Sur la covariance relativiste des lois de réfraction

H. WOJEWODA

Ecole Polytechnique de Wrocław, Institut de Physique, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Pologne.

Nous savons bien que le vecteur d'onde et la fréquence d'onde électromagnétique sont couplés sous forme d'un quadrivecteur. On peut faire des considérations analogues et aboutir aux résultats analogues dans le cas des conditions aux limites pour une onde électromagnétique. Maintenant, la condition aux limites pour le vecteur d'onde et celle pour la fréquence d'onde sont mises sous forme d'une seule relation quadridimensionnelle. Ainsi, nous avons obtenu une expression invariante relativiste des lois de réfraction (quand on passe d'un référentiel d'inertie à un autre). Cette méthode permet d'établir la forme relativiste des lois de réfraction (loi de Snell–Descartes et loi de fréquence).

1. Caractéristiques de propagation de la lumière

Le champ électromagnétique est caractérisé par l'expression suivante [1]–[16]

$$E = E_{0a} e^{-i(\omega t - k_a x_a)}, \qquad a = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Il y a partout la somme relativement à l'indice se répetant deux fois. C'est donc une onde électromagnétique monochromatique plane de fréquence ω et de direction $k_a = \dfrac{\omega}{c_o} c_a^0$.

On sait bien que la phase de propagation

$$\psi = \omega t - k_a x_a \tag{2}$$

est l'invariant de la transformation de Lorentz [9] (quand on passe d'un référentiel d'inertie à un autre). Cela nous permet de construire un vecteur d'onde quadridimensionnel k_α. L'indice grec α prend les valeurs 1, 2, 3, 4. On est conduit aux expressions suivantes

$$k_\alpha = \left(k_a,\ k_4 = \frac{i}{c_o}\,\omega \right). \tag{3}$$

Par conséquent, on écrit

$$E_a = E_{0a} e^{-k_\alpha x_\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4. \tag{4}$$

Soit K $(O\ X_1\ X_2\ X_3)$ un référentiel au repos (conventionnel) et K' $(O'\ X_1'\ X_2'\ X_3')$ un autre référentiel se déplaçant dans K à une vitesse $V = V_1$ constante. L'axe $O'X_1'$ coincide avec l'axe OX_1. Au moment initial, on a $O' = O$. Voir la figure 1. Le passage

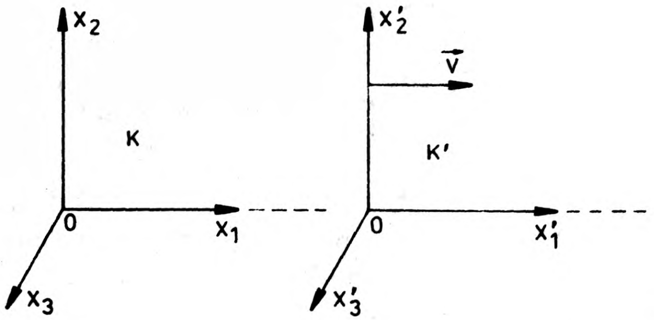

Fig. 1. Les référentiels d'inertie

d'un référentiel à l'autre est soumis au principe de relativité d'Einstein. Alors, les formules de transformation du 4-vecteur d'onde sont (transformation de Lorentz):

$$k'_\alpha = C_{\alpha\beta} k_\beta, \qquad k'_\alpha k'_\alpha = k_\alpha k_\alpha, \qquad k'_\alpha x'_\alpha = k_\alpha x_\alpha, \tag{5}$$

ou bien

$$k'_1 = \frac{k_1 + i\beta k_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad k'_2 = k_2, \quad k'_3 = k_3, \quad k'_4 = \frac{k_4 - i\beta k_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = V/c_o. \tag{6}$$

En coordonnées réelles, on obtient

$$k'_1 = \frac{k_1 \dfrac{\beta}{c_o} \omega}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad k'_2 = k_2, \quad k'_3 = k_3, \quad \omega' = \frac{\omega - V k_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{7}$$

Soulignons le fait que la fréquence ω et le vecteur d'onde k_a sont liées l'une à l'autre (couplage relativiste).

2. Lois de réfraction

Considérons une onde lumineuse monochromatique plane qui tombe sur le plan de séparation de deux milieux optiques homogènes (plan OX_2X_3 ou bien $x_1 = 0$, voir Fig. 2).

Le phénomène de réfraction (et de réflexion) de la lumière est soumis aux conditions de passage d'un milieu à l'autre. Pour un champ électromagnétique, les équations de Maxwell permettent d'établir les conditions aux limites [16]. Il y a la continuité de la composante tangentielle du champ électrique

$$(E_a \tau_a)_2 = (E_a \tau_a)_1 + (E_a \tau_a)'_1, \qquad \tau_1 = 0. \tag{8}$$

Cette condition (8) doit être respectée en tout point du plan de séparation des milieux et à chaque instant. Autrement dit, la relation (8) doit être vérifiée quelle que soit la position du point P dans le plan de réfraction $x_1 = 0$ et le temps t. Ici, l'indice a prend seulement deux valeurs: $a = 2, 3$. Les ondes dans les deux milieux se distinguent par les indices 1 et 2.

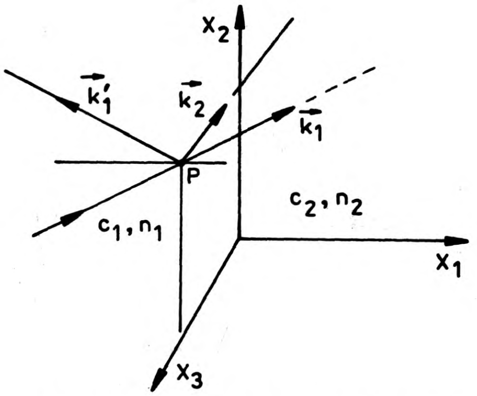

Fig. 2. La réfraction et la réflexion de la lumière

La condition aux limites "temporelle" donne

$$\omega_2 = \omega_1' = \omega_1. \tag{9}$$

Cela veut dire que les fréquences de l'onde refractée et de l'onde réfléchie sont les mêmes et égales à la fréquence d'onde incidente.

La condition aux limites "spatiale" conduit au résultat suivant

$$(k_a x_a)_2 = (k_a x_a)_1' = (k_a x_a)_1 . \tag{10}$$

Alors, les produits scalaires des vecteurs k_a et x_a sont les mêmes pour toutes les trois ondes (incidente, réfléchie et refractée). Comme le vecteur-position x_a est le même pour toutes ces ondes, on obtient

$$(k_a)_2 x_a = (k_a)_1' x_a = (k_a)_1 x_a . \tag{11}$$

La première conclusion est la suivante: lorsque, par exemple, on a $(k_a)_1 x_a = 0$, on aura aussi $(k_a)_2 x_a = 0$ et $(k_a)_1' x_a = 0$. Cela signifie que les rayons refracté et réfléchi sont contenus dans le plan d'incidence (tous sont perpendiculaires au vecteur-position).

L'autre conclusion permet de déterminer les directions des trois ondes. Considérons l'onde refractée. En vertu de la relation (11), on a

$$[(k_a)_2 - (k_a)_1] x_a = 0 \tag{12}$$

ou bien

$$\Delta k_a x_a = 0 \text{ avec } x_1 = 0 . \tag{13}$$

Ainsi, nous constatons que le vecteur

$$\Delta k_a = (\mathrm{k}_a)_2 - (k_a)_1$$

est perpendiculaire au plan d'incidence (voir Fig. 3). Par conséquent, on obtient

$$(k)_2 \sin\alpha_2 = (k_1) \sin\alpha_1 . \tag{14}$$

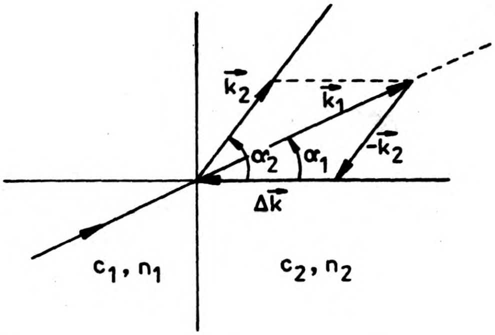

Fig. 3. La loi de Snell–Descartes

Compte tenu de la relation (9), on arrive à la formule bien connue

$$\frac{\sin\alpha_2}{c_2} = \frac{\sin\alpha_1}{c_1}. \tag{15}$$

Introduisant encore l'indice de réfraction du milieu $n = c_o/c$, on peut écrire

$$n_2 \sin\alpha_2 = n_1 \sin\alpha_1 . \tag{16}$$

On retrouve ici l'expression mathématique de la loi de Snell–Descartes.

Notons que cette loi (16) est contenue dans l'équation (13) (en présence de certaines conditions). Cette forme de la loi de réfraction (13) sera utilisée dans les considérations qui suivent.

3. Loi de réfraction généralisée

Passons maintenant au formalisme quadridimensionnel. En nous aidand de l'équation (13) pour le vecteur d'onde tridimensionnel k_a, nous écrivons la relation quadridimensionnelle suivante (analogie formelle):

$$\Delta k_\alpha x_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \tag{17}$$

avec $k_4 = i/c_o$ et $x_4 = ic_o t$.

Le développement du produit scalaire $\Delta k_\alpha x_\alpha$ donne

$$\Delta k_a x_a + \Delta k_4 x_4 = 0$$

ou bien, en coordonnées réelles,

$$\Delta k_a x_a - (\omega_2 - \omega_1)t = 0 . \tag{18}$$

Il faut faire ici la réserve essentielle suivante: nous admettons que la relation (17) satisfait à des conditions de généralité. Elle doit être vérifiée en tout point de la surface de séparation des milieux et à chaque instant. Mathématiquement parlant, on demande que l'équation (17) soit vérifiée quelle que soit la position du point x_a dans le plan de séparation $x_1 = 0$ et quel que soit le temps t.

Revenons à la relation (18). Etant donné que le point x_a et le temps t sont arbitraires, on obtient deux équations. La première d'entre elles est

$$\Delta k_a x_a = 0 \tag{19}$$

et la seconde

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 0. \tag{20}$$

C'est la loi de Snell–Descartes et celle de l'égalité des fréquences de deux ondes incidente et refractée. Elles découlent, toutes les deux, de la relation (17) que le produit scalaire à quatre dimensions des vecteurs Δk_α et x_α est nul. Ainsi, la relation quadridimensionnelle (17) généralise respectivement la loi de Snell–Descartes. Autrement dit, les deux lois de réfraction peuvent être condensées en une seule équation quadridimensionnelle.

4. Formules relativistes

Considérons maintenant deux référentiels d'inertie K et K' (Fig. 1). Le référentiel K' est en mouvement dans le référentiel K à la vitesse $V = V_1$ ($V_2 = V_3 = 0$). Comme il se doit, les 4-scalaires sont des invariants de la transformation de passage d'un référentiel d'inertie à un autre. Alors, par conséquent, on a (relations générales)

$$\Delta k_\alpha x_\alpha = \Delta k_\alpha x_\alpha = 0. \tag{21}$$

De l'invariance de l'expression (21), on déduit: si dans un référentiel quelconque la loi de réfraction sous forme (17) est vérifiée, elle est vérifiée aussi dans tout autre référentiel d'inertie. Ainsi, cette relation (17) peut être considérée comme la généralisation relativiste de la loi de réfraction sous forme (13). La loi réfraction constitue son cas particulier.

Supposons maintenant que la surface de séparation de deux milieux est au repos dans le référentiel mobile K' (plan $O'X'_2X'_3$ ou bien $x'_1 = 0$, voir Fig.2). Lorsque donc dans K', on a

$$\Delta k'_\alpha x'_\alpha = 0$$

on aura aussi, dans le référentiel K

$$\Delta k_\alpha x_\alpha = 0 \tag{22}$$

avec: $x_2 = x'_2$, $x_3 = x'_3$, $k_2 = k'_2$, $k_3 = k'_3$ (transformation de Lorentz). Alors, pour un observateur du référentiel K, en coordonnées réelles, la relation (22) devient

$$\Delta k_a x_a - (\omega_2 - \omega_1)t = 0. \tag{23}$$

Nous admettons que cette relation est vérifiée en tout point du plan de réfraction ($x'_1 = 0$ dans K' ou, ce qui est équivalent, $x_1 = Vt$ dans K) et à chaque instant t. Alors (le vecteur $\Delta k_a = \Delta k'_a$ étant toujours perpendiculaire au plan de réfraction), nous obtenons

$$\Delta k_2 = 0 = \Delta k_3 \tag{24}$$

et aussi

$$\Delta k_1 x_1 - (\omega_2 - \omega_1)t = 0 \tag{25}$$

Considérons, tout d'abord, la relation (25). En vertu du fait que $x_1 = Vt$ (car $x_1' = 0$), on est conduit à la formule relativiste des fréquences [17]–[19]

$$n_2\omega_2\beta\cos\alpha_2 - n_1\omega_1\beta\cos\alpha_1 - (\omega_2 - \omega_1) = 0$$

soit

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1-\beta n_1\cos\alpha_1}{1-\beta n_2\cos\alpha_2}. \tag{26}$$

La formule (24) déterminant les directions de propagation des ondes lumineuses dans les deux milieux devient

$$\omega_2 n_2 \sin\alpha_2 = \omega_1 n_1 \sin\alpha_1. \tag{27}$$

En définitive, on trouve [17]–[19]

$$\frac{n_2\sin\alpha_2}{1-\beta n_2\cos\alpha_2} = \frac{n_1\sin\alpha_1}{1-\beta n_1\cos\alpha_1}. \tag{28}$$

L'indice de réfraction du milieu optique isotrope et homogène dans le référential K' ($n' = c_o/c'$) se transforme comme suit [22]

$$n = \sqrt{1+\frac{(n'^2+1)(1-\beta^2)}{(1+n'\beta\cos\alpha')^2}} \tag{29}$$

(anisotropie cinématique).

Telles sont les relations exprimant la loi de réfraction de la lumière dans référentiel où la surface de séparation de deux milieux est en mouvement rectiligne uniforme. Ces résultats sont conformes à ceux trouvés par un autre raisonnement [17]–[22].

5. Conclusions

En conséquence des résultats obtenus, nous constatons de nouveau que les lois établies par l'optique géométrique ne sont vérifiées que par un observateur se trouvant au repos dans le référentiel propre du système optique. La relation (21) résolve le problème posé:

1. Les deux lois de réfraction de la lumière peuvent être exprimées par une seule équation quadridimensionnelle (17) (elles sont contenues dans cette équation).

2. Quand on passe d'un référentiel d'inertie à un autre, la forme de l'équation de réfraction (17) ne change pas.

Ainsi, nous avons obtenu un résultat important.

Le fait que l'équation (17) exprime effectivement les lois de réfraction de la lumière est justifié par les formules relativistes (26) et (28). Nous avons obtenu ces formules du principe même de transformation du vecteur d'onde quadridimensionnel et de l'invariant de réfraction [17]. Pour terminer soulignons, une fois de plus, que la réfraction de la lumière est un phénomène relatif; elle dépend de l'observateur.

Les résultats obtenus sont dans le cadre des études que nous avons entreprises [17]–[22]. On se propose ici de completer respectivement l'optique relativiste.

Références bibliographiques

[1] MARÉCHAL A., *Traité d'optique instrumentale. Imagerie optique. Aberrations*, Vol. 1, [Ed.] Rev. Opt. Théor. et Instr., Paris 1952.
[2] CHRÉTIEN H., *Cours du calcul des combinaisons optiques*, [Ed.] Rev. Opt., Paris 1938.
[3] BORN M., WOLF E., *Principles of Optics*, Pergamon Press. Oxford 1964.
[4] TUDOROVSKI A. I., *Teoriya opticheskikh priborov* (in Russian) [Ed.] AN USSR, Moskva, Leningrad 1948.
[5] SLUSAREV G. G., *Geometricheskaya optika* (in Russian), [Ed.] AN USSR, Moskva 1946.
[6] LANDSBERG G. S., *Optika* (in Russian), [Ed.] OGIZ, Moskva 1947.
[7] APENKO M. I., DUBOVIK A. S., *Prikladnaya optika* (in Russian). [Ed.] Nauka, Fiz.-Mat. Lit., Moskva 1971.
[8] SLUSAREV G. G., *Metody rascheta opticheskikh sistem* (in Russian), [Ed.] Mashinostroenie. Leningrad 1969.
[9] LANDAU L., LIFSZIC E., *Teoria pola* (in Polish), PWN, Warszawa 1971.
[10] FOCK W. A., *Teoriya prostranstva, vremeni i tyagoteniya* (in Russian), [Ed.] Gos.-Fiz.-Mat. Lit., Moskva 1961.
[11] TRAUTMAN A., *Teoria względności* (in Polish), [Ed.] Ossolineum, Warszawa 1971.
[12] MC CREA W. H., *Relativity Physics*, Methuen and Co. Ltd., London 1947, New York 1954.
[13] SYNGE J. L., *Relativity: The Special Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1958.
[14] MELCHER H., *Relativitätstheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978.
[15] WOJEWODA H., *Relatywistyczna teoria pola elektromagnetycznego* (in Polish), Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1974.
[16] BOK J., HULIN–JUNG N., *Ondes électromagnétiques – Relativité*, [Ed.] Hermann, Paris 1975.
[17] WOJEWODA H., Opt. Appl. **4** (1974), 64.
[18] WOJEWODA H., Opt. Appl. **4** (1974), 37.
[19] WOJEWODA H., Annales des Fac. Pol. de l'UNAZA, Lubumbashi-Kinshasa, **3** (1977), 147.
[20] WOJEWODA H., Opt. Appl. **8** (1978), 155.
[21] WOJEWODA H., J. Optics (Paris) **12** (1981), 193.
[22] WOJEWODA H., Opt. Appl. **14** (1984), 171.

Received April 6, 1990

О релятивистской ковариантности законов преломления

Известно, что волновой вектор, а также частота электромагнитной волны сопряжены релятивистски в виде одного четырехмерного вектора. Похожие рассуждения, а также результаты можно получить для электромагнитной волны в случае граничных условий. Граничное условие для волнового вектора, а также граничное условие для частоты волны были представлены в видие одной четырехмерной зависимости. Таким образом была получена релятивистски инвариантная формула законов преломления (при изменении инерционной системы отчета). Этот метод позволяет определить релятивистскую форму законов преломления (закон Снелл-Декарта и закон частот).

Перевел Станислав Ганцаж