

Robert Pietrzykowski

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
e-mail: robert_pietrzykowski@sggw.pl

KLASYFIKACJA OBIEKTÓW W UJĘCIU CZASOWO-PRZESTRZENNYM Z ZASTOSOWANIEM ANALIZY FUNKCJONALNEJ

CLASSIFICATION OF OBJECTS OF SPATIAL PANEL DATA WITH THE USE OF FUNCTIONAL ANALYSIS

DOI: 10.15611/pn.2018.508.17

JEL Classification: C31, C38, Q14

Streszczenie: Badania i analizy ekonomiczne prowadzą do klasyfikacji obserwowanych obiektów pod względem przestrzennym, czasowym lub przestrzenno-czasowym. Pomijanie oddziaływania przestrzeni na badane obiekty może prowadzić do obniżenia wartości prowadzonych analiz, a nawet do błędnych wniosków. W zagadnieniach klasyfikacyjnych powinno się zatem dążyć do wykorzystania jak największych możliwości, związanych z danymi czasowo-przestrzennymi. Celem przeprowadzonych badań była próba uwzględnienia w analizach przestrzennych nie tylko interakcji przestrzennych, ale także przestrzenno-czasowych, a w konsekwencji propozycja modyfikacji macierzy wag przestrzennych w taki sposób, aby możliwa była analiza interakcji przestrzenno-czasowych. Zaproponowane przez autora podejście do zagadnienia rozwija metody analiz czasowo-przestrzennych. W pracy oprócz metod statystyki przestrzennej wykorzystano elementy analizy funkcjonalnej.

Słowa kluczowe: analiza czasowo-przestrzenna, macierz wag, analiza funkcjonalna.

Summary: The conducted research and economic analysis lead to the classification of observed objects in spatial, temporal or spatial-temporal terms. Failure to include space in research leads to a reduction in the value of conducted analysis, or even to false conclusions. Classification should therefore aim at maximizing the potential of temporal-spatial data. Spatial surveys use statistical methods, which in their structures contain information about spatial interactions. Using spatial statistics tools for autocorrelation we find that there is no way to take into account the time in research because these methods primarily aim at detecting spatial interactions. The aim of the study was to carry out research that would enable to take into account in the spatial analyses such modifications of the weights matrix in order to obtain the possibility of determining temporal-spatial interactions. In addition to methods of spatial statistics, functional analysis elements were used in the work.

Keywords: spatial-temporal analysis, matrix of weights, functional analysis.

1. Wstęp

W różnego rodzaju analizach ekonomicznych bardzo często badania prowadzą do określenia zasad i procedur, które służą do klasyfikacji obiektów. W konsekwencji uzyskujemy podział badanych obiektów ze względu na cechy, które charakteryzują ich własności. Możemy wyróżnić obiekty o charakterze ekonomicznym, czasowym, przestrzennym oraz ich kombinacje. Podstawowy podział metod klasyfikacji określamy jako metody klasyfikacji strukturalnej (analiza skupień) i metody porządkowania liniowego. Można również ujmować zagadnienie klasyfikacji dokładniej: jako metody taksonomiczne, wyróżniając metody klasyfikacji strukturalnej, rankingowej, i metody identyfikacji reprezentantów klas. W zakresie tych ostatnich wyróżniamy klasyfikacje wzorcowe i bezwzorcowe, jedno- i wielokryterialne, dyskryminacyjne oraz klasyfikacje rozłączne, rozmyte i przybliżone (zob. [Wysocki 2010]). Nieuwzględnienie w badaniach ekonomicznych interakcji przestrzennych może prowadzić do błędnych interpretacji wyników lub obniżenia ich wartości poznawczych [Pietrzak 2010; Głowicka-Wołoszyn i in. 2017]. W określeniu odpowiedniej struktury zależności przestrzennej kluczową rolę odgrywa macierz wag przestrzennych. O tym, jak ważny jest dobór macierzy sąsiedztwa, może świadczyć duża liczba prac różnych autorów poruszająca właśnie ten problem [Anselin 2001; Clif, Ord 1973; Getis 2009; Getis, Alstadt 2004; Kuc 2015; Pietrzykowski 2011; 2014; Pietrzak 2010; Suchecka (red.) 2014; Suchecki (red.) 2012 (i wielu innych)]. W literaturze możemy spotkać wiele propozycji postaci macierzy wag. Jej różnorodność spowodowana jest przede wszystkim rozważanymi rodzajami danych oraz rozwiązywanymi problemami z różnych dziedzin nauki, między innymi z ekonomii. Można by sądzić, że ze względu na budowę macierzy wag dobór jej elementów wydaje się nieograniczony, jednak analizując jej różne postacie, w większości obserwujemy po prostu modyfikacje tej macierzy oparte na tych samych podstawach konstrukcyjnych. Wykorzystując narzędzia statystyki przestrzennej do badania autokorelacji przestrzennej, spotykamy się z brakiem możliwości uwzględnienia czasu w badaniach, które przede wszystkim mają za zadanie wykrycie interakcji przestrzennych. Celem pracy było zatem przeprowadzenie badań pozwalających na uwzględnienie w analizach przestrzennych takiej modyfikacji macierzy wag, aby uzyskać możliwość określenia interakcji czasowo-przestrzennych. W pracy oprócz metod statystyki przestrzennej wykorzystano również elementy analizy funkcjonalnej, które posłużyły do uzyskania macierzy odległości wykorzystanej w dalszych analizach.

2. Analiza problemu

Jednym z problemów, jakie występują w analizach danych panelowych, jest uwzględnienie interakcji przestrzennych. Chociaż analiza modeli panelowych rozwija się bardzo dynamicznie, jednak jeżeli chodzi o problem uwzględnienia interakcji przestrzennych, jest on bardzo często pomijany. W pracy dotyczącej ekonometrii

przestrzennej [Suchecki (red.) 2012] przedstawiono sposób uwzględnienia interakcji w czasie i przestrzeni w konstrukcji macierzy wag. Budując macierz W , zakładamy, że funkcja odległości między poszczególnymi jednostkami przestrzennymi jest identyczna we wszystkich badanych okresach i definiuje się ją jako:

$$W_T = (I_T \otimes W) = \begin{bmatrix} W & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & W \end{bmatrix}. \quad (1)$$

W przypadku uwzględnienia autokorelacji przestrzennej składnika losowego mamy do wyboru bezpośrednio zdefiniowanie postaci funkcyjnej struktury interakcji lub zastosowanie odpowiedniego procesu składnika losowego. Szczegółowy opis klasyfikacji różnych konstrukcji przestrzennych modeli panelowych można znaleźć w publikacji Elhorsta [2003]. W analizach przestrzennych kluczową rolę odgrywa macierz wag. Pierwszym autorem, który rozważał wzajemne powiązania pomiędzy zmiennymi, był Moran [1950]. Zaproponował on miarę przestrzennej zależności o postaci:

$$R_{(M)} = \frac{N}{\sum_i \sum_j w_{ij}} \cdot \frac{\mathbf{z}'W\mathbf{z}}{\mathbf{z}'\mathbf{z}}, \quad (2)$$

gdzie: \mathbf{z} jest wektorem kolumnowym, którego elementami są różnice $z_i = x_i - \mu$. w_{ij} są elementami macierzy wag $W_{(p \times p)}$ o postaci

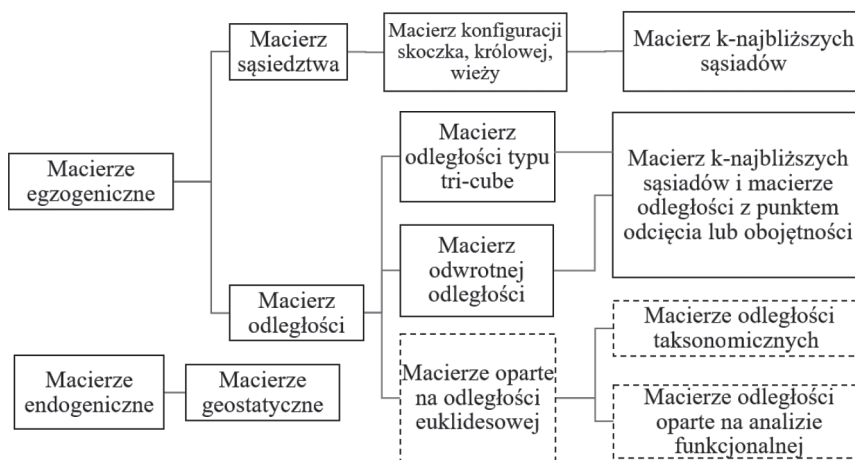
$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{p1} & \dots & w_{pp} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Modyfikując macierz W , możemy uzyskać tzw. przestrzenny korelogram, przyjmując następujące warunki dla jej współczynników:

$$W = \begin{cases} w_{ij} = 1, & \text{kiedy } i\text{-ty obiekt jest sąsiadem } j\text{-tego obiektu} \\ w_{ij} = 0, & \text{kiedy } i\text{-ty obiekt nie jest sąsiadem } j\text{-tego obiektu} \\ w_{ij} = 0, & \text{kiedy } i = j \end{cases} \quad (4)$$

Taki zapis wzajemnych powiązań między badanymi obiektami prowadzi do wyznaczenia najprostszej macierzy wag o strukturze binarnej. Konstrukcja macierzy wag może być oparta na czysto teoretycznej wiedzy na temat badanego problemu (wiedza egzogeniczna) lub na wiedzy empirycznej badanego zjawiska (wiedza endogeniczna) [Getis 2009]. Podstawy budowy macierzy wag opierają się na zdefiniowaniu sąsiedztwa badanych obiektów poprzez określenie, czy są to obiekty, które charakteryzują się wspólną granicą (mówimy wtedy o sąsiedztwie I rzędu). Na rysunku 1 przedstawiono klasyfikację rodzajów macierzy wag przestrzennych ze względu na sposób ich budowy na podstawie prac badawczych Getisa i Alstadta

[2004]. Na rysunku przedstawiono również propozycję rozbudowy klasyfikacji rodzajów macierzy wag, które w swojej strukturze zawierają, oprócz interakcji między obiektami, również element czasowy. Przykład dotyczący macierzy wag opartej na odległościach taksonomicznych można znaleźć u Pietrzykowskiego [2014]. Na rysunku 1 przerywaną linią zaznaczono propozycje poszerzenia dotychczasowych badań dotyczących macierzy wag, przede wszystkim o analizę funkcjonalną.



Rys. 1. Klasyfikacja rodzajów macierzy wag przestrzennych ze względu na sposób ich budowy

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Suchecka (red.) 2014, s. 163].

Modyfikacja macierzy wag. Na rysunku 1 przerywanymi liniami zaznaczono propozycję macierzy wag, które mogą uwzględniać moment czasowy. Modyfikację macierzy wag \mathbf{W} , która uwzględniałaby interakcje przestrzenno-czasowe, przeprowadzono, wykorzystując macierz odległości euklidesowych uzyskanych według formuły 5. Dla wybranych m cech o charakterze ekonomicznym, które obserwowano w pewnym okresie t , określono macierz odległości taksonomicznych, które obliczono dla badanych jednostek przestrzennych (tzn. województw) zgodnie z formułą:

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{l=1}^p (x_{il} - x_{jl})^2}, \quad (5)$$

gdzie: d_{ij} jest odległością euklidesową między obiektami:

$$X_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})' \text{ i } X_j = (x_{j1}, \dots, x_{jp})'.$$

Kontynuując powyższe rozważania, do budowy macierzy wag wykorzystano analizę funkcjonalną. Dane funkcjonalne to krzywe i trajektorie w postaci ciągu, a nie pojedynczej obserwacji. Analiza szeregów czasowych różni się od analizy funkcjonalnej tym, że momenty czasowe w analizie funkcjonalnej są wyrażone za

pomocą zbioru krzywych ciągłych. Dane funkcjonalne zachowują strukturę obserwacji, biorąc pod uwagę informacje o każdym pomiarze. Poza tym w analizie funkcjonalnej obserwowane momenty nie muszą być równomiernie rozmieszczone w czasie, co w konsekwencji pozwala na niwelowanie problemu braku obserwacji [Deręgowski i in. 2017; Ingrassia, Costanzo 2005]. W odróżnieniu od szeregów czasowych, w analizie funkcjonalnej dane czasowe o charakterze dyskretnym przekształca się w zmienne ciągłe zgodnie z procedurami wygładzającymi np. za pomocą liniowych kombinacji k znanych funkcji bazowych na odpowiednią funkcję $X_i(t)$, która jest właściwą postacią funkcjonalną danych. Zbiór takich funkcji $X(t) = (X_1(t), X_1(t), \dots, X_n(t))$ nazywany jest funkcjonalnym zbiorem danych [Hall i in. 2006]. Na bazie funkcji $X(t) \approx \sum_{k=1}^K c_k \phi_k$ (dokładny opis u Ramsaya i in. [Ramsay, Silverman 2005]) można obliczyć macierz odległości zgodnie z formułą:

$$d(X_1; X_2) = \sqrt{\int (X_1(t) - X_2(t))^2 dt}. \quad (6)$$

Uzyskane odległości d można wykorzystać do budowy macierzy wag, która w swojej strukturze będzie zawierała element czasowy, ale właściwie nie uwzględnia autokorelacji przestrzennej. Uzyskana macierz odległości O_f , podobnie jak macierz wag W , na diagonalu ma zera i jest macierzą symetryczną:

$$W_n = W_s + O_f, \quad (7)$$

gdzie W_n – zmodyfikowana macierz wag, W_s – macierz wag pierwszego rzędu, O_f – macierz odległości uzyskana zgodnie z formułą 6.

Macierz wag W uzyskana zgodnie z formułą 4 w najprostszej postaci jest macierzą binarną. Dobór macierzy wag powinien odzwierciedlać zależności przestrzenne łączące analizowane obiekty. Im model wzajemnego oddziaływania obiektów w przestrzeni zostanie zobrazowany bardziej realistycznie, tym dokładniejsze wyniki uzyskamy. Mając podstawową macierz wag w postaci binarnej, możemy dokonać jej standaryzacji, to znaczy, że każdą wagę określającą sąsiedztwo dzielimy przez sumę danego wiersza. W rezultacie uzyskujemy wagi znajdujące się w przedziale od zera do 1. Takie normowanie stosujemy w przypadku różnej liczby sąsiadów, dzięki czemu równoważymy ich wpływ. Częstym zabiegiem przy analizach przestrzennych oprócz normowania wierszowego jest również normowanie kolumnowe lub globalne. W prowadzonych analizach uzyskana macierz sąsiedztwa pierwszego rzędu, uwzględniająca tylko najbliższych sąsiadów, nie jest macierzą symetryczną. Dlatego macierz W_n należy poddać transformacji w celu zapewnienia prawidłowości wnioskowania na podstawie aproksymowanych momentów z próby [Anselin 2001] zgodnie z formułą:

$$W_f = \frac{(W_n + W_n^T)}{2}, \quad (8)$$

gdzie: W_n jest macierzą wag uzyskaną według formuły 7.

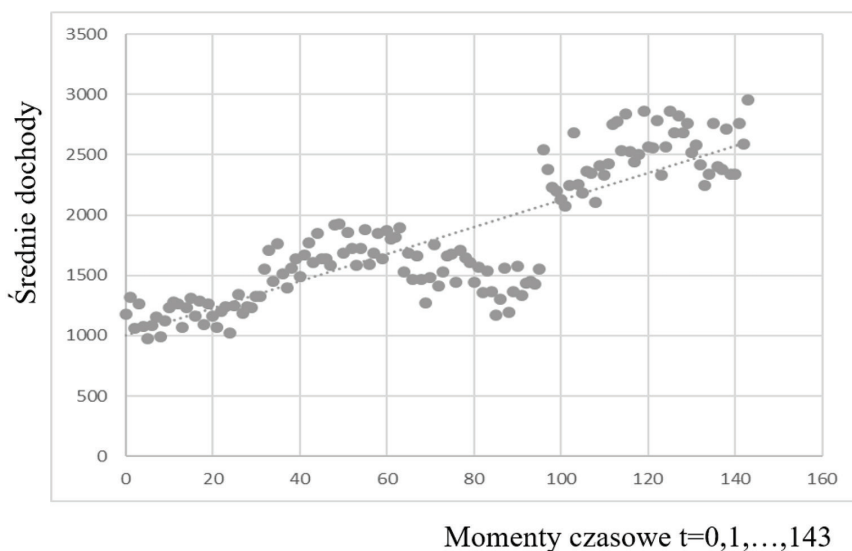
Nowa macierz wag W_f jest zatem macierzą, która ma na diagonalu zera i jest macierzą symetryczną. W swojej strukturze uwzględnia odległości związane z badanymi cechami w jednostce czasu, które pośrednio mogą wpływać na interesującą nas cechę oraz efekt sąsiada. W efekcie uzyskujemy uwikłanie czasu bezpośrednio w konstrukcji macierzy wag. Pozwala to na wykorzystanie tak skonstruowanej macierzy do badania autokorelacji przestrzennych, które zawierają element przestrzenno-czasowy i wzajemne interakcje między badanymi obiektami. W dalszej analizie do klasyfikacji obiektów wykorzystano diagram Morana, który został uzyskany z wykorzystaniem zmodyfikowanej macierzy wag.

3. Przykład

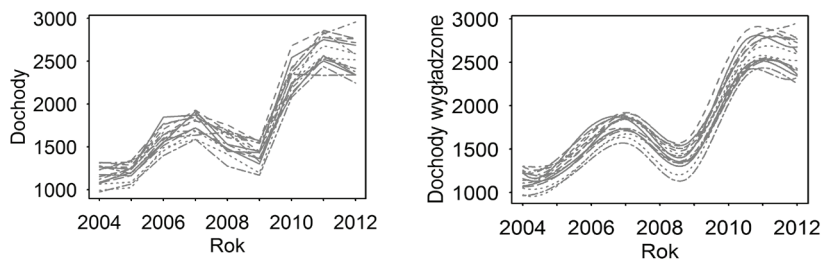
W dalszej części pracy zaprezentowano wyniki badań uwzględniające opisane metody statystyczne. Dane pochodziły z bazy danych polskiego FADN (Farm Accountancy Data Network). Zmienną badaną wykorzystaną w analizach był dochód z gospodarstwa rolnego. Zakres czasu obejmował lata 2004-2012. Prowadzone badania miały na celu uwzględnić interakcje przestrzenno-czasowe dla średniego dochodu z gospodarstwa rolnego na poziomie województw (NUTS2) dla Polski. W prowadzonych analizach wykorzystano klasyczną analizę przestrzenną, diagram Morana i zmodyfikowaną macierz wag. Dokonano modyfikacji macierzy wag opartej na macierzy odległości uzyskanej w analizie funkcjonalnej, która zawierała element przestrzenny i czasowy. W efekcie końcowym uzyskano klasyfikację dochodu gospodarstw rolnych z wykorzystaniem macierzy wag uzyskanej w wyniku analizy funkcjonalnej. Na rysunku 2 przedstawiono kształtowanie się dochodu w gospodarstwach rolnych w badanym okresie. Na osi pionowej mamy średni dochód w gospodarstwie rolnym z uwzględnieniem województw w Polsce (NUTS2). Na osi poziomej podano czas w postaci dyskretnej dla okresu 2004-2012 (tzn. $t = 0, 1, 2, \dots, 143$). Zauważmy, że pomiędzy 90 a 100 momentem czasu widoczne są braki obserwacji, które mogą utrudnić prowadzenie standardowej analizy szeregów czasowych.

W kolejnym kroku przeprowadzono analizę funkcjonalną. Na rysunku 3 zaprezentowano dane oryginalne i wygładzone z wykorzystaniem analizy funkcjonalnej. Krzywe zaprezentowane na rys. 3 przedstawiają zmiany średniego dochodu gospodarstw rolnych w poszczególnych województwach w badanym okresie. Analiza funkcjonalna pozwoliła na uzupełnienie danych, których załamanie było widoczne pomiędzy 90 a 100 momentem czasu (lata 2009-2010). Na rysunku 4 przedstawiono wyniki autokorelacji dla współczynnika Morana z wykorzystaniem zmodyfikowanej macierzy wag, w której wykorzystano odległości euklidesowe z analizy funkcjonalnej (formuła 6 i dalsze).

Rysunek 4 zawiera diagram Morana i jego wizualizację na mapie administracyjnej Polski. Diagram Morana na osi poziomej zawiera wartości standaryzowane średnich dochodów gospodarstw rolnych, a na osi pionowej znajduje się opóźnienie przestrzenne dla poziomu średniego dochodu gospodarstw rolnych. Na diagramie

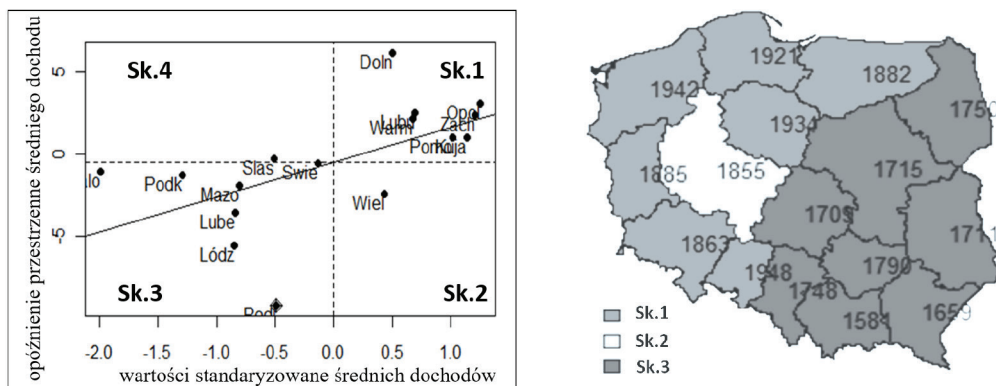


Rys. 2. Średni dochód w gospodarstwie rolnym w podziale na NUTS2 w okresie 2004-2012
 Źródło: obliczenia własne.



Rys. 3. Zmiany średniego dochodu gospodarstw rolnych w poszczególnych województwach (dane oryginalne i wygładzone w analizie funkcjonalnej)
 Źródło: obliczenia własne.

Morana zaznaczono propozycją podziału na cztery skupienia oznaczone jako Sk.1, Sk.2, Sk.3 i Sk.4. Wykorzystanie macierzy wag opartej na analizie funkcjonalnej pozwala na uwzględnienie interakcji przestrzenno-czasowych w dochodach gospodarstw rolnych, co zaprezentowano na diagramie Morana. Podział na cztery skupienia wynika z budowy diagramu Morana, ale pozwala również na interpretacje zgodnie z założeniami tego wykresu (więcej w pracach [Moran 1950; Suchecka (red.) 2014; Pietrzykowski 2011]). Zauważmy również, że pogrupowanie województw w poszczególne skupienia odpowiada średniej wysokości dochodu z gospodarstwa

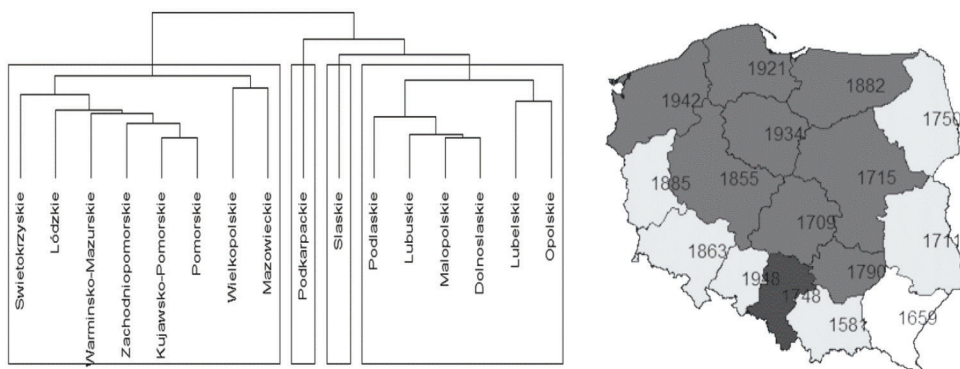


Rys. 4. Modyfikacja macierzy wag na podstawie analizy funkcjonalnej

Źródło: obliczenia własne.

rolnego. W skupieniu pierwszym (Sk.1) znalazły się województwa o wysokim dochodzie z gospodarstwa rolnego, które są otoczone przez województwa o wysokim dochodzie.

W tym skupieniu mamy województwa z zachodniej Polski. W skupieniu drugim (Sk.2) znalazło się tylko województwo wielkopolskie, ponieważ dla niego uzyskano średni dochód z gospodarstwa rolnego niższy niż z województw sąsiadujących. W skupieniu trzecim (Sk.3) znalazły się województwa o niskim średnim dochodzie otoczone przez obiekty o niskich średnich dochodach z gospodarstwa rolnego. W tym skupieniu mamy województwa ze wschodniej Polski. Wszystkie województwa zostały sklasyfikowane do trzech skupień i czwarte skupienie (Sk.4) nie zawiera już żadnego województwa, czyli brakuje województw o wysokich dochodach z gospodarstw, które sąsiadują z województwami o niskich dochodach.



Rys. 5. Diagram i wizualizacja na mapie Polski analizy skupień

Źródło: obliczenia własne.

Na rysunku 5 przedstawiono podział uzyskany w wyniku klasycznej analizy skupień metodą Warda. Analizę skupień wykonano, ustalając podział na cztery skupienia, aby uzyskać możliwość porównania z podziałem uzyskanym z wykorzystaniem analiz przestrzenno-czasowych (por. rys. 4). Zauważmy, że uzyskany podział z wykorzystaniem klasycznej analizy skupień (rys. 5) różni się od podziału z wykorzystaniem nowej metody (rys. 4). W przypadku klasycznej analizy skupień wyróżniamy podział województw na część centralną, w której występuje 8 województw (zachodniopomorskie, pomorskie, warmińsko-mazurskie, kujawsko-pomorskie, wielkopolskie, mazowieckie, łódzkie i świętokrzyskie). W drugim skupieniu mamy 6 województw, które graniczą z naszymi sąsiadami (lubuskie, dolnośląskie, opolskie, małopolskie, lubelskie i podlaskie). Dwa oddzielne skupienia tworzą województwa śląskie i podkarpackie. Dzięki zastosowaniu analiz przestrzenno-czasowych i modyfikacji macierzy wag uzyskano podział obiektów (por. rys. 4), który potwierdza ogólne przeświadczenie o rozkładzie przestrzennym dochodów w gospodarstwach rolnych, to znaczy podział Polski na dwie części A (zachodnią) i B (wschodnią).

4. Zakończenie

Analizy ekonomiczne w odróżnieniu od badań prowadzonych w innych dziedzinach nauki zawierają oprócz danych przekrojowych, element czasowy. Można stwierdzić, że większość problemów ekonomicznych odbywa się w czasie i przestrzeni. Dlatego tak ważny jest rozwój metod ekonometrycznych, które uwzględniają wszystkie informacje zawarte w danych przekrojowo-czasowych. W artykule zaproponowano zastosowanie analizy funkcjonalnej w analizie przestrzennej. Dzięki zastosowaniu nowej metody możliwe jest również uwzględnienie w badaniach ekonomicznych wzajemnych interakcji związanych z położeniem badanych obiektów w przestrzeni. Otwiera to nowe kierunki badań, które analizują powiązania danych przekrojowo-czasowych z interakcjami przestrzennymi.

Podążając w tym kierunku, w pracy zaprezentowano zagadnienie klasyfikacji danych poprzez modyfikację macierzy wag, która w swej budowie zawierała interakcje czasowo-przestrzenne. Do budowy macierzy wag wykorzystano analizę funkcjonalną. W konsekwencji uzyskano podział obiektów, który potwierdza ogólne przeświadczenie o rozkładzie przestrzennym dochodów w gospodarstwach rolnych, to znaczy podział Polski na dwie części A i B. Kierunek dalszych badań powinien skupiać się na porównaniu omawianych modeli przestrzennych wykorzystujących zaproponowaną modyfikację macierzy wag ze standardowymi modelami panelowymi.

Literatura

- Anselin L., 2001, *Spatial Econometrics*, Basil Blackwell, Oxford.
- Cliff A.D., Ord J.K., 1973, *Spatial autocorrelation*, Pion, London.
- Deręgowski K., Krzyśko M., Waszak Ł., Wołyński W., 2017, *Zastosowanie funkcjonalnej analizy kanonicznej w badaniu zależności między wydatkami konsumpcyjnymi w europejskich gospodarstwach domowych*, Wiadomości Statystyczne, LXII, 5(672), s. 19-37.
- Elhorst J.P., 2003, *Specification and Estimation of Spatial Panel Data Models*, International Regional Science Review, nr 26(3), s. 244-268.
- Getis A., 2009, *Spatial Weights Matrices*, Geographical Analysis, t. 41(4), s. 400-409.
- Getis A., Alstadt J., 2004, *Constructing the Spatial Weights Matrices Using a Local Statistics*, Geographical Analysis, t. 36.2, s. 147-163.
- Głowicka-Wołoszyn R., Kozera A., Wysocki F., 2017, *Problem doboru macierzy wag przestrzennych w identyfikacji efektów przestrzennych samodzielności finansowej gmin*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Taksonomia 28, s. 87-98.
- Hall P., Müller H.G., Wang J.L., 2006, *Properties of Principal Component Methods for Functional and Longitudinal Data Analysis*, The Annals of Statistics, vol. 34, nr 3.
- Ingrassia S., Costanzo G.D., 2005, *Functional Principal Component Analysis of Financial Time Series*, [w:] M. Vichi i in. (red.), *New Developments in Classification and Data Analysis*, Springer, Berlin.
- Kuc M., 2015, *Wpływ sposobu definiowania macierzy wag przestrzennych na wynik porządkowania liniowego państw Unii Europejskiej pod względem poziomu życia ludności*, Prace Naukowe Uniwersytetu we Wrocławiu, Taksonomia 24, s. 163-170.
- Moran P.A.P., 1950, *Notes on continuous stochastic phenomena*, Biometrika, t. 37, s. 17-23.
- Pietrzak M.B., 2010, *Problem identyfikacji struktur danych przestrzennych*, Acta Universitatis Nicolai Copernici, Ekonomia XLI – Nauki Humanistyczno-Społeczne, zeszyt 397, s. 83-98.
- Pietrzykowski R., 2011, *Koncepcja i zastosowanie modyfikacji macierzy wag w przestrzennych badaniach ekonomicznych*, Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych, red. B. Borkowski, vol. 12, SGGW, Warszawa 2011, s. 270-278.
- Pietrzykowski R., 2014, *Application of spatial techniques for panel data analysis of agricultural real estate market in the years 2004-2012*, Quantitative Methods in Economics, vol. 15, nr 2, s. 188-197.
- Ramsay J.O., Silverman B.W., 2005, *Functional Data Analysis*, Second Edition, Springer, New York.
- Suchecka J. (red.), 2014, *Statystyka przestrzenna. Metody analiz struktur przestrzennych*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa.
- Suchecki B. (red.), 2012, *Ekonometria przestrzenna II. Modele zaawansowane*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa.
- Wysocki F., 2010, *Metody taksonomiczne w rozpoznawaniu typów ekonomicznych rolnictwa i obszarów wiejskich*, Wydawnictwo Uniwersytetu Przyrodniczego w Poznaniu, Poznań.