PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 106
Ubezpieczenia emerytalne, społeczne i metody aktuarialne 2010

Anna Szymańska
Uniwersytet Łódzki

WYZNACZANIE SKŁADKI NETTO W UBEZPIECZENIACH KOMUNIKACYJNYCH OC DLA ASYMETRYCZNEGO ROZKŁADU WIELKOŚCI SZKÓD

Streszczenie: Najczęściej stosowane zasady szacowania składki netto w ubezpieczeniach komunikacyjnych to zasady oparte na klasycznych miarach statystycznych. W przypadku rozkładów asymetrycznych wydaje się jednak uzasadnione szacowanie składek na podstawie pozycyjnych miar. W pracy podjęto próbę oceny tak wyznaczanych składek w przypadku rozkładu wielkości szkód typu Pareto.

Słowa kluczowe: składka netto, rozkład Pareto, rozkład wielkości szkód.

1. Wstęp

Odpowiednie oszacowanie wysokości składek ubezpieczeniowych w stosunku do poziomu ryzyka, jaki reprezentują ubezpieczeni, jest podstawą działalności każdego ubezpieczyciela. Zbyt niskie składki mogą być przyczyną strat finansowych firmy ubezpieczeniowej. Zbyt wysokie składki jednak w warunkach konkurencji na rynku mogą spowodować utratę klientów.

Składka ubezpieczeniowa to kwota, jaką ubezpieczony jest zobowiązany zapłacić zakładowi ubezpieczeń za udzieloną mu ochronę. Składka netto, powiększona o tzw. współczynnik bezpieczeństwa, to część składki ubezpieczeniowej przeznaczona na pokrycie odszkodowań i świadczeń. Składka brutto to składka netto powiększona o koszty związane z funkcjonowaniem zakładu ubezpieczeń, takie jak: koszty administracyjne, koszty akwizycji, dodatki na działania prewencyjne, zysk i bezpieczeństwo oraz korekty z tytułu inflacji, reasekuracji i dochodów inwestycyjnych.

Artykuł dotyczy szacowania składek netto w ubezpieczeniach majątkowych. Podjęto w nim próbę porównania wysokości składek netto liczonych różnymi metodami, znanymi w literaturze, dla przykładowo wybranego teoretycznego rozkładu wielkości szkód. Oceniono również, jak wielkość wylosowanej próby wpływa na szacowane wartości składek netto.

2. Teoretyczne zasady kalkulacji składki

W ubezpieczeniach majątkowych i pozostałych osobowych podstawą obliczenia składki jest oszacowanie składki netto na podstawie przewidywanej liczby i wielkości roszczeń, czyli na podstawie oceny i pomiaru ryzyka ubezpieczeniowego. Składka netto jest zatem funkcją wielkości szkody.

Niech $\Pi(X)$ oznacza wysokość składki netto za ochronę przed stratą o wielkości X. Niech X będzie zmienną losową o dystrybuancie F_X. Składka netto powinna mieć następujące własności (por. [Kaas i in. 2001]):

1) $\Pi(X) \geq EX$ (nieujemna nadwyżka),

2) $\Pi(X) \leq \min\{x : F_X(x) = 1\}$ (składka nie wyższa niż maksymalna strata),

3) $\Pi(X + a) = \Pi(X) + a$, dla każdego $a \in R$ i $a \geq 0$ (translatywność składki),

4) $\Pi(X + Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$, dla niezależnych zmiennych X i Y (addytywność składki),

5) $\Pi(X) = \Pi\left(\Pi\left(X \middle| Y\right)\right)$, dla wszystkich X, Y (interaktywność składki),

6) $\Pi(aX) = a\Pi(X)$ dla każdego $a \in R$ i $a \geq 0$ (proporcjonalność składki),

7) $\Pi(X + Y) \leq \Pi(X) + \Pi(Y)$, dla dowolnych zmiennych X i Y (subaddytywność składki).

W pracach dotyczących teorii ryzyka ubezpieczeniowego można znaleźć jeszcze inne własności funkcjonału składki. Jednak w praktyce większość funkcjonałów składki nie posiada wszystkich wymienionych własności.

Podamy teraz najczęściej spotykane zasady wyznaczania funkcjonału składki [Kaas i in. 2001]:

1. Zasada czystej składki (równoważności składki netto)

$$\Pi(X) = EX \tag{1}$$

2. Zasada wartości oczekiwanej

$$\Pi(X) = (1 + \alpha)EX \tag{2}$$

gdzie $\alpha \geq 0$ nazywa się współczynnikiem bezpieczeństwa.

3. Zasada wariancji

$$\Pi(X) = EX + \alpha VarX, \alpha \geq 0 \tag{3}$$

4. Zasada odchylenia standardowego

$$\Pi(X) = EX + \alpha\sqrt{VarX}, \alpha \geq 0 \tag{4}$$

5. Zasada odchylenia absolutnego

$$\Pi(X) = EX + \alpha E\left|X - Me_S\right|, \alpha \geq 0 \tag{5}$$

6. Zasada percentylu (kwantyla rzędu ε)

$$\Pi(X) = \min\left\{x : F\left(x\right) \geq 1-\varepsilon\right\} = F_X^{-1}(1-\varepsilon) \tag{6}$$

7. Zasada maksymalnej straty

$$\Pi(X) = pEX + (1-p)\max(X),\ p \geq 0 \quad i \quad \max(X) < \infty \tag{7}$$

8. Zasada zerowej użyteczności – grupa metod wyznaczania składki uwzględniająca preferencje ubezpieczyciela. Zakłada się, że ubezpieczyciel posiadający majątek w ma preferencje dotyczące majątku wyrażone za pomocą funkcji użyteczności $u(w) = Eu\left(w + \Pi(X) - X\right)$, $w \in (-\infty,+\infty)$. Dla $w = 0$ funkcja $u(w)$ ma postać $u(0) = Eu\left(\Pi(X) - X\right)$. W tym przypadku zasada użyteczności nazywana jest zasadą zerowej użyteczności. Najczęściej stosowaną w ubezpieczeniach funkcją użyteczności jest funkcja wykładnicza postaci $u(w) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha w}\right), \alpha > 0.$ Zasada zerowej użyteczności z wykładniczą funkcją użyteczności jest nazywana zasadą wykładniczą i jest określona równaniem

$$\Pi(X) = \frac{1}{\alpha}\log\left(Ee^{\alpha X}\right),\ \ \alpha > 0,\ Ee^{\alpha X} < \infty \tag{8}$$

9. Zasada wiarygodności – to grupa metod wyznaczania składki jako średniej ważonej składki kolektywnej μ i indywidualnej składki $\overline{x}_i$, oszacowanej na podstawie historii roszczeń w przeszłości, czyli jako

$$\Pi(X_i) = Z_i\overline{x}_i + (1 - Z_i)\mu \tag{9}$$

gdzie $Z_i \in (0,1)$. Tak zdefiniowaną składkę nazywa się *składką zaufania* dla *i*-tego kontraktu, natomiast Z_i *współczynnikiem zaufania*.

W warunkach idealnych, tzn. przy nieskończenie dużej liczbie potencjalnych ubezpieczanych oraz doskonałej informacji o ryzyku, powinna być stosowana zasada równoważności składki, co wynika z teorii rachunku prawdopodobieństwa i statystyki.

Analityczne wyznaczenie współczynnika bezpieczeństwa α, występującego w formułach 2, 3, 4, 5 i 8, jest trudne. Najczęściej, wyznaczając składkę netto dla całego portfela, stosuje się dwa podejścia [Ronka-Chmielowiec, Kowalczyk, Poprawska 2006]. W pierwszym składkę dla portfela ryzyk ustala się tak, by prawdopodobieństwo poniesienia straty na tym portfelu w kolejnym okresie nie przekroczyło ustalonej z góry wartości – kwantyla rzędu ε zmiennej losowej łącznej sumy szkód w portfelu. Druga metoda opiera się na teorii ruiny. Według tej metody dobrze oszacowana składka powinna gwarantować, że prawdopodobieństwo ruiny nie przekroczy zadanej wartości. W praktyce współczynnik bezpieczeństwa jest informacją poufną i towarzystwa ubezpieczeniowe nie chcą ujawniać jego wielkości. Jednak współczynnik 100% uznaje się za jego bezpieczną granicę.

Zasadę wykładniczą wprowadził Gerber [Gerber 1979], natomiast zasada maksymalnej straty jest czysto teoretyczna i na ogół służy do wyznaczania górnego ograniczenia składki. Przedstawione funkcjonały składek ubezpieczeniowych powinny być stosowane dla portfeli jednorodnych lub dla jednakowych klas jednego portfela [Daykin, Pentikäinen, Pesonen 1994]. W celu równomiernego rozłożenia ryzyka w portfelu stosuje się zasadę wiarygodności.

3. Przykłady empiryczne

W ubezpieczeniach komunikacyjnych zmienna losowa wielkości szkód ma najczęściej rozkład Pareto, rozkład gamma lub rozkład logarytmiczno-normalny.

W przeprowadzonym badaniu rozważano szacowanie składek netto dla portfela o wielkości szkód typu Pareto. Oceniono, jak zmieniają się parametry opisowe w wylosowanych próbach w zależności od liczebności próby.

Niech zmienna losowa X ma rozkład Pareto z parametrami α i β, o funkcji gęstości postaci

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta + x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0. \tag{10}$$

W przeprowadzonym badaniu wygenerowano populację o rozkładzie Pareto i parametrach:

$$\alpha = 2,3;\ \beta = 2,8;\ EX = 4,93535;\ DX = 5,2745;\ x_{0,5} = 3,7681.$$

Wartość oczekiwana i wariancja w populacji odpowiadają średniej i wariancji wielkości szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC publikowanych przez KNF.

Z populacji losowano po 1000 razy próby (liczba repetycji dla każdej próby o liczebności n wynosiła 1000) o liczebności: 50, 100, 150, 200, 250, 300, 500, 1000. Dla wylosowanych prób obliczono klasyczne i pozycyjne miary struktury oraz błąd średniokwadratowy dla średniej arytmetycznej i mediany z próby. Wyniki przedstawiono w tab. 1-3.

Tabela 1. Wartości klasycznych miar dla prób losowanych z rozkładu Pareto

Parametry populacji: $\alpha = 2,3;\ \beta = 2,8;\ EX = 4,93535;\ DX = 5,2745;\ x_{0,5} = 3,7681$									
n	$\bar{x}_{\min}$	$\bar{x}_{\max}$	$\bar{x}_{\bar{x}}$	e	$S_{\min}$	$S_{\max}$	Me_S	$V_S^{\min}$ (%)	$V_S^{\max}$ (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
50	3,7957	12,5217	4,9715	0,7931	0,8846	46,8840	2,9236	23	417
100	3,8621	8,6443	4,9467	0,4927	1,0823	33,1533	3,2687	28	428
150	4,1586	7,8941	4,9426	0,4337	1,3827	27,8015	3,4134	32	407

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
200	4,2823	7,7014	4,9558	0,3762	1,6822	32,9851	3,4647	38	428
250	4,3132	6,6879	4,9623	0,3324	1,8315	21,9302	3,5941	41	370
300	4,2028	7,4874	4,9618	0,3262	1,7624	27,1075	3,7544	41	399
500	4,3990	6,4737	4,9505	0,2377	2,1293	21,5621	3,8262	47	333
1000	4,5834	5,6965	4,9511	0,1614	2,4663	15,3936	4,0206	53	282

gdzie: n – liczebność próby; $\overline{x}_{\min}$ – minimalna wartość średnich arytmetycznych z próby z 1000 repetycji; $\overline{x}_{\max}$ – maksymalna wartość średnich arytmetycznych z próby z 1000 repetycji; $\overline{x}_{\overline{x}}$ – średnia arytmetyczna średnich arytmetycznych z 1000 repetycji; $e = \sqrt{\frac{1}{1000}\sum_{j=1}^{1000}\left(EX - \overline{x}_j\right)^2}$ błąd średniokwadratowy; $\overline{x}_j$ –średnia arytmetyczna dla j-tej repetycji; $S_{\min}$ – minimalna wartość odchyleń standardowych dla 1000 repetycji; $S_{\max}$ – maksymalna wartość odchyleń standardowych dla 1000 repetycji; Me_S – mediana odchyleń standardowych z 1000 repetycji; $V_S^{\min}$ – minimalna wartość współczynników zmienności z 1000 repetycji; $V_S^{\max}$ – maksymalna wartość współczynników zmienności z 1000 repetycji.

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Wartości pozycyjnych miar dla prób losowanych z rozkładu Pareto

Parametry populacji: $\alpha = 2,3$; $\beta = 2,8$; $EX = 4,93535$; $DX = 5,2745$; $x_{0,5} = 3,768$				
n	$Me_{\min}$	$Me_{\max}$	$\overline{x}_{Me}$	e
50	3,2052	4,7283	3,8096	0,2434
100	3,3320	4,4687	3,7989	0,1653
150	3,4273	4,3249	3,7767	0,1253
200	3,4770	4,2345	3,7773	0,1107
250	3,4906	4,1337	3,7796	0,0986
300	3,5380	4,2191	3,7763	0,0940
500	3,5875	4,0924	3,7746	0,0706
1000	3,6396	3,9936	3,7725	0,0496

gdzie: $Me_{\min}$ – minimalna wartość median z 1000 repetycji; $Me_{\max}$ – maksymalna wartość median z 1000 repetycji; $\overline{x}_{Me}$ – średnia arytmetyczna z median z 1000 repetycji; $e = \sqrt{\frac{1}{1000}\sum_{j=1}^{1000}\left(x_{0,5} - Me_j\right)^2}$ błąd średniokwadratowy; Me_j – mediana dla j-tej repetycji.

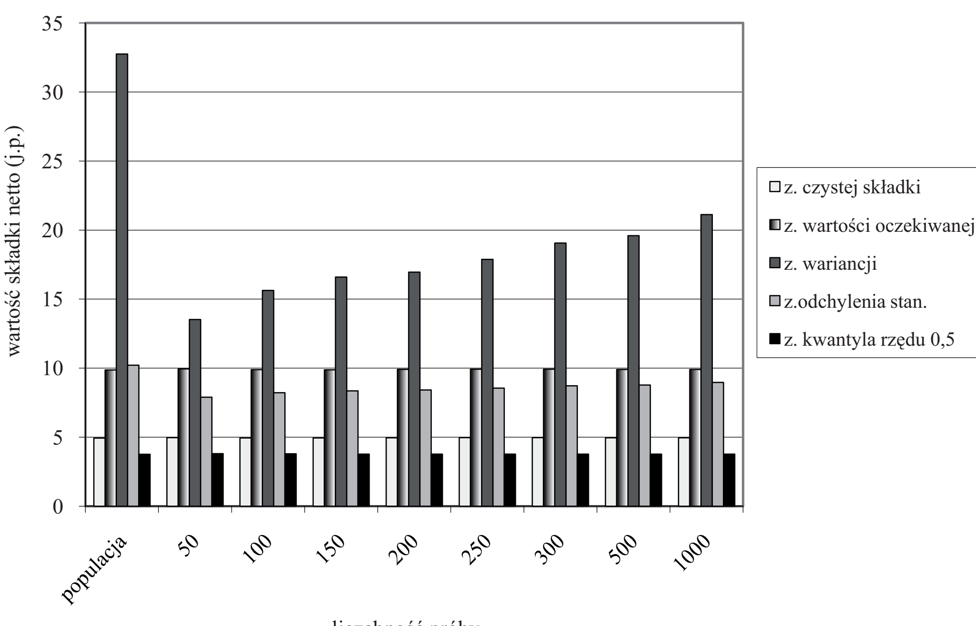
Źródło: obliczenia własne.

Następnie dla badanego rozkładu wielkości szkód oszacowano za pomocą różnych metod składkę netto. Składki wyznaczono dla całej populacji oraz różnych liczebności prób. Przy czym w próbach w tab. 3 do obliczeń wykorzystano średnie wartości z 1000 repetycji.

Tabela 3. Wartości składki netto (j.p.) obliczone różnymi metodami

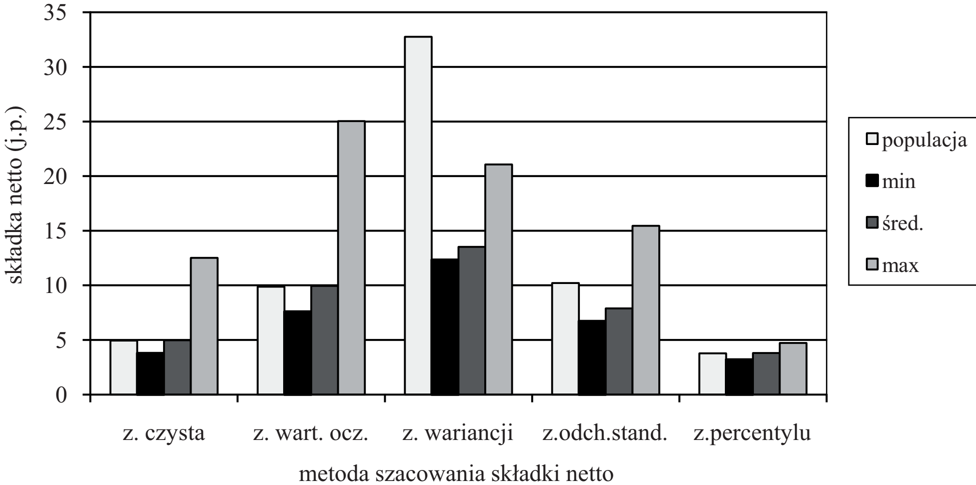
	Zasada wyznaczania składki netto				
	czystej składki	wartości oczekiwanej $\alpha = 1$	wariancji $\alpha = 1$	odchylenia standardowego $\alpha = 1$	kwantyla rzędu 0,5
populacja	4,935335	9,87067	32,75569	10,20984	3,7681
n = 50	4,9715	9,9430	13,5189	7,8951	3,8096
n = 100	4,9467	9,8934	15,6311	8,2154	3,7989
n = 150	4,9426	9,8852	16,5939	8,3560	3,7767
n = 200	4,9558	9,9116	16,9599	8,4205	3,7773
n = 250	4,9623	9,9246	17,8799	8,5564	3,7796
n = 500	4,9618	9,9236	19,0573	8,7162	3,7763
n = 1000	4,9505	9,9010	19,5903	8,7767	3,7746

Źródło: obliczenia własne.



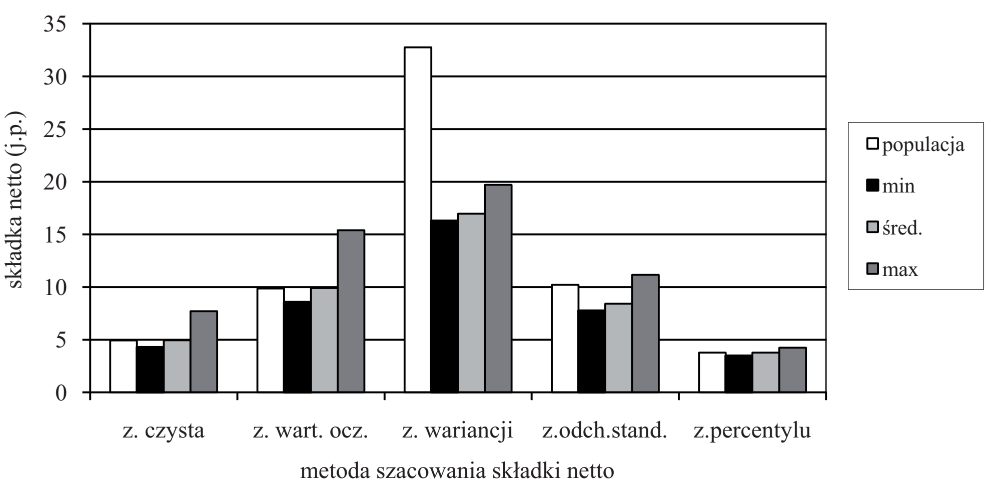
Rys. 1. Wartości składki netto (j.p.) obliczone różnymi metodami

Źródło: obliczenia własne.



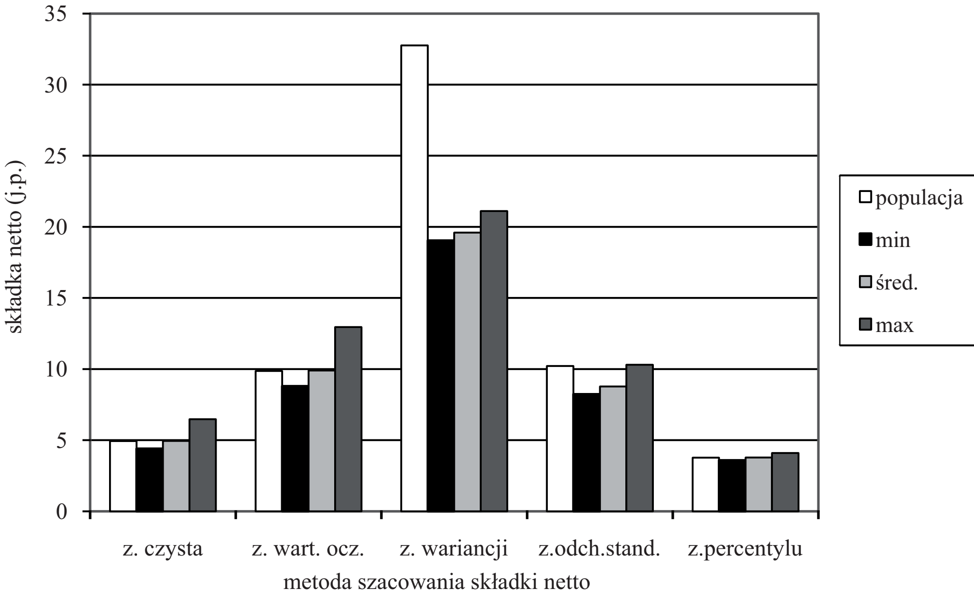
Rys. 2. Wartości składki netto (j.p.) obliczone różnymi metodami dla populacji i wielkości próby $n = 50$ (**min** – na podstawie minimalnych wartości parametrów próby w 1000 repetycjach, **śred**. – na podstawie wartości średnich parametrów próby w 1000 repetycjach, **max** – na podstawie wartości maksymalnych parametrów próby w 1000 repetycjach)

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 3. Wartości składki netto (j.p.) obliczone różnymi metodami dla populacji i wielkości próby $n = 200$

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 4. Wartości składki netto (j.p.) obliczone różnymi metodami dla populacji i wielkości próby n = 500

Źródło: obliczenia własne.

4. Wnioski

Z przeprowadzonych badań wynika, że dla rozkładu Pareto mediana z próby oszacowuje kwantyl rzędu 0,5 w populacji z mniejszym błędem, niż średnia arytmetyczna z próby oszacowuje wartość oczekiwaną w populacji. Wraz ze wzrostem liczebności próby wzrasta również współczynnik zróżnicowania w próbie.

Można również stwierdzić, że w przypadku rozkładu wielkości szkód typu Pareto zasada czystej składki i percentylu dają najbardziej stabilne (niezależne od wielkości próby) wartości składki netto. Najgorsze wyniki uzyskujemy za pomocą zasady wariancji. Im większa liczebność próby, tym bardziej zbliżone wartości składek netto szacowanych różnymi metodami na podstawie próby do składek szacowanych na podstawie parametrów populacji. Jedynie składka szacowana metodą wariancji różni się znacznie dla prób i populacji. Oznacza to, że w przypadku zasady wariancji ubezpieczyciel, szacując składkę netto na podstawie próby, będzie wyznaczał za małą składkę w stosunku do wielkości szkód w portfelu. W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC, przy portfelach składających się z dużej liczby różnych rodzajów ryzyka, wyznaczanie innych parametrów oprócz wartości oczekiwanej może być kłopotliwe. Z przeprowadzonych badań wynika, że próba losowa o liczebności 500 w przypadku rozkładu wielkości szkód typu Pareto zapewnia prawidłowe szacowanie składek netto.

Literatura

Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M., *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London 1994.

Gerber H.G., *Mathematical Risk Theory*, Homewood, Philadelfia 1979.

Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M., *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer, Boston 2001.

Ronka-Chmielowiec W., Kowalczyk P., Poprawska E., *Metody aktuarialne*, PWN, Warszawa 2006.

ESTIMATING NET PREMIUMS IN CAR LIABILITY INSURANCE FOR THE ASYMMETRIC DISTRIBUTION OF THE SIZE OF DAMAGES

Summary: The rules which are most often used to estimate net premiums in car liability insurance are the rules based on classical statistical measures. In the case of asymmetric distributions, estimating net premiums by means of location measures seems to be reasonable. The paper is an attempt to assess premiums determined in this way for the Pareto type distribution of the size of damages.