Ryszard Gonczarek

TEORIA GRUP W FIZYCE

Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2003

Recenzent
Lucjan Jacak

Opracowanie redakcyjne i korekta
Alina Kaczak

Projekt okładki
Zofia i Dariusz Godlewscy

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISBN 83-7085-745-0

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. 782/2003.

SPIS TREŚCI

Wstęp

Pojęcie grupy odgrywa fundamentalną rolę we współczesnej fizyce. Wynika to z faktu, że własności symetrii układów, w których rozpatrywane są poszczególne zjawiska fizyczne, tworzą grupę, a odpowiadające im prawa fizyki stają się niezmiennicze względem tej grupy. Podstawowy aparat matematyczny stosowany do badania tych zagadnień stanowią metody teorii grup. Sama teoria grup jest bardzo rozległą i abstrakcyjną dziedziną matematyki, co powoduje wykorzystanie jej w zagadnieniach fizyki, narzuca potrzebę selektywnego wyboru materiału. Dlatego zdefiniowanie podstawowych pojęć, wykazanie istniejących związków i ograniczeń oraz poznanie metod stosowanych w badaniach grup i ich reprezentacji powinno dostarczyć istotnych elementów wiedzy dla osób interesujących się zagadnieniami fizyki współczesnej.

Niniejszy podręcznik stanowi zebranie materiału wykładanego od wielu lat przez autora podręcznika studentom kierunku fizyka Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej i powstał przy ich współudziale.

1. POJĘCIA PODSTAWOWE

Operacja zamknięta, definicja grupy i określenie jej własności, grupy cykliczne i abelowe, rząd grupy, tabele mnożenia grupowego, przykłady grup składających się z kilku elementów, podgrupy

Definicja – Operacja zamknięta

Niech $\boldsymbol{G}$ oznacza zbiór elementów i niech $a, b \in \boldsymbol{G}$, wówczas dowolna operacja np. $\bullet$ „kropka" zdefiniowana na elementach zbioru $\boldsymbol{G}$ nazywa się operacją zamkniętą, jeżeli dla każdej pary $a, b \in \boldsymbol{G}$ zachodzi $a \bullet b \in \boldsymbol{G}$.

Operacja $\bullet$ często jest określana jako „mnożenie" i może ona oznaczać zwykłe mnożenie liczb, ale także np. mnożenie macierzowe, dodawanie, dodawanie modulo, składanie (superpozycję) itp. Z tego powodu symbol $\bullet$ jest często zastępowany przez $\cdot$ lub po prostu pomijany.

Definicja – Grupa

Grupą nazywamy parę $\{\boldsymbol{G}, \bullet\}$, tj. zbiór elementów $\boldsymbol{G}$ i operację zamkniętą $\bullet$, która spełnia następujące warunki:

1. Łączności, tzn. jeżeli $a, b, c \in \boldsymbol{G}$ to $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.
2. Istnieje element jednostkowy e taki, że dla każdego $a \in \boldsymbol{G}$ zachodzi $a \bullet e = e \bullet a = a$.
3. Dla każdego $a \in \boldsymbol{G}$ istnieje element odwrotny a^{-1} taki, że $a^{-1} \bullet a = a \bullet a^{-1} = e$.

Stwierdzenie. Podaną definicję można ograniczyć, zastępując warunki 2 i 3 warunkami lewostronnymi, prawostronnymi lub mieszanymi, można np. uwzględnić jedynie warunki prawostronne, tj.:

2′. Istnieje element jednostkowy prawostronny e taki, że dla każdego $a \in \boldsymbol{G}$ zachodzi $a \bullet e = a$.

3′. Dla każdego $a \in \boldsymbol{G}$ istnieje element odwrotny prawostronny a^{-1} taki, że $a \bullet a^{-1} = e$

zapewnia spełnienie warunków lewostronnych, a zatem ogółu warunków podanych w definicji grupy.

D o w ó d. (Symbol • został pominięty)

Należy pokazać, że jeżeli $ae = a$ i $aa^{-1} = e$, to $ea = a$ i $a^{-1}a = e$. Ponieważ $a^{-1} \in \boldsymbol{G}$, zatem $(a^{-1})^{-1} \in \boldsymbol{G}$ jest odwrotny do a^{-1}, z czego wynikają następujące relacje:

$$e = a^{-1}(a^{-1})^{-1} = (a^{-1}e)(a^{-1})^{-1} = [a^{-1}(a a^{-1})](a^{-1})^{-1} = [(a^{-1}a)a^{-1}](a^{-1})^{-1}$$
$$= (a^{-1}a)[a^{-1}(a^{-1})^{-1}] = (a^{-1}a)e = a^{-1}(ae) = a^{-1}a$$

czyli z warunku $aa^{-1} = e$ wynika relacja $a^{-1}a = e$, a ponadto jedynka prawostronna jest równa jedynce lewostronnej, gdyż

$$a = ae = a(a^{-1}a) = (aa^{-1})a = (a^{-1}a)a = ea$$

Stwierdzenie. Udowodniona własność jest słuszna dla grup, ale nie musi być słuszna dla ogólnych operacji liniowych.

LEMAT. Dla każdego elementu grupy $a \in \boldsymbol{G}$ zachodzi $(a^{-1})^{-1} = a$

D o w ó d. $a = ae = a[a^{-1}(a^{-1})^{-1}] = (aa^{-1})(a^{-1})^{-1} = e(a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}$

Definicja – Grupa abelowa lub przemienna

Grupa $\{\boldsymbol{G}, \bullet\}$ jest grupą abelową zwaną także przemienną, jeżeli dla każdej pary $a, b \in \boldsymbol{G}$ spełniony jest związek $a \bullet b = b \bullet a$.

Definicja – Rząd grupy

Rząd grupy $\boldsymbol{G}$ – to liczba elementów grupy oznaczana jako n. Jeżeli n jest skończone ($n < \infty$), to grupa jest skończonego rzędu, jeżeli $n = \infty$ to grupa jest nieskończonego rzędu.

Określanie własności grup – przykłady

PRZYKŁAD 1

Grupa jednoelementowa jest najprostszą możliwą grupą, która także musi spełniać wszystkie warunki grupy. Ponieważ grupa powinna mieć element neutralny, więc $\boldsymbol{G} = \{e\}$, a dla dowolnej operacji • zachodzi $e \bullet e \in \boldsymbol{G}$ oraz $e^{-1} = e$ i $e^{-1} \in \boldsymbol{G}$. Realizacją takiej grupy jest para, której zbiór jednoelementowy zawiera liczbę 1, a • oznacza zwykłe mnożenie liczb.

Definicja – Tabela mnożenia dla grupy

Tabela mnożenia dla grupy podaje wszystkie operacje mnożenia elementów grupy.

PRZYKŁAD 2

Grupa dwuelementowa $\boldsymbol{G} = \{e, a\}$, $\bullet$ oznacza mnożenie na grupie.

Ponieważ są słuszne relacje: $e \bullet e = e$ i $a \bullet a \in \boldsymbol{G}$, więc $a \bullet a = e$ albo $a \bullet a = a$. Jeżeli $a \bullet a = a$, to $(a \bullet a) \bullet a^{-1} = a \bullet a^{-1} = e$, z czego wynik, że $a \bullet (a \bullet a^{-1}) = e$, więc $a \bullet e = e$ i $a = e$, co jest sprzeczne z założeniem o elementach grupy, gdyż $a \neq e$, a zatem $a \bullet a = e$.

Elementem odwrotnym a^{-1} jest e albo a. Gdyby $a^{-1} = e$, to $a^{-1} \bullet a = e \bullet a$ i $e = a$, czyli sprzeczność, a zatem $a^{-1} = a$.

Tabela mnożenia dla grupy dwuelementowej

	e	a
e	e	a
a	a	e

Na przykład $\boldsymbol{G} = \{1, -1\}$ ($e = 1$ $a = -1$) i $\bullet$ oznacza mnożenie liczb.

	1	–1
1	1	–1
–1	–1	1

Na przykład $\boldsymbol{G} = \{0, 1\}$ oraz $\bullet$ oznacza dodawanie *modulo* 2, tj. a $\oplus_2$ $b \equiv (a + b)$ (mod 2) jest resztą z dodawania po wyłączeniu liczby podzielnej przez 2, czyli parzystej.

	0	1
0	0	1
1	1	0

Na przykład $\boldsymbol{G}$ jest zbiorem permutacji w zbiorze dwuelementowym, wówczas permutacja tożsamościowa jest jedynką grupy e, a permutacja przestawiająca elementy zbioru jest drugim elementem grupy a

$$(a,b) \xrightarrow{e} (a,b) \qquad \text{oraz} \qquad (a,b) \xrightarrow{a} (b,a) \xrightarrow{a} (a,b)$$

Elementy e i a spełniają relacje określone w pierwszej tabeli. Operacja kropka $\bullet$ może zarówno oznaczać np. mnożenie, dodawanie *modulo*, jak i składanie permutacji, co oznacza, że ogólne własności i relacje między poszczególnymi elementami są spełnione w każdym przypadku realizacji danej grupy.

Definicja – Izomorfizm

Dwie grupy nazywamy izomorficznymi, jeżeli istnieje jednoznaczna odpowiedniość między elementami tych grup zachowująca działanie grupowe. Dla grup izomorficznych $\boldsymbol{G}$ z operacją $\bullet$ i $\boldsymbol{G}'$ z operacją $\times$, gdzie elementom grupy $\boldsymbol{G}$ odpowiadają tak samo oznaczone, ale z *primami* elementy grupy $\boldsymbol{G}'$, dla dowolnej pary elementów grupy $\boldsymbol{G}$ zachodzi relacja $(a \bullet b)' = a' \times b'$.

Stwierdzenie. Grupy izomorficzne są jednakowego rzędu. Grupy o tym samym rzędzie nie muszą być izomorficzne.

Stwierdzenie. Wszystkie grupy dwuelementowe są izomorficzne.

Stwierdzenie. Ustalenie wartości tabeli mnożenia na grupie dokonuje się drogą eliminacji sprzecznych relacji. Dla wielu grup mogą istnieć różne, nie wykluczające się wzajemnie możliwości, określenia mnożenia na grupie.

Przykład 3

Grupa trzyelementowa $\boldsymbol{G} = \{e, a, b\}$, $\bullet$ oznacza mnożenie na grupie.

Eliminacja sprzecznych relacji:

$$a \bullet b \in \boldsymbol{G}, \text{ zatem } a \bullet b = \begin{cases} e \\ a \\ b \end{cases}$$

Gdyby $a \bullet b = a$, wówczas po pomnożeniu przez $a^{-1}\bullet$, tj. $(a^{-1} \bullet a) \bullet b = a^{-1} \bullet a$, otrzymuje się $e \bullet b = e$, czyli $b = e$, czyli sprzeczność. Podobnie w pozostałych przypadkach

$$b \bullet a = \begin{cases} e & \\ a & \Rightarrow b = e \quad \text{sprzeczność} \\ b & \Rightarrow a = e \quad \text{sprzeczność} \end{cases}$$

$$a \bullet a = a^2 = \begin{cases} e & \Rightarrow a \bullet b = e \Rightarrow a \bullet a = a \bullet b \Rightarrow a = b \quad \text{sprzeczność} \\ a & \Rightarrow a \bullet a = a \Rightarrow a = e \quad \text{sprzeczność} \\ b & \Rightarrow a \bullet a = b \end{cases}$$

$$b \bullet b = b^2 = \begin{cases} e & \Rightarrow b \bullet b = e \Rightarrow b \bullet b = a \bullet b \Rightarrow b = a \quad \text{sprzeczność} \\ a & \Rightarrow b \bullet b = a \\ b & \Rightarrow b \bullet b = b \Rightarrow b = e \quad \text{sprzeczność} \end{cases}$$

Dla elementów grupy e, a, b zachodzą zatem relacje $a^2 = b$ oraz $a^3 = a \bullet b = e$, co pozwala przedstawiać grupę trzyelementową w postaci $\boldsymbol{G} = \{e, a, a^2\}$, gdzie $a^3 = e$. Tabela mnożenia dla grupy ma postać:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Przykład realizacji grupy – pierwiastki jedności. Ponieważ $1 = e^{2\pi i}$, więc $1^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, a więc

$$a = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad a^2 = b = e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 2} = e^{\frac{4\pi i}{3}}, \quad a^3 = e^{\frac{6\pi i}{3}} = e^{2\pi i} = 1 \text{ oraz } \boldsymbol{G} = \left\{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\right\}.$$

Stwierdzenie. Zawsze istnieją grupy postaci $\boldsymbol{G} = \{e, a, a^2, a^3, a^{n-1}\}$, gdzie $a^n = e$. Są to np. grupy n pierwiastków n-tego stopnia z jedności, gdzie

$$a = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad a^n = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n = e^{2\pi i} = 1, \quad e = 1$$

Stwierdzenie. Zawsze istnieją grupy dowolnego skończonego rzędu n.

Stwierdzenie. Dla dowolnej grupy $\boldsymbol{G}$ i dowolnego elementu $a \in \boldsymbol{G}$ można utworzyć ciąg $a^0 = e, a^1 = a, a^2, a^3, \ldots, a^i, \ldots$ Jeżeli istnieje $n < \infty$, takie że $a^n = e$, to element a jest skończonego rzędu n. W przeciwnym przypadku rząd elementu a jest nieskończony.

Stwierdzenie. Elementy $e = a^0, a^1, a^2, a^3, ..., a^{n-1}$ są różne, gdy a jest rzędu n ($a^n = e$).

D o w ó d . Nie wprost

Niech $a^i = a^j$, gdy $0 \le i < j \le n - 1$. Wówczas $a^i(a^i)^{-1} = a^j(a^i)^{-1}$, a zatem $e = a^{j-i}$ dla $0 < j - i < n$.

LEMAT. $(a \bullet b)^{-1} = b^{-1} \bullet a^{-1}$ dla dowolnych $a, b \in \boldsymbol{G}$.

D o w ó d . $e = (a \bullet b)^{-1} (a \bullet b) = (b^{-1} \bullet a^{-1}) \bullet (a \bullet b) = b^{-1} \bullet (a^{-1} \bullet a) \bullet b = e$

LEMAT. $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

D o w ó d . $\left(a^{-1}\right)^{-1} \bullet a^{-1} = a \bullet a^{-1} = e$

Definicja – Grupa cykliczna rzędu n

Gdy wszystkie elementy grupy $\boldsymbol{G} = \underbrace{\{e, a, b, ...\}}_{n}$ można zapisać w postaci $\boldsymbol{G} = \{e, a, a^2, a^3, ..., a^{n-1}\}$ oraz $a^n = e$, wówczas grupa $\boldsymbol{G}$ nazywa się cykliczną i jest rzędu n.

Stwierdzenie. Wszystkie grupy 1-, 2-, lub 3-elementowe są wyłącznie cykliczne.

PRZYKŁAD 4

Grupa czteroelementowa $\boldsymbol{G} = \{e, a, b, c\}$, $\bullet$ oznacza mnożenie na grupie.

Stwierdzenie. Dla grup 4-elementowych istnieją dwie nieizomorficzne formy ich realizacji, gdyż

$$a^2 = \begin{cases} e \\ a \Rightarrow a^2 = a \Rightarrow a = e \Rightarrow \text{sprzeczność} \\ b \\ c \end{cases}$$

Założenie 1. $a^2 = b$, wówczas

$$a \bullet c = \begin{cases} a & \Rightarrow a \bullet c = a \Rightarrow c = e \quad \text{sprzeczność} \\ b & \Rightarrow a \bullet c = b = a^2 \Rightarrow a \bullet c = a^2 \Rightarrow a = c \quad \text{sprzeczność} \\ c & \Rightarrow a \bullet c = c \Rightarrow a = e \quad \text{sprzeczność} \\ e \end{cases}$$

oraz

$$a^3 = \begin{cases} e \Rightarrow a^3 = e \Rightarrow a^3 = a \bullet c \Rightarrow a^2 = c \Rightarrow b = c \quad \text{sprzeczność} \\ a \Rightarrow a^3 = a \Rightarrow a^2 = e \Rightarrow b = e \quad \text{sprzeczność} \\ b \Rightarrow a^3 = b = a^3 = a^2 \Rightarrow a = e \quad \text{sprzeczność} \\ c \end{cases}$$

zatem $a^4 = e$ oraz $a^3 = a^2 \bullet a = b \bullet a = a \bullet b = c$. W tym przypadku grupa $\boldsymbol{G} = \{e, a, b = a^2, c = a^3\}$ jest grupą cykliczną. Tabela mnożenia ma postać:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Założenie 2. $a^2 = a$ prowadzi do sprzeczności: $a = e$.

Założenie 3. $a^2 = c$ jest równoważne *założeniu* 1, gdyż element c nie jest w żaden sposób wyróżniony w stosunku do elementu b. W tym przypadku grupa $\boldsymbol{G} = \{e, a, c = a^2, b = a^3\}$ jest także grupą cykliczną.

Założenie 4. $a^2 = e$ prowadzi do następujących możliwości

$$a \bullet b = \begin{cases} e \Rightarrow a \bullet b = e = a^2 \Rightarrow b = a \Rightarrow \text{sprzeczność} \\ a \Rightarrow a \bullet b = a \Rightarrow b = e \Rightarrow \text{sprzeczność} \\ b \Rightarrow a \bullet b = b \Rightarrow a = e \Rightarrow \text{sprzeczność} \\ c \end{cases}$$

oraz

$$a \bullet c = \begin{cases} e \Rightarrow a \bullet c = e = a^2 \Rightarrow c = a \Rightarrow \text{sprzeczność} \\ a \Rightarrow a \bullet c = a \Rightarrow c = e \Rightarrow \text{sprzeczność} \\ b \\ c \Rightarrow a \bullet c = c \Rightarrow a = e \Rightarrow \text{sprzeczność} \end{cases}$$

Analogicznie można wykazać, gdyż nie ma innych możliwości, że $b \bullet a = c$ oraz $c \bullet a = b$. Uwzględniwszy, że $c^2 = (b \bullet a) \bullet (a \bullet b) = (b \bullet (a \bullet a)) \bullet b$ oraz $a^2 = e$, otrzymuje się relację $b^2 = c^2$, która prowadzi do następujących możliwości

$$b^2 = \begin{cases} e \Rightarrow b^2 = c^2 = e \\ a \Rightarrow b^2 = c^2 = a \\ b \Rightarrow b^2 = b \Rightarrow b = e \Rightarrow \text{sprzeczność} \\ c \Rightarrow b^2 = c = c^2 \Rightarrow c = e \Rightarrow \text{sprzeczność} \end{cases}$$

Założenie 4a. $b^2 = c^2 = a$

Po pomnożeniu $a = b^2$ przez a i wykorzystaniu podanych związków otrzymuje się $e = (a \bullet b) \bullet b = c \bullet b$ oraz $e = b \bullet (b \bullet a) = b \bullet c$. W tym przypadku tabela mnożenia dla grupy ma postać:

	e	*a*	*b*	*c*
e	*e*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*e*	*c*	*b*
b	*b*	*c*	*a*	*e*
c	*c*	*b*	*e*	*a*

Po dokonaniu wzajemnie jednoznacznej zamiany elementów a i b ($a \leftrightarrow b$) powyższa tabela uzyskuje postać

	e	*a*	*b*	*c*
e	*e*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*b*	*c*	*e*
b	*b*	*c*	*e*	*a*
c	*c*	*e*	*a*	*b*

która jest identyczna z tabelą mnożenia dla grupy otrzymaną przy założeniu, że $a2 = b$, zatem przyjmując, że $a^2 = e$ oraz $b^2 = c^2 = a$ otrzymuje się grupę cykliczną.

Założenie 4b. $b^2 = c^2 = e$

Po pomnożeniu $a \bullet b = c$ i $b \bullet a = c$ przez b i wykorzystaniu podanych związków otrzymuje się kolejne relacje: $a = c \bullet b$ oraz $a = b \bullet c$. W tym przypadku tabela mnożenia dla grupy ma postać

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

w której na diagonali znajduje się zawsze element neutralny e. Tabeli tej nie można poprzez zamianę zmiennych sprowadzić do postaci uzyskanych dla grupy cyklicznej.

Stwierdzenie. Grupa o relacjach podanych w powyższej tabeli nie jest grupą cykliczną. To tzw. czterogrupa.

Stwierdzenie. Dla grupach czteroelementowych istnieją dwie różne, nieizomorficzne ich formy. Są to grupa cykliczna i czterogrupa. Obie grupy są abelowe (przemienne).

Stwierdzenie. Wśród możliwych grup dowolnego rzędu n zawsze istnieją grupy cykliczne. Grupy cykliczne są abelowe. Jeżeli liczba elementów grupy jest liczbą pierwszą, to grupa może być tylko grupą cykliczną.

Przykład

Przykładem realizacji czterogrupy jest grupa symetrii prostokąta C_{2v}, która zawiera zbiór wszystkich przekształceń prostokąta zmieniających jego położenia w przestrzeni R^2. Grupę $C_{2v} = \{e, a, b, c\}$ tworzą następujące elementy symetrii:

1. e – przekształcenie tożsamościowe,
2. a – obrót o kąt 180° względem osi OZ,
3. b – odbicie względem osi OX,
4. c – odbicie względem osi OY.

Elementy $a^2 = b^2 = c^2 = e$ definiują przekształcenia tożsamościowe, natomiast złożenie dwóch elementów odbicia dają obrót: $b \bullet c = a$. Ponadto $a \bullet b = c$ i $a \bullet c = b$.

Definicja – Podgrupa

Zbiór elementów $\boldsymbol{H}$ zawarty w w grupie $\boldsymbol{G}$ ($\boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{G}$) nazywamy podgrupą grupy $\boldsymbol{G}$, gdy

1. $e \in \boldsymbol{H}$,
2. $a, b \in \boldsymbol{H}$, to $a \bullet b \in \boldsymbol{H}$,
3. $a \in \boldsymbol{H}$, to $a^{-1} \in \boldsymbol{H}$,

tzn. $\boldsymbol{H}$ jest grupą zawartą w grupie $\boldsymbol{G}$.

Przykład

W czterogrupie $\boldsymbol{G} = \{e, a, b, c\}$ zbiory H_1, H_2 i H_3 tworzą podgrupy:

$$H_1 = \{e, a\}, \quad a^2 = e, \quad a^{-1} = a$$

$$H_2 = \{e, b\}, \quad b^2 = e, \quad b^{-1} = b$$

$$H_3 = \{e, c\}, \quad c^2 = e, \quad c^{-1} = c$$

Stwierdzenie. W każdej skończonej grupie $\boldsymbol{G}$, ciąg elementów $\{a, a^2, a^3, ..., a^n = e\}$, gdzie n jest rzędem elementu, $a \in \boldsymbol{G}$ stanowi podgrupę cykliczną grupy $\boldsymbol{G}$.

Stwierdzenie. Jeżeli grupa $\boldsymbol{G}$ jest rzędu n i składa się z elementów $\boldsymbol{G} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, to w ciągach $a_1 \cdot a_i,\ a_2 \cdot a_i, ...,\ a_n \cdot a_i \quad (a_i \in G)$ oraz $a_j \cdot a_1,\ a_j \cdot a_2, ...,\ a_j \cdot a_n \quad (a_j \in G)$ każdy element może występować tylko jeden raz.

D o w ó d. Nie wprost

Niech $a_k \neq a_l$ oraz $a_k \cdot a_i = a_l \cdot a_i \Rightarrow (a_k \cdot a_i) \cdot a_i^{-1} = (a_l \cdot a_i) \cdot a_i^{-1} \Rightarrow a_k = a_l$, czyli sprzeczność.

Wniosek. W tabelach mnożenia dla grupy w każdym rzędzie i w każdej kolumnie dany element może występować tylko jeden raz.

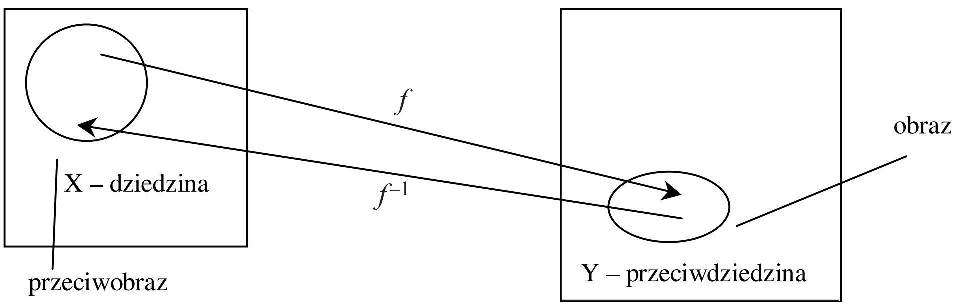
Stwierdzenie. Przedstawione badania relacji grupowych – to badania indukcyjne. Mogą być one prowadzone dla grup 5, 6,... rzędu, ale jest to mało pouczające, a same badania szybko się komplikują. Wyjątek stanowią grupy, których rząd jest liczbą pierwszą. Grupa rzędu $n = 5$ jest tylko cykliczna. Dla zbioru 6 elementów istnieje kilka możliwości utworzenia grupy. W zbiorze tych grup istnieją grupy nieabelowe (nieprzemienne), ale istnieje także grupa cykliczna.

Stwierdzenie. Grupy nieskończonego rzędu mogą być przemienne np. grupa liczb całkowitych z operacją dodawania, gdyż dla dowolnych a i b, $a + b = b + a$, $e = 0$ oraz $a^{-1} = -a$, lub nieprzemienne, jak np. grupa macierzy unitarnych ($\mathbf{U} \bullet \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{E}$) z operacją mnożenia macierzowego, gdyż w ogólności $\mathbf{U}_1 \bullet \mathbf{U}_2 \neq \mathbf{U}_2 \bullet \mathbf{U}_1$.

2. Morfizmy grup

Odwzorowania grup – morfizmy. Homomorfizm, epimorfizm, monomorfizm, izomorfizm, endomorfizm, automorfizm. Jądro homomorfizmu

Odwzorowania zbioru X w zbiór Y za pomocą funkcji f wyraża się następująco $f: X \to Y$. Wówczas X jest dziedziną, Y – przeciwdziedziną, a $\mathrm{Im} f = \{f(x), x \in X\} = f(X) = Y_0 \subset Y$ tworzy tzw. obraz. Zbiór $f^{-1}(Y_0) = \{x \in X, f(x) = Y_0\}$ to tzw. przeciwobraz. Pojęcia te stają się istotne przy definiowaniu odwzorowań o szczególnych własnościach i pozwalają określić następujące ich rodzaje:



Rysunek. Elementy odwzorowania

- Odwzorowanie zbioru „na” zbiór nazywa się *surjekcją* lub odwzorowaniem surjektywnym.
- Różnowartościowe odwzorowanie zbioru w zbiór „1÷1” to *injekcja* lub odwzorowanie injektywne.
- Różnowartościowe odwzorowanie zbioru na zbiór (surjekcja i injekcja) to *bijekcja* lub odwzorowanie bijektywne.
- Ponadto złożenie dwóch odwzorowań nazywa się *superpozycją* odwzorowań.

Stwierdzenie. Formalne ujęcie własności obiektów matematycznych określa się terminem kategorii, który mieści w sobie pojęcia obiektów i morfizmów (przekształceń). W kategorii zbiorów obiektami są zbiory, a morfizmami ich odwzorowania, w kategorii grup natomiast obiektami są grupy, a morfizmami poniżej zdefiniowane przekształcenia.

Definicja – Homomorfizm

Odwzorowanie $f: \{\boldsymbol{G}, \bullet\} \to \{\boldsymbol{G}', \times\}$, które zachowuje działanie grupowe nazywa się homomorfizmem, co oznacza, że jeżeli $a, b \in \boldsymbol{G}$ oraz $f: a \to a'$, $f: b \to b'$, to zachodzi relacja: $(a \bullet b)' = a' \times b'$.

Definicja – Endomorfizm

Endomorfizm to homomorfizm grupy w siebie.

Definicja – Epimorfizm

Epimorfizm to homomorfizm surjektywny, czyli „na" tj. grupy na grupę.

Definicja – Monomorfizm

Monomorfizm to homomorfizm injektywny, czyli „1÷1" tj. różnowartościowy.

Definicja – Izomorfizm (por. s. 9)

Izomorfizm to homomorfizm bijektywny, czyli różnowartościowy i „na", wówczas każdemu elementowi jest przyporządkowany dokładnie jeden element, a rzędy obu grup są jednakowe.

Definicja – Jądro homomorfizmu

Jądrem homomorfizmu f nazywamy zbiór $Ker\, f = \{a \in \boldsymbol{G},$ że $f(a) = e'$, gdzie e' jest jedynką grupy $\boldsymbol{G}'\}$.

Stwierdzenie. Jeżeli jądro epimorfizmu $Ker\, f = \{e\}$, to epimorfizm jest izomorfizmem.

D o w ó d. Nie wprost

Niech dla jakichś $a, b \in \boldsymbol{G}$ oraz $a \neq b$ zachodzi równość $f(a) = f(b)$. Wynika stąd, że $f(b \bullet a^{-1}) = f(b) \times f(a^{-1}) = f(a) \times [f(a)]^{-1} = e'$, ale jądro epimorfizmu jest jednowartościowe, zatem $b \bullet a^{-1} = e$, czyli $b = a$, a więc sprzeczność.

Stwierdzenie. Zbiór $H = Ker\, f$ jest podgrupą grupy $\boldsymbol{G}$.

D o w ó d.

1. Operacja zamknięta. Jeżeli $a, b \in H$, to $a \bullet b \in H$, gdyż

$$f(a \bullet b) = f(a) \times f(b) = e' \times e' = e'.$$

2. Element odwrotny. Jeżeli $a \in H$, to $a^{-1} \in H$, gdyż $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} = e'^{-1} = e'$.

3. Element jednostkowy $e \in H$, gdyż

$$f(e) = f(a \bullet a^{-1}) = f(a) \times \left[f(a)\right]^{-1} = e' \times e' = e'.$$

Definicja – Automorfizm

Izomorfizm grupy w siebie to automorfizm.

Stwierdzenie. Zbiór automorfizmów $Aut(\boldsymbol{G}) = \{e_{\boldsymbol{G}}, \varphi, \psi, \chi, ...\}$ z operacją superpozycji tworzy grupę. Jest to podgrupa grupy $S(G)$ wszystkich bijekcji zbioru G w siebie.

3. Grupy permutacji

Grupa symetryczna i alternująca, cykle przejścia, transpozycje, parzystość permutacji, przykłady grup symetrycznych nieabelowych

Definicja – Grupa symetryczna

Grupa $S(G)$ – grupa wszystkich wzajemnie jednoznacznych odwzorowań n-elementowego zbioru G w siebie tworzy tzw. n-tą grupę symetryczną S_n.

Stwierdzenie. Grupa symetryczna S_n to grupa permutacji n elementów w siebie i jest rzędu $n!$.

Definicja – Elementy grupy S_n

Elementami grupy symetrycznej S_n są różnowartościowe odwzorowania (permutacje), które oznacza się następująco:

$$p_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_{n-1} & m_n \end{pmatrix} = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\},$$

gdzie $\{m_1, m_2, m_3, ..., m_n\}$ to pewne ustawienie zbioru pierwszych n liczb naturalnych w stosunku do porządku naturalnego.

Stwierdzenie. Elementy p_i grupy symetrycznej S_6 są np. postaci:

$$p_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

W grupie symetrycznej S_6 znajduje się $6! = 720$ różnych elementów p_i.

Stwierdzenie. W każdej permutacji można wyróżnić cykle przejścia, które są np. postaci:

$$p_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underset{2}{(16)}\underset{2}{(25)}\underset{2}{(34)}$$

lub

$$p_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \underset{3}{(163)}\underset{2}{(24)}\underset{1}{(5)}$$

Takie wyrażenie permutacji przez cykle, to rozbicie permutacji na cykle rozłączne. Cykle te w zależności od permutacji mogą być różnej długości. W podanych przykładach ich długość wynosi 1, 2, lub 3.

Definicja – Długość cyklu
Cykl zawierający l elementów jest cyklem o długości l.

Stwierdzenie. Cykle jednoelementowe przekształcają element zbioru w siebie.

Stwierdzenie. Wyróżnione cykle są zamknięte i rozłączne.

Stwierdzenie. Działanie cyklu na zbiór uporządkowany naturalnie można przedstawić następująco, np.:

$$(163)\{1,2,3,4,5,6\} = \{\underline{6},2,\underline{1},4,5,\underline{3}\},$$

lub odpowiednio w uproszczonej formie: $(163)\{136\} = \{613\}$, co odpowiada rozłożeniu permutacji na cykle rozłączne i pominięciu jednoelementowych (2), (4) i (5) cykli tożsamościowych, tj.:

$$p_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (163)$$

Stwierdzenie. Efekt permutacji nie zależy od kolejności wykonywania przestawień w cyklu, tzn. od tego, który element cyklu jest początkowy. Dlatego w cyklach zamkniętych, elementy tych cykli można przestawiać cyklicznie, np.: (163) = (316) = (631).

Definicja – Transpozycje
Cykle dwuelementowe to tzw. transpozycje.

Stwierdzenie. Dowolny cykl można przedstawić jako iloczyn transpozycji, które nie muszą być rozłączne, np.:

$$(163) = (13)(16), \text{ wówczas } (13)(16)\{136\} = (13)\{631\} = \{613\}$$

lub korzystając z równoważności cykli rozłącznych (163) i (316) można otrzymać

$(316) = (36)(31)$, wówczas także $(36)(31)\{136\} = (36)\{316\} = \{613\}$.

Stwierdzenie. Dla cykli rozłącznych kolejność wykonywania działań jest nieistotna, natomiast dla cykli nierozłącznych kolejność wykonywania działań jest istotna, np.:

$(31)(36)\{136\} = (31)\{163\} = \{361\} \neq \{613\}$, zatem $(31)(36) \neq (36)(31)$.

Stwierdzenie. Rozkład cyklu na transpozycje nierozłączne nie jest jednoznaczny. Istnieją zawsze różne możliwości rozłożenia, np.: $(163) = (13)(16)$ lub $(163) = (631) = (61)(63)$.

Stwierdzenie. Rozkład cyklu $(1234...n)$ o długości n na transpozycje można zawsze wyrazić w jednej z następujących form:

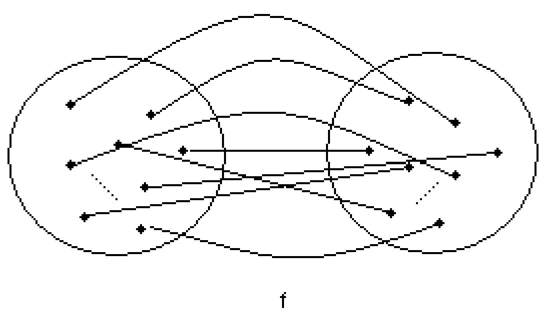
$$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ ...\ \ n) = (1\ \ n)(1\ \ n-1)(1\ n-2)...(1\ \ 3)(1\ \ 2),$$
$$(2\ \ 3\ \ 4\ \ ...\ n\ 1) = (2\ \ 1)(2\ \ n)(2\ \ n-1)...(2\ \ 4)(2\ \ 3),$$
$$\vdots$$
$$(n\ \ 1\ \ 2\ ...\ n-1) = (n\ \ n-1)(n\ \ n-2)(n\ \ n-3)...(n\ \ 2)(n\ \ 1).$$

Definicja – Parzystość permutacji

Parzystość permutacji określa się przez liczbę $P = (-1)^N$, gdzie N to liczba transpozycji, na które można rozłożyć permutację. Gdy $P = 1$ permutacja jest parzysta, a gdy $P = -1$ permutacja jest nieparzysta.

Definicja – Permutacja

Permutacja to dowolna bijekcja f n-elementowego zbioru w siebie. Zbiór ten nie musi być w żaden sposób uporządkowany, a wzajemne przyporządkowanie elementów zbioru dokonuje się jak pokazano na rysunku.



Rysunek. Odwzorowanie zbioru kilkuelementowego w siebie

Stwierdzenie. Iloczyn dwóch permutacji zbioru n-elementowego, czyli złożenie albo superpozycja dwóch permutacji, jest także permutacją. Operacja składania permutacji zatem jest operacją zamkniętą.

Stwierdzenie. Zbiór permutacji zbioru n-elementowego z operacją superpozycji tworzy grupę składającą się z $n!$ elementowów (rzędu $n!$). Jest to grupa symetryczna S_n.

PRZYKŁADY

Grupy symetryczne

$S_1 = \{e\}$ jest rzędu $1! = 1$ i zawiera jedną permutację parzystą e, gdyż $P = (-1)^0 = 1$,
$S_2 = \{e, (12)\}$ jest rzędu $2! = 2$ i zawiera jedną permutację parzystą e oraz jedną nieparzystą (12), gdyż $P = (-1)^1 = -1$. Grupy S_1, S_2 są abelowe.
$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (321)\}$ jest rzędu $3! = 6$ i zawiera 3 permutacje parzyste e, (123) i (321), gdyż $P = (-1)^0 = (-1)^2 = 1$, oraz 3 nieparzyste (12), (13) i (23), gdyż $P = (-1)^1 = -1$. Grupa S_3 jest nieabelowa, ponieważ składanie jej elementów nie jest przemienne, np.: $(12)(13) \neq (13)(12)$, gdyż $(12)(13) = (132) = (321)$, a $(13)(12) = (123) \neq (321)$.

Stwierdzenie. Grupy symetryczne S_n dla $n \geq 3$ nie są abelowe.

LEMAT. Dla dowolnych transpozycji zachodzą równości $(i\,j) = (j\,i)$ oraz $(i\,j)^2 = e$.

Tabela mnożenia dla grupy S_3:

	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
e	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
(12)	(12)	e	(321)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	e	(321)	(12)	(23)
(23)	(23)	(321)	(123)	e	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(321)	e
(321)	(321)	(23)	(12)	(13)	e	(123)

Przykłady mnożenia elementów grupy

$(13)(12) = (123)$

$(12)(13) = (132)(321)$

$(12)(23) = (21)(23) = (231) = (123)$

$(12)(123) = (12)(231) = \underbrace{(12)(21)}_{e}(23) = (23)$

$(12)(321) = (12)(132) = (12)(12)(13) = (13)$

$(123)(123) = (13)(12)(231) = (13)\underbrace{(12)(21)}_{e}(23) = (13)(23) = (31)(32) = (321)$

Definicja – Podgrupy trywialne

Podgrupy trywialne grupy $\boldsymbol{G}$ to cała grupa ($H = \boldsymbol{G}$) oraz podgrupa składająca się wyłącznie z elementu jednostkowego, $H = \{e\}$.

Stwierdzenie. Grupa S_3 ma 4 nietrywialne podgrupy: trzy dwuelementowe – $\{e, (12)\}$, $\{e, (13)\}$, $\{e, (23)\}$ oraz jedną trójelementową – $\{e, (123), (321)\}$. Podgrupy te są cykliczne.

Stwierdzenie. Każda grupa zawiera podgrupę lub podgrupy cykliczne, które można wyodrębnić w następujący sposób. Jeżeli $a \in \boldsymbol{G}$, to ciąg elementów $\{a = a^1, a^2, a^3, ..., a^k = e\}$ tworzy podgrupę cykliczną rzędu k. Wartość k jest także rzędem elementu a.

4. Własności grup symetrycznych

Twierdzenie Cayleya, podgrupa regularna, rozkład na cykle rozłączne, grupy, dla których rząd jest liczbą pierwszą

TWIERDZENIE CAYLEYA. Każda grupa rzędu n jest izomorficzna z jakąś podgrupą grupy symetrycznej S_n (rząd $S_n = n!$).

D o w ó d. Niech $\boldsymbol{G} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ i niech $a_i \in \boldsymbol{G}$, wówczas zbiór $\{a_ia_1, a_ia_2, ..., a_ia_n\}$ zawiera wszystkie elementy grupy $\boldsymbol{G}$, a każdy element występuje tylko jeden raz, gdyż $a_ia_k \neq a_ia_l \Leftrightarrow a_k \neq a_l$. Należy zatem dokonać jednoznacznego przyporządkowania elementom grupy $\boldsymbol{G}$ elementów grupy S_n. Ustala się następujące przyporządkowania:

$$a_i \rightarrow P_{a_i} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_ia_1 & a_ia_2 & \ldots & a_ia_n \end{pmatrix}$$

$$a_j \rightarrow P_{a_j} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_ja_1 & a_ja_2 & \ldots & a_ja_n \end{pmatrix}$$

oraz

$$a_ia_j \rightarrow P_{a_ia_j} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_ia_ja_1 & a_ia_ja_2 & \ldots & a_ia_ja_n \end{pmatrix}$$

Aby udowodnić, że ustalone przyporządkowanie określa izomorfizm grupy $\boldsymbol{G}$ we wskazaną podgrupę grupy S_n, wystarczy wykazać, że spełniona jest relacja: $P_{a_i}P_{a_j} = P_{a_ia_j}$. Po dokonaniu przestawienia elementów można wyrazić P_{a_i} następująco

$$P_{a_i} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_ia_1 & a_ia_2 & \ldots & a_ia_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_ja_1 & a_ja_2 & \ldots & a_ja_n \\ a_ia_ja_1 & a_ia_ja_2 & \ldots & a_ia_ja_n \end{pmatrix}.$$

Wówczas

$$P_{a_i}P_{aj} = \begin{pmatrix} a_j a_1 & a_j a_2 & \dots & a_j a_n \\ a_i a_j a_1 & a_i a_j a_2 & \dots & a_i a_j a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_j a_1 & a_j a_2 & \dots & a_j a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_i a_j a_1 & a_i a_j a_2 & \dots & a_i a_j a_n \end{pmatrix} = P_{a_i a_j}.$$

Stwierdzenie. Grupa S_3 sześcioelementowa ma podgrupę trzyelementową $\{e, (123), (321)\}$, która jest izomorficzna z każdą grupą rzędu $n = 3$.

Stwierdzenie. Grupa S_4 dwudziestoczteroelementowa ma podgrupy izomorficzne z czterogrupą i z czteroelementową grupą cykliczną.

PRZYKŁAD 1.
Dla elementów czterogrupy $\boldsymbol{G} = \{e, a, b, c\}$ zachodzą relacje: $a^2 = b^2 = c^2 = e$, $ab = c$, $bc = a$, $ca = b$. Elementy grupy S_4 należy wybrać w postaci

$$P_e = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ e & a & b & c \end{pmatrix},\ P_a = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \end{pmatrix},\ P_b = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ b & c & e & a \end{pmatrix},\ P_c = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ c & b & a & e \end{pmatrix},$$

wprowadzając cykle zamknięte wyraża się je następująco:

$$P_e = e, \quad P_a = (e\ a)(b\ c), \quad P_b = (e\ b)(a\ c), \quad P_c = (e\ c)(a\ b),$$

zatem szukany podzbiór grupy S_4 jest postaci $\{P_e, P_a, P_b, P_c\} = \{e, (e\ a)(b\ c), (e\ b)(a\ c), (e\ c)(a\ b)\}$. Aby wykazać zachodzenie relacji grupowych $P_{ab} = P_a P_b = P_c$, wykorzystuje się własności mnożenia cykli, np.: $P_a P_b = (e\ a)(b\ c)\ (e\ b)(a\ c) =$ (otrzymując po przekształceniach) $= (e\ c)(a\ b) = P_c$.

PRZYKŁAD 2.
Dla czteroelementowej grupy cyklicznej $\boldsymbol{G} = \{e, a, b = a^2, c = a^3\}$, gdzie $a^4 = e$, elementy grupy S_4 należy wybrać w postaci

$$P_e = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ e & a & b & c \end{pmatrix},\ P_a = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & b & c & e \end{pmatrix},\ P_b = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ b & c & e & a \end{pmatrix},\ P_c = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ c & b & a & e \end{pmatrix}$$

wówczas odpowiadają im następujące cykle:

$$P_e = e,\ P_a = (e\ a\ b\ c),\ P_b = (e\ b)(a\ c),\ P_c = (e\ c\ b\ a)$$

Aby wykazać zachodzenie relacji grupowych, ponownie wykorzystuje się własności mnożenia cykli.

Stwierdzenie. Permutacja na n-elementach daje się przedstawić w formie cykli o długościach 1, 2, 3, 4, ... lub n.

Stwierdzenie. Permutacje występujące w dowodzie twierdzenia Cayleya nie pozostawiają żadnego elementu permutowanego zbioru na swoim miejscu z wyjątkiem permutacji tożsamościowej P_e.

Podgrupy regularne i ich własności

Definicja – Podgrupa regularna

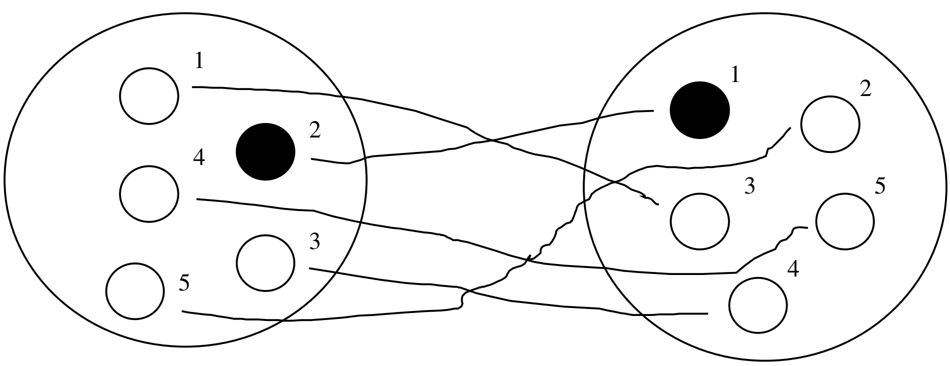
Podgrupa grupy S_n nazywa się podgrupą regularną, jeżeli jej każdy element, z wyjątkiem elementu P_e, przestawia wszystkie elementy permutowanego zbioru. Na przykład

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ jest permutacją regularną, a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ nie jest permutacją regularną.

Stwierdzenie. Podgrupa S_n izomorficzna z grupą n-elementową jest podgrupą regularną, co wynika z konstrukcji dowodu twierdzenia Cayleya, gdyż gdyby permutacja

$P_{a_i} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_i a_1 & a_i a_2 & \dots & a_i a_n \end{pmatrix}$ pozostawiała jakiś element na swoim miejscu, wówczas np. $a_j = a_i a_j$, ale stąd wynika, że $a_i = e$, więc sprzeczność.

LEMAT. W podgrupie regularnej permutacji żadne dwa elementy podgrupy nie przekształcają danego elementu zbioru w inny, ale taki sam element.



Rysunek. Przykład przekształcania zbioru pięcioelementowego przez permutację regularną

D o w ó d. Nie wprost

Niech p_1, p_2 $(p_1 \neq p_2)$ są różnymi permutacjami pewnej podgrupy regularnej R. Przyjmując, że działają one tak na pewien element a, że $p_1 a = b$ oraz $p_2 a = b$, z faktów, że $p_1, p_2 \in R$ oraz $p_1^{-1} \in R$, wynika, że $p_2 p_1^{-1} b = b$, czyli że permutacja regularna $p_2 p_1^{-1}$ pozostawia element b na swoim miejscu, a zatem $p_2 p_1^{-1} = e$, a stąd $p_2 = p_1$, co stanowi sprzeczność.

LEMAT. Cykl $(a_1, a_2, ..., a_l)$ o długości l musi spełniać tożsamość: $\underbrace{(a_1, a_2, ..., a_l)}_{l}{}^{l} = e$ oraz zachodzi relacja, że $\underbrace{(a_1, a_2, ..., a_l)}_{l}{}^{l'} \neq e$ gdy $l' < l$.

LEMAT. Jeżeli element podgrupy regularnej da się rozłożyć na cykle rozłączne, to cykle te muszą mieć tę samą długość.

D o w ó d.

Niech cykl $p = \underset{l_1}{(a_1, ..., a_{l_1})}\underset{l_2}{(a_{l_1+1}, ..., a_{l_1+l_2})}$, gdzie $l = l_1 + l_2$ oraz $l_1 < l_2$ wówczas

$$p^{l_1} = \left[\underset{l_1}{(a_1, ..., a_{l_1})}\underset{l_2}{(a_{l_1+1}, ..., a_{l_1+l_2})}\right]^{l_1} = \underset{l_1}{(a_1, ..., a_{l_1})}^{l_1}\,\underset{l_2}{(a_{l_1+1}, ..., a_{l_1+l_2})}^{l_1} = e\,\underset{l_2}{(a_{l_1+1}, ..., a_{l_1+l_2})}^{l_1}$$

a zatem elementy $a_1, ..., a_{l_1}$ nie ulegają przestawieniu, podczas gdy elementy $a_{l_1+1}, ..., a_{l_1+l_2}$ ulegają przestawieniu, czyli zachodzi sprzeczność z podstawowymi własnościami elementów podgrupy regularnej R, gdyż $p \in R \Rightarrow p^{l_1} \in R$, a permutacja p^{l_1} nie przestawia żadnego z elementów $a_1, ..., a_{l_1}$.

Stwierdzenie. Cykl o długości l umożliwia utworzenie podgrupy cyklicznej rzędu l o elementach $p_1 = \underset{l}{(a_1, ..., a_l)}$, $p_j = \underset{l}{(a_1, ..., a_l)}^{j}$ oraz $p_l = \underset{l}{(a_1, ..., a_l)}^{l} = e$

TWIERDZENIE. Każda grupa $\boldsymbol{G}$ rzędu n jest grupą cykliczną, jeżeli n jest liczbą pierwszą.

D o w ó d

Grupa $\boldsymbol{G}$ jest izomorficzna z jakąś podgrupą regularną R grupy S_n. Podgrupa R zawiera jedynie elementy, które stanowią jeden cykl długości n, gdyż n jest liczbą pierwszą, a elementy podgrupy R mogą być podzielne wyłącznie na cykle rozłączne o jednakowej długości oraz element jednostkowy e, który jest iloczynem n cykli o długości 1. Niech ponadto $R = \{p_1 = e, p_2, p_3, ..., p_n\}$. Dowolny element $p \in R$, różny od e, odpowiada pewnemu cyklowi o długości n, co pozwala wygenerować podgrupę cykliczną $R_1 = \{p, p^2, p^3, ..., p^n\} = e\}$ zawierającą n elementów.

Ponieważ $p \in R$, więc $p^i \in R$, czyli $R_1 \subset R$. Ale rząd grupy R_1 wynosi n, zatem podgrupy R_1 i R mają jednakową liczbę elementów oraz wszystkie elementy podgrupy R_1 należą do R. Wynika stąd, że R_1 = R oraz R jest grupą cykliczną.

Przykład

Dowolna grupa trzeciego rzędu jest izomorficzna z jakąś podgrupą R grupy S_3, która zawiera 6 elementów. Tą podgrupą jest $R = \{e, (123), (321)\}$, która jest cykliczna, gdyż $R = \{(123), (123)^2, (123)^3\} = \{(123), (321), e\}$.

Stwierdzenie. Dla dużych n liczba różnych możliwych grup jest na ogół duża, ale gdy n jest liczbą pierwszą, wóczas istnieje tylko jedna możliwość utworzenia grupy i jest to grupa cykliczna.

Stwierdzenie. Gdy rząd grupy jest liczbą pierwszą, wówczas każdy element p grupy, z wyjątkiem e, generuje całą grupę $\boldsymbol{G} = \{p, p^2, p^3,..., p^n = e\}$ i jest rzędu n oraz $p^k \neq e$, gdy $k < n$.

Definicja – Grupa alternująca

Wszystkie permutacje parzyste zbioru n-elementowego tworzą podgrupę $A_n \subset S_n$, która jest rzędu $n!/2$. Jest to tzw. grupa alternująca.

Przykład

Grupa $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (321)\}$ i podgrupa permutacji parzystych – grupa alternująca $A_3 = \{e, (123), (321)\}$.

5. Grupy klasyczne

Grupy symetrii, grupy punktowe, grupy klasyczne, grupy ortogonalne, unitarne, specjalne ortogonalne, specjalne unitarne (unimodularne), parametry grupy, grupy nakrywające, przykłady

Definicja – Grupa symetrii

Grupa symetrii to zbiór przekształceń symetrii wraz z operacją superpozycji.

Definicja – Grupy punktowe

Grupy symetrii skończonego rzędu, w których przy przekształceniach symetrii zachowuje się jeden niezmieniony punkt, nazywamy grupami punktowymi.

Definicja – Grupy klasyczne

W grupach (nieskończonego rzędu) przekształceń przestrzeni afinicznych, euklidesowych, oraz unitarnych, podgrupy pozostawiające niezmieniony jeden ustalony punkt (np. początek układu współrzędnych) nazywamy grupami klasycznymi.

Definicja – Macierz nieosobliwa

Macierz kwadratowa $n \times n$ nad ciałem liczb rzeczywistych R lub liczb zespolonych C, nieosobliwa jest oznaczana odpowiednio jako $M_n(R)$, gdzie $m_{ij} \in R$ i det $M_n(R) \neq 0$ lub $M_n(C)$, gdzie $m_{ij} \in C$ i det $M_n(C) \neq 0$.

Definicja – Ogólna grupa liniowa

Zbiór macierzy $M_n(R)$ lub $M_n(C)$ z operacją mnożenia macierzowego tworzy tzw. ogólną grupę liniową GL(n,R) nad ciałem liczb rzeczywistych lub GL(n,C) nad ciałem liczb zespolonych.

Stwierdzenie. Warunek det $M_n(R) \neq 0$ lub det $M_n(C) \neq 0$ zapewnia istnienie macierzy odwrotnych $M_n^{-1}(R)$ lub $M_n^{-1}(C)$, które stanowią elementy odwrotne grupy. Element jednostkowy grupy przyjmuje postać:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

czyli E jest macierzą jednostkową $n \times n$. Ponadto spełnione są relacje $M_n(R) \cdot M_n(R)^{-1} = M_n(R)^{-1} \cdot M_n(R) = E$ lub $M_n(C) \cdot M_n(C)^{-1} = M_n(C)^{-1} \cdot M_n(C) = E$.

Definicja – Specjalna grupa liniowa

Zbiór macierzy $M_n(R)$ lub $M_n(C)$ z operacją mnożenia macierzowego tworzy tzw. specjalną grupę liniową SL(n,R) nad ciałem liczb rzeczywistych lub SL(n,C) nad ciałem liczb zespolonych, gdy macierze $M_n(R)$ lub odpowiednio $M_n(C)$ są unimodularne, tj. $\det M_n(R) = 1$ lub $\det M_n(C) = 1$.

Stwierdzenie. Dla obu rozważanych grup, gdy ograniczyć ciało liczb, powstają podgrupy, np.:

$$GL(n,R) \rightarrow \left\langle \begin{matrix} SL(n,R) \\ \\ GL(n,Q) \end{matrix} \right\rangle \rightarrow SL(n,Q) \rightarrow SL(n,Z) \rightarrow E(n)$$

gdzie: Q – liczby wymierne, Z – liczby całkowite.

Definicja – Grupa ortogonalna

Grupa ortogonalna lub grupa macierzy ortogonalnych $O(n)$ jest postaci:

$$O(n) = \left\{ A \in \{M_n(R)\} \text{ oraz } A \cdot A^T = A^T \cdot A = E \right\}$$

Definicja – Grupa specjalna ortogonalna

Grupa specjalna ortogonalna lub grupa specjalna macierzy ortogonalnych $SO(n)$ jest postaci:

$$SO(n) = \left\{ A \in O(n) \text{ oraz } \det A = 1 \right\}$$

Definicja – Grupa unitarna

Grupa unitarna lub grupa macierzy unitarnych $U(n)$ jest postaci:

$$U(n) = \left\{ A \in \{M_n(C)\} \text{ oraz } A \cdot A^+ = A^+ \cdot A = E \right\}, \text{ gdzie } A^+ = (A^*)^T$$

Definicja – Grupa specjalna unitarna

Grupa specjalna unitarna lub grupa specjalna macierzy unitarnych $SU(n)$ jest postaci:

$$SU(n) = \{A \in U(n) \text{ oraz } \det A = 1\}$$

Stwierdzenie. Dla dowolnych macierzy kwadratowych M_n i M_n' zachodzi relacja: $\det(M_n \cdot M_n') = \det M_n \cdot \det M_n'$. Wynika stąd, że dla macierzy ortogonalnych $A \in O(\mathrm{n})$ $\det(A \cdot A^T) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2 = 1$, a więc $\det A = \pm 1$.

Przykłady.

$O(1) = \{[+1], [-1]\}$ – grupa dwuelementowa,

$SO(1) = \{[+1]\}$ – grupa jednoelementowa,

$U(1) = \{[e^{i\varphi}], 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ – grupa nieskończonego rzędu,

$SU(1) = \{[+1]\}$ – grupa jednoelementowa, gdyż $e^{i\varphi} = 1$ dla $\varphi = 0$,

$$SO(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},\ 0 \leq \varphi < 2\pi \right\} \text{ – grupa nieskończonego rzędu}$$

Stwierdzenie. Jednoelementowe grupy $SO(1)$ i $SU(1)$ są izomorficzne. Elementem tych grup jest macierz 1×1 postaci: $[+1]$.

Stwierdzenie. Grupy $SU(1)$ i $SO(2)$ to jednoparametrowe grupy nieskończonego rzędu i są izomorficzne.

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{izomorfizm}} \begin{bmatrix} e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

Stwierdzenie. Każdy element A grupy $SO(3)$ przekształceń izometrycznych właściwych jest obrotem w przestrzeni trzywymiarowej dookoła pewnej nieruchomej osi i daje się sparametryzować przez kąty Eulera φ, ψ i ϑ, gdzie $0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$ oraz $0 \leq \vartheta \leq \pi$, następująco: $A = B_\varphi \cdot C_\vartheta \cdot B_\psi$, gdzie macierze

$$B_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } C_\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

określają odpowiednio obrót wokół osi OZ i wokół osi OX.

Stwierdzenie. Każdy element G grupy $SU(2)$ daje się wyrazić w następujący sposób:

$$G \in SU(2), \quad \text{więc} \quad G = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in C$$

$$G^{+} = \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{bmatrix} \text{ oraz } \det G = 1,$$

zatem

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

Ponieważ $G^{+} = G^{-1}$, więc $\begin{matrix} \overline{\alpha} = \delta & \alpha = \overline{\delta} \\ \overline{\beta} = -\gamma & -\beta = \overline{\gamma} \end{matrix}$, co powoduje, że $G = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$ oraz $\det G = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Stąd wynika, że elementy macierzy $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ i $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ muszą spełniać równość:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1.$$

Stwierdzenie. Grupa $SU(2)$ jest topologiczne równoważna, czyli homeomorficzna ze strefą trójwymiarową S^3 w czterowymiarowej przestrzeni R^4.

Stwierdzenie. Każda macierz $G \in SU(2)$ daje się zapisać w postaci:

$$G(\varphi,\vartheta,\psi) \equiv b_\varphi c_\vartheta b_\psi = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} & i\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} \\ i\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}} & \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \end{bmatrix}, \text{ gdzie } b_\varphi = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix}$$

$$c_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ i\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad |\alpha| = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \quad \arg\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi), \quad |\beta| = \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\arg\beta = \frac{1}{2}(\varphi + \psi + \pi) \quad \text{oraz} \quad 0 \le \varphi < 2\pi\,, \quad 0 \le \vartheta \le \pi\,, \quad -2\pi \le \psi < 2\pi$$

Macierze G można wybrać także w postaci

$$G = \begin{bmatrix} \cos\vartheta' \cdot e^{i\varphi'} & i\sin\vartheta' \cdot e^{i\psi'} \\ i\sin\vartheta' \cdot e^{-i\psi'} & \cos\vartheta' \cdot e^{-i\varphi'} \end{bmatrix}$$

przyjmując, że $0 \le \varphi', \psi', \vartheta' < 2\pi$. W obu przypadkach $\det G = 1$.

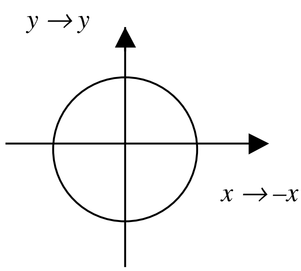
Stwierdzenie. Grupa $SU(2)$ jest grupą nakrywającą dla grupy $SO(3)$. Grupa $SU(2)$ to grupa obrotów właściwych i niewłaściwych (obrót + inwersja) w przestrzeni trójwymiarowej R^3.

Stwierdzenie. Grupa $SO(3)$ jest obrazem homomorficznym grupy $SU(2)$ przy homomorfizmie Φ: $SU(2) \to SO(3)$ z jądrem homomorfizmu $Ker\,\Phi = \{\pm E\}$.

Stwierdzenie. Istnieje monomorfim grupy $SO(3)$ w grupę $SU(2)$, gdyż $SO(3)$ jest podgrupą obrotów właściwych w grupie $SU(2)$ obrotów właściwych i niewłaściwych.

Stwierdzenie. Obroty niewłaściwe, a w szczególności inwersje, to przekształcenia ortogonalne, dla których wyznacznik macierzy przekształcenia A, $\det A = -1$. W przestrzeni dwuwymiarowej inwersją jest np. zamiana współrzędnych $x \to -x$, $y \to y$, wówczas

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \det A = -1.$$



Rysunek. Inwersja w płaszczyźnie, np. $x \to -x$ oraz $y \to y$

6. Ogólne własności grup

Warstwy lewostronne i prawostronne, twierdzenie Lagrange'a, przykłady dla grup symetrycznych, relacja sprzężenia i jej własności, klasy równoważności, wydzielanie klas równoważności, przykłady

Definicja – Warstwy

Niech $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ będzie podgrupą grupy G. Rząd podgrupy A wynosi m, a rząd grupy G odpowiednio n oraz $m < n$. Ponadto niech $b \in G$ i $b \notin A$, wówczas ciąg elementów $\{ba_1, ba_2, ..., ba_m\}$ tworzy tzw. warstwę lewostronną podgrupy A oznaczaną bA, a ciąg elementów $\{a_1b, a_2b, ..., a_mb\}$ tworzy warstwę prawostronną oznaczaną Ab.

Stwierdzenie. Warstwa nie jest podgrupą, gdyż nie zawiera elementu jednostkowego e.

Dowód. Nie wprost

Niech $e \in bA \Rightarrow e = ba_i \Rightarrow b = a_i^{-1}$ ale $a_i \in A \Rightarrow a_i^{-1} \in A \Rightarrow b \in A$, a więc zachodzi sprzeczność, gdyż z założenia $b \notin A$.

Stwierdzenie. Warstwa nie zawiera żadnego elementu należącego do podgrupy A.

Dowód. Nie wprost

Niech $a_i \in A$ i $a_i \in bA \Rightarrow a_i = ba_j \Rightarrow b = a_i a_j^{-1}$, ale $a_i a_j^{-1} \in A$, czyli $b \in A$, a więc sprzeczność.

LEMAT. Dwie warstwy lewostronne (prawostronne) podgrupy A albo mają wszystkie elementy wspólne, albo nie zawierają żadnego wspólnego elementu.

Dowód

Niech xA i yA są warstwami podgrupy $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Gdy warstwy $xA = \{xa_1, xa_2, ..., xa_m\}$ i $yA = \{xy_1, ya_2, ..., ya_m\}$ mają wspólny element, wówczas

$xa_i = ya_j$, gdzie $a_i, a_j \in A$ oraz $xa_i \in xA$, $ya_j \in yA$. Ponieważ $y^{-1}x = a_j a_i^{-1} \in A$, więc ciąg $\{y^{-1}xa_1, y^{-1}xa_2, ..., y^{-1}xa_m\} = A$, ale wówczas

$$yA = \left\{ \underbrace{yy^{-1}}_{e} xa_1, \underbrace{yy^{-1}}_{e} xa_2, ..., \underbrace{yy^{-1}}_{e} xa_m \right\} = \{xa_1, xa_2, ..., xa_m\} = xA \text{, czyli } yA = xA$$

Jeżeli zatem dwie warstwy mają jeden wspólny element, to ich wszystkie elementy są wspólne.

Stwierdzenie. Podgrupa A i jej warstwy są równoliczne.

Dowód. Nie wprost

$A = \{a_1, ..., a_m\}$ oraz $xA = \{xa_1, ..., xa_m\}$. Gdyby warstwa zawierała mniej elementów niż podgrupa A, wówczas $xa_i = xa_j$, ale to implikuje, że $a_i = a_j$, czyli powstaje sprzeczność.

TWIERDZENIE LAGRANGE'A

Rząd grupy G jest całkowitą wielokrotnością rzędu jej dowolnej podgrupy.

Dowód

Niech podgrupa $A \subset G$ i rząd podgrupy A wynosi m, a rząd grupy $G - n$ oraz $n < m$. Ponadto niech $b_1 \in G$ i $b_1 \notin A$, wówczas b_1A jest warstwą i niech $b_2 \in G$ i $b_2 \notin A$ i $b_2 \notin b_1A$ to b_2A jest kolejną warstwą itd. Niech $b_1A, b_2A, ..., b_{\mu-1}A$ będą wszystkimi otrzymanymi różnymi warstwami podgrupy A. Wówczas każdy dowolny element $g \in G$ musi należeć do podgrupy A albo do którejś z warstw b_iA. Ponieważ warstw jest $\mu - 1$ i zawierają po m elementów, zatem $n = m + m(\mu - 1)$, czyli $n = m\mu$.

Definicja – Indeks podgrupy

Parametr m to indeks podgrupy A.

Stwierdzenie. Rząd dowolnego elementu grupy jest dzielnikiem rzędu grupy.

Dowód

Niech $a \in G$ i rząd elementu a wynosi m. Wówczas ciąg $\{a, a^2, a^3, ..., a^m = e\}$ tworzy podgrupę cykliczną rzędu m, zatem m jest dzielnikiem rzędu grupy G.

Stwierdzenie. Grupa, której rząd jest liczbą pierwszą, musi być cykliczna.

Dowód.

Niech rząd grupy G wynosi n i jest liczbą pierwszą. Ponieważ rząd dowolnego jej elementu $a \neq e$ jest dzielnikiem rzędu grupy, więc jest on równy n. Ten element a generuje podgrupę cykliczną $\{a, a^2, ..., a^n = e\}$ równoliczną z G, zatem $G = \{a, a^2, ..., a^n = e\}$ jest grupą cykliczną.

Przykład

Grupa symetryczna S_3 = {e, (12), (13), (23), (123), (321)} rzędu 6 ma podgrupę A = {e, (12)} rzędu 2, dla której można utworzyć dwie różne lewostronne lub prawostronne warstwy. Warstwy lewostronne utworzone przez pomnożenie podgrupy A przez wszystkie elementy grupy S_3 nie należące do podgrupy A mają postać:

(13)A={(13),(123)}

(23)A={(23),(321)}

(123)A={(123),(13)}

(321)A={(321),(23)}

Ponieważ otrzymane warstwy 1 i 3 oraz 2 i 4 są identyczne tj. (13)A = (123)A oraz (23)A = (321)A, zatem $S_3 = A$ + (13)A + (23)A lub $S_3 = A$ + (123)A + (321)A.

Stwierdzenie. Warstwy lewostronne mogą być różne od warstw prawostronnych, np. {(13),(123)} = (13)$A \neq A$(13) = {(13),(321)}, gdyż (13)(12) = (123) $\neq$ (321) = (12)(13).

Przykład

Grupa symetryczna S_3 = {e, (12), (13), (23), (123), (321)} rzędu 6 ma także podgrupę rzędu 3 B = {e, (123),(321)}, dla której można utworzyć tylko jedną warstwę {(12),(13),(23)} zawierającą 3 pozostałe elementy grupy. Zatem warstwy lewostronna i prawostronna są identyczne, tj. (12)B = (13)B = (23)B = B(12) = B(13) = B(23) = {(12),(13),(23)} oraz $S_3 = B$ + (12)B.

Stwierdzenie. Podgrupa B = {e,(123),(321)} – to grupa alternująca A_3 permutacji parzystych, $S_3 - A_3$ = (12)B – to warstwa permutacji nieparzystych, zatem $S_3 = A_3$ + (12)A_3.

Definicja – Sprzężenia

Niech $a, b \in G$, wówczas element b jest sprzężony do elementu a, gdy istnieje takie $x \in G$, że $a = xbx^{-1}$.

LEMAT. Jeżeli b jest sprzężone do a, to a jest sprzężone do b.

Dowód

$$a = xbx^{-1} \Rightarrow x^{-1}ax = b \text{ i niech } y = x^{-1} \in G \Rightarrow b = yay^{-1}$$

LEMAT. a jest sprzężone do a.

Dowód

$a = aaa^{-1}$ lub $a = eae^{-1}$

LEMAT. Jeżeli b jest sprzężone do a i c jest sprzężone do b, to c jest sprzężone do a.

Dowód

$a = xbx^{-1}$ i $b = ycy^{-1}$, $x, y \in G$, zatem $a = x(ycy^{-1})x^{-1} = (xy)c(xy)^{-1}$, a ponieważ $xy \in G$, $a = (xy)c(xy)^{-1}$.

Stwierdzenie. Relacja sprzężenia jest relacją równoważności, gdyż jest ona:

- zwrotna — *b* jest sprzężone do *a* $\Rightarrow$ *a* jest sprzężone do *b*,
- symetryczna — *a* jest sprzężone do *a*,
- tranzytywna (przechodnia) — *b* jest sprzężone do *a* i *c* jest sprzężone do *b* $\Rightarrow$ *c* jest sprzężone do *a*.

Definicja – Klasy

Wszystkie elementy grupy *G* wzajemnie do siebie sprzężone tworzą klasę równoważności, zwaną klasą.

Stwierdzenie. Dwa elementy należące do jednej klasy *C* muszą być tego samego rzędu.

Dowód

Niech $a, b \in C$, zatem $b = xax^{-1}$. Niech rząd elementu *a* wynosi *n*, wówczas $a^n = e$ oraz $a^m \neq e$, gdy $m < n$. Ponieważ $b^m = \left(xax^{-1}\right)^m = \underbrace{xax^{-1}xax^{-1}\dots xax^{-1}}_{m} = xa^m x$, więc jeżeli $m = n$, to $b^n = xa^n x^{-1} = xex^{-1} = e$, czyli $b^n = e$, natomiast gdy $m < n$ i $b^m = e$, wówczas $e = xa^m x^{-1}$ i $a^m = x^{-1}ex = e$, czyli $a^m = e$, a więc sprzeczność.

Stwierdzenie. Jeżeli rzędy dwóch elementów grupy są różne, to nie mogą one należeć do tej samej klasy.

Stwierdzenie. Element jednostkowy *e* tworzy jednoelementową klasę $C = \{e\}$ jedynego elementu rzędu 1, gdyż jedynie $e^1 = e$.

TWIERDZENIE (o tworzeniu klasy elementów sprzężonych względem elementu *a*)

Dla każdego elementu $a \in G$, gdzie $G = \{a_1 = e, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, wszystkie elementy $b_i = a_i a a_i^{-1}$ ciągu $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ są do siebie sprzężone, gdyż są sprzężone do *a* i tworzą klasę (elementów sprzężonych względem *a*).

Dowód

Wszystkie b_i są sprzężone do *a*, gdyż $b_i = a_i a a_i^{-1}$ i $a_i \in G$, zatem b_i są sprzężone do siebie dla $i = 1, \dots, n$, ale są to wszystkie możliwe elementy grupy *G* sprzężone do *a*, więc ciąg $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ tworzy klasę, chociaż nie wszystkie elementy b_i muszą być różne.

Stwierdzenie. Każdą grupę można rozłożyć na klasy. Klasy są rozłączne.

Stwierdzenie. Dla grup abelowych każdy element tworzy własną klasę jednoelementową.

Dowód

Niech dwa elementy a, b grupy abelowej są sprzężone. Wówczas $b = xax^{-1}$, ale $xax^{-1} = xx^{-1}a = a$, więc $b = a$.

Przykład

Grupa cykliczna $G = \{e, a, a^2, a^3\}$, abelowa, czteroelementowa. Rzędy jej elementów wynoszą odpowiednio: $e - 1$, $a - 4$, $b = a^2 - 2$, $c = a^3 - 4$. Klasy $\{e\}$, $\{a\}$, $\{a^2\}$, $\{a^3\}$ są jednoelementowe.

Przykład

W grupie symetrycznej $S_3 = \{e, (12),(13),(23),(123),(321)\}$, gdzie elementy odwrotne tworzą ciąg $\{e,(12),(13),(23),(321),(123)\}$, istnieją klasy:

$C_1 = \{e\}$ – klasa elementu jednostkowego rzędu 1,

C_2 – klasa elementów sprzężonych do elementu (12)

$e(12)e^{-1} = (12)$

$(12)(12)(12)^{-1} = (12)$

$(13)(12)(13)^{-1} = (123)(13) = (321)(13) = (32)(31)(13) = (32) = (23)$

$(23)(12)(23)^{-1} = (213)(23) = (321)(23) = (31)(32)(23) = (13)$

$(123)(12)(123)^{-1} = (13)(12)(12)(321) = (13)(31)(32) = (23)$

$(321)(12)(321)^{-1} = (213)(12)(123) = (23)(21)(12)(123) = (23)(32)(31) = (13)$

zatem $C_2 = \{(12),(13),(23)\}$ zawiera 3 elementy rzędu 2.

C_3 – klasa elementów sprzężonych do elementu (123)

$e(123)e^{-1} = (123)$

$(12)(123)(12)^{-1} = (321)$

Pozostałe kombinacje muszą prowadzić do tego samego wyniku, gdyż klasy są rozłączne, zatem $C_3 = \{(123),(321)\}$ zawiera 2 elementy rzędu 3.

Stwierdzenie. Dla grup permutacji S_n podział na klasy jest zgodny ze strukturą cykli.

Przykład

Klasy grupy S_4 – rząd grupy 4!=24	Liczba elementów	Rząd elementu
C_1 = {e}	1	1
C_2 = {(12),(13),(14),(23),(24),(34)}	6	2
C_3 = {123),(124),(134),(234),(321),(421),(431),(432)}	8	3
C_4 = {(12)(34),(13)(24),(14)(23)}	3	2
C_5 = {(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432)}	6	4
razem	24	

Uwaga. W rozważaniach jest stosowany także symbol $C_k(n)$, który oznacza, że klasa C_k zawiera n elementów.

7. Podgrupy i ich własności

Podgrupy sprzężone, podgrupa inwariantna, grupa prosta, grupa ilorazowa, jądro homomorfizmu jako podgrupa inwariantna, wyszukiwanie podgrup inwariantnych w grupach symetrycznych

Stwierdzenie. Jeżeli H jest podgrupą grupy G, to zbiór $H' = aHa^{-1}$, gdzie $a \in G$, jest także podgrupą grupy G.

Dowód.

Niech $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$ oraz axa^{-1}, $aya^{-1} \in H'$, należy zatem pokazać, że $a(xy)a^{-1} \in H$. Ponieważ $(axa^{-1})(aya^{-1}) = ax(a^{-1}a)ya^{-1} = a(xy)a^{-1}$, więc $a(xy)a^{-1} \in H$. Pozwala to stwierdzić, że

– działanie grupowe jest operacją zamkniętą w H',
– element jednostkowy $e \in H \Rightarrow aea^{-1} = e \in H'$,
– dla każdego $axa^{-1} \in H'$ istnieje element odwrotny, którym jest $ax^{-1}a^{-1} \in H'$, gdyż $(axa^{-1})(ax^{-1}a^{-1}) = ax(a^{-1}a)x^{-1}a^{-1} = a(xx^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = e$.

Stwierdzenie. Gdy $a \in H$ to $H' = aHa^{-1} = H$, wówczas jest to odwzorowanie podgrupy H w siebie, czyli automorfizm.

Dowód

$$x \in H \text{ i } a \in H \Rightarrow axa^{-1} \in H \Rightarrow H' = aHa^{-1} = H$$

Definicja – Podgrupa sprzężona

Podgrupa $H' = aHa^{-1}$, gdzie $H \subset G$ i $a \in G$, nazywa się podgrupą sprzężoną do podgrupy H w grupie G.

Definicja – Podgrupa inwariantna

Jeżeli $aHa^{-1} = H$ dla każdego $a \in G$, to H nazywa się podgrupą inwariantną lub niezmienniczą.

Stwierdzenie. Dla podgrupy grupy inwariantnej z warunku $H' = aHa^{-1}$, $a \in G$ wynika, że $Ha = aH$, H zatem jest podgrupą inwariantną wtedy i tylko wtedy, gdy jej warstwy lewostronne i prawostronne utworzone dla dowolnych $a \in G$ są identyczne.

Stwierdzenie. Jedynka $\{e\}$ i cała grupa G są zawsze podgrupami inwariantnymi, trywialnymi.

Dowód

Dla każdego $a \in G$ jest spełniona relacja $aea^{-1} = e$, więc $a\{e\}a^{-1} = \{e\}$.

Dla każdego $a, b \in G$ $aba^{-1} \in G$, więc $aGa^{-1} = G$.

PRZYKŁAD

Podgrupa $A = \{e, (12)\}$ grupy $S_3 = A + (13)A + (23)A$ nie jest inwariantna, gdyż warstwy lewostronne i prawostronne są różne, np. $(13)A \neq A(13)$.

Podgrupa $B = \{e, (123), (321)\}$ grupy $S_3 = B + (12)B$ jest inwariantna, gdyż warstwy lewostronne i prawostronne są równe dla wszystkich elementów grupy S_3.

Definicja – Grupa prosta

Grupa prosta – to grupa nie posiadająca nietrywialnych, tj. różnych od $\{e\}$ i G, podgrup inwariantnych.

LEMAT. Podgrupa H grupy G jest inwariantna wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera całe klasy grupy G, tzn. jeżeli H zawiera 1 element jakiejś klasy, to zawiera także wszystkie pozostałe elementy tej klasy.

Dowód.

I. Jeżeli H jest inwariantna, $H = aHa^{-1}$, $a \in G$, to H zawiera całe klasy:

Dla każdego zatem $x \in H$ i $a \in G$ $axa^{-1} \in H$, ale elementy axa^{-1} otrzymane dla wszystkich $a \in G$ tworzą klasę C i $C \in H$, czyli H zawiera zawsze pełne klasy.

II. Jeżeli H zawiera całe klasy, $C \in H$, to H jest inwariantna:

Każde $x \in H$ należy do jakiejś klasy C, więc $C \subset H$, ale klasa C zawiera wszystkie elementy postaci axa^{-1} otrzymane dla wszystkich $a \in G$, zatem jeżeli $x \in H$, to także dla wszystkich $a \in G$ wszystkie elementy postaci axa^{-1}, które tworzą klasę C, należą do H, czyli $C \subset H$. Ale to jest słuszne dla dowolnego $x \in H$, które musi należeć do jakiejś klasy. Stąd, jeżeli $x \in H \Rightarrow x \in C$ i wszystkie $axa^{-1} \in C \subset H$, co oznacza, że dla każdego $a \in G$ $aHa^{-1} = H$, czyli H jest inwariantna.

Definicja – Mnożenie warstw

Mnożenie warstw wyraża się następująco:

$aH \cdot bH = \{z = x \cdot y, \text{ gdzie } x \in aH,\ y \in bH\}$, natomiast gdy $a \in H$ i $b \in H$, wówczas $aH = bH = H$ i $H \cdot H = \{z = x \cdot y, \text{ gdzie } x \in H, y \in H\} = H$.

TWIERDZENIE. Zbiór składający się z podgrupy inwariantnej H i wszystkich jej różnych warstw sam stanowi grupę zwaną grupą ilorazową grupy G, którą oznaczamy $G' = G/H$.

Dowód

$aH = Ha$ dla wszystkich $a \in G$, ponieważ H jest inwariantne, ponadto:

– H jest elementem jednostkowym w grupie ilorazowej, gdyż

$$(aH) \cdot H = a \cdot (HH) = aH$$

oraz

$$H \cdot (aH) = (Ha) \cdot H = (aH) \cdot H = a \cdot (HH) = aH \,,$$

– mnożenie warstw jest warstwą, czyli jest to działanie zamknięte, gdyż

$$(aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = ab(HH) = abH,$$

a abH jest warstwą, jako że $ab \in G$,

– każda warstwa aH ma element odwrotny $a^{-1}H$, gdyż

$$aHa^{-1}H = aa^{-1}HH = eH = H \,,$$

zatem $a^{-1}H$ jest elementem odwrotnym do aH w grupie ilorazowej.

Przykład

Grupa $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (321)\}$, jej podgrupa inwariantna $B = \{$e, (123), (321)$\}$ oraz warstwa $(12)B = \{(12), (13), (23)\}$ pozwalają utworzyć grupę ilorazową $S_3/B = \{E, A\}$, gdzie $E = B$ oraz $A = (12)B$. Jest to grupa dwuelementowa, a zatem $A^2 = E$.

Uwaga. Elementy grup ilorazowych oznaczamy dużymi literami tj. *E, A, B, C,...*

Stwierdzenie. Grupę ilorazową można traktować jako homomorfizm grupy G w $G' = G/H$.

TWIERDZENIE. Przy każdym homomorfizmie f grupy G w G', tj. $f(G) = G'$, jądro homomorfizmu $Ker(f) = H$ tworzy podgrupę inwariantną w G.

Dowód

Dla każdego $b \in H = Ker(f) \Rightarrow f(b) = e' \in G'$, ponadto dla każdego $b \in H$ i $a \in G$ element $aba^{-1} \in H$, gdyż $f(aba^{-1}) = f(a)f(b)f(a^{-1}) = f(a)e'f(a)^{-1} = f(a)f(a)^{-1} = e'$, zatem $H = aHa^{-1}$ i jest podgrupą inwariantną.

Stwierdzenie. Przy każdym homomorfizmie $f\colon G \to G'$, jeżeli $a' \in G'$ i $a' \neq e'$ to istnieje warstwa np. aH, gdzie $H = Ker(f)$, taka że $f(aH) = a'$, tzn. całe warstwy są przekształcane w jeden element.

Dowód

Niech $b \in aH \Rightarrow b = ax$ oraz $f(a) = a'$ i $f(x) = e'$, dla dowolnego zatem $b \in aH$ $f(b) = f(ax) = f(a)f(x) = f(a)e' = f(a) = a'$.

Stwierdzenie. Przy dowolnym homomorfizmie $f: G \to G'$ rząd grupy G' musi być dzielnikiem rzędu grupy G.

Dowód

Jądro homomorfizmu $Ker(f)$ oraz utworzone względem niego warstwy są równoliczne, a każda z nich jest przekształcana w jeden element grupy G'. Rząd grupy G jest zatem równy iloczynowi rzędu jądra homomorfizmu $Ker(f)$ i rzędu grupy G'.

Przykład

Wyznaczanie nietrywialnych podgrup inwariantnych grupy S_4. Grupa S_4 zawiera 4!=24 elementy, podgrupy inwariantne muszą spełniać warunki:

– podgrupa inwariantna musi zawierać całe klasy grupy S_4 (por. s. 41), tj. $C_1(1)$, $C_2(6)$, $C_3(8)$, $C_4(3)$, $C_5(6)$, które mają łącznie 1 + 6 + 8 + 3 + 6 = 24 elementy,
– rząd podgrupy musi być dzielnikiem rzędu grupy S_4; dzielnikami liczby 24 są: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, przy czym 1 i 24 to dzielniki trywialne,
– podgrupa musi zawsze zawierać element e, czyli klasę $C_1(1)$.

Przypadek I

$H = C_1(1) + C_4(3)$, czyli $H=\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$. Jest to podgrupa czteroelementowa. Ponieważ elementy podgrupy H spełniają relacje:

$$((12)(34))^2 = ((12)^2(34))^2 = e,\ ((13)(24))^2 = ((13)^2(24))^2 = e,$$
$$((14)(23))^2 = ((14)^2(23))^2 = e,$$

H jest czterogrupą. Grupa ilorazowa $G' = S_4/H$ zawiera 6 elementów.

Przypadek II

$H' = C_1(1) + C_3(8) + C_4(3)$ zawiera 1 + 8 + 3 = 12 elementów. H' jest podgrupą permutacji parzystych, czyli tzw. grupą alternującą

$$A_4 = \{e,(123),(124),(134),(234),(321),(421),(431),(432),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}.$$

Grupa ilorazowa $S_4/A_4 = \{E, A\}$, gdzie $E = A_4$, natomiast A jest warstwą wszystkich permutacji nieparzystych.

Stwierdzenie. Grupa ilorazowa S_n/A_n, gdzie S_n jest grupą symetryczną, a A_n jest grupą alternującą, jest zawsze izomorficzna z grupą dwuelementową {E,A}.

Stwierdzenie. Grupa alternująca A_n jest podgrupą inwariantną grupy symetrycznej S_n. Ponieważ A_n zawiera wszystkie permutacje parzyste, $S_n - A_n$ stanowi warstwę permutacji nieparzystych.

8. Grupy obrotów

Obroty w płaszczyźnie i przestrzeni, kąty Eulera, składanie obrotów

St*wierdzenie*. Istnieją dwie interpretacje obrotów: bierna i czynna. Bierna, gdy obracamy układ współrzędnych, a przestrzeń jest nieruchoma, czynna, gdy obracamy przestrzeń a układ współrzędnych jest nieruchomy. W prezentowanych rozważaniach jest stosowana interpretacja bierna.

Definicja – Operator obrotu $R_{\mathbf{k}}(\alpha)$

Operator obrotu $R_{\mathbf{k}}(\alpha)$ wyznacza obrót w płaszczyźnie wokół ustalonej, prostopadłej do niej osi **k** o kąt α. W szczególności osią **k** może być jedna z osi układu współrzędnych: x, y, z.

Definicja – Operator obrotu $R(\alpha, \beta, \gamma)$

Dowolny obrót w przestrzeni trójwymiarowej daje się wyrazić jak złożenie obrotów:

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

gdzie α, β, γ są kątami Eulera oraz $0 \le \alpha, \gamma < 2\pi$, $0 \le \beta \le \pi$.

Stwierdzenie. Obroty w przestrzeni trójwymiarowej R^3 wokół osi układu współrzędnych można wyrazić za pomocą macierzy 3×3:

$$D(R_z(\alpha)) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(R_y(\beta)) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Stwierdzenie. Kąty α i β są standardowymi kątami sferycznymi φ i ϑ końcowej osi z' względem układu pierwotnego (x, y, z). Kąt γ jest zawarty między osiami y i y' po obrocie $R_z(\alpha)$.

Stwierdzenie. Pola są elementami przestrzeni nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych. Pola mogą być skalarne, wektorowe, tensorowe itp.

Definicja – Działanie operatora obrotu na pole

Operator obrotu R działa w następujący sposób na pole

– skalarne: $Rf(\mathbf{r}) = f'(\mathbf{r}) = f(R^{-1}\mathbf{r})$, np. $R_z(\alpha) f(\mathrm{r}, \varphi) = f(\mathrm{r}, \varphi - \alpha)$,

– wektorowe: $R\boldsymbol{f}(\mathbf{r}) = Rf_j(\mathbf{r})e_j = f_j'(\mathbf{r})e_j'$, gdzie $f_j'(\mathbf{r}) = f_j(R^{-1}\mathbf{r})$ oraz $e_j' = [D^{-1}(R)\mathbf{e}]_j = [D^{\mathrm{T}}(R)\mathbf{e}]_j = D_{ji}^{\mathrm{T}}(R)e_i = D_{ij}(R)e_j$, więc $Rf_j(\mathrm{r})e_j = e_i D_{ij}(R) f_j(R^{-1}\mathbf{r})$.

Definicja – Składanie obrotów

Składanie obrotów, lub iloczyn obrotów, wyraża się następująco:

$$R_1[R_2 f(\mathbf{r})] = R_1 f'(\mathbf{r}) = f'(R_1^{-1}\mathbf{r}) = f(R_2^{-1}R_1^{-1}\mathbf{r}) = f((R_1R_2)^{-1}\mathbf{r}).$$

Stwierdzenie. Ponieważ $(R_1R_2)\mathrm{f}(\mathbf{r}) = \mathrm{f}((R_1R_2)^{-1}\mathbf{r})$, więc $R_1[R_2\mathrm{f}(\mathbf{r})] = (R_1R_2)\mathrm{f}(\mathbf{r})$.

Stwierdzenie. Zbiór macierzy kwadratowych $n\times n$ o wyznaczniku różnym od zera i o określonych własnościach (ortogonalne, unitarne, hermitowskie i inne) z operacją mnożenia macierzowego tworzy grupę nieskończonego rzędu i stopnia n, gdyż

– spełniona jest relacja łączności dla mnożenia macierzy, tj. $(AB)C = A(BC)$,

– jedynką grupy jest macierz jednostkowa E,

– dla każdej macierzy kwadratowej A o wyznaczniku $\det A \neq 0$ istnieje macierz odwrotna A^{-1} taka, że $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{E}$.

Stwierdzenie: Zbiór $R_{\mathbf{k}}(\alpha)$ obrotów w płaszczyźnie wokół prostopadłej do niej osi **k** o kąt α z operacją składania obrotów tworzy grupę. Elementem neutralnym grupy jest $R_{\mathbf{k}}(0)$, tj. obrót o kąt $\alpha = 0$. Ponieważ $R_{\mathbf{k}}(\alpha)R_{\mathbf{k}}(\beta) = R_{\mathbf{k}}(\alpha + \beta)$, więc element odwrotny ma postać $R_{\mathbf{k}}^{-1}(\alpha) = R_{\mathbf{k}}(-\alpha)$, gdyż $R_{\mathbf{k}}(\alpha + \beta) = R_{\mathbf{k}}(0)$, gdy $\beta = -\alpha$.

Stwierdzenie: Zbiór obrotów $R = R(\alpha, \beta, \gamma)$ z operacją składania obrotów tworzy grupę obrotów właściwych w R^3 nieskończonego rzędu trzeciego stopnia, która jest izomorficzna z grupą $SO(3)$. W grupie obrotów $R = R(\alpha, \beta, \gamma)$

– spełniona jest relacja łączności: $(R_1R_2)R_3 = R_1(R_2R_3)$,

– istnieje jedynka $e = R(0, 0, 0)$, tj. $\alpha = \beta = \gamma = 0$,

– element odwrotny ma postać $R^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = R(-\gamma, -\beta, -\alpha)$, gdyż

$$R^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = [R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)]^{-1} = R_z^{-1}(\gamma)R_y^{-1}(\beta)R_z^{-1}(\alpha)$$
$$= R_z(-\gamma)R_y(-\beta)R_z(-\alpha) = R(-\gamma, -\beta, -\alpha)$$

9. Grupy ciągłe

Homeomorfizm grupy ciągłej w przestrzeń euklidesową, mapy, atlasy i ich zgodność, stopień grupy. Topologia grupy, grupy Liego oraz elementy (operatory), generatory i reprezentanci grupy. Komutatory, stałe struktury grupy, antysymetria i tożsamość Jacobiego. Przestrzeń liniowa z bazą generatorów i algebra Liego, obroty operatorów

Stwierdzenie. Jeżeli każdemu obrotowi $R_z(\alpha)$, gdzie $\alpha \neq 0$ zostanie przypisany punkt z przedziału $0 < \alpha < 2\pi$, to otrzymuje się tzw. mapę w przestrzeni euklidesowej R^1, przy czym termin mapa odnosi się zarówno do sposobu odwzorowania jak i do powstałego odwzorowania, tj. zbioru punktów z przedziału $(0, 2\pi)$. Mapa to także odwzorowanie grupy obrotów $R(\alpha, \beta, \gamma)$ w przestrzeń euklidesową R^3, gdy $0 < \alpha, \gamma < 2\pi$ oraz $0 < \beta < \pi$.

Uwaga. Mapy to odwzorowania w zbiory otwarte.

Definicja – Homeomorfizm

Homeomorfizm to ciągłe i wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie f zbioru X w zbiór Y, $f: X \rightarrow Y$ takie, że przekształcenie odwrotne $f^{-1}: Y \rightarrow X$ jest też ciągłe.

Stwierdzenie: Homeomorfizm to odwzorowanie różnowartościowe i obustronnie ciągłe.

Definicja – Stopień grupy

Stopień grupy n to liczba niezależnych i zmieniających się w sposób ciągły parametrów rzeczywistych potrzebnych do określenia poszczególnych elementów grupy.

Definicja – Mapa

Mapa to homeomorfizm dowolnie wybranego otwartego zbioru elementów grupy G w zbiór otwarty przestrzeni euklidesowej R^n, przy czym wymiar przestrzeni n odpowiada stopniowi grupy.

Definicja – Mapy zgodne

Dwie mapy $S_1, S_2 \subset R^n$ nazywamy parami zgodnymi, jeżeli w obszarach, które należą do nich obu, odwzorowanie $S_2^{-1} \to G \to S_1$ jest dostatecznie regularne.

Stwierdzenie. Odwzorowanie dostatecznie regularne to np. ciągłe lub różniczkowalne, lub analityczne.

Definicja – Atlas

Mapę pokrywającą całą grupę, lub układ map parami zgodnych i pokrywających całą grupę nazywamy atlasem.

Stwierdzenie. Jeżeli wszystkie mapy atlasu danej grupy mają obrazy euklidesowe w tej samej przestrzeni R^n, to grupa jest stopnia n.

Stwierdzenie. Jeżeli grupa jest spójna (jednospójna) to odpowiadające jej obrazy euklidesowe mają ten sam wymiar.

PRZYKŁAD. $R_z(\alpha) \to [\alpha] \in R^1$, $R(\alpha, \beta, \gamma) \to [\alpha, \beta, \gamma] \in R^3$

Topologia grupy

Stwierdzenie. Mając atlas grupy, można utworzyć topologię grupy z warunku, że bliskim punktom w obrazie euklidesowym grupy w R^n odpowiadają bliskie elementy grupy $g(\mathbf{s}) \in G$, gdzie $\mathbf{s} \in R^n$.

Stwierdzenie. Elementy grupy, dla których atlas zawiera więcej niż jedną mapę, można oznaczać np. $g_a(\mathbf{s})$, ale wyróżnianie mapy jest nieistotne, gdyż mapy są parami zgodne, więc na ogół się je pomija.

Stwierdzenie. Zwykle początek układu współrzędnych w przestrzeni R^n przypisuje się jedynce grupy, tzn. $g(0) = e$ lub $g(0) = 1$.

Grupy Liego

ZAŁOŻENIA

Rozważa się mapę obejmującą początek układu współrzędnych $0 = [0,...,0] \in R^n$, odpowiadający jedynce grupy $g(0) = 1$, oraz punkty $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in R^n$ leżące dostatecznie blisko 0 tak, żeby elementy grupy $g(\mathbf{u}) = g(\mathbf{s}) \cdot g(\mathbf{t})$ oraz $g(\mathbf{w}) = g(\mathbf{s})^{-1}$ były objęte mapą. Wzory te definiują funkcje $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{s}, t)$ oraz $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{s})$ i są dobrze określone dla $\mathbf{s}$ i $\mathbf{t}$ dostatecznie bliskich początku układu współrzędnych.

Przykład

Dla grupa obrotów w płaszczyźnie XY $g(\mathbf{s}) \equiv R_z(\alpha)$, wówczas $R_z(\gamma) = R_z(\alpha)R_z(\beta) = R_z(\alpha + \beta)$, więc $\gamma = \alpha + \beta$ oraz $R_z(\delta) = R_z(\alpha)^{-1} = R_z(-\alpha)$, więc $\delta = -\alpha$.

Definicja – Grupa Liego

Grupę G, dla której można zbudować atlas i wybrać parametry $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ tak, żeby funkcje $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ oraz $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{s})$ były analityczne, nazywamy grupą Liego.

Stwierdzenie. Grupy, których elementy dadzą się opisać parametrami zmieniającymi się w sposób ciągły, to na ogół grupy Liego.

Stwierdzenie. Grupy operatorów $R_z(\alpha)$ i $R_z(\alpha, \beta, \gamma)$ to grupy Liego.

Generatory

Założenia

Niech $g(\mathbf{s}) \in G$ i $g(\mathbf{s})$ jest funkcją analityczną w pewnym obszarze wokół początku układu współrzędnych oraz $g(0) = 1$. Wówczas

$$g(\mathbf{s}) = 1 - i\sum_{j=1}^{n} s_j \mathrm{J}_j, \text{ gdzie } \mathrm{J}_j = i\frac{\partial g(s)}{\partial s_j}\Big|_{\mathbf{s}=0}$$

są generatorami grupy Liego.

Stwierdzenie. Wiele własności grup Liego można badać, rozpatrując skończoną liczbę generatorów J_j zamiast nieskończonej liczby elementów grupy $g(\mathbf{s})$.

Przykład

Działanie operatora $R_z(\alpha)$, gdy $\alpha \ll 1$, na pole skalarne $f(r, \varphi)$:

$$R_z(\alpha)f(r, \varphi) = f(r, \varphi - \alpha) = f(r, \varphi) - \alpha\frac{\partial}{\partial\varphi}f(r, \varphi) = [1 - i(-i\alpha\frac{\partial}{\partial\varphi})]f(r, \varphi)$$
$$= [1 - i\alpha J_z]f(r, \varphi)$$

zatem $R_z(\alpha) = (1 - i\alpha \mathrm{J}_z)$, gdzie J_z jest generatorem grupy operatorów $\mathrm{R}_z(\alpha)$, którego reprezentantem w wybranym (biegunowym) układzie współrzędnych jest $\mathrm{K}_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

Stwierdzenie. Reprezentant generatora grupy zależy od wyboru układu współrzędnych i ma różną postać w różnych układach współrzędnych, np. reprezentantem generatora J_z w kartezjańskim układzie współrzędnych jest $\mathrm{K}_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = (\mathbf{r}\times\mathbf{p})_z$, gdzie $\mathbf{p} = -i\nabla$, podczas gdy w biegunowym układzie współrzędnych jest $\mathrm{K}_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

Stwierdzenie. Znając generatory grupy J_j można odtworzyć wszystkie elementy grupy $g(\mathbf{s})$.

Stwierdzenie. Znając generator J_z oraz traktując obrót o dowolny kąt α jako złożenie N obrotów o kąt $\alpha/N \ll 1$, postać operatora $R_z(\alpha)$ wyznacza się następująco:

$$R_z(\alpha) = \lim_{N\to\infty}\left[R_z\left(\frac{\alpha}{N}\right)\right]^N = \lim_{N\to\infty}\left(1 - i\frac{\alpha}{N}\mathrm{J}_z\right)^N = \exp\left(-i\,\mathrm{J}_z\alpha\right)$$

Stwierdzenie. Operator obrotu w R^3 ma postać:

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) = \exp(-i\,\mathrm{J}_z\alpha)\exp(-i\,\mathrm{J}_y\beta)\,\exp(-i\,\mathrm{J}_z\gamma)$$

Stwierdzenie. Działanie operatora $g(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \mathrm{R}^n$, w grupach Liego można traktować jako złożenie nieskończonego ciągu infinitezymalnie małych zmian. Wówczas wykorzystując postać operatora $g(\mathbf{s})$ wyznaczoną dla $\mathbf{s} \to 0$: $g(\mathbf{s}) = 1 - i\sum_{j=1}^{n} s_j \mathrm{J}_j$ dla dowolnych rzeczywistych wartości s_j, otrzymuje się:

$$g(\mathbf{s}) = \lim_{N\to\infty}\left[\left(1 - i\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} s_j \mathrm{J}_\mathrm{j}\right)\right]^N = \exp\left(-i\sum_{j=1}^{n} s_j \mathrm{J}_\mathrm{j}\right)$$

Stwierdzenie. Aby uzyskać jawną postać operatora grupy Liego $g(\mathbf{s})$, należy generatory grupy J_j zastąpić reprezentantami generatorów grupy K_j w wybranym układzie współrzędnych.

Stwierdzenie. Generatory grupy Liego $\mathrm{J}_1,..., \mathrm{J}_n$ na ogół nie komutują ze sobą, $[\mathrm{J}_j, \mathrm{J}_k] \neq 0$ dla $j \neq k$, dlatego zgodnie z relacją Hausdorffa–Bakera $\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}} \neq \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{B}}$, gdy $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] \neq 0$, gdzie A i B to np. generatory grupy lub ich kombinacje liniowe.

Komutatory

Definicja – Komutator

Komutatorem elementów grupy $a,b \in G$ jest wyrażenie postaci: $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Stwierdzenie. Operatory postaci $g_l = \exp\left(-is_l\mathrm{J}_l\right)$ to elementy grupy G, $g_l \in G$, gdyż $g_l \equiv g(\mathbf{s})$ dla $\mathbf{s} = [0,...,0, s_l, 0,...,0]$.

Elementem odwrotnym do $g_l = \exp\left(-is_l\mathrm{J}_l\right)$ jest $g_l^{-1} = \exp\left(is_l\mathrm{J}_l\right)$, gdyż

$g_l g_l^{-1} = \exp(-is_l \mathrm{J}_l)\exp(is_l \mathrm{J}_l) = 1$, jako że $[\mathrm{J}_l, \mathrm{J}_l] = 0$ (relacja Hausdorffa–Bakera).

Stwierdzenie. Komutator elementów g_j, g_k jest postaci:

$$[g_j, g_k] = \exp(-is_{jl}\mathrm{J}_j)\exp(-is_k\mathrm{J}_k)\exp(is_j\mathrm{J}_j)\exp(is_k\mathrm{J}_k) = C_{jk}(s_j, s_k)$$

Ponieważ $[\mathrm{J}_j, \mathrm{J}_k] \neq 0$, rozwijając operatory g_j, g_k w szereg dla małych s_j, s_k, otrzymuje się wyrażenie $C_{jk}(s_j,s_k) = (1 - s_j\mathrm{J}_j)(1 - s_k\mathrm{J}_k)(1 + s_j\mathrm{J}_j)(1 + s_k\mathrm{J}_k) = 1 + s_j s_k[\mathrm{J}_j, \mathrm{J}_k]$.

Stwierdzenie. Komutator dwóch elementów grupy jest elementem grupy, więc dla małych s_j, s_k można go przedstawić w postaci: $C_{jk}(s_j,s_k) = 1 - i\sum_{l=1}^{n} t_l \mathrm{J}_l$. Z porównania otrzymanych wyrażeń $C_{jk}(s_j,s_k) = 1 + s_j s_k[\mathrm{J}_j,\mathrm{J}_k] = 1 - i\sum_{l=1}^{n} t_l\mathrm{J}_l$ wynika następująca relacja $[\mathrm{J}_j,\mathrm{J}_k] = i\sum_{l=1}^{n} C_{jk}^{l}\mathrm{J}_l$, gdzie $C_{jk}^{l} = \lim\limits_{s_j,s_k,t_l\to 0} \dfrac{t_l}{s_j s_k}$.

Definicja – Stałe struktury grupy Liego

Współczynniki C_{jk}^{l} to tzw. stałe struktury grupy $\boldsymbol{G}$ i spełniają one

– warunek antysymetrii $C_{jk}^{l} = -C_{kj}^{l}$, gdyż $[\mathrm{J}_j, \mathrm{J}_k] = -[\mathrm{J}_k, \mathrm{J}_j]$ oraz

– relację $\sum_l C_{li}^{m}C_{jk}^{l} + \sum_l C_{kl}^{m}C_{ij}^{l} + \sum_l C_{jl}^{m}C_{ki}^{l} = 0$ wynikającą z tożsamości Jacobiego $[\mathrm{J}_j,[\mathrm{J}_k,\mathrm{J}_l]] + [\mathrm{J}_k,[\mathrm{J}_l,\mathrm{J}_j]] + [\mathrm{J}_l,[\mathrm{J}_j,\mathrm{J}_k]] = 0$.

Przykład.

Dla grupy obrotów generatorami są L_x, L_y, L_z – składowe operatora momentu pędu, wówczas $[\mathrm{L}_j, \mathrm{L}_k] = i\varepsilon_{jkl}\mathrm{L}_l$ oraz $C_{jk}^{l} = \varepsilon_{jkl}$ jest tensorem Levi–Civity.

Stwierdzenie. Zbiór generatorów $\mathrm{J}_1,..., \mathrm{J}_n$ stanowi bazę w przestrzeni liniowej (wektorowej) wszystkich kombinacji liniowych postaci $\sum_{j=1}^{n} s_j\mathrm{J}_j$, które odwzorowują się na elementy $g(\mathbf{s}) = \exp\left(-i\sum_{j=1}^{n} s_j\mathrm{J}_\mathrm{j}\right)$ grupy Liego.

Definicja – Algebra Liego

Przestrzeń liniowa z bazą generatorów $\mathrm{J}_1,..., \mathrm{J}_n$ oraz komutatorem [,] jako iloczynem tworzy tzw. algebrę Liego. Komutator nie jest iloczynem w zwykłym sensie, gdyż nie spełnia relacji łączności.

Definicja – Obroty operatorów

Niech $\hat{O}$ określa dowolny operator oraz $R_{\mathbf{k}}(\alpha)$ jest operatorem obrotu wokół osi **k** o kąt α. Niech ponadto wektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ spełniają relacje $\hat{O}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$, $R_{\mathbf{k}}(\alpha)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{V}$, $R_{\mathbf{k}}(\alpha)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' \in \boldsymbol{V}$, wówczas

$$R_{\mathbf{k}}(\alpha)[\hat{O}\,\boldsymbol{x}] = R_{\mathbf{k}}(\alpha)\,[\hat{O}R_{\mathbf{k}}^{*}(\alpha)R_{\mathbf{k}}(\alpha)\boldsymbol{x}] = [R_{\mathbf{k}}(\alpha)\hat{O}R_{\mathbf{k}}^{*}(\alpha)]R_{\mathbf{k}}(\alpha)\boldsymbol{x} = [R_{\mathbf{k}}(\alpha)\hat{O}R_{\mathbf{k}}^{*}(\alpha)]\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}'$$

stąd obrót operatora $\hat{O}$ określa wyrażenie

$$R_{\mathbf{k}}(\alpha)(\hat{O}) = R_{\mathbf{k}}(\alpha)\hat{O}R_{\mathbf{k}}^{*}(\alpha), \text{ gdzie } R_{\mathbf{k}}(\alpha) = \exp(-\,i\alpha\mathrm{L}_{\mathbf{k}}) \text{ oraz } R_{\mathbf{k}}^{*}(\alpha) = R_{\mathbf{k}}^{-1}(\alpha)$$

Stwierdzenie. Dla małych kątów α obrót operatora $\hat{O}$ określa wyrażenie

$$R_{\mathbf{k}}(\alpha)(\hat{O}) = \exp(-i\alpha\mathrm{L}_{\mathbf{k}})\hat{O}\exp(i\alpha\mathrm{L}_{\mathbf{k}}) = \hat{O} - i\alpha[\mathrm{L}_{\mathbf{k}}, \hat{O}]$$

PRZYKŁAD.

Obroty operatora L_j, $j = x, y, z$, wokół osi z dla małych kątów α, gdzie $[\mathrm{L}_j, \mathrm{L}_k] = i\varepsilon_{jkl}\mathrm{L}_l$, wyrażają się następująco:

$$R_z(\alpha)(L_x) = \mathrm{L}_x + \alpha\mathrm{L}_y, \quad R_z(\alpha)(\mathrm{L}_y) = \mathrm{L}_y - \alpha\mathrm{L}_x, \quad R_z(\alpha)(\mathrm{L}_z) = \mathrm{L}_z$$

10. Całkowanie na grupie Liego

Całkowanie niezmiennicze, miara Haara, całka Hurwitza, objętość grupy, grupy zwarte, przykłady

Definicja – Całkowanie na grupie Liego

Jeżeli funkcja $f(\mathbf{s})$, gdzie $\boldsymbol{s} \in \mathrm{R}^n$, jest całkowalna w R^n, to można mówić, że funkcja jest całkowalna na grupie G, gdyż wówczas $f(\mathbf{s}) = f(\mathbf{s}(g))$ i całkowanie odbywa się po elementach $g \in G$.

Stwierdzenie. Całkowanie po całej grupie wymaga użycia atlasu.

PRZYKŁAD

Całkowanie na grupie obrotów $R_z(\alpha)$, gdzie $0 < \alpha < 2\pi$ oraz $f(\alpha) \equiv 1$

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha = 2\pi$$

Stwierdzenie. Wartości całki zależą od wyboru parametrów grupy.

PRZYKŁAD

Całkowanie na grupie obrotów $R_z(\beta)$, $f(\beta) = f(\alpha) \equiv 1$. Wybór parametru β może być dokonany w sposób dowolny i w odniesieniu do parametru α, $0 < \alpha < 2\pi$, prowadzi do różnych wartości całki:

$\beta = \alpha$ $\qquad \beta = \alpha/2$ $\qquad \beta = \alpha^2$ $\qquad \beta = \ln\alpha$

$$\int_0^{2\pi} 1\, d\beta = 2\pi, \quad \int_0^{\pi} 1\, d\beta = \pi, \quad \int_0^{4\pi^2} 1\, d\beta = 4\pi^2, \quad \int_{-\infty}^{\ln 2\pi} 1\, d\beta = \infty$$

Definicja – Całkowanie niezmiennicze

Całkowanie na grupie nazywamy lewostronnie niezmienniczym, jeżeli dla każdej funkcji całkowalnej f i dla każdego elementu $g_1 \in G$ zachodzi związek

$$\int f(g_1 g)\mu(dg) = \int f(g)\mu(dg)$$

gdzie $\mu(dg)$ oznacza miarę elementu objętości odpowiadającego elementowi dg w euklidesowym obrazie grupy G, a całkowanie rozciąga się na całą grupę.

Stwierdzenie. Całkowanie na grupie jest niezmiennicze, gdy grupa jest jednorodna względem miary.

PRZYKŁAD

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\alpha+\beta)d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos^2(\alpha)d\alpha \quad \text{oraz} \quad d(\alpha+\beta) = \mathrm{d}\alpha.$$

Stwierdzenie. Gdy miara elementu objętości jest niezmiennicza względem „przesunięć" $\mu(dg) = \mu(g_1 dg)$ spowodowanych przez lewostronne działania elementów grupy $g_1 \in G$, wówczas powyższy związek jest spełniony tożsamościowo:

$$\int f(g_1 g)\mu(dg) = \int f(g_1 g)\mu(g_1 dg) = \int f(g_1 g)\mu(dg_1 g) = \int f(g')\mu(dg')$$

gdzie $g' = g_1 g$.

PRZYKŁAD

Grupa obrotów $R_z(\alpha)$. Elementy $g = R_z(\alpha)$, $g_1 = R_z(\alpha_1)$, $g_1 g = R_z(\alpha_1)R_z(\alpha) = R_z(\alpha_1 + \alpha)$ $= R_z'(\alpha)$, gdzie $\alpha' = \alpha + \alpha_1$ wówczas, gdy:

$$\mu(dg) = d\alpha \quad \Rightarrow \quad d\alpha' = d(\alpha + \alpha_1) = d\alpha,$$

$$\mu(dg) = d\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad d(\alpha')^2 = d(\alpha + \alpha_1)^2 \neq d\alpha,$$

$$\mu(dg) = d\ln\alpha \quad \Rightarrow \quad d\ln\alpha' = d\ln(\alpha + \alpha_1) \neq d\ln\alpha.$$

Stwierdzenie. Całkowania na grupie mogą być niezmiennicze lub nie. Zależy to od wyboru miary.

Stwierdzenie. Jeżeli $\mu(dg)$ jest miarą niezmienniczą na grupie, to miara $\mu'(dg) = c\mu(dg)$, gdzie c jest stałą, jest też niezmiennicza i zmienia ona jedynie całkę po grupie o stały czynnik.

Stwierdzenie. Całkę niezmienniczą można zmieniać o dowolny czynnik przez przeskalowanie parametrów lub miary.

Definicja – Miara Haara, całka Hurwitza

Całkowanie niezmiennicze na grupie to całkowanie według miary Haara, a wyznaczana całka nazywa się całką Hurwitza lub całką grupową.

Stwierdzenie. Miara lewostronnie niezmiennicza może być różna od miary prawostronnie niezmienniczej.

Zwartość

Definicja – Objętość grupy

Całkę niezmienniczą po całej grupie z funkcją $f \equiv 1$ nazywamy objętością grupy.

Definicja – Grupy zwarte

Grupy o skończonej objętości nazywamy grupami zwartymi.

Przykład

Grupa translacji wzdłuż osi z: $T_z(a)\, f(z) = f(z - a)$, $-\infty < a < \infty$

Grupa obrotów względem osi z: $R_z(\alpha)\, f(\varphi) = f(\varphi - \alpha)$, $0 < \alpha < 2\pi$

Stwierdzenie. Grupy $\{T_z(\alpha)\}$ i $\{R_z(\alpha)\}$ są lokalnie identyczne, ale różne globalnie, gdyż grupa obrotów $R_z(\alpha)$ jest zwarta, a grupa translacji $T_z(\alpha)$ ma nieskończoną objętość.

TWIERDZENIE. Dla grup zwartych miara lewostronnie (prawostronnie) niezmiennicza jest zawsze prawostronnie (lewostronnie) niezmiennicza (bez dowodu)

Stwierdzenie. Miarą niezmienniczą na grupie obrotów właściwych w R^3, $SO(3)$, jest $\mu(dg) = d\alpha\, d\cos\beta\, d\gamma$, gdzie $0 = \alpha,\ \gamma < 2\pi$, $0 < \alpha < \pi$.

Stwierdzenie. Objętość grupy $SO(3)$ wynosi: $V = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\cos\beta \int_0^{2\pi} d\gamma = 8\pi^2$. Grupa $SO(3)$ jest zwarta, gdyż $V = 8\pi^2 < \infty$. Miara $\mu(dg) = d\alpha\, d\cos\beta\, d\gamma$ jest dwustronnie niezmiennicza.

11. Grupy operatorowe

Grupy transformacji przestrzeni i grupy operatorowe. Transformacja operatora względem operatorów grupy, operator niezmienniczy, kryterium niezmienniczości, operator Cassimira, zagadnienia własne dla operatora, homomorfizm operatorów grupy w zbiór macierzy

Definicja – Grupa transformacji przestrzeni

Niech elementy U_i grupy G działają w przestrzeni wektorowej $V \subset \mathrm{R}^n$ tak, że gdy $\boldsymbol{x} \in V$, wówczas $U_i\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \in V$. Elementy U_i grupy $G = \{U_i, \boldsymbol{x} \in V \Rightarrow U_i\boldsymbol{x} \in V\}$ transformują przestrzeń wektorową V w siebie.

Stwierdzenie. Operatory translacji $T_{\boldsymbol{a}}$ zdefiniowane następująco: $T_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$, gdzie $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a} \in \mathrm{R}^n$, z operacją składania translacji tworzą grupę $\{T_{\boldsymbol{a}}\}$, gdyż $T_{\boldsymbol{a}}(T_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{r}) = T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = T_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}\boldsymbol{r}$, a zatem złożenie translacji jest translacją, $T_{\boldsymbol{a}}T_{\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$, elementem neutralnym jest translacja zerowa $T_{\boldsymbol{0}}$, a element odwrotny $T_{\boldsymbol{a}}^{-1} = T_{-\boldsymbol{a}}$.

Definicja – Przestrzeń funkcyjna

Niech funkcje $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$, $h(\boldsymbol{x})$, ..., gdzie $\boldsymbol{x} \in V$ przypisują każdemu elementowi $\boldsymbol{x} \in V$ pewną liczbę rzeczywistą lub zespoloną, wówczas funkcje f, g, h, ... tworzą przestrzeń funkcyjną H.

Przykład

$f(\boldsymbol{r}) = x^4 + 5y^2 + 7z^5$ i $f(\boldsymbol{r}) \in R$ lub $g(\boldsymbol{r}) = 2x^3 + i(x^2 + y + 4z^3)$ i $g(\boldsymbol{r}) \in C$, gdzie $\boldsymbol{r} \in \mathrm{R}^3$.

Definicja – Grupa operatorowa

Zbiór operatorów $\{\mathcal{U}_i\}$ zdefiniowanych następująco:

$$\mathcal{U}_i f(\boldsymbol{x}) = f(U_i^{-1}\boldsymbol{x})$$

tworzy grupę transformacji funkcji zwaną grupą operatorową $\mathcal{G}$.

Stwierdzenie. Zbiór operatorów $\{\mathcal{U}_i\}$ jest grupą, gdyż zachowuje własności grupy transformacji G, ponieważ

$$\mathcal{U}_i\mathcal{U}_j f(\boldsymbol{x}) = \mathcal{U}_i(\mathcal{U}_j f(\boldsymbol{x})) = \mathcal{U}_i f(U_j^{-1}\boldsymbol{x}) = \mathcal{U}_i f'(\boldsymbol{x}) = f'(U_i^{-1}\boldsymbol{x})$$

$$= f(U_j^{-1}U_i^{-1}\boldsymbol{x}) = f((U_iU_j)^{-1}\boldsymbol{x}),$$

czyli

$$(\mathcal{U}_i\mathcal{U}_j)f(\boldsymbol{x}) = f((U_iU_j)^{-1}\boldsymbol{x})$$

Istnieje zatem jednoznaczne przyporządkowanie $U_i \to \mathcal{U}_i$ oraz $U_j \to \mathcal{U}_j$ oraz zachowana jest relacja grupowa $(U_iU_j) \to (\mathcal{U}_i\mathcal{U}_j)$.

Stwierdzenie. Grupa operatorów $\mathcal{G} = \{\mathcal{U}_i\}$ jest izomorficzna z grupą $G = \{U_i\}$.

Przykład

Translacja: $T_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ oraz $\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(T_{\boldsymbol{a}}^{-1}\boldsymbol{x}) = f(T_{-\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a})$. Odwzorowanie $\{T_{\boldsymbol{a}}\} \to \{\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}\}$ jest zatem izomorficzne. Niech funkcja $f(\boldsymbol{x})$ jest analityczna, wówczas

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\boldsymbol{a}\nabla)^n f(\boldsymbol{x}) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\boldsymbol{a}\nabla)^n\right] f(\boldsymbol{x}) = e^{\boldsymbol{a}\nabla} f(\boldsymbol{x})$$

czyli

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = e^{\boldsymbol{a}\nabla} f(\boldsymbol{x})$$

a stąd $\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}} = e^{\boldsymbol{a}\nabla}$. W mechanice kwantowej wprowadza się operator $\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla$, wtedy

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}} = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{ap}}.$$

Przykład

Obrót wokół osi kartezjańskiego układu współrzędnych:

$$R_z(\alpha) = e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\varphi}} = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha \mathrm{L}_z}, \qquad R_y(\beta) = e^{\frac{i}{\hbar}\beta \mathrm{L}_y}, \qquad R_x(\beta) = e^{\frac{i}{\hbar}\beta \mathrm{L}_x},$$

gdzie L_z, L_y, L_x są kwantowo-mechanicznymi operatorami momentu pędu.

Stwierdzenie. Grupy $\{\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}\}$ i $\{R_i(\alpha)\}$ to grupy operatorów transformacji przestrzeni funkcyjnej H.

Stwierdzenie. Jeżeli parametry elementów grupy np. $\mathcal{G} = \{\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}\}$ zmieniają się w sposób ciągły, to są to grupy ciągłe, w szczególności grupy Liego.

Stwierdzenie. Niech działanie operatora $A_{\boldsymbol{x}}$ działającego w przestrzeni funkcyjnej $\mathrm{H} = \{f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x}), ...\}$ jest określone w punkcie $\boldsymbol{x}$, tzn. $A_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ i działanie operatora $A_{\boldsymbol{x}}$ na $f(\boldsymbol{x})$ zależy od punktu $\boldsymbol{x}$. Niech $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ oraz $\mathcal{U}\mathcal{U}^{-1} = I$, gdzie I jest elementem neutralnym grupy $\mathcal{G}$, oraz $\mathcal{U}f(\boldsymbol{x}) = f(U^{-1}\boldsymbol{x})$, gdzie $U^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \in V$. Ponieważ działanie operatora $\mathcal{U}$ na $A_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x})$ wyraża się następująco: $\mathcal{U}(A_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x})) = \mathcal{U}g(\boldsymbol{x}) = g(U^{-1}\boldsymbol{x})$, a jednocześnie $A_{U^{-1}\boldsymbol{x}}f(U^{-1}\boldsymbol{x}) = g(U^{-1}\boldsymbol{x})$, więc wykorzystując związek $\mathcal{U}\mathcal{U}^{-1} = I$ oraz wykonując przekształcenia: $\mathcal{U}(A_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x})) = \mathcal{U}A_{\boldsymbol{x}}(\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U})f(\boldsymbol{x}) = \mathcal{U}A_{\boldsymbol{x}}\mathcal{U}^{-1}f(U^{-1}\boldsymbol{x}) = g(U^{-1}\boldsymbol{x})$ otrzymuje się następującą relację $A_{U^{-1}\boldsymbol{x}} = \mathcal{U}A_{\boldsymbol{x}}\mathcal{U}^{-1}$.

Definicja – Transformacja operatora

Dla dowolnych funkcji $f(\boldsymbol{x}) \in$ H transformacja operatora $A_{\boldsymbol{x}}$ względem operatorów $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ wyraża się wzorem: $A_{u^{-1}\mathbf{x}} = \mathcal{U}A_{\boldsymbol{x}}\mathcal{U}^{-1}$.

Stwierdzenie. Gdy operatory $\mathcal{U}$ są unitarne, wówczaso $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^{*}$ i $A_{U^{-1}\boldsymbol{x}} = \mathcal{U}A_{\boldsymbol{x}}\mathcal{U}^{*}$.

Definicja – Niezmienniczość operatora

Jeżeli dla każdego $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ zachodzi $\mathcal{U}A_{\boldsymbol{x}}\mathcal{U}^{-1} = A_{\boldsymbol{x}}$, to operator $A_{\boldsymbol{x}}$ jest niezmienniczy ze względu na grupę $\mathcal{G}$.

Definicja – Niezmienniczość funkcji

Jeżeli dla każdego $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ $\mathcal{U}f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, to funkcja $f(\boldsymbol{x})$ jest niezmiennicza ze względu na grupę $\mathcal{G}$.

Przykład

Gdy $f(\boldsymbol{r}) \equiv f(r)$, wówczas $R_{\boldsymbol{k}}(\alpha)f(r) = f(r)$ i $f(r)$ jest niezmiennicza ze względu na grupę obrotów $\{R_{\boldsymbol{k}}(\alpha)\}$.

Stwierdzenie. Z każdą jednoparametrową grupą niezmienniczości jest związana zasada zachowania określonej wielkości fizycznej, np. grupa translacji $\{\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}\}$ i zasada zachowania pędu, grupa obrotów $\{R_{\boldsymbol{k}}(\alpha)\}$ i zasada zachowania momentu pędu.

Stwierdzenie. Każda grupa niezmienniczości dla danego równania stanu układu fizycznego prowadzi do powstania prawa zachowania wielkości fizycznej dla tego równania.

Stwierdzenie. Jeżeli operator jest niezmienniczy ze względu na grupę $\mathcal{G}$, to dla każdego $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ $\mathcal{U}A_{\boldsymbol{x}} = A_{\boldsymbol{x}}\mathcal{U}$ lub $[\mathcal{U}, A_{\boldsymbol{x}}] = 0$, czyli operator $A_{\boldsymbol{x}}$ komutuje ze wszystkimi operatorami grupy $\mathcal{G}$, co stanowi tzw. kryterium niezmienniczości.

Stwierdzenie. Gdy $[\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j] = 0$ dla wszystkich elementów grupy $\mathcal{G}$, wówczas grupa jest abelowa i każdy operator $\mathcal{U}_{\boldsymbol{i}}$ jest niezmienniczy ze względu na grupę $\mathcal{G}$.

Stwierdzenie. Ponieważ $[\mathcal{U}, \mathcal{U}] = 0$, więc $[f(\mathcal{U}), g(\mathcal{U})] = 0$, gdzie f, g dowolne funkcje analityczne.

Przykład

Operator Laplace'a $\Delta = \nabla^2$ jest niezmienniczy ze względu na grupę translacji $\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}} = e^{\boldsymbol{a}\nabla}$, gdyż $[\Delta, e^{\boldsymbol{a}\nabla}] = 0$.

Definicja – Operator Cassimira

Niech operatory $J_1, ..., J_n$ tworzące grupę spełniają relację $[J_j, J_k] = C^l_{jk} J_l$, gdzie C^l_{jk} jest stałą struktury i niech $g^{lm} = C^j_{lk} C^k_{mj}$, wówczas operator $\mathbf{J} = g^{lm} J_l J_m$ zwany operatorem Cassimira jest operatorem niezmienniczym grupy i komutuje ze wszystkimi operatorami grupy, tzn. $[\mathbf{J}, J_j] = 0$.

PRZYKŁAD

Operatory momentu pędu spełniają relację $[L_j, L_k] = i\varepsilon_{jkl} L_l$, więc $g^{lm} = \varepsilon_{ljk}\varepsilon_{mkj} = -2\delta_{lm}$, a stąd operator $\mathbf{J} = -2\delta_{lm} L_l L_m = -2[L_x^2 + L_y^2 + L_z^2] = -2\mathbf{L}^2$, gdzie $\mathbf{L}^2$ – kwadrat całkowitego momentu pędu odpowiada części kątowej operatora Laplace'a, zatem $\mathbf{L}^2$ jest operatorem Cassimira oraz $[\mathbf{L}^2, L_j] = 0$.

Stwierdzenie. Nie wszystkie operatory są niezmiennicze na grupie.

PRZYKŁAD

Niech operator $X_{\boldsymbol{x}}$ działa w natępujący sposób: $X_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} f(\boldsymbol{x})$. Transformacja operatora $X_{\boldsymbol{x}}$ względem operatorów grupy translacji $\{\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}\}$ ma postać:

$$(\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}} X_{\boldsymbol{x}} \mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}^{-1}) f(\boldsymbol{x}) = \mathcal{T}_{\boldsymbol{a}} X_{\boldsymbol{x}} f(\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x}) = \mathcal{T}_{\boldsymbol{a}} X_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \mathcal{T}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$$

$$= (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}) f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{x} f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a} f(\boldsymbol{x}) = (X_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{a}) f(\boldsymbol{x}),$$

a zatem $\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}} X_{\boldsymbol{x}} \mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}^{-1} = X_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{a} \neq X_{\boldsymbol{x}}$.

Definicja – Zagadnienie własne operatorów

Jeżeli $A_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$, to $f(\boldsymbol{x})$ jest funkcją własną operatora $A_{\boldsymbol{x}}$, a λ – odpowiadającą jej wartością własną.

Definicja – Operator hermitowski

Jeżeli $A_{\boldsymbol{x}} = A_{\boldsymbol{x}}^+$, to operator $A_{\boldsymbol{x}}$ jest operatorem samosprzężonym zwanym także hermitowskim.

Stwierdzenie. Jeżeli $f(\boldsymbol{x})$ jest funkcją własną operatora $A_{\boldsymbol{x}}$ oraz $\mathcal{U} A_{\boldsymbol{x}} = A_{\boldsymbol{x}} \mathcal{U}$, to $\mathcal{U} f(\boldsymbol{x})$ jest także funkcją własną operatora $A_{\boldsymbol{x}}$ o tej samej wartości własnej λ.

Dowód

$$A_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$$

oraz

$$A_{\boldsymbol{x}}[\mathcal{U} f(\boldsymbol{x})] = A_{\boldsymbol{x}} \mathcal{U} f(\boldsymbol{x}) = \mathcal{U} A_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = \mathcal{U} \lambda f(\boldsymbol{x}) = \lambda[\mathcal{U} f(\boldsymbol{x})],$$

czyli

$$A_{\boldsymbol{x}}[\mathcal{U} f(\boldsymbol{x})] = \lambda[\mathcal{U} f(\boldsymbol{x})]$$

Stwierdzenie. Jeżeli λ jest własnością niezdegenerowaną, tzn. odpowiada tylko do jednej funkcji własnej $f(\boldsymbol{x})$, to funkcje $\mathcal{U}f(\boldsymbol{x})$ różnią się jedynie o stałą multiplatywną, tzn. $\mathcal{U}f(\boldsymbol{x}) = D(\mathcal{U})f(\boldsymbol{x})$, gdzie $D(\mathcal{U})$ jest stałą zależną od $\mathcal{U}$ oraz $f(\boldsymbol{x}) \sim D(\mathcal{U})f(\boldsymbol{x})$.

Stwierdzenie. Jeżeli $D(\mathcal{U}) = 1$ dla wszystkich $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$, to $\mathcal{U}f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ i funkcja $f(\boldsymbol{x})$ jest niezmiennicza ze względu na grupę $\mathcal{G}$.

Stwierdzenie. Jeżeli λ jest wartością własną μ-krotnie zdegenerowaną tzn. $A_{\boldsymbol{x}}f_i(\boldsymbol{x}) = \lambda f_i(\boldsymbol{x})$ dla $i = 1,..., \mu$, gdzie $\{f_i(\boldsymbol{x})\}$ jest zbiorem liniowo niezależnych funkcji własnych operatora $A_{\boldsymbol{x}}$ odpowiadających wartości własnej λ, to $\mathcal{U}f_i(\boldsymbol{x})$ jest także funkcją własną operatora $A_{\boldsymbol{x}}$ odpowiadającą tej samej wartości własnej λ, tzn. $A_{\boldsymbol{x}}\mathcal{U}f_i(\boldsymbol{x}) = \lambda\mathcal{U}f_i(\boldsymbol{x})$ oraz $\mathcal{U}f_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{\mu} D_{ji}(\mathcal{U})f_j(\boldsymbol{x})$ jest kombinacją liniową funkcji $f_i(\boldsymbol{x})$. Gdy $\mathcal{U} = I$, to $D_{ij}(I) = \delta_{ij}$. Wyrazy $D_{ij}(\mathcal{U})$ są elementami macierzy kwadratowych $D(\mathcal{U})$ stopnia μ.

Stwierdzenie. Zbiór macierzy $\{D(\mathcal{U})\}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$, z operacją mnożenia macierzowego tworzą grupę będącą homomorficznym odwzorowaniem grupy $\mathcal{G}$ w $\{D(\mathcal{U})\}$.

Dowód

Wystarczy wykazać, że odwzorowanie zachowuje działanie grupowe, niech zatem $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{G}$, wówczas

$$(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2)f_i(x) = \mathcal{U}_1[\mathcal{U}_2 f_i(\boldsymbol{x})] = \mathcal{U}_1\sum_{j=1}^{\mu} D_{ji}(\mathcal{U}_2)f_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{\mu} D_{ji}(\mathcal{U}_2)\mathcal{U}_1 f_j(\boldsymbol{x})$$

$$= \sum_{k=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu} D_{kj}(\mathcal{U}_1)D_{ji}(\mathcal{U}_2)f_k(\boldsymbol{x})$$

oraz

$$(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2)f_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\mu} D_{ki}(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2)f_k(\boldsymbol{x}).$$

Ponieważ funkcje $f_i(\boldsymbol{x})$ są liniowo niezależne, więc z porównania otrzymanych relacji wynika, że $\sum_{j=1}^{\mu} D_{kj}(\mathcal{U}_1)D_{ji}(\mathcal{U}_2) = D_{ki}(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2)$, a zatem mnożenie powstałych macierzy zachowuje działanie grupowe. W ujęciu macierzowym otrzymana relacja ma postać: $D(\mathcal{U}_1)D(\mathcal{U}_2) = D(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2)$, a stąd $D(I) = E$ oraz $D(\mathcal{U}^{-1}) = D(\mathcal{U})^{-1}$.

12. REPREZENTACJE GRUP

Reprezentacja grupy – definicja i przykłady. Reprezentacje regularne, wierne, równoważne, przykłady, iloczyn prosty Kröneckera jako odwzorowanie zachowujące iloczyn grupowy

Definicja – Reprezentacja grupy

Reprezentacja grupy G lub $\mathcal{G}$ to homomorficzne odwzorowanie grupy G lub $\mathcal{G}$ w zbiór skończenie wymiarowych macierzy kwadratowych.

Definicja – Stopień macierzy

Wymiar macierzy kwadratowych ($n \times n$) jest określany jako stopień n macierzy kwadratowych lub czasami jako ich rząd n.

Stwierdzenie. Grupa macierzy $\{D(U)\}$, $U \in G$, będąca homomorfizmem grupy G w $\{D(U)\}$, jest reprezentacją grupy G.

Stwierdzenie. Istnieje ścisły związek pomiędzy symetriami a degeneracją fizycznych zagadnień własnych. Gdy funkcje własne odpowiadają pewnej μ-krotnie zdegenerowanej wartości własnej λ (np. poziom energetyczny), to pod działaniem operatorów grupy symetrii transformują się między sobą tworząc w ten sposób macierze przejścia, czyli jedną z reprezentacji grupy.

Stwierdzenie. Zawsze jest możliwe odwzorowanie wszystkich elementów U grupy G w macierz pierwszego stopnia [1], tzn. $D(U) = [1]$ dla wszystkich $U \in G$, lub w macierz jednostkową stopnia n i wówczas

$$D(U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jednak są to mało użyteczne reprezentacje, chociaż istnieją zawsze.

Stwierdzenie. Gdy znana jest reprezentacja A grupy G, tj. homomorfizm $U \to D(U)$, gdzie $U \in G$, $D(U) \in A$, wówczas wyrażenia $\det D(U)$ także tworzą reprezentację macierzy pierwszego stopnia, gdyż równość $\det [D(U_1)\mathrm{D}(U_2)] = \det D(U_1) \det D(U_2)$ zapewnia zachowanie działania grupowego. Odwzorowanie $D(U) \to \det D(U)$ to homomorfizm.

Stwierdzenie. Jeżeli istnieje homomorfizm $G \to G'$ oraz znana jest reprezentacja A grupy G', to odwzorowanie $G \xrightarrow{\text{hom.}} G' \xrightarrow{\text{hom.}} A$ jest homomorfizmem i A jest reprezentacją grupy G.

Przykład

Niech H jest podgrupą inwariantną grupy G oraz grupa ilorazowa grupy $G' = G/H$ ma reprezentację A. Wówczas reprezentacja A jest także reprezentacją grupy G.

Reprezentacje regularne

Stwierdzenie. Jeżeli każdy element grupy $G = \{U_1, U_2, ..., U_g\}$ zostanie pomnożony przez jakiś wybrany element $U_v \in G$, to ciąg elementów $\{U_vU_1, U_vU_2, ..., U_vU_g\}$ zawiera wszystkie elementy grupy tylko inaczej uporządkowane.

Definicja – Reprezentacja regularna

Reprezentacja regularna to odwzorowanie elementów $U_v \in G$ w zbiór macierze $g \times g$ postaci $D_{kl}(U_v) = \delta_{ik}\delta_{jl}$, gdzie $U_i = U_vU_j$.

Stwierdzenie. W każdym wierszu i w każdej kolumnie macierz $D_{kl}(U_n)$ występują same zera i jedna jedynka. Macierze $D(U_v)$ są nieosobliwe, $\det D(U_v) \neq 0$ oraz $\det D(U_v) = \pm 1$, gdyż mogą być one otrzymane z macierzy jednostkowej przez odpowiednie przestawianie kolumn lub wierszy.

Stwierdzenie. Zbiór macierzy $\{D(U_v)\}$ tworzy grupę, a zatem stanowi reprezentację grupy G.

Dowód

Odwzorowaniem elementu jednostkowego $I \in G$ jest $D_{kl}(I) = \delta_{ik}\delta_{il} = \delta_{kl}$ – macierz jednostkowa, gdyż $U_i = IU_i$. Wszystkie pozostałe macierze $D(U_v)$ maja na diagonali same zera. Ponieważ dla $U_v \neq I$ warunek $U_i = U_v U_j$ może być spełniony jedynie, gdy $i \neq j$, elementy $D_{kl}(U_v) = \delta_{ik}\delta_{il}$ mogą zatem przyjmować niezerowe wartości, gdy $k \neq l$.

Zdefiniowane odwzorowanie zachowuje działanie grupowe:

$$\sum_k D_{ik}(U_v) D_{kj}(U_\tau) = \sum_k \delta_{im}\delta_{kn}\delta_{kr}\delta_{js} = \delta_{im}\delta_{js}\delta_{nr} = \delta_{im}\delta_{js} = D_{ij}(U_r U_\tau),$$

gdzie $D_{ik}(U_v) = \delta_{im}\delta_{kn}$ gdy $U_m = U_v U_n$ oraz $D_{kj}(U_\tau) = \delta_{kr}\delta_{js}$ gdy $U_r = U_\tau U_s$. Ponieważ δ_{nr} implikuje warunek $n = r$, więc $U_n = U_\tau U_s$, a stąd powstały związek $U_m = U_v(U_\tau U_s) = (U_v U_\tau)U_s$ pozwala następująco zdefiniować elementy $D_{ij}(U_v U_\tau)$ $= \delta_{im}\delta_{js}$, zatem $D(U_v)D(U_\tau) = D(U_v U_\tau)$ (por. s. 59)

Przykład

Grupa cykliczna 4-elementowa $G = \{a_1 = e, a_2 = a, a_3 = a^2, a_4 = a^3\}$ oraz $a^4 = e$. Warunek $a_i = a_v \cdot a_j$ prowadzi do następujących relacji:

I. $v = 1$, zatem $a_v = e \Rightarrow a_1 = ea_1, a_2 = ea_2, a_3 = ea_3, a_4 = ea_4$ oraz

$$D(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II. $v = 2$, zatem $a_v = a \Rightarrow a_2 = aa_1, a_3 = aa_2, a_4 = aa_3, a_1 = aa_4$ oraz

$$D(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

III. $v = 3$, zatem $a_v = a^2 \Rightarrow a_3 = a^2 a_1, a_4 = a^2 a_2, a_1 = a^2 a_3, a_2 = a^2 a_4$ oraz

$$D(a^2)=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

IV. $v = 4$, zatem $a_v = a^3 \;\Rightarrow\; a_4 = a^3a_1$, $a_1 = a^3a_2$, $a_2 = a^3a_3$, $a_3 = a^3a_4$ oraz

$$D(a^3)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

Stwierdzenie. Istnieją reprezentacje różne od reprezentacji jednowymiarowych.

Definicja – Reprezentacje wierne

Reprezentacje nazywamy wiernymi, jeżeli odwzorowanie grupy w reprezentację: $G \rightarrow \{D(U_v)\}$, gdzie $U_v \in G$, jest izomorfizmem.

Stwierdzenie. Dla reprezentacji regularnych, dla których rząd grupy G jest równy g, odwzorowanie grupy w zbiór macierzy $(g\times g)$ jest izomorfizmem.

Stwierdzenie. Reprezentacja regularna jest reprezentacją wierną.

Stwierdzenie. Jeżeli $D(U_v)$ jest reprezentacją grupy G ($U_v \in G$) oraz S jest dowolną nieosobliwą macierzą kwadratową tego samego stopnia co macierze $D(U_v)$, to macierze $D'(U_v) = S^{-1}D(U_v)S$ także tworzą reprezentację grupy G.

Dowód

Wystarczy wykazać, że macierze $D'(U_v)$ zachowują działanie grupowe. Ponieważ macierze $D(U_v)$ tworzą grupę, więc $D(U_v)D(U_\tau) = D(U_vU_\tau)$, a to pozwala wykazać, że $D'(U_v)D'(U_\tau) = S^{-1}D(U_v)SS^{-1}D(U_\tau)S = S^{-1}D(U_v)D(U_\tau)S = S^{-1}D(U_vU_\tau)S = D'(U_vU_\tau)$.

Definicja – Reprezentacje równoważne

Reprezentacje $\{D(U)\}$ i $\{D'(U)\}$, których elementy są związane relacją $D'(U_v) = S^{-1}D(U_v)S$, przy czym $\det S \neq 0$, nazywają się reprezentacjami równoważnymi.

Definicja – Iloczyn prosty Kröneckera

Iloczyn prosty Kröneckera dwóch macierzy A, B to operator $A \otimes B$ działający w przestrzeni L macierzy C, którego działanie wyraża się następująco $(A \otimes B)C = ACB^T \in$ L, przy czym jeżeli A jest macierzą $(n \times n)$, B – macierzą $(m \times m)$, to C – $(n \times m)$.

Stwierdzenie. Iloczyn prosty Kröneckera ma następujące własności:

– niech E jest macierzą jednostkową $(n \times n)$ lub $(m \times m)$, wówczas operator $E \otimes E = E$ jest operatorem jednostkowym, gdyż $E \otimes EC = ECE = C$ oraz $C = EC = CE$,

– addytywność lewo- i prawostronna, tj.

$$(A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B \quad \text{oraz} \quad A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2$$

– założenie dwóch operatorów iloczynu prostego jest operatorem iloczynu prostego, gdyż

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)C = (A_1 \otimes B_2)A_2CB_2^T = A_1(A_2CB_2^T)B_1^T = (A_1A_2)C(B_1B_2)^T$$
$$= (A_1A_2) \otimes (B_1B_2)C$$

zatem $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1A_2) \otimes (B_1B_2)$,

– element odwrotny ma postać $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$, gdyż

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = E \otimes E = E$$

Stwierdzenie. Iloczyn prosty $A \otimes B$ jest reprezentowany przez macierz czterowskaźnikową postaci $(A \otimes B)_{ij,kl} \equiv A_{ik}B_{jl}$, gdyż

$$[(A \otimes B)C]_{ij} = \sum_{kl} A_{ik}C_{kl}B_{lj}^T = \sum_{kl} A_{ik}B_{jl}C_{kl} = \sum_{kl} (A \otimes B)_{ij,kl}C_{kl}$$

Stwierdzenie. Iloczyn prosty macierzy to zestawienie dwóch niezależnych macierzy, tj. $A \otimes B = A\ B$, przy czym macierze A i B nie łączy żadna operacja, przez co tworzą wyrażenie czterowskaźnikowe.

Stwierdzenie. Ślad iloczynu prostego $Tr(A \otimes B)$ to ślad po indeksach podwójnych, czyli

$$Tr(A \otimes B) = \sum_{ij} (A \otimes B)_{ij,ij} = \sum_i \sum_j A_{ii}B_{jj} = Tr\ A \cdot Tr\ B,$$

a zatem $Tr(A \otimes B) = Tr\ A \cdot Tr\ B$.

Stwierdzenie. Jeżeli $D(U)$ i $D'(U)$ są dwiema reprezentacjami grupy G, to ich iloczyn prosty $D(U) \otimes D'(U)$ jest także reprezentacją tej grupy.

Dowód

Iloczyn prosty zachowuje działanie grupowe

$$\left(D(U_i)\otimes D'(U_i)\right)\left(D(U_j)\otimes D'(U_j)\right)=\left(D(U_i)D(U_j)\right)\otimes\left(D'(U_i)D'(U_j)\right)$$
$$= D(U_iU_j)\otimes D'(U_iU_j)$$

Stwierdzenie. Jeżeli przynajmniej jedna z reprezentacji $D(U)$ i $D'(U)$ jest wierna, to nowa reprezentacja określona przez iloczyn prosty $D(U)\otimes D'(U)$ jest też wierna.

13. Wyznaczanie reprezentacji grup

Metody wyznaczania reprezentacji grup, przykłady dla grup obrotów, reprezentacje nieprzywiedlne, reprezentacja jako suma prosta reprezentacji nieprzywiedlnych, charaktery i ich własności

Stwierdzenie. W celu znalezienia reprezentacji grupy zazwyczaj wykorzystywane są następujące sposoby:

Sposób 1

Należy znaleźć zbiór liniowo niezależnych funkcji $\{f_i(\boldsymbol{x})\}$, które pod działaniem wszystkich elementów grupy $U \in G$ transformują się między sobą, tzn.

$$Uf_i(\boldsymbol{x}) = \sum_j D_{ji}(U) f_j(\boldsymbol{x})$$

Zbiór macierzy $\{D(U)\}$ tworzy wówczas reprezentacje grupy G. Sposób ten jest bardzo użyteczny w odniesieniu do grup nieskończonych, np. grupy Liego.

Sposób 2

Dotyczy grup skończonych. Dla dowolnej funkcji $f(\boldsymbol{x})$ zbiór funkcji $\{f_i(\boldsymbol{x})\}$ otrzymanych następująco: $f_i(\boldsymbol{x}) = U_i f(\boldsymbol{x})$ jest zamknięty na transformacje grupowe, gdyż

$$U_j f_i(x) = U_j U_i f(x) = U_k f(x) = f_k(x)$$

gdzie $U_j U_i = U_k$. Nie wszystkie, tak otrzymane, funkcje $f_i(\boldsymbol{x})$ muszą być liniowo niezależne.

Stwierdzenie. Jeżeli wszystkie funkcje $f_i(\boldsymbol{x})$ są liniowo niezależne oraz $U_i = U_v U_j$, wówczas $U_v f_j(\boldsymbol{x}) = f_i(\boldsymbol{x})$ oraz $U_v f_j(\boldsymbol{x}) = \sum_k D_{kj}(U_v) f_k(\boldsymbol{x}) = \sum_k \delta_{ki} f_k(\boldsymbol{x}) = f_i(\boldsymbol{x})$. Zatem $D_{kj}(U_v) = \delta_{ki}\delta_{jj} = \delta_{ki}$, gdyż $U_i = U_v U_j$, a powstała reprezentacja jest reprezentacją regularną.

Stwierdzenie. Jeżeli w zbiorze $\{f_i(\boldsymbol{x})\}$ nie wszystkie funkcje $f_i(\boldsymbol{x})$ są liniowo niezależne, to elementami otrzymanej reprezentacji są macierze niższego stopnia niż w reprezentacji regularnej, w której stopień macierzy g tworzących reprezentację jest równy rzędowi grupy.

Przykład

Reprezentacja grupy obrotów. Reprezentację grupy obrotów $R_z(\alpha)$ ustala się według pierwszego sposobu.

I. Zbiór liniowo niezależnych funkcji wybiera się w postaci: $f_1(\varphi) = \cos\varphi$, $f_2(\varphi) = \sin\varphi$, (dwie funkcje). Działanie operatora obrotu prowadzi wówczas do relacji:

$$R_z(\alpha)f_1(\varphi) = f_1(\varphi - \alpha) = \cos(\varphi - \alpha) = \cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha = \cos\alpha f_1(\varphi) + \sin\alpha f_2(\varphi),$$

$$R_z(\alpha)f_2(\varphi) = f_2(\varphi - \alpha) = \sin(\varphi - \alpha) = \sin\varphi\cos\alpha - \cos\varphi\sin\alpha = -\sin\alpha f_1(\varphi) + \cos\alpha f_2(\varphi),$$

które w notacji macierzowej można zapisać:

$$R_z(\alpha)\left[f_1, f_2\right] = D^T\left(R_z(\alpha)\right)\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

z czego wynika, że macierze reprezentacji operatora $R_z(\alpha)$ mają postać:

$$D^{(1)}\left(R_z(\alpha)\right) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

oraz że otrzymana reprezentacja $\{D^{(1)}(R_z(\alpha))\}$ – to grupa $SO(2)$. Górny indeks macierzy, tu (1), numeruje różne reprezentacje.

Stwierdzenie. Ponieważ na mocy relacji grupowych zachodzi związek:

$$R_z(\alpha)R_z(\beta) = R_z(\alpha + \beta), \text{ więc } D^{(1)}\left(R_z(\alpha)\right)D^{(1)}\left(R_z(\beta)\right) = D^{(1)}\left(R_z(\alpha + \beta)\right)$$

z czego wynikają poniższe związki dla funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

II. Zbiór liniowo niezależnych funkcji wybiera się w postaci: $f_1(\varphi)=e^{i\varphi}$, (tylko jedna funkcja). Działanie operatora obrotu prowadzi wówczas do relacji:

$$R_z(\alpha)f_1(\varphi)=f_1(\varphi-\alpha)=e^{i(\varphi-\alpha)}=e^{-i\alpha}e^{i\varphi}=e^{-i\alpha}f_1(\varphi)$$

a zatem macierze reprezentacji $D^{(2)}(R_z(\alpha))=[e^{-i\alpha}]$ tworzą grupę $U(1)$.

III. Zbiór liniowo niezależnych funkcji wybiera się w postaci: $f_2(\varphi)=e^{-i\varphi}$, (tylko jedna funkcja). Działanie operatora obrotu prowadzi wówczas do relacji:

$$R_z(\alpha)f_2(\varphi)=f_2(\varphi-\alpha)=e^{-i(\varphi-\alpha)}=e^{i\alpha}e^{-i\varphi}=e^{i\alpha}f_2(\varphi)$$

a zatem macierze reprezentacji $D^{(3)}(R_z(\alpha))=[e^{i\alpha}]$ tworzą grupę $U(1)$.

IV. Zbiór liniowo niezależnych funkcji wybiera się w postaci: $f_1(\varphi)=e^{i\varphi}$, $f_2(\varphi)=e^{-i\varphi}$, (dwie funkcje). Macierze reprezentacji mają wówczas postać:

$$D^{(4)}(R_z(\alpha))=\begin{bmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{bmatrix}$$

i tworzą grupę $SU(2)$, gdyż $\det D^{(4)}(R_z(\alpha))=1$.

V. Zbiór liniowo niezależnych funkcji wybiera się w postaci: $f_m(\varphi)=e^{im\varphi}$, (tylko jedna funkcja). Działanie operatora obrotu prowadzi do relacji:

$$R_z(\alpha)f_m(\varphi)=f_m(\varphi-\alpha)=e^{im(\varphi-\alpha)}=e^{-im\alpha}f_m(\varphi)$$

a zatem macierze reprezentacji $D^{(m)}(R_z(\alpha))=[e^{-im\alpha}]$ tworzą grupę $U(1)$.

Stwierdzenie. Ponieważ grupa $R_z(\alpha)$ jest zwarta o objętości 2π i obroty o kąty „zerowy" i 2π są równoważne $R_z(0) = R_z(2\pi)$, więc $D^{(m)}(R_z(0)) = D^{(m)}(R_z(2\pi))$, czyli $e^{-i2\pi m} = 1$, z czego wynika, że m musi być liczbą całkowitą.

Stwierdzenie. Reprezentacje $D^{(1)}(R_z(\alpha))$ i $D^{(4)}(R_z(\alpha))$ są sobie równoważne, gdyż istnieje transformacja podobieństwa $S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$, która przekształca jedną reprezentację w drugą.

Macierz odwrotna $S^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, gdyż $\det S=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}=1$, zatem

$$S^{-1}D^{(1)}(R_z(\alpha))S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha - i\sin\alpha & i\cos\alpha - \sin\alpha \\ \sin\alpha + i\cos\alpha & \cos\alpha + i\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-i\alpha} & ie^{i\alpha} \\ ie^{-i\alpha} & e^{i\alpha} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-i\alpha} + e^{-i\alpha} & ie^{i\alpha} - ie^{i\alpha} \\ -ie^{-i\alpha} + ie^{-i\alpha} & e^{i\alpha} + e^{i\alpha} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{bmatrix} = D^{(4)}(R_z(\alpha))$$

Stwierdzenie. Jeżeli reprezentację $D(U)$ można sprowadzić, jednocześnie dla wszystkich $U \in G$, za pomocą jakiejś transformacji podobieństwa S, tj. $\widetilde{D}(U) = S^{-1}D(U)S$, do postaci klatkowej:

$$\widetilde{D}(U) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \ddots & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{matrix} \end{bmatrix}$$

w której reprezentacja $\widetilde{D}(U)$ jest sumą prostą reprezentacji o mniejszych wymiarach (tj. reprezentacji podstawowych), to w zbiorze funkcji $\{f_i(\boldsymbol{x})\}$ istnieją podzbiory funkcji, których elementy pod działaniem rozpatrywanej grupy G przekształcają się wzajemnie na siebie.

Definicja – Reprezentacje nieprzywiedlne

Reprezentacje, których nie można za pomocą transformacji podobieństwa sprowadzić do prostszych postaci klatkowych (o mniejszych klatkach) nazywają się reprezentacjami nieprzywiedlnymi lub nieredukowalnymi. Pozostałe reprezentacje to reprezentacje przywiedlne lub redukowalne.

Stwierdzenie. Reprezentacje powiązane ze sobą transformacją podobieństwa $\widetilde{D}(U) = S^{-1}D(U)S$, gdzie det $S \neq 0$, są reprezentacjami równoważnymi. (por. s. 63).

Stwierdzenie. Reprezentacja przywiedlna jest sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych

$$D(U) = a^{(1)}D^{(1)}(U) \oplus a^{(2)}D^{(2)}(U) \oplus \ldots \oplus a^{(n)}D^{(n)}(U) = \bigoplus_{\upsilon=1}^{n} a^{(\upsilon)}D^{(\upsilon)}(U) \, ,$$

gdzie $D^{(\upsilon)}(U)$ – to reprezentacje nieprzywiedlne, a $a^{(\upsilon)}$ jest liczbą równoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych danej reprezentacji, a zatem

$$D(U) = \left[\begin{array}{cccccccc} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\left[\begin{array}{cc} & \\ & \end{array}\right]$}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{$\left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array}\right]$}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{array}\right]$$

$$= a^{(1)}\left[\begin{array}{cc} & \\ & \end{array}\right] \oplus a^{(2)}[\ ] \oplus a^{(3)}\left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array}\right] \oplus \ldots \oplus a^{(n)}\left[\begin{array}{cc} & \\ & \end{array}\right]$$

Stwierdzenie. Wszystkie równoważne reprezentacje nieprzywiedlne można jednocześnie sprowadzić do tej samej postaci za pomocą transformacji podobieństwa $S^{-1}D^{(\upsilon)}(U)S = \widetilde{D}^{(\upsilon)}(U)$.

D o w ó d

Jeżeli w reprezentacji przywiedlnej $D(U)$ istnieją dwie równoważne reprezentacje $\{D^{(\upsilon)}(U)\}$ i $\{\widetilde{D}^{(\upsilon)}(U)\}$

$$D(U)=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0&0&0\\0&0&0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0&0\\0&0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0&0&0\\0&0&0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0&0\\0&0\\0&0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \\ \widetilde{D}^{(\upsilon)}(U) \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0&0\\0&0\\0&0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0&0\\0&0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0&0&0\\0&0&0 \end{matrix} & \ddots & \begin{matrix} 0&0&0\\0&0&0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0&0\\0&0\\0&0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0&0\\0&0\\0&0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \\ D^{(\upsilon)}(U) \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

to wykorzystując macierz postaci

$$\widetilde{S}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0&0&0\\0&0&0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0&0\\0&0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0&0&0\\0&0&0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0&0\\0&0\\0&0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \\ S \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0&0\\0&0\\0&0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0&0\\0&0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0&0&0\\0&0&0 \end{matrix} & \ddots & \begin{matrix} 0&0&0\\0&0&0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0&0\\0&0\\0&0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0&0\\0&0\\0&0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

i transformację podobieństwa, gdzie S jest macierzą spełniającą relację $S^{-1}D^{(\upsilon)}(U)S = \widetilde{D}^{(\upsilon)}(U)$, można równoważne nieprzywiedlne reprezentacje sprowadzić do jednolitej postaci.

Definicja – Charaktery

Ślad macierzy reprezentacji $TrD(U)$ jest oznaczany $\chi(U)$ i nazywany charakterem elementu $U \in G$ w danej reprezentacji.

Stwierdzenie. Charakter elementu U jest taki sam we wszystkich równoważnych reprezentacjach.

Dowód

Ponieważ $\widetilde{D}(U) = S^{-1}D(U)S$ oraz $\chi(U) = TrD(U)$, więc

$$\widetilde{\chi}(U) = Tr\widetilde{D}(U) = Tr[S^{-1}D(U)S] = Tr[SS^{-1}D(U)] = TrD(U) = \chi(U)$$

gdyż wyrażenia występujące pod znakiem śladu wolno przestawiać cyklicznie.

Definicja – Charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych

Ślad elementu U w v-tej reprezentacji nieprzywiedlnej oznacza się:

$$\chi^{(v)}(U) \text{ i } \chi^{(v)}(U) = TrD^{(v)}(U)$$

Stwierdzenie. Wszystkie elementy grupy należące do jednej klasy mają ten sam charakter.

Dowód

Niech elementy grupy U_v, $U_\mu \in C_i$, wtedy istnieje $U_\rho \in G$ takie, że $U_\rho U_v U_\rho^{-1} = U_\mu$. Ponieważ macierze reprezentacji spełniają relacje grupowe, więc

$$D(U_\mu) = D(U_\rho U_v U_\rho^{-1}) = D(U_\rho)D(U_v)D(U_\rho^{-1}) = D(U_\rho)D(U_v)D(U_\rho)^{-1}$$

a zatem

$$\chi(U_\mu) = TrD(U_\rho U_v U_\rho^{-1}) = Tr[D(U_\rho)D(U_v)D(U_\rho)^{-1}]$$
$$= Tr[D(U_\rho)^{-1}D(U_\rho)D(U_v)] = TrD(U_v) = \chi(U_v)$$

Stwierdzenie. Charaktery to funkcje całych klas, a nie poszczególnych elementów grupy.

Definicja – Charakter $\chi_i^{(v)}$

Symbol $\chi_i^{(v)}$ oznacza charakter i-tej klasy w v-tej reprezentacji nieprzywiedlnej.

Stwierdzenie. Jeżeli grupa ma k klas, to wyznaczenie charakterów $\chi_i^{(v)}$ dla $i = 1, ..., k$ w v-tej reprezentacji nieprzywiedlnej dostarcza istotnych informacji o reprezentacji.

14. Reprezentacje unitarne

Równoważność reprezentacji, lematy Schura, reprezentacje grup abelowych, własności reprezentacji wynikające z lematów Schura

Definicja – Macierze unitarne

Macierze $A \in \{M_n(C)\}$ takie, że dla dowolnych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ jest spełniona równość $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$, gdzie (,) oznacza iloczyn skalarny, nazywają się macierzami unitarnymi.

Stwierdzenie. Macierze unitarne A spełniają relacje: $AA^+ = A^+A = E \Rightarrow A^+ = A^{-1}$ oraz tworzą grupę unitarną $U(n)$.

Definicja – Reprezentacje unitarne

Reprezentacje unitarne to reprezantacje utworzone z macierzy unitarnych.

TWIERDZENIE. Każda reprezentacja grupy skończonej jest równoważna reprezentacji unitarnej. Oznacza to, że dla każdej reprezentacji $\{D(U)\}$ istnieje nieosobliwa macierz S taka, że dla każdego $U \in G$ i dla każdej pary $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ spełniona jest równość:

$$(\widetilde{D}(U)\boldsymbol{x}, \widetilde{D}(U)\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \text{gdzie:} \quad \widetilde{D}(U) = S^{-1}D(U)S$$

Dowód

Dowód przeprowadzany jest w kilku etapach. W pierwszym etapie pokazuje się, że każda reprezentacja jest unitarna względem pewnego szczególnego iloczynu skalarnego, nazwanym iloczynem wewnętrznym.

Definicja iloczynu wewnętrznego:

Iloczyn postaci $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} = \sum_{U \in G} \left(D(U)\boldsymbol{x}, D(U)\boldsymbol{y}\right)$ spełnia aksjomaty iloczynu skalarnego, gdyż

$\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \in C$, $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} = \{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\}^*$

oraz

$\{\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{z}) = \alpha\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} + \beta\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\}$ i $\{\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha^*\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\} + \beta^*\{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$

gdzie $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$.

Dowolna macierz spełnia relację $\{D(U')\boldsymbol{x}, D(U')\boldsymbol{y}\} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, gdyż

$$\{D(U')\boldsymbol{x}, D(U')\boldsymbol{y}\} = \sum_{U\in G}\big(D(U)D(U')\boldsymbol{x}, D(U)D(U')\boldsymbol{y}\big) = \sum_{U\in G}\big(D(UU')\boldsymbol{x}, D(UU')\boldsymbol{y}\big)$$

$$= \sum_{U''\in G}\big(D(U'')\boldsymbol{x}, D(U'')\boldsymbol{y}\big) = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$$

gdzie zostało uwzględnione, że $U'' = UU' \in G$.

Stwierdzenie. Dowolna reprezentacja $\{D(U)\}$ wypełnia warunek unitarności względem pewnego szczególnego iloczynu wewnętrznego. Należy zatem znaleźć transformację podobieństwa S, która pozwoli uczynić $\{D(U)\}$ reprezentacją unitarną względem iloczynu skalarnego.

W drugim etapie określa się transformację podobieństwa S.

Niech wektory $\{\boldsymbol{\xi}_i\}$ stanowią zupełną, ortogonalną i unormowaną bazę w V względem iloczynu skalarnego, zatem $(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j) = \delta_{ij}$, a wektory $\{\boldsymbol{\eta}_i\}$ stanowią zupełną, ortogonalną i unormowaną bazę w V względem zdefiniowanego iloczynu wewnętrznego, zatem $\{\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\eta}_j\} = \delta_{ij}$. Operator S określony w V, który transformuje wektory $\boldsymbol{\xi}_i$ w wektory $\boldsymbol{\eta}_i$, tj. $\boldsymbol{\xi}_i = S\boldsymbol{\eta}_i$, spełnia własności:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \{S\boldsymbol{x}, S\boldsymbol{y}\} \text{ lub } (S^{-1}\boldsymbol{x}, S^{-1}\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$$

gdzie

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j, \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j, \text{ więc } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} a_j^* b_j,$$

gdyż

$$\{S\boldsymbol{x}, S\boldsymbol{y}\} = \sum_{i,j=1}^{n}\left\{Sa_i\xi_i, Sb_j\xi_j\right\} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^* b_j \left\{S\xi_i, S\xi_j\right\} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^* b_j \left\{\eta_i, \eta_j\right\} = \sum_{j=1}^{n} a_j^* b_j = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

W trzecim etapie wykazuje się, że $\widetilde{D}(U) = S^{-1}D(U)S$ jest reprezentacją unitarną, czyli że dla dowolnego $U \in G$ jest spełniona równość: $(\widetilde{D}(U)\boldsymbol{x}, \widetilde{D}(U)\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Z powyżej otrzymanych relacji wynika, że

$$(\widetilde{D}(U)\boldsymbol{x}, \widetilde{D}(U)\boldsymbol{y}) = (S^{-1}D(U)S\boldsymbol{x}, S^{-1}D(U)S\boldsymbol{y}) = \{D(U)S\boldsymbol{x}, D(U)S\boldsymbol{y}\}$$

a ponieważ $\{D(U)\}$ jest reprezentacją unitarną względem iloczynu wewnętrznego $\{\ ,\ \}$, więc

$$\{D(U)S\boldsymbol{x}, D(U)S\boldsymbol{y}\} = \{S\boldsymbol{x}, S\boldsymbol{y}\} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

zatem $(\widetilde{D}(U)\boldsymbol{x}, \widetilde{D}(U)\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ i $\{\widetilde{D}(U)\}$ jest reprezentacją unitarną.

Stwierdzenie. Dowolną reprezentację grupy skończonej zawsze można przetransformować w reprezentację unitarną, ale na ogół jest to także możliwe dla wielu nieskończonych i ciągłych grup np. grup Liego.

LEMAT. Jeżeli macierz M komutuje z macierzą unitarną A, $MA = AM$, to macierze M_+ i M_- zdefiniowane następująco:

$M_+ = \frac{1}{2}(M + M^+)$ oraz $M_- = \frac{1}{2i}(M - M^+)$ także komutują z A, przy czym M_+ i M_- są macierzami samosprzężonymi.

Dowód

$$AM = MA \Rightarrow M^+A^+ = A^+M^+ \text{ oraz } AA^+ = A^+A = E$$

zatem

$$AM^+A^+ = AA^+M^+ = M^+ \Rightarrow M^+A = AM^+A^+A = AM^+$$

czyli

$$M^+A = AM^+$$

Ponieważ

$$AM + AM^+ = MA + M^+A \text{, więc } AM_+ = M_+A$$

oraz

$$AM - AM^+ = MA - M^+A \text{, więc } AM_- = M_-A$$

Macierze M_+ i M_- są samosprzężone, gdyż

$$M_+^+ = \left[\frac{1}{2}(M + M^+)\right]^+ = \frac{1}{2}(M^+ + M) = \frac{1}{2}(M + M^+) = M_+$$

oraz

$$M_{-}^{+}=\left[\frac{1}{2i}(M-M^{+})\right]^{+}=-\frac{1}{2i}(M^{+}-M)=\frac{1}{2i}(M-M^{+})=M_{-}$$

LEMAT SCHURA I. Jeżeli $D(U)$ jest elementem nieprzywiedlnej reprezentacji grupy G ($U \in G$) i jeżeli $D(U)M = MD(U)$ dla wszystkich $U \in G$, to M musi być postaci: $M = cE$, gdzie E jest macierzą jednostkową, a c pewną stałą.

Dowód

Zakłada się, że reprezentacja $\{D(U)\}$ jest unitarna, więc $D(U)$ są macierzami unitarnymi. Ponieważ $D(U)M = MD(U) \Rightarrow D(U)M_{\pm} = M_{\pm}D(U)$ oraz $M = M_{+} + iM_{-}$, gdzie macierze M_+ i M_- są macierzami hermitowskimi. Dlatego rozważania można przeprowadzić w odniesieniu do macierzy M_+ i M_-. Niech λ_n, $n = 1, 2,..., k$, są różnymi wartościami własnymi oraz $\boldsymbol{x}_n^{(i)}$, $i = 1, 2,..., m_n$ różnymi, odpowiadającymi wartości własnej λ_n wektorami własnymi operatora (macierzy) M_+, które spełniają relację $M_+\boldsymbol{x}_n^{(i)} = \lambda_n \boldsymbol{x}_n^{(i)}$. Wektory $\boldsymbol{x}_n^{(i)}$ rozpinają N wymiarową przestrzeń, więc $\sum_{n=1}^{k} m_n = N$.

Stwierdzenie. Wszystkie wartości własne λ_n macierzy hermitowskiej są rzeczywiste a wektory własne $\boldsymbol{x}_n^{(i)}$ są ortonormalne tj. $(\boldsymbol{x}_n^{(i)}, \boldsymbol{x}_k^{(j)}) = \delta_{nk}\delta_{ij}$, gdyż dla różnych wartości λ_n, $\boldsymbol{x}_n^{(i)}$ muszą być ortogonalne, a dla tej samej wartości λ_n mogą zostać wybrane jako ortogonalne i w obu przypadkach można je unormować.

Wektor $D(U)\boldsymbol{x}_n^{(i)}$ jest wektorem własnym macierzy M_+, gdyż

$$M_{+}[D(U)\boldsymbol{x}_n^{(i)}] = D(U)M_{+}\boldsymbol{x}_n^{(i)} = D(U)\lambda_n\boldsymbol{x}_n^{(i)} = \lambda_n[D(U)\boldsymbol{x}_n^{(i)}]$$

zatem

$$D(U)\boldsymbol{x}_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{m_n} d_{ij}^{(n)}(U)\boldsymbol{x}_n^{(j)}$$

gdzie $i = 1, 2,..., m_n$ dla wszystkich $U \in G$.

Elementy $d_{ij}^{(n)}(U)$ macierzy $D(U)$ w reprezentacji wektorów własnych $\boldsymbol{x}_n^{(i)}$ określa relacja

$$(\boldsymbol{x}_k^{(j)}, D(U)\boldsymbol{x}_n^{(i)}) = \sum_{l=1}^{m_n} d_{il}^{(n)}(U)(\boldsymbol{x}_k^{(j)}, \boldsymbol{x}_n^{(l)}) = \sum_{l=1}^{m_n} d_{il}^{(n)}(U)\delta_{kn}\delta_{jl} = d_{ij}^{(n)}(U)\delta_{kn}$$

a zatem elementy macierzy $D(U)$, dla których $k \neq n$ są zawsze równe zero i macierz $D(U)$ w bazie $\boldsymbol{x}_n^{(i)}$ ma dla wszystkich $U \in G$ postać:

$$D(U) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} d_{ij}^{(1)}(U) \\ (m_1 \times m_1) \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & (N - m_1) \times (N - m_1) \end{array}\right]$$

w której elementy różne od zera są zawarte w blokach rozłożonych wzdłuż diagonali. Dla $n = 1$ elementy $d_{ij}^{(1)}(U)$ tworzą macierz $(m_1 \times m_1)$ itd. Ponieważ z założenia reprezentacja jest nieprzywiedlna, więc sprzeczność, gdyż $\{D(U)\}$ ma strukturę blokową właściwą dla reprezentacji przywiedlnych. Jedyną możliwością uniknięcia sprzeczności jest przyjęcie, że $m_1 = N$, ale wówczas λ_1 staje się N-krotnie zdegenerowane.

Stwierdzenie. Macierz hermitowska w bazie ortonormalnych wektorów własnych ma postać

$$M_+ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

gdzie niezerowe wartości równe odpowiednio λ_n, $n = 1, 2, ..., k$ występują wyłącznie na diagonali.

Gdy zatem $\lambda_n = \lambda_1$ dla $n = 1, 2, ..., k$, macierz M_+ przyjmuje postać

$$M_+ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 E$$

i analogicznie macierz $M_- = \kappa_1 E$, a stąd $M = (\lambda_1 + \kappa_1)E = cE$.

Stwierdzenie. Jeżeli macierz M, która nie jest macierzą jednostkową, komutuje ze wszystkimi elementami reprezentacji $\{D(U)\}$, tj. $MD(U) = D(U)M$ dla wszystkich $U \in G$, to reprezentacja ta jest przewidywalna.

Stwierdzenie: Grupa abelowa ma tylko jednowymiarowe reprezentacje nieprzewidywalne.

Dowód

Ponieważ wszystkie elementy grupy abelowej komutują ze sobą, więc $[D(U), D(U')] = 0$ dla wszystkich $U' \in G$. Macierz $D(U)$ komutuje zatem ze wszystkimi elementami nieprzywiedlnej reprezentacji $\{D(U')\}$, czyli $D(U) = cE$. Ale żeby reprezentacja macierzy jednostkowych była nieprzywiedlna musi być jednowymiarowa.

LEMAT SCHURA II. Niech $\{D(U)\}$ i $\{D'(U)\}$ będą dwiema nieprzewidywalnymi reprezentacjami grupy G. Jeżeli dla wszystkich $U \in G$ jest spełniona relacja $D(U)M = MD'(U)$, to $D(U)$ i $D'(U)$ są reprezentacjami równoważnymi albo $M = 0$.

Dowód

Macierz $D(U)$ i $D'(U)$ są unitarne i mogą mieć różne wymiary i niech $D(U)$ – macierz $n\times n$, $D'(U)$ – macierz $m\times m$, wówczas M jest macierzą $n\times m$. Ponieważ dla wszystkich $U \in G$ $D(U)M = MD'(U)$, więc $M^+D^+(U) = D'^+(U)M^+$. Ale $D^+(U) = D(U)^{-1} = D(U^{-1})$ dla dowolnego $U \in G$, a zatem także dla $U' = U^{-1} \in G$. Dlatego

$$M^+D^+(U) = D'^+(U)M^+ \Rightarrow M^+D(U^{-1}) = D'(U^{-1})M^+ \Rightarrow M^+D(U) = D'(U)M^+$$

a stąd $MM^+D(U) = MD'(U)M^+$. Podobnie z warunku $D(U)M = MD'(U)$ wynika, że $D(U)MM^+ = MD'(U)M^+$, a zatem $MM^+D(U) = D(U)MM^+$ dla wszystkich $U \in G$. Otrzymana relacja na podstawie pierwszego lematu Schura prowadzi do wniosków, że $MM^+ = cE$, gdzie MM^+ jest macierzą kwadratową $n\times n$ oraz $M^+M = c'E$, gdzie M^+M jest macierzą kwadratową $m\times m$.

W dowodzie lematu rozpatruje się trzy przypadki.

I. Niech $n = m$, wówczas M jest macierzą kwadratową. Jeżeli $c = 0$, to $MM^+ = 0$, co oznacza, że wszystkie wyrazy macierzy MM^+ są równe 0, a więc także $(MM^+)_{ii} = 0$. Stąd wynika, że

$$(MM^+)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}M^+_{ji} = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}M^*_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \left|M_{ij}\right|^2 = 0$$

czyli każdy wyraz $M_{ij} = 0$, a zatem macierz $M = 0$. Jeżeli $c \neq 0$, to $\det(MM^+) = \det M \cdot \det M^+ = \left|\det M\right|^2 = c^n \neq 0$, a więc $\det M \neq 0$ i istnieje macierz odwrotna M^{-1}, a stąd $D(U) = MD'(U)M^{-1}$ dla wszystkich $U \in G$, czyli reprezentacje $\{D(U)\}$ i $\{D'(U)\}$ są równoważne.

II. Jeżeli $n > m$, to macierz M ($n\times m$) należy uzupełnić do macierzy kwadratowej $n\times n$ dopisując $n-m$ kolumn zer. Wówczas macierz N i N^+ ($n\times n$) mają postać:

$$N = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \ \dots \ 0 \\ & 0 \ \dots \ 0 \\ & 0 \ \dots \ 0 \\ M & 0 \ \dots \ 0 \\ & 0 \ \dots \ 0 \\ & 0 \ \dots \ 0 \end{array}\right], \qquad N^+ = \left[\begin{array}{cccccc} & & M^+ & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Łatwo można zauważyć, że $NN^+ = MM^+$, a skoro $MM^+ = cE$, więc $NN^+ = cE$. Podobnie jak poprzednio $\det(NN^+) = \det N \cdot \det N^+ = \left|\det N\right|^2 = c^n$, ale teraz $\det N = 0$, gdyż macierz N ma co najmniej jedną kolumnę zer, zatem $c = 0$, a stąd wynika, że $N = 0$, a więc i $M = 0$.

III. Jeżeli $m > n$, to macierz M ($n\times m$) należy uzupełnić do macierzy kwadratowej $m\times m$ dopisując $m - n$ wierszy zer i dalej postępować jak w przypadku II.

Stwierdzenie. Lematy Schura obowiązują dla dowolnych skończenie wymiarowych reprezentacji unitarnych. Są one zatem także słuszne dla grup nieskończonych (np. Liego) posiadających skończenie wymiarowe reprezentacje.

Stwierdzenie. Macierz postaci $M_i^{(\nu)} = \sum_{U\in C_i} D^{(\nu)}(U)$, gdzie C_i oznacza i-tą klasę, a ν numeruje reprezentacje nieprzywiedlne $\{D^{(\nu)}(U)\}$, jest wielokrotnością macierzy jednostkowej.

Dowód

Należy zauważyć, że

$$D^{(\nu)}(U')M_i^{(\nu)}\left[D^{(\nu)}(U')\right]^{-1} = \sum_{U\in C_i} D^{(\nu)}(U')D^{(\nu)}(U)D^{(\nu)}(U'^{-1}) = \sum_{U\in C_i} D^{(\nu)}(U'UU'^{-1})$$

ale $U \in C_i$, więc $U'' = U'UU'^{-1} \in C_i$ i sumowanie po $U \in C_i$ można zastąpić sumowaniem po $U'' \in C_i$. Zatem

$$D^{(\nu)}(U')M_i^{(\nu)}\left[D^{(\nu)}(U')\right]^{-1} = \sum_{U''\in C_i} D^{(\nu)}(U'') = M_i^{(\nu)}$$

dla wszystkich $U' \in G$, a stąd na mocy pierwszego lematu Schura $M_i^{(\nu)} = c_i^{(\nu)} E$. Gdy wymiar reprezentacji o indeksie ν wynosi n_ν, wówczas $Tr\, M_i^{(\nu)} = c_i^{(\nu)} n_\nu$. Ale

$$Tr\, M_i^{(\nu)} = \sum_{U \in C_i} Tr\, D^{(\nu)}(U) = \sum_{U \in C_i} \chi^{(\nu)}(U) = g_i \chi_i^{(\nu)}$$

gdyż ślady wszystkich macierzy reprezentujących elementy jednej klasy są sobie równe, stąd

$$c_i^{(\nu)} = \frac{g_i}{n_\nu} \chi_i^{(\nu)} \quad \text{oraz} \quad \sum_{U \in C_i} D^{(\nu)}(U) = \frac{g_i}{n_\nu} \chi_i^{(\nu)} E$$

Stwierdzenie. Macierz postaci $M = \sum_{U \in G} D^{(\nu)}(U) X \left[D^{(\mu)}(U)\right]^{-1}$, gdzie $D^{(\nu)}(U)$ i $D^{(\mu)}(U)$ są macierzami nieprzywiedlnych reprezentacji o wymiarach odpowiednio n_ν i n_μ, a X jest dowolną macierzą $n_\nu \times n_\mu$, jest proporcjonalna do macierzy jednostkowej.

Dowód

Należy zauważyć, że dla wszystkich $U' \in G$ spełniona jest relacja

$$D^{(\nu)}(U') M \left[D^{(\mu)}(U')\right]^{-1} = \sum_{U \in G} D^{(\nu)}(U') D^{(\nu)}(U) X D^{(\mu)}(U^{-1}) D^{(\mu)}(U'^{-1})$$
$$= \sum_{U \in G} D^{(\nu)}(U'U) X D^{(\mu)}\left((U'U)^{-1}\right) = \sum_{U'' \in G} D^{(\nu)}(U'') X D^{(\mu)}(U''^{-1}) = M,$$

gdzie $U'' = U'U \in G$, z której wynika, że $D^{(\nu)}(U) M = M D^{(\mu)}(U)$. Na mocy zatem obu lematów Schura $M = c(X) E \delta_{\nu\mu}$ i $M = 0$, gdy $\nu \neq \mu$, oraz $M = c(X)E$, gdy $\nu = \mu$, czyli

$$\sum_{U \in G} D^{(\nu)}(U) X \left[D^{(\mu)}(U)\right]^{-1} = c(X) E \delta_{\nu\mu}.$$

15. Relacje ortogonalności

Relacje ortogonalności dla elementów macierzowych i charakterów dowolnych reprezentacji oraz reprezentacji regularnych i otrzymywane warunki

Stwierdzenie. Elementy macierzy $D_{ij}^{(v)}(U)$, $D_{lk}^{(\mu)}(U)$ dwóch nieprzywiedlnych reprezentacji unitarnych $\{D^{(v)}(U)\}$ i $\{D^{(\mu)}(U)\}$ spełniają związek ortogonalności ze względu na posiadane trzy wskaźniki v, i, j oraz μ, l, k.

Dowód

Macierze unitarne $D^{(v)}(U)$ i $D^{(\mu)}(U)$ oraz dowolna macierz X spełniają związek:

$$\sum_{U\in G} D^{(v)}(U)XD^{(\mu)}(U)^{+} = \mathrm{c}(X)E\delta_{v\mu}$$

gdyż $D^{(v)}(U)^{-1} = D^{(v)}(U)^{+}$, który rozpisany po elementach macierzowych wyraża się następująco:

$$\sum_{U\in G} D_{ii'}^{(v)}(U)X_{i'l'}[D^{(\mu)}(U)^{+}]_{l'l} = \mathrm{c}(X)\delta_{il}\delta_{v\mu}$$

Ponieważ $[D^{(\mu)}(U)^{+}]_{l'l}$ jest elementem macierzy sprzężonej po hermitowsku, więc $[D^{(\mu)}(U)^{+}]_{l'l} = D_{l'l}^{(\mu)*}(U)$. Niech X jest taką macierzą, która ma tylko jeden element różny od zera $X_{jk} = 1$, zatem $X_{i'l'} = \delta_{i'j}\delta_{l'k}$. Wówczas po przyjęciu, że $\mathrm{c}(X) = \mathrm{c}_{jk}$, rozważany związek uzyskuje postać:

$$\sum_{U\in G} D_{lk}^{(\mu)*}(U)D_{ij}^{(v)}(U) = \mathrm{c}_{jk}\delta_{il}\delta_{v\mu}$$

Aby wyznaczyć współczynnik c_{jk}, stosuje się następującą procedurę. Niech $\mu = v$ oraz $l = i$, wówczas po zsumowaniu po i otrzymuje się

$$\sum_{U\in G}\sum_{i=1}^{n_v} D_{ik}^{(v)*}(U)D_{ij}^{(v)}(U) = \mathrm{c}_{jk}\sum_{i=1}^{n_v}\delta_{ii} = \mathrm{c}_{jk}n_v$$

Ale $D^{(\nu)}(U)$ jest macierzą unitarną, więc

$$\sum_{i=1}^{n_\nu} D_{ik}^{(\nu)*}(U) D_{ij}^{(\nu)}(U) = \delta_{kj}$$

a stąd

$$c_{jk} n_\nu = \sum_{U \in G} \delta_{kj} = g\delta_{kj}\text{, czyli } c_{jk} = \frac{g}{n_\nu}\delta_{kj}$$

gdzie g jest rzędem grupy G. Elementy macierzy $D_{ij}^{(\nu)}(U)$, $D_{lk}^{(\mu)}(U)$ nieprzywiedlnych reprezentacji unitarnych spełniają zatem następujący związek ortogonalności:

$$\sum_{U \in G} D_{lk}^{(\mu)*}(U) D_{ij}^{(\nu)}(U) = \frac{g}{n_\nu}\delta_{li}\delta_{kj}\delta_{\mu\nu}$$

który jest zgodny z posiadanymi wskaźnikami.

Stwierdzenie. Macierz $D^{(\nu)}(U)$ o wymiarze n_ν ma n_ν^2 elementów $D_{ij}^{(\nu)}(U)$. Można więc utworzyć co najwyżej $n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_N^2$ ortogonalnych wektorów w g-wymiarowej przestrzeni, gdzie N jest liczbą nierównoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych, zatem

$$\sum_{\nu=1}^{N} n_\nu^2 \le g$$

Stwierdzenie. Grupa skończonego rzędu g może mieć tylko skończoną liczbę nierównoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych $N \le g$, przy czym wymiar każdej z nich musi spełniać warunki $1 \le n_\nu \le \sqrt{g}$.

Stwierdzenie. Ponieważ w grupach abelowych wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne są jednowymiarowe, więc $\sum_{\nu=1}^{N} n_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{N} 1 = N \le g$ oraz $k = g$, gdyż każdy element tworzy osobną klasę.

Stwierdzenie. Charaktery $\chi_i^{(\nu)}$ i $\chi_i^{(\mu)}$, gdzie $i = 1, 2,..., k$ dwóch nieprzywiedlnych reprezentacji unitarnych $\{D^{(\nu)}\}$ i $\{D^{(\mu)}(U)\}$ spełniają związek ortogonalności ze względu na równoważność reprezentacji.

Dowód

Elementy macierzy $D_{ij}^{(\nu)}(U)$, $D_{lk}^{(\mu)}(U)$ spełniają następujący związek ortogonalności:

$$\sum_{U\in G} D_{lk}^{(\mu)*}(U) D_{ij}^{(\nu)}(U) = \frac{g}{n_\nu}\delta_{li}\delta_{kj}\delta_{\mu\nu}$$

Kładąc $k = l$ i sumując po l, otrzymuje się

$$\sum_{U\in G}\sum_{l=1}^{n_\mu} D_{ll}^{(\mu)*}(U) D_{ij}^{(\nu)}(U) = \frac{g}{n_\nu}\delta_{\mu\nu}\sum_{l=1}^{n_\mu}\delta_{li}\delta_{lj} = \frac{g}{n_\nu}\delta_{\mu\nu}\delta_{ij}$$

ale

$$\sum_{l=1}^{n_\mu} D_{ll}^{(\mu)*}(U) = Tr\ D^{(\mu)*}(U) = \chi^{(\mu)*}(U)$$

więc

$$\sum_{U\in G}\chi^{(\mu)*}(U) D_{ij}^{(\nu)}(U) = \frac{g}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{ij}$$

Z kolei kładąc $i = j$ i sumując po i otrzymuje się

$$\sum_{U\in G}\chi^{(\mu)*}(U)\sum_{i=1}^{n_\nu} D_{ii}^{(\nu)}(U) = \sum_{U\in G}\chi^{(\mu)*}(U)\chi^{(\nu)}(U) = g\delta_{\mu\nu}$$

gdyż prawa strona jest różna od zera, jedynie gdy $\mu = \nu$, a wtedy $n_\mu = n_\nu$. Ponieważ wszystkie elementy należące do tej samej klasy C_i mają równe charaktery, otrzymana równość redukuje się do postaci

$$\sum_{i=1}^{k} g_i \chi_i^{(\mu)*}\chi_i^{(\nu)} = g\delta_{\mu\nu}$$

gdzie k jest liczbą klas C_i w grupie G, g_i – liczbą elementów w klasie C_i, a N – liczbą nierównoważnych, nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G. Istnieje zatem N ortogonalnych k-wymiarowych wektorów $\left[\sqrt{\frac{g_1}{g}}\chi_1^{(\nu)}, \sqrt{\frac{g_2}{g}}\chi_2^{(\nu)}, \ldots, \sqrt{\frac{g_k}{g}}\chi_k^{(\nu)}\right]$, a ponieważ ich liczba nie może przewyższać wymiaru przestrzeni, więc $N \le k \le g$.

Stwierdzenie. W przypadku nieskończonych grup ciągłych, np. Liego, sumowanie po elementach grupy należy zastąpić całkowaniem po parametrach grupy. Dla grup zwartych podane relacje i własności zachowują ważność, a przedstawione dowody mogą być łatwo rozszerzone.

Przykład

Grupa obrotów w płaszczyźnie XY o kąt α, $0 \leq \alpha < 2\pi$, – $\{R_z(\alpha)\}$. Grupa ta jest abelowa, a jej jednowymiarowe reprezentacje tworzą grupę $U(1)$ i są postaci $D^{(m)}(R_z(\alpha)) = [e^{im\alpha}]$, gdzie m są liczbami całkowitymi. Ponieważ macierze reprezentacji są jednowymiarowe, więc mają wyłącznie jeden element

$$D_{11}^{(m)}(R_z(\alpha)) \equiv D^{(m)}(R_z(\alpha)) = e^{im\alpha}$$

Sumowanie po elementach grupy $U \in G$ zostaje zastąpione całkowaniem po parametrze α: $\sum_{U \in G} \cdot \to \int_0^{2\pi} d\alpha \,\cdot$, wówczas rząd grupy G równy $\sum_{U \in G} 1 = g$ odpowiada objętości grupy $\{R_z(\alpha)\}$ równej $\int_0^{2\pi} d\alpha \; 1 = 2\pi < \infty$, gdyż grupa jest zwarta. Ponadto związek ortogonalności

$$\sum_{U \in G} D_{lk}^{(\mu)*}(U) D_{ij}^{(\nu)}(U) = \frac{g}{n_\nu} \delta_{li} \delta_{kj} \delta_{\mu\nu}$$

po uwzględnieniu, że $g \to 2\pi$, $n_\nu = 1$ oraz $l = k = i = j = 1$, przyjmuje postać

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \, D^{(m)*}(R_z(\alpha)) D^{(n)}(R_z(\alpha)) = \frac{2\pi}{1} \delta_{mn}$$

W celu sprawdzenia słuszności otrzymanej relacji należy uwzględnić jawną postać elementów

$$D^{(m)}\big(R_z(\alpha)\big) = e^{im\alpha}$$

wówczas

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \, e^{-im\alpha} e^{in\alpha} = \int_0^{2\pi} d\alpha \, e^{i(n-m)\alpha} = \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)\alpha} \Bigg|_0^{2\pi} = \begin{Bmatrix} 0 & \text{gdy} \;\; n \neq m \\ 2\pi & \text{gdy} \;\; n = m \end{Bmatrix} = 2\pi \delta_{mn}$$

Stwierdzenie. Charaktery grupy $\{R_z(\alpha)\}$ mają postać $\chi_\alpha^{(m)} = Tr\, D^{(m)}(R_z(\alpha)) = e^{im\alpha}$ i są równe macierzom reprezentacji nieprzywiedlnej, tj. jedynemu elementowi macierzowemu macierzy jednowymiarowych. Dlatego relacja ortogonalności dla charakterów jest równoważna relacji otrzymanej dla macierzy i ma postać

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \, \chi_\alpha^{(m)*} \chi_\alpha^{(n)} = 2\pi \delta_{mn}$$

Stwierdzenie. Proste rozszerzenia teorii grup skończonych nie zawsze są możliwe w przypadku grup nieskończonych, np. grupy Lorentza.

Stwierdzenie. Znajomość charakterów reprezentacji ($\chi_i^{(\mu)}$ i χ_i) umożliwia określenie krotności $a^{(\mu)}$ dla $\mu = 1, 2, ..., N$ równoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych.

Dowód

Niech $D(U) = a^{(1)}D^{(1)}(U) \oplus a^{(2)}D^{(2)}(U) \oplus \ldots \oplus a^{(N)}D^{(N)}(U)$, gdzie $U \in G$, $a^{(v)}$ jest krotnością równoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych, a $D^{(v)}$(U) jest elementem v-tej reprezentacji nieprzywiedlnej grupy G, wówczas charakter wszystkich elementów U danej klasy C_i jest równy

$$\chi_i = a^{(1)}\chi_i^{(1)} + a^{(2)}\chi_i^{(2)} + \ldots + a^{(N)}\chi_i^{(N)} = \sum_{v=1}^{N} a^{(v)}\chi_i^{(v)}$$

Po wymnożeniu obu stron powyższej równości przez $g_i\chi_i^{(\mu)*}$, gdzie g_i jest liczbą elementów w klasie C_i, i zsumowaniu po i otrzymuje się wyrażenie

$$\sum_{i=1}^{k} g_i\chi_i^{(\mu)*}\chi_i = \sum_{v=1}^{N}\sum_{i=1}^{k} a^{(v)}g_i\chi_i^{(\mu)*}\chi_i^{(v)}$$

które po zastosowaniu relacji ortogonalności $\sum_{i=1}^{k} g_i\chi_i^{(v)}\chi_i^{(\mu)*} = g\delta_{\mu v}$ redukuje się do postaci

$$\sum_{i=1}^{k} g_i\chi_i^{(\mu)*}\chi_i = \sum_{v=1}^{N} a^{(v)}g\delta_{\mu v} = ga^{(\mu)}$$

a stąd

$$a^{(\mu)} = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{k} g_i\chi_i^{(\mu)*}\chi_i$$

Stwierdzenie. Jeżeli dwie reprezentacje danej grupy mają te same charaktery, to muszą być one równoważne, gdyż są scharakteryzowane tymi samymi $a^{(\mu)}$.

Stwierdzenie. W reprezentacji regularnej krotność występowania równoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych jest równa wymiarowi tych reprezentacji, tj. $a^{(\mu)} = n_\mu$.

Dowód

Niech $U_i \in G$ i rząd grupy G wynosi g. Wówczas wymiar reprezentacji regularnej wynosi także g, a elementami reprezentacji są macierze $g \times g$. Elementy macierzy reprezentacji regularnej są określone następująco $D_{kl}(U_v) = \delta_{ik}\delta_{jl}$, gdzie $U_i = U_v U_j$. Element jednostkowy I grupy G tworzy jednoelementową klasę $C_1 = \{I\}$. Ponieważ $U_i = IU_i$, więc $D_{kl}(I) = \delta_{kl}$, a zatem macierz reprezentacji odpowiadająca elementowi jednostkowemu I jest macierzą jednostkową E, podczas gdy pozostałe macierze – elementy reprezentacji regularnej odpowiadające innym elementom grupy G – mają na diagonali same zera. Dla reprezentacji regularnych zatem $\chi_1 = TrD(\varepsilon) = g$ oraz $\chi_i = 0$, gdy $i \neq 1$. Ponieważ macierz jednostkowa w wyniku transformacji podobieństwa przechodzi zawsze w macierz jednostkową, więc charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych otrzymane dla klasy $C_1 = \{I\}$ są równe wymiarowi tych reprezentacji, tj. $\chi_1^{(\mu)} = n_\mu$. Zatem z relacji $\chi_i = \sum_{v=1}^{N} a^{(v)} \chi_i^{(v)}$ wynika, że $g = \sum_{v=1}^{N} a^{(v)} n_v$, gdzie n_v jest wymiarem v-tej reprezentacji nieprzywiedlnej, a z relacji

$$a^{(\mu)} = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{k} g_i \chi_i^{(\mu)*} \chi_i$$

po uwzględnieniu, że $\chi_1 = g$, $\chi_i = 0$ dla $i \neq 1$ oraz $\chi_1^{(\mu)} = n_\mu$ otrzymuje się

$$a^{(\mu)} = \frac{1}{g} \cdot 1 \cdot g n_\mu$$

a stąd $a^{(\mu)} = n_\mu$, co prowadzi do wyrażenia $g = \sum_{v=1}^{N} n_v^2$.

Stwierdzenie. Dla dowolnych reprezentacji nieprzywiedlnych grup skończonych spełniona jest nierówność $\sum_{v=1}^{n} n_v^2 \leq g$. W przypadku reprezentacji regularnych nierówność ta przechodzi w równość $g = \sum_{v=1}^{N} n_v^2$, która oznacza, że liczba elementów macierzowych we wszystkich nierównoważnych reprezentacjach nieprzywiedlnych odpowiadających danemu elementowi grupy jest równa rzędowi grupy.

Stwierdzenie. Elementy $D_{ij}^{(v)}(U)$ macierzy nieprzywiedlnych reprezentacji, gdzie $1 \leq i,j \leq n_v$ oraz $v = 1, 2,..., N$, w reprezentacji regularnej tworzą zupełny ortonormalny układ g wektorów w g-wymiarowej przestrzeni. Wektory te, które unormowane są postaci

$$\left[\sqrt{\frac{n_1}{g}} D_{11}^{(1)}(U), \ldots, \sqrt{\frac{n_N}{g}} D_{n_N n_N}^{(N)}(U) \right]$$

muszą spełniać następującą (drugą) relację ortogonalności:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_\nu}\sum_{j=1}^{n_\nu}\frac{n_\nu}{g}D_{ij}^{(\nu)}(U)D_{ij}^{(\nu)*}(U')=\delta_{UU'}$$

Poprzednio zostało wykazane (por. s. 82), że elementy $D_{ij}^{(\nu)}(U)$ spełniają relację ortogonalności postaci:

$$\sum_{U\in G}\frac{n_\nu}{g}D_{ij}^{(\nu)}(U)D_{kl}^{(\mu)*}(U)=\delta_{\mu\nu}\delta_{ik}\delta_{jl}$$

Stwierdzenie. Z otrzymanej relacji ortogonalności wynika drugi związek ortogonalności dla charakterów.

Dowód

Należy zsumować obie strony otrzymanej (drugiej) relacji ortogonalności po wszystkich elementach $U\in C_l$ oraz $U'\in C_m$, wówczas

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_\nu}\sum_{j=1}^{n_\nu}n_\nu\sum_{U\in C_l}D_{ij}^{(\nu)}(U)\sum_{U'\in C_m}D_{ij}^{(\nu)*}(U')=g\sum_{U\in C_l}\sum_{U'\in C_m}\delta_{UU'}=gg_l\delta_{lm}\ ,$$

z której po uwzględnieniu, że (por. s. 80)

$$\sum_{U\in C_m}D_{ij}^{(\nu)}(U)=\frac{g_m}{n_\nu}\chi_m^{(\nu)}\delta_{ij}$$

otrzymuje się wyrażenie

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_\nu}\sum_{j=1}^{n_\nu}n_\nu\frac{g_m}{n_\nu}\chi_m^{(\nu)}\delta_{ij}\frac{g_l}{n_\nu}\chi_l^{(\nu)*}\delta_{ij}=gg_l\delta_{lm}\ ,$$

z którego z kolei po uwzględnieniu, że $\delta_{ij}^2=\delta_{ij}$ oraz $\sum_{i=1}^{n_\nu}\sum_{j=1}^{n_\nu}\delta_{ij}^2=n_\nu$ wynika następujący (drugi) związek ortogonalności dla charakterów:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\chi_m^{(\nu)}\chi_l^{(\nu)*}=\frac{g}{g_l}\delta_{lm}$$

Stwierdzenie. Otrzymany związek $\sum_{\nu=1}^{N} \chi_m^{(\nu)} \chi_l^{(\nu)*} = \frac{g}{g_l} \delta_{lm}$ dowodzi, że wektory postaci

$$\left[\sqrt{\frac{g_l}{g}}\chi_1^{(\nu)}, \sqrt{\frac{g_2}{g}}\chi_2^{(\nu)}, \ldots, \sqrt{\frac{g_k}{g}}\chi_k^{(\nu)}\right]$$

tworzą zupełny, ortonormalny układ w k-wymiarowej przestrzeni.

*Stwierdzenie***.** Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji w reprezentacji regularnej jest równa liczbie klas, $N = k$.

Dowód

Z relacji ortogonalności dla charakterów wynika odpowiednio, że

$$\sum_{i=1}^{k} g_i \chi_i^{(\nu)} \chi_i^{(\mu)*} = g\delta_{\mu\nu} \;\Rightarrow\; N \le k \text{ oraz } \sum_{\nu=1}^{N} \chi_l^{(\nu)} \chi_m^{(\nu)*} = \frac{g}{g_l}\delta_{lm} \;\Rightarrow\; k \le N \text{, zatem } k = N.$$

Stwierdzenie. Ponieważ odwzorowanie grupy G w reprezentację regularną jest izomorfizmem, a odwzorowanie reprezentacji w charaktery jest homomorfizmem, więc relacje działań grupowych przenoszą się na reprezentacje i charaktery.

Stwierdzenie. Elementy macierzy i charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych wyznaczonych dla reprezentacji regularnej spełniają po dwa związki ortogonalności:

$$\sum_{U\in G} D_{ij}^{(\nu)}(U) D_{kl}^{(\nu)*}(U) = \frac{g}{n_\nu}\delta_{\mu\nu}\delta_{ik}\delta_{jl} \quad \text{i} \quad \sum_{\nu=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_\nu}\sum_{j=1}^{n_\nu} n_\nu D_{ij}^{(\nu)}(U) D_{ij}^{(\nu)*}(U') = g\delta_{UU'}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{k} g_i \chi_i^{(\nu)} \chi_i^{(\mu)*} = g\delta_{\nu\mu} \quad \text{i} \quad \sum_{\nu=1}^{N} \chi_l^{(\nu)} \chi_m^{(\nu)*} = \frac{g}{g_l}\delta_{lm} .$$

Stwierdzenie. Zawsze istnieje trywialna reprezentacja jednowymiarowa taka, że dla wszystkich $U \in G$, $U \to [1] \in SO(1)$.

Stwierdzenie. Dla reprezentacji jednowymiarowych charaktery $\chi_i = TrD(U)$ są identyczne z macierzami reprezentacji oraz $D(U) = \chi_i$ dla wszystkich $U \in C_i$.

Stwierdzenie. Charaktery klasy identyczności są równe wymiarowi reprezentacji.

16. Przykłady wyznaczania reprezentacji

Wyznaczania charakterów i reprezentacji nieprzywiedlnych reprezentacji regularnej dla kilku grup skończonych

Oznaczenia:

g – rząd grupy G, liczba elementów w grupie,
k – liczba klas w grupie G,
g_i – liczba elementów w klasie C_i,
N – liczba nierównoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych, $N=k$.
Wskaźniki: $i = 1, 2,..., k$ oraz $v = 1, 2,..., N$

Stwierdzenie. Tabele charakterów wyznacza się wykorzystując związki ortogonalności oraz relacje grupowe.

Przykład

Grupa jednoelementowa $G = \{e\}$ zawiera jedną klasę $C_1 = \{e\}$ oraz $g = 1, k = 1, N = 1$. Ponieważ

$$\sum_{v=1}^{1} n_v^2 = 1$$

więc $n_1 = a^{(1)} = 1$, a zatem istnieje tylko jedna jednowymiarowa reprezentacja grupy jednoelementowej – $D(1)(e) = [1]$.

Przykład

Grupa dwuelementowa $G = \{e, a\}$ zawiera dwie klasy $C_1 = \{e\}$ i $C_2 = \{a\}$ oraz $g = 2$, $k = 2, N = 2$. Ponieważ $\sum_{v=1}^{2} n_v^2 = 2$, więc $n_1^2 + n_2^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad n_1 = n_2 = 1$ oraz $g_1 = g_2 = 1$. Istnieją zatem dwie reprezentacje jednowymiarowe. Charaktery klasy elementu jednostkowego są równe wymiarowi reprezentacji, $\chi_1^{(\nu)} = n_\nu$, a charaktery reprezentacji trywialnej $\chi_i^{(1)} = 1$. Tabela charakterów zawiera elementy:

Tabela charakterów $\chi_i^{(\nu)}$

$\nu \backslash i$	1	2
1	1	1
2	1	$\alpha = -1$

co wynika z relacji

$$a^2 = e$$

$$\alpha^2 = \left(\chi_2^{(2)}\right)^2 = \chi_1^{(2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm 1$$

Macierze reprezentacji mają zatem postać:
$D^{(1)}(e) = D^{(1)}(a) = [1]$ oraz $D^{(2)}(e) = [1]$, $D^{(2)}(a) = [-1]$

Przykład

Grupa 3-elementowa $G = \{e, a, a^2\}$ zawiera trzy klasy $C_1 = \{e\}$ i $C_2 = \{a\}$, $C_3 = \{a^2\}$ oraz $g = 3$, $k = 3$, $N = 3$. Ponieważ $\sum_{\nu=1}^{3} n_\nu^2 = 3$, więc $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ oraz $g_1 = g_2 = g_3 = 1$. Istnieją zatem 3 reprezentacje jednowymiarowe. Charaktery klasy elementu jednostkowego są równe wymiarowi reprezentacji, $\chi_1^{(\nu)} = n_\nu$, a charaktery reprezentacji trywialnej $\chi_i^{(1)} = 1$. Tabela charakterów zawiera elementy:

Tabela charakterów $\chi_i^{(\nu)}$

$\nu \backslash i$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	β	β^2
3	1	γ	γ^2

co wynika z relacji $\beta^3 = \gamma^3 = 1$ gdyż $a^3 = e$, ale

$$\varepsilon^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

czyli

$$\beta = \gamma^2 = \varepsilon \quad \text{i} \quad \beta^2 = \gamma = \varepsilon^2$$

a stąd

Tabela charakterów $\chi_i^{(\nu)}$

$\nu \backslash i$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	ε	ε^2
3	1	ε^2	ε

oraz $D^{(\nu)}(e) = \chi_1^{(\nu)} = 1$, $D^{(\nu)}(a) = \chi_2^{(\nu)}$, $D^{(\nu)}(a^2) = \chi_3^{(\nu)}$

Przykład

Grupa symetryczna $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (321)\}$ ma $g = 6$ elementów zawartych w trzech klasach: $C_1 = \{e\}$, $C_2 = \{(12), (13), (23)\}$, $C_3 = \{(123), (321)\}$, zatem $g_1 = 1$, $g_2 = 3$, $g_3 = 2$ oraz $N = k = 3$. Ponieważ

$$\sum_{\nu=1}^{3} n_\nu^2 = 6 \Rightarrow n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6 \Rightarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

więc

$$n_1 = n_2 = 1,\ n_3 = 2 \quad \text{oraz} \quad a^{(1)} = a^{(2)} = 1,\ a^{(3)} = 2$$

Jako że $\chi_1^{(\nu)} = n_\nu$, a charaktery reprezentacji trywialnej $\chi_i^{(1)} = 1$, w tabeli charakterów pojawiają się tylko 4 nieznane elementy *a, b, c, d*.

Tabela charakterów $\chi_i^{(\nu)}$

Liczba elementów g_i w klasie →		1	2	3
Wymiar n_ν ↓	$\nu \backslash i$	1	2	3
1	1	1	1	1
1	2	1	a	b
2	3	2	c	d

W celu wyznaczenia elementów nieznanych w tabeli charakterów wykorzystuje się związki ortogonalności

$$\sum_{i=1}^{k} g_i \chi_i^{(\nu)} \chi_i^{(\mu)*} = g\delta_{\mu\nu}, \qquad \sum_{\nu=1}^{N} \chi_l^{(\nu)} \chi_m^{(\nu)*} = \frac{g}{g_l}\delta_{lm}$$

które prowadzą do równań

$$1 + 3a + 2b = 0$$
$$2 + 3c + 2d = 0$$
$$1 + a + 2c = 0$$
$$1 + b + 2d = 0$$

z których tylko 3 są liniowo niezależne. Dlatego pozwalają one wyznaczyć jedynie a, b, d w zależności od c i wówczas

$$a = -1 - 2c$$
$$b = 1 + 3c$$
$$d = -1 - \frac{3}{2}c$$

Aby ustalić c, należy zauważyć, że elementy (123) i (321) zawarte w klasie C_3 spełniają relację $(123)^2 = (321)$. Ponieważ tym elementom odpowiada jeden charakter $\chi_3^{(2)}$, więc

$$\left(\chi_3^{(2)}\right)^2 = \chi_3^{(2)} = 1 \;\Rightarrow\; b = 1 + 3c = 1 \;\Rightarrow\; c = 0 \text{ oraz } a = d = -1$$

a stąd

Tabela charakterów $\chi_i^{(\nu)}$

Liczba elementów g_i w klasie →		1	3	2
Wymiar n_ν ↓	ν \ i	1	2	3
1	1	1	1	1
1	2	1	–1	1
2	3	2	0	–1

Reprezentacje grupy

Grupa symetryczna S_3 ma dwie reprezentacje jednowymiarowe i jedną dwuwymiarową. W reprezentacjach jednowymiarowych charaktery są równe elementom macierzowym.

Reprezentacja I (jednowymiarowa – trywialna)

$$D^{(1)}(e) = D^{(1)}((12)) = D^{(1)}((13)) = D^{(1)}((23)) = D^{(1)}((123)) = D^{(1)}((321)) = 1$$

Reprezentacja II (jednowymiarowa – antysymetryczna)

$$D^{(2)}(e) = D^{(2)}((123)) = D^{(2)}((321)) = 1 \qquad - \text{ permutacje parzyste,}$$

$$D^{(2)}((12)) = D^{(2)}((13)) = D^{(2)}((23)) = -1 \quad - \text{ permutacje nieparzyste.}$$

Reprezentacja III (dwuwymiarowa)

Macierz elementu jednostkowego e jest macierzą jednostkową:

$$D^{(3)}(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pozostałe macierze są unitarne, można zatem przyjąć, że pierwsza z nich ma postać diagonalną

$$D^{(3)}((12)) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Ale $TrD^{(3)}((12)) = \chi_2^{(3)} = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$. Ponieważ $(12)^2 = e$, więc

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a stąd $a = \pm 1$ i można przyjąć, że

$$D^{(3)}((12)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Macierze reprezentacji elementów (13) i (23) spełniają relacje

$$[D^{(3)}((13))]^2 = [D^{(3)}((23))]^2 = D^{(3)}(e)$$

gdyż $(13)^2 = (23)^2 = e$.

Wynika stąd, że

$$D^{(3)}((13)) = [D^{(3)}((13))]^{-1} \text{ oraz } D^{(3)}((23)) = \left[D^{(3)}((23))\right]^{-1}$$

Ponieważ macierze reprezentacji są unitarne, więc

$[D^{(3)}((13))]^{+} = [D^{(3)}((13))]^{-1}$ oraz $[D^{(3)}((23))]^{+} = [D^{(3)}((23))]^{-1}$

a stąd

$D^{(3)}((13)) = [D^{(3)}((13))]^{+}$ oraz $D^{(3)}((23)) = [D^{(3)}((23))]^{+}$

Uwzględniwszy, że $TrD^{(3)}((13)) = TrD^{(3)}((23)) = \chi_2^{(3)} = 0$ można przyjąć je w formie

$$D^{(3)}((13)) = \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & -a \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad D^{(3)}((23)) = \begin{bmatrix} c & d \\ d^* & -c \end{bmatrix}$$

gdzie *a, c* – rzeczywiste, a *b, d* – zespolone. Wykorzystując relację

$$\sum_{U \in C_i} D^{(\nu)}(U) = \frac{g_i}{n_\nu} \chi_i^{(\nu)} E$$

oraz kładąc $\chi_2^{(3)} = 0$, otrzymuje się wyrażenie

$$D^{(3)}((12)) + D^{(3)}((13)) + D^{(3)}((23)) = 0$$

z którego wynika, że

$$\begin{bmatrix} 1+a+c & b+d \\ b^*+d^* & -1-a-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a stąd $1 + a + c = 0$ oraz $b + d = 0$, czyli

$$D^{(3)}((13)) = \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & -a \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad D^{(3)}((23)) = \begin{bmatrix} -(a+1) & -b \\ -b^* & a+1 \end{bmatrix}$$

Dla macierzy tych z warunku unitarności

$$D^{(3)}((13))[D^{(3)}((13))]^{+} = D^{(3)}((23))[D^{(3)}((23))]^{+} = E$$

otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} a^2+|b|^2 & 0 \\ 0 & a^2+|b|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+1)^2+|b|^2 & 0 \\ 0 & (a+1)^2+|b|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a stąd równania

$$a^2 + |b|^2 = 1 \ \text{ i } \ (1+a)^2 + |b|^2 = 1$$

z których wynika, że

$$a = -\frac{1}{2} \ \text{ i } \ b = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\phi}$$

zatem

$$D^{(3)}\big((13)\big) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\phi} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\phi} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad D^{(3)}\big((23)\big) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\phi} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\phi} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Aby wyznaczyć $D^{(3)}((123))$ oraz $D^{(3)}((321))$, należy uwzględnić, że reprezentacja zachowuje działania grupowe, oraz że $(123) = (13)(12)$ i $(321) = (123)^{-1}$, zatem

$$D^{(3)}\big((123)\big) = D^{(3)}\big((13)\big) D^{(3)}\big((12)\big)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\phi} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\phi} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\phi} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\phi} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

oraz

$$D^{(3)}\big((321)\big) = \left[D^{(3)}\big((123)\big)\right]^{-1} = \left[D^{(3)}\big((123)\big)\right]^{+} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\phi} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\phi} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Stwierdzenie. Stała ϕ jest zupełnie dowolna i można przyjąć, że $\phi = 0$.

Dowód

Macierze reprezentacji są postaci

$$D^{(3)}\big((\,\cdot\,)\big) = \begin{bmatrix} a & be^{i\phi} \\ ce^{i\phi} & d \end{bmatrix} \quad \text{i niech} \quad S = \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest macierzą transformacji podobieństwa. Wówczas wykonując transformację podobieństwa otrzymuje się równoważną reprezentację

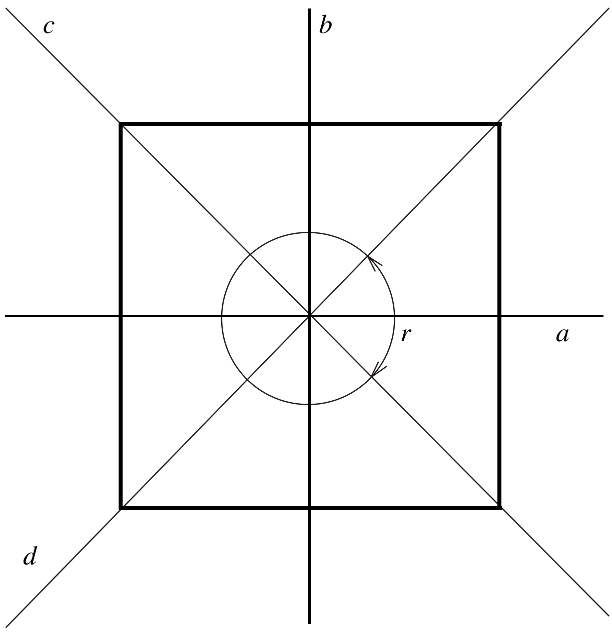
$$S^{-1}D^{(3)}((\cdot))S = \begin{bmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & be^{i\phi} \\ ce^{-i\phi} & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ae^{i\phi} & be^{i\phi} \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

która odpowiada położeniu $\phi = 0$.

Przykład

Grupa symetrii kwadratu w przestrzeni R^2 oznaczana jako C_{4v} ma jedną oś symetrii (oś obrotu) czterokrotną, gdzie r określa obrót o kąt $\pi/2$, oraz cztery płaszczyzny symetrii *a, b, c, d* przecinające się w tej osi. Grupa $C_{4v} = \{e, r, r^2, r^3, a, b, c, d\}$ ma 8 elementów symetrii, rząd jej zatem wynosi 8. Składanie operacji symetrii zostało przedstawione w tabeli mnożenia.



Rysunek. Elementy symetrii kwadratu: 4 płaszczyzny symetrii *a, b, c , d* i oś czterokrotna *r*

Tabela mnożenia

	e	r	r^2	r^3	a	b	c	d
e	e	r	r^2	r^3	a	b	c	d
r	r	r^2	r^3	e	c	d	b	a
r^2	r^2	r^3	e	r	b	a	d	c
r^3	r^3	e	r	r^2	d	c	a	b
a	a	d	b	c	e	r^2	r^3	r
b	b	c	a	d	r^2	e	r	r^3
c	c	a	d	b	r	r^3	e	r^2
d	d	b	c	a	r^3	r	r^2	e

Grupa C_{4v} nie jest abelowa, gdyż np. $ac = r^3 \neq ca = r$, $bc = r \neq ba = r^3$, $cr = a \neq b = rc$ itp.

Grupa C_{4v} ma nietrywialne podgrupy rzędu 2 i 4 (2 i 4 są podzielnikami 8), tj.

- podgrupy dwuelementowe: $\{e, r^2\}$, $\{e, a\}$, $\{e, b\}$, $\{e, c\}$, $\{e, d\}$, gdyż
  $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = r^4 = e$,
- podgrupy czteroelementowe:
  cykliczna $\{e, r, r^2, r^3\}$ – podgrupa obrotów,
  czterogrupa $C_{2v} = \{e, r^2, a, b\}$ – grupa symetrii prostokąta,
  czterogrupa $\{e, r^2, c, d\}$.

Podgrupa $\{e, r^2\}$ jest inwariantna i ma warstwy $\{r, r^3\}$, $\{a, b\}$, $\{c, d\}$, co pozwala utworzyć grupę ilorazową izomorficzną z czterogrupą. Pozostałe trzy podgrupy czteroelementowe są także inwariantne i mają odpowiednio warstwy:

$\{e, r, r^2, r^3\}$ – $\{a, b, c, d\}$,

$\{e, r^2, a, b\}$ – $\{r, r^3, c, d\}$,

$\{e, r^2, c, d\}$ – $\{r, r^3, a, b\}$.

Odpowiadająca im grupa ilorazowa jest izomorficzna z grupą dwuelementową {E, A}.

Grupa C_{4v} ma $k = 5$ klas:

- dwie jednoelementowe: $C_1 = \{e\}$, $C_2 = \{r^2\}$,
- trzy dwuelementowe: $C_3 = \{r, r^3\}$, $C_4 = \{a, b\}$, $C_5 = \{c, d\}$,
  zatem $g_1 = g_2 = 1$, $g_3 = g_4 = g_5 = 2$ oraz $N = k = 5$, ponieważ

$$\sum_{v=1}^{5} n_v^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 8,$$

więc

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1,\ n_5 = 2 \quad \text{oraz} \quad a^{(1)} = a^{(2)} = a^{(3)} = a^{(4)} = 1,\ a^{(5)} = 2.$$

W celu wyznaczenia tabeli charakterów reprezentacji należy uwzględnić, że:

– charaktery klasy $C_1 = \{e\}$ są równe wymiarowi reprezentacji, więc $\chi_1^{(\nu)} = n_\nu$,
– charaktery reprezentacji trywialnej $\chi_i^{(1)} = 1$,
– charaktery reprezentacji jednowymiarowych są tożsame z macierzami reprezentacji, więc spełniają relacje grupowe: $(\chi_2^{(\nu)})^2 = (\chi_4^{(\nu)})^2 = (\chi_5^{(\nu)})^2 = \chi_1^{(\nu)} = 1$ i $(\chi_3^{(\nu)})^4 = \chi_1^{(\nu)} = 1$ dla $\nu = 2, 3, 4$ (oraz, co zostało już uwzględnione, $\nu = 1$),
– dla $i = 2, 4, 5$ oraz $\nu = 2, 3, 4$ charaktery $\chi_i^{(\nu)}$ przyjmują wartości +1 albo –1,
– ponieważ $(\chi_3^{(\nu)})^2 = \chi_2^{(\nu)} = \pm 1$, zatem $\chi_3^{(\nu)}$ może być równe +1, –1, $+i$ albo $-i$.

Jednak wszystkie pozostałe wartości charakterów są rzeczywiste, więc na mocy związków ortogonalności $\chi_3^{(\nu)}$ musi być też rzeczywiste, $\chi_3^{(\nu)} = \pm 1$, a zatem $\chi_2^{(\nu)} = +1$.

Wskazane własności pozwalają określić charaktery dla reprezentacji jednowymiarowych, wówczas charaktery reprezentacji dwuwymiarowej można wyznaczyć bezpośrednio ze związków ortogonalności

$$\sum_{i=1}^{k} g_i \chi_i^{(\nu)} \chi_i^{(\mu)*} = g\delta_{\mu\nu}, \qquad \sum_{\nu=1}^{N} \chi_l^{(\nu)} \chi_m^{(\nu)*} = \frac{g}{g_l}\delta_{lm}$$

Uwzględniwszy powyższe otrzymuje się:

Tabela charakterów $\chi_i^{(\nu)}$

Liczba elementów g_i w klasie →		1	1	2	2	2
Wymiar n_ν ↓	ν \ i	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	–1	–1
1	3	1	1	–1	1	–1
1	4	1	1	–1	–1	1
2	5	2	–2	0	0	0

Łatwo można sprawdzić, że wyznaczone charaktery spełniają związki ortogonalności.

Reprezentacje grupy

Grupa symetrii $C_{4\nu}$ ma cztery reprezentacje jednowymiarowe i jedną dwuwymiarową. W reprezentacjach jednowymiarowych charaktery są równe elementom macierzowym. Jej elementy symetrii odpowiadają pewnym szczególnym obrotom właściwym i niewłaściwym w płaszczyźnie. Wszystkie obroty w płaszczyźnie tworzą grupę klasyczną $O(2)$, która jest izomorficzna z $U(1)$. Elementy reprezentacji dwuwymiarowej stanowią zatem podgrupę grupy $O(2)$, podczas gdy elementy reprezentacji jednowymiarowych tworzą grupę $O(1) = \{[1], [-1]\} \in U(1)$, a reprezentacji trywialnej $SO(1) = \{[1]\}$.

Reprezentacja I (jednowymiarowa – trywialna)

$$D^{(1)}(e) = D^{(1)}(r) = D^{(1)}(r^2) = D^{(1)}(r^3) = D^{(1)}(a) = D^{(1)}(b) = D^{(1)}(c) = D^{(1)}(d) = [1]$$

Reprezentacja II (jednowymiarowa)

$$D^{(2)}(e) = D^{(2)}(r) = D^{(2)}(r^2) = D^{(2)}(r^3) = [1],$$

$D^{(2)}(a) = D^{(2)}(b) = D^{(2)}(c) = D^{(2)}(d) = [-1]$ – reprezentacja podgrupy cyklicznej obrotów

Reprezentacja III (jednowymiarowa)

$$D^{(3)}(e) = D^{(3)}(r^2) = D^{(3)}(a) = D^{(3)}(b) = [1]$$

$D^{(3)}(r) = D^{(3)}(r^3) = D^{(3)}(c) = D^{(3)}(d) = [-1]$ – reprezentacja podgrupy czterogrupy symetrii prostokąta

Reprezentacja IV (jednowymiarowa)

$D^{(4)}(e) = D^{(4)}(r^2) = D^{(4)}(c) = D^{(4)}(d) = [1]$ – reprezentacja podgrupy drugiej czterogrupy

$$D^{(4)}(r) = D^{(4)}(r^3) = D^{(4)}(a) = D^{(4)}(b) = [-1]$$

Reprezentacja V (dwuwymiarowa – ortogonalna)

Macierz elementu jednostkowego e jest macierzą jednostkową:

$$D^{(5)}(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pozostałe macierze są unitarne i spełniają relację:

$$\sum_{U \in C_i} D^{(\nu)}(U) = \frac{g_i}{n_\nu} \chi_i^{(\nu)} E$$

Ponieważ klasa $C_2 = \{r^2\}$ jest jednoelementowa oraz $\chi_2^{(5)} = -2$, więc

$$D^{(5)}(r^2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ślady wszystkich pozostałych elementów reprezentacji są równe 0, tj.

$$TrD^{(5)}(r) = TrD^{(5)}(r^3) = TrD^{(5)}(a) = TrD^{(5)}(b) = TrD^{(5)}(c) = TrD^{(5)}(d) = 0 \,.$$

Wszystkie pozostałe elementy reprezentacji to macierze ortogonalne, których ślad wynosi 0. Niech zatem

$$D^{(5)}(r) = \begin{bmatrix} u & v \\ w & -u \end{bmatrix}$$

Ponieważ $[D^{(5)}(r)]^2 = D^{(5)}(r^2)$, więc

$$\begin{bmatrix} u^2 + vw & 0 \\ 0 & u^2 + vw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a stąd $u^2 + vw = -1$ oraz $\det D^{(5)}(r) = -u^2 - vw = 1$. Wówczas z warunku $[D^{(5)}(r)]^{-1} = [D^{(5)}(r)]^{\mathrm{T}}$ otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} -u & -v \\ -w & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & w \\ v & -u \end{bmatrix}$$

a zatem $u = 0$, $v = -w$ i $v = \pm 1$, a stąd

$$D^{(5)}(r) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad D^{(5)}(r^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

co wynika zarówno z relacji dla sumy macierzy reprezentacji elementów grupy należących do jednej klasy, tj. $D^{(5)}(r) + D^{(5)}(r^3) = 0$, jak i z izomorfizmu grupy i reprezentacji, tj. $D^{(5)}(r)D^{(5)}(r^2) = D^{(5)}(r^3)$, gdyż $rr^2 = r^3$. Otrzymane macierze $D^{(5)}(r^k)$ dla $k = 0, 1, 2, 3$ odpowiadają macierzom reprezentacji grupy obrotów właściwych $SO(2)$

$$D^{(1)}(R_z(\alpha)) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

odpowiednio o kąt $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (por. s. 67).

Pozostałe elementy grupy to szczególne obroty niewłaściwe, które mają własność $\rho^2 = e$, czyli $\rho^{-1} = \rho$, gdzie $\rho \in \{a, b, c, d\}$, więc reprezentujące je macierze ortogonalne spełniają równości $D^{(5)}(\rho) = [D^{(5)}(\rho)]^{-1} = [D^{(5)}(\rho)]^{\mathrm{T}}$ oraz $TrD^{(5)}(\rho) = 0$. Można zatem przyjąć, że

$$D^{(5)}(a) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix}$$

Ponieważ $[D^{(5)}(a)]^2 = D^{(5)}(e) = E$, więc

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

z czego wynika, że $x^2 + y^2 = 1$ czyli $\det D^{(5)}(a) = -x^2 - y^2 = -1$, a zatem x i y mogą być wzięte w postaci $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. Wówczas

$$D^{(5)}(a) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad D^{(5)}(b) = \begin{bmatrix} -\cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

gdyż $C_4 = \{a, b\}$, więc $D^{(5)}(a) + D^{(5)}(b) = 0$. Aby wyznaczyć $D^{(5)}(c)$ i $D^{(5)}(d)$ wystarczy wykorzystać relacje grupowe np. $r{\cdot}a = c$ i $a{\cdot}r = d$, z czego wynika, że $D^{(5)}(c) = D^{(5)}(r){\cdot}D^{(5)}(a)$ i $D^{(5)}(d) = D^{(5)}(a){\cdot}D^{(5)}(r)$, a zatem

$$D^{(5)}(c) = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad D^{(5)}(d) = \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Wybór parametru φ uzależniony jest od wyboru osi układu współrzędnych w stosunku do boków kwadratu i gdy wybrane osie leżą w płaszczyznach a i b, wówczas $\varphi = 0$.

Literatura

1. Bir G.L., Pikus G.E., *Symetria i odkształcenia w półprzewodnikach*, PWN, Warszawa 1977.
2. Byron F.W., Fuller R.W., *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, t. 2, PWN, Warszawa 1975.
3. Mozrzymas J., *Zastosowanie teorii grup w fizyce*, PWN, Warszawa 1976.
4. Zalewski K., *Wykłady o grupie obrotów*, PWN, Warszawa 1987.
5. Kostyrkin A.I., *Wstęp do algebry*, PWN, Warszawa 1984.