

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
Wydział Podstawowych Problemów Techniki
Instytut Fizyki

ROZPRAWA DOKTORSKA

**Zastosowanie grup warkoczowych
w fizyce układów hallowskich 2D
(wyjaśnienie struktury złożonych fermionów)**

Janusz Jacak

Promotor: prof. dr hab. inż. Ryszard Gonczarek

Wrocław 2011

Streszczenie

W pracy przedstawiona jest nowa oryginalna koncepcja zastosowania grup warkoczowych do wyjaśnienia przyczyn występowania korelacji Laughlina w dwuwymiarowych układach naładowanych cząstek w obecności silnego pola magnetycznego i przy ułamkowym wypełnieniu najniższego poziomu Landaua. Topologiczne uwarunkowanie osobliwości ułamkowego kwantowego efektu Halla proponujemy powiązać z sytuacją kiedy promień cyklotronowych orbit jest zbyt krótki w stosunku do odległości między cząstkami, co uniemożliwia zamiany cząstek konieczne dla ustalenia statystyki. Taka sytuacja występuje dla ułamkowego wypełnienia najniższego poziomu Landaua. W celu przywrócenia możliwości zamiany cząstek zostały zdefiniowane podgrupy pełnej grupy warkoczowej o wielo-pętlowym charakterze trajektorii, co prowadzi do zwiększenia efektywnego promienia cyklotronowego i możliwości ustalenia statystyki. Ta ostatnia realizuje się zgodnie z jednowymiarowymi unitarnymi reprezentacjami zdefiniowanych podgrup warkoczowych i pozwala na konsekwentne wprowadzenie nowych cząstek kwantowych identyfikowanych ze złożonymi fermionami i złożonymi anyonami. W ten sposób udaje się wyjaśnić strukturę złożonych fermionów traktowanych tradycyjnie jako kompleksy fermionów i zlokalizowanych na cząstkach fikcyjnych, pomocniczych strumieni pola magnetycznego (*flux-tubes*) lub wirów (*vortices*). Rozwinięta metoda warkoczowych podgrup cyklotronowych pozwala ominąć potrzebę posługiwania się pomocniczymi fikcyjnymi elementami złożonych fermionów (i innych złożonych cząstek pojawiających się w naładowanych układach 2D w silnych polach magnetycznych). Wskazano na niejasności standardowej teorii złożonych fermionów i możliwe związane z tym nadinterpretacje, w szczególności w odniesieniu do mapowania ułamkowego kwantowego efektu Halla na całkowity efekt Halla i wyjaśnienia obserwowanej eksperymentalnie hierarchii wypełnień poziomu Landaua.

Abstract

We propose a new topology type method for explanation of Laughlin correlations in 2D charged systems in the presence of strong magnetic field corresponding to fractional filling of the lowest Landau level. We associate the reason of fractional quantum Hall effect peculiarity with the situation when cyclotron trajectories are too short in comparison to particle separation which precludes particles exchanges along single-looped trajectories. This happens at fractional filling of the lowest Landau level. The cyclotron braid subgroups of the full braid group are originally identified in order to restore exchanges of particles and statistics determination. The statistics of quantum particles is associated with one dimensional unitary representations of the defined cyclotron subgroups. In this manner the structure of composite fermions is elucidated without invoking any fictitious elements like flux-tubes or vortices in traditional heuristic modeling of composite fermions. Some assumptions of standard theory of composite fermions have been identified as not clearly justified and the way of correction of derivation of fractional filling Hall systems hierarchy structure, via mapping of fractional Hall effect onto integer one, is suggested within formulated cyclotron braid theory.

Spis treści

1	Wprowadzenie	2
2	Elementy fizyki układów hallowskich w przestrzeniach 2D	5
2.1	Funkcja Laughlina	6
2.2	Złożone fermiony	7
2.2.1	Złożone fermiony w modelu Jaina	7
2.2.2	Złożone fermiony w modelu Reada	8
2.2.3	Lokalne transformacje cechowania odpowiadające strumieniom Jaina i wirom Reada w konstrukcjach złożonych fermionów	11
3	Topologiczne metody opisu układów wielu cząstek na różnych rozmaitościach	13
3.1	Grupy warkoczowe	13
3.1.1	Pełna grupa warkoczowa dla R^3 , R^2 , sfery S^2 i torusa T . .	14
3.1.2	Czyste grupy warkoczowe	15
3.2	Całki Feynmana po trajektoriach i związek z jednowymiarowymi unitarnymi reprezentacjami pełnej grupy warkoczowej	16
3.3	Bozony, fermiony, anyony i złożone cząstki	17
3.3.1	Anyony na płaszczyźnie, sferze i torusie	17
3.3.2	Statystyki kwantowe i grupy warkoczowe	18
3.4	Wielowymiarowe unitarne nieredukowalne reprezentacje grup warkoczowych	20
4	Grupy warkoczowe dla wielocząstkowych naładowanych układów 2D w silnym polu magnetycznym – cyklotronowe podgrupy warkoczowe	22
4.1	Zbyt krótkie promienie cyklotronowe w układach 2D w silnym polu magnetycznym	22

4.2	Definicja warkoczowej podgrupy cyklotronowej i jej unitarne reprezentacje	24
4.3	Wielo-pętlowe trajektorie – odpowiedź układu na zbyt krótkie trajektorie cyklotronowe	26
4.4	Cyklotronowa struktura złożonych fermionów	30
4.5	Rola oddziaływania kulombowskiego	33
4.6	Złożone fermiony w terminach grup cyklotronowych	36
4.7	Metal Halla w opisie grup cyklotronowych	38
4.8	Uwagi o ograniczeniach dla wielo-pętlowej struktury warkoczy cyklotronowych	39
4.9	Grupy cyklotronowe w przypadku grafenu	45
5	Podsumowanie	51
6	Uzupełnienia i rozszerzenia	54
6.1	Funkcja falowa dla całkowicie wypełnionego najniższego poziomu Landaua	54
6.2	Stany sparowane typu Pfaffian	57
6.3	Podstawowe definicje	60
6.4	Grupy homotopii	63
6.4.1	Definicja homotopii	64
6.4.2	Przekształcenia homotopijne	64
6.4.3	Własności homotopii	65
6.4.4	Homotopia pętli	65
6.5	Przestrzeń konfiguracyjna	70
6.5.1	Pierwsza grupa homotopii przestrzeni konfiguracyjnej układu wielu cząstek	71
6.5.2	Nakrycie przestrzeni	74
6.6	Grupy warkoczowe dla wybranych rozmaitości	74
6.6.1	Grupa warkoczowa dla dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej R^2	74
6.6.2	Grupa warkoczowa dla sfery S^2	79
6.6.3	Grupa warkoczowa dla torusa T	81
6.6.4	Grupa warkoczowa dla trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej R^3	83
6.6.5	Grupa warkoczowa dla prostej R^1 oraz okręgu S^1	85
6.7	Ciągi dokładne dla grup warkoczowych	85
6.8	Zastosowanie czystych grup warkoczowych w informatyce klasycznej	87
	Bibliografia	90
	A Publikacje autora	102

A.1	Lista publikacji autorskich dotyczących tematu rozprawy doktorskiej	102
A.2	Lista innych publikacji autorskich	103
B	Kopie wybranych publikacji	105

Podziękowania

Autor wyraża podziękowania dla
Promotora prof. dra hab. inż. Ryszarda Gonczarka
i prof. dra hab. inż. Lucjana Jacaka
za wszechstronną pomoc w realizacji przedstawionej rozprawy doktorskiej

Rozdział 1

Wprowadzenie

Topologiczne globalne efekty coraz częściej postrzegane są jako odgrywające podstawową rolę w fizyce. W dziedzinach fizyki relatywistycznej, w teorii pola, a także ostatnio przy próbach sformułowania opisu kwantowej grawitacji, szeroko stosuje się zaawansowane metody w dużym stopniu o charakterze topologicznym. W istocie podstawowy aspekt elektrodynamiki ze źródłami – ładunkami i wirami – prądami ma także geometrycznie uwarunkowanie, obydwie defekty pola mają lokalnie nieusuwalny topologiczny charakter. Badania defektów topologicznych (np. uogólnienia defektu skręconej na końcach taśmy, tzw. *sine-Gordon kink* [1]) rozwijane były w ramach teorii pola [1, 2, 3], prowadząc do koncepcji tworów o topologicznym ładunku (np. instantonów [4]). Także w fizyce fazy skondensowanej metody topologiczne były szeroko stosowane, m. in. do charakteryzacji defektów w kryształach [5], a także defektów i tekstur w cieczach kwantowych i innych układach o bogatym, wielowymiarowym parametrze porządku (jak w przypadku nadciekłego He^3 i ciekłych kryształów) [5]. Znane efekty globalne, jak zjawisko Aharonova-Bohma [6], czy cała klasa efektów w rodzaju nadprzewodzących obwodów typu Josephsona [7], a nawet kwantowych interferencyjnych zjawisk, jak lokalizacja Andersona [8], poza podstawowym charakterem, pozwoliły na zbudowanie wyrafinowanych urządzeń, np. nadprzewodnikowy interferometr SQUID (*Superconducting Quantum Inteference Device*) pozwalający na rejestrację pojedynczych kwantów strumienia magnetycznego.

Metody topologiczne okazały się niezwykle istotnie w bardzo podstawowym aspekcie – kwantowania układów wielu jednakowych cząstek. Odkrycie eksperymentalne ułamkowego kwantowego efektu Halla (FQHE, *Fractional Quantum Hall Effect*) [9] przyczyniło się do dostrzeżenia roli topologii przestrzeni (rozmaitości, na której ulokowany jest układ) warunkującej cechy kwantowych cząstek odbywających dynamikę w tych przestrzeniach. Odkryto niezwykle bogactwo topologiczne przestrzeni dwuwymiarowych, przejawiające się poprzez możliwość

realizacji statystyk odmiennych niż fermionowa i bozonowa, a mianowicie ułamkowych statystyk anyonowych.

Coraz mocniej podnoszona jest ostatnio także rola topologicznych stopni swobody w kwantowej topologicznej informatyce [10, 11, 12], gdzie upatruje się możliwości pokonania czy raczej ominięcia lokalnej z natury dekoherencji*, lokując przetwarzanie informacji na globalnych topologicznych stopniach swobody, odpornych na lokalne 'deformacje' dekoherencyjne. Schematy związanych z tą koncepcją tzw. nieabelowych anyonów [16, 11, 12] są bardzo obiecujące, ale trudne do praktycznej realizacji (kontrolowanie topologicznych stopni swobody, np. w układach hallowskich, czy nadprzewodzących, wydaje się jednak poza zasięgiem obecnej technologii).

Centralną rolę w topologicznych metodach stosowanych w fizyce odgrywa topologia algebraiczna [17], szeroka dziedzina opisująca deformacyjny, a zarazem ciągły charakter odwzorowań w różnych przestrzeniach, o dobrych związkach z pojęciami fizycznymi, jak np. z trajektoriami w przestrzeniach konfiguracyjnych dla różnych przestrzeni fizycznych – rozmaitości, odpowiadających ograniczeniom dynamiki lub warunkom brzegowym, powierzchniami i ich osobliwościami (np. powierzchniami izoenergetycznymi typu powierzchni Fermiego), rozkładami przestrzennymi rozmaitych pól i parametrów porządku, czy defektami ich rozkładów.

Głównym narzędziem topologii algebraicznej są grupy homotopii, a w przypadku przestrzeni konfiguracyjnych układów wielu cząstek nazywane grupami warkoczowymi (są to grupy podstawowe [fundamentalne], czyli pierwsze grupy homotopii π_1 przestrzeni konfiguracyjnych wielocząstkowych układów) [18, 19] Grupy warkoczowe badano intensywnie zwłaszcza od lat 70-tych także w kontekście związanej z nimi teorii węzłów i powiązań [19]. Wiele uwagi w rozwijanej obecnie matematyce jest właśnie kierowane w stronę topologii algebraicznej i jej związków z innymi obszarami matematyki.

Grupy warkoczowe to grupy homotopii π_1 wielocząstkowych przestrzeni konfiguracyjnych. Grupa homotopii π_1 to zbiór (o strukturze grupy) klas topologicznie nieekwiwalentnych trajektorii (tzn. takich, które nie mogą być w sposób ciągły przekształcane wzajemnie na siebie za pomocą deformacji, są one wtedy niehomotopijne)[†]. Okazuje się, że grupy warkoczowe bardzo silnie zależą od rodzaju fizycznej przestrzeni, na których ulokowane są trajektorie cząstek – przestrzenie te nazywane są tu rozmaitościami (np. R^3 – przestrzeń trójwymiarowa, R^2 – płaszczyzna, S^2 – sfera trójwymiarowa, T – torus [odpowiadający w szczególności plakietce prostokątnej z warunkami periodycznymi Borna-Karmana]). Niezwykle zaskakującym jest fakt, że grupy warkoczowe dla płaszczyzny (i dla innych lokalnie 2D rozmaitości, jak sfera czy torus) są skomplikowanymi nieskończonymi

*dekoherencja prowadząca do niekontrolowanej utraty informacji kwantowej jest główną przeszkodą na drodze do zbudowania dużego użytecznego komputera kwantowego [13, 14, 15]

[†]podobnie można rozważać homotopie powierzchni i wyżej wymiarowych hiperpowierzchni, co prowadzi do grup homotopii π_2 , π_3 , itd. [19, 5]

grupami, podczas gdy dla przestrzeni trójwymiarowej (i wyżej wymiarowych) są skończone i równe prostej grupie permutacji. Ta istotna różnica stoi w tle bardzo bogatej fizyki układów dwuwymiarowych, których kwantowe własności, niedostępne w wyższych wymiarach, obserwowane są w ramach eksperymentalnej fizyki płaskich układów hallowskich.

Mimo że od początku badań układów hallowskich (od wczesnych lat 80-tych ubiegłego wieku) było jasne, że to właśnie topologiczna odmienność układów płaskich przejawia się w postaci egzotycznej i bogatej fizyki zwłaszcza w obecności silnych pól magnetycznych, to jednak zidentyfikowanie pełni topologicznych uwarunkowań nie zostało osiągnięte. Przedmiotem przedkładanej pracy jest próba uzupełnienia tego niedostatku. Poprzez oryginalne zdefiniowanie cyklotronowych podgrup warkoczowych, zademonstrowano w pracy odtworzenie korelacji Laughlina w naładowanych wielocząstkowych układach 2D, w silnym prostopadłym polu magnetycznym. W ten sposób, wydaje się, została zidentyfikowana przyczyna egzotycznych dwuwymiarowych korelacji Laughlina, traktowanych dotychczas w kategoriach fenomenologicznych. Wyjaśniona została też prawdziwa natura pomocniczych kwantów strumienia pola doczepianych do cząstek w efektywnych modelach złożonych fermionów, konstruowanych dla ilustracji korelacji Laughlina i dla rozwoju metod obliczeniowych. Podobnie znaleziono topologiczne uwarunkowanie struktury wirów w innych fenomenologicznych modelach złożonych fermionów.

Plan pracy jest następujący. W rozdziale drugim przedstawione są syntetycznie główne aspekty fizyki układów hallowskich i korelacji Laughlina. W następnym rozdziale przedstawiono zarys metod topologicznych i teorii grup warkoczowych. W kolejnym rozdziale zdefiniowane są warkoczowe podgrupy cyklotronowe, zastosowane do zidentyfikowania topologicznego uwarunkowania korelacji Laughlina. W szeregu podrozdziałów przedyskutowane zostały rozmaite aspekty zaproponowanego rozwiązania i formalizmu. We wnioskach podsumowano główną tezę pracy – wyjaśnienie korelacji Laughlina i struktury złożonych fermionów w terminach wielo-pętlowych cyklotronowych warkoczy, pojawiających się w naturalny sposób w płaskich układach w dostatecznie silnym polu magnetycznym. W rozdziale szóstym ulokowano wybrane uzupełnienia i szersze rozwinięcia poruszanych wcześniej zagadnień, jak również opis koncepcji wykorzystania czystych grup warkoczowych do kodowania informacji. W dodatkach zestawione są publikacje autora oraz dołączone są kopie wybranych opublikowanych prac.

Rozdział 2

Elementy fizyki układów hallowskich w przestrzeniach 2D

Jednym z najważniejszych odkryć w fizyce pod koniec XX wieku było zaobserwowanie ułamkowego kwantowego efektu Halla (FQHE, *Fractional Quantum Hall Effect*) w wielocząstkowym układzie naładowanych cząstek ograniczonych do dwuwymiarowej dynamiki i przy obecności silnego prostopadłego pola magnetycznego, odpowiadającego ułamkowym zapelnieniom najniższego poziomu Landaua (LLL, *Lowest Landau Level*, rozdział 6.1) [20]. Ten niezwykle eksperymentalnie wskazał na możliwość realizacji odmiennej mechaniki kwantowej w stosunku do dobrze znanych, fermionowej lub bozonowej, realizacji mechaniki kwantowej w przestrzeniach 3D. Osobliwe zachowanie dwuwymiarowej cieczy elektronowej nie pasowało do schematu całkowitego kwantowego efektu Halla (IQHE, *Integer Quantum Hall Effect*), eksperymentalnie zaobserwowanego wcześniej [21] w układzie 2D i zrozumiałego w terminach zapelnienia kolejnych poziomów Landaua. Dobrze znane wcześniej efekty Shubnikova–de Haasa (w odniesieniu do kwantowania przewodnictwa) i de Haasa–van Alphen (w odniesieniu do kwantowania magnetyzacji*) [22], obserwowane eksperymentalnie głównie w metalach 3D, należą w istocie do tej samej klasy efektów. Zaobserwowanie IQHE w układzie 2D, chociaż analogiczne do efektu Shubnikova–de Haasa, odnosiło się do kwazi-dwuwymiarowego układu, gdzie trzeci kierunek (wzdłuż pola) nie wprowadzał ciągłej zmiennej zamazującej nieco kwantowanie w płaszczyźnie prostopadłej do pola magnetycznego, jak ma to miejsce w układach 3D. Odkrycie FQHE zdecydowanie otworzyło nowe pole fizyki kwantowej, bez żadnej analogii w układach 3D. Zostało ono wyjaśnione przez R. B. Laughlina [23, 24], wkrótce po odkryciu

*efekty polegają na mijaniu powierzchni Fermiego przez dyskretne poziomy Landaua (w wyniku wzrostu ich degeneracji wraz ze wzrostem natężenia pola magnetycznego), co prowadzi do osobliwości magnetyzacji lub przewodnictwa

eksperymentalnym [20], który podał bardzo udaną interpretację obserwowanego efektu w terminach słynnych korelacji kwantowych w 2D wyrażonych przez fałową funkcję Laughlina. Zarówno autorzy eksperymentu odnośnie FQHE (D. C. Tsui i H. L. Störmer), jak i autor właściwego wyjaśnienia efektu (R. B. Laughlin) otrzymali w 1998 roku nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki (wcześniej, za eksperymentalną obserwację IQHE w układzie 2D, nagrodę Nobla otrzymał także K. von Klitzing, w 1985 roku).

Zasadniczym aspektem odkrycia FQHE jest wskazanie na odmienną realizację mechaniki kwantowej w przestrzeni 2D, nie mającej odpowiednika w 3D. Choć oddziaływanie kulombowskie naładowanych cząstek na płaszczyźnie odgrywa bardzo istotną rolę w powstawaniu zjawiska, to jednak oddziaływanie to nie daje się sprowadzić do roli zaburzenia ubierającego cząstki w oddziaływanie w schemacie tworzenia kwazicząstek, dobrze znanych w fizyce fazy skondensowanej w 3D. Specyficzna rola oddziaływania kulombowskiego wyraża się w przypadku 2D poprzez, jak to określił Laughlin, kwantowanie odległości. Element macierzo- wy oddziaływania nie jest funkcją ciągłą odległości wyrażonej przez względny moment pędu par cząstek [24]. Sytuację tę ilustruje przedstawienie oddziaływania w postaci tzw. pseudopotencjałów Haldane'a [25, 26, 27], które wyrażają zrzutowanie oddziaływania na podprzestrzeń względnego momentu pędu par. Funkcja Laughlina rzędu p (dla wypełnienia $\frac{1}{p}$ LLL, gdzie $p = 3, 5, \dots$) okazuje się być dokładnym (nie wariacyjnym) stanem, jeśli ograniczyć się tylko do pseudopotencjałów o momencie pędu co najwyżej $p - 2$ [27]. Te pseudopotencjały odpowiadają blisko-zasięgowej składowej oddziaływania, najistotniejszej dla pojawienia się korelacji Laughlina.

2.1 Funkcja Laughlina

Funkcja Laughlina [23] jest prostym uogólnieniem funkcji Slatera przyjmowanej dla pełnego wypełnienia LLL, czyli dla $p = 1$, wtedy żaden z pseudopotencjałów Haldane'a nie odgrywa roli (ponieważ $p - 2 < 0$) i funkcja nieoddziałujących fermionów w polu magnetycznym jest dokładnym rozwiązaniem – ma postać wielomianu Vandermonde'a z gaussowskim czynnikiem eksponencjalnym [28]:

$$\Psi_S(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i,j=1, i>j}^N (z_i - z_j) e^{-\sum_{i=1}^N \frac{|z_i|^2}{4l^2}}, \quad (2.1)$$

gdzie, $z_i = x_i + iy_i$ jest zespoloną reprezentacją położenia i -tej cząstki na płaszczyźnie, $l = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$ to 'magnetyczna' skala odległości (długość magnetyczna).

Funkcja Laughlina ma następującą postać:

$$\Psi_L(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i,j=1, i>j}^N (z_i - z_j)^p e^{-\sum_{i=1}^N \frac{|z_i|^2}{4l^2}}. \quad (2.2)$$

Funkcja Laughlina, podobnie jak Slatera, jest funkcją antysymetryczną, jednakże w odróżnieniu od funkcji Slatera, przy zamianie pary cząstek na płaszczyźnie uzyskuje przesunięcie fazowe $p\pi$, a nie π jak funkcja Slatera i chociaż $e^{ip\pi} = e^{i\pi} = -1$, to czynnik w wykładniku p oznacza właśnie korelacje Laughlina. Czynnik w funkcji Laughlina, $\prod_{i,j=1,i>j}^N (z_i - z_j)^p$, jest wielomianem Jastrowa, a jego mnożniki, $(z_i - z_j)^p$, interpretowane mogą być jako p -krotne zero, gdy $z_i = z_j$ (określane tutaj jako 'przyypinanie p -krotnych zer' do cząstek [29]).

Funkcja Laughlina jest zgadnięta i nie są podane argumenty wskazujące dlaczego dla wypełnienia $\frac{1}{p}$ występują korelacje wyrażone przez czynnik Jastrowa[†], $\prod_{i,j=1,i>j}^N (z_i - z_j)^p$. Wydaje się jednak, że istnieje przyczyna korelacji Laughlina o charakterze topologicznym, charakterystyczna dla topologii 2D, ale nie występująca w 3D (i w wyższych wymiarach). Celem przedstawianej pracy jest zidentyfikowanie tej przyczyny i odtworzenie korelacji Laughlina na podstawie topologicznych, głębiej ulokowanych przesłanek.

2.2 Złożone fermiony

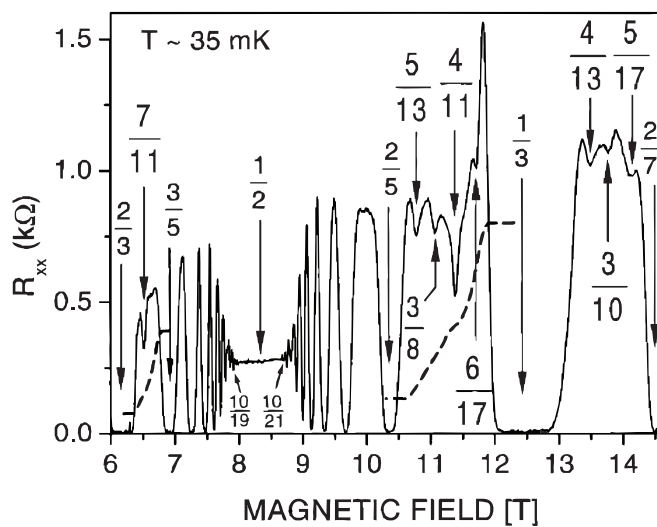
2.2.1 Złożone fermiony w modelu Jaina

Przesunięcie fazowe, $p\pi$, funkcji Laughlina przy zamianie cząstek na płaszczyźnie zostało ujęte w fenomenologicznym modelu złożonych fermionów [30, 31, 32], czyli fermionów z doczepionymi do każdej cząstki lokalnymi strumieniami pola magnetycznego. Jeśli przyjąć zgodnie z założeniem Jaina, że lokalny strumień pola wynosi parzystą liczbę q kwantów strumienia, $\frac{hc}{e}$, to przy zamianie cząstek z doczepionymi strumieniami otrzymujemy, na zasadzie efektu Aharonova Bohma [6, 33], przesunięcie fazowe $(q + 1)\pi$, co odpowiada wymogom korelacji Laughlina. Pomocnicza konstrukcja fikcyjnych strumieni jest bardzo użyteczna, w szczególności pozwala na odtworzenie głównego ciągu tzw. hierarchii obsadzeń LLL, przy których manifestuje się FQHE [30]. Hierarchię tę łatwo dostrzec, gdy uwzględnić, że lokalne strumienie złożonych fermionów mogą w uśrednionym polu zredukować zewnętrzne pole magnetyczne, doprowadzając do IQHE w zmniejszonym polu. Takie stany IQHE w zredukowanym polu odpowiadają kolejnym wypełnionym całkowicie poziomom Landaua i mogą być interpretowane jako nieściśliwe (z uwagi na przerwę energetyczną między kolejnymi całkowicie wypełnionymi poziomami Landaua w efektywnym polu[‡]) stany FQHE o wypełnieniach LLL, $\nu = \frac{n}{2n \pm 1}$ (znak \pm odpowiada dwóm możliwym orientacjom pola efektywnego względem pola zewnętrznego, n odpowiada numerowi wypełnionego

[†]odwrotnie, pokazane jest, że funkcja Laughlina stopnia p odpowiada wypełnieniu $\frac{1}{p}$; dowód opiera się na podobieństwie kwadratu modułu funkcji Laughlina z równowagowym rozkładem termodynamicznym naładowanych cząstek na tle o gęstości ładunku skorelowanej z $\frac{1}{p}$ [24]; jest to wyraz roli oddziaływania kulombowskiego w przypadku kreowania stanów Laughlina

[‡]zmniejszenie powierzchni próbki prowadziłoby do zwiększenia gęstości cząstek i ekranującego pola, co zablokowane jest przez szczelinę energetyczną

poziomu Landaua w efektywnym polu). Ten bardzo klarowny model sprowadza FQHE do oscylacji Shubnikova–de Haasa [34] w polu resztkowym względem pola odpowiadającemu wypełnieniu $\nu = \frac{1}{2}$, w którym następuje całkowita redukcja zewnętrznego pola przez uśrednione pole strumieni (dla przypadku $p = 3$) do zera[§]. Metal Halla i stany z hierarchii FQHE (w pobliżu metalu Halla), które można interpretować w terminach oscylacji Shubnikova–de Haasa, obserwowane są eksperymentalnie z coraz większą precyzją[¶], co wyraźnie widać na załączonym rysunku (Rys.2.1) z pracy [35].



Rys. 2.1. Osobliwości przewodnictwa Halla w reżimie FQHE w studni kwantowej GaAs/AlGaAs o gęstości elektronów 10^{11} cm^{-2} . R_{xx} w obszarze $\frac{2}{3} > \nu > \frac{2}{7}$ w temperaturze $T \sim 35 \text{ mK}$. Główne ułamki zaznaczone strzałkami. Opór Halla R_{xy} w obszarze $\nu = \frac{7}{11}$ oraz $\nu = \frac{4}{11}$ oznaczony przerywaną linią. Źródło: W. Pan, H. L. Störmer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, “Fractional quantum Hall effect of composite fermions,” *Phys. Rev. Lett.* 90, p. 016801, 2003

2.2.2 Złożone fermiony w modelu Reada

Odmienne podejście do złożonych cząstek (w szczególności złożonych fermionów) zostało sformułowane później przy użyciu kolektywnego obiektu – wiru, doczepionego do cząstek [29, 36, 37]. Wiry zostały zaproponowane w analogii do wirów w cieczy nadciekłej w ujęciu funkcjonału Ginzburga-Landaua i zastosowane do

[§]dla $\nu = \frac{1}{2}$ otrzymuje się zatem efektywne zerowe pole magnetyczne, mimo silnego zewnętrznego pola, i co za tym idzie stan cieczy Fermiego, nazywany w tym przypadku metalem Halla; sytuacja powtarza się i dla innych obsadzeń z większym parzystym mianownikiem oraz z większą wtedy liczbą kwantów strumienia doczepionych do cząstek

[¶]nawet w stosunkowo słabszych polach magnetycznych ($\sim 10 \text{ T}$), w porównaniu z wcześniejszymi eksperymentami ($\sim 20 \text{ T}$), dla coraz lepszych próbek o wysokiej koncentracji nośników i ich ruchliwości

opisu FQHE [38]. Elementarny wir z centrum w punkcie z na płaszczyźnie, został zdefiniowany jako [29]:

$$V(z) = \prod_{j=1}^N (z_j - z), \quad (2.3)$$

natomiast wir o wirowości q , z centrum w z , jako:

$$V'(z) = \prod_{j=1}^N (z_j - z)^q. \quad (2.4)$$

Doczepianie wirów do cząstek interpretowane jest jako zamiana z na z_i ($i \neq j$) i dołączenie indeksu i do iloczynu – w wyniku otrzymujemy:

$$V(z) = \prod_{i,j=1, i>j}^N (z_j - z_i) \quad (2.5)$$

oraz

$$V'(z) = \prod_{i,j=1, i>j}^N (z_j - z_i)^q, \quad (2.6)$$

odpowiednio dla elementarnych wirów i wirów o wirowości q . W wyrażeniach (2.5) i (2.6) rozpoznajemy odpowiednio wielomiany Vandermonde'a i Jastrowa. Można zatem oczekiwać, że wiry dobrze oddadzą specyfikę korelacji Laughlina, gdyż są w istocie czynnikami składającymi się na funkcję Laughlina. Należy podkreślić, że wiry zawierają w swojej definicji nie tylko element fazowy (wyrażony przez wirowość i równoważny z przesunięciem fazowym w wyniku zlokalizowanych strumieni magnetycznych w modelu Jaina), ale także zawierają radialną zależność funkcji Laughlina (poprzez wielomian Jastrowa) związaną z minimalizacją energii kulombowskiej (wyrażoną w terminach pseudopotencjałów Haldane'a). Pojęcie wirów Reada (*vortices*) okazało się jednak bardzo użyteczne, z uwagi na dostrzeżenie wyjątkowych własności wirów, w szczególności, rozrzedzenia lokalnej gęstości ładunku, i w ten sposób ekranowania (przez dodatni ładunek *jellium*) ładunku złożonej cząstki, oraz możliwości modyfikowania struktury wiru przez przesuwanie jego centrum w stosunku do związanego z nim elektronu. Ta ostatnia możliwość znalazła zastosowanie przy modelowaniu innej niż laughlinowska, funkcji stanu, np. dla zapelnienia $\nu = \frac{5}{2}$ w postaci tzw. Pfaffianu^{||}, kiedy sparowanie fermionów typu BCS (wyrażone w przestrzeni położeń właśnie przez Pfaffian, rozdział 6.3) nastąpiło w wyniku niestabilności morza Fermiego na przyciąganie [22] (takie przyciąganie złożonych fermionów uzyskać można poprzez deformację wiru [29, 42, 43, 44, 45], dodać należy jednak, że niestabilność normalnej cieczy Fermiego w 2D może mieć inny charakter niż w 3D [46]).

Własności wirów Reada zebrać można w następujący sposób:

^{||} także prawdopodobne dla $\nu = \frac{1}{2}$ lub $\frac{1}{4}$, gdzie zgodnie z ostatnimi doniesieniami eksperymentalnymi [39, 40, 36, 41] obserwuje się nieściśliwe stany związane z przerwą energetyczną wynikłą ze sparowania

- wirowość jest ustalona przez q w wyrażeniu (2.4), tj., jeśli zatoczyć dowolną cząstką j zamkniętą pętlę wokół centrum wiru, wtedy uzyskuje się przesunięcie fazowe $2\pi q$,
- wir powoduje rozrzedzenie lokalnego ładunku, co związane jest z kulombowską separacją na małych odległościach (wyższa wirowość odzwierciedla szybsze dążenie do zera czynnika Jastrowa, czyli 'redukcję' bliskich odległości); w wyniku następuje ekranowanie ładunku elektronu przez dodatni jednorodny ładunek tła (*jellium*), niezrównoważony lokalnie przez rozrzedzenie wiru; dla wirowości q ładunek dodatni wywołany przez rozrzedzenie wiru wynosi $-q\nu e$ [29] (dla $\nu = 1/q$ wynosi zatem $-e$, co powoduje całkowite ekranowanie ładunku elektronu; wówczas, kompleksy elektronów z wirami zachowują się jak neutralne cząstki),
- jeśli zamienić ze sobą dwa wiry, to uzyskuje się przesunięcie fazowe $q^2\nu\pi$, (z powodu deficytu ładunku w wirze [29]), które w przypadku $\nu = \frac{1}{q}$ wynosi $q\pi$; dla wirów o wirowości q , razem ze związanymi z nimi elektronami (elektrony dodają ładunek e do kompleksów i produkują dodatkowe przesunięcie fazowe π przy zamianach kompleksów) kompleksy elektronów z wirami zachowują się jak złożone bozony z zerowym ładunkiem efektywnym w przypadku nieparzystych q i jak złożone fermiony, w przypadku parzystych q ; te nienaładowane efektywne bozony mogą kondensować w kondensacie Bosego-Einsteina, co reprodukuje dokładnie postać funkcji Laughlina dla nieparzystych q [47], podczas gdy dla parzystych q mamy do czynienia z morzem Fermiego efektywnych nienaładowanych fermionów – co można identyfikować z metalem Halla [38, 43, 44].

Głównym aspektem wirów jest ich kolektywny charakter – w definicji wiru uwzględnione są wszystkie cząstki, które kolektywnie tworzą wir. Zatem nie jest to (w przeciwieństwie do zlokalizowanych kwantów strumieni Jaina [*flux tubes* o idealizowanej zerowej średnicy]) konstrukcja lokalna. Jest jednak bardzo użyteczna do interpretacji korelacji Laughlina z powodu wygodnego efektu rozrzedzania gęstości ładunku w wirze, będącego w istocie przejawem zmniejszenia gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstek blisko siebie w wyniku 'doczepiania zer' do cząstek przez czynnik Jastrowa (im wyższa potęga p czynników w wielomianie Jastrowa, $\prod_{i>j}^N (z_i - z_j)^p$, tym szybciej zdążają one do zera przy zbliżaniu argumentów).

Obydwa podejścia, Jaina i Reada, do złożonych cząstek, choć bardzo efektywne, są całkowicie fenomenologiczne, tzn., dostosowują swoją postać – liczbę doczepionych kwantów strumienia (w przypadku złożonych fermionów Jaina) lub wirowość (w przypadku wirów Reada) – do znanej wcześniej funkcji Laughlina. W ten sposób raczej ilustrują, a nie wyjaśniają przyczyny korelacji Laughlina. Dodać można jeszcze, że w przypadku konstrukcji Jaina pomocnicze strumienie

doczepiane w celu uzyskania odpowiedniego przesunięcia fazowego przy zamianie cząstek z doczepionymi strumieniami, na zasadzie efektu Aharonova-Bohma, mają czysto modelowy charakter i strumienie te nie istnieją w rzeczywistości. Z pewnością jednak te modelowe strumienie ilustrują inny fakt, bardziej realny i ulokowany w topologicznej strukturze korelacji Laughlina. Zidentyfikowanie realnej przyczyny tych korelacji – co jest przedmiotem tej pracy – stanowi zatem wyjaśnienie modelowej natury kwantów strumienia doczepianych do cząstek w przypadku złożonych fermionów.

2.2.3 Lokalne transformacje cechowania odpowiadające strumieniom Jaina i wirom Reada w konstrukcjach złożonych fermionów

Wszystkie własności wirów Reada i nieskończenie cienkich strumieni Jaina można ująć razem przy pomocy formalnej lokalnej transformacji cechowania [47, 48] zastosowanej do wyjściowych fermionów. Jeśli zdefiniować wyjściowe fermiony przy pomocy operatora pola ($\Psi(\mathbf{x})$ dla anihilacji fermionu w punkcie \mathbf{x} i $\Psi^+(\mathbf{x})$ dla kreacji), to złożone bozony lub złożone fermiony można zdefiniować następująco,

$$\Phi(\mathbf{x}) = e^{-J(\mathbf{x})}\Psi(\mathbf{x}), \quad \Theta(\mathbf{x}) = \Psi^+(\mathbf{x})e^{J(\mathbf{x})}, \quad (2.7)$$

gdzie: $J(\mathbf{x}) = q \int d^2x' \rho(\mathbf{x}') \log(z - z') - \frac{|z|^2}{4l^2}$, i e^{-J} odpowiada nieunitarnej transformacji cechowania opisującej doczepianie wirów Reada (lub strumieni Jaina) do wyjściowych fermionów opisanych przez $\Psi(\mathbf{x})$ i $\Psi^+(\mathbf{x})$ (odpowiednio dla operatorów anihilacji i kreacji).

Jeśli wydzielić z wyrażenia na $J(\mathbf{x})$ tylko jego urojoną część (tj., tylko uwzględnić urojoną część \log), to otrzymujemy hermitowskie pole Cherna-Simonsa**. To hermitowskie pole Cherna-Simonsa odpowiada ściśle ubieraniu fermionów w lokalne strumienie [53]. Operatory pola $\Phi(\mathbf{x})$ oraz $\Theta(\mathbf{x})$, $\Phi^+(\mathbf{x}) = \Theta(\mathbf{x})e^{J(\mathbf{x})+J^+(\mathbf{x})}$, chociaż nie są wzajemnie sprzężone (są idealnie sprzężone w przypadku hermitowskiego pola Cherna-Simonsa) opisują ogólnie złożone bozony (dla q nieparzystego) oraz złożone fermiony (dla q parzystego), co łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem reguł komutacyjnych [47]. W ramach przybliżenia średniego pola [47] istotne jest zauważyć, że w tym przybliżeniu rzeczywista część J znika, ponieważ rzeczywista część \log jest redukowana przez Gaussian, podczas gdy hermitowskie pole Cherna-Simonsa jest redukowane przez zewnętrzne pole magnetyczne. Z relacji $e^{q \sum_j \log(z - z_j)} = \prod_j^N (z - z_j)^q$ (dla operatora gęstości $\rho(\mathbf{x}) = \Psi^+(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) \implies \sum_{j=1}^N \delta(z - z_j)$), co koresponduje z definicją wiru Reada, można oczekiwać, że równanie (2.7) będzie reprodukowało wszystkie własności wi-

**teoria pól Cherna-Simonsa jest dobrze rozwinięta w ramach kwantowej teorii pola, w tym przypadku hiralnego pola [49, 50] zarówno w 3D jak i w 2D; dla 2D pola Cherna-Simonsa okazały się przydatne do formalnego i efektywnego obliczeniowo doczepiania lokalnych strumieni do cząstek i zmiany statystyki [51, 52], co zostało szeroko wykorzystane do transmutacji (zmiany) statystyki w 2D oraz modelowania anyonów i złożonych fermionów [32, 52]

rów. Nie dostarcza to jednak wyjaśnienia przyczyn konkretnej wirowości, a podaje raczej elegancką formę zapisu, przydatną dla rachunkowych celów.

Transformacja (2.7) (i związany z nią obraz wirów) pozwala na interpretację stanów Laughlina jako kondensatów Bosego-Einsteina złożonych bozonów, w przypadku zapelnień LLL, $\nu = \frac{1}{q}$, q —nieparzyste, [29, 47, 53], ale również ściślejszego (nie zablokowanego szczeliną) morza Fermiego dla q —parzyste, [54, 43, 44] (to ostatnie niestabilne na sparowanie BCS) [42, 55, 22], w pełnej zgodności z przedstawionymi poprzednio interpretacjami korelacji Laughlina poprzez wiry Reada.

Specyficzny charakter wirów jest wyjątkowo jasno widoczny w przypadku $\nu = 1$. Wiry postaci (2.3) doczepione do elektronów w układzie prowadzą do czynnika Vandermonde'a (tzn. wielomianu Jastrowa z $q = 1$). W tym przypadku odpowiedni stan Laughlina przyjmuje postać funkcji Slatera dla N *nieoddziałujących* fermionów, co jednak – równie efektywnie – może być opisane przez kondensat złożonych bozonów [56], zdefiniowanych przy pomocy transformacji (2.7) dla $q = 1$ (jest bardzo interesujące, że całe działanie pola magnetycznego na fermiony zostało zastąpione przez kondensację Bosego-Einsteina nieczułych na pole, nienaładowanych złożonych bozonów). Oddziaływanie Coulomba nie wnosi tu wkładu, gdyż w przypadku $\nu = 1$ pseudopotencjał Haldane'a [57, 27] (tj. istotna, krótko zasięgowa część oddziaływania kulombowskiego, decydująca o wyborze postaci funkcji Laughlina) jest równy zeru (gdyż $q - 2 < 0$, dla $q = 1$) i dlatego funkcja Slatera dla *nieoddziałujących* cząstek jest odpowiednia jako stan własny hamiltonianu dla oddziałujących cząstek dla $\nu = 1$.

Rozdział 3

Topologiczne metody opisu układów wielu cząstek na różnych rozmaitościach

3.1 Grupy warkoczowe

Narzędziem pozwalającym ująć topologiczne charakterystyki układów wielu cząstek w przestrzeniach o różnym wymiarze i na różnych rozmaitościach (w tym ograniczonych i wielospójnych) jest topologia algebraiczna [17], która w języku homotopii (wyrażających topologiczne własności ciągłych deformacji trajektorii) oddaje zawilosci trajektorii wielu cząstek. Grupa podstawowa (fundamentalna) dla danej przestrzeni D , czyli pierwsza grupa homotopii tej przestrzeni (rozdział 6) oznaczana przez $\pi_1(D)$, to zbiór klas nieekwiwalentnych topologicznie (niehomotopijnych) trajektorii w przestrzeni D . Jeśli tą przestrzenią jest przestrzeń konfiguracyjna układu N cząstek, z których każda realizuje swoją trajektorie na rozmaitości M , to odpowiednia grupa homotopii π_1 nazywana jest grupą warkoczową. Przestrzeń konfiguracyjna dla N identycznych cząstek zlokalizowanych na rozmaitości M (np. R^n , lub rozmaitości ograniczonej, jak sfera czy torus) zdefiniowana jest następująco: $Q_N(M) = (M^N \setminus \Delta)/S_N$, dla nierozróżnialnych identycznych cząstek oraz: $F_N(M) = M^N \setminus \Delta$, dla rozróżnialnych identycznych cząstek; M^N jest N -krotnym iloczynem kartezjańskim rozmaitości M , Δ jest zbiorem punktów diagonalnych (gdzie współrzędne dwóch lub większej liczby cząstek są identyczne), który należy odjąć w celu zapewnienia zachowania liczby cząstek w układzie, S_N jest grupą permutacji – struktura ilorazowa została wprowadzona w celu uwzględnienia nierozróżnialności kwantowych cząstek. Warto zauważyć, że nierozróżnialność cząstek została tutaj wprowadzona sztucznie poprzez defi-

nicję przestrzeni konfiguracyjnej, co wskazuje, że ta własność jest niezależna od kwantowych zasad nieoznaczoności.

Grupa warkoczowa to pierwsza grupa homotopii [17, 5], π_1 , dla przestrzeni konfiguracyjnej układu N cząstek. Elementami $\pi_1(A)$ są topologicznie nieekwiwalentne klasy zamkniętych trajektorii w przestrzeni A . W przypadku układu N cząstek, A jest odpowiednią przestrzenią konfiguracyjną. Grupy warkoczowe przedstawiają jedynie możliwy klasyczny ruch układu N cząstek (nie odnosząc się do konkretnej dynamiki), natomiast kwantyzacja przeprowadzana jest przy wykorzystaniu unitarnych reprezentacji klasycznych trajektorii warkoczowych, w ramach formalizmu Feynmana całek po trajektoriach, tak jak zaprezentowano to w kolejnych rozdziałach.

Dla zdefiniowanych wyżej przestrzeni konfiguracyjnych, dla nieodróżnialnych i odróżnialnych jednakowych cząstek, definiuje się dwa rodzaje grup warkoczowych [19]: pełną grupę warkoczową

$$\pi_1(Q_N(M)) = \pi_1(M^N \setminus \Delta)/S_N, \quad (3.1)$$

oraz czystą grupę warkoczową

$$\pi_1(F_N(M)) = \pi_1(M^N \setminus \Delta). \quad (3.2)$$

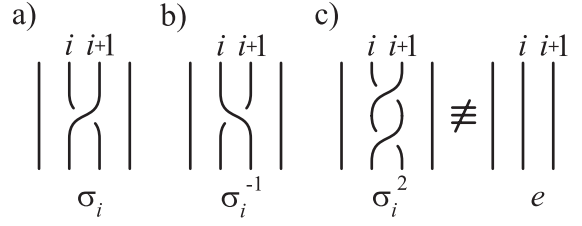
3.1.1 Pełna grupa warkoczowa dla R^3 , R^2 , sfery S^2 i torusa T

Dla $M = R^n$, $n > 2$, grupa warkoczowa posiada prostą strukturę. Pełna grupa warkoczowa, dla $n > 2$ jest równa grupie permutacji S_N (grupa ta jest skończona, rzędu $N!$). Dla $M = R^2$ (oraz dla ograniczonych, lokalnie dwuwymiarowych rozmaitości, takich jak sfera czy torus w trzech wymiarach) grupy warkoczowe są grupami nieskończonymi o wysoce nietrywialnych strukturach.

Wygodnie jest przedstawić strukturę grup warkoczowych dla płaszczyzny (R^2) poprzez prostą prezentację graficzną wykorzystując tzw. geometryczne warkocze [19, 58], Rys. 3.1. Na tym rysunku przedstawione zostały: a) geometryczny warkocz odpowiadający generatorowi σ_i pełnej grupy warkoczowej (zamiana ścieżek i -tej z $(i+1)$ -szą reprezentujących trajektorie cząstek), b) geometryczny warkocz odpowiadający odwrotnemu elementowi do generatora, σ_i^{-1} , c) geometryczny warkocz kwadratu generatora (σ_i)² $\neq e$ (e - element neutralny grupy). W trzech wymiarach zachodzi $(\sigma_i)^2 = e$, natomiast w dwóch wymiarach $(\sigma_i)^2 \neq e$ i to jest powodem złożoności (typu nieskończonego) struktury warkoczy dla dwuwymiarowych rozmaitości.

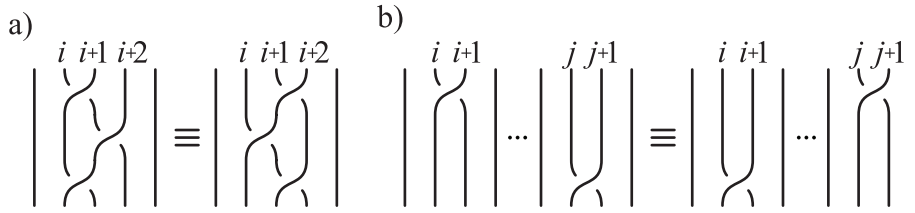
Można wymienić formalne warunki nałożone na generatory σ_i , $i = 1, \dots, N-1$, w celu kompletnego zdefiniowania pełnej grupy warkoczowej w sposób abstrakcyjny [18, 19]. Warunki te zostały zapisane poniżej, a odpowiadające im geometryczne warkocze zostały przedstawione na Rys. 3.2, odpowiednio a, b:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \text{dla } 1 \leq i \leq N-2, \quad (3.3)$$



Rys. 3.1. Prezentacja geometryczna warkoczy dla B_N (tradycyjne [18] oznaczenie pełnej grupy warkoczowej dla rozmaitości R^2): generator σ_i (a) oraz jego element odwrotny, σ_i^{-1} (b); kwadrat generatora σ_i^2 (c)

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i. \quad \text{dla } 1 \leq i, j \leq N-1, |i-j| \geq 2. \quad (3.4)$$



Rys. 3.2. Formalne warunki nałożone na generatory, definiujące pełną grupę warkoczową dla R^2 (a – równanie 3.3 oraz b – równanie 3.4)

W przypadku sfery S^2 pojawia się dodatkowy warunek (oprócz warunków identycznych jak dla grupy B_N) nałożony na generatory [19],

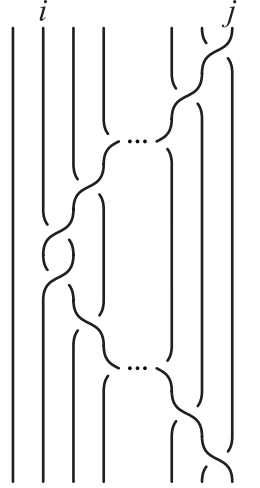
$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_{n-2} \cdot \sigma_{n-1}^2 \cdot \sigma_{n-2} \cdot \dots \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 = e, \quad (3.5)$$

który odzwierciedla fakt, że na sferze pętla zatoczona przez wybraną cząstkę wokół wszystkich pozostałych cząstek jest homotopijna z punktem. Dla torusa T dodatkowe relacje [59] odpowiadają dwóm nieekwiwalentnym trajektoriom dostępnym dla każdej cząstki na tej niejednospójnej rozmaitości [58, 60].

3.1.2 Czyste grupy warkoczowe

Początkowe ustawienie cząstek nie musi być zachowane w przypadku warkoczy z pełnej grupy warkoczowej (cząstki są nierozróżnialne), natomiast dla warkoczy z czystej grupy warkoczowej (kiedy cząstki są rozróżnialne) początkowe ustawienie cząstek pozostaje niezmiennione. Generatory l_{ij} czystej grupy warkoczowej (Rys. 2.3) [19] odpowiadają podwójnej zamianie par cząstek, i, j , bez jakiegokolwiek permutacji ich początkowego ustawienia i można je przedstawić za pomocą generatorów σ_i :

$$l_{ij} = \sigma_{j-1} \cdot \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i^2 \cdot \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \cdot \sigma_{j-1}^{-1}, \quad 1 \geq i \geq j \geq N-1. \quad (3.6)$$



Rys. 3.3. Generator l_{ij} czystej grupy warkoczowej

Czysta grupa warkoczowa jest zatem podgrupą pełnej grupy, ponieważ generatory l_{ij} można wyrazić za pomocą generatorów σ_i . Generatory czystej grupy warkoczowej generowane są przez następujące relacje [19, 58]:

$$l_{rs}^{-1} \cdot l_{ij} \cdot l_{rs} = \begin{cases} l_{ij}, & i < r < s < j \\ l_{ij}, & r < s < i < j \\ l_{rj} \cdot l_{ij} \cdot l_{rj}^{-1}, & r < i = s < j \\ l_{rj} \cdot l_{sj} \cdot l_{ij} \cdot l_{sj}^{-1} \cdot l_{rj}^{-1}, & i = r < s < j \\ l_{rj} \cdot l_{sj} \cdot l_{rj}^{-1} \cdot l_{sj}^{-1} \cdot l_{ij} \cdot l_{sj} \cdot l_{rj} \cdot l_{sj}^{-1} \cdot l_{rj}^{-1}, & r < i < s < j. \end{cases} \quad (3.7)$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że powiązanie pomiędzy pełną grupą warkoczową oraz czystą grupą warkoczową wyraża się przez strukturę ilorazową [19], $B_N/\pi_1(F_N(R^2)) = S_N$ (B_N jest oznaczeniem dla pełnej grupy warkoczowej dla płaszczyzny) [18].

3.2 Całki Feynmana po trajektoriach i związek z jednowymiarowymi unitarnymi reprezentacjami pełnej grupy warkoczowej

Kwantowanie układu N nierozróżnialnych, jednakowych cząstek można przeprowadzić wykorzystując formalizm Feynmana całkowania po trajektoriach [61, 62, 63, 64]. W wyniku zastosowania tego formalizmu uzyskuje się wyrażenie – propagator (prawdopodobieństwo przejścia układu z punktu a , w chwili t_1 , do punktu b , w chwili t_2 , w przestrzeni konfiguracyjnej) postaci:

$$I_{a \rightarrow b} = \int d\lambda e^{iS[\lambda_{a,b}]/\hbar}, \quad (3.8)$$

gdzie $S[\lambda_{a,b}]$ jest klasycznym działaniem dla trajektorii $\lambda_{a,b}$ w klasycznej przestrzeni konfiguracyjnej N -cząstkowego układu, $d\lambda$ jest miarą w przestrzeni trajektorii. Do każdej trajektorii łączącej punkty a i b w przestrzeni konfiguracyjnej N -cząstkowego układu, można dołączyć jednak dodatkowe zamknięte pętle, które są elementami pełnej grupy warkoczowej. Wynikające z tego dołączenia trajektorie trafiają do topologicznie rozłącznych klas, które reprezentowane są przez elementy pełnej grupy warkoczowej (zawiera ona zamknięte trajektorie). W związku z tym do wzoru na całkowanie po trajektoriach wprowadza się [65, 33, 66] dodatkowy czynnik unitarny (waga odpowiadająca danej klasie trajektorii) oraz dodatkowe sumowanie po elementach grupy warkoczowej (ponieważ każdy element pełnej grupy warkoczowej może zostać przyłączony do bezpętlowej prostej trajektorii $\lambda_{a,b}$):

$$I_{a \rightarrow b} = \sum_{l \in \pi_1} e^{i\alpha_l} \int d\lambda_l e^{iS[\lambda_{l(a,b)}]/\hbar}, \quad (3.9)$$

π_1 oznacza tutaj pełną grupę warkoczową. Czynniki $e^{i\alpha_l}$ tworzą jednowymiarową unitarną reprezentację pełnej grupy warkoczowej [65]. Odmienne reprezentacje odpowiadają odmiennym typom kwantowych cząstek związanych z tymi samymi cząstkami klasycznymi. Warto zwrócić uwagę na fakt, że do całki po trajektoriach dają wkład wszystkie możliwe trajektorie, niezależnie od obecności pól czy innych fizycznych uwarunkowań – ale tylko w przypadku gdy dane trajektorie nie są wykluczone, tak jak ma to miejsce w silnych polach magnetycznych dla dwuwymiarowych naładowanych cząstek, co zostanie omówione poniżej.

Klasyczne trajektorie z pełnej grupy warkoczowej nie posiadają kwantowej interpretacji. Kwantowe cząstki nie przemierzają żadnych trajektorii warkoczowych, ponieważ w sensie kwantowym cząstki nie posiadają w ogóle jakichkolwiek trajektorii. Zgodnie z ogólnymi regułami kwantowania [67, 68], N -cząstkowa funkcja falowa musi jednak transformować się zgodnie z jednowymiarową unitarną reprezentacją odpowiedniego elementu grupy warkoczowej, jeśli cząstki klasycznie przemierzają zamkniętą trajektorię w przestrzeni konfiguracyjnej układu N -cząstkowego odpowiadającą temu elementowi warkoczowemu (jest to zamiana argumentów N -cząstkowej funkcji falowej, która w przypadku 2D nie sprowadza się do prostej permutacji). W związku z tym, że warkocze z pełnej grupy warkoczowej opisują zamiany cząstek, więc odpowiadające tym zamianom jednowymiarowe unitarne reprezentacje to statystyczne czynniki fazowe.

3.3 Bozony, fermiony, anyony i złożone cząstki

3.3.1 Anyony na płaszczyźnie, sferze i torusie

Dla S_N , która jest pełną grupą warkoczową dla trójwymiarowych rozmaitości (lub więcej wymiarowych), istnieją tylko dwie różne jednowymiarowe unitarne

reprezentacje (1DUR),

$$\sigma_i \rightarrow \begin{cases} e^{i\theta}, \\ e^{i\pi}, \end{cases} \quad (3.10)$$

odpowiadające bozonom i fermionom (co wyraża się poprzez symetryczność i antysymetryczność odpowiednich funkcji falowych, ponieważ grupa warkoczowa jest w tym przypadku prostą grupą permutacji). Dla dwuwymiarowej przestrzeni (płaszczyzny), grupa warkoczowa (strukturalnie bogatsza niż S_N) posiada nieskończoną liczbę jednowymiarowych unitarnych reprezentacji [58, 69], zapisanych dla generatorów grupy jako $\sigma_i \rightarrow e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, gdzie θ numeruje różne typy tzw. anyonów [23, 24, 9, 33, 66, 11]. Warto zwrócić uwagę na fakt, że elementy jednowymiarowych unitarnych reprezentacji pełnej grupy warkoczowej nie zależą od indeksu i (generatora σ_i) w wyniku istnienia warunku nałożonego na generatory. W związku z tym, że elementy 1DUR komutują, można zapisać (korzystając z warunku (3.3) na generatory pełnej grupy warkoczowej B_N) $e^{i\theta_i} = e^{i\theta_{i+1}}$, gdzie $\sigma_i \rightarrow e^{i\theta_i}$, co daje niezależność od indeksu i elementów 1DUR.

Dla sfery S^2 jednowymiarowe unitarne reprezentacje mają postać [58, 69], $e^{i\theta}$, gdzie $\theta = k\pi/(N-1)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2N-3$. Ciekawym faktem jest to, że dla dwóch cząstek na sferze (czyli dla $N = 2$, $k = 0, 1$) dostępna jest tylko statystyka bozonowa lub fermionowa (wynika to bezpośrednio z równania (3.5)), a anyony mogą pojawić się na sferze dopiero dla przynajmniej 3 cząstek. W przypadku torusa T , dla dowolnej liczby N cząstek, tylko $\theta = 0$ lub π są dopuszczone [69, 59] – dlatego na torusie *nie istnieją* anyony oprócz fermionów i bozonów. Ten ostatni rezultat został rozszerzony [69] i dotyczy wszystkich ograniczonych, lokalnie dwuwymiarowych rozmaitości z wyłączeniem sfery.

3.3.2 Statystyki kwantowe i grupy warkoczowe

Jak wspomniano wcześniej unitarne reprezentacje, w szczególności jednowymiarowe unitarne reprezentacje pełnej grupy warkoczowej, służą do identyfikacji różnych rodzajów kwantowych cząstek, które odpowiadają temu samemu rodzajowi cząstek klasycznych [33, 66].

Warto ponownie podkreślić, że dla grupy permutacji S_N , która jest pełną grupą warkoczową dla R^n , $n \geq 3$, istnieją tylko dwie różne jednowymiarowe unitarne reprezentacje: $\sigma_i \rightarrow e^{i\pi}$ lub $\sigma_i \rightarrow e^{i0}$, (σ_i – zamiana cząstek i -tej z $i+1$ -szą) odpowiadające fermionom i bozonom. Dla R^2 , w związku ze znacznie bogatszą strukturą grupy warkoczowej, mamy do czynienia z nieskończoną liczbą różnych jednowymiarowych unitarnych reprezentacji odpowiadających nieskończonej liczbie różnych kwantowych realizacji tego samego układu klasycznego – anyonów (abelowych, ponieważ jednowymiarowe unitarne reprezentacje komutują).

Bardzo istotne jest zauważyć, że periodyczność z okresem 2π czynnika $e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ uniemożliwia statystyczne rozróżnienie złożonych fermionów od zwykłych fermionów przy użyciu jednowymiarowych unitarnych reprezentacji pełnej grupy

warkoczowej. W celu pokonania tej pozornej przeszkody proponujemy powiązać złożone fermiony z jednowymiarowymi unitarnymi reprezentacjami odpowiednio skonstruowanych podgrup grup warkoczowych zamiast pełnej grupy warkoczowej i w ten sposób wprowadzić możliwość rozróżnienia złożonych fermionów i zwykłych fermionów.

Warto podkreślić, że anyony mogą być rozważane jako 'dwu-wymiarowe' kwantowe cząstki tylko przy braku obecności pola magnetycznego, ponieważ ich trajektorie warkoczowe były wybierane z grupy warkoczowej bez uwzględnienia jakichkolwiek modyfikacji spowodowanych ruchem cyklotronowym. Założenie obecności pola magnetycznego znacznie wpływa na trajektorie – wynikowy ruch cyklotronowy ogranicza różnorodność dostępnych trajektorii, szczególnie w przypadku, gdy odległość pomiędzy cząstkami jest większa od podwójnego promienia cyklotronowego, co uniemożliwia zamianę cząstek wzdłuż trajektorii cyklotronowych, a wymusza (jak pokazujemy niżej) zamiany wzdłuż trajektorii z dodatkowymi pętlami. W ten sposób, w przypadku silnego pola magnetycznego w dwóch wymiarach, nie wszystkie trajektorie są możliwe i te niemożliwe należy usunąć z dziedziny całki po trajektoriach. Obecność magnetycznego pola powoduje konieczność budowania trajektorii z fragmentów trajektorii cyklotronowych i to ogranicza dostępne trajektorie (niezależnie od szczegółów dynamiki), zwłaszcza gdy promienie cyklotronowe stają się zbyt krótkie w stosunku do odległości między cząstkami. Tak właśnie jest dla ułamkowych wypełnień LLL (zauważmy też, że odległość między cząstkami jest stabilizowana przez krótkozasięgową część odpychania Coulomba na poziomie wynikającym z gęstości powierzchniowej cząstek). W szczególnym przypadku ułamkowego wypełnienia $\frac{1}{p}$ LLL, właśnie z powodu zbyt krótkich promieni cyklotronowych, trajektorie będą musiały należeć do odpowiednich podgrup grupy warkoczowej złożonych z trajektorii z dodatkowymi pętlami, co zwiększy promień cyklotronowy i w następstwie ponownie umożliwi zamianę cząstek, tak jak zostanie to niżej przedstawione. W obecności pola magnetycznego sumowanie w propagatorze Feynmana zostanie ograniczone tylko do elementów tej podgrupy (jest to właściwie półgrupa dla określonego kierunku pola magnetycznego), tj. zgodnie z ograniczeniami ruchu cyklotronowego, do wybranych klas trajektorii zamiast wszystkich możliwych elementów z pełnej grupy warkoczowej.

Wynioskować stąd można, że jednowymiarowe unitarne reprezentacje podgrupy grupy warkoczowej, generowane przez ruch cyklotronowy w silnych polach magnetycznych, odtwarzają statystykę złożonych fermionów. W ten sposób można zaimplementować złożone fermiony jako odmienne dwuwymiarowe cząstki kwantowe, odpowiadające wybranym jednowymiarowym unitarnym reprezentacjom warkoczowej podgrupy cyklotronowej. Złożone fermiony będą zatem przypisane do jednowymiarowych unitarnych reprezentacji podgrup cyklotronowych pełnej grupy warkoczowej, tj. do oddzielnego obiektu warkoczowego umożliwia-

jącego odróżnienie złożonych fermionów od zwykłych fermionów oraz od innych kwantowych cząstek w 2D.

W ten sposób uniknięta zostaje konieczność wykorzystywania sztucznego modelu złożonych fermionów jako konstrukcji z dołączonymi do fermionów zlokalizowanymi strumieniami (*flux-tubes*) pola magnetycznego. W zaproponowanym podejściu, wykorzystującym cyklotronową podgrupę warkoczową, dodatkowa faza funkcji falowej zostaje wytworzona poprzez dodatkowe pętle, w trakcie zamiany cząstek, jako nieunikniona własność powodowana obecnością pola magnetycznego w dwuwymiarowym układzie naładowanych cząstek przy ułamkowym wypełnieniu $\nu = \frac{1}{p}$ poziomu Landaua.

3.4 Wielowymiarowe unitarne nieredukowalne reprezentacje grup warkoczowych

Ważną rolę odgrywają także wielowymiarowe unitarne nieredukowalne reprezentacje grup warkoczowych. Zgodnie z ideą Kitaeva [11, 16], dowolna unitarna ewolucja wielo-qubitowego układu (np. dwu-qubitowej bramki kwantowej dla QIP [*Quantum Information Processing*]) może zostać aproksymowana przez wielowymiarowe unitarne nieredukowalne reprezentacje (odpowiedniego rzędu) pełnej grupy warkoczowej, pod warunkiem, że zapewniony jest odpowiedni poziom gęstości wielowymiarowych reprezentacji unitarnych grupy warkoczowej w przestrzeni unitarnych macierzy [11]. Wielowymiarowe unitarne nieredukowalne reprezentacje można łączyć ze zdegenerowanymi nisko-energetycznymi wzbudzeniami (kwazicząstki, kwazidziury, zwykle traktowane jako anyony*) ponad stan podstawowy dla określonego ułamkowego wypełnienia poziomu Landaua. W związku z tym, że elementy wielowymiarowych unitarnych nieredukowalnych reprezentacji nie komutują wzajemnie, analogicznie jak macierze, te zdegenerowane stany wzbudzeń kwazicząstkowych o charakterze anyonów określane są jako nieabelowe anyony [11]. Niestety, nieabelowe anyony, których badania prowadzone były niedawno, w szczególności dla nisko-energetycznych stanów wzbudzonych dla czynników wypełnień poziomu Landaua $\frac{5}{2}$ oraz $\frac{12}{5}$, odpowiadają prawdopodobnie niewystarczająco gęstym wielowymiarowym unitarnym nieredukowalnym reprezentacjom (dla nieabelowych anyonów w przypadku $\frac{5}{2}$ wielowymiarowe unitarne nieredukowalne reprezentacje nie są wystarczająco gęste aby uzyskać odpowiednią aproksymację wielo-qubitowych bramek [11], a drugi obecnie rozważany stan dla $\frac{12}{5}$ jest wciąż dyskusyjny [70]). Dlatego bardzo istotne stają się poszukiwania innych możliwości dla układów z ułamkową statystyką, posiadających odpowiednio gęste wielowymiarowe unitarne nieredukowalne reprezentacje powiązane z nieabe-

*identyfikacja anyonowego charakteru kwazicząstek przeprowadzana była poprzez numeryczne obliczenie fazy Berry'ego po zamkniętej trajektorii dla funkcji falowej, modelującej kwazicząstkę lub kwazidziurę

lowymi anyonami. W dalszej części wprowadzone zostaną cyklotronowe podgrupy warkoczowe pełnej grupy warkoczowej. W związku z faktem, że podgrupy zazwyczaj posiadają bogatsze reprezentacje niż grupy, można oczekiwać, że cyklotronowe podgrupy warkoczowe mogą być przydatne dla rozwinięcia topologicznych metod QIP – ponieważ odpowiednie wielowymiarowe unitarne nieredukowalne reprezentacje podgrupy cyklotronowej mogą być bardziej gęste w porównaniu z reprezentacjami pełnej grupy warkoczowej.

Rozdział 4

Grupy warkoczowe dla wielocząstkowych naładowanych układów 2D w silnym polu magnetycznym – cyklotronowe podgrupy warkoczowe

4.1 Zbyt krótkie promienie cyklotronowe w układach 2D w silnym polu magnetycznym

Jednowymiarowe unitarne reprezentacje pełnej grupy warkoczowej [66, 19, 58, 69] (grupy homotopii π_1 przestrzeni konfiguracyjnej N nierozróżnialnych jednakowych cząstek na płaszczyźnie [19]) definiują wagi dla całek po trajektoriach [33, 66, 65]. Jeśli trajektorie należą do oddzielnych klas homotopii, to nie jest możliwe określenie miary w przestrzeni trajektorii z powodu nieciągłości i można ją ograniczyć tylko do klas homotopijnych trajektorii, natomiast należy dodatkowo wysumować po topologicznie nieekwiwalentnych klasach z wagowym czynnikiem unitarnym. Nieekwiwalentne klasy trajektorii uzyskuje się poprzez doczepianie do otwartych trajektorii $\lambda_{a,b}$ (łączyjących punkty a i b w przestrzeni konfiguracyjnej) dodatkowych zamkniętych pętli wielocząstkowych trajektorii, a tych ostatnich jest tyle ile elementów w pełnej grupie warkoczowej i są one wszystkie wzajemnie niehomotopijne. Całka Feynmana po trajektoriach, określająca kwantowe prawdopodobieństwo przejścia między $a, t = 0$ i b, t (propagator Feynmana)*, przyjmuje

*jest to element macierzowy w reprezentacji położeń operatora ewolucji [62, 63, 61]

zatem postać

$$I_{a \rightarrow b} = \sum_{l \in \pi_1} e^{i\alpha_l} \int d\lambda_l e^{iS[\lambda_{l(a,b)}]/\hbar}, \quad (4.1)$$

gdzie π_1 oznacza odpowiednią pełną grupę warkoczową. Czynniki wagowe $e^{i\alpha_l}$ tworzą jednowymiarową reprezentację (1DUR) pełnej grupy warkoczowej i różne reprezentacje odpowiadają różnym typom kwantowych cząstek. Dla grupy permutacji S_N , która jest pełną grupą warkoczową N cząstek w R^n , $n \geq 3$, istnieją tylko dwie jednowymiarowe unitarne reprezentacje: $\sigma_i \rightarrow e^{i\pi}$ lub $\sigma_i \rightarrow e^{i0}$, (σ_i oznacza tu zamianę i -tej i $(i+1)$ -szej cząstki, czyli generator grupy) odpowiadające bozonom lub fermionom. Dla N cząstek w R^2 grupa warkoczowa jest istotnie bogatsza w porównaniu z S_N i posiada nieskończenie wiele jednowymiarowych unitarnych reprezentacji [66, 69], zdefiniowanych dla generatorów grupy warkoczowej jako: $\sigma_i \rightarrow e^{i\theta}$, $i = 1, \dots, N-1$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, gdzie różne θ odpowiadają różnym typom anyonów [24, 33, 66] (abelowych, gdyż elementy jednowymiarowych reprezentacji komutują).

Zamknięte trajektorie z pełnej grupy warkoczowej opisują zamiany identycznych cząstek, zatem ich jednowymiarowe unitarne reprezentacje (1DURs) określają statystyki cząstek. Ponieważ te reprezentacje (1DURs) są okresowe jako czynniki fazowe, z okresem 2π , odróżnienie przy ich pomocy złożonych fermionów (związanych z korelacjami Laughlina) nie było możliwe, gdyż złożone fermiony wymagają przesunięć fazowych $p\pi$, $p = 3, 5, \dots$. Jeśli związanie złożonych fermionów z jednowymiarowymi unitarnymi reprezentacjami (1DURs) pełnej grupy warkoczowej nie jest możliwe, proponujemy [71] związać je z odpowiednio zdefiniowanymi *podgrupami* pełnej grupy warkoczowej i w ten sposób odróżnić je od zwykłych fermionów.

Pełne grupy warkoczowe zawierają wszystkie możliwe zamknięte wielocząstkowe klasyczne trajektorie – warkocze (z możliwym permutacyjnym przestawieniem początkowego i końcowego uszeregowania cząstek, w celu uwzględnienia ich nierozróżnialności). Naszą analizę opieramy na zauważeniu, że włączenie pola magnetycznego w układach naładowanych cząstek 2D istotnie zmienia te trajektorie – klasyczny cyklotronowy ruch ogranicza różnorodność dopuszczalnych warkoczy.

W przypadku kiedy odległość cząstek jest większa od podwójnego promienia cyklotronowego, co zachodzi dla ułamkowych wypełnień LLL, zamiana cząstek wzdłuż zwykłych jedno-pętlowych trajektorii cyklotronowych jest niemożliwa, ponieważ cyklotronowe orbity są wtedy *zbyt krótkie*. Zamiany cząstek są jednak niezbędne dla określenia statystyki i w celu umożliwienia zamian ponownie, orbity cyklotronowe muszą w jakiś sposób zwiększyć się. Wzrost rozmiarów trajektorii cyklotronowych osiągnąć można przez zmniejszenie efektywnego natężenia pola magnetycznego, albo przez zmniejszenie efektywnego ładunku cząstek. Te dwie możliwości prowadzą do dwóch fenomenologicznych koncepcji złożonych fermionów – ze zmniejszonym polem w konstrukcji fikcyjnych lokalnych strumieni Jaina

[30] i z ekranowanym ładunkiem w konstrukcji wirów Reada [29]. Obydwe modele konstrukcje wydają się nie mieć niczego wspólnego z grupami warkoczowymi, ale w istocie obydwie te fenomenologiczne triki odpowiadają bardziej naturalnej i podstawowej koncepcji ograniczenia warkoczy przez wykluczenie nieosiągalnych trajektorii [71, 72], pozostają wtedy tylko dostępne warkocze. Argumentujemy zatem, że dla dostatecznie silnego pola magnetycznego w układzie 2D naładowanych N cząstek, wielo-pętłowe warkocze umożliwiają odpowiedni wzrost rozmiarów orbit cyklotronowych, przywracając w naturalny sposób zamianę cząstek [72]. Te wielo-pętłowe warkocze tworzą podgrupę pełnej grupy warkoczowej i w obecności silnego pola magnetycznego sumowanie w propagatorze Feynmana musi być zredukowane do tej podgrupy [73, 71], jako do zbioru pozostałych dostępnych trajektorii po wykluczeniu niemożliwych, tzn. po wykluczeniu niedostępnych trajektorii o zbyt krótkich promieniach cyklotronowych[†].

4.2 Definicja warkoczowej podgrupy cyklotronowej i jej unitarne reprezentacje

Proponujemy odnieść złożone anyony (w tym złożone fermiony) do jednowymiarowych unitarnych reprezentacji *podgrup cyklotronowych* pełnej grupy warkoczowej, generowanych przez następujące generatory [71]:

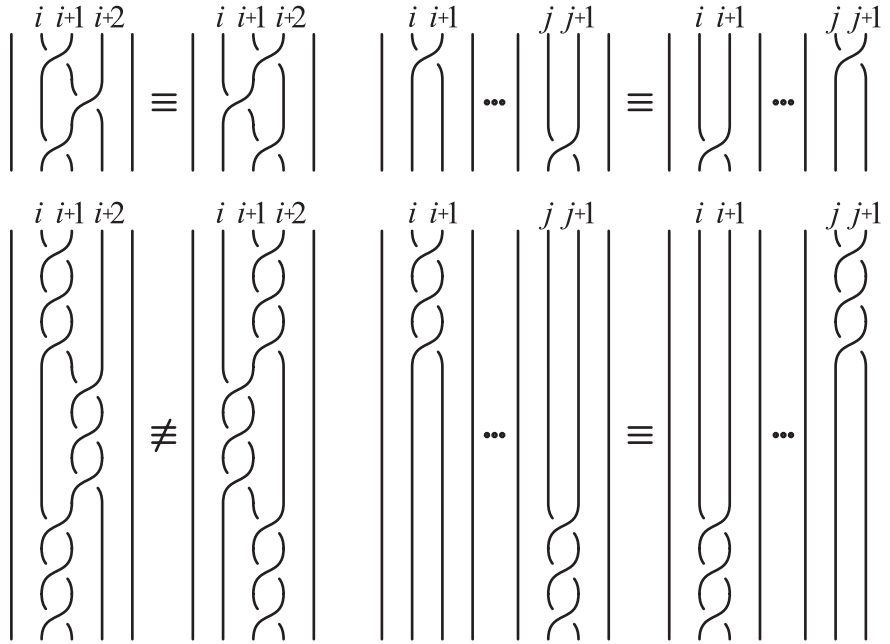
$$b_i^{(p)} = \sigma_i^p, \quad (p = 3, 5, 7, 9, \dots), \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (4.2)$$

gdzie każde p odpowiada innej podgrupie cyklotronowej (i zatem innemu rodzajowi złożonych cząstek związanych z jej reprezentacjami), gdzie σ_i , $i = 1, \dots, N$ oznaczają generatory wyjściowej pełnej grupy warkoczowej. Grupowy element $b_i^{(p)}$ reprezentuje zamianę i -tej z $(i + 1)$ -szą cząstką z $\frac{p-1}{2}$ pętłami, co jest jasne na mocy definicji pojedynczej zamiany σ_i (jak widoczne jest na Rys. 4.2). Generatory $b_i^{(p)}$ budują podgrupę pełnej grupy warkoczowej, ponieważ są wyrażone przez generatory σ_i pełnej grupy. Generatory $b_i^{(p)}$ nie spełniają jednak warunku (3.3) dla generatorów B_N , i.e., $b_i^{(p)} b_{i+1}^{(p)} b_i^{(p)} \neq b_{i+1}^{(p)} b_i^{(p)} b_{i+1}^{(p)}$, podczas gdy warunek (3.4) jest zachowany dla $b_i^{(p)}$: $b_i^{(p)} b_j^{(p)} = b_j^{(p)} b_i^{(p)}$, dla $1 \leq i, j \leq N - 1$, $|i - j| \geq 2$ (Rys.4.1).

Ponieważ warunek (3.3) nie jest spełniony dla cyklotronowej podgrupy, jej 1DURs mogą, w ogólności, zależeć od indeksu i . Unitarne reprezentacje 1DURs pełnej grupy warkoczowej obcięte do cyklotronowej podgrupy, nie zależą jednak od indeksu i i jako indukowane reprezentacje podgrupy cyklotronowej mają postać:

$$b_i^{(p)} \rightarrow e^{ip\alpha}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (4.3)$$

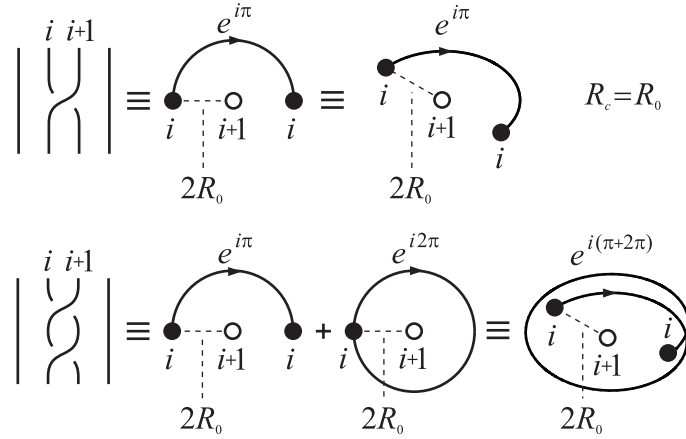
[†]właściwie do półgrupy tej podgrupy przy wybranej orientacji pola magnetycznego, ale z tymi samymi reprezentacjami 1DURs co całą podgrupę



Rys. 4.1. Warunki nałożone na generatory warkoczowej podgrupy cyklotronowej: rysunek górny przedstawia relacje nałożone na generatory grupy B_N , na dolnym rysunku uwidoczniiono, że dla podgrup cyklotronowych tylko drugi warunek jest spełniony

gdzie p jest nieparzystą liczbą całkowitą, oraz $\alpha \in (-\pi, \pi]$. Te reprezentacje 1DURs, numerowane przez *parę* (p, α) , opisują złożone anyony (w szczególności złożone fermiony, w przypadku $\alpha = \pi$). Zatem w celu odróżnienia różnych typów złożonych cząstek wydaje się, należy rozróżniać dwuparametrowe oznaczenia (p, α) reprezentacji 1DURs cyklotronowych warkoczowych podgrup numerowanych przez p . Można tu dodać, że dla ustalonej orientacji pola magnetycznego cyklotronowe trajektorie tworzą raczej półgrupę cyklotronowej podgrupy z tymi samymi jednak reprezentacjami co całej podgrupy.

N -cząstkowa funkcja falowa uzyskuje w tej konstrukcji odpowiednie przesunięcie fazowe związane ze szczególnym, wielo-pętlowym warkoczem opisującym zamianę cząstek w języku grup warkoczowych. W ten sposób przesunięcie fazowe typu Aharonova-Bohma pochodzące od fikcyjnych strumieni lokalizowanych na cząstkach w modelu Jaina złożonych fermionów, jest zastąpione przez dodatkowe pętle warkoczy (każda pętla dodaje 2π do całkowitego przesunięcia fazowego, co zilustrowano na Rys. 4.2 (prawy)). Należy podkreślić, że kwantowe cząstki nie zaskreślają warkoczowych trajektorii. Jako kwantowe nie mają żadnych trajektorii w ogóle. Niemniej jednak, w zgodzie z ogólnymi zasadami kwantowania [67, 68], N -cząstkowa funkcja falowa musi transformować się zgodnie z jednowymiarową unitarną reprezentacją (1DUR) odpowiedniego elementu grupy warkoczowej, gdy cząstki zataczają, w terminach klasycznych (reprezentowane jako argumenty



Rys. 4.2. Generator σ_i pełnej grupy warkoczowej i odpowiadająca mu względna trajektoria zamiany cząstek i -tej i $(i + 1)$ -szej (rys. górny); generator cyklotronowej podgrupy, $b_i^{(p)} = \sigma_i^p$ (na rysunku, $p = 3$), odpowiada dodatkowym $\frac{p-1}{2}$ pętłom, kiedy i -ta cząstka zamienia się z $(i+1)$ -szą (dodatkowe pętłe dają w wyniku dodatkowe przesunięcie fazowe 2π ; $2R_0$ oznacza odległość między cząstkami) (rys. dolny)

funkcji falowej), zamkniętą pętlę zamiany odpowiadającą temu właśnie warkoczowemu elementowi. Ponieważ warkoczowe opisują zamiany położeń cząstek w klasycznym sensie (jako zamiany argumentów wielocząstkowej funkcji falowej), ich reprezentacje 1DURs odzwierciedlają możliwe kwantowe statystyki układu. Zatem, dla warkoczowych podgrup cyklotronowych trajektorii generowanych przez generatory $b_i^{(p)}$, $i = 1, \dots, N - 1$, otrzymujemy statystyczne przesunięcie fazowe $p\pi$ dla złożonych fermionów (tj. dla $\alpha = \pi$ w równaniu (4.3)), jak wymagają tego korelacje Laughlina, bez potrzeby odwoływania się do modeli z pomocniczymi strumieniami (*flux-tubes*).

4.3 Wielo-pętłowe trajektorie – odpowiedź układu na zbyt krótkie trajektorie cyklotronowe

Zgodnie z treścią poprzedniego paragrafu, zaproponowaliśmy łączyć złożone cząstki i korelacje Laughlina z reprezentacjami 1DURs *cyklotronowych podgrup warkoczowych*, które są generowane przez generatory, $b_i^{(p)} = \sigma_i^p$, ($p = 3, 5, \dots$), $i = 1, \dots, N - 1$, z różnymi p dla różnych typów złożonych cząstek (σ_i to generatory pełnej grupy warkoczowej). Generatory $b_i^{(p)}$ reprezentują zamiany cząstek i -tej i $(i + 1)$ -szej z $\frac{p-1}{2}$ pętłami (zamian z mniejszą liczbą pętli w tej podgrupie nie ma), co jest widoczne z przedstawienia przez σ_i (Rys. 4.2). Reprezentacje 1DURs pełnej grupy warkoczowej obcięte do podgrupy (nie zależą wtedy od i) określają reprezentacje 1DURs podgrupy: $b_i^{(p)} \rightarrow e^{ip\alpha}$, $i = 1, \dots, N - 1$, gdzie p nieparzysta liczba całkowita, $\alpha \in (-\pi, \pi]$; te reprezentacje numerowane są przez pary (p, α)

i opisują złożone anyony (złożone fermiony, dla $\alpha = \pi$).

N -cząstkowa funkcja falowa uzyskuje wymagane dla korelacji Laughlina przesunięcie fazowe przy zamianach cząstek, gdyż zgodnie z regułami kwantowania [68, 69], funkcja falowa uzyskuje przesunięcie fazowe reprezentacji 1DUR warkocza, kiedy cząstki zamieniają się według tego warkocza. Każda dodatkowa pętla warkocza dodaje 2π do przesunięcia fazowego, jeśli przyjąć $\alpha = \pi$ – dla złożonych fermionów – Rys. 4.2 (dolny).

Należy zauważyć, że mimo że kwantowe cząstki nie odbywają ruchu wzdłuż warkoczy, to zamiany argumentów N -cząstkowej funkcji falowej odpowiadają poszczególnym warkoczom, zatem w przypadku 2D, *nie tylko permutacjom*. Dlatego dla warkoczy cyklotronowych $b_i^{(p)}$, $i = 1, \dots, N - 1$, otrzymujemy przesunięcie fazowe $p\pi$ oczekiwane dla złożonych fermionów (czyli dla $\alpha = \pi$), co odtwarza fazę wymaganą przez korelacje Laughlina, bez potrzeby wprowadzania lokalnych strumieni lub wirów.

Każda dodatkowa pętla względnej trajektorii zamiany cząstek, zdefiniowanej przez generator $b_i^{(p)}$ cyklotronowej podgrupy, reprodukuje dodatkową pętlę indywidualnych cyklotronowych trajektorii obu zamieniających się cząstek, które składają się na względną trajektorię zamiany – jak zostało to przedstawione na rysunku 4.3. Indywidualne cyklotronowe trajektorie są powtarzane przez względną trajektorię (Rys. 4.3 c,d) z dwukrotnie większym promieniem w stosunku do cyklotronowych trajektorii indywidualnych cząstek (Rys. 4.3 a,b). W języku kwantowym, w odniesieniu do klasycznych wielo-pętlowych cyklotronowych trajektorii, można tylko wnioskować o liczbie kwantów strumienia przypadających na każdą cząstkę w układzie, $\frac{BS}{N}/\frac{hc}{e}$, która dla wypełnienia $\frac{1}{p}$ LLL wynosi p , czyli tyle samo ile wynosi liczba pętli cyklotronowych. Zatem można tu sformułować prostą regułę: (*w przypadku wypełnienia $\frac{1}{p}$ LLL [p nieparzyste]*) dodatkowa pętla na cyklotronowym warkoczu zamiany cząstek prowadzi do dwóch dodatkowych kwantów strumienia pola magnetycznego przechodzących przez indywidualną trajektorię cyklotronową każdej z cząstek.

Powyższa reguła wynika bezpośrednio z definicji cyklotronowej trajektorii, która musi być zamkniętą indywidualną trajektorią cząstki i w związku z tym musi odpowiadać podwójnej zamianie pary cząstek. Wtedy bowiem indywidualne trajektorie obu zamienianych cząstek będą zamknięte, replikując także zamkniętą trajektorię względną podwójnej zamiany (pojedyncza zamiana ma otwartą trajektorię).

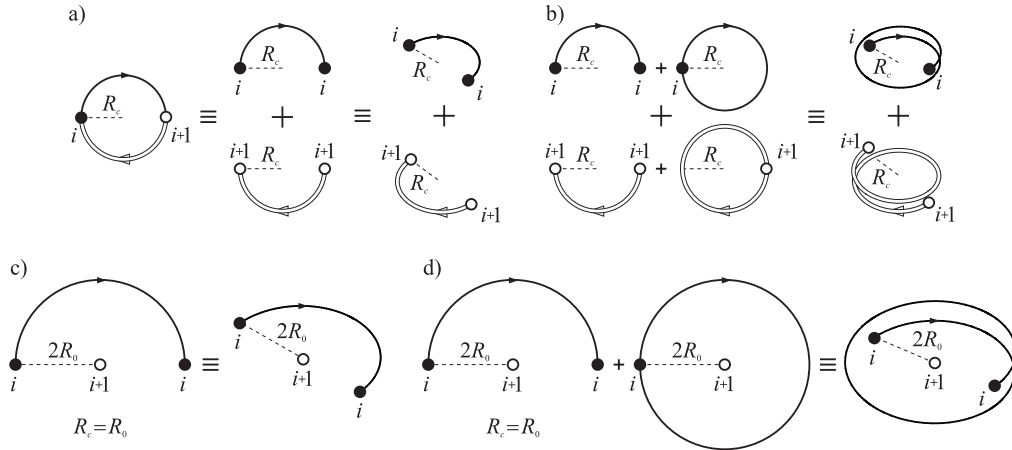
Jeśli zamiana jest prosta, tzn., bez żadnych dodatkowych pętli, wtedy odpowiadające jej indywidualne cyklotronowe trajektorie cząstek też są proste (jedno-pętlowe). W przypadku gdy zamiana odbywa się z dodatkowymi pętlami, jak w przypadku cyklotronowej podgrupy typu p ($p > 1$), trajektorie podwójnej zamiany (przez to zamknięte) ma $2\frac{p-1}{2} + 1 = p$ pełnych pętli oraz tyle samo pętli posiadają indywidualne cyklotronowe trajektorie cząstek, czyli także p pełnych

pętli [72, 74].

Bardzo istotne jest podkreślenie różnicy między zwojami (np. przewodu w zwojnicy 3D) a wielo-pętlowymi 2D cyklotronowymi trajektoriami. W tym ostatnim przypadku, dodatkowe 2D pętle *nie mogą* zwiększyć całkowitego strumienia pola magnetycznego przechodzącego przez układ i wszystkie wielokrotne pętle muszą się dzielić tym samym całkowitym strumieniem. Inaczej jest w przypadku uzwojeń 3D, wtedy każdy nowy zwój dodaje nową porcję strumienia, gdyż każdy zwój dodaje swoją powierzchnię, przez którą przechodzi to samo pole magnetyczne, zwiększając w ten sposób całkowity strumień (w 2D nie jest to prawdą).

Widać zatem, że w 2D dodatkowe pętle zabierają fragmenty strumienia (w przypadku wypełnień $\frac{1}{p}$, kwanty strumienia) i redukują pole magnetyczne – to jest wyjaśnienie natury pomocniczych strumieni Jaina doczepianych do złożonych fermionów w celu ekranowania zewnętrznego pola B . Złożone fermiony nie są więc żadnymi złożonymi strukturami zbudowanymi z cząstek i doczepionych strumieni (*flux-tubes*), chociaż zachowujemy ich oryginalną nazwę. Złożone fermiony są równoprawnymi, jak np. fermiony, cząstkami odmiennymi statystycznie, co ujmują grupy cyklotronowe i ich reprezentacje. Podobnie nieco mylącą nazwę, znowu nawiązującą do modelowych konstrukcji, odnieść można do złożonych anyonów związanych z ułamkowymi reprezentacjami 1DURs podgrup cyklotronowych (tj. z ułamkowym α w reprezentacji (4.3)). Złożone anyony także nie są żadnymi kompozytowymi strukturami, ale są równoprawnymi, odmiennymi statystycznie cząstkami w 2D w obecności silnych pól magnetycznych, podobnie jak zwykle anyony w 2D bez obecności silnego pola magnetycznego.

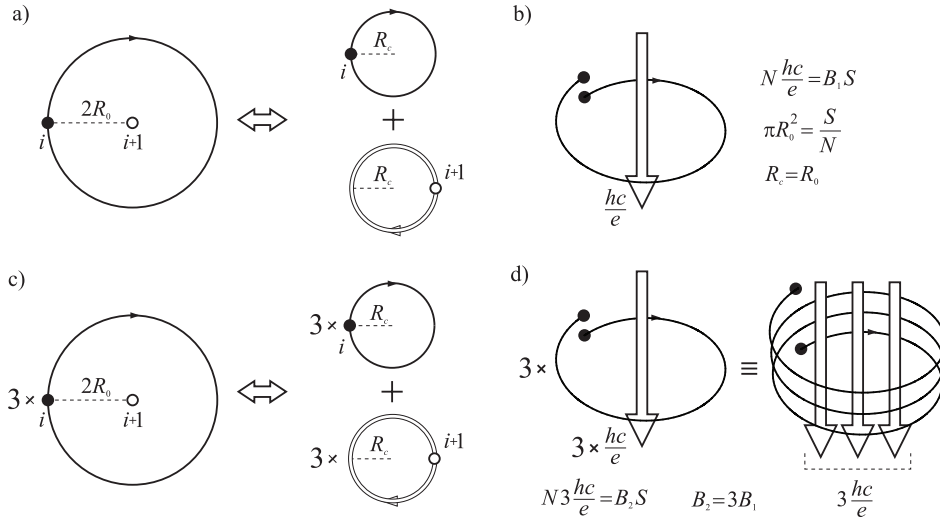
Teorie złożonych fermionów Jaina z fikcyjnymi strumieniami [30, 32, 31], jak i Reada z wirami [29, 42, 54, 47, 48] doczepianymi do cząstek, są zatem efektywnymi, heurystycznymi sformułowaniami o modelowym *a posteriori* charakterze w stosunku do wcześniej znanej funkcji Laughlina. W konstrukcji Jaina, strumienie są używane do odtworzenia laughlinowskiego przesunięcia fazowego przy zamianach cząstek, natomiast wirowość wirów Reada odpowiada potędze w funkcji Laughlina (same wiry mają postać czynników w wielomianie Jastrowa i odzwierciedlają 'przypinanie' wielokrotnych zer do cząstek, właśnie z uwagi na postać wielomianu Jastrowa). W sformułowaniu warkoczowym poszukujemy natomiast bardziej podstawowych argumentów, które wyjaśniałyby właśnie takie, a nie inne laughlinowskie przesunięcie fazowe przy zamianach cząstek. Identyfikujemy tę podstawową przyczynę jako zbyt krótkie dla zamian promienie cyklotronowe przy polach odpowiadających ułamkowym wypełnieniom LLL, co w naturalny i nieodzowny sposób prowadzi do wielo-pętlowych trajektorii warkoczowych, wzdłuż których zamiany cząstek są wciąż możliwe (ponieważ dzielą w 2D ten sam strumień całkowity, osłabiając pole [bo nie zmieniają powierzchni] i muszą mieć zatem większy promień przy takim samym kwancie strumienia [dla wypełnień $\frac{1}{p}$] – a to wystarcza by sięgnąć do innych cząstek w celu zamiany).



Rys. 4.3. Połowa cyklotronowej trajektorii indywidualnych cząstek i -tej i $(i+1)$ -szej (a,b) i odpowiadające im trajektorie względne (c,d) dla zamiany cząstek i -tej i $(i+1)$ -szej w obecności silnego pola magnetycznego dla $\nu = 1$ (a,c) i dla $\nu = \frac{1}{3}$ (b,d) (trzeci wymiar dodany dla lepszej wizualizacji); w obydwu przypadkach, $\nu = 1, \frac{1}{3}$, cyklotronowy promień R_c jest dopasowany do odległości między cząstkami, $2R_c = 2R_0$ oraz R_0 jest utrzymywane przez odpychanie Coulomba przy zadanej gęstości cząstek

Dodać można, że inna idea, ale rzeczywistego kwaziklasycznego cyklotronowego kolektywnego ruchu w zamkniętych pierścieniach w przypadku 2D w polu magnetycznym była analizowana przez Kivelsona i współautorów [46]. W pracy tej autorzy rozważali wkład do energii wymiany od takiego koherentnego cyklicznego rotowania dużych pierścieni w celu wykrycia szczególnego jej wzrostu przy ułamkowych wypełnieniach LLL, z pewnymi związkami analizowanej matrycy cząstek z kryształem Wignera. Rozpatrywane w ten sposób dalekie korelacje rzeczywistej kwantowej dynamiki były szacowane przy pomocy całek funkcjonalnych w kwaziklasycznym przybliżeniu. Trajektorie takie nie mają związku z rozpatrywanymi czysto klasycznymi warkoczami cyklotronowymi w ramach opisu statystyki, ponieważ warkocze nie opisują rzeczywistej kwantowej dynamiki. Cykliczne dalekozasięgowe korelacje Kivelsona wskazują jednak na bliskość korelacji Laughlina z uporządkowaniem kryształu Wignera [46, 75], także rozpatrywanym jako konkurencyjny stan w ujęciu złożonych fermionów [32].

Zaznaczamy raz jeszcze, że cyklotronowe trajektorie nie mają znaczenia realistycznego ruchu, są pomocniczym obiektem metod grup warkoczowych, gdzie dynamika nie odgrywa istotnej roli, natomiast uwzględniane są topologiczne uwarunkowania trajektorii. Kwantowe cząstki nie mają trajektorii, natomiast warkoczowe trajektorie odzwierciedlają topologiczne, a nie dynamiczne cechy układu i poprzez unitarne reprezentacje wiążą się ze statystykami cząstek.



Rys. 4.4. Podwójna (i dlatego zamknięta) względna trajektoria zamiany cząstek i -tej i $(i+1)$ -szej, z jedną dodatkową pętlą (czyli $p = 3$) (a); odpowiadające tej zamianie indywidualne cyklotronowe trajektorie zamieniających się cząstek i -tej i to samo dla $(i+1)$ -szej (b); indywidualne trajektorie cyklotronowe cząstek odpowiadające podwójnej względnej trajektorii zamiany i -tej i $(i+1)$ -szej cząstek w obecności silnego pola magnetycznego, dla $\nu = 1$ (c) i dla $\nu = \frac{1}{3}$ (d), odpowiednio; liczba kwantów strumienia B przypadająca na cząstkę jest zaznaczona w obu przypadkach $\nu = 1, \frac{1}{3}$ (strzałki na rys. (c) i (d)); wynikający promień cyklotronowy R_c odpowiada odległości między cząstkami, $2R_0 = 2R_c$, w obydwu przypadkach (trzeci wymiar dodany dla lepszej ilustracji)

4.4 Cyklotronowa struktura złożonych fermionów

Wielo-pętłowy charakter względnych trajektorii zamian jest wprowadzany przez generatory podgrupy cyklotronowej (4.2) (co prowadzi do także wielo-pętłowej postaci indywidualnych cyklotronowych trajektorii cząstek) i jest to nieodzowna własność naładowanych N -cząstkowych układów 2D w przypadku kiedy odległości między cząstkami (wynikające z gęstości $\frac{N}{S}$ i blokowane przez oddziaływanie Coulomba) są większe niż podwójna długość zwykłego promienia cyklotronowego. Taki przypadek występuje dla ułamkowego $\nu = \frac{1}{p}$ zapelnienia LLL i wtedy zamiany cząstek wzdłuż pojedynczych pętli cyklotronowych są niedostępne. Pozostają jednak inne realizacje zamiany ujęte w pełnej grupie warkoczowej, które zebrać można w postaci jej podgrupy cyklotronowej, zbudowanej z warkoczy wielo-pętłowych. Te dostępne zamiany pozwalają określić statystykę cząstek poprzez różne jednowymiarowe unitarne reprezentacje podgrup warkoczowych. Wielo-pętłowe trajektorie cyklotronowe muszą w przypadku 2D dzielić między siebie ten sam strumień zewnętrznego pola (ponieważ i pole magnetyczne i powierzchnia układu nie zmieniają się) – w ten sposób dodatkowe pętłe zabierają część strumienia, albo – innymi słowy – następuje efektywne zmniejszenie na-

tężenia pola i oczekiwane zwiększenie promieni cyklotronowych, które ponownie pasują do odległości między-cząstkowych (w przypadku $\nu = \frac{1}{p}$, p nieparzyste, i wtedy trajektorii cyklotronowych z p pętlami). Pętle mogą być dodawane pojedynczo do warkoczy, stąd jedna dodatkowa pętla prowadzi do generatora σ_i^3 , dwie dodatkowe pętle dają generatory σ_i^5 itd. (ale nie istnieją grupy cyklotronowe z generatorami σ_i^2 , czy σ_i^4). Wskazane wyżej efektywne osłabianie pola magnetycznego, w wyniku zabierania części niezmiennego strumienia pola zewnętrznego przez dodatkowe pętle w 2D, jest tym efektem, który modelowany był przez Jaina przez dodawanie przeciwnie skierowanych do pola zewnętrznego kwantów pomocniczych strumieni. Te strumienie nie istnieją w istocie, a pole nie jest osłabiane przez żadne pomocnicze strumienie, ale przez dodatkowe pętle cyklotronowe. To wyjaśnienie natury lokalizowanych na cząstkach strumieni Jaina (*flux tubes*) nie zmienia dużej użyteczności modelu Jaina złożonych fermionów w przypadku $\nu = \frac{1}{p}$, p nieparzyste, z bardzo rozbudowaną stroną obliczeniową [30].

Całkowity strumień pola zewnętrznego B przez powierzchnię układu S jest równy BS . Dla złożonych fermionów typu p , dla *podwójnej* zamiany i -tej i $(i+1)$ -szej cząstek (zatem zamkniętej trajektorii z $2\frac{p-1}{2} + 1 = p$ pętlami), otrzymujemy tę samą liczbę p pętli na indywidualnych cyklotronowych trajektoriach cząstek (Rys. 4.4), obejmujących strumień $p\frac{hc}{e}$ (przy wypełnieniu $\nu = \frac{1}{p}$, p nieparzyste, na każdą pętlę przypada jeden kwant strumienia $\frac{hc}{e}$, zgodnie z wyżej sformułowaną zasadą – dla złożonych fermionów typu p mamy p -pętlowe cyklotronowe trajektorie cząstek, albo p kwantów strumienia na cząstkę, $BS = Np\frac{hc}{e}$). Z drugiej strony degeneracja LL wynosi $N_0 = \frac{SBe}{hc}$, (zaniedbując spin) i dla ułamkowego wypełnienia LLL ν , otrzymujemy $N_0 = \frac{N}{\nu}$. Równanie $\frac{BS}{N} = \frac{hc}{e}\frac{1}{\nu}$ daje $\frac{1}{\nu}$ kwantów strumienia, przypadających na jedną cząstkę, co zgadza się z poprzednim oszacowaniem dla $\nu = \frac{1}{p}$.

W przypadku indywidualnych trajektorii cyklotronowych z p pętlami, każda pętla ma swój rozmiar dopasowany do zewnętrznego pola, którego strumień jest pomniejszony przez pozostałe pętle, tzn. o $p - 1$ kwantów na cząstkę, dokładnie tak samo jak w modelu Jaina (ale tylko w przypadku $\nu = \frac{1}{p}$, p nieparzyste). Rzeczywiście, jeśli $BS = \frac{hc}{e}pN$ to $\frac{hc}{e} = \frac{B}{p}\frac{S}{N}$ i $\frac{S}{N}$ odpowiada p -krotnie zmniejszonemu polu. Podążając za analogiami z modelem Jaina, można by argumentować, że dla $\nu = \frac{1}{2}$ i $p = 3$ dwie pętle na cząstkę zabierają cały strumień pola B i trzecia pętla ma nieskończenie długi promień (metal Halla [38]) w zerowym resztkowym polu.

Zabieranie strumienia pola zewnętrznego przez dodatkowe pętle wyjaśnia ekranowanie pola modelowo przyjętego w konstrukcji Jaina z doczepianymi strumieniami. Wnioski z modelu Jaina pozostają obowiązujące także w podejściu cyklotronowych warkoczy, szczególnie dla wypełnień $\nu = \frac{1}{p}$, p nieparzyste (dla innych wypełnień model Jaina okazuje się niedokładny) [76].

Podsumujmy, dlaczego naładowane cząstki w 2D muszą być złożonymi cząstkami (nazwa jest tu myląca i zachowana z opisu Jaina, choć te złożone cząstki są

w istocie równoprawnymi kwantowymi cząstkami o odpowiedniej statystyce, a nie konglomeratami z fikcyjnymi strumieniami) w przypadku pól odpowiadających ułamkowemu wypełnieniu LLL. Dla $\nu = 1$ mamy dokładnie $R_c = R_0$ (gdzie R_c jest promieniem cyklotronowym, $\pi R_c^2 B = \frac{hc}{e}$ oraz $2R_0$ jest odległością między cząstkami, dopasowaną do gęstości i utrzymywaną przez krótko-zasięgową część odpychania Coulomba, $\pi R_0^2 = \frac{S}{N}$). Dla $\nu < 1$ promień cyklotronowy zwykłych trajektorii bez dodatkowych pętli wynosi $R_c < R_0$, zatem R_c jest *zbyt krótki* dla realizacji zamian cząstek wzdłuż tych trajektorii. Dodatkowe pętle prowadzą jednak do wzrostu R_c , co pozwala na ponowne zamiany, gdyż dla p -pętlowych trajektorii cyklotronowych $\frac{hc}{e} = \pi R_c^2 \frac{B}{p}$ i R_c wzrasta w porównaniu do cyklotronowych trajektorii pojedynczych (jedno-pętlowych); dla $\nu = \frac{1}{p}$ ponownie $R_c = R_0$, mimo że zewnętrzne pole jest p -krotnie silniejsze niż dla $\nu = 1$ (przy stałym N).

Pomocnicze strumienie Jaina odgrywały podobną do pętli rolę – zwiększały promień cyklotronowy poprzez redukcję efektywnego pola. Słuszna wydaje się tu konkluzja, że dla $\nu = 1$ cyklotronowe trajektorie są z pojedynczymi pętlami, a grupa warkoczowa jest pełną grupą warkoczową generowaną przez $b_i^{(p=1)} = \sigma_i$, podczas gdy dla $\nu = \frac{1}{p}$, $p > 1$, cyklotronowe trajektorie muszą być wielo-pętlowe, prowadząc równocześnie do warkoczy generowanych przez $b_i^{(p)} = \sigma_i^p$.

Zasadniczy rezultat związany z warkoczowym uzasadnieniem korelacji Laughlina polega na wykazaniu, że złożone fermiony nie są zwykłymi fermionami ubranymi w oddziaływanie na podobieństwo kwazicząstek w fazie skondensowanej, ale są oddzielnymi statystycznie, pełnoprawnymi cząstkami kwantowymi. Chociaż funkcje falowe fermionów i złożonych fermionów są antysymetryczne, to należy pamiętać o odrębności każdego ich rodzaju i nie dopuszczać do ich mieszania, podobnie jak nie miesza się bozonów i fermionów w 3D. Może mieć to znaczenie w numerycznych diagonalizacjach oddziaływania, szeroko stosowanych w celu analizy hallowskich układów. Jeśli do dziedziny minimalizacji hamiltonianu włączono wszystkie antysymetryczne funkcje próbne, to wynik może być inny w porównaniu do sytuacji, jeśli ograniczyć się do określonego typu złożonych fermionów (o zadanym przesunięciu fazowym $p\alpha$), dla którego funkcje próbne tworzą podzbiór wszystkich funkcji antysymetrycznych – może to być powodem nieprawdziwych wyników. Podobnie przy numerycznych analizach wzbudzeń stanów FQHE, odpowiadających kwazicząstkom lub kwazidziurom, interpretowanym często jako anyony spełniające ułamkową statystykę. Przesunięcia fazowe pozwalają zidentyfikować statystykę, obliczaną numerycznie jako faza Berry’ego wzdłuż zamkniętej trajektorii w przestrzeni konfiguracyjnej dla modelowej wielo-cząstkowej funkcji falowej, odpowiadającej nisko-energetycznym wzbudzeniom ponad stan podstawowy, przy ułamkowych wypełnieniach poziomu Landaua. Te wzbudzenia – kwazicząstki lub kwazidziury tradycyjnie są łączone z anyonami w przypadku ułamkowej fazy Berry’ego. Jest jasne jednakże, że nie jest możliwe rozróżnienie między ułamkowym θ (dla 1DUR pełnej grupy warkoczowej) i ułamkowym $p\alpha$ (dla 1DUR

podgrupy cyklotronowej): obydwie te przesunięcia fazowe mogą być tym samym ułamkiem. Ponieważ jednak rozpatrywane kwazicząstki lub kwazidziury są wzbudzeniami w silnym polu magnetycznym, odpowiednie stany powinny być raczej odnoszone do cyklotronowych podgrup i złożonych anyonów, a nie do zwykłych anyonów, jak powszechnie się je traktuje.

Zamiana anyonów na złożone anyony, może mieć też konsekwencje dla rozwijanych ostatnio topologicznych metod kwantowego przetwarzania informacji [11, 16, 10]. Gdyby dowolną wielo-qubitową unitarną ewolucję (w szczególności uniwersalną dwu-qubitową operację) [11, 10] można było aproksymować przez wielo-wymiarową unitarną nieredukowalną reprezentację (MDUR) (odpowiedniego rzędu) grupy warkoczowej, to zaimplementować by można wielo-qubitowe działania na fizycznym układzie naładowanych cząstek 2D w polu magnetycznym. By możliwa była wspomniana aproksymacja, nieodzownym warunkiem jest jednak wymóg dostatecznej gęstości tych MDURs w przestrzeni macierzy unitarnych [11]. MDURs mogą się wiązać ze zdegenerowanymi nisko-energetycznymi wzbudzeniami (kwazicząstkami lub kwazidziurami) ponad stan podstawowy typu FQHE dla ułamkowego wypełnienia LL. Ponieważ elementy MDUR, jako macierze, nie komutują, to zdegenerowane stany są odnoszone do nieabelowych anyonów (w analogii do abelowych anyonów związanych z 1DURs grup warkoczowych) [11]. Ostatnio badane nieabelowe anyony, w szczególności dla nisko-wzbudzonych stanów ponad 5/2 lub 12/5 wypełnienia LL, wykazują najprawdopodobniej niewystarczającą gęstość MDURs (dla nieabelowych anyonów w przypadku wypełnienia 5/2, MDURs są niewystarczające, by aproksymować wymagane wielo-qubitowe bramki [11], natomiast stan 12/5 jest wciąż niewyjaśniony w tym aspekcie [70, 77]). Można zatem stwierdzić, że poszukiwanie innych korzystnych układów fraktalnych z bardziej gęstymi MDURs, związanymi z nieabelowymi anyonami, ma istotne znaczenie. Biorąc pod uwagę, że podgrupy mają zwykle bogatsze reprezentacje niż grupy, można oczekiwać, że cyklotronowe podgrupy warkoczowe mogą być tu bardziej przydatne niż pełne grupy (z powodu możliwości posiadania korzystnie dostatecznie gęstych wielo-wymiarowych reprezentacji podgrup warkoczowych).

4.5 Rola oddziaływania kulombowskiego

Kluczowa rola krótko-zasięgowej części oddziaływania Coulomba między cząstkami dla powstania korelacji Laughlina w 2D jest widoczna poprzez fakt, że funkcja Laughlina jest *dokładną* funkcją falową stanu podstawowego dla wypełnienia $\frac{1}{p}$ LLL, jeśli ograniczyć oddziaływanie do pierwszych $p - 2$ pseudopotencjałów Haldane'a [57, 27, 78], tj. $V = \sum_{i>j} \sum_m^\infty V_m P_m^{ij}$ (P_m^{ij} jest projektorem na stany i -tej i j -tej cząstek ze względny momentem pędu m), ograniczone do składowych V_m , tylko z $m = 1, \dots, p - 2$. Te człony V_m , wyrażające energię oddziaływania Coulomba dla par cząstek ze względny momentem pędu $m \leq p - 2$, uwzględniają

krótko-zasięgową część oddziaływania elektronów, a pozostałe człony, tzn. daleko-zasięgowy ogon oddziaływania dla większych odległości między cząstkami, czyli dla $m = p, \dots$, nie wpływają istotnie na funkcję Laughlina [57, 27, 79]. Korelacje Laughlina są związane z nieściśliwymi stanami, co odzwierciedla dyskretne widmo oddziaływania Coulomba rzutowanego na stany landauowskie, czyli wyrażane w terminach pseudopotencjałów Haldane’a, co nazywane jest nawet przez Laughlina jako ”kwantowanie odległości między cząstkami” (*”a quantisation of particle separation”*) [24, 57]. Kwantyzacja oddziaływania Coulomba po rzutowaniu na stany wyrażone przez względny moment pędu par w podprzestrzeni Hilberta odpowiadającej LLL, prowadzi do nieściśliwych stanów FQHE numerowanych przez liczby całkowite (wartości własne względnego momentu pędu par), te same, które występują w funkcji Laughlina (poprzez potęgę w wielomianie Jastrowa). Istotne jest zauważyć, że w ramach podejścia do FQHE używając pseudopotencjałów Haldane’a (czyli uwzględniając tylko krótko-zasięgową część odpychania Coulomba), korelacje Laughlina przejawiające się poprzez wielo-cząstkową funkcję falową są jednoznacznie możliwym dokładnym stanem podstawowym przy ułamkowym wypełnieniu LLL, a nie wariacyjnym rezultatem modelowania tego stanu [57, 27]. To podkreśla znaczenie idei korelacji Laughlina (wyrażonej przez odpowiednie przesunięcie fazowe przy zamianach cząstek), które są wyrazem topologicznej podstawowej własności oddziałującego naładowanego układu cząstek 2D w silnym polu magnetycznym. Tę własność łączymy tu ze strukturą cyklotronowych podgrup warkoczowych.

Z uwagi na bezpośredni związek korelacji Laughlina i modelujących je złożonych fermionów, można stwierdzić, że odpychanie Coulomba (jego krótko-zasięgową część wyrażoną przez początkowe pseudopotencjały Haldane’a) ma także podstawowe znaczenie dla konstrukcji złożonych fermionów w tradycyjnym ujęciu Jaina. Widoczne jest tu jednak, że dyskretne widmo oddziaływania Coulomba z oddzieleniem przerwami energetycznymi stanów o różnym względnym momencie pędu par w obecności silnego pola magnetycznego (wyrażone przez rzutowanie oddziaływania na stany z ułamkowym wypełnieniem LLL, jak w definicji pseudopotencjałów Haldane’a) nie pozwala na traktowanie oddziaływania w roli ubierania cząstek do kwazicząstek typu Landaua, właśnie z powodu nieciągłości oddziaływania w tej projekcji.

Efektywna metoda opisu przy pomocy lokalnego pola cechowania jest ujęta w ramach teorii pola Cherna-Simonsa (pola chiralnego, tzn., łamiącego symetrię na odbicie czasu i parzystość). Teoria ta rozwijana wcześniej także w 3D została wprowadzona do obszaru FQHE [51, 52], z powodzeniem opisując cząstki ze strumieniami modelującymi dowolne statystyki, w szczególności anyony i złożone fermiony Jaina. Należy jednak podkreślić, że pole Cherna-Simonsa jest przyjmowane ’a priori’ bez podawania fizycznych przyczyn konkretnej jego postaci, czyli także nie wyjaśnia przyczyn modelowych strumieni (*flux tubes*) doczepianych do

cząstek (w przypadku złożonych fermionów lub anyonów).

Zostało zademonstrowane, że krótko-zasięgowa część oddziaływania Coulomba stabilizuje złożone fermiony wobec działania pola Cherna-Simonsa (jego antyhermitowskiej części [47, 79]), które miesza stany z różnymi momentami pędu wewnątrz LLL [79], co prowadzi do zaburzenia modelu złożonych fermionów w ujęciu pola Cherna-Simonsa [32, 79]. Oddziaływanie Coulomba usuwa degenerację stanów z różnymi momentami pędu wewnątrz LLL i powoduje pojawienie się przerw energetycznych stabilizujących obraz złożonych fermionów. Dla wyższych poziomów Landaua obraz złożonych fermionów może nie być już tak efektywny jak dla LLL, z powodu możliwego przekrywania między poziomami indukowanego przez oddziaływanie zdejmujące degenerację [80]. W wielu jednak przypadkach (jak np. $\nu = 5/2$) obraz złożonych fermionów okazuje się bardzo przydatny [31]. Oddziaływanie Coulomba może jednak prowadzić do przekrywania (mieszania) poziomów Landaua jeśli pokona oddzielającą poziomy przerwę energetyczną i wtedy ogranicza efektywność modelu złożonych fermionów [32, 31]. Analizy (także numeryczne) pokazują, że złożone fermiony mogą być użyte do opisu FQHE w drugim poziomie Landaua [37, 55] uwzględniając sparowane ich stany [81, 82]. Mieszanie poziomów Landaua wprowadza poprawki do dwu-ciałowego oddziaływania i ostatnio ilościowo analizowano jego stabilizującą rolę dla stanów Moore'a-Reada wyrażonych przez funkcje falowe z czynnikami Pfaffa [83, 84] (rozdział 6.2).

Krótko-zasięgowa część oddziaływania Coulomba stabilizuje także obraz złożonych fermionów w prezentowanym podejściu warkoczowym, w podobny sposób jak usuwała niestabilność orbit momentu pędu wewnątrz poziomu Landaua wywołaną polem Cherna-Simonsa [79]. Rzeczywiście, jeśli by zredukować krótko-zasięgową część odpychania Coulomba, to odległości między cząstkami mogłyby nie być utrzymywane (i byłyby tylko związane z gęstością powierzchniową układu 2D poprzez średnią wartość) i wtedy inne trajektorie cyklotronowe, dodatkowe w stosunku do wielo-pętlowych (dla $\nu = \frac{1}{p}$) mogłyby być dopuszczone, co spowodowałoby naruszenie konstrukcji cyklotronowej podgrupy warkoczowej.

Zatem krótko-zasięgowa część oddziaływania Coulomba wydaje się być kluczowa w każdym podejściu do złożonych fermionów. Ograniczenie pełnej grupy warkoczowej do jej podgrupy cyklotronowej z wielo-pętłowymi trajektoriami jest uzasadnione tylko dla odległości dopasowanej do promieni cyklotronowych. Rolą osobliwego odpychania Coulomba na bliskich odległościach jest zabezpieczać przed zbyt silnym zbliżaniem się cząstek i utrzymywać odległości między nimi na poziomie średniej wynikającej z gęstości. W ten sposób krótko-zasięgowa część oddziaływania Coulomba jest spożytkowana w konstrukcji cyklotronowych podgrup. Daleko-zasięgowy ogon oddziaływania Coulomba jest pozostawiony jako resztkowe oddziaływanie cząstek, podobnie jak w modelu słabo i daleko-zasięgowo oddziałujących złożonych fermionów Jaina [30, 32, 31].

4.6 Złożone fermiony w terminach grup cyklotronowych

W modelu Jaina złożonych fermionów zakłada się [30, 32, 31], że do każdej cząstki doczepionych jest $p - 1$ kwantów strumienia, dla złożonych fermionów rodzaju p . Zakłada się, że te lokalne strumienie (*flux-tubes*) są zorientowane przeciwnie do strumienia zewnętrznego pola. Następnie rozważa się osłabianie zewnętrznego pola przez średnie pole tych lokalnych strumieni, co można oszacować obliczając redukcję strumienia:

$$BS - N(p - 1)\frac{hc}{e} = \pm B'S, \quad (4.4)$$

gdzie \pm oznacza przyjmowaną możliwą orientację zredukowanego pola B' , zgodną lub przeciwną do pola zewnętrznego B . W zredukowanym polu B' może zachodzić IQHE, czyli,

$$B'S/\frac{hc}{e} = \frac{N}{n},$$

gdzie n oznacza numer LL (liczbę całkowicie zajętych poziomów Landaua, wszystkie mają taką samą degenerację zależną od natężenia pola, wynoszącą $B'S/\frac{hc}{e}$). Wyjściowe pole zewnętrzne odpowiada ułomkowemu zajęciu LLL,

$$\nu = \frac{N}{N_0} = N/BS/\frac{hc}{e}.$$

Z powyższych zależności otrzymujemy, $BS = N/\nu\frac{hc}{e}$ i następnie $N/\nu\frac{hc}{e} - N(p - 1)\frac{hc}{e} = \pm N/n\frac{hc}{e}$, czyli $1/\nu - (p - 1) = \pm 1/n$, a stąd:

$$\nu = \frac{n}{n(p - 1) \pm 1}, \quad (4.5)$$

co daje główny ciąg hierarchii zajęć ν FQHE w rzeczywistym polu zewnętrznym (wyrażony przez nieściśle stany pełnego zajęcia [oddzielone szczeblami, jeśli oddziaływanie Coulomba ich nie redukuje] kolejnych n poziomów Landaua w zredukowanym polu), przez $p - 1$ kwantów strumienia doczepianych modelowo do cząstek w przypadku złożonych fermionów rodzaju p .

Łatwo zauważyć, że w przypadku dwóch kwantów strumienia doczepionych do złożonych fermionów Jaina, czyli dla $p = 3$ otrzymujemy pole $B' = 0$ dla $\nu = \frac{1}{2}$. Rzeczywiście, w takim przypadku,

$$B'S = BS - \frac{1}{2}N_02\frac{hc}{e} = BS - \frac{BS}{\frac{hc}{e}}\frac{hc}{e} = 0.$$

Interpretowane jest to jako stan metalu Halla [38], kiedy złożone fermiony zredukowały swoimi lokalnymi strumieniami cały strumień pola zewnętrznego i zachowują się jak fermiony bez obecności pola – tworzą morze Fermiego, jak w metalu [38, 31].

Powyżej przedstawiony fenomenologiczny schemat złożonych fermionów nie jest jednak do końca przekonujący, jeśli przyjąć wyjaśnienie, że doczepiane kwanty strumienia nie istnieją, a są tylko wyrazem dodatkowych pętli cyklotronowych.

Zweryfikować należy, w szczególności, przyjmowaną powyżej możliwość, że zredukowane pole B' może mieć przeciwny zwrot w stosunku do pola zewnętrznego B (tzn., znak $-$ z przyjmowanego \pm w równaniu (4.4)). Dodatkowe pętle nie mogą bardziej niż cały strumień, redukować ten strumień. Wydaje się zatem, że zakładana w modelu Jaina, możliwość 'przeważenia' strumieni lokalnych nad całkowitym strumieniem jest niejasna. Poniżej pokażemy, że poprawiając to założenie, w ramach cyklotronowych grup warkoczowych można również uzyskać hierarchię zapełnień FQHE poprzez związek z IQHE, oraz uzasadnić stan metalu Halla. W tym celu należy zauważyć, że:

- tylko dla $\nu = \frac{1}{p}$, gdzie p nieprzysta liczba naturalna, każdej pętli cyklotronowej można przyporządkować kwant strumienia; dla $p = 3$ są to zatem dwa dodatkowe kwanty na cząstkę, zgodnie z modelem Jaina; dodajmy, że pętle cyklotronowe nie są rzeczywistymi trajektoriami cząstek i można posługiwać się tu tylko odpowiedniością fragmentów strumienia BS przypadających na pojedynczą pętlę i w przypadku p pętli i pola odpowiadającego zapełnieniu $\nu = \frac{1}{p}$ otrzymujemy pełny kwant $\frac{hc}{e}$ na pętlę;
- dla innych zapełnień ν LLL strumień przypadający na jedną pętlę wynosi $\phi = \frac{BS}{pN} = \frac{BS}{p\nu N_0} = \frac{BS}{p\nu \frac{BS}{hc/e}} = \frac{hc}{e} \frac{1}{p\nu}$; jeśli $\phi = \frac{hc}{e} \frac{1}{n}$, jak w przypadku n całkowicie zapełnionych poziomów Landaua (przy pojedynczych pętlach cyklotronowych na cząstkę), możemy oczekiwać podobnego związku FQHE z IQHE (nieściśliwym stanem) jak w modelu Jaina, i uzyskujemy w ten sposób hierarchię zapełnień FQHE, $\frac{1}{n} = \frac{1}{p\nu}$, czyli,

$$\nu = \frac{n}{p}, \quad p = 3, 5, 7, \dots \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4.6)$$

W ten sposób odtworzyć można wszystkie ułamki zadane relacją (4.5), bez założenia przypinania pełnych kwantów strumienia także poza zapełnieniem $\nu = \frac{1}{p}$ (p nieparzyste) i założenia o możliwości zmiany zwrotu zredukowanego pola;

- w przypadku $\nu = \frac{1}{2}$ i $p = 3$ otrzymujemy $\phi = \frac{BS}{3N} = \frac{eh}{c} \frac{2}{3}$; trzy pętle zabierają zatem dwa pełne kwanty strumienia i fenomenologicznie można domniemywać, że dynamika kwantowego układu odzwierciedli potrójne cyklotronowe trajektorie, z których dwie zabiorą cały strumień (ponieważ akurat odpowiednio pasuje strumień na cząstkę), a trzecia bez pola realizuje ciecz Fermiego; podkreślamy jeszcze raz, że pętle cyklotronowe (związane z klasycznym obrazem warkoczowym) nie muszą obejmować pełnego kwantu w przeciwieństwie do *kwaziklasycznych* trajektorii, do których odnosi się kwantowanie strumienia pola magnetycznego i tylko możemy domniemywać o takim ich charakterze (kwaziklasycznym), ale wyłącznie w przypadkach

gdy jest to możliwe, jak np. dla $\nu = \frac{1}{2}$ (tzn. wtedy gdy na cyklotronowe trajektorie przypadają całkowite wielokrotności kwantu strumienia); warto też dodać że dla pełnego zapełnienia wyższych poziomów Landaua, na cząstkę przypada $\phi = \frac{hc}{e} \frac{1}{n}$ fragment kwantu i nie jest możliwy indywidualny kwaziklasyczny cyklotronowy ruch pojedynczej cząstki, ale raczej kolektywna jego aranżacja, nie przecząca kwantyzacji strumienia w kwaziklasycznym kwantowym opisie.

Powyższe argumenty odnoszą się do klasycznych cyklotronowych pętli, związanych z klasycznymi warkoczowymi trajektoriami, dla których zawsze całkowita jest liczba pętli, ale nie zawsze całkowita jest liczba kwantów strumienia przypadająca na pojedynczą pętlę (jak dla zapełnienia poza $\nu = \frac{1}{p}$).

4.7 Metal Halla w opisie grup cyklotronowych

Spróbujmy odnieść się do stanu dla $\nu = \frac{1}{2}$ (nazywanego metalem Halla) z punktu widzenia grup warkoczowych. W ramach modelu Jaina złożonych fermionów, dwa kwanty strumienia doczepionego do cząstek, całkowicie kasują zewnętrzne pole w przybliżeniu średniego pola (innymi słowy, hermitowskie pole Cherna-Simonsa łączące się z modelem Jaina kasuje, w przybliżeniu średniego pola, całe pole zewnętrzne), a to prowadzi do stanu złożonych fermionów bez obecności pola, czyli morza Fermiego, nazywanego tu metalem Halla [38]. Z kolei w podejściu Reda do złożonych fermionów przy $\nu = \frac{1}{2}$, następuje całkowite zniesienie ładunku z powodu rozrzedzenia gęstości ładunku w pobliżu centrum wiru i ekranowania dodatnim niezrównoważonym ładunkiem tła (*jellium*), dla wirowości $q = 2$ i $\nu = \frac{1}{2}$. Zamiana dwóch wirów produkuje przesunięcie fazowe $q^2\nu\pi = 2\pi$ i jeszcze dodatkowe π , gdy zamieniamy elektrony razem z wirami. Zatem kompleksy złożone z dwóch wirów doczepionych do elektronów zachowują się jak fermiony (bez ładunku) – tworzą morze Fermiego (metal Halla). Niestabilność układu fermionów prowadzi następnie do sparowanego stanu typu BCS [22], wyrażonego w położeniowej reprezentacji przez czynnik Pfaffa (rozdział 6). Stan ze sparowaniem odtwarza nieściśliwość z powodu szczeliny energetycznej sparowania (np. dla $\nu = 5/2$ [55, 45], ale też rozważanego dla $\nu = 1/2$ i $1/4$ [39, 40]). Ponieważ Pfaffian [42] produkuje przesunięcie fazowe $-\pi$ przy zamianach cząstek, to pełne przesunięcie fazowe funkcji falowej z czynnikiem Jastrowa $\prod_{i>j}(z_i - z_j)^2$ [42, 55] wynosi π . Takie przesunięcie fazowe definiowane jest przez 1DUR grupy cyklotronowej (z $p = 3$, ponieważ ta podgrupa cyklotronowa odpowiada zakresowi zapełnień $\nu \in [1/3, 1)$) oznaczoną przez $p\alpha = 3\frac{1}{3}\pi = \pi$, czyli, $\alpha = \frac{1}{3}\pi$. Ta reprezentacja ($p = 3, \alpha = \frac{1}{3}\pi$) indukuje fermionową statystykę dla $\nu = 1/2$ [85], i w terminach warkoczowych złożonych fermionów odpowiada morzu Fermiego (ponieważ dwie pętli zabierają cały strumień pola zewnętrznego) w zgodności też z

lokalną transformacją cechowania z $q = 2$, zatem reprodukuje fermiony (startując ze zwykłych fermionów) [29, 47].

4.8 Uwagi o ograniczeniach dla wielo-pętlowej struktury warkoczy cyklotronowych

Kwantowanie strumienia pola magnetycznego jest bardzo ważnym kwantowym wynikiem, obowiązującym niezależnie od oddziaływania – ma ono charakter kwaziklasyczny, kiedy dynamika kwantowa, w ogólnym przypadku nie odbywająca się wzdłuż trajektorii, może być charakteryzowana (z pewną dokładnością przybliżenia kwaziklasycznego) przez położenie i pęd, tak że można określić orbitę i jej powierzchnię i zatem strumień pola przez tę powierzchnię [22]. Rozpatrywane wyżej trajektorie cyklotronowe związane z warkoczami nie są realnymi trajektoriami cząstek, nawet w sensie kwaziklasycznym. Dynamika kwantowa nie ma charakteru ruchu po trajektoriach, a w przypadku układów w polu magnetycznym kształt funkcji falowych zależy silnie od wyboru cechowania potencjału pola [28, 86]. Periodyczność kwaziklasycznego obrazu [86] przy obecności pola magnetycznego (dowolny kwaziklasyczny pakiet falowy wykazuje periodyczną dynamikę w płaszczyźnie prostopadłej do pola magnetycznego, jak pokazujemy niżej) może jednak sugerować przydatność kwaziklasycznego opisu w powiązaniu z kwantowaniem strumienia pola magnetycznego, obowiązującym w odniesieniu do właśnie kwaziklasycznych orbit. W przypadku gdy część strumienia pola zewnętrznego przypadająca na pojedynczą pętlę cyklotronową daje się wyrazić przez pełne kwanty strumienia, wydaje się możliwe, że kwaziklasyczny obraz silnie oddziałującego układu ładunków w polu magnetycznym odzwierciedlać też będzie cyklotronową strukturę. Takie zupełnie heurystyczne przypuszczenie może wiązać topologiczną warkoczową strukturę z realną dynamiką w tych szczególnych sytuacjach wyróżnionych przez kwaziklasyczne kwantowanie strumienia. Może to pozwolić w szczególności na określenie ograniczeń na stosowalność cyklotronowej wielo-pętlowej struktury przez dynamiczne wymogi minimalizacji energii kinetycznej i oddziaływania. Ograniczenie tego typu jest również obecne w standardowej teorii złożonych fermionów Jaina, w ramach której wykazano [31, 32], że dla $\nu < \frac{1}{9}$ bardziej stabilny niż stan Laughlina jest stan kryształu Wignera. Dla tak wysokich natężeń pola magnetycznego promień cyklotronowy jest bardzo mały i w cyklotronowym warkoczowym opisie wymagana byłaby aż 9-cio pętlowa struktura, co wobec powyżej wskazanej możliwości dynamicznych konsekwencji, może być energetycznie niewygodne. W takiej sytuacji pozostanie prosty jedno-pętlowy ruch cyklotronowy nie umożliwiający jednak zamian cząstek i ustalenia statystyki. Elektrony zostaną zlokalizowane w strukturze trójkątnej sieci Wignera. Badania kwaziklasycznych trajektorii w stanach Laughlina przeprowadzone w pracach [46, 75] wyraźnie potwierdzają tę konkurencyjność kryształu Wignera.

Kryształ Wignera, czyli kryształ elektronowy [87] odpowiada krystalizacji elektronowej cieczy, kiedy przestrzenny rozmiar pakietu odpowiadającego lokalizacji cząstek jest mniejszy od średniej odległości między cząstkami. Takiej krystalizacji można oczekiwać przy niewielkich gęstościach (wtedy względnie dużej średniej odległości między cząstkami), kiedy konkurencja między wzrostem energii kinetycznej w wyniku lokalizacji (przeciwdziałła lokalizacji) a oddziaływaniem (preferuje lokalizację) dopuścić może lokalizację (przy dużych gęstościach energia kinetyczna jest dominująca). Stan kryształu Wignera obserwowany był w dwuwymiarowym układzie elektronów na powierzchni ciekłego helu [88]. Pole magnetyczne zwiększa lokalizację i w elektronowych układach hallowskich 2D, przy niskich wypełnieniach, oczekiwać można także krystalizacji Wignera w konkurencji z Laughlinowskimi kolektywnymi stanami. Poprzez porównanie całkowitej energii (kinetycznej i oddziaływania) stanu opisanego przez funkcje Laughlina i stanu zlokalizowanych elektronów na trójkątnej sieci kryształu Wignera w płaskich układach 2D określono krytyczne wypełnienie najniższego poziomu Landaua $\nu = \frac{1}{10}$, poniżej którego kryształ Wignera jest bardziej korzystny energetycznie [89]. Uwzględnienie mieszania stanów między poziomami Landaua przesuwają to graniczne wypełnienie do $\nu = \frac{1}{9}$ [90]. Numeryczna diagonalizacja na torusie układu 6-ciu cząstek [91] wskazuje z kolei na krytyczne wypełnienie $\nu = \frac{1}{8}$. Przyczyn tych niewielkich rozbieżności upatrywać można w bliskim położeniu energetycznym obu konkurujących stanów w stosunkowo szerokim obszarze różnych parametrów, w różnym stopniu uwzględnianych w rozmaitych podejściach obliczeniowych. Eksperymentalnego potwierdzenia realizacji kryształu Wignera w elektronowym układzie 2D w silnym polu nie osiągnięto jeszcze, ale też nie wykluczono obserwacjami FQHE przy niskich wypełnieniach LLL [31].

Periodyczny charakter dynamiki pakietów falowych

Klasyczna trajektoria cyklotronowa dla naładowanej cząstki ma kolisty kształt w płaszczyźnie 2D (ogólniej w płaszczyźnie prostopadłej do pola w 3D). Kwantowy odpowiednik tej dynamiki może (w zależności od wyboru cechowania pola) nie wykazywać nawet symetrii osiowej (np. w cechowaniu Landaua takiej symetrii nie wykazują stany Landaua z funkcjami Hermite'a względem jednej ze zmiennych w płaszczyźnie prostopadłej do pola [28]). Jest to wynik degeneracji poziomów Landaua, co w klasycznym przypadku znajduje wyraz w braku określenia położenia osi symetrii trajektorii.

Dla cechowania [86]: $\mathbf{A} = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$, klasyczna funkcja Hamiltona pojedynczej cząstki ma postać:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_x - \frac{|e|\hbar}{2c} By \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(p_y + \frac{|e|\hbar}{2c} Bx \right)^2 + \frac{p_z^2}{2m},$$

oraz równania Hamiltona (przyjęto tu oznaczenia $|e| = e$):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{m} \left(p_x - \frac{eB}{2c} y \right), \quad \dot{y} = \frac{1}{m} \left(p_y + \frac{eB}{2c} x \right), \quad \dot{z} = \frac{1}{m} p_z, \\ \dot{p}_x &= -\frac{\omega}{2} \left(p_y + \frac{eB}{2c} x \right), \quad \dot{p}_y = \frac{\omega}{2} \left(p_x - \frac{eB}{2c} y \right), \quad \dot{p}_z = 0.\end{aligned}$$

Rozwiązanie tych równań jest następujące: $x = R \cos(\omega t + \psi) + x_0$, $y = R \sin(\omega t + \psi) + y_0$, (gdzie, $\omega = \frac{eB}{mc}$ to częstość cyklotronowa, R to promień cyklotronowy oraz x_0 , y_0 to położenie środka orbity). Stąd, $y_0 = \frac{y}{2} + \frac{p_x}{m\omega}$, $x_0 = \frac{x}{2} - \frac{p_y}{m\omega}$ i zastępując kanonicznie sprzężone zmienne x, p_x, y, p_y przez operatory, otrzymujemy komutator: $[\hat{x}_0, \hat{y}_0] = \frac{i\hbar}{m\omega}$, co oznacza, że obie współrzędne środka orbity nie mogą być równocześnie określone. Analogicznie do klasycznych rozwiązań można zapisać operatory \hat{x} , \hat{y} w obrazie Heisenberga [86]:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \hat{A} \cos \omega t - \hat{B} \sin \omega t + \hat{x}_0, \\ \hat{y}(t) &= \hat{A} \sin \omega t + \hat{B} \cos \omega t + \hat{y}_0,\end{aligned}$$

gdzie niezależne od czasu operatory, $\hat{A} = \frac{\hat{p}_y}{m\omega} + \frac{\hat{x}}{2}$, $\hat{B} = -\frac{\hat{p}_x}{m\omega} + \frac{\hat{y}}{2}$ oraz $\hat{x}_0 = \frac{\hat{x}}{2} - \frac{\hat{p}_y}{m\omega}$, $\hat{y}_0 = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{\hat{p}_x}{m\omega}$ (przy warunku początkowym $\hat{x}(0) = \hat{x}$, $\hat{y}(0) = \hat{y}$). Zależności te pokazują, że operatory położenia w reprezentacji Heisenberga zależą od czasu w sposób periodyczny, a stąd wynika [86], że dowolny pakiet falowy o dowolnym kształcie w płaszczyźnie x, y będzie zmieniał się w czasie także periodycznie z okresem $2\pi/\omega$. Daje to pewne wyobrażenie o kwantowym cyklotronowym zachowaniu cząstki w polu magnetycznym, w szczególności w kwaziklasycznym przybliżeniu, kiedy zlokalizowany pakiet falowy można identyfikować z poruszającą się kwaziklasyczną cząstką. Na tej podstawie można oczekiwać związku rzeczywistej kwantowej dynamiki z cyklotronowym obrazem warkoczowym.

Można zwrócić uwagę, że pakiet falowy odpowiadający balistycznej kwaziklasycznej dynamice cząstki jest blisko związany z kolektywnym charakterem wielocząstkowego układu - stany pędowe numerują wtedy jednocząstkowe stany stacjonarne, z których tworzony może być balistyczny pakiet falowy. Kolektywny ruch minimalizuje energię kinetyczną, podczas gdy oddziaływanie preferuje lokalizację (i związany z lokalizacją wzrost energii kinetycznej). Zatem kolektywna dynamika wydaje się preferować kwaziklasyczny ruch pakietów balistycznych po periodycznych zamkniętych trajektoriach i wtedy koniecznie obejmujących skwantowane strumienie zewnętrznego pola magnetycznego. Wskazuje to na rolę kolektywizacji w preferencji energetycznej pakietów falowych realizujących zamknięte trajektorie w związku z klasycznym cyklotronowym opisem, także wielopętlowym. Wydaje się to być zgodne z obserwacjami FQHE w grafenie (opisanymi w kolejnym paragrafie), występującym przy niskich gęstościach nośników, a zatem przy ich rozrzedzeniu i zmniejszeniu przez to oddziaływania. Oddziaływanie być może nie odgrywa więc aż tak kluczowej roli w inicjowaniu FQHE, jak to podejrzewano w konsekwencji standardowego modelu złożonych fermionów traktujących

ubieranie fermionów w zlokalizowane strumienie jako wynik tylko oddziaływania [32, 31].

Eksperymentalne potwierdzenie wzrostu rozmiarów efektywnych cyklotronowych orbit elektronów 2D w silnym polu magnetycznym można odnaleźć w pomiarach rezonansu sprzężenia piezoelektrycznego warstwy z powierzchniowymi falami akustycznymi a znajdującym się poniżej układem elektronów 2D. Rezonansowy przekaz energii od fali akustycznej do układu elektronów zaobserwowano przy współmierności długości fali akustycznej i wyraźnie wydłużonych promieni cyklotronowych odpowiadających złożonym fermionom w silnym prostopadłym polu magnetycznym [92, 93]. Innym wynikiem eksperymentalnym wskazującym na zwiększenie rozmiarów cyklotronowych trajektorii przy ułamkowych zapelnieniach LLL jest obserwacja fluktuacji transportu balistycznego nośników w układzie 2D w silnym polu między dwoma nano-szczelinami w kierunku poziomym – wzmocnienie transportu obserwowano, gdy odległość między otworami (szczelinami) była współmierna z wydłużonym promieniem cyklotronowym w zmniejszonym polu efektywnym, wskazując na ogniskowanie cyklotronowe nośników o takich właśnie rozmiarach [94].

Kwaziklasyczny charakter kwantowania strumienia pola magnetycznego

Pęd uogólniony \dagger w przypadku obecności pola magnetycznego wyraża się wzorem [95]:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \quad (4.7)$$

Zamieniamy operator pędu $\hat{\mathbf{p}} = -\hbar\nabla$ na operator $\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, czyli jednocząstkowy hamiltonian $H = \frac{(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + U$ (pęd uogólniony \mathbf{P} zamieniamy operatorem $-i\hbar\nabla$, jako zmienną kanoniczną – zgodnie z odpowiednimi nawiasami Poissona, czyli w zgodzie z regułami komutacji).

Wybierając cechowanie Landaua, $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$, mamy dla pędu kinematycznego, $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $p_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c}Bx$, skąd,

$$p_y p_x - p_x p_y = -i\hbar\frac{e}{c}B, \quad (4.8)$$

albo

$$p_y Y - Y p_y = -i\hbar, \quad (4.9)$$

\dagger w mechanice klasycznej pęd uogólniony $\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}$, i dla cząstki w polu magnetycznym lagranżjan ma postać: $\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$; równania Hamiltona wyrażone są dla pędu uogólnionego (pęd uogólniony i uogólnione położenie tworzą parę kanonicznych zmiennych, odpowiednich do kwantowania), funkcja Hamiltona ma postać $H = \left(\sum P\dot{q} - \mathcal{L}\right)_{\dot{q}(q,P,t)} = \frac{(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + U$; ale pęd kinematyczny, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, wiąże się z siłą, $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$, w szczególności z siłą Lorentza, $\mathbf{F} = \frac{e}{c}q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

gdzie, $Y = \frac{c}{eB}p_x$. Zatem (p_y, Y) można uznać za parę kanonicznie sprzężonych zmiennych i ze wzoru Bohra-Sommerfelda dla kwaziklasycznego przybliżenia,

$$\oint p_y dY = h(n + \gamma(n))q, \quad (4.10)$$

gdzie γ jest wolnozmienną funkcją n , $0 < \gamma(n) < 1$, natomiast q oznacza liczbę pętli klasycznej zamkniętej trajektorii (cyklotronowej) w przypadku 2D[§]. Zatem,

$$\oint p_y dp_x = \frac{heB}{c}(n + \gamma(n))q, \quad (4.11)$$

czyli 'kwant pola powierzchni' w przestrzeni pędów kinematycznych wynosi $\Delta S_p = \frac{heBq}{c}$.

Pole powierzchni kwaziklasycznej trajektorii w przestrzeni pędów kinematycznych skaluje się zatem jak Bq i podobnie skaluje się energia kinetyczna (proporcjonalna do kwadratu pędu kinematycznego). Można na tej podstawie oczekiwać, że wraz ze wzrostem q , kwantowy odpowiednik wielo-pętlowej struktury cyklotronowej staje się coraz mniej wygodny energetycznie z uwagi na szybki wzrost energii kinetycznej (energia potencjalna jest stała wobec przyjętego warunku stałej gęstości i jednorodności układu). Stan z $q = 1$ przy ułamkowych wypełnieniach (tzn. przy wysokich polach) nie może być jednak kolektywnym stanem wielocząstkowym (z powodu zbyt krótkich jedno-pętlowych trajektorii cyklotronowych), dlatego realizują się stany laughlinowskie. Kiedy jednak $q \geq 9$ przewaga energetyczna kolektywnych laughlinowskich stanów znika i wygodniejszym energetycznie jest stan indywidualnych zlokalizowanych cząstek (o nieustalanej statystyce, nie mogących się zamieniać)[¶] tworzących kryształ Wignera.

W odniesieniu do założenia Jaina o całkowitej liczbie kwantów strumienia doczepianych do każdej cząstki, nawet dla wypełnień poza $\nu = \frac{1}{p}$, można zauważyć z punktu widzenia wielo-pętlowej struktury warkoczowej trajektorii cyklotronowych, że wymóg taki musiałby się wiązać ze wspomnianą wyżej możliwością replikowania wielo-pętlowej warkoczowej struktury przez realną dynamikę cyklotronową pakietów falowych. Zgodnie z powyższymi uwagami, każdy pakiet falowy odbywa periodyczną dynamikę (z okresem cyklotronowym), a w szczególności balistyczny pakiet musiałby zataczać zamknięte trajektorie, a zatem obejmujące koniecznie skwantowany strumień pola zewnętrznego. W przypadku $\nu = \frac{1}{p}$ wszystkie pętle wielo-pętlowej trajektorii cyklotronowej obejmowałyby, w tym odwzorowaniu, pełne kwanty strumienia, ale w przypadku ν poza $\frac{1}{p}$ ostatnia pętla

[§]w przypadku 2D i wielo-pętlowych klasycznych trajektorii cyklotronowych w przestrzeni konfiguracyjnej, zgodnie z warkoczową podgrupą, dodajemy tu mnożnik q , gdyż według kwaziklasycznego związku [22], $\mathbf{F}dt = d\mathbf{p} = \frac{e}{c}d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$ (\mathbf{F} siła Lorentza) trajektoria położeniowa jest replikowana, w przybliżeniu kwaziklasycznym, w przestrzeni pędu kinematycznego (ortogonalnie obrócona i przeskalowana czynnikiem $\frac{c}{eB}$), czyli powinna być też wielo-pętlowa

[¶]dla funkcji falowych elektronów z najniższego poziomu Landaua zlokalizowanych na trójkątnej sieci Wignera, tzw. funkcji Maki-Zotos [96], całka przekrycia najbliższych sąsiadów wynosi $\sim e^{-3.6/\nu} \sim e^{-30} \sim 0$, dla $\nu = 1/9$

nie mogłaby obejmować pełnego kwantu (reszta ze strumienia po przyjmowaniu przez poprzednie pętle pojedynczych kwantów strumienia mogłaby być dodatnia lub ujemna, w zależności od zwrotu wypadkowego pola Jaina w stosunku do pola zewnętrznego).

Interesującym wydaje się zauważenie, że utrzymanie w mocy założeń standardowej teorii złożonych fermionów, w przypadku poza $\nu = \frac{1}{p}$, polegających na przyjęciu modelu z całkowitą liczbą kwantów strumienia doczepionych do każdej z cząstek, w proponowanej interpretacji wielo-pętlowej prowadzi do obserwacji, że część z tych pętli obejmować będzie pełne kwanty strumienia a ostatnia tylko fragment kwantu, i to dodatni lub ujemny, w zależności czy efektywne pole Jaina jest skierowane zgodnie czy przeciwnie do pola zewnętrznego (tj. w przypadku $p = 3$ dla $\nu < \frac{1}{2}$ lub $\nu > \frac{1}{2}$, odpowiednio). Taka sytuacja odpowiadałaby realnym zamkniętym periodycznym trajektoriom kwaziklasycznego pakietu falowego, kiedy kwantowanie strumienia pola jest bezwarunkowo wymagane. Oznaczałoby to, że tylko w przypadku, gdy na ostatnią pętlę przypada n -ta część kwantu strumienia (tak jak w przypadku całkowicie zapełnionych n poziomów Landaua) możliwa byłaby aranżacja kwaziklasycznego wielo-pętlowego rzeczywistego ruchu. Ostatnia pętla — podejrzewać można — zorganizowana byłaby w analogii do n -tego poziomu Landau, kolektywnie, tj. przy udziale n cząstek obejmując dopiero wspólnie pełny kwant strumienia pola magnetycznego. Taka kolektywna pętla mogłaby być wyobrażona jako pętla, na obwodzie której mieści się n fal de Broglie'a (każda z nich reprezentując jakby jedną cząstkę). Ta trajektoria realizowałaby cyklotronowy ruch zgodny co do kierunku z poprzednimi pętlami lub przeciwny, w zależności od zwrotu efektywnego pola Jaina w stosunku do pola zewnętrznego. W przypadku takiego wymuszonego przez kwantowanie strumieni odwróconego ruchu cyklotronowego ostatniej trajektorii, jej związek z poprzednimi pętlami musiałby mieć charakter ósemki. Tego typu egzotyczna charakterystyka ewentualnej wielo-pętlowej dynamiki kwantowej rozumianej w kategoriach periodycznego ruchu balistycznych pakietów falowych byłaby konsekwencją kwaziklasycznego kwantowania strumieni i być może jest realizowana (na co wskazuje dobra zgodność modelu złożonych fermionów z obserwacjami FQHE, zwłaszcza w okolicach $\nu = \frac{1}{2}$), ale tylko dla zapełnień ujętych hierarchią $\nu = \frac{n}{n(p-1)\pm 1}$. Alternatywne ujęcie mapowania FQHE na IQHE, z jednakową frakcją strumienia na każdą z pętli wielo-pętlowej struktury (w klasycznym warkoczowym ujęciu, bez wymogu kwantowania strumieni), jak pokazano wyżej, prowadzi do nieco zmodyfikowanej hierarchii zapełnień $\nu = \frac{n}{p}$. Eksperymentalna obserwacja własności metalu Halla dla $\nu = \frac{1}{2}$ wydaje się wskazywać jednak na przewagę poprzedniego modelu.

Zaplanować można eksperyment, przy pomocy którego można by rozstrzygnąć, która z powyższych interpretacji jest poprawna. Eksperyment polegać by mógł na pomiarze ogniskowania cyklotronowego wiązki nośników 2D przepusz-

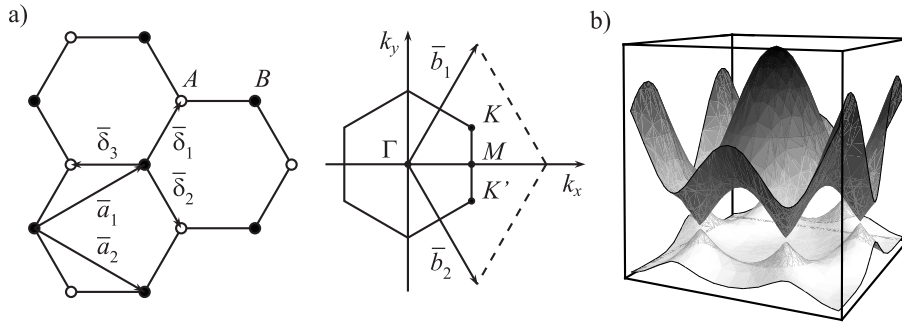
czanych przez wąską, nanometrowych rozmiarów szczelinę, tak jak w eksperymentach opisanych w [94, 32]. Mierząc ogniskowanie na lewo i na prawo od wyjściowej szczeliny w blisko odległych szczelinach kontrolnych, można by wykryć zmianę orientacji cyklotronowego ruchu na ostatniej orbicie wielo-pętłowej trajektorii, mocno wydłużonej w pobliżu $\nu = \frac{1}{2}$. Zmiana orientacji ruchu wzdłuż tej orbity prowadzić by musiała do asymetrii obserwacji przy przechodzeniu przez wypełnienie $\frac{1}{2}$ przy zmniejszaniu lub zwiększaniu natężenia pola zewnętrznego.

4.9 Grupy cyklotronowe w przypadku grafenu

Jednoatomowa warstwa grafitu (alotropowej odmiany węgla) nazywana grafenem tworzy heksagonalną strukturę 2D, z siecią Bravais zadaną przez dwa wektory:

$$\vec{a}_1 = a(3, \sqrt{3})/2, \quad \vec{a}_2 = a(3, -\sqrt{3})/2,$$

($a \simeq 0.142$ nm, odległość między atomami węgla) z dwoma atomami węgla na komórce elementarną, Rys. 4.5 a.



Rys. 4.5. a) Dwusieczowa (A, B) trójkątna struktura grafenu, \vec{a}_1, \vec{a}_2 wektory sieci Bravais, \vec{b}_1, \vec{b}_2 wektory sieci odwrotnej, b) pasmowa struktura grafenu, pasma typu π , w modelu silnego wiązania, wg zależności, $E_{\pm}(K) = \pm t\sqrt{3} + f(k) - t'f(k)$, gdzie $f(k) = 2 \cos(\sqrt{3}k_y a) + 4 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}k_y a) \cos(\frac{3}{2}k_x a)$, $t = 2.7$ eV – energia przeskoiku dla najbliższych sąsiadów (między podsieciami, wektory $\vec{\delta}_i$), $t' = 0.2t$ – energia przeskoiku dla kolejnych sąsiadów (wewnątrz podsieci), $a = 1.42$ Å, idealne punkty Diraca K i K' dla $t' = 0$

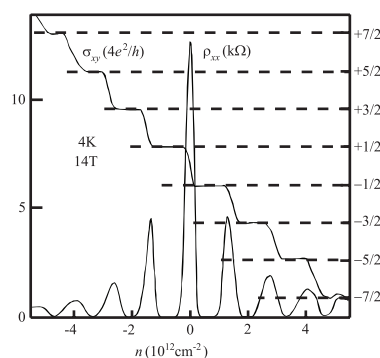
W wyniku powstaje podwójna trójkątna sieć – heksagonalna struktura atomów węgla typu plaster miodu (*honeycomb*), rozwinięta nanorurka. Zhybrydyzowane wiązania sp^2 typu σ prowadzą do mocnej (z kowalencyjnymi wiązaniami) dwuwymiarowej struktury, natomiast prostopadle do płaszczyzny orbitale p hybrydują do typu π struktury pasmowej (dobrze opisywanej w przybliżeniu silnego wiązania i przy uwzględnieniu najbliższych sąsiadów i kolejnych sąsiadów) z dolinami dziurowymi (pasmo walencyjne) i elektronowymi (pasmo przewodnictwa) w punktach K i K' na granicy sześciokątnej strefy Brillouina [97, 98], Rys 4.5 b. Oba pasma stykają się w tych punktach (półprzewodnik bezszczelinowy) i mają

kształt stożków (w przypadku $t' = 0$, w pobliżu punktów K, K'), czyli zależność energii od pędu (odległości od punktów styku) jest liniowa względem długości pędu. Odpowiedni hamiltonian pasmowy (w przybliżeniu silnego wiązania najbliższych sąsiadów i przy uwzględnieniu obu podsieci, numerowanych sztucznie wprowadzonym pseudospinem) jest formalnie ekwiwalentny do opisu relatywistycznych fermionów o zerowej masie spoczynkowej ($E = \pm\sqrt{m_0^2 v_F^4 + p^2 v_F^2}$, z $m_0 = 0$), opisywanych przez równanie Diraca z prędkością światła zastąpioną tutaj przez prędkość Fermiego, $v_F \simeq c/300$ [98, 99]. Równanie dynamiki przybiera zatem postać:

$$-iv_F \vec{\sigma} \cdot \nabla \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}),$$

gdzie wektor macierzy Pauliego odpowiada pseudospinowej strukturze związanej z dwoma podsieciami [98, 100] (funkcje falowe są spinorami w tej strukturze). Zerowa masa fermionów Diraca prowadzi do licznych konsekwencji i anomalnych elektronowych własności grafenu [98, 100, 101, 102]. Dla cząstek Diraca o zerowej masie spoczynkowej nieoznaczoność pędu prowadzi także do nieoznaczoności energii (w przeciwieństwie do przypadku nierelatywistycznego, gdzie relacja nieoznaczoności położenia i pędu jest niezależna od relacji nieoznaczoności energii i czasu), co powoduje że dla cząstek relatywistycznych ewolucja czasowa wiąże stany cząstkowe i dziurowe. Dla bezmasowych elektronów Diraca inne jest też skalowanie energii cyklotronowej ($\sim B^{1/2}$, a nie $\sim B$, jak w przypadku nierelatywistycznych cząstek). Inna, dużo większa jest również wartość tej energii (dwa rzędy większa od odpowiedniej w klasycznych materiałach, tj. wynosi [z powodu zerowej masy w punkcie Diraca] aż około 1000 K, dla pola 10 T), co pozwala obserwować całkowity kwantowy efekt Halla w grafenie nawet w temperaturach pokojowych [101, 102]. Obserwowany jest tu jednak anomalny IQHE (dla $\nu = \pm 4(n + 1/2)$, czyli dla $\pm 2, \pm 6, \pm 10, \dots$ i przy zerowym poziomie Landaua w punkcie Diraca, tj. dla energii zero; \pm odpowiada cząstkom i dziurom, 4 wynika z degeneracji spinowo-dolinowej [pseudospinu], $1/2$ związana jest z fazą Berry'ego dla pseudospinu) [101, 102, 99]), Rys. 4.6, co dobrze wytłumaczone jest strukturą pasmową prowadzącą do efektywnego opisu Diraca [98, 100, 101, 102, 103]. Tzw. paradoks Kleina odnośnie idealnego tunelowania diracowskich cząstek przez bariery potencjału prowadzi z kolei do wielkiej ruchliwości nośników ładunku w grafenie, obserwowanej eksperymentalnie nawet w pobliżu punktu Diraca (poziom Fermiego na granicy między elektronami i dziurami). W punkcie tym gęstość nośników jest zero (i zerowy poziom Landaua lokuje się tu właśnie korzystając z obydwu pasm) [98, 101, 102, 99]. Grafen jest zatem materiałem o wyjątkowych własnościach, dopiero stopniowo identyfikowanych zarówno eksperymentalnie i teoretycznie. Za opracowanie metody otrzymywania płaszczyzn grafenu oraz opisanie licznych jego własności przyznana została nagroda Nobla w 2010 roku, dla A. Geima i K. Novoselova.

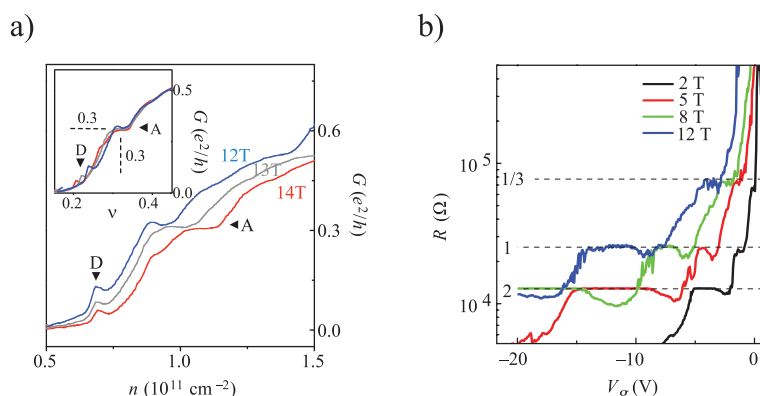
Szczególnie interesujące jest poszukiwanie w przypadku hallowskich pomia-



Rys. 4.6. IQHE w grafenie w funkcji koncentracji (regulowanej przez napięcie bramkujące): pik dla $n = 0$ wskazuje na istnienie poziomu Landaua dla punktu Diraca, pasma elektronów i dziur prowadzą do symetrycznych IQHE oscylacji, stopnie σ_{xy} odpowiadają połówkowymi wielokrotnościami $4e^2/h$, zgodnie ze strukturą pseudospinu dwudolinowego Źródło: A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, "The electronic properties of graphene," *Rev. Mod. Phys.* 81(1), p. 109, 2009

rów grafenu stanów związanych z ułamkowym kwantowym efektem Halla. Mimo zastosowania bardzo silnych pól magnetycznych (do 45 T), nie wykryto FQHE w próbkach grafenu osadzonych na podłożu SiO_2 [104]. W pracy tej wykazano jednak pojawianie się dodatkowych stopni (*plateau*) IQHE dla zapełnień $\nu = 0, \pm 1, \pm 4$, wskazujących na usunięcie degeneracji spinowo-pseudospinowej (podsięci), w wyniku nabierania masy przez fermiony Diraca [104]. Dopiero opanowanie techniki tzw. zawieszonych ultramałych płatków grafenu o niezwykle wysokiej czystości i ruchliwości nośników (powyżej $200000 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$; wysoka ruchliwość jest warunkiem obserwacji FQHE także i w przypadku półprzewodnikowych heterostruktur 2D, co może mieć związek z wielo-pętlowym cyklotronowym kwaziklasycznym ruchem pakietów falowych w przypadku wielo-pętlowych warkoczy związanych z FQHE), pozwoliło na zaobserwowanie FQHE w grafenie przy zapełnieniach $\nu = 1/3$ oraz $-1/3$ (dla dziur, przy przeciwnej polaryzacji bramkującego napięcia ustalającego poziom Fermiego albo w paśmie przewodnictwa, albo w paśmie walencyjnym) [105, 106]. Obie prace raportują obserwację FQHE w grafenie dla silnych pól magnetycznych. W pracy [105], w polu rzędu 14 T dla koncentracji elektronów rzędu $10^{11}/\text{cm}^2$ oraz w pracy [106], w polu rzędu 2 T ale dla mniejszej o rząd koncentracji – Rys. 4.7.

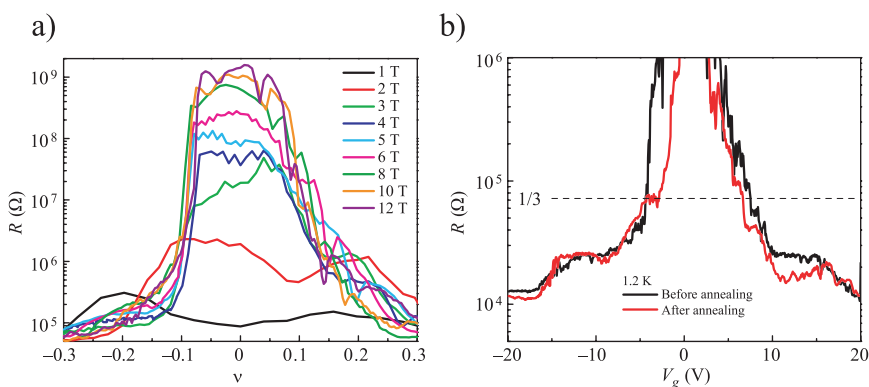
FQHE w zawieszonym grafenie obserwowany jest nawet w temperaturach rzędu 10 K [107], a nawet wyższych [108], co wydaje się być związane z silniejszym oddziaływaniem elektrycznym wobec braku podłoża dielektrycznego (ze stosunkowo wysoką przenikalnością dielektryczną w przypadku półprzewodników, ~ 10) i też z bardzo dużą wartością energii cyklotronowej w grafenie (czyli dużą przerwą energetyczną oddzielającą stany nieściśliwe). Ułamkowy efekt Halla w grafenie rozpatrzany jest też w relacji ze spinowo-pseudospinową strukturą w terminach



Rys. 4.7. a) Obserwacja FQHE w zawieszonym grafenie dla zapelnienia 0.3 ($1/3$) w polu 12-14 T przy koncentracji 10^{11} cm^{-2} i ruchliwosci $250000 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$, b) osobliwosci FQHE w zawieszonym grafenie dla zapelnienia $\frac{1}{3}$ w polu 2-12 T przy koncentracji 10^{10} cm^{-2} i ruchliwosci $200000 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$
Źródło: a) X. Du, I. Skachko, F. Duerr, A. Liucan, and E. Y. Andrei, "Fractional quantum Hall effect and insulating phase of Dirac electrons in graphene," *Nature* 462, p. 192, 2009 b) K. I. Bolotin, F. Ghahari, M. D. Shulman, H. L. Störmer, and P. Kim, "Observation of the fractional quantum Hall effect in graphene," *Nature* 462, p. 196, 2009

symetrii SU(4) i SU(2) [109].

W pracach [102,103] wskazano też na konkurencję stanu FQHE ze stanem izolatorowym w pobliżu punktu Diraca, odpowiadającego silnie malejącej koncentracji – Rys. 4.8.



Rys. 4.8. a) Pojawianie się wraz ze wzrostem natężenia pola magnetycznego stanu izolatorowego wokół punktu Diraca, b) konkurencja FQHE i stanu izolatorowego dla zapelnienia $-1/3$: wygrzewanie usuwa zanieczyszczenia i stwarza warunki do pojawienia się *plateau* FQHE
Źródło: K. I. Bolotin, F. Ghahari, M. D. Shulman, H. L. Störmer, and P. Kim, "Observation of the fractional quantum Hall effect in graphene," *Nature* 462, p. 196, 2009

Z punktu widzenia grup cyklotronowych wyniki eksperymentalne odnośnie

FQHE w grafenie [105, 106, 107, 108, 109] wydają się zgodne z przewidywaniami warkoczowego opisu. W przypadku grafenu specyficzna struktura pasmowa (bezszczelinowego półprzewodnika) ze stożkowymi pasmami typu Diraca prowadzi do równoczesnego udziału (w przypadku punktu Diraca) obu pasm – dziur i elektronów, co w połączeniu z bezmasowym charakterem fermionów Diraca manifestuje się poprzez anomalny IQHE (korygowany w bardzo silnych polach w wyniku zniesienia degeneracji spinowej i dwudolinowej) [101, 102, 104]. Włączenie bocznego napięcia (w zakresie do 10 V [105]) pozwala na regulowanie gęstości nośników przy stałym polu magnetycznym. Należy zatem oczekiwać, że przy mniejszej gęstości nośników (elektronów, lub symetrycznie dziur przy odwrotnej polaryzacji) orbity cyklotronowe będą zbyt krótkie by umożliwiać zamiany warkoczowe cząstek przy dostatecznie silnym polu magnetycznym – słabszym jednak dla mniejszej koncentracji – i tak jest właśnie obserwowane eksperymentalnie [105, 106]. Dla niskich koncentracji, przy zbliżaniu się do punktu Diraca, oczekiwać można, że zbyt silne pola przekroczą próg stabilności stanu IQHE w konkurencji z kryształem Wignera (przy założeniu podobnego charakteru tej konkurencji w przypadku bezmasowych fermionów Diraca do sytuacji tradycyjnych struktur 2D) i to właśnie odpowiada pojawieniu się stanu izolatorowego w pobliżu punktu Diraca w silnym polu magnetycznym [110]. W przypadku heksagonalnej struktury grafenu krystalizacja elektronów (lub dziur) może interferować z trójkątną siecią krystaliczną, a uwzględnienie rezonansu (przeskoków) pomiędzy dwoma obecnymi tu podsieciami może spowodować rozmycie przejścia do stanu izolatorowego, co wydaje się być zgodne z obserwacjami (Rys. 4.8).

Warto też zwrócić uwagę, że w pewnej korespondencji do struktury grafenu typu plaster miodu intensywnie rozważane są ostatnio topologicznie wyróżnione stany kwantowe w układach sieci optycznych zapełnianych atomami (fermionami lub bozonami) [111]. Realizacja takich sieci o sześciokątnych komórkach *honeycomb* lub kwadratowych *checkerboard* możliwa jest w praktyce przy wykorzystaniu interferencji kilku odpowiednio zorientowanych wiązek laserowych, a przy ich specjalnie dobranej modulacji, nawet możliwe jest osiągnięcie wirowania komórki elementarnej (imitując pole magnetyczne) [112]. Stwarza to zupełnie nowe możliwości badania silnie skorelowanych płaskich układów (w tym zupełnie odmiennych od elektronowych, układów bozonowych), chociaż postęp eksperymentu nie jest tu jeszcze zadowalający, zwłaszcza z powodu niemożności obserwacji efektów transportowych dla koniecznie neutralnych atomów, pułapkowanych w sieciach optycznych. Teoretycznie jednak, w tych układach badane są stany hallowskie w polu magnetycznym [112], a także podobne stany bez poziomów Landaua [113, 114, 115]. Te ostatnie nawiązują do idei Haldane’a [116], zgodnie z którą w układach płaskich sieci periodycznych (oryginalnie, typu *honeycomb*) możliwe jest wprowadzenie topologicznej krzywizny Berry’ego poprzez zamodelowanie zespolonych amplitud przeskoków do najbliższych lub dalszych sąsiadów, co łamie

symetrię na odbicie czasu i pozwala na modelowanie topologicznie odmiennych stanów kwantowych podobnych do stanów w silnym polu magnetycznym [117]. Tego typu modele związane z zaproponowanymi ostatnio też topologicznymi izolatorami [118, 119] opisywanymi przez topologiczne niezmienniki podobne do proponowanych wcześniej również dla układów hallowskich [120, 121], niekoniecznie odpowiadają stanom hallowskim w heterostrukturach półprzewodnikowych, czy w grafenie, ale mogą wiązać się z topologicznymi efektami np. dla stanów powierzchniowych [122]. W przypadku jednak gdy odnoszą się do układów w silnym polu magnetycznym (lub imitowanym przez rotację komórek elementarnych [114], czy przez odpowiednio dobrane fazy dla amplitud przeskoków [113]), można oczekiwać podobnego związku z cyklotronowymi grupami warkoczowymi jak w elektronowych układach 2D w półprzewodnikowych studniach kwantowych i w grafenie (podobnie rozważane mogą być tu też stany krystalizacji Wignera [123, 124]).

Rozdział 5

Podsumowanie

Niejednospójna (wielospójna) struktura przestrzeni konfiguracyjnych układów wielu cząstek wyrażona jest przez grupy warkoczowe, czyli pierwsze grupy homotopii π_1 tych przestrzeni, które w takim przypadku są nietrywialnymi grupami. Grupy warkoczowe są wyjątkowo bogate w przypadku układów 2D (i lokalnie 2D). Warkoczowa prezentacja wyraża, że trajektorie w przestrzeni konfiguracyjnej wielocząstkowego układu nie mogą być w sposób ciągły deformowane i przekształcane jedne w drugie, jeśli należą do różnych klas homotopii grupy warkoczowej. Z tego powodu nie jest możliwe przeprowadzenie całkowania po trajektoriach według jednej miary dla wszystkich trajektorii i warunki ciągłości pozwalają definiować miarę w przestrzeni trajektorii tylko w ramach wzajemnie homotopijnych krzywych, czyli dla każdej z klas homotopii oddzielnie. Prowadzi to do rozdzielenia dziedziny całek Feynmana po trajektoriach zgodnie ze strukturą pełnej grupy warkoczowej. Pojawia się w ten sposób konieczność określenia jednowymiarowej unitarnej reprezentacji tej grupy w celu zdefiniowania wag, z jakimi w całkowaniu funkcjonalnym uwzględnione będą poszczególne wzajemnie niehomotopijne klasy wielocząstkowych trajektorii. Każda z takich reprezentacji daje podstawy do scharakteryzowania oddzielnego typu cząstek kwantowych o odmiennej statystyce. W przypadku R^3 i wyżej wymiarowych rozmaitości, pełna grupa warkoczowa jest grupą permutacji, która posiada tylko dwie różne jednowymiarowe reprezentacje unitarne prowadzące do bozonów i fermionów. W przypadku rozmaitości R^2 (i ograniczonych rozmaitości lokalnie 2D) daleko bogatsze reprezentacje unitarne grupy warkoczowej dopuszczają istnienie anyonów, oprócz bozonów i fermionów.

W przedstawionej pracy argumentujemy, że dziedzina sumowania po niehomotopijnych klasach trajektorii w całkach funkcjonalnych obejmować może tylko te elementy pełnej grupy warkoczowej, które zawierają trajektorie możliwe do realizacji. Wskazujemy, że w przypadku obecności silnego pola magnetycznego prostopadłego do płaskiego układu naładowanych cząstek, nie wszystkie trajek-

torie definiowane dla układu bez pola będą dostępne. W przypadku gdy promień cyklotronowy jest zbyt krótki w stosunku do odległości między cząstkami utrzymywanej przez odpychanie Coulomba na poziomie określonym przez gęstość układu, niemożliwe są zwykle zamiany cząstek wzdłuż cyklotronowych trajektorii i odpowiadające elementy grupy warkoczowej należy wykluczyć z dziedziny całek po trajektoriach. Pozostała podgrupa warkoczowa klas trajektorii, nazwana tu warkoczową podgrupą cyklotronową, określa zatem dziedzinę sumowania funkcjonalnego i poprzez swoje reprezentacje unitarne wskazuje na możliwe cząstki kwantowe w dwuwymiarowych układach w silnym polu magnetycznym. Odpowiednie jednowymiarowe unitarne reprezentacje warkoczowych podgrup cyklotronowych pozwalają na zidentyfikowanie złożonych fermionów (ogólniej, złożonych anyonów), cząstek modelowanych dotychczas przy pomocy sztucznych konstrukcji z pomocniczymi lokalnymi strumieniami lub wirami, a obecnych w układach hallowskich z korelacjami Laughlina.

Cząstki te obserwowane eksperymentalnie nie mogły być odróżnione przez reprezentacje pełnej grupy warkoczowej i dopiero określenie właściwej dla obecności silnego pola magnetycznego cyklotronowej struktury warkoczowej stwarza możliwość ich odpowiedniej charakteryzacji w jasnym związku z wymaganą symetrią korelacji Laughlina. W ten sposób udaje się zidentyfikować topologiczne uwarunkowanie egzotycznej fizyki dwuwymiarowych układów hallowskich bez odwoływania się do pomocniczych efektywnych konstrukcji. Zauważono, że w przypadku naładowanych wielocząstkowych układów 2D w silnym polu magnetycznym, wielo-pętlowa struktura cyklotronowa trajektorii warkoczowych spełnia oczekiwane wymagania zamiany cząstek. Wiąże się to z faktem, że w płaskich układach dodatkowe pętle nie mogą prowadzić do wzrostu powierzchni (w przeciwieństwie do układów 3D) i dzielą się tym samym strumieniem pola zewnętrznego, co prowadzi do wzrostu ich rozmiarów, w takim stopniu, że możliwe są zamiany cząstek konieczne dla ustalenia statystyki (zdefiniowania grupy warkoczowej, w tym przypadku cyklotronowej warkoczowej podgrupy).

Równocześnie wyjaśnione zostały szczegóły i charakter modelowych pomocniczych obiektów w poprzednich sformułowaniach odnośnie złożonych fermionów i korelacji Laughlina, w szczególności wykazany został fikcyjny charakter zlokalizowanych na cząstkach strumieni magnetycznych w modelowaniu złożonych fermionów, które wprowadzono sztucznie w istocie też po to, by zwiększyć promień cyklotronowy. Zwrócono uwagę, że w tym modelowym podejściu, założenie o całkowitej liczbie kwantów strumienia doczepianych do cząstek dla wypełnień poziomu Landaua poza $\nu = \frac{1}{p}$, p nieparzyste, prowadzi do niejasnego założenia o możliwości zwrotu wypadkowego pola zewnętrznego i uśrednionego pola doczepianych strumieni przeciwnie do zwrotu pola zewnętrznego, co było stosowane w celu odtworzenia hierarchii wypełnień ułamkowego kwantowego efektu Halla. Cyklotronowe sformułowanie pozwala na usunięcie tych wątpliwości opisu korelacji

Laughlina poprzez złożone fermiony i uzyskanie poprawionej hierarchii wypełnień ułamkowego kwantowego efektu Halla przez mapowanie na całkowity hallowski efekt.

Zauważono także inne możliwe źródło nieścisłości, kiedy przy numerycznych diagonalizacjach oddziaływania (szeroko stosowanych w odniesieniu do układów hallowskich) nie ograniczono dziedziny minimalizacji do podprzestrzeni Hilberta funkcji antysymetrycznych o wymaganej symetrii dostosowanej do złożonych fermionów jako pełnoprawnych kwantowych cząstek odrębnych kwantowo-statystycznie od fermionów (poprzednio złożone fermiony traktowane były niesłusznie jako zwykłe fermiony ubrane tylko w lokalne strumienie w analogii do kwazicząstek, co prowadzić może jednak do istotnych niedokładności w wyniku minimalizacji po zbyt obszernej dziedzinie wszystkich antysymetrycznych funkcji odpowiadających zwykłym fermionom).

Zaproponowany w pracy formalizm cyklotronowych podgrup warkoczowych wydaje się w konsystentny sposób wyjaśniać przyczyny występowania egzotycznych i bogatych korelacji Laughlina w naładowanych wielocząstkowych układach 2D w silnym polu magnetycznym. Pozwala on równocześnie na wyjaśnienie i zweryfikowanie szeroko stosowanych modelowych opisów układów przy pomocy złożonych fermionów. Postęp w ujęciu fizycznych podstaw i topologicznych warunkowań kwantowania układów 2D w polu magnetycznym uzyskany w wyniku rozpatrzenia cyklotronowych podgrup warkoczowych, wskazuje na wielką przydatność metod homotopii w analizie wielocząstkowych układów kwantowych o różnej geometrii. Podstawowe związki fizyki i informatyki pozwalają także oczekiwać szerszego wykorzystania grup warkoczowych (zarówno pełnych, cyklotronowych, jak i czystych) w obu dziedzinach.

Rozdział 6

Uzupełnienia i rozszerzenia

6.1 Funkcja falowa dla całkowicie zapełnionego najniższego poziomu Landaua

Kwantowanie Landaua ruchu naładowanej cząstki w polu magnetycznym w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku pola, jest dokładnym wynikiem o licznych istotnych konsekwencjach, także w fizyce wielocząstkowych układów, jak elektronów w metalu lub w półprzewodniku, czy układów hallowskich 2D. Jeśli rozpatrywać pojedynczą naładowaną cząstkę (wtedy nie ma znaczenia jej statystyka i także nie można jej określić), to w stałym polu magnetycznym odpowiada jej hamiltonian:

$$H = \frac{(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2m} - 2\mu_B\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}, \quad (6.1)$$

gdzie, e oznacza ładunek cząstki, \mathbf{A} wektorowy potencjał pola magnetycznego, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, człon Pauliego*, $-2\mu_B\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$, gdzie μ_B magneton Bohra, $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$, $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ operator spinu (przyjeliśmy tu spin $\frac{1}{2}$ jak dla elektronu) wyrażony przez macierze Pauliego[†]. Jeśli wybrać cechowanie w postaci (cechowanie Landaua):

$$\mathbf{A} = (0, Bx, 0),$$

to równanie na stany stacjonarne przyjmie postać:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c} Bx \right)^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \varepsilon \psi, \quad (6.2)$$

*często pomijany, gdyż w układach fazy skondensowanej mnożony jest dodatkowo przez czynnik giromagnetyczny, zwykle mały (np. w GaAs rozszczepienie Zeemana wywołane przez człon Pauliego jest rzędu 0.1 meV/T)

[†]człon Pauliego w hamiltonianie powoduje tylko jednorodne przesunięcie całego widma o $\mp\mu_B B$ dla spinów zgodnych i przeciwnych do pola (kierunek z wybierany jest wzdłuż pola \mathbf{B}) i dlatego nie odgrywa istotnej roli w kwantowaniu Landaua

a funkcję własną należy wybrać w kształcie:

$$\psi(x, y, z) = e^{ip_y y/\hbar} e^{ip_z z/\hbar} \varphi(x). \quad (6.3)$$

Funkcja $\varphi(x)$ spełnia zatem równanie:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{e^2 B^2}{2mc^2} \left(x - \frac{p_y c}{eB}\right)^2 \varphi(x) = \left(\varepsilon - \frac{p_z^2}{2m}\right) \varphi(x). \quad (6.4)$$

Jest to równanie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego [28],

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{kx^2}{2} \varphi = E\varphi,$$

z przesuniętym środkiem o $\frac{cp_y}{eB}$ i częstością $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{Be}{mc}$, oraz $E = \varepsilon - \frac{p_z^2}{2m}$.
Zatem, otrzymujemy widmo:

$$\varepsilon = \frac{p_z^2}{2m} + \mu_B B(2n + 1) \pm \mu_B B, \quad (6.5)$$

gdzie, $\pm \mu_B B$ odpowiada przesunięciu widma dla dwóch orientacji spinu (z powodu członu Pauliego w hamiltonianie). Pomijając ten człon, a także przechodząc do przypadku 2D, mamy oscylatorowe widmo:

$$\varepsilon = \mu_B B(2n + 1)$$

oraz funkcje własne w postaci stanów oscylatora harmonicznego (z wielomianami Hermite'a H_n) ze środkiem przesuniętym wzdłuż kierunku x o $x_0 = \frac{ep_y}{eB}$:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} a^{1/2} \sqrt{2^n n!}} e^{-(x-x_0)^2/2a^2} H_n \left(\frac{x-x_0}{aB} \right). \quad (6.6)$$

Przesunięcie środka oscylatora jest tu przyczyną degeneracji wszystkich poziomów, w takim samym stopniu dla każdego $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Degenerację tę łatwo oszacować, gdyż, $0 < \frac{cp_y}{eB} < L_x$ oraz $dn_y = dp_y \frac{L_y}{\hbar}$, co daje degenerację każdego poziomu n , $\frac{L_1 L_2 B}{\hbar c/e} = \frac{BS}{\hbar c/e}$ (czyli wielkość strumienia pola BS wyrażona w kwantach strumienia $\frac{\hbar c}{e}$).

Dla innego cechowania, odpowiadającego np. cylindrycznej symetrii (we współrzędnych cylindrycznych),

$$A_\phi = B\rho/2, \quad A_\rho = A_z = 0,$$

równanie Schrödingera przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] \\ & - \frac{i\hbar\omega}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{m\omega^2}{8} \rho^2 \pi = E\psi, \end{aligned} \quad (6.7)$$

gdzie, $\omega = \frac{|e|B}{mc}$. Rozwiązanie ma postać:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iM\phi} e^{ip_z z/\hbar} R(\rho),$$

gdzie radialna część spełnia równanie:

$$\zeta R'' + R' + \left(-\frac{\zeta}{4} + \beta - \frac{M^2}{4\zeta} \right) R = 0, \quad (6.8)$$

gdzie, $\beta = \frac{1}{\hbar\omega} \left(E - \frac{p_z^2}{2m} \right) - \frac{M}{2}$, $\zeta = \frac{m\omega}{2\hbar} \rho^2$. Dla $\zeta \rightarrow \infty$ asymptotyka R jest postaci $e^{-\zeta/2}$, a dla $\zeta \rightarrow 0$, postaci $\zeta^{|M|/2}$. Zatem $R(\zeta) = e^{-\zeta/2} \zeta^{|M|/2} w(\zeta)$ i wtedy w spełnia równanie konfluentnej funkcji hipergeometrycznej [28, 86],

$$w = F \left\{ - \left(\beta - \frac{|M|+1}{2} \right), |M|+1, \zeta \right\}, \quad (6.9)$$

gdzie, $\beta - (|M|+1)/2$, musi być nieujemną liczbą całkowitą n_ρ , a wartości własne są dane wzorem:

$$E = \hbar\omega \left(n_\rho + \frac{|M|+M+1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (6.10)$$

Są to te same wartości własne jak wyżej, w cechowaniu Landaua, ale wyrażone przez inne liczby kwantowe (M to z -towa składowa momentu pędu). Degeneracja jest również taka sama jak poprzednio, ale wyraża się tu poprzez niezależność E od ujemnych M . Funkcje falowe mają postać:

$$R_{n_\rho M}(\rho) = \frac{1}{a^{1+|M|}} \left[\frac{(|M|+n_\rho)!}{2^{|M|} |n_\rho!| |M|!} \right]^{1/2} e^{-\rho^2/(4a^2)} \rho^{|M|} F(-n_\rho, |M|+1, \rho^2/(2a^2)), \quad (6.11)$$

czyli zupełnie inną niż w przypadku cechowania Landaua. Zależność postaci funkcji falowych od wyboru cechowania potencjału pola magnetycznego jest wyrazem niefizycznego charakteru cechowania, ale i dopasowywania się też funkcji falowych do symetrii cechowania i odpowiednich warunków brzegowych, typu plakietki dla cechowania Landaua i okręgu (w przypadku 2D) dla cylindrycznej symetrii. Zatem, gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki (moduł funkcji falowej) jest też nie związana tu z cyklotronowymi klasycznymi trajektoriami. Funkcje falowe mogą nie mieć nawet cylindrycznej symetrii, jak w przypadku cechowania Landaua. Związane jest to z degeneracją poziomów Landaua i niekomutatywnością operatorów składowych x i y położenia środka orbit cyklotronowych (nie mogą być one równocześnie określone) [28, 86]. Dynamika kwantowa wykazuje jednak cyklotronowy periodyczny charakter, co zaobserwować można w ewolucji czasowej w reprezentacji Heisenberga operatorów położenia, odpowiadających klasycznej trajektorii cyklotronowej (co oznacza, że dowolny pakiet falowy będzie realizował periodyczną cyklotronową dynamikę w płaszczyźnie prostopadłej do pola magnetycznego) [86]. Wartości własne energii (choć mogą wyrażać się poprzez

różne liczby kwantowe) są niezależne od cechowania, podobnie jak degeneracja poziomów energetycznych. Poziomy te nazywane są poziomami Landaua.

Można teraz rozważyć gaz nieoddziałujących fermionów zapełniających zdegenerowane poziomy Landaua. W szczególności interesujący jest przypadek kompletnego zapełnienia najniższego poziomu Landaua, kiedy liczba cząstek N jest równa degeneracji poziomów $\frac{BS}{hc/e}$. Odpowiednia funkcja falowa przyjmuje postać wyznacznika Slatera różnych stanów jednocząstkowych z pierwszego poziomu Landaua i antysymetryzowanych z powodu nierozróżnialności fermionów. W symetrii cylindrycznej, przyjmując $n_\rho = 0$, funkcje falowe mają postać: $\sim z^{|M|} e^{-|z|^2/2a^2}$, dla $-M = 0, 1, 2, 3 \dots N - 1$ (co odpowiada degeneracji dla ujemnych M), $z = \rho e^{i\phi} = x + iy$. W wyniku antysymetryzacji otrzymujemy wyznacznik Slatera – funkcję falową dla N nieoddziałujących cząstek – w postaci:

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \text{const.} e^{-\sum_i |z_i|^2/2a^2} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{N-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_N & z_N^2 & \dots & z_N^{N-1} \end{vmatrix}. \quad (6.12)$$

Powyższy wyznacznik w funkcji Slatera jest znanym wyznacznikiem Vandermonde'a i całą funkcję zapisać można w postaci:

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \text{const.} e^{-\sum_i |z_i|^2/2a^2} \prod_{i,j=1, i>j}^N (z_i - z_j), \quad (6.13)$$

gdzie ostatni iloczyn jest wielomianem Vandermonde'a. Zastąpienie wielomianu Vandermonde'a przez również antysymetryczny wielomian Jastrowa $\prod_{i,j=1, i>j}^N (z_i - z_j)^p$ (p nieparzysta liczba naturalna) zmienia funkcję Slatera w funkcję Laughlina dla FQHE dla ułamkowych zapełnień, $\nu = \frac{1}{p}$ LLL.

6.2 Stany sparowane typu Pfaffian

Wyznacznik antysymetrycznej macierzy $2n \times 2n$ może być wyrażony (z dokładnością do znaku) w postaci kwadratu wielomianu stopnia n zbudowanego z elementów tej macierzy. Ten wielomian nazywa się Pfaffianem macierzy (antysymetrycznej, parzystego rzędu). Czyli, np.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix},$$

$$Pf(A) = \pm \sqrt{\det(A)} = \pm \sqrt{a^2} = a,$$

(znak ustalić można z def. (6.14), ponieważ posługując się relacją $(Pf(A))^2 = \det(A)$ możliwe jest określenie Pfaffianu z dokładnością do znaku)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix},$$

$$Pf(B) = \pm \sqrt{\det(B)} = af - be + dc.$$

łatwo pokazać proste własności Pfaffianu,

$$(Pf(A))^2 = \det(A),$$

$$Pf(BAB^T) = \det(B)Pf(A),$$

$$Pf(aA) = a^n Pf(A),$$

$$Pf(A^T) = (-1)^n Pf(A),$$

gdzie A, B macierze antysymetryczne rzędu $2n$, a – liczba.

Przydatna jest też następująca reprezentacja Pfaffianu macierzy $A = \{a_{ij}\}$ rzędu $2n$, $a_{ij} = -a_{ji}$:

$$Pf(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(2i-1)\sigma(2i)}, \quad (6.14)$$

gdzie S_{2n} jest grupą permutacji i $\text{sign}(\sigma)$ oznacza znak (parzystość) permutacji. Dla macierzy antysymetrycznych, dla których określony jest Pfaffian, można wprowadzić sparowanie indeksów $1, \dots, 2n$, tzn.,

$$\alpha = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\}, \quad (6.15)$$

gdzie, $i_k < j_k$, oraz $i_1 < i_2 < \dots < i_n$. Takiemu dowolnemu sparowaniu odpowiada permutacja:

$$\pi = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \dots & j_n \end{array} \right\}. \quad (6.16)$$

Używając powyższych sparowań można zapisać:

$$Pf(A) = \sum_{\alpha} \text{sign}(\pi) a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}, \quad (6.17)$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich możliwych sparowaniach spełniających warunki kolejności indeksów.

Na przykład, dla macierzy 4×4 mamy,

$$Pf(A) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23},$$

co zgadza się z pierwiastkiem z wyznacznika macierzy A .

Pfaffiany okazują się przydatne do modelowania funkcji falowych sparowanych $2n$ fermionów w stanie BCS w reprezentacji położeniowej (w przypadku 2D), w postaci funkcji:

$$Pf \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right). \quad (6.18)$$

W ogólności, funkcja typu BCS w przestrzeni położzeń ($2n$ cząstek w 2D) ma postać [42]:

$$\Psi_{BCS}(z_1, \dots, z_{2n}) = \text{Antysymetryzacja} \left\{ \prod_{i, \text{parzyste}}^{2n} \psi(z_{i-1} - z_i) \right\}, \quad (6.19)$$

gdzie *Antysymetryzacja* dotyczy wszystkich możliwych sparowań $2n$ cząstek (tych sparowań jest $(2n-1)!!$) – dokładnie jak w definicji Pfaffianu [125]. Funkcja pary fermionów $\psi(z_i - z_j)$ musi być nieparzysta i powinna być monotonicznie malejącą funkcją odległości cząstek, jeśli ma reprezentować sparowanie. Najprostszą taką funkcją (i odpowiadającą standardowej reprezentacji BCS w przestrzeni pędów, ze stałym potencjałem parowania)[‡] jest,

$$\psi(z_i - z_j) = \frac{1}{z_i - z_j}. \quad (6.20)$$

Funkcja falowa w postaci Pfaffianu (6.18) ma osobliwość dla $z_i = z_j$, ale występuje zwykle jako czynnik razem z wielomianami typu Jastrowa, co powoduje usunięcie osobliwości w całej modelowanej funkcji ze sparowaniem, jak w poniższym przykładzie (dla zapełnienia $\nu = \frac{1}{2}$ LLL):

$$\Psi(z_1, \dots, z_{2n}) = Pf \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 e^{-\sum_j |z_j|^2 / (2a^2)}. \quad (6.21)$$

Warto tu zauważyć, że Pfaffian wprowadza w powyższej funkcji przesunięcie fazowe $-\pi$ przy zamianie cząstek, co razem z 2π od czynnika Jastrowa, daje sumaryczne przesunięcie fazowe π (jak dla zwykłych fermionów).

Niestabilność morza Fermiego na tworzenie par Coopera przy obecności niezeraowego przyciągania cząstek

U podstaw teorii nadprzewodnictwa BCS znajduje się obserwacja o niestabilności dwucząstkowej funkcji Greena *normalnej* cieczy Fermiego w kanale cząstka-cząstka [22]. Ten kanał koherentnych rozprożeń wyróżnić można w równaniu

[‡]dla hamiltonianu BCS, $H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} - \frac{\pi}{m} \sum_{i \neq j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, sparowana funkcja BCS (w 2D) jest postaci $Pf \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right)$ (co wiąże się z relacją, $\nabla^2 \frac{1}{z} = -2\pi \delta(z)/z$) [42]

na wierzchołki typu Bethe-Salpetera. Wierzchołek pełny wyraża się przez nieredukowalną funkcję wierzchołkową względem zgodnie-równoległe skierowanych dwóch funkcji Greena (kanał cząstka-cząstka dla rozproszeń; tzn. że nie można tej nieredukowalnej funkcji wierzchołkowej przeciąć wzdłuż takiej pary funkcji Greena), lub przez inną nieredukowalną funkcję wierzchołkową względem antyrównoległych dwóch funkcji Greena. Odpowiadające tym nieredukowalnym wierzchołkom wysumowanie nieskończonej drabiny grafów z gołym oddziaływaniem nie wyczerpuje wszystkich możliwych rozproszeń, a równoczesne wysumowanie obu nieskończonych drabin grafów jest niemożliwe. Zatem analizowane są osobliwości obu kanałów oddzielnie. Kanał cząstka-dziura wiąże się z teorią normalnej cieczy Fermiego – określając wzbudzenia kolektywne typu zerowy dźwięk i tłumienie Landaua (w terminach amplitud Landaua wyrażających się przez odpowiednią granicę funkcji wierzchołkowej) [22]. Natomiast analiza osobliwości kanału cząstka-cząstka wskazuje na niestabilność stanu podstawowego normalnej cieczy Fermiego na koherentne rozproszenie pary cząstek o sumarycznym pędzie bliskim zero (czyli pary cząstek z przeciwnych stron powierzchni Fermiego), a zatem na tworzenie par Coopera. Z prostej analizy jądra równania całkowego dla kanału cząstka-cząstka (zgodnie-równoległych funkcji Greena) wynika, że *czysto urojony biegun* funkcji wierzchołkowej (i zatem dwucząstkowej funkcji Greena; biegun wskazujący na niestabilność stanu normalnego cieczy Fermiego) pojawia się w górnej półpłaszczyźnie (po przedłużeniu analitycznym związanym z przejściem od funkcji matsubarowskich do funkcji retardowanych/adwansowanych), pod warunkiem: 1) przyciągającego charakteru oddziaływania (znak minus przy gołej funkcji wierzchołkowej), 2) niewielkiego sumarycznego pędu obu koherentnie rozpraszanych cząstek, 3) niskiej temperatury (warunki 2) i 3) prowadzą do możliwości określenia krytycznego pędu par Coopera i temperatury krytycznej dla niestabilności stanu normalnego na tworzenie tych par) [22] rozdział VII §33. Podkreślić tu należy, że tak opisana niestabilność morza normalnych fermionów w przypadku ich (dowolnie małego) przyciągania wskazuje na koherentne formowanie par Coopera, czyli niestabilność do stanu BCS, zidentyfikowaną jednak w stanie *normalnym*. Pełny opis stanu nadprzewodzącego (lub nadciekłego dla nie-naładowanych fermionów) wymaga wprowadzenia anomalnych funkcji Greena i anomalnych wierzchołków, wykraczając poza ramy teorii normalnej cieczy Fermiego, co zostało sformułowane przez Larkina i Migdala dla sparowania typu s i Czerwonkę dla sparowania typu p, opisane ze stosowną literaturą np. w [22, 126].

6.3 Podstawowe definicje

Podgrupa Zbiór $G' \subseteq G$ nazywamy podgrupą grupy G , gdy:

1. $e \in G'$,

2. $\forall_{x,y \in G'} x \bullet y \in G'$,
3. jeżeli $x \in G'$ to $x^{-1} \in G'$,

tzn. para $\{G', \bullet\}$ jest grupą.

Rząd grupy Rząd grupy G jest liczbą elementów grupy oznaczaną jako n . Jeżeli n jest skończone ($n < \infty$), to grupa jest skończonego rzędu, jeżeli $n = \infty$, to grupa jest nieskończonego rzędu.

Grupy cykliczne Gdy wszystkie elementy grupy $G = \{e, a, b, \dots\}$ można zapisać w postaci $G = \{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$, gdzie $a^k = \underbrace{a \bullet \dots \bullet a}_k$, $k \in \{0, \dots, n\}$ (" \bullet " jest działaniem) oraz $a^k = e \Leftrightarrow k = 0 \vee k = n$, wówczas taką grupę G nazywamy cykliczną i jest ona rzędu n .

Grupy permutacji Grupa $S(G)$ wszystkich wzajemnie jednoznacznych odwzorowań n -elementowego zbioru G w siebie tworzy grupę symetryczną S_n . Grupa symetryczna S_n to grupa permutacji n elementów w sobie. Rząd S_n wynosi $n!$.

Generatory grupy Niech X będzie dowolnym podzbiorem grupy G . Przez $\langle X \rangle$ oznaczamy przekrój wszystkich podgrup grupy G zawierających X . $\langle X \rangle$ jest podgrupą grupy G , i nazywany jest podgrupą generowaną przez X . Elementy zbioru X nazywane są generatorami grupy $\langle X \rangle$. Podgrupa $\langle X \rangle$ składa się z elementów postaci:

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

gdzie $x_i \in X$, $\alpha_i = \pm 1$.

Jeżeli grupa G jest generowana przez skończony zbiór generatorów X to nie może być nieprzeliczalna.

Warstwy Niech G będzie grupą a G' jej podgrupą. *Warstwą lewostronną* podgrupy G' w grupie G nazywamy zbiór $xG' = \{x \bullet g, g \in G'\}$, gdzie $x \in G$. Każdy element warstwy xG' jest reprezentantem tej warstwy. *Warstwą prawostronną* podgrupy G' w grupie G nazywamy zbiór $G'x = \{g \bullet x, g \in G'\}$, gdzie $x \in G$. Każdy element warstwy $G'x$ jest reprezentantem tej warstwy.

Homomorfizm grup Homomorfizm $f : \{G, \bullet\} \rightarrow \{G', \times\}$ (oznaczane $f : G \rightarrow G'$ lub f) jest odwzorowaniem zachowującym działanie grupowe, tzn.:

$$\forall_{x,y \in G} f(x \bullet y) = f(x) \times f(y).$$

Jądro homomorfizmu grup Jądrem homomorfizmu $f : G \rightarrow G'$ nazywamy zbiór $\text{Ker } f = \{x \in G, f(x) = e'\}$, gdzie e' jest elementem neutralnym G' .

Niech $H = \text{Ker } f$

- **Lemat 1.** Jądro H homomorfizmu $f : G \rightarrow G'$ jest podgrupą grupy G .
- **Lemat 2.** $\forall_{x \in G} xH = Hx$, gdzie $xH = \{x \bullet h, h \in H\}$ i $Hx = \{h \bullet x, h \in H\}$.
- **Lemat 3.** Para $\{H, \bullet\}$ jest grupą.
- **Lemat 4.** Odwzorowanie $f' : G' \rightarrow G$ jest homomorfizmem.
- **Lemat 5.** Podgrupa $H \subset \text{Ker } f'$, a nawet $H = \text{Ker } f'$.

Grupa ilorazowa oznaczana G/H jest to grupa warstw G' dzielnika normalnego H .

Dzielnik normalny (podgrupa normalna) Dzielnikiem normalnym nazywamy dowolną podgrupę G' grupy G , spełniającą warunek:

$$\forall_{x \in G} xG'x^{-1} = G'.$$

Każdy dzielnik normalny jest jądrem pewnego homomorfizmu.

Reprezentacja grupy Reprezentacją grupy G nazywane jest odwzorowanie homomorficzne tej grupy w zbiór skończone wymiarowych macierzy kwadratowych. Grupa, której elementami są macierze $D(x)$, $x \in G$, będąca obrazem homomorficznym grupy G jest jej reprezentacją. Zawsze istnieją reprezentacje trywialne (dowolnego wymiaru) grupy G – macierze jednostkowe.

Jeśli A jest reprezentacją grupy G to wyznaczniki $\det D(x)$, $D(x) \in A$, $x \in G$ tworzą jednowymiarową reprezentację grupy G . Jeżeli istnieje homomorfizm $f : G \rightarrow G'$ oraz A jest reprezentacją grupy G' to A jest reprezentacją grupy G . Niech $D(x)$ i $D'(x)$, gdzie $x \in G$ będą reprezentacjami grupy G . Jeżeli $D'(x) = S^{-1}D(x)S$, gdzie S jest dowolną macierzą nieosobliwą, to $D(x)$ i $D'(x)$ nazywane są reprezentacjami równoważnymi.

Reprezentacje nieprzywiedlne grup Reprezentacją nieprzywiedlną lub nieredukowalną nazywana jest reprezentacja, której nie można za pomocą transformacji podobieństwa sprowadzić do prostszych postaci klatkowych. Pozostałe reprezentacje to reprezentacje przywiedlne lub redukowalne.

Każda reprezentacja przywiedlna jest sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych

$$D(x) = a_1D_1(x) \oplus a_2D_2(x) \oplus \dots \oplus a_nD_n(x) = \bigoplus_{i=1}^n a_iD_i(x),$$

gdzie $D_i(x)$ oznacza reprezentację nieprzywiedlną, a a_i jest liczbą podprzestrzeni transformujących się wg reprezentacji równoważnych jednej i tej samej reprezentacji nieprzywiedlnej (oznacza to, że reprezentacja nieprzywiedlna $D_i(x)$ zawiera się a_i razy w reprezentacji przywiedlnej). Reprezentację $D(x)$ można więc przedstawić w postaci quasi-diagonalnej:

$$D(x) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \\ = a_1 \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \oplus a_2 \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \oplus a_3 \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \oplus \dots \oplus a_n \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}.$$

Unitarne reprezentacje grup Macierze $A \in \{M_n(C)\}$ (gdzie $\{M_n(C)\}$ to zbiór macierzy kwadratowych n -tego rzędu nad ciałem liczb zespolonych C), takie że dla dowolnych $\bar{a}, \bar{b} \in V$ (V – przestrzeń wektorowa) jest spełniona równość $(\bar{a}, \bar{b}) = (A\bar{a}, A\bar{b})$, gdzie $(,)$ oznacza iloczyn skalarny, nazywają się macierzami unitarnymi.

Macierze unitarne A spełniają relację

$$AA^+ = A^+A = 1 \Rightarrow A^+ = A^{-1},$$

gdzie $A^+ = (A^T)^*$ oraz tworzą grupę unitarną $U(n)$.

Reprezentacja unitarna to reprezentacja utworzona z macierzy unitarnych.

Każda reprezentacja grupy skończonej jest równoważna reprezentacji unitarnej. Tzn.

$$\forall_{\{D(x)\}} \exists S \forall_{x \in G} \forall_{\bar{a}, \bar{b} \in V} (D'(x) \bar{a}, D'(x) \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{b}),$$

gdzie S oznacza macierz nieosobliwą, a $D'(x) = S^{-1}D(x)S$.

6.4 Grupy homotopii

Przestrzeń Ω łukowo spójna to przestrzeń, w której każda para punktów daje się połączyć w tej przestrzeni łukiem. Łuk rozumiany jest jako homeomorficzny z odcinkiem $[0, 1]$, gdzie homeomorfizm jest przekształceniem $f : X \rightarrow Y$, które jest ciągle i różnowartościowe, oraz przekształcenie odwrotne $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ także jest ciągle. Można zdefiniować pętle (obrazy ciągle okręgu S^1 w danej przestrzeni) w punkcie ω_0 w przestrzeni Ω , jako zamknięte, ciągle krzywe (ze zdefiniowanym skierowaniem krzywych), które przechodzą przez punkt ω_0 . Tak

zdefiniowane pętle można traktować jako ciągle transformacje $F(t)$ odcinka $[0, 1]$ w przestrzeń Ω , przy założeniu, że $F(0) = F(1) = \omega_0$. Jeżeli $F(t) = \omega_0$ dla każdego $t \in [0, 1]$, to wtedy pętla jest nazywana pętlą zerową (punktem).

Warto zwrócić uwagę na fakt, że topologia algebraiczna nie ogranicza się jedynie do badania przestrzeni topologicznych i własności pojedynczych przekształceń tych przestrzeni na siebie, ale także bada całe zbiory przekształceń [127, 128, 129, 130, 5, 17]. Pojęcie homotopii odgrywa rolę kluczową w operowaniu tymi zbiorami. Homotopię można przedstawić poglądowo [127, 128, 129, 130, 5, 17]: dwa przekształcenia $f, g : X \rightarrow Y$ są homotopijne, jeżeli w sposób ciągły w produkcie kartezjańskim $X \times Y$ można przejść od wykresu przekształcenia f do wykresu przekształcenia g . Inaczej, jeżeli istnieje rodzina przekształceń $h_t : X \rightarrow Y$, ciągła względem parametru $t \in [0, 1]$, której pierwszym elementem jest $h_0 = f$, a ostatnim $h_1 = g$. Np. każde przekształcenie odcinka $[0, 1]$ w siebie, daje się przez homotopię zdeformować do dowolnego innego przekształcenia, w szczególności do przekształcenia stałego $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : x \mapsto p$. Można zauważyć, że homotopia dzieli ogromny zbiór przekształceń jednej przestrzeni w drugą na klasy równoważności, przy czym przekształcenia należące do jednej takiej klasy mają bardzo zbliżone własności topologiczne. Dla niektórych par przestrzeni zbiór klas homotopii przekształceń między nimi ma naturalną strukturę algebraiczną grupy. Pojęcie homotopii stało się podstawą topologii algebraicznej (szczególnie topologii rozmaitości), ponieważ prawie wszystkie niezmienniki algebraiczne są niezmiennikami homotopii [5, 17].

6.4.1 Definicja homotopii

Rodzina przekształceń:

$$h_t : X \rightarrow Y, \quad t \in [0, 1]$$

nazywa się homotopią między przekształceniami h_0 a h_1 , gdy odwzorowanie:

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y : (x, t) \mapsto h_t(x),$$

jest ciągle.

6.4.2 Przekształcenia homotopijne

Dwa przekształcenia $f : X \rightarrow Y$ i $g : X \rightarrow Y$ nazywają się homotopijne, gdy istnieje homotopia $h_t : X \rightarrow Y$, $t \in [0, 1]$, taka że $h_0 = f$, $h_1 = g$.

Homotopię h_t lub H między f a g oznacza się symbolem: $h_t : f \sim g$ lub $H : f \sim g$.

6.4.3 Własności homotopii

Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi[§]. Relacja homotopii na zbiorze Y^X (wszystkich przekształceń przestrzeni X w przestrzeń Y) jest relacją równoważności (czyli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia). Aby udowodnić zwrotność relacji wystarczy przyjąć $\forall_{t \in [0,1]} h_t = f$. Aby udowodnić symetryczność relacji należy przyjąć, że $h_t : f \sim g$ jest homotopią między f a g , wtedy istnieje homotopia $h_{1-t} : g \sim f$. Aby udowodnić przechodniość relacji, należy rozważyć dwie homotopie: $\phi_t : f \sim g$ oraz $\psi_t : g \sim h$, wtedy homotopia $h_t : f \sim h$ jest określona wzorem:

$$h_t = \begin{cases} \phi_{2t}, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \psi_{2t-1}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Powyżej zostało pokazane, że relacja homotopii jest równoważnością, więc istnieje klasy równoważności, nazywane klasami homotopii. Klasa homotopii, do której należy przekształcenie f nazywana jest klasą homotopii przekształcenia f i oznaczana jest symbolem $[f]$.

Niech X będzie przestrzenią metryzowalną. Przy topologii zwarto-otwartej w Y^X , klasy homotopii są identyczne ze składowymi łukowej spójności.

6.4.4 Homotopia pętli

Dwie pętle F i G są homotopijne, jeżeli istnieje rodzina przekształceń $h_t(l)$, $t, l \in [0, 1]$, w daną przestrzeń, w której określone są pętle ($h_t(l)$ jest ciągła ze względu na t i l) i spełnione są następujące warunki:

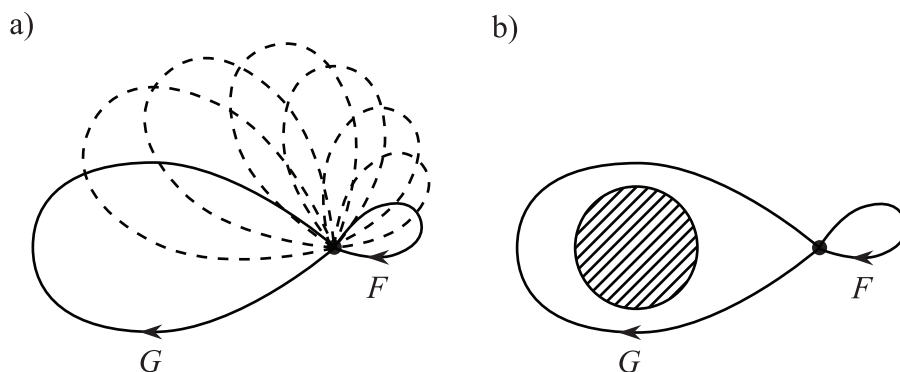
$$\begin{aligned} h_0(l) &= F(l), \\ h_1(l) &= G(l), \\ h_t(0) &= h_t(1) = \omega_0, \end{aligned}$$

gdzie $t, l \in [0, 1]$.

Przykłady pętli homotopijnych i niehomotopijnych zostały przedstawione na Rys.6.1

Przestrzeń łukowo spójna, w której każda pętla jest homotopijna z pętlą zerową nazywana jest przestrzenią jednospójną - inaczej - przestrzenią jednospójną X nazywana jest przestrzeń łukowo spójna, dla której każde przekształcenie okręgu $S^1 \rightarrow X$ jest homotopijne z przekształceniem stałym, lub inaczej jest to taka przestrzeń, w której każda pętla jest brzegiem obrazu 2-wymiarowej kuli.

[§] Przestrzenią topologiczną nazywamy przestrzeń X z ustaloną topologią τ , która spełnia następujące warunki: $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$; $\forall_{U_1, U_2 \in \tau} U_1 \cap U_2 \in \tau$; $\forall_{U_s \in \tau} \forall_{s \in S} \bigcup_{s \in S} U_s \in \tau$. Oznacza to, że topologia jest rodziną zbiorów otwartych.



Rys. 6.1. Przestrzeń z wyciętym fragmentem (obszar zakreskowany). a) pętłe F i G są homotopijne – schematyczna ciągła transformacja pętli F w pętlę G (obie pętłe są także homotopijne z pętlą zerową). b) pętłe F i G niehomotopijne – brak możliwości ciągłej transformacji pętli F (homotopijnej z pętlą zerową) w pętlę G (otaczającą wycięcie w przestrzeni)

Można rozważyć złożenie dwóch pętli, przy uwzględnieniu skierowania pętli. Wyniki złożenia pętli F i G określa się jako opisanie najpierw pętli F a później pętli G w następujący sposób:

$$F \cdot G = \begin{cases} F(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Należy pamiętać, że opisując dowolną pętlę trzeba zwrócić uwagę na skierowanie pętli.

Klasą abstrakcji pętli F oznaczaną jako $[F]$, nazywany jest zbiór wszystkich pętli homotopijnych z pętlą F . Zbiór wszystkich pętli przechodzących przez punkt ω_0 w danej przestrzeni Ω podzieli się na klasy zawierające wzajemnie homotopijne pętle. Każda pętla należąca do klasy $[F]$ jest jej reprezentacją.

Definiowane jest także działanie na klasach, w podobny sposób, jak definiowane jest działanie na pojedynczych pętlach [129, 5, 17]:

$$[F] \cdot [G] \stackrel{def}{=} [F \cdot G].$$

Istotnym faktem jest, że wynik $[F \cdot G]$ złożenia dwóch klas homotopijnych pętli nie zależy od wyboru poszczególnych reprezentacji klas $[F]$ i $[G]$. Taka definicja działania wynika z tego, że dowolne dwie pętłe F i G zaczepione w punkcie ω_0 można złożyć i otrzyma się pętlę $F \cdot G$ także zaczepioną w punkcie ω_0 . Dlatego można zaproponować podobne działanie na klasach, które nie będzie wprowadzać poza zbiór klas. Dowodzi się, że powyższe klasy z tak zdefiniowanym działaniem tworzą grupę.

Niech $\pi_1(\Omega, \omega_0)$ będzie zbiorem klas pętli homotopijnych w przestrzeni Ω zaczepionych w punkcie ω_0 , z działaniem składania pętli zdefiniowanym powyżej.

Łączność wprowadzonego powyżej działania wynika z:

Jeżeli $[F]$, $[G]$, $[H] \in \pi_1(\Omega, \omega_0)$, to

$$[F] \cdot ([G] \cdot [H]) = ([F] \cdot [G]) \cdot [H].$$

Iloczyn $[F] \cdot ([G] \cdot [H])$ jest klasą pętli homotopijnych:

$$F \cdot (G \cdot H) = \begin{cases} F(4t) & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ G(4t-1) & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ H(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

a iloczyn $([F] \cdot [G]) \cdot [H]$ jest także klasą pętli homotopijnych:

$$F \cdot (G \cdot H) = \begin{cases} F(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(4t-2) & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ H(4t-3) & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}.$$

Obie klasy są homotopijne, homotopię między nimi ustala rodzina:

$$h_s = \begin{cases} F\left(\frac{4t}{s+1}\right) & t \in \left[0, \frac{s+1}{4}\right] \\ G(4t-s-1) & t \in \left[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}\right] \\ H\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & t \in \left[\frac{s+2}{4}, 1\right] \end{cases},$$

co wskazuje na łączność działania.

Elementem neutralnym grupy $\pi_1(\Omega, \omega_0)$ jest klasa pętli homotopijnych z pętlą zerową (punktem). Jeżeli $[F] \in \pi_1(\Omega, \omega_0)$, to

$$[F] \cdot [\varepsilon] = [F] \quad [\varepsilon] \cdot [F] = [F].$$

Homotopię między pętlami $F \cdot \varepsilon$ i F ustala rodzina:

$$h_s = \begin{cases} F\left(\frac{2t}{1+s}\right) & t \in \left[0, \frac{s+1}{2}\right] \\ \omega_0 & t \in \left[\frac{s+1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

a homotopię między pętlami $\varepsilon \cdot F$ i F ustala rodzina:

$$h_s = \begin{cases} \omega_0 & t \in \left[0, \frac{1-s}{2}\right] \\ F\left(\frac{2t+s-1}{1+s}\right) & t \in \left[\frac{1-s}{2}, 1\right] \end{cases},$$

co wskazuje na istnienie elementu neutralnego.

Elementem odwrotnym względem klasy $[F] \in \pi_1(\Omega, \omega_0)$ jest klasa, która zawiera pętlę odwrotną F^{-1} , tzn. $[F]^{-1} = [F^{-1}]$. Dla każdej klasy $[F] \in \pi_1(\Omega, \omega_0)$:

$$[F] \cdot [F]^{-1} = [e] = [F]^{-1} \cdot [F].$$

Homotopię między pętłami $F \cdot F^{-1}$ i e ustala rodzina:

$$h_s = \begin{cases} F(2t) & t \in \left[0, \frac{1-s}{2}\right] \\ F(2 - 2(t+s)) & t \in \left[\frac{1-s}{2}, 1-s\right] \\ F(0) & t \in [1-s, 1] \end{cases} .$$

Dla $s = 0$ $h_0 = F \cdot F^{-1}$, a dla $s = 1$ $h_1 = e$, więc $[F] \cdot [F]^{-1} = [F \cdot F^{-1}] = [e]$. Analogicznie przebiega dowód $[F]^{-1} \cdot [F] = [e]$.

Opisana powyżej grupa nazywana jest fundamentalną (podstawową) grupą przestrzeni Ω w punkcie ω_0 lub **pierwszą grupą homotopii**, i oznaczana się ją [127, 128, 129, 130, 5, 17]:

$$\pi_1(\Omega, \omega_0) .$$

Jeżeli przestrzeń Ω jest przestrzenią jednopójną, pierwsza grupa homotopii dla tej przestrzeni jest grupą trywialną, tzn. zawiera tylko jeden element $\pi_1(\Omega, \omega_0) = \varepsilon$ (gdzie ε jest jednoelementową grupą – trywialną). Wyróżniony punkt ω_0 z przestrzeni Ω nazywany jest punktem bazowym. Klasa pętli zerowej zawiera element tożsamościowy grupy $\pi_1(\Omega, \omega_0)$. Element odwrotny klasy pętli $[F]$ definiowany jest następująco:

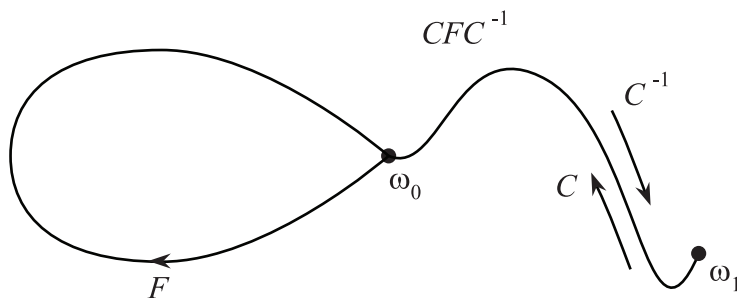
$$[F]^{-1} = [F^{-1}] ,$$

gdzie F^{-1} jest pętlą przeciwnie skierowaną względem pętli F .

Można teraz rozważyć krzywą C , należącą do przestrzeni łukowo spójnej Ω , która łączy punkty ω_0 i ω_1 z tej przestrzeni. Poniższa transformacja:

$$\pi_1(\Omega, \omega_0) \rightarrow \pi_1(\Omega, \omega_1) : [F] \rightarrow [C] \cdot [F] \cdot [C]^{-1} , \quad (6.22)$$

jest izomorfizmem, czyli homomorfizmem wzajemnie jednoznaczny (na Rys. 6.2 został przedstawiony powyższy izomorfizm).



Rys. 6.2. Konstrukcja pętli $C \cdot F \cdot C^{-1}$ w punkcie ω_1

Można pokazać, że odwzorowanie $\pi_1(\Omega, \omega_0) \rightarrow \pi_1(\Omega, \omega_1) : [F] \rightarrow [C] \cdot [F] \cdot [C]^{-1}$ jest izomorfizmem. Jeżeli $[F] \in \pi_1(\Omega, \omega_0)$, to określone jest złożenie $[C] \cdot [F] \cdot [C]^{-1} \in \pi_1(\Omega, \omega_1)$, więc odwzorowanie (6.22) jest poprawnie zdefiniowane. Jeżeli $[F_1], [F_2] \in \pi_1(\Omega, \omega_0)$, to złożeniu $[F_1] \cdot [F_2]$ odpowiada element:

$$[C] \cdot ([F_1] \cdot [F_2]) \cdot [C]^{-1} = ([C] \cdot [F_1] \cdot [C]^{-1}) \cdot ([C] \cdot [F_2] \cdot [C]^{-1}) ,$$

zatem odwzorowanie (6.22) jest homomorfizmem.

Jeżeli $[C] \cdot [F] \cdot [C]^{-1} = e$ (element neutralny grupy $\pi_1(\Omega, \omega_1)$), to

$$[b] = [C]^{-1} \cdot [C] \cdot [F] \cdot [C]^{-1} \cdot [C] = [C]^{-1} \cdot [C] = e,$$

(element neutralny w grupie $\pi_1(\Omega, \omega_0)$), a więc odwzorowanie (6.22) jest iniektywne (różnowartościowe).

Jeżeli $[G] \in \pi_1(\Omega, \omega_1)$, to $[C]^{-1} \cdot [F] \cdot [C] \in \pi_1(\Omega, \omega_0)$ oraz

$$[C]^{-1} \cdot [F] \cdot [C] \rightarrow [C],$$

a więc odwzorowanie (6.22) jest surjektywne ("na").

Jeżeli odwzorowanie jest iniektywne i surjektywne wtedy jest wzajemnie jednoznaczne, czyli jest izomorfizmem.

Z powyższego wynika, że grupa fundamentalna (pierwsza grupa homotopii) dla przestrzeni łukowo spójnej nie zależy od wyboru punktu bazowego. Z tego powodu dla przestrzeni łukowo spójnych istnienie grupy fundamentalnej, czyli grupy homotopii nie wymaga definiowania punktu bazowego (pierwszą grupę homotopii można więc zapisać jako $\pi_1(\Omega)$).

Poniżej zostały przedstawione rozważania umożliwiające określenie grup fundamentalnych dla bardziej złożonych przestrzeni. Grupa fundamentalna dla iloczynu kartezjańskiego dwóch przestrzeni łukowo spójnych równa jest sumie prostej dwóch fundamentalnych grup dla tych przestrzeni [129]:

$$\pi_1(\Omega_1 \times \Omega_2) = \pi_1(\Omega_1) \oplus \pi_1(\Omega_2),$$

gdzie sumą prostą $G_1 \oplus \dots \oplus G_n$ grup G_1, \dots, G_n nazywamy iloczyn kartezjański $G_1 \times \dots \times G_n$ z działaniem "•" określonym wzorem:

$$(a_1, \dots, a_n) \bullet (b_1, \dots, b_n) = \left(a_1 \overset{1}{\bullet} b_1, \dots, a_n \overset{n}{\bullet} b_n \right),$$

gdzie "•^k" jest działaniem w grupie G_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Przestrzeń rzeczywista R jest jednospójna, czyli

$$\pi_1(R) = \varepsilon.$$

Zatem także

$$\pi_1(R^n) = \varepsilon.$$

(gdzie ε jest jednoelementową grupą – trywialną), ponieważ

$$\pi_1(R^n) = \pi_1(R^{n-1} \times R) = \dots = \pi_1 \left(\underbrace{R \times \dots \times R}_n \right) = \underbrace{\pi_1(R) \oplus \dots \oplus \pi_1(R)}_n.$$

Można rozważyć teraz $\pi_1(S^1)$. Elementami grupy fundamentalnej dla przestrzeni łukowo spójnej S^1 są klasy o danej krotności pętli skierowanych (liczba

skierowanych nawinięć na okrąg) – dlatego jest to grupa izomorficzna z addytywną grupą liczb całkowitych Z – liczby całkowite odpowiadają liczbie nawinięć, a działanie dodawania liczb odpowiada działaniu składania pętli. Czyli, wiedząc że

$$\pi_1(S^1) = Z,$$

podobnie jak w przypadku R^n , można scharakteryzować grupę homotopii dla torusa $T = S^1 \times S^1$, mianowicie:

$$\pi_1(T) = \pi_1(S^1 \times S^1) = \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) = Z \oplus Z.$$

Analogicznie można przeprowadzić charakterystykę wyższych grup homotopii. Zgodnie z definicją pętla jest transformacją f odcinka $[0, 1]$ w przestrzeń Ω , przy założeniu, że $f(0) = f(1) = \omega_0$. Pętle można otrzymać także, jako transformacje nie odcinka a okręgu, czyli:

$$f : S^1, s \rightarrow \Omega, \omega_0,$$

okrąg S^1 zostaje przetransformowany w Ω , a punkt $s \in S^1$ przechodzi w swój obraz $\omega_0 \in \Omega$. Można to traktować jako definicję grupy fundamentalnej – grupa fundamentalna jest to zbiór klas homotopijnych transformacji $f : S^1, s \rightarrow \Omega, \omega_0$. Można teraz w naturalny sposób wprowadzić n -tą grupę homotopii (n -wymiarową grupę homotopii) jako zbiór klas homotopijnych transformacji $f : S^n, s \rightarrow \Omega, \omega_0$, dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Te grupy oznaczane będą w następujący sposób:

$$\pi_n(\Omega, \omega_0).$$

Powyższa definicja jest poprawna dla $n > 0$. W przypadku gdy $n = 0$ otrzymany z definicji zbiór $\pi_0(\Omega, \omega_0)$ nie musi być grupą, ponieważ $\pi_0(\Omega, \omega_0)$ jest zbiorem łukowych składowych – czyli maksymalnych podprzestrzeni łukowo spójnych danej przestrzeni – przestrzeni Ω z punktem ω_0 jako punktem bazowym. Dla przestrzeni łukowo spójnej $\pi_0(\Omega, \omega_0)$ jest grupą jednoelementową. W pewnych okolicznościach można zdefiniować działanie dla zerowej grupy homotopii i stworzyć strukturę grupy [5].

6.5 Przestrzeń konfiguracyjna

Przestrzeń konfiguracyjna, czyli przestrzeń położeń cząstek jest zbiorem o wymiarze zależnym zarówno od liczby stopni swobody (parametrów) charakteryzujących klasyczne położenie cząstek układu, jak i od liczby cząstek. Poszczególne cząstki mogą znajdować się na określonej rozmaitości M , gdzie rozmaitość rozumiana jest jako przestrzeń, która lokalnie posiada strukturę przestrzeni euklidesowej np. płaszczyzna R^2 , okrąg S^1 , sfera S^2 , torus T , itp.

Jeżeli N jednakowych cząstek rozpatrywanych jest jako zbiór cząstek, które są rozróżnialne, tzn. cząstki rozumiane klasycznie (można je ponumerować),

wtedy przestrzeń konfiguracyjna całego układu jest postaci N -krotnego iloczynu kartezjańskiego rozmaitości M :

$$\underbrace{M \times \dots \times M}_N = M^N. \quad (6.23)$$

Natomiast, jeżeli cząstki będą traktowane jako cząstki w sensie kwantowym, wtedy można mówić o nierozróżnialności jednakowych cząstek i przestrzeń konfiguracyjna dla układu takich cząstek będzie inna – punkty z przestrzeni M^N różniące się jedynie permutacją indeksów należy uznać za identyczne. W celu uwzględnienia nierozróżnialności jednakowych cząstek używa się pojęcia przestrzeni ilorazowej*.

Przestrzeń konfiguracyjną układu N nierozróżnialnych, jednakowych cząstek na danej rozmaitości M , można zapisać jako przestrzeń ilorazową:

$$M^N/S_N, \quad (6.24)$$

gdzie S_N jest grupą permutacji N elementów.

W przypadku przestrzeni nierozróżnialnych cząstek M^N/S_N warto zwrócić uwagę na problem występowania punktów osobliwych, tzn. takich dla których położenia dwóch lub więcej cząstek pokrywają się ze sobą (są to stałe punkty dla działania grupy S_N na M^N – punkty te nazwa się punktami diagonalnymi). Usunięcie z przestrzeni punktów diagonalnych (dyskretny zbiór punktów diagonalnych oznaczany jako Δ) wykonuje się w celu zapewnienia zachowania liczby cząstek w układzie. Czyli przestrzeń konfiguracyjna układu N jednakowych, nierozróżnialnych cząstek na rozmaitości M , ma postać:

$$Q_N(M) = (M^N \setminus \Delta) / S_N. \quad (6.25)$$

Analogicznie przestrzeń konfiguracyjna układu N jednakowych rozróżnialnych cząstek na rozmaitości M , ma postać:

$$F_N(M) = M^N \setminus \Delta. \quad (6.26)$$

6.5.1 Pierwsza grupa homotopii przestrzeni konfiguracyjnej układu wielu cząstek

Pierwsza grupa homotopii dla przestrzeni konfiguracyjnej układu wielu cząstek na danej rozmaitości nazywana jest grupą warkoczową [19, 58]. Jeżeli rozpatrywana

*Jeśli X będzie przestrzenią liniową, a Y będzie jej liniowym podzbiorem to klasami abstrakcji można nazwać podzbiory przestrzeni X uzyskane w taki sposób, że x i y należą do tej samej klasy abstrakcji wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y \in Y$. Klasę, która zawiera element x zazwyczaj oznacza się $[x]$. W zbiorze klas abstrakcji można wprowadzić działania $[x] + [y] = [x + y]$ oraz $\alpha[x] = [\alpha x]$, gdzie α jest liczbą (działania te spełniają aksjomaty działań przestrzeni liniowych. Elementem zerowym jest klasa abstrakcji, do której należą wszystkie elementy ze zbioru Y . Zbiór wszystkich klas abstrakcji wraz z tak określonymi działaniami nazywany jest *przestrzenią ilorazową* i oznaczany X/Y

jest przestrzeń konfiguracyjna układu N jednakowych, nierozróżnialnych cząstek na rozmaitości M , to pierwsza grupa homotopii dla tej przestrzeni nazywana jest pełną grupą homotopii i zapisywana jest w następujący sposób:

$$\pi_1 \left((M^N \setminus \Delta) / S_N \right). \quad (6.27)$$

Elementami należącymi do tej grupy są klasy, które składają się z homotopijnych trajektorii (czyli trajektorii, które mogą być w sposób topologicznie ciągle przekształcone w siebie) dla przestrzeni ilorazowej $(M^N \setminus \Delta) / S_N$. W tym przypadku położenia końcowe i początkowe mogą się różnić – związane są ze sobą przez permutację współrzędnych cząstek (są zatem nierozróżnialne). Natomiast dla przestrzeni konfiguracyjnej układu N jednakowych, ale rozróżnialnych cząstek na rozmaitości M pierwsza grupa homotopii nazywana jest czystą grupą warkoczową:

$$\pi_1 (M^N \setminus \Delta). \quad (6.28)$$

Elementy tworzące czystą grupę warkoczową, są klasami, złożonymi z homotopijnych trajektorii w przestrzeni $M^N \setminus \Delta$, dla których położenia końcowe i początkowe są takie same.

Grupę warkoczową można przedstawić za pomocą jej generatorów[¶]. W przypadku czystej grupy warkoczowej generatorami są klasy topologicznie nieściąganych^{||} (niehomotopijnych z punktem) pętli, odpowiadających danym trajektoriom układu, gdzie tylko jedna cząstka zakreśliła swoją trajektorię a reszta pozostaje na swoim miejscu. Ta pojedyncza pętla jest nieściągana, zamkniętą trajektorią – jej nieściągłość spowodowana jest z jedną z dwóch przyczyn:

1. pozostałe cząstki (w niektórych przypadkach, w zależności od rodzaju i wymiaru rozmaitości, pozostałe cząstki są odpowiedzialne za istnienie klas homotopii),
2. defekty topologiczne danej rozmaitości M .

Pełna grupa warkoczowa $\pi_1 \left((M^N \setminus \Delta) / S_N \right)$ generowana jest zatem przez elementy, które można podzielić na dwa typy. Pierwszy typ odpowiada generatorom tzw. czystej grupy warkoczowej [19, 58], drugi to klasy homotopijnych, zamkniętych trajektorii odpowiadających zamianie dwóch cząstek (przy braku zmiany położenia pozostałych cząstek i braku tworzenia się dodatkowych niehomotopijnych pętli). Te dwa typy generatorów generujących grupę $\pi_1 \left((M^N \setminus \Delta) / S_N \right)$

[¶]Generatorem grupy G jest element zbioru X spełniającego warunki: 1) każdy element z grupy G można przestawić jako iloczyn elementów zbioru X lub ich elementów odwrotnych, 2) najmniejszą podgrupą grupy G zawierającą zbiór X jest grupa G .

^{||}ściągłość należy rozumieć jako ciągłą transformację w sensie topologicznym pętli do punktu (nieciągłą transformacją jest np. rozerwanie pętli)

oznacza się odpowiednio przez L i P . Można zauważyć, że L jest zbiorem generatorów grupy $\pi_1(M^N \setminus \Delta)$. Natomiast grupę generowaną przez zbiór P oznacza się $\Sigma_N(M)$. Dla jednospójnej rozmaitości M [19, 58]:

$$\pi_1\left(\left(M^N \setminus \Delta\right) / S_N\right) = \Sigma_N(M) \quad (6.29)$$

oraz grupa $\pi_1(M^N \setminus \Delta)$ jest podgrupą $\Sigma_N(M)$ [19]. Wynika to z faktu, że jednospójność rozmaitości M jest powodem generowania pełnej grupy warkoczowej $\pi_1\left(\left(M^N \setminus \Delta\right) / S_N\right)$ (oraz wszystkich elementów zbioru L) jedynie przez generatory zbioru P . Jeżeli rozmaitość M nie jest jednospójna, to zbiory L i P są rozłączne, a relacje między ich elementami zależą od rozmaitości M [19, 69]. Można zauważyć, że grupa $\pi_1(M^N \setminus \Delta)$ jest normalną podgrupą $\pi_1\left(\left(M^N \setminus \Delta\right) / S_N\right)$ dla dowolnej rozmaitości M . Elementy grupy ilorazowej $\pi_1\left(\left(M^N \setminus \Delta\right) / S_N\right) / \pi_1(M^N \setminus \Delta)$ numerują wszystkie możliwe permutacje cząstek, które mogą być otrzymane z dowolnego uporządkowania początkowego cząstek. Grupa ilorazowa

$$\pi_1\left(\left(M^N \setminus \Delta\right) / S_N\right) / \pi_1(M^N \setminus \Delta)$$

w ogólności jest grupą permutacji S_N , ale istnieją rozmaitości, dla których tak nie jest [19, 69] – np. rozmaitości niespójne oraz okrąg [19, 58]. W przypadku układu wielu cząstek na rozmaitości niespójnej M , która jest sumą maksymalnych podprzestrzeni spójnych

$$M = \sum_{i=1}^k M_i, \quad (6.30)$$

wszystkie możliwe uporządkowania układu będą opisane przez elementy następującej grupy:

$$\tilde{S}_N = \bigoplus_{i=1}^k S_{N_i}, \quad (6.31)$$

gdzie N_i oznacza liczbę cząstek w podprzestrzeni N_i . Przypadek okręgu zostanie omówiony oddzielnie.

Przestrzeń $F_N(M) = M^N \setminus \Delta$ jest rozwłóknieniem** nad przestrzenią $Q_N(M) = \left(M^N \setminus \Delta\right) / S_N$ zadany przez epimorfizm†† $h_{S_N} : F_N(M) \rightarrow Q_N(M)$ [129, 17]. Liniowe odwzorowanie h_{S_N} związane jest z działaniem grupy permutacji S_N na przestrzeń $F_N(M)$.

W powyższym przypadku włóknami‡‡ są przestrzenie $N!$ -elementowe $[F_N(M)]_x$ gdzie $x \in Q_N(M)$. Ponadto jest to lokalnie trywialne rozwłóknienie. Lokalna trywialność rozwłóknienia definiowana jest następująco [19, 129, 17]:

$$\forall_{x \in Q_N(M)} \exists_U F_N(M) \mid U = U \times [F_N(M)]_x, \quad (6.32)$$

** Rozwłóknieniem nad przestrzenią topologiczną X nazywana jest para złożona z przestrzeni topologicznej Y oraz ciągłego odwzorowania $h : Y \rightarrow X$ (przekształcenie surjektywne).

†† Epimorfizmem jest homomorfizm surjektywny ("na").

‡‡ Włóknem jest przeciwobraz punktu $x \in X$ w odwzorowaniu $h : Y \rightarrow X$ (inaczej $h^{-1}(x)$).

gdzie U oznacza otoczenie punktu x , a $F_N(M)|U$ oznacza obcięcie przestrzeni $F_N(M)$ do przeciwobrazu U w odwzorowaniu $h_{S_N} : F_N(M) \rightarrow Q_N(M)$.

6.5.2 Nakrycie przestrzeni

Nakrycie przestrzeni spójnej X definiowane jest jako przekształcenie $p : Y \rightarrow X$, gdy

$$\forall_{x \in X} \exists_U p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} C_i, \quad C_j \cap C_k = \emptyset, \quad \text{int}C_i = C_i, \quad (6.33)$$

gdzie U oznacza otoczenie otwarte i łukowo spójne punktu x , oraz gdy

$$\forall_{C_i} p|C_i : C_i \rightarrow U, \quad (6.34)$$

gdzie $p|C_i$ jest homeomorfizmem (surjektywnym) pomiędzy C_i a U . Jeżeli $p : Y \rightarrow X$ jest nakryciem to Y nazywane jest przestrzenią nakrywającą przestrzeń X . Z powyższego wynika, że przestrzeń $F_N(M)$ jest przestrzenią nakrywającą przestrzeń $Q_N(M)$. Wykluczenie punktów osobliwych (zbiór punktów diagonalnych Δ) prowadzi do swobodnego działania $*S_N$ na $F_N(M)$ i wskazuje, że homomorfizm $h_{S_N} : F_N(M) \rightarrow Q_N(M)$ jest odwzorowaniem nakrywającym, czyli jest lokalnie trywialnym, oraz każde włókno $[F_N(M)]_x$ jest dyskretne (zawiera skończoną liczbę elementów) [19, 58].

6.6 Grupy warkoczowe dla wybranych rozmaitości

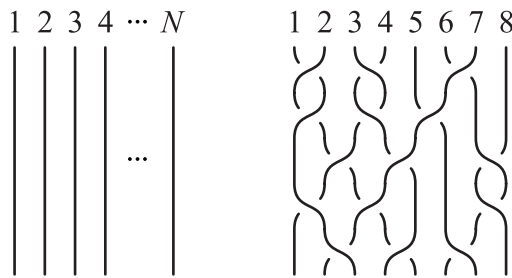
6.6.1 Grupa warkoczowa dla dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej R^2

Pełna grupa warkoczowa dla R^2 ,

$$\pi_1(Q_N(R^2)) = \pi_1\left(\left(\left(R^2\right)^N \setminus \Delta\right) / S_N\right), \quad (6.35)$$

została opisana przez Artina [18] (nazywana jest klasyczną grupą homotopii Artina), często oznaczana jest jako B_N . Dla rozmaitości R^2 standardowo wykorzystuje się graficzną prezentację elementów grupy warkoczowej – poprzez tzw. geometryczne warkoczki. Element trywialny pełnej grupy warkoczowej dla układu N cząstek na rozmaitości R^2 reprezentowany jest przez nieprzecinające się linie (trajektorie pojedynczych cząstek) łączące N punktów początkowych z N punktami końcowymi (Rys. 6.3).

*swobodne działanie definiowane jest jako działanie nieposiadające punktów stałych, czyli takich punktów p należących do danej rozmaitości M , że gdy grupa G działa na M , to jeżeli $g \in G$, to $gp = p$



Rys. 6.3. Trywialny N -warkocz oraz nietrywialny 8-warkocz

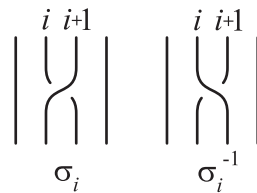
Istotnym faktem jest, że linie na rysunku, przedstawiające poszczególne trajektorie cząstek, w przypadku nietrywialnym mogą tworzyć różne warkocze poprzez dowolne splećanie, przy uwzględnieniu braku możliwości przecinania się pojedynczych linii – ponieważ z rozpatrywanej przestrzeni zostały usunięte punkty diagonalne (Δ – zbiór punktów diagonalnych) (Rys. 6.3).

Jeżeli uporządkowanie początkowe jest identyczne z uporządkowaniem końcowym oraz warkocz opisuje krzywą zamkniętą (pętlę) w przestrzeni $F_N(R^2) = (R^2)^N \setminus \Delta$, to takiego warkocza nie można rozplątać – do rozplątania konieczne byłoby ”przecięcie” linii warkocza.

W związku z tym, że R^2 jest przestrzenią jednopójną, można zapisać:

$$\pi_1(R^2) = \varepsilon \quad (6.36)$$

oraz pełna grupa warkoczowa B_N jest generowana przez generatory ze zbioru P – elementów odpowiadających zamianie dwóch sąsiednich cząstek. Element σ_i odpowiadający zamianie cząstki i -tej z cząstką $i + 1$ oraz jego element odwrotny σ_i^{-1} zostały przedstawione na Rys. 6.4.



Rys. 6.4. Graficzne przedstawienie elementarnych operacji zamiany cząstek σ_i i σ_i^{-1}

Można więc zapisać, że

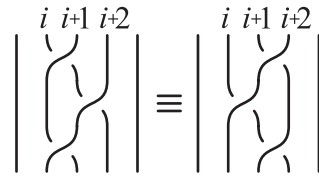
$$B_N = \Sigma_N(R^2). \quad (6.37)$$

Istotne jest także, aby dodatkowo przedstawić relacje, które określają generatory σ_i pełnej grupy warkoczowej [19].

Relacja nałożona na generatory σ_i

$$\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq N - 2, \quad (6.38)$$

związana jest z faktem istnienia możliwości "przesuwania" warkoczy (graficzne przedstawienie relacji – Rys. 6.5).

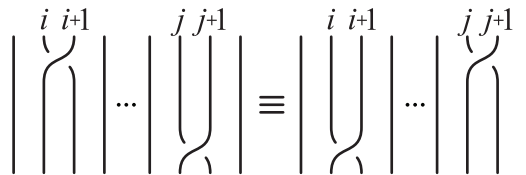


Rys. 6.5. Warkocz po lewej stronie jest topologicznie homotopijny z warkoczem po prawej stronie (transformacja pomiędzy jednym a drugim jest ciągła w sensie topologicznym)

Kolejna relacja nałożona na generatory σ_i ,

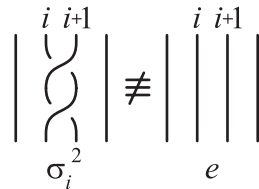
$$\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i, \quad 1 \leq i, j \leq N - 1, |i - j| \geq 2, \quad (6.39)$$

opisuje brak wpływu kolejności zamiany par cząstek (cząstki i -tej z cząstką $i + 1$ oraz cząstki j -tej z cząstką $j + 1$) na topologię warkoczy, przy założeniu, że dane zamiany nie nachodzą na siebie – czemu odpowiada warunek $|i - j| \geq 2$ (Rys. 6.6).



Rys. 6.6. Warkocz po lewej stronie jest topologicznie równoważny z warkoczem po prawej stronie (kolejność nie nachodzących na siebie zamian par cząstek nie wpływa na homotopijność pętli)

Warto podkreślić, że operacja dwukrotnej zamiany cząstek σ_i^2 (przedstawiona na Rys. 6.7) nie jest topologicznie równoważna z warkoczem trywialnym. Ponieważ pojedyncze linie i -ta i $i + 1$ zaczepiają się o siebie, tworząc nierozplątywalny warkocz.



Rys. 6.7. Podwójna zamiana cząstek i -tej z $i + 1$ oznaczana σ_i^2 nie jest elementem jednostkowym grupy B_N

Chociaż podwójna zamiana σ_i^2 zachowuje kolejność cząstek, to:

$$\sigma_i^2 \neq e. \quad (6.40)$$

Zatem w grupie B_N istotne są nie tylko konfiguracje: początkowa i końcowa danego układu (dane punkty w przestrzeni $F_N(M) = M^N \setminus \Delta$), ale także sam przebieg trajektorii układu.

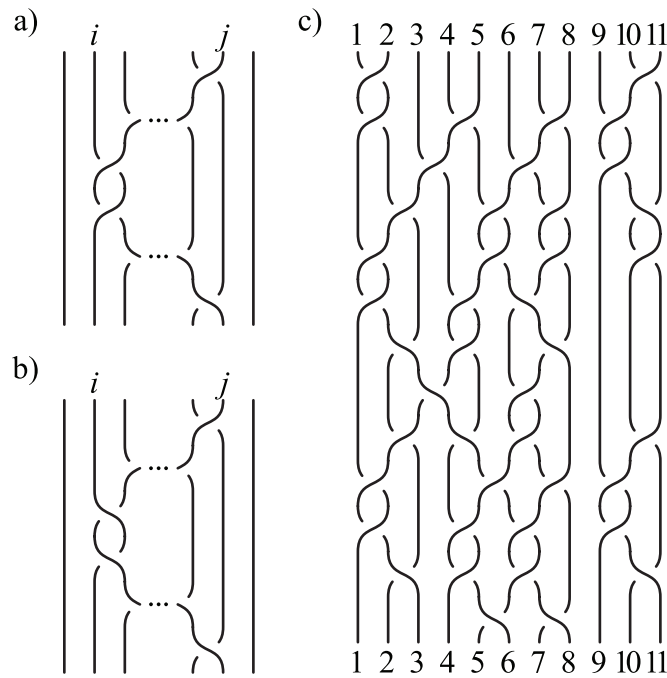
Rozważając zbiór generatorów L dla rozmaitości R^2 można zauważyć, że pierwsza grupa homotopii dla przestrzeni konfiguracyjnej N cząstek na rozmaitości R^2 jest podgrupą klasycznej grupy homotopii Artina, czyli:

$$\pi_1(F_N(R^2)) \subset \Sigma_N(R^2) \quad (6.41)$$

Wynika z tego, że generatory ze zbioru L można przedstawić za pomocą elementów σ_i :

$$l_{ij} = \sigma_{j-1} \cdot \sigma_{j-2} \cdot \dots \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i^2 \cdot \sigma_{i+1}^{-1} \cdot \dots \cdot \sigma_{j-2}^{-1} \cdot \sigma_{j-1}^{-1}, \quad 1 \leq i \leq j \leq N-1 \quad (6.42)$$

Element l_{ij} , czyli element czystej grupy warkoczowej, będący zarazem jej generatorem, odpowiada zamianie i -tej cząstki z j -tą cząstką zachowując kolejność cząstek (Rys. 6.8)



Rys. 6.8. a) Generator l_{ij} czystej grupy warkoczowej, odpowiadający zamianie cząstek i -tej z j -tą przy zachowaniu uporządkowania cząstek, b) element odwrotny $l_{ij}^{-1} = \sigma_{j-1} \cdot \sigma_{j-2} \cdot \dots \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i^{-2} \cdot \sigma_{i+1}^{-1} \cdot \dots \cdot \sigma_{j-2}^{-1} \cdot \sigma_{j-1}^{-1}$ do generatora l_{ij} , c) przykładowy 11-warkocz będący elementem czystej grupy warkoczowej – początkowe i końcowe ustawienia cząstek są identyczne

Poniższe relacje nałożone na generatory definiują czystą grupę warkoczową

$\pi_1 \left((R^2)^N \setminus \Delta \right)$ [131]

$$l_{rs}^{-1} \cdot l_{ij} \cdot l_{rs} = \begin{cases} l_{ij}, & i < r < s < j \\ l_{ij}, & r < s < i < j \\ l_{rj} \cdot l_{ij} \cdot l_{rj}^{-1}, & r < i = s < j \\ l_{rj} \cdot l_{sj} \cdot l_{ij} \cdot l_{sj}^{-1} \cdot l_{rj}^{-1}, & i = r < s < j \\ l_{rj} \cdot l_{sj} \cdot l_{rj}^{-1} \cdot l_{sj}^{-1} \cdot l_{ij} \cdot l_{sj} \cdot l_{rj} \cdot l_{sj}^{-1} \cdot l_{rj}^{-1}, & r < i < s < j \end{cases} \quad (6.43)$$

Można teraz przejść do grupy ilorazowej:

$$\pi_1 \left(\left((R^2)^N \setminus \Delta \right) / S_N \right) / \pi_1 \left((R^2)^N \setminus \Delta \right) = B_N / \pi_1 \left(F_N \left(R^2 \right) \right). \quad (6.44)$$

Zgodnie z definicją struktura ilorazowa przedstawiona jest za pomocą homomorfizmu z jądrem będącym normalną podgrupą czystej grupy warkoczowej $\pi_1 \left((R^2)^N \setminus \Delta \right)$. Czyli określona jest przez warunek nałożony na generator grupy

$$l_{ij} = e, \quad (6.45)$$

albo

$$l_{ij} = \sigma_{j-1} \cdot \sigma_{j-2} \cdot \dots \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i^2 \cdot \sigma_{i+1}^{-1} \cdot \dots \cdot \sigma_{j-2}^{-1} \cdot \sigma_{j-1}^{-1} = e, \quad (6.46)$$

gdzie $1 \leq i \leq j \leq N - 1$, więc

$$\sigma_i^2 = e, \quad (6.47)$$

gdzie $1 \leq i \leq N - 1$.

Z powyższego wynika, że grupa ilorazowa jest generowana przez generatory σ_i , które spełniają relacje (6.38) i (6.39), oraz dodatkowo relację (6.47). Tak wygenerowana grupa okazuje się być grupą permutacji N -elementowego zbioru, oznaczaną jako S_N . Czyli:

$$\pi_1 \left(\left((R^2)^N \setminus \Delta \right) / S_N \right) / \pi_1 \left((R^2)^N \setminus \Delta \right) = B_N / \pi_1 \left(F_N \left(R^2 \right) \right) = S_N \quad (6.48)$$

Grupa permutacji S_N N -elementowego zbioru jest generowana przez operacje zamiany dwóch sąsiadujących ze sobą elementów zbioru – czyli tworzona jest przez generatory, które są analogiczne do generatorów σ_i . Generatory grupy S_N muszą więc spełniać relacje określające generatory σ_i , czyli (6.38) i (6.39) (Rys. 6.5 i Rys. 6.6). W odróżnieniu od grupy B_N , która wykazuje zależność nie tylko od konfiguracji, ale także od przebiegu samej trajektorii – grupa permutacji S_N zależy wyłącznie od kolejności elementów, a nie od sposobu ich zamiany. To powoduje, że dla grupy permutacji nie istnieje różnica między elementem σ_i^2 a elementem jednostkowym ε , co także oznacza, że nie istnieje różnica między σ_i a σ_i^{-1} . Z tego wynika, że generatory σ_i spełniają własność (6.47).

Istnieje także inna prezentacja klasycznej grupy homotopii Artina B_N przedstawionej w [60]. Wprowadza ona nowe generatory:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1, \\ a &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_{N-1}.\end{aligned}\tag{6.49}$$

Powyższe generatory określone są poprzez następujące relacje:

$$a^N = (a \cdot \sigma)^{N-1}$$

oraz

$$\sigma \cdot a^{-j} \cdot \sigma \cdot a^j = a^{-j} \cdot \sigma \cdot a^j \cdot \sigma,$$

gdzie $2 \leq j \leq \frac{N}{2}$. Można zapisać generatory σ_i za pomocą nowych generatorów σ , a :

$$\sigma_i = a^{i-1} \cdot \sigma \cdot a^{-(i-1)}.$$

W odróżnieniu od wcześniej omawianej prezentacji B_N , w której generator odpowiadał operacji zamiany dwóch sąsiednich cząstek (generator σ_i), powyższa prezentacja opiera się o generatory, które odpowiadają zamianie dwóch sąsiednich cząstek jedynie wtedy, gdy mają indeksy 1 i 2 (generator σ). Natomiast złożenia (potęgi) generatora a sprowadzają pozostałe cząstki na pozycje 1 i 2.

6.6.2 Grupa warkoczowa dla sfery S^2

S^2 jest przestrzenią jednopójną, ponieważ każda pętla jest homotopijna z pętlą zerową, czyli pierwsza grupa homotopii dla tej rozmaitości ma postać:

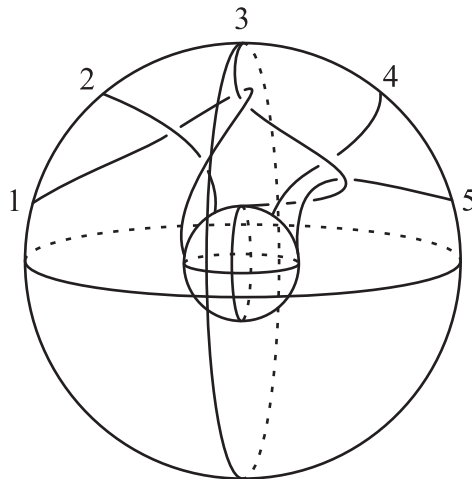
$$\pi_1(S^2) = \varepsilon.$$

Grupa warkoczowa dla układu N cząstek na sferze S^2 ma postać:

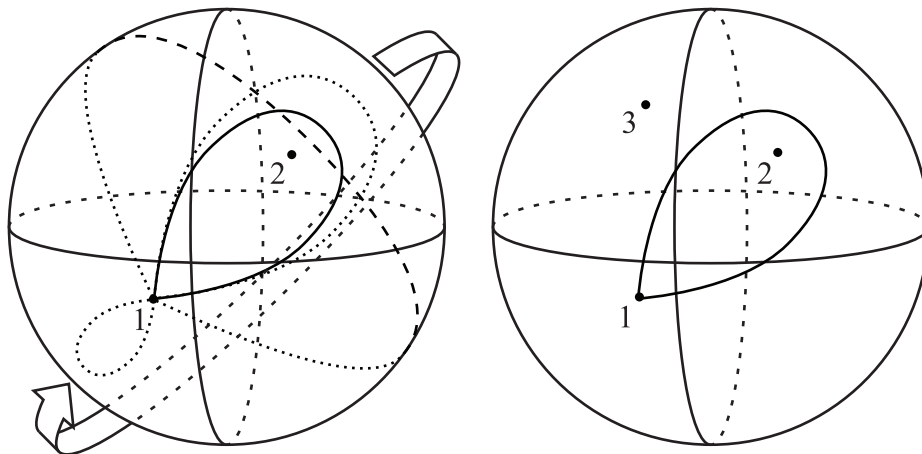
$$\pi_1(Q_N(S^2)) = \Sigma_N(S^2).$$

Podobnie jak w przypadku przestrzeni R^2 , istnieje intuicyjna, graficzna prezentacja grupy warkoczowej (Rys. 6.9).

Grupa warkoczowa na sferze jest generowana przez generatory odpowiadające zamianie dwóch sąsiadujących ze sobą cząstek. Z faktu, że sfera S^2 jest lokalnie izomorficzna z płaszczyzną R^2 wynika, że własności generatorów na R^2 (6.38), (6.39) muszą być także spełnione dla generatorów na sferze. Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że sfera S^2 posiada odmienne własności globalne od przestrzeni R^2 , z którą jest lokalnie izomorficzna. Jest to spowodowane tym, że dowolna pętla na sferze może zostać zinterpretowana na dwa różne sposoby. Jako przykład można podać pętlę, którą zatoczy cząstka wokół wszystkich pozostałych – taka pętla jest homotopijna z pętlą zerową (Rys.6.10)



Rys. 6.9. Graficzna prezentacja 4-warkocza na sferze S^2 . Dwa zbiory punktów (większa sfera i mniejsza sfera) odpowiadają konfiguracjom (początkowej i końcowej) danego układu na sferze



Rys. 6.10. Pętla, którą zatoczy cząstka wokół wszystkich pozostałych cząstek, jest homotopijna z punktem – w przypadku dwóch cząstek na sferze każda pętla jest homotopijna z punktem (lewa sfera); w przypadku trzech lub więcej cząstek nie jest możliwe ciągłe ściągnięcie pętli (która nie otacza wszystkich cząstek) do punktu (prawa sfera)

To prowadzi do dodatkowego ograniczenia nałożonego na generatory grupy warkoczowej na sferze [19, 69]:

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_{n-2} \cdot \sigma_{n-1}^2 \cdot \sigma_{n-2} \cdot \dots \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 = e. \quad (6.50)$$

Wprowadzenie dodatkowego ograniczenia na generatory wskazuje na uboższy charakter grupy warkoczowej na sferze, w porównaniu z grupą warkoczową na płaszczyźnie. Natomiast relacje określające generatory l_{ij} na sferze S^2 mają identyczną postać jak dla generatorów dla przestrzeni R^2 – związane jest to z defi-

nicją generatorów l_{ij} (6.42) (ograniczenie (6.50) nie zmienia relacji na generatory grupy czystej dla sfery). Dlatego struktura ilorazowa pełnej grupy warkoczowej i czystej grupy warkoczowej ma następującą postać:

$$\pi_1 \left(\left((S^2)^N \setminus \Delta \right) / S_N \right) / \pi_1 \left((S^2)^N \setminus \Delta \right) = \pi_1 \left(Q_N(S^2) \right) / \pi_1 \left(F_N(S^2) \right) = S_N. \quad (6.51)$$

6.6.3 Grupa warkoczowa dla torusa T

Torus jest to kartezjańskie złożenie dwóch okręgów S^1 :

$$T = S^1 \times S^1.$$

Jako rozmaitość, torus posiada wiele bardzo ważnych interpretacji fizycznych. Torus jest topologicznie równoważny prostokątnej plakietce w przestrzeni R^2 z nałożonymi periodycznymi warunkami brzegowymi. Ta rozmaitość w odróżnieniu od płaszczyzny, czy sfery nie jest przestrzenią jednopójną, z czego wynika, że

$$\pi_1(T) \neq \varepsilon.$$

Pierwsza grupa homotopii układu N cząstek na torusie T posiada bardzo złożoną strukturę w porównaniu z grupami warkoczowymi dla płaszczyzny lub sfery [19, 59]. Wynika to z istotnych własności topologicznych torusa. Pierwsza grupa homotopii dla torusa ma postać:

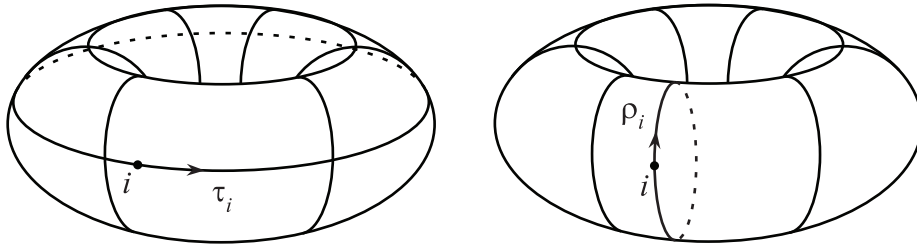
$$\pi_1(T) = \pi_1(S^1 \times S^1) = \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) = Z \oplus Z \neq \varepsilon,$$

gdzie \oplus oznacza sumę prostą, a Z jest addytywną grupą liczb całkowitych. Z powyższego wynika, że

$$\pi_1(Q_N(T)) \neq \Sigma_N(T).$$

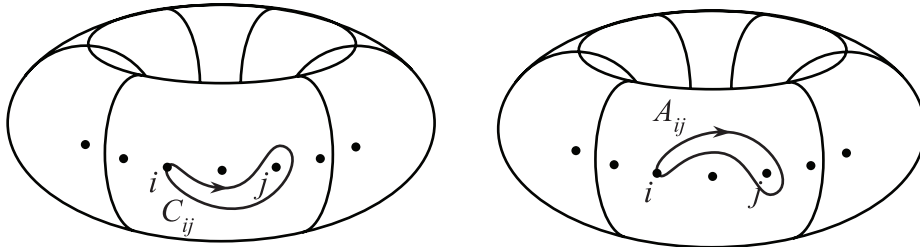
Zbiór generatorów grupy $\pi_1(Q_N(T))$ składa się z dwóch zbiorów L i P (ponieważ rozpatrywana rozmaitość nie jest jednopójna). Zbiór generatorów L zawiera elementy generujące czystą grupę warkoczową $\pi_1(F_N(T))$, a generatory ze zbioru P odpowiadają zamianie sąsiadujących cząstek na powierzchni torusa. Należy zwrócić uwagę, że nie wszystkie elementy ze zbioru L można przedstawić za pomocą złożenia generatorów odpowiadających zamianie cząstek. Te, które nie wyrażają się za pomocą generatorów ze zbioru P związane są z własnościami topologicznymi torusa – już dla pojedynczej cząstki istnieją niehomotopijne trajektorie. Graficzna prezentacja grupy warkoczowej na torusie umożliwia łatwe zobrazowanie generatorów należących do zbioru L , które są związane z topologią torusa (Rys. 6.11).

Generatory τ_i i ρ_i (gdzie $i = 1, 2, \dots, N$) odpowiadają przemieszczaniu pojedynczej cząstki po jednej z dwóch rodzajów niehomotopijnych trajektorii na



Rys. 6.11. Graficzna prezentacja generatorów τ_i i ρ_i niezwiązanych z zamianą cząstek, ale wynikających z topologicznych własności torusa

torusie – w obu przypadkach pozostałe cząstki pozostają na swoich miejscach. Dla ułatwienia wprowadza się dodatkowe generatory związane z zapętlaniem się cząstek. Generatory A_{ij} i C_{ij} odpowiadają dwóm rodzajom niehomotopijnych trajektorii zakreślanych przez cząstkę i -tą wokół cząstki j -tej (Rys. 6.12).



Rys. 6.12. Pomocnicze generatory A_{ij} i C_{ij} (opisujące zapętlanie się cząstek), oraz odpowiadające im niehomotopijne trajektorie

Nowe generatory A_{ij} i C_{ij} mogą zostać wyrażone za pomocą generatorów τ_i i ρ_i poprzez następujące relacje [19, 59]:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \tau_j^{-1} \cdot \rho_i \cdot \tau_j \cdot \rho_i^{-1}, \\ C_{ij} &= \rho_j^{-1} \cdot \tau_i \cdot \rho_j \cdot \tau_i^{-1}. \end{aligned}$$

gdzie $1 \leq i \leq j \leq N$. W ten sposób otrzymujemy zbiór warunków definiujących zależności występujące pomiędzy generatorami pełnej grupy warkoczowej dla układu N cząstek na rozmaitości typu torus, który można podzielić na trzy podzbiory:

1. równania definiujące generatory τ_i i ρ_i ,
2. równania definiujące generatory σ_i ,
3. równania definiujące zależności pomiędzy generatorami ze zbiorów L i P .

Poniższe równania definiują generatory ze zbioru L [19, 59]:

$$\begin{aligned}
\tau_i \cdot A_{jk} &= A_{jk} \cdot \tau_i, \\
\rho_i \cdot A_{jk} &= A_{jk} \cdot \rho_i, \\
\tau_i \cdot \tau_j &= \tau_j \cdot \tau_i, \\
\rho_i \cdot \rho_j &= \rho_j \cdot \rho_i, \\
C_{ij} &= (\tau_i \cdot \tau_j) \cdot A_{ij}^{-1} \cdot (\tau_j^{-1} \cdot \tau_i^{-1}), \\
A_{ij} &= (\rho_i \cdot \rho_j) \cdot C_{ij}^{-1} \cdot (\rho_j^{-1} \cdot \rho_i^{-1}), \\
C_{ij} &= (A_{j-1,j}^{-1} \cdot A_{j-2,j}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{i+1,j}^{-1}) \cdot A_{ij}^{-1} \cdot (A_{i+1,j} \cdot A_{i+2,j} \cdot \dots \cdot A_{j-1,j}), \\
\tau_1 \cdot \rho_1 \cdot \tau_1^{-1} \cdot \rho_1^{-1} &= A_{1,N} \cdot A_{1,N-1} \cdot \dots \cdot A_{1,3} \cdot A_{1,2}.
\end{aligned}$$

gdzie $1 \leq i \leq j \leq k \leq N$. Równania definiujące generatory σ_i mają identyczną postać z równaniami (6.38) i (6.39). Trzeci podzbiór relacji definiujących generatory pełnej grupy warkoczowej, który określa wzajemne relacje generatorów ze zbiorów L i P , ma postać [19, 59]:

$$\begin{aligned}
\tau_{i+1} &= \sigma_i^{-1} \cdot \tau_i \cdot \sigma_i^{-1}, \\
\rho_{i+1} &= \sigma_i \cdot \rho_i \cdot \sigma_i, \\
\tau_1 \cdot \sigma_i &= \sigma_i \cdot \tau_1, \\
\rho_1 \cdot \sigma_i &= \sigma_i \cdot \rho_1, \\
\sigma_i^2 &= A_{i,i+1},
\end{aligned}$$

gdzie $1 \leq i \leq N-1$ i $2 \leq j \leq N-1$.

Istotne jest to, że przedstawione przykłady grup warkoczowych dla układu N cząstek na rozmaitościach typu: płaszczyzna euklidesowa, sfera, torus w pełni oddają globalne, topologiczne własności tych przestrzeni [5]. W przypadku sfery – przestrzeni zamkniętej, jednorodnej, lokalnie izomorficznej do płaszczyzny, pojawia się dodatkowe ograniczenie na generatory, które wynika z własności samej przestrzeni. Wskazuje to na zupełnie odmienny charakter topologiczny (globalny) sfery w porównaniu do płaszczyzny. Podobnie w przypadku torusa – przestrzeni niejednorodnej, ale także lokalnie izomorficznej do płaszczyzny, charakter globalny przestrzeni jest inny od charakteru płaszczyzny, chociaż obie są przestrzeniami dwuwymiarowymi. Można zauważyć, że grupa warkoczowa dla torusa ma znacznie bardziej złożoną strukturę – co związane jest z wprowadzeniem dodatkowych generatorów wynikających z własności topologicznych przestrzeni.

6.6.4 Grupa warkoczowa dla trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej R^3

Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa R^3 jest przestrzenią jednorodną:

$$R^3 = R \times R \times R.$$

Pierwsza grupa homotopii dla przestrzeni R^3 jest grupą trywialną:

$$\pi_1(R^3) = \pi_1(R \times R \times R) = \pi_1(R) \oplus \pi_1(R) \oplus \pi_1(R) = \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon = \varepsilon.$$

Grupa warkoczowa dla przestrzeni konfiguracyjnej N cząstek na rozmaitości R^3 ma więc postać

$$\pi_1 \left(\left((R^3)^N \setminus \Delta \right) / S_N \right) = \pi_1 \left(Q_N (R^3) \right) = \Sigma_N (R^3),$$

i jest generowana przez generatory σ_i odpowiadające zamianie cząstki i -tej z cząstką $i + 1$ -szą. Należy zwrócić uwagę na fakt, że w przestrzeni $F_N (R^3)$ każda zamknięta krzywa (pętla) jest ściągalna do punktu poprzez ciągłe transformacje – ponieważ w przestrzeni trójwymiarowej nie można otoczyć żadnego punktu nieściągłą pętlą. Dlatego

$$\pi_1 \left(F_N (R^3) \right) = \varepsilon.$$

Zgodnie z równaniem (6.53)

$$\pi_1 \left(Q_N (R^3) \right) / \pi_1 \left(F_N (R^3) \right) = \pi_1 \left(Q_N (R^3) \right) / \varepsilon = \pi_1 \left(Q_N (R^3) \right) = S_N$$

Można zauważyć, że równania (6.38), (6.39), oraz (6.47) definiują generatory. W przypadku trójwymiarowej przestrzeni równanie (6.47) jest spełnione, ponieważ podwójna zamiana cząstek jest topologicznie równoważna z zatoczeniem pętli jedną cząstką wokół drugiej, a taka pętla może zostać ściągnięta w tej przestrzeni "nad" lub "pod" cząstką. Powyższe własności prowadzą do podstawowej różnicy pomiędzy grupą warkoczową dla dwuwymiarowej przestrzeni, a grupą warkoczową dla trójwymiarowej (i wyżejwymiarowych) przestrzeni. W przypadku przestrzeni trójwymiarowej pojedyncze struny cząstki i -tej i cząstki $i + 1$ -szej nie splątują się w warkocz. Co więcej, każdy warkocz w przestrzeni trójwymiarowej może zostać rozplątany. Dlatego w rozważanym przypadku istotne są jedynie konfiguracje początkowa i końcowa układu, a nie trajektoria ewolucji. Z tego wynika, że:

$$\pi_1 \left(Q_N (R^3) \right) / \pi_1 \left(F_N (R^3) \right) = S_N.$$

Dla jednospójnych rozmaitości M o wymiarze $\dim M > 2$ zachodzi równość:

$$\pi_1 \left(Q_N (M) \right) = \Sigma_N (M) = S_N.$$

Wynika to z faktu, że każda pętla zatoczona wokół danego punktu jest ściągalna w przestrzeniach o wymiarze $\dim M \geq 3$. W przypadku gdy $\pi_1 (M) \neq \varepsilon$, ale $\dim M \geq 3$, wtedy $\Sigma_N (M) = S_N$, nawet jeżeli $\pi_1 (Q_N (M)) \neq S_N$. Z powyższego wynika, że dla przestrzeni trójwymiarowych, bądź wyżej wymiarowych, efekty topologiczne nie mają żadnego wpływu na $\Sigma_N (M)$. To pociąga za sobą fakt, że pełna grupa warkoczowa $\pi_1 (Q_N (M))$ zmienia się jedynie w przypadku, gdy jednocześnie zmienia się czysta grupa warkoczowa $\pi_1 (F_N (M))$.

6.6.5 Grupa warkoczowa dla prostej R^1 oraz okręgu S^1

W przypadku R^1 , przestrzeń $F_N(R^1)$ jest podzielona na rozłączne, jednospójne podprzestrzenie C_i , które są ponumerowane przez elementy grupy permutacji S_N . Wynika z tego, że początek i koniec trajektorii muszą należeć do tej samej podprzestrzeni C_i (odpowiada to zachowaniu kolejności cząstek na prostej). Dlatego [58]:

$$\pi_1(Q_N(R^1)) = \pi_1(F_N(R^1)) = \varepsilon.$$

W przypadku okręgu S^1 , który jest topologicznie równoznaczny odcinkowi z periodycznymi warunkami brzegowymi, rozważane zagadnienie staje się bardziej złożone, ponieważ istnieje możliwość realizacji cyklicznych permutacji cząstek. Generatorem pełnej grupy warkoczowej $\pi_1(Q_N(S^1))$ jest element δ , który odpowiada przestawieniu pierwszej cząstki na ostatnie miejsce. Generator ten jest nieskończonego rzędu, ponieważ kolejne potęgi δ^n odpowiadają niehomotopijnym pętlom, dlatego

$$\pi_1(Q_N(S^1)) = Z,$$

gdzie Z oznacza addytywną grupę liczb całkowitych. Natomiast grupa $\pi_1(F_N(S^1))$ generowana jest przez generator $\nu = \delta^N$, dlatego

$$\pi_1(F_N(S^1)) = Z.$$

Mimo, że obie grupy $\pi_1(Q_N(S^1))$ i $\pi_1(F_N(S^1))$ odpowiadają tej samej abstrakcyjnej, nieskończonej grupie, to jednak związek ich generatorów powoduje, że

$$\pi_1(Q_N(S^1)) / \pi_1(F_N(S^1)) = Z_N,$$

gdzie Z_N oznacza cykliczną grupę rzędu N . Podobnie jak w przypadkach dwuwymiarowych i trójwymiarowych rozmaitości rozważanych wcześniej, grupa Z_N numeruje wszystkie możliwe permutacje, jakie można otrzymać z danego początkowego uporządkowania.

W przypadku rozważanych rozmaitości R^1 i S^1 nie istnieje grupa Σ_N , ponieważ niemożliwa jest zamiana położenia dwóch cząstek bez zatoczenia nieściąganej pętli. Z powyższych rozważań wynika, że formalizm grup warkoczowych nie jest odpowiedni do układów jednowymiarowych [132, 5].

6.7 Ciągi dokładne dla grup warkoczowych

Ciąg homomorfizmów $G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n$, gdzie G_i są grupami, jest dokładny, jeśli

$$f_i(G_i) = \text{Ker } f_{i+1}.$$

Zauważyć można, że $F_N(M)$ (przestrzeń konfiguracyjna rozróżnialnych jednokowych cząstek bez punktów diagonalnych) tworzy rozwłóknienie przestrzeni

$Q_N(M)$ (przestrzeń konfiguracyjna nierozróżnialnych jednakowych cząstek bez punktów diagonalnych) zdefiniowane przez epimorfizm h_{S_N} związany z S_N działającą na $F_N(M)$ [17, 133]. Każde włókno $F_N(M)_x, x \in Q_N(M)$ jest skończoną przestrzenią ($N!$ -elementową) i rozwłóknienie jest lokalnie trywialne*. Stąd wynika, że $F_N(M)$ jest nakrywającą przestrzenią dla $Q_N(M)$. Dla takiego rozwłóknienia dokładny ciąg grup homotopii ma postać [134, 17]:

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \pi_n([F_N(M)]_x, y) \rightarrow \pi_n(F_N(M), y) \rightarrow \pi_n(Q_N(M), x) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \pi_1([F_N(M)]_x, y) \rightarrow \pi_1(F_N(M), y) \rightarrow \pi_1(Q_N(M), x) \rightarrow \dots, \\ &\rightarrow \pi_0([F_N(M)]_x, y) \rightarrow \pi_0(F_N(M), y), \end{aligned}$$

gdzie M oznacza łukowo spójną rozmaitość o wymiarze $\dim M \geq 2$, $\pi_n(\Omega, \omega)$ jest n -tą grupą homotopii dla przestrzeni Ω z punktem bazowym $\omega \in \Omega$, punkty $x \in Q_N(M)$ oraz $y \in F_N(M)$ są dowolnie wybrane.

Ponieważ każde włókno $[F_N(M)]_x$ jest skończone (zawiera $N!$ elementów), to

$$\pi_1([F_N(M)]_x, y) = \varepsilon$$

oraz

$$\pi_0([F_N(M)]_x, y) = S_N.$$

Z łukowej spójności przestrzeni $F_N(M)$ wynika, że

$$\pi_0(F_N(M), y) = \varepsilon,$$

czyli dla każdej n -tej grupy homotopii można pominąć punkt bazowy y . Zatem ciąg homotopii przyjmie postać [19, 134, 17]:

$$\varepsilon \rightarrow \pi_1(F_N(M)) \xrightarrow{\alpha} \pi_1(Q_N(M)) \xrightarrow{\beta} S_N \rightarrow \varepsilon, \quad (6.52)$$

gdzie ε oznacza jednoelementową grupę trywialną, a α, β są epimorfizmami.

Z dokładności ciągu wynika, że wszystkie generatory należące do zbioru L (zbiór generatorów czystej grupy warkoczowej) muszą należeć także do jądra epimorfizmu β . Natomiast generatory $\sigma_i \in P$ (zbiór generatorów zamian sąsiednich cząstek [jeśli M jest jednospójną przestrzenią to są to wszystkie generatory pełnej grupy warkoczowej, a grupa czysta jest jej podgrupą]) zostają przekształcone w odpowiednie elementy grupy permutacji S_N . Z równania (6.52) otrzymujemy, że czysta grupa warkoczowa $\pi_1(F_N(M))$ jest dzielnikiem normalnym pełnej grupy warkoczowej $\pi_1(Q_N(M))$ oraz

$$\pi_1(Q_N(M)) / \pi_1(F_N(M)) = S_N. \quad (6.53)$$

Oznacza to, że w przypadku kiedy sposób zamiany pozycji cząstek jest nieistotny pełna grupa warkoczowa jest grupą permutacji S_N .

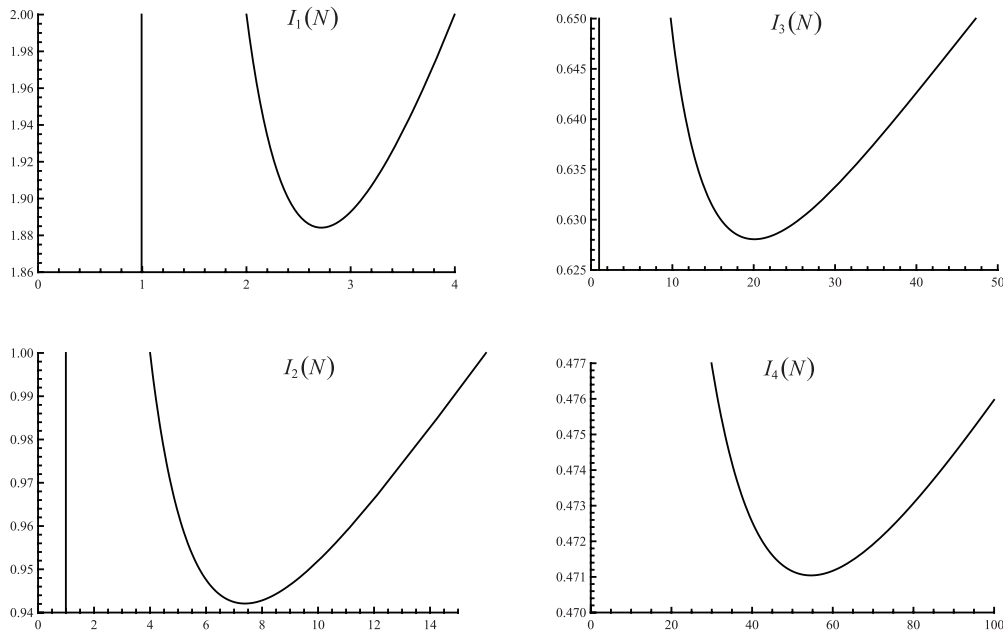
* h_{S_N} zadaje lokalnie trywialne rozwłóknienie, jeśli każdy punkt $x \in Q_N(M)$ ma otoczenie U , że w nim rozwłóknienie jest trywialne, tj. $F_N(M)|U = U \times F_N(M)_x$, gdzie $F_N(M)|U$ oznacza przecięcie $F_N(M)$ i przeciwobrazu U w odwzorowaniu h_{S_N} [58]

6.8 Zastosowanie czystych grup warkoczowych w informatyce klasycznej

Bogata struktura grup warkoczowych w 2D stwarza możliwość zastosowania tych obiektów matematycznych do kodowania informacji klasycznej [135]. Szczególnie przydatne wydają się tu czyste grupy warkoczowe, podgrupy grupy pełnej, także nieskończone w przypadku 2D. Grupy czyste generowane są przez generatory l_{ij} , spełniające relacje (3.7) (paragraf 3.1.2) i odnoszą się do warkoczów obrazujących zamianę cząstek, ale z zachowaniem uporządkowania cząstek (w tym sensie, odpowiadają zamianom jednakowych, ale odróżnialnych cząstek). Jeśli odwzorować 0 i 1 kodu binarnego w dwa generatory czystej grupy warkoczowej trzech cząstek na R^2 , a trzeci generator identyfikować ze znakiem przerwania, to można kodować informację w warkoczowej strukturze. Oprócz grupowych własności nowej reprezentacji informacji (np. element odwrotny może być przydatny w identyfikacji informacji), relacje między generatorami pozwalają na ekwiwalentne przetwarzanie zakodowanej informacji, niedostępne w kodzie binarnym. Może to mieć istotniejsze znaczenie, jeśli by również kodować informację klasyczną o bogatszych alfabetach niż w przypadku binarnym, wykorzystując czyste grupy dla większej liczby cząstek (o bardziej rozbudowanych relacjach dla generatorów).

Czysta grupa warkoczowa (w odróżnieniu od pełnej grupy warkoczowej) udostępnia właśnie odpowiednie dla kodowania podzbiory generatorów, które zachowują porządek – w przypadku pełnej grupy warkoczowej generatory σ_i oraz σ_j są przemienne dla $|i - j| \geq 2$ i nie mogą być wykorzystane jako podstawowe elementy kodowe. Przy szacowaniu liczby dostępnych elementów kodowych należy uwzględnić podzbiór generatorów, które zachowują porządek – można przyjąć tu w przybliżeniu (po uwzględnieniu relacji dla generatorów) liniową zależność od liczby linii N . Skrócenie długości kodu informacji w alfabecie N elementowym, w stosunku do długości informacji kodowanej binarnie, wyrazi się zatem jako $\log_2(N)$. Z drugiej strony wzrost liczby symboli alfabetu (liczby linii N) komplikuje samą strukturę kodującą, co wiąże się ze wzrostem zużycia zasobów wydatkowanych na utworzenie kolejnych nici powiązań. Należy tu zauważyć, że prezentacja czystych warkoczów w 2D, przy pomocy przeplatanych linii łączących punkty o takim samym ustawieniu, może być identyfikowana ze strukturą sieci powiązań w 3D, przy warunku stałości punktów początkowych i końcowych. Daje to możliwość kodowania informacji (w elementach czystej grupy warkoczowej) w takiej sieci połączeń wykorzystując rzeczywiste splątania warkoczowe fizycznie realizowanych linii. Funkcję wydatkowania zasobów (energetycznych, materialnych) potrzebnych dla zorganizowania sieci można przykładowo zamodelować w postaci potęgowej, $g_1 = N, g_2 = N^{\frac{1}{2}}, g_3 = N^{\frac{1}{3}}, g_4 = N^{\frac{1}{4}}$. Wykres funkcji $I_i(N) = g_i(N)/(\log_2 N)$ – Rys. 6.13, wykazuje minimum, przy którym kodowanie w N alfabetach jest optymalne z punktu widzenia stosunku nakładów do

pojemności informatycznej.



Rys. 6.13. Wykresy funkcji $I_i(N)$, wyrażającej wielkość nakładów na zysk kodowania, dla różnego skalowania nakładów, $g_i \sim N^i$ $i = 1, 2, 3, 4$

Na podkreślenie zasługuje tu fakt, że struktura warkoczowa odpowiada splątaniom, a nie adresowaniu połączeń tych linii. Przewaga tych pierwszych polega tu na nieskończonych zasobach informatycznych odpowiedniej czystej grupy warkoczowej w 2D w stosunku do skończonego zasobu adresowania połączeń ($N!$ dla N linii). Interesującym wydaje się tu wynik [135] pokazujący, że pojemność informacyjna splątań takiej sieci osiąga maksimum przy około 20 liniach przy równoczesnym optymalizowaniu nakładów wydatkowanych na utworzenie całej sieci, dla realnego skalowania nakładów $\sim N^{1/3}$, Rys. 6.13. Najbardziej optymalna informacyjnie i oszczędna od strony nakładów potrzebnych na zorganizowanie sieci połączeń 3D (w której kodować można splątaniowe warkocze z czystej grupy warkoczowej 2D) jest zatem stosunkowo niewielka sieć odpowiadająca alfabetowi około 20 elementowemu. Zaskakująca jest tu koincydencja tej liczby z liczbą głosek używanych informatycznie w większości języków, co może wskazywać na splątaniową (warkoczową), a nie adresową strukturę zapisu i przetwarzania informacji lingwistycznej w sieci neuronów.

Inne argumenty, które przytoczyć można za warkoczową strukturą informacji klasycznej odnieść można do preferowanego dwuwymiarowego jej charakteru, w korespondencji do geometryzacji informacji kodowanej w czystych grupach warkoczowych dla dwuwymiarowych rozmaitości (tylko wtedy grupy warkoczowe są nieskończone). Dwuwymiarowy charakter informacji wydaje się być podnoszony przez *zasadę holograficzną* [136, 137, 138]. Zgodnie z tą zasadą entropia (a zatem

i informacja [139]) skaluje się jak powierzchnia horyzontu zdarzeń w przypadku czarnej dziury, po to, by II zasada termodynamiki obowiązywała także w odniesieniu do kolapsu materii w osobliwości grawitacyjnej [137, 138, 140]. W tym celu wprowadzono [137, 138] entropię czarnej dziury, $S_{BH} = \frac{A}{4}$, gdzie A ($A = 16\pi M^2$) jest powierzchnią horyzontu zdarzeń czarnej dziury o masie M (jednostki wybrano w konwencji Plancka: $\hbar = G = c = k = 1$; wtedy jednostka powierzchni Plancka $\frac{G\hbar}{c^3} = 1$ [= $2,59 \cdot 10^{-66}$ cm²]). Dla przykładu, w przypadku protonu powierzchnia horyzontu zdarzeń wynosi około 10^{20} (w jednostkach Plancka), a dla Ziemi 10^{41} . Skończona powierzchnia horyzontu ogranicza entropię i zatem liczbę stopni swobody układu, $e^{S_{BH}} = \dim H$, gdzie H jest odpowiednią przestrzenią Hilberta. W czarną dziurę nie może zatem zamienić się obiekt o zbyt dużej entropii, może być ona co najwyżej równa $1/4$ powierzchni horyzontu tej utworzonej dziury, $A/4$. Jest to ograniczenie liczby stopni swobody układu ($\sim \ln \dim H$) i wskazuje, że entropia (oraz informacja) skalują się jak powierzchnia, a nie jak objętość. Zostały sformułowane holograficzne modele, chociaż nie w fizycznie uzasadnionych metrykach (w hiperbolicznej metryce *anti-de-Sitter*, z uwagi na konieczność utworzenia brzegu przestrzeni z hologramem) [141, 142, 143], to jednak podkreślające dwuwymiarową geometrię informacji.

Poglądowym argumentem za dwuwymiarowym charakterem informacji, może być też fakt, że efektywne i szybkie przetwarzanie informacji klasycznej, które odbywa się w dużej skali w każdej z komórek organizmów żywych, wykorzystuje kodowanie informacji w deformacjach powierzchni odpowiednio skonformowanych białek (dużych polimerowych struktur o dostatecznie wtedy dużej powierzchni przy rozdzielczości w skali atomowej; małe molekuly, jak np. H₂O, są informatycznie nieprzydatne z powodu zbyt małej powierzchni). Tysiące sygnałów enzymatycznych równocześnie przetwarzanych w komórkach wykorzystują najprawdopodobniej najbardziej efektywny nośnik informacji, jakim są deformowane powierzchnie, nie bez związku z abstrakcyjną reprezentacją dwuwymiarowego charakteru informacji w warkoczowych strukturach (można również odwzorować zdeformowaną powierzchnię, po jej digitalizacji, w strukturę czystej grupy warkoczowej).

Bibliografia

- [1] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory, 2nd ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [2] A. M. Polyakov, "Particle spectrum in quantum field theory," *Zhurn. Eksp. Teor. Fiz., Pis. Red.* **20**, p. 430, 1974.
- [3] G. t'Hooft, "Magnetic monopoles in unified gauge theories," *Nuclear Phys. B* **79**, p. 276, 1974.
- [4] G. t'Hooft, "Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle," *Phys. Rev. D* **14**, p. 3432, 1976.
- [5] N. Mermin, "The topological theory of defects in ordered media," *Rev. Mod. Phys.* **51**, p. 591, 1979.
- [6] Y. Aharonov and D. Bohm, "Significance of electromagnetic potentials in quantum theory," *Phys. Rev.* **115**, p. 485, 1959.
- [7] B. D. Josephson, "The discovery of tunnelling supercurrents," *Rev. Mod. Phys.* **46**, p. 251, 1974.
- [8] P. W. Anderson, "Absence of diffusion in certain random lattices," *Phys. Rev.* **109**, p. 1492, 1958.
- [9] S. Das Sarma and A. Pinczuk, *Perspectives in Quantum Hall Effects: Novel Quantum Liquids in Low-Dimensional Semiconductor Structures*, Wiley, New York, 1997.
- [10] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge UP, Cambridge, 2000.
- [11] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, "Non-abelian anyons and topological quantum computation," *Rev. Mod. Phys.* **80**, p. 1083, 2008.

- [12] J. Preskill, *Topological Quantum Computation*. Lecture Notes for Phys. 219, California Inst. Tech.
- [13] D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger, *The Physics of Quantum Information*, Springer Verlag, Berlin, 2000.
- [14] W. Jacak, J. Krasnyj, L. Jacak, and R. Gonczarek, *Dekoherecja orbitalnych i spinowych stopni swobody w kropkach kwantowych*, Oficyna Wydawnicza PWR, Wrocław, 2009.
- [15] L. Jacak, J. Krasnyj, W. Jacak, R. Gonczarek, and P. Machnikowski, "Unavoidable decoherence in semiconductor quantum dots," *Phys. Rev. B* **72**, p. 245309, 2005.
- [16] A. Y. Kitaev, "Fault-tolerant quantum computation by anyons," *Annals of Phys.* **303**, p. 2, 2003.
- [17] E. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [18] E. Artin, "Theory of braids," *Annals of Math.* **48**, p. 101, 1947.
- [19] J. S. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Princeton UP, Princeton, 1974.
- [20] D. C. Tsui, H. L. Störmer, and A. C. Gossard, "Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit," *Phys. Rev. Lett.* **48**, p. 1559, 1982.
- [21] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, "New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance," *Phys. Rev. Lett.* **45**, p. 494, 1980.
- [22] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I. E. Dzialoshinskii, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Dover Publ. Inc., Dover, 1975.
- [23] R. B. Laughlin, "Quantized motion of three two-dimensional electrons in a strong magnetic field," *Phys. Rev. B* **27**, p. 3383, 1983.
- [24] R. B. Laughlin, "Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations," *Phys. Rev. Lett.* **50**, p. 1395, 1983.
- [25] S. M. Girvin, A. H. MacDonald, and P. M. Platzman, "Collective-excitation gap in the fractional quantum Hall effect," *Phys. Rev. Lett.* **54**, p. 581, 1985.
- [26] S. M. Girvin and A. H. MacDonald, "Off-diagonal long-range order, oblique confinement, and the fractional quantum Hall effect," *Phys. Rev. Lett.* **58**, p. 1252, 1987.

- [27] F. D. M. Haldane, “Fractional quantization of the Hall effect: a hierarchy of incompressible quantum fluid states,” *Phys. Rev. Lett.* **51**, p. 605, 1983.
- [28] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory*, Nauka, Moscow, 1972.
- [29] N. Read, “Theory of the half-filled Landau level,” *Semicond. Sci. Technol.* **9**, p. 1859, 1994.
- [30] J. K. Jain, “Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect,” *Phys. Rev. Lett.* **63**, p. 199, 1989.
- [31] J. K. Jain, *Composite Fermions*, Cambridge UP, Cambridge, 2007.
- [32] O. Heinonen, *Composite Fermions*, World Sc., Singapore, 1998.
- [33] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Sc., Singapore, 1990.
- [34] A. A. Abrikosov, *Vvedenie v teoriu normalnykh metallov*, Nauka, Moskva, 1972.
- [35] W. Pan, H. L. Störmer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, “Fractional quantum hall effect of composite fermions,” *Phys. Rev. Lett.* **90**, p. 016801, 2003.
- [36] Z. Papić, G. Möller, M. V. Milovanović, N. Regnault, and M. O. Goerbig, “Fractional quantum Hall state at $\nu = 1/4$ in a wide quantum well,” *Phys. Rev. B* **79**, p. 245325, 2009.
- [37] N. Read, “Order parameter and Ginzburg-Landau theory for the fractional quantum Hall effect,” *Phys. Rev. Lett.* **62**, p. 86, 1989.
- [38] B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, “Theory of the half-filled Landau level,” *Phys. Rev. B* **47**, p. 7312, 1993.
- [39] D. R. Luhman, W. Pan, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, “Observation of a fractional quantum Hall state at $\nu=1/4$ in a wide GaAs quantum well,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, p. 266804, 2008.
- [40] J. Shabani, T. Gokmen, Y. T. Chiu, and M. Shayegan, “Evidence for developing fractional quantum Hall states at even denominator $1/2$ and $1/4$ fillings in asymmetric wide quantum wells,” *Phys. Rev. Lett.* **103**, p. 256802, 2009.
- [41] J. Shabani, T. Gokmen, and M. Shayegan, “Correlated states of electrons in wide quantum wells at low fillings: the role of charge distribution symmetry,” *Phys. Rev. Lett.* **103**, p. 046805, 2009.

- [42] M. Greiter, X. G. Wen, and F. Wilczek, “Paired Hall states,” *Nuclear Phys. B* **374**, p. 567, 1992.
- [43] E. Rezayi and N. Read, “Fermi-liquid-like state in a half-filled Landau level,” *Phys. Rev. Lett.* **72**, p. 900, 1994.
- [44] D. H. Lee, “Neutral fermions at filling factor $\nu = 1/2$,” *Phys. Rev. Lett.* **80**, p. 4745, 1998.
- [45] R. Willett, J. P. Eisenstein, H. L. Störmer, D. C. Tsui, A. C. Gossard, and J. H. English, “Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum Hall effect,” *Phys. Rev. Lett.* **59**, p. 1776, 1987.
- [46] S. Kivelson, C. Kallin, D. P. Arovas, and J. R. Schrieffer, “Cooperative ring exchange theory of the fractional quantized Hall effect,” *Phys. Rev. Lett.* **56**, p. 873, 1986.
- [47] R. Rajaraman and S. L. Sondhi, “A field theory for the Read operator,” *Int. J. Mod. Phys. B* **10**, p. 793, 1996.
- [48] R. Shankar and G. Murthy, “Towards a field theory of fractional quantum Hall states,” *Phys. Rev. Lett.* **79**, p. 4437, 1997.
- [49] S. S. Chern and J. Simons, “Characteristic forms and geometric invariants,” *Annals of Math.* **99**(2), p. 48, 1974.
- [50] E. Witten, “Chern–Simons theory as a string theory,” *Prog. Math.* **133**, p. 637, 1995.
- [51] A. L. Fetter, C. B. Hanna, and R. B. Laughlin, “Random-phase approximation in the fractional-statistics gas,” *Phys. Rev. B* **39**, p. 9679, 1989.
- [52] A. Lopez and E. Fradkin, “Fractional quantum Hall effect and Chern–Simons gauge theories,” *Phys. Rev. B* **44**, p. 5246, 1991.
- [53] S. C. Zhang, T. H. Hansson, and S. Kivelson, “Effective-field-theory model for the fractional quantum Hall effect,” *Phys. Rev. Lett.* **62**, p. 82, 1989.
- [54] V. Pasquier and F. D. M. Haldane, “A dipole interpretation of $\nu = 1/2$ state,” *Nuclear Phys. B* **516**, p. 719, 1998.
- [55] G. Moore and N. Read, “Nonabelions in the fractional quantum Hall effect,” *Nuclear Phys. B* **360**, p. 362, 1991.
- [56] N. Read, “Lowest-Landau-level theory of the quantum Hall effect: The Fermi-liquid-like state of bosons at filling factor one,” *Phys. Rev. B* **58**, p. 16262, 1998.

- [57] R. E. Prange and S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, Springer Verlag, New York, 1990.
- [58] L. Jacak, P. Sitko, K. Wieczorek, and A. Wójs, *Quantum Hall Systems: Braid groups, composite fermions, and fractional charge*, Oxford UP, Oxford, 2003.
- [59] T. Einarsson, “Fractional statistics on a torus,” *Phys. Rev. Lett.* **64**, p. 1995, 1990.
- [60] J. S. Birman, “On braid groups,” *Communications on Pure and Applied Mathematics* **22**, p. 41, 1969.
- [61] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [62] M. Chaichian and A. Demichev, *Path Integrals in Physics Volume I Stochastic Processes and Quantum Mechanics*, IOP Publishing Ltd, Bristol; Philadelphia, 2001.
- [63] M. Chaichian and A. Demichev, *Path Integrals in Physics Volume II Quantum Field Theory, Statistical Physics and other Modern Applications*, IOP Publishing Ltd, Bristol; Philadelphia, 2001.
- [64] G. J. Papadopoulos and J. T. Devreese, *Path Integrals and Their Applications in Quantum, Statistical, and Solid State Physics*, Plenum Press, New York, 1978.
- [65] M. G. Laidlaw and C. M. DeWitt, “Feynman functional integrals for systems of indistinguishable particles,” *Phys. Rev. D* **3**, p. 1375, 1971.
- [66] Y. S. Wu, “General theory for quantum statistics in two dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* **52**, p. 2103, 1984.
- [67] T. D. Imbo and E. C. G. Sudarshan, “Inequivalent quantizations and fundamentally perfect spaces,” *Phys. Rev. Lett.* **60**, p. 481, 1988.
- [68] E. C. G. Sudarshan, T. D. Imbo, and T. R. Govindarajan, “Configuration space topology and quantum internal symmetries,” *Phys. Lett. B* **213**, p. 471, 1988.
- [69] T. D. Imbo, C. S. Imbo, and C. S. Sudarshan, “Identical particles, exotic statistics and braid groups,” *Phys. Lett. B* **234**, p. 103, 1990.
- [70] J. S. Xia, W. Pan, C. L. Vicente, E. D. Adams, N. S. Sullivan, H. L. S. D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, “Electron correlation in the second Landau level: a competition between many nearly degenerate quantum phases,” *Phys. Rev. Lett.* **93**, p. 176809, 2004.

- [71] J. Jacak, I. Jóźwiak, and L. Jacak, “New implementation of composite fermions in terms of subgroups of a braid group,” *Phys. Lett. A* **374**, p. 346, 2009.
- [72] J. Jacak, I. Jóźwiak, L. Jacak, and K. Wieczorek, “Cyclotron braid group structure for composite fermions,” *J. Phys: Cond. Matt.* **22**, p. 355602, 2010.
- [73] J. Jacak, I. Jóźwiak, and L. Jacak, “Composite fermions in braid group terms,” *Open Sys. and Inf. Dyn.* **17**, p. 1, 2010.
- [74] J. Jacak, I. Jóźwiak, L. Jacak, and K. Wieczorek, “Cyclotron braid group approach to Laughlin correlations,” *Adv. Theor. Math. Phys.* , 2011. (accepted).
- [75] D. H. Lee, G. Baskaran, and S. Kivelson, “Generalized cooperative-ring-exchange theory of the fractional quantum Hall effect,” *Phys. Rev. Lett.* **59**, p. 2467, 1987.
- [76] J. Jacak and L. Jacak, “On auxiliary flux tubes associated to composite fermions in 2D Hall systems.” arXiv:1101.1601v1 [cond-mat.mes-hall], 2011.
- [77] E. H. Rezayi and N. Read, “Non-abelian quantized Hall states of electrons at filling factors $12/5$ and $13/5$ in the first excited Landau level,” *Phys. Rev. B* **79**, p. 075306, 2009.
- [78] S. H. Simon, E. H. Rezayi, and N. R. Cooper, “Pseudopotentials for multiparticle interactions in the quantum Hall regime,” *Phys. Rev. B* **75**, p. 195306, 2007.
- [79] T. Morinari, “Composite fermion pairing theory in single-layer systems,” *Phys. Rev. B* **62**, p. 15903, 2000.
- [80] T. Sbeouelji and N. Meskini, “Stability of the fractional quantum Hall effect in higher Landau levels for composite fermions carrying four vortices,” *Phys. Rev. B* **64**, p. 193305, 2001.
- [81] N. Read and D. Green, “Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect,” *Phys. Rev. B* **61**, p. 10267, 2000.
- [82] G. Möller and S. H. Simon, “Paired composite-fermion wave functions,” *Phys. Rev. B* **77**, p. 075319, 2008.
- [83] W. Bishara and C. Nayak, “Effect of Landau level mixing on the effective interaction between electrons in the fractional quantum Hall regime,” *Phys. Rev. B* **80**, p. 121302, 2009.

- [84] E. H. Rezayi and S. H. Simon, “Breaking of particle-hole symmetry by Landau level mixing in the $\nu=5/2$ quantized Hall state.” arXiv:0912.0109v2 [cond-mat.mes-hall], 2009.
- [85] J. Jacak and L. Jacak, “Recovery of Laughlin correlations with cyclotron braids,” *Euorophysics Lett.* **92**, p. 60002, 2010.
- [86] P. W. Eliutin and W. D. Krivchenkov, *Kvantovaja miechanika*, Nauka, Moskwa, 1976.
- [87] E. P. Wigner, “On the interaction of electrons in metals,” *Phys. Rev.* **46**, p. 1002, 1934.
- [88] C. C. Grimes and G. Adams, “Evidince for liquid-to-crystal phase transition in a classical, two-dimensional sheet of electrons,” *Phys. Rev. Lett.* **42**, p. 795, 1979.
- [89] D. Levesque, J. J. Weiss, and A. H. MacDonald, “Crystallization of the incompressible quantum-fluid state of a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field,” *Phys. Rev. B* **30**, p. 1056, 1984.
- [90] S. S. Mandal, M. R. Peterson, and J. K. Jain, “Two-dimensional electron system in high magnetic fields: Wigner crystal versus composite-fermion liquid,” *Phys. Rev. Lett.* **90**, p. 106403, 2003.
- [91] K. Yang, F. D. M. Haldane, and E. H. Rezayi, “Wigner crystal in a lowest Landau level at low filling factors,” *Phys. Rev. B* **64**, p. 0831301(R), 2001.
- [92] R. I. Willet, R. R. Ruel, K. W. West, and L. N. Pfeiffer, “Experimental demonstration of a Fermi surface at one-half filling of the zeroth Landau level,” *Phys. Rev. Lett.* **71**, p. 3846, 1993.
- [93] R. I. Willet, K. W. West, and L. N. Pfeiffer, “Apparent inconsistency of observed composite fermion geometric resonances and measured effective mass,” *Phys. Rev. Lett.* **75**, p. 2988, 1995.
- [94] R. Fleischmann, *Nichtlineare Dynamik in Halbleiter-Nanostrukturen*. PhD thesis, Frankfurt University, 1996.
- [95] I. I. Olchovskii, *Kurs teoreticeskoj mehaniki dlia fizikov*, Izdat. Mosk. Univ., Moskwa, 1974.
- [96] K. Maki and X. Zotos, “Static and dynamic properties of a two-dimensional Wigner crystal in a strong magnetic field,” *Phys. Rev. B* **28**, p. 4349, 1983.
- [97] P. R. Wallace, “The band theory of graphite,” *Phys. Rev.* **71**, p. 622, 1947.

- [98] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, “The electronic properties of graphene,” *Rev. Mod. Phys.* **81**(1), p. 109, 2009.
- [99] K. Yang, “Spontaneous symmetry breaking and quantum Hall effect in graphene,” *Sol. State Comm.* **143**, p. 27, 2007.
- [100] A. K. Geim and A. H. MacDonald, “Graphene: exploring carbon flatland,” *Physics Today* **60**, p. 35, 2007.
- [101] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, and A. A. Firsov, “Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene,” *Nature* **438**, p. 197, 2005.
- [102] Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Störmer, and F. Kim, “Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry’s phase in graphene,” *Nature* **438**, p. 201, 2005.
- [103] J. W. MacClure, “Diamagnetism of graphite,” *Phys. Rev.* **104**, p. 666, 1956.
- [104] Y. Zhang, Z. Jiang, J. P. Small, M. S. Purewal, Y.-W. Tan, M. Fazlollahi, J. D. Chudov, J. A. Jaszczak, H. L. Störmer, and P. Kim, “Landau-level splitting in graphene in high magnetic fields,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, p. 136806, 2006.
- [105] X. Du, I. Skachko, F. Duerr, A. Luican, and E. Y. Andrei, “Fractional quantum Hall effect and insulating phase of Dirac electrons in graphene,” *Nature* **462**, p. 192, 2009.
- [106] K. I. Bolotin, F. Ghahari, M. D. Shulman, H. L. Störmer, and P. Kim, “Observation of the fractional quantum Hall effect in graphene,” *Nature* **462**, p. 196, 2009.
- [107] D. A. Abanin, I. Skachko, X. Du, E. Y. Andrei, and L. S. Levitov, “Fractional quantum Hall effect in suspended graphene: transport coefficients and electron interaction strength,” *Phys. Rev. B* **81**, p. 115410, 2010.
- [108] I. Skachko, X. Du, F. Duerr, A. Luican, D. A. Abanin, L. S. Levitov, and E. Y. Andrei, “Fractional quantum Hall effect in suspended graphene probed with two-terminal measurements,” *Phil. Trans. R. Soc. A* **368**, p. 5403, 2010.
- [109] Z. Papić, M. O. Goerbig, and N. Regnault, “Atypical fractional quantum Hall effect in graphene at filling factor $1/3$,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, p. 176802, 2010.

- [110] C. Yannouleas, I. Romanovsky, and U. Landman, “Edge and bulk components of lowest-Landau-level orbitals, correlated fractional quantum Hall effect incompressible states, and insulating behavior of finite graphene samples,” *Phys. Rev. B* **82**, p. 125419, 2010.
- [111] T. D. Stanescu, V. Galitski, and S. Das Sarma, “Topological states in two-dimensional optical lattices,” *Phys. Rev. A* **82**, p. 013608, 2010.
- [112] R. N. Palmer and D. Jaksch, “High-field fractional Hall effect in optical lattices,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, p. 180407, 2006.
- [113] D. N. Sheng, Z.-C. Gu, K. Sun, and L. Sheng, “Fractional quantum Hall effect in the absence of Landau levels.” arXiv:1102.2658v1 [cond-mat.str-el], 2011.
- [114] M. Zhang, H. Huang, C. Zhang, and C. Wu, “Quantum anomalous Hall states in the p-orbital honeycomb optical lattice,” *Phys. Rev. A* **83**, p. 023615, 2011.
- [115] A. S. Sørensen, E. Demler, and M. D. Lukin, “Fractional quantum Hall states of atoms in optical lattices,” *Phys. Rev. Lett.* **94**, p. 086803, 2005.
- [116] F. D. M. Haldane, “Model of quantum Hall effect without Landau levels: condensed matter realization of the ‘parity anomaly’,” *Phys. Rev. Lett.* **61**, p. 2015, 1988.
- [117] K. Sun, H. Yao, E. Fradkin, and S. A. Kivelson, “Topological insulators and nematic phases from spontaneous symmetry breaking in 2D Fermi systems with a quadratic band crossing,” *Phys. Rev. Lett.* **103**, p. 046811, 2009.
- [118] Z. Wang, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, “Topological order parameters for interacting topological insulators,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, p. 256803, 2010.
- [119] X.-L. Qi and S.-C. Zhang, “The quantum spin Hall effect and topological insulators.” arXiv:1001.1602v1 [cond-mat.mtrl-sci], 2010.
- [120] V. M. Yakovenko, “Chern-Simons term and \mathbf{n} field in Haldane’s model for quantum Hall effect without Landau levels,” *Phys. Rev. Lett.* **65**, p. 251, 1990.
- [121] J. E. Avron, D. Osadchy, and D. Seiler, “A topological look at the quantum Hall effect,” *Physics Today* **56**, p. 38, August 2003.
- [122] P. Cheng, C. Song, T. Zhang, Y. Zhang, Y. Wang, J.-F. Jia, J. Wang, Y. Wang, B.-F. Zhu, X. Chen, X. Ma, K. He, L. Wang, X. Dai, Z. Fang,

- X. Xie, X.-L. Qi, C.-X. Liu, S.-C. Zhang, and Q.-K. Que, “Landau quantization of topological surface states in Bi_2Se_3 ,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, p. 076801, 2010.
- [123] C. Wu, D. Bergman, L. Balents, and S. Das Sarma, “Flat bands and Wigner crystalization in honeycomb optical lattice,” *Phys. Rev. Lett.* **99**, p. 070401, 2007.
- [124] R. L. Willet, H. L. Störmer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. West, and K. W. Baldwin, “Termination of the series of fractional quantum Hall states at small filling factors,” *Phys. Rev. B* **38**, p. 7881, 1988.
- [125] F. Dyson quoted in J. R. Schrieffer, *Theory of superconductivity*, Benjamin-Cummings, Reading, MA, 1983. p. 42.
- [126] L. Jacak, *Nonlinear topics in Fermi liquid theory*, Oficyna Wyd. PWr, Wrocław, 1988.
- [127] A. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, PWN, Warszawa, 1976.
- [128] G. Birkhoff and S. M. Lane, *Przegląd algebry współczesnej*, PWN, Warszawa, 1966.
- [129] R. Duda, *Wprowadzenie do topologii, Część 1: Topologia ogólna; Wprowadzenie do topologii, Część 2: Topologia algebraiczna*, PWN, Warszawa, 1991.
- [130] S. Lang, *Algebra*, PWN, Warszawa, 1973.
- [131] H. S. Coxeter and W. O. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [132] J. M. Leinaas and J. Myrheim, “On the theory of identical particles,” *Nuovo Cimento* **37B**, p. 1, 1977.
- [133] K. Jänich, *Topologia*, PWN, Warszawa, 1991.
- [134] V. L. Hansen, *Braids and coverings*, Cambridge UP, Cambridge, 1989.
- [135] J. Jacak, I. Józwiak, and L. Jacak, “Application of braid groups for information processing,” in *Proc. of the 2007 International Conference on Foundation of Computer Science*, H. R. Arabnia and P. L. Zou, eds., p. 344, CSREA Press, 2007.
- [136] R. Bousso, “The holographic principle,” *Rev. Mod. Phys.* **74**, p. 825, 2002.
- [137] J. D. Bekenstein, “Black holes and the second law,” *Nuovo Cim. Lett.* **4**, p. 737, 1972.

- [138] S. W. Hawking, "Gravitational radiation from colliding black holes," *Phys. Rev. Lett.* **26**, p. 1344, 1971.
- [139] N. Gershenfeld, *The Physics of Information Technology*, Cambridge U.P., Cambridge, 2000.
- [140] S. W. Hawking, "Black hole explosions?," *Nature* **248**, p. 30, 1974.
- [141] L. Suskind, "The world as a hologram," *J. Math. Phys.* **36**, p. 6377, 1995.
- [142] J. Maldacena and A. Strominger, "Semiclassical decay of near extremal fivebranes," *J. High Energy Phys.* **12**, p. 008, 1999.
- [143] E. Witten, "Gauge theory correlators from non-critical string theory," *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, p. 253, 1998.

Dodatki

Dodatek A

Publikacje autora

A.1 Lista publikacji autorskich dotyczących tematu rozprawy doktorskiej

- **J. Jacak**, I. Józwiak, L. Jacak, K. Wieczorek, *Cyclotron braid group approach to Laughlin correlations*, arXiv:0910.4250v1 [cond-mat.mes-hall] (accepted in Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 2011).
- **J. Jacak**, L. Jacak, *On auxiliary flux tubes associated to composite fermions in 2D Hall systems*, arXiv:1101.1601v1 [cond-mat.mes-hall], 2011.
- **J. Jacak**, L. Jacak, *Recovery of Laughlin correlations with cyclotron braids*, Europhysics Letters **92**, p. 60002, 2010.
- **J. Jacak**, I. Józwiak, L. Jacak and K. Wieczorek, *Cyclotron braid group structure for composite fermions*, J. Phys.: Condens. Matter **22**, p. 355602, 2010.
- **J. Jacak**, I. Józwiak, L. Jacak, *Composite fermions in braid group terms*, Open Systems & Information Dynamics **17**, p. 1, 2010.
- **J. Jacak**, I. Józwiak, L. Jacak, *New implementation of composite fermions in terms of subgroups of a braid group*, Physics Letters A **37**, p. 346, 2009.
- **J. Jacak**, I. Józwiak, L. Jacak, *Application of braid groups for information processing*, Proceedings of the 2007 International Conference on Foundation of Computer Science FCS2007, Editors Hamid R. Arabnia, P. L. Zhou; CSREA Press, p. 344, 2007.

A.2 Lista innych publikacji autorskich

- W. Jacak, J. Krasnyj, **J. Jacak**, W. Donderowicz, L. Jacak, *Mechanism of plasmon-mediated enhancement of photovoltaic efficiency*, J. Phys. D: Appl. Phys. **44**, p. 055301, 2011.
- **J. Jacak**, J. Krasnyj, W. Jacak, R. Gonczarek, A. Chepok, L. Jacak, *Surface and volume plasmons in metallic nanospheres in a semiclassical RPA-type approach: Near-field coupling of surface plasmons with the semiconductor substrate*, Phys. Rev. B **82**, p. 035418, 2010.
- W. Jacak, J. Krasnyj, **J. Jacak**, R. Gonczarek, A. Chepok, L. Jacak, D. Z. Hu, D. Schaadt, *Radius dependent shift in surface plasmon frequency in large metallic nanospheres: Theory and experiment*, J. Appl. Phys. **107**, p. 124317, 2010.
- W. Jacak, J. Krasnyj, **J. Jacak**, A. Chepok, L. Jacak, W. Donderowicz, D. Z. Hu, D. M. Schaadt, *Undamped collective surface plasmon oscillations along metallic nanosphere chains*, J. Appl. Phys. **108**, p. 084304, 2010.
- L. Jacak, **J. Jacak**, *Informatyka kwantowa – perspektywy, Rozdział I, Systemy czasu rzeczywistego, Metody i zastosowania*, Praca zbiorowa pod redakcją Z. Huzara i Z. Mazura, Polskie Towarzystwo Informatyczne, ISBN 978-83-206-1658-3, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa 2007, p. 13, 2007.
- W. Jacak, J. Krasnyj, **J. Jacak**, A. Henrykowski, L. Jacak, *Mechanism of plasmon enhancement of PV efficiency for metallic nano-modified surface of semiconductor photo-cell*, Intern. Rev. Phys, Vol. 4. n. 6, pp. 335-348, 2010.
- W. Jacak, J. Krasnyj, **J. Jacak**, *Mechanism of plasmon enhancement of PV efficiency for metallic nano-modified surface of semiconductor photo-cell*, Proc. of SPIE 2010 vol 7757, p. 775734-1-15, Plasmonics: Metallic Nanostructures and Their Optical Properties VIII, ed. M. Stockman.
- W. Jacak, J. Krasnyj, **J. Jacak**, R. Gonczarek, L. Jacak, *Dephasing of orbital and spin degrees of freedom in semiconductor quantum dots due to phonons and magnons*, Phys. Stat. Sol. C **3**, p. 3707, 2006.
- W. Jacak, J. Krasnyj, **J. Jacak**, M. Krzyżosiak, L. Jacak, *Quantum information processing on spin degrees of freedom in QDs placed in diluted magnetic semiconductor*, Phys. Stat. Sol. C **3**, p. 3702, 2006.
- W. Jacak, J. Krasnyj, **J. Jacak**, *Spin qubit and its decoherence in quantum dot in a diluted magnetic semiconductor medium*, Proc. of International

Conference on Physics of Semiconductors (ICPS2006, Wien, Austria, 2006, <http://scitation.aip.org/spinweb/>).

- współautorstwo skryptów (w języku ang. do nowo-uruchamianych studiów z zakresu fizyki w języku ang., PWr):
 - **J. Jacak**, L. Jacak, *Introduction to quantum information processing (supplementary materials)*, e-skrypt, PWR Wrocław, 2010.
 - L. Jacak, **J. Jacak**, *Introduction to quantum optics (supplementary materials)*, e-skrypt, PWR Wrocław, 2010.
- współautorstwo skryptu PWr:
 - W. Jacak, W. Donderowicz, **J. Jacak**, L. Jacak, *Wstęp do informatyki kwantowej*, skrypt, PWR Wrocław, 2011.

Dodatek B

Kopie wybranych publikacji

Recovery of Laughlin correlations with cyclotron braids

J. JACAK and L. JACAK ^(a)

Institute of Physics, Wrocław University of Technology - Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland, EU

received 9 September 2010; accepted 29 November 2010

published online 5 January 2011

PACS 05.30.Pr – Fractional statistics systems (anyons, etc.)

PACS 73.43.-f – Quantum Hall effects

Abstract – Cyclotron braid subgroups are defined in order to identify the topological origin of Laughlin correlations in 2D Hall systems. Flux tubes and vortices for composite fermion constructions are explained in terms of cyclotron braids. The odd and even denominator fractional lowest Landau level fillings are discussed.

Copyright © EPLA, 2010

Introduction. – The essence of 2D Hall system physics involves Laughlin correlations (LCs), which are expressed by the famous Laughlin wave function (LF) [1]. An analysis of the Coulomb interaction in Haldane pseudopotential terms [2–4] indicates that the LF exactly describes the ground state for N charged 2D particles at the fractional Landau level (LL) filling $1/q$, q odd integer, if one neglects the long-distance part of the Coulomb interaction expressed by a projection on the relative angular momenta of particle pairs for values greater than $q - 2$. An effective model of composite fermions (CFs) [5] was next formulated in terms of auxiliary flux tubes attached to particles in order to produce the required statistical phase by employing the Aharonow-Bohm phase shift. The competitive construction of CFs utilizes so-called vortices [6,7], collective fluid-like objects that are pinned to bare fermions and reproducing LCs [6]. Both types of composite particles, with vortices or with flux tubes, are phenomenological in nature, thus the question arises as to what is a more fundamental reason for LCs in 2D charged systems. It is commonly acknowledged [8–10] that the source of exotic LCs is of a 2D peculiar topology type. To match the topological properties of quantum systems, quantization by the Feynman path integral method is particularly convenient [8,9]. In the present letter we revisit it to recover LCs by employing properties of the underlying cyclotron braid picture [11,12] without a phenomenological modeling of CFs.

Too-short cyclotron trajectories at strong magnetic fields. – One-dimensional unitary representations (1DURs) of the full braid group [9,13–15] (π_1 homotopy group of undistinguishable N -particle configuration space [13]), define weights for the path integral

summation over trajectories [8,9]. If the trajectories fall into separated homotopy classes that are distinguished by non-equivalent closed loops attached to an open trajectory $\lambda_{a,b}$ (linking points a and b in the configuration space), then an additional unitary factor (the weight of the particular trajectory class) should be included [8,9] in the path integral: $I_{a \rightarrow b} = \sum_{l \in \pi_1} e^{i\alpha_l} \int d\lambda_l e^{iS[\lambda_{l(a,b)}]}$, where

π_1 stands for the full braid group. The factors $e^{i\alpha_l}$ form a 1DUR of the full braid group and distinct representations correspond to distinct types of quantum particles. For the permutation group S_N , which is the full braid group for N particles in R^n , $n \geq 3$, there exist only two 1DURs: $\sigma_i \rightarrow e^{i\pi}$ or $\sigma_i \rightarrow e^{i0}$, (σ_i is the interchange of the i -th and $(i+1)$ -th particles) corresponding to fermions and bosons, respectively. For N particles in R^2 the braid group is substantially richer than S_N and has an infinite number of 1DURs [9,15], defined for the group generators as: $\sigma_i \rightarrow e^{i\theta}$, $i = 1, \dots, N-1$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, where each θ corresponds to a different type of anyons [1,8,9] (Abelian, as the 1DUR elements commute). The closed loops from the full braid group describe exchanges of identical particles, thus, their 1DURs indicate the statistics of the particles. Because 1DURs are periodic with a period of 2π , the statistical distinguishing of CFs linked with LCs is precluded due to the fact that they require a phase shift of $p\pi$, $p = 3, 5, \dots$. If it is impossible to associate CFs with the 1DURs of the full braid group, we propose [11] to associate them with appropriately constructed braid subgroups instead of the full braid group and in this way to distinguish CFs from fermions.

The full braid group contains all accessible closed multi-particle classical trajectories —braids (with initial and final orderings of particles that may differ by permutation). We base our analysis on the observation that inclusion of a magnetic field substantially changes

^(a)E-mail: ljacak@pwr.wroc.pl

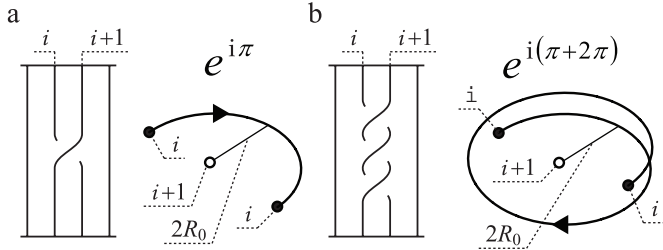


Fig. 1: The generator σ_i of the full braid group and the corresponding relative trajectory of the i -th and $(i+1)$ -th particles exchange (a); the generator of the cyclotron braid subgroup, $b_i^{(p)} = \sigma_i^p$ (in the figure, $p=3$), corresponds to additional $\frac{p-1}{2}$ loops when the i -th particle interchanges with the $(i+1)$ -th one ($2R_0$ is the inter-particle separation) (b).

these trajectories — a classical cyclotron motion confines a variety of accessible braids. When the separation of particles is greater than twice the cyclotron radius, which occurs at fractional lowest LL fillings, the exchanges of particles along single-loop cyclotron trajectories are precluded, because the cyclotron orbits are *too short* for interchanges. Particle interchanges, however, are necessary for defining the statistics and in order to allow exchanges again, the cyclotron radius must somehow be *enhanced*. An enhancement could be achieved by either lowering the effective magnetic field or lowering the effective particle charge. These two possibilities lead to the two phenomenological concepts of CFs — with the lowered field in Jain’s construction [5] and with the screened charge in Read’s construction of vortices [6]. Both of these constructions seem to have nothing in common with braid groups, but actually both of these phenomenological tricks correspond to the same, more basic and natural concept, of restricting the braids by excluding inaccessible trajectories [11,12]. We argue that at sufficiently high magnetic fields in 2D charged N -particle systems, multi-loop braids allow for the enlargement of cyclotron orbits, thus restoring particle exchanges in a natural way [12]. These multi-loop braids form a subgroup of the full braid group and, in the presence of strong magnetic field, the summation in the Feynman propagator will be thus confined to the elements of this subgroup (its semigroup, for fixed magnetic field orientation, however, with the same 1DURs as of the subgroup).

Cyclotron braid subgroups — the response to too short trajectories. — More precisely, we associate composite particles and LCs with the 1DURs of *cyclotron braid subgroups* that are generated by the following generators: $b_i^{(p)} = \sigma_i^p$, ($p=3, 5, \dots$), $i=1, \dots, N-1$, where each p corresponds to a different type of cyclotron braid subgroup (and to a different type of corresponding composite particles), and σ_i are the generators of the full braid group. The group element $b_i^{(p)}$ represents the interchanges of the i -th and $(i+1)$ -th particles with $\frac{p-1}{2}$ loops, which is clear by virtue of the definition of

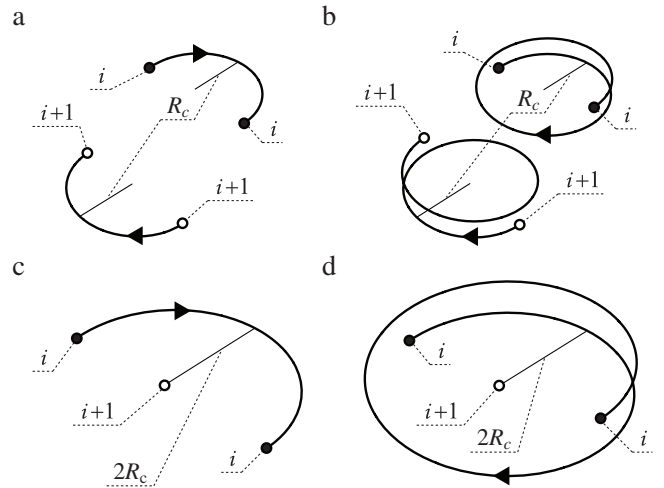


Fig. 2: Half of the individual particle cyclotron trajectories of the i -th and $(i+1)$ -th particles ((a), (b)) and the corresponding relative trajectories ((c), (d)) for interchanges of the i -th and $(i+1)$ -th 2D particles under a strong magnetic field, for $\nu=1$ (left) and for $\nu=\frac{1}{3}$ (right), respectively (3D for better visualization).

the single interchange σ_i (cf. fig. 1). The 1DURs of the full group confined to the cyclotron subgroup do not depend on i and yield the cyclotron subgroup 1DURs: $b_i^{(p)} \rightarrow e^{ip\alpha}$, $i=1, \dots, N-1$, where p is an odd integer and $\alpha \in (-\pi, \pi]$. These 1DURs, enumerated by the *pairs* (p, α) , describe composite anyons (CFs, for $\alpha = \pi$). Thus in order to distinguish various types of composite particles one has to consider (p, α) 1DURs of cyclotron braid subgroups.

The N -particle wave function acquires an appropriate phase shift due to particle interchanges, because in agreement with the general rules of quantization [10,15], the wave function must transform according to the 1DUR of an appropriate element of the braid group when the particles traverse, in classical terms, a closed loop in the configuration space corresponding to this particular braid element. In this manner, the Aharonov-Bohm phase of Jain’s fictitious fluxes is replaced by additional loops (each loop adds 2π to the total phase shift, if one considers 1DUR with $\alpha = \pi$ related to CFs, cf. fig. 1 (right-hand side)). Let us emphasize that the real particles do not traverse the braid trajectories, as quantum particles do not have any trajectories. But exchanges of coordinates of the N -particle wave function can be represented by braid group elements, in 2D — not permutation only [9,10,15]. Hence, for the braid cyclotron subgroup generated by $b_i^{(p)}$, $i=1, \dots, N-1$, we obtain the statistical phase shifts $p\pi$ for the CFs (*i.e.*, for $\alpha = \pi$), as required by the LCs, without the need to model them with flux tubes or vortices.

Each additional loop of a relative trajectory for the particle pair interchange (as defined by the generators $b_i^{(p)}$) reproduces an additional loop in the individual cyclotron trajectories for both interchanging particles — cf. fig. 2. The cyclotron trajectories are repeated in the relative trajectory (c, d) with twice the radius of

the individual particle trajectories (a, b). In quantum language, with regards to classical multi-loop cyclotron trajectories, one can conclude only on the number, $\frac{BS}{N} / \frac{hc}{e}$, of flux quanta per single particle in the system, which for the filling $\frac{1}{p}$ is p , *i.e.*, the same as the number of cyclotron loops. Thus, a simple rule could be formulated: an additional loop of a cyclotron braid corresponding to particle interchange, results in *two* additional flux quanta piercing the individual particle cyclotron trajectories. This rule follows immediately from the definition of the cyclotron trajectory, which must be a *closed* individual particle trajectory related to a *double* interchange of the particle pair. In this way, the cyclotron trajectories of both interchanging particles are closed, just like the closed relative trajectory for the *double* interchange. If the interchange is simple, *i.e.*, without any additional loops, the corresponding individual particle cyclotron trajectories are also simple, *i.e.*, single-looped. However, when the interchange of particles is multi-looped, as associated with the p -type cyclotron subgroup ($p > 1$), the double interchange relative trajectory has $2\frac{p-1}{2} + 1 = p$ closed loops, and the individual cyclotron trajectories are also multi-looped, with p loops [12].

It is important to emphasize the difference between the turns of a 3D winding (*e.g.*, of a wire) and multi-loop 2D cyclotron trajectories. In the latter case, 2D multi-loop trajectories cannot enhance the total magnetic field flux BS piercing the system, so all loops must share the same total flux. In the former case, each turn of a winding adds a new portion of the flux, just as a new turn adds a new surface, which is, however, not the case in 2D.

The additional loops in 2D take away the flux quanta simultaneously diminishing the field; this gives an explanation for Jain's auxiliary fluxes screening the external field B . CFs are actually not compositions of particles with flux tubes, though the original name can be still used. Moreover, one can use a similar name, "composite anyons", for particles associated with fractional 1DURs (*i.e.*, with fractional α) of the cyclotron subgroup instead of the full braid group.

The role of the short-range part of the Coulomb interaction. – The Coulomb interaction is crucial for LCs [2–4] but cannot be accounted for in a manner of standard dressing particles with interactions as is typical for quasiparticles in solids, because the interaction does not have a continuous spectrum with respect to particle separation expressed in relative angular-momentum terms [2,3]. The interaction can be operationally included within the Chern-Simons (Ch-S) field theory [16,17], an effective description of the local gauge field attached to particles, which, in the area of Hall systems, suits to particles with vortices, such as anyons and CFs [18]. It has been demonstrated [3,19] that the short-range part of the Coulomb interaction stabilizes CFs against the action of the Ch-S field (its anti-Hermitian term [19,20]), which mixes states with distinct angular momenta within

LL [19], in disagreement with the CF model in the Ch-S field approach [18,19]. The Coulomb interaction removes the degeneracy of these states and results in energy gaps which stabilize the CF picture, especially effectively for the lowest LL. For higher LLs, the CFs are not as useful due to possible mixing between the LLs induced by the interaction [21]. The short-range part of the Coulomb interaction also stabilizes the CFs in cyclotron braid terms [11], similarly to how it removes the instability caused by the Ch-S field for angular-momentum orbits in LL [19]. Indeed, if the short-range part of the Coulomb repulsion was reduced, the separation of particles would not be rigidly kept (adjusted to a density only in average) and then other cyclotron trajectories, in addition to those for a fixed particle separation (multi-loop at $\nu = \frac{1}{p}$), would be admitted, which would violate the subgroup construction.

Vortices —links with cyclotron braids. – For Read's CFs [6,7], LCs are modeled by collective vortices that are attached to the particles. A vortex with its center at z is defined as [6] $V(z) = \prod_{j=1}^N (z_j - z)^q$, where q is the vorticity. For odd q , it is linked to the Jastrow factor of the LF (resulting by the replacement of z by z_i and the addition of i ($i > j$) to the product domain, *i.e.*, binding to electrons). In particular, for $q=1$ one arrives at the Vandermonde determinant, associated with the ordinary single-loop cyclotron motion of N fermions on the plane at $\nu=1$. Because the vortices are fragments of the Laughlin function, they contain more information than just the statistical winding phase shift (the latter expressed by the factor, $\prod_{i,j} (z_i - z_j)^q / |z_i - z_j|^q$). 1DURs of the cyclotron braid subgroups define the statistical phase winding, but not the shape of the wave function, which is determined via the energy competition between various wave functions with the same statistical symmetry. Thus, vortices contain information beyond just the statistical phase shift, they also include the specific radial dependence of multi-fold zeros pinned to particles through the Jastrow polynomial. The vortex is a collective fluid-like concept that does not meet the single-particle picture. The vorticity q is selected in accordance with the *known in advance* Laughlin function, thus, similarly as CF flux tubes, it requires a motivation within the cyclotron structure.

The properties of vortices can be listed as follows [6]: 1) when traversing with an arbitrary particle z_j a closed loop around the vortex center, then the gain in phase is equal to $2\pi q$; 2) the vortex induces a depletion of the local charge density, which results in a locally positive charge (due to background jellium) that screens the charge of the electron associated to the vortex center; this positive charge is $-q\nu e$ (for $\nu=1/q$ it gives $-e$, which would completely screen the electron charge); 3) exchange of vortices results in a phase shift of $q^2\nu\pi$, (due to the charge deficit of the vortex), which for $\nu = \frac{1}{q}$ gives $q\pi$; the q -fold vortex, together with the bound electron (which contributes a charge e to the complex and produces a statistics phase shift of π), forms a complex that behaves

like a composite boson with zero effective charge for odd q and like a composite fermion for even q . The bosons can condense to exactly reproduce the LF for odd q [20], while, for even q , one deals with the Fermi sea in a zero net field, as in both cases the effective charge of the complexes is zero; the latter case reproduces the Hall metal state [22–24].

The second property explains why the model with vortices works. The reduced effective charge of the electron–vortex complex, results in an increase of the cyclotron radius, which is necessary for particle exchanges at fractional fillings.

All properties of vortices or flux tubes can be grasped together by a formal local gauge transformation [20] of the original fermion particles (defined by the field operator $\Psi(\mathbf{x})$) to composite particles: $\Phi(\mathbf{x}) = e^{-J(\mathbf{x})}\Psi(\mathbf{x})$, $\Theta(\mathbf{x}) = \Psi^+(\mathbf{x})e^{J(\mathbf{x})}$, where: $J(\mathbf{x}) = q \int d^2x' \rho(\mathbf{x}') \log(z - z') - \frac{|z|^2}{4l^2}$, and e^{-J} corresponds to a nonunitary, in general, transformation that describes the attachment of Read’s vortices (or Jain’s flux tubes) to the bare fermions, $\Psi(\mathbf{x})$ and $\Psi^+(\mathbf{x})$ (for the annihilation and creation fields, respectively). When restricting $J(\mathbf{x})$ to only its imaginary part (*i.e.*, to the imaginary part of \log), one arrives at the Hermitian Ch-S field corresponding to the dressing of fermions with local flux tubes [25]. The field operators $\Phi(\mathbf{x})$ and $\Theta(\mathbf{x})$, $\Phi^+(\mathbf{x}) = \Theta(\mathbf{x})e^{J(\mathbf{x})+J^+(\mathbf{x})}$, though are not mutually conjugated (they are perfectly conjugated for the Hermitian Ch-S field), describe composite bosons (for odd q) and composite fermions (for even q) within the mean-field approach [20] (remarkably, the real part of J vanishes in the mean field, as the real part of \log is canceled by the Gaussian, while the Hermitian Ch-S field is canceled by the external magnetic field). From the relation $e^{q \sum_j \log(z - z_j)} = \prod_j^N (z - z_j)^q$ (for the density operator $\rho(\mathbf{x}) = \Psi^+(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) \implies \sum_{j=1}^N \delta(z - z_j)$), which coincides with the definition of Read’s vortex, one can expect that the above local gauge transformation reproduces all properties of the vortices. This gauge transformation allows for the interpretation of the Laughing state as a Bose–Einstein condensate of composite bosons, at $\nu = \frac{1}{q}$, q odd, [6,20], and as a compressible fermion sea, at q even, [23,24] (the latter is unstable against BCS-like pairing) [7,26]. Assuming that the CFs are defined by the 1DURs of the cyclotron subgroup, the Hermitian term of this gauge transformation should be omitted, because it defines CFs when starting from ordinary fermions, which are already taken into account in terms of cyclotron braids.

Compressible Hall-metal state in cyclotron braid terms. – Let us finally comment on the $\nu = \frac{1}{2}$ state (Hall metal) from the point of view of the braid approach. Within Jain’s model, two flux tubes attached to composite fermions completely cancel an external magnetic field in the mean-field approximation (in other words, the Hermitian Ch-S field associated with Jain’s model cancels, in mean field, the external magnetic field), and this

results in a Fermi sea, called the Hall metal state [22]. Within Read’s approach to composite particles at $\nu = \frac{1}{2}$, the complete cancellation of charge takes place due to the charge density depletion of the vortex with $q=2$. Mutual interchange of 2-fold vortices produces $q^2\nu\pi = 2\pi$ phase shift and including additional π due to electrons, the complexes of 2-fold vortices with electrons behave like fermions (without charge) —thus form a Fermi sea (Hall metal). The instability of the Fermi system, results next in a paired state expressed by the Pfaffian factor, restoring incompressibility due to the pairing-gap (BCS-like paired state at $\nu = 5/2$ [26,27], also considered for $\nu = 1/2$ and $1/4$ [28,29]). As Pfaffian [7] contributes with $-\pi$ to the phase shift due to particle interchanges, the total phase shift of the wave function with the Jastrow polynomial $\prod_{i>j} (z_i - z_j)^2$ [7,26] is π . This phase is given by the 1DUR of the cyclotron braid group (with $p=3$, as such a cyclotron braid subgroup corresponds to the range $\nu \in [1/3, 1)$) assigned by $p\alpha = 3\frac{1}{3}\pi = \pi$, *i.e.*, $\alpha = \frac{1}{3}\pi$. The representation ($p=3$, $\alpha = \frac{1}{3}\pi$) induces the fermion statistics phase shift of the many-particle wave function for $\nu = 1/2$, and in terms of braid-composite fermions, it corresponds to a net composite electron Fermi sea (since two loops take away the total external flux), in consistence with the local gauge transformation with $q=2$, thus reproducing fermions (starting from ordinary fermions) [6,20].

In summary, we argue that, at fractional LL fillings, braid trajectories must be multi-looped, while those with lower number of loops (including single-looped) are excluded due to too short cyclotron radius. This unavoidable property of braids recovers LCs in a natural way for 2D charged systems upon strong magnetic field and explains the structure of CFs both with flux tubes or vortices. Unitary representations of cyclotron braids allow also for a self-consistent explanation of compressible states at fillings with even denominators. For example, the $\nu = 1/2$ metal Hall state corresponds to composite anyons with $p\alpha = 3\frac{1}{3}\pi = \pi$ number of 1DUR of the $p=3$ cyclotron braid subgroup.

REFERENCES

- [1] LAUGHLIN R. B., *Phys. Rev. Lett.*, **50** (1983) 1395.
- [2] HALDANE F. D. M., *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983) 605.
- [3] PRANGE R. E. and GIRVIN S. M., *The Quantum Hall Effect* (Springer Verlag, New York) 1990.
- [4] LAUGHLIN R. B., *Phys. Rev. B*, **27** (1983) 3383.
- [5] JAIN J. K., *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989) 199.
- [6] READ N., *Semicond. Sci. Technol.*, **9** (1994) 1859.
- [7] GREITER M., WEN X. G. and WILCZEK F., *Nucl. Phys. B*, **374** (1992) 567.
- [8] WILCZEK F., *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity* (World Scientific, Singapore) 1990.
- [9] WU Y. S., *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984) 2103.
- [10] SUDARSHAN E. C. G., IMBO T. D. and GOVINDARAJAN T. R., *Phys. Lett. B*, **213** (1988) 471.

-
- [11] JACAK J., JÓZWIAK I. and JACAK L., *Phys. Lett. A*, **374** (2009) 364.
- [12] JACAK J. *et al.*, *J. Phys.: Condens. Matter*, **22** (2010) 355602.
- [13] BIRMAN J. S., *Braids Links, and Mapping Class Groups*, *Ann. Math. Stud.*, **82** (Princeton University Press, Princeton) 1974.
- [14] JACAK L. *et al.*, *Quantum Hall Systems: Braid groups, composite fermions, and fractional charge* (Oxford University Press, Oxford) 2003.
- [15] IMBO T. D., IMBO C. S. and SUDARSHAN C. S., *Phys. Lett. B*, **234** (1990) 103.
- [16] FETTER A. L., HANNA C. B. and LAUGHLIN R. B., *Phys. Rev. B*, **39** (1989) 9679.
- [17] LOPEZ A. and FRADKIN E., *Phys. Rev. B*, **44** (1991) 5246.
- [18] HEINONEN O., *Composite Fermions* (World Scientific, Singapore) 1998.
- [19] MORINARI T., *Phys. Rev. B*, **62** (2000) 15903.
- [20] RAJARAMAN R. and SONDHI S. L., *Int. J. Mod. Phys. B*, **10** (1996) 793.
- [21] SBEOUELJI T. and MESKINI N., *Phys. Rev. B*, **64** (2001) 193305.
- [22] HALPERIN B. I., LEE P. A. and READ N., *Phys. Rev. B*, **47** (1993) 7312.
- [23] REZAYI E. and READ N., *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994) 900.
- [24] LEE D. H., *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 4745.
- [25] ZHANG S. C., HANSSON T. H. and KIVELSON S., *Phys. Rev. Lett.*, **62** (1989) 82.
- [26] MOORE G. and READ N., *Nucl. Phys. B*, **360** (1991) 362.
- [27] WILLETT R. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987) 1776.
- [28] LUHMAN D. R. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **101** (2008) 266804.
- [29] SHABANI J. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **103** (2009) 256802.

Cyclotron braid group structure for composite fermions

J Jacak¹, I Jóźwiak², L Jacak¹ and K Wieczorek¹

¹ Institute of Physics, Wrocław University of Technology, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland

² Institute of Applied Computer Science, Wrocław University of Technology, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland

E-mail: janusz.jacak@pwr.wroc.pl, ireneusz.jozwiak@pwr.wroc.pl, lucjan.jacak@pwr.wroc.pl and konrad.wieczorek@pwr.wroc.pl

Received 21 March 2010, in final form 8 July 2010

Published 13 August 2010

Online at stacks.iop.org/JPhysCM/22/355602

Abstract

Although they describe properties of 2D Hall systems in the fractional quantum regime well, composite fermions suffer from the unexplained character of the localized magnetic field flux-tubes attached to each particle in order to reproduce the Laughlin correlations via Aharonov–Bohm phase shifts. The identification of the cyclotron trajectories of 2D charged particles as accessible classical trajectories within the braid group approach at the magnetic field presence, allows, however, for the avoidance of the construction with fluxes. We introduce cyclotron braid subgroups for charged 2D systems at the fractional Landau-level filling associated in a more natural way with composite fermions without invoking field flux-tubes. The Aharonov–Bohm phase shifts caused by fluxes are replaced with the phase gain due to multi-loop cyclotron trajectories unavoidably occurring at the fractional filling of $1/p$ (p is an odd integer). Another approach to composite particles, using so-called vortices, is also discussed from the point of view of the cyclotron braid group description (for both odd and even p integers).

1. Introduction

Composite fermions (CFs) are commonly regarded as ordinary 2D fermions, with an associated even number of localized magnetic flux quanta in the form of flux-tubes fixed to each particle [1–3], which results in correlations involving binding of electrons and zeros of the wavefunction [1] (note that the idea of flux-tubes attached to particles was applied to 2D Hall systems earlier, in the context of a Chern–Simons field theory [4, 5]). As was formulated in Jain’s original paper [1], his CF construction takes advantage of accessing the fractional quantum Hall effect (FQHE) from the integer quantum Hall effect (IQHE) by adding an even number of flux quanta to each electron, and this analogy between FQHE and IQHE suggests a natural generalization of the Laughlin states. Correlations expressed by wavefunction zeros binding to electrons, beyond only the phase-winding, are related to the Laughlin radial wavefunction behaviour and were also understood in terms of vortices associated to particles [6–8].

The construction with the flux-tubes was introduced [1–3] in order to explain Laughlin correlations [9, 10] in 2D

electron systems at sufficiently strong external magnetic fields corresponding to the fractional filling of the lowest Landau-level (LL), as observed experimentally in the FQHE [11–13]. The Laughlin wavefunction [9, 10] describes the ground state of Coulomb interacting N charged 2D particles in the magnetic field for the fractional filling $\frac{1}{p}$ of the lowest LL. It is a generalization of the Slater determinant for the completely filled lowest LL obtained by the replacement of the Vandermonde determinant, $\prod_{i<j}(z_i - z_j)$, in this Slater function (for a magnetic field in a cylindrical gauge [14]) by the Jastrow polynomial, $\prod_{i<j}(z_i - z_j)^p$ (p is an odd integer). The Laughlin wavefunction is still antisymmetric but differs from the Slater function in the phase shift acquired due to interchange of a 2D particle pair. For the Vandermonde function it is π , while for the Jastrow function it is $p\pi$. Even though $e^{ip\pi} = e^{i\pi} = -1$, the difference in phases is important in the planar geometry (but in higher dimensions had no meaning) and was the reason for introducing CFs as fermions with attached local magnetic field flux-tubes. The necessary additional phase shift is acquired due to the Aharonov–Bohm

phase shift caused by these local flux-tubes [15], provided that each CF is a carrier of $p - 1$ flux quanta $\frac{hc}{e}$.

This construction is, however, phenomenological and does not explain the physical origin of local magnetic flux quanta attached to charged particles, which alter original fermions into CFs, or how to understand the localization of fluxes on particles. Nevertheless, CFs describe the FQHE hierarchy surprisingly well, especially within the lowest LL [2]. The system of weakly (residually) [2] interacting CFs seems to be equivalent to the strongly interacting electron system with Laughlin correlations imposed. The auxiliary fluxes of CFs, oriented oppositely to the external field, are assumed to be able to screen the external magnetic field, and in the effective weaker field, one can deal with an IQHE, which yields the main line of the FQHE hierarchy $\frac{p}{2p \pm 1}$ [1, 2]. The important observation in favour of this model is the so-called Hall metal state [16] at filling fraction $\frac{1}{2}$, when the total external magnetic field should be cancelled by the averaged internal field of CF fluxes. In other words, the oscillations in Hall conductivity can be associated with Shubnikov–de Haas oscillations in a reduced resultant magnetic field (for small departure from $\frac{1}{2}$, at least [2, 3]).

The phase shift of the multi-particle wavefunction acquired during a mutual interchange of a particle pair assigns the statistics of the particles. Because of $e^{i\pi} = e^{ip\pi}$, with p as an odd integer, it is impossible to distinguish the statistics of CFs from the statistics of fermions in this manner.

We propose the solution of this problem and show that CFs are rightful 2D particles distinct in statistics from ordinary fermions. To this end, we have developed a braid group representation method on cyclotron braid subgroups addressed, in a natural way, toward CFs. Simultaneously, the flux-tubes attached to CFs within Jain’s construction [1] are replaced with additional loops of trajectories consistent with the braid subgroup structure caused by the cyclotron motion of 2D charged particles under the presence of a strong magnetic field corresponding to $\frac{1}{p}$ filling of LL.

2. Statistics and braid groups

In the first part of this section we review briefly the braid group approach to quantum statistics of many particle systems.

The exceptional topology of 2D systems [17] is related to complicated homotopy groups [18] describing classical trajectories for many particle 2D systems. Classes of topologically non-equivalent closed loops in the configuration space of the system of N identical particles build up the π_1 homotopy group, called in this case the braid group (full and pure for indistinguishable and distinguishable particles, respectively) [18–21].

The configuration space of N identical particles located on a manifold M is defined as $Q_N(M) = (M^N \setminus \Delta)/S_N$ for indistinguishable identical particles, and as $F_N(M) = M^N \setminus \Delta$ for distinguishable identical particles; M^N is the N th Cartesian product of the manifold M , Δ is the set of diagonal points (when coordinates of two or more particles coincide), subtracted in order to preserve the conservation of particle number, S_N is the permutation group and the quotient

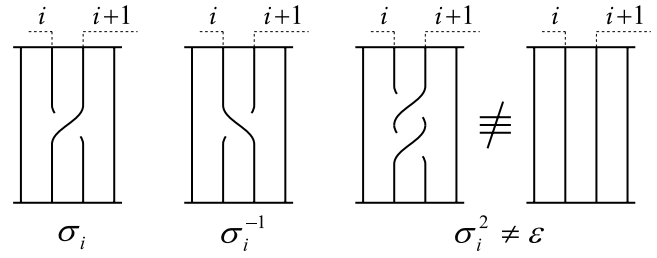


Figure 1. The geometrical presentation of the generator σ_i of the full braid group for R^2 and its inverse σ_i^{-1} (left); in 2D $\sigma_i^2 \neq e$ (right).

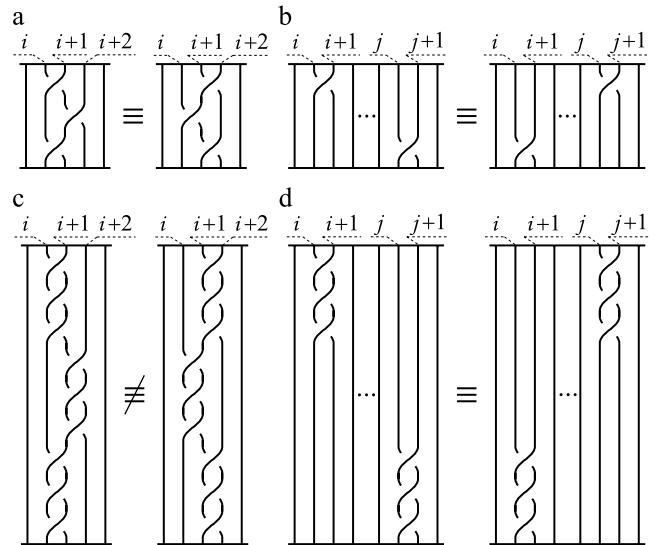


Figure 2. Formal conditions defining a full braid group for R^2 , cf equations (1a) and (1b) (a) and (b), respectively); violation of condition (1a) for the cyclotron subgroup generators $b_i^{(3)}$ (c) (condition (1b) is maintained for the cyclotron subgroup generators (d)).

structure is introduced to account for the indistinguishability of ‘quantum’ particles. For these configuration spaces two types of braid groups are defined [18]: $\pi_1(Q_N(M)) = \pi_1((M^N \setminus \Delta)/S_N)$, a *full braid group* and $\pi_1(F_N(M)) = \pi_1(M^N \setminus \Delta)$, a *pure braid group*.

A simple pictorial presentation of the braid groups for the plane $M = R^2$ is possible via geometrical braids [18] (cf figure 1). In figure 1 (left) a geometrical braid is depicted corresponding to the generator of the full braid group σ_i (interchange of the i th and $(i + 1)$ th strings representing particle trajectories). In 3D (and in higher dimensions) $\sigma_i^2 = e$ (the neutral element), while in 2D $\sigma_i^2 \neq e$ (cf figure 1 (right)), which makes 2D braids complicated.

The formal conditions imposed on generators of the full braid group for the plane are as follows [18, 20] (figure 2 (upper)):

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \text{for } 1 \leq i \leq N - 2, \quad (1a)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i. \quad \text{for } 1 \leq i, \quad j \leq N - 1, \quad |i - j| \geq 2. \quad (1b)$$

The pure braid group is a subgroup of the full group; for generators and defining relations for generators of the pure braid group, see e.g., [18].

Unitary representations, in particular one-dimensional (1DURs) of the full braid group, serve for the identification of various quantum particles corresponding to the same classical ones [15, 22]. Quantization of the system of N identical indistinguishable particles can be expressed by the Feynman integral over trajectories (the propagator is the probability for a transition from a point a to a point b in the configuration space): $I_{a \rightarrow b} = \int d\lambda e^{iS[\lambda_{a,b}]/\hbar}$, where $S[\lambda_{a,b}]$ is the classical action for the trajectory $\lambda_{a,b}$. To each $\lambda_{a,b}$ trajectory linking points a and b in the N -particle configuration space one can attach additional loops from a full braid group and in this manner make topologically non-equivalent trajectories. If trajectories fall into separated homotopy classes, distinguished by non-equivalent closed loops attached to $\lambda_{a,b}$, and represented by elements of the full braid group, then the additional unitary factor (the weight of the particular trajectory class) should be added [15, 22] to the path integral: $I_{a \rightarrow b} = \sum_{l \in \pi_1} e^{i\alpha_l} \int d\lambda_l e^{iS[\lambda_{l(a,b)}]}$, where π_1 stands for the full braid group, as to each loop-less $\lambda_{a,b}$ trajectory an arbitrary braid loop can be attached. The factors $e^{i\alpha_l}$ form a 1DUR of the full braid group and distinct representations correspond to distinct types of quantum particles. Note that in the path integral all possible trajectories contribute, regardless of the field or any other physical circumstances, unless they exclude some orbits, as in the case of strong magnetic field for charged 2D particles, which is described below.

For the permutation group S_N , being the full braid group for R^n , $n \geq 3$, there exist only two 1DURs: $\sigma_i \rightarrow e^{i\pi}$ or $\sigma_i \rightarrow e^{i0}$ (σ_i is the interchange of the i th and $(i + 1)$ th particles), corresponding to fermions and bosons, respectively. For R^2 the braid group is substantially richer than S_N and has an infinite number of 1DURs [19, 21, 22], defined for the group generators as: $\sigma_i \rightarrow e^{i\theta}$, $i = 1, \dots, N - 1$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, where each θ corresponds to a different type of 2D particles called anyons [10, 12, 15, 22, 23] (Abelian, as 1DUR elements commute). Note that the 1DURs of the full braid group do not depend on i (index of the generator σ_i) owing to the condition (1a) imposed on generators (since elements of 1DUR commute, from equation (1a) it follows that $e^{i\theta_i} = e^{i\theta_{i+1}}$, where $\sigma_i \rightarrow e^{i\theta_i}$, which gives i -independence of θ_i).

As 1DURs $e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ are periodic with the period 2π , this precludes the statistical distinguishing of CFs from fermions by the 1DURs of the full braid group, as CFs correspond to the phase shift $p\pi$, $p = 3, 5, 7, 9, \dots$. In order to overcome this ostensible obstacle we propose below to associate CFs with the 1DURs of appropriately constructed braid subgroups instead of the full braid group and in this way to distinguish CFs from fermions.

It should be emphasized that anyons can be regarded as 2D particles in the *absence* of a magnetic field only, as the trajectories for the braid group were taken without any modifications caused by cyclotron motion. The inclusion of a magnetic field substantially changes the trajectories—the resulting cyclotron motion confines a variety of accessible trajectories, especially in the case when the separation of

particles is greater than double the cyclotron radius, which precludes exchanges of particles along single-loop cyclotron trajectories. In this manner, in the case of the strong magnetic field in 2D, not all trajectories are possible and those that are impossible have to be excluded from the path integral domain. The presence of a magnetic field causes the trajectories to have to be built from pieces of cyclotron trajectories and in the particular case of $\frac{1}{p}$ fractional LL filling they fall into a braid subgroup formed by trajectories with additional loops and thus with enhanced radii, again allowing particle exchanges, as is demonstrated below. In the presence of the magnetic field, the summation in the Feynman propagator will thus be confined to the elements of this subgroup (its semigroup, for fixed magnetic field orientation) only, i.e., in accordance with cyclotron motion, to selected classes of trajectories instead of the whole full braid group.

It is easy to notice that the 1DURs of the braid subgroups generated by cyclotron motion in a strong magnetic field reproduce the statistics of CFs. In this manner one can implement CFs as separate quantum 2D particles in terms of braid representations. CFs will thus be ascribed to 1DURs of the cyclotron subgroups of the full braid groups, i.e., to the separate braid objects allowing for the distinguishing of CFs from ordinary fermions and from other 2D particles. Simultaneously the construction with field fluxes attached to CFs is avoided. Within the proposed cyclotron braid subgroup approach, the additional phase is gained by additional loops during particle interchanging, as an unavoidable property induced by the magnetic field in 2D charged systems at LL filling $\frac{1}{p}$.

3. Cyclotron braid subgroups for composite particles

We propose to associate composite anyons (including CFs) with the 1DURs of the full braid group *cyclotron subgroups*, as generated by the following generators [24]:

$$b_i^{(p)} = \sigma_i^p, \quad (p = 3, 5, 7, 9, \dots), \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (2)$$

where each p corresponds to a different type of cyclotron braid subgroup (and to a different sort of corresponding composite particles), and σ_i are generators of the full braid group. The group element $b_i^{(p)}$ represents the interchange of i th and $(i + 1)$ th particles with $\frac{p-1}{2}$ loops, which is clear by virtue of the definition of the single interchange σ_i (cf figure 3). The generators $b_i^{(p)}$ create the subgroup of the full braid group as they are expressed by the generators σ_i of the full braid group. The $b_i^{(p)}$ do not, however, satisfy the condition (1a), i.e., $b_i^{(p)} b_{i+1}^{(p)} b_i^{(p)} \neq b_{i+1}^{(p)} b_i^{(p)} b_{i+1}^{(p)}$, while the condition (1b) is maintained for $b_i^{(p)}$: $b_i^{(p)} b_j^{(p)} = b_j^{(p)} b_i^{(p)}$, for $1 \leq i, j \leq N - 1$, $|i - j| \geq 2$ (figure 2 (lower)). Since condition (1a) does not hold for the cyclotron subgroup, its 1DURs can depend on the index i , in general. The 1DURs of the full group confined to the cyclotron subgroup, do not depend, however, on i , which yields:

$$b_i^{(p)} \rightarrow e^{ip\alpha}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (3)$$

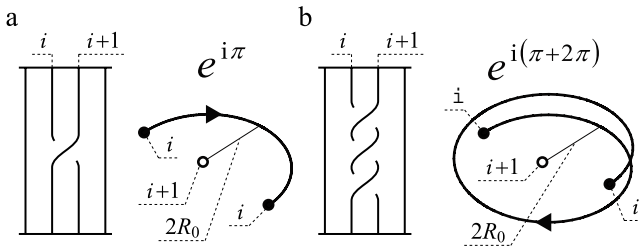


Figure 3. The generator σ_i of the full braid group and the corresponding relative trajectory of the i th and $(i + 1)$ th particle exchange (a); the generator of the cyclotron braid subgroup, $b_i^{(p)} = \sigma_i^p$ (in the figure, $p = 3$), corresponds to additional $\frac{p-1}{2}$ loops when the i th particle interchanges with the $(i + 1)$ th one (an additional loop results in the 2π phase shift; $2R_0$ is the inter-particle separation) (b).

where p is an odd integer and $\alpha \in (-\pi, \pi]$. These 1DURs, enumerated by the pairs (p, α) , describe composite anyons (in particular CFs, for $\alpha = \pi$). Thus in order to distinguish various types of composite particles it is sufficient to consider (p, α) 1DURs of cyclotron p -numbered braid subgroups. Note that at fixed magnetic field orientation the cyclotron trajectories form the semigroup of the cyclotron subgroup, though with the same 1DURs as those of the subgroup.

The N -particle wavefunction for CFs acquires in this construction an appropriate phase shift due to a peculiar type of particle interchanges in the braid picture, i.e., the Aharonov–Bohm phase of fictitious fluxes is replaced by additional loops (each loop adds 2π to the total phase shift, cf figure 3 (right)). Let us emphasize that the quantum particles do not traverse the braid trajectories, as quantum particles do not have any trajectories at all. Nevertheless, in agreement with the general rules of quantization [25, 26], the N -particle wavefunction must transform according to the 1DUR of an appropriate element of the braid group when the particles traverse, in classical terms, a closed loop in the configuration space of the N -particle system corresponding to this particular braid element. As braids describe the exchanges of particle positions in the classical sense (denoted by arguments of the multi-particle wavefunction), their 1DURs reflect the possible statistics of the system. Hence, for the braid subgroup of cyclotron trajectories generated by $b_i^{(p)}$, $i = 1, \dots, N - 1$, we obtain the statistics phase shifts $p\pi$ for CFs (i.e., for $\alpha = \pi$ in equation (3)), as required by the Laughlin correlations, without the need to model them by auxiliary flux-tubes.

3.1. Multi-loop cyclotron trajectory

Both composite fermion theories, with Jain’s fluxes [1–3] or Read’s vortices [7, 8, 27–29] attached to particles, are of effective and heuristic-type formulations *a posteriori* with respect to Laughlin function. The former uses fluxes to reproduce the required Laughlin phase, while in the latter model, parts of the Jastrow factor are defined as vortices (and thus ‘zeros are pinned’ to particles through the vortices form). In our braid group approach we look for some prior arguments which stand behind the winding Laughlin phase shift and recognize them in the cyclotron braid structure,

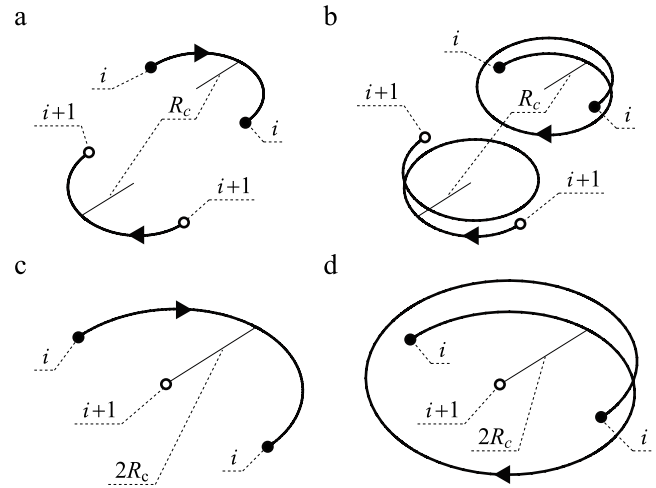


Figure 4. Half of the individual particle cyclotron trajectories of the i th and $(i + 1)$ th particles ((a), (b)) and the corresponding relative trajectories ((c), (d)) for interchanges of i th and $(i + 1)$ th 2D particles under a strong magnetic field, for $\nu = 1$ (left) and for $\nu = \frac{1}{3}$ (right), respectively (3D for better visualization), in both cases $\nu = 1, \frac{1}{3}$, the appropriate cyclotron radius R_c fits in the particle separation, $2R_c = 2R_0$, and R_0 is fixed by the Coulomb repulsion.

unavoidably caused by the strong magnetic field acting on the 2D charge interacting N -particle system. For sufficiently strong fields the cyclotron orbits are too short for exchanges. But exchanges are necessary in order to establish statistics, and particles must exchange somehow. The natural way is to realize these exchanges by multi-loop trajectories which in 2D have enhanced radius (due to sharing by all loops in 2D of the same external magnetic field flux, in contrast to 3D wire loops). These multi-loop trajectories can be next effectively modelled by Jain’s fluxes or Read’s vortices, though in both these cases, the fluxes and the vortices were not previously explained and were assumed heuristically in order to satisfy Laughlin correlation requirements. An advantage of the cyclotron braid approach consists thus in supplying a more basic motivation for Laughlin correlations linked next with effective constructions of composite particles.

In order to explain the multi-loop structure of cyclotron trajectories, let us first make a simple observation that each additional loop of a relative trajectory for particle pair interchange reproduces an additional loop in *individual cyclotron trajectories* for both interchanging particles—cf figure 4. In this figure the cyclotron motion of particles is depicted for the interchange of i th and $(i + 1)$ th particles separated by double cyclotron radius $2R_c$, without any additional loops (a) and with the additional loop (b), respectively. Such multi-loop trajectories correspond to the definition of the subgroup generators $b_i^{(p)}$. The cyclotron trajectories with the cyclotron radius are repeated in the relative trajectory ((c), (d)) with a double radius in comparison to the individual particle cyclotron trajectories ((a), (b)).

With regard to the classical multi-loop cyclotron trajectories, one can conclude in quantum terms only on the number, $\frac{BS}{N} / \frac{hc}{e}$, of flux quanta per single particle in the system. For the LL filling $\frac{1}{p}$ is p , this number of flux quanta per particle

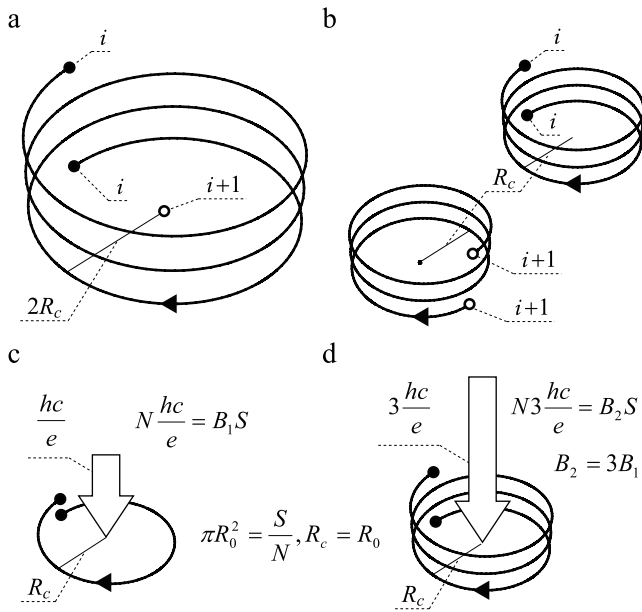


Figure 5. The *double* (thus closed) relative trajectory for the interchange of the i th particle with the $(i + 1)$ th one, with one additional loop (i.e., $p = 3$) (a); the corresponding individual particle cyclotron trajectory of the i th particle (the same for the $(i + 1)$ th one) (b); individual particle cyclotron trajectories corresponding to double relative trajectories for interchanges of i th and $(i + 1)$ th 2D particles under a strong magnetic field, for $\nu = 1$ (c) and for $\nu = \frac{1}{3}$ (d), respectively; the number of B field flux quanta per particle is indicated in both cases of $\nu = 1, \frac{1}{3}$ (arrows in (c) and (d)); the resulting cyclotron radius R_c fits in the inter-particle separation, $2R_0 = 2R_c$, in both cases (3D for better visualization).

apparently coincides with the number of cyclotron loops of each particle. Therefore, one can formulate the following simple rule. Each additional loop of a braid corresponding to particle interchange, introduced in accordance with generators of the cyclotron braid subgroup, results in *two* additional flux quanta piercing the individual particle cyclotron trajectories.

The above statement immediately follows from the definition of the cyclotron trajectory. The cyclotron trajectory is defined as the individual particle trajectory corresponding to a *double* interchange of the particle pair (cf figure 5). In this manner, the cyclotron trajectories of both interchanging particles are closed, similarly to the closed relative trajectory for the *double* interchange. If the interchange of particles is simple, i.e., without any additional loops, the corresponding individual particle cyclotron trajectories are also simple, single-loop (circles on a 2D plane). Nevertheless, when the interchange of particles is multi-loop, as associated with the p -type cyclotron subgroup ($p > 1$), then the double interchange relative trajectory has $2\frac{p-1}{2} + 1 = p$ closed loops and the corresponding individual cyclotron trajectories must be also multi-loop, with p loops. This is illustrated in figure 5.

It is important to emphasize here the difference between the turns of 3D windings (e.g., of a wire) and the multi-loop 2D cyclotron trajectories. In the latter case, 2D multi-loop trajectories cannot enhance the total magnetic field flux BS piercing the system (thus, the number of flux quanta per particle must coincide with the number of loops of a closed

cyclotron individual particle trajectory). In the former case (3D windings), each turn of windings adds a new portion of the flux as a new turn adds a new surface in fact, which is, however, not true in the case of 2D. In the latter case of 2D multi-loop trajectories, all loops share the same total flux of the external field.

Note also that some ideas of cyclotronic-type rigid movement were developed in [30]. It should be emphasized, however, that cyclotron braids are not the case of quasiclassical rings analysed by Kivelson *et al* [30] (and in other works cited therein). In that paper authors consider the contribution to exchange energy due to coherent cyclic movement by simultaneous rotation of a closed cooperative ring with a large number of particles in order to find energy cusps at fractional lowest LL fillings with some links to Wigner crystal ordering. The quasiclassical rings considered there were addressed to real long-range correlations of true quantum dynamics though expressed in a limiting quasiclassical picture, while braids are pure classical many particle configuration space trajectories being elements of the general topological approach to statistics not dynamics. Although the objects of both attitudes are not the same, the cyclotron motion is a property of some generality and probably linked with transition to Wigner crystal state competitive to FQHE, as analysed using the semiclassical ring picture [30, 31] and also discussed in CF terms [2].

Let us emphasize that the cyclotron trajectories considered in the present paper do not have any realistic motion meaning, they are formal auxiliary objects of the braid group method. They are not real trajectories of quantum particles. The electrons considered as quantum particles do not have any trajectories and do not traverse any classical trajectories, including cyclotron ones. Classical trajectories lie, however, in the centre of the braid group approach. Braids are classical closed trajectories from the many particle configuration space. Thus, one cannot expect that the cyclotron braids could be somehow calculated using e.g., path integrals. Only 1DURs (one-dimensional unitary representations) of braid groups link up with path integrals, supplying appropriate weights for topologically non-equivalent classical trajectory classes. These classes are exactly numbered by elements of the braid groups. Additionally, one can formulate a link of 1DURs of the braid group with the wavefunction: as the pure braid group elements define exchanges of classical particles, thus they describe also exchanges of coordinates of multi-electron wavefunction. Therefore, a 1DUR element gives the phase shift of this function caused by an exchange of wavefunction coordinates according to the prescription given by this particular braid associated with its 1DUR. Cyclotron braids are not quantum particle trajectories and therefore they are not a particular type of motion (as the quasiclassical cyclotron motion analysed in [30] using path integral expansions). Braid groups are a topological tool and do not display a real dynamic. Their relation with path integration is only via unitary braid group representations and serves not for determination of the dynamic picture but to distinguish statistical phases. As these phases are central for FQHE and were previously modelled heuristically only, a possibility for determining them in a more consistent manner in topology terms seems to be advantageous.

3.2. Relation of cyclotron braid subgroups with CFs

It should be emphasized that the multi-loop shape of the relative trajectory for interchanges, as defined by the subgroup generators (2) (and the corresponding multi-loop form of individual particle cyclotron trajectories) is an unavoidable property of the charged N -particle 2D system in the case when inter-particle separation (resulting from the density $\frac{N}{S}$ and fixed by the Coulomb repulsion) is greater than the double value of the single-loop cyclotron radius. In this case, in particular at the $\frac{1}{p}$ LL filling fraction, any exchanges along simple single-loop cyclotron trajectories are impossible, because the corresponding cyclotron radii are too short. In order to restore the possibility of particle interchanges, which are necessary for establishing statistics (or equivalently for the braid generator definition, where 1DURs define the statistics), these too short cyclotron radii must be enhanced. The way to enhance the effective cyclotron radius of the 2D particle, which would again fit into the inter-particle separation (and then allow interchanges), is through the multi-loop character of the cyclotron motion and the simultaneously resulting multi-loop braids for particle interchanges (represented by generators of the cyclotron braid subgroups, equation (2)), as was presented in section 3.1. Bearing in mind the discussion presented there, one can conclude that the additional 2D cyclotron loops take away some part of the total external field flux and thus reduce the effective field, which leads to the desired growth of the resulting cyclotron radius. This property of the multi-loop cyclotron orbits can be modelled by Jain's fluxes reducing external field and thus enhancing cyclotron radius. In this way, the multi-loop cyclotron braids explain a true nature of flux components of composite particles.

The total flux of the external field through the surface S is BS . For p -type CFs, if one considers the relative trajectory of the *double* interchange of i th and $(i+1)$ th particles (thus closed and with $2\frac{p-1}{2} + 1 = p$ loops), one gets the individual particle closed cyclotron trajectories with the same number p of loops (cf figure 5), embracing the flux $p\frac{hc}{e}$ (each loop takes away a single flux quantum in accordance with the above formulated rule). Thus, for the p -type of CFs we deal with closed p -loop cyclotron trajectories of particles, i.e., p flux quanta per particle, $BS = Np\frac{hc}{e}$. On the other hand the degeneracy of the LL is equal to $N_0 = \frac{SBe}{hc}$, (neglecting spin) and for fractional filling ν , $N_0 = \frac{N}{\nu}$. The equation $\frac{BS}{N} = \frac{hc}{e}\frac{1}{\nu}$ gives $\frac{1}{\nu}$ flux quanta per particle, which fits with the previous estimation for $\nu = \frac{1}{p}$.

In the case of p -loop trajectory each loop has its size adjusted to the external magnetic field flux diminished by $p-1$ quanta per particle taken away by the remaining loops, exactly as in the case of Jain's model. Indeed, if $BS = \frac{hc}{e}pN$, then $\frac{hc}{e} = \frac{B}{p}\frac{S}{N}$ and $\frac{S}{N}$ corresponds to a p times lowered field. Following an analogy with Jain's model, one could argue that for $\nu = \frac{1}{2}$ and $p = 3$, two loops per particle take away the total B field flux and the third loop has to be of infinite radius (Hall metal [16]) for the zero rest-field.

The additional loops take away the flux quanta simultaneously diminishing the field; this gives an explanation for the Jain fluxes screening the field B . Thus, the presented cyclotron subgroup implementation of CFs can be addressed

to Jain's theory with all the advantages of the related conclusions [2], in particular of the integer quantum Hall effect in the rest-field, leading to the hierarchy of the incompressible FQHE states [1, 2].

One can summarize why 2D charged particles must be composite particles for fields corresponding to fractional filling of LL. For $\nu = 1$ one has $R_c = R_0$ (where R_c is the cyclotron radius, $\pi R_c^2 B = \frac{hc}{e}$ and $2R_0$ is the separation of particles, adjusted to the density and fixed by the short-range part of the Coulomb repulsion, $\pi R_0^2 = \frac{S}{N}$). For $\nu < 1$ the radius of cyclotron trajectory without additional loops is $R_c < R_0$, so R_c is *too short* for particle interchange along these trajectories. Additional loops can, however, enhance R_c and again allow interchanges, since for p -loop cyclotron trajectories $\frac{hc}{e} = \pi R_c^2 \frac{B}{p}$, and R_c grows in comparison to single-loop trajectories; for $\nu = \frac{1}{p}$, again $R_c = R_0$, though the external field is p times bigger than for $\nu = 1$ (at constant N). The auxiliary flux-tubes of Jain's CFs actually played a similar role, leading to an increase of the cyclotron radius in the reduced resultant field. Thus, one can conclude that for $\nu = 1$ the cyclotron trajectories are single-loop and the braids are generated by $b_i^{(p=1)} = \sigma_i$, while for $\nu = \frac{1}{p}$, $p > 1$, the cyclotron trajectories must be multi-loop, simultaneously resulting in braids generated by $b_i^{(p)} = \sigma_i^p$.

The additional loops associated with the appropriate subgroup generators lead to the phase shifts for particle interchanges, just as for Jain's CFs and they permit corresponding Laughlin-type function requirements to be satisfied. These loops replace the screening flux-tubes. Note that multi-loop trajectories (similarly to single-loop ones) only have meaning in classical braid terms. Quantum particles do not traverse any trajectories, including any multi-loop cyclotron trajectories. The corresponding wavefunctions transform, however, in agreement with the 1DURs of the braid group [25, 26] (of the cyclotron subgroup, in the presence of a magnetic field), resulting in appropriate statistics behaviour.

Let us emphasize that although CFs actually are not compositions of particles and flux-tubes, we have not modified the original name of 'composite fermions'. Moreover, we use the similar name 'composite anyons' for particles associated with fractional 1DURs (i.e., with fractional $p\alpha$ in equation (3)) of the cyclotron subgroup instead of the full braid group. The phase shift can be calculated as the Berry phase along a closed trajectory in the configuration space for model multi-particle wavefunctions corresponding to low-energy excitations beyond the ground state at the fractional filling of LL. These excitations—quasiparticles/quasiholes—were traditionally associated with anyons in the case of a fractional Berry phase. It is clear, however, that it is impossible to distinguish between fractional θ (of the 1DUR of the full braid group) and $p\alpha$ (of the 1DUR of the cyclotron subgroup): both these phase shifts can happen to be the same fraction. Nevertheless, as the considered quasiparticles/quasiholes are excitations at the magnetic field presence, these states should rather be associated with cyclotron braid 1DURs, and therefore they are composite anyons and not ordinary anyons, as previously regarded.

This change, of anyons for composite anyons, would result in a possible convenience for recently developed topological quantum information processing applications [23, 32, 33]. According to an idea of Kitaev [32], an arbitrary unitary evolution of a multi-qubit system (e.g., of a double qubit gate) [23, 33] can be approximated by the multi-dimensional unitary irreducible representation (MDUR) (of an appropriate rank) of a braid group, provided there is a sufficient density of MDURs in the unitary matrix space [23]. These MDURs can be linked with degenerated low-energy excitations (quasiparticles/quasiholes) above the ground state for some fractional LL fillings. Since elements of MDUR do not commute, as matrices, these degenerate states are referred to non-Abelian anyons [23]. Unfortunately, the non-Abelian anyons recently investigated, in particular for the low excited states for 5/2 and 12/5 LL filling factors, probably correspond to insufficiently dense MDURs (for non-Abelian anyons in the $\frac{5}{2}$ case, the MDURs are not dense enough to approximate the needed qubit gates [23], and another considered state of $\frac{12}{5}$ is still disputable [34, 35]). Thus, the search for other opportunities for fractional statistics systems with more dense MDURs associated with non-Abelian anyons is of high significance. As subgroups have usually richer representations than a group, one could expect that the cyclotron braid subgroups would be convenient for topological quantum information processing applications, since the relevant MDURs of cyclotron subgroups would be denser in comparison to the representations of a full braid group.

3.3. A role of the short-range part of the Coulomb interaction

The crucial character of the short-range part of the Coulomb interaction for Laughlin correlations is visible from the fact that the Laughlin function is an accurate ground state wavefunction for $\frac{1}{p}$ LL filling, if one confines the Coulomb interaction represented by the so-called Haldane's pseudopotential [13, 36, 37], $V = \sum_{i>j} \sum_m^\infty V_m P_m^{ij}$ (P_m^{ij} is the projector on the states of i th and j th particles with relative angular momentum m), to the components V_m , with $m = 1, \dots, p - 2$ only. These V_m terms, i.e., the Coulomb interaction energy of a particle pair with relative angular momentum m , contribute to the short-range part of the interaction of electrons, and the remaining terms, i.e., the long-range interaction tail, corresponding to greater particle separation, i.e., with $m = p, \dots$, do not strongly influence the Laughlin function [13, 36, 38]. The Laughlin correlations are associated with the incompressible states, which correspond to the discrete spectrum of the Coulomb interaction projected on LL states, i.e., the interaction expressed in terms of Haldane's pseudopotential even named by Laughlin as 'a quantization of particle separation' [10, 13]. The quantization of the Coulomb interaction after projection on the relative angular momentum of particle pairs in the LL subspace of the Hilbert space results in incompressible FQHE states numbered by integers (eigen-values of relative angular momentum of particle pairs), the same as those which occur in the Laughlin functions (the exponent in the Jastrow polynomial). It is

important to note that according to an approach to FQHE using Haldane's pseudopotential (confined to the short-range part of the Coulomb repulsion), the Laughlin correlations revealed in the multi-particle wavefunction are an unambiguous possibility for accurate ground state at fractional LL filling, not only a variational result of the ground state modelling [13, 36]. This supports the idea that Laughlin correlation (expressed by an appropriate phase shift) is a fundamental topology-originated property of interacting charged 2D particles. One can thus expect that this Landau quantization behaviour of an interacting 2D charged system must also manifest itself within the braid group quantization approach to the same system, e.g., via an introduced cyclotron subgroup structure.

Since the Laughlin correlations can be expressed within the CF approach, the Coulomb repulsion (the short-range part of Haldane's pseudopotential) is also of a fundamental significance for the CF construction. It should, however, be emphasized that the Coulomb interaction with the discrete spectrum, i.e., with the separation by energy gaps of distinct relative angular momenta of particle pairs for sufficiently high magnetic field (noticeable via the projection of the interaction on a fractional filled LL, as in the definition of Haldane's pseudopotential), does not play the role of the standard dressing of particles with interaction, as typical for quasiparticles in solids, just because the interaction does not have a continuous spectrum in this projection.

An effective description of a local gauge field attached to particles is supplied by the Chern–Simons (ChS) field theory (chiral field, i.e., breaking time reversal and parity). This approach revived [39, 40] in the area of FQHE, successfully describes particles with vortices, in particular for anyons and Jain's CFs [2]. It still, however, does not explain the physical origin of the flux-tubes assumed in composite particle constructions.

It was demonstrated [13, 38] that the short-range part of the Coulomb interaction stabilizes CFs against the action of the ChS field (its antiHermitian term [28, 38]), which mixes states with distinct angular momenta within LL [38], in disagreement with Jain's CF model in the ChS field approach [2, 38]. The Coulomb interaction removes the degeneracy of these states and results in energy gaps which stabilize the CF picture, especially effectively within the lowest LL. For higher LLs, the CFs are not so useful due to possible mixing between the LLs induced by the interaction [41]. The Coulomb interaction would lead to mixing of Landau-levels if exceeds the gap between levels, and then would diminish the effectiveness of the composite fermion picture [2, 3]. Nevertheless, many analyses evidence that composite fermions can be used to describe FQH states in the second Landau-level [42, 43] including paired CF states [44, 45]. Landau-level mixing provides corrections to the two-body interaction, and recently its stabilizing role for the Moore–Read state [46, 47] was quantitatively determined.

The short-range part of the Coulomb interaction also stabilizes CFs in our description, similarly to how it removes the instability caused by the ChS field for angular momentum orbits in LL [38]. Indeed, if the short-range part of the Coulomb repulsion was reduced, the separation of particles

would not be rigidly kept (adjusted to a density only on average) and then other cyclotron trajectories, additional to those for fixed particle separation (multi-loop at $\nu = \frac{1}{p}$), would be admitted, which would violate the subgroup construction.

Thus, the short-range part of the Coulomb interaction turns out to be crucial for CF formation under any description. The confinement of the full braid group to the subgroup with the multi-loop structure of cyclotron motion is justified only for particle separation adjusted to the double cyclotron radius. It is a role of the short-range part of the Coulomb repulsion that does not allow closer inter-particle separation than that which follows from the density. In this manner the short-range part of the Coulomb interaction is involved in the construction of the cyclotron braid structure. The long-range tail of the Coulomb interaction is left as a residual interaction of particles, which agrees with Jain's model of weakly interacting CFs [1, 2].

4. Composite particles as complexes with vortices

4.1. Definition of vortices—links with cyclotron braids

In this subsection a short review of other authors' results is given in part. The Laughlin correlations involved binding of electrons and zeros of the wavefunction were the starting point also for another construction of composite fermions [7, 8, 27], in which Laughlin correlations were modelled by so-called vortices associated to particles. This was done in some analogy to superfluid vortices in the Ginzburg–Landau approach to the superfluid continuous phase [6, 48]. An elementary vortex for a 2D Hall system, with a centre in z , is defined as the product [7]:

$$V(z) = \prod_{j=1}^N (z_j - z). \quad (4)$$

If one substitutes z with z_i in the above formula and includes the index i ($i > j$) to the product domain, one arrives at the Vandermonde determinant associated to ordinary cyclotron motion of N noninteracting fermions on the plane at magnetic field corresponding to $\nu = 1$ [14] (i.e., to single-looped cyclotron orbits in the classical braid picture). Thus, one can state, that the vortex given by equation (4) is connected to the simple cyclotron classical motion of N free charged 2D particles, quantumly described by the Slater determinant with the Vandermonde factor (the vortices are factors in this function and binding of them to electrons consists in the substitution of z with z_i and in the inclusions of index i to the product domain in equation (4)).

Next, one may introduce a natural generalization,

$$V'(z) = \prod_{j=1}^N (z_j - z)^q, \quad (5)$$

regarded as a q -fold vortex (q is called as the vorticity). Such a vortex is related with q -looped cyclotron trajectories, since for odd q , equation (5) links to the Jastrow factor of the Laughlin function (resulting by replacement of z by z_i and addition of i ($i > j$) to the domain of the product in equation (5), which means the association of q -fold vortices to fermions).

This indicates that behind the vortex construction are the same braid properties as described by the cyclotron braid subgroups. Because vortices are fragments of the Laughlin function, therefore they contain more information than only the statistics winding phase shift (the latter expressed by the factor $\prod_{i,j} (z_i - z_j)^q / |z_i - z_j|^q$). The Laughlin function minimizes the Coulomb energy and defines an accurate ground state for the Haldane pseudopotential, i.e., for the short-range part of the Coulomb interaction [36], and the vortices inherit these properties. 1DURs of cyclotron braid subgroups define the statistical phase-winding, but not the shape of the wavefunction. The function shape is determined via energy competition between various multi-particle wavefunctions with the same statistics fixed by 1DUR. Vortices contain thus information beyond only the statistics phase shift, they include also the specific radial dependence of multi-fold zeros pinned to particles through the Jastrow polynomial (which expresses a result of Coulomb repulsion).

The vortex is a collective construction because all particles are involved in its definition, equation (4) or (5). Thus, the dressing of a bare electron with the vortex associated to it does not meet the single-particle picture and is aided with some collective heuristic-type fluid-like idea (with the vorticity q selected in accordance with the known in advance Laughlin function). As the vorticity choice is not supported by any other arguments, the vortex model of composite fermions is heuristic similarly to the flux-tube model. The relative advantage of the vortex model for composite particles (fermions or bosons) is, however, connected with information on the Coulomb energy minimizing state (comprised by radial dependence of zeros pinned to particles).

A phenomenological modification of vortices, like a shift of the centre of the vortex from the position of an associated electron, may result in effective attraction of vortex-composite fermions, leading to their pairing at e.g., $\nu = 5/2$ [8, 43]. This corresponds, in fact, to a modification of the Laughlin function and leads to a new wavefunction, in this case, N -particle BCS-like function in the form of Pfaffian, as was described in [8, 43, 44]. Note that the wavefunction with the Pfaffian factor is still of the same statistical symmetry as that for the particular sort of braid-composite fermions (defined by 1DUR of the corresponding cyclotron subgroup).

Summarizing this short review, the vortex-composite particles create a convenient effective phenomenological picture of composite particles, with several remarkable properties. These properties can be listed as follows:

- the vorticity is fixed by q in formula (5), i.e., when traversing with an arbitrary particle z_j a closed loop around the vortex centre, then the gain in phase is equal to $2\pi q$,
- the vortex induces a depletion of the local charge density, linked to the Coulomb repulsion separating particles at small distances; it can be noticed that a locally positive charge (due to background jellium) screens next the charge of the electron associated to the vortex centre in the case of a composite particle; for the vorticity q the positive charge of the vortex is $-qve$ (for $\nu = 1/q$ it gives $-e$, which completely screens the electron charge: the complex of

the vortex with the electron behaves like a neutral particle in this case),

- if one exchanges two vortices the resulting phase shift is $q^2\nu\pi$ (due to the charge deficit of the vortex [7]), which for $\nu = \frac{1}{q}$ gives $q\pi$; the q -fold vortex together with the bound electron (which contributes with the charge e to the complex, and produces π statistical phase shift), the complex of the electron with the vortex behaves like a composite boson with zero effective charge for odd q and like a composite fermion for even q ; these bosons can condense reproducing exactly the Laughlin function for odd q [28], while for even q one deals with the Fermi sea in a zero net field, as in both cases the effective charge of complexes is zero—the latter case reproduces the Hall metal state [16, 49, 50].

The last but one of the above properties makes clear why the model with vortices works. The reduced effective charge of the electron–vortex complex results in the cyclotron radius growth, which is necessary for particle exchanges at the field magnitude corresponding to fractional filling. The vorticity adjusted to the form of the earlier known Laughlin function defines a level of this charge screening.

4.2. Local gauge transformation corresponding to Jain's fluxes and Read's vortices

All properties of vortices or of flux-tubes can be expressed by a formal local gauge transformation [28, 29] of the original fermion particles (defined by the field operator $\Psi(\mathbf{x})$) to composite bosons or composite fermions (the results of other authors are briefly reviewed in this subsection):

$$\Phi(\mathbf{x}) = e^{-J(\mathbf{x})}\Psi(\mathbf{x}), \quad \Theta(\mathbf{x}) = \Psi^+(\mathbf{x})e^{J(\mathbf{x})}, \quad (6)$$

where $J(\mathbf{x}) = q \int d^2x' \rho(\mathbf{x}') \log(z - z') - \frac{|z|^2}{4l^2}$, and e^{-J} corresponds to a nonunitary transformation that describes the attachment of Read's vortices (or Jain's flux-tubes) to the bare fermions with $\Psi(\mathbf{x})$ and $\Psi^+(\mathbf{x})$ (for annihilation and creation fields, respectively). When restricting $J(\mathbf{x})$ to only its imaginary part (i.e., to the imaginary part of \log), one arrives at the Hermitian ChS field corresponding to the dressing of fermions with magnetic field local flux-tubes [48]. The field operators $\Phi(\mathbf{x})$ and $\Theta(\mathbf{x})$, $\Phi^+(\mathbf{x}) = \Theta(\mathbf{x})e^{J(\mathbf{x})+J^+(\mathbf{x})}$, though are not mutually conjugated (they are perfectly conjugated for the Hermitian ChS field), well describe composite bosons (for odd q) and composite fermions (for even q) within the mean field approach [28] (remarkably, the real part of J vanishes in mean field, as the real part of \log is cancelled by the Gaussian, while the Hermitian ChS field is cancelled by the external magnetic field). From the relation $e^{q \sum_j \log(z - z_j)} = \prod_j^N (z - z_j)^q$ (for the density operator $\rho(\mathbf{x}) = \Psi^+(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) \implies \sum_{j=1}^N \delta(z - z_j)$), which coincides with the definition of Read's vortex, one can expect that equation (6) reproduces all properties of vortices. Let us, however, emphasize that this does not give an explanation of the vortices' origin which would be rather associated with the cyclotron braids.

Transformation (6) (and the associated vortex picture) allows for the interpretation of the Laughlin state as a Bose–Einstein condensate of composite bosons, at $\nu = \frac{1}{q}$, q -odd [7, 28, 48], and as a compressible fermion sea, at q -even [27, 49, 50] (the latter one is unstable against BCS-like pairing) [8, 43, 51].

The specific character of the concept of vortices is clearly visible, in particular, for $\nu = 1$. Vortices of the form (4), attached to electrons in the system, result in the Vandermonde factor (being the Jastrow factor with $q = 1$). In this case, the corresponding Laughlin state is thus given by the Slater function of N *noninteracting* fermions, which, however, can also be effectively described by the Bose–Einstein condensate of bosons [52] defined by the transformation (6) with $q = 1$ (all the action of the magnetic field on ordinary fermions is replaced with this Bose condensation). The Coulomb interaction does not contribute in this particular case, since at $\nu = 1$ the Haldane pseudopotential [13, 36] (i.e., the short-range part of the Coulomb interaction, being essential in the selection of the Laughlin state form) is zero (as $q - 2 < 0$, for $q = 1$), and thus the Slater function of *noninteracting* particles is suitable as the eigen-state of the interacting system at $\nu = 1$.

5. Conclusions

We have argued that in the presence of a strong magnetic field corresponding to $\frac{1}{p}$ (p odd) LL filling, the full braid group for the 2D charged interacting N -particle system is reduced to its subgroup, which we refer to as the cyclotron braid subgroup of type p . The p -numbered cyclotron subgroups are defined by the generators $b_i^{(p)} = \sigma_i^p$ (σ_i are the generators of the full braid group), and reflect the cyclotron trajectories of Coulomb interacting charged 2D particles at a sufficiently strong magnetic field corresponding to $\frac{1}{p}$ LL filling. We have suggested that the 1DURs of these subgroups describe CFs (and, more generally, composite anyons) with the statistical properties required by the Laughlin-type correlations. The association of CFs with separate braid subgroups distinguishes CFs from fermions, despite the 2π periodicity of 1DURs. The identification of the cyclotron braid subgroups seems to resolve the problem of local magnetic field fluxes (flux-tubes) attached to CFs. The presented CF braid group implementation does not invoke any flux-tubes (we retained, however, the traditional name of 'composite fermions', though they turn out not to be compositions with fluxes). The Aharonov–Bohm phase shifts caused by CF magnetic fluxes are replaced by the N -particle wavefunction phase shift due to additional $\frac{p-1}{2}$ loops at interchanges of particles unavoidably occurring in the classical cyclotron braid picture. These loops allow interchanges of particles when the single-loop cyclotron diameter is shorter than the particle separation, and to restore particle interchanges in the braid picture, each particle must traverse, in the classical braid meaning, a closed p -loop cyclotron trajectory, or, in the quantum language, each particle must take away p quanta of the B magnetic field flux; $p - 1$ of them play the equivalent role to $p - 1$ flux quanta attached to each CF in Jain's model, thereby reducing the external field. This suggests that CFs are not complexes with flux-tubes nor ordinary quasiparticles,

i.e., fermions dressed with the interaction (as e.g., Landau quasiparticles), but are separated in the statistics of 2D particles topologically arranged by cyclotron braids. Thus, CFs should not be mixed with ordinary fermions, or with other sorts of CFs (with different p), though all of them correspond to antisymmetric wavefunctions. The whole segment $(-\pi, \pi]$ gives an opportunity to define composite anyons as particles distinct from ordinary anyons, linking them with the 1DURs of appropriate cyclotron braid subgroups instead of the full braid group (π corresponds to CFs, 0 to composite bosons).

Composite particles with vortices were also analysed in terms of the cyclotron braid subgroups. In the vortex-type approach to composite particles, the statistics phase of 2D particles (corresponding to the cyclotron group 1DUR) defines the symmetry (vorticity number) of vortices. Their shape, taken in the form of a partial factors of the Jastrow polynomial, is, however, beyond the phase only (corresponding to multi-fold zeros of the Jastrow term) and includes information on the Coulomb energy minimization (which, as in the case of the Laughlin function, is expressed by its radial dependence). The vortex induced depletion of the charge distribution allows in this picture for the screening of an electron charge resulting in the effective enhancement of the cyclotron radius for the effective particles dressed with the nonlocal vortices. This nonlocal vortex structure aids in the adjustment of an appropriate statistics phase and takes advantage of Coulomb energy minimization. This is not accessible through the statistics phase only, though the phase symmetry of the corresponding model wavefunction (even with the pairing Pfaffian term) satisfies the cyclotron braid group representation requirements. Thus, behind the phase symmetry of the composite fermions in terms of vortices is again the cyclotron braid structure of the underlying 2D system, and the phase can be modelled by vortices if one started with the ordinary fermions, similarly to in the case of the flux-tube construction.

References

- [1] Jain J K 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 199
- [2] Heinonen O 1998 *Composite Fermions* (Singapore: World Scientific)
- [3] Jain J K 2007 *Composite Fermions* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [4] Girvin S M, MacDonald A H and Platzman P M 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 581
- [5] Girvin S M and MacDonald A H 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1252
- [6] Read N 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 86
- [7] Read N 1994 *Semicond. Sci. Technol.* **9** 1859
- [8] Greiter M, Wen X G and Wilczek F 1992 *Nucl. Phys. B* **374** 567
- [9] Laughlin R B 1983 *Phys. Rev. B* **27** 3383
- [10] Laughlin R B 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1395
- [11] Tsui D C, Störmer H L and Gossard A C 1982 *Phys. Rev. Lett.* **48** 1559
- [12] Das Sarma S and Pinczuk A 1997 *Perspectives in Quantum Hall Effects: Novel Quantum Liquids in Low-Dimensional Semiconductor Structures* (New York: Wiley)
- [13] Prange R E and Girvin S M 1990 *The Quantum Hall Effect* (New York: Springer)
- [14] Landau L D and Lifshitz E M 1972 *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Moscow: Nauka)
- [15] Wilczek F 1990 *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity* (Singapore: World Scientific)
- [16] Halperin B I, Lee P A and Read N 1993 *Phys. Rev. B* **47** 7312
- [17] Leinaas J M and Myrheim J 1977 *Nuovo Cimento B* **37** 1
- [18] Birman J S 1974 *Braids, Links, and Mapping Class Groups (Annals of Math. Stud. vol 82)* (Princeton: Princeton University Press)
- [19] Jacak L, Sitko P, Wiczorek K and Wojs A 2003 *Quantum Hall Systems: Braid Groups, Composite Fermions, and Fractional Charge* (Oxford: Oxford University Press)
- [20] Artin E 1947 *Ann. Math.* **48** 101
- [21] Imbo T D, Imbo C S and Sudarshan C S 1990 *Phys. Lett. B* **234** 103
- [22] Wu Y S 1984 *Phys. Rev. Lett.* **52** 2103
- [23] Nayak C, Simon S H, Stern A, Freedman M and Das Sarma S 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1083
- [24] Jacak J, Jóźwiak I and Jacak L 2009 *Phys. Lett. A* **374** 364
- [25] Imbo T D and Sudarshan E C G 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 481
- [26] Sudarshan E C G, Imbo T D and Govindarajan T R 1988 *Phys. Lett. B* **213** 471
- [27] Pasquier V and Haldane F D M 1998 *Nucl. Phys. B* **516** 719
- [28] Rajaraman R and Sondhi S L 1996 *Int. J. Mod. Phys. B* **10** 793
- [29] Shankar R and Murphy R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4437
- [30] Kivelson S, Kallin C, Arovas D P and Schrieffer J R 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 873
- [31] Lee D, Baskaran G and Kivelson S 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 2467
- [32] Kitaev A Yu 2003 *Ann. Phys.* **303** 2
- [33] Nielsen M A and Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [34] Xia J S, Pan W, Vicente C L, Adams E D, Sullivan N S, Störmer H L, Tsui D C, Pfeiffer L N, Baldwin K W and West K W 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 176809
- [35] Rezayi E H and Read N 2009 *Phys. Rev. B* **79** 075306
- [36] Haldane F D M 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 605
- [37] Simon S H, Rezayi E H and Cooper N R 2007 *Phys. Rev. B* **75** 195306
- [38] Morinari T 2000 *Phys. Rev. B* **62** 15903
- [39] Fetter A L, Hanna C B and Laughlin R B 1989 *Phys. Rev. B* **39** 9679
- [40] Lopez A and Fradkin E 1991 *Phys. Rev. B* **44** 5246
- [41] Sbeouelji T and Meskini N 2001 *Phys. Rev. B* **64** 193305
- [42] Read N and Rezayi E 1999 *Phys. Rev. B* **59** 8084
- [43] Moore G and Read N 1991 *Nucl. Phys. B* **360** 362
- [44] Read N and Green D 2000 *Phys. Rev. B* **61** 10267
- [45] Möller G and Simon S H 2008 *Phys. Rev. B* **77** 075319
- [46] Bishara W and Nayak C 2009 *Phys. Rev. B* **80** 121302
- [47] Rezayi E H and Simon S H 2009 *Breaking of particle-hole symmetry by Landau level mixing in the $\nu = 5/2$ quantized Hall state* arXiv:0912.0109
- [48] Zhang S C, Hansen T H and Kivelson S 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 82
- [49] Rezayi E and Read N 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 900
- [50] Lee D-H 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 4745
- [51] Abrikosov A A, Gorkov L P and Dzialoshinskii I E 1975 *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (New York: Dover)
- [52] Read N 1998 *Phys. Rev. B* **58** 16262



Contents lists available at ScienceDirect

Physics Letters A

www.elsevier.com/locate/pla



New implementation of composite fermions in terms of subgroups of a braid group

J. Jacak^a, I. Jóźwiak^b, L. Jacak^{a,*}

^a Institute of Physics, Wrocław University of Technology, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland

^b Institute of Applied Computer Science, Wrocław University of Technology, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland

ARTICLE INFO

Article history:

Received 4 April 2009

Received in revised form 28 September 2009

Accepted 29 October 2009

Available online 3 November 2009

Communicated by A.R. Bishop

PACS:

05.30.Pr

73.43.-f

Keywords:

Braid groups

Composite fermions

Anyons

ABSTRACT

The new implementation of composite fermions and more generally – of composite anyons is formulated, exploiting one-dimensional unitary representations of appropriately constructed subgroups of the full braid group. The nature of hypothetical fluxes attached to the Jain's composite fermions is explained via additional cyclotron trajectory loops consistently with the braid subgroup structure. It is demonstrated that composite fermions are proper 2D particles (not an auxiliary construction), but associated with braid subgroups instead of the full braid group.

© 2009 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Exotic topological properties of 2D quantum systems have been widely investigated since the discovery of the fractional quantum Hall effect (FQHE) [1]. A hierarchy of Landau level (LL) fractional fillings was experimentally observed [1–3] and explained by new topological concepts closely related with planar geometry [4–6]. The exceptional topology of 2D systems is connected with nontrivial homotopy groups [7,8] describing planar trajectories for many-particle systems. Classes of topologically nonequivalent closed loops in the configuration space of the system of N identical particles build up π_1 homotopy group, called in this case a braid group (full and pure for indistinguishable and distinguishable particles, respectively) [7–10]. Braid groups for 2D case are infinite, while for higher dimensions are finite and equal (full braid groups) to the permutation group S_N (for 1D case this formalism is irrelevant). Unitary representations, in particular one-dimensional (1DURs) of the full braid group serve for identification of quantum particles corresponding to the same classical ones [5,6]. For S_N there exist only two 1DUR: $\sigma_i \rightarrow e^{i\pi}$ or $\sigma_i \rightarrow e^{i0}$ (σ_i – the interchange of the i th and $(i+1)$ th particles) corresponding to fermions and bosons, respectively. In 2D there is however an abundance of

1DURs of the full braid groups: $e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, associated with anyons (Abelian). Anyons satisfy a fractional statistics – the interchange of two anyons results in a θ phase shift of the wave function [5,6]. The phase factor of the 1DUR (and the statistics) is determined modulo 2π .

2. Braid groups: Definitions

The configuration space of N identical particles located on a manifold M is defined as: $Q_N(M) = (M^N \setminus \Delta)/S_N$, for indistinguishable identical particles, and as: $F_N(M) = M^N \setminus \Delta$, for distinguishable identical particles; M^N is the N th Cartesian product of the manifold M , Δ is the set of diagonal points (when coordinates of two or more particles coincide), subtracted in order to preserve conservation of the particle number, S_N is the permutation group – the quotient structure is introduced in order to account for indistinguishability of quantum particles. For these configuration spaces two types of braid groups are defined [7,10]: $\pi_1(Q_N(M)) = \pi_1((M^N \setminus \Delta)/S_N)$, a *full braid group* and $\pi_1(F_N(M)) = \pi_1(M^N \setminus \Delta)$, a *pure braid group*.

A simple presentation of the braid groups for the plane is possible via geometrical braids [7] (cf. Fig. 1). In this figure (left) a geometrical braid is depicted corresponding to the generator of the full braid group σ_i (interchange of the i th and $(i+1)$ th strings representing particle trajectories). In 3D (and in higher dimensions)

* Corresponding author.

E-mail address: lucjan.jacak@pwr.wroc.pl (L. Jacak).

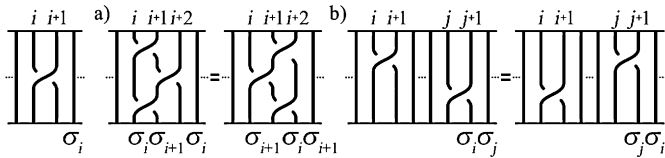


Fig. 1. The geometrical presentation of the full braid group for R^2 : (from the left) the generator of the full braid group, the formal definition of the full braid group (a) and (b).

$\sigma_i^2 = e$ (the neutral element), while in 2D $\sigma_i^2 \neq e$, which makes 2D braids complicated. The formal conditions imposed on generators of the full braid group for the plane are illustrated by geometrical braids in Fig. 1(a), (b) and can be written as follows [7]:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{for } 1 \leq i \leq N - 2, \\ \text{(b)} \quad & \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{for } 1 \leq i, j \leq N - 1, |i - j| \geq 2. \end{aligned} \quad (1)$$

For generators of the pure braid group (being a subgroup of the full group) and defining relations for generators, see, e.g., [7,10].

3. Composite fermions

Significant progress in understanding of FQHE was achieved in the formulation by Laughlin [4] of the wave function corresponding to fractional filling of LL and being a generalization of the Slater determinant for completely filled zeroth LL. Substitution in this Slater function (at magnetic field in cylindrical gauge) of the Vandermonde determinant, $\prod_{i < j} (z_i - z_j)$, by the Jastrow polynomial, $\prod_{i < j} (z_i - z_j)^p$ (p odd integer), results in the Laughlin wave function for filling $\frac{1}{p}$ [4], which is still antisymmetric but additionally differs from the Slater function in the phase shift acquired due to interchange of a 2D-particle pair. For the Vandermonde function it is π , while for the Jastrow function $p\pi$. Even though $e^{ip\pi} = e^{i\pi} = -1$, the phase shift $p\pi$ is distinct from π , which is important in planar geometry (in higher dimension the phase shift has no meaning).

The remarkable idea of Jain [11] associated this difference in phases with the notion of composite fermions (CFs), as complexes of the charged fermions and of $p - 1$ magnetic flux quanta, $\frac{hc}{e}$, attached to each particle. The additional Laughlin phase shift, $(p - 1)\pi$, above the fermionic π , is given by Aharonov–Bohm phase of local fluxes [5]. The fluxes of CFs, oriented oppositely to the external field are assumed to be able to screen the external magnetic field, and in the effective weaker differential field, one can deal with an integer quantum Hall effect (IQHE) – which yields the fractional hierarchy $\frac{p}{2p \pm 1}$ [11,12]. In other words, the oscillations in Hall conductivity can be associated with Szubnikov–de Haas oscillations in an effective differential magnetic field. The most pronounced observation behind this model is the so-called Hall metal state [13] at filling fraction $\frac{1}{2}$, when the total external magnetic field should be canceled by the averaged internal field of CF fluxes. There arises, however, the question of what is the physical source of these magnetic flux quanta attached to charged particles which alter original fermions into CFs.

Description of a local chiral (i.e. breaking time reversion and parity) gauge field attached to particles is supplied by the Chern–Simons (ChS) field theory, and this approach revived [14] in the area of FQHE successfully describing particles with fluxes for anyons and CFs [12]. It still however does not explain, what are the spontaneously arising fluxes dressing CFs. This dressing takes place only in the presence of a strong magnetic field, thus occurs as a response to the external field in a system of interacting charged 2D particles. A short-range part of the Coulomb interaction stabilizes CFs against action of ChS field, which mixes states with distinct

angular momenta within LL [15]. Interaction removes the degeneracy of these states and results in energy gaps stabilizing CF picture, especially effectively for the lowest LL. For higher LLs CFs are not so useful due to mixing of LLs [16]. Numerical studies, e.g., for finite systems on so-called Haldane sphere [17], allow for identification of particular fractional states and of low energy excitations – quasiparticles [typically, anyons] [3], also beyond the lowest LL. Worth mentioning is a filling factor $\frac{5}{2}$ for which the Pfaffian wave function was suggested [18] of the form $\sim \text{Pf}(\frac{1}{z_i - z_j}) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^q$, with q an even integer (this state focused much attention as low-energy excitations of it, quasiparticles and quasiholes, would manifest a noncommutative statistics of so-called non-Abelian anyons linked with quasiparticle degenerated states, expected for decoherence free quantum information manipulations [19,20]).

The obstacle on the way for better understanding of the CFs is that the phase factor with $p\pi$ connected to CFs is indistinguishable from that with π for ordinary fermions (since $e^{ip\pi} = e^{i\pi}$, if p is odd integer). In the present Letter we try to overcome this problem via construction of special subgroups of the full braid groups, adjusted to cyclotron motion in a strong magnetic field. We show that the 1DURs of these subgroups reproduce the statistical properties of CFs. In this manner we implement CFs as rightful quantum 2D particles in terms of braid representations. CFs are thus numbered by 1DURs, $e^{ip\pi} = -1$ (and the phase shift $p\pi$, p odd integer), of the specially selected p -numbered subgroups of the full braid groups, the separate braid objects allowing for distinguishing of CFs from ordinary fermions and from other 2D particles. Simultaneously the problem of fluxes attached to CFs is removed. Within the proposed braid subgroup approach the additional phase is acquired by additional loops during particle interchanging, a generic subgroup property induced by the strong magnetic field in 2D charged systems. This braid subgroup implementation of CFs supports an idea [11,12] of CFs as rightful 2D particles, though in another manner explains the corresponding Laughlin function phase shift. On the other hand, the braid implementation of CFs supplies a well defined mathematical object, the subgroups of the full braid group, convenient for further analysis of CF properties.

Distinguishing of CFs from fermions is important in particular for numerical diagonalization of interaction of CFs (not all antisymmetric functions can be admitted, but only those which have the same phase shift due to particle interchanges, unless the mixing of various sorts of CFs took place [this is prohibited, similarly to the mixing of fermions and bosons in 3D]).

The whole segment $(-\pi, \pi]$ gives an opportunity to define composite anyons as particles which are distinct from ordinary anyons. One can define the composite anyons as quantum 2D particles corresponding to 1DURs, $e^{i p \alpha}$ (with the phase shift $p\alpha$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$), of appropriate p -numbered subgroups of the full braid group. The physics behind the choice of the particular subgroup of the full braid group is the magnetic field acting on planar system of interacting charged particles; it induces the type of generators of the subgroup, as is demonstrated below.

4. Unitary representations of braid groups

Quantization of the system of N identical indistinguishable particles can be expressed by the Feynman integral over trajectories (propagator): $I_{a \rightarrow b} = \int d\lambda e^{iS[\lambda_{a,b}]}$, where $S[\lambda_{a,b}]$ is the classical action for the trajectory $\lambda_{a,b}$. If trajectories fall into separated topologically nonequivalent classes, represented by elements of the full braid group, then the additional unitary factor (the weight of the separated trajectory class) should be added [5,6]: $I_{a \rightarrow b} = \sum_{l \in \pi_1} e^{i\alpha_l} \int d\lambda_l e^{iS[\lambda_{l(a,b)l}]}$. These factors $e^{i\alpha_l}$ form a 1DUR of the full braid group and distinct representations correspond

to distinct types of quantum particles. For 2D space (the plane), the braid group has an infinite number of 1DURs [9,10], written for the group generators: $\sigma_i \rightarrow e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, where each θ corresponds to a different type of anyons [2,4–6,19]. Note that the 1DURs of the full braid group do not depend on i owing to the condition (a) of Eq. (1) imposed on generators (since 1DUR commute, from (a) of Eq. (1) it follows that $e^{i\theta_i} = e^{i\theta_{i+1}}$, where $\sigma_i \rightarrow e^{i\theta_i}$).

In order to implement CFs in a similar manner via subgroups of the full braid group, the summation in the Feynman propagator is confined to the subgroup elements only, i.e., to selected, suitably to cyclotron motion, classes of trajectories instead of the full braid group.

5. Cyclotron subgroups of braid group for composite particles

We propose to associate composite anyons (including CFs) with 1DURs of the *cyclotron subgroups* of the full braid group, generated by the new generators:

$$b_i^{(p)} = \sigma_i^p \quad (p = 3, 5, 7, 9, \dots), \quad (2)$$

where each p corresponds to a different sort of cyclotron subgroup and thus of composite anyons. The group element $b_i^{(p)}$ represents the interchange of i th and $(i+1)$ th particles with $\frac{p-1}{2}$ loops, which is clear due to the definition of the single interchange by σ_i (cf. Fig. 2(a), (b)). The generators $b_i^{(p)}$ create the subgroup of the full braid group as they are expressed by generators σ_i of the full braid group. The $b_i^{(p)}$ do not, however, satisfy the condition (a) of Eq. (1) (cf. Fig. 2(c)), while the condition (b) is maintained for $b_i^{(p)}$: $b_i^{(p)} b_j^{(p)} = b_j^{(p)} b_i^{(p)}$, for $1 \leq i, j \leq N-1$, $|i-j| \geq 2$. Disappearance of the condition (a) results in possible dependence of the subgroup 1DUR on the index i , in general. The 1DURs of the full group confined to the subgroup, do not depend however on i , and yield:

$$b_i^{(p)} \rightarrow e^{ip\alpha}, \quad (3)$$

p an odd integer, $\alpha \in (-\pi, \pi]$. These 1DURs describe composite anyons (CFs for $\alpha = \pi$). For $\alpha = \pi$, $e^{ip\alpha} = e^{i\pi p} = -1$ and 1DUR of the cyclotron subgroup coincides with 1DUR of the full braid group. The difference consists, however, in the braid objects to which the 1DURs are addressed. The difference between the full group and its cyclotron subgroup results in distinct domains in the summation in the corresponding path integrals, which distinguishes CFs from ordinary fermions. The coincidence $e^{ip\alpha} = e^{i\alpha} = -1$, for $\alpha = \pi$, indicates that both wave functions for CFs and fermions are antisymmetric. The CF phase shift $p\pi$ (due to particle exchange expressed by $b_i^{(p)}$ braid) is distinct than π of ordinary fermions, which is important in 2D exactly as in the case of Lughlin correlation requirements expressed by the Jastrow-type generalization of the Vandermonde factor. The explicit difference of 1DURs of the full braid group and the cyclotron subgroup is noticeable for α being fraction of π , when $e^{ip\alpha} \neq e^{i\alpha}$.

In the above construction of CFs the wave function acquires an appropriate phase shift due to a peculiar type of particle interchanges, i.e., we replace the Aharonov–Bohm phase of fictitious fluxes with additional loops (each adds 2π to the total phase shift – cf. Fig. 2). Each additional loop in a relative trajectory for particle pair interchange (such a trajectory is needed for definition of the subgroup generator $b_i^{(p)}$) reproduces an additional loop in individual trajectories for both particles – cf. Fig. 3. In this figure the cyclotron motion of a particle pair is depicted for the interchange of A and B particles separated by the double cyclotron radius $2R_c$ [without additional loops (a), (b) and with the additional loop (c), (d), respectively; the cyclotron trajectories are repeated in the relative trajectory with a

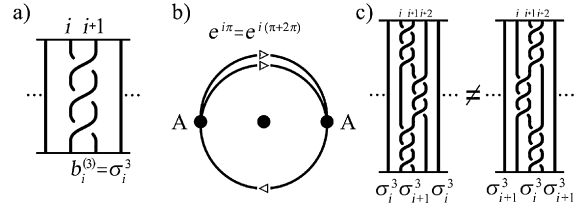


Fig. 2. The generator $b_i^{(3)} = \sigma_i^3$ for the subgroup of the full braid group, relevant for CFs (with $p = 3$) (a); the generator $b_i^{(p)} = \sigma_i^p$ corresponds to additional $\frac{p-1}{2}$ loops when the i th (A) particle interchanges with the $(i+1)$ th (B) one (in the figure $p = 3$) (b); violation of the condition (a) of Eq. (1) for the subgroup generators $b_i^{(3)}$ (c).

double radius in comparison to the single particle trajectories]. The additional loop in the relative trajectory for particle interchange results in additional *two* flux quanta piercing the individual particle cyclotron trajectories. It is clear, if one define the individual cyclotron trajectory as *closed* trajectory of each particle corresponding to *closed* and therefore *double* relative trajectory of mutual interchange of two particles (single interchange has an open trajectory). When the interchange is without any additional loops, then cyclotron individual particle trajectory is also simple, just 2D circle, but when the interchange involves a loop, the corresponding closed cyclotron trajectory gains *two* additional loops (for $\frac{p-1}{2}$ additional loops at interchange we arrive with $2 \cdot \frac{p-1}{2} + 1 = p$ loops in closed individual particle cyclotron trajectories).

Let us emphasize that real quantum particles do not traverse any single-loop or multi-loop trajectories, as they have no trajectories at all. The classical braid picture with multi-loop cyclotron braids allow, however, for concluding on the number of external magnetic field flux quanta taken away by each particle in the system, as it is the same as a number of loops in individual particle cyclotron classical trajectory. Note also that these loops cannot be treated as, e.g., windings of a wire, since in 2D each new loop does not add the surface (and flux) in opposite to 3D wire windings.

The total flux of the external field through the surface S is BS . For p type of CFs, if to consider the relative trajectory of *double* interchange of A and B particles (thus closed and with $2 \cdot \frac{p-1}{2} + 1 = p$ loops), we get the underlying closed cyclotron trajectories of particles with the same number p of loops (cf. Fig. 3), embracing the total flux $p \frac{hc}{e}$ (assuming that each loop takes a single flux quantum). Thus for p type of CFs we deal with closed p -loop cyclotron trajectories of particles, i.e. p flux quanta per particle, $BS = Np \frac{hc}{e}$. On the other hand, the degeneracy of the LL equals to $N_0 = \frac{SBe}{hc}$ (neglecting spin), and for fractional filling ν , $N_0 = \frac{N}{\nu} \cdot \frac{BS}{N} = \frac{hc}{e} \frac{1}{\nu}$ gives $\frac{1}{\nu}$ flux quanta per particle, which fits with the previous estimation only for $\nu = \frac{1}{p}$.

In the case of p -loop trajectory each loop has dimension adjusted to the field flux diminished by $p-1$ quanta per particle taken away by remaining loops, exactly as in the case of the Jain's model. Indeed, if $BS = \frac{hc}{e} pN$ then $\frac{hc}{e} = \frac{B}{p} \frac{S}{N}$ and $\frac{S}{N}$ corresponds to p times lowered field. Following an analogy with Jain's model, one could argue that for $\nu = \frac{1}{2}$ and $p = 3$, two loops per particle take the total B field flux and the third loop has to be of infinite radius (Hall metal) for zero rest-field.

The additional loops take away flux quanta simultaneously diminishing the field; this gives the explanation of the fictitious Jain fluxes screening the field. Thus the presented subgroup implementation of CF can be addressed to Jain's theory with all advantages of the related conclusions [11], in particular of the IQHE in the rest-field.

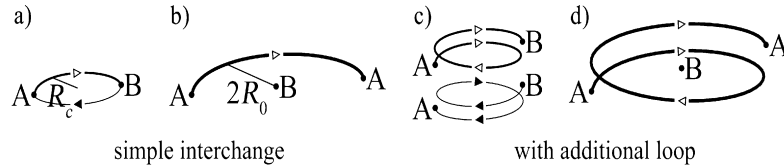


Fig. 3. Cyclotron (a), (c) and corresponding relative (b), (d) trajectories for interchanges of A and B 2D-particles at strong magnetic field, (a), (b) for $\nu = 1$, (c), (d) for $\nu = \frac{1}{3}$, respectively (3D for better visualization), in both cases $\nu = 1, \frac{1}{3}$ the appropriate cyclotron radius R_c fits with the particle separation $2R_c = 2R_0$, fixed by the Coulomb repulsion.

One can also argue why 2D charged particles must be composite particles for fields corresponding to fractional filling of LL. For $\nu = 1$ one has $R_c = R_0$ (where R_c is the cyclotron radius, $\pi R_c^2 B = \frac{hc}{e}$ and $2R_0$ is the separation of particles, adjusted to the density and fixed by the short-range part of the Coulomb repulsion, $\pi R_0^2 = \frac{S}{N}$). For $\nu < 1$ the radius of the cyclotron trajectory without additional loops implies $R_c < R_0$, and then R_c is *too short* for particle interchange along these trajectories. Additional loops can however enhance R_c and again allow interchanges, since for p -loop cyclotron trajectories $\frac{hc}{e} = \pi R_c^2 \frac{B}{p}$, and R_c grows in comparison to single-loop trajectories; for $\nu = \frac{1}{p}$, again $R_c = R_0$, though the external field is p times bigger than for $\nu = 1$ (at constant N). The fictitious fluxes of Jain's CFs played actually the similar role leading to an increase of cyclotron radius in the differential field.

The multi-loop character of particle interchange is thus an unavoidable property of charged 2D system at magnetic field strong enough that single-loop particle interchanges are impossible because of too short simple cyclotron radius in comparison to particle separation. Restoring exchanges (needed for statistics determination) unavoidably causes thus multi-loop cyclotron braids and composite particles.

Let us emphasize that though CFs actually are not compositions of particles and fluxes, we have not modified the original name 'composite fermions'. The Jain's fluxes do not exist and can be treated rather as a useful model for presented above cyclotron braid subgroup basic concept for Laughlin correlations. Moreover, we use the similar name 'composite anyons' for particles associated with fractional 1DURs of the cyclotron subgroup instead of the full braid group. The phase shift can be calculated as the Berry's phase along closed trajectory in configuration space for model multi-particle wave function, e.g., corresponding to low energy excitations above the ground state at fractional filling of LL. These excitations – quasiparticles/quasiholes were traditionally associated with anyons in the case of a fractional Berry's phase. It is, however, clear that it is impossible to distinguish between fractional θ (of 1DUR of the full braid group) and $p\alpha$ (of 1DUR of the cyclotron subgroup) – both these phase shifts can be the same fraction. As considered quasiparticles/quasiholes are excitations at the magnetic field presence, thus these states should be rather associated with cyclotron braids 1DURs, and therefore they are composite anyons and not ordinary anyons, as previously regarded.

Note that the short-range part of the Coulomb interaction stabilizes CFs in our description, similarly as it removes instability caused by ChS field for angular momentum orbits in LL [14]. Indeed, if to reduce the short-range part of the Coulomb repulsion, the separation of particles would not be rigidly kept (only in average adjusted to a density) and then other cyclotron trajectories above those for fixed particle separation would be admitted, which violates the subgroup construction for a particular LL filling.

The additional loops associated with the appropriate subgroup generators, preserve the phase shifts for particle interchanges just as for Jain's CFs and permit corresponding Laughlin-type function requirements to be satisfied. These loops substitute for the fictitious screening fluxes.

Association of CFs with the subgroups of full braid groups opens the possibility of considering also multidimensional unitary representations (MDURs) of these subgroups (representations of subgroups are richer than of a group) for similar purposes as still hypothetical non-Abelian anyons [19]. In order to approximate an arbitrary unitary evolution of a multi-qubit gate by braid group MDUR, a sufficient density of MDUR is required [19,20] (for non-Abelian anyons in the $\frac{5}{2}$ case the density of MDURs is probably not enough [19], and another state $\frac{12}{5}$, now under consideration, is still disputable [21]). Note also that recent experiments [22] with the filling $\frac{5}{2}$ indicate anyon excitations with formal charge $\frac{e}{4}$, which supports an idea that the Moore–Read-type state [18] for $\frac{5}{2}$ corresponds to $q = 4$, with the phase-shift 3π for particle interchanges (as the Pfaffian term contributes to the phase-shift with $-\pi$).

6. Conclusions

Even though anyons have been successfully described by braid groups, the application of braid groups to CFs was not previously formulated (because of the 2π period of 1DUR). In the present Letter we implement CFs (and composite anyons) in terms of braids via 1DURs confined to specially chosen, in accordance with cyclotron motion, *braid subgroups* generated by the new generators $b_i^{(p)} = \sigma_i^p$ (p enumerates a sort of composite anyons). Association of CFs with a distinct braid object than the full braid group supports an idea that CFs are separate 2D quantum particles which cannot be mixed with ordinary fermions, or with other sorts of CFs (though all correspond to antisymmetric functions). Determination of the special braid group object, the subgroup of the full braid group, linked with the CFs, resolves also the problem of fictitious magnetic flux quanta attached to these particles within Jain's picture. The Aharonov–Bohm phase shifts caused by hypothetical fluxes are replaced with the phase shifts due to additional $\frac{p-1}{2}$ loops during interchanges of particles. These loops are a generic property of interchanges of uniformly distributed (due to the Coulomb interaction) 2D particles in a strong external magnetic field when the ordinary cyclotron radius is too short in comparison to particle separation (in this case each CF must traverse a closed p -loop cyclotron trajectory in order to enhance the effective cyclotron radius, or in a quantum language, it takes away p quanta of the B field flux; $p - 1$ of them play an equivalent role as $p - 1$ flux quanta attached to each CF in Jain's model). The 1DURs of the subgroup generated by $b_i^{(p)}$ ($p - \text{odd integer}$) supply an implementation of composite anyons, including CFs of rank p ($b_i^{(p)} \rightarrow e^{ip\alpha}$, $\alpha \in (-\pi, \pi]$, CFs for $\alpha = \pi$), with the phase shifts (due to the additional loops) the same as required by Laughlin-type functions. It makes CFs similar to other types of 2D quantum particles, despite the 2π periodicity limitation for 1DUR (unifying 1DURs for distinct phase shifts modulo 2π). The composite particles within the presented implementation are thus not connected with the full braid groups but with their subgroups, and the selection of an appropriate p -numbered subgroup ($b_i^{(p)}$ generators) reflects cyclotron trajectories of 2D interacting charged particles at strong magnetic field.

Acknowledgement

Supported by the Polish KBN Project No. N202 071 32/1513 and Network LFPPI.

References

- [1] D.C. Tsui, H.L. Stormer, A.C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) 1559.
- [2] S. Das Sarma, A. Pinczuk, *Perspectives in Quantum Hall Effects: Novel Quantum Liquids in Low-Dimensional Semiconductor Structures*, Wiley, New York, 1997.
- [3] R.E. Prange, S.M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, Springer Verlag, New York, 1990.
- [4] R.B. Laughlin, *Phys. Rev. B* 27 (1983) 3383;
R.B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* 50 (1983) 1395.
- [5] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific, Singapore, 1990.
- [6] Y.S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* 52 (1984) 2103.
- [7] J.S. Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, *Annals of Mathematical Studies*, vol. 82, Princeton University Press, Princeton, 1974.
- [8] E. Artin, *Ann. Math.* 48 (1947) 101.
- [9] T.D. Imbo, C.S. Imbo, E.C.G. Sudarshan, *Phys. Lett. B* 234 (1990) 103.
- [10] L. Jacak, P. Sitko, K. Wiczorek, A. Wojs, *Quantum Hall Systems: Braid Groups, Composite Fermions, and Fractional Charge*, Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [11] J.K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* 63 (1989) 199.
- [12] O. Heinonen, *Composite Fermions*, World Scientific, Singapore, 1998.
- [13] B.I. Halperin, P.A. Lee, N. Read, *Phys. Rev. B* 47 (1993) 7312.
- [14] A.L. Fetter, C.B. Hanna, R.B. Laughlin, *Phys. Rev. B* 39 (1989) 9679;
A. Lopez, E. Fradkin, *Phys. Rev. B* 44 (1991) 5246.
- [15] T. Morinari, *Phys. Rev. B* 62 (2000) 15903.
- [16] T. Sbeouelji, N. Meskini, *Phys. Rev. B* 64 (2001) 193305.
- [17] F.D.M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983) 605.
- [18] G. Moore, N. Read, *Nucl. Phys. B* 360 (1991) 362.
- [19] C. Nayak, S.H. Simon, A. Stern, M. Freedman, S. Das Sarma, *Rev. Mod. Phys.* 80 (2008) 1083.
- [20] A. Kitaev, *Ann. Phys.* 303 (2003) 2.
- [21] J.S. Xia, et al., *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 176809;
E.H. Rezayi, N. Read, arXiv:cond-mat/0608346.
- [22] M. Dolev, et al., *Nature* 452 (2008) 829;
I.P. Radu, et al., *Science* 320 (2008) 899.

Cyclotron braid group approach to Laughlin correlations

J. Jacak¹, I. Józwiak², L. Jacak^{1*}, K. Wieczorek¹

¹ Institute of Physics, ² Institute of Computer Science,
Wrocław University of Technology,
Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland

* ljacak@pwr.wroc.pl

Abstract

Homotopy braid group description including cyclotron motion of charged interacting 2D particles at strong magnetic field presence is developed in order to explain, in algebraic topology terms, Laughlin correlations in fractional quantum Hall systems. There are introduced special cyclotron braid subgroups of a full braid group with one dimensional unitary representations suitable to satisfy Laughlin correlation requirements. In this way an implementation of composite fermions (fermions with auxiliary flux quanta attached in order to reproduce Laughlin correlations) is formulated within uniform for all 2D particles braid group approach. The fictitious fluxes—vortices attached to the composite fermions in a traditional formulation are replaced with additional cyclotron trajectory loops unavoidably occurring when ordinary cyclotron radius is too short in comparison to particle separation and does not allow for particle interchanges along single-loop cyclotron braids. Additional loops enhance the effective cyclotron radius and restore particle interchanges. A new type of 2D particles—composite anyons is also defined via unitary representations of cyclotron braid subgroups. It is demonstrated that composite fermions and composite anyons are rightful 2D particles, not auxiliary compositions with fictitious fluxes and are associated with cyclotron braid subgroups instead of the full braid group, which may open also a new opportunity for non-Abelian composite anyons for topological quantum information processing applications, due to richer representations of subgroup than of a group.

1 Introduction

Specific topological properties of 2D N -particle systems have been recognized within algebraic topology [1] using homotopy group methods [2, 3]. They turned out to be of particular significance in understanding of quantum behavior of 2D electron systems widely experimentally investigated in Hall configuration since the discovery of fractional quantum Hall effect (FQHE) [4]. A hierarchy of Landau level (LL) fractional fillings was observed [4, 5, 6] and explained by new topological concepts closely related with planar geometry [7, 8, 9]. The exceptional topology of 2D systems is connected with nontrivial homotopy groups [2, 11, 12, 13, 14] describing planar trajectories for many-particle systems. Classes of topologically nonequivalent closed loops in the configuration space of a system of N identical particles build up π_1 homotopy group [1], called in this case a braid group (full and pure for indistinguishable and distinguishable particles, respectively) [2, 11, 12, 13].

Braid groups for 2D case are infinite, while for higher dimensions are finite and equal (full braid groups) to the permutation group S_N (for 1D case this formalism is irrelevant) [3]. Unitary representations, in particular one-dimensional (1DURs) of the full braid group serve for identification of quantum particles corresponding to the same classical ones [9]. For S_N there exist only two distinct 1DURs: $\sigma_i \rightarrow e^{i\pi}$ or $\sigma_i \rightarrow e^{i0}$, (σ_i —the interchange of i th and $(i+1)$ th particles) corresponding to fermions and bosons, respectively. In 2D there is, however, an abundance of distinct 1DURs of the full braid groups: $e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, associated with anyons (Abelian) [7, 8, 5, 9, 15]. Anyons reveal a fractional statistics—the interchange of two anyons results in a θ phase shift of the wave function [9, 10].

Crucial for understanding of FQHE was the formulation by Laughlin [7, 8] of the wave function for a ground state of 2D charged particle system at strong magnetic field presence. The Laughlin function [8] corresponds to $\frac{1}{p}$ (p -odd integer) fractional filling of the lowest LL and is a generalization of the Slater determinant. The Slater function for completely filled lowest LL, for magnetic field in cylindrical gauge, has the form (up to an exponential factor) of the Vandermonde determinant, $\prod_{i < j} (z_i - z_j)$, $z_i = x_i + iy_i$ stands here for i th 2D particle coordinate expressed as a complex number. Replacement in this Slater function of the Vandermonde determinant with the Jastrow polynomial, $\prod_{i < j} (z_i - z_j)^p$, (p odd integer), results in the Laughlin wave function [7, 8] for filling $\frac{1}{p}$. The Laughlin function is still antisymmetric but differs from the Slater function in the phase shift acquired due to interchange of a 2D particle pair. For the Vandermonde function it is π , while for the Jastrow function $p\pi$. The difference in phases is important in planar geometry (in higher dimensions the phase shift has no meaning), but 2π periodicity of the phase factor, $e^{ip\pi} = e^{i\pi}$, also in 2D seemingly does not allow for distinguishing of the statistics imposed by Laughlin correlations from ordinary fermion antisymmetry. Therefore more subtle topological attitude—the braid group methods, should be here applied in order to grasp the novelty introduced by the Laughlin function.

The phenomenological approach to Laughlin correlations was introduced in terms of composite fermions (CFs), regarded as ordinary 2D fermions with associated to each particle even number of magnetic flux quanta [16, 17]. The even number, q , of magnetic flux quanta attached to individual particles does not change antisymmetry of the total system wave function, but due to Aharonov-Bohm effect results in additional $q\pi$ phase shift during particle pair interchange [9]. In this manner the magnetic field local fluxes, called as vortices, attached to CFs model the Laughlin correlations [7, 8]. The CF attitude suffers, however, from an artificial character of the construction,

i.e., not explained source of the magnetic field fluxes changing fermions into CFs.

Nevertheless, CFs regarded as only weakly (residually) interacting, surprisingly well describe Hall systems [16, 17] especially within the lowest LL (for higher LLs the inter-level mixing effects perturb a CF picture). The vortices of CFs, oriented oppositely to the external field are assumed to be able to screen the external magnetic field, and in the effective weaker resultant field, one can deal with an integer quantum Hall effect—which yields the fractional hierarchy $\frac{p}{2p\pm 1}$ [16, 17]. In other words, the oscillations in Hall conductivity (FQHE) can be associated with Szubnikov-de Haas oscillations in an effective reduced magnetic field. The interesting observation supporting this model is the so-called Hall metal state [18] at filling fraction $\frac{1}{2}$, when the total external magnetic field should be canceled by the averaged internal field of CF fluxes. It still arises, however, an important question of what is the physical source of these magnetic flux quanta, i.e., vortices, attached to charged particles which alter original fermions into CFs and how to understand localization of magnetic field fluxes on individual particles.

In the present paper we demonstrate the braid structure of composite fermions, as particles with statistical properties required by Laughlin correlations, via association them with cyclotron braid subgroups instead of the full braid groups. Introduced below cyclotron braid subgroups reflect the classical braid picture for 2D N -particle charged system at the presence of magnetic field. The quantization, via 1DURs of these cyclotron subgroups, allow for natural explanation of Laughlin correlations, without invoking artificial vortices. In particular this approach elucidates the CF construction and the true character of auxiliary Jain's vortices [16], which turned out a useful model of basic trajectory loops unavoidably occurring on cyclotron braids at fractional LL fillings $\frac{1}{p}$. The multi-loop braids from cyclotron braid subgroups allow for particle interchange in the braid picture, when the single-loop cyclotron diameter is shorter than the particle separation, which precludes their exchanges along single-loop cyclotron trajectories. In order to enhance cyclotron radius and to restore particle interchanges in braid picture, each particle must traverse, in classical braid meaning, a closed p -loop cyclotron trajectory, or in quantum language, each particle takes away p quanta of the external magnetic field flux; $p - 1$ of them play the equivalent role as $p - 1$ flux quanta attached to each CF in a traditional model, reducing the external field. Topological implementation of CFs in braid group terms was not previously formulated due to periodicity of 1DURs. Association of composite particles (including composite fermions) with a separate cyclotron braid subgroups allows, however, for distinguishing them in terms of unitary representations, despite 2π periodicity of the unitary factor.

The paper is organized as follows. In the next paragraph the main lines of the braid group approach to quantum systems are summarized. In the following one, the original idea of cyclotron braid subgroups is developed and applied to description of CFs, and more generally to composite-anyons. The multi-loop structure of cyclotron braids, essential for CF description, is explained. The role of the Coulomb interaction is described in a separate paragraph. The possible application of introduced composite anyons to topological quantum information processing (QIP) is indicated.

2 Braid group method for description of N -particle systems

Definitions of a full and a pure braid groups

Braid group is a first homotopy group [1], π_1 , for configuration space of N -particle system. $\pi_1(A)$ is a group of topologically nonequivalent classes of closed trajectories in the space A . In the case of N -particle system, A is an appropriate classical configuration space. The braid groups display only a possible classical motion of N -particle system and a quantization is performed via unitary representations of classical braid trajectories, as it is described below.

The configuration space of N identical particles located on a manifold M (e.g., R^n , or compact manifolds) is defined as: $Q_N(M) = (M^N \setminus \Delta)/S_N$, for indistinguishable identical particles, and as: $F_N(M) = M^N \setminus \Delta$, for distinguishable identical particles; M^N is the N th Cartesian product of the manifold M , Δ is the set of diagonal points (when coordinates of two or more particles coincide), subtracted in order to preserve conservation of the particle number, S_N is the permutation group—the quotient structure is introduced in order to account for indistinguishability of quantum particles. Note, that indistinguishability of particles is here artificially introduced in the definition of configuration space, which indicates that this property is independent of quantum uncertainty principles.

For these configuration spaces two types of braid groups are defined [2]:

$$(1) \quad \pi_1(Q_N(M)) = \pi_1(M^N \setminus \Delta)/S_N,$$

a full braid group and

$$(2) \quad \pi_1(F_N(M)) = \pi_1(M^N \setminus \Delta),$$

a pure braid group.

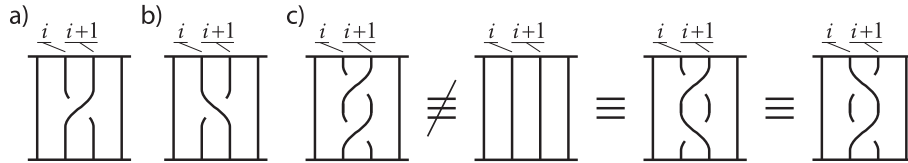


Figure 1. Geometrical braid presentation for B_N : the generator σ_i (a) and its inverse, σ_i^{-1} (b); square of the generator σ_i^2 (c)

For $M = R^n$, $n > 2$ the braid group have a simple structure. The full braid group, for $n > 2$, equals to a permutation group S_N (note, that this group is a finite group, of rank $N!$). For $M = R^2$ (and for compact locally 2D manifolds, as a sphere or a torus in 3D) the braid groups are infinite highly nontrivial groups.

It is convenient to illustrate a structure of the braid groups for the plane via a simple presentation using geometrical braids [2, 12]—cf. Fig. 1. In this figure there are depicted: (a) geometrical braid corresponding to the generator σ_i of the full braid group (interchange of the i th and $(i + 1)$ th strings representing particle trajectories), (b) geometrical braid corresponding to the inverse element of the generator, σ_i^{-1} , (c) geometrical braid for the square of the generator $(\sigma_i)^2 \neq e$ (e —the neutral element of the group). In 3D $(\sigma_i)^2 = e$, which simplifies the braid structure to ordinary permutation group S_N , while in 2D $(\sigma_i)^2 \neq e$ and it causes complicated (of infinite type) structure of planar braids.

One can list formal conditions imposed on generators σ_i , $i = 1, \dots, N - 1$, in order to define the full braid group for the plane, in an abstract manner [11, 2]. These conditions are written below and are illustrated by geometrical braids in Fig. 3 a,b,

$$(3) \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \text{for } 1 \leq i \leq N - 2,$$

$$(4) \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i. \quad \text{for } 1 \leq i, j \leq N - 1, |i - j| \geq 2.$$

The initial ordering of particles is not conserved for braids from a full braid group, while for braids from a pure one, the ordering must be conserved. The generators l_{ij} of a pure braid group [2] correspond to double exchanges of particle pairs, ij , however, without any perturbation of the assumed ordering of particles, and have the following form in terms of σ_i generators:

$$(5) \quad l_{ij} = \sigma_{j-1} \cdot \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i^2 \cdot \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \cdot \sigma_{j-1}^{-1}, \quad 1 \geq i \geq j \geq N - 1.$$

The pure group is a subgroup of the full group since the generators l_{ij} are expressed by means of σ_i generators. For defining relations for generators of the pure group cf. Refs [2, 12].

Note that the connection between the full braid group and the pure one is given by the quotient relation [2], $B_N/\pi_1(F_N(\mathbb{R}^2)) = S_N$ (B_N stands here for commonly used notation for the full braid group for the plane) [11].

For the sphere S^2 the additional condition for generators, beyond those given by Eqs (3) and (4), is imposed [2],

$$(6) \quad \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_{n-2} \cdot \sigma_{n-1}^2 \cdot \sigma_{n-2} \cdot \dots \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 = e,$$

which displays the fact that on the sphere a loop of a selected particle embracing all other particles is contractible to a point. For the torus T additional relations [14] correspond to two nonequivalent paths of each particle on this not simple-connected manifold.

Quantization in braid group picture

Quantization of the system of N identical indistinguishable particles can be performed by application of the Feynman integral over trajectories, leading to a propagator (probability for a transition from a point a to a point b in the configuration space):

$$(7) \quad I_{a \rightarrow b} = \int d\lambda e^{iS[\lambda_{a,b}]/\hbar},$$

where $S[\lambda_{a,b}]$ is the classical action for the trajectory $\lambda_{a,b}$ in the classical configuration space of N -particle system, $d\lambda$ is a measure in a trajectory space. To each trajectory linking a and b points in the N particle configuration space, one can attach, however, additional closed loops which are elements of the full braid group. Thus resulting trajectories fall into separated topologically nonequivalent classes, represented by elements of the full braid group. Therefore an additional unitary factor (the weight of the separated trajectory class) should be added [9, 10] in the formula for integration over trajectories, together with the additional sum over the braid group elements (since each element of the full braid group can be attached to a loop-less simple trajectory $\lambda_{a,b}$):

$$(8) \quad I_{a \rightarrow b} = \sum_{l \in \pi_1} e^{i\alpha_l} \int d\lambda_l e^{iS[\lambda_{l(a,b)}]/\hbar},$$

π_1 represents here the full braid group. These factors $e^{i\alpha_l}$ form a 1DUR of the full braid group. Distinct representations correspond to distinct types of quantum particles, linked to the same classical ones.

As was mentioned in the Introduction, for S_N , which is the full braid group for 3D manifolds (and for higher dimensions), there exist only two distinct 1DURs,

$$(9) \quad \sigma_i \rightarrow \begin{cases} e^{i0}, \\ e^{i\pi}, \end{cases}$$

corresponding to bosons and fermions, respectively (leading to a symmetry and antisymmetry properties of relevant wave functions). For 2D space (the plane), the braid group (considerably richer than S_N) has an infinite number of 1DURs [12, 13], written for the group generators as $\sigma_i \rightarrow e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, where each θ enumerates a different type of so-called anyons [7, 8, 5, 9, 10, 15]. Note that elements of 1DUR of the full braid group do not depend on the index i (of the generator σ_i) owing to the condition (3) imposed on generators. Because the 1DUR elements commute, then from Eq. (3) it follows that $e^{i\theta_i} = e^{i\theta_{i+1}}$, where $\sigma_i \rightarrow e^{i\theta_i}$, which gives this i -index independence of 1DUR elements.

For the sphere S^2 1DURs have the form [12, 13], $e^{i\theta}$, where $\theta = k\pi/(N-1)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2N-3$. It is interesting to notice, that for two particles on the sphere (i.e., for $N = 2$ one has only $k = 0, 1$) only bosonic or fermionic statistics are available (actually because of Eq. (6)), and anyons may occur on the sphere for three particles, at least. In the case of a torus T , for an arbitrary number N of particles, $\theta = 0$ or π are admitted only [13, 14]—thus on a torus any anyons do not exist, except for fermions and bosons. This result was generalized [13] also for all compact locally-2D manifolds with exception for the sphere.

The classical trajectories from the full braid group have no quantum meaning. Quantum particles do not traverse any braid trajectories since they do not have trajectories at all. In agreement with the general rules of quantization [19, 20], N -particle wave function must transform according to 1DUR of an appropriate element of the braid group when the particles traverse classically a closed loop in the configuration space of N -particle system corresponding to this braid element. As braids from the full braid group describe interchanges of particles, thus corresponding 1DURs display statistics phase factors.

Note that important are also multidimensional unitary irreducible representations (MDURs) of braid groups. According to an idea of Kitaev [15, 21], an arbitrary unitary evolution of multi-qubit system (e.g., of a double qubit gate for QIP) [15, 22] can be approximated by a MDUR (of an appropriate rank) of a full braid group, provided the sufficient density level of MDURs in the unitary matrix space [15]. MDURs can be linked with

degenerated low-energy excitations (quasiparticles/quasiholes, typically regarded as anyons) above the ground state for some fractional LL fillings. Since elements of MDUR do not commute, as matrices, these degenerate states of anyons are referred as non-Abelian anyons [15]. Unfortunately, the non-Abelian anyons recently investigated in particular low excited states for $5/2$ and $12/5$ LL filling factors correspond probably to not sufficiently dense MDURs (for non-Abelian anyons in $\frac{5}{2}$ case the MDURs are not dense enough to approximate needed qubit gates [15], and another considered now state $\frac{12}{5}$ is still disputable [23]). Thus searching for other opportunities for fractional statistics systems with more dense MDURs associated with non-Abelian anyons is of high significance. In the next section we will introduce a cyclotron braid subgroups of a full braid group. As subgroups have usually richer representations than a group, thus one can expect that the cyclotron braid subgroups would be convenient for topology methods for QIP, since the relevant MDURs of cyclotron subgroups would be more dense in comparison to representations of a full braid group.

3 Cyclotron braid groups at magnetic field presence

Let us emphasize that the braid groups described above are constructed in the absence of the magnetic field. Elements of the full braid group were all trajectories without any modifications caused by the magnetic field. Inclusion of the magnetic field considerably confines, however, the variety of admitted trajectories. All trajectories must be of cyclotron shape at the presence of the magnetic field and this property highly modifies the braid group structure. Instead of a full braid group, cyclotron trajectories form a braid subgroup—a cyclotron subgroup, in particular at $1/p$ fractional LL filling. It leads to an opportunity for an implementation of CFs (2D particles at a strong magnetic field presence) via cyclotron subgroups of the full braid group. Following this idea, at magnetic field presence the summation in the Feynman propagator must be confined to the subgroup elements only, i.e., to selected, suitably to cyclotron motion, classes of trajectories instead of arbitrary elements of the full braid group. The 1DURs of the cyclotron braid subgroups will thus substitute the 1DURs of the full braid group in the path integral (8).

Let us consider 2D charged particle system with planar density $\frac{N}{S}$ (N is the number of particles, S is the surface of a sample) and at presence of a perpendicular magnetic field B . Topology of a manifold where the particles are located is assumed here the same as of the plane R^2 (it would be considered as an compact subset of R^2 , without a boundary) [2]. For this manifold one can define the full braid group [2, 11, 12, 13], being the

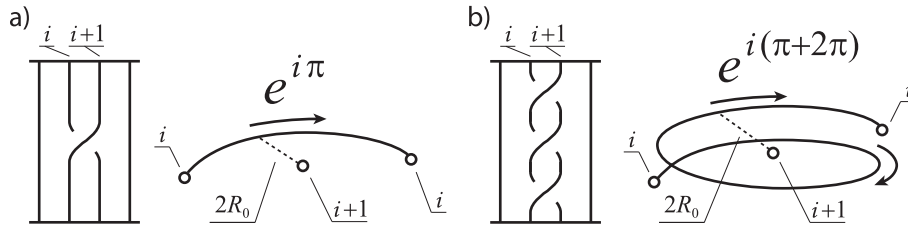


Figure 2. The generator σ_i of the full braid group and the corresponding relative trajectory of particle i th and $(i+1)$ th exchange (a); the generator of the cyclotron braid subgroup, $b_i^{(p)} = \sigma_i^p$ (in the figure $p = 3$), corresponds to additional $\frac{p-1}{2}$ loops when the i th particle interchanges with the $(i+1)$ th one (an additional loop results in 2π phase shift; $2R_0$ —inter-particle separation) (b)

π_1 homotopy group [1] of the configuration space for N indistinguishable particles on R^2 . This braid group is commonly called as B_N (the Artin group) [11] and is generated by interchanges of neighboring particles at chosen their ordering [2, 12],

$$(10) \quad \sigma_i, \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

with defining relations given by Eqs (3) and (4).

Definition of the cyclotron braid subgroup

Let us define the cyclotron braid subgroup by means of its generators $b_i^{(p)}$ of the following form:

$$(11) \quad b_i^{(p)} = \sigma_i^p, \quad p = 1, 3, 5, 7, 9, \dots; \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

where each p corresponds to a different type of the cyclotron subgroup and σ_i are generators of the full braid group.

The full braid group element $b_i^{(p)}$ (the generator of the cyclotron braid subgroup of type p) represents the interchange of i th and $(i+1)$ th particles with $\frac{p-1}{2}$ loops. It is clear due to the definition of the single interchanges by the generators σ_i of the full braid group, cf. Fig. 2.

The generators $b_i^{(p)}$ create the subgroup of the full braid group as they are expressed by generators σ_i of the full braid group. The $b_i^{(p)}$ do not, however, satisfy the condition (3) (cf. Fig. 3 (c)), while the condition (4) is

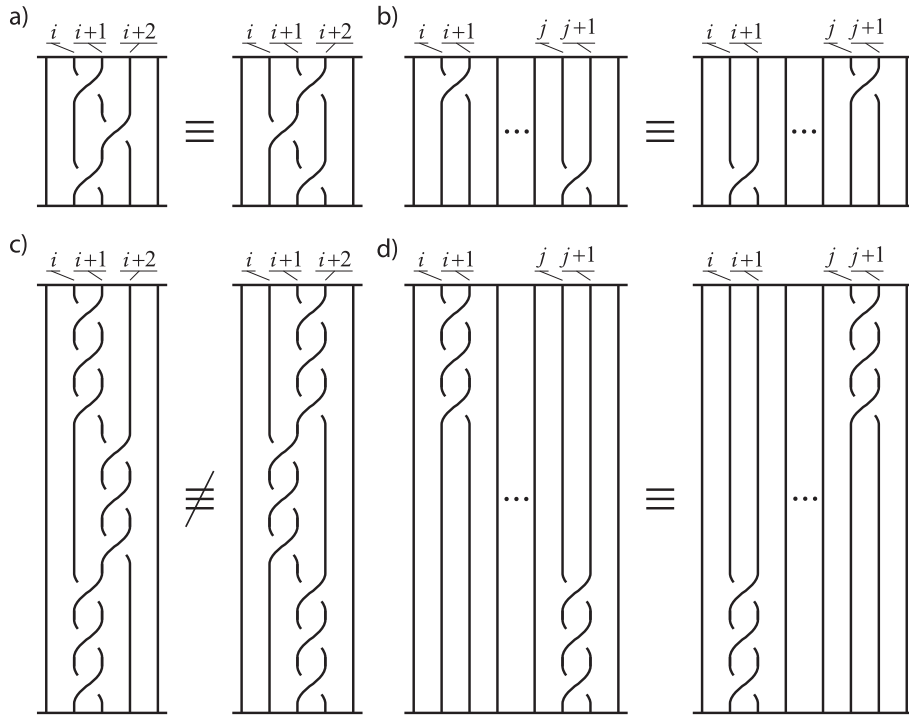


Figure 3. Formal conditions defining a full braid group for R^2 , cf. Eqs (3) and (4); violation of the condition (3) for the cyclotron subgroup generators $b_i^{(3)}$ (c) (the condition (4) is maintained for the cyclotron subgroup generators (d))

maintained for $b_i^{(p)}$: $b_i^{(p)}b_j^{(p)} = b_j^{(p)}b_i^{(p)}$, for $1 \leq i, j \leq N - 1$, $|i - j| \geq 2$ (cf. Fig. 3 (d)).

The condition (3) resulted in independence of 1DUR of the braid group generator index i . Disappearance of this condition for the cyclotron braid subgroup leads to possible dependence of the subgroup 1DUR on the index i , in general. The 1DURs of the full group, $\sigma_i \rightarrow e^{i\alpha}$, confined to the subgroup, do not depend, however, on i and yield:

$$(12) \quad b_i^{(p)} \rightarrow e^{ip\alpha},$$

p an odd integer, $\alpha \in (-\pi, \pi]$. These 1DURs of the cyclotron braid subgroup, numbered by the pairs (p, α) , describe composite anyons, and, in a particular case, CFs for $\alpha = \pi$.

Multi-loop cyclotron braid structure

For the above construction of the cyclotron subgroups the N -particle wave function acquires an appropriate phase shift due to a peculiar type of particle interchanges in the braid picture, i.e., we replace the Aharonov-Bohm phase of fictitious fluxes by additional braid loops (each loop adds 2π to the total phase shift—cf. Fig. 2). It is noticeable if one takes into account the rules of quantization in the braid group framework [19, 20]. In agreement with them, N -particle wave function must transform according to 1DUR of an appropriate element of the braid group, when the particles traverse classically a closed loop in the configuration space of N -particle system corresponding to this braid element. For the cyclotron braid subgroup generated by $b_i^{(p)}$, $i = 1, \dots, N - 1$ (defined by Eq. (11)), we obtain for particle pair interchange the total wave function phase shifts $p\pi$ (for $\alpha = \pi$ in the representation given by Eq. (12)), as is required by Laughlin correlations [7, 8], without modeling them by fictitious vortices.

Definition of an individual particle cyclotron trajectory

Note, that each additional loop of a relative trajectory for particle pair interchange (such a trajectory is needed for definition of the subgroup generators $b_i^{(p)}$) reproduces an additional loop in individual cyclotron trajectories for both interchanging particles—cf. Fig. 4. In this figure the cyclotron motion of particle pair is depicted for the interchange of i th and $(i + 1)$ th particles separated by double cyclotron radius $2R_c$, without any additional loops (a) and with the additional loop (b), respectively. The cyclotron trajectories are repeated in the relative trajectory (right) with a double radius in comparison to the individual particle trajectories (left). In quantum language, with regard to classical multi-loop cyclotron trajectories, one can conclude only on the number, $\frac{BS}{N} / \frac{hc}{e}$, of flux quanta per single particle in the system, which for the LL filling $\frac{1}{p}$ is p , i.e., the same as the number of cyclotron loops of each particle. Thus a simple pictorial rule could be here formulated: an additional loop on a braid corresponding to particle interchange, introduced in accordance with generators of the cyclotron braid subgroup, results in *two* additional flux quanta piercing the individual particle cyclotron trajectories. It immediately follows from the definition of the cyclotron trajectory.

One can define this trajectory as the individual particle trajectory corresponding to a *double* interchange of the particle pair (cf. Fig. 5). In this way, the cyclotron trajectories of both interchanging particles are closed, similarly as closed the relative trajectory for double interchange is. If the

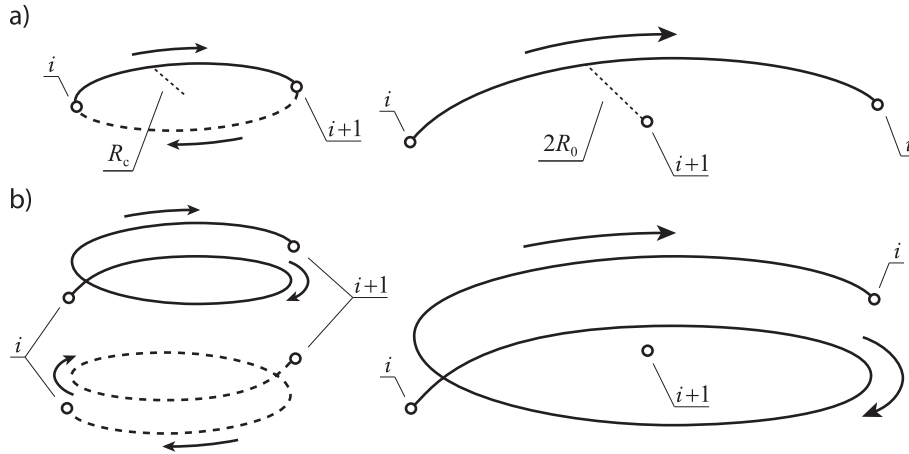


Figure 4. Cyclotron (left) and corresponding relative (right) trajectories for interchanges of i th and $(i + 1)$ th 2D-particles at strong magnetic field, (a) for $\nu = 1$, (b) for $\nu = \frac{1}{3}$, respectively (3D for better visualization); in both cases, $\nu = 1, \frac{1}{3}$, the appropriate cyclotron radius R_c fits with the inter-particle separation $2R_0 = 2R_c$, $2R_0$ —inter-particle separation is fixed by the Coulomb repulsion

interchange is simple, i.e., without any additional loops, the corresponding individual particle cyclotron trajectories are also simple, single-loop (circles on 2D plane). But when the interchange of particles is multi-loop, as associated with p -type cyclotron subgroup ($p > 1$), the double interchange relative trajectory has $2\frac{p-1}{2} + 1$ closed loops and the individual cyclotron trajectories are also multi-loop, with p loops. It is illustrated in the Fig. 5.

It is worth to emphasize the difference between turns of windings (e.g., of a wire) and multi-loop 2D cyclotron trajectories. The latter ones cannot enhance a piercing total magnetic field flux BS (thus the number of flux quanta per particle coincides with the number of loops of closed cyclotron individual particle trajectory), while in the former case, each turn of windings adds a new portion of the flux as a new turn adds a new surface in fact (which is no case in 2D).

Relation of cyclotron braid subgroups with CFs

We will explain below that the multi-loop shape of the relative trajectory for interchanges, as defined by the subgroup generators (11) (and corresponding

multi-loop form of individual particle cyclotron trajectories), is an unavoidable property in the case when inter-particle separation (resulted from the density $\frac{N}{S}$ and fixed by the Coulomb repulsion) is greater than the double value of single-loop cyclotron radius. In this case, in particular at $\frac{1}{p}$ LL filling fraction, any exchanges along simple single-loop cyclotron trajectories are impossible, because the corresponding cyclotron radius is too short. In order to restore a possibility of particle interchanges (necessary, on the other hand, for braid structure definition and thus for statistics determination), too short cyclotron radius must be enhanced. The way to enhance the effective cyclotron radius, which would again fit to inter-particle separation, is the multi-loop character of cyclotron motion and simultaneously resulting multi-loop braids for particle interchanges (represented by generators of the cyclotron braid subgroups, Eq. (11)). The additional cyclotron loops take away a part of the external field flux and thus reduce the effective field which leads to an expected growth of a resulting cyclotron radius.

The total flux of the external field through the surface S is BS . For p type of CFs, if one considers the relative trajectory of *double* interchange of i th and $(i + 1)$ th particles (thus closed and with $2\frac{p-1}{2} + 1 = p$ loops), one gets the individual particle closed cyclotron trajectories with the same number p of loops (cf. Fig. 5), embracing the total flux $p\frac{hc}{e}$ (each loop takes away a single flux quantum in accordance with the above presented interpretation). Thus for p type of CFs we deal with closed p -loop cyclotron trajectories of particles, i.e. p flux quanta per particle, $BS = Np\frac{hc}{e}$. On the other hand, the degeneracy of the LL equals to $N_0 = \frac{SBe}{hc}$, (neglecting spin) and for fractional filling ν , $N_0 = \frac{N}{\nu}$. $\frac{BS}{N} = \frac{hc}{e}\frac{1}{\nu}$ gives $\frac{1}{\nu}$ flux quanta per particle, which fits with the previous estimation only for $\nu = \frac{1}{p}$.

In the case of p -loop trajectory each loop has its size adjusted to the external magnetic field flux diminished by $p - 1$ quanta per particle taken away by remaining loops, exactly as in the case of the Jain's model. Indeed, if $BS = \frac{hc}{e}pN$, then $\frac{hc}{e} = \frac{B}{p}\frac{S}{N}$ and $\frac{S}{N}$ corresponds to p times lowered field. Following an analogy with Jain's model, one could argue that for $\nu = \frac{1}{2}$ and $p = 3$, two loops per particle take away the total B field flux and the third loop has to be of infinite radius (Hall metal [18]) for zero rest-field.

The additional loops take away flux quanta simultaneously diminishing the field; this gives an explanation of the fictitious Jain fluxes screening the field B . Thus the presented cyclotron subgroup implementation of CFs can be addressed to Jain's theory with all advantages of the related conclusions [17], in particular of the integer quantum Hall effect in the rest-field, leading to hierarchy of FQHE [16, 17].

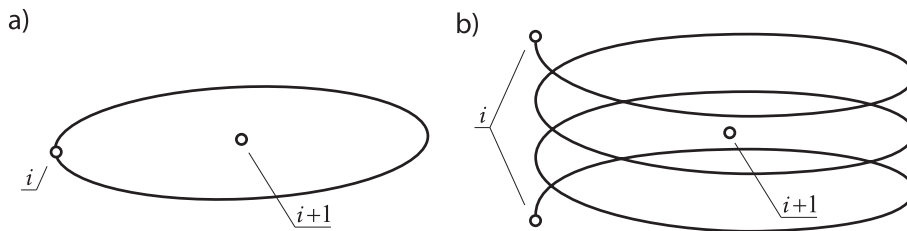


Figure 5. Individual particle closed cyclotron trajectories corresponding to *double* relative trajectories for interchanges of i th and $(i + 1)$ th 2D-particles at strong magnetic field, (a) for $\nu = 1$, (b) for $\nu = \frac{1}{3}$, respectively (3D for better visualization); the number of B field flux quanta per particle is indicated in both cases, $\nu = 1, \frac{1}{3}$; the resulting cyclotron radius R_c fits with the inter-particle separation $2R_0 = 2R_c$ in both cases

One can thus summarize why 2D charged particles must be associated with classical multi-loop braids for fields corresponding to fractional filling of LL. For $\nu = 1$ one has $R_c = R_0$ (where R_c is the cyclotron radius, $\pi R_c^2 B = \frac{hc}{e}$ and $2R_0$ is the separation of particles, adjusted to the density and fixed by the short-range part of the Coulomb repulsion, $\pi R_0^2 = \frac{S}{N}$). For $\nu < 1$ the radius of cyclotron trajectory without additional loops $R_c < R_0$, and then R_c is *too short* for particle interchange along these trajectories. Additional loops can however enhance R_c and again allow interchanges, since for p -loop cyclotron trajectories $\frac{hc}{e} = \pi R_c^2 \frac{B}{p}$, and R_c grows in comparison to single-loop trajectories; for $\nu = \frac{1}{p}$, again $R_c = R_0$, though the external field is p times bigger than for $\nu = 1$ (at constant N). The fictitious fluxes of Jain's CFs played actually the similar role leading to an increase of cyclotron radius in the reduced resultant field. One can conclude thus that for $\nu = 1$ the cyclotron trajectories are single-loop and braids are generated by $b_i^{(p=1)} = \sigma_i$, while for $\nu = \frac{1}{p}$, $p > 1$, the cyclotron trajectories must be multi-loop, simultaneously resulting in braids generated by $b_i^{(p)} = \sigma_i^p$.

Note finally that for a fixed magnetic field orientation the one-side cyclotron rotation is admitted, thus the cyclotron subgroup should be confined to its semigroup structure only. It does not cause, however, any perturbations of relevant 1DURs of cyclotron subgroups, which are crucial for identification of composite particles.

The additional loops associated with the appropriate subgroup generators lead to the phase shifts for particle interchanges, just as for Jain's CFs and permit corresponding Laughlin-type function requirements to be satisfied. These loops replace the fictitious screening fluxes. Note once more that multi-loop trajectories (similarly as single-loop ones) have only meaning in classical braid terms. Quantum particles do not traverse any trajectories, also any multi-loop cyclotron trajectories. The corresponding wave functions transform, however, in an agreement with 1DURs of the braid group or of the subgroup [19, 20], resulting in appropriate statistics behavior.

Let us emphasize that though CFs actually are not compositions of particles and vortices, we have not modified the original name 'composite fermions'. Moreover we use the similar name 'composite anyons' for particles associated with fractional 1DURs (i.e., with fractional $p\alpha$ in Eq. (12)) of the cyclotron subgroup instead of the full braid group. The phase shift θ can be calculated as the Berry's phase along closed trajectory in configuration space for model multi-particle wave function corresponding to low energy excitations above the ground state at fractional filling of LL. These excitations—quasiparticles/quasiholes were traditionally associated with anyons in the case of a fractional Berry's phase. It is, however, clear that it is impossible to distinguish between fractional θ and $p\alpha$ —both these phase shifts can be the same fraction. As considered quasiparticles/quasiholes are excitations at the magnetic field presence, thus these states should be rather associated with cyclotron braids 1DURs, and therefore are composite anyons and not ordinary anyons, as previously regarded. This change, anyons for composite anyons, would result in convenient for QIP more dense relevant MDURs corresponding to braid subgroup instead of the full braid group.

A role of the short-range part of the Coulomb interaction

The crucial character of the short-range part of the Coulomb interaction for Laughlin correlations is visible from the fact that the Laughlin function is an accurate ground state wave function at $\frac{1}{p}$ LL filling, if to confine the Coulomb interaction represented by the so-called Haldane's pseudopotential [24, 6], $V = \sum_{i>j} \sum_m^\infty V_m P_m^{ij}$, (P_m^{ij} is the projector on the states of i th and j th particles with relative angular momentum m), to the components V_m , with $m = 1, \dots, p-2$ only. These V_m terms, the Coulomb interaction energy of an particle pair with relative angular momentum m , contribute the short-range part of the interaction of electrons, and the remaining terms—long-range interaction tail, corresponding to greater particle separation, i.e., with $m = p, \dots$, do not influence strongly the Laughlin function [6, 24, 25]. The Laughlin correlations are associated with the incompressible states which

correspond to discrete spectrum of Coulomb interaction projected on LL states, i.e., interaction expressed in terms of Haldane's pseudopotential with components assigned by relative angular momentum of particle pairs. This property, essential for FQHE, was even named by Laughlin as "a quantization of particle separation" [8, 6]. Quantization of the Coulomb interaction after projection on relative angular momentum of particle pairs in LL Hilbert subspace results in incompressible FQHE states numbered by integers (eigen-values of relative angular momentum of particle pairs), the same which occur in the Laughlin functions (the exponent in the Jastrow polynomial). It is important to note that according to an attitude to FQHE using Haldane's pseudopotential (confined to the short-range part of the Coulomb repulsion), the Laughlin correlations revealed in the multi-particle wave function are unambiguous possibility for accurate ground state at fractional LL filling, not only a variational result of the ground state modeling [6, 24]. It supports an idea that Laughlin correlations are a fundamental topology-originated property of interacting charged 2D particles. One can thus expect that this Landau quantization behavior of interacting 2D charged system must also manifest itself within braid group quantization approach to the same system, via the introduced cyclotron subgroup structure.

Since the Laughlin correlations can be expressed within CF approach, thus the Coulomb repulsion (the short range part of Haldane's pseudopotential) is of a fundamental significance also for the CF construction. It should be, however, emphasized that the Coulomb interaction with the discrete spectrum, i.e., with separation by energy gaps the distinct relative angular momenta of particle pairs for sufficiently high magnetic field (noticeable via projection of the interaction on fractional filled LL as in the definition of Haldane's pseudopotential) does not play a role of standard dressing of particles with interaction, typical for quasiparticles in solids, just because the interaction has not a continuous spectrum in this projection.

An effective description of a local gauge field attached to particles is supplied by the Chern-Simons (Ch-S) field theory (chiral field, i.e., breaking time reversion and parity). This approach revived [26, 27] in the area of FQHE successfully describing particles with fluxes, in particular anyons and Jain's CFs [17]. It still, however, does not explain, what the spontaneously arising fluxes are.

It was demonstrated [6, 25] that the short-range part of the Coulomb interaction stabilizes CFs against action of Ch-S field (its antihermitean term), which mixes states with distinct angular momenta within LL [25] in disagreement with the Jain's CF model in CH-S field approach [17, 25].

The Coulomb interaction removes the degeneracy of these states and results in energy gaps which stabilize CF picture, especially effectively within the lowest LL. For higher LLs CFs are not so useful due to possible mixing between LLs induced by interaction [28].

The short-range part of the Coulomb interaction stabilizes CFs also in our description, similarly as it removes instability caused by Ch-S field for angular momentum orbits in LL [25]. Indeed, if the short-range part of the Coulomb repulsion was reduced, the separation of particles would not be rigidly kept (adjusted to a density only in average) and then another cyclotron trajectories, additional to those for fixed particle separation (multi-loop at $\nu = \frac{1}{p}$), would be admitted, which violates the subgroup construction.

Thus the short-range part of the Coulomb interaction turns out to be crucial for CF formation in any description. Confining of the full braid group to the subgroup with multi-loop structure of cyclotron motion is justified only for particle separation adjusted to the double cyclotron radius. It is a role of the short-range part of the Coulomb repulsion which does not allow closer inter-particle separation than that which follows from the density. In this manner the short-range part of the Coulomb interaction is involved in the construction of the cyclotron braid structure. The long-range tail of the Coulomb interaction is left as a residual interaction of particles, which agrees with the Jain's model of weakly interacting CFs [16, 17].

4 Conclusions

We have developed the braid group description for the case of N charged 2D particle system at strong magnetic field presence, via definition of the cyclotron braid subgroups. This formalism allowed for interpretation of the Laughlin correlations of 2D charged systems within the braid group approach to N particle quantum systems. In this manner we formulated a new implementation of CFs employing braid group methods. Braid description of CFs was not previously established because of 2π period of 1DURs. In the present paper we have avoided this problem via reduction of 1DURs to specially chosen braid subgroups selected in accordance with a 2D cyclotron motion. These cyclotron braid subgroups, generated by the new generators $b_i^{(p)} = \sigma_i^p$ ($p = 1, 3, 5, \dots$ enumerates a sort of composite anyons, σ_i are generators of the full braid group), are separated braid objects which allow for distinguishing in statistics of CFs (with $p > 1$) from ordinary fermions. It supports an idea that CFs are rightful 2D quantum particles which cannot

be mixed with ordinary fermions, or with other sorts of CFs (though all correspond to antisymmetric functions). Distinguishing of CFs from fermions is important in particular for numerical diagonalization of interaction of CFs (not all antisymmetric functions can be admitted in diagonalization procedure, but only those which have the same phase shift due to particle interchanges, unless the mixing of various sorts of CFs took place [this is prohibited, similarly to the mixing of fermions and bosons in 3D]).

CFs turn out thus to be real 2D particles and not quasiparticles, i.e., they are not fermions dressed with interaction only, but are arranged as separate particles in topological terms. Identification of the special braid group object, the subgroup of the full braid group, associated with CFs, resolves also the problem of fictitious magnetic flux quanta, vortices, attached to these particles within the standard Jain's model. The Aharonov-Bohm phase shifts caused by hypothetical fluxes are replaced with the phase shifts due to additional $\frac{p-1}{2}$ loops during interchanges of particles (described in classical braid terms). These loops are an unavoidable property of interchanges of uniformly distributed (due to the Coulomb repulsion) 2D particles in a strong external magnetic field when ordinary cyclotron radius is too short for particle interchanges (each particle traverses, in a classical braid picture, a closed p -loop cyclotron trajectory or in quantum language, it takes away p quanta of the B field flux; $p-1$ of them play the equivalent role as $p-1$ screening flux quanta attached to each CF in Jain's model).

The 1DURs, $b_i^{(p)} \rightarrow e^{ip\alpha}$, $\alpha \in (-\pi, \pi]$, of the cyclotron braid subgroups generated by $b_i^{(p)}$ (p —odd integer) supply, more generally, an implementation of composite anyons, including CFs of rank p , for $\alpha = \pi$. In particular, CFs (for $\alpha = \pi$) gain the phase shift $p\pi$ (due to the additional loops) the same as required by Laughlin-type correlations. The composite particles within the presented implementation are thus not connected with the full braid group but with their cyclotron subgroups. It makes CFs described rightfully with other types of 2D quantum particles within the uniform braid group approach, despite the 2π period limitation for 1DURs.

An important role of the short-range part of the Coulomb interaction is indicated. This interaction fixes the inter-particle separation, (only in average determined by the planar density), which allows for definition of multi-loop cyclotron braid trajectories for particle interchanges in the case when single-loop cyclotron radius is too short in comparison to inter-particle separation, precluding particle exchanges along single-loop trajectories, as for $\frac{1}{p}$ LL filling. The additional loops reduce the total magnetic field flux and enhance the effective cyclotron radius, restoring possibility of particle interchanges. Thus multiloop trajectories are unavoidable property of cyclotron

braids leading, in a natural way, to the Laughlin correlations, without artificial constructions with vortices.

On the other hand, the cyclotron subgroups may have richer unitary representations, including MDURs, in comparison to the full braid group, which would result in more dense MDURs corresponding to composite non-Abelian anyons for possible QIP applications.

Supported by the Polish KBN Project No N202 071 32/1513 and Network LFPPI

References

- [1] E. Spanier, Algebraic Topology, Springer Verlag, Berlin 1966.
- [2] J. S. Birman, Braids, Links, and Mapping Class Groups, Annals of Math. Stud. **82**, Princeton UP, Princeton 1974.
- [3] N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51** (1979) 591.
- [4] D. C. Tsui, H. L. Störmer and A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1559.
- [5] S. Das Sarma and A. Pinczuk, Perspectives in quantum Hall effects: novel quantum liquids in low-dimensional semiconductor structures, Wiley, New York 1997.
- [6] R. E. Prange, and S. M. Girvin, The Quantum Hall Effect, Springer Verlag, New York 1990.
- [7] R. B. Laughlin, Phys. Rev. B **27** (1983) 3383.
- [8] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1395.
- [9] F. Wilczek, Fractional Statistics and Anyon Superconductivity, World Sc., Singapore 1990.
- [10] Y. S. Wu, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 2103.
- [11] E. Artin, Annals of Math. **48** (1947) 101.
- [12] L. Jacak, P. Sitko, K. Wieczorek and A. Wojs, Quantum Hall Systems: Braid groups, composite fermions, and fractional charge, Oxford UP, Oxford 2003.
- [13] T. D. Imbo, C. S. Imbo and E. C. G. Sudarshan, Phys. Lett. B **234** (1990) 103.
- [14] T. Einarsson, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1995.
- [15] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, Rev. Mod. Phys. **80** (2008) 1083.
- [16] J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 199.

- [17] O. Heinonen, Composite Fermions, World Sc., Singapore 1998.
- [18] B. I. Halperin, P. A. Lee and N. Read, Phys. Rev. B **47** (1993) 7312.
- [19] T. D. Imbo and E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 481.
- [20] E. C. G. Sudarshan, T. D. Imbo and T. R. Govindarajan, Phys. Lett. B **213** (1988) 471.
- [21] A. Kitaev, Russian Math. Survey, **52:61** (1997) 1191; A. Kitaev, Annals Phys. **303** (2003) 2; M. Freedman, A. Kitaev, M. Larsen and Z. Wang, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **40** (2003) 31.
- [22] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge UP, Cambridge 2000.
- [23] J. S. Xia *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 176809; E. H. Rezayi and N. Read, arXiv:cond-mat/0608346v1 (2006).
- [24] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 605.
- [25] T. Morinari, Phys. Rev. B **62** (2000) 15903.
- [26] A. L. Fetter, C. B. Hanna and R. B. Laughlin, Phys. Rev. B **39** (1989) 9679.
- [27] A. Lopez and E. Fradkin, Phys. Rev. B **44** (1991) 5246.
- [28] T. Sbeouelji and N. Meskini, Phys. Rev. B **64** (2001) 193305.