

KAZIMIERZ KRULISZ

INŻYNIER-ELEKTRYK  
MAJOR WOJSK ŁĄCZNOŚCI

Biblioteka Główna i OINT  
Politechniki Wrocławskiej



100100212912

# ZASADY RADJOTECHNIKI

CZĘŚĆ I

PODSTAWY TEORETYCZNE

NAKŁADEM

SEKCJI RADJOTECHNICZNEJ STOWARZYSZENIA ELEKTRYKÓW POLSKICH

WYDANE PRZY POMOCY SUBSYDJUM

MINISTERSTWA POCZT I TELEGRAFÓW I INSTYTUTU RADJOTECHNICZNEGO

WARSZAWA 1934



K A Z I M I E R Z   K R U L I S Z

INŻYNIER-ELEKTRYK  
MAJOR WOJSK ŁĄCZNOŚCI

Z A S A D Y  
R A D J O T E C H N I K I

CZĘŚĆ I

PODSTAWY TEORETYCZNE

NAKŁADEM

SEKCJI RADJOTECHNICZNEJ STOWARZYSZENIA ELEKTRYKÓW POLSKICH

WYDANE PRZY POMOCY SUBSYDJUM

MINISTERSTWA POCZT I TELEGRAFÓW I INSTYTUTU RADJOTECHNICZNEGO

WARSZAWA 1934

153367

PRAWA AUTORSKIE ZASTRZEŻONE.



343613 L/1

---

Druk. „Społeczna”, Warszawa, Pl. Grzybowski 3/5, tel. 205-80.

---

0040/015810

\*

\*

\*

Dłuższa przerwa między wydaniem trzech pierwszych rozdziałów części I-ej, a wydaniem dalszego ciągu pracy spowodowana była w znacznej mierze brakiem odpowiednich funduszków. To też w imieniu Sekcji Radjotechnicznej i swoim własnym poczuwam się do miłego obowiązku złożenia w tym miejscu podziękowania Panu Ministrowi Poczt i Telegrafów inż. Emilowi Kalińskiemu i Dyrektorowi Departamentu Technicznego tegoż Ministerstwa, Panu inż. mjr. Antoniemu Krzyczkowskiemu za przyznanie subsydjum, które pozwoli wydać w szybkim tempie również i pozostałe dwie części.

Z pośród osób, wymienionych w przedmowie do pierwszej części tego tomu i okazujących mi nadal skuteczną pomoc w pracy, szczególnie podziękowanie należy się Panu kpt. inż. Karolowi Wołowskiemu za jego niezmiernie cenne rady i wydatną pomoc korektorską, której mi nie szczędził pomimo przeciążenia własnymi obowiązkami, oraz Biuru Stowarzyszenia Elektryków Polskich, a w szczególności Generalnemu Sekretarzowi Panu inż. Józefowi Podoskiemu i Panu inż. Mściławowi Pczyckiemu. Przyjmując na siebie wszystkie obowiązki administracyjne, związane z wydawnictwem, Biuro ułatwiło mi w dużym stopniu prace wydawnicze.

AUTOR.

Warszawa, w lipcu 1934.



## PRZEDMOWA

Szybki rozwój radjotechniki w ciągu ostatnich lat kilkunastu, a przede wszystkim jej doniosłe znaczenie dla szeregu celów praktycznych, sprawiły, iż ta najmłodsza gałąź elektrotechniki zatraciła szybko charakter fizykalno-laboratoryjny, a zdobycze jej wcześniej stały się własnością przemysłu i eksploatacji, zanim doczekały się wszechstronnego pogłębienia teoretycznego. Teorja, wypracowywana nie tylko w uczelniach, lecz w znacznej części w pracowniach naukowych wielkich firm i w laboratorjach państwowych, stopniowo tylko przenika na łamy pism naukowych pod postacią oderwanych przyczynków, siłą rzeczy nie uzgodnionych przez różnych autorów. To rozdrobnienie i ta dorywczość prac teoretycznych, a głównie różnorodność języków, w których są ogłaszane, stanowi poważną trudność dla studujących, którzy nie rozporządzają w dostatecznej mierze czasem, niezbędnym dla przeprowadzenia samodzielnych dociekań.

Materiały, któremi rozporządzamy, są obecnie już wystarczające dla syntetycznego ujęcia. Dlatego też radjotechnika może się wykazać szeregiem dzieł klasycznych, częstokroć o charakterze czysto naukowym, z pośród których, ze względu na bardzo rozległy zakres tego działu nauk technicznych, na pierwsze miejsce wybijają się monografie, wyczerpująco ujmujące poszczególne specjalności radjotechniki, jak znane w Polsce lampy katodowe prof. Dr. Groszkowskiego.

Wobec tego jednakże, że w naszej literaturze technicznej daje się odczuwać brak podręcznika, któryby obejmował całość, a zwłaszcza zasady ogólne radjotechniki z uwzględnieniem potrzeb inżyniera-praktyka, zdecydowałem się wydać niniejszą książkę. Ze względu na ten jej charakter, ograniczyłem możliwie rozważania czysto matematyczne, sprowadzając je do niezbędnych dla zrozumienia zjawisk fizycznych, starałem się natomiast dać jaknajwięcej przykładów obliczeniowych i wskazówek praktycznych. Całość dzieli się na trzy części zasadnicze: Podstawy teoretyczne, Części konstrukcyjne, Urządzenia radjotechniczne. Obecnie, ze względu na trudności wydawnicze, wychodzi jedynie część pierwsza.

Czytelnika zdziwi może brak pewnego rodzaju wstępu z zasad elektrotechniki. Ominąłem go celowo, by nie obarczać książki materia-

tem, który z konieczności musiałby być nazbyt zwięzły, a który jest świetnie opracowany w szeregu dzieł naszej literatury elektrotechnicznej. Nieco obszerniej natomiast opracowano na początku teorię obwodów rezonansowych i sprzężonych, która stanowi podstawę dla należytego zrozumienia wszelkiego rodzaju urządzeń radjotechnicznych.

Zadaniem podręcznika jest danie czytelnikowi podstaw i nadanie mu kierunku do dalszej pracy samodzielnej, która wobec szybkiego rozwoju wiedzy i techniki współczesnej opierać się winna przede wszystkim na śledzeniu literatury periodycznej, tak krajowej, jak i obcej.

Niech mi wolno będzie w tym miejscu złożyć najserdeczniejsze podziękowanie tym, których inicjatywa i poparcie umożliwiły wydanie tego tomu w okresie bynajmniej nie sprzyjającym realizacji tego rodzaju przedsięwzięć, a mianowicie Zarządowi Sekcji Radjotechnicznej S. E. P. z jej Prezesem, Panem dyr. inż. Kazimierzem Jackowskim na czele, jak i Panu prof. Dr. Januszowi Groszkowskiemu, Dyrektorowi Instytutu Radjotechnicznego. Osobne podziękowanie należy się moim najbliższym współpracownikom, a więc w pierwszym rzędzie Panu kapitanowi Stefanowi Jasińskiemu za Jego długoletnią stałą współpracę nad przygotowaniem i opracowaniem materiałów do rękopisu i pomoc w sprawach administracyjnych, związanych z drukiem, Pani Olenie Arcimowiczównie za pełne poświęcenia zajęcie się stroną graficzną książki, i Panu kpt. inż. Karolowi Wołowskiemu za przygotowanie szeregu wykresów oraz wydatną pomoc i cenne rady w czasie uskuteczniania korekty wydawnictwa.

Warszawa, w lutym 1932 r.

AUTOR.



## WSTĘP.

### 1. Przedmiot radjotechniki.

Głównem zadaniem radjotechniki jest studjum zagadnień, związanych z przesyłaniem energii elektrycznej na odległość bez pomocy połączenia przewodzącego. To przesyłanie energii dochodzi do skutku dzięki promieniowaniu przez źródło prądu zmiennego — *fal elektromagnetycznych*, które, rozchodząc się w przestrzeni, indukują w napotykanym po drodze przewodnikach siły elektromotoryczne o częstotliwości tej samej, jaką posiada prąd wytwarzający fale. Chociaż zasadniczo prąd zmienny o każdej częstotliwości promieniuje fale elektromagnetyczne, to jednakże z energią wystarczającą do celów technicznych zjawisko promieniowania występuje dopiero przy częstotliwościach powyżej 10 000 okr./sek, takimi więc *prądami wielkiej częstotliwości*, czyli *szybkoszmiennymi* zajmuje się radjotechnika.

Zagadnienia radjotechniki rozpadają się na trzy równe grupy:

- 1) *Wytwarzanie* prądów szybkoszmiennych,
- 2) *Promieniowanie* fal elektromagnetycznych i rozchodzenie się ich w przestrzeni,
- 3) *Pochłanianie* energii z fal elektromagnetycznych i wykorzystanie tej energii, czyli *odbiór* radjoelektryczny.

Podczas gdy pierwsza i trzecia grupa mieszczą się całkowicie w ramach elektrotechniki, to druga znacznie poza nią wykracza, sięgając do fizyki najwyższych warstw atmosfery ziemskiej i stykając się w wielu punktach z meteorologją, geofizyką, a nawet z astronomją.

Fundamentem radjotechniki jest teoria prądów zmiennych w najszerszym swoim zakresie, wiele bowiem zjawisk, które przy częstotliwościach spotykanych w technice prądów silnych, mają znaczenie drugorzędne, przy częstotliwościach, któremi operuje radjotechnika, dochodzą do pierwszorzędnej doniosłości. Wystarczy tu wymienić promieniowanie energii z przewodników, zjawiska rezonansowe, naskórkowość i wpływ pojemności własnej przewodników i t. p. Bardzo ważne są również dla radjotechniki teoria długich linii i elektroakustyka, czyli technika zamiany energii głosowej na elektryczną i naodwrot. Tak więc radjotechnika w całej swej rozciągłości opiera się na znajomości teorii prądów zmiennych, w niektórych tylko kierunkach pogłębiając ją dla swoich celów.

Z radjotechniką łączy się ściśle szereg innych działów fizyki technicznej, z których donioślejszą stała się w ostatnich kilkunastu latach technika lamp katodowych, a ostatnio i komórek światłoczułych, oparta

znowu na technice wysokich próżni. Z drugiej strony ze zdobyczy radjotechniki korzystają inne gałęzie wiedzy i techniki, jak technika pomiarów elektrycznych, elektromedycyna, hutnictwo (piece wielkiej częstotliwości), meteorologja, astronomja (pomiar czasu i światłości gwiazd), nie mówiąc już o ściśle z radjotechniką związaną teletechnice. Tak więc radjotechnika nie jest bynajmniej wiedzą zamkniętą w sobie, lecz współpracuje ku obopólnej korzyści z innymi działami elektrotechniki i techniki w ogólności, a dzięki właściwościom swego zastosowania stała się czynnikiem wkraczającym wielokrotnie w zakres zainteresowań polityki międzynarodowej.

Uwzględniając światowe znaczenie wiedzy radjotechnicznej, stworzono dwie międzynarodowe organizacje, zajmujące się jej rozwojem, a mianowicie:

1) Międzynarodową radjową Unję naukową (Union Radio Scientifique Internationale, U. R. S. I.), której zadaniem są badania czysto naukowe nad rozchodzeniem się fal i pokrewnymi zjawiskami, oraz

2) Międzynarodowy Komitet Doradczy dla Spraw Technicznych Radjokomunikacji (Comité Consultatif International Technique des Communications Radioélectriques, C. C. I. R.), zbierający się od r. 1929 w odstępach dwuletnich i wypowiadający swe opinie w sprawach technicznych, związanych z eksploatacją urządzeń radjowych.

Wszelkie zaś sprawy organizacyjne o znaczeniu międzynarodowym, związane z eksploatacją środków radjokomunikacyjnych, regulują Międzynarodowe Konferencje Radjotelegraficzne, zbierające się z reguły co 5 lat. Owoce prac tych Konferencyj jest Międzynarodowa Konwencja Radjotelegraficzna (Convention Radiotélégraphique Internationale), która wraz z dołączonymi regulaminami dyktuje normy używania środków radjokomunikacyjnych, obowiązujące wszystkie państwa, które Konwencję podpisały.

Organem regulującym wszystkie sprawy bieżące, związane z radjokomunikacją, jest Międzynarodowe Biuro Telegraficzne, urzędujące w Bernie Szwajcarskiem.

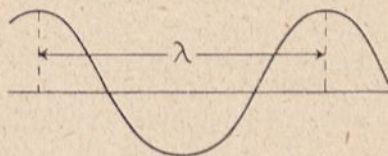
## 2. Zasada radjokomunikacji.

Prąd zmienny, płynąc w przewodniku, wywołuje w jego otoczeniu pola magnetyczne i elektryczne o złożonym przebiegu, które w próżni (i w powietrzu) przenoszą się z szybkością światła, tworząc t. zw. pole elektromagnetyczne. W dostatecznej odległości od źródła fala elektromagnetyczna składa się z pola elektrycznego i pola magnetycznego (stąd nazwa), zgodnych w fazie, lecz skierowanych prostopadle względem siebie i względem kierunku posuwania się fali, i zmieniających się z częstotliwością równą częstotliwości prądu w przewodniku promieniującym. Wzdłuż powierzchni ziemi (o ile ją będziemy uważali za doskonały przewodnik), pole elektryczne fali posiada kierunek pionowy, magnetyczne zaś poziomy. Fala elektromagnetyczna jest więc *falą poprzeczną*. Oba pola zawierają w sobie i przenoszą równe ilości energii; energia ta, zawarta w fali, zaczerpnięta została oczywiście ze źródła prądu, które tę falę wytworzyło.

Pod długością fali elektromagnetycznej rozumiemy odległość w przestrzeni, dzielącą w danej chwili dwie bezpośrednio po sobie następujące amplitudy tego samego znaku (rys. 1). Między długością fali  $\lambda$  a częstotliwością jej drgań  $f$ , względnie ich okresem  $T$ , zachodzi zaś znany związek

$$\lambda = \frac{c}{f} = c T, \quad (1)$$

gdzie  $c$  jest szybkością rozchodzenia się fali. W przypadku fal elektromagnetycznych  $c$  równa się szybkości światła i wynosi około  $2,9982 \cdot 10^{10}$  cm/s. Stąd długość fali elektromagnetycznej w powietrzu



Rys. 1.

$$\lambda \text{ cm} = \frac{2,9982 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}}{f \text{ okr/s}}. \quad (1a)$$

W obecnej technice radiokomunikacyjnej znajdują zastosowanie fale o długości od 30 000 m do kilkunastu cm. co odpowiada częstotliwościom prądów wzbudzających od  $10^4$  do  $2 \cdot 10^9$  okresów na sekundę. Do niedawna fale elektromagnetyczne określano w radiokomunikacji według ich długości, wyrażonej w metrach. Obecnie przyjęto jako cechę charakterystyczną urządzeń nadawczych i odbiorczych oraz ich obwodów rezonansowych *częstotliwość*, wyrażoną w tysiącach lub milionach okresów na sekundę (kilocykle i megacykle). Do przeliczania częstotliwości na długość fali przyjęto tymczasowo szybkość światła jako równą  $3 \cdot 10^{10}$  cm/s.

Urządzenie wytwarzające i wysyłające fale elektromagnetyczne czyli *stacja nadawcza* zawierać musi trzy zasadnicze czynniki:

1) Źródło energii (silnik cieplikowy lub wodny, względnie sieć elektryczna),

2) Generator prądu szybkozmiennego,

3) Obwód promieniujący fale, czyli antenę nadawczą.

Energja, promieniująca z anteny pod postacią pola elektromagnetycznego, w miarę oddalania się od anteny, obejmuje coraz większą przestrzeń, wskutek czego ilość energii, przypadająca na jednostkę przestrzeni, maleje z odległością od stacji nadawczej. Energja przenoszona przez fale zanika jeszcze i z tego powodu, że pola jej, napotykając w drodze na przewodniki, indukują w nich siły elektromotoryczne, te zaś wytwarzając w tych przewodnikach prądy, powodują w nich zużycie energii, oczywiście kosztem fali elektromagnetycznej. Takim przewodnikiem, pochłaniającym energję fal, jest przede wszystkim powierzchnia ziemi wraz ze wszystkimi na niej się znajdującymi przedmiotami, zdolnymi przewodzić elektryczność.

Również i *stacje odbiorcze* posługują się celowo przewodnikami, pochłaniającymi energję elektromagnetyczną z przestrzeni, które noszą nazwę *anten odbiorczych*. Oprócz:

1) Anteny odbiorczej  
stacja odbiorcza musi posiadać

2) Obwód lub obwody rezonansowe, nastrajane na żadaną częstotliwość fali.

3) Urządzenie przetwarzające energię prądów szybkozmiennych na energię zdolną wytwarzać dźwięki lub też uruchamiać przyrządy zapisujące, czyli t. zw. *detektor*.

W praktyce radjokomunikacyjnej używa się z reguły detektorów prostujących, zamieniających prądy szybkozmiennne na impulsy jednokierunkowe.

Wreszcie ze względu na to, że moc pochłaniania przez antenę odbiorczą jest przeważnie bardzo mała (nieraz bywa rzędu  $10^{-9}$  wata), stosuje się na stacjach odbiorczych w bardzo szerokim zakresie:

4) *Wzmacniacze*, czyli przekaźniki, wyzwalające ze źródeł miejscowych energię w rytmie odbieranych impulsów.

Tak urządzenia detekcyjne, jak i wzmacniające posługują się obecnie prawie wyłącznie lampami katodowymi.

### 3. Typy radjokomunikacji.

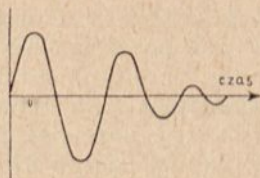
Przesyłanie wiadomości zapomocą fal elektromagnetycznych może się odbywać zapomocą jednego z następujących sposobów:

1) *Telegrafji*, czyli nadawania umówionych impulsów, które na stacji odbiorczej albo odtwarzają alfabet Morse'a (dźwiękowo lub zapomocą pisanych kropek i kresek), albo też za pośrednictwem odpowiednich mechanizmów bezpośrednio drukują litery.

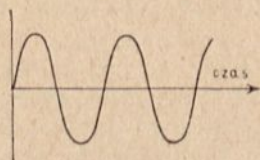
2) *Telefonji*, polegającej na odpowiednim *modulowaniu* fal wysyłanych.

3) *Przesyłania obrazów* nieruchomych (teleautografja) lub ruchomych (telewizja).

W początkach radjokomunikacji używano wyłącznie fal t. zw. *gasnących*, wytwarzanych przez prądy, składające się z następujących po sobie impulsów o zanikającej amplitudzie (rys. 2a). Fale takie, jako przerywane, nadają się tylko dla celów telegrafji i użycie ich ogranicza



Rys. 2a.



Rys. 2b.

się obecnie jedynie do niektórych służb radjokomunikacji morskiej, dzięki łatwości odbioru na odbiornikach kryształkowych. Natomiast bardzo szerokie zastosowanie znalazły fale wytwarzane przez prądy sinusoidalne o stałej amplitudzie czyli fale *niegasnące* (rys. 2b), nadające się do wszelkich typów przesyłania.

Międzynarodowa Konferencja Radjotelegraficzna, która odbyła się w r. 1927 w Waszyngtonie, sklasyfikowała typy fal nadawczych w sposób następujący:

Klasa A — fale niegasnące,

Typ A-1 — fale niegasnące nadawane telegraficznie,

Typ A-2 — fale niegasnące nadawane telegraficznie i równocześnie modulowane tonem,

Typ A-3 — fale niegasnące modulowane telefonicznie,

Klasa B — fale gasnące.

Na zakończenie wymienić należy osobną grupę przesyłania impulsów radjoelektrycznych, jaką stanowi *telemechanika*, czyli kierowanie na odległość pojazdów i statków, uruchamianie maszyn i t. p. Pod względem technicznym jest to właściwie telegrafja, gdyż polega ona na wysyłaniu impulsów, które na stacji odbiorczej uruchamiają układy przekazników włączające obwody miejscowe. Telemechanikę można więc określić jako połączenie radjotelegrafji z telefonją automatyczną.

#### 4. Rozwój historyczny radjokomunikacji.

Ogłoszenie teorii fal elektromagnetycznych przez James Clerk Maxwell'a w r. 1873, i doświadczalne jej potwierdzenie przez Henryka Hertza w latach 1886—1888, nie nasunęły początkowo żadnych wniosków co do praktycznej możliwości wykorzystania tego doniosłego odkrycia. Wprawdzie w r. 1889 Elihu Thompson wysunął myśl wykorzystania fal elektromagnetycznych dla telegrafji, a Nikola Tesla w r. 1893 dokonał w tym kierunku prób laboratoryjnych, lecz dopiero w r. 1895 Guglielmo Marconi urzeczywistnił pierwsze połączenie radjotelegraficzne, posługując się do tego celu świeżo przez prof. Righi'ego zbudowanym iskiernikiem, anteną odbiorczą Popowa (1895) kohererem Branly'ego (1892). Zasługą Marconi'ego było racjonalne połączenie wszystkich tych wynalazków i udowodnienie możliwości praktycznego ich użycia. Doświadczenia Marconi'ego zwróciły wkrótce uwagę na ten nowy środek łączności, a zwłaszcza na jego doniosłość dla marynarki. W Niemczech w latach 1898—1902 Braun, Arco i Slaby ulepszyli urządzenia o falach gasnących czyli iskrowe, współpracując z firmą elektrotechniczną A. E. G., w Anglii Marconi zorganizował tow. Marconiego, które w r. 1900 zbudowało pierwszą stację wielkiej mocy w Poldhu, która to stacja w r. 1902 nawiązała pierwszą łączność z kontynentem amerykańskim. W r. 1902 dokonano również poważnego ulepszenia w odbiorze, wprowadzając na miejsce niepewnych kohererów prostowniki elektrolityczne (G. Ferrié, Schlömlich, Fessenden).

W r. 1903 Waldemar Poulsen zbudował pierwszy generator fal niegasnących, oparty na zasadzie łuku elektrycznego, połączonego z obwodem drgań.

W r. 1904 radjotelegraf znalazł pierwsze praktyczne zastosowanie w wojsku podczas wojny rosyjsko-japońskiej.

Począwszy od r. 1905 zarzucono stosowany do tej pory odbiór piszący zapomocą aparatu Morse'a, przechodząc na odbiór słuchowy, ulepszony zwłaszcza dzięki odkryciu detektorów kryształkowych (1906, F. Braun, G. J. Pickard).

W latach następnych system iskrowy i fal niegasnących rozwijały się równolegle. Pierwszy dał w r. 1906—7 iskiernik wielokrotny Wien'a i iskiernik wirujący Fessenden'a, drugi zaś dalsze ulepszenia łuku Poulsen'a i stworzenie maszyn wielkiej częstotliwości (Fessenden i Aleksan-

derson 1905 — 10, Goldschmidt 1911) i transformatorów częstotliwości (Arco 1912 — 13), oraz wynalezienie zasady interferencyjnego odbioru słuchowego fal niegasnących (R. A. Fessenden 1907).

Punktem przełomowym w rozwoju radjokomunikacji jest wynalezienie lampy katodowej trójelektrodowej (Lee de Forest 1907), a zwłaszcza zasady sprzężenia zwrotnego (Meissner 1913). Z chwilą stworzenia lampowych generatorów prądów szybkozmiennych rozwiązano również zagadnienie radjotelefonji, które dotąd było w stadium prób. Bardzo szybki rozwój nadajników i odbiorników lampowych nastąpił w czasie wojny światowej z obu stron frontu. Wykorzystanie prac wojennych dało po wojnie wspaniałe rozwój radjofonji, a następnie fal krótkich i bardzo krótkich, a w ostatnich latach przesyłania obrazów i prac doświadczalnych nad telewizją. Epoka powojenna nie przyniosła, co prawda, poza systematycznym zbadaniem bardzo dużego zasięgu fal krótkich, żadnych rewolucyjnych odkryć w dziedzinie radjotechniki, daje ona natomiast systematyczne pogłębienie wiedzy radjotechnicznej i coraz dalsze ulepszenia i wypracowania poprzednio poznanych środków. Po okresie odkryć nadszedł okres ich wykorzystania.

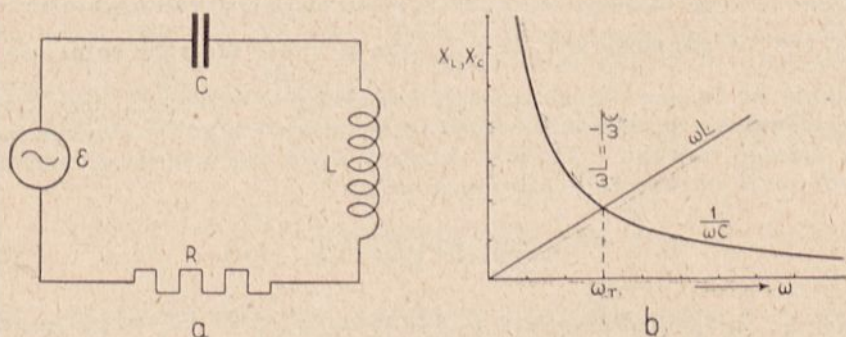
---

## ROZDZIAŁ I. OBWODY REZONANSOWE.

Zjawiska rezonansu w obwodach elektrycznych, zawierających indukcyjność i pojemność, posiadają dla radjotechniki pierwszorzędą doniosłość. Obwody rezonansowe spotykamy tak na stacjach nadawczych, gdzie wielokrotnie od nich uwarunkowana jest częstotliwość wytwarzanych prądów, jak i w urządzeniach odbiorczych, gdzie pozwalają one wydzielić żądaną częstotliwość z chaosu fal elektromagnetycznych, wypełniających w każdej chwili przestrzeń. Dlatego też gruntowne zaznajomienie się z temi zjawiskami jest nieodzowne dla dalszych studjów nad radjotechniką.

### 1. Istota rezonansu napięć i przepięcie rezonansowe.

Gdy w obwód zawierający szeregowo połączone oporność  $R$ , indukcyjność  $L$  i pojemność  $C$  (rys. 3 a) włączamy szeregowo siłę elektromoto-



Rys. 3.

ryczną  $E$  o częstotliwości kątowej (pulsacji)  $\omega = 2\pi f$ , oporność jego wyrazi się symbolicznie wzorem

$$\hat{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

gdzie  $j = \sqrt{-1}$  jest jednostką urojoną, względnie — w postaci rzeczywistej

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Natężenie prądu, płynącego w tym obwodzie, wynosi

$$J = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (1)$$

Przy danej sile elektromotorycznej i oporności  $R$  wartość  $J$  będzie największa, gdy oporność urojona obwodu  $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  stanie się równą zero, wówczas bowiem

$$J_r = \frac{E}{R}. \quad (1a)$$

Przypadek ten dla określonego obwodu znajdzie wówczas, gdy (rys. 3b)

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

czyli gdy częstotliwość zasilająca będzie wynosiła

$$\omega_r = 2\pi f_r = \frac{1}{\sqrt{L_{(H)} C_{(F)}}}. \quad (2)$$

Przypadek ten nazywamy *rezonansem napięć* obwodu, wówczas bowiem przeciwnapięcia występujące na indukcyjności i na pojemności, przesunięte w fazie o  $180^\circ$ , a mianowicie  $V_L = J\omega L$  oraz  $V_C = \frac{J}{\omega C}$  stają się sobie równe i wzajemnie się znoszą. Częstotliwość, wyrażoną we wzorze 2, przy której zachodzi zjawisko rezonansu napięć, nazywamy *częstotliwością rezonansową*  $\omega_r$  danego obwodu. Zamiast częstotliwości rezonansowej możemy też wprowadzić okres prądu rezonansowego

$$T_r = \frac{1}{f_r} = 2\pi \sqrt{L_{(H)} C_{(F)}}. \quad (2a)$$

Zgodnie z zależnością  $\lambda = c T$  obliczymy długość fali promieniowanej przez obwód w rezonansie

$$\lambda_{(cm)} = 3 \cdot 10^{10} 2\pi \sqrt{L_{(H)} C_{(F)}} = 2\pi \sqrt{L_{(cm)} C_{(cm)}}. \quad (2b)$$

gdy  $L$  wyrazimy w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych, a  $C$  w jednostkach elektrostatycznych.

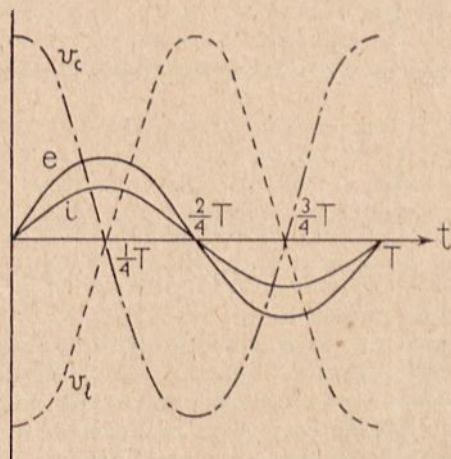
Dogodniejsze dla celów praktycznych jest wyrażenie fali w metrach.

$$\lambda_{(m)} = \frac{2\pi}{100} \sqrt{L_{(cm)} C_{(cm)}} = 1884 \sqrt{L_{(\mu H)} C_{(\mu F)}}. \quad (2c)$$

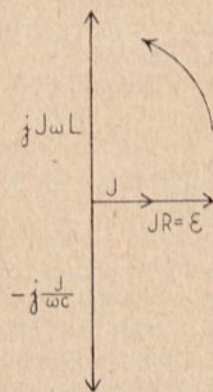
Wykresy napięć w rezonansie podają rysunki 4 a (wykres w funkcji czasu) oraz 4 b (wykres wektorowy).



Z rysunku 4b widzimy, że urojone spadki napięć  $V_L = J\omega L$  oraz  $V_C = \frac{J}{\omega C}$ , chociaż znacznie mogą przewyższać siłę elektromotoryczną  $E$ , jednakże wzajemnie się równoważą, tak, iż siła elektromotoryczna ma do pokonania jedynie spadek napięcia, wywołany przez prąd na oporności omowej  $R$ .



Rys. 4a.



Rys. 4b.

Równoważenie się obu napięć urojonych bardzo dobrze widać na rys. 4a, który pokazuje, że tak  $V_L$  jak i  $V_C$  równocześnie przechodzą przez zero i przez maximum, lecz ich wartości chwilowe stale zwrócone są w kierunkach wprost przeciwnych.

Napięcia te, zwane *przebiegami rezonansowymi*, wynoszą, gdy uwzględnimy wzór (2):

$$J_r \omega_r L = \frac{J_r}{\omega_r C} = V_c = V_l = J_r \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{E}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (3)$$

w którym  $X_r = \sqrt{\frac{L}{C}}$  jest rezonansową opornością urojoną czyli *opornością charakterystyczną* obwodu. Stosunek przebiecia rezonansowego do siły elektromotorycznej

$$\frac{V_r}{E} = \frac{1}{R\Omega} \sqrt{\frac{L_H}{C_f}} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R} = \frac{X_r}{R} = \sigma \quad (3a)$$

nazywamy *współczynnikiem przebiecia rezonansowego*. Oznacza on, ilekrotnie w rezonansie napięcie na okładkach kondensatora lub na końcówkach zwojnicy samoindukcyjnej przewyższa siłę elektromotoryczną i wyraża się stosunkiem oporności urojonej, występującej na indukcyjności i pojemności w rezonansie, do oporności omowej obwodu.

Jak wskazuje wzór (3a) przepięcie rezonansowe jest tem większe, im większa jest indukcyjność obwodu, zaś tem mniejsze, im większa jest jego oporność omowa i pojemność.

W przypadku, gdy

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

współczynnik  $\sigma = 1$ , czyli przepięcia we właściwym tego słowa znaczeniu niema. O ile zaś

$$R > \sqrt{\frac{L}{C}},$$

napięcia rezonansowe są mniejsze od siły elektromotorycznej przyłożonej do obwodu.

W przypadku skrajnym, gdyby oporność była równa zeru, przepięcie rezonansowe byłoby nieskończenie wielkie.

Przepięcie rezonansowe może osiągnąć duże wartości, szczególnie w obwodach o małych stratach. W obwodach prądów częstotliwości akustycznych, w których obecność żelaza powoduje znaczne straty dodatkowe, obraca się ono w granicach 8 do 15, natomiast w niektórych obwodach wielkiej częstotliwości, gdzie straty doprowadzono do minimum, jak w obwodach stacyj nadawczych wielkiej mocy, dojść ono może do wartości 1000<sup>1)</sup>, normalnie zaś jest rzędu kilkudziesięciu do kilkuset.

Projektując obwód radjoelektryczny, zawsze należy mieć na uwadze wartość przepięcia rezonansowego i do niego dostosować izolację przewodników, a w pierwszym rzędzie wytrzymałość dielektryczną kondensatora. Dlatego też tak zwojnice, jak i kondensatory należy obliczać na *moc urojoną*, która wystąpi w rezonansie na zaciskach zwojnicy i kondensatora. Zgodnie z poprzednim ta moc urojona wynosi

$$P_{ur} = IV = P_r \sigma,$$

gdzie  $P_r$  jest mocą rzeczywistą obwodu w rezonansie  $P_r = J_r E$ . Z równania (3) możemy obliczyć stosunek, w jakim pozostają do siebie amplitudy natężenia prądu rezonansowego i przepięcia. Mamy bowiem

$$V_m = \frac{E_m}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}$$

i naodwrot

$$I_m = V_m \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (4)$$

Te same równania możemy odnieść do wartości skutecznych prądu i przepięcia. Wynika z nich, że przy danem przepięciu natężenie prądu rezonansowego jest tem większe, im większa jest pojemność obwodu.

<sup>1)</sup> Patrz R. V. Hansford i H. Faulkner, J. I. E. E. 1927, vol. 95, p. 277, oraz I. E. E. Wir. Proc. II, str. 10, 1927.

Fakt ten jest ważny dla projektowania anten, gdzie postulatem jest osiągnięcie możliwie dużego natężenia prądu, nie przekraczając pewnego dopuszczalnego przepięcia.

## 2. Drgania elektromagnetyczne.

Przesunięcie faz o 180 stopni między przepięciem pojemnościowym i indukcyjnym sprawia, że działanie ich nie występuje na zewnątrz, chociaż wewnątrz obwodu wywołuje naprężenia elektryczne o dużej nieraz wartości.

Zjawisko to tłumaczy się ze strony fizycznej w sposób następujący:

Prąd  $i$  płynący w obwodzie wytwarza dzięki indukcyjności tegoż obwodu pole magnetyczne, którego energia osiąga maximum w chwili, gdy prąd przechodzi przez amplitudę. Energia tego pola, nagromadzona w ciągu pierwszego ćwierćokresu, wyraża się wzorem:  $W_L = \frac{J_m^2 L}{2}$ , gdzie  $J_m$

jest amplitudą prądu. W tej chwili maximum prądu, siła przeciw-elektromotoryczna indukcji, która dotychczas sprzeciwiała się narastaniu prądu, znika czyli przechodzi przez zero. Równocześnie natężenie prądu zaczyna słabnąć—rozpoczyna się drugi ćwierć-okres prądu. Pole magnetyczne zaczyna zanikać, energia jego maleje, równocześnie jednakże powstaje w myśl zasady Lenza siła przeciwelektromotoryczna, wspierająca siłę elektromotoryczną źródła w ładowaniu pojemności, na której obecnie powstaje napięcie, przeciwdziałające prądowi ładowania. Dzięki zanikowi energii pola magnetycznego gromadzi się obecnie w kondensatorze energia pola elektrycznego. Z chwilą, gdy energia pola magnetycznego znikła,  $V_c$  osiąga maximum  $V_{cm}$  kondensator naładował się całą energią, która pierwotnie nagromadzona była w polu magnetycznym. Maksymalna energia pola elektrycznego, skupiona w tej chwili w kondensatorze, wynosi  $W_c = \frac{V_{cm}^2 C}{2}$ . W dalszym ciągu zjawiska kondensator rozbraja

się, wyzwala ją zeń energia wytwarza prąd, który ze swej strony wzbudza energię pola magnetycznego w zwojnicy. Zjawiska opisane powtarzają się w ciągu każdego półokresu. Źródło prądu udziału bezpośredniego w nich nie bierze, raz dostarczywszy potrzebnej energii polu magnetycznemu. Uzupełnia ono jedynie część energii straconą skutkiem nieodwracalnej zamiany na ciepło Joule'a. Skutkiem uzupełniania strat przez źródło prądu ilość energii przelewającej się z pola magnetycznego w elektryczne i naodwrot pozostaje ta sama. A więc maksymalna energia elektryczna równa się w każdym okresie maksymalnej energii magnetycznej, czyli

$$W = \frac{I_m^2 L}{2} = \frac{V_{cm}^2 C}{2}. \quad (5)$$

Równość tę nietrudno udowodnić na podstawie wzoru (4), wyrażającego związek między prądem a przepięciem (pojemnościowym)

$$V_m = J_m \sqrt{\frac{L}{C}},$$

skąd obliczamy

$$W_c = \frac{J_m^2 L}{2C} C = \frac{J_m^2 L}{2},$$

a więc równość wartości maksymalnych obu postaci energii jest wykazana.

Na tej samej zasadzie zachowania energii stwierdzimy, że suma energii elektrycznej i magnetycznej jest w każdej chwili tasama, zachodzi więc równość:

$$\frac{i^2 L}{2} + \frac{v^2 C}{2} = \text{const} = W. \quad (5a)$$

W zjawisku opisanem zachodzi analogja do ruchu drgającego układu mechanicznego (np. wahadła). I tam bowiem następuje okresowa zamiana jednej postaci energii (kinetycznej) w drugą (potencjalną) i naodwrot, zaś suma obu tych energii, pomijając straty skutkiem oporów ruchu, jest w każdej chwili tasama. Analogja idzie jeszcze dalej. Energię pola elektrycznego można uważać jako energję potencjalną, gdyż podobnie, jak energja potencjalna układu mechanicznego da się nagromadzić w wahadle, wychylenem z równowagi i zatrzymanem w pewnej wysokości, tak i energję elektryczną możemy skupić w kondensatorze, naładowanym do pewnej różnicy potencjałów. Enercja pola magnetycznego natomiast istnieje tylko podczas przepływu prądu, a więc dzięki ruchowi elektryczności, analogicznie do energii kinetycznej, występującej jedynie w czasie ruchu. Indukcyjność ma to samo znaczenie, co masa w układzie mechanicznym, zaś oporność omowa obwodu posiada wiele cech wspólnych z oporem tarcia.

Na zasadzie tej analogji zjawiska zachodzące w obwodzie rezonansowym określono nazwą *drgań elektromagnetycznych*, a obwód posiadający pojemność i indukcyjność nazwano obwodem drgań.

Drgania elektromagnetyczne, powstające w obwodzie drgań, zachowują stałą amplitudę jedynie dzięki stałemu zasilaniu z zewnętrznego źródła energii. Pozostawione bowiem same sobie, po dłuższym lub krótszym czasie zanikłyby z powodu rozproszenia całego zapasu energii na ciepło Joule'a. Noszą więc charakter drgań wymuszonych. Obwód zachowuje się jak wahadło zegarowe, które drga wprawdzie okresem drgań rezonansowych, lecz stałą amplitudę wychyleń zachowuje dzięki temu, że działa na nie siła sprężyny lub ciężarka.

Jednakże obwód zdolny jest drgać drganiami wymuszonymi również i w przypadku, gdy częstotliwość prądu zasilającego nie będzie odpowiadała częstotliwości rezonansowej, jest jednakże rzeczą oczywistą, że energja tych drgań będzie mniejsza, niż energja drgań rezonansowych. Ponieważ oporności urojone nie są zrównoważone, oporność pozorna (całkowita) obwodu

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

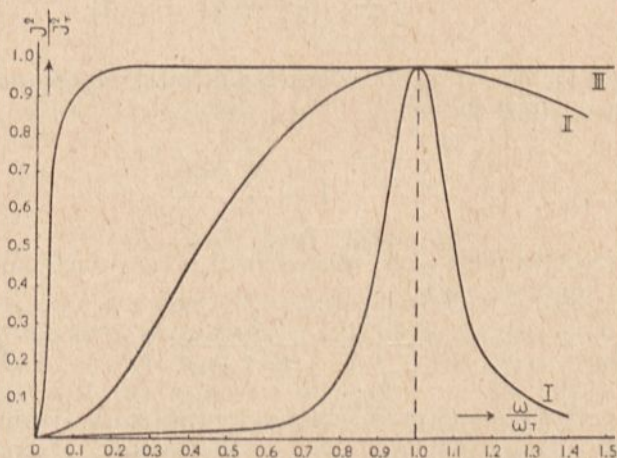
jest większa od oporności omowej, a tem samem prąd płynący pod wpływem tej samej siły elektromotorycznej jest mniejszy, niż w rezonansie.

Stąd energia pola magnetycznego jest mniejsza niż poprzednio. Dlatego też, aby w obwodzie osiągnąć maximum energii, sprowadzamy go do rezonansu z siłą elektromotoryczną zasilającą.

### 3. Krzywa rezonansu.

Natężenie prądu w obwodzie z pojemnością  $C$  i indukcyjnością  $L$  obliczyć można dla każdej częstotliwości ze wzoru (1). Przy jego pomocy można wykreślić t. zw. *krzywą rezonansu*, wyrażającą związek między natężeniem prądu w obwodzie a częstotliwością, przy stałej sile elektromotorycznej zasilającej, czyli  $J = f(\omega)_{E=\text{const.}}$ . Krzywa ta daje maximum prądu przy częstotliwości rezonansowej  $J_r = \frac{E}{R}$  podczas gdy dla wszystkich

innych wartości  $\omega \leq \omega_r$  otrzymujemy natężenie prądu mniejsze. Normalnie krzywą rezonansu wykreśla się w ten sposób, że na osi odciętych odkłada się wartości stosunku  $\omega/\omega_r$ , zaś na osi rzędnych  $J^2/J_r^2$ , a więc stosunek mocy pochłoniętej przez obwód w rezonansie do mocy pochłoniętej przy częstotliwości dowolnej (rys. 5).



I)  $\sigma = 5$ , II)  $\sigma = 0,5$ , III)  $\sigma = 0,025$ .

Rys. 5.

Tym sposobem dla rezonansu rzędna i odcięta są równe jedności, a krzywe tą drogą osiągnięte dają możliwość porównywania obwodów, w których wartości bezwzględne poszczególnych wielkości elektrycznych są różne.

Stosunek kwadratów prądów otrzymujemy z równań (1) i (1a) jako <sup>1)</sup>

$$\frac{J^2}{J_r^2} = \frac{\left(\frac{E}{Z}\right)^2}{\left(\frac{E}{R}\right)^2} = \frac{R^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)^2}$$

<sup>1)</sup> Popelniamy tu niedokładność, zakładając  $R = \text{const.}$  (patrz Część II). Jednakże w pobliżu wierzchołka rezonansu wpływ zmienności  $R$  można pominąć.

Podstawiając w powyższym równaniu  $\omega = \frac{\omega}{\omega_r}$  oraz  $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{CL}}$ , otrzymamy

$$\left(\frac{J}{J_r}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\omega}{\omega_r} \sqrt{\frac{L}{C}} - \frac{\omega_r}{\omega} \sqrt{\frac{L}{C}} \right)^2} = \frac{1}{1 + \sigma^2 \left( \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)^2}. \quad (6)$$

Wzór (6) można jeszcze przekształcić, wprowadzając t. zw. *rozstrojenie*, określone zależnością

$$\frac{\omega}{\omega_r} = 1 + \varepsilon \quad \text{czyli} \quad \varepsilon = \frac{\omega}{\omega_r} - 1.$$

Otrzymamy wówczas wzór

$$\left(\frac{J}{J_r}\right)^2 = \frac{1}{1 + \sigma^2 \left[ \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right]^2}, \quad (7)$$

który, o ile operujemy w pobliżu wierzchołka krzywej rezonansu ( $\varepsilon < 0,1$ ), upraszcza się do postaci

$$\left(\frac{J}{J_r}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{4 \sigma^2 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon)^2}}. \quad (7a)$$

Przy jeszcze mniejszych wartościach  $\varepsilon$  ( $\varepsilon < 0,05$ ) można przyjąć z dostateczną dokładnością

$$\left(\frac{J}{J_r}\right)^2 \cong \frac{1}{1 + 4 \sigma^2 \varepsilon^2}. \quad (7b)$$

Wzory powyższe wskazują, że prąd przy rozstrajaniu obwodu maleje tem szybciej, im większy jest współczynnik przepięcia obwodu. Współczynnik przepięcia jest więc miarą *ostrości rezonansu* obwodów rezonansowych. Wzór (7b) pozwala obliczyć w prosty sposób wartość współczynnika przepięcia, niezbędna dla zapewnienia żądanej ostrości rezonansu. A mianowicie

$$\sigma \cong \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{J_r}{J}\right)^2 - 1}. \quad (8)$$

Jeżeli np. żądamy, aby stosunek kwadratu prądów zmalał do 0,5, czyli aby moc spadła do połowy mocy rezonansu przy rozstrojeniu 1% ( $\varepsilon = 0,01$ ), to obwód musi posiadać współczynnik przepięcia

$$\sigma \cong 50 \sqrt{2 - 1} = 50.$$

Ostrość rezonansu pociąga za sobą konieczność dokładnego strojenia obwodu, lecz równocześnie daje możność ścisłego stwierdzenia momentu

rezonansu. Dlatego obwody o ostrym rezonansie mają doniosłe znaczenie w radjotechnice, w szczególności dla celów pomiarowych i odbiorczych.

Na rys. 5 (krzywe I, II, III) przedstawiony jest wpływ  $\sigma$  na ostrość krzywej rezonansu.

Mając daną krzywą rezonansu obwodu, możemy z niej obliczyć współczynnik przepięcia, a temsamem, znając  $L$  i  $C$ , oporność skuteczną obwodu. Dzięki temu krzywe rezonansu, służą również do pomiaru oporności obwodów.

Dostrojenie obwodu rezonansowego do prądu danej częstotliwości odbywa się drogą zmiany indukcyjności lub pojemności. Przebieg tego strojenia można wyrazić za pomocą krzywych rezonansu w postaci

$$J = f(L)_{\substack{E = \text{const} \\ C = \text{const}}}, \quad (9)$$

lub

$$J = f(C)_{\substack{E = \text{const} \\ L = \text{const}}} \quad (9a)$$

posiadających podobny kształt jak krzywa rys. 5. Są one dogodnie przy dostrajaniu zespołów stacyjnych i przy pewnych pomiarach radiotechnicznych.

#### 4. Jednostki tłumienia.

Często okazuje się dogodnym przedstawienie krzywych rezonansu w skali logarytmicznej, szczególnie gdy idzie o duże stosunki prądów lub mocy. Używa się do tego celu t. zw. *jednostek tłumienia*, będących logarytmami pewnego określonego stosunku prądów lub mocy.

Istnieją dwie zasadnicze jednostki tłumienia *bel* (ku czci Grahama Bell'a) wzgl. *decybel*, oparty na logarytmach dziesiętnych, rozpowszechniony w literaturze angielskiej, oraz *neper* (ku czci Napiera), oparty na logarytmach naturalnych i używany na kontynencie Europy. Chociaż obie jednostki są równouprawnione, to jednakże zależnie od okoliczności, użycie jednego lub drugiego układu jednostek może okazać się dogodniejszym.

A. Definicję bel'a daje równanie

$$N \text{ jednostek tłumienia} = \log_{10} \frac{P_1}{P_2},$$

skąd mamy

$$\frac{P_1}{P_2} = 10^N,$$

czyli dla  $N = 1$

$$\frac{P_1}{P_2} = 10.$$

A więc jeden *bel* odpowiada stosunkowi mocy równemu 10. Ponieważ jednostka ta w praktyce okazała się za duża, wprowadzono jednostkę dziesięciokrotnie mniejszą, zwaną *decybelem* wyprowadzającą się z równania

$$N = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2},$$

czyli

$$\frac{P_1}{P_2} = 10^{0,1N}.$$

Stąd jednemu decybelowi odpowiada stosunek mocy

$$\frac{P_1}{P_2} = 10^{0,1} = 1,259.$$

Analogicznie możemy obliczyć dla stosunku prądów lub napięć

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{J_1}{J_2}\right)^2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2.$$

skąd dla jednego decybelu otrzymamy stosunek prądów lub napięć

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{V_1}{V_2} = 10^{\frac{1}{20}} = 1,122.$$

Następująca tablica podaje zamianę decybeli na stosunek mocy względnie napięć albo prądów, i naodwrot:

Decybele	$\frac{P_1}{P_2}$	$\frac{J_1}{J_2} \left( \frac{V_1}{V_2} \right)$	$\frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{J_1}{J_2}$	Decybele dla mocy	Decybele dla prądów lub napięć
1	1,295	1,122	1	0	0
2	1,585	1,259	2	3,010	6,020
3	1,995	1,412	3	4,771	9,542
4	2,512	1,585	4	6,021	12,042
5	3,162	1,778	5	6,990	13,980
6	3,981	1,995	6	7,782	15,564
7	5,012	2,239	7	8,451	16,902
8	6,310	2,512	8	9,031	18,062
9	7,943	2,818	9	9,542	19,084
10	10,0	3,162	10	10,0	20,0
20	100	10	20	13,010	26,020
30	1000	31,62	30	14,771	29,542
40	10000	100	40	16,021	32,042
50	100000	316,2	50	16,990	33,980
60	10 <sup>6</sup>	1000	100	20,0	40,0
—	—	—	1000	30,0	60,0

Podane tu stosunki wyrażają, ilekrotnie mniejsza jest dana moc w stosunku do pewnej mocy obranej jako normalna. Można jednak również wprowadzić stosunek odwrotny, wyrażający, jakim ułamkiem mocy rezo-



nansowej jest moc przy danej częstotliwości. Wówczas decybele, jako logarytmy ułamków rzeczywistych, posiadają oczywiście znaki ujemne, lecz ich wartości bezwzględne równają się wartościom podanym w tabelce.

Np. stosunkowi  $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{5}$  odpowiada „-6,990 decybeli”, zaś wartości „-5 decybeli” odpowiada  $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{3,162}$ . Jeżeli wykreślimy krzywą rezonansu prostego obwodu rezonansowego w jednostkach tłumienia, to dla dodatnich jednostek tłumienia dostaniemy krzywą rezonansu odwróconą w stosunku do wykresów rys. 5, podczas gdy jednostki ujemne dadzą nam krzywą o tym samym charakterze, co zwykła krzywa rezonansu.

Na uwagę zasługuje, że stosunek mocy, odpowiadający jednemu decybelowi, odpowiada tej zmianie energii głosowej, którą normalne specjalnie niewyszkolone ucho może wyczuć, i dzięki temu jest to wielkość bardzo dogodna w zastosowaniu do badania obwodów odbiorczych i telefonicznych.

B. Jednostka tłumiona *neper* wyprowadza się z zależności

$$N_{\text{neper}} = \ln \frac{J_1}{J_2} = \ln \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2},$$

o ile prądy wzgl. napięcia odniesione są do tej samej oporności. Wobec tego, że logarytm dziesiętny równa się  $2,3026 \ln$ , mamy związek między *neperem* i *decybelem*.

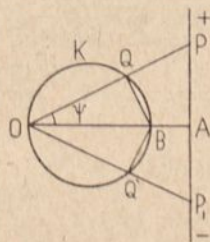
$$\begin{aligned} 1 \text{ db} &= 0,115 \text{ neper} \\ 1 \text{ neper} &= 8,686 \text{ db.} \end{aligned} \quad (10)$$

Stosując jednostki tłumienia, należy obrać pewien *poziom odniesienia*. Dla krzywych rezonansu prostych obwodów jest to oczywiście wierzchołek krzywej rezonansu. W badaniach obwodów telefonicznych obiera się w zasadzie moc  $10^{-3}$  wata, wydzieloną na oporności 600 omów.

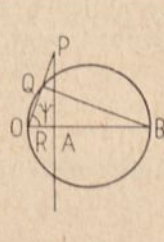
## 5. Graficzna analiza zjawiska rezonansu.

Zjawisko rezonansu ujmuje w sposób graficzny wykres wektorowy Argand'a (rys. 6). W wykresie tym  $\overline{OA} = R$  jest opornością omową,  $\overline{AP} = X$  opornością indukcyjną lub pojemnościową, zaś  $\overline{OP} = Z$  całkowita opornością pozorną. Gdy  $\overline{OB} = \frac{E}{R}$  jest amplitudą prądu rezonansowego, to wówczas koło „K”, wykreślone na  $\overline{OB}$  jako na średnicy, odcina na prostej  $\overline{OP}$  odcinek  $\overline{OQ} = J$ , wyrażający natężenie prądu przy danej oporności pozornej.

Z podobieństwa trójkątów  $\overline{OBQ}$  i  $\overline{APO}$  wynika



Rys. 6a.



Rys. 6b.

$$OQ = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OA}}{\overline{OP}} = \left(\frac{E}{R}\right) \left(\frac{R}{Z}\right) = \frac{E}{Z} = J.$$

Kąt  $\phi$  wyraża każdorazowe przesunięcie faz między siłą elektromotoryczną a prądem, gdyż

$$\frac{X}{R} = \operatorname{tg} \phi.$$

Górne półkole wykresu odpowiada obciążeniu indukcyjnemu, dolne pojemnościowemu.

Wykres (6 a) wykonano dla dużej oporności omowej, zaś (6 b) dla małej oporności.

## 6. Przykład.

Obwód rezonansowy posiada pojemność  $C = 900 \text{ cm} = 10^{-9} \text{ F}$ , indukcyjność  $L = 100000 \text{ cm} = 10^{-4} \text{ H}$ , oporność omowa  $R = 10 \Omega$ . Na obwód działa siła elektromotoryczna  $E = 200 \text{ v}$ . Obliczyć jego częstotliwość rezonansową, natężenie prądu i moc w rezonansie przy częstotliwości  $f_1 = 1,1 f_r$ , przepięcie rezonansowe, moc urojoną w rezonansie i ostrość rezonansu.

Częstotliwość rezonansu

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-9} \cdot 10^{-4}}} = \frac{10^7}{2\pi\sqrt{10}} = 500000 \text{ okr/sek} = 500 \text{ Kc/s},$$

a stąd

$$\omega_r = 2\pi f_r = 3140000,$$

zaś

$$\omega_1 = 1,1 \omega_r = 3454000.$$

Prąd rezonansowy

$$J_r = \frac{200}{10} = 20 \text{ amperów.}$$

Moc w rezonansie

$$P_r = J_r^2 R = 4000 \text{ W} = 4 \text{ KW}.$$

By obliczyć odnośne wartości przy  $f_1 = 1,1 f_r$ , określić musimy oporność urojoną przy tej częstotliwości

$$X_1 = 3454 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{3454 \cdot 10^6 \cdot 10^{-9}} = 55 \Omega.$$

Stąd natężenie prądu

$$J_1 = \frac{200}{\sqrt{10^2 + 55^2}} \cong 3,6 \text{ amperów,}$$

a moc pochłonięta przez obwód w tym przypadku

$$P_1 = 10 \cdot 3,6^2 \cong 130 \text{ woltów.}$$

Jak widać, przez rozstrojenie o 10% moc spadła do 3,3% mocy rezonansowej.

Współczynnik przebiecia

$$\sigma = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 0,1 \sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-9}}} = 31,6.$$

Stąd wartość skuteczna przebiecia

$$V = 200 \cdot 31,6 = 6320 \text{ woltów,}$$

zaś jego amplituda

$$V_m = 6320 \cdot \sqrt{2} = 8950 \text{ woltów,}$$

a moc urojona obwodu w rezonansie

$$P_{ur} = 4 \cdot 31,6 \cong 127 \text{ kVA.}$$

Wartość ta pozwoli nam zaprojektować zwojnicę i kondensator tak na obciążenie prądem, jak i na izolację.

Pojęcie o ostrości krzywej rezonansu obwodu da nam obliczenie rozstrojenia, przy którym  $\left(\frac{J}{J_r}\right)^2 = 0,5$ . Zgodnie z (8) mamy

$$\varepsilon = \frac{1}{2\sigma} \sqrt{\left(\frac{J_r}{J}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2 \cdot 31,6} \cong 0,016,$$

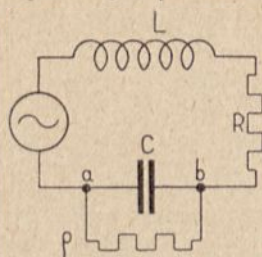
czyli 1,6% rozstrojenia, co odpowiada wartości  $\pm 8$  kc/s.

## 7. Rezonans w obwodzie z upływnością.

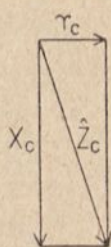
Dotychczas zakładaliśmy, że w rozpatrywanym obwodzie rezonansowym istnieje jedynie oporność omowa przewodników, niema natomiast upływności ani w kondensatorze, ani w zwojnicy. W rzeczywistych warunkach liczyć się należy przede wszystkim z upływnością kondensatora, którą przedstawić można jako oporność  $\rho$  załączoną równolegle do kondensatora (rys. 7 a). Teraz oporność  $\hat{Z}_c$  na zaciskach  $a-b$  kondensatora nie będzie już czysto urojona, lecz będzie wypadkową z dwu oporności równoległych  $\hat{Z}_1 = \rho$ ,  $\hat{Z}_2 = -j \frac{1}{\omega C}$ . Według II prawa Kirchhoffa

$$\hat{Z}_c = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} = \frac{-j \frac{\rho}{\omega C}}{\rho - j \frac{1}{\omega C}}.$$

czyli po usunięciu niewymierności i oddzieleniu części urojonej od rzeczywistej i pewnym przekształceniu



Rys. 7a.



Rys. 7b.

$$Z_c = \frac{\rho}{\omega^2 C^2 \rho^2 + 1} - j \frac{\rho^2 \omega C}{\omega^2 C^2 \rho^2 + 1}. \quad (11)$$

Warunek rezonansu napięć przedstawia się teraz w postaci

$$X = \omega L - \frac{\rho^2 \omega C}{\rho^2 \omega^2 C^2 + 1} = 0$$

z czego otrzymujemy częstotliwość rezonansową

$$\omega'_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{\rho^2 C}} = \omega_r \sqrt{1 - \frac{L}{\rho^2 C}}. \quad (12)$$

Jak widać z tego, częstotliwość rezonansowa obwodu z upływnością zależy nie tylko od stałych  $L$  i  $C$  obwodu, lecz również od jego *upływności*. Równocześnie człon rzeczywisty równania (11) zwiększa oporność omową obwodu. Równanie (12) dowodzi, że zmiany oporności załączonej równolegle do pojemności obwodu wywołują zmiany częstotliwości rezonansowej tego obwodu, co posiada doniosłe znaczenie dla teorii układów z lampami katodowymi.

Gdy oporność  $\rho \gg \frac{1}{\omega C}$  czyli gdy upływność w obwodzie jest mała, wpływ jej na częstotliwość rezonansową można pominąć, gdyż wzór (11) przyjmuje postać

$$Z_c \cong \frac{1}{\rho \omega^2 C^2} - j \frac{1}{\omega C}, \quad (12a)$$

a więc, upływność powoduje jedynie wzrost oporności omowej obwodu o wielkość

$$r_c = \frac{1}{\rho \omega^2 C^2}. \quad (13)$$

## 8. Rezonans w obwodzie zawierającym żelazo (obwód ferromagnetyczny).

Gdy zwojnica w obwodzie magnetycznym zawiera żelazo, indukcyjność jej staje się funkcją natężenia prądu, gdyż

$$L = \mu L_0,$$

gdzie  $\mu$  jest przenikliwością magnetyczną żelaza, a  $L_0$  indukcyjnością zwojnicy bez rdzenia żelaznego. Indukcyjność jest więc wielkością, zależną nie tylko od amplitudy prądu przepływającego, lecz i od jego wartości chwili

lowych, tak iż zmienia się ona nawet w ciągu jednego okresu. Jeżeli jednakże dla uproszczenia pominiemy histerezę magnetyczną i założymy sinusoidalny przebieg prądu w obwodzie, wprowadzić możemy skuteczną wartość strumienia magnetycznego jako funkcję skutecznej wartości prądu

$$\Phi = JL,$$

czyli

$$L = \frac{\Phi}{J},$$

z czego warunek rezonansu napięć wyrazić możemy zależnością

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{\omega \Phi}{J},$$

czyli

$$\omega_r = \sqrt{\frac{J}{\Phi C}}. \quad (14)$$

A więc, jak wynika z powyższego, *częstotliwość rezonansowa* w obwodzie t. zw. ferromagnetycznym *jest funkcją natężenia prądu*. Innymi słowy dla każdego natężenia prądu istnieje inna częstotliwość rezonansowa i dla każdej częstotliwości istnieje inne natężenie prądu, dające w obwodzie rezonans.

Dla obwodów rezonansowych, zawierających żelazo, charakterystyczne jest zjawisko *przeskoku prądu* (niem. *Kipperscheinung*), polegające na tem, że w pewnych warunkach małemu przyrostowi siły elektromotorycznej odpowiada nagły wzrost prądu, a temsamem i przepięcia. W przybliżeniu zjawisko to można zanalizować metodą graficzną<sup>1)</sup>. Mając zdjętą doświadczalnie krzywą magnetyzacji zwojniczy w postaci  $V_L = f(J)$  (rys. 8 a, krzywa (I), kreślimy w tej samej podziałce prostą spadku napięcia omowego  $IR$  (II), oraz prostą spadku napięcia pojemnościowego  $\frac{J}{\omega C}$  (III).

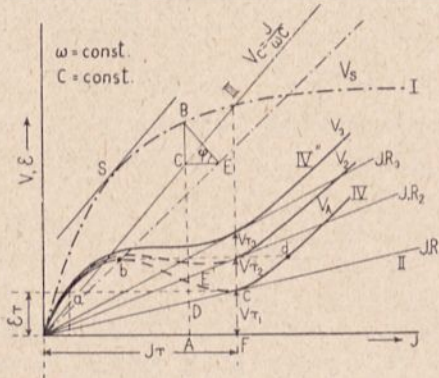
Wówczas prądowi  $J$  (punkt  $A$ ) odpowiada spadek napięcia omowy  $\overline{AD}$  oraz spadek napięcia urojony  $\overline{AB} - \overline{AC}$ . Całkowity spadek napięcia będzie sumą geometryczną obu składowych i otrzymamy go jako przeciwprostokątnię  $\overline{BE}$  trójkąta  $BCE$ , w którym  $CE = AD$ . Odkładając  $\overline{AE'} = \overline{BE}$  jako rzędną w punkcie  $A$ , otrzymamy jeden punkt wypadkowej charakterystyki obwodu

$$J = f(E).$$

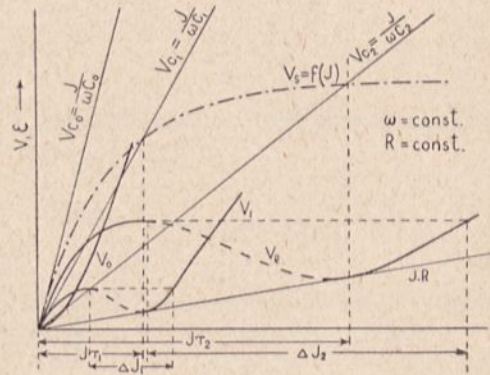
Powtarzając tę konstrukcję dla szeregu punktów, otrzymamy całą charakterystykę (krzywa IV). Równocześnie z kąta  $\varphi = \sphericalangle CEB$  odczytać możemy dla każdego punktu przesunięcie faz między prądem i napięciem.

<sup>1)</sup> L. Fleischmann. ETZ. 1922, str. 1288.

Przebieg krzywej wskazuje, że zwiększając siłę elektromotoryczną od wartości najmniejszych, otrzymamy początkowo równomierny wzrost natężenia prądu przy równoczesnym obciążeniu indukcyjnym źródła. Z chwilą jednak, gdy dojdziemy do punktu *b*, natężenie prądu nagle przeskakuje do wartości odpowiadającej punktowi *d* i równocześnie z tem obciążenie z indukcyjnego staje się pojemnościowym, tak iż rezonansu w obwodzie tą drogą osiągnąć nie możemy.



Rys. 8a.



Rys. 8b.

Rezonans otrzymamy dopiero, obniżając *E* do punktu *c*. Wystąpi on w punkcie przecięcia się prostej III z krzywą I,  $V_c = V_L$ , i w miejscu tem krzywa IV będzie styczna do prostej spadku napięcia (siła elektromotoryczna rezonansu  $E_r$ ). Gdy siłę elektromotoryczną obniżymy poniżej rezonansowej, natężenie prądu nagle spadnie do wartości odpowiadającej punktowi *a*, od którego począwszy przebieg odbywa się normalnie, przy indukcyjnym obciążeniu źródła. Części krzywej, wykreślonej linią przerywaną, praktycznie urzeczywistnić nie można.

Zjawisko przeskoku prądu w obwodzie drgań zawierającym żelazo streszcza się więc w następującem:

1. W pewnych punktach krzywej bardzo małym zmianom napięcia odpowiadają znaczne skoki natężenia prądu.
2. Zarazem zmienia się gwałtownie przesunięcie fazy z równoczesną zmianą jego znaku (z indukcyjnego na pojemnościowy i na odwrót).
3. Dla pewnego zakresu wartości *E*, inne wartości *J* (mniejsze) odpowiadają wzrostowi napięcia, inne (większe) jego obniżeniu.
4. Rezonans napięć dla danej częstotliwości występuje przy określonej sile elektromotorycznej i ściśle określonym natężeniu prądu  $J_r$ .

Zjawisko przeskoku prądu ustaje z chwilą, gdy oporność obwodu przekroczy pewną wartość krytyczną. Począwszy od tej oporności charakterystyka obwodu przyjmuje postać przedstawioną na krzywej IV'' rys. 8a. Krzywa ta wykazuje co prawda na pewnej przestrzeni bardzo duże przyrosty prądu, lecz przebieg odbywa się w sposób ciągły i jest odwracalny.

Przeskok prądu zniknie również, gdy pojemność obwodu zmniejszymy do wartości  $C_0$ , przy której prosta  $J/\omega C$  stanie się styczną do krzywej magnetyzacji. Gdy pojemność obwodu będzie mniejsza od  $C_0$ , nie otrzymamy

rezonansu przy danej częstotliwości. Natomiast dla wszystkich wartości  $C > C_0$  rezonans będzie, przyczem prąd rezonansowy i skok prądu będą rosły z pojemnością (rys. 8b).

Wpływ zmian częstotliwości ( $C = \text{const}$ ,  $R = \text{const}$ ).

Gdy zwiększymy częstotliwość, to w myśl zależności

$$V_p = \omega \mu L_0, \quad V_c = -\frac{1}{\omega C}$$

rzędne krzywej I wzrosną, zaś prostej III zmniejszą się, wobec czego ich punkt przecięcia przesunie się dalej w prawo. Odwrotne zjawisko nastąpi, gdy częstotliwość zmniejszymy. W przeciwieństwie do charakterystyk I i III położenie prostej  $JR$  z dostateczną dokładnością można uważać jako niezmiennicze<sup>1)</sup>.

Stąd ważne wnioski dla obwodów w ferromagnetycznych:

1. Im większa częstotliwość, tem większy jest prąd rezonansu obwodu.

2. Punkty rezonansu poszczególnych charakterystyk leżą na tej samej prostej  $JR$ .

Przy pewnej częstotliwości, którą oznaczymy przez  $f_0$ , prosta  $V_c$  jest styczna do krzywej  $V_p$ . Jest to najmniejsza częstotliwość, przy której w obwodzie otrzymać możemy rezonans; dla wszystkich  $f < f_0$  rezonansu nie ma, gdyż przy nich obie charakterystyki wcale się nie przetną.

Częstotliwości  $f_0$  odpowiada oczywiście pewien prąd rezonansu, a temsamem pewne określone nasycenie  $B_{\text{max}}$  żelaza.

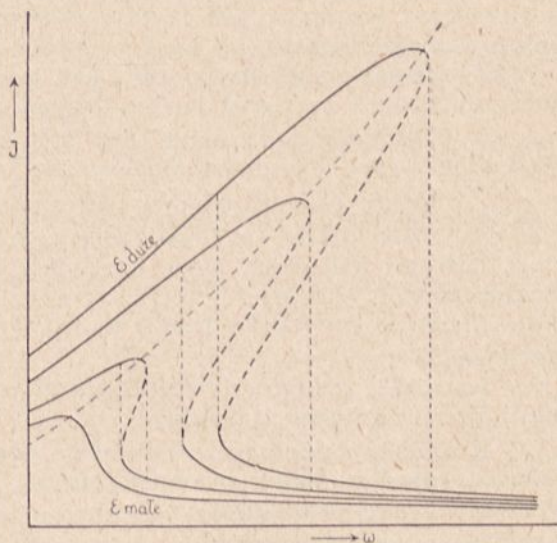
Charakterystyczny przebieg krzywych rezonansu

$$J = f(f)_{E = \text{const}}$$

w obwodach z żelazem dla różnych wartości siły elektromotorycznej  $E$  podaje rys. 9.

Gdy oporność omową (skuteczną) obwodu przyjmiemy jako stałą, rezonans, jak wynika z poprzedniego, jest funkcją napięcia przyłożonego  $E$ .

Dla  $E$ , odpowiadającego częstotliwości  $f_0$ , krzywa rezonansu ma przebieg analogiczny, jak w obwodach, nie zawierających żelaza. Jednakże, w miarę wzrostu napięcia przyłożonego, punkt rezonansu przesuwa się



Rys. 9.

<sup>1)</sup> Jest to niezupełnie ściśle, gdyż oporność skuteczna, w której skład wchodzi i straty żelaza, nie jest zupełnie stała przy różnych częstotliwościach.

w kierunku częstotliwości większych i równocześnie charakter krzywych rezonansu zmienia się zasadniczo. Po stronie częstotliwości mniejszych od rezonansowej krzywa jest bardziej płaska, zaś w drugiej swej gałęzi wykazuje wybitną nieciągłość, przyczem część wykropkowana krzywej nie da się urzeczywistnić<sup>1)</sup>). Wszystkie punkty rezonansu leżą na wspólnej krzywej o charakterze parabolicznym. Nieciągłość krzywej rezonansu dowodzi występowania przeskoku prądu i, jak z przebiegu łatwo się zorientować, rezonans jest tu dość chwiejny i to tem bardziej, im większe jest nasycenie żelaza.

Zjawisko przeskoku prądu jest niepożądane, a nawet może być niebezpieczne z przyczyn następujących:

1. Utrudnia nastrojanie obwodu do rezonansu, a nawet w razie nastrojania czyni rezonans niepewnym.
2. Każda zmiana napięcia alternatora wymaga nowego strojenia.
3. Skok prądu, a temsamem i przepięcia, zwłaszcza gdy pojemność obwodu jest duża, może uszkodzić obwód, a conajmniej przepalić bezpieczniki.

Zjawisko przeskoku prądu można przytłumić zapomocą następujących środków:

1. małej indukcji żelaza  $B_{max}$ , aby się utrzymać w granicach prostolinijności krzywej nasycenia,
2. małej pojemności obwodu rezonansowego,
3. niezbyt małej oporności omowej,
4. dodatkowej indukcyjności bez żelaza w szereg z indukcyjnością zawierającą rdzeń żelazny.

## 9. Cechy rezonansu napięć.

Streszczając, co dotychczas powiedziano, można scharakteryzować rezonans napięć następującemi zjawiskami:

1. Przesunięcie faz między siłą elektromotoryczną a prądem zanika i obwód przedstawia dla źródła obciążenie bezindukcyjne.

2. Dzięki temu mamy w obwodzie przy stałej wartości siły elektromotorycznej największe natężenie prądu, a temsamem największe zużycie mocy  $P = I^2R$ .

3. Napięcia urojone na kondensatorze i na indukcyjności są sobie równe i mogą wielokrotnie przekraczać wartość siły elektromotorycznej, zasilającej obwód.

Ostatnie dwa punkty dają nam możliwość stwierdzenia rezonansu, co można skuteczniej jednym z trzech sposobów:

a) Przyrządem typu amperomierzowego, włączonym szeregowo w obwód.

<sup>1)</sup> Wynika stąd wskazówka praktyczna, że chcąc taki obwód dostroić do rezonansu z pewną częstotliwością  $f_{rez}$ , zawsze należy wychodzić z częstotliwości  $f < f_{rez}$ , czyli stroić, zmniejszając pojemność lub indukcyjność.



b) Przyrządem typu watomierzowego.

c) Przyrządem typu woltomierzowego, załączonym zazwyczaj równolegle do kondensatora.

Często dla pomiarów przybliżonych, kontrolnych, stosuje się w miejsce amperomierzy żarówki elektryczne, które intensywnością światła wskazują rezonans, zaś woltomierz zastępuje się rurką, napelnioną rozrzedzonym helem lub neonem, która działa analogicznie.

Wszystkie rodzaje pomiarów rezonansu muszą się odbywać przy stałej sile elektromotorycznej. Rezonans siły elektromotorycznej z obwodem można osiągnąć w sposób dwojaki:

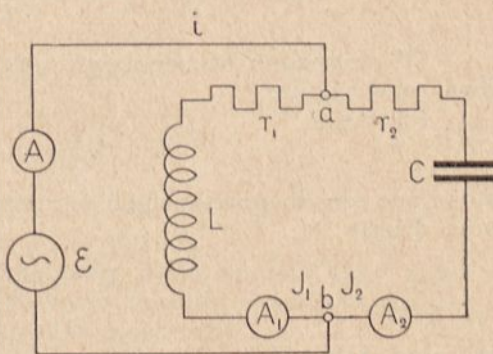
1. dostosowując częstotliwość siły elektromotorycznej do cech obwodu.

2. dostrajając obwód do siły elektromotorycznej zasilającej drogą zmiany  $L$  lub  $C$ .

Oba sposoby posiadają dla radjotechniki doniosłe znaczenie.

## 10. Rezonans prądów.

W odróżnieniu od rezonansu napięć, rezonans prądów polega na tem, że prądy płynące w dwu gałęziach równoległych, z których jedna zawiera indukcyjność i oporność, druga pojemność i oporność (rys. 10), zrównoważone są w ten sposób co do wielkości i fazy, iż prąd wypadkowy jest w fazie z siłą elektromotoryczną (rys. 12 b, c). Podobnie jak w obwodzie rezonansu napięć, tak i tu oporności urojone równoważą się przez odpowiedni dobór wielkości  $L$  i  $C$  obwodu. Pewna analogja do rezonansu napięć leży w tem, że jak tam przy małej oporności obwodu napięcia bezmocne wielokrotnie przekraczają siłę elektromotoryczną, tak tu prądy płynące w obu gałęziach mogą wielokrotnie przewyższać natężenie prądu zasilającego (*przetężenie rezonansowe* — stąd nazwa rezonansu prądów).



Rys. 10.

Zjawisko przetężenia rezonansowego wyjaśnić możemy w ten sposób, że prądy płynące wewnątrz obwodu  $L$  i  $C$  powstają przez wymianę energii pola elektrycznego na energję pola magnetycznego i na odwrót, o charakterze drgającym, podczas gdy prąd dopływający z zewnątrz pokrywa jedynie straty wywołane przez oporność omową obwodu. W przypadku skrajnym, gdyby oporność omowa obwodu była równa zeru, drgania elektromagnetyczne odbywałyby się w nim bez strat i obwód nie pobierałby energii ze źródła. Jego oporność pozorna równa byłaby nieskończoności.

Najogólniejsze rozwiązanie układu dwu połączonych równolegle oporności pozornych  $\hat{Z}_1$  i  $\hat{Z}_2$  otrzymamy metodą symboliczną, stosując uogólnione II-gie prawo Kirchhoffa. Mamy w ten sposób oporności pozorne

$$\hat{Z}_1 = r_1 + jX_1; \quad \hat{Z}_2 = r_2 + jX_2,$$

które podstawione do wzoru Kirchhoffa dają wartość zespoloną (a)

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} = \frac{(r_1 + jX_1)(r_2 + jX_2)}{(r_1 + r_2) + j(X_1 + X_2)} = R + jX. \quad (b)$$

Po usunięciu niewymierności otrzymujemy

$$R = \frac{r_1 Z_2^2 + r_2 Z_1^2}{(r_1 + r_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} \quad (15)$$

$$X = \frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{(r_1 + r_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}.$$

Obwód da nam rezonans, czyli bezindukcyjne obciążenie źródła, gdy będzie

$$X = 0, \text{ czyli } X_1 Z_2^2 = -X_2 Z_1^2, \quad (16)$$

co po podstawieniu  $Z_1^2 = r_1^2 + X_1^2$  oraz  $Z_2^2 = r_2^2 + X_2^2$  daje nam rozwiązanie

$$X_1 = \frac{-(r_2^2 + X_2^2) \pm \sqrt{(r_2^2 + X_2^2)^2 - 4X_2^2 r_1^2}}{2X_2}. \quad (16a)$$

W przypadku szczególnym gdy mamy  $r_1 = r_2 = r$ , otrzymujemy dwa rozwiązania:

Pierwsze

$$X_1' = -X_2 \quad (16b)$$

stosujące się do powszechnie spotykanych obwodów radjotechnicznych, oraz drugie

$$X_1'' = -\frac{r^2}{X_2}, \quad (16c)$$

któremu, jak widać odpowiada znaczna oporność omowa obwodu. Z równań tych obliczyć możemy częstotliwość rezonansową.

Dla obwodu przedstawionego na rys. 10 mamy równoległe oporności pozorne

$$\hat{Z}_1 = r_1 + j\omega L; \quad \hat{Z}_2 = r_2 - j\frac{1}{\omega C}, \quad (c)$$

przez które przepływają odnośne prądy

$$\hat{J}_1 = \frac{\hat{E}}{\hat{Z}_1} \text{ oraz } \hat{J}_2 = \frac{\hat{E}}{\hat{Z}_2}$$

Podstawiając wartości (c) w równaniu (15) otrzymamy wypadkowe oporności składowe:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{r_2(r_1^2 + \omega^2 L^2) + r_1\left(r_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)}{(r_1 + r_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \\
 X &= \frac{\frac{1}{\omega C}\left(\frac{L}{C} - r_1^2\right) - \omega L\left(\frac{L}{C} - r_2^2\right)}{(r_1 + r_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{15a}$$

W układzie tym nastąpi rezonans, gdy oporność urojona  $X$  zrównamy z zerem. Oporność urojona zniknie w trzech przypadkach:

1 — gdy  $\omega = 0$ , a więc w przypadku prądu stałego (zwarcie przez gałąź indukcyjną),

2 — gdy  $\omega = \infty$  (przypadek teoretyczny, zwarcie przez gałąź pojemnościową),

3 — wreszcie gdy

$$\frac{1}{\omega C}\left(\frac{L}{C} - r_1^2\right) = \omega L\left(\frac{L}{C} - r_2^2\right),$$

co odpowiada częstotliwości

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - r_1^2}{\frac{L}{C} - r_2^2}}.
 \tag{17}$$

Przypadek ten jest właściwym rezonansem obwodu.

I. Zachowanie się obwodu w przypadku 3-cim zmienia się w zależności od oporności omowych  $r_1$  i  $r_2$ . Dla uproszczenia przyjmiemy wpraw, że  $r_1 = r_2 = r$ . Rozróżnimy tu 3 przypadki zasadnicze:

A. Gdy oporność

$$r < \sqrt{\frac{L}{C}} = X_r,$$

wzór (17) przybiera postać uproszczoną

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}},
 \tag{17a}$$

a więc częstotliwość rezonansowa odpowiada częstotliwości rezonansu napięć obwodu bez upływności.

Obwód przy tej częstotliwości zachowuje się jak obciążenie omowe, o oporności zastępczej (pozornej, lecz zachowującej się jak omowa):

$$R_z = \frac{r(r^2 + \omega_r^2 L^2) + r\left(r^2 + \frac{1}{\omega_r^2 C^2}\right)}{4r^2} = \frac{r^2 + \omega_r^2 L^2}{2r} \quad (18)$$

gdyż opory pozorne obu gałęzi  $\hat{Z}_1$  i  $\hat{Z}_2$  są sobie równe. Względnie, po podstawieniu  $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , otrzymamy:

$$R_z = \frac{L}{2rC} + \frac{r}{2} \quad (18a)$$

Ponieważ przeważnie

$$\frac{r}{2} \ll \frac{L}{2rC},$$

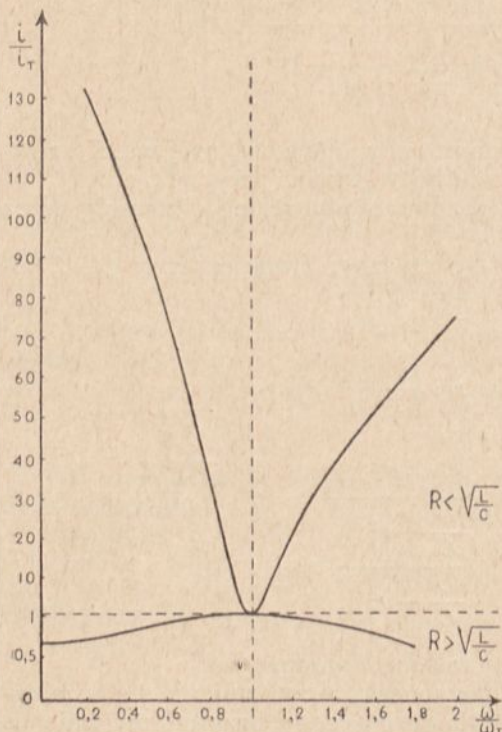
więc możemy napisać:

$$R_z = \frac{L}{2rC} = \frac{L}{RC} \quad (18b)$$

gdy  $2r = R$ .

Jest to zarazem maximum oporności pozornej, dla wszystkich bowiem pozostałych wartości  $\omega$  oporność pozorna obwodu  $L$  i  $C$  jest mniejsza niż  $R_z$ . Jeżeli wykreśli-  
my krzywą  $R_z = f(\omega)$  lub  $\frac{R_z}{Z} =$

$= f\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)$ , otrzymamy krzywą rezonansu analogiczną, jak  $J = f(\omega)$  dla  $L$  i  $C$  włączonych szeregowo w obwód źródła, jeżeli jednakże wykreśli-  
my ją jako funkcję  $\left(\frac{i}{i_r}\right)$ , otrzy-



Rys. 11.

mamy krzywą wklęsłą (rys. 11). Krzywa jest tem ostrzejsza, im mniejsza jest oporność  $r$  wobec wyrazu  $\sqrt{\frac{L}{C}} = X_r$ , czyli im większy jest współczynnik przepięcia obwodu.

Łatwo się przekonać, że gdy oporność omową obwodu założymy równą zero, oporność pozorna stanie się równa nieskończoności.

B. Gdy oporności omowe, leżące w obu gałęziach, osiągną wartość

$$r_1 = r_2 = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

równanie (17) daje jako wynik symbol nieoznaczony  $\frac{0}{0}$ , którego rozwiązanie wynosi:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

jednakże ta częstotliwość rezonansowa nie posiada realnego znaczenia, gdyż po podstawieniu do wzorów (15a) wartości  $r_1 = r_2 = r = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , oraz  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , okazuje się, że obwód dla wszystkich częstotliwości zachowuje się jako oporność omowa

$$R_z = r = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (19)$$

niezależna od częstotliwości (prosta kropkowana na rys. 11, równoległa do osi odciętych). Przypadek ten odpowiada zresztą pierwiastkowi (16c) równania ogólnego (16).

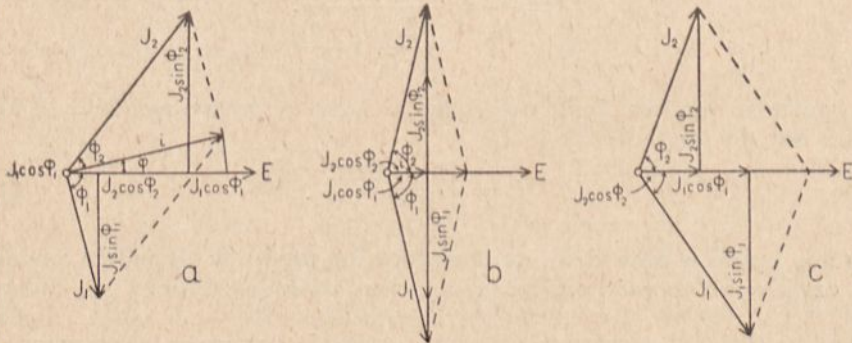
C. Gdy oporność

$$r_1 = r_2 > \sqrt{\frac{L}{C}},$$

częstotliwość rezonansowa odpowiada równaniu (17), lecz wartość oporności zastępczej

$$R_z = \frac{L}{2rC} = \frac{r}{2}$$

stanowi tu minimum oporności pozornej tak, iż dla każdej innej częstotliwości oporność pozorna obwodu  $L$  i  $C$  jest większa. Krzywa rezonansu jest w tym przypadku wypukła (rys. 11).



Rys. 12.

II. A. Gdy obie oporności są różne  $r_1 \leq r_2$ , lecz małe w porównaniu z  $\sqrt{\frac{L}{C}}$ , obwód zachowuje się analogicznie, jak wyjaśniono pod I.A. i częstotliwość rezonansową można wyrazić w przybliżeniu wzorem (17a).

Również i oporność zastępczą w rezonansie daje nam wzór przybliżony (18b).

Gdy oporności omowe nie są bardzo małe wobec oporności charakterystycznej  $Xr$ , stosować należy wzory dokładne (15a) i (17).

B. Gdy jedna z oporności jest mniejsza od  $\sqrt{\frac{L}{C}}$ , druga zaś większa, równanie (17) daje wynik urojony — obwód nie posiada żadnej częstotliwości rezonansowej.

Rys. 12 daje wykresy wektorowe zjawisk w obwodzie z opornościami symetrycznymi (b) i niesymetrycznymi (c).

Jak widać, jedynie w przypadku równych oporności mamy do czynienia z zupełnym zrównaniem się prądów bezmocnych w obu gałęziach.

#### Przetężenie rezonansowe.

Jeżeli napięcie między  $a$  i  $b$  oznaczymy przez  $E$ , to natężenie prądu, płynącego w każdej z gałęzi w rezonansie, wynosi:

$$J_r = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{r_1^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{E}{\sqrt{r_2^2 + \frac{1}{\omega_r C^2}}}$$

O ile, jak przeważnie bywa w obwodach radjotechnicznych,  $r \ll X$ , otrzymamy postać uproszczoną

$$J_r \cong \frac{E}{\omega L} = E\omega C = E\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{E}{X_r} \quad (20)$$

Natomiast natężenie prądu zewnętrznego

$$i_r = \frac{E}{R_z} = \frac{E}{\frac{L}{2rC} + \frac{r}{2}} \quad (21)$$

Gdy oporność omowa jest niewielka i gdy podstawimy  $2r = R$ , wzór uprości się do postaci

$$i_r = \frac{E}{R_z} = \frac{ERC}{L} \quad (21a)$$

Stosunek prądu w obwodzie zamkniętym do prądu w obwodzie zewnętrznym, czyli *współczynnik przetężenia rezonansowego*, obliczy się wówczas jako

$$\sigma_i = \frac{J_r}{i_r} = E\sqrt{\frac{C}{L}} : \frac{E}{\frac{L}{2rC} + \frac{r}{2}} = \frac{1}{2r\omega} \sqrt{\frac{L(\omega)}{C(\omega)}} + \frac{r}{2} \sqrt{\frac{C(\omega)}{L(\omega)}} \quad (22)$$

W obwodach wielkiej częstotliwości przeważnie mamy  $L \gg C$ , w takich więc razach wzór (22) można uprościć do postaci

$$\frac{J_r}{i_r} = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (22a)$$

identycznej ze wzorem (3) na współczynnik przebiecia rezonansowego. W podobny sposób otrzymamy dla oporności omowej w jednej gałęzi

$$\frac{J_r}{i_r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (22b)$$

Z równań (22a) i (18b) łatwo znaleźć związek między współczynnikiem przebiecia rezonansowego, a opornością rezonansową obwodu. Mamy bowiem

$$R_z = \frac{L}{RC} = \sigma_i \sqrt{\frac{L}{C}} = \sigma_i X_r. \quad (23)$$

Podkreślić tu należy, że w przeciwieństwie do układu rezonansu napięć i do innych układów rezonansu prądów, w układzie rys. 10-go niema napięć wyższych od napięcia zasilającego.

### 11. Obwód rezonansu prądów z dzieloną indukcyjnością.

Dla generatorów lampowych ważny jest typ obwodu, jak na rys. 13. W tym przypadku oporność pozorną obu gałęzi wynosi:

$$\hat{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1$$

$$\hat{Z}_2 = r_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right).$$

Jeżeli dla uproszczenia założymy  $r_1 = r_2 = r \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$ , to dla rezonansu zgodnie z (16b) można napisać:

$$\omega L_1 = -\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right),$$

czyli

$$\omega(L_1 + L_2) = \frac{1}{\omega C},$$

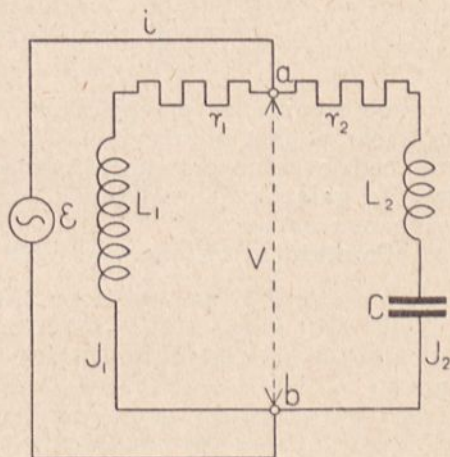
skąd

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}, \quad (24)$$

gdzie  $L_1 + L_2 = L$  jest całkowitą indukcyjnością szeregową obwodu.

Oporność zastępcza urojona będzie wówczas równa zero, a oporność zastępcza o charakterze bezindukcyjnym wyrazi się wzorem

$$R_z = \frac{r(r^2 + \omega_r^2 L_1^2) + r\left[r^2 + \left(\omega_r L_2 - \frac{1}{\omega_r C}\right)^2\right]}{4r^2} = \frac{\omega_r^2 L_1^2}{2r} + \frac{r}{2} \approx \frac{\omega_r^2 L_1^2}{R}, \quad (25)$$



Rys. 13.

Podstawiając w (25) wartość na  $\omega_r$  z (24), otrzymamy

$$R_z = \frac{L_1^2}{R(L_1 + L_2)C} = \frac{L_1}{RC} \cdot \frac{L_1}{L_1 + L_2}. \quad (25a)$$

Z powyższego wynika, że oporność zastępczą obwodu rezonansu prądów można dowolnie zmniejszać, dzieląc jego indukcyjność w odpowiednim stosunku między obie gałęzie. Przypadek graniczny  $R_{z \max}$  otrzymamy, gdy  $L_1 = L$ , a więc gdy przejdziemy do podstawowego układu rezonansu prądów. Dla żądanego oporu zastępczego  $R_z$  obliczymy potrzebną indukcyjność  $L$ , z wzoru (25), a mianowicie

$$L_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{R R_z}. \quad (25b)$$

Ta właściwość obwodu rezonansu prądów jest bardzo ważna dla racjonalnego wykorzystania generatorów lampowych.

Obwód rezonansu prądów z podzieloną indukcyjnością tem różni się zasadniczo od układu podstawowego, że występujące w nim napięcia wewnętrzne mogą być znacznie wyższe od napięcia  $V$  przyłożonego do jego zacisków. Napięcie to bowiem, jeżeli założymy  $r_1 = r_2 = r$ , wynosi

$$V = J \left[ r + j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = J [r + j \omega L_2],$$

z czego wynika, że przepięcie na kondensatorze może być tem większe, im większa jest indukcyjność  $L_2$  w stosunku do  $L_1$ . Graniczną wartością będzie pełne przepięcie rezonansowe, gdy cała indukcyjność przejdzie do gałęzi pojemnościowej, czyli gdy obwód zamieni się na obwód rezonansu napięcie.

Przetężenie rezonansowe dla tego układu znajdziemy z zależności

$$J \cong \frac{V}{\omega L_1},$$

oraz

$$V \cong i R_z = i \frac{\omega^2 L_1^2}{R},$$

skąd

$$\frac{J}{i} \cong \frac{\omega L_1}{R}, \quad (26)$$

co dla częstotliwości rezonansowej da

$$\left( \frac{J}{i} \right)_r = \frac{L_1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L_1}{C} \cdot \frac{L_1}{L_1 + L_2}}. \quad (26a)$$



## 12. Obwód rezonansu prądów z dzieloną pojemnością.

Przypadek ten podaje nam rys. 14. Oporności pozorne obu gałęzi dają nam wzory:

$$\hat{Z}_1 = r_1 - j \frac{1}{\omega C_1},$$

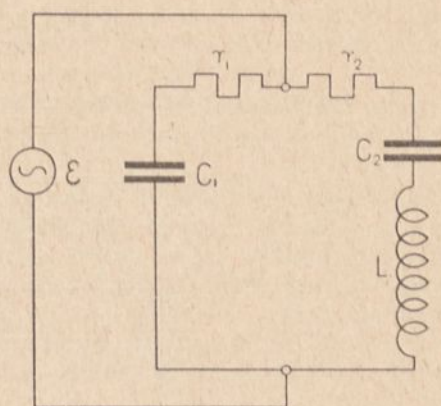
$$\hat{Z}_2 = r_2 + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C_2} \right).$$

Tu, zakładając również  $r_1 = r_2 = r$ , otrzymamy dla rezonansu zgodnie z (16b)

$$-\frac{1}{\omega C_1} + \omega L - \frac{1}{\omega C_2} = 0,$$

czyli

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}}. \quad (27)$$



Rys. 14.

Oporność zastępcza w rezonansie

$$R_z = \frac{r \left( r^2 + \frac{1}{\omega^2 C_1^2} \right) + r \left[ r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C_2} \right)^2 \right]}{4r^2}$$

$$R_z = \frac{r}{2} + \frac{1}{\omega^2 C_1^2 2r} \cong \frac{1}{\omega_r^2 C_1^2 R}. \quad (28)$$

A więc wartość  $\frac{1}{\omega_r C_1}$  posiada dla tego układu to samo znaczenie, co dla poprzedniego wielkość  $\omega_r L_1$ . Zmiana oporności zastępczej jest tu jednakże o wiele mniej dogodna, gdyż zmniejszając  $C_1$ , a nie chcąc zmienić nastrojenia obwodu, musimy równocześnie zmienić  $C_2$  lub  $L$ . Układ ten posiada jednakże tę wyższość, że w razie zasilania go przez generator o sile elektromotorycznej niesinusoidalnej (np. generator lampowy, pracujący z wysoką sprawnością), przytłumia on drgania harmoniczne, zwierając je częściowo przez pojemność  $C_1$ , która stanowi dla nich o wiele mniejszą oporność pozorną, niż gałąź, zawierająca indukcyjność.

## 13. Obwód rezonansu prądów o obu gałęziach złożonych.

Dalszą odmianą obwodów rezonansu prądu stanowi układ, w którym obie gałęzie zawierają równocześnie indukcyjność i pojemność (rys. 15). Spotyka go się również w pewnych typach generatorów lampowych.

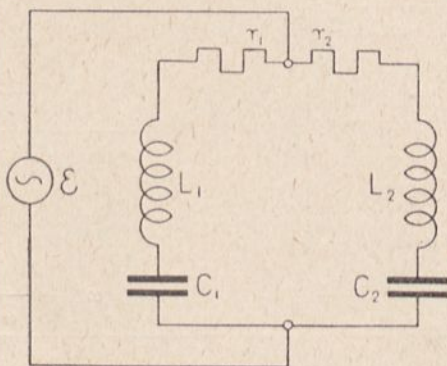
Mamy tu:

$$\hat{Z}_1 = r_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right),$$

$$\hat{Z}_2 = r_2 + j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right).$$

I znów z temi zastrzeżeniami, co poprzednio ( $r_1 = r_2$ ) otrzymamy:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1 + L_2}{C_1 + C_2}}} = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{(L_1 + L_2) C_1 C_2}}. \quad (29)$$



Rys. 15.

Oporność zastępcza w rezonansie wyniesie:

$$R_z = \frac{r \left[ r^2 + \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right)^2 \right] + r \left[ r^2 + \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)^2 \right]}{4r^2},$$

czyli

$$R_z = \frac{r}{2} + \frac{\left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right)^2}{2r} \cong \frac{\left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right)^2}{R}. \quad (30)$$

#### 14. Porównanie rezonansu prądów z rezonansem napięć.

Jak wynika z poprzednich rozważań, rezonans prądów posiada pewne cechy wspólne z rezonansem napięć, posiada jednakże i pewne własności zasadniczo go różniące od tamtego zjawiska. Zasadnicze własności obu zjawisk streścić można w następującym:

1. Obwód rezonansu prądów, podobnie jak obwód rezonansu napięć, przy pewnej częstotliwości (częstotliwość rezonansowa) zachowuje się jak oporność bezindukcyjna.

2. Częstotliwość rezonansowa jest niezależna od oporności omowej obwodu, gdy w obwodzie rezonansu prądów oporności obu gałęzi równoległych są równe; w obwodzie rezonansu napięć częstotliwość nie zależy od oporności, gdy obwód ten nie posiada upływności.

3. Obwód rezonansu prądów przy pewnej oporności zachowuje się jak oporność omowa niezależna od częstotliwości; obwód rezonansu napięć tej własności nie posiada.

4. Obwód rezonansu prądów bez strat przedstawia dla częstotliwości rezonansowej oporność nieskończenie wielką; oporność obwodu rezonansu napięć jest w tym przypadku równa zero. Obwód rezonansu prądów o małych stratach pracuje więc korzystnie ze źródłem prądu o dużej oporności wewnętrznej (generatory lampowe, wzmacniacze rezonansowe), podczas gdy takież obwód rezonansu napięć może być przystosowany do źródła o małej oporności (generatory maszynowe, iskrowe, łukowe, anteny odbiorcze).

5. Obwód rezonansu prądów stwarza dla częstotliwości mniejszych od rezonansowej obciążenie indukcyjne, dla większych zaś pojemnościowe; obwód rezonansu napięć zachowuje się odwrotnie.

6. W obwodzie rezonansu prądów o małych stratach występuje w rezonansie przeteżenie rezonansowe, podczas gdy w obwodzie rezonansu napięć spotykamy przepięcia rezonansowe.

Dla orjentacji, jakie wartości oporności rezonansowej są osiągalne w typowych obwodach rezonansu prądów w urządzeniach odbiorczych, posłużyć mogą następujące cyfry, podające górne granice  $R_z$  (R. T. Beatty):

$$f \cong 10^5 \text{ okr/sek } (\lambda \cong 3000 \text{ m}) - R_z \leq 400\,000 \, \Omega,$$

$$f \cong 10^6 \text{ okr/sek } (\lambda \cong 300 \text{ m}) - R_z \leq 100\,000 \, \Omega,$$

$$f \cong 10^7 \text{ okr/sek } (\lambda \cong 30 \text{ m}) - R_z \leq 10\,000 \, \Omega.$$

Dla obwodów nadawczych, zwłaszcza o większej mocy, ze względu na małą oporność zwojnic, osiągnięcie dużej oporności rezonansowej nie jest zbyt trudne, nie jest jednakże tak bardzo ważne dzięki małej oporności wewnętrznej lamp dużej mocy. Przeważnie nawet spotyka się tam obwody z dzielonymi opornościami urojonemi, a więc nie wykorzystujące maksymalnej oporności zastępczej.

## 15. Przykład.

Mamy zaprojektować obwód rezonansu prądów na częstotliwość  $10^5$  okr/s, dla prądu 15 amperów. Oporność obwodu wynosi  $5 \, \Omega$ , przepięcie nie powinno przekraczać  $10\,000 \text{ V}$ . Przy oporności wewnętrznej generatora  $R_g = 6\,000 \, \Omega$ , sprawność układu powinna wynosić nie mniej niż  $0,8$ .

Mamy tu spełnić trzy warunki:

1) Aby sprawność układu wynosiła 0,8, oporność zastępczą obwodu obliczymy z zależności:

$$\eta_1 = \frac{R_z}{R_z + R_g}, \text{ stąd } R_z = R_g \frac{\eta_1}{1 - \eta_1},$$

czyli w naszym zadaniu

$$R_z = 6000 \frac{0,8}{0,2} = 24000 \Omega = \frac{\omega^2 L_{1H}^2}{R_{\Omega}}.$$

2) Z drugiej strony najmniejszą pojemność kondensatora znajdziemy z warunku

$$C_{(f)} = \frac{J}{\omega V_c}.$$

3) Wreszcie musi być spełniony warunek rezonansu

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_{(H)} C_{(f)}}},$$

przyczem

$$L \geq L_1.$$

Obliczamy więc kolejno te wartości, podstawiając

$$f = 10^5 \text{ okr/sek}, \omega = 2\pi \cdot 10^5.$$

Stąd:

I. Indukcyjność  $L_1$ :

$$L_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{R R_z} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^5} \sqrt{5 \cdot 24000} = 0,55 \cdot 10^{-3} H.$$

II. Pojemność obwodu

$$C = \frac{15}{2\pi \cdot 10^5 \cdot 10^4} = 2,4 \cdot 10^{-9} F.$$

Obieramy więc  $C = 3 \cdot 10^{-9} F = 2700 \text{ cm}$ , co nam da napięcie na kondensatorze

$$V_c = \frac{15}{2\pi \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-9}} \cong 8000 \text{ woltów}.$$

III. Wreszcie, podstawiając  $C$  we wzorze na częstotliwość, znajdujemy

$$L_{(H)} = \frac{1}{\omega^2 C_{(f)}} \cong \frac{1}{40 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^{-9}} = 0,833 \cdot 10^{-3} H = 833 \mu H.$$

A więc  $L > L_1$ , czyli wszystkie warunki spełniliśmy. Gdyby się było okazało, że  $L < L_1$ , musielibyśmy przyjąć mniejszą pojemność, a temsamem wyższe napięcie na kondensatorze.

Maksymalna oporność zastępcza obwodu wyniesie więc dla  $L_1 = L$

$$R_{z \max} = 24\,000 \cdot \left(\frac{833}{550}\right)^2 \cong 55\,500 \Omega.$$

Prąd w obwodzie zewnętrznym obliczymy ze współczynnika prze-  
tężenia rezonansowego, który wynosi

$$\sigma_L = \frac{\omega L_1}{R} = \frac{2\pi \cdot 10^5 \cdot 0,55 \cdot 10^{-3}}{5} = 69.$$

Stąd prąd zasilający

$$i = \frac{R}{\omega L_1} J = \frac{15}{69} = 0,217 \text{ Amp} \cong 0,22 \text{ Amp}.$$

Stąd napięcie  $V$  na zaciskach obwodu

$$V = i R_z = 0,22 \cdot 24 \cdot 10^3 \cong 5300 \text{ woltów}.$$

Moc zużyta w obwodzie wyniesie wobec tego

$$P = Vi = 5300 \cdot 0,22 \cong 1160 \text{ watów}.$$

Ten sam wynik powinniśmy otrzymać ze wzoru

$$P = J^2 R = 225 \cdot 5 \cong 1125 \text{ watów}.$$

Mała różnica pochodzi z zaokrągłeń uskuteczionych w poprzed-  
niem obliczeniu.

## ROZDZIAŁ II.

### STANY PRZEJŚCIOWE W OBWODACH REZONANSOWYCH

Dotychczas rozpatrywaliśmy zjawiska, zachodzące w obwodach rezonansowych, zasilanych siłą elektromotoryczną sinusoidalną, w stanie t. zw. *ustalonym*, to znaczy po upływie pewnego czasu od włączenia siły elektromotorycznej, gdy zjawiska w obwodzie zdołały już dojść do równowagi. Bardzo ważne jednakże dla zrozumienia szeregu zjawisk jest studjum *stanów* t. zw. *przejściowych*, zachodzących w chwili nagłego włączenia lub wyłączenia siły elektromotorycznej, zasilającej obwód. Teoria tych zjawisk była ongiś, w czasach stosowania fal gasnących, podstawowym działem radjotechniki, lecz i dziś, chociaż większość zadań radjotechnicznych rozwiązać można przy pomocy prądów sinusoidalnych, nie straciła na doniosłości.

#### 1. Równanie drgań swobodnych.

Drgania samoistne, swobodne, mogą powstać w obwodzie rezonansowym w dwu przypadkach:

1) Gdy z obwodu rezonansowego nagle usuniemy siłę elektromotoryczną;

2) Gdy w kondensatorze nagromadzimy pewien ładunek, a następnie wyładowujemy go przez obwód zawierający  $L$ ,  $C$  i  $R$ .

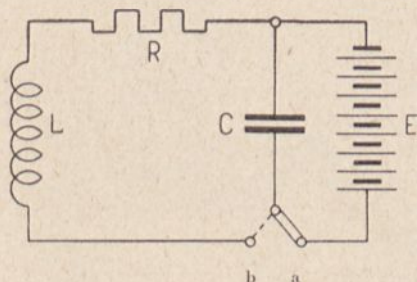
Drugi przypadek jest bardziej przejrzysty i dlatego na nim się oprzemy dla matematycznego ujęcia zjawiska. Wyobraźmy sobie układ rys. 16-go, zawierający obwód rezonansowy bez upływności. Gdy przełącznik znajduje się w położeniu  $a$ , kondensator ładuje się z baterji  $E$  do napięcia  $V_0$ , równego jej sile elektromotorycznej. Gdy następnie przełącznik przetrzucimy w położenie  $b$ , kondensator zaczyna się wyładowywać przez oporność  $R$  i indukcyjność  $L$ . Sumę napięć chwilowych wy-

razić wówczas możemy zgodnie z prawem Ohma równaniem różniczkowym

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = 0. \quad (31)$$

Gdy do równania tego wprowadzimy zależność

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (32)$$



Rys. 16.

i równanie podzielimy przez  $LC$ , otrzymamy równanie różniczkowe, wyrażające przebieg wyładowania kondensatora w obwodzie rezonansowym

$$\frac{dv^2}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0. \quad (31a)$$

Podstawiając wreszcie:

$$\frac{1}{LC} = \omega_r^2, \quad \frac{R}{2L} = \delta,$$

sprowadzimy równanie (31) do postaci

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\delta \frac{dv}{dt} + \omega_r^2 v = 0. \quad (31b)$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu ze względu na  $v$ . Czynniki mu zadość funkcja wykładnicza

$$v = \varepsilon^{\alpha t}. \quad (a)$$

w której  $\varepsilon$  jest podstawą logarytmów naturalnych. Podstawiona w równaniu (31) daje ona równanie

$$\alpha^2 \varepsilon^{\alpha t} + 2\delta \alpha \varepsilon^{\alpha t} + \omega_r^2 \varepsilon^{\alpha t} = 0, \quad (b)$$

któremu odpowiada równanie charakterystyczne

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_r^2 = 0, \quad (c)$$

posiadające dwa pierwiastki:

$$\alpha_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_r^2}, \quad (d)$$

$$\alpha_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_r^2}.$$

Odpowiada to ogólnemu rozwiązaniu równania różniczkowego

$$v = A \varepsilon^{\alpha_1 t} + B \varepsilon^{\alpha_2 t}. \quad (e)$$

Pierwiastki równania (c) są rzeczywiste, gdy

$$a) \quad \delta \geq \omega_r \text{ czyli } R \geq 2 \sqrt{\frac{L}{C}},$$

są zaś liczbami zespolonymi, gdy

$$b) \quad \delta < \omega_r \text{ czyli } R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Gdy założymy

$$|\omega_r^2 - \delta^2| = \omega_0^2, \quad (33)$$

to otrzymamy dla pierwszego przypadku  $\delta^2 - \omega_r^2 = \omega_0^2$ , więc

$$a) \quad \alpha_1 = -\delta + \omega_0, \quad \alpha_2 = -\delta - \omega_0, \quad (f)$$

zaś dla drugiego przypadku  $\delta^2 - \omega_r^2 = -\omega_0^2$ , więc

$$b) \quad \alpha_1 = -\delta + j\omega_0, \quad \alpha_2 = -\delta - j\omega_0. \quad (g)$$

Rozpatrzmy po kolei oba przypadki.

A. *Pierwiastki rzeczywiste:*

Równanie napięcia (e)

$$v = A \varepsilon^{(-\delta + \omega_0)t} + B \varepsilon^{(-\delta - \omega_0)t} \quad (h)$$

daje nam równanie prądu

$$i = C \frac{dv}{dt} = C [A (\omega_0 - \delta) \varepsilon^{(\omega_0 - \delta)t} + B (-\omega_0 - \delta) \varepsilon^{(-\omega_0 - \delta)t}].$$

Dla obliczenia współczynników  $A$  i  $B$  zakładamy, że w momencie  $t = 0$  mamy  $v = V_0$ ,  $i = 0$ . Wówczas:

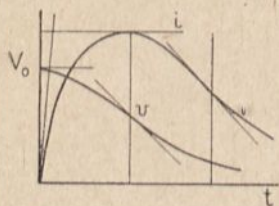
$$V_0 = A + B,$$

$$A (\omega_0 - \delta) + B (-\omega_0 - \delta) = 0,$$

co daje:

$$A = V_0 \frac{\omega_0 + \delta}{2\omega_0},$$

$$B = V_0 \frac{\omega_0 - \delta}{2\omega_0}.$$



Rys. 17a.

Stąd równanie napięcia

$$v = \frac{V_0}{2\omega_0} [(\omega_0 + \delta) \varepsilon^{(\omega_0 - \delta)t} + (\omega_0 - \delta) \varepsilon^{-(\omega_0 + \delta)t}], \quad (34)$$

zaś odpowiadające mu równanie prądu wyładowania

$$i = \frac{V_0 C}{2\omega_0} [(\omega_0^2 - \delta^2) \varepsilon^{(\omega_0 - \delta)t} - (\omega_0^2 + \delta^2) \varepsilon^{-(\omega_0 + \delta)t}],$$



czyli

$$i = -\frac{CV_0}{2} \cdot \frac{\omega_r^2}{\omega_0} [\varepsilon^{(\omega_0 - \delta)t} - \varepsilon^{-(\omega_0 + \delta)t}]. \quad (35)$$

Jak widać, funkcje (34) i (35) są funkcjami wykładniczymi. Przebieg ich przedstawiony na rys. 17a wskazuje, że wyładowanie kondensatora odbywa się jednokierunkowo, dążąc asymptotycznie do zera. Wyładowanie takie nazywamy *aperjodycznym*.

B. *Pierwiastki urojone.* Wówczas równanie napięcia ma postać

$$v = A \varepsilon^{(-\delta + j\omega_0)t} + B \varepsilon^{-(\delta + j\omega_0)t} = \varepsilon^{-\delta t} (A \varepsilon^{j\omega_0 t} + B \varepsilon^{-j\omega_0 t}). \quad (\alpha)$$

Stosujemy wzory Eulera:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{j\omega_0 t} &= \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t, \\ \varepsilon^{-j\omega_0 t} &= \cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t, \end{aligned}$$

i otrzymujemy po podstawieniu:

$$A + B = M, \quad A - B = N,$$

równanie napięcia

$$v = \varepsilon^{-\delta t} (M \cos \omega_0 t + j N \sin \omega_0 t). \quad (\beta)$$

Równanie prądu otrzymujemy z ( $\alpha$ )

$$i = C \frac{dv}{dt} = C [(-\delta + j\omega_0) A \varepsilon^{(-\delta + j\omega_0)t} - (\delta + j\omega_0) B \varepsilon^{-(\delta + j\omega_0)t}],$$

i stosując te same podstawienia co poprzednio, sprowadzamy do postaci

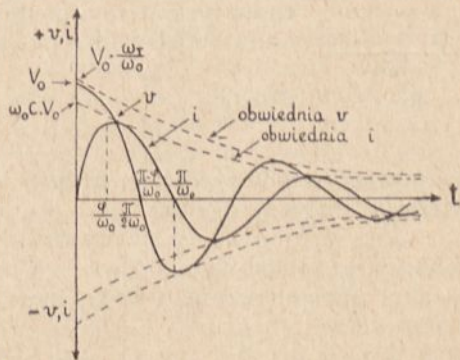
$$i = C \varepsilon^{-\delta t} [(j\omega_0 N - M\delta) \cos \omega_0 t - (jN\delta + \omega_0 M) \sin \omega_0 t]. \quad (\gamma)$$

Zakładając warunki początkowe

$$t = 0, \quad v = V_0, \quad i = 0,$$

obliczamy z ( $\beta$ ) i ( $\gamma$ ) stałe:

$$M = V_0, \quad N = \frac{1}{j} \cdot \frac{\delta}{\omega_0} V_0, \quad (\delta)$$



Rys. 17b.

skąd otrzymujemy ostateczne równania napięcia i prądu w obwodzie:

$$v = V_0 \varepsilon^{-\delta t} \left( \cos \omega_0 t + \frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right), \quad (36)$$

$$i = -\omega_0 C V_0 \varepsilon^{-\delta t} \left( \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + 1 \right) \sin \omega_0 t. \quad (37)$$

Równanie (36) można przekształcić, zakładając (rys. 18)

$$\frac{\delta}{\omega_0} = \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad (38)$$

wobec czego

$$\sin \varphi = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \delta^2}} = \frac{\omega_0}{\omega_r}, \quad \cos \varphi = \frac{\delta}{\omega_r}.$$

Stosując wzór

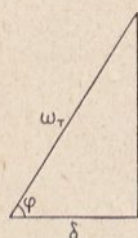
$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta),$$

otrzymujemy

$$v = \frac{\omega_r}{\omega_0} V_0 \varepsilon^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (35a)$$

Jak widać, równania (36) i (37) są to funkcje sinusoidalne o amplitudzie malejącej według prawa wykładniczego (rys. 17 b), wyładowanie kondensatora odbywa się więc teraz pod postacią drgań o amplitudzie malejącej czyli *drgań gasnących*. Częstotliwość, z jaką odbywa się wyładowanie, wynosi według równania (33)

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_r^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} < \omega_r, \quad (33a)$$



Rys. 18.

$\omega_0$  i nosi nazwę *częstotliwości drgań własnych* obwodu, w odróżnieniu od jego częstotliwości rezonansowej. Zaś amplituda tych drgań maleje według funkcji wykładniczej, której stałą wykładnika potęgowego

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad (39)$$

nazywamy *współczynnikiem tłumienia* obwodu. Funkcja  $\varepsilon^{-\delta t}$  wyraża obwiednią krzywej drgań.

Jak wynika z przeprowadzonej dyskusji, wyładowanie energii w obwodzie rezonansowym odbyć się może w sposób dwojaki:

a) aperiodycznie, gdy oporność omowa obwodu wynosi

$$R \geq 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

b) pod postacią drgań zanikających, gdy

$$R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

W pierwszym przypadku obwód rezonansowy nazywamy *aperjodycznym*, w drugim zaś *obwodem drgań*. Wartość oporności

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

poczawszy od której obwód staje się *aperjodycznym*, nosi nazwę *oporności krytycznej*.

Krańcowy przypadek *aperjodyczności* obwodu otrzymamy, gdy założymy  $L=0$ . Wówczas przebieg zjawiska wyrażony będzie równaniem

$$iR + \frac{1}{C} \int idt = 0,$$

któremu odpowiada rozwiązanie:

$$\left. \begin{aligned} v &= V_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \\ i &= \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

gdzie wyrażenie  $\frac{1}{RC}$  jest stałą czasu obwodu z kondensatorem.

## 2. Dyskusja równania drgań swobodnych.

Z równań (33a), (34) i (35) wynikają bardzo ważne wnioski o zachowaniu się obwodu drgań podczas wyładowania.

1°. Przedewszystkiem *częstotliwość* drgań jest *stała* przez cały czas trwania drgań. Jest ona tem mniejsza, im większy jest współczynnik tłumienia obwodu (rys. 19). Równanie (33a) wskazuje, że oporność omowa obwodu drgań wpływa opóźniająco na wyładowanie i ładowanie się kondensatora, do tego stopnia, że z chwilą, gdy oporność dojdzie do wartości krytycznej, okres wyładowania staje się nieskończenie długim, tak, iż powtórne naładowanie kondensatora w kierunku odwrotnym staje się niemożliwym. Cała bowiem energia, zawarta w kondensatorze, zamieniła się już podczas wyładowania na ciepło Joule'a i pole magnetyczne obwodu nie zdołało nagromadzić w sobie energii niezbędnej dla ponownego naładowania kondensatora.

Dwa obwody rezonansowe, które mają równe częstotliwości drgań własnych, nazywamy *izochronicznymi*, natomiast o dwu obwodach, które mają tę samą częstotliwość rezonansową, mówimy, że są *w rezonansie*. *Izochronizm* i *rezonans* pokrywają się tylko wówczas, gdy oba obwody mają równe współczynniki tłumienia, lub gdy te wielkości dla obu obwodów są bardzo małe. Gdy  $\delta \ll \omega_r$  (rys. 20) możemy napisać

$$\omega_0 \approx \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_{(H)} C_{(F)}}},$$

skąd okres drgań własnych

$$T_0 = T_r = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (33b)$$

Wzór ten nosi nazwę *wzoru Thomsona*.

2°. Stosunek następujących po sobie amplitud czyli *stosunek tłumienia* drgań jest *wielkością stałą*. Mamy bowiem (rys. 20)

$$k = \frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\varepsilon^{-\delta(t+T_0)}} = \varepsilon^{\delta T_0} = \varepsilon^{\frac{R}{2L} T_0} \quad (41)$$

Logarytm naturalny stosunku tłumienia

$$D = \ln k = \frac{R(\Omega)}{2L(\Omega)} T_0 \quad (42)$$

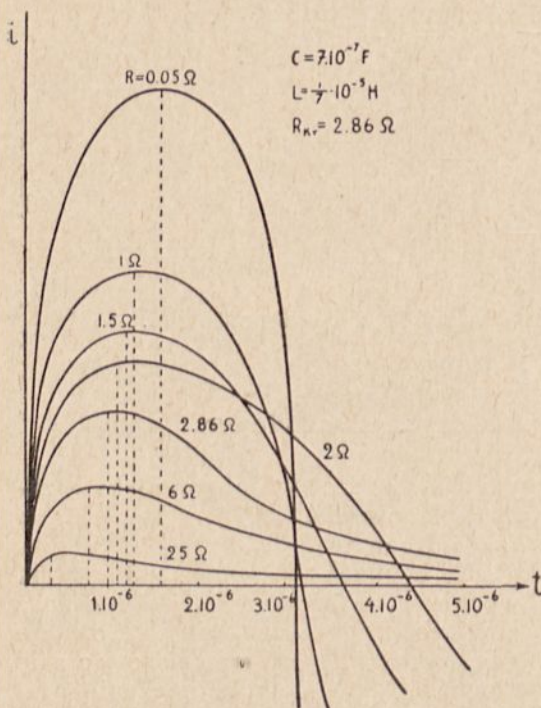
nosi nazwę *dekrementu logarytmicznego*, czyli krótko *dekrementu drgań*. Dla obwodów o małym tłumieniu, do których zastosować można wzór Thomsona, dekrement sprowadza się do postaci

$$D = \frac{R}{2L} 2\pi\sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (42a)$$

Przybliżenie to można stosować, gdy  $D$  nie przekracza wartości 0,2.

Porównanie ze wzorem (3a) rozdziału I. wykazuje, że przy małym tłumieniu obwodu istnieje zależność

$$D = \frac{\pi}{\sigma} \text{ czyli } \sigma = \frac{\pi}{D}. \quad (42b)$$



Rys. 19.

Według „Cours Technique du Centre d'Instructions pour élèves-officiers radiotélégraphistes”.

Dlatego też wielu autorów nawet w odniesieniu do drgań niegasnących posługuje się dekrementem. Należy jednakże podkreślić, że bardziej ściśle jest operowanie współczynnikiem przepięcia, gdyż wyrażenie dekrementu w postaci wzoru (42a) jest jedynie — mniej lub więcej — przybliżone.

3°. Między napięciem na kondensatorze i natężeniem prądu w obwodzie drgającym występuje przesunięcie faz o kąt  $\varphi$ , określony zależnością (rys. 18)

$$\text{ctg } \varphi = \frac{\delta}{\omega_0}.$$

Kąt ten jest mniejszy od  $90^\circ$ , w przeciwnym bowiem razie nie mogłoby być mowy o wydzielaniu mocy w obwodzie, gdyż w przypadku drgań swobodnych siłą elektromotoryczną jest właśnie napięcie pojemnościowe. I tu leży zasadnicza różnica między drganiami własnymi, a drganiami rezonansowymi, że między napięciem na kondensatorze, a prądem drgań gasnących istnieje przesunięcie faz mniejsze od  $\frac{\pi}{2}$ .

Można tu więc mówić o współczynniku mocy <sup>1)</sup>

$$\cos \varphi = \frac{\delta}{\omega_r} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (38a)$$

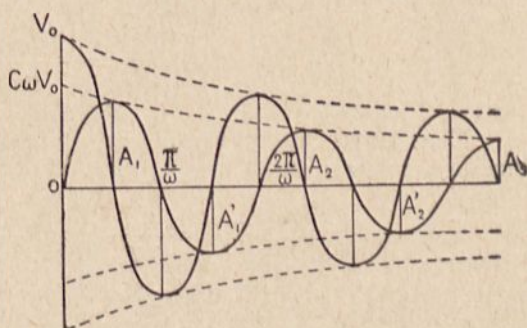
Gdy współczynnik tłumienia jest bardzo mały ( $\delta \ll \omega_r$ ), przesunięcie faz wynosi praktycznie  $\frac{\pi}{2}$ , a wzory (34) i (35) upraszczają się do postaci:

$$v = V_0 \varepsilon^{-\delta t} \cos \omega_r t, \quad (34a)$$

$$i = \omega_r C V_0 \varepsilon^{-\delta t} \sin \omega_r t = \\ = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \varepsilon^{-\delta t} \sin \omega_r t. \quad (35a)$$

Obliczamy stąd pierwszą amplitudę prądu w obwodzie drgającym

$$J_1 = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \varepsilon^{-\delta \frac{T_0}{4}} \cong \\ \cong V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} = J_0. \quad (43)$$



Rys. 20.

Wzór ten pokrywa się ze wzorem (4), wyprowadzonym dla drgań rezonansowych.

<sup>4)</sup> Zwrócić tu należy uwagę na ciekawy szczegół. Przebieg drgań gasnących nie jest idealną sinusoidą, lecz odbiega od tej postaci tym bardziej, im większe jest tłumienie obwodu. Otóż, w myśl uogólnionego twierdzenia Fourier'a<sup>2)</sup> każdą taką krzywą, która w nieskończoności posiada wartość zero, rozłożyć można na widmo częstotliwości wyrażone całką

$$i = f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} a \cos(\omega t + \varphi) d\omega, \quad (44)$$

w której  $a$  i  $\varphi$  są funkcjami  $\omega$ . W myśl więc tego obwód, w którym powstają drgania gasnące, ściśle biorąc nie promieniuje jednej częstotliwości, lecz widmo częstotliwości, czem tłumaczy się fakt, że fale

<sup>1)</sup> Niektórzy autorowie nieściśle stosują to pojęcie do prądów sinusoidalnych.

<sup>2)</sup> Patrz m. in. Koerts, Atmosphärische Störungen, Ollendorf, E. N. T. VII. str. 108  
Manezarski, Materiały Konferencji CCIR w Kopenhadze, str. 490.

gasnące o wiele trudniej jest wydzielić w odbiorniku, niż fale niegasnące. Przeszkody wywołane przez falę gasnącą, są przytem tem większe, im większy jest dekrement. Dlatego też zabroniono używać fal gasnących, których dekrement przekracza 0,2 i obecnie coraz silniejsza jest tendencja w kierunku zupełnego usunięcia z użycia fal gasnących<sup>1)</sup>.

5°. Wzory (34) i (35) wskazują, że amplitudy drgań gasnących maleją asymptotycznie, czyli że zupełny zanik drgań następuje dopiero po czasie nieskończenie długim. Jednakże w większości przypadków praktycznych można uważać, że drgania zanikły, gdy amplituda ich zmalała do pewnego określonego ułamka pierwszej amplitudy. Oznaczając stosunek pierwszej amplitudy do  $p$ -tej przez  $m$ , otrzymamy

$$\frac{A_1}{A_p} = m = \varepsilon^{\delta p T} = \varepsilon^{p D},$$

skąd liczba drgań użytecznych

$$p = \frac{\ln m}{D}.$$

Czas użyteczny trwania ciągu drgań, od chwili powstania do praktycznego ich zaniku

$$\tau = p T_0 = \frac{\ln m}{\delta T_0} T_0 = \frac{\ln m}{\delta} = \frac{2L_H}{R_\Omega} \ln m. \quad (46)$$

Normalnie przyjmuje się, że drgania zanikły, gdy amplituda ich spadła do 1/100 wartości początkowej. Wobec tego  $m = 100$ ,  $\ln m = 4,6$ .

Wzór (46) wskazuje, że czas zaniku drgań nie zależy od ich częstotliwości, lecz wyłącznie od stałych obwodu  $R$  i  $L$ .

### 3. P r z y k ł a d.

1. Dla obwodu z przykładu str. 24 obliczyć tłumienie, częstotliwość drgań własnych i liczbę drgań użytecznych.

2. Określić jego oporność krytyczną, i częstotliwość drgań własnych przy  $R' = \frac{R_{kr}}{2}$ .

1. Dla oporności skutecznej  $10 \Omega$  współczynnik tłumienia wynosi

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{10}{2 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^4.$$

<sup>1)</sup> Konwencja Waszyngtońska zabrania począwszy od 1.1.1930 instalowania nowych stacyj iskrowych, których moc doprowadzona przekracza 300 w., a nakazuje wycofanie wszystkich stacyj istniejących o mocy większej, niż wymieniona, do dnia 1.1.1940.

A więc częstotliwość drgań własnych

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{10^4 \cdot 10^9 - 25 \cdot 10^8} \cong 500\,000 \text{ okr/sek} = 500 \text{ kc/s.}$$

Okres drgań własnych uważać więc można za równy okresowi drgań rezonansowych.

Wobec tego dekrement logarytmiczny można obliczyć według wzoru przybliżonego (42a)

$$D = 31,4 \sqrt{\frac{10^{-9}}{10^{-4}}} \cong 0,1.$$

Liczba drgań użytecznych, gdy założymy  $m = 100$ ,

$$p = \frac{\ln m}{D} = \frac{4,6}{0,1} = 46,$$

zaś czas trwania drgań użytecznych

$$\tau = p T_0 = \frac{p}{f_0} = \frac{46}{5 \cdot 10^5} \cong 9 \cdot 10^{-5} \text{ sek.}$$

Drgania więc praktycznie zanikną po 1/10 000 sekundy.

2. Oporność krytyczna obwodu wynosi

$$R_{kr} = 2 \sqrt{\frac{L(m)}{C(f)}} = 2 \sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-9}}} \cong 632 \Omega.$$

Przy oporności równej połowie oporności krytycznej, czyli  $R' = 316 \Omega$ , współczynnik tłumienia wyniesie

$$\delta' = \frac{316}{2 \cdot 10^{-4}} = 1,58 \cdot 10^6,$$

a stąd częstotliwość drgań własnych

$$f'_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{10 \cdot 10^{12} - 2,5 \cdot 10^{12}} \cong 436\,000 = 4,36 \cdot 10^5 \text{ okr/sek.}$$

Pod wpływem zwiększenia oporności do połowy wartości krytycznej częstotliwość drgań własnych zmalała o 13%.

Dekrement logarytmiczny drgań obliczyć musimy według wzoru dokładnego (42)

$$D' = \delta' T'_0 = \frac{\delta'}{f'_0} = \frac{1,58 \cdot 10^6}{4,36 \cdot 10^5} = 3,63.$$

#### 4. Znaczenie tłumienia dla drgań niegasnących.

Jak dowodzi równanie (39), tłumienie jest wielkością określoną stałymi elektrycznymi obwodu, a nie prądu. Wywiera ono zatem wpływ i na drgania niegasnące, z tą jednak różnicą, że nie objawia się w zanikaniu ich amplitudy, albowiem straty energii uzupełniane są w sposób ciągły przez źródło prądu. Z tego względu niezupełnie ściśle jest nazywanie drgań niegasnących „nietłumionymi” — tłumieniu one ulegają, lecz zachowują stałą amplitudę dzięki uzupełnieniu energii z zewnątrz.

Dekrement drgań jest więc i dla drgań niegasnących miarą zużytej w obwodzie energii. Wykazuje to definicja dekrementu drgań, wprowadzona przez H. Reina<sup>1)</sup>. Według niej stosunek energii zużytej w ciągu jednego okresu do energii całkowitej, zawartej w obwodzie (np. magnetycznej)

$$\frac{W_R}{W_m} = \frac{1/2 J_m^2 R T}{1/2 J_m^2 L} = \frac{R}{L} T = 2 \delta T = 2D, \quad (42c)$$

równa się podwójnemu dekrementowi obwodu.

Najwyraźniej jednakże uwydatnia się wpływ tłumienia na drgania niegasnące w okresach przejściowych, a więc w chwilach wyłączenia lub włączenia siły elektromotorycznej.

I tak w chwili nagłego wyłączenia siły elektromotorycznej<sup>2)</sup> energia nagromadzona w danej chwili w kondensatorze wyładowuje się pod postacią drgań gasnących. Przebieg tych drgań jakościowo będzie odpowiadał równaniom (34) i (35), jednakże pierwsza ich amplituda będzie zależała od fazy, w której usunięta została siła elektromotoryczna.

Podobnie uwydatnia się tłumienie w chwili włączenia siły elektromotorycznej w obwód rezonansowy. Stan przejściowy, odpowiadający włączeniu siły elektromotorycznej sinusoidalnej w obwód rezonansowy, wyrazić można według prawa Ohma równaniem

$$i R + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = E_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (47)$$

różniącym się od równania (31) tem, że zawiera człon  $E_m \sin(\omega t + \varphi)$ , gdzie  $\varphi$  oznacza fazę, w której nastąpiło włączenie siły elektromotorycznej w obwód.

Po przekształceniach, zastosowanych w tamtem równaniu, sprowadza się ono do postaci:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \delta \frac{dv}{dt} + \omega_r^2 v = \omega_r^2 E \sin(\omega t + \varphi).$$

<sup>1)</sup> H. Rein, Lehrbuch, 1917, str. 9.

<sup>2)</sup> O ile oczywiście równocześnie z wyłączeniem siły elektromotorycznej nie przerwaliśmy obwodu.



Ogólne rozwiązanie tego równania dla  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  posiada dla napięcia i prądu następujące postacie: <sup>1)</sup>

$$v = \left[ \varepsilon^{-\delta t} (M \cos \omega_0 t + jN \sin \omega_0 t) \right] + \frac{E \omega^2}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi + \psi), \quad (48)$$

$$i = C \frac{dv}{dt} = C \varepsilon^{-\delta t} \left[ (j \omega_0 N - M \delta) \cos \omega_0 t - (j N \delta + \omega_0 M) \sin \omega_0 t \right] + \frac{C E \omega_r^2 \omega}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \varphi + \psi). \quad (49)$$

Równania te wskazują, że z chwilą włączenia siły elektromotorycznej zmiennej w obwód rezonansowy drgający ( $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ) o częstotliwości rezonansowej  $\omega_r$  i częstotliwości drgań własnych  $\omega_0$ , w obwodzie tym otrzymujemy dwa drgania:

a) jedno sinusoidalne wymuszone o częstotliwości  $\omega$ , równej częstotliwości siły elektromotorycznej załączonej;

b) drugie gasnące swobodne, o częstotliwości drgań własnych obwodu  $\omega_0$  (wyrazy w nawiasach graniastych).

Po pewnym czasie drgania własne obwodu zanikają i utrzymują się tylko drgania wymuszone o częstotliwości źródła. Ze względu na to, że w przypadku ogólnym siła elektromotoryczna zasilająca nie będzie w rezonansie z obwodem, między nią i prądem płynącym w obwodzie wystąpi przesunięcie faz o kąt  $\psi$ , przyczem

$$\cot g \psi = - \frac{2 \delta \omega}{\omega_r^2 - \omega^2}.$$

Równania (48) i (49) znacznie się upraszczają, gdy siła elektromotoryczna zasilająca jest w rezonansie z obwodem, czyli gdy

$$\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \text{oraz} \quad \psi = 0,$$

oraz gdy tłumienie obwodu jest bardzo małe, a więc

$$\delta \ll \omega_r, \quad \omega_0 = \omega_r = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

<sup>1)</sup> Podstawiając jako całkę równania zredukowanego

$$v_1 = \varepsilon^{-\delta t} (M \cos \omega_0 t + jN \sin \omega_0 t),$$

a jako całkę szczególną równania zupełnego

$$v_2 = A \sin(\omega t + \varphi) + B \cos(\omega t + \varphi),$$

i wyznaczając wartości stałych  $A, B$  dla warunków początkowych

$$t = 0, \quad v = 0, \quad i = 0,$$

oraz uwzględniając, że  $\cos \varphi = \frac{\delta}{\omega_0}$ , (patrz równanie 38a).

Jeżeli przytem założymy warunki początkowe  $t = 0$ ,  $v = 0$ ,  $i = 0$ , obliczyć możemy stałe  $M$  i  $N$  równań (48) i (49)

$$M = -\frac{\omega_r}{2\delta} E \sin \varphi = -2\sigma E \sin \varphi, \quad N = -\frac{E}{2\delta} (\delta \sin \varphi + \omega_r \cos \varphi),$$

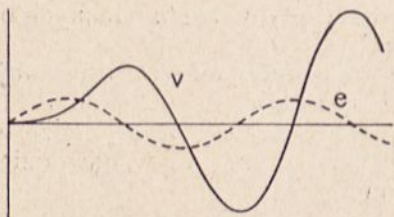
co podstawione do równań (48) i (49), daje po uproszczeniach

$$v = \frac{E \omega_r}{2\delta} \sin(\omega_r t + \varphi) (1 - \varepsilon^{-\delta t}) = \sigma E \sin(\omega_r t + \varphi) (1 - \varepsilon^{-\delta t}), \quad (50)$$

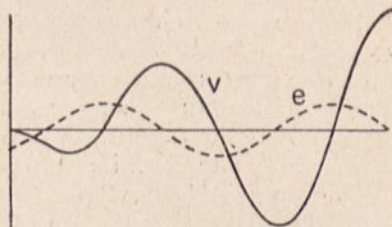
oraz

$$i = \frac{E}{R} \cos(\omega_r t + \varphi) (1 - \varepsilon^{-\delta t}). \quad (51)$$

Z równań tych wynika, że przepięcie rezonansowe ( $\sigma E = V_r$ ) oraz prąd w obwodzie rezonansowym narastają według prawa wykładniczego zanim dojdą do wartości końcowej. Można powiedzieć, że drgania gasnące powstające w obwodzie, przeszkadzają powstaniu przepięcia, które ustala się dopiero po ich zniknięciu. Przytem przebieg narastania jest zależny od kąta  $\varphi$ , czyli od fazy, w której siła elektromotoryczna została



Rys. 21 a, ( $\varphi = 0^\circ$ ).



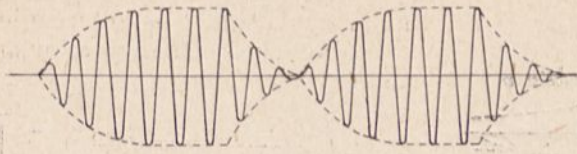
Rys. 21 b, ( $\varphi = -60^\circ$ ).

włączona w obwód. Dwa takie charakterystyczne przebiegi mamy na rys. 21 a dla siły elektromotorycznej, włączonej z początkiem okresu, na rys. 21 b dla kąta  $\varphi = -60^\circ$ .

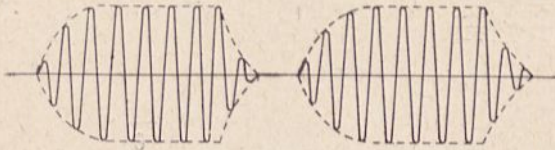
Zjawisko stopniowego narastania drgań rezonansowych znane jest i w innych dziedzinach techniki, dość wymienić wpływ rezonansu na drgania mechaniczne mostów i wałów.

Dyskusja równań (50) i (51) wskazuje, zgodnie zresztą z teorią drgań gasnących, że przepięcie rezonansowe ustala się tem szybciej, im większe jest tłumienie obwodu. Z drugiej zaś strony łączy się z tem mniejsza wartość bezwzględna przepięcia i mniejsza ostrość rezonansu obwodu.

Wolne ustalenie się drgań, czyli długi czas drgań użytecznych (wzór 46) jest zjawiskiem niepożądanem przy nadawaniu i odbiorze szybkiej telegrafji. Jeżeli bowiem okres zanikania będzie dłuższy od odstępów między impulsami, impulsy te nie dadzą w odbiorniku wyraźnych znaków, lecz będą się zlewały (rys. 22 a), podczas gdy przy dostatecznie silnem tłumieniu znaki będą wyraźnie oddzielone (rys. 22 b). Wynika stąd pewna trudność przy projektowaniu obwodów rezonansowych dla szybkiej telegrafji, szczególnie po stronie odbiorczej. Wymaga się bowiem wyraźnych znaków i dostatecznej ostrości rezonansu, a więc równocześnie dużych wartości



Rys. 22 a.



Rys. 22 b.

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \text{i} \quad \sigma = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Trudności, stąd wynikające, są, tem większe, im mniejsza jest częstotliwość, a więc im większa długość fali nadawanej. Fale długie bowiem wymagają, dla osiągnięcia rezonansu, dużych wartości  $L$  i  $C$ , a przytem ich obwody antenowe ze względu na małą zdolność promieniowania, posiadają małą oporność omową, ponadto ich obwody odbiorcze, skutkiem ma-

łych odstępów między falami poszczególnych stacyj (do 250 okr/s), muszą wykazywać dużą ostrość rezonansu. W urządzeniach krótkofalowych natomiast  $L$  jest małe, zaś  $R$ , ze względu na straty i znaczną oporność promieniowania, duże, a dzięki dużym odstępom między falami (kilka kc/s) ostrość rezonansu przy odbiorze nie posiada tak doniosłego znaczenia. Dlatego też, gdy na falach rzędu 20.000 m największa szybkość nadawania jest rzędu 40 słów na minutę (jednemu słowu odpowiada 5 liter alfabetu Morse'a), to na falach rzędu 20 m szybkość ta dochodzi do 300 słów i więcej. Również i telewizję, która wymaga szybkości impulsów rzędu 100 000 na sekundę, zrealizować można przy pomocy fal krótkich.

## 5. Drgania w obwodzie rezonansowym, zasilanym pod napięciem stałym.

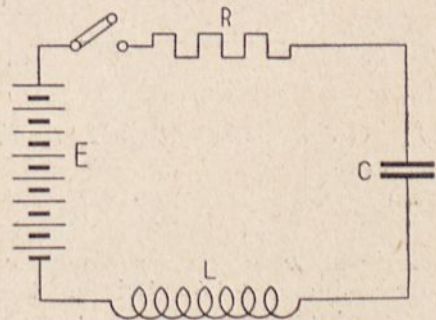
Drgania gasnące, jako zjawisko przejściowe, mogą również powstać, gdy kondensator załączymy przez indukcyjność na źródło napięcia stałego  $E$  (rys. 23). Jeżeli obwód ładujący obok pojemności  $C$  zawiera oporność  $R$  i indukcyjność  $L$ , przebieg włączenia możemy wyrazić równaniem różniczkowym:

$$iR + L \frac{di}{dt} + C \int idt = E = \text{const.} \quad (52)$$

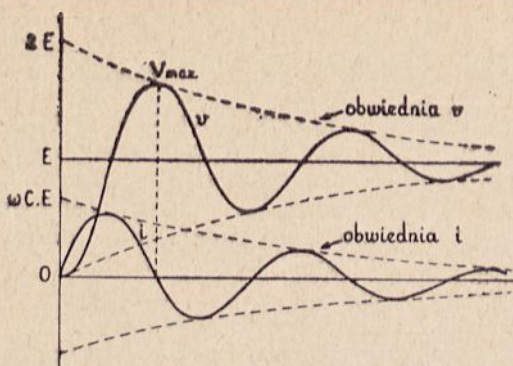
które prowadzi do analogicznego rozwiązania, jak oba poprzednio rozpatrywane. I tu również ładowanie będzie się odbywało aperiodycznie, gdy

$$R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

będzie zaś miało charakter drgający, gdy  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ .



Rys. 23.



Rys. 24.

W tym ostatnim przypadku, który wyłącznie nas interesuje w radjotechnice, mamy rozwiązanie

$$v = E \left[ 1 - \frac{\omega_r}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi) \varepsilon^{-\delta t} \right]$$

$$i = E \frac{\omega_r^2 C}{\omega_0} \varepsilon^{-\delta t} \sin \omega_0 t, \quad (53)$$

przyczem

$$\varphi = \arctg \frac{\omega_0}{\delta}.$$

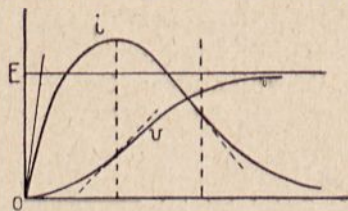
W szczególności, gdy  $\delta \ll \omega_0$ , mamy  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega_0 = \omega_r$  i równania (53) upraszczają się do postaci:

$$\begin{aligned} v &= E (1 - \varepsilon^{-\delta t} \cos \omega_r t), \\ i &= \omega_r C E \varepsilon^{-\delta t} \sin \omega_r t, \end{aligned} \quad (54)$$

której odpowiada rys. 24.

Analizując te równania, widzimy, że podobnie, jak w przypadku włączenia siły elektromotorycznej zmiennej, tak i tu drgania swobodne przeciwdziałają włączonej sile elektromotorycznej, która dochodzi do pełnej wartości dopiero po zaniknięciu drgań (ściśle biorąc po czasie nieskończenie długim). Przeciwnapięcie na kondensatorze, mając charakter zmienny, sumuje się w półokresach dodatnich z siłą elektromotoryczną E, wytwarzając na kondensatorze przepięcie, którego wartość maksymalna odpowiada amplitudzie pierwszego dodatniego półokresu, a więc występuje po czasie  $T_0/2$ .

Wynosi ono



Rys. 25.

$$V_{max} = E \left( 1 + \varepsilon^{-\frac{\delta T_0}{2}} \right) = E \left( 1 + \varepsilon^{-\frac{D}{2}} \right) \quad (55)$$

i tem bardziej zbliża się do wartości  $2E$ , im mniejsze jest tłumienie obwodu.

Rezonansowe ładowanie kondensatora przy pomocy napięcia stałego stosowane było w urządzeniach iskrowych Fessenden-Marconi. Używano tam napięcia stałego 12 000 V, osiągając przepięcie (1,8 ÷ 1,9) E.

Znajomość zjawiska drgającego ładowania kondensatora przez napięcie stałe ułatwia zrozumienie zjawisk wzbudzania drgań niegasnących przy pomocy łuków świetlnych i generatorów lampowych. Tłumaczy ona również niektóre zjawiska przebiecia kondensatorów w obwodach pomocniczych, które nie są budowane celowo jako obwody rezonansowe.

Gdy obwód rezonansowy jest aperiodyczny, przepięcia niema i napięcie na kondensatorze dąży asymptotycznie do wartości siły elektromotorycznej źródła zasilającego (rys. 25). Skrajnym przypadkiem aperiodyczności jest i tu obwód bezindukcyjny, który wyraża się równaniem różniczkowym

$$iR + \frac{1}{C} \int idt = E,$$

dającym rozwiązaniem

$$v = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right),$$

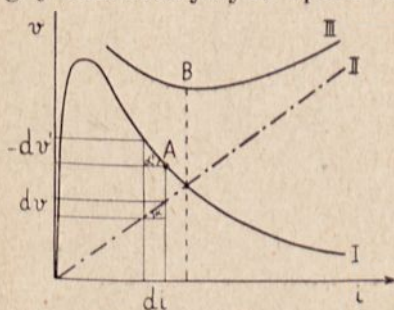
$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (56)$$

## 6. Drgania w obwodach z opornością ujemną.

O przewodniku mówimy, że posiada oporność ujemną, gdy zmianom prądu przepływającego przez ten przewodnik odpowiadają zmiany spadku napięcia na jego końcówkach w kierunku odwrotnym, wbrew prawu Ohma. A więc gdy np. natężenie prądu w obwodzie wzrasta, spadek napięcia na zaciskach takiego przewodnika maleje i naodwrot zmniejszeniu natężenia odpowiada wzrost spadku napięcia wzdłuż przewodnika. Przykładem takiego przewodnika o oporności ujemnej jest łuk Volty, którego charakterystykę

$$v = f(i)$$

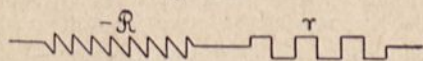
mamy na rys. 26, krzywa I. Charakterystyka ta jest *spadająca*, podczas gdy charakterystyka oporu omowego jest rosnąca (prosta II), albowiem spadek napięcia rośnie na nim proporcjonalnie do prądu  $i$ . Podczas gdy dla charakterystyki II oporność wyraża się pochodną



Rys. 26.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dv}{di} = R > 0,$$

to natomiast dla krzywej I będziemy mieli w tem miejscu



Rys. 27.

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{-dv'}{di} = -R < 0. \quad (57)$$

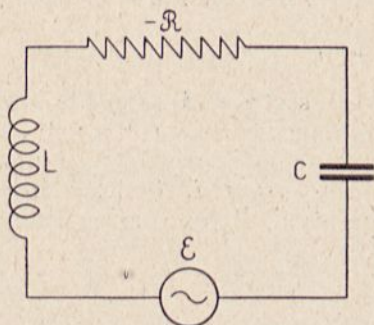
Równanie powyższe jest definicją oporności ujemnej. Oporność ujemna charakteryzuje nam jedynie, w jaki sposób zachowuje się dany przewodnik *podczas zmian przepływającego przez niego prądu*, pozatem jednak

posiada ona cechy oporności dodatniej, gdyż podobnie jak ona pochłania energię prądu w postaci ciepła Joule'a. Obwód z samą tylko opornością ujemną zachowuje przy prądzie stałym równowagę chwiejną. Gdy np. w danej chwili stan równowagi odpowiada punktowi *A*, to najmniejsza zmiana prądu w kierunku dodatnim powoduje dalszy wzrost prądu aż do granicy, którą dopuszcza charakterystyka. Podobne zjawisko wystąpi w kierunku odwrotnym, gdy prąd zacznie maleć. Skutkiem zakłócenia w kierunku ujemnym prąd może spaść do zera, podczas gdy w dodatnim nigdy do nieskończoności nie dojdzie, gdyż spadająca część charakterystyki oporności zawsze jest ograniczona od strony rosnących wartości prądu. Z podanych tu wyjaśnień wynika, że oporność ujemna według definicji równania (57) posiada znaczenie tylko dla zmian prądu, a więc przede wszystkim dla prądu zmiennego. Jest to więc oporność o charakterze *dynamicznym*. Z tego rodzaju opornością spotkamy się w szeregu przyrządów używanych w radjotechnice, jak np. lampy katodowe, detektory i t. p.

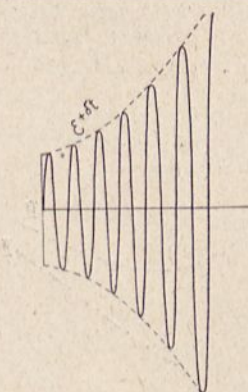
Jeżeli oporność ujemną połączymy w szereg z dodatnią (rys. 27), co w rzeczywistości jest przypadkiem normalnym, otrzymamy charakterystykę wypadkową (krzywa III, rys. 26), której przebieg będzie częściowo ujemny (spadający), częściowo dodatni (rosnący), zależnie od tego, czy będzie

$$|R| > |r| \quad \text{czy też} \quad |R| < |r|.$$

W szczególności, gdy zajdzie równość  $|R| = |r|$ , oporność takiego obwodu będzie równa zero.



Rys. 28.



Rys. 29.

Jeżeli oporność ujemną włączymy w obwód drgań (rys. 28), to zamiast dodatniego współczynnika tłumienia  $\delta$  wprowadzić musimy do równania (31 b) wartość  $-\delta = -\frac{R}{2L}$ , tak iż równanie to przyjmie postać

$$\frac{d^2v}{dt^2} - 2\delta \frac{dv}{dt} + \omega_r v = 0, \quad (58)$$

której odpowiada rozwiązanie równania charakterystycznego

$$\alpha = +\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_r^2}.$$

Dyskusja tego równania wskazuje, podobnie jak w przypadku oporności dodatniej, że dla  $\delta^2 \gg \omega_r^2$  przebiegi w obwodzie będą aperiodyczne, podczas gdy dla  $\delta^2 < \omega_r^2$  będziemy mieli przebiegi drgające, dla małych  $\delta$  wyrażone równaniami:

$$v = V_0 \varepsilon^{\delta t} \cos \omega_r t \quad (59)$$

$$i = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \varepsilon^{\delta t} \sin \omega_r t,$$

Wynika z nich, że amplituda drgań zamiast maleć, wzrasta według prawa logarytmicznego, dążąc do nieskończoności (rys. 29). Współczynnik  $\delta$  nie jest więc w tym przypadku współczynnikiem tłumienia, lecz *współczynnikiem wzniesienia* drgań, zaś wyrażenie

$$D = -\delta T_0 \cong -\frac{\pi}{R} \sqrt{\frac{C}{L}},$$

nosi nazwę *inkrementu logarytmicznego* drgań.

Rozwiązanie tego typu nie posiada oczywiście znaczenia fizycznego, gdyż żadne ze znanych urządzeń nie posiada charakterystyki ujemnej, sięgającej w nieskończoność.

Chcąc uwzględnić, że oporność ujemna sięga tylko do pewnej granicy i wraz z amplitudą drgań maleje, aby następnie przejść w oporność dodatnią, Baltazar van der Pol<sup>1)</sup> wprowadził zależność  $R$  od amplitudy, dając równanie drgań w obwodzie z opornością ujemną w postaci<sup>2)</sup>

$$L \frac{d^2 v}{dt^2} - R(1 - v^2) \frac{dv}{dt} + \frac{v}{C} = 0, \quad (60)$$

czyli

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - 2\delta(1 - v^2) \frac{dv}{dt} + \omega_r^2 v = 0. \quad (60a)$$

W rozwiązaniu tego równania można rozróżnić dwa przypadki krańcowe.

1. Jeżeli  $\left| \frac{2\delta}{\omega_r} \right| = \left| R \sqrt{\frac{C}{L}} \right| = \left| \frac{D}{\pi} \right| \ll 1$ , a więc jeżeli inkrement drgań jest bardzo mały, otrzymuje się przybliżone rozwiązanie w postaci

$$v = \frac{2}{\sqrt{1 + \varepsilon^{-2\delta(t+C)}}} \sin(\omega_r t + \psi). \quad (61)$$

<sup>1)</sup> Patrz między innymi: B. v. d. Pol. Ueber »Relaxationsschwingungen«. Jahrb. d. drahtl. Tel. 28, str. 178, r. 1926 i 29, str. 114, r. 1927.

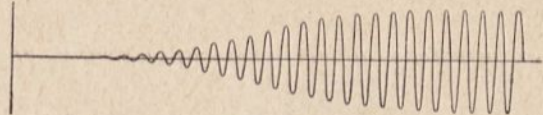
<sup>2)</sup> Założenie jedności w wyrazie  $(1 - v^2)$  jest dowolne. Oznacza ono, że dla dowolnej wartości napięcia, przyjętej jako jednostka, amplituda drgań dąży do pewnej określonej granicy.

W funkcji tej o charakterze perjodycznym amplituda początkowo rośnie, lecz ustala się szybko na wartości granicznej  $2^1$ ) (rys. 30). Jest to przypadek samowzbudnych drgań niegasnących, wytwarzanych przy pomocy łuku Volty (generator łukowy) lub też lampy trójelektrodowej (generator lampowy). Niezbędnym warunkiem narastania amplitudy drgań jest oczywiście stałe zasilanie obwodu drgającego świeżą energią, n. p. ze źródła prądu stałego, jak to się dzieje w generatorze łukowym (rys. 31).

2. Jeżeli natomiast  $\left| \frac{2\delta}{\omega_r} \right| \gg 1$ , a więc jeżeli inkrement obwodu jest duży, mamy rozwiązanie *pozornie aperiodyczne*, lecz w rzeczywistości posiadające zupełnie określony okres powtarzalności

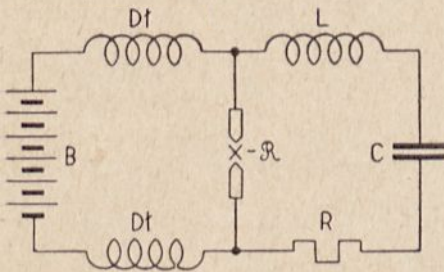
$$T = RC, \quad (62)$$

gdzie  $R$  jest opornością omową obwodu.



Rys. 30.

Przebieg zjawiska podany jest na rys. 32. Odbywa się on w sposób następujący: Początkowo, gdy  $v^2 \ll 1$ , mamy aperiodyczne narastanie napięcia zgodnie z równaniem (58) dążące asymptotycznie do nieskończoności. Jednakże równocześnie ze wzrostem  $v$  maleje oporność ujemna, aby następnie zmienić znak na dodatni.



Rys. 31.

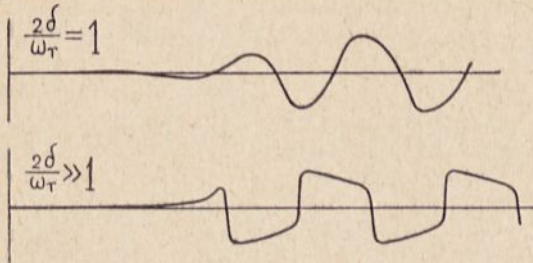
Wskutek tego krzywa przegina się, aż wreszcie w pewnym momencie następuje nagłe wyładowanie kondensatora i naładowanie go, dzięki indukcyjności (choćby znikomo małej) w kierunku odwrotnym. W ten sposób każdy półokres przebiegu składa się z dwu części: aperiodycznego ładowania kondensatora i aperiodycznego jego wyładowania, przy czym przebiegi te powtarzają się do nieskończoności dzięki zasilaniu obwodu ze źródła prądu stałego. Mamy więc jednak w obwodzie drgania, co prawda o charakterze znacznie różniącym się od sinusoidalnego i zawierającego bardzo silne harmoniczne, lecz ściśle okresowe i niegasnące. V. d. Pol nazwał te drgania *relaksacyjnymi*, ze względu na proporcjonalność ich okresu do stałej czasu obwodu z pojemnością, a więc do czasu wyładowania (relaksacji) obwodu.

Typowym układem, w którym powstają drgania relaksacyjne, jest rurka wypełniona gazem rozrzedzonym (np. lampa neonowa), włączona w obwód zawierający obok siły elektromotorycznej stałej, oporność i pojemność (rys. 33). Na drganiach relaksacyjnych opiera się również zasada *multiwibratora* Abrahama i Blocha — generatora lampowego, który dzięki zawartości w drganiach liczących częstotliwości harmonicznych używany jest do wzorcowania falomierzy.

1) W stosunku do dowolnie przyjętej jednostki.

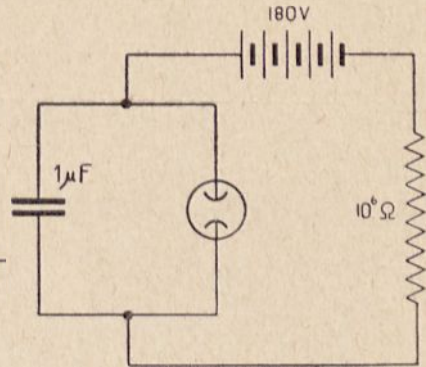


Pozatem drgania relaksacyjne są częstym zjawiskiem w układach lampowych zawierających pojemność i dużą oporność. Występują one tam jako t. zw. drgania pasożytnicze, a więc niepożądane, których usu-



Rys. 32.

(Według B. v. d. Pol'a).



Rys. 33.

nięcie przedstawia poważne nieraz trudności („wycie” wzmacniaczy). Jedną z cech drgań relaksacyjnych jest to, że łatwo się synchronizują z pewną częstotliwością narzuconą, zwłaszcza gdy leży ona w pobliżu jednej z częstotliwości harmonicznych tych drgań.

## 7. Metody wytwarzania prądów wielkiej częstotliwości.

Metody wytwarzania prądów szybkozmiennych podzielić można na dwie grupy zasadnicze:

A. Metody posługujące się obwodami drgań jako pośrednikami w przetwarzaniu dowolnej energii elektrycznej (np. prądu stałego) na energię prądu szybkozmiennego. We wszystkich urządzeniach podpadających pod tę kategorię częstotliwość prądów wytwarzanych jest zależna od częstotliwości drgań własnych układu.

B. Metody wytwarzania prądów szybkozmiennych niezależnych od obwodu zewnętrznego.

A. Jeżeli czynnikiem decydującym o częstotliwości prądów wytwarzanych jest obwód drgań, to zajść mogą 3 możliwości:

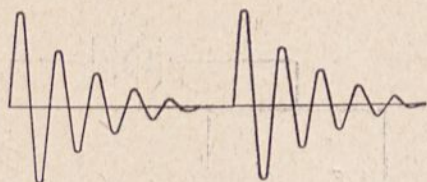
1. Kondensator obwodu drgań ładuje się w znacznych stosunkowo odstępach czasu, np. zapomocą prądu zmiennego małej częstotliwości, a energia w nim nagromadzona wyładowuje się pod postacią ciągów drgań gasnących (rys. 34 a) (generatory iskrowe).

Częstotliwość prądu zasilającego w tych układach nie pozostaje w żadnym związku z częstotliwością wytwarzaną.

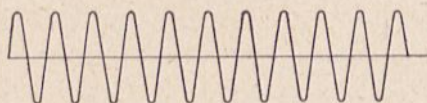
2. Kondensator obwodu drgań jest stale zasilany za pośrednictwem oporności ujemnej, tak iż amplituda drgań utrzymuje się stała (rys. 34 b),

otrzymujemy więc drgania niegasnące (generatory łukowe, lampowe). Energię czerpiemy tu z reguły ze źródła prądu stałego.

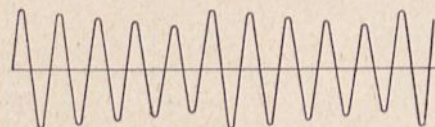
3. Obwód drgań jest zasilany w okresach będących całkowitą wielokrotnością okresu drgań własnych obwodu, dzięki czemu amplituda drgań, chociaż po każdym naładowaniu obwodu maleje, narasta jednak w regularnych odstępach do wartości pierwotnej (rys. 34 c). Zjawisko to



a



b



c

Rys. 34.

Wobec tego, że drgania tego rodzaju nigdy zupełnie nie zanikają, zaliczamy je do drgań niegasnących.

B. Do kategorii generatorów prądów szybkozmiennych, niezależnych od stałych elektrycznych obwodu zewnętrznego, należą przede wszystkim maszyny wielkiej częstotliwości, częstotliwość bowiem prądu przez nie dostarczanego jest jednocześnie określona przez ich liczbę obrotów. Jeżeli obwody użytkowane tych urządzeń nastrajają się do rezonansu, to

jedynie dla lepszego wykorzystania maszyny ( $\cos \varphi = 1$ ).

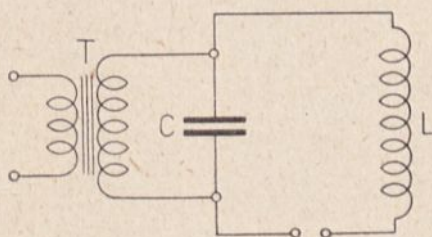
Do grupy tej zaliczyć również można pewne typy transformatorów częstotliwości (Joly i Vallauri).

## 8. Wytwarzanie i moc drgań gasnących.

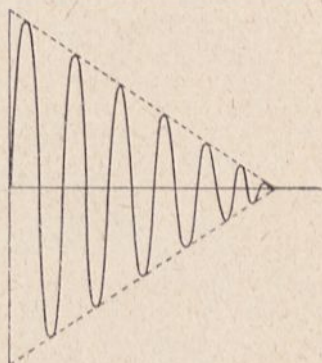
Typowym sposobem wytwarzania drgań gasnących jest metoda iskiernikowa. Kondensator obwodu drgań (rys. 35), zawierającego w szeregu włączoną przerwę iskrową  $J$ , załączony jest na zaciski transformatora, zasilanego prądem zmiennym lub przerywanym prądem stałym (induktor Ruhmkorffa). Przerwa iskrowa dobrana jest tak, aby jej przebicie nastąpiło z chwilą, gdy kondensator naładowuje się do pewnego napięcia  $V_0$ . Dzięki temu w okresie ładowania kondensatora obwód drgań jest przerywany, zwiera się on natomiast skutkiem zjonizowania przerwy iskrowej z chwilą, gdy kondensator osiągnął żądane napięcie, umożliwiając w ten sposób wyładowanie energii pod postacią drgań gasnących. Gdy amplituda tych drgań spadnie poniżej pełnej wartości, iskiernik pod wpływem chłodzenia dejonizuje się, tak iż w obwodzie drgań powstaje ponownie przerwa i kondensator jest gotów do przyjęcia następnego ładunku. Można przerwę iskrową dobrać np. w ten sposób, ażeby przeskok

iskry, a tem samem ciąg drgań gasnących, powstawał w chwili każdej amplitudy napięcia na zaciskach wtórnych transformatora. Otrzymamy w takim razie częstość ciągów drgań  $n$  równą podwójnej częstotliwości prądu zasilającego. (200 do 1000 okr/s).

Należy tu zaznaczyć, że drgania gasnące, powstające w obwodzie z iskiernikiem, nie znikają według krzywej logarytmicznej, zgodnie z równaniem (34) i (35). Zanik następuje tu o wiele szybciej wskutek tego, że w miarę malenia amplitudy drgań iskiernik dejonizuje się i oporność jego rośnie. Wynikiem tego jest, że amplituda drgań spada prawie, że według linii prostej (rys. 36).



Rys. 35.



Rys. 36.

Znając liczbę  $n$  ciągów drgań, które powstają w obwodzie z iskiernikiem w czasie jednej sekundy, obliczyć możemy moc wydzieloną w tym obwodzie. A mianowicie, jeżeli napięcie przebiecia iskiernika wynosi  $V_0$ , to energia nagromadzona za każdym razem wynosi

$$W_1 = \frac{V_0^2 C}{2},$$

zaś energia zużyta w obwodzie w ciągu jednej sekundy, a więc moc będzie wynosiła

$$P = nW_1 = \frac{n V_0^2 C}{2}. \quad (63)$$

Wyrażając moc w postaci  $J^2 R$ , możemy obliczyć wartość skuteczną prądu gasnącego

$$J = V_0 \sqrt{\frac{n C}{2 R}}. \quad (64)$$

We wzorze tym wszystkie wielkości są wyrażone w jednostkach praktycznych. Wartość skuteczna prądu gasnącego posiada doniosłe znaczenie praktyczne, jest to bowiem wielkość, którą wskazuje włączony w obwód amperomierz cieplny i od której zależy nagrzanie przewodników obwodu drgającego.

Średnią wartość prądu gasnącego zdefiniować możemy jako całkowity ładunek doprowadzony do obwodu w ciągu 1 sekundy. Wobec tego, że jednorazowy ładunek kondensatora wynosi  $CV_0$ , a w ciągu sekundy wprowadzamy  $n$  ładunków, prąd średni będzie

$$I_{sr} = n C V_0. \quad (65)$$

Wartość średnia prądu gasnącego jest więc różna od zera, a to dzięki niesymetryczności półokresów względem osi odciętych.

Oba wzory są oparte na założeniu, że czas drgań użytecznych jest mniejszy od czasu dzielącego dwa następujące po sobie naładowania kondensatora, czyli

$$\tau \ll \frac{1}{n} \text{ sek.}$$

Do tych samych wyników, które obliczyliśmy sposobem elementarnym, doszlibyśmy, rozwiązując całki:

$$J^2 = n \int_0^{\infty} i^2 dt, \quad (64a)$$

$$I_{sr} = n \int_0^{\infty} i dt. \quad (65a)$$

Na zasadzie prądu skutecznego obliczyć można skuteczną siłę elektromotoryczną drgań gasnących — pojęcie, mające zastosowanie w teorii odbioru. Mamy bowiem równość

$$J^2 R = \frac{E^2}{R},$$

czyli

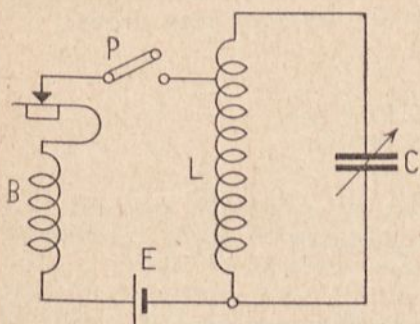
$$E = JR = V_0 R \sqrt{\frac{n C}{2 R}} = V_0 \sqrt{\frac{n C R}{2}}. \quad (66)$$

## 9. Wzbudzenie drgań zapomocą brzęczyka.

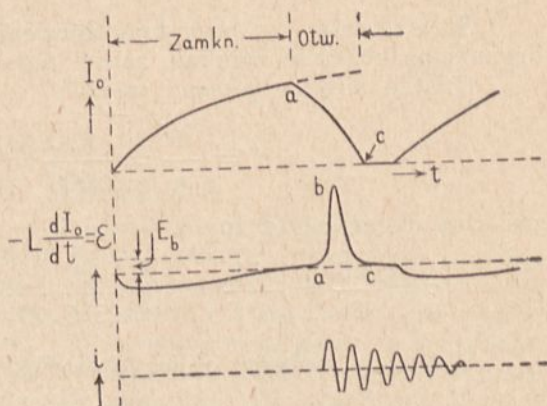
Obok wzbudzenia iskiernikowego istnieje drugi sposób wzniesienia drgań iskrowych, wykorzystujący przepięcia, wywołane przez nagłą przerwę w obwodzie zawierającym indukcyjność. Układ do tego celu stosowany, t. zw. układ bodźczy Eichhorna (rys. 37), składa się z obwodu drgań, z którym sprężony jest indukcyjnie obwód, zawierający ogniwo galwaniczne  $E$  i przerywacz elektromagnetyczny (brzęczyk)  $B$ . Powstałe przy przerywaniu obwodu baterji przepięcia indukują się na obwód drgań, ładując jego kondensator, który następnie wyładowywa się pod postacią drgań gasnących. Dzięki temu, że obwód drgań nie zawiera

iskiernika, drgania te są słabo tłumione i mają przebieg logarytmiczny. Zjawiska zachodzące w układzie z brzęczykiem ilustrują wykresy rys. 38-go.

Moc drgań dostarczona przez obwód wzbudzany brzęczykiem, jest rzędu 0,05 wata. Przed wprowadzeniem do techniki pomiarowej gene-



Rys. 37.



Rys. 38.

ratorów lampowych bardzo małej mocy; układ brzęczykowy stanowił najdogodniejsze źródło prądów szybkozmiennych dla szeregu pomiarów radjotechnicznych.

## 10. Przykład.

Wzór (64) pozwala nam zaprojektować obwód drgań gasnących na określoną moc. Mamy np. zbudować obwód na 0,5 kW mocy, mając do rozporządzenia  $V_0 = 20000$  woltów i  $n = 2000$  isker na sekundę; przypuszczalna oporność obwodu wynosi  $10 \Omega$ , częstotliwość  $f_0 = 5 \cdot 10^5$  okr./sek ( $\lambda = 600$  m).

Prąd skuteczny

$$J = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{500}{10}} \cong 7 \text{ A.}$$

Ze wzoru (64) obliczamy pojemność obwodu

$$C = \frac{2J^2R}{nV_0^2} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 10}{2000 \cdot 4 \cdot 10^8} = 1250 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 1250 \mu\text{p. F.}$$

Indukcyjność niezbędna dla nastrojenia obwodu

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 25 \cdot 10^{10} \cdot 1250 \cdot 10^{-12}} = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ H.}$$

Odpowiada temu dekrement logarytmiczny obwodu

$$D \cong \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} = 10\pi \sqrt{\frac{1250 \cdot 10^{-12}}{0,8 \cdot 10^{-4}}} \cong 0,125.$$

Sprawdźmy, czy przy tem tłumieniu i przy danej częstoci iskiei drgania praktycznie zanikną, zanim pojawi się następny ciąg drgań. Odstęp między iskami wynosi

$$f = \frac{1}{n} = \frac{1}{2000} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ sek.},$$

zaś czas drgań użytecznych (wzór 46)

$$\tau = \frac{4,6}{\delta} = \frac{4,6}{Df} = \frac{4,6}{0,125 \cdot 5 \cdot 10^5} = 7,4 \cdot 10^{-5} < 5 \cdot 10^{-4}.$$

Wreszcie możemy obliczyć pierwszą amplitudę prądu

$$J_0 \cong V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \cong 80 \text{ amperów}$$

i jego wartość średnią

$$J_{sr} = n C V_0 = 2000 \cdot 1250 \cdot 10^{-12} \cdot 20000 = 0,05 \text{ ampera.}$$

Ostatnią wartość wskazałby przyrząd prądu stałego włączony w obwód drgań.

## BIBLIOGRAFJA DO ROZDZIAŁÓW I i II <sup>1)</sup>.

1. G. Hensel: *Elektrotechnika w zadaniach*, Wyd. II. Warszawa 1926.
2. M. Pożaryski: *Podstawy naukowe elektrotechniki*, Wyd. II. Warszawa 1927.
3. Staniewicz: *Teoria prądów zmiennych*, Skrypt wydany staraniem B. P. S. P. W.
4. A. Fraenckel: *Theorie der Wechselströme*, Wyd. III. Berlin. 1922.
5. H. Morecroft: *Principles of Radiocommunication*, Wyd. II. Nev-York, Londyn, 1927.
6. Rohmann: *Elektrische Schwingungen*, Sammlung Goeschen Nr. 751/2.
7. H. Rein: *Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie*, Berlin, 1917.
8. J. B. Pomey: *Introduction à la théorie des courants téléphoniques et de la radiotélégraphie*, Paryż, 1920.
9. H. G. Möller: *Behandlung von Schwingungsaufgaben mit komplexen Amplituden und mit Vektoren*, Lipsk 1928.
10. F. Ollendorf: *Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik*, Berlin 1926.
11. Materiały dotyczące obwodów ferromagnetycznych, znajdują Czytelnicy w szeregu prac J. Zennecka i jego uczniów w rocznikach *Jahrbuch der Drahtlosen Telegraphie*, począwszy od r. 1922.

<sup>1)</sup> W bibliografji, załączonej do poszczególnych rozdziałów, podane są dzieła i prace, szczególnie nadające się do pogłębienia przedmiotu, nie ma jednak ona na celu wyliczenia wszystkich prac ogłoszonych w danym zakresie.

### ROZDZIAŁ III. OBWODY SPRZEŻONE.

Obwody sprzężone są układem bardzo często stosowanym w elektrotechnice, dają bowiem możliwość transformowania siły elektromotorycznej źródła na wartość najlepiej odpowiadającą oporności odbiornika energii (transformatory techniczne). W radjotechnice poza tym sprzężone obwody rezonansowe pozwalają w znacznym stopniu zaostrić krzywą rezonansu układu, co posiada doniosłe znaczenie dla tłumienia prądów harmoniczných w urządzeniach nadawczych i zwiększenia selektywności urządzeń odbiorczych.

#### 1. Istota i rodzaje sprzężenia.

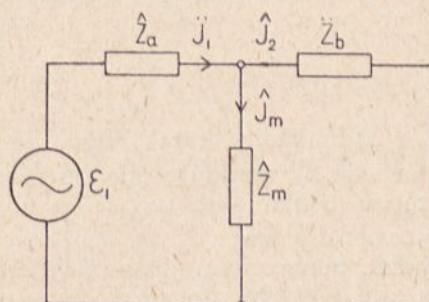
Dwa obwody elektryczne są sprzężone, jeżeli prąd przepływający przez jeden z nich, wzbudza w drugim obwodzie siłę elektromotoryczną. W takim układzie dwu obwodów, *pierwotnym* nazywamy obwód, w którym działa niezależna siła elektromotoryczna (*siła elektromotoryczna pierwotna*), wtórnym zaś obwód, w którym powstaje siła elektromotoryczna (*siła elektromotoryczna wtórna*) pod działaniem prądu płynącego w obwodzie pierwotnym (*prądu pierwotnego*).

Siłę elektromotoryczną wtórną określić można w sposób najogólniejszy jako *spadek napięcia*, wytworzony przez prąd pierwotny na pewnej oporności  $\hat{Z}_m$  dowolnego charakteru, wspólnej obu obwodom (rys. 39).

Układ podany na rys. 39, rozważać można, przyjmując, że siła elektromotoryczna  $\hat{E}_1$  ma do pokonania oporność  $\hat{Z}_a$ , oraz w szereg z nią połączoną oporność zastępczą

$$\hat{Z}_z = \frac{\hat{Z}_m \hat{Z}_b}{\hat{Z}_m + \hat{Z}_b}$$

Odpowiadający oporności  $\hat{Z}_a + \hat{Z}_z$  prąd pierwotny  $\hat{J}_1$  rozgałęzia się zgodnie z prawami Kirchhoffa na prąd  $\hat{J}_m$  i  $\hat{J}_2$ , płynące w poszczególnych ga-



Rys. 39.

łęziach oporności złożonej  $\hat{Z}_z$ . Metoda ta jest bardzo wygodna przy rozwiązywaniu układów bardziej złożonych.

Można jednakże przystąpić do zagadnienia w sposób nieco odmienny, dla zjawisk w obwodach sprzężonych bardziej pogładowy.

Przyjmujemy, że obwód pierwotny zawiera oporność pozorną

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_a + \hat{Z}_m,$$

zaś obwód wtórny oporność pozorną

$$\hat{Z}_2 = \hat{Z}_b + \hat{Z}_m.$$

W całym obwodzie pierwotnym płynie całkowity prąd pierwotny  $\hat{J}_1$ , zaś we wtórnym prąd  $\hat{J}_2$ , tak iż w gałęzi wspólnej mamy sumę wektorową obu prądów

$$\hat{J}_m = \hat{J}_1 + \hat{J}_2.$$

Prąd pierwotny, płynąc przez oporność wspólną  $\hat{Z}_m$ , wytwarza na jej końcówkach spadek napięcia, działający jako siła elektromotoryczna wtórna

$$\hat{E}_2 = \hat{J}_1 \hat{Z}_m. \quad (67)$$

Pod jej działaniem wytwarza się w obwodzie wtórnym prąd

$$\hat{J}_2 = \frac{\hat{E}_2}{\hat{Z}_m + \hat{Z}_b} = \hat{J}_1 \frac{\hat{Z}_m}{\hat{Z}_2}. \quad (68)$$

Jednakże wskutek tego, że wchodząca w skład obwodu wtórnego oporność  $\hat{Z}_m$  znajduje się równocześnie w obwodzie pierwotnym, prąd wtórny będzie oddziaływał z powrotem na obwód pierwotny, albowiem wytworzony przez  $\hat{J}_2$  na oporności  $\hat{Z}_m$  spadek napięcia wystąpi w obwodzie pierwotnym jako *siła elektromotoryczna oddziaływania powrotnego*. Ta siła elektromotoryczna wynosi

$$\hat{E}_{21} = \hat{J}_2 \hat{Z}_m = \hat{J}_1 \frac{\hat{Z}_m^2}{\hat{Z}_2}.$$

Podstawiając  $\hat{Z}_2 = R_2 + jX_2$ , gdzie  $X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}$ , i usuwając niewymierność mianownika, otrzymamy

$$\hat{E}_{21} = \hat{J}_1 \frac{\hat{Z}_m^2}{\hat{Z}_2^2} (R_2 - jX_2). \quad (69)$$



Wobec tego prawo Ohma dla obwodu pierwotnego obciążonego obwodem wtórnym, wyrazi się równaniem

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_{21} = \hat{J}_1 \hat{Z}_1,$$

czyli

$$\hat{E}_1 + \hat{J}_1 \left[ \frac{\hat{Z}_m^2}{Z_2^2} R_2 - j \frac{\hat{Z}_m^2}{Z_2^2} X_2 \right] = \hat{J}_1 (R_1 + j X_1),$$

co po uporządkowaniu daje

$$\hat{E}_1 = \hat{J}_1 \left[ R_1 - \frac{\hat{Z}_m^2}{Z_2^2} R_2 + j (X_1 + \frac{\hat{Z}_m^2}{Z_2^2} X_2) \right] = \hat{J}_1 \hat{Z}_I = \hat{J}_1 (R_I + j X_I). \quad (70)$$

Równanie (70) dowodzi, że układ sprzężony sprowadzić można do jednego obwodu zastępczego, w którym działa siła elektromotoryczna  $\hat{E}_1$  i płynie prąd  $\hat{J}_1$ . Wyrażenie w nawiasach będzie opornością równoważną obwodu zastępczego.

Oporność wspólna sprzężenia  $\hat{Z}_m$  może posiadać charakter dowolny; w ogólnej swej postaci wyrazi się ona równaniem

$$\hat{Z}_m = R_m + j X_m = R_m + j \left( \omega L_m - \frac{1}{\omega C_m} \right); \quad (71)$$

stąd też

$$\hat{Z}_m^2 = (R_m + j X_m)^2 = R_m^2 + 2j R_m X_m - X_m^2.$$

Dla skrajnych przypadków, gdy oporność ta będzie urojona ( $R_m = 0$ ) otrzymamy:

$$R_I = R_1 + \frac{X_m^2}{Z_2^2} R_2, \quad X_I = X_1 - \frac{X_m^2}{Z_2^2} X_2. \quad (72a)$$

zaś dla oporności sprzężenia rzeczywistej ( $X_m = 0$ ):

$$R_I = R_1 - \frac{R_m^2}{Z_2^2} R_2, \quad X_I = X_1 + \frac{R_m^2}{Z_2^2} X_2. \quad (72b)$$

Podana tu metoda nadaje się do rozwiązywania dowolnych układów sprzężonych.

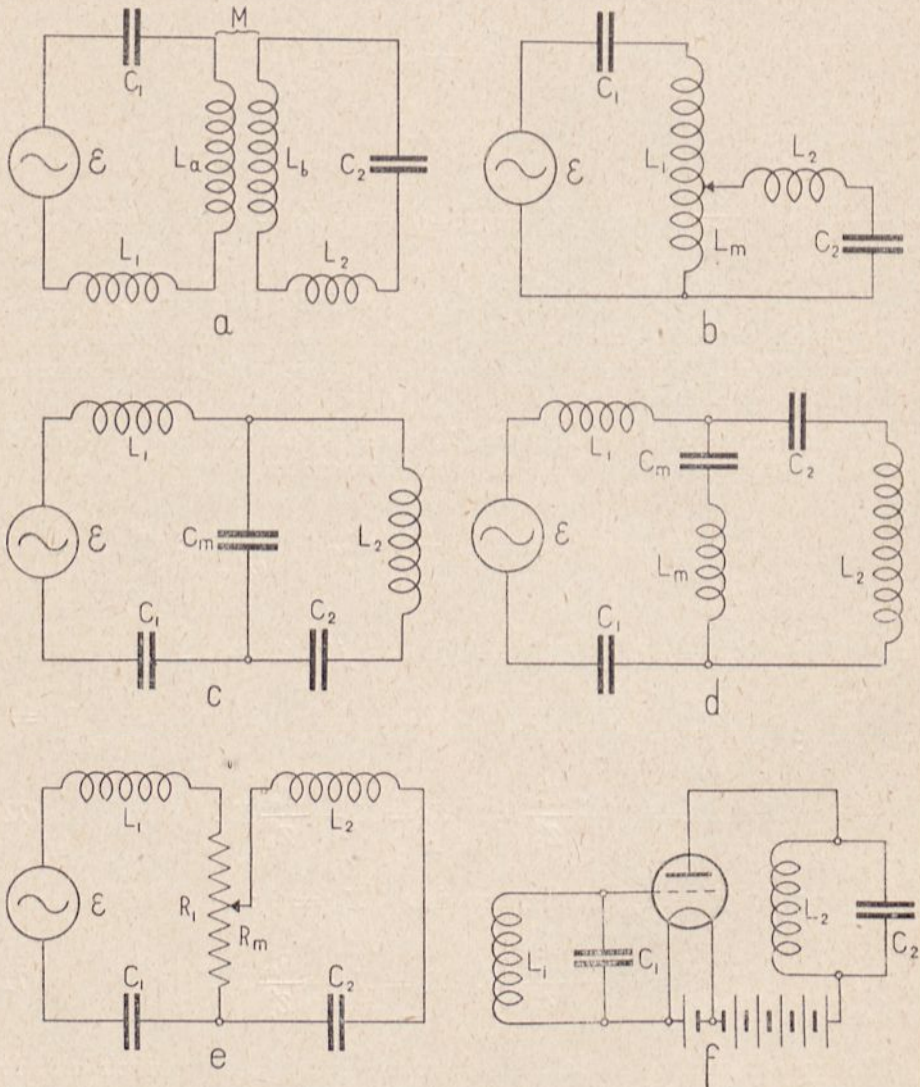
Układ sprzężony rozwiązać możemy również metodą *równań napięć* w obwodach. Mamy tu w obwodzie pierwotnym

$$\hat{E}_1 = \hat{J}_1 \hat{Z}_a + \hat{J}_m \hat{Z}_m = \hat{J}_1 (\hat{Z}_a + \hat{Z}_m) + \hat{J}_2 \hat{Z}_m,$$

a w obwodzie wtórnym

$$0 = \hat{J}_2 \hat{Z}_b + \hat{J}_m \hat{Z}_m = \hat{J}_2 (\hat{Z}_b + \hat{Z}_m) + \hat{J}_1 \hat{Z}_m.$$

Wyrugowanie z tych równań wartości  $\hat{J}$  i rozwiązanie ich prowadzi do tego samego wyniku, co metody podane poprzednio.



Rys. 40.

### Rodzaje sprzężenia.

Oporność, której część jest wspólna obu obwodom, a więc która pośredniczy w sprzężeniu, nosi nazwę *oporności charakterystycznej sprzężenia*.

nia. Zależnie od tego, czy oporność charakterystyczna jest rzeczywista, indukcyjna, czy pojemnościowa, rozróżniamy typy sprzężenia:

- 1) *oporowe* czyli galwaniczne,
- 2) *indukcyjne* czyli magnetyczne,
- 3) *pojemnościowe* czyli elektrostatyczne.

Wreszcie zależnie od tego, czy między oboma obwodami istnieje połączenie przewodzące czy też nie, rozróżniamy:

- a) *sprzężenie bezpośrednie*, i
- b) *sprzężenie pośrednie*.

Oczywiście obok typów wyliczonych istnieć mogą sprzężenia o opornościach charakterystycznych złożonych z dwu lub wszystkich trzech typów (*sprzężenia mieszane*). Do kategorii sprzężeń mieszanych należy między innymi sprzężenie przez lampę trójelektrodową.

Na rys. 40 a, b, c, przedstawione są zasadnicze układy obwodów sprzężonych indukcyjnie pośrednio (transformator Tesli), indukcyjnie bezpośrednio (autotransformator Oudin'a), i pojemnościowo. Na rys. 40 d mamy typowy przykład sprzężenia mieszanego, pojemnościowo-indukcyjnego, zaś na rys. 40 f przykład sprzężenia przez lampę.

Wzory (72 a) i (72 b) wykazują zasadniczą różnicę między sprzężeniem oporowym, a sprzężeniami skutecznymi za pośrednictwem oporności urojonych, a więc indukcyjnym i pojemnościowym (względnie indukcyjno-pojemnościowym). A mianowicie przy sprzężeniu oporowym obciążenie obwodem wtórnym powoduje *zmniejszenie oporności rzeczywistej, a wzrost urojonej*, zaś przy sprzężeniu zapomocą oporności urojonej powoduje ono *wzrost oporności rzeczywistej, a zmniejszenie urojonej*.

#### *Współczynnik sprzężności.*

Miarą wzajemnego oddziaływania dwu obwodów sprzężonych jest ich *współczynnik sprzężności*  $\alpha$ . Jest to stosunek *wspólnej* oporności charakterystycznej obu obwodów do średniej geometrycznej z całkowitych oporności charakterystycznych sprzężenia obu obwodów

$$\alpha = \frac{Z_{sm}}{\sqrt{\sum Z_{s1} \cdot \sum Z_{s2}}} \quad (73)$$

Zależnie od typu sprzężenia poszczególne wartości  $Z_s$  mogą być rzeczywiste, urojone lub zespolone. I tak dla sprzężenia oporowego wejdą do wzoru tylko oporności omowe obu obwodów, dla indukcyjnego tylko oporności indukcyjne. Współczynnik sprzężności nie może przekroczyć wartości 1.

## **2. Ogólny przypadek obwodów sprzężonych transformatorowo.**

Rozpatrzmy wpiery układ obwodów sprzężonych indukcyjnie pośrednio (transformatorowo), gdyż jest to układ najbardziej typowy i posiadający wielostronne zastosowanie w radjotechnice. Jako przedmiot rozważań obierzemy obwody najogólniejsze, a więc zawierające oporność, indukcyjność i pojemność (rys. 41). Są one sprzężone dzięki temu, że

pole magnetyczne prądu pierwotnego przenika częściowo zwoje, stanowiące indukcyjność obwodu wtórnego, a więc między uzwojeniami obu obwodów występuje indukcyjność wzajemna  $M$ . Dzięki temu w obwodzie wtórnym pojawia się siła elektromotoryczna indukcji

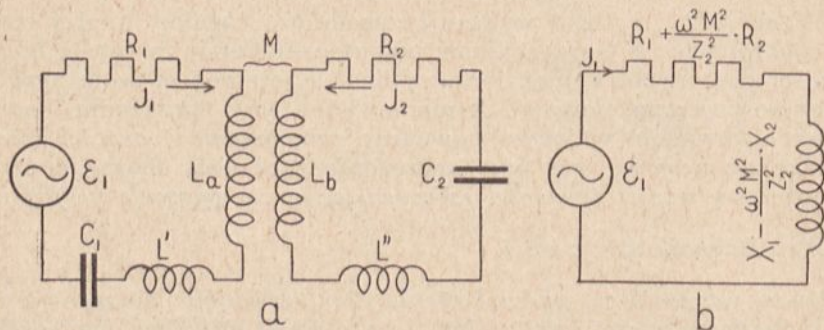
$$\hat{E}_2 = -j\omega M \hat{J}_1. \quad (74)$$

Współczynnik sprzężności, zgodnie z definicją równania (73), dla obwodów takich posiada postać

$$z = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega(L_a + L')\omega(L_b + L'')}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad (75)$$

jeżeli wprowadzimy:  $L_a + L' = L_1$ ,  $L_b + L'' = L_2$ .

Dla matematycznego ujęcia przebiegów, zachodzących w układzie sprzężonym, przyjmujemy jako punkt wyjścia prąd pierwotny  $\hat{J}_1$ , by na-



Rys. 41.

stepnie wstecznie obliczyć nieznaną początkowo siłę elektromotoryczną pierwotną, niezbędną dla wytworzenia prądu  $\hat{J}_1$ . Posłużymy się do tego celu metodą ogólną, podaną w poprzednim paragrafie.

Odpowiadająca prądowi pierwotnemu siła elektromotoryczna wtórna

$$\hat{E}_2 = -j\omega M \hat{J}_1,$$

wywołuje w obwodzie wtórnym prąd

$$\hat{J}_2 = \frac{\hat{E}_2}{\hat{Z}_2} = \frac{-j\omega M \hat{J}_1}{\hat{Z}_2}, \quad (76)$$

jeżeli przez  $\hat{Z}_2$  oznaczymy oporność pozorną obwodu wtórnego

$$\hat{Z}_2 = R_2 + jX_2 = R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right).$$

Z równania (76) obliczyć można stosunek prądu wtórnego do pierwotnego, czyli *przekładnię prądową* układu sprzężonego

$$p = \frac{\hat{J}_2}{\hat{J}_1} = \frac{-j\omega M}{\hat{Z}_2}, \quad (76a)$$

lub też w liczbach bezwzględnych

$$p = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\omega M}{Z_2} = \frac{\omega M}{\sqrt{R_2^2 + X_2^2}}. \quad (76b)$$

Prąd wtórny  $\hat{J}_2$ , płynąc w obwodzie wtórnym, oddziałuje przez indukcję wzajemną obu obwodów z powrotem na obwód pierwotny, indukując w nim siłę elektromotoryczną oddziaływania powrotnego

$$\hat{E}_{21} = -j\omega M \hat{J}_2 = -\frac{\omega^2 M^2}{\hat{Z}_2} \hat{J}_1 = -\frac{\omega^2 M^2}{R_2 + jX_2} \hat{J}_1.$$

Zgodnie z prawem Ohma otrzymamy więc

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_{21} = \hat{J}_1 \hat{Z}_1,$$

czyli po podstawieniu  $\hat{E}_{21}$ , oraz po usunięciu niewymierności mianownika

$$\hat{E}_1 = \hat{J}_1 \left[ R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2 + j \left( X_1 - \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} X_2 \right) \right]. \quad (77)$$

Oporność równoważna sprowadzona do obwodu pierwotnego (rys. 41b), zawiera więc składowe:

$$R_I = R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2, \quad (77a)$$

$$X_I = X_1 - \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} X_2. \quad (77b)$$

Wyniki te zgadzają się w zupełności z wynikami równań ogólnych (72a, b). Stwierdzają one wyprowadzone tam wnioski, a mianowicie, że w obwodach sprzężonych zapomocą oporności urojonej, skutkiem dołączenia obwodu wtórnego oporność omowa obwodu pierwotnego pozornie rośnie, a oporność urojona pozornie maleje.

Fizyczne znaczenie tego zjawiska dla sprzężenia indukcyjnego jest zrozumiałe. Po pierwsze bowiem energia zużyta w obwodzie wtórnym pobierana jest z obwodu pierwotnego, i to zwiększenie zużycia energii czerpanej ze źródła przedstawić można pod postacią zwiększenia oporności rzeczywistej obwodu pierwotnego. Powtórze zaś prąd wtórny, zgodnie z prawem Lenza, wytwarza własny strumień magnetyczny, przeciwdziałający strumieniowi prądu pierwotnego. To przeciwdziałanie strumieniowi pierwotnemu jest przytem regulatorem obciążenia źródła. Im większe jest zu-

życie mocy w obwodzie wtórnym, czyli im większy jest prąd wtórny, tem bardziej strumień magnetyczny wtórny osłabia strumień pierwotny, zmniejszając pozornie indukcyjność obwodu pierwotnego, dzięki czemu zwiększenie prądu pierwotnego może pokryć zwiększone zapotrzebowanie mocy (zasada działania transformatorów).

Z równań (77 a, b) widać również, że obwody sprzężone mogą dać bezindukcyjne obciążenie źródła, chociaż każdy oddzielnie nie jest nastrojony do rezonansu z siłą elektromotoryczną. Wystarczy jedynie spełnić warunek

$$X_1 - \frac{\omega^2 M^2}{Z^2} X_2 = 0,$$

czyli

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + X_2^2}, \quad (78)$$

co wobec tego, że

$$\frac{\omega M}{Z_2} = \frac{J_2}{J_1},$$

sprowadza się do warunku

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{J_2^2}{J_1^2} \quad \text{czyli} \quad X_1 J_1^2 = X_2 J_2^2. \quad (78a)$$

Jest to ogólny warunek *kompensacji przesunięcia faz* w obwodach sprzężonych. Nazywanie tego zjawiska rezonansem byłoby niezupełnie ściśle, o ile choć jeden z obwodów nie zawiera pojemności. Oczywiście, gdy przynajmniej jeden z obwodów jest obwodem rezonansowym, warunek (78) jest *warunkiem rezonansu* dla układu sprzężonego.

Równanie (78 a) dowodzi, że kompensacji faz odpowiada *równość mocy urojonych w obu obwodach*.

### 3. Zachowanie się obwodu wtórnego przy stałej częstotliwości.

Równanie (77) możemy również odnieść do prądu wtórnego, co da nam możliwość zbadania zależności tego prądu od oporności obu obwodów i od ich sprzężenia. Wprowadzając wartość prądu wtórnego z równania (76), otrzymamy

$$\hat{E}_1 = - \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{j\omega M} \hat{J}_2 + j\omega M \hat{J}_2,$$

skąd wartość prądu wtórnego, jako funkcja siły elektromotorycznej pierwotnej, wyrazi się w postaci

$$\hat{J}_2 = \frac{-j\omega M \hat{E}_1}{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 + \omega^2 M^2}. \quad (79)$$

Równanie to wskazuje, że prąd w obwodzie wtórnym, o ile założymy stałą siłę elektromotoryczną pierwotną, zależy tak od współczynnika indukcji wzajemnej, czyli od sprzężności obu obwodów, jak też od oporności pozornej każdego z nich. Ażeby zbadać te zależności, sprowadzimy wpierw mianownik równania, który jest liczbą zespoloną, do postaci rzeczywistej. A mianowicie, podstawiając (J. Béthenod 1909)

$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 = A + jB,$$

otrzymujemy

$$J_2 = \frac{\omega M E_1}{\sqrt{(\omega^2 M^2 + A)^2 + B^2}} = \frac{E_1}{\sqrt{\frac{A^2 + B^2}{\omega^2 M^2} + 2A + \omega^2 M^2}}. \quad (79a)$$

Na zasadzie tego równania zanalizujemy zależność prądu wtórnego najpierw od sprzężności obwodów, a następnie od charakteru ich obciążenia

### 1. Zależność od sprzężności.

Prąd wtórny osiągnie wartość największą, gdy mianownik strony prawej równania osiągnie minimum. Zakładając  $Z_1$  i  $Z_2$ , a więc  $A$  i  $B$ , stałe i różniczkując cząstkowo ze względu na  $\omega M$  wyrażenie pod pierwiastkiem w postaci

$$y = \frac{A^2 + B^2}{x} + 2A + x, \quad \text{gdzie } \omega^2 M^2 = x,$$

łatwo możemy stwierdzić, że minimum odpowiada wartości

$$x^2 = A^2 + B^2,$$

czyli

$$\omega^2 M^2 = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Nietrudno dowieść, że  $A^2 + B^2 = Z_1^2 Z_2^2$ <sup>1)</sup>, wobec czego warunek *maximum prądu wtórnego przy zmiennej sprzężności, a niezmiennych*

<sup>1)</sup> Przeliczenie:

$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 = A + jB = (R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) = R_1 R_2 - X_1 X_2 + j(R_2 X_1 + R_1 X_2),$$

czyli

$$A = R_1 R_2 - X_1 X_2, \quad B = R_2 X_1 + R_1 X_2.$$

Pozatem mamy zależności:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2}, \quad R_1 = Z_1 \cos \varphi_1, \quad X_1 = Z_1 \sin \varphi_1,$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2}, \quad R_2 = Z_2 \cos \varphi_2, \quad X_2 = Z_2 \sin \varphi_2,$$

z których otrzymujemy:

$$A = Z_1 Z_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = Z_1 Z_2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$B = Z_1 Z_2 (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = Z_1 Z_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Wynika stąd:

$$A^2 + B^2 = Z_1^2 Z_2^2 [\sin^2 (\varphi_1 + \varphi_2) + \cos^2 (\varphi_1 + \varphi_2)] = Z_1^2 Z_2^2.$$

opornościach pozornych obu obwodów (niezmiennem nastrojeniu) wyraża się w postaci

$$\omega M = \sqrt{Z_1 Z_2}. \quad (80)$$

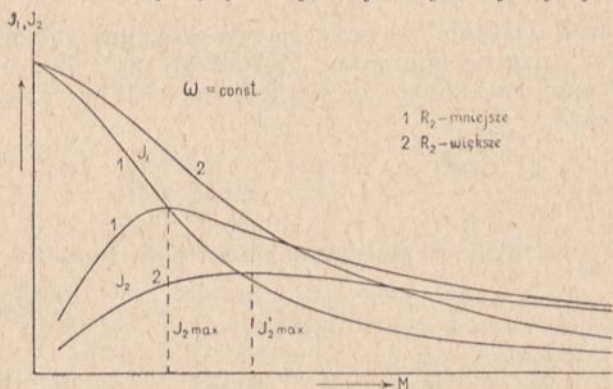
Jeżeli wartość tę podstawimy w równaniu (79 a), uwzględniając, że  $A = Z_1 Z_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$  (patrz przypisek na str. 77), to otrzymamy maksymalny prąd wtórny

$$J_2 \max = \frac{E_1}{\sqrt{2 Z_1 Z_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}}, \quad (81)$$

lub też po pewnym przekształceniu <sup>1)</sup>

$$J_2 \max = \frac{E_4}{2\sqrt{R_1 R_2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}}. \quad (81a)$$

A więc przy niezmiennych stałych elektrycznych obu obwodów, prąd wtórny osiąga maximum przy pewnej, najkorzystniejszej sprzężności. Ma-



Rys. 42.

ximum to jest tem wyraźniejsze, im mniejsza jest oporność omowa wtórnego obwodu (rys. 42, krzywe 1 i 2).

Gdy warunek maximum prądu wtórnego jest spełniony, przekładnia prądowa sprzężenia (76 a) przybiera postać

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (82)$$

## 2. Zależność $J_2$ od nastrojenia obwodu.

Z równań (81) i (81 a) wynika, że maksymalny prąd wtórny, osiągnięty drogą doboru sprzężności, jest funkcją przesunięcia faz w obu obwodach. Można wykazać, że wyraz pod pierwiastkiem równania (81 a) nie może być większy od jedności, osiąga zaś jedność, gdy

$$^1) \quad Z_1 = \frac{R_1}{\cos \varphi_1}, \quad Z_2 = \frac{R_2}{\cos \varphi_2}, \quad Z_1 Z_2 = \frac{R_1 R_2}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}.$$



$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi, \quad (83)$$

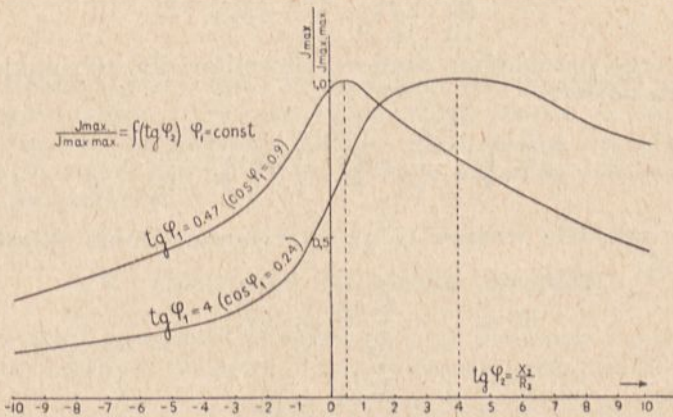
wówczas bowiem

$$2 \cos^2 \varphi = 1 + \cos 2\varphi.$$

Odpowiada temu prąd wtórny

$$J_{2\max \max} = \frac{E_1}{2\sqrt{R_1 R_2}}. \quad (84)$$

A więc w obwodzie wtórnym osiąga się, przy stałym zachowywaniu najkorzystniejszej sprzężności, bezwzględne maximum natężenia prądu (maximum maximorum), gdy przesunięcia faz w obu obwodach są sobie równe co do wielkości i znaku. Wartość tego maksymalnego prądu jest niezależna od bezwzględnych wartości przesunięć faz w obu obwodach i zależy jedynie od oporności omowych obu obwodów.



Rys. 43.

Przesunięcie faz w obwodach wpływa jedynie na sprzężność, gdyż zgodnie z warunkiem (80) musi być każdorazowo spełniona zależność  $\omega M = \sqrt{Z_1 Z_2}$ . Wyraz ten będzie oczywiście najmniejszy, gdy będzie  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , czemu odpowiada  $\omega M = \sqrt{R_1 R_2}$ .

Różnica między optimumm sprzężności przy dowolnie nastrojonych obwodach, a bezwzględnym maximum prądu wtórnego wymaga wyraźnego podkreślenia. Podczas gdy optimumm sprzężności odpowiada wierzchołkowi krzywej  $J_2 = f(\omega M)$  przy pewnych  $Z_1$  i  $Z_2$ , to bezwzględne maximum prądu wtórnego jest wierzchołkiem krzywej  $J_{2\max} = f(\varphi_2)$  (rys. 43) przy stałym  $\varphi_1$  lub odwrotnie. Jak wskazują krzywe rys. 43-go maximum to jest tem wyraźniejsze, im bliżej rezonansu znajduje się obwód, którego stałych elektrycznych nie zmieniamy.

Maximum prądu wtórnego jest oczywiście równoznaczne z maximum mocy w obwodzie wtórnym. Wniesie ono zgodnie z poprzednimi wzorami

$$P_{2\max \max} = J_{2\max \max}^2 \cdot R_2 = \frac{E_1^2}{4 R_1 \cdot R_2} R_2 = \frac{E_1^2}{4 R_1}. \quad (85)$$

Jest to czwarta część mocy, którą pobierałby obwód pierwotny, gdyby był sam dla siebie nastrojony do rezonansu z siłą elektromotoryczną, a która wynosiłaby

$$P_{1r} = \frac{E_1^2}{R_1}. \quad (85a)$$

Z warunkiem  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$  wiążą się zależności:

$$\cos \varphi = \frac{R_1}{Z_1} = \frac{R_2}{Z_2}, \quad \text{czyli} \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2},$$

oraz

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_1}{R_1} = \frac{X_2}{R_2}, \quad \text{czyli} \quad \frac{X_1}{X_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Wobec tego przekładnia prądowa obwodów dla maximum maximum przybiera postać

$$\frac{J_2}{J_1} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \sqrt{\frac{X_1}{X_2}}. \quad (86)$$

Stąd, na zasadzie wzorów (77a), otrzymujemy obie składowe oporności pozornej:

$$R_l = R_1 + \frac{R_1}{R_2} R_2 = 2R_1, \quad (86a)$$

$$X_l = X_1 - \frac{X_1}{X_2} X_2 = 0.$$

Wynikają z tego bardzo ważne wnioski dla maximum maximum mocy wtórnej:

a) Układ sprzężony przedstawia dla źródła prądu obciążenie bezindukcyjne, a więc prąd pierwotny jest w fazie z siłą elektromotoryczną.

b) To bezindukcyjne obciążenie źródła osiąga się przy dowolnych lecz równych sobie, przesunięciach faz w obu obwodach, wziętych oddzielnie.

c) Moc maksymalna osiągnięta w obwodzie wtórnym równa się mocy straconej w obwodzie pierwotnym, czyli układ pracuje ze sprawnością 0,5, gdyż oporność, przeniesiona z obwodu wtórnego, równa się oporności obwodu pierwotnego (równanie 86a).

Zjawisko maximum mocy w obwodach sprzężonych posiada cechy wspólne z rezonansem napięć obwodu prostego. I tak obok obciążenia bezindukcyjnego (kompensacji przesunięcia faz) mamy tu maksymalne natężenie prądu (wtórnego), oraz maksymalną moc (wtórną). O ile obwód wtórny posiada pojemność, to równocześnie z maximum prądu wtórnego będziemy mieli i *maximum przepięcia* w obwodzie wtórnym. Wówczas mówić możemy w całym tego słowa znaczeniu o *rezonansie układu sprzężonego*. Współ-

czynnik przebiecia rezonansowego, obliczyć możemy na zasadzie równania (84), a mianowicie:

$$V_{c_2} = \frac{J_2 \text{ max max}}{\omega C_2} = \frac{E_1}{2 \sqrt{R_1 R_2}} \cdot \frac{1}{\omega C_2},$$

czyli

$$\sigma_{12} = \frac{V_{c_2}}{E_1} = \frac{1}{2 \omega C_2 \sqrt{R_1 R_2}}. \quad (87)$$

W przypadku szczególnym, gdy obwód wtórny jest w rezonansie z siłą elektromotoryczną<sup>1)</sup>, a więc gdy jest  $\omega = \frac{1}{\sqrt{C_2 L_2}}$ , współczynnik przebiecia przybiera postać

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2 \sqrt{R_1 R_2}} \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}. \quad (87a)$$

Jak widzimy, przypomina on kształtem współczynnik przebiecia obwodu rezonansowego, wyrażony wzorem (3a). Można go uważać za *przekładnię napięciową* sprzężonego układu. Maksymalne przebiecie w obwodzie wtórnym wykorzystuje się w szeregu układów odbiorczych, stosujących lampy katodowe.

#### 4. Sprawność sprzężenia obwodów.

Sprawność sprzężenia określamy jako stosunek mocy wydzielonej w obwodzie wtórnym do mocy doprowadzonej przez źródło prądu

$$\eta = \frac{J_2^2 R_2}{J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{J_1^2}{J_2^2} R_1}. \quad (88)$$

Jeżeli podstawimy przekładnię prądową z równania (76b)  $p = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\omega M}{Z_2}$  oraz  $Z_2 = \frac{R_2}{\cos \varphi_2}$ , sprawność wyrazi się równaniem

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{Z_2^2}{\omega^2 M^2}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1 R_2}{\omega^2 M^2 \cos^2 \varphi_2}}. \quad (88a)$$

Stąd sprzężność niezbędna dla osiągnięcia żądanej sprawności sprzężenia

$$\omega M = Z_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\eta}{1 - \eta}} = \frac{1}{\cos \varphi_2} \sqrt{R_1 R_2 \frac{\eta}{1 - \eta}}. \quad (89)$$

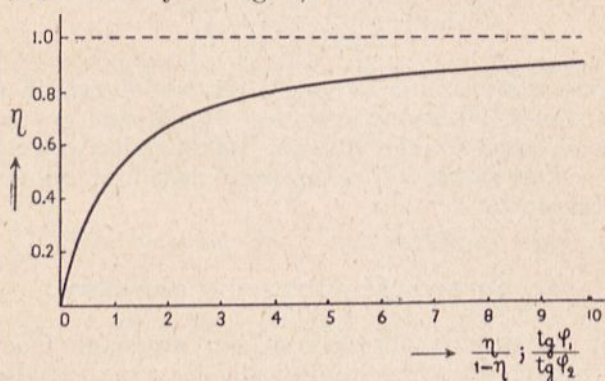
<sup>1)</sup> Obwód pierwotny oczywiście musi być też dostrojony do rezonansu z siłą elektromotoryczną.

Wzór (89) pozwala obliczyć współczynnik indukcji wzajemnej w henrach, gdy oporność obu obwodów podstawimy w omach. Z równania (89) wynika, że współczynnik indukcji wzajemnej  $M$  musi być tem większy, im większa jest żądana sprawność sprzężenia, im większe są oporności omowe obu obwodów, oraz im większe jest przesunięcie faz w obwodzie wtórnym. Może on być tem mniejszy, im większa jest częstotliwość zasilającej siły elektromotorycznej.

Oczywiście przy obliczeniu  $M$  zachowany być musi warunek

$$\alpha = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1, \quad (89a)$$

przyczem maksymalna wartość  $\alpha$  zależy od warunków konstrukcyjnych. Gdy oba obwody są zestrojone, o wyborze  $\alpha$  rozstrzygają czynniki, które rozpatrzone będą w dalszym ciągu<sup>1)</sup>.



Rys. 44.

Jeżeli równocześnie żądamy, ażeby układ stanowił obciążenie bezindukcyjne, to spełnić musimy warunek (78), czyli

$$\omega^2 M^2 = Z_2^2 \frac{X_1}{X_2},$$

z czego po porównaniu z (89) mamy

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\eta}{1 - \eta}. \quad (90)$$

Jak łatwo się przekonać, gdy  $\varphi_1 = \varphi_2$ , sprawność osiągnięta wynosi 0,5, co zresztą zgadza się z wynikami otrzymanymi w poprzednim paragrafie.

Zależność  $\eta$  od stosunku przesunięcia faz w obu obwodach wyraża krzywa rys. 44. Podaje ona równocześnie funkcję  $\frac{\eta}{1 - \eta}$  w zależności

<sup>1)</sup> Zagadnienie tak zwanej „sprężności krytycznej“, paragrafy 10, 11 i 12.

od  $\eta$ , daje więc zarazem zależność  $M$  od  $\eta$  przy stałych  $\omega$ ,  $R_1$  i  $R_2$ . Z krzywej tej wynika, że przy danym przesunięciu faz w obwodzie wtórnym, przesunięcie faz w obwodzie pierwotnym musi być tego samego znaku i tem większe, im większą sprawność chcemy osiągnąć przy równoczesnym bezindukcyjnym obciążeniu źródła prądu. Istnieje wprawdzie możność ścisłego dostrojenia do rezonansu obu obwodów, praktycznie jednak zawsze będziemy mieli do czynienia z pewnym rozstrojeniem, którego zresztą, strojąc obwody, nie stwierdzimy.

Streszczając dotychczasowe rozważania, stwierdzić możemy, że maximum mocy w obwodzie wtórnym przy *stałej sile elektromotorycznej* pierwotnej otrzymujemy ze sprawnością 50%. Chcąc osiągnąć wyższą sprawność, musimy obwody sprząć silniej, ale równocześnie z tem zmniejszamy moc otrzymaną w obwodzie wtórnym. Tę samą moc wtórną przy zwiększonej sprawności uzyskamy jedynie, gdy podwyższymy siłę elektromotoryczną.

Jeżeli rozporządzamy źródłem prądu, którego straty dopuszczalne są ograniczone, a zwłaszcza jeżeli chcemy oszczędnie gospodarować pobieraną energją, to — rzecz oczywista — będziemy dążyli do *dużej sprawności*, starając się przekroczyć wartość 0,5. W urządzeniach nadawczych mniejszej i średniej mocy sprawność osiągnięta jest rzędu 0,6 do 0,8, dochodząc w urządzeniach bardzo wielkiej mocy do 0,95 i więcej (np. stacja Rugby)<sup>1)</sup>.

Zasadę maximum mocy zastosujemy jedynie tam, gdzie zależy nam wyłącznie na wydobyciu największej energii ze źródła o dostatecznym zapasie tej energii. Będziemy ją naprzykład stosowali w technice odbiorczej, gdzie jako źródło występuje energia nagromadzona w fali elektromagnetycznej.

## 5. Stany krytycznego obciążenia obwodów sprzężonych.

Moc pobierana przez obwód wtórny przy znacznej sprawności sprzężenia jest, jak zaznaczono, mniejsza od maximum mocy wtórnej. Wobec tego przy nieodpowiednim doborze sprzężności może zajść przypadek maximum mocy, a temsamem przeciążenia obwodu wtórnego; o ile obwód ten zawiera pojemność, wystąpi równocześnie maximum przepięcia.

Dla źródła prądu i dla obwodu pierwotnego, o ile jest obwodem rezonansowym, największe obciążenie wystąpi z chwila, gdy obwód wtórny będzie otwarty<sup>2)</sup> lub bardzo słabo sprzężony, a on sam będzie w rezonansie z siłą elektromotoryczną. Będziemy mieli wówczas w obwodzie pierwotnym prąd rezonansowy (wzór 85a), który zgodnie z rozważaniami poprzednich paragrafów będzie znacznie większy, niż prąd pierwotny przy obciążeniu obwodem wtórnym. Równocześnie też wystąpi odpowia-

<sup>1)</sup> Hansford i Faulkner, l. c. na str. 16.

<sup>2)</sup> Przypadek taki może zajść na stacji nadawczej, gdy się zerwie antena, stanowiąca pojemność obwodu wtórnego.



oraz

$$\overline{MH} = \overline{AB} \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 = \frac{\omega^2 M^2}{R_2} \cdot \frac{X_2}{Z_2} \cdot \frac{R_2}{Z_2} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} X_2 = X_1'.$$

A więc trójkąt  $AHM$  jest trójkątem oporności obwodu wtórnego, odniesionym do obwodu pierwotnego. Stąd z łatwością znajdziemy obciążenie źródła przez układ sprzężony, a mianowicie:

$$R_l = R_1 + R' = \overline{OA} + \overline{AH} = \overline{PM},$$

$$X_l = X_1 - X' = \overline{OQ} - \overline{HM} = \overline{PQ}.$$

Stąd równoważna oporność pozorną

$$Z_l = \overline{QM}$$

oraz kąt przesunięcia faz

$$\varphi_l = \sphericalangle PMQ.$$

Na rys. 45 przyjęliśmy kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , leżące powyżej osi  $OB$ , jako dodatnie, a więc górne półkoło odpowiada indukcyjnemu obciążeniu obwodu wtórnego, zaś dolne półkoło obciążeniu pojemnościowemu. Zaś kąt  $\varphi_1$  będzie dodatni, gdy  $\overline{OQ} > \overline{OP}$ , będzie natomiast ujemny, gdy  $\overline{OQ} < \overline{OP}$ , wykres daje więc możliwość szybkiego orjentowania się w warunkach obciążenia generatora. Równocześnie daje on obraz sprawności sprzężenia, gdyż, opierając się na zależności

$$\eta_1 = \frac{R'}{R' + R_1},$$

możemy znaleźć sprawność jako stosunek odcinków

$$\eta_1 = \frac{\overline{AH}}{\overline{OH}}.$$

Przy pomocy wykresu rys. 45 można badać zachowanie się obwodów sprzężonych przy różnych przesunięciach faz obu obwodów, zmieniając kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ . Można również rozpatrywać wpływ sprzężności, kreśląc koła o różnych promieniach, lecz pamiętając o zależności  $M = z \sqrt{L_1 L_2}$ , co zresztą nie przedstawia trudności, gdy oba obwody zawierają pojemność. Na podanym przykładzie drogą zwiększenia sprzężności osiągnęliśmy kompensację faz i lepszą sprawność (koło  $K_1$ ).

Wykres pozwala również z góry ustalić warunki dla żądanej sprawności przy równoczesnej kompensacji faz. Dobieramy wówczas odpowiedni stosunek  $\overline{OA}$  do  $\overline{OH}_1$ , mając dane kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  kreślimy prostą  $\overline{QM}_1$  równoległą do  $\overline{OH}_1$  i z punktu  $\overline{M}_1$  prostą  $\overline{M}_1 B_1$ , prostopadłą do  $\overline{AM}_1$ . Tem samym znajdujemy odcinek  $\overline{AB}_1$ , który przy znanym  $R_2$  daje nam żadaną wartość  $\omega M_1$ .

## 7. Przykład obliczenia obwodów sprzężonych.

Mamy obliczyć obwody sprzężone indukcyjnie dla danych następujących:

$$R_2 = 5 \Omega, \quad J_2 = 10 \text{ A}, \quad C_2 = 1000 \cdot 10^{-12} \text{ F},$$

$\omega = 10^6$ ,  $\eta = 0,85$ ,  $R_1 = 2,5 \Omega$  (oporność obwodu wraz ze źródłem).

Obciążenie źródła prądu winno być bezindukcyjne. Ponadto przyjmujemy

$$\cos \varphi_2 = 0,8 \quad (\varphi_2 = 36^\circ 50', \quad \text{tg } \varphi_2 = 0,75).$$

*Obliczenie.*

Dla wartości  $\eta = 0,85$  znajdujemy

$$\frac{\eta}{1 - \eta} = \frac{0,85}{0,15} = 5,66.$$

Stąd mamy

$$\omega M = \frac{1}{0,8} \cdot \sqrt{2,5 \cdot 5 \cdot 5,66} = 10,5 \Omega,$$

czyli

$$M = \frac{10,5}{10^6} = 10,5 \cdot 10^{-6} \text{ H}.$$

Oczywiście, dla zapewnienia sobie możności dostrajania obwodów w szerszych granicach, przewidzimy maksymalny współczynnik indukcji wzajemnej znacznie większy, np.  $M_{max} = 30 \cdot 10^{-6} \text{ H}$ .

Ponadto mamy

$$\text{tg } \varphi_1 = \text{tg } \varphi_2 \cdot 5,66 = 4,25, \quad \varphi_1 = 76^\circ 45', \quad \cos \varphi_1 \cong 0,23.$$

Znajdujemy oporności urojone i pozorne obu obwodów

$$X_1 = R_1 \text{tg } \varphi_1 = +10,6 \Omega, \quad Z_1 = \frac{R_1}{\cos \varphi_1} \cong 10,9 \Omega,$$

$$X_2 = R_2 \text{tg } \varphi_2 = +3,75 \Omega, \quad Z_2 = \frac{R_2}{\cos \varphi_2} = 6,25 \Omega.$$

Przekładnia prądowa

$$p = \frac{\omega M}{Z_2} = \frac{10,5}{6,25} = 1,68,$$

a więc prąd pierwotny

$$J_1 = \frac{J_2}{1,68} = 5,95 \text{ A} (\sim 6 \text{ A})$$



Całkowita oporność omowa odniesiona do obwodu pierwotnego

$$R_I = 2,5 + 5 \cdot (1,68)^2 = 16,6 \Omega.$$

Całkowita oporność urojona odniesiona do obwodu pierwotnego

$$X_I = 10,6 - 3,75 (1,68)^2 = 0.$$

Potrzebna siła elektromotoryczna pierwotna

$$E_1 = J_1 R_I = 99 V. (\sim 100 V).$$

Moc pierwotna

$$P_1 = E_1 J_1 = 99 \cdot 5,95 = 590 W.$$

Sprawdzamy sprawność

$$P_2 = J_2^2 R_2 = 500 W,$$

a więc

$$\eta = \frac{500}{590} = 0,85.$$

Prąd pierwotny możemy obliczyć i inną drogą. A mianowicie

$$P_1 = \frac{P_2}{\eta} = \frac{500}{0,85} = 590 W.$$

Moc stracona w obwodzie pierwotnym

$$P_{str} = P_1 - P_2 = 90 W = J_1^2 R_1.$$

Stąd prąd pierwotny

$$J_1 = \sqrt{\frac{90}{2,5}} \cong 6 A.$$

co zgadza się z wynikiem poprzednim.

Teraz znajdujemy indukcyjności i pojemności obu obwodów oraz występujące na nich napięcia.

Oporność urojona obwodu wtórnego

$$\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 3,75 \Omega, \quad \omega L_2 = 3,75 + \frac{1}{10^6 \cdot 10^{-9}} \cong 1000 \Omega,$$

stąd

$$L_2 = \frac{10^3}{10^6} = 10^{-3} H.$$

Indukcyjność obwodu pierwotnego otrzymamy z zależności  $M = \kappa \cdot \sqrt{L_1 L_2}$ . Zakładając  $\kappa = 0,02$ , obliczymy

$$L_1 = \frac{M^2}{\kappa^2 L_2} = \frac{(10,5)^2 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}} = 276 \cdot 10^{-6} H.$$

Ażeby otrzymać żądane przesunięcie faz w obwodzie pierwotnym, musimy włączyć weń pojemność, którą obliczymy z zależności

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 10,6 \, \Omega, \text{ czyli } \frac{1}{\omega C_1} = 276 - 10,6 = 265,4 \, \Omega.$$

A więc

$$C_1 = \frac{1}{265,4 \cdot 10^6} \cong 3770 \cdot 10^{-12} \, F.$$

Obieramy pojemność

$$C_1' = 4000 \cdot 10^{-12} \, F,$$

której odpowiada indukcyjność

$$L_1' = \frac{1}{\omega} \left( 10,6 + \frac{1}{4 \cdot 10^{-9} \cdot 10^6} \right) \cong 260 \cdot 10^{-6} \, H.$$

Skutkiem tego współczynnik sprzężności ulegnie nieznacznej zmianie. Napięcia skuteczne na kondensatorach w normalnych warunkach pracy

$$V_{c_1} = \frac{J_1}{\omega C_1} = 6 \cdot 250 = 1500 \, V,$$

$$V_{c_2} = \frac{J_2}{\omega C_2} = 10 \cdot 10^3 = 10000 \, V.$$

Napięcia na indukcyjnościach będą cokolwiek wyższe, ze względu na nieznaczną przewagę oporności indukcyjnej nad pojemnościową.

Warunki przeciążenia obwodu wtórnego znajdziemy na zasadzie równania (84).

$$J_{2 \max \max} = \frac{100}{2 \sqrt{5} \cdot 2,5} = 14,2 \, A,$$

$$V_{2 \max} = 10000 \frac{14,2}{10} = 14200 \, V.$$

A więc maximum mocy przeciąża obwód wtórny o ok. 40%.

Prąd w obwodzie pierwotnym nieprzestrojonym przy otwartym obwodzie wtórnym (prąd jałowy):

$$J_1 = \frac{E_1}{Z_1} = \frac{100}{10,9} \cong 9,2 \, A,$$

i odpowiadające mu przepięcie

$$V' = 9,2 \cdot 250 \cong 2300 \, V.$$

Gdy natomiast obwód pierwotny nastrojony jest w biegu jałowym do rezonansu

$$J_{1r} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{100}{2,5} = 40 \text{ A},$$

$$V_{1r} = 40 \cdot 250 = 10000 \text{ V}.$$

Obwód pierwotny będzie więc zabezpieczony przed uszkodzeniem przy wadliwym strojeniu, gdy izolacja jego części konstrukcyjnych będzie obliczona na 10000 woltów napięcia roboczego.

## 8. Częstotliwości rezonansowe w dwu indukcyjnie sprzężonych obwodach rezonansowych.

Dotychczas rozpatrywaliśmy układ sprzężony, zasilany siłą elektromotoryczną o stałej częstotliwości, a zmienialiśmy jedynie sprzężność i oporności pozorne obwodów. Teraz zanalizujemy zjawiska zachodzące w dwu sprzężonych obwodach rezonansowych, gdy zmieniamy częstotliwość siły elektromotorycznej.

Rozróżnimy tu dwa zasadnicze przypadki:

1. Oba obwody posiadają tę samą częstotliwość rezonansową czyli są *zestrojone*. Wyraża się to równością

$$\omega_{r1} = \omega_{r2},$$

czyli

$$L_1 C_1 = L_2 C_2. \quad (91)$$

2. Obwody posiadają różne częstotliwości rezonansowe czyli

$$\omega_{r1} \neq \omega_{r2}.$$

Zjawiska rezonansu jako funkcji częstotliwości w obwodach sprzężonych wklajają się przez to, że z chwilą zbliżenia obu obwodów rozstrajają się one wzajemnie, skutkiem czego częstotliwość rezonansu jest funkcją oporności urojonych obu obwodów. Stąd też, naogół biorąc, rezonans układu sprzężonego wystąpi przy częstotliwościach nieco odmiennych, niż częstotliwość rezonansowa obwodów nawet zestrojonych. Częstotliwości te otrzymamy jako pierwiastki ogólnego równania kompensacji faz (78), odniesionego do  $\omega$  jako zmiennej niezależnej. To *równanie częstotliwości* układu dwu sprzężonych obwodów rezonansowych posiada postać

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)^2} \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = 0.$$

W dalszych przekształceniach tego równania będziemy się posługiwali następującymi oznaczeniami

$$\omega_{r1} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad (\text{a}) \quad \omega_{r2} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \quad (\text{b})$$

$$X_{r1} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}, \quad (\text{c}) \quad X_{r2} = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}, \quad (\text{d})$$

$$\frac{\omega}{\omega_{r1}} = y, \quad (\text{e}) \quad \frac{\omega_{r2}}{\omega_{r1}} = z, \quad (\text{f})$$

$$z = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad (\text{g}) \quad \begin{aligned} \omega^2 M^2 &= y^2 \omega_{r1}^2 z^2 L_1 L_2 = \\ &= \frac{y^2}{z} z^2 X_{r1} X_{r2}, \end{aligned} \quad (\text{h})$$

$$X_1 = X_{r1} \left( y - \frac{1}{y} \right), \quad (\text{i}) \quad X_2 = X_{r2} \left( \frac{y}{z} - \frac{z}{y} \right), \quad (\text{j})$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}, \quad (\text{k}) \quad \sigma_2 = \frac{1}{R_2} \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}. \quad (\text{l})$$

### 1. Przypadek dwu obwodów zestrojonych.

Gdy obwody są zestrojone, a więc gdy  $\omega_{r1} = \omega_{r2} = \omega_r$ , ( $z = 1$ ), równanie częstotliwości sprowadza się do postaci

$$X_{r1} \left( y - \frac{1}{y} \right) - \frac{y^2 \omega_r^2 M^2}{R_2^2 + X_{r2}^2 \left( y - \frac{1}{y} \right)^2} \cdot X_{r2} \left( y - \frac{1}{y} \right) = 0 \quad (92)$$

Jeden z pierwiastków tego równania da nam równość

$$y - \frac{1}{y} = 0 \quad \text{czyli} \quad y_1 = 1,$$

(znak algebraiczny nie posiada tu znaczenia).

Stąd jedną z częstotliwości rezonansowych jest

$$\omega' = \omega_{r1} = \omega_{r2}, \quad (93)$$

którą nazwiemy *częstotliwością zestrojenia*.

Następne wartości znajdziemy z równania

$$X_{r1} - \frac{y^2 \omega_r^2 M^2}{R_2^2 + X_{r2}^2 \left( y - \frac{1}{y} \right)^2} \cdot X_{r2} = 0,$$

czyli

$$X_{r1} \left[ \left( R_2^2 + X_{r2}^2 \left( y - \frac{1}{y} \right)^2 \right) - y^2 \omega_r^2 M^2 X_{r2} \right] = 0.$$

Wyciągamy przed nawias pierwszego członu  $X_{r2}^2$  i podstawiamy wartości (g) i (l), przez co otrzymujemy po uporządkowaniu

$$y^4 (1 - z^2) + y^2 \left( \frac{1}{\sigma_2^2} - 2 \right) + 1 = 0.$$

Jest to równanie drugiego stopnia ze względu na  $y^2$  i posiada pierwiastki:

$$y_3^2 = \frac{2 - \frac{1}{\sigma_2^2} + \sqrt{4 \left( z^2 - \frac{1}{\sigma_2^2} \right) + \frac{1}{\sigma_2^4}}}{2(1 - z^2)}, \quad (94)$$

$$y_2^2 = \frac{2 - \frac{1}{\sigma_2^2} - \sqrt{4 \left( z^2 - \frac{1}{\sigma_2^2} \right) + \frac{1}{\sigma_2^4}}}{2(1 - z^2)}.$$

To równanie ogólne na częstotliwości sprzężenia posiada pewne postaci uproszczone:

a) W przypadku, gdy  $\frac{1}{\sigma_2} \ll z$ , wartości równania (94) sprowadzają się do postaci:

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - z}}, \quad \omega'' = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 - z}}, \quad (95)$$

$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + z}}, \quad \omega''' = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 + z}}.$$

Są to klasyczne wartości częstotliwości rezonansowych sprzężenia dwu obwodów, z których wtórny ma oporność omową równą zero. Można je stosować w praktyce, gdy obwód wtórny ma małe tłumienie (duży współczynnik przebiecia), a obwody są stosunkowo silnie sprzężone.

Dla większości przypadków spotykanych w radjotechnice wzór (95) daje dostateczne przybliżenie.

b) Gdy  $z = \frac{1}{\sigma_2}$ , pierwiastki  $y_2$  i  $y_3$  przybierają wartości:

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad (96)$$

$$y_3 = 1.$$

c) Wreszcie, gdy  $z < \frac{1}{\sigma_2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\sigma_2}\right)^2}$ , pierwiastki  $y_2$  i  $y_3$  są urojone, tak iż mamy jedną tylko częstotliwość rezonansową

$$\omega' = \omega_r. \quad (97)$$

## 2. Przypadek obwodów rozstrojonych.

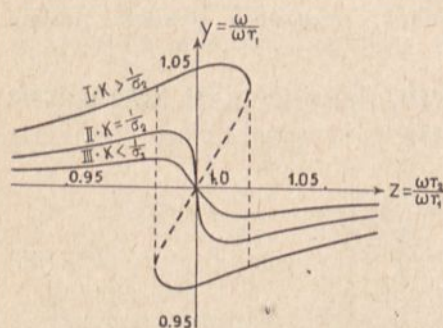
Gdy obwody są rozstrojone, mamy równanie częstotliwości

$$X_{r1} \left( y - \frac{1}{y} \right) - \frac{y^2 \omega_{r1}^2 M^2}{R_2^2 + X_{r2}^2 \left( \frac{y}{z} - \frac{z}{y} \right)^2} \cdot X_{r2} \left( \frac{y}{z} - \frac{z}{y} \right) = 0.$$

Po analogicznych przekształceniach, jak w poprzednim równaniu, otrzymamy

$$z \left( y - \frac{1}{y} \right) \left[ \frac{1}{\sigma_2^2} + \left( \frac{y}{z} - \frac{z}{y} \right)^2 \right] - y^2 z^2 \left( \frac{y}{z} - \frac{z}{y} \right) = 0. \quad (98)$$

Jest to *najogólniejsze* równanie częstotliwości dwu sprzężonych obwodów rezonansowych. Jest to równanie 3-go stopnia ze względu na  $y$ , które nie posiada prostego rozwiązania algebraicznego, tak iż najbardziej pogładowe jest rozwiązanie wykresalne. Zależnie od tego, czy  $z > \frac{1}{\sigma_2}$ ,



Rys. 46.

czy  $z = \frac{1}{\sigma_2}$ , czy też  $z < \frac{1}{\sigma_2}$ , równanie

to posiada przebieg krzywych I, II lub III rys. 46, przedstawionych z początkiem układu w punkcie 1. Na osi

odciętych oznaczone są wartości  $z = \frac{\omega_{r2}}{\omega_{r1}}$ , na osi rzędnych odpowia-

jące im wartości  $y = \frac{\omega}{\omega_{r1}}$ , tak iż dla

krzywej, wykreślonej przy danych

$z$  i  $\sigma_2$ , odczytać możemy częstotliwości rezonansowe, odpowiadające każdemu stosunkowi  $\frac{\omega_{r2}}{\omega_{r1}}$ , co jest równoznaczne ze znalezieniem częstotliwości rezonansowych dla każdego rozstrojenia obwodu wtórnego względem obwodu pierwotnego. Jak widać z rys. 46-go, dla  $z > \frac{1}{\sigma_2}$  mamy

w pewnych granicach rozstrojenia *trzy* częstotliwości rezonansowe. Punktowi  $z = 1$  odpowiadają pierwiastki (93) i (94) równania (92).

Z pominięciem oporności omowej obwodu wtórnego, czyli dla  $\frac{1}{\sigma_2} \ll \left( \frac{y}{z} - \frac{z}{y} \right)$ , równanie (98) sprowadza się do postaci

$$z \left( y - \frac{1}{y} \right) \left( \frac{y}{z} - \frac{z}{y} \right)^2 - y^2 \kappa^2 \left( \frac{y}{z} - \frac{z}{y} \right) = 0. \quad (99)$$

Daje ono rozwiązania:

$$1) \quad \frac{y}{z} - \frac{z}{y} = 0, \text{ czyli } y_1 = z,$$

co odpowiada warunkowi

$$\omega' = \omega_{r2}, \quad (99a)$$

oraz

$$2) \quad y^4(1 - \kappa^2) - y^2(1 + z^2) + z^2 = 0,$$

skąd mamy:

$$y_2^2 = \frac{(1 + z^2) + \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4z^2\kappa^2}}{2(1 - \kappa^2)} \quad (99b)$$

$$y_3^2 = \frac{(1 + z^2) - \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4z^2\kappa^2}}{2(1 - \kappa^2)}$$

lub po podstawieniu wartości za  $z$ :

$$\left( \frac{\omega_r''}{\omega_{r1}} \right)^2 = \frac{1 + \frac{\omega_{r2}^2}{\omega_{r1}^2} + \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega_{r2}^2}{\omega_{r1}^2} \right)^2 + 4 \frac{\omega_{r2}^2}{\omega_{r1}^2} \kappa^2}}{2(1 - \kappa^2)}, \quad (99c)$$

$$\left( \frac{\omega_r'''}{\omega_{r1}} \right)^2 = \frac{1 + \frac{\omega_{r2}^2}{\omega_{r1}^2} - \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega_{r2}^2}{\omega_{r1}^2} \right)^2 + 4 \frac{\omega_{r2}^2}{\omega_{r1}^2} \kappa^2}}{2(1 - \kappa^2)}.$$

Gdy w powyższych równaniach podstawimy  $z = 1$ , czyli  $\omega_{r1} = \omega_{r2}$ , otrzymamy wyniki zgodne z równaniami (95). Podobnie jak tamte wzory, tak i wzory (99c) mogą być stosowane z dostatecznym przybliżeniem w większości przypadków, interesujących radjotechnika.

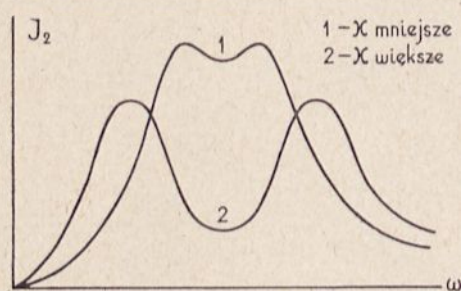
W praktycznym zastosowaniu częściej spotykamy się z obwodami rozstrojonymi niż z zestrojonymi, gdyż nastrojenie układu do rezonansu przy zestrojeniu obwodów jest jednym z nieskończenie wielu przypadków możliwych. Typowym układem znacznie rozstrojonym są tak zwane „anteny aperjodyczne”, sprzężone z obwodem strojonym w układach odbiorczych. Nazwa „aperjodycznej” jest tu niesłuszna, gdyż anteny takie są obwodami rezonansowymi, lecz nie dającymi się dostroić do rezonansu z częstotliwością odbieraną.

## 9. Krzywe rezonansu układu sprzężonego indukcyjnie

Krzywą rezonansu układu sprzężonego otrzymamy, zasilając go siłą elektromotoryczną o stałej amplitudzie, niezależną od cech elektrycznych tego układu. Można przytem postępować w sposób dwojaki:

- przy stałej częstotliwości zmieniać nastrojenie obwodów,
- nie zmieniając układu, zasiląć go siłą elektromotoryczną o zmiennej częstotliwości.

Przy obu tych metodach zdejmowania krzywych rezonansu, możemy je odnieść albo:



Rys. 47.

1. do obwodu pierwotnego, czyli badać zależność

$$J_1 = f(\omega)_{z=\text{const}} \text{ lub } J_1 = f(z)_{\omega=\text{const}}$$

albo też

2. do obwodu wtórnego, badając zależność

$$J_2 = f(\omega)_{z=\text{const}} \text{ lub } J_2 = f(z)_{\omega=\text{const}}$$

W pierwszym przypadku krzywa rezonansu scharakteryzuje nam zachowanie się układu sprzężonego wobec źródła prądu, w drugim zaś da nam obraz pochłaniania mocy przez obwód wtórny przy różnych nastrojeniach obwodu lub różnych częstotliwościach prądu zasilającego.

W ten sposób otrzymane krzywe rezonansu posiadają przebieg zbliżony do przebiegu krzywej rezonansu obwodu rezonansu napięć, dopóki sprzężność jest bardzo słaba. Przy sprzężności silniejszej natomiast pojawiają się dwa wierzchołki rezonansu, odpowiadające obu skrajnym częstotliwościom rezonansowym, i to nawet wówczas, gdy oba obwody są zestrojone. Wierzchołki te występują tem wyraźniej, im silniejsza jest sprzężność (rys. 47).

Odpowiednikiem krzywej rezonansu, wyprowadzonej w rozdziale I dla obwodu prostego, jest krzywa, wyrażająca stosunek kwadratu prądu pierwotnego do kwadratu prądu rezonansowego w obwodzie pierwotnym nieobciążonym, to znaczy  $\frac{J_1^2}{J_{r1}^2}$ . Obliczyć ją możemy w sposób następujący:

$$J_{r1} = \frac{E_1}{R_1}, \quad J_1 = \frac{E_1}{Z_1},$$

skąd

$$\frac{J_1}{J_{r1}} = \frac{R_1}{Z_1}$$



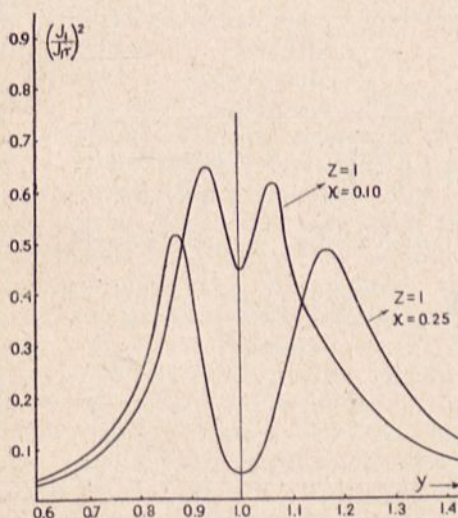
czyli

$$\left(\frac{J_1}{J_{r1}}\right)^2 = \frac{R_1^2}{\left(R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2\right)^2 + \left(X_1 - \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} X_2\right)^2}. \quad (100)$$

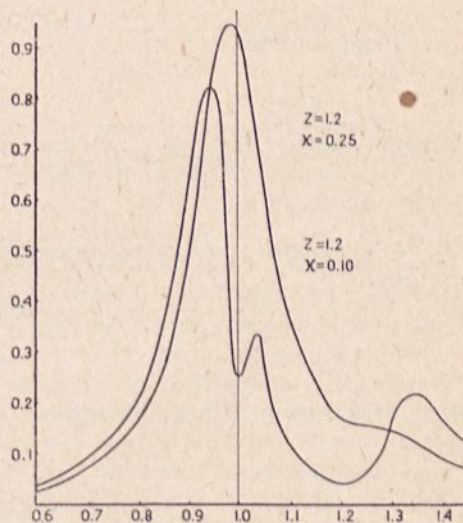
Jeżeli wprowadzimy tu wartości zastosowane w § 8, wyrazić możemy to równanie w postaci

$$\left(\frac{J_1}{J_{r1}}\right)^2 = \frac{1}{\left[1 + \frac{y^2 x^2 \sigma_1 \sigma_2}{z \left[1 + \sigma_2^2 \left(\frac{y-z}{z-y}\right)^2\right]}\right]^2 + \sigma_1^2 \left[\left(y - \frac{1}{y}\right) - \frac{y^2 x^2 \sigma_2^2 \left(\frac{y-z}{z-y}\right)}{z \left[1 + \sigma_2^2 \left(\frac{y-z}{z-y}\right)^2\right]}\right]^2} \quad (100a)$$

Przebieg tej krzywej dla różnych wartości  $x$  i  $z$  podany jest na rys. 48-ym a i b.



Rys. 48 a.



Rys. 48 b.

W odniesieniu do prądu wtórnego krzywą rezonansu możemy otrzymać, odnosząc prąd wtórny z równania (79a) do maximum maximum prądu wtórnego, równanie (84). Funkcja ta wyrazi się w postaci

$$\left(\frac{J_2}{J_{2max\ max}}\right)^2 = \frac{4R_1 R_2}{\frac{Z_1 Z_2}{\omega^2 M^2} + 2(R_1 R_2 - X_1 X_2) + \omega^2 M^2}. \quad (101)$$

Najprostszą postać równania krzywej rezonansu, odniesionej do prądu wtórnego, a zarazem pod względem fizycznym najbardziej przejrzystą, otrzymamy, zakładając zestrojenie obu obwodów ( $\omega_{r1} = \omega_{r2} = \omega_r$ ) i bardzo słabą sprzężność. Tego typu obwody sprzężone posiadają doniosłe znaczenie w technice odbiorczej, dając krzywe rezonansu o wiele ostrzejsze, niż jeden obwód rezonansowy. Równanie krzywej znajdziemy w sposób następujący:

Prąd w obwodzie pierwotnym, jeżeli pominiemy oddziaływanie obwodu wtórnego, wynosi

$$J_1 = \frac{E_1}{Z_1} = \frac{E_1}{R_1 \sqrt{1 + \sigma_1^2 \left(y - \frac{1}{y}\right)^2}}.$$

Siła elektromotoryczna wtórna

$$E_2 = \omega M J_1 = E_1 \cdot \frac{y \omega_r M}{R_1 \sqrt{1 + \sigma_1^2 \left(y - \frac{1}{y}\right)^2}}.$$

Prąd wtórny

$$J_2 = \frac{E_2}{Z_2} = \frac{R_1 y \omega_r M}{\left[ R_1 \sqrt{1 + \sigma_1^2 \left(y - \frac{1}{y}\right)^2} \right] \left[ R_2 \sqrt{1 + \sigma_2^2 \left(y - \frac{1}{y}\right)^2} \right]}.$$

Dla częstotliwości rezonansowej otrzymamy w tych samych warunkach

$$J_{r1} = \frac{E_1}{R_1}, \quad E_2 = \frac{E_1 \omega_r M}{R_1}, \quad J_2 = \frac{E_1 \omega_r M}{R_1 R_2},$$

skąd otrzymujemy bezpośrednio

$$\left(\frac{J_2}{J_r}\right)^2 = \frac{y^2}{\left[1 + \sigma_1^2 \left(y - \frac{1}{y}\right)^2\right] \left[1 + \sigma_2^2 \left(y - \frac{1}{y}\right)^2\right]}. \quad (102)$$

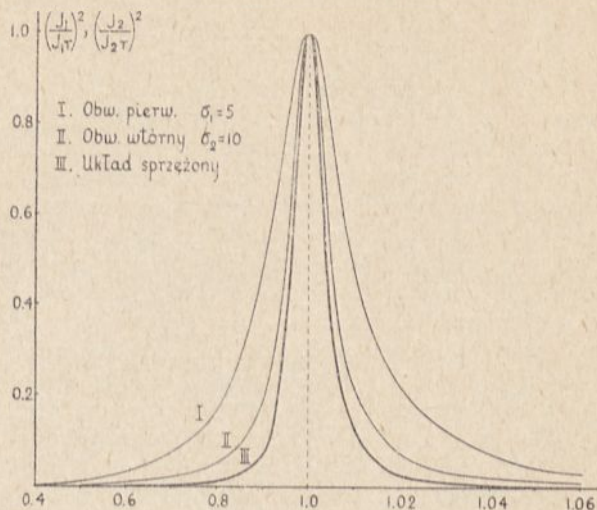
Wprowadzając rozstrojenie  $\varepsilon = y - 1$ , analogicznie, jak w równaniu (7b), otrzymamy dla małych rozstrojeń ( $\varepsilon < 0,05$ )

$$\left(\frac{J_2}{J_r}\right)^2 = \frac{(1 + \varepsilon)^2}{(1 + 4\sigma_1^2 \varepsilon^2)(1 + 4\sigma_2^2 \varepsilon^2)}. \quad (102a)$$

Równania (102) i (102a) dowodzą, że ostrość rezonansu rośnie ze współczynnikami przebiecia obu obwodów; w pierwszym przybliżeniu mo-

żna powiedzieć, że jest ona funkcją iloczynu tych współczynników. Jest to zrozumiałe, gdyż pomijając czynnik  $y^2$  w liczniku, rzędne krzywej rezonansu odniesionej do obwodu wtórnego są iloczynami rzędnych krzywych

rezonansu obu obwodów (rys. 49). W tej okoliczności leży duża doniosłość obwodów strojonych bardzo słabo sprzężonych, dla techniki odbiorczej i pomiarowej. Charakterystyczną cechą krzywej rezonansu, odniesionej do obwodu wtórnego, jest jej asymetria. A mianowicie wskutek proporcjonalności siły elektromotorycznej wtórnej do częstotliwości prądu zasilającego, otrzymujemy dla częstotliwości większych rzędne wyższe, niż dla mniejszych. Stąd *krzywa rezonansu obwodów sprzężonych indukcyjnie spada bardzo stromo w kierunku częstotliwości mniejszych od rezonansowej, niż po stronie częstotliwości większych*. Asymetria ta nie posiada jednakże znaczenia w pobliżu wierzchołka rezonansu ( $y \cong 1$ ). Tę samą asymetrię wykazują również krzywe rezonansu obwodów silnie sprzężonych.



Rys. 49.

Znaczenie krzywych rezonansu o dwu wierzchołkach. Obwody rezonansowe sprzężone stosunkowo silnie, a więc odznaczające się krzywą rezonansu o dwu wierzchołkach, rozpowszechniają się obecnie coraz bardziej jako t. zw. *filtry widmowe*, czyli obwody przepuszczające mniej więcej równomiernie pewne określone widmo częstotliwości (Plebański<sup>1)</sup> Vreeland). Filtry takie posiadają doniosłe znaczenie dla równomiernego odbioru całego widma modulacyjnego stacji radijonicznej bez widocznego osłabienia częstotliwości krańcowych. Szerokość przepuszczanego widma takiego układu odpowiada mniej więcej różnicy obu częstotliwości rezonansowych (wzór 95).

Ciekawe wykorzystanie krzywej rezonansu o dwu wierzchołkach znalazło Tow. Marconi'ego w zastosowaniu do stacji nadawczych. A mianowicie antena nadawcza sprzężona jest bardzo silnie z zamkniętym obwodem rezonansowym, tak iż oba wierzchołki rezonansu dla częstotliwości

$\frac{\omega_r}{\sqrt{1-z}}$  i  $\frac{\omega_r}{\sqrt{1+z}}$  występują bardzo wyraźnie, co pozwala zasilać antenę

równocześnie zapomocą dwu generatorów o różnych częstotliwościach. Rzecz oczywista, że antena musi być obliczona na obciążenie sumą prądów, do-

<sup>1)</sup> Patrz „Przegląd Radjotechniczny“, a w szczególności roczniki 1931 i 1932.

starczanych przez oba generatory. Ze względu na pewne trudności, związane z eksploatacją, urządzenie to nie znalazło szerszego zastosowania i obecnie już nie ma go w użyciu.

### 10. Sprzężność krytyczna, silna i słaba.

Z poprzednich rozważań wynika, że jedną z częstotliwości rezonansowych sprzężenia jest częstotliwość rezonansowa obu obwodów zestrojonych. W tych warunkach oczywiście z obwodu wtórnego na pierwotny przenosi się jedynie *oporność urojona*. Skoro jednakże zmieni się częstotliwość zasilająca tak w obwodzie pierwotnym, jak i we wtórnym, pojawiają się oporności urojone tego samego znaku. Temsamem w oporności przeniesionej do obwodu pierwotnego również pojawi się składowa urojona, przeciwdziałająca oporności urojonej tegoż obwodu. Zależnie od sprzężności oporność urojona przeniesiona do obwodu pierwotnego może być przy nieskończeniu małym rozstrojeniu:

a) mniejsza od oporności urojonej obwodu pierwotnego — znak oporności urojonej układu sprzężonego nie zmieni się;

b) większa od oporności urojonej obwodu pierwotnego, oporność urojona układu zmienia znak;

c) równa oporności urojonej obwodu pierwotnego — układ pozostaje nadal bezindukcyjnym.

Sprzężność, przy której przesunięcia faz dla nieskończenie małych zmian częstotliwości kompensują się, nazywamy *sprzężnością krytyczną*. Wyraża się ona równaniem<sup>1)</sup>

$$dX_1 = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} dX_2 = 0.$$

Jeżeli w niem podstawimy

$$\frac{dX}{dy} = \frac{d}{dy} \left[ X_r \cdot \left( y - \frac{1}{y} \right) \right] = X_r \left( 1 + \frac{1}{y^2} \right),$$

i gdy uwzględnimy, że dla  $y = 1$  i  $z = 1$  mamy  $Z_2 = R_2$  oraz  $\omega_r^2 M^2 = \kappa^2 X_{r1} X_{r2}$ , otrzymamy warunek sprzężności krytycznej

$$X_{r1} dy - \frac{\kappa^2 X_{r1} X_{r2}}{R_2^2} X_{r2} dy = 0.$$

czyli

$$\kappa = \frac{R_2}{X_{r2}} = \frac{1}{\sigma_2}. \quad (103)$$

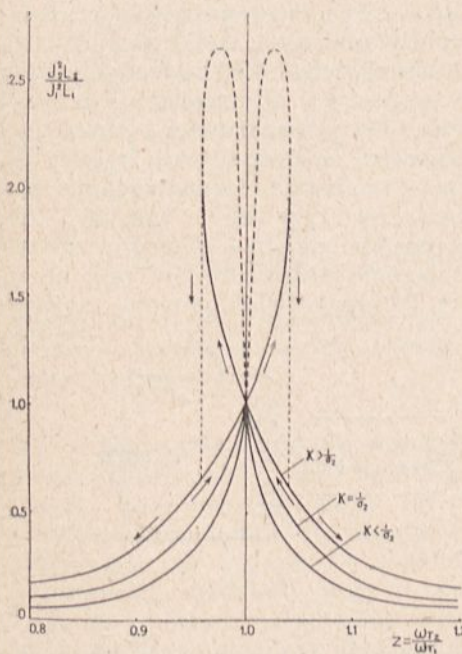
Zgodnie z tem będziemy rozróżniali:

1. *Sprzężność silną*, gdy  $\kappa > \frac{1}{\sigma_2}$ ,

<sup>1)</sup> Patrz m. i. W. Kummerer, Telefunken Ztg. Nr. 47, str. 63.

2. Sprężność krytyczną, gdy  $\kappa = \frac{1}{\sigma_2}$ ,
3. Sprężność słabą, gdy  $\kappa < \frac{1}{\sigma_2}$ ,
4. Sprężność bardzo słabą, gdy wpływ obwodu wtórnego na częstotliwość rezonansową układu można pominąć ( $\kappa < \frac{1}{\sigma_2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\sigma_2}\right)^2}$ ).

Różnicę między sprężnością silną i słabą wykazuje również t. zw. *równanie przekładni prądowych* obwodów sprzężonych, wyrażające przekładnię prądową w rezonansie przy różnych częstotliwościach rezonansowych sprzężenia. Zgodnie z równaniem (78 a) mamy dla kompensacji faz



Rys. 50.

$$\frac{J_2^2}{J_1^2} = \frac{X_1}{X_2} = \frac{X_{r1} y \left(1 - \frac{1}{y^2}\right)}{X_{r2} \frac{y}{z} \left(1 - \frac{z^2}{y^2}\right)},$$

co po podstawieniu odpowiednich wielkości daje

$$\frac{J_2^2}{J_1^2} = \frac{L_1 \left(1 - \frac{1}{y^2}\right)}{L_2 \left(1 - \frac{z^2}{y^2}\right)} = \frac{L_1 \left(1 - \frac{\omega_{r1}^2}{\omega^2}\right)}{L_2 \left(1 - \frac{\omega_{r2}^2}{\omega^2}\right)}, \quad (104)$$

lub też

$$\frac{J_2^2 L_2}{J_1^2 L_1} = \frac{1 - \frac{1}{y^2}}{1 - \frac{z^2}{y^2}}. \quad (104 a)$$

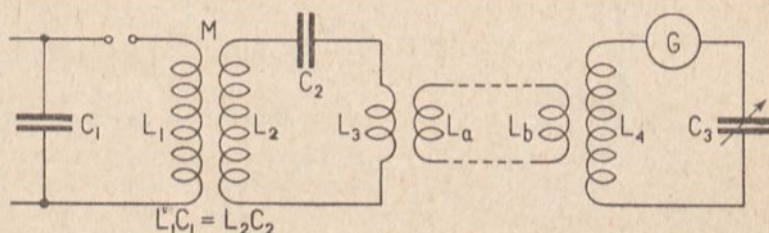
Podstawiając w równaniu (104 a) odpowiadające sobie wartości  $y$  i  $z$  z równania (98) lub też z wykresów rys. 46-go, otrzymujemy krzywe rys. 50-go. Wyrażają one, jaka przekładnia prądów przy danym stosunku rozstrojenia obu obwodów  $\left(\frac{\omega_{r1}}{\omega_{r2}}\right)$  odpowiada każdej z możliwych częstotliwości rezonansowych układu. Wielkości te są zarazem miarą sprawności układu oraz przepięcia rezonansowego w obwodzie wtórnym, jednakże z zastrzeżeniem, że stosunek  $\frac{L_1}{L_2}$  jest stały, czyli że obwody są dostrajane przy pomocy pojemności. Jeżeli ten warunek nie jest spełniony, należy

uwzględnić odpowiednią poprawkę i przebieg krzywych będzie się różnił od podanego na rys. 50-tym.

Z rysunku 50-go widzimy, że dla  $z \ll \frac{1}{\sigma_2}$  przebieg krzywych jest regularny z wyraźnym maximum przy  $z = 1$ , co odpowiada zestrojeniu obu obwodów. Skoro jednak sprzężność przekroczy wartość krytyczną, przebieg krzywej zmienia się zasadniczo — tworzy ona pętle dającą po trzy wartości przekładni prądowej dla każdej wartości rozstrojenia obwodów  $z$ , stosownie do trzech pierwiastków na częstotliwość rezonansową.

## 11. Drgania w obwodach sprzężonych. Przeciągnięcie.

Różnica między sprzężnością słabą i silną występuje najwyraźniej gdy częstotliwość prądu zasilającego zależy od danych elektrycznych układu, jak to ma miejsce w generatorach iskrowych lub wzbudzanych dzięki oporności ujemnej (generatory lampowe i łukowe). W urządzeniach takich przedewszystkiem ustalić się mogą przy silnej sprzężności i danym rozstrojeniu obwodów tylko dwie częstotliwości rezonansowe, drgania bowiem, odpowiadające częstotliwości trzeciej posiadają równowagę chwiejną i nie mogą się utrzymać (część kropkowana krzywej na rys. 46). Zjawisko to jest najlepiej zrozumiałe na przykładzie dwu obwodów zestrojonych. Przy częstotliwości  $\omega = \omega_r$  obciążenie obu obwodów jest bezindukcyjne. Skoro jednak częstotliwość z jakiegokolwiek powodu *zwiększy*



Rys. 51.

się o nieskończenie małą wartość, obciążenie obu obwodów stanie się indukcyjnym, jednakże oporność urojona, przeniesiona z obwodu wtórnego na pierwotny ze znakiem przeciwnym, zgodnie z poprzednimi wywodami będzie przeważała nad opornością urojoną obwodu pierwotnego. Cały układ wobec tego stanie się pojemnościowym, co odpowiada jeszcze większej częstotliwości rezonansowej a więc dalszemu zakłóceniu równowagi. Podobny przebieg będą miały zjawiska, gdy częstotliwość wypadkowo się zmniejszy. Wobec tego stan równowagi w takich warunkach nie może istnieć i drgania o tej częstotliwości jako drgania własne obwodu urzeczywistnić się nie dadzą, a w układzie sprzężonym powstać mogą drgania swobodne jedynie o częstotliwościach skrajnych.

Zachowanie się układu będzie zasadniczo różne, zależnie od tego, czy będzie on pobudzony do drgań gasnących, czy do drgań niegasnących.

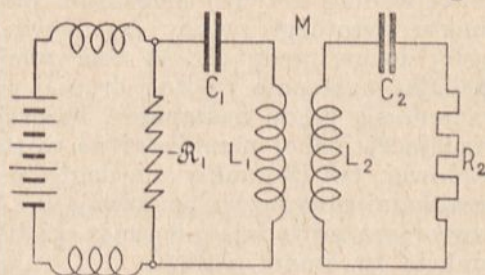
W pierwszym przypadku, gdy obwód pierwotny pobudzany jest za pośrednictwem iskiernika, powstają w obwodach *drżania gasnące o obu częstotliwościach* rezonansowych układu, co można wykazać przy pomocy obwodu rezonansowego, bardzo słabo sprzężonego z układem drżającym. Krzywa rezonansu, zdjęta zapomocą takiego obwodu, wykazuje wyraźnie dwa wierzchołki, dowodzące, że w badanym układzie płyną dwa prądy o różnych częstotliwościach. Do wykonania tego rodzaju pomiaru może posłużyć układ rys. 51-go, w którym obwód rezonansowy, zawierający ogniwo termoelektryczne  $T$  z galwanometrem  $G$ , sprzężony jest z układem badanym za pośrednictwem pętlicy  $L_a - L_b$ .

Dzięki możliwości równoczesnego powstawania drgań własnych o dwu różnych częstotliwościach, dwa obwody sprzężone stanowią układ elektryczny o *dwu stopniach swobody*, w odróżnieniu od obwodu prostego, posiadającego tylko jeden stopień swobody.

Odmienne przebiegają zjawiska, gdy w obwodach wzbudzamy drżania niegasnące za pośrednictwem oporności ujemnej, włączonej w obwód pierwotny (rys. 52.) W układzie takim warunkiem ustalenia się drgań jest, aby moc prądu zmiennego doprowadzana do układu, równała się mocy zużytej, czyli zachowana być musi równość

$$J_1^2 (-R_1) = J_2^2 R_2 \quad (105)$$

jeżeli przez  $(-R_1)$  oznaczymy wypadkową oporność ujemną obwodu pierwotnego.



Rys. 52.

I tu coprawda w pierwszej chwili włączenia siły elektromotorycznej powstaną drżania o obu częstotliwościach, jednakże silniej będzie narastała amplituda drgań o tej częstotliwości, która ma do pokonania mniejsze tłumienie. Gdy tłumienia dla obu częstotliwości są równe, szybciej ustalą się drżania o częstotliwości większej, gdyż — jak wynika z rozważań rozdziału II-go — posiada ona krótszy czas ustalania się. Drżania szybciej narastające pobierają ze źródła coraz więcej energii, wskutek czego drżania drugiej częstotliwości ulegają przytłumieniu, tak iż w końcu ustalą się tylko *jedna częstotliwość* drgań.

Zależność częstotliwości drgań wytwarzanych w takich warunkach dają nam krzywe częstotliwości na rys. 46. Gdy układ z opornością ujemną pobudźmy do drgań i będziemy przestrajali jeden z obwodów, na przykład wtórny, zmieniając w ten sposób  $z$ , częstotliwość drgań ze wzrostem  $z$  będzie początkowo również rosła. O ile  $z \ll \frac{1}{\sigma_2}$ , to w pobliżu wartości  $z=1$  następuje szybkie zmniejszenie się częstotliwości, a następnie ponowny łagodny wzrost, dążący asymptotycznie do wartości  $y=1$ . Przy silnej sprzężności natomiast mamy coprawda początkowo wzrost częstotliwości, jednakże z chwilą dojścia do punktu zwrotnego częstotliwość na-

gle *przeskakuje* na dolną gałąź krzywej, poczem następuje powolny powrót do granicy  $y = 1$  na dolnej gałęzi krzywej. Gdy natomiast posuwamy się od wielkich częstotliwości obwodu wtórnego do mniejszych (od dużych wartości  $z$  do małych), dochodzimy po dolnej gałęzi krzywej do jej punktu zwrotnego, poczem znowu następuje nagły przeskok do częstotliwości większej i ponowne zmniejszanie się częstotliwości wzdłuż górnej gałęzi krzywej. Te nagłe zmiany częstotliwości pod wpływem przestrajania jednego z obwodów (to samo doświadczenie mogliśmy wykonać, przestrajając obwód pierwotny) nazywamy *przeskokiem częstotliwości generatora drgań*.

Z przeskokiem częstotliwości wiąże się zjawisko *przeciągania* („Ziehen” H. Barkhausen’a), które wynika z przebiegu krzywej „przekładni prądowej” (rys. 50). Wyobraźmy sobie, że w układzie silnie sprzężonym pobudzonym do drgań niegasnących przestrajamy obwód wtórny zapomocą zmiennej pojemności, i przy stałym natężeniu prądu pierwotnego mierzymy prąd wtórny. Gdy w takich warunkach będziemy zwiększali częstotliwość obwodu wtórnego, a temsamem  $z$ , prąd wtórny będzie narastał według krzywej przekładni prądowych, dopóki nie dojdziemy do punktu zwrotnego pętlicy ( $z$  odpowiadające stycznej do pętlicy, równoległej do osi rzędnych). W tem miejscu prąd wtórny zrywa się nagle, spadając następnie według drugiej gałęzi krzywej. Równocześnie z zerwaniem się prądu następuje i przeskok częstotliwości z wartości odpowiadającej jednej przekładni na wartość odpowiadającą nowej przekładni prądowej, tak iż punkty nieciągłości krzywej częstotliwości i krzywej przekładni prądowych pokrywają się. Przestrajanie obwodów w kierunku odwrotnym powoduje zerwanie prądu i przeskok częstotliwości w drugim punkcie zwrotnym pętlicy.

Zjawisko przeciągania i przeskoku częstotliwości w generatorach lampowych i łukowych z obwodem pośrednim występuje często samorzutnie, gdy w czasie pracy wypadkowo zmieniają się, choćby nieznacznie, własności elektryczne układu, co czyni pracę generatorów tego typu bardzo niepewną. Przeciągania oczywiście niema, gdy sprzężność obwodów generatora nie przekracza wartości krytycznej, w tych warunkach jednakże trudno jest osiągnąć dostateczną sprawność, jak to wynika z następującego przeliczenia:

Wobec bezindukcyjności obu obwodów <sup>1)</sup> mamy  $Z_1 = R_1$  i  $Z_2 = R_2$ , tak iż równanie (89) przybiera postać

$$\omega_r^2 M^2 = \omega_r^2 \kappa^2 L_1 L_2 = R_1 R_2 \frac{\eta_1}{1 - \eta_1},$$

czyli

$$\frac{\eta_1}{1 - \eta_1} = \kappa^2 \frac{\omega_r L_1}{R_1} \cdot \frac{\omega_r L_2}{R_2} = \kappa^2 \sigma_1 \sigma_2.$$

<sup>1)</sup> Oczywiście pod warunkiem, że  $\sigma_2$  jest bardzo wielkie, wówczas bowiem  $\kappa_{kr}$  jest bardzo małe i we wzorze (96) można je pominąć (patrz także § 13).



Jeżeli podstawimy dla sprzężności krytycznej  $z^2 = \frac{1}{\sigma_2^2}$ , to największa sprawność, jaką osiągnąć możemy bez przeciągania, wyraża się wzorem

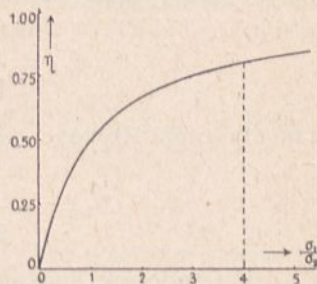
$$\eta_{max} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \quad (106)$$

Jeżeli np. współczynnik przepięcia obwodu pierwotnego będzie czterokrotnie większy od współczynnika przepięcia obwodu wtórnego, co niełatwo jest urzeczywistnić, sprawność maksymalna wyniesie 0,8 (rys. 53). Równanie (106) możemy przekształcić, wprowadzając, zgodnie z (3a)

$$\sigma = \frac{1}{\omega_r CR}$$

Wówczas otrzymamy wzór

$$\eta_{max} = \frac{1}{1 + \frac{C_1 R_1}{C_2 R_2}} \quad (106a)$$



Rys. 53.

z którego okazuje się, że w układzie samowzbudnym przy danych opornościach obu obwodów tem łatwiej osiągnąć dużą sprawność, im większa jest pojemność obwodu wtórnego.

Należy tu zwrócić uwagę na fakt, że projektując układ samowzbudny z obwodem pośrednim, raczej należy przewidzieć sprzężność słabszą od krytycznej. Rzut oka na wzór

$$z \leq \frac{1}{\sigma_2} \leq R_2 \sqrt{\frac{C_2}{L_2}}$$

wskazuje, że w razie jakiejś zmiany w obwodzie wtórnym, przypuśćmy zmniejszenia się jego oporności, sprzężność samoczynnie stać się może dla danego układu większą od krytycznej. Przypadek taki może zająć, gdy w obwodzie antenowym stacji nadawczej polepszą się warunki uziemienia. Stwierdza to, jak wrażliwe i niepewne w działaniu są samowzbudne układy sprzężone.

## 12. Zachowanie się obwodów zestrojonych w rezonansie.

Z chwilą, gdy dwa obwody zestrojone pracują na jednej z częstotliwości sprzężenia  $\omega' = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-z}}$  lub  $\omega'' = \frac{\omega_r}{\sqrt{1+z}}$ , to oczywiście każdy z nich jest rozstrojony względem częstotliwości rezonansowej, oba wszakowo w tym samym kierunku. Oporności urojone, występujące w obu

obwodach, da nam następujące przeliczenie: Oporność urojona obwodu pierwotnego wynosi zgodnie z poprzednim

$$X_1 = X_{r1} \left( y - \frac{1}{y} \right).$$

Jeżeli tu podstawimy

$$\omega' = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-z}}, \text{ czyli } y' = \frac{1}{\sqrt{1-z}}, \text{ oraz } \omega'' = \frac{\omega_r}{\sqrt{1+z}}, y'' = \frac{1}{\sqrt{1+z}},$$

to otrzymamy dla częstotliwości *większej oporność indukcyjną*

$$X_1' = \frac{z}{\sqrt{1-z}} X_r = \frac{z}{\sqrt{1-z}} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}, \quad (107)$$

zaś dla częstotliwości *mniejszej oporność pojemnościową*

$$X_1'' = -\frac{z}{\sqrt{1+z}} X_r = -\frac{z}{\sqrt{1+z}} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}. \quad (107 \text{ a})$$

W podobny sposób otrzymamy dla obwodu wtórnego

$$X_2' = \frac{z}{\sqrt{1-z}} \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}, \quad X_2'' = \frac{z}{\sqrt{1+z}} \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}. \quad (108)$$

Wobec tego, że obciążenie bezmocne źródła prądu w rezonansie jest skompensowane, interesuje nas jedynie przesunięcie faz w obwodzie wtórnym. Wynosi ono dla częstotliwości większej

$$\operatorname{tg} \varphi_2' = \frac{X_2'}{R_2} = \sigma_2 \frac{z}{\sqrt{1-z}}, \quad (109)$$

zaś dla częstotliwości mniejszej

$$\operatorname{tg} \varphi_2'' = \frac{X_2''}{R_2} = -\sigma_2 \frac{z}{\sqrt{1+z}}. \quad (109 \text{ a})$$

Prądy wtórne, odpowiadające obu częstotliwościom rezonansowym, są więc przesunięte w fazie względem wtórnej siły elektromotorycznej *w kierunkach przeciwnych*. Jeżeli założymy silną stosunkowo sprzężność i duży współczynnik przepięcia obwodu wtórnego (małe  $R_2$ , duże  $L_2$ ), przyjmując możemy z pewnym przybliżeniem, że to przesunięcie faz wynosi  $\pi/2$ <sup>1)</sup>. Wobec tego, uwzględniając, że  $\hat{E}_2 = -j\omega M \hat{J}_1$ , otrzymamy

$$\hat{J}_2 \cong \frac{-j\omega M \hat{J}_1}{jX_2'} = -\frac{\omega' M}{X_2'} \hat{J}_1 = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \hat{J}_1 \quad (110)$$

<sup>1)</sup> Na tej zasadzie dopuszczalne jest uproszczenie, założone dla wyprowadzenia równania częstotliwości w § 8.

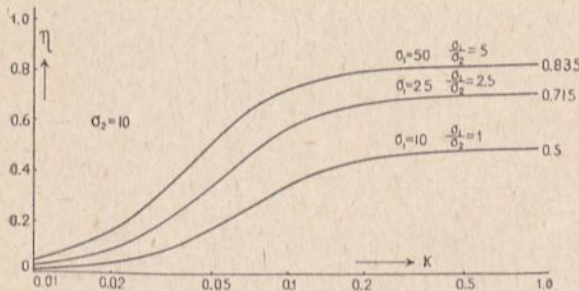
oraz

$$\hat{J}_2'' \cong \frac{-j \omega'' M \hat{J}_1}{-j X_2''} = \frac{\omega'' M}{X_2''} \hat{J} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot \hat{J}. \quad (110a)$$

Z tego wynika, że przy częstotliwości rezonansowej *większej*, prąd wtórny przesunięty jest prawie o  $180^\circ$  względem prądu pierwotnego, zaś przy częstotliwości *mniejszej* prądy są prawie zgodne w fazie.

Jak łatwo się przekonać, dla sprzężności bardzo słabej wtórny prąd rezonansowy opóźniony będzie o  $\pi/2$  względem prądu pierwotnego.

☞ Sprawność dwu obwodów zestrojonych, po uwzględnieniu równań (89) i (108), oraz po odpowiednim przekształceniu wyraża się wzorem



Rys. 54.

$$\eta_i = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2 \sigma_2^2 + (1 - \kappa)}{\kappa^2 \sigma_1 \sigma_2}}. \quad (111)$$

Dla wartości granicznej  $\kappa = 1$ , otrzymujemy stąd

$$\eta_{lim} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}, \quad (111a)$$

najwyższą wartość sprawności, którą przy danym stosunku współczynników przepięcia obu obwodów moglibyśmy osiągnąć, a której jednakże praktycznie urzeczywistnić nie możemy. Wartość ta pokrywa się zresztą ze sprawnością przy sprzężności krytycznej i w rezonansie obwodu wtórnego. Jak wskazują krzywe rys. 54, sprawność ze wzrostem  $\kappa$  dochodzi asymptotycznie do wartości granicznej, zbliżając się do niej stosunkowo szybko.

Tensam wynik otrzymamy, podstawiając  $\kappa = \frac{1}{\delta_2}$  i zakładając  $\frac{1}{\delta_2} \ll 1$ , co zresztą pokrywa się ze wzorem (106) i uczynionem tem zastrzeżeniem.

Jak wynika z tych wzorów, sprawność obwodów zestrojonych silnie sprzężonych również zależna jest od stosunku współczynników przepięć, jak w przypadku sprzężności krytycznej. Jeżeli natomiast nie będziemy zwracali uwagi na zestawienie obwodów, jak to zresztą mamy w praktyce, osiągnąć możemy dowolną sprawność przy obciążeniu bezindukcyjnym źródła (patrz równania 89 i 90).

Obecność oporności urojonej w obwodzie wtórnym dwu obwodów zestrojonych bywa częstym źródłem błędów w niektórych pomiarach radiotechnicznych, w których zakłada się, że w obwodzie wtórnym mamy tylko oporność omową.

### 13. Przykład dla sprzężenia obwodów zestrojonych.

Mamy 2 obwody rezonansowe dostrojone do częstotliwości  $\omega = 10^6$ . Obwody posiadają dane następujące (patrz przykład § 7):

$$R_1 = 2,5 \Omega, R_2 = 5 \Omega, C_2 = 1000 \cdot 10^{-12} F = 10^{-9} F.$$

Obliczyć:

- 1) Sprawność graniczną zestrojenia dla danych według § 7.
- 2) Częstotliwości rezonansowe przy sprzężności  $\kappa = 0,1$  i odpowiadające tym częstotliwościom oporności urojone obwodu wtórnego.
- 3) Sprawność osiągalną przy tej sprzężności.
- 4) Dobranie warunków dla sprawności 0,7 przy sprzężności krytycznej.

- 1) Znajdujemy indukcyjności i pojemności obu obwodów:

Mamy

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 = 10^{-12}$$

Ponadto założyliśmy  $C_2 = 10^{-9} F$ . Stąd mamy

$$L_2 = \frac{10^{-12}}{10^{-9}} = 10^{-3} H = 1 mH.$$

Stąd współczynnik przebiecia obwodu wtórnego

$$\sigma_2 = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{10^{-3}}{10^{-9}}} = 200.$$

Gdybyśmy przyjęli, jak w poprzednim przykładzie,

$$C_1 = 4000 \cdot 10^{-12} F = 4 \cdot 10^{-9} F,$$

otrzymalibyśmy

$$L_1 = \frac{10^{-3}}{4} = 0,25 \cdot 10^{-3} H,$$

a stąd

$$\sigma_1 = \frac{1}{2,5} \sqrt{\frac{0,25 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-9}}} = \frac{0,5}{5} \cdot 10^3 = 100.$$

Stąd graniczna wartość sprawności, jaką moglibyśmy osiągnąć przy zestrojeniu obwodów (wzór 111a), wynosiłaby

$$\eta_{lim} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} = \frac{1}{1 + 2} = 0,33,$$

wobec 0,85 osiągniętych w § 7 przy rozstrojeniu obwodów.

- 2) Zakładając  $\kappa = 0,1$ , to wobec tego że  $0,1 \gg \frac{1}{200}$ , otrzymamy, zgodnie z równaniami (94),

$$\omega' = \frac{10^6}{\sqrt{0,9}} = \frac{10^6}{0,9486} = 1,054 \cdot 10^6,$$

$$\omega'' = \frac{10^6}{\sqrt{1,1}} = \frac{10^6}{1,044} = 0,958 \cdot 10^6.$$

Odpowiadające tym częstotliwościom przesunięcia faz w obwodzie wtórnym otrzymamy z równań (109) i (109a)

$$\operatorname{tg} \varphi_2' = \sigma_2 \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa}} = 200 \cdot \frac{0,1}{0,9487} = 21,08,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2'' = \sigma_2 \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa}} = -200 \cdot 0,0958 = -19,16.$$

Wobec tego większej częstotliwości sprzężenia odpowiada obciążenie indukcyjne w obwodzie wtórnym

$$X_2' = 5 \cdot 21,08 \cong 105,4 \Omega,$$

zaś mniejszej częstotliwości sprzężenia obciążenie pojemnościowe

$$X_2'' = -5 \cdot 19,16 = -95,8 \Omega.$$

Jest więc oczywiste, że w tych warunkach w obliczeniu częstotliwości rezonansowych można pominąć  $R_2$  wobec  $X_2$ .

3) Sprawność, którą osiągniemy w tych warunkach, obliczyć możemy albo z równania (88a), albo z równania (111).

Dla równania (88a) musimy obliczyć

$$M = \kappa \sqrt{L_1 L_2} = 0,1 \cdot \sqrt{1 \cdot 0,25 \cdot 10^{-6}} = 0,05 \cdot 10^{-3} H,$$

oraz dla  $\omega'$ :

$$Z_2'^2 = 5^2 + 105,4^2 \cong 11134, \quad Z_2' \cong 105,5 \Omega,$$

zaś dla  $\omega''$ :

$$Z_2''^2 = 5^2 + 95,8^2 \cong 9200, \quad Z_2'' \cong 96 \Omega.$$

Stąd sprawność dla  $\omega'$ :

$$\eta_1' = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{Z_2'^2}{\omega'^2 M_2}} = \frac{1}{1 + \frac{2,5}{5} \cdot \frac{11134}{\frac{1}{0,9} \cdot 10^{12} \cdot 25 \cdot 10^{-12}}} \cong 0,33,$$

zaś dla  $\omega''$ :

$$\eta_1'' = \frac{1}{1 + \frac{2,5}{5} \cdot \frac{9200}{\frac{1}{1,1} \cdot 10^{12} \cdot 25 \cdot 10^{-10}}} \cong 0,33.$$

Wynik dla obu częstotliwości sprzężenia jest ten sam, co zgadza się z równaniem (111), według którego  $\eta$  jest funkcją wyłącznie  $\alpha$ . Równanie (111) daje ten sam wynik

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^4 + 0,9}{10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^4}} \cong 0,33.$$

Przeliczenia te stwierdzają, że dla tak znacznych wartości współczynników przebiecia, sprzężność 0,1 daje już sprawność, praktycznie pokrywającą się ze sprawnością graniczną.

4) Chcąc osiągnąć sprawność 0,7 w układzie samowzbudnym, a więc przy współczynniku sprzężności nie większym od krytycznego, musieliśmy spełnić warunek (106a), czyli

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{C_1 R_1}{C_2 R_2}},$$

co w naszym przykładzie dałoby stosunek pojemności w obu obwodach

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\eta}{1 - \eta} = 0,5 \cdot 2,33 \cong 1,17.$$

Należałoby więc zwiększyć pojemność obwodu wtórnego, lub też w odpowiednim stosunku zwiększyć pojemność wtórną, a zmniejszyć pierwotną. Wobec tego, że pojemność wtórną stanowi tu pojemność anteny, zwiększenie jej ponad pewną granicę niezawsze jest technicznie możliwe. Z drugiej zaś strony zmniejszenie pojemności pierwotnej zwiększa przebiecie w obwodzie pierwotnym, co pociąga za sobą zastosowanie skuteczniejszej, a więc droższej izolacji. Stąd też osiągnięcie znacznej sprawności w układach samowzbudnych związane jest z poważnymi trudnościami.

Zaznaczyć należy, że równocześnie ze zmianą stosunku  $L$  do  $C$  zmienia się i stosunek oporności w obu obwodach, raczej na naszą niekorzyść.

#### 14. Układy, w których jeden z obwodów nie zawiera pojemności.

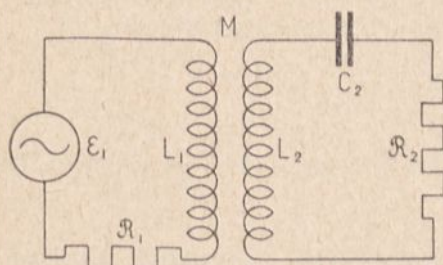
I. W urządzeniach radjotechnicznych często spotykamy się z układami rezonansowymi, w których tylko jeden z obwodów jest strojony. Jeżeli obwód *wtórny jest strojony* (rys. 55), obie oporności składowe odniesione do obwodu pierwotnego wyraża się wzorami

$$R_I = R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2} R_2, \quad (112)$$

$$X_I = \omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2} \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right).$$

Rezonans układu otrzymamy dla  $X_1 = 0$ . Równanie na częstotliwość rezonansową przyjmuje bardzo prostą postać, gdy  $R_2$  możemy pominąć wobec  $\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}$ , co będzie zawsze możliwe, gdy obwód wtórny posiada duży współczynnik przebiecia i jest stosunkowo silnie sprzężony z obwodem pierwotnym. Wówczas mamy

$$\omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} = 0, \text{ czyli } L_1 - \frac{\omega M^2}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} = 0.$$



Rys. 55.

Dzieląc licznik i mianownik drugiego wyrazu lewej strony równania przez  $\omega$  i przedstawiając  $M^2 = \kappa^2 L_1 L_2$ , otrzymamy częstotliwość rezonansową

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2 (1 - \kappa^2)}} = \frac{\omega_{r2}}{\sqrt{1 - \kappa^2}}. \quad (113)$$

Częstotliwość rezonansowa układu jest więc *większa* od częstotliwości rezonansowej obwodu wtórnego.

Dla tego samego założenia ( $R_2 \ll \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}$ ) znajdziemy równoważną oporność omową obwodu pierwotnego, podstawiając  $y_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2}}$ ,

$$R_1 \cong R_1 + \frac{\omega^2 \kappa^2 L_1 L_2}{X_{r2}^2 \left(y_2 - \frac{1}{y_2}\right)^2} R_2 = R_1 + \frac{L_1 R_2}{L_2 \kappa^2}. \quad (114)$$

Opisany układ jest typowy dla nadajników z alternatorami wielkiej częstotliwości. Spotyka go się również często w urządzeniach wzmacniających wielkiej częstotliwości. Tam oczywiście układ obliczony jest nie na dużą sprawność, lecz na maximum przebiecia, co jest równoznaczne z maximum mocy w obwodzie wtórnym. Warunek ten będzie spełniony, gdy  $\omega M = \sqrt{Z_1 Z_2}$  oraz  $\varphi_1 = \varphi_2$ , co się równa warunkowi

$$R_1 = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2.$$

O ile jest  $\omega L_1 \gg R_2$ , czyli gdy oporność indukcyjna jest znacznie większa od oporności wewnętrznej lampy, można zastosować przybliżenia (113) i (114) (ze względu na warunek  $\varphi_1 = \varphi_2$ ). Wówczas będzie

$$R_1 = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{R_2}{\kappa^2}, \text{ czyli } \kappa = \sqrt{\frac{L_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot L_2}}. \quad (115)$$

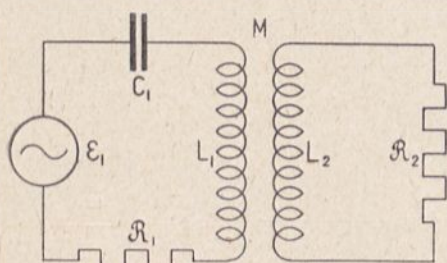
W przeciwnym razie ( $\omega L_1 \ll R_1$ )<sup>1)</sup> mamy przybliżenie  $\omega' \cong \omega_{r2}$ , a wówczas

$$R_1 = \frac{\omega_{r2}^2 M^2}{R_2^2} R_2, \text{ czyli } \omega_{r2} M = \sqrt{R_1 R_2}, \quad (116)$$

albo też

$$\% = \frac{1}{\omega_{r2}} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{R_1 R_2 C_2}{L_1}}. \quad (116 a)$$

II. Jeżeli *obwód pierwotny jest strojony* (rys. 56), określają go równania:



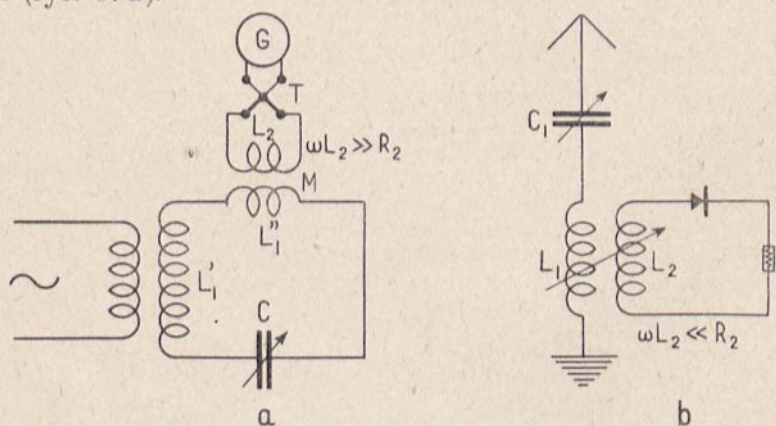
Rys. 56.

$$R_l = R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} R_2,$$

$$X_l = \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) - \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \omega L_2. \quad (117)$$

Rozważając ten układ, rozróżnić należy dwa przypadki skrajne:

1. Oporność omowa obwodu wtórnego jest znacznie większa od jego oporności indukcyjnej ( $\omega L_2 \ll R_2$ ). Przypadek ten praktycznie jest urzeczywistniony w tak zwanych *obwodach detekcyjnych*, zawierających detektor stykowy lub lampowy i używanych do celów odbiorczych i mierniczych (rys. 57 b).



Rys. 57.

2. Oporność omową obwodu wtórnego można pominąć wobec jego oporności indukcyjnej. Warunek ten spełniają przeważnie obwody detekcyjne, zawierające ogniwo termoelektryczne o oporności rzędu kilku do kilkunastu omów (rys. 57 a).

<sup>1)</sup> Warunek ten zawsze będzie spełniony w układach z lampą ekranowaną.



Obwody tego typu stosuje się przeważnie ze sprzężnością dającą maximum mocy lub też znacznie słabszą (przy takich pomiarach, gdzie uniknąć chcemy zmiany warunków w obwodzie mierzonym).

W pierwszym przypadku ( $\omega L_2 \ll R_2$ ) warunek maximum mocy będzie spełniony, gdy

$$R_1 \cong \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2} R_2, \text{ czyli } \omega M = \sqrt{R_1 R_2}, \quad (118)$$

zaś częstotliwość rezonansowa układu będzie praktycznie częstotliwością rezonansową obwodu pierwotnego.

W drugim przypadku warunkowi maximum mocy odpowiada

$$R_1 \cong \frac{\omega^2 M^2}{\omega^2 L_2^2} R_2 = \frac{M^2}{L_2^2} R_2, \quad (119)$$

zaś częstotliwość rezonansowa układu wynosi

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1 (1 - \kappa^2)}} = \frac{\omega_{r1}}{\sqrt{1 - \kappa^2}}. \quad (120)$$

Jak wynika z równania (119), w układzie o małej oporności warunek maximum mocy w szerokich granicach jest niezależny od częstotliwości (o ile tylko  $\omega L_2 \gg R_2$ ), co posiada doniosłe znaczenie dla techniki mierniczej.

Tego rodzaju sprzężenia niestrojone pozwalają bowiem włączać w obwód rezonansowy przyrządy miernicze o dużej stosunkowo oporności, nie pogarszając zbyt ostrości rezonansu obwodu i to dla szerokich zakresów częstotliwości. Spotykamy je również jako transformatory miernicze dla amperomierzy w urządzeniach nadawczych.

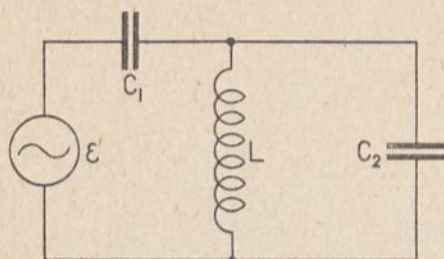
Ścisłe biorąc, w radjotechnice nie spotykamy obwodów bezpojemnościowych, każda bowiem zwojnica posiada pojemność własną, którą uważać możemy za przyłączoną do niej równolegle. Jednakże, o ile częstotliwość rezonansowa takiego układu leży znacznie wyżej od jego częstotliwości roboczych, uważać możemy przybliżenie, założone powyżej, za dostatecznie dokładne.

## 15. Obwody sprzężone bezpośrednio.

Wszystkie zależności, wyprowadzone dla układu sprzężonego pośrednio odnoszą się również do układu (rys. 40 b), w którym sprzężenie indukcyjne dochodzi do skutku za pośrednictwem indukcyjności  $L_m$ , wspólnej obu obwodom. Pewne różnice, wynikające stąd że w części  $L_m$  obwodu znajduje się również oporność omowa, można pominąć w urządzeniach radjotechnicznych, w których zawsze będziemy mieli  $\omega L \gg R$ . Tak więc wzory, wyprowadzone poprzednio, można zastosować do układu autotransformatorowego, zastępując wyrażenie  $\omega M$  przez  $\omega L_m$ .

Istnieją dwa szczególne przypadki obwodów sprzężonych bezpośrednio:

1. Układ, w którym całkowita indukcyjność jest wspólna obu obwodom (rys. 58). Odpowiada temu  $z = 1$ , a jedyna dla tego układu częstotliwość rezonansowa (z pominięciem oporności omowych) wynosi.



Rys. 58.

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}. \quad (121)$$

Gdy zaś obwody są zestrojone, czyli  $C_1 = C_2 = C$ , częstotliwość rezonansowa wyraża się wzorem

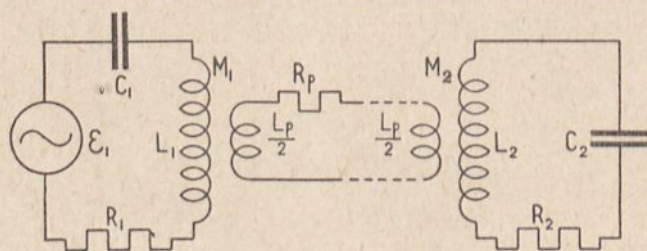
$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = \frac{\omega_r}{\sqrt{2}}. \quad (121 a)$$

2. Drugim skrajnym przypadkiem obwodów sprzężonych autotransformatorowo są obwody *rezonansu prądów*, zawierające w jednej z gałęzi samą indukcyjność (rys. 10 i 13), które rozpatrywane były w rozdziale I-ym. Sprowadzają się one do przypadku, gdy zarówno indukcyjność, jak i pojemność w całości znajdują się w obwodzie wtórnym.

## 16. Kilka obwodów sprzężonych kaskadowo.

W praktyce często spotyka się układy, w których mamy kilka obwodów sprzężonych kaskadowo jeden za drugim. Stosujemy wówczas tę samą metodę, którą stosowaliśmy do dwu obwodów. A mianowicie najpierw przenosimy oporność obwodu ostatniego na przedostatni, następnie wartości równoważne obu obwodów przenosimy na obwód poprzedni i t. d., aż dojdziemy do obwodu pierwotnego.

Jako przykład obierzemy dwa obwody rezonansowe, sprzężone za



Rys. 59.

pośrednictwem tak zwanej *pętli* (rys. 59), układ bardzo rozpowszechniony w miernictwie radjotechnicznym dla osiągnięcia bardzo słabych sprzężeń.

Przyjmując, że pętla zawiera dwie równe zwojnice, każda o indukcyjności  $L_p/2$ , obliczymy wpieryw oporności obwodu wtórnego, przeniesione na pętlę, a następnie oporności równoważne obwodu i pętli przeniesione

na obwód pierwotny. Będziemy tu mieli, stosując oznaczenia rys. 59-go, oporności składowe odniesione do pętli

$$R'_p = R_p + \frac{\omega^2 M_2^2}{Z_2^2} R_2,$$

$$X'_p = \omega L_p - \frac{\omega^2 M_2^2}{Z_2^2} X_2.$$

Stąd oporność pozorną pętli obciążonej

$$Z'_p = R'_p + j X'_p,$$

lub też w wartościach skalarnych

$$Z'_p = \sqrt{R_p'^2 + X_p'^2}.$$

Stąd obliczymy oporności równoważne, odniesione do obwodu pierwotnego

$$R_I = R_1 + \frac{\omega^2 M_1^2}{Z_p'^2} \left( R_p + \frac{\omega^2 M_2^2}{Z_2^2} R_2 \right), \quad (122)$$

$$\begin{aligned} X_I &= X_1 - \frac{\omega^2 M_1^2}{Z_p'^2} \left( \omega L_p - \frac{\omega^2 M_2^2}{Z_2^2} X_2 \right) = \\ &= X_1 - \frac{\omega^2 M_1^2}{Z_p'^2} \omega L_p + \frac{\omega^2 M_1^2}{Z_p'^2} \cdot \frac{\omega^2 M_2^2}{Z_2^2} X_2. \end{aligned} \quad (122a)$$

Równoważna oporność urojona, przeniesiona do obwodu pierwotnego, składa się więc z dwu czynników: jednego o znaku ujemnym, drugiego o znaku dodatnim. Stąd kompensacja faz może być osiągnięta przy różnych wartościach bezwzględnych obu składników, gdyż jedynie ich różnica musi znosić się z opornością urojoną obwodu pierwotnego.

Jeżeli oporność omowa pętli możemy pominąć wobec jej indukcyjności, co zresztą odpowiada warunkom praktycznym, całkowita oporność omowa, odniesiona do obwodu pierwotnego wynosi

$$R_I = R_1 + \frac{\omega^2 M_1^2}{Z_p'^2} \cdot \frac{\omega^2 M_2^2}{Z_2^2} R_2. \quad (123)$$

Jeżeli we wzorze tym podstawimy

$$M_1^2 = \kappa_1^2 L_1 L_p \text{ oraz } M_2^2 = \kappa_2^2 L_p L_2,$$

to otrzymamy

$$R_I = R_1 + \frac{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \omega^4 L_1 L_2 L_p}{Z_p'^2 Z_2^2} R_2. \quad (123a)$$

Z równania (123a) wynika, że w tym przypadku współczynnik sprzężności obwodu trzeciego z pierwszym (odniesiony do oporności rze-

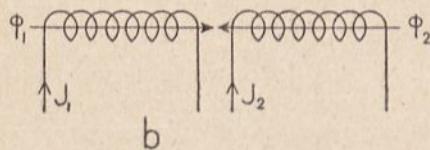
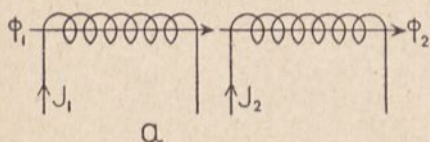
czywistej) równy jest iloczynowi obu składowych współczynników sprzężności.

W analogiczny sposób, jak rozwiązaliśmy układ z pętlą, rozwiązać można dowolny układ trzech obwodów sprzężonych. W praktyce radjotechnicznej spotyka się szereg takich układów, w których np. obwód pierwotny jest niestrojony, zaś oba następne są obwodami strojonymi (niektóre generatory lampowe z obwodem pośrednim), lub też oba pierwsze obwody są rezonansowe, a ostatni niestrojony (jak odbiorniki detektorowe z obwodem pośrednim).

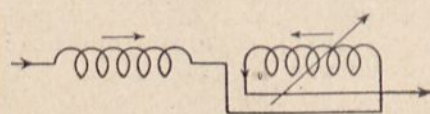
## 17. Indukcyjność wzajemna dodatnia i ujemna.

Znak algebraiczny współczynnika indukcji wzajemnej określić można w sposób następujący (rys. 60).

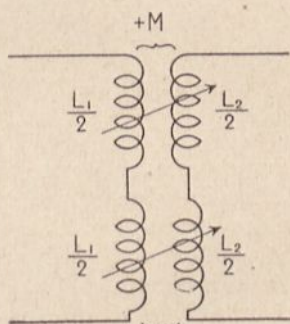
Jeżeli w układzie dwu zwojnic prądy płynące w tym samym kierunku wytwarzają *strumienie magnetyczne zgodne* (rys. 60a), indukcyjność wzajemna, występująca między nimi, posiada znak *dodatni*.



Rys. 60.



Rys. 61.



Rys. 62.

Jeżeli natomiast prądy te wytwarzają *strumienie o kierunkach przeciwnych*, (rys. 60 b), indukcyjność wzajemna posiada znak *ujemny*. Ujemny współczynnik indukcji wzajemnej mają np. dwie zwojnice z których jedna jest nawinięta lewoskrętnie, a druga prawoskrętnie, lub też, gdy jedna ze zwojnic ma krzyżujące się doprowadzenia (rys. 61). Dzięki temu w każdym układzie zwojnic możemy otrzymać indukcyjność wzajemną dodatnią lub ujemną, przelączając końce jednej ze zwojnic lub też odwracając jej położenie względem drugiej zwojnicy.

Znak algebraiczny indukcyjności wzajemnej posiada znaczenie

fizyczne jedynie, gdy oba obwody skojarzone są ze sobą jeszcze w inny sposób. I tak bardzo ważny jest on w układzie samowzbudnego generatora lampowego, gdzie poza sprzężeniem indukcyjnym mamy sprzężenie przez lampę oraz wspólny punkt uziemienia obwodów. Wykorzystuje się go też w t. zw. *warjometrach indukcyjności własnej*<sup>1)</sup>, utworzonych z połączonych szeregowo — jednej zwojnicy stałej i drugiej ruchomej, mogącej obracać się o 360°, jak na rys. 61. Przy pomocy takiego przyrządu otrzymać można indukcyjność zmienną w sposób ciągły w granicach od

$$L_{min} = L_1 + L_2 - 2M, \quad (124)$$

do

$$L_{max} = L_1 + L_2 + 2M.$$

Typowym przykładem wykorzystania ujemnego współczynnika indukcji wzajemnej jest układ rys. 62, stosowany przez T-wo Marconiego, do nadawania znaków telegraficznych w generatorach lampowych ze wzbudzeniem obcem. A mianowicie dzięki zrównoważeniu sprzężenia dodatniego z ujemnym suma sił elektromotorycznych w obwodzie wtórnym równa się zeru. Dopiero po zwarceniu jednej ze zwojnic w obwodzie pierwotnym lub wtórnym jedna z kompensujących się sił elektromotorycznych znika i druga z nich występuje czynnie w obwodzie wtórnym.

Wzory (124) i układ rys. 61 mogą posłużyć do pomiaru indukcyjności wzajemnej. A mianowicie mierzymy wpierv całkowitą indukcyjność układu przy sumujących się strumieniach, następnie przełączamy końce jednej ze zwojnic i mierzymy znowu indukcyjność układu. Stąd obliczamy

$$M = \frac{L_{max} - L_{min}}{4}. \quad (125)$$

## 18. Sprzężenia pojemnościowe.

Sprzężenia pojemnościowe spotyka się w radjotechnice tak w postaci wyraźnej, uskutecznione przy pomocy kondensatorów, jak też i pod postacią przygodną, naskutek pojemności, występującej między częściami konstrukcyjnymi różnych obwodów. Wpływ tych pojemności przypadkowych, zmieniających nieraz charakter zjawisk w obwodach szybkozmiennych, jest tem większy, im większa jest częstotliwość prądów, płynących w układzie.

Sprzężenia pojemnościowe sprowadzić można do dwu postaci zasadniczych:

1) *Sprzężenia pojemnościowego bezpośredniego*, jak na rys. 40c, gdy oba obwody są połączone przewodząco.

2) *Sprzężenia pojemnościowego pośredniego* (rys. 63a), gdy obwody są oddzielone od siebie kondensatorami sprzężenia. Do tej postaci sprowadzają się przeważnie sprzężenia przypadkowe.

<sup>1)</sup> Patrz Część II.

1) Sprzężenie bezpośrednie rozwiązuje się bardzo prosto na zasadzie wzorów (72a), jeżeli jako oporność sprzężenia podstawimy wielkość

$$X_m = -j \frac{1}{\omega C_m}. \quad (126)$$

Otrzymujemy wówczas oporności równoważne:

$$\begin{aligned} R_I &= R_1 + \frac{R_2}{\omega^2 C_m^2 Z_2^2}, \\ X_I &= X_1 - \frac{X_2}{\omega^2 C_m^2 Z_2^2}. \end{aligned} \quad (127)$$

Jeśli oba obwody są rezonansowe, oporności urojone obu obwodów wyrażają się w postaci

$$X_I = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_I}, \quad X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_{II}},$$

gdzie  $C_I$  i  $C_{II}$  są pojemnościami wypadkowymi obu obwodów, pojętych zgodnie z § 1 tego rozdziału:

$$C_I = \frac{C_1 C_m}{C_1 + C_m}; \quad C_{II} = \frac{C_2 C_m}{C_2 + C_m}. \quad (128)$$

Współczynnik sprzężności tych obwodów, zgodnie z ogólną definicją, wynosi

$$z = \frac{1}{\omega C_m} : \sqrt{\frac{1}{\omega C_I} \cdot \frac{1}{\omega C_{II}}} = \sqrt{\frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_m)(C_2 + C_m)}}, \quad (129)$$

zaś częstotliwości obu obwodów są:

$$\begin{aligned} \omega_{r1} &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_I}} = \sqrt{\frac{C_1 + C_m}{L_1 C_1 C_m}}, \\ \omega_{r2} &= \frac{1}{\sqrt{L_2 C_{II}}} = \sqrt{\frac{C_2 + C_m}{L_2 C_2 C_m}}. \end{aligned} \quad (130)$$

Warunek maximum mocy w obwodzie wtórnym wyprowadzamy analogicznie, jak w przypadku sprzężenia indukcyjnego

$$\frac{1}{\omega^2 C_m^2} = Z_1 Z_2, \quad (131)$$

zaś warunek kompensacji faz z równania (127)

$$X_1 = \frac{X_2}{\omega^2 C_m^2 Z_2^2}. \quad (132)$$

Z równania (132), po podstawieniu wartości (129) i (130) otrzymujemy równanie częstotliwości, które daje wyniki podobne, jak równanie częstotliwości obwodów sprzężonych indukcyjnie. O ile możemy pominąć oporność omową obwodu wtórnego wobec jego oporności urojonej w rezonansie układu, otrzymujemy częstotliwości rezonansowe dla obwodów rozstrojonych.

$$\omega' = \sqrt{\frac{\omega_{r_1}^2 + \omega_{r_2}^2 + \sqrt{(\omega_{r_1}^2 - \omega_{r_2}^2)^2 + 4z^2 \omega_{r_1}^2 \omega_{r_2}^2}}{2}}, \quad (133)$$

$$\omega'' = \sqrt{\frac{\omega_{r_1}^2 + \omega_{r_2}^2 - \sqrt{(\omega_{r_1}^2 - \omega_{r_2}^2)^2 + 4z^2 \omega_{r_1}^2 \omega_{r_2}^2}}{2}}.$$

Stąd dla obwodów zestrojonych ( $\omega_{r_1} = \omega_{r_2}$ ) otrzymamy częstotliwości rezonansowe:

$$\omega' = \omega_r \sqrt{1 + z}; \quad \omega'' = \omega_r \sqrt{1 - z}. \quad (133a)$$

Należy tu podkreślić, że w tym układzie obwodów sprzężonych *sprężność jest tem silniejsza, im mniejsza jest pojemność  $C_m$* . Dla  $C_m = 0$  otrzymujemy  $z = 1$  i wówczas mamy

$$\omega' = \omega_r \sqrt{2}. \quad (133b)$$

Gdy wreszcie indukcyjności obu obwodów są równe ( $L_1 = L_2$ , co wobec warunku  $\omega_{r_1} = \omega_{r_2}$  pociąga za sobą warunek  $C_1 = C_2$ ) jak to się często spotyka w obwodach odbiorczych, wykonanych jako już wspomniane filtry widmowe<sup>1)</sup>, wówczas

$$\omega' = \sqrt{\frac{2 C_1 + C_m}{L_1 C_1 C_m}}, \quad \omega'' = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (133c)$$

Jak widać, jedną z częstotliwości rezonansowych jest częstotliwość własna obwodu pierwotnego, niezależnie od sprzężności między oboma obwodami.

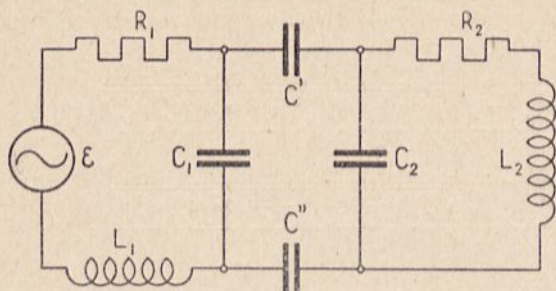
Skrajny przypadek sprzężenia pojemnościowego bezpośredniego otrzymujemy, gdy obwód pierwotny nie zawiera indukcyjności. Wówczas układ sprzężony sprowadza się do obwodu rezonansu prądu, odpowiadającego rys. 14 i 15 (rozdz. I). Ściśle biorąc, układ typowy rezonansu prądu (rys. 10) również dobrze uważać możemy jako sprzężony tak indukcyjnie, jak i pojemnościowo.

2) *Sprężenie pośrednie*. W układzie tym (rys. 63a) zastąpić można pojemności sprzężenia  $C'$  i  $C''$  jedną pojemnością wypadkową (rys. 63b).

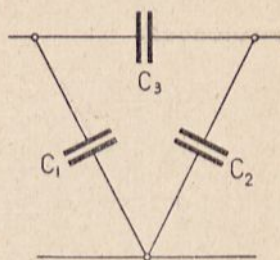
$$C_3 = \frac{C' C''}{C' + C''}, \quad (134)$$

<sup>1)</sup> Patrz § 9, tego rozdziału.

dzięki czemu można go sprowadzić do postaci podanej na rys. 64, a więc ostatecznie również do *sprzężenia bezpośredniego*. Pojemnością sprzężenia jest tu pojemność obwodu pierwotnego  $C_1$ , zaś obwodem wtórnym jest pojemność  $C_3$  połączona w szereg z obwodem rezonansu prądów  $L_2 C_2 R_2$ .



Rys. 63 a.

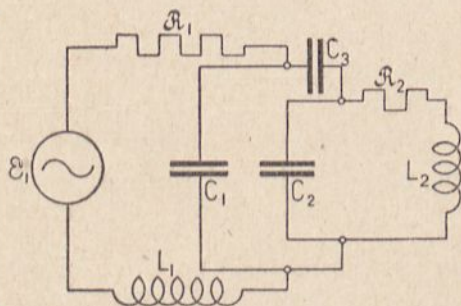


Rys. 63 b.

Układ ten można rozwiązać stosunkowo prosto, gdy pominiemy oporność omową obwodu wtórnego. Wówczas mamy oporność zastępczą obwodu  $L_2 C_2$ :

$$\hat{Z} = jX_2 = \frac{j\omega L_2 \left(-j \frac{1}{\omega C_2}\right)}{j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} = -j \frac{L_2}{C_2} \cdot \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}},$$

zaś oporność zastępcza całego układu, utworzonego przez kondensator  $C_1$ ,



Rys. 64.

i dołączoną do niego gałąź równoległą, wynosi:

$$\hat{Z}_2 = -j \frac{\frac{1}{\omega C_1} \left( \frac{1}{\omega C_3} + \frac{L_2}{C_2} \cdot \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \right)}{\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_3} + \frac{L_2}{C_2} \cdot \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}}$$



Warunek rezonansu będzie spełniony, gdy będzie

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \cdot \left( \frac{1}{\omega C_3} + \frac{L_2}{C_2} \cdot \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \right) = 0.$$

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_3} + \frac{L_2}{C_2} \cdot \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} = 0.$$

Jeżeli w równaniu tem założymy:

$$y = \frac{\omega}{\omega_{r1}}, \quad \omega_{r1} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \omega_{r2} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}},$$

dochodzimy do postaci

$$y^4 \left( \frac{1}{\omega_{r2}^2 C_1} + \frac{1}{\omega_{r2}^2 C_3} + \frac{1}{\omega_{r2}^2 C_2} \right) -$$

$$- y^2 \left( \frac{1}{\omega_{r1}^2 C_1} + \frac{1}{\omega_{r1}^2 C_3} + \frac{1}{\omega_{r2}^2 C_2} + \frac{1}{\omega_{r2}^2 C_3} \right) + \frac{1}{\omega_{r1}^2 C_3} = 0.$$

Zakładając  $\omega_{r1} = \omega_{r2} = \omega_r$  (zestrojenie obu obwodów), oraz podstawiając

$$A = \frac{1}{\omega_r^2 C_1} + \frac{1}{\omega_r^2 C_3} + \frac{1}{\omega_r^2 C_2}, \quad B = \frac{1}{\omega_r^2 C_3},$$

dochodzimy do rozwiązania

$$y^2 = \frac{(A+B) \pm \sqrt{(A+B)^2 - 4AB}}{2A} = \frac{A+B \pm (A-B)}{2A},$$

które po podstawieniu odnośnych wartości daje

$$y' = 1, \quad \text{czyli } \omega' = \omega_r,$$

oraz

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{\frac{C_3}{C_1} + \frac{C_3}{C_2} + 1}}, \quad \text{czyli } \omega'' = \omega_r \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{C_3}{C_1} + \frac{C_3}{C_2} + 1}}.$$

Wynika stąd, że jedną z częstotliwości rezonansowych układu jest zawsze częstotliwość rezonansowa obwodów zestrojonych.

W przeciwieństwie do sprzężenia pojemnościowego bezpośredniego, sprzężność w układzie o sprzężeniu pośrednim rośnie ze wzrostem pojemności sprzężenia  $C_3$ .

Dowodzi tego wzór na współczynnik sprzężności<sup>1)</sup>

$$z = \frac{C_3}{\sqrt{(C_1 + C_3)(C_2 + C_3)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{C_1}{C_3} + 1\right)\left(\frac{C_2}{C_3} + 1\right)}}. \quad (136)$$

Sprężenie pojemnościowe chętnie stosuje się tam, gdzie zależy na usunięciu wpływu prądu o większych częstotliwościach niż częstotliwość robocza, jak np. wyższych harmonicznych tej częstotliwości. Albowiem podczas gdy sprzężenie indukcyjne daje wtórna siłę elektromotoryczną, proporcjonalną do częstotliwości, to sprzężenie pojemnościowe daje siły elektromotoryczne odwrotnie proporcjonalne do częstotliwości. A więc w porównaniu ze sprzężeniem indukcyjnym układ pojemnościowy daje nam w obwodzie wtórnym harmoniczne, osłabione w stosunku do kwadratu rzędu harmoniczej<sup>2)</sup>.

Z tego też powodu krzywe rezonansu obwodów sprzężonych pojemnościowo dają rzędne stosunkowo wyższe dla częstotliwości mniejszych od rezonansu, a niższe dla częstotliwości większych — a więc posiadają asymetrię odwrotną niż krzywe obwodów sprzężonych indukcyjnie.

1) Przeliczenie:

Równoważne oporności charakterystyczne (pojemnościowe) obu obwodów wynoszą:

$$X_{c_1} = \frac{\frac{1}{\omega C_1} \left( \frac{1}{\omega C_2} + \frac{1}{\omega C_3} \right)}{\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2} + \frac{1}{\omega C_3}} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{C_2 + C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}, \quad (a)$$

$$X_{c_2} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{C_1 + C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}. \quad (b)$$

Oporność charakterystyczną obwodu pierwszego możemy wyrazić sumą

$$X_{c_1}^v = X_a + X_m, \quad \text{przyczem } X_a : X_m = \frac{1}{C_3} : \frac{1}{C_2},$$

skąd

$$X_m = \frac{C_3}{C_2 + C_3} X_{c_1}. \quad (c)$$

Podstawiając (a), (b) i (c) do wzoru (73), mamy

$$z = \frac{X_m}{\sqrt{X_{c_1} X_{c_2}}} = \frac{C_3}{C_2 + C_3} \sqrt{\frac{X_{c_1}}{X_{c_2}}} = \frac{C_3}{\sqrt{(C_1 + C_3)(C_2 + C_3)}}.$$

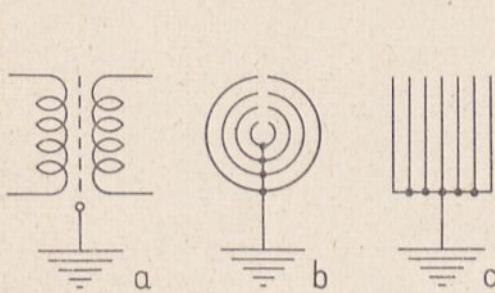
2) R. V. Hansford i H. Faulkner, patrz cytata na str. 16.

## 19. Odsprężenie.

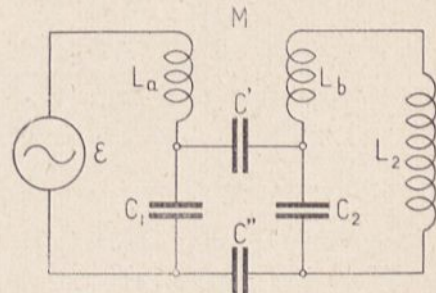
W wielu przypadkach zachodzi konieczność usunięcia wzajemnego oddziaływania na siebie dwu obwodów, lub też, gdy oddziaływanie takie dochodzi do skutku różnymi drogami, ograniczenia tego wpływu tylko do jednego sposobu sprzężenia. Wówczas stosuje się środki, mające na celu *odsprężenie* obwodów. Jako przykłady można przytoczyć: oddziaływanie pojemnościowe dwu sąsiadujących anten, szczególnie nadawczych, sprzężenie dwu obwodów przez pojemność wewnętrzną lampy trójelektrodowej, oraz sprzężenie pojemnościowe, występujące między zwojniami układu sprzężonego indukcyjnie.

Do usunięcia tego rodzaju sprzężeń niepożądanych stosuje się jeden z następujących sposobów:

1) *Oslony elektryczne* między zwojnicami, gdy zamierzamy usunąć niepożądane sprzężenie pojemnościowe (rys. 65a). Oslona musi tu być tak wykonana, aby w niej nie mogły powstawać zamknięte obwody prądów



Rys. 65.



Rys. 66.

wirowych, wówczas bowiem osłona przesłaniałaby również magnetycznie i byłaby źródłem dodatkowych strat. Przykłady takich osłon podane są na rys. 65 b. i c.

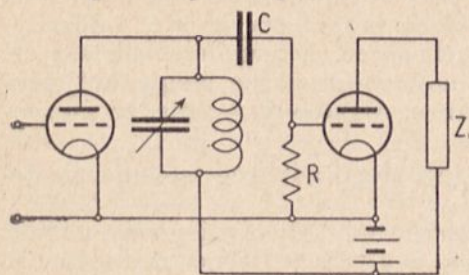
2) *Przeciwsprężenia*<sup>1)</sup> polegające na wprowadzeniu do obwodu siły elektromotorycznej o równej amplitudzie i odwrotnej fazie. Typowym przykładem przeciwsprężenia jest kompensacja sprzężeń pojemnościowych przy pomocy sprzężenia indukcyjnego (rys. 40 d i rys. 66). Układ rys. 66 może być zastosowany do dwu anten sprzęgających się pojemnościowo. Zrównoważenie osiągnąć tu można oczywiście tylko dla określonej częstotliwości.

3) *Układy mostkowe*, opierające się na zasadzie mostka Wheatstone'a o opornościach urojonych. Układy mostkowe pozwalają kompensować niepożądane sprzężenie przy pomocy sprzężenia tego samego typu, a więc np. pojemnościowe—pojemnościowym, dzięki czemu kompensacja taka w szerokich granicach jest niezależna od częstotliwości. Układy mostkowe są szeroko stosowane w urządzeniach lampowych dla równoważenia pojemności wewnętrznej lamp trójelektrodowych.

<sup>1)</sup> Patrz m. i. S. Manczarski, Przegl. Radj. 1930. Z. 17 i nast.

## 20. Sprężenie oporowe.

Jak wynika ze wzorów (72b), podanych w § 1-szym tego rozdziału, przy sprężeniu oporowym oporność rzeczywista obwodu wtórnego przenosi się do pierwotnego ze znakiem ujemnym, urojona zaś z dodatnim. Wobec tego kompensacja faz może nastąpić jedynie wówczas, gdy *oporności urojone obu obwodów posiadają znaki przeciwne*. Istnieje też tylko jedna częstotliwość rezonansowa która przy zestrojeniu obwodów równa się częstotliwości rezonansowej tych obwodów. Gdy obwody są rozstrojone, to —



Rys 67.

jak wynika z poprzednio powiedzianego — częstotliwość rezonansowa leży między częstotliwościami rezonansowymi obu obwodów.

$$\omega_{r1} \leq \omega_r \leq \omega_{r2}.$$

Sprężenie oporowe obwodów rezonansowych spotyka się bardzo rzadko, rozpowszechnione są natomiast sprężenia t. zw. oporowo-pojemnościowe w układach lampowych, gdzie zależy na oddzieleniu obwodów prądu stałego. Typowe sprężenie tego rodzaju mamy na rys. 67.

## 21. Stany przejściowe w obwodach sprzężonych. Teoria Bjerknesa.

Przebiegi w obwodach sprzężonych stają się o wiele zawilsze z chwilą, gdy obwody te są zasilane drganiami swobodnymi o charakterze gasnącym. Teoria drgań gasnących w obwodach sprzężonych, chociaż dziś już nie posiada tak doniosłego znaczenia praktycznego, jak w okresie rozkwitu systemów iskrowych, nie straciła jednakże doniosłości pedagogicznej, pozwala bowiem wnikać głębiej w zjawiska przejściowe, zachodzące w układach sprzężonych.

Ogólny przypadek drgań swobodnych w obwodach sprzężonych indukcyjnie daje nam układ równań:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \frac{di_2}{dt} + v_1 &= 0, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} + v_2 &= 0, \end{aligned} \quad (137)$$

w których  $v_1$  i  $v_2$  są napięciami na kondensatorach obu obwodów.

Jeżeli sprzężność między obwodami jest bardzo słaba, tak iż oddziaływanie obwodu wtórnego na pierwotny możemy pominąć, obwód wtórny można rozpatrywać niezależnie, jako pozostający pod działaniem siły elektromotorycznej wtórnej (V. Bjerknesa)

$$c_2 = -M \frac{di_1}{dt} = E_2 \varepsilon^{-\delta_1 t} \cos(\omega_{01} t + \varphi_1).$$

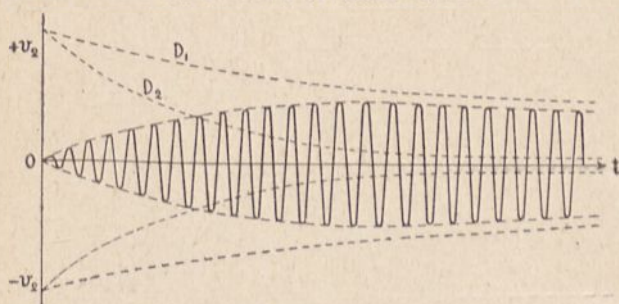
Równanie napięć w obwodzie wtórnym posiada więc postać

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + v_2 = E_2 \varepsilon^{-\delta_2 t} \cos(\omega_{01} t + \varphi_1). \quad (137 a)$$

Rozwiązuje się ono podobnie jak równanie (47) w rozdziale II-gim daje więc w wyniku dwa drgania:

- a) *swobodne* o częstotliwości własnej obwodu wtórnego,
- b) *wymuszone*, o częstotliwości własnej obwodu pierwotnego.

Układ będzie się zachowywał różnie, zależnie od stosunku dekrementów obu obwodów. A mianowicie:



Rys. 68.

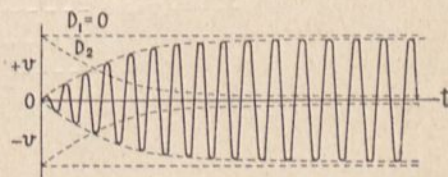
1) Jeżeli drgania obwodu wtórnego są silnie tłumione, natomiast drgania wymuszone posiadają tłumienie słabe, to po pewnym czasie drgania swobodne zanikną, a obwód wtórny będzie drgał drganiami wymuszonymi (rys. 68). W szczególności, jeżeli dekrement drgań obwodu pierwotnego jest róż-

wny zeru (drgania niegasnące), w obwodzie wtórnym po okresie przejściowym ustalają się drgania o stałej amplitudzie, czyli przebieg sprowadza się do równania (47), rys. 69.

2) Jeżeli tłumienie drgań pierwotnego obwodu jest duże w porównaniu z tłumieniem obwodu wtórnego, wówczas oczywiście drgania wymuszone znikają wcześniej, a obwód wtórny drga swobodnie z częstotliwością własną (rys. 72). Na tem zjawisku opiera się *wzbudzenie bodźcze* M. Wien'a (1906), o którym mowa będzie w następnym paragrafie.

Z rozważań poprzednich wynika, że w obwodzie wtórnym zawsze ustalają się te drgania, których tłumienie jest mniejsze.

Wartość skuteczną prądu wtórnego, składającego się również z dwu drgań gasnących wyrazić można przy słabej sprzężności i małym tłumieniu obu obwodów ( $D_1 + D_2 \ll 2\pi$ ) wzorem przybliżonym (wzór Bjerknæs'a)



Rys. 69.

$$J_2^2 = n \int_0^{\infty} i^2 dt = \frac{n V_{02}^2}{16 \omega_1^2 L_1^2} \cdot \frac{D_1 + D_2}{D_1 D_2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{D_1 + D_2}{2\pi}\right)^2}, \quad (a)$$

w którym  $n$  — częstość iskier,  $V_{02}$  — napięcie wtórne, odpowiadające pierwszej amplitudzie prądu pierwotnego.

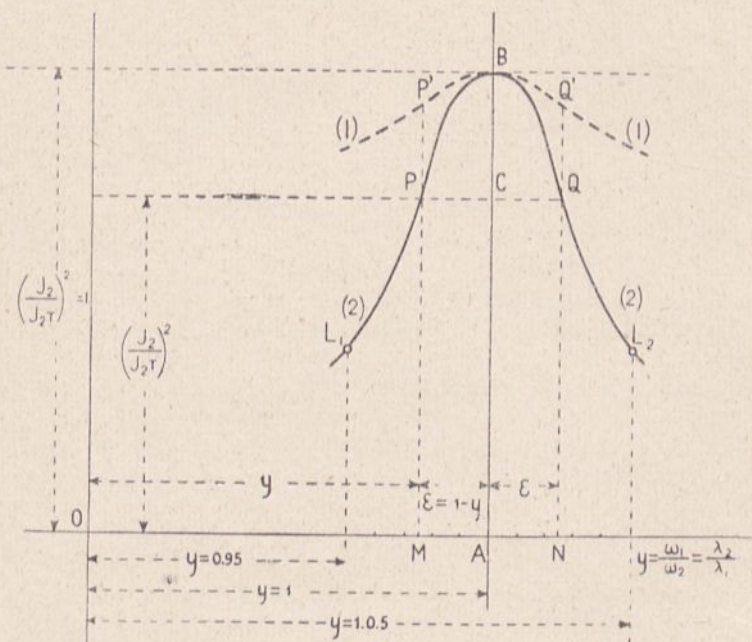
Gdy oba obwody są zestrojone, częstotliwość drgań wymuszonych

równa się częstotliwości drgań własnych obwodu wtórnego, dzięki czemu oba drgania sumują się, dając maksymalną wartość prądu wtórnego. Wówczas równanie (a) sprowadza się do postaci

$$J_{2r}^2 = \frac{nV_{02}^2}{16\omega_2 L_1^2} \cdot \frac{4\pi^2}{D_1 D_2 (D_1 + D_2)} \quad (b)$$

Z równań (a) i (b) otrzymujemy równanie krzywej rezonansu drgań gasnących (krzywa Bjerkes'a, rys. 70).

$$\left(\frac{J_2}{J_{2r}}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2}{(D_1 + D_2)^2} \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} \quad (138)$$



Rys. 70.

Z równania krzywej rezonansu obliczyć możemy sumę dekrementów logarytmicznych obwodu pierwotnego i wtórnego

$$D_1 + D_2 = 2\pi \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \sqrt{\frac{J_2^2}{J_{2r}^2 - J_2^2}} = 2\pi \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{J_{2r}}{J_2}\right)^2 - 1}} \quad (138 a)$$

Pozwala ono obliczyć dekrement obwodu wzbudzonego zapomocą drgań o znanym tłumieniu. Metoda ta posiadała bardzo doniosłe znaczenie dla pomiaru oporności skutecznej obwodów radjotechnicznych, w okresie gdy jako źródła prądu dla celów pomiarowych używano obwodu, wzbudza-

nego przy pomocy brzęczyka. Mając do rozporządzenia źródło drgań niegasnących, posługiwać się możemy przy pomiarach oporności wzorem (7) rozdziału I-go.

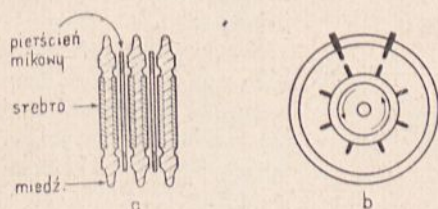
Podkreślić należy, że ze względu na uproszczenia, zastosowane przy wyprowadzeniu równania Bjerkes'a pomiary wykonywane na jego zasadzie są dokładne, o ile:

- 1) sprzężność jest bardzo słaba,
- 2) suma dekrementów tłumienia  $(D_1 + D_2) \leq 0,2$ ,
- 3) rozstrojenie  $\epsilon = \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 \right)$  nie przekracza wartości 0,05.

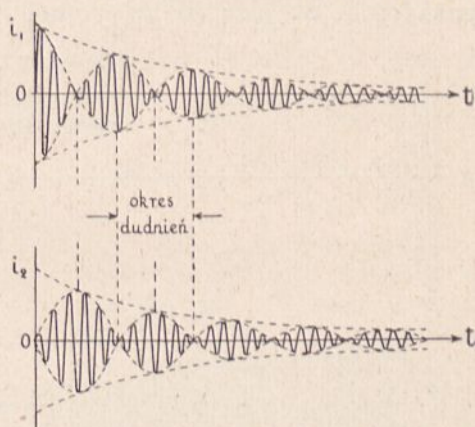
Gdy podane warunki nie są dochowane, krzywa staje się asymetryczną i wierzchołek jej nie odpowiada rzędnej równej jedności.

## 22. Sprzężność silna. Zjawisko fali podwójnej.

Gdy oba obwody są silniej sprzężone, teorii Bjerkes'a stosować do nich nie można. Występują wówczas w układzie dwie częstotliwości rezonansowe, którym, jak już zaznaczono, odpowiadają drgania swobodne o dwu częstotliwościach. Wiąże się z tem zjawisko *dudnień*, polegające



Rys. 71.



Rys. 72.

na kolejnym przelewaniu się energii z obwodu pierwotnego do wtórnego i z powrotem do obwodu pierwotnego (rys. 72), aż do zupełnego wyczerpania się jej na oporach obu obwodów. Okres przelewania się energii pokrywa się z okresem drgań interferencyjnych obu częstotliwości drgań własnych, jest bowiem

$$\Omega = \omega' - \omega'' \quad (139)$$

Gdy oba obwody są zestrojone, częstotliwości drgań własnych sprzężenia wynoszą (P. Drude)

$$\omega' = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 - z'}}, \quad \omega'' = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 + z'}} \quad (140)$$

gdzie

$$z' = \sqrt{z^2 - \left(\frac{D_1 - D_2}{2\pi}\right)^2}. \quad (140a)$$

O ile jest spełniony warunek

$$(D_1 - D_2) \ll 2\pi,$$

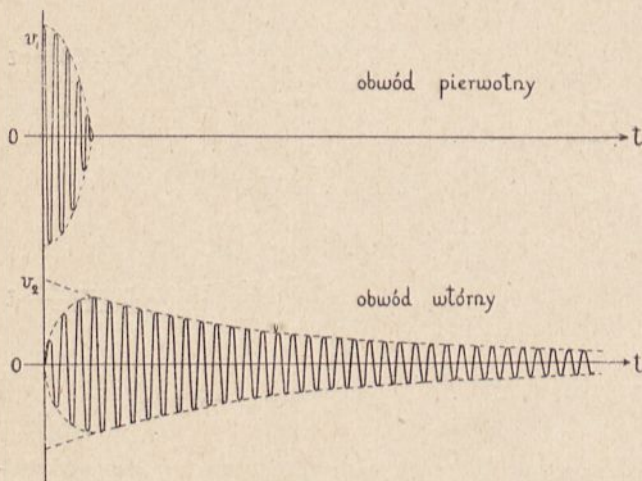
częstotliwość drgań własnych sprowadza się do wzoru (95), czyli

$$\omega' = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-z}}, \quad \omega'' = \frac{\omega_r}{\sqrt{1+z}}.$$

Jeżeli natomiast jest

$$z = \frac{D_1 - D_2}{2\pi}, \quad (140b)$$

mamy tylko jedną częstotliwość drgań własnych,  $\omega_0$ . Przypadek ten jest analogią do sprzężności krytycznej dla drgań niegasnących. Sprzężność mniejszą od krytycznej nazywamy *slabą* w odniesieniu do drgań gasnących, większą od krytycznej — *silną*.



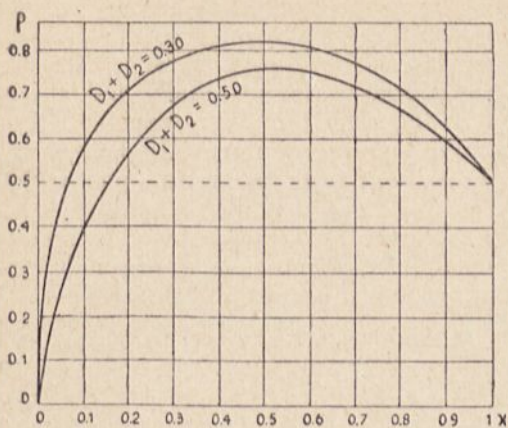
Rys. 73.

Przypadek sprzężności krytycznej można zrealizować, zwiększając dostatecznie tłumienie obwodu pierwotnego. Na tem oparł *M. Wien* swoją metodę usuwania dwufalowości w obwodach sprzężonych o drganiach gasnących, która w eksploatacji tego systemu (*F. Braun*) była zjawiskiem bardzo niepożądanym. *Wien* wprowadził do obwodu pierwotnego iskiernik o dużej oporności i szybkiej dejonizacji (iskiernik wielokrotny, rys. 71 a), dzięki

czemu osiągnięto nie tylko jednofalowość drgań, ale i szybkie przerywanie obwodu pierwotnego z chwilą przejścia energii do obwodu wtórnego, tak iż energia ta zużywa się w obwodzie wtórnym pod postacią drgań słabo tłumionych (rys. 73). Jako wartość graniczną sprzężności dla przeciętnych urządzeń systemu *Wien*'a można podać  $z' \sim 0.2$ . Wzbudzenie bodźcze działa prawidłowo tylko pod warunkiem, że sprzężność krytyczna nie jest przekroczona — przy sprzężności silniejszej dwufalowość występuje pomimo iskiernika wielokrotnego. Podobny skutek osiąga się w systemie *Fessenden-Marconi*, stosującym zamiast iskiernika wielokrotnego iskiernik



wirujący, w ten sposób nastawiony, by nastąpiło mechaniczne zerwanie iskry z chwila, gdy energia drgań z obwodu pierwotnego przejdzie do wtórnego, rys. 71 b.



Rys. 74 a.

Wynika z tego, że drgania o częstotliwości większej są tłumione silniej, niż drgania o mniejszej częstotliwości. Gdy sprężność jest niezbyt silna ( $\alpha < 0,1$ ), dekrementy obu drgań są w przybliżeniu równe

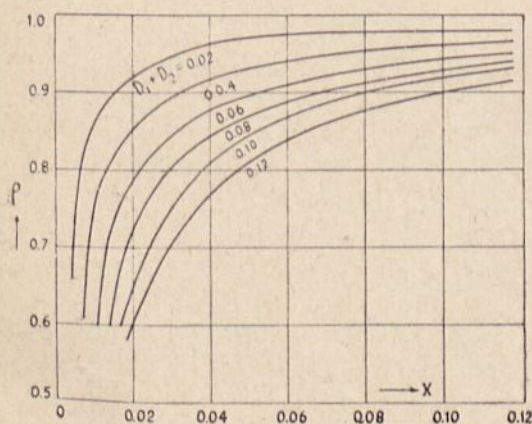
Obie te metody noszą nazwę *wzbudzenia bodźczego* drgań gasnących. Obecnie stosowane stacje iskrowe, z wyjątkiem niektórych prostych stacyj do wzywania pomocy, pracujących bez obwodu pośredniego, oparte są wyłącznie na zasadzie wzbudzenia bodźczego.

Dekrementy obu drgań w układzie dwufalowym wynoszą według Drude'go <sup>1)</sup>.

$$D' = \frac{D_1 + D_2}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}}, \quad (141)$$

$$D'' = \frac{D_1 + D_2}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha}}.$$

$$D' \cong D'' \cong \frac{D_1 + D_2}{2}. \quad (141a)$$



Rys. 74 b.

$$\frac{V_{m2}}{V_{m1}} = p \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = p \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (142)$$

w którym  $p$  jest współczynnikiem mniejszym od jedności i będącym funkcją  $\alpha'$  oraz sumy dekrementów. Przebieg krzywej

$$p = f(\alpha')$$

<sup>1)</sup> Patrz Zenneck, Lehrbuch.

dla dwu wartości  $D_1 + D_2$  podaje rys. 74a. Wynika zeń, że dla każdej wartości  $D_1 + D_2$  istnieje pewna sprzężność, dająca maksymalne przebiecie w obwodzie wtórnym i że ze wzrostem  $z'$  krzywe dążą do wartości 0,5. Na rys. 74b podano szereg krzywych dla tłumień najczęściej spotykanych w urządzeniach iskrowych. Dowodzą one, że dla małych tłumień przekroczenie  $z' = 0,1$  nie daje widocznej korzyści. Krzywe rys. 74 a i b obliczone są bez uwzględnienia zmiennej oporności iskiernika, dają więc wyniki dokładne tylko dla urządzeń odbiorczych. Krzywe zdjęte doświadczalnie wykazują przebieg nieregularny, będący wynikiem zmiany oporności iskiernika—która jest funkcją prądu—pod wpływem zmian sprzężności.

Na zasadzie wzoru (142) można obliczyć *sprawność* obwodów sprzężonych, zasilanych drganiem gasnącemi. A mianowicie energia doprowadzona do obwodu pierwotnego wynosi

$$W_1 = \frac{V_{1m}^2 C_1}{2},$$

zaś energia przeniesiona do obwodu wtórnego

$$W_2 = \frac{V_{2m}^2 C_2}{2} = V_{1m}^2 p^2 \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{C_2}{2} = p^2 \frac{C_1 V_{1m}^2}{2}.$$

Wobec tego sprawność

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = p^2. \quad (143)$$

Z krzywych rys. 74 a i b wynika, że sprawność może być tem większa, im mniejsze jest tłumienie obu obwodów.

### BIBLIOGRAFJA DO ROZDZIAŁU III.

1. *Cdt. Chaulard, Conférences Techniques sur la T. S. F.* Skrypt litografowany. Ecole Supérieure d'Electricité.
2. *A. Fraenckel. Theorie der Wechselströme.*
3. *J. H. Morecroft, Principles of Radio Communication.* Wyd. II. 1927.
4. *M. Pożaryski, Teorja prądów szybkozmennych,* skrypt B. P. S. P. W.
5. *Rein-Wirtz, Radiotelegraphisches Praktikum.* Berlin 1922.
6. *J. Zenneck u. H. Rukop, Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie.* Stuttgart 1925.

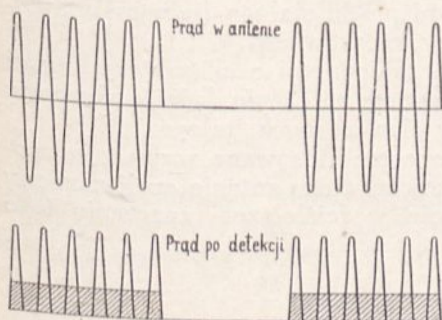
## ROZDZIAŁ IV.

### MODULACJA I DETEKCCJA

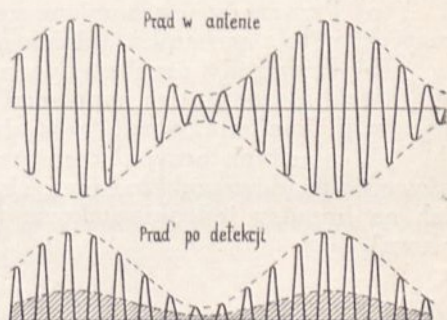
Ostatecznym celem wytwarzania, na stacji nadawczej, prądów szybkozmennych i wypromieniowania ich energii pod postacią fal elektromagnetycznych jest uruchomienie odpowiednich urządzeń na stacji odbiorczej. Cel ten osiąga się przy pomocy dwóch zasadniczych czynności:

a) Zasilania anteny stacji nadawczej prądami szybkozmiennymi o żądanym przebiegu czyli *modulowania* prądu w antenie;

b) Przekształcenia prądu szybkozmiennego, indukowanego w antenie stacji odbiorczej na prąd o takim przebiegu, aby zdolny był uruchomić przyrządy odtwarzające przesyłane sygnały. W najogólniejszym pojęciu czynność tę określimy nazwą *detekcji* prądów szybkozmiennych.



Rys. 75 a.



Rys. 75 b.

Stosowane systemy radiokomunikacyjne, ze względu na szczególny charakter nadawania i odbioru podzielić możemy na następujące kategorie: <sup>1)</sup>

- 1) Telegrafja z odbiorem automatycznym,
- 2) Telegrafja typu A-1 z odbiorem słuchowym,
- 3) Telegrafja falami klasy B i typu A-2,
- 4) Telefonja.

<sup>1)</sup> Oznaczenie fal  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  i  $B$  patrz we wstępie, § 3.

5) Przesyłanie obrazów nieruchomych (teleautografja) i ruchomych (telewizja),

6) Telemechanika.

Ze względu na sposoby nadawania wszystkie te kategorie ująć można w dwie grupy zasadnicze:

a) Wymagające *zmian prądu nadawczego skokami*, od pewnego minimum do pewnego maximum (telegrafja falami  $A_1$ , telemechanika, przesyłanie obrazów kreskowych);

b) Wymagające *zmian prądu nadawczego, uskutecznianych w sposób ciągły*, lub też impulsów o zmiennem natężeniu, odtwarzających pewne określone przebiegi (telefonja, przesyłanie obrazów cieniowanych, telewizja).

Na rys. 75 a i b mamy typowe przykłady modulacji prądu szybkozmiennego i jego detekcji według obu wymienionych tu zasadniczych sposobów — rysunek górny podaje wyidealizowany (bez stanów przejściowych) przebieg prądu w antenie nadawczej, rysunek dolny takież wykres prądu po detekcji. Część zakreskowana oznacza przebieg średniego prądu zasilającego przyrząd odbiorczy.

Telegrafja falami typu A-2 łączy zmiany prądu skokami ze zmianami w sposób ciągły (przerywanie fal modulowanych).

Elementem podstawowym wszystkich systemów jest *modulacja sinusoidalna prądu szybkozmiennego*.

W podobny sposób, jak po stronie nadawczej, rozróżniamy i po stronie odbiorczej dwie grupy podstawowe, zależnie od charakteru przyrządów, a mianowicie mamy tam:

a) Przyrządy uruchamiane impulsami prądu stałego (telegrafja automatyczna, telemechanika, odbiór obrazów kreskowych),

b) Przyrządy uruchamiane prądami zmiennymi o charakterze mniej lub więcej złożonym lub impulsami o zmiennem natężeniu (odbior słuchowy telegrafji, telefonja, przesyłanie obrazów cieniowanych, telewizja).

W obu tych przypadkach metody obecnie stosowane wymagają *prostowania* prądów szybkozmiennych indukowanych w antenie czyli zamiany ich na impulsy jednokierunkowe (detekcja w ściślejszem znaczeniu tego słowa).

## 1. Modulacja sinusoidalna prądu stałego. Nadawanie telegraficzne.

Jako najprostszy przykład modulacji uważać możemy modulację prądu stałego, jaka występuje naprzykład w obwodzie mikrofonowym aparatu telefonicznego. Dla uproszczenia przyjmiemy, że w obwodzie, zawierającym źródło prądu stałego  $E$  i oporność omową  $R$ , działa oprócz tego sinusoidalna siła elektromotoryczna  $e = E \cdot \sin pt$ , o częstotliwości kątowej  $p = 2\pi \cdot \nu$  (rys. 76 a). W tym przypadku w obwodzie będzie płynęła składowa prądu stałego

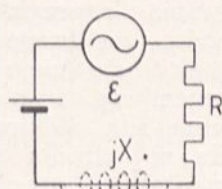
$$I = \frac{E}{R}, \quad (a)$$

z nałożoną na nią składową prądu zmiennego

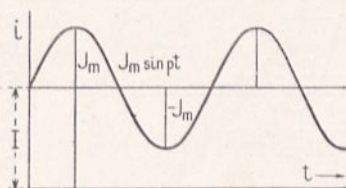
$$i = \frac{E_m \sin pt}{R} = J_m \sin pt, \quad (b)$$

tak iż chwilowe wartości prądu całkowitego w obwodzie wyrażą się równaniem (rys. 76 b)

$$i' = I + i = I + J_m \sin pt. \quad (144)$$



Rys. 76 a.



Rys. 77 b.

Jeżeli obwód — oprócz oporności omowej — zawiera również oporność urojoną  $jX$  (oczywiście przepuszczającą prąd stały), to będzie

$$i = \frac{E_m \sin pt}{R + jX} = J_m \sin(pt + \varphi),$$

a równanie (144) otrzyma postać ogólną

$$i' = I + J_m \sin(pt + \varphi),$$

ub też

$$i' = I \left[ 1 + \frac{J_m}{I} \sin(pt + \varphi) \right] = I [1 + m \cdot \sin(pt + \varphi)]. \quad (144a)$$

W przypadku modulacji prądu stałego, prąd stały będziemy nazywali *prądem nośnym*, a prąd zmienny *prądem modulującym*. Stosunek amplitudy prądu modulującego do prądu nośnego

$$\frac{J_m}{I} = m, \quad (144b)$$

nazwiemy *głębokością modulacji*. Głębokość modulacji wyrażona w procentach

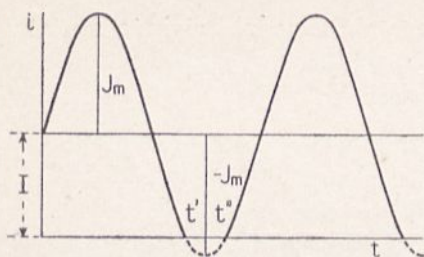
$$m^0_0 = 100 \cdot m, \quad (144c)$$

będzie to *procent modulacji*.

Jeżeli żądamy, aby prąd modulujący był dokładnym odtworzeniem napięcia modulującego, czyli jeżeli żądamy *wiernej modulacji*, głębokość modulacji nie może przekroczyć 100%. Innymi słowy, amplituda prądu modulującego nie może przekroczyć wartości prądu modulowanego

$$J_m \leq I.$$

Gdy amplituda modulująca przekroczy tę wartość ( $J_m > I$ ), prąd w obwodzie przez pewien ułamek okresu (rys. 77, odcinek  $t' - t''$ ) spada do zera, co zniekształca przebieg modulacji, wprowadzając *harmoniczne*, których nie było w napięciu modulującym. Zjawisko to nazywamy *przemodulowaniem*.



Rys. 77.

W taki sposób objawia się przemodulowanie w obwodach, w których modulacja skutecznia się drogą oddziaływania na przykład na oporność obwodu, zasilanego przez napięcie stałe, jak to się dzieje w obwodzie z mikrofonem węglowym. Gdyby jednak zmienna siła elektromotoryczna pochodziła ze źródła niezależnego od prądu stałego, przemodulowanie

dałoby przebieg kropkowany, nie pociągający za sobą zniekształcenia sinusoidalnego, lecz polegający na zmianie kierunku prądu podczas części okresu.

#### *Średnia wartość i moc prądu modulowanego.*

Średnia wartość prądu modulacyjnego, o ile przebieg jego jest sinusoidalny, wynosi, jeżeli przez  $\Theta$  oznaczymy okres modulacji,

$$J_{sr} = \frac{m \cdot I}{\Theta} \int_0^{\Theta} \sin pt \, dt = 0.$$

Z tego wynika, że *średnia wartość prądu pod wpływem modulacji nie ulega zmianie, o ile modulacja jest sinusoidalna* lub prąd modulujący złożony jest wyłącznie ze składników sinusoidalnych. Mamy więc

$$I = I_0,$$

jeżeli przez  $I_0$  oznaczymy *prąd spoczynkowy*, płynący, gdy w obwodzie niema modulacji.

Wobec tego i moc pobierana ze źródła prądu nie ulega zmianie pod wpływem modulacji, mamy bowiem

$$P_1 = E \cdot I = I^2 \cdot R = \text{const.}$$

Moc prądu modulującego możemy natomiast wyrazić całką

$$P_2 = \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} Ri^2 \, dt = \frac{m^2 I^2 \cdot R}{\Theta} \int_0^{\Theta} \sin^2 pt \, dt = \frac{m^2 I^2 R}{2} \quad (145)$$

Stąd sprawność modulacji określić możemy zależnością

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{m^2}{2}. \quad (145 a)$$

### Nadawanie telegraficzne.

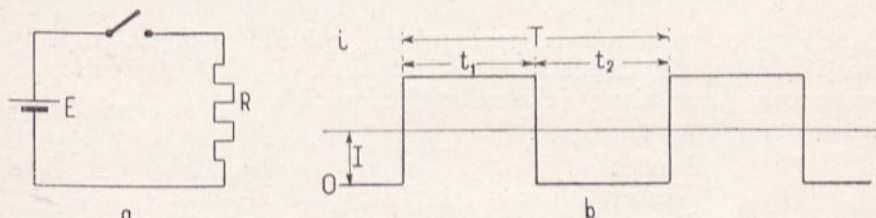
Jako skrajny przypadek modulacji uważać możemy przerywanie i zamykanie obwodu za pomocą wyłącznika (rys. 78 a). Jeżeli dla uproszczenia założymy, że obwód nie zawiera indukcyjności, a więc, że niema opóźnienia przy powstawaniu i zanikaniu prądu, otrzymamy przebieg prądu jak na rys. 78 b. Przebieg ten możemy sprowadzić do modulacji prądami sinusoidalnymi, przyjmując, że prąd  $I = \frac{J_{\max}}{2}$  jest modulowany stu procentowo krzywą prostokątną o maksymalnej wartości  $I$ . Krzywą taką możemy rozłożyć na szereg harmoniczny Fourier'a, który — o ile okresy przerw równają się okresom włączenia (nadawanie kropek w alfabecie Morse'a) — posiada postać (rys. 79)

$$y = \frac{4I}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots + \frac{1}{2n-1} \sin (2n-1)x + \dots \right] \quad (146)$$

Gdy dla  $n$  włączeń i przerw na sekundę podstawimy  $p = 2\pi n$ , to równanie (146) da nam krzywą prądu przerywanego

$$i = 1,27 I \cdot \sin pt + 0,425 I \sin 3pt + 0,255 I \sin 5pt + \dots \quad (146a)$$

A więc przerywanie i włączanie obwodu prądu stałego w równych odstępach odpowiada modulowaniu prądem sinusoidalnym z częstotliwością przerw i z nałożonymi na nią prądami sinusoidalnymi o nieparzystych częstotliwościach wyższych harmonicznych, których amplitudy pozostają w stosunku odwrotnym do rzędu amplitudy.



Rys. 78.

Stąd bardzo ważny wniosek, że—chcąc odtworzyć po stronie odbiorczej impulsy telegraficzne o przebiegu możliwie ostrym, zbliżonym do prostokątnego, doprowadzić należy do przyrządu odbiorczego nie tylko impulsy o częstotliwości nadawania, lecz conajmniej jeszcze ich trzecią, jeżeli nie piątą, harmoniczną. (Krzywą taką mamy na rys. 79, krzywa II). Zjawisko to należy uwzględnić szczególnie w urządzeniach odbiorczych, stosujących filtry małej częstotliwości.

Częstotliwość nadawania telegraficznego obliczyć można w sposób następujący:

Miarą szybkości nadawania jest liczba słów nadanych w ciągu minuty (w.p.m.)<sup>1)</sup>. Według kodu międzynarodowego słowo zawiera 5 liter i przerwę

<sup>1)</sup> Skrót na określenie angielskie „words per minute”.

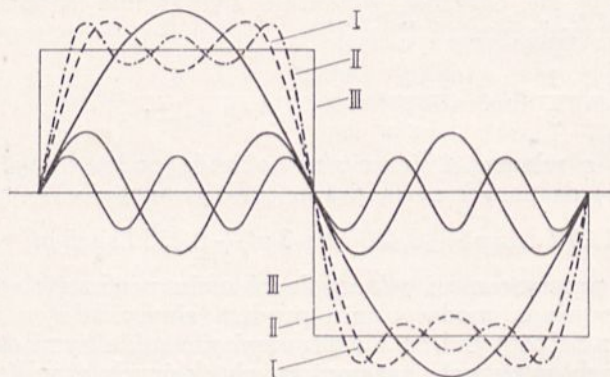
2 kreski (po 3 kropki), litera w alfabecie Morse'a średnio 9 kropek, kropka zaś jest to jeden impuls i jedna przerwa, czyli 1 okres. Stąd obliczymy częstotliwość

$$n_{\text{okr/sek}} = \frac{5 \cdot 9 + 6}{60} \times \text{Liczba słów na minutę.}$$

Dla 100 słów na minutę mamy

$$n = \frac{51 \cdot 100}{60} = 85,$$

co dla 3-ciej harmonicznej odpowiada częstotliwości  $85 \times 3 = 255$  okr./sek.



Rys 79.

Inne systemy nadawania, posługujące się kluczem pięcio-impulsowym, wymagają mniejszej częstotliwości nadawania. I tak, jeżeli alfabet międzynarodowy przyjmiemy jako równy jedności, to innym systemom odpowiadają częstotliwości

Baudot	0,75,
Węstern-Murray (start-stop)	0,69—0,72,
Siemens	0,625.

## 2. Modulacja telefoniczna. Budowa dźwięków mowy i muzyki.

Podczas przesyłania dźwięków mowy ludzkiej i muzyki nie spotykamy się z modulacją o przebiegu czysto sinusoidalnym. Zjawiska tu spotykane są o wiele bardziej złożone, albowiem obok pewnych tonów podstawowych zawierają one szereg wyższych tonów harmoniczných i nieharmonicznych, a nawet przebiegów o charakterze gasnącym, które — wzięte jako całość — stanowią o charakterze i barwie dźwięku.

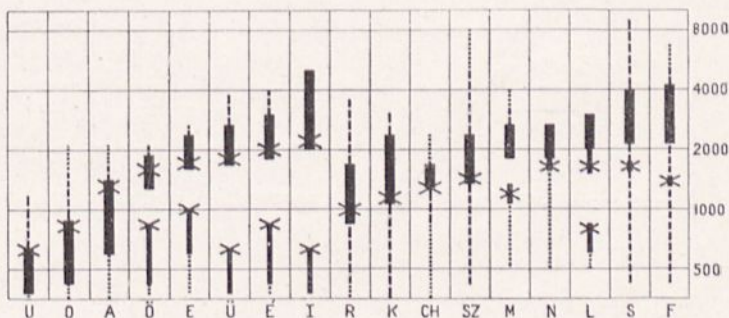
Prace szeregu badaczy, a w szczególności w ostatnich czasach Dayton C. Miller'a i C. Stumpf'a<sup>1)</sup> stwierdziły, że każdy dźwięk mowy, oprócz pewnego tonu podstawowego, zawiera szereg charakterystycznych dlań to-

<sup>1)</sup> Patrz m. in. F. Trendelenburg, Jahrb. d. d. T. 28, str. 84, 1926.



nów wyższych, których brak czyni dźwięk niezrozumiałym. Tony te noszą nazwę *tworzących* (niem. Sprachformanten) i częstotliwości ich dla poszczególnych dźwięków mowy są niezależne od tonu podstawowego — na przykład dana samogłoska śpiewana barytonem czy sopranem zawiera te same częstotliwości tworzące. Inne tony, szczególnie harmoniczne, zawarte w dźwiękach, obecnością swoją nadają im swoistą *barwę*, nie zmieniając ich zasadniczego charakteru. Od nich zależą indywidualne cechy głosu poszczególnych osób.

Jak stwierdziły ostatnie badania, instrumenty muzyczne również zawierają tony tworzące, którym obok tonów harmonicznych, poszczególne instrumenty muzyczne zawdzięczają swe charakterystyczne dźwięki. Źródłem tworzących są rezonanse mechaniczne instrumentów, jak pudło skrzypiec, tuby trąb i t. d.



Rys. 80.

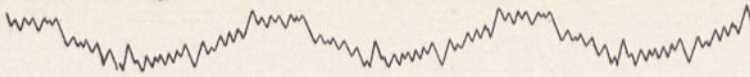
Gama tonów, zawartych w mowie i w muzyce, jest bardzo szeroka. Zawiera się ona w granicach od kilkunastu do kilkunastu tysięcy okr/sek.

Poszczególne tony składowe wpływają nie tylko bezpośrednio na dźwięki, lecz — o ile nie pozostają do siebie w stosunku harmonicznym — dają *tony kombinacyjne*, o sumie lub różnicy ich częstotliwości. Szczególnie ważne są tony różnicowe, gdyż dzięki nim oddziaływać mogą na charakter dźwięku nawet tony składowe o częstotliwościach ponadслыszalnych.

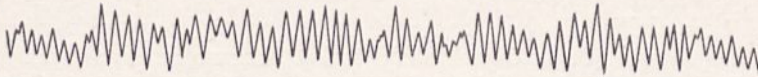
Powstawanie tonów kombinacyjnych tłumaczy teoria nakładania drgań, podana w § 18 tego rozdziału.

Rys. 80 podaje zestawienie częstotliwości tworzących niektórych głosek według C. Stumpf'a, zaś rys. 81 *a* do *d* zdjęcia oscylograficzne dźwięków śpiewanych, według F. Trendelenburga.

Z pośród tonów, składających się na dźwięki mowy, nie wszystkie posiadają tęsamą doniosłość. Chociaż największy zasób energii gromadzi się na tonach około 500 okresów na sekundę, to jednak dla zrozumienia mowy ważniejsze są tony wyższe, a nawet bardzo wysokie, tak iż ograniczenie częstotliwości od góry wpływa bardzo ujemnie na jakość przesyłanej mowy. Już począwszy od 8000 okr/s w dół pojawia się pewne przytłumienie dźwięku S, a około 3000 okr/s nie można zupełnie odróżnić „S” od „F”. Jaki wpływ na zrozumiałość mowy (niemieckiej) posiada ograniczenie częstotliwości od góry, wykazuje zestawienie, sporządzone na podstawie prac C. Stumpf'a.



Spółgłoska „M”, ton podstawowy 248 okr./s.



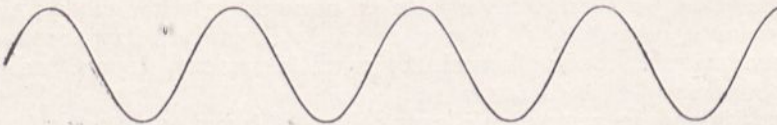
Spółgłoska „SZ”, średni ton ok. 4000 okr./s



Samogłoska „A”, ton podstawowy 185 okr./s.



Spółgłoska „R”, ton podstawowy 454 okr./s.



Samogłoska „U”, ton podstawowy 291 okr./s.



Samogłoska „I”, ton podstawowy 195 okr./s.

Rys. 81. Wykresy niektórych dźwięków mowy według oscylogramów F. Trendelenburga

Tablica Stumpla.

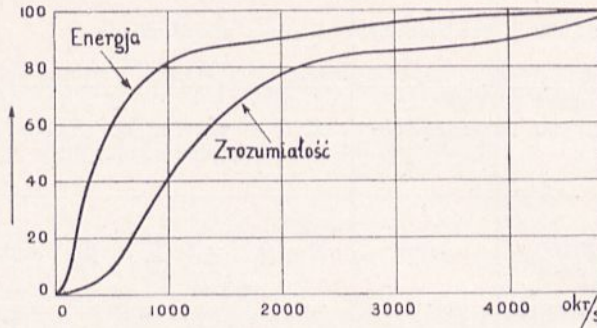
Górna granica		Zrozumia- łość	Szczegóły zniekształcenia dźwięków
$\nu$	$p = 2\pi \nu$		
4 780	30 000	bardzo dobra	S silnie przytłumione.
3 630	23 000	bardzo dobra	$\acute{E}$ , $I$ — przyćmione, S bardzo niewyraźne, F przytłumione.
3 180	20 000	dobra	$\acute{E} = \acute{O}$ , $I = U$ , S, F, Ch bardzo niewyraźne.
2 870	18 000	dobra	$\acute{E}$ , $I$ — nieco chrypiące, nie można odróżnić S od F.
2 550	16 000	prawie dobra	Spółgłosek syczących nie można rozróżnić, M i N nosowe, trudno rozróżnić
2 230	14 000	znośna	Z samogłosek tylko $\acute{O}$ zachowuje swój dźwięk. Sz przytłumione, M, N i N nosowe ledwie można rozróżnić.
1 910	12 000	zrozumienie wymaga wysiłku.	Samogłoski silnie zniekształcone, T i P trudno rozróżnić, M, N i N nosowego wcale nie można rozróżnić.
1 430	9 000	bardzo zła	Samogłoski przeważnie przechodzą w U i O, K = T, R ma dźwięk gardlany, inne spółgłoski przechodzą w szmery.

Graficzne przedstawienie związku między zrozumiałością i energią zawartą w głosie, a ograniczeniem częstotliwości, podają wykresy H. Fletcher'a (dla wymowy amerykańskiej), rys. 82 a i b. Rys. 82 a odnosi się do filtru przepuszczającego niższe tony, zaś rys. 82 b do filtru ograniczającego tony wyższe. Widzimy z nich, że przepuszczając naprzykład tony leżące poniżej 1000 okr/s, otrzymujemy wprawdzie przeszło 80% energii zawartej w mowie, ale zrozumiałość wynosi zaledwie 40%. Gdy natomiast przepuścimy wszystkie tony leżące powyżej 1000 okr/s, a usuniemy niższe, to w mowie zawarte będzie niespełna 20% energii, ale zrozumiałość przekroczy 80%.

I na muzyce również odbija się ujemnie ograniczenie górnych częstotliwości. A mianowicie przy górnej granicy 2000 okr/s ztracają się róż-

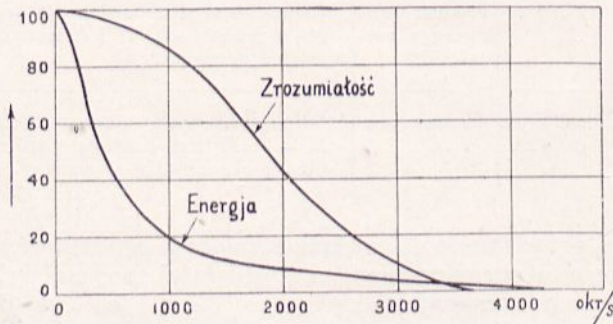
nice między poszczególnymi instrumentami, (w szczególności dźwięki skrzypiec zbliżają się do dźwięków piszczałki), a nawet przesunięcie tej granicy do 4000 okr/s pozbawia muzykę wielu cech charakterystycznych.

O *wrażliwości ucha ludzkiego* na tony różnej wysokości i na ich natężenie może nas pouczyć wykres R. L. Wegeł'a<sup>1)</sup>, podany na rys. 83.



Rys. 82 a. Ograniczenie częstotliwości od góry.

Na osi odciętych mamy tu częstotliwości, na osi rzędnych ciśnienie dyn/cm<sup>2</sup> wywierane przez falę głosową na bębenek ucha. Krzywa dolna wyraża próg czułości bębienka przy poszczególnych tonach, a więc minimalną amplitudę danej częstotliwości, którą ucho zdolne jest wyczuć, górna krzywa oznacza górną granicę słyszalności, a więc ciśnienie, od którego począwszy ucho zamiast wrażenia słuchowego zaczyna odczuwać ból. Wewnątrz obu krzywych mieści się tak zwane *pole słyszalności*. *Obejmuje ono*, jak widać, częstotliwości od około 20 okr/s do 20000 okr/s, a więc 10 oktaf, a dla



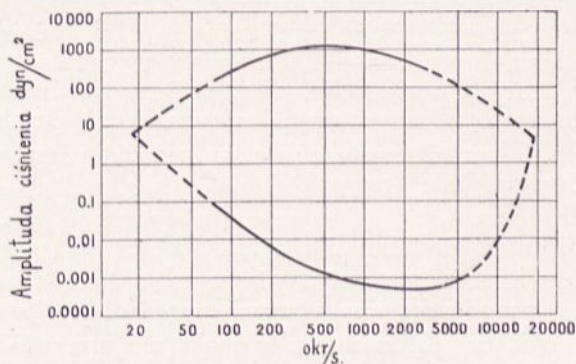
Rys. 82 b. Ograniczenie częstotliwości od dołu.

średnich tonów, najważniejszych dla mowy i muzyki, zmiany natężenia głosu w granicach od 1 do 10<sup>6</sup>, czyli 120 decybeli (ok. 14 neperów). Zaznaczyć należy, że minimalna różnica natężenia głosu, jaką w tym zakresie ucho zdolne jest wyczuć, wynosi około 1 db.

<sup>1)</sup> Electrical Communication, I. Str. 43, 1922.

W praktyce warunki energetyczne przedstawiają się następująco:

Średnia moc mowy ludzkiej, wygłoszonej bez wysiłku, jest rzędu 10 mikrowatów, chwilowe jednakże maxima, wywołane akcentowaniem pewnych wyrazów, są znacznie większe. Średnio można przyjąć, że moc szczytowa równa się około 25-krotnej wartości mocy średniej czyli 14 db



Rys. 83.

(1,6 nepera), co daje stosunek amplitud równy 5. W muzyce rozpiętość mocy jest znacznie większa i dochodzi przy odtwarzaniu utworów orkiestralnych do 60 db (7 neperów). Jednakże w radjofonji, ze względów praktycznych, rozpiętość tę przy pomocy odpowiedniej regulacji wzmocnienia ogranicza się do 30 db.

Górna granica tonów słyszalnych zmniejsza się z wiekiem osobnika, i tak dla wieku 30 lat wynosi ona średnio 16000 okr/sek, w 50-tym roku życia około 13000 okr/s.

W praktyce telefonicznej i radjofonicznej zmuszeni jesteśmy ze względów technicznych ograniczyć widmo przesyłanych częstotliwości. I tak dla rozmów telefonicznych minimalny zakres częstotliwości, niezbędny dla porozumienia się, wynosi 300 do 2500 okr/s (a więc około 3 oktaw), jednakże pożądane jest przesyłanie zakresem od 200 do 3000 okr/s (około 4 oktaw). Radjofonja, która wymaga nie tylko zrozumienia, ale i artystycznego odtworzenia przesyłanych dźwięków, stawia wymagania o wiele większe: od 50 do 10000 okr/s (a więc przeszło 7 oktaw), w praktyce jednakże górna granica 6400 okr/s (6 oktaw) daje zupełnie zadawalające wyniki, a wielokrotnie nawet ograniczyć się trzeba do zakresu 100 — 5000 okr/s.

### 3. Zniekształcenia w przesyłaniu telefonji.

Ażeby drogą elektryczną wiernie przesyłać i odtwarzać telefonję, musielibyśmy rozporządzać przyrządami, które w ostatnim etapie przesyłania odtwarzałyby najdokładniej fale głosowe o takim samym charakterze, jak fale, które pobudziły mikrofon nadawczy. Spełnienie tego żądania napotyka na bardzo poważne trudności, gdyż wiernemu odtwarzaniu stoją na przeszkodzie dwa zasadnicze zjawiska:

1) *Rezonans* (mechaniczny lub elektryczny) poszczególnych przyrządów, który sprawia, że niektóre tony są nadmiernie uwydatnione, inne zaś tłumione.

2) *Nieproporcjonalna zależność* między przyczyną i skutkiem, jak na przykład między ciśnieniem i wychyleniem błony mikrofonu, między napięciem wzbudzającym i prądem w lampach katodowych i t. d., występująca szczególnie przy większych amplitudach, a sprawiająca, że bodziec o przebiegu sinusoidalnym wywołuje zjawisko o przebiegu niesinusoidalnym. Zgodnie z teorią Fourier'a przebieg wtórny zawiera drgania o częstotliwościach harmonicznych, których nie zawierał przebieg pierwotny.

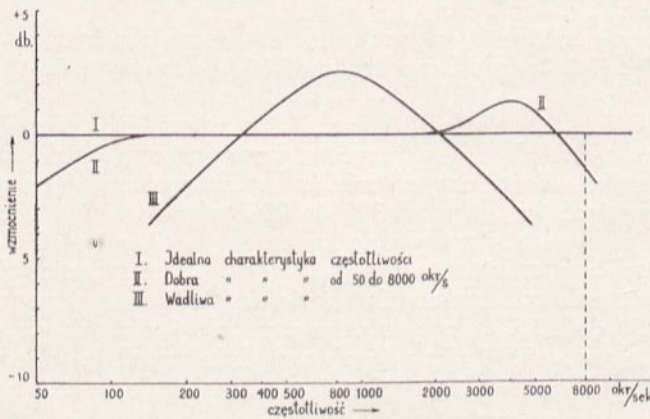
Stąd zniekształcenia, występujące w przyrządach przekazujących telefonję, dzielimy na dwie grupy:

1) *Zniekształcenia częstotliwości*, gdy oporność pozorna urządzeń przesyłających dźwięki jest funkcją częstotliwości.

2) *Zniekształcenia amplitudy*, gdy oporność urządzeń przesyłających jest funkcją amplitudy przesyłanych prądów.

Zniekształcenia częstotliwości występują we wszystkich stosowanych urządzeniach elektrycznych i elektroakustycznych, szczególnie gdy zakres przesyłanych częstotliwości jest tak szeroki, jak tego wymaga współczesna radjofonja.

Idealną *charakterystyką częstotliwości* jest prosta równoległa do osi odciętych (rys. 84, krzywa I). Praktycznie jednakże charakterystykę uważa się za dobrą w żądanym zakresie, gdy *odchylenia* od prostej w jed-

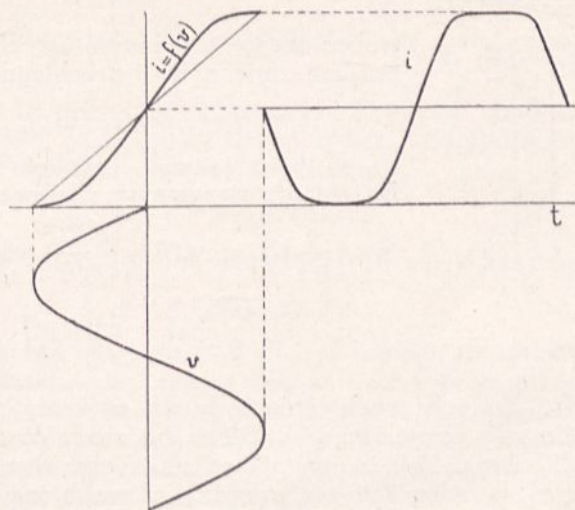


Rys. 84.

nym i w drugim kierunku od linii prostej *nie przekraczają 2 db* (rys. 84, krzywa II), w tych bowiem granicach różnic w natężeniu poszczególnych tonów ucho nie odczuwa w sposób przykry. Gdy odchylenia są większe, charakterystyka jest wadliwa (krzywa III).

Idealna *charakterystyka amplitudy* dla przyrządów elektrycznych wyraża się prostoliniową zależnością między napięciem i prądem (rys. 85, krzywa I), w całym zakresie spotykanych amplitud. Większość przyrzą-

dów spotykanych w technice przesyłania dźwięków posiada jednakże charakterystyki, tylko w ograniczonym zakresie prostolinijne, jak na przykład lampy katodowe (rys. 85, krzywa II). Wykroczenie poza te odcinki prostolinijne wywołuje *przemodulowanie*, a temsamem staje się źródłem drgań harmonicznycch.



Rys. 85.

Miarą zniekształcenia amplitudy jest stosunek wytworzonych przez nie harmonicznycch do amplitudy podstawowej i wyraża się *współczynnikiem chrypienia* (niem. Klirrfaktor)

$$k = \frac{\sqrt{J_2^2 + J_3^2 + J_4^2 + \dots}}{J_1} \quad (147)$$

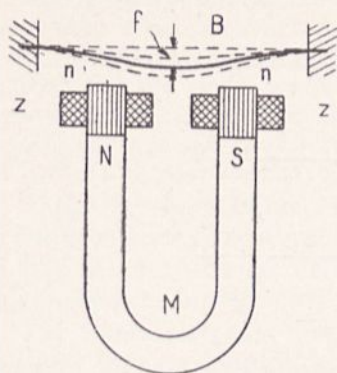
Dopuszczalny *współczynnik chrypienia* wynosi dla radjofonji (a więc dla artystycznego przekazywania dźwięków) 0,04, czyli 28 decybeli tłumienia, zaś dla radjotelefonji komunikacyjnej dopuszcza się zniekształcenie 0,1 czyli 20 db.

#### 4. Działanie prądu zmiennego na słuchawkę magnetyczną.

Typowym przyrządem odbiorczym, stosowanym w radjokomunikacji, jest słuchawka magnetyczna, której konstrukcję podano schematycznie na rys. 86. Trwały magnes  $M$ , naprzeciw którego znajduje się błona  $B$  z miękkiego żelaza, jest zaopatrzony w zwojnice, przez które przepływa prąd odbierany. Zwojnice są osadzone na nasadkach biegunowych  $a$  i  $b$ , wykonanych z miękkiego żelaza dzielonego. Cel zastosowania magnesu trwałego, czyli polaryzacji magnetycznej słuchawki, jest dwojaki:

- 1) zapobieżenie zniekształceniu dźwięków,
- 2) zwiększenie czułości słuchawki.

Działanie słuchawki magnetycznej wyjaśniają następujące rozważania: Siła przyciągająca magnesu jest proporcjonalna do kwadratu indukcji magnetycznej<sup>1)</sup>.



Rys. 86

$$F = \frac{B^2 q}{8\pi} \text{ dyn}, \quad (148)$$

wobec czego zasilanym w elektromagnesie, prądem zmiennym o przebiegu (rys. 87a)

$$i = J_m \sin pt,$$

i wytwarzającym indukcję magnetyczną  $B_m \sin pt$ , otrzymamy siłę przyciągającą

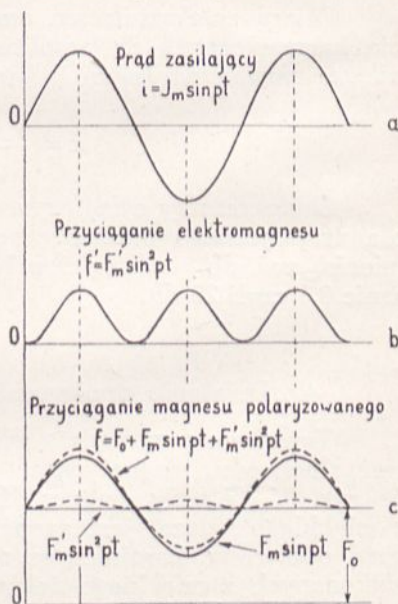
$$\begin{aligned} f' &= \frac{q}{8\pi} (B_m \sin pt)^2 = \frac{q B_m^2}{8\pi} \cdot \sin^2 pt = \\ &= \frac{q B_m^2}{8\pi} (1 - \cos 2pt). \end{aligned} \quad (149)$$

Przy bardzo małych wychyleniach błony możemy przyjąć, że są proporcjonalne do siły przyciągającej. Błona będzie więc drgała, zgodnie z równaniem (149) i rys. 87 b, z częstotliwością, równą dwukrotnej częstotliwości zasilającej, a więc ton wytworzony przez błonę, równy będzie oktawie tonu przekazywanego. Zjawisko to będzie dla nas oczywiste, gdy sobie uprzytomnimy, że siła przyciągająca elektromagnesu jest niezależna od kierunku prądu, a więc, że każdemu okresowi prądu odpowiadają dwa okresy przyciągania

Gdy natomiast błonę ustawimy naprzeciw magnesu trwałego o indukcji  $B_0$ , będzie ona podlegała stałemu przyciąganiu z siłą

$$F_0 = \frac{q B_0^2}{8\pi},$$

ulegając wygięciu, zaznaczonemu na rys. 86. Gdy ją teraz poddamy działaniu zmiennego strumienia magnetycznego, strumień ten raz będzie się dodawał do strumienia stałego, raz od niego odejmował, tak iż podczas półokresu dodatniego prądu błona będzie przyciągana silniej, podczas ujemnego słabiej, wykonywując w ten sposób jeden okres drgań podczas jednego okresu prądu zmiennego (położenie krańcowe kropkowane na rys. 86).



Rys. 87.

<sup>1)</sup> Dla bardzo małych amplitud drgań błony.



Równanie siły przyciągającej wyrazi się teraz w postaci

$$f = \frac{q}{8\pi} (B_0 + B_m \sin pt)^2 = \frac{q}{8\pi} (B_0^2 + 2B_0 B_m \sin pt + B_m^2 \sin^2 pt), \quad (150)$$

lub też

$$f = \frac{q}{8\pi} [(B_0^2 + B_m^2) + 2B_0 B_m \sin pt - B_m^2 \cos 2pt]. \quad (150 a)$$

Równanie to wskazuje (patrz rys. 87 c), że obok składowej stałej, która nie wpływa na przebieg drgań błony, występują tu drgania o częstotliwości podstawowej, wyrażone członem

$$2B_0 B_m \sin pt,$$

oraz drgania o częstotliwości podwójnej (drugiej harmoniczej)

$$B_m^2 \cos 2pt.$$

Drgania błony nie posiadają więc przebiegu sinusoidalnego, lecz przebieg ten jest odkształcony, jak to wskazuje krzywa kropkowana na rys. 87c. Innymi słowy, słuchawka wprowadza zniekształcenia amplitudy, które będą tem większe, im większa jest amplituda składowej zmiennej w porównaniu z polaryzacją stałą („przeciążenie” słuchawki). Jeżeli jednakże przyjmie-my, zgodnie z warunkami rzeczywistymi, że

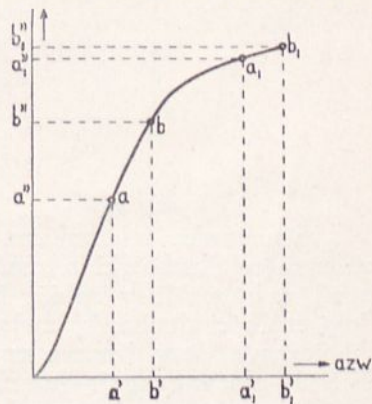
$$B_0 \gg B_m,$$

to możemy pominąć drugą harmoniczną i napisać z dostatecznym przybliżeniem

$$f \cong \frac{q}{8\pi} (B_0^2 + 2B_0 B_m \sin pt). \quad (150 b)$$

Z równania (150 b) wynika, że amplituda drgań błony jest proporcjonalna do indukcji  $B_0$  magnesu trwałego, że więc polaryzacja stała nie tylko zapewnia czystość odtwarzania dźwięków, lecz zwiększa również czułość słuchawki. Oba te względy przemawiają za stosowaniem magnesów o jak największej indukcji. Nie można jednakże dojść do nasycenia na krzywej magnetyzacji (rys. 88), wówczas bowiem, z powodu małej przenikliwości magnetycznej żelaza, zmiany strumienia byłyby bardzo małe (odcinki  $a''-b''$  i  $a_1''-b_1''$ ), a więc korzyść osiągnięta przez duże  $B_0$  byłaby zniweczona.

Z tego, co tu powiedziano o wpływie polaryzacji magnetycznej na działanie słuchawki, wynika, że nie jest obojętną, w którym kierunku włącza się słuchawkę w obwód prądu, zawierającego składową stałą



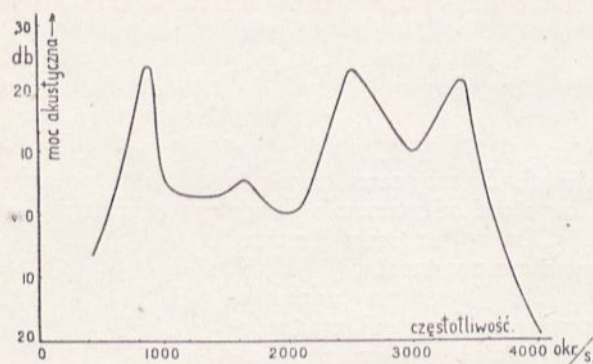
Rys. 88.

(jak np. prąd w obwodzie anodowym lampy wzmacniającej). Należy tu zawsze przestrzegać, aby ta składowa magnesowała słuchawkę, a nie rozmagnesowywała jej. W tym celu słuchawki zaopatrzone są w oznaczenia „+” i „-”.

Ażeby ochronić magnesy przed rozmagnesowaniem się z biegiem czasu („starzenie się” magnesów) nadaje im się kształt możliwie zamknięty, o jak najmniejszym polu rozproszenia. Również i nasady biegunowe z miękkiego żelaza, wspomniane we wstępie tego paragrafu, mają za cel zabezpieczenie magnesów, służą mianowicie do tego, aby zmienny strumień magnetyczny indukowany nie przebiegał przez magnes trwały. Ponadto nasady z miękkiego żelaza łatwiej ulegają przemagnesowaniu niż stal magnesu, zwiększają czułość słuchawki.

### Rezonans mechaniczny słuchawki.

Obok zniekształceń amplitudy, spowodowanych przez przebiegi magnetyczne, spotykamy w słuchawce również zniekształcenia częstotliwości, których źródłem są zjawiska rezonansu mechanicznego błony. W większości słuchawek główny rezonans błony leży około 1000 okr/s, poza nim występują jeszcze punkty rezonansowe (zazwyczaj dwa) w granicach między 2000 a 3000 okr/s. Typową charakterystykę częstotliwości słuchawki telefonicznej podaje rys. 89. Wskazuje ona, że powyżej 4000 okr/s czułość słuchawki jest bardzo mała, czego przyczyna leży w dużej stosunkowo bezwładności mechanicznej jej błony.



Rys. 89.

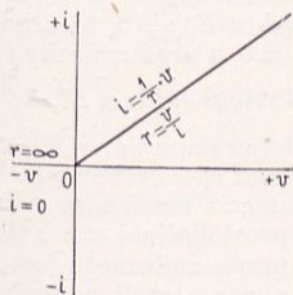
Słuchawka telefoniczna należy do najczulszych wskaźników prądu zmiennego. Słuchawki o znacznej oporności omowej (o znacznej liczbie zwoi) dają możliwy odbiór telefoniczny już przy mocy rzędu  $10^{-7}$  wata. Próg czułości słuchawki, zwłaszcza w pobliżu częstotliwości rezonansu mechanicznego, leży jeszcze znacznie niżej — słuchawki o oporności 1000 do 4000 omów reagują już na prądy rzędu  $10^{-7}$  ampera, co ze słuchawki czyni pierwszorzędny czynnik przy pomiarach metodami zerowymi, równy co do czułości bardzo precyzyjnym galwanometrom prądu stałego.

Pomimo tak dużej czułości słuchawki, szczególnie w okolicy głównej częstotliwości rezonansowej (minimalna moc, potrzebna do pobudzenia dobrej słuchawki w okolicy jej rezonansu jest rzędu  $10^{-9}$  wata), dla normalnego odbioru stosuje się moce znacznie większe. I tak dla dobrego odbioru telegraficznego wymaga się mocy doprowadzonej do słuchawki rzędu  $10 \mu\text{W}$  do  $100 \mu\text{W}$ . W szczególnie trudnych warunkach odbioru, jak np. na samolocie, stosuje się moce prądu  $1 \text{ mW}$ .

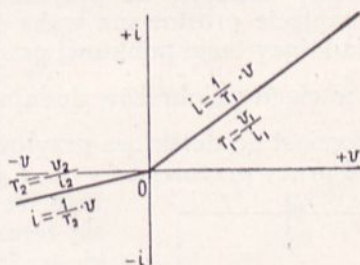
Moce te są znikomo małe, jeżeli uwzględnimy minimalną sprawność słuchawki, określając jako sprawność stosunek mocy wytworzonych drgań głosowych do doprowadzonej mocy elektrycznej. Słuchawka bowiem jest rodzajem silnika elektrycznego, w którym przeważająca część mocy doprowadzonej zamienia się na ciepło w uzwojeniach i rdzeniu elektromagnesów, część traci się na pokonanie oporów ruchu błony, a tylko mała cząstka promieniuje na zewnątrz pod postacią energii fal głosowych. Średnio sprawność słuchawek w pobliżu rezonansu nie przekracza 1%, zaś przy innych częstotliwościach jest znacznie mniejsza.

## 5. Detekcja prądów wielkiej częstotliwości.

Prądy wielkiej częstotliwości, indukowane w obwodach odbiorczych, nie nadają się bezpośrednio ani do zasilania elektromagnesów w przekazywnikach, ani do uruchomienia słuchawki telefonicznej. Bezpośredniemu zasilaniu elektromagnesów prądami wielkiej częstotliwości stoją na przeszkodzie przede wszystkim nadmierne straty w żelazie, zaś słuchawka magnetyczna, pomijając straty, nie reagowałaby na te prądy ze względu na dużą bezwładność mechaniczną. Zresztą gdyby nawet reagowała, drgania przez nią wytwarzane byłyby niedostępne dla ucha, jak to wynika z rozważań § 2 tego rozdziału.



Rys. 90a.

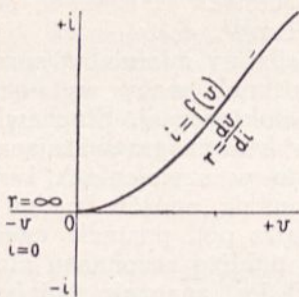


Rys. 90b.

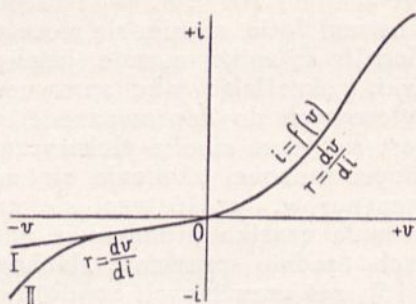
Dlatego w praktyce odbiorczej posługujemy się prądami szybkozmiennymi *wyprostowanymi* przy pomocy odpowiednich prostowników, zwanych tu — ze względu na szczególne zadanie, które spełniają — *detektorami*.

Zadaniem *detektora prostującego* jest zniekształcenie prądu szybkozmiennego symetrycznego na prąd o przebiegu asymetrycznym, któryby posiadał możliwie znaczną składową stałą. Zniekształcenie takie otrzymamy, przepuszczając prąd zmienny przez *przewodnik o charakterystyce*

oporności niesymetrycznej (choćby na pewnym odcinku). Typowe charakterystyki prostowników  $i = f(v)$  podane są na rys. 90 a do d. Charakterystyki rys. 90 a i c wyobrażają *prostowniki zupełne*, o przewodności wyłącznie jednokierunkowej; pierwsza z nich jest charakterystyką *idealną*, prostolinijną, podczas gdy druga jest typowa dla prostowników lampowych.



Rys. 90c.

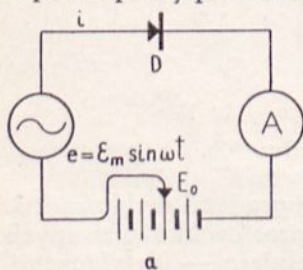


Rys. 90d.

Na rys. 90 b i d mamy charakterystyki *prostowników niezupełnych*, przy czym d jest wykresem typowym dla detektorów stykowych, t. zw. kryształkowych. Charakterystyka typu d może być w całej rozciągłości asymetryczna (krzywa I), lub też asymetria może się ograniczyć tylko do pewnego odcinka charakterystyki (krzywa II).

Bardzo ważny dla działania detektora prostującego jest wybór tak zwanego *punktu pracy*, to jest punktu na charakterystyce, którego współrzędne są wyznaczone (rys. 91 a i b) przez pewne początkowe napięcie stałe  $E_0$ , działające w obwodzie (polaryzacja początkowa) i odpowiadający mu prąd stały, płynący przez prostownik. Znaczenie punktu pracy dla detekcji zrozumiemy najlepiej na przykładzie prostownika idealnego (rys. 91 b). Jeżeli napięcie prostowane waha się około punktu  $E_0 = 0$ , to prąd stały, odpowiadający temu punktowi pracy będzie  $I_0 = 0$ , a prąd zmienny  $i$  będzie płynął w ciągu półokresów dodatnich, dając wartość średnią  $\Delta I = \frac{J_m}{\pi}$ . Je-

żeli natomiast do detektora przyłożymy początkowe napięcie  $|+E_0| \geq |2E_m|$ , to punkt pracy przeniesiemy do B, otrzymując prąd spoczynkowy  $I_0$ . Wobec tego, że wahania napięcia zmiennego odbywają się teraz na części prostoliniżnej charakterystyki, średnia wartość prądu zmiennego jest równa zero i prostowania niema. Jeżeli natomiast damy takie same ujemne napięcie początkowe  $-E_0$ , to również detekcji nie będzie, gdyż w punkcie C oporność detektora jest nieskończenie wielka. Łatwo się przekonać, że przyłożenie napięcia początkowego dodatniego lub ujemnego, mniejszego od amplitudy napięcia prostowanego, da nam prąd średni mniejszy, niż odpowiadający punktowi A. Jak doniosłe znaczenie wybór punktu pracy posiada dla detektorów krzywoliniżnych, przekonamy się w dalszym ciągu.

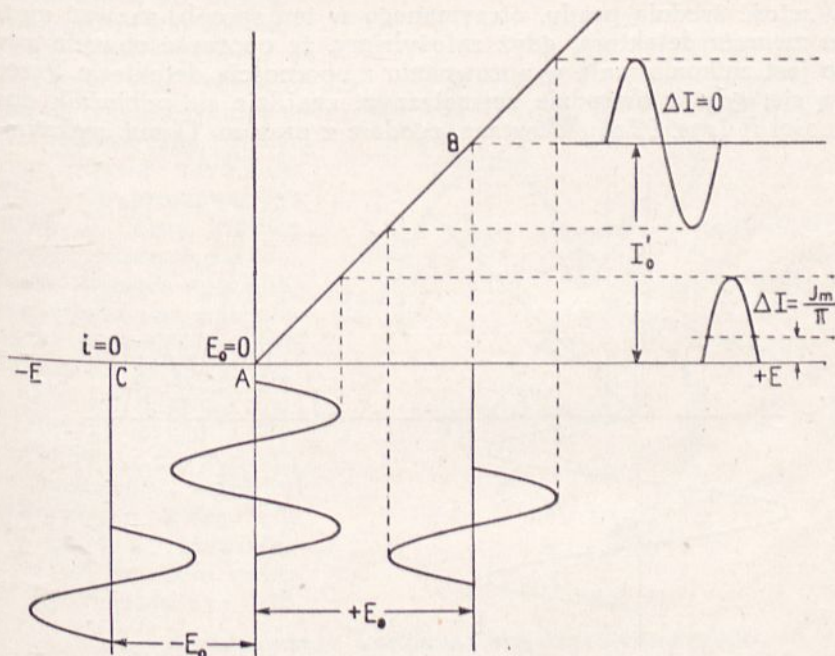


Rys. 91a.

W następnych rozdziałach rozpatrzemy kolejno dwa skrajne przypadki: charakterystykę prostolinijną i charakterystykę kwadratową. W praktyce, szczególnie radjofonicznej, dążymy do osiągnięcia charakterystyki prostolinijnej, zaś odbiór stacji telegraficznych zbliża się do warunków krzywej kwadratowej. Większość przypadków praktycznych mieści się między oboma przypadkami krańcowymi.

## 6. Działanie detektora o charakterystyce idealnej.

Działanie prostownika rozpatrzemy wpierrw na charakterystyce idealnej rys. 90 a. Wyobraźmy sobie obwód rys. 91 a, składający się ze źródła zmiennej siły elektromotorycznej  $E$ , detektora prostującego  $D$  i miliamperomierza prądu stałego (o bardzo małej oporności). Jeżeli punkt pracy



Rys. 91b.

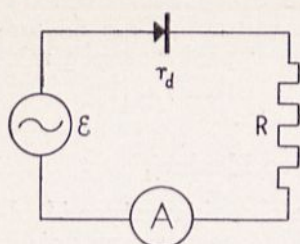
detektora obierzemy w  $A$ , to prąd płynący pod działaniem siły elektromotorycznej zmiennej ( $e = E_m \sin \omega t$ , rys. 91 b), wyrazi się równaniami:

$$\text{od } t=0 \text{ do } t = \frac{T}{2}, \quad i = J_{m_0} \sin \omega t = \frac{E_m}{r_d} \cdot \sin \omega t,$$

jeżeli  $r_d = \frac{E_m}{J_{m_0}}$  jest opornością detektora, zaś

$$\text{od } t = \frac{T}{2} \text{ do } t = T, \quad i = 0.$$

Stąd średnia wartość prądu, składającego się z takich impulsów jednokierunkowych:



Rys. 92a.

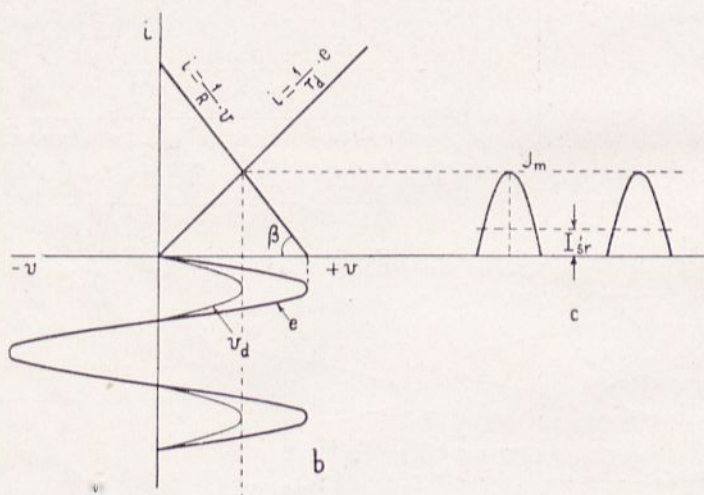
$$I_{sr0} = \Delta I = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} J_{m0} \sin \omega t dt = \frac{J_{m0}}{\pi}, \quad (151)$$

czyli, po uwzględnieniu równania charakterystyki:

$$J_{m0} = \frac{E_m}{r_d},$$

$$I_{sr0} = \frac{E_m}{\pi \cdot r_d}. \quad (151 a)$$

Wartość średnią prądu, otrzymanego w ten sposób, nazwać możemy *prądem zwarcia detektora*, gdyż założyliśmy, że oporność obwodu zewnętrznego jest znikomo mała w porównaniu z opornością detektora. Przebiegi zmieniają się, gdy w obwodzie zewnętrznym znajdzie się odbiornik energii o oporności  $R$  (rys. 92 a). Wówczas, zgodnie z prawem Ohma, maksymalna



Rys. 92b.

wartość prądu płynącego przez detektor, wyniesie:

$$J_m = \frac{E_m}{r_d + R},$$

czemu będzie odpowiadała wartość średnia prądu wyprostowanego:

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} J_m \sin \omega t dt = \frac{J_m}{\pi} = \frac{E_m}{\pi (R_d + R)}. \quad (152)$$

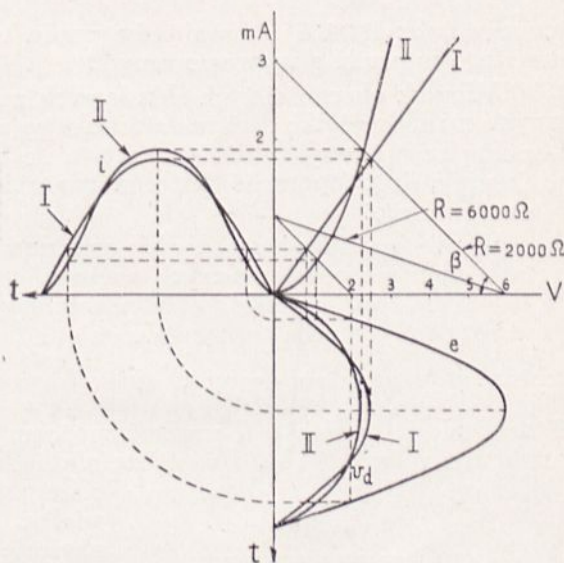
Do graficznego przedstawienia przebiegu prostowania z obciążeniem użyć można konstrukcji rys. 93. Spadek napięcia na oporności zewnętrznej daje nam *prosta spadku napięcia*, wyrażona równaniem:

$$v = i \cdot R,$$

czyli:

$$R = \frac{v}{i} = \operatorname{ctg} \beta.$$

Mając więc na zaciskach obwodu pewne chwilowe napięcie  $e$ , kreślimy z punktu, odpowiadającego temu napięciu na osi odciętych, prostą spadku napięcia pod kątem  $\beta = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{v}{i}$ . Punkt przecięcia się prostej z charakterystyką detektora da nam rzeczywiste napięcie  $v_d$  na detektorze, oraz odpowiadającą mu chwilową wartość prądu  $i$  w obwodzie. Powtarzając tę konstrukcję dla szeregu wartości chwilowych napięcia zasilającego, otrzymamy krzywą przebiegu prądu wyprostowanego (krzywa  $i$ ), oraz krzywą przebiegu napięcia na detektorze (krzywa  $v_d$ ). Konstrukcja taka jest potrzebna tylko przy krzywoliniowej charakterystyce detektora (krzywa II). Gdy charakterystyka jest linią prostą, ograniczyć się możemy do wyznaczenia amplitud obu krzywych, które będą miały przebieg sinusoidalny. Na tej zasadzie wykonane są wykresy rys. 92b.



Rys. 93.

### 7. Zastosowanie kondensatora wyrównawczego.

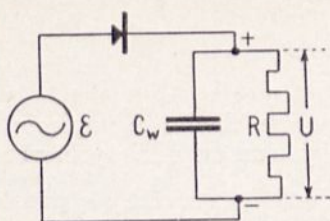
Jak wynika z poprzednich rozważań, detektor prostujący daje prąd o charakterze tętniącym, przerywanym. Prąd ten obok składowej stałej, wyrażonej wzorami (151) i (152), zawiera składową zmienną o częstotliwości prądu prostowanego, oraz jego harmoniczne, wyraża się więc szeregiem Fouriera<sup>1)</sup>

$$i = \frac{J_m}{\pi} + \frac{J_m}{2} \sin \omega t - \frac{2J_m}{1.3 \cdot \pi} \cdot \cos 2\omega t - \frac{2J_m}{3.5 \cdot \pi} \cdot \cos 4\omega t \dots + \frac{2J_m}{(n^2 - 1)\pi} \cdot \cos n\omega t, \quad (154)$$

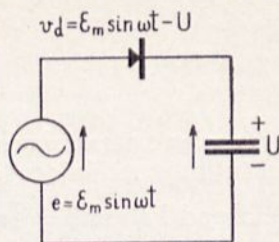
gdzie  $n$  jest dowolną liczbą parzystą.

<sup>1)</sup> Patrz dodatek I.

W prądzie wyprostowanym znajduje się więc prąd prostowany z połową amplitudy pierwotnej, oraz szereg harmonicznych parzystych, z których pierwsza (II harmoniczna) posiada amplitudę około 21% prądu pro-



Rys. 94a.



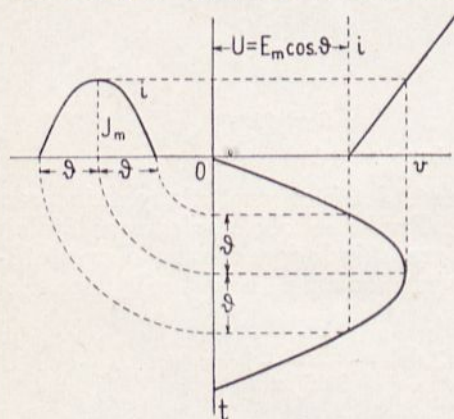
Rys. 94b.

stowanego, czyli 42,5% amplitudy prądu o częstotliwości podstawowej, zawartego w prądzie wyprostowanym.

Wskutek obecności tych składowych zmiennych w prądzie wyprostowanym mamy nie tylko znaczne stosunkowo zużycie mocy prądu zmiennego w oporze zewnętrznym, lecz ponadto, o ile odbiornik energii nie jest bezindukcyjny, jego oporność pozorną znacznie zmniejsza amplitudę prądu wyprostowanego.

Aby tego uniknąć, stosuje się w układach detekcyjnych (jak zresztą i w urządzeniach prostowniczych większej mocy) kondensator wyrównawczy  $C_w$  (rys. 94 a), zwierający odbiornik energii dla prądów szybkochyennych. Jeżeli pojemność tego kondensatora jest dostatecznie duża, możemy pominąć jego oporność urojona  $\left(-j \frac{1}{\omega C_w}\right)$  wobec oporności rzeczywistej de-

tektora, tak iż oporność  $R$  uważać możemy za zwartą dla prądów szybkochyennych (rys. 94 b). Równocześnie jednakże na kondensatorze  $C_w$ , o ile pojemność jego jest dostatecznie wielka, utrzymuje się pewne stałe napięcie  $U$ , równe spadkowi napięcia średniego prądu wyprostowanego na oporności  $R$ . Napięcie to przeciwdziała zmiennej sile elektromotorycznej, działającej w obwodzie, tak iż detektor pozostaje pod działaniem napięcia



Rys. 95.

$$v_d = E_m \sin \omega t - U, \quad (155)$$

Odpowiada to przesunięciu początku układu o wartość  $U$  w kierunku ujemnym (rys. 95), wskutek czego prąd w obwodzie detekcyjnym nie płynie w ciągu całego półokresu dodatniego, lecz jedynie w czasie, gdy wartość chwilowa  $e$  przekracza napięcie  $U$  na kondensatorze. Kąt  $\vartheta$  (rys. 95), odpowiadający połowie czasu przepływu prądu przez obwód, a równy cza-



sowi ładowania kondensatora poprzez detektor, nazywamy *kątem ładowania* prostownika.

Wobec tego, że prąd w obwodzie detekcyjnym z kondensatorem płynie tylko w ciągu ułamka okresu, odpowiadającego podwójnemu kątowi ładowania, przebieg prądu nie posiada postaci połówki sinusoidy, lecz jedynie kształt odcinka jej o podstawie  $2\vartheta$ . Stąd też *wartość średnia prądu wyprostowanego* wyrazi się w sposób odmienny, niż dla obwodu bez kondensatora wyrównawczego. A mianowicie krzywa prądu stanowi wierzchołek sinusoidy (fikcyjnej), której amplituda (rys. 96) wynosi  $J_m'$ . By otrzymać rzędne rzeczywistej krzywej prądu, musimy od nich odjąć część nieistniejącą, wyrażoną zależnością:

$$J_m' - J_m = J_m' \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = J_m' \cos \vartheta.$$

Stąd więc równanie krzywej prądu wyrazić możemy w postaci:

$$i = J_m' \sin x - J_m' \cos \vartheta = J_m' (\sin x - \cos \vartheta).$$

Z rys. 96 wynika dalej, że wartość maksymalna prądu wynosi:

$$J_m = J_m' (1 - \cos \vartheta),$$

skąd równanie prądu w zależności od jego wartości maksymalnej posiada postać:

$$i = \frac{J_m}{1 - \cos \vartheta} \cdot (\sin x - \cos \vartheta). \quad (156)$$

Prąd średni da nam całka <sup>1)</sup>:

$$I_{sr} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{J_m}{1 - \cos \vartheta} \left[ \int_{\pi/2 - \vartheta}^{\pi/2 + \vartheta} \sin x \, dx - \cos \vartheta \int_{\pi/2 - \vartheta}^{\pi/2 + \vartheta} dx \right],$$

co po rozwiązaniu w oznaczonych granicach daje (rys. 97, krzywa I):

$$I_{sr} = \frac{J_m}{\pi} \cdot \left( \frac{\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta} \right). \quad (157)$$

Uwzględniając, że w pierwszym przybliżeniu można przyjąć <sup>2)</sup>:

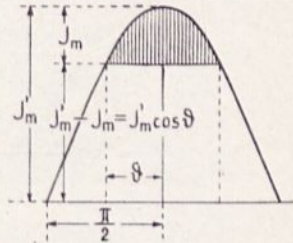
$$\frac{\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta} \cong \frac{2\vartheta}{3},$$

wyrażenie na prąd wyprostowany przybiera postać przybliżoną:

$$I_{sr} \cong \frac{2J_m}{3\pi} \cdot \vartheta \cong 0,21 J_m \cdot \vartheta. \quad (157 a)$$

<sup>1)</sup> W tem i w dalszych przeliczeniach okres jest wyrażony w mierze łukowej.

<sup>2)</sup> Rozwijając w szereg  $\sin \vartheta$  i  $\cos \vartheta$ , i pomijając wyższe potęgi.



Rys. 96.

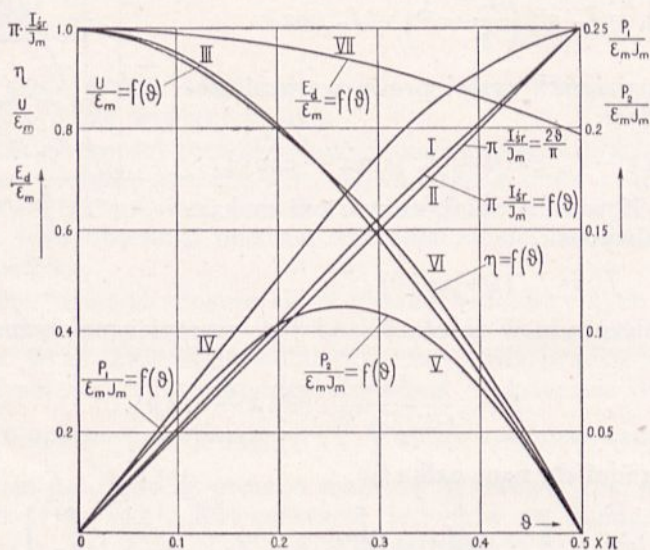
Jak wynika z rys. 97, przebieg równania (157) nie wiele różni się od prostej (krzywa II):

$$I_{sr} = \frac{J_m}{\pi} \cdot \frac{2\vartheta}{\pi} = \frac{2}{\pi^2} \cdot J_m \cdot \vartheta \cong 0,2 J_m \cdot \vartheta, \quad (157 b)$$

która praktycznie pokrywa się z poprzednim przybliżeniem .

Jak już zaznaczono na wstępie, napięcie wyprostowane, a temsamem kąt ładowania jest funkcją prądu wyprostowanego. Nietrudno dowieść na zasadzie rys. 95 i 96, że (krzywa III):

$$U = E_m \cdot \cos \vartheta. \quad (158)$$



Rys. 97.

Stąd obliczyć możemy oporność zewnętrzną  $R$ , odpowiadającą kąto-  
wi ładowania  $\vartheta$ , podstawiając wzór (157a):

$$R = \frac{U}{I_{sr}} \cong \frac{E_m \cos \vartheta}{0,21 J_m \cdot \vartheta} \cong 4,7 \frac{E_m}{J_m} \cdot \frac{\cos \vartheta}{\vartheta}, \quad (159)$$

lub, zważywszy, że oporność detektora, obliczona z jego charakterystyki  
(patrz rys. 95 i 96) i równania (155 i 156) wynosi:

$$r_d = \frac{E_m (1 - \cos \vartheta)}{J_m}, \quad (159 a)$$

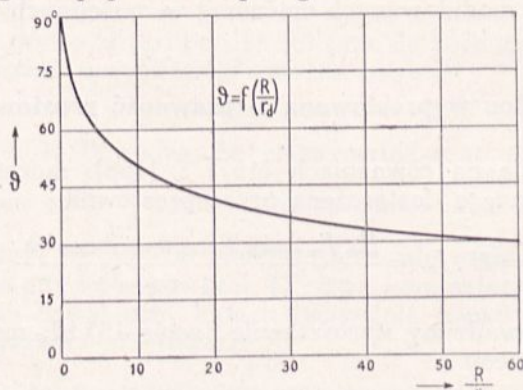
otrzymamy:

$$R \cong 4,7 r_d \frac{\cos \vartheta}{\vartheta (1 - \cos \vartheta)}. \quad (159 b)$$

Kąt ładowania jest więc funkcją obciążenia prostownika. Zależność kąta  $\vartheta$  od stosunku  $R/r_d$  podaje krzywa rys. 98. Tak z tej krzywej, jak i z dyskusji równania (159 b) wynika, że dla obwodu otwartego ( $R = \infty$ ) kąt ładowania jest równy zeru, i napięcie wyprostowane w biegu jałowym:

$$U_o = E_m. \quad (158 a)$$

Gdy natomiast prostownik jest zwarty ( $R = 0$ ), kąt ładowania  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , napięcie wyprostowane  $U = 0$ , czyli przypadek ten sprowadza się do rozpatrywanego w poprzednim paragrafie.



Rys. 98.

Prąd średni w zależności od amplitudy napięcia zmiennego wyrazi się na zasadzie poprzednich wzorów równaniem:

$$I_{sr} = \frac{E_{r1}}{r_d} \cdot \frac{\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta}{\pi} \quad (160)$$

czyli, dla uproszczonego wzoru (157 b):

$$I_{sr} = 0,21 \vartheta \cdot \frac{E_m}{r_d} (1 - \cos \vartheta), \quad (160 a)$$

jest więc wprost proporcjonalny do przyłożonego napięcia zmiennego, gdyż kąt ładowania w prostowniku o charakterystyce prostoliniowej, w myśl (159 b), jest niezależny od amplitudy napięcia zmiennego. Fakt ten jest bardzo ważny dla nieznieształconej detekcji sygnałów modulowanych.

#### Stała czasu obwodu detekcyjnego.

Z dotychczasowych rozważań wynikałoby, że pojemność kondensatora wyrównawczego powinna być możliwie wielka i to założenie byłoby zupełnie słuszne dla stanów ustalonych. Skoro natomiast odbieramy znaki telegraficzne, uwzględnić musimy stałą czasu obwodu  $\tau = CR$ , od której zależy szybkość narastania i zanikania prądu w obwodzie zgodnie z równaniami:

$$i = I (1 - e^{-\frac{t}{CR}}) \quad \text{oraz} \quad i' = I \cdot e^{-\frac{t}{CR}},$$

Gdyby stała czasu obwodu była zbyt duża, mogłoby to spowodować zlewanie się poszczególnych znaków przy szybkim nadawaniu. Na to zjawisko zwróciliśmy już uwagę w rozdziale II, § 4, w odniesieniu do prądów wielkiej częstotliwości. Stała czasu obwodu detekcyjnego jest oczywiście funkcją szybkości nadawania i powinna być mniejsza niż czas trwania przerwy między znakami.

Stała czasu obwodu detekcyjnego posiada również doniosłe znaczenie dla odbioru telefonicznego, gdy bowiem jest zbyt duża, opóźnia ona stany przejściowe występujące przy modulacji i wywołuje zjawiska zbliżone do echa. Inne względy, wpływające na wybór kondensatora wyrównawczego przy odbiorze fal modulowanych omówimy w następnych paragrafach.

### 8. Moc wyprostowana i sprawność prostowania.

Opierając się na równaniach (157) i (158), możemy obliczyć moc prądu wyprostowanego dostarczoną przez prostownik:

$$P_2 = U \cdot I_{sr} = \frac{E_m J_m}{\pi} \cdot \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta - \vartheta \cos^2 \vartheta}{1 - \cos \vartheta} \quad (161)$$

Jeżeli wprowadzimy uproszczenie (wzór 157 b), moc wyprostowana wyrazi się równaniem:

$$P_2 = E_m J_m \frac{2}{\pi^2} \vartheta \cos \vartheta \cdot \cong 0,21 E_m J_m \vartheta \cos \vartheta \quad (161 a)$$

Zależność mocy wyprostowanej od kąta ładowania podaje krzywa V rys. 97.

Zaś moc pierwotną, pobraną ze źródła prądu zmiennego, oblicza się całką<sup>1)</sup>:

$$P_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2-\vartheta}^{\pi/2+\vartheta} e i dx,$$

w której

$$e = E_m \sin x, \quad i = -\frac{J_m}{1 - \cos \vartheta} \cdot (\sin x - \cos \vartheta).$$

Po podstawieniu tych wartości otrzymujemy:

$$P_1 = \frac{E_m J_m}{2\pi(1 - \cos \vartheta)} \cdot \left[ \int_{\pi/2-\vartheta}^{\pi/2+\vartheta} \sin^2 x dx - \cos \vartheta \int_{\pi/2-\vartheta}^{\pi/2+\vartheta} \sin x dx \right],$$

<sup>1)</sup> Przyjmujemy prostownik jako obciążenie bezindukcyjne źródła prądu i pomijamy oporność indukcyjną obwodu. Założenie takie, choć niezawsze dopuszczalne, uprości nam dalsze przeliczenia.

co po wykonaniu całkowania w oznaczonych granicach daje:

$$P_1 = E_m \cdot J_m \cdot \frac{\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta}{2\pi(1 - \cos \vartheta)}. \quad (162)$$

Funkcję tę przedstawia krzywa IV rys. 97.

Na zasadzie równań (161) i (162) znajdziemy sprawność prostownika:

$$\eta = \frac{2(\sin \vartheta \cos \vartheta - \vartheta \cos^2 \vartheta)}{\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta}. \quad (163)$$

Zależność sprawności od kąta ładowania również mamy na rys. 97, na krzywej VI. Krzywa ta jest bardzo zbliżona do kosinusoidy (krzywa III), tak iż z dostatecznym przybliżeniem można napisać:

$$\eta \cong \cos \vartheta. \quad (163 a)$$

Krzywe rys. 97 dowodzą, że maksymalną moc wyprostowaną daje nam kąt ładowania około  $\frac{\pi}{4}$  czyli  $45^\circ$  ze sprawnością około 70%. Mniejsze kąty ładowania dają wprawdzie mniejszą moc, ale większą sprawność prostowania, podczas gdy kąty powyżej  $45^\circ$  dają i zmniejszenie mocy i pogorszenie sprawności. Pracę przy kątach ładowania ponad  $45^\circ$  możemy więc uważać za *przeciążenie* prostownika.

Wobec tego, że prostownik jest urządzeniem elektrycznym, w którym po stronie pierwotnej płynie prąd zmienny, a po wtórnej prąd stały, możemy go rozpatrywać w sposób dwojaki: od strony prądu zmiennego lub od strony prądu stałego.

Od strony prądu zmiennego ważne będzie dla nas pytanie, jakie obciążenie dla źródła prądu przedstawia prostownik wraz ze swoim obwodem wyjściowym. Tę *oporność zastępcza prostownika* otrzymamy z równania (162) jako:

$$R_z = \frac{E^2}{P_1} = \frac{E_m^2}{2P_1} = \frac{E_m}{J_m} \cdot \frac{\pi(1 - \cos \vartheta)}{\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta} \quad (162 a)$$

lub też, po uwzględnieniu (159 a):

$$R_z = \frac{\pi \cdot r_d}{\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta}. \quad (162 b)$$

Oporność  $R_z$  jest wielkością, którą należy wstawić jako  $R_z$  do równania (118) na str. 111.

Możemy jednakże rozpatrywać prostownik również *jako źródło prądu stałego* o pewnej sile elektromotorycznej  $E_d$ , którą obliczyć można z równań (157) i (162) jako:

$$E_d = \frac{P_1}{I_{sr}} = E_m \cdot \frac{\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta}{2(\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta)}. \quad (164)$$

Przebieg tej funkcji mamy na krzywej VII rys. 97.

Przy pomocy równania (164) możemy znaleźć, jaką oporność zastępczą  $R_d$  dla prądu stałego przedstawia prostownik, obliczając:

$$R_d + R = \frac{E_d}{I}, \text{ czyli } R_d = \frac{E_d}{I} - R. \quad (164 a)$$

Obliczenia te mają znaczenie raczej dydaktyczne, pozwalając rozpa-trywać detektor jako generator prądu stałego o sile elektromagnetycznej  $E_d$  i oporności wewnętrznej  $R_d$ . Wyniki otrzymane tą drogą pokrywają się zresztą z obliczonymi przy pomocy wzorów poprzednich.

*Przykład.*

Mamy charakterystykę prostolinijną detektora o nachyleniu  $i/v = 2 \text{ mA/V}$ , co odpowiada oporności:

$$r_d = \frac{1 \text{ V}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ A}} = 500 \Omega.$$

Przyjmując oporność zewnętrzną  $R = 4000 \Omega$ , otrzymamy:

$$\frac{R}{r_d} = \frac{4000}{500} = 8,$$

czemu odpowiada, według krzywej rys. 98, kąt ładowania:

$$\vartheta \cong 53^\circ \cong 0,3 \pi = 0,942.$$

Dla kąta tego mamy  $\sin \vartheta = 0,8$ ,  $\cos \vartheta = 0,6$ . Stąd obliczymy z (159a):

$$\frac{E_m}{J_m} = \frac{r_d}{1 - \cos \vartheta} = \frac{500}{0,4} = 1250,$$

z czego znajdziemy oporność równoważną:

$$R_z = 1250 \cdot \frac{0,4 \pi}{0,942 - 0,6 \cdot 0,8} \cong 3530 \Omega.$$

Sprawność prostowania wynosi w przybliżeniu:

$$\eta \cong \cos \vartheta = 0,6.$$

Przyjmując amplitudę napięcia zasilającego  $E_m = 1 \text{ V}$ , otrzymamy z (159 a):

$$J_m = \frac{1}{1250} = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 0,8 \text{ mA}.$$

Moc pierwotna według krzywej IV lub równania (162) wyniesie:

$$P_1 = 1 \cdot 0,8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,177 = 0,141 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cong 0,14 \text{ mW},$$

skąd obliczyć możemy wartość skuteczną prądu zmiennego:

$$J = \frac{P_1}{E} = \frac{0,14}{1} \sqrt{2} \cong 0,20 \text{ mA}.$$

(wartość tę wskazałby amperomierz cieplny włączony przed detektorem).

Napięcie wyprostowane (158) wynosi:

$$U = 1 \cdot 0,6 = 0,6 \text{ V},$$

zaś prąd wyprostowany (157 b):

$$I_{sr} = \frac{2}{\pi^2} \cdot 0,8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3 \pi \cong 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 0,15 \text{ mA}$$

Stąd moc wyprostowana (161):

$$P_2 = U I_{sr} = I_{sr} E_{sr} \cos \vartheta = 0,6 \cdot 0,15 = 0,09 \text{ mW},$$

a sprawność:

$$\eta = \frac{0,09}{0,14} = 0,60,$$

co jest zgodne z poprzednimi obliczeniami.

Jeżeli detektor pracuje w układzie rys. 57 b, str. 11, to przy oporności skutecznej anteny  $R_1 = 40 \Omega$  otrzymamy w obwodzie detekcyjnym maksimum mocy, gdy:

$$\omega M = \sqrt{R_1 R_2} = \sqrt{40 \cdot 3530} \cong 375 \Omega,$$

co dla  $\omega = 10^7$  ( $\lambda \sim 188 \text{ m}$ ) da wymagany współczynnik indukcji wzajemnej

$$M = \frac{375}{10^7} \text{ H} = 37,5 \mu\text{H}.$$

### 8-a. Detekcja na zakrzywieniu charakterystyki prostownika.

Rozwinięta w poprzednich paragrafach teoria prostownika o charakterystyce prostoliniowej stosuje się z dostatecznym przybliżeniem jedynie do prostowników lampowych, zasilanych napięciem zmiennym o znacznej amplitudzie (w technice odbiorczej — rzędu kilku woltów). W wielu jednakże przypadkach praktycznych, jak na przykład w odniesieniu do odbioru odległych stacji telegraficznych, napięcie zasilające jest zbyt małe, aby charakterystykę detektora można było zastąpić przez średnią linię prostą (rys. 99 b, prosta kropkowana). Wahania napięcia odbywają się tu w wąskich granicach, dokoła pewnego początkowego napięcia stałego  $E_0$ , które określa nam punkt pracy na charakterystyce.

Aby otrzymać możliwie skuteczne prostowanie, punkt pracy obierzemy tak, by gałęzie krzywej po obu jego stronach posiadały nachylenia możliwie różne. Nie umieścimy więc punktu pracy ani na części prostoliniowej  $B$ , ani też w punkcie przegięcia  $C$  charakterystyki, na tych bowiem odcinkach krzywa jest symetryczna i dałaby krzywą prądu również symetryczną o wartości średniej równej zeru.

Działanie prostujące na zakrzywieniu charakterystyki wyjaśni nam następujące rozumowanie matematyczne:

Jeżeli charakterystyka detektora wyraża się w sposób ogólny funkcją:

$$i = f(v), \quad (a)$$

to dla napięcia początkowego  $E_0$  będziemy mieli prąd początkowy:

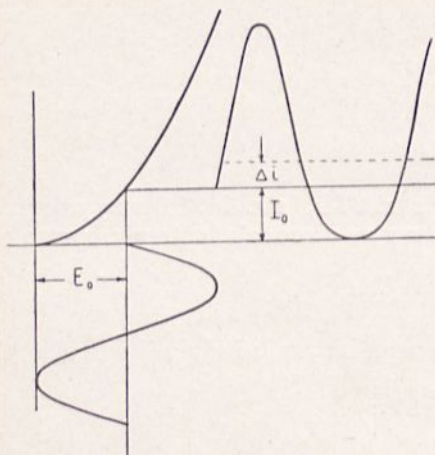
$$I_0 = f(E_0). \quad (b)$$

Napięcie  $E_0$  i prąd  $I_0$  są współrzędnymi punktu pracy detektora. Jeżeli teraz dokoła wartości początkowej  $E_0$  napięcie będzie się zmieniało, przypuśćmy w sposób sinusoidalny, a więc o wielkość:

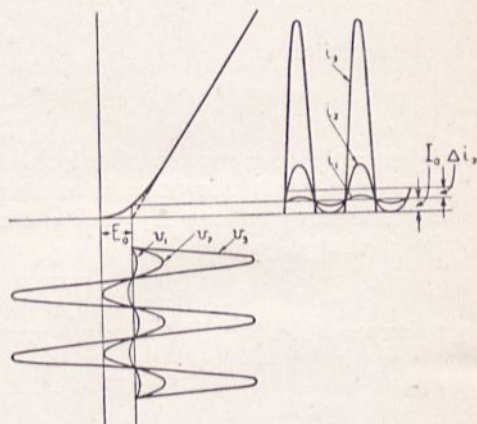
$$v = V_m \sin \omega t, \quad (c)$$

to, w pewnej chwili, prąd płynący w obwodzie ulegnie zmianie o pewną wartość  $i$ , czyli będzie:

$$I_0 + i = f(E_0 + v) = f(E_0 + V_m \sin \omega t) \quad (d)$$



Rys. 99a.



Rys. 99b.

Jeżeli w granicach zmian napięcia  $\pm V_m$  funkcja ta jest ciągła i skończona, to rozwinąć ją możemy na szereg potęgowy Taylor'a dokoła wartości  $E_0$ :

$$I_0 + i = f(E_0) + f'(E_0) \cdot V_m \sin \omega t + \frac{1}{2!} \cdot f''(E_0) V_m^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{3!} f'''(E_0) \cdot V_m^3 \sin^3 \omega t + \dots + \frac{1}{n!} f^n(E_0) V_m^n \sin^n \omega t + \dots \quad (e)$$

Wobec tego, że

$$f(E_0) = I_0,$$

otrzymamy przyrost prądu w postaci:

$$i = f'(E_0) V_m \sin \omega t + \frac{f''(E_0) V_m^2}{2!} \cdot \sin^2 \omega t + \frac{f'''(E_0) V_m^3}{3!} \cdot \sin^3 \omega t + \dots \dots + \frac{f^n(E_0) V_m^n}{n!} \cdot \sin^n \omega t + \dots \quad (f)$$

Miarą detekcji jednakże nie będą chwilowe przyrosty prądu pod wpływem chwilowych wartości napięcia zmiennego — prądem wyprostowanym będzie *średnia wartość przyrostów* w ciągu całkowitej wielokrotności okresu napięcia prostowanego:

$$\Delta i = I_{sr} = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} i dt, \quad (g)$$



czyli

$$\Delta i = \frac{1}{nT} \cdot \left[ f'(E_0) \cdot V_m \int_0^{nT} \sin \omega t dt + \frac{f''(E_0) V_m^2}{2!} \int_0^{nT} \sin^2 \omega t dt + \right. \\ \left. + \frac{f'''(E_0) V_m^3}{3!} \int_0^{nT} \sin^3 \omega t dt + \dots \right]. \quad (h)$$

Wiemy zaś, że średnie wartości potęg nieparzystych funkcji sinusoidalnych, wzięte przez całkowitą wielokrotność okresu, są równe zeru:

$$\int_0^{nT} \sin \omega t dt = \int_0^{nT} \sin^3 \omega t dt = \dots = 0, \quad (i)$$

wobec czego średni przyrost prądu wyprostowanego:

$$\Delta i = \frac{f''(E_0)}{n \cdot T \cdot 2!} \cdot V_m^2 \int_0^{nT} \sin^2 \omega t dt + \frac{f^{IV}(E_0) \cdot V_m^4}{nT \cdot 4!} \int_0^{nT} \sin^4 \omega t dt + \dots \quad (j)$$

Po wykonaniu powyższego działania otrzymujemy prąd wyprostowany

$$i = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_m^2}{2!} f''(E_0) + \frac{3}{8} \cdot \frac{V_m^4}{4!} \cdot f^{IV}(E_0) + \dots + \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{V_m^n}{n!} f^{(n)}(E_0) + \dots \quad (165)$$

Jeżeli uwzględnimy, że praktycznie charakterystyki detektorów w zakresie zakrzywienia z dostatecznym przybliżeniem dają szereg o współczynnikach potęgowych szybko malejących, czyli że wyrazy o potęgach wyższych od trzeciej, można pominąć, wzór (165) napisać można w przybliżeniu w postaci

$$\Delta i \cong \frac{V_m^2}{4} \cdot f''(E_0). \quad (165 a)$$

Stąd wniosek, że dla małych amplitud napięć prostowanych prąd wyprostowany jest proporcjonalny do kwadratu przyłożonego napięcia zmiennego, oraz do drugiej pochodnej charakterystyki.

Należy więc obrać punkt pracy w tym miejscu charakterystyki, w którym jej druga pochodna jest największa, czyli w którym występuje największa krzywizna charakterystyki.

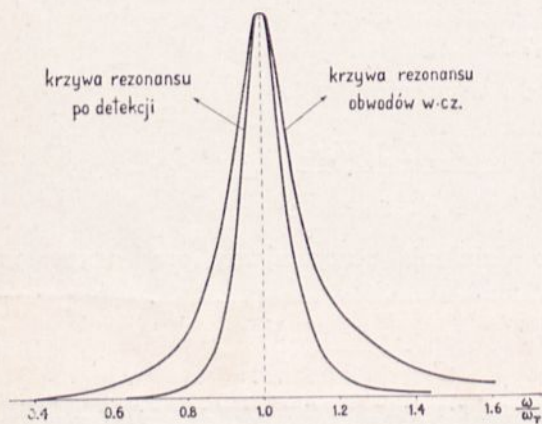
#### Czułość detektora.

Z równania (165a) wynika, że ze zmniejszeniem napięcia prostowanego prąd wyprostowany maleje w stosunku kwadratowym. W tym więc stosunku maleje czułość detektora wobec stacji o słabym odbiorze. Zja-

wisko to zwiększa ogólną selektywność odbiornika, albowiem gdy siła elektromotoryczna stacji przeszkadzającej dzięki właściwościom rezonansowym obwodów odbiorczych tłumi się w pewnym stosunku, to prąd wyprostowany, który stacja ta da w słuchawkach, stłumiony będzie w kwadracie tego stosunku. Stąd krzywa rezonansu odbiornika, zdjęta dla słabych sygnałów przy pomocy prądu wyprostowanego za detektorem, jest ostrzejsza od krzywej rezonansu, zdjętej w układzie wielkiej częstotliwości. Dlatego też dla oceny odbiornika zdejmuje się krzywe rezonansu za detektorem.<sup>1)</sup>

Porównanie takich dwu krzywych rezonansu mamy na rys. 100.

Gdy wreszcie *amplituda napięcia prostowanego spadnie do pewnej granicy, można przyjąć, że zmiany jej odbywają się na elementarnym odcinku prostoliniowym charakterystyki detektora, a więc detekcji niema.*



Rys. 100.

Wynika stąd, że detektor posiada pewien próg czułości, poniżej którego przestaje reagować na przychodzące sygnały. Czułość detektora zależy oczywiście od punktu pracy i jest tem mniejsza, im łagodniejsze jest zakrzywienie charakterystyki w danym punkcie.

Stąd wniosek praktyczny, że nie można odbierać dowolnie słabych stacyj, stosując wyłącznie wzmocnienie prądów małej częstotliwości, otrzymanych po detekcji, lecz dla odbioru stacyj odległych niezbędne jest wzmacnianie

prądów wielkiej częstotliwości przed doprowadzeniem ich do detektora.

To, co dotychczas powiedziano o detektorze prostującym, streścić możemy w sposób następujący:

1) Gdy amplituda napięcia prostowanego jest znaczna (rzędu jednego wolta i więcej), prąd wyprostowany jest wprost proporcjonalny do napięcia zmiennego. O ile charakterystyka jest u dołu łagodnie zakrzywiona, wybór punktu pracy nie jest zbyt krytyczny.

2) Gdy napięcie prostowane jest małe (poniżej 0,1 V), prąd wyprostowany jest w przybliżeniu proporcjonalny do kwadratu napięcia, a czułość detektora zależy w dużym stopniu od wyboru punktu pracy.

3) Przy bardzo małych amplitudach napięcia prostowanego, zależnych zresztą od punktu pracy, prostowania niema.

Na rys. 99 b przedstawione są porównawczo te trzy stany pracy detektora.

<sup>1)</sup> Patrz S. Dierewianko, Badanie odbiorników radjofonicznych, Prz. Radj. 1932, str. 33 i nast.

### Przykład.

Mamy charakterystykę lampy katodowej dwuelektrodowej, wyrażoną równaniem:

$$i = 80 v^2 \mu A.$$

Kolejne pochodne tej funkcji wynoszą:

$$f' = 120 \sqrt{v}, \quad f'' = \frac{60}{\sqrt{v}},$$

$$f''' = -\frac{30}{\sqrt{v^3}}, \quad f^{IV} = \frac{45}{\sqrt{v^5}}, \quad f^V = -\frac{112,5}{\sqrt{v^7}}, \quad f^{VI} = \frac{394}{\sqrt{v^9}}, \quad \text{i t. d.}$$

Stąd możemy utworzyć szereg równania ( $e$ ):

$$\begin{aligned} I + i = & 80 \cdot \sqrt{E_0^3} + 120 \sqrt{E_0} \cdot V_m \sin \omega t + \frac{60}{1 \cdot 2 \cdot \sqrt{E_0}} V_m^2 \sin^2 \omega t + \\ & - \frac{30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{E_0^3}} \cdot V_m^3 \sin^3 \omega t + \frac{45}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \sqrt{E_0^5}} \cdot V_m^4 \sin^4 \omega t + \\ & - \frac{112,5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \sqrt{E_0^7}} \cdot V_m^5 \sin^5 \omega t + \frac{394}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \sqrt{E_0^9}} \cdot V_m^6 \sin^6 \omega t + \dots \end{aligned}$$

Dyskusja tego szeregu wykazuje, że wraz z napięciem początkowym wszystkie pochodne parzyste maleją, że więc największą skuteczność prostowania mamy w pobliżu  $E_0 = 0$ .

Widać również, że, wyjąwszy wartość  $E_0$  znacznie mniejsze od jedności, dalsze wyrazy szeregu szybko maleją, można więc będzie pominać wyższe pochodne parzyste wobec drugiej pochodnej.

Założmy  $V_m = 1$  wolt i obliczmy prąd spoczynkowy i wyprostowany dla różnych wartości  $E_0$ .

Dla  $E_0 = 1$  wolt otrzymamy  $I_0 = 80 \mu A$ , a prąd wyprostowany z równań ( $j$ ) i (165)

$$\begin{aligned} \Delta i = & \frac{V_m^2}{4} \frac{60}{\sqrt{E_0}} + \frac{3}{8} \cdot \frac{V_m^4}{4!} \frac{45}{\sqrt{E_0^5}} + \frac{5}{12} \cdot \frac{V_m^6}{6!} \frac{394}{\sqrt{E_0^9}} = \\ = & 7,5 + 0,7 + 0,23 \cong 8,4 \mu A. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że o ile przy  $E_0 = 1$  wolt czwarta pochodna jeszcze wpływa na wynik, to szosta już posiada znaczenie bardzo małe.

Dla  $E_0 = 2$  wolty będziemy mieli

$$I_0 = 80 \sqrt{8} \cong 220 \mu A,$$

zaś prąd wyprostowany

$$\begin{aligned} \Delta i = & \frac{7,5}{\sqrt{2}} + \frac{3}{8} \cdot \frac{45}{24} \cdot \frac{1}{\sqrt{32}} + \frac{5}{12} \cdot \frac{394}{720} \cdot \frac{1}{\sqrt{512}} = \\ = & 5,3 + 0,125 + 0,013 \cong 5,44 \mu A. \end{aligned}$$

jest już bardzo mały wobec prądu spoczynkowego.

Przy napięciu  $E_0 = 10 V$  otrzymamy

$$I_0 = 80\sqrt{1000} \simeq 2500 \mu A.$$

zaś prąd wyprostowany

$$\Delta i \simeq \frac{7,5}{\sqrt{10}} \simeq 2,4 \mu A.$$

wynosi zaledwie 0,1% prądu spoczynkowego, a więc charakterystykę uważać możemy w tym miejscu za linię prostą.

Gdybyśmy obrali punkt pracy przy  $E_0 = 0$ , otrzymalibyśmy prostownik jednokierunkowy.

## 9. Detektor o charakterystyce krzywoliniowej, pracujący na oporność.

### Charakterystyka dynamiczna.

Teorię detektora, pracującego na zakrzywieniu charakterystyki, ograniczyliśmy w poprzednim paragrafie do warunków zwarcia. Gdy natomiast w obwód, zawierający detektor, włączymy szeregowo oporność (omową), będziemy musieli uwzględnić dwa zjawiska:

- 1) Spadek napięcia wytworzony przez prąd spoczynkowy  $I_0$ ,
- 2) Dodatkowy spadek napięcia wywołany przez prąd prostowany.

Spadek napięcia wytworzony w *spoczynku*, a temsamem *przesunięcie punktu pracy* detektora, określić możemy w sposób podany na rys. 93, przy pomocy prostej spadku napięcia. A mianowicie z punktu na osi odciętych, odpowiadającego początkowemu napięciu  $E_0$ , kreślimy prostą pod kątem:

$$\beta = \text{arc ctg } R = \text{arc ctg } \frac{E_0}{I_0},$$

i z punktu przecięcia się jej z charakterystyką detektora odczytujemy współrzędne  $Vd$  i  $I_0$  rzeczywistego punktu pracy.

Punkt pracy detektora pracującego w szereg z opornością jest więc zależny od oporności zewnętrznej i można go dobrać w sposób dwojaki:

a) Zmieniając napięcie początkowe, co odpowiada równoległemu przesunięciu prostej spadku napięcia na rys. 93,

b) Przy stałym napięciu początkowym, zmieniając oporność  $R$ , co odpowiada prostym o różnych nachyleniach, wychodzącym z tego samego punktu  $E_0$  (prosta dla  $R = 2000 \Omega$  i dla  $R = 6000 \Omega$ ).

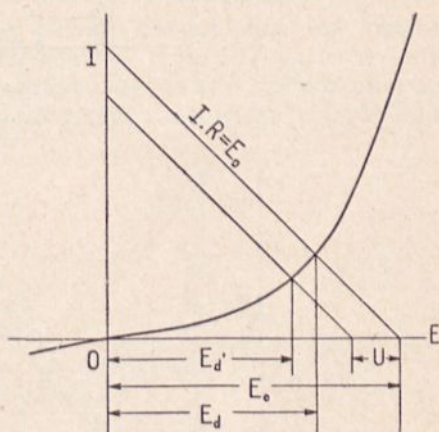
Zagadnienie *spadku napięcia wywołanego przez prąd prostowany* znacznie się upraszcza przy założeniu, że oporność  $R$  jest zabocznikowana kondensatorem  $C_w$  (rys. 94) o pojemności dostatecznej, aby zewrzeć składową zmienną prądu wyprostowanego, co zresztą odpowiada warunkom praktycznym. Wówczas na końcówkach oporu  $R$ , a temsamem i na okładzinach kondensatora, powstaje spadek napięcia  $U = I_{sr} \cdot R$ , który dodaje się do spadku napięcia początkowego  $I_0 R$ .

Pod wpływem prądu wyprostowanego następuje więc dalsze *przesunięcie punktu pracy w kierunku ujemnym*. Wobec tego, że prąd wyprosto-

wany jest funkcją amplitudy przyłożonego napięcia zmiennego, *punkt pracy nie jest ustalony*, lecz w miarę zwiększania amplitudy napięcia zmiennego przesuwa się coraz bardziej w dół charakterystyki, przez co zmniejsza się równocześnie prąd spoczynkowy. Na rys. 101 wyrażiliby się to przesunięciem początku prostej spadku napięcia z punktu  $E_0$  do punktu  $E_0 - U$ .

Jednakże prąd wyprostowany nie jest teraz jednoznaczna funkcją napięcia prostowanego, jak to było w przypadku detektora o charakterystyce prostoliniowej. Po pierwsze zmienia się tu stale punkt pracy, a prąd wyprostowany jest w myśl wzoru (165a) funkcją punktu pracy, powtórnie zaś zmniejsza się równocześnie  $I_0$ , przez co  $\Delta i$  staje się pozornie mniejsze.

Przy większych amplitudach napięcia prostowanego detektor zachowuje się różnie, zależnie od typu charakterystyki. Detektor lampowy, posiadający przewodność wybitnie jednokierunkową, przechodzi wówczas na sposób pracy, rozważony w § 7, i można doń zastosować rozwiniętą tam teorię. Na tej zasadzie pracują t. zw. *detektory mocy* (power rectifier), detektory lampowe, zasilane amplitudą napięcia rzędu kilku woltów i dające prąd wyprostowany prawie proporcjonalny do napięcia (patrz równania 161 i 161 a).



Rys. 101.

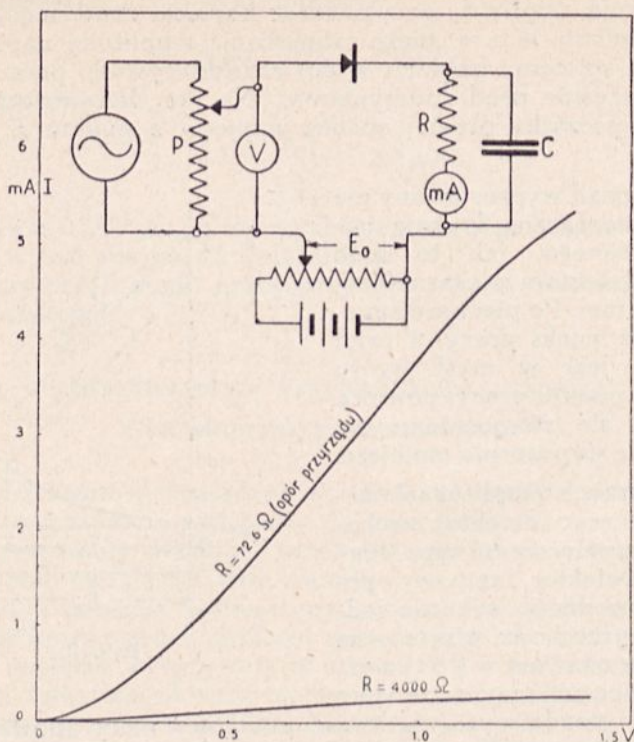
Prostowniki stykowe, o ile ich charakterystykę można przyrównać do dwu odcinków prostych o różnym nachyleniu (patrz rys. 90 b), zachowują się w sposób zbliżony. Jeżeli jednak charakterystyka takiego prostownika jest w dalszym swym przebiegu symetryczna (rys. 90 d), to punkt pracy w miarę wzrostu amplitudy napięcia zbliża się do punktu przeięcia i skuteczność prostowania pogarsza się.

Najlepszy obraz zachowania się detektora w rzeczywistych warunkach pracy daje jego *charakterystyka dynamiczna*. Wyraża ona prąd wyprostowany w zależności od amplitudy napięcia przyłożonego:

$$\Delta i = f(V_m). \quad (166).$$

Charakterystykę dynamiczną można zdjąć przy pomocy układu rys. 102, doprowadzając do detektora napięcia zmienne  $V$ , regulowane zapomocą potencjometru  $P$ , i odczytując na miliamperomierzu prądu stałego odpowiadające tym napięciom prądy  $I_0 + \Delta i$ .

Typowe charakterystyki dynamiczne detektora przy różnych obciążeniach podają krzywe rys. 102 dla detektora stykowego.



Rys. 102.

Z porównań tych krzywych wynika, że zależność między prądem wyprostowanym i napięciem staje się tem bardziej prostolinijna, im większa jest oporność zewnętrzna wobec oporności detektora.

### 10. Modulacja prądu wielkiej częstotliwości.

Detekcja prądu szybkozmiennego o stałej amplitudzie i częstotliwości — zgodnie z poprzednimi paragrafami — daje nam w wyniku prąd stały. Ażeby na stacji odbiorczej otrzymać nie prąd stały, lecz żądane sygnały, musimy tak modulować prąd, zasilający antenę nadawczą, aby detekcja dała nam przebiegi prądu, odtwarzające przebiegi nadawania sygnałów. A więc, jeżeli to jest nadawanie impulsowe, prąd po detekcji musi być prądem stałym, przerywanym w odpowiedni sposób, jeżeli zaś mamy do czynienia z modulacją telefoniczną, prąd po detekcji musi być kopją prądu w obwodzie mikrofonu.

Rozróżniamy dwa zasadnicze typy modulowania prądu wielkiej częstotliwości:

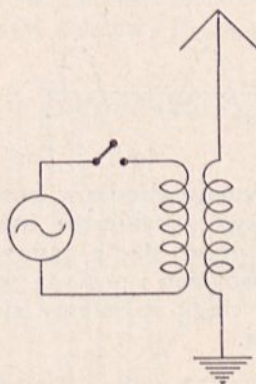
1) *Modulację amplitudy*, polegającą na zmianach amplitudy prądu nadawczego w sposób żądany;

2) *Modulację częstotliwości*, polegającą na odpowiednich zmianach częstotliwości prądu szybkozmiennego, przy zachowaniu stałej amplitudy tego prądu.

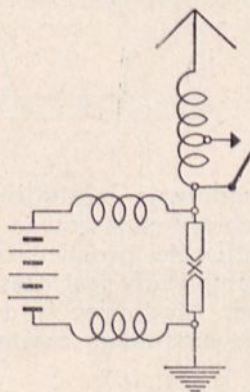
3) Trzeci sposób, *modulacja faz*, jest odmianą modulacji częstotliwości, jak to stwierdzimy w dalszym ciągu.

Dla zrozumienia istoty obu zasadniczych typów modulacji mogą nam posłużyć następujące przykłady nadawania telegraficznego:

a) Jeżeli przerywamy i zamykamy obwód anteny lub też obwód, zasilający antenę, zapomocą klucza morsowskiego (rys. 103-a), to w antenie w odpowiednich odstępach czasu powstają ciągi prądu szybkozmiennego stałej częstotliwości o długości, odpowiadającej czasowi naciśnięcia klu-



Rys. 103-a.



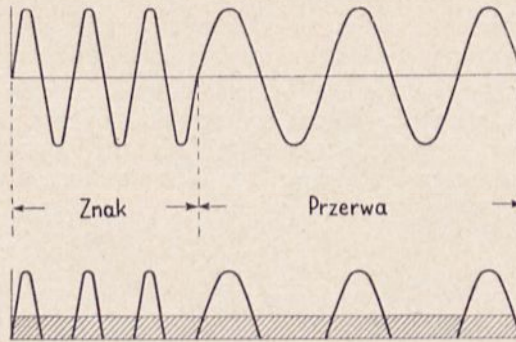
Rys. 103-b.

cza (patrz rys. 75-a). Prąd ten, po detekcji, daje przerywany prąd stały, odpowiadający impulsom prądu w obwodzie morsowskim (rys. 75-a, dół). W jaki sposób taka modulacja telegraficzna sprowadza się do modulacji sinusoidalnej, wyjaśniono w § 1 tego rozdziału.

b) Przykładem modulacji częstotliwości jest nadawanie znaków telegraficznych metodą t. zw. *fali negatywnej*, stosowane na stacjach łukowych (rys. 103-b). Polega ono na tem, że w antenie stacji nadawczej w spoczynku płynie prąd o częstotliwości własnej obwodu antenowego, zawierającego całkowitą indukcyjność. Dla nadawania znaków klucz nadawczy zwiera część zwojnicy antenowej, wskutek czego częstotliwość własna obwodu rośnie, lecz amplituda prądu praktycznie pozostaje ta sama. Otrzymujemy w ten sposób prąd o przebiegu podanym na rys. 104 u góry. Rzecz oczywista, że prąd taki po detekcji da nam nieprzerwany ciąg prądu stałego, nie pozwalający wyróżniać poszczególnych znaków (rys. 104 dół). Dopiero gdy stłumimy prąd o częstotliwości spoczynkowej, co możemy skutecznie przy pomocy obwodów odbiorczych o dostatecznej ostrości rezonansu, do obwodu detekcyjnego dojdą tylko impulsy o częstotliwości roboczej, dając przebieg prądu wyprostowanego, odpowiadający wykresowi na rys. 75-a. Gdybyśmy obwód odbiorczy przestroili na częstotliwość spoczynkową, otrzymalibyśmy po detekcji impulsy, odpowiadające prze-

rwom w nadawaniu, a więc niejako negatyw znaków nadawanych (stąd nazywa „fali negatywnej”).

Z zestawienia obu systemów modulacji widzimy, że modulacja amplitudy daje nam w odbiorniku obraz nadawania dzięki samej tylko detekcji,

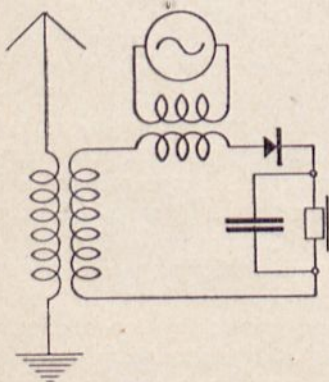


Rys. 104.

podczas gdy modulacja częstotliwości wymaga środków pomocniczych dla wywołania przebiegu nadawczego (w naszym przykładzie usunięcia prądów jednej z częstotliwości promieniowanych przez stację nadawczą). Dlatego też modulacja amplitudy jest częściej stosowana i posiada większą doniosłość praktyczną. Stąd więc w dalszym ciągu zajmiemy się nią bardziej szczegółowo, niż modulacją częstotliwości.

#### Odbiór interferencyjny (heterodynowy).

Osobne zagadnienie stanowi *modulacja sygnałów na stacji odbiorczej*, której zadaniem jest przystosowanie do odbioru słuchowego sygnałów telegraficznych niemodulowanych ( $A_1$ ). Dawniej używane sposoby przerywania drgań, mechanicznie przy pomocy *włóczyka* (Schleifer) lub elektromagnetycznie za pomocą *tikkera* (oba urządzenia zawdzięczamy Poulsenowi) obecnie zupełnie ustąpiły miejsca



Rys. 105.

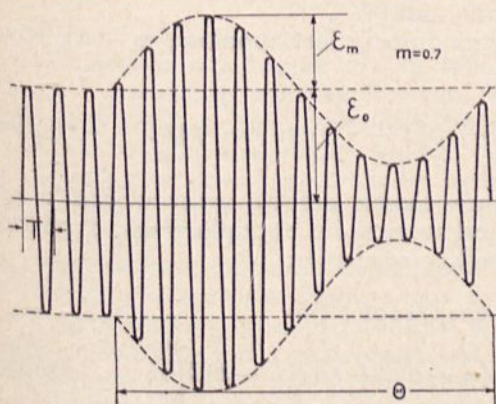
zasadzie *nakładania drgań miejscowych* na drgania odbierane (R. A. Fessenden), co po detekcji daje *dudnienia* o częstotliwości równej różnicy obu częstotliwości nakładanych, a więc prąd tętniący zamiast prądu stałego (*odbiór interferencyjny* czyli *heterodynowy*). Ze względu na własności rezonansowe słuchawki i właściwości ucha różnicę częstotliwości nakładanych odbiera się przeważnie w granicach od 1000 do 3000 okr. na sekundę. Można ją zresztą dowolnie zmieniać, gdyż generator drgań nakładanych (t. zw. pospolicie heterodyna) pozwala zmieniać częstotliwość w sposób ciągły. Schemat odbioru heterodynowego podany jest na rys. 105-tym.



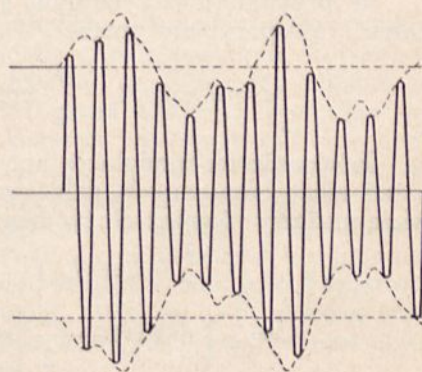
Zasadę interferencji stosuje się również w t. zw. odbiornikach *superheterodynowych* („supersonic heterodyne” Armstrong, Levy), w których — z prądu o częstotliwości odbieranej — przez interferencję ze źródłem drgań miejscowych i przez detekcję otrzymujemy prąd wypadkowy o częstotliwości mniejszej, który poddajemy wzmocnieniu, a następnie powtórnej detekcji. Metodę tę stosuje się przede wszystkim do odbioru fal krótkich, aby uniknąć wzmocnienia bezpośrednio prądów o bardzo wielkiej częstotliwości.

## 11. Modulacja amplitudy.

Pod sinusoidalną modulacją amplitudy napięcia lub prądu wielkiej częstotliwości rozumiemy sinusoidalne wahania się jego amplitudy  $A$  około pewnej wartości średniej  $A_0$  o pewną wartość  $A_m$  (rys. 106) z częstotli-



Rys. 106-a.



Rys. 106-b.

wością kątową  $p = 2\pi\nu$ . Analogicznie do modulacji prądu stałego (§ 1 tego rozdziału) będziemy tu mieli stopień modulacji:

$$m = \frac{A_m}{A_0} \leq 1.$$

Zmiany amplitudy przebiegu szybkozmiennego możemy więc wyrazić równaniem:

$$A = A_0 + A_m \sin pt = A_0 (1 + m \cdot \sin pt), \quad (167)$$

zaś wartości chwilowe tego przebiegu da nam równanie:

$$x = A \cdot \sin \omega t = A_0 (1 + m \cdot \sin pt) \cdot \sin \omega t. \quad (167a)$$

Jeżeli więc w obwodzie elektrycznym o oporności  $Z$  działa zmienna siła elektromotoryczna modulowana o amplitudzie średniej  $E_0$ :

$$e = E_0 (1 + m \cdot \sin pt) \sin \omega t,$$

to prąd płynący w tym obwodzie wyniesie:

$$i = \frac{e}{Z} = \frac{E_0 (1 + m \cdot \sin pt) \sin \omega t}{Z} = J_0 (1 + m \cdot \sin pt) \sin (\omega t + \varphi). \quad (168)$$

Zakładając dla uproszczenia, że obwód ten jest bezindukcyjny i że posiada oporność  $R$ , otrzymamy:

$$i = J_0 (1 + m \sin \cdot pt) \sin \omega t,$$

lub po wymnożeniu:

$$i = J_0 \sin \omega t + m J_0 \sin pt \sin \omega t.$$

Po przekształceniu<sup>1)</sup> daje nam to równanie:

$$i = J_0 \sin \omega t - \frac{m J_0}{2} \cos (\omega + p) t + \frac{m J_0}{2} \cos (\omega - p) t. \quad (169)$$

W przypadku szczególnym, gdy modulacja jest zupełna ( $m = 1$ ), równanie (169) przybiera postać:

$$i = J_0 \sin \omega t - \frac{J_0}{2} \cos (\omega + p) t + \frac{J_0}{2} \cos (\omega - p) t. \quad (169a)$$

Równanie na modulację amplitudy można zresztą wyprowadzić z założeń nieco odmiennych, zależnych od warunków początkowych, a mianowicie możemy również ułożyć następujące równania:

$$\begin{aligned} i &= J_0 (1 + m \cos pt) \cos \omega t = \\ &= J_0 \left\{ \cos \omega t + \frac{m}{2} \left[ \cos (\omega + p) t + \cos (\omega - p) t \right] \right\}; \end{aligned} \quad (169b)$$

$$\begin{aligned} i &= J_0 (1 + m \cos pt) \sin \omega t = \\ &= J_0 \left\{ \sin \omega t + \frac{m}{2} \left[ \sin (\omega + p) t + \sin (\omega - p) t \right] \right\}; \end{aligned} \quad (169c)$$

$$\begin{aligned} i &= J_0 (1 + m \sin pt) \cos \omega t = \\ &= J_0 \left\{ \cos \omega t + \frac{m}{2} \left[ \sin (\omega + p) t - \sin (\omega - p) t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (169d)$$

Wszystkie te równania są równoznaczne, dają bowiem tensam kształt krzywej modulacji, różnią się jedynie obranymi warunkami początkowymi.

<sup>1)</sup> Stosujemy wzór:

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{1}{2} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

i podstawiamy:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \omega t; \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = pt;$$

czyli

$$\alpha = (\omega + p) t; \quad \beta = (\omega - p) t.$$

Dyskusja tych równań dowodzi, że prąd o amplitudzie, modulowanej sinusoidalnie, jest sumą *trzech* prądów o różnych częstotliwościach, a mianowicie

$$\omega_1, (\omega + p) \text{ i } (\omega - p).$$

Pierwszą z nich, która jest częstotliwością prądu niemodulowanego, nazywamy *częstotliwością nośną*, pozostałe zaś dwie *częstotliwościami bocznymi* czyli *modulacyjnymi*. Jedna z nich jest większa, druga zaś mniejsza od częstotliwości nośnej o wielkość częstotliwości modulującej  $p$ . Większa z nich nazywają też z tego powodu górną, mniejszą zaś — dolną częstotliwością boczną. Górny prąd modulacyjny (przy obciążeniu bezindukcyjnym) jest opóźniony o  $90^\circ$  względem prądu nośnego, dolny zaś wyprzedza go o  $90^\circ$  jeżeli jako stan początkowy przyjmujemy warunki równania (169-a).

### Widmo modulacji.

Częstotliwości boczne nie są tylko pojęciem abstrakcyjnym, wynikającym z przeróbek matematycznych. Posiadają one znaczenie fizyczne<sup>1)</sup>, a obecność ich można stwierdzić doświadczalnie przy pomocy częstotlicznika. Drugim dowodem istnienia częstotliwości bocznych jest zjawisko *demodulacji* w obwodach o bardzo ostrej krzywej rezonansu. W obwodach takich prądy o częstotliwościach bocznych, jako oddalone od rezonansu, występują ze zmniejszoną amplitudą, co ma ten sam skutek, jak gdybyśmy w odpowiednim stosunku zmniejszyli głębokość modulacji. Demodulacja z powodu rezonansu występuje tem wyraźniej, im wyższy jest ton modulujący, tembardziej bowiem oddalone są częstotliwości boczne od częstotliwości nośnej, na którą nastrojony jest obwód. Staje się to przyczyną *niekształcenia częstotliwości* przesyłanych dźwięków, gdyż tony wyższe skutkiem tego zjawiska ulegają przytłumieniu.

Można wreszcie dowieść istnienia tych częstotliwości, otrzymując *drogą syntezy* częstotliwości przebieg modulacji amplitudy.

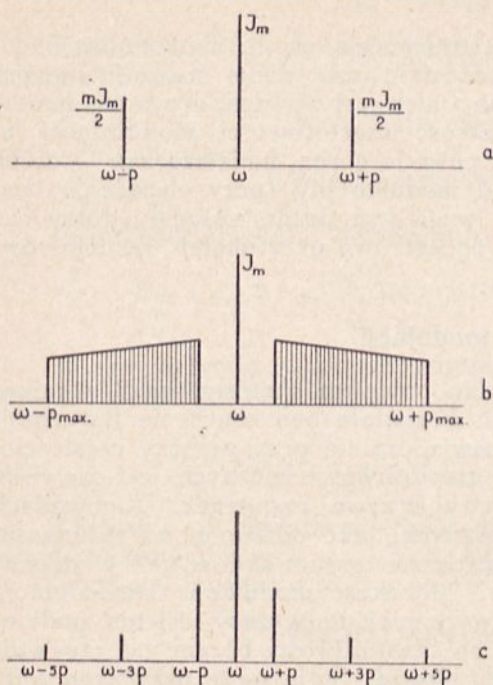
Obecność częstotliwości bocznych sprawia, że stacja o modulowanej amplitudzie prądu w antenie nie promieniuje jednej tylko fali o częstotliwości nośnej, lecz również fale odpowiadające obu częstotliwościom bocznym. Stąd zakres częstotliwości, zajmowany przez taką stację, posiada szerokość równą podwójnej częstotliwości modulującej, a więc  $2\nu$  (rys. 107-a). Zakres ten nosi nazwę *widma częstotliwości modulacji* lub w krótkości *widma modulacji*. Aby dwie stacje nie przeszkadzały sobie wzajemnie, konieczne jest nietylko, by ich widma modulacji nie zachodziły za siebie, lecz ponadto wymaga się, aby między częstotliwościami krańcowymi obu widm istniał pewien odstęp.

Gdy przy pomocy modulacji amplitudy przesyłamy mowę lub muzykę, modulujemy prąd nośny już nie jednym tonem sinusoidalnym, lecz szeroką wstęgą częstotliwości słyszalnych (rys. 107 b). Jak już podano w § 2 tego rozdziału, częstotliwości modulujące dla telefonji ogranicza się do zakresu

<sup>1)</sup> Patrz m. in. M. Colebrook, The Physical Reality of Side Bands, Wireless Eng. T. VIII, str. 4, 1931, ciekawy materiał znajduje się również w pracy A. D. Ladner'a „A Study of Wave Synthesis by Mechanical Means” w „Marconi Review” Nr. 9 — 11, z r. 1929.

od 200 do 3000 okr/s, dla radjofonji dochodzą do rozpiętości 50 do 10000 okr/s. Wskutek tego, idealnie biorąc, stacja radjofoniczna zajmowałaby

widmo szerokości 20 kc/s jednakże szereg niedoskonałości technicznych sprawia, że nie przekracza ono w praktyce 10 do 12 kc/s. Jest to zresztą pożądane ze względu na to, że fale stacji radjofonicznych w Europie rozmieszczone są w odstępach zaledwie 9 kc/s, a czasami nawet w mniejszych, skutkiem czego widma ich zachodzą częściowo na siebie, powodując wzajemne zakłócenia.



Rys. 107.

Również i stacja o nadawaniu telegraficznym, zgodnie z tem, co powiedziano w § 1 tego rozdziału, promieniuje mniej lub więcej szerokie widmo częstotliwości. Schematycznie podano to na rys. 107 c. Szerokość widma telegraficznego jest tem szersza, im bardziej znaki telegraficzne zbliżone są do prostokątnych. Znaki spłaszczone dają widmo modulacji węższe.

*Stosunek procentowy* największej częstotliwości modulującej do częstotliwości nośnej posiada doniosłe znaczenie praktyczne, choćby ze względu

na szerokość zajmowanego widma i na wymaganą ostrość rezonansu urządzeń odbiorczych. Jak stosunek ten przedstawia się dla różnych zakresów fal, gdy założymy  $\nu_{max} = 5$  kc/s, dowodzi następująca tabelka:

Długość fali m	Częstotliwość kc/s	Stosunek procentowy 100%
30000	10	± 50%
10000	30	± 17%
3000	100	± 5%
1000	300	± 1,7%
300	1000	± 0,5%
100	3000	± 0,17%
30	10000	± 0,05%
10	30000	± 0,017%

Okazuje się z niej, że w falach powyżej 10000 m (poniżej 30 kc/s) telefonja nawet w najskromniejszym zakresie częstotliwości nie dałaby się zrealizować ze względu na olbrzymią szerokość procentową promieniowanego widma. Częstotliwości nośne tego zakresu nadają się dlatego jedynie dla celów telefonji przewodowej przy pomocy prądów nośnych. Im krótsza natomiast jest fala nośna, tem korzystniejszy jest stosunek procentowy widma modulacji do częstotliwości nośnej, tem łatwiej więc można uniknąć szeregu trudności konstrukcyjnych i eksploatacyjnych.

Z poprzednich rozważań wynika, jaki zgubny wpływ dla radjokomunikacji mogą mieć *zniekształcenia amplitudy* prądów modulujących, albowiem wprowadzenie do widma modulacji 2-giej lub — co gorsza — 3-ciej harmonicznej, szczególnie wyższych tonów, znacznie poszerza widmo modulacji, wywołując przeszkody w widmach fal sąsiednich. Łatwo sobie uzmysłowić, że nawet kilkuprocentowe harmoniczne w widmie stacji o dużej mocy i głęboko modulowanej mogą przeszkadzać stacjom słabym lub o modulacji niezbyt głębokiej.

## 12. Warunki energetyczne modulacji amplitudy.

Równocześnie ze zmianą amplitudy prądu modulowanego zmienia się oczywiście i moc wydzielona w obwodzie.

Jeżeli założymy, że  $p \ll \omega$ , to przyjąć możemy, że w ciągu jednego okresu prądu nośnego amplituda jego nie zmieni się, możemy więc całkować przez jeden okres  $T$ , przyjmując, że w tym krótkim czasie  $pt = \text{const}$ . Tak więc moc wydzieloną w ciągu okresu  $T$  da nam całka (patrz równanie 168):

$$P_T = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{J_0^2 R}{T} \left( 1 + m \sin pt \right)^2 \cdot \int_0^T \sin^2 \omega t dt,$$

czyli

$$P_T = \frac{J_0^2 R}{2} \left( 1 + m \sin pt \right)^2. \quad (170)$$

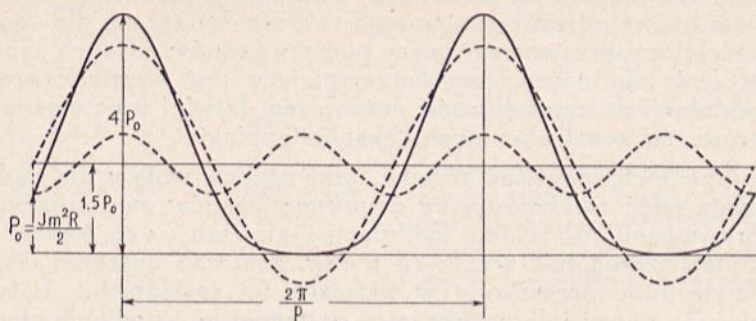
Po rozwinięciu kwadratu równanie to możemy wyrazić w postaci (rys. 108):

$$\begin{aligned} P_T &= \frac{J_0^2 R}{2} \left( 1 + 2m \sin pt + m^2 \sin^2 pt \right) = \\ &= \frac{J_0^2 R}{2} \left( 1 + \frac{m^2}{2} + 2m \sin pt - \frac{m^2}{2} \cos 2pt \right). \end{aligned} \quad (170a)$$

A więc moc chwilowa wydzielona w obwodzie składa się z mocy wydzielonej przez falę nośną:

$$P_0 = \frac{J_0^2 R}{2},$$

oraz z mocy wahającej się pod wpływem modulacji. Jak wynika z wykresu rys. 108, wahania mocy, pomimo obecności drugiej harmonicznej czę-



Rys 108. <sup>1)</sup>

stotliwości modulującej, odbywają się z częstotliwością prądu modulującego. Gdy założymy  $m = 1$ , otrzymamy z równania (170)

$$P_{T \max} = 4 \frac{J_0^2 R}{2} = 4 P_0, \quad (170b)$$

a więc moc chwilowo dochodzi do *czterokrotnej* wartości mocy fali nośnej (mocy spoczynkowej).

Ażeby otrzymać całkowitą moc (moc skuteczną), wydzieloną w czasie modulacji, musimy scałkować wyrażenie (170-a) w granicach jednego okresu modulacji  $\theta$  :

$$P = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} P_T dt = \frac{J_0^2 R}{2} \left[ \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) + \frac{2m}{\theta} \int_0^{\theta} \sin pt dt - \frac{m^2}{2\theta} \int_0^{\theta} \cos 2pt dt \right],$$

co się równa

$$P = \frac{J_0^2 R}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) = P_0 \left(1 + \frac{m^2}{2}\right), \quad (171)$$

i daje przy pełnej modulacji:

$$P_{100\%} = 1,5 P_0. \quad (171a)$$

A więc pod wpływem modulacji amplitudy, *średnia moc prądu szybkozmiennego zwiększa się*, dochodząc przy pełnej modulacji do 1,5 wartości mocy spoczynkowej. Ta nadwyżka mocy przypada na prądy o częstotliwościach bocznych, i to na oba w równej mierze. Mamy więc w prądzie modulowanym następujący bilans mocy:

Prąd nośny:

$$\omega \dots \dots P_0 = \frac{J_0^2 R}{2};$$

<sup>1)</sup> Na rys. 108 powinno być:  $P_0 = \frac{J_0^2 R}{2}$ .

Prąd modulujący górny:

$$\omega + p \dots P_1 = \frac{m^2}{4} \cdot \frac{J_0^2 R}{2};$$

Prąd modulujący dolny:

$$\omega - p \dots P_2 = \frac{m^2}{4} \cdot \frac{J_0^2 R}{2};$$

Całkowita moc modulująca:

$$P_{mod} = \frac{m^2}{2} \cdot \frac{J_0^2 R}{2};$$

co dla  $m = 1$  daje

$$P = 1,5 P_0; \quad P_1 = P_2 = \frac{P_0}{4}; \quad P_{mod} = \frac{P_0}{2}.$$

A więc przy pełnej modulacji w każdej z fal bocznych zawarta jest moc równa jednej czwartej mocy fali nośnej.

Na podstawie wzoru (171) możemy obliczyć wartość skuteczną prądu modulowanego. Jeżeli wartość skuteczna prądu nośnego wynosi:

$$J = \frac{J_0}{\sqrt{2}},$$

to otrzymamy skuteczny prąd modulowany:

$$J_{mod} = \frac{J_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{m^2}{2}} = J \cdot \sqrt{1 + \frac{m^2}{2}}, \quad (172)$$

co znowu dla  $m = 1$  da

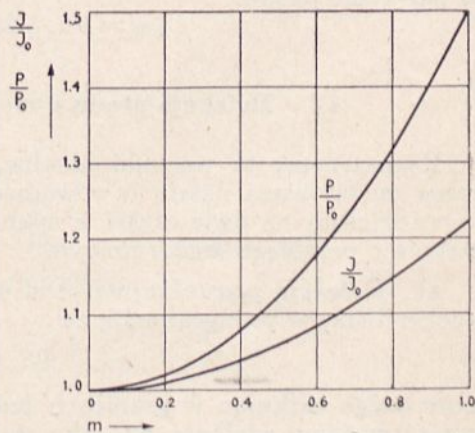
$$J_{100\%} = J_0 \sqrt{1,5} \simeq 1,225 J_0. \quad (172a)$$

Z tego wynika, że pod wpływem modulacji amplitudy prąd w obwodzie przyrasta, dochodząc przy pełnej modulacji do około 1,22-krotnej wartości prądu spoczynkowego.

Zależność przyrostu skutecznych wartości mocy i prądu od głębokości modulacji podają krzywe rys. 109.

Wzór (172) pozwala nam obliczyć głębokość modulacji nadajnika na podstawie pomiaru prądu spoczynkowego i prądu podczas modulacji sinusoidalnej. Głębokość modulacji da nam wzór:

$$m = \sqrt{2 \left( \frac{J_{mod}^2}{J_0^2} - 1 \right)}. \quad (173)$$



Rys. 109.

Wartość tę można również odczytać bezpośrednio z krzywej rys. 109. Jak widać z tej krzywej, pomiar jest mało dokładny dla niezbyt głębokiej modulacji. Wymaga on ponadto, aby napięcia źródeł zasilających były niezależne od zmian obciążenia, wywołanych przez modulację, w przeciwnym bowiem razie wartości w spoczynku i podczas modulacji nie są tęsame.<sup>1)</sup>

#### Przykład.

W antenie o oporności  $13,5 \Omega$  zmierzono skuteczną wartość natężenia prądu w spoczynku  $J_0 = 95$  amperów, zaś w chwili modulowania nadajnika przebiegiem sinusoidalnym natężenie to wzrosło do  $J_{mod} = 107$  amperów. Stąd obliczyć możemy głębokość modulacji:

$$m = \sqrt{2 \left[ \left( \frac{107}{95} \right)^2 - 1 \right]} \approx 0,75 .$$

Moc w antenie w spoczynku wynosiła:

$$P = 95^2 \cdot 13,5 = 122 \cdot 10^3 \text{ W} = 122 \text{ KW},$$

zaś w czasie modulacji 75--procentowej:

$$P_{mod} = 107^2 \cdot 13,5 = 155 \text{ KW}.$$

Na obie częstotliwości boczne przypadało więc:

$$155 - 122 = 33 \text{ KW}.$$

Przy modulacji pełnej otrzymalibyśmy w antenie moc:

$$P_{100\%} = 1,5 \cdot 122 = 183 \text{ KW},$$

zaś natężenie prądu:

$$J_{100\%} = 95 \cdot 1,225 = 116 \text{ A}.$$

### 13. Detekcja prądu o modulowanej amplitudzie.

Rozpatrzmy tu warunki idealne, a mianowicie, że siła elektromotoryczna modulowana działa w obwodzie bezindukcyjnym. Rozważania nasze rozdzielimy na dwie części, a mianowicie na detekcję *prostoliniijną* i na detekcję *o przebiegu kwadratowym*.

a) *Detekcja prostoliniijna*. Dla uproszczenia założymy, podobnie jak to uczyniliśmy w paragrafie 12, że

$$D \ll \omega ,$$

wobec czego całkując w granicach jednego okresu wielkiej częstotliwości, przyjąć możemy wielkość *p.t.* jako stałą. Dzięki naszemu założeniu przyjąć możemy ponadto, że oporność urojona kondensatora wyrównawczego

<sup>1)</sup> Patrz m. in. W. N. Tuttle, Modulation Measurements on Broadcast Transmitters G. R. E. tom V, Nr. 10 marzec 1931.



jest znikomo mała dla częstotliwości nośnej, bardzo duża natomiast dla częstotliwości modulującej, czyli:

$$\frac{1}{\omega C} \ll R \ll \frac{1}{pC}. \quad (175)$$

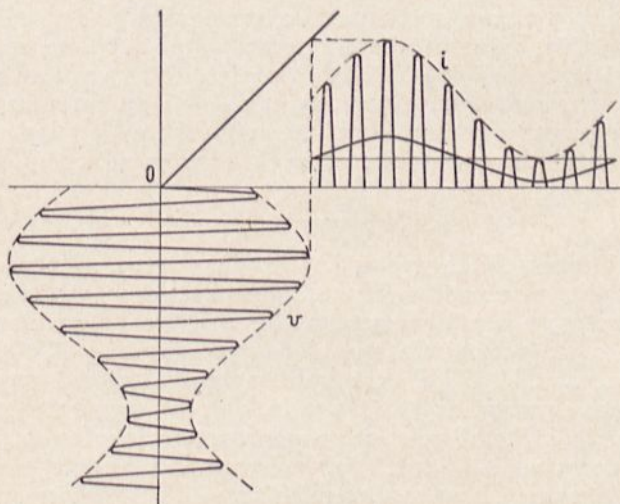
To założenie co do oporności kondensatora będzie miało znaczenie decydujące dla dalszej dyskusji.

Wreszcie, aby uprościć całkowanie, założymy, że oporność wewnętrzna jest mała wobec oporności detektora, tak, iż możemy przyjąć  $\vartheta \cong \frac{\pi}{2}$ , co nam daje prąd prostowany o przebiegu połówek sinusoidy.

Na zasadzie powyższych założeń jeden okres prądu wielkiej częstotliwości wyrazić możemy następującymi równaniami (patrz rys. 110):

$$\text{od } t=0 \text{ do } t=\frac{T}{2} \quad i = J_0(1 + m \sin pt) \sin \omega t, \quad (a)$$

$$\text{od } t=\frac{T}{2} \text{ do } t=T \quad i = 0. \quad (b)$$



Rys. 110.

Średnią wartość tego prądu da nam całka:

$$i_{sr} = J_0 \left( 1 + m \sin pt \right) \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt. \quad (c)$$

skąd mamy przebieg prądu średniego w zależności od modulacji

$$i_{sr} = \frac{J_0}{\pi} \left( 1 + m \sin pt \right). \quad (174)$$

czyli:

$$i_{sr} = \frac{J_0}{\pi} + \frac{m J_0}{\pi} \sin p t. \quad (174a)$$

Równanie to wskazuje, że prąd wyprostowany zawiera *składową stałą*:

$$\frac{J_0}{\pi},$$

oraz *składową zmienną o częstotliwości modulującej*:

$$m \cdot \frac{J_0}{\pi} \sin p t.$$

Składowa zmienna modulująca, jak widać, ściśle odpowiada przebiegowi modulacji, a amplituda jej proporcjonalna jest do głębokości modulacji prądu nośnego. Jedynie składowa zmienna jest składnikiem użytecznym prądu wyprostowanego, ona bowiem dostarcza energii dla wprowadzenia w ruch błony słuchawki.

Dzięki temu siła odbioru, osiągnięta przez stację nadawczą w danej odległości, zależy nie tylko od amplitudy fali nośnej, lecz również od głębokości modulacji, i z dwu stacji ta nam zapewni w danym miejscu silniejszy odbiór, dla której wartość bezwzględna amplitudy modulującej będzie większa. Dzięki temu i zasięg stacji radiotelefonicznej rośnie z głębokością modulacji. Stosowanie więc głębokiej modulacji pozwala na zmniejszenie mocy stacji nadawczej, co jest korzystne nie tylko ze względów ekonomicznych, lecz ze względu na zmniejszenie interferencji fali nośnej z falami innych stacji.

Rozważania nasze odnosiły się co prawda, w myśl założenia, do układu zwartego jednakże obecność większej oporności zewnętrznej, zabocznikowanej kondensatorem wyrównawczym, nie wpływa na przebieg prądu wyprostowanego, o ile oczywiście spełniona jest nierówność (175). Zgodnie bowiem z równaniami (159 b) kąt ładowania jest niezależny od napięcia zasilającego, zaś średnia wartość prądu, jak to wynika z równań (160) i (160 a), jest przy stałym kącie ładowania proporcjonalna do tego napięcia.

Wobec tego przebiegi i wartości bezwzględne średniego prądu wyprostowanego, odniesione do *okresu wielkiej częstotliwości*, są wprawdzie odmiennie niż w obwodzie nieobciążonym, lecz *obwiednia* ich ściśle odpowiada krzywej modulacji. Dzięki temu detektor o charakterystyce prostoliniowej nie powoduje *zniekształcenia amplitudy*.

Natomiast może on być przyczyną *zniekształcenia częstotliwości*, a to ze względu na obecność kondensatora wyrównawczego. A mianowicie, we wstępie założyliśmy, że jego pojemność jest tak dobrana, aby było

$$\frac{1}{\omega C} \ll R \ll \frac{1}{p C}. \quad (175)$$

Warunek ten łatwo spełnić dla *wielkich częstotliwości* nośnych, co stanowi jeszcze jedną poważną zaletę stosowania ich dla radiotelefonji. Gdy

natomiast częstotliwość nośna jest stosunkowo mała i zbliża się rzędem wielkości do najwyższych tonów modulujących, kondensator posiadający małą oporność dla prądów o częstotliwości nośnej, będzie również częściowo przepuszczał prądy o największych częstotliwościach modulujących, osłabiając wysokie tony i tłumiąc harmoniczne tonów niższych (demodulacja wyższych tonów przez detekcję). W przypadku skrajnym, gdy oporność urojona kondensatora będzie znikomo mała dla częstotliwości modulujących, w obwodzie zewnętrznym otrzymamy tylko składową stałą i detektor nie odtworzy nam modulacji.

O wpływie kondensatora wyrównawczego na odbiór tonów o różnej wysokości pouczyć nas może następujące przeliczenie:

Jeżeli oporność omowa odbiornika energii wynosi  $R = 4000 \Omega$ , a chcemy, by składowa szybkozmienna o częstotliwości kątowej  $\omega = 10^6$  ( $\lambda \cong 1900 m$ ), płynąca przezeń, nie przekraczała 5%, musimy obrać taką pojemność kondensatora, aby było

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 200 \Omega, \text{ czyli } C = \frac{1}{10^6 \cdot 200} 5 \cdot 10^{-9} F.$$

Wówczas dla tonu  $\nu = 800$  ( $p = 2\pi\nu \cong 5000$ ) kondensator ten będzie przedstawiał oporność

$$X_{800} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-9} \cdot 5000} = 40000 \Omega,$$

dziesięciokrotnie większą od oporności użytkowej. Natomiast dla tonu  $\nu = 8000$  ( $\omega = 50000$ ) oporność ta będzie wynosiła zaledwie

$$X_{8000} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^4} = 4000 \Omega,$$

czyli będzie równa oporności odbiornika.

Jeszcze bardziej niekorzystnie przedstawi się detekcja wyższych tonów, gdy odbiornik jest indukcyjny. Załóżmy, że jest to słuchawka telefoniczna o oporności skutecznej  $4000 \Omega$  i indukcyjności  $0,5 H$ . Wówczas oporność odbiornika wyniesie dla  $\nu = 800$

$$Z_{800} = \sqrt{(5000 \cdot 0,5)^2 + 4000^2} = 4700 \Omega,$$

zaś dla  $\nu = 8000$

$$Z_{8000} = \sqrt{(50000 \cdot 0,5)^2 + 4000^2} \cong 25000 \Omega;$$

z czego wynika, że dla tonu  $\nu = 8000$  słuchawka jest praktycznie zwarta przez kondensator. W rzeczywistości warunki będą jeszcze gorsze ze względu na wzrost oporności skutecznej słuchawki przy tej częstotliwości z powodu strat w żelazie.

Przykład ten wskazuje, jak niekorzystne są dla radjotelefonji dłuższe fale i że w przypadkach takich, jaki podaje przykład, raczej należy stosować kondensator zamały i zgodzić się na gorsze wyrównanie prądu szybkozmiennego, a temsamem gorszą sprawność detekcji, niż spowodować nadmierne zniekształcenie częstotliwości.

Wkońcu należy zwrócić uwagę jeszcze na jeden szczegół. Składowa wielkiej częstotliwości zgodnie z równaniami (a) i (b) na początku tego paragrafu, jest prądem prostowanym jednopółkowo, który wyrazić można szeregiem równania (154). Zawiera on więc również częstotliwość podstawową oraz jej harmoniczne parzyste i to zgodnie z (a), o proporcjonalnie modulowanej amplitudzie. Można więc, umieszczając w obwodzie wyjściowym—zamiast oporu zabocznikowanego pojemnością—obwód rezonansowy nastrojony na daną częstotliwość, otrzymać ponownie prąd wielkiej częstotliwości modulowany. Zjawisko to jest bardzo ważne dla szeregu lampowych urządzeń modulacyjnych, pracujących półkownikami przebiegami prądu.

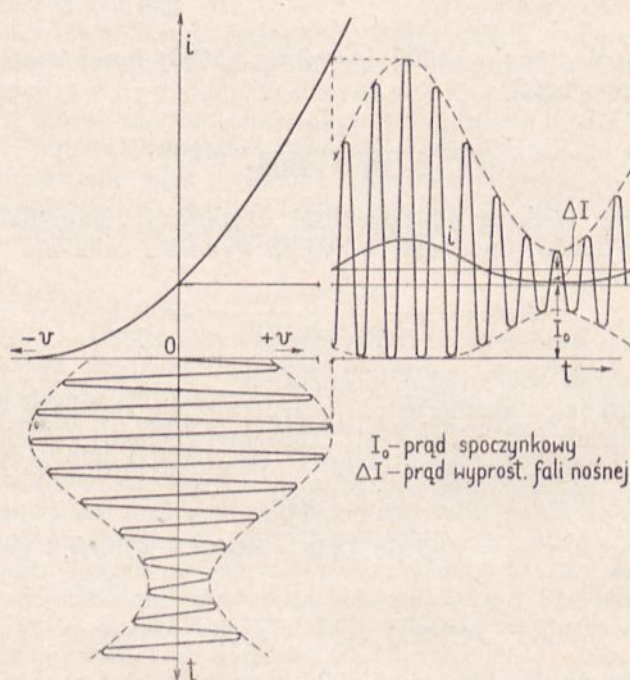
b) *Charakterystyka o przebiegu kwadratowym.*

Przyjmując równanie detektora czysto kwadratowe (rys. 111)

$$i = I_0 + b v^2,$$

i podstawiając

$$v = V_0 (1 + m \sin pt) \cdot \sin \omega t,$$



Rys. 111.

otrzymamy po rozwinięciu i odpowiednim przekształceniu

$$i = I_0 + b V_0^2 \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{m^2}{4} \right) + m \sin pt - \frac{m^2}{4} \cos 2pt - \left( \frac{1}{2} + \frac{m^2}{4} \right) \cos 2\omega t + \right. \\ \left. - m \cdot \cos 2\omega t \cdot \sin pt + \frac{m^2}{4} \cdot \cos 2\omega t \cdot \cos 2pt \right]. \quad (176)$$

Z równania (176) wynika, że detekcja o przebiegu kwadratowym daje w wyniku:

1. składową stałą:

$$\frac{b V_0^2}{2} \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right);$$

2. składową o częstotliwości modulującej:

$$b m V_0^2 \sin pt;$$

3. drugą harmoniczną częstotliwości modulującej:

$$\frac{b m^2 V_0^2}{4} \cos 2 pt;$$

4. drugą harmoniczną częstotliwości nośnej:

$$\frac{b V_0^2}{2} \left( 1 + \frac{m^2}{4} \right) \cos 2 \omega t;$$

5. drugą harmoniczną częstotliwości nośnej modulowaną z częstotliwością modulującą i jej drugą harmoniczną:

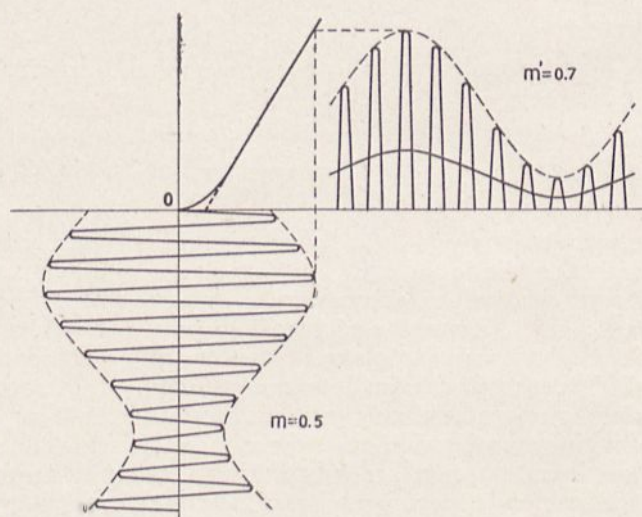
$$- b m V_0^2 \cdot \cos 2 \omega t \cdot \sin pt + \frac{b m^2 V_0^2}{4} \cos 2 \omega t \cos 2 pt.$$

Składowe wymienione pod 4. i 5. są to wielkie częstotliwości, nie wchodzi więc pod uwagę dla detekcji. Podobnie nie posiada znaczenia dla odbioru fal modulowanych składowa stała. Ważne natomiast są dla nas składowe 2-ga i 3-cia. Pierwsza z nich jest to prąd o częstotliwości modulującej, a więc dla nas najważniejszy. On jeden przy odbiorze telefonicznym jest składnikiem użytecznym detekcji. Widzimy ze wzoru, że, podobnie jak przy detekcji prostoliniowej, tak i tu amplituda tego prądu jest proporcjonalna do głębokości modulacji. Lecz równocześnie jest on proporcjonalny do kwadratu amplitudy prądu nośnego, czem zasadniczo detekcja o przebiegu kwadratowym różni się od prostoliniowej, zresztą zgodnie z tem, co wprowadziliśmy dla detekcji sygnału niemodulowanego.

Jednakże obok częstotliwości modulującej detekcja o przebiegu kwadratowym daje nam jej drugą harmoniczną, a więc wywołuje zniekształcenie amplitudy prądu modulowanego (krzywa *i* na rys. 110). Wzór wskazuje, że harmoniczną ta jest proporcjonalna do kwadratu głębokości modulacji i że w skrajnym przypadku  $m = 1$  osiąga 25% częstotliwości podstawowej. Wynika stąd ważna wskazówka, że chcąc zapewnić niezniekształcony odbiór telefonji na duże odległości (gdyż w tych przypadkach przede wszystkim wchodzi pod uwagę detekcja krzywolinijna), nie możemy modułować zbyt głęboko. Łatwo się przekonać, że już przy  $m = 0,5$  otrzymamy harmoniczną wynoszącą około 6% podstawowej, co wprawdzie daje warunki zupełnie znośne dla telefonji handlowej, lecz przekracza normy dopuszczalne dla radjofonji.

Zaznaczyć tu należy, że równanie rzeczywistej charakterystyki detektora zawiera jeszcze *składowe wyższych potęg*, które dają *harmoniczne częstotliwości o odpowiednich rzędach* i o amplitudzie również rosnącej z głębokością modulacji.<sup>1)</sup> Wynika stąd, że detektor krzywoliniorny jest poważnym źródłem *zniekształcenia amplitudy*, tem groźniejszym, im głębiej modulowane sygnały odbieramy.

Technika odbiorcza stara się zapobiec zniekształceniom amplitudy, wywołanym przez detekcję, dążąc do budowy detektorów o charakterystyce prostoliniornej. Choć w praktyce detektory o idealnej charakterystyce prostoliniornej prawie że nie istnieją, to jednak można otrzymać detekcję zadowalającą wymogi praktyczne, doprowadzając do detektora sygnały dostatecznie wzmacnione, tak aby osiągnąć *prostowanie zupełne (detektory mocy)*. Jeżeli przytem prąd odbierany nie jest modulowany na zbyt głęboko (np.  $m \leq 0,8$  rys. 112), wówczas cały przebieg modulacji przypada na część prawie prostoliniorną charakterystyki detektora, dzięki czemu po detekcji otrzymuje krzywą modulacji praktycznie sinusoidalną.



Rys. 112.

Z detekcją w takich warunkach łączy się zjawisko *pozornego zwiększenia głębokości modulacji*. Przyczyną jego jest krzywoliniorna zależność prądu wyprostowanego od napięcia, występująca na początku charakterystyki, a więc w części niemodulowanej, jak to widać na rys. 112. Zjawisko to jest przyczyną błędów w pomiarach modulacji, opierających się na badaniu prądu po detekcji.

<sup>1)</sup> Patrz m. i. W. L. Mc. Pherson, Electr. Commun., lipiec 1928.

#### 14. Modulacja amplitudy prądu, zawierającego wyższe harmoniczne.

Często prądy nośne, stosowane w praktyce radjotechnicznej, zawierają szereg wyższych harmonicznych, tak iż wyrazić je możemy szeregiem Fouriera w postaci

$$i = \sum_{n=1}^{n=\infty} J_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = J_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + J_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \\ + J_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots + J_n \sin(n\omega t + \varphi_n) + \dots$$

Jeżeli do poszczególnych członów tego szeregu zastosujemy równanie (168) z § 11-go, otrzymamy szereg prądów o modulowanej amplitudzie:

czyli

$$i = \sum_{n=1}^{n=\infty} J_n (1 + m \sin pt) \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (178).$$

$$i = J_1 (1 + m \sin pt) \sin(\omega t + \varphi_1) + \\ + J_2 (1 + m \sin pt) \sin(\omega t + \varphi_2) + \\ + J_3 (1 + m \sin pt) \sin(\omega t + \varphi_3) + \\ + \dots + \\ + J_n (1 + m \sin pt) \sin(n\omega t + \varphi_n) + \\ + \dots$$

Z równań tych wynika, że modulacja amplitudy szeregu Fouriera daje w wyniku szereg prądów harmonicznym, z których każdy jest modulowany w amplitudzie z tą samą częstotliwością i z tą samą głębokością, co prąd podstawowy.

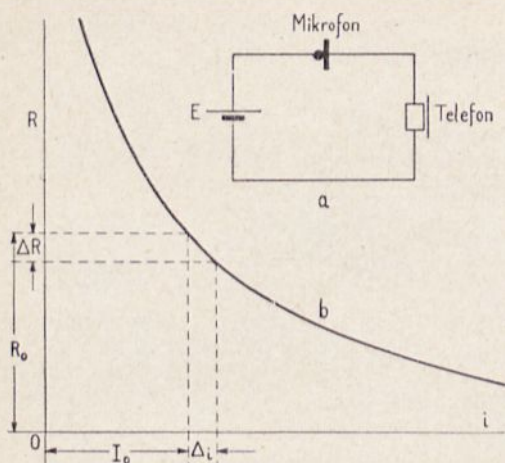
A więc stacja modulowana, mająca w antenie prąd nie idealnie sinusoidalny, lecz zawierający wyższe harmoniczne, promieniuje szereg fal modulowanych o tym samym charakterze, co fala podstawowa.

Każda więc z tych fal może być odbierana oddzielnie, co przy znacznym odsetku natężenia harmonicznym sprawia, że stacja taka zamiast jednego widma zajmuje szereg widm o tejsamej szerokości. Dlatego współczesna technika nadawcza dąży wszelkimi środkami do tego, by ograniczyć promieniowanie fal harmonicznym.

Równanie (178) i wyciągnięte zeń wnioski odnoszą się oczywiście tylko do przypadku, kiedy modulujemy prąd o przebiegu zniekształconym, nie zaś do przypadku, gdy ulega zniekształceniu amplitudy prąd wielkiej częstotliwości już zmodulowany. Krańcowym przykładem tego przypadku jest krzywolinijna detekcja prądu modulowanego i wyprowadzone tam wnioski możemy w zasadzie zastosować i tu. Jak wykazano w równaniu (176) i wyjaśniono w dalszym ciągu, każdej harmonicznemu częstotliwości nośnej towarzyszy harmoniczna częstotliwość modulującej tego samego rzędu. Jeżeli takie zniekształcenie występuje w nadajniku (nadajniki modulowane na niższych stopniach mocy, w których następnie wzmacnia się wielką częstotliwość modulowaną — system obecnie prawie wyłącznie stosowany w radjofonji), widmo modulacji znacznie się rozszerza, zwiększając przeszkody powodowane przez stację.

## 15. Zasadnicze sposoby modulowania amplitudy.

W najogólniejszych zarysach podzielić możemy sposoby modulowania amplitudy na następujące 3 grupy:



Rys. 113.

Jeżeli przy pewnej oporności  $R_0$  płynie w obwodzie prąd<sup>1)</sup>

$$J_0 = \frac{E}{R_0}, \quad (a)$$

to pod wpływem np. zmniejszenia oporności o wielkość  $\Delta R$  prąd wzrośnie do wartości

$$J_0 + \Delta i = \frac{E}{R - \Delta R} = \frac{E}{R_0} \frac{1}{1 - \frac{\Delta R}{R}}. \quad (b)$$

Wyrażenie to możemy rozwinąć w szereg Maclaurina względem  $\frac{\Delta R}{R}$ , co da nam

$$J_0 + \Delta i = \frac{E}{R_0} \left[ 1 + \frac{\Delta R}{R_0} + \left( \frac{\Delta R}{R_0} \right)^2 + \left( \frac{\Delta R}{R_0} \right)^3 + \dots \right]. \quad (c)$$

Odejmując (a) od (c), otrzymamy wyrażenie na  $\Delta i$ :

$$\Delta i = \frac{E}{R_0} \left[ \frac{\Delta R}{R_0} + \left( \frac{\Delta R}{R_0} \right)^2 + \left( \frac{\Delta R}{R_0} \right)^3 + \dots \right]. \quad (179)$$

<sup>1)</sup> Wyjaśnione tu zasady odnoszą się do modulacji tak prądu stałego jak i zmiennego.



Jeżeli założymy, że oporność  $\Delta R$  zmienia się sinusoidalnie, czyli

$$\Delta R = r \sin pt,$$

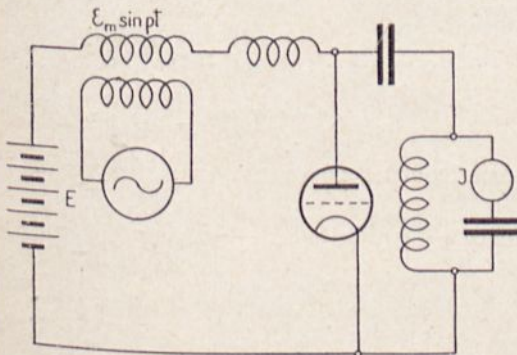
gdzie  $r$  jest amplitudą zmian oporności, to wyrażenie na zmiany prądu przyjmuje postać

$$\Delta i = i = \frac{E}{R_0} \left[ \frac{r}{R_0} \sin pt + \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 \sin^2 pt + \left( \frac{r}{R_0} \right)^3 \sin^3 pt + \dots \right]. \quad (179a)$$

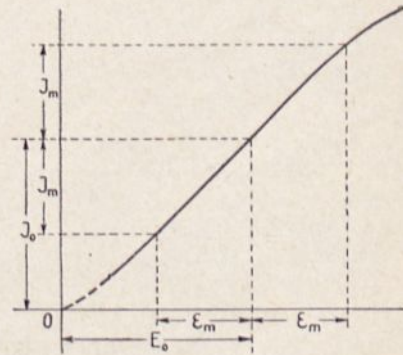
Z równania (179 a) widzimy, że modulacja tego rodzaju jest źródłem zniekształcenia amplitudy, daje bowiem szereg wyższych harmonicznych częstotliwości modulującej. Zniekształcenie to rośnie ze stosunkiem  $\frac{r}{R_0}$  czyli z głębokością modulacji. Jedynie przy bardzo małym stosunku  $\frac{r}{R_0}$  dalsze człony szeregu można pominąć i napisać

$$i = \frac{E r}{R_0^2} \sin pt. \quad (180)$$

Ze względu na to, że metoda zmiany oporności nie dopuszcza głębszej modulacji bez zniekształceń, stosowanie jej w obwodach prądów szybkozmiennych jest bardzo ograniczone<sup>1)</sup> (prymitywne stacyjki małej mocy). Posiada ona natomiast bardzo doniosłe znaczenie dla modulacji prądu stałego w urządzeniach, z których czerpiemy bardzo małą moc, rzędu  $10^{-2}$  W. i mniej (telefonja drutowa, obwody mikrofonowe urządzeń radiotelefonicznych).



Rys. 114 a.

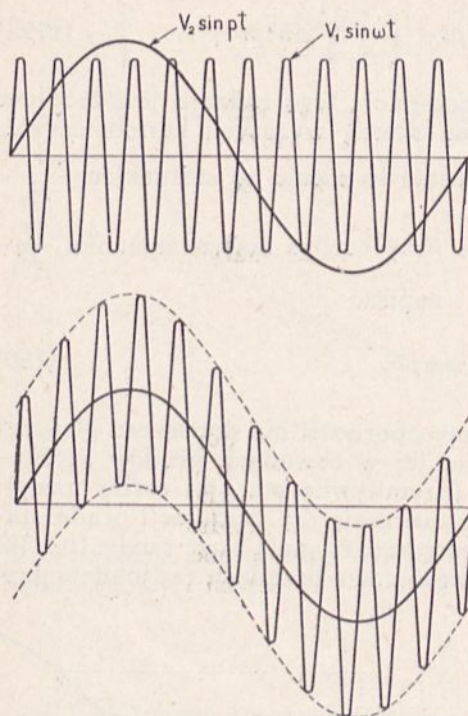


Rys. 114 b.

2) Aby istniała możliwość modulowania generatora przez zmiany napięcia zasilającego, musi istnieć zależność prostolinijna między napięciem zasilającym, a wytwarzanym prądem wielkiej częstotliwości. Taka zależność istnieje w szerokich granicach między napięciem anodowym generatora lampowego, a prądem w obwodzie rezonansowym, leżącym między anodą i katodą (krzywa rys. 114 b) (zasada modulacji anodowej czyli Hei-

<sup>1)</sup> Do tej samej kategorii należy dławik modulacyjny wielkiej częstotliwości (Pungs. Alexanderson).

sing'a). Siłę elektromotoryczną stałą  $E$  zasilającej generator, odpowiada prąd szybkozmienny o wartości skutecznej  $J_0$ . Jeżeli na nią nałożymy siłę elektromotoryczną zmienną, np. sinusoidalną o przebiegu  $E_m \cdot \sin pt$ , to prąd w obwodzie rezonansowym pocnie się wahać sinusoidalnie około wartości



Rys. 115.

średniej  $J_0$ , czyli da nam sinusoidalną modulację amplitudy prądu szybkozmiennego. Dzięki temu, że zachowana jest prostolinijna zależność między napięciem zasilającym i prądem w bardzo szerokich granicach, urządzenia tego typu dopuszczają modulację, zbliżoną do 100%.

3) Jeżeli w obwodzie o stałej oporności omowej nałożymy na siebie dwie siły elektromotoryczne o znacznie różniących się częstotliwościach  $\omega$  i  $p$  (o różnych rzędach wielkości), a więc

$$v = V_1 \sin \omega t + V_2 \sin pt, \quad (a)$$

modulacji amplitudy nie otrzymamy: te siły elektromotoryczne dadzą nam dwa prądy, istniejące niezależnie obok siebie (rys. 115). Przebiegi zmieniają się z chwilą, gdy zależność między siłą elektromotoryczną i prądem będzie krzywolinijna, a w szczególności, gdy będzie ona kwadratowa (rys. 116):

$$i = I_0 + a v + b v^2. \quad (b)$$

Podstawiając w równaniu (b) wartość  $v$  z równania (a), otrzymamy

$$i = I_0 + a(V_1 \sin \omega t + V_2 \sin pt) + b(V_1 \sin \omega t + V_2 \sin pt)^2, \quad (181)$$

czyli

$$i = I_0 + a(V_1 \sin \omega t + V_2 \sin pt) + b(V_1^2 \sin^2 \omega t + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \sin \omega t \cdot \sin pt + V_2^2 \sin^2 pt). \quad (181-a)$$

Pierwszy i trzeci człon wyrażenia w nawiasach prostych przedstawiają drugie harmoniczne obu częstotliwości nakładających się i dla modulacji znaczenia nie mają, tembardziej, że będą zwarte przez obwód rezonansowy, nastrojony na  $\omega$ . Natomiast człon środkowy można przekształcić (patrz § 11) na

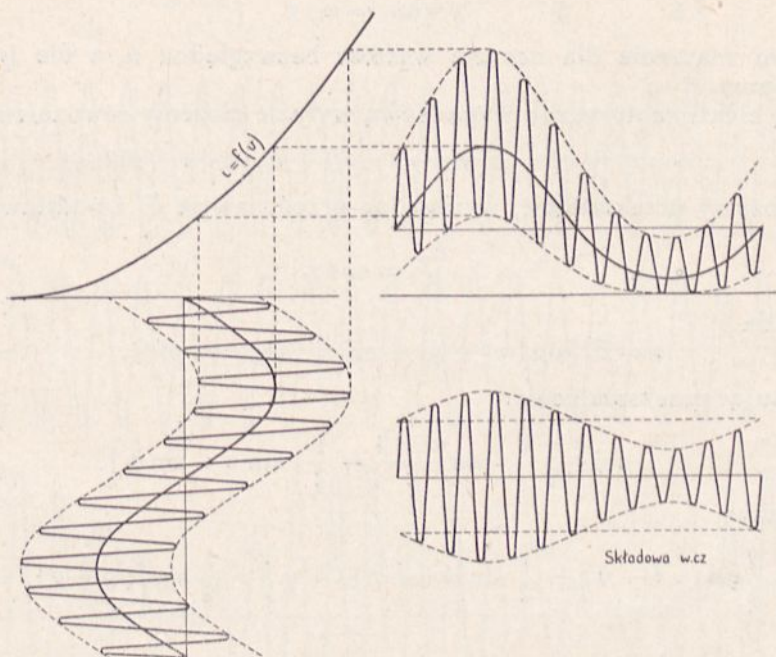
$$b V_1 V_2 [\cos (\omega - p) t - \cos (\omega + p) t],$$

co daje żądane częstotliwości boczne dla zmodulowania prądu nośnego

$$a V_1 \sin \omega t.$$

Modulację możemy więc wyrazić zapomocą równania

$$\begin{aligned} i' &= a \cdot V_1 \cdot \sin \omega t + b V_1 V_2 \sin \omega t \sin pt \cdot = \\ &= a V_1 \sin \omega t \left( 1 + \frac{b}{a} \cdot V_2 \sin pt \right), \end{aligned} \quad (182)$$



Rys. 116.

czyli

$$i' = a \cdot V_1 \sin \omega t + b V_1 V_2 \cos(\omega - p)t - b V_1 V_2 \cos(\omega + p)t. \quad (182-a)$$

Warunkiem czystości modulacji jest tu oczywiście kształt krzywej, nie zawierający wyższych potęg  $v$ , obecność ich bowiem, jak łatwo się przekonać, jest źródłem wyższych harmoniczných modulacji. Innymi słowy, funkcja pochodna charakterystyki  $i = f(v)$  obwodu musi być linią prostą.

Na wyjaśnionej tu zasadzie opierają się pewne urządzenia generatorów lampowych z modulacją w obwodzie siatki.<sup>1)</sup>

## 16. Nakładanie (interferencja) prądów sinusoidalnych.

Załóżmy, że w obwodzie rys. 105 działają dwie siły elektromotoryczne zmienne o różnych częstotliwościach, wyrażone równaniami

$$e_1 = E_1 \sin(\omega t - \psi), \quad \text{oraz} \quad e_2 = E_2 \sin \omega_2 t,$$

<sup>1)</sup> Również i modulacja anodowa sprowadza się do nakładania dwu częstotliwości na charakterystyce detektora prostolinijnego.

przyczem  $\psi$  oznacza kąt przesunięcia faz między nimi w momencie początkowym.

Przyjmijmy, że

$$E_1 > E_2, \quad (a)$$

oraz że

$$\omega_2 = \omega + p, \quad (b)$$

czyli

$$p = \omega_2 - \omega, \quad (c)$$

przyczem znaczenie dla nas ma wartość bezwzględna  $p$ , a nie jej znak algebraiczny.

Siłę elektromotoryczną wypadkową wyrazić możemy równaniem

$$e = e_1 + e_2 = E_1 \sin(\omega t - \psi) + E_2 \sin(\omega + p)t, \quad (183)$$

które możemy przekształcić, wyciągając przed nawias  $E_1$  i podstawiając

$$\frac{E_2}{E_1} = \cos \chi, \quad (d)$$

co nam da

$$e = E_1 [\sin(\omega t - \psi) + \cos \chi \cdot \sin(\omega + p)t]. \quad (e)$$

Stosując przekształcenie:

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \beta), \quad (f)$$

otrzymamy:

$$e = E_1 \left\{ \sin(\omega t - \psi) + \frac{1}{2} \sin[(\omega + p)t + \chi] + \frac{1}{2} \sin[(\omega + p)t - \chi] \right\},$$

czyli

$$e = \frac{E_1}{2} \left\{ \sin(\omega t - \psi) + \sin[(\omega + p)t + \chi] \right\} + \frac{E_1}{2} \left\{ \sin(\omega t - \psi) + \sin[(\omega + p)t - \chi] \right\}. \quad (g)$$

Po ponownym przekształceniu obu części prawej strony równania (g) według wzoru (f) w kierunku odwrotnym oraz po uwzględnieniu, że

$$\frac{\omega + \omega_2}{2} = \omega + \frac{p}{2},$$

oraz  $\omega_2 - \omega = p$ , równanie przyjmuje wkońcu postać,

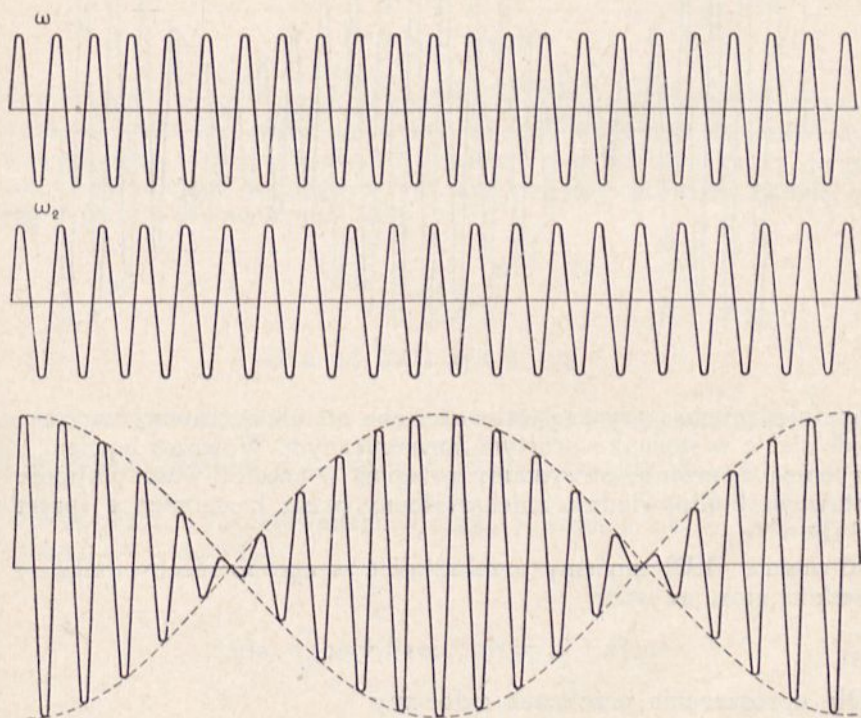
$$e = E_1 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega}{2}t + \frac{\psi}{2} + \frac{\chi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega}{2}t - \frac{\psi}{2} + \frac{\chi}{2}\right) + E_1 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega}{2}t + \frac{\psi}{2} - \frac{\chi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega}{2}t - \frac{\psi}{2} - \frac{\chi}{2}\right). \quad (184)$$

W przypadku szczególnym, gdy amplitudy obu sił elektromotorycznych są równe, mamy

$$E_1 = E_2 = E_m \quad \text{oraz} \quad \cos \chi = 1,$$

czyli  $\chi = 0$ , i równanie (184) upraszcza się do postaci

$$e = 2 E_m \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega}{2} t + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega}{2} t - \frac{\phi}{2}\right). \quad (185)$$



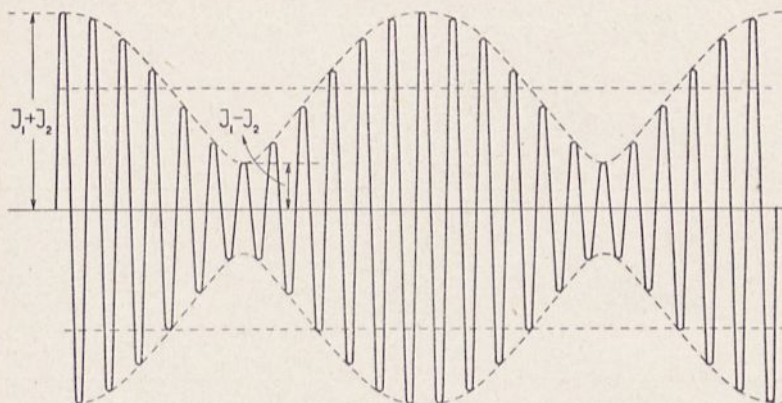
Rys. 117.

O ile różnica obu nałożonych częstotliwości jest bardzo mała, a więc  $\frac{p}{2} \ll \omega$ , możemy napisać

$$e = 2 E_m \cos\left(\frac{p}{2} t + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right). \quad (185-a)$$

Przebieg funkcji (184) i (185) mamy na rys. 117 i 118. Dyskusja ich wskazuje, że nakładając dwie siły elektromotoryczne o różnych częstotliwościach, otrzymamy wypadkową siłę elektromotoryczną o *częstotliwości średniej arytmetycznej* z obu częstotliwości nałożonych, i o *amplitudzie zmiennej*, której obwiedniami są funkcje sinusoidalne o częstotliwości rów-

nej połowie różnicy obu częstotliwości nałożonych. Interferencja dwu sił elektromotorycznych o różnych częstotliwościach daje więc prąd wielkiej częstotliwości o amplitudzie modulowanej z mniejszą częstotliwością (zjawisko dudnień). Gdy amplitudy obu drgań są równe, amplituda wypadkowa waha się w granicach od  $2E_m$  do zera, dając typowy przypadek drgań węzłowych (rys. 117).



Rys. 118.

Dudnień niema, gdy częstotliwości obu sił elektromotorycznych pozostają do siebie w stosunku prostym *harmonicznym*. Wówczas bowiem, zgodnie z teorią Fourier'a, otrzymamy przebieg o częstotliwości najmniejszej (podstawowej) odpowiednio zniekształcony przez harmoniczne (patrz do-  
datek II).

Równanie (183) możemy przekształcić w sposób nieco odmienny, niż poprzednio, stosując wzór

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

Dla uproszczenia przeliczeń założymy

$$e = E_1 \sin \omega t + E_2 \sin(\omega t + pt + \psi),$$

co w niczem nie zmieni przebiegu, przesuwając jedynie początek układu, i podstawimy

$$\alpha = \omega t, \quad \beta = pt + \psi.$$

Otrzymujemy w ten sposób

$$e = E_1 \sin \omega t + E_2 \sin \omega t \cos(pt + \psi) + E_2 \cos \omega t \sin(pt + \psi),$$

co po prostym przekształceniu daje

$$e = E_1 \sin \omega t \left[ 1 + \frac{E_2}{E_1} \cos(pt + \psi) \right] + E_2 \sin(pt + \psi) \cos \omega t. \quad (184\text{-a})$$

Równanie to wskazuje, że nakładając dwa drgania o różnych amplitudach, otrzymujemy drgania węzłowe (człon drugi) z nałożoną na nie sinusoidalną modulacją amplitudy o głębokości  $m = \frac{E_2}{E_1}$  (człon pierwszy).

Oba te przebiegi przesunięte są względem siebie o  $\pi/2$  tak w wielkiej, jak i w małej częstotliwości.

## 17. Detekcja prostolinijna prądów nałożonych.

### A. Detekcja idealna.

Rozpatrzmy wpiery detekcję idealną prądów nałożonych w obwodzie detekcyjnym zwartym. Jeżeli założymy, że amplitudy obu sił elektromotorycznych są sobie równe i że obwód detektora jest bezindukcyjny, to prąd wyprostowany w ciągu jednego okresu wielkiej częstotliwości będzie miał przebieg (zgodnie z równaniem 185)

$$\text{od } 0 \text{ do } \pi \dots\dots i = 2 J_m \cos \frac{p}{2} t \sin \left( \omega + \frac{p}{2} \right) t$$

$$\text{od } \pi \text{ do } 2\pi \dots\dots i = 0.$$

Jeżeli założymy, że  $p \ll \omega$ , czyli że w ciągu jednego półokresu prądu szybkozmiennego wartość  $2 J_m \cos \frac{p}{2} t$  możemy uważać za stałą, to wartość średnią prądu wyprostowanego w ciągu dowolnego okresu prądu szybkozmiennego da nam całka:

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i dt = \frac{2 J_m}{\pi} \cos \frac{p}{2} t \quad (186)$$

w granicach od

$$t = 0 \text{ do } t = \frac{T}{2},$$

zaś

$$I_{sr} = -\frac{2 J_m}{\pi} \cos \frac{p}{2} t, \quad (186-a)$$

w granicach od

$$t = \frac{T}{2} \text{ do } t = T.$$

Będzie to iednak, w stosunku do okresu dudnień  $\Theta = \frac{1}{f_1 - f_2}$ , chwilowa

średnia wartość prądu wyprostowanego. Wartość ta zmienia się w czasie według funkcji  $\pm \cos \frac{p}{2} \cdot t$ , i to w pierwszym półokresie ze znakiem dodatnim, a w drugim — z ujemnym (rys. 119). W ten sposób średnia wartość wyprostowanego prądu szybkozmiennego posiada postać skomutowanego czyli prostowanego dwupółkowo prądu tętniącego o częstotliwości  $\frac{p}{2}$  i amplitudzie tętnienia

$$J_{sr.m} = \frac{2J_m}{\pi}. \quad (187)$$

Prąd taki wyraża się szeregiem Fourier'a, w którym częstotliwością podstawową jest  $\frac{p}{2}$

$$i = \frac{2J_{sr.m}}{\pi} \left[ 1 - \frac{2}{3} \cos pt - \frac{2}{15} \cos 2pt + \dots \right] \quad (188)$$

zawiera więc, obok składowej stałej, prąd o częstotliwości  $p$  oraz wyższe harmoniczne parzyste tej częstotliwości.



Rys. 119.

W ten sposób interferencja dwu prądów o różnych częstotliwościach daje *po detekcji* prąd wyprostowany, tętniący z częstotliwością podstawową, *równą różnicy* nałożonych na siebie *wielkich częstotliwości*. A więc wysokość tonu podstawowego, otrzymanego w słuchawkach, równa się różnicy częstotliwości prądów nałożonych (*ton interferencyjny*).<sup>1)</sup>

Należy tu podkreślić dwa szczegóły, ważne dla eksploatacji odbiorników:

a) Odbierając fale pewnej częstotliwości, otrzymamy tensam ton interferencyjny przy *dwu* częstotliwościach nałożonych; a mianowicie  $\omega_2' = \omega + p$  oraz  $\omega_2'' = \omega - p$ . Stąd też stacja odbierana występuje w dwóch położeniach podziałki generatora drgań pomocniczych (t. zw. *generatora heterodynowego* czyli *heterodyny*).

Zjawisko to jest niedogodne przy małej selektywności obwodu wejściowego odbiornika, wówczas bowiem szereg fal, leżących w granicach słyszalności powyżej i poniżej częstotliwości nakładanej (a więc około  $\pm 10$

<sup>1)</sup> Ściśle biorąc, nie można mówić o *tonie* interferencyjnym, [ze względu na obecność wyższych oktaw (patrz równanie 188)].



kc/s), daje tony interferencyjne, utrudniając odbiór sygnałów żądanych. Interferencja taka może powstać również i z harmonicznymi stacjami, pracującymi na falach znacznie dłuższych.

b) W normalnie stosowanych układach dostatecznie selektywnych, występuje zjawisko odwrotne: a mianowicie jedna z częstotliwości nakładanych jest silnie tłumiona z powodu ostrości rezonansu obwodu. W układach z generatorem dodatkowym nie sprawia to szczególnej trudności, obwód odbiorczy bowiem można dostroić do rezonansu z sygnałem odbieranym, a prąd nakładany doprowadzić do żądanej amplitudy dzięki zapasowi mocy generatora. Trudniej przedstawia się zagadnienie w odbiornikach ze wzbudzeniem własnym (*autodynowych*), tam bowiem obwód odbiorczy siłą rzeczy jest w rezonansie z prądem nakładanym, a rozstrojony względem sygnału. Dla fal krótszych powstałe w ten sposób rozstrojenie jest znikomo małe, lecz na falach długich (rzędu dwu tysięcy metrów i więcej), jest ono procentowo tak znaczne, iż wpływa ujemnie na siłę odbioru. Dlatego dla dłuższych fal nie stosuje się układów autodynowych.

c) Jeżeli generator drgań miejscowych daje krzywą bogatą w harmoniczne, to nie tylko prąd o częstotliwości podstawowej daje tony interferencyjne, lecz również dają je i prądy o częstotliwościach harmonicznymi. Zjawisko to szczególnie zagraża odbiornikom, posiadającym obwód wejściowy niestrojony (niektóre typy odbiorników superheterodynowych), jest więc wskazane, by do odbiornika doprowadzać prądy miejscowe, możliwie wolne od harmonicznymi [generator prądów miejscowych o dostatecznej mocy (kilka watów), zasilający obwód wejściowy za pośrednictwem słabo sprzężonych obwodów pośrednich].

d) Znaczenie pojemności kondensatora wyrównawczego w detekcji prądów interferencyjnych jest analogiczne, jak przy odbiorze prądów modulowanych (patrz § 13). Jednakże warunek

$$\frac{1}{\omega C} \ll Z \ll \frac{1}{p C}$$

łatwiej tu spełnić ze względu na mniejszą rozpiętość częstotliwości dudnień, które praktycznie zawierają się w granicach od 1000 do 2000 okr/s. Jednakże i tu trudności są tem większe, im mniejsze częstotliwości (dłuższe fale) odbieramy.

Przy bardzo wielkiej pojemności kondensatora wyrównawczego oczywiście nie otrzymamy tonu interferencyjnego, lecz prąd stały o wartości [patrz równania (186), 186 a) i 187) oraz rys. 119]:

$$I = \frac{2}{\pi} J_{sr,m} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 J_m}{\pi} \approx 0,4 J_m. \quad (189)$$

Układy detekcyjne, prostujące nie tylko prąd nośny, lecz i prądy interferencyjne, spotyka się często w technice pomiarowej jako t. zw. *woltomierze lampowe*. Posiadają one kondensatory wyrównawcze o pojemności rzędu mikrofaradów. Spotyka się je również w urządzeniach do automatycznego odbioru telegraficznego, wymagających prądu stałego do uruchomienia aparatu piszącego.

Dla uproszczenia założyliśmy, że obie siły elektromotoryczne działają na obwód bezindukcyjny. W praktyce radjotechnicznej przebiegi takie odbywają się z reguły w obwodach rezonansowych o dużej ostrości rezonansu tak, iż nawet nieznaczna różnica częstotliwości, stosowana przy odbiorze słuchowym (kilka tysięcy okresów na sekundę) daje już przesunięcie faz między siłami elektromotorycznymi i prądami, zbliżone do  $90^\circ$ . W szczególności w układach odbiorczych autodynowych obwodów ten jest w rezonansie z drganiami miejscowymi, a rozstrojony w stosunku do drgań odbieranych. Te przesunięcia faz nie zmieniają jednakże istoty zjawiska, prowadząc się ostatecznie do równania (183).

### 18. Detekeja prądów nałożonych, na zakrzywieniu charakterystyki detektora.

Podstawiając w równaniu detektora krzywoliniowego o postaci ogólnej

$$i = I_0 + a v + b v^2$$

sumę dwu napięć szybkozmiennych

$$v = V_1 \sin \omega t + V_2 \sin \omega_2 t,$$

otrzymamy równanie prądu

$$i' = I_0 + a (V_1 \sin \omega t + V_2 \sin \omega_2 t) + b (V_1 \sin \omega t + V_2 \sin \omega_2 t)^2. \quad (190)$$

Po rozwinięciu i uporządkowaniu<sup>1)</sup> otrzymujemy sumę wyrazów

$$\begin{aligned} i' = I_0 + b \frac{V_1^2 + V_2^2}{2} + b V_1 V_2 \cos pt + a V_1 \sin \omega t + \\ + a V_2 \sin \omega_2 t - \frac{b V_1^2}{2} \cos 2 \omega t - \frac{b V_2^2}{2} \cos 2 \omega_2 t + \\ - b V_1 V_2 \cos (\omega + \omega_2) t. \end{aligned} \quad (190-a)$$

z których dwa pierwsze oznaczają składową stałą, trzeci wyraz składową o częstotliwości dudnień  $p$ , pozostałe zaś są to składowe o częstotliwościach szybkozmiennych podstawowej i wyższych. Jeżeli odbiornik energii jest zabocznikowany kondensatorem wyrównawczym, składowe o wielkich częstotliwościach uważać możemy za zwarte. Składowe te pozatem, jako pierwsze potęgi funkcji sinusoidalnych, dają wartość średnią równą zeru, nie wpłynęłyby więc na wartość prądu wyprostowanego.

Najważniejszy jest dla nas człon trzeci, składowa o częstotliwości dudnień. Jest ona proporcjonalna do *iloczynu* amplitud obu napięć składo-

<sup>1)</sup> Stosując przekształcenie

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = -(\cos \alpha - \cos \beta)$$

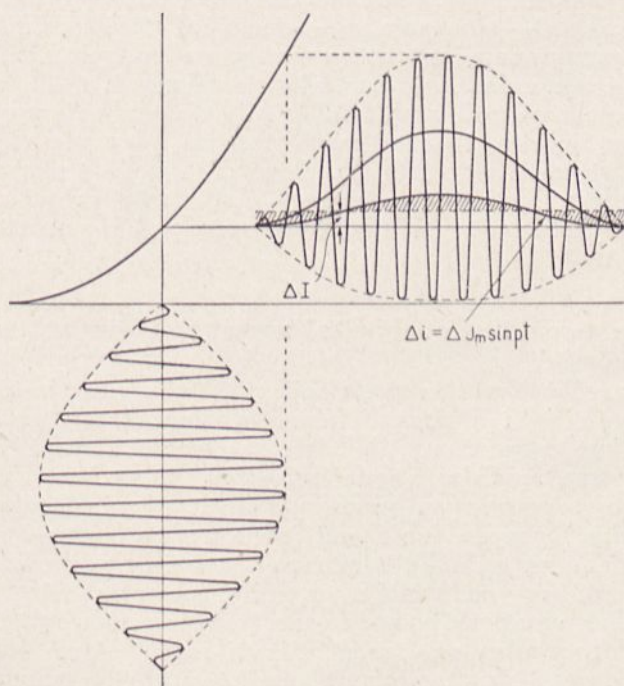
i podstawiając

$$\alpha + \beta = 2 \omega \quad \text{oraz} \quad \alpha - \beta = 2 \omega_2.$$

wych, a więc *siłę odbioru można zwiększyć, zwiększając amplitudę drgań miejscowych*, oczywiście w granicach kwadratowego przebiegu charakterystyki detektora. Zjawisko to jest bardzo ważne dla odbioru słabych stacji, dla których nałożenie drgań miejscowych jest równoznaczne ze *wzmocnieniem* drgań odbieranych (wzmocnienie przez nakładanie drgań)<sup>1)</sup>.

Dzięki temu przy pomocy nakładania drgań można odbierać z dostateczną siłą stację, której sygnał leżałby sam poniżej progu czułości detektora. Tem też tłumaczy się znaczna czułość odbiorników t. zw. superheterodynowych, w których dwukrotnie wykorzystujemy wzmocnienie przez nakładanie drgań (przy odbiorze telegrafji).

Pod względem jakościowym detekcja na charakterystyce kwadratowej różni się zasadniczo od detekcji prostoliniowej tem, że daje *ton interferencyjny o częstotliwości p, czystej, bez wyższych harmoniczych*. Powstawanie tego przebiegu przedstawia dla równych amplitud drgań nakładanych rys. 120.



Rys. 120.

Jest rzeczą oczywistą, że z chwilą, gdy charakterystyka detektora nie jest idealnie kwadratowa, lecz zawiera wyższe potęgi, prąd po detekcji zawiera również i wyższe harmoniczne tonu interferencyjnego.

<sup>1)</sup> Tem tłumaczy się zjawisko często obserwowane przy odbiorze fal gasnących, że włączenie generatora miejscowego wzmacnia siłę odbioru.

Jeżeli zwrócimy uwagę na człony wielkiej częstotliwości, to widzimy tam, poza drugą harmoniczną obu częstotliwości nakładanych, również i sumę tych częstotliwości. Prąd o częstotliwości kątowej  $\omega + \omega_2$  mogliśmy wyłowić, gdybyśmy — zamiast oporu zabocznikowanego kondensatorem — umieścili na wyjściu detektora obwód rezonansowy, nastrojony na tę częstotliwość.

Również i detekcja prostolinijna daje nam częstotliwość  $\omega + \omega_2$ , która jest drugą harmoniczną wielkiej częstotliwości prostowanej  $\frac{\omega + \omega_2}{2}$ .

Wynika to bezpośrednio z rozwinięcia w szereg krzywej prądu prostowanego (równanie 154).

Teoria detekcji prądów nałożonych przy pomocy charakterystyki krzywoliniijnej tłumaczy nam powstawanie tonów kombinacyjnych w akustyce. Należy bowiem uprzytomnić sobie, że większość układów drgających mechanicznie wykazuje elongację proporcjonalną do ciśnienia tylko przy bardzo małych amplitudach. Gdy nacisk przekroczy pewną granicę, zależność  $s = f(p)$ , ( $s$  — elongacja,  $p$  — ciśnienie) staje się funkcją bardziej złożoną, czego przykładem jest choćby membrana telefoniczna i błona bębnowa ucha. Gdy taki układ drgający, którego zależność  $s = f(p)$  da się wyrazić funkcją potęgową, poddamy działaniu dwu lub kilku tonów nie pozostających względem siebie w stosunku harmonicznym, lub zawierających składowe, które tego warunku nie spełniają, błona drga według równania (190 a), stając się źródłem, obok harmonicznym obu częstotliwości nakładanych, również i tonów kombinacyjnych równych różnicy lub sumie tych częstotliwości.

## 19. Modulacja bez jednej z fal bocznych (jednowstęgowa).

Znaczna szerokość widma modulacji amplitudy jest zjawiskiem niedogodnym, szczególnie na dłuższych falach, gdzie zakres rozporządzalnych częstotliwości jest ograniczony. Wadzie tej technika stara się zapobiec, stosując tak zwaną *modulację jednowstęgową*, polegającą na tem, że na stacji nadawczej przy pomocy odpowiednich urządzeń filtrujących, usuwa się *jedno z widm bocznych*, lub nawet *jedno widmo boczne i częstotliwość nośną*. Ze względu na technikę odbiorczą oba systemy sprowadzają się do tego samego, gdyż przy nadawaniu bez fali nośnej częstotliwość nośna nakłada się w odbiorniku przy pomocy generatora miejscowego. Zawsze więc do detektora doprowadza się *i prąd nośny i jedno widmo boczne*. Jeżeli we wzorze na sinusoidalną modulację amplitudy (169) pominiemy wyrażenie, odpowiadające jednej z częstotliwości bocznych (np. większej), otrzymamy równanie

$$v = V_0 \sin \omega t + \frac{m V_0}{2} \cos (\omega - p) t, \quad (191)$$

które, jak widzimy, jest równoznaczne z równaniem na nałożenie dwu sił elektromotorycznych o częstotliwościach różniących się o  $p$  i o różnych amplitudach (równanie 183).

A więc modulacja jednowstęgowa jest równoznaczna z nakładaniem na stałą częstotliwość nośną szeregu zmiennych częstotliwości bocznych, sprządza się więc w zasadzie do zjawiska interferencji, rozpatrywanego w poprzednich paragrafach.

Wynikają stąd bardzo ważne wnioski dla detekcji fali modulowanej jednowstęgowo. A mianowicie, jak wynika z równania (188), detekcja prostolinijna prądów nałożonych daje obwiednię, zawierającą wprawdzie podstawową sinusoidę o częstotliwości  $p$ , lecz w towarzystwie szeregu harmonicznych. Innymi słowy, *detekcja prostolinijna fali modulowanej jednowstęgowo daje odbiór o znacznym zniekształceniu amplitudy*. Jednakże, im mniejsza jest głębokość modulacji, tembardziej przebieg zbliża się do modulacji sinusoidalnej i wpływ zniekształcenia maleje.

Natomiast równanie (190 a) na detekcję o przebiegu kwadratowym dla prądów interferencyjnych dowodzi, że detekcja ta odtwarza prąd o częstotliwości  $p$  bez zniekształceń. Wynika stąd, że chcąc otrzymać nieznkształconą detekcję, należałoby stosować *detektor o charakterystyce idealnie kwadratowej*.

Wobec tego jednakże, że w praktyce, szczególnie przy odbiorze sygnałów o znaczniejszej amplitudzie, o wiele łatwiej jest urzeczywistnić detektor o charakterystyce prawie prostoliniijnej, niż detektor o charakterystyce idealnie kwadratowej, nieznkształcony odbiór modulacji jednowstęgowej jest zagadnieniem technicznie o wiele trudniejszym.

Zalety i wady modulacji jednowstęgowej obu typów (z falą nośną i bez fali nośnej) scharakteryzować można następująco:

1) Modulacja jednowstęgowa z falą nośną daje poważne zwężenie widma promieniowanego, jednakże stacja, promieniując falę nośną, w której nagromadzona jest największa energia, może przeszkadzać na odległościach znacznie większych, niż jej zasięg użyteczny. Pod względem energetycznym przy modulacji tej oszczędzamy niewiele (przy pełnej modulacji zgodnie z § 12 —  $\frac{1}{6}$  mocy całkowitej). Zaletą tego systemu jest możliwość odbioru przy pomocy prostych odbiorników o odpowiedniej charakterystyce detektora, a więc nawet odbiorników z detektorem stykowym.

2) Modulacja jednowstęgowa bez fali nośnej daje znacznie większe korzyści pod względem ograniczenia przeszkód, a moc promieniowaną dla  $m = 1$  redukuje do  $\frac{1}{6}$  mocy przy modulacji dwuwstęgowej.

Ujemną stroną tej modulacji jest konieczność posiadania na stacji odbierczej generatora miejscowego o częstotliwości ściśle odpowiadającej odbieranej fali nośnej. Częstotliwość drgań musi być przytem bardzo stała, gdyż nieznaczne nawet wahania wywołują zmiany tonacji, a więc zniekształcenia odbioru. Dlatego przy obecnym stanie techniki modulacja ta nadaje się jedynie do komunikacji między stacjami stałymi, odpowiednio wyposażonemi technicznie.

## 20. Modulacja częstotliwości.

Myślą przewodnią stworzenia modulacji częstotliwości była chęć znalezienia takiego systemu modulacji, któryby dawał węższe widmo częstotliwości, niż modulacja amplitudy. Na pozór takiemu warunkowi powinien odpowiadać prąd o stałej amplitudzie, którego częstotliwość  $\omega$  wahałaby

się około pewnej wartości stałej (częstotliwość nośna  $\omega_0$ ) z częstotliwością modulującą  $p$  w pewnych bardzo wąskich granicach  $\Delta\omega$ , dzięki czemu, zdawałoby się, widmo modulacji powinno być zawarte w dowolnie małych granicach  $\pm\Delta\omega$ . Częstotliwość takiego prądu powinna więc wyrażać się wzorem

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \sin pt. \quad (a)$$

Częstotliwość  $\omega$  jest oczywiście zmienna i możemy założyć, że w elementarnym odcinku czasu  $dt$  zmienia się o wartość  $\omega dt$ . Możemy więc napisać równanie różniczkowe

$$d\omega = \omega dt = (\omega_0 + \Delta\omega \sin pt) dt, \quad (b)$$

które po scałkowaniu daje

$$\omega t = \int (\omega_0 + \Delta\omega \sin pt) dt = \omega_0 t - \frac{\Delta\omega}{p} \cos pt. \quad (c)$$

Stąd prąd o modulowanej częstotliwości wyrazi się równaniem

$$i = J_0 \sin \omega t = J_0 \sin \left( \omega_0 t - \frac{\Delta\omega}{p} \cos pt \right). \quad (192)$$

Wielkość  $\frac{\Delta\omega}{p}$  którą oznaczymy przez  $m_1$ , wyraża nam stosunek, w jakim wahania częstotliwości pozostają do częstotliwości modulującej. Przez analogję do modulacji amplitudy nosi ona nazwę *współczynnika głębokości modulacji częstotliwości*, a różni się od współczynnika głębokości modulacji amplitudy zasadniczo tem, że może przybierać dowolną wartość mniejszą lub większą od jedności oraz, że jest funkcją częstotliwości, gdyż—jak widać—jest on *odwrotnie proporcjonalny do częstotliwości modulującej*.

Równanie (192) możemy przekształcić, stosując wzór

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

przez co otrzymamy:

$$i = J_0 [\sin \omega_0 t \cdot \cos(m_1 \cos pt) - \cos \omega_0 t \cdot \sin(m_1 \cos pt)]. \quad (192-a)$$

Wyrażenia  $\cos(m_1 \cos pt)$  oraz  $\sin(m_1 \cos pt)$  możemy rozwinąć w szeregi potęgowe, otrzymując w ten sposób

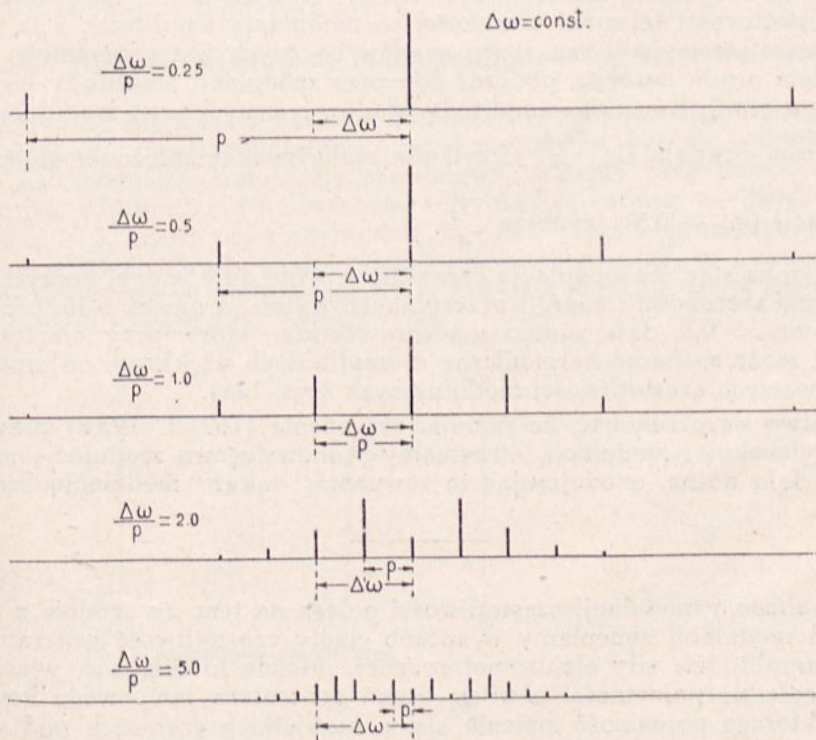
$$i = J_0 \sin \omega_0 t \left[ 1 - m_1^2 \frac{\cos^2 pt}{2!} + m_1^4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos^4 pt}{4!} - \dots \right] + \\ - J_0 \cos \omega_0 t \left[ m_1 \cos pt - m_1^3 \frac{1}{4} \frac{\cos^3 pt}{3!} + \dots \right], \quad (192-b)$$

Łatwo się przekonać na zasadzie przekształceń, stosowanych w poprzednich paragrafach, że wzór (192 b) zawiera nie tylko częstotliwości boczne, odpowiadające częstotliwości modulującej  $p$ , ale i nieskończony szereg czę-

stotliwości, odpowiadających jej wyższym harmonicznym. A mianowicie po odpowiednim przekształceniu i uporządkowaniu, szeregi (192 b) można sprowadzić do postaci

$$i = J_0 \sin \omega_0 t (a_0 - a_1 \cos 2pt + a_2 \cos 4pt - \dots) + \\ - J_0 \cos \omega_0 t (b_1 \cos pt - b_2 \cos 3pt + \dots). \quad (192-c)$$

Modulacja częstotliwości daje więc o wiele szersze (ściśle biorąc—nie-skończenie szerokie) widmo częstotliwości, niż modulacja amplitudy. Widma częstotliwości przy rozmaitych głębokościach modulacji mamy na rys. 121 (według B. v. der. Pol'a).



Rys. 121. (Według B. v. d. Pol'a).

Jednakże należy zaznaczyć, że mianowniki współczynników przy wyrazach o rosnących potęgach, rosną bardzo szybko. Dzięki temu, o ile  $m$  jest mniejsze od jedności, współczynniki te szybko maleją, tak, iż dalsze wyrazy szeregów można pominąć, a, o ile jest spełniony warunek

$$m_1 < 0,5,$$

można już przyjąć z dostateczną dokładnością

$$i = J_0 (\sin \omega_0 t - m_1 \cos pt \cdot \cos \omega_0 t). \quad (193)$$

Po przekształceniu wyrazu drugiego <sup>1)</sup> równanie (193) możemy sprowadzić do postaci

$$i = J_0 \sin \omega_0 t - \frac{m_1 J_0}{2} \cos(\omega_0 + p)t - \frac{m_1 J_0}{2} \cos(\omega_0 - p)t. \quad (193-a)$$

Z porównania tego równania z równaniem (169) na modulację amplitudy

$$i = J_0 \sin \omega t - \frac{m J_0}{2} \cos(\omega + p)t + \frac{m J_0}{2} \cos(\omega - p)t,$$

wynika, że modulacja częstotliwości niezbyt głęboka ( $m_1 < 0,5$ ) daje widmo częstotliwości tejsamej szerokości co modulacja amplitudy, z tą jedyną różnicą, że wypadkowa z obu prądów bocznych jest przesunięta o  $90^\circ$  względem prądu nośnego, podczas gdy przy modulacji amplitudy jest ona w fazie z nim<sup>2)</sup>. Również i amplitudy prądów bocznych przy modulacji częstotliwości równają się  $\frac{m J_0}{2}$ , czyli dla maksymalnej założonej głębokości

modulacji ( $m_1 = 0,5$ ), wynoszą  $\frac{J_0}{4}$ .

Wynika stąd, że modulacja częstotliwości nie daje żadnej korzyści pod względem szerokości i energii przesyłanego widma, a nawet, o ile przekroczymy  $m_1 = 0,5$ , daje widmo znacznie szersze, które przy wartościach  $m_1 > 1$  może zawierać harmoniczne o amplitudach większych od amplitud podstawowych częstotliwości modulujących (rys. 121).

Łatwo się przekonać, że sumując wyrażenia (169) i (193 a) przy tejsamej głębokości modulacji, otrzymamy jednowstęgową modulację amplitudy z falą nośną, a odejmując te równania, takąż modulację bez fali nośnej.

*Realizacja* modulacji częstotliwości polega na tem, że zgodnie z przebiegiem modulacji zmieniamy w sposób ciągły częstotliwość generatora o stałej amplitudzie siły elektromotorycznej. Można to osiągnąć, włączając równolegle do pojemności obwodu drgań generatora lampowego kondensator, którego pojemność zmienia się w niewielkich granicach pod wpływem fal głosowych (mikrofon pojemnościowy). Te zmiany pojemności o  $\pm \Delta C$  powodują odpowiednie rozstrajanie obwodu, a temsamem zmiany częstotliwości generatora w granicach  $\pm \Delta \omega$ .

Z poprzednich rozważań wynika, że modulacja częstotliwości nie wykazuje żadnych zalet wobec modulacji amplitudy, dlatego też nie posiada ona większego zastosowania praktycznego. Jednakże zjawisko modulacji

<sup>1)</sup> stosując wzór

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2} (\cos \alpha + \cos \beta).$$

<sup>2)</sup> Patrz § 21.

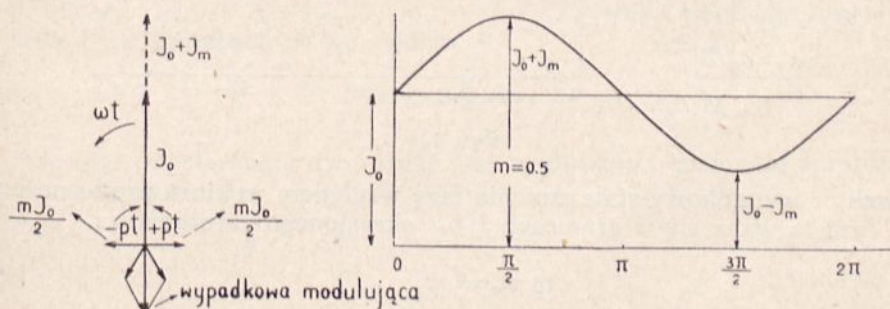


częstotliwości jest mimo to bardzo ważne w praktyce, występuje bowiem jako bardzo niepożądane zjawisko wtórne na stacjach nadawczych. A mianowicie, jeżeli generator stabilizowany i z jakiegokolwiek przyczyny ulega wahaniom częstotliwości (np. skutkiem zmian obciążenia pod wpływem modulacji amplitudy lub nadawania telegraficznego), mamy do czynienia z modulacją częstotliwości, która znacznie może poszerzyć widmo promieniowane.

Sz szczególnie niebezpieczne są tu *szybkie* wahania częstotliwości (t. zw. scyntylacje), często występujące na stacjach lampowych i dające stosunkowo wielką częstotliwość modulacji. Dla tego też stosuje się wszystkie dostępne środki, aby wahania częstotliwości generatorów utrzymać w jak najwęższych granicach (patrz zalecenia C. C. I. R.).

## 21. Wykresy wektorowe modulacji amplitudy i częstotliwości.

Zjawiska zachodzące podczas modulacji rozmaitych typów można śledzić w sposób bardzo poglądowy przy pomocy wykresów wektorowych. I tak np. modulację amplitudy przedstawić możemy przy pomocy trzech wektorów, z których jeden obraca się z szybkością kątową  $\omega$ , drugi z szybkością  $\omega + p$ , trzeci zaś z szybkością  $\omega - p$ . Jeżeli ograniczymy się do badania obwiedni prądu modulowanego, możemy przyjąć, że wektor o częstotliwości  $\omega$  stoi w miejscu, pozostałe zaś dwa obracają się w kierunkach przeciwnych z szybkością kątową  $\pm p$ .



Rys. 122.

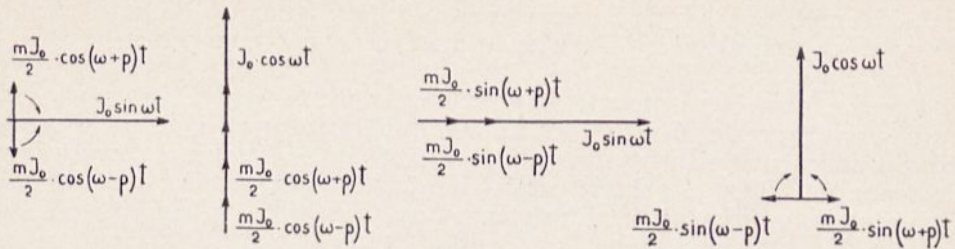
Tego rodzaju wykresy mamy na rysunkach 122 do 125. Na rys. 122 skonstruowany jest przebieg obwiedni modulacji dla równania

$$i = J_0 \cos \omega t + \frac{m J_0}{2} \sin (\omega + p) t - \frac{m J_0}{2} \sin (\omega - p) t,$$

przyjmując  $m = 0,5$ .

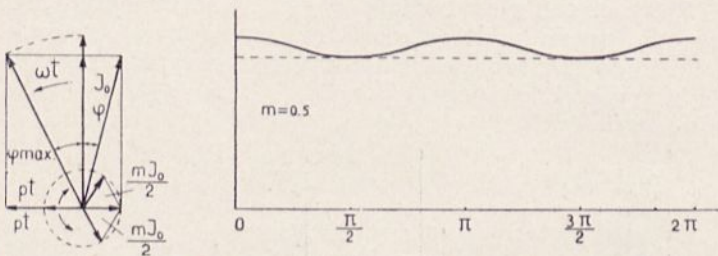
Jak widzimy, oba wektory częstotliwości bocznych cyklicznie zmieniają swe fazy względem wektora prądu nośnego, jednakże symetrycznie, tak iż wypadkowy wektor modulujący *stałe jest w fazie* z wektorem nośnym  $J$ , a więc zmienia się sinusoidalnie.

Rys. 123 a—d podaje wykresy wektorowe modulacji amplitudy dla poszczególnych przypadków, odpowiadających założeniom równań (169) do (169 c). Wynika z nich jasno równoznaczność tych czterech równań.



Rys. 123.

Na rys. 124 a i b mamy odpowiednie wykresy modulacji częstotliwości, oparte na równaniu (193), również dla  $m_1 = 0,5$ . Widzimy tu, że przebieg różni się od przebiegu modulacji amplitudy przede wszystkim tem,



Rys. 124.

że wektor wypadkowy stale zmienia fazę względem wektora prądu nośnego i że faza ta waha się w granicach  $\pm \varphi_m$  określonego zależnością :

$$\operatorname{tg} \varphi_m = m_1, \quad (194)$$

w naszym więc przypadku  $\varphi_m = 26^\circ 30'$ .

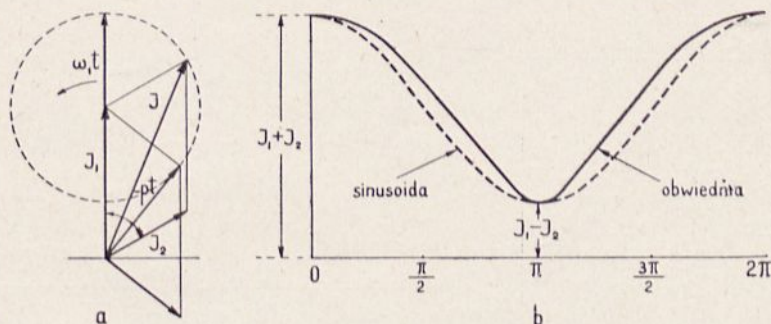
W przeciwieństwie więc do modulacji amplitudy, *modulacja częstotliwości* polega na sinusoidalnej zmianie fazy względem pewnej wartości średniej, odpowiadającej prądowi nośnemu, co jest oczywiste, gdy sobie uprzytomnimy, że długość okresu ulega okresowym wahaniom około wartości średniej. Stąd też jest zrozumiałe, że fala modulowana co do częstotliwości musi promieniować nieskończone widmo fal, gdyż wahania częstotliwości odbywają się w sposób ciągły.

Z rys. 124 b widać, że amplituda drgań, wykreślonych na zasadzie wzoru (193), nie jest stała, lecz wzrasta i powraca do wielkości pierwotnej z podwójną częstotliwością modulującą. Jest to wynikiem pominięcia dalszych członów szeregu, a w szczególności członu, zawierającego drugą harmoniczną częstotliwości modulującej. Stąd wniosek, że już przy głęboko-

ści modulacji 50% niezbędna jest obecność drugiej harmonicznej modulacji, czyli widmo podwójnej szerokości, jeżeli chcemy zachować amplitudę praktycznie stałą. Tylko dla bardzo małej głębokości modulacji bowiem wypadkową z wektorów, dodających się pod kątem prostym, uważać możemy za równą wektorowi nośnemu.

Inny znowu charakter posiada przebieg *interferencji* dwu prądów.

Jeżeli tu założymy, że wektor  $J_1$  o większej amplitudzie stoi w miejscu, otrzymamy jednostajny obrót wektora mniejszego  $J_2$  w jednym lub

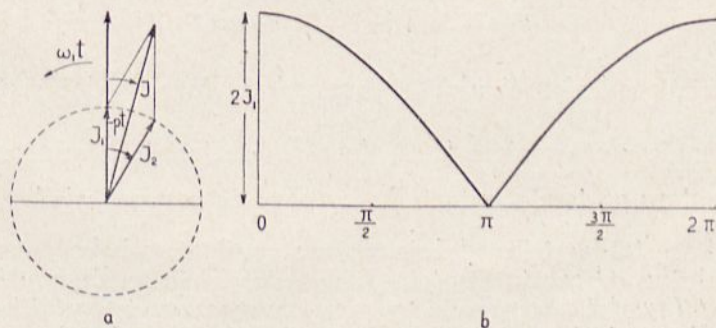


Rys. 125.

drugim kierunku, zależnie od tego, czy dla  $\omega_1 - \omega_2 = p$  jest  $p > 0$  czy też  $p < 0$  (rys. 125). Natomiast wektor wypadkowy  $J$ , o amplitudzie zmiennej w granicach  $J_{\max} = J_1 + J_2$  i  $J_{\min} = J_1 - J_2$  waha się w obu kierunkach dokoła  $J_1$  w granicach  $\pm \varphi_m$ , gdzie

$$\varphi_m = \arcsin \frac{J_2}{J_1}. \quad (195)$$

A więc interferencja dwu drgań jest modulacją o zmiennej amplitudzie i zmiennej fazie.

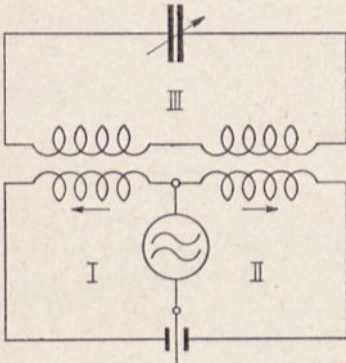


Rys. 126.

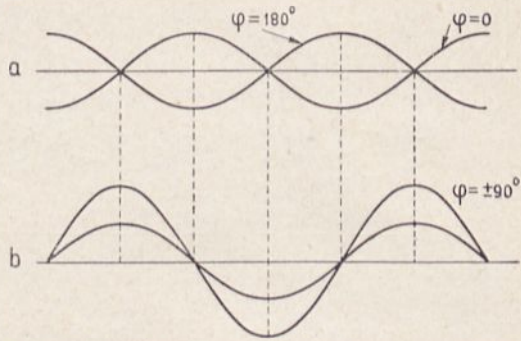
W szczególnym wypadku, gdy  $J_1 = J_2 = J$  (rys. 126), amplituda wektora wypadkowego zawiera się w granicach od  $2J$  do zera, a największy kąt odchylenia fazy wynosi  $90^\circ$ .

## 22. Modulacja fazy.

Można wyobrazić sobie, poza modulacją amplitudy i częstotliwości, jeszcze jeden sposób modulacji nadajnika, znany pod nazwą *modulacji fazy*. Wyobrażamy go sobie na przykład w ten sposób, że generator o częstotliwości stałej zasila dwa obwody I i II (rys. 127), w których w spoczynku prądy przesunięte są względem siebie o  $180^\circ$ , tak, iż działając na obwód III, indukują w nim siły elektromotoryczne, które znoszą się wzajemnie.



Rys. 127.



Rys. 128.

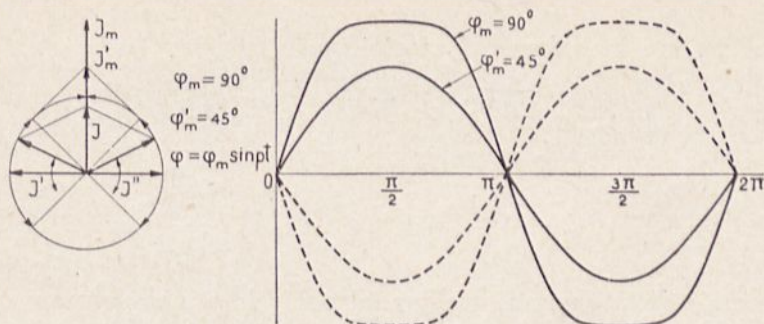
Jeżeli teraz pod wpływem modulacji (np. zapomocą różnicowego mikrofonu pojemnościowego) będziemy rozstrajali oba obwody w przeciwnych kierunkach, przesunięcie faz sił elektromotorycznych w obwodzie III będzie różne od  $180^\circ$  i suma tych sił elektromotorycznych będzie różna od zera (rys. 128 a i b). W obwodzie III mamy więc prąd sinusoidalny o częstotliwości  $\omega$ , którego faza zmienia się sinusoidalnie w granicach  $\pm \varphi_m$  z częstotliwością  $p$ . Możemy go wyrazić równaniem:

$$i = J_m \sin(\omega t - \varphi \cos pt), \quad (196)$$

które wyraża prąd sinusoidalny o przesunięciu faz również sinusoidalnie zmiennem.

Porównanie z równaniem (192) dowodzi, że jest to równanie tego samego charakteru co tamto, z tą tylko różnicą, że zamiast wielkości  $\frac{\Delta \omega}{p}$ , zależnej od częstotliwości modulującej, występuje tu głębokość modulacji  $\varphi$  stała, niezależna od częstotliwości. Stąd wniosek, że *modulacja fazy daje widmo częstotliwości o szerokości tej samej co modulacja częstotliwości, jest więc w istocie swą również modulacją częstotliwości, jest zaś gorsza przez to, że podczas gdy modulacja częstotliwości daje fale boczne o amplitudzie malejącej z częstotliwością modulującą, modulacja fazy daje dla wszystkich częstotliwości tęsamą amplitudę fali bocznej, zwiększając przez to niebezpieczeństwo przeszkadzania. Modulacja fazy nie daje więc żadnych korzyści w porównaniu z modulacją amplitudy.*

Wykres wektorowy modulacji faz mamy na rysunku 129. Widać żeń, że amplituda jest tu wprawdzie zmienna, lecz nie odtwarza przebiegu mo-



Rys. 129.

dulacji. Gdy jednakże głębokość modulacji jest niewielka,  $\varphi_m < \frac{\pi}{4}$ , odpowiednia amplituda zbliża się do przebiegu nakładania się równych amplitud (rys. 126).

### 23. Detekcja prądów o modulowanej częstotliwości lub fazie.

Dla modulacji częstotliwości wynika z samego założenia (stałość amplitudy), że detekcja przy pomocy prostownika o charakterystyce prostoliniowej może dać tylko prąd średni o wartości *stałej*, a więc niemodulowany. Również nie da nam tego charakterystyka o przebiegu kwadratowym, gdyż wyrażenie:

$$\begin{aligned} \left[ J_m \sin \left( \omega_0 t - \frac{\Delta \omega}{p} \cos pt \right) \right]^2 &= \frac{J_m^2}{2} \left[ J - \cos 2 \left( \omega_0 t - \frac{2}{p} \cos pt \right) \right] = \\ &= \frac{J_m^2}{2} - \frac{J_m^2}{2} \cos \left( 2 \omega_0 t - \frac{2 \cdot 2}{p} \cos pt \right), \end{aligned}$$

daje w wyniku *składową stałą* oraz składowe o *podwójnej częstotliwości nośnej* z modulacją częstotliwości. A więc i tu nie osiągamy odtworzenia tego przebiegu.

Stąd wniosek, że chcąc odtworzyć w odbiorniku przebieg modulacji, musimy *przed detekcją zmodulować amplitudę* prądu odbieranego. Osiągniemy to, przepuszczając prąd przez obwód, którego oporność pozorna jest funkcją częstotliwości, i to możliwie zbliżoną do prostoliniowej. Warunek ten będzie spełniony, gdy np. obwód odbiorczy nastroimy tak, aby widmo częstotliwości odbieranych znajdowało się całkowicie na jednym ze zboczy krzywej rezonansu, lub też, gdy równoległe do detektora włączymy indukcyjność.

Napięcie na indukcyjności wyraża się równaniem

$$v = -L \frac{di}{dt},$$

czyli dla prądu o modulowanej częstotliwości będzie:

$$\begin{aligned} v &= -L \frac{d \left[ J_m \sin \left( \omega_0 t - \frac{\Delta \omega}{p} \cos pt \right) \right]}{dt} = \\ &= -J_m \omega_0 L \left( 1 + \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \sin pt \right) \cdot \cos \left( \omega_0 t + \frac{\Delta \omega}{p} \cos pt \right). \end{aligned} \quad (197)$$

Równanie (197) wyraża więc nadal napięcie o modulowanej częstotliwości, lecz z równocześnie modulowaną amplitudą. Głębokość tej modulacji amplitudy jest jednakże niewielka, wyraża się bowiem wartością

$$m' = \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \quad (197 \cdot a)$$

Analogiczny wynik otrzymamy dla modulacji fazy, a mianowicie

$$v = J_m \omega L \left( 1 + \frac{\varphi}{\omega} p \sin pt \right) \cos \left( \omega t + \frac{\varphi}{p} \cos pt \right), \quad (198)$$

z którego to równania wynika, że głębokość modulacji jest

$$m' = \frac{\varphi}{\omega} \cdot p, \quad (198a)$$

a więc rośnie proporcjonalnie do częstotliwości modulującej. Musimy więc po detekcji zastosować urządzenie, wzmacniające np. prądy wyprostowane w stosunku odwrotnym do częstotliwości.

Obok metod, podanych tu przykładowo, istnieją jeszcze inne sposoby odbioru fal o modulowanej częstotliwości, jak np. usunięcie jednej wstęgi bocznej, przesunięcie fazy fali nośnej i t. p., jednakże ze względu na małą doniosłość praktyczną modulacji częstotliwości, pomijamy szczegółowe omówienie tych sposobów.

Przebieg modulacji fazy, o ile jest  $\varphi_m < \frac{\pi}{4}$ , można odbierać, zgodnie z tem co powiedziano w § 22, stosując detekcję o przebiegu kwadratowym.

#### 24. Zniekształcenia modulacji amplitudy w obwodach rezonansowych.

W dotychczasowych rozważaniach nie uwzględnialiśmy wpływu własności rezonansowych obwodu na prąd o modulowanej amplitudzie, wspominając jedynie o demodulacji wyższych tonów modulujących. Lecz w takich razach obok demodulacji mamy do czynienia z równoczesnym prze-

sunieniem faz częstotliwości bocznych. Gdy założymy, że napięcie modulowane sinusoidalnie zasila obwód rezonansu prądów, ściśle dostrojony do częstotliwości nośnej, to w przypadku skrajnym, a mianowicie przy małej oporności obwodu i dla większych częstotliwości modulujących (wyższych tonów), w prądzie, zasilającym obwód, otrzymamy przesunięcie faz dla częstotliwości bocznych praktycznie równe  $\frac{\pi}{2}$ , i to dla częstotliwości górnej w kierunku dodatnim (oporność pojemnościowa), dla dolnej — kierunku ujemnym (oporność indukcyjna). Równanie (169) przyjmie więc postać:

$$i = J_0 \sin \omega t - \frac{m J_0}{2} \cos \left[ (\omega + p) t + \frac{\pi}{2} \right] + \\ + \frac{m J_0}{2} \cos \left[ (\omega - p) t - \frac{\pi}{2} \right] = J_0 \sin \omega t + \frac{m J_0}{2} \sin (\omega + p) t + \\ + \frac{m J_0}{2} \cdot \sin (\omega - p) t ,$$

co, po odpowiednim przekształceniu daje nam:

$$i = J_0 \sin \omega t (1 + m \cdot \cos p t) .$$

Z równania tego wynika, że skutkiem przesunięcia faz prądów o częstotliwościach bocznych, charakter modulacji wprawdzie nie uległ zmianie, lecz *przebieg modulacji przesunął się w fazie*.

To przesunięcie faz nie jest istotne dla modulacji zapomocą prostego przebiegu sinusoidalnego, jednakże dla złożonych przebiegów modulacyjnych, jakimi są mowa i muzyka, ma swoje znaczenie, przesuując bowiem fazę tonów wyższych względem niższych, *zmienia kształt krzywej modulacji*. Może ono w pewnych warunkach uwydatnić lub tłumić niektóre harmoniczne, zmieniając w ten sposób barwę dźwięku.

Zjawisko to, zwane *zniekształceniem fazowym*, znane jest również w telefonji przewodowej. Występuje ono na długich linjach skutkiem różnej szybkości rozchodzenia się prądów o różnych częstotliwościach.

Bardziej szkodliwą, niż przesunięcie faz, jest *modulacja asymetryczna*, którą otrzymujemy, gdy obwód jest rozstrojony względem częstotliwości nośnej, a w szczególności, gdy cały przebieg przesuwa się na jedno zbocze krzywej rezonansu. Wówczas, naogół biorąc, prąd jednej częstotliwości bocznej ulega większemu stłumieniu, niż prąd drugiej częstotliwości, co upodobnia przebieg modulacyjny do modulacji jednowstęgowej z falą nośną, stanowiąc niejako stadium przejściowe między jednym i drugim typem modulacji. Modulację asymetryczną możemy wyrazić ogólnym wzorem:

$$i = J_0 \sin \omega t - \frac{m_1 J_0}{2} \cdot \cos [(\omega + p) t + \varphi_1] + \frac{m_2 J_0}{2} \cos [(\omega - p) t + \varphi_2] (199),$$

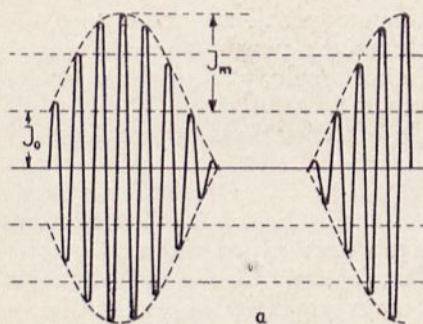
w którym

$$m_1 \leq m \leq m_2$$

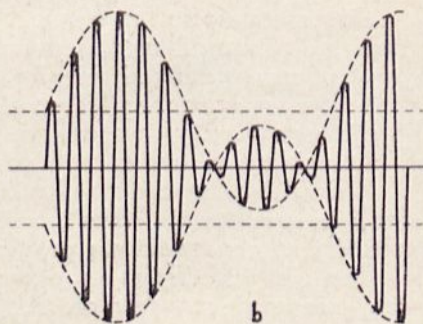
są współczynnikami głębokości modulacji dla obu częstotliwości bocznych, przyczem jeden z nich jest większy, drugi zaś mniejszy od średniego współczynnika modulacji pierwotnej.

W warunkach rzeczywistych, modulacji asymetrycznej bynajmniej nie można uważać za przypadek wyjątkowy — wprost przeciwnie, będzie to zjawisko normalne w wieloobwodowych układach odbiorczych. Że zaś nie daje się we znaki w sposób rażący, przypisać to należy temu, że w poszczególnych obwodach tłumieniu może ulegać to jedna, to druga częstotliwość boczna, wzajemnie się kompensując, resztę zaś może poprawić detektor, o ile jego charakterystyka ma przebieg zbliżony do przebiegu kwadratowego. Gdy sobie uprzytomnimy, że modulacja symetryczna wymaga detekcji prostoliniowej, zaś jednowstęgowa kwadratowej, i że detektory spotykane w praktyce posiadają charakterystyki stanowiące coś pośredniego, dochodzimy do wniosku, że niedoskonała modulacja i niedoskonała detekcja mogą się wzajemnie pogodzić.

Typowym wreszcie zniekształceniem przebiegu modulacyjnego jest — omówione już w zasadzie w związku z modulacją prądu stałego — *przemodulowanie*. Podobnie jak w modulacji prądu stałego, tak i w modulacji prądu szybkozmiennego przemodulowanie zasadniczo będzie polegało na obcięciu wierzchołków krzywej modulującej (rys. 130 a). Dolne wierzchołki będą obcięte, gdy amplituda modulacji  $J_m$  przekroczy amplitudę nośną, czyli gdy  $m > 1$ . Obcięcie górnych wierzchołków (zaznaczone prostym kropkowaniem na rysunku) może nastąpić w urządzeniu lampowym, gdy amplituda modulująca przekroczy wartość, odpowiadającą prądowi nasycenia lampy.



Rys. 130-a.

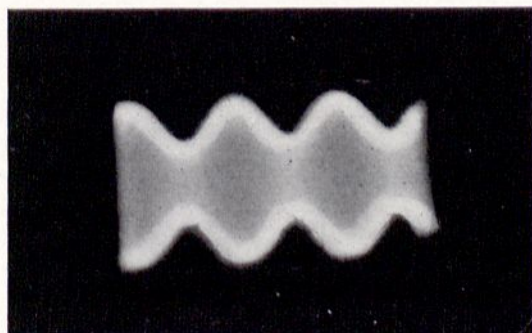


Rys. 130-b.

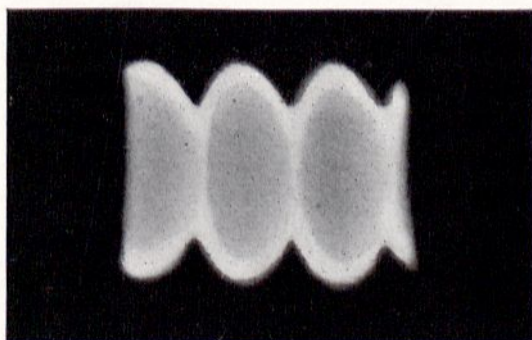
Przebiegu rys. 130 b, który przedstawia wykres równania (168) przy założeniu  $m > 1$ , nie spotykamy w generatorach modulowanych metodami stosowanymi w praktyce. Można go wytworzyć drogą syntetyczną, nakładając na siebie prądy o odpowiednim stosunku częstotliwości i amplitud, lub też drogą tłumienia prądu nośnego. Całkowite usunięcie prądu nośnego da nam w wyniku interferencję obu częstotliwości bocznych, odpowiadającą równaniu (184), którą uważać możemy za skrajny przypadek przemodulowania.



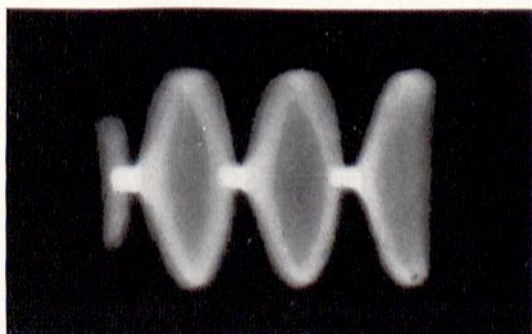
TABLICA I.



a



b



c

Zdjęcia oscylograficzne wykonane przez inż. K. Lewińskiego.

Rys. 131.



Podobne zjawisko przemodulowania może wystąpić przez wywołanie asymetrii prądu głęboko modulowanego, wówczas bowiem może się zdarzyć, że współczynnik głębokości modulacji jednego z prądów o częstotliwości bocznej przekroczy jedność.

Zdjęcia oscylograficzne rys. 131-go dają nam typowe przykłady opisanych zjawisk. Na rys. 131 a mamy prawidłową modulację sinusoidalną o głębokości około 0,30, zaś na rys. 131 b przemodulowanie według wykresu rys. 130 a. Natomiast rys. 131 c daje nam typową modulację asymetryczną, której obwiednia przypomina rys. 118 i 125.

Wkońcu nie można pominąć milczeniem zniekształceń, których źródłem jest przypadkowa modulacja częstotliwości (patrz § 20), mogąca wystąpić w generatorze modulowanym. Prądy o zmiennej częstotliwości, będące wynikiem takiej modulacji, interferują wówczas z prądami modulującymi, dając w wyniku dudnienia o częstotliwościach, które nie istniały w pierwotnym przebiegu modulującym.

Zniekształceniom skutkiem modulacji częstotliwości ulegają przede wszystkim generatory lampowe samowzbudne.

## 25. Wzajemne oddziaływanie dwóch prądów modulowanych w odbiorniku.

W praktyce odbiorczej niezawsze mamy do czynienia z jednym tylko prądem modulowanym. Często zdarza się, że w obwodach odbiorczych na odbierany prąd modulowany nakłada się drugi taki prąd (lub nawet kilka prądów), a zjawiska, które to nakładanie wywołuje, wpływać mogą w pewnych warunkach bardzo ujemnie na odbiór.

Istniejące obok siebie dwa prądy modulowane nie oddziałują na siebie, dopóki obwody, w których płyną, mają charakterystyki prostolinijne; wówczas prąd wypadkowy pozostanie sumą dwu prądów. Zjawisko natomiast komplikuje się z chwilą, gdy prądy takie spotkają się w obwodzie o charakterystyce krzywoliniowej, a zwłaszcza w *obwodzie detektora*.

Przedewszystkiem pod wpływem detekcji powstają prądy interferencyjne o częstotliwościach równych różnicom częstotliwości nośnych obu prądów oraz ich częstotliwości bocznych. O ile te częstotliwości interferencyjne leżą w granicach akustycznych, słuchawka wytwarza tony dodatkowe, przeszkadzające odbiorowi, o ile zaś są to częstotliwości ponadслyszalne, nie mają one praktycznego wpływu na odbiór.

Jeżeli amplituda jednego z prądów jest znacznie większa niż prądu drugiego, zauważyć można zjawisko zagłuszania stacji pozornie silniejszej przez słabszą, znane pod nazwą *pozornej demodulacji stacji słabszej*. Zjawisko to ma już bogatą literaturę<sup>1)</sup>, starającą się wytłumaczyć jego przyczynę. Najprostszem jednak wydaje się wyjaśnienie E. Malletta<sup>2)</sup>, według którego siła elektromotoryczna o większej amplitudzie tak znacznie przesuwają punkt pracy detektora (patrz § 9 tego rozdziału i rys. 101), iż siła elek-

<sup>1)</sup> R. T. Beatty, E. W. V, str. 300, 1928. F. M. Colebrook E. W. VIII, str. 538 r. 1931. J. Groszkowski, Prz. R. XI, str. 57, 1933.

<sup>2)</sup> E. Mallett, E. W. IX, str. 248, 1932.

tromotoryczna słabsza działa w niekorzystnym punkcie charakterystyki detektora (patrz rys. 97), wskutek czego prostowanie jest bardzo mało skuteczne, lub nawet wcale nie ma prostowania.

Zjawisko pozornej demodulacji jednej stacji przez drugą przybiera nieraz ciekawą postać w połączeniu z zanikiem fal elektromagnetycznych. Wówczas może się zdarzyć, że w miarę osłabienia pola fal jednej lub drugiej stacji obie na zmianę zagłuszają się.

Nietylko w detektorach spotykamy się z charakterystykami krzywoliniwnymi, występują one również w lampach katodowych wzmacniających. O ile taką charakterystykę posiada lampa, wzmacniająca prądy wielkiej częstotliwości, spotkać się możemy ze zjawiskiem zwanem *modulacją wzajemną* lub *skrośną* (cross modulation). Polega ona na tem, że w pewnych warunkach jeden z prądów modulowanych moduluje drugi, tak, iż na tamten obok własnego przebiegu modulacji nakłada się jeszcze i drugi przebieg modulujący, a w słuchawce otrzymujemy równocześnie programy obu stacji. Przeszkód stacji obcej, która wywołała modulację wzajemną, nie możemy usunąć żadnem urządzeniem filtrującym, skoro przeszkadzający przebieg modulacyjny nałożony jest na prąd nośny, który odbieramy. Odbieramy więc jak gdyby jedną stację, nadającą dwa programy na tej samej fali.

Powstawanie modulacji wzajemnej tłumaczy nam następujące rozumowanie matematyczne:

Charakterystykę krzywoliniwną lampy katodowej możemy przedstawić za pomocą szeregu potęgowego

$$i = I_0 + ae + be^2 + ce^3 + \dots \quad (a)$$

Załóżmy, że do takiej lampy doprowadzamy dwa napięcia zmienne o przebiegach sinusoidalnych i o odpowiednich częstotliwościach kątowych  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , czyli, że napięcie działające na obwód siatki wyraża się równaniem:<sup>1)</sup>

$$e = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t \dots \quad (b)$$

Po podstawieniu tych wielkości do równania (a) i po wykonaniu szeregu prostych przekształceń otrzymamy, ograniczając rozwinięcie do 3-ciej potęgi:

$$\begin{aligned} i = & \left[ I_0 + \frac{b(A^2 + B^2)}{2} \right] + bAB \cos(\omega_1 - \omega_2)t + \\ & + \left[ aA + \frac{3cA^3}{4} + \frac{3cAB^2}{2} \right] \sin \omega_1 t + \\ & + \left[ aB + \frac{3cA^2B}{2} + \frac{3cB^3}{4} \right] \sin \omega_2 t - \frac{bA^2}{2} \cos 2\omega_1 t + \\ & - \frac{bB^2}{2} \cos 2\omega_2 t - bAB \cos(\omega_1 + \omega_2)t - \frac{cA^3}{4} \sin 3\omega_1 t + \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Patrz E. Peterson i F. B. Llewellyn, Operation of Modulators, Proc. I.R.E. 1930.

$$\begin{aligned}
& -\frac{c B^3}{4} \sin 3 \omega_2 t - \frac{3 c A^2 B}{4} \sin (2 \omega_1 + \omega_2) t - \frac{3 c A B^2}{4} \sin (2 \omega_2 + \omega_1) t + \\
& + \frac{3 c A^2 B}{4} \sin (2 \omega_1 - \omega_2) t + \frac{3 c A B^2}{4} \sin (2 \omega_2 - \omega_1) t. \quad (200)
\end{aligned}$$

Przyjmijmy następnie, że lampa zawiera w obwodzie wyjściowym (anodowym) układ rezonansu prądów (rys. 40 f) o takiej ostrości rezonansu, aby nastrojony na częstotliwość  $\omega_1$ , dostatecznie tłumiał częstotliwość  $\omega_2$ . Wówczas wszystkie składowe równania (200) będą stłumione, z wyjątkiem członu zawierającego  $\omega_1$ , a równanie prądu zasilającego obwód rezonansowy wyrazić możemy równaniem:

$$i = \left[ a A + \frac{3 c}{4} (A^3 + 2 A B^2) \right] \sin \omega_1 t. \quad (201)$$

Z równania tego wynika przedewszystkiem, że na przebieg prądu wzmacnianego w układzie rezonansowym *nie wpływa 2-ga potęga charakterystyki lampy*. Innymi słowy, jeżeli lampa o charakterystyce kwadratowej *pracuje jako wzmacniacz rezonansowy*, nie wprowadza ona żadnych zniekształceń do prądu wzmoconego o częstotliwości podstawowej. Na przebieg prądu wpływa dopiero obecność członu w potędze trzeciej. Ten też człon wprowadza do równania prądu  $i$  amplitudę  $B$  napięcia o częstotliwości  $\omega_2$ .

Założmy teraz, że amplituda  $B$  nie jest stała, lecz modulowana z częstotliwością kątową  $q$ , czyli, że mamy:

$$e_2 = B (1 + m \cos q t) \sin \omega_2 t$$

i podstawmy wielkość  $B (1 + m \cos q t)$  do równania (201)

Otrzymamy w ten sposób :

$$i = a A \left[ 1 + \frac{3 c A^2}{4 a} + \frac{3 c B^2}{2 a} (1 + m \cos q t)^2 \right] \sin \omega_1 t,$$

a po rozwinięciu i uporządkowaniu

$$\begin{aligned}
i = a A \left[ 1 + \left( \frac{3 c A^2}{4 a} + \frac{3 c B^2}{2 a} + \frac{3 c B^2 m^2}{4 a} \right) + \frac{3 c B^2 m}{a} \cos q t \right] \sin \omega_1 t + \\
+ \frac{3 c A B^2 m^2}{4} \cos 2 q t \cdot \sin \omega_1 t \quad (201a)
\end{aligned}$$

Jeżeli w pierwszym przybliżeniu pominiemy wyrazy w nawiasach okrągłych wobec jedności oraz obecność 2-ej harmonicznej częstotliwości modulującej, możemy napisać

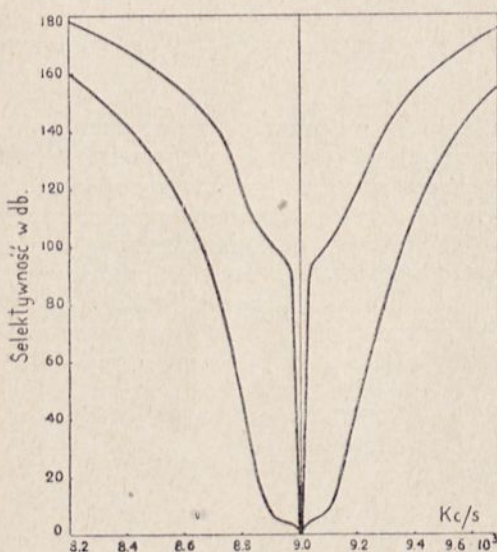
$$i \cong a A \left[ 1 + \frac{3 c B^2 m}{a} \cdot \cos q t \right] \cdot \sin \omega_1 t. \quad (201b)$$

Widzimy z tego równania, że skutkiem obecności 3-ciej potęgi w równaniu charakterystyki lampy *prąd odbierany ulega modulacji przez prąd przeszkadzający*, o ile ten prąd przeszkadzający jest modulowany. Jako głębokość modulacji uważać możemy w pierwszym przybliżeniu wyrażenie:

$$\frac{3 c B^2 m}{a}$$

z którego wynika, że modulacja wzajemna jest proporcjonalna do głębokości modulacji sygnału przeszkadzającego i do kwadratu jego amplitudy.

Wobec tego, że przy modulacji wzajemnej mamy do czynienia z modulowaniem przez sygnały obce prądu nośnego o częstotliwości odbieranej,



Rys. 132. (według źródeł amerykańskich).

jest rzeczą oczywistą, że przeszkód tych w dalszym ciągu nie możemy już usunąć żadnym sposobem. Jest to więc zjawisko bardzo niepożądane, pogarszające w dużym stopniu selektywność odbiornika, a jedynym środkiem, zabezpieczającym przed nim, jest dostateczne wyfiltrowanie częstotliwości przeszkadzającej przed dojściem do lampy. Na rys. 132 mamy krzywe selektywności odbiornika bez modulacji wzajemnej i z modulacją wzajemną według danych amerykańskich.

Rzut oka na równanie (201) wskazuje ponadto, że człon w 3-ciej potędze — obok modulacji wzajemnej — powoduje również i zniekształcenia amplitudy przebiegu modulacyjnego. Mamy tam bowiem  $A^3$ , które,

o ile odpowiada prądowi modulowanemu, daje nam:

$$A^3 (1 + m \cos qt)^3.$$

To wyrażenie, jak łatwo się przekonać zawiera 2-gą i 3-cią harmoniczną częstotliwość modulującej.

## 26. Streszczenie.

Rozważania, zawarte w rozdziale IV-tym, streścić można w następujący sposób:

### I. Charakterystyka prostownicza prostolinijna.

<sup>10</sup> Detektor prostolinijny daje prąd wyprostowany proporcjonalny do napięcia.

2<sup>o</sup> Obciążenie prostownika dużym oporem, zwartym pojemnością dla małej częstotliwości, pozwala odtworzyć wiernie zmiany amplitudy prądu prostowanego.

3<sup>o</sup> Przy odbiorze modulacji jednowstęgowej detekcja prostolinijna daje drugie harmoniczne częstotliwości modulacji.

4<sup>o</sup> Włączając w obwód wyjściowy prostownika obwód rezonansowy, można ponownie wydzielić wielką częstotliwość z nieznkształconą modulacją.

## II. Charakterystyka prostownicza kwadratowa.

1<sup>o</sup> Detektor o charakterystyce kwadratowej daje prąd prostowany proporcjonalny do kwadratu napięcia.

2<sup>o</sup> W układzie prostowniczym (znaczny opór dla przebiegów modulacyjnych z bocznikowaną pojemnością) daje znaczne zniekształcenia amplitudy, wprowadzając drugą harmoniczną.

3<sup>o</sup> Modulację jednowstęgową odtwarza prawidłowo.

4<sup>o</sup> Obecność drugiej potęgi w charakterystyce układu, zasilającego obwód rezonansowy wielkiej częstotliwości, nie wprowadza zniekształceń w przebiegu modulacji prądu o częstotliwości podstawowej i nie powoduje modulacji wzajemnej.

5<sup>o</sup> Przez nałożenie w układzie o charakterystyce kwadratowej częstotliwości modulującej i modulowanej otrzymuje się w wyjściowym obwodzie rezonansowym prawidłową modulację amplitudy.

Pozatem oba typy charakterystyk, przy nakładaniu drgań, dają również częstotliwość równą sumie obu częstotliwości nakładanych, o ile w obwodzie wyjściowym umieścimy obwód rezonansowy nastrojony na tę częstotliwość.

## BIBLIOGRAFJA DO ROZDZIAŁU IV.

Wobec tego, że rozdział IV-ty obejmuje szereg tematów stosunkowo nowych, nie wszystkie są opracowane w podręcznikach, natomiast większość materiałów jest rozsiana w literaturze periodycznej. Na najważniejsze artykuły wskazano w tekście. Poniżej podamy tylko kilka podręczników, odnoszących się częściowo do niniejszego rozdziału.

- 1) J. Groszkowski, *Radjotechnika*, Warszawa 1932 (skrypt).
- 2) P. David, *Mannuel de la réception radioélectrique*, Paryż 1930.
- 3) *Die wissenschaftlichen Grundlagen des Rundfunkempfanges* — dzieło zbiorowe, wydane pod redakcją prof. K. W. Wagnera, Berlin 1927.
- 4) A. Fraenckel, *Theorie der Wechselströme*.
- 5) L. Staniewicz, *Teorja prądów zmiennych cz. I i II*, Warszawa 1930.
- 6) E. Reynaud-Bonin, *L'acoustique téléphonique*, Wyd. E. Chiron, Paryż.

## ROZDZIAŁ V.

### FALE ELEKTRYCZNE W PRZEWODNIKACH.

W poprzednich rozdziałach rozważaliśmy zjawiska elektryczne, które były zmienne w czasie, lecz w przestrzeni uważaliśmy je za niezmiennie, to znaczy, przyjmowaliśmy, że we wszystkich punktach obwodu nierozgałęzionego natężenie prądu posiada w danej chwili tęsamą wartość. Założenie takie jest dopuszczalne, o ile długość przewodnika jest stosunkowo mała. Jeżeli natomiast przewodnik jest długi, zjawisko elektryczne nie ustala się w tej samej chwili na całej jego długości, lecz dochodzi do jego końca po upływie pewnego ściśle określonego czasu. Obwód tego rodzaju, w którym zjawiska elektryczne są zmienne nie tylko w czasie, ale i w przestrzeni, nazywamy *obwodem nieustalonym*, w przeciwieństwie do obwodu o małych stosunkowo wymiarach, w którym rozkład prądu uważać można za stały w przestrzeni, i który z tego powodu nosi nazwę *obwodu niby-ustalonego*.

Obwody dotychczas rozpatrywane, zawierające pojemność w postaci kondensatora i indukcyjność w postaci zwojnicy, połączone krótkimi przewodami, uważamy po prostu za niby-ustalone (zastrzeżenia co do tego omówimy w dalszym ciągu). Natomiast układy, zawierające długie przewody o stałych elektrycznych, jak oporność i pojemność, rozłożonych równomiernie na całej ich długości, jak na przykład długa linja elektryczna, są obwodami nieustalonymi. Dlatego też w dalszym ciągu zajmujemy się szczegółowo teorią linii elektrycznej, jako typowego obwodu nieustalonego. Teoria linii da nam możliwość szczegółowego rozpatrzenia zjawisk zachodzących w antenach nadawczych i odbiorczych.

#### 1. Obwód o stałych elektrycznych rozłożonych równomiernie.

Chcąc rozpatrywać zjawiska elektryczne, zachodzące w układzie, złożonym ze źródła siły elektromotorycznej  $\hat{E}$  i oporności  $\hat{Z}_2$ , połączonych bardzo długimi przewodnikami (rys. 133), musimy uwzględnić, że każdy odcinek przewodnika posiada pewną *oporność omową*  $R_1$ , pewną *indukcyjność*  $L_1$ , pewną *pojemność*  $C_1$  oraz pewną *niedoskonałość izolacji*, wyrażającą się *upływnością*  $G_1$ . Jeżeli podane tu wielkości elektryczne odnoszą się do jednostki długości przewodnika, np. do 1 km<sup>1</sup>), to w każdym elementarnym odcinku  $dx$  tego przewodnika, otrzymamy pewien *elementarny spadek napięcia*:

---

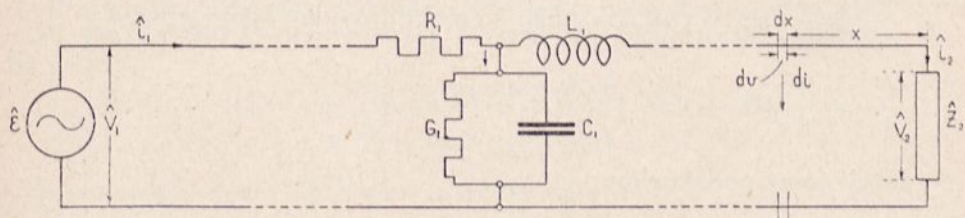
<sup>1</sup>) W dalszym ciągu rozważania nasze będziemy odnosili do linii dwuprzewodowej, a więc  $R_1$ ,  $L_1$ ,  $C_1$  i  $G_1$  będą oznaczały stałe elektryczne jednostki długości podwójnego przewodu.



$$\partial v = i R_1 dx + L_1 dx \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (a)$$

oraz pewien *elementarny ubytek prądu*, spowodowany upływnością i pojemnością tego odcinka:

$$\partial i = v G_1 dx + C_1 dx \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (a')$$



Rys. 133.

Te spadki napięcia i prądu będą miały znaki dodatnie, jeżeli przyjmiemy, — co jest dogodniejsze dla dalszych przeliczeń, — że *początek układu znajduje się na końcu linii*. Dzieląc oba równania, (a) i (a'), przez  $dx$ , otrzymamy pochodne napięcia i prądu względem długości:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = i R_1 + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad i \quad \frac{\partial i}{\partial x} = v G_1 + C_1 \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (b)$$

Przyjmując sinusoidalny przebieg napięcia i prądu w czasie:

$$v = V_m \sin \omega t, \quad i = J_m \sin (\omega t + \psi),$$

otrzymamy pochodne tych funkcji względem czasu

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \omega V_m \cos \omega t, \text{ czyli } \frac{d\hat{v}}{dt} = j\omega \hat{v}, \\ \frac{di}{dt} &= \omega J_m \cos (\omega t + \psi), \text{ czyli } \frac{d\hat{i}}{dt} = j\omega \hat{i}, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

jeżeli przez  $j$  oznaczymy symbolicznie wyprzedzanie fazy pochodnej o  $\pi/2$  względem funkcji pierwotnej.

Stosując nadal rachunek symboliczny i podstawiając (c) w (b), otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{v}}{dx} &= \hat{i} (R_1 + j\omega L_1) = \hat{i} \cdot \hat{Q}, \\ \frac{d\hat{i}}{dx} &= \hat{v} (G_1 + j\omega C_1) = \hat{v} \cdot \hat{Y}, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

jeżeli wprowadzimy oznaczenia:

$$R_1 + j\omega L_1 = \hat{Q} \quad \text{i} \quad G_1 + j\omega C_1 = \hat{Y}. \quad (202)$$

Ażeby w równaniach (d) wyrugować jedną z niewiadomych  $\hat{v}$  i  $\hat{i}$ , różniczkujemy je ponownie względem  $x$  i podstawiamy w każdym z nich odpowiednią wartość pochodnej drugiej niewiadomej:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} &= \frac{d\hat{i}}{dx} (R_1 + j\omega L_1) = \hat{v} (G_1 + j\omega C_1) \cdot (R_1 + j\omega L_1) = \hat{v} \cdot \hat{Q} \cdot \hat{Y} \\ \frac{d^2 \hat{i}}{dx^2} &= \frac{d\hat{v}}{dx} (G_1 + j\omega C_1) = \hat{i} (R_1 + j\omega L_1) \cdot (G_1 + j\omega C_1) = \hat{i} \cdot \hat{Q} \cdot \hat{Y} \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Jeżeli teraz podstawimy:

$$\hat{Q} \cdot \hat{Y} = \alpha^2, \quad (202-a)$$

otrzymamy równania różniczkowe drugiego rzędu o jednej niewiadomej:

$$\frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} - \alpha^2 \hat{v} = 0, \quad \frac{d^2 \hat{i}}{dx^2} - \alpha^2 \hat{i} = 0. \quad (g)$$

Ogólne rozwiązanie tych równań otrzymamy, przyjmując np. natężenie prądu w postaci:

$$\hat{i} = \varepsilon^{\lambda x}, \quad (h)$$

skąd obliczymy pochodne:

$$\frac{d\hat{i}}{dx} = \lambda \cdot \varepsilon^{\lambda x}, \quad \frac{d^2 \hat{i}}{dx^2} = \lambda^2 \varepsilon^{\lambda x}. \quad (i)$$

Drugie z równań (g) możemy więc wyrazić przez

$$\lambda^2 \varepsilon^{\lambda x} - \alpha^2 \varepsilon^{\lambda x} = 0, \quad (j)$$

skąd otrzymamy *równanie charakterystyczne równania różniczkowego*

$$\lambda^2 - \alpha^2 = 0, \quad \text{czyli } \lambda = \pm \alpha.$$

co daje nam rozwiązanie ogólne równania prądu w linii elektrycznej:

$$\hat{i} = \hat{A} \cdot \varepsilon^{\alpha x} + \hat{B} \varepsilon^{-\alpha x}, \quad (203)$$

w którym  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$  są pewnemi, narazie bliżej nieznanemi, wielkościami zespolonemi.

Równanie napięcia otrzymamy z równań (d):

$$\hat{v} = \frac{1}{\hat{Y}} \cdot \frac{d\hat{i}}{dx} = \frac{1}{\hat{Y}} \cdot \alpha \left( \hat{A} \varepsilon^{\alpha x} - \hat{B} \varepsilon^{-\alpha x} \right).$$

czyli ostatecznie:

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Y}}} \cdot \left( \hat{A} \varepsilon^{\alpha x} - \hat{B} \varepsilon^{-\alpha x} \right). \quad (203-a)$$

## 2. Wyznaczenie współczynników równania linii elektrycznej.

Postać dogodniejszą dla dalszej dyskusji otrzymamy, wyrażając równania (203) i (203 a) przy pomocy funkcji hiperbolicznych. Mamy:

$$\varepsilon^{\alpha x} = \cosh \alpha x + \sinh \alpha x,$$

$$\varepsilon^{-\alpha x} = \cosh \alpha x - \sinh \alpha x,$$

co po podstawieniu do równania (203) daje:

$$\begin{aligned} \hat{i} &= \hat{A}(\cosh \alpha x + \sinh \alpha x) + \hat{B}(\cosh \alpha x - \sinh \alpha x) = \\ &= (\hat{A} + \hat{B}) \cdot \cosh \alpha x + (\hat{A} - \hat{B}) \sinh \alpha x. \end{aligned}$$

Jeżeli teraz wprowadzimy nowe współczynniki:

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{M}, \quad \hat{A} - \hat{B} = \hat{N},$$

otrzymamy równanie prądu w postaci:

$$\hat{i} = \hat{M} \cosh \alpha x + \hat{N} \sinh \alpha x. \quad (204)$$

W analogiczny sposób wyrazimy równanie przebiegu napięcia:

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Y}}} \left[ (\hat{A} - \hat{B}) \cosh \alpha x + (\hat{A} + \hat{B}) \sinh \alpha x \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Y}}} \left( \hat{N} \cosh \alpha x + \hat{M} \sinh \alpha x \right). \end{aligned} \quad (204a)$$

*Warunki na końcu linii.*

By obliczyć stałe  $\hat{M}$  i  $\hat{N}$ , podstawimy warunki początkowe równania. Na końcu linii, który przyjęliśmy jako początek układu, mamy (patrz rys. 133):

$$x = 0, \quad \hat{i} = \hat{i}_2, \quad \hat{v}_2 = \hat{i}_2 \hat{Z}_2,$$

otrzymamy wówczas:

$$\hat{i}_2 = \hat{M} \cosh 0 + \hat{N} \sinh 0 = \hat{M},$$

$$\hat{v}_2 = \hat{i}_2 \hat{Z}_2 = \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Y}}} \left( \hat{M} \sinh 0 + \hat{N} \cosh 0 \right) = \hat{N} \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Y}}}.$$

Mamy więc obliczone stałe:

$$\hat{M} = \hat{i}_2 \quad \text{ i } \quad \hat{N} = \hat{i}_2 \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{\hat{Y}}{\hat{Q}}}, \quad (205)$$

a więc równania (204) i (204-a) mają postać:

$$\left. \begin{aligned} \hat{i} &= \hat{i}_2 \left( \cosh \alpha x + \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{\hat{Y}}{\hat{Q}}} \sinh \alpha x \right), \\ \hat{v} &= \hat{i}_2 \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Y}}} \cdot \left( \sinh \alpha x + \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{\hat{Y}}{\hat{Q}}} \cdot \cosh \alpha x \right). \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

W równaniach (206), poza prądem  $\hat{i}_2$ , którego wielkość założyć możemy dowolnie, wszystkie pozostałe wielkości są stałymi elektrycznymi linii i zasilanego przez nią odbiornika. Równania te są więc całkowicie określone.

*Warunki na początku linii.*

Na początku linii mamy:

$$x = l, \quad \hat{i} = \hat{i}_1 \quad \text{ i } \quad \hat{v} = \hat{v}_1,$$

a więc równania (206) otrzymają postać:

$$\left. \begin{aligned} \hat{i}_1 &= \hat{i}_2 \left( \cosh \alpha l + \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{\hat{Y}}{\hat{Q}}} \sinh \alpha l \right), \\ \hat{v}_1 &= \hat{i}_2 \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Y}}} \left( \sinh \alpha l + \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{\hat{Y}}{\hat{Q}}} \cosh \alpha l \right). \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

Z tego układu równań możemy obliczyć *oporność pozorną*, jaką dla źródła prądu przedstawia linia wraz z obciążeniem końcowym  $\hat{Z}_2$ . A mianowicie:

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{v}_1}{\hat{i}_1} = \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Y}}} \cdot \frac{\sinh \alpha l + \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{\hat{Y}}{\hat{Q}}} \cosh \alpha l}{\cosh \alpha l + \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{\hat{Y}}{\hat{Q}}} \sinh \alpha l}, \quad (208)$$

lub, po podzieleniu licznika i mianownika przez  $\cosh \alpha l$ :

$$\hat{Z}_1 = \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Y}}} \cdot \frac{\operatorname{tgh} \alpha l + \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{\hat{Y}}{\hat{Q}}}}{1 + \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{\hat{Y}}{\hat{Q}}} \cdot \operatorname{tgh} \alpha l}. \quad (208\text{-a})$$

Równanie (208-a) pozwoli nam przedyskutować zachowanie się linii wraz z obciążeniem końcowym w odniesieniu do źródła prądu.

### 3. Dyskusja równania linii. Oporność falowa.

#### a) Linja nieskończenie długa.

Jeżeli przyjmiemy, że linja jest nieskończenie długa, czyli gdy w równaniu (208-a) podstawimy  $l = \infty$ , czyli  $\operatorname{tgh} \infty = 1$ , to otrzymamy:

$$\hat{Z}_1 = \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Y}}} \cdot \frac{1 + \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{\hat{Y}}{\hat{Q}}}}{1 + \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{\hat{Y}}{\hat{Q}}}} = \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Y}}} = \hat{Z}_0. \quad (209)$$

Wielkość  $\hat{Z}_0$  na podstawie równań (202), wynosi:

$$\hat{Z}_0 = \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Y}}} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}}. \quad (210)$$

zależy więc, przy danej częstotliwości  $\omega$ , wyłącznie tylko od stałych elektrycznych linii, a więc jeżeli linja jest nieskończenie długa, odbiornik na jej końcu nie ma żadnego wpływu na obciążenie źródła. Wielkość  $\hat{Z}_0$ , wyrażającą oporność pozorną samej linii, nazywamy *opornością falową* czyli *charakterystyczną* linii.

Jak wskazuje równanie (210), oporność falowa linii jest funkcją częstotliwości.

Wprowadzając wielkość  $\hat{Z}_0$  do równania (208 a), otrzymamy wyrażenie na oporność całkowitą linii wraz z obciążeniem:

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_0 \cdot \frac{\operatorname{tgh} \alpha l + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_0}}{1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_0} \operatorname{tgh} \alpha l}. \quad (208-b)$$

lub też, po wyniesieniu przed nawiasy w liczniku i mianowniku wielkości  $\hat{Z}_2$ :

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_0 \frac{\frac{1}{\hat{Z}_2} \cdot \operatorname{tgh} \alpha l + \frac{1}{\hat{Z}_0}}{\frac{1}{\hat{Z}_2} \operatorname{tgh} \alpha l + \frac{1}{\hat{Z}_2}}. \quad (208-c)$$

Wyrażenie (210) jest liczbą zespoloną. Posiłkując się wzorami Eulera i Moivre'a<sup>1)</sup>, możemy je przekształcić, pisząc:

$$\hat{Q} = \sqrt{R_1^2 + L_1^2 \omega^2} \cdot \varepsilon^{j\varphi_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{R_1}.$$

<sup>1)</sup> Patrz Dodatek I.

$$\hat{Y} = \sqrt{G_1^2 + \omega^2 C_1^2} \cdot \varepsilon^{j\varphi_2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega C_1}{G_1},$$

z czego otrzymamy:

$$\hat{Z}_0 = \sqrt[4]{\frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{G_1^2 + \omega^2 C_1^2}} \cdot \varepsilon^{\frac{j(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}} = Z_0 \cdot \varepsilon^{\frac{j(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}}, \quad (210-a)$$

gdzie

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt[4]{\frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{G_1^2 + \omega^2 C_1^2}} = \\ &= \sqrt[4]{\frac{\omega^2 L_1^2 \left( \frac{R_1^2}{\omega^2 L_1^2} + 1 \right)}{\omega^2 C_1^2 \left( \frac{G_1^2}{\omega^2 C_1^2} + 1 \right)}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{R_1^2}{\omega^2 L_1^2}}{1 + \frac{G_1^2}{\omega^2 C_1^2}}}, \end{aligned} \quad (210-b)$$

jest modułem czyli wartością bezwzględną oporności falowej.

b) Linja o długości skończonej, zwarta i otwarta.

Dla linii *zwartej* na końcu mamy

$$\hat{Z}_2 = 0.$$

Podstawiając tę wartość w równaniu (208-b), otrzymamy *oporność zwarcia* linii:

$$\hat{Z}_{10} = \hat{Z}_0 \operatorname{tgh} \alpha l. \quad (211)$$

Gdy natomiast linja jest *otwarta*, mamy:

$$\hat{Z}_2 = \infty.$$

Podstawiając tę wartość do równania (208-c), otrzymamy:

$$\hat{Z}_{1\infty} = \hat{Z}_0 \frac{\frac{\operatorname{tgh} \alpha l}{\infty} + \frac{1}{\hat{Z}_0}}{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\hat{Z}_0} \operatorname{tgh} \alpha l} = \hat{Z}_0 \operatorname{ctgh} \alpha l. \quad (212)$$

Jest to *oporność stanu jałowego* linii o skończonej długości.

Mnożąc przez siebie stronami równania (211) i (212), otrzymamy:

$$\hat{Z}_{1\infty} \cdot \hat{Z}_{1-0} = \hat{Z}_0 \operatorname{ctgh} \alpha l \cdot \hat{Z}_0 \operatorname{tgh} \alpha l = \hat{Z}_0^2,$$

z czego możemy obliczyć oporność falową jako:

$$\hat{Z}_0 = \sqrt{\hat{Z}_{1\infty} \cdot \hat{Z}_{10}}. \quad (213)$$

Możemy więc zmierzyć oporność falową linii, mierząc jej oporność zwarcia i oporność stanu jałowego.

c) *Oporność końcowa równa oporności falowej.*

Jeżeli założymy

$$\hat{Z}_2 = \hat{Z}_0.$$

to z równania (208-b) otrzymamy

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_0 \cdot \frac{\operatorname{tgh} \alpha l + 1}{1 + \operatorname{tgh} \alpha l} = \hat{Z}_0. \quad (214)$$

A więc linja, na której końcu załączono odbiornik o oporze równym oporności falowej linii, zachowuje się względem źródła prądu *jak linja nieskończenie długa*. Znaczy to, że oporność końcowa w tym przypadku nie wywołuje żadnej zmiany w przepływie prądu, posiada bowiem tęsamą wielkość i tęsam charakter, co cała linja.

Linja w ten sposób obciążona nosi nazwę *linji bez odbić*. Znaczenie tej nazwy będzie wyjaśnione w następnych paragrafach.

#### 4. Prąd w linji jako funkcja drogi i czasu. Fale w przewodnikach.

Stałe, które obliczyliśmy w (205), możemy przenieść do równań (203) i (203-a). Mamy bowiem:

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{M}, \quad \hat{A} - \hat{B} = \hat{N},$$

z czego, po uwzględnieniu, że  $\sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Y}}} = \hat{Z}_0$ , otrzymamy:

$$\hat{A} = \frac{\hat{i}_2}{2} \cdot \left(1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_0}\right) \quad \text{i} \quad \hat{B} = \frac{\hat{i}_2}{2} \cdot \left(1 - \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_0}\right). \quad (215)$$

Wobec tego równania (203) i (203-a) wyraża się w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \hat{i} &= \hat{i}_2 \cdot \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0} \cdot \varepsilon^{\alpha x} - \hat{i}_2 \cdot \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0} \cdot \varepsilon^{-\alpha x}, \\ \hat{v} &= \hat{i}_2 \cdot \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_0}{2} \cdot \varepsilon^{\alpha x} + \hat{i}_2 \cdot \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_0}{2} \cdot \varepsilon^{-\alpha x}. \end{aligned} \right\} \quad (216)$$

Jak wynika z założenia (202-a), wykładnik potęgowy  $\alpha$  jest liczbą zespoloną, możemy więc wyrazić ją w postaci:

$$\alpha = \beta + j\gamma. \quad (202-b)$$

Wobec tego funkcje wykładnicze równania (216) równają się:

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} &= e^{\beta x + j \gamma x} = e^{\beta x} \cdot e^{j \gamma x}, \\ e^{-\alpha x} &= e^{-\beta x - j \gamma x} = e^{-\beta x} \cdot e^{-j \gamma x}. \end{aligned}$$

Wiemy zaś, że jest (patrz dodatek II):

$$\begin{aligned} e^{j \gamma x} &= \cos \gamma x + j \sin \gamma x, \\ e^{-j \gamma x} &= \cos \gamma x - j \sin \gamma x, \end{aligned}$$

tak, iż natężenie prądu w dowolnym punkcie wzdłuż linii da się wyrazić równaniem:

$$\begin{aligned} \hat{i} = \hat{i}_2 \cdot \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0} \cdot e^{\beta x} \cdot (\cos \gamma x + j \sin \gamma x) + \\ - \hat{i}_2 \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0} \cdot e^{-\beta x} (\cos \gamma x - j \sin \gamma x). \end{aligned}$$

Wobec tego, że na początku założyliśmy sinusoidalną zmienność prądu w czasie, możemy napisać:

$$J_{m_2} \sin(\omega t + \psi) \text{ zamiast } \hat{i}_2,$$

oraz uwzględniając, że symbol  $j$  oznacza wyprzedzenie fazy o  $\frac{\pi}{2}$ :

$$J_{m_2} \cos(\omega t + \psi) \text{ zamiast } j \hat{i}_2.$$

Podstawiając te wielkości w równaniu (216) na  $i$ , otrzymamy równanie prądu w linii:

$$\begin{aligned} \hat{i} = J_{m_2} \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0} \cdot e^{\beta x} \cdot \left[ \sin(\omega t + \psi) \cdot \cos \gamma x + \cos(\omega t + \psi) \cdot \sin \gamma x \right] + \\ - J_{m_2} \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0} \cdot e^{-\beta x} \cdot \left[ \sin(\omega t + \psi) \cdot \cos \gamma x - \cos(\omega t + \psi) \cdot \sin \gamma x \right]. \end{aligned}$$

Po prostym przekształceniu<sup>1)</sup> otrzymamy ostateczną postać równania prądu:

<sup>1)</sup> Stosujemy wzór

$$\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha \pm \beta).$$



$$\hat{i} = J_{m_2} \cdot \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0} \cdot \varepsilon^{\beta x} \cdot \sin(\omega t + \gamma x + \psi) + \\ - J_{m_2} \cdot \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0} \cdot \varepsilon^{-\beta x} \cdot \sin(\omega t - \gamma x + \psi). \quad (217)$$

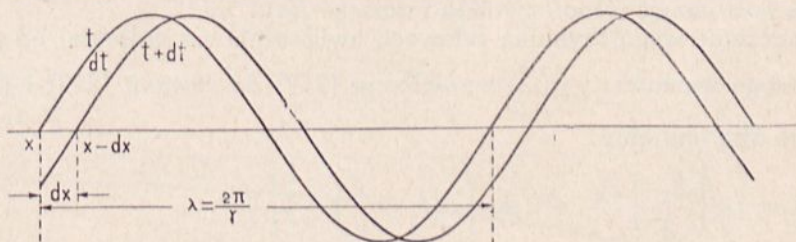
W analogiczny sposób otrzymamy równanie napięcia:

$$\hat{v} = J_{m_2} \cdot \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_0}{2} \cdot \varepsilon^{\beta x} \sin(\omega t + \gamma x + \psi) + \\ + J_{m_2} \cdot \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_0}{2} \cdot \varepsilon^{-\beta x} \sin(\omega t - \gamma x + \psi). \quad (217-a)$$

Równania (217) i (217-a), wykazują, że w linii, zasilanej przez siłę elektromotoryczną sinusoidalnie zmienną, przebiegi elektryczne są funkcją dwu zmiennych — czasu  $t$  i drogi  $x$ .

Zjawisko zmienności w czasie jest oczywiste i bliższego wyjaśnienia nie wymaga: w dowolnym punkcie linii prąd i napięcie mają w czasie przebieg sinusoidalny o szybkości kątowej  $\omega = 2\pi f$ .

Dokładniejszej analizy wymaga natomiast zjawisko zmienności w przestrzeni. W tym celu uchwycimy pewien moment dla rozpatrzenia rozkładu prądu i napięcia wzdłuż linii, czyli założymy na chwilę, że  $t = \text{const}$ . Wówczas, pomijając wyrazy wykładnicze  $\varepsilon^{\beta x}$  i  $\varepsilon^{-\beta x}$ , które oznaczają wykładniczą zmienność amplitudy<sup>1)</sup>, otrzymamy ponownie przebieg sinusoidalny o szybkości kątowej  $\gamma$ . Jest to więc, pomijając zmienność amplitudy, krzywa sinusoidalna, której stan początkowy powtarza się za każdym obrotem kąta  $\gamma x$  o wartość  $2\pi$  (rys. 134). Ruch taki w przestrzeni nazywamy, jak



Rys. 134.

wiadomo, *ruchem falowym*, a drogę, odpowiadającą zmianie kąta o wartość  $2\pi$ , czyli przebytą w jednym okresie, *długością fali*  $\lambda$ . Długość fali wynosi więc:

$$x_{2\pi} = \lambda = \frac{2\pi}{\gamma}. \quad (218)$$

<sup>1)</sup> Mamy tu analogię do równań, dyskutowanych w rozdziale II-gim.

Związek między zmiennością prądu w czasie, a ruchem falowym wzdłuż przewodnika znajdziemy w sposób następujący.

Założymy, że po czasie  $dt$  w punkcie oddalonym o  $(-dx)$  od punktu odległego o  $x$  od końca linii, wartość funkcji sinusoidalnej będzie ta sama, co w chwili początkowej w punkcie  $x$ , czyli:

$$\sin[\omega(t+dt) + \gamma(x-dx) + \psi] = \sin(\omega t + \gamma x + \psi).$$

Warunek ten będzie oczywiście spełniony, gdy

$$\omega t + \omega dt + \gamma x - \gamma dx + \psi = \omega t + \gamma x + \psi,$$

czyli

$$\omega dt - \gamma dx = 0.$$

Stąd otrzymujemy równość

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{\omega}{\gamma}, \quad (219)$$

w której pochodna  $\frac{dx}{dt}$  jest *szybkością*, z jaką fala porusza się wzdłuż przewodnika. Uwzględniając zaś (218), otrzymamy:

$$\frac{\omega}{\gamma} = f\lambda, \quad \text{czyli } \lambda = \frac{u}{f} = \frac{2\pi u}{\omega} = uT, \quad (220)$$

Długość fali jest więc drogą, jaką przebywa prąd lub napięcie w ciągu jednego okresu zmienności siły elektromotorycznej zasilającej.

Z równania (219) oraz z określenia  $\gamma$  (równanie 202-b) wynika, że *szybkość rozchodzenia się prądów w przewodnikach jest funkcją ich częstotliwości*. Wielkością, charakteryzującą szybkość rozchodzenia się fal w danej linii, a więc przesunięcie faz w poszczególnych punktach linii względem początku układu, jest część urojona  $\gamma$  wykładnika potęgowego  $\alpha$ . Wielkość ta nosi nazwę *współczynnika falowego linii*.

Znaczenie współczynnika falowego uwidoczni się najlepiej po podstawieniu jego wartości  $\gamma = \frac{\omega}{u}$  z równania (219) do równań (217) i (217-a), przez co otrzymujemy:

$$i = J_{m_2} \left\{ \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0} \cdot \varepsilon^{\beta x} \cdot \sin \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \psi \right] + \right. \\ \left. - \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0} \cdot \varepsilon^{-\beta x} \cdot \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \psi \right] \right\} \quad (217')$$

$$v = J_{m_2} \left\{ \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_0}{2} \cdot \varepsilon^{\beta x} \cdot \sin \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \psi \right] + \right. \\ \left. + \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_0}{2} \cdot \varepsilon^{-\beta x} \cdot \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \psi \right] \right\} \quad (217'\text{-a})$$

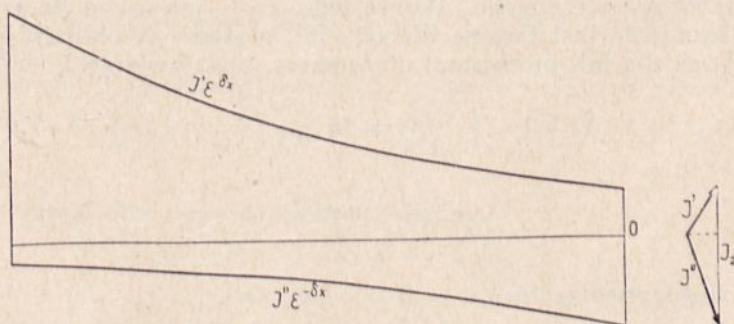
Jak widać, wielkość  $\frac{x}{u}$  wyraża tu czas, o jaki zjawisko elektryczne w odległości  $x$  do końca linii wyprzedza przebieg na końcu linii lub też opóźnia się względem niego. Wielkość  $\omega \frac{x}{u} = \gamma x$  jest więc stałą przesunięcia fazy dla danego punktu linii.

Zależność szybkości rozchodzenia się prądów od ich częstotliwości jest zjawiskiem bardzo niepożądanym w telefonji, sprawia ona bowiem, że poszczególne składowe przesyłanego widma częstotliwości zmieniają wzdłuż linii wzajemne przesunięcia faz, wywołując wspomniane już w rozdziale IV *zniekształcenia fazowe*.

### 5. Odbicie fal. Tłumienie przestrzenne linii.

Funkcje wykładnicze  $\varepsilon^{\beta x}$  i  $\varepsilon^{-\beta x}$ , zawierające część rzeczywistą wykładnika potęgowego  $\alpha$ , wskazują, że amplitudy fali wzdłuż linii zmieniają się według prawa wykładniczego. Z równań (217) i (217-a) wynika, że przebiegi w linii składają się z dwu fal, z których jedna, licząc od końca linii, posiada amplitudę rosnącą, druga zaś malejącą. Znaczą to, że fala, wyszedłszy z początku linii maleje ku jej końcowi, skąd część jej powraca ku początkowi, w dalszym ciągu malejąc, jak o tem świadczą znaki ujemne współczynników  $\beta$  i  $\gamma$ <sup>1)</sup> w drugiej części prawej strony obu równań. Tę falę powracającą, przez analogję do podobnych zjawisk znanych z innych dziedzin fizyki, nazywamy *falą odbitą*, w odróżnieniu od fali pierwotnej, wychodzącej z początku linii.

Przebieg obwiedni równań fali pierwotnej i fali odbitej mamy na rys. 135.



Rys. 135.

Z równań (217) i (217-a) wynika, że amplituda prądu na końcu linii jest różnicą geometryczną amplitud obu fal składowych:

$$\hat{J}_{m_2} = \hat{J}'_{m_2} - \hat{J}''_{m_2},$$

<sup>1)</sup> Znak „-“ przy współczynniku  $\gamma$  oznacza — jak wynika z równania (219) poprzedniego paragrafu — opóźnianie fazy wzdłuż linii, a więc ruch w kierunku przeciwnym.

gdzie

$$\hat{J}'_{m_2} = \hat{J}_{m_2} \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0} \quad \text{i} \quad \hat{J}''_{m_2} = \hat{J}_{m_2} \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0}.$$

są naogół liczbami zespolonemi. Natomiast amplituda napięcia na końcu linii jest sumą geometryczną obu napięć składowych:

$$\hat{V}_{m_2} = \hat{V}'_{m_2} + \hat{V}''_{m_2}.$$

Stosunek amplitudy odbitej do amplitudy przychodzącej nazywamy *współczynnikiem odbicia* linii obciążonej oporności  $Z_2$ . Wynosi on:

$$\hat{m} = \frac{\hat{J}''_{m_2}}{\hat{J}_{m_2}} = \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_0}{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_0}. \quad (221)$$

i jest, jak widać, naogół liczbą zespoloną, co oznacza, że amplitudy te w ogólnym przypadku przesunięte są w fazie względem siebie. Gdy założymy  $\hat{Z}_2 = \hat{Z}_0$ , współczynnik odbicia równa się zeru, czyli odbicia niema. Łatwo sprawdzić, że wówczas w równaniach (217) i (217-a) znikną człony odpowiadające fali odbitej. Tem tłumaczy się znaczenie nazwy *linji bez odbić*, którą nadajemy linii, obciążonej oporem równym jej oporowi falowemu.

Rzecz oczywista, odbicia również niema, gdy linja jest nieskończenie długa.

Stosunek bezwzględnych wartości amplitudy początkowej fali do jej amplitudy końcowej jest miarą zmniejszenia się amplitudy wzdłuż linii, czyli jej *tlumienia przestrzennego*. Wobec tego, że — jak łatwo się przekonać — wartość tłumienia jest tasama dla obu fal, możemy je obliczyć dla jednej z nich. I tak dla fali pierwotnej otrzymamy, podstawiając  $x = l$ ,

$$|J_1'| = |J_2'| e^{\beta l},$$

czyli

$$\left| \frac{J_1'}{J_2'} \right| = e^{\beta l},$$

albo po zlogarytmowaniu:

$$\ln \left( \frac{J_1'}{J_2'} \right)^2 = \beta l = b, \quad (222)$$

Wielkość  $\beta l = b$  jest *dekrementem przestrzennym* linii. W krótkości nazywamy go *tlumieniem linii*. Współczynnik  $\beta$ , będący wykładnikiem potęgowym równania prądu lub napięcia wzdłuż linii, nazywamy *współczynnikiem tłumienia*.

Ze względu na charakter równania najwygodniejszą *jednostką tłumienia linii* jest *neper* (patrz rozdział I, § 4), nietrudno jednak w razie potrzeby przejść na układ dziesiętny (decybele).

Współczynnik tłumienia ma doniosłe znaczenie dla telefonji, pozwala bowiem obliczyć zasięg linii telefonicznej. Jeżeli średnia moc prądu zmiennego, dostarczana do linii przez aparat telefoniczny, wynosi 2 m W, a moc niezbędna dla dobrego odbioru telefonicznego wynosi 2  $\mu$  W, to otrzymamy

$$\frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{J_1}{J_2} \right)^2 = \varepsilon^{2b} = 1000,$$

skąd obliczymy

$$b = \frac{1}{2} \ln 1000 = 3,5 \text{ nepera.}$$

Jeżeli przyjmiemy, że na urządzenia stacyjne nadawcze i odbiorcze przypada po 1 neperze tłumienia, to tłumienie na linii może wynosić 1,5 nepera. Stąd obliczymy zasięg linii telefonicznej

$$l = \frac{1,5}{\beta}. \quad (223)$$

## 6. Obliczenie współczynnika falowego i współczynnika tłumienia.

Zgodnie z założeniem (202) i (202-b) mamy:

$$\alpha = \beta + j\gamma = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)}.$$

Z równania tego po pewnych przekształceniach<sup>1)</sup> możemy obliczyć oba współczynniki linii, a mianowicie *współczynnik tłumienia*

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(R_1^2 + \omega^2 L_1^2)(G_1^2 + \omega^2 C_1^2)} + (R_1 G_1 - \omega^2 L_1 C_1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega^2 L_1 C_1} \sqrt{\left(1 + \frac{R_1^2}{\omega^2 L_1^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{G_1^2}{\omega^2 C_1^2}\right) + (R_1 G_1 - \omega^2 L_1 C_1)}, \quad (224)$$

<sup>1)</sup> Podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymamy

$$\beta^2 - \gamma^2 = R_1 G_1 - \omega^2 L_1 C_1 \quad (a)$$

$$j 2 \beta \gamma = j \omega (L_1 G_1 - C_1 R_1) \quad (b)$$

Podnosimy powtórnie do kwadratu:

$$(\beta^2 - \gamma^2)^2 = \beta^4 - 2\beta^2\gamma^2 + \gamma^4 = R_1^2 G_1^2 - 2\omega R_1 G_1 C_1 L_1 + \omega^4 L_1^2 C_1^2 \quad (c)$$

$$4\beta^2\gamma^2 = \omega^2 L_1^2 G_1^2 + 2\omega^2 R_1 G_1 L_1 C_1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2 \quad (d)$$

Dodając te dwa równania, otrzymamy:

$$(\beta^2 + \gamma^2)^2 = G_1^2 R_1^2 + \omega^2 (L_1^2 G_1^2 + R_1^2 C_1^2) + \omega^4 L_1^2 C_1^2,$$

$$\text{czyli } (\beta^2 + \gamma^2)^2 = (R_1^2 + \omega^2 L_1^2)(G_1^2 + \omega^2 C_1^2). \quad (e)$$

co w połączeniu z (c) daje układ dwu równań o dwu niewiadomych, z którego możemy obliczyć  $\beta$  i  $\gamma$ .

oraz współczynnik falowy:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(R_1^2 + \omega^2 L_1^2)(G_1^2 + \omega^2 C_1^2)} - (R_1 G_1 - \omega^2 L_1 C_1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega^2 L_1 C_1} \sqrt{\left(1 + \frac{R_1^2}{\omega^2 L_1^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{G_1^2}{\omega^2 C_1^2}\right) - \left(R_1 G_1 - \omega^2 L_1 C_1\right)}. \end{aligned} \quad (225)$$

Wyrażenia te można sprowadzić do postaci prostszych dla pewnych uproszczonych założeń.

a) *Linja bez strat.*

I tak, jeżeli założymy:

$$R_1 = 0, \quad G_1 = 0,$$

(linja bez strat) co jest dopuszczalne, gdy  $R_1 \ll \omega L_1$  oraz  $G_1 \ll \omega C_1$ , to z równań (224) i (225) otrzymamy:

$$\beta = 0, \quad (226)$$

$$\gamma = \omega \sqrt{L_1 C_1}. \quad (227)$$

Wówczas amplituda fal wzdłuż przewodnika jest stała, a ich szybkość rozchodzenia się wynosi:

$$u = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad (228)$$

i jest niezależna od częstotliwości prądu.

Oporność falowa linii bez strat wynosi, zgodnie z równaniem (210):

$$\hat{Z}_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = Z_0. \quad (229)$$

Jest ona również niezależna od częstotliwości prądu i posiada charakter bezindukcyjny.

Jako linje bez strat możemy uważać linje, zasilane prądami wielkiej częstotliwości, gdyż linje te prawie zawsze spełniają warunki  $\omega L_1 \gg R_1$  i  $\omega C_1 \gg G_1$ , tak iż  $R_1$  i  $G_1$  można pominąć. Dzięki temu teorię układów antenowych w większości przypadków sprowadzić możemy do teorii linii bez strat.

b) *Linja telefoniczna napowietrzna.*

Wyrażenie  $\sqrt{\left(1 + \frac{R_1^2}{\omega^2 L_1^2}\right) \left(1 + \frac{G_1^2}{\omega^2 C_1^2}\right)}$  z równań (224) i (225) możemy rozwinać na szereg potęgowy, którego wyrazy szybko maleją i mogą być pominięte, o ile  $\omega L_1 > 3 R_1$  oraz  $\omega C_1 > 3 G_1$ , co się sprawdza w zastosowaniu

do napowietrznych linii telefonicznych. Wyrażenie to równa się wówczas w przybliżeniu:

$$1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R_1^2}{\omega^2 L_1^2} + \frac{G_1^2}{\omega^2 C_1^2} \right),$$

co po podstawieniu do (224) i (225) daje:

$$\beta \approx \frac{1}{2} \left[ R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + G_1 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \right], \quad (230)$$

oraz

$$\gamma \approx \frac{1}{2} \sqrt{4\omega^2 L_1 C_1 + \left( R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} - G_1 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \right)^2}. \quad (231)$$

Można udowodnić, że wyrażenie na tłumienie jest najmniejsze, gdy spełniony jest warunek (zwany warunkiem Heaviside'a):

$$R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} = G_1 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}},$$

czyli

$$\frac{R_1}{G_1} = \frac{L_1}{C_1}. \quad (232)$$

Wówczas mamy najmniejszy współczynnik tłumienia:

$$\beta_{\min} = \sqrt{R_1 G_1} = R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} = G_1 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}, \quad (233)$$

zaś współczynnik falowy jest równy:

$$\gamma = \omega \sqrt{L_1 C_1}, \quad (234)$$

a więc szybkość rozchodzenia się fal wynosi:

$$u = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (235)$$

A więc linja o najmniejszym tłumieniu daje zarazem szybkość rozchodzenia się niezależną od częstotliwości prądu, podobnie jak linja bez strat. Dzięki temu nie daje ona zniekształceń fazowych, nosi więc nazwę *linji bez zniekształceń*.

Oporność falowa linji bez zniekształceń według równania (210-b), po uwzględnieniu warunku (232) wynosi:

$$\hat{Z}_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = Z_0,$$

a więc, podobnie jak w linji bez strat, posiada charakter bezindukcyjny i jest niezależna od częstotliwości.

c) Linja wielkiej częstotliwości ze stratami.

Nie we wszystkich przypadkach linii wielkiej częstotliwości pominąć możemy *oporność*. Przypadek taki zachodzi naprzykład w silnie promieniujących antenach krótkofalowych.

Wówczas, pomijając  $G_1$ , zastosować możemy przybliżenie (230) w postaci:

$$\beta \approx \frac{1}{2} R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}. \quad (230-a)$$

Dla linii takich stosują się jednakże z dostatecznym przybliżeniem wzory: (227) na współczynnik falowy i (229) na oporność falową, podane wyżej dla linii bez strat.

d) Linja telefoniczna kablowa.

W kablach telefonicznych obołowionych oporność indukcyjna jest naogół mała wobec oporu omowego (zwłaszcza dla małych średnic), a wpływność mała wobec przewodności pojemnościowej  $\omega C_1$ . Wobec tego można przyjąć z dostatecznym przybliżeniem  $L_1 = 0$  i  $G_1 = 0$ . Wówczas równania (224) i (225) redukują się do

$$\beta = \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} R_1 \omega C_1}. \quad (237)$$

Oporność falowa linii kablowej, zgodnie z (210) wynosi:

$$\hat{Z}_0 = \sqrt{\frac{R_1}{j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{R_1}{\omega C_1}} \cdot \varepsilon^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad (238)$$

z czego wynika, że prąd wyprzedza napięcie o 45 stopni. <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Należy tu zwrócić uwagę, że przesunięcie faz, wywołane przez oporność falową inji, w żadnym przypadku nie może przekroczyć  $\pm 45^\circ$ . Wynika to z następujących rozważań:

Ogólną postacią oporności falowej jest:

$$\hat{Z}_0 = \sqrt{\frac{a + jb}{c + jd}},$$

Zgodnie z dodatkiem I, licznik i mianownik można wyrazić symbolicznie przez:

$$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \varepsilon^{j\varphi_1}, \quad \text{gdzie } \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b}{a} \text{ (maximum } 90^\circ\text{)},$$

$$c + jd = \sqrt{c^2 + d^2} \cdot \varepsilon^{j\varphi_2}, \quad \text{gdzie } \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{d}{c} \text{ (maximum } 90^\circ\text{)}.$$

Stąd mamy:



## 7. Pupinizacja i krarupizacja linii telefonicznych. . .

Linje telefoniczne napowietrzne, a tembardziej linje kablowe, dalekie są od warunku (232), mają bowiem zadużą stosunkowo oporność i pojemność, jak o tem łatwo się przekonać z danych, zawartych w załączonej tabelce. Dlatego też zasięg linii kablowych jest niewielki i chcąc rozmawiać

### Stałe linii telefonicznych.

(Wg. Winzheimer, Übertragungstechnik)

Rodzaj linii	średnica przewodników mm	$R_1$ $\Omega/\text{km}$	$L_1$ $H/\text{km}$	$C_1$ $\mu F/\text{km}$	$G_1$ $\mu S/\text{km}$
Linja brązowa napowietrzna	2,0	15,66	0,0022	0,0054	0,5
	3,0	5,28	0,0020	0,0060	0,5
	4,0	3,00	0,0019	0,0064	0,5
	5,0	1,90	0,0018	0,0067	0,5
Kabel lokalny	0,8	72,0	0,0007	0,031	0,55
Kabel daleko-siężny	0,9	54,0	0,0007	0,031	0,55
	1,4	22,5	0,0007	0,032	0,55
	1,7	16,0	0,0007	0,037	0,60
	2,0	11,0	0,0007	0,037	0,70
Linja polowa jednoprzewodowa		100,	0,0025	0,01 <sup>2)</sup> do 0,015	1,0 do 10,0
Kabel Krarupa	0,7	16,0	0,01	0,039	1,1

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

zaś

$$\sqrt{\frac{a + jb}{c + jd}} = \sqrt[4]{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} \cdot e^{j\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}.$$

Wystąpić tu mogą następujące przypadki skrajne :

a) obie części urojone równe zeru  $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0$  ;

b) obie części rzeczywiste równe zeru  $\varphi_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{90^\circ - 90^\circ}{2} = 0$  ;

c)  $a = 0$ ,  $d = 0$ ,  $\varphi = \frac{90 - 0}{2} = 45^\circ$  ;

d)  $b = 0$ ,  $c = 0$ ,  $\varphi = \frac{0 - 90^\circ}{2} = -45^\circ$

<sup>2)</sup> Wysokość zawieszenia nad ziemią ok. 2,5 m.

na większe odległości, musielibyśmy ustawiać w niewielkich odstępach stacje wzmacniakowe dla wzmocnienia prądów przychodzących i przekazania ich na następny odcinek kabla. Metoda taka zwiększenia zasięgu, pomijając zniekształcenia częstotliwości i fazy, wywołane przez kabel, byłaby bardzo kosztowna i niewygodna.

Nie mogąc w praktyce zmniejszyć wydatnie oporności, a tembardziej pojemności, można zwiększyć zasięg linii — co równa się zmniejszeniu liczby stacyj wzmacniakowych — a zarazem zbliżyć się do warunku Heaviside'a, zwiększając sztucznie indukcyjność linii. Znane są dwie metody zwiększania indukcyjności linii:

a) Metoda Pupina (pupinizacja), polegająca na włączaniu w linię dodatkowych zwojnic samoindukcyjnych (cewki Pupina) w odstępach co 1,7 do 2 km.

b) Metoda Krarup'a (krarupizacja), polegająca na owinięciu kabla dwiema lub trzema warstwami drutu żelaznego (lub z innego materiału o dużej przenikliwości magnetycznej).

Metoda Pupina posiada dwie zasadnicze wady:

a) Włączając szeregowo cewki, zwiększamy równocześnie oporność skuteczną linii przez co tracimy część korzyści, osiągniętej przez zwiększenie indukcyjności. Jeżeli stała czasu cewki pupinowskiej wynosi:

$$\tau = \frac{L_c}{R_c},$$

czyli jej oporność

$$R_c = \frac{L_c}{\tau},$$

to z równania (230) obliczyć możemy tłumienie linii po włączeniu cewki<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} \left\{ (R_1 + R_c) \sqrt{\frac{C_1}{L_1 + L_c}} + G_1 \sqrt{\frac{L_1 + L_c}{C_1}} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( R_1 + \frac{L_c}{\tau} \right) \sqrt{\frac{C_1}{L_1 + L_c}} + G_1 \sqrt{\frac{L_1 + L_c}{C_1}} \right\}. \end{aligned} \quad (239)$$

Przyjmując  $\tau = \text{const}$  dla danego typu cewek, obliczyć możemy z warunku (232) najkorzystniejszą indukcyjność cewki Pupina

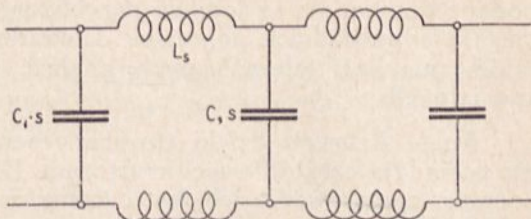
$$L_c = \frac{G_1 L_1 - C_1 R_1}{\frac{C_1}{\tau} - G_1}. \quad (240)$$

<sup>1)</sup> Należy tu podstawić wartość  $L_c$  i  $R_c$  przypadające na 1 km. linii. Zaznaczyć należy, że cewka pupinowska składa się z dwu równych części, włączanych w jeden i w drugi przewód linii.

Stała czasu dobrze wykonanych cewek pupinowskich dochodzi do 0,02, naogół jednak jest mniejsza.

Pupinizacja linii kablowych pozwala zwiększyć ich zasięg 2-krotnie, dla linii napowietrznych korzyść z pupinizacji jest mniejsza, ze względu na bardziej niekorzystny stosunek oporu cewki do oporu linii.

b) Drugą poważną wadą linii spupinizowanej jest jej niejednorodność. Włączając bowiem w pewnych odstępach zwojnice, rozbijamy niejako linię na szereg obwodów rezonansowych, utworzonych z pojemności linii przypadającej na odcinek między dwiema cewkami i indukcyjności cewek (rys. 136). Układ ma własności filtra, tłumiącego silnie częstotliwości, leżące powyżej częstotliwości krytycznej<sup>1)</sup>.



Rys. 136.

$$\omega_k = \frac{2}{\sqrt{LC}}, \quad (241)$$

jeżeli  $L$  i  $C$  są indukcyjnością szeregową i pojemnością równoległą każdego członu filtra.

W linii spupinizowanej jednostkowy obwód stanowi odcinek o długości  $s$ , równej odstępowi 2 cewek (rys 136). Indukcyjność takiego odcinka uważać możemy za równą indukcyjności całkowitej obu połówek cewki  $L = 2 \frac{L_c}{2} = L_c$ , zaś pojemność wynosi  $C_1 s$ , jeżeli odstęp  $s$  między cewkami wyrazimy w km. Stąd obliczymy częstotliwość krytyczną:

$$\omega_k = \frac{2}{\sqrt{(L_c + L_1 s) \cdot C_1 s}}, \quad (241-a)$$

Częstotliwość krytyczna jest drugim czynnikiem, który nie pozwala w pełni wykorzystać pupinizacji. Należy bowiem ograniczyć się do takiej indukcyjności, która by nie dała częstotliwości krytycznej mniejszej od górnej granicy przesyłanego widma. Szczególne trudności następują przewo-  
dy kablowe przeznaczone dla przesyłania programów radjofonicznych, którym stawia się bardzo duże wymagania co do górnej granicy częstotliwości. W nowoczesnych kablach telefonicznych znajdują się specjalne pary przewodników, t. zw. *radjofoniczne*. Są one umieszczone w środku przekroju kabla i skonstruowane są tak, by ich pojemność była jaknajmniejsza, przytem są one tylko częściowo spupinizowane (pupinizacja słaba), to znacząca indukcyjność cewek jest znacznie mniejsza, niżby tego wymagało osiągn-

<sup>1)</sup> Patrz rozdział VI.

nięcie minimum tłumienia. W parach tych  $\omega_k = 2\pi \cdot 5500$  (Ameryka) do  $2\pi \cdot 6700$  (Europa), a obecnie nawet starają się przekroczyć tę granicę.

Niejednorodność linii spuinizowanej sprawia, że — ściśle biorąc — nie jest ona ani właściwą linią, ani właściwym filtrem. Wobec tego równania podane poprzednio są jedynie przybliżone i dla różnych częstotliwości wymagają odpowiednich poprawek. Dokładniejsze wzory, stosowane do projektowania linii telefonicznych, znaleźć można w odpowiednich dziełach specjalnych.

*Kable Krarupa* dzięki równomiernemu rozmieszczeniu indukcyjności, nie posiadają częstotliwości krytycznej, lecz ze względu na duży koszt wykonania, zastosowanie ich jest ograniczone. Używają je przeważnie jako kable telefoniczne podmorskie i do wprowadzania linii napowietrznych do miast.

## 8. Przykład.

Poniżej podajemy przybliżone przeliczenie linii telefonicznej dla zorientowania czytelnika jakościowo w charakterze zjawisk, spotykanych w łącznikowych liniach radjofonicznych.

Mamy linię kablową o średnicy 1,7 mm, której zgodnie z podaną tablicą odpowiada stałe:

$$R_1 = 16 \Omega/\text{km}; \quad L_1 = 0,0007 \text{ H}/\text{km}; \quad C_1 = 37 \cdot 10^{-9} \text{ F}/\text{km}$$

$$G_1 = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ S}/\text{km}.$$

Ze wzoru (237) obliczamy współczynnik tłumienia i falowy dla „normalnej częstotliwości telefonicznej” ( $\omega = 5000$ ):

$$\beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{R_1 \omega C_1} \simeq 38,5 \cdot 10^{-3} \text{ neper}/\text{km}.$$

Stąd mamy zasięg linii na podstawie wzoru (223)

$$l = \frac{1,5 \cdot 10^3}{38,5} \simeq 39 \text{ km}.$$

Oporność falowa linii, zgodnie z (238) wynosi dla  $\omega = 5000$ :

$$\hat{Z}_0 = \sqrt{\frac{R_1}{\omega C_1}} \cdot \varepsilon^{-j45^\circ}$$

a więc

$$Z_0 = \sqrt{\frac{16 \cdot 10^9}{5 \cdot 37 \cdot 10^3}} = 294 \Omega.$$

Część rzeczywista

$$|R_0| = 294 \cdot \cos 45^\circ = 208 \Omega,$$

a część urojona

$$|X_0| = 294 \cdot \sin 45^\circ = 208 \Omega = |R_0|.$$

Chcąc linię ulepszyć, zamierzamy ją spupinizować. Najkorzystniejsza indukcyjność, włączona na 1 km długości linii, przy założeniu  $\tau = 0,02$ , wyniesie zgodnie z (240) (wartość bezwzględna):

$$L_c = \frac{C_1 R_1 - G_1 L_1}{G_1 - \frac{C_1}{\tau}} = \frac{16 \cdot 37 \cdot 10^{-9} - 0,6 \cdot 10^{-6} \cdot 0,7 \cdot 10^{-3}}{0,6 \cdot 10^{-6} - \frac{37 \cdot 10^{-9}}{20 \cdot 10^{-3}}} \cong 0,47 \text{ H/km.}$$

Temu odpowiada oporność dodatkowa na 1 km linii:

$$R_c = \frac{0,47}{0,02} = 23,5 \Omega/\text{km}.$$

Minimalne tłumienie, zgodnie z (233) wyniesie

$$\beta_{\min} = \sqrt{(16 + 23,5) \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 4,85 \cdot 10^{-3},$$

które daje maksymalny zasięg

$$l_{\max} = \frac{1500}{4,85} = 310 \text{ km}.$$

Oporność falową linii spupinizowanej obliczymy według wzoru (229)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_1'}{C_1}} = \sqrt{\frac{0,47 + 0,0007}{37 \cdot 10^{-9}}} = 3570 \Omega.$$

Posiada ona, rzecz oczywista, charakter omowy.

Sprawdzamy częstotliwość krytyczną. Umieszczając zwojnicy Pupina co 1,7 km, otrzymamy całkowitą indukcyjność jednej zwojnicy  $L_c = 0,47 \cdot 1,7 = 0,8 \text{ H}$ , a pojemność jednego odcinka linii  $1,7 \cdot 37 \cdot 10^{-9} = 63 \cdot 10^{-9} \text{ F}$ .

Stąd:

$$\omega_k = \frac{2}{\sqrt{0,8 \cdot 63 \cdot 10^{-9}}} \cong 9000,$$

co daje  $f_k \cong 1420 \text{ okr/sek}$ . Linia nie odpowiada więc minimalnym wymaganiom, stawianym linii telefonicznej.

Zakładając częstotliwość krytyczną  $f_k = 3000$ <sup>1)</sup> ( $\omega_k = 20000$ ), a więc przystosowując linię jedynie dla celów telefonicznych, a nie dla transmisji radjofonicznych, obliczymy maksymalne  $L_c$  które wynosi:

$$L_c = \frac{4}{\omega^2 C} = \frac{4}{4 \cdot 10^8 \cdot 63 \cdot 10^{-9}} \approx 0,159 \text{ H}.$$

Na 1 km otrzymamy stąd  $L_c = 0,0935 \text{ H/km}$  oraz  $R_c = \frac{0,0935}{0,02} \approx 4,7 \Omega$ , co wraz z opornością linii daje  $R_1'' = 20,7 \Omega/\text{km}$ . Tłumienie, otrzymane w ten sposób, daje nam wzór (239):

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \left[ 20,7 \sqrt{\frac{37 \cdot 10^{-9}}{94,2 \cdot 10^{-3}}} + 0,6 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{94,2 \cdot 10^{-3}}{37 \cdot 10^{-9}}} \right] \approx 7 \cdot 10^{-3} \text{ neper/km}.$$

Stąd zasięg linii osiągnięty przy słabszej pupinizacji:

$$l = \frac{1,5}{7 \cdot 10^{-3}} = 207 \text{ km}.$$

Oporność falową tej linii częściowo spupinizowanej musimy obliczyć według wzoru ogólnego (210).

$$\hat{Z}_0 = \sqrt{\frac{R_1'' + j\omega L_1''}{G_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{L_1''}{C_1}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{R_1''^2}{\omega L_1''^2}}{1 + \frac{G_1^2}{\omega C_1^2}}} \cdot \varepsilon^{j \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}.$$

Obliczymy odpowiednie wartości dla  $\omega_1 = 5000$  i  $\omega_2 = 20000$ .  
Dla  $\omega_1 = 5000$  mamy

$$\text{tg } \varphi_1 = \frac{5000 \cdot 0,094}{20,7} = \frac{470}{20,7} = 22,7, \quad \varphi_1 \approx 87^\circ 29'$$

$$\text{tg } \varphi_2 = \frac{5000 \cdot 37 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 10^{-7}} = \frac{1850}{6} \approx 308, \quad \varphi_2 \approx 89^\circ 49'$$

Stąd przesunięcie faz linii

$$\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = -1^\circ 10',$$

<sup>1)</sup> Patrz rozdział IV.

Wobec tego, że dla częstotliwości  $\omega_2 = 20000$  te przesunięcia faz będą jeszcze mniejsze, oporność falową linii praktycznie uważać możemy za bezindukcyjną. Wyniesie ona z dostatecznym przybliżeniem:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_1''}{C_1}} = \sqrt{\frac{0,094}{37 \cdot 10^{-9}}} = 1590 \Omega.$$

Z przeliczonego tu przykładu widzimy, że częściowa pupinizacja pozwoliła nam zwiększyć zasięg bezpośredni linii przeszło pięciokrotnie, a więc w tysamym stosunku zmniejszyć liczbę stacji wzmacniakowych na linii dalekosiężnej. Gdybyśmy jednak żądali przystosowania kabla dla radjofonji, korzyść osiągnięta z pupinizacji byłaby skromniejsza.

### 9. Znaczenie odbicia. Odbicie zupełne i częściowe.

Powróćmy jeszcze do równań (217) i (217-a):

$$i = J_{m_2} \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0} \cdot \varepsilon^{\beta x} \cdot \sin(\omega t + \gamma x + \psi) + \\ - J_{m_2} \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_0}{2 \hat{Z}_0} \cdot \varepsilon^{-\beta x} \cdot \sin(\omega t - \gamma x + \psi);$$

$$v = J_{m_2} \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_0}{2} \cdot \varepsilon^{\beta x} \cdot \sin(\omega t + \gamma x + \psi) + \\ + J_{m_2} \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_0}{2} \varepsilon^{-\beta x} \cdot \sin(\omega t - \gamma x + \psi).$$

Jak już wykazano w § 5, fala odbita znika, gdy  $\hat{Z}_2 = \hat{Z}_0$ . Warunek nieodbijania się fal jest co do istoty swej podobny do rezonansu w układzie prostym lub do warunku maximum mocy w układzie obwodów sprzężonych, odpowiada on bowiem maksymalnemu wykorzystaniu energii przez odbiornik, znajdujący się na końcu linii.

Przeciwnieństwem jego będzie *odbicie zupełne*, polegające na tem, że *koniec linii wcale energii nie pobiera*. Warunek ten będzie spełniony, gdy koniec linii będzie albo *zwarty* albo *otwarty*.

a) *Linja zwarta*. Gdy podstawimy  $\hat{Z}_2 = 0$  równania (217) i (217-a) przyjmą postać:

$$i = \frac{J_{m_2}}{2} \cdot \varepsilon^{\beta x} \cdot \sin(\omega t + \gamma x + \psi) + \frac{J_{m_2}}{2} \cdot \varepsilon^{-\beta x} \cdot \sin(\omega t - \gamma x + \psi); \quad (242)$$

$$v = \frac{J_{m_2}}{2} \hat{Z}_0 \cdot \varepsilon^{+\beta x} \cdot \sin(\omega t + \gamma x + \psi) - \frac{J_{m_2}}{2} \cdot \hat{Z}_0 \cdot \varepsilon^{-\beta x} \cdot \sin(\omega t - \gamma x + \psi). \quad (242-a)$$

Podstawiając warunki końca linii, czyli  $x = 0$ , otrzymamy:

$$i_2 = \frac{J_{m_2}}{2} \sin(\omega t + \psi) + \frac{J_{m_2}}{2} \sin(\omega t + \psi) = J_{m_2} \cdot \sin(\omega t + \psi); \quad (242')$$

$$v_2 = \frac{J_{m_2}}{2} \hat{Z}_0 \sin(\omega t + \psi) - \frac{J_{m_2}}{2} \hat{Z}_0 \sin(\omega t + \psi) = 0. \quad (242'\text{-a})$$

Stąd — oczywisty zresztą — wniosek, że *napięcie na końcu linii zwartej jest stale równe zeru*, zaś natężenie prądu na końcu posiada wartość uwarunkowaną jedynie tłumieniem linii.

b) *Linja otwarta*. By zbadać warunki w linii otwartej, musimy najpierw przekształcić równania (217) i (217-a), podstawiając:

$$V_{m_2} = J_{m_2} \hat{Z}_2 \quad \text{czyli} \quad J_{m_2} = \frac{V_{m_2}}{\hat{Z}_2},$$

otrzymamy wówczas:

$$i = \frac{V_{m_2}}{2} \cdot \left( \frac{1}{\hat{Z}_0} + \frac{1}{\hat{Z}_2} \right) \cdot \varepsilon^{\beta x} \cdot \sin(\omega t + \gamma x + \psi) + \\ - \frac{V_{m_2}}{2} \left( \frac{1}{\hat{Z}_0} - \frac{1}{\hat{Z}_2} \right) \cdot \varepsilon^{-\beta x} \cdot \sin(\omega t - \gamma x + \psi), \quad (217')$$

$$v = \frac{V_{m_2}}{2} \left( 1 + \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_2} \right) \cdot \varepsilon^{\beta x} \cdot \sin(\omega t + \gamma x + \psi) + \\ + \frac{V_{m_2}}{2} \left( 1 - \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_2} \right) \cdot \varepsilon^{-\beta x} \cdot \sin(\omega t - \gamma x + \psi). \quad (217'\text{-a})$$

Dla linii otwartej, podstawiając  $\hat{Z}_2 = \infty$  otrzymamy:

$$i = \frac{V_{m_2}}{2 \hat{Z}_0} \varepsilon^{\beta x} \sin(\omega t + \gamma x + \psi) - \frac{V_{m_2}}{2 \hat{Z}_0} \cdot \varepsilon^{-\beta x} \cdot \sin(\omega t - \gamma x + \psi), \quad (243)$$

$$v = \frac{V_{m_2}}{2} \varepsilon^{\beta x} \cdot \sin(\omega t + \gamma x + \psi) + \frac{V_{m_2}}{2} \varepsilon^{-\beta x} \sin(\omega t - \gamma x + \psi). \quad (243\text{-a})$$

Podstawiając  $x = 0$ , otrzymamy warunki na końcu linii

$$i_2 = 0, \quad (243') \quad \text{oraz} \quad v_2 = V_{m_2} \sin(\omega t + \psi). \quad (243'\text{-a})$$

Wynika stąd, że *prąd na końcu linii otwartej jest stale równy zeru*, natomiast napięcie posiada wartość skończoną, którą możemy znaleźć z równania (243-a), znając  $V_{m_2}$  i obliczając  $V_{m_2} = V_{m_1} \cdot \varepsilon^{-\beta l}$ .

Pozatem widać z równań (243) i (243-a), że w przeciwieństwie do linii obciążonej i zwartej, *w linii otwartej fale prądu odejmują się, a fale napięcia dodają się*.



Z rozważań powyższych wynika, że na końcu linii niema zużycia energii (odbicie zupełne), gdy linja jest zwarta ( $\hat{Z}_2 = 0$ ) lub otwarta ( $\hat{Z}_2 = \infty$ ). Gdy zaś linja obciążona jest na końcu opornością, równą jej oporności falowej ( $\hat{Z}_2 = \hat{Z}_0$ ), całkowita moc, doprowadzona do końca linii, zużywa się w odbiorniku (linja bez odbić).

We wszystkich przypadkach przejściowych ( $\hat{Z}_2 \geq \hat{Z}_0$ , lecz  $0 < |\hat{Z}_2| < \infty$ ) mamy do czynienia z odbiciem częściowym, polegającym na tem, że część energii pochłania odbiornik, część zaś oscyluje między odbiornikiem a linią. Zjawiska w linii elektrycznej można porównać ze zjawiskami w obwodzie rezonansowym: linja bez odbić odpowiada obwodowi dostrojonemu do rezonansu, linja z odbiciami zaś obwodowi rozstrojonemu, gdy moc urojona oscyluje między obwodem a źródłem prądu.

Odbicie fali oddziaływa w ten sposób na źródło prądu, że źródło to, dla wytworzenia na końcu linii prądu  $i_2$ , musi posiadać większą siłę elektromotoryczną, niż w przypadku linii bez odbić, musi bowiem wytworzyć na początku linii różnicę geometryczną prądów  $J'_m$  i  $J''_m$ , którą możemy obliczyć, podstawiając do równania (217) wartość  $x = l$ . Natomiast w przypadku linii bez odbić daje ono jedynie prąd  $J'_m$ . Innemi słowy, przy stałej wartości siły elektromotorycznej otrzymujemy w linii maximum prądu, gdy

$$\hat{Z}_2 = \hat{Z}_0.$$

Działanie fali odbitej na początku linii porównać można także z siłą elektromotoryczną oddziaływania zwrotnego w obwodach sprzężonych.

Wpływ odbicia jest oczywiście tem większy, im krótsza jest linja i im mniejsze jest jej tłumienie, tem większa bowiem będzie wartość  $J''_m$ .

#### 10. Dyskusja linii bez strat. Fale stojące.

Dyskusja matematyczna zjawiska odbić przedstawia się najbardziej przejrzysto w linii bez strat. Zakładając bowiem  $\beta = 0$ , otrzymamy zgodnie z § 6:

$$J_{m_1} = J_{m_2} = J_m; \quad \hat{Z}_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = Z_0,$$

co po podstawieniu do równań (217) i (217-a) daje:

$$i = \frac{J_m}{2} \left[ \left( \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + 1 \right) \cdot \sin(\omega t + \psi + \gamma x) + \right. \\ \left. - \left( \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} - 1 \right) \sin(\omega t + \psi - \gamma x) \right], \quad (244)$$

$$v = \frac{J_m}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \left[ \left( \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + 1 \right) \cdot \sin(\omega t + \psi + \gamma x) + \right. \\ \left. + \left( \hat{Z}_2 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} - 1 \right) \cdot \sin(\omega t + \psi - \gamma x) \right]. \quad (244-a)$$

Przedyskutujemy teraz poszczególne przypadki obciążenia:

a) *Linja bez odbić.* Podstawiając  $\hat{Z}_2 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ , otrzymamy:

$$i = J_m \sin(\omega t + \psi + \gamma x), \quad (245)$$

$$v = J_m \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \sin(\omega t + \psi + \gamma x). \quad (245-a)$$

A więc w linii bez odbić i bez strat napięcie i prąd są *w fazie* we wszystkich jej punktach.

b) *Linja zwarta.* Podstawiając  $\hat{Z}_2 = 0$ , otrzymamy równanie prądu

$$i = \frac{J_m}{2} \left[ \sin(\omega t + \psi + \gamma x) + \sin(\omega t + \psi - \gamma x) \right],$$

co po przekształceniu<sup>1)</sup> daje

$$i = J_m \cos \gamma x \cdot \sin(\omega t + \psi). \quad (246)$$

W analogiczny sposób otrzymamy równanie napięcia w linii zwartej jako:

$$v = J_m \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \sin \gamma x \cdot \cos(\omega t + \psi). \quad (246-a)$$

c) *Linja otwarta.* Podstawiając w równaniu (217') podane na początku uproszczenia i zakładając  $\hat{Z}_2 = \infty$ , otrzymamy równanie prądu w linii otwartej

$$i = \frac{V_m}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \left[ \sin(\omega t + \psi + \gamma x) - \sin(\omega t + \psi - \gamma x) \right],$$

a po przekształceniu:

$$i = V_m \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \sin \gamma x \cdot \cos(\omega t + \psi) = J_m \sin \gamma x \cdot \cos(\omega t + \psi). \quad (247)$$

Zaś równanie napięcia:

$$v = V_m \cdot \cos \gamma x \cdot \sin(\omega t + \psi) = J_m \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \cos \gamma x \cdot \sin(\omega t + \psi). \quad (247-a)$$

Równania (246) i (246-a) oraz (247) i (247-a) wskazują, że w linii, w której nastąpiło odbicie zupełne, wytwarza się wzdłuż linii stały prze-

<sup>1)</sup> Stosujemy wzór

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta.$$

strzennie rozkład prądu i napięcia, wyrażony z uwzględnieniem (218) równaniami (rys. 137):

$$i_x = i_0 \cos \gamma x = i_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad (246')$$

$$v_x = v_0 \sin \gamma x = v_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda}; \quad (246\text{-}a')$$

b) dla linii otwartej

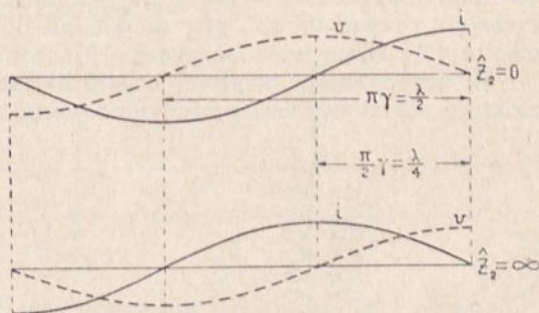
$$i_x = i_0 \sin \gamma x = i_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad (247')$$

$$v_x = v_0 \cos \gamma x = v_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (247\text{-}a')$$

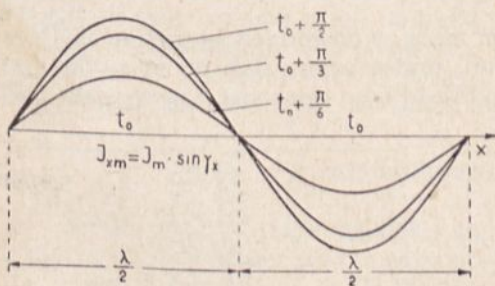
Z równań tych wynika, że dla  $x=0$ , t.j. na końcu linii mamy węzeł napięcia dla linii zwartej, a węzeł prądu dla linii otwartej. Węzły te powtarzają się w odstępach:

$$x = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\lambda}{2}.$$

W czasie natomiast przebieg prądu i napięcia w dowolnym punkcie linii wyraża się równaniami (rys. 138).



Rys. 137.



Rys. 138.

a) dla linii zwartej

$$i_t = J_{mx} \cdot \sin(\omega t + \psi), \quad (246'')$$

$$v_t = V_{mx} \cos(\omega t + \psi). \quad (246\text{-}a'')$$

b) dla linii otwartej

$$i_t = J_{mx} \cos(\omega t + \psi), \quad (247'')$$

$$v_t = V_{mx} \sin(\omega t + \psi). \quad (247\text{-}a'')$$

Każda z tych wielkości zmienia się w czasie sinusoidalnie, zaś w przestrzeni w obrębie jednej połowki fali wszystkie wartości chwilowe są w fazie, by w sąsiedniej półfali przesunąć się w fazie o  $180^\circ$ .

Przebiegi zachodzące w linii zwartej lub otwartej, przypominają zjawisko fal stojących w drgających prętach i strunach. Stąd temu zjawisku elektrycznemu nadano również nazwę *fal stojących elektrycznych*.

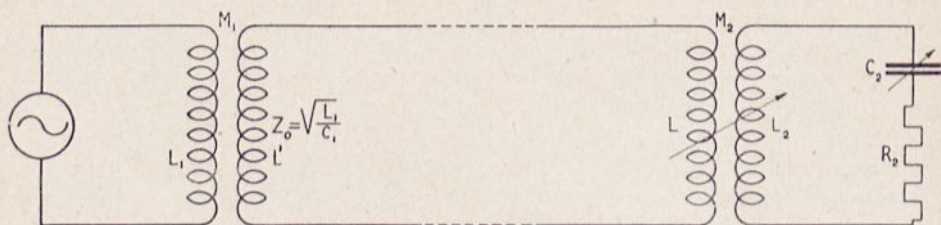
W liniach bez strat z odbiciem zupełnym napięcie i prąd przesunięte są względem siebie o  $90^\circ$  tak w czasie, jak i w przestrzeni, jak to wynika z podanych wyżej równań. Jest to fizycznie oczywiste, skoro bowiem ani koniec linii, ani sama linia nie pobiera energii, to w żadnym miejscu i w żadnej chwili wyrażenie  $v$  i  $\cos\varphi$  nie może mieć wartości rzeczywistej.

Z powyższego wynika, że w linii ze stratami nie mogą powstać czyste fale stojące, gdyż na falę stojącą, wytworzoną na końcu linii, zawsze będzie się nakładała fala bieżąca o amplitudzie malejącej wykładniczo, pokrywająca straty wzdłuż linii. Tak więc tylko na końcu linii będziemy mieli węzeł rzeczywisty, w pozostałych zaś punktach węzłowych jedynie *minimum*, rosnące ku początkowi linii.

W przypadku częściowego odbicia, również i na końcu linii nie ma węzła — mamy wówczas falę bieżącą z nałożoną na nią falą stojącą. Dopiero w linii bez odbić fala stojąca znika zupełnie i prąd oraz napięcie maleją równomiernie ku końcowi linii.

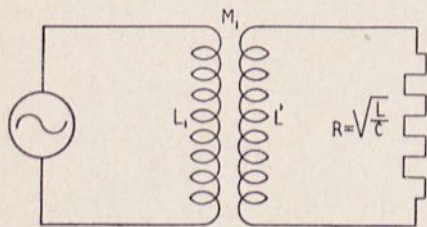
O spełnieniu warunku nieodbijania się fal w linii bez strat<sup>1)</sup> można się przekonać, włączając w nią 3 amperomierze na odcinku  $\lambda/4$ . Zgodnie z powyższymi rozważaniami, gdy nie ma fali odbitej, wszystkie 3 amperomierze wskazują tę samą wartość prądu (Marconi — Franklin).

W urządzeniach wielkiej częstotliwości warunek nieodbijania się fal realizuje się zazwyczaj przez odpowiedni dobór sprzężenia (rys. 139), po-

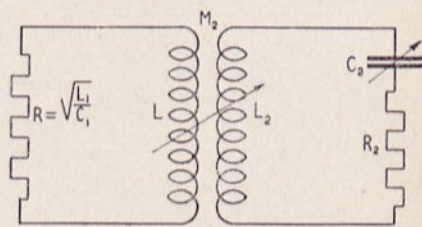


Rys. 139.

krywający się z warunkiem maximum mocy w obwodach sprzężonych (Rozdział II. § 3). By obliczyć taki układ, podstawiamy tak na początku linii (rys. 140-a), jak i na jej końcu (rys. 140-b) jako oporność rzeczywistą linii:



Rys. 140-a.



Rys. 140-b.

$Z_0 = R = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ , jako jej oporność urojona:  $\omega L$ , gdzie  $L$  jest indukcyjnością

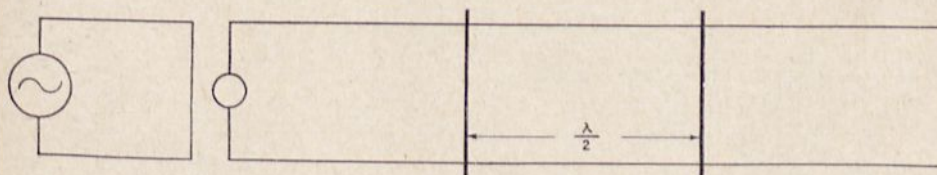
<sup>1)</sup> Jak już zaznaczono w § 6, linie zasilane prądami wielkiej częstotliwości, uważać możemy w przybliżeniu za linie bez strat.

sprężenia włączoną w linię. Należy tu podkreślić, że  $Z_0$  nie jest tu miarą strat, powstających w linii, gdyż w myśl założenia — skoro linia jest bez strat,  $Z_0$  jest wielkością urojoną, a jedynie pod względem przesunięcia faz zachowuje się jak oporność omowa (podobnie jak obwód rezonansu prądów bez oporności omowej).

W niektórych przypadkach (np. w antenie falowej Beverage-Kellogg-Rice) warunek nieodbijania fal osiąga się przez włączenie na końcu linii oporu omowego równego oporności falowej linii.

### Układ Lechera.

Teoria fal stojących daje nam bardzo wygodną metodę pomiaru bardzo wielkich częstotliwości<sup>1)</sup> (fal bardzo krótkich rzędu metrów i decymetrów) przy pomocy układu dwu poziomych przewodników rozpiętych równoległe w odległości 20 do 30 cm od siebie (rys. 141). Utworzona w ten sposób linia zasilana jest na jednym końcu przez generator, wytwarzający badaną częstotliwość, na drugim zaś końcu jest otwarta.



Rys. 141.

Na początku linii umieszczamy wskaźnik prądu (małą żarówkę, lub, dla dokładnych pomiarów, termoelement z galwanometrem) i przesuwamy wzdłuż linii mostek zwierający. Wówczas w pewnych położeniach zwieracza lampa gaśnie (galwanometr wskazuje zero), zaś w położeniach oddalonych od poprzednich o  $\lambda/4$ , lampka zaświeca się najjaśniej (galwanometr wskazuje maximum). Poszczególne minima (maxima) oddalone są od siebie o  $\lambda/2$ . Możemy więc zmierzyć długość fali, mierząc odległość między dwoma wskazaniem maximum lub zerowami.

### 11. Przykład obliczenia linii zasilającej.

Źródło prądu o częstotliwości kątovej  $\omega = 10^7$  i o oporności wewnętrznej  $R_g = 10 \Omega$  mamy sprząc zapomocą linii zasilającej o oporności falowej  $Z_0 = 600 \Omega$  z anteną o oporności  $R_A = 20 \Omega$  w taki sposób, aby otrzymać sprawność przeniesienia 90% ( $\gamma_1 = 0,9$ , nie licząc strat w linii).

Przyjmując, że antena jest dostrojona do rezonansu i że oporność indukcyjna zwojniczy sprzężenia jest mała wobec  $Z_0$ , otrzymamy:

$$\omega M_{21} = \sqrt{600 \cdot 20} \approx 110 \Omega, \text{ czyli } M_{21} = 110 \cdot 10^{-7} = 11 \cdot 10^{-6} \text{ H.}$$

<sup>1)</sup> Patrz m. i. O. Schmidt, Das Paralleldrahtsystem als Messinstrument in der Kurzwellentechnik, Jahrb. 41 str. 2 r. 1933.

Gdybyśmy przyjęli  $\omega L = 60 \Omega$ , czyli  $L = 6 \cdot 10^{-6}$  H. i współczynnik sprzężności  $k = 0,6$ , zwojnica sprzężenia w antenie musiałaby mieć indukcyjność:

$$L_2 = L_A = \frac{M_2^2}{k^2 L} = \frac{121 \cdot 10^{-12}}{0,36 \cdot 6 \cdot 10^{-6}} = 56 \cdot 10^{-6} \text{ H.}$$

By osiągnąć rezonans przy  $\omega = 10^7$ , pojemność anteny powinna wobec tego wynosić:

$$C_A = \frac{1}{10^{14} \cdot 56 \cdot 10^{-6}} = 179 \cdot 10^{-12} \text{ F.}$$

Założymy, że w obwodzie antenowym płynie prąd  $J_A = 10$  A. Wówczas moc wydzielona w antenie wynosi  $20 \cdot 10^2 = 2000$  watów, zaś prąd w linii zasilającej znajdziemy z równości

$$J_l^2 \cdot 600 = 2000 \text{ W,}$$

skąd mamy

$$J_l = \sqrt{\frac{2000}{600}} = 1,83 \text{ A.}$$

Sprzężenie linii z obwodem zasilającym obliczymy według zasad rozdziału III, § 4. i przykładu § 7. Zakładamy indukcyjność sprzężenia linii  $L_1 = 6 \cdot 10^{-6}$  H,  $\omega = 10^7$ . Stąd mamy:

$$Z_2 = \sqrt{600^2 + 10^{14} \cdot 6^2 \cdot 10^{-12}} \simeq 600 \Omega;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = 0,1, \quad \cos \varphi_2 = 0,99 \simeq 1.$$

Stąd na podstawie równania (89) obliczymy:

$$\omega M_1 = Z_0 \sqrt{\frac{R_g}{Z_0} \cdot \frac{\gamma_1}{1 - \gamma_1}} = \sqrt{600 \cdot 10 \cdot 9} = 232 \Omega$$

czyli

$$M_1 = \frac{232}{10^7} = 23,2 \cdot 10^{-6} \text{ H.}$$

A więc niezbędna indukcyjność w obwodzie pierwotnym przy  $k = 0,6$ :

$$L_1 = \frac{M_1^2}{k^2 L} = \frac{540 \cdot 10^{-12}}{0,36 \cdot 6 \cdot 10^{-6}} = 250 \cdot 10^{-6} \text{ H.}$$

Przesunięcie faz w obwodzie pierwotnym, o ile żądamy obciążenia bezindukcyjnego, powinno być dodatnie i ma wynosić zgodnie ze wzorem (90)

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\gamma_1}{1 - \gamma_1} \operatorname{tg} \varphi_2 = 0,9.$$

a więc

$$X_1 = R_g \operatorname{tg} \varphi_1 = 9 \Omega.$$

Stąd obliczymy

$$C_1 = \frac{1}{\omega^2 L - 9 \omega} = \frac{1}{10^{14} \cdot 6 \cdot 10^{-6} - 9 \cdot 10^7} = 1960 \cdot 10^{-12} \text{F}.$$

Oporność całkowita odniesiona do obwodu pierwotnego wynosi:

$$R_t = 10 + \frac{\omega^2 M_1^2}{Z_2^2} \cdot 600 = 100 \Omega,$$

zaś moc, przy  $\eta = 0,9$ :

$$P_1 = \frac{2000}{0,9} \sim 2220 \text{ W}.$$

Stąd obliczymy prąd pierwotny

$$J_1 = \sqrt{\frac{2220}{100}} \sim 4,7 \text{ A}.$$

Moglibyśmy również obliczyć w przybliżeniu straty w linii zasilającej. Jeżeli przyjmiemy oporność jej równą  $5 \Omega$ , to moc stracona:

$$P_1 = 5 \cdot 1,83^2 \sim 17 \text{ watów}.$$

Straty te są tak nieznaczne, iż nie wpływają na wynik obliczeń.

## 12. Oporność pozorną linii zwartej i otwartej.

Przy pomocy wzorów, wyprowadzonych w § 10, możemy obliczyć oporność pozorną (ściśle mówiąc — wobec pominięcia strat w linii — oporność urojoną) linii w dowolnym jej punkcie od końca. Będzie to oporność, jaką linia zwarta lub otwarta o zmiennej długości będzie przedstawiała dla źródła prądu. W tym celu przejdziemy z wartości chwilowych na wartości skuteczne, wyrażone symbolicznie, oznaczając:

$$J_m \sin(\omega t + \psi) \text{ przez } \hat{J}, \quad V_m \sin(\omega t + \psi) \text{ przez } \hat{V},$$

$$J_m \cos(\omega t + \psi) \text{ przez } j\hat{J}, \quad V_m \cos(\omega t + \psi) \text{ przez } j\hat{V}.$$

Z równań (246) i (246-a) obliczymy w ten sposób dla *linii zwartej*:

$$\hat{Z}_x = \frac{j\hat{J} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \sin \gamma x}{\hat{J} \cos \gamma x} = j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \operatorname{tg} \gamma x. \quad (248)$$

Analogicznie równania (247) i (247-a) dadzą nam dla linii otwartej:

$$\hat{Z}_x = \frac{j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cos \gamma x}{j \hat{J} \sin \gamma x} = -j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \gamma x. \quad (249)$$

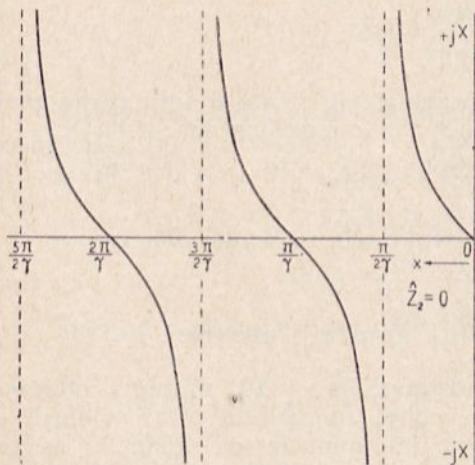
Z równania (248) wynika (rys. 142), że w linii zwartej dla wszystkich wartości:

$$x = \frac{n \cdot \pi}{\gamma}, \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3 \dots \infty \quad (250)$$

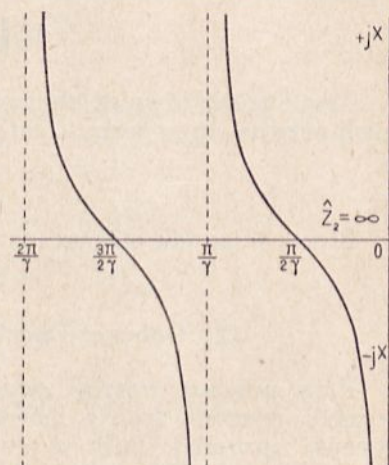
jest  $\hat{Z}_x = X = 0$ , natomiast dla wszystkich wartości:

$$x = \frac{(2n-1)}{2} \cdot \frac{\pi}{\gamma} \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3 \dots \infty \quad (251)$$

jest  $\hat{Z}_x = X = \pm \infty$ .



Rys. 142.



Rys. 143.

W linii otwartej zaś mamy [równanie (249), rys. 143]:

$$\text{dla } x = \frac{(2n-1)\pi}{2\gamma}; \quad \hat{Z}_x = 0, \quad (250 \text{ a})$$

$$\text{dla } x = \frac{n\pi}{\gamma}; \quad \hat{Z}_x = \pm \infty, \quad (251 \text{ a})$$

Na szczególniejszą uwagę zasługuje warunek  $\hat{Z}_x = 0$ . Oznacza on, że dla źródła prądu włączanego w danym punkcie, linia nie przedstawia żadnej oporności urojonej, pozostaje więc tylko jej oporność omowa, której



popinąć nie można skoro mamy  $X = 0$ . Przypadek ten pokrywa się z *rezonansem napięć* obwodu niby-ustalonego, podczas gdy przypadek  $Z_x = \pm \infty$  odpowiada rezonansowi prądów. Rezonansowi napięć odpowiadają więc wszystkie *węzły* fali napięcia linii, zaś rezonansowi prądów wszystkie *brzośce* fali napięcia.

Równania (248) i (249) można dyskutować z dwu punktów widzenia: a) zmiennej długości linii przy stałej częstotliwości zasilającej, b) zmiennej częstotliwości przy danej długości linii. Zależności te możemy wyrazić albo jako funkcję długości fali, albo jako funkcję częstotliwości.

Podstawiając wartość na  $\gamma$  z równania (218), czyli  $\gamma = \frac{2\pi}{\lambda}$ , otrzymamy z równania (250) warunek rezonansu napięć dla linii *zwartej*:

$$x = n \frac{\lambda_r}{2}, \quad \text{czyli} \quad \lambda_r = \frac{2l}{n}, \quad (250')$$

gdzie  $x = l$  jest długością danej linii. Zaś dla linii *otwartej*:

$$x = (2n - 1) \frac{\lambda_r}{4} \quad \text{czyli} \quad \lambda_r = \frac{4l}{2n - 1}. \quad (251')$$

Wprowadzając natomiast zgodnie z równaniem (220) zależność  $\lambda = \frac{2\pi u}{\omega_r}$ , zaś z równania (228) wartość na  $u$ , otrzymamy dla linii *zwartej*:

$$x = n \frac{\pi u}{\omega} = n \frac{\pi}{\omega \sqrt{L_1 C_1}},$$

czyli

$$\omega_r = n \frac{\pi}{l \sqrt{L_1 C_1}} = n \frac{\pi}{\sqrt{L_l C_l}}, \quad (250'')$$

jeżeli  $L_l = l \cdot L_1$  i  $C_l = C_1$  są całkowitą indukcyjnością i pojemnością danej linii o długości  $l$ .

Podobnie otrzymamy dla linii *otwartej*:

$$x = \frac{2n - 1}{2} \cdot \frac{\pi}{\omega \sqrt{L \cdot C}},$$

czyli

$$\omega_r = (2n - 1) \frac{\pi}{2l \sqrt{L_1 C_1}} = (2n - 1) \cdot \frac{\pi}{2 \sqrt{L_l C_l}}. \quad (251'')$$

Z równań (250'), (251'), (250'') i (251'') możemy wyprowadzić następujące wnioski:

a) *Linia zwarta* jest w rezonansie napięć ( $X_l = 0$ ), z siłą elektromotoryczną zasilającą, jeżeli długość linii jest *dowolną całkowitą wielokrotnością połówki długości fali*, jaka przy tej częstotliwości powstaje w linii zgodnie z równaniem (220). A więc dla spełnienia warunku rezonansu, linia musi być równa conajmniej połowie długości fali.

Linja *otwarta* natomiast jest w rezonansie, jeżeli jej długość jest *nieparzystą wielokrotnością ćwiartki długości fali*.

Tu więc linja musi być równa przynajmniej  $\frac{1}{4} \lambda$ .

b) Jeżeli linja *zwarta* jest w rezonansie z pewną częstotliwością, to jest również w rezonansie ze *wszystkimi jej harmonicznymi*.

Jeżeli linja *otwarta* jest w rezonansie z pewną częstotliwością, to jest również w rezonansie ze *wszystkimi jej harmonicznymi nieparzystymi*.

Łatwo się przekonać z równań oraz z rysunków 142 i 143, że dla  $X = +\infty$  warunki będą odwrotne, to znaczy, linja *zwarta* będzie w rezonansie prądów z harmonicznymi nieparzystymi, a *otwarta* ze wszystkimi harmonicznymi.

### 13. Zastosowanie teorii odbić do anten prostych.

Teoria odbić zupełnych posiada dla radjotechniki znaczenie podstawowe, na niej bowiem opiera się teoria anten tak prostych, jak i najbardziej złożonych.

*Antena prosta*, której teorię tu rozwiniemy, jest to linja jednoprzewodowa, zazwyczaj ustawiona pionowo, w której wytwarzamy fale stojące prądu i napięcia. Jeden (górnny) koniec anteny zawsze jest otwarty, drugi (dolny) może być również otwarty lub też uziemiony, przyczem dla uproszczenia przyjmujemy, że ziemia jest doskonałym przewodnikiem.

Antenę izolowaną na obu końcach nazywamy *anteną symetryczną*, w drugim zaś przypadku mamy do czynienia z anteną *asymetryczną* czyli *uziemioną*.

Teoria obu typów sprowadza się do teorii *linji otwartej*, jeżeli rozważania nasze będziemy odnosili do *górnego końca* anteny. Zasadnicza różnica między oboma typami będzie polegała, zgodnie z poprzednim paragrafem, na następującem:

a) By w antenie *uziemionej* na końcu uziemionym przypadł punkt węzłowy napięcia, musi ona posiadać długość równą *ćwiartce* długości fali wytwarzanej, lub też jej wielokrotności nieparzystej. Antena uziemiona jest więc w rezonansie z *falą podstawową* równą jej *czterokrotnej długości*  $l$ :

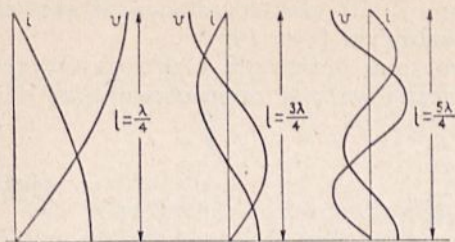
$$\lambda_0 = 4l, \text{ czyli } l = \frac{\lambda_0}{4}, \quad (252)$$

oraz ze wszystkimi jej harmonicznymi *nieparzystymi* (rys. 144)

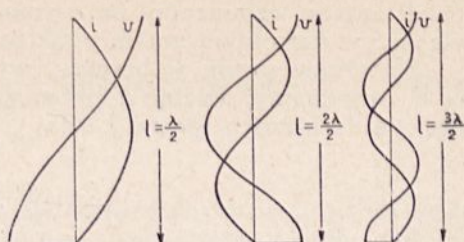
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{2n-1}, \text{ czyli } \omega_r = \omega_0(2n-1). \quad (252\text{-a})$$

Antena *symetryczna* natomiast będzie w rezonansie z *falą podstawową*, równą *dwukrotnej* jej długości:

$$\lambda_0 = 2l', \text{ czyli } l' = \frac{\lambda_0}{2}. \quad (253)$$



Rys. 144.



Rys. 145.

oraz ze wszystkimi jej harmonicznymi (rys. 145)

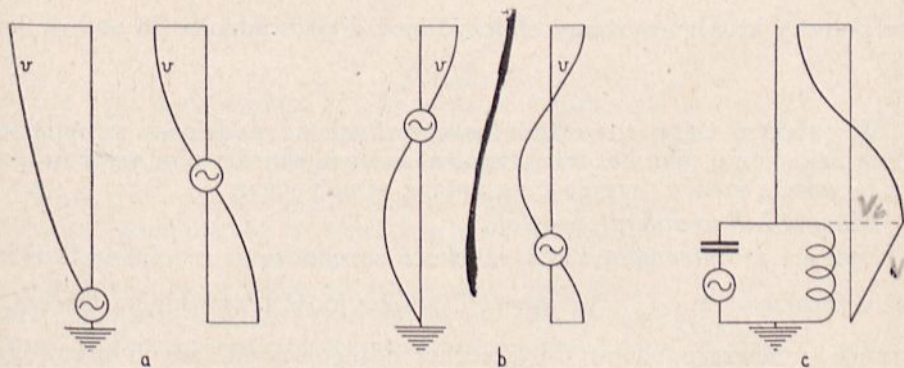
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \quad \text{czyli } \omega_r = n \omega_0. \quad (253-a)$$

b) Antena uziemiona będąca w rezonansie, ma więc zawsze u podstawy *brzusiec prądu*, zaś u wierzchołka *brzusiec napięcia*. Jak wynika z równań (246) i (246-a), związek między temi wielkościami wyraża się równaniem<sup>1)</sup>

$$V_b = J_b \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = J_b Z_0. \quad (254)$$

W antenie *symetrycznej* natomiast na obu jej końcach występują brzusce napięcia.

Wierzchołek anteny uziemionej i *oba* końce anteny symetrycznej są więc punktami, na których izolację należy zwrócić szczególną uwagę.



Rys. 146.

### Zasilanie anten.

Zasilanie anteny uskutecznia się przeważnie w *węźle napięcia*<sup>2)</sup> (zasilanie takie można nazwać *prądowym*), włączając siłę elektromotoryczną w antenie uziemionej u podstawy, w antenie symetrycznej w środku (rys. 146-a).

<sup>1)</sup> W dalszym ciągu rozważania nasze będą się odnosiły do wartości *skutecznych* napięcia i prądu.

<sup>2)</sup> Tam bowiem antena, zgodnie § 12, posiada najmniejszą oporność.

Jeżeli antenę wzbudzamy na harmonicznej, siłę elektromotoryczną można włączyć w dowolnym innym punkcie węzłowym (rys. 146-b).

Natężenie prądu w brzuścu, wytworzone przez siłę elektromotoryczną  $E$ , otrzymamy, dzieląc  $E$  przez skuteczną wartość oporności anteny odniesioną do brzuśca (patrz § 14):

$$J_b = \frac{E}{R_e} \quad (255)$$

Należy tu zwrócić uwagę, że od włączenia siły elektromotorycznej w antenę (z wyjątkiem włączenia jej u podstawy anteny uziemionej) zależy możliwość powstawania harmonicznych. Jeżeli, na przykład, źródło prądu znajduje się w środku anteny symetrycznej, to jest rzeczą oczywistą, że antena rozбивa się niejako na dwie anteny ćwierć-falowe, w których warunki rezonansu napięć mają tylko harmoniczne nieparzyste częstotliwości zasilającej. Podobne rozważania możemy odnieść i do anteny zasilanej w dowolnym punkcie węzłowym.

Obok zasilania prądowego możliwe jest również zasilanie napięciowe anteny symetrycznej. Można je urzeczywistnić na przykład w ten sposób, że antenę symetryczną łączymy jednym końcem z obwodem rezonansowym, jak na rys. 146-c. Wówczas przepięcie  $V$ , powstające w tym obwodzie, jest równocześnie wartością brzuścową  $V_b$  napięcia anteny. Zgodnie ze wzorem (154), napięcie to wytwarza w antenie prąd o wartości brzuścowej:

$$J_b = V_b \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$$

przy pomocy którego możemy obliczyć moc doprowadzoną do anteny jako

$$P = J_b^2 R_e$$

W dalszym ciągu rozważań teoretycznych za podstawę przyjmujemy antenę uziemioną, jako bardziej typową, zaś wnioski dla niej wyprowadzone z łatwością można przenieść na antenę symetryczną.

*Długość fali w antenie prostej.*

Zgodnie z równaniem (235) szybkość rozchodzenia się fal w linii bez strat wynosi  $u = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ . Pojemność i indukcyjność przewodnika niemagnetycznego, umieszczonego w dostatecznej odległości od innych przewodników, o średnicy małej w porównaniu z długością, wyrażają się z dostatecznym przybliżeniem wzorami:

$$\left. \begin{aligned} C_A &\approx \frac{l}{2 \ln \frac{l}{r}} \cdot j.e.st = \frac{l}{2 \ln \frac{l}{r}} \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-11} \text{ F} , \\ L_A &\approx 2l \cdot \ln \frac{l}{r} \cdot j.e.m. = 2l \cdot \ln \frac{l}{r} \cdot 10^{-9} \text{ H} , \end{aligned} \right\} \quad (256)$$

stąd obliczymy szybkość:

$$u = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{2 \ln \frac{l}{r} \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1/9 \cdot 10^{-11}}{2 \ln l/r}}} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sek} = c. \quad (256-a)$$

A więc szybkość rozchodzenia się fal elektrycznych w linii bez strat równa się szybkości światła, czyli szybkości rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w przestrzeni. Temsamem i długość fali elektrycznej w antenie prostej uważać możemy za równą w przybliżeniu fali elektromagnetycznej w przestrzeni.

#### 14. Obwód zastępczy anteny prostej uziemionej.

Zgodnie ze wzorem (252) antena prosta uziemiona jest w rezonansie z częstotliwością podstawową, której odpowiada długość fali  $\lambda = 4l$ . Jest to, jak wynika z (251''), częstotliwość kąтова:

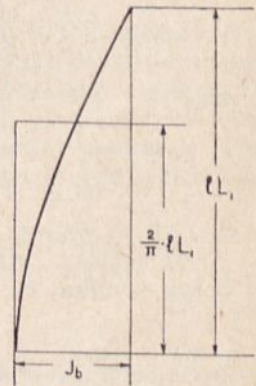
$$\omega_0 = \frac{\pi}{2l \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{\pi}{2 \sqrt{l L_1 \cdot l C_1}} = \frac{1}{\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{L_{A(H)} C_{A(F)}}}. \quad (257)$$

jeżeli przez  $L_A$  i  $C_A$  oznaczymy indukcyjność i pojemność przewodnika antenowego. Podstawiając w równaniu (257) zależność (220), otrzymamy:

$$\lambda_0 = 4 \cdot c \cdot \sqrt{L_A C_A} = 4 \sqrt{L_{A(\text{cm})} C_{A(\text{cm})}}, \quad (257-a)$$

wzór na falę podstawową anteny prostej (wyrażoną w cm), który z dostatecznym przybliżeniem stosuje się również do anten o bardzo złożonej konstrukcji.

Wzór (257) nie jest identyczny ze wzorem na częstotliwość rezonansową w obwodzie niby-ustalonym, któryby posiadał te same wartości  $L$  i  $C$ . Jest to dla nas oczywiste, skoro sobie uprzytomnimy, że rozkład prądu i napięcia wzdłuż przewodnika nie jest równomierny. Tak więc na przykład strumień magnetyczny wytworzony w indukcyjności  $L_A$  przez prąd, którego wartość skuteczna u podstawy anteny wynosi  $J_b$ , nie będzie  $J_b L_A$  lecz wyniesie, gdy uwzględnimy równanie (247'),



Rys. 147.

$$\Phi = \int_{x=0}^{x=\frac{\lambda}{4}=l} J_x L_1 dx = J_b L_1 \int_{x=0}^{x=\frac{\lambda}{4}=l} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot dx = \frac{J_b L_1 \lambda}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot J_b L_A.$$

Stąd obliczymy *indukcyjność* tak zwaną *skuteczną* anteny uziemionej, odnosząc ją do prądu u jej podstawy (rys. 147):

$$L_e = \frac{\Phi}{J_b} = \frac{2}{\pi} \cdot L_A. \quad (258)$$

Indukcyjność rzeczywista  $L_A$  anteny, w odróżnieniu od indukcyjności skutecznej, nazywamy indukcyjnością *statyczną*.

W ten sam sposób możemy obliczyć pojemność skuteczną anteny z całki, wyrażającej jej całkowity ładunek elektryczny, jako iloraz z ładunku i napięcia brzoścowego.

Mamy bowiem:

$$Q = \int_{x=0}^{x=\lambda/4=l} V_x C_1 dx = C_1 V_b \int_{x=0}^{x=\lambda/4=l} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} dx = \frac{2}{\pi} \cdot l \cdot C_1 V_b,$$

$$\text{czyli } C_e = \frac{Q}{V_b} = \frac{2}{\pi} C_A. \quad (258\text{-a})$$

Łatwo się przekonać, że wyrażenia (258) i (258-a) spełniają równanie (2) rozdziału I, a obwód utworzony z indukcyjności  $L_e$  i pojemności  $C_e$  pod względem częstotliwości rezonansowej będzie odpowiadał antenie prostej.

Jednakże obwód taki nie odpowiada antenie pod względem mocy urojonej, nie daje bowiem równowartości wyrażen  $J^2 L_e'$  oraz  $V^2 C_e'$ . Aby spełnić warunek energetyczny, wartości skuteczne musiałyby odpowiadać całkom (odniesionym do wartości skutecznych prądu i napięcia):

$$W_c = \int_{x=0}^{x=\lambda/4=l} J_x^2 L_1 dx = J_b^2 L_1 \int_0^{\lambda/4} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} x dx = \frac{J_b^2}{2} l L_1,$$

oraz

$$W_c = \int_0^{\frac{\lambda}{4}} V_x^2 C_1 dx = V_b^2 C_1 \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} dx = \frac{V_b^2}{2} l C_1,$$

z czego wynika, że wartości skuteczne energetyczne winny wynosić:

$$L_e' = 0,5 L_A \quad (258')$$

$$C_e' = 0,5 C_A. \quad (258'\text{-a})$$

Wszelako, jak łatwo się przekonać, wielkości te nie spełniają warunku częstotliwości rezonansowej. Nie można więc spełnić równocześnie warunków dla częstotliwości rezonansowej i dla mocy urojonej. Dlatego też powszechnie ograniczamy się do żądania równej częstotliwości rezonansowej, przyjmując jako wartości skuteczne wielkości podane pod (258) i (258-a).

Również i dla oporności omowej przewodnika antenowego wprowadzić musimy pojęcie wielkości skutecznej. Będzie to oczywiście oporność zastępcza, która włączona w brzości prądu pochłonie tę samą moc, co rzeczywista oporność przewodnika przy rzeczywistym rozkładzie prądu w antenie. Da ją całka:

$$J_b^2 R_e = \int_0^{\frac{\lambda}{4}} J_x^2 R_1 dx = \frac{J_b^2 l R_1}{2},$$

czyli

$$R_e = 0,5 R_A. \quad (259)$$

Należy tu podkreślić, że wyrażenie (259) daje jedynie *oporność omową* przewodnika antenowego, nie odnosi się natomiast do *oporu promieniowania* anteny, o którym będzie mowa w dalszym ciągu (rozdział VII).

Gdybyśmy chcieli odnieść oporność anteny nie do punktu uziemienia, lecz do innego punktu, odległego o  $x$  od wierzchołka anteny, musielibyśmy spełnić warunek równości mocy:

$$J_b^2 R_e = J_x^2 R_e',$$

czyli

$$R_e' = R_e \cdot \left( \frac{J_b}{J_x} \right)^2 = \frac{R_e}{\sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda}}. \quad (259-a)$$

## 15. Strojenie anteny prostej do rezonansu.

Dostrajanie anteny do rezonansu zapomocą zmiany jej długości byłoby niezbyt dogodnie, a nawet w większości przypadków byłoby niewykonalne. Z tego powodu stosuje się dostrajanie anten, polegające na tem, że w antenę włącza się odpowiedni dodatkowy opór indukcyjny lub pojemnościowy, którego zadaniem jest skompensowanie oporności urojonej, jaką antena o danej długości przedstawia przy częstotliwości prądu zasilającego.<sup>1)</sup>

Na podstawie równania (249) oporność urojoną anteny o długości  $l$  wyrazić możemy — opierając się na zależnościach (218), (227) i (257) — w sposób następujący<sup>2)</sup>:

<sup>1)</sup> W dalszym ciągu będziemy się opierać na założeniu, że długość włączonych przyrządów dodatkowych, a zwłaszcza zwojnic, jest znikomo mała wobec długości anteny.

<sup>2)</sup> Przeliczenie:

$$\lambda = \frac{2\pi u}{\omega}; \quad \lambda_0 = \frac{2\pi u}{\omega_0}; \quad \text{więc} \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\omega_0}{\omega};$$

Stąd mamy

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2\pi l \omega}{\lambda_0 \omega_0} = \frac{2\pi l \omega}{4l \omega_0} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}.$$

$$\begin{aligned}\hat{Z}_A &= -j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \gamma l = -j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} = \\ &= -j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}.\end{aligned}\quad (249\text{-a})$$

Wyrażenie to, zgodnie z § 12 i wykresami rys. 143, równa się zeru dla wszystkich wartości  $\omega_r = (2n - 1)\omega_0$ , czyli dla fal długości  $\lambda_r = \frac{4l}{2n - 1}$  (równanie 252-a).

Na tej podstawie rozpatrzmy, w jaki sposób można dostroić do rezonansu antenę uziemioną, której długość jest mniejsza lub większa od ćwiartki długości fali.

a) *Przedłużenie fali anteny.*

Jeżeli częstotliwość zasilająca jest mniejsza od  $\omega_0$ , czyli jeżeli fala zasilająca jest dłuższa od fali podstawowej anteny, *antena zachowuje się jak pojemność*. Dostrojenie do rezonansu można skutecznie, włączając w szereg z anteną u jej podstawy indukcyjność  $L$  (rys. 148-a), spełniającą warunek:

$$j\omega L - j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = 0, \quad (260)$$

lub też, po uwzględnieniu zależności  $\omega = \frac{2\pi u}{\lambda}$  (równanie 220) i prostym przekształceniu<sup>1)</sup>

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{L}{L_1} - \operatorname{ctg} 2\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{2\pi l}{\lambda} \cdot \frac{L}{L_A} - \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} = 0. \quad (260')$$

A więc *indukcyjność* włączona w szereg z anteną *zwiększa*, czyli *przedłuża* falę anteny, a więc *nastraja ją na częstotliwość rezonansową mniejszą*, podobnie zresztą, jak indukcyjność włączona szeregowo w obwód rezonan-

<sup>1)</sup> Przeliczenie:

$$\omega L = \frac{2\pi u}{\lambda} \cdot L = \frac{2\pi}{\lambda \sqrt{L_1 C_1}} \cdot L,$$

skąd

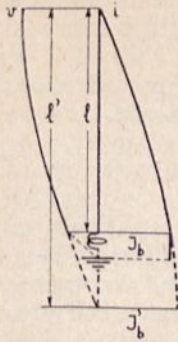
$$\frac{2\pi}{\lambda \sqrt{L_1 C_1}} \cdot L - \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} = 0.$$

co po wymnożeniu przez  $\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$  daje ostatecznie:

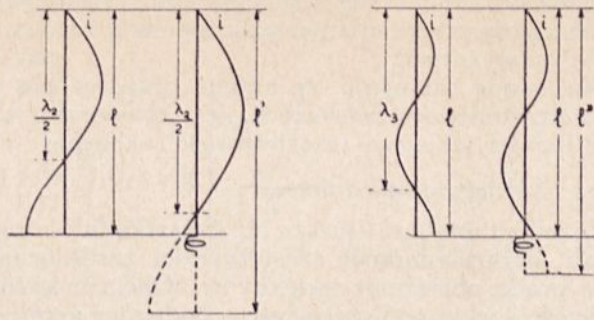
$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{L}{L_1} - \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} = 0.$$

Należy pamiętać, że  $\lambda$  jest tu długością fali w przewodniku i tylko z pewnym przybliżeniem odpowiada długości fali elektromagnetycznej.



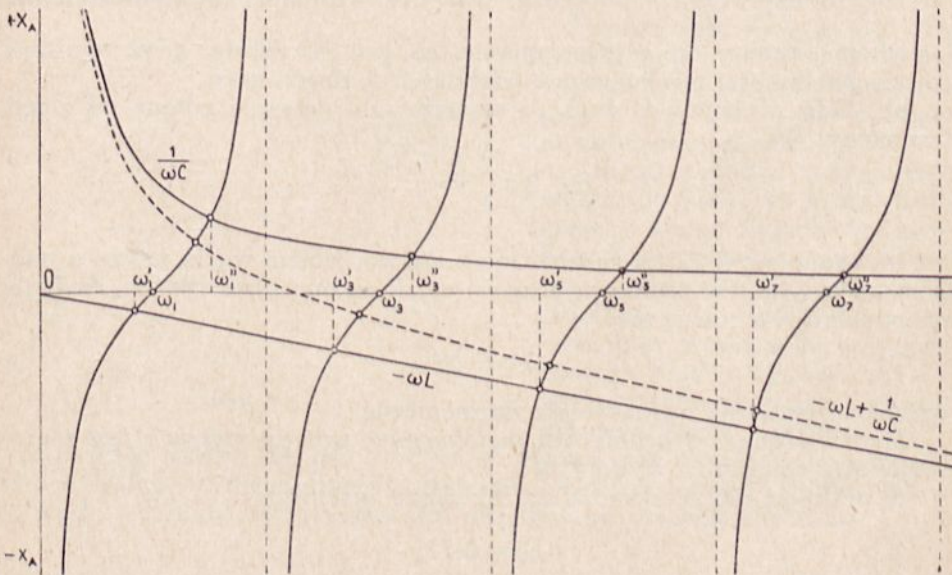


Rys. 148-a.



Rys. 148-b.

sowy. W zasadzie przedłużać można w ten sposób antenę dowolnie, jednakże ze względów technicznych, szczególnie w urządzeniach nadawczych, nie przekracza się 8 do 10-krotnej długości fali własnej. W ten sam sposób jak podstawową, można przedłużyć którąkolwiek z fal harmonicznych nieparzystych anteny, jeżeli długość anteny jest mniejsza, niż odpowiednia wielokrotność ćwiartek fali (rys. 148-b). Dla obliczenia żądanej wielkości  $L$ , zastosować można bezpośrednio wzory (260) lub (260'). Podobnie i dalsze wzory tego rozdziału nadają się do obliczania anten, strojonych na harmoniczną.



Rys. 149.

Włączenia dodatkowej indukcyjności w antenę, wpływa ciekawie na jej większe częstotliwości rezonansowe, których już nie można nazwać harmonicznymi, gdyż do częstotliwości podstawowej nie pozostają w stosunku harmonicznym. Świadczy o tem wykres rys. 149. na którym prosta  $-\omega L$  wy-

raza oporność indukcyjną <sup>1)</sup>, jako funkcję częstotliwości, a punkty przecięcia jej z charakterystykami anteny dają punkty rezonansowe dla kolejnych częstotliwości wyższych.

Na uwagę zasługuje, że antena przedłużona, nastrojona na którąkolwiek z częstotliwości większych, jest równocześnie nastrojona i na pewne częstotliwości mniejsze (częstotliwości uboczne).

b) *Skrócenie fali anteny.*

Jeżeli antena jest dłuższa niż ćwiartka fali lub nieparzysta liczba ćwiartek fali, odpowiadającej częstotliwości zasilającej, przedstawia ona dla źródła prądu obciążenie indukcyjne. Obciążenie to musimy skompensować pojemnością włączoną szeregowo u podstawy anteny (skracanie fali anteny):

$$-j \frac{1}{\omega C} - j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = 0, \quad (261)$$

lub w odniesieniu do długości fali:

$$\frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{C_1}{C} + \operatorname{ctg} 2\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi l} \cdot \frac{C_A}{C} + \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} = 0. \quad (261')$$

Równanie to daje dwa przypadki krańcowe:

a) Jeżeli  $C = \infty$  a więc, gdy antena połączona jest bezpośrednio z ziemią, to mamy  $\operatorname{ctg} 2\pi \frac{l}{\lambda} = 0$ , czyli warunek rezonansu anteny uziemionej.

Nastrojenie anteny nie uległo zmianie, co jest oczywiste, gdyż oporność urojona pojemności nieskończenie wielkiej jest równa zeru.

b) Gdy założymy  $C = 0$ , co oznacza odizolowanie anteny od ziemi, otrzymamy:

$$\operatorname{ctg} 2\pi \frac{l}{\lambda} = \infty.$$

Jest to, zgodnie z § 12, równoznaczne z wytworzeniem węzła prądu u podstawy anteny, antena zachowuje się więc jak antena symetryczna, czyli jej fala podstawowa równa się:

$$\lambda'_0 = 2l,$$

i antena ta rezonuje na wszystkie harmoniczne.

Stąd wniosek: *Skracanie fali podstawowej anteny możliwe jest teoretycznie w granicach od  $\lambda_0$  do  $\lambda_0/2$ .*

W praktyce nie przekracza się zazwyczaj wartości:

$$\lambda_{\min} = 0,7 \lambda_0.$$

Powstawanie większych częstotliwości rezonansowych anteny skróconej (poza przypadkami skrajnymi dyskutowanymi powyżej), ilustrują nam na rys. 149 punkty przecięcia krzywej  $\frac{1}{\omega C}$  z charakterystykami anteny.

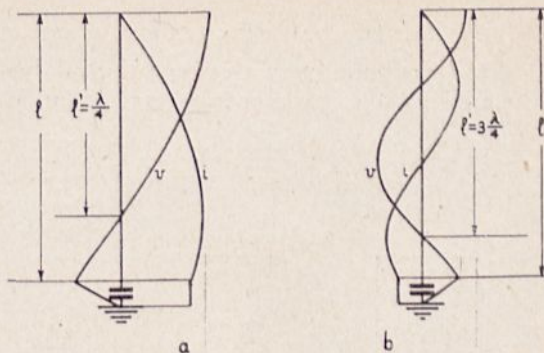
<sup>1)</sup> Ze znakiem przeciwnym.

Rozkład prądu i napięcia w antenie skróconej podaje rys. 150-a. Charakterystyczne jest tu powstanie powyżej uziemienia węzła napięcia, a temsamem i brzośca prądu. Antena skrócona różni się więc od anteny nieobciążonej i od anteny przedłużonej tem, że w miejscu uziemienia posiada nie maksimum prądu, lecz wartość natężenia mniejszą.

Rys. 150-b wskazuje, w jaki sposób za pomocą kondensatora szeregowego można dostroić antenę na jej harmoniczną.

Typowymi przykładami anten skróconych z natury swej konstrukcji są a) antena z przeciwwagą i b) antena wisząca samolotowa.

Konstrukcja anteny z przeciwwagą polega na tem, że zamiast z ziemią, łączymy ją z siecią przewodników, rozwieszoną na niewielkiej wysokości nad ziemią, i posiadającą względem ziemi znaczną pojemność. Pojemność ta, jako włączona szeregowo między ziemią i anteną, skraca w pewnej mierze falę anteny.



Rys. 150.



Rys. 151.

Przeciwwagę anteny stanowi pojemność własna mas metalowych samolotu, która ze względu na niewielkie wymiary konstrukcji jest rzędu zaledwie kilkuset  $\mu\mu F$ . Antena samolotowa jest więc anteną znacznie skróconą.

Przeciwwagi stosuje się, gdy ziemia pod anteną posiada złą przewodność, lub gdy charakter gruntu (np. skały) nie pozwala na założenie uziemienia.

Antena wisząca samolotowa wykonana jest jako linka obciążona na końcu ciężarkiem i swobodnie zwisająca z samolotu. Pod wpływem wypadkowego działania siły ciężkości i oporu powietrza skutkiem ruchu postępowego, antena wisząca przybiera charakterystyczny kształt krzywej zwisu (rysunek 151).

## 16. Antena prosta obciążona indukcyjnością i pojemnością równocześnie.

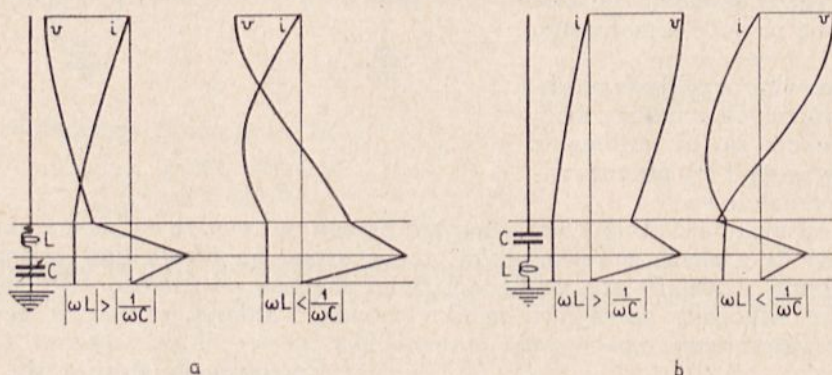
Anteny obciążone samą tylko indukcyjnością spotyka się w praktyce bardzo często, natomiast anten z samą tylko pojemnością włączoną w szereg, prawie że się nie spotyka. Zwykle bowiem w szereg z pojemnością włącza się jeszcze indukcyjność, choćby jako organ sprzężenia z dalszymi ob-

wodami. Szczególnie w odbiornikach rozpowszechnionym sposobem strojenia jest włączanie indukcyjności skokami i pokrywanie tych skoków zapomożą kondensatora obrotowego.

A. *Indukcyjność i pojemność włączone szeregowo.*

Stąd dochodzimy do przypadku ogólnego anteny obciążonej szeregowo indukcyjnością i pojemnością (rys. 152):

$$j \omega L - j \frac{1}{\omega C} - j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = 0, \quad (262)$$



Rys. 152.

czyli, po podobnych przekształceniach, jak w poprzednim paragrafie:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{L}{L_1} - \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{C_1}{C} - \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2\pi l}{\lambda} \cdot \frac{L}{L_A} - \frac{\lambda}{2\pi l} \cdot \frac{C_A}{C} - \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} = 0. \quad (262')$$

Równanie (262) daje dwie możliwości:

- a) albo  $|\omega L| > \left| \frac{1}{\omega C} \right|$ , a wówczas antena jest przedłużona, albo też  
 b)  $|\omega L| < \left| \frac{1}{\omega C} \right|$ , co w wyniku daje skrócenie anteny.

Wreszcie, jeżeli spełnimy warunek:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad \text{czyli} \quad LC = \frac{1}{\omega^2},$$

długość fali nie ulegnie zmianie i antena będzie nastrojona na swoją falę własną. Mamy wówczas dla fali podstawowej z (257):

$$\omega = \omega_0 = \frac{\pi}{2l} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

czyli

$$LC = \frac{4}{\pi^2} \cdot lL_1 \cdot lC_1 = \frac{4}{\pi^2} \cdot L_A C_A,$$

co jest zgodne z wywodami § 14.

Jednakże obecność zwojnicy i kondensatora w antenie nie pozostaje bez wpływu na nią. Przedewszystkiem przez szeregowe włączenie  $L$  z indukcyjnością anteny zwiększa się indukcyjność wypadkową obwodu, a włączenie szeregowe  $C$  z pojemnością anteny zmniejsza pojemność wypadkową. Wobec tego zwiększa się współczynnik przepięcia obwodu (zmniejsza się dekrement), a temsamem rośnie ostrość krzywej rezonansu. Stąd nazwa anteny ze zmniejszonym tłumieniem.

Następnie, pomimo, że częstotliwość podstawowa pozostaje bez zmiany, obecność dodatkowych oporów urojonych wpływa na wyższe częstotliwości rezonansowe, jak to wskazuje krzywa kropkowana na rys. 149. Fakt ten nie jest bez znaczenia dla tłumienia harmoniczných w urządzeniach nadawczych.

Jak wynika z rysunku 152, jeżeli w układzie przeważa indukcyjność, otrzymujemy na zwojnicy węzeł napięcia, a więc punkt, którego potencjał jest równy potencjałowi ziemi. Punkt taki możemy połączyć z ziemią, nie wpływając w niczem na zachowanie się układu. Własność tę wykorzystujemy w antenach z przeciwwagą, gdzie punkt węzłowy zwojnicy przedłużającej łączy się czasami z masą aparatury, a przez nią z t. zw. uziemieniem stacyjnym.

Węzła napięcia na zwojnicy niema, gdy indukcyjność jest włączona poniżej kondensatora, jak na rys. 152 b.

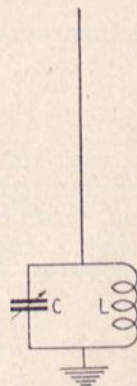
Jeżeli natomiast w antenie przeważa opór pojemnościowy, węzeł otrzymujemy w pewnym punkcie anteny, co jest oczywiste, gdyż antena jest skrócona.

### B. Pojemność dołączona równoległe do indukcyjności przedłużającej.

Często spotyka się — szczególnie w urządzeniach odbiorczych — układ, w którym indukcyjność i pojemność dodatkowa w antenie połączone są równoległe, na podobieństwo obwodu rezonansu prądów (rys. 153). Obwód taki, jaki wykazano w rozdziale I, zależnie od nastrojenia, może zachowywać się jak pojemność, jak oporność omowa, lub też jak indukcyjność. Stąd wniosek, że obecność jego w antenie — zależnie od warunków — może falę jej przedłużać albo skracać.

Pomijając dla większej przejrzystości oporności omowe włączonego obwodu, otrzymamy jego oporność pozorną:

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= \frac{\omega L \cdot \left( -j \frac{1}{\omega C} \right)}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \\ &= -j \frac{L}{C} \cdot \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = -j \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} \end{aligned}$$



Rys. 153.

Stąd warunek rezonansu anteny obciążonej da nam równanie:

$$\left(-j \frac{L}{C}\right) \cdot \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} - j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = 0, \quad (264)$$

czyli

$$\left(-\frac{L}{C} \cdot \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}\right) = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Wobec tego również i odwrotności tych wyrażeń są sobie równe, możemy więc napisać:

$$\frac{C}{L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = 0, \quad (264')$$

lub też po przekształceniu (patrz § 15):

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{C}{C_1} - \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{L_1}{L} + \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2\pi l}{\lambda} \cdot \frac{C}{C_A} - \frac{\lambda}{2\pi l} \cdot \frac{L_A}{L} + \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda} = 0. \quad (264'')$$

Z równania (264) wynika, że antena będzie przedłużona, o ile będzie:

$$\left(-\frac{L}{C}\right) \cdot \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = -\frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} > 0,$$

to znaczy, o ile:

$$\omega^2 < \frac{1}{LC}, \quad (265)$$

a więc jeżeli częstotliwość rezonansowa  $\omega_r$  obwodu dołączonego będzie większa od częstotliwości zasilającej, czyli, zgodnie z poprzednimi uwagami, jeżeli obwód będzie obciążał antenę indukcyjnie. Pod tym warunkiem obwód rezonansu prądów włączony w antenę pozwala realizować znaczne przedłużenie fali przy pomocy indukcyjności stosunkowo małej.

## 17. Stałe skuteczne anteny przedłużonej i skróconej.

Indukcyjność skuteczną anteny o jakimkolwiek rozkładzie prądu możemy obliczyć na zasadach, zastosowanych w § 14 z równości:

$$L_A J_{sr} = L_e J_b \quad \text{czyli} \quad L_e = \frac{J_{sr}}{J_b} \cdot L_A,$$

jeżeli przez  $J_b$  oznaczymy wartość skuteczną prądu w brzuściu lub w miejscu uziemienia.

W antenie przedłużonej prąd u podstawy, zgodnie z rys. 148-a wynosi:

$$J_b = J_b' \sin \frac{2\pi l}{\lambda},$$

jeżeli  $J_b'$  jest fikcyjną wartością brzuścową odniesioną do ćwiartki fali. Stąd więc rozkład prądu wzdłuż anteny wyrazić możemy równaniem:

$$J_x = \frac{J_b}{\sin \frac{2\pi l}{\lambda}} \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad (266)$$

z którego można obliczyć średnią wartość prądu w antenie:

$$J_{sr} = \frac{J_b}{l \cdot \sin \frac{2\pi l}{\lambda}} \int_{x=0}^{x=l} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot dx = J_b \frac{\lambda}{2\pi l} \cdot \frac{1 - \cos \frac{2\pi l}{\lambda}}{\sin \frac{2\pi l}{\lambda}}.$$

Stąd, zgodnie z poprzednim określeniem, indukcyjność skuteczna anteny przedłużonej równa się:

$$L_e = L_A \cdot \frac{\lambda}{2\pi l} \cdot \frac{1 - \cos \frac{2\pi l}{\lambda}}{\sin \frac{2\pi l}{\lambda}}. \quad (267)$$

Funkcja ta, typu  $\frac{1 - \cos \alpha y}{\alpha y \cdot \sin \alpha y}$ , w miarę przedłużania fali, czyli w miarę zbliżania się  $\frac{l}{\lambda}$  do zera, dąży do granicy:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha y}{\alpha y \sin \alpha y} = 0,5,$$

wobec czego dla większych przedłużeń można przyjąć z dostateczną dokładnością:

$$L_e = 0,5 L_A. \quad (267a)$$

Analogicznie (rys. 148-a) możemy obliczyć pojemność skuteczną anteny przedłużonej z zależności:

$$C_A V_{sr} = C_e V_b,$$

oraz

$$V_{sr} = \frac{V_b}{l} \int_{x=0}^{x=l} \cos \frac{2\pi x}{\lambda},$$

jako

$$C_e = \frac{C_A}{l} \int_{x=0}^{x=l} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot dx = C_A \frac{\lambda}{2\pi l} \cdot \sin \frac{2\pi l}{\lambda}. \quad (268)$$

Ta znów funkcja typu  $\frac{\alpha y}{\sin \alpha y}$  w miarę przedłużania fali dąży do jedności, wobec czego pojemność skuteczna anteny znacznie przedłużonej:

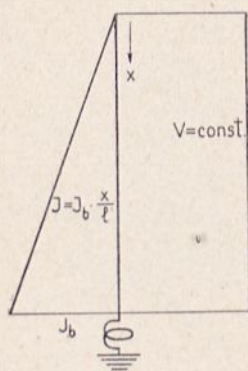
$$C_e \cong C_A, \quad (268a)$$

Dlatego też częstotliwość rezonansową anteny kilkakrotnie przedłużonej można wyrazić wzorem przybliżonym:

$$\omega_r \cong \frac{1}{\sqrt{(L + 0,5 L_A) \cdot C_A}}. \quad (269)$$

Przybliżony rozkład prądu i napięcia w antenie znacznie przedłużonej przedstawia rys. 154.

Wartości skuteczne  $L_e$  i  $C_e$ , odniesione do warunków energetycznych i obliczone, zgodnie z założeniami, podanymi w § 14, dałyby wielkości graniczne  $\frac{L_A}{3}$  i  $C_A$ <sup>1)</sup> (patrz niżej obliczenie  $R_e$ ).



Rys. 154.

Wzory (267) i (268) zastosować możemy bez zmian również i do anteny skróconej, jeżeli indukcyjność skuteczną odnosimy do prądu u podstawy anteny. Gdybyśmy ją chcieli odnieść do brzośca prądu, co zresztą posiada mniejsze znaczenie praktyczne, otrzymalibyśmy:

$$\begin{aligned} L_e' &= L_A \frac{1}{l} \int_{x=0}^{x=l} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot dx = \\ &= L_A \cdot \frac{\lambda}{2\pi l} \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi l}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

czyli:

$$L_e' = L_e \cdot \sin \frac{2\pi l}{\lambda}. \quad (270)$$

<sup>1)</sup> Spotykana czasami w literaturze wartość  $L_e = \frac{L_A}{3}$  dla (267 a) opiera się na rozwinięciu w szereg funkcji  $\text{ctg} \sqrt{L_A C_A}$  i pominięciu dalszych wyrazów, podczas kiedy suma tych wyrazów dąży do granicy  $\frac{1}{2}$ .



Oporność skuteczną przewodnika o długości  $l$ , odniesiona do podstawy anteny, daje nam wyrażenie:

$$R_c = \frac{R_A}{J_b^2} \cdot \frac{1}{l} \int_{x=0}^{x=l} J^2 dx.$$

Jeżeli prąd u podstawy wynosi  $J_b = J_b' \sin \frac{2\pi l}{\lambda}$  otrzymamy wyrażenie

na oporność skuteczną:

$$\begin{aligned} R_c &= \frac{R_A}{l \sin^2 \frac{2\pi l}{\lambda}} \int_0^l \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot dx = \frac{R_A}{l \sin^2 \frac{2\pi l}{\lambda}} \cdot \left( \frac{l}{2} - \frac{\lambda}{8\pi} \cdot \sin \frac{4\pi l}{\lambda} \right) = \\ &= \frac{R_A}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\lambda}{4\pi l} \cdot \sin \frac{4\pi l}{\lambda}}{\sin^2 \frac{2\pi l}{\lambda}}. \end{aligned} \quad (271)$$

Przy większych przedłużeniach mamy rozkład prądu praktycznie prostolinijny  $J \cong J_b \frac{x}{l}$  (rys. 145) i wartość skuteczną oporności przewodnika obliczyć możemy z całki:

$$R_c = R_A \cdot \frac{1}{l^3} \int_{x=0}^{x=l} x^2 dx = \frac{R_A}{3}. \quad (271a)$$

Z równania (271) wynika, że w miarę skracania anteny, jej oporność omowa rośnie bardzo szybko w odniesieniu do prądu u podstawy. Odniesiona do brzośca prądu wynosiłaby ona:

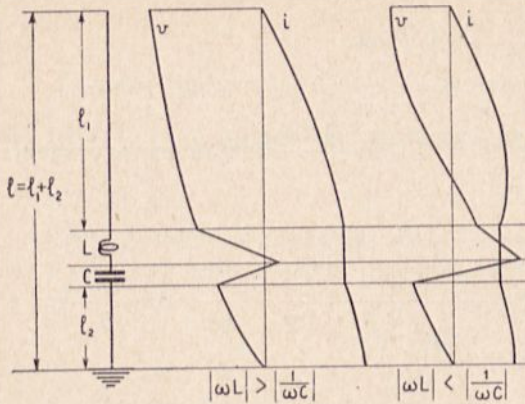
$$R_c' = \frac{R_A}{2} \left( 1 - \frac{\lambda}{4\pi l} \cdot \sin \frac{4\pi l}{\lambda} \right), \quad (271b)$$

byłaby więc znacznie mniejsza.

## 18. Obciążenie włączone w dowolnym miejscu anteny.

Dotychczas przyjmowaliśmy, że urządzenia dostrojcze anteny włączone są bezpośrednio u podstawy anteny. Warunek ten w praktyce niezawsze da się spełnić, gdyż zdarza się, że między aparaturą i punktem uziemienia mamy pewną odległość, której nie można pominąć wobec długości anteny, szczególnie w urządzeniach krótkofalowych. Stąd też nie bez znaczenia jest przypadek, gdy  $L$  i  $C$  są włączone w antenę w pewnej odległości  $l_2$  od pod-

stawy (rys. 155), tak, iż całkowita długość anteny  $l$  równa się sumie obu odcinków  $l_1$  i  $l_2$ .



Rys. 155.

Wówczas, chcąc osiągnąć rezonans w antenie, a więc na dolnym jej końcu otrzymać węzeł napięcia, spełnić musimy dla punktu uziemienia warunek (w ogólnym przypadku):

$$-j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_{01}} + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + j X_{l_2} = 0, \quad (272)$$

jeżeli  $\omega_{01}$  jest częstotliwością rezonansową górnego odcinka anteny, a  $X_{l_2}$  jest opornością urojoną części anteny, leżącej między aparaturą i uziemieniem.

Wartość tę obliczamy najdogodniej, uważając część  $l_2$  za linię zwartą na końcu uziemionym. Wynosi ona <sup>1)</sup>, zgodnie z równaniami (248) i (218):

$$X_{l_2} = j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_{02}} = j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \operatorname{tg} \frac{2\pi l_2}{\lambda},$$

jeżeli  $\omega_{02}$  jest częstotliwością rezonansową dolnego odcinka anteny.

Stąd otrzymamy warunek rezonansu:

$$j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) - j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_{01}} + j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_{02}} = 0, \quad (272')$$

albo po przekształceniu:

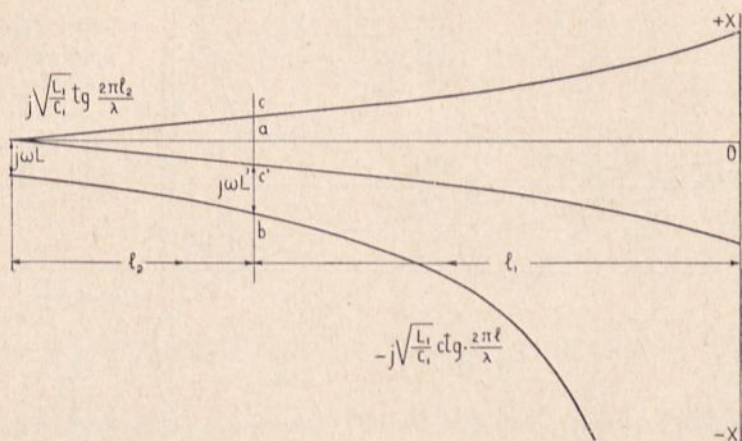
$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{L}{L_1} - \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{C_1}{C} - \operatorname{ctg} \frac{2\pi l_1}{\lambda} + \operatorname{tg} \frac{2\pi l_2}{\lambda} = \\ = \frac{2\pi l}{\lambda} \cdot \frac{L}{L_A} - \frac{\lambda}{2\pi l} \cdot \frac{C_A}{C} - \operatorname{ctg} \frac{2\pi l_1}{\lambda} + \operatorname{tg} \frac{2\pi l_2}{\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (272'')$$

Jest to najogólniejsza postać równania anteny prostej obciążonej. Podstawiając w niem  $l_2 = 0$  sprowadzamy je do poprzednio rozważanego równania (262).

Gdy natomiast założymy kolejno  $C = \infty$ , lub  $L = 0$ , otrzymamy równanie anteny przedłużonej albo skróconej z przyrządem dostrojczym, załączonym w dowolnym miejscu.

<sup>1)</sup> Przyjmujemy dla uproszczenia przeliczeń, że  $L_1$  i  $C_1$  dla obu odcinków przewodnika są te same. Naogół wartości te będą nieco odmienne.

Wpływ, jaki wywiera włączenie przyrządu dostrojczego w pewnej odległości od ziemi, badać można przy pomocy wykresów rys. 156 a i b. Z rys. 156 a wynika, że w miarę przesuwania zwojnicy w górę anteny, wymagana indukcyjność  $L'$  rośnie — indukcyjność staje się mniej skuteczna, co jest oczywiste wobec malenia prądu w kierunku wierzchołka anteny. Wpływ ten uwydatnia się tem silniej im krótsza jest antena wobec długości fali, a więc im bardziej ma być przedłużona.



Rys. 156-a.

Jak wynika z rys. 156-a, warunek rezonansu dla dowolnego punktu anteny, w którym włączona jest indukcyjność, można wyrazić równaniem:

$$-j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi l_1}{\lambda} + j\omega L' = -j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \operatorname{tg} \frac{2\pi l_2}{\lambda} \quad (273)$$

z którego nietrudno obliczyć żadaną wartość  $L'$ .

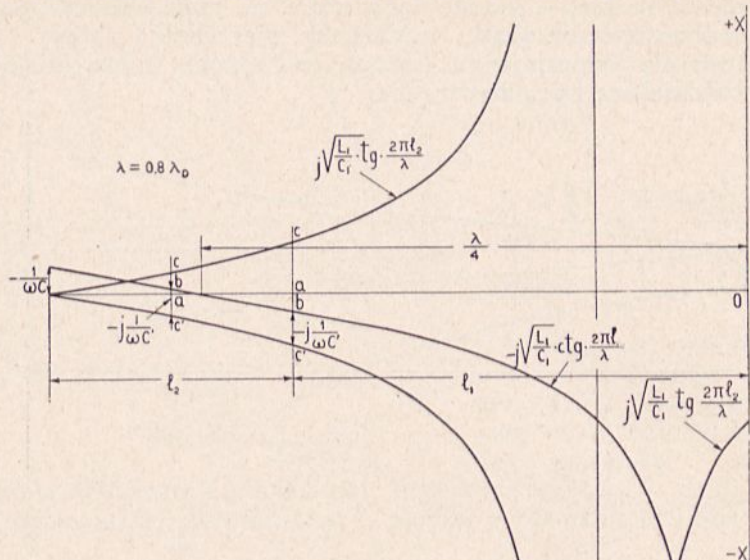
Przy skracaniu anteny (rys. 156-b) wymagana pojemność kondensatora również zależy od miejsca włączenia kondensatora. Przebieg jest jednak nieco odmienny niż przy przedłużaniu, istnieje bowiem pewna odległość  $l_2$ , wymagająca najmniejszej oporności dodatkowej  $\frac{1}{\omega C'}$  dla dostrojenia anteny. Ten najkorzystniejszy punkt włączenia leży w miejscu, gdzie oporności urojone obu odcinków są sobie równe, i nie jest zbyt krytyczny, tak, iż nawet dość znaczne przesunięcie miejsca włączenia kondensatora, nie ma tu wielkiego wpływu.

Rezonans wyraża się tu podobnym wzorem, jak w przypadku przedłużenia fali:

$$j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \operatorname{ctg} \frac{2\pi l_1}{\lambda} + j \frac{1}{\omega C} = j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi l_2}{\lambda} \quad (273a)$$

Jeżeli generator włączony jest u podstawy anteny, oporność skuteczną obu części anteny i przyrządów dostrojczych należy odnieść do podstawy

posługując się wzorami § 16. Jeżeli zaś włączymy generator w miejscu włączenia przyrządów dostrojczych (co jest przypadkiem częście spotykanym), oporności\*skuteczne dla części anteny należy odnieść do tego miejsca.



Rys. 156-b.

W antenie przedłużanej spowoduje to pozorny wzrost oporności, zbyt długie doprowadzenie do ziemi może więc wpłynąć niekorzystnie na warunki pracy generatora, w antenie skróconej natomiast sprzężenie z generatorem w pobliżu brzośca prądu daje pozorne zmniejszenie oporności.

### 19. Pojemność u wierzchołka anteny.

Wobec tego, że dla pierwszej ćwiartki fali stojącej antena przedstawia opór pojemnościowy, część  $x$  tej anteny u góry (rys. 157) można zastąpić kondensatorem, któryby spełnił warunek:

$$\frac{1}{\omega C_0} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \operatorname{ctg} \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad (274)$$

czyli, po podstawieniu  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda \sqrt{L_1 \cdot C_1}}$ ,

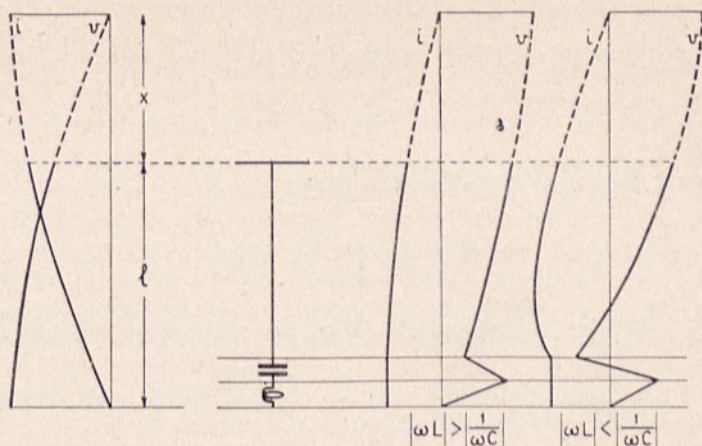
$$\operatorname{ctg} \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{C_1}{C_0}, \quad (274')$$

a więc:

$$C_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot C_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (274'')$$

Również to dowodzi, że pojemność  $C_0$  umieszczona u góry anteny, przedłuża antenę o wartość równą  $x$ .

Oporność pozorną tej anteny odnieść musimy teraz do długości  $(l + x)$ , będzie więc ona równa:



Rys. 157.

$$\hat{Z} = -j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi(l+x)}{\lambda} = -j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \left( \frac{2\pi l}{\lambda} + \frac{2\pi x}{\lambda} \right), \quad (275)$$

czyli po prostym przekształceniu <sup>1)</sup> i podstawieniu wartości (274') na  $\operatorname{ctg} \frac{2\pi x}{\lambda}$ :

$$\hat{Z} = -j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \frac{\frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{C_1}{C_0} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} - 1}{\frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{C_1}{C_0} + \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda}}. \quad (275a)$$

Ogólny warunek rezonansu takiej anteny, zwanej anteną z pojemnością końcową, wyrazi nam równanie (patrz równanie 262'):

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{L}{L_1} - \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{C_1}{C} - \frac{\frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{C_1}{C_0} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} - 1}{\frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{C_1}{C_0} + \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda}} = \\ & = \frac{2\pi l}{\lambda} \cdot \frac{L}{L_A} - \frac{\lambda}{2\pi l} \cdot \frac{C_A}{C} - \frac{\frac{\lambda}{2\pi l} \cdot \frac{C_A}{C_0} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} - 1}{\frac{\lambda}{2\pi l} \cdot \frac{C_A}{C_0} + \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda}} = 0. \quad (276) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Stosujemy przekształcenie  $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$  podstawiając  $\alpha = \frac{2\pi l}{\lambda}$  i  $\beta = \frac{2\pi x}{\lambda}$ .

Z równania (275) wynika, że jeżeli będzie  $x \gg l$ , a więc jeżeli pojemność końcowa anteny będzie bardzo duża, możemy pominąć  $\frac{2\pi l}{\lambda}$  wobec  $\frac{2\pi x}{\lambda}$  a więc <sup>1)</sup> oporność urojona anteny, po podstawieniu wartości (274), wyrazić można w przybliżeniu przez:

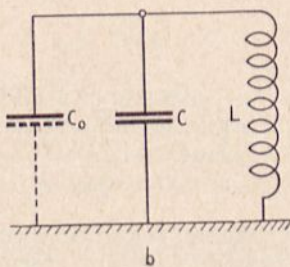
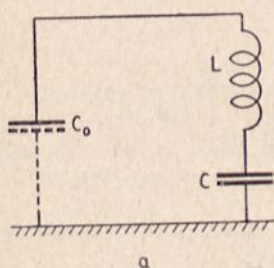
$$\hat{Z} \approx -j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi x}{\lambda} = -j \frac{1}{\omega C_0} \quad (275'a)$$

Wobec tego równanie (276) uprości się do postaci (rys. 158-a):

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} - \frac{1}{\omega C_0} = \omega L - \frac{1}{\omega} \cdot \frac{C + C_0}{C_1 \cdot C_0} = 0 \quad \text{czyli } \omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L \cdot \frac{C C_0}{C + C_0}}}$$

Stąd wniosek, że antenę o dużej pojemności końcowej możemy uważać za kondensator o pojemności  $C_0$ , a obwód—utworzony przez nią wraz z włączonymi w nią przyrządami dostrojczymi ( $L$  i  $C$ )—za obwód niby-ustalony. Większość anten długo- i średniofalowych, spotykanych w praktyce, odpo-

wiada temu przybliżeniu. Wyjątek stanowią anteny lotnicze wiszące i niektóre typy anten radjofonicznych.



Rys. 158.

Tosamo uproszczenie zastosować możemy i do układu rezonansu prądów włączonego w antenę (rys. 158-b). W układzie

tym możemy przyjąć, pomijając indukcyjność własną anteny, że pojemność dodatkowa jest załączona równolegle do pojemności anteny. A więc częstotliwość rezonansową takiej anteny można wyrazić wzorem:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L(C + C_0)}} \quad (277)$$

Zaletą dużej pojemności końcowej w zastosowaniu do fal długich jest przede wszystkim możliwość stosowania anten stosunkowo niskich bez potrzeby przedłużania ich przy pomocy zwojnic. Następnie anteny te można

<sup>1)</sup> Uproszczenie to jest tembardziej dopuszczalne, że otrzymujemy wówczas stosunkowo duże kąty  $\frac{2\pi x}{\lambda}$ .

zasiłać większem natężeniem prądu, osiągając przepięcia, nie przekraczające dopuszczalnych granic <sup>1)</sup>).

Wreszcie zaletą ich jest prawie równomierny rozkład prądu wzdłuż ich wysokości, co jest połączone z korzyścią dla skutecznego promieniowania energii.

Pojemność u góry anteny tworzy się, rozpinając na odpowiedniej wysokości nad ziemią pewną ilość połączonych z sobą drutów (poziomych lub zwisających pod kątem) i łącząc je z właściwą anteną pionową.

Należy zwrócić uwagę, że wzory wyprowadzone w tym paragrafie, są jedynie przybliżeniem, nie uwzględniają bowiem odbić, wywołanych skutkiem przejścia prądu z części pionowej anteny do części tworzącej pojemność. Antena właściwa i przewodniki stanowiące pojemność posiadają bowiem różne wartości już przez samą różnicę położenia względem ziemi, przez co taka antena jest — ściśle biorąc — linią niejednorodną, złożoną z odcinków o różnych charakterystykach, a zjawiska komplikują się jeszcze bardziej przez indukcyjność i pojemność wzajemną poszczególnych części anteny. Jednakże dla celów technicznych przyjęte tu przybliżenie jest dostateczne.

## 20. Ogólne uwagi o wzorach na obliczenie anten prostych.

Wyprowadzone w poprzednich paragrafach wzory na obliczanie anten prostych, ze względu na swoją postać znane pod nazwą *wzorów tangenso-owych*, posiadają jedną niedogodność: o ile w prosty sposób pozwalają obliczyć żadaną indukcyjność lub pojemność dla nastrojenia danej anteny na żadaną długość fali, o tyle są trudne, jeżeli zamierzamy obliczyć, na jaką falę nastroi się układ przy danej zmianie środków dostrojczych. To drugie zadanie, naogół rzadsze, rozwiązać można jedynie graficznie, wykreśliwszy poprzednio daną funkcję dla szeregu wartości  $l/\lambda$ .

Wzory tangensowe nie uwzględniają strat w linii. Wywołany w ten sposób błąd w stosunku do rzeczywistego rozkładu prądu i napięcia w antenie nie posiada praktycznego znaczenia. W razie, gdyby zachodziła konieczność ściślejszych obliczeń, można się posługiwać odpowiednio wzorami § 9-go lub też wzorami hiperbolicznymi § 3-go.

Różnice stąd wynikające wykaże następujące proste przeliczenie.

Oporność pozorna linii ze stratami w myśl równania (212) tego rozdziału wynosi <sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= \hat{Z}_0 \operatorname{ctgh} \alpha l = \hat{Z}_0 \operatorname{ctgh} (\beta + j\gamma) l = \\ &= \hat{Z}_0 \frac{\cosh \beta l \cdot \cos \gamma l + j \sinh \beta l \sin \gamma l}{\sinh \beta l \cdot \cos \gamma l + j \cosh \beta l \cdot \sin \gamma l} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Przepięcie, występujące na końcu anteny, łatwo obliczyć z rozkładu napięć jako

$$V = V_b \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$$

<sup>2)</sup> Patrz dodatek I.

Po usunięciu niewymierności mianownika otrzymujemy stąd:

$$\dot{Z} = \dot{Z}_0 \frac{\sinh \beta l \cdot \cosh \beta l - j \sin \gamma l \cdot \cos \gamma l}{\sinh^2 \beta l + \sin^2 \gamma l},$$

co, po podstawieniu z § 6 wartości:

$$\beta = \frac{R_1}{2} \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}, \quad (233); \quad \gamma = \omega \sqrt{L_1 C_1}. \quad (234), \quad \dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}. \quad (236)$$

dla linii zasilanej prądami szybkozmiennymi i uwzględnieniu, że przy małych wartościach  $\beta l$  mamy  $\sinh \beta l \approx \beta l$ ,  $\cosh \beta l \approx 1$ , daje ostatecznie:

$$\dot{Z} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \frac{\frac{R_1 l}{2} \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} - j \sin \gamma l \cdot \cos \gamma l}{\frac{R_1^2 l^2}{4} \cdot \frac{C_1}{L_1} + \sin^2 \gamma l}.$$

Po rozdzieleniu części rzeczywistej i urojonej otrzymujemy w ten sposób:

$$R_A = \frac{R_1 l}{2 \left[ \left( \frac{R_1 l}{2} \right)^2 \cdot \frac{C_1}{L_1} + \sin^2 \gamma l \right]}, \quad (278)$$

$$X_A = -j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \frac{\sin \gamma l \cdot \cos \gamma l}{\left( \frac{R_1 l}{2} \right)^2 \cdot \frac{C_1}{L_1} + \sin^2 \gamma l}.$$

Wyrażenie  $\left( \frac{R_1 l}{2} \right)^2 \cdot \frac{C_1}{L_1}$  możemy pominąć wobec  $\sin^2 \gamma l$ , wyjąwszy

przypadki, gdy znajdujemy się w pobliżu harmonicznych parzystych fali własnej anteny, wówczas wzory upraszczają się<sup>1)</sup> do:

$$R_A = \frac{R_1 l}{2 \sin^2 \omega l \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{R_1 l}{2 \sin^2 \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}. \quad (287a)$$

$$X_A = -j \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Jak widać, nawet przy uwzględnieniu strat, wzory tangensowe zachowują ważności, wyjąwszy przypadek, gdy antena pracuje w pobliżu którejs z swych harmonicznych parzystych.

Wzory wyprowadzone w poprzednich paragrafach dla anteny uziemionej przenieść można bezpośrednio na antenę symetryczną, o ile obciążenie włączone jest symetrycznie w jej środku. Warunek ten zresztą prawie zaw-

<sup>1)</sup> Patrz równanie (257) str. 249.



sze jest spełniony w praktyce. Wówczas antenę symetryczną uważamy za złożoną z dwu równych połówek i wykonywamy przeliczenia dla jednej tylko połówki tak, jak gdyby była anteną uziemioną.

Jest rzeczą bardzo ważną przy stosowaniu wzorów tangensowych, by  $l$  i  $\lambda$  były wyrażone w tych samych jednostkach długości (metrach lub centymetrach), we wzorach tych bowiem wszędzie długość przewodnika wyrażona jest nie jako wartość bezwzględna, lecz jako ułamek długości fali.

## 21. Przykłady obliczeń.

a) Antenę o wysokości 140 m, wykonaną z linki miedzianej o średnicy 5 mm, nastroić na falę 325 m (925 kc./sek), w ten sposób, aby brzusiec prądu znajdował się na wysokości 100 m nad ziemią (przykład anteny radiofonicznej we Wrocławiu, rys. 159).

Obliczamy wprawdzie indukcyjność i pojemność na 1 metr (100 cm) długości anteny wzorami przybliżonemi <sup>1)</sup> (256):

$$L_1 = 2 l \cdot \ln \frac{l_a}{r} \text{ cm/m} = 2 \cdot 100 \ln \frac{140 \cdot 100}{0,25} =$$

$$= 200 \cdot 10,95 \approx 2200 \text{ cm/m} = 2200 \cdot 10^{-9} \text{ H/m.}$$

$$C_1 = \frac{l}{2 \ln \frac{l_a}{r}} \text{ cm/m} = \frac{100}{2 \ln \frac{140 \cdot 100}{0,25}} = \frac{100}{2 \cdot 10,95}$$

$$\approx 4,6 \text{ cm/m} \approx 5,1 \cdot 10^{-12} \text{ F/m.}$$

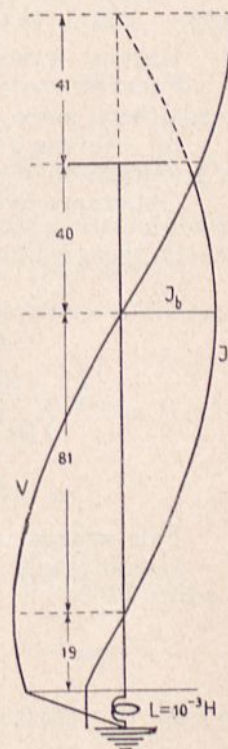
Długość fali w antenie zakładamy jako równą nadawanej fali elektromagnetycznej. Ćwiartka tej fali wynosi  $\frac{325}{4} = 81,25$  m. Wobec tego, zgodnie z założeniem, brzusiec prądu, który ma być na wysokości 100 m, znajduje się wyżej, niż na  $\lambda/4$  a zatem antena musi być nastrojona na 3-cią harmoniczną.

Trzecia ćwiartka fali, górna, jest niepełna, gdyż pozostaje na nią długość  $140 - 100 = 40$  m. Musimy więc zastosować antenę z pojemnością końcową, równoważną długości  $x = 81,25 - 40 = 41,25$  m. Pojemność tę obliczamy z wzoru (274'')

$$C_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot C_1 \cdot \text{tg} \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{325}{2\pi} \cdot 5,1 \cdot 10^{-12} \cdot \text{tg} \frac{2 \cdot 41,25 \cdot \pi}{325} =$$

$$= 264 \cdot 10^{-12} \cdot \text{tg} 0,254 \pi = 264 \cdot 10^{-12} \cdot \text{tg} 45^\circ 43' =$$

$$= 264 \cdot 10^{-12} \cdot 1,025 = 270 \cdot 10^{-12} \text{ F.}$$



Rys. 159.

<sup>1)</sup> Przy pomocy metod, podanych w tomie II, wielkości te można obliczyć z większą dokładnością.

Obliczamy teraz oporność urojona dostrojczą przy pomocy równania (275):

$$X = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} 2\pi \left( \frac{l_a + x}{\lambda} \right) = 0,$$

czyli

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{22 \cdot 10^{-7}}{5,1 \cdot 10^{-12}}} \cdot \operatorname{ctg} 2\pi \frac{140 + 41,25}{325} = 656 \cdot \operatorname{ctg} 1,115\pi = \\ &= 656 \cdot \operatorname{ctg} 200^{\circ}43' = 656 \cdot (+2,64) = 1730 \Omega. \end{aligned}$$

Oporność urojona ma znak dodatni, musimy więc włączyć u podstawy indukcyjność przedłużającą:

$$L = \frac{1630}{2\pi \cdot 0,935 \cdot 10^6} = 294 \cdot 10^{-6} H = 0,294 \text{ mH}.$$

Antena ta oczywiście będzie miała węzeł prądu na wysokości  $(100 - \lambda/4) \cong 19 \text{ m}$ , zaś na wysokości 100 m węzeł napięcia.

Antena, wykonana na stacji wrocławskiej, zaopatrzona jest ponadto w odłącznik, znajdujący się na wysokości około 80 m, po wyłączeniu którego antena może pracować jak ćwierć-falowa.

b) Antenę prostą o długości 80 m i średnicy 4 mm mamy przedłużyć w granicach od  $\lambda_1 = 500 \text{ m}$  ( $\omega_1 \cong 3,77 \cdot 10^6$ ) do  $\lambda_2 = 1000 \text{ m}$  ( $\omega_2 = 1,885 \cdot 10^6$ ).

Obliczamy indukcyjność i pojemność przewodnika na 1 m długości:

$$L_1 = 2 \cdot 100 \cdot \ln \frac{80 \cdot 100}{0,2} = 200 \cdot 10,6 = 2120 \text{ cm/m} \cong 2,12 \cdot 10^{-6} H/\text{m}.$$

$$L_A = 2,12 \cdot 10^{-6} \cdot 80 H \cong 170 \cdot 10^{-6} H.$$

$$C_1 = \frac{100}{2 \ln \frac{8000}{0,2}} = \frac{100}{2 \cdot 10,6} = 4,72 \text{ cm/m} = 5,25 \cdot 10^{-12} F/\text{m}.$$

$$C_A = 5,25 \cdot 10^{-12} \cdot 80 F = 420 \cdot 10^{-12} F.$$

Fala własna anteny  $\lambda_0 = 4 \times 80 = 320 \text{ m}$ .

Indukcyjność potrzebną do przedłużenia fali do 500 m obliczymy z wzoru (260'):

$$\begin{aligned} L_{\min} &= L_1 \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} = 2,12 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{500}{2\pi} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2 \cdot 80 \cdot \pi}{500} = \\ &= 1,69 \cdot 10^{-6} \operatorname{ctg} 0,32\pi = 169 \cdot 10^{-6} \cdot \operatorname{ctg} 57^{\circ}36' = 169 \cdot 10^{-6} \cdot 0,635 H \cong 110 \mu H \end{aligned}$$

Dla fali najdłuższej otrzymamy:

$$\begin{aligned} L_{\max} &= 2,12 \cdot 10^{-6} \frac{1000}{2\pi} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2 \cdot 80 \cdot \pi}{1000} = 338 \cdot 10^{-6} \cdot \operatorname{ctg} 28^{\circ}48' = \\ &= 338 \cdot 10^{-6} \cdot 1,82 H \cong 615 \mu H. \end{aligned}$$

A więc zmienna indukcyjność przedłużająca dla pokrycia żądanego zakresu fal, wykonana na przykład w postaci warjometru, powinna posiadać zakres od 110  $\mu H$  do 615  $\mu H$ .

Gdybyśmy chcieli obliczyć indukcyjność  $L$  metodą przybliżoną według wzoru (269) otrzymalibyśmy:

$$L_{\min} \approx \frac{1 - 0,5 \omega_1^2 L_A \cdot C_A}{\omega_1^2 C_A} = \frac{1 - 0,5 \cdot (3,77 \cdot 10^6)^2 \cdot 170 \cdot 10^{-6} \cdot 420 \cdot 10^{-12}}{(3,77 \cdot 10^6)^2 \cdot 420 \cdot 10^{-12}} =$$

$$= \frac{1 - 0,507}{5960} = 82,8 \cdot 10^{-6} H.$$

Błąd wynosi tu około 33% dla stosunku  $\lambda/\lambda_0 = \frac{500}{320} = 1,56$ , a więc obliczenie jest zbyt niedokładne.

Dla fali najdłuższej:

$$L_{\max} \approx \frac{1 - 0,5 (1,885 \cdot 10^6)^2 \cdot 170 \cdot 10^{-6} \cdot 420 \cdot 10^{-12}}{(1,885 \cdot 10^6)^2 \cdot 420 \cdot 10^{-12}} =$$

$$= \frac{1 - 0,127}{1490} = 585 \cdot 10^{-6} H.$$

A więc błąd dla przedłużenia około 3-krotnego wynosi 5,13%. W obu przypadkach wzór przybliżony dał wartość zamałą.

Z przykładów tych można się zorientować, że dla przedłużenia powyżej 5-krotnego błąd wynikający ze stosowania wzoru przybliżonego można zupełnie pominąć.

c) Tak sama antena znajduje się na samolocie o pojemności własnej  $C_0 = 500 \cdot 10^{-12} F$ . Stosujemy wzór (262) dla fali 500 m:

$$L'_{\min} = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{C_1 L_1}{C_0} + \frac{\lambda}{2\pi} \cdot L_1 \cdot \text{ctg } 0,32\pi = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{C_1 L_1}{C_0} + L_{\min} =$$

$$= \left(\frac{500}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{5,25 \cdot 10^{-12} \cdot 2,12 \cdot 10^{-6}}{500 \cdot 10^{-12}} + 110 \cdot 10^{-6} =$$

$$= \frac{25 \cdot 10^4}{39,5} \cdot 2,22 \cdot 10^{-8} + 110 \cdot 10^{-6} = 0,634 \cdot 2,22 \cdot 10^{-4} + 110 \cdot 10^{-6} =$$

$$= (141 + 110) \cdot 10^{-6} \approx 250 \cdot 10^{-6} H.$$

dla fali najdłuższej otrzymamy

$$L'_{\max} = \left(\frac{1000}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{5,25 \cdot 10^{-12} \cdot 2,12 \cdot 10^{-6}}{500 \cdot 10^{-12}} + 615 \cdot 10^{-6} =$$

$$= (562 + 615) \cdot 10^{-6} \approx 1200 \cdot 10^{-6} H.$$

d) Antenę samolotową chcemy przedłużać przy pomocy kondensatora obrotowego, załączonego równolegle do indukcyjności, czyli dobrać takie

warunki obwodu  $L-C$ , aby obwód ten przedstawiał obciążenie indukcyjne równe obciążeniu wywołanemu przez indukcyjności obliczone poprzednio w przykładzie c).

Obieramy kondensator obrotowy, dający zakres zmienności pojemności obwodu od  $C_{\max} = 500 \cdot 10^{-12} F$  do  $C_{\min} = 100 \cdot 10^{-12} F$  (stosunek praktycznie łatwo osiągalny).

Dla fali najdłuższej musimy więc spełnić warunek:

$$\omega_2 L'_{\max} = \frac{\omega_2 L}{\omega_2^2 L C_{\max} - 1},$$

z którego obliczymy:

$$L = \frac{L'_{\max}}{\omega_2^2 L'_{\max} C_{\max} + 1} = \frac{1200 \cdot 10^{-6}}{3,55 \cdot 10^{12} \cdot 1200 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot 10^{-12} + 1} = 385 \cdot 10^{-6} H.$$

Tą indukcyjnością i pojemnością  $C_{\min} = 100 \cdot 10^{-12} F$  nie będziemy mogli pokryć całego zakresu fal, lecz będziemy musieli zastosować przynajmniej 2 stopnie indukcyjności. Obliczymy więc indukcyjność, potrzebną dla osiągnięcia fali najkrótszej przy pomocy pojemności  $C_{\min}$ . Otrzymamy ją z równania:

$$L_0 = \frac{L'_{\min}}{\omega_1^2 L'_{\min} C_{\min} + 1} = \frac{250 \cdot 10^{-6}}{14,2 \cdot 10^{12} \cdot 250 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12} + 1} = 185 \cdot 10^{-6} H.$$

By się przekonać, czy zakresy obu stopni indukcyjności pokrywają się przy pomocy przyjętego kondensatora zmiennego, musimybyśmy rozwiązać dwa razy równanie<sup>1)</sup>:

$$\frac{\omega L}{\omega^2 L C - 1} - \frac{1}{\omega C_0} - \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = 0,$$

obliczając (wzór 257):

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{L_A C_A}} = \frac{\pi}{2\sqrt{170 \cdot 10^{-6} \cdot 420 \cdot 10^{-12}}} = 5,9 \cdot 10^6,$$

i podstawiając:

$$a) \quad L = L_0 = 185 \cdot 10^{-6} H, \quad C = C_{\max} = 500 \cdot 10^{-12} F,$$

$$b) \quad L = 383 \cdot 10^{-6} H, \quad C = C_{\min} = 100 \cdot 10^{-12} F.$$

Rozwiązanie znajdziemy dość szybko, podstawiając za  $\omega$  kilka wartości, leżących w projektowanym zakresie. Przeliczenia te wykazują, że zakres przy większej indukcyjności sięga do  $\omega \simeq 2,71 \cdot 10^6$  ( $\lambda \simeq 696$  m), zaś przy mniejszej do  $\omega \simeq 2,69 \cdot 10^6$  ( $\lambda \simeq 700$  m). Jeżeli uwzględnimy, że pojemność minimalną kondensatora przyjęliśmy z pewnym zapasem, to pokrycie się obu zakresów fal mamy zapewnione. Mamy więc:

$$\text{dla } L = 385 \cdot 10^{-6} H, \quad \lambda = 700 \div 1000 \text{ m.}$$

$$\text{dla } L_0 = 185 \cdot 10^{-6} H, \quad \lambda = 500 \div 700 \text{ m.}$$

<sup>1)</sup> Jest to równanie (264) uzupełnione członem  $-\frac{1}{\omega C_0}$ , uwzględniając pojemność samolotu.

e) Mamy obliczyć indukcyjność przedłużającą antenę z przykładu b) do 1000 m, jeżeli zwojnica ma być włączona w odległości 20 m od ziemi.

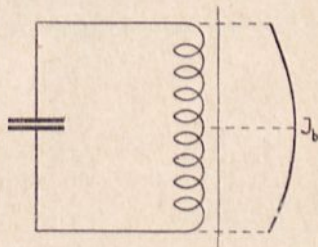
W ten sposób antena rozpada się na dwie części:  $l_1 = 60$  m i  $l_2 = 20$  m. Przy pomocy wzoru (272''), zakładając  $C = \infty$  możemy obliczyć indukcyjność  $L$ :

$$\begin{aligned} L &= L_1 \frac{\lambda}{2\pi} \left( \operatorname{ctg} \frac{2\pi l_1}{\lambda} - \operatorname{tg} \frac{2\pi l_2}{\lambda} \right) = 2,12 \cdot \frac{1000}{2\pi} \left( \operatorname{ctg} \frac{2\pi \cdot 60}{1000} - \operatorname{tg} \frac{2\pi \cdot 20}{1000} \right) \cdot 10^{-6} = \\ &= 338 (\operatorname{ctg} 0,12\pi - \operatorname{tg} 0,04\pi) = 338 (\operatorname{ctg} 21^\circ 36' - \operatorname{tg} 7^\circ 12') = \\ &= 338 (2,26 - 0,126) = 810 \cdot 10^{-6} H, \end{aligned}$$

która jest przeszło o 30% większa, niż w przypadku włączenia zwojniczy u podstawy.

## 22. Zastosowanie teorii linii do obwodu niby-ustalonego.

Obwód złożony z indukcyjności i pojemności skupionej nazwalibyśmy obwodem *niby-ustalonym*, podkreślając przez tę nazwę, że tylko w *przybliżeniu* przyjąć możemy rozkład prądu w takim obwodzie za równomierny. W rzeczywistości zwojnica takiego obwodu, wykonana z przewodnika o dość znacznej długości i równomiernie rozłożonej indukcyjności i pojemności, powinna być uważana za linię elektryczną. Gdy zwojnica taka połączona jest z kondensatorem, tworzy ona niejako antenę symetryczną o znacznych pojemnościach końcowych, wzdłuż której, licząc od środka ku obu końcom, rozkład prądu jest w przybliżeniu sinusoidalny (rys. 160). Wartość tego prądu wzdłuż całej zwojniczy uważać możemy za stałą, z temi samymi zastrzeżeniami, z jakimi uczynilibyśmy to w § 19 dla anteny z pojemnością końcową. Obwód zamknięty będzie więc tembardziej zbliżony do ustalonego, im większa jest pojemność jego kondensatora wobec pojemności własnej zwojniczy.



Rys. 160.

Dla pomiaru mocy w obwodzie zamkniętym o niedostatecznie dużej pojemności, a temsamem o nieustalonym rozkładzie prądu, duże znaczenie posiada miejsce włączenia amperomierza. Jeżeli bowiem włączymy przyrząd w środku zwojniczy, a więc w brzuścu prądu, to, chcąc obliczyć moc, wstawić możemy do wzoru  $P = J_b^2 R_c$  oporność skuteczną, odniesioną do brzuśca prądu, którą obliczymy według całki:

$$R_c = R \int_{-l}^{+l} \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda} dx. \quad (279)$$

Gdybyśmy amperomierz włączyli na jednym z końców zwojnicy, gdzie prąd jest mniejszy, otrzymalibyśmy przy podstawieniu oporności zmierzonej w brzońcu prądu, wartość mocy zmałą. Musielibyśmy w tym przypadku odnieść oporność tę do końca zwojnicy, w stosunku (rys. 160):

$$R_e' = R_e \cdot \left( \frac{J_b}{J_e} \right)^2 = \frac{R_e}{\cos^2 \frac{2\pi l}{\lambda}} \quad (278 \text{ a})$$

#### BIBLIOGRAFJA DO ROZDZIAŁU V.

1. A. Fraenckel. *Theorie der Wechselströme* J. Springer. Berlin.
2. R. Winzheimer. *Vertragungstechnik*, Monachjum i Berlin 1929, R. Oldenbourg.
3. J. A. Fleming. *Propagation des courants électriques dans les conducteurs téléphoniques et télégr* (tłum. franc.) Paryż 1913.
4. Breisig. *Theoretische Telegraphieaphiques*.
5. *Théorie de la Télégraphie sans fil*, Ministère de la Guerre. Charles Lavauselle et C-ie. Paryż 1930.
6. P. Vieillard. *Les antennes de T.S.F.* wyd. E. Chiron. Paryż.
7. N. N. Łucenko. *Osnowy teorji radjotechniki, elektromagnitnyje kolebanja* (w jęz. ros.) Moskwa 1933.

## ROZDZIAŁ VI.

### FILTRY ELEKTRYCZNE.

Filtrami elektrycznymi nazywamy układy, posiadające zdolność rozdzielania prądów o różnych częstotliwościach dzięki zależności ich oporności pozornej od częstotliwości zasilającej. Układy takie mogą być utworzone z odpowiednich elementów  $L$ ,  $C$  i  $R$  jako jeden obwód mniej lub więcej złożony, lub też mogą się składać z szeregu następujących po sobie elementów (filtry jednoczłonowe i wieloczłonowe).

Ze względu na zachowanie się filtrów zależnie od częstotliwości zasilającej rozróżniamy 4 zasadnicze typy filtrów:

1° *Filtry przepuszczające częstotliwości mniejsze od pewnej częstotliwości krytycznej  $\omega_k$ , a tłumiące prądy o częstotliwościach  $\omega > \omega_k$ , (passe-bas).*

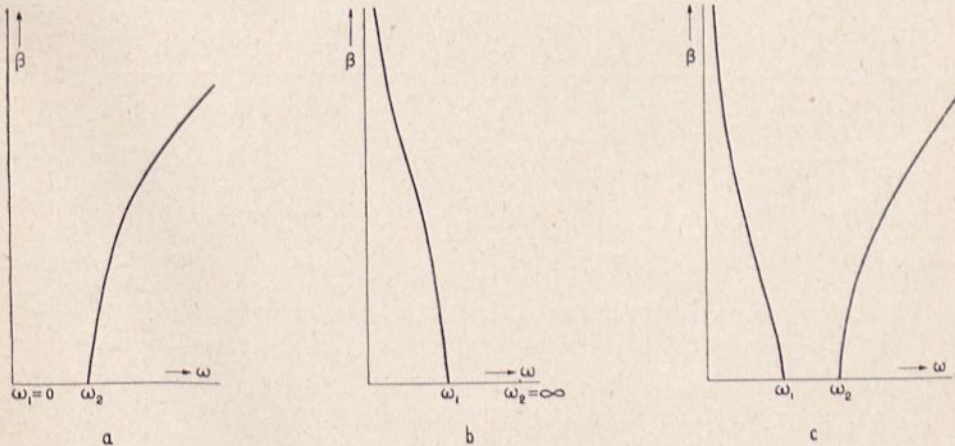
2° *Filtry przepuszczające częstotliwości większe od częstotliwości krytycznej, a więc wykazujące własności odwrotne, niż wymienione poprzednio, (passe-haut).*

3° *Filtry przepuszczające pewne widmo częstotliwości (filtry widmowe), które nie tłumią częstotliwości zawartych w pewnych granicach  $\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$ , tłumią natomiast częstotliwości leżące powyżej i poniżej tych granic (passe-bande).*

Wreszcie typ rzadziej spotykany:

4° *Filtry dławiące pewne widmo częstotliwości (dławik widmowy), a więc zachowujące się odwrotnie, niż wymienione pod 3°.*

Typowe charakterystyki odpowiadające wyszczególnionym tu typom filtrów mamy na rys. 161 a do c.



Rys. 161.

Filtry elektryczne mają szerokie zastosowanie w radjotechnice i tele-technice, jak np. dla tłumienia tętnień prostowników i prądnic zasilających, dla otrzymaniażądanego przebiegu krzywej rezonansu, dla usuwania harmonicznych i t. p.

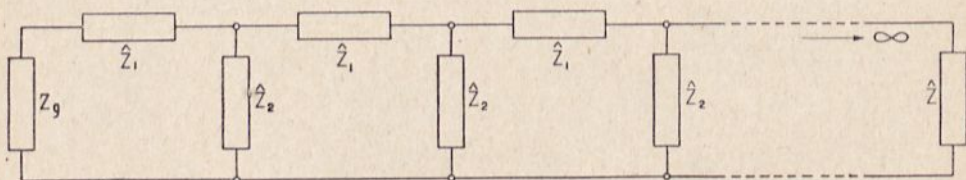
W myśl ogólnej definicji filtrami są również obwody rezonansowe proste, jednakże *filtrem właściwym* będziemy nazywali układ, który przy pewnej częstotliwości granicznej *nagle* zmienia swą oporność pozorną z bardzo dużej na bardzo małą lub naodwrot i zachowuje ją następnie dla szerszego lub węższego *zakresu częstotliwości*. Te nagłe przejścia nazywamy *granicami* filtru, a odpowiadające im częstotliwości *krytycznymi* lub *granicznymi*.

Teoria filtrów wykazuje wiele podobieństwa do teorii linii elektrycznej i stanowi poniekąd jej uzupełnienie. Ze względu na to podobieństwo układy filtrujące noszą również nazwę *linij sztucznych*.

### 1. Filtr prosty złożony z elementów T lub II. Oporność falowa.

Najbardziej elementarny jest filtr, składający się z szeregu nieskończonego powtarzających się równych oporów szeregowych  $\hat{Z}_1$  i równoległych  $\hat{Z}_2$  (rys. 162) nie sprzężonych bezpośrednio między sobą i tworzących pewne powtarzające się elementy, czyli człony. Układ taki nosi nazwę *filtru prostego* czyli *symetrycznego*.

Każdy *człon* filtru tworzy *czwórnik*, układ elektryczny, posiadający 2 zaciski wejściowe  $a - a'$  i dwa zaciski wyjściowe  $b - b'$ . Cechą charakterystyczną takiego członu jest brak siły elektromotorycznej wewnątrz niego działającej. Wobec tego może on jedynie pobierać energję, a nie może jej dostarczać, jest więc układem elektrycznym *biernym*.



Rys. 162.

Układ według rys. 162 można rozłożyć na dwa zasadnicze typy członów:

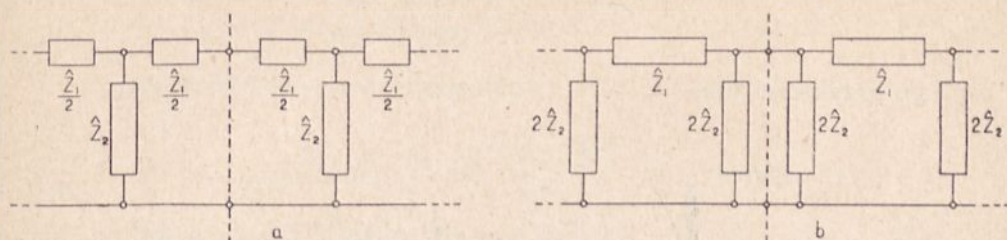
a) Człony typu *T* (rys. 163-a), utworzone w ten sposób, że jeden opór równoległy  $\hat{Z}_2$  łączymy z połówkami  $\frac{\hat{Z}_1}{2}$  dwu sąsiednich oporów szeregowych.

b) Człony typu *II* (rys. 163-b), powstałe przez rozbitcie oporu równoległego na 2 opory 2-krotnie większe  $2\hat{Z}_2$ , połączone równoległe, i przez połączenie dwu takich oporów  $2\hat{Z}_2$  przy pomocy jednego oporu szeregowego  $\hat{Z}_1$ , położonego między nimi.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Według tego schematu obliczaliśmy linię spupinizowaną w rozdziale V.



Jak łatwo się przekonać, oba te układy zastępcze są elektrycznie równoważne układowi rys. 162. Stosowanie ich zależy jedynie od ukształtowania początku filtru według jednego lub drugiego schematu.



Rys. 163.

Skoro założymy, że filtr składa się z nieskończenie wielu tego rodzaju członów, to oczywiście dowolny człon filtru jest obciążony przez oporność pozorną, równą jego oporności własnej. A więc oporność filtru, mierzona na zaciskach wejściowych dowolnego członu, będzie zawsze tą samą i równa oporności pozornej jednego członu. Oporność tę  $\hat{Z}_0$ , jako typową dla filtru o danej konstrukcji, nazywamy jego *opornością charakterystyczną*, czyli *fałową*. Posiada ona to samo znaczenie dla filtru, co oporność fałowa  $\hat{Z}_0$  dla linii elektrycznej.

Każdy człon filtru możemy więc przedstawić sobie jako obciążony opornością zewnętrzną równą  $\hat{Z}_0$  (rys. 164-a i b), co nam pozwoli w prosty sposób obliczyć tę wielkość.

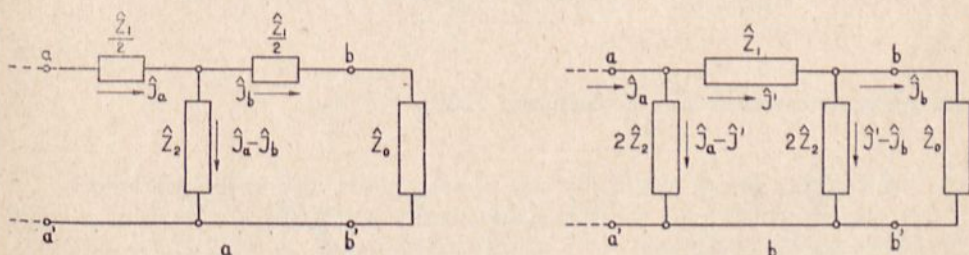
a) Człon typu T (rys. 164-a). Zgodnie z założeniem, że człon obciążony oporem fałowym nadal posiada opór równy fałowemu, otrzymamy:

$$\hat{Z}_0 = \frac{\hat{Z}_1}{2} + \frac{\left(\frac{\hat{Z}_1}{2} + \hat{Z}_0\right) \cdot \hat{Z}_2}{\frac{\hat{Z}_1}{2} + \hat{Z}_0 + \hat{Z}_2}$$

skąd po wylimitowaniu  $\hat{Z}_0$  mamy:

$$\hat{Z}_{0T} = \sqrt{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 \left(1 + \frac{\hat{Z}_1}{4 \hat{Z}_2}\right)} = \sqrt{\hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1^2}{4}} \quad (280)$$

b) Analogicznie otrzymamy dla filtru typu II (rys. 164-b):



Rys. 164.

$$\hat{Z}_{0II} = \frac{2 \hat{Z}_2 \left( \hat{Z}_1 + \frac{2 \hat{Z}_2 \cdot \hat{Z}_{0II}}{2 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_{0II}} \right)}{\hat{Z}_1 + 2 \hat{Z}_2 + \frac{2 \hat{Z}_2 \cdot \hat{Z}_{0II}}{2 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_{0II}}}$$

czyli po przekształceniu:

$$\hat{Z}_{0II} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2}{1 + \frac{\hat{Z}_1}{4 \hat{Z}_2}}} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1^2}{4}}} \quad (281)$$

## 2. Tłumienie filtru i warunki przepuszczania.

Podobnie jak linja elektryczna, tak i filtr powoduje wzdłuż swojej długości spadek napięcia i prądu, wywołując *tłumienie* prądu przepływającego. Charakterystyczne dla niego będą spadki amplitud obu tych zmiennych na jednym członie. Oznaczmy je symbolicznie przez:

$$\frac{\hat{V}_a}{\hat{V}_b} = \frac{\hat{Z}_0 \cdot \hat{J}_a}{\hat{Z}_0 \cdot \hat{J}_b}; \text{ czyli } \frac{\hat{V}_a}{\hat{V}_b} = \frac{\hat{J}_a}{\hat{J}_b} \quad (282)$$

Stosunki te dla obu układów podstawowych możemy z łatwością obliczyć z rysunków 164-a i b.

Dla układu T mamy:

$$\hat{V}_a = \hat{J}_a \frac{\hat{Z}_1}{2} + (\hat{J}_a - \hat{J}_b) \hat{Z}_2 = \hat{J}_a \hat{Z}_{0T}$$

$$\hat{V}_b = (\hat{J}_a - \hat{J}_b) \hat{Z}_2 - \hat{J}_b \frac{\hat{Z}_1}{2} = \hat{J}_b \hat{Z}_{0T}$$

Z drugiego z tych równań otrzymujemy:

$$\frac{\hat{J}_a}{\hat{J}_b} = \frac{\hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1}{2} + \hat{Z}_{0T}}{\hat{Z}_2}$$

lub, po podstawieniu  $\hat{Z}_{0T}$  z równania (280):

$$\frac{\hat{J}_a}{\hat{J}_b} = \frac{\hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1}{2} + \sqrt{\hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1^2}{4}}}{\hat{Z}_2} = \left( 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2} \right) + \sqrt{\left( 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2} \right)^2 - 1} \quad (283)$$

W podobny sposób można obliczyć dla układu II (rys. 164-b):

$$\hat{V}_a = (J_a - J_b) \cdot 2 \hat{Z}_2 = J' \hat{Z}_1 + (J' - J_b) \cdot 2 \hat{Z}_2 = \hat{J}_a \hat{Z}_{0II},$$

$$\hat{V}_b = (J' - J_b) \cdot 2 \hat{Z}_2 = \hat{J}_b \hat{Z}_{0II}.$$

Z pierwszego równania eliminujemy:

$$\hat{J}' = \hat{J}_a \frac{2 \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{0II}}{2 \hat{Z}_2},$$

i po podstawieniu do drugiego otrzymujemy:

$$\frac{\hat{J}_a}{\hat{J}_b} = \frac{2 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_{0II}}{2 \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{0II}}. \quad (284)$$

Mnożąc licznik i mianownik tego wyrażenia przez  $(2 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_{0II})$  i podstawiając  $\hat{Z}_{0II}$  z równania (280), dochodzimy wkońcu do wyniku:

$$\frac{\hat{J}_a}{\hat{J}_b} = \frac{\hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1}{2} \sqrt{\hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1^2}{4}}}{\hat{Z}_2}. \quad (284')$$

z którego okazuje się, że oba układy są równoważnościowe pod względem tłumienia. Jest to oczywiste, skoro oba składają się z tych samych elementów.

Stosunek  $\frac{\hat{J}_a}{\hat{J}_b}$  jest naogół wielkością zespoloną, można go więc wyrazić w postaci:

$$\frac{\hat{J}_a}{\hat{J}_b} = \varepsilon^\alpha = \varepsilon^{\beta + j\gamma} = \hat{x} + \sqrt{\hat{x}^2 - 1}, \quad (284 \text{ a})$$

jeżeli wprowadzimy oznaczenie:  $\hat{x} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2}$ .

Stąd mamy:

$$\ln \frac{\hat{J}_a}{\hat{J}_b} = \beta + j\gamma = \ln(\hat{x} + \sqrt{\hat{x}^2 - 1}) = \text{Ar} \cosh \hat{x}.$$

czyli

$$\cosh(\beta + j\gamma) = \hat{x} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2}. \quad (285)$$

Podobnie jak w linii elektrycznej, tak i w filtrze, część rzeczywista stanowi *współczynnik tłumienia* i jest miarą malenia amplitudy prądu wzdłuż jednego członu filtru, zaś część urojona jest *współczynnikiem falowym*

filtru, będącym miarą przesunięcia faz wywołanego przez jeden człon (na skutek skończonej szybkości posuwania się fali prądu).

Wyrażenia te posiadają analogiczne znaczenie, jak współczynnik tłumienia i współczynnik falowy na jednostkę długości linii. Stąd więc całkowite tłumienie w filtrze z  $l$  członów wyrazi się równaniem

$$\left(\frac{J_a}{J_b}\right) = (\varepsilon^\beta)^l = \varepsilon^{\beta l}, \text{ czyli } \ln\left(\frac{J_a}{J_b}\right) = \beta l. \quad (286)$$

A więc tłumienie filtru złożonego z  $l$  członów równa się iloczynowi ze współczynnika tłumienia i liczby członów.

#### Warunek przepuszczania.

Wobec tego, że wewnątrz filtru nie działają żadne siły elektromotoryczne, współczynnik tłumienia może być tylko albo dodatni, albo równy zeru:

$$\left(\frac{J_a}{J_b}\right) = \beta \geq 0,$$

albowiem wzrastanie prądu w filtrze byłoby sprzeczne z prawem o zachowaniu energii.

Wartość dodatnia, o ile jako początek układu przyjmiemy koniec filtru, oznacza tłumienie amplitudy prądu w filtrze. Jeżeli natomiast  $\beta = 0$ , oznacza to, że wartość bezwzględna amplitudy prądu po wyjściu z danego członu filtru jest taka sama, jaka była przy wejściu do tego członu. Możemy więc połączyć nieskończenie wiele takich filtrów szeregowo, a prąd mimo to będzie swobodnie przechodził.

Warunek  $\beta = 0$  jest więc *warunkiem przepuszczania* filtru i oznacza, że filtr przepuszcza wszystkie częstotliwości, dla których spełniony jest warunek  $\beta = 0$ .

Dla warunku przepuszczania mamy więc:

$$\cosh j\gamma = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2},$$

a wobec tego, że  $\cosh j\gamma = \cos \gamma$ <sup>1)</sup>, możemy napisać:

$$\cos \gamma = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2}. \quad (285 \text{ a})$$

Jeżeli kąt jest liczbą rzeczywistą, to oczywiście musi być również  $\frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2}$  liczbą rzeczywistą i przytem zawartą w granicach:

$$(-2) \leq \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} \leq 0.$$

<sup>1)</sup> Patrz dodatek I.

czyli

$$(-1) \leq \frac{\hat{Z}_1}{4\hat{Z}_2} \leq 0.$$

Wynika to z tego, że cosinus może być zawarty jedynie w granicach  $(-1) \leq \cos \gamma \leq (+1)$  i w tych tylko granicach jest wielkością rzeczywistą. Jeżeli wyrazimy w ogólnej postaci zespolonej wielkość:

$$\frac{\hat{Z}_1}{4\hat{Z}_2} = U + jV, \quad (287)$$

warunki, którym powinien odpowiadać filtr w zakresie częstotliwości przepuszczanych, możemy wyrazić w sposób następujący:

$$V = 0, \quad (-1) \leq U \leq 0, \quad (288)$$

czyli

$$(-1) \leq \frac{\hat{Z}_1}{4\hat{Z}_2} \leq 0. \quad (288 \text{ a})$$

Z równań (288) i (288-a) wynikają następujące wnioski:

1<sup>o</sup> Jeżeli  $\hat{Z}_1$  i  $\hat{Z}_2$  są opornościami omowemi, iloraz ich da wprawdzie liczbę rzeczywistą, ale zawsze  *dodatnią*, nie spełni więc warunku drugiego, a więc same oporności omowe nie nadają się do konstrukcji filtrów.

2<sup>o</sup> Jeżeli  $\hat{Z}_1$  i  $\hat{Z}_2$  są liczbami zespolonemi, warunki przepuszczania mogą być spełnione dla pewnych tylko częstotliwości, nie zaś dla dowolnie szerokich zakresów.

3<sup>o</sup> Natomiast żadnych trudności nie przedstawia dobór odpowiednich *czystych oporności urojonych*, któreby uczyniły zadość obu warunkom równocześnie w dowolnie obranych granicach.

Nie można oczywiście wykonać oporów urojonych zupełnie bez oporności omowej, a temsamem idealnie spełnić warunku podanego pod 3<sup>o</sup>, jednakże w praktyce nie przedstawia zbytnich trudności wykonanie ich w ten sposób, aby oporność omową można było pominąć wobec oporności urojonej. Dlatego też narazie będziemy rozpatrywali teorię filtrów idealnych, a wpływ oporności omowej uwzględnimy dodatkowo (§ 5).

### 3. Określenie widma przepuszczanego przez filtr.

Warunek wyrażony w równaniu (288-a) pozwala nam w prosty sposób określić widmo częstotliwości przepuszczanych przez filtr. Oznacza on mianowicie, że widmo to jest ograniczone z jednej strony częstotliwością, dla której  $\frac{\hat{Z}_1}{4\hat{Z}_2} = 0$ , z drugiej zaś częstotliwością, przy której  $\hat{Z}_1 = -4\hat{Z}_2$ .

Pierwszy z tych warunków będzie spełniony w dwu przypadkach: albo  $\hat{Z}_1 = 0$ , albo też  $\hat{Z}_2 = \infty$ .

Rozwiązując więc równania:

$$\frac{\hat{Z}_1}{4\hat{Z}_2} = 0 \quad \text{i} \quad \hat{Z}_1 = -4\hat{Z}_2.$$

ze względu na  $\omega$ , otrzymamy jako rozwiązanie odnośne częstotliwości graniczne, a zawarty między nimi zakres częstotliwości będzie widmem przepuszczanem.

Naodwrot, chcąc zaprojektować filtr, mający przepuszczać żądane widmo częstotliwości, obieramy  $\hat{Z}_1$  tak, aby przy jednej częstotliwości granicznej było  $\hat{Z}_1 = 0$ , lub  $\hat{Z}_2 = \infty$ , a przy drugiej był spełniony warunek  $\hat{Z}_1 = -4\hat{Z}_2$ .

Zagadnienie to można również rozwiązać graficznie. Kreślimy charakterystykę  $\hat{Z}_1 = f(\omega)$ , i charakterystykę  $\hat{Z}_2 = f(\omega)$ , lecz ze znakiem przeciwnym i rzędniemi pomnożonymi przez 4, co nam da  $(-4\hat{Z}_2) = f(\omega)$ . Wystarczy teraz znaleźć 2 punkty: punkt przecięcia się obu krzywych, którego odcięta da nam rozwiązanie warunku  $\hat{Z}_1 = -4\hat{Z}_2$ , oraz punkt przecięcia charakterystyki  $\hat{Z}_1$  z osią x-ów, lub też odciętą, dla której jest  $\hat{Z}_2 \pm \infty$ , skąd otrzymamy drugą częstotliwość graniczną.

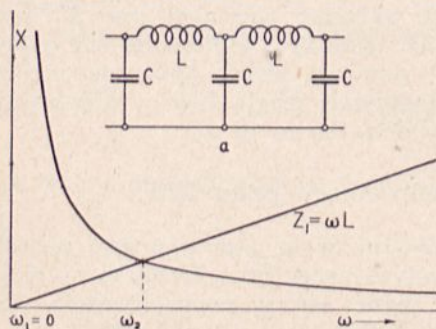
Podajemy poniżej najprostsze przykłady:

a) *Filtr przepuszczający dolne częstotliwości.*

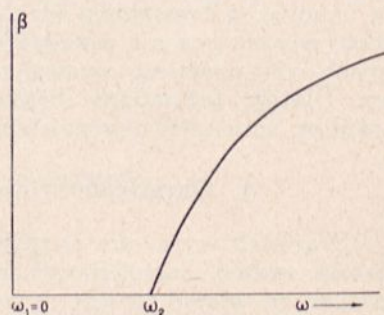
Musimy wpierv spełnić warunek  $\frac{\hat{Z}_1}{4\hat{Z}_2} = 0$  dla  $\omega_1 = 0$ , lub też po prostu  $\hat{Z}_1 = 0$ , co z łatwością osiągniemy, stosując oporność indukcyjną  $\omega L$ . Równocześnie jednak dla częstotliwości granicznej  $\omega_2$ , od której począwszy filtr ma tłumić, musi być spełniony warunek:

$$j\omega_2 L = -4\hat{Z}_2; \text{ czyli } j\omega_2 L + 4\hat{Z}_2 = 0.$$

Wobec tego, że  $\hat{Z}_2$  powinno posiadać oporność urojona i znak odwrotny niż  $j\omega L$ , obieramy jako  $\hat{Z}_2$  pojemność, a więc  $\hat{Z}_2 = -j\frac{1}{\omega C}$ , tworząc filtr w układzie rys. 165-a. Warunek drugi wyrazi się wobec tego w postaci:



b



c

Rys. 165.

$$j\omega_2 L = (-4) \cdot \left(-j\frac{1}{\omega_2 C}\right), \text{ czyli } \omega_2 L = \frac{4}{\omega_2 C},$$

jak to również widać z wykresu rys. 165-b.

Stąd znajdziemy dla drugiej częstotliwości granicznej warunek:

$$\omega_2 = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad (289)$$

A więc filtr złożony z dławików i kondensatorów według układu rys. 165-a, przepuszcza wszystkie częstotliwości w granicach od 0 do  $\omega_2 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ , czyli w całym tym zakresie posiada  $\beta = 0$ . Wartości  $\beta$  dla wszystkich częstotliwości leżących poza widmem przepuszczania, czyli *charakterystykę tłumienia* jednego członu filtru obliczamy z wartości rzeczywistych równania (284). Przybliżony jej przebieg mamy na rys. 165-c.

Oporność falowa filtru w układzie T, zgodnie z równaniem (280), wynosi:

$$\hat{Z}_{0T} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2} \quad (290)$$

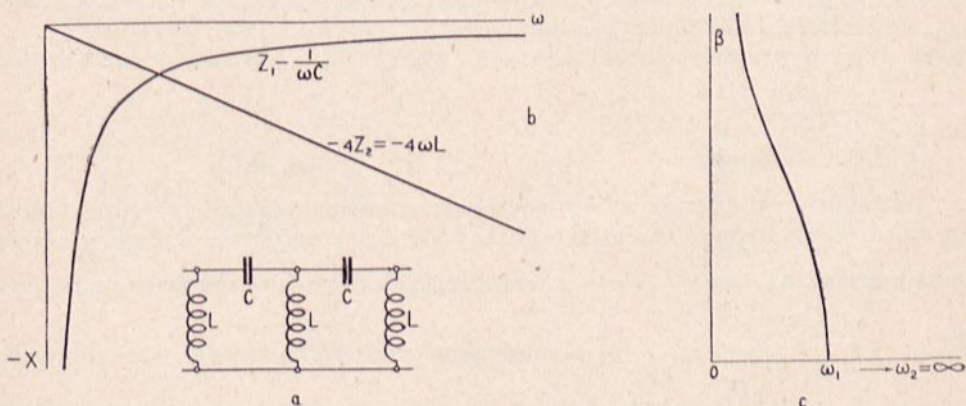
Zaś dla układu II otrzymamy analogicznie równania:

$$\hat{Z}_{0II} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}} \quad (291)$$

Jeżeli założymy pewne  $\hat{Z}_{0I}$ , to z równania (290) lub (291) mamy ustalony stosunek  $\frac{L}{C}$ , z czego, przy pomocy wzoru (289) na  $\omega_2$ , mamy dane obie wielkości  $L$  i  $C$ .

b) *Filtr przepuszczający górne częstotliwości.*

Filtr ten powinien przepuszczać wszystkie częstotliwości począwszy od pewnej granicznej  $\omega_1$  do nieskończoności, czyli  $\omega_2 = \infty$ . Możemy więc założyć warunek  $\hat{Z}_{1\omega_2 = \infty} = 0$ . Warunek ten oczywiście spełni pojemność, więc jako opory szeregowo wybieramy kondensatory, by zaś spełnić drugi wa-



Rys. 166.

runek  $\hat{Z}_1 = -4\hat{Z}_2$ , jako opory równoległe obieramy dławiki (rys. 166-a). Drugi więc warunek wyrazi nam się podobnie, jak w poprzednim przykładzie (rys. 166-b), jako:

$$-j \frac{1}{\omega_1 C} = -4j \omega_1 L,$$

skąd możemy obliczyć częstotliwość dolną:

$$\omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{LC}}. \quad (292)$$

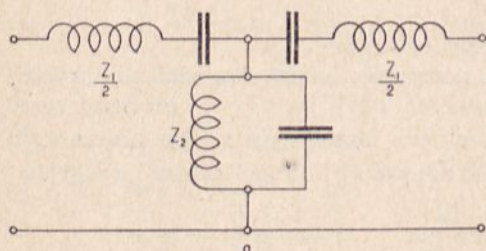
A więc filtr rys. 166-a będzie przepuszczał częstotliwości większe od  $\omega_1$ , zaś wszystkie częstotliwości mniejsze będzie tłumił według przebiegu rys. 166-c.

Oporność falowa tego filtru w układzie T wynosi

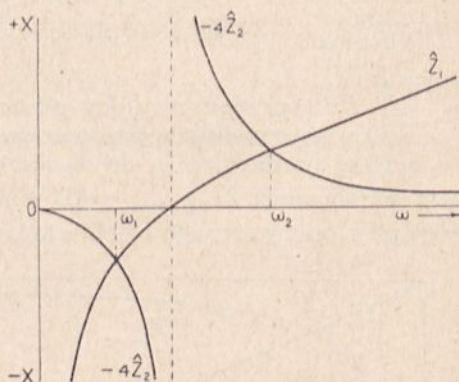
$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4\omega^2 LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2}, \quad (293)$$

a w układzie II

$$\hat{Z}_{0II} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4\omega^2 LC}}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2}}. \quad (294)$$



Rys. 167 a.



Rys. 167 b.

### c) Filtr widmowy.

Istnieje niekończące się wiele możliwości rozwiązania takiego filtru. Może nim być układ rys. 167-a, składający się z szeregowych obwodów rezonansu napięć  $\hat{Z}_1 = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$  i równoległych obwodów rezonansu prądów

$$\hat{Z}_2 = -j \frac{L_2}{C_2} \cdot \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \quad (\text{z pominięciem oporności omowej}),$$

nastrojonych na tę samą częstotliwość rezonansową. Załaganie rozwiązujemy graficz-



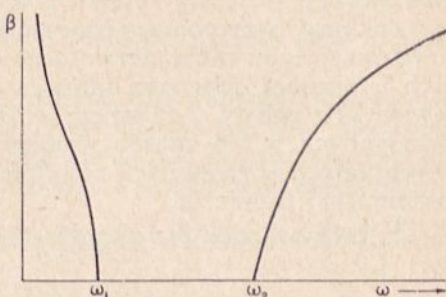
nie, kreśląc  $\hat{Z}_1$  i  $-4\hat{Z}_2$  w funkcji  $\omega$  i znajdując ich punkty przecięcia (rys. 167-b). Analitycznie znajdziemy je, rozwiązując równanie:

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 4 \frac{L_2}{C_2} \cdot \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{4\omega L_2}{\omega^2 L_2 C_2 - 1} \quad (295)$$

i znajdując obie częstotliwości graniczne  $\omega_1$  i  $\omega_2$  będące pierwiastkami tego równania (295).

Jak łatwo się przekonać, w tym przypadku rozwiązanie dla warunku  $\frac{\hat{Z}_1}{4\hat{Z}_2} = 0$ , czyli  $\hat{Z}_1 = 0$ , jest zawarte między wartościami  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , otrzymanymi z równania (295).

Krzywą tłumienia tego filtra podaje rys. 167-c.



Rys. 167-c.

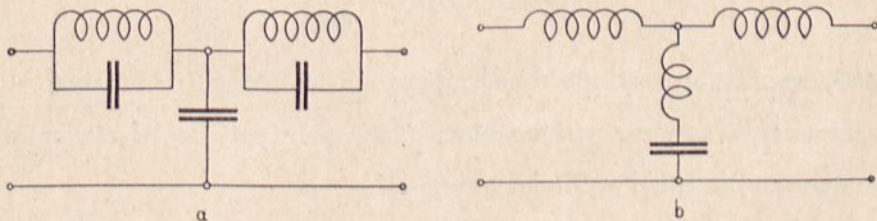
#### 4. Filtry pochodne i złożone.

W poprzednim paragrafie omówiliśmy w krótkości układy najprostsze, t. zw. *filtry pierwotne*. Często jednak spotyka się układy bardziej złożone, przy których pomocy można uzyskać dowolny przebieg charakterystyki tłumienia. W szczególności, jeżeli zależy nam na bardzo stromym zboczu charakterystyki filtra, obiera się układ, którego charakterystyka przy pewnej częstotliwości, leżącej obok jednej z częstotliwości granicznych, wykazuje *tłumienie nieskończenie wielkie*. Częstotliwość ta  $\omega_\infty$ , musi spełnić warunek:

$$\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = \infty, \quad (296)$$

co, jak wynika z rozważań § 2, odpowiada tłumieniu nieskończenie wielkiemu. Warunek ten można zrealizować, obierając albo  $\hat{Z}_1 = \infty$ , albo  $\hat{Z}_2 = 0$ .

Można np. wykonać filtr przepuszczający poniżej częstotliwości  $\omega_2$  utworzony — zamiast z dławików — z obwodów rezonansu prądów (rys.



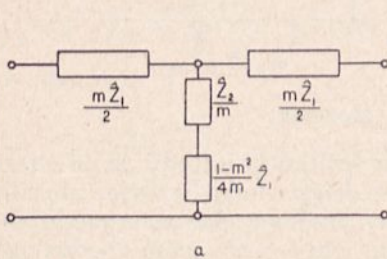
Rys. 168.

168-a), nastrojonych np. na częstotliwość  $1,1\omega_2$ , przy której  $\hat{Z}_1 = \infty$ , wskutek czego charakterystyka tłumienia w granicach od  $\omega_2$  do  $1,1\omega_2$  będzie

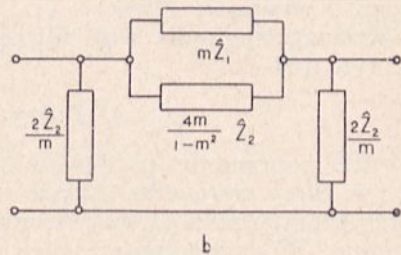
przebiegała od zera do nieskończoności, dając zbrocze bardzo strome. Można też, zamiast kondensatorów, włączyć jako  $\hat{Z}_2$  obwody rezonansu napięć (rys. 168-b), nastrojone na tę samą częstotliwość  $1,1 \omega_2$  i zwierające filtr przy tej częstotliwości ( $\hat{Z}_2 = 0$ ), co również da tłumienie nieskończenie wielkie dla tej częstotliwości.

Te i tym podobne układy, rozwinięte z filtrów podstawowych, można rozwiązywać w prosty sposób, posługując się metodą *filtrów pochodnych*. Są to układy, przy pomocy których filtr bardziej złożony można sprowadzić do pewnego typu filtru pierwotnego o tychsamyach częstotliwościach granicznych i tejsamej oporności falowej. Metoda ta więc pozwala rozpatrywać pewien filtr prosty o żądanem widmie przepuszczanem i, opierając się na otrzymanych w ten sposób wynikach, przejść na układ bardziej złożony o tychsamyach własnościach zasadniczych, lecz o zmienionym przebiegu charakterystyki tłumienia.

Filtry pochodne dla układów T i II, mamy na rys. 169-a i b.



Rys. 169-a.



Rys. 169-b.

Rozpatrzmy oba układy, przyjmując dla poszczególnych oporów składowych wartości podane na rysunku. Wówczas dla układu T pochodnego oporność falowa wyniesie (patrz wzór 280).

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{0T} &= \sqrt{m \hat{Z}_1 \left( \frac{\hat{Z}_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} \cdot \hat{Z}_1 \right) \cdot \left[ 1 + \frac{m \hat{Z}_1}{4 \left( \frac{\hat{Z}_2}{m} + \frac{1-m^2}{4} \cdot \hat{Z}_1 \right)} \right]} \\ &= \sqrt{\hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2 \left( 1 + \frac{\hat{Z}_1}{4 \hat{Z}_2} \right)}, \end{aligned} \quad (297)$$

z czego wynika, że jest ona równa oporności falowej filtru prostego.

Tłumienie, zgodnie z równaniem (285) zależy tylko od stosunku  $\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}$ . Stosunek ten dla filtru pochodnego wynosi:

$$\left( \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} \right)_m = \frac{m \hat{Z}_1}{\frac{\hat{Z}_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} \hat{Z}_1} = \frac{4m^2 \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}}{(1-m^2) \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} + 4}. \quad (298)$$

Z równania tego z łatwością można wyprowadzić, że:

- a) dla  $\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = 0$ , również jest  $\left(\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}\right)_m = 0$ ,  
 b) dla  $\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = -4$ , również jest  $\left(\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}\right)_m = -4$ ,

z czego wynika, że filtr pochodny posiada również te same częstotliwości graniczne, co filtr pierwotny.

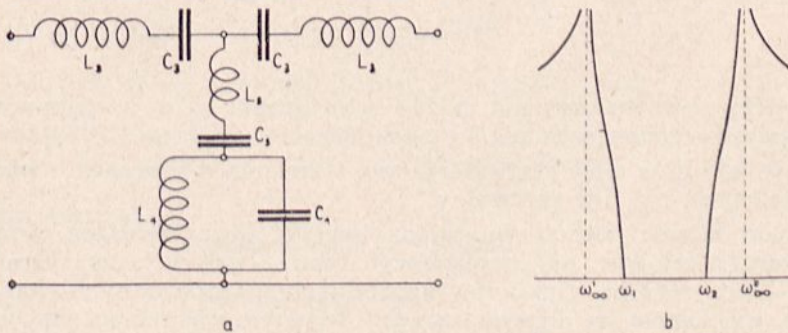
A więc udowodniliśmy, że można utworzyć *filtr pochodny o tej samej oporności falowej i tym samym zakresie częstotliwości*, co filtr pierwotny, lecz posiadający odmienną charakterystykę tłumienia. W szczególności filtr pochodny przy pewnych częstotliwościach może wykazywać nieskończenie

wielkie tłumienie. Częstotliwości te muszą spełnić warunek  $\left(\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}\right)_m = \infty$ ,

co nastąpi, gdy mianownik wyrażenia (298) przyrównamy do zera. Stąd obliczymy:

$$\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = \frac{-4}{1 - m^2}, \text{ czyli } m = \sqrt{1 + \frac{4\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1}}. \quad (299)$$

W analogiczny sposób, jak to uczyniliśmy dla układu T, można wykazać dla *filtru pochodnego typu II*, że posiada on tę samą oporność falową, co filtr pierwotny (patrz wzór 297) i że stosunek  $\left(\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}\right)_m$  jest tensam, co filtru pochodnego typu T (wzór 298).



Rys. 170.

Opierając się na zasadzie tworzenia filtrów pochodnych, z prostego filtru widmowego rys. 167 możemy utworzyć filtr widmowy pochodny według rys. 170.

W filtrze pierwotnym mieliśmy:

$$\hat{Z}_1 = j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right); \quad \hat{Z}_2 = -j \frac{L_2}{C_2} \cdot \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}.$$

Jeżeli założymy:

$$L_3 = m L_1, \quad C_3 = \frac{C_1}{m}, \quad L_4 = \frac{L_2}{m}, \quad C_4 = m C_2,$$

$$L_5 = \frac{1 - m^2}{4m} \cdot L_1, \quad C_5 = \frac{4m}{1 - m^2} \cdot C_1,$$

spełnione będą warunki:

$$\hat{Z}_3 = j \left( \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3} \right) = j m \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = m \hat{Z}_1,$$

$$\hat{Z}_4 = -j \frac{L_4}{C_4} \cdot \frac{1}{\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4}} = -j \frac{1}{m} \cdot \frac{L_2}{C_2} \cdot \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{\hat{Z}_2}{m},$$

$$\hat{Z}_5 = j \left( \omega L_5 - \frac{1}{\omega C_5} \right) = j \frac{1 - m^2}{4m} \cdot \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = \frac{1 - m^2}{4m} \hat{Z}_1.$$

W takim układzie otrzymamy dwie częstotliwości, przy których tłumienie jest nieskończenie wielkie, zależnie od wielkości  $m$ . Zgodnie bowiem ze wzorem (299) mamy równanie:

$$m^2 = 1 - \frac{L_2}{C_2} \cdot \frac{4}{\left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \cdot \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)}, \quad (300)$$

dające przy pewnym obramem  $m$  dwa rozwiązania na  $\omega_\infty$ , odpowiadające obu częstotliwościom o tłumieniu nieskończenie wielkiem.

Filtr taki daje więc charakterystykę tłumienia o zboczach o wiele bardziej stromych, niż filtr pierwotny.

Dzięki filtrom pochodnym można tworzyć linje filtrujące, składające się z szeregu członów, nie identycznego typu — jak w t. zw. filtrach prostych — lecz złożone z układów pochodnych o różnorodnych charakterystykach, wzajemnie się dopełniających. Jedynym warunkiem jest, by przy wszystkich częstotliwościach oporność falowa wszystkich członów była ta sama. Warunek ten z łatwością można spełnić na podstawie danych rys. 169.

W ten sposób skonstruowane filtry noszą nazwę *filtrów złożonych*.

Tłumienie całkowite takiego filtry, złożonego z różnych członów, możemy obliczyć, dodając do siebie tłumienia poszczególnych członów

$$\beta l = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots \quad (286 a)$$

## 5. Wpływ oporności omowej na charakterystykę filtru.

Dotychczas zakładaliśmy, że elementy filtru są czystymi oporami urojonymi. Ścisłe biorąc, zawierają one zawsze pewną składową rzeczywistą, która sprawia, że warunek  $\beta = 0$  w zakresie przepuszczanym nie jest spełniony i pewne — choć nieznaczne — tłumienie tam występuje. Również i dla częstotliwości  $\omega_{\infty}$  nigdy nie możemy spełnić idealnie warunków  $\hat{Z}_1 = \infty$  ani  $\hat{Z}_2 = 0$ , a więc dla tych częstotliwości tłumienie filtru będzie wprawdzie bardzo duże, ale nigdy nie będzie nieskończenie wielkie. Innymi słowy, oporność omowa sprawia, że zwiększa tłumienie tam, gdzie byłoby bardzo małe, a zmniejsza tam, gdzie powinno być bardzo duże, skutkiem czego charakterystyka filtru przebiega *bardziej łagodnie*.

Charakterystykę filtru rzeczywistego można z łatwością obliczyć (O. J. Zobel), przyjmując, że:

1° kondensatory są bez upływności,

2° oporność zwojnic samoindukcyjnych jest proporcjonalna do częstotliwości, czyli:

$$\frac{R}{\omega L} = \operatorname{tg} \delta \approx \delta = \text{const.}$$

Wielkość tę nazywamy stratnością zwojnic<sup>1)</sup>.

Oporność pozorną zwojnic można więc wyrazić zależnością:

$$\hat{Z} = R + j\omega L = (\delta + j)\omega L. \quad (301)$$

Obliczając według tego wzoru oporności pozorne poszczególnych zwojnic filtru, podstawiamy je do wzoru (285), rozbijając wynik na część rzeczywistą  $\beta$  i urojoną  $j\gamma$ . Podstawiając zależność (287) do równania (285) będziemy mieli:

$$\cosh(\beta + j\gamma) = \cosh[(1 + 2U) + j2V],$$

stosując zaś przekształcenie (patrz dodatek I):

$$\cosh(\beta + j\gamma) = \cosh \beta \cdot \cosh j\gamma + \sinh \beta \cdot \sinh j\gamma,$$

i podstawiając:

$$\cosh j\gamma = \cos \gamma, \quad \sinh j\gamma = j \sin \gamma,$$

otrzymamy wkońcu:

$$\left. \begin{aligned} \cosh \beta \cdot \cos \gamma &= 1 + 2U \\ \sinh \beta \cdot \sin \gamma &= 2V \end{aligned} \right\} \quad (302)$$

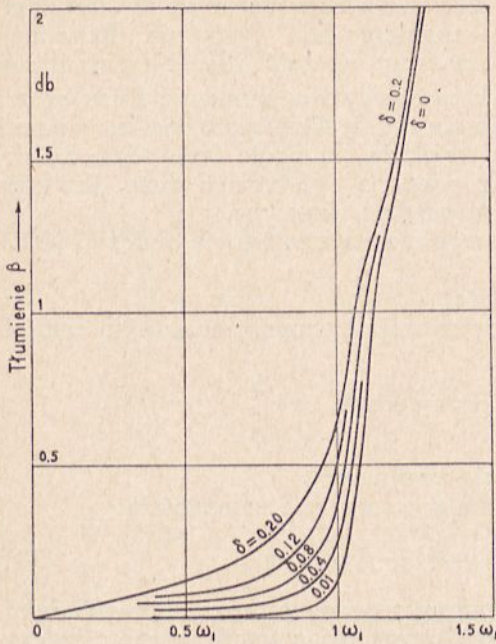
Ten układ równań możemy rozwiązać, posługując się równaniami pomocniczymi:

$$\sin^2 \gamma + \cosh^2 \gamma = 1, \quad \text{oraz} \quad \cosh^2 \beta - \sinh^2 \beta = 1,$$

poczem z tablic znajdujemy odpowiednie wartości  $\beta$  i  $\gamma$ .

<sup>1)</sup> Patrz „Części konstrukcyjne“.

Rys. 171 podaje charakterystyki tłumienia filtra, przepuszczającego dolne częstotliwości przy różnych wartościach  $\delta$ . Widać z nich, że ze wzrostem oporności częstotliwość graniczna filtra nie ulega zmianie, lecz



Rys. 171.

granica przepuszczania staje się coraz mniej wyraźna. Im ostrzejszą chcemy mieć tę granicę, tem mniejsza jest dopuszczalna wartość  $\delta$ , jednakże w miarę zmniejszania oporności rośnie cena takiego filtra. Zależnie więc od przeznaczenia filtra obiera się pewną wartość  $\delta$  kompromisową.

Orientacyjnie można podać następujące wartości graniczne  $\delta$  dla poszczególnych kategorii filtrów:

1° Filtry o bardzo ostrej granicy i bardzo wysokim widmie przepuszczanem,

$$\delta < 0,01.$$

2° Filtry normalne, o ograniczonych wymiarach i cenie,

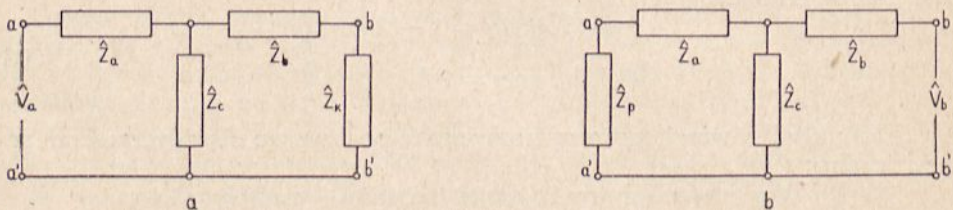
$$\delta < 0,03.$$

3° Filtry, którym nie stawia się zbyt surowych żądań,

$$\delta \geq 0,04.$$

## 6. Człon niesymetryczny.

Rozważaliśmy dotychczas filtry, których człony posiadają tęsamą oporność falową. Można jednakże łączyć również człony o różnych opornościach falowych, jednakże pod warunkiem, że oporność wejściowa członu następnego równa się oporności wyjściowej członu poprzedniego. W ten sposób dochodzimy do pojęcia *członu niesymetrycznego*, posiadającego różne oporności falowe, zależnie od kierunku włączenia go w linię.



Rys. 172.

Rozpatrzmy układ rys. 172, przedstawiający człon  $T$  o nierównych ramionach  $\hat{Z}_a$  i  $\hat{Z}_b$ . Załóżmy, że człon ten na wyjściu posiada dowolne ob-

ciążenie  $\hat{Z}_k$ . Człon taki dla napięcia  $\hat{V}_1$  działającego między punktami  $a - a'$ , przedstawia oporność wejściową:

$$\hat{Z}_I = \hat{Z}_a + \frac{\hat{Z}_c(\hat{Z}_b + \hat{Z}_k)}{\hat{Z}_b + \hat{Z}_c + \hat{Z}_k}. \quad (303)$$

Jeżeli zaś oporność, po której człon ten jest włączony, wynosi  $\hat{Z}_p$ , to dla napięcia  $\hat{V}_b$ , działającego na jego zaciskach wyjściowych  $b - b'$ , stanowi on oporność wyjściową:

$$\hat{Z}_{II} = \hat{Z}_b + \frac{\hat{Z}_c(\hat{Z}_a + \hat{Z}_p)}{\hat{Z}_a + \hat{Z}_c + \hat{Z}_p}. \quad (304)$$

Jeżeli dobierzemy warunki w ten sposób, aby oporność włączona na wyjściu członu była równa jego oporności wyjściowej, a oporność poprzedzająca go równa była jego oporności wejściowej, czyli jeżeli spełnimy warunki:

$$\hat{Z}_I = \hat{Z}_p, \quad \text{oraz} \quad \hat{Z}_{II} = \hat{Z}_k, \quad (305)$$

wówczas oporność układu na każdym przejściu będzie taka sama w obu kierunkach, a więc filtr będzie się zachowywał jak układ jednorodny — podobnie jak linja bez odbić. Oporności odpowiadające warunkowi (305) nazywamy *opornościami zastępczymi* filtru (ang. *image impedance*), a filtr pracujący we wszystkich członach na swoje oporności zastępcze, możemy nazwać *filtrem bez odbić*.

Oporności zastępcze otrzymamy ze wzorów (303) i (304), podstawiając w nich warunki (305) i rugując kolejno  $\hat{Z}_p$  i  $\hat{Z}_k$ :

$$\hat{Z}_p = \hat{Z}_{0I} = \sqrt{\frac{(\hat{Z}_a + \hat{Z}_c)(\hat{Z}_a\hat{Z}_b + \hat{Z}_b\hat{Z}_c + \hat{Z}_c\hat{Z}_a)}{\hat{Z}_b + \hat{Z}_c}}. \quad (306)$$

$$\hat{Z}_k = \hat{Z}_{0II} = \sqrt{\frac{(\hat{Z}_b + \hat{Z}_c)(\hat{Z}_a\hat{Z}_b + \hat{Z}_b\hat{Z}_c + \hat{Z}_c\hat{Z}_a)}{\hat{Z}_a + \hat{Z}_c}}. \quad (307)$$

W przypadku szczególnym, gdy założymy:

$$\hat{Z}_a = \hat{Z}_b = \frac{\hat{Z}_1}{2}, \quad \hat{Z}_c = \hat{Z}_2,$$

otrzymamy:

$$\hat{Z}_p = \hat{Z}_k = \hat{Z}_0 = \sqrt{2\hat{Z}_a\hat{Z}_c + \hat{Z}_a^2} = \sqrt{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1^2}{4}},$$

oporność falową członu symetrycznego typu  $T$  (równanie 279).

*Krańcowe przypadki obciążenia filtru. Pomiar oporności falowej.*

Na podstawie równań (303) i (304) możemy rozpatrywać zachowanie się filtru przy dowolnym obciążeniu, nie tylko równym jego oporności za-

stępczej. Szczególnie ciekawe będą dla nas przypadki filtru *otwartego* i *zwartego*. Łatwo stwierdzić na podstawie rys. 172, że dla filtru *otwartego* otrzymamy oporność wejściową:

$$\hat{Z}_{I\infty} = \hat{Z}_a + \hat{Z}_c, \quad (308)$$

i oporność wyjściową:

$$\hat{Z}_{II\infty} = \hat{Z}_b + \hat{Z}_c. \quad (309)$$

Natomiast dla filtru *zwartego* otrzymamy oporność wejściową:

$$\hat{Z}_{Izw} = \hat{Z}_a + \frac{\hat{Z}_b \hat{Z}_c}{\hat{Z}_b + \hat{Z}_c} = \frac{\hat{Z}_a \hat{Z}_b + \hat{Z}_b \hat{Z}_c + \hat{Z}_c \hat{Z}_a}{\hat{Z}_b + \hat{Z}_c}, \quad (310)$$

oraz oporność wyjściową:

$$\hat{Z}_{IIzw} = \hat{Z}_b + \frac{\hat{Z}_a \hat{Z}_c}{\hat{Z}_a + \hat{Z}_c} = \frac{\hat{Z}_a \hat{Z}_b + \hat{Z}_b \hat{Z}_c + \hat{Z}_c \hat{Z}_a}{\hat{Z}_a + \hat{Z}_c}. \quad (311)$$

Podstawiając wyniki równań (310) i (311) do wzorów (306) i (307), otrzymamy oporności zastępcze obu stron filtru:

$$\hat{Z}_{0I} = \sqrt{\hat{Z}_{I\infty} \cdot \hat{Z}_{Izw}}, \quad (306a)$$

$$\hat{Z}_{0II} = \sqrt{\hat{Z}_{II\infty} \cdot \hat{Z}_{IIzw}}. \quad (307a)$$

Z tych wzorów wynika, że można znaleźć oporność falową filtru, mierząc jego oporność pozorną w stanie zwartym i w stanie otwartym, podobnie jak oporność falową linii elektrycznej.

## 7. Łączenie członów niesymetrycznych.

Dla filtru *bez odbić* można wykazać, że jego *oporność falowa wejściowa* i *wyjściowa* zależą jedynie od *pierwszego* i *ostatniego* członu tego filtru.

A mianowicie, oporności falowe takiego układu (rys. 173-a), składającego się z dwu dowolnych członów (naogół niesymetrycznych) obliczymy na podstawie wzorów (306) i (307) jako:

$$\hat{Z}_{0I} = \sqrt{\frac{(\hat{Z}_a + \hat{Z}_c)(\hat{Z}_a \hat{Z}_b + \hat{Z}_b \hat{Z}_c + \hat{Z}_c \hat{Z}_a)}{\hat{Z}_b + \hat{Z}_c}}, \quad (a)$$

$$\hat{Z}'_{0II} = \sqrt{\frac{(\hat{Z}_b + \hat{Z}_c)(\hat{Z}_a \hat{Z}_b + \hat{Z}_b \hat{Z}_c + \hat{Z}_c \hat{Z}_a)}{\hat{Z}_a + \hat{Z}_c}} =$$

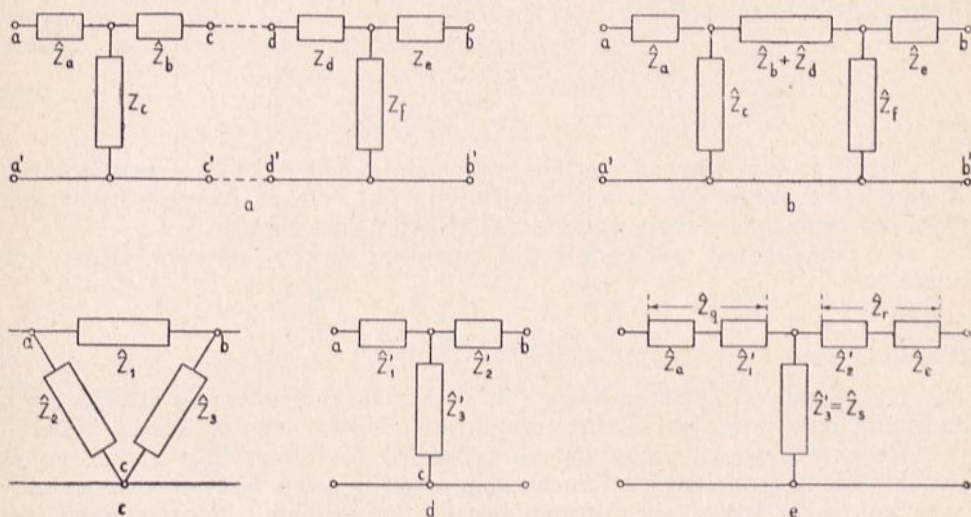
$$= \hat{Z}'_{0I} = \sqrt{\frac{(\hat{Z}_e + \hat{Z}_f)(\hat{Z}_d \hat{Z}_e + \hat{Z}_e \hat{Z}_f + \hat{Z}_f \hat{Z}_d)}{\hat{Z}_d + \hat{Z}_f}}; \quad (b)$$

$$\hat{Z}_{0II} = \sqrt{\frac{(\hat{Z}_e + \hat{Z}_f)(\hat{Z}_d \hat{Z}_e + \hat{Z}_e \hat{Z}_f + \hat{Z}_f \hat{Z}_d)}{\hat{Z}_e + \hat{Z}_f}}. \quad (c)$$



Układ rys. 173-a jest oczywiście równoważny układowi rys. 173-b. Wewnętrzna część tego układu tworzy człon typu II; który możemy zamienić na człon typu T w sposób następujący:

Dowolny układ oporów  $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2$  i  $\hat{Z}_3$ , połączonych w trójkąt (rys. 173-c), wówczas będzie równoważny układowi  $\hat{Z}'_1, \hat{Z}'_2$  i  $\hat{Z}'_3$  połączonemu w gwiazdę (rys. 173-d), jeżeli oporności między punktami  $a-c, b-c$  i  $a-b$  będą



Rys. 173

tesame w obu układach, czyli, jeżeli opory  $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \hat{Z}_3$  spełnią — jak to łatwo wykazać — następujące warunki:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Z}'_1 &= \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3} \\ \hat{Z}'_2 &= \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_3}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3} \\ \hat{Z}'_3 &= \frac{\hat{Z}_2 \hat{Z}_3}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3} \end{aligned} \right\} \quad (312)$$

Podstawiając do równań (312) wartości:  $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_b + \hat{Z}_d$ ,  $\hat{Z}_2 = \hat{Z}_c$ , oraz  $\hat{Z}_3 = \hat{Z}_f$ , otrzymamy układ zastępczy filtru (rys. 173-e) złożony z następujących oporów:

$$\hat{Z}_q = \hat{Z}_a + \hat{Z}'_1 = \hat{Z}_a + \frac{\hat{Z}_c(\hat{Z}_b + \hat{Z}_d)}{\hat{Z}_b + \hat{Z}_c + \hat{Z}_d + \hat{Z}_f} \quad (d)$$

$$\hat{Z}_r = \hat{Z}_e + \hat{Z}'_2 = \hat{Z}_e + \frac{\hat{Z}_f(\hat{Z}_b + \hat{Z}_d)}{\hat{Z}_b + \hat{Z}_c + \hat{Z}_d + \hat{Z}_f} \quad (e)$$

$$\hat{Z}_s = \hat{Z}'_s = \frac{\hat{Z}_c \cdot \hat{Z}_f}{\hat{Z}_b + \hat{Z}_c + \hat{Z}_d + \hat{Z}_f} \quad (f)$$

Oporności falowe tego filtra zastępczego będą, zgodnie ze wzorami (306) i (307):

$$\hat{Z}_{0I} = \sqrt{\frac{(\hat{Z}_q + \hat{Z}_s)(\hat{Z}_q \hat{Z}_r + \hat{Z}_r \hat{Z}_s + \hat{Z}_q \hat{Z}_s)}{\hat{Z}_r + \hat{Z}_s}} \quad (g)$$

$$\hat{Z}_{0II} = \sqrt{\frac{(\hat{Z}_r + \hat{Z}_s)(\hat{Z}_q \hat{Z}_r + \hat{Z}_r \hat{Z}_s + \hat{Z}_q \hat{Z}_s)}{\hat{Z}_q + \hat{Z}_s}} \quad (h)$$

Jeżeli do tych równań podstawimy wartości (d), (e) i (f) i uwzględnimy równość (b), okaże się, że oporności falowe (g) i (h) są równe wielkościom (a) i (c) czyli twierdzenie podane na początku jest słuszne.

To samo można udowodnić dla dowolnej liczby członów filtra bez odbić.

### 8. Obciążenie filtra.

Dotychczas przyjmowaliśmy, że filtr jest nieskończenie długi, czyli, że każdy jego człon jest obciążony oporem równym jego oporności falowej.

Rzecz oczywista, nicby się nie zmieniło, gdybyśmy filtr o skończonej liczbie członów obciążyli odbiornikiem, któryby przy wszystkich częstotliwościach zachowywał się taksamo jak filtr. Spełnienie tego warunku jest niewykonalne, szczególnie, gdy charakterystyka filtra jest bardziej złożona. Dlatego też w warunkach rzeczywistych, o ile zakres częstotliwości zasilających jest szeroki, filtr będzie pracował na obciążenie różne od jego oporności falowej i jego charakterystyka tłumienia będzie odmienna od idealnej, obliczonej dla filtra nieskończenie długiego.

Jednakże dla celów praktycznych jest zupełnie wystarczające, jeżeli odbiornik będzie *dostosowany do charakterystyki filtra w obrębie widma przepuszczanego*. Warunek ten będzie spełniony, gdy opór odbiornika będzie równy oporności falowej filtra przy częstotliwości równej *średniej geometrycznej* z obu częstotliwości granicznych:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (313)$$

Wobec tego, że w obrębie przepuszczania filtr zachowuje się jak opór omowy, odbiornik, którym filtr jest obciążony, powinien posiadać oporność bezindukcyjną, równą oporności falowej filtra przy częstotliwości  $\omega_0$ .

Tesame rozważania odnoszą się zresztą również i do źródła zasilającego, które w taki sam sposób powinno być dostosowane do członu wejściowego filtra, jak odbiornik do jego członu wyjściowego.

Jak wynika z teorii filtrów niesymetrycznych, dobranie filtra, któryby mógł połączyć źródło prądu i odbiornik o znacznie różniących się opornościach, nie stanowi szczególnej trudności.

Szczególnie korzystnym okazało się (O. J. Zobel) zakończenie obu stron filtra t. zw. *pół-członem*, o kierunku odwróconym względem normal-

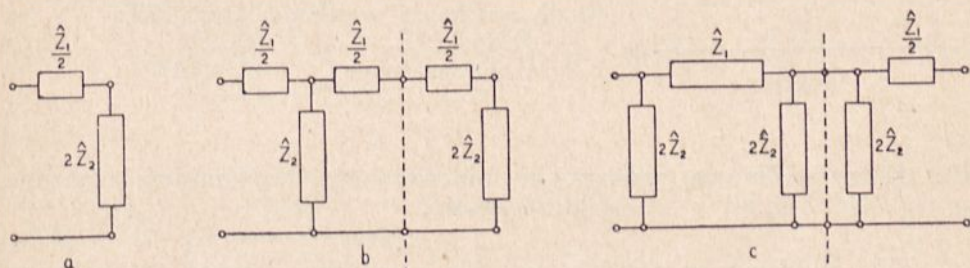
nych członów filtru. Zapewnia to filtrowi znacznie większą niezależność od zmian obciążenia zewnętrznego.

Taki pół-człon, zwany też członem typu  $M$ , otrzymujemy, dzieląc człon  $T$  lub  $\Pi$  na połowę (rys. 174-a). Otrzymujemy w ten sposób w obu przypadkach układ, utworzony z oporu szeregowego  $\hat{Z}_a = \frac{\hat{Z}_1}{2}$  i z oporu równoległego  $\hat{Z}_c = 2\hat{Z}_2$ . Jest krańcowy przypadek filtru niesymetrycznego, którego jedno ramię  $\hat{Z}_b = 0$ . Jak łatwo obliczyć przy pomocy wzorów (306) i (307), oporności falowe członu  $M$  wynoszą:

$$\hat{Z}_{0I} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_1}{2} \left( 2\hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1}{2} \right)} = \sqrt{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1^2}{4}}, \quad (314)$$

$$\hat{Z}_{0II} = \sqrt{\frac{2\hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2^2}{\hat{Z}_1 + 2\hat{Z}_2}} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2}{1 + \frac{\hat{Z}_1}{4\hat{Z}_2}}}. \quad (315)$$

A więc, zależnie od kierunku włączenia, oporność falowa członu  $M$  równa się albo oporności falowej członu  $T$  albo też członu  $\Pi$ .



Rys. 174.

Odwrócone dołączenie członu  $M$  do filtru  $T$  (rys. 174-b) zamienia ten filtr pozornie na filtr  $\Pi$ ; analogiczne dołączenie go do filtru  $\Pi$  (rys. 174-c) nadaje temu filtrowi wygląd filtru  $T$ .

## 9. Przykład obliczenia filtru przypuszczającego częstotliwości mniejsze od częstotliwości granicznej.

Filtr, tłumiący wszystkie częstotliwości powyżej  $\omega_2 = 20000$ , ma pracować na oporność  $Z = 1000 \Omega$  o charakterze omowym.

Tę wartość powinna posiadać oporność falowa filtru przy średniej geometrycznej częstotliwości widma przepuszczanego, która zgodnie z (313) wynosi:

$$\omega_{sr} = \sqrt{20000 \times 0} = 0.$$

Projektujemy filtr jednoczłonowy typu  $T$ , zakończony obustronnie członami  $M$ , co w danym przypadku pokrywa się z dwuczłonowym filtrem typu II.

Mając daną częstotliwość graniczną, obliczamy z równania (289):

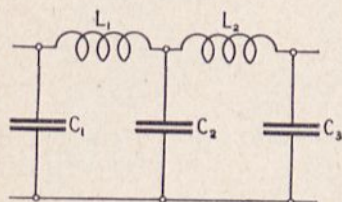
$$LC = \frac{4}{\omega_2^2} = \frac{4}{4 \cdot 10^8} = 10^{-8}.$$

Drugie równanie daje nam żądana oporność falowa. Dzięki temu, że filtr możemy uważać jako złożony z dwu członów typu II, możemy obliczyć  $Z_0$  z równania (291), zakładając zgodnie z poprzednim,  $\omega_{sr} = 0$ :

$$\dot{Z}_{0II} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = 1000 \Omega.$$

czyli

$$\frac{L}{C} = 10^6 \Omega.$$



Rys. 175.

Z tych dwu równań mamy  $L = 0,1 H$ ,  $C = 0,1 \mu F$ . Poszczególne elementy filtru będą posiadały wielkości (rys. 175):

Dławiki:  $L_1 = L_2 = 0,1 H$ .

Kondensatory:  $C_1 = C_3 = 0,05 \mu F$ ,

$C_2 = 0,1 \mu F$ .

## 10. Filtry widmowe, zawierające indukcyjności i pojemności łączone szeregowo.

Filtr widmowy w układzie rys. 176 *a* możemy uważać za pochodny filtru rys. 176 *b*. Możemy mianowicie przyjąć, że pojemność  $C_2$  jest wypadkową dwu szeregowo połączonych pojemności  $C_A$  i  $C_B$ :

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B},$$

dzięki czemu otrzymujemy układ zastępczy rys. 176 *c*. Aby układy *b* i *c* były równoważne pod względem zakresu przepuszczenia i oporności falowej, musimy — zgodnie z § 4 — spełnić następujące warunki:

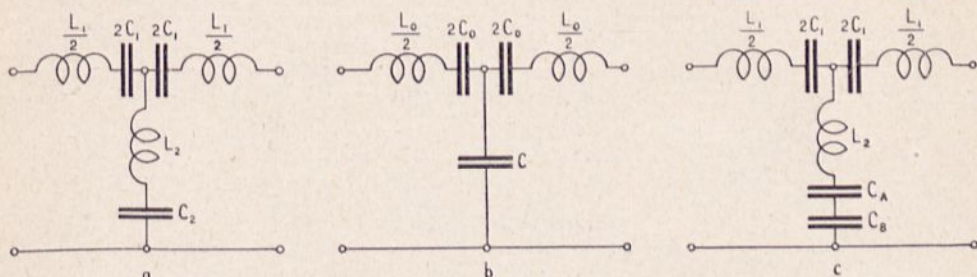
$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = m \left( \omega L_0 - \frac{1}{\omega C_0} \right),$$

$$\frac{1}{\omega C_B} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\omega C}.$$

$$\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} = \frac{1 - m^2}{4m} \left( \omega L_0 - \frac{1}{\omega C_0} \right).$$

Możemy więc obliczyć częstotliwości graniczne i oporność falową dla układu prostszego, którego oporności wynoszą:

$$\hat{Z}_1 = j \left( \omega L_0 - \frac{1}{\omega C_0} \right), \quad \hat{Z}_2 = -j \frac{1}{\omega C}.$$



Rys. 176.

Stąd obliczamy:

$$\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = \frac{j \left( \omega L_0 - \frac{1}{\omega C_0} \right)}{-j \frac{1}{\omega C}} = - \frac{C}{C_0} \cdot (\omega^2 L_0 C_0 - 1). \quad (316)$$

Częstotliwości graniczne znajdziemy, zakładając kolejno  $Z_1/Z_2 = 0$  i  $Z_1/Z_2 = -4$  i rozwiązując te równania względem  $\omega$ . Na podstawie pierwszego z tych założeń obliczamy:

$$- \frac{C}{C_0} (\omega_1^2 L_0 C_0 - 1) = 0 \quad \text{czyli} \quad \omega_1^2 L_0 C_0 = 1,$$

co daje jedną częstotliwość graniczną:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (317)$$

Analogicznie znajdziemy drugą częstotliwość graniczną z równości:

$$- \frac{C}{C_0} (\omega_2^2 L_0 C_0 - 1) = -4, \quad \text{czyli} \quad \omega_2^2 L_0 C_0 = \frac{4C_0}{C} + 1,$$

skąd otrzymamy:

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \cdot \sqrt{\frac{4C_0 + C}{C}}. \quad (317')$$

Oporność falową dla układu  $T$  znajdziemy na podstawie równania (280).  
Obliczamy wartości:

$$\hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2 = j \left( \omega L_0 - \frac{1}{\omega C_0} \right) \left( -j \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{\omega^2 L_0 C_0 - 1}{\omega^2 C_0 C},$$

$$1 + \frac{\hat{Z}_1}{4\hat{Z}_2} = 1 - \frac{\omega^2 L_0 C_0 - 1}{4} \cdot \frac{C}{C_0} = \frac{4C_0 - C(\omega^2 L_0 C_0 - 1)}{4C_0},$$

podstawiamy je do równania (280) i otrzymujemy:

$$\hat{Z}_{0T}^2 = \frac{\omega^2 L_0 C_0 - 1}{\omega^2 C_0 C} \cdot \frac{4C_0 - C(\omega^2 L_0 C_0 - 1)}{4C_0} =$$

$$= \frac{\omega^2 L_0 C_0 - 1}{4\omega^2 C_0^2} \cdot \left[ \frac{4C_0 + C}{C} - \omega^2 L_0 C_0 \right]. \quad (318)$$

Dla projektowania filtra najważniejsza jest znajomość jego oporności falowej w widmie przepuszczanym. Jak już powiedziano w § 8, obliczamy ją dla częstotliwości średniej geometrycznej tego widma, a więc dla  $\omega_{sr} = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$ .

W naszym przypadku:

$$\omega_{sr}^2 = \omega_1 \cdot \omega_2 = \frac{1}{L_0 C_0} \sqrt{\frac{4C_0 + C}{C}}, \quad (319)$$

czyli

$$\omega_{sr}^2 L_0 C_0 = \sqrt{\frac{4C_0 + C}{C}}. \quad (319')$$

Podstawiając tę wartość do równania (318) i uwzględniając wartości  $\omega_1$  i  $\omega_2$  z równań (317) i (317'), otrzymamy średnią oporność falową filtra:

$$\hat{Z}_{0Tsr} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \cdot \left[ \sqrt{\frac{4C_0 + C}{C}} - 1 \right]. \quad (320)$$

Możemy jednakże wykonać pewne przekształcenie. A mianowicie z równań (317) i (317') mamy:

$$\sqrt{\frac{4C_0 + C}{C}} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

zaś z równania (317):

$$\frac{1}{\sqrt{C_0}} = \omega_1 \sqrt{L_0}.$$

Podstawiając te wielkości do (320), otrzymamy wyrażenie na średnią oporność falową:

$$\hat{Z}_{0Tsr} = \frac{L_0}{2} (\omega_2 - \omega_1), \quad (320a)$$

z którego znajdujemy:

$$L_0 = \frac{2\dot{Z}_{0Tsr}}{\omega_2 - \omega_1} \quad (320b)$$

*Filtr pochodny.*

Z założeń, które przyjęliśmy dla filtru pochodnego, wynikają następujące wnioski:

$$L_1 = mL_0 \quad (a), \quad C_1 = \frac{C_0}{m} \quad (b), \quad L_2 = \frac{1-m^2}{4m} L_0 \quad (c), \quad C_A = \frac{4m}{1-m^2} C_0 \quad (d),$$

$$C_B = mC \quad (e).$$

Z zależności (d) i (e) obliczamy:

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} = \frac{1-m^2}{4m} \cdot \frac{1}{C_0} + \frac{1}{mC},$$

czyli

$$C_2 = \frac{m \cdot C_0 \cdot C}{C_0 + \frac{1-m^2}{4} \cdot C} \quad (f).$$

Teraz możemy obliczyć częstotliwości graniczne. Podstawiając (a) i (b) do równania (317), otrzymamy:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad (317a)$$

Po podstawieniu zaś zależności (a), (b) i (f) do równania (317') i po wyeliminowaniu  $m^2$  przy pomocy równania (c) <sup>1)</sup> znajdziemy:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4C_1 + C_2}{C_1 C_2 (L_1 + 4L_2)}} \quad (317'a)$$

Tłumienie nieskończenie wielkie otrzymamy przy częstotliwości, dla której  $\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \infty$ . Warunek ten będzie spełniony, gdy  $\dot{Z}_2 = 0$ , czyli dla przypadku rezonansu napięć, gdyż, wtedy mamy zwarcie w gałęzi równoległej filtru.

Odpowiada temu częstotliwość:

$$\omega_\infty = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad (321)$$

Na podstawie powyższych danych możemy obliczyć wszystkie elementy filtru, mając zadane  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_\infty$  i  $\dot{Z}_{0Tsr}$ .

A mianowicie z równania (320-b) i równania (a) mamy:

$$L_1 = \frac{2m \dot{Z}_{0Tsr}}{\omega_2 - \omega_1} \quad (322)$$

<sup>1)</sup> Podstawiamy  $L_0 = \frac{L_1}{m}$  z równania (a) do (c).

Z równania (317-a) otrzymujemy:

$$C_1 = \frac{1}{\omega_1^2 L_1} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2m \omega_1^2 \hat{Z}_{0T_{sr}}} \quad (323)$$

Z zależności (c) i równania (320-b) mamy:

$$L_2 = \frac{1 - m^2}{4m} \cdot L_0 = \frac{\hat{Z}_{0T_{sr}}(1 - m^2)}{2m(\omega_2 - \omega_1)} \quad (324)$$

Pojemność  $C_2$  obliczamy z równania (317'-a)<sup>1)</sup> jako:

$$C_2 = \frac{2m(\omega_2 - \omega_1)}{Z_{0T_{sr}}(\omega_2^2 - m^2\omega_1^2)} \quad (325)$$

Podstawiając  $C_1$  z równania (323), dochodzimy do wyniku równania (325).

Wobec tego częstotliwość o tłumieniu nieskończenie wielkim wynosi po podstawieniu (324) i (325):

$$\omega_\infty = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \sqrt{\frac{\omega_2^2 - m^2\omega_1^2}{1 - m^2}} \quad (326)$$

Z równania (326) łatwo obliczyć wartość  $m$ , która nam daje żadaną charakterystykę filtru (o tłumieniu nieskończenie wielkim przy żądanej częstotliwości  $\omega_\infty$ ):

$$m = \sqrt{\frac{\omega_\infty^2 - \omega_2^2}{\omega_\infty^2 - \omega_1^2}} \quad (327)$$

Dane te są wystarczające dla zaprojektowania filtru.

*Przykład.*

Dla średniej oporności falowej  $\hat{Z}_{0sr} = 600 \Omega$ , mamy obliczyć filtr widmowy z zakresem przepuszczalności:

$$\omega_1 = 2\pi \cdot 30000, \quad \omega_2 = 2\pi \cdot 40000, \quad \omega_\infty = 2\pi \cdot 45000.$$

Znajdujemy  $m$  z równania (327):

$$m = \sqrt{\frac{4,5^2 - 4^2}{4,5^2 - 3^2}} \approx 0,6.$$

---

<sup>1)</sup> Podstawiamy  $L_1 C_1 = \frac{1}{\omega_1^2}$ , oraz  $L_2 C_1 = \frac{1 - m^2}{4m^2 \omega_1^2}$ , jak to wynika z równań (323) i (324) skąd otrzymujemy  $C_2 \cdot \frac{\omega_2^2 - m^2 \omega_1^2}{m^2 \omega_1^2} = 4C_1$ .



Teraz możemy obliczyć:

$$L_1 = \frac{2 m Z_{0sr}}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2 \cdot 0,6 \cdot 600}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^4 - 2\pi \cdot 3 \cdot 10^4} = \frac{720}{6,28 \cdot 10^4} = 11,5 \cdot 10^{-3} H.$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_1^2 L_1} = \frac{1}{(2\pi \cdot 3 \cdot 10^4)^2 \cdot 11,5 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{0,400 \cdot 10^9} \cong 2,44 \cdot 10^{-9} F.$$

$$L_2 = \frac{Z_{0sr} (1 - m^2)}{2 m (\omega_2 - \omega_1)} = \frac{600 [1 - (0,6)^2]}{2 \cdot 0,6 (2\pi \cdot 4 \cdot 10^4 - 2\pi \cdot 3 \cdot 10^4)} = \frac{384}{7,54 \cdot 10^4} = 5,1 \cdot 10^{-3} H.$$

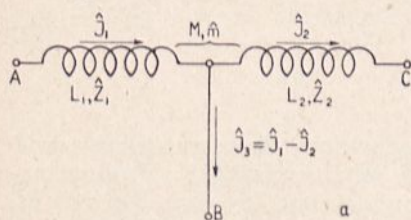
$$C_2 = \frac{2 m (\omega_2 - \omega_1)}{Z_{0sr} (\omega_2^2 - m^2 \omega_1^2)} = \frac{2 \cdot 0,6 (2\pi \cdot 40000 - 2\pi \cdot 30000)}{600 [(2\pi \cdot 4 \cdot 10^4)^2 - (0,6)^2 \cdot (2\pi \cdot 3 \cdot 10^4)^2]} \cong 2,51 \cdot 10^{-9} F.$$

Człon ten mogliśmy połączyć z drugim, w którym częstotliwość o tłumieniu nieskończenie wielkim leży poniżej widma przepuszczanego (np.  $\omega_{\infty} = 2\pi \cdot 25000$ ), obliczonym w sposób analogiczny. Otrzymalibyśmy w ten sposób filtr o charakterystyce, której oba zbocza posiadają bardzo strome pochycenie.

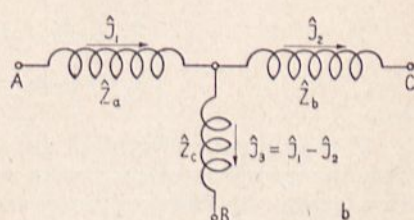
## 11. Filtry z indukcyjnością wzajemną.

Osobną grupę stanowią filtry, w których poszczególne indukcyjności sprzężone są między sobą, zmieniając skutkiem tego przebieg charakterystyki tłumienia filtru.

Indukcyjność wzajemna może występować we wszystkich typach filtrów, tu jednakże ograniczymy się do bliższego rozpatrzenia filtru widmowego.



Rys. 177 a.



Rys. 177 b.

W układzie rys. 177-a, mamy dwie zwojnice  $L_1$  i  $L_2$  o opornościach urojonych  $\hat{Z}_1 = j\omega L_1$  i  $\hat{Z}_2 = j\omega L_2$  sprzężone przy pomocy indukcyjności wzajemnej  $M$ , przedstawiającej wspólną oporność sprzężenia  $j\omega M = \hat{m}$ . W trzech gałęziach tego układu płyną prądy:  $\hat{I}_1$ ,  $\hat{I}_2$  i  $\hat{I}_3 = \hat{I}_1 - \hat{I}_2$ , analogicznie jak w układzie  $T$  rys. 163-a.

Opierając się na tych założeniach, możemy obliczyć spadki napięć między punktami A—B i B—C, opierając się na prawach indukcji:

$$\hat{V}_{AB} = \hat{J}_1 \hat{Z}_1 + \hat{J}_2 \cdot \hat{m},$$

$$\hat{V}_{BC} = \hat{J}_2 \cdot \hat{Z}_2 + \hat{J}_1 \hat{m},$$

lub, po wstawieniu wartości:  $\hat{J}_2 = \hat{J}_1 - \hat{J}_3$ :

$$\hat{V}_{AB} = \hat{J}_1 (\hat{Z}_1 + \hat{m}) - \hat{J}_3 \hat{m}, \quad (\text{a})$$

$$\hat{V}_{BC} = \hat{J}_1 (\hat{Z}_2 + \hat{m}) - \hat{J}_3 \hat{Z}_2. \quad (\text{b})$$

Gdybyśmy teraz układ rys. 177-a zechcieli zastąpić równoważnym układem  $T$  w postaci rys. 177-b, wykazującym te same spadki napięć między punktami A—B i B—C, co układ pierwotny, musielibyśmy spełnić następujące warunki:

$$\hat{V}_{AB} = \hat{J}_1 \hat{Z}_a + \hat{J}_3 \hat{Z}_c \quad (\text{c})$$

$$\hat{V}_{BC} = -\hat{J}_3 \cdot \hat{Z}_c + \hat{J}_2 \cdot \hat{Z}_b = \hat{J}_1 \hat{Z}_b - \hat{J}_3 (\hat{Z}_c + \hat{Z}_b) \quad (\text{d})$$

Podstawiając za  $\hat{V}_{AB}$  i  $\hat{V}_{CD}$  wartości z równań (a) i (b), otrzymamy:

$$\hat{J}_1 \hat{Z}_a + \hat{J}_3 \hat{Z}_c = \hat{J}_1 (\hat{Z}_1 + \hat{m}) - \hat{J}_3 \hat{m}, \quad (\text{e})$$

$$\hat{J}_1 \hat{Z}_b - \hat{J}_3 (\hat{Z}_c + \hat{Z}_b) = \hat{J}_1 (\hat{Z}_2 + \hat{m}) - \hat{J}_3 \hat{Z}_2. \quad (\text{f})$$

Z równań (e) i (f) otrzymamy przez porównanie współczynników:

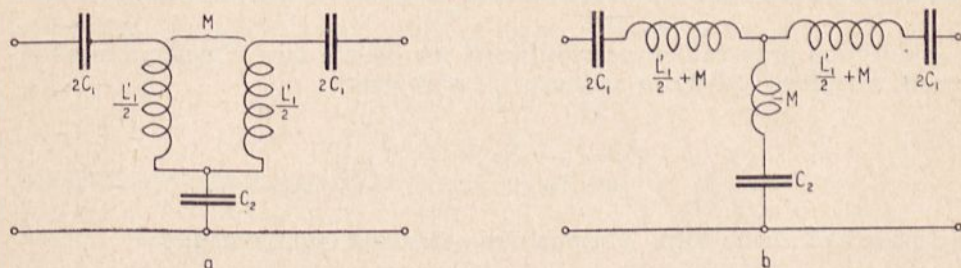
$$\left. \begin{aligned} \hat{Z}_a &= \hat{Z}_1 + \hat{m} = j \omega (L_1 + M); \\ \hat{Z}_b &= \hat{Z}_2 + \hat{m} = j \omega (L_2 + M); \\ \hat{Z}_c &= -\hat{m} = -j \omega M. \end{aligned} \right\} \quad (328)$$

Z tego dowodu wynika, że układ  $T$ , zawierający dwie zwojnice szeregowe sprzężone indukcyjnością wzajemną  $M$ , można zastąpić układem, zawierającym obie indukcyjności szeregowe, powiększone, każda o wartość  $M$ , a w gałęzi równoległej indukcyjność, równą *ujemnej wartości współczynnika indukcji wzajemnej*.

Rzecz oczywista, gdy obie indukcyjności będą związane współczynnikiem indukcji wzajemnej *ujemnym* (rozdział III, § 17), to w gałęzi równoległej wystąpi dodatkowa indukcyjność ze znakiem dodatnim.

Twierdzenie to możemy zastosować bezpośrednio do teorii filtru widmowego, rozpatrywanego w § 10. A mianowicie układ rys. 178-a, w którym obie zwojnice są sprzężone, możemy zastąpić układem rys. 178-b. Łatwo zrozumieć, że skoro między zwojnicami filtru według rys. 178-a wystąpi

ujemna indukcyjność wzajemna, filtr *jakościowo* będzie identyczny z filtrem rys. 176, gdyż wielkość  $M$  pojawia się w gałęzi równoległej ze znakiem dodatnim, zachowując się, jak indukcyjność  $L_2$  w tamtym układzie. Różnica będzie jedynie jakościowa, albowiem zamiast  $L_1$  będziemy musieli wprowadzić do równań wielkość  $L_1 = L_1' - 2M$ .



Rys. 178.

Odmienne natomiast zachowa się filtr z *dodatnią* indukcyjnością wzajemną. Wówczas bowiem  $L_2$  wystąpi ze *znakiem ujemnym*, czego następstwem będzie, iż w gałęzi równoległej przy żadnej częstotliwości nie osiągniemy rezonansu napięć.

Oporności pozorne tego układu wynoszą:

$$\hat{Z}_1 = j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right), \quad (a)$$

$$\hat{Z}_2 = -j \left( \omega M + \frac{1}{\omega C_2} \right). \quad (b)$$

Jeżeli przez  $L_1$  oznaczymy wartość  $L_1' + 2M$ , w której  $L_1'$  jest indukcyjnością szeregową układu bez uwzględnienia indukcyjności wzajemnej.

Z tych równań otrzymamy stosunek:

$$\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = - \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{\omega M + \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{1 - \omega^2 L_1 C_1}{1 + \omega^2 M C_2} \quad (329)$$

Ze stosunku  $\hat{Z}_1/\hat{Z}_2$  znajdziemy częstotliwości graniczne, przyrównując to wyrażenie kolejno do zera i do  $-4$ . Otrzymamy w ten sposób wyrażenia:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad (330)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{C_2 + 4C_1}{C_1 C_2 (L - 4M)}}. \quad (331)$$

które są zgodne ze wzorami (317-a) i (317'-a), co jest oczywiste, skoro filtr ten jest pochodnym filtru rys. 176.

Wobec tego i średnią oporność falową filtru obliczyć możemy według wzoru:

$$\dot{Z}_{0T_{sr}} = (\omega_2 - \omega_1) \frac{L_1}{2m}, \quad (320a)$$

Filtr ten przy żadnej częstotliwości nie będzie miał tłumienia nieskończenie wielkiego, gdyż dla żadnego  $\omega$  wyrażenie:

$$\dot{Z}_2 = -j \left( \omega M + \frac{1}{\omega C_2} \right)$$

nie może być równe zero. Posiada ono natomiast *minimum*, gdy:

$$|\omega M| = \left| \frac{1}{\omega C_2} \right|,$$

czemu odpowiada częstotliwość o *największym tłumieniu*:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{M \cdot C_2}}, \quad (322)$$

Stałe filtru możemy obliczyć z równań (322) do (325), wyprowadzonych dla filtru z § 10, uwzględniając jedynie ujemny znak przy  $M$  w gałęzi równoległej, a mianowicie:

$$L_1 = \frac{2m_1 Z_{0T_{sr}}}{\omega_2 - \omega_1}, \quad (333)$$

$$C_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2m_1 \omega_1^2 Z_{0T_{sr}}}, \quad (334)$$

$$M = \frac{Z_{0T_{sr}}(1 - m_1^2)}{2m_1(\omega_2 - \omega_1)}, \quad (335)$$

$$C_2 = \frac{2m_1(\omega_2 - \omega_1)}{Z_{0T_{sr}}(\omega_2^2 - m_1^2 \omega_1^2)}. \quad (336)$$

Wielkość  $m_1$  obliczymy, przemnażając równania (335) i (336) stronami i podstawiając  $M C_2 = \frac{1}{\omega_m^2}$  z równania (332):

$$m_1 = \sqrt{\frac{\omega_m^2 - \omega_2^2}{\omega_m^2 - \omega_1^2}}. \quad (337)$$

Równania (333) do (337) dają nam wszystkie elementy potrzebne do zaprojektowania filtru.

## 12. Przykłady obliczenia filtrów z indukcyjnością wzajemną.

a) W filtrze, obliczonym w przykładzie § 10, między obiema połówkami indukcyjności  $L_1$  występuje indukcja wzajemna dodatnia, dając współczynnik sprzężności  $k = 0,4$ .

Wobec tego indukcyjność wypadkową  $L_1$  otrzymamy przy mniejszej indukcyjności własnej obu połówek  $\frac{L_1'}{2}$  mamy bowiem związek:

$$\frac{L_1'}{2} + \frac{L_1'}{2} + 2M = L_1,$$

skąd obliczymy rzeczywistą indukcyjność własną:

$$L_1' = L_1 - 2M. \quad (a)$$

Wartość  $M$  otrzymujemy z zależności (patrz rozdział III):

$$k = \frac{M}{\sqrt{\frac{L_1'}{2} \cdot \frac{L_1'}{2}}} = \frac{2M}{L_1'}, \quad \text{stąd} \quad M = \frac{k \cdot L_1'}{2}, \quad (b)$$

co po podstawieniu do (a) da nam:

$$L_1' = L_1 - k \cdot L_1'.$$

czyli:

$$L_1' = \frac{L_1}{1+k} = \frac{11,5 \cdot 10^{-3}}{1,4} \simeq 8,2 \cdot 10^{-3} H,$$

Współczynnik indukcyjności wzajemnej obliczymy teraz z (b):

$$M = 0,2 \cdot 8,2 \cdot 10^{-3} H = 1,64 \cdot 10^{-3} H.$$

Ta indukcyjność wzajemna, zgodnie z wywodami poprzedniego paragrafu, występuje w gałęzi równoległej ze znakiem przeciwnym, a więc w gałęzi tej musi się znajdować indukcyjność odpowiednio większa od obliczonej poprzednio, a mianowicie:

$$L_2' = L_2 + M = 5,1 \cdot 10^{-3} + 1,64 \cdot 10^{-3} = 6,74 \cdot 10^{-3} H.$$

Pojemności filtru pozostaną oczywiście bez zmiany.

b) Gdyby w filtrze występowała taka sama indukcyjność wzajemna ze znakiem dodatnim, musielibyśmy odpowiednio zwiększyć indukcyjność  $L_1'$ , a zmniejszyć  $L_2'$ .

c) Filtr z indukcyjnością wzajemną dodatnią, a bez indukcyjności w gałęzi równoległej, ma odpowiadać danym następującym:

$$Z_{0T_{sr}} = 600 \Omega, \quad \omega_1 = 2\pi \cdot 30000, \quad \omega_2 = 2\pi \cdot 40000, \quad \omega_m = 2\pi \cdot 45000.$$

Ze wzoru (337) znajdujemy:

$$m_1 = \sqrt{\frac{45^2 - 40^2}{45^2 - 30^2}} \approx 0,615,$$

co pozwala nam obliczyć pozostałe wartości:

$$L_1 = \frac{2 \cdot 0,615 \cdot 600}{2\pi \cdot 10000} \approx 11,7 \cdot 10^{-3} H;$$

$$C_1 = \frac{2\pi \cdot 10000}{2 \cdot 0,615 \cdot 4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^8 \cdot 600} \approx 2,4 \cdot 10^{-9} F;$$

$$M = \frac{600 \cdot (1 - 0,378)}{-2 \cdot 0,615 \cdot 2\pi \cdot 10000} \approx 0,48 \cdot 10^{-3} H$$

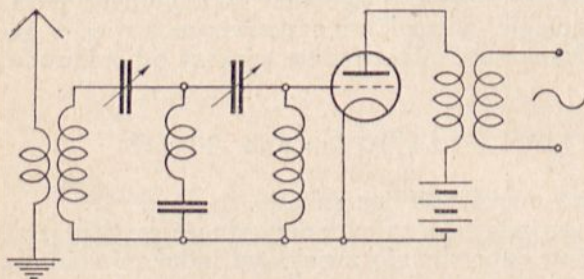
$$C_2 = \frac{2 \cdot 0,615 \cdot 2\pi \cdot 10^4}{600 \cdot 4\pi^2 \cdot 10^8 \cdot (4^2 - 0,615^2 \cdot 3^2)} \approx 0,4 \cdot 10^{-9} F.$$

Indukcyjność każdej ze zwojnic, włączonej w filtr, wyniesie zgodnie z § 11:

$$\frac{L_1'}{2} = \frac{L_1}{2} - M = (5,85 - 0,48) 10^{-3} = 5,37 \cdot 10^{-3} H.$$

### 13. Filtry w odbiornikach. Filtry złożone z szeregu obwodów strojonych.

Jak już wspomniano, t. zw. *filtry* stosowane w odbiornikach radiofonicznych, nie są filtrami w ścisłym tego słowa znaczeniu, nie pracują bowiem na oporność równą ich oporności falowej, lecz z reguły są *zwarte*. (Patrz rys. 179 i 180). Obliczanie takich *filtrów dwuobwodowych* sprowadza się

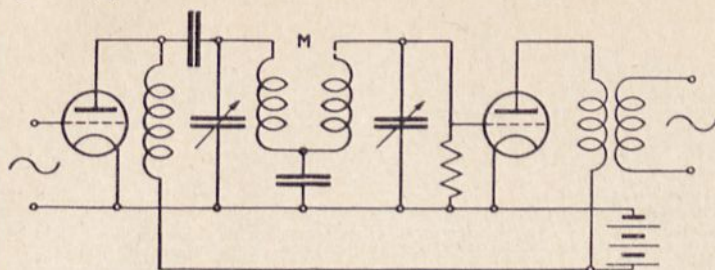


Rys. 179.

więc do rozwiązania układu sprzężonego o mniej lub więcej złożonej wspólnej oporności charakterystycznej, którą stanowią zazwyczaj albo indukcyjność w szereg z pojemnością (pochodna filtru § 10), albo też pojemność z indukcyjnością wzajemną dodatnią lub ujemną (pochodne filtrów § 11). Układy takie oczywiście mają

pewne cechy wspólne z filtrami właściwymi, a w szczególności układ ze sprzężeniem indukcyjno-pojemnościowym oraz z ujemną

indukcyjnością wzajemną mają charakterystyki, które dla pewnych częstotliwości wykazują o tłumienie nieskończenie wielkie.



Rys. 180.

Odmianą kategorię stanowią t. zw. *filtry rezonansowe*, złożone z szeregu obwodów rezonansowych sprzężonych indukcyjnie. Układ taki, zgodnie z ogólną teorią układów sprzężonych, posiada krzywą rezonansu o tem większej liczbie wierzchołków, im więcej obwodów sprzęgniemy. Łącząc więc szeregowo albo równoległe odpowiednią ilość takich obwodów sprzężonych, możemy otrzymać charakterystykę, zbliżoną do charakterystyki typowego filtra widmowego<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Patrz m. in. prace inż. Plebańskiego w „Przeł. Radj.”, M. Reed, The Analysis and Design of a Main of Resonant Circuits, E. W. IX. str. 259 i 320 r. 1932.

## BIBLIOGRAFJA DO ROZDZIAŁU VI.

### ARTYKUŁY I DZIELA OGÓLNE.

1. Pierre David, Essai sur la théorie des filtres électriques, L'Onde Electr. V, str. 5 i 72, r. 1926.
2. K. Dobrski, Filtry Elektryczne, Przegląd Radjotechniczny r. 1926, str. 97 i 105.
3. Pierre David, Les électriques, wyd. E. Chiron, Paryż.
4. M. Reed, Electrical Wave Filtres, E. W. VII, str. 122, 190, 256, 315, 382 i 440 r. 1930.
5. W. Proctor Wilson, The design of Wave Filters, Marconi Rev. 1929, Nr. 10, str. 15 i Nr. 11, str. 17.
6. W. A. Barclay, Applications of the Method of Alignment to Reactance Computations and Simple Filters Theory, E. W. VII, str. 59, 180, 242, 309 i 376 z r. 1930.
7. H. Sterky, Methods of Computing and Improving the Complex Effective Attenuation, Soad Impedances and Reflexion Coefficients of Electric Wave Filters Ericsson Technics, str. 33 r. 1933.

W przytoczonych pracach znajdzie czytelnik również spis literatury, odnoszącej się do tego przedmiotu.

### BIBLIOGRAFJA DO FILTRÓW WIDMOWYCH W ODBIORNIKACH.

1. N. R. Bligh, The Design of the Band Pass Filter E. W. IX. str. 61, r. 1932.
2. C. H. Buffery, Resistance in Band Pass Filters, E. W. IX. str. 504, r. 1932.
3. R. T. Beatty, Two-element Band-pass Filters, E. W. IX. str. 546, r. 1932.
4. C. W. Oatley, The Theory of Band-pass Filters for Radio Receivers, E. W. IX. str. 606, r. 1932.

## ROZDZIAŁ VII.

### PROMIENIOWANIE FAL ELEKTROMAGNETYCZNYCH.

Promieniowanie energii pod postacią fal elektromagnetycznych, czyli przesyłanie energii elektrycznej na odległość bez pomocy ośrodka przewodzącego, opiera się na istnieniu w dielektrykach *prądów przesunięcia*, przewidzianych przez teorię Maxwell'a, a polegających na *chwilowem* zakłóceniu stanu równowagi elektrycznej dielektryka pod działaniem powstającego lub zanikającego pola elektrycznego. Oczywiście, gdy pole elektryczne jest zmienne, stan elektryczny dielektryka również ulega ciągłym zmianom i prąd przesunięcia dzięki temu posiada charakter *prądu zmiennego*. Zgodnie z przewidywaniami Maxwell'a, potwierdzonemi doświadczeniem, prąd przesunięcia, podobnie jak prąd przewodzenia, posiada zdolność wytwarzania *strumienia magnetycznego*. Stąd wniosek, że każdemu przesunięciu ładunków elektrycznych towarzyszy pole magnetyczne, czyli *pole magnetyczne jest nieodłącznie związane z każdą zmianą pola elektrycznego*.

Odwrotnie też, zgodnie z prawem Faraday'a, każda zmiana strumienia magnetycznego wywołuje siłę elektromotoryczną, a temsamem i prąd przesunięcia. A więc i naodwrot, *pole elektryczne związane jest z każdą zmianą pola magnetycznego*.

Na nieodłącznem, współistnieniu obu tych zjawisk polegają fale elektromagnetyczne, posuwające się w dielektryku z szybkością posuwania się linii pola magnetycznego, równą szybkości światła.

W obwodzie niby-ustalonym, złożonym z kondensatora i zwojnicy, w dielektryku kondensatora, obok pola elektrycznego, również występuje pole magnetyczne, wywołane przez prąd przesunięcia, zaś w dielektryku zwojnicy jej pole magnetyczne jest źródłem pola elektrycznego. Taki obwód zamknięty jest więc również zdolny do promieniowania fal, jednakże ze względu na znaczne skupienie jego części konstrukcyjnych, energia wypromieniowana jest bardzo mała. Dlatego też jako organy promieniujące, czyli *anteny* stosuje się przeważnie obwody otwarte, opisane w rozdziale V.

#### 1. Prąd przewodzenia i prąd przesunięcia.

Wyobraźmy sobie jakikolwiek ośrodek *jednorodny*, który w każdym punkcie swojej przestrzeni posiada stałe wielkości charakterystyczne:

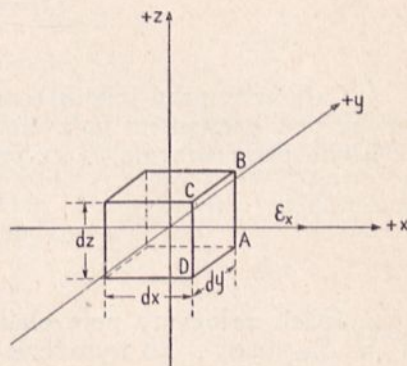
- $\sigma$  — przewodność elektryczną: właściwą na 1 cm<sup>3</sup>,
- $\epsilon$  — stałą dielektryczną,
- $\mu$  — przenikliwość magnetyczną.



Ośrodek ten nie jest więc ani idealnym przewodnikiem, ani idealnym dielektrykiem.

Założmy ponadto, że ośrodek ten jest *izotropowy*, to znaczy taki, że podane stałe są niezależne od kierunku działania pola elektrycznego, czy magnetycznego. Dzięki temu wielkości te są stałe i nie mają żadnego uprzywilejowanego kierunku, możemy je więc uważać za wielkości *skalarne*.

Obierzmy w tym ośrodku układ współrzędnych prostokątnych, których kierunki dodatnie zaznaczono na rys. 182-a.<sup>1)</sup> Początek układu niech się znajduje w środku elementarnego prostopadłościanu, którego boki równe odpowiednio  $dx$ ,  $dy$  i  $dz$  ustawione są równoległe do poszczególnych osi współrzędnych.



Rys. 181-a.

Jeżeli w środku tego prostopadłościanu o przewodności właściwej  $\sigma$  działa w kierunku osi  $x$  pewne natężenie pola elektrycznego  $\mathcal{E}_x$ , wywoła ono w tym samym kierunku, *prąd* przewodzenia równy:

$$i'_x = j'_x dy dz = \sigma \mathcal{E}_x dy dz = \sigma \mathcal{E}_x ds_x, \quad (a)$$

gdzie  $dy dz = ds_x$  jest elementem powierzchni, prostopadłej do osi  $x$ -ów, zaś  $j'_x$  — natężeniem prądu przewodzenia, przypadającym na jednostkę powierzchni ( $1 \text{ cm}^2$ ), czyli *gęstością prądu przewodzenia* w danym ośrodku. Gęstość prądu przewodzenia wyniesie więc, zgodnie z powyższym:

$$j'_x = \sigma \mathcal{E}_x. \quad (a')$$

Równocześnie jednak obrany ośrodek jest i dielektrykiem. A więc pole elektryczne  $\mathcal{E}_x$  wywołuje w nim przesunięcie pewnego ładunku elektrycznego  $q$  na  $1 \text{ cm}^2$  powierzchni  $ABCD$  prostopadłej do kierunku działania pola, które to przesunięcie ze swej strony wywołuje indukcję elektryczną:

$$D_x = 4 \pi q_x = \varepsilon \mathcal{E}_x. \quad (b)$$

Z równania (b), znając  $\mathcal{E}_x$  i stałą dielektryczną  $\varepsilon$  ośrodka, możemy obliczyć ładunek przesunięty przez jednostkę powierzchni prostopadłej do osi  $x$ -ów:

$$q_x = \frac{\varepsilon \mathcal{E}_x}{4 \pi}. \quad (c)$$

Jeżeli pole elektryczne  $\mathcal{E}_x$  jest zmienne w czasie, to i ładunek przesunięty pod jej działaniem również ulega zmianom w czasie, a więc przez jednostkę powierzchni przekroju  $ABCD$  przepływa zmienny prąd elektryczny.

<sup>1)</sup> Taki właśnie układ współrzędnych był stosowany przez Maxwell'a.

ny (prąd przesunięcia), wyrażony znaną zależnością:  $j = \frac{dq}{dt}$ , co — uwzględniając równanie (c) — daje gęstość prądu przesunięcia:

$$j_x'' = \frac{dq_x}{dt} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{dC_x}{dt}. \quad (d)$$

Całkowity prąd jednostkowy, pojawiający się w niedoskonałym dielektryku pod działaniem pola elektrycznego o natężeniu  ${}^x C_x$ , składa się więc z prądu przewodzenia  $j_x'$  i z prądu przesunięcia  $j_x''$ , i wynosi:

$$j_x = j_x' + j_x'' = C_x \sigma + \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{dC_x}{dt}. \quad (e)$$

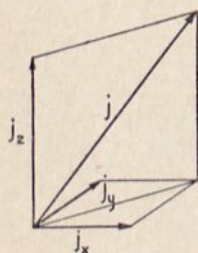
Jeżeli założymy pole elektryczne zmienne sinusoidalnie o przebiegu  $C_x = C_{xm} \sin \omega t$ , to wyrażenie (e) przyjmuje postać:

$$i_x = \sigma C_{xm} \sin \omega t + \frac{\varepsilon}{4\pi} \omega C_{xm} \cos \omega t, \quad (f)$$

z której widać, że prąd przewodzenia jest w fazie z polem elektrycznym, zaś prąd przesunięcia wyprzedza je w czasie o  $\pi/2$ . Ponadto widzimy, że natężenie prądu przesunięcia jest proporcjonalne do częstotliwości pola elektrycznego, prąd przesunięcia posiada więc tem większe znaczenie, im większa jest częstotliwość prądu, gdy mamy zaś do czynienia z polem elektrycznym niezmiennym w czasie (np. przy prądzie stałym) — wówczas znika zupełnie<sup>1)</sup>.

W dielektryku doskonałym ( $\sigma = 0$ ) nie ma prądu przewodzenia, więc może występować jedynie prąd przesunięcia.

W taki sam sposób, jak wyprowadziliśmy równanie składowej gęstości prądu dla osi  $x$ -ów, możemy je wyprowadzić i dla pozostałych składowych, otrzymując układ przestrzenny trzech równań:



Rys. 181-a.

$$\left. \begin{aligned} j_x &= \sigma C_x + \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial C_x}{\partial t}, \\ j_y &= \sigma C_y + \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial C_y}{\partial t}, \\ j_z &= \sigma C_z + \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial C_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (338)$$

<sup>1)</sup> Oczywiście w stanie ustalonym, gdyż w chwili włączania i wyłączania obwodu pojawiają się chwilowe prądy przesunięcia.

Z tych trzech składowych możemy obliczyć wypadkową gęstość prądu w danym punkcie ośrodka:

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}, \quad (338a)$$

jak to widać z rys. 181-a.

## 2. Prawo Ampère'a.

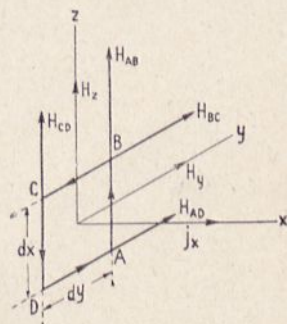
Według prawa Ampère'a *praca, wykonana przez pole magnetyczne wzdłuż jakiegokolwiek zamkniętego obwodu w danym ośrodku (siła magnetyczna działająca wzdłuż tego obwodu), równa się liczbowo natężeniu prądu, przepływającego przez dowolną powierzchnię, ograniczoną tym obwodem zamkniętym, pomnożonemu przez  $4\pi$ .*

Prawo to można wyrazić równaniem:

$$\int_0 \mathcal{H}_l dl = 4\pi i, \quad (339)$$

w którym  $\mathcal{H}_l$  oznacza składową pola magnetycznego, każdorazowo styczną do badanego obwodu zamkniętego.

Obierzmy więc znów w naszym układzie współrzędnych elementarny prostokąt  $ABCD$ , o bokach równych  $dy$  i  $dz$  (rys. 182), prostopadły do osi  $x$ -ów. Skoro przez tę elementarną powierzchnię przepływa prąd o gęstości  $j_x$ , wytwarza on pewne pole magnetyczne, leżące w płaszczyźnie  $ABCD$  i mające w środku tego prostokąta—t.j. w początku układu—wartość  $\mathcal{H}$ , którą rozłożyć możemy na składową poziomą  $\mathcal{H}_y$  i na składową pionową  $\mathcal{H}_z$ . Pole to, jako będące funkcją położenia, jest zmienne w przestrzeni i miarą tej zmienności wzdłuż osi  $y$  jest pochodna cząstkowa  $\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y}$ , zaś w kierunku



Rys. 182.

osi  $z$ -ów — pochodna  $\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z}$ . Ponadto, wobec bardzo małych wymiarów prostokąta  $ABCD$ , można przyjąć, że na długości każdego boku prostokąta wartość pochodnych jest stała.

A więc przy tem założeniu wzdłuż np. boku  $AB$  działać będzie natężenie pola różniące się od wartości  $\mathcal{H}_z$  o wielkość pochodnej cząstkowej  $\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y}$ , pomnożoną przez  $\frac{dy}{2}$  t. j. przez połowę boku  $BC$ . Ta różnica natężenia pola będzie więc wynosiła:

$$+ \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}.$$

W ten sposób otrzymamy natężenia pola, działające wzdłuż poszczególnych boków prostokąta:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_{AB} &= \mathcal{H}_z + \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}, & \mathcal{H}_{CD} &= \mathcal{H}_z - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}, \\ \mathcal{H}_{BC} &= \mathcal{H}_y + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2}, & \mathcal{H}_{DA} &= \mathcal{H}_y - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

Siłę magnetomotoryczną dookoła obwodu obliczymy na zasadzie całki (339), obierając jako dodatni kierunek liczenia kierunek wskazany regułą Ampère'a i zaznaczony na rys. 182 strzałkami. Będzie mianowicie:

$$\int_0 \mathcal{H}_l dl = \int_A^B \mathcal{H}_{AB} dl + \int_B^C \mathcal{H}_{BC} dl + \int_C^D \mathcal{H}_{CD} dl + \int_D^A \mathcal{H}_{DA} dl, \quad (\text{b})$$

a poszczególne całki znajdziemy, podstawiając wartości natężenia pola wzdłuż odpowiednich boków. A mianowicie<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \int_A^B \mathcal{H}_{AB} dl &= \left( \mathcal{H}_z + \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) dz = \mathcal{H}_z dz + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} dy dz, \\ \int_B^C \mathcal{H}_{BC} dl &= -\mathcal{H}_y dy - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} dz dy, \\ \int_C^D \mathcal{H}_{CD} dl &= -\mathcal{H}_z dz + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} dy dz, \\ \int_D^A \mathcal{H}_{DA} dl &= \mathcal{H}_y dy - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} dz dy. \end{aligned} \right\} \quad (\text{c})$$

Uwzględniając, że  $dy dz = ds_x$  jest elementem powierzchni, otrzymamy po zsumowaniu wartości (c) całkę kołową, wyrażającą prawo Ampère'a:

$$4\pi j_x ds_x = \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} ds_x - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} ds_x,$$

<sup>1)</sup> Znaki "—" w drugiej i trzeciej całce pochodzą stąd, że całkujemy w kierunku przeciwnym do strzałek zaznaczonych na rysunku 182.

skąd dalej po obustronnem podzieleniu przez  $ds_x$  i podstawieniu wartości na  $j_x$  z równań (338):

$$4\pi\sigma\mathcal{E}_x + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z}.$$

Jest to *równanie* pola magnetycznego, wywołanego przez prąd o gęstości  $j_x$ , przepływający w kierunku osi  $x$ -ów, a składający się z prądów przewodzenia i przesunięcia. W podobny sposób możemy znaleźć równania pól, wytworzonych przez składowe prądu w pozostałych kierunkach osi współrzędnych i otrzymamy przestrzenny układ trzech równań:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\sigma\mathcal{E}_x + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z}, \\ 4\pi\sigma\mathcal{E}_y + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x}, \\ 4\pi\sigma\mathcal{E}_z + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (340)$$

Są to ogólne równania układu trójwymiarowego. W poszczególnych przypadkach mogą one być uproszczone, zależnie od przyjętych założeń.

### 3. Prawo Faraday'a. Pole elektromagnetyczne.

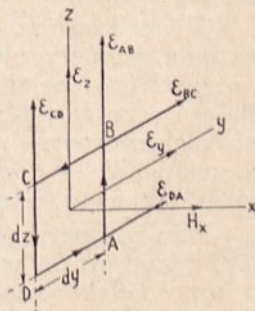
Prawo Faraday'a powiada, że *siła elektromotoryczna całkowita wzniecona wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej, znajdującej się w pewnym ośrodku, równa się pochodnej względem czasu strumienia magnetycznego, przenikającego dowolną powierzchnię, opierającą się na tej krzywej zamkniętej*. Wyraża się ono równaniem:

$$E = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (341)$$

Obierzmy znowu w ośrodku elementarny prostokąt o bokach  $dy$  i  $dz$ , ustawiony prostopadłe do osi  $x$ -ów (rys. 183) i założmy, że w kierunku osi  $x$  działa składowa  $\mathcal{H}_x$  pola magnetycznego. To pole magnetyczne wytwarza nam strumień  $\Phi_x = \mu \mathcal{H}_x dy dz = \mu \mathcal{H}_x ds_x$ , który—zgodnie z prawem Faraday'a—da nam siłę elektromotoryczną:

$$E_{ABCD} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} dy dz. \quad (a)$$

Założmy, że pod działaniem  $\mathcal{H}_x$  w środku prostokąta powstaje pole o składowych natę-



Rys. 183.

zenia  $\mathcal{E}_y$  i  $\mathcal{E}_z$ , i że te składowe zmieniają się wzdłuż osi  $y$  i  $z$  według pochodnych cząstkowych  $\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}$  i  $\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z}$ . Ponadto przyjmijmy kierunek dodatni ten sam, co w § 2. Wówczas, tym samym sposobem co poprzednio, obliczymy wypadkową siłę elektromotoryczną wzdłuż boków prostokąta:

$$E_{ABCD} = \int_0^l \mathcal{E}_{AB} dl = \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} ds_x - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} ds_x, \quad (b)$$

która, podstawiona do równania (a), daje nam równanie:

$$-\mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z},$$

wyrażające związek między polem magnetycznym w danym ośrodku i wytworzonym przez nie polem elektrycznym.

Postępując analogicznie z pozostałymi składowymi pola magnetycznego, otrzymamy drugi układ trzech równań pola elektromagnetycznego:

$$\left. \begin{aligned} -\mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z}, \\ -\mu \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}, \\ -\mu \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (342)$$

Układy równań (340) i (342) nazywamy *maxwellowskimi równaniami pola elektromagnetycznego*. Pierwsza grupa tych równań powiada, że w danym ośrodku może powstać pole magnetyczne, gdy albo przezeń przepływa *prąd przewodzenia*, albo też występuje w nim *zmiennie w czasie pole elektryczne*. Druga zaś grupa stwierdza, że *zmiennemu w czasie polu magnetycznemu zawsze towarzyszy zmiennie w przestrzeni pole elektryczne*.

W doskonałym dielektryku może więc istnieć stałe pole elektryczne bez pola magnetycznego między dwoma będącymi w spoczynku ładunkami o różnych potencjałach. Pole magnetyczne natomiast może się pojawić dopiero wówczas, gdy ładunki elektryczne są w ruchu, a więc przy stałym polu elektrycznym — pod wpływem prądu przewodzenia czyli: albo w przewodniku, albo w dielektryku niedoskonałym. Jednakże takie stałe pole magnetyczne nie wywołuje wtórnego pola elektrycznego.

Pole magnetyczne może jednak powstać również i wtedy, gdy pole elektryczne działa w dielektryku doskonałym, lecz tylko pod warunkiem, że to pole elektryczne jest zmiennie w czasie, a więc wywołuje *prąd przesunięcia*. Wówczas jednak polu magnetycznemu zawsze towarzyszy wywołane przez nie wtórne pole elektryczne.

Innymi słowy, zmianom pola elektrycznego w czasie odpowiada zawsze przesuwanie się linii pola magnetycznego, czyli zmienność pola magnetycznego w przestrzeni, odwrotnie też, zmienności pola magnetycznego w czasie odpowiada przesuwanie się linii pola elektrycznego, czyli zmienność pola elektrycznego w przestrzeni. A więc zmienna siła elektromotoryczna zawsze jest przyczyną współlistnienia zmiennych pól elektrycznego i magnetycznego — zjawiska nazywanego *polem elektromagnetycznym*.

Zgodnie z tem, co powiedziano o prądzie przesunięcia w § 1, natężenie obu składników pola elektromagnetycznego będzie tem większe, im większa jest częstotliwość prądu. Dlatego dla promieniowania energii elektromagnetycznej stosuje się w radjotechnice prądy wielkiej częstotliwości.

#### 4. Prawa ciągłości pola elektromagnetycznego.

Układ zasadniczych sześciu równań pola elektromagnetycznego (340) i (342) musimy uzupełnić jeszcze t. zw. *równaniami ciągłości* pól magnetycznego i elektrycznego.

Wiadomo, że linje pola magnetycznego są krzywami zamkniętymi, ciągłymi. Stąd też, jeżeli do jakiejś przestrzeni zamkniętej wchodzi pewna liczba tych linii (wyrażona strumieniem  $\Phi$ ), to taka sama liczba linii musi z tej przestrzeni wyjść. Innymi słowy, *całkowity przyrost linii pola*, po przejściu przez daną przestrzeń, musi być *równy zeru*. Jeżeli przyrost ten rozłożymy według kierunków współrzędnych, to warunek ciągłości pola magnetycznego wyrazić możemy analitycznie równaniem:

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} = 0,$$

lub, po uwzględnieniu zależności  $\Phi = \mu \mathcal{H} s$ :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial z} = 0. \quad (343)$$

To samo prawo można zastosować do pola elektrycznego pod warunkiem, że wewnątrz rozpatrywanej przestrzeni niema swobodnych ładunków elektrycznych. Wówczas bowiem żadna z wchodzących linii pola nie może kończyć się wewnątrz przestrzeni. Można więc napisać dla strumienia elektrycznego:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0.$$

lub, po uwzględnieniu, że  $D = \varepsilon \cdot \mathcal{E}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = 0. \quad (344)$$

Jeżeli natomiast wewnątrz zamkniętej przestrzeni znajduje się wolny ładunek elektryczny  $q$ , liczba linii pola elektrycznego, wychodząca z tego

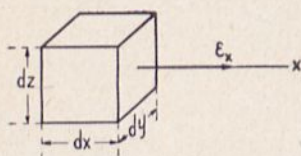
ładunku, wynosi  $4\pi \cdot q$  i warunek ciągłości, wyrażony równaniem (344), przybiera postać:

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} = 4\pi \cdot q. \quad (345)$$

W zastosowaniu do promieniowania fal elektromagnetycznych będziemy się spotykali z przestrzenią wolną od ładunków swobodnych, wobec czego zasadniczo będziemy stosowali równanie (344). Z warunkiem (345) spotykamy się jedynie w teorii rozchodzenia się fal w warstwie Kennelly-Heaviside'a, utworzonej z rozrzedzonych gazów zjonizowanych, a więc zawierającej ładunki elektryczne swobodne.

### 5. Energia zawarta w polu elektromagnetycznym.

Niech między ściankami  $A$  i  $B$  elementarnego prostopadłościanu o objętości  $dx \cdot dy \cdot dz = dv$  (rys.184) działa w kierunku osi  $x$ -ów różnica potencjałów  $dV_x = C_x dx$  i niech pod jej działaniem w tym kierunku przez element powierzchni  $ds_x = dy \cdot dz$  przesunie się ładunek  $q_x = Q_x \cdot dy \cdot dz$ , gdzie  $Q_x$  oznacza ładunek na jednostkę powierzchni, czyli gęstość powierzchniową ładunku. Wówczas energia potencjalna, nagromadzona w elemencie objętości  $dv$  wskutek przesunięcia ładunku  $q_x$  wyniesie:



Rys. 184.

$$dW_{e_x} = \frac{q_x \cdot dV_x}{2} = \frac{Q_x \cdot \epsilon_x}{2} \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

W równaniu tem możemy podstawić

$$Q_x = \frac{D_x}{4\pi} = \frac{\epsilon \cdot \epsilon_x}{4\pi}, \quad \text{co nam da:}$$

$$dW_{e_x} = \frac{\epsilon}{8\pi} \cdot \epsilon_x^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \frac{\epsilon}{8\pi} \cdot \epsilon_x^2 \cdot dv. \quad (a)$$

Oznaczając przez:

$$w_e = \frac{dW_e}{dv}$$

energję elektryczną, odpowiadającą jednostce objętości w danym punkcie ośrodka, obliczamy ją dla składowej pola  $\epsilon_x$  z równania (a) jako:

$$w_{e_x} = \frac{\epsilon}{8\pi} \cdot \epsilon_x^2 \text{ erg/cm}^3, \quad (b)$$

jeżeli wszystkie wielkości wyrazimy w jednostkach elektrostatycznych.



Analogicznie otrzymamy dla pozostałych składowych pola elektrycznego:

$$\left. \begin{aligned} w_{e_y} &= \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot C_y^2, \text{ erg/cm}^3, \\ w_{e_z} &= \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot C_z^2, \text{ erg/cm}^3. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Wobec tego, że energia jest wielkością skalarną, zapasy energii, nagromadzone w jednostce objętości pod działaniem składowych pola elektrycznego, dodać możemy algebraicznie. W ten sposób otrzymamy całkowitą energię elektryczną, przypadającą na jednostkę objętości ośrodka w danym punkcie:

$$w_e = w_{e_x} + w_{e_y} + w_{e_z} = \frac{\varepsilon}{8\pi} (C_x^2 + C_y^2 + C_z^2). \quad (d)$$

Wobec tego zaś, że mamy:

$$C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = C^2,$$

gdzie  $C$  jest wypadkowym polem elektrycznym, działającym w danym punkcie, jednostkową energią elektryczną możemy wyrazić wzorem:

$$w_e = \frac{\varepsilon}{8\pi} C^2 = \frac{\varepsilon}{8\pi} (C_x^2 + C_y^2 + C_z^2). \quad (346)$$

Jeżeli pole elektryczne jest zmienne w czasie, to i energia ulega zmianie w czasie, a zmiana ta wyraża się pochodną cząstkową:

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left( C_x \cdot \frac{\partial C_x}{\partial t} + C_y \cdot \frac{\partial C_y}{\partial t} + C_z \cdot \frac{\partial C_z}{\partial t} \right). \quad (346 a)$$

Energję kinetyczną, nagromadzoną w polu magnetycznym naskutek przepływu prądu  $J$  wyraża nam zależność:

$$W_m = \frac{\Phi \cdot J}{2}.$$

Jeżeli w naszym przypadku strumień przenika prostopadłościem w kierunku osi  $x$ -ów, wartość składowej strumienia w tym kierunku wyniesie:

$$\Phi_x = p \cdot \mathcal{H}_x \cdot dy \cdot dz.$$

Natężenie prądu, który to pole wywołał, obliczymy z prawa Amprère'a (patrz § 2):

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_A^B \mathcal{H}_x dl = \frac{\mathcal{H}_x \cdot dx}{4\pi}.$$

A więc energia pola magnetycznego, nagromadzona w elemencie ośrodka o objętości  $dv$  pod działaniem składowej  $\mathcal{H}_x$  pola magnetycznego, wyniesie:

$$dW_{m_x} = \frac{\mu}{8\pi} \cdot \mathcal{H}_x^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \frac{\mu}{8\pi} \cdot \mathcal{H}_x^2 \cdot dv, \quad (\text{a})$$

skąd obliczymy energię magnetyczną zawartą w jednostce objętości w danym punkcie ośrodka w odpowiadającej składowej  $\mathcal{H}_x$ :

$$\frac{dW_{m_x}}{dv} = w_{m_x} = \frac{\mu}{8\pi} \cdot \mathcal{H}_x^2 \text{ erg/cm}^3. \quad (\text{b})$$

Ilości energii magnetycznej, odpowiadające pozostałym składowym pola magnetycznego, wyniosą odpowiednio:

$$\left. \begin{aligned} w_{m_y} &= \frac{\mu}{8\pi} \cdot \mathcal{H}_y^2 \text{ erg/cm}^3, \\ w_{m_z} &= \frac{\mu}{8\pi} \cdot \mathcal{H}_z^2 \text{ erg/cm}^3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{c})$$

W równaniach tych wszystkie wielkości są wyrażone w jednostkach elektromagnetycznych.

Analogicznie, jak dla pola elektrycznego, znajdziemy i tu całkowitą energię magnetyczną, zawartą w jednostce objętości:

$$w_m = \frac{\mu}{8\pi} \cdot \mathcal{H}^2 = \frac{\mu}{8\pi} \cdot (\mathcal{H}_x^2 + \mathcal{H}_y^2 + \mathcal{H}_z^2), \quad (347)$$

oraz pochodną jej względem czasu, gdy pole magnetyczne jest zmienne w czasie:

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi} \left( \mathcal{H}_x \cdot \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} + \mathcal{H}_y \cdot \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} + \mathcal{H}_z \cdot \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial t} \right). \quad (347 \text{ a})$$

Wreszcie, energię zamienioną w czasie  $dt$  na ciepło Joule'a w jednostce objętości w danym punkcie ośrodka o przewodności  $\sigma$  wyrazić można równaniem:

$$\begin{aligned} dw_r &= \frac{j^2}{\sigma} \cdot dt = \frac{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}{\sigma} \cdot dt = \\ &= \sigma (C_x^2 + C_y^2 + C_z^2) \cdot dt \end{aligned}$$

Stąd otrzymamy pochodną energii względem czasu, czyli moc, straconą na ciepło Joule'a w jednostce objętości:

$$\frac{\partial w_r}{\partial t} = \sigma (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2). \quad (348)$$

Wiadomo, że pole elektryczne i pole magnetyczne mogą gromadzić energję, natomiast prąd przewodzenia jest przyczyną nieodwracalnej zamiany (patrz rozdział I) energii na ciepło Joule'a. Energja elektryczna i magnetyczna są związane z istnieniem linii pól, jest więc oczywiste, że skoro te linje poruszają się w przestrzeni, to i energja wraz z niemi powinna poruszać się nietylko w przewodnikach, ale i w dielektryku, bo ten właśnie jest zasadniczo siedliskiem obu tych pól.

W jaki sposób i w jakich warunkach takie przenoszenie energii wraz z polami elektrycznym i magnetycznym jest możliwe, poucza nas *twierdzenie Poyntinga*.

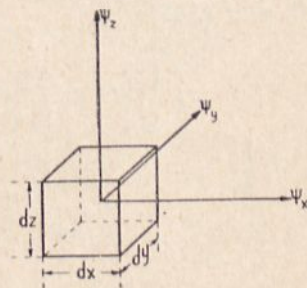
## 6. Twierdzenie Poyntinga.

Wobec tego, że pole elektryczne i magnetyczne posiadają pewne określone kierunki w przestrzeni, i posuwanie ich linii odbywa się również w pewnym kierunku, więc przenoszenie się energii wraz z niemi, czyli *ruch strumienia energii* odbywać się musi również w pewnym kierunku. *Strumień energii jest więc wielkością kierunkową czyli wektorową*, w odróżnieniu od energii samej, która jest wielkością skalarną.

Wektor, podający nam ilość energii, przepływającej w jednostce czasu (1 sek.) przez jednostkę powierzchni (1 cm<sup>2</sup>) w kierunku do niej prostopadłym, określamy nazwą wektora Poyntinga i oznaczamy literą  $\Psi$ .

Wektor Poyntinga wyraża więc gęstość energii przenikającej w jednostce czasu daną powierzchnię. Wymiarem jego jest więc moc na cm<sup>2</sup>.

Zalóżmy, że przez elementarny prostopadłościan  $dx \cdot dy \cdot dz = dv$  (rys. 185), przepływa strumień energii, którego miarą jest wektor Poyntinga  $\Psi$ , wychodzący z prostopadłościanu w kierunku, w którym płynie energja, i mający swój początek w środku prostopadłościanu, obranym jako początek układu. Wektor ten rozkładamy na składowe  $\Psi_x$ ,  $\Psi_y$  i  $\Psi_z$ .



Rys. 185.

Jeżeli składowa  $\Psi_x$  wektora Poyntinga zmienia się wzdłuż osi x-ów według pochodnej  $\frac{\partial \Psi_x}{\partial x}$ , to przez płaszczyznę elementarną A, równą  $dy \cdot dz$ , wchodzi w ciągu sekundy energja równa:

$$\left( \Psi_x - \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{2} \right) \cdot dy \cdot dz,$$

zaś zaś przez płaszczyznę B wychodzi energia:

$$\left( \Psi_x + \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz.$$

Wobec tego w kierunku osi x-ów gromadzi się w elemencie  $dv$  w ciągu sekundy energia:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \Psi_x - \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) - \left( \Psi_x + \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \right] \cdot dy \cdot dz = \\ & = - \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \cdot dv \end{aligned}$$

czyli na jednostkę objętości w danym punkcie ośrodka przypada moc:  $\frac{\partial \Psi_x}{\partial x}$ .

W ten sam sposób możemy znaleźć przyrosty energii na sekundę w pozostałych kierunkach osi współrzędnych, tak, iż całkowity przyrost energii na sekundę i na  $1 \text{ cm}^3$  objętości wynosi:

$$- \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \right).$$

Ten przyrost energii, zgodnie z prawem o zachowaniu energii, musi być równy sumie przyrostów energii pola elektrycznego i magnetycznego oraz przyrostu strat na ciepło Joule'a. Musi więc być <sup>1)</sup> (patrz równania 346 a), (347 a) i (348):

$$\begin{aligned} - \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \right) &= \frac{\partial w_e}{\partial t} + \frac{\partial w_m}{\partial t} + \frac{\partial w_r}{\partial t} = \\ &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \left( c_x \frac{\partial c_x}{\partial t} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial t} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial t} \right) + \\ &+ \frac{\mu}{4\pi} \left( \mathcal{H}_x \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} + \mathcal{H}_y \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} + \mathcal{H}_z \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial t} \right) + \\ &+ \sigma (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2). \end{aligned}$$

---

<sup>1)</sup> Należy tu zwrócić uwagę, że wszystkie wielkości tego równania muszą być wyrażone, w tym samym układzie jednostek (elektrostatycznym, elektromagnetycznym, lub praktycznym).

Po podstawieniu do tego równania odnośnych wartości z równań Maxwellowskich <sup>1)</sup>, otrzymamy w końcu:

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \Psi_x + \frac{\partial}{\partial y} \Psi_y + \frac{\partial}{\partial z} \Psi_z \right] = \\
 & = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_z \mathcal{H}_y - \epsilon_y \mathcal{H}_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon_x \mathcal{H}_z - \epsilon_z \mathcal{H}_x) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_y \mathcal{H}_x - \epsilon_x \mathcal{H}_y) \right].
 \end{aligned}$$

Stąd możemy obliczyć poszczególne składowe wektora Poyntinga, przyrównując do siebie odpowiednie pochodne cząstkowe obu stron tego równania:

$$\left. \begin{aligned}
 \Psi_x &= \frac{1}{4\pi} (\epsilon_y \mathcal{H}_z - \epsilon_z \mathcal{H}_y), \\
 \Psi_y &= \frac{1}{4\pi} (\epsilon_z \mathcal{H}_x - \epsilon_x \mathcal{H}_z), \\
 \Psi_z &= \frac{1}{4\pi} (\epsilon_x \mathcal{H}_y - \epsilon_y \mathcal{H}_x).
 \end{aligned} \right\} \quad (349)$$

<sup>1)</sup> Przekształcamy prawą stronę równania i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4\pi} \left[ \epsilon_x \left( \epsilon \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} + 4\pi \sigma \epsilon_x \right) + \epsilon_y \left( \epsilon \frac{\partial \epsilon_y}{\partial t} + 4\pi \sigma \epsilon_y \right) + \epsilon_z \left( \epsilon \frac{\partial \epsilon_z}{\partial t} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 4\pi \sigma \epsilon_z \right) \right] + \frac{1}{4\pi} \left[ \mu \mathcal{H}_x \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} + \mu \mathcal{H}_y \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} + \mu \mathcal{H}_z \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial t} \right].
 \end{aligned}$$

a następnie podstawiamy wartości z równań (340) i (342), co nam daje:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4\pi} \left[ \epsilon_x \left( \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} \right) + \epsilon_y \left( \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} \right) + \epsilon_z \left( \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} \right) \right] + \\
 & - \frac{1}{4\pi} \left[ \mathcal{H}_x \left( \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} \right) + \mathcal{H}_y \left( \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \right) + \mathcal{H}_z \left( \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \right) \right] = \\
 & = \frac{1}{4\pi} \left[ \left( \epsilon_z \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} + \mathcal{H}_y \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \right) - \left( \epsilon_y \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} + \mathcal{H}_z \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \quad + \left( \epsilon_x \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} + \mathcal{H}_z \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \right) - \left( \epsilon_z \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} + \mathcal{H}_x \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} \right) + \\
 & \quad \left. + \left( \epsilon_y \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} + \mathcal{H}_x \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} \right) - \left( \epsilon_x \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} + \mathcal{H}_y \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} \right) \right] = \\
 & = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_z \mathcal{H}_y - \epsilon_y \mathcal{H}_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon_x \mathcal{H}_z - \epsilon_z \mathcal{H}_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_y \mathcal{H}_x - \epsilon_x \mathcal{H}_y) \right].
 \end{aligned}$$

Ten układ równań odpowiada iloczynowi wektorowemu:

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} [\mathcal{E} \cdot \mathcal{H}],$$

którego wartość bezwzględna wynosi:

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} \mathcal{E} \mathcal{H} \cos \varphi, \quad (349a)$$

gdzie  $\varphi$  jest kątem zawartym między kierunkami wektorów obu pól<sup>1)</sup>.

Gdy oba pola są prostopadłe do siebie, a więc gdy  $\varphi = 90^\circ$ , wektor Poyntinga sprowadza się do postaci

$$|\Psi| = \frac{1}{4\pi} \mathcal{E} \mathcal{H} \text{ erg/sek} \quad (349b)$$

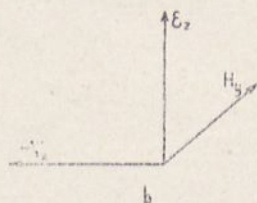
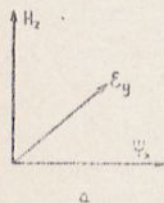
gdy  $\mathcal{E}$  i  $\mathcal{H}$  wyrazimy w tym samym układzie jednostek cgs. e. m.

Na podstawie równań (349a) i (349b) możemy sformułować twierdzenie Poyntinga w sposób następujący<sup>1)</sup>:

*Energja przenikająca w jednej sekundzie prostopadle przez jednostkę powierzchni, jest proporcjonalna do iloczynu składowych pól elektrycznego i magnetycznego, leżących w tej płaszczyźnie.*

Innymi słowy, energja elektromagnetyczna porusza się w kierunku prostopadłym do płaszczyzny, w której leżą wektory obu pól. Jest ona proporcjonalna do ich iloczynu, a więc przenoszenie energii może się odbywać tylko przy *równoczesnem* istnieniu obu pól. Nie może więc być mowy o przenoszeniu energii, gdy istnieje tylko jedno z tych pól, lub gdy przy polach zmiennych sinusoidalnie jedno z nich przesunięte jest w fazie o  $90^\circ$  względem drugiego. Aby więc energja mogła się przenosić, pole elektryczne i magnetyczne muszą posiadać składowe o fazach zgodnych lub przesuniętych o  $180^\circ$ . Stwierdzenie tej zasady jest zresztą zgodne z zasadą wytwarzania energii elektrycznej w przewodnikach, co również ma miejsce tylko pod warunkiem istnienia składowych napięcia i prądu o zgodnych fazach.

Równania (349a) i (349b) pozwalają nam również określić „zwrot”, czyli znak algebraiczny wektora Poyntinga. Założywszy znaki dodatnie składowych obu pól, przyjmijmy wpraw, że pole elektryczne leży w osi y-ów, czyli  $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_z = 0$ , a pole magnetyczne w osi z-ów, czyli  $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_y = 0$ . Wówczas wektor Poyntinga wynosi (rys. 186 a):



Rys. 186.

$$\Psi_{x'} = \Psi_x = \frac{1}{4\pi} \mathcal{E}_y \mathcal{H}_z,$$

i posiada znak dodatni.

Gdy natomiast założymy  $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y = 0$  i  $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_z = 0$  (rys. 186 b), otrzymamy:

$$\Psi_{x''} = -\Psi_x = -\frac{1}{4\pi} \mathcal{E}_z \mathcal{H}_y,$$

a więc wektor Poyntinga posiada znak ujemny.

<sup>1)</sup> Równanie to odpowiada w mechanice wyrażeniu na moment.

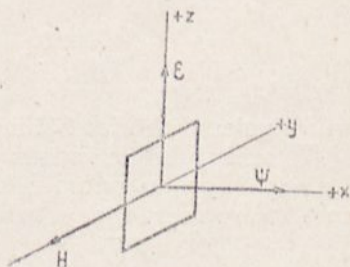
Stąd możemy wypowiedzieć ważne prawo o kierunku ruchu energii w polu elektromagnetycznym (prawo lewej ręki, analogiczne zresztą do prawa dla silników elektrycznych):

Gdy kciuk, palec wskazujący i palec środkowy lewej ręki utworzą układ współrzędnych prostokątnych w ten sposób, aby palec wskazujący wskazywał kierunek pola magnetycznego, palec środkowy — kierunek pola elektrycznego, wówczas kciuk wskaże kierunek ruchu energii elektromagnetycznej czyli kierunek wektora Poyntinga.

## 7. Fale płaskie w dielektryku.

Jeżeli w pewnym punkcie ośrodka wywołamy pole elektromagnetyczne, na przykład zapomocą prądu zmiennego, płynącego w przewodniku, to pojawiające się dokoła tego przewodnika linie pól: elektrycznego i magnetycznego, oddalając się z pewną szybkością, będą z sobą przenosiły energję elektromagnetyczną pod postacią fal *elektromagnetycznych*. Skoro ośrodek jest izotropowy, energja we wszystkich kierunkach będzie się rozchodziła z tą samą szybkością od punktu, w którym została wytworzona, a więc po pewnym czasie znajdzie się na powierzchni kulistej, której środkiem jest wspomniany punkt. Fale elektromagnetyczne rozchodzą się więc w ośrodku jednorodnym pod postacią kul współśrodkowych, są to więc t. zw. *fale kuliste*, a *czoło fali* w każdym punkcie przestrzeni jest częścią powierzchni kulistej.

Ażeby zbadać zjawiska, zachodzące w fali elektromagnetycznej, rozpatrzmy ją wpierw w jej postaci najprostszej. A mianowicie w znacznej odległości od środka możemy przyjąć, że element powierzchni fali kulistej jest *płaszczyzną*. Załóżmy, że ten element powierzchni jest prostopadły do osi  $x$ -ów i że wektor Poyntinga  $\Psi = \Psi_x$  jest zwrócony w kierunku dodatnim tej osi. Jeżeli teraz przyjmiamo, że wektor pola elektrycznego jest pionowy, czyli:  $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y = 0$ , i w danej chwili zwrócony w górę, to w myśl reguły trzech palców lewej ręki wektor pola magnetycznego musi być poziomy ( $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_y$ ,  $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_z = 0$ ) i zwrócony w kierunku ujemnym osi  $y$ -ów (rys. 187). Ponadto, jeżeli ośrodek jest jednorodny, to w przypadku fali płaskiej we wszystkich punktach elementu powierzchni czołowej pole elektryczne i pole magnetyczne będą miały w danej chwili tę samą wartość, co się wyrazi warunkami:



Rys. 187.

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} = 0,$$

stwierdzającymi, że w kierunkach  $y$  i  $z$  wielkości te są niezmiennie.

O takiej fali mówimy, że ma pole elektryczne spolaryzowane w płaszczyźnie pionowej, a pole magnetyczne spolaryzowane w płaszczyźnie poziomej.

Ponadto, ponieważ ośrodek jest dielektrykiem, mamy  $\sigma = 0$ .

Dzięki tym uproszczeniom równania pola elektromagnetycznego (340) i (342) sprowadzają się do postaci:

$$\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (350)$$

By rozwiązać ten układ dwu równań, różniczkujemy oba względem  $t$ :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right) \quad \text{i} \quad \mu \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right),$$

i podstawiamy odpowiednie wartości na  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$  i  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$  z równań (350),

przez co otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, & \text{czyli} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \\ \mu \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}, & \text{czyli} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (351)$$

Równania tych typów spełniają funkcje o ogólnej postaci:

$$\begin{aligned} \zeta &= F_1 \left( t - \frac{x}{u} \right) + F_2 \left( t + \frac{x}{u} \right), \\ \mathcal{H} &= f_1 \left( t - \frac{x}{u} \right) + f_2 \left( t + \frac{x}{u} \right), \end{aligned}$$

dwóch zmiennych niezależnych — czasu i przestrzeni.

W szczególności możemy założyć, że funkcje te, przy wzbudzeniu fali za pomocą prądu sinusoidalnego, posiadają postać znanego nam już równania ruchu falowego, a mianowicie: <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta'_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \zeta''_m \sin \omega \left( t + \frac{x}{u} \right); \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}'_m \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) - \phi \right] + \mathcal{H}''_m \sin \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \phi \right]. \end{aligned}$$

W równaniach tych  $u$  oznacza szybkość rozchodzenia się fal, a drugi człon ich odnosi się do fali odbitej. Przyjmując przestrzeń nieograniczoną, falę od-

<sup>1)</sup> Wartości  $x$  liczymy tu od początku układu, a nie — jak w teorii linii w rozdziale V — od końca.



bitą możemy pominąć, wobec czego przyjęte przez nas funkcje sprowadzają się do postaci:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right), \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}_m \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) - \psi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (352)$$

Kąt  $\psi$  oznacza tu ewentualne — narazie nieznanne — przesunięcie faz między obydwoma polami w stanie początkowym.

Zakładając dowolnie  $\mathcal{E}_m$ , musimy znaleźć 3 niewiadome: pole magnetyczne  $\mathcal{H}_m$ , szybkość rozchodzenia się fal  $u$  i kąt przesunięcia faz  $\psi$  między obydwoma polami.

Szybkość  $u$  znajdziemy z równania (351), podstawiając odpowiednie pochodne  $\mathcal{E}$ , wyrażonego równaniem (352), a mianowicie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \omega \mathcal{E}_m \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right), \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \mathcal{E}_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} &= -\frac{\omega}{u} \mathcal{E}_m \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right), \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} &= -\frac{\omega^2}{u^2} \mathcal{E}_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right). \end{aligned}$$

Podstawiając te wartości do równania (351) na pole elektryczne, otrzymamy:

$$-\omega^2 \mathcal{E}_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) = -\frac{\omega^2}{u^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon \mu} \mathcal{E}_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right),$$

czyli:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (353)$$

Szybkość rozchodzenia się fal w dielektryku zależy więc wyłącznie od stałych elektrycznych i magnetycznych ośrodka, a nie zależy od częstotliwości fali. A więc jakkolwiek przebieg zmienny w czasie, przenosi się zapomocą fal elektromagnetycznych bez zniekształcenia fazowego.

W powietrzu, gdzie:

$$\varepsilon = 1 \text{ cgs. e. s. t.}, \quad \text{a} \quad \mu = 1 \text{ cgs. j. e. m.} = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}} \text{ cgs. e. s. t.}$$

szybkość fal elektromagnetycznych wynosi:

$$u = \sqrt{9 \cdot 10^{20}} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sek} = c \quad (353 \text{ a})$$

i równa się *szybkości światła*<sup>1)</sup>.

Wielkość  $\mathcal{H}_n$  i  $\psi$  znajdziemy z równania (350):

$$\mu \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x},$$

podstawiając odpowiednie pochodne.

Otrzymamy tą drogą równanie:

$$\mu \cdot \omega \mathcal{H}_m \cdot \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) - \psi \right] = -\frac{\omega}{u} \mathcal{E}_m \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right),$$

które po podstawieniu wartości za  $u$  i odpowiednim przekształceniu<sup>2)</sup> daje:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m \cdot \left[ \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \cos \psi + \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \sin \psi \right] = \\ = -\mathcal{E}_m \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right). \end{aligned}$$

Zakładając w tym równaniu:

$$\left( t - \frac{x}{u} \right) = \frac{T}{4},$$

otrzymamy:

$$\sin \psi = 0, \text{ a tem samym } \cos \psi = 1,$$

a więc:

$$\mathcal{H}_m \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) = -\mathcal{E}_m \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right), \quad (354)$$

lub, uzględniając zależność:  $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ :

$$\mathcal{H}_m \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \pi \right] = \mathcal{E}_m \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right), \quad (354 \text{ a})$$

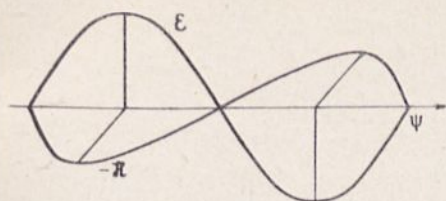
<sup>1)</sup> Według ostatnich pomiarów (Michelson 1932 r.) szybkość światła wynosi  $2,9982 \cdot 10^{10}$  cm/s, jednakże ze względów praktycznych będziemy się nadal posługiwać wartością  $3 \cdot 10^{10}$  cm/sek.

<sup>2)</sup> Stosujemy przekształcenie:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Stąd wyciągamy dwa następujące wnioski:

1<sup>o</sup> Pole elektryczne i magnetyczne są w fazie w czasie, jednakże z powodu przyjętego układu współrzędnych pole magnetyczne występuje w równaniu ze znakiem ujemnym (przesunięcie faz o 180<sup>o</sup>, patrz rys. 188).



Rys. 188.

2<sup>o</sup> Między amplitudami obu pól fali elektromagnetycznej zachodzi związek

$$|\mathcal{H}_m| = \left| c_m \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \right|. \quad (355)$$

Podstawiając tę wartość w wyrażeniu (347) na energię elektromagnetyczną, otrzymamy:

$$w_m = \frac{\mu \mathcal{H}_m^2}{8\pi} = \frac{\mu}{8\pi} c_m^2 \frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{\varepsilon c_m^2}{8\pi}. \quad (356)$$

z czego wynika, że energia zawarta w polu magnetycznym fali elektromagnetycznej równa się energii zawartej w polu elektrycznym tej samej fali elektromagnetycznej.

W szczególnym przypadku dla powietrza otrzymamy, stosując np. układ jednostek elektrostatyczny ( $\varepsilon = 1$ ),  $\mu = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}$ :

$$\mathcal{H}_m \text{ c g s . e . s t . } = 3 \cdot 10^{10} \cdot c_m \text{ c g s . e . s t . } \quad (356')$$

a więc liczba, wyrażająca natężenie pola magnetycznego w jednostkach elektrostatycznych, będzie  $3 \cdot 10^{10}$  razy większa od liczby, wyrażającej natężenie pola elektrycznego w jednostkach elektrostatycznych.

Stąd łatwo obliczyć, że dla powietrza:

$$\mathcal{H}_m \text{ c g s . e . m . } = c_m \text{ c g s . e . s t . } \quad (356 \text{ a})$$

A więc w powietrzu natężenie pola magnetycznego fali jest liczbowo równe natężeniu pola elektrycznego, jeżeli pole magnetyczne wyrazimy w jednostkach elektromagnetycznych, a pole elektryczne w jednostkach elektrostatycznych.

Na zasadzie wyprowadzonych tu wielkości, oraz uwzględniając, że

$$\frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

wektor Poyntinga dla fali płaskiej wyrazić możemy równaniem:

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} \epsilon_m \mathcal{H}_m \sin^2 \left( \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right), \quad (357)$$

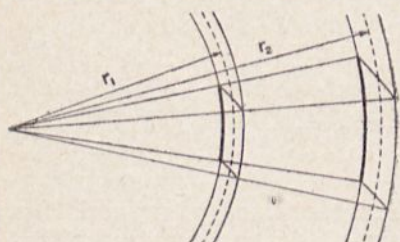
czyli:

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\epsilon}{\mu} \epsilon_m^2 \sin^2 \left( \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right). \quad (357a)$$

## 8. Rozchodzenie się fali kulistej i fali cylindrycznej.

Fali płaskiej, w której energia byłaby skierowana równoległym strumieniem, w praktyce właściwie nie spotykamy. Zbliża się do tego przypadku jedynie przesyłanie prądów szybkodziennych wzdłuż przewodów, czyli t. zw. radjotelefonja przewodowa.

W radjokomunikacji natomiast normalnym typem rozchodzenia się energii jest *fala kulista*. Jeżeli przyjmiemy, że ośrodek jest doskonałym dielektrykiem, to strat energii nie będzie, a więc energia, przenikająca kolejne powierzchnie kuliste fali, będzie wielkością stałą. Wobec tego, że powierzchnia kuli jest proporcjonalna do kwadratu jej promienia, więc i *gęstość energii*, której miarą jest wektor Poyntinga, zmienia się na fali kulistej odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od źródła promieniowania (rys. 189). Jeżeli wektor Poyntinga u źródła promieniowania wynosi:



Rys. 189.

$$\Psi_0 = \frac{1}{4\pi} \epsilon_0 \mathcal{H}_0,$$

to w odległości  $r$  wartość jego wyniesie:

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\epsilon_0 \mathcal{H}_0}{r^2}. \quad (358)$$

Wobec tego, że energia fali elektromagnetycznej rozkłada się równomiernie na pole elektryczne i magnetyczne, pola te muszą maleć odwrotnie proporcjonalnie do odległości, czyli

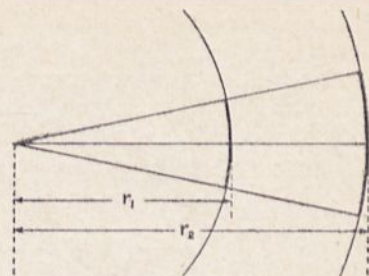
$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{r}, \quad \mathcal{H} = \frac{\mathcal{H}_0}{r}. \quad (359)$$

Drugim typem fali, którego przybliżenie spotykamy w rzeczywistości, jest *fala cylindryczna*. Powstaje ona, gdy energia promieniowania porusza się w dielektryku, ograniczonym dwiema równoległymi płaszczyznami, tworząc dokoła anteny słoje cylindryczne (rys. 190). Jako cylindryczne uważać możemy fale elektromagnetyczne na większych odległościach od anteny, rozchodzące się jako fale powierzchniowe wzdłuż powierzchni ziemi dzięki jej działaniu dyfrakcyjnemu. Wobec tego, że powierzchnie poszczególnych

walców współśrodkowych, stanowiących czoło fali, są proporcjonalne do promienia:  $S = 2\pi r h$ , a więc wektor Poyntinga w takiej fali zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do odległości od źródła. Mamy więc dla fali cylindrycznej:

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{r}, \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{r}}, \quad \mathcal{H} = \frac{\mathcal{H}_0}{\sqrt{r}}. \quad (360)$$

W bardzo dużej odległości od źródeł i na niewielkiej przestrzeni tak falę kulistą, jak i cylindryczną z dostatecznym przybliżeniem uważać można za fale płaskie.

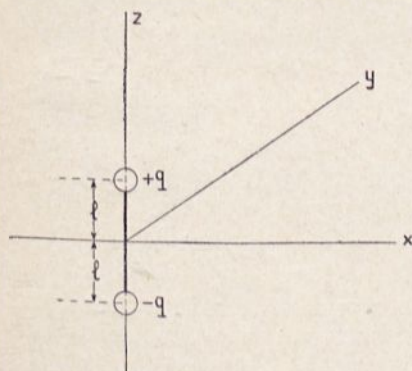


Rys. 190.

### 9. Promieniowanie dipola.

Dotychczas rozpatrywaliśmy własności fali elektromagnetycznej, nie wchodząc w mechanizm wzbudzenia jej przez antenę.

Dla zbadania tego zjawiska obierzmy sobie elementarną antenę symetryczną w postaci bardzo krótkich przewodników <sup>1)</sup>, znacznie przedłużonych przy pomocy pojemności końcowych (rys. 191). Dzięki temu osiągniemy równomierny rozkład prądu w przewodnikach i skupienie pojemności na końcach. Układ taki nosi nazwę dipola Hertz'a.



Rys. 191.

Gdy dipol Hertz'a umieścimy na osi z-ów, linie pola magnetycznego będą przebiegały współśrodkowo dookoła dipola, a więc poziomo. Wobec tego składowej pionowej tego pola nie będzie, będzie więc  $\mathcal{H}_z = 0$ , a równania maxwellowskie sprowadzą się do następującej, nieco uproszczonej postaci:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z}, \\ \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z}, \\ \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y}, \end{aligned} \right\} (361)$$

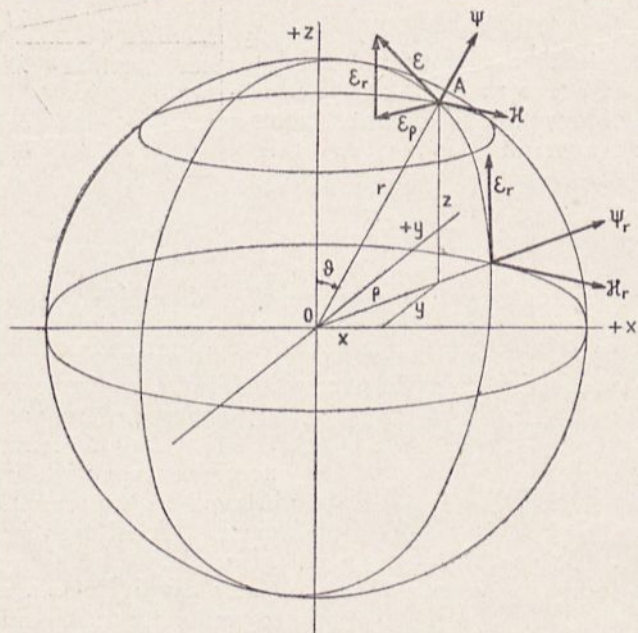
$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}, \\ \mu \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x}, \end{aligned} \right\} (362)$$

<sup>1)</sup> Zakładamy, że długość tej anteny jest bardzo mała wobec długości fali.

przyczem:

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = 0. \quad (363)$$

Falę kulistą, wytworzoną przez dipol, ilustruje nam rys. 192. Ośią kuli jest oś z-ów, płaszczyzna prostopadła do dipola, przechodząca przez jego środek, jest *płaszczyzną równikową fali*. Promień kuli  $r$  jest odległością,



Rys. 192.

mierzoną od środka dipola, którą fala przebyła w danej chwili  $t$ . Jeżeli rzut promienia  $r$  na płaszczyznę równikową oznaczymy przez  $\rho$  otrzymamy następujące zależności: <sup>1)</sup>

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (a)$$

$$r^2 = \rho^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (b)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho}{r} = \sin \vartheta, \quad (c)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos \vartheta. \quad (d)$$

<sup>1)</sup> Mamy  $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ , stąd  $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2} (\rho^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2z = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{z}{r}$ .  
Analogicznie wyprowadzamy drugi związek.

Pozatem, w myśl twierdzenia Poyntinga, wobec tego, że kierunek posuwania się fali jest zgodny z kierunkiem promienia, pole magnetyczne musi być styczne do równoleżnika kuli, a pole elektryczne do południka. Z tego wynikają dalsze związki:

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_x^2 + \mathcal{H}_y^2, \quad (364)$$

$$\mathcal{C}_\rho^2 = \mathcal{C}_x^2 + \mathcal{C}_y^2, \quad \mathcal{C}^2 = \mathcal{C}_\rho^2 + \mathcal{C}_z^2 = \mathcal{C}_x^2 + \mathcal{C}_y^2 + \mathcal{C}_z^2. \quad (364')$$

By rozwiązać układ równań pola elektromagnetycznego, wprowadzamy za Hertz'em funkcję zastępczą  $\Pi$ , zwaną *potencjałem wektorowym* Hertz'a, której znaczenie fizyczne wyjaśni się po rozwiązaniu formalnym przy założeniu pewnych warunków granicznych. Funkcja ta powinna odpowiadać założeniom:

$$\mathcal{H}_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial y}, \quad \mathcal{H}_y = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial x}. \quad (365)$$

Różniczkując odpowiednio te funkcje, podstawiając je do grupy równań (361) i całkując względem  $t$ , otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{C}_x &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \\ \mathcal{C}_y &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, \\ \mathcal{C}_z &= -\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (366)$$

Wreszcie, podstawiając funkcje (365) do pierwszego z równań (362), otrzymamy po pewnych przekształceniach<sup>1)</sup>:

$$\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}. \quad (367)$$

<sup>1)</sup> Różniczkując równanie (365) i mnożąc je obustronnie przez  $\varepsilon \mu$  oraz uwzględniając równanie (362) otrzymamy:

$$\varepsilon \mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} = \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial y} \right) = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{C}_y}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{C}_z}{\partial y}.$$

Podstawiamy teraz wartości  $\frac{\partial \mathcal{C}_y}{\partial z}$  i  $\frac{\partial \mathcal{C}_z}{\partial y}$  z równań (366) i otrzymujemy:

$$\varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right).$$

Równania (366) i (367) dostatecznie charakteryzują pole elektromagnetyczne, gdyż (366) są całkami względem  $t$  równań (361), dających zmienność pola elektrycznego w czasie, a pochodne cząstkowe względem  $y$  i względem  $x$  równania (367) dadzą nam pierwsze i drugie z równań (362), przedstawiających zmienność pola magnetycznego w czasie, trzecie zaś z równań (362) przekształca się w tożsamość po podstawieniu wartości z równań (366).

Warunkom wyrażonym w równaniach (365) i (366) odpowie oczywiście każda funkcja, która uczyni zadość równaniu (367). Jak łatwo się przekonać, warunek ten spełnia również funkcja w postaci:

$$\Pi = \frac{\Pi_0}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{u} \right), \quad (368)$$

przedstawiająca falę, której amplituda jest odwrotnie proporcjonalna do odległości, a więc funkcja, według której zmieniają się  $\mathcal{E}$  i  $\mathcal{H}$  w fali kulistej (patrz § 8).

Do równań (365) i (366) możemy teraz wprowadzić nowe współrzędne  $\rho$ ,  $r$  i  $\vartheta$ . Stosując podstawienia (a) do (d) i obliczając odpowiednie pochodne<sup>1)</sup>, otrzymujemy wyrażenie na pole magnetyczne:

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_x^2 + \mathcal{H}_y^2 = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial x} \right)^2 = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial \rho} \right)^2,$$

a więc (obierając znak zgodnie z twierdzeniem Poyntinga):

$$\mathcal{H} = - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial \rho} \quad (369)$$

Składową pionową pola elektrycznego otrzymamy z 3-go równania

<sup>1)</sup> Możemy z łatwością obliczyć:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho},$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x}{\rho} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right) = \frac{x}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial \rho},$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial y} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{y}{\rho} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right) = \frac{y}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial \rho}.$$



[366], podstawiając odpowiednie pochodne <sup>1)</sup>:

$$C_z = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} \right). \quad (370)$$

Wreszcie składową poziomą pola elektrycznego da nam zależność:

$$C_\rho^2 = C_x^2 + C_y^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} \right)^2 \right],$$

z czego, po podstawieniu odpowiednich pochodnych, otrzymujemy <sup>2)</sup>:

$$C_\rho = \pm \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z}. \quad (371)$$

<sup>1)</sup> Z łatwością obliczamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{\rho} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{x}{\rho} \cdot \left( \frac{x}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} - \frac{x^2}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right) = \\ &= \frac{1}{\rho} \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{\rho^2} \right) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{x^2}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{\rho} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{y}{\rho} \cdot \left( \frac{y}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} - \frac{y^2}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right) = \\ &= \frac{1}{\rho} \cdot \left( 1 - \frac{y^2}{\rho^2} \right) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{y^2}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2}. \end{aligned}$$

stąd

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} &= \frac{1}{\rho} \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{\rho^2} + 1 - \frac{y^2}{\rho^2} \right) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{x^2 + y^2}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} = \\ &= \frac{1}{\rho} \left( 2 - \frac{x^2 + y^2}{\rho^2} \right) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2}. \end{aligned}$$

<sup>2)</sup> Przeliczamy:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right) = \frac{x}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right) = \frac{y}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z},$$

stąd

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} \right)^2 &= \frac{x^2}{\rho^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z} \right)^2 + \frac{y^2}{\rho^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z} \right)^2 = \\ &= \frac{x^2 + y^2}{\rho^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z} \right)^2 = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z} \right)^2. \end{aligned}$$

## 10. Składowe pola elektromagnetycznego.

Wprowadzając potencjał wektorowy Hertz'a w postaci, wyrażonej równaniem (368):

$$\Pi = \frac{\Pi_0}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{u} \right),$$

postaramy się wpierw rozwiązać zagadnienie dla przypadku najprostszego, a mianowicie dla *płaszczyzny równikowej*. W płaszczyźnie tej znika składowa pozioma pola elektrycznego, mamy więc:

$$\zeta_\rho = 0, \quad \zeta = \zeta_z, \quad \rho = r.$$

Wobec tego możemy napisać dla płaszczyzny równikowej:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} \right), \\ \mathcal{H} &= -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \cdot \partial r} \end{aligned} \right\} \quad (372)$$

skąd, po podstawieniu odpowiednich pochodnych potencjału wektorowego<sup>1)</sup>, otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left[ \frac{\Pi}{r} \cdot \frac{\omega^2}{u^2} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) - \frac{\Pi_0}{r^2} \cdot \frac{\omega}{u} \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Pi_0}{r^3} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) \right], \\ \mathcal{H} &= -\frac{\Pi_0}{r} \cdot \frac{\omega^2}{u} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) + \frac{\Pi_0}{r^2} \cdot \omega \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{u} \right). \end{aligned} \right\} \quad (373)$$

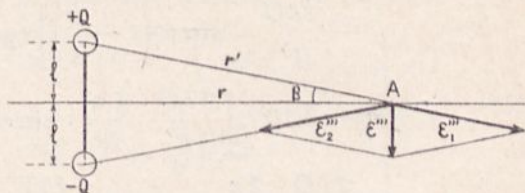
<sup>1)</sup> Przeliczenia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial r} &= -\frac{\Pi_0}{r} \cdot \frac{\omega}{u} \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) - \frac{\Pi_0}{r^2} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{u} \right), \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) = -\frac{\Pi_0}{r} \cdot \frac{\omega^2}{u^2} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) + \\ &\quad + \frac{2\Pi_0}{r^2} \cdot \frac{\omega}{u} \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) + \frac{2\Pi_0}{r^3} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{u} \right), \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) &= \frac{\Pi_0}{r} \cdot \frac{\omega^2}{u} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) - \frac{\Pi_0}{r^2} \cdot \frac{\omega}{u} \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{u} \right). \end{aligned}$$

W równaniu (373) na pole elektryczne ostatni człon, odwrotnie proporcjonalny do trzeciej potęgi odległości, wyraża *pole elektrostatyczne*, bezpośrednio indukowane przez ładunki statyczne dipola. Pole to w odległości  $r$  od ładunku elektrycznego możemy określić na podstawie prawa Coulomb'a (rys. 193):

$$E = \frac{q}{\epsilon \cdot r^2}.$$

Wobec tego maksymalny ładunek  $(+Q^1)$  wytworzy w punkcie A, leżącym w płaszczyźnie równikowej w odległości  $r'$  od tego ładunku, amplitudę pola elektrycznego:



Rys. 193.

$$E_{m_1} = \frac{Q}{\epsilon \cdot r'^2}.$$

zaś taki sam ładunek ujemny wytworzy w tym samym punkcie pole:

$$E_{m_2} = -\frac{Q}{\epsilon \cdot r'^2}.$$

Stąd wynika, że  $|E_{m_1}| = |E_{m_2}|$ .

Pole wypadkowe  $E_m$  jest sumą geometryczną obu tych pól i wynosi (przyjmując  $r' \approx r$ ):

$$E_m = 2 E_{m_1} \cdot \cos \beta = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{2Q}{r^2} \cdot \frac{l}{r} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{2lQ}{r^3} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \Pi_0,$$

z czego wynika, że pierwotnie dowolnie obrana wielkość  $\Pi_0$  wynosi:

$$\Pi_0 = 2lQ. \quad (374)$$

Wielkość tę nazywamy *momentem elektrycznym dipola*.

Podstawiając do równań (373) wartość momentu elektrycznego, zaś za  $\omega$  wielkość  $\omega = \frac{2\pi u}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda}$  (równanie 220 i 256-a rozdziału V), przyj-

<sup>1)</sup> Przebieg zmienności ładunku w czasie wyraża nam:

$$q = Q \sin \omega t.$$

mując ponadto jako ośrodek powietrze ( $\varepsilon = 1$  w układzie elektrostatycznym jednostek), otrzymamy <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \left[ \frac{2lQ}{r} \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{2lQ}{r^2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{2lQ}{r^3} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \text{cgs. e. st.} \\ \mathcal{H} &= -3.10^{10} \cdot \left[ \frac{2lQ}{r} \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{2lQ}{r^2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \text{cgs. e. st.} \end{aligned} \right\} (373a)$$

Jak dowodzą te równania, pole elektromagnetyczne, wytwarzane przez dipol, zawiera 5 pól składowych:

- 1) Pole elektrostatyczne pierwotne  $\zeta'$  odwrotnie proporcjonalne do *trzeciej potęgi odległości* od anteny.
- 2) Pole magnetyczne pierwotne  $\mathcal{H}''$ , indukowane przez ruch ładunków  $i = \frac{dq}{dt}$ , na podstawie prawa Laplace'a proporcjonalne do częstotliwości i odwrotnie proporcjonalne do *kwadratu odległości* od anteny, przesunięte w fazie o  $90^\circ$  wstecz, względem pola elektrycznego.
- 3) Pole elektryczne wtórne  $\zeta''$ , wytworzone w dielektryku przez ruch linii pola magnetycznego, również proporcjonalne do częstotliwości i odwrotnie proporcjonalne do *kwadratu odległości* od anteny, będące w fazie w wywołującym je polem magnetycznym.
- 4) Pole magnetyczne wtórne  $\mathcal{H}'''$ , wytworzone przez prąd przesunięcia, będący wynikiem istnienia wtórnego pola elektrycznego, proporcjonalne do kwadratu częstotliwości i odwrotnie proporcjonalne do *pierwszej potęgi odległości* od anteny.
- 5) Pole elektryczne  $\zeta'''$ , pochodne wtórnego pola magnetycznego, tak jak ono proporcjonalne do kwadratu częstotliwości i odwrotnie proporcjonalne do *pierwszej potęgi odległości* od anteny.

Pole  $\zeta'$  i pole  $\mathcal{H}''$  są więc, jak już zaznaczono, przesunięte <sup>2)</sup> w fazie o  $90^\circ$ . Natomiast pola  $\mathcal{H}'''$  i  $\zeta''$  oraz  $\mathcal{H}''''$  i  $\zeta'''$  są parami w fazie, są więc zdolne do przenoszenia energii elektromagnetycznej. Jednakże pola  $\mathcal{H}''$  i  $\zeta''$ , zwane też *polami indukcyjnymi*, zanikają bardzo szybko w porównaniu z  $\mathcal{H}'''$  i  $\zeta'''$ , tak, iż w niewielkiej nawet odległości od anteny można je pominąć ( $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$ ), czyli rzędu kilku długości fali <sup>3)</sup>. Pole elektrostatyczne, mogące

<sup>1)</sup> Wyrażenie na  $\mathcal{H}$  mnożymy przez  $e = 3.10^{-10}$  aby natężenia obu pól wyrazić w jednym i tym samym układzie jednostek elektrostatycznym.

<sup>2)</sup> Znak ujemny przy  $\mathcal{H}$  tego wyjaśniono w paragrafie 7 tego rozdziału.

<sup>3)</sup> Dlatego pomiary promieniowania anten wykonywa się zawsze na odległościach przynajmniej  $5 \div 6$  długości fali, by zmniejszyć błąd, spowodowany przez odcieńność pól indukcyjnych.

powodować sprzężenie pojemnościowe z otaczającymi antenę przewodnikami, zanika jeszcze szybciej. Właściwym czynnikiem wytwarzającym fale elektromagnetyczne są dopiero pola  $\mathcal{H}'''$  i  $\mathcal{E}'''$  i jedynie one nas interesują, o ile idzie o zjawiska związane z radjokomunikacją. Dlatego też w dalszym ciągu będziemy pomijali pozostałe składowe pola elektromagnetyczne tak, iż natężenia pola w płaszczyźnie równikowej wyrazimy w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_r &= \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot l \cdot Q}{r \cdot \lambda^2} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \text{ cgs e. st.} \\ \mathcal{H}_r &= \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot l \cdot Q \cdot c}{r \cdot \lambda^2} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \text{ cgs. e. st.} \end{aligned} \right\} \quad (375)$$

Z praw, według których maleją poszczególne pola, wynika, że w bezpośrednim sąsiedztwie anteny przeważają pola pierwotne, a więc przesunięcie w czasie faz między wypadkowymi polami jest zbliżone do  $90^\circ$ <sup>1)</sup>. Im bardziej zaś oddalamy się od anteny, tem bardziej to przesunięcie faz ulega zmniejszeniu, aż wreszcie na dużych odległościach fazy pól są całkowicie zgodne.

## 11. Promieniowanie przestrzenne dipola.

Rozpatrzmy teraz rozdział energii fali kulistej w przestrzeni, ograniczając się jedynie do pól, malejących odwrotnie proporcjonalnie do pierwszej potęgi odległości.

Zgodnie z równaniem (369) otrzymamy z pominięciem wyższych potęg wielkości  $\frac{1}{r}$ <sup>2)</sup> następujące wyrażenie na pole magnetyczne:

- <sup>1)</sup> Szczegółowe prace nad polem elektromagnetycznym w bezpośrednim sąsiedztwie anteny ogłosili w ostatnich czasach między innymi:
1. J. S. Mc Petrie, „Graphical Method for Determining the Magnitude and Phase of the electric Field in the Neighbourhood of an Antenna Carrying a known Distribution of Current”, J. E. E. W. P. VI, str. 40, r. 1931.
  2. J. A. Ratcliffe, L. G. Vedy i A. F. Wilkins „The Spreading of Electromagnetic Waves from a Hertzian Dipole”, J. E. E. W. P. VII, str. 71, 1932 r.
  3. H. Zickendraht, „Messungen im Nahfeld eines Rundspruchsenders”, Helvetica Physica Acta V, str. 3, 1932 r.
  4. G. W. O. H. The Field in the Immediate Neighbourhood of a Transmitting Aerial. E. W. W. E. IX, str. 119, 1932 r.

<sup>2)</sup> Przeliczenia

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\Pi_0 \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right] = \\ &= - \frac{\Pi_0}{r^2} \left[ r \cdot \frac{\omega}{c} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial \rho} + \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial \rho} \right] \approx \\ &\approx - \frac{\Pi_0}{r} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) = - \frac{2 l \cdot Q}{r} \cdot \frac{2 \pi}{\lambda} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \cdot \end{aligned}$$

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial \rho} = -\frac{2l \cdot Q}{r} \cdot \frac{\omega^2}{c} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad (376)$$

czyli:

$$\mathcal{H} = -\frac{8\pi^2 \cdot l \cdot Q \cdot c}{r \cdot \lambda^2} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) = \mathcal{H}_r \cdot \sin \vartheta. \quad (376')$$

Składowa pionowa pola elektrycznego dla  $\varepsilon = 1$  będzie wynosiła:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z = & \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right) = \frac{\Pi}{r} \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \\ & + \frac{\Pi}{r^2} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned} \quad (377)$$

(Pomijamy tu drugi człon  $\frac{\Pi_0}{r^2} \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)$ , jako odwrotnie proporcjonalny do trzeciej potęgi  $r$ , a więc b. mały w stosunku do pierwotnego członu).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} & \cong -\Pi_0 \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\rho \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r^2} \right] = \\ & \cong -\Pi_0 \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r^4} \left\{ r^2 \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega}{c} \cdot r^3 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \right. \\ & \left. - 2r^2 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \cong -\frac{\Pi_0}{r} \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial t} & = \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{\Pi_0}{r} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] = \\ & = \frac{2l \cdot Q}{r} \cdot \frac{\omega^2}{c} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z} & = -\Pi_0 \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \rho \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r^2} \right] = \\ & = -\Pi_0 \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \left[ -\frac{\rho}{r} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\omega}{r \cdot c} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] = \\ & = -\frac{\Pi_0 \cdot \omega}{c} \cdot \left[ -\frac{\cos \vartheta \cdot \sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\omega}{r \cdot c} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \cong \\ & \cong -\frac{\Pi_0}{r} \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned}$$

Drugi człon możemy pominąć dlatego, że wyraża on pole przesunięte w fazie o  $90^\circ$  względem pola magnetycznego, a więc nie biorące udziału w przenoszeniu energii, oraz że pole to jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości. Wobec tego równanie możemy uprościć do postaci:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z &= \frac{2lQ}{r} \cdot \frac{4\pi^2 \cdot c^2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) = \\ &= \frac{8\pi^2 lQ}{r \cdot \lambda^2} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) = \mathcal{E}_r \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (377a)$$

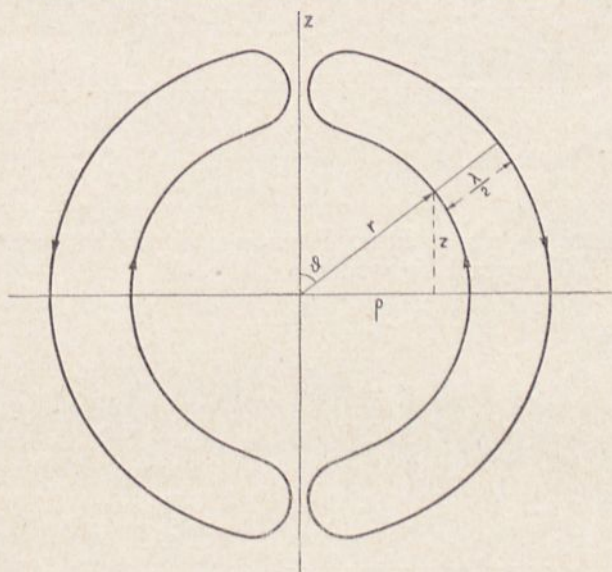
Składowa pozioma pola elektrycznego wynosi:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\rho &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z} = - \frac{8\pi^2 \cdot lQ}{r \cdot \lambda^2} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) = \\ &= - \mathcal{E}_r \sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (378)$$

Wypadkowe pole elektryczne promienia idącego pod kątem  $\vartheta$ , wynosi wobec tego:

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_z^2 + \mathcal{E}_\rho^2} = \mathcal{E}_r \sqrt{\sin^4 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta} = \mathcal{E}_r \sin \vartheta. \quad (379)$$

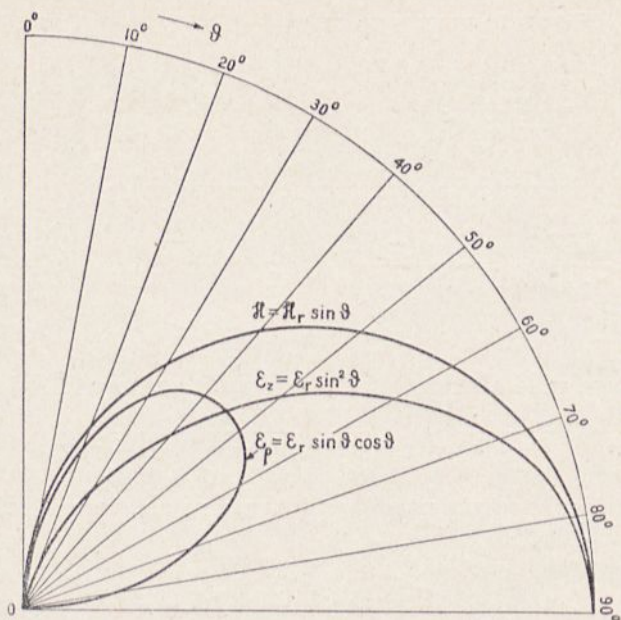
Wynik ten jest zresztą zgodny z teorią fali elektromagnetycznej.



Rys. 194.

Przy pomocy równań (376), (377 a) i (378) możemy obliczyć pole elektryczne i magnetyczne w dowolnym punkcie fali kulistej, wytworzonej przez elementarny dipol, jak to wykonano na rys. 194 dla pola elektrycznego na

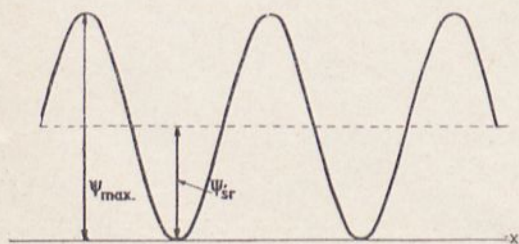
przestrzeni połówki długości fali. Wykres biegunowy tych wartości mamy na rys. 195. Widać z niego, co jest zresztą oczywiste ze wzorów, że dipol promieniuje najsilniej w kierunku prostopadłym do swej osi, a więc w płaszczyźnie równikowej, a nie promieniuje wcale w kierunku swej osi. Lepiej



Rys. 195.

jeszcze ilustruje to wykres wektora Poyntinga, który na podstawie równań (358), (376) i (379) wyrazi się wzorem:

$$\Psi_m = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\mathcal{H}_m \cdot \mathcal{E}_m}{r^2} = \frac{\mathcal{H}_r \mathcal{E}_r}{4\pi \cdot r^2} \sin^2 \vartheta, \quad (380)$$



Rys. 196.

Jest to amplituda wektora Poyntinga. Wartość skuteczną otrzymamy, wprowadzając skuteczne wartości  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{E}$ , a więc (rys. 196):

$$\begin{aligned} \Psi_{sr} &= \frac{\Psi_m}{2} = \Psi = \\ &= \frac{\mathcal{H}_r \cdot \mathcal{E}_r}{4\pi \cdot r^2} \cdot \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (380a)$$



## 12. Promieniowanie anteny o wymiarach skończonych. Wzór Hertza i Rüdemberga.

Równania z poprzednich paragrafów, wyrażające natężenia pól elektrycznego i magnetycznego, wytwarzane przez dipol elementarny, możemy przenieść bezpośrednio na antenę symetryczną, której długość jest mała wobec długości fali (kilkakrotnie mniejsza od ćwiartki fali), a więc, zgodnie z określeniami rozdziału V-go, na antenę *znacznie przedłużoną*. Jeżeli przytem założymy, że antena posiada znaczne pojemności na końcach, otrzymamy w niej praktycznie równomierny rozkład prądu, tak iż możemy przyjąć  $J = f(z) = \text{const.}$  czyli

$$\int_0^l J dz = J \int_0^l dz = J l.$$

Jeżeli antena taka jest w rezonansie z częstotliwością zasilającą, możemy zastosować dla niej następujące założenia (będziemy tu stosowali wartości skuteczne napięcia i prądu):

$$Q = V C, \quad V = J \sqrt{\frac{L_H}{C_F}}, \quad \lambda_{\text{cm}} \cong 2 \pi c \sqrt{L_H C_F}.$$

W równaniach tych, wszystkie wielkości są wyrażone w tym samym układzie jednostek (praktycznym), możemy więc, oznaczając przez  $h = 2l$  całkowitą wysokość anteny symetrycznej, napisać równania dla płaszczyzny równikowej w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_r &= \frac{2 \pi h J}{c r \lambda} \text{ cgs. e. st. / cm,} \\ \mathcal{H}_r &= \frac{2 \pi h J}{r \lambda} \text{ cgs. e. st.} \end{aligned} \right\} \quad (381)$$

Wprowadzając do tych wzorów wartości  $J$  w amperach,  $h$  w metrach,  $r = d^1$ ) i  $\lambda$  w km i wyrażając natężenie pola elektrycznego w jednostkach układu praktycznego, pola magnetycznego w gaussach, otrzymujemy <sup>2)</sup>:

$$\mathcal{E}_r = 60 \pi \frac{J_A h_m}{d_{\text{km}} \lambda_{\text{km}}} \mu \text{ V/m} \quad (381')$$

<sup>1)</sup> W dalszym ciągu odległość zamiast przez  $r$  będziemy oznaczać przez  $d$ , to oznaczenie spotyka się bowiem we wszystkich wzorach *praktycznych* na rozchodzenie się fal.

<sup>2)</sup> Przeliczenia:

$$\mathcal{E}_r = \frac{2 \pi \cdot h \cdot J}{c \cdot d \cdot \lambda} \text{ (cgs. e. st.)} = \frac{2 \pi \cdot h \cdot 10^2 \cdot J \cdot 3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^{10} \cdot d \cdot 10^5 \cdot \lambda \cdot 10^8} \text{ (cgs. e. st.)} =$$

$$\mathcal{H}_r = 0,2 \pi \frac{h_m J_A}{d_{\text{km}} \lambda_{\text{km}}} \cdot 10^{-8} \text{ gaussów.} \quad (381'')$$

Jeżeli antenę o tej samej wysokości  $h$  połączymy z ziemią, którą zakładamy jako doskonale przewodzącą (patrz rys. 199 § 14), wówczas do dowolnego punktu w przestrzeni dochodzi nie tylko promień bezpośredni od anteny, lecz również i promień odbity od ziemi. Ziemia doskonale przewodząca działa więc tak, jak gdyby pod ziemią znajdowało się odbicie zwierciadlane anteny o tej samej wysokości, czyli równoważna wysokość anteny uziemionej jest dwukrotnie większa od jej wysokości rzeczywistej. Obecność ziemi podwaja więc niejako wysokość anteny, wobec tego, jeżeli wysokość ta jest mała wobec długości fali, tak iż pominać można przesunięcia faz, wywołane przez różnicę dróg  $r'$  i  $r''$ <sup>1)</sup>, natężenie pola jest dwukrotnie większe od natężenia pola anteny odosobnionej o tej samej wysokości. Będzie więc wówczas:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{4 \pi}{c} \cdot \frac{h J}{d \lambda} \text{ cgs. e. st.} = 120 \pi \frac{J_A h_m}{d_{\text{km}} \lambda_{\text{km}}} \text{ v. V/m.} \\ \mathcal{H} &= 4 \pi \frac{h J}{d \lambda} \text{ cgs. e. st.} = 0,4 \pi \frac{J_A h_m}{d_{\text{km}} \lambda_{\text{km}}} \text{ gauss.} \end{aligned} \right\} \quad (381a)$$

Pierwsze z równań (381a) znane jest w literaturze pod nazwą wzoru Hertza-Rüdenberga. Iloczyn  $Jh$  nazywamy *momentem prądowym* anteny i wyrażamy go w t. zw. *metramperach*, oznaczając tę nową jednostkę przez  $AM$  ( $J$  jest tu oczywiście wartością skuteczną prądu). Równanie Hertza-Rüdenberga zastosować można również i do anten o nieustalonym rozkładzie prądu, lecz pod warunkiem, że ich wysokość jest mała w porównaniu z długością fali. Z dużą dokładnością możemy dopuścić takie przybliżenie, gdy fala robocza wynosi  $(3 \div 4) \lambda_0$ , gdzie  $\lambda_0 = 4l$ . Wprowadzamy wówczas, zamiast wysokości geometrycznej, t. zw. *wysokość skuteczną*  $h_e$  anteny. Wysokość skuteczna dla anteny, której wysokość rzeczywista jest mała w porównaniu z długością fali, otrzymamy, obliczając jej moment prądowy z uwzględnieniem rozkładu prądu i dzieląc go przez natężenie prądu w brzości, podobnie jak obliczaliśmy w § 14 rozdziału V-ego indukcyjność

<sup>1)</sup> Zjawisko to będzie szczegółowo omówione w § 14.

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \pi \cdot h \cdot 10^2 \cdot J \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 300}{3 \cdot 10^{10} \cdot d \cdot 10^5 \cdot \lambda \cdot 10^5} \text{ V/cm} = \frac{60 \pi \cdot h \cdot J}{d \cdot \lambda} \cdot 10^{-8} \text{ V/cm} = 60 \pi \cdot \frac{h_m \cdot J_A}{d_{\text{km}} \cdot \lambda_{\text{km}}} \text{ V/m.} \\ \mathcal{H}_r &= \frac{2 \pi \cdot h \cdot J}{d \cdot \lambda} \text{ (cgs. e. st.)} = \frac{2 \pi \cdot h \cdot 10^2 \cdot J \cdot 3 \cdot 10^9}{d \cdot 10^5 \cdot \lambda \cdot 10^5} \text{ (cgs. e. st.)} = \\ &= \frac{2 \pi \cdot h \cdot J \cdot 3 \cdot 10^{11}}{d \cdot \lambda \cdot 10^{10}} \text{ (cgs. e. st.)} = \frac{2 \pi \cdot h \cdot J \cdot 3 \cdot 10^{11}}{d \cdot \lambda \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^{10}} \text{ (cgs. e. m.)} = \\ &= 0,2 \pi \cdot \frac{h_m \cdot J_A}{d_{\text{km}} \cdot \lambda_{\text{km}}} \cdot 10^{-8} \text{ gaussów.} \end{aligned}$$

skuteczną. A więc:

$$h_e = \frac{1}{J_b} \int_0^h i dz. \quad (382)$$

Jeżeli na przykład mamy antenę prostą znacznie przedłużoną (rozdział V, § 17, rys. 154), to przebieg prądu wzdłuż anteny wyrazić można równaniem:

$$J_z = J_b \frac{x}{h},$$

z czego otrzymamy wysokość skuteczną:

$$h_e = \frac{1}{h} \int_0^h x dx = \frac{h}{2}. \quad (382a)$$

Inne przykłady na obliczanie wysokości skutecznej anten znajdują się w „Częściach konstrukcyjnych”. Dla anten, których wysokości rzeczywistej nie możemy uważać jako małej w stosunku do długości fali, możemy stosować wzór (382) jedynie dla obliczenia pola w płaszczyźnie równikowej. Zawodzi on jednakże, gdybyśmy na jego podstawie chcieli obliczyć moc całkowitą wypromieniowaną przez antenę (patrz niżej § 14).

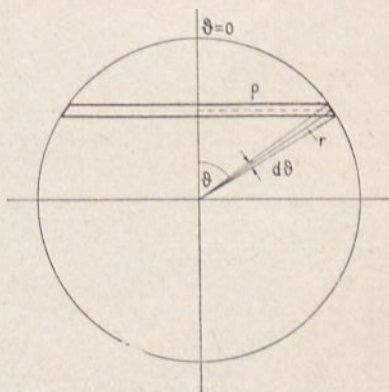
### 13. Moc wypromieniowana przez antenę niską.

Wektor Poyntinga, wyrażając energję, przenikającą przez jednostkę powierzchni w ciągu jednej sekundy, daje nam temsamem *moc* wypromieniowaną przez tę jednostkę powierzchni. Całkowitą moc, wypromieniowaną przez dipol, znajdziemy, całkując wektor Poyntinga przez całą powierzchnię fali kulistej.

Obliczymy wpierw moc wypromieniowaną przez elementarny pas czaszy kulistej o szerokości  $r d\vartheta$  (rys. 197). Powierzchnia tej elementarnej czaszy wynosi:

$$ds = 2\pi \rho r d\vartheta = 2\pi r^2 \sin\vartheta d\vartheta.$$

Wobec tego moc, promieniowaną przez ten element powierzchni, obliczymy na podstawie wzorów (376') i (379), wprowadzając skuteczne wartości natężeń pól elektrycznego i magnetycznego w odpowiednich jednostkach:



Rys. 197.

$$dP = \Psi ds = \frac{\mathcal{E}_r \mathcal{H}_r}{4\pi} \sin^2\vartheta ds = \frac{\mathcal{E}_r \mathcal{H}_r}{2} r^2 \sin^3\vartheta d\vartheta. \quad (383)$$

Podstawiając za  $C_r$  i  $\mathcal{U}_r$  wartości z równań (380), wyrażone w jednostkach cgs. e. st., otrzymamy:

$$dP = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi h J}{c r \lambda} \right) \cdot \left( \frac{2\pi h J}{r \lambda} \right) r^2 \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{2\pi^2}{c} \left( \frac{hJ}{\lambda} \right)^2 \sin^3 \vartheta d\vartheta \text{ erg/sek.} \quad (383')$$

Wprowadzając natężenie prądu w amperach ( $1 A = 3 \cdot 10^9$  cgs. e. st.) i przechodząc z erg/sek. na waty ( $1 \text{ wat} = 1 \text{ Joule/sek.} = 10^7 \text{ erg/sek.}$ ), dojdziemy do wyrażenia na moc:

$$dP = 60\pi^2 \left( \frac{h_m J_A}{\lambda_m} \right)^2 \sin^3 \vartheta d\vartheta \text{ watów,} \quad (383a)$$

w którym  $h$  i  $\lambda$  muszą być wyrażone w tych samych jednostkach ( $cm$  lub  $m$ ).

Całkując to równanie w granicach od:  $\vartheta = 0$  do  $\vartheta = \pi$  otrzymamy całkowitą moc, przenikającą przez powierzchnię kulistą:

$$\begin{aligned} P_{kuli} &= 60\pi^2 \left( \frac{hJ}{\lambda} \right)^2 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3} 60\pi^2 \left( \frac{hJ}{\lambda} \right)^2 = \\ &= 80\pi^2 \left( \frac{h_m J_A}{\lambda_m} \right)^2 \text{ watów.} \end{aligned} \quad (384)$$

Skoro mamy do czynienia z anteną uziemioną<sup>1)</sup>, promieniuje jedynie górna połowa fali kulistej, a zatem podstawiając wartości z równania (381), należy równanie (383) całkować jedynie w granicach od  $\vartheta = 0$  do  $\vartheta = +\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} P_{półkuli} &= 240\pi^2 \left( \frac{hJ}{\lambda} \right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \vartheta d\vartheta = 160\pi^2 \left( \frac{hJ}{\lambda} \right)^2 = \\ &\simeq 1600 \left( \frac{h_m}{\lambda_m} \right)^2 J_A^2 = R_p J^2. \end{aligned} \quad (385)$$

Przez analogję do wyrażenia na moc, straconą na ciepło Joule'a nazywamy wyrażenie

$$160\pi^2 \left( \frac{h_m}{\lambda_m} \right)^2 = R_p \simeq 1600 \frac{h_m^2}{\lambda_m^2} \quad (386)$$

opornością promieniowania anteny uziemionej znacznie przedłużonej.

<sup>1)</sup> Przyjmujemy tu, że ziemia jest doskonałym przewodnikiem ( $\sigma = \infty$ ). O wpływie przewodności o wartości skończonej będzie mowa dalej.

Porównanie wzorów (384) i (385) wykazuje, że antena uziemiona o tej samej wysokości, co całkowita wysokość  $2l$  anteny symetrycznej, promieniuje energję dwukrotnie większą.

Łatwo się przekonać, że antena uziemiona, której wysokość równoważna równa jest wysokości anteny symetrycznej:

$$2h_{uz} = 2l, \text{ czyli } h_{uz} = l,$$

a więc, której wysokość rzeczywista równa się wysokości jednej połówki anteny symetrycznej, promieniuje energję dwukrotnie mniejszą, niż antena symetryczna. Jeżeli bowiem wprowadzimy do wzoru (384) wielkość  $2l$  zamiast  $h$ , otrzymamy moc promieniową anteny symetrycznej:

$$P_{pr} = 80\pi^2 \left( \frac{2l_m J_A}{\lambda_m} \right)^2 = 320\pi^2 \left( \frac{l_m J_A}{\lambda_m} \right)^2 \text{ watów.} \quad (384a)$$

Równanie na moc wypromieniowaną wskazuje, że moc ta jest proporcjonalna do kwadratu wysokości skutecznej anteny i do kwadratu natężenia prądu, a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu długości fali, czyli jest ona również *uprost proporcjonalna do kwadratu częstotliwości* prądu zasilającego.

Tem tłumaczy się, że do promieniowania fal elektromagnetycznych nadają się jedynie prądy o dostatecznie wielkiej częstotliwości. Prądy małej częstotliwości wymagałyby bowiem takiej wysokości anten, która praktycznie byłaby niewykonalna.

O wpływie częstotliwości na promieniowanie pozwalają nam się zorientować następujące dane:

Warszawska stacja transatlantycka przy długości fali  $\lambda = 18350$  m posiada wysokość skuteczną anteny:  $h = 84$  m. Stąd oporność promieniowania wynosi zaledwie:

$$R_p \simeq 1600 \left( \frac{84}{18.10^3} \right)^2 = 0,035 \Omega,$$

co przy prądzie w antenie  $J \simeq 930$  A daje moc wypromieniowaną:

$$P_{pr} = 930^2 \cdot 0,035 \simeq 30 \text{ KW.}$$

Całkowita oporność anteny wynosi około  $0.2 \Omega$ , co daje moc doprowadzoną do anteny

$$P = 930^2 \cdot 0,2 \simeq 175 \text{ KW.},$$

a więc *sprawność promieniowania*, pod którą rozumiemy stosunek mocy wypromieniowanej do całkowitej mocy rzeczywistej, doprowadzonej do anteny:

$$\eta_{pr} = \frac{P_{pr}}{P} = \frac{P_{pr}}{P_{pr} + P_{strat.}} \quad (389a)$$

wynosi w naszym przypadku zaledwie:

$$\eta = \frac{30}{175} \approx 0,17.$$

Na krótszych falach warunki promieniowania są lepsze. I tak na falach radjofonicznych spotyka się sprawność rzędu 0,5 i więcej, zaś na falach krótkich, przy zastosowaniu anten, pracujących na harmonicznym, przekracza ona 90%.

W rozdziale V, rozpatrując antenę czy to prostą, czy to z pojemnością końcową, pomijaliśmy oporność i przyjmowaliśmy, że między napięciem i prądem przesunięcie faz wzdłuż anteny wynosi wszędzie  $90^\circ$ . Pomijając już straty energii skutkiem zamiany na ciepło, musimy tu wprowadzić dalsze sprostowanie. A mianowicie, gdybyśmy założyli, że przesunięcie faz wzdłuż całej anteny wynosi dokładnie  $\pi/2$  nie mogłoby być mowy o promieniowaniu energii, w antenie bowiem mielibyśmy jedynie moc urojoną<sup>1)</sup>.

Wobec tego jednakże, że przesunięcie faz między napięciem i prądem jest zbliżone do  $90^\circ$ , energia pola elektrycznego i magnetycznego w najważniejszej swej części pojawia się dokoła anteny w postaci mocy urojonej, oscylującej między polem elektrycznym i magnetycznym, a więc w postaci drgań elektromagnetycznych, jak w niby - ustalonym obwodzie rezonansowym. Jedynie nieznaczna część tej energii, dzięki istnieniu w obu polach składowych o zgodnej fazie, promieniuje w przestrzeń pod postacią fal elektromagnetycznych, jako moc rzeczywista,  $P_{pr}$ , która dodaje się do mocy zamienionej w przewodniku antenowym na ciepło Joule'a. Suma tych dwóch mocy stanowi moc rzeczywistą w antenie.

Energja bezmocna natomiast, zawarta w drganiach elektromagnetycznych, nie wychodzi poza antenę na odległość większą, niż  $\lambda/4$ , na taką bowiem odległość dochodzą w ciągu  $1/4$  okresu drgań prądu linje pola magnetycznego, by w ciągu następnej ćwiartki odbyć drogę powrotną do anteny. Cała więc energia bezmocna drgań zawarta jest w przestrzeni kulistej (w przypadku anteny uziemionej — w przestrzeni półkulistej), o promieniu równym ćwiartce długości fali.

### *Charakterystyka pionowa promieniowania.*

Funkcja podcałkowa równania (384) -  $\sin^3 \vartheta$  daje nam zmienność wektora Poyntinga w płaszczyźnie pionowej promieniowania anteny, czyli t.zw. jej *pionową charakterystykę promieniowania*. [ $\Psi = f(\vartheta)$ ].

Charakterystykę tę dla anteny niskiej w porównaniu z długością fali mamy na rys. 198. Górna połowa tej charakterystyki, wyciągnięta pełną kreską, podaje promieniowanie anteny doskonale uziemionej, zaś całość wraz z dolną połówką daje nam charakterystykę promieniowania anteny symetrycznej w przestrzeni swobodnej. Z wykresu tego, który należy so-

---

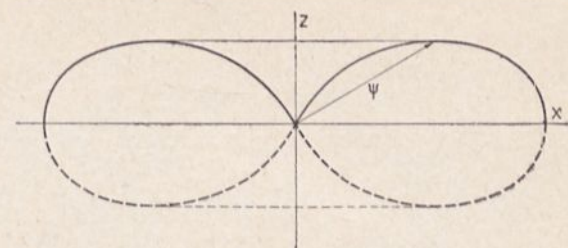
<sup>1)</sup> Mamy tu do czynienia z podobnym zjawiskiem, jak w przypadku drgań swobodnych (gasnących), rozpatrywanym w rozdziale II-gim. I tam również przesunięcie faz między napięciem na kondensatorze i prądem wyładowania jest mniejsze, niż  $90^\circ$ .

bie wyobrazić jako przekrój ciała obrotowego, widać, że główna część energii wypromieniowanej przez taką antenę jest skupiona w płaszczyźnie równikowej.

Pionową charakterystykę promieniowania można odnieść również do natężenia pola elektrycznego:

$$C_{\vartheta} = f(\vartheta).$$

Zasadniczy jej charakter przez to się nie zmienia, otrzymamy jedynie przebieg mniej spłaszczonej, gdyż pole elektryczne wynosi:



Rys. 198.

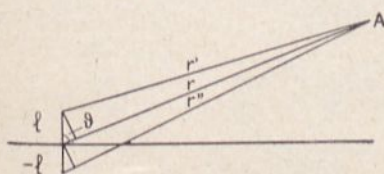
$$C_{\vartheta} = C_r \cdot \sin^2 \vartheta$$

wobec:

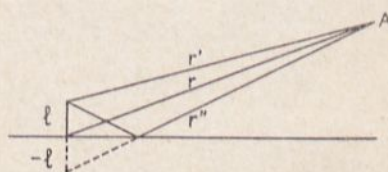
$$\Psi_{\vartheta} = \Psi_r \cdot \sin^3 \vartheta$$

#### 14. Promieniowanie anten wysokich. Antena ćwierćfalowa.

Gdy wysokość anteny jest znaczna wobec długości fali (rzędu  $\lambda/4$  lub większa), zjawiska dookoła niej zachodzące stają się bardziej złożone, nie można bowiem pominąć różnicy faz w drogach, jakie przebywają fale dochodzące z poszczególnych elementów anteny do danego punktu przestrzeni, w którym sumują się geometrycznie. Wobec tego, zależnie od kąta promieniowania  $\vartheta$ , będziemy musieli uwzględnić interferencję między poszczególnymi promieniami. Ilustruje to najlepiej rys. 199. Mamy tu antenę symetryczną o wysokości  $h = 2l$ ; w odległości  $r$  od jej środka, znajduje



Rys. 199.



Rys. 200.

się punkt  $A$ , leżący na powierzchni fali kulistej o promieniu  $r$ . Jest oczywiste, że promienie, wychodzące z punktów anteny, odległych od jej środka o długości  $+z$  i  $-z$ , nie dojdą do tego punktu w fazie zgodnej z promieniem  $r$ . Jeżeli założymy, że długość  $r$  jest znacznie większa od długości  $l$ , możemy napisać z dostatecznym przybliżeniem:

$$r' = r - z \cos \vartheta, \quad r'' = r - (-z \cos \vartheta) = r + z \cos \vartheta. \quad (a)$$

Wobec tego pola, wytworzone w punkcie  $A$  przez dwa symetryczne elementy anteny  $+ dz$  i  $- dz$ , wyrażą się jako funkcje momentu prądowego dwu symetrycznych elementów anteny w postaci następującej:

$$J_m \left[ \sin \omega \left( t - \frac{r - z \cos \vartheta}{c} \right) + \sin \omega \left( t - \frac{r + z \cos \vartheta}{c} \right) \right] dz \quad (b)$$

co po odpowiednim przekształceniu <sup>1)</sup> daje:

$$2 J_m \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \cdot \cos \left( \frac{2 \pi z}{\lambda} \cos \vartheta \right) dz. \quad (c)$$

Gdy założymy sinusoidalny rozkład prądu wzdłuż anteny i przyjmiemy jako początek układu środek anteny symetrycznej, możemy napisać równanie prądu w postaci:

$$I_z = J_b \cos \left( \frac{2 \pi z}{\lambda} + \varphi \right),$$

przyczem zależnie od tego, czy w środku anteny symetrycznej jest brzusiec, czy węzeł prądu, będziemy mieli  $\varphi = 0$  lub  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . W ten sposób

obliczyć możemy wypadkowy moment prądowy anteny w odniesieniu do punktu  $A$ , całkując przez całkowitą długość anteny:

$$(hJ)_m = 2 J_{bm} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \int_0^l \cos \left( \frac{2 \pi z}{\lambda} + \varphi \right) \cos \left( \frac{2 \pi z}{\lambda} \cos \vartheta \right) dz. \quad (d)$$

Zakładając dla naszych przeliczeń  $r = \text{const.}$  (czyli całkując cząstkowo względem czasu), możemy wprowadzić skuteczną wartość prądu o przebiegu:

$$i = J_{bm} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

wobec czego będziemy mieli:

$$(hJ)_m = 2 J_{bm} \int_0^l \cos \left( \frac{2 \pi z}{\lambda} + \varphi \right) \cdot \cos \left( \frac{2 \pi z}{\lambda} \cdot \cos \vartheta \right) dz. \quad (387)$$

<sup>1)</sup> Stosujemy wzór:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta.$$

i podstawiamy:

$$\alpha = \omega \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad \beta = \omega \frac{z \cos \vartheta}{c} = \frac{2 \pi z \cos \vartheta}{\lambda}.$$



By obliczyć energję wypromieniowaną, wprowadzimy wartość (387) do równania (383-a). Nie popełnimy tu wielkiego błędu, jeżeli pominiemy wpływ różnicy promieni  $r'$  i  $r''$  na amplitudę wytworzonego pola, możemy więc przyjąć  $r' \simeq r'' \simeq r$ , i napisać:

$$dP = \frac{60 \pi^2 \cdot J_b^2}{\lambda^2} \left[ \int_0^l \cos \left( \frac{2\pi z}{\lambda} + \varphi \right) \cos \left( \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \vartheta \right) dz \right]^2 \sin^3 \vartheta d\vartheta. \quad (388)$$

Po rozwiązaniu całki określonej, zawartej w nawiasach prostokątnych, można obliczyć całkowitą moc wypromieniowaną przez antenę, całkując otrzymane z (388) wyrażenie ze względu na  $\vartheta$  w granicach od 0 do  $\pi$ .

W ten sposób możemy znaleźć moc promieniowaną i oporność promieniowania, odniesioną do środka anteny, dla dowolnej harmonicznej anteny. Jeżeli antena jest uziemiona i jeżeli założymy, że ziemia jest doskonałym przewodnikiem ( $\sigma = \infty$ ), to granice całkowania dla momentu prądowego nie ulegają zmianie, gdyż dzięki odbiciu od ziemi promieni skierowanych ku dołowi, promienie te dochodzą do punktu A tak, jak gdyby wychodziły z odbicia zwierciadlanego anteny, znajdującego się pod ziemią (rys. 200), jak to już zaznaczono w § 13.

Zmienia się natomiast granice całkowania dla fali kulistej, i podobnie jak w § 13, zawarte będą od  $\vartheta = 0$  do  $\vartheta = \pi/2$ .

Dla przykładu obliczymy moc promieniowaną anteny prostej ćwierćfalowej. Mamy tam  $\varphi = 0$ , a więc <sup>1)</sup>:

$$(hJ)_{sk} = 2 J_b \int_0^{\lambda/4} \cos \left( \frac{2\pi z}{\lambda} + \varphi \right) \cdot \cos \frac{2\pi z \cos \vartheta}{\lambda} dz = \frac{J_b \lambda \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \cos \vartheta \right)}{\pi \sin^2 \vartheta}, \quad (z)$$

wobec czego moc promieniowaną da nam całka:

$$\begin{aligned} P_{pr} &= \frac{60}{\lambda^2} \cdot \frac{\pi^2}{\pi^2} \lambda^2 J_b^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin \vartheta} d\vartheta = \\ &= 60 J_b^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin \vartheta} d\vartheta \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Stosujemy wzór całkowy:

$$\int \cos m z \cos n z dz = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(m-n)z}{m-n} + \frac{\sin(m+n)z}{m+n} \right) + C.$$

zakładając:

$$m = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad a \quad n = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \vartheta.$$

Całka określona z tego wyrażenia wynosi <sup>1)</sup>:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} d\vartheta = 0,6095 \sim 0,61,$$

wobec czego otrzymujemy moc wypromieniowaną:

$$P_{pr} = 60 \cdot 0,61 \cdot J_b^2 = 36,6 J_b^2. \quad (389)$$

Stąd, zgodnie z określeniem pojęcia oporności promieniowania w § 13, znajdujemy, że oporność promieniowania anteny ćwierćfalowej wynosi:

$$R_{pr} = 36,6 \Omega. \quad (390)$$

Jest to oporność, wyrażająca całkowitą energię wypromieniowaną pod postacią fal elektromagnetycznych (z pominięciem pól odwrotnie proporcjonalnych do kwadratu odległości).

Chcąc uwzględnić jedynie składową pola w płaszczyźnie równikowej, co w pewnych przypadkach jest wystarczające, moglibyśmy znaleźć wysokość skuteczną anteny z równania (382):

$$h_e = \frac{1}{J_b} \int_0^{\lambda/4} J_b \cos \frac{2\pi z}{\lambda} dz = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{2}{\pi} h, \quad (391)$$

co według wzoru (386) dałoby oporność promieniowania:

$$R_p = 160 \pi^2 \left( \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{1}{\lambda} \right)^2 \approx 40 \Omega.$$

niezgodną z poprzednim wynikiem. Obliczenie to spotykamy w literaturze jako przybliżone.

Do obliczeń mocy, podanych w rozdziale V. § 14 i 17, nie należy stosować oporności promieniowania odpowiadającej polu w płaszczyźnie równikowej, lecz oporność promieniowania rzeczywistą. Oporność promieniowania, jako odniesioną do brzośca prądu, można bezpośrednio sumować z opornością przewodnika, obliczoną w tych paragrafach, o ile moc odnosimy również do brzośca prądu.

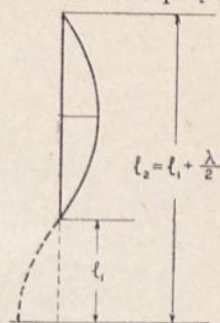
O ile oporność przewodnika jest odniesiona do innego punktu anteny,  $R'_p$  należy odnieść do żądanego punktu anteny w stosunku  $R'_p = R_p \left( \frac{J}{J_b} \right)^2$ .

Równanie (2) pozwala nam obliczyć wektor Poyntinga anteny ćwierćfalowej dla dowolnego kąta  $\vartheta$  i w ten sposób wykreślić charakterystykę pionową promieniowania anteny, podobnie, jak to czyniliśmy dla anteny z pojemnością skupioną. Charakterystyka ta jest bardziej spłaszczona, dając jeszcze większe skupienie energii w kierunku płaszczyzny równikowej. (patrz niżej rys. 203).

<sup>1)</sup> Funkcję tą można scałkować przez rozwinięcie w szereg.

Wzory (387) i (388) możemy zastosować również i do anten ustawionych na dowolnej wysokości nad ziemią. Wówczas tylko krzywą rozkładu prądu przedłużymy musimy do ziemi (rys. 201) i podstawimy w równaniu prądu odpowiednią wartość na  $\varphi$ , a granice całkowania ograniczyć do rzeczywistej długości anteny. I tak np. gdy antenę półfalową umieścimy na wysokości  $\lambda/4$  nad ziemią będziemy mieli  $\varphi=0$ , a całka na moment prądowy będzie miała postać:

$$(hJ)_{sk} = \int_{\lambda/4}^{\frac{3\lambda}{4}} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \left( \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \vartheta \right) dz$$



Rys. 201.

### 15. Oporność i charakterystyka promieniowania anten zasilanych harmonicznymi.

Metodą, podaną w poprzednim paragrafie i zastosowaną tam do anteny ćwierćfalowej możemy obliczać również anteny pracujące na dowolnej harmonicznej. I tak przy pomocy wzoru (388) znajdziemy oporność promieniowania takiej anteny, zaś z funkcji:

$$\left[ \int_0^h \cos \left( \frac{2\pi z}{\lambda} + \varphi \right) \cos \frac{2\pi z \cos \vartheta}{\lambda} dz \right] \cdot \cos^3 \vartheta$$

jej pionową charakterystykę promieniowania.

Na rys. 202-a mamy wykres oporności promieniowania anteny prostej idealnie uziemionej, lub ustawionej tuż nad ziemią doskonale przewodzącą w zależności od jej wysokości, obliczony przez S. Ballantine'a<sup>1)</sup>. Widzimy z niego, że oporność ta osiąga kolejno coraz większe maxima dla parzystych wielokrotności ćwiartki fali (harmonicznych parzystych), dążąc do wartości 200  $\Omega$ .

Wzory przybliżone, wyprowadzone przez tegoż autora, na oporność promieniowania anteny prostej wzbudzonej na harmonicznej, są następujące:

a) dla harmonicznych parzystych:

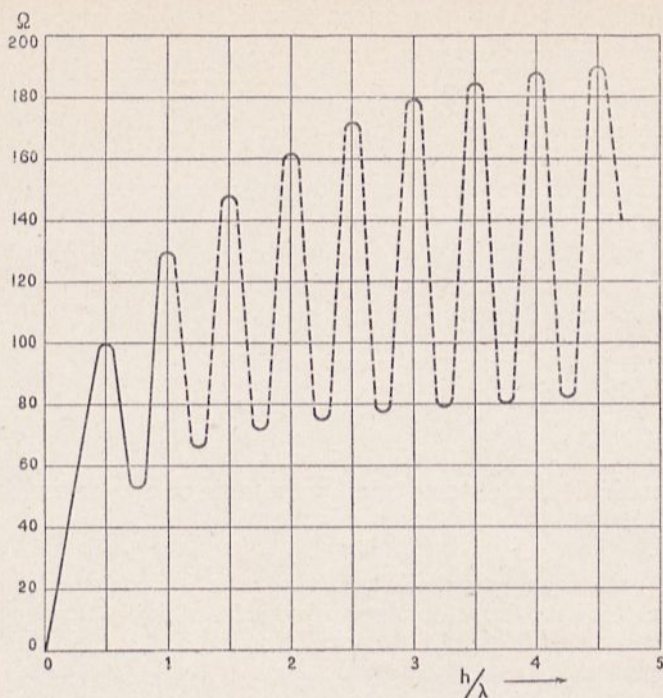
$$R_{pr} \cong 15 (\ln n + 2,416) \Omega, \quad (392)$$

b) dla harmonicznych nieparzystych (3-ciej i wyższych):

$$R_{pr} = 45 (\ln n + 1,491) \Omega. \quad (393)$$

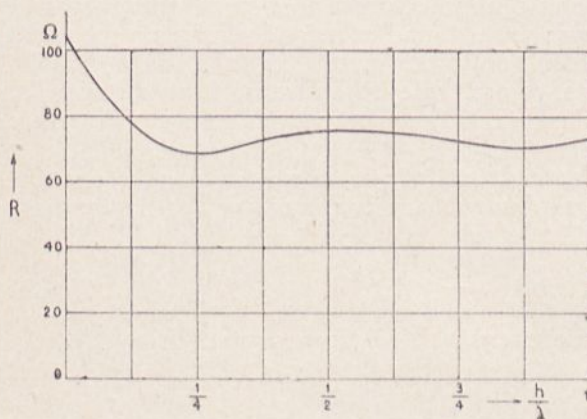
gdzie  $n$  oznacza rząd harmonicznej.

<sup>1)</sup> Stuart Ballantine, Discussion on Radiation Resistance of a Vertical Antenna Proc. I. R. E. 15, str. 245, r. 1927.



Rys. 202a (Według St, Ballantine'a).

Rys. 202-b podaje nam zależność oporności promieniowania pionowej anteny półfalowej od wysokości ustawienia jej nad ziemią, obliczaną podług zasady podanej przy końcu § 14. Widać z tego wykresu, że oporność



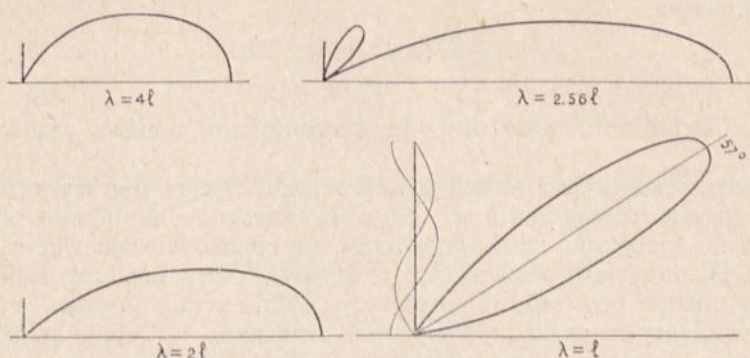
Rys. 202 b.

promieniowania takiej anteny spada, w miarę oddalania anteny od ziemi, od wartości 104  $\Omega$ , którą posiada, gdy antena jest ustawiona bezpośrednio nad ziemią, do około 73,2 omów, co się równa dwukrotnej oporności anteny ćwierćfalowej uziemionej.

Pionowe charakterystyki promieniowania anteny wzbudzonej na różnych harmonicznych, mamy na rys. 203. Z rys. 203-a widać, że antena półfalowa daje charakterystykę promieniowania bardziej spłaszczoną, niż antena ćwierćfalowa, nato-

<sup>1)</sup> S. Manczarski, Oporność i zysk anten kierunkowych, Przegl. Radiot. XI, str 67, r. 1933,

miast anteny wzbudzone na wyższych harmonicznym wykazują pewne kierunki w których energia promieniowania równa się zero. Jest to oczywiste, gdyż wówczas w pewnym odcinku anteny kierunek prądu jest przeciwny, a więc na pewnym kierunku będą się schodziły pola w fazach wprost przeciwnych, co w wyniku da promieniowanie



Rys. 303.

równe zero. Maximum wektora Poyntinga zwrócone jest w tym przypadku pod pewnym kątem w górę.

Najsilniejsze promieniowanie w płaszczyźnie równikowej osiągamy według S. Ballantine'a<sup>1)</sup>, jak widać z rys. 203, gdy  $\lambda = 2,56 l$ , czemu odpowiada wysokość:

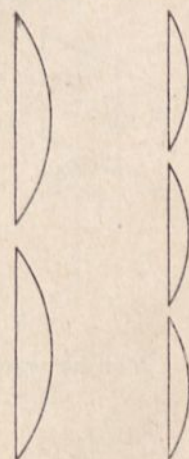
$$l = 0,39 \lambda.$$

Drugie maximum, nieco większe, lecz połączone z większym promieniowaniem ubocznym w górę, osiągamy przy stosunku:

$$l = 0,625 \lambda.$$

Praktycznie wykonane anteny o silnym promieniowaniu poziomym mają przeważnie wysokość od  $0,45 \lambda$  do  $0,6 \lambda$ . Jako podstawą do obliczenia długości elektrycznej anteny w przykładzie na str. 269 przyjęto stosunek  $0,56 \lambda$ .

Chcąc otrzymać maximum wektora Poyntinga w kierunku poziomym, przy równoczesnym zwiększeniu oporności promieniowania, stosuje się anteny, w których odcinki o promieniowaniu przeciwnym zastępują się obwodami zastępczymi, lub umieszcza się je tak, by nie mogły promieniować (rys. 204). Otrzymujemy w ten sposób szereg dipoli o zgodnym promieniowaniu,



Rys. 204.

<sup>1)</sup> S. Ballantine On the Optimum Transmitting Wave Length for a Vertical Antenna over Perfect Earth. Proc. IRE. 12. str. 833—839, r. 1924.

którego oporność promieniowania można wyrazić wzorem przybliżonym<sup>1)</sup>:

$$R_{pr} = 60 [1,22 + 2(m - 1)] \Omega. \quad (394)$$

w którym  $m$  oznacza liczbę dipoli umieszczonych jeden nad drugim.

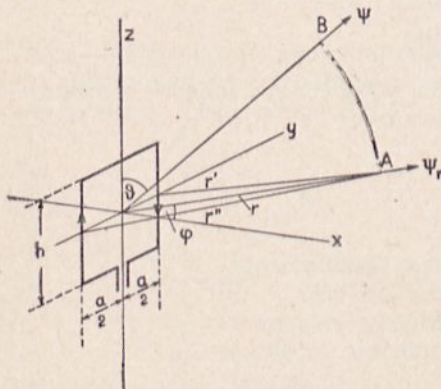
I tak np. antena złożona z szeregu  $m = 3$  dipoli będzie miała oporność promieniowania:

$$R_{pr} = 60 [1,22 + 4] \simeq 313 \Omega.$$

## 16. Promieniowanie obwodu zamkniętego. Antena ramowa.

Antena otwarta jest układem najkorzystniejszym dla wypromieniowania energii elektromagnetycznej, gdyż wytwarzane dokoła niej pola, elektryczne i magnetyczne, swobodnie mogą się rozchodzić we wszystkich kierunkach. W obwodzie zamkniętym natomiast, który możemy sobie przedstawić w postaci prostokątnej ramy (rys. 205), prądy płynące w dwu bokach równoległych, posiadają kierunki przeciwne i dlatego pola, wytwarzane przez te prądy, przeciwdziałają sobie, a na zewnątrz działa tylko pole różnicowe. Jednakże obwody zamknięte spotykamy również w pewnych przypadkach jako układy promieniujące pod nazwą *anten ramowych*.

By zanalizować działanie promieniujące anteny ramowej, założymy, że długości boków  $a$  i  $h$  są małe w stosunku do długości fali tak, iż każdy z tych boków uważać możemy za dipol Hertza.



Rys. 205.

Rozpatrzmy wpieryw działanie w płaszczyźnie poziomej ( $x, y$ ) obu boków pionowych o wysokości  $h$ . Do dowolnego punktu A (dostatecznie oddalonego od ramy tak, aby dopuszczalne było przybliżenie, zastosowane w § 15), docho-  
dzą pola o znakach przeciwnych, które przebyły odpowiednie drogi:

$$r' = r - \frac{a}{2} \cos \varphi.$$

$$r'' = r + \frac{a}{2} \cos \varphi.$$

Stosując wzory (381), otrzymamy w punkcie A pole elektryczne:

$$E_{rh} = \frac{2\pi}{c} \cdot \frac{h J_m}{r \lambda} \left[ \sin \omega \left( t - \frac{r - \frac{a}{2} \cos \varphi}{c} \right) + \right.$$

<sup>1)</sup> E Siegel i J. Labus, Feldverteilung und Energieemission von Richtantennen Jahrb. 39, str. 86, r. 1932, Manczarski l. c.

$$\left. - \sin \omega \left( t - \frac{r + \frac{a}{2} \cos \varphi}{c} \right) \right]$$

lub, po przekształceniu <sup>1)</sup>):

$$C_{rh} = - \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{h J_m}{r \lambda} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \left( \pi \frac{a}{\lambda} \cos \varphi \right).$$

Wprowadzając wartość skuteczną prądu o wartości chwilowej

$$J_m \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right),$$

otrzymamy:

$$|C_{rh}|_h = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{h J}{r \lambda} \sin \left( \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cos \varphi \right) \text{ c g s. e. s t.} \quad (395)$$

a przez analogję dla pola magnetycznego:

$$|\mathcal{H}_{rh}|_h = 4 \pi \frac{h J}{r \lambda} \sin \left( \pi \frac{a}{\lambda} \cos \varphi \right) \text{ c g s. e. s t.} \quad (395')$$

Wobec tego, że założyliśmy  $\lambda \gg a$  i  $\lambda \gg h$  możemy napisać:

$$\sin \left( \pi \frac{a}{\lambda} \cos \varphi \right) \simeq \pi \frac{a}{\lambda} \cos \varphi.$$

<sup>1)</sup> Stosujemy wzór:

$$\sin (\alpha - \beta) - \sin (\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta,$$

przyczem:

$$\alpha = \omega \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad \beta = \frac{a \omega}{2c} \cos \varphi.$$

Wyrażenie na  $\beta$  możemy przekształcić, podstawiając

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

przez co otrzymamy:

$$\beta = \pi \frac{a}{\lambda} \cos \varphi.$$

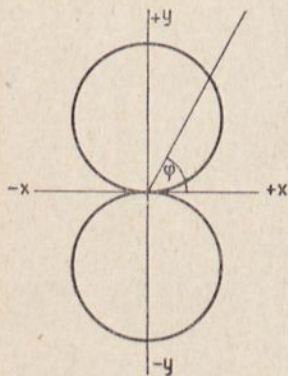
Stosując zaś wyniki, otrzymane w § 12, przy rozważaniu teorii dipola, otrzymamy wyrażenie na pola wypromieniowywane w dowolnym punkcie przestrzeni

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_h &= \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{hJ}{r\lambda} \cdot \pi \frac{a}{\lambda} \cos\varphi \sin\vartheta = \\ &= \frac{4\pi^2}{c} \cdot \frac{SJ}{r\lambda^2} \cos\varphi \sin\vartheta \text{ c g s. e. s t. ,} \\ \mathcal{H}_h &= 4\pi^2 \frac{SJ}{r\lambda^2} \cos\varphi \sin\vartheta \text{ c g s. e. s t.} \end{aligned} \right\} \quad (395a)$$

We wzorach tych  $ah = S$  jest powierzchnią ramy. Jeżeli rama posiada  $n$  zwoi, wówczas mamy jakby  $n$  prądów płynących równolegle, możemy więc wprowadzić do wzoru wartość  $nS$  jako *skuteczną powierzchnię ramy*. A więc pola dla ramy  $n$ -zwojowej wyniosą:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_h &= \frac{4\pi^2}{c} \cdot \frac{nSJ}{r\lambda^2} \cos\varphi \sin\vartheta \text{ c g s. e. s t.} \\ \mathcal{H}_h &= 4\pi^2 \frac{nSJ}{r\lambda^2} \cos\varphi \sin\vartheta \text{ c g s. e. s t.} \end{aligned} \right\} \quad (395b)$$

Ze wzorów (395 a) wynika, że w odróżnieniu od promieniowania pojedynczego dipola lub anteny otwartej, promieniowanie anteny ramowej w płaszczyźnie równikowej jest funkcją kąta  $\varphi$ , a więc posiada własności kierunkowe. Poziomą charakterystykę ramy mamy na rys. 206. Wynika z niej, że rama promieniuje najsilniej w kierunkach  $(+y)$  i  $(-y)$ , nie promieniuje zaś wcale w kierunku  $x$ , prostopadłym do jej płaszczyzny. Jest to oczywiste, gdyż kierunek ten jest miejscem geometrycznym promieni dochodzących w fazach wprost przeciwnych, a więc znoszących się wzajemnie.



Rys. 206.

Obok pary boków  $h$  promieniuje również para boków  $a$ . Dla boków tych w sposób zupełnie analogiczny możemy wyprowadzić wzory na pola <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_a &= \frac{4\pi^2}{c} \cdot \frac{nSJ}{r\lambda^2} \cos\psi \cos\vartheta, \\ \mathcal{H}_a &= 4\pi^2 \frac{nSJ}{r\lambda^2} \cos\psi \cos\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (396)$$

<sup>1)</sup> Rozpatrujemy tu antenę ramową z pominięciem wpływu ziemi i wywołanych przez nią odbić.



Jak wynika z tych wzorów, których budowa jest identyczna z budową wzorów (395 a), najsilniejsze promieniowanie mamy znowu w płaszczyźnie ramy, jednakże w kierunkach  $+z$  i  $(-z)$ . Dla boków  $a$  otrzymamy więc taką samą co do kształtu charakterystykę promieniowania, jak dla boków  $h$ , lecz przesuniętą o  $90^\circ$ , a więc skierowaną wzdłuż osi  $z-z$ , a nie  $y-y$  (rys. 207).

Oba więc kierunki najsilniejszego promieniowania leżą w płaszczyźnie ramy. Promieniowanie wypadkowe w jakimkolwiek kierunku leżącym w tej płaszczyźnie, będzie więc sumą geometryczną promieniowań obu par boków:

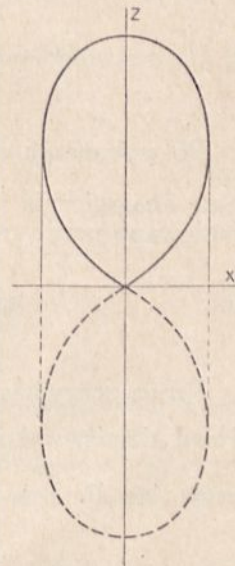
$$\zeta = \sqrt{\zeta_h^2 + \zeta_a^2},$$

co, po podstawieniu wartości z równań (395 a) i (396), da dla pola elektrycznego:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{4\pi^2}{c} \cdot \frac{nSJ}{r\lambda^2} \cdot \cos\varphi \sqrt{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta} = \\ &= \frac{4\pi^2}{c} \cdot \frac{nSJ}{r\lambda^2} \cos\varphi. \end{aligned} \quad (397)$$

Analogicznie otrzymamy dla pola magnetycznego:

$$\mathcal{H} = 4\pi^2 \frac{nSJ}{r\lambda^2} \cos\varphi. \quad (397')$$



Rys. 207.

Wynika stąd ważny wniosek, że w płaszczyźnie ramy promieniowanie jest niezależne od kierunku. A więc antena ramowa w swojej płaszczyźnie promieniuje równomiernie we wszystkich kierunkach, tak samo jak dipol Herta. Stąd też nazywają ramę *dipolem magnetycznym*, a wielkość:

$$\frac{nSJ}{\lambda}$$

nosi nazwę *momentu magnetycznego* anteny ramowej. Oś dipola magnetycznego jest oś  $x$ -ów.

Całkowitą moc wypromieniowaną przez ramę możemy więc z łatwością obliczyć, całkując wektor Poyntinga na powierzchni kuli, dla której za oś główną obraliśmy oś  $x$ -ów, a jako zmienną kąt  $\varphi$ .

Wektor Poyntinga wyniesie na podstawie równań (380) i (397):

$$\Psi_\varphi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{4\pi^2}{c} \cdot \frac{4\pi^2 n^2 S^2 J^2}{r^2 \lambda^4} \cos^2\varphi = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\pi^2 n^2 S^2 J^2}{r^2 \lambda^4} \cos^2\varphi.$$

Energja przenikająca w 1 sekundzie przez czaszę kulistą o powierzchni:

$$ds = 2 \pi r^2 \cos \varphi d\varphi ,$$

wyrazi się różniczką:

$$dP = \frac{2 \pi^2}{c} \cdot \frac{4 \pi^2 n^2 S^2 J^2}{\lambda^4} \cos^3 \varphi d\varphi \quad \text{erg/sek.},$$

lub, po przejściu na prąd w amperach i moc w watach:

$$dP = 260 \pi^2 \left( \frac{2 \pi n S_{\text{cm}} J_A}{\lambda_{\text{cm}}^2} \right)^2 \cos^3 \varphi d\varphi \quad \text{watów.}$$

Po wykonaniu całkowania w granicach od  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  do  $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$  otrzymamy analogicznie jak dla pola dipola elektrycznego w § 13, moc wypromieniowaną przez ramę, czyli przez dipol magnetyczny:

$$P_{pr} = 80 \pi^2 \left( \frac{2 \pi n S J}{\lambda^2} \right)^2 = 320 \pi^4 \left( \frac{n S_{\text{cm}} J_A}{\lambda_{\text{cm}}^2} \right)^2 \text{ watów.} \quad (398)$$

Rzecz oczywista, że dla ramy, znajdującej się w nieznaczącej odległości nad ziemią, wykonamy całkowanie tylko w granicach od 0 do  $\frac{\pi}{2}$ , analogicznie, jak dla anteny otwartej (§ 13) i otrzymamy moc wypromieniowaną:

$$P_{pr} = 640 \pi^4 \left( \frac{n S_{\text{cm}} J_A}{\lambda_{\text{cm}}^2} \right)^2 \text{ watów.} \quad (399)$$

Odpowiednio do tego oporność promieniowania ramy umieszczonej nad ziemią wyniesie:

$$R_{pr} = 640 \pi^4 \left( \frac{n S_{\text{cm}}}{\lambda_{\text{cm}}^2} \right)^2 = 160 \pi^2 \left( \frac{2 \pi n S_{\text{cm}}}{\lambda_{\text{cm}}^2} \right)^2 \Omega. \quad (400)$$

O ile, jak założyliśmy, wymiary anteny są małe wobec długości fali, moc wypromieniowana nie zależy od kształtu anteny, lecz jedynie od jej powierzchni.

Przez analogję do anteny otwartej wielkość

$$h_{e_{\text{cm}}} = \frac{2 \pi n S_{\text{cm}}}{\lambda_{\text{cm}}} \quad (400a)$$

możemy nazwać *wysokością skuteczną ramy promieniującej*. Jak łatwo się przekonać, jest to wielkość bardzo mała. Tak np. dla fali  $\lambda = 1000 \text{ m} =$

=  $10^5$  cm i ramy  $n = 10$ -zwojowej o boku  $a = h = 200$  cm, otrzymamy wysokość skuteczną promieniowania:

$$h_e = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10^4}{10^5} \approx 25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}.$$

podczas gdy antena prosta o wysokości równej bokowi obliczanej ramy, a więc  $h = 200$  cm = 2 m, miałaby wysokość skuteczną  $h_e = 0,5 \cdot 2 = 1$  m (wzór 382 a).

Jeżeli zrobimy porównanie wzorów na moc wypromieniowaną dla anteny otwartej i anteny ramowej:

$$P_{\text{otw}} = 320 \pi^2 \left( \frac{IJ}{\lambda} \right)^2 \text{ watów,} \quad (384\text{-a})$$

$$P_{\text{ram}} = 640 \pi^4 \left( \frac{nSJ}{\lambda^2} \right)^2 \text{ watów,} \quad (399)$$

to zobaczymy, że niema bezwzględnej przewagi promieniowania anteny otwartej nad anteną ramową. Sprawa polega na tem, że energia promieniowana przez antenę otwartą, jest proporcjonalna do drugiej potęgi częstotliwości, podczas gdy do wzoru na promieniowanie anteny ramowej częstotliwość wchodzi w potęgę czwartej.

Porównując więc obie anteny możemy wyznaczyć dla każdego przypadku częstotliwość krytyczną, poniżej której przewaga promieniowania leży po stronie anteny otwartej, a powyżej której promieniowanie anteny ramowej jest większe.

## 17. Zasada działania odbiorczego anten.

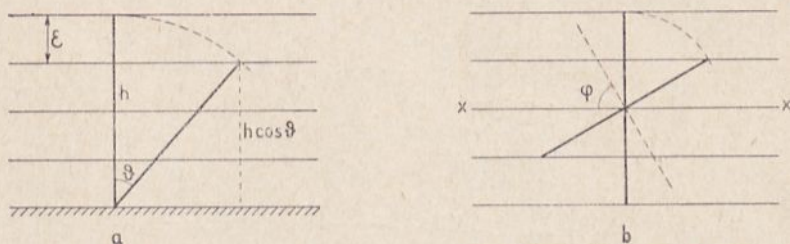
Oddziaływanie fali elektromagnetycznej na napotykaną po drodze obwody elektryczne interpretować można w jeden z dwu sposobów: albo, że pole elektryczne, natrafiając w swej drodze na przewodnik, wytwarza między końcami jego różnicę potencjałów, albo też, że linje pola magnetycznego, przecinające ten przewodnik, indukują w nim siłę elektromotoryczną. Oba ujęcia prowadzą do tego samego wyniku i mogą być stosowane dowolnie, co jest oczywiste, gdyż oba pola istnieją zawsze równocześnie, a energia może być oddana obwodowi tylko przy współdziałaniu obu pól, zaś siły elektromotoryczne indukowane przez oba pola, są równe co do amplitudy i fazy, a działają w obwodzie *równolegle*. Jednakże najdogodniej jest dla anteny otwartej wyjść z ujęcia pola elektrycznego, a dla anteny ramowej z pola magnetycznego.

a) *Antena otwarta.*

Siłę elektromotoryczną, indukowaną przez pole elektryczne w antenie, wyraża nam całka (rys. 208):

$$E_2 = \int_0^{h_2} \mathcal{E} dz \quad (401)$$

Gdy pole elektryczne jest jednorodne, a więc gdy falę uważać możemy za płaską, co — w dużej odległości od anteny nadawczej i przy nieznaczej



Rys. 208.

stosunkowo wysokości anteny odbiorczej — zawsze jest dopuszczalne, otrzymamy:

$$E_2 = \mathcal{E} h_2 \quad (401a)$$

Jeżeli więc stacja nadawcza wytwarza w miejscu odbioru natężenie pola elektrycznego  $\mathcal{E} = 10 \mu\text{V/m}$ , a wysokość anteny odbiorczej wynosi 5 m, to w antenie tej pod wpływem fali powstaje siła elektromotoryczna:

$$E_2 = 5 \cdot 10 = 50 \mu\text{V}.$$

Pod działaniem tej siły elektromotorycznej powstaje w antenie odbiorczej prąd:

$$\hat{J}_2 = \frac{\hat{\mathcal{E}}_2}{\hat{Z}_2} \quad (402)$$

który, gdy antena jest dostrojona do rezonansu, osiąga maximum:

$$J_{2r} = \frac{E_2}{R_2} \quad (402a)$$

Antena odbiorcza może działać albo na obwód detektora stykowego, sprzężony indukcyjnie z anteną, przyczem sprzężenie obieramy zazwyczaj tak, aby w obwodzie detektora osiągnąć maximum mocy (patrz rozdział III),

albo też antena zasila obwód wejściowy (siatkowy) lampy katodowej, a wówczas staramy się osiągnąć możliwie duże przepięcie, co w ostateczności sprowadza się również do warunku maximum mocy.

O ile przyjmujemy, że pole elektryczne fali jest pionowe, to maksymalna siła elektromotoryczna powstanie w antenie otwartej, ustawionej pionowo. Oczywiście jest, że ta siła elektromotoryczna nie zależy od kierunku fali przychodzącej w płaszczyźnie poziomej. Gdy natomiast antenę nachylimy pod kątem  $\varphi$  względem pionu, to na nią będzie działał tylko rzut pola elektrycznego na antenę, czyli  $C \cos \vartheta$ . Wartość ta stanie się zerem, gdy antena będzie ułożona poziomo, lub gdy fala będzie padała na antenę w kierunku jej osi.

Antena pionowa, użyta jako odbiorcza, posiada więc wybitną *kierunkowość w płaszczyźnie pionowej*. Pionowa charakterystyka odbiorcza anteny prostej odpowiada więc pionowej charakterystyce promieniowania tej anteny.

*Wysokość skuteczna* pionowej anteny odbiorczej, ze względu na jednorodność pola elektrycznego w miejscu odbioru, równa się wprost wysokości końca anteny nad ziemią czy też przeciwwagą, niezależnie od rozkładu prądu. Od rozkładu prądu zależy natomiast oporność skuteczna anteny odbiorczej, odnoszona zazwyczaj do wartości prądu w miejscu sprzężenia z odbiornikiem.

#### b) Antena ramowa.

Jeżeli fala posuwa się w kierunku osi x-ów, a oś ramy tworzy z tym kierunkiem kąt  $\varphi$  (rys. 208 b), to powierzchnię ramy przecina składowa strumienia magnetycznego, prostopadła do płaszczyzny ramy, a więc  $\Phi_n = \Phi \sin \varphi$ . Siła elektromotoryczna, indukowana w ramie, będzie:

$$e = - \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \sin \varphi. \quad (403)$$

Jeżeli pole magnetyczne fali jest jednorodne, co — wobec znacznej odległości od anteny nadawczej i małych wymiarów anteny ramowej — zawsze możemy przyjąć, to mamy:

$$\Phi = n a h \cdot \mathcal{H}_t = n S \mathcal{H}_m \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right).$$

Po wykonaniu różniczkowania, z uwzględnieniem związku  $\omega = \frac{2 \pi c}{\lambda}$  równanie to da nam wyrażenie na siłę elektromotoryczną indukowaną w ramie:

$$e_2 = - \frac{2 \pi c}{\lambda} n S \mathcal{H}_m \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \varphi.$$

Odpowiada temu wartość skuteczna siły elektromotorycznej odbiorczej:

$$E_2 = \frac{2 \pi c}{\lambda} n S \mathcal{H} \sin \varphi \text{ cgs. e. m.} \quad (404)$$

Jednakże dla powietrza mamy w układzie cgs elektromagnetycznym, równość liczbową:

$$c \mathcal{H} = \mathcal{E}_i,$$

możemy więc napisać:

$$E_2 = \mathcal{E}_i \frac{2\pi n S}{\lambda} \sin \varphi. \quad (404a)$$

Z równania tego wynika, że współczynnik przy  $\mathcal{E}_i$ , — przez analogię do określenia dla anteny pionowej. — nazwać możemy *wysokością skuteczną ramy odbiorczej*:

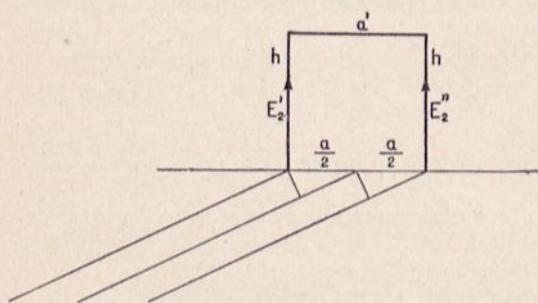
$$h_e = \frac{2\pi n S}{\lambda} \sin \varphi. \quad (405)$$

Wysokość skuteczna ramy odbiorczej jest więc funkcją kierunku padania fali przychodzącej. Jest ona zerem, gdy rama płaszczyzną swoją jest ustawiona prostopadłe do kierunku fali przychodzącej, osiąga zaś swoje maximum, gdy rama leży w płaszczyźnie fali, a więc stoi prostopadłe do kierunku jej pola magnetycznego. Rama odbiorcza posiada więc charakterystykę poziomą taką samą, jak rama nadawcza (rys. 205, § 16).

Z równania (405) otrzymujemy maksymalną wysokość skuteczną ramy odbiorczej:

$$(h_{e_{cm}})_{\max} = \frac{2\pi n S_{cm^2}}{\lambda_{cm}}. \quad (405a)$$

Jak łatwo się przekonać, rama odbiorcza o wymiarach małych w stosunku do długości fali, nie wykazuje własności kierunkowych w płaszczyźnie pionowej, w której ona leży. Skoro bowiem strumień magnetyczny jest prostopadły do wektora Poyntinga, to w ramie zawsze otrzymamy maximum odbioru, dopóki wektor ten leży w jej płaszczyźnie, niezależnie od kąta, który rama tworzy z poziomem.



Rys. 209.

A więc *rama odbiorcza posiada tę samą charakterystykę pionową, co rama nadawcza.*

Działanie odbiorcze anteny ramowej można wyjaśnić również przy pomocy pola elektrycznego. A mianowicie, jeżeli płaszczyzna ramy tworzy z falą przychodzącą kąt  $\psi = 90 - \varphi$  (rys. 209), to w boku  $h$  powstaje siła elektromotoryczna:

$$E'_2 = h \mathcal{E}_m \sin \omega \left( t - \frac{r - \frac{a}{2} \cos \psi}{c} \right),$$

natomiast w drugim boku  $h'$  powstaje równocześnie siła elektromotoryczna:

$$E_2'' = h c_m \sin \omega \left( t - \frac{x + \frac{a}{2} \cos \psi}{c} \right).$$

Wobec tego, że  $E_2'$  i  $E_2''$  posiadają ten sam kierunek, więc w obwodzie zamkniętym  $a$  i  $h'$  przeciwdziałają sobie, a działa jedynie ich różnica:

$$\begin{aligned} E_2 &= E_2' - E_2'' = \\ &= c_m h \left[ \sin \omega \left( t - \frac{r - \frac{a}{2} \cos \psi}{c} \right) - \sin \omega \left( t - \frac{r + \frac{a}{2} \cos \psi}{c} \right) \right] = \\ &= 2 c_m h \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \left( \pi \frac{a}{\lambda} \cos \psi \right). \end{aligned}$$

Gdy wymiary  $a$  są małe wobec  $\lambda$  możemy napisać, podobnie jak w § 16:

$$\sin \left( \pi \frac{a}{\lambda} \cos \psi \right) \approx \pi \frac{a}{\lambda} \cos \psi = \pi \frac{a}{\lambda} \sin \varphi$$

i równanie na siłę elektromotoryczną dla ramy  $n$  - zwojowej sprowadzić do postaci:

$$E_2 = c \frac{2 \pi n S}{\lambda} \sin \varphi,$$

która jest identyczna z wyrażeniem, otrzymanem przy pomocy pola magnetycznego (równanie 404 a).

Z tego wynika, że działanie pola elektrycznego na ramę odbiorczą jest zupełnie równoznaczne z działaniem pola magnetycznego, indukując w ramie siłę elektromotoryczną, równą co do fazy i amplitudy a działającą równolegle z siłą elektromotoryczną, wzbudzoną przez pole magnetyczne.

To samo zresztą można udowodnić i dla anteny otwartej.

#### *Prawo odwrotności A. Sommerfelda.*

Jak widzimy, istnieje ścisła odwracalność między anteną nadawczą i odbiorczą, tak otwartą, jak i ramową. Zjawisko to uogólnił i udowodnił w sposób ścisły A. Sommerfeld w swoim *prawie odwrotności* dla promieniowania fal elektromagnetycznych (Reziprozitäts - Theorem der drahtlosen Telegraphie <sup>1)</sup>).

<sup>1)</sup> Jahrbuch 26 r. 1925 str. 93 i Jahrbuch 37 r. 1931 str. 167.

„Jeżeli w punkcie  $O_1$  jakiegokolwiek ośrodka znajduje się antena dowolnego typu  $A_1$ , zaś w punkcie  $O_2$  również dowolna antena  $A_2$ , to natężenie pola w miejscu odbioru będzie to samo przy tej samej mocy nadawczej i częstotliwości, niezależnie od tego, która z tych dwu anten nadaje, a która odbiera”.

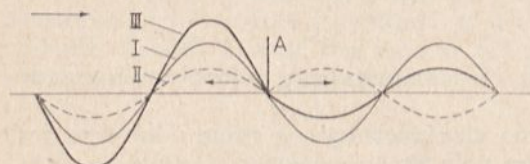
Twierdzenie to wypowiada innymi słowy, że skoro możliwa jest łączność radjotelegraficzna na pewnej fali w jednym kierunku, jest ona możliwa i w kierunku przeciwnym. Twierdzenie Sommerfelda posiada dużą doniosłość praktyczną dla radjokomunikacji, szczególnie przy pomiarach wysokości skutecznej anten.

Prawo Sommerfelda zawodzi, gdy na drodze fal działa obce pole magnetyczne. Przypadek ten ma miejsce przy rozchodzeniu się fal odbitych w jonosferze (patrz niżej).

## 18. Oddziaływanie anteny odbiorczej na falę elektromagnetyczną.

Z chwilą, gdy pod działaniem fali elektromagnetycznej w antenie odbiorczej powstanie prąd, antena ta staje się anteną nadawczą i promieniuje energię. Wypromieniowana energia jest tem większa, im większa jest oporność promieniowania anteny w porównaniu z opornością równoważną odbiornika energii i opornością strat anteny odbiorczej. Wynika z tego, że antena odbiorcza zbyt wysoka nie jest korzystna, pomimo, że w niej indukuje się większa siła elektromotoryczna. Antena taka posiada bowiem równocześnie dużą sprawność promieniowania, a więc znaczną część energii pobranej promieniuje z powrotem.

Jeżeli antena jest w rezonansie z falą, prąd w antenie jest w fazie z polem. Ponieważ zaś pola promieniowane są w fazie z prądem w antenie promieniującej, więc fala wtórna anteny odbiorczej, nastrojonej do rezonansu, jest w fazie z falą przychodzącą. Wynikiem tego jest, że w kierunku przeciwnym do ruchu fali pierwotnej I (rys. 210-a) fala wtórna II sumuje się z falą pierwotną, w kierunku zaś zgodnym odejmuje się



Rys. 210-a.

od niej. Wskutek tego przed anteną odbiorczą następuje zgęszczenie linii pola, zaś poza anteną rozrzedzenie, jak to widać na rys. 210 b. Zjawisko to przypomina działanie ssące i powstawanie wirów za przedmiotami znajdującymi się w strumieniu cieczy lub gazu, albo też poruszającymi się w ośrodku ciekłym lub gazowym.

Jeżeli oporność promieniowania anteny wynosi  $R_p$ , a pozostała oporność zastępczą obwodu odbiorczego  $R$ , to moc pobieraną z fali elektromagnetycznej przez antenę da nam wzór:

$$P_2 = \frac{E_0^2}{R + R_p} \quad (406)$$



Sprawność odbioru, jak łatwo sprawdzić, wyraża się jako:

$$\eta_{\text{odb.}} = \frac{R}{R + R_p}, \quad (407)$$

Wobec tego moc użyteczna w odbiorniku wyniesie:

$$P_u = P_2 \eta = \frac{E_2^2 R}{(R + R_p)^2}. \quad (408)$$

Jeżeli przyjmiemy oporność promieniowania jako stałą, wyrażenie to osiągnie maximum, gdy będzie  $R = R_p$ , a więc antena odbiorcza da nam największą moc, gdy oporność użytkowa będzie równa oporności promieniowania anteny.

Ta maksymalna moc użytkowa wyniesie:

$$P_{u \text{ max}} = \frac{E_2^2 R_p}{4 R_p^2} = \frac{E_2^2}{4 R_p} = \frac{h^2 C_v^2}{4 R_p}. \quad (408a)$$

Jeżeli wszystkie wielkości wyrazimy w jednostkach cgs. e. st. i podstawimy z wzoru (386) wartości oporności promieniowania:

$$R_p = 160 \pi^3 \frac{h^2}{\lambda^2} \Omega = \frac{16}{9} \pi^2 \frac{h^2}{\lambda^2} 10^{-10} \text{ cgs. e. st.},$$

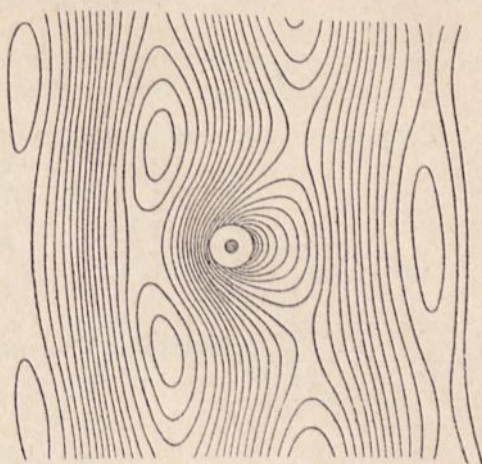
to otrzymamy:

$$P_{u \text{ max}} = \frac{9}{64} \frac{C_v^2 \lambda^2}{\pi^2} \cdot 10^{10} \text{ erg/sek.} \quad (408a')$$

Taką energję czerpie antena odbiorcza z pewnej powierzchni przekroju czoła fali przechodzącej. Powierzchnię tę znajdziemy, dzieląc pobraną moc przez wektor Poyntinga fali w miejscu odbioru (R. Rüdenberg), wektor ten bowiem wyraża nam zgodnie z § 6. moc, przypadającą na 1 cm<sup>2</sup> powierzchni fali, którą tu uważamy za płaską.

Wektor Poyntinga w powietrzu i w jednostkach cgs. e. st. wynosi:

$$\Psi = \frac{C_v^2 c}{4 \pi},$$

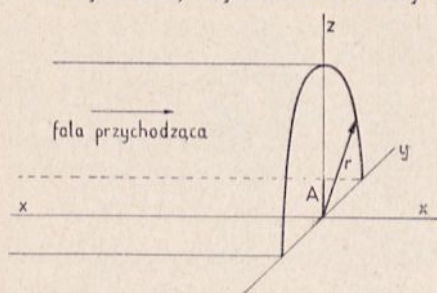


Rys. 210-b.

a stąd powierzchnia, z której antena odbiorcza czerpie moc:

$$S = \frac{P_{u \max}}{\Psi} = \frac{9}{64} \cdot \frac{c^2 \lambda^2}{\pi^2} \cdot 10^{10} \frac{4\pi}{c^2 \cdot 3 \cdot 10^{10}} = \frac{3}{16} \cdot \frac{\lambda^2_{\text{cm}}}{\pi} \text{ cm}^2. \quad (409)$$

Przy małej wysokości anteny powierzchnię tę możemy sobie wyobrazić w postaci półki poprzecznego przekroju walca, której powierzchnię wyraża wzór  $S = \frac{\pi r^2}{2}$  rys. 210-c, skąd znajdziemy promień półkola przekroju:



Rys. 210-c.

$$r = \sqrt{\frac{2S}{\pi}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot \lambda_{\text{cm}}^2}{\pi \cdot 16 \pi}} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \sim 0,2 \lambda. \quad (410)$$

W rzeczywistości powierzchnia przekroju nie będzie półkolem, lecz będzie miała kształt elipsy tem bardziej wydłużonej, im wyższa jest antena. Przeliczenia Rūdenberga dowodzą, że antena odbiorcza wymaga do swego działania pewnej przestrzeni, a więc zbytne zagęszczenie anten odbiorczych, nastrojonych na tęsamą falę, wpływa ujemnie na siłę odbioru. Ze zjawiskiem tem spotykamy się bardzo często w odbiorze radjofo-  
nicznym.

Wzajemne oddziaływanie anten odbiorczych jest zjawiskiem bardzo złożonym, szczególnie gdy są one niezupełnie dostrojone i promieniują falę odbiorczą w różnych fazach.<sup>1)</sup>

## 19. Fale elektromagnetyczne w dielektryku niedoskonałym i w przewodnikach.

Dotychczas ograniczaliśmy się do fal, rozchodzących się w doskonałym dielektryku, nie powodującym żadnych strat energii przezeń przechodzącej, a jeżeli uwzględnialiśmy obecność ziemi, to przyjmowaliśmy, że jest ona doskonałym przewodnikiem, do którego fala nie wchodzi, lecz ulega całkowitemu odbiciu. Założenie to przyjęliśmy, bliżej go nie uzasadniając.

W rzeczywistości ziemia jest przewodnikiem niedoskonałym, a raczej półprzewodnikiem, czyli równocześnie i niedoskonałym dielektrykiem, pochłania więc część energii przesuwających się nad nią fal. By móc należycie ocenić jej udział w przewodzeniu fal, musimy wpierw rozpatrzyć zjawiska, związane z rozchodzeniem się fal elektromagnetycznych w dielektryku, posiadającym równocześnie i przewodność.

<sup>1)</sup> Patrz m. i. J. Plebański, Przegl. Radj. III. r. 1925 (str. 13, 20, 57, 65 i 89).

Fale w ośrodku niedoskonałym najdogodniej rozpatrywać na przykładzie fali płaskiej, która nam daje znaczne uproszczenie równań, dla niewielkiego rozpatrywanego obszaru zresztą zupełnie usprawiedliwione. Zgodnie z założeniami, które dla fali płaskiej przyjęliśmy w § 7, falę taką w dielektryku niedoskonałym wyrażą nam równania maxwellowskie:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\sigma\zeta + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \\ \mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (411)$$

Równania te spełni między innymi funkcja o postaci: <sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 e^{-\beta x} \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right), \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) - \varphi \right], \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

która wyraża nam wielkości sinusoidalnie zmienne o amplitudzie tłumionej i jest analogiczna do równań, które otrzymaliśmy na fale w przewodnikach (patrz rozdział V).

Po obliczeniu odpowiednich pochodnych cząstkowych <sup>2)</sup> i podstawieniu

<sup>1)</sup> Zasadę logarytmów naturalnych oznaczamy tu przez  $e$ , by ją odróżnić od stałej dielektrycznej  $\varepsilon$ .

<sup>2)</sup> Obliczamy pochodne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \omega \zeta_0 e^{-\beta x} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= -\beta \zeta_0 e^{-\beta x} \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) - \frac{\omega}{u} \zeta_0 e^{-\beta x} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= \omega \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) - \varphi \right] = \\ &= \omega \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \cos \varphi + \omega \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \sin \varphi, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} &= -\beta \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) - \varphi \right] - \frac{\omega}{u} \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) - \varphi \right] = \\ &= -\beta \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \cos \varphi + \beta \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \sin \varphi + \end{aligned}$$

ich do równań (411) otrzymujemy układ dwu równań, wyrażający nam fale w półprzewodniku:

$$\begin{aligned}
 & 4\pi\sigma\epsilon_0 e^{-\beta x} \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \epsilon \omega \epsilon_0 e^{-\beta x} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) = \\
 & = -\beta \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \cos \varphi + \beta \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \sin \varphi + \\
 & - \frac{\omega}{u} \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \cos \varphi - \frac{\omega}{u} \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \sin \varphi, \\
 & \text{oraz} \\
 & \mu \omega \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \cos \varphi + \mu \omega \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \sin \varphi = \\
 & = -\beta \epsilon_0 e^{-\beta x} \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) - \frac{\omega}{u} \epsilon_0 e^{-\beta x} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right).
 \end{aligned}
 \tag{b}$$

W równaniach tych nieznanne są wielkości:

współczynnik tłumienia  $\beta$ ,  
 szybkość rozchodzenia się fal  $u$ ,  
 natężenie pola magnetycznego  $\mathcal{H}_0$ ,  
 kąt przesunięcia faz między obu polami  $\varphi$ .

By obliczyć te stałe, obieramy kolejno warunki początkowe raz tak, aby była spełniona tożsamość:

$$\sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) = 1, \quad \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) = 0,$$

powtórnie zaś tak, aby było:

$$\sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) = 0, \quad \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) = 1.$$

---


$$- \frac{\omega}{u} \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \cos \varphi - \frac{\omega}{u} \mathcal{H}_0 e^{-\beta x} \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \sin \varphi.$$

W przeróbkach tych zastosowano przekształcenia:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\text{podstawiając } \alpha = \omega \left( t - \frac{x}{u} \right), \quad \beta = \varphi.$$

Pozatem, wobec tego, że dla wszystkich wartości  $x < \infty$ , wyrażenie  $e^{-\beta x}$  jest wielkością skończoną, oba równania możemy obustronnie podzielić przez to wyrażenie. Równania (b) dadzą nam więc następujące dwa układy równań:

$$\left. \begin{aligned} \alpha) \quad 4\pi\sigma C_0 &= -\beta \mathcal{H}_0 \cos \varphi - \frac{\omega}{u} \mathcal{H}_0 \sin \varphi, \\ \mu \omega \mathcal{H}_0 \sin \varphi &= -\beta C_0, \quad \text{czyli } \mathcal{H}_0 \sin \varphi = -\frac{\beta C_0}{\mu \omega}, \\ \beta) \quad \varepsilon \omega C_0 &= \beta \mathcal{H}_0 \sin \varphi - \frac{\omega}{u} \mathcal{H}_0 \cos \varphi, \\ \mu \omega \mathcal{H}_0 \cos \varphi &= -\frac{\omega}{u} C_0, \quad \text{czyli } \mathcal{H}_0 \cos \varphi = -\frac{C_0}{\mu u}. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Po podstawieniu otrzymanych wartości na  $\mathcal{H}_0 \sin \varphi$  i  $\mathcal{H}_0 \cos \varphi$  do obu pozostałych równań, otrzymujemy wkońcu dwa równania z niewiadomymi  $\beta$  i  $u$ :

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\sigma &= \frac{2\beta}{\mu u}, \quad \text{czyli } \beta = 2\pi\sigma\mu u, \\ \varepsilon\omega &= \frac{\omega}{\mu u^2} - \frac{\beta^2}{\mu\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

skąd, po podstawieniu wartości  $\beta$  do drugiego z tych równań otrzymujemy równanie dwukwadratowe względem  $u$ :

$$4\pi^2\sigma^2\mu^2 u^4 + \varepsilon\omega^2\mu u^2 - \omega^2 = 0, \quad (e)$$

które daje nam rozwiązanie:

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{-\varepsilon\omega^2 \pm \varepsilon\omega^2 \sqrt{1 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}}{8\pi^2\sigma^2\mu} = \frac{-\varepsilon f^2 \pm \varepsilon f^2 \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 f^2}}}{2\sigma^2\mu}, \\ \text{czyli} \quad u^2 &= \frac{1}{\varepsilon\mu} \left( \frac{-\varepsilon^2 f^2}{\sigma^2} \right) \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 f^2}}}{2}. \end{aligned} \quad (f)$$

Równanie (f) możemy przekształcić, mnożąc licznik i mianownik przez:

$$1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 f^2}},$$

skąd otrzymujemy: <sup>1)</sup>

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4 \sigma^2}{\varepsilon^2 f^2}} \right]}} \quad (412)$$

Przy pomocy równania (412) możemy obliczyć dalsze niewiadome. A mianowicie przy pomocy pierwszego z równań (d) znajdziemy *współczynnik tłumienia fali* w dielektryku niedoskonałym:

$$\beta = 2 \pi \sigma \mu u = 2 \pi \sigma \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4 \sigma^2}{\varepsilon^2 f^2}} \right]}} \quad (413)$$

Z równań zaś (c) mamy:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\beta}{\omega} u = \frac{2 \sigma}{\varepsilon f} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{4 \sigma^2}{\varepsilon^2 f^2}}} \quad (414)$$

oraz:

$$\mathcal{H}_0 = \sqrt{\mathcal{H}_0^2 \sin^2 \varphi + \mathcal{H}_0^2 \cos^2 \varphi} = -\frac{\zeta_0}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{\beta^2}{\omega^2} + \frac{1}{u^2}},$$

co, po podstawieniu wartości  $\frac{\beta^2}{\omega^2}$  z drugiego z równań (d), daje nam:

$$\mathcal{H}_0 = -\zeta_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{4 \sigma^2}{\varepsilon^2 f^2}} \quad (415)$$

We wszystkich prawie przypadkach, z którymi spotykamy się w radio-komunikacji, mamy do czynienia z ośrodkami o przenikliwości magnetycznej  $\mu = 1$ , czyli

$$\mu_{\text{cgs. e. st.}} = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}$$

Tę też wartość możemy wprowadzić do wszystkich powyższych równań zamiast  $\mu$ , jeżeli równania te wyrazimy w układzie cgs elektrostatycznym. Jeżeli mamy:

$$\frac{4 \sigma^2}{\varepsilon^2 f^2} \gg 1,$$

<sup>1)</sup> Pierwiastek z różnicą wyrazów w mianowniku nie posiada znaczenia, gdyż daje rozwiązanie urojone.

co odpowiada mniejszym stosunkowo częstotliwościom, wzory (412) do (415) możemy uprościć do postaci następujących:

$$u \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\sigma}{\varepsilon f}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma}{f}}}, \quad (412a)$$

$$\beta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{2\pi\sigma}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\sigma}{\varepsilon f}\right)}} = \frac{2\pi\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma}{f}}}, \quad (413a)$$

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon f}{2\sigma}}, \quad (414a)$$

$$\mathcal{H}_0 \approx -\varepsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{2\sigma}{\mu f}}. \quad (415a)$$

Gdy natomiast jest:

$$\frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 f^2} \ll 1,$$

co jest spełnione przy bardzo wielkich częstotliwościach, otrzymujemy:

$$u \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (412b) \quad \beta \approx 2\pi\sigma \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad (413b)$$

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \frac{\sigma}{\varepsilon f}, \quad (414b) \quad \mathcal{H}_0 \approx -\varepsilon_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (415b)$$

Z równań (412) do (415), jeżeli założymy  $\sigma = 0$  (doskonały dielektryk), otrzymamy:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad \beta = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad \mathcal{H}_0 = -\varepsilon_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}},$$

zgodnie z wynikami, otrzymanymi dla doskonałego dielektryka w § 7. Na równaniach tych oparliśmy teorię rozchodzenia się fal w powietrzu.

*Fale w przewodniku.*

Jeżeli wreszcie spełniony jest warunek:

$$\frac{2\sigma}{\varepsilon f} \gg 1, \quad \text{czyli} \quad \frac{2\sigma}{f} \gg \varepsilon,$$

który jest równoznaczny z pominięciem prądu przesunięcia wobec prądu przewodzenia (ośrodek jest wówczas praktycznie *przewodnikiem*), możemy napisać:

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 f^2}} \right]} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon f}},$$

a wówczas wzory (412) do (415) upraszczają się jeszcze bardziej.

Otrzymamy w ten sposób równanie na szybkość rozchodzenia się fal w przewodniku:

$$u = \sqrt{\frac{f}{\sigma \mu}} \text{ cm/s.} \quad (416)$$

Współczynnik tłumienia wyniesie:

$$\beta = 2\pi \sqrt{\sigma f \mu} = \sqrt{2\pi \sigma \omega \mu} \text{ neper/cm.} \quad (417)$$

Kąt przesunięcia faz między polem elektrycznym i magnetycznym wyznaczy nam:

$$\operatorname{tg} \varphi = 1, \quad \text{skąd} \quad \varphi = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4} \pi, \quad (418) \text{ } ^1)$$

z czego wynika, że w przewodniku przesunięcie faz między obu polami wynosi  $45^\circ$ .

Wreszcie

$$\mathcal{H}_0 = -\zeta_0 \sqrt{\frac{2\sigma}{\mu f}}. \quad (419)$$

Wzory (416) do (419) możemy stosować w przypadkach, w których prąd przesunięcia można pominąć wobec prądu przewodzenia, a więc, gdy dany ośrodek można uważać za przewodnik. Doszlibyśmy do nich również, gdybyśmy w założeniu (411) pominęli człon  $\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ , odpowiadający prądowi przesunięcia.

Błąd popełniony przez pominięcie prądu przesunięcia wynosi około 10%, gdy  $\frac{2\sigma}{\varepsilon f} = 5$ , a około 5%, gdy  $\frac{2\sigma}{\varepsilon f} = 10$ .

Następująca tabelka pozwoli nam zorientować się, dla których częstotliwości uważać możemy powierzchnię ziemi za przewodnik. Na podstawie

<sup>1)</sup> Ze względu na znak ujemny przy  $\mathcal{H}_0$ , (patrz teoria wektora Poyntinga § 6).



badani amerykańskich<sup>1)</sup> przyjęc możemy dla różnych rodzajów powierzchni ziemi:

Rodzaje gruntu	Woda morska	Grunt b. dobrze przewodzący, wilgotny	Grunt średni	Grunt źle przewodzący
$\sigma_{\text{cgs. e. m.}} = \frac{\sigma_{\text{cgs. e. st.}}}{c^2}$	$10^{-11}$	$10^{-12}$	$10^{-13}$	od $10^{-14}$ do $10^{-15}$
$\varepsilon_{\text{cgs. e. st.}}$	80	20	14	5

Pierwsza z tych rubryk odnosi się do wody morskiej, zaś wartość  $\sigma = 10^{-13}$  cgs e. m. jest średnią wartością dla terenu płaskiego i średnio zalesionego w Europie.

Wartości mniejsze od  $\sigma = 10^{-13}$  cgs. e. m. spotyka się w terenach górzystych i silnie zalesionych (Karpaty, półwysep Skandynawski).

Dla rubryk, podanych w poprzedniej tabelce, otrzymamy następujące górne granice częstotliwości, przy których błąd popełniony przez pominięcie prądu przesunięcia nie przekroczy:

$$5\%_0 - \left( f_{\text{max}} = \frac{2c^2 \sigma_{\text{cgs. e. m.}}}{10\varepsilon} \right),$$

lub też  $10\%_0 - \left( f'_{\text{max}} = \frac{2c^2 \sigma_{\text{cgs. e. m.}}}{5\varepsilon} \right).$

Wyniki przeliczeń można ująć w następującą tabelkę:

Błąd %	Górna granica częstotliwości w kc/sek.	$\sigma_{\text{cgs. e. m.}}$				
		$10^{-11}$	$10^{-12}$	$10^{-13}$	$10^{-14}$	$10^{-15}$
5	$f_{\text{max}}$	22.500	9.000	1.300	360	36
10	$f'_{\text{max}}$	45.000	18.000	2.600	720	72

Z tabelki tej wynika, że godząc się z błędem 5-cio procentowym — możemy uważać morze za przewodnik dla fal powyżej 13 m długości, zaś średnią głębę ( $\sigma = 10^{-13}$  cgs. e. m.) — dla fal dłuższych od 230 m. Należy zaznaczyć, że w wielu przypadkach spotyka się wartości  $\varepsilon$  większe, niż podane w tabelce, wskutek czego wzór uproszczony ogranicza się do częstotliwości odpowiednio mniejszych, niż obliczone w powyższej tabelce.

O ile wielkość  $\frac{2\sigma}{\varepsilon f} \geq 3$ , stosować możemy z dostatecznym przybliże-

<sup>1)</sup> Report of Committee on Radio Propagation Data, Proc. IRE 1933. Ostatnie badania R. L. Smith-Rose'a, ogłoszone w Proceedings Royal Society wskazują, że  $\sigma$  i  $\varepsilon$  ziemi nie są wielkościami stałymi, lecz rosną z częstotliwością fali.

niem wzory uproszczone (412 a) do (415 a). W wielu przypadkach praktycznych warunków ten będzie spełniony.

### Szybkość rozchodzenia się fal.

Wzory (412), (412 a) i (416) dowodzą, że w półprzewodnikach (pojęcie to, jak widzimy z poprzedniego, jest związane z częstotliwością fali) i w przewodnikach szybkość rozchodzenia się fal jest mniejsza, niż w dielektryku o tych samych  $\mu$  i  $\epsilon$  i to tem mniejsza, im większa jest przewodność ośrodka i im mniejsza jest częstotliwość fali.

Szybkość rozchodzenia się fal w typowych ośrodkach i odpowiadające im długości fali zebrane są w następującej tabeli. Wartości te obliczono, stosując uproszczenia w granicach podanych wyżej norm.

$f_{kc}/sek.$		15	150	1500	15000	150000
Ośrodek						
Powietrze	$u_{cm/s}$	$3 \cdot 10^{10}$				
	$\lambda_m$	20000	2000	200	20	2
Miedź $\sigma = 5 \cdot 10^{-4}$ cgs. e. m.	$u_{cm/s}$	$5,45 \cdot 10^3$	$17,2 \cdot 10^3$	$54,5 \cdot 10^3$	$172 \cdot 10^3$	$545 \cdot 10^3$
	$\lambda_m$	0,0036	0,00115	0,00036	0,000115	0,000036
Woda morska $\sigma = 10^{-11}$ cgs. e. m.	$u_{cm/s}$	$38,5 \cdot 10^6$	$122 \cdot 10^6$	$385 \cdot 10^6$	$1190 \cdot 10^6$	$8400 \cdot 10^6$
	$\lambda_m$	25,5	8,15	2,55	0,80	0,56
Ziemia $\sigma = 10^{-13}$ cgs. e. m.	$u_{cm/s}$	$3,85 \cdot 10^8$	$12,2 \cdot 10^8$	$38,5 \cdot 10^8$	$73 \cdot 10^8$	$80 \cdot 10^8$
	$\lambda_m^{\circ}$	255	81,5	25,5	4,9	0,53

Jak widać z tego zestawienia, fale elektromagnetyczne rozchodzą się w ośrodkach innych niż powietrze, a w szczególności w ośrodkach przewodzących, ze znacznie mniejszą szybkością, a długości fal, odpowiadające poszczególnym częstotliwościom, są znacznie krótsze.

### Tłumienie fal.

Współczynnik tłumienia  $\beta$  fal elektromagnetycznych w półprzewodnikach i przewodnikach ma to samo znaczenie fizyczne, co współczynnik tłumienia linii elektrycznej.

Współczynnik tłumienia pozwala obliczyć, na jaką głębokość przenikają w dany ośrodek fale o różnych częstotliwościach. Zwykle jako miarę przenikania przyjmuje się głębokość, na której natężenie pola danej fali

równa się  $1/e$  natężenia pola na powierzchni danego ośrodka, chociaż przy dostatecznie dużych natężeniach pola na powierzchni, fala może być odbierana na głębokościach znacznie większych.

Dla półprzewodników głębokość ta wynosi:

$$a = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2\pi\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\mu} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 f^2}} \right]}. \quad (420)$$

Wzór ten możemy uprościć dla:

$$\frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 f^2} \gg 10 \quad \text{do} \quad a \approx \frac{1}{2\pi\sigma} \sqrt{\frac{1}{\mu} \left( \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma}{f} \right)}, \quad (420a)$$

zaś dla wartości:

$$\frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 f^2} \leq 0,1 \quad \text{do} \quad a \approx \frac{1}{2\pi\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (420b)$$

Dla przewodników otrzymamy na podstawie wzoru (417):

$$a = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma\mu}f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}. \quad (421)$$

We wzorach tych wszystkie jednostki muszą być wyrażone w tym samym układzie cgs.

Dla ośrodków niemagnetycznych podstawiamy w układzie cgs. e. st.  $\mu = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}$ , zaś w układzie cgs. e. m. podstawiamy  $\mu = 1$ .

Następująca tablica podaje szereg wartości na  $a$  w centymetrach dla najczęściej spotykanych ośrodków:

Ośrodek \ $f_{\text{okr./s.}}$	$1,5 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^7$	$1,5 \cdot 10^8$
Miedź $\sigma = 45 \cdot 10^{16}$ cgs. e. st.	0,058	0,0184	0,0058	0,00184	0,00058
Woda morska $\sigma = 9 \cdot 10^9$ cgs. e. st. $\varepsilon = 80$ cgs. e. st.	412	130	41,2	13	5,3
Grunt średni $\sigma = 9 \cdot 10^7$ cgs. e. st. $\varepsilon = 14$ cgs. e. st.	4120	1300	412	212	200
Gr. żle przewodz. $\sigma = 9 \cdot 10^5$ cgs. e. st. $\varepsilon = 5$ cgs. e. st.	42000	15900	11850	11850	11850

Ze wzorów i z zestawienia wynika, że fale przenikają do ośrodka tem głębiej, im gorsza jest jego przewodność i im większa jest jego stała dielektryczna oraz im mniejsza jest częstotliwość fali.

Liczby, zawarte w tablicy dowodzą, że fale elektromagnetyczne, szczególnie najmniejszych częstotliwości, przenikają stosunkowo głęboko do wody i do ziemi. Dzięki temu zjawisku przy pomocy najdłuższych fal stosowanych w radjokomunikacji można się porozumiewać z łodziami podwodnymi, zanurzonymi na znacznej głębokości.

Do ziemi, szczególnie przy złej przewodności, fale przenikają znacznie głębiej niż do wody — ma to miejsce nawet przy bardzo wielkich częstotliwościach. Jak zresztą wynika ze wzoru (420 b), powyżej pewnej częstotliwości, wynoszącej w przybliżeniu:

$$f \approx \sqrt{\frac{40 \sigma^2}{\epsilon^2}} = 6,3 \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (422)$$

głębokość przenikania fal do gruntu źle przewodzącego jest niezależna od częstotliwości.

Dzięki przenikaniu fal do ziemi można stosować, szczególnie do celów odbiorczych, tak zwane *anteny ziemne*, w postaci przewodników zakopanych na pewnej głębokości w ziemi.

Do przewodnika doskonałego ( $\sigma = \infty$ ) natomiast fale elektromagnetyczne nie przenikają wcale, dla niego bowiem  $a = 0$ . Stąd też mówimy o doskonałym przewodniku, że odbija on falę całkowicie.

## 20. Zachowanie się fali w pobliżu ziemi. Teorja Zennecka.

Wobec tego, że ziemia jest półprzewodnikiem, pole elektromagnetyczne fali, posuwającej się nad nią, wytwarza w niej zarówno prądy przewodzenia, jak i prądy przesunięcia. Prądy przewodzenia związane są nieodłącznie z wytwarzaniem ciepła Joule'a co popierwsze—powoduje zmniejszenie się energii fali, poruszającej się wzdłuż powierzchni ziemi, a powtórę—wpływa na zmianę kierunku poruszania się tej fali, a więc na odchylenie wektora Poyntinga. Skoro bowiem część energii wchodzi do ziemi — co do której zakładamy, że powierzchnia jej leży w płaszczyźnie równikowej anteny promieniującej — wektor Poyntinga musi posiadać składową skierowaną do ziemi, a zatem wektor wypadkowy nie może już przebiegać równoległe do płaszczyzny równikowej, lecz ulega pewnemu nachyleniu.

Teorję zjawiska rozchodzenia się fal nad przewodnikiem niedoskonałym podał pierwszy J. Zenneck <sup>1)</sup> dla fali płaskiej, uogólnił ją zaś dla fali kulistej A. Sommerfeld <sup>2)</sup>.

Można tu się oprzeć na zachowaniu się promienia elektromagnetycznego na pograniczu dwu ośrodków zgodnie z prawami optyki. A mianowicie pro-

<sup>1)</sup> J. Zenneck, Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche. Annalen d. Physik 23, str. 846, r. 1907.

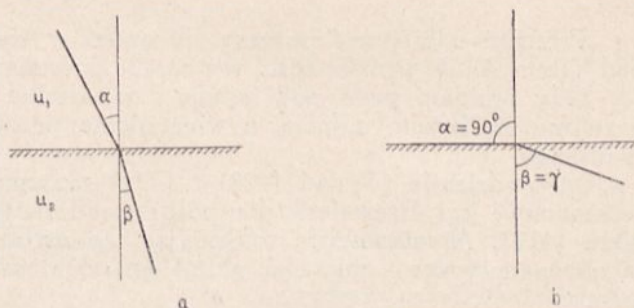
<sup>2)</sup> A. Sommerfeld, Ueber die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. Ann. d. Physik 18, str. 665, r. 1909.

mień świetlny, padając na płaszczyznę rozdziału dwu ośrodków o różnych gęstościach optycznych (szybkościach rozchodzenia się fal), ulega w przypadku ogólnym *częściowemu odbiciu i częściowemu załamaniu*. Znaczący to, że część przychodzącej energii powraca do pierwszego ośrodka, a część przenika do drugiego ośrodka.

Zjawiskami odbicia i załamania rządzą dwa prawa podstawowe (rys. 211):

a) Kąt padania  $\alpha$  równa się kątowi odbicia  $\alpha'$ .

b) Kąt padania  $\alpha$  i kąt załamania  $\beta$  są związane prawem Snell'a (Snelliusa):



Rys. 211 a i b.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{const} = \frac{u_1}{u_2} = n, \quad (423)$$

w którym  $u_1$  i  $u_2$  są szybkościami rozchodzenia się fali w obu ośrodkach. Stosunek  $\frac{u_1}{u_2} = n$  nazywamy *współczynnikiem załamania* danych dwu ośrodków.

Zwykle przez współczynnik załamania pewnego ośrodka (współczynnik załamania bezwzględny) określamy stosunek szybkości światła w danym ośrodku do szybkości światła w próżni:

$$n = \frac{u}{c}. \quad (423a)$$

Równanie (423) możemy więc również napisać w postaci:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (423b)$$

Z prawa Snell'a wynika, że promień przechodzący z ośrodka o większej szybkości (optycznie rzadszego) do ośrodka o szybkości mniejszej (optycznie gęstszego), załamuje się zbliżając się *ku* prostopadłej do powierzchni rozdziału obu ośrodków, wystawionej w punkcie padania, w przeciwnym zaś przypadku — załamuje się oddalając się *od* tej prostopadłej.

Wynika zeń dalej, że w przypadku, gdy promień pada *stycznie* do płaszczyzny rozgraniczającej dwa ośrodki ( $\alpha = 90^\circ$ ) ulega on również częściowemu załamaniu w kierunku ośrodka gęstszego (rys. 211 b). Kąt  $\gamma$ , pod którym wówczas następuje załamanie, jest największym kątem załamania, jaki można otrzymać na pograniczu tych dwu ośrodków i nosi nazwę

kąta granicznego czyli kąta Brewstera. Kąt Brewstera otrzymamy, podstawiając w równaniu (423)  $\sin \alpha = 1$ , a więc:

$$\sin \beta_{gr} = \sin \gamma = \frac{u_2}{u_1}. \quad (424)$$

Promień odbity zaś porusza się nadal w kierunku stycznym, a więc pod kątem  $90^\circ$  do prostopadłej w punkcie podania.

Gdy promień pada pod kątem  $\gamma$  z ośrodka gęstszego do rzadszego, następuje całkowite odbicie, a więc niema przejścia energii do ośrodka rzadszego.

Na podstawie równań (423) i (424) możemy obliczyć współczynniki załamania i kąt Brewstera dla półprzewodników, posługując się równaniem (412). A mianowicie zakładając, że ośrodki, które nas interesują, są niemagnetyczne i obierając układ cgs. elektrostatyczny ( $\mu = c^2$ ), otrzymamy:

$$n = \frac{u}{c} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\epsilon}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2 f^2}} \right]}}. \quad (425)$$

Zaś kąt Brewstera dla dwu ośrodków o stałych  $\epsilon_1, \sigma_1$  i  $\epsilon_2, \sigma_2$  określimy funkcją:

$$\sin \gamma = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\frac{\epsilon_1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma_1^2}{\epsilon_1^2 f^2}} \right]}{\frac{\epsilon_2}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma_2^2}{\epsilon_2^2 f^2}} \right]}}. \quad (426)$$

W najbardziej dla nas ważnym przypadku: powietrze — ziemia, przedstawiając:

$$\epsilon_1 = 1, \sigma_1 = 0, \epsilon_2 = \epsilon, \sigma_2 = \sigma,$$

otrzymamy:

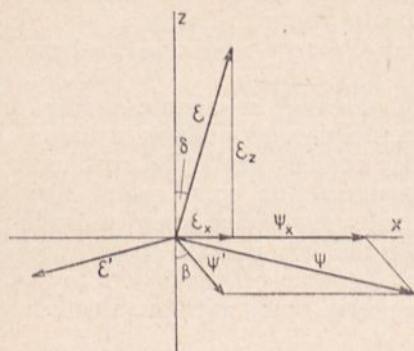
$$\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{\frac{\epsilon}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2 f^2}} \right]}}. \quad (426a)$$

Wskutek obecności promienia załamane go w kierunku ziemi wypadkowy wektor Poyntinga fali elektromagnetycznej odchyła się ku dołowi od kierunku poziomego pod pewnym kątem  $\delta$  (rys. 212 a), który jest tem większy, im większa część energii wchodzi do ziemi.

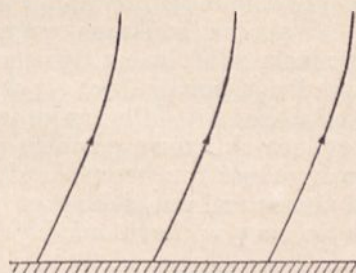
Zgodnie z twierdzeniem Poyntinga wektor pola elektrycznego, jako prostopadły do kierunku fali, również odchyła się od pionu w kierunku ruchu fali o ten sam kąt  $\delta$ , można więc rozłożyć go na składową pionową  $C_z$  i składową poziomą  $C_x$  związane zależnością:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{C_x}{C_z},$$

wskutek czego linie pola elektrycznego fali nie trafiają do ziemi prostopadle, lecz pod kątem (rys. 212 b). Pole magnetyczne fali, jako prostopadłe do płaszczyzny padania, wskutek tego zjawiska nie ulega zmianie.



Rys. 212-a.



Rys. 212-b.

Według obliczeń Zennecka (1. c.) wielkość ta wyraża się wzorem <sup>1)</sup> (gdy jednym z ośrodków jest powietrze:  $\sigma_1 = 1$ ,  $\epsilon_1 = 1$  drugim ziemia:  $\sigma_2 = \sigma$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon$ ):

$$\operatorname{tg} \delta = \sqrt[4]{\frac{\sigma_1^2 + \frac{f^2 \epsilon_1^2}{4}}{\sigma_2^2 + \frac{f^2 \epsilon_2^2}{4}}} = \sqrt[4]{\frac{\frac{f}{2\sigma}}{1 + \frac{f^2 \epsilon^2}{4\sigma^2}}}, \quad (427)$$

który dla  $\frac{f^2 \epsilon^2}{4\sigma^2} \ll 1$  (dobra przewodność, mała częstotliwość fali) upraszcza się do postaci:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{c_x}{c_z} \approx \sqrt{\frac{f}{2\sigma}}. \quad (427a)$$

Jak wynika z równania (427) nachylenie wektora pola elektrycznego jest tem mniejsze, im mniejsza jest przewodność gruntu, a w miarę zbliżania się do wartości  $\sigma = \infty$  dąży do zera. Wyniki te są zgodne z rozważaniami § 19, w których wykazano, że fale wnikają tem głębiej w ziemię, im gorsza jest przewodność, a nie wnikają wcale do przewodnika doskonałego ( $\sigma = \infty$ ), nad którym przechodzą bez załamania. Straty energii fali, rozchodzącej się wzdłuż ziemi, są więc tem większe, im gorsza jest przewodność gruntu. Jest to zgodne z doświadczeniem, gdyż nad morzem fale rozchodzą się o wiele lepiej, niż nad lądem.

<sup>1)</sup> Zagadnienie to rozwiązał nieco inną metodą prof. G.W.O. Howe w artykule „The Tilt of Radio Waves and their Penetration into the Earth” WEEW X., str. 767 — 391, r. 1933.

Pozatem nachylenie wektora pola elektrycznego rośnie wraz z zwiększeniem częstotliwości fali.

Przy dobrej przewodności (np. nad morzem) i długich falach nachylenie wektora pola elektrycznego jest bardzo małe, dla fal radjofonicznych nad lądem jest ono rzędu kilku stopni, zaś dla fal krótkich i złego gruntu dochodzi do kilkudziesięciu stopni. Wyniki tych obliczeń zgadzają się bardzo dobrze z danymi doświadczalnymi.

Wskutek wnikania energii elektromagnetycznej w ziemię mamy do czynienia właściwie z dwiema falami: jedną biegnącą w powietrzu nad ziemią, drugą poruszającą się w ziemi<sup>1)</sup>. Wobec różnicy szybkości rozchodzenia się obu fal, fala znajdująca się na pograniczu (na powierzchni ziemi), a będąca składową poziomą pola elektrycznego, musi mieć jakąś wypadkową szybkość rozchodzenia się i wskutek tego nie jest w fazie ze składowymi pionowymi pól elektrycznych obu tych fal. Zgodnie z Zenneckiem przesunięcie faz  $\varphi$  w czasie między  $\epsilon_z$  i  $\epsilon_x$  dla fali powietrznej wyraża zależność:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\sigma}{\epsilon f}. \quad (428)$$

W razie rozchodzenia się fali nad przewodnikiem, za jaki uważać możemy ziemię, uwzględniając zastrzeżenia § 19-go, przesunięcie faz w czasie między obydwoma polami wynosi 45°.

Wskutek tego przesunięcia faz pole elektryczne ani w powietrzu, ani w ziemi nie posiada określonego kierunku, lecz jest polem wirującym eliptycznie. Kierunek zaś podany wzorem (427) jest jedynie kierunkiem większej osi tej elipsy. Przykład takiej elipsy, dla warunków wyjątkowo niekorzystnych ( $\sigma = 10^{-16}$  cgs. e. m.) podaje według Zenneck'a rys. 212 c.

Wobec tego i stosowanie wzoru (472-a) wymaga pewnej ostrożności gdy przy jego pomocy określamy kierunek wektora wypadkowego (Howe l. c.).

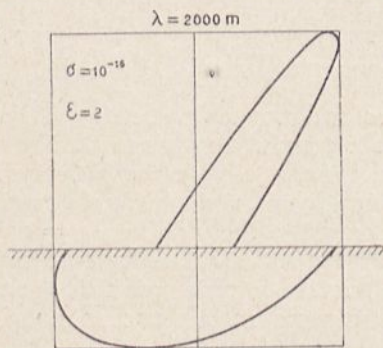
A mianowicie wzór przybliżony (427a) słuszny jest wówczas, gdy mierzymy oddzielnie składową pionową i oddzielnie składową poziomą pola elektrycznego. Gdy natomiast mierzymy nachylenie pola elektrycznego, nachylając antenę pionową tak, aby otrzymać w niej największą siłę elektromotoryczną, otrzymany kierunek wypadkowego działania obu wektorów, z których

poziomy, jako opóźniony w fazie o 45°

względem, pionowego ma wartość  $\frac{\epsilon_{m_x}}{\sqrt{2}}$

z chwilą, gdy pionowy przechodzi przez amplitudę. Wobec tego nachylenie, przy którym w antenie powstaje maksymalna siła elektromotoryczna, określa się zależnością:

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{\epsilon_x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\epsilon_z} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f}{\sigma}}. \quad (427b)$$

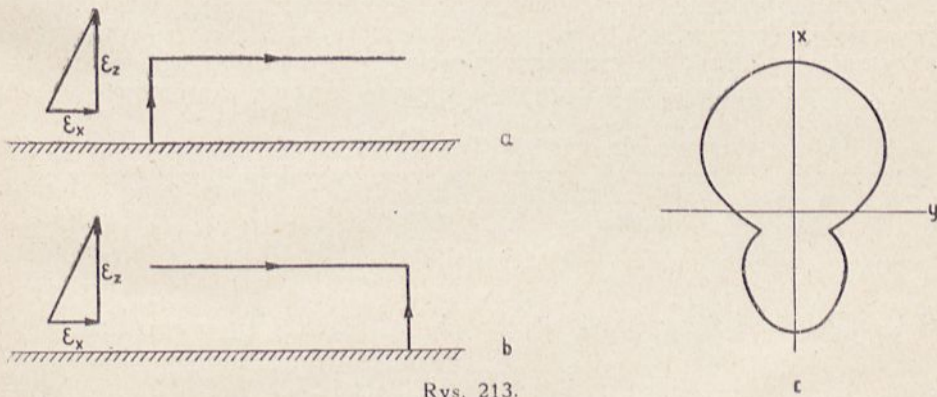


Rys. 212-c.

<sup>1)</sup> Patrz np. J. Zenneck, Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie.



Nachylenie wektora pola elektrycznego zaznacza się przy odbiorze na antenę pionową, na którą działa tylko składowa pionowa pola. Dlatego w dalszym ciągu, podając natężenie pola elektrycznego w miejscu odbioru, będziemy mieli na myśli jego *składową pionową*. W szczególny sposób zaznacza się nachylenie wektora pola elektrycznego na charakterystykę odbiorczą anteny typu  $L$ , o dłuższej części poziomej w jednym kierunku (rys. 213-a i b). Składowa pozioma pola indukuje w części poziomej anteny siłę elektromotoryczną, która sumuje się z siłą elektromotoryczną, indukowaną w części pionowej. Skutkiem tego, gdy część pozioma anteny jest zwrócona zgodnie z ruchem fali (rys. 213-a) następuje wzmocnienie odbioru, gdy część pozioma zwrócona jest przeciw ruchowi fali (rys. 213-b), otrzymujemy osłabienie odbioru. Wskutek tego charakterystyka odbiorcza anteny  $L$  posiada kształt podany na rys. 213-c.



Rys. 213.

Opierając się na prawie Sommerfelda, możemy przewidzieć, że antena  $L$  posiada taką samą charakterystykę nadawczą, co zresztą można udowodnić i w inny sposób<sup>1)</sup>. Antena  $L$  nadawcza promieniuje najsilniej w kierunku końca uziemionego, a więc najlepsze warunki pracy otrzymamy, gdy antenę nadawczą i odbiorczą zwrócimy częściami pionowymi ku sobie.

Rzecz oczywista, antena  $L$  traci swe własności kierunkowe jak nadawcze, tak i odbiorcze przy dobrej przewodności gruntu.

Składową poziomą wykorzystuje się również w odbiorze przez zastosowanie t. zw. anteny falowej (Beverage, Rice, Kellog). Jest to linja elektryczna zawieszona nisko nad ziemią, o długości równej w przybliżeniu długości fali odbiorczej. Po stronie zwróconej ku stacji nadawczej linja ta jest uziemiona przez oporność równą jej oporności falowej, zaś na końcu przeciwległym znajduje się odbiornik. Fala przychodząca indukuje wzdłuż anteny siły elektromotoryczne, które wytwarzają fale bieżące w obu kierunkach. W kierunku ku odbiornikowi fale te biegną w fazie z falą w powietrzu i sumują się, zaś w kierunku przeciwnym, trafiając na oporność równą

<sup>1)</sup> Patrz m. i. Zenneck, Lehrbuch.

oporności falowej linii, uziemiają się bez odbić. Antena falowa ma więc charakterystykę odbiorczą jednokierunkową<sup>1)</sup>.

## 21. Obliczenie zasięgu fal. Wzór Sommerfelda.

Wskutek pochłaniania energii fali elektromagnetycznej przez ziemię, natężenie pola elektrycznego fali biegnącej w płaszczyźnie równikowej nie da się wyrazić odwrotną proporcjonalnością, jak to wyprowadziliśmy w § 12-ym dla warunków idealnych (wzór 381):

$$\zeta = 120 \pi \frac{h_m \cdot J_A}{d_{km} \lambda_{km}} \mu \cdot V/m.$$

Amplituda fali na skutek tłumienia spowodowanego pochłanianiem będzie malała szybciej, niż to wyraża wzór Hertza - Rüdemberga, chcąc więc otrzymać wyniki zgodne z rzeczywistością, do wzoru tego wprowadzić musimy jakiś czynnik zmniejszający  $S$ , będący funkcją częstotliwości, odległości i własności gleby ( $\sigma$ ,  $\varepsilon$  i ewentualnie  $\mu$ ).

Ścisłe rozwiązanie dla wartości tego czynnika, tłumiącego w przypadku ogólnym dał A. Sommerfeld, wyrażając go jako funkcję t. zw. (przez niego) „odległości liczbowej” (numerische Distanz)<sup>2)</sup>:

$$S = f(d_n),$$

gdzie, dla ośrodków niemagnetycznych,  $d_n$  wyraża się wzorem:

$$d_n = \pi f \frac{d}{c} \cdot \frac{\left[ \varepsilon_1^2 \left( 1 + \frac{4 \sigma_1^2}{\varepsilon_1^2 f^2} \right) \right]^{\frac{3}{4}}}{\left[ \varepsilon_2^2 \left( 1 + \frac{4 \sigma_2^2}{\varepsilon_2^2 f^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (429)$$

w którym poza oznaczeniami stosowanymi w § 19 mamy:  $c$  — szybkość światła równą  $3 \cdot 10^{10}$  cm/s.,  $d$  — odległość od nadajnika. Gdy wszystkie wielkości są wyrażone w układzie cgs. e. st., odległość liczbową  $d_n$  otrzymujemy w cm.

Jeżeli jednym z ośrodków jest powietrze ( $\varepsilon_1 = 1, \sigma_1 = 0$ ), możemy napisać  $\varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ , a wzór na odległość liczbową sprowadza się do wyrażenia:

$$d_n = \frac{\pi f d}{c \varepsilon \sqrt{1 + \frac{4 \sigma^2}{\varepsilon^2 f^2}}}. \quad (429a)$$

<sup>1)</sup> Teorię anteny falowej podał S. Manczarski w artykule „W jaki sposób został polepszony odbiór japońskiej stacji JND ?” w Przegl. Radiot. Nr. 1 do 4, r. 1930.

<sup>2)</sup> Patrz m. i. B. v. d. Pol. Ueber die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen Jahrb. 37. str. 152. r. 1931.

Jeżeli w tym wzorze wyrazimy  $\sigma$  w jednostkach cgs. e. st.  $\left(\sigma_{e.m.} = \frac{\sigma_{e.st.}}{9 \cdot 10^{20}}\right)$  wprowadzimy  $\lambda = \frac{c}{f}$  i wyrazimy je w km,  $d$  również wyrazimy w km, to otrzymamy:

$$d_{n_{cm}} = \frac{\pi d_{km}}{\lambda_{km} \varepsilon \sqrt{1 + \left(\frac{6 \cdot 10^{15} \sigma_{e.m.} \lambda_{km}}{\varepsilon}\right)^2}}. \quad (429b)$$

Wzór ten możemy uprościć z tem samem ograniczeniem, które omówiono w § 19. A mianowicie gdy jest:

$$\frac{4 \sigma_{e.st.}^2}{\varepsilon^2 f^2} \gg 1, \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{6 \cdot 10^{15} \sigma_{e.m.} \lambda_{km}}{\varepsilon}\right)^2 \gg 1,$$

otrzymujemy:

$$d_{n_{cm}} \approx \frac{\pi d_{km} 10^{-15}}{6 \sigma_{cgs e.m.} \lambda_{km}^2}. \quad (429c)$$

Jak wykazał v. d. Pol. (l. c.), funkcję  $S$  wyrazić można z dostateczną dokładnością wzorem:

$$S = f(d_n) = \frac{2 + 0,3 d_n}{2 + d_n + 0,6 d_n^2}. \quad (430)$$

Dla wartości  $d_n \gg 20$  wyrażenie to upraszcza się do postaci:

$$S \approx \frac{1}{2 d_n}. \quad (430a)$$

Przy pomocy tej zależności obliczyć można natężenie pola elektrycznego (jego składowej pionowej) w dowolnej odległości od stacji:

$$E = 120 \pi \frac{h_{em} J_A}{d_{km} \lambda_{km}} \cdot \frac{2 + 0,3 d_n}{2 + d_n + 0,6 d_n^2} \mu V/m \quad (431)$$

Zamiast momentu prądowego  $hJ$  można wprowadzić do wzoru (431) moc wypromieniowaną, posługując się wzorem (385). Wprowadzając do przeliczeń  $\lambda_{km}, d_{km}, P_{kW}$  otrzymamy <sup>1)</sup> wzór Sommerfelda - v. d. Pol'a:

$$E = \frac{300}{d_{km}} \sqrt{P_{kW}} \frac{2 + 0,3 d_n}{2 + d_n + 0,6 d_n^2} \mu V/m \quad (432)$$

<sup>1)</sup>  $P_{kW} = 0,16 \pi^2 \left(\frac{h e J}{\lambda}\right)^2$ , stąd  $h_{em} J_A = \frac{1}{0,4 \pi} \lambda_{km} \sqrt{P_{kW}}$ .

co, po podstawieniu do wzoru (381), daje:

$$\frac{120 \pi}{d_{km} \lambda_{km}} \cdot \frac{1}{0,4 \pi} \lambda_{km} \sqrt{P_{kW}} = \frac{300}{d_{km}} \sqrt{P_{kW}},$$

Wobec tego, że w wyrażeniu na odległość liczbowa występuje iloczyn  $\sigma \lambda^2$ , ta sama krzywa, obliczona dla pewnych wartości  $\sigma$  i  $\lambda$ , będzie również słuszna dla całego szeregu  $\sigma$  i  $\lambda$ , byleby iloczyn ( $\sigma \lambda^2$ ) był stały (oczywiście w granicach, gdzie jest spełniony warunek  $\frac{2\sigma}{f} \gg \varepsilon$ , oraz gdy  $\varepsilon$  pozostaje to samo).

Wobec tego, że przeliczenie poszczególnych wartości  $C$  ze wzoru Sommerfelda - v. d. Pol'a jest niedogodne, oblicza się odpowiednie krzywe dla żadanego  $\sigma$  i żadanych długości fal, odniesione do 1 kW wypromieniowanego. *Natężenie pola, wytworzone przez stację o dowolnej mocy wypromieniowanej, otrzymamy, mnożąc wartość otrzymaną z krzywej, przez  $\sqrt{P_{kW}}$*

Z równania Sommerfelda - v. d. Pol'a łatwo się przekonać, że tłumienie fal elektromagnetycznych rośnie szybko z częstotliwością. Innymi słowy, zasięg stacji przy tej samej mocy wypromieniowanej jest tem mniejszy, im krótsza jest fala.

## 22. Wpływ krzywizny ziemskiej. Wzory Watsona i Eckersley'a.<sup>1)</sup>

Teoria Sommerfelda nie uwzględnia dwu bardzo ważnych czynników: kulistości ziemi i obecności również kulistej, koncentrycznie względem ziemi umieszczonej jonosfery, znanej pod nazwą warstwy Heaviside'a-Kennelly'ego.

Wskutek nieuwzględnienia kulistości ziemi, wzór (432) może być stosowany jedynie do odległości, nie przekraczających 150 do 200 km, a więc w granicach, w których ziemię praktycznie uważać możemy za płaską. Na większych odległościach nastąpiłoby oddzielenie promienia elektromagnetycznego od ziemi, co sprawiłoby, że na takich odległościach porozumienie radiotelegraficzne byłoby niemożliwe.

Że jednak takie porozumienie jest możliwe, zawdzięczamy to *uginaniu się fal* wzdłuż powierzchni ziemi pod wpływem zjawiska *dyfrakcji*, określonego zasadą Huyghensa, która — przystosowana do fal elektromagnetycznych radiowych — powiada, że *każdy przewodnik elementarny, w którym fala elektromagnetyczna wzbudziła prąd, sam staje się źródłem elementarnej fali kulistej.*

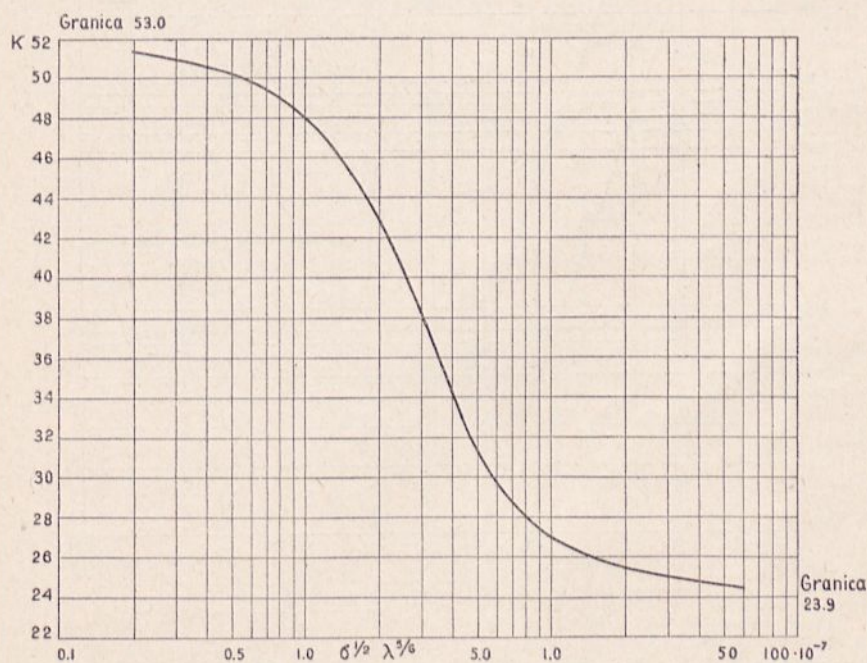
Na podstawie zjawiska dyfrakcji ziemia bierze wybitny udział w dalszym rozchodzeniu się fali elektromagnetycznej wzdłuż jej powierzchni dzięki temu, że poszczególne elementy jej powierzchni dają składowe promieniowania wtórnego, styczne do powierzchni ziemi, wskutek czego powstaje fala cylindryczna, uginająca się wzdłuż krzywizny ziemskiej. Jest rzeczą oczywistą, że przewodność ziemi dla zjawiska tego posiada znaczenie pierwszorzędne i że zwiększenie zasięgu dzięki dyfrakcji będzie tem wybitniejsze, im mniejsze są straty energii w ziemi, a więc im dłuższa jest fala. W ten sposób najdłuższe fale stosowane w radiokomunikacji ( $\lambda = 15000 - 25000$  m) rozchodzą się na odległości rzędu tysięcy kilometrów.

<sup>1)</sup> Sporo materiału, odnoszącego się do tego paragrafu i następnych, oddał łaskawie do mego rozporządzenia p. inż. St. Manczarski z M. P. i T.

Wzór na rozchodzenie się fal wzdłuż ziemi pod działaniem dyfrakcji dał G. N. Watson. Wzór ten, przystosowany do użytku praktycznego przez T. L. Eckersley'a<sup>1)</sup>, w odniesieniu do mocy wypromieniowanej, wyrażonej w kilowatach, posiada postać następującą:

$$\zeta = \frac{34}{d^{1/2} \lambda^{1/6}} \cdot \sqrt{P} \cdot e^{-\frac{\zeta d}{\lambda^{2/3} R}} \text{ mV/m.} \quad (433)$$

We wzorze tym  $\zeta = f(\sigma^{1/2}, \lambda^{1/6})$  jest wielkością zależną od przewodności i od długości fali. Przebieg jej dla różnych wartości  $\sigma^{1/2}, \lambda^{1/6}$  ( $\sigma$  w jednostkach e. m.,  $\lambda$  w km) podaje krzywa rys. 214. Dla fal długich dąży ona do granicy  $\zeta \simeq 23,9$ .

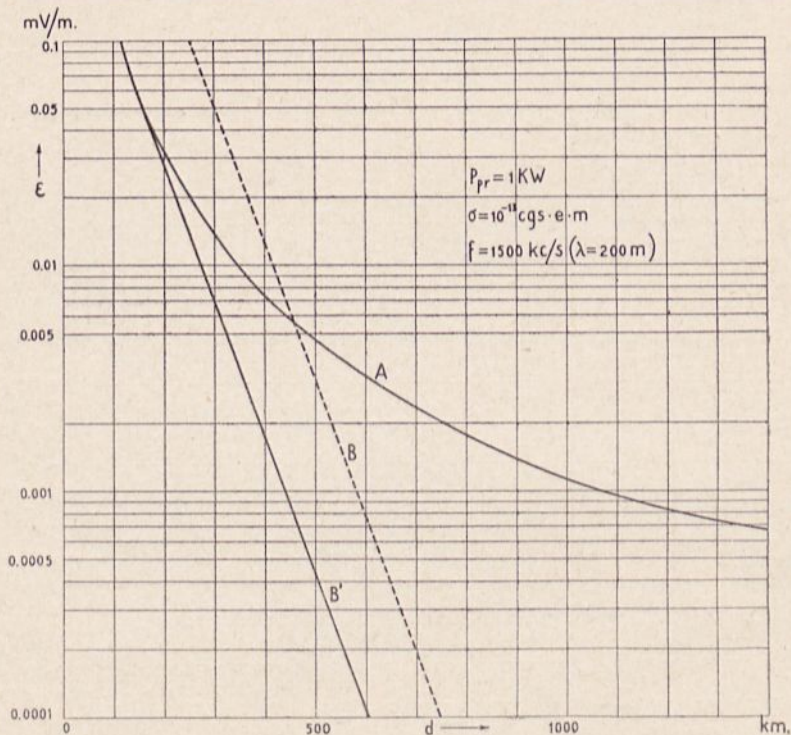


Rys. 214.

Z samego założenia tego wzoru wynika, że jest on ważny dopiero dla odległości powyżej 100 km, gdy już zawodzi promieniowanie bezpośrednie. Naogół krzywa wyrażona tym wzorem, będąca przedłużeniem krzywej Sommerfelda, nie łączy się bezpośrednio z tą krzywą, lecz przecina się z nią

<sup>1)</sup> T. L. Eckersley. Direct Ray Broadcasting Transmission Proc. I. R. E. r. 1932. Pierwszy wzór dyfrakcyjny dał Witold Rybczyński, docent Politechniki lwowskiej, w r. 1913 (Annalen d. Phys. 41, str. 191).

pod pewnym kątem (rys. 215). By otrzymać ciągłość, musimy krzywą Watsona - Eckersley'a cokolwiek przesunąć w kierunku pionowym, tak, by ona była styczna do krzywej Sommerfelda<sup>1)</sup>. Złożona w ten sposób krzywa podaje nam w sposób ciągły przebieg natężenia pola stacji jako funkcję odległości i pozwala obliczać moc niezbędną do wytworzeniażądanego natężenia pola na żądanej odległości od stacji przy danej długości fali i danych właściwościach gruntu.

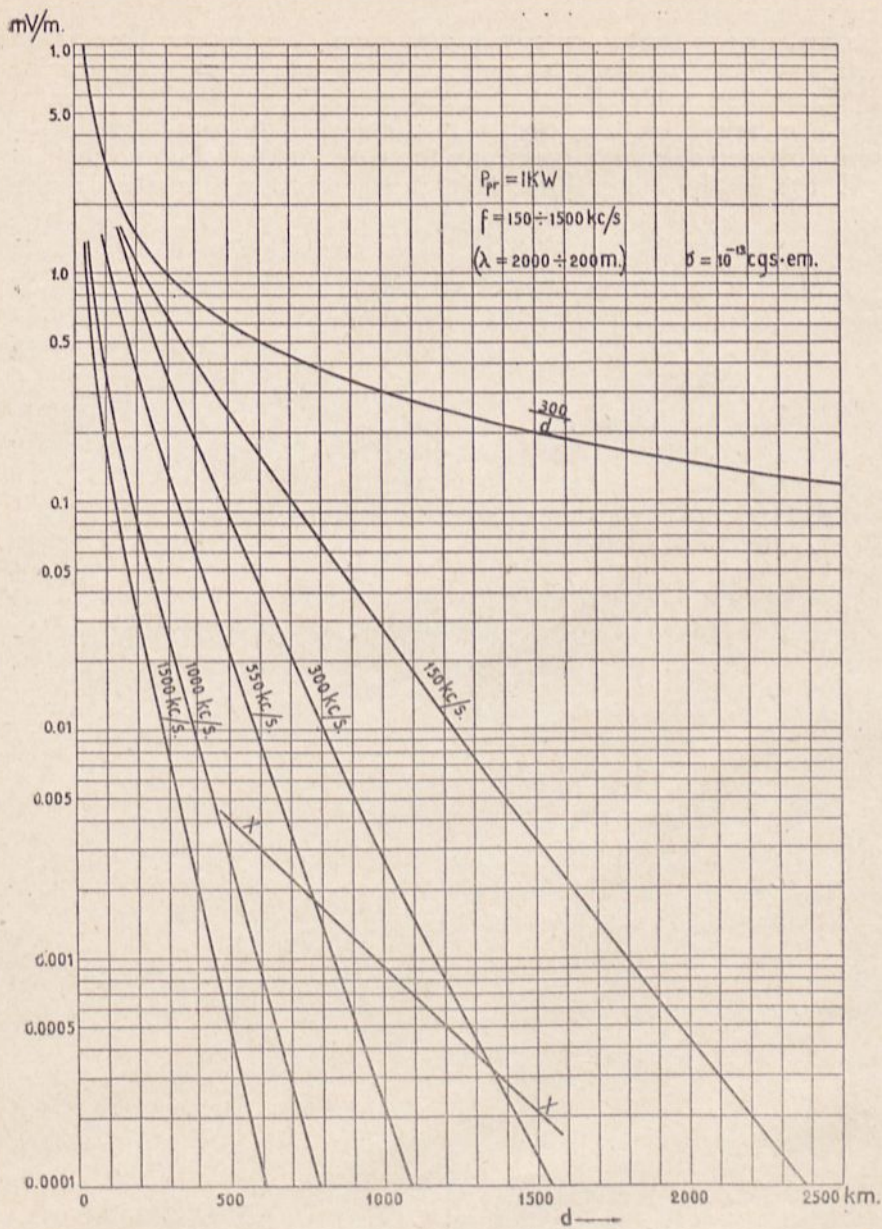


Rys. 215.

Rzecz oczywista, że nie jest wskazane posługiwanie się do tego celu metodą algebraiczną, lecz krzywymi, obliczonymi uprzednio dla szeregu przewodności i długości fal.

Na rys. 216 podano jako przykład rodzinę krzywych dla fal od 2000 do 200 m (150 do 1500 kc/s) i przewodności  $\sigma = 10^{-13}$  cgs. e. m. (średnia wartość dla naszych warunków). Dla porównania podano krzywą odwrotnej proporcjonalności, odpowiadającą rozchodzeniu się fali kulistej bez strat energii (wzór 381 wyrażony w funkcji mocy,  $C_c = \frac{300}{d_{km}} \sqrt{P_{kW}}$ ).

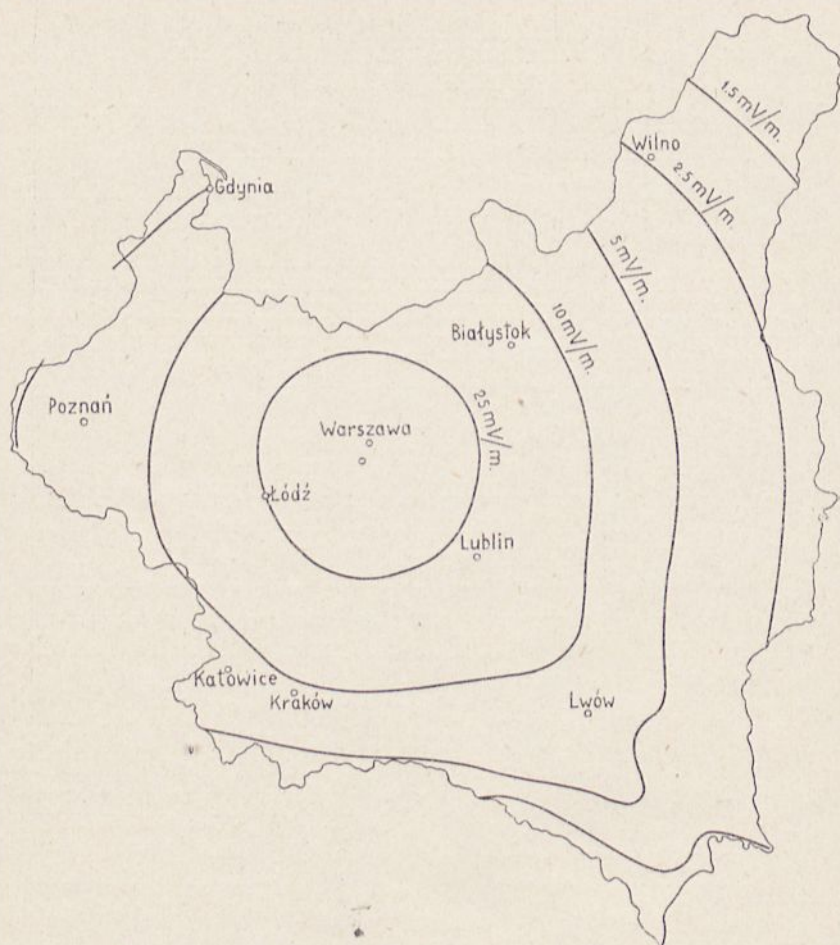
<sup>1)</sup> Według pracy T. L. Eckersley'a, jeszcze nie ogłoszonej.



Rys. 216.

Wartości ujęte w krzywych rozchodzenia się fal są przybliżone i możemy uważać je jedynie za wartości orientacyjne. Przyczyna leży w tem, że wartość  $\sigma$  wprowadzona od wzorów, nie może być określona zbyt dokładnie,

zależy ona bowiem od jakości poszczególnych połaci terenu, dla których wartość ta waha się w bardzo szerokich granicach. Spotykamy bowiem obszary o przewodności znacznie lepszej, niż  $10^{-13}$  cgs. e. m., lecz również — szczególnie w terenach górzystych i silnie zalesionych — bywa ona rzędu  $10^{-14}$ , a nawet  $10^{-15}$  cgs. e. m. Ponadto na rozchodzenie się fal wpływają bardzo ujemnie przeszkody terenowe, takie, jak gęste lasy i osiedla. Z tego względu, określiwszy dla danego obszaru wypadkową wartość



Rys 217.

$\sigma$ , na przykład z pomiarów natężenia pól, liczyć się należy z tem, że w poszczególnych kierunkach, a nawet na pewnych odcinkach tych kierunków, w praktyce spotykamy się ze znacznymi odchyleniami (od + 100% do — 50%). Widać to bardzo dobrze na krzywych zasięgu, zdjętych dla radiostacji warszawskiej (rys. 217).



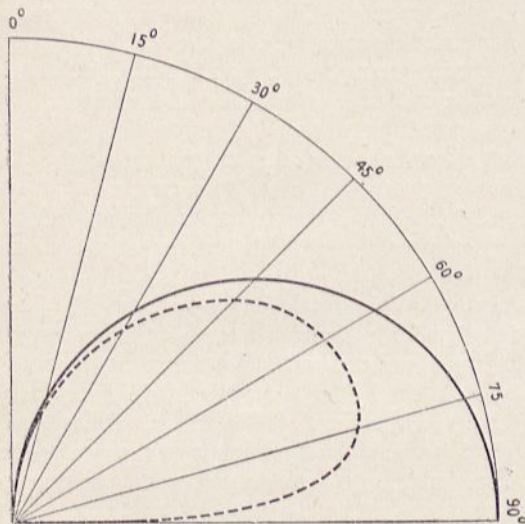
### 23. Wpływ ziemi na pionową charakterystykę promieniowania.

Pochłanianie fali powierzchniowej przez ziemię nie pozostaje bez wpływu na pionową charakterystykę promieniowania anteny. Działaniu ziemi ulega przede wszystkim promieniowanie w płaszczyźnie równikowej, które — jako przebiegające równoległe do ziemi — jest najsilniej pochłaniane. Ziemia oddziaływa jednak również i na promieniowanie w innych kierunkach, gdyż promienie odbite od ziemi, dające wraz z promieniami bezpośrednimi promieniowanie wypadkowe (patrz § 14), przy odbiciu ulegają osłabieniu. Wskutek tego charakterystyka, obliczona z uwzględnieniem strat energii w ziemi, różni się mniej lub więcej od charakterystyki idealnej, obliczonej dla ziemi doskonale przewodzącej.

Wpływ ziemi zależy od jej przewodności i stałej dielektrycznej i jest tem większy, im większa jest częstotliwość fali promieniowanej<sup>1)</sup>.

Na rys. 218 mamy pionową charakterystykę promieniowania anteny ćwierćfalowej z uwzględnieniem stratności ziemi według T. L. Eckersley'a (linja przerywana). Widzimy, że promieniowanie przyziemne jest tu prawie całkowicie przytłumione, wskutek czego najsilniejsze promieniowanie skierowane jest pod pewnym kątem w górę.

Przewodność ziemi zaznacza swój wpływ na charakterystykę promieniowania na przestrzeni



Rys. 218.

około jednej długości fali od anteny.

### 24. Załamywanie się fal w jonosferze.

Fale elektromagnetyczne rozchodzące się w sposób opisany dotychczas, czerpią swą energję z promieniowania anteny w płaszczyźnie równikowej. Jak wynika z poprzednich rozważań, zasięg ich jest tem większy, im mniejsza jest ich częstotliwość, a więc im większa jest ich długość: podczas gdy fale najdłuższe, stosowane w radjokomunikacji, mają zasięgi rzędu tysięcy km, to dla fal rzędu metrów nie przekracza on kilku km (na ziemi). Składają się na to dwa czynniki: dłuższe fale ulegają mniejszemu pochłanianiu, niż fale krótsze, a uginają się natomiast lepiej, niż fale krótkie.

Fale rozchodzące się przy współdziałaniu przewodności ziemi nazywamy *falami powierzchniowymi*, gdyż rozchodzenie się ich uwarunkowane jest

<sup>1)</sup> T. L. Eckersley, Short Wave Wireless Telegraphy. I. E. E. Wir. Proc. 2 r. 1927, str. 85 ÷ 128.

stanem powierzchni gruntu, po którym się posuwają, a zapas przenoszonej przez nie energii zamyka się w warstwie o grubości zaledwie kilku długości fali nad ziemią.

Jednakże obok promieniowania w płaszczyźnie równikowej, znaczna część energii anteny promieniuje w przestrzeń. Te fale przestrzenne byłyby dla nas stracone, gdyby nie obecność warstwy powietrza, silnie rozrzedzonej i zjonizowanej, otaczającej kulę ziemską, czyli *jonosfery*, zwanej też na pamiątkę jej odkrywców, warstwą *Kennelly'ego* i *Heaviside'a*.

Przyczyną jonizacji najwyższych warstw rozrzedzonej atmosfery ziemskiej jest przedewszystkiem działanie promieni słonecznych, a w szczególności widma pozafioletkowego, i zawartych w widmie słonecznym promieni korpuskularnych.

W górnej atmosferze, zjonizowanej przez promienie słoneczne, po ustaniu bezpośredniego działania tych promieni następuje wprawdzie, częściowa rekombinacja (zneutralizowanie) zjonizowanych cząstek gazu, jednakże znaczna część tych cząsteczek pozostaje nadal w stanie zjonizowanym, tak, iż warstwa Heaviside'a utrzymuje się przez całą dobę. Jednakże pod bezpośrednim wpływem promieni słonecznych, a więc w ciągu dnia, gęstość jonów zwiększa się i sama warstwa zjonizowana sięga bliżej ziemi, do warstw, w których panuje wyższe ciśnienie, i które tylko pod bezpośrednim działaniem promieni słonecznych utrzymują się w stanie dostatecznie silnie zjonizowanym<sup>1)</sup>.

Wobec tego jest jasne, że nietylko przewodność jonosfery, ale i jej dolna granica musi się wahać w zależności od pory dnia i roku, a nawet zależnie od faz okresów działania plam słonecznych. W południe, a zwłaszcza w lecie będziemy mieli nietylko największą przewodność jonosfery, ale i jej wysokość nad ziemią będzie najmniejsza. W nocy, a szczególnie w czasie nocy zimowej, przewodność tej warstwy będzie najmniejsza, a jej odległość od ziemi — największa. Z powyższego wynika również, że bardzo duży wpływ na zjawiska jonizacyjne posiada szerokość geograficzna — jonosfera w okolicach podzwrotnikowych bardziej będzie zbliżona do warunków dziennych i letnich, pod biegunami zaś — do nocnych i zimowych.

Do zależności od pór dnia, roku i szerokości geograficznej dochodzi wreszcie jeszcze wpływ pola magnetycznego ziemi.

Struktura jonosfery nie jest jednolita: po stronie zbliżonej do ziemi mamy większe ciśnienie atmosferyczne, a więc większą zawartość cząstek gazu na jednostkę objętości, ale zato słabsze działanie jonizacyjne promieni słonecznych. W kierunku wyższych warstw natomiast procentowa zawartość jonów rośnie, lecz na znacznych wysokościach pomimo to zawartość jonów zaczyna maleć z powodu małej gęstości gazu. Istnieje więc pewien słój o największej gęstości jonów, poniżej i powyżej którego przewodność jonosfery jest mniejsza.

Na podstawie tego, co powiedziano, wpływ jonosfery na rozchodzenie się fal możemy sobie wyjaśnić w sposób następujący: Wskutek jonizacji górnej warstwy atmosfery stają się półprzewodnikami, w których obok prądów

<sup>1)</sup> Ściśle biorąc, jonizacja dochodzi aż do powierzchni ziemi, lecz gęstość jonów w dolnych warstwach atmosfery jest tak mała, iż można jej nie brać pod uwagę przy rozpatrywaniu rozchodzenia się fal elektromagnetycznych.

przesunięcia powstają również prądy przewodzenia, jednakże prądy te nie są prądami kondukcyjnymi, jak w metalach lub ziemi, lecz prądami *konwekcyjnymi*, związanymi z ruchem cząstek zjonizowanych. Jeżeli gęstość prądu konwekcyjnego w jonosferze wynosi  $j$ , wówczas do fali płaskiej możemy zastosować równania (patrz § 19):

$$4\pi j + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}. \quad (434)$$

Jeżeli gaz jest dostatecznie rozrzedzony, tak, iż można pominąć kolejne zderzenia między poruszającymi się jonami, gęstość prądu konwekcyjnego wyrazi się równaniem:

$$j = q v = N e v, \quad (a)$$

w którym  $N$  jest gęstością elektronów na  $1 \text{ cm}^3$ ,  $e$  jest ładunkiem 1 elektronu ( $e = 4,774 \cdot 10^{-10}$  cgs. e. st.), zaś  $v$  — średnią szybkością ruchu elektronów, wywołanego działaniem pola elektrycznego.

Szybkość nadaną elektronom przez pole elektryczne o natężeniu  $\mathcal{E}$  znajdziemy z prawa o zachowaniu energii pod postacią równania:

$$e \mathcal{E} = m p = m \frac{dv}{dt}, \quad (b)$$

które wyraża, że iloczyn z ładunku elektronu  $e$  i natężenia pola  $\mathcal{E}$  równy pracy wykonanej przez pole elektryczne poruszające elektron, równa się iloczynowi z masy elektronu  $m = 9 \cdot 10^{-28}$  i przyspieszenia  $p = \frac{dv}{dt}$ , nadanego tej masie przez pole elektryczne, czyli energii kinetycznej udzielonej elektronowi.

Zakładając sinusoidalny przebieg pola:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

znajdziemy z równania (b):

$$dv = \frac{e}{m} \mathcal{E}_0 \sin \omega t dt, \quad (c)$$

czyli:

$$v = \frac{e \mathcal{E}_0}{m} \int \sin \omega t dt = -\frac{e}{m \omega} \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (d)$$

Podstawiając tę wartość do równania (a), otrzymamy:

$$j = -N e \frac{e}{m \omega} \mathcal{E}_0 \cos \omega t = -\frac{N e^2}{m \omega} \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (e)$$

Gdy uwzględnimy, że

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \omega \mathcal{E}_0 \cos \omega t,$$

otrzymamy pierwsze z równań maxwellovskich dla fali płaskiej w jonosferze w postaci:

$$-\frac{4\pi N e^2}{m\omega} \zeta_0 \cos \omega t + \varepsilon \omega \zeta_0 \cos \omega t = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x},$$

czyli:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \left( \varepsilon - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2} \right) \omega \zeta_0 \cos \omega t = \left( \varepsilon - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (434a)$$

Widzimy, że równanie to posiada taką samą postać, jak odpowiednie równanie (350) dla dielektryka doskonałego. Różnica polega jedynie na tem, że zamiast stałej dielektrycznej  $\varepsilon$  wprowadzić musimy wielkość zmienną, będącą funkcją gęstości jonów  $N$  i częstotliwości fali:

$$\varepsilon' = \varepsilon - \frac{4\pi e^2}{m} \cdot \frac{N}{\omega^2} = \varepsilon_{\text{cgs. e. st.}} - 81 \frac{N}{f_{\text{kc/s}}^2}. \quad (434b)$$

Wobec tego szybkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w jonosferze wyrazić można równaniem (353) w postaci:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \left( \varepsilon - \frac{4\pi e^2}{m} \cdot \frac{N}{\omega^2} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{\text{cgs. e. st.}} \left( \varepsilon_{\text{cgs. e. st.}} - 81 \frac{N}{f_{\text{kc/s}}^2} \right)}}, \quad (435a)$$

z którego wynika bardzo ważny wniosek, a mianowicie, że *jonizacja górnej warstwy atmosfery pozornie zmniejsza stałą dielektryczną powietrza, a więc zwiększa szybkość rozchodzenia się fal.*

Ten przyrost szybkości jest tem większy, im mniejsza jest częstotliwość fali. Wobec tego, że — jak powiedzieliśmy poprzednio — jonizacja do pewnej granicy rośnie ze wzrostem wysokości nad powierzchnią ziemi, fala więc, przenikając ku górze, przechodzi kolejno do warstw o coraz większej szybkości rozchodzenia się (o coraz mniejszej gęstości optycznej). A więc fala ta, o ile nie pada prostopadle do jonosfery, do pewnej granicy musi ulegać kolejno coraz to większemu załamaniu się od prostopadłej w punkcie padania (patrz § 20). To załamywanie się, jak wynika z równania (435), będzie tem silniejsze, im mniejsza jest częstotliwość fali.

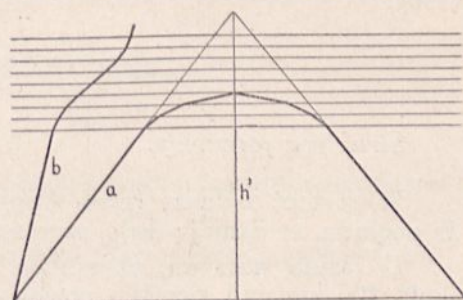
Zachodzą teraz dwie możliwości:

a) Gdy częstotliwość jest stosunkowo mała, to skutkiem silnego załamania kąta padania szybko stanie się stycznym do warstw, które fala napotyka, a więc zgodnie z prawem Brewstera część energii ulegnie załamaniu z po-

wrotem w kierunku ośrodka optycznie gęstszego, a więc ku dołowi (rys. 219, krzywa a). Ten promień załamany będzie teraz załamywał się, kolejno zbliżając się coraz bardziej ku prostopadłej padania, aż w końcu opuści jonosferę pod kątem równym pierwotnemu kątowi padania. Możemy więc wyobrazić sobie, że promień odbił się od jonosfery na pewnej wysokości  $h'$ , większej od rzeczywistej wysokości, którą osiągnął. Ta pozorna wysokość, zwana wysokością skuteczną jonosfery, w myśl tego, co powiedziano powyżej, jest funkcją zarówno częstotliwości fali, jak i jej kąta padania.

b) Przy odpowiednio większej częstotliwości fali jej współczynnik załamania w jonosferze jest tak mały, że trafia ona na warstwę o maksymalnej jonizacji pod stosunkowo dużym kątem, tak, iż promień przenika tę warstwę, załamując się następnie kolejno i zbliżając się coraz bardziej ku prostopadłej padania, a więc na ziemię już nie powróci (rys. 219, krzywa b).

Z dyskusji równania (435) wynika dalej, że szybkość rozchodzenia się fali w jonosferze może stać się dowolnie wielka, a nawet nieskończenie wielka, gdy będzie  $\epsilon' = 0$ . Fakt ten wymaga pewnego omówienia, gdyż przypuszczenie, że energia przenosi się z szybkością większą, niż szybkość światła, byłoby niezgodne z dotychczasowymi zasadami fizyki.



Rys. 219.

Otóż w rozchodzeniu się fal w jonosferze należy rozróżnić dwa zjawiska:

a) Szybkość zmian fazy przesuwałcej się fali wzdłuż jej drogi, czyli t. zw. *szybkość fazową*  $u_f$ , która może być nawet nieskończenie wielka.

b) Szybkość posuwania się energii impulsu, która udziela się wytrąconym z równowagi elektronom i za ich pośrednictwem przenosi się w ośrodku. Szybkość ta, zwana *szybkością grupową*  $u_g$ ,<sup>1)</sup> jest mniejsza zarówno od szybkości fazowej, jak i — naogół — od szybkości światła.

Między szybkością fazową i grupową istnieje związek:

$$u_f \cdot u_g = c^2. \quad (436)$$

Energja, dochodząca do odbiornika po załamaniu się w jonosferze, porusza się więc z szybkością grupową, a nie z szybkością fazową. Stąd więc pomiary wysokości jonosfery, polegające na pomiarze czasu, który upłynął między wysłaniem impulsu, a jego powrotem, dają pozorne wysokości znacznie większe od rzeczywistych jeżeli do obliczeń wprowadzimy szybkość światła, zamiast szybkości grupowej.

<sup>1)</sup> Nazwa pochodzi stąd, że jest to szybkość, z jaką przenosi się nie poszczególna fala, lecz impuls energii, złożony z pewnej grupy (ciągu) fal.

Co do rzędu wielkości tych zjawisk może nas zorientować następujące przeliczenie:

Jeżeli przyjmiemy:  $N = 10^5$  jonów na  $1 \text{ cm}^3$ ,  $\mu = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}$  cgs. e. st.,  
 $\epsilon = 1$ ,  $f = 3000 \text{ kc/s}$  ( $\lambda = 100 \text{ m}$ ), to otrzymamy szybkość fazową:

$$u_f = \frac{1}{\sqrt{\mu \left( \epsilon - 81 \frac{N}{f^2} \right)}} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{\sqrt{1 - 81 \frac{10^5}{9 \cdot 10^{20}}}} \simeq 9,5 \cdot 10^{10} \text{ cm/s.}$$

Odpowiadająca jej szybkość grupowa wyniesie zgodnie z równaniem (436):

$$u_g = \frac{c^2}{u_f} \simeq 0,95 \cdot 10^{10} \text{ cm/s.}$$

### Struktura jonosfery.

Większość badaczy (prof. Appleton, T. L. Eckersley i inni) skłania się do poglądu, że istnieją dwie, wyraźnie rozdzielone warstwy jonosfery:

1) Dolna warstwa, oznaczona literą  $E$ , znajdująca się na wysokości około 100 km nad ziemią i posiadająca dostateczną przewodność jedynie w dzień, tak, iż w ciągu nocy wpływ jej jest bardzo mały.

2) Górna warstwa, t. zw. warstwa  $F$ , znajdująca się na wysokości 180 do 250 km, utrzymuje się w ciągu całej doby, zmienia tylko swoją przewodność, zależnie od stanu naświetlenia.

Niektórzy badacze<sup>1)</sup> rozróżniają nawet w warstwie  $F$  dwa różne słoje, z których dolny  $F_1$  jest bardziej zależny od dziennych zmian naświetlenia, niż wyższy  $F_2$ .

Warstwy jonosfery charakteryzują się tak zwaną *częstotliwością krytyczną prostopadłego padania*. Jest to największa częstotliwość, przy której promień padający prostopadle na daną warstwę jonosfery już nie powraca na ziemię, a więc wnika w jonosferę bez odbicia. Wysokość skuteczna, podawana dla poszczególnych warstw, odnosi się do częstotliwości leżących bezpośrednio poniżej częstotliwości krytycznej.

Według ostatnich badań w St. Zjedn. Ameryki (Kirby, Berkner i Stuart), średnie wartości częstotliwości krytycznej są następujące:

a) Dla warstwy $E$ :	lato:	wiosna i jesień:	zima:
rano	3200 kc/s	2900 kc/s	2000 kc/s
w południe	3400 kc/s	3200 kc/s	3000 kc/s
wieczorem	3300 kc/s	2800—3000 kc/s	2000 kc/s

b) Warstwa  $F_1$  posiada z reguły 2 częstotliwości krytyczne, nieznacznie różniące się od siebie.

<sup>1)</sup> M. i S. G. Kirby, L. V. Berkner i D. M. Stuart, Studies on the Ionosphere and their Application to Radio Transmission. Proc. I. R. E. 20, str. 481—521, r. 1934.

Średnia wartość częstotliwości krytycznej jest dla tej warstwy w lecie rzędu 4500 kc/s, w zimie zaś około 3800 kc/s.

c) Dla warstwy  $F_2$  częstotliwość krytyczna jest w lecie rzędu 5000 kc/s, w zimie waha się ona od 8000 do 9500 kc/s. Wynika z tego, że warstwa ta zachowuje się odwrotnie, niż warstwy  $E$  i  $F_1$ , których częstotliwości krytyczne są w lecie większe, niż w zimie, co jest zrozumiałe wobec większego natężenia promieniowania słonecznego. To odmienne zachowanie się warstwy  $F_2$  nasuwa przypuszczenie, że jonizacja jej jest pochodzenia innego, niż słoneczne.

Jak stwierdzają obserwacje, granice warstw  $F_1$  i  $F_2$  nie są zbyt wyraźne, a czasami nawet granice te zlewają się z sobą tak, że tworzy się tylko jedna warstwa.

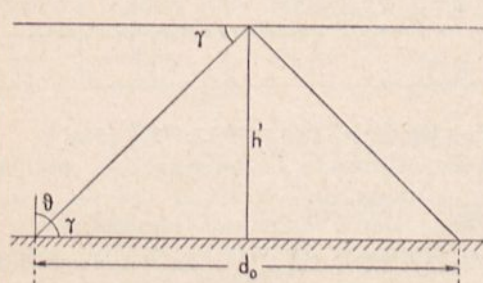
Gęstość jonizacji, według T. W. Eckersley'a jest w poszczególnych warstwach następującego rzędu wielkości:

- w warstwie  $E$  —  $N \cong 10^5$  jonów/cm<sup>3</sup>
- w warstwie  $F_1$  —  $N \cong 3 \cdot 10^5$  „
- w warstwie  $F_2$  —  $N \cong 9 \cdot 10^5$  „

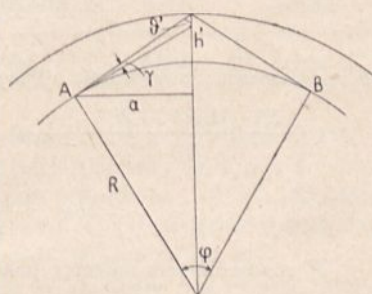
Wielkości te oczywiście wahają się w dość znacznych granicach zależnie od pory dnia i roku.

*Zachowanie się jonosfery wobec różnych częstotliwości przy różnych kątach padania.*

Z tego, co powiedziano wynika, że fale o częstotliwości mniejszej od krytycznej również mogą ulec prostopadłemu odbiciu od jonosfery. Fale natomiast o częstotliwościach większych praktycznie nie ulegają odbiciu, lecz załamaniu, i to przy kątach tem większych (licząc od prostopadłej w punkcie padania), im większa jest częstotliwość fali. Każdą więc częstotliwość fali charakteryzuje w stosunku do danej warstwy jonosfery ( $E$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ) pewien kąt padania, od którego począwszy następuje załamanie ku ziemi (poniżej tego kąta występuje przenikanie przez warstwę). Kąt ten nazywamy *kątem granicznym* dla danej częstotliwości.



Rys. 220-a.



Rys. 220-b.

Krytyczny kąt padania i odpowiadająca mu pozorna wysokość odbicia wyznaczają *najmniejszą odległość*, na której fala o danej długości przy danym stanie jonosfery może powrócić na ziemię. Odległość tę nazywamy *odległością uskосу fali* (ang. skip distance). Na podstawie rys. 220-a łatwo

obliczyć odległość uskoku (nie uwzględniając krzywizny ziemi), jako równą:

$$d_0 = 2 h' \operatorname{ctg} \gamma = 2 h' \operatorname{tg} \vartheta' . \quad (437)$$

Dla dokładniejszych obliczeń należy uwzględnić krzywiznę ziemi.

Wówczas odległość  $d_0$  jest łukiem wielkiego koła, wyrażonym wzorem (rys. 220 b):

$$d_0 = R \varphi , \quad (437 a)$$

w którym  $R \cong 6400$  km jest promieniem ziemskim, a kąt  $\varphi$  wyraża się funkcją <sup>1)</sup>

$$\sin \varphi \cong \frac{2 h'}{R} \operatorname{tg} \vartheta' , \quad (437 b)$$

w której  $h'$  jest skuteczną wysokością jonosfery w km, a  $\vartheta'$  granicznym kątem padania.

Z powyższego wynika, że odległość uskoku rośnie z częstotliwością fali, gdyż kąt graniczny rośnie z częstotliwością. Największa częstotliwość, która zdoła jeszcze powrócić na ziemię, będzie ta, dla której kąt graniczny jest równy zero (gdy promień pada stycznie do jonosfery). Częstotliwość tę, powyżej której przy danych warunkach istniejących w jonosferze łączność jest niemożliwa, nazywamy *częstotliwością graniczną*.

<sup>1)</sup> Przeliczenie (rys. 220 b):

$$R + h' = R \cos \frac{\varphi}{2} + a \operatorname{ctg} \vartheta' ,$$

ponieważ zaś

$$a = R \sin \frac{\varphi}{2} ,$$

więc

$$\frac{R + h'}{R} = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \vartheta' .$$

Po podniesieniu do kwadratu otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{R^2 + 2 R h' + h'^2}{R^2} &= \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg}^2 \vartheta' + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \vartheta' = \\ &= \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg}^2 \vartheta' + \sin \varphi \operatorname{ctg} \vartheta' . \end{aligned}$$

W równaniu tem możemy pominąć  $h'^2$  wobec  $(R^2 + 2 R h')$ , a dla stosunkowo niewielkich kątów  $\varphi$  i dostatecznie dużych  $\vartheta$ , napisać  $\cos^2 \frac{\varphi}{2} \cong 1$ , oraz pominąć  $\sin^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg}^2 \vartheta'$  wobec  $\sin \varphi \operatorname{ctg} \vartheta'$ , skąd otrzymamy uproszczenie:

$$\frac{2 h'}{R} \cong \sin \varphi \operatorname{ctg} \vartheta' ,$$



Podana tu krótka charakterystyka jonosfery prowadzi do następujących bardzo ważnych wniosków:

1) Małe częstotliwości (fale długie) mają większy współczynnik załamania i mniejszy kąt graniczny. Ponadto pozorne odbicie może nastąpić przy mniejszej gęstości elektronów.

2) Wielkie częstotliwości (fale krótkie) wymagają większej gęstości elektronów i większych kątów padania. Wnikają one naogół głębiej w jonosferę, niż fale długie.

3) Im dłuższa jest fala (mniejsza częstotliwość), tem mniejsza jest odległość uskoku.

4) Przy tej samej długości fali odległość uskoku jest mniejsza w dzień, niż w nocy i mniejsza w lecie, niż w zimie.

Doświadczenia wskazują, zgodnie zresztą z temi rozważaniami, że fale dłuższe (mniej więcej ponad  $f = 3000$  kc/s,  $\lambda = 100$  m) odbijają się już od warstwy *E*, a więc w dzień ta warstwa jest dla nich decydująca. Natomiast fale krótsze przenikają tę warstwę nawet w dzień i odbicie ich następuje dopiero w warstwie *F*. Wobec tego jednakże, że muszą one dwukrotnie przeniknąć tę warstwę, zanim dojdą do miejsca odbioru, stan warstwy *E* posiada dla ich rozchodzenia się pierwszorzędne znaczenie.

T. L. Eckersley podaje związek między częstotliwością krytyczną dla warstwy *E*, a częstotliwością graniczną, ujęty w następującej tabelicy:

<i>f</i> krytyczne. dla <i>E</i> kc/s	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000
<i>f</i> graniczne kc/s	9800	11200	13800	15900	17800	19750	21750	23450	25650	27500	29500

Jeżeli zaś częstotliwość krytyczna dla warstwy *E* wynosi 3000 kc/s to poszczególnym częstotliwościom odpowiadają następujące kąty graniczne:

<i>f</i> kc/s	5000	6000	7500	10000	15000	20000
$\vartheta^{\circ}$	54,5	61,5	68,4	84,	84,3	—

Pierwsza z tych tablic pozwala nam zorientować się z pewnym przybliżeniem, jaka największa częstotliwość przy badanym stanie warstwy *E* jeszcze może być użyta do korespondencji na duże odległości. I tak, zgodnie z poprzednimi danymi, w zimie rano i wieczorem częstotliwość graniczna będzie 9800 kc/s (30,6 m), w lecie w południe 23450 kc/s (12,8 m).

Z drugiej zaś tablicy, podanej dla średnich warunków dziennych, może my obliczyć odległość uskoku, posługując się wzorami (437) i (437 a). I tak np. przy stanie jonizacji warstwy *E*, odpowiadającym częstotliwości krytycznej 3000 kc/s częstotliwość 5000 kc/s ( $\lambda = 60$  m) da nam odległość uskoku (jeżeli dla warstwy *F*, przyjmujemy  $h' = 200$  km):

$$d_0 = 2 h' \operatorname{tg} \vartheta = 2 \cdot 200 \cdot \operatorname{tg} 54,5^{\circ} = 400 \cdot 1,4 = 560 \text{ km.}$$

W tych samych warunkach obliczymy odległość uskoku dla fali 10 000 kc/s ( $\lambda = 30$  m) przy pomocy wzorów (437 a) i (437 b).

$$\sin \varphi = \frac{2 \cdot 200}{6400} \cdot \operatorname{tg} 75,5^\circ = 0,242,$$

a więc

$$\varphi = 14^\circ = \pi \cdot \frac{14}{180} = 0,244 \text{ radjana.}$$

Stąd znajdziemy odległość uskoku

$$d_0 = 6400 \cdot 0,244 = 1560 \text{ km.}$$

## 25. Straty energii fal przestrzennych.

Fale elektromagnetyczne nie załamują się w jonosferze bez strat, elektrony bowiem są pobudzane do drgań przez pole fali. Wykonywując zaś drgania, popierwsze promieniują one fale wtórne, niekoniecznie powracające na ziemię, powtórę zaś podczas tego ruchu drgającego zderzają się z cząstkami gazu, które jonizują i oddają im swoją energię kinetyczną. Straty energii skutkiem zderzeń będą tem większe, im więcej cząstek znajduje się w jonosferze, a więc im większe ciśnienie w niej panuje. Stąd wniosek, że największe straty energii będą występowały w warstwie *E*.

Straty są tem większe, im mniejsza jest częstotliwość fali, gdyż przy bardzo wielkich częstotliwościach elektrony, drgając z pewną szybkością, przebywają w ciągu jednego okresu krótszą drogę, niż przy częstotliwościach mniejszych, a więc drgają z mniejszą amplitudą. Stąd mniejsze jest prawdopodobieństwo zderzeń z jonami.

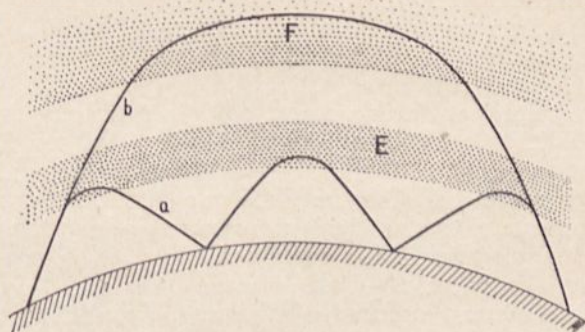
Tłumienie fal w jonosferze zależy od kąta padania. Im mniejszy jest ten kąt, tem dalej fala wnika w jonosferę, a więc tem dłuższą drogę musi odbyć promień, zanim wydobędzie się z niej z powrotem. Ponieważ jednakże w dalszych warstwach jonosfery panuje mniejsze ciśnienie i zderzenia z cząstkami gazu są rzadsze, a więc i straty są stosunkowo mniejsze.

Jak wynika z powyższego, w gorszym położeniu pod względem tłumienia, znajdują się fale długie, szczególnie w dzień, gdy ich odbicie następuje od warstwy *E* o dużym ciśnieniu atmosferycznym i to pod stosunkowo dużymi kątami.

Straty przy rozchodzeniu się na większe odległości są zwiększone jeszcze przez zjawisko kilkukrotnego odbijania się od ziemi. Promień bowiem odbity od jonosfery, trafiając na ziemię, ulega ponownemu odbiciu, traci przytem jednak część swojej energii, gdyż odbicie to, jak wiemy, ze względu na niedoskonałą przewodność ziemi, nie jest zupełne. Szczególnie niekorzystne jest odbicie, gdy promień pada prawie stycznie do ziemi, co występuje na odległości około 2000 km, wówczas bowiem odbywa dłuższą drogę wzdłuż powierzchni ziemi.

Dlatego dla komunikacji na duże odległości szczególnie ważne jest promieniowanie, dochodzące do miejsca przeznaczenia możliwie bez odbić od ziemi i odbywające drogę w jonosferze z możliwie małymi stratami.

Rys. 221 daje porównanie rozchodzenia się dziennego (a) i nocnego (b) fali niezbyt długiej. W dzień fala długa odbija się kilkakrotnie od warstwy *E*, zanim dojdzie do odbiornika, podczas gdy w nocy, przeszedłszy z pewnymi stratami przez tę warstwę, odbywa resztę drogi w korzystniejszych warunkach w warstwie *F*. Dlatego na falach długich stwierdzić można tak duże różnice siły odbioru między dniem i nocą.



Rys. 221.

Pochłanianie energii w jonosferze zależy w dużym stopniu od kąta padania fali. Dotychczasowe obserwacje wskazują na to, że pochłanianie jest najmniejsze przy kącie około  $35^{\circ}$ .

## 26. Klasyfikacja fal w zależności od charakterystyki rozchodzenia się.

Z rozważań objętych poprzednimi paragrafami wynika, że zasięg fali powierzchniowej jest tem większy, im mniejsza jest częstotliwość, oraz że odległość uskoku rośnie z częstotliwością. A więc najdłuższe fale rozchodzą się przede wszystkim dzięki fali powierzchniowej, dla fal krótszych natomiast zasięg bezpośredni (fali powierzchniowej) jest ograniczony, fale zaś przetrzonne odbijają się od jonosfery i powracają na ziemię na znacznych odległościach. A więc działania fali powierzchniowej i fali odbitej są różne na różnych częstotliwościach i zależnie od tego fale radiokomunikacyjne możemy rozbić na następujące zasadnicze grupy (C. C. I. R. 1929):

1) *Fale długie*  $30000 \div 3000$  m ( $10 \div 100$  kc/s) które dzięki małemu pochłanianiu i skutecznemu uginaniu rozchodzą się na znaczne odległości, a promieniowanie odbite posiada znaczenie drugorzędne. Zasięg tych fal maleje wyraźnie w miarę wzrostu częstotliwości.

2) *Fale średnie*  $300 \div 200$  m ( $100 \div 1500$  kc/s), przy których również wykorzystuje się przede wszystkim promieniowanie bezpośrednie, lecz promieniowanie odbite daje się odczuć nawet w dzień i pojawia się nawet na niewielkich odległościach od stacji. Ze względu na stosunkowo duże tłumienie fali powierzchniowej w tym zakresie fal (patrz rys. 216) promieniowanie odbite w nocy (od znacznie wyższych warstw *F*) znacznie zwiększa zasięg fal tego rzędu poza granice zasięgu bezpośredniego.

3) *Fale pośrednie*  $200 \div 50$  m ( $1500 \div 600$  kc/s). Mniejsze częstotliwości tego zakresu zachowują się podobnie jak fale średnie, natomiast w miarę zbliżania się do górnej granicy tych częstotliwości zasięg bezpo-

średni znaczenie się skraca, a odległość uskoku rośnie, tak iż pojawiają się czasami przerwy w zasięgu, t. zw. *obszary milczenia*. W nocy średnie fale tego zakresu, a w dzień krótsze fale, dają zasięgi odbite rzędu od kilkuset km do kilku tysięcy km.

Nad morzem, dzięki małemu pochłanianiu przez wodę morską dłuższe fale tego zakresu dają pewne zasięgi rzędu 200 ÷ 300 km i dlatego są stosowane do celów radiotelefonji na małych statkach.

4) *Fale krótkie* 50 ÷ 10 m (6000 ÷ 30000 kc/s). Zasięg bezpośredni tych fal jest bardzo mały, odległość uskoku bardzo duża. Fale rzędu 30 m (10000 kc/s) dają bardzo duże zasięgi (kilkunastu tysięcy km) w nocy, a fale rzędu 15 m (20000 kc/s) — w dzień (w nocy nie powracają one na ziemię). Jednakże dwie fale na dobę naogół nie zapewniają łączności 24 godzinnej, konieczne bowiem jest stosowanie jednej lub dwu fal dla okresów przejściowych (wschód i zachód słońca). W zimie należy stosować fale nieco dłuższe, w lecie — fale krótsze.

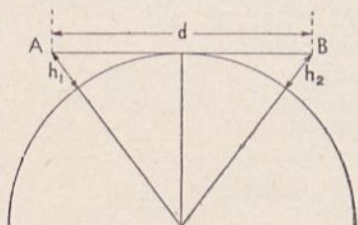
*Obszary milczenia są dla fal krótkich zjawiskiem typowym*, tak iż na łączność ciąglą na dowolne odległości w granicach zasięgu liczyć nie można.

Komunikacja przy pomocy fal krótkich na duże odległości napotyka na szczególne trudności w kierunku wschód — zachód, gdyż na części drogi panuje wówczas dzień, a na części noc. Prostsze są zjawiska, gdy łączność odbywa się w kierunku północ — południe, wówczas bowiem mamy na całej drodze dzień albo noc, spotykamy się tu jedynie z przejściem od zimy do lata lub naodwrot. Szczególnie kapryśne są połączenia, przy których fale przechodzą przez bieguny magnetyczne.

Chociaż na falach krótkich obserwuje się wielokrotnie bardzo duże zasięgi przy bardzo małych mocach, to jednak ze względu na duże wahania natężenie pola (patrz niżej) dla korespondencji pewnej stosuje się przeważnie moce rzędu dziesiątków kW.

Najkrótsze fale tego zakresu [poniżej 13 m (23000 kc/s)] są bardzo kapryśne, odbicie ich następuje bowiem tylko przy silnej koncentracji elektronów w jonosferze, a więc tylko przy sprzyjających okolicznościach mogą one być wykorzystane dla komunikacji na wielkie odległości.

5) *Fale bardzo krótkie* [poniżej  $\lambda = 10$  m, (30000 kc/s)] dzielą się na fale metrowe, decymetrowe i centymetrowe. Najdłuższe fale tego zakresu (10 ÷ 7 m) zachowują się czasami jak fale krótkie, dając w dzień odbicie na duże odległości (szczególnie w kierunku północ — południe). Naogół jednak wykorzystuje się tylko zasięg bezpośredni tych fal, który jest bardzo mały ze względu na silne pochłanianie ich przez ziemię i nieznaczne uginanie.



Rys. 222.

Natomiast znaczne stosunkowo zasięgi tych fal stwierdza się przy t. zw. *geometrycznej widoczności*, wyrażonej wzorem (rys. 222):

$$d_m = \sqrt{2R} (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \approx 3550 (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}),$$

czyli

$$d_{km} = 3,55 (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})_m, \quad (438)$$

w którym  $R$  jest promieniem kuli ziemskiej ( $R \cong 6,4 \cdot 10^6$  m), zaś  $h_1$  i  $h_2$  są wysokościami nadajnika i odbiornika nad ziemią, wyrażonemi w metrach.

I tak, jeżeli nadajnik jest ustawiony na wysokości  $h_1 = 400$  m, a odbiornik na wysokości  $h_2 = 900$  m nad poziomem, a teren między obiema stacjami jest płaski, zasięg optyczny między temi stacjami wynosi:

$$d = 3,55 (\sqrt{400} + \sqrt{900}) = 3,55 \cdot 50 = 177,5 \text{ km.}$$

Zasięgi te otrzymuje się nawet przy bardzo małych mocach, a to głównie dzięki możności stosowania reflektorów o niewielkich wymiarach. Umieszczenie nadajnika i odbiornika na wysokości kilku długości fali nad ziemią znacznie zwiększa zasięg tych fal.

Fale bardzo krótkie zachowują się więc zasadniczo jak promienie świetlne, rozchodząc się po liniach prostych. Są jednak zdolne omijać przeszkody nie większe, niż rząd długości fali, a w szczególności przechodzą przez mgłę i dym.

Stwierdzono również znaczną zdolność uginania się tych fal nad morzem, dzięki czemu otrzymano zasięgi, przewyższające ich zasięg optyczny o kilkadziesiąt km.

## 27. Zjawiska towarzyszące promieniowaniu odbitemu.

### *Wahania odbioru. Zanik.*

Warstwa Heaviside'a nie posiada bynajmniej struktury jednolitej i stałej, przeciwnie — ulega ona stałej fluktuacji, a poszczególne promienie tej samej fali, przechodząc równocześnie przez jonosferę, nie zawsze załamują się ściśle w ten sam sposób.

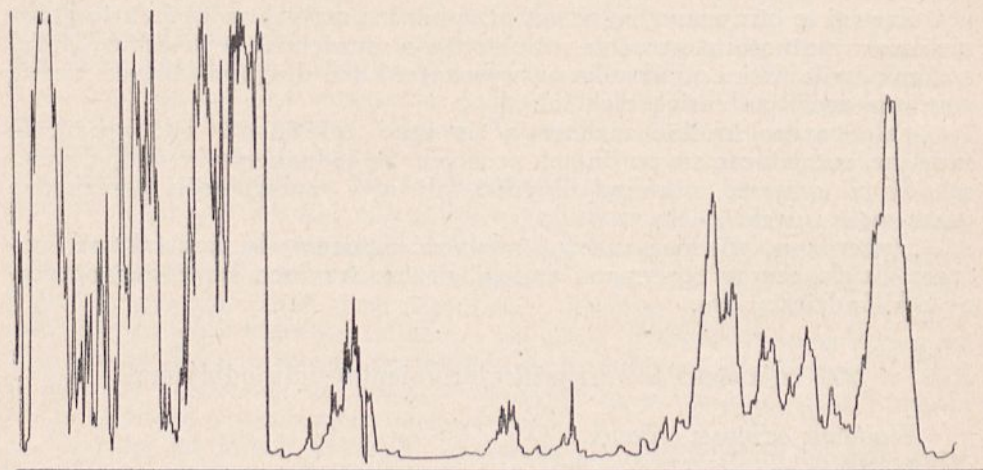
Ponadto fale, promieniowane z anteny pod różnymi kątami, odbijają się też pod różnymi kątami i w ten sposób w drodze między stacją nadawczą i odbiorczą jedne promienie odbijają się zaś tylko raz, inne zaś mogą przebiec kilkakrotnie przestrzeń między jonosferą i ziemią. Mogą więc dojść do stacji odbiorczej nie tylko z różnym tłumieniem, ale — przebywając drogi o różnych długościach — nie zawsze po powrocie na ziemię spotykają się w tej samej fazie. Jest oczywiste, że skoro to przesunięcie faz wyniesie  $180^\circ$  czyli  $\lambda/2$ , następuje osłabienie odbioru, a nawet — przy równych amplitudach dwu spotykających się w ten sposób promieni — zupełny zanik odbioru.

Te wahania siły odbioru, a w szczególności zjawisko *zaniku* (ang. fading) są typowe dla promieniowania odbitego. Wobec tego, że zanik występuje każdorazowo, gdy spotkają się dwa promienie różniące się o pół długości fali, zjawisko to powtarza się w tem mniejszych odstępach czasu, im krótsza jest fala. Dlatego też na falach średnich spotykamy czasami okresy zaniku kilkuminutowe, im zaś fale są krótsze, tem szybsze są przejścia siły odbioru od maximum do minimum i naodwrot.

Typowy przebieg zaniku na krótkiej fali radjofonicznej (rzędu 300 m) mamy na rys. 223.

Zanik często posiada charakter *selektywny* — przy nieznacznej różnicy w częstotliwościach fal (100 do 1000 okresów) zjawisko to już nie wy-

stępuje równocześnie. Zanik selektywny pociąga za sobą silne zniekształcenie w odbiorze radjotelefonicznym, tłumiąc pewne częstotliwości w zakresie widma modulacji fali odbieranej i powodując interferencję między poszczególnymi falami bocznymi, dochodzącymi po różnych drogach do odbiornika. Szczególnie przykre są zniekształcenia, spowodowane przez zanik selektywny, gdy częstotliwość fali nośnej nie jest stała, lecz ulega przypadkowej modulacji częstotliwości<sup>1)</sup>.



Rys. 223. (Według automatycznej rejestracji).

Zanik selektywny wykorzystano dla zwalczania zaniku przy odbiorze telegrafji. A mianowicie stwierdzono, że fale telegraficzne modulowane dają pewniejszy odbiór, niż fale  $A_1$ , gdyż przynajmniej jedna z trzech fal promieniowanych nie zanika równocześnie z pozostałymi. Również i zjawisko niejednoczesności zaniku w przestrzeni pozwala nam w znacznym stopniu usprawnić odbiór. Buduje się w tym celu 3 anteny w odległości około 300 m jedna od drugiej, zasilając z każdej z nich oddzielny odbiornik, a po detekcji sprowadza się wszystkie sygnały do wspólnego obwodu małej częstotliwości (t. zw. diversity system).

Oprócz interferencji promieni przyczyną zaniku może być również działanie pola magnetycznego ziemi. Pole to powoduje rozszczepienie promienia elektromagnetycznego na 2 promienie<sup>2)</sup> o różnych szybkościach rozchodzenia się, różnych stopniach pochłaniania przez jonosferę i różnych kierunkach skręcania płaszczyzny polaryzacji (t. zw. promień właściwy i promień dodatkowy). Czasami jeden tylko z tych promieni wraca na zie-

<sup>1)</sup> Ciekawe szczegóły znajdują się w pracy O. Böhm'a „Ueber die Ausbreitung von Rundfunkwellen“ T. Z. Nr. 57, str. 200, r. 1931.

<sup>2)</sup> E. V. Appleton, Wireless Studies on the Ionosphere J. I. E. E. Wir. Proc. 7, str. 257, 1932.

mię, a czasem oba ulegają odbiciu. W każdym jednakże razie taki rozszczepiony promień powracający na ziemię ulega skręceniu płaszczyzny polaryzacji, dochodzącemu nieraz do  $70^\circ$ , wskutek czego pole elektryczne jest prawie poziome, a magnetyczne prawie pionowe. Rzecz oczywista, że w tych warunkach siła elektromotoryczna indukowana w antenie ustawionej pionowo jest bardzo mała i zjawisku skręcenia płaszczyzny polaryzacji towarzyszy zanik siły odbioru.

Szczególnie charakterystyczne są długotrwałe (czasami nawet kilkudniowe) okresy zaniku fal krótkich, wywołane wyjątkowo silnym działaniem jonizacyjnym słońca, połączonym z zaburzeniami w polu magnetycznym ziemi. Zjawiska te są znane pod nazwą *burz magnetycznych* i występują przeważnie w okolicach podbiegunowych, słabnąc w kierunku równika.

Zanikowi fal krótkich w czasie burz magnetycznych towarzyszy często polepszenie się siły odbioru na falach bardzo długich.

### *Echa.*

Drugim, poza zanikiem, zjawiskiem typowym dla rozchodzenia się odbitych fal krótkich jest t. zw. *zjawisko echa*. Polega ono na tem, że przy bardzo szybkim nadawaniu znaków tensam impuls pojawia się w odbiorniku dwa razy lub nawet kilkakrotnie w odstępach ułamków sekundy. Zjawisko to jest szczególnie przykre przy przesyłaniu obrazów, wywołując zacieranie się konturów rysunków, a w radiotelefonji jest źródłem dalszych zniekształceń.

Przyczyną echa bywa zazwyczaj to, że promieniowanie dochodzi do odbiornika albo z dwóch przeciwnych kierunków dokoła ziemi,<sup>1)</sup> albo też niektóre promienie kilkakrotnie okrążają kulę ziemską, zanim dojdą do anteny odbiorczej. Wreszcie przyczyną echa w bardzo małych odstępach czasu może być to, że poszczególne promienie dochodzą do odbiornika różnymi drogami. Echo może być również wywołane przez promień dodatkowy, powstający przy rozszczepieniu magnetycznym fal.

Echa, wywołane przez promieniowanie obiegające ziemię w kierunku przeciwnym, niż odbierane, można usuwać, stosując po stronie nadawczej i odbiorczej anteny jednokierunkowe z reflektorami. Natomiast echa, przychodzące z tego samego kierunku co sygnał, usunąć nie można.

Zaobserwowano również (Störmer, Appleton, v. d. Pol) echa pojawiające się dopiero po upływie kilku minut. Zjawiska te są bardzo rzadkie i tłumaczą je przeważnie odbiciem się fal poza atmosferę ziemską w przestrzeni międzyplanetarnej, chociaż pojawiają się również zdania, że przyczyną ich jest wyjątkowo silna jonizacja, powodująca bardzo małą szybkość grupową sygnału w jonosferze.

<sup>1)</sup> Gdy np. odbiornik znajduje się w odległości 6000 km od nadajnika, licząc na obwodzie koła wielkiego, to odległość w kierunku przeciwnym wynosi  $2\pi R - 6000 = 2\pi \cdot 6400 \text{ km} - 6000 \text{ km} = 34000 \text{ km}$ . Drogę tę promień przebędzie w przybliżeniu w czasie  $\frac{34000}{300000} \approx 0,11 \text{ sek.}$ , o tyle więc później dojdzie do odbiornika, niż promień biegnący bliższą drogą. W rzeczywistości różnica będzie jeszcze większa, gdyż liczyć należy drogę łamaną kilkakrotnych odbić między jonosferą i ziemią. Zjawiskiem echa zajmuje się T. L. Eckersley w pracy „Studies on Radio Transmission” I. E. E. Wir. Proc. 7. 1932, str. 137.

Echa krótkotrwałe pojawiają się zazwyczaj w lecie w czasie dni najdłuższych, a w zimie w czasie dni najkrótszych i to na szlakach, które przebiegają wzdłuż pól wielkich, przechodzących w pobliżu biegunów. Warunkiem bowiem dla kilkakrotnego okrążenia ziemi jest, by fala na całej drodze spotykała stan jonosfery umożliwiającą jej przejście.

#### *Zjawisko Dopplera.*

W okresach szybkich zmian stanu jonizacji warstwy Heaviside'a można zauważyć zjawisko, znane w akustyce pod nazwą zjawiska Dopplera. Polega ono na tem, że fale odbite pozornie zwiększają swoją częstotliwość, gdy droga ich nagle się skróci, zmniejszają zaś pozornie częstotliwość, gdy droga przebyta przez promień ulegnie nagle wydłużeniu.

Zjawisko Dopplera może być wywołane przez nagłe zmiany wysokości jonosfery, lub przez nagłe zwiększenie lub zmniejszenie się liczby odbić w jonosferze. Obserwowano zmiany częstotliwości, wywołane przez zjawisko Dopplera, rzędu  $0,1\%$ .

#### *Rozproszenie fal.*

Częstem zjawiskiem, obserwowanem przy odbiorze fal odbitych, są zmiany kierunku fali przychodzącej tak w płaszczyźnie poziomej, jak i pionowej. Zmiany kierunku w płaszczyźnie poziomej występują prawie wyłącznie w nocy i to silniej na falach długich, niż na krótkich i są zjawiskiem bardzo niepożądanem w radjojonometrii i przy odbiorze kierunkowym.

Zmiany kąta padania w płaszczyźnie pionowej spotyka się szczególnie przy odbiorze fal krótkich, gdzie składowa pozioma pola elektrycznego nieraz kilkakrotnie przewyższa składową pionową. Wskutek tego anteny odbiorcze o charakterystyce pionowej wybitnie płaskiej (poziomej) nie są pożądane, dają bowiem większe wahania siły odbioru.

### 28. Wzory na rozchodzenie się promieniowania odbitego na falach średnich i długich.

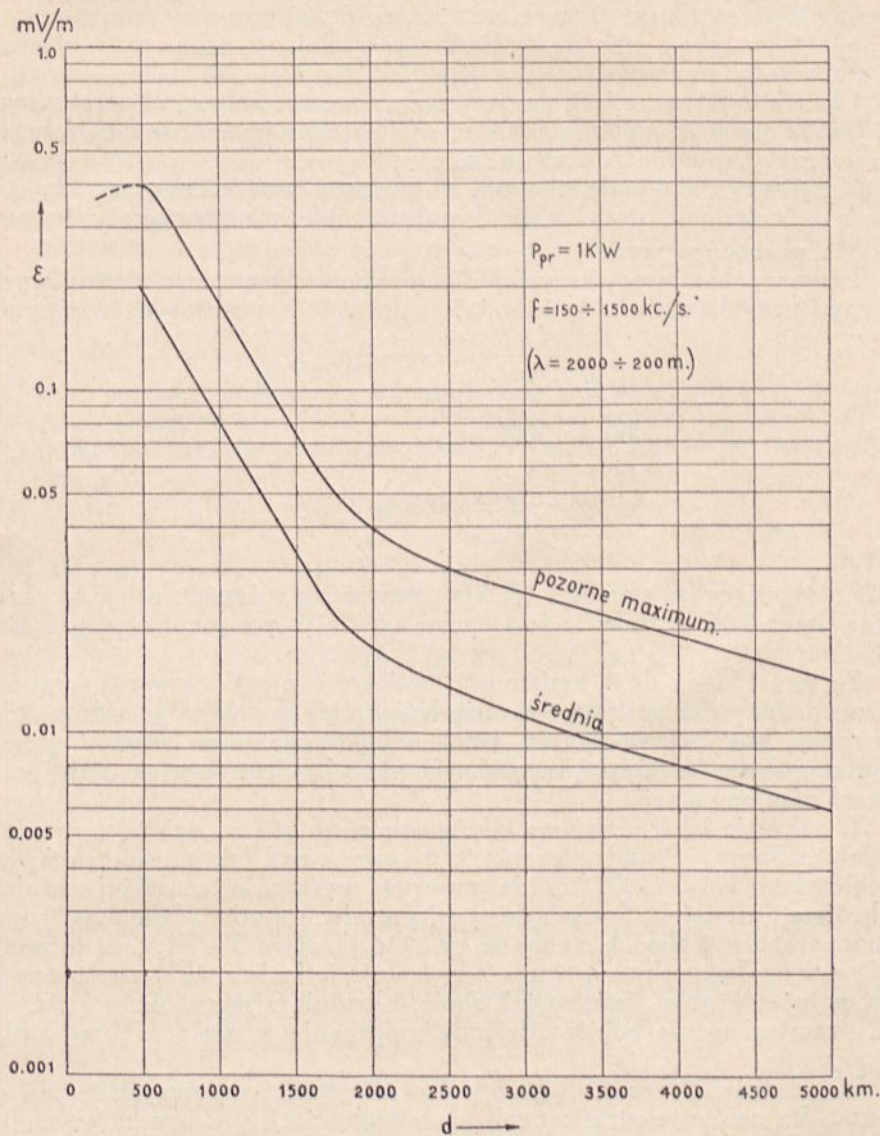
Ze względu na dużą zmienność zjawisk, związanych z promieniowaniem odbitem, trudno jest ustalić prawa, które pozwalałyby — chociaż z pewnym przybliżeniem — obliczyć moc niezbędną dla zapewnieniażądanego zasięgu. Systematyczne obserwacje promieniowania odbitego w zakresie fal średnich wykazały, że częstokroć wartości natężenia pola wahają się w stosunku 1 : 20, a poszczególne punkty pomiarowe zawierają się w granicach między krzywą dyfrakcyjną dla danej fali (patrz § 24) i wartościami odpowiadającymi rozchodzeniu się fali kulistej bez strat ( $C = \frac{300}{d_{km}} \sqrt{P_{kw}}$ , krzywa przerywana). W niektórych przypadkach otrzymuje się nawet szerszy zakres wahań.

Badania te doprowadziły jednakże do wypośredkowania pewnych krzywych orientacyjnych, pozwalających określić rząd wielkości pola elektrycznego, wytwarzanego przez daną moc na danej odległości podczas „nocy”<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Pod naszą szerokością geograficzną warunki „nocne” dla fal średnich panują prawie przez całą dobę. Wyjątek stanowi kilka godzin około południa w ciągu miesięcy letnich, a około 1 godziny w zimie.



Krzywe te mamy na rys. 224. Oparte są one na obserwacjach poczynionych w Europie, Z. S. R. R. i w Stanach Zjednoczonych A. P. Górna krzywa daje nam t. zw. *maximum pozorne* — tę wartość natężenia pola, którą fala przekracza jedynie w ciągu 5% czasu.



Rys. 224.

Jest to wartość średnia, która w poszczególnych przypadkach może się wahać w granicach od 1/3 wartości otrzymanej z krzywej, do 3-krotnej

wartości. Jeżeli więc z krzywej tej znajdziemy dla danej mocy i odległości natężenie pola  $\zeta = 1$  mV/m, to liczyć się musimy z tem, że możemy otrzymać pozorne maximum wartości pola zawarte w granicach od 0,3 mV/m do 3 mV/m.

Dolna krzywa daje *przypuszczalne średnie wartości* natężenia pola promienia odbitego. Jest to wartość, której pole normalnie nie przekracza w ciągu 50% czasu. Co do dokładności istnieją te same zastrzeżenia, co dla pozornego maximum.

Charakterystyczne jest, że podane krzywe nie zależą od częstotliwości. Nie jest to zupełnie ściśle, ale wobec wielkiej zmienności zjawisk zależności takiej praktycznie nie zdołano ustalić.

Krzywe rys. 224 podane są dla 1 kW. mocy promieniowanej. By otrzymać natężenie pola przy mocy dowolnej, należy otrzymane z krzywych wartości pomnożyć przez  $\sqrt{P_{kW}}$ .

Poszczególne części krzywej dla maximum pozornego można wyrazić wzorami przybliżonymi. I tak od 500 do 2000 km stosować można wzór:

$$\zeta \approx \sqrt{P_{kW}} \cdot e^{-0,00173 d_{km}} \text{ mV/m}, \quad (439)$$

w granicach zaś od 2000 do 5000 km:

$$\zeta \approx \frac{80}{d_{km}} \sqrt{P_{kW}} \text{ mV/m}. \quad (439a)$$

Przypuszczalne wartości średnie otrzymamy, mnożąc wartości maksymalne przez 0,45. Liczba ta jest oparta na statystyce pomiarów z ostatnich lat.

Ze względu na dużą zmienność, obliczenie promieniowania „nocnego” nie może służyć za podstawę do ustalenia *zasięgu roboczego* stacji. Służy ono raczej jako orientacja, na jakich odległościach i w jakim stopniu nasza stacja może zakłócać pracę obcych stacji. Jest to więc raczej *zasięg przeszkadzający* stacji.

W zakresie fal średnich spotykamy się również i w „dzień” z promieniowaniem odbitem. Promieniowanie to przeważa nad falą powierzchniową na odległościach 500 do 1000 km i ta przewaga występuje tem bliżej nadajnika, im krótsza jest fala. Średnią krzywą promieniowania „dziennego” opartą na pomiarach angielskich mamy na rys. 216 (krzywa X—X). Jest to wartość średnia dla całego roku, obserwacje wykazują jednakże, że w zimie otrzymujemy natężenia pola „dziennego” około 4-krotnie wyższe, niż w lecie. Naogół promieniowanie odbite „dziennie” wykazuje o wiele większą stałość, niż nocne.

W zakresie fal średnich promieniowanie odbite wykorzystane jest częstokroć dla celów telegraficznych na odległościach przekraczających 1000 km. a wahania odbioru pokonywa się przez dostateczną moc nadajnika i dostateczne wzmocnienie w odbiorniku, połączone z ograniczeniem prądu maksymalnego w przyrządach piszących (t. zw. ograniczniki prądu „limiters”).

W radjofonji natomiast, gdzie na pierwszym miejscu stawia się jakość odbioru, *zasięg użyteczny* (t. zw. po francusku „rayon d'action agréable”)

ogranicza się do odległości, na której pole fali odbitej nie przekracza 1/3 natężenia pola fali powierzchniowej, na większych bowiem odległościach pojawiają się nietylko wahania siły odbioru, ale i zniekształcenia skutkiem zaniku selektywnego. Zasięg ten waha się od 30 km (na falach rzędu 200 m) do 250 ÷ 300 km (fale rzędu 2000 m) i nie można go zwiększyć przez podwyższenie mocy stacji, gdyż stosunek natężeń obu pól jest niezależny od mocy.

Jedynym skutecznym środkiem, zwiększającym zasięg użyteczny stacji radjofonicznych, jest stosowanie anten lub układów anten o silnym promieniowaniu poziomym (t. zw. anteny przeciwzanikowe). Jeden z możliwych typów takiej anteny przeliczono w przykładzie na str. 269.

Wahania odbioru zwalczać można również przez zastosowanie w odbiornikach radjofonicznych samoczynnej regulacji siły odbioru. Są to jednak urządzenia, niestosowane w prymitywnych i tanich odbiornikach, których w radjofonji jest większość, a poza tym skuteczność tej regulacji zawodzi wobec zaniku selektywnego.

#### Przykład.

Mamy znaleźć maksymalne i średnie natężenie pola, jakie na odległości 1500 km wytworzy stacja radjofoniczna o mocy fali nośnej 120 kW w antenie.

Zakładając sprawność promieniowania  $\eta = 0,7$ , obliczymy moc wypromieniowaną:

$$P_{pr.} = 120 \cdot 0,7 = 84 \text{ kW}.$$

Z krzywej rys. 224 znajdujemy dla  $d = 1500$  km i mocy wypromieniowanej 1 kW maksymalne natężenie pola  $C_1 = 0,075$  mV/m, a stąd otrzymamy dla 84 kW:

$$C_1 = 0,075 \cdot \sqrt{84} \simeq 0,7 \text{ mV/m}.$$

Jednakże w myśl tego, co powiedziano poprzednio, natężenie pola może osiągnąć wartość nawet 3-krotnie większą, dochodząc do 2 mV/m.

Średnia wartość natężenia pola nocnego, z jaką będzie należało liczyć się, wyniesie:

$$C_{sr} = 0,45 \cdot 0,7 \simeq 0,3 \text{ mV/m}.$$

### 29. Obliczenie zasięgu fal długich, Wzór Austin'a i Cohen'a .

Dla obliczenia zasięgu fal długich stosuje się powszechnie wzór empiryczny Austin'a i Cohen'a, oparty na pomiarach, dokonanych przez laboratorium marynarki wojennej Stanów Zjednoczonych:

Pierwotny wzór Austina, dotychczas jeszcze bardzo rozpowszechniony, ma postać następującą:

$$C_1 = 120 \pi \frac{h J}{\lambda d} \sqrt{\frac{\vartheta}{\sin \vartheta}} \cdot \varepsilon^{-\frac{\alpha d}{\sqrt{\lambda}}} \text{ } \mu\text{V/m} \quad (440)$$

w którym  $\lambda$  i  $d$  są wyrażone w km,  $h$  w metrach,  $\vartheta$  jest odległością kątową między stacjami w radjanach, a  $\alpha$  jest t. zw. *spółczynnikiem pochłaniania*,

który dla fal długich (ponad 3000 m), a nad morzem i dla fal średnich, można uważać za wielkość zależną jedynie od przewodności gruntu. Dla morza przyjmuje się  $\alpha = 0,0015$ , niezależnie od długości fali. Tensam współczynnik przyjęć można dla fal długich również i wówczas, gdy pewna część ich drogi przebiega nad lądem. Na wzorze (440) ze współczynnikiem  $\alpha = 0,0015$  opierają się obliczenia zasięgu stacji okrętowych, przewidzianych konwencją o bezpieczeństwie życia ludzkiego na morzu.

W zakresie fal średnich (200 do 2000 m) pomiary wykazały dużą zależność współczynnika  $\alpha$  od długości fali. Wartości pomiarowe w tym zakresie fal, wahają się w granicach od 0,01 (dobra przewodność gruntu) do 0,08 (w miastach). Dla tego zakresu fal nad lądem wzór Austina obecnie ma mniejszą aktualność wobec krzywych Sommerfeld-Eckersley'a.

W r. 1926 L. W. Austin podał wzór nieco odmienny, oparty na pomiarach rozchodzenia się fal nad morzem, w postaci:

$$C_c = 120 \pi \frac{Jh}{\lambda d} \sqrt{\frac{\vartheta}{\sin \vartheta}} \cdot e^{-\frac{\alpha d}{\lambda^{0,6}}} \quad \mu\text{V/m}, \quad (440a)$$

W „nowym” wzorze Austin'a współczynnik  $\alpha$  posiada dla morza wartość 0,0014. Wzór ten dla fal średnich daje wartości podobne, jak stary, dla fal najdłuższych zaś daje wyniki do 2 do 3-krotnie większe.

Obok wzoru Austin'a do obliczenia zasięgu fal długich stosują również czasami wzór Eckersley'a (433). Daje on jednak naogół wartości za duże.

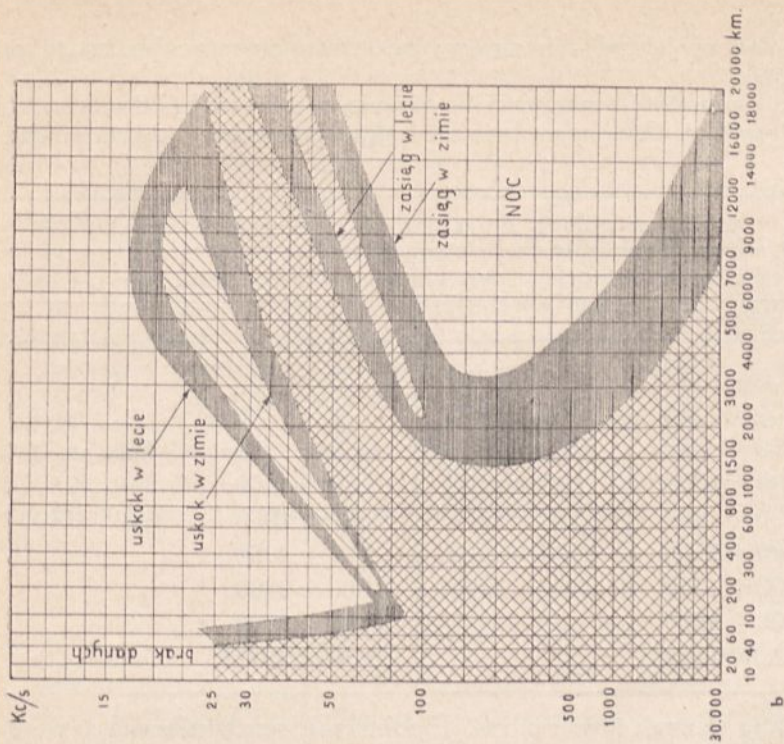
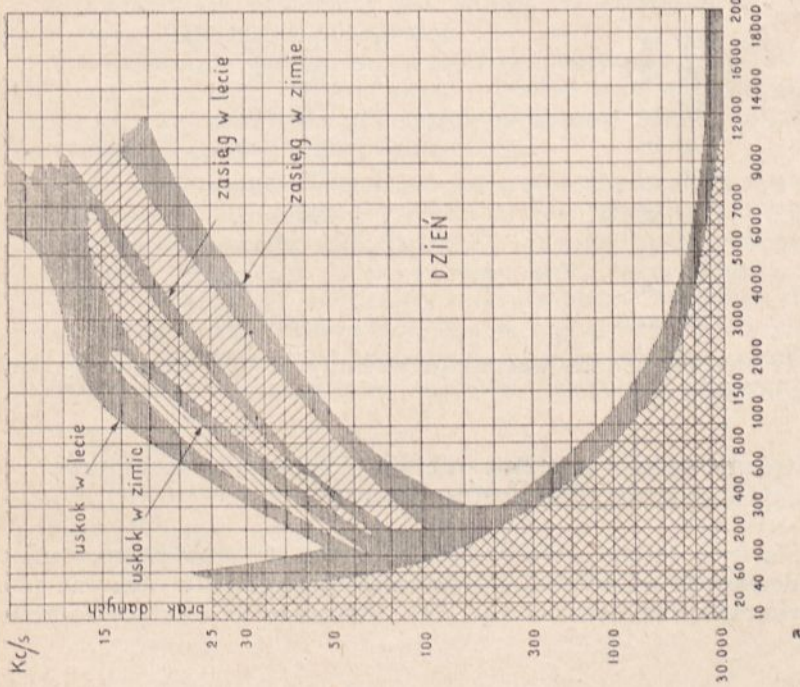
### 30. Wybór fal krótkich dla komunikacji na duże odległości.

Wzorów i krzywych na obliczenie natężenia pola fal krótkich jeszcze nie ustalono, a zgłoszone dotychczas propozycje nie są należycie potwierdzone doświadczeniem. Istnieją natomiast krzywe, pozwalające określić orientacyjnie, jaki zakres fal krótkich jest odpowiedni do nawiązania łączności na daną odległość o danej porze dnia i roku.

Dla przykładu podajemy wykresy opracowane przez Stany Zjednoczone A. P. i ogłoszone w materiałach konferencji radiokomunikacyjnej w Mardrycie (1932). Wykres rys. 225-a jest ważny dla dnia w miejscu nadawania, zaś 225-b dla nocy. Odległość uskoku i zasięg są zaznaczone szerokimi pasami, w których granicach są zawarte dane wielkości.

Jakościowo dają te wykresy bardzo dobry obraz zachowania się fal różnych zakresów częstotliwości. Zakresy te ulegają niestety dość znacznym fluktuacjom z roku na rok ze względu na okresy plam słonecznych (15-miesięczny, 11-letni i 23-letni). I tak o ile w roku 1929 najkorzystniejsza fala dzienna była około 19.000 kc/s t. j. około 15,8 m, a nocna 10000 kc/s, t. j. około 30 m, to w roku 1932 najlepsze fale były około 13000 kc/s (23 m) w dzień, a 5000 kc/s (60 m) w nocy.

Jako dobra orientacja mogą tu służyć dane co do częstotliwości granicznych w zależności od  $f_{kr}$  warstwy E, ogłoszone przez T. L. Eckersley'a (patrz § 25). Gdy znamy stan warstwy E, pozwalają one przynajmniej określić największą częstotliwość, którą w danych warunkach możemy użyć.



Pasy zacieniowane oznaczają granice zmienności poszczególnych zasięgów.

Rys. 225.

Ponadto dla projektowania następujące dane orientacyjne mogą oddać duże usługi:

I. Statki i samoloty amerykańskie stosują w okolicach Atlantyku północnego następujące fale wywoławcze, jako najbardziej pewne (dane C. C. I. R.):

Często- tliwość kc/s	Zasięg w milach morskich (1 mila = 1,855 km.).			
	L a t o		Z i m a	
	dzień	noc	dzień	noc
3105	0 ÷ 150	0 ÷ 300	0 ÷ 200	0 ÷ 500
4140	0 ÷ 200	0 ÷ 500	0 ÷ 300	0 ÷ 2000
5520	0 ÷ 250	100 ÷ 600	0 ÷ 350	250 ÷ 2200
6210	0 ÷ 300	200 ÷ 800	0 ÷ 400	500 ÷ 2500
8280	250 ÷ 800	650 ÷ 2600	300 ÷ 1000	2000 ÷ 3500
11040	500 ÷ 1500	1500 ÷ 3000	600 ÷ 2000	—
12420	600 ÷ 1800	2000 ÷ 3500	800 ÷ 2200	—
16560	1000 ÷ 3500	—	1400 ÷ 3500	—
22080	od 2000 wyżej	—	od 3000 wyżej	—

II. Według danych tow. Philips (Eindhoven), następujących zasięgów można się spodziewać przy użyciu stacji samolotowej o mocy 10 W w antenie, z anteną wiszącą, nad lądem:

Fala:	Zasięg:
100 m	0 ÷ 75 km
90 m	0 ÷ 100 km
80 m	0 ÷ 150 km
70 m	0 ÷ 200 km
60 m	0 ÷ 300 km
50 m	0 ÷ 400 km
40 m	powyżej 400 km
30 m	„ 500 km
20 m	„ 600 km

Zasięgi te są podane dla warunków dziennych. W nocy zwiększają się one o 25 do 50%.

### 31. Natężenie pola w miejscu odbioru. Przeszkody techniczne i atmosferyczne.

Gdyby nie było żadnych wpływów ubocznych, to przy pomocy odpowiednio zbudowanych odbiorników lampowych moglibyśmy odbierać pola elektryczne znacznie mniejsze od 1  $\mu$ V/m. Jednakże w praktyce radjoko-

munikacyjnej zmuszeni jesteśmy stosować natężenie pól, przekraczające wartość  $1 \mu\text{V/m}$ , a nawet w niektórych przypadkach pola wynoszące dziesiątki miliwoltów na metr. Zmuszają nas do tego już to fale elektromagnetyczne, ujęte ogólną nazwą *przeszkód* elektrycznych, już to prądy o częstotliwościach akustycznych, mające swe źródło w odbiornikach.

Przeszkody elektryczne dzielimy, ze względu na ich źródło, na dwie kategorie:

1) *Przeszkody atmosferyczne*, wywołane głównie przez silne wyładowania elektryczności atmosferycznej, szczególnie w czasie burz.

2) *Przeszkody techniczne*, wytwarzane przez przyrządy elektryczne, szczególnie takie, których działanie jest połączone z przerywaniem prądu.

Zarówno przeszkody atmosferyczne, jak i techniczne, posiadają ten sam charakter. Są to przebiegi o charakterze impulsów aperiodycznych małej częstotliwości, które jednakże, w myśl teorii Fourier'a, można rozłożyć na nieskończony szereg przebiegów periodycznych, o częstotliwościach rosnących i amplitudach malejących<sup>1)</sup>. Przeszkody wytwarzają więc ciągłe widmo fal, a siłę elektromotoryczną, wytworzoną przez nie w odbiorniku daje całka:

$$E = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \zeta_{\omega} \sin(\omega t + \varphi) d\omega, \quad (441)$$

w której  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są częstotliwościami granicznymi, przepuszczanymi przez odbiornik, zaś  $\zeta_{\omega}$  są to amplitudy fal, odpowiadające poszczególnym częstotliwościom przeszkody.

Z faktu tego wynikają dwa wnioski, które się potwierdzają w praktyce:

a) Przeszkody występują tem silniej, im mniejsza jest częstotliwość (im większa długość) fali odbieranej.

b) Odbiornik jest tem mniej wrażliwy na przeszkody, im węższe jest widmo częstotliwości, które odbiera. A więc w odbiorniku telegraficznym o ostrej krzywej rezonansu przeszkody występują słabiej, niż np. w odbiorniku radjofonicznym z filtrem widmowym.

*Przeszkody atmosferyczne*, jak już wspomniano, mają swe źródło przede wszystkim w burzach i ze względu na swój charakter falowy rozchodzą się nieraz na duże bardzo odległości, jak i fale radjotelegraficzne. Podobnie, jak i te fale, zależne są od pory dnia i roku, szczególnie w zakresie fal krótkich. Głównem ich siedliskiem są kraje podzwrotnikowe, dlatego w naszej szerokości geograficznej przychodzą one przeważnie z kierunków południowych. Niezależnie od tego bywają też przejściowe źródła przeszkód atmosferycznych o charakterze lokalnym. Najsilniej występują one w na-

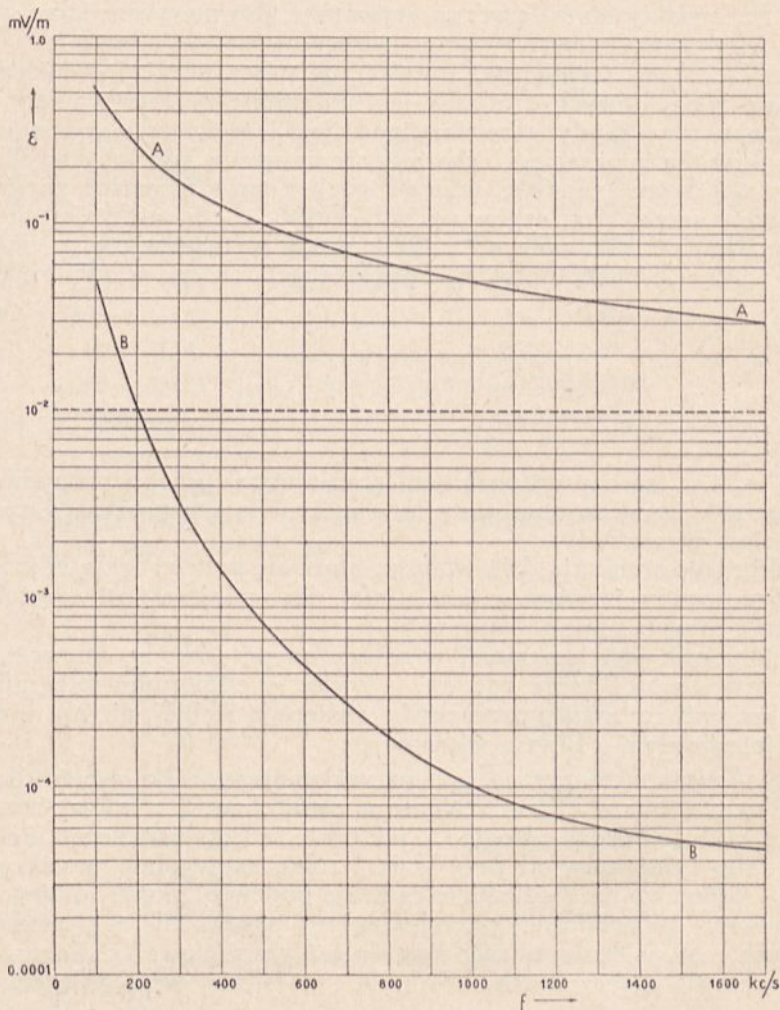
<sup>1)</sup> Blizsze dane znajdzie czytelnik w pracach:

1) J. R. Carson, Selective Circuits and Static Interference, Trans. A. I. E. E. 43, str. 789, r. 1924.

2) Koerts, Atmosphärische Störungen, Berlin.

3) St. Manczarski, Usuwanie zakłóceń w odbiorze radjowym, Przegl. Elektr. Z. 8. r. 1932.

szym klimacie w miesiącach lipcu i sierpniu. Orientacyjny wykres zależności natężenia przeszkód atmosferycznych od częstotliwości (długości fali w mV/m dla okolic N. Yorku, podają wykresy rys. 226<sup>1)</sup>: krzywa A dla dnia, krzywa B dla nocy. Krzywe te wskazują, zresztą zgodnie z naszym doświadczeniem, że na falach krótkich przeszkody atmosferyczne nie dają się zbyt w znacznym stopniu zmniejszyć.



Rys. 226.

Skuteczne środki do zwalczania przeszkód atmosferycznych znamy jedynie dwa: *selektywne odbiorniki* i *anteny odbiorcze kierunkowe* — ten

<sup>1)</sup> Według „Committee on Propagation Data“ Proc. I. R. E. 21, str. 1419, r. 1933.



ostatni oczywiście tylko wówczas, gdy główny kierunek przeszkód w danej okolicy nie jest zgodny z kierunkiem fal odbieranych.

Przeszkody techniczne występują oczywiście tylko w okolicach zelektryfikowanych, a przede wszystkim w wielkich miastach i w ośrodkach przemysłowych. Źródłem ich są przeważnie komutatory i wszelkiego rodzaju przerywacze, jak cewki indukcyjne, dzwonki, aparaty telegraficzne, różne aparaty dla użytku domowego i t. p. Natężenie pola elektrycznego przeszkód technicznych zależy od odległości od źródła i w osiedlach silnie zelektryfikowanych dochodzi do średniego poziomu rzędu kilkunastu do kilkudziesięciu mV/m. Rzadziej staje się dokuczliwą bezpośrednia indukcja prądu 50-okresowego.

Osobną kategorią przeszkód technicznych, występującą przy odbiorze na samolotach i samochodach, jest promieniowanie fal, wywołane przez działanie iskrownika. Iskrownik silnika wraz z kablami, doprowadzającymi do świec, stanowi niejako stację nadawczą o falach gasnących, których długość zależy od długości kabla i pojemności masy silnika. Średnio fale te są rzędu kilkudziesięciu metrów.

Przeszkodom tym zapobiega się, osłaniając elektrostatycznie całość urządzenia zapłonowego (iskrownik, kable, świece), które jest starannie izolowane od masy silnika (kable dwuprzewodowe do świec). Osłonę łączy się z masą silnika i całej konstrukcji metalowej.

Zwalczać przeszkody techniczne można dwiema drogami<sup>1)</sup>:

a) u samego źródła — przez stosowanie odpowiednich urządzeń fitrujących, nie dopuszczających przeszkód do sieci;

b) przy odbiorniku — przez kompensowanie przeszkód po doprowadzeniu dodatkowego napięcia kompensującego w fazie przeciwnej (S. Mancharzski) oraz przez osłanianie elektrostatyczne doprowadzeń do anten odbiorczych.

Do przeszkód technicznych zaliczyć należy również szereg zjawisk elektrycznych, objawiających się w postaci szumu<sup>2)</sup>, których źródłem jest sam odbiornik, a więc — nierównomierna emisja lamp katodowych, t. zw. zjawisko temperatury w odbiornikach i t. p., zjawiska wynikające z nieciągłości budowy materji a wreszcie — w odbiornikach sieciowych — niedoskonałe wyfiltrowanie prądu wyprostowanego.

Przeszkody tego rodzaju, odniesione do zacisków wejściowych odbiornika, wyrażają się pod postacią siły elektromotorycznej na zaciskach wejściowych odbiornika rzędu 1  $\mu V$  w odbiornikach bateryjnych, a rzędu 10  $\mu V$  w odbiornikach zasilanych z sieci prądem wyprostowanym. Przeszkody tej kategorii potęgują się z liczbą stopni wzmocnienia, zastosowanych w odbiorniku. Szumy własne odbiorników (nie licząc szumu w odbiornikach sieciowych) są naogół większe na falach krótkich, niż na długich. Przepuszczalnie przyczyna leży w tem, że bezwzględna szerokość widma

<sup>1)</sup> Wyczerpującą literaturę znajdzie Czytelnik w „Przeglądzie Elektrotechnicznym i Radjotechnicznym. Bardzo bogate dane znajdują się w dokumentach CCIR na Konferencję Lizbońską (Zagadnienie Nr. 6).

<sup>2)</sup> Patrz m. i. sprawozdanie L. B. Turner'a, część II-ga I. E. E. Wir. Proc. 8 str. 16 — 21, r. 1933.

przepuszczanego jest większa w odbiornikach krótkofalowych, niż w długofalowych.

Do wyliczonych tu przeszkód dochodzi wkońcu jeszcze *przesłuch stacji obcych* z powodu niedostatecznej selektywności odbiornika lub zamałej różnicy częstotliwości między falami pracujących stacji.

Najsukuteczniejszym środkiem do zwalczania przeszkód elektrycznych w odbiorze jest *dostatecznie silne natężenie pola elektrycznego odbieranych sygnałów*.

Stosunek natężenia pola elektrycznego fali do pola przeszkód zależy od kategorii odbioru. Najmniejsze wymagania pod tym względem stawia się przy odbiorze słuchowym sygnałów telegraficznych, gdyż proste tony harmoniczne stosunkowo łatwo jest wyróżnić z pośród wszelkiego rodzaju niemelodyjnych trzasków i szmerów.

Większego natężenia pola odbiorczego wymaga odbiór telegraficzny samopiszący, tam bowiem odpada selekcja, dokonywana przez odbierającego, a każdy impuls po detekcji zdolny jest poruszyć aparat piszący.

Największe wymagania stawia się przy odbiorze telefonicznym, który wymaga dobrej zrozumiałości mowy, a szczególnie w odbiorze radjofonicznym, gdzie oprócz zrozumiałości żąda się jeszcze zachowania wartości artystyczne reprodukcji.

Rzecz oczywista, że osobne wymagania stawia się przy odbiorze w warunkach trudnych, jak w samolotach i samochodach oraz dla radjofonji w miejscowościach o silnych przeszkodach technicznych.

Oprócz tych wszystkich rozważań przy ustalaniu natężenia pola należy brać pod uwagę wahania, wywołane przez falę odbitą i liczyć się raczej z minimum, niż ze średnią wartością  $\bar{C}$ , oczywiście tylko wówczas, gdy wartość tę da się ustalić z dostateczną pewnością.

#### *Stosunek przeszkód do pola odbiorczego.*

Na podstawie ostatnich obserwacji można dopuścić następujące stosunki pola przeszkadzającego do pola odbieranego (według źródeł francuskich):

##### 1) *Odbiór telegraficzny samopiszący:*

Stosunek przeszkody do sygnału 1 : 3.

##### 2) *Odbiór telegraficzny słuchowy:*

Stosunek ten może być większy, o ile przy odbiorze oba sygnały dostatecznie różnią się tonem. Przy odpowiednim doborze tonów możliwy jest odbiór nawet przy stosunku 1 : 1.

##### 3) *Telefonja handlowa (płatne rozmowy):*

Stosunek najwyżej 1 : 10.

##### 4) *Telefonja niehandlowa (rozmowy lotnicze, wojskowe i t. p.):*

Stosunek 1 : 3.

##### 5) *Radjogonjometria:*

Stosunek 1 : 7, o ile stacja przeszkadzająca ma ton różniący się wyraźnie od odbiorczego (mierzonego).

### 6) Radjołonja:

Możliwy jest odbiór przy stosunku 1 : 12, jednakże dla odbioru z zachowaniem wartości artystycznej dopuszczalny jest stunek nie większy, niż 1 : 50 do 1 : 100. Przeszkody krótkotrwałe w postaci chwilowych trzasków mogą być jednak znacznie silniejsze.

#### Natężenie pola elektrycznego w miejscu odbioru.

Od wyboru natężenia pola w miejscu odbioru zależy pewność korespondencji. By pewność ta była stuprocentowa, a więc, by o każdej porze, nawet przy najsilniejszych przeszkodach, możliwe było porozumienie się bez omyłek, musielibyśmy mieć natężenia pól, nieproporcjonalnie duże dla warunków średnich. Dlatego, projektując połączenie radjokomunikacyjne, liczymy się z góry z tem, że w wyjątkowo niekorzystnych okolicznościach połączenie to zawiedzie. I tak, pracując na falach długich, z góry przewidujemy, że w miesiącach letnich będziemy mieli bardzo duże trudności z powodu przeszkód atmosferycznych.

Podane niżej zestawienie zawiera wartości natężenia pola elektrycznego, odpowiadające średnim warunkom eksploatacyjnym i opiera się na doświadczeniach szeregu państw europejskich i pozaeuropejskich, sprawdzonych w znacznej części pomiarami Wydziału Radjokomunikacyjnego M. P. i T. Charakterystyczna w niem jest ta okoliczność, że wymagane natężenia pól są tem mniejsze, im krótsza jest fala robocza, co wynika z zależności natężenia przeszkód atmosferycznych od długości fali (rys. 226). Wartości podane odnoszą się do średnich szerokości geograficznych, a nie do okolic podzwrotnikowych, gdzie przeszkody atmosferyczne są wyjątkowo silne.

Co do wartości podanych dla telefonji, należy pamiętać, że zasięg zależy tu nie tylko od natężenia fali nośnej, lecz przede wszystkim od głębokości modulacji (patrz rozdział IV). Wartości podane w tablicy, dają nam natężenie pola fali nośnej przy uwzględnieniu głębokości modulacji, normalnie spotykanej przy danej kategorii urządzeń.

#### Niezbędne natężenia pól elektrycznych w miejscu odbioru.

Rubryka	Zakres fal		Długie	Średnie	Krótkie
	Rodzaj pracy				
1	Fale $A_1$ odbiór samopiszący		$20 \div 100 \mu V/m^1)$		$5 \div 20 \mu V/m$
2	Fale $A_1$ odbiór słuchowy		$10 \div 25 \mu V/m$	$5 \div 20 \mu V/m^2)$	$2 \div 10 \mu V/m^3)$
3	Fale $A_1$ odbiór słuchowy na samolocie			$50 \mu V/m$	
4	Fale $A_2$			$20 \div 50 \mu V/m$	
5	Fale $A_2$ na samolocie			$100 \div 200 \mu V/m$	

Niezbędne natężenia pól elektrycznych w miejscu odbioru. (c. d.)

Rubryka	Zakres fal	Długie	Średnie	Krótkie
	Rodzaj pracy			
6	Telefonja handlowa	8 ÷ 40 $\mu$ V/m <sup>1)</sup>		5 ÷ 30 $\mu$ V/m <sup>4)</sup>
7	Telefonja niehandlowa		20 ÷ 100 $\mu$ V/m	
8	Telefonja na samolocie		200 ÷ 300 $\mu$ V/m	
9	Radjofonja <sup>5)</sup> bardzo dobry odbiór		Bardzo dobry odbiór: Duże miasta 2000 ÷ 50000 $\mu$ V/m Mniejsze miasta 1000 ÷ 10000 $\mu$ V/m Wieś 300 ÷ 3000 $\mu$ V/m	
10	Radjofonja, możliwy odbiór lampowy		100 ÷ 500 $\mu$ V/m	
11	Przesyłanie obrazów			Jak odbiór samopiszący
12	Radjogonjometrja morska		50 $\mu$ V/m <sup>6)</sup>	
13	Radjogonjometrja — stacje lotn. naziemne		10 ÷ 30 $\mu$ V/m	

U W A G I:

1) Niezbędne natężenie pola rośnie z długością fali i z szybkością nadawania. Lahaye podaje na to dla fal długich wzór:

$$C = a \frac{N}{f}$$

w którym  $f$  — częstotliwość w kc/s,

$N$  — liczba wyrazów na minutę,

$a$  — stała; w dobrych warunkach  $a = 50$ , przy silnych zakłóceniach technicznych i w okolicach podzwrotnikowych  $a = 100 \div 150$ .

2) Przy małych szybkościach nadawania i dobrych warunkach atmosferycznych możliwy jest odbiór pól rzędu 1  $\mu$  V/m. Do obliczenia zasięgu stacyj dla wzywania pomocy (według starego wzoru Austina) zakłada się  $C = 100 \mu$  V/m.

3) Dolna granica odnosi się do fal krótszych, górna do fal dłuższych. Wartości podane są dla odbiorników udoskonalonych z antenami kierunkowymi i urządzeniami przeciwwzniekanikowymi. Odbiorniki średniej jakości wymagają pól podanych w rubryce 1.

4) Tesame zastrzeżenia co pod 3). Prawidłowy odbiór telefoniczny możliwy jest tylko przy pomocy odbiorników udoskonalonych.

5) Dolne granice odnoszą się do fal najkrótszych zakresu radjofonicznego, górne do fal najdłuższych. Liczby, podane przez Międzynarodową Unję Radjofoniczną, zaspokajają wszelkie wymagania co do jakości odbioru, nawet przy średnim natężeniu przeszkód technicznych.

6) Liczba podana przez Konferencję specjalistów dla sygnałów morskich w Londynie, 1931.

7) Są to wartości, przy których pracuje jedynie połączenie telefonji handlowej na długich falach między Anglią i St. Zj. A. P. na falach ok. 5000 m, systemem jednej wstęgi bocznej bez fali nośnej.

## 32. Obliczenie mocy dla stacji nadawczej.

By stacja nadawcza mogła spełnić swoje zadanie, musi ona posiadać żądany zasięg, czyli na żądanej odległości wytwarzać natężenie pola, niezbędne dla danego rodzaju odbioru. Wobec tego zaś, że natężenie pola, poza innymi czynnikami, jest proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego z mocy wypromieniowanej, więc najważniejszym etapem w projektowaniu stacji nadawczej jest ustalenie jej mocy.

Tok obliczenia mocy stacji nadawczej jest inny dla fal długich i średnich, a inny dla fal krótkich.

Fale pośrednie pod względem fali powierzchniowej należą do kategorii fal średnich, zaś pod względem fali przestrzennej — do fal krótkich.

### a) Fale długie i średnie.

Pierwszym krokiem w projektowaniu stacji jest wybór fali lub zakresu fal. Pod tym względem na falach długich i średnich swoboda jest niewielka, gdyż fale te są ściśle rozdzielone przez Międzynarodowy Regulamin Radjokomunikacyjny pomiędzy poszczególne kategorie służb. Ponadto w zakresach radjokomunikacji stałej i radjofonji nawet poszczególne fale są zajęte przez państwa na zasadzie wspólnego porozumienia.

Służby morskie, lotnicze i państwowe (wojskowe, policyjne i t. d.) mają przyznane pewne pasy częstotliwości, w których obrębie mogą pracować na dowolnej fali.

Mając daną częstotliwość fali, możemy wyznaczyć niezbędną moc wypromieniowaną przy pomocy krzywych (rys. 216), obliczonych dla danej częstotliwości ze wzorów Sommerfelda (432), Watsona i Eckersley'a (433), lub dla fal długich w przybliżeniu według Austina. (wzory 440 i 440-a). Następnie, orientując się co do rzędu wielkości całkowitego oporu anteny, a temsamem znając w przybliżeniu sprawność anteny, obliczamy całkowitą moc w antenie.

Metodę obliczenia ilustruje najlepiej następujący przykład:

Mamy zaprojektować stację lotniskową, która w korespondencji telegraficznej z samolotami w średnich warunkach lądowych ( $\sigma=10^{-13}$  cgs.e.m.) ma mieć zasięg 500 km. Odbiór na samolocie zawsze jest słuchowy, więc zgodnie z tablicą §. 31 przyjmujemy  $C=50 \mu\text{V/m}=0,05 \text{ mV/m}$ . Zgodnie z regulaminem międzynarodowym stacja może pracować w zakresie częstotliwości 255 — 290 kc/s (1176 ÷ 1034 m).

Wobec tego, że najgorsze warunki rozchodzenia się ma fala najkrótsza, możemy oprzeć się na wartościach, które nam da krzywa dla  $f = 300$  kc/s. Z rys. 216 znajdujemy, że na odległości 500 km moc promieniowana 1 kW daje natężenie pola  $\frac{C}{C_1} = 0,08$  mV/m. Mając zaś proporcję:

$$\frac{C}{C_1} = \sqrt{\frac{P}{1 \text{ kW}}} \quad \text{czyli:} \quad \frac{C^2}{C_1^2} = P,$$

znajdziemy:

$$P_{pr.} = \left( \frac{0,05}{0,08} \right)^2 = \frac{25}{64} \simeq 0,4 \text{ kW}.$$

Jest to największa potrzebna moc wypromieniowana, gdyż na falach dłuższych warunki rozchodzenia się są korzystniejsze, jednakże dla prostoty obliczenia przyjmiemy na całym zakresie  $P_{pr.} = 0,4$  kW.

Z równania (385) możemy obliczyć metrampery stacji:

$$hJ = \frac{300 \cdot 10^3}{120 \pi} \sqrt{P_{kW} \lambda_{km}} = 195 \sqrt{P_{kW} \lambda_{km}}.$$

Mamy więc dla fali najdłuższej (jako najmniej korzystnej):

$$hJ = 185 \sqrt{0,4} \cdot 1,176 \simeq 590 \text{ m} \times A.$$

Przyjmujemy, że wysokość masztów wynosi <sup>1)</sup>:

$$h_m = 60 \text{ m}.$$

a wysokość skuteczna

$$h_e = 0,6 \times h_m = 36 \text{ m}.$$

Teraz możemy obliczyć prąd u podstawy anteny:

$$J = \frac{590}{36} = 16,4 \simeq 16,5 \text{ A}$$

i oporność promieniowania (równanie 386):

$$R_{pr.} = 1600 \cdot \left( \frac{h_e}{\lambda} \right)^2 = 1600 \cdot \left( \frac{36}{1176} \right)^2 \simeq 1,50 \Omega.$$

Sprawdzamy moc promieniowaną:

$$P_{pr.} = J^2 R_p = 16,5^2 \cdot 1,5 \simeq 400 \text{ W} = 0,4 \text{ kW},$$

a więc jest ona zgodna z założeniem.

<sup>1)</sup> W dalszych rozdziałach podane są szczegółowe rozważania, odnoszące się do wyboru wysokości masztów i mocy nadajnika.

Jeżeli założymy, że oporność strat w obwodzie antenowym wynosi około  $6 \Omega$ , otrzymamy całkowitą oporność anteny:

$$R_A = 1,50 + 6 = 7,50 \Omega,$$

a stąd moc całkowita, jaką doprowadzić musimy do anteny, wyniesie:

$$P_A = 16,5^2 \cdot 7,50 = 2040 \text{ w} \simeq 2 \text{ kW}.$$

Daje to sprawność promieniowania:

$$\eta_{pr.} = \frac{0,4}{2} = 0,2.$$

wartość, której stacje tego typu naogół nie przekraczają.

Przy pomocy krzywej rys. 216 możemy sprawdzić, na jakiej odległości stacja nasza da jeszcze dobry odbiór słuchowy w warunkach lądowych  $\mathcal{E}' = 10 \mu\text{V/m}$ . Wartości tej przy pomocy wypromieniowanej  $1 \text{ kW}$  odpowiada natężenie pola:

$$\mathcal{E}'_1 = 0,01 \sqrt{\frac{1}{0,4}} \simeq 0,016 \text{ mV/m}.$$

która to wartość, według krzywej rys. 216, daje nam odległość około  $750 \text{ km}$ .

Fala odbita „nocna” natomiast może dać na tej odległości pozorne maximum (rys. 224;

$$\mathcal{E} \simeq 0,3 \sqrt{0,4} \simeq 0,19 \text{ m V/m} = 190 \mu\text{ V/m} ,$$

a przypuszczalna średnia wartość natężenia pola:  $0,45 \cdot 190 = 85 \mu\text{V/m}$ . Jak widzimy, wielkości te wielokrotnie przekraczają projektowane pola robocze.

W ciągu „dnia” fala odbita, jak widać z rys. 216, przy częstotliwościach tego rzędu jeszcze nie posiada praktycznego znaczenia.

#### b) Fale krótkie.

Stacje krótkofalowe, jak już zaznaczono, muszą zmieniać falę w ciągu doby 2- do 4-krotnie, by sobie zapewnić dobrą komunikację. Dlatego międzynarodowy podział fal przewiduje szereg wąskich zakresów, przyznanych kolejno tej samej kategorii służb (stałe, ruchome, i wspólne dla stałych i ruchomych), by stacjom ułatwić możliwość doboru fal z odpowiednich zakresów. Wybór fal opiera się na orjentacyjnych rozważaniach, wspomnianych w § 30, lecz ostateczne ustalenie fal roboczych dla danego połączenia, może nastąpić tylko drogą doświadczalną. Zresztą fale ustalone tą drogą bynajmniej nie są wielkościami niezmiennymi, gdyż zależnie od okresów plam słonecznych muszą ulegać modyfikacjom.

Również i wybór mocy nie opiera się na dość pewnych obliczeniach. Praktyka wykazuje, że moc, dająca dość pewną łączność przy odbiorze automatycznym na odległości bardzo duże, jest rzędu 10 do 40 kW, zaś na odległości rzędu 1 do 3 tysięcy km (przeważnie stosuje się tu krótsze fale zakresu pośredniego) moc bywa rzędu  $5 \div 10$  kW.

Na odległości kilkuset km do tysiąca km przy odbiorze słuchowym stosuje się stacje o mocy kilkuset watów, zaś na samolotach nawet kilkudziesięciowatowe.

## BIBLIOGRAFJA DO ROZDZIAŁU VII.

1. H. Merczyng, prof. Inst. Inż. Kom. w Petersburgu. Teorja prądu elektrycznego, Warszawa, 1905.
2. Rozanskij. Elektriczeskija luzci.
3. H. Poincaré, Teorja Maxwella i fale Hertza, (tłum.), Warszawa 1917.
4. S. A. Fleming, The Principles of Electric Wave Telegraphy and Telephony, Londyn, 1919.
5. J. B. Pomey. Introduction à la théorie des courants téléphoniques et de la radiotélégraphie. Paryż 1920.
6. J. Zenneck i H. Rukop, Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie, Stuttgart, 1925.
7. R. Mesny. Les ondes électriques courtes (Recueil des conférences - rapports de documentation sur la physique), Paryż 1927.
8. F. E. Terman, Radio Engineering, N. York — Londyn 1932.
9. K. W. Wagner, Wissenschaftliche Grundlagen des Rundfunkempfangs — rozdziały:
  - VI. R. Rüdenberg, Ausstrahlung, Ausbreitung und Empfang der elektrischen Wellen.
  - VII. A. Esau, Störungen des Empfangs durch unregelmässige Wellenausbreitung, Atmosphärische Störungen.
10. P. David, Manuel de réception radioélectrique.
11. Woprosy izluczenja i rasprostranienja elektromagnitnoj eniergii. — Trudy Naucznoissledowatielskogo Instituta Swiazi — T. 12. r. 1933.
12. N. N. Łucenko. Osnowy teorji radjotechniki. Elektromagnitnyje kolebanja, Moskwa, 1933.
13. Dr. W. Pogorzelski. — Zarys teorji wektorów, Lwów — Warszawa, 1925.



## DODATEK I.

### SZEREGI FOURIER'A.

#### 1. Wyrażenie matematyczne funkcji Fourier'a.

Na zasadzie twierdzenia *Fourier'a* (1807) każdą funkcję periodyczną można wyrazić jako złożoną z szeregu funkcji sinusoidalnych, z których każda posiada postać ogólną:

$$i_n = J_n \sin(n \omega t + \varphi_n), \quad (1)$$

zwanych *harmonicznymi* tej funkcji podstawowej.

Można ją więc wyrazić sumą:

$$i = F(\omega t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} J_n \sin(n \omega t + \varphi_n), \quad (2)$$

w której  $n$  jest dowolną liczbą szeregu naturalnego.

Suma ta nosi nazwę *szeregu Fourier'a*. Szereg Fourier'a może obejmować nieskończoną lub skończoną liczbę wyrazów, może zawierać wszystkie kolejne wyrazy szeregu naturalnego lub też tylko niektóre z nich.

Równanie (1) można przekształcić:

$$i_n = J_n \sin(n \omega t + \varphi_n) = J_n \cos \varphi_n \sin n \omega t + J_n \sin \varphi_n \cos n \omega t$$

czyli:

$$i_n = a_n \sin n \omega t + b_n \cos n \omega t, \quad (1a)$$

jeżeli podstawimy:

$$J_n \cos \varphi_n = a_n, \quad J_n \sin \varphi_n = b_n.$$

Każdą składową harmoniczną można więc rozłożyć na sinusoidalną i kosinusoidalną, których amplitudy są związane z amplitudą harmoniczej zależnością:

$$J_n^2 \cos^2 \varphi_n + J_n^2 \sin^2 \varphi_n = J_n^2$$

czyli:

$$J_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3)$$

Na zasadzie powyższego, równanie (2) można przedstawić jako sumę dwu sum:

$$i = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \sin n \omega t + \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \cos n \omega t.$$

Dla wartości  $n = 0$  pierwszy wyraz staje się równy zero, drugi natomiast daje

$$b_n \cos 0 = b_n = b_0 = \text{const},$$

co dowodzi, że jedną ze składowych szeregu Fourier'a może być stała.

Wobec tego równanie (2) napisać możemy w ostatecznej postaci:

$$i = b_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin n \omega t + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \cos n \omega t, \quad (2a)$$

albo też w rozwinięciu:

$$i = b_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2 \omega t + a_3 \sin 3 \omega t \dots + a_n \sin n \omega t + \dots \\ \dots + b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2 \omega t + b_3 \cos 3 \omega t + \dots \dots + b_n \cos n \omega t + \dots \quad (2b)$$

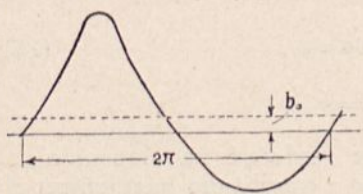
## 2. Składowa stała szeregu Fourier'a.

Obecność stałej w szeregu Fourier'a w rozumieniu elektrotechnicznym oznacza, że prąd zmienny o przebiegu odkształconym zawierać może obok prądów zmiennych o częstotliwościach harmonicznym również *składową prądu stałego*. Składowa ta wystąpi wówczas, gdy ilość elektryczności przepływającej w jednym kierunku będzie przeważała nad ilością elektryczności, płynącą w kierunku odwrotnym.

Prądy zmienne, nie zawierające prądu stałego, w odróżnieniu od prądów które zawierają prąd stały, nazywamy *czystymi* prądami zmiennymi.

Geometrycznie obecność stałej w szeregu Fourier'a oznacza, że powierzchnia części krzywej, leżącej nad osią odciętych, nie jest równa powierzchni, leżącej poniżej tej osi (rys. 1).

Jeżeli oznaczymy  $i = y$ ,  $t = x$  i wartości  $x$  wyrazimy w mierze łukowej, to czas jednego okresu podstawowego będzie odpowiadał kątowi  $2\pi$ . Wówczas obliczymy powierzchnię krzywej z całki:



Rys 1.

$$S = \int_0^{2\pi} y dx,$$

zaś średnią wartość rzędną:

$$y_{sr} = b_0 = \frac{S}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y dx. \quad (4)$$

W przypadku czystego prądu zmiennego całka ta jest równa zero i  $b_0$  znika. Zresztą z każdej krzywej można usunąć  $b_0$ , przesuując ją o tę war-

tość w odpowiednim kierunku osi odciętych (rys. 1). Elektrycznie zaś pozbywamy się z krzywej prądu składowej stałej przez zastosowanie transformatora, w którego uzwojeniu wtórnem otrzymamy zawsze czysty prąd zmienny.

### 3. Wyznaczenie analityczne amplitud składowych harmonicznych.

Wykazanie poszczególnych składowych harmonicznych w prądzie o krzywej odkształconej możliwe jest *drogą doświadczalną*, a mianowicie, zasilając takim prądem np. obwód rezonansu prądów<sup>1)</sup>. Jeżeli np., równoległe do obu gałęzi  $L$  i  $C$  tego obwodu włączymy woltomierz elektrostatyczny, to nastrojając obwód kolejno na poszczególne częstotliwości harmoniczne, będziemy mogli z odchyień woltomierza wnioskować o wzajemnym stosunku ich amplitud. Obwód ten bowiem tylko dla częstotliwości harmonicznej, na którą jest nastrojony, przedstawia oporność rezonansową  $R_2 \cong \frac{L}{rC}$ , dla pozostałych natomiast stanowi prawie że zwarcie przez gałąź indukcyjną lub pojemnościową. Urządzenia oparte na tej zasadzie (Armagnat 1902), nazywamy *analizatorami harmonicznych*.

Do obliczenia analitycznego amplitudy dowolnej ( $k$ -tej) harmonicznej dochodzimy w sposób następujący:

Pomnóżmy wszystkie rzędne krzywej w granicach jednego okresu podstawowego przez  $\sin kx$  i znajdziemy wartość średnią tego wyrażenia:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \sin kx dx. \quad (a)$$

Wartość  $y$  w myśl równania (2a) wynosi:

$$y = b_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin nx + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \cos nx, \quad (b)$$

musimy więc znaleźć wartość średnią z trzech grup funkcji:

$$\begin{aligned} 1. & \quad \frac{a_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \sin kx dx, \\ 2. & \quad \frac{b_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \sin kx dx, \\ 3. & \quad \frac{b_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin kx dx. \end{aligned} \quad (c)$$

<sup>1)</sup> Patrz Rozdział I. § 10.

Wszystkie te całki w oznaczonych granicach całkowania są równe zeru<sup>1)</sup>, z wyjątkiem pierwszej, i to dla szczególnego przypadku  $n = k$ . Mamy wówczas:

$$\frac{a_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 kx \, dx = \frac{a_k}{2\pi} \left[ -\frac{1}{4k} \sin 2kx + \frac{x}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{a_k}{2}. \quad (d)$$

Wynika stąd, że całka (a), wykonana w wyznaczonych granicach dla szeregu (b), daje jako wynik (d), czyli możemy napisać równość:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \sin kx \, dx = \frac{a_k}{2}. \quad (e)$$

Możemy więc obliczyć amplitudę składowej sinusoidalnej dla  $k$ -tej harmonicznej:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin kx \, dx. \quad (5)$$

Postępując tą samą drogą ze składową kosinusoidalną, to znaczy znajdującą całkę:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \cos kx \, dx,$$

---

<sup>1)</sup> Stosujemy podstawienie  $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2} (\cos \beta - \cos \alpha)$ ,

przyczem  $\alpha = (n + k)x$ ,  $\beta = (n - k)x$ ,

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin kx \, dx &= \frac{a_n}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \cos(n-k)x \cdot dx - \int_0^{2\pi} \cos(n+k)x \cdot dx \right] = \\ &= \left[ \frac{1}{n-k} \cdot \sin(n-k)x - \frac{1}{n+k} \cdot \sin(n+k)x \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

W podobny sposób możemy scałkować funkcję 2.

otrzymujemy amplitudę kosinusoidy  $k$ -tej harmonicznej:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos kx dx. \quad (6)$$

Stąd amplituda całkowita  $k$ -tej harmonicznej w myśl równania (3) wynosi:

$$J_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

zaś przesunięcie jej fazy względem początku układu wyznacza nam:

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{J_k \sin \varphi_k}{J_k \cos \varphi_k} = \frac{b_k}{a_k}. \quad (7)$$

#### 4. Szczególne przypadki krzywych.

Z pośród mnogości krzywych niesinusoidalnych można wybrać pewne typy, które dzięki szczególnym własnościom upraszczają analizę i pozwalają z góry wysnuć pewne wnioski ogólne.

a) Krzywa której dolny (ujemny) półokres jest odzwierciedleniem górnego (dodatniego), t. zw. *krzywa symetryczna względem osi odciętych* (rys. 2).

Krzywa taka odznacza się przede wszystkim brakiem składowej stałej, albowiem powierzchnie obu jej części są sobie równe.

Spełnia ona warunek

$$y_x = -y_{x+\pi}, \quad (8)$$

który wyraża, że wszystkie rzędne, oddalone od siebie o pół okresu, są sobie równe, lecz posiadają znaki przeciwne.

Wobec tego, że jest:

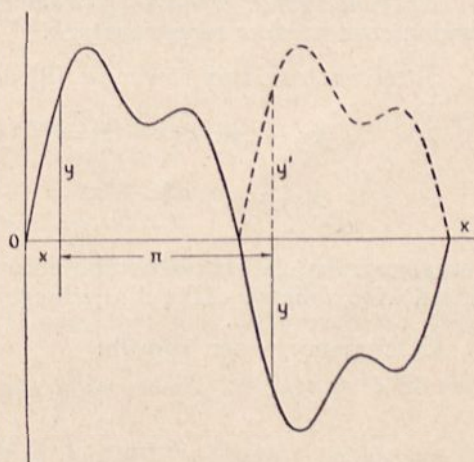
$$y_x = \sum a_n \sin nx + \sum b_n \cos nx$$

oraz

$$y_{x+\pi} = \sum a_n \sin n(x+\pi) + \sum b_n \cos n(x+\pi), \quad (a)$$

więc musi być spełniony warunek

$$\sin nx = -\sin n(x+\pi), \quad (b)$$



Rys. 2.

oraz:

$$\cos nx = -\cos n(x + \pi). \quad (b)$$

Istnieje zaś zależność:

$$\begin{aligned} \sin n(x + \pi) &= \sin(nx + n\pi) = \sin nx \cdot \cos n\pi + \cos nx \cdot \sin n\pi \\ \cos n(x + \pi) &= \cos(nx + n\pi) = \cos nx \cdot \cos n\pi - \sin nx \cdot \sin n\pi, \end{aligned}$$

a że jest:

$$\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n,$$

więc:

$$\begin{aligned} \sin n(x + \pi) &= (-1)^n \sin nx, \\ \cos n(x + \pi) &= (-1)^n \cos nx. \end{aligned} \quad (c)$$

Jak wynika z (c), warunek (b), a temsamem i (8) może być spełniony jedynie dla nieparzystych wartości  $n$ . Można więc wypowiedzieć twierdzenie:

*Krzywa symetryczna względem osi odciętych może zawierać jedynie harmoniczne rzędów nieparzystych.*

Jeżeli zastosujemy równanie (8) do obliczenia amplitud, to otrzymamy:

$$\begin{aligned} y_{x+\pi} \cdot \sin n(x + \pi) &= (-y_x) \cdot (-\sin nx) = y_x \sin nx \\ y_{x+\pi} \cdot \cos n(x + \pi) &= (-y_x) \cdot (-\cos nx) = y_x \cos nx, \end{aligned}$$

z czego wynika, że krzywe w obu połówkach okresu mają ten sam przebieg. Można więc obliczyć całkę dla jednego półokresu i wynik pomnożyć przez 2.

Otrzymamy w ten sposób:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y \sin kx \, dx, \quad (9)$$

oraz

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y \cos kx \, dx. \quad (10)$$

Dla krzywej symetrycznej w stosunku do osi odciętych wystarczy więc zanalizować tylko jeden półokres.

b) *Krzywa symetryczna względem początku układu.*

Jeżeli krzywa ma przebieg rys. 3-go, to spełniony jest warunek:

$$y(-x) = -y_x,$$

co jest równoznaczne z warunkiem,

$$y(2\pi - x) = -y_x. \quad (11)$$

Rzędna dla punktu  $(2\pi - x)$  wynosi:

$$y(2\pi - x) = \sum a_n \sin n(2\pi - x) + \sum b_n \cos n(2\pi - x),$$

zaś odpowiednie funkcje trygonometryczne:

$$\begin{aligned} \sin n(2\pi - x) &= \sin 2\pi n \cdot \cos nx - \cos 2\pi n \cdot \sin nx, \\ \cos n(2\pi - x) &= \cos 2\pi n \cdot \cos nx + \sin 2\pi n \cdot \sin nx. \end{aligned}$$

Mamy zaś:

$$\sin 2\pi n = 0, \quad \cos 2\pi n = 1,$$

wobec czego:

$$\begin{aligned} \sin n(2\pi - x) &= -\sin nx, \\ \cos n(2\pi - x) &= +\cos nx. \end{aligned}$$

Jak z tego widzimy, warunek (11) jest spełniony jedynie przez składowe sinusoidalne, a więc:

*Krzywa symetryczna względem początku układu zawiera jedynie harmoniczne sinusoidalne.*

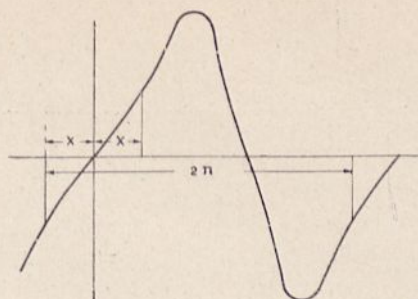
c) *Krzywa symetryczna względem początku układu i względem osi odciętych.*

Krzywa taka (rys. 4), spełnia równocześnie warunki równań (8) i (11), a tem samym może zawierać jedynie składowe nieparzyste sinusoidalne. Mamy tu spełniony warunek:

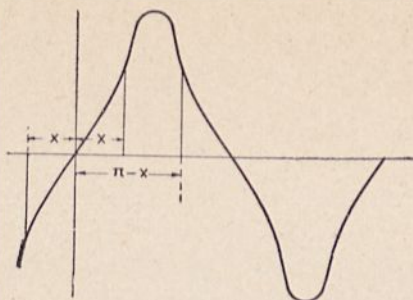
$$y(\pi - x) = y_x. \quad (12)$$

Wobec tego:

$$\sin n(\pi - x) = \sin n\pi \cos nx - \cos n\pi \cdot \sin nx,$$



Rys. 3.



Rys. 4.

a że:

$$\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n,$$

więc dla wartości nieparzystych  $n$ :

$$\sin n(\pi - x) = \sin nx,$$

a temsamem

$$y_{(\pi-x)} \sin n(\pi - x) = y_x \sin nx.$$

Wynika stąd, że obie połówki *półokresu* są względem siebie symetryczne a ich powierzchnie równe, wystarczy więc całkować przez ćwierć okresu, i amplitudy przyjmują postać:

$$a_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin kx dx. \quad (13)$$

Łącząc cechy obu poprzednich krzywych, krzywa ta może więc zawierać *jedynie harmoniczne sinusoidalne nieparzyste*.

Krzywa rys. 4-go jest typowa dla układów, w których niema zjawisk histerezy w jakiegokolwiek postaci, w szczególności dla przebiegów elektro-nych w lampach katodowych.

d) *Krzywa tętniąca* (krzywa prądu wyprostowanego dwupołkowego).

Krzywa ta (rys. 5) różni się od poprzednich typów przede wszystkim obecnością składowej stałej, gdyż obie połówki jej sumują się. Następnie w postaci najczęściej spotykanych spełnia ona warunek:

$$y(-x) = y_x \quad (14)$$

Opierając się znów na ogólnej postaci szeregu Fourier'a:

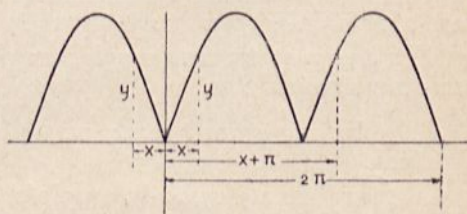
$$y = \sum a_n \sin nx + \sum b_n \cos nx$$

stwierdzamy, że:

$$\sin(-nx) = -\sin nx,$$

$$\cos(-nx) = \cos nx.$$

z czego wynika wniosek, że *krzywa tętniąca zawiera tylko składowe kosinusoidalne*.



Rys. 5.



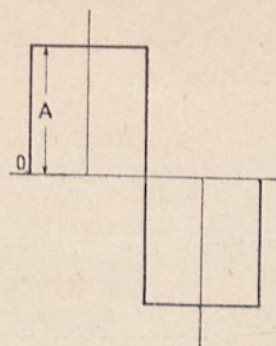
## 5. Przykłady analizy krzywych.

1) *Krzywa prostokątna*<sup>1)</sup>. Krzywa ta (rys. 6) o najprostszej postaci, algebraicznie wyraża się równaniem:

$$\text{od } x=0 \text{ do } x=\pi \quad y=A,$$

$$\text{od } x=\pi \text{ do } x=2\pi \quad y=-A.$$

Odpowiada ona warunkom typu c) poprzedniego paragrafu, zawiera więc tylko składowe sinusoidalne rzędów nieparzystych i można do niej zastosować równanie (13)



Rys. 6.

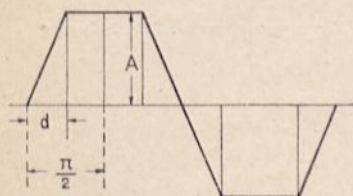
$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A \cdot \sin nx \, dx = -\frac{4A}{\pi n} \left[ \cos nx \right]_0^{\pi/2} = -\frac{4A}{\pi n} \left( \cos n \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

z czego wynika, że dla wszystkich wartości  $n$  parzystych  $a_n = 0$ , zaś dla nieparzystych:

$$a_n = \frac{4A}{\pi n}. \quad (15)$$

Daje to po rozwinięciu szereg nieskończony o postaci:

$$y = \frac{4A}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots + \frac{1}{n} \sin n + \dots \right) \quad (15a)$$



Rys. 7.

2) *Krzywa trapezowa* (rys. 7) również należy do typu c). Wobec tego możemy się ograniczyć do ćwierćokresu i równanie jej wyrazić w postaci:

$$\text{od } x=0 \text{ do } x=\alpha \quad y = \frac{x}{\alpha} A$$

$$\text{od } x=\alpha \text{ do } x=\frac{\pi}{2} \quad y = A.$$

Wobec tego równanie (13) wyraża się w postaci:

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin nx \, dx = \frac{4A}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} x \sin nx \, dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin nx \, dx \right).$$

<sup>1)</sup> Patrz Rozdział IV. § 1.

Do pierwszej całki stosujemy całkowanie cząstkowe:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

podstawiając:

$$u = x, \quad dv = \sin nx dx,$$

$$du = dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx$$

otrzymujemy:

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} x \sin nx dx = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\alpha} = \frac{\sin n\alpha}{\alpha n^2} - \frac{\cos n\alpha}{n}.$$

Natomiast druga całka:

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin nx dx = \left[ -\frac{\cos nx}{n} \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n} \cos n\alpha.$$

Wobec czego otrzymujemy:

$$a_n = \frac{4A}{\pi \cdot n^2 \alpha} \sin n\alpha = \frac{4A}{\pi n} \cdot \frac{\sin n\alpha}{n\alpha}, \quad (16)$$

tak iż szereg Fourier'a dla krzywej trapezowej posiada postać:

$$y = \frac{4A}{\alpha \cdot \pi} \left[ \sin \alpha \cdot \sin x + \frac{\sin 3\alpha}{9} \cdot \sin 3x + \frac{\sin 5\alpha}{25} \cdot \sin 5x + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} \sin nx \dots \right]. \quad (16a)$$

*Przypadki szczególne:*

a) Gdy kąt  $\alpha = 0$ , otrzymujemy krzywą prostokątną. Wówczas:

$$\lim \left( \frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)_{n \rightarrow 0} = 1,$$

a amplituda wyraża się znany już wzorem:

$$a_n = \frac{4A}{\pi \cdot n}.$$

b) Dla trójkąta  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , a więc  $\sin n\alpha = \sin n\frac{\pi}{2}$  posiada wartość:

$$+ 1 \text{ dla } n = (4m + 1), \quad - 1 \text{ dla } n = (4m - 1),$$

gdzie  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Wobec tego szereg ma postać:

$$y = \frac{8A}{\pi^2} \left[ \sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \dots \right] \quad (17)$$

c) Dla  $n\alpha = \pi$ , czyli  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ , mamy  $\sin n\alpha = \sin \pi = 0$  i odnośna

harmoniczna w krzywej trapezowej znika. A więc jeżeli np.  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , usunięta jest 3-cia harmoniczna, która ma największą amplitudę. Krzywa tego typu jest najbardziej zbliżona do sinusoidy.

3) *Krzywa tętnica*<sup>1)</sup> dla prądu sinusoidalnego prostowanego dwupołkowo (rys. 5). Krzywa wyraża się równaniem:

$$\begin{aligned} \text{dla } x = 0 \div \pi & \quad y = J_m \sin x \\ \text{dla } x = \pi \div 2\pi & \quad y = -J_m \sin x. \end{aligned}$$

Zawiera ona przede wszystkim składową stałą, która wynosi:

$$b_0 = \frac{J_m}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right] = \frac{J_m}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \frac{J_m}{\pi}. \quad (18)$$

Składowe zmienne będą wyłącznie kosinusoidalne, jak to wykazano w § 4, a więc:

$$b_n = \frac{J_m}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \cos nx \, dx \right],$$

Stosujemy przekształcenie:

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2} (\sin \alpha - \sin \beta),$$

<sup>1)</sup> Wchodzą tu w rachubę tylko wartości nieparzyste.

gdzie

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = n x, \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = x, \quad \alpha = (n + 1) x, \quad \beta = (n - 1) x.$$

Stąd:

$$b_n = \frac{J_m}{2\pi} \left[ \int_0^\pi \sin(n+1)x dx - \int_0^\pi \sin(n-1)x dx + \right. \\ \left. - \int_\pi^{2\pi} \sin(n+1)x dx + \int_\pi^{2\pi} \sin(n-1)x dx \right],$$

$$b_n = \frac{J_m}{2\pi} \left\{ \left[ -\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^\pi + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_\pi^{2\pi} \right\},$$

a ponieważ  $\cos n x = (-1)^n$  więc:

$$b_n = \frac{J_m}{2\pi} \left[ \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \right].$$

W równaniu tem wszystkie wartości nieparzyste  $n$  dają  $b_n = 0$ . Więc szereg zawiera tylko harmoniczne kosinusoidalne parzyste. Dla tych wartości:

$$b_n = -\frac{4J_m}{\pi(n^2 - 1)}. \quad (19)$$

Szereg otrzymuje więc postać:

$$y = \frac{4J_m}{\pi} \left[ \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 4x}{3.5} - \frac{\cos 6x}{5.7} - \dots \right]. \quad (19a)$$

W krzywej występuje więc bardzo silnie druga harmoniczna. Dlatego ma ona duże znaczenie w technice podwajania częstotliwości.

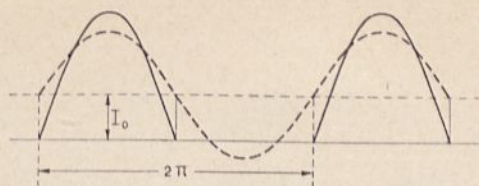
a) *Krzywa tętniąca półokresowa*<sup>1)</sup>. Krzywa ta powstaje, gdy prąd

<sup>1)</sup> Patrz Rozdział IV, § 6 i następne.

płynie tylko w ciągu jednego półokresu (rys. 8), a więc równanie jej wyraża się w postaci:

$$x = 0 \div \pi \quad y = J_m \sin x.$$

$$x = \pi \div 2\pi \quad y = 0.$$



Rys. 8.

Jej składowa stała wynosi wobec tego:

$$b_0 = \frac{J_m}{2\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{J_m}{\pi}. \quad (20)$$

Pod względem składowych zmiennych różni się ona obecnością składowej podstawowej sinusoidalnej:

$$a_1 = \frac{J_m}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin x \, dx = \frac{J_m}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{J_m}{2}. \quad (21)$$

Krzywa ta jest wykreślona na rys. 8.

Harmoniczne wyższych rzędów, kosinusoidalne, wyrażone są całką:

$$b_n = \frac{J_m}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx \, dx = -\frac{2J_m}{\pi(n^2 - 1)}. \quad (22)$$

tak iż krzywa wyraża się równaniem:

$$y = \frac{2J_m}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \sin x - \frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 4x}{3.5} - \dots \right]. \quad (22a)$$

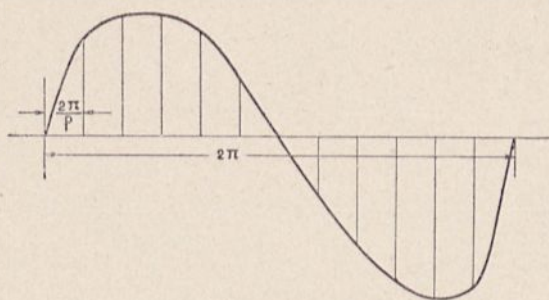
Krzywe tętniące półokresowe posiadają doniosłe znaczenie w radiotechnice, zwłaszcza w teorii generatorów lampowych. Przebieg tych krzywych nie zawsze jest sinusoidalny, mogą one być prostokątne, trapezowe i t. p. i zależnie od kształtu mogą zawierać sinusoidy wyższych rzędów nieparzystych.

## 6. Analiza arytmetyczna i graficzna.

Metodą analityczną można rozwijać w szereg Fourier'a funkcje, dające się wyrazić w prosty sposób zapomocą równania. Większość krzywych spotykanych w elektrotechnice, posiada jednak przebieg nieprawidłowy, tak iż metody tej do nich stosować nie można. Wówczas uciekamy się do

metod przybliżonych arytmetycznych lub graficznych, polegających w zasadzie na tem, że zamiast całkowania przeprowadza się sumowanie skończonej liczby rzędnych na przestrzeni jednego okresu podstawowego (rys. 9). W tym celu dzielimy okres na  $p$  równych odcinków i w każdym punkcie podziału kreślimy odpowiednią rzędną.

Dalsze postępowanie jest analogiczne, jak pokazano w § 3. A mianowicie, aby znaleźć amplitudę składowej sinusoidalnej rzędu  $k$ , mnożymy wszystkie rzędne przez  $\sin kx$  i znajdujemy średnią wartość:



Rys. 9.

$$\frac{1}{p} \sum_1^p y \sin kx,$$

która — podobnie jak w § 3, jest połową szukanej amplitudy. Amplituda sinusoidy wynosi więc:

$$a_k = \frac{2}{p} \sum_1^p y \sin kx. \quad (23)$$

Podobnie amplituda kosinusoidy:

$$b_k = \frac{2}{p} \sum_1^p y \cos kx, \quad (24)$$

Składowa stała wynosi oczywiście:

$$b_0 = \frac{1}{p} \sum_1^p y. \quad (25)$$

Wartości otrzymane tą drogą są tem dokładniejsze, im więcej punktów podziału zastosowaliśmy. Zwykle przyjmuje się  $p = 12$  do  $p = 24$ .

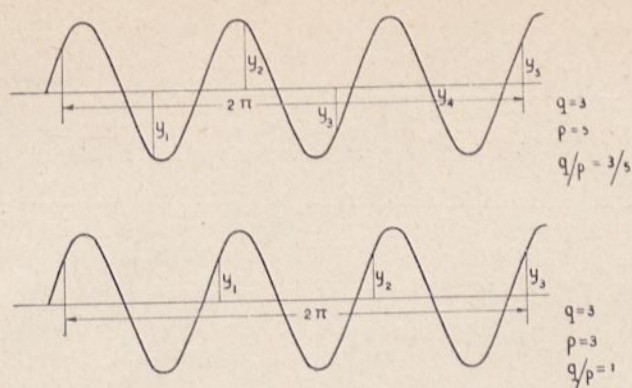
Załączone tabelki (I i II) podają wartość  $\sin nx$  i  $\cos nx$  do  $n = 5$  włącznie, dla podziału okresu na 24 części.

Do metody arytmetycznej analizy harmonicznych stosują się wszystkie wnioski, wysnute dla poszczególnych typów krzywych w § 4-tym.

Inna metoda, opracowana przez Fischer-Hinnen'a (ETZ, 1901, str. 396) polega na następującem twierdzeniu, wynikającym z własności funkcji geometrycznych. Jeżeli odcinek, zawierający  $q$  pełnych sinusoid, podzielimy na  $p$  odcinków, to suma rzędnych, odpowiadających punktom podziału:

a) równa się zeru, gdy  $q$  nie jest całkowitą wielokrotnością  $p$  (rys. 10a).

b) równa się  $p$ -krotnej wartości amplitudy, gdy  $q$  jest całkowitą wielokrotnością  $p$  (rys. 10b)



Rys. 10.

Mając np. krzywą typu  $a$  (§ 4 oraz rys. 11), zawierającą tylko harmoniczne nieparzyste, obieramy punkt  $O$  jako początek układu i odmierzamy długość okresu  $2\pi$ , Rzędna w punkcie  $O$  zawiera wszystkie amplitudy kosinusoidalne:

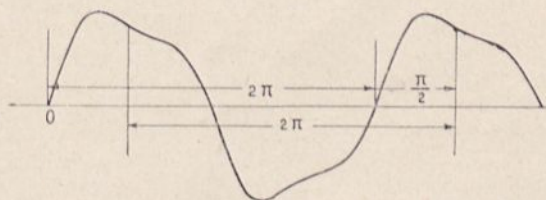
$$y_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = 0.$$

Następnie dzielimy okres na 3 części, więc suma rzędnych wynosi w myśl poprzedniego twierdzenia:

$$\Sigma y_{(3)} = 3(b_3 + b_9 + b_{15} + \dots).$$

Dzieląc teraz okres na 5 części mamy:

$$\Sigma y_{(5)} = 5(b_5 + b_{15} + \dots).$$



Rys. 11.

W ten sposób otrzymujemy układ równań o tylu niewiadomych, ile harmonicznych chcemy obliczyć. Nie wymagając nadzwyczajnej dokładności, możemy oczywiście pominąć harmoniczne wyższych rzędów, których amplitudy zresztą w większości spotykanych krzywych są bardzo małe.

Dla obliczenia składowych sinusoidalnych przesuwamy początek układu o  $\frac{\pi}{2}$  i powtarzamy poprzednią operację, pamiętając, że dla:

$$n = 4m + 1 \quad \sin n \frac{\pi}{2} = +1,$$

a dla

$$n = 4m - 1 \quad \sin n \frac{\pi}{2} = -1.$$

Tablica I.

$\sin nx = \sin n\omega t$  dla  $p = 24$

$x = \frac{360 \cdot \alpha}{24}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
15	+ 0,259	+ 0,500	+ 7,707	+ 0,866	+ 0,966
30	+ 0,500	+ 0,866	+ 1,000	+ 0,866	+ 0,500
45	+ 0,707	+ 1,000	+ 0,707	0,000	- 0,707
60	+ 0,866	+ 0,866	0,000	- 0,866	- 0,866
75	+ 0,966	+ 0,500	- 0,700	- 0,866	+ 0,259
90	+ 1,000	0,000	- 1,000	0,000	+ 1,000
105	+ 0,966	- 0,500	- 0,707	+ 0,866	+ 0,259
120	+ 0,866	- 0,866	0,000	+ 0,866	- 0,866
135	+ 0,707	- 1,000	+ 0,707	0,000	- 0,707
150	+ 0,500	- 0,866	+ 1,000	- 0,866	+ 0,500
165	+ 0,259	- 0,500	+ 0,707	- 0,866	+ 0,966
180	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
195	- 0,259	+ 0,500	- 0,707	+ 0,866	- 0,966
210	- 0,500	+ 0,866	- 1,000	+ 0,866	- 0,500
225	- 0,707	+ 1,000	- 0,707	0,000	+ 0,707
240	- 0,866	+ 0,866	0,000	- 0,866	+ 0,866
255	- 0,966	+ 0,500	+ 0,707	- 0,866	- 0,259
270	- 1,000	0,000	+ 1,000	0,000	- 1,000
285	- 0,966	- 0,500	+ 0,707	+ 0,866	- 0,259
300	- 0,866	- 0,866	0,000	+ 0,866	+ 0,866
315	- 0,707	- 1,000	- 0,707	0,000	+ 0,707
330	- 0,500	- 0,866	- 1,000	- 0,866	- 0,500
345	- 0,259	- 0,500	- 0,707	- 0,866	- 0,966
360	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Dlatego mamy:

$$y'_1 = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \dots$$

$$\Sigma y'_3 = 3 (-a_3 + a_9 - a_{15} + \dots)$$

$$\Sigma y'_5 = 5 (a_5 - a_{15} + \dots)$$

.....

Z obu powyższych metod mamy:  $J_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ .



Tablica II.  
 $\cos nx$  dla  $p = 24$ .

$x = \frac{360 \cdot \alpha}{24}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000
15	+ 0,966	+ 0,866	+ 0,707	+ 0,500	+ 0,259
30	+ 0,766	+ 0,500	0,000	- 0,500	- 0,866
45	+ 0,707	0,000	- 0,707	- 1,000	- 0,707
60	+ 0,500	- 0,500	- 1,000	- 0,500	+ 0,500
75	+ 0,259	- 0,866	- 0,707	+ 0,500	+ 0,966
90	0,000	- 1,000	0,000	+ 1,000	0,000
105	- 0,259	- 0,866	+ 0,707	+ 0,500	- 0,966
120	- 0,500	- 0,500	+ 1,000	- 0,500	- 0,500
135	- 0,707	- 0,000	+ 0,707	- 1,000	+ 0,707
150	- 0,866	+ 0,500	0,000	- 0,500	+ 0,866
165	- 0,966	+ 0,866	- 0,707	+ 0,500	- 0,259
180	- 1,000	+ 1,000	- 1,000	+ 1,000	- 1,000
195	- 0,966	+ 0,866	- 0,707	+ 0,500	- 0,259
210	- 0,866	+ 0,500	0,000	- 0,500	+ 0,866
225	- 0,707	0,000	+ 0,707	- 1,000	+ 0,707
240	- 0,500	- 0,500	+ 1,000	- 0,500	- 0,500
255	- 0,259	- 0,866	+ 0,707	+ 0,500	- 0,966
270	0,000	- 1,000	0,000	+ 1,000	0,000
285	+ 0,259	- 0,866	- 0,707	+ 0,500	+ 0,966
300	+ 0,500	- 0,500	- 1,000	- 0,500	+ 0,500
315	+ 0,707	0,000	- 0,707	- 1,000	- 0,707
330	+ 0,866	+ 0,500	0,000	- 0,500	- 0,866
345	+ 0,966	+ 0,866	+ 0,707	+ 0,500	+ 0,259
360	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000

Jeżeli krzywa zawiera harmoniczne parzyste, obliczenie składowych kosinusoidalnych pozostaje bez zmiany, natomiast obliczenie składowych sinusoidalnych nieco się zmienia. Należy mianowicie uwzględnić, że w punkcie  $\pi/2$  wszystkie sinusoidy rzędów parzystych posiadają wartość zero. Wobec tego rzędna punktów  $\frac{\pi}{2}$  zawiera tylko amplitudy sinusoid nieparzystych:

$$y'_1 = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \dots,$$

których obliczenie przeprowadza się sposobem podanym wyżej.

Jeżeli teraz początek układu przesuniemy w punkt  $\frac{\pi}{4}$  i odcinek okresu podstawowego podzielimy na dwie równe części, będziemy mieli:

$$\Sigma y''_2 = 2 (a_2 - a_6 + a_{10} - a_{14} + a_{18} - \dots).$$

Ponieważ rzędne te zawierają wszystkie nieparzyste wielokrotne drugiej harmonicznej, dzielimy teraz odcinek na 6, 10 i t. d. części mamy:

$$\Sigma y''_6 = 6 (a_6 + a_{18} - \dots)$$

$$\Sigma y''_{10} = 10 (a_{10} - a_{30} + \dots)$$

.....

By znaleźć czwartą harmoniczną i jej wielokrotne nieparzyste, zaczynamy nasze postępowanie od punktu  $\frac{\pi}{8}$ , dla 8-mej harmonicznej od  $\frac{\pi}{16}$  i t.d.

Istnieje wreszcie między innymi metoda czysto graficzna R. Rothe'go (E. T. Z. 1920) pozwalająca znaleźć bezpośrednio amplitudy całkowite  $J_n$  poszczególnych harmonicznych. Okres podstawowy krzywej dzielimy na  $p$  części i odpowiadające punktom podziału rzędne sumujemy geometrycznie pod kątami  $n \frac{\pi}{p}$ . Każdorazowa suma geometryczna, pomnożona przez  $\frac{2}{p}$ , daje żadaną amplitudę  $J_n$ .

## 7. Wartość skuteczna i moc prądu złożonego.

Do obliczenia wartości skutecznej prądu i mocy prądów złożonych służy równanie wyrażające średnią wartość iloczynu dwu szeregów Fourier'a w ciągu okresu podstawowego:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y y' dx. \tag{26}$$

Jeżeli mamy dwa szeregi Fourier'a w postaci:

$$y = \Sigma (a_n \sin nx + b_n \cos nx) = \Sigma C_n \sin (n \omega t + \varphi_n),$$

$$y' = \Sigma (a'_n \sin nx + b'_n \cos nx) = \Sigma C'_n \sin (n \omega t + \varphi'_n),$$

to zastanowienie się nad własnościami funkcji gonjometrycznych prowadzi do następujących wniosków: 1) średnia wartość iloczynu sinusoidy i kosinusoidy tej samej częstotliwości przez cały okres równa się zeru, oraz 2) średnia wartość iloczynu dwu sinusoid o różnych częstotliwościach (patrz § 3)

również wynosi zero. Pozostają więc tylko iloczyny sinusoid, oraz kosinusoid tej samej częstotliwości:

$$\frac{a_n a_n'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 n x dx \quad \text{i} \quad \frac{b_n b_n'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 n x dx,$$

a więc:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \cdot y' dx = \sum \frac{1}{2} (a_n a_n' + b_n b_n'),$$

lub po podstawieniu:

$$a_n = C_n \cos \psi_n, \quad b_n = C_n \sin \psi_n, \quad a_n' = C_n' \cos \psi_n', \quad b_n' = C_n' \sin \psi_n'.$$

$$a_n a_n' + b_n b_n' = C_n C_n' (\cos \psi_n \cdot \cos \psi_n' + \sin \psi_n \sin \psi_n'),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y y' dx = \sum \frac{1}{2} C_n C_n' \cos (\psi_n - \psi_n').$$

Na zasadzie powyższego wzoru obliczymy wartość skuteczną prądu, podstawiając  $y = y' = i$ ,  $x = \omega t$ , otrzymamy ze wzoru (26) średnią wartość kwadratów prądu w ciągu jednego okresu podstawowego, czyli kwadrat wartości skutecznej prądu złożonego:

zaś

$$J^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \sum \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2) = \sum \frac{1}{2} J_n^2 = \sum J_n^2, \quad (27)$$

a więc prąd skuteczny wynosi:

$$J = \sqrt{\sum J_n^2} = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \dots} \quad (27a)$$

gdzie  $J_1, J_2, J_3, \dots$  są wartościami skutecznymi poszczególnych prądów harmonicznich. Wzory (27) i (27a) wskazują, że prądy skuteczne poszczególnych harmonicznich są od siebie niezależne.

Gdy oporność obwodu wynosi  $R$ , to moc zużyta w obwodzie wyniesie:

$$P = J^2 \cdot R = J_1^2 R + J_2^2 R + J_3^2 R + \dots$$

czyli moce wydzielone przez poszczególne harmoniczne są od siebie niezależne.

Jeżeli krzywe napięcia i prądu oznaczmy przez:

$$v_n = V_{nm} \sin(n \omega t + \psi_n)$$

$$i_n = J_{nm} \sin(n \omega t + \psi_n'),$$

gdzie  $\psi_n$  i  $\psi_n'$  są kątami przesunięcia fazy względem początku układu, to w myśl równania (26) możemy obliczyć moc w obwodzie:

$$P = \int_0^T v \cdot i \, dt = \sum \frac{1}{2} V_{nm} \cdot J_{nm} \cos(\psi_n - \psi_n') =$$

$$= \sum \frac{1}{2} V_{nm} J_{nm} \cos \varphi_n \quad (29)$$

gdzie  $\varphi_n$  jest kątem przesunięcia faz między napięciem i prądem dla każdej poszczególnej harmonicznej. Podstawiając:  $\frac{1}{2} V_{nm} \cdot J_{nm} = V_n J_n$  i rozwijając (29) otrzymamy:

$$P = V_1 J_1 \cos \varphi_1 + V_2 J_2 \cos \varphi_2 + \dots \quad (29a)$$

Wzór ten sprawdza wypowiedziane wyżej twierdzenie o niezależności mocy harmonicznych.

We wzorze na moc prądu złożonego nie występują wartości skuteczne wypadkowego prądu i napięcia w obwodzie, lecz odnośne wartości napięć i prądów harmonicznych składowych. Mimo to jednak wyrażamy moc całkowitą prądu złożonego zapomocą wzoru

$$P = V \cdot J \cdot \cos \varphi \quad (30)$$

gdzie  $\cos \varphi$  nazywamy współczynnikiem mocy. Nie wyraża on faktycznego kąta przesunięcia faz między prądem i napięciem, lecz jest to pewna wielkość zastępcza, fikcyjna. Wielkości powyższe możemy wykorzystać do wykresów wektorjalnych, operując nimi tak, jak gdyby to były wartości skuteczne i kąt przesunięcia faz prądu i napięcia sinusoidalnego.

## 8. Suma dwu prądów złożonych.

Suma dwu prądów złożonych naogół będzie miała inny kształt, aniżeli oba prądy składowe, albowiem harmoniczne ich będą się składały pod różnymi kątami przesunięcia faz.

Jeżeli np. mamy dwa prądy równe co do wielkości i kształtów, jednakże przesunięte w fazie (w stosunku do częstotliwości podstawowej) o kąt  $\varphi$ , to poszczególne harmoniczne wykażą przesunięcia faz  $n\varphi$ . Gdy przypadkowo dla jednej z harmonicznych będzie  $n \cdot \varphi = \pi$  albo nieparzystą wielokrotną  $\pi$ , to oczywiście harmoniczne te się zniosą i znikną z prądu wypadkowego. Naodwrot, gdy  $n \cdot \varphi = 2\pi$  lub jest parzystą wielokrotnością  $\pi$ , har-

moniczna wystąpi z podwójną amplitudą. Tak np. dla kąta  $\varphi = 60^\circ$ , znikną harmoniczne trzecia, dziewiąta i t. d. te same zaś harmoniczne uwydatnią się przy  $\varphi = 120^\circ$ . W pierwszym przypadku prąd wypadkowy będzie bardziej zbliżony do sinusoidy, w drugim będzie silniej zniekształcony, niż prądy składowe.

Naogół biorąc, prąd wypadkowy będzie odpowiadał kształtem prądom składowym jedynie, gdy przesunięcie faz będzie równe zeru.

### 9. Odkształcenie prądu złożonego pod wpływem indukcyjności i pojemności.

Krzywa prądu wówczas tylko będzie odpowiadała charakterem krzywej napięcia złożonego, gdy obwód będzie przedstawiał tę samą oporność dla wszystkich częstotliwości składowych. Warunek ten spełnia jedynie oporność omowa, i to z zastrzeżeniem, że dla wyższych harmonicznych można pominąć wzrost oporności pod wpływem t. zw. działania naskórkowego lub strat w żelazie. Natomiast z chwilą, gdy w obwodzie znajdzie się indukcyjność lub pojemność, których oporność jest funkcją częstotliwości, stosunek harmonicznym w prądzie ulega poważnym zmianom, mogąc zmienić zasadniczo charakter krzywej.

#### a) Wpływ pojemności.

Jeżeli napięcie zasilające ma postać

$$v = \Sigma (a_n \sin n \omega t + b_n \cos n \omega t),$$

to prąd płynący przez kondensator wyrazi nam wzór:

$$i = C \frac{dv}{dt} = C \omega \Sigma n \cdot (a_n \cos n \omega t - b_n \sin n \omega t), \quad (31)$$

Harmoniczne prądu zwiększają się więc w stosunku prostym do rzędu harmonicznnej.

#### b) Wpływ indukcyjności.

Prąd płynący przez indukcyjność daje nam całka:

$$i = -\frac{1}{L} \int v dt = \frac{1}{\omega L} \Sigma \frac{1}{n} \left( -a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t \right). \quad (32)$$

Tu amplitudy prądów harmonicznym będą odwrotnie proporcjonalne w stosunku do odpowiednich amplitud napięć.

Odwrotnie będą się zachowywały napięcia, wytworzone na tych oporach urojonych, gdy przez nie będzie płynął prąd o danej krzywej. Wówczas oczywiście na kondensatorze spadki napięć będą tem mniejsze, im wyższy jest rząd harmonicznnej, natomiast na indukcyjności spadki napięcia będą się zwiększały w miarę rzędu harmonicznnej.

W jakim stopniu może być zmieniony charakter krzywej pod wpływem oporności pozornej, przedstawia nam krzywa napięcia trójkątna, zasilająca kondensator. Krzywa ta (§ 4) wyraża się równaniem:

$$\text{od } x = 0 \text{ do } x = \pi/2 \quad y = \frac{2 V_m}{\pi} \cdot x,$$

$$\text{od } x = \pi/2 \text{ do } x = \pi \quad y = \frac{2 V_m}{\pi} (1 - x t),$$

lub po podstawieniu  $x = \omega t$ :

$$y = \frac{2 V_m}{\pi} \cdot \omega t, \quad y = \frac{2 V_m}{\pi} (1 - \omega t).$$

Wobec tego prąd ładujący pojemność dla  $x = 0$  do  $\pi/2$  będzie:

$$i = C \frac{dv}{dt} = + \frac{2}{\pi} V_m \omega C = \text{const},$$

dla  $x = \frac{\pi}{2}$  do  $\pi$ :

$$i = - \frac{2}{\pi} V_m \omega C = \text{const}.$$

A więc krzywa prądu jest prostokątna i wyprzedza napięcie o  $\frac{\pi}{2}$ .

Do tego samego wyniku doszlibyśmy, różniczkując odpowiadający krzywej szereg Fouriera.

## 10. Prądy złożone w obwodzie rezonansowym.

Wpływ harmoniczných, zawartých w prądzie, uwydatnia się w szczególności w obwodach rezonansowych.

I tak *obwód rezonansu napięć*<sup>1)</sup> przedstawia dla harmoniczných opór pozorny:

$$\hat{Z}_n = R + j \left( n \omega L - \frac{1}{n \omega C} \right) = R + j n \left( n \omega L - \frac{1}{n^2 \omega C} \right). \quad (33)$$

Przesunięcia faz poszczególných harmoniczných wyrażają się zależnością:

$$\text{tg } \varphi_n = \frac{n \omega L - \frac{1}{n \omega C}}{R}. \quad (34)$$

<sup>1)</sup> Rozdział I. § 1.

Dla tej harmonicznej, z którą obwód jest w rezonansie, czyli dla której spełniony jest warunek:

$$n \omega L = \frac{1}{n \omega C}, \quad \text{czyli} \quad \omega L = \frac{1}{n^2 \omega C}, \quad (35)$$

stanowi on zwarcie, dla wszystkich zaś pozostałych przedstawia znaczny opór pozorny.

Dla odvodu rezonansu prądów, przyjmując dla uproszczenia, że  $R = R_2 = R_1$  otrzymamy rezonans dla danej harmonicznej<sup>1)</sup>, gdy:

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$$

a więc, gdy

$$n \omega L = \frac{1}{n \omega C}, \quad \text{czyli} \quad \omega L = \frac{1}{n^2 \omega C} \quad (36)$$

co pokrywa się z warunkiem, wyrażonym w równaniu (35). Dla tej częstotliwości obwód przedstawia maksymalny opór pozorny o charakterze bezindukcyjnym, który wynosi w przybliżeniu:

$$R_z = \frac{n^2 \omega^2 L^2}{2 R} = \frac{n^2 \omega^2 L^2}{r}.$$

<sup>1)</sup> Rozdział I. § 10.

## DODATEK 2.

### ZASADNICZE POJĘCIA Z RACHUNKU SYMBOLICZNEGO.

Poniżej podajemy zestawienie zależności, występujących w rachunku liczbami zespolonymi, celem uzupełnienia pewnych przeróbek, dokonanych w tekście.

#### 1. Twierdzenie Eulera i Moivre'a.

Dowolną wielkość zespoloną  $OA = a + jb$  (rys. 1), której wartość bezwzględna czyli *moduł* wynosi:

$$(\overline{OA}) = r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

wyrazić możemy również w postaci

$$\overline{OA} = r \cos \varphi + jr \sin \varphi = r (\cos \varphi + j \sin \varphi), \quad (1)$$

jeżeli  $\varphi$  oznacza kąt, zawarty między kierunkiem tej wielkości a osią odciętych, a określony zależnością:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \quad (1a)$$

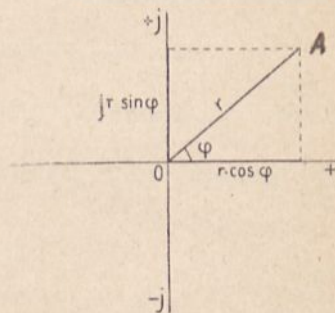
Według Eulera możemy wówczas napisać:

$$\overline{OA} = r (\cos \varphi + j \sin \varphi) = r \cdot \varepsilon^{j\varphi} \quad (2)$$

gdzie  $\varepsilon = 2,718$  jest podstawą logarytmów naturalnych.

Związek ten można udowodnić, opierając się na rozwinięciu w szereg funkcji, wchodzących w skład równania (2). Mamy dla dowolnej zmiennej  $x$

$$\varepsilon^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (3)$$



Rys. 1.



Jeżeli  $\varepsilon^x$  podniesiemy do potęgi urojonej, otrzymamy:

$$\varepsilon^{jx} = 1 + j \frac{x}{1!} + j^2 \frac{x^2}{2!} + j^3 \frac{x^3}{3!} + \dots + j^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

czyli:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{jx} &= 1 + j \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - j \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + j \frac{x^n}{n!} \dots = \\ &= \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) + j \left( \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Porównywując ten szereg (4) z szeregami dla funkcji trygonometrycznych:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (5)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (6)$$

więc

$$\varepsilon^{jx} = \cos x + j \sin x$$

widzimy, że twierdzenie Eulera jest słuszne.

Analogicznie możemy udowodnić, słuszność wzoru Eulera dla ujemnych potęg urojonych, a mianowicie:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-jx} &= 1 - j \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + j \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - j \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \\ &= \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) - j \left( \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right), \end{aligned}$$

czyli

$$\varepsilon^{-jx} = \cos x - j \sin x. \quad (7)$$

Z powyższego wynika, że:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{\varepsilon^{jx} + \varepsilon^{-jx}}{2}, \\ \sin x &= \frac{\varepsilon^{jx} - \varepsilon^{-jx}}{2j} = -j \cdot \frac{\varepsilon^{jx} - \varepsilon^{-jx}}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Na podstawie szeregów (3) do (7) można również udowodnić, że

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon^{jx})^n = \varepsilon^{jnx} &= (\cos x + j \sin x)^n = \cos nx + j \sin nx, \\ \varepsilon^{-jnx} &= (\cos x - j \sin x)^n = \cos nx - j \sin nx. \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

oraz

Są to t. zw. wzory *Moivre'a*.

Na podstawie wzorów (8) i (8-a) potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych wyrazić można w sposób następujący:

$$\overline{OA}^n = (a + jb)^n = r^n \cdot \varepsilon^{\pm jnx} = r^n \cdot (\cos nx \pm j \sin nx), \quad (9)$$

$$\sqrt[n]{\overline{OA}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon^{\pm j \frac{x}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left( \cos \frac{x}{n} \pm j \sin \frac{x}{n} \right). \quad (10)$$

Pochodną wielkości zespolonej da nam wzór:

$$\frac{d(OA)}{dx} = r \frac{d\varepsilon^{\pm jnx}}{dx} = \pm j n r \cdot \varepsilon^{\pm jnx} = \pm j n r \cdot (\cos nx \pm j \sin nx), \quad (11)$$

zaś całkę tej wielkości:

$$\begin{aligned} \int \left( \overline{OA} \right) dx &= r \int \varepsilon^{\pm jnx} \cdot dx = \mp j \frac{r}{n} \varepsilon^{\pm jnx} = \mp j \frac{r}{n} \cdot (\cos nx \pm j \sin nx) = \\ &= \pm j^{-1} n^{-1} \cdot r \cdot (\cos nx \pm j \sin nx). \end{aligned} \quad (12)$$

W podobny sposób otrzymamy pochodną rzędu  $p$  oraz  $p$  - krotną całkę wielkości zespolonej:

$$\frac{d^p(OA)}{dx^p} = \pm j^p n^p \cdot r \cdot \varepsilon^{\pm jnx} = \pm j^p n^p \cdot r (\cos nx \pm j \sin nx), \quad (13)$$

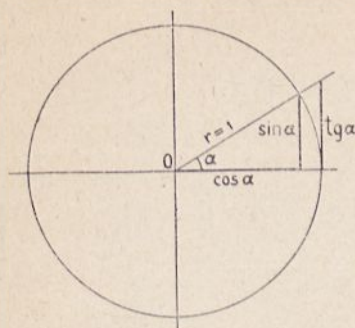
$$\int \int \dots \int \left( \overline{OA} \right) dx = \pm j^{-p} n^{-p} \cdot r \cdot \varepsilon^{\pm jnx} = \pm j^{-p} n^{-p} \cdot r (\cos nx \pm j \sin nx). \quad (14)$$

## 2. Funkcje hiperboliczne.

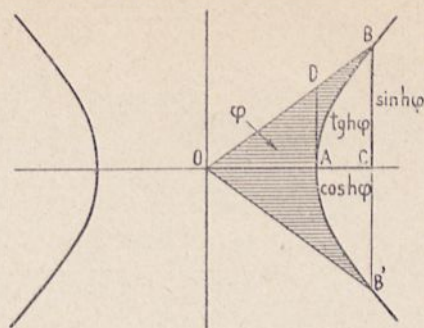
Funkcje hiperboliczne zostały wprowadzone dla uniknięcia urojonych wielkości przy układaniu tablic dla funkcji trygonometrycznych łuku  $jx$ .

Funkcje te pozostają w podobnym stosunku do powierzchni OBAB'hi-

perboli równobocznej o osi rzeczywistej  $a = 1$ , jak funkcje trygonometryczne do powierzchni wycinka koła o promieniu  $r = 1$  (rys. 2 i 3).<sup>1)</sup>



Rys. 2.



Rys. 3.

I tak, oznaczając powierzchnię  $OBAB'$  przez  $\varphi$  wprowadzamy następujące pojęcia:

$$BC = \sinh \varphi \text{ — sinus hiperboliczny,}$$

$$OC = \cosh \varphi \text{ — kosinus hiperboliczny,}$$

$$\frac{B'C}{OC} = \frac{AD}{OA} = \frac{AD}{1} = \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} = \operatorname{tgh} \varphi \text{ tangens hiperboliczny,}$$

$$\frac{1}{AD} = \frac{\cosh \varphi}{\sinh \varphi} = \operatorname{ctgh} \varphi \text{ kotangens hiperboliczny.}$$

Z geometrii analitycznej można wykazać, że dla dowolnej zmiennej  $x$  istnieją zależności<sup>2)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

<sup>1)</sup> Wobec tego, że powierzchnia wycinka koła jest proporcjonalna do łuku, możemy utożsamić kąt w mierze łukowej z powierzchnią wycinka.

<sup>2)</sup> Przeliczenie:

a) Równanie hiperboli równobocznej jest:  $x^2 - y^2 = 1$ .  
więc (patrz rys. 3):

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1.$$

b) Pole zakreskowane hiperboli równobocznej rys. 3 o osi  $a = 1$  wynosi:

$$S_{2OBA} = \varphi = a^2 \ln \left( \frac{OC + CB}{a} \right) = \ln(OC + CB) = \ln(\cosh \varphi + \sinh \varphi).$$

Stąd mamy  $e^\varphi = \cosh \varphi + \sinh \varphi$  (b).

Z układu tych dwóch równań obliczamy bezpośrednio zależności (15).

które wykazują dużą analogię do równań (8). Wynikają z nich zależności:

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = -j \sinh jx, \quad \sinh jx = j \sin x,$$

$$\cos x = \cos(-x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cosh jx.$$

Z równań (15) wynika dalej:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (16)$$

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (17)$$

Przebiegi funkcji hiperbolicznych podane są na rys. 4 do 6. Z krzywych tych oraz z równań (15) i (17) wynika, że:

$$\cos ix = \cosh x \quad \text{i t. d.}$$

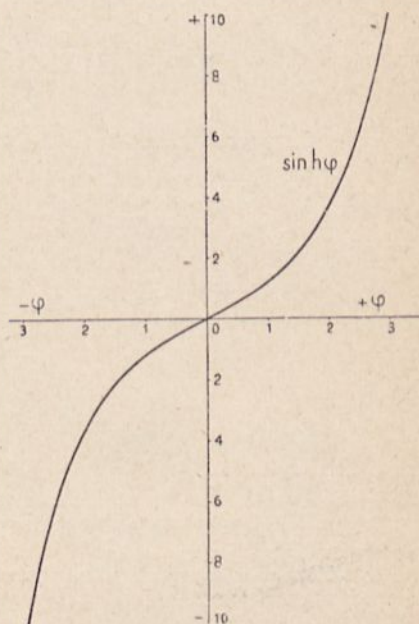
$$\operatorname{tg} x = j \operatorname{tg} jx,$$

$$\operatorname{tg} jx = j \operatorname{tgh} x.$$

Dalej mamy:

- 1)  $\sin 0 = 0,$
- 2)  $\sinh(-x) = -\sinh x,$
- 3)  $\cosh 0 = 1$
- 4)  $\cosh(-x) = \cosh x,$
- 5)  $\operatorname{tgh} 0 = 0,$
- 6)  $\operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh} x,$
- 7)  $\operatorname{tgh}(\pm\infty) = \pm 1,$
- 8)  $\operatorname{cthh} 0 = \pm\infty$
- 9)  $\operatorname{ctgh}(-x) = -\operatorname{ctgh} x$
- 10)  $\operatorname{ctgh}(\pm\infty) = \pm 1.$

(18)



Rys 4.

Pozatem ważne są zależności:

- 1)  $\cosh x + \sinh x = e^x,$
- 2)  $\cosh x - \sinh x = e^{-x},$
- 3)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$

(19)

Wzory 1 i 2 pozwalają obliczać z tablic funkcji hiperbolicznych wielkości  $e^x$  i  $e^{-x}$  tak ważne dla radjotechnika.

Funkcjami odwrotnymi funkcji hiperbolicznych są *powierzchnie*, a nie łuki, jak funkcje odwrotne funkcji trygonometrycznych. Mamy tu, jeżeli:

$$\sinh x = u,$$

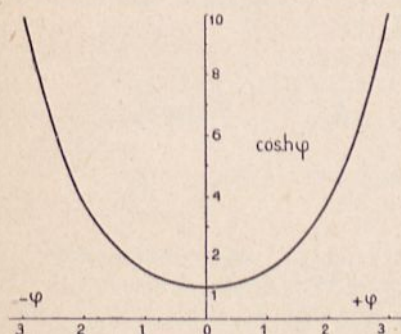
to

$$x = \operatorname{arsinh} u \text{ (area sinus hiperbolici),}$$

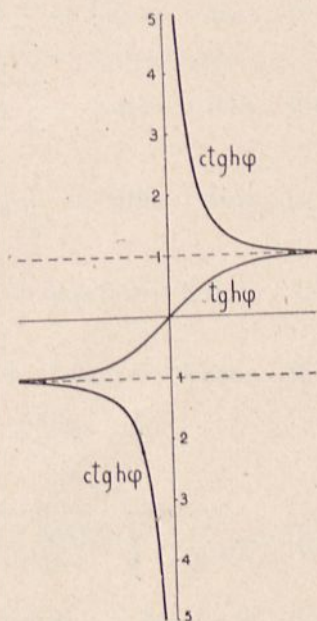
co oznacza, że wartości  $u$  funkcji  $\sinh x$  odpowiada *powierzchnia*  $O B A B$ , równa  $x$ . Funkcje odwrotne posiadają wartości:

- 1)  $\operatorname{arsinh} u = \ln (u + \sqrt{u^2 + 1})$ ,
- 2)  $\operatorname{arcosh} u = \ln (u + \sqrt{u^2 - 1})$ ,
- 3)  $\operatorname{artgh} u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}$ ,
- 4)  $\operatorname{arctgh} u = \frac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1}$ .

(20)



Rys. 5.



Rys. 6.

*Inne zależności i przekształcenia funkcji hiperbolicznych:*

- 1)  $\sinh (\alpha \pm \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta \pm \cosh \alpha \sinh \beta$ ;
- 2)  $\cosh (\alpha \pm \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta \mp \sinh \alpha \sinh \beta$ ;
- 3)  $\operatorname{tgh} (\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tgh} \alpha \pm \operatorname{tgh} \beta}{1 \pm \operatorname{tgh} \alpha \operatorname{tgh} \beta}$ ;
- 4)  $\sinh \alpha \pm \sinh \beta = 2 \sinh \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cosh \frac{\alpha \mp \beta}{2}$ ;

- 5)  $\cosh \alpha + \cosh \beta = 2 \cosh \frac{\alpha + \beta}{2} \cosh \frac{\alpha - \beta}{2}$ ;
- 6)  $\sinh \alpha - \sinh \beta = 2 \cosh \frac{\alpha + \beta}{2} \sinh \frac{\alpha - \beta}{2}$ ;
- 7)  $\cosh \alpha - \cosh \beta = 2 \sinh \frac{\alpha + \beta}{2} \sinh \frac{\alpha - \beta}{2}$ ;
- 8)  $\sinh \alpha \cdot \sinh \beta = \frac{1}{2} \sinh (\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \cosh (\alpha - \beta)$ ;
- 9)  $\cosh \alpha \cdot \cosh \beta = \frac{1}{2} \cosh (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cosh (\alpha - \beta)$ ;
- 10)  $\sinh \alpha \cdot \cosh \beta = \frac{1}{2} \sinh (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sinh (\alpha - \beta)$ ;
- 11)  $\cosh \alpha \cdot \sinh \beta = \frac{1}{2} \sinh (\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sinh (\alpha - \beta)$ ;
- 12)  $\sinh 2\alpha = 2 \sinh \alpha \cdot \cosh \alpha = \frac{2 \operatorname{tgh} \alpha}{1 - \operatorname{tgh}^2 \alpha}$ ;
- 13)  $\cosh 2\alpha = \cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 + 2 \sinh^2 \alpha =$   
 $= \frac{1 + \operatorname{tgh}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tgh}^2 \alpha}$ ;
- 14)  $\operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cosh \alpha - 1}{\cosh \alpha + 1}} = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha + 1} = \frac{\cosh \alpha - 1}{\sinh \alpha}$ ;
- 15)  $\varepsilon^\alpha = \cosh \alpha + \sinh \alpha$ ;  $\varepsilon^{-\alpha} = \cosh \alpha - \sinh \alpha$ ;
- 16)  $\operatorname{Ar} \sinh \alpha = \ln (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1})$ ;  $\operatorname{Ar} \cosh \alpha = \ln (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})$ ;
- 17)  $\cosh \alpha = \cos j\alpha$ ;  $\sinh \alpha = -j \sin j\alpha$ ;  $\operatorname{tgh} \alpha = -j \operatorname{tg} j\alpha$ ;
- 18)  $d \sinh \alpha = \cosh \alpha d\alpha$ ;  $d \cosh \alpha = \sinh \alpha d\alpha$ ;  $d \operatorname{tgh} \alpha = \frac{d\alpha}{\cosh^2 \alpha}$ ;
- 19)  $\int \sinh \alpha d\alpha = \cosh \alpha + C$ ;  $\int \cosh \alpha d\alpha = \sinh \alpha + C$ ;  
 $\int \operatorname{tgh} \alpha d\alpha = \ln \cosh \alpha + C$ ;

Obliczenie funkcji hiperbolicznych, których argumentem jest liczba zespolona.

$$1) \sinh(a + jb) = \sinh a \cdot \cos b + j \cosh a \cdot \sin b,$$

$$2) \cosh(a + jb) = \cosh a \cdot \cos b + j \sinh a \cdot \sin b,$$

$$3) \operatorname{tgh}(a + jb) = \frac{\sinh 2a + j \sin 2b}{\cosh 2a + \cos 2b},$$

$$4) \operatorname{ctgh}(a + jb) = \frac{\sinh 2a - j \sin 2b}{\cosh 2a - \cos 2b}.$$

Obliczenie funkcji hiperbolicznych, których argument jest powiększony o  $j \frac{\pi}{2}$ .

$$1) \sinh\left(x + j \frac{\pi}{2}\right) = j \cosh x,$$

$$2) \cosh\left(x + j \frac{\pi}{2}\right) = j \sinh x,$$

$$3) \operatorname{tgh}\left(x + j \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctgh} x,$$

$$4) \operatorname{ctgh}\left(x + j \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tgh} x.$$

Obliczenie łuku (kąta), którego tangens jest liczbą zespoloną.

Załóżmy że dana jest nam liczba  $A + jB$ , i trzeba znaleźć taki kąt  $\theta = a + jb$ , któryby spełniał równanie:

$$\operatorname{tg} \theta = A + jB.$$

Jeżeli:

$$A + jB = \operatorname{tg}(a + jb), \text{ to } (A + jB) \cosh(a + jb) = \sinh(a + jb), \quad (a)$$

a

$$(A + jB) = (\cosh a \cdot \cos b + j \sinh a \sin b) = \sinh a \cdot \cos b + j \cosh a \cdot \sin b. \quad (b)$$

Przyrównywując do siebie oddzielnie części rzeczywiste i urojone tych równań i dzieląc następnie pierwsze z otrzymanych równań przez  $\cosh a \cdot \cos b$  a drugie przez  $\sinh a \cdot \sin b$ , otrzymamy dwa nowe równania. Mnożymy te równania przez siebie stronami i po uwzględnieniu zależności:

$$\operatorname{tg} 2b = \frac{2B}{\operatorname{ctg} b - \operatorname{tg} b},$$

piszemy wzór ostateczny:

$$\operatorname{tg} 2b = \frac{2B}{1 - A^2 - B^2} \quad (1)$$

W podobny sposób znajdujemy:

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2A}{1 + A^2 + B^2}; \quad (2)$$

Z równań: (1) i (2) obliczamy kąt  $\theta$ .

*Przykład:*  $\operatorname{tg} \theta = 3 - j7$ .

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \cdot 3}{1 + 3^2 + 7^2} = \frac{6}{59} \approx \operatorname{tg} 0,102, a = 0,051,$$

$$\operatorname{tg} 2b = \frac{-2 \cdot 7}{1 - 3^2 - 7^2} = \frac{-14}{-58} = 0,241 = \operatorname{tg} (13^\circ 34' + 180^\circ),$$

gdyż jest ze znakiem minus, a  $b = 96^\circ 47'$ , skąd

$$\theta = 0,051 + j96^\circ 47'.$$

*Obliczenie modułu wyrażeń  $\sinh(a + jb)$  i  $\cosh(a + jb)$ .*

Na podstawie wzorów wyprowadzonych poprzednio, możemy napisać:

$$\sinh(a + jb) = \sinh a \cdot \cos b + j \cosh a \cdot \sin b,$$

$$\cosh(a + jb) = \cosh a \cdot \cos b + j \sinh a \cdot \sin b.$$

Skąd po odpowiednich przeróbkach otrzymamy:

$$\begin{aligned} |\sinh(a + jb)| &= \sqrt{\sinh^2 a + \sin^2 b} = \sqrt{\cosh^2 a - \cos^2 b} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} (\cosh 2a - \cos 2b)}. \end{aligned}$$

W analogiczny sposób znajdziemy:

$$\begin{aligned} |\cosh(a + jb)| &= \sqrt{\sinh^2 a + \cos^2 b} = \sqrt{\cosh^2 a - \sin^2 b} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} (\cosh 2a + \cos 2b)}. \end{aligned}$$



## SKRÓTY CZASOPISM UŻYTE W TEKŚCIE

<i>Jahrb.</i>	Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie — Zeitschrift für Hochfrequenztechnik (obecnie Hochfrequenztechnik und Elektroakustik).
<i>Proc. J. R. E.</i>	Proceedings of the Institute of Radio Engineers N. York.
<i>J. I. E. E.</i>	Journal of the Institution of Electrical Engineers Londyn.
<i>I. E. E. Wir. Proc.</i>	Institution of Electrical Engineers. Proceedings of the Wireless Section. Londyn.
<i>T. Z.</i>	Telefunken — Zeitung.
<i>E. T. Z.</i>	Elektrotechnische Zeitschrift.
<i>E. W., E. W. W. E., lub WEEW .</i>	Experimental Wireless and Wireless Engineer (początkowo Experimental Wireless obecnie Wireless Engineers and Experimental Wireless) Londyn.
<i>W. W.</i>	Wireles World Londyn.
<i>O. E.</i>	L'Onde électrique. Paryż.
<i>E. N. T.</i>	Elektrische Nachrichten Technik.
<i>Ann. d. Phys.</i>	Annalen der Physik.
<i>Trans. A. I. E. E.</i>	Transactions of the Institute of Electrical Engineers. N. York.



## SPIS RZECZY.

	str.
Przedmowa . . . . .	5
<b>Wstęp.</b>	
1. Przedmiot radjotechniki . . . . .	7
2. Zasada radjokomunikacji . . . . .	8
3. Typy radjokomunikacji . . . . .	10
4. Rozwój historyczny radjokomunikacji . . . . .	11

## ROZDZIAŁ I.

### Obwody rezonansowe.

	<i>str.</i>
1. Istota rezonansu napięć i przepięcie rezonansowe . . . . .	13
2. Drgania elektromagnetyczne . . . . .	17
3. Krzywa rezonansu . . . . .	19
4. Jednostki tłumienia . . . . .	21
5. Graficzna analiza zjawiska rezonansu . . . . .	23
6. Przykład . . . . .	24
7. Rezonans w obwodzie z upływnością . . . . .	25
8. Rezonans w obwodzie zawierającym żelazo (obwód ferromagnetyczny) . . . . .	26
9. Cechy rezonansu napięć . . . . .	30
10. Rezonans prądów . . . . .	31
11. Obwód rezonansu prądów z dzieloną indukcyjnością . . . . .	37
12. Obwód rezonansu prądów z dzieloną pojemnością . . . . .	39
13. Obwód rezonansu prądów o obu gałęziach złożonych . . . . .	39
14. Porównanie rezonansu prądów z rezonansem napięć . . . . .	40
15. Przykład . . . . .	41

## ROZDZIAŁ II.

### Stany przejściowe w obwodach rezonansowych.

	<i>str.</i>
1. Równanie drgań swobodnych . . . . .	44
2. Dyskusja równania drgań swobodnych . . . . .	49
3. Przykład . . . . .	52
4. Znaczenie tłumienia dla drgań niegasnących . . . . .	54
5. Drgania w obwodzie rezonansowym, zasilanym pod napięciem stałym . . . . .	57
6. Drgania w obwodach z opornością ujemną . . . . .	59
7. Metody wytwarzania prądów wielkiej częstotliwości . . . . .	63
8. Wytwarzania i moc drgań gasnących . . . . .	64
9. Wzbudzenie drgań zapomocą brzęczyka . . . . .	66
10. Przykład . . . . .	67
Biblijografia do rozdziałów I i II . . . . .	68

## ROZDZIAŁ III.

### Obwody sprzężone.

	<i>str.</i>
1. Istota i rodzaj sprzężenia . . . . .	69
2. Ogólny przypadek obwodów sprzężonych transformatorowo . . . . .	73
3. Zachowanie się obwodu wtórnego przy stałej częstotliwości . . . . .	76
4. Sprawność sprzężenia obwodów . . . . .	81
5. Stany krytycznego obciążenia obwodów sprzężonych . . . . .	83
6. Wykres kołowy obwodów sprzężonych . . . . .	84
7. Przykład obliczenia obwodów sprzężonych . . . . .	86
8. Częstotliwości rezonansowe w dwu indukcyjnie sprzężonych obwodach rezonansowych . . . . .	89
9. Krzywe rezonansu układu sprzężonego indukcyjnie . . . . .	94
10. Sprężność krytyczna, silna i słaba . . . . .	98
11. Drgania w obwodach sprzężonych. Przeciąganie . . . . .	100
12. Zachowanie się obwodów zestrojonych w rezonansie . . . . .	103
13. Przykład dla sprzężenia obwodów zestrojonych . . . . .	106
14. Układy, w których jeden z obwodów nie zawiera pojemności . . . . .	108
15. Obwody sprzężone bezpośrednio . . . . .	111
16. Kilka obwodów sprzężonych kaskadowo . . . . .	112
17. Indukcyjność wzajemna dodatnia i ujemna . . . . .	114
18. Sprzężenie pojemnościowe . . . . .	115
19. Odsprzężenie . . . . .	121
20. Sprzężenie oporowe . . . . .	122
21. Stany przejściowe w obwodach sprzężonych. Teoria Bjerksesa . . . . .	122
22. Sprężność silna. Zjawisko fali podwójnej . . . . .	125
Biblijografia do rozdziału III . . . . .	128

## ROZDZIAŁ IV.

### Modulacja i detekcja.

	str.
1. Modulacja sinusoidalna prądu stałego . . . . .	130
2. Modulacja telefoniczna. Nadawanie telegraficzne. Budowa dźwięków mowy i muzyki . . . . .	134
3. Zniekształcenia w przesyłaniu telefonji . . . . .	139
4. Działanie prądu zmiennego na słuchawkę magnetyczną . . . . .	141
5. Detekcja prądów wielkiej częstotliwości . . . . .	145
6. Działanie detektora o charakterystyce idealnej . . . . .	147
7. Zastosowanie kondensatora wyrównawczego . . . . .	149
8. Moc wyprostowana i sprawność prostowania . . . . .	154
8a. Detekcja na zakrzywieniu charakterystyki prostownika . . . . .	157
9. Detektor o charakterystyce krywoliniowej, pracujący na oporność. Charakterystyka dynamiczna . . . . .	162
10. Modulacja prądu wielkiej częstotliwości . . . . .	164
11. Modulacja amplitudy . . . . .	167
12. Warunki energetyczne modulacji amplitudy . . . . .	171
13. Detekcja prądu o modulowanej amplitudzie . . . . .	174
14. Modulacja amplitudy prądu zawierającego wyższe harmoniczne . . . . .	181
15. Zasadnicze sposoby modulowania amplitudy . . . . .	182
16. Nakładanie (interferencja) prądów sinusoidalnych . . . . .	185
17. Detekcja prostolinijna prądów nałożonych . . . . .	189
18. Detekcja prądów nałożonych na zakrzywieniu charakterystyki detektora . . . . .	192
19. Modulacja bez jednej z fal bocznych (jednowstęgowa) . . . . .	194
20. Modulacja częstotliwości . . . . .	195
21. Wykresy wektorowe modulacji amplitudy i częstotliwości . . . . .	199
22. Modulacja fazy . . . . .	202
23. Detekcja prądów o modulowanej częstotliwości lub fazie . . . . .	203
24. Zniekształcenia modulacji amplitudy w obwodach rezonansowych . . . . .	204
25. Wzajemne oddziaływanie dwóch prądów modulowanych w odbiorniku . . . . .	207
26. Streszczenie . . . . .	210
Bibliografia do rozdziału IV-ego . . . . .	211

## ROZDZIAŁ V.

### Fale elektryczne w przewodnikach.

	str.
1. Obwód o stałych elektrycznych rozłożonych równomiernie . . . . .	212
2. Wyznaczenie współczynników równań linii elektrycznej . . . . .	215
3. Dyskusja równania linii. Oporność falowa . . . . .	217
4. Prąd w linii jako funkcja drogi i czasu. Fale w przewodnikach . . . . .	219
9. Znaczenie odbicia. Odbicie zupełne i częściowe . . . . .	235
5. Odbicie fal. Tłumienie przestrzenne linii . . . . .	223
6. Obliczenie współczynnika falowego i współczynnika tłumienia . . . . .	225
7. Pupinizacja i krarupizacja linii telefonicznych . . . . .	229
8. Przykład . . . . .	232
10. Dyskusja linii bez strat. Fale stojące . . . . .	237

	str.
11. Przykład obliczenia linii zasilającej . . . . .	241
12. Oporność pozorną linii zwartej i otwartej . . . . .	243
13. Zastosowanie teorii odbić do anten prostych . . . . .	246
14. Obwód zastępczy anteny prostej uziemionej . . . . .	249
15. Strojenie anteny prostej do rezonansu . . . . .	251
16. Antena prosta obciążona indukcyjnością i pojemnością równocześnie . . . . .	255
17. Stałe skuteczne anteny przedłużonej i skróconej . . . . .	258
18. Obciążenie włączone w dowolnym miejscu anteny . . . . .	261
19. Pojemność u wierzchołka anteny . . . . .	264
20. Ogólne uwagi o wzorach na obliczenie anten prostych . . . . .	267
21. Przykłady obliczeń . . . . .	269
22. Zastosowanie teorii linii do obwodu niby ustalonego . . . . .	273
Bibliografia do rozdziału V . . . . .	274

## ROZDZIAŁ VI.

### Filtry elektryczne.

	str.
1. Filtr prosty złożony z elementów T lub II, Oporność falowa . . . . .	276
2. Tłumienie filtru i warunki przepuszczania . . . . .	278
3. Określenie widma przepuszczanego przez filtr . . . . .	281
4. Filtry pochodne i złożone . . . . .	285
5. Wpływ oporności omowej na charakterystykę filtru . . . . .	289
6. Człon niesymetryczny . . . . .	290
7. Łączenie członów niesymetrycznych . . . . .	292
8. Obciążenie filtru . . . . .	294
9. Przykład obliczenia filtru przepuszczającego częstotliwości mniejsze od częstotliwości granicznej . . . . .	295
10. Filtry widmowe, zawierające indukcyjność i pojemności łączone szeregowo . . . . .	296
11. Filtry z indukcyjnością wzajemną . . . . .	301
12. Przykłady obliczenia filtrów z indukcyjnością wzajemną . . . . .	305
13. Filtry w odbiornikach. Filtry złożone z szeregu obwodów strojonych . . . . .	306
Bibliografia do rozdziału VI . . . . .	307

## ROZDZIAŁ VII.

### Promieniowanie fal elektromagnetycznych.

	str.
1. Prąd przewodzenia i prąd przesunięcia . . . . .	308
2. Prawo Ampère'a . . . . .	311
3. Prawo Faradaya. Pole elektromagnetyczne . . . . .	313
4. Prawa ciągłości pola elektromagnetycznego . . . . .	315
5. Energja zawarta w polu elektromagnetycznym . . . . .	316
6. Twierdzenie Poynting'a . . . . .	319
7. Fale płaskie w dielektryku . . . . .	323
8. Rozchodzenie się fali kulistej i fali cylindrycznej . . . . .	328
9. Promieniowanie dipola . . . . .	329

	str.
10. Składowe pola elektromagnetycznego . . . . .	334
11. Promieniowanie przestrzenne dipola . . . . .	337
12. Promieniowanie anteny o wymiarach skończonych. Wzór Hertz'a i Rüdenberga	341
13. Moc wypromieniowana przez antenę niską . . . . .	343
14. Promieniowanie anten wysokich. Antena ćwierćfalowa . . . . .	347
15. Oporność i charakterystyka promieniowania anten zasilanych harmonicznymi .	351
16. Promieniowanie obwodu zamkniętego. Antena ramowa . . . . .	354
17. Zasada działania odbiorczego anten . . . . .	359
18. Oddziaływanie anteny odbiorczej na falę elektromagnetyczną . . . . .	364
19. Fale elektromagnetyczne w dielektryku niedoskonałym i w przewodnikach . .	366
20. Zachowanie się fali w pobliżu ziemi. Teoria Zennecka . . . . .	376
21. Obliczenie zasięgu fal. Wzór Zommerfelda . . . . .	382
22. Wpływ krzywizny ziemskiej. Wzory Watsona i Eckersley'a . . . . .	384
23. Wpływ ziemi na poniową charakterystykę promieniowania . . . . .	389
24. Załamywanie się fal w jonosferze . . . . .	389
25. Straty energii fal przestrzennych . . . . .	398
26. Klasyfikacja fal w zależności od charakterystyki rozchodzenia się . . . . .	399
27. Zjawiska towarzyszące promieniowaniu odbitemu . . . . .	401
28. Wzory na rozchodzenie się promieniowania odbitego na falach średnich i dłu- gich . . . . .	404
29. Obliczenie zasięgu fal długich. Wzór Austin'a i Cohen'a . . . . .	407
30. Wybór fal krótkich dla komunikacji na duże odległości . . . . .	408
31. Natężenie pola w miejscu odbioru. Przeszkody techniczne i atmosferyczne . .	410
32. Obliczenie mocy dla stacji nadawczej . . . . .	417
Bibliografia do rozdziału VII . . . . .	420

#### DODATEK 1.

#### Szeregi Fourier'a

	str.
1. Wyrażenie matematyczne funkcji Fourier'a . . . . .	421
2. Składowa stała szeregu Fourier'a . . . . .	422
3. Wyznaczenie analityczne amplitud składowych harmonicznymi . . . . .	423
4. Szczególne przypadki krzywych . . . . .	425
5. Przykłady analizy krzywych . . . . .	429
6. Analiza arytmetyczna i graficzna . . . . .	433
7. Wartość skuteczna i moc prądu złożonego . . . . .	438
8. Suma dwu prądów złożonych . . . . .	440
9. Odkształcenie prądu złożonego pod wpływem indukcyjności i pojemności . .	441
10. Prądy złożone w obwodzie rezonansowym . . . . .	442

#### DODATEK 2.

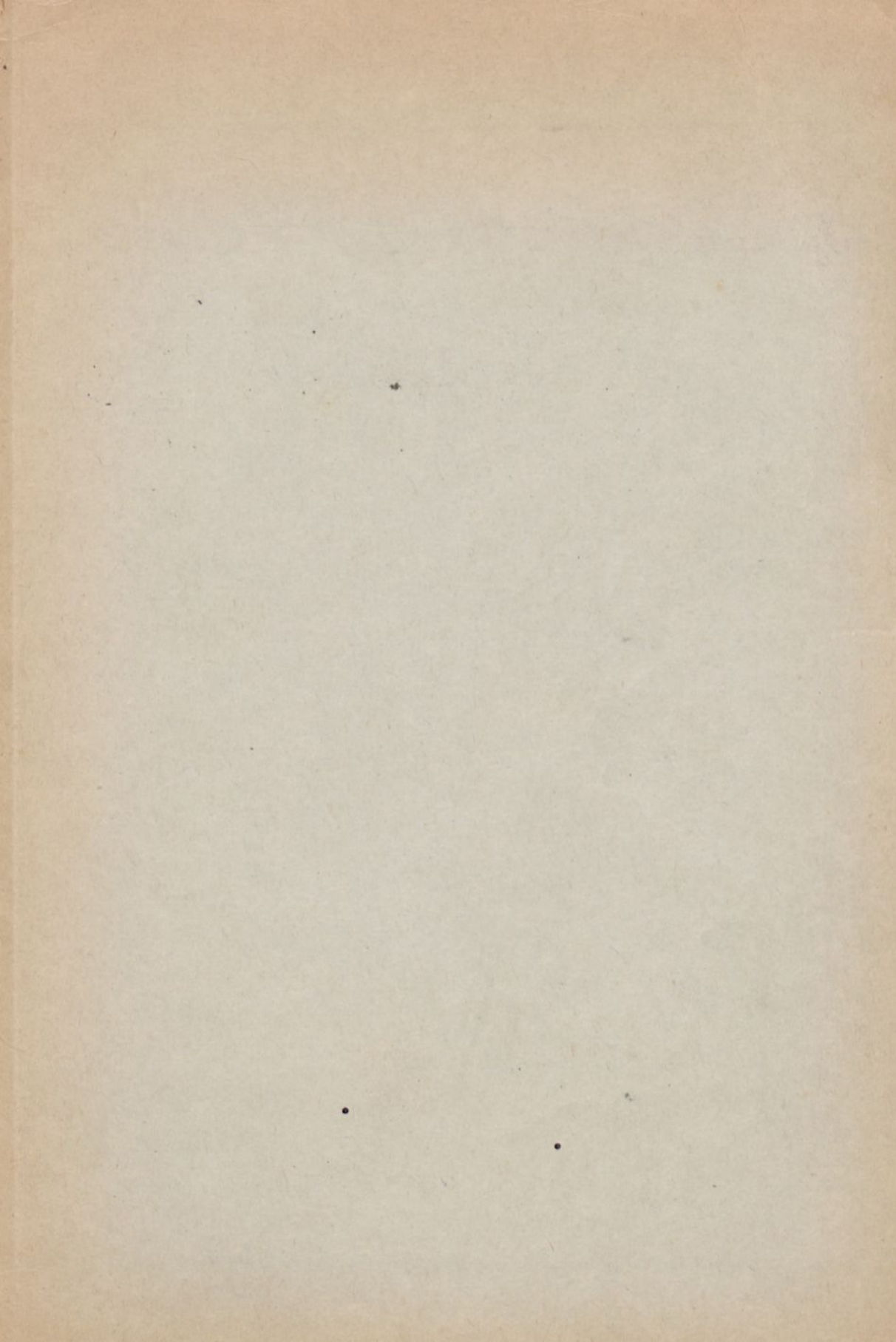
#### Zasadnicze pojęcia z rachunku symbolicznego.

1. Twierdzenie Eulera i Moirre'a . . . . .	444
2. Funkcje hiperboliczne . . . . .	446
Skróty czasopism użyte w tekście . . . . .	453
Spis rzeczy . . . . .	455



20, -







BIBLIOTEKA GŁÓWNA

343613L/1