

**Ewa Dziawgo**

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

---

**ZMODYFIKOWANE OPCJE WSTECZNE  
O STAŁEJ CENIE REALIZACJI  
– ANALIZA WŁASNOŚCI**

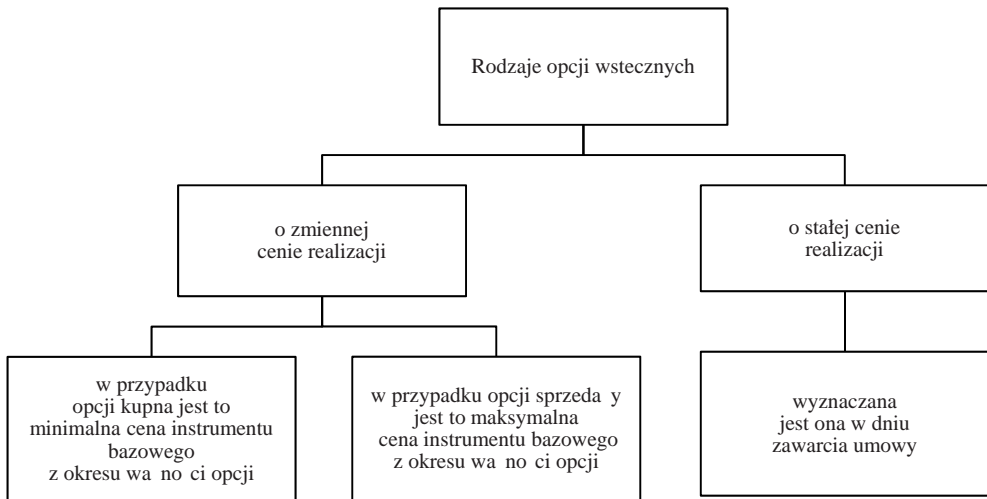
---

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono zagadnienia dotyczące zmodyfikowanych opcji wstecznych o stałej cenie realizacji: charakterystykę instrumentu, funkcję wypłaty, model wyceny, wpływ wybranych czynników na cenę analizowanych opcji. Ilustracja empiryczna zawarta w artykule przedstawiona jest na podstawie symulacji wyceny opcji walutowych wystawionych na EUR/PLN. Celem artykułu jest przedstawienie własności zmodyfikowanych opcji wstecznych o stałej cenie realizacji i porównanie kształtowania się cen opcji zwykłych, opcji wstecznych i zmodyfikowanych opcji wstecznych o stałej cenie realizacji.

**Słowa kluczowe:** cena realizacji opcji, opcje wsteczne.

## 1. Wstęp

Konsekwencją rosnącej zmienności warunków rynkowych jest poszukiwanie nowych metod i instrumentów finansowych, które umożliwiłyby skuteczniejsze zarządzanie ryzykiem rynkowym. W grupie instrumentów pochodnych opcje zajmują szczególne miejsce. Na ich atrakcyjność wpływa niesymetryczność praw i obowiązków nałożonych na strony transakcji [Hull 2002, s. 194; Tarczyński 2003, s. 149; Jajuga 2007, s. 73; Dziawgo 2003, s. 11]. Opcje wsteczne (ang. *lookback options*) należą do klasy opcji uwarunkowanych wartościami ekstremalnymi. Na wartość tych opcji ma wpływ ekstremalna cena instrumentu bazowego osiągnięta w okresie ważności opcji [Conze 1991, s. 1893; Goldman i in. 1979, s. 1111; Napiórkowski 2002, s. 82; Dziawgo 2007, s. 211]. Opcje wsteczne występują w obrocie na rynku pozagiełdowym. Rysunek 1 przedstawia podział opcji wstecznych ze względu na cenę wykonania.



Rys. 1. Podział opcji wstecznych ze względu na cenę realizacji opcji

Źródło: opracowanie własne.

## 2. Charakterystyka opcji wstecznych o stałej cenie realizacji

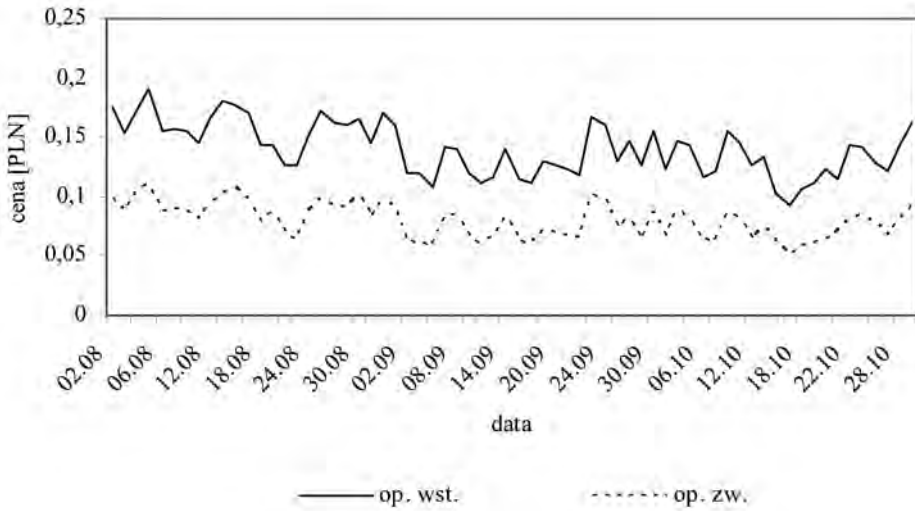
W przypadku opcji wstecznych o stałej cenie realizacji (ang. *fixed-strike lookback options*) cena wykonania jest wyznaczana w dniu zawarcia umowy. W dniu realizacji opcji nabywca wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji otrzymuje wypłatę, która równa jest różnicy między najwyższą ceną, którą osiągnął instrument bazowy w okresie ważności opcji, a ceną wykonania. Z kolei nabywca wstecznej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji otrzymuje wypłatę, która jest równa różnicy między ceną wykonania a najniższą ceną osiągniętą przez instrument bazowy w okresie ważności opcji.

Ze względu na ekstremalną cenę instrumentu bazowego, która jest uwzględniana w rozliczeniu kontraktu opcyjnego, nabywca wstecznej opcji o stałej cenie realizacji oczekuje w przyszłości:

- znacznego wzrostu ceny instrumentu bazowego – w przypadku opcji kupna,
- znacznego spadku ceny instrumentu bazowego – w przypadku opcji sprzedaży.

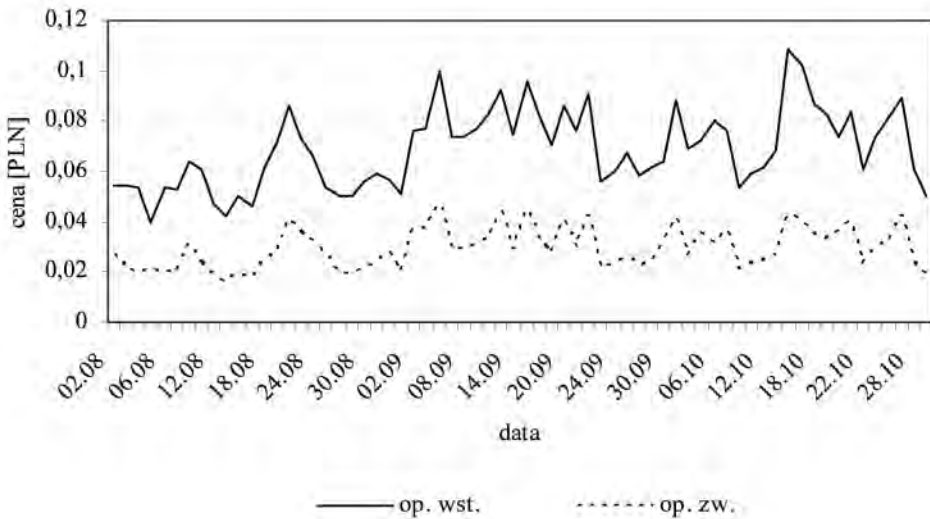
### Przykład 1

Rozważania dotyczą kształtowania się ceny zwykłych opcji i wstecznych opcji o stałej cenie realizacji. Na rysunku 2 przedstawiono kształtowanie się ceny zwykłej opcji kupna i wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji. Z kolei rysunek 3 jest ilustracją kształtowania się ceny zwykłej opcji sprzedaży i wstecznej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji. Opcje wystawione są na EUR/PLN. Termin wygaśnięcia opcji wynosi sześć miesięcy. Symulacja wyceny przeprowadzona jest dla okresu 2.08 – 29.10. 2010 r.



**Rys. 2.** Kształtowanie się ceny zwykłej opcji kupna (op. zw.) i wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji (op. wst.)

Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 3.** Kształtowanie się ceny zwykłej opcji sprzedaży (op. zw.) i wstecznej opcji sprzedaży (op. wst.) o stałej cenie realizacji

Źródło: opracowanie własne.

Z analizy kształtowania się cen rozpatrywanych opcji wynika, że:

- w porównaniu z opcjami zwykłymi, opcje wsteczne są znacznie droższe od opcji zwykłych,
- wzrost/spadek ceny instrumentu bazowego wpływa na wzrost/spadek ceny zwykłej opcji kupna oraz wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji,
- wzrost/spadek ceny instrumentu bazowego wpływa na spadek/wzrost ceny zarówno zwykłej opcji sprzedaży, jak i wstecznej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji.

Znaczne wahania cen opcji wstecznych oraz wpływ ekstremalnej ceny instrumentu bazowego na otrzymywany dochód z opcji wstecznych stwarzają nowe możliwości inwestycyjne z zastosowaniem tego instrumentu – szczególnie w warunkach dużej zmienności ceny instrumentu bazowego. Jednakże w porównaniu z opcjami zwykłymi wadą opcji wstecznych może być ich stosunkowo wysoka cena. Wprowadzenie do funkcji wypłaty opcji wstecznych o stałej cenie realizacji parametru  $f$ , przez który mnoży się ekstremalną cenę instrumentu bazowego, pozwala na obniżenie ceny analizowanych opcji wstecznych. Zmodyfikowane w ten sposób opcje wsteczne o stałej cenie realizacji nazywane są częściowymi opcjami wstecznymi o stałej cenie realizacji (ang. *partial fixed strike lookback options*) [Zhang 2001, s. 355].

### 3. Własności zmodyfikowanych opcji wstecznych o stałej cenie realizacji – analiza empiryczna

#### 3.1. Częściowe wsteczne opcje kupna o stałej cenie realizacji

Funkcja wypłaty częściowej – wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji wynosi:

$$w_c = \max[f \cdot M_{T_0} - K; 0], \quad (1)$$

gdzie:  $K$  – cena wykonania opcji,

$M_{T_0}$  – najwyższa cena instrumentu bazowego osiągnięta w okresie ważności opcji,

$f$  – parametr,  $0 < f \leq 1$ .

W przypadku, kiedy wartość parametru  $f$  wynosi 1, to wzór (1) przedstawia funkcję wypłaty zwykłej-wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji.

W sytuacji, kiedy  $K \geq f \cdot M_{T_0}$ , cena wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji wynosi [Zhang 2001, s. 356]:

$$C_t = f \cdot [e^{-q(T-t)} S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} KN(d_2)] + \frac{f \cdot \sigma^2}{2(r-q)} S_t \left[ - \left( \frac{f \cdot S_t}{K} \right)^{\frac{-2(r-q)}{\sigma^2}} e^{-r(T-t)} N(-\bar{d}_2) + e^{-q(T-t)} N(d_1) \right] \quad (2)$$

gdzie:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{f \cdot K}\right) + (r - q + 0,5\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t},$$

$$\bar{d}_2 = \frac{\ln\left(\frac{f \cdot K}{S_t}\right) + (r - q - 0,5\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad t \in [0; T],$$

$T$  – czas wygaśnięcia opcji,

$r$  – stopa procentowa wolna od ryzyka,

$q$  – stopa dywidendy,

$\sigma$  – zmienność ceny instrumentu bazowego,

$N(d)$  – dystrybuanta rozkładu normalnego, pozostałe oznaczenia są takie same jak we wzorze (1).

W przypadku, kiedy  $K < f \cdot M_{T_0}$ , cena wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji wynosi [Zhang 2001, s. 356]:

$$C_t = e^{-r(T-t)}(f \cdot M_{T_0} - K) + f \cdot [e^{-q(T-t)} S_t N(d_3) - e^{-r(T-t)} M_{T_0} N(d_4)] +$$

$$+ \frac{f \cdot \sigma^2}{2(r - q)} S_t \left[ -\left(\frac{S_t}{f \cdot M_{T_0}}\right)^{\frac{-2(r-q)}{\sigma^2}} e^{-r(T-t)} N(-\bar{d}_4) + e^{-q(T-t)} N(d_3) \right] \quad (3)$$

gdzie:

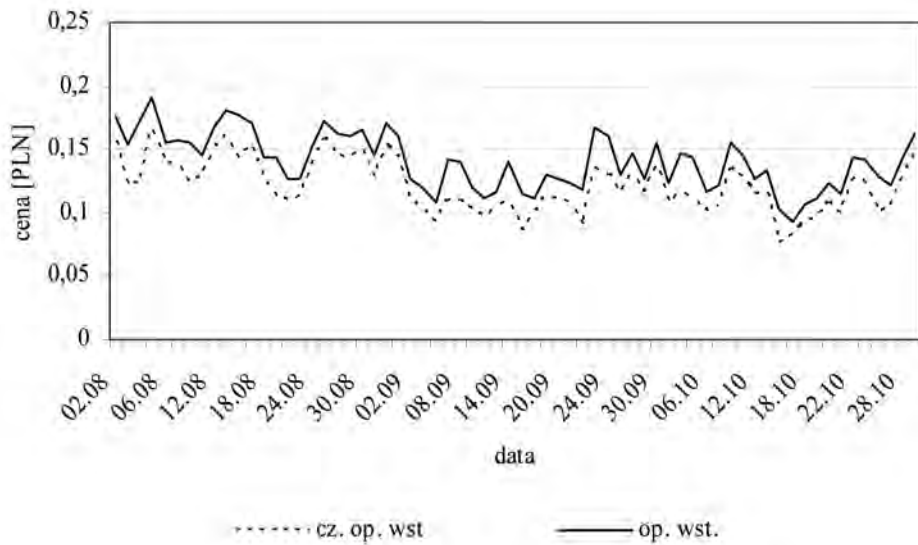
$$d_3 = \frac{\ln\left(\frac{f \cdot S_t}{M_{T_0}}\right) + (r - q + 0,5\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_4 = d_3 - \sigma\sqrt{T - t},$$

$$\bar{d}_4 = \frac{\ln\left(\frac{M_{T_0}}{f \cdot S_t}\right) + (r - q - 0,5\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

pozostałe oznaczenia są takie same jak we wzorze (2).

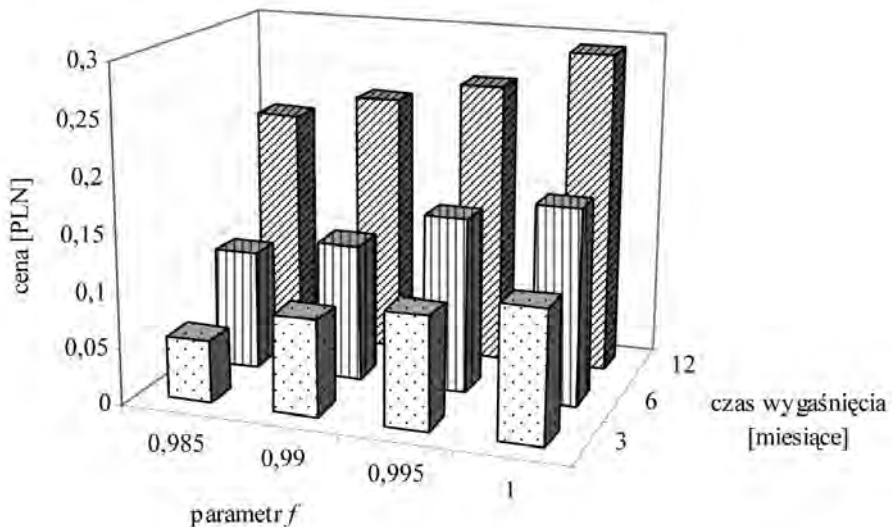
### Przykład 2

Na rysunku 4 przedstawiono kształtowanie się ceny zwykłej-wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji oraz częściowej-wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji z parametrem  $f = 0,995$ . Opcje wystawione są na EUR/PLN. Termin wygaśnięcia



**Rys. 4.** Kształtowanie się ceny zwykłej-wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji (op. wst.) oraz częściowej-wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji (cz. op. wst.) z parametrem  $f = 0,995$

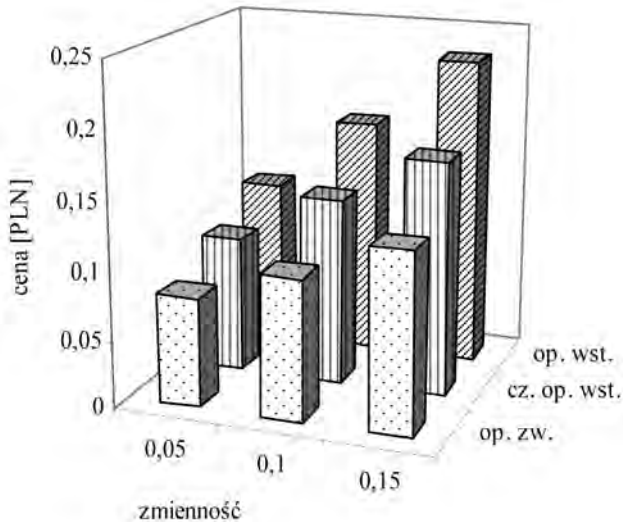
Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 5.** Wpływ parametru  $f$  oraz czasu wygaśnięcia na cenę częściowej wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji

Źródło: opracowanie własne.

opcji wynosi sześć miesięcy. Symulacja wyceny przeprowadzona jest dla okresu 2.08 – 29.10. 2010 r. Rysunek 5 jest ilustracją wpływu czasu wygaśnięcia oraz wartości parametru  $f$  na kształtowanie się ceny częściowych-wstecznych opcji kupna o stałej cenie realizacji. Natomiast na rys. 6 przedstawiono wpływ zmienności ceny instrumentu bazowego na cenę zwykłej opcji kupna, zwykłej-wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji oraz częściowej-wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji.



**Rys. 6.** Wpływ zmienności na cenę opcji kupna (zwykłej, zwykłej-wstecznej o stałej cenie realizacji oraz częściowej-wstecznej z parametrem  $f = 0.995$ )

Źródło: opracowanie własne.

Z analizy kształtowania się cen przedstawionych na powyższych wykresach wynikają następujące własności zmodyfikowanej opcji wstecznej o stałej cenie realizacji:

- częściowa-wsteczna opcja kupna jest tańsza od zwykłej-wstecznej opcji kupna,
- spadek parametru  $f$  wpływa na spadek ceny częściowej opcji kupna o stałej cenie realizacji,
- wzrost zmienności ceny instrumentu bazowego wpływa na wzrost ceny analizowanych opcji, przy czym znaczniejszy wzrost ceny występuje w przypadku opcji wstecznych,
- dla każdej wartości parametru  $f$ , opcje charakteryzujące się dłuższym terminem wygaśnięcia są droższe.

### 3.2. Częściowe wsteczne opcje sprzedaży o stałej cenie realizacji

Funkcja wypłaty wstecznej-częściowej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji wynosi:

$$w_p = \max[K - f \cdot m_{T_0}; 0], \quad (4)$$

gdzie:  $K$  – cena wykonania opcji,

$m_{T_0}$  – najwyższa cena instrumentu bazowego osiągnięta w okresie ważności opcji,

$f$  – parametr,  $f \geq 1$ .

Jeżeli wartość parametru  $f$  równa jest 1, to wzór (4) przedstawia funkcję wypłaty zwykłej-wstecznej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji.

W sytuacji, kiedy  $K \leq f \cdot m_{T_0}$ , cena wstecznej opcji kupna o stałej cenie realizacji wynosi [Zhang 2001, s. 356]:

$$P_t = f \cdot [-e^{-q(T-t)} S_t N(-d_1) + e^{-r(T-t)} K N(-d_2)] + \\ + \frac{f \cdot \sigma^2}{2(r-q)} S_t \left[ \left( \frac{f \cdot S_t}{K} \right)^{\frac{-2(r-q)}{\sigma^2}} e^{-r(T-t)} N(\bar{d}_2) - e^{q(T-t)} N(-d_1) \right] \quad (5)$$

gdzie:  $f \geq 1$ , pozostałe oznaczenia są takie same jak we wzorze (2).

W przypadku, kiedy  $K > f \cdot m_{T_0}$ , cena wstecznej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji wynosi [Zhang 2001, s. 356]:

$$P_t = e^{-r(T-t)} (K - f \cdot m_{T_0}) + f \cdot [-e^{-q(T-t)} S_t N(-d_5) + e^{-r(T-t)} m_{T_0} N(-d_6)] + \\ + \frac{f \cdot \sigma^2}{2(r-q)} S_t \left[ \left( \frac{S_t}{f \cdot m_{T_0}} \right)^{\frac{-2(r-q)}{\sigma^2}} e^{-r(T-t)} N(\bar{d}_6) - e^{q(T-t)} N(-d_5) \right] \quad (6)$$

gdzie:

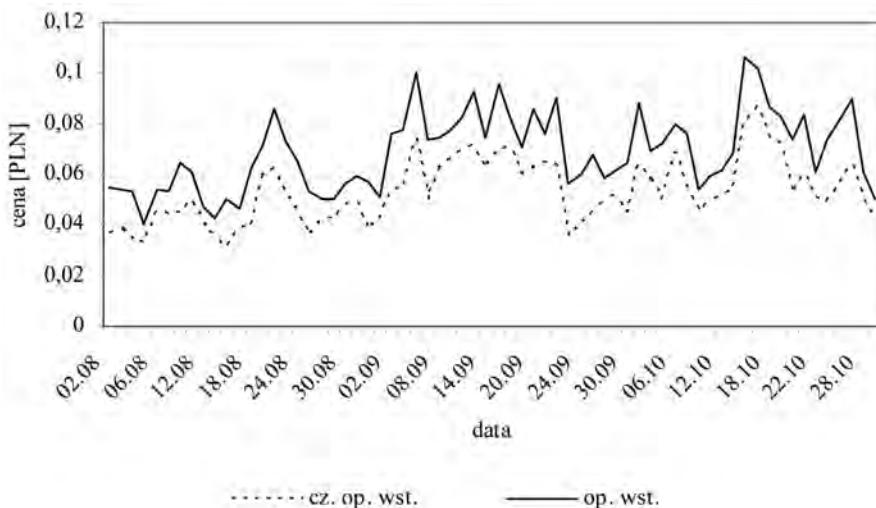
$$d_5 = \frac{\ln \left( \frac{f \cdot S_t}{m_{T_0}} \right) + (r - q + 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_6 = d_5 - \sigma\sqrt{T-t}, \\ \bar{d}_6 = \frac{\ln \left( \frac{m_{T_0}}{f \cdot S_t} \right) + (r - q - 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

pozostałe oznaczenia są takie same jak we wzorze (4).



### Przykład 3

Rozważania dotyczą kształtowania się ceny częściowej-wstecznej opcji sprzedaży. Rysunek 7 jest ilustracją kształtowania się ceny zwykłej-wstecznej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji oraz częściowej-wstecznej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji z parametrem  $f = 1,005$ . Opcje wystawione są na EUR/PLN. Symulacja wyceny przeprowadzona jest dla okresu 2.08 – 29.10. 2010 r. Termin wygaśnięcia opcji wynosi sześć miesięcy. Na rysunku 8 przedstawiono wpływ czasu wygaśnięcia oraz wartości parametru  $f$  na cenę częściowych opcji wstecznych o stałej cenie realizacji. Z kolei rys. 9 jest ilustracją wpływu zmienności ceny instrumentu bazowego na cenę zwykłej opcji sprzedaży, zwykłej-wstecznej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji oraz częściowej-wstecznej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji.

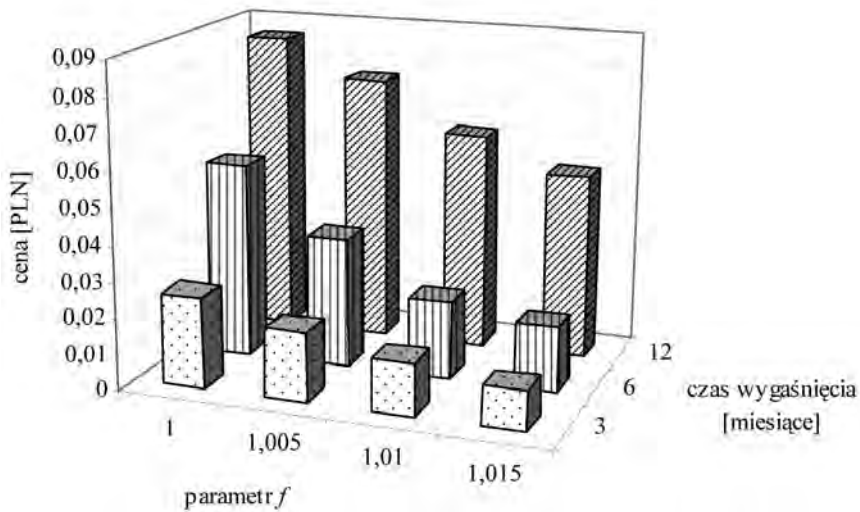


**Rys. 7.** Kształtowanie się ceny zwykłej-wstecznej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji oraz wstecznej-częściowej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji z parametrem  $f=1,005$

Źródło: opracowanie własne.

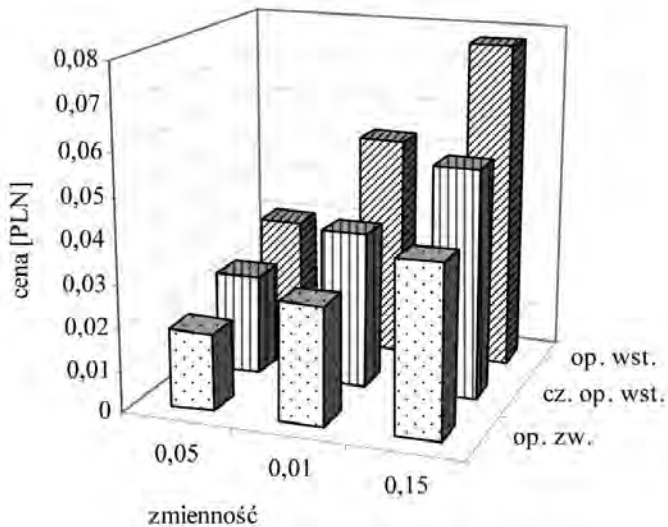
Na podstawie analizy kształtowania się cen wynikają następujące własności zmodyfikowanej wstecznej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji:

- częściowa-wsteczna opcja sprzedaży jest tańsza od zwykłej-wstecznej opcji sprzedaży,
- wzrost parametru  $f$  wpływa na spadek ceny częściowej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji,
- wzrost zmienności ceny instrumentu bazowego wpływa na znacznie większy wzrost ceny opcji wstecznych,
- dla każdej wartości parametru  $f$  opcje, które charakteryzują się dłuższym terminem wygaśnięcia, są droższe.



Rys. 8. Wpływ parametru  $f$  oraz czasu wygaśnięcia na cenę częściowej wstecznej opcji sprzedaży o stałej cenie realizacji

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 9. Wpływ zmienności na cenę opcji sprzedaży (zwykłej, zwykłej-wstecznej o stałej cenie realizacji oraz częściowej-wstecznej z parametrem  $f=1,005$ )

Źródło: opracowanie własne.

## 4. Podsumowanie

Wartość opcji wstecznych zależy od ekstremalnej ceny instrumentu bazowego, która została osiągnięta w okresie ważności opcji. W warunkach niestabilnego otoczenia zmodyfikowane opcje wsteczne o stałej cenie realizacji przez stwarzaną możliwość doboru wartości parametru  $f$  stanowią szczególnie instrument zarządzania ryzykiem. Parametr  $f$  jest czynnikiem, który w znaczny sposób wpływa na cenę częściowych opcji wstecznych, a tym samym na koszt konstruowanych strategii inwestycyjnych wykorzystujących ten rodzaj opcji w transakcjach finansowych. Wybór częściowej opcji wstecznej z odpowiednią wartością parametru  $f$ , czasem wygaśnięcia i ceną wykonania pozwala na kształtowanie poziomu zabezpieczenia do oczekiwanej zmienności ceny instrumentu bazowego.

Na polskim rynku finansowym w ofercie niektórych banków występują już wsteczne-zwykłe opcje walutowe. Wprowadzenie do obrotu częściowych opcji wstecznych o stałej cenie realizacji dałoby firmom profesjonalnie stosującym opcje w transakcjach finansowych możliwość kształtowania nowych profili wypłat z inwestycji, przyczyniających się do poprawy wyników finansowych. Wprowadzenie do obrotu zmodyfikowanych opcji wstecznych zwiększyłoby atrakcyjność polskiego rynku finansowego.

## Literatura

- Conze A., *Path dependent options: The case of lookback options*, „The Journal of Finance” 1991, vol. XLVI.
- Dziawgo E., *Analiza własności opcji wstecznych*, [w:] P. Karpuś, J. Węclawski (red.), *Problemy rozwoju rynku finansowego w aspekcie wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie, Lublin 2007.
- Dziawgo E., *Modele kontraktów opcyjnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, Toruń 2003.
- Goldman B.M., Sosin H.B., Gatto M.A., *Path dependent options: “Buy at the low, sell at the high”*, „The Journal of Finance” 1979, vol. XXXIV.
- Hull J. C., *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall International, 2002.
- Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- Napiórkowski A., *Charakterystyka, wycena i zastosowanie wybranych opcji egzotycznych*, NBP, Departament Analiz i Badań, Warszawa 2002.
- Tarczyński W., *Instrumenty pochodne na rynku kapitałowym*, PWE, Warszawa 2003.
- Zhang P.G., *Exotic Options. A Guide to Second Generation Options*, World Scientific, Singapore 2001.

## **MODIFIED FIXED STRIKE LOOKBACK OPTIONS – ANALYSIS OF THE PROPERTIES**

**Summary:** The article presents the issues connected with the modified fixed strike lookback options: instrument characteristics, payoff function, pricing model, the influence of selected factors on the option price. The empirical data included in the article are presented on the basis of the pricing simulations of the options on EUR/PLN. The aim of the article is to present the properties of the modified fixed strike lookback options as well as to compare the pricing of standard, lookback and modified lookback options.