

**Na prawach rękopisu**

Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego  
Politechniki Wrocławskiej

**Modelowanie belek trójwarstwowych  
o grubych nakładkach drewnianych**

**Raport serii PRE nr 9/2017**

**Praca doktorska**

Rafał Idzikowski

Słowa kluczowe:  
Mechanika,  
wrażliwość projektowa i niezawodność belki,  
konstrukcje drewniane,  
badania eksperymentalne

Promotor: prof. dr inż. Paweł Śniady

Wrocław, czerwiec 2018

Autor:

mgr inż. Rafał Idzikowski

.....

Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu  
Wydział Inżynierii Kształtowania Środowiska i Geodezji  
Instytut Budownictwa  
Pl. Grunwaldzki 24, 50-363 Wrocław  
tel. +48 889 921 923  
e-mail: rafal.idzikowski@upwr.edu.pl

Raport został złożony w Redakcji Wydawnictw Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej w lutym 2018 r.

Lista odbiorców:

Recenzenci	2 egz.
Promotor	1 egz.
Autor	2 egz.
CWiINT PWr	1 egz.
Archiwum W-2	2 egz.

---

Razem 8 egz.

*Składam serdeczne podziękowania Panu Profesorowi Pawłowi Śniademu  
za wyjątkową, chwilami ponadludzką, cierpliwość,  
wrozumiałość  
i rzadko obecnie spotykaną życzliwość,  
którymi obdarzał mnie na co dzień w trakcie realizacji tej rozprawy doktorskiej.  
Pragnę podziękować żonie Katarzynie za jej uznanie dla wysiłku,  
poniesionego podczas pracy nad rozprawą doktorską.  
Dziękuję Rodzicom za dopingowanie mnie do pracy.  
Dziękuję  
dr. inż. Robertowi Świerzko z Uniwersytetu Przyrodniczego we Wrocławiu  
za pomoc udzieloną podczas badań laboratoryjnych,  
dr. Wojciechowi Młockowi z Uniwersytetu Rolniczego im. Hugona Kołłątaja w Krakowie  
oraz  
dr. Rafałowi Topolnickiemu z Uniwersytetu Wrocławskiego  
za pomoc w realizacji tej rozprawy doktorskiej.  
Dziękuję Koleżankom i Kolegom  
z Instytutu Budownictwa Uniwersytetu Przyrodniczego we Wrocławiu za wszystkie uwagi  
i komentarze, dzięki którym podniosła się jakość przedmiotowej rozprawy doktorskiej.*



## Spis treści

Spis treści .....	1
Wykaz podstawowych oznaczeń.....	3
1. Wstęp.....	5
2. Cel i zakres pracy .....	13
3. Badania doświadczalne belki trójwarstwowej.....	16
3.1. Opis eksperymentu .....	16
3.2. Prace przygotowawcze i montażowe belek trójwarstwowych.....	16
3.3. Oznaczenie parametrów wytrzymałościowych drewna .....	20
3.3.1. Oznaczenie wytrzymałości drewna na zginanie .....	20
3.3.2. Oznaczenie ogólnego modułu sprężystości przy zginaniu .....	25
3.3.3. Oznaczenie modułu odkształcenia postaciowego metodą stałej rozpiętości ...	30
3.4. Oznaczenie parametrów wytrzymałościowych rdzenia poliuretanowego .....	30
3.4.1. Oznaczenie wytrzymałości rdzenia poliuretanowego na ścinanie.....	30
3.4.2. Oznaczenie wytrzymałości rdzenia poliuretanowego na ściskanie .....	43
3.4.3. Oznaczenie modułu sprężystości pianki poliuretanowej przy ściskaniu .....	49
3.4.4. Oznaczenie wytrzymałości rdzenia poliuretanowego na rozciąganie .....	54
3.4.5. Oznaczenie modułu sprężystości rdzenia poliuretanowego przy rozciąganiu.	56
3.5. Rezultaty badań laboratoryjnych belek trójwarstwowych .....	61
4. Modele teoretyczne belek trójwarstwowych .....	72
4.1. Wprowadzenie.....	72
4.2. Belka Eulera-Bernoulliego .....	73
4.3. Model belki sandwiczowej z uwzględnieniem ścinania rdzenia i nakładek (Uogólniony model zig-zag) .....	77
4.3.1. Równania różniczkowe belki sandwiczowej .....	77
4.4. Wyznaczenie sił przekrojowych i naprężeń dla belki z uwzględnieniem ścinania nakładek	86
4.5. Model zig-zag.....	91
4.6. Układ dwóch sprzężonych belek.....	93
5. Analiza numeryczna opracowanych modeli teoretycznych .....	98
5.1. Analiza numeryczna modelu Eulera-Bernoulliego .....	98
5.2. Analiza numeryczna modelu Zig-Zag.....	104
5.3. Analiza numeryczna modelu Zig-Zag z uwzględnieniem ścinania w nakładkach	112
5.4. Analiza numeryczna modelu dwóch sprzężonych belek.....	122

6.	Belki warstwowe o podatnych połączeniach warstw .....	123
6.1.	Belka dwuwarstwowa o podatnym połączeniu warstw .....	123
6.2.	Belka trójwarstwowa o podatnych połączeniach warstw .....	129
7.	Probabilistyczna analiza belki sandwiczowej .....	138
7.1.	Probabilistyczna analiza belki trójwarstwowej dla modelu Zig-Zag.....	138
7.2.	Praktyczne zastosowanie problematyki niezawodności przy projektowaniu belki trójwarstwowej.....	142
8.	Niezawodność belki sandwiczowej.....	144
8.1.	Wprowadzenie .....	144
8.2.	Prosty wskaźnik niezawodności. Indeks Cornella .....	144
8.3.	Metoda niezawodności momentów pierwszego i drugiego rzędu (FORM). Indeks Hasofera-Linda.....	146
8.4.	Niezawodność belki sandwiczowej .....	148
8.5.	Praktyczne zastosowanie problematyki niezawodności przy projektowaniu belki trójwarstwowej.....	150
9.	Wnioski końcowe .....	153
	Spis literatury .....	157
	Spis norm .....	164
	Streszczenie.....	165
	Summary .....	168
	Załącznik 1 .....	170
	Załącznik 2.....	171

## Wykaz podstawowych oznaczeń

### Symbole łacińskie

$A_f$	Pole przekroju poprzecznego okładziny
$a_i$	Wymiar pionowy, grubość, $i$ -tej warstwy
$b$	Szerokość próbki lub belki trójwarstwowej
$E_c$	Moduł Younga materiału rdzenia belki trójwarstwowej
$E_f$	Moduł Younga materiału okładziny belki trójwarstwowej
$E_{m,g}$	Ogólny moduł sprężystości drewna
$E_{m,gi}$	Ogólny moduł sprężystości pojedynczej próbki drewna
$\overline{E_{m,g}}$	Średni ogólny moduł sprężystości drewna
$f$	Wysokość przekroju okładziny
$\overline{f_m}$	Średnia wytrzymałość drewna na zginanie
$\overline{f_{m,i}}$	Wytrzymałość na zginanie pojedynczej próbki drewna o indeksie $i$
$G_c$	Moduł Kirchhoffa rdzenia belki trójwarstwowej
$G_f$	Moduł Kirchhoffa okładziny belki trójwarstwowej
$H$	Całkowita wysokość belki trójwarstwowej
$H()$	Funkcja jednostkowa Heaviside'a
$h$	Wysokość przekroju rdzenia
$I_i$	Moment bezwładności nakładki o indeksie $i$
$I_{yf}$	Moment bezwładności okładziny belki trójwarstwowej względem osi $y$ przekroju
$i$	Numer indeksu
$k_0$	Współczynnik sprężystości warstwy rdzenia
$k_1$	Sztywność na ścinanie warstwy rdzenia
$k_s$	Sztywność połączenia między warstwami składowymi elementu
$s_x$	Odchylenie standardowe wytrzymałości
$L$	Rozpiętość przęsła próbki
$m$	Wartość średnia, oczekiwana
$M$	Moment zginający
$M_{f,i}$	Moment zginający w nakładce belki trójwarstwowej
$N$	Siła osiowa
$N_i$	Siła osiowa w nakładce belki trójwarstwowej o indeksie $i$
$n$	Liczba wyrazów w szeregu
$P$	Obciążenie siłą skupioną
$p_n$	Uogólnione obciążenie belki trójwarstwowej
$p_f$	Prawdopodobieństwo wystąpienia awarii konstrukcji
$q$	Obciążenie równomiernie rozłożone
$S_y$	Moment styczny odcinanej części przekroju
$s_x$	Odchylenie standardowe wielkości fizycznej

$U$	Ugięcie próbki
$u$	Przemieszczenie próbki
$u_i$	Przesunięcie poziome nakładki o indeksie $i$
$V$	Siła tnąca
$V_i$	Siła tnąca w nakładce o indeksie $i$ belki trójwarstwowej
$V_{cv}$	Siła tnąca w rdzeniu belki trójwarstwowej
$V_x$	Współczynnik zmienności wielkości fizycznej
$W$	Wskaźnik wytrzymałości przekroju
$w$	Przemieszczenie pionowe próbki
$x$	Oś podłużna elementu lub wartość rzędnej po tej osi
$x_0$	Punkt przyłożenia siły skupionej do belki trójwarstwowej
$y$	Oś pozioma przekroju poprzecznego elementu lub wartość rzędnej po tej osi
$y_n$	Współczynnik
$z$	Oś pionowa przekroju poprzecznego elementu lub wartość rzędnej po tej osi

### Symbole greckie

$\beta$	Współczynnik
$\beta_C$	Wskaźnik niezawodności
$\gamma$	Wielkość bezwymiarowa
$\gamma$	Kąt wzajemnego poziomego przesunięcia nakładek
$\delta()$	Delta Diraca
$\zeta$	Połowa średniej harmoniczej sztywności podłużnej nakładek
$\kappa$	Współczynnik ścinania przekroju poprzecznego belki
$\sigma_f$	Naprężenia normalne w nakładkach
$\sigma_{M,i}$	Naprężenia normalne od momentów zginających w nakładce o indeksie $i$
$\sigma_{N,i}$	Naprężenia normalne od siły osiowej w nakładce o indeksie $i$
$\sigma$	Odchylenie standardowe wielkości fizycznej
$\tau$	Wytrzymałość pianki poliuretanowej na ścinanie
$\tau_c$	Naprężenia styczne na styku rdzenia i nakładki
$\tau_f$	Naprężenia styczne w nakładkach
$\tau_i$	Naprężenia styczne w nakładce o indeksie $i$
$\tau_\gamma$	Naprężenia styczne na styku rdzenia i nakładki od wzajemnego poziomego przesunięcia nakładek
$\tau_v$	Naprężenia styczne na styku rdzenia oraz nakładki od wzajemnego pionowego przesunięcia nakładek
$\upsilon$	Kąt obrotu nakładek od ścinania w nakładkach
$\varphi$	Kąt obrotu nakładek od przemieszczeń pionowych nakładek
$\varphi_n$	Współczynnik
$\psi$	Kąt wzajemnego przesunięcia nakładek względem płaszczyzny pionowej
$\psi_n$	Współczynnik



### 1. Wstęp

Konstrukcje sandwichowe to pojęcie odnoszące się do różnorodnych konstrukcji trójwarstwowych. Ich cechą charakterystyczną jest to, że warstwy zewnętrzne, zwane okładzinami, wykonywane są z materiałów o wyraźnie wyższych parametrach wytrzymałościowych w porównaniu do parametrów wytrzymałościowych warstwy wewnętrznej, zwanej rdzeniem. Ze względu na bezsporne zalety, takie jak korzystny stosunek wytrzymałości do wagi tych konstrukcji, praktycznie nieograniczoną możliwością kształtowania ich geometrii oraz dobrą izolacyjność cieplną i akustyczną wspólnie znajdują one szerokie zastosowanie w wielu obszarach budownictwa i inżynierii. Elementy w postaci płyt trójwarstwowych stosowane są w lotnictwie, aeronautyce czy przemyśle stoczniowym jako panele zewnętrzne w konstrukcjach samolotów i statków. Spotkać je można powszechnie również w budownictwie, gdzie wykorzystywane są jako elementy konstrukcji przegród budowlanych, także o dużych wymaganiach w zakresie termoizolacyjności.

W ciągu ostatnich kilkunastu lat układy trójwarstwowe uległy rozwinięciu pod względem materiałowym i wytrzymałościowym. Przeanalizowano przydatność układów trójwarstwowych w wielu wariantach, odmiennych pod względem konstrukcji i wykorzystywanych materiałów okładzin oraz rdzenia. Aktualnie okładziny konstruowane są jako cienkościennie warstwy metalowe (blachy), kompozytowe a nawet szklane. Rdzenie natomiast spotykane są w wariantach metalowych (spieniony metal), poliuretanowych (pianki), drewnianych (drewno balsa) czy układów plastra miodu. Wiele z tych innowacji zostało zastosowanych w produkcji przemysłowej przedmiotowych układów. Unowocześnienie tych rozwiązań nie ominęło także kwestii połączenia poszczególnych części składowych.

Przegląd literaturowy dokonany w związku z realizacją przedmiotowej rozprawy doktorskiej wykazał, że konstrukcje trójwarstwowe z drewnianymi okładzinami nie są obecnie popularnym przedmiotem analiz teoretycznych i doświadczalnych. W związku z tym zdecydowano się zaproponować wykorzystanie drewna sosnowego do skonstruowania okładzin jednoprzęsłowych belek trójwarstwowych. Wybór tego materiału konstrukcyjnego podyktowany był kilkoma przesłankami. Najważniejszą wydaje się być stała dostępność drewna w Polsce i Europie ze względu na naturalne odnawianie się zasobów tego materiału oraz duże powierzchnie lasów. Jest to także materiał bardzo wytrzymały, szczególnie w relacji do jego wagi. W tym kontekście wypada ono nawet korzystniej w porównaniu do stali. Drewno jest także materiałem tanim, co jest niewątpliwie ważne ze względów ekonomicznych.

Aby zachować niską wagę konstrukcji sandwichowej, zapewniając jednocześnie odpowiednio wysoką wytrzymałość, zdecydowano o wyborze pianki poliuretanowej na materiał rdzenia. Znana z produkcji płyt warstwowych firma Kingspan przygotowała na zlecenie autora jednolite panele piankowe o uzgodnionej wcześniej geometrii.

Fakt, że analizowane belki trójwarstwowe były montowane z elementów składowych z dwóch odmiennych materiałów, spowodował logiczne ukierunkowanie na problem mechanizmów zniszczenia takich konstrukcji. Opisywana w literaturze mnogość procesów niszczących jest zależna od schematu statycznego konstrukcji, sposobu obciążenia, geometrii przekroju i właściwości wykorzystanych materiałów.

W publikacji [130], w jej drugim rozdziale, autorzy przedstawili cztery zasadnicze mechanizmy zniszczenia jednoprzęsłowych, wolnopodpartych belek sandwichowych z kompozytowymi okładzinami i piankowym, poliuretanowym rdzeniem.

Pierwszy z nich określono jako mikrowyboczenie okładzin (*microbuckling of composite face sheet*) w miejscu, gdzie przykładane było obciążenie skupione. Zdaniem autorów artykułu do mikrowyboczenia okładziny dochodzi wtedy, gdy naprężenia osiowe w okładzinie ściskanej osiągają pewną wartość nośności tej warstwy na mikrowyboczenie  $\sigma_f$  (*face sheet microbuckling strength*). Wykazano też, że na wstępnym etapie procesu projektowania można wykorzystać nośność na mikrowyboczenie  $\sigma_f$  do określenia wartości siły niszczącej belkę sandwichową.

Drugi mechanizm zniszczenia belki sandwichowej został przedstawiony jako falowanie lub marszczenie się warstwy okładziny (*face wrinkling*) w otoczeniu przyłożonego obciążenia skupionego. Autorzy zdefiniowali ten mechanizm jako lokalną, sprężystą niestateczność na skutek wyboczenia, ujawniającą się w postaci krótkich fal górnej okładziny. Z uwagi na opór, jaki daje materiał rdzenia belki sandwichowej, powstające fale skierowane są w kierunku od rdzenia. Przy czym zwrócono też uwagę, że długość takiej fali może zależeć od materiału rdzenia. Sformułowano prostą zależność na wartość siły skupionej wywołującej falowanie okładziny.

W przypadku rdzenia o przekroju w postaci plastra miodu nie stanowi on ciągłego podparcia dla obciążonego pasa. W takiej sytuacji długość fali jako odkształcenia okładziny jest powiązana z rozmiarem komórki rdzenia. Belki sandwichowe skonstruowane z pianek poliuretanowych nie podlegają zdaniem autorów tej regule.

Trzeci mechanizm zniszczenia belki sandwichowej związany jest ze ścinaniem rdzenia (*core shear*). Zakłada się, że rdzeń ulega zniszczeniu na skutek przekroczenia jego nośności na ścinanie  $\tau_c$ . Podano zależność na wartość siły skupionej wywołującej zniszczenie rdzenia na skutek ścinania. Wyrażenie to uwzględnia wyłącznie parametry związane z rdzeniem.

W przypadku belek z okładzinami metalowymi zaobserwowano powstawanie w nich przegubów plastycznych. Ta plastyczna wytrzymałość okładzin na zginanie powodowała wzrost wartości obciążenia niszczącego. Jednak fakt ten okazuje się prawdziwy tylko w przypadku cienkich warstw zewnętrznych. Dla grubszych warstw zewnętrznych, o dużej sztywności, plastyczne ścinanie rdzenia jest powiązane ze sprężystym zginaniem okładzin.

Czwarty mechanizm zniszczenia związany jest ze zjawiskiem wgniecenia okładziny w miejscu przyłożenia obciążenia skupionego (*indentation*). Autorzy wykazali, że sposób uwzględnienia tego zjawiska w rozważaniach analitycznych zmieniał się na przestrzeni lat. Początkowo, do wyprowadzenia zależności na obciążenie wywołujące wgniecenie przyjmowano, że okładziny belki sandwichowej zachowują się jak belki sprężyste, a rdzeń jako sprężyste podłoże. Niektórzy zakładali, że obciążenie niszczące jest związane z uplastycznieniem rdzenia, lecz odrzucali wpływ wytrzymałości okładzin na wielkość wgniecenia. Wyrażali je jako iloczyn wytrzymałości na ściskanie rdzenia przez powierzchnię obciążenia. O ile podejście to mogło być uznawane za słuszne dla belek o cienkich okładzinach, o tyle dla konstrukcji o grubych nakładkach dawało błędne rezultaty.

Natomiast autorzy publikacji, analizując problem wgniecenia jako mechanizmu zniszczenia, założyli dwa modele belki sandwichowej. Pierwszy traktuje rdzeń jako materiał sztywno plastyczny. W drugim zaś przyjęto materiał rdzenia jako sprężysto plastyczny. Wyprowadzono następnie równania opisujące wielkość siły, wywołującej przedmiotowy sposób zniszczenia elementu.

W rozdziale 7 książki [149] autor zidentyfikował osiem mechanizmów zniszczenia elementu sandwichowego.

Pierwszy z nich dotyczył uplastycznienia lub zarysowania okładziny pod wpływem naprężeń ściskających lub rozciągających wywołanych zginaniem (*face yielding/fracture*). Autor przedstawił formułę na naprężenie niszczące okładzinę dla obu możliwych przypadków.

Drugi model dotyczył zniszczenia belki na skutek ścięcia materiału rdzenia (*core shear failure*). Podkreślony został fakt, że rdzeń w elementach zginanych jest przede wszystkim poddany ścinaniu, oraz że w praktyce przenosi niemal całe obciążenie poprzeczne. Następnie przedstawiona została formuła na maksymalne naprężenia tnące w rdzeniu.

Zniszczenie elementu sandwiczowego na skutek marszczenia się okładzin (*face wrinkling*) może, według autora, ujawnić się podczas wyboczenia przy ściskaniu, w przypadku wystąpienia ściskania w okładzinie przy zginaniu lub podczas wystąpienia obu wariantów jednocześnie.

Kolejny przypadek został zdefiniowany jako utrata stateczności ogólnej związanej z wyboczeniem (*general buckling*). Autor stwierdza, że samo wyboczenie elementu poddanego ściskaniu nie musi doprowadzić do zniszczenia jego struktury, niemniej jednak skutkiem zaistnienia zjawiska może być spadek nośności elementu. W związku z tym przedstawione zostało równanie siły krytycznej, wywołującej zjawisko wyboczenia konstrukcji sandwiczowej.

Dodatkowo, w odniesieniu do ściskanych konstrukcji sandwiczowych, wyróżniono przypadek zniszczenia elementu poprzez zgniecenie przekroju przy ścinaniu (*shear crimping*). Zjawisko to można zaobserwować jako rezultat znacznego wychylenia elementu ze swojej płaszczyzny wskutek wyboczenia, kiedy pojawiają się duże siły poprzeczne. Zniszczenie występuje dla przekroju, w którym siły poprzeczne osiągają największą wartość na długości przęsła.

W przypadku konstrukcji trójwarstwowych z rdzeniem z materiału o strukturze plastra miodu często występującym zjawiskiem jest wgniecenie lub też marszczenie cienkościennej okładziny na powierzchni pomiędzy komórkami struktury rdzenia (*face dimpling*). Wyprowadzona została formuła na naprężenie wywołujące to zjawisko.

Kolejną formą zniszczenia elementu sandwiczowego opisaną w publikacji było wgniecenie materiału rdzenia przy obciążeniu elementu siłą skupioną (*core indentation*). Autor zakłada przy tym, że takiego zjawiska można uniknąć rozkładając obciążenie skupione na odpowiednio dużą powierzchnię okładziny, obliczaną jako iloraz siły skupionej przez wytrzymałość materiału rdzenia na ściskanie.

Konstrukcje warstwowe z podatnym rdzeniem mogą ulec zniszczeniu pod obciążeniem dynamicznym, wywołującym drgania elementu (*vibration*). Zaleca się więc, aby unikać obciążeń wywołujących drgania o częstotliwości zbliżonej do częstotliwości drgań własnych.

Monografia [21] w kwestii mechanizmów zniszczenia konstrukcji sandwiczowej szczególnie nacisk kładzie na omówienie problemu zniszczenia połączenia między okładziną a rdzeniem (*face/core debond*). W rozdziale 9 autor wyróżnia trzy najważniejsze warianty zachowania się połączenia. W przypadku okładzin wykonanych na bazie tworzyw sztucznych możliwa jest ich delaminacja (*face delamination*). Zarysowaniu może ulec także materiał rdzenia w pobliżu połączenia z okładziną (*core failure*). Wreszcie trzecim możliwym mechanizmem zniszczenia jest zniszczenie połączenia między okładziną a rdzeniem (*face/core interface failure*). W dalszej części rozdziału 9 autor zaprezentował teorię oraz rozwiązania analityczne związane z mechaniką powstawania oraz propagacji rys w strefie kontaktu okładziny i rdzenia.

W artykule [123] zaprezentowano wyniki badań stalowego elementu sandwiczowego z rdzeniem o przekroju w kształcie litery „Y”. Stalowe cienkościenne okładziny zostały połączone z rdzeniem poprzez spawanie. Dla porównania przebadano także belki z rdzeniem

w postaci spienionego metalu. Badania doświadczalne oraz analizy numeryczne wykazały, że możliwe jest wystąpienie trzech modeli zniszczenia: ścięcie rdzenia, uplastycznienie stalowej okładziny lub wgniecenie rdzenia. Odnosząc się do cienkościennych konstrukcji sandwiczowych stwierdzono, że w przypadku belek z rdzeniem o niskiej wytrzymałości na ścinanie (na przykład spienionego metalu) bardziej prawdopodobne jest wystąpienie dwóch pierwszych mechanizmów. Jednocześnie autorzy publikacji zwrócili uwagę, że niska wytrzymałość na ściskanie wybranych rdzeni powoduje, iż uplastycznienie pasa nie będzie decydujące z punktu widzenia projektowania takiego elementu. W takim przypadku można zauważyć rozkład deformacji pasa na znacznej jego powierzchni. W związku z tym redukcja koncentracji naprężeń w pobliżu punktu obciążenia jest zjawiskiem pozytywnym, które zdaniem autorów, może zwiększyć wytrzymałość badanych struktur.

Publikacja [146] dotyczy badania belki sandwiczowej pod obciążeniem statycznym i dynamicznym. Opisane tu próbki o rdzeniu ze spienionego aluminium oraz cienkościennych aluminiowych okładzin podlegały trzem sposobom zniszczenia.

Pierwszy, najrzadziej występujący, związany był ze zniszczeniem połączenia między okładziną a rdzeniem.

Częściej występował mechanizm zniszczenia okładzin na skutek powstania przegubów plastycznych, co widoczne było szczególnie w rozwiązaniach z rdzeniem znacznej grubości. W tych przypadkach, w pierwszej kolejności obserwowano mechanizm wgniecenia rdzenia (*indentation*), który następnie przechodził w mechanizm uplastycznienia okładzin.

Belki sandwiczowe wykonane z tych samych materiałów, lecz o grubszych i wytrzymalszych nakładkach, ulegały zniszczeniu poprzez ścięcie materiału rdzenia.

W rozdziale czwartym przytoczonej publikacji zaprezentowano także mapy mechanizmów zniszczenia (*failure mode map*) jako relację między grubością nakładek i rdzenia oraz rozpiętością przęsła próbki a rodzajem decydującego o zniszczeniu próbki zjawiska.

Inne rozwiązanie belki wielowarstwowej, w której wykorzystano laminaty wzmocnione włóknem szklanym jako okładziny oraz pianę fenolową jako rdzeń, zostało przedstawione w publikacji [1]. Autorzy przebadali serie próbek, poddając je czteropunktowemu zginaniu oraz zakładając kilka różnych odległości skrajnej siły skupionej względem właściwej podpory (*shear span to depth ratio*; „ $a/d$ ”). Zidentyfikowano dwa zasadnicze mechanizmy zniszczenia. Pierwszy związany był ze ścięciem rdzenia. Drugi objawiał się uszkodzeniem ściskanej okładziny.

W przypadku przebadanych belek sandwiczowych obserwowane zniszczenie konstrukcji różniło się w funkcji wskaźnika „ $a/d$ ”. Przy krótszym przęsle o uszkodzeniu decydowało ścięcie materiału rdzenia bez jednoczesnej awarii zewnętrznej okładziny lub połączenia między okładziną a rdzeniem.

Dla belek o wskaźniku „ $a/d$ ” równym 0,55 ujawniał się mechanizm ścinania przy ścisaniu rdzenia (*shear-compression failure*). Dla belek o wskaźniku „ $a/d$ ” równym 1,66 zniszczenie polegało na ukośnym ścięciu rdzenia bez uszkodzenia połączenia pomiędzy warstwą zewnętrzną a rdzeniem. Przy większej rozpiętości przęsła oraz wskaźnikach „ $a/d$ ” o wartościach 3,05 oraz 4,5 oprócz ścinania rdzenia, na skutek redystrybucji sił, obserwowano zniszczenie połączenia między rdzeniem a dolną okładziną. Dla przyjętych wskaźników równych 7,22 oraz 10,0 mechanizm zniszczenia belek polegał na odspojeniu się pasa ściskanego od rdzenia i jego wyboczeniu. Jednocześnie autorzy podkreślili fakt, że w tym przypadku rdzeń belki pozostał nienaruszony.

Kolejną pozycją dotyczącą rozwiązań cienkościennych w konstrukcjach sandwichowych jest praca [91]. Belki o przekroju prostokątnym poddawano czteropunktowemu zginaniu w kierunku prostopadłym, jak i równoległym do powierzchni łączących okładziny z rdzeniem. Część belek skonstruowana była poprzez połączenie warstwami kilku pojedynczych elementów, tworząc wielowarstwowe struktury.

W rozdziale trzecim tej publikacji autorzy zaprezentowali rezultaty badań dla wielu układów przekroju poprzecznego belek. Modele trójwarstwowe o warstwach ułożonych poziomo w początkowej fazie obciążania ulegały zarysowaniu w strefie rozciąganej rdzenia. Przy czym nie prowadziło to do zniszczenia konstrukcji. Dolna rozciągana okładzina zabezpieczała bowiem zarysowany rdzeń, a tym samym cały element przed nagłym zniszczeniem. Decydującym mechanizmem zniszczenia okazało się uszkodzenie połączenia między górną ściskaną nakładką a rdzeniem, co doprowadziło do wyboczenia cienkościennej okładziny. Próbką o tych samych wymiarach przekroju poprzecznego, lecz usytuowana w pozycji pionowej, nie została zniszczona nagle w fazie sprężystej. Ujawnił się korzystny wpływ pionowego usytuowania okładzin, który przeciągnął nośność aż do fazy plastycznej. Finalnie, zniszczenie elementu nastąpiło poprzez utratę nośności ściskanej i rozciąganej strefy okładzin.

Podobne badania doświadczalne i mechanizmy zniszczenia układów wielowarstwowych zostały przedstawione w artykule [92].

Mechanizmy zniszczenia cienkościennych paneli trójwarstwowych przedstawiono w artykule [93]. Autor przeprowadził badania eksperymentalne paneli sandwichowych o całkowitej grubości 20 mm, zbudowanych z zewnętrznych okładzin z polimerów wzmocnionych włóknem szklanym (*glass fibre composite*) oraz rdzenia ze modyfikowanych i utwardzonych fenoli. Przeanalizowano relację między mechanizmem zniszczenia a wskaźnikiem „ $a/D$ ” (shear span-to-depth ratio) oznaczającym relację między odcinkiem występowania sił tnących a pełną wysokością przekroju próbki.

Z publikacji wynika, że formy zniszczenia elementów zależą od zaproponowanego wskaźnika „ $a/D$ ”, oraz że dla małych wartości „ $a/D$ ” obciążenie niszczące belkę jest większe niż w przypadku większej wartości wskaźnika „ $a/D$ ”. Jednocześnie wykazano, że do momentu zniszczenia elementu wartość obciążenia przyrastała liniowo aż do chwili uszkodzenia, kiedy następował skokowy spadek nośności. W przypadku kilku próbek zaobserwowano tylko niewielki spadek sztywności przekroju wyjaśniony powstaniem rys w materiale rdzenia. Dla belek o wskaźniku „ $a/D$ ” większym niż 4 ujawniało się powstawanie delikatnej nieliniowości na krzywej relacji obciążenie-odkształcenie tuż przed finałowym zniszczeniem próbki.

Z analizy zachowania się obciążonych belek wynika, że elementy sandwichowe zazwyczaj ulegały destrukcji tuż po pojawieniu się pierwszej rysy na skutek ścinania w rdzeniu. We wszystkich próbkach rysa od ścinania w rdzeniu ujawniała się pod punktem przyłożenia obciążenia skupionego.

Próbki o wartości wskaźnika „ $a/D$ ” równego 1 i 2 ulegały uszkodzeniu wskutek ścinania w rdzeniu i nieznacznemu uszkodzeniu połączenia między okładziną a rdzeniem. Nie zauważono natomiast wgłębień w materiale okładziny w miejscach podparcia i przykładania obciążenia, co wyjaśniano albo przyjęciem właściwej średnicy wałków podporowych i obciążających, albo dystrybucją przez włókna szklane naprężeń ściskających poza obszar przyłożenia obciążenia skupionego i unikając w ten sposób uszkodzeń. Dla dłuższych elementów i tym samym wyższym współczynnikiem „ $a/D$ ” z przedziału od 3 do 6, uszkodzenie elementu związane było ze

zniszczeniem połączenia między warstwą zewnętrzną a rdzeniem, poprzedzonym zarysowaniem rdzenia wskutek ścinania.

W przypadku cienkościennych elementów trójwarstwowych analizowano także wpływ użycia w jednym panelu rdzeni o odmiennych właściwościach mechanicznych i różnorodnych połączeniach między nimi (*core junction*) na formy zniszczenia tych paneli [17]. Autorzy zaproponowali badania serii 8 jednoprzęsłowych paneli trójwarstwowych o całkowitej długości 500 mm, podpartych przegubowo podporami w rozstawie 460 mm. Grubość rdzenia pianki PVC przyjęto równą 60 mm, natomiast grubości okładzin skonstruowano z arkuszy aluminiowych o grubości 1 mm.

Podobnie, jak w wielu wcześniej wymienionych przypadkach, zniszczenie panelu następowało wskutek ścięcia materiału rdzenia, przy czym występowanie przekrojów krytycznych związane było także z kształtem styku między sąsiednimi warstwami rdzenia.

Zbliżona tematyka została poruszona w [16].

Wpływ obciążenia z niewielką prędkością konstrukcji sandwiczowej na sposób jej zniszczenia poruszono w publikacji [49]. Ponieważ odpowiedź konstrukcji warstwowej na obciążenie związana jest z własnościami materiałów składowych i geometrii przekroju poprzecznego, autorzy poddali analizie MES układy z rdzeniem ze spienionej stali nierdzewnej. Z tego samego materiału wykonano też okładziny belek. Zaproponowany model dla takich konstrukcji weryfikowano także pod kątem predykcji możliwych rodzajów awarii.

Powołując się na prace dotyczące mechaniki materiałów o strukturze komórkowej (jak spieniona stal) autorzy sugerowali kilka prawdopodobnych mechanizmów zniszczenia belek trójwarstwowych: ścięcie rdzenia (*core shear*), zginanie belki bez powstawania wgnieceń pasa górnego (*overall bending without local denting of upper face-sheet*), lokalne wgniecenie warstwy zewnętrznej przy braku zginania belki sandwiczowej (*local denting without overall bending*), jednoczesne zginanie belki i lokalnie powstające wgniecenia okładziny (*bending and local denting*), zginanie belki oraz ścinanie rdzenia, lokalne wgniecenie pasów wraz ze ścinaniem rdzenia, marszczenie się okładzin (*face-sheet wrinkling*), zniszczenie połączenia między warstwą zewnętrzną a rdzeniem (*debonding*) oraz pęknięcie pasa (*face-sheet fracture*).

Autorzy publikacji zwracają też uwagę na fakt, że pojawienie się pewnych sposobów zniszczenia dla rozpatrywanego elementu zależy od geometrii przekroju poprzecznego, właściwości materiałów składowych, warunków brzegowych w modelu teoretycznym, a także od rozpiętości przęsła belki. Dla przykładu, przy krótszych rozpiętościach załamanie (*collapse of sandwich beam*) analizowanych belek jest zazwyczaj inicjowane lokalnym wgnieceniem pasa. Przy wzroście rozpiętości przęsła efekt lokalnego wgniecenia maleje. Natomiast przyjęcie odpowiednio dłuższego przęsła powoduje, że początek załamania elementu związany jest z uplastycznieniem materiału pasa. W przypadku tych konstrukcji, w których okładzina ma stosowną grubość i wytrzymałość, decydującym przypadkiem zniszczenia staje się ścinanie rdzenia.

W pracy [103] autorzy omówili konstrukcje warstwowe zbudowane z materiałów jednorodnych (drewno balsa), struktur siatkowych (struktura plastra miodu) i materiałów niejednorodnych (pianki). Poza niewątpliwymi zaletami tego typu konstrukcji zwrócono też uwagę na problem, jakim jest różnorodność form ich zniszczenia. Wymieniono między innymi następujące mechanizmy: globalne wyboczenie konstrukcji, delaminację połączoną z lokalnym wyboczeniem okładzin, ścinanie rdzenia, lokalne wgłębienie powierzchni

lub wyboczenie pojedynczej komórki (w przypadku konstrukcji z rdzeniem o strukturze siatkowej).

Artykuł [111] prezentuje analizę układów wielowarstwowych, w których kolejne drewniane warstwy zostały połączone drewnianymi kołkami.

Badania laboratoryjne przeprowadzono na belkach wolnopodpartych w układach dwuwarstwowych i czterowarstwowych. Dla pojedynczej warstwy drewnianej przyjęto wymiary równe 140 x 38 x 2200 mm. Części składowe były łączone w konstrukcje wielowarstwowe drewnianymi kołkami, wprowadzanymi pod kątem 45 stopni. Przebadano kilka serii próbek, w których warstwy były łączone 20, 32, 44 i 56 kołkami.

W odniesieniu do układów dwuwarstwowych stwierdzono, że belki wolnopodparte wykazują dobrą sztywność początkową, oraz że relacja między przemieszczeniem a odkształceniem jest niemal liniowa, aż do zniszczenia konstrukcji poprzez ścięcie łączników. Autorzy stwierdzają ponadto, że łączniki poddawane są też dodatkowej sile rozciągającej, wywołanej przez warstwy, chcące rozdzielić się wskutek zginania belki.

W przypadku konstrukcji czterowarstwowych zniszczenie następowało na skutek kruchego pęknięcia warstwy najniższej przy rozciąganiu.

Ciekawą publikacją jest [20], w której przedstawiono problematykę wpływu imperfekcji cienkościennej górnej okładziny (*upper face wrinkling*) na zniszczenie belki trójwarstwowej z rdzeniem podatnym poprzez jej załamanie i towarzyszące temu wgniecenie materiału rdzenia (*indentation collapse mechanism*).

Spośród możliwych awarii autorzy wymienili: uszkodzenia okładziny związane z ich ściskaniem lub rozciąganiem, rozwarstwienie materiału górnej okładziny, pęknięcie na styku okładziny i rdzenia, wgłębienia w górnej powierzchni elementu, marszczenie górnej okładziny przy ściskaniu oraz zniszczenie przekroju przez ścięcie rdzenia.

Przyczyną przedmiotowej imperfekcji cienkościennej górnej warstwy, do której przykładane jest obciążenie, może być rodzaj jej uszkodzenia. Przykładowo, marszczenie się górnej okładziny powodowane jest przez miejscowe rozwarstwienie albo jej zmienną grubość spowodowaną błędami w procesie produkcji. W takim wypadku podatna na imperfekcję warstwa wierzchnia traktowana jest jako element niepryzmatyczny lub belka-słup. Takie podejście stanowi analogię do kompozytowych belek sandwichowych z rdzeniem z pianki polimerowej, w których obserwuje się sprężystą deformację okładzin i uplastycznienie rdzenia na skutek ściskania. Rozwiązania te charakteryzują się tym, że załamanie przy zgniataniu przekroju (*indentation collapse*) może się pojawić z powodu zniszczenia okładzin przy ściskaniu w następstwie wzmocnienia odkształceniowego (*strain-hardening*), spowodowanego uplastycznieniem materiału rdzenia. Naprężenia ściskające w okładzinie mogą powstać przy zginaniu przekroju, jak również przy lokalnym zginaniu spowodowanym obciążeniem skupionym. Zdaniem autorów publikacji przedstawiony mechanizm zniszczenia jest typowy dla warstwowych belek ciągłych.

Załamanie belki przy wgnieceniu przekroju może być także konsekwencją lokalnej niestateczności ściskanej okładziny, mimo że wciąż pracuje ona sprężysto a rdzeń pozostaje w fazie sprężystej lub plastycznej. Ten sposób zniszczenia ujawnia się w przypadku układów jednoprzęsłowych, w których globalne zginanie przekroju nie może być pominięte.

Problem ściskania rdzenia jako zjawiska, występującego powszechnie w układach trójwarstwowych, przeanalizowany został w [132]. Zdaniem autora uwzględnienie przedmiotowego problemu obliczeń nie jest łatwe, ponieważ naprężenia ściskające w rdzeniu

zależą od wielu szczegółów związanych z obciążeniem oraz właściwości mechanicznych okładzin i rdzenia. Obciążenia, które są przekazywane na element sandwiczowy poprzez dużą powierzchnię kontaktu, przyczyniają się do powstawania mniejszych ekstremów naprężeń ściskających w rdzeniu. Z podobną sytuacją mamy do czynienia w przypadku belek o sztywnych pasach.

Omówione wcześniej, dosyć szczegółowo, publikacje nie są jedynymi, z którymi zapoznał się autor rozprawy. Wiele innych pozycji literaturowych, na różnym poziomie szczegółowości, omawiało zagadnienia związane z:

- Prowadzeniem badań doświadczalnych konstrukcji kompozytowych (warstwowych) i opisem mechanizmów ich zniszczenia [2], [14-20], [28], [32, 33, 37], [54-58], [73], [76], [81,82], [90-92], [93-98], [101], [115-118], [121], [123-126], [129,130], [133-141], [145-148];
- Modelami i analizami teoretycznymi układów warstwowych [26], [31], [43,44], [46-53], [72], [74], [80], [83], [85-89], [99], [104], [127], [144-145];
- Zwiększaniem nośności podatnego rdzenia na ścinanie [66,67], [75];
- Rodzajem materiałów wykorzystywanych do konstruowania belek warstwowych ze względu na ich korzystne właściwości mechaniczne [70, 71], [77], [112].



## 2. Cel i zakres pracy

Głównym celem pracy jest analiza różnych modeli teoretycznych belek trójwarstwowych (w tym belek sandwiczowych) przydatnych przy modelowaniu ich zachowania się, gdy zbudowane są z grubych nakładek drewnianych. W analizie tej nie tylko porównywano wyniki numeryczne otrzymane z modeli teoretycznych z wynikami otrzymanymi z badań doświadczalnych, ale także zwracano uwagę, na ile dany model uwzględnia istotne cechy zachowania się belek trójwarstwowych o grubych nakładkach poddanych działaniu obciążeń.

Praca składa się z części doświadczalnej i teoretycznej. W części doświadczalnej badane są belki sandwiczowe trójwarstwowe zbudowane z dwóch zewnętrznych nakładek drewnianych i rdzenia zbudowanego z poliuretanu. Moduł Younga rdzenia jest wielokrotnie mniejszy od modułu Younga. Nakładki są belkami na tyle wysokimi (krępyimi), że występuje ich zginanie. Celem przeprowadzonych badań doświadczalnych jest weryfikacja modeli teoretycznych belek sandwiczowych poprzez identyfikację sposobu ich zachowania się, a także ustalenie własności mechanicznych i wytrzymałościowych materiałów, z których te belki są zbudowane. Intencją było otrzymanie odpowiedzi na następujące pytania:

- Czy belka zginana jest jako całość? A zatem czy płaskość całego przekroju belki została zachowana (założenia belki Eulera-Bernoulliego), czy też każda z nakładek zginana jest oddzielnie, przy czym występuje sprzężenie tego zginania poprzez rdzeń? W pierwszym przypadku naprężenia w każdej nakładce powinny być tego samego znaku a w drugim przypadku, we włóknach skrajnych nakładek mogą być naprężenia różnych znaków;
- Czy przemieszczenia nakładek w kierunku prostopadłym do osi belki można uznać za jednakowe czy też występują różnice powstałe w wyniku ściskania rdzenia?
- Czy występuje wzajemne przemieszczenie nakładek wzdłuż osi belki?
- Ustalenie możliwych mechanizmów zniszczenia belek sandwiczowych o grubych nakładkach.

Kolejnym celem przeprowadzonych badań było wyznaczenie stałych materiałowych, jak moduł Younga i Kirchhoffa oraz wytrzymałościowych materiałów, z których zbudowana jest belka a stąd otrzymanie odpowiednich charakterystyk probabilistycznych badanych wielkości.

Celem części teoretycznej rozprawy jest sprawdzenie na ile różne modele teoretyczne belek trójwarstwowych spełniają warunki wynikające z przeprowadzonych badań doświadczalnych.

Przeprowadzono analizę czterech modeli teoretycznych belek trójwarstwowych.

Jako pierwszy model przyjęto belkę Eulera-Bernoulliego, w której ważne jest założenie płaskości całego przekroju belki przy zginaniu. Przyjęto, że naprężenia normalne wynikające ze zginania w rdzeniu są pomijalnie małe. W tym przypadku stan przemieszczenia belki określony jest przez jedną funkcję spełniającą jedno równanie różniczkowe. Drugi model belki trójwarstwowej jest modelem Zig-Zag belki sandwiczowej, w którym uwzględniono nie tylko zginanie nakładek i ścinanie rdzenia, ale także dodatkowo wpływ ścinania samych nakładek na stan przemieszczenia belki.

W tym ogólnym modelu występują trzy nieznane funkcje określające stan przemieszczeń belki i spełniające sprzężony układ trzech równań różniczkowych zwyczajnych. Zaproponowany

model belki sandwiczowej wymagał wyprowadzenia odpowiednich zależności także dla stanu naprężeń.

Trzeci model - Zig-Zag belki sandwiczowej, w którym odpowiednie zależności otrzymano z modelu drugiego pomijając wpływ ścinania nakładek. W tym przypadku stan przemieszczeń belki opisany jest dwoma funkcjami spełniającymi sprzężony układ dwóch równań różniczkowych. We wszystkich trzech modelach przyjmowano warunki brzegowe jak dla belki swobodnie podpartej stąd rozwiązania równań różniczkowych postaci szeregów trygonometrycznych.

Jako czwarty model rozpatrzono układ dwóch belek Eulera-Bernoulliego połączonych warstwą sprężystą modelującą rdzeń, w której uwzględniono nie tylko ściskanie, ale także ścinanie.

Ważnym problemem w belkach wielowarstwowych jest zagadnienie poślizgu występujące w miejscu połączenia tych warstw. Problem ten omówiono na przykładzie belki dwuwarstwowej. Między innymi pokazano, że stan przemieszczeń takiej belki opisany jest układem sprzężonych dwóch równań różniczkowych analogicznych do układu dwóch równań trójwarstwowej belki sandwiczowej w ujęciu teorii Zig-Zag. Wynika stąd, że belka dwuwarstwowa, w której uwzględniono podatność połączenia może być traktowana jako belka sandwiczowa o zerowej wysokości rdzenia.

Kolejnym celem rozprawy jest racjonalizacja projektowania belek sandwiczowych o zginanych nakładkach. Stąd propozycje analizy probabilistycznej belek uwzględniająca losową niepewność pewnych parametrów, ocena niezawodności belek za pomocą wskaźnika niezawodności (indeks niezawodności) ze względu na różne mechanizmy zniszczenia.

Przedstawiana praca doktorska składa się z dziewięciu rozdziałów.

Rozdział pierwszy - „Wstęp” - zawiera wprowadzenie do zagadnień związanych z mechaniką belek trójwarstwowych zwanych też belkami sandwiczowymi. Przedstawiono tu między innymi przegląd literatury związany z przedmiotowymi belkami sandwiczowymi a w szczególności dotyczący:

- laboratoryjnych badań doświadczalnych,
- mechanizmów zniszczenia,
- stosowanych materiałów składowych,
- modeli teoretycznych opisujących ich stan przemieszczenia i wyężenia.

W rozdziale drugim - „Cel i zakres pracy” – przedstawiono cel pracy i nakreślono jej zakres.

Rozdział trzeci – „Badania doświadczalne belki trójwarstwowej” – zawiera cztery podrozdziały zatytułowane jako: „Opis eksperymentu”, „Oznaczenie parametrów wytrzymałościowych drewna”, „Oznaczenie parametrów wytrzymałościowych rdzenia poliuretanowego” oraz „Rezultaty badań laboratoryjnych belek trójwarstwowych. Przedstawiono tu procedury normowe oznaczania parametrów wytrzymałościowych materiałów składowych analizowanych belek trójwarstwowych, czyli drewna i pianki poliuretanowej. Pokazano w skrócie procedury normowe, przebieg prac laboratoryjnych oraz analizę otrzymanych rezultatów. Wyznaczono wartości średnie poszukiwanych parametrów dla rozpatrywanych serii próbek, a także przeprowadzono analizę statystyczną otrzymanych wyników.

W rozdziale czwartym – „Modele teoretyczne belek trójwarstwowych” - przedstawione zostały cztery modele teoretyczne, opisujące przemieszczenia jednoprzęsłowych belek trójwarstwowych. Modele zostały uporządkowane według stopnia ich złożoności. Dwa pierwsze

modele, w których element traktowany jest jako klasyczna belka Eulera oraz model Zig-Zag, funkcjonują już w literaturze tematu, lecz uznano, że dla porządku zostaną pokazane w szerszym zakresie. Kolejne dwa omówione w dysertacji modele stanowią oryginalny wkład w temacie układów warstwowych.

Piąty rozdział – „Analiza numeryczna opracowanych modeli teoretycznych” – zawiera rozwiązania zaproponowanych modeli oraz zestawienie otrzymanych rezultatów z wynikami otrzymanymi w trakcie niszczących badań laboratoryjnych serii 5 sztuk belek trójwarstwowych. Porównania dotyczą przemieszczenia okładziny dolnej i górnej w kilku obserwowanych przekrojach poprzecznych elementu oraz naprężeń obliczonych na podstawie odkształceń włókien zewnętrznych dolnej i górnej okładziny mierzonych w przekroju w środku rozpiętości przęsła belki sandwiczowej.

W rozdziale szóstym – „Belki warstwowe o połączeniach podatnych” – przedstawiono problematykę połączeń podatnych między materiałem rdzenia z warstwami zewnętrznymi. Podstawy teoretyczne zostały przybliżone dla dwóch najważniejszych przypadków: dla elementu złożonego z dwóch warstw oraz dla elementu z trzema warstwami składowymi.

Przedmiotem rozdziału siódmego – „Probabilistyczna analiza belki sandwiczowej” – jest analiza probabilistyczna stanu przemieszczenia belek trójwarstwowych w oparciu o model Zig-Zag. Założono w niej, że obciążenia lub charakterystyki materiałów składowych mają charakter losowy. Z rozważań teoretycznych wyprowadzono zależności umożliwiające obliczenie wariancji i wartości oczekiwanych przemieszczenia elementu jednoprzęsłowego.

Rozdział ósmy – „Niezwodność belki sandwiczowej” – składa się z pięciu podrozdziałów, w których zwrócono uwagę na uwzględnienie teorii niezawodności w procesie projektowania konstrukcji warstwowych. Skupiono się tutaj na takich wielkościach opisujących niezawodność konstrukcji, jak Indeks Cornella, czy prawdopodobieństwo wystąpienia awarii. Na podstawie danych zebranych podczas prac laboratoryjnych oraz ich analizy statystycznej opracowany został przykład obliczeniowy dotyczący wyznaczania wskaźnika niezawodności belki trójwarstwowej

ze względu na dwa najbardziej prawdopodobne mechanizmy zniszczenia. Założono, że są nimi zniszczenie okładzin na skutek przekroczenia wartości dopuszczalnych naprężeń normalnych lub przekroczenie naprężeń ścinających w rdzeniu.

Całość pracy podsumowuje rozdział dziewiąty – „Podsumowanie” – w którym przeprowadzono dyskusję nad otrzymanymi wynikami a także zaprezentowano wnioski końcowe.

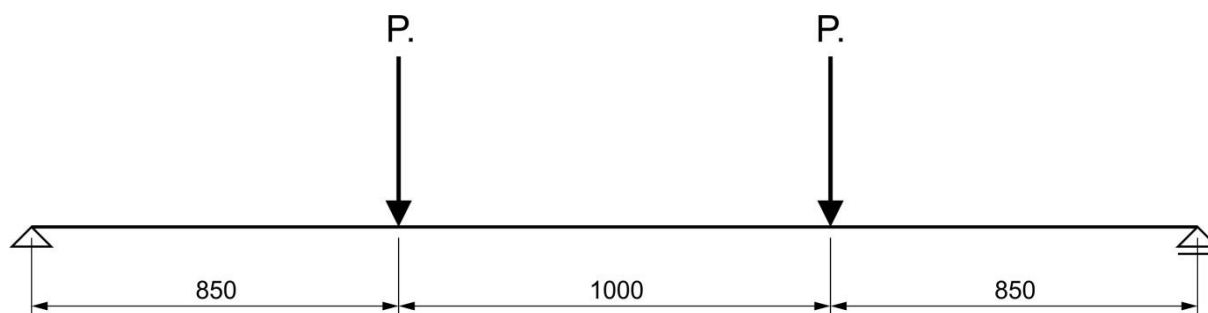
### 3. Badania doświadczalne belki trójwarstwowej

#### 3.1. Opis eksperymentu

Specyfika przedmiotowej rozprawy doktorskiej, traktowanej jako doświadczalno-teoretyczna spowodowała, że istotnym aspektem merytorycznym stało się przeprowadzenie badań laboratoryjnych. U podstaw tego pomysłu leżało założenie, że otrzymane rezultaty mogłyby posłużyć do weryfikacji modeli teoretycznych, opisujących stan przemieszczenia i wyężenia belek trójwarstwowych z drewnianymi okładzinami oraz rdzeniem poliuretanowym. Poza tym otrzymane wyniki i poczynione obserwacje mogłyby pomóc w analizie problematyki mechanizmów zniszczenia układów trójwarstwowych złożonych z materiałów o odmiennych właściwościach oraz wpływu ścinania w nakładkach na przemieszczenie pionowe całej konstrukcji sandwichowej.

Ze względu na ograniczone środki finansowe, jakimi dysponował autor rozprawy doktorskiej, wszystkie czynności związane z montażem oraz badaniami niszczącymi przedmiotowe belki zostały przeprowadzone w Laboratorium Technologii Materiałów i Konstrukcji Budowlanych, należącym organizacyjnie do Wydziału Inżynierii Kształtowania Środowiska i Geodezji Uniwersytetu Przyrodniczego we Wrocławiu.

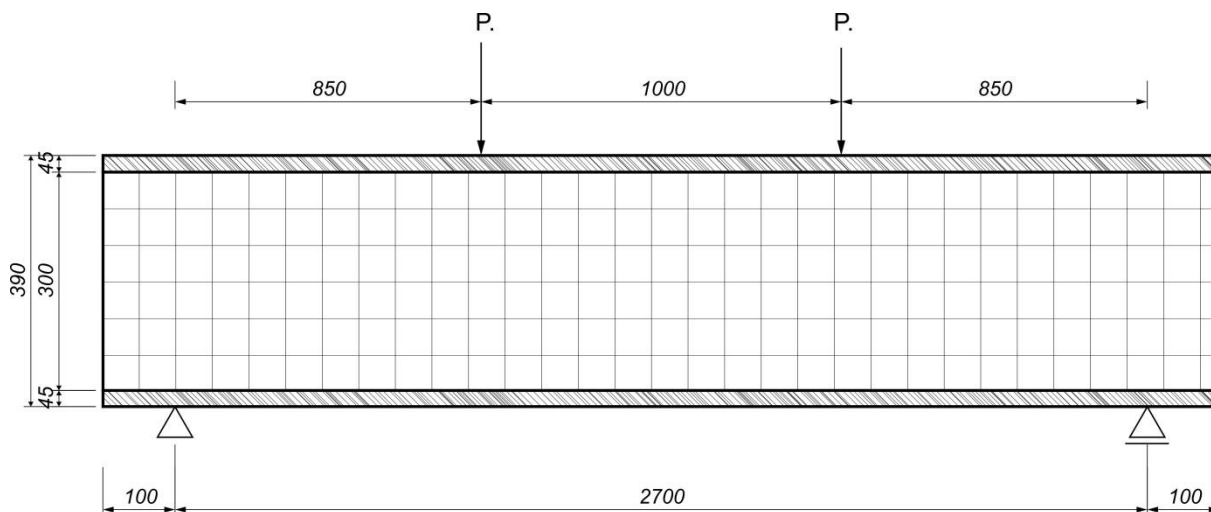
Przyjęto, że badania będą dotyczyły serii pięciu jednoprzęsłowych belek swobodnie podpartych o rozpiętości między podporami równej 2700 mm. Przyjęty rozstaw podpór wynikał bezpośrednio z długości elementów drewnianych, jakimi dysponował autor oraz możliwości przestrzennych w samym laboratorium. Zaplanowano, że belki będą obciążane dwiema siłami skupionymi usytuowanymi w równych odległościach równych 850 mm odpowiednio od lewej i prawej podpory (rysunek (3.1.1)).



Rysunek 3.1.1 Schemat statyczny analizowanej belki trójwarstwowej. Wymiary w [mm]

#### 3.2. Prace przygotowawcze i montażowe belek trójwarstwowych

Do laboratoryjnych badań niszczących przewidziano jednoprzęsłowe belki trójwarstwowe konstruowane samodzielnie przez autora rozprawy. Pasy belki trójwarstwowej wykonane zostały z belek z drewna sosnowego o szerokości  $b_f$  równej 150 mm i wysokości przekroju poprzecznego  $h_f$  równej 45 mm. Między pasami wklejany był rdzeń w postaci panelu z pianki poliuretanowej o szerokości  $b_c$  równej 150 mm i wysokości przekroju poprzecznego  $h_c$  równej 300 mm.

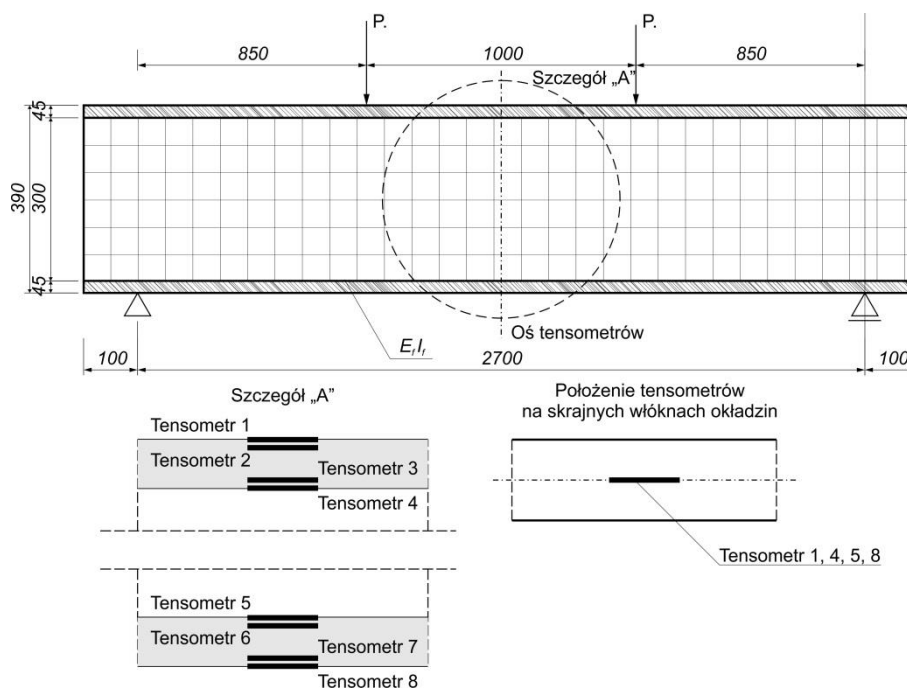


Rysunek 3.2.1 Geometria belki trójwarstwowej przewidzianej do badań laboratoryjnych

W rezultacie otrzymano belkę o wysokości przekroju poprzecznego równej 390 mm. Uzyskany stosunek pełnej wysokości przekroju poprzecznego do rozpiętości przęsła belki kształtujący się na poziomie 6,92 w zamyśle autora posłużyć miał uwzględnieniu wpływu ścinania na stan przemieszczenia rozpatrywanych belek.

Przed sklejeniem poszczególnych części składowych na powierzchniach bocznych drewnianych pasów naklejane były tensometry elektrooporowe. W tym wypadku czujniki TFS-5/120 firmy Tenmex w Łodzi. Na każdym pasie montowano cztery tensometry w środku rozpiętości przęsła w układzie jak na Rysunku 3.2.2.

W związku z tym przewidziano, że w połowie rozpiętości badanej belki trójwarstwowej odkształcenia okładzin będą mierzone przez 8 sztuk tensometrów elektrooporowych. Dwa tensometry oznaczone numerami 1, 4, 5 oraz 8 umieszczono na powierzchniach poziomych wzdłuż osi podłużnej belki. Natomiast tensometry oznaczone numerami 2, 3, 6 oraz 7 umieszczono na powierzchni bocznej okładziny drewnianej.



Rysunek 3.2.2 Schemat naklejania tensometrów na drewnianych okładzinach belek trójwarstwowych

W dalszej kolejności z tensometrów wyprowadzono okablowanie, które, wraz z mostkiem tensometrycznym firmy „Tenmex” – model TMX-2216SE, utworzyło układ pomiarowy w formie półmostka tensometrycznego.

W końcowym etapie czynności montażowych drewniane okładziny i poliuretanowy panel rdzenia zostały połączone przy użyciu kleju poliuretanowego PB-350 firmy Tytan. Po rozprowadzeniu warstwy kleju na powierzchniach drewnianych okładzin, ułożeniu poliuretanowego rdzenia i wstępnym dopasowaniu elementów składowych gotowa belka była umieszczana w pięciu stalowych ramach w celu ustabilizowania geometrii podczas wiązania kleju. Przykładową belkę w czasie montażu przedstawia fotografia (3.2.1).



**Fotografia 3.2.1** Belka trójwarstwowa w trakcie montażu

Zarówno badania niszczące belek trójwarstwowych, jak i prace przygotowawcze i montażowe, były prowadzone w ciągu 2014 roku w Laboratorium Technologii Materiałów i Konstrukcji Budowlanych Wydziału Inżynierii Kształtowania Środowiska i Geodezji Uniwersytetu Przyrodniczego we Wrocławiu.

Gotowe belki trójwarstwowe umieszczane były na stalowych podporach umożliwiających przegubowe podparcie badanych elementów. Przyjęty rozstaw podpór wynosił 2700 mm.



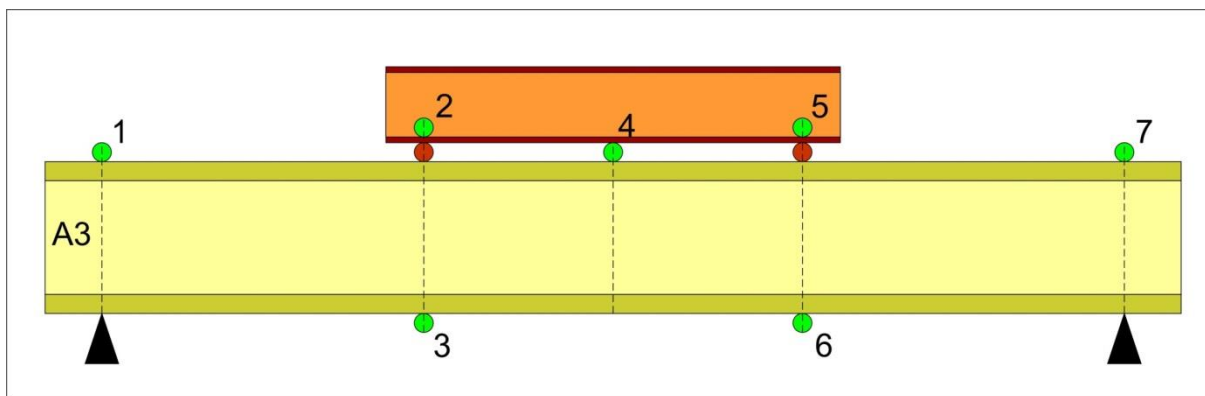
**Fotografia 3.2.2** Gotowa belka trójwarstwowa na stanowisku pomiarowym

Uzyskanie schematu statycznego belki jednoprzęsłowej wolnopodpartej, obciążonej dwiema siłami skupionymi, był możliwy dzięki zastosowaniu stalowego trawersu rozkładającego obciążenie od siłownika na dwa obciążenia punktowe (fotografia (3.2.2)). Samo obciążenie zadawane było przez ramę siłową Satec/Instron.

Obserwacje stanu przemieszczenia i wyężenia belki przeprowadzono dzięki zastosowaniu kilku urządzeń pomiarowych. Poniżej pasa dolnego belki, w środku rozpiętości elementu, umieszczono piezoelektryczny czujnik przemieszczeń służący do monitorowania przemieszczenia pasa dolnego. Dodatkowo, dzięki tensometrom naklejonym w połowie rozpiętości konstrukcji na drewniane okładziny (rysunek (3.1.3)), możliwe były obserwacje odkształceń pasów wywołanych obciążeniem zewnętrznym.

Aby dysponować pełniejszą wiedzą o wzajemnych przemieszczaniach się górnych i dolnych okładzin przeprowadzono także fotogrametryczną kontrolę ugięć. Miejsca punktów kontrolnych założonych na obu warstwach zewnętrznych pokazano na rysunku (3.1.4). Przyjęto tutaj zasadę, że pomiary tachimetrem będą wykonywane co 5 mm przemieszczenia pasa dolnego belki trójwarstwowej. Punkty pomiarowe zostały wybrane dla kilku przekrojów charakterystycznych elementu (rysunek (3.2.3)):

- w przekrojach podporowych,
- w miejscu przyłożenia obciążeń skupionych od trawersu,
- w środku rozpiętości belki oraz
- w połowie odległości między podporą skrajną a siłą skupioną przekazywaną przez trawers.



Rysunek 3.2.3 Schemat rozmieszczenia punktów pomiarowych do pomiarów geodezyjnych tachimetrem

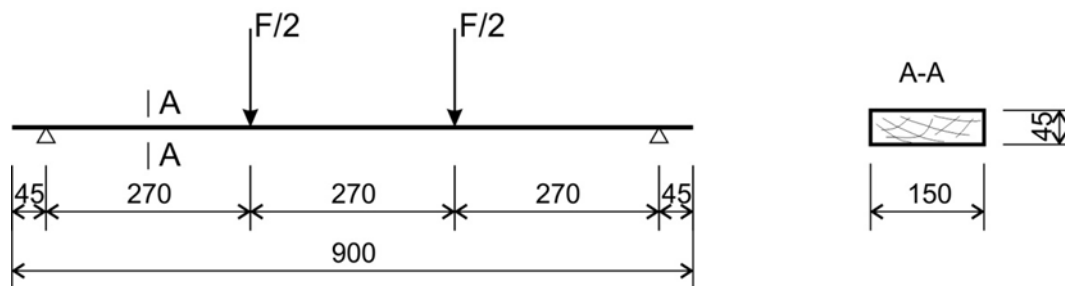
W trakcie prac laboratoryjnych poddano obciążeniu serię pięciu sztuk belek trójwarstwowych. Pomiary były prowadzone aż do chwili zniszczenia struktury elementu.

### 3.3. Oznaczenie parametrów wytrzymałościowych drewna

#### 3.3.1. Oznaczenie wytrzymałości drewna na zginanie

Oznaczenie wytrzymałości drewna na zginanie przeprowadziłem zgodnie z rozdziałem 13 normy [152, 153] w dniu 22 kwietnia 2014 roku w Laboratorium Technologii Materiałów i Konstrukcji Budowlanych na Wydziale Inżynierii Kształtowania Środowiska i Geodezji Uniwersytetu Przyrodniczego we Wrocławiu.

Badanie przeprowadziłem na serii 5 próbek o szerokości przekroju poprzecznego 150 mm, wysokości przekroju poprzecznego 45 mm oraz długości całkowitej 900 mm. Odległość między punktami podparcia próbki przyjęto równą 810 mm (rysunek (3.3.1)).



Rysunek 3.3.1 Schemat statyczny próbki drewna przy oznaczaniu wytrzymałości na zginanie

Kolejne próbki ponumerowane od 1 do 5 były umieszczane na stanowisku pomiarowym ramy wytrzymałościowej zestawu ToniNorm. Charakterystyki użytkowe tej ramy przedstawiono w tabeli (3.3.1).

Tabela 3.3.1 Parametry użytkowe maszyny wytrzymałościowej ToniNorm 100 kN

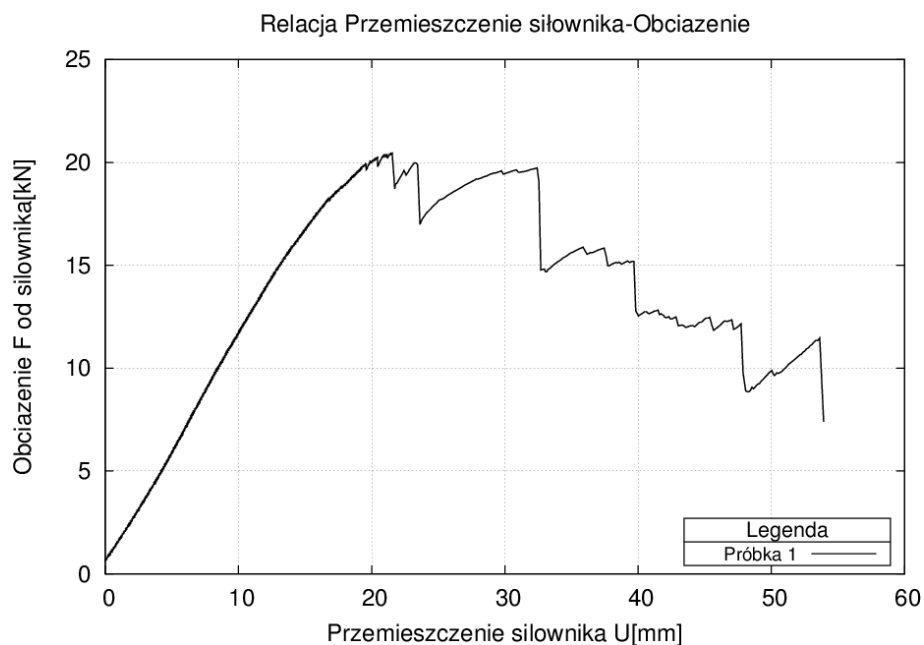
Rodzaj parametru użytkowego	Wartość parametru użytkowego
Maksymalna wartość obciążenia	100 kN
Maksymalny rozstaw podpór	1000 mm
Szerokość podpór	500 mm
Maksymalna długość próbki	1100 mm
Maksymalna wysokość próbki	300 mm



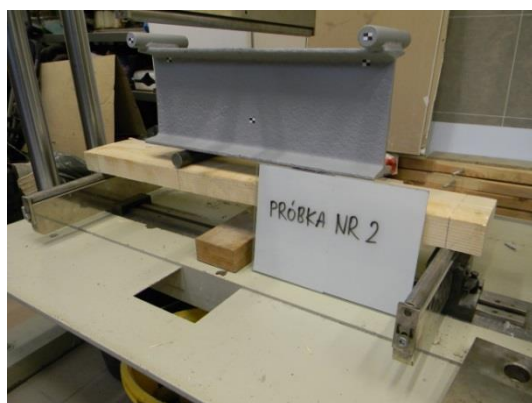
Próbki obciążane były z prędkością 3,2 kN/min aż do zniszczenia. Dokumentacja fotograficzna z oznaczania wytrzymałości drewna na zginanie dla kolejnych pięciu próbek została przedstawiona na fotografiach (3.3.1) – (3.3.5) oraz rysunkach (3.3.2) – (3.3.6).



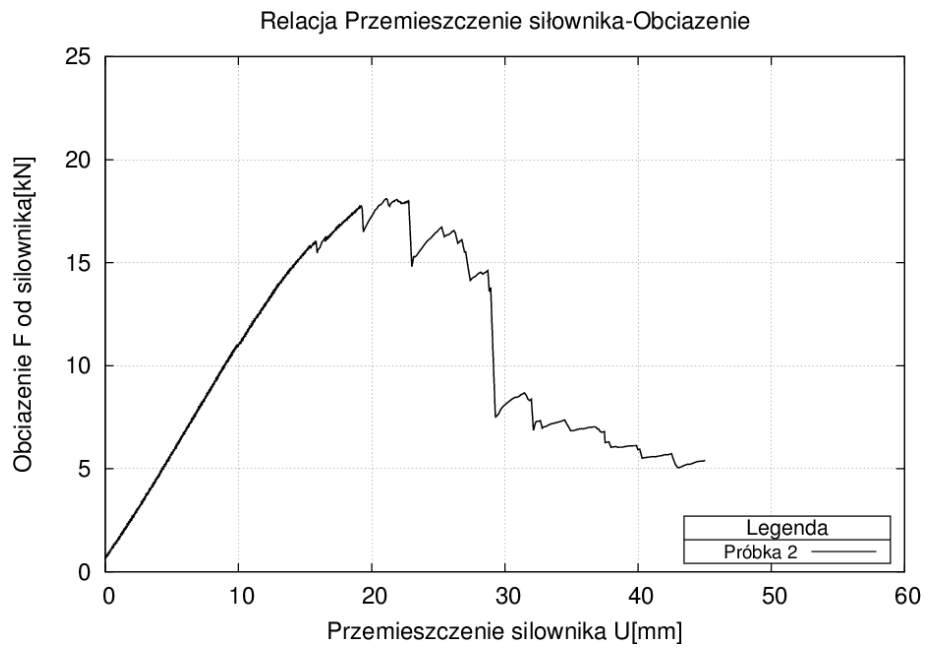
**Fotografia 3.3.1** Próbka numer 1 na stanowisku pomiarowym przed i po zniszczeniu



**Rysunek 3.3.2** Wykres zależności między ugięciem próbki  $U$  a obciążeniem od siłownika  $F$ , uzyskany dla próbki nr 1



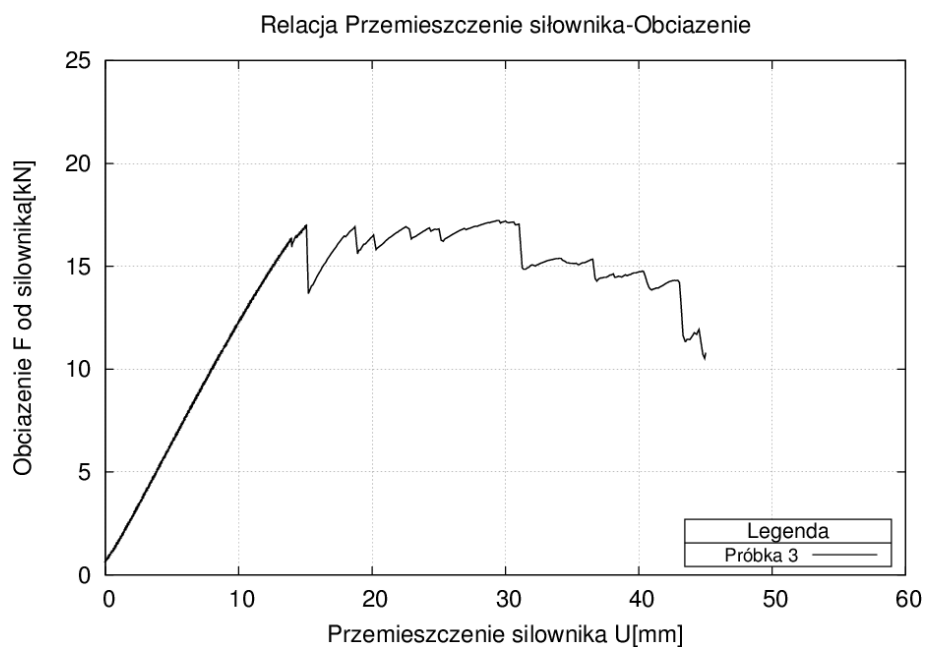
**Fotografia 3.3.2** Próbka numer 2 na stanowisku pomiarowym przed i po zniszczeniu



Rysunek 3.3.3 Wykres zależności między ugięciem próbki U a obciążeniem od siłownika F, uzyskany dla próbki nr 2



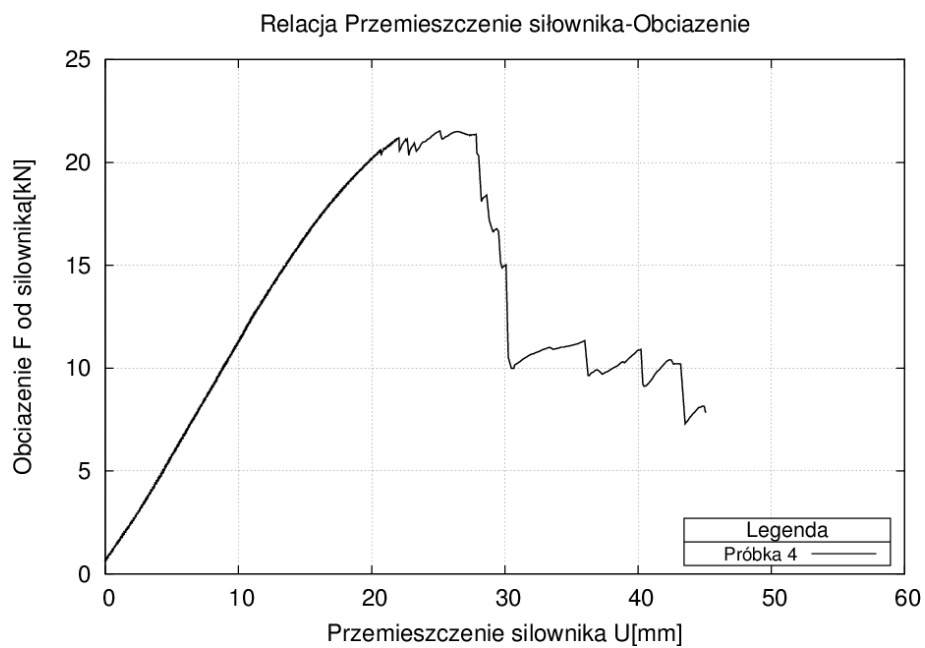
Fotografia 3.3.3 Próbka numer 3 na stanowisku pomiarowym przed i po zniszczeniu



Rysunek 3.3.4 Wykres zależności między ugięciem próbki U a obciążeniem od siłownika F, uzyskany dla próbki nr 3



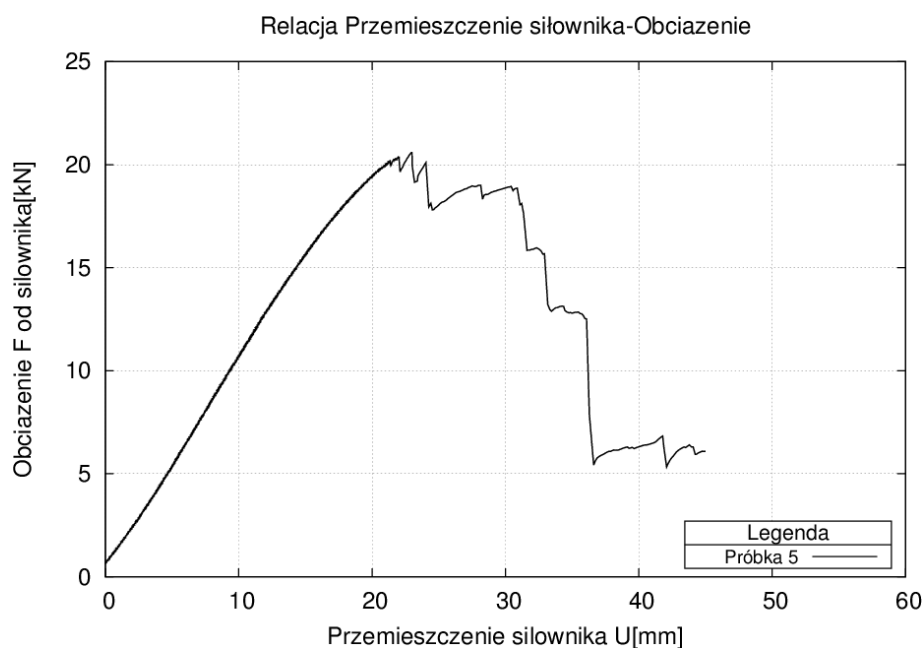
Fotografia 3.3.4 Próbka numer 4 na stanowisku pomiarowym przed i po zniszczeniu



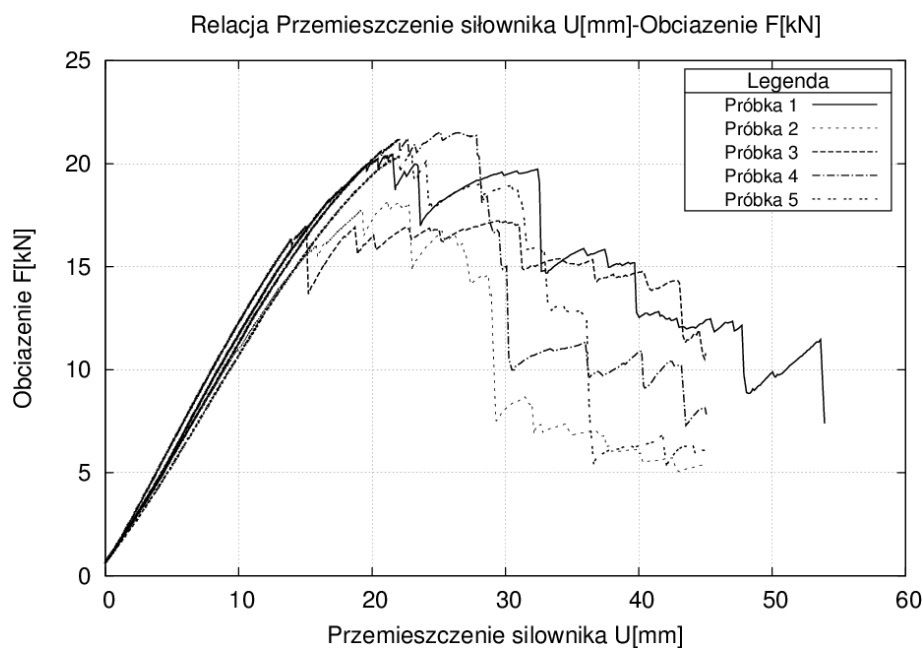
Rysunek 3.3.5 Wykres zależności między ugięciem próbki U a obciążeniem od siłownika F, uzyskany dla próbki nr 4



Fotografia 3.3.5 Próbka numer 5 na stanowisku pomiarowym przed i po zniszczeniu



Rysunek 3.3.6 Wykres zależności między ugięciem próbki U a obciążeniem od siłownika F, uzyskany dla próbki nr 5



Rysunek 3.3.7 Zbiorczy wykres zależności między ugięciem próbki U a obciążeniem od siłownika F

Zbiorczy wykres dla pełnej serii próbek zaprezentowano na Rysunku 3.3.7. Maksymalne wartości sił i odpowiadające im ugięcia próbek zestawiono w Tabeli 3.3.2.

Tabela 3.3.2 Wartości maksymalnych sił od siłownika i odpowiadających im ugięć uzyskanych podczas oznaczenia wytrzymałości drewna na zginanie

Numer próbki	Maksymalna wartość obciążenia $F_{max}$ [kN] od siłownika
1	20,4358
2	18,1050
3	17,2261
4	21,5351
5	20,5905

Wartości wytrzymałości drewna na zginanie obliczono na podstawie równania (3.3.1) a rezultaty otrzymane dla każdej próbki zestawiono w Tabeli 3.3.3:

$$f_m = \frac{aF_{\max}}{2W} \quad (3.3.1)$$

gdzie:

$a$  – odległość miejsca przyłożenia siły do najbliższej podpory w [mm],

$F_{\max}$  – obciążenie maksymalne od siłownika w [mm],

$W$  – wskaźnik wytrzymałości przekroju w [mm<sup>3</sup>].

**Tabela 3.3.3** Wartość średniej arytmetycznej wytrzymałości drewna na zginanie

Numer próbki	$F_{\max}$ [kN]	$a$ [mm]	$W$ [mm <sup>3</sup> ]	$f_{m,i}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\bar{f}_m$ [N/mm <sup>2</sup> ]
1	20,4358	270	50625	54,50	52,21
2	18,1050			48,28	
3	17,2261			45,94	
4	21,5351			57,43	
5	20,5905			54,91	

Do dalszych obliczeń przyjęto wartość średniej arytmetycznej wytrzymałości na zginanie  $\bar{f}_m$  równą 52,21 [N/mm<sup>2</sup>]. Współczynnik zmienności dla serii próbek kształtował się na poziomie około 8,3% wobec czego uznano, że badanie przeprowadzono poprawnie a jego rezultaty są miarodajne.

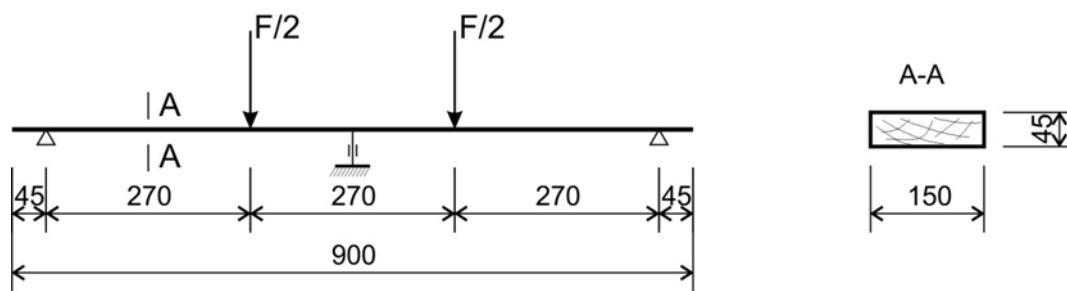
**Tabela 3.3.4** Odchylenie standardowe i współczynnik zmienności wytrzymałości drewna na zginanie

Numer próbki	$f_{m,i}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\bar{f}_m$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$s_x$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$V_x$ [-]
1	54,50	52,21	4,35	0,0833
2	48,28			
3	45,94			
4	57,43			
5	54,91			

### 3.3.2. Oznaczenie ogólnego modułu sprężystości przy zginaniu

Oznaczenie ogólnego modułu sprężystości drewna przy zginaniu przeprowadzono zgodnie z Rozdziałem 10 normy [152, 153] w dniu 28 kwietnia 2014 roku w Laboratorium Technologii Materiałów i Konstrukcji Budowlanych na Wydziale Inżynierii Kształtowania Środowiska i Geodezji Uniwersytetu Przyrodniczego we Wrocławiu.

Badanie przeprowadzono na serii trzech próbek o szerokości przekroju poprzecznego 150 mm, wysokości przekroju poprzecznego 45 mm oraz długości całkowitej 900 mm. Odległość między punktami podparcia próbki przyjęto równą 810 mm (rysunek (3.3.8)).

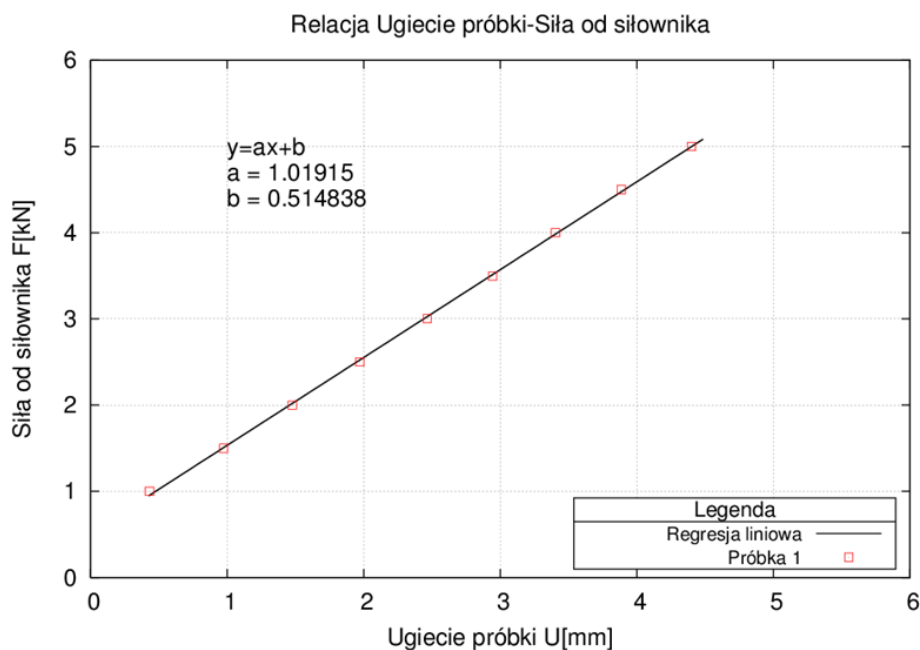


Rysunek 3.3.8 Schemat statyczny próbki drewna przy oznaczaniu ogólnego modułu sprężystości drewna przy zginaniu

Próbki na stanowisku pomiarowym przedstawiają fotografie (3.3.6) – (3.3.8). Natomiast relacje między obciążeniem a ugięciem próbek przedstawiają rysunki (3.3.9) – (3.3.11).



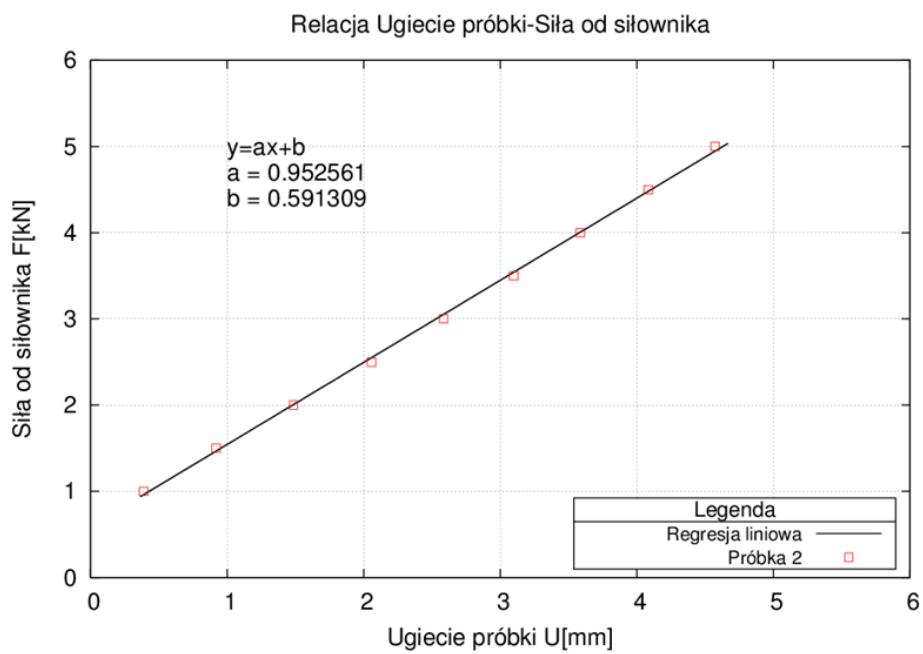
Fotografia 3.3.6 Próbka nr 1 na stanowisku pomiarowym



Rysunek 3.3.9 Punktowy oraz liniowy wykres relacji między całkowitą siłą obciążającą a wartością ugięcia próbki nr 1



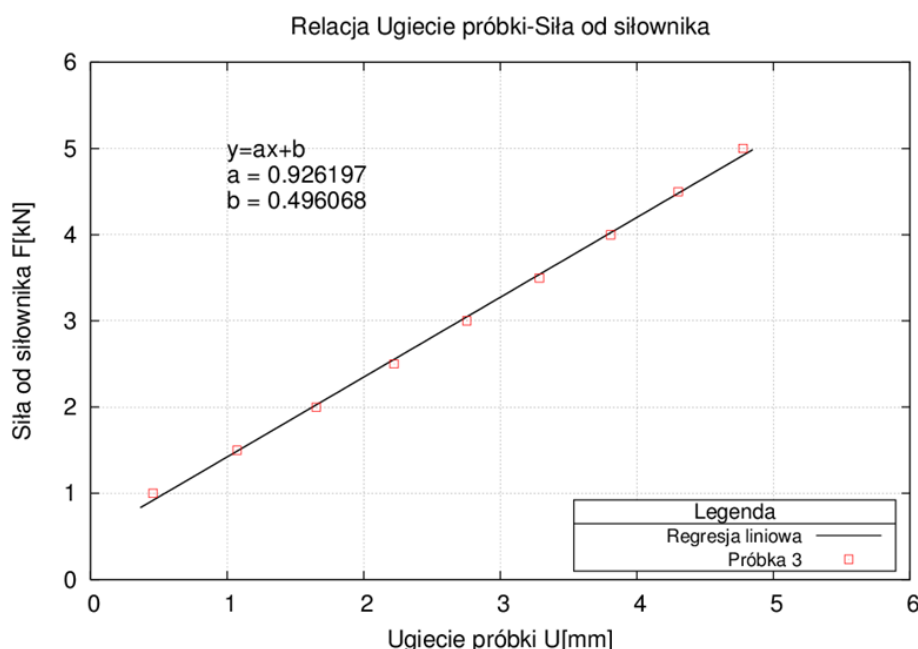
Fotografia 3.3.7 Próbka nr 2 na stanowisku pomiarowym



Rysunek 3.3.10 Punktowy oraz liniowy wykres relacji między całkowitą siłą obciążającą a wartością ugięcia próbki nr 2



Fotografia 3.3.8 Próbka nr 3 na stanowisku pomiarowym



Rysunek 3.3.11 Punktowy oraz liniowy wykres relacji między całkowitą siłą obciążającą a wartością ugięcia próbki nr 3

Zgodnie z rozdziałem 10 normy [152, 153] zastosowane obciążenie maksymalne nie powinno przekraczać  $0,4F_{max}$ , aby nie spowodować uszkodzenia próbek. Ponieważ maksymalna wartość siły od siłownika  $F_{max}$  podczas określania wytrzymałości drewna na zginanie wyniosła  $\sim 21,54$  kN oznacza to, że podczas oznaczania ogólnego modułu sprężystości drewna siła od siłownika nie powinna przekraczać  $\sim 8,62$  kN. Warunek ten został spełniony gdyż dla żadnej spośród trzech badanych próbek maksymalne obciążenie od siłownika  $F_{max}$  nie przekroczyło wartości 6 kN.

Liniowe relacje obciążenie-ugięcie w zakresie odkształceń sprężystych przedstawiono na rysunkach (3.3.9) - (3.3.11), natomiast równania liniowej funkcji aproksymującej wraz ze współczynnikami korelacji dla każdej z trzech badanych próbek zestawiono w tabeli (3.3.5).



**Tabela 3.3.5** Równania funkcji liniowych relacji obciążenie-ugięcie próbek

Numer próbki	Równanie funkcji liniowej między ugięciem $w$ a siłą $F$	Współczynnik korelacji
1	$F = 1,01915 \cdot w + 0,514838$	0,9997
2	$F = 0,952561 \cdot w + 0,591309$	0,9991
3	$F = 0,926197 \cdot w + 0,496068$	0,9986

Na podstawie równań liniowych z Tabeli 3.3.5 oraz zgodnie z rozdziałem 10.3 normy [155, 156] ogólny moduł sprężystości  $E_{m,g}$  dla każdej z próbek został obliczony ze wzoru:

$$E_{m,g} = \frac{l^3 \cdot (F_2 - F_1)}{bh^3(w_2 - w_1)} \left[ \left( \frac{3a}{4l} \right) - \left( \frac{a}{l} \right)^3 \right] \quad (3.3.2)$$

gdzie:

$l$  – rozpiętość próbki między podporami w [mm],

$b$  – szerokość przekroju poprzecznego próbki w [mm],

$h$  – wysokość przekroju poprzecznego próbki w [mm],

$a$  – odległość miejsca przyłożenia siły od najbliższej podpory w [mm],

$F_2 - F_1$  – przyrost obciążenia w prostoliniowej części wykresu obciążenie-ugięcie w [N],

$w_2 - w_1$  – przyrost ugięcia odpowiadający przyrostowi  $F_2 - F_1$  w [mm].

Obliczenia ogólnego modułu sprężystości przy zginaniu  $E_{m,g}$  przeprowadzono osobno dla każdej próbki przyjmując założenia, że:

- szerokość przekroju poprzecznego próbek  $b = 150$  mm,
- wysokość przekroju poprzecznego próbek  $h = 45$  mm,
- rozpiętość próbki między podporami  $l = 810$  mm,
- odległość miejsca przyłożenia siły od najbliższej podpory  $a = 270$  mm.

Rezultaty obliczeń ogólnego modułu sprężystości drewna przy zginaniu  $E_{m,g}$  oraz wartość średnią ogólnego modułu sprężystości drewna zestawiono w tabeli (3.3.6).

**Tabela 3.3.6** Wartości ogólnego modułu sprężystości próbek drewna

Numer próbki	Ugięcie próbki $w$ [mm]		Siła od siłownika $F$ według równań z Tabeli 1.5 $10^3$ [N]		Ogólny moduł sprężystości $E_{m,g}$ [GPa]	Średni ogólny moduł sprężystości $\overline{E_{m,g}}$ [GPa]
	$w_2$	$w_1$	$F_2$	$F_1$		
1	4,0	2,0	4,5914	2,5531	8,4386	7,9982
2	4,0	2,0	4,4015	2,4964	7,8872	
3	4,0	2,0	4,2008	2,3484	7,6689	

Do dalszych obliczeń przyjęta została wartość średniej arytmetycznej ogólnego modułu sprężystości drewna przy zginaniu  $\overline{E_{m,g}}$  równa  $7,99 \cdot 10^3$  [N/mm<sup>2</sup>]. Współczynnik zmienności dla serii próbek pokazany w tabeli (3.3.7) kształtował się na poziomie około 5% wobec czego uznano, że badanie przeprowadzono poprawnie a jego rezultaty są miarodajne.

Tabela 3.3.7 Odchylenie standardowe i współczynnik zmienności ogólnego modułu sprężystości drewna

Numer próbki	$E_{m,gi}$ [N/mm <sup>2</sup> ] $\cdot 10^3$	$\overline{E_{m,g}}$ [N/mm <sup>2</sup> ] $\cdot 10^3$	$s_x$ [N/mm <sup>2</sup> ] $\cdot 10^2$	$V_x$ [-]
1	8,4386			
2	7,8872	7,9982	3,9668	0,0496
3	7,6689			

### 3.3.3. Oznaczenie modułu odkształcenia postaciowego metodą stałej rozpiętości

Przedmiotowe oznaczenie modułu odkształcenia postaciowego dla drewna zostało wykonane dwukrotnie na podstawie norm [152, 153]. Ponieważ obliczony współczynnik zmienności  $V_x$  kształtował się na poziomie  $\sim 0,9$  uznano, że otrzymane rezultaty nie są miarodajne. Z powodu braku większej ilości materiału do przeprowadzenia ponownego oznaczenia zgodnie z [131] przyjęto wartość współczynnika Poissona równą 0,41 i wynikającą na tej podstawie wartość modułu Kirchhoffa równą  $G_f = 2,833$  GPa.

## 3.4. Oznaczenie parametrów wytrzymałościowych rdzenia poliuretanowego

### 3.4.1. Oznaczenie wytrzymałości rdzenia poliuretanowego na ścinanie

Oznaczenie wytrzymałości rdzenia poliuretanowego na ścinanie przeprowadzono na podstawie wytycznych i zaleceń zawartych w kilku publikacjach. Ze względu na różnorodność zaleceń [27, 149, 156], niekiedy sprzecznych ze sobą oraz przedstawione wątpliwości związane z praktyczną realizacją prac laboratoryjnych [25] podjęto decyzję o przeprowadzeniu tego oznaczenia według procedury zbliżonej do [21].

Polska norma [151] przedstawia kompletną procedurę oznaczania wytrzymałości na ścinanie próbek z pianki poliuretanowej. Polega ona na przygotowaniu serii próbek o długości  $250_{-5}^0$  mm, szerokości  $50_{-1}^0$  mm i grubości  $25 \pm 0,5$  mm w ilości co najmniej 5 sztuk. Próbki te są następnie przyklejane do dwóch stalowych blach i niszczone w taki sposób, by zapewnić prędkość przesuwu blach  $1_0^{+0,5}$  mm na minutę.

Wytrzymałość na ścinanie  $q$  próbki z pianki poliuretanowej obliczana jest zgodnie z zależnością

$$q = \frac{1000 \cdot F_m}{l \cdot b} \quad (3.4.1)$$

gdzie:

$q$  – wytrzymałość na ścinanie próbki [kPa],

$F_m$  – maksymalna siła niszcząca [N],

$l$  – długość początkowa próbki [mm],

$b$  – szerokość próbki [mm].

Natomiast Carlsson w [21] powoływał się na normę [157] przedstawiającą podobną procedurę badania wytrzymałości na ścinanie próbek pianki poliuretanowej. Zasadniczo, metoda ta oparta była na poddaniu rozciąganiu próbki przyklejonej do dwóch stalowych płyt w celu

osiągnięcia zniszczenia poprzez ścięcie badanego materiału. Autor publikacji zwrócił jednak uwagę, że sam przebieg badania nie gwarantuje czystego ścinania całej próbki. W celu wyeliminowania

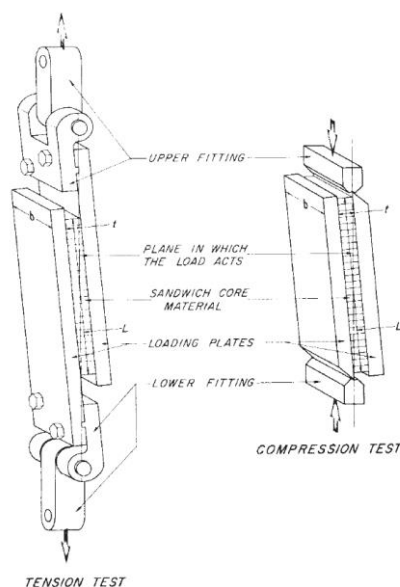
lub ewentualnie zminimalizowania wpływu innych naprężeń Carlsson zaleca, aby badanie przeprowadzać na długich próbkach umieszczonych między obciążanymi blachami w taki sposób, aby płaszczyzna obciążenia przechodziła przez przeciwległe narożniki próbki oraz osie obrotu blach.

Ponadto Carlsson proponuje, aby szerokość badanej próbki pianki poliuretanowej liczyła co najmniej 50 mm a jej długość była równa co najmniej dwunastokrotności grubości próbki.

W pracy [25] autorka skomentowała swoje doświadczenia związane z praktyczną realizacją procedur zawartych w [151]. Chuda-Kowalska przeprowadziła oznaczanie wytrzymałości próbek z pianki poliuretanowej na ścinanie oraz oznaczenie Modułu Kirchhoffa. W tym celu wykorzystwała próbki o wymiarach  $25 \times 50 \times 250$  mm, które następnie przykleiła do blach stalowych o grubości 16 mm. Tak przygotowane próbki były następnie montowane w maszynie wytrzymałościowej i niszczone zgodnie z normową procedurą. Autorka pisze następnie „(...) Badania wykazały, że pomimo dużej staranności w przygotowywaniu próbek były one obarczone błędami (podczas obróbki struktura pianki często ulegała uszkodzeniu, a klejenie do metalowych podpór zawsze powodowało pewne przesunięcia). Miało to duży wpływ na dokładność wyników a w szczególności na wartość modułu ścinania  $G_C$ . Dodatkowo sposób mocowania podpór metalowych w aparaturze badawczej umożliwiał występowanie dużych błędów w redystrybucji sił, a tym samym wpływał na niepoprawny wynik szacowanej stałej materiałowej (...)”.

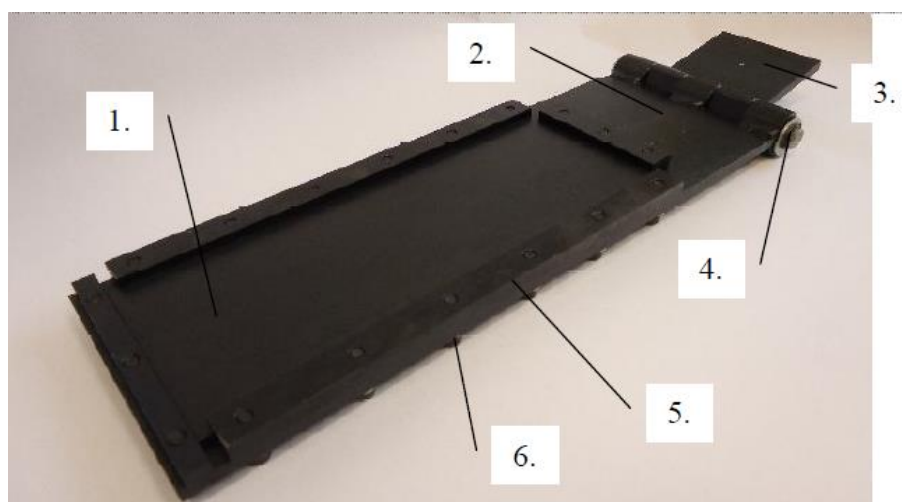
Ze względu na przedstawione wątpliwości i różnice w procedurach oznaczania wytrzymałości na ścinanie oraz Modułu Kirchhoffa, zdecydowano o przeprowadzeniu badań według zmodyfikowanej metody zawartej w [151].

Przyjęto, że próbki z pianki poliuretanowej będą miały wymiary  $300 \times 100 \times 20$  mm, co było faktyczną realizacją zasady przedstawionej w [21], aby stosunek długości do grubości próbki wynosił co najmniej 12. Jednocześnie przygotowano własną wersję akcesorium stalowego o takich proporcjach, aby uwzględnić kolejną zasadę mówiącą, że linia obciążenia powinna przechodzić przez przeciwległe narożniki próbki i osie obrotu dwóch części chwytaka.



**Rysunek 3.4.1** Proponowane rozwiązanie konstrukcyjne chwytaka do próbek pianki przy oznaczaniu wytrzymałości na ścinanie według [21] oraz [149]

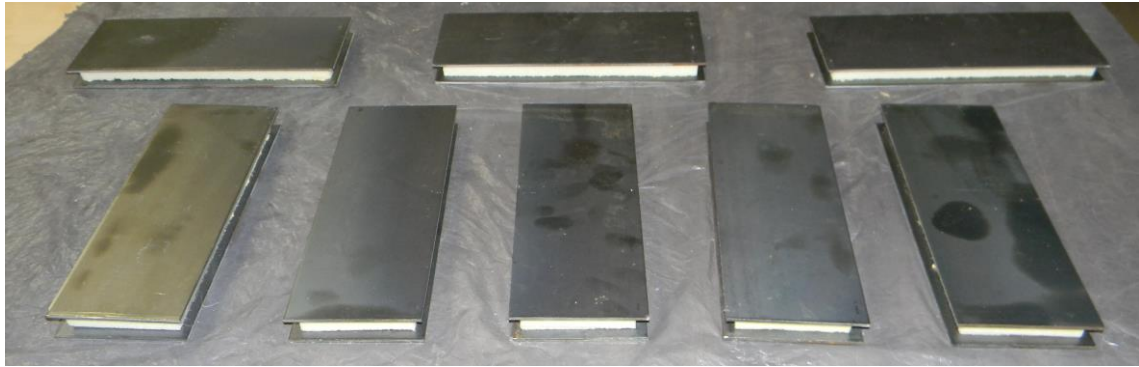
Gotową połowę urządzenia w wersji zaproponowanej przeze mnie przedstawia fotografia (3.4.1) natomiast dokumentację wykonawczą urządzenia zawiera załącznik A.



**Fotografia 3.4.1** Połowa urządzenia do badania wytrzymałości na ścinanie próbek pianki poliuretanowej: 1- blacha do naklejania próbki pianki, 2- główne ramię urządzenia, 3- uchwyt/zaczep do połączenia z maszyną wytrzymałościową, 4- sworzeń stalowy, 5- uchwyty kątowe do mocowania blachy (1) z naklejoną próbką pianki, 6- Śruby imbusowe do mocowania głównego ramienia urządzenia (2) do uchwytów kątowych (5)

Prędkość przykładania obciążenia próbki z pianki poliuretanowej została zaczerpnięta z instrukcji zawartych w [151] i przyjęta jako równa 1 milimetr na minutę.

Oznaczenie wytrzymałości pianki poliuretanowej na ścinanie oraz Modułu Kirchhoffa przeprowadzono w dniu 30 lipca 2015 roku w Laboratorium Technologii Materiałów i Konstrukcji Budowlanych. Wykorzystano maszynę wytrzymałościową Satec/Instron 600 kN znajdującą się na wyposażeniu Laboratorium. Przedmiotowe badanie przeprowadzono na serii 5 próbek o wymiarach  $300 \times 100 \times 20$  mm, przyklejonych do dwóch stalowych blach o wymiarach  $320 \times 120 \times 5$  mm. Do połączenia próbek i blach użyto kleju poliuretanowego Tytan wyprodukowanego przez przedsiębiorstwo „Selena S.A”.



**Rysunek 3.4.2** Próbki pianki wklejone do stalowych blach przed przykręceniem do stalowego chwytaka

W celu oznaczenia wartości wytrzymałości próbek pianki poliuretanowej na ścinanie oraz Modułu Kirchhoffa skorzystano z zależności przedstawionych w [21] oraz [157]:

$$\tau = \frac{P}{L \cdot b}, \quad (3.4.2)$$

$$G = \frac{\tau}{\gamma}, \quad (3.4.3)$$

$$\gamma = \frac{u}{h_c}, \quad (3.4.4)$$

gdzie:

$\tau$  – wytrzymałość pianki poliuretanowej na ścinanie w  $[\text{N}/\text{mm}^2]$ ,

$G$  – Moduł Kirchhoffa w  $[\text{N}/\text{mm}^2]$ ,

$L$  – długość próbki pianki poliuretanowej w  $[\text{mm}]$ ,

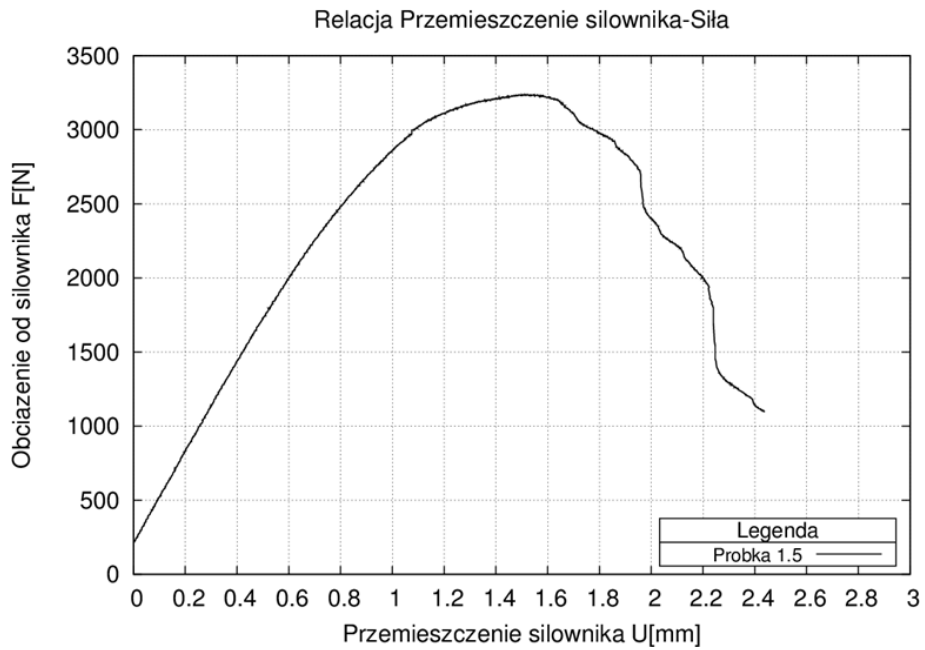
$P$  – siła obciążająca próbkę  $[\text{N}]$ ,

$b$  – szerokość próbki pianki poliuretanowej w  $[\text{mm}]$ ,

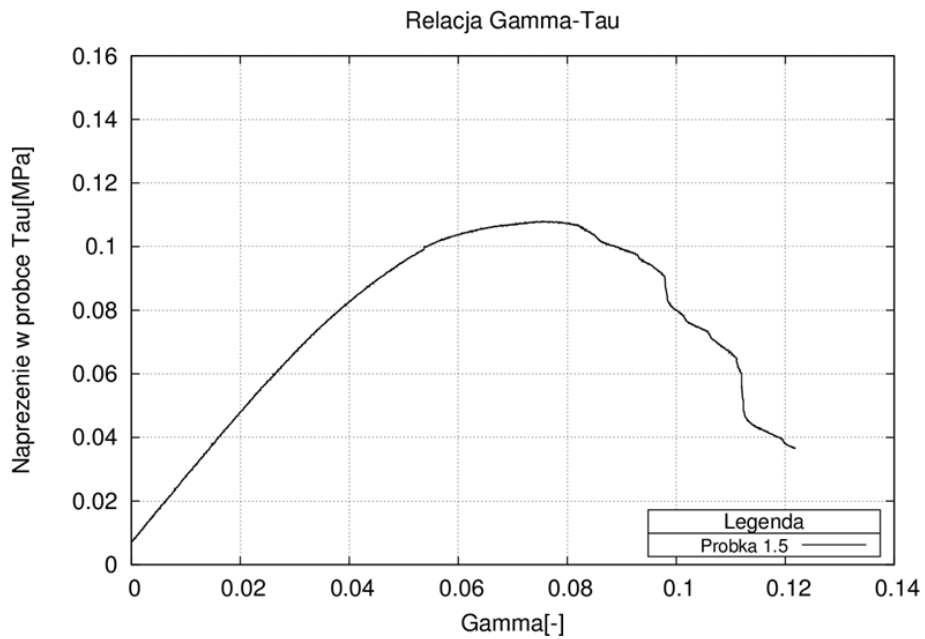
$u$  – przemieszczenie próbki pod wpływem obciążenia w  $[\text{mm}]$ ,

$h_c$  – grubość próbki w  $[\text{mm}]$ .

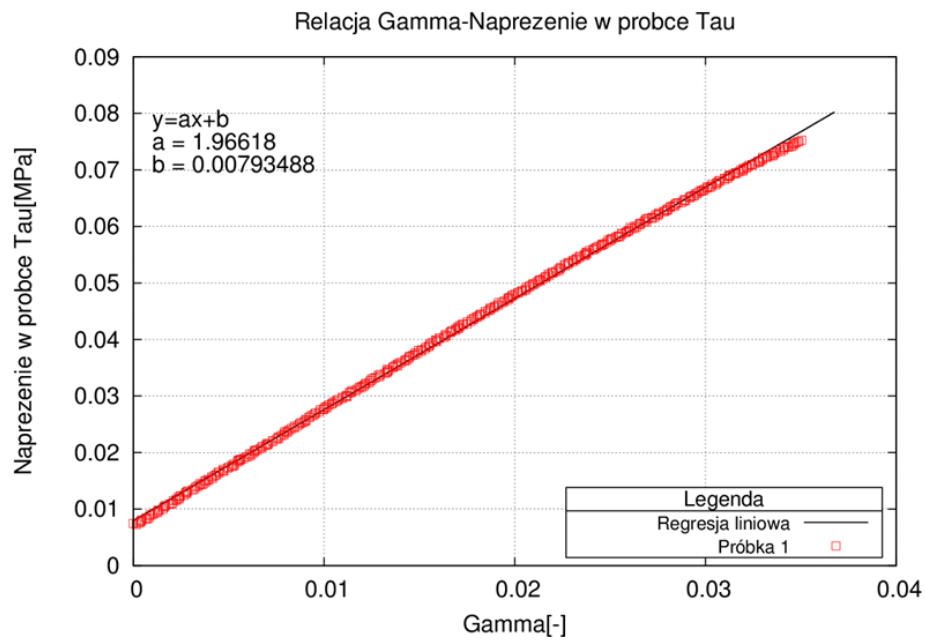
Rezultaty z przeprowadzonych pomiarów laboratoryjnych dla serii 5 próbek o numerach od 1.5 do 1.9 przedstawiają rysunki (3.4.3) – (3.4.18).



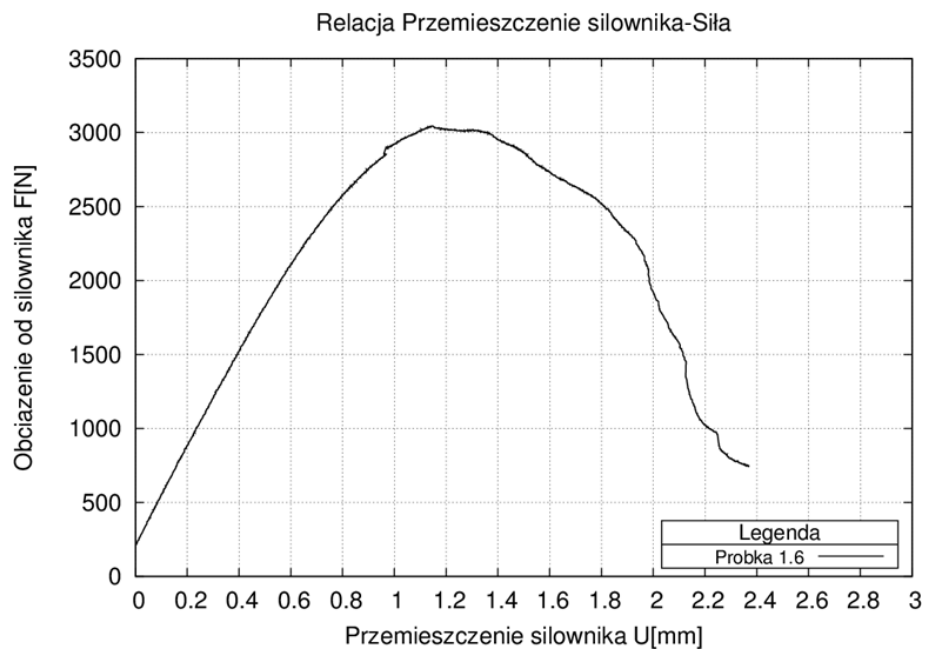
Rysunek 3.4.3 Wykres relacji między przemieszczeniem próbki nr 1.5 a siłą obciążającą [dane autora]



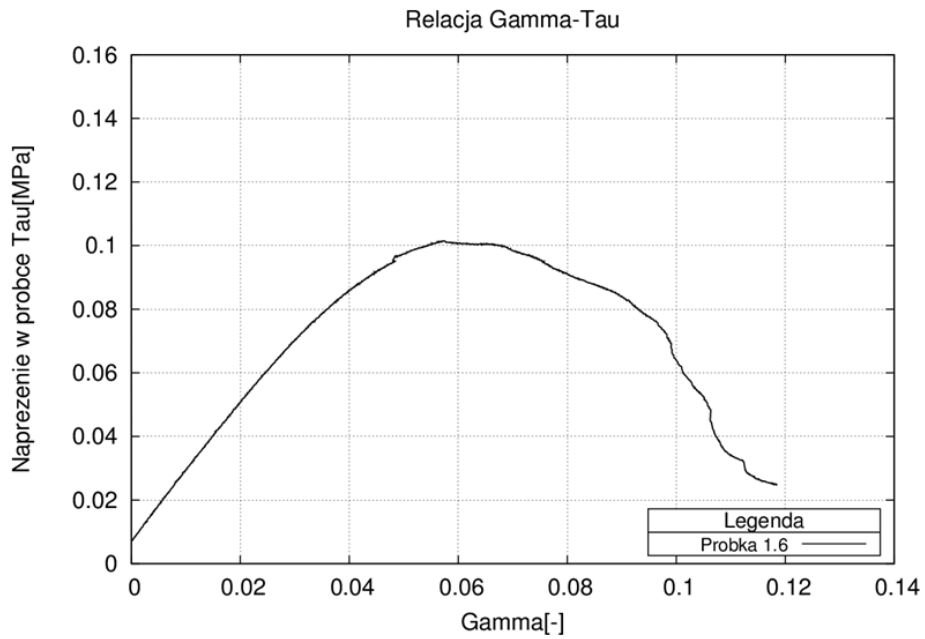
Rysunek 3.4.4 Wykres relacji między wielkością  $\gamma$  a naprężeniem  $\tau$  w przekroju próbki nr 1.5 [dane autora]



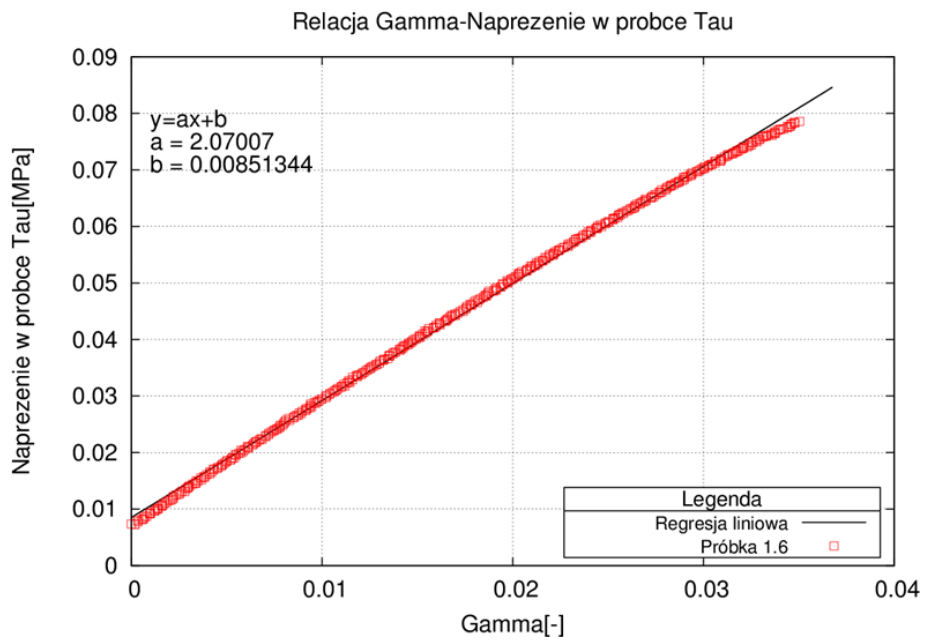
**Rysunek 3.4.5** Wykres relacji między wielkością  $\gamma$  a naprężeniem  $\tau$  w przekroju próbki nr 1.5 dla fazy sprężystej oraz jej liniowa aproksymacja ze współczynnikiem korelacji  $r = 0,996$  [dane autora]



**Rysunek 3.4.6** Wykres relacji między przeszczeniem próbki nr 1.6 a siłą obciążającą

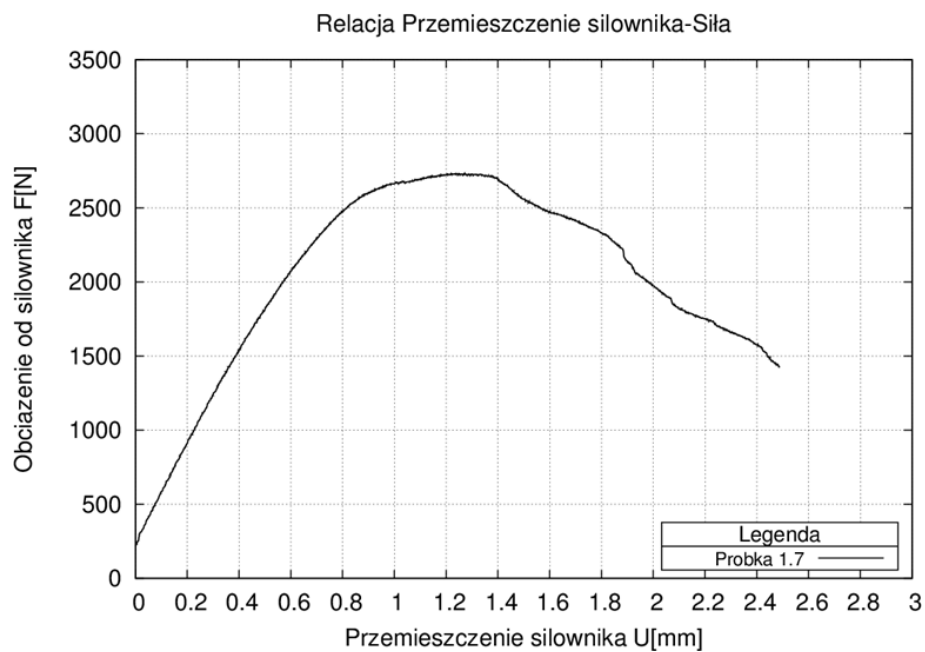


Rysunek 3.4.7 Wykres relacji między wielkością  $\gamma$  a naprężeniem  $\tau$  w przekroju próbki nr 1.6

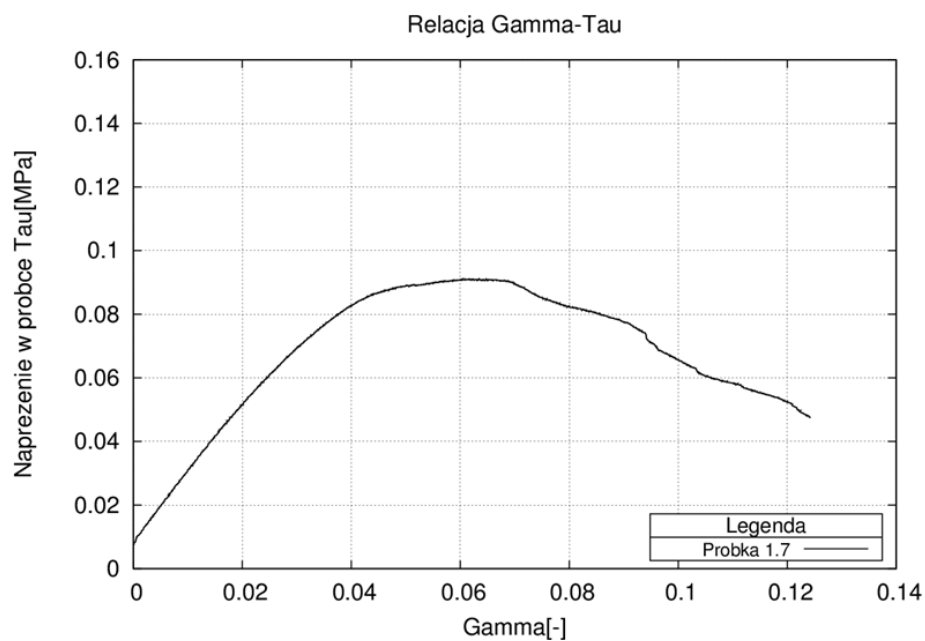


Rysunek 3.4.8 Wykres relacji między wielkością  $\gamma$  a naprężeniem  $\tau$  w przekroju próbki nr 1.6 dla fazy sprężystej oraz jej liniowej aproksymacji ze współczynnikiem korelacji  $r = 0,9992$

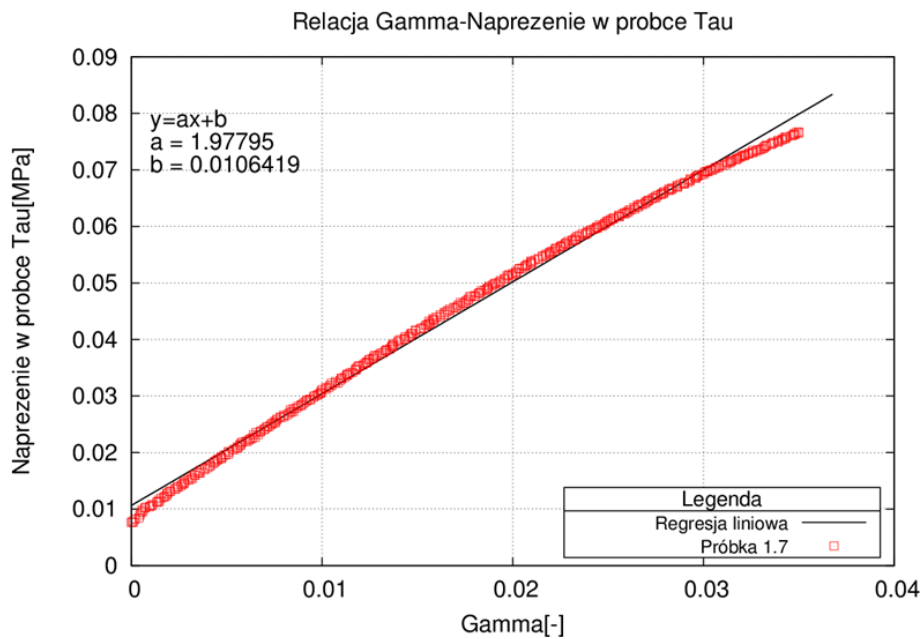




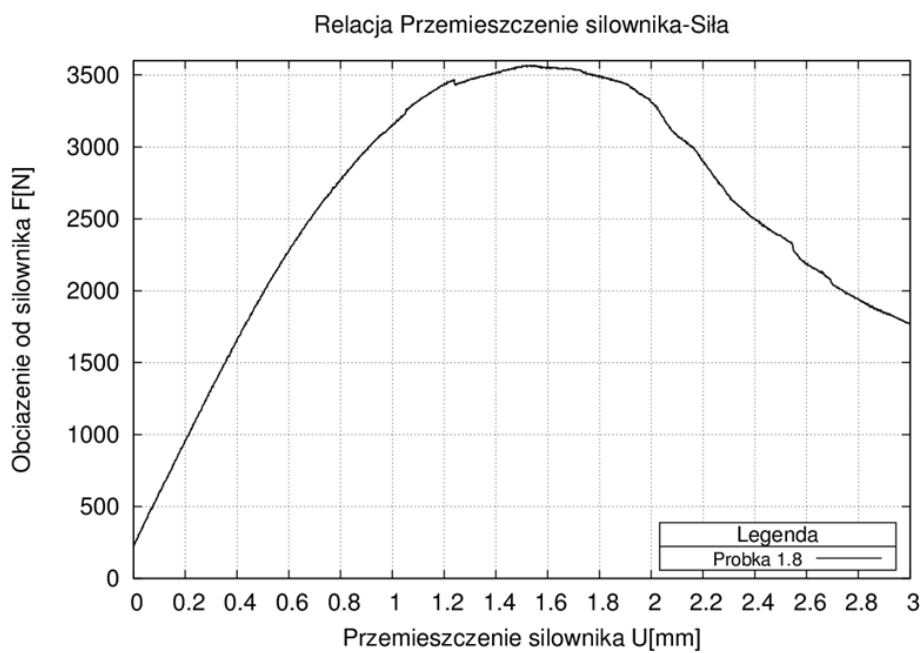
**Rysunek 3.4.9** Wykres relacji między przeszczeniem próbki nr 1.7 a siłą obciążającą



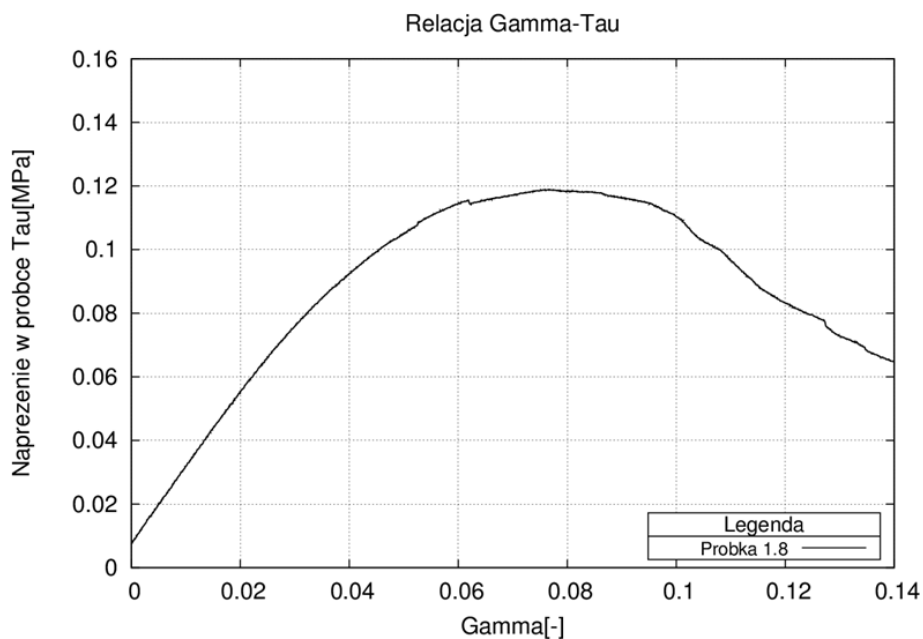
**Rysunek 3.4.10** Wykres relacji między wielkością  $\gamma$  a naprężeniem  $\tau$  w przekroju próbki nr 1.7



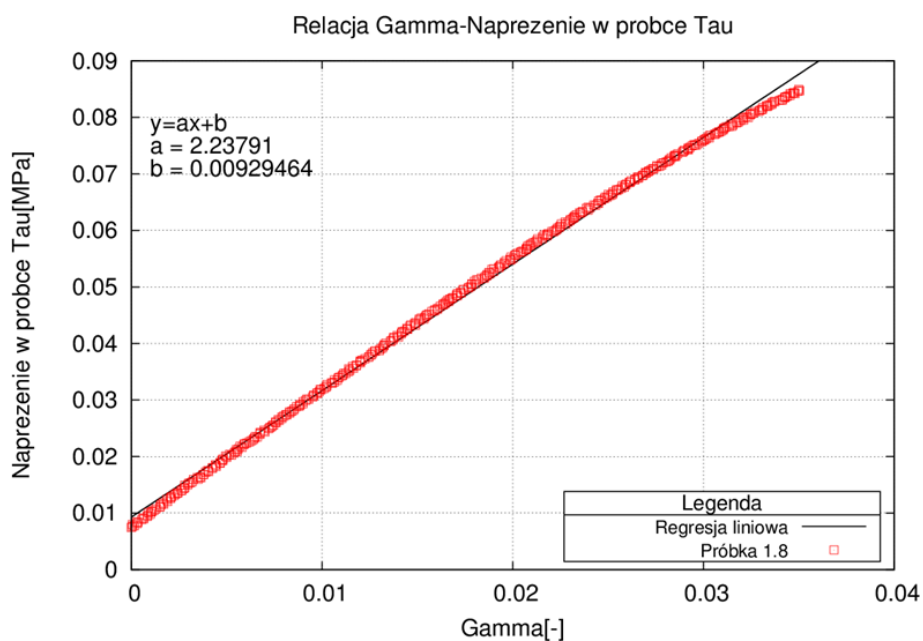
**Rysunek 3.4.11** Wykres relacji między wielkością  $\gamma$  a naprężeniem  $\tau$  w przekroju próbki nr 1.7 dla fazy sprężystej oraz jej liniowa aproksymacja ze współczynnikiem korelacji  $r = 0,9978$



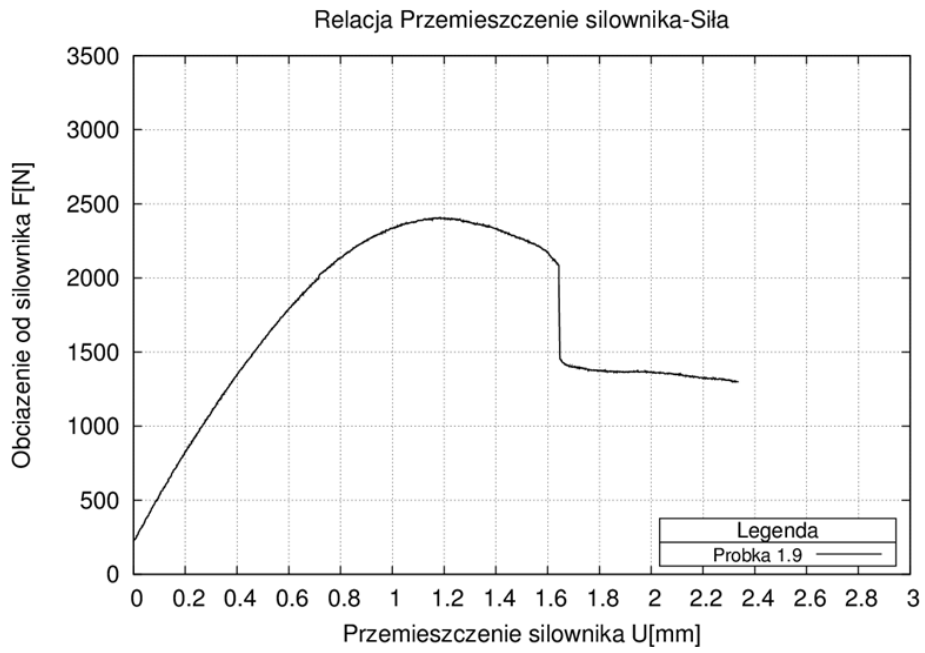
**Rysunek 3.4.12** Wykres relacji między przemieszczeniem próbki nr 1.8 a siłą obciążającą



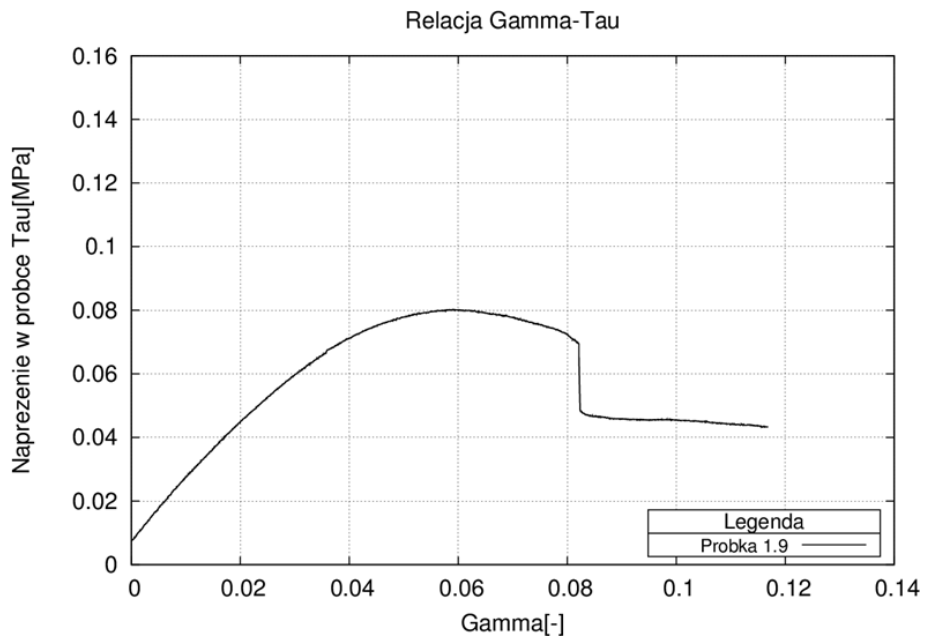
Rysunek 3.4.13 Wykres relacji między wielkością  $\gamma$  a naprężeniem  $\tau$  w przekroju próbki nr 1.8



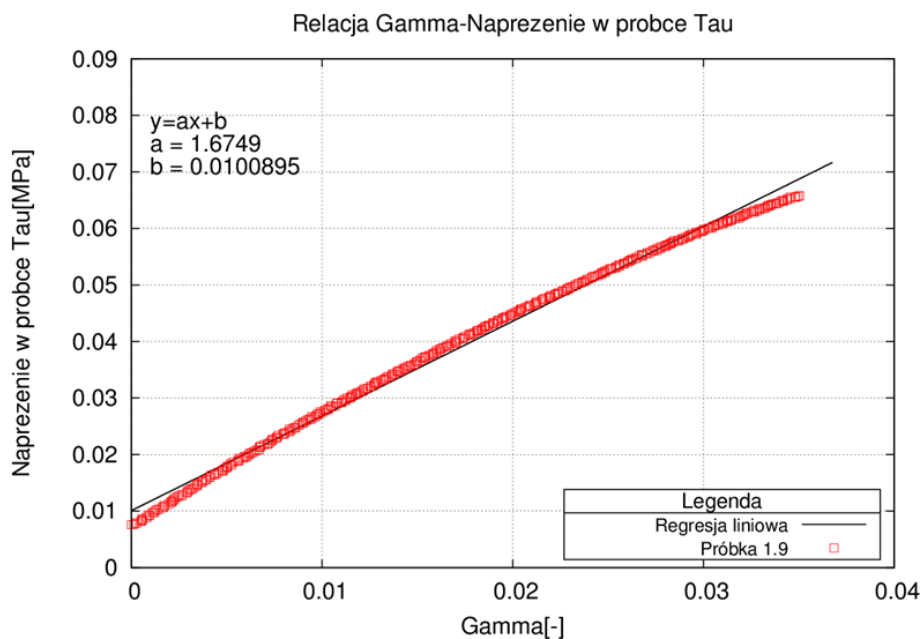
Rysunek 3.4.14 Wykres relacji między wielkością  $\gamma$  a naprężeniem  $\tau$  w przekroju próbki nr 1.8 dla fazy sprężystej oraz jej liniowa aproksymacja ze współczynnikiem korelacji  $r = 0,9989$



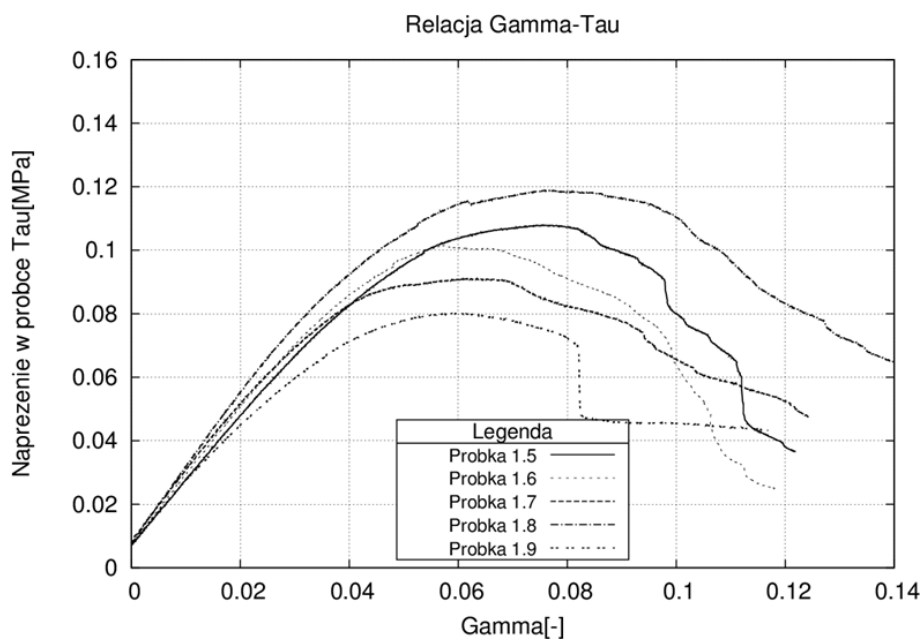
Rysunek 3.4.15 Wykres relacji między przemieszczeniem próbki nr 1.9 a siłą obciążającą



Rysunek 3.4.16 Wykres relacji między wielkością  $\gamma$  a naprężeniem  $\tau$  w przekroju próbki nr 1.9



**Rysunek 3.4.17** Wykres relacji między wielkością  $\gamma$  a naprężeniem  $\tau$  w przekroju próbki nr 1.9 dla fazy sprężystej oraz jej liniowa aproksymacja ze współczynnikiem korelacji  $r = 0,9973$



**Rysunek 3.4.18** Wykres relacji między wielkością  $\gamma$  a naprężeniem  $\tau$  w przekrojach dla całej serii próbek

Wartości maksymalnych zmierzonych naprężeń  $\tau$  dla serii próbek, będących jednocześnie wartościami wytrzymałości na ścinanie wraz z wartością średnią wytrzymałości, przedstawiono w tabeli (3.4.1).

**Tabela 3.4.1** Maksymalne naprężenia przy ścinaniu próbek z pianki poliuretanowej

Numer próbki	Maksymalna siła obciążająca próbkę $P$ [N]	Naprężenie przy ścinaniu $\tau$ [N/mm <sup>2</sup> ]	Naprężenie średnie przy ścinaniu $\bar{\tau}$ [N/mm <sup>2</sup> ]
1.5	3238,46703	0,107949	0,099
1.6	3044,18961	0,101473	
1.7	2731,36720	0,091046	
1.8	3566,38106	0,118879	
1.9	2406,55800	0,080219	

Do dalszych obliczeń została przyjęta wartość średniej arytmetycznej wytrzymałości pianki na ścinanie  $\bar{\tau}$  równą 0,099[N/mm<sup>2</sup>]. Współczynnik zmienności dla serii próbek kształtował się na poziomie około 15% wobec czego uznano, że badanie przeprowadzono poprawnie a jego rezultaty są miarodajne. Obliczenia współczynnika zmienności przedstawiono w tabeli (3.4.2).

**Tabela 3.4.2** Odchylenie standardowe i współczynnik zmienności wytrzymałości pianki na ścinanie

Numer próbki	$\tau$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\bar{\tau}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$s_x$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$V_x$ [-]
1.5	0,107949	0,099	0,014943	0,15
1.6	0,101473			
1.7	0,091046			
1.8	0,118879			
1.9	0,080219			

Natomiast Moduły Kirchhoffa dla serii próbek wyznaczono poprzez liniową aproksymację sprężystego zakresu przebiegu relacji  $\tau$ - $\gamma$ . Równania funkcji liniowych aproksymujących część sprężystą wykresu zawarto w tabeli (3.4.3).

**Tabela 3.4.3** Równania funkcji aproksymujących część liniową wykresu t-g próbek pianki poliuretanowej

Numer próbki	Równanie funkcji regresji $\tau$ - $\gamma$	Współczynnik korelacji $r$	Współczynnik determinacji $r^2$
1.5	$\tau = 1,9662 \cdot \gamma + 0,0079$	0,9960	0,9920
1.6	$\tau = 2,0701 \cdot \gamma + 0,0085$	0,9992	0,9984
1.7	$\tau = 1,97795 \cdot \gamma + 0,0106$	0,9978	0,9956
1.8	$\tau = 2,23791 \cdot \gamma + 0,0093$	0,9989	0,9978
1.9	$\tau = 1,6749 \cdot \gamma + 0,0101$	0,9973	0,9946

Zasięg części sprężystej określono wychodząc z założenia, że wartość współczynnika determinacji dla liniowej funkcji aproksymującej nie może być niższy niż 0,99.

Obliczenia modułu Kirchhoffa dla serii próbek pianki poliuretanowej prezentuje Tabela 3.4.4. Współczynnik zmienności modułu Kirchhoffa kształtuje się na poziomie 10% i w związku z tym uznano, że jego oznaczenie przeprowadzono poprawnie. W dalszych obliczeniach posługiwano się wartością  $\bar{G} = 1,985 \text{ MPa}$ .

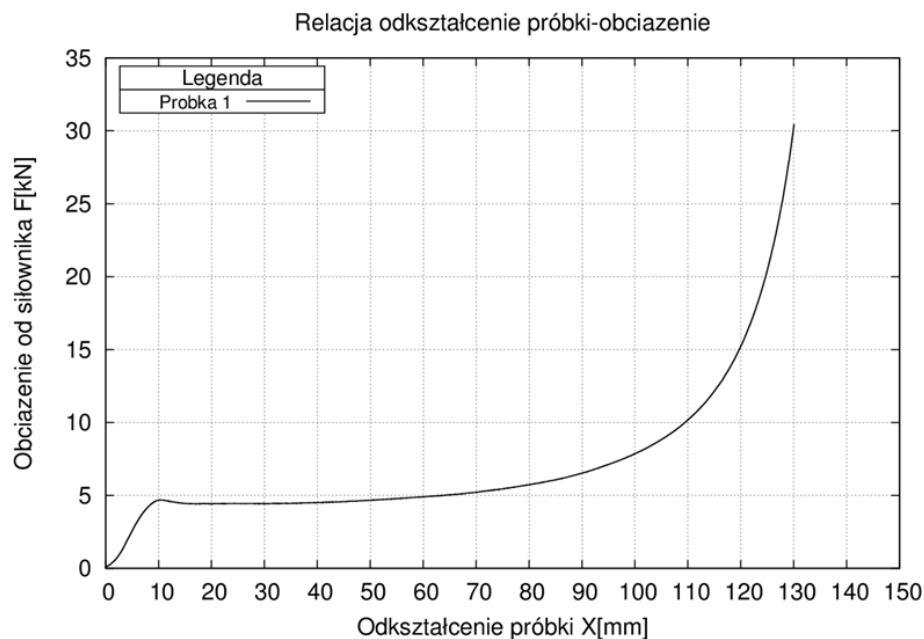
**Tabela 3.4.4** Odchylenie standardowe, współczynnik zmienności i wartość średnia modułu Kirchhoffa pianki

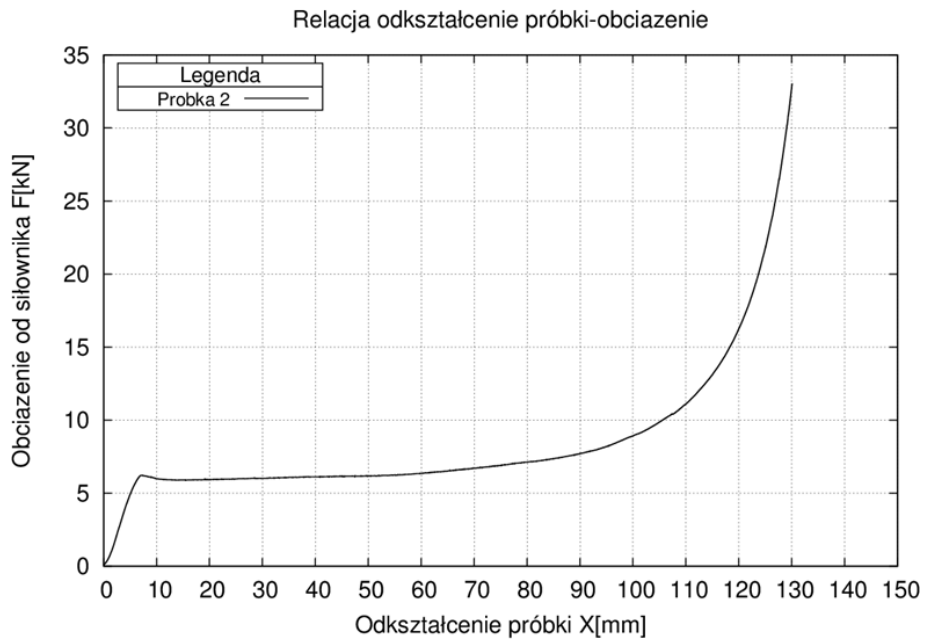
Numer próbki	$G$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\bar{G}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$s_x$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$V_x$ [-]
1.5	1,9662			
1.6	2,0701			
1.7	1,97795	1,985	0,205	0,10
1.8	2,23791			
1.9	1,6749			

### 3.4.2. Oznaczenie wytrzymałości rdzenia poliuretanowego na ściskanie

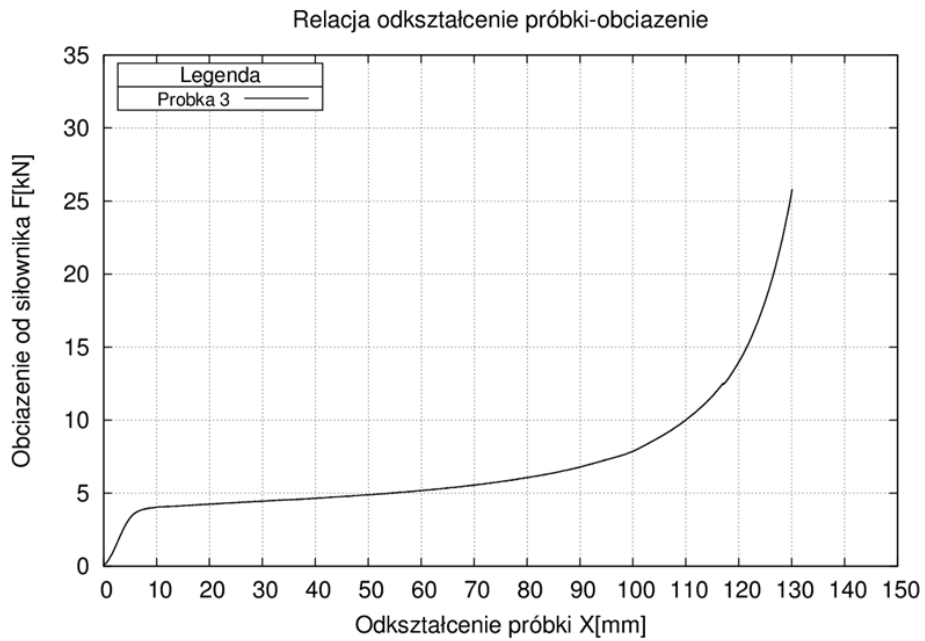
Oznaczenie wytrzymałości pianki poliuretanowej na ściskanie przeprowadzono zgodnie z normami [154-156]. W tym celu została przygotowana seria 10 sześciennych próbek o długości boku równej 150 mm, ponumerowanych kolejno od 1 do 10. Próbki były obciążane z prędkością przesuwu tłoku wynoszącą 15 mm/min.

Rezultaty badań niszczących próbki pokazano na rysunkach (3.4.19) – (3.4.28) prezentujących relację między odkształceniem próbki  $X$  a siłą obciążającą  $F$ .

**Rysunek 3.4.19** Wykres relacji między odkształceniem próbki  $X$  [mm] a siłą obciążającą  $F$  [kN] dla próbki nr 1

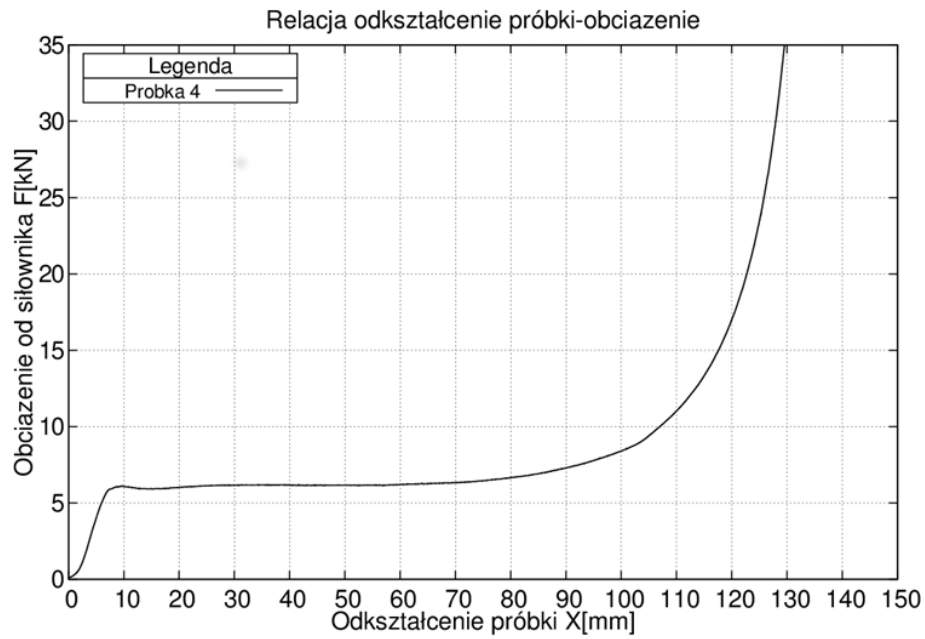


Rysunek 3.4.20 Wykres relacji między odkształceniem próbki  $X$  [mm] a siłą obciążającą  $F$  [kN] dla próbki nr 2

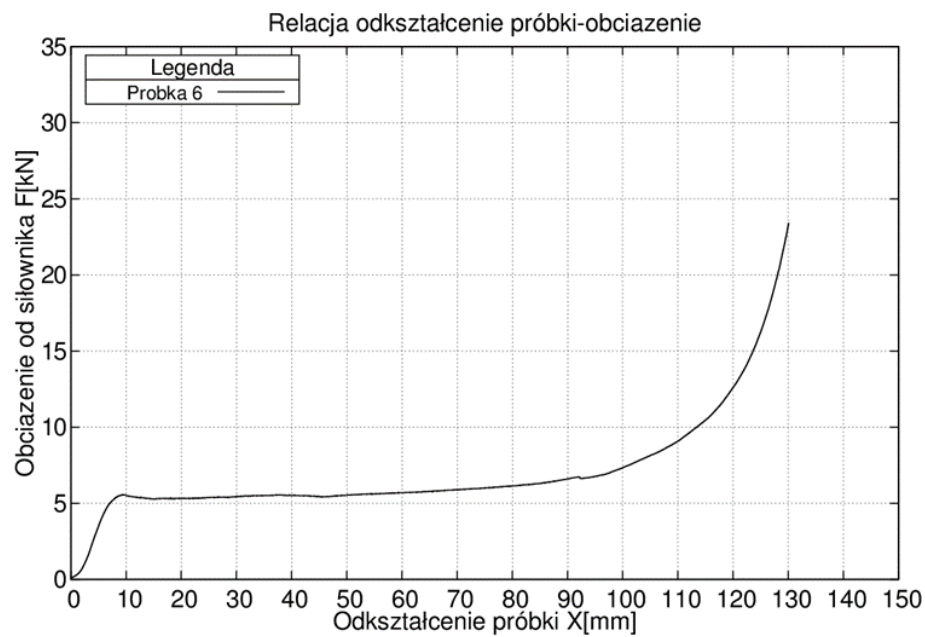


Rysunek 3.4.21 Wykres relacji między odkształceniem próbki  $X$  [mm] a siłą obciążającą  $F$  [kN] dla próbki nr 3

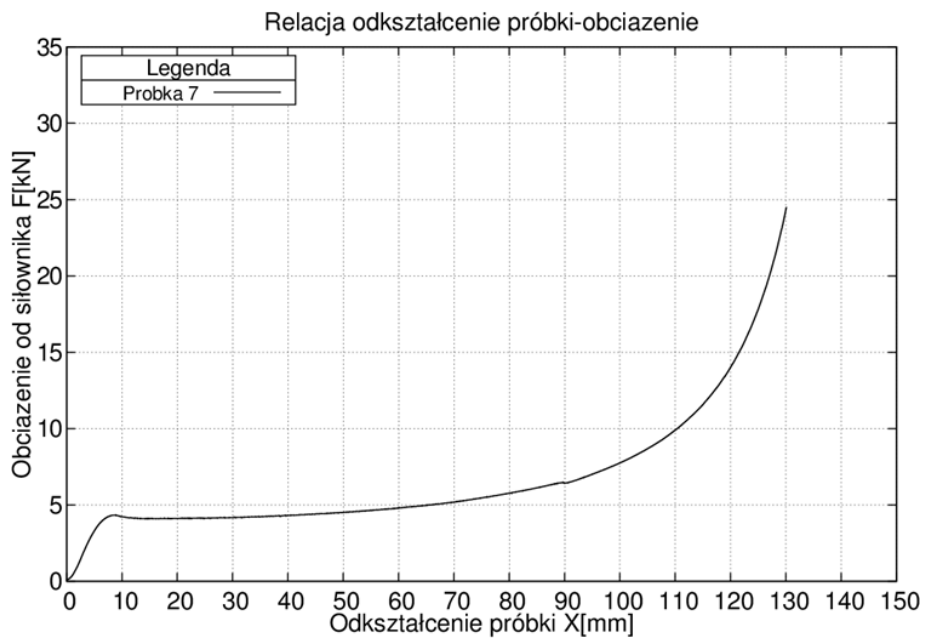




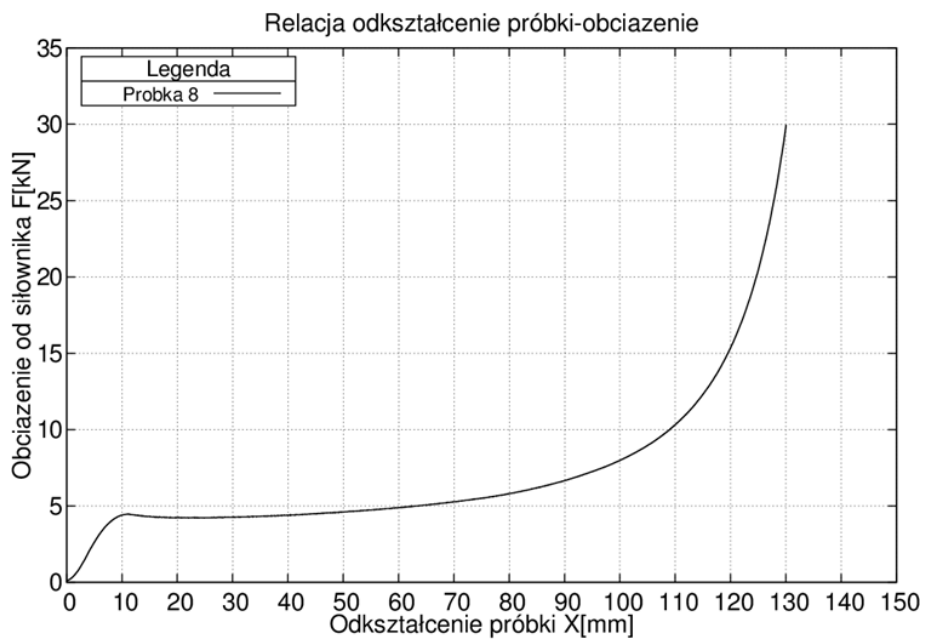
Rysunek 3.4.22 Wykres relacji między odkształceniem próbki  $X$  [mm] a siłą obciążającą  $F$  [kN] dla próbki nr 4



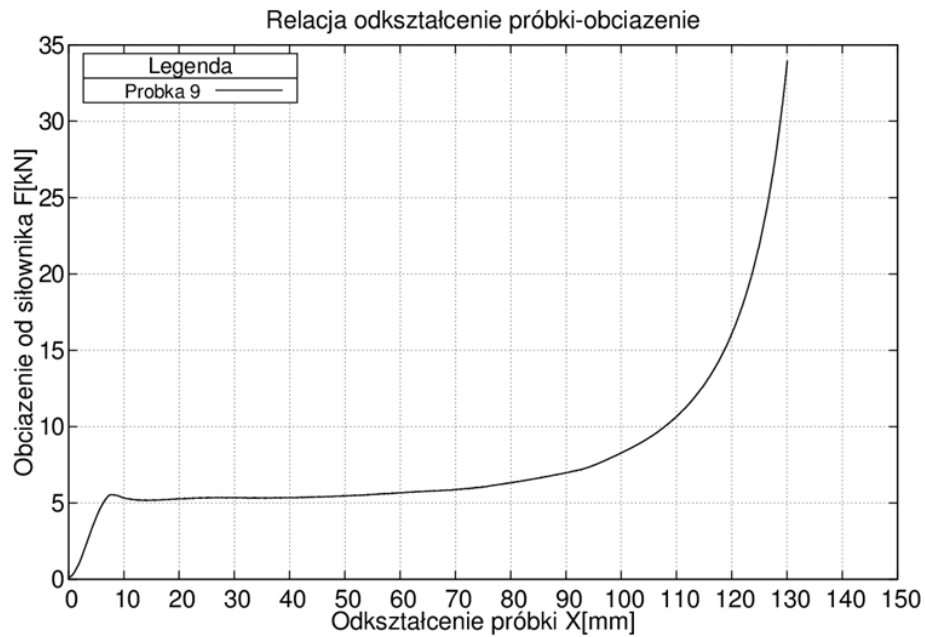
Rysunek 3.4.23 Wykres relacji między odkształceniem próbki  $X$  [mm] a siłą obciążającą  $F$  [kN] dla próbki nr 6



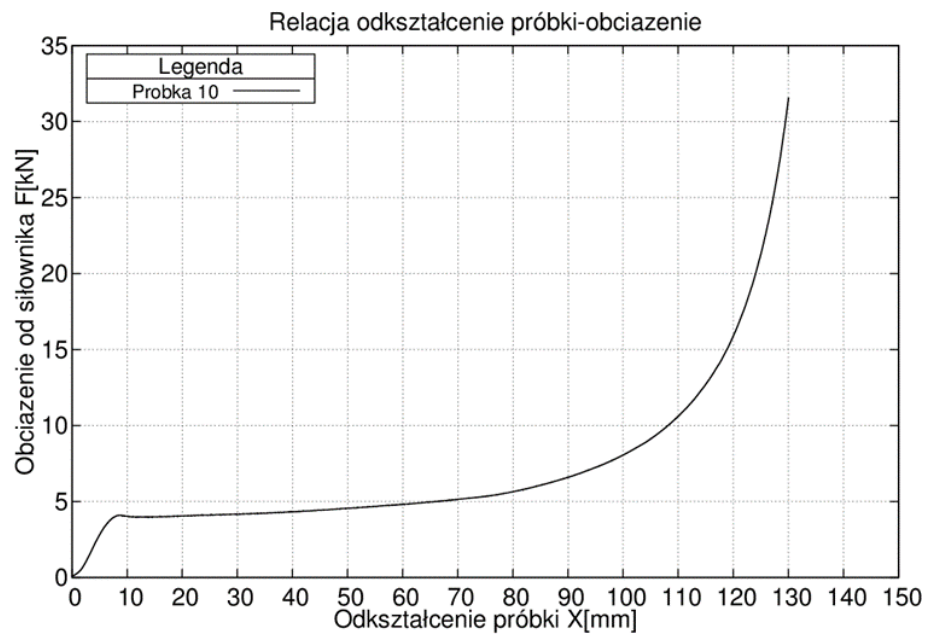
Rysunek 3.4.24 Wykres relacji między odkształceniem próbki  $X$  [mm] a siłą obciążającą  $F$  [kN] dla próbki nr 7



Rysunek 3.4.25 Wykres relacji między odkształceniem próbki  $X$  [mm] a siłą obciążającą  $F$  [kN] dla próbki nr 8

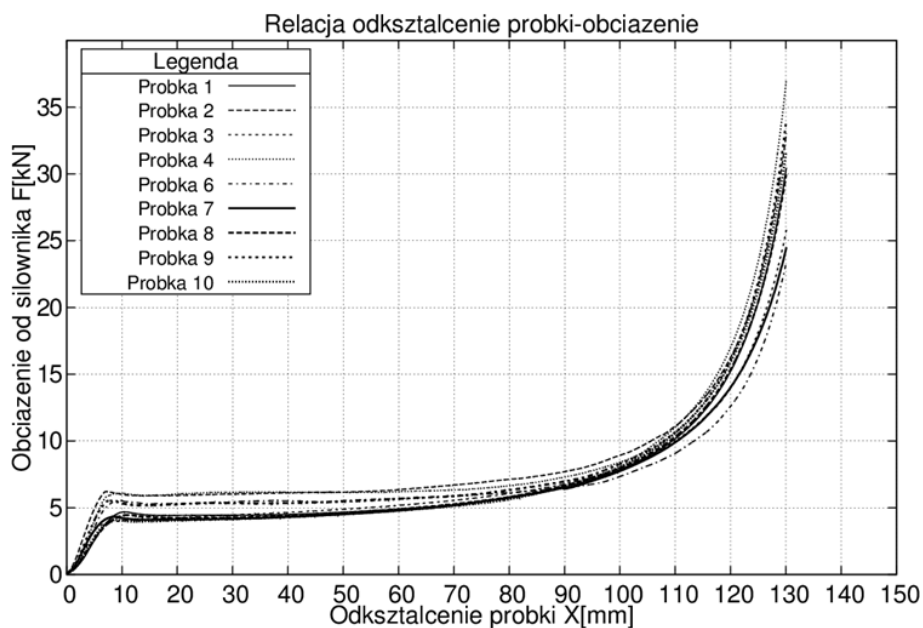


Rysunek 3.4.26 Wykres relacji między odkształceniem próbki  $X$  [mm] a siłą obciążającą  $F$  [kN] dla próbki nr 9



Rysunek 3.4.27 Wykres relacji między odkształceniem próbki  $X$  [mm] a siłą obciążającą  $F$  [kN] dla próbki nr 10

Wykres zbiorczy dla badanych próbek przedstawia rysunek (3.4.28).



Rysunek 3.4.28 Wykres zbiorczy relacji między odkształceniem próbki  $X$  [mm] a siłą obciążającą  $F$  [kN]

Wytrzymałość na ściskanie  $\sigma_m$  pojedynczej próbek pianki poliuretanowej była obliczana zgodnie z zależnością (3.4.5):

$$f_{Cc} = \frac{F_u}{A} \cdot 10^3 \quad (3.4.5)$$

gdzie:

$F_u$  – maksymalna siła obciążająca próbkę w [N],

$A$  – powierzchnia początkowa przekroju poprzecznego próbki w [mm<sup>2</sup>].

Rezultaty obliczeń wytrzymałości pianki poliuretanowej na ściskanie  $\overline{f_{Cc}}$  przedstawiono w tabeli (3.4.5).

Tabela 3.4.5 Wytrzymałości na ściskanie  $f_{Cc}$  próbek z pianki poliuretanowej oraz wytrzymałość średnia  $\overline{f_{Cc}}$

Numer próbki	Maksymalna siła $F_u$ obciążająca próbkę	Powierzchnia początkowa przekroju poprzecznego próbki $A$	Wytrzymałość na ściskanie próbki $f_{Cc}$	Wartość średnia wytrzymałości na ściskanie $\overline{f_{Cc}}$	Odchylenie standardowe wytrzymałości na ściskanie $s_x$	Współczynnik zmienności $V_x$
	[N]	[mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[-]
1	4689,3	22171,21	0,21			
2	6220,4	21470,45	0,29			
4	6185,6	22274,00	0,28			
6	5556,7	21475,58	0,26			
7	4333,7	21844,80	0,20	0,24	0,039	0,163
8	4458,5	21486,27	0,21			
9	5543,2	21889,18	0,25			
10	4095,3	21578,80	0,19			

Wartość współczynnika zmienności wytrzymałości pianki na ściskanie  $V_x$  kształtująca się na poziomie około 16,3% pozwala sformułować wniosek o akceptowalnym poziomie

dokładności i miarodajności wartości średniej wytrzymałości  $\overline{f_{cc}}$ . Do dalszych obliczeń przyjęto wartość 0,24 MPa.

### 3.4.3. Oznaczenie modułu sprężystości pianki poliuretanowej przy ściskaniu

Oznaczenie modułu sprężystości pianki poliuretanowej przy ściskaniu  $E$  zostało wykonane w oparciu o normy [154-156]. Wartość modułu sprężystości obliczono zgodnie z procedurą:

$$E_{Cc} = \frac{F_u \cdot d_c}{w_u \cdot A} \quad (3.4.6)$$

gdzie:

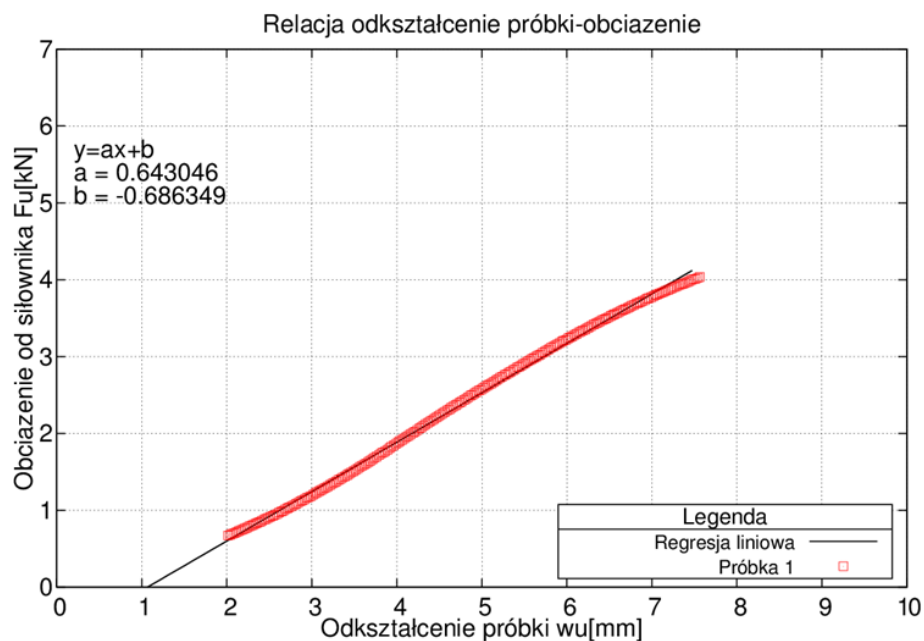
$F_u$  – maksymalna siła obciążająca próbkę [N],

$d_c$  – grubość początkowa próbki [mm]

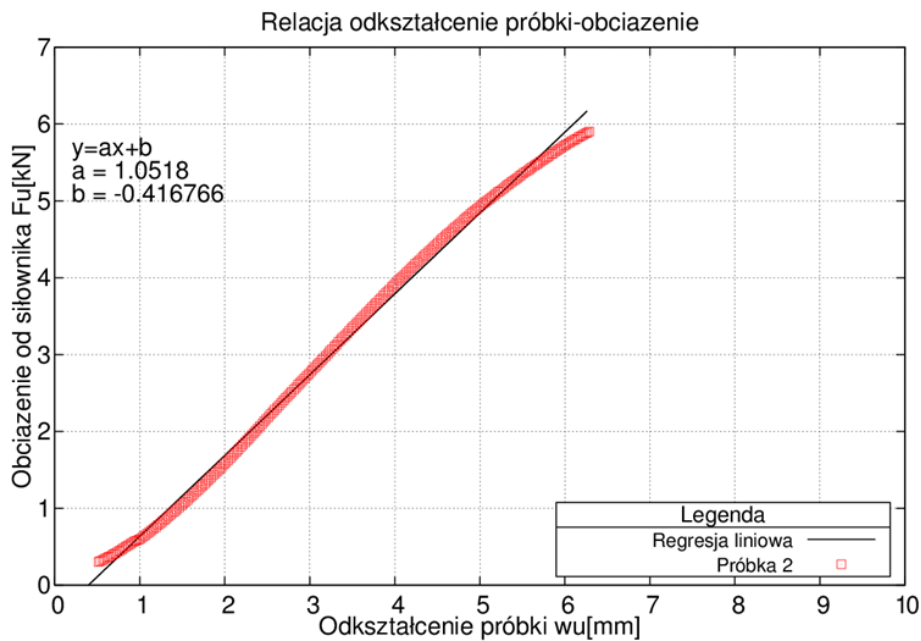
$w_u$  – odkształcenie próbki przy  $F_e$  w [mm],

$A$  – powierzchnia przekroju poprzecznego próbki [mm<sup>2</sup>].

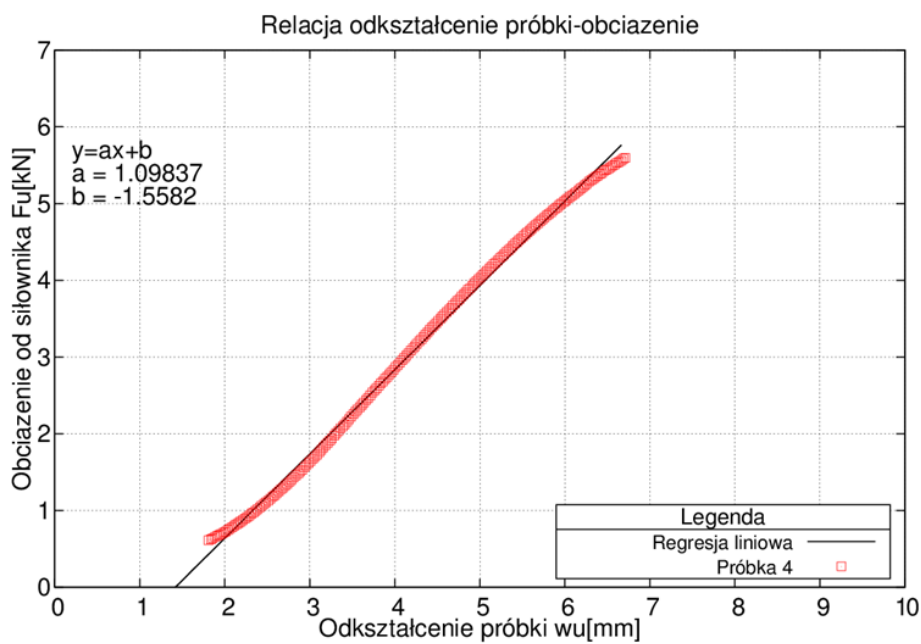
Aproksymację liniową sprężystej części wykresów relacji między przemieszczeniem siłownika X a obciążeniem F dla kolejnych próbek zaprezentowano na rysunkach (3.4.29) – (3.4.36).



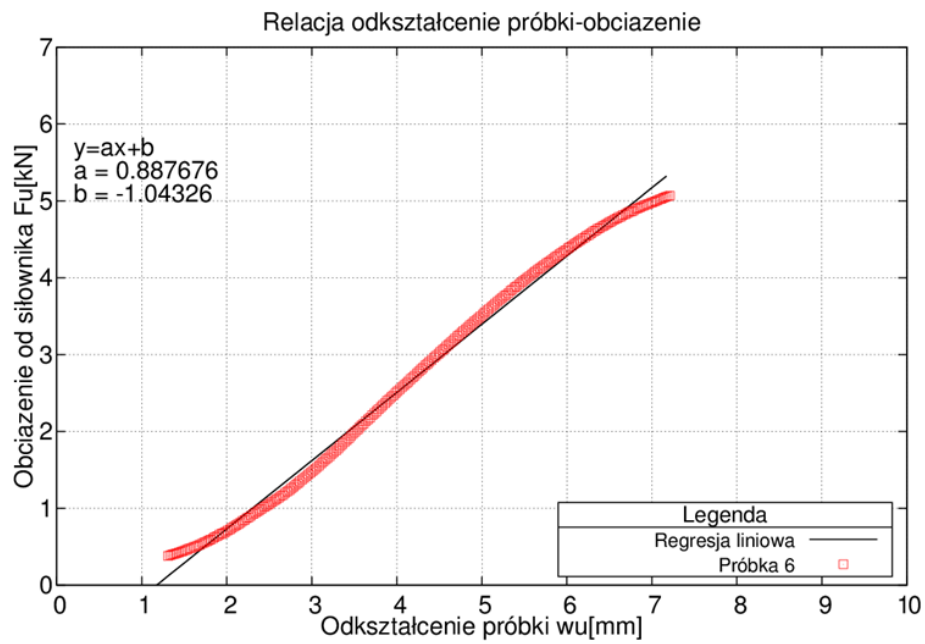
Rysunek 3.4.29 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 1



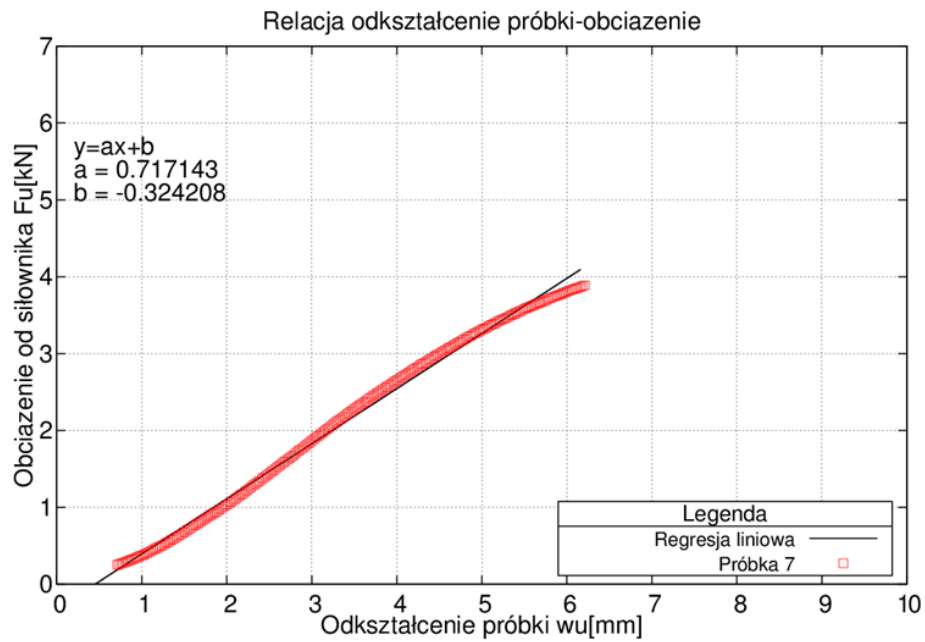
Rysunek 3.4.30 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 2



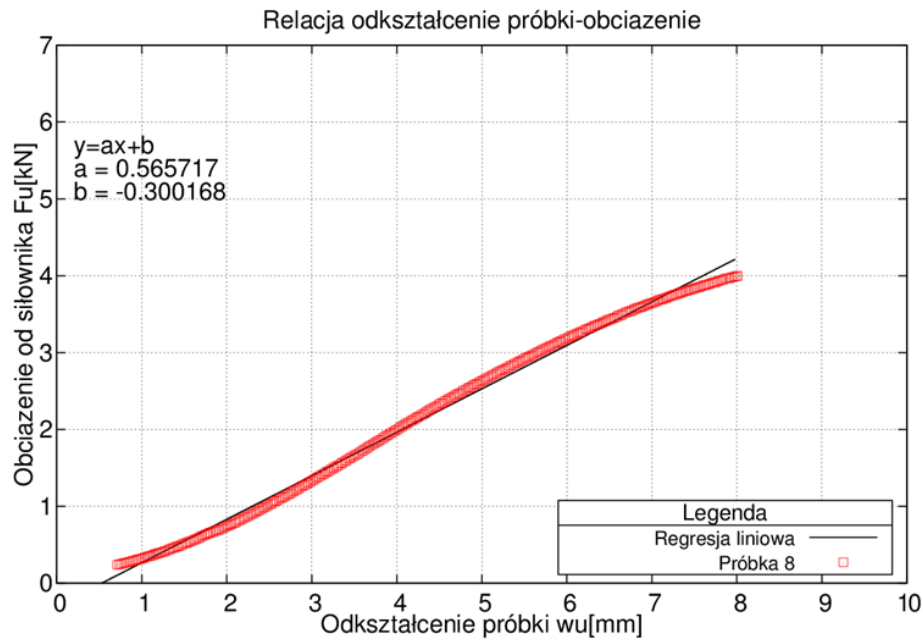
Rysunek 3.4.31 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 4



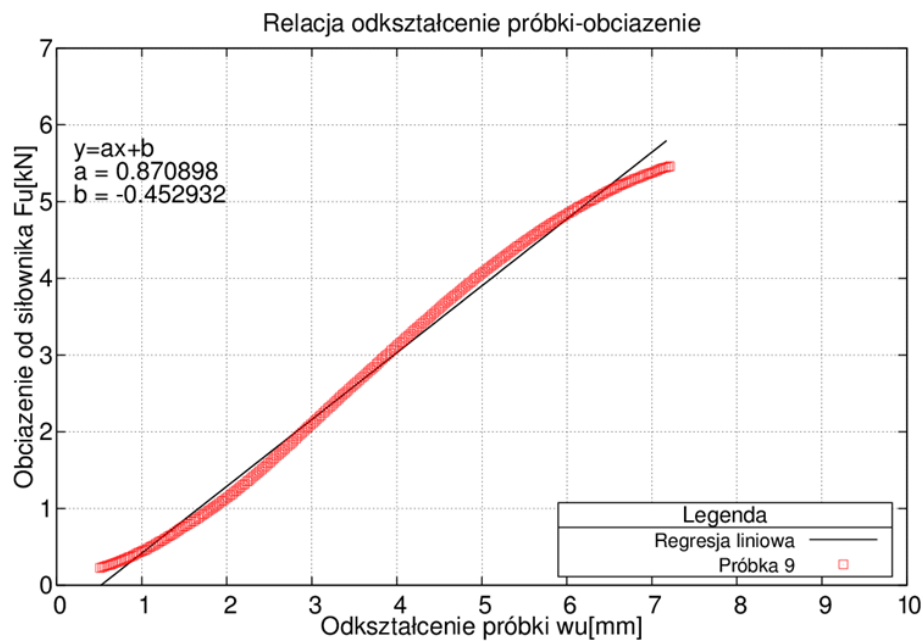
Rysunek 3.4.32 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 6



Rysunek 3.4.33 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 7

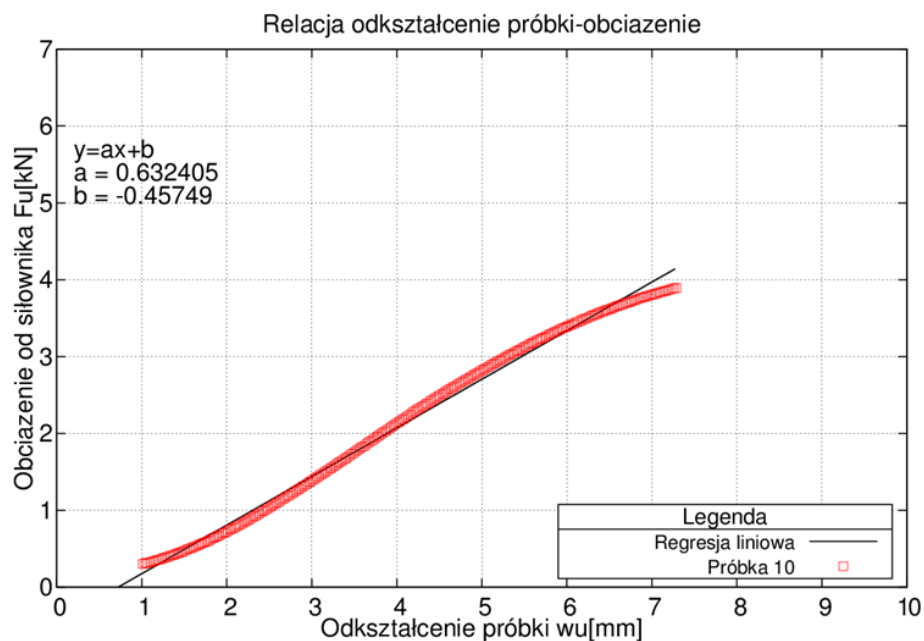


Rysunek 3.4.34 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 8



Rysunek 3.4.35 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 9





Rysunek 3.4.36 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 10

Równania funkcji liniowych aproksymujących część sprężystą wykresów zostały przedstawione w tabeli (3.4.6). Przyjęta została zasada, że do dalszych obliczeń wykorzystano równania, dla których współczynnik determinacji  $r^2 \geq 0,99$ .

Tabela 3.4.6 Równania funkcji liniowych aproksymujących część sprężystą wykresów  $F_u(w)$

Numer próbki	Równanie funkcji liniowej aproksymującej część sprężystą wykresu $F_u(w)$	Współczynnik determinacji $r^2$
1	$F = 0,6430 \cdot X - 0,6863$	0,9978
2	$F = 1,0518 \cdot X - 0,4168$	0,9965
4	$F = 1,0984 \cdot X - 1,5582$	0,9973
6	$F = 0,8877 \cdot X - 1,0433$	0,9946
7	$F = 0,7171 \cdot X - 0,3242$	0,9946
8	$F = 0,5657 \cdot X - 0,3002$	0,9950
9	$F = 0,8709 \cdot X - 0,4529$	0,9942
10	$F = 0,6324 \cdot X - 0,4575$	0,9940

Obliczenia wartości modułu sprężystości próbek pianki poliuretanowej zostały przedstawione w tabeli (3.4.7).

**Tabela 3.4.7** Rezultaty obliczeń modułu sprężystości  $E$  pianek poliuretanowych przy ściskaniu

Nr	Maksymalna siła obciążająca próbkę $F_u$	Przesunięcie $w_u$ przy $F_u$	Moduł sprężystości przy ściskaniu $E_{cc}$	Wartość średnia Modułu sprężystości przy ściskaniu $\overline{E}_{cc}$	Odchylenie standardowe wytrzymałości na ściskanie $s_x$	Współczynnik zmienności $V_x$
	[N]	[mm]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[-]
1	4689,3	7,29	4,37			
2	6220,4	5,91	7,28			
4	6091,7	5,54	7,47			
6	5556,7	6,26	6,17			
7	4335,0	6,05	4,99	5,56	1,35	0,243
8	4459,3	7,88	3,98			
9	5543,2	6,36	5,91			
10	4095,9	6,48	4,36			

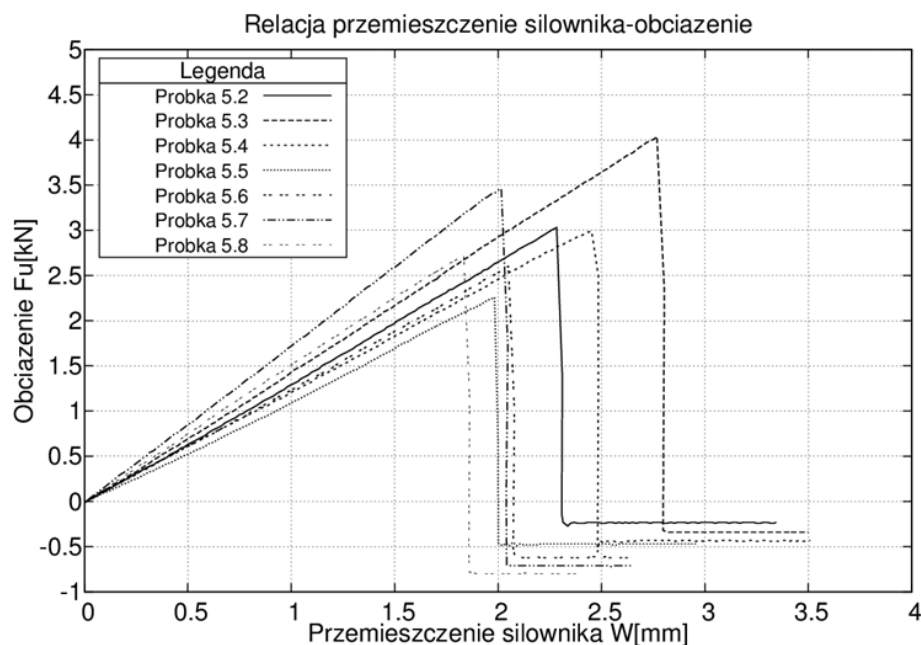
Do dalszych obliczeń przyjęto średnią wartość modułu sprężystości przy ściskaniu równą  $\overline{E} = 5,56 \text{ MPa}$ . Przyjęcie, jako miarodajnej, wartości średniej dla serii ośmiu próbek potwierdza analiza statystyczna otrzymanych wyników zaprezentowanych w tabeli (3.4.8).

**Tabela 3.4.8** Analiza statystyczna otrzymanej serii wartości modułów sprężystości pianki przy ściskaniu  $E_{cc}$

Nr próbki	Moduł sprężystości przy ściskaniu $E$	Pierwszy kwartyl $Q_1$	Mediana	Trzeci kwartyl $Q_3$	Odchylenie ćwiartkowe $Q$	Dolna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 - 3Q$	Górna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 + 3Q$
	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
1	4,37						
2	7,28						
4	7,47						
6	6,17						
7	4,99	4,37	5,45	6,45	1,04	1,25	9,57
8	3,98						
9	5,91						
10	4,36						

### 3.4.4. Oznaczenie wytrzymałości rdzenia poliuretanowego na rozciąganie

Oznaczenie modułu sprężystości pianki poliuretanowej przy rozciąganiu przeprowadzono zgodnie z normą [156]. Badanie zostało zrealizowane dla serii 7 próbek sześciennych o długości boku 150 mm, ponumerowanych od 5.2 do 5.8. Wykres relacji między przemieszczeniem siłownika  $W$  a wartością obciążenia  $F_u$  przedstawiony został na rysunku (3.4.37). Ze względu na brak odpowiednich przystawek do maszyny wytrzymałościowej autor rozprawy zdecydowano o wytworzeniu własnego urządzenia – chwytaka do próbek – umożliwiającego sprawne wykonywanie badań dla większej serii próbek. Charakterystyka chwytaka dla obciążeń niszczących próbki praktycznie wyklucza istotny wpływ na mierzone wartości sił obciążających. Dokumentacja wykonawcza chwytaka przedstawia załącznik B.



Rysunek 3.4.37 Relacja między przemieszczeniem siłownika  $W$  a siłą obciążającą  $F_u$  podczas próby rozciągania pianki

Wytrzymałości próbek pianki poliuretanowej na rozciąganie  $f_{ct}$  zostały obliczone zgodnie z zależnością (3.9) a rezultaty obliczeń zaprezentowano w tabeli (3.4.9).

$$f_{ct} = \frac{F_u}{A} \quad (3.4.7)$$

gdzie:

$F_u$  – maksymalna siła obciążająca próbkę w [kN];

$A$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego próbki [ $\text{mm}^2$ ].

Tabela 3.4.9 Rezultaty obliczeń wytrzymałości pianki poliuretanowej na rozciąganie  $\sigma_m$

Numer próbki	Wartość siły obciążającej próbkę $F_u$ [kN]	Wytrzymałość próbki na rozciąganie $f_{ct}$ [MPa]	Wartość średnia $\overline{f_{ct}}$ [MPa]	Odchylenie standardowe wytrzymałości $s_x$ [MPa]	Współczynnik zmienności $V_x$ [-]
5.2	3,030	0,135	0,134	0,026	0,195
5.3	4,040	0,180			
5.4	2,990	0,133			
5.5	2,260	0,100			
5.6	2,600	0,116			
5.7	3,460	0,154			
5.8	2,720	0,121			

Do dalszych obliczeń przyjęto średnią wartość wytrzymałości pianki poliuretanowej przy rozciąganiu równą  $\overline{f_{ct}} = 0,134 \text{ MPa}$ .

Analiza statystyczna wytrzymałości przy rozciąganiu dla pojedynczych próbek pokazana w tabeli (3.4.10) wskazywała, że wszystkie wartości  $f_{ct}$  mogły zostać uwzględnione do wyznaczenia wytrzymałości średniej  $\overline{f_{ct}}$ .

**Tabela 3.4.10** Analiza statystyczna otrzymanej serii wartości wytrzymałości pianki przy rozciąganiu  $f_{ct}$

Nr próbki	Wytrzymałość próbki na rozciąganie $f_{ct}$	Pierwszy kwartyl $Q_1$	Mediana	Trzeci kwartyl $Q_3$	Odchylenie ćwiartkowe $Q$	Dolna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 - 3Q$	Górna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 + 3Q$
	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
5.2	0,135						
5.3	0,180						
5.4	0,133						
5.5	0,100	0,119	0,133	0,145	0,013	0,080	0,184
5.6	0,116						
5.7	0,154						
5.8	0,121						

### 3.4.5. Oznaczenie modułu sprężystości rdzenia poliuretanowego przy rozciąganiu

Oznaczenie modułu sprężystości przy rozciąganiu zostało przeprowadzone zgodnie z normą [156]. Dla krzywych z rysunku (3.4.37) wyznaczone zostały równania liniowych funkcji aproksymujących przebiegi krzywej dla ich części sprężystej. Przyjęto zasadę, że za miarodajne uznaje się równania funkcji, dla których współczynnik determinacji  $r^2$  jest nie mniejszy niż 0,99. Dla tak określonych relacji między przemieszczeniem tłoku  $w_u$  a obciążeniem próbki  $F_u$  wykorzystano równanie (3.4.8) do wyznaczenia wartości modułów sprężystości przy rozciąganiu.

$$E_{ct} = \frac{F_u \cdot d_c}{w_u \cdot A} \quad (3.4.8)$$

gdzie:

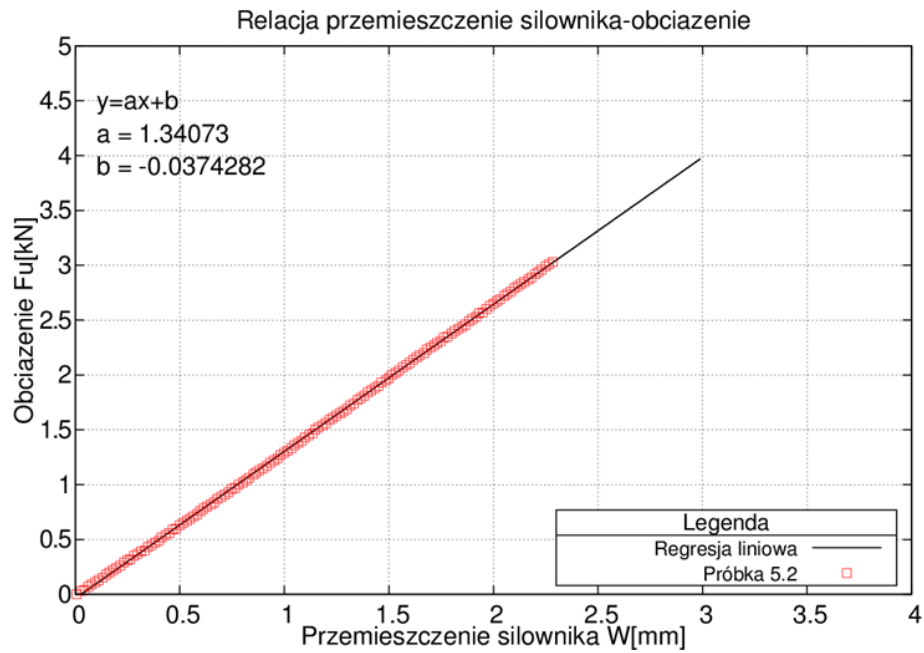
$F_u$  – maksymalna siła obciążająca próbkę w [N];

$d_c$  – grubość próbki [mm];

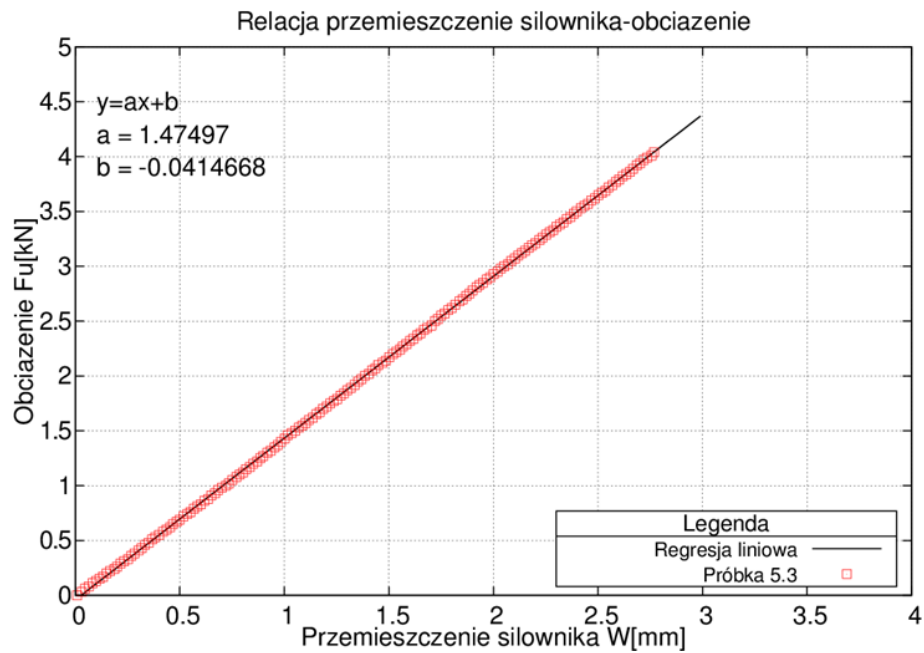
$w_u$  – przemieszczenie siłownika przy zadanym obciążeniu [mm];

$A$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego próbki [mm<sup>2</sup>].

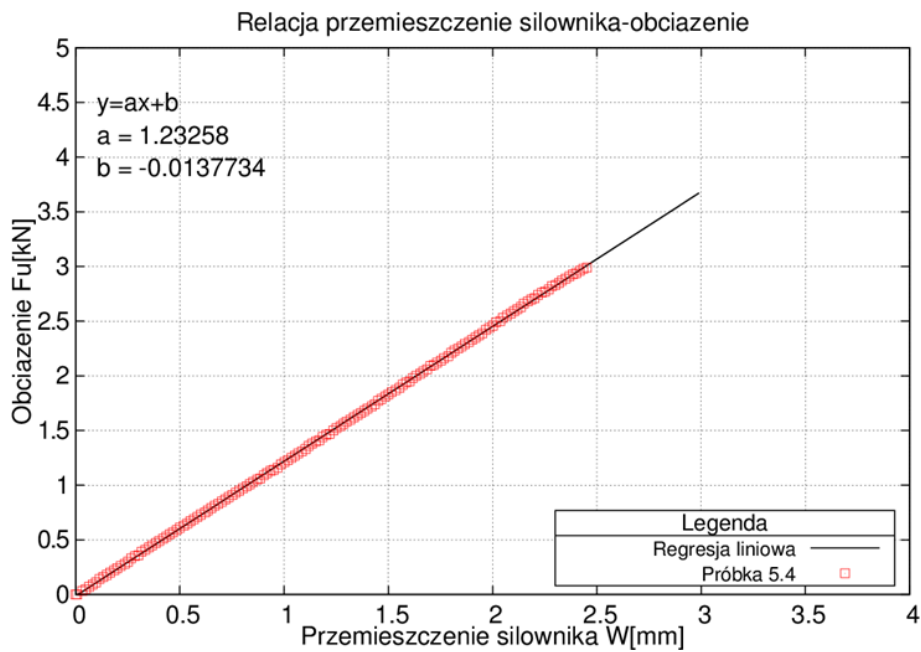
Aproksymację liniową sprężystej części wykresów relacji między przemieszczeniem siłownika  $w_u$  a obciążeniem  $F_u$  dla kolejnych próbek przedstawiają rysunki (3.4.38) – (3.4.44).



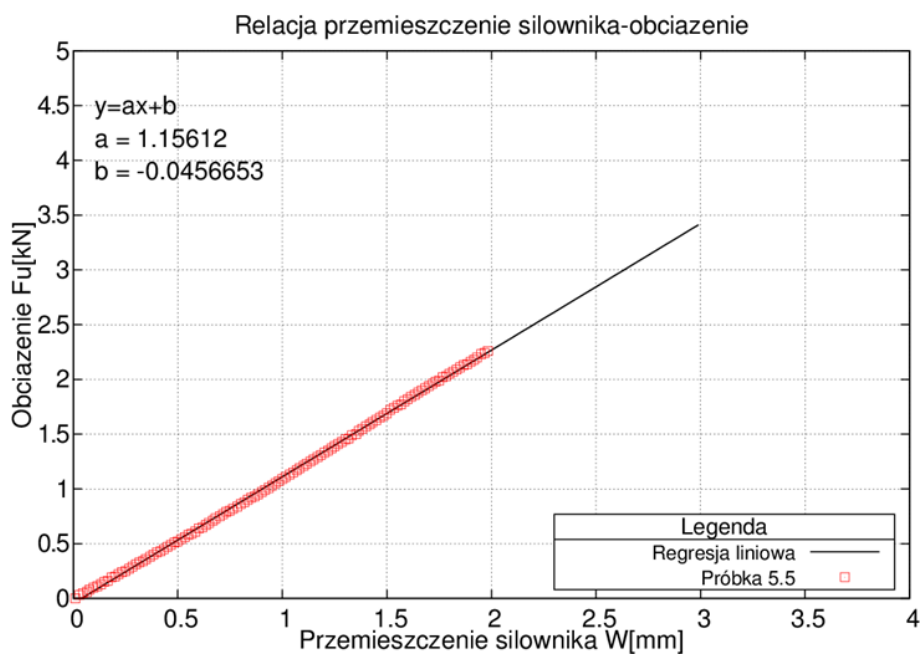
Rysunek 3.4.38 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 5.2



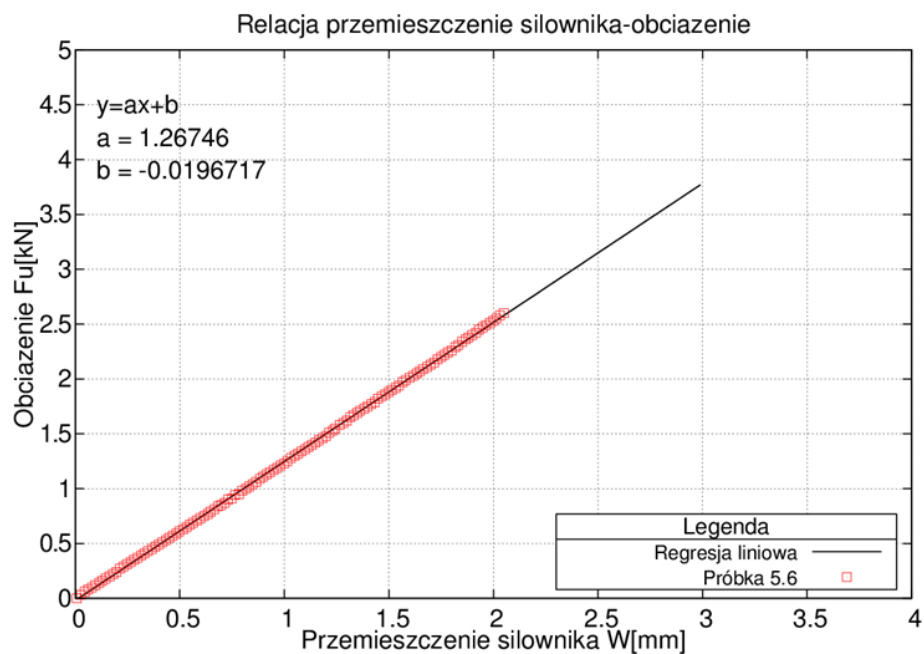
Rysunek 3.4.39 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 5.3



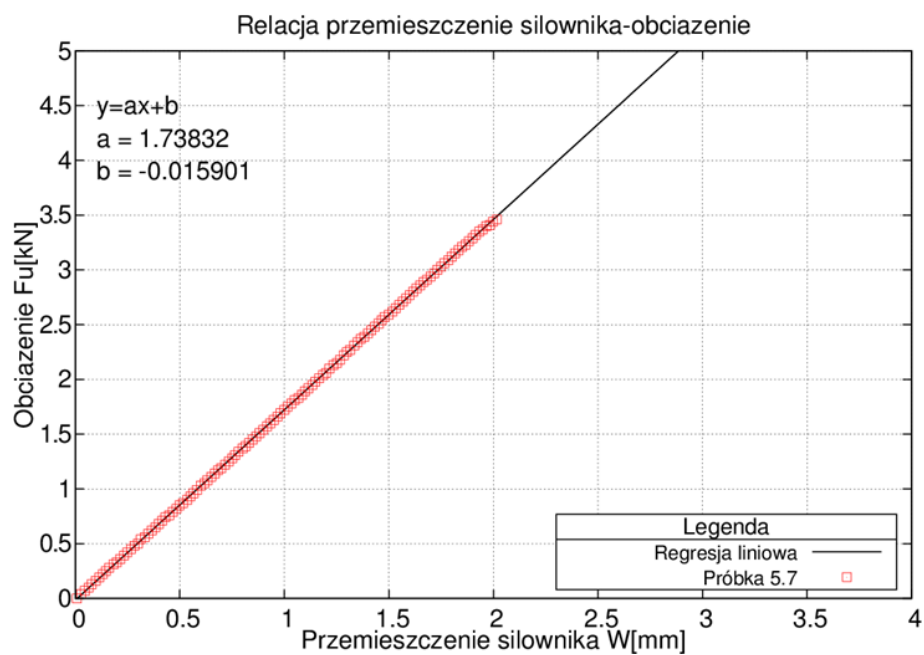
Rysunek 3.4.40 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 5.4



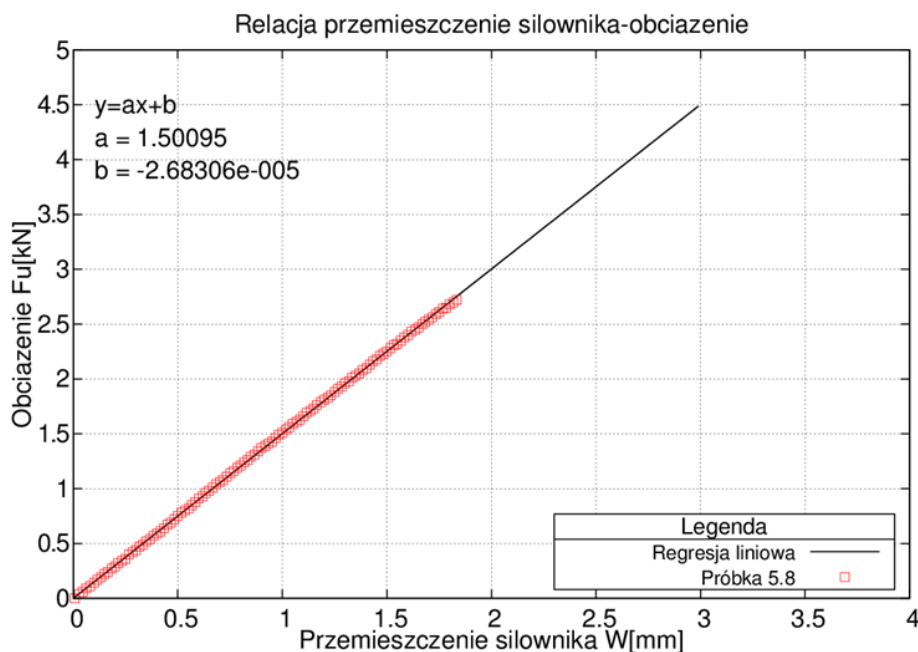
Rysunek 3.4.41 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 5.5



Rysunek 3.4.42 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 5.6



Rysunek 3.4.43 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 5.7



Rysunek 3.4.44 Aproksymacja liniowa sprężystej części wykresu zależności  $w_u - F_u$  dla próbki 5.8

Równania funkcji liniowych aproksymujących część sprężystą wykresów zostały przedstawione w tabeli (3.3.11). Przyjęta została zasada, że do dalszych obliczeń wykorzystano równania, dla których współczynnik determinacji  $r^2 \geq 0,99$ .

Tabela 3.4.11 Równania funkcji liniowych aproksymujących część sprężystą wykresów  $F_u(w)$

Numer próbki	Równanie funkcji liniowej aproksymującej część sprężystą wykresu $F_u(w)$	Współczynnik determinacji $r^2$
5.2	$F = 1,3407 \cdot w - 0,0374$	0,9998
5.3	$F = 1,4750 \cdot w - 0,0415$	1,0000
5.4	$F = 1,2326 \cdot w - 0,0138$	0,9998
5.5	$F = 1,1561 \cdot w - 0,0457$	0,9994
5.6	$F = 1,2675 \cdot w - 0,0197$	0,9998
5.7	$F = 1,7383 \cdot w - 0,0159$	1,0000
5.8	$F = 1,5009 \cdot w$	0,9998

Obliczenia wartości średniego modułu sprężystości przy rozciąganiu pianki poliuretanowej  $\overline{E}_{Ct}$  zostały zaprezentowane w tabeli (3.4.12).



**Tabela 3.4.12** Rezultaty obliczeń modułu sprężystości  $E_{Ct}$  pianek poliuretanowych przy ścisaniu

Nr	Maksymalna siła obciążająca próbkę $F_u$	Przesunięcie $w_u$ przy $F_u$	Moduł sprężystości przy ścisaniu $E_{Ct}$	Wartość średnia Modułu sprężystości przy rozciąganiu $\overline{E_{Ct}}$	Odchylenie standardowe wytrzymałości na ścisanie $s_x$	Współczynnik zmienności $V_x$
	[N]	[mm]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[-]
5.2	3030,0	2,26	8,94			
5.3	4040,0	2,74	9,83			
5.4	2990,0	2,43	8,22			
5.5	2260,0	1,95	7,71			
5.6	2600,0	2,05	8,45	8,54	1,18	0,138
5.7	3460,0	3,47	6,65			
5.8	2720,0	1,81	10,0			

Do dalszych obliczeń przyjęto średnią wartość modułu sprężystości pianki poliuretanowej przy rozciąganiu równą  $\overline{E_{Ct}} = 8,54 \text{ MPa}$ . Analiza statystyczna modułu sprężystości przy rozciąganiu dla pojedynczych próbek pokazana w tabeli (3.4.13) wskazuje, że wszystkie wartości  $E_{Ct}$  mogły zostać uwzględnione do wyznaczenia wytrzymałości średniej  $\overline{E_{Ct}}$ .

**Tabela 3.4.13** Analiza statystyczna otrzymanej serii wartości wytrzymałości pianki przy rozciąganiu  $E_{Ct}$

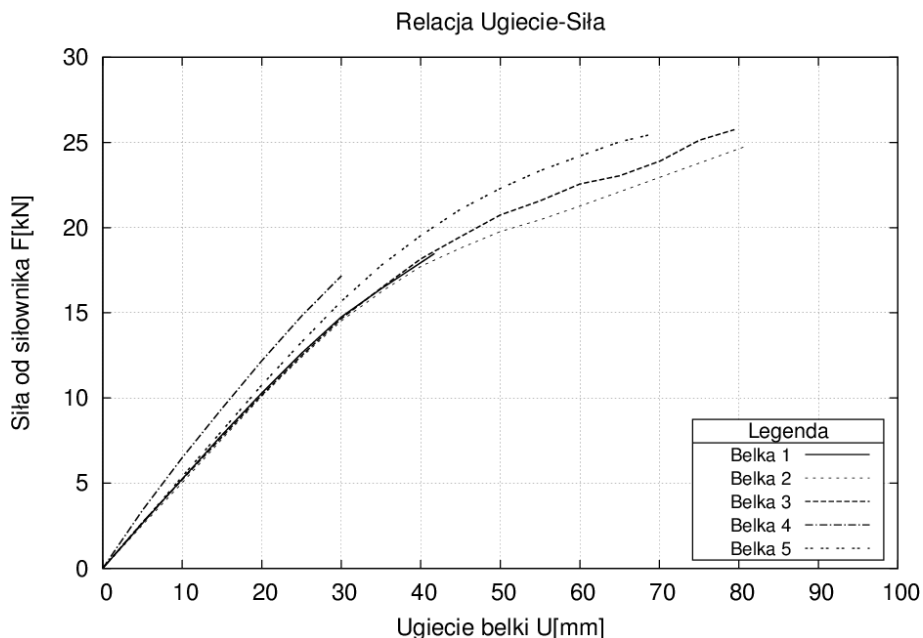
Nr próbki	Wytrzymałość próbki na rozciąganie $E_{Ct}$	Pierwszy kwartyl $Q_1$	Mediana	Trzeci kwartyl $Q_3$	Odchylenie ćwiartkowe $Q$	Dolna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 - 3Q$	Górna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 + 3Q$
	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
5.2	8,94						
5.3	9,83						
5.4	8,22						
5.5	7,71	7,965	8,450	9,385	0,710	5,835	11,515
5.6	8,45						
5.7	6,65						
5.8	10,00						

### 3.5. Rezultaty badań laboratoryjnych belek trójwarstwowych

Na bazę danych, opisujących stan przemieszczenia i wyężenia belek trójwarstwowych w trakcie badań niszczących, składają się:

- przemieszczenia pasa dolnego w środku rozpiętości belki trójwarstwowej dla całej serii pięciu belek,
- odkształcenia i wynikające z nich naprężenia drewnianych okładzin w środku rozpiętości dla całej serii pięciu belek,
- przemieszczenia pasa górnego i dolnego, mierzone w kilku przekrojach jednocześnie, w odniesieniu do jednej belki trójwarstwowej (belka numer 3) oraz
- zaobserwowane mechanizmy zniszczenia badanych elementów.

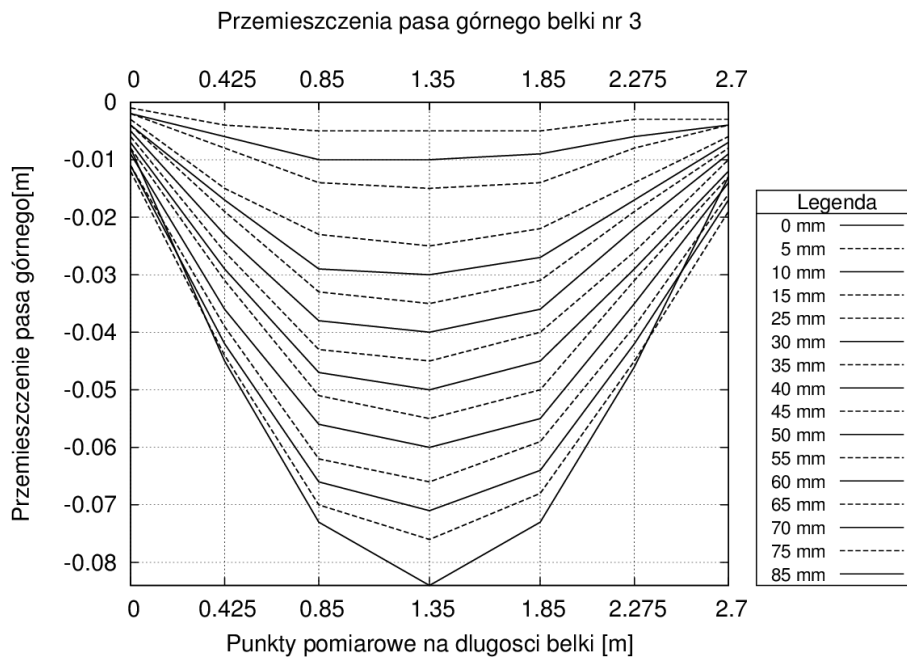
Podstawowym parametrem mierzonym w trakcie obciążania belki od momentu przyłożenia obciążenia aż do chwili zniszczenia konstrukcji było przemieszczenie pasa dolnego w środku rozpiętości. Rezultaty przedstawiono na rysunku (3.5.1), który prezentuje relację między przemieszczeniem skrajnych zewnętrznych włókien pasa dolnego a całkowitą siłą od siłownika maszyny wytrzymałościowej.



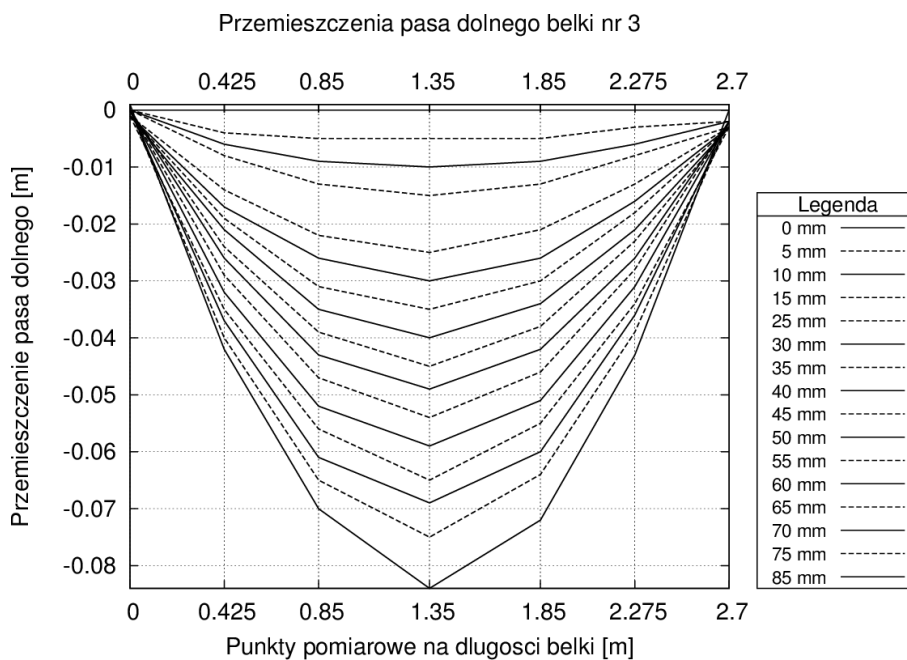
**Rysunek 3.5.1** Relacja między całkowitą siłą od siłownika  $F$  do przemieszczenia pasa dolnego  $U$

Z rysunku (3.4.1) wynika, że przedstawione zależności między ugięciem pasa dolnego  $U$  a obciążeniem całkowitym  $F$  dla belek numer 1, 2, 3 oraz 5 składają się z dwóch części. Część pierwsza może być opisana jako zależność liniowa, w której belka trójwarstwowa pracuje sprężysto. Przy przemieszczeniu dolnej okładziny na poziomie około 30 mm wykres się zakrzywia i taki przebieg krzywej może być interpretowany jako początek fazy nieliniowej. Natomiast w przypadku próbki numer 4 zniszczenie nastąpiło w momencie czasowym poprzedzającym wyraźny koniec fazy sprężystej.

Dodatkowo, co 5 mm przemieszczenia okładziny dolnej belki, prowadzono fotogrametryczny pomiar przemieszczenia obu drewnianych warstw zewnętrznych. Rezultaty pomiarów dla 5 przekrojów charakterystycznych belki (rysunek (3.5.2) oraz rysunek (3.5.3)) przedstawiają wykresy poniżej.



Rysunek 3.5.2 Przemieszczenia pasa górnego belki numer 3 na podstawie pomiarów tachimetrem



Rysunek 3.5.3 Przemieszczenia pasa dolnego belki numer 3 na podstawie pomiarów tachimetrem

Pomiary z przemieszczeń drewnianych okładzin dla belki numer 3 z wykorzystaniem tachimetru elektronicznego potwierdziły przypuszczenia, że na skutek przyłożonego obciążenia materiał rdzenia ulega ściśnięciu. Największe zmiany wysokości rdzenia obserwowane były w przekrojach podporowych oraz w przekrojach obciążonych punktowo przez trawers. Dla przykładu:

- przy przemieszczeniu pasa dolnego na poziomie około 30 mm drewniane okładziny zbliżyły się do siebie o około 3 mm zarówno w przekrojach podporowych jak i w przekrojach przyłożenia sił skupionych, podczas gdy w środku rozpiętości belki nie zaobserwowano tego zjawiska;
- przy przemieszczeniu pasa dolnego na poziomie około 50 mm drewniane okładziny zbliżały się do siebie nierównomiernie – drewniane okładziny w lewym przekroju

podporowym zbliżyły się do siebie o około 7 mm natomiast drewniane okładziny w prawym przekroju podporowym zbliżyły się do siebie o około 10 mm. W przekrojach przyłożenia sił skupionych pasy belki zbliżyły się do siebie odpowiednio o 3 mm i 4 mm, zaś w środku rozpiętości pasy belki zbliżyły się do siebie o 1 mm;

- tuż przed zniszczeniem belki numer 3, przy przemieszczeniu pasa dolnego na poziomie około 75 mm zaobserwowano, że drewniane okładziny także zbliżały się do siebie nierównomiernie – drewniane okładziny w lewym przekroju podporowym zbliżyły się do siebie o około 12 mm natomiast drewniane okładziny w prawym przekroju podporowym zbliżyły się do siebie o około 17 mm. W przekrojach przyłożenia sił skupionych pasy belki zbliżyły się do siebie odpowiednio o 5 mm i 6 mm, zaś w środku rozpiętości pasy belki zbliżyły się do siebie o 1 mm.

Z powyższego wynika, że ściskanie poliuretanowego rdzenia nie było równomierne i zjawisko to przebiegało bardziej intensywnie w przekrojach przypodporowych w porównaniu do analizowanego przekroju usytuowanego w środku rozpiętości belki.

Na podstawie pomiarów odkształceń rejestrowanych przez zestaw ośmiu tensometrów tFs-5 (rysunek (3.2.2)) możliwe było obliczenie naprężeń we włóknach górnej i dolnej okładziny drewnianej. Wykorzystana została zależność (3.5.1):

$$\sigma = \varepsilon \cdot \overline{E}_{mg} \quad (3.5.1)$$

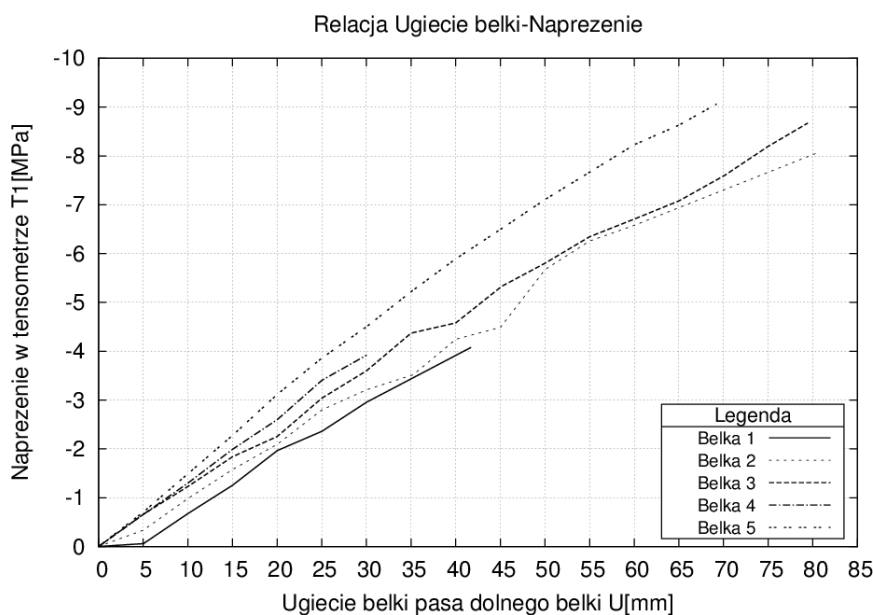
gdzie:

$\sigma$  – naprężenie normalne od zginania w [MPa],

$\varepsilon$  – odkształcenie mierzone przez tensometr [mm/m],

$\overline{E}_{mg}$  – moduł sprężystości drewna [mm<sup>3</sup>].

Rezultaty pomiarów tensometrów T1 dla całej serii pięciu belek trójwarstwowych zostały przedstawione na rysunku (3.4.4). Pokazuje on relację między ugięciem pasa dolnego obciążonej belki a wartościami naprężeń ściskających, obliczonych na podstawie odkształceń tensometrów T1.



Rysunek 3.5.4 Naprężenia w okładzinie na podstawie odkształceń mierzonych przez tensometry T1

Z powyższego wykresu wynika, że wraz ze wzrostem obciążenia następował praktycznie liniowy przyrost naprężeń w skrajnych górnych włóknach górnej okładziny. W przypadku belek numer 1 oraz 4 mniejszy zasięg wykresów wynikał z wcześniejszego, w porównaniu z belkami numer 2,3 oraz 5, zniszczenia konstrukcji.

Analiza statystyczna naprężeń, obliczonych na podstawie odkształceń tensometru T1 dla badanej serii elementów, została przedstawiona w tabelach (3.5.1) oraz (3.5.2).

Tabela (3.4.1) prezentuje analizę statystyczną naprężeń w odniesieniu do przemieszczenia dolnej okładziny od 0 do 30 mm. Wynika z niej, że wśród mierzonych wartości nie znajdują się obserwacje odstające. Zauważyć można także, że wartości współczynnika zmienności maleją wraz ze wzrostem przyłożonego obciążenia i przemieszczeniem pasa dolnego. Przy przemieszczeniu równym 5 mm współczynnik zmienności  $V_x$  był równy 0,580 podczas gdy dla przemieszczenia równego 30 mm jego wartość spadała do poziomu 0,167. Oznaczać to mogło, że przy większym obciążeniu poprawiała się jakość współpracy między trawersem i obciążaną konstrukcją oraz ulegały zatarciu ewentualne różnice w powtarzalności wykonania modeli.

**Tabela 3.5.1** Analiza statystyczna naprężeń w miejscu położenia tensometru T1 dla całej serii pięciu belek trójwarstwowych w odniesieniu do przemieszczenia pasa dolnego w zakresie  $0 \div 30$  mm

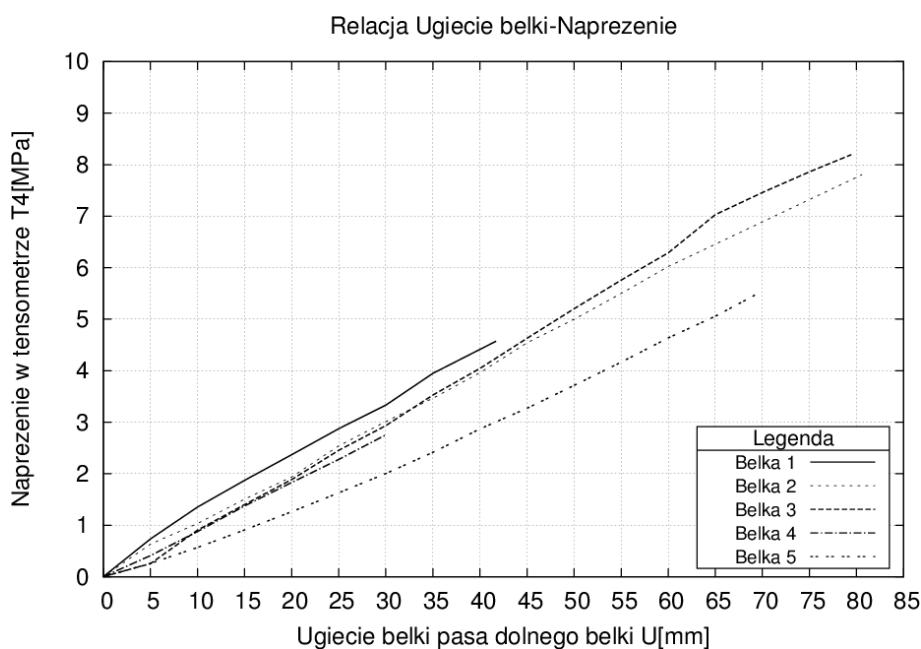
Przemieszczenie pasa dolnego	Wartość minimalna	Pierwszy kwartyl $Q_1$	Mediana	Trzeci kwartyl $Q_3$	Wartość maksymalna	Odechylenie ćwiartkowe $Q$	Dolna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 - 3Q$	Górna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 + 3Q$	Współczynnik zmienności $V_x$
[mm]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[---]
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	0,0579	0,3358	0,6566	0,6590	0,7097	0,1616	-0,1490	1,1438	0,580
10	0,6754	0,9855	1,2309	1,3021	1,4901	0,1583	0,5106	1,7770	0,277
15	1,2535	1,5770	1,8414	1,9904	2,2753	0,2067	0,9569	2,6105	0,219
20	1,9649	2,0957	2,2528	2,6008	3,1139	0,2525	1,3381	3,3583	0,192
25	2,3605	2,8014	3,0382	3,4061	3,8642	0,3024	1,8942	4,3133	0,185
30	2,9571	3,2128	3,5993	3,9208	4,5004	0,3540	2,1508	4,9829	0,167

Dla większych wartości przemieszczeń pasa dolnego analiza statystyczna naprężeń zawarta w tabeli (3.5.2) wykazuje znaczne podobieństwa. Także w tym przypadku nie zaobserwowano obserwacji odstających. Również wartość współczynnika zmienności zmniejszała się od wartości 0,185 do 0,128 przy przemieszczeniu pasa dolnego równym 60 mm.

**Tabela 3.5.2** Analiza statystyczna naprężeń w miejscu położenia tensometru T1 dla serii trzech belek trójwarstwowych (2, 3 oraz 5) w odniesieniu do przemieszczenia pasa dolnego w zakresie 45 ÷ 60 mm

Przemieszczenie pasa dolnego	Wartość minimalna	Pierwszy kwartyl $Q_1$	Mediana	Trzeci kwartyl $Q_3$	Wartość maksymalna	Odchylenie ćwiartkowe $Q$	Dolna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 - 3Q$	Górna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 + 3Q$	Współczynnik zmienności $V$
[mm]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[---]
45	4,4916	4,9112	5,3309	5,9143	6,4977	0,5015	3,4066	7,4190	0,185
50	5,6778	5,7407	5,8037	6,4563	7,1088	0,3578	4,6674	7,5296	0,128
55	6,2574	6,3021	6,3468	7,0084	7,6699	0,3531	5,2428	8,0677	0,117
60	6,5791	6,6437	6,7082	7,4703	8,2323	0,4133	5,4037	8,7102	0,128

Rezultaty pomiarów tensometrów T4 dla całej serii pięciu belek trójwarstwowych zostały przedstawione na rysunku (3.4.5). Pokazuje on relację między ugięciem pasa dolnego obciążonej belki a wartościami naprężeń rozciągających, obliczonych na podstawie odkształceń tensometrów T4.



**Rysunek 3.5.5** Naprężenia w okładzinie na podstawie odkształceń mierzonych przez tensometry T4

Z powyższego wykresu wynika, że wraz ze wzrostem obciążenia następował praktycznie liniowy przyrost naprężeń w skrajnych dolnych włóknach górnej okładziny. W przypadku belek numer 1 oraz 4 mniejszy zasięg wykresów wynikał z wcześniejszego, w porównaniu z belkami numer 2,3 oraz 5, zniszczenia konstrukcji.

Analiza statystyczna naprężeń, obliczonych na podstawie odkształceń tensometru T4 dla badanej serii elementów, została przedstawiona w tabelach (3.5.3) oraz (3.5.4).

**Tabela 3.5.3** Analiza statystyczna naprężeń w miejscu położenia tensometru T4 dla całej serii pięciu belek trójwarstwowych w odniesieniu do przemieszczenia pasa dolnego w zakresie 0 ÷ 30 mm

Przemieszczenie pasa dolnego	Wartość minimalna	Pierwszy kwartyl $Q_1$	Mediana	Trzeci kwartyl $Q_3$	Wartość maksymalna	Odchylenie ćwiartkowe $Q$	Dolna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 - 3Q$	Górna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 + 3Q$	Współczynnik zmienności $V$
[mm]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[---]
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	0,2543	0,2597	0,4112	0,6349	0,7365	0,1876	-0,3032	1,1978	0,4768
10	0,5684	0,8803	0,9054	1,0349	1,3524	0,0773	0,6485	1,2668	0,2990
15	0,9069	1,3745	1,4025	1,5052	1,8718	0,0654	1,1784	1,7013	0,2445
20	1,2606	1,8310	1,8861	1,9394	2,3703	0,0542	1,6684	2,1019	0,2132
25	1,6325	2,2787	2,4542	2,5447	2,8761	0,1330	1,8796	2,9437	0,1950
30	2,0038	2,7567	2,9327	3,0154	3,3337	0,1293	2,3688	3,4034	0,1766

W odniesieniu do wartości naprężeń zmierzonych po stronie wewnętrznej górnej okładziny można odnotować występowanie obserwacji odstających. Dotyczą one przede wszystkim naprężeń mierzonych w przypadku belki numer 5, które były najmniejsze w całym zbiorze i wykroczyły poza dolną granicę obserwacji nadających się do analizy statystycznej. Także niektóre odnotowane wartości maksymalne przekroczyły górną granicę obserwacji akceptowanych przy analizie statystycznej. Obserwowany jest także zmniejszanie wartości współczynnika zmienności  $V$  naprężeń wraz ze wzrostem przemieszczenia pasa dolnego.

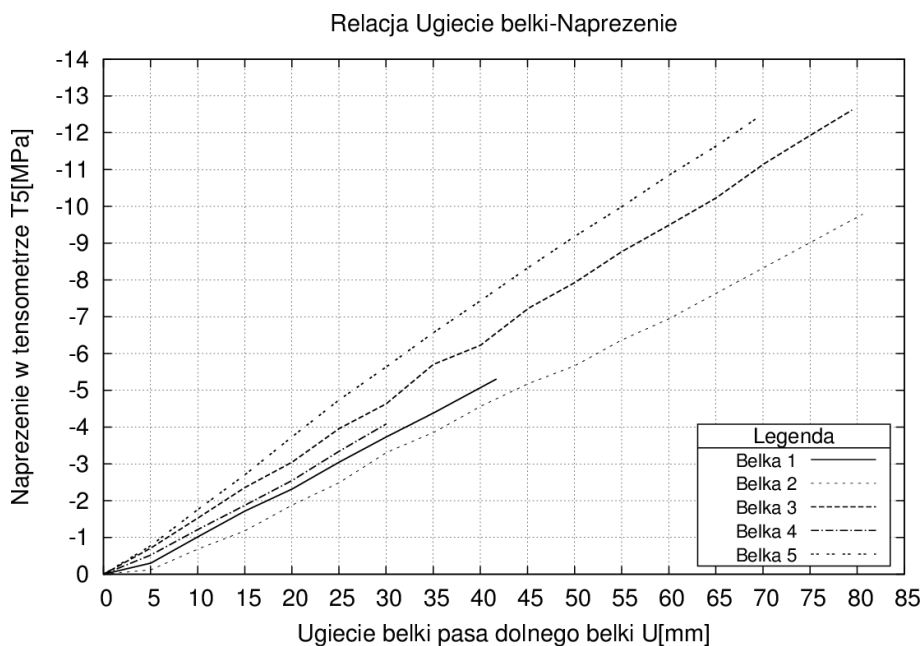
**Tabela 3.5.4** Analiza statystyczna naprężeń w miejscu położenia tensometru T4 dla serii trzech belek trójwarstwowych (2, 3 oraz 5) w odniesieniu do przemieszczenia pasa dolnego w zakresie 45 ÷ 60 mm

Przemieszczenie pasa dolnego	Wartość minimalna	Pierwszy kwartyl $Q_1$	Mediana	Trzeci kwartyl $Q_3$	Wartość maksymalna	Odchylenie ćwiartkowe $Q$	Dolna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 - 3Q$	Górna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 + 3Q$	Współczynnik zmienności $V$
[mm]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[---]
45	3,2717	3,9083	4,5448	4,5964	4,6480	0,3441	2,8761	5,6286	0,184
50	3,7159	4,3589	5,0020	5,1037	5,2055	0,3724	3,2418	6,2209	0,174
55	4,1690	4,8346	5,5001	5,6299	5,7596	0,3977	3,6416	6,8229	0,166
60	4,6395	5,3310	6,0225	6,1566	6,2908	0,4128	4,0926	7,3951	0,157

Przy przemieszczeniach pasa dolnego w zakresie od 45 mm do 60 mm nie zanotowano wśród naprężeń obserwacji odstających w współczynnik zmienności zmniejszył się z wartości 0,184 do wartości 0,157.

Naprężenia w skrajnych górnych włóknach dolnej drewnianej okładziny zostały obliczone na podstawie odkształceń zmierzonych przez tensometry T5 i przedstawione na rysunku (3.5.6).

Pokazuje on relację między ugięciem pasa dolnego obciążonej belki a wartościami naprężeń rozciągających, obliczonych na podstawie odkształceń tensometrów T5.



**Rysunek 3.5.6** Naprężenia w okładzinie na podstawie odkształceń mierzonych przez tensometry T5

Analiza statystyczna naprężeń, obliczonych na podstawie odkształceń tensometru T5 dla badanej serii elementów, została przedstawiona w tabelach (3.5.5) oraz (3.5.6).

**Tabela 3.5.5** Analiza statystyczna naprężeń w miejscu położenia tensometru T5 dla całej serii pięciu belek trójwarstwowych w odniesieniu do przemieszczenia pasa dolnego w zakresie 0 ÷ 30 mm

Przemieszczenie pasa dolnego	Wartość minimalna	Pierwszy kwartyl $Q_1$	Mediana	Trzeci kwartyl $Q_3$	Wartość maksymalna	Odchylenie ćwiartkowe $Q$	Dolna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 - 3Q$	Górna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 + 3Q$	Współczynnik zmienności $V_x$
[mm]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[---]
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	0,1217	0,3041	0,5204	0,7098	0,7788	0,2029	-0,3046	1,3185	0,5651
10	0,6862	1,0178	1,2169	1,5258	1,7601	0,2540	0,2559	2,2877	0,3391
15	1,1823	1,7164	1,8740	2,3574	2,7013	0,3205	0,7548	3,3190	0,2986
20	1,8800	2,3155	2,5471	3,0450	3,7314	0,3648	1,2211	4,1394	0,2633
25	2,4908	3,0491	3,3434	3,9581	4,7440	0,4545	1,6856	5,3216	0,2463
30	3,3088	3,7339	4,0862	4,6336	5,6333	0,4499	2,3842	5,9833	0,2102

Na powierzchni górnej dolnego pasa nie stwierdzono występowania wartości odstających naprężeń a współczynnik zmienności zmniejszał się od wartości 0,5651 do 0,2102 przy jednoczesnym wzroście ugięcia pasa dolnego (tabela (3.5.5)).

Również przy przemieszczeniach pasa dolnego w przedziale od 45 mm do 60 mm nie pojawiły się obserwacje odstające. Współczynniki zmienności  $V_x$  pokazane w tabeli (3.5.6)

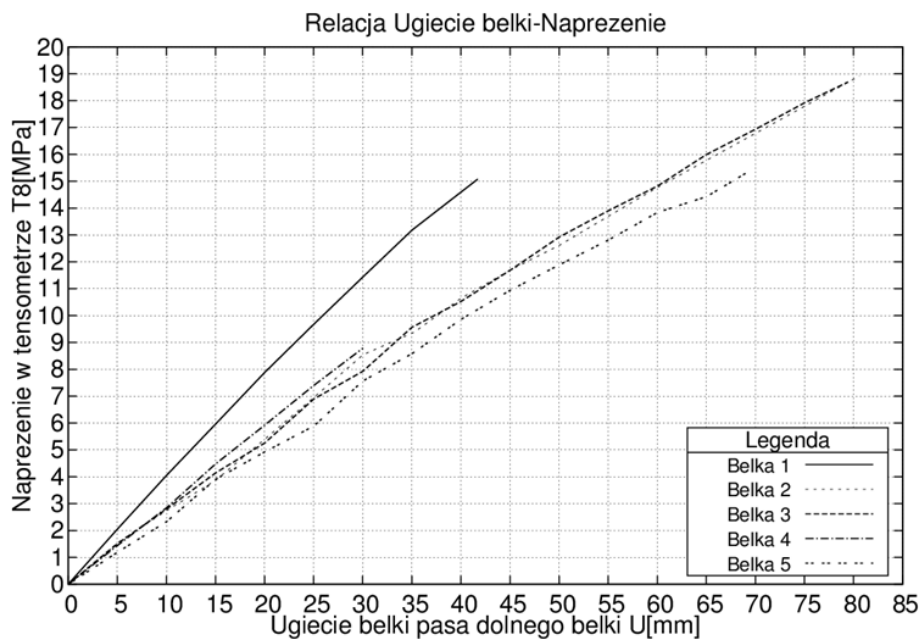


zmniejszały się wraz z ugięciem pasa dolnego, lecz dla żadnego jego wartość nie spadła poniżej 0,200.

**Tabela 3.5.6** Analiza statystyczna naprężeń w miejscu położenia tensometru T5 dla serii trzech belek trójwarstwowych (2, 3 oraz 5) w odniesieniu do przemieszczenia pasa dolnego w zakresie 45 ÷ 60 mm

Przemieszczenie pasa dolnego	Wartość minimalna	Pierwszy kwartyl $Q_1$	Mediana	Trzeci kwartyl $Q_3$	Wartość maksymalna	Odchylenie ćwiartkowe $Q$	Dolna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 - 3Q$	Górna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 + 3Q$	Współczynnik zmienności $V_x$
[mm]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[---]
45	5,1737	6,2061	7,2385	7,7819	8,3253	0,7879	3,8423	10,1457	0,232
50	5,6684	6,7972	7,9259	8,5532	9,1805	0,8780	4,1631	11,1873	0,234
55	6,3674	7,5681	8,7688	9,3804	9,9919	0,9061	4,8497	12,0987	0,220
60	6,9428	8,2154	9,4879	10,1685	10,8491	0,9766	5,2857	13,0982	0,218

Naprężenia na powierzchni zewnętrznej dolnej drewnianej okładziny belek trójwarstwowych zostały obliczone na podstawie odkształceń tensometru T8 i przedstawione w tabeli (3.5.7) oraz tabeli (3.5.8).



**Rysunek 3.5.7** Naprężenia w okładzinie na podstawie odkształceń mierzonych przez tensometry T8

**Tabela 3.5.7** Analiza statystyczna naprężeń w miejscu położenia tensometru T8 dla całej serii pięciu belek trójwarstwowych w odniesieniu do przemieszczenia pasa dolnego w zakresie 0 ÷ 30 mm

Przemieszczenie pasa dolnego	Wartość minimalna	Pierwszy kwartyl $Q_1$	Mediana	Trzeci kwartyl $Q_3$	Wartość maksymalna	Odchylenie ćwiartkowe $Q$	Dolna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 - 3Q$	Górna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 + 3Q$	Współczynnik zmienności $V$
[mm]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[---]
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	1,1932	1,4416	1,5089	1,5422	2,0594	0,0503	1,2907	1,6931	0,204
10	2,3278	2,7435	2,7997	2,8518	4,0537	0,0542	2,5810	3,0143	0,219
15	3,8705	3,9076	4,1431	4,4759	5,9620	0,2841	3,0552	5,3283	0,194
20	4,9241	5,2560	5,4053	5,9259	7,8854	0,3350	4,2511	6,9309	0,200
25	5,8953	6,8918	6,9592	7,4020	9,6819	0,2551	6,1265	8,1672	0,191
30	7,5632	7,9283	8,5421	8,7901	11,4393	0,4309	6,6357	10,0827	0,172

Przy przemieszczeniach pasa dolnego w przedziale od 0 do 30 mm zaobserwowano, że maksymalne obliczone naprężenia wykraczają poza górną granicę obserwacji odstających. Współczynniki zmienności  $V$  zmniejszały się stopniowo wraz z przyrostem przemieszczeń od wartości 0,204 do 0,172.

**Tabela 3.5.8** Analiza statystyczna naprężeń w miejscu położenia tensometru T8 dla serii trzech belek trójwarstwowych (2, 3 oraz 5) w odniesieniu do przemieszczenia pasa dolnego w zakresie 45 ÷ 60 mm

Przemieszczenie pasa dolnego	Wartość minimalna	Pierwszy kwartyl $Q_1$	Mediana	Trzeci kwartyl $Q_3$	Wartość maksymalna	Odchylenie ćwiartkowe $Q$	Dolna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 - 3Q$	Górna granica przedziału obserwacji odstających $Q_1 + 3Q$	Współczynnik zmienności $V$
[mm]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[---]
45	10,9453	11,3200	11,6947	11,7076	11,7205	0,1938	10,7386	12,2890	0,038
50	11,8869	12,2528	12,6188	12,7724	12,9261	0,2598	11,4734	13,5518	0,043
55	12,8114	13,2529	13,6943	13,7976	13,9009	0,2724	12,4357	14,6148	0,043
60	13,8422	14,3051	14,7680	14,7944	14,8207	0,2446	13,5712	15,5283	0,038

Przy większych przemieszczeniach pasa dolnego (tabela (3.5.8)) nie zaobserwowano wartości odstających naprężeń. Brak także, widocznego przy wcześniejszych zestawieniach, trendu spadkowego współczynnika zmienności naprężeń. W tym wypadku wartość współczynnika zmienności kształtowała się w niewielkim zakresie od 0,038 do 0,043. Wyraźnie widać, że współczynnika zmienności przyjmował w tym wypadku znacznie mniejsze wartości niż dla poprzednich obserwacji.

Innym obserwowanym elementem był przebieg zniszczenia serii pięciu badanych elementów trójwarstwowych.



**Rysunek 3.5.8** Zniszczenie i jednocześnie wyczerpanie nośności belki trójwarstwowej na skutek ukośnego ścięcia rdzenia poliuretanowego przy jednoczesnym ścięciu pianki przy klejonym połączeniu z pasem drewnianym

W przypadku każdej z pięciu przebadanych belek zniszczenia przebiegało według podobnego scenariusza. Po osiągnięciu obciążenia niszczącego następowało ścięcie rdzenia, co skutkowało pojawieniem się ukośnej rysy w materiale rdzenia. Przykładową awarię rdzenia zaprezentowano na przykładzie belki numer 2 na rysunku (3.5.8). Wraz z pojawieniem się ukośnej rysy następowało także ścięcie materiału panelu przy styku z warstwą kleju poliuretanowego. Skutkowało to także skokowym spadkiem wartości odkształceń w założonych na drewnianych okładzinach tensometrach.

## 4. Modele teoretyczne belek trójwarstwowych

### 4.1. Wprowadzenie

W pracy badane są i analizowane belki, w których okładziny (belki zewnętrzne) mają znaczne wymiary po wysokości tej belki. W takich okładzinach oprócz sił osiowych powstają także momenty zginające, których wpływ na przemieszczenia belki nie można pominąć, co czyni się często, gdy okładziny są bardzo cienkie. Okładziny te połączone są rdzeniem, którego parametry materiałowe są znacznie słabsze niż belek zewnętrznych. Najczęściej przyjmuje się, że rdzeń nie przenosi naprężeń normalnych. Belki takie często nazywa się także w literaturze polskiej belkami sandwiczowymi. Poniżej rozpatrzone zostaną cztery różne modele teoretyczne belki sandwiczowej. Z przeprowadzonych badań doświadczalnych na belkach a przedstawionych w rozdziale 3 wynika, że model teoretyczny rozpatrywanych belek powinien uwzględniać między innymi:

- nakładki są belkami zginanymi w ten sposób, że w włóknach skrajnych każdej belki mogą występować naprężenia normalne o znakach przeciwnych,
- przemieszczenia nakładek prostopadłe do osi belki w dowolnym przekroju są różne,
- występuje wzajemne przemieszczenie nakładek wzdłuż osi belki.

Pierwszy najprostszy rozpatrywany model to belka Eulera-Bernoulliego, w której pomija się wpływ naprężeń normalnych w rdzeniu belki na stan przemieszczeń i wyężenia belki. Zakłada się tutaj, że moduł Younga rdzenia belki jest wielokrotnie mniejszy od modułu Younga nakładek. Stan przemieszczeń belki opisuje tylko jedna funkcja. Obok rozwiązania klasycznego w formie zamkniętej podano je także dla obciążenia siłą skupioną i równomiernie rozłożonego w postaci szeregu. Pozwala to na porównanie stanu przemieszczeń belki dla różnych teoretycznych modeli belki a także na porównanie rozwiązania dla obciążenia statycznego i obciążenia dynamicznego (nie jest to celem prezentowanej pracy). Już na wstępie należy stwierdzić, że taki model belki sandwiczowej nie spełnia wyżej wymienionych warunków.

Następny model teoretyczny belki sandwiczowej jest najbardziej ogólny i nie był rozpatrywany w literaturze. Model ten został przedstawiony w punktach 4.3 – 4.4. W tym modelu belki uwzględnia się nie tylko przemieszczenie belki wynikające ze zginania nakładek, ale także wynikające ze ścinania zarówno rdzenia jak i nakładek oraz wzajemne przesunięcie nakładek (model Zig-Zag z dodatkowo uwzględnionym ścinaniem w nakładkach). Model ten nazywany będzie *zmodyfikowanym modelem Zig-Zag*. Stan przemieszczeń belki opisują trzy funkcje: całkowite przemieszczenie belki, kąt obrotu przekroju wynikający ze zginania nakładek oraz kąt określający wzajemne przesunięcie nakładek.

W trzecim modelu teoretycznym belki sandwiczowej analizowanym w pracy jest model zbliżony do drugiego modelu, w którym pomija się wpływ ścinania w nakładkach na stan przemieszczeń belki. W modelu występują dwie funkcje określające stan przemieszczeń belki: całkowite przemieszczenie belki oraz kąt określający wzajemne przesunięcie nakładek wynikające ze ścinania rdzenia. Jest to klasyczny model Zig-Zag. Model ten dość często stosowany jest w analizie stanu przemieszczenia belek sandwiczowych [139], [149]. W obu modelach Zig-Zag możliwe jest wystąpienie różnych znaków naprężeń normalnych w każdej nakładce oraz uwzględniony jest wzajemne przesunięcie nakładek wzdłuż osi belki.

Jako czwarty rozpatrzono model, który jest układem dwóch sprzężonych belek Eulera-Bernoulliego połączonych warstwą sprężystą. Podobnie jak w modelu Zig-Zag stan

przemieszczeń belki opisują dwie funkcje. W modelu tym każda nakładka zginana jest oddzielnie. Model ten uwzględnia fakt, że występuje różnica przemieszczeń między górną i dolną nakładką. W literaturze przyjmuje się [110], że rdzeń przenoszący wzajemne oddziaływanie górnej i dolnej belki traktowany jest jak podłoże Winklera. W pracy przyjęto, że rdzeń traktowany jest jak podłoże Pasternaka, co pozwala uwzględnić nie tylko jego ściskanie, ale także jego ścinanie.

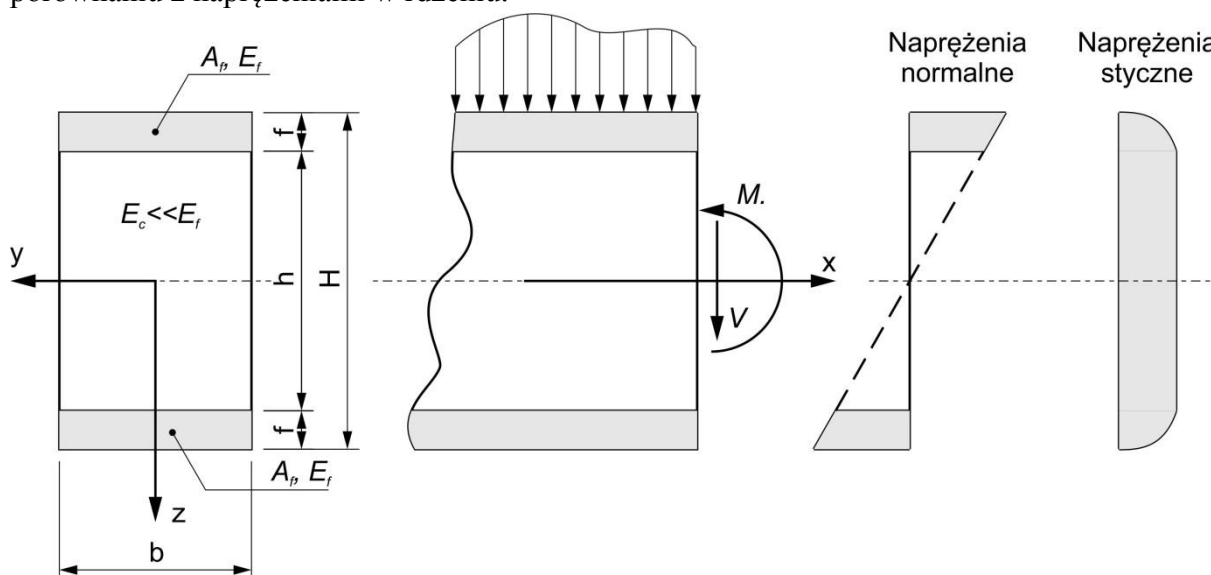
## 4.2. Belka Eulera-Bernoulliego

Rozpatruje się belkę sandwichową zbudowaną z dwóch warstw zewnętrznych (okładzin-belek) na tyle grubych, że są one zginane i z warstwy środkowej (rdzenia). Przyjmuje się, że belka poddana jest działaniu obciążenia prostopadłego do osi pręta. Przemieszczenia belki rozpatruje się w zakresie sprężystym i wyprowadzając odpowiednie równanie uwzględnia się założenia ważne dla małych przemieszczeń. Wynika stąd, że równania belki wyprowadzone zostaną w zakresie teorii liniowej. W znanej monografii [113] Plantema proponował, aby w belce sandwichowej o cienkich nakładkach przyjąć założenia jak w belce Eulera-Bernoulliego i pominąć naprężenia normalne w rdzeniu w przypadku, gdy moduł ściśliwości Younga w nakładkach jest wielokrotnie większy niż moduł Younga materiału rdzenia. W rozpatrywanej belce o grubych nakładkach drewnianych i zastosowanym materiale w rdzeniu belki także przyjmujemy powyższe założenia. Przypomnijmy, że rozpatrywany model nie spełnia warunków wymienionych w rozdziale 4.1.

W rozpatrywanym modelu belki przyjęto:

- przekrój płaski całej belki przy zginaniu nadal pozostaje płaski,
- pomijane są naprężenia normalne przy zginaniu w rdzeniu belki.

To drugie założenie wynika z faktu, że moduł ściśliwości rdzenia jest wielokrotnie mniejszy od modułu ściśliwości nakładek stąd naprężenia normalne w rdzeniu są bardzo małe w porównaniu z naprężeniami w rdzeniu.



Rysunek 4.2.1 Rozkład naprężeń normalnych i stycznych w przekroju belki trójwarstwowej według założeń Eulera-Bernoulliego

Rozpatruje się belkę o przekroju prostokątnym. Przyjęto oznaczenia jak pokazano na rysunku (4.2.1). Postępując analogicznie według znanych procedur z wytrzymałości materiałów [107], naprężenia normalne i styczne w nakładkach określone są wzorami:

$$\sigma_f(z) = \frac{Mz}{I_{yf}}, \quad \tau = \frac{V\bar{S}_y}{I_{yf}b}, \quad (4.2.1)$$

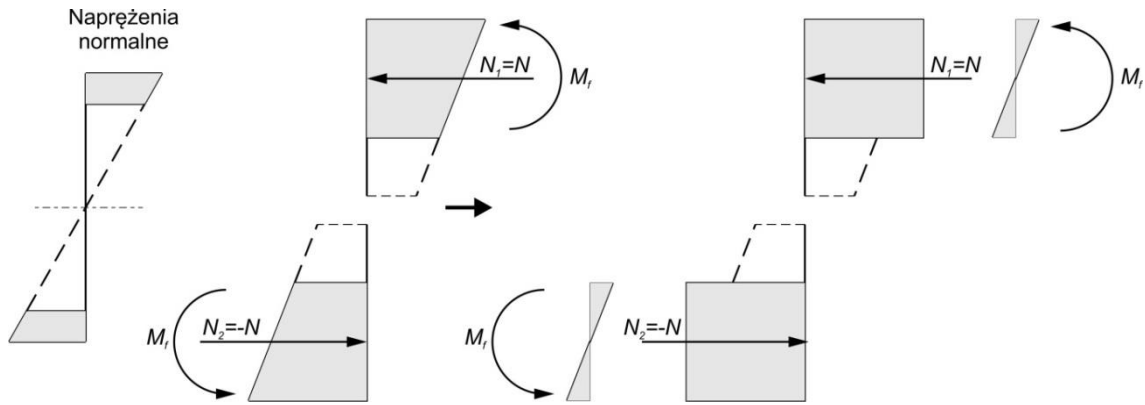
dla  $\frac{h}{2} < z \leq \frac{h}{2} + f$  i  $-(\frac{h}{2} + f) \leq z < -\frac{h}{2}$ , przy czym:

$I_{yf} = \frac{bf^3}{6} + \frac{bf(h+f)^2}{2} = \frac{bH^3}{2} [\frac{\beta^3}{3} + \beta(1-\beta)^2]$ ,  $f = \beta H$ ,  $0 < \beta < 0.5$ , natomiast  $M$  i  $V$  są odpowiednio momentem zginającym i siłą tnącą w belce.

Naprężenia styczne w rdzeniu belki są równe:

$$\tau = \frac{Vf(h+f)}{2I_{yf}} = \frac{VH^2\beta(1-\beta)}{2I_{yf}}, \quad -\frac{h}{2} < z \leq \frac{h}{2}. \quad (4.2.2)$$

Jak wynika z Rysunku 4.2.2 nakładka górna jest belką ściskaną siłą osiową:



**Rysunek 4.2.2** Naprężenia normalne oraz siły układ sił osiowych i momentów zginających w nakładkach belki trójwarstwowej traktowanej jako belkę Eulera-Bernoulliego

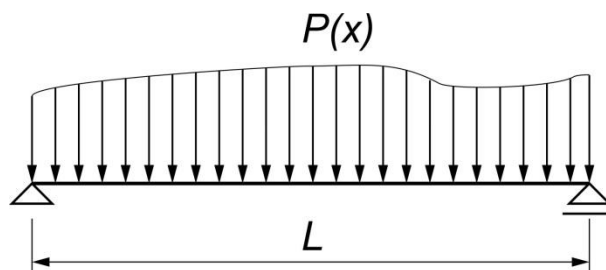
$$N_1 = -N = -M \frac{bf(h+f)}{2J_{yf}} = -M \frac{3(h+f)}{f^2 + 3(h+f)^2} = -M \frac{3(1-\beta)}{H[\beta^2 + 3(1-\beta)^2]} \quad (4.2.3)$$

i zginana momentem:

$$M_f = \frac{M}{2} \left[ 1 - \frac{3(h+f)^2}{f^2 + 3(h+f)^2} \right] = \frac{M}{2} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 3(1-\beta)^2}. \quad (4.2.4)$$

Nakładka dolna jest belką rozciąganą siłą osiową  $N_2 = N$  i zginana momentem  $M_f$ . Wielkości  $N$  i  $M_f$  określone są wzorami (4.2.3) i (4.2.4). Symbolem  $M$  oznaczono moment zginający w danym przekroju belki.

Równanie różniczkowe opisujące przemieszczenia belki ma postać (równanie (4.2.5)):


**Rysunek 4.2.3** Schemat statyczny belki trójwarstwowej obciążonej równomiernie

$$E_f I_{yf} \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = p(x), \quad (4.2.5)$$

gdzie:  $w(x)$  jest przemieszczeniem (ugięciem) belki a  $p(x)$  działającym obciążeniem natomiast  $E_f$  jest modułem Younga materiału nakładek (drewna).

Dla belki swobodnie podpartej o rozpiętości  $L$  warunki brzegowe mają postać:

$$w(0) = w(L) = 0, \quad (4.2.6)$$

$$\left. \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right|_{x=L}. \quad (4.2.7)$$

Równanie różniczkowe (4.2.5) dla warunków brzegowych (4.2.6) i (4.2.7) jest rozwiązywane dwoma sposobami. Pierwsze rozwiązanie przedstawiono w formie szeregu. Dla warunków brzegowych (4.2.6) i (4.2.7) rozwiązanie jest poszukiwane w postaci szeregu:

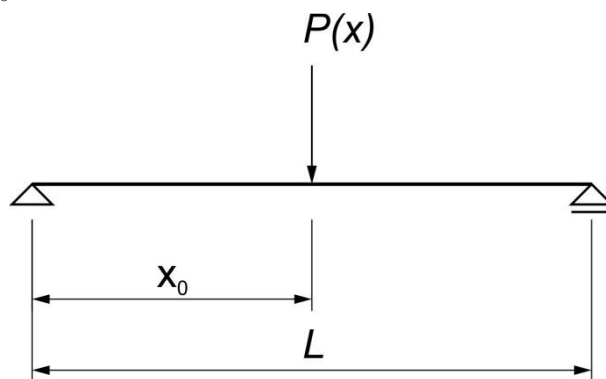
$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (4.2.8)$$

Po podstawieniu (4.2.8) do równania (4.2.5) i wykonania ortogonalizacji rozwiązanie otrzymuje się w postaci:

$$w(x) = \frac{2}{E_f I_{yf} L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (4.2.9)$$

gdzie  $p_n = \int_0^L p(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$ .

Rozpatrzone zostały dwa przypadki obciążenia belki. Niech belka obciążona będzie siłą skupioną  $P$  w punkcie  $x_0$  (rysunek (4.2.4)).


**Rysunek 4.2.4** Schemat statyczny belki trójwarstwowej obciążonej siłą skupioną

Funkcja obciążeń ma postać:

$$p(x) = P\delta(x - x_0), \quad (4.2.10)$$

gdzie: symbol  $\delta()$  oznacza deltę Diraca.

Korzystając ze znanych własności delty Diraca otrzymuje się:

$$p_n = \int_0^L p(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = P \int_0^L \delta(x - x_0) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = P \sin \frac{n\pi x_0}{L}. \quad (4.2.11)$$

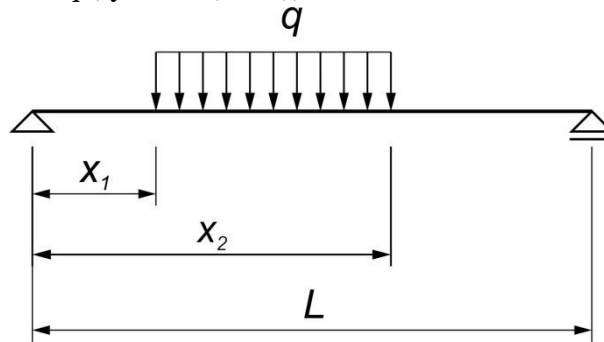
Przykładowo w tym przypadku wzór (4.2.9) przyjmuje postać:

$$w(x) = \frac{2P}{E_f I_{yf} L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (4.2.12)$$

Gdy siła jest w środku rozpiętości belki wówczas należy podstawić:

$$p_n = P \sin \frac{n\pi}{2}. \quad (4.2.13)$$

Jako drugi przypadek rozpatrzony będzie przypadek belki z obciążeniem równomiernie rozłożone. Niech belka będzie obciążona na odcinku  $(x_1, x_2)$  obciążeniem równomiernie rozłożonym o intensywności  $q$  (rysunek (4.2.5)).



Rysunek 4.2.5

W tym przypadku stała  $p_n$  jest równa:

$$p_n = q \int_{x_1}^{x_2} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{qL}{n\pi} (\cos \frac{n\pi x_1}{L} - \cos \frac{n\pi x_2}{L}). \quad (4.2.14)$$

Gdy belka obciążona jest równomiernie na całej długości wówczas stała ta jest równa:

$$p_n = \frac{qL}{n\pi} [1 - (-1)^n]. \quad (4.2.15)$$

Gdy belka obciążona jest kilkoma siłami skupionymi i obciążeniem równomiernie rozłożonym to korzystając z zasady superpozycji skutki od każdego obciążenia dodajemy.

Rozpatrzmy ponownie belkę obciążoną siłą skupioną w punkcie  $x_0$ . W tym przypadku równanie różniczkowe (4.2.5) ma postać:

$$E_f I_{yf} \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = P\delta(x - x_0). \quad (4.2.16)$$

Całkując bezpośrednio równanie (4.2.16) i uwzględniając warunki brzegowe (4.2.6), (4.2.7) otrzymuje się rozwiązanie w postaci:

$$w(x) = \frac{P}{6E_f I_{yf}} \left\{ L^2 x \left[ \left(1 - \frac{x_0}{L}\right) - \left(1 - \frac{x_0}{L}\right)^3 \right] - x^3 \left(1 - \frac{x_0}{L}\right) + (x - x_0)^3 H(x - x_0) \right\}, \quad (4.2.17)$$

gdzie symbol  $H()$  oznacza funkcję jednostkową Heaviside'a.



Momenty zginające i siły tnące określają znane wzory:

$$M(x) = -E_f I_{yf} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = P \left[ x \left( 1 - \frac{x_0}{L} \right) - (x - x_0) H(x - x_0) \right], \quad (4.2.18)$$

$$V(x) = -E_f I_{yf} \frac{d^3 w(x)}{dx^3} = P \left[ \left( 1 - \frac{x_0}{L} \right) - H(x - x_0) \right]. \quad (4.2.19)$$

Rozpatrzmy także dodatkowo przypadek, gdy belka na całej długości jest równomiernie obciążona obciążeniem  $q$ . W tym przypadku przemieszczenia belki opisuje równanie różniczkowe:

$$E_f I_{yf} \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q. \quad (4.2.20)$$

Po scałkowaniu równania (4.2.20) i uwzględnieniu odpowiednich warunków brzegowych dla belki swobodnie podpartej otrzymuje się:

$$w(x) = \frac{qx}{12E_f I_{yf}} \left( \frac{L^3}{2} - Lx^2 + \frac{x^3}{2} \right). \quad (4.2.21)$$

Momenty zginające i siły tnące określają znane wzory:

$$M(x) = -E_f I_{yf} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{qxL}{2} \left( 1 - \frac{x}{L} \right), \quad (4.2.22)$$

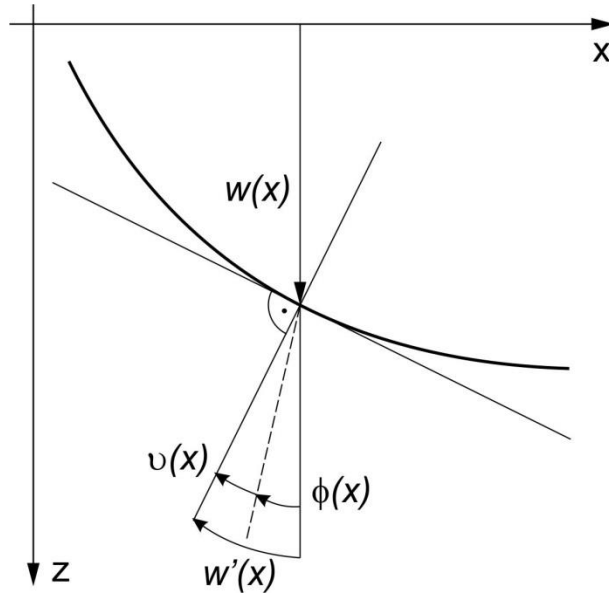
$$V(x) = -E_f I_{yf} \frac{d^3 w(x)}{dx^3} = \frac{qL}{2} \left( 1 - 2 \frac{x}{L} \right). \quad (4.2.23)$$

Jak wynika z przeprowadzonej analizy numerycznej i przedstawionej w dalszej części pracy model ten daje wyniki daleko odbiegające od rezultatów otrzymanych na drodze doświadczalnej. Stąd wynika, że nie można go stosować w analizie stanu naprężeń i przemieszczeń belek sandwiczowych.

### 4.3. Model belki sandwiczowej z uwzględnieniem ścinania rdzenia i nakładek (Uogólniony model zig-zag)

#### 4.3.1. Równania różniczkowe belki sandwiczowej

Rozpatruje się belkę sandwiczową zbudowaną z dwóch warstw zewnętrznych (okładzin-belek) na tyle grubych, że są one zginane i ścinane oraz z warstwy środkowej (rdzenia) ulegającej tylko ścinaniu. Przyjmuje się, że warstwa środkowa nie ulega skróceniu w wyniku działania naprężeń normalnych do osi pręta. Przyjmuje się, że belka poddana jest działaniu obciążenia prostopadłego do osi pręta. Przemieszczenia belki rozpatruje się w zakresie sprężystym i wyprowadzając odpowiednie równania uwzględnia się założenia ważne dla małych przemieszczeń. Wynika stąd, że równania belki wyprowadzone zostaną w zakresie teorii liniowej. W przyjętym modelu belki sandwiczowej przyjęto, że jej przemieszczenia pionowe wywołane są zarówno zginaniem jak i ścinaniem warstw zewnętrznych. Stąd stan przemieszczeń belki sandwiczowej opisują trzy funkcje: funkcja przemieszczeń pionowych  $w(x)$ , funkcja opisująca obrót przekroju  $\varphi(x)$  i kąt obrotu  $\psi(x)$  określający wzajemne przesunięcie warstw zewnętrznych a stąd ścinanie rdzenia belki. Między funkcją przemieszczenia belki  $w(x)$ , kątem obrotu przekroju  $\varphi(x)$  i kątem ścinania warstw zewnętrznych  $\vartheta(x)$  istnieje zależność (rysunek (4.3.1)):



**Rysunek 4.3.1** Funkcje opisujące stan przemieszczenia belki trójwarstwowej: funkcja przemieszczeń pionowych  $w(x)$ , kąt obrotu przekroju  $\phi(x)$  oraz kąt ścinania okładzin  $\nu(x)$

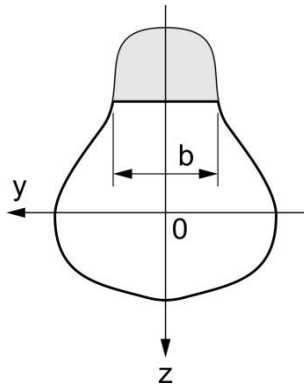
$$g(x) = \frac{dw(x)}{dx} - \phi(x). \quad (4.3.1)$$

Przyjmując przy zginaniu założenia Bernoulliego (jak dla belki Eulera) oraz uwzględniając dodatkowo ścinanie (jak w belce Flüggego i belce Timoszenki) związki między momentami zginającymi  $M_i(x)$  i siłami tnącymi  $V_i(x)$  a przemieszczeniami belek (okładzin) mają znaną postać:

$$M_i(x) = -(E_f I_f)_i \frac{d\phi(x)}{dx}, \quad V_i(x) = \left(\frac{G_f A_f}{\kappa}\right)_i g(x) = \left(\frac{G_f A_f}{\kappa}\right)_i \left[\frac{dw(x)}{dx} - \phi(x)\right]. \quad (4.3.2)$$

gdzie:  $E_f$  jest modułem Younga,  $G_f$  jest modułem Kirchhoffa,  $A_f$  jest polem przekroju poprzecznego belki (okładziny),  $I_f$  jest momentem bezwładności względem głównej środkowej osi bezwładności przekroju okładziny  $y$ ,  $\kappa$  jest współczynnikiem ścinania przekroju poprzecznego belki, przy czym:  $(E_f I_f)_i$  - sztywność na zginanie okładziny.

Gdy wskaźnik  $i=1$  wówczas dana wielkość dotyczy górnej belki, a gdy  $i=2$  dotyczy dolnej belki. Współczynnik  $\kappa$  wyznacza się ze wzoru (rysunek (4.3.2)) [110]:



**Rysunek 4.3.2** Moment statyczny odcinanej części do obliczenia współczynnika ścinania Timoszenki  $\kappa$

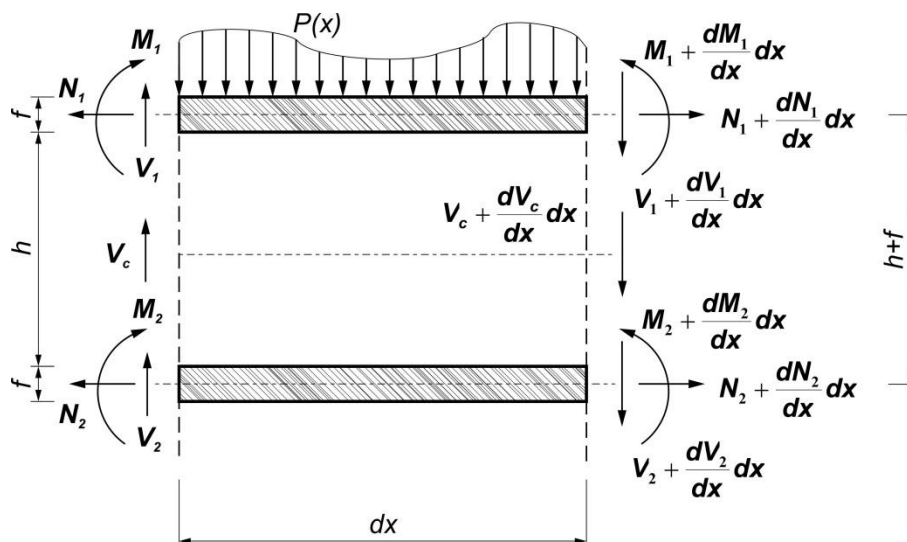
$$\kappa = \frac{A}{J^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA, \quad (4.3.3)$$

gdzie:  $S = S(z)$  jest momentem statycznym względem osi  $y$  części pola zakreskowanego na Rysunku 4.3.2 a  $b = b(z)$  odpowiednią szerokością belki. Dla belki o przekroju prostokątnym mamy  $\kappa = 1, 2$ .

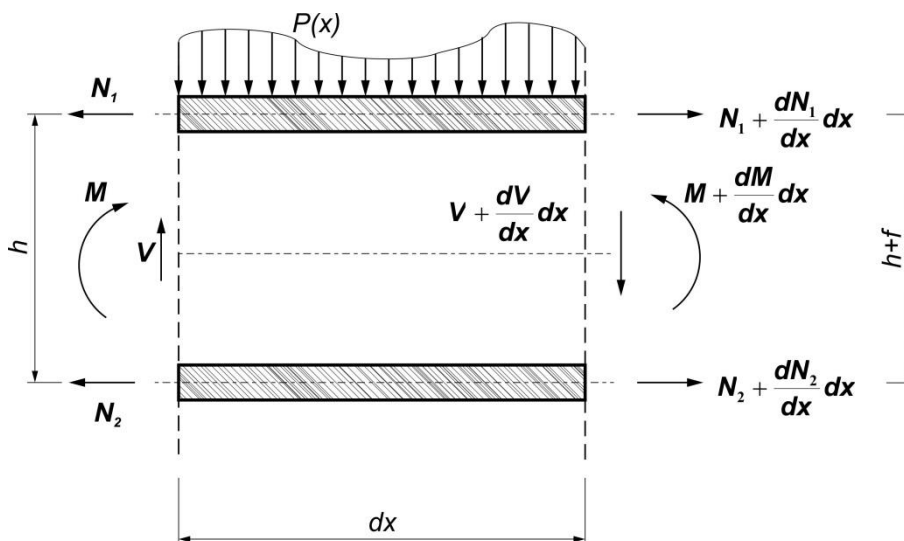
Siłom tnącym w górnej i dolnej belce towarzyszy siła tnąca w rdzeniu:

$$V_{c,g}(x) = (GA)_c \mathcal{G}(x) = (GA)_c \left[ -\frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x) \right], \quad (4.3.4)$$

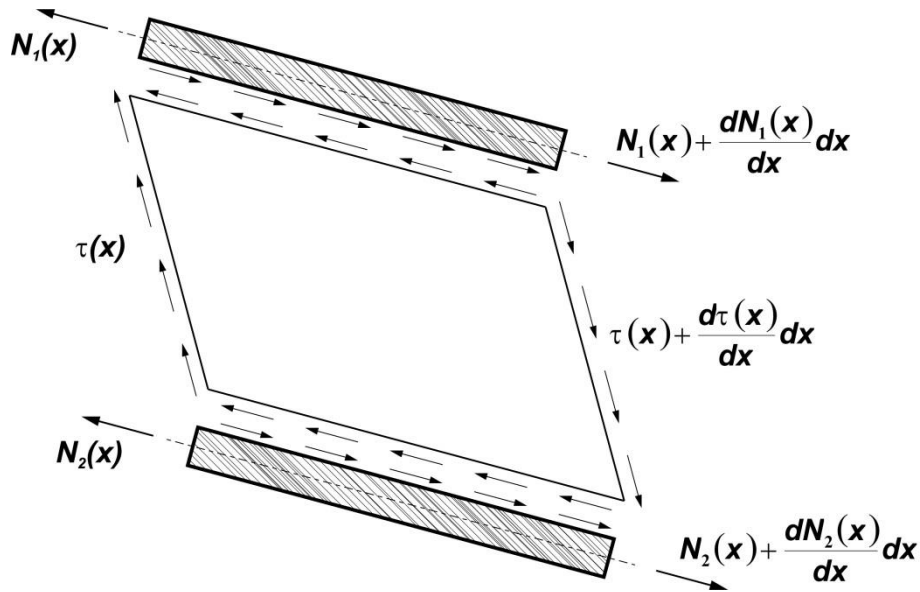
gdzie:  $G_c$  jest modułem Kirchhoffa a  $A_c$  polem przekroju rdzenia belki czyli  $(GA)_c$  jest sztywnością rdzenia belki na ścinanie.



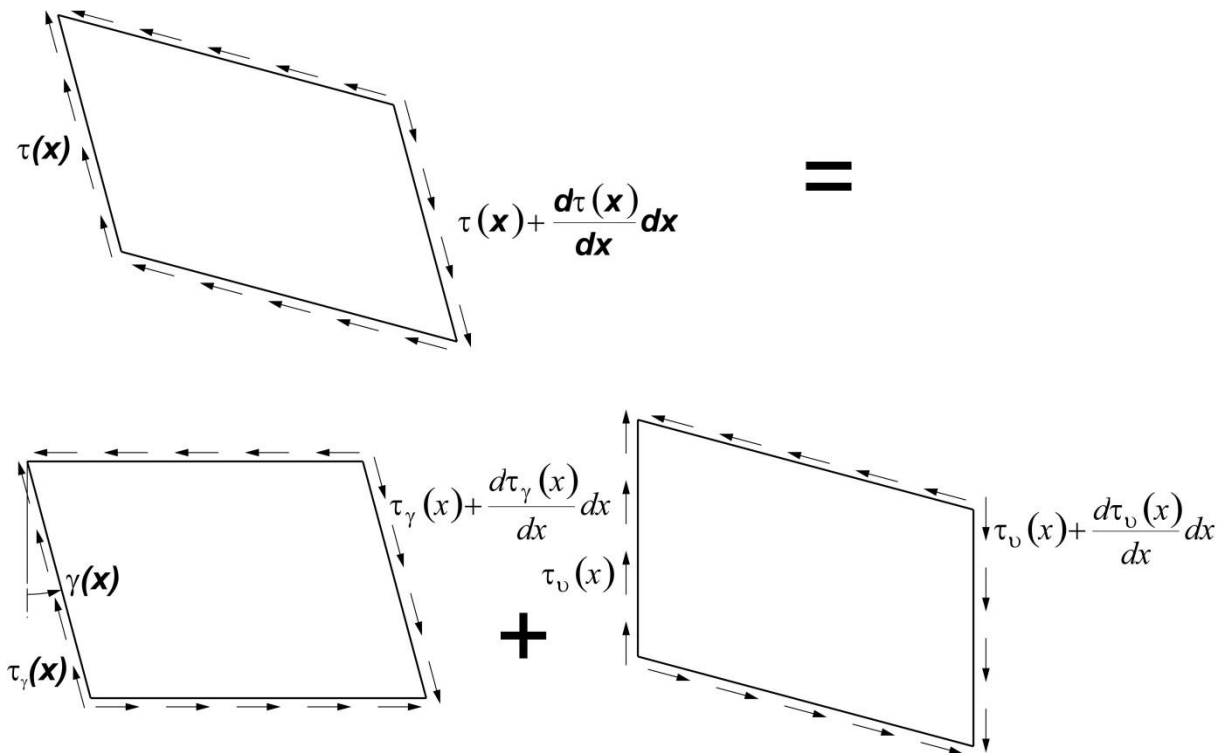
Rysunek 4.3.3 Momenty zginające, siły tnące i siły osiowe działające na odcinku  $dx$  na okładzinie i rdzeń



Rysunek 4.3.4 Siły przekrojowe będące sumą sił przekrojowych działających na odcinku  $dx$  na poszczególne elementy belki



Rysunek 4.3.5 Naprężenia styczne w rdzeniu i siły osiowe w nakładkach



Rysunek 4.3.6 Naprężenia styczne w rdzeniu jako suma naprężeń stycznych powstałych w wyniku przesunięcia się wzajemnego górnej i dolnej nakładki i naprężeń stycznych wynikających z odkształcenia postaciowego samych nakładek

Na rysunku (4.3.3) pokazano siły przekrojowe (momenty zginające, siły tnące i siły osiowe) działające na poszczególne elementy (nakładki i rdzeń) belki sandwiczowej, natomiast na rysunku (4.3.4) siły przekrojowe będące sumą sił przekrojowych działających na poszczególne elementy belki. Rysunek (4.3.5) przedstawia naprężenia styczne w rdzeniu i siły osiowe w nakładkach. Rysunek (4.3.6) ilustruje fakt, że naprężenia styczne w rdzeniu są sumą naprężeń stycznych powstałych w wyniku przesunięcia się wzajemnego górnej i dolnej nakładki (odkształcenie  $\gamma$ ) i naprężeń stycznych wynikających z odkształcenia postaciowego  $\vartheta$  samych nakładek.

Rozpatrując warunki równowagi wyciętego elementu belki pokazanego na rysunku (4.3.3) i korzystając z rysunków (4.3.4) – (4.3.6) wyznaczone zostaną wzajemne związki między siłami przekrojowymi a także naprężeniami.

Z warunku sumy rzutów sił na oś X mamy:

$$\sum X = 0$$

$$-N_1(x) + N_1(x) + \frac{dN_1(x)}{dx} dx - N_2(x) + N_2(x) + \frac{dN_2(x)}{dx} dx = 0. \quad (4.3.5)$$

Upraszczając powyższe równanie otrzymano:

$$\frac{dN_1(x)}{dx} + \frac{dN_2(x)}{dx} = 0, \quad (4.3.6)$$

gdzie:  $N_i(x)$  – osiowa siła występująca w górnej lub dolnej belce (okładzinie).

Z sumy rzutów sił na oś Y wynika:

$$\sum Y = 0$$

$$-V_1(x) + V_1(x) + \frac{dV_1(x)}{dx} dx - V_2(x) + V_2(x) + \frac{dV_2(x)}{dx} dx -$$

$$V_c(x) + V_c(x) + \frac{dV_c(x)}{dx} dx + p(x)dx = 0. \quad (4.3.7)$$

Po dokonaniu uproszczeń otrzymuje się:

$$\frac{dV_1(x)}{dx} + \frac{dV_2(x)}{dx} + \frac{dV_c(x)}{dx} = -p(x), \quad (4.3.8)$$

Wprowadzając oznaczenie (Rysunek 4.3.3):

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_c(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_{c\gamma}(x) + V_{c\delta}(x) =$$

$$= V_1(x) + V_2(x) + [\tau_\gamma(x) + \tau_\delta(x)]hb \quad (4.3.9)$$

i różniczkując to wyrażenie otrzymano:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{dV_1(x)}{dx} + \frac{dV_2(x)}{dx} + \frac{dV_c(x)}{dx} \quad (4.3.10)$$

Stąd zależność (4.3.8) przyjmuje postać:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x). \quad (4.3.11)$$

Z warunku sumy momentów względem punktu B:

$$\sum M_B(x) = 0$$

$$V(x)dx + M_1(x) - M_1(x) - \frac{dM_1(x)}{dx} dx + M_2(x) - M_2(x) - \frac{dM_2(x)}{dx} dx -$$

$$[N_1(x) - N_1(x) - \frac{dN_1(x)}{dx} dx](h + f) = 0. \quad (4.3.12)$$

Dzieląc powyższe wyrażenie przez  $dx$  otrzymano:

$$V(x) = \frac{dM_1(x)}{dx} + \frac{dM_2(x)}{dx} - (h + f) \frac{dN_1(x)}{dx} = \frac{dM(x)}{dx} + (h + f) \frac{dN(x)}{dx}, \quad (4.3.13)$$

przy czym:  $N(x) = N_2(x) = -N_1(x)$ ,  $M(x) = M_1(x) + M_2(x)$ .

Różniczkując równanie (4.3.13) otrzymano:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2} + (h + f) \frac{d^2N(x)}{dx^2}. \quad (4.3.14)$$

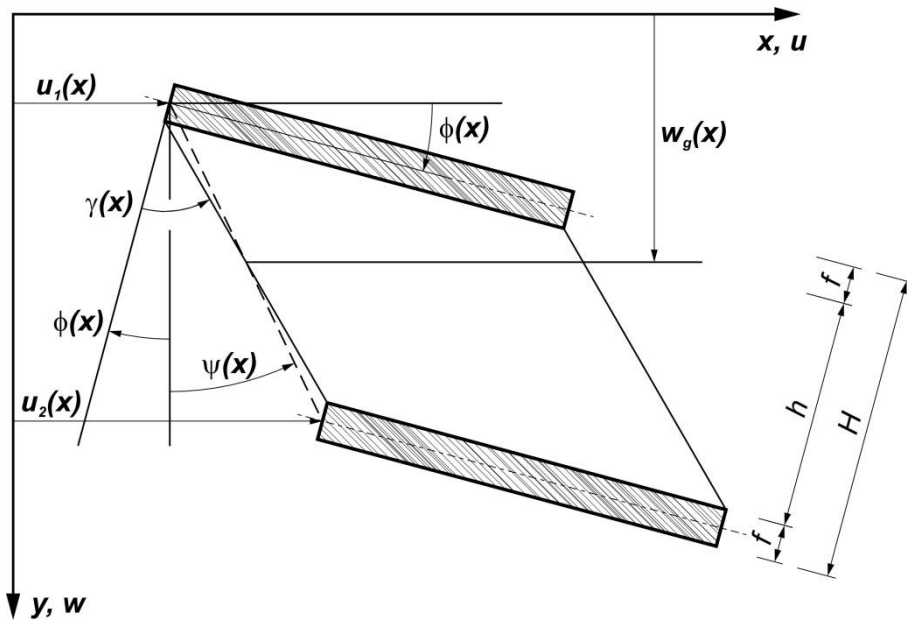
Korzystając z powyższych zależności i związków konstytutywnych między naprężeniami i odkształceniami wyprowadzone zostaną równania różniczkowe opisujące przemieszczenia belki. Na rysunku (4.3.7) przedstawiono przemieszczenia z pominięciem przemieszczeń wywołanych ścinaniem nakładek. Funkcja  $w_g(x)$  przedstawia przemieszczenie pionowe belki wywołane

tylko zginaniem nakładek ( $\varphi(x) = \frac{dw_g(x)}{dx}$ ). Całkowite przemieszczenie pionowe belki jest sumą:

$$w(x) = w_g(x) + w_s(x), \quad (4.3.15)$$

przy czym symbolem  $w_s(x)$  oznaczono pionowe przemieszczenie belki wynikające ze ścinania

nakładek ( $\vartheta(x) = \frac{dw_s(x)}{dx}$ ).



**Rysunek 4.3.7** Funkcje opisujące stan przemieszczenia belki trójwarstwowej:  $w_g(x)$  opisująca przemieszczenie osi belki;  $w_s(x)$  opisująca przemieszczenie osi belki na skutek ścinania w nakładkach;  $\varphi(x)$  oznaczającą kąt obrotu nakładek;  $\psi(x)$  opisująca kąt obrotu osi łączącej środki ciężkości górnej i dolnej nakładki względem płaszczyzny pionowej;  $\gamma(x)$  opisująca kąt obrotu rdzenia względem osi prostopadłej do osi pasa górnego;  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  przemieszczenia poziome odpowiednio pasa górnego i dolnego

Przyjmując, że materiał spełnia prawo Hooke'a otrzymuje się związek między siłami osiowymi i przemieszczeniami  $u_i(x)$  wzdłuż osi belki:

$$N_i(x) = (E_f A_f)_i \frac{du_i(x)}{dx}, \quad (4.3.16)$$

gdzie  $E_i$  jest modułem Younga odpowiednio dla  $i = 1$  – górnej belki (okładziny) i  $i = 2$  – dolnej belki (okładziny) oraz  $(E_f A_f)_i = E_f b h_i$ , przy czym  $h_i = h$  jest wysokością i-tej belki.

Związki między momentami zginającymi i siłami tnącymi a przemieszczeniami dla okładzin określają wzory (4.3.2) i (4.3.4), natomiast związki między siłami tnącymi i przemieszczeniami w rdzeniu belki określają wzory:

$$V_{cg}(x) = G_c b h \left[ \frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x) \right] = \tau_g b h, \quad (4.3.17)$$

$$V_{cr}(x) = G_c b h \left( 1 + \frac{f}{h} \right) [\varphi(x) + \psi(x)]. \quad (4.3.18)$$

Po zróżniczkowaniu drugiej zależności (4.3.2) otrzymano:

$$\frac{dV_i(x)}{dx} = \left(\frac{G_f A_f}{\kappa}\right)_i \left[\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \frac{d\varphi(x)}{dx}\right]. \quad (4.3.19)$$

Jak wynika z rysunku (4.3.7) zależność między odkształceniem postaciowym rdzenia belki i kątami opisującymi przemieszczenia belki ma postać:

$$\gamma(x) = [\varphi(x) + \psi(x)]\left(1 + \frac{f}{h}\right), \quad (4.3.20)$$

przy czym:

$$\psi(x) = \frac{u_2(x) - u_1(x)}{h + f}. \quad (4.3.21)$$

Różniczkując powyższą zależność otrzymuje się:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{1}{h + f} \left[\frac{du_2(x)}{dx} - \frac{du_1(x)}{dx}\right]. \quad (4.3.22)$$

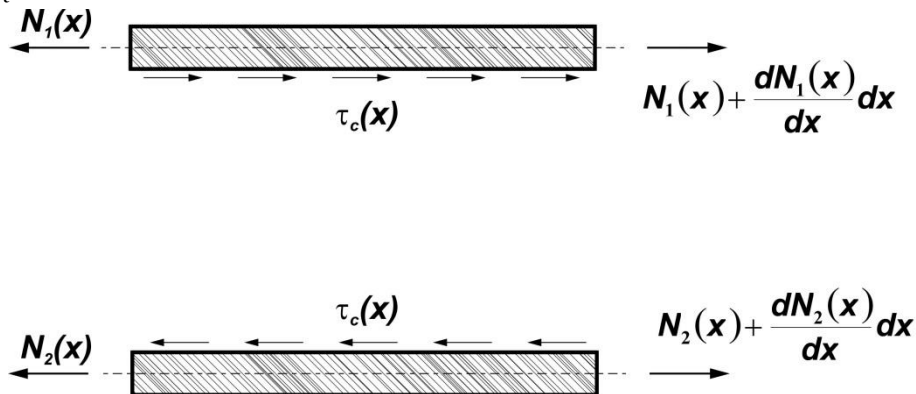
Stosując prawo Hooke'a dla odkształceń postaciowych w rdzeniu otrzymuje się:

$$\gamma(x) = \frac{\tau_\gamma(x)}{G_c} = [\varphi(x) + \psi(x)]\left(1 + \frac{f}{h}\right), \quad (4.3.23)$$

a stąd:

$$\tau_\gamma(x) = G_c \gamma(x) = G_c [\varphi(x) + \psi(x)]\left(1 + \frac{f}{h}\right). \quad (4.3.24)$$

Rozpatrując równowagę wyciętego elementu nakładki o długości  $dx$  (Rysunek 4.3.8) otrzymuje się:



Rysunek 4.3.8 Równowaga wyciętego elementu nakładki o długości  $dx$

$$\frac{dN_i(x)}{dx} = (-1)^i \frac{dN(x)}{dx} = (-1)^i \tau_c(x) b, \quad (4.3.25)$$

$$\frac{dN(x)}{dx} = \tau_c(x) b = [\tau_\gamma(x) + \tau_g(x)] b = b G_c \left[ \frac{f}{h} \varphi(x) + \left(1 + \frac{f}{h}\right) \psi(x) + \frac{dw(x)}{dx} \right], \quad (4.3.26)$$

gdzie:  $b$  jest szerokością przekroju belki.

Z równanie (4.3.22) otrzymano:

$$\begin{aligned} \frac{du_1(x)}{dx} - \frac{du_2(x)}{dx} &= (h + f) \frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{N_2(x)}{(E_f A_f)_2} - \frac{N_1(x)}{(E_f A_f)_1} = \\ &= N(x) \left( \frac{1}{(E_f A_f)_2} + \frac{1}{(E_f A_f)_1} \right) \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

Przekształcając równanie (4.3.27) otrzymano:

$$N(x) = \zeta(h+f) \frac{d\psi(x)}{dx}, \quad (4.3.28)$$

gdzie:  $\zeta = \frac{(E_f A_f)_1 (E_f A_f)_2}{(E_f A_f)_1 + (E_f A_f)_2}$  jest połową średniej harmoniczną sztywności podłużnej nakładek.

Różniczkując równanie (4.3.28) otrzymano:

$$\frac{dN(x)}{dx} = \zeta(h+f) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \quad (4.3.29)$$

Porównując wzory (4.3.26), (4.3.29) otrzymuje się równanie wiążące trzy niewiadome funkcje przemieszczeń belki:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{G_c b}{\zeta h} \psi(x) - \frac{G_c b}{\zeta(h+f)} \frac{dw(x)}{dx} - \frac{G_c b f}{\zeta h(h+f)} \varphi(x) = 0. \quad (4.3.30)$$

Podstawiając do warunku równowagi (4.3.11) zależności dla siły tnącej:

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_{c9}(x) + V_{cy}(x) = \left(\frac{G_f A_f}{\kappa}\right)_1 \left[\frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x)\right] + \left(\frac{G_f A_f}{\kappa}\right)_2 \left[\frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x)\right] + G_c b h \left[\frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x)\right] + G_c b (h+f) [\varphi(x) + \psi(x)] \quad (4.3.31)$$

otrzymuje się drugie równanie różniczkowe:

$$-\left[\left(\frac{G_f A_f}{\kappa}\right)_1 + \left(\frac{G_f A_f}{\kappa}\right)_2 + G_c b h\right] \left[\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \frac{d\varphi(x)}{dx}\right] - G_c b h \left(1 + \frac{f}{h}\right) \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\psi(x)}{dx}\right] = p(x), \quad (4.3.32)$$

przy czym:  $\left(\frac{G_f A_f}{\kappa}\right)_1 = \left(\frac{G_f A_f}{\kappa}\right)_2 = \frac{G_f b f}{\kappa}$ .

Kolejne równanie różniczkowe wyprowadza się z równania równowagi (4.3.13). Korzystając z zależności (4.3.28) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} & + \left[\left(\frac{G_f A_f}{\kappa}\right)_1 + \left(\frac{G_f A_f}{\kappa}\right)_2\right] \left[\frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x)\right] + \\ & G_c b h \left\{ \frac{dw(x)}{dx} + \frac{f}{h} \varphi(x) + \left(1 + \frac{f}{h}\right) \psi(x) \right\} = \\ & - \left[ (E_f I_f)_1 + (E_f I_f)_2 \right] \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + (h+f)^2 \zeta \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2}. \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Zmieniając nieco kolejność równań stan przemieszczeń belki sandwiczowej opisują trzy równania różniczkowe:

$$-\left[\left(\frac{GA}{\kappa}\right)_b + G_c b h\right] \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \left[\left(\frac{GA}{\kappa}\right)_b - G_c b f\right] \frac{d\varphi(x)}{dx} - G_c b h \left(1 + \frac{f}{h}\right) \frac{d\psi(x)}{dx} = p(x), \quad (4.3.34)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{G_c b}{\zeta h} \psi(x) - \frac{G_c b}{\zeta(h+f)} \frac{dw(x)}{dx} - \frac{G_c b f}{\zeta h(h+f)} \varphi(x) = 0. \quad (4.3.35)$$



$$\begin{aligned}
 & [(E_f I_f)_1 + (E_f I_f)_2] \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - (h+f)^2 \zeta \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \\
 & + [(\frac{G_f A_f}{\kappa})_1 + (\frac{G_f A_f}{\kappa})_2 + G_c b h] \frac{dw(x)}{dx} + \\
 & + \{ - [(\frac{G_f A_f}{\kappa})_1 + (\frac{G_f A_f}{\kappa})_2] + G_c b f \} \phi(x) + b(h+f) G_c \psi(x) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.3.36}$$

w których występują trzy nieznanne funkcje  $w(x)$ ,  $\phi(x)$  i  $\psi(x)$  oraz wprowadzono oznaczenia:

$$(\frac{GA}{\kappa})_b = (\frac{G_f A_f}{\kappa})_1 + (\frac{G_f A_f}{\kappa})_2, \quad (EI)_b = (E_f I_f)_1 + (E_f I_f)_2.$$

Dla powyższego układu trzech równań różniczkowych należy podać sześć warunków brzegowych. Dla belki swobodnie podpartej o rozpiętości  $L$  warunki brzegowe mają postać:

$$w(0) = w(L) = 0, \tag{4.3.37}$$

$$\left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0, \tag{4.3.38}$$

$$\left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0. \tag{4.3.39}$$

Rozpatrzmy belkę z uwzględnieniem ścinania nakładek, której stan przemieszczenia opisany jest układem równań (4.3.34)-(4.3.36). Bezpośrednie całkowanie tego układu równań dla dowolnych obciążeń jest trudne w realizacji. Stąd dla warunków brzegowych (4.3.37)-(4.3.39) rozwiązania poszukujemy w postaci szeregów:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{4.3.40}$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \tag{4.3.41}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{4.3.42}$$

Nieznane stałe  $y_n$ ,  $\phi_n$ ,  $\psi_n$  występujące w szeregach (4.3.40) - (4.3.42) wyznaczone zostaną z układu równań różniczkowych (4.4.34) - (4.4.36). Po podstawieniu powyższych szeregów (4.3.40) - (4.3.42) do układu równań (4.3.34) - (4.3.36) i wykorzystaniu ortogonalnych własności funkcji trygonometrycznych otrzymuje się algebraiczny układ równań:

$$[(\frac{GA}{\kappa})_b + G_c b h] (\frac{n\pi}{L})^2 y_n - [(\frac{GA}{\kappa})_b - G_c b f] (\frac{n\pi}{L}) \phi_n + G_c b h (1 + \frac{f}{h}) (\frac{n\pi}{L}) \psi_n = \frac{2}{L} p_n, \tag{4.3.43}$$

$$\frac{G_c b}{\zeta(h+f)} (\frac{n\pi}{L}) y_n + \frac{G_c b f}{\zeta h(h+f)} \phi_n + [(\frac{n\pi}{L})^2 + \frac{G_c b}{\zeta h}] \psi_n = 0, \tag{4.3.44}$$

$$\begin{aligned}
 & [(\frac{GA}{\kappa})_b + G_c b f] (\frac{n\pi}{L}) y_n - [(EI)_b (\frac{n\pi}{L})^2 + (\frac{GA}{\kappa})_b - G_c b f] \phi_n + \\
 & + [(h+f)^2 \zeta (\frac{n\pi}{L})^2 + b(h+f) G_c] \psi_n = 0,
 \end{aligned} \tag{4.3.45}$$

gdzie:

$$p_n = \int_0^L p(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \tag{4.3.46}$$

Powyższy układ równań przedstawiony będzie w następującej postaci:

$$a_{11n}y_n + a_{12n}\varphi_n + a_{13n}\psi_n = \frac{2}{L}p_n, \quad (4.3.47)$$

$$a_{21n}y_n + a_{22n}\varphi_n + a_{23n}\psi_n = 0, \quad (4.3.48)$$

$$a_{31n}y_n + a_{32n}\varphi_n + a_{33n}\psi_n = 0, \quad (4.3.49)$$

gdzie:

$$a_{11n} = [(\frac{GA}{\kappa})_b + G_cbh](\frac{n\pi}{L})^2, \quad a_{12n} = -[(\frac{GA}{\kappa})_b - G_cbf](\frac{n\pi}{L}), \quad a_{13n} = G_cbh(1 + \frac{f}{h})(\frac{n\pi}{L}),$$

$$a_{21n} = \frac{G_c b}{\zeta(h+f)}(\frac{n\pi}{L}), \quad a_{22n} = +\frac{G_c bf}{\zeta h(h+f)}, \quad a_{23n} = (\frac{n\pi}{L})^2 + \frac{G_c b}{\zeta h},$$

$$a_{31} = [(\frac{GA}{\kappa})_b + G_cbf]\frac{n\pi}{L}, \quad a_{32} = -[(EI)_b(\frac{n\pi}{L})^2 + (\frac{GA}{\kappa})_b - G_cbf],$$

$$a_{33} = (h+f)^2\zeta(\frac{n\pi}{L})^2 + b(h+f)G_c.$$

Rozwiązania powyższego układu równań przedstawiamy poniżej w postaci rekurencyjnej:

$$y_n = \frac{2p_n}{L} \cdot \frac{a_{33n}(a_{22n}a_{33n} - a_{23n}a_{32n})}{(a_{11n}a_{33n} - a_{13n}a_{31n})(a_{22n}a_{33n} - a_{23n}a_{32n}) - (a_{12n}a_{33n} - a_{13n}a_{32n})(a_{21n}a_{33n} - a_{23n}a_{31n})}, \quad (4.3.50)$$

$$\varphi_n = -\frac{a_{21n}a_{33n} - a_{23n}a_{31n}}{a_{22n}a_{33n} - a_{23n}a_{32n}}y_n, \quad (4.3.51)$$

$$\psi_n = -\frac{a_{31n}}{a_{33n}}y_n - \frac{a_{32n}}{a_{33n}}\varphi_n. \quad (4.3.52)$$

Po obliczeniu powyższych stałych ze wzorów (4.3.50) - (4.3.52) wyznacza się stan przemieszczeń belki (4.3.40) - (4.3.42), a następnie ze wzorów (4.3.2), (4.3.4), (4.3.17), (4.3.18), 4.3.28) siły przekrojowe (wewnętrzne) jak momenty zginające, siły poprzeczne i siły osiowe w belce. Stałą  $p_n$  występującą w powyższych wzorach dla obciążenia siłą skupioną i obciążeniem równomiernie rozłożonym określono w rozdziale 4.2. Następnie można wyznaczyć naprężenia normalne i styczne. Szczegóły przedstawione zostaną w poniższym podrozdziale.

#### 4.4. Wyznaczenie sił przekrojowych i naprężeń dla belki z uwzględnieniem ścinania nakładek

Niektóre z przytoczonych poniżej wzorów podano wcześniej jednak dla wygody obliczeń przytoczone one będą ponownie czasami z drobnymi modyfikacjami i przypisana im będzie nowa numeracja.

Jak wynika ze wzorów (4.3.2) momenty zginające w belce górnej i dolnej określa wzór:

$$M_i(x) = -(EI)_i \frac{d\varphi(x)}{dx}, \quad (4.4.1)$$

a siły tnące:

$$V_i(x) = (\frac{GA}{\kappa})_i \vartheta(x) = (\frac{GA}{\kappa})_i [\frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x)], \quad (4.4.2)$$

Równanie dla siły osiowej w nakładkach określa wzór (4.4.2):

$$N(x) = \zeta(h+f) \frac{d\psi(x)}{dx}, \quad (4.4.3)$$

gdzie  $\zeta = \frac{E_1 A_1 \cdot E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$  jest połową średniej harmoniczną sztywności podłużnej nakładek.

Do wyznaczenia naprężeń stycznych w okładzinach potrzebna jest pochodna siły osiowej:

$$\frac{dN(x)}{dx} = \zeta(h+f) \frac{d^2\psi(x,t)}{dx^2} \quad (4.4.4)$$

Naprężenia normalne w okładzinach wywołane momentem zginającym wyznaczamy ze wzoru:

$$\sigma_{M_i}(x, z_i) = \frac{M_i(x) z_i}{I_i}, \quad i = 1, 2, \quad (4.4.5)$$

przy czym  $I_i = \frac{bf^3}{12}$ .

Naprężenia normalne w okładzinach wywołane siłą osiową powstałej w belce wyznaczane są ze wzoru:

$$\sigma_{N_i}(x) = \frac{N_i(x)}{bf}. \quad (4.4.6)$$

Stąd naprężenia w belce (w nakładce) są równe:

$$\sigma_i(x, z_i) = \frac{M_i(x) z_i}{I_i} + \frac{N_i(x)}{bf}. \quad (4.4.7)$$

Przypomnijmy, że  $N_1(x) = -N(x)$  i  $N_2(x) = N(x)$ .

Biorąc pod uwagę zależności na momenty zginające (4.4.1) i siły osiowe (4.4.4) ostatecznie naprężenia normalne określają wzory:

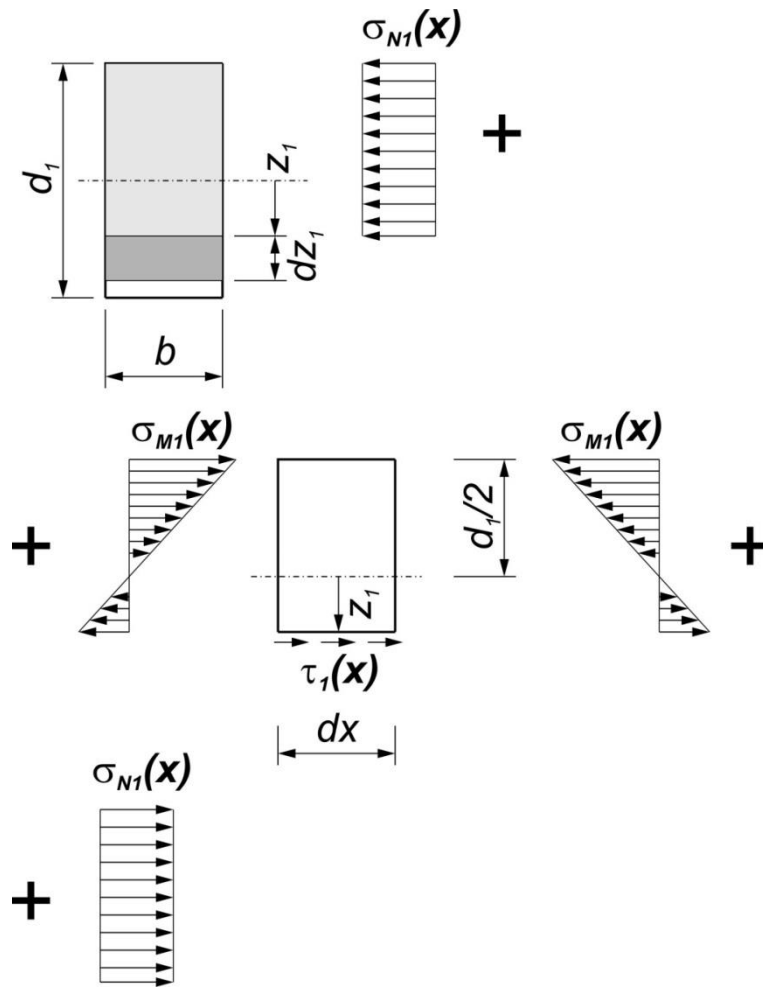
$$\sigma_1(x, z_1) = -(EI)_1 \frac{d\varphi(x)}{dx} \frac{z_1}{I_1} - \frac{\zeta(h+f)}{bf} \frac{d\psi(x)}{dx}, \quad -\frac{d_1}{2} \leq z_1 \leq \frac{d_1}{2}, \quad (4.4.8)$$

$$\sigma_2(x, z_2) = -(EI)_2 \frac{d\varphi(x)}{dx} \frac{z_2}{I_2} + \frac{\zeta(h+f)}{bf} \frac{d\psi(x)}{dx}, \quad -\frac{d_2}{2} \leq z_2 \leq \frac{d_2}{2}. \quad (4.4.9)$$

Wyznamy naprężenia styczne w okładzinach (belkach zewnętrznych).

#### **Belka górna (i=1).**

Rozpatrzona zostanie równowaga wyciętego elementu jak pokazano na rysunku (4.4.1).



Rysunek 4.4.1 Naprężenia  $\sigma_N$  od siły osiowej w pasie górnym oraz  $\sigma_M$  od zginania na odcinku dx

$$\tau_1(x, z_1) b dx - \sigma_{N_1}(x) b \left(z_1 + \frac{f}{2}\right) + \left(\sigma_{N_1}(x) + \frac{d\sigma_{N_1}(x)}{dx} dx\right) b \left(z_1 + \frac{f}{2}\right) - \int_{\bar{A}_1} \sigma_{M_1}(x, z_1) d\bar{A}_1(z_1) + \int_{\bar{A}_1} \left[\sigma_{M_1}(x, z_1) + \frac{\partial \sigma_{M_1}(x, z_1)}{\partial x} dx\right] d\bar{A}_1(z_1) = 0. \quad (4.4.10)$$

Po uproszczeniu otrzymuje się:

$$\tau_1(x, z_1) + \frac{d\sigma_{N_1}(x)}{dx} \left(z_1 + \frac{f}{2}\right) + \int_{-\frac{f}{2}}^{z_1} \frac{\partial \sigma_{M_1}(x, z_1)}{\partial x} dz_1 = 0, \quad (4.4.11)$$

Przy czym uwzględniono  $d\bar{A}_1 = b dz_1$ .

Po uwzględnieniu wzorów na naprężenia normalne:

$$\sigma_{M_1}(x, z_1) = \frac{M_1(x) z_1}{I_1}, \quad (4.4.12)$$

$$\sigma_{N_1}(x) = \frac{N_1(x)}{bf}, \quad (4.4.13)$$

uzyskano równanie:

$$\tau_1(x, z_1) = -\frac{\left(z_1 + \frac{f}{2}\right)}{bf} \frac{dN_1(x)}{dx} - \frac{1}{I_1} \frac{dM_1(x)}{dx} \int_{-\frac{f}{2}}^{z_1} z_1 dz_1. \quad (4.4.14)$$

Pamiętając, że pochodną momentu zginającego jest siła tnąca, wyrażenie na naprężenia styczne w górnej belce przyjmuje postać:

$$\tau_1(x, z_1) = -\frac{dN_1(x)}{dx} \frac{\left(\frac{f}{2} + z_1\right)}{bf} - \frac{V_1(x)\bar{S}_1(z_1)}{I_1 b} \quad (4.4.15)$$

Przy czym:  $V_1(x) = \frac{dM_1(x)}{dx}$  i  $\bar{S}_1(z_1) = b \int_{\frac{f}{2}}^{z_1} z dz = -\frac{b}{2} \left(\frac{f^2}{4} - z_1^2\right)$ , który jest momentem

statycznym zakreskowanego pola na rysunku (4.4.1) względem osi symetrii belki górnej.

Ekstremalne naprężenie styczne w danym przekroju wyznaczamy z warunku:

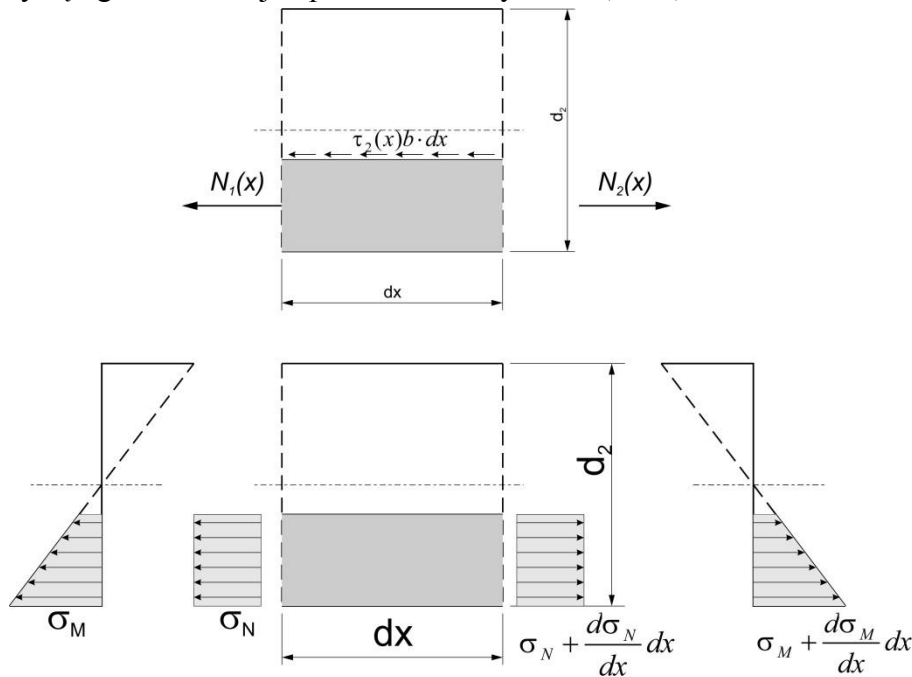
$$\frac{\partial \tau_1(x, z_1)}{\partial z_1} = -\frac{dN_1(x)}{dx} \frac{1}{bf} - \frac{V_1(x)}{I_1 b} \frac{d\bar{S}_1(z_1)}{dz_1} = 0, \quad (4.4.16)$$

$$z_{1e} = -\frac{I_1}{bf} \frac{1}{V_1(x)} \frac{dN_1(x)}{dx} = -r_1^2 \frac{1}{V_1(x)} \frac{dN_1(x)}{dx}, \quad (4.4.17)$$

gdzie:  $I_1 = r_1^2 bf$ .

**Belka dolna (i=2).**

W tym przypadku postępowanie jest podobnie jak dla belki górnej. Rozpatrzona zostanie równowaga wyciętego elementu jak pokazano na Rysunku (4.4.2).



**Rysunek 4.4.2** Naprężenia  $\sigma_N$  od siły osiowej w pasie górnym oraz  $\sigma_M$  od zginania na odcinku  $dx$

$$-\tau_2(x, z_2)b dx - \sigma_{N_2}(x)b \left(\frac{f}{2} - z_2\right) + \left(\sigma_{N_2}(x) + \frac{d\sigma_{N_2}(x)}{dx} dx\right)b \left(\frac{f}{2} - z_2\right) - \int_{\bar{A}_2} \sigma_{M_2}(x, z_1) d\bar{A}_2(z_2) + \int_{\bar{A}_2} \left[\sigma_{M_2}(x, z_1) + \frac{\partial \sigma_{M_2}(x, z_1)}{\partial x} dx\right] d\bar{A}_2(z_2) = 0. \quad (4.4.18)$$

Po uproszczeniu otrzymano:

$$-\tau_2(x, z_1) + \frac{d\sigma_{N_2}(x)}{dx} \left(\frac{f}{2} - z_2\right) + \int_{z_2}^{\frac{f}{2}} \frac{\partial \sigma_{M_2}(x, z)}{\partial x} dz = 0, \quad (4.4.19)$$

Przy czym: uwzględniono  $d\bar{A}_2 = bdz_2$ .

Po uwzględnieniu wzorów na naprężenia normalne:

$$\sigma_{M_2}(x, z_2) = \frac{M_2(x)z_2}{I_2}, \quad \sigma_{N_2}(x) = \frac{N_2(x)}{bf}, \quad (4.4.20)$$

Otrzymuje się:

$$\tau_2(x, z_2) = \frac{(\frac{f}{2} - z_2)}{bf} \frac{dN_2(x)}{dx} + \frac{1}{I_2} \frac{dM_2(x)}{dx} \int_{z_2}^{\frac{f}{2}} z_1 dz_1. \quad (4.4.21)$$

Pamiętając, że pochodną momentu zginającego jest siła tnąca, wyrażenie na naprężenia styczne w górnej belce są równe:

$$\tau_2(x, z_2) = \frac{dN_2(x)}{dx} \frac{(\frac{f}{2} - z_2)}{bf} + \frac{V_2(x)\bar{S}_2(z_2)}{I_2 b}. \quad (4.4.22)$$

Przy czym:  $V_2(x) = \frac{dM_2(x)}{dx}$  i  $\bar{S}_2(z_2) = b \int_{z_2}^{\frac{f}{2}} z dz = \frac{b}{2} (\frac{f^2}{4} - z_2^2)$  jest momentem statycznym zakresowanego pola na Rysunku (4.4.2) względem osi symetrii belki górnej.

Przypomnijmy, że moment bezwładności przekroju prostokątnego jest równy  $I_i = \frac{bf^3}{12}$ .

Ekstremalne naprężenie styczne w danym przekroju wyznaczane są z warunku:

$$\frac{\partial \tau_2(x, z_2)}{\partial z_2} = -\frac{dN_2(x)}{dx} \frac{1}{bf} + \frac{V_2(x)}{I_2 b} \frac{d\bar{S}_2(z_2)}{dz_2} = 0, \quad (4.4.23)$$

a stąd:

$$z_{2e} = -\frac{I_2}{bf} \frac{1}{V_2(x)} \frac{dN_2(x)}{dx} = -r_2^2 \frac{1}{V_2(x)} \frac{dN_2(x)}{dx}, \quad (4.4.24)$$

gdzie:  $I_2 = r_2^2 bf$ .

Związki między siłami tnącymi i przemieszczeniami w rdzeniu belki zostały określone wzorami:

$$V_{cg}(x) = (GA)_c \left[ \frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x) \right] = \tau_g(x) bh, \quad (4.4.25)$$

$$V_{cy}(x) = G_c bh \left( 1 + \frac{f}{h} \right) [\varphi(x) + \psi(x)] \quad (4.4.26)$$

Naprężenia styczne w rdzeniu określa wzór:

$$\tau_\gamma(x) = G_c \gamma(x) = G_c [\varphi(x) + \psi(x)] \left( 1 + \frac{f}{h} \right), \quad (4.4.27)$$

$$\tau_g(x) = G_c \left[ \frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x) \right]. \quad (4.4.28)$$

Naprężenia styczne między rdzeniem a nakładkami są określone wzorem:

$$\tau(x) = G_c \left[ \frac{dw(x)}{dx} + \frac{f}{h} \varphi(x) + \left( 1 + \frac{f}{h} \right) \psi(x) \right] = \quad (4.4.29)$$

$$G_c \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right) y_n + \frac{f}{h} \varphi_n \left( 1 + \frac{f}{h} \right) \psi_n \right] \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Wyprowadzone w rozdziałach 4.3 oraz 4.4 równania i zależności pozwalają wyznaczyć dla danego obciążenia zarówno stan przemieszczeń belki jak równie występujący w niej stan naprężeń.

#### 4.5. Model zig-zag

W znanych w literaturze modelach teoretycznych belki sandwiczowej pomija się wpływ sił tnących w nakładkach na przemieszczenia belki. W przypadku, gdy pomijamy ścinanie w belkach zewnętrznych (okładzinach) wówczas kąt obrotu przekroju wywołany zginaniem jest równy:

$$\varphi(x) = \frac{dw(x)}{dx} \quad (4.5.1)$$

i wzory (4.3.2) należy zastąpić znanymi zależnościami dla belki Eulera:

$$M_i(x) = -(EI)_i \frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad V_i(x) = -(EI)_i \frac{d^3w(x)}{dx^3}. \quad (4.5.2)$$

Przemieszczenia belki sandwiczowej opisane są teraz dwiema funkcjami: funkcją przemieszczeń pionowych  $w(x)$  i kąta obrotu  $\psi(x)$  określającego wzajemne przesunięcie warstw zewnętrznych. Postępując podobnie jak w punkcie (4.3) i uwzględniając związki (4.5.1), (4.5.2) otrzymuje się układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych o postaci:

$$(EI)_b \frac{d^4w(x)}{dx^4} - \frac{G_c b (h+f)^2}{h} \left[ \frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{d\psi(x)}{dx} \right] = p(x) \quad (4.5.3)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{G_c b}{\zeta h} \psi(x) - \frac{G_c b}{\zeta h} \frac{dw(x)}{dx} = 0 \quad (4.5.4)$$

Oznaczenia różnych wielkości występujących w układzie równań (4.5.3), (4.5.4) są analogiczne jak w dwóch poprzednich podrozdziałach.

Dla belki swobodnie podpartej o rozpiętości  $L$  warunki brzegowe mają postać:

$$w(0) = w(L) = 0, \quad \left. \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0, \quad (4.5.5)$$

$$\left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (4.5.6)$$

Układ równań różniczkowych (4.5.3), (4.5.4) rozwiążemy podobnie jak to przedstawiono w podrozdziale 4.3. Dla warunków brzegowych (4.5.5), (4.5.6) (belka swobodnie podparta) rozwiązanie poszukuje się w postaci dwóch szeregów:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (4.5.7)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (4.5.8)$$

Po podstawieniu (4.5.7) i (4.5.8) do układu równań różniczkowych (4.5.3), (4.5.4) otrzymuje się układ równań algebraicznych:

$$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left[ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (EJ)_b + \frac{G_c b (h+f)^2}{h} \right] y_n + \frac{G_c b (h+f)^2}{h} \left(\frac{n\pi}{L}\right) \psi_n = \frac{2p_n}{L}, \quad (4.5.9)$$

$$\frac{G_c b}{\zeta h} \left(\frac{n\pi}{L}\right) y_n + \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{G_c b}{\zeta h}\right] \psi_n = 0, \quad (4.5.10)$$

gdzie  $p_n = \int_0^L p(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$ .

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymuje się:

$$y_n = \frac{2}{L} \frac{p_n \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{G_c b}{\zeta h}\right]}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (EJ)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(EJ)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}}, \quad (4.5.11)$$

$$\psi_n = \frac{-2G_c b}{\zeta L h} \frac{p_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (EJ)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(EJ)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}}, \quad (4.5.12)$$

Stąd funkcje przemieszczeń określone są wzorami:

$$w(x) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{G_c b}{\zeta h}\right] \sin \frac{n\pi x}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (EI)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(EI)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}}, \quad (4.5.13)$$

$$\psi(x) = \frac{-2G_c b}{\zeta L h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos \frac{n\pi x}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (EI)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(EI)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}}. \quad (4.5.14)$$

W przypadku obciążenia belki siłą w skupioną  $P$  w punkcie  $x_0$  biorąc pod uwagę zależność (4.2.11) wzory (4.5.13), (4.5.14) przyjmują postać:

$$w(x) = \frac{2P}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{G_c b}{\zeta h}\right] \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (EI)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(EI)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}}, \quad (4.5.15)$$

$$\psi(x) = \frac{-2PG_c b}{\zeta L h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n\pi}{L}\right) \sin \frac{n\pi x_0}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (EI)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(EI)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}}. \quad (4.5.16)$$

Podobnie w przypadku obciążenia belki na całej długości odpowiednie rozwiązania mają postać:

$$w(x) = 2q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{G_c b}{\zeta d_c}\right] [1 - (-1)^n] \sin \frac{n\pi x}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^5 \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (EI)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(EI)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}}, \quad (4.5.17)$$

$$\psi(x) = \frac{-2qG_c b}{\zeta L h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n] \cos \frac{n\pi x}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (EI)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(EI)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}}. \quad (4.5.18)$$

Naprężenia normalne w nakładkach wyznacza się pamiętając, że momenty zginające i siły osiowe są odpowiednio równe:



$$M_i(x) = -(EI)_i \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad N(x) = \zeta(h+f) \frac{d\psi(x)}{dx}. \quad (4.5.19)$$

Powróćmy do układu równań (4.5.3), (4.5.4). Jak wynika z rysunku (4.3.7) związek między kątem obrotu  $\psi(x)$  a przesunięciami nakładek wzdłuż osi belki ma postać:

$$u_2(x) - u_1(x) = u(x) = (h+f)\psi(x), \quad (4.5.20)$$

i zastępując kąt obrotu różnicą przesunięć nakładek wzdłuż osi pręta układ równań (4.5.3) oraz (4.5.4) przyjmuje postać:

$$(EI)_b \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \frac{G_c b (h+f)^2}{h} \left[ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{1}{h+f} \frac{du(x)}{dx} \right] = p(x), \quad (4.5.21)$$

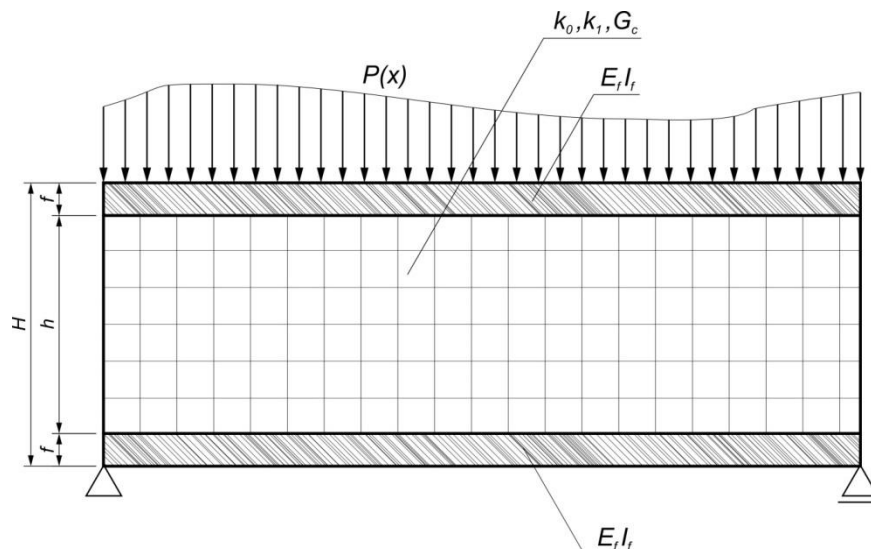
$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \frac{G_c b}{\zeta h} u(x) - \frac{G_c b (h+f)}{\zeta h} \frac{dw(x)}{dx} = 0. \quad (4.5.22)$$

Dla belki swobodnie podpartej warunki brzegowe zastępują warunki brzegowe podane poniżej:

$$\left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (4.5.23)$$

#### 4.6. Układ dwóch sprzężonych belek

Jak wynika z przeprowadzonych badań doświadczalnych ugięcia (przemieszczenia pionowe) nakładki górnej i dolnej są różne. Wynika stąd, że rdzeń belki sandwiczowej ulega skróceniu w kierunku pionowym. Przedstawione wcześniej modele teoretyczne nie uwzględniają tego zjawiska. Potraktujmy każdą nakładkę jako oddzielną belkę. Belki te połączone są warstwą sprężystą (rdzeniem). Łączącą belki rdzeń traktujemy jako dwuparametrowe podłoże Pasternaka. Rozpatrzmy sytuację, gdy obie nakładki są belkami swobodnie podpartymi (rysunek (4.6.1)) oraz gdy górna nakładka  $w_1(x)$  jest belką spoczywającą na dwuparametrowym podłożu (o swobodnych końcach) a dolna nakładka  $w_2(x)$  jest belką swobodnie podpartą (rysunek (4.6.2)). Stan przemieszczeń obu belek opisuje sprzężony układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych:



**Rysunek 4.6.1** Schemat belki trójwarstwowej traktowanej jako układ dwóch sprzężonych belek. Podparty jest pas dolny podczas gdy do pasa górnego przykładane jest obciążenie

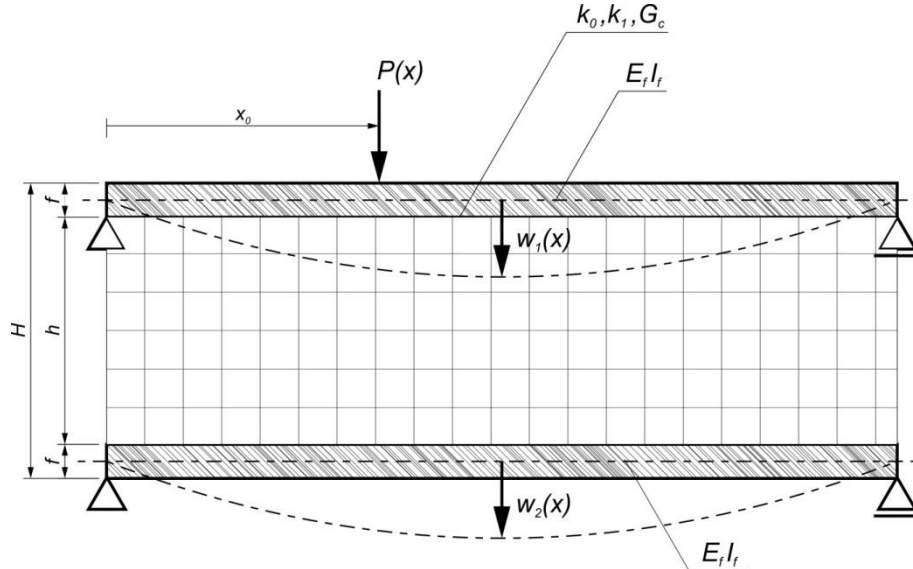
$$EI \frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} - k_1 \left[ \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} - \frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} \right] + k_0 [w_1(x) - w_2(x)] = p(x),$$

$$EI \frac{d^4 w_2(x)}{dx^4} - k_1 \left[ \frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} - \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \right] + k_0 [w_2(x) - w_1(x)] = 0,$$
(4.6.1)

gdzie:  $EI$  jest sztywnością nakładki na zginanie,  $E$  jest modułem Younga,  $I$  jest momentem bezwładności przekroju nakładki,  $k_0$  współczynnikiem sprężystości łączącej warstwy (jak w podłożu Winklera),  $k_1$  jest sztywnością na ścinanie łączącej warstwy.

Warunki brzegowe dla belek mają postać:

- gdy obie belki, górna i dolna, są swobodnie podparte (rysunek (4.6.1)), wówczas:

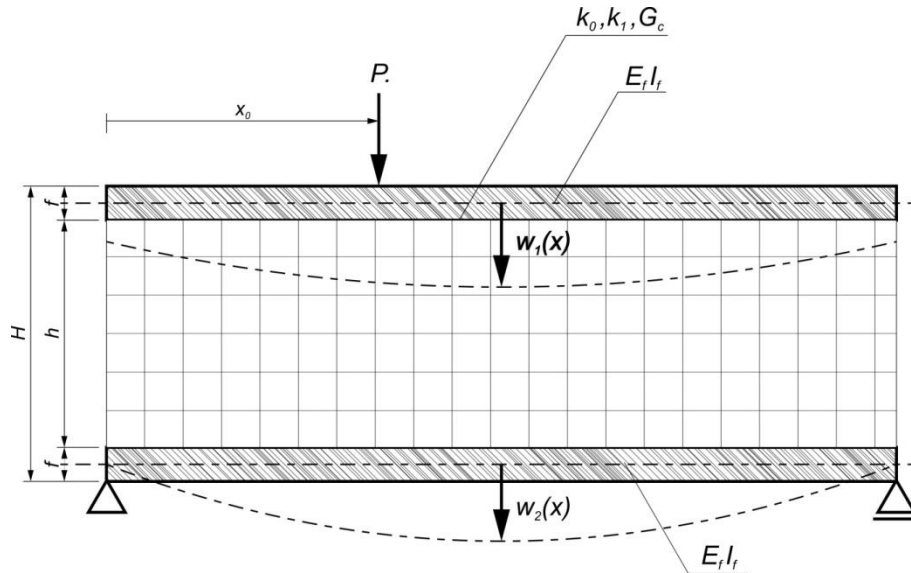


**Rysunek 4.6.2** Przemieszczenia osi okładzin belki trójwarstwowej traktowanej jako układ dwóch sprzężonych belek. Przypadek, w którym podparte są jednocześnie pas dolny i górny a obciążenie przykładane jest do pasa górnego

$$w_1(0) = w_1(L) = 0, \quad \left. \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0,$$

$$w_2(0) = w_2(L) = 0, \quad \left. \frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0.$$
(4.6.2)

- belka górna jest swobodna na obu końcach a dolna swobodnie podparta:



**Rysunek 4.6.3** Przesunięcia osi okładzin belki trójwarstwowej traktowanej jako układ dwóch sprzężonych belek. Przypadek, w którym podparty jest tylko pas dolny a obciążenie przykładane jest do pasa górnego

$$\left. \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{d^3 w_1(x)}{dx^3} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^3 w_1(x)}{dx^3} \right|_{x=L} = 0, \quad (4.6.3)$$

$$w_2(0) = w_2(L) = 0, \quad \left. \frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0.$$

Warunki brzegowe dla górnej belki wynikają z faktu, że zarówno moment zginający jak i siła tnąca na jej końcach są równe zero a dla dolnej belki dolnej przesunięcia i momenty zginające na końcach są równe zero.

Stałe warstwy łączącej (rdzenia) obie belki (nakładki) wynoszą:

$$k_0 = \frac{E_c b}{h}, \quad k_1 = 0.5 G_c h b \quad (4.6.4)$$

gdzie:  $E_c$  i  $G_c$  są odpowiednio modułem Younga i Kirchhoffa rdzenia belki natomiast  $h$  oraz  $b$  wysokością i szerokością rdzenia.

Rozpatrzmy stan przesunięcia układu belek dla warunków brzegowych (4.6.2) (rysunek (4.6.1)). Wprowadzono nowe funkcje określone zależnościami:

$$w_I(x) = w_1(x) + w_2(x), \quad w_{II}(x) = w_1(x) - w_2(x). \quad (4.6.5)$$

Z układu równań (4.6.1) otrzymuje się:

$$EI \frac{d^4 w_I(x)}{dx^4} = p(x), \quad (4.6.6)$$

$$EI \frac{d^4 w_{II}(x)}{dx^4} - k_1 \frac{d^2 w_{II}(x)}{dx^2} + k_0 w_{II}(x) = p(x).$$

Nowe funkcje spełniają warunki brzegowe (4.6.2).

Wyznaczono rozwiązania równań (4.6.6) gdy układ belek obciążony jest siłą skupioną  $P$  w punkcie  $x_0$ . Wówczas mamy:

$$p(x) = P \delta(x - x_0) \quad (4.6.7)$$

Całkując równanie (4.6.6), uwzględniając (4.6.7) i warunki brzegowe (4.6.2), otrzymuje się (równanie (4.2.17)):

$$w_I(x) = \frac{P}{6EI} \left\{ L^2 x \left[ 1 - \frac{x_0}{L} \right] - \left( 1 - \frac{x_0}{L} \right)^3 \right\} - x^3 \left( 1 - \frac{x_0}{L} \right) + (x - x_0)^3 H(x - x_0), \quad (4.6.8)$$

gdzie: symbol  $H(x)$  oznacza funkcję jednostkową Heaviside'a.

Drugie równanie (4.6.6) po uwzględnieniu obciążenia (4.6.7) przedstawione będzie w postaci:

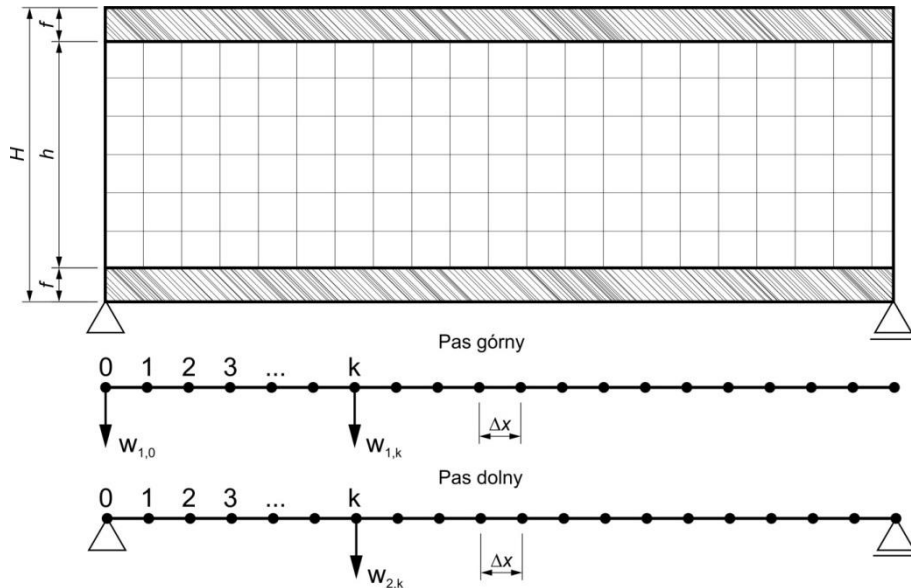
$$\frac{d^4 w_{II}(\xi)}{d\xi^4} - \alpha^2 \frac{d^2 w_{II}(\xi)}{d\xi^2} + \beta w_{II}(\xi) = \frac{PL^3}{EI} \delta(\xi - \xi_0), \quad (4.6.9)$$

gdzie:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \alpha^2 = \frac{k_1 L^2}{EI}, \quad \beta = \frac{k_0 L^4}{EI}.$$

Rozwiązanie analityczne równania (4.6.9) ma różną postać zależną od wzajemnych relacji parametrów  $\alpha$  i  $\beta$ .

Układ równań rozwiążemy metodą różnic skończonych. Każdą belkę dzielimy na  $n$  części. Punkt początkowy każdej belki ma wskaźnik 0 a końcowy  $n$ . Poniżej podane są formuły różnicowe dla centralnych różnic skończonych.



Rysunek 4.6.4 Metodyka dyskretyzacji okładzin belki trójwarstwowej

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w(x_k)}{dx^2} &= \frac{1}{(\Delta x)^2} (w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1}), \\ \frac{d^3 w(x_k)}{dx^3} &= \frac{1}{2(\Delta x)^3} (-w_{k-2} + 2w_{k-1} - 2w_{k+1} + w_{k+2}), \\ \frac{d^4 w(x_k)}{dx^4} &= \frac{1}{(\Delta x)^4} (w_{k-2} - 4w_{k-1} + 6w_k - 4w_{k+1} + w_{k+2}), \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

Warunki brzegowe dla podpory przegubowej z lewej strony pręta mają postać:

$$w_0 = 0, \quad w_{-1} = -w_1,$$

Warunki brzegowe dla podpory przegubowej z prawej strony pręta, odpowiednio:

$$w_n = 0, \quad w_{n+1} = -w_{n-1}.$$

Warunki brzegowe dla swobodnego końca z lewej strony pręta mają postać:

$$w_{-1} = 2w_0 - w_1, \quad w_{-2} = 4w_0 - 4w_1 + w_2,$$

A dla prawego swobodnego końca belki mamy:

$$w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1}, \quad w_{n+2} = 4w_n - 4w_{n-1} + w_{n-2}.$$

Przemieszczenia górnej belki oznaczamy  $w_{1k}$  a dolnej  $w_{2k}$ , przy czym  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  dla belki górnej i  $k = 1, 2, \dots, n-1$  dla belki dolnej. Powstaje układ  $2n$  równań. W równaniach (4.6.3)

$$\text{oznaczono } \Delta x = \frac{L}{n}.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\alpha = \frac{k_1}{EI} (\Delta x)^2, \quad \beta = \frac{k_0}{EI} (\Delta x)^4.$$

Dla belki górnej układ równań ma następującą budowę:

$$k=0 \quad (2 + \beta)w_{1,0} - 4w_{1,1} + 2w_{1,2} = \frac{(\Delta x)^4}{EI} p_{10},$$

$$k=1 \quad -(2 + \alpha)w_{1,0} + (5 + 2\alpha + \beta)w_{1,1} - (4 + \alpha)w_{1,2} + w_{1,3} - (2\alpha + \beta)w_{2,1} + \alpha w_{2,2} = \frac{(\Delta x)^4}{EI} p_{11},$$

$$k=2, 3, \dots, n-2$$

$$w_{1,k-2} - (4 + \alpha)w_{1,k-1} + (6 + 2\alpha + \beta)w_{1,k} - (4 + \alpha)w_{1,k+1} + w_{1,k+2} + \alpha w_{2,k-1} - (2\alpha + \beta)w_{2,k} + \alpha w_{2,k+1} = \frac{(\Delta x)^4}{EI} p_{1k},$$

$$k=n-1$$

$$w_{1,n-3} - (4 + \alpha)w_{1,n-2} + (5 + 2\alpha + \beta)w_{1,n-1} - (2 + \alpha)w_{1,n} + \alpha w_{2,n-2} - (2\alpha + \beta)w_{2,n-1} = \frac{(\Delta x)^4}{EI} p_{1,n-1}$$

$$k=n \quad 2w_{1,n-2} - 4w_{1,n-1} + (2 + \beta)w_{1,n} = \frac{(\Delta x)^4}{EI} p_{1n}$$

Dla belki dolnej układ równań ma następującą budowę:

$$k=1 \quad (5 + 2\alpha + \beta)w_{2,1} - (4 + \alpha)w_{2,2} + w_{2,3} + \alpha w_{1,0} - (2\alpha + \beta)w_{1,1} + \alpha w_{1,2} = 0,$$

$$k=2 \quad -(4 + \alpha)w_{2,1} + (6 + 2\alpha + \beta)w_{2,2} - (4 + \alpha)w_{2,3} + w_{2,4} + \alpha w_{1,1} - (2\alpha + \beta)w_{1,2} + \alpha w_{1,3} = 0,$$

$$k=3, 4, \dots, n-3$$

$$w_{2,k-2} - (4 + \alpha)w_{2,k-1} + (6 + 2\alpha + \beta)w_{2,k} - (4 + \alpha)w_{2,k+1} + w_{2,k+2} + \alpha w_{1,k-1} - (2\alpha + \beta)w_{1,k} + \alpha w_{1,k+1} = 0,$$

$$k=n-2$$

$$w_{2,n-4} - (4 + \alpha)w_{2,n-3} + (6 + 2\alpha + \beta)w_{2,n-2} - (4 + \alpha)w_{2,n-1} + \alpha w_{1,n-3} - (2\alpha + \beta)w_{1,n-2} + \alpha w_{1,n-1} = 0,$$

$$k=n-1 \quad w_{2,n-3} - (4 + \alpha)w_{2,n-2} + (5 + 2\alpha + \beta)w_{2,n-1} + \alpha w_{1,n-2} - (2\alpha + \beta)w_{1,n-1} + \alpha w_{1,n} = 0,$$

Obciążenia w równaniach są równe

$$p_{10} = \int_0^{\Delta x/2} p(x) dx,$$

$$p_{1n} = \int_{L-\Delta x/2}^L p(x) dx,$$

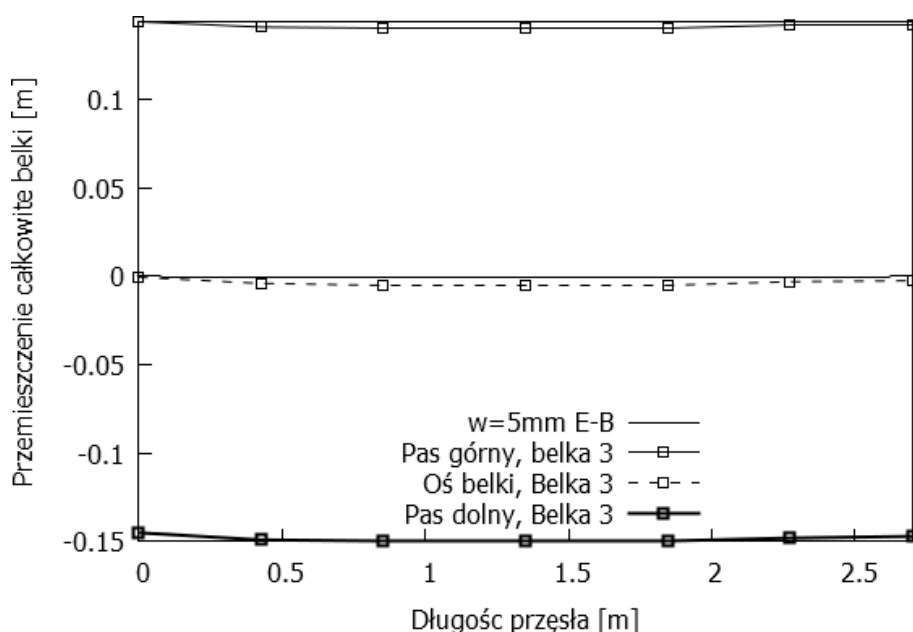
$$p_{1k} = \int_{L-\Delta x/2}^{L+\Delta x/2} p(x) dx,$$

dla:  $k=1, 2, \dots, n-1$

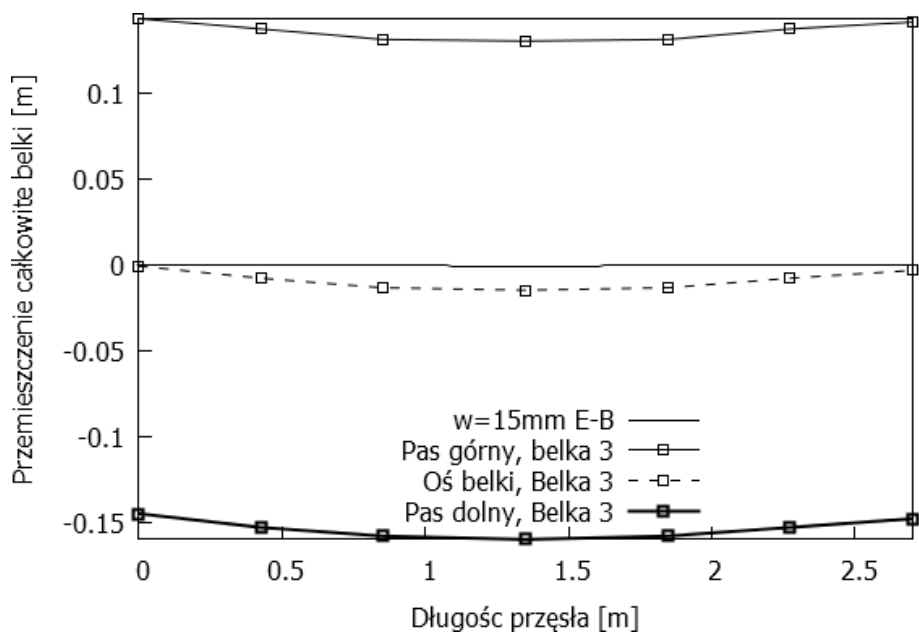
## 5. Analiza numeryczna opracowanych modeli teoretycznych

### 5.1. Analiza numeryczna modelu Eulera-Bernoulliego

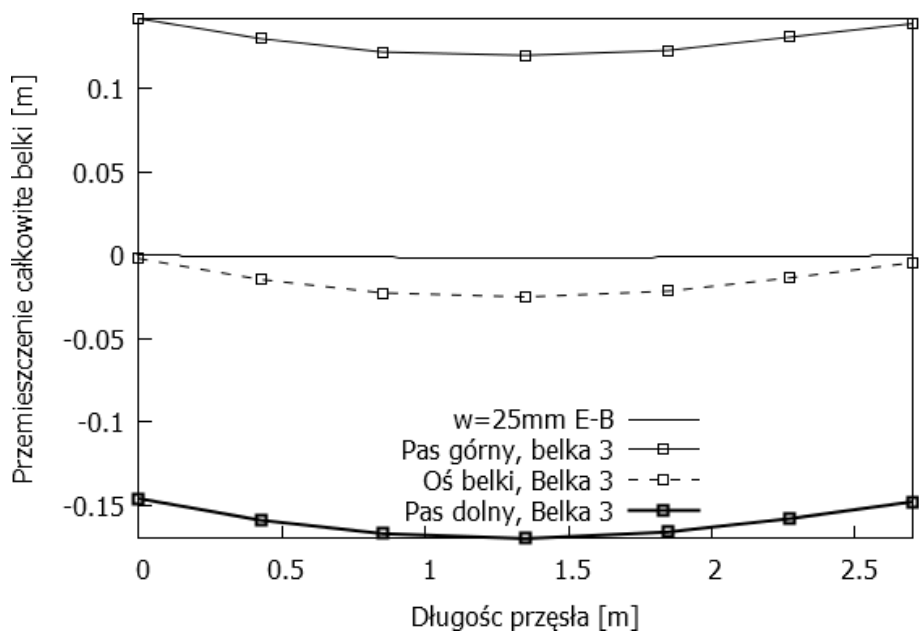
Podstawową formą porównania modelu belki trójwarstwowej opisanej równaniami Eulera-Bernoulliego z rezultatami otrzymanymi w trakcie badań doświadczalnych wydaje się być zestawienie przemieszczeń. Poniżej zaprezentowano przemieszczenia osi i skrajnych krawędzi okładzin zmierzone podczas badania belki nr 3 oraz przemieszczenia samej osi belki według modelu przedstawionego dokładniej w rozdziale 4.2. Kolejne rysunki (5.1.1) - (5.1.8) prezentują wyniki dla obciążeń, odpowiadającym kolejnym ugięciom dolnej okładziny, mierzonym w trakcie badań doświadczalnych.



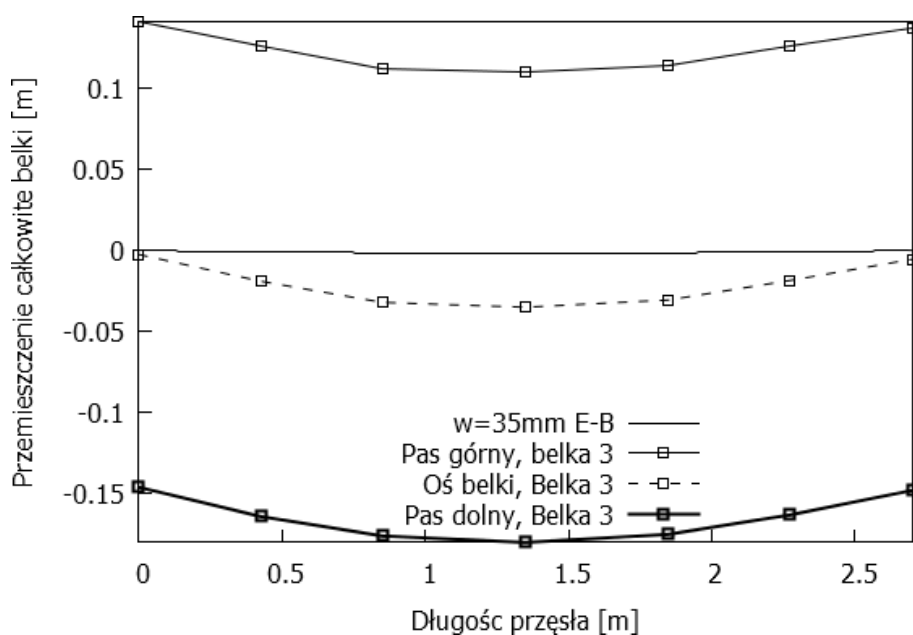
**Rysunek 5.1.1** Przemieszczenie osi (linia przerywana) oraz okładziny górnej (linia ciągła z kwadratami) i dolnej (linia ciągła szersza z kwadratami) belki trójwarstwowej numer 3 w porównaniu do przemieszczenia zmierzonego w trakcie badań laboratoryjnych dla 5 mm ugięcia okładziny dolnej (linia ciągła)



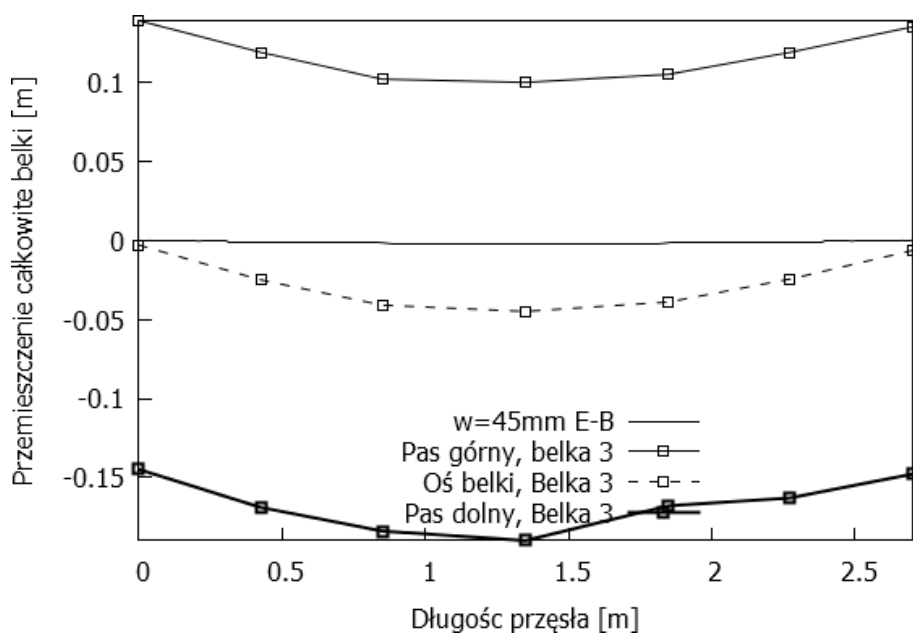
**Rysunek 5.1.2** Przemieszczenie osi (linia przerywana) oraz okładziny górnej (linia ciągła z kwadratami) i dolnej (linia ciągła szersza z kwadratami) belki trójwarstwowej numer 3 w porównaniu do przemieszczenia zmierzonego w trakcie badań laboratoryjnych dla 15 mm ugięcia okładziny dolnej (linia ciągła)



**Rysunek 5.1.3** Przemieszczenie osi (linia przerywana) oraz okładziny górnej (linia ciągła z kwadratami) i dolnej (linia ciągła szersza z kwadratami) belki trójwarstwowej numer 3 w porównaniu do przemieszczenia zmierzonego w trakcie badań laboratoryjnych dla 25 mm ugięcia okładziny dolnej (linia ciągła)

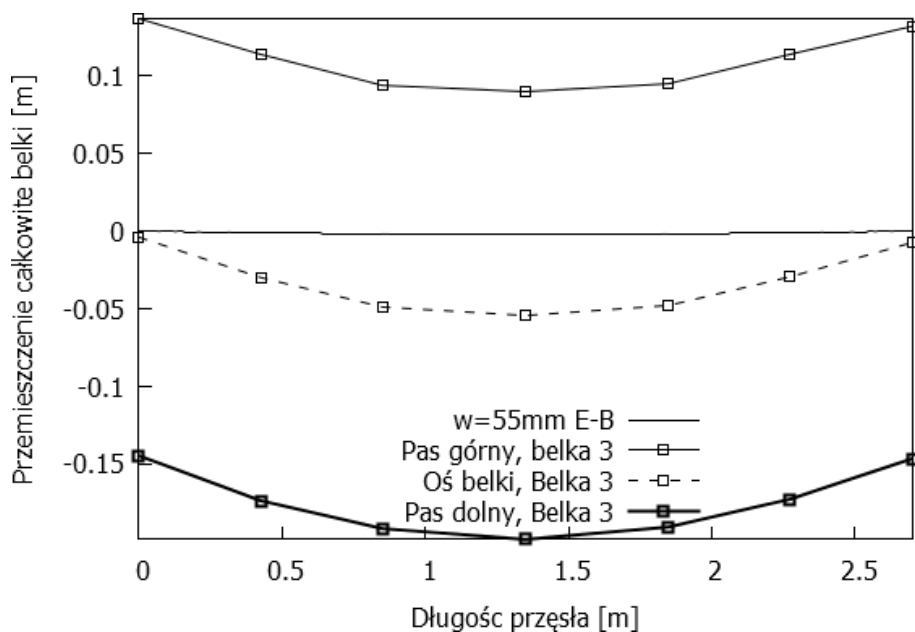


**Rysunek 5.1.4** Przeszczenie osi (linia przerywana) oraz okładziny górnej (linia ciągła z kwadratami) i dolnej (linia ciągła szersza z kwadratami) belki trójwarstwowej numer 3 w porównaniu do przeszczenia zmierzzonego w trakcie badań laboratoryjnych dla 35 mm ugięcia okładziny dolnej (linia ciągła)

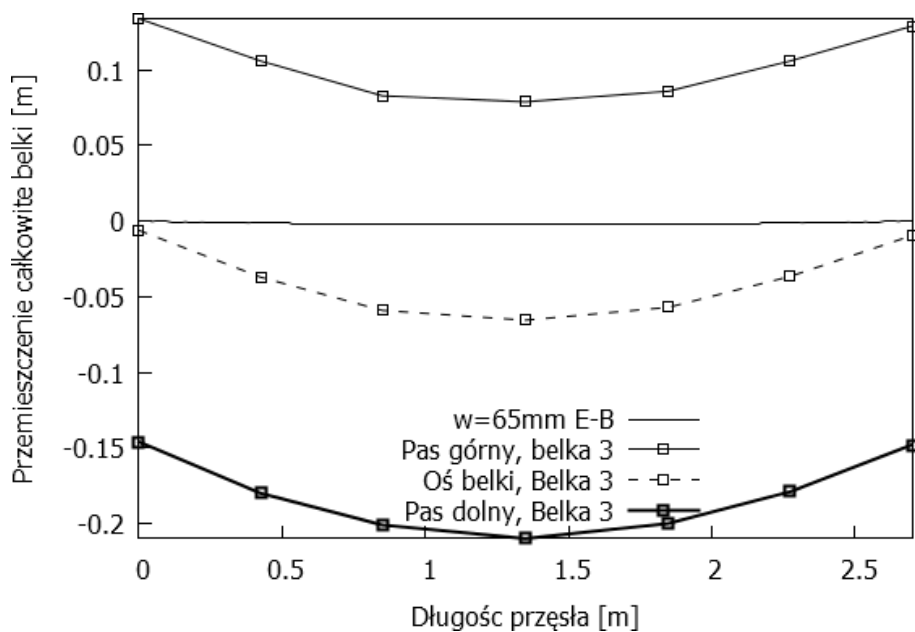


**Rysunek 5.1.5** Przeszczenie osi (linia przerywana) oraz okładziny górnej (linia ciągła z kwadratami) i dolnej (linia ciągła szersza z kwadratami) belki trójwarstwowej numer 3 w porównaniu do przeszczenia zmierzzonego w trakcie badań laboratoryjnych dla 45 mm ugięcia okładziny dolnej (linia ciągła)

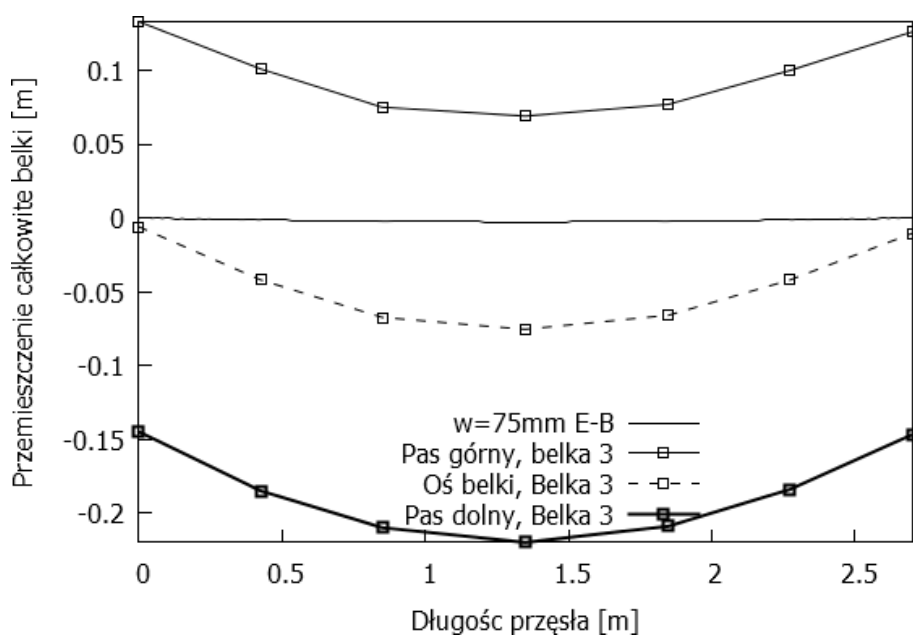




**Rysunek 5.1.6** Przeszyczenie osi (linia przerywana) oraz okładziny górnej (linia ciągła z kwadratami) i dolnej (linia ciągła szersza z kwadratami) belki trójwarstwowej numer 3 w porównaniu do przeszczenia zmierzonoego w trakcie badań laboratoryjnych dla 55 mm ugięcia okładziny dolnej (linia ciągła)



**Rysunek 5.1.7** Przeszyczenie osi (linia przerywana) oraz okładziny górnej (linia ciągła z kwadratami) i dolnej (linia ciągła szersza z kwadratami) belki trójwarstwowej numer 3 w porównaniu do przeszczenia zmierzonoego w trakcie badań laboratoryjnych dla 65 mm ugięcia okładziny dolnej (linia ciągła)

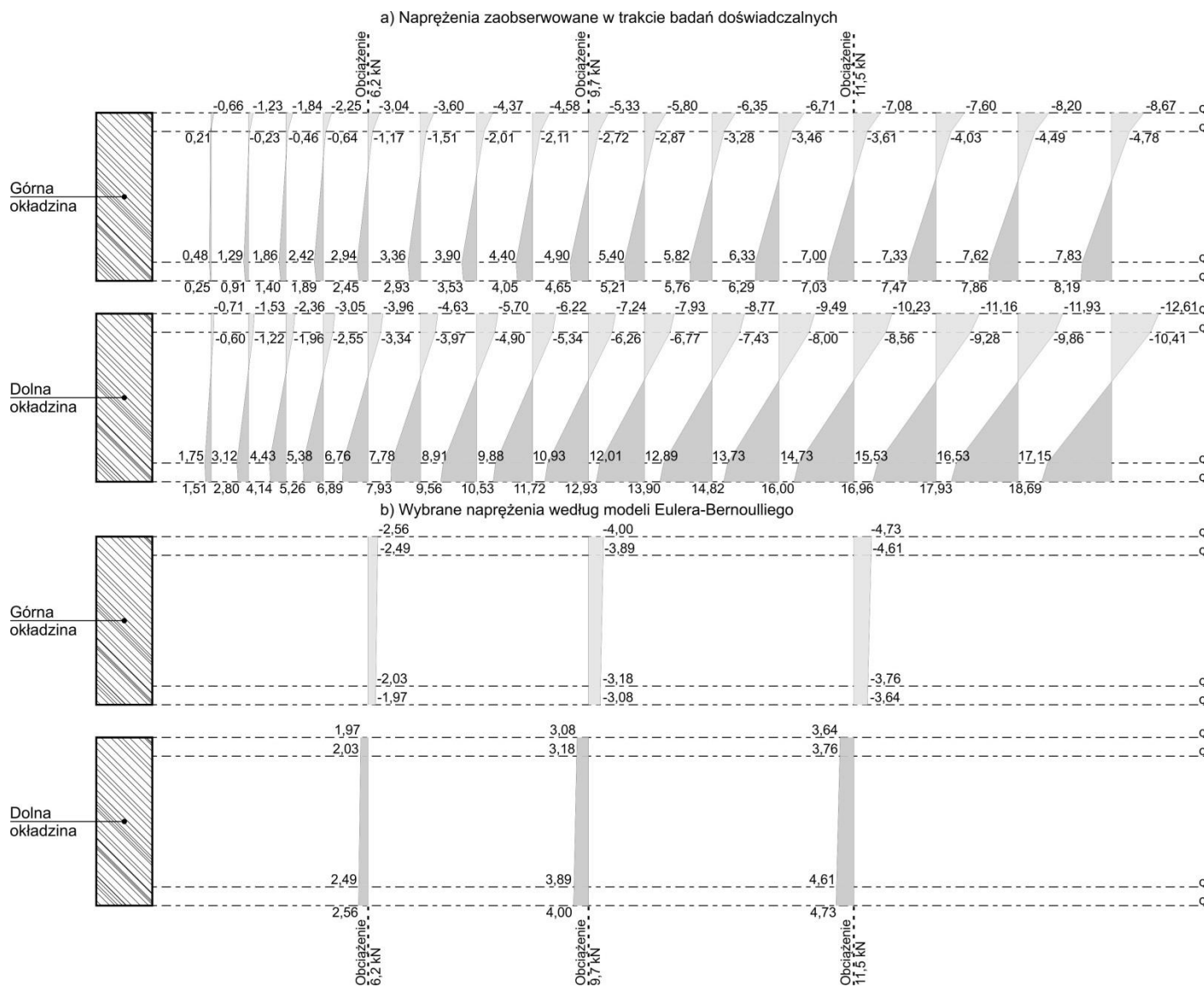


**Rysunek 5.1.8** Przeszczenie osi (linia przerywana) oraz okładziny górnej (linia ciągła z kwadratami) i dolnej (linia ciągła szersza z kwadratami) belki trójwarstwowej numer 3 w porównaniu do przeszczenia zmierzzonego w trakcie badań laboratoryjnych dla 75 mm ugięcia okładziny dolnej (linia ciągła)

Przeгляд powyższych wykresów pozwala jednoznacznie stwierdzić, że model Eulera Bernoulliego nie opisuje prawidłowo stanu przeszczenia belek trójwarstwowych.

Także wartości naprężeń normalnych w drewnianych okładzinach, wyznaczone na podstawie równań z rozdziału 4.2, nie odpowiadają wartościom obliczonym na podstawie odkształceń tensometrów. Różnice te zostały zaprezentowane na rysunku (5.1.9). Wykres znajdujący się w części górnej rysunku przedstawia naprężenia w badanej belce numer 3 zaś wykres niżej przedstawia naprężenia obliczone na podstawie rozwiązań teoretycznych. Oprócz istotnych różnic w wartościach naprężeń dla każdego z trzech pośrednich obciążeń zmierzonych w trakcie pomiarów uwagę zwracają także znaki naprężeń. Z rysunku (5.1.9) wynika, że w trakcie badań doświadczalnych, pod wpływem obciążenia, w obu drewnianych okładzinach pojawiały się naprężenia przeciwnych znaków. Oznacza to, że jednocześnie i w górnej i dolnej okładzinie pojawia się strefa ściskana i rozciągana. Na podstawie rysunku (5.1.9) można także wnioskować, że wartości naprężeń w skrajnych zewnętrznych włóknach pasa dolnego osiągają większe wartości w porównaniu z naprężeniami w pasie górnym. Różnice te rosną wraz ze wzrostem przyłożonego obciążenia na trawers.

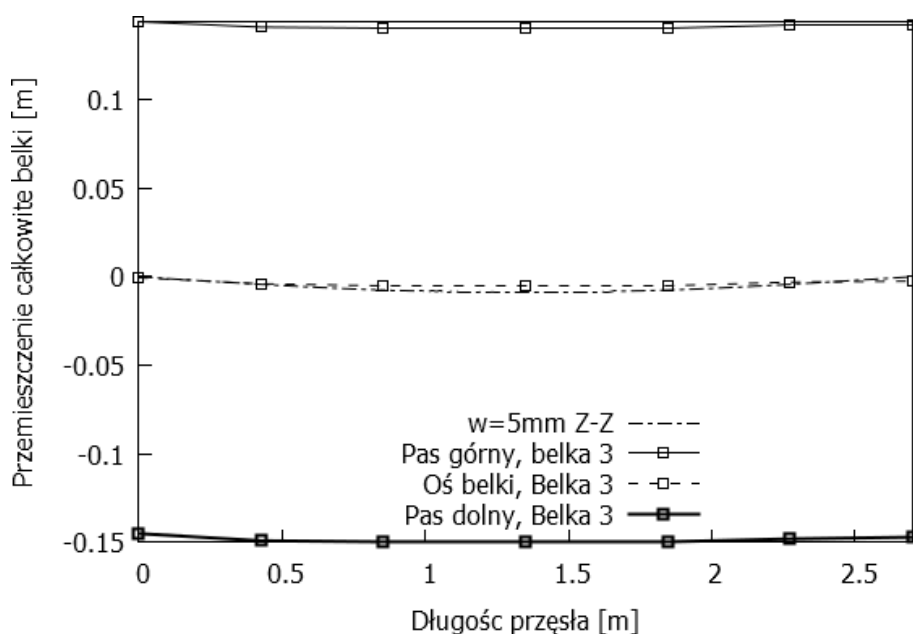
Wykres naprężeń dla modelu Eulera-Bernoulliego jest odmienny. W obu okładzinach pojawiają się naprężenia równe co do wartości, lecz o przeciwnych znakach. Przekłada się to na nierównomierne ściskanie pasa górnego oraz nierównomierne rozciąganie pasa dolnego (rysunek (5.1.9)).



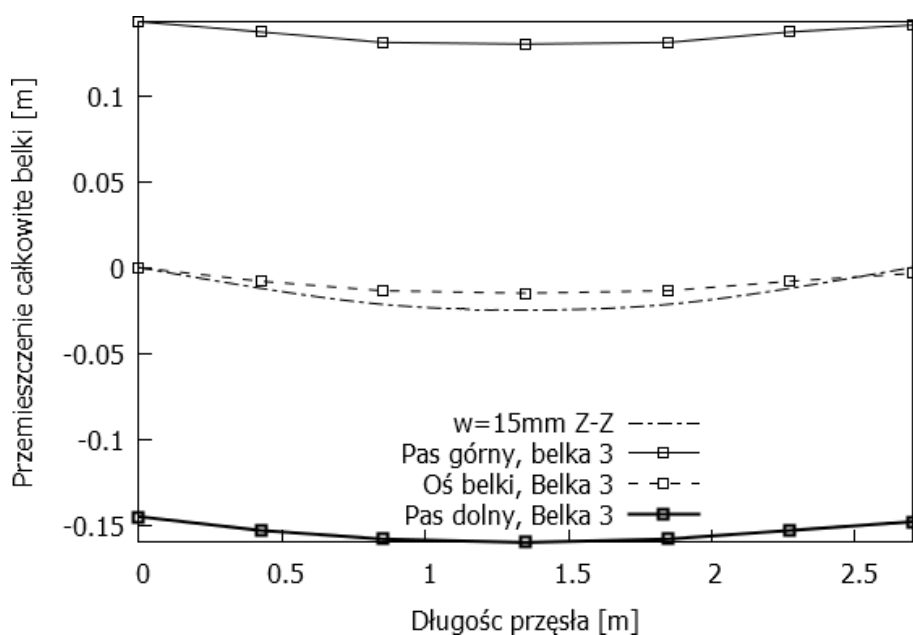
Rysunek 5.1.9 Porównanie naprężeń w okładzinach: a) na podstawie badań doświadczalnych oraz b) modelu Eulera-Bernoulliego

## 5.2. Analiza numeryczna modelu Zig-Zag

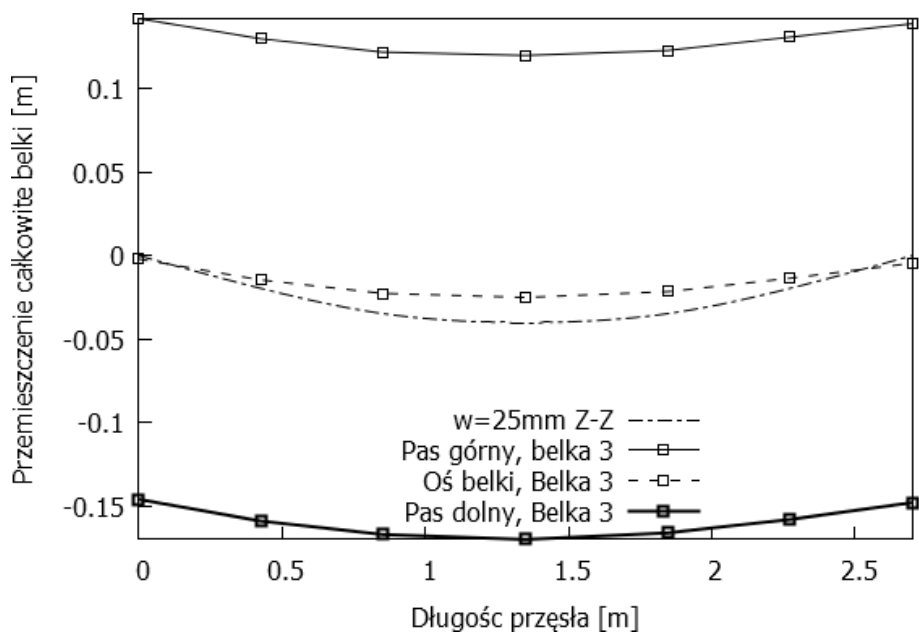
Podobnie jak w przypadku modelu Eulera-Bernoulliego także rezultaty obliczeń przemieszczeń i odkształceń otrzymane z równań według modelu Zig-Zag skonfrontowano z rezultatami otrzymanymi w trakcie doświadczeń laboratoryjnych. Na rysunkach (5.2.1) – (5.2.8) zestawiono przemieszczenia osi belki według założeń modelu Zig-Zag z przemieszczeniami okładziny górnej, dolnej oraz osi belki zmierzonymi w laboratorium podczas obciążania belki numer 3.



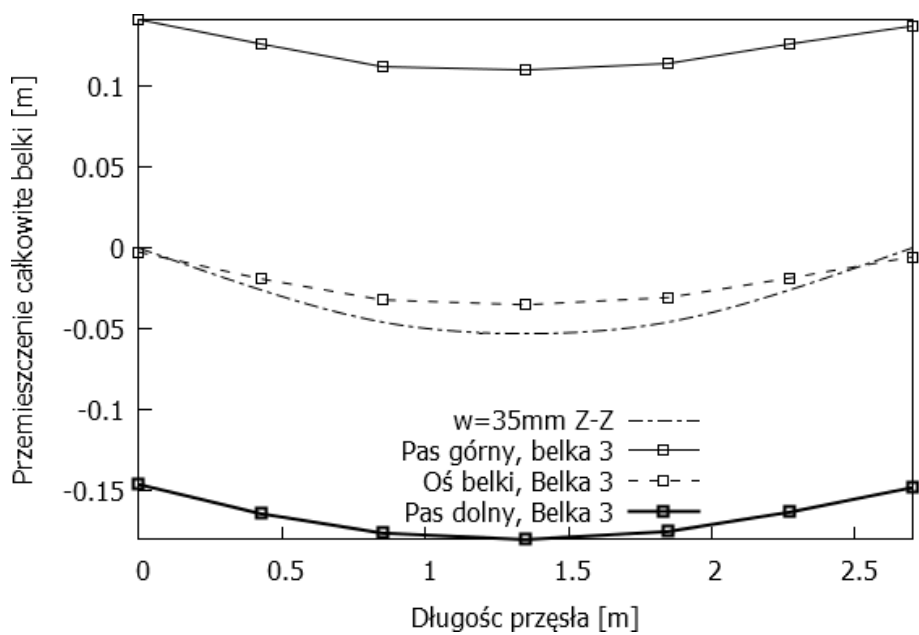
**Rysunek 5.2.1** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla modelu Zig-Zag (Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 5 mm przemieszczenia dolnej okładziny



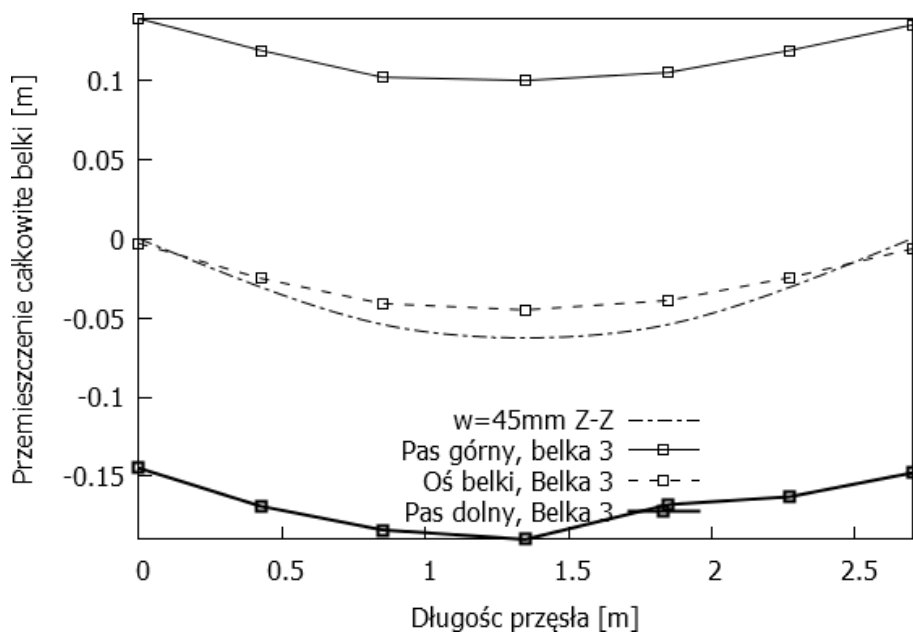
**Rysunek 5.2.2** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla modelu Zig-Zag (Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 15 mm przemieszczenia dolnej okładziny



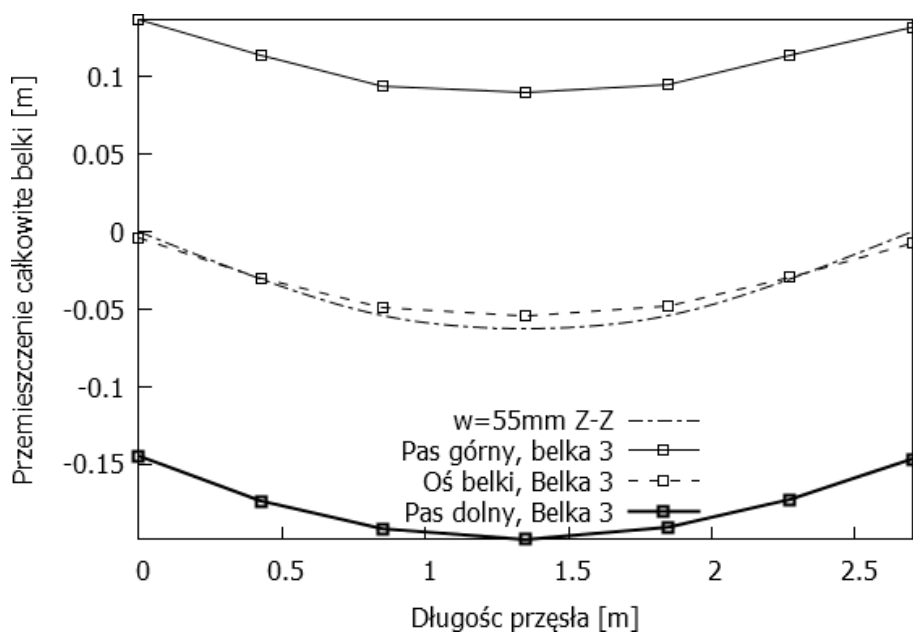
**Rysunek 5.2.3** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla modelu Zig-Zag (Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 25 mm przemieszczenie dolnej okładziny



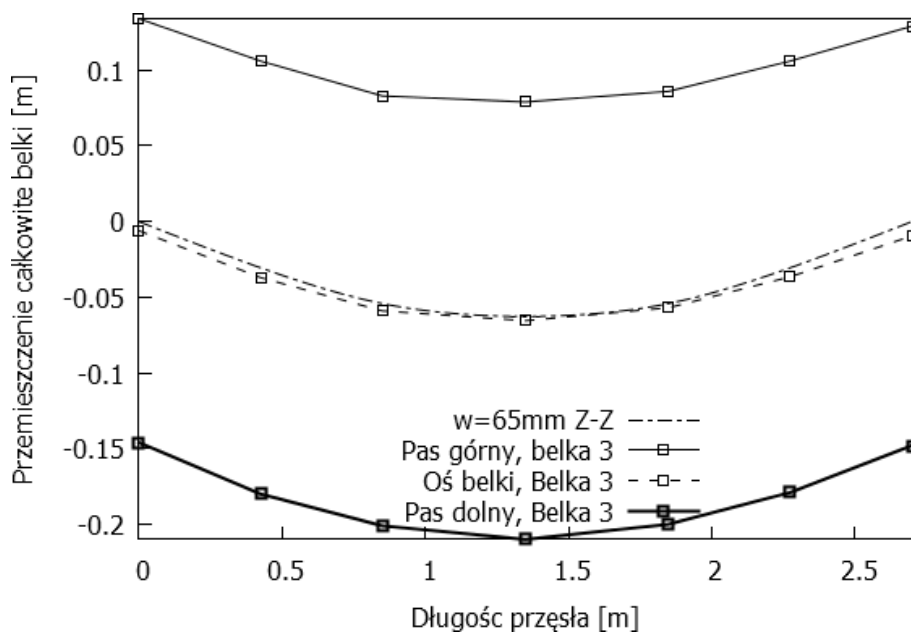
**Rysunek 5.2.4** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla modelu Zig-Zag (Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 35 mm przemieszczenie dolnej okładziny



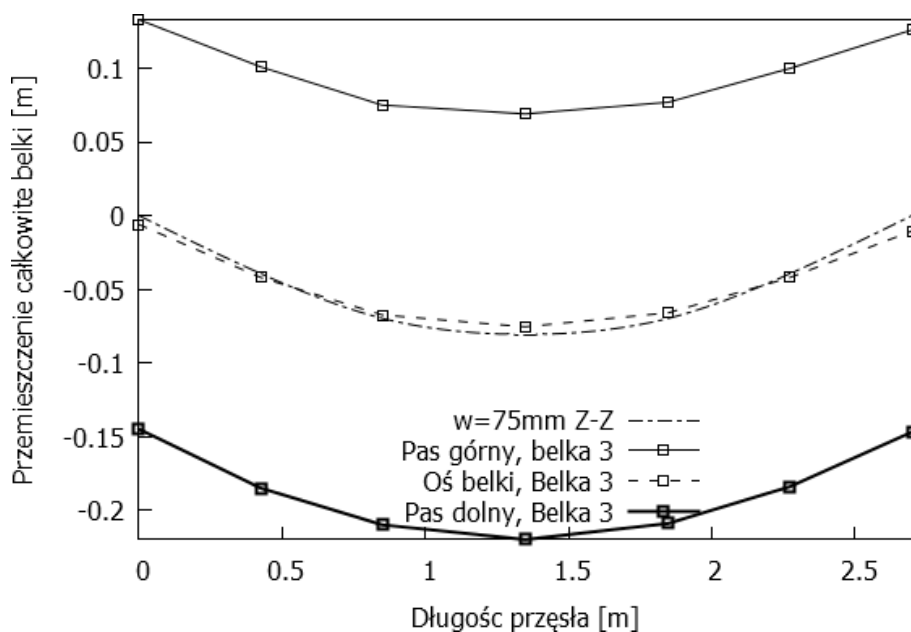
**Rysunek 5.2.5** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla modelu Zig-Zag (Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 45 mm przemieszczenie dolnej okładziny



**Rysunek 5.2.6** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla modelu Zig-Zag (Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 55 mm przemieszczenie dolnej okładziny



**Rysunek 5.2.7** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla modelu Zig-Zag (Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 65 mm przemieszczenie dolnej okładziny

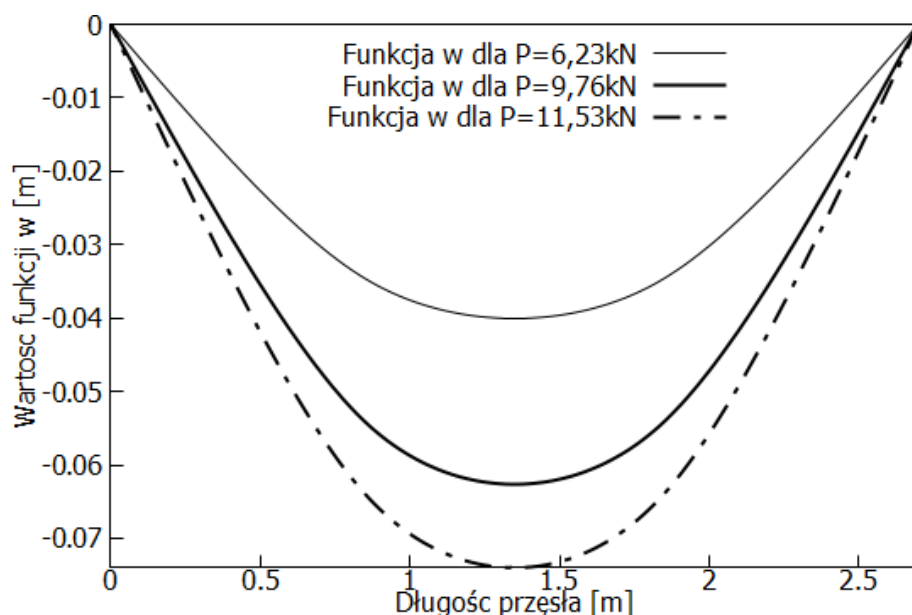


**Rysunek 5.2.8** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla modelu Zig-Zag (Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 75 mm przemieszczenie dolnej okładziny

Z porównania przemieszczeń osi teoretycznej belki trójwarstwowej z osią belki poddanej badaniom doświadczalnym wynika, że ich wartości prezentują ten sam rząd wielkości. Różnią się jednak co do wartości. Największe różnice między przemieszczeniami osi belek zaobserwowano dla przemieszczenia pasa dolnego  $w \approx 45 \text{ mm}$ . Przy mniejszych i większych przemieszczeniach różnice te były wyraźnie mniejsze. Obserwacje porównawcze pokazują wpływ faktu, że w modelu teoretycznym belka podparta jest na obu końcach swojej osi. Z tego też powodu w przekrojach podporowych nie doznaje ona przemieszczeń pionowych. W przypadku belki poddanej badaniom doświadczalnym jej oś jest usytuowana w połowie

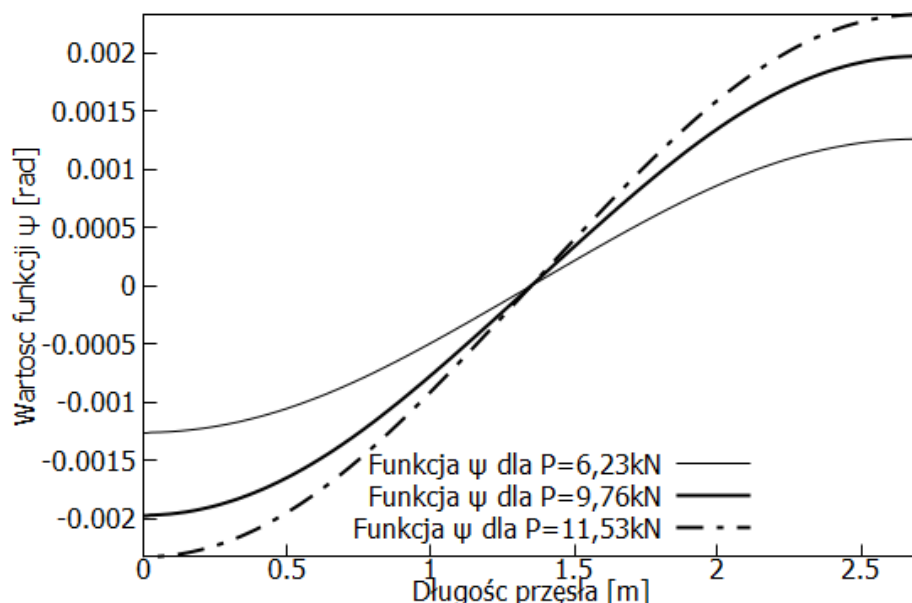
wysokości przekroju i w związku z tym, że obserwowane jest ściskanie rdzenia, powyższe wykresy pokazują pionowe przemieszczenia osi elementu także w przekrojach podporowych.

Na rysunku (5.2.9) zaprezentowano wykres funkcji  $w(x)$ , opisującej przemieszczenie pionowe osi belki trójwarstwowej, dla trzech wartości obciążeń sił skupionych.



**Rysunek 5.2.9** Przemieszczenia pionowe belki trójwarstwowej dla trzech wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi: ~6,23 kN, ~9,76 kN oraz ~11,53 kN

Na rysunku (5.2.10) przedstawiono wykresy funkcji  $\psi(x)$ , opisującej kąt przemieszczenia poziomego osi okładzin belki trójwarstwowej, dla trzech wartości obciążeń sił skupionych.

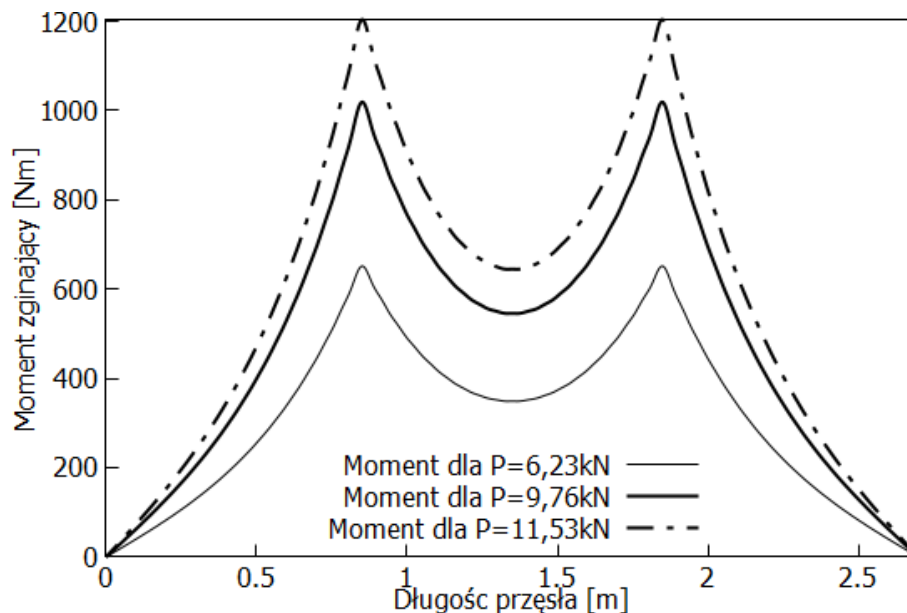


**Rysunek 5.2.10** Kąt przemieszczenia poziomego osi okładzin belki trójwarstwowej dla trzech wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi: ~6,23 kN, ~9,76 kN oraz ~11,53 kN

Natomiast rysunek (5.2.11) pokazuje wykres momentów zginających w pojedynczej okładzinie rozpatrywanej konstrukcji trójwarstwowej. Z wykresu wynika, że ekstremalna wartość momentu zginającego nie pojawia się w środku rozpiętości konstrukcji, lecz w miejscu przyłożenia sił skupionych. W środku rozpiętości elementu pojawia się lokalne ekstremum

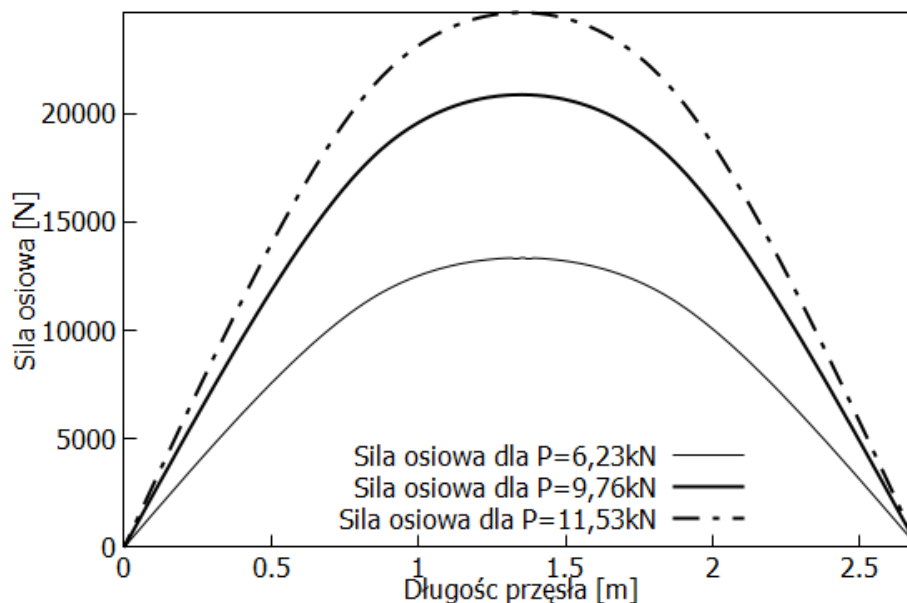


przebiegu momentów, lecz jest ono, co do wartości, około 40% mniejsze w porównaniu z ekstremum globalnym przekroju pod siłą skupioną.



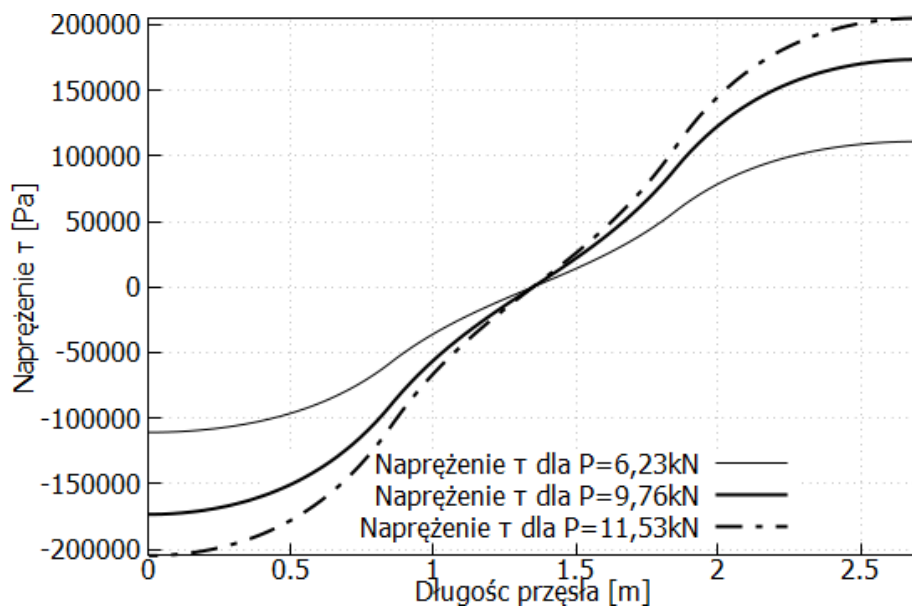
**Rysunek 5.2.11** Momenty zginające w osi okładzin belki trójwarstwowej dla trzech wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi: ~6,23 kN, ~9,76 kN oraz ~11,53 kN

Z założeń teoretycznych leżących u podstaw modelu Zig-Zag i wyprowadzonych na ich podstawie równań wynika istnienie siły osiowej w okładzinach ustroju. Ich przebieg został wykreślony dla trzech wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi i pokazany na rysunku (5.2.12). Wynika z niego, że ekstremalna wartość siły osiowej pojawia się w środku rozpiętości przęsła analizowanej belki.

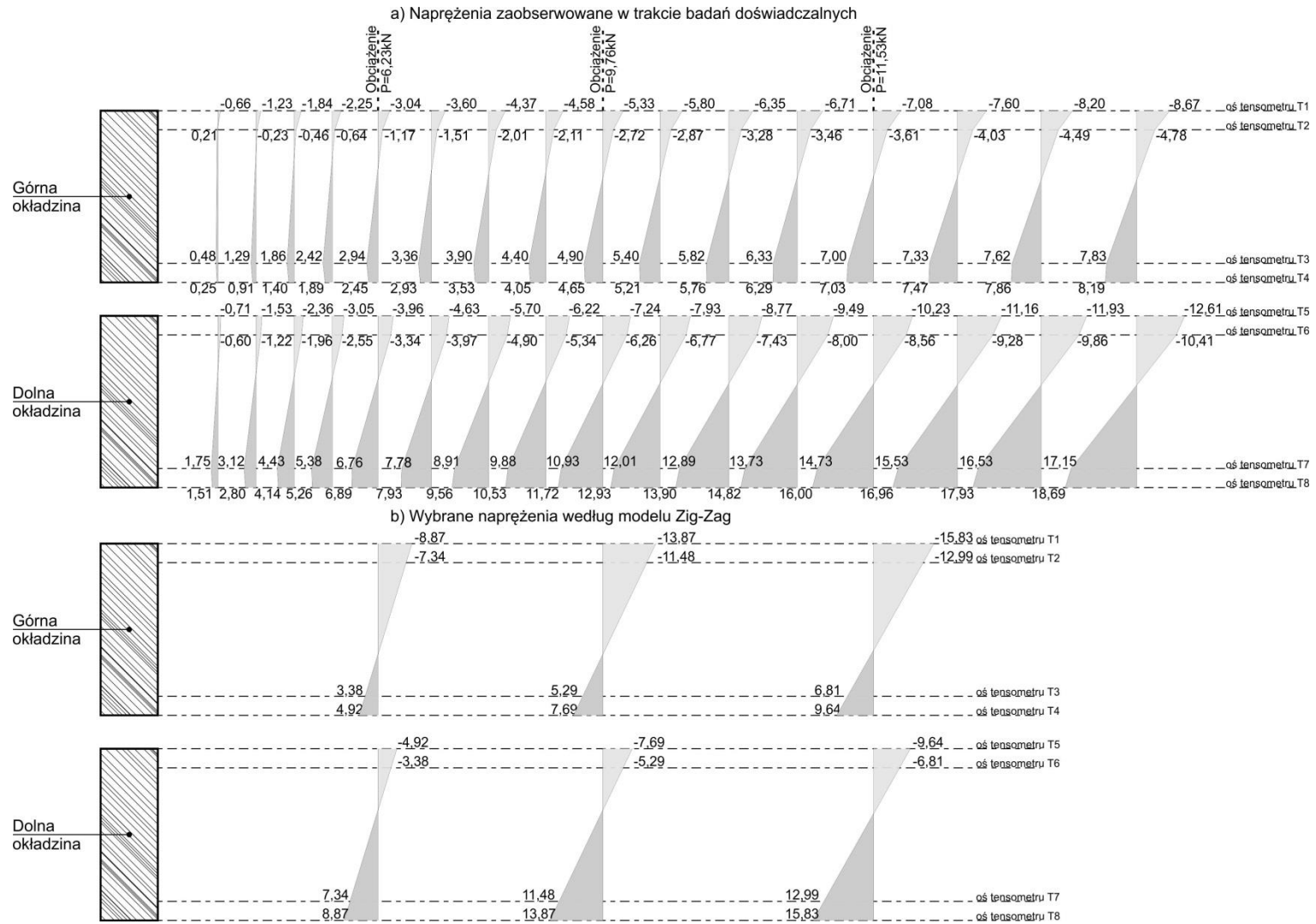


**Rysunek 5.2.12** Siły osiowe w osi okładzin belki trójwarstwowej dla trzech wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi: ~6,23 kN, ~9,76 kN oraz ~11,53 kN

Naprężenia styczne, na styku okładziny i rdzenia, zmieniają się w sposób pokazany na Rysunku 5.2.13. Z poniższego wykresu wynika, że w środku rozpiętości belki naprężenia styczne  $\tau_y$  są równe zero. Największe wartości osiągają natomiast w przekrojach podporowych.



**Rysunek 5.2.13** Naprężenia styczne w płaszczyźnie styku okładziny i rdzenia belki trójwarstwowej dla trzech wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi: ~6,23 kN, ~9,76 kN oraz ~11,53 kN



Rysunek 5.2.14 Zestawienie naprężeń normalnych w drewnianych pasach belki trójwarstwowej w przekroju w środku rozpiętości belki trójwarstwowej: na podstawie badań doświadczalnych (powyżej) oraz na podstawie modelu Zig-Zag (poniżej)

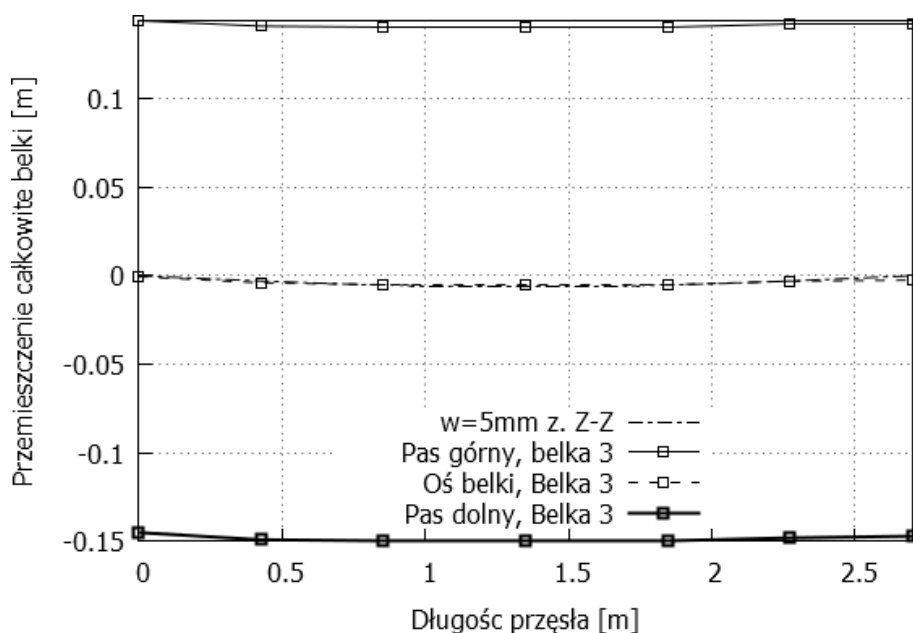
Rysunek (5.2.13) przedstawia porównanie wartości naprężeń w okładzinach belki sandwiczowej w środku jej rozpiętości, obliczonymi na podstawie odkształceń tensometrów elektrooporowych, z wartościami naprężeń obliczonymi na podstawie teoretycznych rozważań przedstawionych w Rozdziale 4.

Z rysunku (5.2.13) wynika, że rozkład naprężeń z modelu teoretycznego jest symetryczny względem osi belki. Zewnętrzne włókna górnej okładziny są ściskane natomiast skrajne włókna dolnej okładziny są rozciągane. Wartości naprężeń nie są jednak tożsame. Na styku okładzin i poliuretanowego rdzenia osiągają one mniejsze wartości na skutek działania naprężeń stycznych  $\tau_{\gamma}$ .

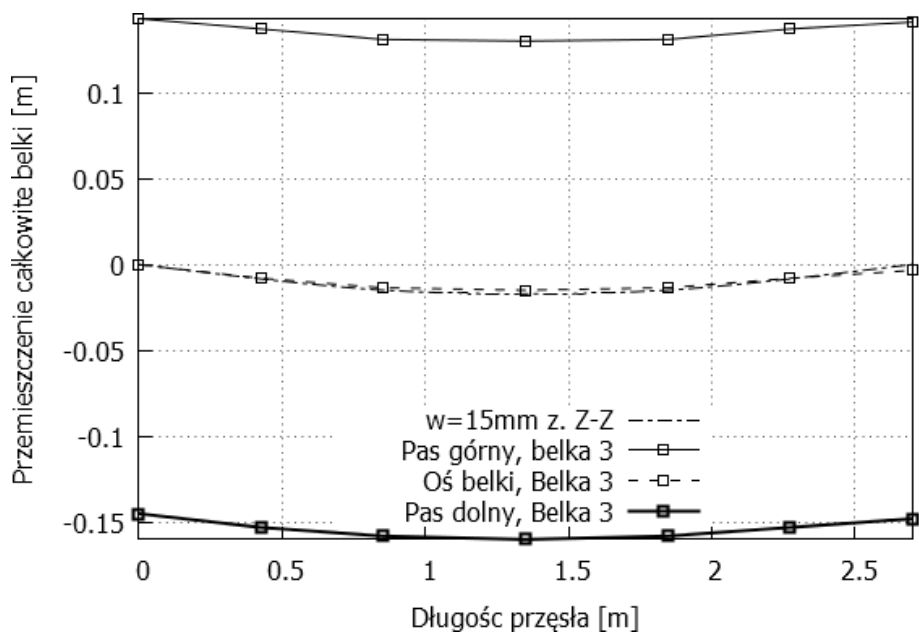
Natomiast rozkład naprężeń normalnych uzyskanych z odkształceń tensometrów jest nierównomierny. Zachodzi co prawda analogia, że w płaszczyźnie styku rdzenia i okładzin wartości naprężeń normalnych osiągają one mniejsze wartości w porównaniu z włóknami zewnętrznymi, lecz pozostałe cechy ich rozkładu są już odmienne. W badanych belkach naprężenia normalne w środku rozpiętości belki, we włóknach górnych pasa górnego, osiągały mniejsze wartości niż naprężenia we włóknach dolnych pasa dolnego.

### 5.3. Analiza numeryczna modelu Zig-Zag z uwzględnieniem ścinania w nakładkach

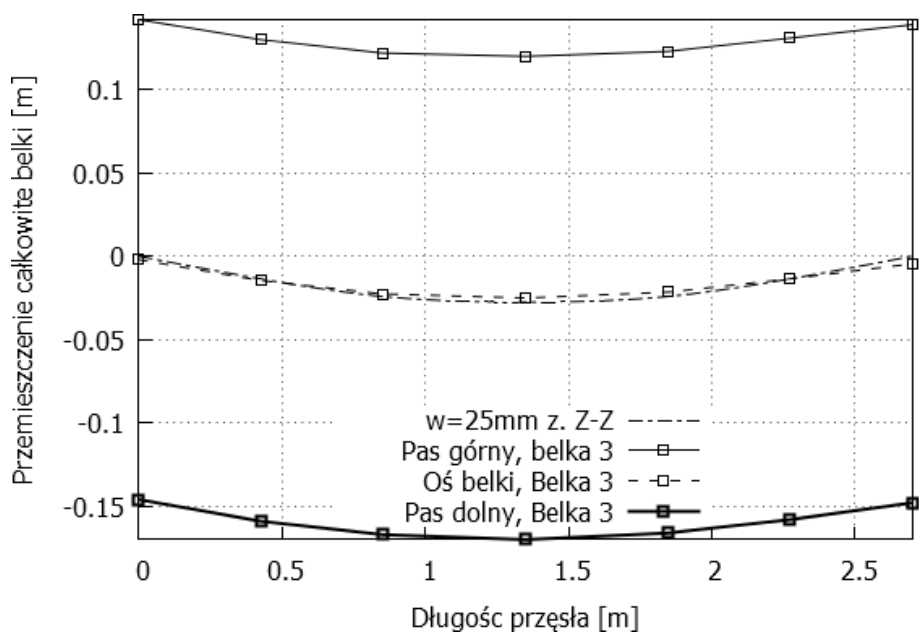
Model Zig-Zag uwzględniający ścinanie w drewnianych nakładkach stanowi rozwinięcie modelu Zig-Zag. Porównanie przemieszczeń osi belki według tego modelu z rezultatami uzyskanymi dla belki numer 3 pokazuje seria wykresów, zamieszczonych na rysunkach (5.3.1)-(5.3.8).



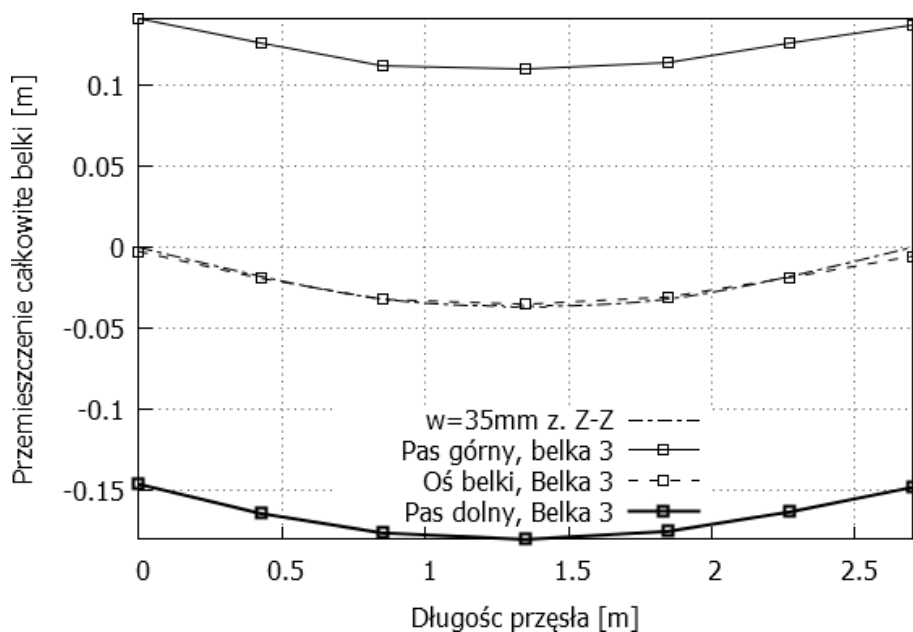
**Rysunek 5.3.1** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla zmodyfikowanego (uogólnionego) modelu Zig-Zag (z. Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 5 mm przemieszczenia dolnej okładziny



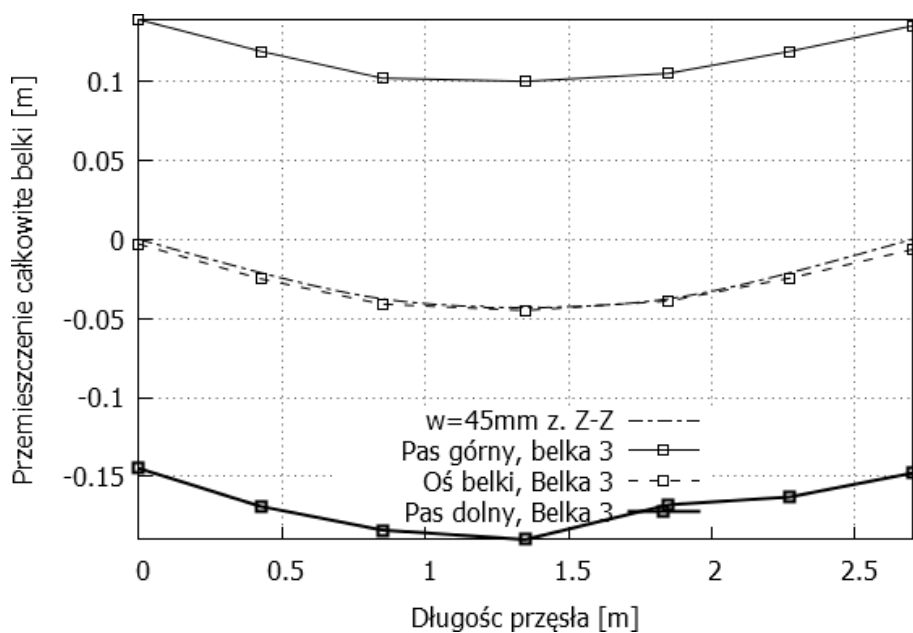
**Rysunek 5.3.2** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla zmodyfikowanego (uogólnionego) modelu Zig-Zag (z. Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 15 mm przemieszczenia dolnej okładziny



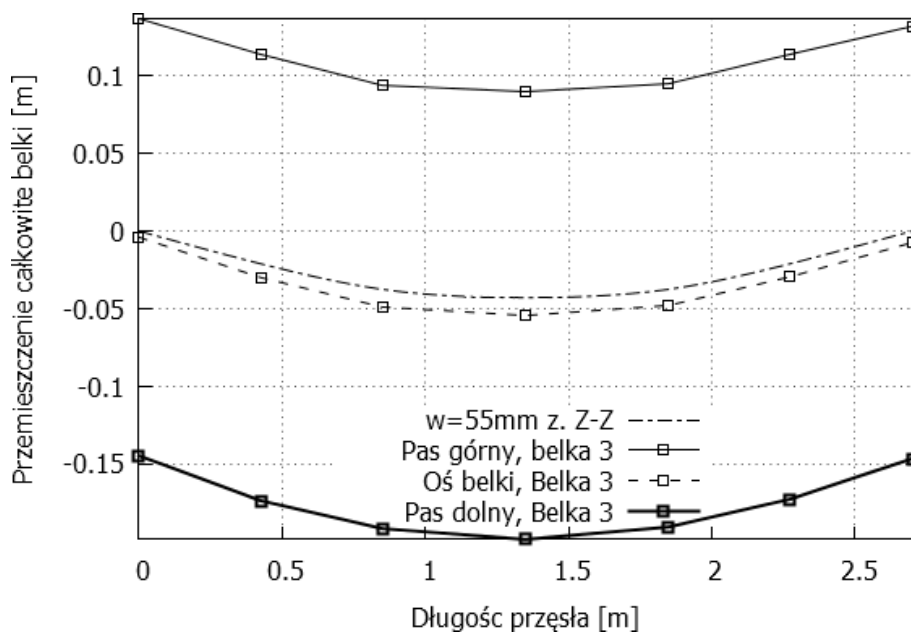
**Rysunek 5.3.3** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla zmodyfikowanego (uogólnionego) modelu Zig-Zag (z. Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 25 mm przemieszczenia dolnej okładziny



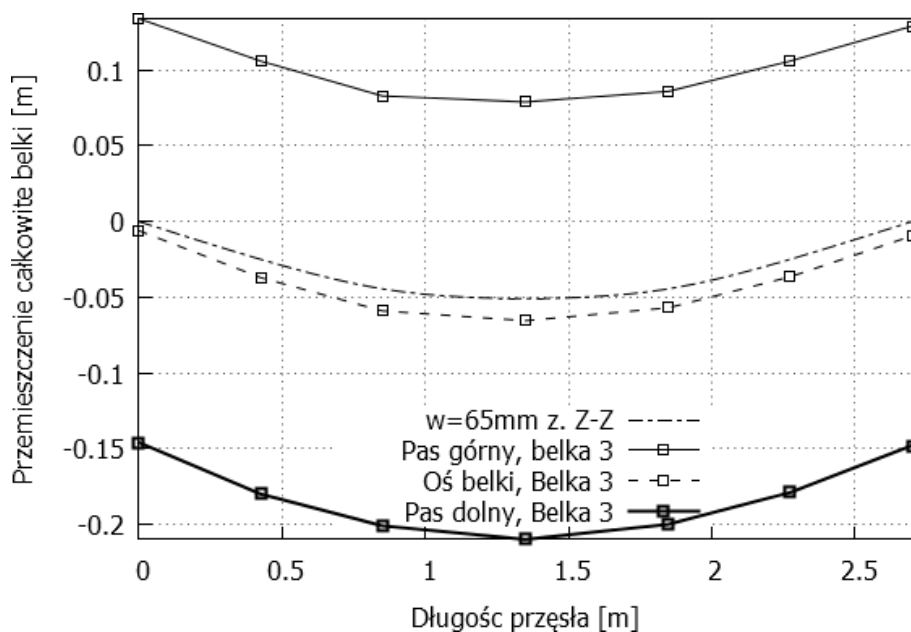
**Rysunek 5.3.4** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla zmodyfikowanego (uogólnionego) modelu Zig-Zag (z. Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 35 mm przemieszczenia dolnej okładziny



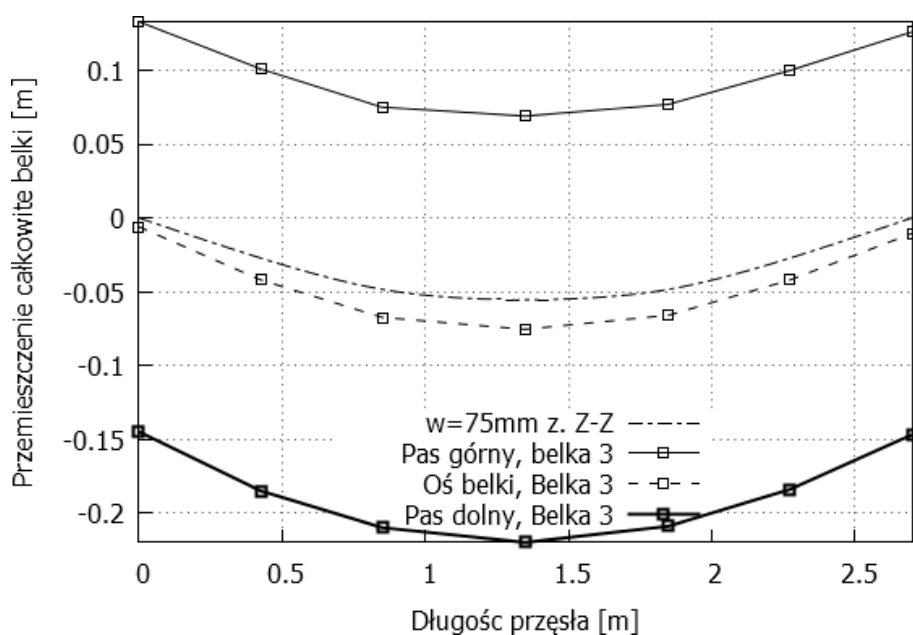
**Rysunek 5.3.5** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla zmodyfikowanego (uogólnionego) modelu Zig-Zag (z. Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 45 mm przemieszczenia dolnej okładziny



**Rysunek 5.3.6** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla zmodyfikowanego (uogólnionego) modelu Zig-Zag (z. Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 55 mm przemieszczenia dolnej okładziny



**Rysunek 5.3.7** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla zmodyfikowanego (uogólnionego) modelu Zig-Zag (z. Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 65 mm przemieszczenia dolnej okładziny



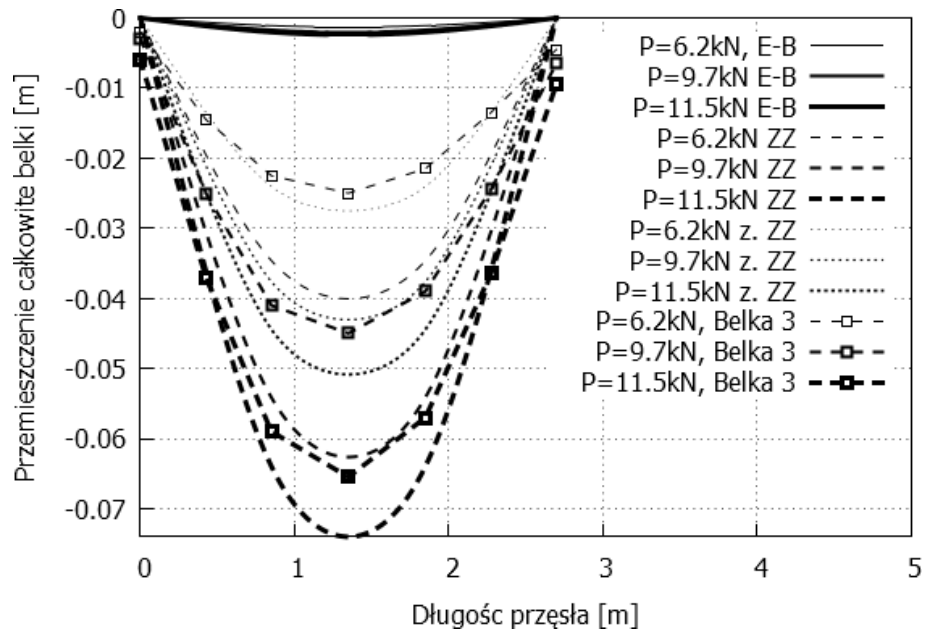
**Rysunek 5.3.8** Wykres porównawczy przemieszczeń osi belki obliczonych dla zmodyfikowanego (uogólnionego) modelu Zig-Zag (z. Z-Z) oraz osi i krawędzi zewnętrznych okładzin badanej belki nr 3 dla obciążenia wywołującego 75 mm przemieszczenia dolnej okładziny

Podobnie jak w przypadku poprzednich modeli także i w tym przypadku za oś elementu trójwarstwowego rozumie się oś usytuowaną w połowie odległości między skrajnymi krawędziami górną i dolną belki. Dodatkowo w modelu teoretycznym zakłada się, że podparta jest oś belki nie zaś jej dolna okładzina, jak to miało miejsce w trakcie badań doświadczalnych. Ta różnica powoduje, że oś belki numer 3 obciążanej w laboratorium przemieszcza się w przekrojach podporowych, czego nie obserwuje się dla osi modelu teoretycznego.

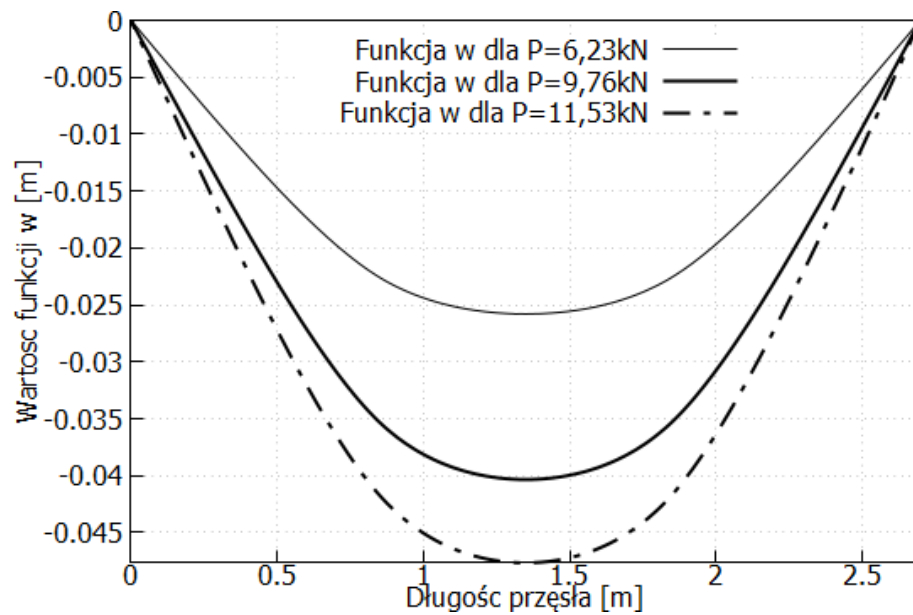
Z rysunków (5.3.1) – (5.3.5) wynika, że przemieszczenie pionowe osi modelu teoretycznego oraz belki rzeczywistej niemal pokrywają się. Wraz z przyrostem obciążenia różnice w położeniu osi odkształconej zwiększają się. Oś belki rzeczywistej przemieszcza się bardziej w stosunku do osi modelu teoretycznego. Wielkości przemieszczeń pionowych wciąż są tego samego rzędu natomiast w ujęciu procentowym kształtują się na poziomie ~30%.

Rysunek (5.3.9) prezentuje przemieszczenia osi belek dla wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi trzech dotychczas skomentowanych modeli teoretycznych: Eulera-Bernoulliego (E-B), Zig-Zag (ZZ) i zmodyfikowanego (uogólnionego) modelu Zig-Zag (z. ZZ) uwzględniającego ścinanie w okładzinach. Na rysunku (5.3.9) pokazano też przebieg przemieszczenia, przyjętej do celów porównawczych, osi belki numer 3 (Belka 3). Wynika z niego, że model Eulera-Bernoulliego daje rezultaty wyraźnie odstające od pozostałych dwóch modeli teoretycznych i że nie są to wyniki miarodajne. Model Zig-Zag lepiej odwzorowywał stan przemieszczenia elementu przy mniejszych obciążeniach zaś model Zig-Zag, uwzględniający ścinanie w nakładkach, dawał rezultaty bliższe rzeczywistym przemieszczeniom dla większych obciążeń.

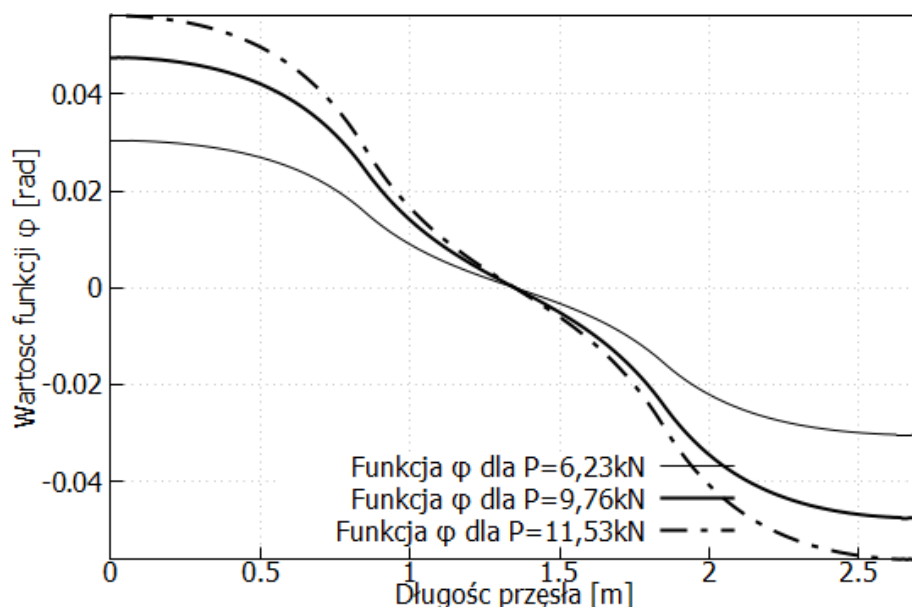




**Rysunek 5.3.9** Przemieszczenia teoretycznych osi belek trójwarstwowych dla modelu Eulera-Bernoulliego (E-B), Zig-Zag (ZZ), Zig-Zag z uwzględnieniem ścianania (z. ZZ) oraz rzeczywistej belki numer 3 przy trzech wybranych wartościach obciążeń siłami skupionymi: ~6,23 kN, ~9,76 kN oraz ~11,53 kN



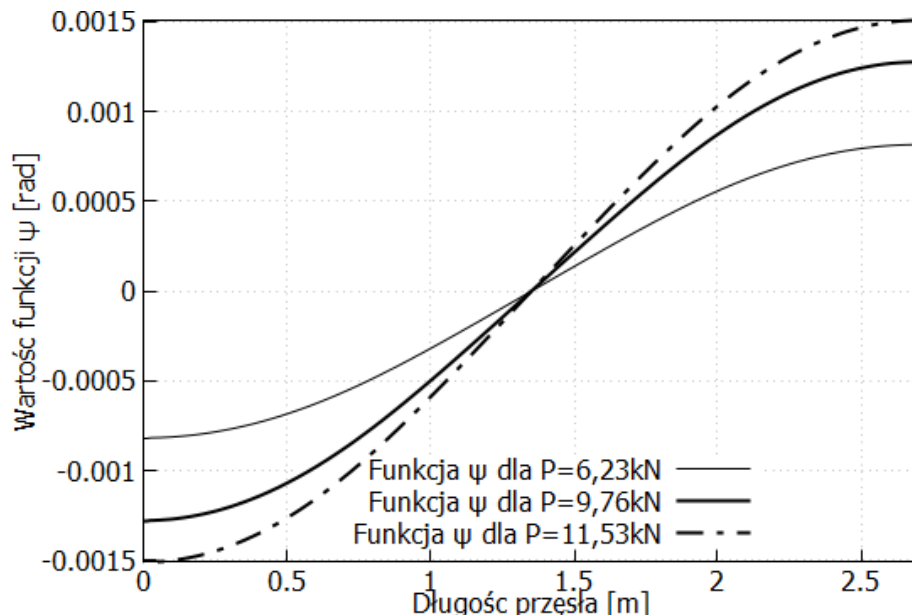
**Rysunek 5.3.10** Przemieszczenia pionowe belki trójwarstwowej dla trzech wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi: ~6,23 kN, ~9,76 kN oraz ~11,53 kN



**Rysunek 5.3.11** Kąty obrotu przekroju dla trzech wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi:  $\sim 6,23\text{ kN}$ ,  $\sim 9,76\text{ kN}$  oraz  $\sim 11,53\text{ kN}$

Na podstawie równań wyprowadzonych w rozdziale 4, dla trzech wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi, wykreślono przebiegi funkcji  $\varphi(x)$  opisującej kąt obrotu przekroju belki. Rezultaty przedstawiono na rysunku (5.3.11).

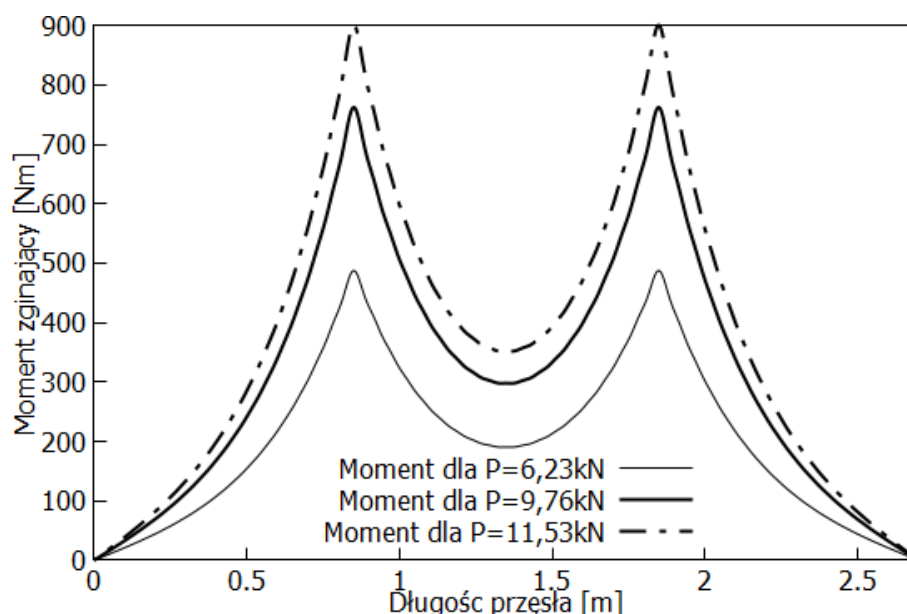
Przebieg zmienności funkcji  $\psi(x)$ , opisującej poziome przesunięcie okładzin, przedstawiono na rysunku (5.3.12).



**Rysunek 5.3.12** Kąt przemieszczenia poziomego osi okładzin belki trójwarstwowej dla trzech wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi:  $\sim 6,23\text{ kN}$ ,  $\sim 9,76\text{ kN}$  oraz  $\sim 11,53\text{ kN}$

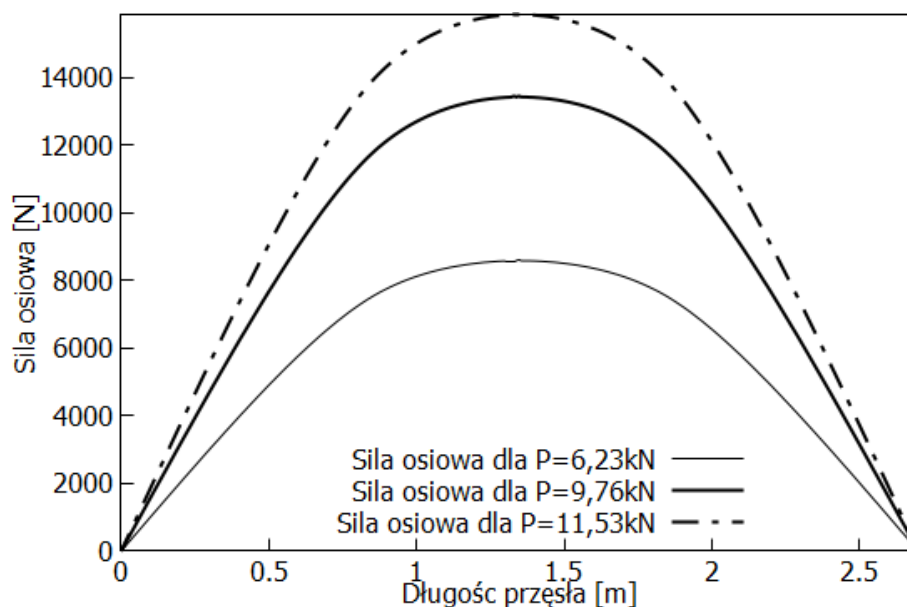
Natomiast na rysunku (5.3.13) pokazano przebieg zmienności momentów zginających w pojedynczej okładzinie. Podobnie jak dla przebiegu momentów zginających według modelu Zig-Zag także i dla przedmiotowego modelu ekstremalne wartości momentów pojawiają się w przekrojach obciążonych siłami skupionymi. W przekroju usytuowanym w połowie rozpiętości belki momenty zginające osiągają ekstremum lokalne, gdzie wartości są mniejsze. Zgodnie z

warunkami brzegowymi dla tego modelu momenty zginające w przekrojach podporowych są równe zero.



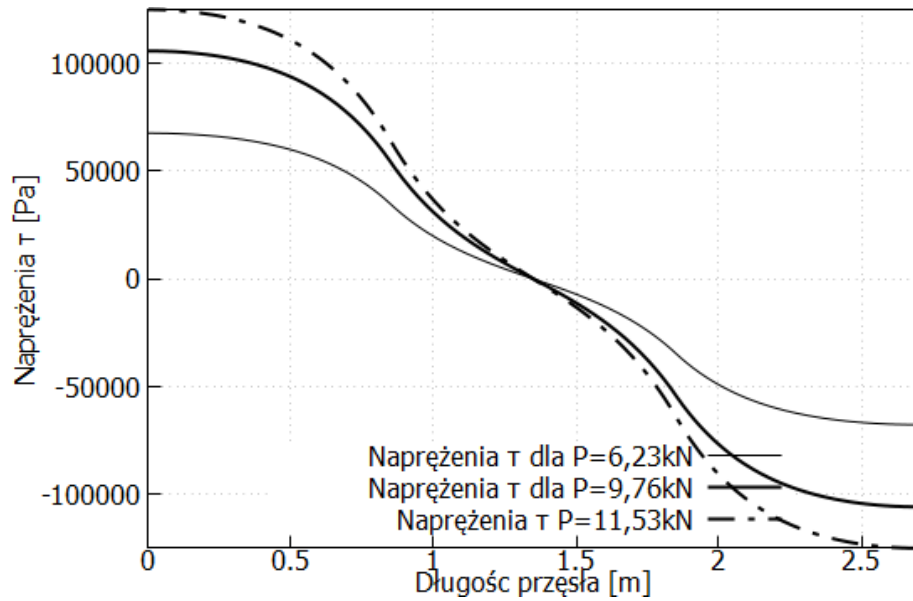
**Rysunek 5.3.13** Momenty zginające w osi okładzin belki trójwarstwowej dla trzech wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi: ~6,23 kN, ~9,76 kN oraz ~11,53 kN

Przebieg sił osiowych w pojedynczej okładzinie belki trójwarstwowej przedstawiono na rysunku (5.3.14). Wynika z niego, że ekstremalne wartości sił osiowych pojawiają się w przekroju usytuowanym w środku rozpiętości belki.

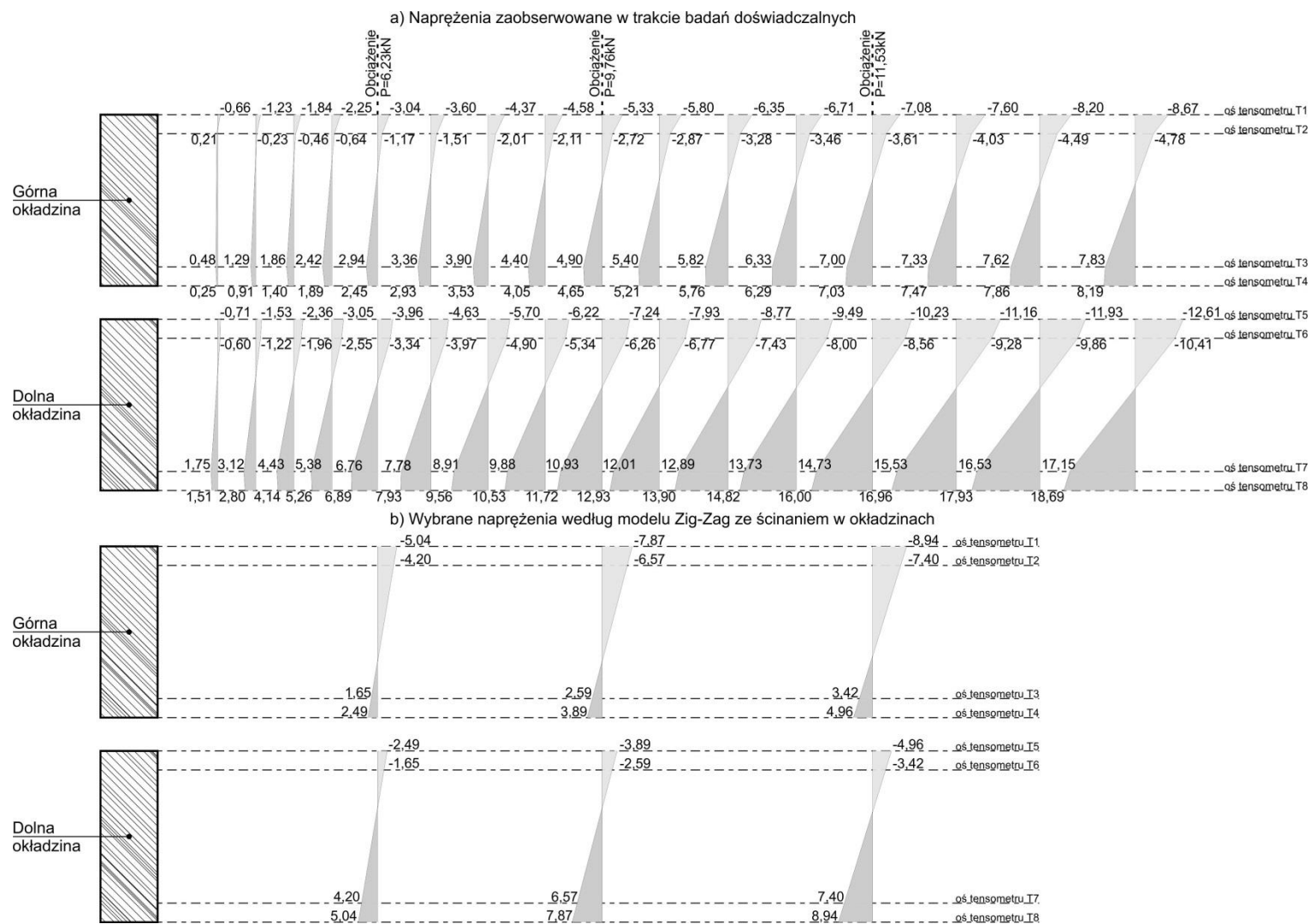


**Rysunek 5.3.14** Siły osiowe w osi okładzin belki trójwarstwowej dla trzech wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi: ~6,23 kN, ~9,76 kN oraz ~11,53 kN

Wartości momentów zginających i sił osiowymi w okładzinach, obliczonych według modelu Zig-Zag ze ścinaniem w nakładkach wskazują, że przy przyjętych wymiarach przekroju poprzecznego oraz parametrach wytrzymałościowych parametrów składowych dominującą siłą wewnętrzną jest siła osiowa. Natomiast momenty zginające odgrywają tu rolę drugorzędą.



**Rysunek 5.3.15** Napężenia styczne w płaszczyźnie styku okładziny i rdzenia belki trójwarstwowej dla trzech wybranych wartości obciążeń siłami skupionymi:  $\sim 6,23\text{ kN}$ ,  $\sim 9,76\text{ kN}$  oraz  $\sim 11,53\text{ kN}$



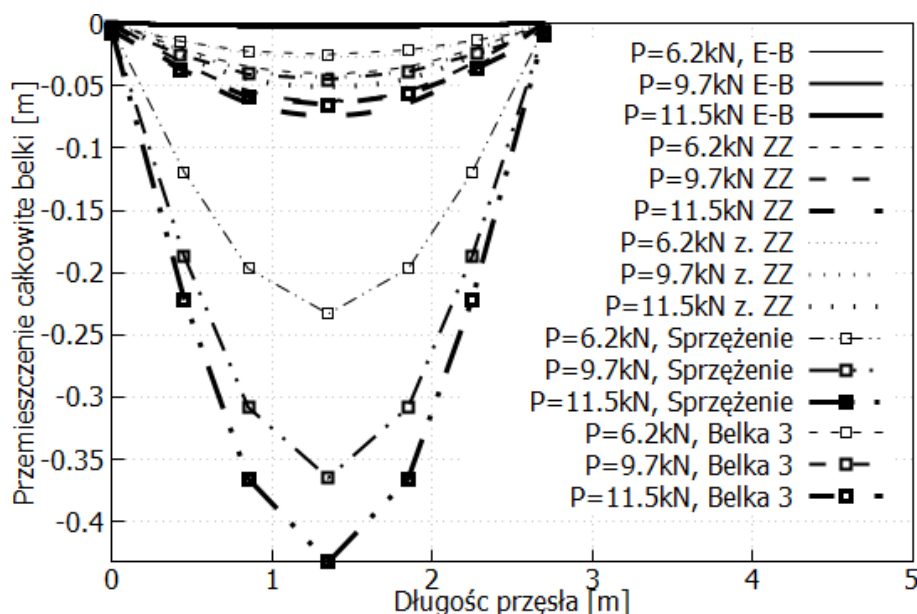
Rysunek 5.3.16

Miarą efektywności modelu teoretycznego Zig-Zag uwzględniającego ścinanie w nakładkach jest także porównanie naprężeń normalnych w drewnianych okładzinach belki trójwarstwowej. Wykresy naprężeń dla środkowego przekroju belki wyznaczone na podstawie odkształceń tensometrów oraz obliczone dla prezentowanego modelu przedstawiono na rysunku (5.3.15). Założenia teoretyczne dla omawianego modelu spowodowały, że naprężenia normalne w okładzinach mają układ symetryczny. Nie pojawił się efekt wzrostu naprężeń rozciągających w zewnętrznych włóknach pasa dolnego. Naprężenia normalne osiągnęły tu mniejsze wartości w porównaniu do klasycznego modelu Zig-Zag.

Zauważono też, że różnice wartości naprężeń ściskających w zewnętrznych włóknach górnej okładziny dla modelu i badań doświadczalnych maleją wraz ze wzrostem obciążenia. Odwrotny efekt widoczny jest dla włókien zewnętrznych pasa dolnego. Różnice w wartościach naprężeń dochodzą tu do 50%.

#### 5.4. Analiza numeryczna modelu dwóch sprzężonych belek

W przypadku ostatniego już modelu zakładającego, że belka trójwarstwowa jest traktowana jako układ dwóch elementów połączonych dwuparametrowym podłożem Pasternaka analizie poddano tylko przemieszczenia osi belki. Rezultaty obliczeń przedstawiono na rysunku (5.4.1). Wynika z niego, że przemieszczenia osi belki według modelu są o rząd wielkości większe w porównaniu do przemieszczeń zmierzonych w trakcie badań laboratoryjnych oraz modeli Zig-Zag i modelu Z-ig-Zag uwzględniającego ścinanie w nakładkach.



**Rysunek 5.4.1** Zestawcze porównanie przemieszczeń dla analizowanych modeli teoretycznych belek trójwarstwowych: Eulera-Bernoulliego (E-B), Zig-Zag (ZZ), Zig-Zag (zmodyfikowany) ze ścinaniem w nakładkach (z. ZZ) oraz belek sprzężonych (Sprzężenie)

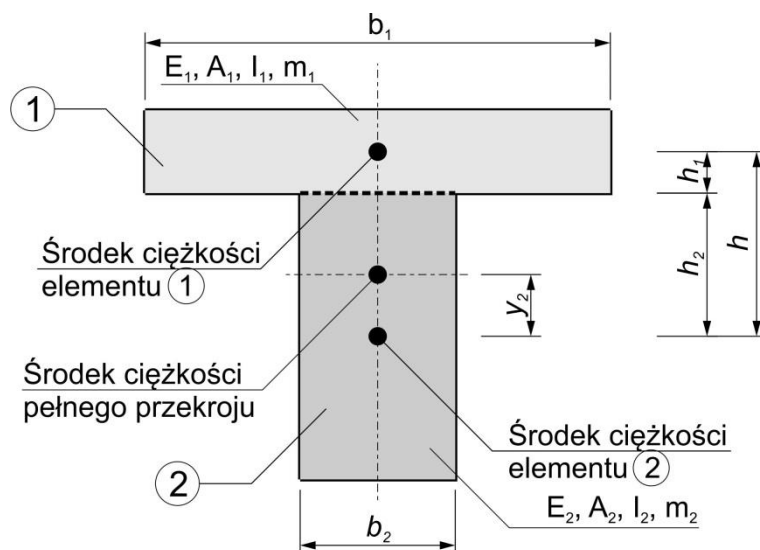
Na podstawie rysunku (5.4.1) wnioskować można, że zaproponowany model opisujący stan przemieszczenia belki trójwarstwowej nie jest właściwy.

## 6. Belki warstwowe o podatnych połączeniach warstw

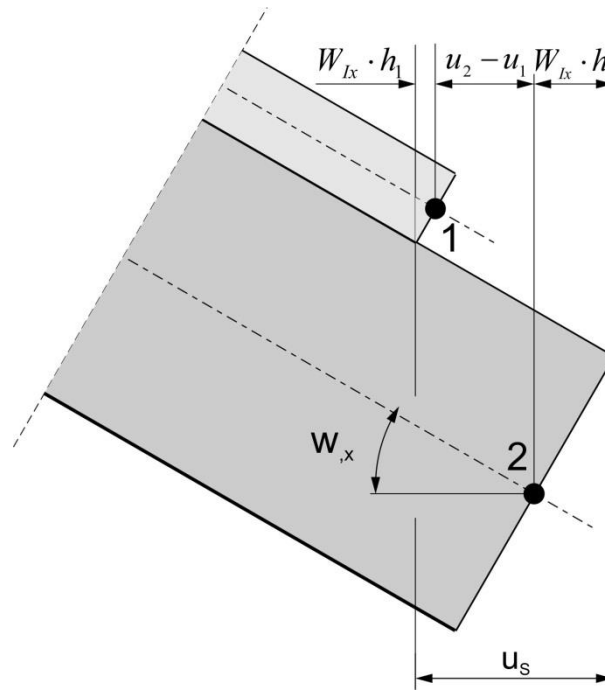
### 6.1. Belka dwuwarstwowa o podatnym połączeniu warstw

Elementami wrażliwymi często mającymi istotny wpływ na stan wyężenia i przemieszczenia belki a także jej niezawodność są połączenia warstw. Połączenia te często ulegają zniszczeniu. W miejscach tych może wystąpić poślizg między współpracującymi warstwami. Problem ten analizowany był w wielu pracach na przykład [4], [8-9], [22-24], [30], [34-36], [39-42], [45], [69], [78], [102], [108], [119,120], [122,123], [143] i to zarówno w zagadnieniach statycznych jak i dynamicznych. Problem ten omówiony zostanie poniżej na przykładzie belki dwuwarstwowej z uwzględnieniem poślizgu między warstwami. Jak wynikać będzie z wyprowadzonych równań różniczkowych belka dwuwarstwowa może być traktowana jak trójwarstwowa belka sandwiczowa, w której wysokość rdzenia jest pomijalnie mała, ale poślizg między warstwami można uważać za ścinanie rdzenia.

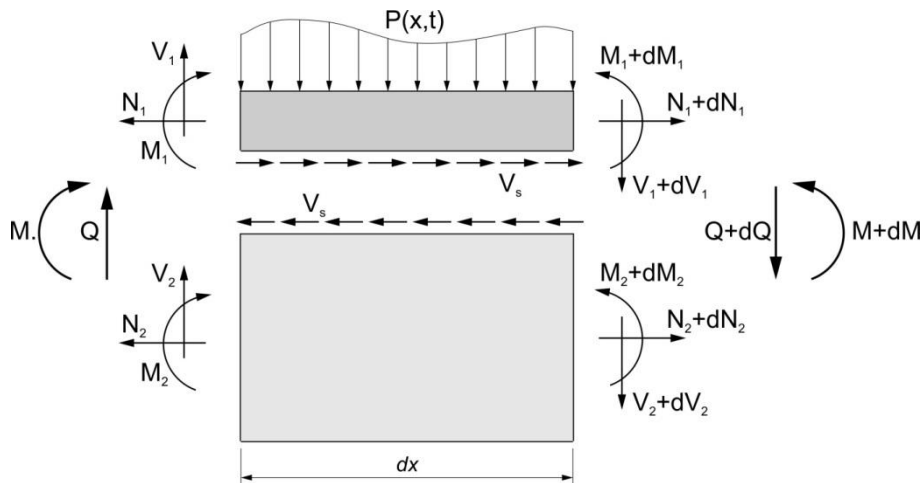
Niech belka będzie zbudowana z dwóch warstw (elementów) połączonych w jedną całość (rysunek (6.1.1)).



Rysunek 6.1.1 Geometria przekroju poprzecznego elementu dwuwarstwowego



Rysunek 6.1.2 Wzajemne przemieszczenia części składowych belki dwuwarstwowej



Rysunek 6.1.3 Siły wewnętrzne w przekroju belki dwuwarstwowej oraz na styku warstw składowych na odcinku dx

Na rysunku (6.1.1) przedstawiono przekrój poprzeczny belki dwuwarstwowej. Rysunek (6.1.2) prezentuje stan przemieszczeń belki wraz z przesunięciem wzajemnym obu warstw natomiast rysunek (6.1.3) zawiera siły przekrojowe działające na wycięty fragment belki.

Jak wynika z rysunku (6.1.3), wzajemny poślizg między obu warstwami wynosi:

$$u_s(x) = u_2(x) - u_1(x) + h \frac{dw(x)}{dx} = u(x) + h \frac{dw(x)}{dx}, \quad (6.1.1)$$

gdzie:  $h = h_1 + h_2$ .

Różniczkując zależność (6.2.1) otrzymuje się:

$$\frac{du_s(x)}{dx} = \varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x) + h \frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad (6.1.2)$$

natomiast ze zgodności krzywizny przy zginaniu górnej i dolnej belki wynika zależność:



$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{M_1(x)}{(EI)_1} = -\frac{M_2(x)}{(EI)_2}, \quad (6.1.3)$$

Siła działająca między belkami (siłą ścinającą) jest równa:

$$V_s(x) = k_s u_s(x) = k_s \left[ u(x) + h \frac{dw(x)}{dx} \right], \quad (6.1.4)$$

gdzie: stała  $k_s$  oznacza sztywność połączenia warstw na ścinanie i określona jest w [MPa].

Z warunków równowagi dla wyciętego elementu belki (rysunek (6.1.3)) a więc z sumy rzutów wszystkich sił na oś poziomą, pionową i równowagi momentów otrzymuje się zależności:

$$\sum X = 0$$

– dla górnej belki:

$$\frac{dN_1(x)}{dx} + k_s u_s(x) = 0, \quad (6.1.5)$$

– dla dolnej belki:

$$\frac{dN_2(x)}{dx} + k_s u_s(x) = 0, \quad (6.1.6)$$

i po zsumowaniu równań (6.1.6) i (6.1.7) otrzymuje się:

$$\frac{dN_1(x)}{dx} + \frac{dN_2(x)}{dx} = 0, \quad (6.1.7)$$

$$\sum Y = 0$$

– dla górnej belki:

$$\frac{dV_1(x)}{dx} = -p(x), \quad (6.1.8)$$

– dla dolnej belki:

$$\frac{dV_2(x)}{dx} = 0, \quad (6.1.9)$$

i po zsumowaniu powyższych równań otrzymuje się:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x), \quad (6.1.10)$$

gdzie:  $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$ .

$$\sum M = 0$$

– dla górnej belki:

$$\frac{dM_1(x)}{dx} = V_1(x) - V_s(x)h_1, \quad (6.1.11)$$

$$V_1(x) = \frac{dM_1(x)}{dx} + V_s(x)h_1, \quad (6.1.12)$$

– dla dolnej belki:

$$\frac{dM_2(x)}{dx} = V_2(x) - V_s(x)h_2, \quad (6.1.13)$$

$$V_2(x) = \frac{dM_2(x)}{dx} + V_s(x)h_2, \quad (6.1.14)$$

i po zsumowaniu powyższych zależności otrzymuje się:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) - V_s(x)h, \quad (6.1.15)$$

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} + V_s(x)h, \quad (6.1.16)$$

Przy czym dla belki Eulera-Bernoulliego ważna jest zależność:

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x) = -[(EI)_1 + (EI)_2] \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2}. \quad (6.1.17)$$

Z powyższych zależności wynikają następujące związki między przemieszczeniami i siłami przekrojowymi (wewnętrznymi):

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{d^2 M(x)}{dx^2} + h \frac{dV_s(x)}{dx} = -EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + h \frac{dV_s(x)}{dx} = -p(x), \quad (6.1.18)$$

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{du_2(x)}{dx} - \frac{du_1(x)}{dx} = -N(x) \left[ \frac{1}{(EA)_1} - \frac{1}{(EA)_2} \right], \quad (6.1.19)$$

a stąd:

$$N(x) = -\frac{du(x)}{dx} \zeta, \quad (6.1.20)$$

a po zróżniczkowaniu tego ostatniego równania:

$$\frac{dN(x)}{dx} = -\zeta \frac{d^2 u(x)}{dx^2}, \quad (6.1.21)$$

a także biorąc pod uwagę zależność:

$$\frac{dN(x)}{dx} = -k_s \left[ u(x) + h \frac{dw(x)}{dx} \right], \quad (6.1.22)$$

gdzie:

$$N_1(x) = -N_2(x) = N(x), \quad \zeta = \frac{E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2},$$

i po pewnych matematycznych przekształceniach otrzymano układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych, określających stan przemieszczenia belki z uwzględnieniem poślizgu między belkami:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - h^2 k_s \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - h k_s \frac{du(x)}{dx} = p(x), \quad (6.1.23)$$

$$\zeta \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - k_s u(x) - k_s h \frac{dw(x)}{dx} = 0. \quad (6.1.24)$$

Warunki brzegowe dla belki swobodnie podpartej mają postać:

$$w(0) = w(L) = 0 \quad (6.1.25)$$

$$\left. \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0, \quad (6.1.26)$$

$$\left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0, \quad (6.1.27)$$

gdzie:  $L$  jest długością belki.

Warto zauważyć, że układ równań różniczkowych (6.1.23), (6.1.24) jest analogiczny do układu równań różniczkowych (4.5.21), (4.5.22) opisującego stan przemieszczeń trójwarstwowej

belki sandwiczowej w ujęciu teorii Zig-Zag przy innej interpretacji stałych występujących w tych układach równań. Stąd wynika, że belka zbudowana z dwóch elementów, między którymi występuje wzajemne przesunięcie, może być traktowana jako belka sandwiczowa o pomijalnie małej wysokości rdzenia.

Dla warunków brzegowych (6.1.26) i (6.1.27) rozwiązania poszukujemy w postaci szeregów:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (6.1.28)$$

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (6.1.29)$$

Po podstawieniu powyższych szeregów do równań (6.2.23), (6.2.24) i wykonaniu ortogonalizacji otrzymujemy algebraiczny układ równań:

$$\left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 EI + h^2 k_s \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right] y_n + h k_s \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 u_n = \frac{2p_n}{L}, \quad (6.1.30)$$

$$k_s h \left( \frac{n\pi}{L} \right) y_n + \left[ \zeta \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_s \right] u_n = 0. \quad (6.1.31)$$

gdzie:  $p_n = \int_0^L p(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$ .

Po rozwiązaniu powyższego układu równań i podstawieniu do wzorów (6.1.28) oraz (6.1.29) szukane przemieszczenia określają wzory:

$$w(x) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ \zeta \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_s \right] p_n \sin \frac{n\pi x}{L}}{\left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 \left[ EI \zeta \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_s h^2 \zeta + EI k_s \right]}, \quad (6.1.32)$$

$$u(x) = -\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_s h \left( \frac{n\pi}{L} \right) p_n \cos \frac{n\pi x}{L}}{\left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 \left[ EI \zeta \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_s h^2 \zeta + EI k_s \right]}. \quad (6.1.33)$$

W przypadku siły skupionej  $P$  w punkcie  $x_0$  mamy

$$p(x) = P \delta(x - x_0) \quad (6.1.34)$$

Stąd:

$$p_n = P \sin \frac{n\pi x_0}{L}. \quad (6.1.35)$$

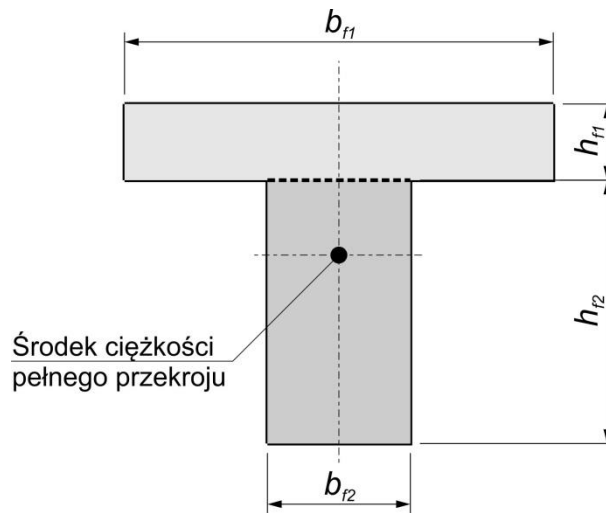
Symbolem  $\delta()$  oznaczono deltę Diraca.

Aby zobrazować wpływ podatności połączenia między częściami składowymi belki dwuwarstwowej przeprowadzono obliczenia dla hipotetycznej jednoprzęsłowej belki wolnopodpartej, obciążonej dwiema siłami skupionymi. Geometria przekroju poprzecznego, schemat statyczny oraz dane materiałowe przedstawiono poniżej.

Przyjęto następujące dane wyjściowe:

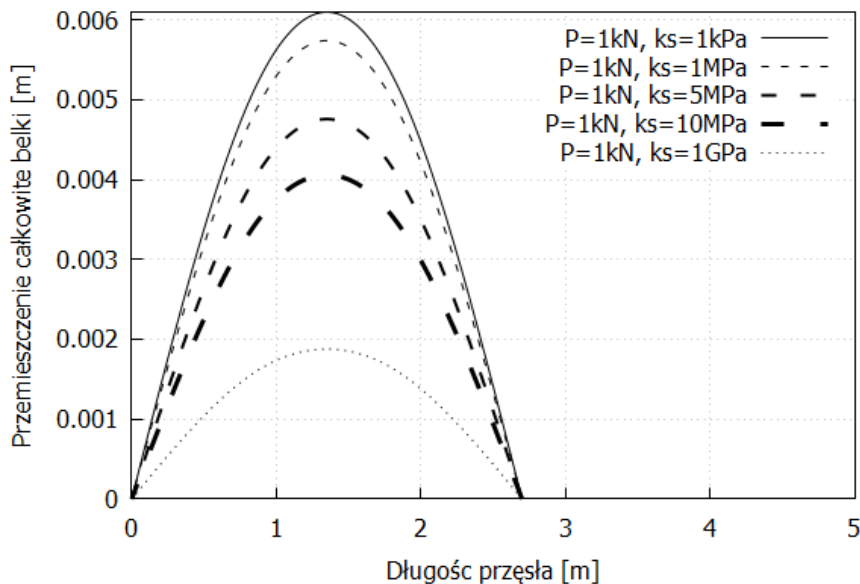
- moduł sprężystości części drewnianych  $E_f = 7,99 \cdot 10^9 Pa$  ;
- wysokość przekroju poprzecznego górnej belki  $h_{f1} = 0,045m$  ;
- szerokość przekroju poprzecznego górnej belki  $b_{f1} = 0,15m$  ;

- wysokość przekroju poprzecznego dolnej belki  $h_{f2} = 0,15m$  ;
- szerokość przekroju poprzecznego dolnej belki  $b_{f1} = 0,045m$  ;
- rozpiętość teoretyczna belki  $L = 2,70m$  .

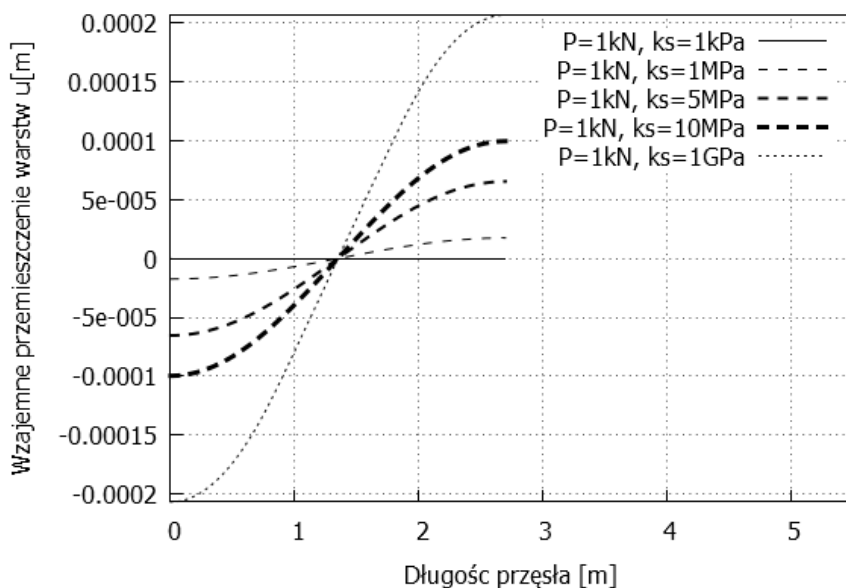


**Rysunek 6.1.4** Geometria przekroju teowego belki drewnianej złożonej z dwóch części składowych. Płaszczyzna styku zaznaczona przerywaną linią

W przykładzie założono, że belka będzie obciążana dwiema siłami skupionymi o wartości 1,0 kN według schematu statycznego jak na rysunku (3.1.1). Rozpatrzono pięć wartości sztywności połączenia  $k_s$  między częściami składowymi belki: 1,0 kPa, 1,0 MPa, 5,0 MPa, 10,0 MPa oraz 1000,0 MPa. Przebiegi funkcji określających wartości przemieszczenia pokazano zbiorczo na rysunku (6.1.5), natomiast wielkości poślizgów części składowych pokazano na rysunku (6.1.6).



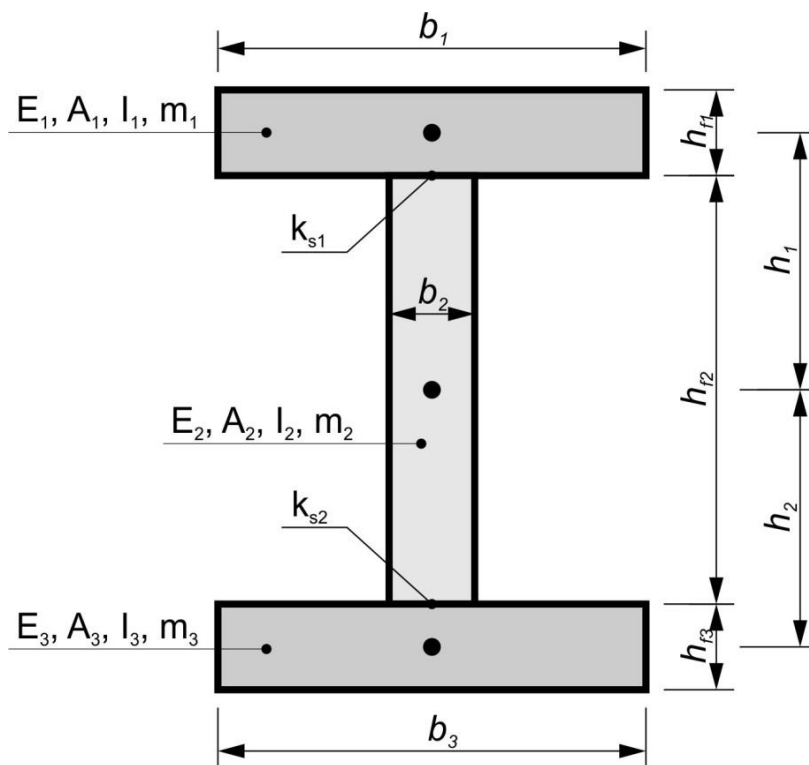
**Rysunek 6.1.5** Przemieszczenia pionowe drewnianej belki teowej dla różnych wartości sztywności połączenia  $k_s$



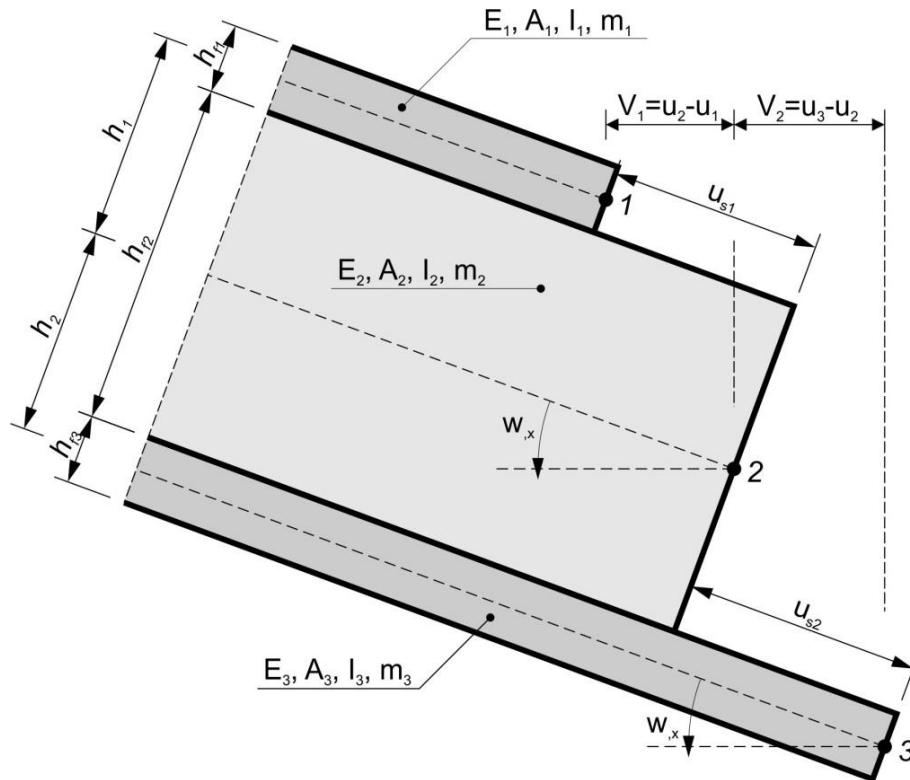
Rysunek 6.1.6 Wartości wzajemnego poślizgu składowych drewnianej belki teowej dla różnych wartości sztywności połączenia  $k_s$

## 6.2. Belka trójwarstwowa o podatnych połączeniach warstw

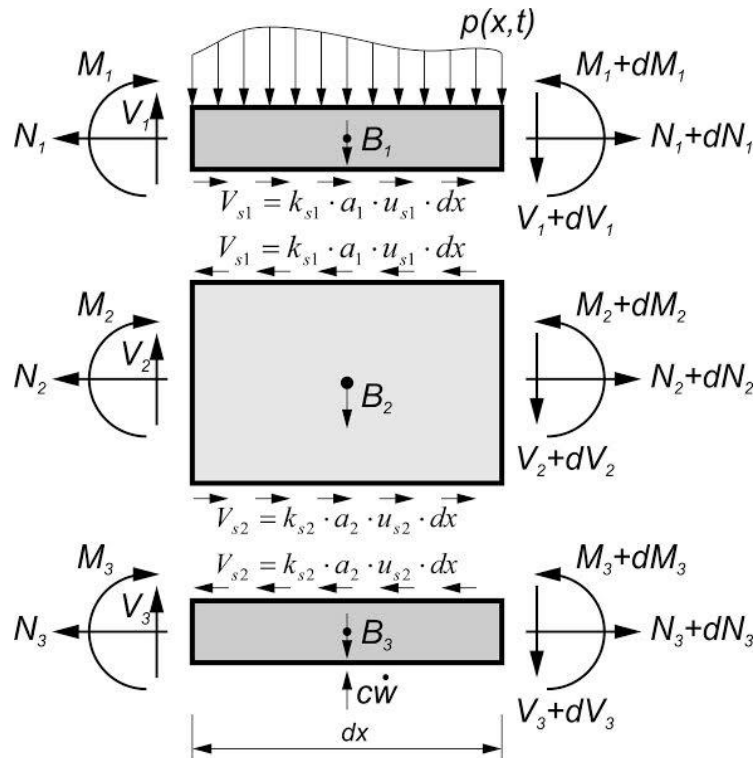
Niech belka będzie zbudowana z trzech warstw (elementów) połączonych w jedną całość (Rysunek 6.1.1).



Rysunek 6.2.1 Geometria przekroju poprzecznego elementu trójwarstwowego



Rysunek 6.2.2 Wzajemne przemieszczenia części składowych belki trójwarstwowej



Rysunek 6.2.3 Siły wewnętrzne w przekroju belki trójwarstwowej oraz na styku warstw składowych na odcinku  $dx$

Rysunek (6.2.3) prezentuje siły wewnętrzne belki trójwarstwowej oraz na styku warstw składowych na odcinku  $dx$ .

Biorąc pod uwagę równowagę układu dla myślowo wyciętego fragmentu belki trójwarstwowej o długości  $dx$  (rysunek (6.2.3)) sformułować można następujące równania:

$$\sum X = 0$$

$$\frac{dn_1(x)}{dx} + k_{s1}[\bar{u}_1(x) + h_1 \frac{dw(x)}{dx}] = 0, \quad (6.2.1)$$

$$\frac{dn_2(x)}{dx} - k_{s1}[\bar{u}_1(x) + h_1 \frac{dw(x)}{dx}] + k_{s2}[\bar{u}_2(x) + h_2 \frac{dw(x)}{dx}] = 0, \quad (6.2.2)$$

$$\frac{dn_3(x)}{dx} - k_{s2}[\bar{u}_2(x) + h_2 \frac{dw(x)}{dx}] = 0, \quad (6.2.3)$$

gdzie:  $\bar{u}_1(x) = u_2(x) - u_1(x)$ ,  $\bar{u}_2(x) = u_3(x) - u_2(x)$ .

Po zsumowaniu równań (6.2.1-6.2.3) otrzymano równanie (6.2.4):

$$\frac{dn_1(x)}{dx} + \frac{dn_2(x)}{dx} + \frac{dn_3(x)}{dx} = 0, \quad (6.2.4)$$

$$\sum Y = 0$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x), \quad (6.2.5)$$

gdzie:  $V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x)$ ,

$$\sum M = 0$$

$$\frac{dM_1(x)}{dx} = V_1(x) + N_1 \frac{dw(x)}{dx} - k_{s1}[\bar{u}_1(x) + h_1 \frac{dw(x)}{dx}] \frac{h_{f1}}{2}, \quad (6.2.6)$$

$$\frac{dM_2(x)}{dx} = V_2(x) + N_2 \frac{dw(x)}{dx} - k_{s1}[\bar{u}_1(x) + h_1 \frac{dw(x)}{dx}] \frac{h_{f1}}{2} - k_{s2}[\bar{u}_2(x) + h_2 \frac{dw(x)}{dx}] \frac{h_{f2}}{2}, \quad (6.2.7)$$

$$\frac{dM_3(x)}{dx} = V_3(x) + N_3 \frac{dw(x)}{dx} - k_{s2}[\bar{u}_2(x) + h_2 \frac{dw(x)}{dx}] \frac{h_{f3}}{2}, \quad (6.2.8)$$

Po zsumowaniu stronami równań (6.2.6-6.2.8) otrzymano równanie (6.2.9):

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) + N \frac{dw(x)}{dx} - k_{s1}[\bar{u}_1(x) + h_1 \frac{dw(x)}{dx}] h_1 - k_{s2}[\bar{u}_2(x) + h_2 \frac{dw(x)}{dx}] h_2, \quad (6.2.9)$$

Prawdziwa jest poniższa zależność:

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x) + M_3(x) = -[(EI)_1 + (EI)_2 + (EI)_3] \frac{d^2w(x)}{dx^2} = EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (6.2.10)$$

Następnie:

$$N = N_1 + N_2 + N_3, \quad (6.2.11)$$

$$\frac{N_1}{(EA)_1} = \frac{N_2}{(EA)_2} = \frac{N_3}{(EA)_3}. \quad (6.2.12)$$

Różniczkując stronami równanie (6.2.9) otrzymano równanie (6.2.13):

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2} - N \frac{d^2w(x)}{dx^2} + k_{s1} \left[ \frac{d\bar{u}_1(x)}{dx} + h_1 \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right] h_1 + \\ + k_{s2} \left[ \frac{d\bar{u}_2(x)}{dx} + h_2 \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right] h_2 \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Uwzględniając równanie (6.2.5) w wyrażeniu (6.2.13) otrzymano zależność (6.2.14):

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4w(x)}{dx^4} + N \frac{d^2w(x)}{dx^2} - [k_{s1}h_1^2 + k_{s2}h_2^2] \frac{d^2w(x)}{dx^2} + \\ - k_{s1}h_1 \frac{d\bar{u}_1(x)}{dx} - k_{s2}h_2 \frac{d\bar{u}_2(x)}{dx} = p(x). \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Można sformułować równanie:

$$\frac{du_2(x)}{dx} - \frac{du_1(x)}{dx} = \frac{n_2(x)}{(EA)_2} - \frac{n_1(x)}{(EA)_1}, \quad (6.2.15)$$

Przekształcając równanie (6.1.15) oraz różniczkując je stronami otrzymano wyrażenie (6.1.16):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{u}_1(x)}{dx^2} = \frac{1}{(AE)_2} \left\{ k_{s1} \left[ \bar{u}_1(x) + h_1 \frac{dw(x)}{dx} \right] - k_{s2} \left[ \bar{u}_2(x) + h_2 \frac{dw(x)}{dx} \right] \right\} + \\ + \frac{1}{(AE)_1} k_{s1} \left[ \bar{u}_1(x) + h_1 \frac{dw(x)}{dx} \right]. \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Podobną analizę można przeprowadzić dla równań (6.2.17) oraz (6.2.18):

$$\frac{du_3(x)}{dx} - \frac{du_2(x)}{dx} = \frac{n_3(x)}{(EA)_3} - \frac{n_2(x)}{(EA)_2}, \quad (6.2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{u}_2(x)}{dx^2} = \frac{1}{(AE)_3} k_{s2} \left[ \bar{u}_2(x) + h_2 \frac{dw(x)}{dx} \right] + \\ - \frac{1}{(AE)_2} \left\{ k_{s1} \left[ \bar{u}_1(x) + h_1 \frac{dw(x)}{dx} \right] - k_{s2} \left[ \bar{u}_2(x) + h_2 \frac{dw(x)}{dx} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

$$EI \frac{d^4w(x)}{dx^4} + N \frac{d^2w(x)}{dx^2} - [k_{s1}h_1^2 + k_{s2}h_2^2] \frac{d^2w(x)}{dx^2} - k_{s1}h_1 \frac{d\bar{u}_1(x)}{dx} - k_{s2}h_2 \frac{d\bar{u}_2(x)}{dx} = p(x) \quad (6.2.19)$$



$$\frac{d^2 \bar{u}_1(x)}{dx^2} = \frac{1}{(AE)_2} \left\{ k_{s1} \left[ \bar{u}_1(x) + h_1 \frac{dw(x)}{dx} \right] - k_{s2} \left[ \bar{u}_2(x) + h_2 \frac{dw(x)}{dx} \right] \right\} + \frac{1}{(AE)_1} k_{s1} \left[ \bar{u}_1(x) + h_1 \frac{dw(x)}{dx} \right] \quad (6.2.20)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_2(x)}{dx^2} = \frac{1}{(AE)_3} \left\{ k_{s2} \left[ \bar{u}_2(x) + h_2 \frac{dw(x)}{dx} \right] \right\} + \frac{1}{(AE)_2} \left\{ k_{s1} \left[ \bar{u}_1(x) + h_1 \frac{dw(x)}{dx} \right] - k_{s2} \left[ \bar{u}_2(x) + h_2 \frac{dw(x)}{dx} \right] \right\} \quad (6.2.21)$$

Ostatecznie otrzymuje się układ trzech równań (6.2.22 – 6.2.24):

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + N \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - [k_{s1} h_1^2 + k_{s2} h_2^2] \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - k_{s1} h_1 \frac{d\bar{u}_1(x)}{dx} - k_{s2} h_2 \frac{d\bar{u}_2(x)}{dx} = p(x). \quad (6.2.22)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_1(x)}{dx^2} - \varsigma_1 k_{s1} \bar{u}_1(x) + \frac{k_{s2}}{(AE)_2} \bar{u}_2(x) - \left[ \varsigma_1 k_{s1} h_1 - \frac{k_{s2} h_2}{(AE)_2} \right] \frac{dw(x)}{dx} = 0, \quad (6.2.23)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_2(x)}{dx^2} - \varsigma_2 k_{s2} \bar{u}_2(x) + \frac{k_{s1}}{(AE)_2} \bar{u}_1(x) - \left[ \varsigma_2 k_{s2} h_2 - \frac{k_{s1} h_1}{(AE)_2} \right] \frac{dw(x)}{dx} = 0, \quad (6.2.24)$$

gdzie:  $\varsigma_1 = \frac{1}{(EA)_1} + \frac{1}{(EA)_2}$     $\varsigma_2 = \frac{1}{(EA)_2} + \frac{1}{(EA)_3}$

Warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} w(0) = w(L) = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0, \\ \left. \frac{\partial \bar{u}_1(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \bar{u}_1(x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \\ \left. \frac{\partial \bar{u}_2(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \bar{u}_2(x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

gdzie  $L$  jest rozpiętością belki warstwowej.

Po zastąpieniu zmiennej  $x$  wielkością względną  $\xi$ :

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi \in [0, 1], \quad (6.2.26)$$

Ostatecznie równania (6.1.22) - (6.1.24) przyjmują formę jak poniżej:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w(\xi)}{d\xi^4} + \frac{NL^2}{EI} \frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} - \frac{[k_{s_1} h_1^2 + k_{s_2} h_2^2] L^2}{EI} \frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} + \\ - \frac{k_{s_1} h_1 L^3}{EI} \frac{d\bar{u}_1(\xi)}{d\xi} - \frac{k_{s_2} h_2 L^3}{EI} \frac{d\bar{u}_2(\xi)}{d\xi} = \frac{L^4}{EI} p(\xi) \end{aligned} \quad (6.2.27)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_1(\xi)}{d\xi^2} - \varsigma_1 k_{s_1} L^2 \bar{u}_1(\xi) + \frac{k_{s_2} L^2}{(AE)_2} \bar{u}_2(\xi) - [\varsigma_1 k_{s_1} h_1 - \frac{k_{s_2} h_2}{(AE)_2}] L \frac{dw(\xi)}{d\xi} = 0, \quad (6.2.28)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_2(\xi)}{d\xi^2} - \varsigma_2 k_{s_2} L^2 \bar{u}_2(\xi) + \frac{k_{s_1} L^2}{(AE)_2} \bar{u}_1(\xi) - [\varsigma_2 k_{s_2} h_2 - \frac{k_{s_1} h_1}{(AE)_2}] L \frac{dw(\xi)}{d\xi} = 0. \quad (6.2.29)$$

Warunki brzegowe dla układu równań (6.2.27) – (6.2.29) przyjmują formę:

$$\begin{aligned} w(0) = w(1) = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 w(\xi)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial^2 w(\xi)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=1} = 0, \\ \left. \frac{\partial \bar{u}_1(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial \bar{u}_1(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0, \\ \left. \frac{\partial \bar{u}_2(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial \bar{u}_2(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0. \end{aligned} \quad (6.2.30)$$

Rozwiązanie jest poszukiwane w postaci szeregów:

$$w(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin n\pi\xi, \quad (6.2.31)$$

$$\bar{u}_1(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n} \cos n\pi\xi, \quad (6.2.32)$$

$$\bar{u}_2(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} \cos n\pi\xi. \quad (6.2.33)$$

Stąd:

$$[(n\pi)^4 + (n\pi)^2 \frac{[k_{s_1} h_1^2 + k_{s_2} h_2^2 - N] L^2}{EI}] y_n + (n\pi) \frac{k_{s_1} h_1 L^3}{EI} u_{1n} + (n\pi) \frac{k_{s_2} h_2 L^3}{EI} u_{2n} = 0, \quad (6.2.34)$$

$$[(n\pi)^2 + \varsigma_1 k_{s_1} L^2] u_{1n} - \frac{k_{s_2} L^2}{(EA)_2} u_{2n} + (n\pi) [\varsigma_1 k_{s_1} h_1 - \frac{k_{s_2} h_2}{(EA)_2}] L y_n = 0, \quad (6.2.35)$$

$$[(n\pi)^2 + \varsigma_2 k_{s_2} L^2] u_{2n} - \frac{k_{s_1} L^2}{(EA)_2} u_{1n} + (n\pi) [\varsigma_2 k_{s_2} h_2 - \frac{k_{s_1} h_1}{(EA)_2}] L y_n = 0. \quad (6.2.36)$$

Stąd, po przekształceniach:

$$\left[ (n\pi)^4 + (n\pi)^2 \cdot \frac{[k_{s1}h_1^2 + k_{s1}h_1^2 - N] \cdot L^2}{EI} \right] \cdot y_n + (n\pi) \frac{k_{s1}h_1L^3}{EI} u_{1n} + (n\pi) \frac{k_{s2}h_2L^3}{EI} u_{2n} = p_n \frac{2L^4}{EI} \quad (6.2.37)$$

$$(n\pi) \left[ \zeta_1 k_{s1} h_1 - \frac{k_{s2} h_2}{(EA)_2} \right] L \cdot y_n + [(n\pi)^2 + \zeta_1 k_{s1} L^2] \cdot u_{1n} - \frac{k_{s2} L^2}{(EA)_2} \cdot u_{2n} = 0 \quad (6.2.38)$$

$$(n\pi) \left[ \zeta_2 k_{s2} h_2 - \frac{k_{s1} h_1}{(EA)_2} \right] L \cdot y_n - \frac{k_{s1} L^2}{(EA)_2} \cdot u_{1n} + [(n\pi)^2 + \zeta_2 k_{s2} L^2] \cdot u_{2n} = 0 \quad (6.2.39)$$

Formę powyższego układ równań można znacząco uprościć stosując następujące podstawienia:

$$a_{11} = \left[ (n\pi)^4 + (n\pi)^2 \cdot \frac{[k_{s1}h_1^2 + k_{s2}h_2^2 - N] \cdot L^2}{EI} \right] a_{12} = (n\pi) \frac{k_{s1}h_1L^3}{EI} a_{13} = (n\pi) \frac{k_{s2}h_2L^3}{EI} \quad (6.2.40)$$

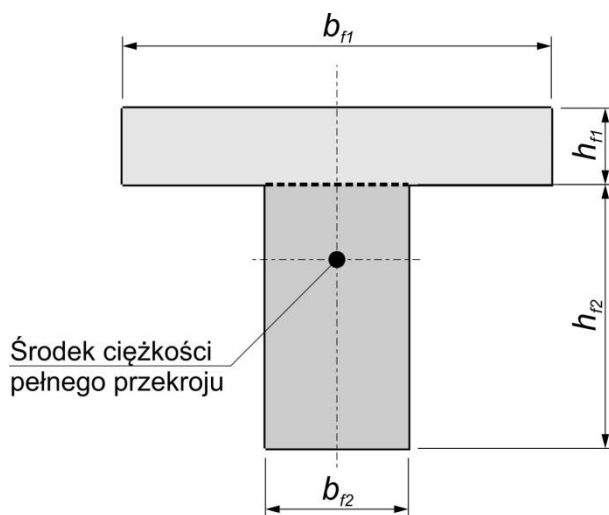
$$a_{21} = (n\pi) \left[ \zeta_1 k_{s1} h_1 - \frac{k_{s2} h_2}{(EA)_2} \right] L a_{22} = [(n\pi)^2 + \zeta_1 k_{s1} L^2] a_{23} = -\frac{k_{s2} L^2}{(EA)_2}$$

$$a_{31} = (n\pi) \left[ \zeta_2 k_{s2} h_2 - \frac{k_{s1} h_1}{(EA)_2} \right] L a_{32} = -\frac{k_{s1} L^2}{(EA)_2} a_{33} = [(n\pi)^2 + \zeta_2 k_{s2} L^2]$$

Podobnie jak w rozdziale (6.1) wpływ podatności połączenia między częściami składowymi belki dwuwarstwowej przeanalizowano w przykładzie rachunkowym. Przeprowadzono obliczenia dla hipotetycznej jednoprzęsłowej belki wolnopodpartej, obciążonej dwiema siłami skupionymi, zobrazowano przykładem obliczeniowym. Geometria przekroju poprzecznego, schemat statyczny oraz dane materiałowe przedstawiono poniżej.

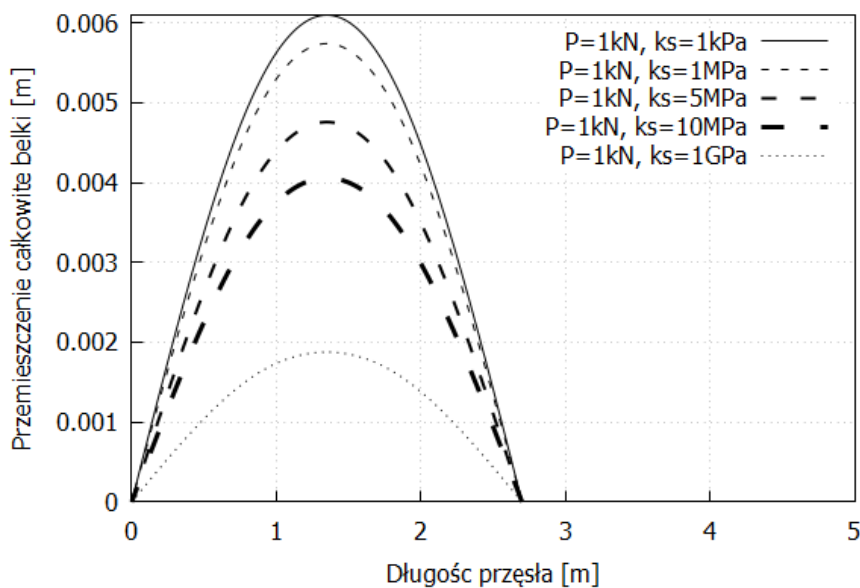
Przyjęto następujące dane wyjściowe:

- moduł sprężystości części drewnianych  $E_f = 7,99 \cdot 10^9 Pa$ ;
- wysokość przekroju poprzecznego górnej i dolnej belki  $h_{f1} = 0,045m$ ;
- szerokość przekroju poprzecznego górnej i dolnej belki  $b_{f1} = 0,15m$ ;
- wysokość przekroju poprzecznego środkowej belki  $h_{f2} = 0,15m$ ;
- szerokość przekroju poprzecznego środkowej belki  $b_{f1} = 0,045m$ ;
- rozpiętość teoretyczna belki  $L = 2,70m$ .

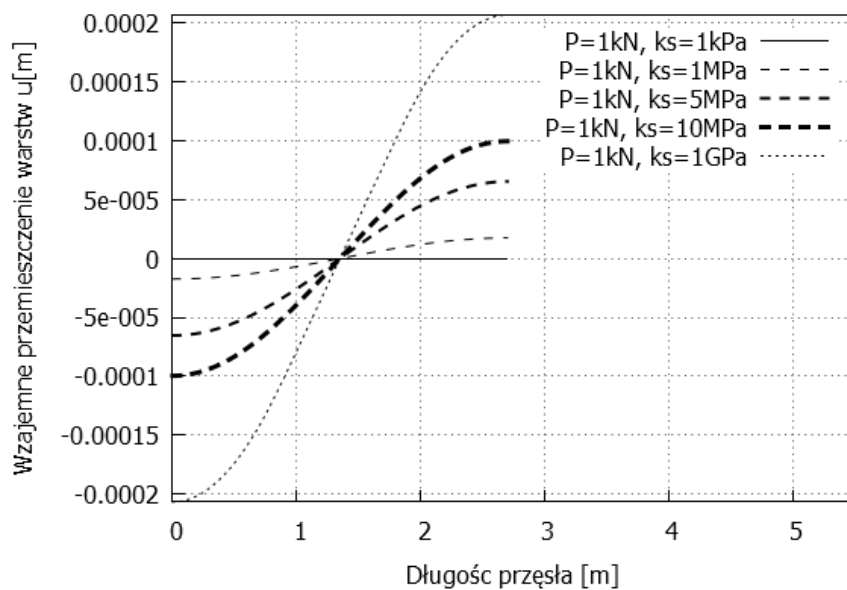


**Rysunek 6.2.4** Geometria przekroju teowego belki drewnianej złożonej z dwóch części składowych. Płaszczyzna styku zaznaczona przerywaną linią

W przykładzie założono, że belka będzie obciążana dwiema siłami skupionymi o wartości 1,0 kN według schematu statycznego jak na rysunku (3.1.1). Rozpatrzono pięć wartości sztywności połączenia  $k_s$  między częściami składowymi belki: 1,0 kPa, 1,0 MPa, 5,0 MPa, 10,0 MPa oraz 1000,0 MPa. Przebiegi funkcji określających wartości przemieszczenia pokazano zbiorczo na rysunku (6.1.5), natomiast wielkości poślizgów części składowych pokazano na rysunku (6.1.6).



**Rysunek 6.2.5** Przemieszczenia pionowe drewnianej belki teowej dla różnych wartości sztywności połączenia  $k_s$



Rysunek 6.2.6 Wartości wzajemnego poślizgu składowych drewnianej belki teowej dla różnych wartości sztywności połączenia  $k_s$

## 7. Probabilistyczna analiza belki sandwiczowej

### 7.1. Probabilistyczna analiza belki trójwarstwowej dla modelu Zig-Zag

W rozdziale 4 przyjmowano, że parametry belek są jednoznacznie określone, czyli są deterministyczne. W rzeczywistości część parametrów belek, podobnie jak w innych konstrukcjach, mają charakter losowy. Potwierdzają to badania opisane w wcześniejszych rozdziałach. Poniżej na przykładzie modelu belki Zig-Zag opisanego w podrozdziale 4.5 przedstawiono analizę probabilistyczną stanu przemieszczenia belki przyjmując, że moduł Kirchhoffa rdzenia jest zmienną losową a pozostałe parametry belki są jednoznacznie określone, czyli są wielkościami deterministycznymi. Obciążenie belki może być deterministyczne lub opisane funkcją losową. Przyjęto, że znane są odpowiednie charakterystyki probabilistyczne jak wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej belki a także charakterystyki obciążenia w przypadku, gdy ma ono charakter losowy. Jak podano wcześniej stan przemieszczeń belki sandwiczowej opisuje układ równań różniczkowych [wzory (4.5.3), (4.5.4)]:

$$(E_f I)_b \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \frac{G_c b (h+f)^2}{h} \left[ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{d\psi(x)}{dx} \right] = p(x) \quad (7.1)$$

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - \frac{G_c b}{\zeta h} \psi(x) - \frac{G_c b}{\zeta h} \frac{dw(x)}{dx} = 0 \quad (7.2)$$

a rozwiązanie dla belki swobodnie podpartej o rozpiętości L ma postać [wzory (4.5.13), (4.5.14)]

$$w(x) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{G_c b}{\zeta h} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}}{\left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 \left\{ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 (E_f I)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(E_f I)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}}, \quad (7.3)$$

$$\psi(x) = \frac{-2G_c b}{\zeta L h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \left( \frac{n\pi}{L} \right) \cos \frac{n\pi x}{L}}{\left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 \left\{ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 (E_f I)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(EI)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}}, \quad (7.4)$$

gdzie  $p_n = \int_0^L p(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$ .

W powyższych wzorach symbolem  $E_f$  oznaczono moduł Younga nakładek natomiast symbolem  $E[]$  oznaczać będziemy wartość oczekiwaną wielkości w nawiasie kwadratowym.

Jak wspomniano wcześniej moduł Kirchhoffa  $G_c$  w rdzeniu jest zmienną losową przy czym znane są ich charakterystyki probabilistyczne jak

- wartość oczekiwana  $E[G_c] = \bar{G}_c$ ,
- wariancja  $\sigma_{G_c} = E[G_c - E[G_c]]^2 = \mathcal{G}_{G_c}^2 \cdot E^2[G_c]$

W przypadku, gdy obciążenie ma charakter losowy przyjmiemy, że znane są jego charakterystyki losowe.

Celem dalszej analizy jest wyznaczenie wartości oczekiwanej i wariancji przemieszczeń belki określone wzorami (7.3), (7.4). Zadanie to można rozwiązać wykorzystując metodę Monte

Carlo, ale wówczas trzeba znać funkcję gęstości prawdopodobieństwa odpowiednich zmiennych losowych. Dysponując danymi podanymi powyżej zastosowana zostanie metoda perturbacyjna [65]. Metoda ta jest często stosowana, gdy współczynniki zmienności są mniejsze od 0.2. Poniżej metoda ta zostanie przedstawiona najpierw dla jednej zmiennej losowej, a następnie dla kilku zmiennych losowych.

Rozpatrzono sytuację, gdy zmienna losowa jest funkcją zmiennej losowej  $X$  a więc  $Y = g(X)$ . Powstaje problem jak oszacować charakterystyki losowe zmiennej losowej  $Y$  gdy znane są charakterystyki probabilistyczne zmiennej losowej  $X$  a mianowicie wartość oczekiwana  $E[X] = \bar{X} = m_X$  i wariancja  $\sigma_X^2$ . Rozwińmy funkcję  $g(x)$  w szereg Taylora wokół wartości oczekiwanej  $m_X$ , otrzymując

$$Y = g(X) = g(m_X) + (X - m_X) \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=m_X} + \frac{1}{2} (X - m_X)^2 \left. \frac{d^2g(x)}{dx^2} \right|_{x=m_X} + \dots \quad (7.5)$$

Wzór pozwala na oszacowanie szukanych charakterystyk probabilistycznych. Z reguły przy wyznaczaniu charakterystyk probabilistycznych zmiennej losowej  $Y$  uwzględnia się dwa lub trzy wyrazy w rozwinięciu (7.5) zależnie od współczynnika zmienności  $v_X$ . Gdy rozrzut zmiennej losowej  $X$  nie jest duży, skąd wynika mała wartość współczynnika zmienności  $V_X$ , uwzględniamy dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia otrzymując:

$$E[Y] = g(m_X) = g(\bar{X}), \quad (7.6)$$

oraz wariancję w postaci

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \left( \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=m_X} \right)^2 \quad (7.7)$$

Gdy uwzględnia się trzy wyrazy w rozwinięciu w szeregu (7.5) otrzymuje się odpowiednio wartość oczekiwaną

$$E[Y] = g(m_X) + \frac{1}{2} \sigma_X^2 \left. \frac{d^2g(x)}{dx^2} \right|_{x=m_X}, \quad (7.8)$$

przy czym  $\left. \frac{d^2g(x)}{dx^2} \right|_{x=m_X} = \left. \frac{d^2g(x)}{dx^2} \right|_{x=m_X}$ ,

oraz wariancję:

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \left( \left. \frac{dg(m_X)}{dx} \right)^2 + \frac{1}{4} (\mu_{4X} - \sigma_X^4) \left( \left. \frac{d^2g(m_X)}{dx^2} \right)^2 + \mu_{3X} \frac{dg(m_X)}{dx} \left. \frac{d^2g(m_X)}{dx^2} \right), \quad (7.9)$$

gdzie:  $\mu_{3X} = E[(X - m_X)^3]$  i  $\mu_{4X} = E[(X - m_X)^4]$  są momentami centralnymi zmiennej losowej  $X$ .

Aby wyznaczyć wariancję  $\sigma_Y^2$  ze wzoru (7.9) niezbędna jest znajomość momentów centralnych  $\mu_{3X}$  i  $\mu_{4X}$ . W szczególnym przypadku, gdy zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny, wówczas  $\mu_{3X} = 0$  i  $\mu_{4X} = 3\sigma_X^4$  a wzór (7.9) przyjmuje postać:

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \left( \left. \frac{dg(m_X)}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \sigma_X^4 \left( \left. \frac{d^2g(m_X)}{dx^2} \right)^2 \right). \quad (7.10)$$

Uogólnijmy dotychczasowe rozważania na przypadek, gdy zmienna losowa  $Y$  jest funkcją wektora losowego  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  czyli wielu zmiennych losowych  $X_1 = X_1(e), \dots, X_n = X_n(e)$  a więc mamy  $Y = g(\mathbf{X}) = g(X_1, \dots, X_n)$ . Aby wyznaczyć szukane charakterystyki zmiennej losowej  $Y$  rozwija się funkcję  $g(\mathbf{X})$  w szereg Taylora wokół wartości średnich  $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{m}_X = [m_{x_1}, \dots, m_{x_n}]^T$

$$Y = g(\mathbf{m}_X) + \sum_{i=1}^n (X_i - m_{x_i}) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}_X} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - m_{x_i})(X_j - m_{x_j}) \frac{\partial^2 g(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}_X} + \quad (7.11)$$

Uwzględniając tylko dwa pierwsze wyrazy w rozwinięciu (7.11) wówczas charakterystyki probabilistyczne zmiennej losowej  $Y$  określają wzory analogiczne do (7.6-7.7)

$$Y = g(\mathbf{m}_X), \quad \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(X_i, X_j) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}_X}. \quad (7.12)$$

Gdy uwzględnia się trzy wyrazy rozwinięcia w szereg Taylora odpowiednie wzory przyjmują postać

$$E[Y] = g(\mathbf{m}_X) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(X_i, X_j) \frac{\partial^2 g(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}_X}, \quad (7.13)$$

oraz

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(X_i, X_j) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}_X} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mu_{X_i X_j X_k} \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}_X} + \\ & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [\mu_{X_i X_j X_k X_l} - \text{cov}(X_i, X_j) \text{cov}(X_k, X_l)] \frac{\partial^2 g(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_l} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}_X}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

przy czym:

$$\mu_{X_i X_j X_k} = E\{(X_i - m_{x_i})(X_j - m_{x_j})(X_k - m_{x_k})\},$$

$$\mu_{X_i X_j X_k X_l} = E\{(X_i - m_{x_i})(X_j - m_{x_j})(X_k - m_{x_k})(X_l - m_{x_l})\}.$$

Podane powyżej formuły dla momentów probabilistycznych zostaną zastosowane w analizie probabilistycznej przemieszczenia belki sandwiczowej określonej wzorami (7.3), (7.4). Ponieważ moduł Kirchhoffa występuje zarówno w liczniku jak i mianowniku ułamków we wzorach (7.3), (7.4) rozpatrzmy szczególny przypadek, gdy między dwoma zmiennymi zachodzi relacja

$$Y = f(X) = \frac{aX + b}{cX + d}, \quad (7.15)$$

gdzie: symbole  $a, b, c, d$  oznaczają stałe.

Różniczkując zależność (7.15) otrzymuje się:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{a}{cx + d} - \frac{c(ax + d)}{(cx + d)^2}, \quad (7.16)$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -2 \frac{ac}{(cx + d)^2} + \frac{1}{2} \frac{c^2(ax + b)}{(cx + d)^3}. \quad (7.17)$$



Szczegółowiej rozpatrzmy przypadek (a=0, b=1, c=1, d=0):

$$Y = \frac{1}{X} \quad (7.18)$$

Ze wzoru (7.6) wynika, że wartość oczekiwana odwrotności zmiennej losowej jest równa odwrotności wartości oczekiwanej, a więc:

$$E[Y] = m_Y = \frac{1}{m_X} = \frac{1}{x} \quad (7.19)$$

Ze wzoru (7.8) otrzymuje się:

$$E[Y] = \frac{1}{m_X} (1 + V_x^2) \quad (7.20)$$

gdzie  $V_x = \frac{\sigma_x}{m_x}$  jest współczynnikiem zmienności zmiennej  $x$ .

Wykorzystując tylko dwa wyrazy rozwinięcia w szereg Taylora wariancję określa zależność

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{\frac{1}{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{m_x^4} = \frac{V_x^2}{m_x^2}. \quad (7.21)$$

Korzystając z powyższych zależności wyznaczone zostaną wartości oczekiwane i wariancje przemieszczeń określonych wzorami (7.3) i (7.4):

$$E[w(x)] = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{\bar{G}_c b}{\zeta h} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}}{\left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 \left\{ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 (E_f I)_b + \frac{\bar{G}_c b}{h} \left[ \frac{(E_f I)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}}, \quad (7.22)$$

$$E[\psi(x)] = -\frac{2\bar{G}_c b}{\zeta L h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \left( \frac{n\pi}{L} \right) \cos \frac{n\pi x}{L}}{\left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 \left\{ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 (E_f I)_b + \frac{\bar{G}_c b}{h} \left[ \frac{(E_f I)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}}, \quad (7.23)$$

Aby wyznaczyć wariancje przemieszczeń belki ze wzoru (7.7) obliczone zostaną odpowiednie pochodne:

$$\begin{aligned} \frac{dw(x, G_c)}{dG_c} &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \frac{b}{\zeta h} \sin \frac{n\pi x}{L}}{\left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 \left\{ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 (E_f I)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(E_f I)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}} + \\ &- \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \frac{b}{h} \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{G_c b}{\zeta h} \right] \left[ \frac{(E_f I)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \sin \frac{n\pi x}{L}}{\left( \frac{n\pi}{L} \right)^8 \left\{ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 (E_f I)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(E_f I)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}^2} \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$\frac{d\psi(x, G_c)}{dG_c} = -\frac{2b}{\zeta L h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos \frac{n\pi x}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (E_f I)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(E_f I)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}} + \frac{2G_c b}{\zeta L h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{b}{h} \left[ \frac{(E_f I)_b}{\zeta} (h+f)^2 \right] \cos \frac{n\pi x}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^8 \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (E_f I)_b + \frac{G_c b}{h} \left[ \frac{(E_f I)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right] \right\}^2} \quad (7.25)$$

Jak widać z powyższych wzorów rozwiązania dla charakterystyk probabilistycznych przemieszczeń belki będą miały bardzo rozbudowaną postać. Z tego powodu funkcje przemieszczeń belki (7.3), (7.4) zostaną przedstawione w postaci:

$$w(x) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n [a_{wn} G_c + b_{wn}] \sin \frac{n\pi x}{L}}{c_{wn} G_c + d_{wn}}, \quad (7.26)$$

$$\psi(x) = \frac{-2b}{\zeta L h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n a_{\psi n} G_c \cos \frac{n\pi x}{L}}{c_{\psi n} G_c + d_{\psi n}}, \quad (7.27)$$

gdzie:  $a_{wn} = \frac{b}{\zeta h}$ ,  $b_{wn} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ ,  $c_{wn} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{b}{h} \left[ \frac{(E_f I)_b}{\zeta} + (h+f)^2 \right]$ ,  $d_{wn} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^6 (E_f I)_b$ ,  
 $a_{\psi n} = \frac{n\pi}{L}$ ,  $b_{\psi n} = 0$ ,  $c_{\psi n} = c_{wn}$ ,  $d_{\psi n} = d_{wn}$ .

Charakterystyki probabilistyczne funkcji przemieszczeń belki są następnie wyznaczone według następującego algorytmu:

- obliczane są pochodne funkcji (7.26) i (7.27) z wykorzystaniem wzorów (7.16) i (7.17),
- na podstawie obliczonych pochodnych wyznaczamy wartości oczekiwane i wariancje ze wzorów (7.6) i (7.7) lub z dokładniejszych wzorów (7.8) i (7.9), ewentualnie dla zmiennej o rozkładzie normalnym ze wzoru (7.10).

Z analogii układu równań (7.1), (7.1.2) z układem równań (6.1.23), (6.1.24) dla belki dwuwarstwowej z podatnym połączeniem wynika, że podane rozwiązania ze względu na losowość modułu Kirchhoffa mogą być wykorzystane przy analizie tej drugiej belki ze względu na losowość modułu połączenia  $k_s$ .

## 7.2. Praktyczne zastosowanie problematyki niezawodności przy projektowaniu belki trójwarstwowej

W przykładzie obliczeniowym pokazano praktyczne zastosowanie rozważań, zawartych w Rozdziale 7.1. Założono belkę jak na rysunku (3.1.2) obciążoną siłami skupionymi o wartości 5000 [N]. Parametry wytrzymałościowe materiałów składowych przyjęto tak jak przedstawiono w Rozdziale 3. Założono, że zmienną losową jest moduł Kirchhoffa rdzenia poliuretanowego, którego wartość średnią przyjęto równą  $\bar{G}_c = E[G_c] = 1,985 \cdot 10^6 Pa$ .

Postawiono pytanie, w jaki sposób losowość modułu Kirchhoffa pianki rdzenia wpływa na wartość współczynnika zmienności ugięcia belki w środku jej rozpiętości?

Na podstawie równania (7.24) wyznaczono wartość pierwszej pochodnej funkcji przemieszczenia po zmiennej  $\bar{G}_c$ . Obliczenia wykonano w programie Maxima 15.08.2.

Wariancja funkcji przemieszczenia osiągnęła wartość  $\sigma_w^2 = 2.068 \cdot 10^{-6} [m^2]$ .

Na jej podstawie możliwe było obliczenie odchylenia standardowego funkcji przemieszczenia, które uzyskało wartość:

$$\sigma_w = \sqrt{\sigma_w^2} = \sqrt{2.068 \cdot 10^{-6} [m^2]} = 0.00143 [m]$$

W dalszej kolejności, na podstawie równania (7.22) konieczne było obliczenie średniej wartości przemieszczenia osi belki  $m_w$ . Natomiast wartość średnia przemieszczenia pionowego traktowana była tu jako wartość oczekiwana, czyli  $m_w = E[w]$ . Obliczenie szeregu z równania (7.22) także przeprowadzono w programie Maxima. Przy założonym obciążeniu w postaci dwóch sił skupionych o wartości 5000 [N] wielkość przemieszczenia była równa 0.03211[m].

Zatem współczynnik zmienności przemieszczenia pionowego belki trójwarstwowej wynosił:

$$V_w = \frac{\sigma_w}{m_w} = 0.04478.$$

Współczynnik zmienności dla materiału rdzenia, obliczony według procedur w Rozdziale 3, był równy:

$$V_G = 0,100.$$

Z powyższego wynika, że współczynnik zmienności ugięcia belki w środku jej rozpiętości jest mniejszy od współczynnika zmienności dla materiału rdzenia. Oznacza to, że dla rozpatrywanego elementu wpływ losowości modułu Kirchhoffa rdzenia na ugięcie belki nie jest istotny.

## 8. Niezawodność belki sandwiczowej

### 8.1. Wprowadzenie

Projektując konstrukcję przyjmuje się, że różne jej parametry i działające na nią obciążenia są jednoznacznie określone, zdeterminowane. W rzeczywistości zarówno wymiary elementów konstrukcji i budowli, własności mechaniczne i fizyczne zastosowanych materiałów a także działające na nią obciążenia często znacznie się różnią od założonych wielkości i obarczone są dużą niepewnością i niejednoznacznością. W większym lub mniejszym stopniu mają one zmienny, mówimy losowy charakter. Dotyczy to także belek sandwiczowych, które mają dość złożony charakter i zbudowane są z różnych materiałów, których cechy mechaniczne mogą mieć charakter losowy a także mogą wystąpić różne mechanizmy ich zniszczenia. Najpełniejszą miarą niezawodności konstrukcji jest wyznaczenie prawdopodobieństwa, że nie ulegnie ona awarii  $p_r$  a stąd prawdopodobieństwo awarii  $p_f = 1 - p_r$ . Wyznaczenie tych wielkości wymaga znajomości funkcji gęstości prawdopodobieństwa (dystrybuant) obciążeń i parametrów konstrukcji opisujących rozkład prawdopodobieństwa tych wielkości. Często nie dysponuje się pełnymi rozkładami prawdopodobieństwa tylko takimi wielkościami jak wartości średnie i wariancje zmiennych losowych. Wielkości te można wykorzystać do określenia prostej charakterystyki niezawodności, jakim jest wskaźnik (indeks) niezawodności. W niniejszej pracy użyty będzie do oceny niezawodności prosty wskaźnik (indeks) niezawodności zwany także indeksem Cornella  $\beta_c$  nazwany tak od nazwiska autora tego wskaźnika. Warto przypomnieć, że podobny wskaźnik zaproponował Rżanicyn około 20 lat wcześniej.

### 8.2. Prosty wskaźnik niezawodności. Indeks Cornella

Zanim rozpatrzmy niezawodność belki sandwiczowej rozpatrzmy niezawodność elementu, którego nośność oznaczymy przez  $R$  a działające obciążenie w bazie nośności oznaczymy przez  $S$ . Przyjmijmy, że wielkości  $R$  i  $S$  są wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym wielkości  $m_R$  i  $m_S$  oraz  $\sigma_R^2$  i  $\sigma_S^2$  oznaczają wartości oczekiwane i wariancje odpowiednich zmiennych losowych. Przypomnijmy, że dla zmiennej losowej  $X$  przez wartość oczekiwaną i jej wariancję rozumiemy wielkości

$$E[X] = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, \quad (8.2.1)$$

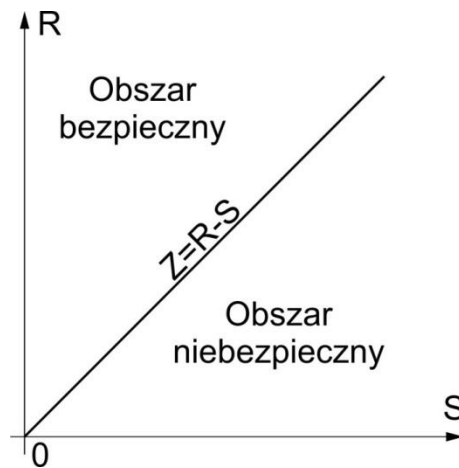
$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E^2[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx, \quad (8.2.2)$$

Gdzie symbol  $E[*]$  oznacza wartość oczekiwaną a  $f_X(x)$  funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$ .

Niech funkcja  $Z$  oznacza zapas bezpieczeństwa, a więc ma postać

$$Z = R - S \quad (8.2.3)$$

Zauważmy, że gdy  $Z > 0$  to konstrukcja jest bezpieczna, natomiast gdy  $Z < 0$  to ulega ona awarii. Stan graniczny jest wówczas, gdy spełniona zostaje równość  $Z = R - S = 0$  co pokazano na rysunku (6.2.1)



**Rysunek 8.2.1** Zakres obszaru bezpiecznego i niebezpiecznego oraz stan graniczny funkcjonowania konstrukcji

Wartość oczekiwaną i wariancję zapasu  $Z$  określają zależności:

$$m_Z = m_R - m_S \quad (8.2.4)$$

oraz

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \quad (8.2.5)$$

Niech zmienne losowe  $R$  i  $S$  mają rozkład normalny stąd zmienna  $Z$  ma także rozkład normalny o wartości oczekiwanej  $m_Z$  (8.2.4) i wariancji  $\sigma_Z^2$  (8.2.5). Prosty wskaźnik (indeks) niezawodności  $\beta_C$  definiuje się jako odwrotność współczynnika zmienności zapasu bezpieczeństwa, a więc

$$\beta_C = \frac{m_Z}{\sigma_Z} = \frac{1}{V_z} = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (8.2.6)$$

Gdy zmienna losowa  $Z$  ma rozkład normalny wówczas:

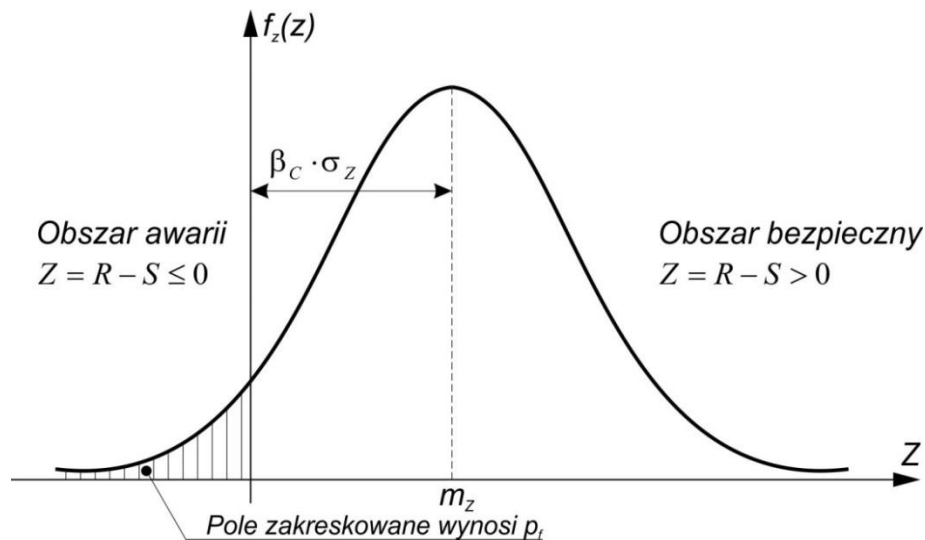
$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = \Phi\left(\frac{z - m_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi\left(\frac{z}{\sigma_Z} - \beta_C\right) \quad (8.2.7)$$

przy czym symbolem  $\Phi(\cdot)$  oznaczono dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

Konstrukcja ulegnie awarii, gdy  $R \leq S (Z \leq 0)$  a więc prawdopodobieństwo awarii  $p_f$  dla zmiennych o rozkładzie normalnym jest równe:

$$p_f = P\{R - S \leq 0\} = P\{Z \leq 0\} = \Phi(-\beta_C) \quad (8.2.8)$$

Na rysunku (8.2.2) przedstawiono funkcję gęstości prawdopodobieństwa  $f_Z$  zapasu bezpieczeństwa  $Z$ :



Rysunek 8.2.2 Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zapasu bezpieczeństwa  $Z$

Wskaźnik niezawodności [59-65] zdefiniowany wzorem (8.2.6) może też być wykorzystany w analizie układów, dla których nie są znane rozkłady prawdopodobieństwa nośności i obciążenia lub są inne niż rozkłady normalne. Wskaźnik niezawodności  $\beta_C$  jest definiowany na poziomie dwóch pierwszych momentów probabilistycznych. W przypadku, gdy rzeczywiste rozkłady prawdopodobieństwa są różne od rozkładu normalnego wówczas prawdopodobieństwo awarii może znacznie odbiegać od określonego wzorem (8.2.8).

### 8.3. Metoda niezawodności momentów pierwszego i drugiego rzędu (FORM). Indeks Hasofer-Linda

Wprowadźmy nowe zmienne standaryzowane

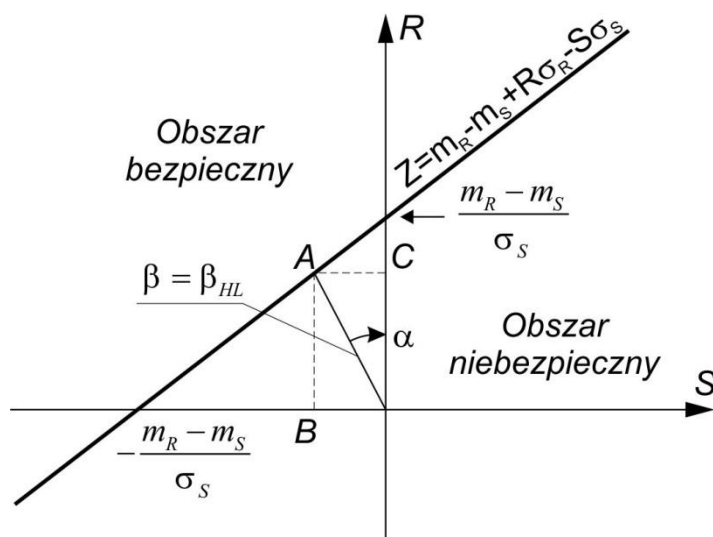
$$r = \frac{R - m_R}{\sigma_R}, \quad s = \frac{S - m_S}{\sigma_S}, \quad (8.3.1)$$

przy czym:  $E[r] = 0$ ,  $E[s] = 0$ ,  $\sigma_r^2 = 1$ ,  $\sigma_s^2 = 1$ .

Podstawiając (8.3.1) do warunku (8.2.3) otrzymuje się warunek graniczny w bazie zmiennych standaryzowanych:

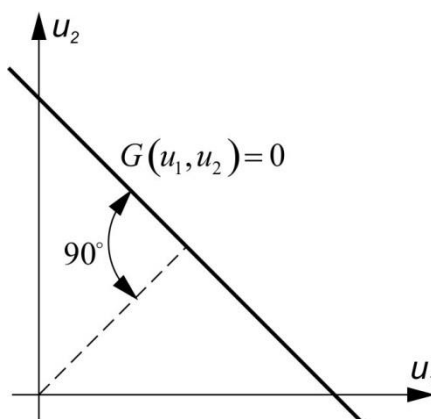
$$Z' = (m_R - m_S) + r\sigma_R - s\sigma_S = 0 \quad (8.3.2)$$

Fakt pokazano na rysunku (8.3.1).



**Rysunek 8.3.1** Granica obszaru bezpiecznego i obszaru niebezpiecznego. S oznacza tu wielkość obciążenia, R jest nośnością układu

Jak zostanie pokazane poniżej dla wielu zmiennych [11], [13], [66], [79], [84], [100], [105], [106], [109], [114], [128], [142], [150] wskaźnik niezawodności Cornella (8.2.6), (8.2.13) jest najkrótszą odległością początku układu od prostej  $Z'=0$  (rys. (8.3.1)). W tym przypadku wskaźnik niezawodności nazywamy wskaźnikiem niezawodności lub wskaźnikiem (indeksem) niezawodności Hasofera-Linda i oznaczać będziemy  $\beta$  lub  $\beta_{H-L}$ .

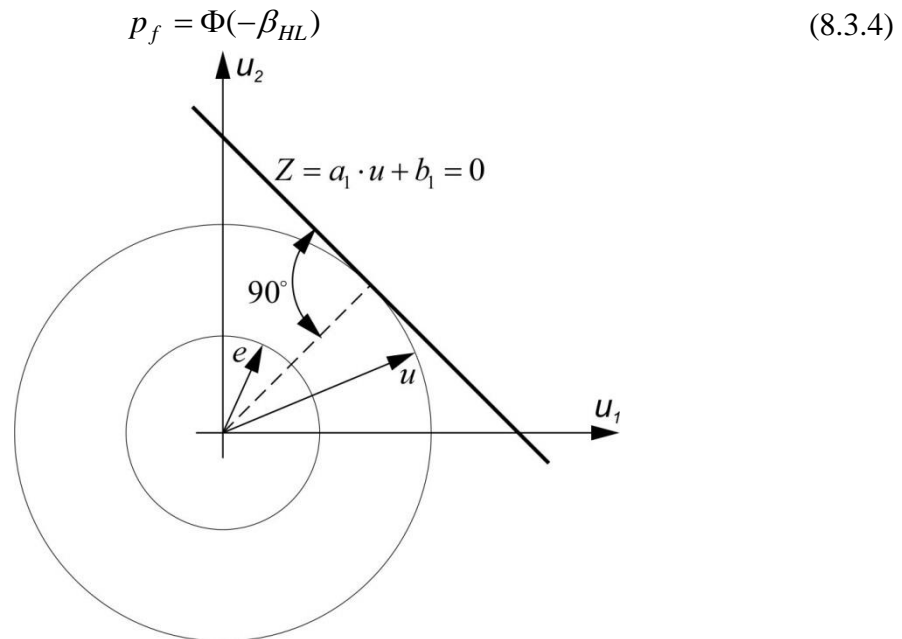


**Rysunek 8.3.2**

Wykażemy, że indeks  $\beta = \beta_{H-L}$  jest rzeczywiście najkrótszą odległością hiperpłaszczyzny  $G(\mathbf{u}) = 0$  od początku układu. Jak wiadomo z geometrii wektor jednostkowy prostopadły do płaszczyzny  $Z = \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{u} + b_1$  ma składowe  $\mathbf{e} = \frac{-\mathbf{a}_1}{\sqrt{\mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{a}_1}}$ . Rozpatrzmy wektor, którego początkiem jest początek układu współrzędnych 0, a koniec leży na płaszczyźnie  $Z = \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{u} + b_1 = 0$ . Iloczyn skalarny wektora jednostkowego  $\mathbf{e}$  i wektora  $\mathbf{u}$  jest równy

$$\frac{-\mathbf{a}_1}{\sqrt{\mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{a}_1}} \cdot \mathbf{u} = \frac{b_1}{\sqrt{\mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{a}_1}} = \beta \quad (8.3.3)$$

Prawdopodobieństwo awarii określone jest wzorem



Rysunek 8.3.3

Powyższa interpretacja indeksu niezawodności,  $\beta$  jako odległości początku układu współrzędnych od powierzchni granicznej w bazie standaryzowanych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, została wykorzystana w metodach FORM (First Order Reliability Method) i SORM (Second Order Reliability Method)[100, 109].

#### 8.4. Niezawodność belki sandwiczowej

Belki sandwiczowe mają bardziej złożoną budowę niż belki zbudowane z jednego materiału. Stąd w tym przypadku są możliwe różne mechanizmy ich zniszczenia i uszkodzenia [21, 93, 103, 113, 117, 123, 130, 132, 139, 146-159]. W pracy [149] wymieniono następujące mechanizmy zniszczenia:

- uplastycznienie lub kruche pęknięcie okładziny przy zginaniu,
- zniszczenie materiału rdzenia na skutek ścinania,
- marszczenie (wyboczenie) okładziny przy zginaniu i/lub ściskaniu,
- wyboczenie elementu przy ściskaniu,
- przesunięcie jednej części względem drugiej części elementu, prostopadle do jego osi podłużnej, przy jednoczesnym uszkodzeniu rdzenia,
- marszczenie (wyboczenie) obu powierzchni okładzin przy ściskaniu,
- lokalne wgniecenie materiału okładziny pod działaniem siły skupionej.

Z przeprowadzonych badań przedstawionych w rozdziale 3 belki sandwiczowej zbudowanej z dwóch belek drewnianych o względnie dużych wysokościach w porównaniu z całą belką wynika, że dominujące są trzy mechanizmy uszkodzenia (zniszczenia) takiej belki. Są to przekroczenie nośności belki ze względu na naprężenia normalne w nakładkach, naprężenia ścinające w rdzeniu lub naprężenia w miejscu połączenia rdzenia z nakładką w przekrojach, w których obciążenie wywołuje efekt ekstremalny. Projektując belkę sandwiczową może się okazać, że jeden z mechanizmów zniszczenia belki jest dominujący. Zastosowanie teorii niezawodności pozwala na bardziej racjonalne projektowanie belki. Racjonalne projektowanie



belki polega na takim doborze jej parametrów, aby indeksy niezawodności belki ze względu na dominujące mechanizmy zniszczenia były zbliżone.

Oznaczmy przez  $R$  nośność belki ze względu na jedno z wyżej wymienionych naprężeń (naprężenie normalne w nakładce, naprężenie ścinające w rdzeniu lub naprężenie ścinające w połączeniu nakładki z rdzeniem). Przyjmijmy, że nośność ta jest losowa i znana jest jej wartość oczekiwana  $E[R]=m_R$  i wariancja  $\sigma_R^2 = m_R^2 v_R^2$  przy czym symbol  $v_R$  oznacza współczynnik zmienności tej nośności. Wartość charakterystyczną nośności  $R_k$  wyznacza się ze wzoru

$$R_k = m_R - k_R \sigma_R = m_R (1 - k_R v_R). \quad (8.4.1)$$

Wielkość  $k_R$  wyznacza się przyjmując, że wartość charakterystyczna nośności jest 0,05 kwantylem rozkładu nośności. Dla rozkładu normalnego mamy  $k_R = 1,645$ .

W przypadku ustalania danych projektowych na podstawie prób wówczas stała  $k_R$  dla przyjętego rozkładu normalnego zależy od liczebności próby  $n$  i przyjmuje wartości podane w poniższej tabelce (litera  $t$  oznacza  $k_R$ ):

**Tabela 8.4.1** Wartość argumentu rozkładu  $t$  w zależności od próby  $n$

n	4	5	6	8	10	20	30	$\infty$
t	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

Wartość obliczeniową wyznacza się ze wzoru

$$R_d = \frac{R_k}{\gamma_m} = \frac{1}{\gamma_m} (m_R - k_R v_R), \quad (8.4.2)$$

gdzie symbol  $\gamma_m > 1$  oznacza współczynnik bezpieczeństwa.

Oznaczmy przez  $S$  efekt działania w miejscu wielkości  $R$  wywołany obciążeniem  $P$ , które przyjmujemy, że jest zmienną losową o znanej wartości oczekiwanej  $E[P]=m_P$  i wariancji  $\sigma_P^2 = m_P^2 v_P^2$ .

Wyznamy wartość charakterystyczną  $P_k$  obciążenia. Wielkość tę wyznaczamy ze wzoru:

$$P_k = m_P + k_P \sigma_P = m_P (1 + k_P v_P) \quad (8.4.3)$$

przy czym przyjmuje się, że wartość charakterystyczna obciążenia jest 0,95 kwantylem.

W przypadku, gdy obciążenie ma rozkład normalny wówczas wskaźnik tolerancji obciążenia wynosi  $k_P = 1,645$  i wartość charakterystyczną określa wzór:

$$P_k = m_P (1 + 1,645 v_P) \quad (8.4.4)$$

Wartość obliczeniową obciążenia  $P_d$  wyznacza się mnożąc przez odpowiedni współczynnik bezpieczeństwa:

$$P_d = \gamma_f P_k \quad (8.4.5)$$

Efekt obliczeniowy  $S_d$  wyznaczamy ze wzoru:

$$S_d = P_d H_{p=1}^S, \quad (8.4.6)$$

gdzie symbolem  $H_{p=1}^S$  oznaczono wielkość  $S$  wywołaną siłą  $P=1$ .

Wskaźnik niezawodności przy powyższych oznaczeniach jest równy

$$\beta = \frac{m_R - m_P H_{P=1}^S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_P^2 (H_{P=1}^S)^2}} \quad (8.4.7)$$

Projektując konstrukcję powinien być spełniony warunek  $R_d \geq S_d$ . Wyznamy indeks niezawodności gdy stanem granicznym jest równość wartości obliczeniowych nośności i efektu obciążenia  $R_d = S_d$ .

Z równania stanu granicznego określonego wzorem:

$$R_d = S_d = \frac{1}{\gamma_m} m_R (1 - k_R v_R) = \gamma_f m_P H_{P=1}^S (1 + k_P v_P) \quad (8.4.8)$$

Wyznamy wielkość:

$$m_P H_{P=1}^S = \frac{1}{\gamma_m \gamma_f} \frac{m_R (1 - k_R v_R)}{1 + k_P v_P} \quad (8.4.9)$$

i po podstawieniu do wzoru (8.4.7) otrzymuje się wskaźnik niezawodności w postaci

$$\beta^d = \frac{\gamma_f (1 + k_P v_P) - \frac{1 - k_R v_R}{\gamma_m}}{\sqrt{\gamma_m^2 v_R^2 (1 + k_P v_P)^2 + \frac{v_P^2 (1 - k_R v_R)^2}{\gamma_f^2}}} \quad (8.4.10)$$

Można zauważyć, że w rozpatrywanym przypadku wskaźnik niezawodności jest funkcją tylko współczynników zmienności nośności i obciążenia.

## 8.5. Praktyczne zastosowanie problematyki niezawodności przy projektowaniu belki trójwarstwowej

Rozpatrzono belkę sandwiczową o wymiarach i obciążeniu, dla której przeprowadzono badania (rozdział 3). Analizę statyczną belki wykonano według modelu Zig-Zag (rozdział 4). Wyznaczony został współczynnik niezawodności Cornella ze względu na maksymalne naprężenia normalne w nakładkach i drugi współczynnik niezawodności ze względu na maksymalne naprężenia ścinające w rdzeniu. Istotny jest fakt, że badane belki uległy zniszczeniu właśnie poprzez zniszczenie rdzenia.

W pierwszej kolejności obliczono współczynnik niezawodności ze względu na maksymalne naprężenia normalne w nakładkach. Przyjęto następujące założenia:

- obie siły skupione są sobie równe i są losowe,
- wartość oczekiwana (średnia) i współczynnik zmienności dla obciążenia siłami skupionymi wynoszą:  $E[P] = m_p = 8 \cdot 10^3 \text{ N}$ ,
- współczynnik zmienności przyjęto  $v_p = 0.3$ .

Maksymalne naprężenie w nakładce wywołane siłą jednostkową obliczonych ze wzorów przedstawionych w Rozdziale 4 wynosi:  $S_{P=1} = 2300 \frac{1}{m^2}$

Zwraca się uwagę, że obliczone naprężenia normalne w nakładkach wywołane są momentem zginającym i siłą osiową.

Wartość średnia maksymalnego naprężenia normalnego wywołane obciążeniem wynosi:

$$E[S] = m_s = 2300 \frac{1}{m^2} \cdot 8 \cdot 10^3 \text{ N} = 18,4 \cdot 10^6 \text{ Pa}.$$

Odchylenie standardowe naprężeń wywołane obciążeniem dla przyjętych danych wynosi:

$$\sigma_s = m_s v_s = 18,3 \cdot 0,3 \cdot 10^6 Pa = 5,52 \cdot 10^6 Pa.$$

Stąd wariancja maksymalnych naprężeń normalnych w belce dla przyjętego obciążenia jest równa:

$$\sigma_s^2 = 5,52^2 \cdot 10^{12} (Pa)^2 = 30,47 \cdot 10^{12} (Pa)^2.$$

Z przeprowadzonych badań wynika, że średnia wytrzymałość (nośność) drewna ze względu na naprężenia normalne i współczynnik zmienności odpowiednio wynoszą:

$$E[R] = m_R = 52,21 \cdot 10^6 Pa, \quad v_R = 0,0833.$$

Na podstawie dotychczasowych obliczeń otrzymano odchylenie standardowe i wariancję nośności belki:

$$\sigma_R = m_R v_R = 52,21 \cdot 10^6 \cdot 0,0833 Pa = 4,35 \cdot 10^6 Pa,$$

$$\sigma_R^2 = (4,35)^2 \cdot 10^{12} (Pa)^2 = 18,9225 \cdot 10^{12} (Pa)^2.$$

Wyznaczone powyżej wielkości pozwalają określić współczynnik niezawodności ze względu na maksymalne naprężenia normalne w nakładkach. Jego wartość jest równa:

$$\beta = \frac{m_R - m_s}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_s^2}} = \frac{(52,21 - 18,4) \cdot 10^6}{10^6 \sqrt{18,9225 + 30,47}} = 4,81.$$

Uważa się, że prawidłowo zaprojektowana konstrukcja powinna mieć współczynnik niezawodności większy niż 3,8.

Przyjmując założenie, że wszystkie zmienne mają rozkład normalny można określić prawdopodobieństwo awarii, które w rozpatrywanym przypadku jest bardzo niskie:

$$p_f = \Phi(-4,81) \cong 3 \cdot 10^{-7}.$$

Przedstawiona procedura powtórzona zostanie do obliczeń współczynnika niezawodności oraz prawdopodobieństwa awarii ze względu na maksymalne naprężenia ścinające w rdzeniu.

Wartość średnia maksymalnego naprężenia ścinającego w rdzeniu wywołane obciążeniem wynosi

$$S_{p=1} = 9,81 \cdot \frac{1}{m^2}$$

$$E[S] = m_s = 9,81 \cdot \frac{1}{m^2} \cdot 8 \cdot 10^3 N = 78,48 \cdot 10^3 Pa.$$

Odchylenie standardowe naprężeń stycznych wywołane obciążeniem dla przyjętych danych wynosi:

$$\sigma_s = m_s v_s = 78,48 \cdot 0,3 \cdot 10^3 Pa = 23,54 \cdot 10^3 Pa.$$

Stąd wariancja maksymalnych naprężeń stycznych w rdzeniu dla przyjętego obciążenia jest równa:

$$\sigma_s^2 = 23,54^2 \cdot 10^6 Pa^2 = 5,54 \cdot 10^8 Pa^2.$$

Z przeprowadzonych badań wynika, że średnia wytrzymałość (nośność) na ścinanie rdzenia i współczynnik zmienności odpowiednio wynoszą:

$$E[R] = m_R = 99 \cdot 10^3 Pa, \quad v_R = 0,15.$$

Na podstawie dotychczasowych obliczeń otrzymuje się odchylenie standardowe i wariancję nośności belki:

$$\sigma_R = m_R v_R = 99 \cdot 10^3 \cdot 0,15 Pa = 14,85 \cdot 10^3 Pa,$$

$$\sigma_R^2 = 14,85^2 \cdot 10^3 Pa^2 = 220,52 \cdot 10^6 Pa^2.$$

Wyznaczone powyżej wielkości pozwalają określić wartość współczynnika niezawodności ze względu na maksymalne naprężenia styczne w rdzeniu:

$$\beta = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{(99 - 78,48) \cdot 10^3}{10^3 \sqrt{220,52 + 554}} = 0,736.$$

Prawdopodobieństwo awarii wynosi:

$$p_f = \Phi(-0,736) \cong 0,23$$

Takie prawdopodobieństwo awarii jest niedopuszczalne, gdyż prawie co czwarta belka ulega awarii.

Na podstawie przedstawionego przykładu pokazano, że wykorzystując elementy teorii niezawodności można bardziej racjonalnie projektować belki o złożonej strukturze. Analizowana belka spełnia warunki niezawodności ze względu na naprężenia normalne natomiast ze względu na naprężenia styczne w rdzeniu jej niezawodność jest bardzo niska. Potwierdziły to przedstawione wcześniej badania, gdyż wszystkie badane belki uległy zniszczeniu poprzez awarię rdzenia.

## 9. Wnioski końcowe

Doświadczalno-teoretyczny charakter przedmiotowej rozprawy doktorskiej był uznawany za dający możliwości pełniejszego rozpatrzenia problematyki konstrukcji warstwowych w porównaniu do prac czysto teoretycznych. Przegląd literaturowy w zakresie wykonany przez autora pokazał, że trudno o odnalezienie opracowań w tematyce belek warstwowych, w których kompleksowo pokazano by zmagania z problemami związanymi z metodyką prowadzenia badań doświadczalnych, oznaczania wartości parametrów wytrzymałościowych materiałów konstrukcyjnych lub tworzenia poprawnych modeli tych konstrukcji.

Stwierdzono, że publikacje naukowe zazwyczaj pomijają któryś z przedstawionych aspektów bądź prezentują go w sposób uproszczony. Wiele z przytoczonych publikacji na przykład pomijało problem wyboru procedur oznaczania średnich wartości cech danego materiału składowego, podczas gdy w tej rozprawie doktorskiej problem oznaczania wytrzymałości pianki poliuretanowej rdzenia na ścinanie, a także modułu sprężystości poprzecznej, okazały się pewnymi trudnościami zarówno teoretycznymi jak i praktycznymi. Ze względu na ograniczone środki finansowe i brak wyposażenia Laboratorium Technologii Betonów i Wytrzymałości Materiałów w urządzenia do oznaczania parametrów wytrzymałościowych pianek poliuretanowych, na podstawie przeprowadzonego przeglądu literaturowego oraz norm, zdecydowano o wykonaniu własnych chwyteków umożliwiających prowadzenie oznaczeń. Dokumentacje urządzeń do oznaczenia wytrzymałości na ścinanie oraz modułu sprężystości poprzecznej oraz urządzenia do oznaczania wytrzymałości oraz modułu sprężystości przy rozciąganiu przedstawiają odpowiednio załączniki 1 i 2.

Żadna z przeanalizowanych publikacji nie poruszała praktycznego problemu wykonania połączenia klejonego (lub innego właściwego) między kolejnymi warstwami omawianych elementów sandwichowych. Doświadczenia własne autora wskazywały natomiast, że jakość wykonania prac montażowych wpływała na trwałość i nośność belek trójwarstwowych. Ponieważ przytoczone w rozdziale 1 publikacje opisywały prace laboratoryjne prowadzone bądź na gotowych płytach warstwowych produkowanych taśmowo lub małych elementach warstwowych z tworzyw sztucznych, ich autorzy nie komentowali problemu spajania ze sobą pojedynczych części. Natomiast w przypadku badań doświadczalnych, prowadzonych przez autora na elementach o znacznie większych gabarytach, kwestia stabilizowania elementu w czasie wiązania kleju była jedną z kluczowych i mających wpływ na powtarzalność otrzymanych rezultatów (zagadnienie omówione szerzej w rozdziale 3.2).

Dla celów tej rozprawy doktorskiej przyjęto, że w konstrukcji belek trójwarstwowych wykorzystane będą trzy różne materiały składowe: drewniane okładziny, rdzeń z pianki poliuretanowej oraz warstwa łącząca z kleju poliuretanowego. Taki układ warstw o odmiennych właściwościach mechanicznych generuje wielokierunkową problematykę w zakresie optymalizacji modelowania wyężenia i przemieszczenia belki. W rozprawie dokonano przeglądu i analizę kilku modeli teoretycznych jednoprzęsłowych elementów trójwarstwowych obciążonych statycznie obciążeniem równomiernym i siłami skupionymi. Dla każdego modelu przedstawiono rozwiązania w postaci układów równań różniczkowych oraz ich rozwiązania w postaci szeregów przy wykorzystaniu skończonej sinusowej lub kosinusowej transformacji Fouriera.

W pierwszym modelu potraktowano element sandwichowy jako standardową belkę Eulera-Bernoullego. Wyprowadzono równanie przemieszczenia pionowego belki przy obciążeniu

równomiernym o dowolnym położeniu oraz siłą skupioną o dowolnym położeniu. Porównanie pomiarów przemieszczeń oraz odkształceń (a tym samym naprężeń) wykonanych w trakcie badań niszczących wartościami z rozważań teoretycznych jednoznacznie wskazuje, że belka trójwarstwowa nie może być opisywana modelem belki Eulera-Bernoulliego.

Kolejny model teoretyczny przeanalizowany w rozprawie to klasyczny model Zig-Zag wykorzystywany do opisu wyteżenia i przemieszczenia układów trójwarstwowych. Wyprowadzono układ równań opisujący stan przemieszczenia belki trójwarstwowej w oparciu o wartość przemieszczenia pionowego oraz kąt wzajemnego przesunięcia nakładek. Zestawienie wartości przemieszczeń pionowych oraz naprężeń w drewnianych okładzinach wykazała, że ten model symuluje przemieszczenie elementu trójwarstwowego z większą dokładnością. Największe różnice w przemieszczeniu pionowym między pomiarem doświadczalnym a wynikiem teoretycznym zaobserwowano przy ugięciu równym 45 mm. Również rozkład naprężeń obliczonych na podstawie odkształceń tensometrów odbiega od rezultatów teoretycznych, co skomentowano w podrozdziale 5.2.

Jednym ze źródeł rozbieżności między rezultatami z badań doświadczalnych i obliczeń teoretycznych może być fakt, że model teoretyczny opisuje przemieszczenie osi belki położonej w środku wysokości przekroju poprzecznego i podpartej przegubowo na jej końcach. W rzeczywistości jednak, w sytuacji laboratoryjnej, podpierano pas dolny belki, nie zaś jej oś. W rezultacie, w grupie rysunków (5.2.1) – (5.2.8) ujawniły się różnice między rzeczywistą a teoretyczną osią belki. Widać na nich, że oś belki doznaje przemieszczenia w przekrojach podporowych, natomiast w przypadku modelu teoretycznego zakłada się przemieszczenie zerowe.

Rozwinięcie modelu Zig-Zag, stanowiące istotny wkład własny i stanowiący oryginalny element tej pracy, to zaproponowany trzeci już model teoretyczny, uwzględniający ścinanie w nakładkach drewnianych. Problem wpływu ścinania został uwzględniony na etapie badań doświadczalnych poprzez skonstruowanie serii belek o proporcjach rozpiętości teoretycznej przeseł do wysokości przekroju poprzecznego równych  $\sim 6,92$ , czyli takiej, przy której wpływ ten może się ujawnić.

Zaprezentowano wyprowadzenie układu trzech równań w oparciu o trzy niewiadome opisujące stan przemieszczenia belki. Rozwiązanie układu przedstawiono w postaci szeregów, w które rozwinięto funkcję opisującą stan przemieszczeń pionowych, kąt obrotu nakładek (uwzględniający wpływ ścinania) oraz kąt wzajemnego przesunięcia nakładek. Pokazano także równania dla sił wewnętrznych oraz naprężeń w pasach belki. Z rysunków (5.3.1) – (5.3.8) można wnioskować, że dla fazy sprężystej pracy belki (kończącej się dla przemieszczenia pasa dolnego równego około 35 mm) różnice między przemieszczeniem teoretycznej osi belki oraz osi rzeczywistej kształtowały się na poziomie kilkunastu procent. Przy większych obciążeniach (rysunki 5.3.6 – 5.3.8) te różnice wzrastały do poziomu nawet 45 procent. Jednocześnie model teoretyczny daje przemieszczenia mniejsze od obserwowanych. Również w tym przypadku ujawnia się, nieuwzględniony w modelu, fakt przemieszczenia osi belki w przekrojach podporowych.

Czwarty zaproponowany model teoretyczny sformułowano na podstawie obserwacji poczynionych w trakcie badań doświadczalnych, z których wynikało, że po przyłożeniu obciążenia do górnej okładziny następuje ściskanie rdzenia z pianki poliuretanowej. Zbudowano więc dwa modele traktujące belkę sandwichową jako układ dwóch warstw połączonych ze sobą dwuparametrowym podłożem sprężystym. W pierwszym wariantcie założono podparcie tylko

pasa dolnego belki (co jest odzwierciedleniem warunków rzeczywistych podczas badań doświadczalnych) w drugim zaś założone podparcie obu okładzin. Rozwiązanie zaprezentowano w postaci układu równań rozwiązane metodą różnic skończonych. Obliczenia przemieszczeń dla przyjętych obciążeń, wykonane w programie SciLab wykazały znaczne różnice między rezultatami teoretycznymi i wynikami z badań doświadczalnych. Nie mniej jednak autor proponuje nie odrzucać definitywnie tej propozycji jako bezwartościowej, lecz sugeruje jego dalszą optymalizację.

W dalszej części rozprawy podjęto się analizy problemu poślizgu w połączeniach podatnych między warstwami składowymi belek sandwichowych. Problem ten opisany został dla dwóch przypadków: belki dwu- trójwarstwowej. W przypadku belki dwuwarstwowej omówiono wpływ podatności połączenia na przemieszczenie pionowe elementu oraz wielkość wzajemnego przesunięcia (poślizgu) warstw składowych. Problematyka ta nie była prezentowana w szerokim zakresie w literaturze tematu, a może stanowić istotny element w opisie stanu przemieszczenia i wyężenia belek trójwarstwowych pod obciążeniem statycznym.

Istotnym osiągnięciem autora jest przestudiowanie problemu poślizgu dla belki trójwarstwowej. W rozdziale 6.2 zaprezentowano rozwiązanie teoretyczne uwzględniające funkcję opisującą przemieszczenie pionowe oraz poślizg obu warstw zewnętrznych.

Omówienie tej problematyki wzajemnego poślizgu warstw zakończono przykładami obliczeniowymi dla kilku wybranych podatności połączenia  $k_s$ .

W rozdziale 7 zaprezentowano probabilistyczną analizę stanu przemieszczenia belki sandwichowej w oparciu o model Zig-Zag. Może ona znaleźć praktyczne zastosowanie w sytuacji, kiedy jeden lub kilka parametrów materiałów składowych belek ma charakter losowy. W rozprawie problem ten omówiono dla założenia, że moduł Kirchhoffa materiału rdzenia jest wielkością losową. Przeprowadzono wywód zakończony wyprowadzeniem równań, pozwalających na określenie wpływu losowości wybranego parametru na wielkość przemieszczenia pionowego belki trójwarstwowej. Oceny tej dokonuje się poprzez porównanie współczynników zmienności dla analizowanej funkcji (tutaj: przemieszczenia) oraz współczynnika zmienności dla parametru losowego. Rozdział 7 opatrzone stosownym przykładem obliczeniowym.

Kwestia takiego projektowania zginanej konstrukcji warstwowej, aby prawdopodobieństwa wystąpienia różnego rodzaju awarii były do siebie zbliżone, było przedmiotem ostatniego, 8 rozdziału rozprawy. Omówiono problematykę niezawodności w odniesieniu do układów warstwowych.

W podrozdziale 8.5 zaprezentowano przykład rachunkowy wyjaśniający praktyczną stronę wykorzystania wskaźnika niezawodności do oceny bezpieczeństwa konstrukcji. Na podstawie danych o materiałach składowych zaczerpniętych z rozdziału 3 oraz analizach teoretycznych z rozdziału 4, poddano analizie wartość wskaźnika niezawodności ze względu dwa najbardziej prawdopodobne mechanizmy zniszczenia belki trójwarstwowej: zniszczenie drewnianych okładzin na skutek przekroczenia wytrzymałości na zginanie oraz ścięcia rdzenia. Obliczenia wykazały, że dla rozpatrywanego przypadku o wystąpieniu awarii decyduje przekroczenie maksymalnych naprężeń stycznych w poliuretanowym rdzeniu. Wskaźnik niezawodności osiągnął w tym wypadku tylko wartość 0,736 co przełożyło się na prawdopodobieństwo awarii równe około 0,23. Oznacza to, że kwestia właściwego kształtowania rdzenia ze względu na jego nośność na ścinanie jest zagadnieniem decydującym o niezawodności całego elementu.

Autor pragnie zwrócić uwagę, że każdy z przedstawionych modeli teoretycznych jest oparty o pewne ograniczenia w zakresie uwzględnianych procesów obserwowanych w trakcie eksperymentu laboratoryjnego. W praktyce jednocześnie występują zjawiska: ścinania rdzenia, wpływu ścinania w nakładkach na przemieszczenie pionowe elementu, ściskanie rdzenia czy wpływ podatności połączenia. Ściskanie rdzenia wywołuje ponadto nieliniowy przebieg krzywej relacji obciążenie-ugięcie dla badanej serii próbek. Oznacza to, że istnieje obszar do dalszej naukowej działalności badawczo-teoretycznej w zakresie optymalizacji analizowanych konstrukcji trójwarstwowych. Mógłby on dotyczyć uzupełnienia modelu Zig-Zag, uwzględniającego ścinanie w nakładkach, także o problematykę ściskania rdzenia oraz podatność połączenia międzywarstwowego. Należy też przypomnieć, że wszystkie założenia i obliczenia wykonane zostały jak dla materiałów pracujących sprężysto. Przedstawione w rozprawie rozważania wskazują jednak na nieliniową pracę konstrukcji z pianką poliuretanową w roli rdzenia, co także prowadzi do powstawania różnic między analizami teoretycznymi a badaniami laboratoryjnymi.



## Spis literatury

- [1] Awad Ziad K., Aravinthan T., Manalo A.: Geometry effect on the behaviour of single and glue-laminated glass fibre reinforced polymer composite sandwich beams loaded in four-point bending. *Materials and Design* 39, 2012, 93 – 103.
- [2] Baba B. O., Thoppul S.: Experimental evaluation of the vibration behavior of flat and curved sandwich composite beams with face/core debond. *Composite Structures* 91, 2009, 110 – 119.
- [3] Bae S. H., Cho J. R., Bae S. R., Jeong W. B.: A discrete convolutional Hilbert transform with the consistent imaginary initial conditions for the time-domain analysis of five-layered viscoelastic sandwich beam. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 268, 2014, 245 – 263.
- [4] Bai F., Davidson J.S.: Analysis of partially composite foam insulated concrete sandwich structures. *Engineering Structures* 91, 2015, 197 – 209.
- [5] Banerjee J. R., Cheung C. W., Morishima R., Perera M., Njuguna J.: Free vibration of a three-layered sandwich beam using the dynamic stiffness method and experiment. *International Journal of Solids and Structures* 44, 2007, 7543 – 7563.
- [6] Banerjee S., Bhattacharyya D.: Optimal design of sandwich panels made of wood veneer hollow cores. *Composites Science and Technology* 71, 2011, 425 – 432.
- [7] Barbieri N., Barbieri R., Winikes L.C.: Parameters estimation of sandwich beam model with rigid polyurethane foam core. *Mechanical Systems and Signal Processing* 24, 2010, 406 – 415.
- [8] Batista M. Sousa Jr. J., da Silva A.R.: Analytical and numerical analysis of multilayered beams with interlayer slip. *Engineering Structures* 32, 2010, 1671 – 1680.
- [9] Batista M. Sousa Jr. J.: Exact finite elements for multilayered composite beam-columns with partial interaction. *Computers and Structures* 123, 2013, 48 – 57.
- [10] Bekuita J.-J.R.B., Oguamanama D.C.D., Damisab O.: Aquasi-2D finite element formulation for the analysis of sandwich beams. *Finite Elements in Analysis and Design* 43, 2007, 1099 – 1107.
- [11] Benjamin J. R., Cornell C. A.: *Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*. W-T, Warszawa, 1977.
- [12] Bhimaraddi A.: Sandwich beam theory and the analysis of constrained layer damping. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 591 – 602.
- [13] Biegus A.: *Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych*. PWN, 1999.
- [14] Birsan M., Sadowski T., Marsavina L., Linul E., Pietras D.: Mechanical behavior of sandwich composite beams made of foams and functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures* 50, 2013, 519 – 530.
- [15] Bozhevolnaya E., Kildegaard A.: Experimental study of uniformly loaded curved sandwich beam. *Composite Structures* 40, 1998, 175 – 185.
- [16] Bozhevolnaya E., Lyckegaard A., Thomsen O.T.: Novel design of foam core junctions in sandwich panels. *Composites: Part B* 39, 2008, 185 – 190.
- [17] Bozhevolnaya E., Lyckegaard A.: Structurally graded core inserts in sandwich panels. *Composite Structures* 68, 2005, 23 – 29.
- [18] Bozhevolnaya E., Thomsen O. T.: Structurally graded core junctions in sandwich beams: quasi static loading conditions. *Composite Structures* 70, 2005, 1 – 11.
- [19] Bozhevolnaya E., Thybo Thomsen O.: Structurally graded core junctions in sandwich beams: fatigue loading conditions. *Composite Structures* 70, 2005, 12 – 23.
- [20] Campi F., Massabò R.: An analytical assessment of the influence of skin imperfections on the indentation collapse mechanism in composite sandwich beams. *Composite Structures* 94, 2011, 299 – 311.

- [21] Carlsson L.A., Kardomateas G.A.: *Structural and Failure Mechanics of Sandwich Composites*. Springer Science, 2011.
- [22] Challamel N., Girhammar U.A.: Lateral-torsional buckling of vertically layered composite beams with interlayer slip under uniform moment. *Engineering Structures* 34, 2012, 505 – 513.
- [23] Challamel N.: On lateral–torsional vibrations of elastic composite beams with interlayer slip. *Journal of Sound and Vibration* 325, 2009, 1012 – 1022.
- [24] Chen W.Q., Wu Y.F., Xu R.Q.: State space formulation for composite beam-columns with partial interaction. *Composites Science and Technology* 67, 2007, 2500 – 2512.
- [25] Chuda-Kowalska M.: *Metodyka eksperymentalnych badań trójwarstwowych płyt z cienkimi okładzinami*. Rozprawa doktorska zrealizowana pod opieką prof. dra hab. inż. Andrzeja Garsteckiego, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej. Poznań, 2013.
- [26] Conde Y., Pollien A., Mortensen A.: Functional grading of metal foam cores for yield-limited lightweight sandwich beams. *Scripta Materialia* 54, 2006, 539 – 543.
- [27] Cunningham P. R., White R. G.: A new measurement technique for the estimation of core shear strain in closed sandwich structures. *Composite Structures* 51, 2001, 319 – 334.
- [28] Damanpack A. R., Bodaghi M., Aghdam M.M., Shakeri M.: Active control of geometrically non-linear transient response of sandwich beams with a flexible core using piezoelectric patches. *Composite Structures* 100, 2013, 517 – 531.
- [29] Dariushi S., Sadighi M.: A new nonlinear high order theory for sandwich beams: An analytical and experimental investigation. *Composite Structures* 108, 2014, 779 – 788.
- [30] DaSilva A.R., Sousa Jr. J.B.M.: A family of interface elements for the analysis of composite beams with interlayer slip. *Finite Elements in Analysis and Design* 45, 2009, 305 – 314.
- [31] Davalos J. F., Qiao P., Ramayanam V., Shan L., Robinson J.: Torsion of honeycomb FRP sandwich beams with a sinusoidal core configuration. *Composite Structures* 88, 2009, 97 – 111.
- [32] Deshpande V. S., Fleck N. A.: Collapse of truss core sandwich beams in 3-point bending. *International Journal of Solids and Structures* 38, 2001, 6275 – 6305.
- [33] Duarte I., Vesenjak M., Krstulovic-Opara L.: Dynamic and quasi-static bending behaviour of thin-walled aluminium tubes filled with aluminium foam. *Composite Structures* 109, 2014, 48 – 56.
- [34] Ecsedi I., Baksa A.: Analytical solution for layered composite beams with partial shear interaction based on Timoshenko beam theory. *Engineering Structures* 115, 2016, 107 – 117.
- [35] Ecsedi I., Baksa A.: Static analysis of composite beams with weak shear connection. *Applied Mathematical Modelling* 35, 2011, 1739 – 1750.
- [36] Faella C., Martinelli E., Nigro E.: Steel-concrete composite beams in partial interaction: Closed-form “exact” expression of the stiffness matrix and the vector of equivalent nodal forces. *Engineering Structures* 32, 2010, 2744 – 2754.
- [37] Fengnian J., Hailong C., Long Z., Hualin F., Chuanguo C., Ning K.: Failure mechanisms of sandwich composites with orthotropic integrated woven corrugated cores: Experiments. *Composite Structures* 98, 2013, 53 – 58.
- [38] Foraboschi P.: Three-layered sandwich plate: Exact mathematical model. *Composites: Part B* 45, 2013, 1601 – 1612.
- [39] Girhammar U.A., Pan D.H., Gustafsson A.: Exact dynamic analysis of composite beams with partial interaction. *International Journal of Mechanical Sciences* 51, 2009, 565 – 582.
- [40] Girhammar U.A., Pan D.H.: Exact static analysis of partially composite beams and beam-columns. *International Journal of Mechanical Sciences* 49, 2007, 239 – 255.

- [41] Girhammar U.A.: A simplified analysis method for composite beams with interlayer slip. *International Journal of Mechanical Sciences* 51, 2009, 515 – 530.
- [42] Girhammar U.A.: Composite beam–columns with interlayer slip – Approximate analysis. *International Journal of Mechanical Sciences* 50, 2008, 1636 – 1649.
- [43] He M., Hu W.: A study on composite honeycomb sandwich panel structure. *Materials and Design* 29, 2008, 709 – 713.
- [44] He M., Hu W.: A study on composite honeycomb sandwich panel structure. *Materials and Design* 29, 2008, 709 – 713.
- [45] Hjiat M., Battini J.-M., Nguyen Q.H.: Large displacement analysis of shear deformable composite beams with interlayerslips. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 47, 2012, 895 – 904.
- [46] Hop T.: *Konstrukcje warstwowe*. Arkady, Warszawa 1980
- [47] Hua H., Belouettar S., Potier-Ferry M., Makradib A., Koutsawab Y.: Assessment of various kinematic models for instability analysis of sandwich beams. *Engineering Structures* 33, 2011, 572 – 579.
- [48] Hua H., Belouettar S., Potier-Ferry M., Makradib A., Koutsawab Y.: Assessment of various kinematic models for instability analysis of sandwich beams. *Engineering Structures* 33, 2011, 572 – 579.
- [49] Hua Qin Q., Wang T. J.: An analytical solution for the large deflections of a slender sandwich beam with a metallic foam core under transverse loading by a flat punch. *Composite Structures* 88, 2009, 509 – 518.
- [50] Hyeung-Yun K., Woonbong H.: Effect of debonding on natural frequencies and frequency response functions of honey comb sandwich beams. *Composite structures* 55, 2002, 51 – 62.
- [51] Hyeung-Yun K., Woonbong H.: Effect of debonding on natural frequencies and frequency response functions of honeycomb sandwich beams. *Composite Structures* 55, 2002, 51 – 62.
- [52] Ivañez I., Santiuste C., Sanchez-Saez S.: FEM analysis of dynamic flexural behaviour of composite sandwich beams with foam core. *Composite Structures* 92, 2010, 2285 – 2291.
- [53] Jakobsen J., Bozhevolnaya E., Thomsen O. T.: New peel stopper concept for sandwich structures. *Composites Science and Technology* 67, 2007, 3378 – 3385.
- [54] Jasion P., Magnucki K.: Modelowanie wyboczenia lokalnego okładziny kołowej płyty sandwichowej. *Modelowanie Inżynierskie* 45, 2012, 171 – 176.
- [55] Jelovica J., Romanoff J., Ehlers S., Aromaa J.: Ultimate strength of corroded web-core sandwich beams. *Marine Structures* 31, 2013, 1 – 14.
- [56] Jen Yi-Ming, Chang Li-Yen: Effect of thickness of face sheet on the bending fatigue strength of aluminum honeycomb sandwich beams. *Engineering Failure Analysis* 16, 2009, 1282 – 1293.
- [57] Ji-Hyun L., Ki-Ju K.: Mechanical behavior of sandwich panels with tetrahedral and Kagome truss cores fabricated from wires. *International Journal of Solids and Structures* 43, 2006, 5228 – 5246.
- [58] Jung Kim B., Gil Lee D.: Characteristics of joining inserts for composite sandwich panels. *Composite Structures* 86, 2008, 55 – 60.
- [59] Kamiński M., Strąkowski M., Sokołowski D.: Stochastic finite element method reliability analysis of corrugated I-beam girder. *Computer Modeling in Engineering & Science*, 99 (3), 2014, 209 – 231.
- [60] Kamiński M., Strąkowski M.: Introduction to probabilistic safety analysis of the steel frame structures exposed to fire. *Sixth M.I.T. Conference of Computational Fluid and Solid Mechanics*, 2011.
- [61] Kamiński M., Strąkowski M.: On bending of the steel bisymmetric I-beam profile exposed to fire. *Computer Methods in Mechanics*, Gdańsk 2015.

- [62] Kamiński M., Strąkowski M.: On the least squares stochastic finite element analysis of the steel skeletal towers exposed to fire. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 13 (2), 2013, 242 – 253.
- [63] Kamiński M., Świta P.: Generalized stochastic finite element method in elastic stability problems. *Computers & Structures*, 89 (11 – 12), 2011, 1241 – 1252.
- [64] Kamiński M.: *Computational Mechanics of Composite Materials. Sensitivity, Randomness and Multiscale Behaviour*. Springer-Verlag, 2005.
- [65] Kamiński M.: On the dual iterative stochastic perturbation-based finite element method in solid mechanics with Gaussian uncertainties. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 104 (11), 2015, 1038 – 1060.
- [66] Kamiński M.: *The stochastic perturbation method for computational mechanics*. Wiley, 2013.
- [67] Kampner M., Grenestedt J. L.: On using corrugated skins to carry shear in sandwich beams. *Composite Structures* 85, 2008, 139 – 148.
- [68] Kampner M., Grenestedt J. L.: On using corrugated skins to carry shear in sandwich beams. *Composite Structures* 85, 2008, 139 – 148.
- Kawagoe K.:
- [69] Keo P., Nguyen Q.-H., Somja H., Hjjaj M.: Derivation of the exact stiffness matrix of shear-deformable multi-layered beam element in partial interaction. *Finite Elements in Analysis and Design* 112, 2016, 40 – 49.
- [70] Kepler J. A.: Simple stiffness tailoring of balsa sandwich core material. *Composites Science and Technology* 71, 2011, 46 – 51.
- [71] Kesler O., Gibson L.J.: Size effects in metallic foam core sandwich beams. *Materials Science and Engineering A326*, 2002, 228 – 234.
- [72] Kim J., Swanson S. R.: Design of sandwich structures for concentrated loading. *Composite Structures* 52, 2001, 365 – 373.
- [73] Kiral Z., Toygar M. E., Kiral B. G., Sayman O.: Effect of the root crack on the lateral buckling loads and natural frequencies of sandwich composite beams. *Composites: Part B* 53, 2013, 308 – 313.
- [74] Kukliński M.: Modelowanie wpływu liczby warstw ręcznie wytwarzanych materiałów kompozytowych na ich właściwości mechaniczne przy zginaniu. *Modelowanie Inżynierskie* 44, 2012, 171 – 178.
- [75] Kulkarni N., Mahfuz H., Jeelani S., Carlsson L.A.: Fatigue crack growth and life prediction of foam core sandwich composites under flexural loading. *Composite Structures* 59, 2003, 499 – 505.
- [76] Kumar M., Shenoj R. A., Cox S. J.: Experimental validation of modal strain energies based damage identification method for a composite sandwich beam. *Composites Science and Technology* 69, 2009, 1635 – 1643.
- [77] Langdon G. S., von Klemperer C. J., Rowland B. K., Nurick G. N.: The response of sandwich structures with composite face sheets and polymer foam cores to air-blast loading: Preliminary experiments. *Engineering Structures* 36, 2012, 104 – 112.
- [78] Le Grogne P., Nguyen Q.-H., Hjjaj M.: Exact buckling solution for two-layer Timoshenko beams with interlayer slip. *International Journal of Solids and Structures* 49, 2012, 143 – 150.
- [79] Lichołai L. (pod red.): *Budownictwo Ogólne*, tom 3. Arkady, 2010, 376 – 419.
- [80] Liu H., Cao Z. K., Yao G. C., Luo H. J., Zu G. Y.: Performance of aluminum foam–steel panel sandwich composites subjected to blast loading. *Materials and Design* 47, 2013, 483 – 488.
- [81] Lou J.\*, Ma L., Wu L.-Z.: Free vibration analysis of simply supported sandwich beams with lattice truss core. *Materials Science and Engineering B* 177, 2012, 1712 – 1716.

- [82] Lyckegaard A., Bozhevolnaya E., Thybo Thomsen O.: Experimental investigation of local bending effects in the vicinity of a junction between a straight sandwich beam and a curved sandwich beam. *Composites: Part B* 35, 2004, 629 – 637.
- [83] Lyckegaard A., Thybo Thomsen O.: Nonlinear analysis of a curved sandwich beam joined with a straight sandwich beam. *Composites: Part B* 37, 2006, 101 – 107.
- [84] Madsen H.O., Krenk S., Lind N.C., *Methods of Structural Safety*, Prentice Hall 1986.
- [85] Magnucka-Blandzia E., Magnucki K.: Effective design of a sandwich beam with a metal foam core. *Thin-Walled Structures* 45, 2007, 432 – 438.
- [86] Magnucki K., Jasion P., Smyczyński M.: Modelowanie belek pięciowarstwowych. *Modelowanie Inżynierskie* nr 45, t. 14, 2012.
- [87] Magnucki K., Smyczyński M., Jasion P.: Deflection and strength of a sandwich beam with thin binding layers between faces and a core. *Arch. Mech.* 65, 2013, 301 – 311.
- [88] Magnucki K.: Wytrzymałość i stateczność belek – słupów trójwarstwowych. *Modelowanie Inżynierskie* 42, 2011, 249 – 258.
- [89] Maheri M. R., Adams R. D.: On the flexural vibration of Timoshenko beams and the applicability of the analysis to a sandwich configuration. *Journal of Sound and Vibration* 209, 1998, 419 – 442.
- [90] Manalo A. C., Aravinthan T., Karunasena W.: Flexural behaviour of glue-laminated fibre composite sandwich beams. *Composite Structures* 92, 2010, 2703 – 2711.
- [91] Manalo A. C.: Behaviour of fibre composite sandwich structures under short and asymmetrical beam shear tests. *Composite Structures* 99, 2013, 339 – 349.
- [92] Manalo A., Aravinthan T.: Behaviour of glued fibre composite sandwich structure in flexure: Experiment and Fibre Model Analysis. *Materials and Design* 39, 2012, 458 – 468.
- [93] Manalo A.C., Aravinthan T., Karunasena W.: In-plane shear behaviour of fibre composite sandwich beams using asymmetrical beam shear test. *Construction and Building Materials* 24, 2010, 1952 – 1960.
- [94] Manalo A.C.: Behaviour of fibre composite sandwich structures under short and asymmetrical beam shear tests. *Composite Structures* 99, 2013, 339 – 349.
- [95] Massabò R., Cavicchi A.: Interaction effects of multiple damage mechanisms in composite sandwich beams subject to time dependent loading. *International Journal of Solids and Structures* 49, 2012, 720 – 738.
- [96] McCormak T. M., Miller R., Kesler O., Gibson L. J.: Failure of sandwich beams with metallic foam cores. *International Journal of Solids and Structures* 38, 2001, 4901 – 4920.
- [97] McCormak T.M., Miller R., Kesler O., Gibson L.J.: Failure of sandwich beams with metallic foam cores. *International Journal of Solids and Structures* 38, 2001, 4901 – 4920.
- [98] McGarva L. D., Astrom B. T.: Experimental investigation of compression moulding of glass/PA12-PMI foam core sandwich components. *Composites: Part A* 30, 1999, 1171 – 1185.
- [99] Mead D. J.: The measurement of the loss factors of beams and plates with constrained and unconstrained damping layers: A critical assessment. *Journal of Sound and Vibration* 300, 2007, 744 – 762.
- [100] Melchers R. E.: *Structural Reliability analysis and prediction*. JohnWiley & Sons, 1987.
- [101] Mohana K., Hona Y.T., Idapalapati S., Seowa H.P.: Failure of sandwich beams consisting of alumina face sheet and aluminum foam core in bending. *Materials Science and Engineering A* 409, 2005, 292 – 301.
- [102] Monetto I.: Analytical solutions of three-layer beams with interlayer slip and step-wise linear interface law. *Composite Structures* 120, 2015, 543 – 551.

- [103] Muc A., Nogowczyk R.: Formy zniszczenia konstrukcji sandwichowych z okładzinami wykonanymi z kompozytów. *Composites* 5, 2005, 31 – 36.
- [104] Murína J., Aminbaghaib M., Kuti V.: Exact solution of the bending vibration problem of FGM beams with variation of material properties. *Engineering Structures* 32, 2010, 1631 – 1640.
- [105] Murzewski J.: Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych. Arkady, Warszawa, 1970.
- [106] Murzewski J.: Niezawodność konstrukcji inżynierskich. Arkady, Warszawa, 1989
- [107] Mutermilch J., Jastrzębski P., Orłowski W.: Wytrzymałość materiałów. Arkady, 1985.
- [108] Nguyena Q.-H., Martinelli E., Hjiat M.: Derivation of the exact stiffness matrix for a two-layer Timoshenko beam element with partial interaction. *Engineering Structures* 33, 2011, 298 – 307.
- [109] Nowak S. A., Collins K. R.: Reliability of structures. Mc Graw Hill, 2000.
- [110] Nowacki W.: *Mechanika Budowli*, Tom I, Tom II. Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa, 1957.
- [111] O’Loinsigh C., Oudjene M., Ait-Aider H., Fanning P., Pizzi A., Shotton E., Meghlat E.-M.: Experimental study of timber-to-timber composite beam using welded-through wood dowels. *Construction and Building Materials* 36, 2012, 245 – 250.
- [112] Osei-Antwi M, de Castro J., Vassilopoulos A.P., Keller T.: Shear mechanical characterization of balsa wood as core material of composite sandwich panels. *Construction and Building Materials* 41, 2013, 231 – 238.
- [113] Plantema F.J.: Sandwich construction. The bending and buckling of sandwich beams, plates and shells. John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- [114] Puła W.: Zastosowanie teorii niezawodności konstrukcji do oceny bezpieczeństwa fundamentów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2004.
- [115] Qiao P., Yang M.: Impact analysis of fiber reinforced polymer honeycomb composite sandwich beams. *Composites: Part B* 38, 2007, 739 – 750.
- [116] Qin Q. H., Wang T. J.: An analytical solution for the large deflections of a slender sandwich beam with a metallic foam core under transverse loading by a flat punch. *Composite Structures* 88, 2009, 509 – 518.
- [117] Qin Q., Wang T. J.: Low-velocity impact response of fully clamped metal foam core sandwich beam incorporating local denting effect. *Composite Structures* 96, 2013, 346 – 356.
- [118] Radford D. D., Fleck N. A., Deshpande V. S.: The response of clamped sandwich beams subjected to shock loading. *International Journal of Impact Engineering* 32, 2006, 968 – 987.
- [119] Ranzi G., Bradford M.A.: Analytical solutions for the time-dependent behavior of composite beams with partial interaction. *International Journal of Solids and Structures* 43, 2006, 3770 – 3793.
- [120] Ranzi G., Gara F., Ansourian P.: General method of analysis for composite beams with longitudinal and transverse partial interaction. *Computers and Structures* 84, 2006, 2373 – 2384.
- [121] Richard Liew J.Y., Soheli K.M.A., Koh C.G.: Impact tests on steel-concrete-steel sandwich beams with lightweight concrete core. *Engineering Structures* 31, 2009, 2045 – 2059.
- [122] Rongqiao X., Yu-Fei W.: Two-dimensional analytical solutions of simply supported composite beams with interlayer slips. *International Journal of Solids and Structures* 44, 2007, 165 – 175.
- [123] Rubino V., Deshpande V. S., Fleck N. A.: The dynamic response of end-clamped sandwich beams with a Y-frame or corrugated core. *International Journal of Impact Engineering* 35, 2008, 829 – 844.

- [124] Rubino V., Deshpande V. S., Fleck N. A.: The three-point bending of Y-frame and corrugated core sandwich beams. *International Journal of Mechanical Sciences* 52, 2010, 485 – 494.
- [125] Schaumann E., Valle'e T., Keller T.: Direct load transmission in hybrid FRP and lightweight concrete sandwich bridge deck. *Composites: Part A* 39, 2008, 478 – 487.
- [126] Seong D. Y., Jung C. G., Yang D. Y., Moonb K. J., Ahn D. G.: Quasi-isotropic bending responses of metallic sandwich plates with bi-directionally corrugated cores. *Materials and Design* 31, 2010, 2804 – 2812.
- [127] Shen H., Sokolinsky V. S., Nutt S. R.: Accurate predictions of bending deflections for soft-core sandwich beams subject to concentrated loads. *Composite Structures* 64, 2004, 115 – 122.
- [128] Śniady P.: *Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza PWr, 2000.
- [129] Sokolinsky V. S., Shen H., Vaikhanski L., Nutt S. R.: Experimental and analytical study of nonlinear bending response of sandwich beams. *Composite Structures* 60, 2003, 219 – 229.
- [130] Steeves C. A., Fleck N. A.: Collapse mechanisms of sandwich beams with composite faces and a foam core, loaded in three-point bending. Part II: experimental investigation and numerical modeling. *International Journal of Mechanical Sciences* 46, 2004, 585 – 608.
- [131] Stewarski E., Bystrowski J., Jakubowski J.: *Wytrzymałość Materiałów. Ćwiczenia laboratoryjne*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 1995.
- [132] Swanson S. R.: Core compression in sandwich beams under contact loading. *Composite Structures* 64, 2004, 389 – 398.
- [133] Tagarielli V.L., Deshpande V.S., Fleck N. A.: The dynamic response of composite sandwich beams to transverse impact. *International Journal of Solids and Structures* 44, 2007, 2442 – 2457.
- [134] Tan Z. H., Luo H. H., Long W. G., Han X.: Dynamic response of clamped sandwich beam with aluminium alloy foam core subjected to impact loading. *Composites: Part B* 46, 2013, 39 – 45.
- [135] Tan Z.H., Luo H.H., Long W.G., Han X.: Dynamic response of clamped sandwich beam with aluminium alloy foam core subjected to impact loading. *Composites: Part B* 46, 2013, 39 – 45.
- [136] Tilbrook M.T., Deshpande V.S., Fleck N.A.: The impulsive response of sandwich beams: Analytical and numerical investigation of regimes of behavior. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 54, 2006, 2242 – 2280.
- [137] Tuhkuri J.: Sandwich structures under ice loading. Theoretical and experimental investigations. *Marine Structures* 9, 1996, 259 – 280.
- [138] Ural A., Zehnder A. T., Ingraffea A. R.: Fracture mechanics approach to facesheet delamination in honeycomb: measurement of energy release rate of the adhesive bond. *Engineering Fracture Mechanics* 70, 2003, 93 – 103.
- [139] Vinson J. R.: *The Behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials*. Technomic Publishing Company, 1999.
- [140] Wang P. W., Zhong W. W., Hsu J. F.: Investigation of multi-layer sandwich beams through single degree-of-freedom transformation. *Applied Acoustics* 74, 2013, 521 – 525.
- [141] Wanga Z., Jing L., Ning J., Zhao L.: The structural response of clamped sandwich beams subjected to impact loading. *Composite Structures* 93, 2011, 1300 – 1308.
- [142] Woliński Sz., Wróbel K.: *Niezawodność konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 2001.

- [143] Xu R., Wub Y.: Static, dynamic, and buckling analysis of partial interaction composite members using Timoshenko's beam theory. *International Journal of Mechanical Sciences* 49, 2007, 1139 – 1155.
- [144] Yazici M., Wright J., Bertin D., Shukla A.: Experimental and numerical study of foam filled corrugated core steel sandwich structures subjected to blast loading. *Composite Structures* 110, 2014, 98 – 109.
- [145] Yi-Ming J., Li-Yen Ch.: Effect of thickness of face sheet on the bending fatigue strength of aluminum honeycomb sandwich beams. *Engineering Failure Analysis* 16, 2009, 1282 – 1293.
- [146] Yu J., Wang E., Li J., Zheng Z.: Static and low-velocity impact behavior of sandwich beams with closed-cell aluminum-foam core in three-point bending. *International Journal of Impact Engineering* 35, 2008, 885 – 894.
- [147] Zenkert D., Burman M.: Failure mode shifts during constant amplitude fatigue loading of GFRP/foam core sandwich beams. *International Journal of Fatigue* 33, 2011, 217 – 222
- [148] Zenkert D., Shipsha A., Persson K.: Static indentation and unloading response of sandwich beams. *Composites Part B*, 35, 2004, 511 – 522.
- [149] Zenkert D.: *An Introduction to Sandwich Construction*. EMAS Publishing, 1997.
- [150] Żukowski S.: *Ocena bezpieczeństwa płaskich konstrukcji prętowych w aspekcie teorii przystosowania*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2006.

## Spis norm

- [151] PN-C-89072:1993: Tworzywa sztuczne porowate – Oznaczanie wytrzymałości na ścinanie sztywnych materiałów.
- [152] PN-EN-408:2003: Konstrukcje drewniane – Drewno konstrukcyjne lite i klejone warstwowo – Oznaczanie niektórych właściwości fizycznych i mechanicznych
- [153] PN-EN-408:2010: Konstrukcje drewniane – Drewno konstrukcyjne lite i klejone warstwowo - Oznaczanie niektórych właściwości fizycznych i mechanicznych
- [154] PN-EN-826:1998: Wyroby do izolacji cieplnej w budownictwie – Określanie zachowania przy ściskaniu
- [155] PN-EN 826:2013 Wyroby do izolacji cieplnej w budownictwie – Określanie zachowania przy ściskaniu
- [156] PN-EN 14509:2007: Samonośne izolacyjno-konstrukcyjne płyty warstwowe z dwustronną okładziną metalową – Wyroby fabryczne – Specyfikacje
- [157] C273 ASTM Standard: Standard Test Method for Shear Properties of Sandwich Core Materials



## Streszczenie

Rozdział pierwszy przedmiotowej rozprawy doktorskiej przybliży problematykę belek trójwarstwowych oraz zawiera uzasadnienie podjęcia tego tematu. Układy trójwarstwowe, szczególnie w formie belek i płyt, są współcześnie powszechnie stosowane w różnych gałęziach przemysłu i gospodarki. Do ich niewątpliwych zalet można zaliczyć odpowiednią wytrzymałość na zginanie, niską wagę oraz łatwość kształtowania geometrii. Ze względu na liczne walory drewna, którymi są: powszechna dostępność, wysoka wytrzymałość na zginanie, niskie koszty nabycia i łatwość obróbki, zdecydowano, że okładziny przedmiotowych układów sandwichowych będą wykonane właśnie z tego materiału. Aby obniżyć wagę całej konstrukcji do skonstruowania rdzenia wybrano panele z pianki poliuretanowej.

W dalszej części zaprezentowano przegląd literatury tematu, w którym skupiono się na problematyce różnorodności mechanizmów zniszczenia w zależności od geometrii przekroju poprzecznego konstrukcji i właściwości materiałów składowych elementów trójwarstwowych. Przegląd literatury przeprowadzony był także pod kątem modeli, opisujących przemieszczenie i wyężenie elementów sandwichowych.

W rozdziale drugim zaprezentowano najważniejsze zagadnienia i problematykę, które będą poruszane w tej rozprawie doktorskiej.

Nadrzędnym celem części doświadczalnej było zebranie możliwie dużej ilości danych umożliwiających weryfikację zaprezentowanych w kolejnych rozdziałach modeli teoretycznych belek trójwarstwowych. Były nimi: odkształcenia skrajnych włókien drewnianych okładzin oraz przemieszczenia pionowe obu warstw zewnętrznych. W ramach prac laboratoryjnych ustalono własności mechaniczne i wytrzymałościowe materiałów składowych badanych belek sandwichowych. W związku z badaniami eksperymentalnymi postawiono także kilka pytań, dotyczących sposobu pracy belkowego elementu trójwarstwowego i mechanizmów jego zniszczenia, wzajemnych przemieszczeń pionowych okładzin i powiązanego zjawiska ściskania rdzenia, wpływu ścinania w nakładkach na całkowite przemieszczenie pionowe elementu czy występowania wzajemnego poziomego przesunięcia nakładek.

W odniesieniu do części teoretycznej postawiono podstawowe pytanie: w jakim zakresie modele belek trójwarstwowych odzwierciedlają rzeczywiste ich zachowanie zaobserwowane w laboratorium. Zdecydowano, że rozpatrzone zostaną cztery modele teoretyczne belki trójwarstwowej: model Eulera-Bernoulliego, klasyczny model Zig-Zag, model Zig-Zag uwzględniający ścinanie w grubych nakładkach zginanych oraz model traktujący belkę sandwichową jako układ dwóch niezależnych elementów połączonych dwuparametrowym podłożem Pasternaka.

Innym ważnym i ciekawym problemem, jaki jest poruszony w tej pracy jest zagadnienie poślizgu, występujące w płaszczyznach połączenia warstw składowych. Problem ten omówiono na przykładzie belki dwuwarstwowej i trójwarstwowej.

Kolejnym celem rozprawy jest racjonalizacja projektowania belek sandwichowych o zginanych nakładkach. Zaprezentowana zostanie propozycja analizy probabilistycznej belek trójwarstwowych, uwzględniająca losową niepewność pewnych parametrów wraz z oceną niezawodności belek za pomocą wskaźnika niezawodności (indeksu niezawodności) ze względu na różne mechanizmy zniszczenia.

Rozdział trzeci podzielony został na dwie części.

W pierwszej przedstawiono wyniki z oznaczenia własności wytrzymałościowych drewna i pianki poliuretanowej. Określono: wytrzymałość drewna na zginanie ( $f_m = 52,21$  MPa), przyjęty współczynnik Poissona dla drewna  $\nu = 0,40$ , ogólny moduł sprężystości drewna ( $E_{m,g} = 7,99$  GPa), wytrzymałość pianki poliuretanowej na ścinanie ( $\tau = 0,099$  MPa), moduł Kirchhoffa pianki poliuretanowej ( $G = 1,985$  MPa), wytrzymałość pianki poliuretanowej na ściskanie ( $f_{Cc} = 0,24$  MPa), moduł sprężystości pianki poliuretanowej przy ściskaniu ( $E_{Cc} = 5,56$  MPa), wytrzymałość pianki poliuretanowej przy rozciąganiu ( $f_{Ct} = 0,134$  MPa) i moduł sprężystości pianki poliuretanowej przy rozciąganiu ( $E_{Ct} = 8,54$  MPa).

W części drugiej tego rozdziału przedstawiono przebieg badań doświadczalnych serii pięciu belek trójwarstwowych. Przyjęto elementy o rozpiętości 2700 mm, wysokości przekroju 390 mm i szerokości przekroju 150 mm. Okładziny drewniane z drewna sosnowego miały wysokość 45 mm i szerokość 150 mm. Rdzeń z pianki poliuretanowej miał wysokość 300 mm i szerokość 150 mm. Opisane zostały czynności związane z montażem belek, badaniami niszczącymi oraz zbiór wyników, opracowanych pod względem statystycznym.

W rozdziale czwartym wyprowadzono zależności opisujące relacje między obciążeniami a przemieszczeniami dla wspomnianych czterech wybranych modeli, które mogą posłużyć do opisu belek trójwarstwowych. Oprócz równań przemieszczeń pionowych wyprowadzono też zależności umożliwiające wykreślenie: funkcji przebiegu kąta wzajemnego przesunięcia nakładek, kąta obrotu nakładek przy ścinaniu w nakładkach, momentów zginających i sił osiowych i tnących w okładzinach i rdzeniu.

W rozdziale piątym przedstawiono analizę numeryczną zaprezentowanych w rozdziale czwartym modeli.

Rozdział szósty podzielony został na dwie części i poświęcony problemowi poślizgu połączenia podatnego między okładziną a rdzeniem.

W części pierwszej problem ten został opisany dla przypadku układu dwuwarstwowego.

W części drugiej zaś przeprowadzono analizę poślizgu dla układu trójwarstwowego.

Wyprowadzono także wzory, umożliwiające wykreślenie funkcji przemieszczeń pionowych oraz wzajemnego przesunięcia warstw składowych.

Rozdział siódmy poświęcony został analizie probabilistycznej belki trójwarstwowej na przykładzie modelu Zig-Zag. Przyjęto w niej, że moduł Kirchhoffa rdzenia jest zmienną losową a pozostałe parametry belki są jednoznacznie określone czyli są wielkościami deterministycznymi. Założono też, że znane są odpowiednie charakterystyki probabilistyczne jak wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej belki a także charakterystyki obciążenia w przypadku, gdy ma ono charakter losowy.

Niezawodność belki trójwarstwowej była przedmiotem rozważań rozdziału ósmego. Na podstawie przeglądu literaturowego oraz obserwacji belek w trakcie badań doświadczalnych wynika, że dominujące są trzy mechanizmy uszkodzenia (zniszczenia) takiej belki. Są to przekroczenie nośności belki ze względu na naprężenia normalne w nakładkach, naprężenia ścinające w rdzeniu lub naprężenia w miejscu połączenia rdzenia z nakładką w przekrojach, w których obciążenie wywołuje efekt ekstremalny. Projektując belkę sandwichową może się okazać, że jeden z mechanizmów zniszczenia belki jest dominujący. Wykazano, że zastosowanie teorii niezawodności pozwala na bardziej racjonalne projektowanie belki. Zaprezentowane w tym rozdziale racjonalne projektowanie belki polega na takim doborze jej parametrów, aby indeksy niezawodności belki ze względu na dominujące mechanizmy zniszczenia były zbliżone.

Rozdział dziewiąty stanowi podsumowanie, w którym przedstawiono wnioski z badań doświadczalnych oraz analiz teoretycznych.

### Summary

The first chapter of this doctoral dissertation introduces the problem of three-layer beams and provides justification for undertaking this topic. Three-layer systems, especially presenting the form of beams and slabs, are nowadays widely used in various branches of industry and the economy. Their undoubted advantages include adequate bending strength, low weight and ease of geometry forming. Due to the numerous advantages of wood, which are: common availability, high bending strength, low purchase costs and ease of processing, it was decided that the face layers of the concerned sandwich systems will be made of this material. To reduce the weight of the entire structure, polyurethane foam panels were chosen to construct the core.

In the next part, a review of the subject literature was presented, which focused on the problem of the diversity of destruction mechanisms depending on the geometry of the cross-section of the structure and the properties of the component materials of the three-layer elements. The literature review was also conducted paying special attention to models describing the displacement and strain of sandwich elements.

The second chapter presents the most important issues and issues that will be discussed in this doctoral dissertation.

The overarching goal of the experimental part was to collect as much data as possible to verify the theoretical models of three-layer beams presented in the following chapters. They were: deformations and strains of the external fibers of the timber faces and vertical displacements of both outer layers. As part of laboratory work, mechanical and strength properties of the constituent materials of the tested sandwich beams were determined. In connection with experimental investigations, several questions were also asked about the work of the three-layer beam element and mechanisms of its destruction, mutual vertical displacements of faces and the related phenomenon of core compression, influence of shearing effects in faces on the total vertical displacement of the element or the occurrence of horizontal displacement of timber faces.

With reference to the theoretical part the basic question was asked: to what extent the three-layer beam models reflect their real behavior observed in the laboratory. It was decided that four theoretical models of the three-layer beam will be considered: the Euler-Bernoulli model, the classic Zig-Zag model, the Zig-Zag model including shear in thick bended faces and the sandwich beam model as a system of two independent elements connected with a two-parameter Pasternak base.

Another important and interesting problem that is touched upon in this work is the problem of slip, occurring in the planes between component layers. This problem is discussed on the example of a two-layer and three-layer beam.

Another goal of the dissertation is the rationalization of the process of designing sandwich beams with bent faces. The proposition of probabilistic analysis of three-layer beams is presented taking into account the random uncertainty of certain parameters along with the assessment of reliability of beams using the reliability index due to various mechanisms of destruction.

The third chapter was divided into two parts.

The first part presents the results from the determination of the strength properties of wood and polyurethane foam. It was determined: bending strength of wood ( $f_m = 52.21$  MPa),

assumed Poisson's coefficient for wood  $\nu = 0.40$ , apparent modulus of elasticity ( $E_{m,g} = 7.99$  GPa), shear strength of polyurethane foam ( $\tau = 0.099$  MPa), Kirchhoff modulus of polyurethane foam ( $G = 1.985$  MPa), polyurethane foam compression strength ( $f_{Cc} = 0.24$  MPa), polyurethane foam elastic modulus under compression ( $E_{Cc} = 5.56$  MPa), polyurethane foam tensile strength ( $f_{Ct} = 0.134$  MPa) and polyurethane foam elastic modulus in tension ( $E_{Ct} = 8.54$  MPa).

The second part of this chapter presents the experimental study of a series of five three-layer beams. Elements with a span of 2,700 mm, a cross-section height of 390 mm and a cross-section width of 150 mm were assumed. Timber faces of pine wood were 45 mm high and 150 mm wide. The core made of polyurethane foam was 300 mm high and 150 mm wide. The activities related to the building of the beams, destructive tests and a set of results, developed in statistical terms, were described.

The fourth chapter was dedicated the derivation the relationships between loads and displacements for the four selected models that can be used to describe three-layer beams. In addition to the vertical displacement equations, the following relations were derived: the function of the faces mutual displacement angle, the faces rotation angle, bending moments and axial and shear forces in the faces and core.

The fifth chapter presents the numerical analysis of the models presented in the fourth chapter.

The sixth chapter is divided into two parts and devoted to the slip problem of the flexible connection between the external layers and the core.

In the first part, this problem was described for the case of a two-layer system.

In the second part, a slip analysis for a three-layer system was carried out.

Equations were also derived which allow to plot vertical displacement functions and mutual displacement of component layers.

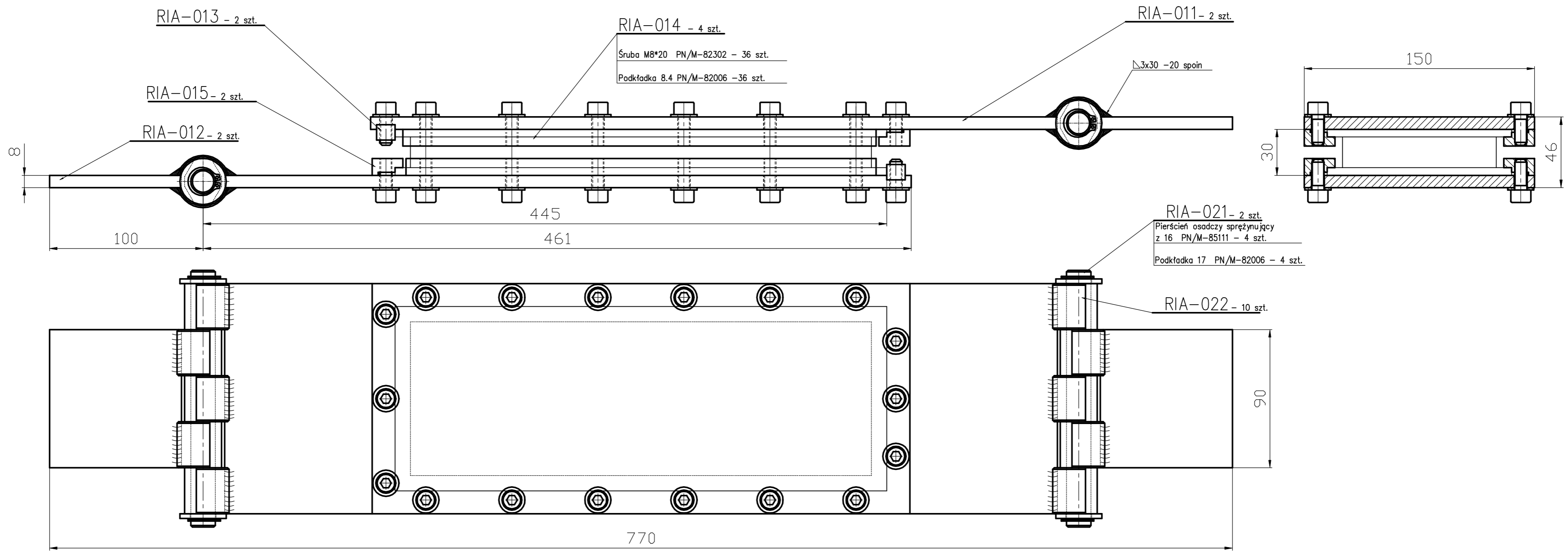
The seventh chapter is devoted to the probabilistic analysis of the three-layer beam by the example of the Zig-Zag model. It was assumed that the Kirchhoff modulus of the core is a random variable and the remaining parameters of the beam are unambiguously defined, that is, they are deterministic quantities. It was also assumed that the appropriate probabilistic characteristics are known, such as the expected value and the beam's random variable variance as well as the load characteristics when it is of a random nature.

The reliability of the three-layer beam was the subject matter of Chapter 8 considerations. The literature review and the beams observation during experimental studies show that the three mechanisms of damage (destruction) of such a beam are dominant. These are: exceeding the load capacity of the beam due to the normal stresses in the overlays, shear stress in the core or stress at the connection surface between the core and the timber face in cross-sections where the load develops an extreme effect. The designing process of a sandwich beam may indicate that one of the mechanisms of the beam's destruction is dominant. It has been shown that the application of the reliability theory allows more rational layers beam design. The rational beams design presented in this chapter is based on the selection of its parameters so that the beam's reliability indexes are similar due to the dominant mechanisms of destruction.

The ninth chapter is a summary in which the conclusions from experimental research and theoretical analysis are presented.

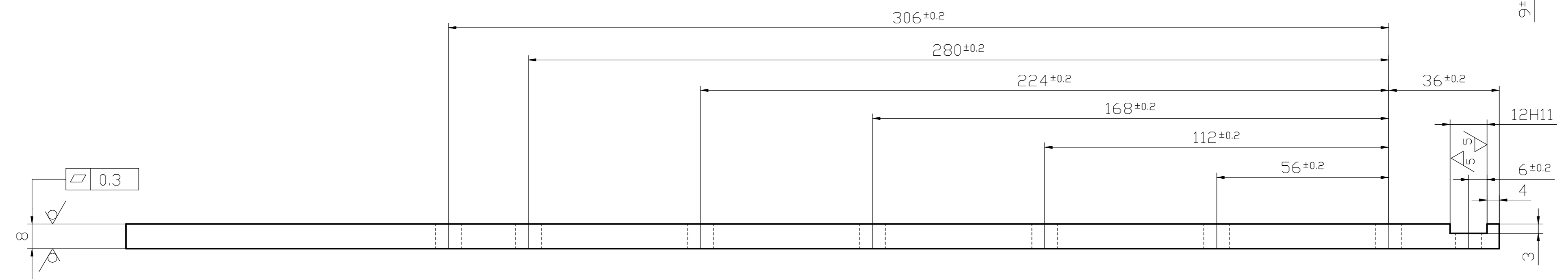
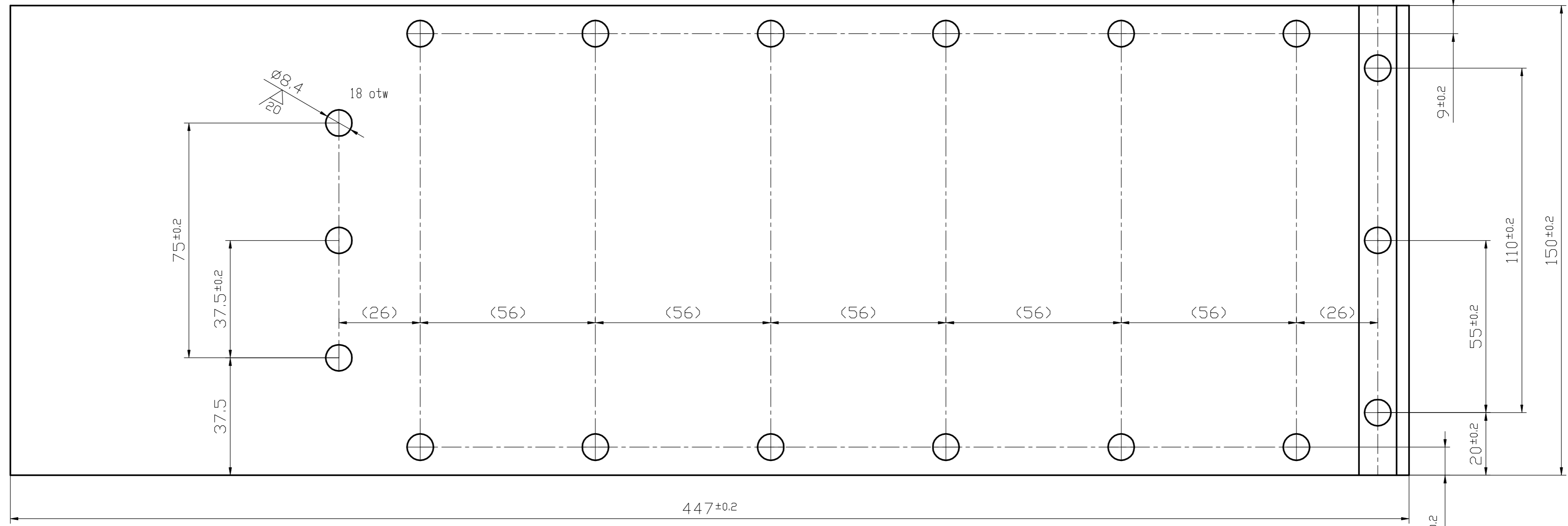
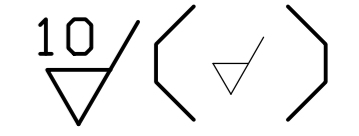
Załącznik 1

Załącznik 2



1		1:2	Uchwyt	Wykonano do
Ilość sztuk	Materiał	Podz.	Nazwa przedmiotu	Nr rysunku
				RIA-000

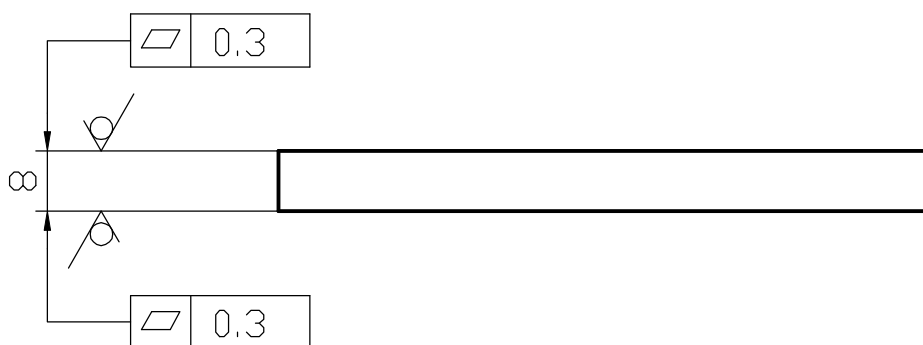
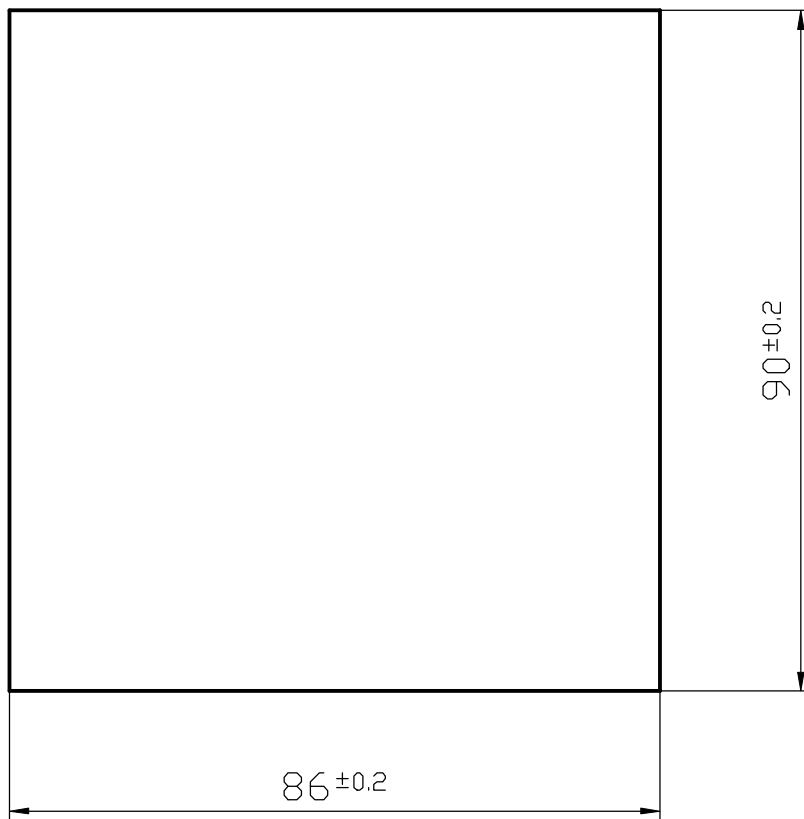




1. Ostre krawędzie stępić 0.5\*45°

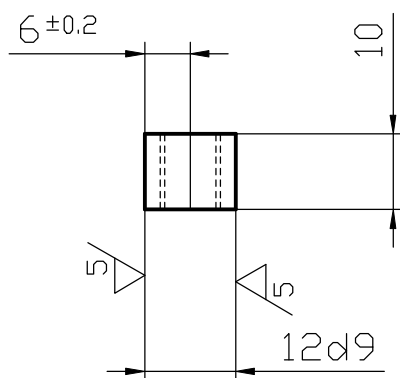
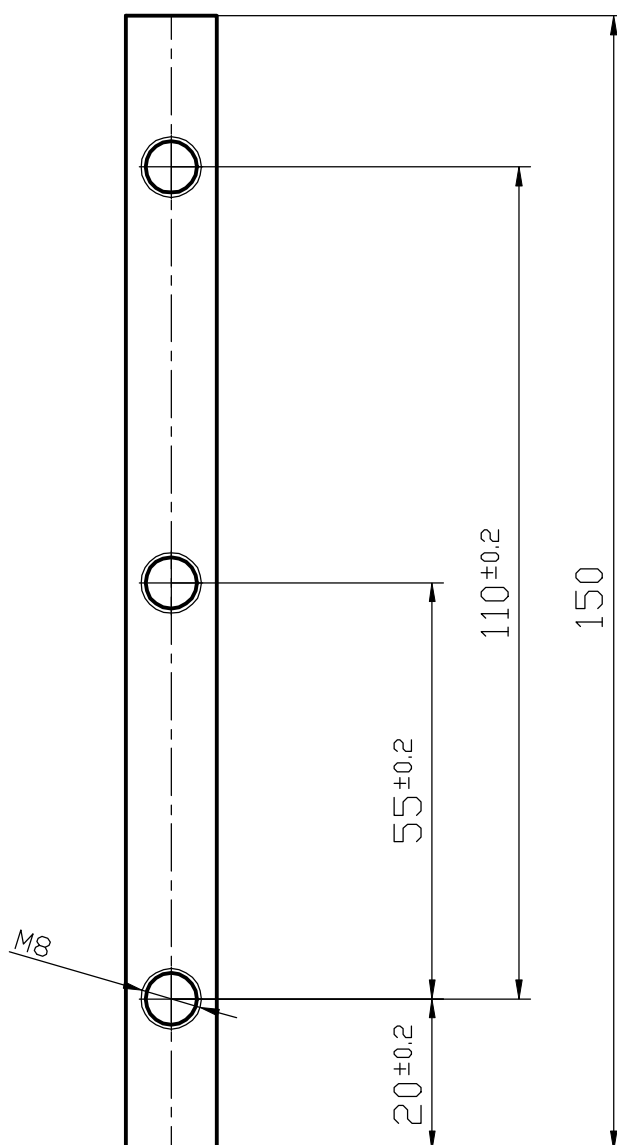
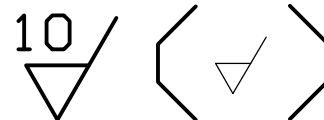
2 Ilość sztuk	St3 ≠8 Materiał	1:1 Podz.	Płyta Nazwa przedmiotu	Wykonano do RIA-011 Nr rysunku
------------------	-----------------------	--------------	---------------------------	--------------------------------------

10



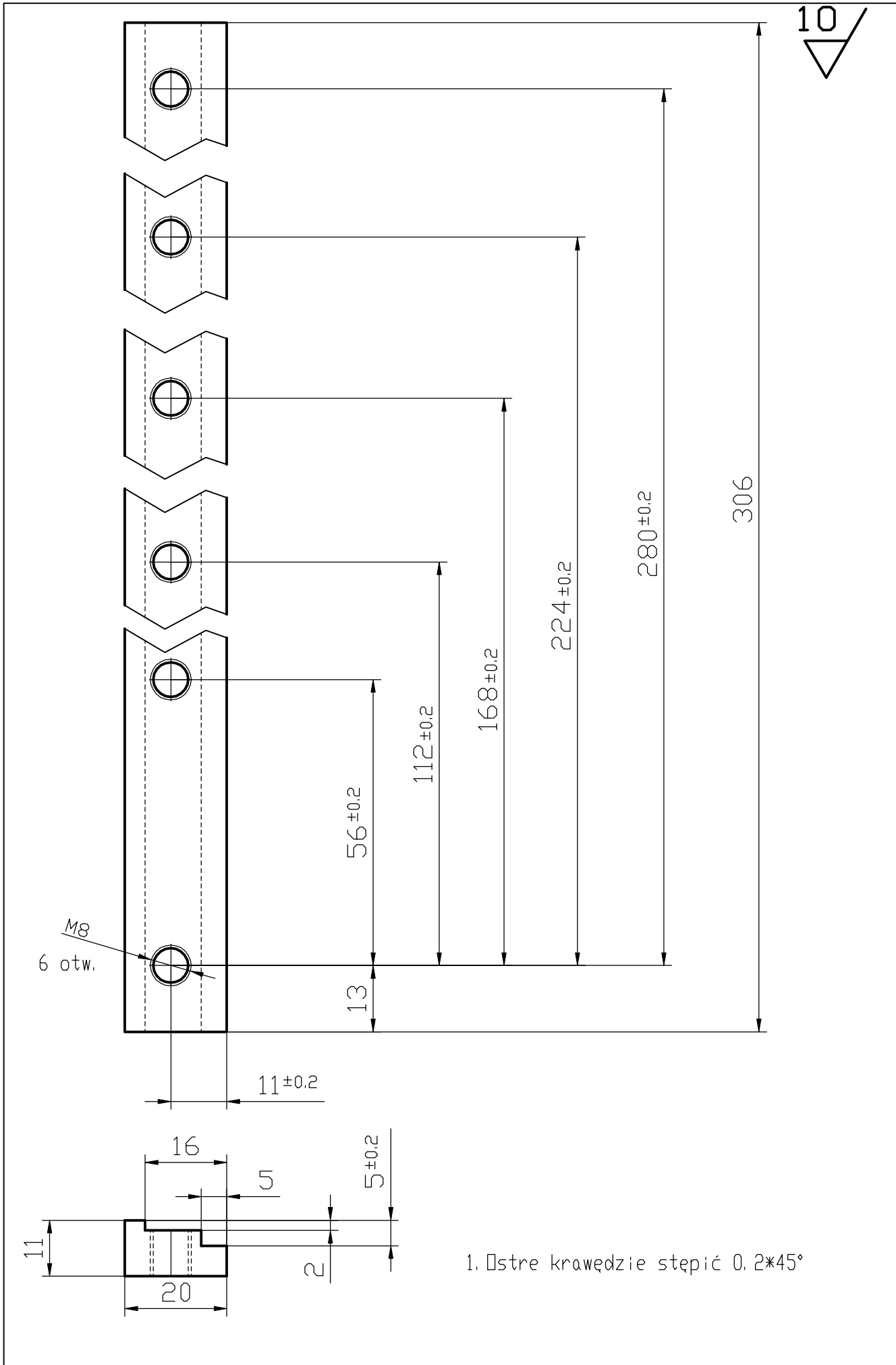
2 Ilość sztuk	St3 ≠ 8 Materiał	1:1 Podz.	Płyta Nazwa przedmiotu	Wykonano do
				RIA-012 Nr rysunku

12d9 -0.050  
-0.093



1. Ostre krawędzie stępić 0.2\*45°

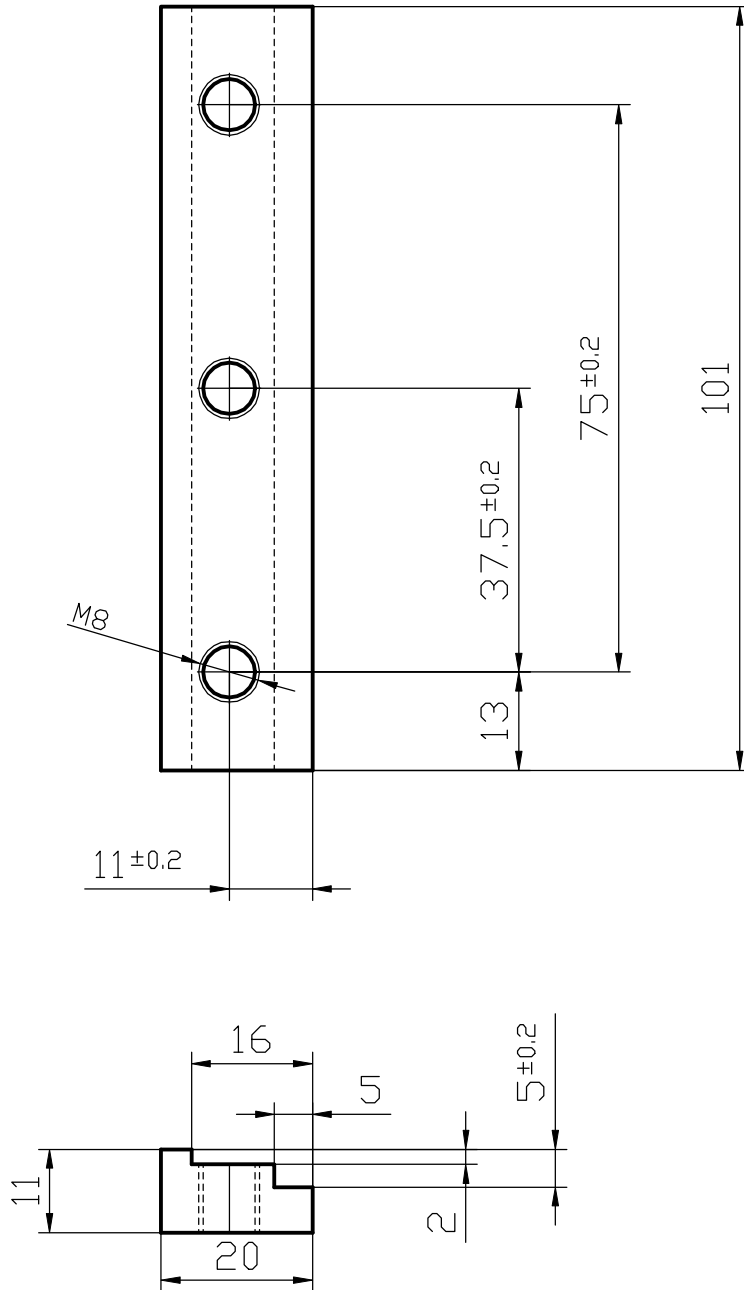
2 Ilość sztuk	45 Materiał	1:1 Podz.	Listwa Nazwa przedmiotu	Wykonano do
				RIA-013 Nr rysunku



10

4 Ilość sztuk	45 Materiał	1:1 Podz.	Docisk Nazwa przedmiotu	Wykonano do	
				RIA-014	
				Nr rysunku	

10



1. Ostre krawędzie stępić  $0.2 \times 45^\circ$

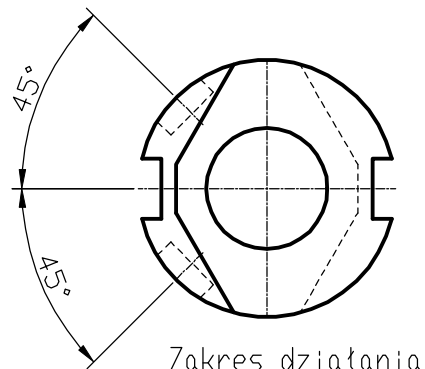
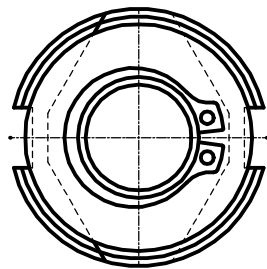
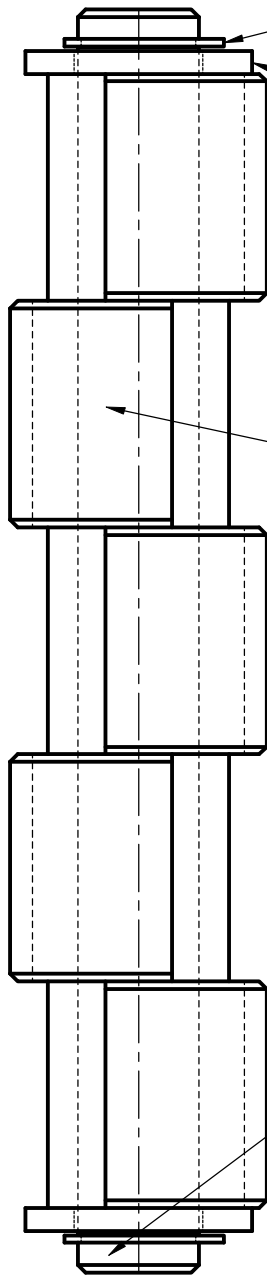
2 Ilość sztuk	45 Materiał	1:1 Podz.	Docisk Nazwa przedmiotu	Wykonano do
				RIA-015 Nr rysunku

Pierścień osadczy sprężynujący  
z16 PN/M-85111 - 2+2 szt.

Podkładka 17 PN/M-82006 - 2+2 szt.

RIA-022 - 5+5 szt.

RIA-021 - 1+1 szt.

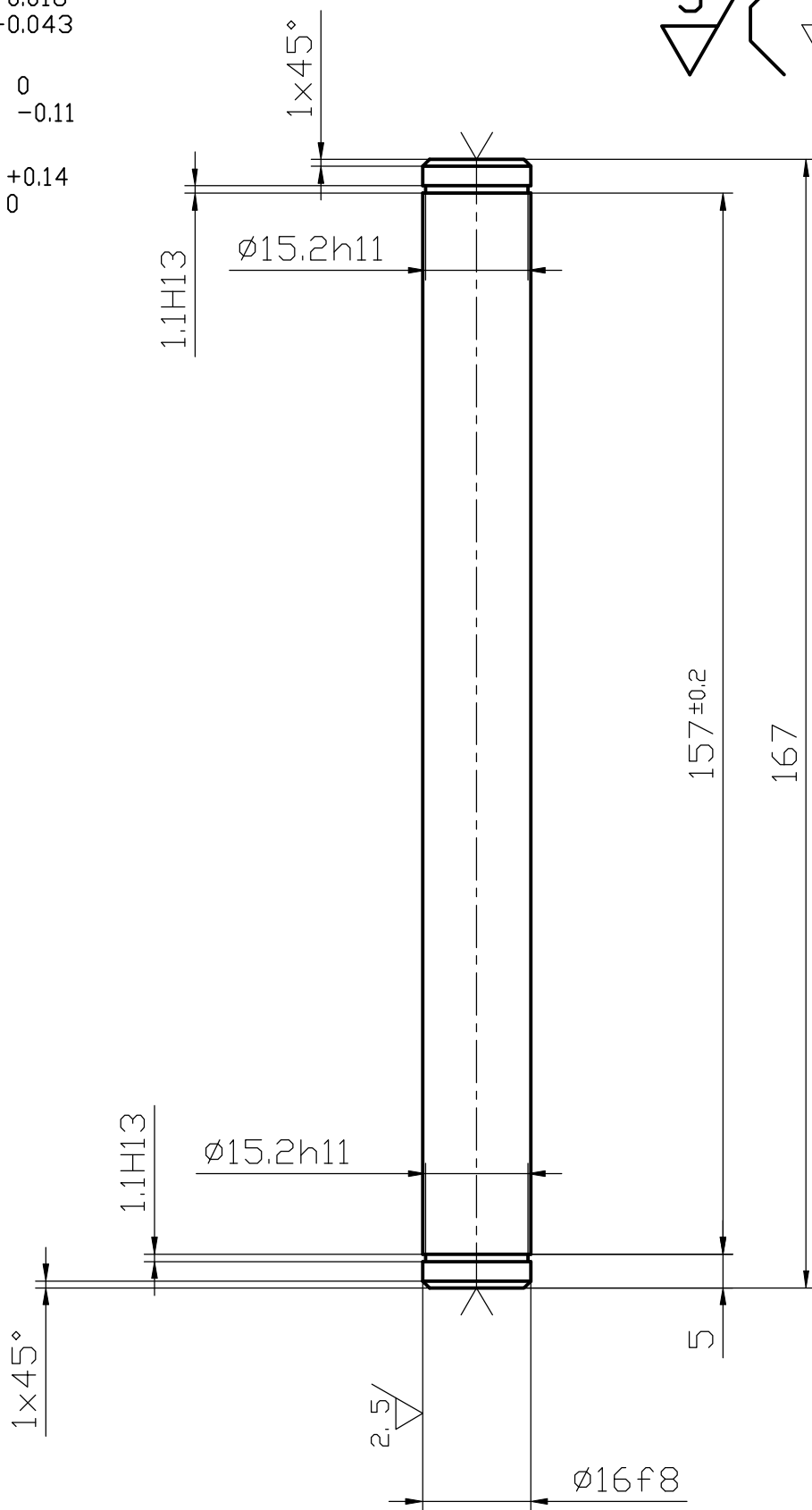
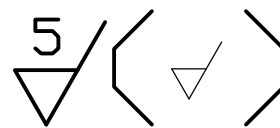


2 Ilość sztuk	Materiał	1:1 Podz.	Zawias Nazwa przedmiotu	Wykonano do
				RIA-020 Nr rysunku

16f8  $\begin{matrix} -0.016 \\ -0.043 \end{matrix}$

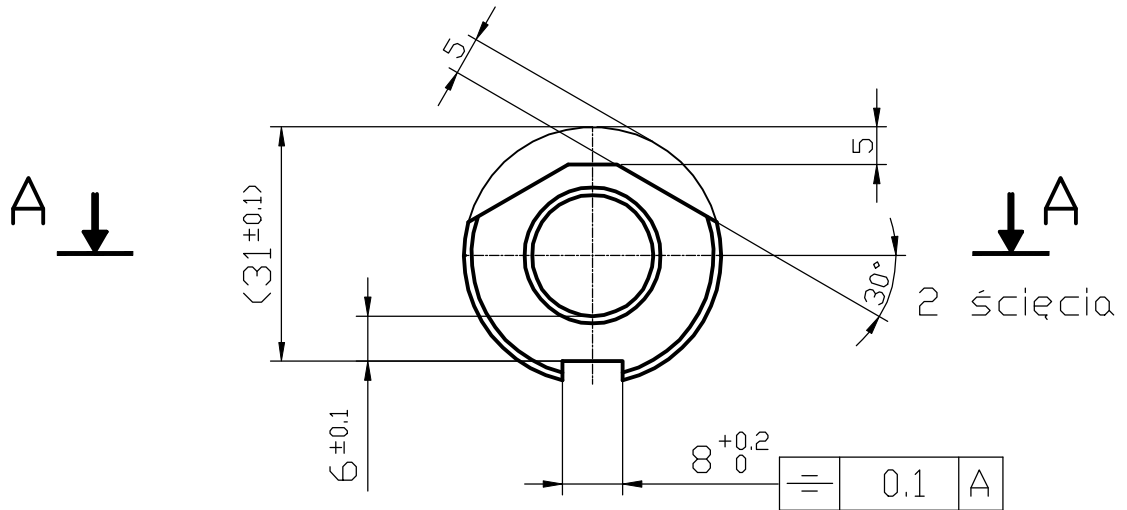
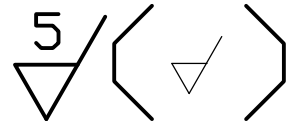
15.2h11  $\begin{matrix} 0 \\ -0.11 \end{matrix}$

1.1H13  $\begin{matrix} +0.14 \\ 0 \end{matrix}$

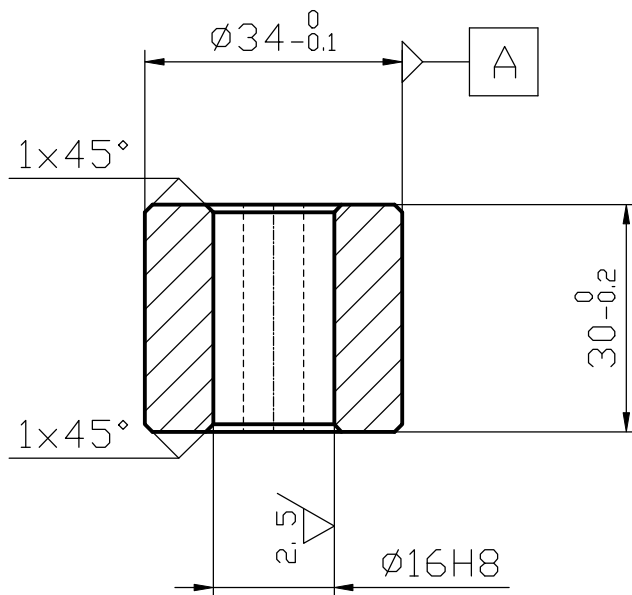


2	45	1:1	Watek	Wykonano do
Ilość sztuk	Materiał	Podz.	Nazwa przedmiotu	RIA-021
				Nr rysunku

16H8  $\begin{matrix} +0.027 \\ 0 \end{matrix}$



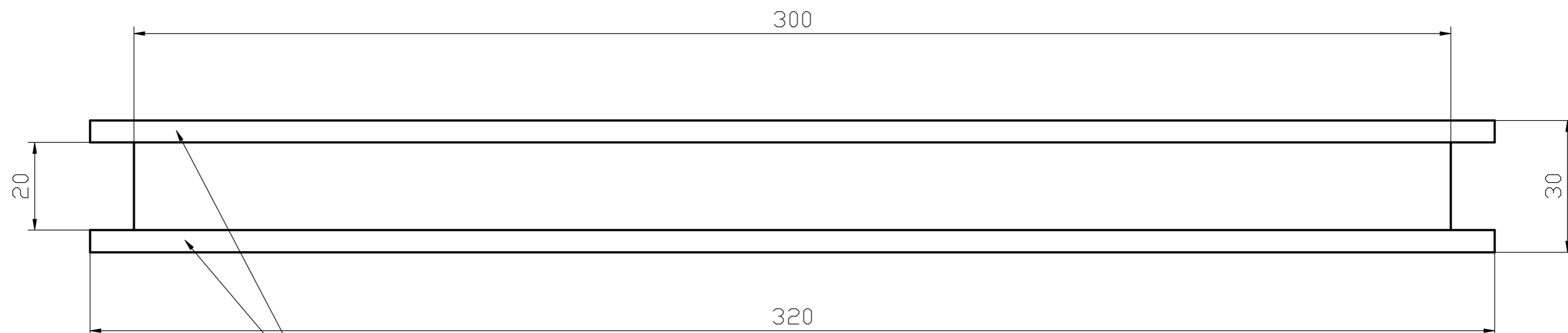
A - A



1. Ostre krawędzie stępić 0,2\*45°

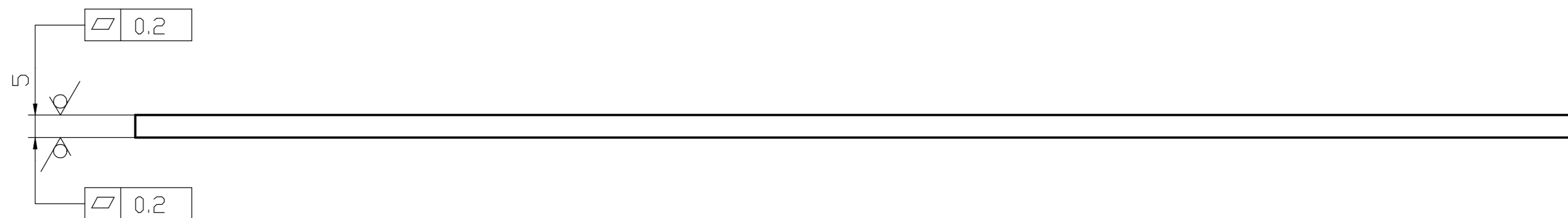
10 Ilość sztuk	St3 Materiał	1:1 Podz.	Tulejka Nazwa przedmiotu	Wykonano do
				RIA-022 Nr rysunku





RIA-031 - 2 szt.

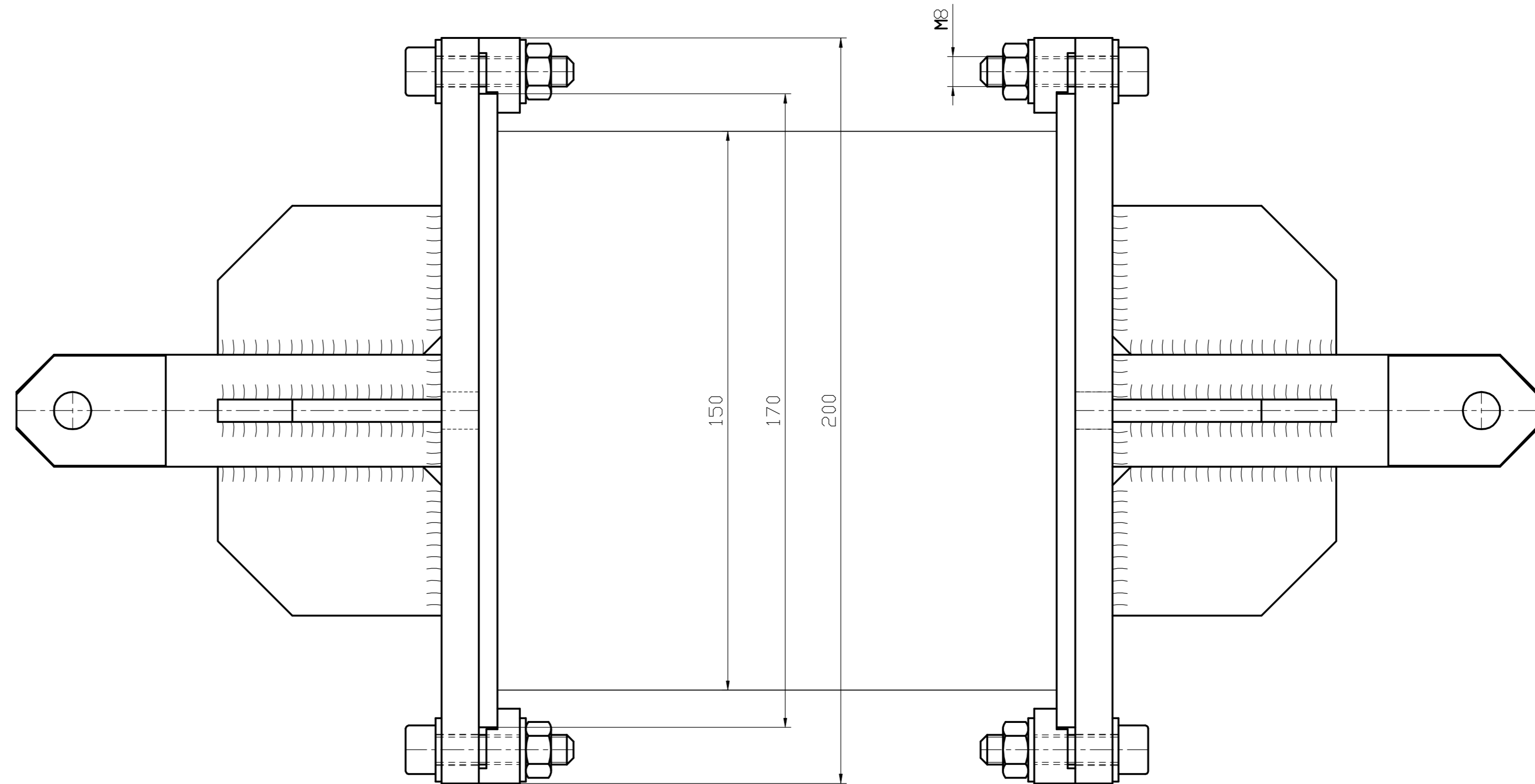
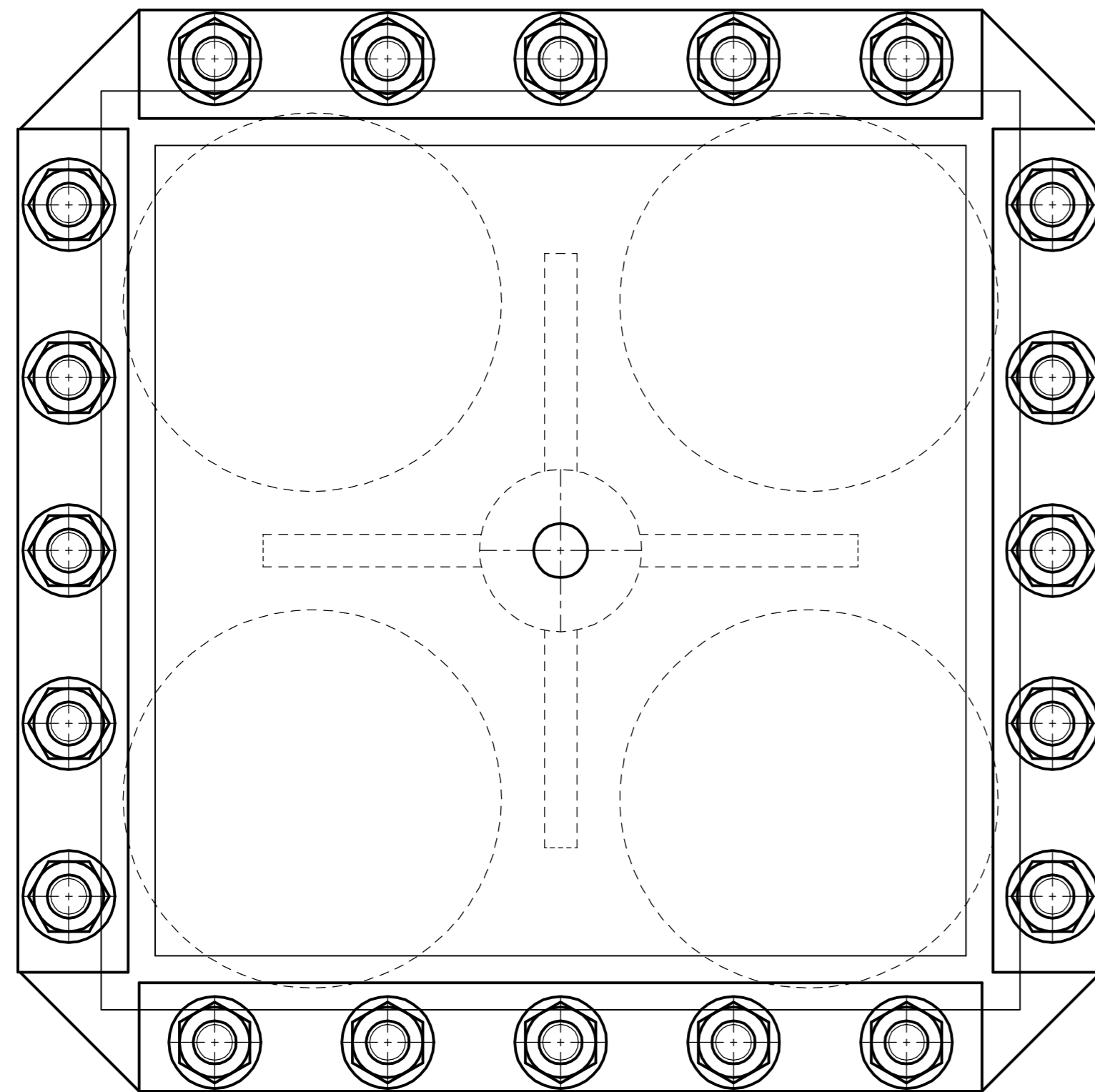
x Ilość sztuk	Materiał	1:1 Podz.	Próbka Nazwa przedmiotu	Wykonano do
				RIA-030 Nr rysunku



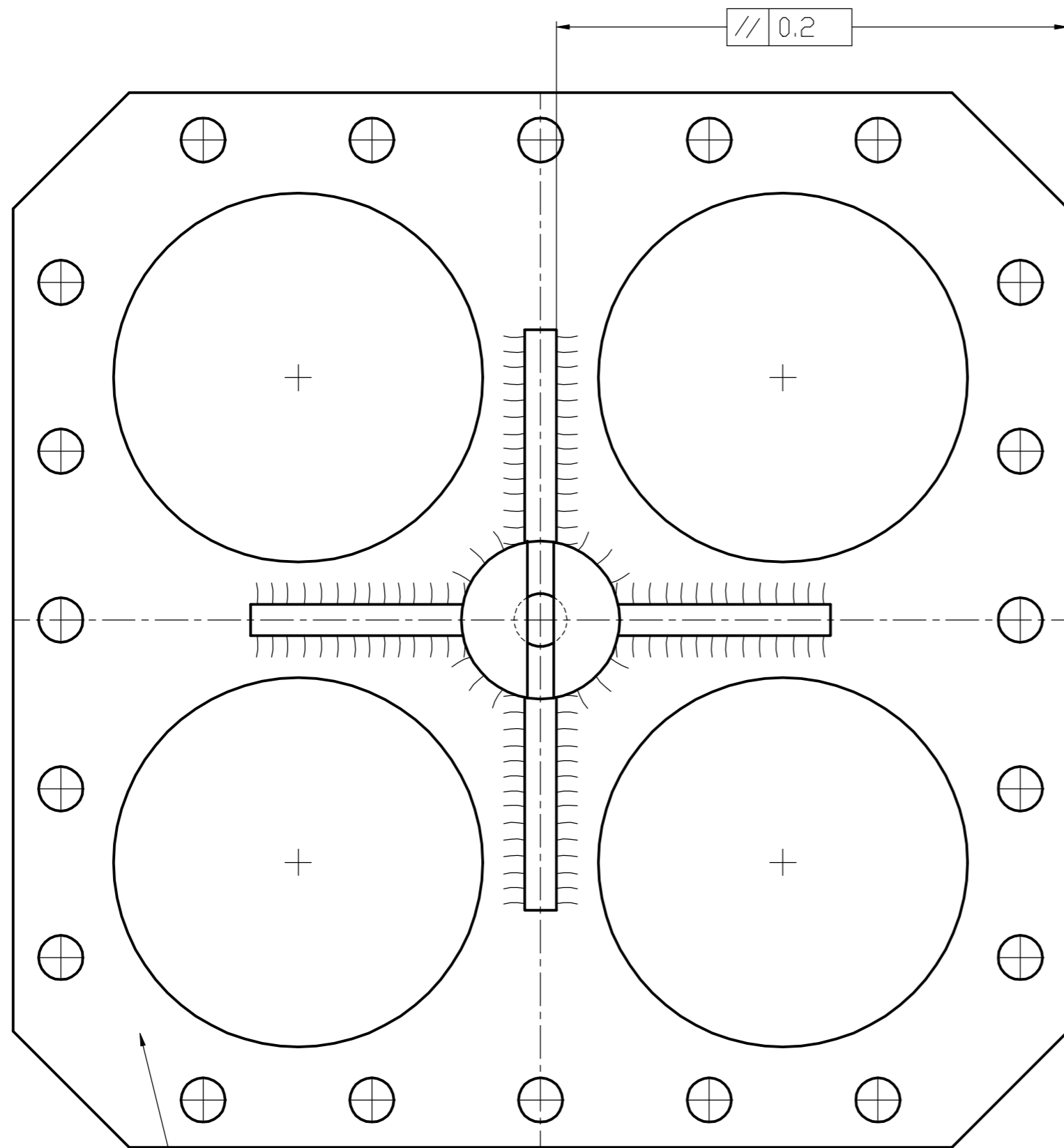
2 szt. stanowią jeden komplet

1. Ostre krawędzie stępic 0.2\*45°

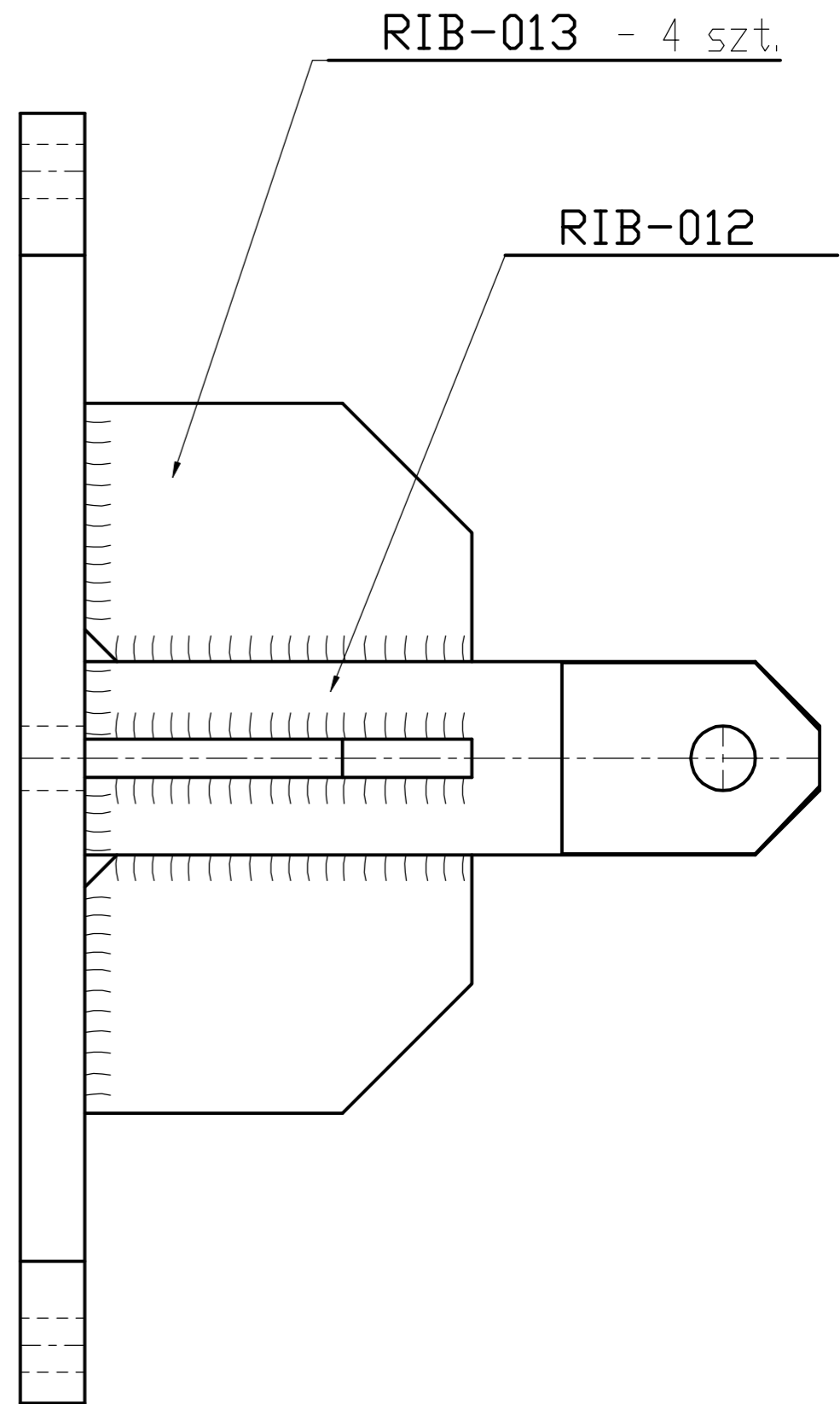
2 Ilość sztuk	St3 ≠5 Materiał	1:1 Podz.	Płyta próbki Nazwa przedmiotu	Wykonano do
				RIA-031 Nr rysunku



1		1:1	Uchwyt	Wykonano do
Ilość sztuk	Materiał	Podz.	Nazwa przedmiotu	RIB-000
				Nr rysunku



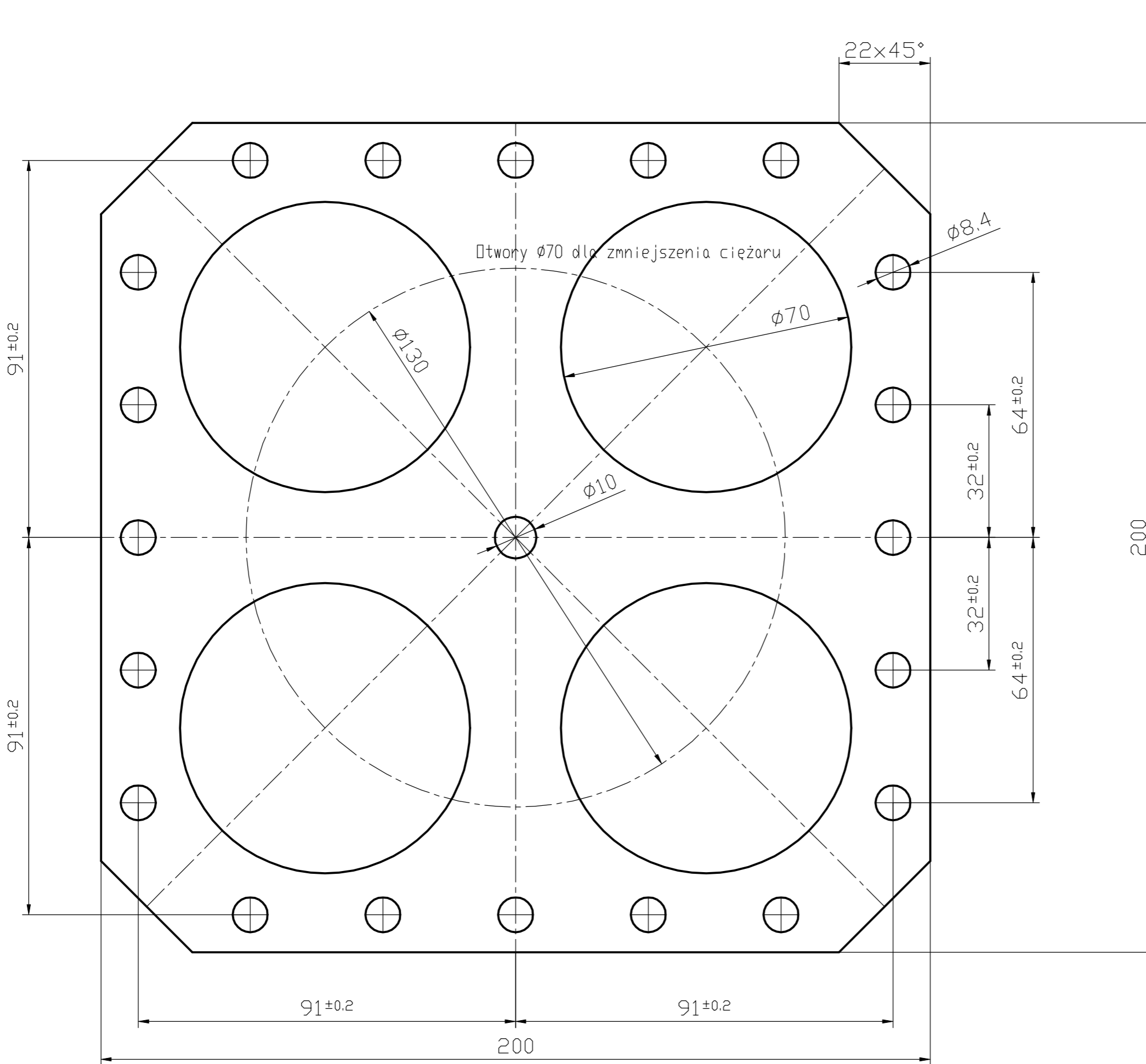
RIB-011



RIB-013 - 4 szt.

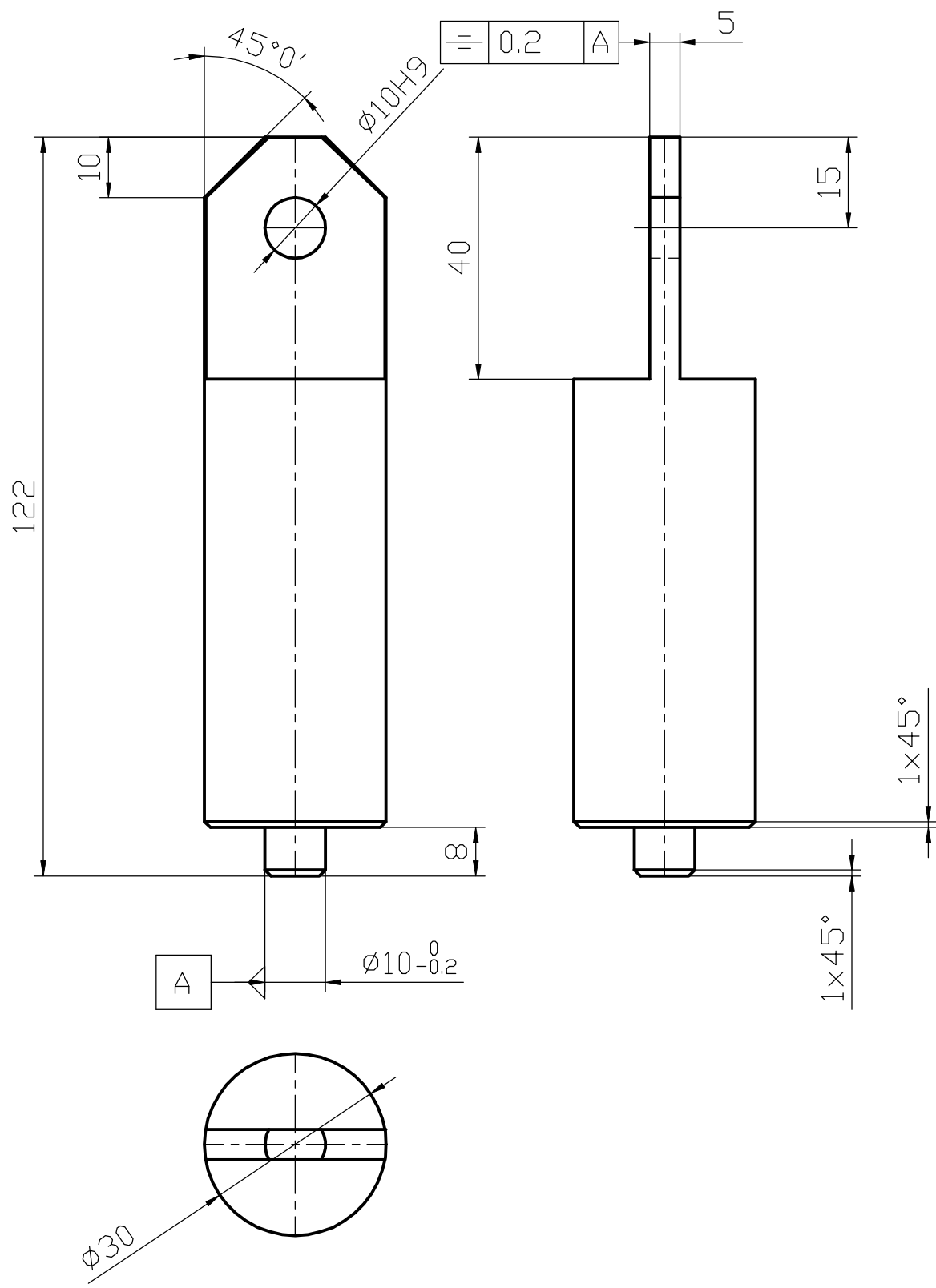
RIB-012

2		1:1	Podstawa	Wykonano do
Ilość sztuk	Materiał	Podz.	Nazwa przedmiotu	RIB-010
				Nr rysunku



1. Ostre krawędzie stępić 0.2\*45°
2. Otwory Ø70 dla zmniejszenia ciężaru

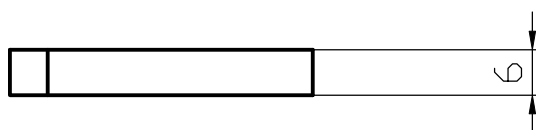
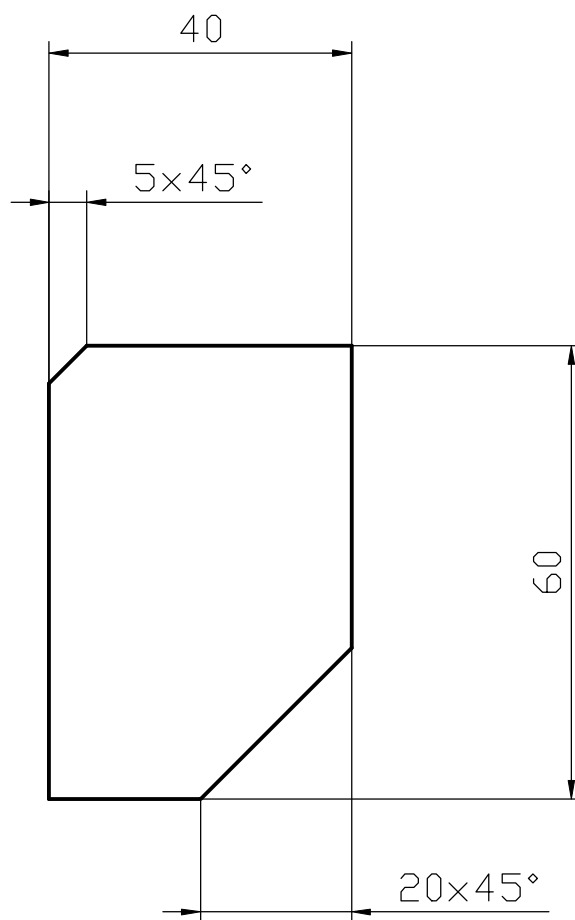
2	St3	1:1	Płyta	Wykonano do
Ilość sztuk	≠10 Materiał	Podz.	Nazwa przedmiotu	RIB-011
				Nr rysunku



10

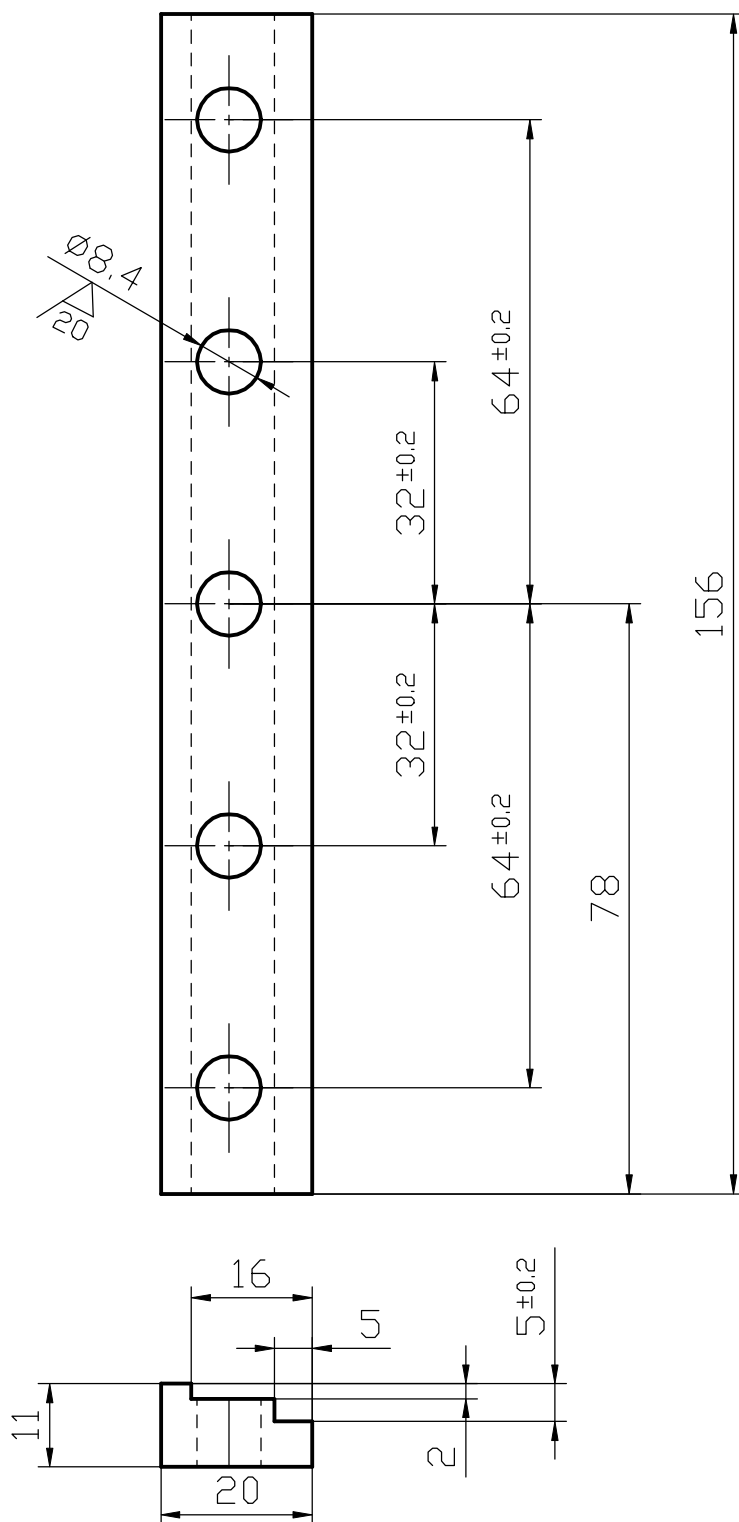
2	St3	1:1	Watek	Wykonano do
Ilość sztuk	Materiał	Podz.	Nazwa przedmiotu	RIB-012
				Nr rysunku

10



1. Ostre krawędzie stępić 0,2\*45°
2. Grubość 6 bez obróbki

8	St3	1:1	Płytką	Wykonano do
Ilość sztuk	Materiał	Podz.	Nazwa przedmiotu	Nr rysunku
				RIA-013

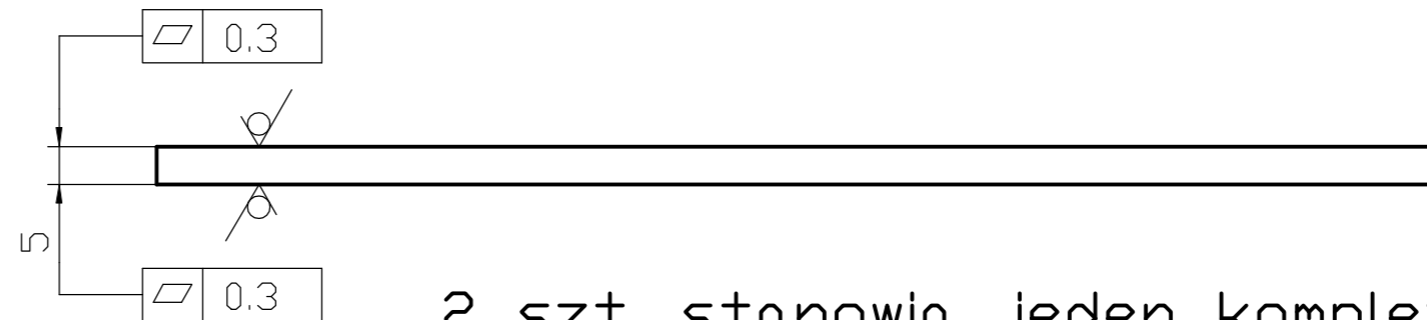
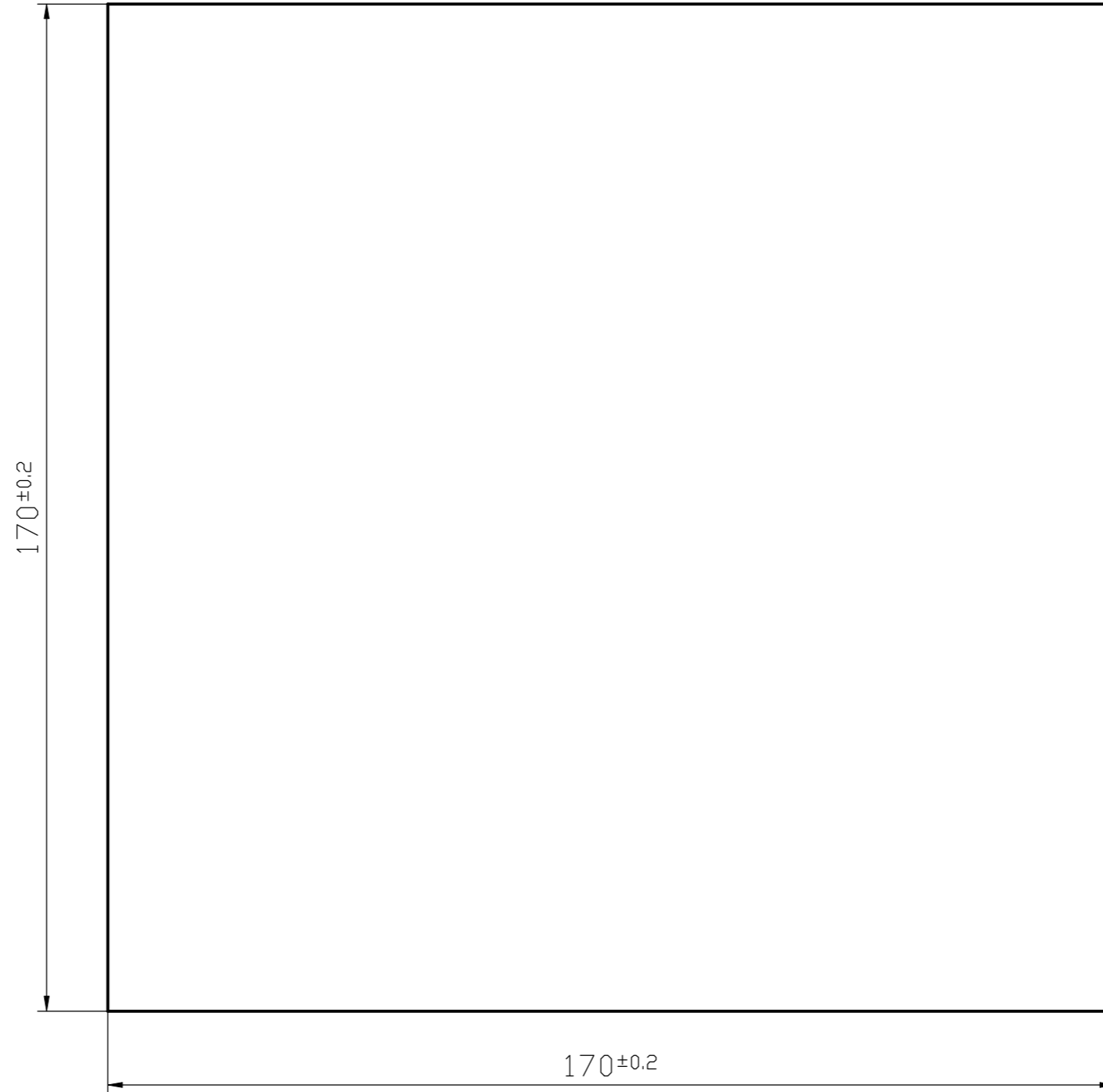


1. Ostre krawędzie stępić 0,2\*45°

8	45	1:1	Docisk	Wykonano do
Ilość sztuk	Materiał	Podz.	Nazwa przedmiotu	RIA-020
				Nr rysunku



10  
▽



2 szt. stanowią jeden komplet

1. Ostre krawędzie stępić 0,2\*45°

2 Ilość sztuk	St3 ≠8 Materiał	1:2 Podz.	Płyta Nazwa przedmiotu	Wykonano do
				RIA-030 Nr rysunku