647 II

INŻ. DR. KASPER WEIGEL
PROFESOR POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

RACHUNEK WYRÓWNAWCZY

WEDLE METODY NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW ORAZ JEGO ZASTOSOWANIA PRZY ROZMIERZANIU KRAJU

KSIĄŻNICA POLSKA
TOWARZYSTWA NAUCZYCIELI SZKÓŁ WYŻSZYCH
LWÓW — WARSZAWA
1923

Inż. Dr. KASPER WEIGEL
PROFESOR POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

RACHUNEK WYRÓWNAWCZY

WEDLE METODY NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW
ORAZ
JEGO ZASTOSOWANIA PRZY ROZMIERZANIU KRAJU

KSIĄŻNICA POLSKA
TOWARZYSTWA NAUCZYCIELI SZKÓŁ WYŻSZYCH
LWÓW—WARSZAWA
MCMXXIII

I. ZWIĄZKOWA DRUKARNIA WE LWOWIE, UL. LINDEGO 4.

PRZEDMOWA.

Oddając do użytku publicznego książkę p. t. „*Rachunek wyrównawczy*“, uważam za wskazane dorzucić na samym początku parę uwag, które — dotycząc głównie jej przeznaczenia oraz sposobu korzystania z niej — uzupełniają także do pewnego stopnia i jej treść przez podanie kilku najważniejszych dat z dziedziny historji rachunku wyrównawczego.

Główną podstawę tego rachunku, opartego na rachunku prawdopodobieństwa, stanowi „*metoda najmniejszych kwadratów*“, wymagająca, aby suma kwadratów błędów spostrzeżeń była najmniejszą.

Przed pracami, omawiającemi powyższą metodę, zasługują na wzmiankę dwie, oparte na innych zasadach: jedna z roku 1770-go, w której znany matematyk francuski *J. Lagrange* przedstawił teorję błędów spostrzeżeń, opartą na rachunku prawdopodobieństwa, a druga z roku 1792-go, w której niemniej sławny *P. Laplace* podał metodę wyrównania spostrzeżeń, wyprowadzoną przy pomocy dwu przez niego przyjętych warunków [1]).

Pierwsza publikacja metody najmniejszych kwadratów wyszła z pod pióra *A. Legendre'a* w roku 1805-ym [2]) — jako dodatek dzieła „*Nouvelles méthodes pour la determination des orbites des comètes*“ — p. t. „*Sur la méthode des moindres carrés*“; drugą ogłosił w roku 1808 Amerykanin *Andrain*.

Właściwym jednak wynalazcą rachunku wyrównawczego, opartego na metodzie najmniejszych kwadratów, jest słynny niemiecki matematyk i astronom *K. F. Gauss*, który — mimoto, że ogłosił zasady swej teorji wyrównawczej dopiero w roku 1809-ym w dziele p. t. „*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*“ (Hamburg), — wynalazł ją jednak jeszcze w roku 1794-ym (1795-ym) i zastosował w praktyce przed ukazaniem się publikacji Legendre'a. Zarazem trzeba wyraźnie zaznaczyć, że dopiero w dziełach Gaussa napotykamy na odpowiednie *uzasadnienie* powyższej metody, jak też, że nie poprzestając na

---

[1]) Warunki te były: *a)* suma błędów spostrzeżeń jest równą zeru, *b)* suma bezwzględnych wartości błędów jest najmniejszą.

[2]) Karta tytułowa nosi datę 1806 r.

wyżej wymienionem dziele, ogłosił Gauss z biegiem czasu jeszcze pięć dalszych dzieł, dotyczących metody najmniejszych kwadratów.

Nie mogąc na tem miejscu podać całkowitej — dziś bardzo rozległej — literatury, odnoszącej się do rachunku wyrównawczego i teorji błędów przypadkowych, poprzestaję na wyliczeniu nazwisk najwybitniejszych autorów, bez względu na to, czy ich dzieła względnie rozprawy mają charakter teoretyczny, czy też praktyczny.

Najwybitniejszymi autorami zagranicznymi są między innymi:

E. Abbe,	T. Engeworth,	P. Pizzetti,
G. Airy,	I. Encke,	H. Poincaré,
C. Andrae,	G. Fechner,	S. Poisson,
J. Bertrand,	E. Forest,	L. Puissant,
F. Bessel,	Ch. Gerling,	A. Sawicz,
M. Bienaymé,	J. Glaisher,	G. Schiaparelli,
H. Bruns,	G. Hagen,	Ch. Schols,
E. Catalan,	P. Hansen,	O. Schreiber,
W. Chauvenet,	F. Helmert,	O. Stone,
A. Clarke,	W. Jordan,	T. Thiele,
M. Crofton,	L. Krüger,	S. Wellisch,
P. Czebyszew,	A. Markow,	Th. Wittstein,
E. Czuber,	M. Merriman,	T. Wright,
I. Diengler,	C. Peirce,	G. Zachariae.

Znaczną część wymienionych tu nazwisk znajdzie czytelnik w uwagach niniejszej pracy wraz z przytoczeniem odpowiednich rozpraw.

Najważniejsze dzieła, dotyczące tego przedmiotu a napisane w języku *polskim,* przedstawiają się następująco.

Pierwszym autorem polskim, który zajął się metodą najmniejszych kwadratów, był *Wł. Folkierski,* omawiając ją w II-gim tomie „*Zasad rachunku różniczkowego i całkowego*" (Paryż, 1873) w rozdziale „*Zastosowania rachunku całkowego do rachunku prawdopodobieństwa*".

Rok 1879-y przynosi nam drugą pracę z tej dziedziny p. t: „*Teorja najmniejszych kwadratów. Według wykładów prof. D. Zbrożka napisał August Witkowski...*" (autograf, Lwów 1879), a wkrótce potem ogłasza prof. *D. Zbrożek* w Pamiętniku Akademji Umiejętności w Krakowie, (W. mat.-przyrodn.) T. IX, (1884) pracę p. t. „*Zastosowanie wyznaczników w teorji najmniejszych kwadratów*".

Następną pracę znajdujemy w V-ym tomie „Prac matematyczno-fizycznych" (Warszawa 1894) p. t. „*O metodzie najmniejszych kwadratów*" pióra *Wł. Gosiewskiego,* po której następuje w niedługim czasie „*Rachunek wyrównania błędów spostrzeżeń na podstawie metody najmniejszych kwadratów*" (Kraków 1896) *B. Gustawicza.*

Serję prac polskich z tej dziedziny kończą: praca *A. B. Danielewicza* w VIII-ym tomie „Dzieł i rozpraw matematyczno-fizycznych“ (Warszawa 1904) p. t.: „*Metoda najmniejszych kwadratów*“ oraz szereg rozpraw, ogłoszonych przeważnie w Czasopiśmie Technicznem (Lwów) i Zeitschr. f. Vermessungswesen (Wiedeń) [1]).

Po tych uwagach, odnoszących się do historji rachunku wyrównawczego, przechodzę do omówienia przeznaczenia książki, jak i podania wskazówek, jak należy z niej korzystać.

Rozpoczynając pracę nad „Rachunkiem wyrównawczym“, chciałem początkowo dostarczyć odpowiedniego podręcznika studentom Politechniki Lwowskiej, uczęszczającym na moje wykłady „Teorji błędów i rachunku wyrównawczego.“ Spełnienie tego zadania nie okazało się jednak tak prostem, jakby można o tem sądzić z pozoru.

Podczas gdy studenci, kształcący się na inżynierów mierniczych, muszą znać bardzo szczegółowo rachunek wyrównawczy wraz z jego zastosowaniem do wszelkich zagadnień z dziedziny miernictwa i geodezji wyższej, należy podać studentom, kandydatom na inżynierów budowy i inżynierów-leśników ten sam przedmiot w zakresie znacznie mniejszym, uwzględniając jednak przytem specjalne potrzeby obu tych zawodów.

Widząc, że nawet przy układaniu podręcznika szkolnego będę musiał uwzględnić przynajmniej dwie kategorje czytelników, zmieniłem pierwotny zamiar, uzupełniając książkę ustępami, mogącemi być użytecznemi jednostkom pracującym naukowo; przez co powstała trzecia kategorja czytelników.

Prócz tego należało jeszcze koniecznie uwzględnić mające niebawem nastąpić *rozmierzanie Polski* i z tego powodu omówić bardzo szczegółowo metody wyrównawcze, odnoszące się do *tryangulacji,* zajmującej aż trzy obszerne rozdziały (IX. X. i XI).

Wskutek tego wzrosła objętość książki do tak znacznych rozmiarów, że musiałem zdecydować się na pominięcie rozdziału, traktującego o badaniu błędów systematycznych podziału kół poziomych i pionowych, śrub mikrometrycznych i t. p.; rozdział ten wybrałem z tego powodu, że jest on wyczerpująco omówiony w znanem dziele F. R. Helmerta p. t. „Die Ausgleichungsrechnung n. d. Methode der kleinsten Quadrate“ (Lipsk, Berlin 1907) na str. 436. i d.

Nieodzowne wiadomości z dziedziny teorji błędów, potrzebne do należytego zrozumienia rachunku wyrównawczego, starałem się podać

---

[1]) Ostatnią rozprawę prof. Dra A. Łomnickiego o znaczeniu czysto teoretycznem znajdzie czytelnik w IV-ym tomie „Fundamenta mathematicae“.

w sposób zwięzły, poprzestając na najelementarniejszych twierdzeniach rachunku prawdopodobieństwa. Przy wyznaczaniu kształtu funkcji prawdopodobieństwa $\varphi(\varepsilon)$ wolałem posiłkować się sposobem, podanym przez H. Poincarégo w Calcul des Probabilités, (Paryż 1912), aniżeli wywodami A. Markowa, podanemi w jego „Wahrscheinlichkeitsrechnung" (tłumacz. z rosyjskiego, Lipsk, Berlin 1912), opartemi na pojęciu *„nadzieji matematycznej"*, jakoteż nadzwyczaj interesującemi poglądami profesora Dra A. Łomnickiego we „Fundamenta mathematicae" (t. IV, Warszawa), nie chcąc odwracać uwagi czytelnika od tematu właściwego przez wprowadzanie pojęć, ogólnie mniej znanych.

W pracy mej posługiwałem się dość znaczną ilością dzieł i rozpraw, cytując je bądź w tekście samym, bądź też w uwagach, umieszczonych u dołu stronnic; najwięcej korzystałem z ostatnio wymienionego dzieła Helmerta, z I-go tomu podręcznika W. Jordana p. t. „Handbuch der Vermessungskunde" (Stuttgart 1920), jakoteż w jednym dowodzie z dzieła O. Eggerta p. t. „Einführung in die Geodäsie", (Berlin 1907). Nieliczne ustępy, dotyczące geodezji wyższej, starałem się przedstawić zgodnie z wykładami Kolegi Dra Łucjana Grabowskiego, profesora Astronomji sferycznej i geodezji wyższej w Politechnice Lwowskiej. Pozatem znajdzie czytelnik bardzo wiele miejsc, opracowanych w sposób zupełnie samodzielny.

Nakoniec poczuwam się do miłego obowiązku wyrażenia podziękowania asystentowi Politechniki Lwowskiej p. Janowi Lechowiczowi za pomoc w przeliczaniu niektórych przykładów jak i „Książnicy" T. N. S. W. za staranne wydanie książki.

Lwów, w maju 1922 r.

Treść.

Str.

Uwaga. Kandydaci na inżynierów budowy i inżynierów leśników mogą poprzestać na zgłębieniu pierwszych pięciu rozdziałów w całości, oraz na przestudjowaniu z rozdz. VIII-go pierwszych siedmiu, z rozdz. IX-go pierwszych pięciu, z rozdziału X-go pierwszych siedmiu i z rozdziału XI *A* pierwszych sześciu paragrafów, przyczem mogą, bez szkody dla zrozumienia dalszych ustępów, pominąć ustępy, zawarte między trzema gwiazdkami (* * *).

W podobny sposób mogą korzystać z niniejszej książki uczniowie szkół mierniczych, opuszczając jeszcze dodatkowo rozdział II-gi prócz § 1-go.

Ważniejsze omyłki druku.

Str. 10.	wiersz 3.	z dołu (w uwadze)	zamiast Ou	ma być *On*
„ 14.	„ 16.	z góry	należy skreślić słowo *wyznaczoną*	
„ 15.	„ 17.	„ „	zamiast Gausa	ma być *Gaussa*
„ 16.	„ 3.	„ „ „	$\frac{1}{n} \overset{n}{\Sigma} l :$	ma być: $\frac{1}{n} : \overset{n}{\Sigma} l$
„ 18.	„ 8.	z dołu „	ograniczoną	ma być *ograniczona*
„ 19.	„ 14.	z góry „	krzyemi	„ „ *krzywemi*
„ 19.	„ 15.	„ „	po słowie: muszą należy dodać *obie krzywe*	
„ 19.	„ 5.	z dołu zamiast	$+_w$	ma być $+\varepsilon_w$
„ 20.	„ 5.	z góry „	jak	„ „ *niż*
„ 20.	„ 14.	„ „ „	$\varepsilon + de$	ma być $\varepsilon + d\,\varepsilon$
„ 21.	„ 17.	„ „ „	$n - \infty$	„ „ $n = \infty$
„ 23.	„ 13.	z dołu „	str. 16	„ „ *str. 18.*
„ 24.	„ 1.	w uwadze „	Welliseh	ma być *Wellisch*
„ 25.	„ 2.	„ „ „	derl. Astr.	ma być *Berl. Astr.*
„ 38.	„ 10.	z dołu wzór (5) zamiast	$\varepsilon_1{}' \varepsilon_2{}'$	ma być $\varepsilon_1{}' \varepsilon_1{}'$
„ 39.	„ 19.	„ „ zamiast	jak i $l_1 - l_2$	ma być jak i $-l_1 - l_2$
„ 40.	„ 10.	z góry „	$\sqrt{63 \cdot 43}$	ma być $\sqrt{64 \cdot 43}$
„ 40.	„ 18. i 19.	z góry	zamiast L_n	„ „ L_r
„ 40.	„ 10.	z dołu zamiast	$\begin{cases} L_n \\ a_n (l_n + \varepsilon_r) \end{cases}$	ma być $\begin{matrix} L_r \\ a_r (l_r + \varepsilon_r) \end{matrix}$
„ 40.	„ 9.	„ „ „	$\begin{cases} l_n \\ a_n l_r \end{cases}$	ma być $\begin{matrix} l_r \\ a_r l_r \end{matrix}$
„ 40.	„ 8.	„ „ „	$a_n \varepsilon_r$	„ „ $a_r \varepsilon_r$
„ 41.	„ 3.	z góry „	wszystuie	ma być *wszystkie*
„ 41.	„ 16.	„ „ „	$\frac{\partial f}{\partial l_n}$	ma być $\frac{\partial f}{\partial l_r}$
„ 42.	„ 12.	„ „ „	$-290 \cdot 5\ cm + 1890 \cdot 3\ cm_2$	ma być $-290 \cdot 5\ cm^2 + 1890 \cdot 3\ cm^2$
„ 42.	„ 17.	„ „	należy skreślić słowo: *kwadratowych*	
„ 47.	„ 8.	z dołu „	z równania	ma być *z wyrównania*
„ 49.	„ 18.	„ „ „	$[\delta\delta]$ min	„ „ $[\delta\delta] = min$
„ 50.	„ 11.	„ „ „	$[\delta]\, 0,$	„ „ $[\delta] = 0,$
„ 51.	„ 1.	z góry „	ściślejsęym	„ „ *ściślejszym*

Str. 51. wiersz 12. z góry zamiast $[\varepsilon^2]=$ ma być $[\varepsilon]^2=$
„ 54. „ 4. „ „ „ gdy „ „ *gdyż*
„ 56. „ 6. „ „ „ je „ „ *ją*
„ 56. „ 17. z dołu „ sumę z iloczynów ma być *sumę iloczynów*
„ 58. „ 4. z góry „ otrzymany ma być *otrzymamy*
„ 60. „ 10. „ „ „ $L_2=0{\cdot}6$ „ „ $L_2=5{\cdot}0$
„ 60. „ 6. z dołu „ $p_4=\frac{\nu}{0{\cdot}6\nu}$ „ „ $p_4=\frac{\nu}{5{\cdot}0\nu}$
„ 61. „ 16. „ „ „ $\pm\frac{\mu_0}{p_i}$ „ „ $\frac{\mu_0}{\sqrt{p_i}}$
„ 61. „ 2. „ „ „ d_k „ „ l_k
„ 83. „ 2. „ „ „ $y=$ „ „ $y+$
„ 96. „ 18. z góry „ | 10·00 *m* | 10·00 *m* | 20·00 *m* | ma być
| 10·00 *m* | 15·00 *m* | 20·00 *m*
„ 96. „ 22. „ „ „ $\frac{\mu_0{}^2}{\mu_Y{}^0}$ ma być $\frac{\mu_0{}^2}{\mu_Y{}^2}$
„ 113. „ 5. „ „ (wzór (16)) zamiast $(F_2.1)$ ma być $[F_2.1)^2$
„ 113. „ 6. z dołu (wzór (20)) „ $+\frac{\partial F}{\partial z}$, „ „ $+\frac{\partial F}{\partial z}\zeta$,
„ 117. „ 17. z góry (wzór (4**)) „ $=\left(\frac{100}{D}\right)$, ma być $\left(\frac{100}{D}\right)^2$,
„ 125. „ 6. „ „ (wzór (11)) „ $\mu_i=$ ma być $\mu_i{}^2=$
„ 142. **na figurze 10. należy przestawić kąty przy wierzchołku X: 8) na lewo, a 7) na prawo**
„ 160. „ 3. z dołu (wzór (22)) zamiast $[p\delta'\delta']$ ma być $[p\delta''\delta'']$
„ 160. „ 1. „ „ (wzór (22)) „ $[p\delta'\delta']=[p\delta''\delta'']$ ma być $[p\delta'\delta']+$
$+[p\delta''\delta'']$
„ 169. „ 17. z góry zamiast 1.740·400 ma być 1740400
„ 169. „ 11. z dołu „ spostzzeżenie ma być *spostrzeżenie*
„ 216. „ 4. z góry „ $\left(\frac{[pl]}{p}\right)^0$ ma być $\left(\frac{[pl]}{[p]}\right)^0$
„ 257. „ 9. „ „ „ **§ 7. Przykład obustronnego wyrównania.**
ma być **§ 7. Przykład wyrównania obustronnego wcinania.**

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Wiadomości podstawowe.

§ 1. Rodzaje błędów spostrzeżeń. Zadanie rachunku wyrównawczego.

Wyniki najstaranniejszych spostrzeżeń fizycznych wielkości nie mogą być nigdy *ściśle* t. j. *bezbłędne*.

Głębsze zastanowienie się nad przebiegiem jakiegokolwiek spostrzeżenia (pomiaru) uświadamia nas, że na niezgodność wyniku spostrzeżenia z prawdziwą wartością spostrzeganej wielkości wpływa bardzo wiele częstokroć nawet bardzo nieznacznych przyczyn.

Przyczyny te można podzielić na dwie grupy. Pierwszą obejmują takie, z których istnienia oraz prawdopodobnego ich skutku możemy *sobie zdać sprawę* mniej lub więcej dokładnie. Natomiast przyczyny, należące do grupy drugiej są nam albo zupełnie *nieznane,* lub tak *mało uchwytne,* że nie możemy powiedzieć nic pewnego o ich wpływach na wynik; o ich istnieniu przekonywa nas fakt, że spostrzeżenia dokonane nad jedną i tąsamą wielkością w warunkach (jak się nam wydaje) jednakowych, różnią się z reguły między sobą choćby tylko bardzo nieznacznie.

Oczywiście, że pierwsza grupa przyczyn jest dla wyników otrzymywanych przy spostrzeżeniach mniej szkodliwą, gdyż znając owe przyczyny choćby nawet i powierzchownie, możemy w każdym razie znacznie zmniejszyć ich działalność szkodliwą na wynik przez zastosowanie odpowiednich poprawek oraz należytego postępowania przy pomiarze, czego — rozumie się — nie możemy uczynić w odniesieniu do drugiej grupy przyczyn.

Sprawę tę będę się starał objaśnić na przykładach.

Przy pomiarze długości taśmą stalową wpływają na niedokładność wyniku — między innemi — następujące przyczyny: niedokładne wytyczenie kierunku prostej, nieścisłe ułożenie taśmy wzdłuż wytyczonego kierunku, zwisanie jej z powodu niedostatecznego napięcia, niedokładne oznaczenie na terenie początku i końca taśmy, nieodpowiednia jej długość, wpływ temperatury i t. p.

Wszystkie te przyczyny są nam jednak o tyle znane przed rozpoczęciem pomiaru, że możemy ich wpływ szkodliwy ograniczyć, jeśli nie zupełnie to przynajmniej bardzo znacznie, wykonując opisane wyżej czynności pomiarowe bardzo starannie, stwierdzając długość taśmy na komparatorze, oraz mierząc — o ile nam zależy na bardzo dokładnym pomiarze — także i temperaturę taśmy przy jej użyciu.

Oczywiście, że mimo tego postępowania nie potrafimy usunąć w zupełności szkodliwego wpływu wymienionych przyczyn na wynik, a gdy jeszcze weźmiemy na uwagę istnienie przyczyn, o których działalności możemy mieć zaledwie bardzo słabe pojęcie (n. p. natury fizjologicznej) i przyczyn zupełnie nam nie znanych, zrozumiemy łatwo, dlaczego przy kilkakrotnym pomiarze tej samej długości, mimo stosowania jednakowej metody pomiaru, otrzymamy wyniki niezupełnie zgodne.

Weźmy teraz na uwagę pomiar przyrządem znacznie delikatniejszym, a więc n. p. aneroidem. W przyrządzie tym odpowiada podniesieniu się lub opadnięciu wierzchniej pokrywy puszki o wypompowanem powietrzu o 4 $\mu\mu$ przesunięcie się wskazówki o około 1 *m/m*. Można zatem łatwo sobie wyobrazić, że przy tego rodzaju przenośni (1 : 250) w tak drobnym przyrządzie, jest niemożliwe dokładne zdanie sobie sprawy z bardzo wielu przyczyn mających wpływ na ostateczny wynik. Wprawdzie potrafimy ocenić mniej lub więcej dokładnie wpływ niektórych przyczyn działających w tym przypadku i niektóre z nich unieszkodliwić — przynajmniej do pewnego stopnia —, a to, albo przez odpowiednią kompensację mechanizmu, albo drogą rachunkową, jednak pozostała liczba przyczyn będzie tak wielką, że wyniki uzyskane pewnym aneroidem przy pomiarze tej samej wysokości, będą z reguły odbiegały od siebie jeszcze bardziej, niż to miało miejsce przy pomiarach taśmą stalową.

Każda z przyczyn uczestnicząca w danym przypadku jest powodem niezgodności wyniku, wywołując tak zwany błąd *cząstkowy* lub *elementarny,* wszystkie zaś w danym przypadku uczestniczące składają się na *całkowity błąd spostrzeżenia.*

Błędy (całkowite) występujące przy spostrzeżeniach dzielimy na trzy kategorje: błędy *grube, systematyczne* i *przypadkowe.*

1. *Błędy grube.* Błędy te wynikają z powodu przeoczenia obserwatora i różnią się zwyczajnie swą znaczną wielkością od innych, tak że po zestawieniu spostrzeżeń nad tą samą wielkością, możemy z reguły poznać, które z nich są obarczone błędem grubym.

Przykłady z praktyki mierniczej: Licząc przy pomiarze prostej ilość przyłożeń taśm lub łat mierniczych, zaznaczono w raptularzu o jedno przyłożenie za mało lub za wiele popełniając przezto błąd 20 *m* względnie 5 *m*; lub kończąc pomiar prostej odczytano t. zw. resztę na nieodpowiedniej stronie taśmy, otrzymując zamiast właściwej wartości reszty, wielkość uzupełniającą ją do 20 *m*.

Oczywiście, że można popełnić przez przeoczenie i bardzo nieznaczny błąd, tak że nie będzie go można wykryć przez zestawienie kilku spostrzeżeń; w tym przypadku wejdzie on do później omawianego rachunku wyrównawczego, jednak wpływ jego będzie — praktycznie biorąc — o ile mamy do dyspozycji większą ilość spostrzeżeń bardzo nieznaczny na wynik wyrównania, a to właśnie ze względu na jego nieznaczną wielkość.

2. *Błędy systematyczne.* Są to błędy występujące w szeregu spostrzeżeń wedle pewnego prawa związanego ściśle z okolicznościami, wśród których wykonywano pomiary. O ile przyczyny wywołujące owe błędy działają stale jednakowo podczas wykonywania szeregu spostrzeżeń, będą miały błędy systematyczne wszystkich spostrzeżeń wartość stałą; nazywamy je wówczas błędami *stałemi.*

Jako **przykłady** tego rodzaju błędów mogą posłużyć błędy występujące przy pomiarze kąta teodolitem o ekscentrycznie osadzonej osi alhidady. Każdy odczyt jest z tego powodu obarczony dwoma błędami systematycznemi, z których jeden zmienia się wzdłuż obwodu limbusu wedle prawa sinusoidy, drugi pozostaje w każdem miejscu stały.

3. *Błędy przypadkowe.* Działanie przyczyn błędów przypadkowych zależy od okoliczności, które zmieniają się w czasie między spostrzeżeniami (od poprzedniego spostrzeżenia do następnego), a których związku ilościowego ze spostrzeżeniami nie można wykazać.

Logicznie można uzasadnić, że przy rozważaniu błędów tego rodzaju można zastosować rachunek prawdopodobieństwa [1]), określając je jako błędy, które mogą pojawić się w szeregu spostrzeżeń *z równem prawdopodobieństwem* jako *dodatnie* lub jako *ujemne.*

Teorja błędów zajmuje się tylko błędami przypadkowemi. Błędy innego rodzaju muszą być przed zastosowaniem rachunku wyrównawczego, albo zupełnie usunięte ze spostrzeżeń, lub conajmniej przez odpowiednią metodę pomiaru tak zredukowane, by nie miały praktycznego wpływu na wynik wyrównania. Ostatnia uwaga odnosi się do błędów systematycznych, którym często możemy nadać przez odpowiednie postępowanie podczas pomiaru charakter błędów przypadkowych, tak że uzyskane wyniki spostrzeżeń mogą być użyte do rachunku wyrównawczego.

Przykład. Ponieważ przy pomiarze kąta występują prócz wyżej wymienionych błędów systematycznych jeszcze i błędy podziału limbusu o charakterze systematycznym, nadaje się im charakter błędów przypadkowych, przez pomiar tegoż kąta na odpowiednio obranych częściach limbusu teodolitu, uzyskując na pewnych jego częściach wyniki za duże, na innych za małe, czyli nadając wedle poprzednich uwag powstającym błędom charakter błędów przypadkowych, gdyż każdemu błędowi o pewnej wielkości w sensie dodatnim, będzie odpowiadał równy błąd w sensie ujemnym.

Ponieważ, jak już wspomniałem, spostrzeżenia dokonane nad jedną i tą samą wielkością nie mogą dać z reguły zgodnego wyniku, wynika

[1]) *Kries.* Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitrechnung. Eine logische Untersuchung 1886. str. 217.

*

ztąd konieczność zastosowania jakiegoś rachunku wyrównawczego dla uzyskania jednoznacznej wartości spostrzeganej wielkości; a chcąc, aby uzyskana wartość była *najbardziej prawdopodobną,* należy ów rachunek wraz ze związaną z nim teorją błędów przypadkowych oprzeć na rachunku prawdopodobieństwa.

Po tych uwagach zastanówmy się nad zadaniami, jakie mają spełnić rachunek wyrównawczy i teorja błędów.

Rachunek wyrównawczy podaje nam:

1. *sposoby,* jak należy *zużytkować rachunkowo spostrzeżenia,* — o ile były dokonane w większej ilości, jak zachodziła potrzeba —, aby uzyskać jednoznaczny wynik, który nam przedstawi zarazem najbardziej prawdopodobną wartość mającej się wyznaczyć wielkości (względnie mających się wyznaczyć wielkości),

2. *dokładność* każdego spostrzeżenia, wartości uzyskanych wyrównaniem i ich funkcyj,

3. możność *uzyskania* jedynie odpowiednich *wzorów empirycznych* przez wyznaczenie formuł interpolacyjnych najbardziej odpowiadających w tym celu dokonanym spostrzeżeniom.

Sprawa pierwszorzędnej wagi dla badaczy naukowych, a więc i inżynierów pracujących nad ustaleniem wzorów empirycznych na podstawie dokonanych doświadczeń.

Teorja błędów zaznajamia nas z *prawami, jakim podlegają przypadkowe błędy spostrzeżeń;* jest więc — jak widzimy — nauką podstawową dla rachunku wyrównawczego.

Rachunek wyrównawczy ma zatem, jak to wynika z powyższych rozważań, znaczenie bardzo doniosłe i to tak dla badań naukowych, jak i celów praktycznych, a to dzięki okoliczności, że nietylko podaje nam *najbardziej prawdopodobną* wartość mającej się wyznaczyć wielkości, lecz zarazem i *dokładność* jej wyznaczenia, co się uskutecznia przez obliczenie błędu „prawdopodobnego" w praktyce zwykle „*średniego*" wartości uzyskanej z rachunku.

W praktyce zależy nam z reguły na tem, aby uzyskać wynik o pewnej z góry określonej dokładności, a jedynego sposobu sprawdzenia, czy tak postawione zadanie zdołaliśmy spełnić, dostarcza nam właśnie rachunek wyrównawczy.

Ale i na tem nie koniec; bo nawet w przypadkach, w których stwierdziliśmy, że nie osiągnęliśmy żądanej dokładności, orjentuje nas rachunek ten, czy możliwem jest uzyskanie jej przez odpowiednie pomnożenie ilości spostrzeżeń, czy też należy użyć innych dokładniejszych przyrządów lub metod, by sprostać postawionemu zadaniu.

Ze względu na to, że teorja błędów — owa podwalina rachunku wyrównawczego — opiera się na rachunku prawdopodobieństwa, podaję w następnym rozdziale te zasady tegoż rachunku, które będą potrzebne dla niektórych dowodów odnoszących się do teorji błędów.

§ 2. Pojęcia i twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa potrzebne dla dalszych wywodów.

a) Prawdopodobieństwo pojedyncze.

Nazwijmy ilość przypadków sprzyjających pewnemu zdarzeniu s, zaś ilość przypadków, w których owe zdarzenia może wogóle zajść w, a otrzymamy na określenie matematycznego prawdopodobieństwa tego zdarzenia wzór:

$$p=\frac{s}{w}. \tag{1}$$

Zatem *prawdopodobieństwo* pewnego *zdarzenia* w znaczeniu matematycznem jest ***stosunkiem liczby przypadków sprzyjających*** temu zdarzeniu do ***liczby wszystkich przypadków***, w jakich to zdarzenie może zajść, t. j. do liczby wszystkich możliwych przypadków[1]).

Granice p są $\frac{o}{w}=0$ i $\frac{w}{w}=1$. Pierwszy wzór odpowiada *niemożności*, drugi *pewności* zajścia tegoż spostrzeżenia. Zaś prawdopodobieństwo, że zdarzenie owo nie zajdzie równa się $1-p$.

Przykłady. Prawdpodobieństwo wyrzucenia dwoma kostkami w sumie liczby 12 jest równe $\frac{1}{36}$, gdyż na 36 wszystkich możliwych przypadków jeden zaledwie sprzyja temu zdarzeniu (na obu kostkach 6). Zaś prawdopodobieństwo wyrzucenia dwoma kostkami w sumie liczby 8 równa się $\frac{5}{36}$, gdyż mamy tu pięć przypadków sprzyjających, a mianowicie: 2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2.

b) Prawdopodobieństwo zdarzeń wykluczających się wzajemnie.

Jeśli mamy wyznaczyć z jakiem prawdopodobieństwem z kilku zdarzeń wzajemnie się wykluczających (t. j. nie mogących zajść równocześnie) $A, B, C, \ldots N$, którekolwiek zajdzie, to prawdopodobieństwo tak określone równa się ***sumie prawdopodobieństw pojedynczych wszystkich owych zdarzeń.*** Oznaczając zatem prawdopodobieństwa owych zdarzeń przez $p_a, p_b, p_c, \ldots p_n$ otrzymamy powyżej określone prawdopodobieństwo:

$$p_{(a+b+c+\ldots+n)}=p_a+p_b+p_c+\ldots+p_n. \tag{2}$$

[1]) Definicja ta nie jest w zupełności zadawalająca, co stwierdził między innymi i znany matematyk H. Poincaré poprzedzając ją w swych wykładach o rachunku prawdopodobieństwa następującem zdaniem: L'on ne peut guère donner une definition satisfaisante de la Probabilité. — H. Poincaré. Calcul des Probabilités. Paris 1912. (Wyd. 2-gie) str. 24.

Przykład. Do próżnej urny wrzucono k kul, c czerwonych, b białych i n niebieskich, a zatem $k=c+b+n$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągając z urny jedną kulę wyciągniemy czerwoną lub niebieską?

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli czerwonej jest: $p_c=\frac{c}{k}$, zaś niebieskiej $p_n=\frac{n}{k}$, zatem prawdopodobieństwo, o które się pytamy będzie określone wzorem:

$$p_{c+n}=\frac{c+n}{k}.$$

Oczywiście, że prawdopodobieństwo to jest równocześnie równe prawdopodobieństwu niewyciągnięcia kuli białej, które wedle poprzednich uwag wypada:

$$1-p_b=1-\frac{b}{k}=\frac{c+n}{k}.$$

c) Prawdopodobieństwo dwu zdarzeń niezależnych, czyli prawdopodobieństwo złożone.

Prawdopodobieństwo, że kilka zdarzeń niezależnych od siebie A, B, C, . . N zajdzie równocześnie (lub bezpośrednio po sobie), równa się *iloczynowi prawdopodobieństw pojedynczych* tych zdarzeń. Zatem:

$$p_{(a.b.c....n)}=p_a.p_b.p_c\ldots p_n. \tag{3}$$

Przykład. W urnie znajduje się k kul, c czerwonych, n niebieskich, i b białych; jakie jest prawdopodobieństwo, że — wyciągając z urny trzy kule po jednej i wrzucając wyciągniętą przed wyjęciem następnej do urny — wyciągniemy właśnie kule o trzech kolorach?

Jeśli po wyciągnięciu każdej kuli wrzucamy ją z powrotem, będą prawdopodobieństwa pojedyncze wyjęcia kul każdego z wymienionych trzech kolorów: $p_c=\frac{c}{k}$, $p_n=\frac{n}{k}$, $p_b=\frac{b}{k}$, zatem jako odpowiedź na nasze pytanie otrzymamy wynik:

$$p_{c.n.k}=\frac{c.n.b}{k^3}.$$

Natomiast prawdopodobieństwo *wyciągnięcia r razy po sobie kuli białej* przy tem samem postępowaniu będzie określone wzorem

$$(p_b)^r=\left(\frac{b}{k}\right)^r. \tag{3*}$$

Wzór ten ma bardzo ważne znaczenie dla późniejszych wywodów.

d) Prawo liczb wielkich.

Dotychczas omawialiśmy prawdopodobieństwa zdarzeń, których przyczynę powstania znaliśmy zupełnie dokładnie. N. p. wiedzieliśmy, ile jest kul w urnie każdego koloru, wiele z nich mamy naraz wyciągnąć i t. d. Są jednak przypadki, w których nie znamy dokładnie przyczyn pewnych zdarzeń; chcąc wyznaczyć ich prawdopodobieństwo uciekamy się do doświadczeń, których liczba musi być jednak *bardzo znaczną*.

Wnioskujemy tu następująco: jeśli jakieś zdarzenie, na bardzo wielką ilość n wszystkich możliwych przypadków t. j. doświadczeń, zaszło w pewnych okolicznościach m razy, należy słusznie przypuszczać, że zajdzie ono i w przyszłości w tych samych okolicznościach w liczbie, której stosunek do ilości wszystkich możliwych przypadków (w przyszłości) będzie ten sam jak poprzednio t. j. $\frac{m}{n}$.

Sprawą tą zajmował się między innymi *Bernoulli* wykazując, że omawiane prawdopodobieństwo różni się bardzo nieznacznie od $\frac{m}{n}$ (twierdzenie Bernoulliego); w praktyce przyjmujemy je zatem równe temu stosunkowi.

e) Prawdopodobieństwo przyczyn. Twierdzenie Bayesa.

Założmy, że zdarzenie A miało miejsce, oraz, że n przyczyn P_1, P_2,....... P^n *wzajemnie się wykluczających* mogło je wywołać, t. j. że w rzeczywistości wywołała je z nich tylko jedna.

Przypuśćmy dalej, że prawdopodobieństwo, z jakiem zdarzenie A byłoby nastąpiło, gdyby była działała przyczyna P_i wynosi p_i. Natomiast prawdopodobieństwo *a priori* — czyli prawdopodobieństwo przed zdarzeniem —, że przyczyna P_i uczestniczyła w tym przypadku, oznaczmy (p_i).

Pamiętając o naszem założeniu, że zdarzenie A miało miejsce, pytamy się: jakie jest prawdopodobieństwo *a posteriori* — t. j. po zdarzeniu A —, że je wywołała właśnie przyczyna P_i?

Prawdopodobieństwo to oznaczymy literą x i będziemy się starali znaleść je drogą pośrednią.

Prawdopodobieństwo, że przyczyna P_i uczestniczyła w tym wypadku, a uczestnicząc byłaby wywołała zdarzenie A jest wedle *c)* prawdopodobieństwem złożonem z prawdopodobieństwa *a priori* (p_i), że P_i w tym przypadku uczestniczyła, oraz z prawdopodobieństwa p_i, z jakiem zdarzenie A byłoby nastąpiło, gdyby była działała przyczyna P_i; a zatem prawdopodobieństwo złożone jest: $(p_i)\ p_i$.

Prawdopodobieństwo tak otrzymane równa się jednak prawdopodobieństwu otrzymanemu i następującem rozumowaniem: nasamprzód należy przyjąć, że zdarzenie A miało miejsce, a potem (gdy już miało miejsce) przypisać wywołanie go przyczynie P_i.

W ten sposób rozumując otrzymamy również prawdopodobieństwo złożone, którego pierwszą częścią jest wedle *b)* suma: $(p_1)\,p_1+(p_2)\,p_2+ \\ +\ldots\ldots+(p_n)\,p_n$, zaś drugą prawdopodobieństwo *a posteriori* x; zatem ostatnio omawiane prawdopodobieństwo złożone wypadnie:

$$x\,\{(p_1)\,p_1+(p_2)\,p_2+\ldots\ldots+(p_n)\,p_n\}. \tag{4}$$

Jak już wspomniałem oba te prawdopodobieństwa złożone są sobie równe. Zatem:

$$x=\frac{(p_i)\,p_i}{(p_1)\,p_1+(p_2)\,p_2+\ldots\ldots(p_n)\,p_n}. \tag{5}$$

Jestto twierdzenie Bayesa, które ująłem w definicję następującą:

Prawdopodobieństwo a posteriori, że pewna przyczyna P_i wywołała zdarzenie A równa się stosunkowi iloczynu prawdopodobieństwa a priori, że przyczyna P_i uczestniczyła w tym przypadku przez prawdopodobieństwo, z jakiem zdarzenie A byłoby nastąpiło, gdyby była działała przyczyna P_i do sumy iloczynów prawdopodobieństw utworzonych w ten sam sposób dla wszystkich n przyczyn mogących uczestniczyć w tym przypadku.

Przykład. Mamy r urn, z których każda zawiera k kul różnego koloru. Urny podzielono na n kategorji K_1, $K_2 \ldots . K_n$; do pierwszej niech należy a_1 urn, do drugiej a_2 urn... do n-tej a_n urn. W każdej urnie należącej do pierwszej kategorji niech będzie między innemi po b_1 kul białych, w drugiej po $b_2 \ldots .$ w n-tej po b_n kul białych.

Przypuśćmy, że ktoś sięgnąwszy do dowolnej urny wyjął kulę białą. Pytamy się — po tym fakcie dokonanym —, jakie jest prawdopodobieństwo, że wyjęto ją z urny należącej do pierwszej kategorji K_1?

Prawdopodobieństwo, o które się pytamy, jest poprzednio omawianem prawdopodobieństwem *a posteriori* $x=\dfrac{(p_1)\,p_1}{\sum\limits_1^n (p)\,p}$.

Prawdopodobieństwo *a priori* (p_1) znajdziemy rozumując następująco: przyczyną wyciągnięcia kuli białej z urn pierwszej kategorji jest okoliczność, że na r urn a_1 urn należy do kategorji pierwszej, a zatem

$$(p_1)=\frac{a_1}{r}.$$

Zaś prawdopodobieństwo p_1, z jakiem wyciągnęlibyśmy wówczas (t. j. gdyby ta przyczyna była działała) kulę białą z dowolnej urny pierwszej kategorji jest stosunek b_1 do k, zatem

$$p_1=\frac{b_1}{k}\text{; przeto:}$$

$$x=\frac{a_1\,b_1}{\sum\limits_1^n a\,b}.$$

Przykład szczegółowy. Pięć urn podzieliliśmy na dwie kategorje, z których pierwsza zawiera trzy, druga dwie urny. W każdej urnie mamy 10 kul, między któremi jest w urnach pierwszej kategorji po 6 białych, zaś w urnach drugiej kategorji po 3 białe kule. Zatem $r=5$, $n=2$, $a_1=3$, $a_2=2$, $b_1=6$, $b_2=3$.

Pytamy się po wyciągnięciu kuli białej, jakie jest prawdopodobieństwo *(a posteriori)*, że pochodzi ona z urn kategorji pierwszej.

Wstawiając do wzoru na x liczby szczególne otrzymamy:

$$x_1=\frac{3.6}{3.6+2.3}=\frac{3}{4}.$$

Wyznaczając dla kontroli prawdopodobieństwo tego samego rodzaju, że wyciągnięta kula biała pochodzi z urn kategorji drugiej otrzymamy:

$$x_2=\frac{2.3}{3.6+2.3}=\frac{1}{4},$$

zaś (pewność), że pochodzi z urn jednej lub drugiej kategorji

$$x_1+x_2=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1.$$

§ 3. Krótki zarys teorji błędów przypadkowych. Funkcja prawdopodobieństwa $\varphi(\varepsilon)$.

Wiadomości podane o błędach przypadkowych w § 1-szym są zbyt ogólnikowe, aby mogły nam wystarczyć dla dalszych wywodów; należy je przeto nieco uzupełnić dla uzyskania jaśniejszego poglądu na tę sprawę.

Przedewszystkiem należy znaleść *prawo*, któremu podlegają błędy przypadkowe. Nie mając jednak dostatecznych podstaw, aby dojść do niego samem rozumowaniem, musimy oprzeć się na doświadczeniach, a dopiero mając za sobą wyniki doświadczeń dostosować do nich odpowiednią hipotezę. *Wszelkie zaś hipotezy* — choćby najbardziej trafiające do przekonania — *nie poparte licznemi doświadczeniami, nie mogą być tu miarodajnemi.*

Natomiast należy wymienić trzy hipotezy wykazujące większą lub mniejszą zgodność z doświadczeniami; wynikiem wszystkich trzech są prawa o kształcie funkcyj wykładniczych.

Hipoteza pierwsza. Błąd spostrzeżenia jest wynikiem współdziałania bardzo wielkiej liczby przyczyn niezależnych, z których każda podlega temu samemu prawu. Prawo to ma spełnić tylko jeden warunek, a mianowicie: że błędom o tej samej absolutnej wielkości przysługuje prawdopodobieństwo równe.

Hipotezę tę analizował *Laplace.*

Hipoteza druga analizowana przez Bessela. Błąd spostrzeżenia jest wynikiem współdziałania bardzo wielkiej liczby przyczyn niezależnych, które działają wprawdzie wedle dowolnych praw i między dowolnemi granicami jednak z tem ograniczeniem, że błędy dodatnie i ujemne o tej samej wielkości pojawiają się w szeregach spostrzeżeń w tejsamej ilości, oraz że prawdopodobne wartości kwadratów błędów elementarnych są wielkościami tego samego rzędu.

Hipoteza trzecia. Błąd spostrzeżenia jest wynikiem współdziałania bardzo wielkiej liczby przyczyn niezależnych, z których każda, gdyby działała sama, wywołałaby błąd bardzo mały w stosunku do tych błędów, jakieby powstały z kombinacji działania wszystkich innych przyczyn.

Hipotezę tę poddał analizie *Crofton.*

Szczegółowe omawianie tych hipotez wykracza poza ramę niniejszego dzieła, czytelnik chcący się zajmować niemi dokładniej znajdzie je wystarczająco szczegółowo omówione w dziele E. Czubera [1]), lub odnośnych publikacjach [2]).

Chcąc jednak uzmysłowić czytelnikom sprawę powstawania błędów spostrzeżeń z błędów cząstkowych, zajmę się nieco bliżej hipotezą *Hagena* [3]), która jest tylko szczególnym przypadkiem hipotezy pierwszej. Hipotezę tę — popartą również doświadczeniami — wybrałem nie z tego powodu, aby usiłować przekonać czytelników o jej bezwzględnej słuszności, ale tylko dlatego, że — ze względu na swą prostotę — nadaje się najlepiej do osiągnięcia wyżej wspomnianego celu.

Hagen przyjął, że błąd spostrzeżenia jest *sumą* bardzo wielkiej liczby, niezależnych, równych, bardzo małych błędów *cząstkowych,* przyczem każdy z nich może wpływać na wynik spostrzeżenia z takiem samem prawdopodobieństwem w sensie dodatnim jak i ujemnym.

Przyjęcie to nie jest wprawdzie ścisłem, choćby z tego powodu, że wyklucza błąd cząstkowy o wielkości równej zeru, podczas gdy — jak to zaraz obaczymy — błąd całkowity przyjmuje przez współdziałanie błędów cząstkowych najczęściej właśnie tę wartość; okoliczność ta dowodziłaby zatem, że cząstkowe błędy podlegają innemu prawu, jak całkowite błędy spostrzeżeń. Mimo to, można, ze względu na zgodność wyników tej hipotezy z doświadczeniami, uważać ten sposób przedstawienia rzeczy za bardzo zbliżony do prawdy; boć przecie przyjęto, że błędy cząstkowe są bardzo małe, różnią się przeto tylko bardzo nieznacznie od zera.

---

[1]) *E. Czuber.* Theorie der Beobachtungsfehler, Lipsk 1891. str. 78 i t. d.

[2]) *Laplace.* Théorie analyt. des Probabilités II. Art. 23; *Bessel.* Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler, 1838. Astr. Nachrichten, tom XV. Nr. 358—359; *Crofton.* On the Proof. of the Law of Errors of Observations 1870, London Philos. Transact., 160, str. 175.

[3]) *Hagen.* Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3-cie wyd. 1882.

Nazywając błędy cząstkowe ν, a całkowite (spostrzeżeń) ε, otrzymamy dla n błędów cząstkowych następujące wyniki:

Błąd całkowity ε	Składające się nań błędy cząstkowe	Wielkość błędu całkowitego	Ilość pojawienia się bł. całkowitego
ε'	$+\nu+\nu+\nu+\ldots+\nu+\nu+\nu$	$n\nu$	$\binom{n}{n}=1$
ε''	$+\nu+\nu+\nu+\ldots+\nu+\nu-\nu$	$(n-2)\nu$	$\binom{n}{n-1}=n$
ε'''	$+\nu+\nu+\nu+\ldots+\nu-\nu-\nu$	$(n-4)\nu$	$\binom{n}{n-2}=\binom{n}{2}$
.	....	....	
$\varepsilon^{(n/2+1)}$	$+\nu+\nu+\nu\ldots\ldots-\nu-\nu-\nu$	0	$\binom{n}{n/2}$
.	....	....	
$\varepsilon^{(n-1)}$	$+\nu+\nu-\nu\ldots\ldots-\nu-\nu-\nu$	$-(n-4)\nu$	$\binom{n}{n-2}=\binom{n}{2}$
$\varepsilon^{(n)}$	$+\nu-\nu-\nu\ldots\ldots-\nu-\nu-\nu$	$-(n-2)\nu$	$\binom{n}{n-1}=n$
$\varepsilon^{(n+1)}$	$-\nu-\nu-\nu\ldots\ldots-\nu-\nu-\nu$	$-n\nu$	$\binom{n}{n}=1$

(1)

Przyjmując zaś w szczególnym przypadku $n=8$, otrzymamy wyniki zestawione poniżej:

Błąd całkowity	Wielkość błędu całkowitego	Ilość pojawienia się	Oznacz. bł. całk. wedle absol. wielk.	Prawdopodobieństwo błędu całkowitego (w przybliżeniu)
ε'	8ν	$\binom{8}{8}=1$	ε_4	$^1/_{256}=\backsim 0{\cdot}004$
ε''	6ν	$\binom{8}{7}=8$	ε_3	$^8/_{256}=\backsim 0{\cdot}031$
ε'''	4ν	$\binom{8}{6}=28$	ε_2	$^{28}/_{256}=\backsim 0{\cdot}109$
$\varepsilon^{(4)}$	2ν	$\binom{8}{5}=56$	ε_1	$^{56}/_{256}=\backsim 0{\cdot}219$
$\varepsilon^{(5)}$	0	$\binom{8}{4}=70$	ε_0	$^{70}/_{256}=\backsim 0{\cdot}273$
$\varepsilon^{(6)}$	-2ν	$\binom{8}{3}=56$	$-\varepsilon_1$	$^{56}/_{256}=\backsim 0{\cdot}219$
$\varepsilon^{(7)}$	-4ν	$\binom{8}{2}=28$	$-\varepsilon_2$	$^{28}/_{256}=\backsim 0{\cdot}109$
$\varepsilon^{(8)}$	-6ν	$\binom{8}{1}=8$	$-\varepsilon_3$	$^8/_{256}=\backsim 0{\cdot}031$
$\varepsilon^{(9)}$	-8ν	$\binom{8}{0}=1$	$-\varepsilon_4$	$^1/_{256}=\backsim 0{\cdot}004$
	$\Sigma=0$	$\Sigma=256$	$\Sigma=0$	$\Sigma=\backsim 0{\cdot}999$

(2)

(z powodu skróceń), ma być $=1$.

Z powyższych zestawień widać, że powstałe wedle hipotezy Hagena błędy spostrzeżeń ε spełniają następujące warunki:

1. *prawdopodobieństwo jednakowo wielkich błędów dodatnich i ujemnych jest równe,*

2. *prawdopodobieństwo popełnienia błędu mniejszego jest większe, niż błędu większego,*

3. *największe prawdopodobieństwo posiada błąd* $\varepsilon_0 = 0$.

Nazywając przeto P_ε prawdopodobieństwo pojawienia się błędu ε widzimy, że [1]:

$$P(+\varepsilon) = P(-\varepsilon), \tag{3}$$

czyli że P_ε jest *funkcją parzystą* (symetryczną) *błędu* ε.

Te trzy wymienione właściwości błędów utworzonych wedle hipotezy Hagena charakteryzują jednak i przypadkowe błędy spostrzeżeń uzyskane drogą eksperymentalną, czyli że *doświadczenie popiera hipotezę Hagena.*

Gdybyśmy chcieli przedstawić związek między wielkością błędu a jego prawdopodobieństwem wykreślnie, otrzymalibyśmy biorąc do wykresu wyniki zestawione w tabelach — szereg odcinków stojących oddzielnie obok siebie. Otóż, aby uzyskać odpowiedni wykres dający możność sumowania prawdopodobieństwo błędów (co jest nam potrzebne dla wyznaczenia prawdopodobieństwa błędu zawartego w pewnych granicach), podzielimy oś odciętych na odcinki o wielkości $2\nu = \Delta\varepsilon$ i wykreślimy nad niemi jako podstawami prostokąty o wysokości $\frac{P_\varepsilon}{\Delta\varepsilon}$, jak na fig. 1. dla $n = 8$.

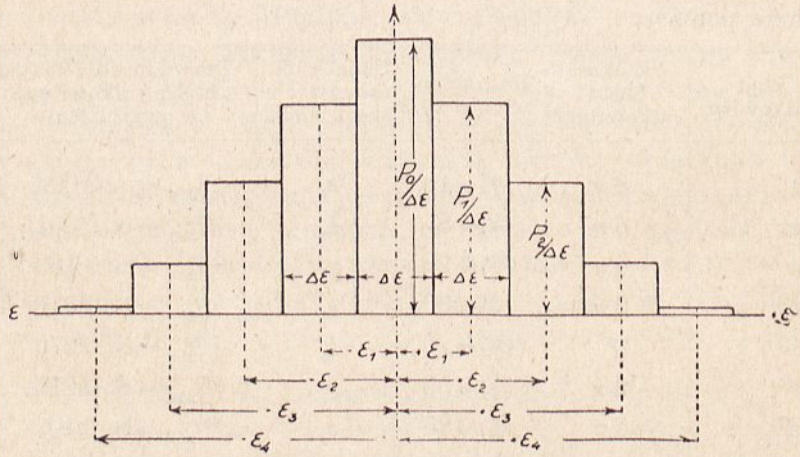

Fig. 1.

[1]) Prawdopodobieństwo błędów będę oznaczał nadal przez P, gdyż p chcę zachować dla wielkości t. zw. wag, które będą występowały przy późniejszych rozważaniach.

A zatem przyjęliśmy, że prawdopodobieństwo P_ε odnosi się do błędów leżących w granicach między $\varepsilon - v$, a $\varepsilon + v$, lub wedle nowego oznaczenia między $\varepsilon - \frac{\Delta\varepsilon}{2}$, a $\varepsilon + \frac{\Delta\varepsilon}{2}$.

Prawdopodobieństwo, że błąd jest zawarty w granicach od $a = +\varepsilon_1$ *do* $b = +\varepsilon_3$ równa się — jak to wprost widać na rysunku — *powierzchni* trzech *prostokątów odnoszących się* do tych trzech *błędów*, gdyż prawdopodobieństwo to równa się wedle § 2. *b)* sumie prawdopodobieństw $P_1 + P_2 + P_3$, którym odpowiadają na rysunku wspomniane prostokąty.

Wielkość $\frac{P_\varepsilon}{\Delta\varepsilon}$, którą odcięliśmy dla każdego błędu na osi rzędnych nazywamy *funkcją prawdopodobieństwa* oznaczając ją przez $\varphi(\varepsilon)$, a jeśli równocześnie przejdziemy ze skończonej ilości n na $n = \infty$, oraz przyjmiemy błędy v nieskończenie małe, przemieni się $\Delta\varepsilon$ w różniczkę $d\varepsilon$, tak, że otrzymamy związek:

$$P_\varepsilon = \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{4}$$

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu ε t. j. błędu zawartego w granicach między ε, a $\varepsilon + d\varepsilon$ $\left(\text{lub } \varepsilon - \frac{d\varepsilon}{2}, \text{ a } \varepsilon + \frac{d\varepsilon}{2}\right)$ równa się wartości *funkcji prawdopodobieństwa* $\varphi(\varepsilon)$ *pomnożonej przez różniczkę błędu* $d\varepsilon$.

(Oczywiście, że twierdzenie powyższe jest zupełnie niezależne od hipotezy Hagena, którą podałem nieco szczegółowiej ze względu na łatwość przedstawienia jej na wykresie (fig. 1.)).

§ 4. Wyznaczenie funkcji prawdopodobieństwa[1]).

Przypuśćmy, że spostrzegliśmy n razy pewną wielkość otrzymując za każdym razem inny wynik:

$$l_1, l_2, \ldots \ldots l_n.$$

Po dokonaniu spostrzeżeń pytamy się, jakie jest prawdopodobieństwo, że *prawdziwa wartość* spostrzeganej przez nas wielkości jest *zawarta w granicach między* L, a $L + dL$.

Prawdopodobieństwo to jest znanem nam z § 2c prawdopodobieństwem przyczyn (str. 6).

I tak nazywając (p_i) prawdopodobieństwo *a priori*, że wartość spostrzeganej wielkości jest zawarta w granicach między L a $L + dL$, zaś p_i prawdopodobieństwo, z jakiem wyniki naszych spostrzeżeń wypadłyby w granicach między l_1 a $l_1 + dl_1$, l_2 a $l_2 + dl_2, \ldots\ldots$ l_n a $l_n + dl_n$, gdyby

[1]) Ustęp ten opracowałem posługując się częściowo dziełem *H. Poincaré,* Calcul des Probabilités. Paryż 1912, str. 169 i dalsze.

spostrzegana wielkość była zawarta w granicach między L, a $L+dL$, otrzymamy wedle twierdzenia Bayesa (§ 2, (5), str. 8):

$$P_L = \frac{(p_i)p_i}{\sum_1^n (p_i)p_i}. \qquad (1)$$

W poprzednim ustępie ustaliliśmy wzór na prawdopodobieństwo pojawienia się błędu ε w granicach między ε, a $\varepsilon+d\varepsilon$: $P_\varepsilon = \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$. Wedle tego wzoru prawdopodobieństwo błędu spostrzeżenia l nie jest zależne od wielkości samego l.

Otóż Poincaré przyjmuje zamiast $\varphi(\varepsilon)$ ogólniejszy kształt funkcji prawdopodobieństwa mianowicie $\varphi(l, L)$ taki, że prawdopodobieństwo P_i — popełnienia błędu dl_i — przedstawia się:

$$P_i = \varphi(l_i L_i)\,dl_i. \qquad (2)$$

Natomiast prawdopodobieństwo *a priori* (p_i) zależy tylko od interwału dL i od wszystkiego, co wiemy o L, zatem:

$$(p_i) = \psi(L)\,dL. \qquad (3)$$

Mając w ten sposób ~~wyznaczoną~~ pierwszą część licznika wzoru Bayesa wyznaczoną, przystąpmy do jego drugiej części.

Prawdopodobieństwo p_i otrzymamy tworząc iloczyn prawdopodobieństw: $\varphi(l_1 L)\,dl_1 . \varphi(l_2 L)dl_2 \ldots\ldots \varphi(l_n L)\,dl_n = p_i$ (a to wedle § 2 c), gdyż z takiem prawdopodobieństwem otrzymalibyśmy w szeregu spostrzeżeń jedno po drugiem spostrzeżenie l (t. j. o wartości w granicach między l a $l+dl$), gdyby spostrzegana wielkość była L (t. j. w granicach między L a $L+dL$).

A zatem licznik szukanego wyrażenia przedstawi się w formie:

$$\psi(L)\,dL . \varphi(l_1 L)\,dl_1\, \varphi(l_2 L)\,dl_2 \ldots . \varphi(l_n L)\,dl_n.$$

Zaś mianownik otrzymamy całkując powyższe wyrażenie względem samego L od $-\infty$ do $+\infty$, tak że po uproszczeniu przez stałe czynniki licznika i mianownika $dl_1, dl_2 \ldots . dl_n$ otrzymamy ostatecznie:

$$P_L = \frac{\psi(L)\,dL . \varphi(l_1 L) . \varphi(l_2 L) \ldots . \varphi(l_n L)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(L)dL . \varphi(l_1 L)\,\varphi(l_2 L) \ldots . \varphi(l_n L)}. \qquad (4)$$

Aby uzyskać możność przeprowadzenia dalszych wywodów, należy oprzeć się na założeniach Gaussa.

Przypuśćmy, że dokonaliśmy $n=\infty$ ilość spostrzeżeń pewnej wielkości L (w tych samych warunkach) i że błędy poszczególnych spostrzeżeń są tylko przypadkowe (t. zn., że $P(+\varepsilon) = P(-\varepsilon)$). Jeżeli zestawimy wszystkie spostrzeżenia uporządkowane wedle wielkości, to — ze względu na przypadkowy charakter błędów spostrzeżeń — wyniki poszczególnych spostrzeżeń względnie ich błędy ugrupują się symetrycznie względem wielkości L, t. j. każdemu spostrzeżeniu większemu od L o pewną wielkość odpowie spostrzeżenie mniejsze od L o takąsamą wielkość. Przy tego rodzaju ugrupowaniu się spostrzeżeń względem wielkości L, które będzie miało miejsce przy ilości spostrzeżeń $n=\infty$, będzie oczywiście $\frac{\sum_1^n l}{n}$, *średnia arytmetyczna* utworzona ze wszystkich spostrzeżeń, przedstawiała ze stanowiska rachunku prawdopodobieństwa wartość *najbardziej prawdopodobną* wielkości L w granicach między L, a $L+dL$, przyczem interwał dL będzie zależał od wielkości interwałów dl.

Biorąc analogję z tego przypadku także i dla skończonej ilości spostrzeżeń n możemy przyjąć, że średnia arytmetyczna nie dostarcza nam wprawdzie w tym przypadku wartości najbardziej prawdopodobnej, *staje się* jednak przy rosnącej ilości spostrzeżeń — o ile błędy ich są nieznaczne i niezależne — *coraz bardziej prawdopodobną* wartością wielkości L.

Temi wywodami da się usprawiedliwić założenie *Gaussa*[1]), który przyjął *średnią arytmetyczną* utworzoną ze *skończonej ilości n spostrzeżeń* jako wartość *najbardziej prawdopodobną wielkości L*.

Dalsze przyjęcia Gausa:

$$\psi(L)=1 \text{ i } \varphi(l,\ L)=\varphi(L-l) \tag{5}$$

są w związku z poprzedniem, przyczem to ostatnie założenie oznacza, *że prawdopodobieństwo pojawienia się błędu* pewnego spostrzeżenia jest *niezależne od wielkości samego spostrzeżenia*.

Przyjmując założenie Gaussa, należy zatem nadać funkcji φ taki kształt, jaki wynika z przyjęcia średniej arytmetycznej za wartość najbardziej prawdopodobną wielkości L.

W tym przypadku jest jednak dL wielkością stałą, a zarazem mianownik wzoru (4)-go staje się równy jedności (jedna przyczyna działa jako pewnik); przeto po uwzględnieniu założeń (5) otrzymamy:

$$P_L=dL.\varphi(L-l_1).\varphi(L-l_2)\ldots\ldots\ldots\varphi(L-l_n). \tag{6}$$

Dla $P_L=\max.$ musi być iloczyn:

$$\varphi(L-l_1).\varphi(L-l_2)\ldots\ldots\ldots\varphi(L-l_n)=\boldsymbol{max.}, \tag{7}$$

lub:

$$\log\varphi(L-l_1)+\log\varphi(L-l_2)+\ldots\ldots\log\varphi(L-l_n)=\max. \tag{8}$$

(log oznacza logarytm naturalny o podstawie e), a w następstwie:

$$\frac{d\varphi(L-l_1)}{\varphi(L-l_1)\,d(L-l_1)}+\frac{d\varphi(L-l_2)}{\varphi(L-l_2)\,d)L-l_2)}+\ldots+\frac{d\varphi(L-l_n)}{\varphi(L-l_n)\,d(L-l_n)}=0. \tag{9}$$

Połóżmy dla uproszczenia:

$$\frac{1}{\varphi(L-l_i)}\cdot\frac{d\varphi(L-l_i)}{d(L-l_i)}=\frac{\varphi'(L-l_i)}{\varphi(L-l_i)}=F(l_i),$$

[1]) Dokładne omówienie tej kwestji znajdzie czytelnik w dziele: *H. Poincaré*, Calcul des Probabilités. Paryż 1912, w rozdz. X-tym i XI-tym.

a otrzymamy powyższe równanie w kształcie:

$$F(l_1)+F(l_2+\ldots\ldots .F(l_n)=0. \qquad (9^*)$$

Zarazem jest jednak z powodu $L=\frac{\sum\limits_1^n l}{n}$:

$$l_1+l_2+\ldots\ldots +l_n=nL. \qquad (10)$$

Po zróżniczkowaniu i porównaniu obu równań (9*) i (10) wypadnie (ze względu na to, że L jest wielkością stałą):

$$F'(l_1)\,dl_1+F'(l_2)\,dl_2+\ldots . F'(l_n)\,dl_n=dl_1+dl_2+\ldots . dl_n. \qquad (11)$$

Równanie to jednak może istnieć tylko pod warunkiem (o ile mamy przynajmniej po trzy wyrazy po obu stronach), jeśli:

$$F'(l_1)=F'(l_2)=\ldots . F'(l_n)=A \text{ (wielkości stałej).} \qquad (12)$$

Weźmy na uwagę dowolny z tych wyrazów, więc $F'(l_i)$ to:

$$F'(l_i)=d\left\{\frac{\varphi'(L-l_i)}{\varphi'(L-l_i)}\right\}.\frac{1}{d\,(L-l_i)}=A, \qquad (13)$$

a przez całkowanie otrzymamy:

$$F(l_i)=\frac{\varphi'(L-l_i)}{\varphi(L-l_i)}=A(L-l_i)+B. \qquad (14)$$

Ponieważ $\sum\limits_1^n F(l_i)=0$, przeto i $A\sum\limits_1^n(L-l_i)+nB=0$.

Pierwszy człon ostatniego równania jest jednak zerem, gdyż

$$\sum_1^n(L-l_i)=nL-l_1-l_2-\ldots . -l_n=0,$$

przeto i drugi człon tegoż równania $nB=0$, a zatem:

$$B=0.$$

W obec tego $F(l_i)=\frac{d\varphi(L-l_i)}{\varphi(L-l_i)}.\frac{1}{d\,(L-l_i)}=A(L-l_i)$. (14*)

Całkując to wyrażenie otrzymamy:

$$l\varphi(L-l_i)=\tfrac{1}{2}A(L-l_i)^2+C', \text{ lub} \qquad (15)$$

$$\varphi(L-l_i)=e^{\frac{1}{2}A(L-l_i)^2}.e^{C'} \text{ (}e\text{ podstawa log. natur.)} \qquad (16)$$

Badanie prawa błędów wykazuje, — jak poprzednio zaznaczono — *że największe prawdopodobieństwo ma błąd* $=0$, zaś *najmniejsze błąd największy ujemny czy dodatni* $(-\infty, +\infty)$; zatem stała $\frac{1}{2}A$ musi mieć wartość ujemną (inaczej byłoby przeciwnie).

Połóżmy więc $\frac{1}{2}A=-h^2$, a dla uproszczenia $L-l_i=\varepsilon_i$, oraz $e^{C'}=C$ to otrzymamy:

$$\varphi(\varepsilon_i)=Ce^{-h^2\varepsilon^2}. \qquad (17)$$

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu ε (w granicach między ε, a $(\varepsilon+d\varepsilon)$ wyrażone wzorem: $P_\varepsilon=\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$, przedstawi się po wstawieniu wartości za $\varphi(\varepsilon)$:

$$P_\varepsilon=Ce^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon; \qquad (18)$$

zaś prawdopodobieństwo popełnienia błędu w granicach między ε_1, a ε_2:

$$P_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}=C\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon; \text{ (porówn. § 2. } b\text{), (str. 5).} \tag{19}$$

Jeśli rozciągniemy obszar możliwości popełnienia błędu od $-\infty$ do $+\infty$, przejdzie prawdopodobieństwo w pewność, zatem

$$C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon=1. \tag{20}$$

Podstawiając $h\varepsilon=t$, $\varepsilon=\frac{t}{h}$, oraz $d\varepsilon=\frac{dt}{h}$ (gdyż h jest wielkością stałą), otrzymamy:

$$\frac{C}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt=1. \tag{20*}$$

Powyższa całka jest znaną pod nazwą całki Laplace'a, a wartość jej wynosi $\sqrt{\pi}$, przeto:

$$\frac{C}{h}\sqrt{\pi}=1, \quad C=\frac{h}{\sqrt{\pi}}, \text{ a w następstwie:}$$

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}, \quad P_\varepsilon=\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon. \tag{21}$$

W ten sposób wyprowadzone prawo błędów, zwane zazwyczaj krótko *prawem Gaussa*, odnosi się jednak *tylko do błędów przypadkowych* $\{$t. j., gdy $\varphi(+\varepsilon)=\varphi(-\varepsilon)\}$.

Podobnie jak założenia Gaussa tak i wyprowadzone z nich prawo Gaussa należy odnieść właściwie do błędów, które powstałyby przy $n=\infty$ ilości spostrzeżeń. Błędy powstałe przy tej ilości spostrzeżeń możemy jednak zidentyfikować, lub conajmniej uważać za bardzo bliskie z błędami „prawdziwemi“, pod któremi rozumiemy różnice między wartością prawdziwą, a wartościami otrzymanemi ze spostrzeżeń.

Zatem *prawo Gaussa* odnosi się przedewszystkiem do *błędów prawdziwych* spostrzeżeń, które będziemy oznaczali nadal wyłącznie przez ε.

§ 5. Krzywa prawdopodobieństwa. Znaczenie parametru *h*.

Przyjmując pewne wartości dla parametru h, możemy wykreślić t. zw. *krzywą prawdopodobieństwa*, przedstawiającą nam związek między $\varphi(\varepsilon)$, a ε.

Figura 2. (patrz str. 18.) przedstawia nam taki wykres, przyczem ε są odciętemi, a $\varphi(\varepsilon)$ rzędnemi.

Oś $\varphi(\varepsilon)$ jest osią symetrji krzywej. Dla $\varepsilon=0$ osiąga $\varphi(0)$ wartość $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$, dla $\varepsilon=+\infty$ oraz $\varepsilon=-\infty$ wartość zera. Krzywą charakteryzują dwa punkty przegięcia P_1 i P_2, leżące symetrycznie względem osi $\varphi(\varepsilon)$. Położenie ich znajdziemy przez dwukrotne zróżniczkowanie względem ε równania $\varphi(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$ otrzymując:

$$\varphi'(\varepsilon)=-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}, \text{ a następnie:} \quad (1)$$

$$\varphi''(\varepsilon)=-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}+\frac{4h^5}{\sqrt{\pi}}\varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}=\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}(2h^2\varepsilon^2-1). \quad (2)$$

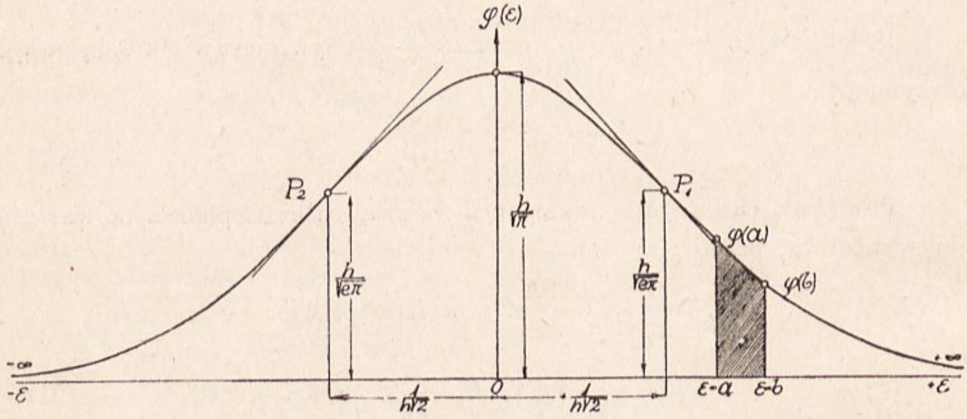

Fig. 2.

Z warunku $\varphi''(\varepsilon)=0$ wynika, że $2h^2\varepsilon^2-1=0$, a dalej:

$$\varepsilon=\frac{1}{h\sqrt{2}} \text{ (wartości odciętych punktów przegięcia).} \quad (3)$$

Wstawiając tę wartość do wzoru na $\varphi(\varepsilon)$ otrzymamy:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{-h^2/h^2\sqrt{2}}=\frac{h}{\sqrt{e\pi}} \text{ (jako wartość rzędnych p. przegięcia).} \quad (4)$$

Prawdopodobieństwo popełnienia pewnego błędu n. p. $\varepsilon=a$ przedstawia nam *rzędna* odpowiadająca $\varepsilon=a$ o grubości $d\varepsilon$, jest to zatem wielkość nieskończenie mała (co zresztą wynika ze związku $P_\varepsilon=\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$); zaś *prawdopodobieństwo* popełnienia *błędu w granicach między* $\varepsilon=a$, a $\varepsilon=b$ przedstawia nam *powierzchnia między krzywą, a osią* ε *ograniczoną rzędnemi* $\varphi(a)$ i $\varphi(b)$, co odpowiada *całce:*

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon. \quad (5)$$

Całkowita powierzchnia zawarta między krzywą prawdopodobieństwa, a osią ε oznacza prawdopodobieństwo popełnienia w ogóle jakiegoś *błędu* ε (w granicach od $\varepsilon=-\infty$ do $+\infty$); a jako prawdopodobieństwo równe pewności odpowiada *jedności,* jak to przedstawia równanie:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon=1. \quad (6)$$

Zajmijmy się następnie zbadaniem znaczenia parametru h.

Porównując dwa szeregi błędów, z których pierwszemu odpowiada parametr h_1, zaś drugiemu parametr h_2, zauważymy z łatwością, że w obu szeregach będzie pewien błąd $\pm\varepsilon$ o prawdopodobieństwie *jednakowem;* nazwijmy go ε_w. Natomiast, o ile $h_2 > h_1$, wszystkie *błędy* o wartości absolutnie (bez względu na znak) *mniejszej* będą miały w szeregu drugim (t. j. o h_2) *prawdopodobieństwo większe,* niż te same błędy w szeregu pierwszym (o h_1), zaś błędy bezwzględnie *większe* prawdopobieństwo *mniejsze* w szeregu drugim, niż w szeregu pierwszym.

Okoliczność ta wskazuje, że szereg drugi (o h_2) jest dokładniejszy niż pierwszy.

Rozumowanie to wynika z warunków:

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_1^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon = 1 = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_2^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon, \text{ dla } h_2 > h_1. \qquad (6^*)$$

Jeśli bowiem powierzchnie zawarte między obu krzyemi o osią ε są równe jedności, muszą ze względu na ich kształt przecinać się w dwu punktach W' i W'' leżących symetrycznie po obu stronach osi $\varphi(\varepsilon)$, którym odpowiadają błędy $-\varepsilon_w$ względnie $+\varepsilon_w$ (lub krótko $\pm\varepsilon_w$).

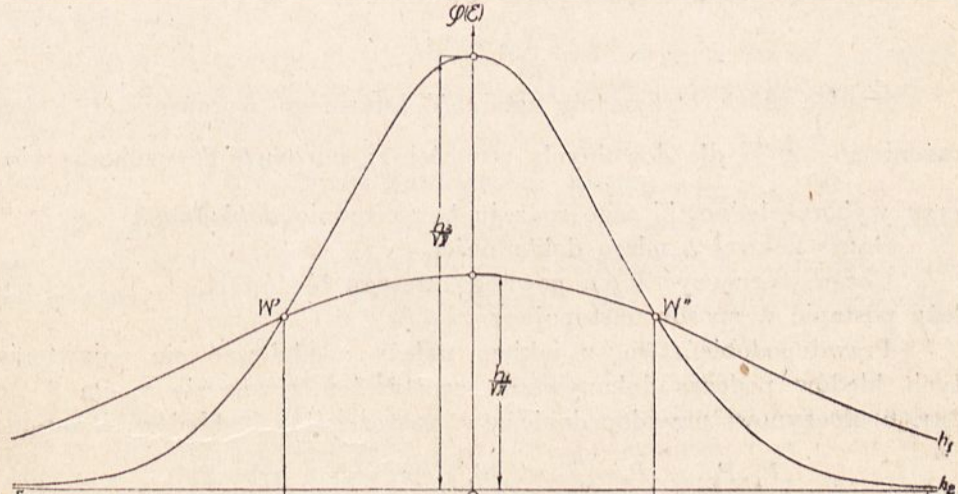

Fig. 3.

Odciętym między $\varepsilon = -\infty$, a $\varepsilon = -\varepsilon_w$ oraz między $\varepsilon = +\varepsilon_w$, a $\varepsilon = +\infty$ będą odpowiadały mniejsze rzędne $\varphi(\varepsilon)$ krzywej h_2 niż odpowiedne rzędne krzywej h_1, odwrotnie będą rzędne $\varphi(\varepsilon)$ odpowiadające odciętym w granicach między $-\varepsilon_w$, a $+\varepsilon_w$ większe dla krzywej o parametrze h_2 niż odpowiedne rzędne krzywej o parametrze h_1. Różnice te ilustruje bardzo dobrze fig. 3.

Prawdopodobieństwo, popełnienia błędu w granicach między $-\varepsilon_w$, a $+\varepsilon_w$ jest dla drugiego szeregu (t. j. o h_2) większe niż dla pierwszego szeregu i odwrotnie prawdopodobieństwo popełnienia błędu w granicach między $-\infty$, a $-\varepsilon_w$ oraz $+\varepsilon_w$ a $+\infty$ jest mniejsze dla szeregu drugiego jak pierwszego. Zatem słusznie uważamy drugi szereg spostrzeżeń za dokładniejszy.

Parametr h nazywamy *miarą dokładności;* uważamy bowiem pewne spostrzeżenie za m razy dokładniejsze od drugiego, jeśli przy pierwszem spostrzeżeniu prawdopodobieństwo błędu zawartego w granicach między ε, a $\varepsilon+d\varepsilon$ jest równe prawdopodobieństwu błędu zawartego w granicach między $m\varepsilon$, a $m(\varepsilon+d\varepsilon)$ przy spostrzeżeniu drugiem.

Chcąc określić cyfrowo dokładność spostrzeżenia podlegającemu prawu $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$, należy obrać za jednostkę dokładności spostrzeżenie, przy którem prawdopodobieństwo popełnienia błędu w granicach między ε, a $\varepsilon+d\varepsilon$ wynosi: [1])

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\varepsilon^2}d\varepsilon; \tag{7}$$

prawdopodobieństwo popełnienia błędu w granicach między $m\varepsilon$, a $m(\varepsilon+d\varepsilon)$ jest przy tego rodzaju spostrzeżeń równe:

$$\frac{m}{\sqrt{\pi}}e^{-m^2\varepsilon^2}d\varepsilon. \tag{8}$$

Kładąc $m=h$, otrzymamy zgodność ostatniego wyrażenia (8) z wyrażeniem $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$ dla dowolnych wartości ε; *parametr* h oznacza więc przy wyborze jednostki tego rodzaju bezpośrednio *dokładność.*

Gauss nazwał h miarą dokładności.

Chcąc wyznaczyć h dla pewnego szeregu błędów $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ należy postąpić w sposób następujący.

Prawdopodobieństwo, z jakiem należy spodziewać się pojawienia tych błędów podczas dokonywania spostrzeżeń, równa się wedle § 2c (str. 6) iloczynowi prawdopodobieństw poszczególnych błędów, a zatem:

$$P_1.P_2\ldots P_n=\frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}}e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]},^{2)} \text{ (przyczem } [\varepsilon\varepsilon]=\Sigma\varepsilon^2\text{)}. \tag{9}$$

Najodpowiedniejsze, t. j. najbardziej prawdopodobne, będzie takie h, które odpowie najbardziej prawdopodobnemu pojawieniu się wspomnianych błędów ε, a zatem to h, któremu odpowiada $P_1.P_2\ldots P_n=max.$

[1]) *E. Czuber.* Theorie der Beobachtungsfehler, Lipsk, 1891, str. 122.

[2]) Użyłem tu po raz pierwszy *symboliki Gaussa,* która przyjęła się w rachunku wyrównawczym, mianowicie $[\varepsilon\varepsilon]$ zamiast $\Sigma\varepsilon^2$; odtąd będę ją stosował stale, n. p. $[ab]$ zamiast Σab i t. p.

Chcąc je uzyskać należy przyrównać pochodną tego wyrażenia względem h do zera:

$$\frac{d(P_1 . P_2 \ldots P_n)}{dh} = \frac{n h^{n-1} e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]}}{\sqrt{\pi_n}} - \frac{h^n 2h[\varepsilon\varepsilon] e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]}}{\sqrt{\pi_n}} = 0, \quad (10)$$

lub:

$$n - 2h^2[\varepsilon\varepsilon] = 0, \quad (11)$$

a wreszcie:

$$h^2 = \frac{n}{2[\varepsilon\varepsilon]}, \quad h = \sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon\varepsilon]}}. \quad (12)$$

Wyraz $\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$ nazywamy *błędem średnim* spostrzeżeń (patrz ustęp następny) oznaczając go przez $\pm\mu$; zatem:

$$h^2 = \frac{1}{2\mu^2}, \quad h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}. \quad (13)$$

h możemy zatem otrzymać wprost z błędów spostrzeżeń. Realne znaczenie ma tu oczywiście tylko znak $+$.

Wreszcie należy zauważyć, że o ile h dozwala nam ocenić dokładność dokonanego szeregu spostrzeżeń, spełnia to samo zadanie również i μ, jako wielkość odwrotnie proporcjonalna do h.

Błąd μ może być zatem użyty *dla porównywania dokładności szeregów spostrzeżeń.*

Związki (12) i (13) mają znaczenie ścisłe w myśl uwag podanych w § 4-tym tylko dla $n = \infty$; dla *skończonej* ilości spostrzeżeń n przedstawiają się jako *przybliżenia.*

§ 6. Miary dokładności spostrzeżeń.

W poprzednim ustępie wykazaliśmy, że prócz h może być użyty jako miara dokładności spostrzeżeń błąd średni μ. Prócz błędu średniego mamy jeszcze dwa błędy, których możemy użyć do tego samego celu; są to: błąd przeciętny i prawdopodobny.

1. Błąd przeciętny ϑ.

Błąd ten otrzymujemy tworząc średnię arytmetyczną z bezwzględnych wartości błędów szeregu t. j.:

$$\vartheta = \pm\frac{[|\varepsilon|]}{n}. \quad (1)$$

Dla uzyskania ogólnego wyrażenia na ten błąd, należy wyjść z definicji prawdopodobieństwa błędu. Oznaczając przez P_i prawdopodobieństwo błędu $|\varepsilon_i|$, możemy napisać związek:

$$P_i = \frac{n_i}{n}, \quad (2)$$

w którym n_i oznacza liczbę, ile razy błąd $|\varepsilon_i|$ ma się pojawić w szeregu spostrzeżeń na liczbę n wszystkich spostrzeżeń.

Mnożąc obie strony równania (2) przez $n|\varepsilon_i|$ otrzymamy:

$$n P_i|\varepsilon_i| = n_i|\varepsilon_i|.$$

Tworząc takie same związki dla $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$ i t. d. i dodając je otrzymamy dalej:

$$\begin{aligned} n P_1|\varepsilon_1| &= n_1|\varepsilon_1| \\ n P_2|\varepsilon_2| &= n_2|\varepsilon_2| \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline n[P|\varepsilon|] &= [|\varepsilon|], \end{aligned} \tag{3}$$

lub:
$$\frac{[|\varepsilon|]}{n} = [P|\varepsilon|] = \vartheta. \tag{4}$$

Wyrażenie oznaczone $[P|\varepsilon|]$ jest jednak dla $n=\infty$ całką:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varepsilon|e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon, \text{ zatem dla } n=\infty:$$

$$\vartheta = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varepsilon|e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon. \tag{5}$$

Wstawiając do ostatniego wzoru ε zamiast $|\varepsilon|$, musimy wziąć na uwagę, że całkowanie należy przeprowadzić w granicach od 0 do $+\infty$ mnożąc równocześnie wynik przez dwa. $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\varepsilon|\, e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon = 2\int_0^{+\infty}\varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon\right)$.

Ostatecznie więc otrzymujemy wyrażenie na błąd przeciętny w formie:

$$\vartheta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon. \tag{6}$$

W celu rozwiązania powyższej całki położymy $h\varepsilon = t$, a zatem będzie: $\varepsilon = \frac{t}{h}$, $d\varepsilon = \frac{dt}{h}$; po wstawieniu tych wartości otrzymamy:

$$\int_0^{\infty}\varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon = \frac{1}{h^2}\int_0^{\infty}te^{-t^2}\,dt. \tag{7}$$

Ponieważ
$$\int te^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int d\,(e^{-t^2}) = -\frac{1}{2}\,e^{-t^2} + C, \tag{8}$$

przeto
$$\int_0^{\infty}te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}, \text{ zatem:}$$

$$\int_0^{\infty}\varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon = \frac{1}{2h^2}, \text{ a ostatecznie:} \tag{9}$$

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \pm\frac{0{\cdot}5641896}{h}. \tag{10}$$

Widzimy zatem, *że błąd* ϑ jako odwrotnie proporcjonalny do h może również jak i μ być użyty jako *miara dokładności spostrzeżeń.*

2. Błąd średni μ.

Stosując analogiczne rozumowanie do błędów spostrzeżeń podniesionych do dowolnej skończonej potęgi $m>0$, możemy napisać ogólnie (dla $n=\infty$):

$$\frac{[\varepsilon^m]}{n}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^m\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon=2\int_0^{\infty}\varepsilon^m\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon. \tag{11}$$

Praktyczne znaczenie ma jednak tylko wykładnik potęgowy $m=2$ (z powodów, o których mowa poźniej); w ten sposób utworzony błąd nazywamy, jak wspomniałem przy końcu § 5-go (str. 21) błędem średnim μ szeregu spostrzeżeń. Zatem otrzymamy (ściśle dla $n=\infty$):

$$\mu^2=\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}=2\int_0^{\infty}\varepsilon^2\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\varepsilon^2e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon.\text{[1]} \tag{12}$$

Stosując, jak poprzednio, $h\varepsilon=t$, przekształcimy powyższą całkę na:

$$\frac{1}{h^3}\int_0^{\infty}t^2e^{-t^2}dt;\ \text{ponieważ}\ \int_0^{\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4},\ \text{przeto:}$$

$$\int_0^{\infty}\varepsilon^2e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{\sqrt{\pi}}{4h^3},\ \text{a w następstwie:} \tag{13}$$

$$\mu^2=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\varepsilon^2e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{1}{2h^2},\ \text{lub ostatecznie:} \tag{14}$$

$$\mu=\frac{1}{h\sqrt{2}}=\pm\frac{0{\cdot}7071068}{h}. \tag{15}$$

Zatem *błąd średni μ może być użyty jako miara dokładności szeregu spostrzeżeń*. Zarazem należy zaznaczyć, że μ odpowiada w krzywej prawdopodobieństwa odciętym obu punktów przegięcia. (Fig. 2, str. 16).

3. Błąd prawdopodobny ϱ.

Poprzednie błędy są, jak widzieliśmy wartościami przeciętnemi ogólnie $\frac{[\varepsilon^m]}{n}$, natomiast błąd prawdopodobny ϱ ma znaczenie zupełnie inne; wymaga tedy zastosowania innego rozumowania.

Jak wiadomo jest:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=1=P_\infty\ \text{(pewność)}; \tag{16}$$

t. j. prawdopodobieństwo pojawienia się błędu zawartego w granicach między $-\infty$ a $+\infty$ jest pewnością.

Przyjmując za P dowolną wartość od zera do jedności i oznaczając ją przez P_x, można wyznaczyć błąd x odpowiadający przyjętemu prawdopodobieństwu P_x ze związku:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{+x}\varepsilon^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=P_x. \tag{16*}$$

[1]) $[\varepsilon\varepsilon]$ oznacza — jak wspomniałem — wedle *symboliki Gaussa* $\Sigma\varepsilon^2$.

Rozwiązanie zagadnienia polega tu zatem na znalezieniu odpowiednich granic całkowania.

Specjalne znaczenie ma w tym przypadku błąd, którego *prawdopodobieństwo* $P=1/2$. Błąd ten nazwał Bessel błędem *prawdopodobnym* ϱ; zatem $P_\varrho=1/2$.

ϱ jest zatem graniczną wartością, która może być z równem prawdopodobieństwem przekroczoną, jak i nie przekroczoną, czyli z równem prawdopodobieństwem możemy popełnić błąd większy od ϱ, jak błąd mniejszy od ϱ. Wartość ϱ znajdziemy przeto ze związku:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\varrho}^{+\varrho} e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho h} e^{-t^2}dt=\frac{1}{2} \tag{17}$$

$$\left(\text{przyczem } h\varepsilon=t, \text{ więc } \varepsilon=\frac{t}{h},\ d\varepsilon=\frac{dt}{h}\right).$$

Dla całki $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt=\Theta(t)$ są obliczone tablice, z których można znaleść jej wartość dla argumentu t, lub odwrotnie wyznaczyć t dla znanej wartości $\Theta(t)$.

Dokładną wartość na $t=h\varrho$ można wyznaczyć z szeregu:

$$\Theta(\varrho h)=\frac{1}{2}=\left\{\varrho h-\frac{(\varrho h)^3}{2}+\frac{(\varrho h)^5}{10}-\frac{(\varrho h)^7}{42}+\frac{(\varrho h)^9}{216}-\dots\dots\right\}$$ [1].

Jednym lub drugim sposobem wyznaczone ϱh wynosi na 7 miejsc dziesiętnych:

$$\varrho h=0{\cdot}4769363,\ \text{zatem:}$$

$$\varrho=\frac{0{\cdot}4769363}{h}. \tag{18}$$

Zatem — jak widzimy — może być i ϱ użyty jako *miara dokładności spostrzeżeń*.

Łatwo udowodnić wyrażając h kolejno przez trzy wspomniane błędy i zestawiając otrzymane wyniki, że między błędami ϑ, ϱ i μ istnieją następujące związki:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu=0{\cdot}7978846\,\mu=\frac{1}{0{\cdot}4769363\sqrt{\pi}}\,\varrho=1{\cdot}1829372\,\varrho,\\
\mu&=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\vartheta=1{\cdot}2533141\,\vartheta=\frac{1}{0{\cdot}4769363\sqrt{2}}\,\varrho=1{\cdot}4826021\,\varrho,\\
\varrho&=0{\cdot}4769363\sqrt{\pi}\,\vartheta=0{\cdot}8453476\,\vartheta=0{\cdot}4769363\sqrt{2}\,\mu=0{\cdot}6844898\,\mu.
\end{aligned}\right| \tag{19}$$

Z powyższego zestawienia widać, że *największym* z tych błędów jest *błąd średni*, mniejszym od niego przeciętny, zaś najmniejszym prawdopodobny.

[1]) *S. Wellisch.* Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung. Wiedeń, Lipsk, 1909 zawiera na str. 48. w uwadze wartość ρh wyznaczoną tym wzorem na 11 (względnie 13) miejsc dziesiętnych: $\rho h=0{\cdot}47693627620_{45}\dots$

W praktyce posługujemy się w rachunku wyrównawczym *tylko błędem średnim* μ, a to dlatego, że przy skończonej ilości spostrzeżeń jesteśmy w stanie błąd ten wyznaczyć stosunkowo jeszcze najdokładniej. Wprawdzie bardzo rzadko możemy obliczać go z wzoru $\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$, gdyż nie znając prawdziwej wartości szukanej wielkości nie możemy znać i poszczególnych ε i musimy posługiwać się t. zw. błędami pozornemi δ; zobaczymy jednak później, że rzecz ma się podobnie i przy użyciu błędów pozornych.

Błędem *przeciętnym* ϑ posługują się niekiedy *empirycy*, a to głównie ze względu na łatwość obliczenia, jak i obrazowego przedstawienia tego błędu.

Błąd *prawdopodobny* ϱ ma znaczenie *teoretyczne*. *Wyznaczyć* go można łatwo wprost z błędów spostrzeżeń biorąc po zestawieniu błędów wedle ich wielkości absolutnej przy nieparzystej liczbie n wartość $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-go błędu, lub przy parzystej liczbie n interpolując dla uzyskania jego wartości liniowo między $\frac{n}{2}$-tym, a $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-szym błędem. Oczywiście, że ten sposób wyznaczenia błędu prawdopodobnego dostarcza go nam tylko w dość grubem przybliżeniu. Dla dokładniejszego wyznaczenia tego błędu należy użyć drogi pośredniej przy zastosowaniu związków (19)-tych, a więc *najkorzystniej przy pomocy błędu średniego* μ.

Błędy „średnie" tworzone na wzór błędu μ przy pomocy formuły $\frac{[\varepsilon^m]}{n}$ dla wykładnika parzystego $m>0$, lub przy pomocy formuły $\frac{[|\varepsilon^m|]}{n}$ dla wykładnika nieparzystego $m>0$, wykazują przy tejsamej skończonej ilości n również mniejszą dokładność wyznaczenia jak błąd średni μ.

Dla *uzyskania* pewnej *orjentacji*, z jaką dokładnością można obliczyć ze skończonej ilości błędów ε błędy ϱ, ϑ i μ, podajemy bez dowodu dokładność wyznaczenia powyższych błędów określoną błędami średniemi:

$$
\begin{aligned}
\mu_\varrho &= 0{\cdot}85544\frac{\varrho}{\sqrt{n}} && \text{(błąd śr. błędu } \varrho), \\
\mu_\vartheta &= 0{\cdot}75551\frac{\vartheta}{\sqrt{n}} && \text{„ „ „ } \vartheta), \\
\mu_\mu &= 0{\cdot}70711\frac{\mu}{\sqrt{n}} && \text{„ „ „ } \mu).
\end{aligned} \tag{20}
$$

Dla *porównania dokładności* wyznaczenia błędu średniego μ przy pomocy różnych potęg błędów ε podajemy poniżej wzory na błąd średni μ wraz z odpowiedniemi błędami średniemi; wskaźniki przy μ oznaczają tu potęgi błędów ε użyte przy obliczeniu [1]).

[1]) Sprawą dokładności tych błędów zajmował się *Gauss* (1816), a następnie, *Encke*, derl. Astr. Jahrb. 1834, str. 289—293; obaj jednak podali liczebne wyniki nie dla błędów średnich lecz dla prawdopodobnych.

$$
\begin{array}{lll}
\mu_1 = 1{\cdot}2533\dfrac{[|\varepsilon|]}{\sqrt{n}} & \text{z błędem średnim} & \dfrac{0{\cdot}7555}{\sqrt{n}}\mu_1 \\
\mu_2 = \sqrt{\dfrac{[\varepsilon^2]}{n}} & ,, \quad ,, \quad ,, & \dfrac{0{\cdot}7071}{\sqrt{n}}\mu_2 \\
\mu_3 = 0{\cdot}8557\sqrt[3]{\dfrac{[|\varepsilon^3|]}{n}} & ,, \quad ,, \quad ,, & \dfrac{0{\cdot}7371}{\sqrt{n}}\mu_3 \\
\mu_4 = 0{\cdot}7598\sqrt[4]{\dfrac{[\varepsilon^4]}{n}} & ,, \quad ,, \quad ,, & \dfrac{0{\cdot}8165}{\sqrt{n}}\mu_4 \\
\mu_5 = 0{\cdot}6902\sqrt[5]{\dfrac{[|\varepsilon^5|]}{n}} & ,, \quad ,, \quad ,, & \dfrac{0{\cdot}9422}{\sqrt{n}}\mu_5 \\
\dots & \dots & \dots
\end{array}
\qquad (21)
$$

Z obu powyższych zestawień wynika słusznie uprzywilejowane stanowisko błędu średniego ($\mu = \mu_2$) w rachunku wyrównawczym.

Biorąc na uwagę błąd średni $\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$ widzimy, że „dokładność średnia“ wyznaczenia tego błędu rosnąca szybko przy niewielkiej liczbie spostrzeżeń powiększa się przy większych ilościach n stosunkowo niewiele. I tak wynoszą średnie odchylenia błędu średniego wyrażone procentowo:

dla $n = 4$	$\pm\ 35{\cdot}3\%\ \mu$	
„ „ $= 6$	$\pm\ 28{\cdot}9\%\ \mu$	
„ „ $= 8$	$\pm\ 25{\cdot}0\%\ \mu$	
„ „ $= 10$	$\pm\ 22{\cdot}4\%\ \mu$	
„ „ $= 12$	$\pm\ 20{\cdot}4\%\ \mu$	(22)
. . . .	. . .	
„ „ $= 22$	$\pm\ 15{\cdot}1\%\ \mu$	
. . . .	. . .	
„ „ $= 50$	$\pm\ 10{\cdot}0\%\ \mu$	

Wzory i zestawienia powyższe, mimo, że odnoszą się do błędów prawdziwych ε i mają znaczenie przybliżenia, stanowią *dobrą orjentację* dla obioru ilości spostrzeżeń.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Zasady rachunku wyrównawczego.

§ 1. Błędy pozorne. Metoda najmniejszych kwadratów.

Dotychczas mówiliśmy o *błędach prawdziwych* ε, t. j. o *różnicach między prawdziwemi* wartościami spostrzeganych wielkości, a wartościami otrzymanemi jako wyniki *spostrzeżeń*. Błędy te są nam w praktyce — z wyjątkiem bardzo rzadkich przypadków — z reguły *nieznane*, a to z powodu niemożności poznania prawdziwej wartości spostrzeganej wielkości. Z tego powodu mają wszelkie wzory zawierające błędy prawdziwe znaczenie tylko teoretyczne, są zatem nie przydatne dla rachunku wyrównawczego. W rachunku tym posługujemy się przeto innemi *błędami* t. zw. *pozornemi*, t. j. *różnicami* między wartościami spostrzeganych wielkości uzyskanemi *z wyrównania* a wartościami *spostrzeżeń*.

Jeśli spostrzeżenia odnoszą się bezpośrednio do wielkości, której wartość mamy uzyskać rachunkiem wyrównawczym, czyli gdy są *bezpośrednie*, błąd *prawdziwy* ε jest określony związkiem:

$$\varepsilon = X - l, \tag{1}$$

przyczem X oznacza prawdziwą wartość spostrzeganej wielkości, zaś błąd *pozorny* δ przedstawia się w tym przypadku następująco:

$$\delta = x - l, \tag{1*}$$

przyczem x oznacza wartość spostrzeganej wielkości uzyskaną z wyrównania.

Mimo to, że dopiero w następnym § 2-gim poznamy szczegółowo wszelkie rodzaje spostrzeżeń, do których może być stosowany rachunek wyrównawczy, musimy już obecnie zająć się prócz omówionych spostrzeżeń bezpośrednich przynajmniej jeszcze jedną kategorją spostrzeżeń t. zw. spostrzeżeń *pośrednich*, aby mieć możność wyprowadzenia ogólnej metody wyrównawczej, która — w pewnych przypadkach z dołączeniem pewnych warunków — mogłaby być zastosowaną do wszelkiego rodzaju spostrzeżeń.

W przypadkach, gdy nie możemy spostrzegać bezpośrednio wielkości X uciekamy się do drogi pośredniej spostrzegając szereg wielkości L będących funkcjami (tego samego ogólnego kształtu) wielkości X; spostrzeżenia tego rodzaju nazywamy *pośredniemi*.

Oznaczając wartość spostrzeżenia przez L, otrzymamy w tym przypadku wzory na błędy prawdziwe ε i pozorne δ:

$$\varepsilon = f(X) - L \tag{2}$$

$$\delta = f(x) - L. \tag{2*}$$

Spostrzeżenia L choć dokonane *bezpośrednio* nazywamy w tym przypadku *pośredniemi*, ponieważ chodzi nam o znalezienie wartości wyrównanej wielkości x (a nie L).

Przechodząc dalej do przypadku ogólnego spostrzeżeń pośrednich, przyjmiemy, że spostrzeżenia nasze są funkcjami (tego samego kształtu ogólnego) k niezależnych wielkości $X, Y, Z \ldots\ldots$, których wartości najbardziej odpowiedne $x, y, z, \ldots$ chcemy wyznaczyć rachunkiem wyrównawczym.

Oczywiście, że *rachunek wyrównawczy* będzie tylko *możliwy*, gdy k, ilość t. zw. *niewiadomych*, będzie *mniejszą* od ilości *spostrzeżeń* n ($k < n$). Błędy prawdziwe i pozorne przedstawiają się zatem w ogólnym przypadku spostrzeżeń pośrednich:

$$\varepsilon = f(X, Y, Z, \ldots\ldots) - L \tag{3}$$

$$\delta = f(x, y, z, \ldots\ldots) - L, \tag{3*}$$

przyczem jednak L pochodzą z obserwacyj *bezpośrednich*, o czem zawsze pamiętać należy przy układaniu związku (3*).

Chcąc wyprowadzić ogólną zasadę wyrównania obierzemy przy wywodach drogę następującą. Nasamprzód weźmiemy na uwagę spostrzeżenia bezpośrednie o dokładności jednakowej i wyprowadzimy opierając się na prawie Gaussa, zasadę wyrównania dla tego najbardziej prostego przypadku. Następnie ustalimy zasadę wyrównania dla przypadku ogólniejszego, t. j. dla wyrównania spostrzeżeń bezpośrednich o dokładności różnej; wreszcie postąpimy w sposób analogiczny w przypadku spostrzeżeń pośrednich.

a) Spostrzeżenia bezpośrednie o dokładności jednakowej.

W końcowym ustępie § 4-go wspomnieliśmy, na str. 17., że prawo Gaussa {§ 4-ty wzór (21)} odnosi się przedewszystkiem do błędów prawdziwych (oczywiście przypadkowych); obecnie, kiedy poznaliśmy znaczenie błędów pozornych, należy zastanowić się, czy można zastosować je i do błędów pozornych δ.

Sprawa ta jest jednak już przesądzoną, a to z chwilą przyjęcia *założenia Gaussa,* że najbardziej prawdopodobną wartością spostrzeganej wielkości jest *średnia arytmetyczna* utworzona ze *skończonej* ilości spostrzeżeń.

O ile tedy oczyściliśmy wyniki naszych spostrzeżeń z błędów systematycznych i liczba spostrzeżeń nie jest zbyt małą, możemy zastosować prawo Gaussa i do błędów pozornych przyjmując na prawdopodobieństwo pojawienia się błędu δ wzór:

$$P_\delta = \frac{\chi}{\sqrt{\pi}} e^{-\chi^2\delta^2} d\,\delta, \tag{4}$$

przyczem χ oznacza miarę dokładności błędów pozornych.

Związek między χ, a błędami pozornemi jest analogiczny jak wyprowadzony w § 5-tym i podany na str. 21. wzorem (12)-tym związek między h, a błędami prawdziwemi; a zatem:

$$\chi^2 = \frac{n}{2[\delta\delta]}. \tag{5}$$

Z porównania obu tych wzorów wynika dalej

$$\chi^2 : h^2 = [\varepsilon\varepsilon] : [\delta\delta]. \tag{6}$$

Ponieważ w każdym konkretnym przypadku wyrównania sumy $[\varepsilon\varepsilon]$ i $[\delta\delta]$ są stałemi, przeto stosunek kwadratów miar dokładności dla błędów pozornych i prawdziwych jest stały, czyli

$$\chi^2 = C.h^2, \; ^{1)} \tag{7}$$

(przyczem C oznacza liczbę stałą dla pewnego przypadku wyrównania).

Prawdopodobieństwo pojawienia się wszystkich n błędów δ w szeregu naszych spostrzeżeń jest wedle § 2-go *c)* rozdz. I-go prawdopodobieństwem złożonem i przedstawia się wzorem (ze względu na stałą wielkość χ):

$$\left(\frac{\chi}{\sqrt{\pi}} d\,\delta\right)^n e^{-\chi^2[\delta\delta]}. \tag{8}$$

Wyrażenie to, jako zależne od poszczególnych $\delta = x - l$ przybiera dla danych wartości l, a zmieniającej się wartości x różne wartości. Różnym systemom błędów δ powstałym z przyjęcia różnych wartości na x będą odpowiadały różne wartości wyrażenia (8).

---

[1]) Jak się później przekonamy wynosi stosunek $\chi^2 : h^2$ w przypadku spostrzeżeń bezpośrednich $n : (n-1)$. Porównaj także *E. Czubera* artykuł w pierwszym tomie Monatshefte f. Math. u. Physik, oraz *E. Czuber*, Theorie d. Beobachtungsfehler, Lipsk, 1901, str. 156.

Tę wartość x, która spowoduje, że prawdopodobieństwo określone wzorem (8) osiągnie swą wartość największą, zatem wartość odpowiadającą najbardziej prawdopodobnemu systemowi błędów δ obrał Gauss za wartość wyrównaną.

(Porównaj § 4-ty rozdz. I-go).

Warunek:

$$\left(\frac{\chi}{\sqrt{\pi}} d\delta\right)^n e^{-\chi^2[\delta\delta]} = \max. \tag{9}$$

może być tylko spełniony gdy:

$$\chi^2[\delta\delta] = \min., \tag{10}$$

a ze względu, że $\chi^2 = \text{const.}$:

$$[\delta\delta] = \boldsymbol{min.} \tag{11}$$

Zatem wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich o jednakowej dokładności polega na wyznaczeniu takiej wartości x, dla której suma kwadratów błędów (pozornych) jest najmniejszą.

Metodę tę nazwał *Legendre metodą najmniejszych kwadratów;* nazwa ta jest i obecnie używana powszechnie, choć właściwszą byłaby metoda najmniejszej sumy kwadratów.

b) Spostrzeżenia bezpośrednie o dokładności różnej.

Jeśli spostrzeżenia bezpośrednie nie były dokonane z jednakową dokładnością, odpowiadają poszczególnym błędom prawdziwym $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots \varepsilon_n$ różne miary dokładności $h_1, h_2, \ldots . h_n$, zaś błędom pozornym $\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots \delta_n$ również różne miary dokładności $\chi_1, \chi_2, \ldots . . \chi_n$. (Każdy błąd pozorny jak i prawdziwy odnosi się do innego szeregu błędów).

W tym przypadku przybiera wzór (8)-my kształt

$$\left(\frac{d\delta}{\sqrt{\pi}}\right)^n \chi_1 . \chi_2 . \ldots . . \chi_n . e^{-[\chi\chi\,\delta\delta]}, \tag{8*}$$

a wartość wyrównaną x znajdziemy z warunku

$$\left(\frac{d\delta}{\sqrt{\pi}}\right)^n \chi_1 . \chi_2 . \ldots . . \chi_n . e^{-[\chi\chi\,\delta\delta]} = \max. \tag{9*}$$

Z warunku (9*) wynika, że:

$$[\chi\chi\,\delta\delta] = \min. \tag{10*}$$

Między poszczególnemi miarami dokładności błędów pozornych i prawdziwych zachodzi jednak związek (7), przeto równanie (10*) możemy napisać także i we formie:

$$[hh\,\delta\delta] = \min. \text{ lub } \left[\frac{\delta\delta}{\mu\mu}\right] = \min., \tag{12}$$

gdyż $h^2 = \dfrac{1}{2\mu^2}$ wedle związku (13)-go § 5-go rozdz. I-go (str. 21).

W rachunku wyrównawczym nie posługujemy się jednak wielkościami h, lecz wprowadzamy w ich miejsce *liczby* p, których związek z wielkościami h jest określony proporcją:

$$h_1{}^2 : h_2{}^2 : \ldots\ldots : h_n{}^2 = p_1 : p_2 : \ldots\ldots\ldots p_n = \frac{1}{\mu_1{}^2} : \frac{1}{\mu^2{}_2} : \ldots\ldots \frac{1}{\mu_n{}^2}. \qquad (13)$$

Liczby p nazywamy *wagami* spostrzeżeń.

Odkładając dokładniejsze omówienie wag do § 3-go niniejszego rozdziału, napiszemy związek (12) w kształcie:

$$[p\,\delta\delta] = min. \qquad (11^*)$$

W przypadku spostrzeżeń o dokładności różnej wyrównanie polega na wyznaczaniu takiej wartości x, dla której suma iloczynów z kwadratów błędów pozornych i odpowiadających im wag jest najmniejszą.

Biorąc na uwagę zamiast błędów δ (spostrzeżeń różnodokładnych) szereg błędów $\chi\delta$, $h\delta$, $\frac{\delta}{\mu}$, lub $\delta\sqrt{p}$ i stosując do nich jako do błędów spostrzeżeń o dokładności jednakowej wzór (11)-ty, otrzymamy dla błędów $\chi\delta$ związek (10*), dla błędów $h\delta$ względnie $\frac{\delta}{\mu}$ związki (12), zaś dla błędów $\delta\sqrt{p}$ związek (11*) jako zasadę wyrównania.

W obu tedy przypadkach *a)* i *b)* opiera się wyrównanie na jednym związku zasadniczym.

c) S p o s t r z e ż e n i a p o ś r e d n i e.

Mimoto, że celem wyrównania spostrzeżeń pośrednich jest wyznaczenie wartości wyrównanych x, y, z, ..., odnoszą się *błędy* δ w tym przypadku *do spostrzeżeń* L, zatem — zależnie od tego, czy dokonano je z dokładnością jednakową czy też różną — prawdopodobieństwo równoczesnego pojawienia się tych błędów w szeregu dokonanych spostrzeżeń L będzie określone wzorem (8)-mym względnie (8*).

Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich przeprowadzimy zatem wyznaczając także wartości x, y, z, ..., dla których — w przypadku spostrzeżeń o dokładności równej, — jest:

$$[\delta\delta] = min.,$$

— zaś w przypadku spostrzeżeń o dokładności różnej, — jest:

$$[p\,\delta\delta] = min.$$

O ile związki (2*) i (3*) (na str. 28) nie mają kształtu liniowego, muszą być przed wyrównaniem sprowadzone do tego kształtu sposobem podanym później.

Związki (11)-ty i (11*) przedstawiają zatem ogólną zasadę, wyrównania dotychczas omawianych spostrzeżeń.

§ 2. Rodzaje zagadnień rachunku wyrównawczego.

Zależnie od rodzaju spostrzeżeń przeznaczonych do wyrównania przybiera rachunek wyrównawczy *różne* formy, przeto konieczną rzeczą jest dokładne zapoznanie się z *rodzajami spostrzeżeń*, aby mieć możność wyboru odpowiedniej formy wyrównania.

W tym celu zestawię najważniejsze rodzaje rachunku wyrównawczego, omawiając równocześnie spostrzeżenia wchodzące w grę w danym przypadku.

1. Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich o dokładności *a)* jednakowej, *b)* różnej.

a) O spostrzeżeniach bezpośrednich *równodokładnych* mówiliśmy już w poprzednim paragrafie. Nie wymagają one zresztą żadnych dalszych objaśnień.

Jako przykład może posłużyć pomiar pewnej długości dokonany n. p. taśmą stalową kilka lub kilkanaście razy w tych samych warunkach, t. j. jedną i tą samą (sprawdzoną) taśmą i możliwie z jednakową starannością.

b) Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich o *dokładności różnej* ma miejsce, gdy okoliczności towarzyszące pomiarom nie były jednakowe; a więc gdy dokonano spostrzeżeń różnemi przyrządami, różnemi metodami, nie zachowano przy każdym pomiarze tej samej staranności i t. p.

N. p. mierząc bezpośrednio pewną długość mierzono ją początkowo taśmą stalową, następnie łatami mierniczemi układając je od oka prostopadle do pionu, a wreszcie zastosowano do pomiaru łatami libele nasadkowe układając łaty w ten sposób dokładniej do poziomu i t. p.

Wyrównanie tego rodzaju przeprowadza się, jak wspomniałem — na zasadzie {§ 1. (11*)}:

$$[p\,\delta\delta] = \text{min.},$$

a stąd wypływa konieczność znajomości odpowiednich wag p. Jak je stosownie obrać, o tem będzie mowa w późniejszych paragrafach.

2. Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich (pośredniczących):

a) o wagach równych,

b) o wagach różnych.

I te spostrzeżenia omawialiśmy w poprzednim § 1., dlatego ograniczę się w tem miejscu tylko do kilku uwag uzupełniających poprzednio podane wiadomości.

W przypadkach, gdy między błędami prawdziwemi ε, a wielkościami X, Y, Z,.... zachodzą związki liniowe kształtu:

$$\varepsilon_i = a_i X + b_i Y + c_i Z + \ldots\ldots - L_i, \tag{1}$$

mają i związki między *błędami pozornemi* δ, a wielkościami x, y, z, ... oczywiście również kształt analogiczny:

$$\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots\ldots - L_i, \tag{1*}$$

przyczem L są wielkości obserwowane *bezpośrednio*.

Kładąc $-L_i = l_i$ piszemy zazwyczaj związki (1*) w kształcie:

$$\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots\ldots + l_i \tag{1**}$$

nazywając je równaniami błędów.

Spółczynniki a, b, c,.... przy niewiadomych równań błędów (x, y, z,....) uważamy za wielkości *bezbłędne*, tak że całkowity błąd równania odnosi się do wyrazu wolnego l jako utworzonego ze spostrzeżenia.

Przy związkach nieliniowych kształtu ogólnego {§ 1. równ. (3) i (3*)}:

$$\delta_i = f_i(x, y, z, \ldots\ldots) - L_i, \tag{2}$$

musimy sprowadzić f_i (x, y, z,....) do kształtu liniowego, co uskuteczniamy rozwijając f_i (x, y, z,....) *w szereg Taylora i opuszczając w nim wyrazy rzędów wyższych niż pierwszy*, oczywiście pod założeniem, że mamy do dyspozycji *odpowiednio przybliżone wartości niewiadomych* x_0, y_0, z_0, ...[1]).

Oznaczając $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$, $z = z_0 + \zeta$,..... otrzymamy (3)

$$\delta_i = f_i(x_0, y_0, z_0, \ldots) + \frac{\partial f_i}{\partial x}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z}\zeta + \ldots\ldots - L_i. \tag{2*}$$

Przyjmując, że w przybliżeniu $\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{\partial f_i}{\partial x_0}, \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial f_i}{\partial y_0}, \frac{\partial f_i}{\partial z} = \frac{\partial f_i}{\partial z_0} \ldots\ldots,$

oraz kładąc dla uproszczenia

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_0} = a_i, \quad \frac{\partial f_i}{\partial y_0} = b_i, \quad \frac{\partial f_i}{\partial z_0} = c_i, \tag{4}$$

$$f_i(x_0, y_0, z_0, \ldots) - L_i = l_i, \tag{5}$$

otrzymamy i w tym przypadku związek liniowy:

$$\delta_i = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta + \ldots\ldots + l_i. \tag{2**}$$

Jako **przykład** niech posłuży wyznaczenie stałych tachymetru (odległownicy).

Wzór na odległość D mierzoną optycznie tachymetrem w poziomie opiewa: $D = Kl + k$; przyczem K i k są stałe przyrządu, zaś l oznacza wielkość odcinka odczytanego na łacie między skrajnemi nitkami poziomemi przyrządu.

---

1) W praktyce są nam wartości x_0, y_0, z_0,.... znane z reguły z dokładnością usprawiedliwiającą powyższe założenie. W przypadkach wątpliwych możemy po znalezieniu wartości ξ, η, ζ,.... zbadać wpływ wyrazów rzędów wyższych (drugiego rz.) i w razie potrzeby przeprowadzić wyrównanie na nowo z wartościami przybliżonemi $x_0 + \xi$, $y_0 + \eta$, $z_0 + \zeta$,....

Odczytując na łacie ustawianej kolejno w znanych odległościach D odcinki l (przy poziomej osi celowej lunety przyrządu), otrzymamy dla wyznaczenia stałych K i k, n związków kształtu

$$D_i = K l_i + k.$$

Jeżeli ilość spostrzeżeń n jest większą od 2 (t. j. od ilości niewiadomych), należy wyznaczyć wartości obu stałych rachunkiem wyrównawczym.

Aby równania błędów ustawić w sposób odpowiedni, należy *zasadniczo oddzielić wielkość spostrzeganą od niewiadomych*, tak aby przybrały kształt (1*) względnie (2).

W naszym przypadku są wielkościami spostrzeganemi odcinki l odczytywane na łacie, oraz odległości D. Wpływ błędów odcinków l odgrywa jednak przy wyznaczaniu stałych większą rolę niż wpływ błędów odległości D, co łatwo stwierdzić kładąc w przybliżeniu $K = \frac{D}{l}$ i urabiając błąd $\varepsilon_K = \pm \frac{1}{l} \varepsilon_D \mp \frac{D}{l^2} \varepsilon_l$: n. p. dla $D = 100\,m$ i $l = 1{\cdot}00\,m$ będzie wpływ błędu odległości: $\pm \frac{1}{1{\cdot}00\,m} 0{\cdot}03\,m = \pm 0{\cdot}03$, zaś wpływ błędu odcinka l: $\pm \frac{100\,m}{1{\cdot}00\,m^2} 0{\cdot}0025\,m = \mp 0{\cdot}25$.

W praktyce przyjmujemy zatem odległości D jako bezbłędne.

W konsekwencji wyjdziemy przy układaniu równań błędów ze związku $l_i + \delta_i = \frac{D_i - k}{K}$, który po oznaczeniu $K = x$, $k = y$ przybierze kształt:

$$\delta_i = \frac{D_i - y}{x} - l_i.$$

Wprowadzajac do rachunku wartości *przybliżone* niewiadomych x_0 i y_0 uzyskane z dwu spostrzeżeń o różniących się znacznie l, lub przyjęte zkądinnąd (przy zwyczajnych tachymetrach K wynosi około 100, k około 0·30 m) i rozwijając, jak poprzednio zaznaczono, $\frac{D-y}{x}$ w szereg Taylora, nadajemy powyższemu związkowi kształt liniowy; zatem

$$\delta_i = -\frac{D_i - y_0}{x_0^2}\xi - \frac{1}{x_0}\eta + \left(\frac{D_i - y_0}{x_0} - l_i\right),$$

lub po oznaczeniu $-\frac{D_i - y_0}{x_0^2} = a_i$, $-\frac{1}{x_0} = b_i$, $\frac{D_i - y_0}{x_0} - l_i = \lambda_i$:

$$\delta_i = a_i \xi + b_i \eta + \lambda_i,$$

przyczem $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$.

Ze względu na to, że odcinki l są odczytywane na łacie w różnych odległościach D, nie można ich uważać za szereg spostrzeżeń równodokładnych. Z praktyki wiemy, że dokładność odczytu odcinka l jest odwrotnie proporcjonalna do odstępu łaty od przyrządu, zatem wagi poszczególnych spostrzeżeń, względnie równań błędów, utworzymy na podstawie związku

$$h_1^2 : h_2^2 : \ldots : h_n^2 = \frac{C^2}{D_1^2} : \frac{C^2}{D_2^2} : \ldots\ldots : \frac{C^2}{D_n^2},$$

przyczem C jest stałą o dymensjach D, czyli odległością, w której chcemy wyniki tachymetrji porównywać. I tak, jeśli $D_1 = 50\,m$, $D_2 = 100\,m$, $D_3 = 150\,m$, $D_4 = 200\,m$, $D_5 = 250\,m$, otrzymamy przyjmując $C = 100\,m$:

$$p_1 = 4{\cdot}00,\ p_2 = 1{\cdot}00,\ p_3 = 0{\cdot}44,\ p_4 = 0{\cdot}25,\ p_5 = 0{\cdot}16.$$

Ze względów praktycznych jest wskazane wstawić w równaniach błędów poszczególne D w *cm*, otrzymując δ również w *cm*.

Inny sposób ustawienia równań błędów przy przypadku wyznaczania stałych tachymetru podajemy w § 9-tym rozdziału IV-go.

3. Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych.

Jeżeli prawdziwe wartości spostrzeganych przez nas wielkości *stoją ze sobą w pewnych związkach*, lub, co wychodzi na jedno, mają *spełnić pewne warunki*, nazywamy spostrzeżenia odnoszące się do nich spostrzeżeniami *zawarunkowanemi*.

Oczywiście *wyrównanie* może mieć miejsce tylko wtedy, gdy ilość *warunków* r jest *mniejszą* od ilości *spostrzeżeń* n.

W przypadkach, gdy warunki są związkami nieliniowemi, należy je sprowadzić do kształtu liniowego sposobem podanym poprzednio.

Jako *przykład* może tu posłużyć wyrównanie kątów w trójkącie płaskim. Prawdziwe wartości kątów trójkąta płaskiego spełniają jeden warunek, a mianowicie: suma kątów trójkąta płaskiego równa się 180^0. Natomiast kąty spostrzegane α, β i γ nie spełnią go z reguły, tak że porównując ich sumę z 180^0 otrzymamy pewne nieznaczne „odchylenie“ od 0 (w sensie dodatnim lub ujemnym). Wartość owego odchylenia nazywamy *odchyłką* ω. Zatem:

$$\alpha+\beta+\gamma-180^0=\omega. \tag{6}$$

Związek ten nazywamy *równaniem odchyłki*. Oczywiście, że *liczba równań odchyłek* odpowiada *liczbie warunków* r.

Chcąc spełnić warunek postawiony na początku zagadnienia należy udzielić spostrzeganym kątom takich *poprawek* δ (błędów pozornych), aby:

$$(\alpha+\delta_\alpha)+(\beta+\delta_\beta)+(\gamma+\delta_\gamma)-180^0=0, \tag{7}$$

lub po odjęciu równania pierwszego od drugiego:

$$\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma+\omega=0. \tag{7*}$$

Ten związek między odchyłką ω, a poprawkami δ należy uzupełnić warunkiem, jaki poprawki, jako błędy przypadkowe, mają spełniać, a mianowicie:

$$[\delta\delta]=\text{min.},$$

o ile spostrzeżenia były równodokładne, względnie

$$[p\,\delta\delta]=\text{min.},$$

o ile ich dokładność nie była jednakowa.

⁂ 4. Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich z warunkami.

Zagadnienie powyższe ma miejsce, gdy *niewiadome* spostrzeżeń pośrednich mają *spełnić* pewne *warunki*.

Ze względu na to, że szczegółowe przedstawienie tego rodzaju wyrównania wymaga od czytelnika dokładnej znajomości poprzednio przedstawionych wyrównań, ograniczę się na razie tylko do *krótkiego* przedstawienia tego rodzaju zagadnień.

Przypuśćmy, że pomierzyliśmy w wierzchołkach sieci tryangulacyjnej kąty w różnych kombinacjach. Stosując przy wyrównaniu kątów na każdym wierzchołku sieci metodę spostrzeżeń pośrednich, otrzymalibyśmy dla każdego wierzchołka ogólnie n związków kształtu:

$$\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots . . l_i. \tag{8}$$

Ponieważ jednak *kąty* te mają *spełnić równocześnie geometryczne warunki sieci tryangulacyjnej*, musimy uwzględnić jeszcze i r równań odpowiadających r warunkom sieci, które (po sprowadzeniu ich do kształtu liniowego) przedstawią się następująco:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z + \ldots . . \\ 0 = B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 z + \ldots . . \end{array}\right\} \begin{array}{l}(r \text{ równań odpowiadających} \\ \quad r \text{ warunkom sieci}).\end{array} \tag{9}$$

Oczywiście zasada wyrównania pozostaje tu w mocy, t. j. zagadnienie polega na wyznaczeniu takich wartości $x, y, z, \ldots$ dla których $[\delta\delta] = \min.$, względnie $[p\,\delta\delta] = \min.$ przy równoczesnem spełnieniu warunków sieci, lub co na jedno wyjdzie równań odchyłek.

W praktyce ma powyższe zagadnienie wielkie znaczenie przy rozmierzaniu krajów.

5. Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych o niewiadomych.

Przytoczone dotychczas przypadki wyrównań mieszczą się w następującem *ogólnem* zagadnieniu, w którem związki między odchyłkami ω, poprawkami δ oraz niewiadomemi $x, y, z, \ldots$ są przedstawione równaniami:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + A_1 \delta_1 + A_2 \delta_2 + A_3 \delta_3 + \ldots + \omega_1 \\ 0 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + B_1 \delta_1 + B_2 \delta_2 + B_3 \delta_3 + \ldots + \omega_2 \\ 0 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + C_1 \delta_1 + C_2 \delta_2 + C_3 \delta_3 + \ldots + \omega_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad (\text{ilość } k) \qquad\qquad\quad (\text{ilość } n) \end{array}\right\} (\text{ilość } r) \tag{10}$$

W przypadku, gdy ilość niewiadomych k równa się ilości warunków r, otrzymujemy jednoznaczne wyniki na $x, y, z, \ldots$ bez rachunku wyrównania pod założeniem, że wszystkie $\delta = 0$.

Zatem wyrównanie na zasadzie $[\delta\delta] = \min.$, ewentualnie $[p\,\delta\delta] = \min.$ może mieć tylko miejsce, gdy

$$r > k.$$

Zarazem musi być jednak i:

$$n > r - k,$$

a to z powodu następującego.

Jeżeli przy pomocy k równań, w których k niewiadomych $x, y, z, \ldots$ wyrażono przez odpowiednie δ, wyeliminujemy w pozostałej reszcie $(r-k)$ równań niewiadome $x, y, z, \ldots$, otrzymamy w rezultacie $(r-k)$ związków zawierających n poprawek δ. Tem postępowaniem sprowadza się powyższe zagadnienie do wyrównania spostrzeżeń zawarunkowanych, opisanego pod 3) przy którem ilość poprawek n musi być — jak wspomniałem — większa niż ilość warunków. Zatem w tym przypadku:

$$n > r - k.$$

Zagadnienie to ma jednak charakter więcej *teoretyczny;* w praktyce możemy je napotkać w bardzo wyjątkowych przypadkach.

Wszystkie dotychczas omówione zagadnienia rachunku wyrównawczego można sprawadzić do wyrównania spostrzeżeń pośrednich lub zawarunkowanych {patrz 2) i 3)}. Wybór między temi metodami zależy od tego, która z nich wymaga w danym przypadku mniejszego nakładu pracy rachunkowej. Dokładne omówienie tej sprawy, wymagające pewnego zasobu wiadomości i orjentacji w rachunku wyrównawczym, odkładam do późniejszych ustępów.

* * *

6. Funkcje wielkości spostrzeganych bezpośrednio.

Prócz przytoczonych już zagadnień z dziedziny rachunku wyrównawczego napotykamy bardzo często w praktyce na zagadnienie, które uważać można do pewnego stopnia za *odwrócenie* zagadnienia opisanego pod 2).

Niech $f(L_1, L_2, \ldots . L_n)$ oznacza *funkcję* pewnych wielkości, których wartości spostrzegane niech będą: $l_1, l_2, \ldots . l_n$. Ponieważ l są — jako spostrzeżenia — błędne, przeto i $f(l_1, l_2, \ldots . l_n)$ musi być obarczona pewnym błędem. Chcąc wyznaczyć jego wartość należy wprzód poznać *prawo przenoszenia się błędów*, prawo, które nie zawiera w sobie wprawdzie problemu wyrównawczego, stanowi jednak o tak ważnej sprawie stojącej w ścisłym związku z rachunkiem wyrównawczym, że należy je omówić dokładnie jeszcze przed rozpatrywaniem poszczególnych przypadków wyrównania.

§ 3. Prawo przenoszenia się błędów.

Przedewszystkiem należy zauważyć, że przytoczone tu prawo odnosi się w ogólności do błędów *średnich,* a tylko w jednym przypadku i do błędów prawdziwych. Przypadek ten omówimy zaraz na początku niniejszego ustępu.

1. Wielokrotność spostrzeżenia.

Jeżeli pewne spostrzeżenie l jest obarczone błędem prawdziwym ε, to oczywiście *wielokrotności* tegoż spostrzeżenia al będzie odpowiadał błąd *a razy większy,* zatem $a\varepsilon$.

Dla przejścia z błędów prawdziwych do średnich należy użyć drogi następującej.

Wyobraźmy sobie, że spostrzegaliśmy l nieskończoną ilość razy (t. j. przyjmijmy n, które dąży do nieskończoności). Mnożąc każde spostrzeżenie przez liczbę a mnożymy temsamem i otrzymane poprzednio błędy przez a; zatem szereg błędów zmieni się na $a\varepsilon_1$, $a\varepsilon_2$, ... i t. d. Błędy te odpowiadają wielkościom al_1, al_2, ... Zatem średni błąd wielkości al otrzymamy z wzoru $\mu^2_{(al)} = a^2\mu^2$, t. j.:

$$\mu_{(al)} = \pm a\,\mu. \tag{1}$$

2. Suma spostrzeżeń.

Weźmy na uwagę przypadek, gdy funkcja $f(L_1, L_2)$ jest *sumą* wielkości L_1 i L_2, a zatem

$$f(L_1, L_2) = L_1 + L_2. \tag{2}$$

Wstawiając za L_1 i L_2 wartości niezależnych od siebie spostrzeganych wielkości l_1 i l_2, otrzymamy:

$$f(l_1, l_2) = l_1 + l_2; \quad \text{ponieważ jednak:}$$

$$f(L_1, L_2) = l_1 + \varepsilon_1 + l_2 + \varepsilon_2, \quad \text{przeto:} \tag{2*}$$

$f(L_1, L_2) - f(l_1, l_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (w znaczeniu algebraicznem), lub:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \tag{3}$$

Prawo to przybiera jednak kształt *inny*, gdy przejdziemy do błędów *średnich*.

Przyjmując i w tym przypadku, że spostrzegaliśmy obie wielkości $n = \infty$ razy, możemy utworzyć dla błędów wartości *przeciętne* różnych potęg błędów. Tworząc je specjalnie dla potęg drugich, otrzymamy n^2 związków na ε_f kształtu:

$$\varepsilon^2_f = \varepsilon_1{}^2 + 2\,\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon^2_2. \tag{4}$$

Związki te powstałe z n^2 kombinacyj błędów ε_1', ε_1'', ε_1'''.... i błędów ε_2', ε_2'', ε_2'''.... przedstawiają się następująco:

(ilość członów n)

$$\text{(ilość wierszy } n)\left.\begin{array}{l}
\varepsilon_1'\varepsilon_1' + 2\,\varepsilon_1'\varepsilon_2' + \varepsilon_2'\varepsilon_2' \\
\varepsilon_1'\varepsilon_1' + 2\,\varepsilon_1'\varepsilon_2'' + \varepsilon_2''\varepsilon_2'' \\
\varepsilon_1'\varepsilon_1' + 2\,\varepsilon_1'\varepsilon_2''' + \varepsilon_2'''\varepsilon_2''' \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}
\varepsilon_1''\varepsilon_1'' + 2\,\varepsilon_1''\varepsilon_2' + \varepsilon_2'\varepsilon_2' \\
\varepsilon_1''\varepsilon_1'' + 2\,\varepsilon_1''\varepsilon_2'' + \varepsilon_2''\varepsilon_2'' \\
\varepsilon_1''\varepsilon_1'' + 2\,\varepsilon_1''\varepsilon_2''' + \varepsilon_2'''\varepsilon_2''' \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} +$$

$$[\varepsilon_f\varepsilon_f] = n\,\varepsilon_1'\varepsilon_1' + 2\,\varepsilon_1'[\varepsilon_2] + [\varepsilon_2\varepsilon_2] + n\,\varepsilon_1''\varepsilon_1'' + 2\,\varepsilon_1''[\varepsilon_2] + [\varepsilon_2\varepsilon_2] + \tag{5}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
\varepsilon_1'''\varepsilon_1''' + 2\,\varepsilon_1'''\varepsilon_2' + \varepsilon_2'\varepsilon_1' \\
\varepsilon_1'''\varepsilon_1''' + 2\,\varepsilon_1'''\varepsilon_2'' + \varepsilon_2''\varepsilon_2'' \\
\varepsilon_1'''\varepsilon_1''' + 2\,\varepsilon_1'''\varepsilon_2''' + \varepsilon_2'''\varepsilon_2''' \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} + \dots\dots$$

$$+ n\,\varepsilon_1'''\varepsilon_1''' + 2\,\varepsilon_1'''[\varepsilon_2] + [\varepsilon_2\varepsilon_2] + \dots$$

Suma wszystkich n^2 kombinacyj przedstawia nam, jak w powyższem równaniu zaznaczono, sumę kwadratów błędów ε_f.

Łącząc ze sobą odpowiedne wyrazy, otrzymamy:

$$[\varepsilon_f\varepsilon_f]=n[\varepsilon_1\varepsilon_1]+2[\varepsilon_1][\varepsilon_2]+n[\varepsilon_2\varepsilon_2], \tag{5*}$$

a dzieląc przez ilość kombinacyj (t. j. wszystkich przypadków):

$$\frac{[\varepsilon_f\varepsilon_f]}{n^2}=\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{n}+2\frac{[\varepsilon_1][\varepsilon_2]}{n^2}+\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{n}. \tag{6}$$

Ponieważ *sumę kwadratów błędów prawdziwych podzieloną przez ich ilość* określiliśmy jako *błąd średni* μ, przeto ze względu na n^2 błędów ε_f, a tylko po n błędów ε_1 i ε_2 jest (ściśle dla $n=\infty$):

$$\frac{[\varepsilon_f\varepsilon_f]}{n^2}=\mu^2{}_f, \text{ zaś } \frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{n}=\mu^2{}_1, \text{ oraz } \frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{n}=\mu^2{}_2. \tag{7}$$

Natomiast zdąża wartość wyrażenia $\frac{[\varepsilon_1][\varepsilon_2]}{n^2}$ przy rosnącej do nieskończoności liczbie spostrzeżeń n ze względu na parzystość funkcji prawdopodobieństwa obu grup błędów ε_1 i ε_2 do granicznej wartości równej zeru. Innemi słowy będzie odpowiadał każdemu iloczynowi $\varepsilon_1^{(i)}\varepsilon_2^{(k)}$ iloczyn $-\varepsilon_1^{(i)}\varepsilon^{(k)}$, a zatem suma ich da jako wynik zero.

Ostatecznie będzie więc dla $n=\infty$:

$$\mu^2{}_f=\mu^2{}_1+\mu^2{}_2. \tag{8}$$

Oczywiście, że ten sam *wzór jest ważnym* tak dla l_1-l_2, jak i l_1-l_2, oraz $-l_1+l_2$.

Przykład. Odległość D pomierzono w dwu częściach. Pierwszą jej część pomierzono *łatami mierniczemi*, drugą *taśmą stalową*.

Wyniki pomiaru były następujące:

Długość części pierwszej $D_1=105{\cdot}21\ m$, części drugiej $D_2=215{\cdot}84\ m$.

Znając średnie μ_D błędy obu pomiarów μ_1 i μ_2, należy obliczyć błąd średni μ_D całkowitej długości D.

Wartości błędów średnich μ_1 i μ_2 można uzyskać w sposób *dwojaki*.

Pierwszy sposób polega na obliczeniu błędu średniego z błędów spostrzeżeń przy pomocy odpowiedniego *wzoru na* μ; zauważyć jednak należy, że liczba spostrzeżeń powinna być w tym przypadku *dość znaczną* [1]).

W sposób *drugi* można otrzymać błąd średni obliczając go z *wzoru empirycznego*, ustawionego na podstawie licznych doświadczeń, dokonanych w średnich warunkach pewnym przyrządem oraz pewną metodą. Sposób ten bywa używany bardzo często w praktyce.

Empiryczny wzór (uproszczony) na wyznaczenie błędu średniego przy pomiarze długości D łatami lub taśmą wynosi:

$$\mu_D=\nu\sqrt{D};$$

[1]) Por. końcowy ustęp § 6. rozdziału I. (str. 26.).

przyczem ν wynosi dla pomiaru łatami 0·003 $m^{1/2}$ dla pomiaru taśmą st. 0·005 $m^{1/2}$, zaś D jest określone w metrach.

W naszym przypadku będzie zatem:

$$\mu_1 = 0{\cdot}003\sqrt{105{\cdot}21\, m} = \backsim \pm 3{\cdot}1\, cm, \text{ zaś}$$
$$\mu_2 = 0{\cdot}005\sqrt{215{\cdot}84\, m} = \backsim \pm 7{\cdot}3\, cm.$$

Prowadząc na razie rachunek w metrach otrzymamy

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}000009\,.\,105.21 = 0{\cdot}000947\,.\,. \\ 0{\cdot}000025\,.\,215{\cdot}84 = 0{\cdot}006396\,.\,. \\ \hline 0{\cdot}006443\, m^2. \end{array}$$?

0,007343

Zatem μ_D w cm będzie: $\mu_D = \sqrt{63{\cdot}43}\, cm = \pm 7{\cdot}96\, cm$, okrągło 8 **cm.**

73,43

Jak widzimy wynik różni się dość znacznie od sumy utworzonej w bezwzględnej wartości błędów $|\mu_1|$ i $|\mu_2|$, która wynosi $3{\cdot}1\, cm + 7{\cdot}3\, cm = 10{\cdot}4\, cm$.

W przypadku, gdy *suma* składa się z całego *szeregu wielkości* l_1, $l_2 \ldots l_n$, otrzymamy jej błąd średni przy pomocy wzoru:

$$\mu^2_f = \mu^2_1 + \mu^2_2 + \ldots . \mu^2_n = [\mu\mu], \tag{9}$$

przyczem $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ są błędami średniemi poszczególnych l.

3. Funkcja liniowa spostrzeżeń.

Jeśli $f(L_1, L_2, \ldots L_n)$ jest funkcją liniową prawdziwych wartości L_1, $L_2, \ldots L_n$, kształtu:

$$f(L_1, L_2, \ldots L_r) = a_0 + a_1 L_1 + a_2 L_2 + \ldots + a_r L_r, \tag{10}$$

to po wstawieniu w miejsce L wartości spostrzeganych $l_1, l_2, \ldots . l_r$, będzie funkcja

$$f(l_1, l_2, \ldots l_r) = a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + \ldots + a_r l_r \tag{10*}$$

obarczona prawdziwym błędem

$$\varepsilon_f = f(L_1, L_2 \ldots L_r) - f(l_1, l_2 \ldots l_r). \tag{11}$$

Zestawiając oba te związki i odejmując drugi od pierwszego, otrzymujemy wielkość ε_r wyrażoną przez błędy $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r$ odnoszące się do spostrzeżeń l. Przytem, ponieważ $L_i = l_i + \varepsilon_i$, będzie:

$$\begin{array}{rcl} f(L_1, L_2, \ldots L_n) &=& a_0 + a_1(l_1 + \varepsilon_1) + a_2(l_2 + \varepsilon_2) + \ldots . . a_n(l_n + \varepsilon_r) \\ f(l_1, l_2, \ldots l_n) &=& a_0 + a_1 l_1 \qquad + a_2 l_2 \qquad + \ldots . . a_n l_r \\ \hline \varepsilon_f &=& a_1 \varepsilon_1 \qquad + a_2 \varepsilon_2 \qquad + \ldots . . a_n \varepsilon_r. \end{array} \tag{12}$$

Aby zastąpić błędy prawdziwe średniemi, przeprowadzimy rozumowanie analogiczne jak w przypadku opisanym pod 2).

Wyobrażając sobie, że spostrzegliśmy każdą wielkość l n razy (przyczem n niech dąży do ∞), moglibyśmy utworzyć znów n^2 związków kształtu $\varepsilon_f = a_1\varepsilon_1 + a_1\varepsilon_1 + \ldots a_r \varepsilon_r$, a podnosząc je wszystkie do potęgi drugiej sumując i dzieląc przez n^2 otrzymalibyśmy ostatecznie:

$$\frac{[\varepsilon_f \varepsilon_f]}{n^2} = \frac{[a_1 a_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1]}{n} + \frac{[a_2 a_2 \varepsilon_2 \varepsilon_2]}{n} + \ldots + \frac{[a_r a_r \varepsilon_r \varepsilon_r]}{n} + \frac{R}{n^2}, \tag{13}$$

przyczem R oznacza sumę wszystkich wchodzących tu w grę podwójnych iloczynów w kształcie $2a_i a_k[\varepsilon_i][\varepsilon_k]$. Ponieważ suma błędów ε przy n dążącem do ∞ równa się zeru, przeto wszystuie wyrazy tego kształtu są zerami, a więc i $R=0$.

Wyrażając ostatnie równanie przez błędy średnie, otrzymamy ze względu, że $\frac{[\varepsilon_f\varepsilon_f]}{n^2}=\mu_f^2$, zaś $\frac{[a_i a_i \varepsilon_i \varepsilon_i]}{n}=a_i^2\frac{[\varepsilon_i\varepsilon_i]}{n}=a_i^2\mu_i^2$:

$$\mu_f^2=a_1^2\mu_1^2+a_2^2\mu_2^2+\ldots a_r^2\mu_r^2=[a^2\mu^2]=[aa\mu\mu]. \tag{14}$$

4. Funkcja nieliniowa spostrzeżeń.

Gdy funkcja $f(L_1, L_2,\ldots L_r)$ nie jest liniową funkcją prawdziwych wartości wielkości $L_1, L_2,\ldots L_r$, należy po wstawieniu za $L_1, L_2,\ldots L_r$ wartości $l_1+\varepsilon_1$, $l_2+\varepsilon_2,\ldots l_r+\varepsilon_r$, rozwinąć ją w szereg Taylora *opuszczając* pod założeniem, że błędy popełnione są małe, *wyrazy rzędów wyższych niż pierwszy*. (W praktyce jest to przyjęcie prawie wyłącznie uzasadnione). Otrzymamy zatem:

$$f(L_1, L_2,\ldots L_r)=f(l_1+\varepsilon_1, l_2+\varepsilon_2,\ldots l_r+\varepsilon_r)=f(l_1, l_2,\ldots l_r)+\frac{\partial f}{\partial l_1}\varepsilon_1+ \\ +\frac{\partial f}{\partial l_2}\varepsilon_2+\ldots\frac{\partial f}{\partial l_n}\varepsilon_r, \tag{15}$$

a dalej:

$$f(L_1, L_2,\ldots L_r)-f(l_1, l_2,\ldots l_r)=\varepsilon_f=\frac{\partial f}{\partial l_1}\varepsilon_1+\frac{\partial f}{\partial l_2}\varepsilon^2+\ldots\frac{\partial f}{\partial l_r}\varepsilon_r. \tag{15*}$$

Przypadek ten sprowadziliśmy więc do omawianego poprzednio. Kładąc dla uproszczenia $\frac{\partial f}{\partial l_1}=f_1$, $\frac{\partial f}{\partial l_2}=f_2,\ldots\frac{\partial f}{\partial l_r}=f_r$, dojdziemy — po zastosowaniu analogicznego rozumowania jak poprzednio — do następującego wyniku:

$$\mu_f^2=f_1^2\mu_1^2+f_2^2\mu_2^2+\ldots f_r^2\mu_r^2=[ff\mu\mu]. \tag{16}$$

Przypadek zawiera zatem w sobie wszystkie poprzednio omawiane.

Ogólnie możemy powiedzieć, że *kwadrat błędu średniego funkcji spostrzeżeń bezpośrednich równa się sumie iloczynów z kwadratów pierwszych pochodnych cząstkowych tej funkcji względem poszczególnych spostrzeżeń i kwadratów średnich błędów tychże spostrzeżeń.*

Oczywiście, że w ten sposób uzyskany średni błąd może być tak dobrze *dodatni* jak i *ujemny* $(\pm\mu)$.

Przykład pierwszy. Powierzchnię P wyznaczono planimetrem typu Amslera, umieściwszy biegun wewnątrz jej pola. Wzór na wartość powierzchni wyznaczonej w ten sposób opiewa:

$$P=\pm C_1 n+C_2;$$

n oznacza w tym związku ilość obrotów kółeczka liczbowego, zaś C_1 i C_2 są stałe o dymensjach powierzchni, (znak + odnosi się do przypadku, gdy $P>C_2$, w przypadku odwrotnym należy zastosować znak —.

Wszystkie trzy w grę tu wchodzące wielkości są — jako wynikłe ze spostrzeżeń — obarczone błędami, (pomimo, że C_1 i C_2 nazywają stałemi planimetru). Wartości ich są w przypadku omawianym w przykładzie:

$$C_1 = 100{\cdot}0\ cm^2 \text{ z błędem średnim } \mu_1 = \pm 0{\cdot}2\ cm^2,$$
$$n_2 = 2{\cdot}905 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \mu_n = \pm 0{\cdot}02$$
$$C_2 = 1890{\cdot}3\ cm^2 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \mu_2 = \pm 2{\cdot}1\ cm^2$$

(przyczem wartości wielkości C_1 i C_2 *wyznaczono oddzielnie*).

Funkcja $P = \pm C_1 n + C_2$ zawiera iloczyn dwu spostrzeganych, a więc w tym przypadku zmiennych wielkości, jest przeto funkcją nieliniową.

Ponieważ $P < C_2$, o czem przekonano się w przybliżeniu inną drogą, przeto będziemy stosowali wzór:

$$P = -C_1 n + C_2 = -290{\cdot}5\ cm + 1890{\cdot}3\ cm_2 = 1599{\cdot}8\ cm^2.$$

Dla wyznaczenia μ_P średniego błędu powierzchni P należy obliczyć naprzód: $f_1 = \frac{\partial f}{\partial C_1} = -n$, $f_n = \frac{\partial f}{\partial n} = -C_1$ oraz $f_2 = \frac{\partial f}{\partial C_2} = 1$;

zatem: $f_1 = -2{\cdot}905$, $f_n = -100{\cdot}0\ cm^2$, $f_2 = 1$.

Po wstawieniu tych wartości oraz wartości na błędy średnie poszczególnych spostrzeżeń, otrzymamy kwadrat średniego błędu $\mu_P{}^2$ w centymetrach kwadratowych do potęgi czwartej:

$$\mu_P{}^2 = (-2{\cdot}905 \times 0{\cdot}2)^2 + (-100{\cdot}0 \times 0{\cdot}02)^2 + 2{\cdot}1^2$$
$$\mu_P{}^2 = (0{\cdot}338 + 4{\cdot}000 + 4{\cdot}410)\ cm^4 = 8{\cdot}748\ cm^4,$$

a stąd $\mu_P = \pm 2{\cdot}958\ cm^2$; okrągło $\mu_P = \pm 3{\cdot}0\ cm^2$.

Przykład ten poucza nas, które z wchodzących tu w grę wielkości należy pomierzyć *staranniej*, a które z powodu małego ich wpływu na wynik ogólny mogą być wyznaczone z *mniejszą* starannością.

Gdybyśmy przyjęli, że obie t. zw. stałe są rzeczywiście wielkościami *bezbłędnemi*, otrzymalibyśmy jako wynik $\pm 2\ cm^2$, a zatem wynik o $\pm 1\ cm^2$ błędny (33%), natomiast przez opuszczenie *tylko wpływu błędu stałej* C_1 wypadłby $\mu_P = \pm 2{\cdot}9\ cm^2$, zatem tylko o $\pm 0{\cdot}1\ cm^2$ błędny (3·3%).

Przykład drugi. W trójkącie płaskim zmierzono podstawę b, oraz oba kąty przyległe α i γ. Jaki jest błąd średni powierzchni trójkąta obliczonej wzorem $P = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$, jeżeli błędy średnie spostrzeganych ilości są μ_b, μ_α i μ_γ. (Dwa ostatnie błędy rozumiane w mierze analitycznej).

Ogólny wzór na kwadrat błędu średniego $\mu_P{}^2$ przedstawia się:

$$\mu_P{}^2 = f_b{}^2 \mu_b{}^2 + f_\alpha{}^2 \mu_\alpha{}^2 + f_\gamma{}^2 \mu_\gamma{}^2.$$

$$f_b = \frac{\partial P}{\partial b} = b \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = 2\frac{P}{b},$$

$$f_\alpha = \frac{\partial P}{\partial \alpha} = \tfrac{1}{2} b^2 \frac{\sin(\alpha+\gamma)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\alpha+\gamma)}{\sin^2(\alpha+\gamma)} \sin\gamma =$$

$$= \tfrac{1}{2} b^2 \sin\gamma \frac{\cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)} = P\operatorname{ctg}\alpha - P\operatorname{ctg}(\alpha+\gamma) = P\{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)\}$$

$$f_\gamma = \frac{\partial P}{\partial \gamma} = \tfrac{1}{2} b^2 \frac{\sin(\alpha+\gamma)\cos\gamma - \sin\gamma\cos(\alpha+\gamma)}{\sin^2(\alpha+\gamma)} \sin\alpha = P\{\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)\}$$

$$\mu^2{}_P = P^2\left[\frac{4}{b^2}\mu_b{}^2 + \{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)\}^2 \mu_\alpha{}^2 + \{\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)\}^2 \mu_\gamma{}^2\right]$$

$$\mu_P = P\sqrt{\frac{4}{b^2}\mu_b^2 + \{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)\}^2\mu_\alpha^2 + \{\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)\}^2\mu_\gamma^2}$$

$$\mu_P = P\sqrt{\frac{4}{b^2}\mu_b^2 + \left(\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}\mu_\alpha^2 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma}\mu_\gamma^2\right)\frac{1}{\sin^2(\alpha+\gamma)}}.$$

Przechodząc do konkretnego przypadku przyjmijmy:

$$b = 201{\cdot}64\,m,\quad \alpha = 44^0 15',\quad \gamma = 61^0 23',$$

$\mu_b = \pm 0{\cdot}071\,m$; błędy śr. kątów niech wynoszą w mierze stopniowej $\pm 1'$, zatem w mierze analitycznej $\mu_\alpha = \mu_\gamma = \pm\frac{1'}{\rho'} = \pm\frac{1}{3438} = \pm 0{\cdot}00029$.

Ze względu na bardzo małe wielkości pod pierwiastkiem pomnożymy μ_b, μ_α i μ_γ przez 10000, dzieląc równocześnie P przez 10000.

Rachunek przedstawia się następująco (przy użyciu maszyny do rachowania).

$$P = \tfrac{1}{2}b^2\frac{\sin\alpha\,\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{40658{\cdot}6896}{2}\times\frac{0{\cdot}697791\,.\,0{\cdot}877844}{0{\cdot}963006} = 12931{\cdot}1476\,m^2.$$

$$\frac{P}{10000} = \backsim 1{\cdot}293115\,m^2,\quad \frac{2}{b}10000\,\mu_b^2 = \frac{2\times 710}{201{\cdot}64} = \backsim 7{\cdot}0423$$

$$\left(\frac{2}{b}10000\,\mu_b\right)^2 = \backsim 49{\cdot}59$$

$$10000\,\mu_\alpha = 10000\,\mu_\gamma = \pm 2{\cdot}9.\qquad (10000\,\mu_\alpha)^2 = 8{\cdot}41$$

$$\begin{array}{rlrl}
\operatorname{ctg}\alpha = & 1{\cdot}026529 & \operatorname{ctg}\gamma = & 0{\cdot}545595\\
\operatorname{ctg}(\alpha+\gamma) = & -0{\cdot}279832 & \operatorname{ctg}(\alpha+\gamma = & -0{\cdot}279832\\
\hline
\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}(\alpha+\gamma) = & 1{\cdot}306361 & \operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}(\alpha+\gamma) = & 0{\cdot}825427.
\end{array}$$

Licząc następnie na 4 względnie na 2 miejsca dziesiętne otrzymamy:

$$\{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)\}^2 = 1{\cdot}7066 \qquad \{\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)\}^2 = 0{\cdot}6813$$

$$2{\cdot}3879\times 8{\cdot}41 = 20{\cdot}0822 = \backsim 20{\cdot}08 \qquad 49{\cdot}59 + 20{\cdot}08 = 69{\cdot}67$$

$$(1{\cdot}2931\times\sqrt{69{\cdot}67})\,m^2 = \pm 1{\cdot}2931\times 8{\cdot}347\,m^2 = \pm 10{\cdot}7935\,m^2,\ \mu_P = \pm 10{\cdot}79\,m^2.$$

5. Błąd średni powstały z kilku przyczyn błędów.

Zastanówmy się nad przypadkiem, w którym błąd spostrzeżenia jest błędem *wypadkowym* powstałym z sumy błędów składowych występujących wskutek działania od siebie *niezależnych,* a nam znanych przyczyn. Prawdziwy błąd ε spostrzeżenia l niech będzie zatem:

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' + \ldots\ldots, \tag{17}$$

przyczem każdy z błędów po prawej stronie równania niech będzie wynikiem działania przyczyn od siebie niezależnych.

Stosując w tym przypadku rozumowanie podane pod 2. i 3. możemy określić kwadrat błędu średniego μ^2 wzorem:

$$\mu^2 = \mu'^2 + \mu''^2 + \mu'''^2 + \ldots\ldots, \tag{18}$$

gdzie μ', μ'', μ''',... są błędami średniemi powstałemi z błędów ε', ε'', ε''',....

Wzór ten jest *ważny* i wtenczas, gdy *jedna z przyczyn* działa *systematycznie* lub *stale,* traci jednak swą ważność dla więcej tak działających przyczyn.

Bardzo dobrze ilustruje nam ten przypadek błąd średni kierunku przy pomiarach kątów poziomych.

Pomiar kierunku składa się z dwu czynności, z nastawienia lunety przyrządu na cel, oraz z dokonania odczytu na limbusie. Te dwie niezależne od siebie przyczyny wywołują dwa niezależne błędy składowe. Jeśli przeprowadzając pomiary posługiwano się odpowiedniemi częściami limbusu, mają oba te błędy charakter przypadkowy, a jako takie podpadają pod przypadek omawiany powyżej.

Oznaczając błąd średni nastawienia przez μ_n, zaś odczytu przez μ_0, otrzymujemy na określenie błędu średniego spostrzeżenia kierunku wzór:

$$\mu_{kr} = \sqrt{\mu_n^2 + \mu_0^2}. \tag{19}$$

Ponieważ kąt jest różnicą dwu kierunków, przeto błąd średni kąta μ_{kt} obliczamy z wzoru:

$$\mu_{kt} = \sqrt{\mu_{kr}^2 + \mu_{kr}^2} = \mu_{kr}\sqrt{2}. \tag{20}$$

Z powyższych dociekań wynika bardzo ważna wskazówka dotycząca pomiarów kątów poziomych.

Mając n. p. pomierzyć kąty zawarte między trzema kierunkami, możemy to wykonać (zazwyczaj) w sposób dwojaki: *a)* metodą pomiaru kątów, *b)* metodą kierunkową.

Przy pierwszym sposobie mierzymy kąty zawarte między kierunkami pierwszym i drugim, a następnie między pierwszym i trzecim. Błąd średni obu tych kątów wynosi $\mu_{kt} = \mu_{kr}\sqrt{2}$, natomiast błąd średni kąta zawartego między kierunkiem drugim a trzecim, obliczonego z różnicy kątów poprzednich będzie $\sqrt{2\mu^2_{kr} + 2\mu^2_{kr}} = \pm 2\mu_{kr}$.

Spostrzegając natomiast metodą kierunkową otrzymamy błąd średni każdego kąta jako różnicy dwu kierunków o błędach średnich μ_{kr}:

$$\mu_{kt} = \mu_{kr}\sqrt{2};$$

przyczem nakład pracy pomiarowej będzie mniejszy niż poprzednio.

Dlatego to używamy dziś przy pomiarach przeciętnych prawie wyłącznie metody *kierunkowej*. Natomiast przy *tryangulacji I-dnej* posługujemy się metodą pomiaru kątów *we wszystkich kombinacjach*, która w tym przypadku okazała się z innych względów najbardziej stosowną, a zarazem najdokładniejszą.

§ 4. Wagi spostrzeżeń.

W końcowym ustępie § 1. drugiego rozdziału (na str. 31.) określiliśmy wagi spostrzeżeń p jako liczby proporcjonalne do kwadratów dokładności h.

Ponieważ błędy średnie są wedle § 6. (2) pierwszego rozdziału odwrotnie proporcjonalne do h, mianowicie:

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \tag{1}$$

przeto *wagi p są to liczby dodatnie odwrotnie proporcjonalne do kwadratów błędów spostrzeżeń.*

Dla wyznaczenia wag mamy zatem związek:

$$p_1 : p_2 : \ldots\ldots : p_n = \frac{1}{\mu_1^2} : \frac{1}{\mu_2^2} : \ldots\ldots : \frac{1}{\mu^2_n}. \tag{2}$$

Jestto jeden z najważniejszych związków rachunku wyrównawczego.

Ze związku na wagi widać, że można je *wszystkie pomnożyć* lub *podzielić* przez pewną liczbę bez zmiany wpływu na tok wyrównania; zarazem należy nadmienić, że o ile znamy błędy średnie odpowiadające naszym spostrzeżeniom, określamy przez *przyjęcie jednej wagi* zupełnie ściśle wagi reszty spostrzeżeń.

Przyjmując dowolną liczbę dodatnią jako wagę pewnego spostrzeżenia, przyjmujemy równocześnie możność istnienia spostrzeżenia *o wadze równej jedności*. Aby jednak mieć możność porównywania dokładności różnych szeregów spostrzeżeń, nie przyjmujemy pewnej liczby jako wagę *dowolnego* spostrzeżenia, lecz przyznajemy wagę równą jedności spostrzeżeniu (pewnego gatunku) dokonanemu w *pewnych określonych warunkach*. W grę tu wchodzić mogą *jakość* przyrządu, którym się posługujemy, *wartość* spostrzeganej wielkości, o ile stwierdzono doświadczeniem, że błąd średni spostrzeżenia zależy od niej i t. p.

Sprawę tę będę się starał objaśnić na przykładach. Wzór empiryczny na błąd średni pomiaru długości łatami mierniczemi jest: $\mu_l = \nu_l \sqrt{D}$, przyczem, o ile pod D rozumiemy długość w metrach, wynosi $\nu_l = 0{\cdot}003\, m^{1/2}$. Jaką wagę należy przyjąć dla D mierzonego taśmą stalową, jeżeli *długości 100 m mierzonej łatami* nadaliśmy wagę równą *jedności*, (czyli gdy przyjęliśmy dla spostrzeżenia o wadze równej jedności pewien przyrząd, oraz zależność błędu od wielkości)?

Wzór empiryczny na błąd średni przy pomiarze taśmą stalową długości D opiewa również $\mu_t = \nu_t \sqrt{D}$, przyczem jednak $\nu_t = 0{\cdot}005\, m^{1/2}$.

Waga pomiaru długości D *łatami* będzie — w obec powyżej zaznaczonego przyjęcia —:

$$p_D : p_{100} = \frac{1}{\mu^2_D} : \frac{1}{\mu^2_{100}}, \text{ a ponieważ } p_{100} = 1:$$

$$p_D = \frac{\mu^2_{100}}{\mu^2_D} = \frac{100\, \nu^2_l}{D\, \nu^2_l} = \frac{100}{D};$$

natomiast waga pomiaru taśmą tej samej długości p_D' będzie na podstawie analogicznie utworzonej proporcji:

$$p_D' = \frac{100\, \nu^2_l}{D\, \nu^2_t} = \frac{100}{D} \cdot \frac{9}{25}, \text{ a zatem } \textit{mniejsza}.$$

N. p. waga pomiaru długości 300 m łatami będzie:

$p_{300} = \frac{1}{3} = 0{\cdot}33...$, zaś pomiaru tej samej długości taśmą:

$p'_{300} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{3}{25} = 0{\cdot}12.$

Oczywiście, że mogliśmy byli przyjąć dla 100 m mierzonych *taśmą* wagę $p = 1$ (lub równie dobrze dla $D = 1000\, m$), trzeba jednak, zdecydowawszy się raz na pewne przyjęcie, umieć wyznaczyć wagi dla reszty spostrzeżeń.

Podobnie jak przy pomiarach długości postępujemy przy obiorze wag dla pomiarów niwelacyjnych. Kwadrat błędu średniego jest tu proporcjonalny do długości ciągu niwelacyjnego, błąd średni wynosi zatem dla długości ciągu D: $\mu_D = C\sqrt{D}$. (Wzór empiryczny).

C jest tu stałą zależną od jakości przyrządu niwelacyjnego, oraz metody stosowanej przy pomiarze.

Przy wyrównywaniu pomiarów niwelacyjnych przyjmuje się zazwyczaj wagę $p=1$ dla ciągu o długości 1 km, zatem waga ciągu o długości 600 *m* spostrzeganego tymsamym przyrządem (lub przynajmniej tego samego typu) przy zastosowaniu tejsamej metody pomiaru wynosi $\frac{C.1}{C.0\cdot6} = \backsim 1\cdot67$.

Dla pomiarów tryangulacyjnych używamy teodolitów przystosowanych do rzędu sieci tryangulacyjnej, dlatego wystarczy tu przyjąć wagę równą jedności dla pojedynczego pomiaru kierunku lub kąta. (O czem dokładniej przy tryangulacji).

Błąd średni spostrzeżenia o wadze $p=1$ nazywamy *jednostkowym błędem średnim* oznaczając go przez μ_0. W rachunku wyrównawczym ma on znaczenie bardzo ważne, gdyż określa nam *porównawczą miarę dokładności* przy spostrzeżeniach o dokładności *różnej*.

Z proporcji $p_i : 1 = \frac{1}{\mu_i^2} : \frac{1}{\mu_0^2}$ wynika:

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{\mu_i^2}. \tag{3}$$

Zatem *wagę pewnego spostrzeżenia* można określić jako *stosunek kwadratu jednostkowego błędu średniego do kwadratu błędu średniego samego spostrzeżenia.*

Definicja ta jest znaczenia pierwszorzędnego dla przyjmowania wag spostrzeżeń *a priori* (t. j. przed wyrównaniem).

Pamiętając ją, oraz stosując ją z należytem zrozumieniem rzeczy, uchronimy się od przyjęcia a priori wag nieodpowiednich, co może być przyczyną otrzymania zupełnie bezwartościowych wyników wyrównania.

Przyjmując zatem jako wagi liczby odwrotnie proporcjonalne do kwadratów błędów średnich $\frac{C}{\mu_i^2}$, przyjmujemy temsamem jednostkowy błąd średni $\mu_0 = \sqrt{C}$.

*** Są jednak przypadki, w których stosowanie powyższej formuły na wagi natrafia na pewne trudności i mogłoby — przy nienależytem zrozumieniu rzeczy — być powodem przyjęcia wag nawet zupełnie błędnych. Ma to miejsce przy wyrównywaniu spostrzeżeń niejednorodnych, więc n. p. przy ścisłem wyrównaniu ciągów poligonowych. Warunki w tym przypadku (o ile chodzi o poligon zamknięty) są:

$[s \sin\alpha] = 0$, $[s \cos\alpha] = 0$, $[\alpha] = (n-2)\,180^0$, jeśli s oznacza długości boków poligonu, zaś α kąty wewnętrzne.

Warunki te przechodzą po wstawieniu do nich spostrzeganych wartości s i α i sprowadzeniu ich do kształtu liniowego na:

$$\begin{aligned} &[s \sin \alpha] + \frac{1}{\rho}[s \cos \alpha\, \delta \alpha] + [\sin \alpha\, \delta s] = 0 \\ &[s \cos \alpha] - \frac{1}{\rho}[s \sin \alpha\, \delta \alpha] + [\cos \alpha\, \delta s] = 0 \\ &[\alpha] - (n-2)\, 180^0 + [\delta \alpha] \qquad = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Ponieważ $\delta \alpha$ i δs nie są w tychsamych dymensjach, gdyż $\delta \alpha$ wyrażamy n. p. w sek. kąt. zaś δs w cm, przeto należy w tym przypadku przedstawić warunek wyrównawczy $[hh\delta\delta] = \min.$ w formie:

$$\left[\frac{\delta\delta}{\mu\,\mu}\right] = \boldsymbol{min.} \tag{5}$$

Oznaczmy błędy pozorne kątów przez δ_x zaś długości przez δ_s, zatem:

$\left[\frac{\delta\delta}{\mu\,\mu}\right] = \min. = \left[\delta_x^2 \left(\frac{1''}{\mu_x''}\right)^2\right] + \left[\delta_s^2 \left(\frac{1\;cm}{\mu_s\;cm}\right)^2\right]$, przyczem δ_x i δ_s odpowiadają (5*) wprawdzie ilościowo sekundom kąt. względnie *cm*, są jednak wielkościami *niemianowanemi*.

Teraz dopiero możemy przejść na wagi „kątowe" i „długościowe" mianowicie:

$\left[\frac{\delta\delta}{\mu\,\mu}\right] = [p_x \delta_x^2] + [p_s \delta_s^2]$ w równaniu tem oznaczono (5**)

$$p_x = \left(\frac{1''}{\mu_x''}\right)^2 \text{ zaś } p_s = \left(\frac{1\;cm}{\mu_s\;cm}\right)^2, \tag{6}$$

a więc p są również wielkościami niemianowanemi. Mamy tu zatem dwa różne błędy śr. jednostkowe *a priori*, jeden wynosi $1''$ drugi $1\;cm$.

μ_0 otrzymane z równania będzie wielkością niemianowaną (jak to wynika z powyższych przyjąć dla błędów średnich), a mianowicie:

$$\mu_0 = \frac{\mu_0''}{1''} \text{ oraz } \mu_0 = \frac{\mu_0\;cm}{1\;cm}.$$

Zaś błędy średnie poszczególnych spostrzeżeń będą się składały z błędów kątowych:

$$\frac{\mu_x''}{1''} = \frac{\mu_0''}{1''\sqrt{p_x}},\ \mu_x'' = \frac{\mu_0''}{\sqrt{p_x}}, \text{ oraz dług. (analogicznie) } \mu_s\,cm = \frac{\mu_0\,cm}{\sqrt{p_s}}. \tag{7}$$

Szczegółowe omówienie wag spostrzeżeń pośrednich nastąpi w § 9-tym rozdz. IV-tego.

* * *

ROZDZIAŁ TRZECI.

Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich.

Po należytem opanowaniu omówionych poprzednio podstawowych wiadomości, możemy wreszcie przystąpić do samego przeprowadzenia rachunku wyrównawczego, stosując go po koleji do spostrzeżeń wyszczególnionych szczegółowo w § 2 rozdz. II.

§ 1. Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich o dokładności jednakowej (t. j. o wagach równych).

Wielkość, której wartość prawdziwą oznaczamy przez X, spostrzeżono n razy otrzymując następujące wyniki:

$$l_1,\ l_2, \ldots \ldots l_n.$$

Jeśli nas nic nie upoważnia do przyjęcia róónych dokładności dla poszczególnych spostrzeżeń, musimy przyjąć a priori, że dokładność wszystkich spostrzeżeń była jednakowa, a zatem, że i wagi ich są równe. Dla uproszczenia możemy więc przyjąć je wszystkie równe jedności, a tem samem *będzie się odnosił jednostkowy błąd średni do każdego spostrzeżenia.*

Ponieważ — jak wspomniałem — nie jesteśmy w stanie wyznaczyć prawdziwej wartości X spostrzeganej wielkości, ma nam rachunek wyrównawczy dostarczyć jej wartość, wedle założeń Gaussa, najbardziej prawdopodobną x, którą ściśle można nazwać *wartością wyrównaną.*

Rachunek wyrównawczy nie będzie się zatem odnosił do błędów prawdziwych

$$\varepsilon_i = X - l_i, \tag{1}$$

lecz *do błędów pozornych:*

$$\delta_i = x - l_i. \tag{1*}$$

W § 1 rozdz. II określiliśmy w tym przypadku warunek wyrównania równaniem:

$$[\delta\delta] = \text{min.} \tag{2}$$

Jeśli jednak mamy znaleść taką wartość x, którąby spełniła powyższy warunek, musi być:

$$\frac{d[\delta\delta]}{dx}=\frac{d(\delta_1{}^2+\delta_2{}^2+\ldots+\delta_n{}^2)}{dx}=0, \text{ lub:} \tag{3}$$

$$2\delta_1+2\delta_2+\ldots+2\delta_n=0. \tag{3*}$$

Powyższe równanie możemy przedstawić w postaci dwojakiej:

1. $$[\delta]=0, \text{ lub} \tag{4}$$

2. $$[x-l]=nx-[l]=0. \tag{4*}$$

Pierwsze orzeka, że suma błędów przypadkowych równa się zeru, drugie dozwala nam wyznaczyć x ze spostrzeżeń l, mianowicie:

$$x=\frac{[l]}{n}. \tag{5}$$

A zatem *wartość x, uzyskana wyrównaniem w przypadku spostrzeżeń równodokładnych, jest średnią arytmetyczną utworzoną ze wszystkich n spostrzeżeń.*

Wynik ten nie mógł zresztą wypaść inaczej, gdyż tak kształt funkcji prawdopodobieństwa, jak i warunek wyrównania są oparte na założeniu Gaussa, identycznem z właśnie otrzymanym wynikiem. Innemi słowy przyjęcie średniej arytmetycznej za wartość najbardziej prawdopodobną (równodokładnych) spostrzeżeń jest równoznaczne w rachunku wyrównawczym z przyjęciem $[\delta\delta]$ min. i odwrotnie.

Przejdźmy następnie do określenia związku między błędem średnim μ, a błędami pozornemi δ.

Wyjdźmy ze znanego nam już wzoru na μ

$$\mu^2=\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}. \tag{6}$$

Zauważyć przytem należy, że błąd średni μ jest miarą dokładności szeregu spostrzeżeń l (por. § 6 rozdz. I), a wobec jednakowej ich dokładności odnosi się do każdego spostrzeżenia l. Innemi słowy μ jest błędem średnim każdego spostrzeżenia l przed wyrównaniem.

Następnie przejdźmy do wyznaczenia błędu średniego średniej arytmetycznej.

Prawdziwy błąd średniej arytmetycznej określa nam różnica:

$$X-x=\varepsilon_x, \tag{7}$$

zaś jej ***błąd średni*** otrzymamy jako błąd średni funkcji kształtu

$$x=\frac{l_1}{n}+\frac{l_2}{n}+\ldots+\frac{l_n}{n}=\frac{[l]}{n}. \tag{8}$$

Kwadrat błędu średniego funkcji liniowej wynosi wedle rozdz. II, (§ 3 ust. 3) (14), (str. 41):

$$\mu_f{}^2=[a\,a\,\mu\,\mu], \tag{9}$$

zatem w naszym przypadku będzie (ponieważ $a=\frac{1}{n}$):

$$\mu_x^2=\frac{1}{n^2}\mu^2+\frac{1}{n^2}\mu^2+\dots\frac{1}{n^2}\mu^2=\frac{\mu^2}{n},\ \text{lub}\ \mu_x=\frac{\mu}{\sqrt{n}}. \tag{10}$$

A dalej wynika z proporcji:

$$p_x:1=\frac{1}{\mu_x^2}:\frac{1}{\mu^2},\quad p_x=\frac{\mu^2}{\mu_x^2}=n. \tag{11}$$

Jeśli zatem przyjęliśmy wagi spostrzeżeń równe jedności, odpowiada *średniej arytmetycznej waga* $p_x=n$, t. j. ilość spostrzeżeń, z której ją utworzono.

Natomiast ze względu na równania:

$h_x^2:h^2=\frac{1}{\mu_x^2}:\frac{1}{\mu^2}$, $h_x=h\sqrt{n}$, (przyczem h oznacza dokładność pojedynczego spostrzeżenia), twierdzimy, że dokładność średniej arytmetycznej jest $\sqrt{n}$ razy większa niż dokładność pojedynczego spostrzeżenia.

Po tych wywodach możemy przystąpić do wyprowadzenia *związku między błędami pozornemi δ, a błędem średnim μ.*

Błąd prawdziwy spostrzeżenia l_i określa nam związek: $X-l_i=\varepsilon_i$ zaś błąd pozorny związek: $x-l_i=\delta_i$.

Ztąd wynika, że $\varepsilon_i-\delta_i=X-x$, lub

$$\varepsilon_i=\delta_i+X-x=\delta_i+\varepsilon_x. \tag{12}$$

Podnosząc n takich związków, utworzonych dla wszystkich spostrzeżeń, do kwadratu i sumując je, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^2 &= \delta_1^2+2\delta_1\varepsilon_x+\varepsilon_x^2\\
\varepsilon_2^2 &= \delta_2^2+2\delta_2\varepsilon_x+\varepsilon_x^2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\varepsilon_n^2 &= \delta_n^2+2\delta_n\varepsilon_x+\varepsilon_x^2\\
\hline
[\varepsilon\varepsilon] &= [\delta\delta]+2[\delta]\varepsilon_x+n\varepsilon_x^2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Ponieważ $[\delta]=0$, przeto ze względu na skończoną wartość ε_x i $2[\delta]\varepsilon_x=0$, a gdy ponadto wstawimy zamiast kwadratu błędu prawdziwego średniej arytm. kwadrat jej błędu średniego, (t. j. założymy, że $\varepsilon_x^2=\mu_x^2$), będzie miał powyższy związek kształt następujący:

$$[\varepsilon\varepsilon]=[\delta\delta]+n\mu_x^2; \tag{14}$$

wedle poprzednich wywodów $\mu_x^2=\frac{\mu^2}{n}$, przeto:

$$[\varepsilon\varepsilon]=[\delta\delta]+\mu^2,$$

a ze względu, że $[\varepsilon\varepsilon]=n\mu^2$, ostatecznie:

$$\mu^2=\frac{[\delta\delta]}{n-1},\quad \mu=\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}. \tag{15}$$

Ponieważ $\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}=\frac{[\delta\delta]}{n-1}$, przeto ze względu na (6)-ty związek § 1-go rozdz. II-go: $\chi^2:h^2=[\varepsilon\varepsilon]:[\delta\delta]$ jest $\chi^2:h^2=n:(n-1)$.

*** *Wzór 15-ty* można wyprowadzić *sposobem ściślejszym.*

Ponieważ $\varepsilon_i = \delta_i + (X - x)$, przeto sumując n związków utworzonych w tensam sposób dla wszystkich n błędów, otrzymamy:

$$[\varepsilon] = [\delta] + n(X - x), \text{ a stąd, ponieważ } [\delta] = 0:$$

$$X - x = \frac{[\varepsilon]}{n}, \quad (X - x)^2 = \varepsilon_x^2 = \frac{[\varepsilon]^2}{n^2} \text{ i ostatecznie:}$$

$$n(X - x)^2 = n\varepsilon_x^2 = \frac{[\varepsilon]^2}{n}.$$

Zatem ze względu na związek $[\varepsilon\varepsilon] = [\delta\delta] + n\varepsilon_x^2$, będzie dalej:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\delta\delta] + \frac{[\varepsilon]^2}{n}. \tag{16}$$

Ponieważ $[\varepsilon]^2$ musi być wielkością dodatnią przeto $[\varepsilon\varepsilon] > [\delta\delta]$.

Nie mogąc wyznaczyć prawdziwej wielkości $\frac{[\varepsilon]^2}{n}$, będziemy się starali zastąpić ją wartością przeciętną (średnią) tego wyrażenia.

$$\begin{aligned}[][\varepsilon]^2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots . \varepsilon_n)^2 = \;& \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots . + \varepsilon_{n-1}^2 + \varepsilon_n^2 \\ & + 2\,\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\,\varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots . + 2\,\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \\ & + 2\,\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\,\varepsilon_2\varepsilon_4 + \ldots . \\ & + 2\,\varepsilon_1\varepsilon_4 + \ldots .\end{aligned}$$

Przeto ogólnie przedstawi się:

$$\frac{[\varepsilon]^2}{n} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} + 2\frac{[\varepsilon_i\varepsilon_k]}{n}$$

(przyczem i przyjmuje wartości od 1 do $n-1$, zaś k od 2 do n).

Przeciętna wartości sumy iloczynów $\frac{2[\varepsilon_i\varepsilon_k]}{n}$ dąży jednak przy rosnącej do ∞ ilości n do zera, ze względu, że funkcja prawdopodobieństwa tych błędów — jako przypadkowych — jest funkcją parzystą. (Z praktycznego punktu widzenia przedstawia $\frac{2[\varepsilon_i\varepsilon_k]}{n}$ nawet przy niewielkich ilościach n wielkość zaniedbywalną).

Powracając do poprzednio omawianego związku, otrzymamy ze względu, że $\frac{[\varepsilon]^2}{n} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}$ (w przecięciu):

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\delta\delta] + \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}, \text{ lub: } n\mu^2 = [\delta\delta] + \mu^2, \text{ a ostatecznie:} \tag{17}$$

$$\mu^2 = \frac{[\delta\delta]}{n-1}\ ^{1)}. \tag{18}$$

Zatem wzór na błąd średni μ wyrażony przez błędy pozorne opiewa:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}. \tag{18*}$$

[1]) Ścisłe sposoby wyprowadzenia tej formuły podali: *Helmert*, Astr. Nachr. tom, 88 Nr. 2096—97. Helmert, Spr. pr. Akademji umiej. (1904) XXX., oraz *Wellisch*, Th. u. Pr. d. Ausgleichungsr. (1909), § 26, str. 99.

*

Ponieważ i ten drugi sposób wyprowadzenia formuły na błąd średni μ spotkał się z zarzutami Bertranda [1]), podaję przeto w krótkości przebieg ścisłego dowodu Helmerta na związek między μ, a błędami pozornemi δ.

Prawdopodobieństwo pojawienia się jednego po drugim (czyli jednoczesnego pojawienia się) błędów $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ w szeregu spostrzeżeń jest określone wyrażeniem:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n. \tag{19}$$

Oznaczając różnicę $X-x$ przez u, możemy przedstawić błędy prawdziwe w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \delta_1 + u \\
\varepsilon_2 &= \delta_2 + u \\
&\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots \\
\varepsilon_{n-1} &= \delta_{n-1} + u \\
\varepsilon_n &= -\delta_1 - \delta_2 \ldots - \delta_{n-1} + u,
\end{aligned}$$

a sumę kwadratów błędów:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\delta\delta] + nu^2. \tag{20}$$

Podstawiając w wyrazie na prawdopodobieństwo te wielkości, otrzymamy na iloczyn $d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n$ wyrażenie:

$$|I| \,.\, d\delta_1 \,.\, d\delta_2 \ldots d\delta_{n-1} \,.\, du; \tag{21}$$

(u przyjęto tu jako zmienną, gdyż system błędów $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ może odpowiadać nieskończenie wielu różnym systemom błędów pr. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$), przyczem $|I|$ oznacza wyznacznik następujący:

$$|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 \ldots & -1 \end{vmatrix} = n.$$

Zatem po wstawieniu tych wartości do wzoru (19) otrzymamy:

$$n\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\delta\delta]-h^2nu^2} d\delta_1 d\delta_2 \ldots d\delta_{n-1} \,.\, du.$$

Wyrażenie na prawdopodobieństwo pojawienia się błędów $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ (jednego po drugim) otrzymamy, całkując powyższe wyrażenie (od $-\infty$ do $+\infty$) ze względu na zmienną u; a zatem będzie:

$$\begin{aligned}
n\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\delta\delta]} d\delta_1 d\delta_2 \ldots d\delta_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2nu^2} du = \\
= \sqrt{n}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} e^{-h^2[\delta\delta]} \,.\, d\delta_1 d\delta_2 \ldots d\delta_{n-1}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Danej sumie kwadratów $[\delta\delta]$ odpowiada ta wartość dokładności h, która powoduje największą wartość poprzedniego wyrażenia (najbardziej prawdopodobna wartość h).

---

1) *Bertrand.* Calcul des Probabilités, art. 160 i 162.

Zatem ma być: $h^{n-1}e^{-h^2[\delta\delta]}=\max.$, wówczas jednak musi być:

$$(n-1)h^{n-2}-2h^n[\delta\delta]=0$$

$$\frac{1}{2h^2}=\frac{[\delta\delta]}{n-1}; \text{ że zaś } \frac{1}{2h^2}=\mu^2, \text{ przeto:} \tag{23}$$

$$\mu^2=\frac{[\delta\delta]}{n-1}, \quad \mu=\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}. \tag{24}$$

Dokładność wyznaczenia μ^2 z kwadratów błędów pozornych wynosi: $\frac{[\delta\delta]}{n-1}\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ [1]. ***

Przechodząc następnie do ***błędu średniego średniej arytmetycznej,*** otrzymamy:

$$\mu_x^2=\frac{\mu^2}{n}=\frac{[\delta\delta]}{n(n-1)}, \quad \mu_x=\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n(n-1)}}. \tag{25}$$

Sumę $[\delta\delta]$ tworzymy, ze względu na jej znaczenie dla dokładności wyrównania, zazwyczaj w dwojaki sposób. Pierwszy polega na podniesieniu różnic $\delta_i=x-l_i$ do kwadratu i zesumowaniu wyników. Drugi kontrolny opiera się na wzorze, który w łatwy sposób otrzymamy jak następuje.

Przez podniesienie związków

$$\left.\begin{array}{l} x-\delta_1=l_1 \\ x-\delta_3=l_2 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ x-\delta_n=l_n \end{array}\right| \text{ do kwadratu, zmieniamy je następująco: } \begin{array}{l} x^2-2x\delta_1+\delta_1^2=l_1^2 \\ x^2-2x\delta_2+\delta_2^2=l_2^2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ x^2-2x\delta_n+\delta_n^2=l_n^2, \end{array}$$

a tworząc ich sumę otrzymujemy równanie:

$$nx^2+[\delta\delta]=[ll], \tag{26}$$

które po wstawieniu wartości za x przejdzie w związek:

$$n\frac{[l]^2}{n^2}+[\delta\delta]=[ll], \text{ tak, że ostatecznie będzie:}$$

$$[\delta\delta]=[ll]-\frac{[l][l]}{n}. \tag{27}$$

(Wedle znaków przyjętych w matematyce ma to równanie kształt: $\Sigma\delta^2=\Sigma l^2-\frac{(\Sigma l)^2}{n}$).

Zaznaczyć wreszcie należy, że ***bardzo korzystnem,*** a niekiedy nawet ***koniecznem*** dla wykonania rachunku jest przyjęcie wartości ***przybliżonej*** x_0. Ma to szczególnie wielkie znaczenie, gdy wartości spostrzeżeń odpowiadają wielocyfrowym liczbom (użycie równania kontrolnego na $[\delta\delta]$ może być wówczas bez x_0 nawet prawie zupełnie niemożliwem).

---

[1]) Dokładność wyznaczenia błędu μ wedle wzoru (15)-go wynosi 0·35 μ dla $n=5$, 0·23 μ dla $n=10$, 0·15 μ dla $n=20$.

Oznaczając wartości spostrzegane przez L, otrzymujemy ze związku: $L=x_0+l$ wielkości l, któremi możemy znacznie wygodniej operować rachunkowo, zaś wynik wyrównania i wszystkie tu występujące błędy pozostaną bez zmiany, gdy błąd wielkości l jest równy błędowi wielkości L. Należy tylko uwzględnić, że $x=\frac{[L]}{n}=x_0+\frac{[l]}{n}$.

Przykład. Aby przyzwyczaić czytelnika do odpowiedniej formy przeprowadzania rachunku wyr., podaję przykład zestawiony schematycznie wraz z równaniami kontrolnemi. Bezcelowego wyznaczania wyników na wiele miejsc dziesiętnych należy bezwarunkowo unikać. Najpraktyczniej zrobimy przyjmując l w liczbach całkowitych, obliczając średnią, błędy pozorne i błąd średni na jedno miejsce dziesiętne, zaś kwadraty błędów na dwa miejsca dziesiętne.

Przedmiotem *wyrównania jest osiem wyników otrzymanych przy pomiarze tejsamej długości taśmą stalową.*

Liczba porząd.	L (w m)	l (w cm) $-x_0+l$	δ +	δ —	$\delta\delta$	ll	Błędy średnie w cm Uwaga
1	212·23	3	3·3	—	10·89	9	$\mu=\sqrt{\frac{181\cdot52}{7}}=\pm5\cdot1\ cm$
2	·28	8	—	1·7	2·89	64	
3	·34	14	—	7·7	59·29	196	$\mu_x=\sqrt{\frac{181\cdot52}{8.7}}=\pm1\cdot8\ cm$
4	·20	0	6·3	—	39·69	0	kontrola dla $[\delta\delta]$
5	·24	4	2·3	—	5·29	16	$\frac{[l]\,[l]}{n}=312\cdot50$
6	·33	13	—	6·7	44·89	169	
7	·26	6	0·3	—	0·09	36	$[\delta\delta]=494\cdot00-312\cdot50=$ 181·50
8	·22	2	4·3	—	18·49	4	
	Sumy:	50	16·5	16·1	181·52	494	
	$x_0=212\cdot20m$	$\frac{[l]}{n}=\frac{50}{8}=$ $=6\cdot3$	$[\delta]=+0\cdot4$				

$x=212\cdot263\pm0\cdot018\ m$, okrągło $x=212\cdot26\pm0\cdot02\ m$.

Ponieważ wyniki pomiarów są dane z dokładnością, która waha się w centymetrach, przeto przyjęliśmy za jednostki w rachunku wyr. centymetry, oszczędzając sobie trudu przez przyjęcie wartości przybliżonej x_0. Wartość wszelkich wyników wyrównania powinno się podawać z dokładnością większą o jedno miejsce dziesiętne jak wartości spostrzegane. Okoliczność, że [δ] nie jest ściśle zerem, lecz wynosi $+0{\cdot}4$ (wynika to z powodu zaokrąglenia wartości $\left.\frac{[l]}{n}\right)$, nie ma widocznego wpływu na dokładność obliczenia bł. średnich, i tak w przykładzie tymsamym, liczonym przy $\frac{[l]}{n}=6{\cdot}25$ i $[\delta]=0$, wypadają oba błędy średnie nawet i na drugiem miejscu dziesiętnem zupełnie takie same. Byłoby więc *bezcelową pracą,* zachować dokładniej, jak podano w przykładzie.

Nakoniec możemy się zapytać, czy *osiągnęliśmy* przez wyrównanie przeciętną średnią *dokładność pomiaru taśmą.* Z wzoru empirycznego na śr. bł. pomiaru taśmą wynika: $0{\cdot}005\sqrt{212{\cdot}2}\ m=\pm 7{\cdot}3\ cm$. Ponieważ śr. bł. μ odnoszący się do poprzednio podanych spostrzeżeń wynosi $\mu=\pm 5{\cdot}1\ cm$, przeto wystarczyłoby właściwie jedno względnie dla kontroli dwa spostrzeżenia, aby osiągnąć żądaną dokładność, podczas gdy przez ośmiokrotny pomiar tej samej długości *zmniejszyliśmy* błąd jej na $\mu_x=\pm 1{\cdot}8\ cm$.

Natomiast inaczej wyglądałaby sprawa, gdyby powyższe rezultaty odnosiły się do pomiaru *łatami mierniczemi.* Przeciętna dokładność tak wykonanych pomiarów byłaby określona przez empiryczny wzór na bł. śr.: $0{\cdot}003\sqrt{212{\cdot}2}\ m=\pm 4{\cdot}4\ cm$. Jak tedy widzimy, nie wystarczyłby wówczas jeden pomiar, gdyż błąd średni pojedynczego pomiaru wynosi $\mu=\pm 5{\cdot}1\ cm$. Oczywiście daje nam i w tym przypadku wynik wyrównania znacznie większą dokładność, jak przeciętna.

Przy sposobności warto poruszyć jeszcze jedną sprawę. Przypuśćmy, że chcemy osiągnąć dokładność pomiaru długości taką, *aby błąd średni ostatecznego wyniku nie przekraczał 4 cm.* Na podstawie dwu pierwszych spostrzeżeń przeprowadzamy rachunek prowizorycznie i przekonujemy się, że błąd średni μ wynosi $\pm 10\ cm$, a zatem bł. śr. $\mu_x=\frac{10}{\sqrt{2}}\ cm=\pm 7{\cdot}1\ cm$; otóż chcemy wiedzieć, ile razy należy jeszcze powtórzyć pomiar, aby zredukować bł. śr. wyniku z $\pm 7{\cdot}1\ cm$ do $\pm 4{\cdot}0\ cm$.

Ponieważ $\mu^2_x=\frac{\mu^2}{n}$, zatem (pod założeniem, że błąd średni nie zmieni się, t. zn. stosując tę samą dokładność pomiaru) otrzymamy: $n=\frac{\mu^2}{\mu^2_x}=\frac{100}{16}=6{\cdot}3$, a zatem należy wykonać 7 spostrzeżeń, t. j. jeszcze 5 dodatkowych.

§ 2. Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich o dokładności różnej.

Spostrzeżeniom o dokładności różnej odpowiadają *różne wagi p.* Zasadę przyjmowania wag *a priori* omówiliśmy dokładnie w § 4-tym II-go rozdz. Mimo to, ze względu na wielką doniosłość tej sprawy, powrócimy do niej raz jeszcze pod koniec niniejszego ustępu, podając odpowiedni przykład.

Jak już wspomniano w § 2-gim II-go rozdziału, wyrównanie tego rodzaju spostrzeżeń odbywa się na zasadzie $[p\delta\delta]=\min.$, a zatem suma iloczynów kwadratów błędów pozornych i wag musi być najmniejszą.

Przypuśćmy, że spostrzegaliśmy bezpośrednio pewną wielkość n razy, lecz każdym razem z inną dokładnością, w obec czego spostrzeżeniom $l_1, l_2, \ldots l_n$ odpowiadają różne wagi $p_1, p_2, \ldots p_n$. Chcemy wyznaczyć na podstawie rachunku wyrównawczego najbardziej prawdopodobną wartość spostrzeganej wielkości X.

Jeżeli x ma być wartością „wyrównaną", musimy je znaleść z warunku: $[p\delta\delta]=\min.$, t. zn. należy znaleść x na podstawie równania:

$$\frac{d[p\delta\delta]}{dx}=0. \tag{1}$$

Tworząc jak poprzednio błędy pozorne δ, jako różnice wartości wyrównanej x a spostrzeganej l_i, otrzymamy n równań kształtu:

$$\delta_i=x-l_i. \tag{2}$$

Wstawiając te wielkości do poprzedniego równania, otrzymamy:

$$\frac{d[p\delta\delta]}{dx}=\frac{p_1 d\delta_1{}^2}{dx}+\frac{p_2 d\delta_2{}^2}{dx}+\ldots\frac{p_n d\delta_n{}^2}{dx}=0 \tag{1*}$$

$$2p_1\delta_1+2p_2\delta_2+\ldots 2p_n\delta_n=0.$$

$$[p\delta=0], \text{ lub} \tag{3}$$

$$[p(x-l)]=0. \tag{3*}$$

Ostatnie równanie możemy napisać także w kształcie:

$$[p]x=[pl], \text{ zatem:}$$

$$x=\frac{[pl]}{[p]}. \tag{4}$$

Wyrażenie to nazywamy ***średnią arytmetyczną ogólną;*** otrzymujemy je dzieląc sumę z iloczynów wartości spostrzeżeń i odpowiadających im wag przez sumę wszystkich wag. Kontrolę rachunkową daje nam w tym przypadku równanie: $[p\delta]=0$ (w miejsce poprzedniego $[\delta]=0$).

Przejdźmy teraz do omówienia błędów średnich. Ponieważ spostrzeżenia nasze nie tworzą szeregu o pewnej stałej dokładności h, lecz każde z nich należy do innego szeregu o różnych dokładnościach $h_1, h_2, \ldots h_n$, odpowiadają im przeto różne błędy średnie $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$. Aby jednak uzyskać miarę porównawczą dla ich dokładności, wyobrażamy sobie pewne spostrzeżenie o wadze $p=1$ i o odpowiadającym mu błędzie średnim μ_0 (przyczem jest rzeczą ***zupełnie obojętną,*** czy spostrzeżenie takie ***istnieje*** faktycznie ***w zespole naszych spostrzeżeń).*** (Por. końcowe uwagi § 4, rozdz. II).

Błąd śr. spostrzeżenia o wadze $p=1$ nazywamy jednostkowym błędem średnim.

Najprościej dojdziemy do wyznaczenia tego błędu przez zamianę zespołu naszych spostrzeżeń o wagach i błędach śr. różnych na szereg spostrzeżeń o wagach $p=1$, o wspólnym błędzie średnim, który wedle powyższych uwag będzie oczywiście jednostkowym błędem średnim μ_0.

Wiemy na podstawie prawa przenoszenia się błędów (rozdz. II. § 3, 1), że mnożąc wartość spostrzeżeń przez pewną (bezbłędną) liczbę a, mnożymy równocześnie i błąd średni tegoż spostrzeżenia przez a, otrzymując w miejsce poprzedniej wartości $\pm\mu$ wartość bł. śr. $\pm a\mu$. Wraz ze zmianą błędu średniego zmienia się jednak i waga spostrzeżenia i tak, jeśli wynosiła poprzednio p_l, będzie po pomnożeniu spostrzeżenia przez a, wynosiła na podstawie związku:

$$p_l : p_{al} = \frac{1}{\mu^2} : \frac{1}{a^2\mu^2} \text{ już nie } p_l, \text{ ale } p_{al} = \frac{p_l}{a^2}. \tag{5}$$

Mnożąc tedy wartość spostrzeżenia przez a, dzielę wagę tegoż spostrzeżenia przez a^2.

Skorzystajmy z tego twierdzenia w naszym przypadku. Chcąc zamienić spostrzeżenie l_i o wadze p_i i błędzie śr. $\pm\mu_i$ na wielokrotność tegoż spostrzeżenia o wadze $p=1$ i jednostkowym błędzie śr. $\pm\mu_0$, należy je pomnożyć przez $\sqrt{p_i}$, (przez co otrzymuje się wielokrotność tegoż spostrzeżenia o wartości $l_i\sqrt{p_i}$, wadze $\frac{p_i}{p_i}=1$ i jedn. bł. śr. $\pm\mu_0$).

W ten sposób można wszystkie spostrzeżenia $l_1, l_2, \ldots l_n$ o wagach $p_1, p_2, \ldots p_n$ *zamienić* na ich wielokrotności $l_1\sqrt{p_1}$, $l_2\sqrt{p_2}, \ldots$ $l_n\sqrt{p_n}$ o *wagach równych jedności*, należące do jednego szeregu, którego miarą dokładności jest jedn. błąd śr. μ_0.

Błędy prawdziwe tych wielokrotności mają wartości:

$$\varepsilon_1\sqrt{p_1},\ \varepsilon_2\sqrt{p_2}, \ldots \varepsilon_n\sqrt{p_n}.$$

Zatem jednostkowy błąd średni μ_0 otrzymamy wedle wzoru:

$$\mu_0^2 = \frac{p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + \ldots p_n\varepsilon_n^2}{n} = \frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n}. \tag{6}$$

Aby przejść do związku o błędach pozornych δ, zastosujemy rozumowanie analogiczne jak przy spostrzeżeniach równodokładnych.

Jak tam mamy i tu n związków kształtu:

$$\varepsilon_i = \delta_i + X - x, \tag{7}$$

a podnosząc każdy z nich do kwadratu i mnożąc przez p, otrzymamy n równań:

$$\begin{aligned} p_1\varepsilon_1\varepsilon_1 &= p_1\delta_1\delta_1 + 2p_1\delta_1(X-x) + p_1(X-x)^2 \\ p_2\varepsilon_2\varepsilon_2 &= p_2\delta_2\delta_2 + 2p_2\delta_2(X-x) + p_2(X-x)^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n\varepsilon_n\varepsilon_n &= p_n\delta_n\delta_n + 2p_n\delta_n(X-x) + p_n(X-x)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

zaś w sumie: $[p\varepsilon\varepsilon] = [p\delta\delta] + 2[p\delta](X-x) + [p](X-x)^2$.

Wobec $[p\delta]=0$ będzie dalej:

$$[p\varepsilon\varepsilon] = [p\delta\delta] + [p](X-x)^2. \tag{8*}$$

Nieznaną nam wielkość $(X-x)^2$ zastąpimy, jak poprzednio, wielkością najbardziej nadającą się do tego, t. j. kwadratem błędu śr. średniej arytmetycznej ogólnej μ_x^2.

Błąd ten otrzymany w sposób analogiczny jak dla średniej arytm. zwyczajnej. Wzór na średnią arytm. ogólną możemy przekształcić w sposób następujący:

$$x=\frac{[pl]}{[p]}=\frac{\sqrt{p_1}}{[p]}l_1\sqrt{p_1}+\frac{\sqrt{p_2}}{[p]}l_2\sqrt{p_2}+\ldots\frac{\sqrt{p_n}}{[p]}l_n\sqrt{p_n}. \tag{9}$$

Ponieważ wszystkim wielokrotnościom spostrzeżeń $l_i\sqrt{p_i}$ odpowiada jedn. błąd średni μ_0, przeto będzie wedle prawa przenoszenia się błędów:

$$\mu_x^2=\frac{p_1}{[p]^2}\mu_0^2+\frac{p_2}{[p]^2}\mu_0^2+\ldots+\frac{p_n}{[p]^2}\mu_0^2=\frac{\mu_0^2}{[p]}. \tag{10}$$

Kładąc w poprzednim związku (na μ_0), $(X-x)^2=\mu_x^2$, otrzymamy:

$$[p\varepsilon\varepsilon]=[p\delta\delta]+\mu_0^2,\quad n\mu_0^2=[p\delta\delta]+\mu_0^2.\ \text{a ostatecznie:} \tag{11}$$

$$\mu_0^2=\frac{[p\delta\delta]}{n-1},\quad \mu_0=\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-1}},\ \text{oraz:} \tag{12}$$

$$\mu_x^2=\frac{[p\delta\delta]}{[p](n-1)},\quad \mu_x=\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{[p](n-1)}}. \tag{13}$$

Oczywiście, że i w tym przypadku wprowadzimy do rachunku x_0, wartość ***przybliżoną*** śr. arytmetycznej ogólnej, oraz wyznaczymy $[p\delta\delta]$ podwójnie, raz tworząc poszczególne $p\delta^2$ i sumując je, zaś drugi raz wyrachowując $[p\delta\delta]$ ze związku kontrolnego, który zaraz wyprowadzimy.

Jeśli podniesiemy n związków kształtu:

$$x-\delta_i=l_i$$

do kwadratu, pomnożymy każdy przez odpowiednie p_i i je razem zesumujemy, otrzymamy równanie:

$$[p]x^2-2x[p\delta]+[p\delta\delta]=[pll]. \tag{14}$$

Ponieważ $[p\delta]=0$, a $x^2=\frac{[pl]^2}{[p]^2}$, przeto otrzymamy:

$\frac{[pl][pl]}{[p]}+[p\delta\delta]=[pll]$; a ostatecznie równanie kontrolne na $[p\delta\delta]$ będzie miało kształt:

$$[p\delta\delta]=[pll]-\frac{[pl][pl]}{[p]}. \tag{15}$$

Przykład pierwszy. Powierzchnię P, wynoszącą około 201 cm^2, wyznaczono na planie czterema planimetrami, *a)* biegunowym Amslera, *b)* kompensacyjnym (Amsler-Coradi), *c)* wózkowym kulistym Coradiego i *d)* tarczowym Coradiego. Chcąc uzyskać wynik bardzo dokładny, dokonano planimetrem *a)* osiem, pl. *b)* cztery, pl. *c)* i *d)* po trzy spostrzeżenia.

Wyniki tych pomiarów były następujące:

śr. arytm. z 8 spostrzeżeń pl. *a)*: 201·27 cm^2, błąd śr. $\mu_a = \pm 0{\cdot}20\ cm^2 = 20\ m/m^2$
„ „ „ 4 „ pl. *b)*: 201·17 cm^2, „ „ $\mu_b = \pm 0{\cdot}05\ cm^2 = 5\ m/m^2$
„ „ „ 3 „ pl. *c)*: 201·24 cm^2, „ „ $\mu_c = \pm 0{\cdot}04\ cm^2 = 4\ m/m^2$
„ „ „ 3 „ pl. *d)*: 201·18 cm^2, „ „ $\mu_d = \pm 0{\cdot}02\ cm^2 = 2\ m/m^2$.

Przyjmując wagę $p = 1$ dla pojedynczego pomiaru planimetrem *b)*, otrzymamy wagi dla *pojedynczych* pomiarów innemi planimetrami ze związków:

$$p_a : 1 = \frac{1}{\mu_a^2} : \frac{1}{\mu_b^2},\quad p_a = \frac{\mu_b^2}{\mu_a^2} = \frac{25}{400} = \backsim 0{\cdot}06$$

$$p_c : 1 = \frac{1}{\mu_c^2} : \frac{1}{\mu_b^2},\quad p_c = \frac{\mu_b^2}{\mu_c^2} = \frac{25}{16} = \backsim 1{\cdot}56$$

$$p_d : 1 = \frac{1}{\mu_d^2} : \frac{1}{\mu_b^2},\quad p_d = \frac{\mu_b^2}{\mu_d^2} = \frac{25}{4} = \backsim 6{\cdot}25.$$

Ponieważ waga średniej arytm., utworzonej z n spostrzeżeń, jest n razy większą od wagi pojedynczego spostrzeżenia, przeto otrzymamy wagi dla wymienionych spostrzeżeń:

$$\begin{aligned} p_1 &= 8p_a = 8.0{\cdot}06 = \backsim 0{\cdot}5, & L_1 &= 201{\cdot}27\ cm^2 \\ p_2 &= 4p_b = 4.1{\cdot}00 = 4{\cdot}0, & L_2 &= 201{\cdot}17\ cm^2 \\ p_3 &= 3p_c = 3.1{\cdot}56 = \backsim 4{\cdot}7, & L_3 &= 201{\cdot}24\ cm^2 \\ p_4 &= 3p_d = 3.6{\cdot}25 = \backsim 18{\cdot}8, & L_4 &= 201{\cdot}18\ cm^2. \end{aligned}$$

Resztę rachunku wykonamy w zestawieniu schematycznem, jak to miało miejsce przy obliczaniu poprzedniego przykładu.

L. porz.	L (w cm^2)	l w m/m^2	p	pl	δ +	δ —	$p\delta$ +	$p\delta$ —	$p\delta\delta$	pll	Błędy średnie i uwagi
1	201·27	17	0·5	8·5	—	7·97	—	3·99	31·80	144·5	$\mu_0 = \sqrt{\frac{184{\cdot}32}{3}} = \pm 7{\cdot}8\ m/m^2$
2	·17	7	4·0	28·5	2·03	—	8·12	—	16·48	196·0	
3	·24	14	4·7	65·8	—	4·97	—	23·36	116·10	921·2	$\mu_x = \sqrt{\frac{184{\cdot}32}{3.28}} = \pm 1{\cdot}5\ m/m^2$
4	·18	8	18·8	150·4	1·03	—	19·36	—	19·94	1203·2	
	$x_0 = 201{\cdot}10$	Sumy:	28·0	252·7			27·48	27·35	184·32	2464·9	
							+0·13				

$$\frac{[pl]}{[p]} = 9{\cdot}03 \qquad \text{Kontr.}\quad [p\delta\delta] = 2464{\cdot}9 - \frac{252{\cdot}7^2}{28{\cdot}0} = 184{\cdot}28.$$

$x = 201{\cdot}190\ cm^2$ z bł. średnim $\pm 0{\cdot}015\ cm^2$.

Ze względu, że wagi obliczono na 1 miejsce dziesiętne, wyznaczono $p\delta$, $p\delta\delta$ na 2 miejsca dziesiętne.

Przykład drugi. Pięć ciągów niwelacyjnych o różnych długościach L_1, L_2, L_3, L_4 i L_5, nawiązanych do pięciu punktów stałych (t. j. o danej wysokości), schodzi się w jednym punkcie t. zw. węzłowym. Należy wyznaczyć najbardziej prawdopodobną wysokość punktu węzłowego H_w, oraz jej błąd średni.

Wysokości punktów stałych:	Długości ciągów:	Wzniesienia między p. stałemi, a p. węzł. z niwelacji:
$H_1 = 251{\cdot}386\ m$	$L_1 = 0{\cdot}4\ km$	$h_1 = -\ 6{\cdot}118\ m$
$H_2 = 247{\cdot}248$ „	$L_2 = 0{\cdot}8$ „	$h_2 = -\ 1{\cdot}950$ „
$H_3 = 262{\cdot}851$ „	$L_3 = 1{\cdot}2$ „	$h_3 = -17{\cdot}601$ „
$H_4 = 259{\cdot}475$ „	$L_4 = 0{\cdot}6$ „	$h_4 = -14{\cdot}179$ „
$H_5 = 241{\cdot}382$ „	$L_5 = 1{\cdot}6$ „	$h_5 = +\ 3{\cdot}846$ „

L oznaczają tu długości ciągów, a nie odległości punktów stałych od punktu węzłowego; najprościej otrzymujemy je mnożąc podwójny średni odstęp łaty niw. od przyrządu przez ilość przestawień przyrządu. Dla przyjęcia na podstawie długości L wag wystarczy wyznaczyć L w km. na 1 miejsce dziesiętne. (I tak, jeśli śr. odstęp łaty od przyrządu wynosił 50 m, a ilość przestawień cztery, będzie L w $km = 4 \times 0{\cdot}1\ km = 0{\cdot}4\ km$).

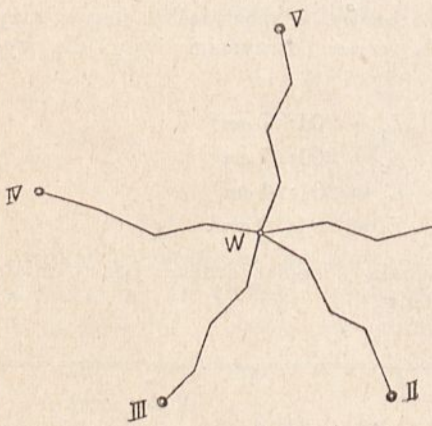

Fig. 4.

Dodając h do H, otrzymujemy pięć różnych wyników na H_w: 245·268, 245·298, 245·250, 245·296 i 245·228.

Empiryczny wzór na błąd śr. przy niwelacji jest $\mu = \nu\sqrt{L}$ (uproszczony). Chcąc uzyskać przy wyrównaniu jako miarę dokładności μ_0 jednostkowy błąd średni na 1 km, wyznaczymy wagi ze związku znanego: $p_i : 1 = \frac{1}{\mu_i^2} : \frac{1}{\mu_0^2}$, wstawiając do powyższego równania liczby L odpowiadające ilości km ciągów; zatem będzie:

$$p_1 = \frac{\nu}{0{\cdot}4\,\nu} = 2{\cdot}5,\ p_2 = \frac{\nu}{0{\cdot}8\,\nu} = \backsim 1{\cdot}3,\ p_3 = \frac{\nu}{1{\cdot}2\,\nu} = \backsim 0{\cdot}8,\ p_4 = \frac{\nu}{0{\cdot}6\,\nu} =$$

$$= \backsim 0{\cdot}2,\ p_5 = \frac{\nu}{1{\cdot}6\,\nu} = \backsim 0{\cdot}6.$$

(Ze względu, że przyjmujemy wagi na podstawie bł. śr. wyznaczonych (uproszczonym) wzorem empirycznym, a nie na podstawie bł. śr., jakie odpowiadają w rzeczywistości spostrzeżeniom, wystarczy obliczać wagi zazwyczaj na jedno miejsce dziesiętne).

Przebieg wyrównania wykazuje tabela następująca:

L. porz.	H_w (w m)	l w m/m	p	pl	δ +	δ —	$p\delta$ +	$p\delta$ —	$p\delta\delta$	pll	Błędy średnie i uwagi
1	245·268	48	2·5	120·0	1·14	—	2·85	—	3·25	5760·0	$\mu_0 = \sqrt{\frac{2538{\cdot}97}{4}} =$
2	·298	78	1·3	101·4	—	28·86	—	37·52	1083·12	7909·2	$= \pm 25{\cdot}2\, m/m$
3	·250	30	0·8	24·0	19·14	—	15·31	—	293·03	720·0	
4	·296	76	0·2	15·2	—	26·86	—	5·37	144·24	1155·2	$\mu_x = \sqrt{\frac{2538{\cdot}97}{4.5{\cdot}4}} =$
5	·228	8	0·6	4·8	41·14	—	24·68	—	1015·35	38·4	$\pm 10{\cdot}8\, m/m$
		Sumy:	5·4	265·4			42·84	42·89	2538·97	15582·8	
							$[p\delta] = -0{\cdot}05$				

$x_0 = 245{\cdot}220\ m$ $\quad \frac{[pl]}{[p]} = 49{\cdot}14\ m/m$ $\qquad \frac{[pl]^2}{[p]} = 13043{\cdot}92$

Kontr. . . 2538·98

$x = 245{\cdot}239_1\ m$ z bł. średnim $\pm 0{\cdot}0108\ m$. ($\mu_0 = \pm 25{\cdot}2\ m/m$ jest błędem śr. na 1 km długości ciągu przed wyrównaniem).

Można także wyznaczyć błędy śr. poszczególnych spostrzeżeń, choć w praktyce zależy nam tylko w niektórych przypadkach na ich wartości. W naszym przypadku będą błędy średnie obliczone na podstawie wzoru $\mu_i = \pm \frac{\mu_0}{\sqrt{p_i}}$:

$\mu_1 = \pm 16{\cdot}0\ m/m$, $\mu_2 = \pm 22{\cdot}9\ m/m$, $\mu_3 = \pm 28{\cdot}2\ m/m$, $\mu_4 = 56{\cdot}3\ m/m$, $\mu_5 = 32{\cdot}5\ m/m$

§ 3. Różnice spostrzeżeń. Wyrównanie par spostrzeżeń.

Z n spostrzeżeń, dokonanych nad pewną wielkością, można utworzyć $n . \frac{n-1}{2}$ *różnic spostrzeżeń* kształtu:

$$\left.\begin{array}{llll} l_2 - l_1 = d_{2,1}, & & & \\ l_3 - l_1 = d_{3,1}, & l_3 - l_2 = d_{3,2}, & & \\ l_4 - l_1 = d_{4,1}, & l_4 - l_2 = d_{4,2}, & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ l_n - l_1 = d_{n,1}, & l_n - l_2 = d_{n,2}, & \ldots & l_n - l_{n-1} = d_{n,n-1}, \end{array}\right\} \quad (1)$$

z których jednak tylko $n-1$ jest *niezależnych*.

Dla dalszych wywodów jest ważną kwestją znaczenie różnic d, oraz pytanie, czy można z nich tworzyć wartości średnie, tak jak to ma miejsce przy błędach prawdziwych.

Biorąc na uwagę różnicę $d_{k,i} = d_k - l_i$, możemy ją napisać także następująco:

$$d_{k,i} = X - l_i - (X - l_k) = \varepsilon_i - \varepsilon_k, \text{ lub}$$
$$d_{k,i} = x - l_i - (x - l_k) = \delta_i - \delta_k, \text{ zatem:}$$
$$d_{k,i} = l_k - l_i = \varepsilon_i - \varepsilon_k = \delta_i - \delta_k. \tag{2}$$

Różnica $d_{k,i}$ jest więc nietylko różnicą spostrzeżeń $l_k - l_i$, ale zarazem *i różnicą ich prawdziwych oraz pozornych błędów* $\varepsilon_i - \varepsilon_k$ i $\delta_i - \delta_k$.

Z drugiej strony jest $l_k - l_i$ *funkcją spostrzeżeń* l_k i l_i, której wartość prawdziwa $X - X$ równa się zeru.

Różnica między wartością prawdziwą $X - X = 0$, a $l_k - l_i$ jest *prawdziwym* błędem funkcji $l_k - l_i$:

$$X - X - (l_k - l_i) = \varepsilon_f = l_i - l_k = \varepsilon_k - \varepsilon_i = -d_{k,i}. \tag{3}$$

Mamy zatem *szczególny przypadek*, w którym *błąd prawdziwy funkcji* równa się wartości *samej funkcji* wziętej *ze znakiem przeciwnym*.

Wedle prawa przenoszenia się błędów jest średni błąd funkcji $l_i - l_k$ lub $l_k - l_i$ określony wzorem:

$$\mu_f^2 = \mu^2 + \mu^2 = 2\mu^2, \tag{4}$$

o ile weźmiemy na uwagę m spostrzeżeń l (ściśle dla m dążącego do ∞).

Ponieważ $\mu_f^2 = \frac{[\varepsilon_f \varepsilon_f]}{m}$, zaś $\varepsilon_f = -d$, przeto

$$\mu_f^2 = \frac{[dd]}{m}. \tag{5}$$

Kładąc $\sqrt{\frac{[dd]}{m}} = D$, otrzymamy związek (6)

$$D = \mu\sqrt{2}. \tag{7}$$

Średnia różnica D równa się błędowi średniemu μ pomnożonemu przez $\sqrt{2}$.

Jak wspomniałem, możemy utworzyć z n spostrzeżeń l $n\frac{n-1}{2}$ różnic d kształtu:

$$d_{k,i} = \delta_i - \delta_k.$$

Podnosząc je do kwadratu i sumując, otrzymamy:

$$[dd] = (n-1)[\delta\delta] - 2[\delta_i \delta_k], \tag{8}$$

(gdyż każdy δ^2 powtórzy się w $n\frac{n-1}{2}$ związkach $(n-1)$ razy).

Sumę $2[\delta_i \delta_k]$ wyznaczymy z równania:

$$[\delta]^2 = 0 = [\delta\delta] + 2[\delta_i \delta_k] \text{ (gdyż } [\delta], \text{ a więc i } [\delta]^2 = 0),$$
$$\text{zatem:} \quad -2[\delta_i \delta_k] = [\delta\delta].$$

Rugując w poprzednim związku $-2[\delta_i \delta_k]$ otrzymamy:

$$[dd] = (n-1)[\delta\delta] + [\delta\delta] = n[\delta\delta]. \tag{9}$$

Ponieważ wszystkich różnic d jest $n\frac{n-1}{2}$, przeto:

$$D^2 = \frac{[dd]}{n\frac{n-1}{2}} = \frac{[\delta\delta]}{\frac{n-1}{2}} = 2\mu^2, \tag{10}$$

$$\text{zaś } [\delta\delta] = (n-1)\mu^2, \text{ a } \mu = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}. \tag{11}$$

Biorąc do pomocy ścisły związek wyprowadzony w § 1 rozdz. III-go (patrz wzór 16-ty): $[\varepsilon\varepsilon] = [\delta\delta] + \frac{[\varepsilon]^2}{n}$, otrzymamy dalej:

$$[\delta\delta] = (n-1)\mu^2 = n\mu^2 - \frac{[\varepsilon]^2}{n}, \text{ zatem}$$

$$\frac{[\varepsilon]^2}{n} = n\mu^2 - (n-1)\mu^2 = \mu^2. \tag{12}$$

Wstawiając wartość na $\frac{[\varepsilon]^2}{n}$ do równania na $[\varepsilon\varepsilon]$, zmienimy kształt tego związku na następujący:

$$\left.\begin{array}{l} [\varepsilon\varepsilon] = [\delta\delta] + \mu^2, \text{ lub } n\mu^2 - \mu^2 = [\delta\delta], \text{ otrzymując} \\ \text{odwrotnie: } \mu^2 = \frac{[\delta\delta]}{n-1}. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Możemy zatem przy pomocy różnic spostrzeżeń udowodnić w sposób ścisły (dla n dążącego do ∞) prawdziwość powyższego związku.

Teorją różnic spostrzeżeń zajmował się pierwszy Jordan 1869, a niezależnie od niego Bréger. Pewne nieścisłości teorji Jordana skorygował Andrae, a w polemice, która się na ten temat wywiązała i trwała do roku 1873, względnie 1876, także Zachariae i Helmert [1]).

Na teorji różnic spostrzeżeń opiera się wyrównanie par spostrzeżeń. W praktyce mamy do czynienia z wyrównaniem:

1. *pary spostrzeżeń* a) *równo-* b) *różnodokładnej,*
2. *par* „ a) „ b) *różnodokładnych.*

1. Wyrównanie pary spostrzeżeń.

Dla uproszczenia sprawy omówimy przypadek spostrzeżeń *różnodokładnych,* a po wyprowadzeniu wzorów ogólnych, przejdziemy do przypadku 1 a), w którym dokładność spostrzeżeń jest jednakowa ($p = 1$).

Dwa spostrzeżenia l i l', odnoszące się do jednej wielkości, nazywamy *parą spostrzeżeń.* Zakładając, że wagi ich p i p' są różne, otrzymamy ich wartość wyrównaną, tworząc z nich średnią arytmetyczną ogólną:

$$x = \frac{pl + p'l'}{p + p'}. \tag{14}$$

[1]) Astr. Nachr. (1869) t. 74, str. 209—226 (Jordan); t. 74, str. 283—284 (Andrae), (1872) t. 79, str. 219—222 oraz str. 257—272; (1872) t. 80, str. 67—70 Zachariae; t. 80, str. 189—190 (Jordan); (1873) t. 81, str. 49—52 (Helmert), t. 81, str. 51—56 (Jordan); t. 81 str. 225—267 Zachariae; (1876) t. 88, str. 127—131 (Helmert).

Zamiast użyć na błędy średnie wzorów poprzednio wyprowadzonych, stosujemy w tym przypadku wzory zawierające różnicę spostrzeżeń $d=l'-l$.

Ponieważ

$$\left.\begin{aligned}\delta=x-l&=\frac{pl+p'l'}{p+p'}-\frac{pl+p'l}{p+p'}=\frac{p'}{p+p'}(l'-l)=\frac{p'}{p+p'}d,\\ \text{a } \delta'=x-l'&=\frac{pl+p'l'}{p+p'}-\frac{pl'+p'l'}{p+p'}=\frac{p}{p+p'}(l-l')=-\frac{p}{p+p'}d,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

przeto wstawiając te wartości do wzoru na błąd śr. μ_0, otrzymamy:

$$\mu_0^2=\frac{[p\delta\delta]}{2-1}=[p\delta\delta]=\frac{pp'^2+p'p^2}{(p+p')^2}d^2=\frac{(p+p')}{(p+p')^2}pp'd^2=\frac{pp'}{p+p'}d^2,$$

$$\mu_0=\frac{d}{\sqrt{p+p'}}\sqrt{pp'}; \tag{16}$$

zaś błąd średni wielkości wyrównanej będzie ze względu na związek

$$\mu_x^2=\frac{\mu_0^2}{[p]}=\frac{\mu_0^2}{p+p'}=\frac{pp'}{(p+p')^2}d^2:$$

$$\mu_x=\frac{d}{p+p'}\sqrt{pp'}. \tag{17}$$

W przypadku wag równych ($p=p'=1$) upraszczają się wszystkie wzory znacznie, będzie zatem:

$$x=\frac{l+l'}{2}; \tag{14*}$$

$$d=l'-l,\ \delta=\frac{d}{2},\ \delta'=-\frac{d}{2}; \tag{15*}$$

$$\mu^2=\frac{d^2}{2},\ \mu=\frac{d}{\sqrt{2}}; \tag{16*}$$

$$\mu_x^2=\frac{d^2}{4},\ \mu_x=\pm\frac{d}{2}. \tag{17*}$$

2. Wyrównanie par spostrzeżeń.

Przypuśćmy, że spostrzegliśmy r par spostrzeżeń, odnoszących się do r wielkości jednego gatunku, to znaczy, że *wszystkie* $l_1\ l'_1,\ l_2\ l'_2, \ldots l_r\,l_r'$ są długościami, wysokościami lub t. p., oraz że każdej parze sp. odpowiada inna waga p.

Wyrównanie polegać będzie na utworzeniu r wielkości wyrównanych $x_1, x_2, \ldots x_r$, (z których każda będzie średnią arytmetyczną utworzoną ze spostrzeżeń należących do odpowiedniej pary), a następnie na wyznaczeniu $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_r$, błędów śr. pojedynczych spostrzeżeń każdej pary, oraz $\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \ldots \mu_{x_r}$, błędów śr. wielkości wyrównanych. Błędy $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_r$ nazywamy błędami śr. *przed wyrównaniem,* zaś błędy śr. $\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \ldots \mu_{x_r}$ błędami śr. *po wyrównaniu.*

Chcąc uzyskać miarę dokładności dla spostrzeżeń wszystkich par, możemy, o ile wiemy na podstawie doświadczenia, że błędy prawdziwe jakoteż i średnie spostrzeżeń l są zależne od wielkości związanych z poszczególnemi l, tak przekształcić wszystkie l, aby odnosiły się do pewnej idealnej wielkości X_0. Znając bowiem empiryczne wzory na μ_0 i μ_i, możemy n. p. dla spostrzeżeń l_i i l_i' i-tej pary utworzyć wagę $p_i = \frac{\mu^2_0}{\mu_i^2}$ i t. d.

Mnożąc każde spostrzeżenie przez odpowiadający mu $\sqrt{p}$, otrzymamy $2r$ wielokrotności spostrzeżeń kształtu: $\sqrt{p_1}\, l_1$, $\sqrt{p_1}\, l_1'$, $\sqrt{p_2}\, l_2$, $\sqrt{p_2}\, l_2'$, ... $\sqrt{p_r}\, l_r$, $\sqrt{p_r}\, l_r'$.

Jednostkowy błąd średni tego szeregu będzie — wedle wzoru (6)-go § 2-go rozdz. III-go, podanego na str. 57. — określony związkiem:

$$\mu^2_0 = \frac{p_1(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1'^2) + p_2(\varepsilon^2_2 + \varepsilon_2'^2) + \dots p_r(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r'^2)}{2r} = \frac{2[p\,\mu\mu]}{2r}. \qquad (18)$$

Ponieważ jednak wedle poprzednich wywodów $2\mu_1^2 = d_1^2, \dots 2\mu_r^2 = d_r^2$,

$$\text{przeto: } \mu_0^2 = \frac{[pdd]}{2r}, \text{ lub } \mu_0 = \sqrt{\frac{[pdd]}{2r}}. \qquad (19)$$

Kładąc $d_0^2 = \frac{[pdd]}{r}$, $d_0 = \sqrt{\frac{[pdd]}{r}}$ (średnie d), otrzymamy: (20)

$$\text{(jedn. bł. śr. } \textit{przed} \text{ wyr.) } \mu_0^2 = \frac{d_0^2}{2}, \ \mu_0 = \frac{d_0}{\sqrt{2}}, \qquad (21)$$

a ze względu, że $\mu_{x_0}^2 = \frac{\mu_0^2}{2}$:

$$\text{(jedn. błąd śr. } \textit{po} \text{ wyr.) } \mu_{x_0}^2 = \frac{d_0^2}{4}, \ \mu_{x_0} = \pm\frac{d_0}{2}. \qquad (22)$$

Wyznaczając błędy śr. μ_0 i μ_{x_0}, możemy uprościć sobie rachunek wyrównawczy, pomijając wszystkie błędy śr. μ_i oraz μ_{x_i}.

Znaczenie błędów śr. μ_0 i μ_{x_0} poznamy najlepiej na przykładzie.

Dla przeprowadzenia pomiarów wodnych założono wzdłuż rzeki r reperów (punktów stałych wys.), nawiązując niwelację do dawnego reperu R o danej wysokości. Wszystkie spady między reperami pomierzono dwa razy, uzyskując w ten sposób r par spostrzeżeń. Jeśli oznaczymy długości ciągów niwelacyjnych między reperami $L_1, L_2, \dots L_r$, możemy, ze względu na empiryczny wzór dla błędu średniego niwelacji ciągu o długości L: $\mu_L \doteq \nu\sqrt{L}$, przyjąć wagi dla poszczególnych par spostrzeżeń $p = \frac{\nu^2 . 1}{\nu^2 . L} = \frac{1}{L}$, przyczem, chcąc uzyskać później μ_0 *na długość 1 km*, należy wstawić do wzoru na p wielkości L w km (jednak jako wielkości niemianowane).

Przebieg wyrównania będzie następujący.

Pary spostrzeżeń (spadów między reperami) są:

$$s_1,\ s_1', \qquad s_2,\ s_2', \qquad \ldots \qquad s_r,\ s_r' \quad \text{o wagach:}$$

$$p_1, \qquad p_2, \qquad \ldots\ldots \qquad p_r;$$

$$d_1 = s_1' - s_1, \quad d_2 = s_2' - s_2, \quad \ldots\ldots \quad d_r = s_r' - s_r,$$

$$x_1 = \frac{s_1 + s_1'}{2}, \quad x_2 = \frac{s_2 + s_2'}{2}, \quad \ldots\ldots \quad x_r = \frac{s_r + s_r'}{2}.$$

$$\left| \begin{array}{l} \mu_1 = \dfrac{d_1}{\sqrt{2}}, \quad \mu_2 = \dfrac{d_2}{\sqrt{2}}, \quad \ldots\ldots \quad \mu_r = \dfrac{d_r}{\sqrt{2}}, \\ \mu_{x_1} = \dfrac{d_1}{2}, \quad \mu_{x_2} = \dfrac{d_2}{2}, \quad \ldots\ldots \quad \mu_{x_r} = \dfrac{d_r}{2}, \end{array} \right|$$

wyznaczenie tych bł. śr. może być pominięte bez uszczerbku rachunku wyr.

$$d_0 = \sqrt{\frac{[pdd]}{r}} = \sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{dd}{L}\right]}, \tag{20}$$

$$\mu_0 = \frac{d_0}{\sqrt{2}}, \quad \mu_{x_0} = \frac{d_0}{2}, \quad \text{lub} \quad \mu_0 = \sqrt{\frac{1}{2r}\left[\frac{dd}{L}\right]}, \quad \mu_{x_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{dd}{L}\right]}; \qquad (21^*) \text{ i } (22^*)$$

μ_0 jest jednostkowym błędem śr. t. j. spostrzeżenia o wadze $p=1$ *przed wyrównaniem,* zaś μ_{x_0} jednostkowym błędem śr. *wyrównanego* spostrzeżenia o wadze $p=1$, czyli *po wyrównaniu.* (Oba błędy śr. *na 1 km* dł. ciągu).

Błąd średni wysokości każdego reperu można obliczyć w sposób *dwojaki.* Przyjmując wysokość reperu R za bezbłędną, otrzymamy (oznaczając μ_{H_i} błąd średni wysokości reperu R_i przed wyr., zaś $(\mu)_{H_i}$ błąd śr. wysokości tegoż reperu po wyrównaniu)

sposobem *pierwszym:*

$$\mu_{H_i} = \sqrt{\frac{[dd]_1^i}{2}} \qquad (\mu)_{H_i} = \frac{1}{2}\sqrt{[dd]_1^i} \tag{23}$$

sposobem *drugim:*

$$\mu_{H_i} = \mu_0\sqrt{[L]_1^i} \qquad (\mu)_{H_i} = \mu_{x_0}\sqrt{[L]_1^i}. \tag{24}$$

Ściśle rzecz biorąc nadają się wzory sposobu drugiego tylko do obliczenia błędów śr. wysokości *ostatniego reperu* t. j. R_n, gdyż obliczenie ma tu miejsce przy pomocy jednostkowych błędów śr., odnoszących się do ciągu R—R_n. W tym też przypadku dadzą obie metody wynik zgodny (pomijając błędy z powodu zaokrągleń). Dla błędów śr. innych wysokości otrzymujemy drugą metodą tylko wyniki *przybliżone.*

Przykład liczbowy.

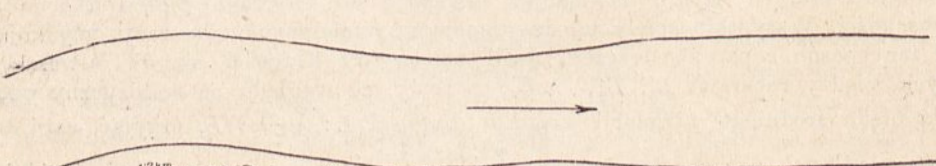

Fig. 5.

L. p.	Oznaczenie spadu	Spady w m		Długość ciągów L w km	Wagi p
		s	s'		
1	z R na R_1	5·835	5·830	1·2	$\frac{1}{1\cdot2}=\backsim 0\cdot8$
2	z R_1 na R_2	6·314	6.322	1·8	$\frac{1}{1\cdot8}=\backsim 0\cdot6$
3	z R_2 na R_3	4·918	4·912	1·4	$\frac{1}{1\cdot4}=\backsim 0\cdot7$
4	z R_3 na R_4	8·129	8·138	2·5	$\frac{1}{2\cdot5}=0\cdot4$

Wyrównanie: (d, μ w m/m).

L. p.	$d=s'-s$	$\mu=\frac{d}{\sqrt{2}}$	$\mu_x=\pm\frac{d}{2}$	$L=\frac{1}{p}$	dd	$\frac{dd}{L}$	Wyrównane wartości spadów x wraz z błędami śr. (w m)
1	-5	$\frac{5}{\sqrt{2}}=\pm3\cdot5$	$\pm\frac{5}{2}=\pm2\cdot5$	1·2	25	20·83	$x_1=5\cdot832_5\ (\pm0\cdot002_5)$
2	$+8$	$\frac{8}{\sqrt{2}}=\pm4\cdot9$	$\pm\frac{8}{2}=\pm4\cdot0$	1·8	64	35·56	$x_2=6\cdot318\ (\pm0\cdot004)$
3	-6	$\frac{6}{\sqrt{2}}=\pm4\cdot2$	$\pm\frac{6}{2}=\pm3\cdot0$	1·4	36	25·71	$x_3=4\cdot915\ (\pm0\cdot003)$
4	$+9$	$\frac{9}{\sqrt{2}}=\pm6\cdot4$	$\pm\frac{9}{2}=\pm4\cdot5$	2·5	81	32·40	$x_4=8\cdot133_5\ (\pm0\cdot004_5)$
				Suma:		114·50	

$$\mu_0=\sqrt{\frac{1}{2r}\left[\frac{dd}{L}\right]}=\sqrt{\frac{114\cdot50}{8}}=\pm3\cdot78\ m/m \text{ jedn. śr. błąd na 1 } km \text{ przed wyrówn.}$$

$$\mu_{x_0}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{dd}{L}\right]}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{114\cdot50}{4}}=\pm2\cdot68\ m/m \quad \text{„ „ „ „ 1 } km \text{ po wyrówn.}$$

Błędy śr. wysokości poszczególnych reperów (po wyrównaniu):

obliczone wzorem (ścisł.) $\frac{1}{2}\sqrt{[dd]_1^i}$ — obliczone wzorem $\mu_{x_0}\sqrt{[L]_1^i}$ (przybl.)

$(\mu)_{H_1}=\frac{1}{2}\sqrt{25}=\pm2\cdot5\ m/m$ — $(\mu)_{H_1}=2\cdot68\sqrt{1\cdot2}=\pm2\cdot9\ m/m$

$(\mu)_{H_2}=\frac{1}{2}\sqrt{89}=\pm4\cdot7$ „ — $(\mu)_{H_2}=2\cdot68\sqrt{3\cdot0}=\pm4\cdot6$ „

$(\mu)_{H_3}=\frac{1}{2}\sqrt{125}=\pm5\cdot6$ „ — $(\mu)_{H_3}=2\cdot68\sqrt{4\cdot4}=\pm5\cdot6$ „

$(\mu)_{H_4}=\frac{1}{2}\sqrt{206}=\pm7\cdot2$ „ — $(\mu)_{H_4}=2\cdot68\sqrt{6\cdot9}=\pm7\cdot0$ „

(Niezgodność obu wyników na $(\mu)_{H_4}$ z powodu zaokrągleń).

*

§ 4. Zastosowanie metody wyrówn. spostrzeżeń bezpośrednich do spostrzeżeń zawarunkowanych jednym związkiem. (Wyrównanie do stałej sumy).

Jeśli spostrzeżenia zawarunkowane mają spełnić tylko *jeden warunek*, da się ich wyrównanie sprowadzić do wyrównania spostrzeżeń bezpośrednich.

O spostrzeżeniach zawarunkowanych w ogólności mówiliśmy w ust. 3-cim § 2-go rozdz. II., podając równocześnie odpowiedni przykład.

W przypadku, gdy warunek nie ma kształtu liniowego, należy go sprowadzić przed zastosowaniem rachunku wyrównawczego do formy *liniowej* przez rozwinięcie go w szereg Taylora z pominięciem wyrazów rzędu większego niż pierwszy.

Prawdziwych wartości $X_1, X_2, \ldots X_n$ spostrzeganych wielkości, spełniających warunek:

$$f(X_1, X_2, \ldots X_n) = 0, \tag{1}$$

nie będziemy mogli wyznaczyć, musząc się zadowolnić najbardziej prawdopodobnemi ich wartościami $x_1, x_2, \ldots x_n$, spełniającemi warunek:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0. \tag{2}$$

Podstawiając za $x_1 = l_1 + \delta_1$, $x_2 = l_2 + \delta_2$, ... $x_n = l_n + \delta_n$, otrzymamy pomijając wyrazy rzędów wyższych niż pierwszy:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(l_1, l_2, \ldots l_n) + \frac{\partial f}{\partial l_1}\delta_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2}\delta_2 + \ldots \frac{\partial f}{\partial l_n}\delta_n = 0. \tag{2*}$$

Oznaczając dla uproszczenia pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial l_i}$ przez a_i, będziemy mieli następnie:

$$f(l_1, l_2, \ldots l_n) + a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + \ldots a_n\delta_n = 0. \tag{2**}$$

Natomiast wartości spostrzeganych wielkości l nie sprawdzą funkcji do 0, lecz będzie:

$$f(l_1, l_2, \ldots l_n) = \omega, \quad \omega \gtrless 0, \text{ zatem:} \tag{3}$$

$$a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + \ldots a_n\delta_n + \omega = 0. \tag{4}$$

Wyrównanie można w tym przypadku przeprowadzić przez sprowadzenie spostrzeżeń zawarunkowanych do spostrzeżeń bezpośrednich.

Przyjmijmy dla ogólności, że spostrzeżenia l nie były o dokładności jednakowej, że zatem odpowiadają im wagi $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Wartość wyrównana x_i, dowolnego spostrzeżenia l_i, może być przedstawioną przy pomocy dwu spostrzeżeń niezależnych, z których jedno otrzymujemy wprost jako

$$x_i = l_i + \delta_i, \tag{5}$$

zaś drugie ze związku $[a\delta]+\omega=0$, wstawiając za δ_i wielkość x_i-l_i: $a_i\delta_i+a_2\delta_2+\ldots.+a_i(x_i-l_i)+\ldots+a_n\delta_n+\omega=0$, zatem

$$x_i=\left(l_i-\frac{\omega}{a_i}\right)-\frac{[a\delta]-a_i\delta_i}{a_i}, \text{ a właściwie } x_i=\varphi(l_1\ldots l_h,\, l_k,\ldots l_n)-$$

$$-\frac{[a\delta]-a_i\delta_i}{a_i}, \tag{6}$$

przyczem $-\dfrac{[a\delta]-a_i\delta_i}{a_i}=\delta'_i$ jest błędem pozornym spostrzeżenia $\left(l_i-\dfrac{\omega}{a_i}\right)=l_i'$.

Spostrzeżeniu l_i odpowiada waga p_i, zaś wagę p_i' spostrzeżenia $\left(l_i-\dfrac{\omega}{a_i}\right)$ możemy obliczyć w sposób następujący.

Warunek, który spełniają błędy pozorne δ, dotyczy oczywiście i błędów prawdziwych ε; zatem jest: $[a\varepsilon]+\omega=0$, lub

$$a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\ldots a_h\varepsilon_h+a_i(X_i-l_i)+a_k\varepsilon_k+\ldots a_n\varepsilon_n+\omega=0,$$

a dalej $X_i-l_i=-\dfrac{\omega}{a_i}-\dfrac{[a\varepsilon]-a_i\varepsilon_i}{a_i}$, w obec czego:

$$\varepsilon_i'=X_i-\left(l_i-\frac{\omega}{a_i}\right)=-\frac{[a\varepsilon]-a_i\varepsilon_i}{a_i}=-\frac{a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\ldots a_h\varepsilon_h+a_k\varepsilon_k+\ldots+a_n\varepsilon_n}{a_i}. \tag{7}$$

Przechodząc do błędów średnich, otrzymamy przeto (błąd śr. a priori wielk. $l_i-\dfrac{\omega}{a_i}$):

$$\mu_i'^2=\frac{[a^2\mu^2]-a_i^2\mu_i^2}{a_i^2}, \text{ zaś } \frac{1}{p_i'}=\frac{\left[\frac{aa}{p}\right]-\frac{a_i^2}{p_i}}{a_i^2}, \text{ a ostatecznie} \tag{8}$$

$$p_i'=\frac{a_i^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]-\frac{a_i^2}{p_i}}. \tag{9}$$

Średnię arytmetyczną ogólną x_i otrzymamy wedle wzoru $x=\dfrac{[pl]}{[p]}$:

$$x_i=\frac{l_ip_i+\left(l_i-\frac{\omega}{a_i}\right)p_i'}{p_i+p_i'}=l_i-\frac{\omega p_i'}{a_i(p_i+p_i')}; \tag{10}$$

$$\text{a ponieważ } p_i+p_i'=\frac{p_i\left[\frac{aa}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]-\frac{a_i^2}{p_i}}, \text{ przeto } \frac{p_i'}{p_i+p_i'}=\frac{a_i^2}{p_i\left[\frac{aa}{p}\right]},$$

$$\text{zatem } x_i=l_i-\omega\frac{a_i/p_i}{\left[\frac{aa}{p}\right]}. \tag{11}$$

Do dalszych wywodów dotyczących błędów średnich najlepiej użyć różnicy spostrzeżeń d.

W naszym przypadku

$$d=l_i-\frac{\omega}{a_i}-l_i=-\frac{\omega}{a_i}. \tag{12}$$

(jedn. błąd śr. przed wyr.) $\mu_0{}^2=d^2\frac{p_i p_i'}{p_i+p_i'}=\frac{\omega^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$, $\mu_0=\frac{\omega}{\sqrt{\left[\frac{aa}{p}\right]}}$, (13)

(bł. śr. spostrz. l_i przed wyr.) $\mu_i=\frac{\mu_0}{\sqrt{p_i}}=\omega\frac{\sqrt{\frac{1}{p_i}}}{\sqrt{\left[\frac{aa}{p}\right]}}$, zaś (14)

(błąd śr. wartości wyr. x_i) $\mu_{x_i}=\frac{\mu_0}{\sqrt{p_i+p_i'}}=\frac{\omega}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\sqrt{\left[\frac{aa}{p}\right]-\frac{a_i{}^2}{p_i}}\sqrt{\frac{1}{p_i}}$, (15)

(czyli błąd średni po wyrównaniu).

W *przypadku*, gdy $f(l_1, l_2, \ldots l_n)$ na kształt *sumy*, t. j. gdy $l_1+l_2+\ldots+l_n-A=\omega$ (dla $A=$ const.), wzory upraszczają się znacznie, otrzymamy je przy *wagach różnych* $p_1, p_2, \ldots p_n$, kładąc we wzorach poprzednio wyprowadzonych $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$. A zatem będzie:

$$x_i=l_i-\omega\frac{\frac{1}{p_i}}{\left[\frac{1}{p}\right]}, \tag{11*}$$

$$\mu_0=\frac{\omega}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}},\quad \mu_i=\omega\frac{\sqrt{\frac{1}{p_i}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}},\quad \text{zaś}\quad \mu_{x_i}=\frac{\omega}{\left[\frac{1}{p}\right]}\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p_i}}\sqrt{\frac{1}{p_i}}. \tag{12*}$$

Jeszcze bardziej uproszczą się wzory w przypadku $f(l_1, l_2, \ldots l_n)= =l_1+l_2+l_3+\ldots l_n$, t. j. gdy: $l_1+l_2+\ldots l_n-A=\omega$ (przyczem $A=$const.), a *wagi* $p_1=p_2=\ldots p_n=1$.

Wzory te przybierają wówczas następującą postać:

$$x_i=l_i-\frac{\omega}{n}, \tag{11**}$$

$$\mu=\frac{\omega}{\sqrt{n}}=\mu_i;\quad \text{zaś}\quad \mu_{x_i}=\frac{\omega}{n}\sqrt{n-1}. \tag{12**}$$

Przykład pierwszy. W trójkącie płaskim pomierzono kąty z jednakową dokładnością, uzyskując następujące wyniki:

$\alpha=$	44°	15′	30″
$\beta=$	70°	38′	15″
$\gamma=$	65°	05′	50″
$\Sigma=$	179°	59′	35″.

Warunek jaki mają spełnić wyrównane wartości kątów x_α, x_β i x_γ, odpowiadający równaniu (2-mu), jest:

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma - 180^0 = 0.$$

Ponieważ suma kątów mierzonych wynosi $179^0\,59'\,35''$, przeto otrzymamy z równania (3-go) wartość ω:

$$179^0\,59'\,35'' - 180^0\,00'\,00'' = -25'' = \omega.$$

Wartości wyrównane spostrzeżeń otrzymamy ze związku (11**):

$$x_\alpha = \alpha - \frac{\omega}{n} = \alpha + \frac{25''}{3} = 44^0\,15'\,38''{\cdot}33$$

$$x_\beta = \beta - \frac{\omega}{n} = \beta + \frac{25''}{3} = 70^0\,38'\,23''{\cdot}33$$

$$x_\gamma = \gamma - \frac{\omega}{n} = \delta + \frac{25''}{3} = 65^0\,05'\,58''{\cdot}33$$

$$179^0\,59'\,59''{\cdot}99.$$

Ze względu, że spostrzegaliśmy kąty — jak o tem pouczają nas poniżej obliczone błędy średnie — z dokładnością mniejszą niż na $10''$, można podać wyniki wyrównane w sekundach lub conajwyżej w dziesiątych sekund, dostosowując ich sumę w zupełności do 180^0.

Wyrównane spostrzeżenia są zatem;

$$x_\alpha = 44^0\,15'\,38''{\cdot}3$$
$$x_\beta = 70^0\,38'\,23''{\cdot}4$$
$$x_\gamma = 65^0\,05'\,58''{\cdot}3$$
$$\Sigma = 180^0\,00'\,00''.$$

Błędy średnie otrzymamy z wzoru (12**) dla wszystkich trzech spostrzeżeń:

$$\text{(przed wyrówn.) } \mu = \frac{25''}{\sqrt{3}} = \pm 14''{\cdot}4, \qquad \text{(po wyrówn.) } \mu_x = \frac{25''}{3}\sqrt{2} = 11''{\cdot}8.$$

Przykład drugi. Jako przykład drugi podajemy wyrównanie ciągu niwelacyjnego między dwoma znakami (markami) wysokości A i B.

Dane są wysokości punktów A i B oraz (z niwelacji) 3 wzniesienia, t. j. między p. A i 1, 1 i 2 oraz 2 i B; wreszcie znane są długości ciągów cząstkowych $L_{A.1}$ $L_{1.2}$ i $L_{2.B}$.

	$h_1 = +5{\cdot}315\ m$	$L_{A.1} = 1{\cdot}8\ km$
$H_A = 312{\cdot}351\ m$	$h_2 = -4{\cdot}229\ m$	$L_{1.2} = 0{\cdot}9\ km$
$H_B = 316{\cdot}125\ m$	$h_3 = +2{\cdot}695\ m$	$L_{2.B} = 2{\cdot}5\ km$
$\Delta H = H_B - H_A = +3{\cdot}474\ m$	$\Sigma h = +3{\cdot}781\ m.$	

Wedle wzoru (3)-go otrzymamy ω z równania:

$$\Sigma h - \Delta H = \omega = 3{\cdot}781\ m - 3{\cdot}774\ m = 7\ m/m.$$

Wagi wzniesień spostrzeganych przyjmiemy — jak dotychczas przy wyrównaniu spostrzeżeń uzyskanych przez niwelację — równe cyfrowo ***odwrotnościom długości ciągów***; ze względu, że w wyprowadzonych poprzednio wzorach znajdują się odwrotności wag, przeto

$$\frac{1}{p_1} = 1{\cdot}8, \quad \frac{1}{p_2} = 0{\cdot}9, \quad \frac{1}{p_3} = 2{\cdot}5, \quad \text{a} \quad \frac{1}{[p]} = 5{\cdot}2.$$

Wzniesienia wyrównane uzyskamy z wzoru (11*):

$$x_1 = +5\cdot315\,m - \frac{7\cdot0}{5\cdot2}\,.\,1\cdot8\,m/m = +5\cdot315\,m - 2\cdot4\,m/m = +5\cdot312{,}6\,m$$

$$x_2 = -4\cdot229\,m - \frac{7\cdot0}{5\cdot2}\,.\,0\cdot9\,m/m = -4\cdot229\,m - 1\cdot2\,m/m = -4\cdot230{,}2\,m$$

$$x_3 = +2\cdot695\,m - \frac{7\cdot0}{5\cdot2}\,.\,2\cdot5\,m/m = +2\cdot695\,m - 3\cdot4\,m/m = +2\cdot691{,}6\,m$$

$$\Sigma = +3\cdot774\,m$$

Błędy średnie otrzymamy z wzorów (12*):

$$\mu_0 = \frac{\omega}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}} = \frac{7\,m/m}{\sqrt{5\cdot2}} = \pm 3\cdot1\,m/m$$ (jedn. błąd śr. na długości 1-go *km*).

$$\mu_1 = \frac{7\cdot0}{\sqrt{5\cdot2}}\sqrt{1\cdot8}\,m/m = \pm 4\cdot1\,m/m,\quad \mu_2 = \frac{7\cdot0}{\sqrt{5\cdot2}}\sqrt{0\cdot9}\,m/m = \pm 2\cdot9\,m/m,$$

$$\mu_3 = \frac{7\cdot0}{\sqrt{5\cdot2}}\sqrt{2\cdot5}\,m/m = \pm 4\cdot9\,m/m,$$ jako błędy średnie przed wyrównaniem; zaś

$$\mu_{x_1} = \frac{7\cdot0}{5\cdot2}\sqrt{3\cdot4\,.\,1\cdot8}\,m/m = \pm 3\cdot3\,m/m,\quad \mu_{x_2} = \frac{7\cdot0}{5\cdot2}\sqrt{4\cdot3\,.\,0\cdot9}\,m/m = \pm 2\cdot6\,m/m,$$

$$\mu_{x_3} = \frac{7\cdot0}{5\cdot2}\sqrt{2\cdot7\,.\,2\cdot5}\,m/m = \pm 3\cdot5\,m/m,$$ jako błędy średnie wzniesień po wyrównaniu.

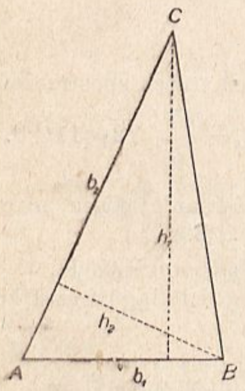

Fig. 6.

Przykład trzeci. W trójkącie pomierzono dwa boki b_1 i b_2, oraz dwie odpowiadające im wysokości h_1 i h_2; ponieważ należało znaleść rachunkiem wyrównawczym nietylko powierzchnię trójkąta, lecz także i wyrównane wartości mierzonych wielkości, przeto zastosowano przy wyrównaniu jako równanie odchyłki (wynikające z podwójnego obliczenia powierzchni):

$$\tfrac{1}{2}\,b_1\,h_1 - \tfrac{1}{2}\,b_2\,h_2 = \omega.$$

Liniowe równanie odchyłki wyrażonej, przez poprawki wielkości spostrzeganych, jest zatem

$$a_1\,\delta_1 + a_2\,\delta_2 + a_3\,\delta_3 + a_4\,\delta_4 + \omega = 0,$$

przyczem $a_1 = \frac{\partial f}{\partial b_1} = \frac{h_1}{2}$, $\delta_1 = \delta(b_1)$, $a_2 = \frac{\partial f}{\partial h_1} = \frac{b_1}{2}$, $\delta_2 = \delta(h_1)$

$$a_3 = \frac{\partial f}{\partial b_2} = -\frac{h_2}{2},\ \delta_3 = \delta(b_2),\ a_4 = \frac{\partial f}{\partial h_2} = -\frac{b_2}{2},\ \delta_4 = \delta(h_2).$$

Wartości spostrzeżeń są następujące:

$$b_1 = 79\cdot35\,m,\ h_1 = 129\cdot36\,m,\ b_2 = 142\cdot66\,m,\ h_2 = 71\cdot86\,m.$$

Odchyłka $\omega = 5132\cdot36 - 5125\cdot77 = 6\cdot59\,m^2$.

Przyjmując, że spostrzeżeniu 100 *m* długości odpowiada waga równa jedności, otrzymamy odwrotności wag spostrzeżeń z wzoru $\frac{1}{p_i} = \frac{\nu^2 d}{\nu^2\,100} = \frac{d}{100}$, zatem

$$\frac{1}{p_1} = 0\cdot79,\quad \frac{1}{p_2} = 1\cdot29,\quad \frac{1}{p_3} = 1\cdot43,\quad \frac{1}{p_4} = 0\cdot72.$$

Dalszy ciąg rachunku przedstawia się schematycznie:

L. p.	a	$\frac{1}{p}$	aa	$\frac{a}{p}$	$\frac{aa}{p}$	δ w cm	Długość spostrzegana	Długość wyrównana	Błędy średn. przed wyrównaniem	Błędy średn. po wyrównaniu
1	64·7	0·79	4186	51.1	3307	−3·1	79·35 m	79·319 m	5·6 cm	4·7 cm
2	39·7	1·29	1576	51·2	2033	−3·1	129·36 „	129·329 „	7·2 „	6·5 „
3	−35·9	1·43	1289	51·3	1843	+3·1	142·66 „	142·691 „	7·6 „	6·9 „
4	−71·3	0·72	5084	51·3	3660	+3·1	71·86 „	71·891 „	5·3 „	4·4 „
				$\left[\frac{aa}{p}\right]$=10843						

$$\delta\,(cm) = -\frac{\frac{a}{p}}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\,100\,\omega, \qquad \mu_0 = \frac{100\,\omega}{\sqrt{\left[\frac{aa}{p}\right]}}\,cm = \pm\,6{\cdot}3\ cm.$$

Początkowy warunek przedstawia się po wyrównaniu: 5129·12—5129·10=
=0·02 m^2 (zamiast poprzednich 6·59 m^2). Zgodność zatem wystarczająca.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich (pośredniczących).

§ 1. Równania błędów. Równania normalne.

O spostrzeżeniach pośrednich mówiliśmy w §§ 1-szym i 2-gim rozdziału drugiego. Z rozważań tych wynika, że $L_i + \delta_i$, wartość spostrzeżenia poprawiona o błąd pozorny δ_i, t. j. wartość *„wyrównana“* spostrzeżenia, da się zawsze przedstawić przy pomocy związku liniowego niewiadomych niezależnych kształtu:

$$L_i + \delta_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots, \text{ lub} \tag{1}$$

$$L_i + \delta_i = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta + \ldots + f(x_0, y_0, z_0, \ldots). \tag{2}$$

Pierwsze równanie odnosi się do przypadku, gdy spostrzeżenia są *liniowemi* funkcjami wyznaczanych wielkości stałych x, y, $z, \ldots$; drugie ma miejsce, gdy związki między spostrzeżeniami a wielkościami stałemi x, y, $z, \ldots$ nie mają kształtu *liniowego,* gdy zatem $L_i + \delta_i = f_i(x, y, z, \ldots)$. Przez rozwinięcie funkcji $f(x, y, z, \ldots)$ w *szereg Taylora,* z opuszczeniem wyrazów rzędu wyższego niż pierwszy, sprowadzamy ją w tym przypadku do kształtu liniowego, tak że związek ostatnio wymieniony przybiera kształt równania (2). Oczywiście może mieć to miejsce tylko wówczas, gdy x_0, y_0, $z_0, \ldots$, wartości przybliżone niewiadomych, są tak bliskie wartościom x, y, $z, \ldots$, że opuszczenie wyrazów rzędów wyższych niż pierwszy nie będzie miało wpływu na wynik wyrównania w znaczeniu praktycznem.

Ale nawet w przypadku liniowego związku między spostrzeżeniami a niewiadomemi wprowadzamy do rachunku bardzo często wartości przybliżone x_0, y_0, $z_0, \ldots$, a to celem uniknięcia operowania liczbami wielkiemi. Równanie (1) przybiera wówczas kształt równania (2).

Związki na błędy pozorne δ_i przedstawiają się ze względu na równania (1) i (2):

$$\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + l_i, \text{ względnie} \tag{1*}$$

$$\delta_i = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta + \ldots + l_i. \tag{2*}$$

Spółczynniki a_i, b_i, c_i,... równania pierwszego są wielkościami bezbłędnemi, znanemi ze związków między spostrzeżeniami z niewiadomemi, zaś wyraz wolny $l_i = -L_i$ jest wartością spostrzeżenia L_i, wziętą ze znakiem ujemnym.

W równaniu (2*) oznaczają spółczynniki a_i, b_i, c_i,... *cząstkowe pochodne* funkcji $f_i(x, y, z, \ldots)$ względem niewiadomych $x, y, z, \ldots$; a zatem:

$$a_i = \frac{\partial f_i}{\partial x} = \backsim \frac{\partial f_i}{\partial x_0}, \quad b_i = \frac{\partial f_i}{\partial y} = \backsim \frac{\partial f_i}{\partial y_0}, \quad c_i = \frac{\partial f_i}{\partial z} = a \frac{\partial f_i}{\partial z_0}, \ldots,$$

przyczem uważamy je za wielkości bezbłędne; niewiadomemi są w tym przypadku poprawki wartości przybliżonych:

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0, \quad \zeta = z - z_0, \ldots,$$

zaś *wyraz wolny* l_i oznacza tu *różnicę między przybliżoną a spostrzeganą wartością funkcji:*

$$l_i = f_i(x_0, y_0, z_0, \ldots) - L_i.$$

Jak tedy widzimy, kształt równań określających błędy pozorne jest w obu przypadkach jednakowy, o ile nazwiemy niewiadome rownań ogólnie $x, y, z, \ldots$ (bez względu na ich znaczenie), a mianowicie:

$$\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + l_i;$$

równania tego kształtu nazywamy *równaniami błędów*, a *liczba* ich odpowiada *ilości spostrzeżeń n*.

Dla uproszczenia dalszych wywodów będziemy traktowali oba przypadki (1*) i (2*) równocześnie, co jest możliwem, o ile nadamy spółczynnikom $a, b, c, \ldots$, niewiadomym $x, y, z, \ldots$ oraz wyrazom wolnym l odpowiednie znaczenie zależne od tego, czy odnoszą się do przypadku (1*) czy też (2*).

Przyjmując dla ogólności, że spostrzeżeniom L odpowiadają różne wagi p, otrzymamy n równań błędów o wagach $p_1, p_2, \ldots p_n$, z których należy — jak to wykazano w końcowych ustępach § 1-go i początkowych § 2-go rozdz. II-go — *przy* pomocy *warunku:*

$$[p\delta\delta] = \boldsymbol{min}. \tag{3}$$

znaleść *najbardziej prawdopodobne wartości niewiadomych* $x, y, z, \ldots$ pod założeniem, że ilość niewiadomych $k < n$.

Równania błędów w liczbie n przedstawią się następująco:

$$\left.\begin{array}{ll}
\delta_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1, & \text{z wagą } p_1 \\
\delta_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2, & \quad \text{"} \quad \text{"} \quad p_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\delta_n = a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + l_n & \quad \text{"} \quad \text{"} \quad p_n.
\end{array}\right\} \tag{4}$$

Jeżeli niewiadome $x, y, z, \ldots$ mają spełniać warunek (3)-ci, muszą być cząstkowe pochodne sumy $[p\delta\delta]$ względem niewiadomych równe zeru, zatem:

$$\frac{\partial[p\delta\delta]}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial[p\delta\delta]}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial[p\delta\delta]}{\partial z} = 0, \ldots; \tag{5}$$

liczba tak utworzonych związków odpowiada liczbie niewiadomych, a zatem k.

Weźmy na uwagę pierwszy związek {równań (5)}:

$$0=\frac{\partial[p\partial\partial]}{\partial x}=\frac{\partial[p\partial\partial]}{\partial\delta_1}\frac{\partial\delta_1}{\partial x}+\frac{\partial[p\delta\delta]}{\partial\delta_2}\frac{\partial\delta_2}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial[p\delta\delta]}{\partial\delta_n}\frac{\partial\delta_n}{\partial x}; \qquad (5^*)$$

ponieważ $\frac{\partial[p\delta\delta]}{\partial\delta_i}=2p_i\delta_i$, zaś $\frac{\partial\delta_i}{\partial x}=a_i$, przeto

$$\frac{\partial[p\delta\delta]}{\partial x}=2p_1a_1\delta_1+2p_2a_2\delta_2+\ldots+2p_na_n\delta_n=0, \text{ lub}$$

$$[pa\delta]=0. \qquad (6^*)$$

Analogicznie przekształci się związek drugi {równań (5)}:

$$0=\frac{\partial[p\delta\delta]}{\partial y}=\frac{\partial[p\delta\delta]}{\partial\delta_1}\frac{\partial\delta_1}{\partial y}+\frac{\partial[p\delta\delta]}{\partial\delta_2}\frac{\partial\delta_2}{\partial y}+\ldots\frac{\partial[p\delta\delta]}{\partial\delta_n}\frac{\partial\delta_n}{\partial y} \qquad (5^{**})$$

ze względu, że $\frac{\partial\delta_i}{\partial y}=b_i$, na:

$$\frac{\partial[p\delta\delta]}{\partial y}=2p_1b_1\delta_1+2p_2b_2\delta_2+\ldots 2p_nb_n\delta_n=0, \text{ lub}$$

$$[pb\delta]=0. \qquad (6^{**})$$

Trzeci i każdy następny związek aż do k-tego włącznie urobimy również analogicznie, otrzymując $[pc\delta]=0,\ldots[pk\delta]=0$, zatem ogólnie:

$$[pi\delta]=0. \quad (\text{dla } i \text{ równego } a, b, c\ldots k). \qquad (6)$$

Tych k związków kształtu równania (6)-go nazywamy ***równaniami normalnemi.*** Ponieważ ilość ich odpowiada ***ilości niewiadomych,*** przeto rugując z nich przy pomocy n równań błędów wszystkie błędy δ, otrzymamy k równań, z których wyznaczymy jednoznacznie k niewiadomych $x, y, z,\ldots$

Po wspomnianem podstawieniu przedstawi się nam pierwsze równanie normalne w postaci:

$$\begin{aligned}&p_1a_1(a_1x+b_1y+c_1z+\ldots\ldots+l_1)+\\+&p_2a_2(a_2x+b_2y+c_2z+\ldots\ldots+l_2)+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+&p_na_n(a_nx+b_ny+c_n+\ldots\ldots+l_n)=0,\end{aligned}$$

a po wymnożeniu i zesumowaniu kolumnami

$$[paa]x+[pab]y+[pac]z+\ldots[pal]=0, \qquad (6^*)$$

zaś drugie przy analogicznem postępowaniu:

$$[pab]x+[pbb]y+[pbc]+\ldots+[pbl]=0, \qquad (6^{**})$$

dalej trzecie jako:

$$[pac]x+[pbc]y+[pcc]z+\ldots[pcl]=0 \qquad (6^{***})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wreszcie k-te równanie normalne w postaci:

$$[pak]x+[pbk]y+[pck]z+\ldots\ldots+[pkl]=0,$$

(przyczem $[paa]=p_1a^2_1+p_2a^2_2+\ldots.p_na_n^2$, $[pab]=p_1a_1b_1+p_2a_2b_2+\ldots.+$ $+p_na_nb_n\ldots.$ i t. d.).

Zestawiając wszystkie równania normalne, otrzymamy zatem k równań kształtu:

$$\left.\begin{array}{l} [paa]x+[pab]y+[pac]z+\ldots.+[pal]=0 \\ [pab]x+[pbb]y+[pbc]z+\ldots.+[pbl]=0 \\ [pac]x+[pbc]y+[pcc]z+\ldots.+[pcl]=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pak]x+[pbk]y+[pck]z+\ldots.+[pkl]=0. \end{array}\right\} \quad (6)$$

W przypadku wag równych przybierają równania normalne postać:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]x+[ab]y+[ac]z+\ldots.+[al]=0 \\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+\ldots.+[bl]=0 \\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+\ldots.+[cl]=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [ak]x+[bk]y+[ck]z+\ldots.+[kl]=0. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Z równań tych wyznaczamy jednoznacznie wszystkie *niewiadome*, a następnie *z równań błędów wartości poszczególnych δ.*

§ 2. Rozwiązanie równań normalnych sposobem Gaussa.

Przy niewielkiej ilości równań normalnych, (t. j. 1 lub 2) jest obiór metody rozwiązywania równań normalnych rzeczą stosunkowo *dość obojętną;* o ile jednak mamy do czynienia z ilością *większą* (t. j. 3 lub więcej), należy wedle ogólnego zdania wybitnych pracowników w tej dziedzinie zastosować *specjalną metodę* rozwiązywania równań normalnych, obmyślaną przez *Gaussa.*

Metoda wyznaczników może być z korzyścią stosowana przy rozwiązywaniu dwu równań normalnych, natomiast począwszy od trzech równ. norm. nastręcza — jak uczy doświadczenie — więcej roboty rachunkowej [1]).

Metoda Gaussa jest metodą rugowania niewiadomych; zaletą jej jest wielka *przejrzystość* rachunku, dalej *łatwa do zapamiętania budowa formul,* jak i możliwość bardzo ścisłej *kontroli* w ciągu całego rachunku.

Prócz metod ściśle rachunkowych można zastosować w praktyce i sposoby *wykreślne* rozwiązywania równań normalnych. Jednym z takich sposobów jest sposób podany przez autora [2]), który daje nam możność wyznaczenia niewiadomych, błędów śr. i t. p. z dowolną żądaną dokła-

[1]) Pierwszym, który zastosował metodę wyznaczników do rachunku wyrównawczego był prof. Politechniki Lwowskiej *D. Zbrożek,* umieszczając w IX t. Pamiętników Akademji Umiejętności w Krakowie (1884 r.) „Zastosowanie wyznaczników w teorji najmn. kwadr.".

[2]) *Dr. K. Weigel.* Graphische Ausgleichung der vermittelnden,... Beobachtungen, österr. Zeitschrift f. Vermessungswesen, 1910.

dnością, przy stosunkowo niewielkim nakładzie pracy. Sposób ten nadaje się specjalnie wówczas, gdy liczba równań jest znaczniejsza (a więc od 3 począwszy).

Dla uproszczenia wzorów podamy *sposób Gaussa dla trzech równań normalnych o wagach równych;* wzory, które wyprowadzimy, mogą być stosowane i dla spostrzeżeń o wagach różnych, o ile przeistoczymy każdą sumę kształtu $[aa]$, $[ab]$,... na sumy z wagami, a więc na $[paa]$, $[pab]$ i t. d.

Mając rozwiązać system równań normalnych:

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]x+[ab]y+[ac]z+[al]=0\\
&[ab]x+[bb]y+[bc]z+[bl]=0\\
&[ac]x+[bc]y+[cc]z+[cl]=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

mnożymy pierwsze równanie kolejno przez ilorazy $\frac{[ab]}{[aa]}, \frac{[ac]}{[aa]}$ (przy większej ilości równ. norm. przez $\frac{[ad]}{[aa]}, \frac{[ae]}{[aa]}$, i t. d.), uzyskując równania:

$$\left.\begin{aligned}
&[ab]x+\frac{[ab][ab]}{[aa]}y+\frac{[ab][ac]}{[aa]}z+\frac{[ab][al]}{[aa]}\\
&[ac]x+\frac{[ab][ac]}{[aa]}y+\frac{[ac][ac]}{[aa]}z+\frac{[ac][al]}{[aa]}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Odejmując pierwsze równanie systemu (2)-go od drugiego równania normalnego, a drugie równ. syst. (2)-go od trzeciego r. norm., otrzymujemy dwa równania wolne od niewiadomej x:

$$\left\{[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right\}y+\left\{[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right\}z+[bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}=0$$

$$\left\{[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right\}y+\left\{[cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}\right\}z+[cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}=0.$$

Równania te nazywamy równaniami normalnemi *raz zredukowanemi;* wedle symboliki Gaussa piszemy je w następującej formie skróconej:

$$\begin{aligned}
&[bb.1]y+[bc.1]z+[bl.1]=0\\
&[bc.1]y+[cc.1]z+[cl.1]=0,
\end{aligned} \qquad (3)$$

(ogólnie $(\overset{v}{k}-1)$ równań normalnych raz zredukowanych).

Jedynka umieszczona w klamrze oznacza ilość przeprowadzonych redukcyj, a więc w tym przypadku jedną, zaś litery umieszczone w klamrze wskazują nam sumę, z której powstał zredukowany wyraz; dalej należy pamiętać, że pierwsza redukcja odbywa się przy pomocy odjęcia od sumy redukowanej ilorazu o *mianowniku* $[aa]$, a o *liczniku* składającym się z iloczynu dwu sum powstałych z kombinacji litery a z literami sumy redukowanej, jak to widać na wyrazach:

$$[bb.1]=[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]},\quad [bc.1]=[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]},\quad [bl.1]=[bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}.$$

Pewną *kontrolę*, czy wyraz został dobrze zredukowany stanowi i ten szczegół, że wyraz zredukowany, pojęty algebraicznie, równa się zeru. Zatem, gdy zamiast np.

$$[cl.1]=[cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]} \text{ napiszemy } (cl)-\frac{(ac)(al)}{(aa)},$$

to wyrażenie to: $\dfrac{(aa)(cl)-(ac)(al)}{(aa)}=\dfrac{a^2cl-a^2cl}{a^2}=0.$

Druga redukcja, przeprowadzona analogicznie jak pierwsza, przez pomnożenie pierwszego równ. zredukowanego przez $\dfrac{[bc.1]}{[bb.1]}$ i odjęcie go od drugiego r. zred., daje nam w przypadku 3 niewiadomych *jedno równanie normalne zredukowane podwójnie:*

$$\left\{[cc.1]-\frac{[bc.1][bc.1]}{[bb.1]}\right\}z+[cl.1]-\frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}=0,$$

(ogólnie (k—2) równań normalnych zredukowanych podwójnie).

Oznaczając wedle symboliki Gaussa analogicznie jak przy redukcji pierwszej

$$[cc.1]-\frac{[bc.1][bc.1]}{[bb.1]}=[cc.2],\quad [cl.1]-\frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}=[cl.2],$$

otrzymujemy, jako wynik drugiej redukcji w naszym przypadku:

$$\mathbf{[cc.2]z+[cl.2]=0.} \tag{4}$$

Zestawmy w 3 grupach równania normalne nieredukowane, raz oraz dwa razy (w naszym przypadku) redukowane, a otrzymamy:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]x+[ab]y+[ac]z+[al]=0\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bl]=0\\ [ac]\,x+[bc]\,y+[cc]z+[cl]=0\end{array}\right\}\ \text{równ. normalne} \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{l}[bb.1]y+[bc.1]z+[bl.1]=0\\ [bc.1]\,y+[cc.1]\,z+[cl.1]=0\end{array}\right\}\ \text{równ. normalne 1 reduk.} \tag{6}$$

$$[cc.2]z+[cl.2]=0\ \}\ \text{równ. norm. 2 razy reduk.} \tag{7}$$

Z tych trzech grup równań (w przypadku 3 niewiad.) weźmy z każdej po pierwszym równaniu i zestawmy je w nową grupę równań:

$$\begin{array}{r}\mathbf{[aa]x+[ab]y+\ \ [ac]z+\ \ [al]=0}\\ \mathbf{[bb.1]y+[bc.1]z+[bl.1]=0}\\ \mathbf{[cc.2]z+[cl.2]=0.}\end{array} \tag{8}$$

Równań tych mamy w naszym przypadku 3, ogólnie przy k niewiadomych będzie ich k, tak, że możemy z nich wyznaczyć wszystkie niewiadome jednoznacznie, poczynając od ostatniego równania.

Ten system równ. normalnych przysposobionych do wyznaczenia niewiadomych nazywamy systemem *zredukowanych równań normalnych,* lub krótko *zredukowanemi równaniami normalnemi.*

Począwszy *od równania ostatniego wyznaczamy wstecz* przy pomocy ostatnio zestawionych równań (8) *niewiadome* x, y, z.

W przypadku wag różnych, zmieniają się wszystkie sumy kształtu $[aa]$, $[ab]\ldots$, $[bb.1]$, $[bc.1]\ldots$, $[cc.2]$, $[cl.2]$, na sumy: $[paa]$, $[pab]\ldots$, $[pbb.1]$, $[pbc.1]\ldots$, $[pcc.2]$, $[cl.2]$, co nie wymaga bliższych objaśnień. Jak to obaczymy wkrótce, będzie nam potrzebną do wyznaczenia błędu śr. suma $[\delta\delta]$, względnie suma $[p\,\delta\delta]$. Znając wartości niewiadomych, możemy obliczyć wartości błędów pozornych δ, tem samem δ^2, a wreszcie i $[\delta\delta]$, zaś w przypadku wag różnych $p\delta^2$ i ostatecznie $[p\,\delta\delta]$.

§ 3. Kontrole rachunkowe.

Wspomnieliśmy już poprzednio, że sposób Gaussa daje nam możliwość kontroli rachunkowej, niezbędnej przy żmudnych obliczeniach rachunku wyrównawczego. Kontrole te mają tem większe znaczenie praktyczne, że dotyczą różnych stadjów rachunku, a każda część skontrolowana może być uważana za wolną od błędów rachunkowych, o ile kontrola wypadła zadowalająco.

1. *Kontrole spółczynników równań normalnych, oraz zredukowanych równań normalnych.*

Dodając spółczynniki niewiadomych i wyraz wolny w każdem równaniu błędów, otrzymamy pewne liczby, które wzięte ze znakiem *przeciwnym* sprawdzą nam tak utworzone równania *do zera;* zatem dla 3 niewiadomych:

$$a_1+b_1+c_1+l_1+s_1=0$$
$$a_2+b_2+c_2+l_2+s_2=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n+b_n+c_n+l_n+s_n=0,$$ przyczem suma ich jest również równą zeru,
$$[a]+[b]+[c]+[l]+[s]=0.$$

Ostatnie równanie dostarcza nam dowodu, że wszystkie s obliczono dobrze. Mnożąc każde równanie przez a z odpowiednim wskaźnikiem otrzymamy:

$$a_1\,a_1+a_1\,b_1+a_1\,c_1+a_1\,l_1+a_1\,s_1=0$$
$$a_2\,a_2+a_2\,b_2+a_2\,c_2+a_2\,l_2+a_2\,s_2=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n\,a_n+a_n\,b_n+a_n\,c_n+a_n\,l_n+a_n\,s_n=0,$$ a sumując te równania:
$$[aa]+[ab]+[ac]+[al]+[as]=0.$$

Analogicznie otrzymamy, sumując poprzednie równania pomnożone przez odpowiednie b, c, l i s:

$$[ab]+[bb]+[bc]+[bl]+[bs]=0$$
$$[ac]+[bc]+[cc]+[cl]+[cs]=0$$
$$[al]+[bl]+[cl]+[ll]+[ls]=0$$
$$[as]+[bs]+[cs]+[ls]+[ll]=0.$$

Zestawiając powyższe równania kontrolne schematycznie będziemy mieli (dla 3 niewiadomych):

a) Kontrola wyrazów s:

a_1	b_1	c_1	l_1	s_1	0
a_2	b_2	c_2	l_2	s_2	0
....	....	....	....	....	0
....	....	....	....	....	0
a_n	b_n	c_n	l_n	s_n	0
$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[l]$	$[s]$	0

b) Kontrola spółcz. równ. norm.:

$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$	0
$[ab]$	$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	$[bs]$	0
$[ac]$	$[bc]$	$[cc]$	$[cl]$	$[cs]$	0
$[al]$	$[bl]$	$[cl]$	$[ll]$	$[ls]$	0
$[as]$	$[bs]$	$[cs]$	$[ls]$	$[ss]$	0
0	0	0	0	0	

W analogiczny sposób można utworzyć dalsze kontrole spółczynników zredukowanych równ. normalnych.

Zatem w przypadku 3 niewiadomych będziemy mieli prócz kontroli *a)* i *b)*:

c) Kontr. sp. 1. redukcji:

$[bb.1]$	$[bc.1]$	$[bl.1]$	$[bs.1]$	0
$[bc.1]$	$[cc.1]$	$[cl.1]$	$[cs.1]$	0
$[bl.1]$	$[cl.1]$	$[ll.1]$	$[ls.1]$	0
$[bs.1]$	$[cs.1]$	$[ls.1]$	$[ss.1]$	0
0	0	0	0	

d) Kontr. sp. 2. red.:

$[cc.2]$	$[cl.2]$	$[cs.2]$	0
$[cl.2]$	$[ll.2]$	$[ls.2]$	0
$[cs.2]$	$[ls.2]$	$[ss.2]$	0
0	0	0	0

e) Kontr. sp. 3. red.:

$[ll.3]$	$[ls.3]$	0
$[ls.3]$	$[ss.3]$	0
0	0	

Przyczem $[ll.3]=[ll.2]-\frac{[cl.2][cl.2]}{[cc.2]}$; zaś $[ls.3]$ i $[ss.3]$ są wyrazy utworzone w sposób analogiczny. Ostatnia kontrola *e)* jest potrzebną ze względu na wyrażenie $[ll.3]$, którem posługujemy się przy kontroli $[\delta\delta]$, (o czem później)[1]).

[1]) Inny sposób kontroli używany zazwyczaj przez instytuty geodezyjne podaję w końcowym przykładzie § 7-go. (str. 101.)

Wszystkie te kontrole, uzyskane dla przypadku spostrzeżeń o wagach równych, można z łatwością wyprowadzić i dla spostrzeżeń o wagach różnych. Wszystkie sumy kontrol od *b)* do *e)* włącznie będą zawierały wówczas *i wagi p;* a zatem będziemy mieli zamiast $[aa]$, $[ab]$ i t. d.... $[paa]$, $[pab]$ i t. d.... aż do sumy $[pss.3]$ włącznie, którą otrzymamy w miejsce sumy $[ss.3]$.

2. *Kontrola sumy* $[\delta\delta]$ względnie $[p\delta\delta]$.

Sumę $[\delta\delta]$ względnie $[p\delta\delta]$, wyznaczoną wprost z równań błędów, możemy otrzymać także i inną drogą, uzyskując w ten sposób kontrolę tej sumy mającej — jak obaczymy później — bardzo ważne znaczenie przy wyrównaniu spostrzeżeń pośrednich.

Dla ogólności przyjmijmy, że wagi spostrzeżeń są różne, że zatem mamy wyprowadzić nowy związek na $[p\delta\delta]$, który — w przypadku wag równych — przejdzie na $[\delta\delta]$.

Weźmy na uwagę równanie błędów: $\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z + l_i$. Mnożąc je przez $p_i l_i$, otrzymamy:

$$p_i l_i \delta_i = p_i a_i l_i x + p_i b_i l_i y + p_i c_i l_i z + p_i l_i l_i, \tag{1}$$

zaś mnożąc przez $p_i \delta_i$:

$$p_i \delta_i \delta_i = p_i a_i \delta_i x + p_i b_i \delta_i y + p_i c_i \delta_i z + p_i l_i \delta_i. \tag{2}$$

Dodając do siebie n równań kształtu (1), a następnie n równań kształtu (2), otrzymamy dwa równania:

$$[pl\delta] = [pal]x + [pbl]y + [pcl]z + [pll] \tag{1*}$$

oraz: $$[p\delta\delta] = [pa\delta]x + [pb\delta]y + [pc\delta]z + [pl\delta]. \tag{2*}$$

Ponieważ $[pa\delta] = [pb\delta] = [pc\delta] = 0$ jako równania normalne, (co stwierdziliśmy przy wyprowadzaniu równ. normalnych), przeto

$$[p\delta\delta] = [pl\delta], \text{ lub} \tag{3}$$

$$\mathbf{[p\delta\delta] = [pal]x + [pbl]y + [pcl]z + [pll]}. \tag{4}$$

W równaniu tem wyrugujemy niewiadome x, y, z przy pomocy systemu zredukowanych równań normalnych.

Wstawiając za x wyrażenie uzyskane z pierwszego zr. r. norm.

$$x = -\frac{[pab]}{[paa]}y - \frac{[pac]}{[paa]}z - \frac{[pal]}{[paa]}, \text{ otrzymamy:}$$

$$[p\delta\delta] = [pll] - \frac{[pal][pal]}{[paa]} + \left\{[pbl] - \frac{[pab][pal]}{[paa]}\right\}y + \left\{[pcl] - \frac{[pac][pal]}{[paa]}\right\}z$$

lub: $$[p\delta\delta] = [pll.1] + [pbl.1]y + [pcl.1]z; \tag{4*}$$

wstawiając następnie (z 2. r. zred.)

$$y = -\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}z - \frac{[pbl.1]}{[pbb.1]}, \text{ otrzymamy dalej:}$$

$$[p\delta\delta] = [pll.1] - \frac{[pbl.1][pbl.1]}{[pbb.1]} + \left\{[pcl.1] - \frac{[pbc.1][pbl.1]}{[pbb.1]}\right\}z, \text{ lub:}$$

$$[p\delta\delta] = [pll.2] + [pcl.2]z; \tag{4**}$$

rugując wreszcie i z przy pomocy związku:

$$z = -\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}, \text{ otrzymamy ostatecznie:}$$

$$[p\delta\delta] = [pll.2] - \frac{[pcl.2][pcl.2]}{[pcc.2]} = [pll.3]. \qquad (4^{***})$$

Dla spostrzeżeń o wagach $p=1$ przejdzie powyższy związek w równanie kontrolne:

$$[\delta\delta] = [ll.3]. \qquad (5)$$

Zauważyć należy, że suma $[ll.3]$ względnie $[pll.3]$ jest sprawdzona kontrolą *e)*, jak to poprzednio uwidoczniono; o ile zatem ta kontrola wypadła zadowalająco, mamy gwarancję, że wyrażenie to jest wolne od błędów rachunkowych.

Powyższy dowód, przeprowadzony dla trzech niewiadomych, może być uogólniony dla k niewiadomych, w którym to przypadku wypadnie:

$$[p\delta\delta] = [pll.k], \qquad (4)$$

jako k-ta redukcja sumy $[pll]$.

§ 4. Jednostkowy błąd średni μ_0.

W przypadku, gdy spostrzeżeniom odpowiadają wagi różne, obieramy jako miarę dokładności spostrzeżeń ***błąd śr. spostrzeżenia o wadze*** $p=1$, nazywając go ***jednostkowym błędem średnim*** μ_0.

Przy wyrównywaniu spostrzeżeń równodokładnych ($p=1$) odpowiada ten błąd każdemu spostrzeżeniu, nazywamy go więc wówczas krótko błędem średnim μ (bez wskaźnika $_0$).

Dla ogólności przyjmijmy, że spostrzeżeniom naszym odpowiadają wagi różne; wzór wyprowadzony dla tego założenia będzie oczywiście ważny i w szczególnym przypadku wag $p=1$, jak to miało miejsce w wywodach poprzednich.

Natomiast ograniczymy się ze zrozumiałych powodów tylko do ***trzech niewiadomych***, uogólniając potem otrzymany wzór dla k niewiadomych.

Napiszmy system zredukowanych równań normalnych w następującej formie:

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{[pab]}{[paa]} y + \frac{[pac]}{[paa]} z = -\frac{[pal]}{[paa]} &= u_1 \\ y = \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} z = -\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]} &= u_2 \\ z = -\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]} &= u_3. \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

*

Wyrażając niewiadome x, y, z przez wielkości u_1, u_2, u_3, otrzymamy:

$$z = u_3$$

$$y = u_2 - \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} u_3$$

$$x = u_1 - \frac{[pab]}{[paa]}\left(u_2 - \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} u_3\right) - \frac{[pac]}{[paa]} u_3, \text{ a ostatecznie:}$$

$$z = u_3$$

$$y = u_2 - \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} u_3$$

$$x = u_1 - \frac{[pab]}{[paa]} u_2 + \frac{[pab]}{[paa]} \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} u_3 - \frac{[pac]}{[paa]} u_3.$$

Wartości te, wstawione do równania błędów $\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z + l_i$, przekształcą je następująco:

$$\delta_i = a_i \left\{ \begin{array}{l} u_1 + \\ -\frac{[pab]}{[paa]} u_2 + \\ +\frac{[pab]}{[paa]} \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} u_3 + \\ -\frac{[pac]}{[paa]} u_3 \end{array} \right\} + b_i \left\{ \begin{array}{l} u_2 + \\ -\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} u_3 \end{array} \right\} + c_i u_3 + l_i. \qquad (2)$$

Po uporządkowaniu prawej strony tego równania podług u_1, u_2 i u_3, otrzymamy dalej:

$$\delta_i = a_i u_1 + \left\{ b_i - a_i \frac{[pab]}{[paa]} \right\} u_2 + \left\{ \left(c_i - a_i \frac{[pac]}{[paa]} \right) - \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} \left(b_i - a_i \frac{[pab]}{[paa]} \right) \right\} u_3 + l_i,$$

a oznaczając $b_i - a_i \frac{[pab]}{[paa]} = b_i'$, $c_i - a_i \frac{[pac]}{[paa]} = c_i'$, $c_i' - \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} b' = c_i''$:

$$\delta_i = a_i u_1 + b_i' u_2 + c_i'' u_3 + l_i. \qquad (2^*)$$

Związek ten przedstawia nam równanie błędów o niewiadomych u_1, u_2, u_3. Biorąc na uwagę n takich równań, można z nich wyznaczyć, stosując metodę najmniejszych kwadratów, najbardziej prawdopodobne wartości u_1, u_2 i u_3.

Natomiast prawdziwe wartości niewiadomych u_1', u_2' i u_3' będą zawarte w n analogicznie utworzonych związkach, o ile zastąpimy błędy pozorne prawdziwemi, a zatem:

$$\varepsilon_i = a_i u_1' + b_i' u_2' + c_i'' u_3' + l_i. \qquad (2^{**})$$

Odejmując ostatnio otrzymany związek od poprzedniego, otrzymamy:

$$\delta_i - \varepsilon_i = a_i (u_1 - u_1') + b_i' (u_2 - u_2') + c_i'' (u_3 - u_3'), \text{ lub:}$$

$$\delta_i = a_i \Delta u_1 + b_i' \Delta u_2 + c_i'' \Delta u_3 + \varepsilon_i. \qquad (3)$$

Związek ten jest również równaniem błędów, w którem *wyraz wolny* *jest błędem prawdziwym* ε. O ile waga spostrzeżenia L_i była p_i, jest ona oczywiście także wagą odpowiedniego ε_i.

Najbardziej prawdopodobne wartości niewiadomych Δu_1, Δu_2, Δu_3 otrzymamy zatem na podstawie równań normalnych kształtu:

$$\begin{aligned}
&[paa]\Delta u_1 + [pab']\Delta u_2 + [pac'']\Delta u_3 + [pa\varepsilon] = 0 \\
&[pab']\Delta u_1 + [pb'b']\Delta u_1 + [pb'c'']\Delta u_3 + [pb'\varepsilon] = 0 \\
&[pac'']\Delta u_1 + [pb'c'']\Delta u_2 + [pc''c'']\Delta u_3 + [pc''\varepsilon] = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Łatwo jednak udowodnić, rozwijając *sumy* $[pab']$, $[pac'']$, $[pb'c'']$, że wartości ich są *równe zeru.*

N. p. $[pab'] = p_1 a_1\left(b_1 - a_1\dfrac{[pab]}{[paa]}\right) + p_2 a_2\left(b_2 - a_2\dfrac{[pab]}{[paa]}\right) + \ldots\ldots$

$+ p_n a_n\left(b_n - a_n\dfrac{[pab]}{[paa]}\right)$, a zatem $[pab'] = [pab] - [paa]\dfrac{[pab]}{[paa]} = 0.$

Taksamo łatwo udowodnić, że i $[pac''] = [pb'c''] = 0$.

Równania normalne przybierają w obec tego kształt:

$$\begin{aligned}
&[paa]\Delta u_1 + [pa\varepsilon] = 0 \\
&[pb'b']\Delta u_2 + [pb'\varepsilon] = 0 \\
&[pc''c'']\Delta u_3 + [pc''\varepsilon] = 0,
\end{aligned} \tag{4*}$$

$$\text{zaś } \Delta u_1 = -\frac{[pa\varepsilon]}{[paa]},\quad \Delta u_2 = -\frac{[pb'\varepsilon]}{[pb'b']},\quad \Delta u_1 = -\frac{[pc''\varepsilon]}{[pc''c'']}. \tag{4**}$$

Utwórzmy z n równań błędów kształtu

$$\delta_i = a_i\Delta u_1 + b'_i\Delta u_2 + c''_i\Delta u_3 + \varepsilon_i \tag{3}$$

sumę $[p\delta\delta]$, mnożąc każde z tych równań przez odpowiednią wielkość $p_i\delta_i$. Poszczególne równania przedstawią się wówczas:

$$p_i\delta_i\delta_i = p_i a_i\delta_i\Delta u_1 + p_i b_i'\delta_i\Delta u_2 + p_i c_i''\delta_i\Delta u_3 + p_i\varepsilon_i\delta_i,$$

a suma ich:

$$[p\delta\delta] = [pa\delta]\Delta u_1 + [pb'\delta]\Delta u_2 + [pc''\delta]\Delta u_3 + [p\varepsilon\delta]. \tag{5}$$

Ze względu na poprzednio utworzone równania normalne są jednak sumy $[pa\delta] = [pb'\delta] = [pc''\delta] = 0$, przeto pozostaje:

$$[p\delta\delta] = [p\varepsilon\delta] = p_1\varepsilon_1\delta_1 + p_2\varepsilon_2\delta_2 + \ldots + p_n\varepsilon_n\delta_n. \tag{5*}$$

Wyrażając w sumie $[p\varepsilon\delta]$ wszystkie δ przez Δu przy pomocy równań błędów (3), otrzymamy:

$$[p\delta\delta] = p_1\varepsilon_1(a_1\Delta u_1 + b_1'\Delta u_2 + c''\Delta u_3 + \varepsilon_1) + p_2\varepsilon_2(a_2\Delta u_1 + b'_2\Delta u_2 + c_2''\Delta u_3 + \varepsilon_2) +$$
$$\ldots\ldots + p_n\varepsilon_n(a_n\Delta u_1 + b_n'\Delta u_2 + c_n''\Delta u_3 + \varepsilon_n),$$

lub porządkując wyrazy podług Δu_1, Δu_2 i Δu_3:

$$[p\delta\delta] = [pa\varepsilon]\Delta u_1 + [pb'\varepsilon]\Delta u_2 + [pc''\varepsilon]\Delta u_3 + [p\varepsilon\varepsilon].$$

Wreszcie po wstawieniu wartości niewiadomych z równań normalnych, przekształci się ten związek na:

$$[p\delta\delta] = [p\varepsilon\varepsilon] - \frac{[pa\varepsilon]^2}{[paa]} - \frac{[pb'\varepsilon]^2}{[pb'b']} - \frac{[pc''\varepsilon]^2}{[pc''c'']}; \tag{5**}$$

przyczem, jak widzimy ilość wyrazów ujemnych odpowiada liczbie niewiadomych.

Weźmy na uwagę $[pa\varepsilon]^2$.

$$[pa\varepsilon]^2=(p_1a_1\varepsilon_1)^2+(p_2a_2\varepsilon_2)^2+\ldots.(p_na_n\varepsilon_n)^2+$$
$$+2p_1a_1p_2a_2\varepsilon_1\varepsilon_2+$$
$$+2p_1a_1p_3a_3\varepsilon_1\varepsilon_3+2p_2a_2p_3a_3\varepsilon_2\varepsilon_3+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+2p_1a_1p_na_n\varepsilon_1\varepsilon_n+2p_2a_2p_na_n\varepsilon_2\varepsilon_n+\ldots.+2p_{n-1}a_{n-1}p_na_n\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n.$$

Dla n rosnącego do ∞, będzie wartość przeciętna sumy powyższych iloczynów podwójnych zdążała do zera pod założeniem, że prawdopodobieństwo pojawienia się błędów ε wyraża się funkcją parzystą; pozostają zatem do omówienia wyrażenia kwadratowe, wypisane w pierwszym rzędzie:

$$(p_1a_1\varepsilon_1)^2+(p_2a_2\varepsilon_2)^2+\ldots.+(p_na_n\varepsilon_n)^2=[p^2a^2\varepsilon^2]. \tag{6}$$

Sumę tę możemy napisać także następująco:

$$[p^2a^2\varepsilon^2]=p_1a_1^2.p_1\varepsilon_1^2+p_2a_2^2.p_2\varepsilon_2^2+\ldots.p_na_n^2p_n\varepsilon_n^2.$$

Przeciętną wartość tej sumy (biorąc na uwagę znów nieskończenie wiele razy powtarzane spostrzeżenia) otrzymamy, zastępując — jak w dawniejszych wywodach — kwadraty błędów prawdziwych kwadratami odpowiednich błędów średnich. Zatem

$$[p^2a^2\varepsilon^2]=p_1a_1^2p_1\mu_1^2+p_2a_2^2p_2\mu_2^2+\ldots.+p_na_n^2p_n\mu_n^2.$$

Ze względu na zasadnicze równanie $\mu_i^2:\mu_0^2=\frac{1}{p_i}:\frac{1}{1}$, lub $\mu_i^2=\frac{\mu_0^2}{p_i}$, będzie dalej:

$$[p^2a^2\varepsilon^2]=p_1a_1^2\mu_0^2+p_2a_2^2\mu_0^2+\ldots.p_na_n^2\mu_0^2=\mu_0^2[paa],$$
$$\text{czyli } [p^2a^2\varepsilon^2]=[pa\varepsilon]^2=\mu_0^2[paa]. \tag{7}$$

Analogicznie postępując, otrzymamy również

$$[pb'\varepsilon]^2=\mu_0^2[pb'b'],\ [pc''\varepsilon]^2=\mu_0^2[pc''c'']. \tag{7*}$$

Po wstawieniu tych wartości do związku na $[p\delta\delta]$ będzie:

$$[p\delta\delta]=[p\varepsilon\varepsilon]-\frac{[paa]}{[paa]}\mu_0^2-\frac{[pb'b']}{[pb'b']}\mu_0^2-\frac{[pc''c'']}{[pc''c'']}\mu_0^2,$$

a gdy uwzględnimy jeszcze znany nam związek zasadniczy

$$\mu_0^2=\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n} \text{ i wyrugujemy } [p\varepsilon\varepsilon]=n\mu_0^2,$$

otrzymamy ostatecznie dla 3 niewiadomych:

$$[p\delta\delta]=(n-3)\mu_0^2,$$
$$\mu_0^2=\frac{[p\delta\delta]}{n-3}. \tag{8}$$

Ponieważ w równaniu na $[p\delta\delta]$ mamy tyle wyrazów ujemnych ile niewiadomych, gdyż każda niewiadoma wytwarza w tym związku wyrażenie kształtu $-\frac{[pii]}{[pii]}\mu_0{}^2 = -\mu_0{}^2$, przeto w przypadku, gdy ilość niewiadomych wynosi k, otrzymamy wzór ogólny:

$$\mu_0{}^2 = \frac{[p\,\delta\delta]}{n-k}, \text{ względnie}$$

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{n-k}}. \tag{8*}$$

Błędy średnie poszczególnych spostrzeżeń wyznaczamy podług znanego związku: $\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_i}}$.

W przypadku, gdy wagi spostrzeżeń są równe jedności ($p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$), zmieni się powyższy wzór na:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-k}}. \tag{8**}$$

§ 5. Błędy średnie wielkości wyrównanych x, y, z....

W niektórych przypadkach wyrównania spostrzeżeń pośrednich możemy poprzestać tylko na wyznaczeniu wartości niewiadomych, jednostkowego błędu średniego μ_0, oraz błędów średnich spostrzeżeń μ_i; natomiast w przeważnej ilości przypadków wyrównań prowadzimy rachunek dalej, celem uzyskania błędów śr. wyrównanych wielkości x, y, z,...

Weźmy dla uproszczenia wywodów na uwagę spotrzeżenia tylko o 3 *niewiadomych*, przyjmując jednak dla ogólnego traktowania zagadnienia, że spostrzeżeniom L odpowiadają wagi *różne*.

Związek między spostrzeżeniami L a niewiadomemi x, y, z przedstawia się wedle wzoru (2)-go § 2-go (str. 33.) w ogólnej formie (dla spostrzeżenia L_i):

$$\left.\begin{aligned} \delta_i &= f_i(x,\ y,\ z) - L_i, \text{ lub} \\ L_i + \delta_i &= f_i(x,\ y,\ z); \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

równania tego kształtu możemy nazwać ***równaniami błędów we formie ogólnej***.

Natomiast wartości x, y, z, uzyskane z wyrównania przedstawiają się we formie ogólnej następująco:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_x(L_1,\ L_2, \ldots\ldots L_n) \\ y &= \varphi_y(L_1,\ L_2, \ldots\ldots L_n) \\ z &= \varphi_z(L_1,\ L_2, \ldots\ldots L_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Wyraz wolny l w liniowych równaniach błędów określiliśmy jako różnicę między przybliżoną wartością spostrzeżenia $f(x_0, y_0, z_0)$ a spostrzeżeniem L, mianowicie:

$$l_i = f(x_0,\ y_0,\ z_0) - L_i,$$

przyczem x_0, y_0, z_0 są przybliżonemi wartościami niewiadomych.

Nadając temu związkowi kształt równania (1), otrzymamy:

$$L_i+l_i=f(x_0,\ y_0,\ z_0). \tag{3}$$

Ponieważ równania (2) mają ważność dla *dowolnych* spostrzeżeń, zachowują ją przeto i dla spostrzeżeń L_i+l_i o błędach $\delta_i=0$; ztąd wynika, że możemy x_0, y_0 i z_0 przedstawić w formie równań (2), zmieniając tylko każde L na $(L+l)$:

$$\begin{aligned} x_0&=\varphi_x(L_1+l_1,\ L_2+l_2,\ldots L_n+l_n)\\ y_0&=\varphi_y(L_1+l_1,\ L_2+l_2,\ldots L_n+l_n)\\ z_0&=\varphi_z(L_1+l_1,\ L_2+l_2,\ldots L_n+l_n). \end{aligned} \tag{4}$$

Każdy z tych związków możemy rozwinąć w szereg Taylora z zaniedbaniem wyrazów rzędów wyższych niż pierwszy, o ile x_0, y_0 z_0 są tak zbliżone do wartości x, y, z, że powstałe wskutek tego l są wielkościami odpowiednio małemi.

Wówczas będzie:

$$\begin{aligned} x_0&=\varphi_x(L_1,\ L_2,\ldots L_n)+\frac{\partial\varphi_x}{\partial L_1}l_1+\frac{\partial\varphi_x}{\partial L_2}l_2+\ldots\frac{\partial\varphi_x}{\partial L_n}l_n\\ y_0&=\varphi_y(L_1,\ L_2,\ldots L_n)+\frac{\partial\varphi_y}{\partial L_1}l_1+\frac{\partial\varphi_y}{\partial L_2}l_2+\ldots\frac{\partial\varphi_y}{\partial L_n}l_n\\ z_0&+\varphi_z(L_1,\ L_2,\ldots L_n)+\frac{\partial\varphi_z}{\partial L_1}l_1+\frac{\partial\varphi_z}{\partial L_2}l_2+\ldots\frac{\partial\varphi_z}{\partial L_n}l_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Związki (5), połączone ze związkami (2), wytwarzają nowe związki, (6), w których dla uproszczenia oznaczono

$$\frac{\partial\varphi_x}{\partial L_i}=\alpha_i,\ \frac{\partial\varphi_y}{\partial L_i}=\beta_i,\ \frac{\partial\varphi_z}{\partial L_i}=\gamma_i,\ \text{zaś } x-x_0=\xi,\ y-y_0=\eta,\ z-z_0=\zeta, \tag{5*}$$

a mianowicie:

$$\left.\begin{aligned} -\xi&=\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2+\ldots\alpha_n l_n=[\alpha l]\\ -\eta&=\beta_1 l_1+\beta_2 l_2+\ldots\beta_n l_n=[\beta l]\\ -\zeta&=\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+\ldots\gamma_n l_n=[\gamma l]. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Równaniom tym odpowiadają równania błędów (1), które — przez rozwinięcie w szereg Taylora z zachowaniem wyrazów tylko rzędu pierwszego — przemieniamy na liniowe kształtu:

$$\delta_i=a_i\xi+b_i\eta+c_i\zeta+l_i, \tag{7}$$

przyczem, jak to zaznaczyliśmy jeszcze w § 1 rozdz. II-ego,

$$a_i=\frac{\partial f_i}{\partial x_0},\ b_i=\frac{\partial f_i}{\partial y_0},\ c_i=\frac{\partial f_i}{\partial z_0},\ (\text{zaś } l_i=f_i(x_0,\ y_0,\ z_0)-L_i).$$

Wstawiając do równań (6) prawdziwe wartości l_1', l_2',... l_n', otrzymamy i po lewej stronie tych równań prawdziwe wartości

$$-\xi',\ -\eta',\ -\zeta',\ \text{przyczem } \xi'=X-x_0,\ \eta'=Y-y_0,\ \zeta'=Z-z_0;$$

będzie zatem:

$$\left.\begin{aligned} -\xi'&=\alpha_1 l_1'+\alpha_2 l_2'+\ldots+\alpha_n l_n'=[\alpha l']\\ -\eta'&=\beta_1 l_1'+\beta_2 l_2'+\ldots+\beta_n l_n'=[\beta l']\\ -\zeta'&=\gamma_1 l_1'+\gamma_2 l_2'+\ldots+\gamma_n l_n'=[\gamma l']. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Równania błędów odpowiadające równaniom (8) są kształtu analogicznego do (7):

$$0 = a_i \xi' + b_i \eta' + c_i \zeta' + l_i', \tag{9}$$

(przyczem każdy *błąd pozorny* równa się oczywiście *zeru*).

Rugując w równaniach (8) poszczególne l' przy pomocy związków kształtu (9), otrzymamy:

$$-\xi' = \alpha_1(-a_1\xi' - b_1\eta' - c_1\zeta') + \alpha_2(-a_2\xi' - b_2\eta' - c_2\zeta') + \ldots + \alpha_n(-a_n\xi' - b_n\eta' - c^n\zeta')$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{lub} & \xi' = [a\alpha]\xi' + [b\alpha]\eta' + [c\alpha]\zeta', \\ \text{a analogicznie:} & \eta' = [a\beta]\xi' + [b\beta]\eta' + [c\beta]\zeta', \\ \text{oraz:} & \zeta' = [a\gamma]\xi' + [b\gamma]\eta' + [c\gamma]\zeta'. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Ponieważ ξ', η' i ζ' są od siebie niezależne, a równania (10) ważne dla ich dowolnych wartości, przeto muszą być spółczynniki

$$\left.\begin{array}{ll} & [a\beta] = [a\gamma] = [b\alpha] = [b\gamma] = [c\alpha] = [c\beta] = 0, \\ \text{zaś spółczynniki} & [a\alpha] = [b\beta] = [c\gamma] = 1. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Mnożąc każde z równań błędów kształtu (7):

$$\delta_i = a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta + l_i$$

przez odpowiednie α_i i sumując je wszystkie, otrzymamy:

$$[\alpha\delta] = [a\alpha]\xi + [b\alpha]\eta + [c\alpha]\zeta + [\alpha l], \text{ lub ze względu na (11):}$$

$$[\alpha\delta] = \xi + [\alpha l];$$

ponieważ jednak wedle (6): $-\xi = [\alpha l]$, przeto

$$\left.\begin{array}{l} [\alpha\delta] = 0, \text{ a analogicznie i} \\ [\beta\delta] = 0, \text{ oraz } [\gamma\delta] = 0. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Po tych wywodach przejdźmy do błędów śr. niewiadomych x, y, z.

Wstawiając do równania (2) prawdziwe wartości spostrzeżeń, t. j. $L_i + \varepsilon_i$ zamiast L_i, otrzymamy prawdziwe wartości niewiadomych X, Y, Z jako związki:

$$\begin{aligned} X &= \varphi_x(L_1 + \varepsilon_1, L_2 + \varepsilon_2, \ldots L_n + \varepsilon_n) \\ Y &= \varphi_y(L_1 + \varepsilon_1, L_2 + \varepsilon_2, \ldots L_n + \varepsilon_n) \\ Z &= \varphi_z(L_1 + \varepsilon_1, L_2 + \varepsilon_2, \ldots L_n + \varepsilon_n), \end{aligned} \tag{13}$$

które pod założeniem odpowiednio niewielkich ε przedstawią się we formie liniowej:

$$X = \varphi_x(L_1, L_2, \ldots L_n) + \frac{\partial \varphi_x}{\partial L_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial \varphi_x}{\partial L_2}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_x}{\partial L_n}\varepsilon_n$$

$$Y = \varphi_y(L_1, L_2, \ldots L_n) + \frac{\partial \varphi_y}{\partial L_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial \varphi_y}{\partial L_2}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_y}{\partial L_n}\varepsilon_n$$

$$Z = \varphi_z(L_1, L_2, \ldots L_n) + \frac{\partial \varphi_z}{\partial L_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial \varphi_z}{\partial L_1}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_z}{\partial L_n}\varepsilon_n,$$

a ostatecznie ze względu na równ. (2), oraz

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial L_i} = \alpha_1, \quad \frac{\partial \varphi_y}{\partial L_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial \varphi_z}{\partial L_i} = \gamma_i: \tag{13*}$$

$$
\begin{aligned}
X-x&=\alpha_1\,\varepsilon_1+\alpha_2\,\varepsilon_2+\ldots.+\alpha_n\varepsilon_n=[\alpha\varepsilon]\\
Y-y&=\beta_1\,\varepsilon_1+\beta_2\,\varepsilon_2+\ldots.+\beta_n\varepsilon_n=[\beta\varepsilon]\\
Z-z&=\gamma_1\,\varepsilon_1+\gamma_2\,\varepsilon_2+\ldots.+\gamma_n\varepsilon_n=[\gamma\varepsilon].
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Przechodząc z błędów prawdziwych na średnie, otrzymamy wedle prawa przenoszenia się błędów (§ 3. rozdz. II-go, (14), str. 41.):

$$
\begin{aligned}
\mu_x{}^2&=[\alpha\alpha\,\mu\mu]=\alpha_1{}^2\,\mu_1{}^2+\alpha_2{}^2\,\mu_2{}^2+\ldots.+\alpha_n{}^2\,\mu_n{}^2\\
\mu_y{}^2&=[\beta\beta\,\mu\mu]=\beta_1{}^2\,\mu_1{}^2+\beta_2{}^2\,\mu_2{}^2+\ldots.+\beta_n{}^2\,\mu_n{}^2\\
\mu_y{}^2&=[\gamma\gamma\,\mu\mu]=\gamma_1{}^2\,\mu_1{}^2+\gamma_2{}^2\,\mu_2{}^2+\ldots.+\gamma_n{}^2\,\mu_n{}^2.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Ze względu, że przyjęliśmy różne wagi poszczególnych spostrzeżeń, będą i μ, błędy śr. poszczególnych spostrzeżeń różne; możemy je jednak wyrazić przez jednostkowy błąd średni przy pomocy znanej relacji

$$\mu_i{}^2=\frac{\mu_0{}^2}{p_i}.$$

Równania (15) przejdą tedy na związki:

$$\mu_x{}^2=\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]\mu_0{}^2,\quad \mu_y{}^2=\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]\mu_0{}^2,\quad \mu_z{}^2=\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]\mu_0{}^2. \tag{16}$$

* * * Rachunek wyrównawczy, przeprowadzony wedle metody najmniejszych kwadratów, powinien nam dostarczyć takich wartości niewiadomych, których błędy średnie byłyby najmniejsze, (t. zw. najdokładniejszych wartości niewiadomych).

Aby się przekonać, czy twierdzenie to odpowiada rzeczywistości, załóżmy że sumy: $\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]=\text{min.}$, $\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]=\text{min.}$, oraz $\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]=\text{min.}$ i zbadajmy uwzględniając równ. (11), czy związki, wyprowadzone z tych warunków, zgadzają się ze związkami, wynikającemi z równań normalnych.

Weźmy nasamprzód na uwagę $\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]$. Jeśli ta suma ma osiągnąć wartość *minimalną z uwzględnieniem trzech związków* (11), odnoszących się do *spółczynników* α, wówczas należy wedle zasad analizy dodać owe trzy związki, pomnożone przez pewne spółczynniki nieoznaczone, do sumy $\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]$ i znaleść bezwzględną minimalną wartość funkcji utworzonej w ten sposób.

Przyjmując (dla otrzymania przejrzystych wzorów) spółczynniki nieoznaczone: $-2\,Q_{1.1}$, $-2\,Q_{1.2}$ i $-2\,Q_{1.3}$, otrzymamy — mnożąc przez nie odpowiednie związki (11) — trzy nowe związki: $-2\,Q_{1.1}([a\,\alpha]-1)=0$, $-2\,Q_{1.2}[b\,\alpha]=0$ i $-2\,Q_{1.3}[c\,\alpha]=0$, które, dodane do $\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]$, utworzą funkcję Ω_1, mającą być sprowadzoną do bezwzględnego minimum; zatem

$$\Omega_1=\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]-2\,Q_{1.1}([a\,\alpha]-1)-2\,Q_{1.2}[b\,\alpha]-2\,Q_{1.3}[c\,\alpha]=\text{min.} \tag{17}$$

Przyrównując pierwsze pochodne $\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha}$ do zera, otrzymamy n równań kształtu:

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_i} = 2\frac{\alpha_i}{p_i} - 2\, Q_{1.1} a_i - 2\, Q_{1.2}\, b_i - 2\, Q_{1.3}\, c_i = 0, \text{ lub:}$$

$$\alpha_i = p_i a_i\, Q_{1.1} + p_i b_i\, Q_{1.2} + p_i c_i\, Q_{1.3}. \qquad (18)$$

Mnożąc to równanie obustronnie przez a_i, otrzymamy

$$a_i \alpha_i = p_i a_i a_i\, Q_{1.1} + p_i a_i b_i\, Q_{1.2} + p_i a_i c_i\, Q_{1.3},$$

a sumując n tych związków (dla $i=1, 2, \ldots n$) i pamiętając, że wedle (11) jest $[a\alpha]=1$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = [paa]\, Q_{1.1} + [pab]\, Q_{1.2} + [pac]\, Q_{1.3}. \\ \text{Taksamo otrzymamy, mnożąc (18*) przez } b_i \text{ i } c_i\text{, oraz sumując} \\ \text{tak otrzymane związki:} \\ 0 = [pab]\, Q_{1.1} + [pbb]\, Q_{1.2} + [pbc]\, Q_{1.3} \\ 0 = [pac]\, Q_{1.1} + [pbc]\, Q_{1.2} + [pcc]\, Q_{1.3}. \end{array}\right\} \quad (19)$$

Spółczynniki $Q_{1.1}$, $Q_{1.2}$ i $Q_{1.3}$, uzyskane na podstawie tych równań, a wstawione do równań typu (18), wyznaczą nam poszczególne α, przy pomocy których obliczymy z pierwszego związku (6) ξ, a zarazem i x.

W analogiczny sposób otrzymamy przy pomocy funkcji:

$$\Omega_2 = \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] - 2\, Q_{2.1}[a\beta] - 2\, Q_{2.2}([b\beta]-1) - 2\, Q_{2.3}[c\beta] = \min.$$

i pochodnych kształtu $\quad \beta_i = p_i a_i\, Q_{2.1} + p_i b_i\, Q_{2.2} + p_i c_i\, Q_{2.3} \qquad (18^*)$

trzy związki:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = [paa]\, Q_{2.1} + [pab]\, Q_{2.2} + [pac]\, Q_{2.3} \\ 1 = [pab]\, Q_{2.1} + [pbb]\, Q_{2.2} + [pbc]\, Q_{2.3} \\ 0 = [pac]\, Q_{2.1} + [pbc]\, Q_{2.2} + [pcc]\, Q_{2.3}, \end{array}\right\} \quad (19^*)$$

z których wyznaczymy η, względnie y,

zaś przy pomocy funkcji:

$$\Omega_3 = \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] - 2\, Q_{3.1}[a\gamma] - 2\, Q_{3.2}[b\gamma] - 2\, Q_{3.3}([c\gamma]-1) = \min.$$

i pochodnych kształtu $\quad \gamma_i = p_i a_i\, Q_{3.1} + p_i b_i\, Q_{3.2} + p_i c_i\, Q_{3.3} \qquad (18^{**})$

ostatnie trzy związki:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = [paa]\, Q_{3.1} + [pab]\, Q_{3.2} + [pac]\, Q_{3.3} \\ 0 = [pab]\, Q_{3.1} + [pbb]\, Q_{3.2} + [pbc]\, Q_{3.3} \\ 1 = [pac]\, Q_{3.1} + [pbc]\, Q_{3.2} + [pcc]\, Q_{3.3}, \end{array}\right\} \quad (19^{**})$$

z których wyznaczymy ζ, względnie ostatnią niewiadomą z.

Mnożąc każde z n równań (18) przez odpowiednie δ i sumując je, otrzymamy:

$$[\alpha\delta] = [pa\delta]\, Q_{1.1} + [pb\delta]\, Q_{1.2} + [pc\delta]\, Q_{1.3},$$

lub ponieważ wedle równ. (12) $[\alpha\delta]=0$:

$$0 = [pa\delta]\, Q_{1.1} + [pb\delta]\, Q_{1.2} + [pc\delta]\, Q_{1.3}. \qquad (20)$$

Prawa strona tego równania może stać się dla dowolnych (wedle przyjęcia) wartości $Q_{1.1}$, $Q_{1.2}$ i $Q_{1.3}$ tylko wtedy zerem, gdy:

$$[pa\delta]=0,\ [pb\delta]=0 \text{ i } [pc\delta]=0.$$

Ostatnie trzy równania są jednak *równaniami normalnemi,* napisanemi w formie skróconej, a ztąd wniosek, że niewiadomą ξ — względnie x — *otrzymujemy identyczną z rachunku* $\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]=$ *min. jak z równań normalnych,* t. j. z warunku $[p\delta\delta]=$ min.

Analogicznie otrzymamy z n równań (pochodnych) (18*):

$$[\beta\delta]=0=[pa\delta]\,Q_{2.1}+[pb\delta]\,Q_{2.2}+[pc\delta]\,Q_{2.3}, \tag{20*}$$

a z n równań (18**):

$$[\gamma\delta]=0=[pa\delta]\,Q_{3.1}+[pb\delta]\,Q_{3.2}+[pc\delta]\,Q_{3.3}, \tag{20**}$$

które to związki mogą istnieć dla dowolnych wartości Q tylko pod warunkami:

$$[pa\delta]=0,\ [pb\delta]=0 \text{ i } [pc\delta]=0.$$

Z tego wynika, że *wartości niewiadomych wyznaczone z rachunku* $\mu_x^2=$ *min.,* $\mu_y^2=$ *min. i* $\mu_z^2=$ *min. są identyczne z wartościami tych niewiadomych obliczonemi z warunku* $[p\delta\delta]=$ *min.* Metoda najmniejszych kwadratów błędów spostrzeżeń pokrywa się więc z metodą najmniejszych kwadratów błędów śr. niewiadomych, a zarazem odpowiadają niewiadomym równań normalnych najmniejsze błędy średnie.

Mnożąc każdy z n związków (18) przez odpowiednie ilorazy $\frac{\alpha}{p}$ i sumując je, otrzymamy

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]=[a\alpha]Q_{1.1}+[b\alpha]\,Q_{1.2}+[c\alpha]\,Q_{1.3}, \tag{21}$$

lub ze względu na związki (11):

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]=Q_{1.1}. \tag{22}$$

Analogicznie otrzymamy z n związków (18*) i (18**):

$$\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]=[a\beta]\,Q_{2.1}+[b\beta]\,Q_{2.2}+[c\beta]\,Q_{2.3} \tag{21*}$$

$$\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]=[a\gamma]\,Q_{3.1}+[b\gamma]\,Q_{3.2}+[c\gamma]\,Q_{3.3}, \tag{21**}$$

a ostatecznie ze względu na (11):

$$\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]=Q_{2.2},\ \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]=Q_{3.3}. \tag{22*}$$

* * *

Wstawiając te wartości do równań (16), zmienimy je na:

$$\mu_x^2=Q_{1.1}\,\mu_0^2,\ \mu_y^2=Q_{2.2}\,\mu_0^2,\ \mu_z^2=Q_{3.3}\,\mu_0^2.$$

Oczywiście, że o ile wagi spostrzeżeń są równe jedności, przejdą związki (22) i (22*) na:

$$Q_{1.1}=[\alpha\alpha],\ Q_{2.2}=[\beta\beta],\ Q_{3.3}=[\gamma\gamma]. \qquad (22^{**})$$

W przypadku trzech niewiadomych możemy wyznaczyć $Q_{1.1}$, $Q_{2.2}$ i $Q_{3.3}$ z 9 równań (19), (19*) oraz (19**), w ogólnym przypadku o k *niewiadomych* z analogicznie utworzonych k^2 *równań*, przyczem ilość wyrażeń potrzebnych dla utworzenia błędów śr. niewiadomych będzie oczywiście k. ***Równania te nazywamy równaniami wag.***

Postępowanie powyższe wymagałoby rozwiązania ogólnie k^2 równań wag. *Liczba ich zredukuje* się jednak ogólnie do $\frac{k(k+1)}{2}$, gdyż udowodnimy, że $Q_{1.2}=Q_{2.1}$, $Q_{1.3}=Q_{3.1}$, i t. d.

* * * Mnożąc każde z n równań (18) przez odpowiednie ilorazy $\frac{\beta}{p}$ i sumując je, otrzymamy:

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]=[a\beta]\,Q_{1.1}+[b\beta]\,Q_{1.2}+[c\beta]\,Q_{1.3},\ \text{a ze względu na równ. (11):}$$

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]=Q_{1.2};$$

zaś mnożąc każde z n równań (18*) przez odpowiednie ilorazy $\frac{\alpha}{p}$ i sumując je, otrzymamy:

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]=[a\alpha]\,Q_{2.1}+[b\alpha]\,Q_{2.2}+[c\alpha]\,Q_{2.3},\ \text{lub ze względu na równ. 11):}$$

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]=Q_{2.1}.\ \text{Zatem}\ Q_{1.2}=Q_{2.1}.$$

Analogicznie postępując, możemy łatwo udowodnić, że wszystkie Q o przestawionych wskaźnikach są sobie równe, a zatem:

$$Q_{1.2}=Q_{2.1}=\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right],\ Q_{1.3}=Q_{3.1}=\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right],\ Q_{2.3}=Q_{3.2}=\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right];$$

$$\text{ogólnie}\ Q_{i.k}=Q_{k.i}. \quad *\,*\,* \qquad (24)$$

W obec tego redukuje się ilość równań wag, potrzebnych dla wyznaczenia $Q_{1.1}$, $Q_{2.2}, \ldots Q_{k.k}$, do $\frac{k(k+1)}{2}$ równań, gdyż k spółczynników $Q_{i.i}$ możemy wyznaczyć tylko równocześnie z $\frac{k(k-1)}{2}$ spółczynnikami $Q_{i.h}$, na co potrzeba razem $\frac{k(k+1)}{2}$ równań. W przypadku gdy $k=3$, będziemy mieli zatem 6 koniecznie potrzebnych równań wag.

Z równań (19) wybieramy w tym celu tylko pierwsze równanie, z (19*) dwa pierwsze równania, dodając do nich wszystkie 3 równ. (19**).

Równania te przedstawiają się we formie zredukowanej, przydatnej wprost do wyznaczenia potrzebnych spółczynników Q:

$$\left.\begin{array}{r}
[paa]\,Q_{1.1}+\;[pab]\,Q_{1.2}+\;[pac]\,Q_{1.3}=1\\
[paa]\,Q_{1.2}+\;[pab]\,Q_{2.2}+\;[pac]\,Q_{2.3}=0\\
[pbb.1]\,Q_{2.2}+[pbc.1]\,Q_{2.3}=1\\
[paa]\,Q_{1.3}+\;[pab]\,Q_{2.3}+\;[pac]\,Q_{3.3}=0\\
[pbb.1]\,Q_{2.3}+[pbc.1]\,Q_{3.3}=0\\
[pcc.2]\,Q_{3.3}=1.
\end{array}\right\} \quad (25)$$

Poczynając od równania ostatniego, a kończąc na pierwszem, wyznaczamy wszystkie spółczynniki: $Q_{3.3}$, $Q_{2.3}$, $Q_{1.3}$, następnie $Q_{2.2}$, $Q_{1.2}$, a wreszcie i $Q_{1.1}$.

Mając liczebne wartości wszystkich Q, obliczamy na podstawie równań (23) kwadraty błędów średnich μ_x^2, μ_y^2 i μ_z^2. Wag niewiadomych dostarczają nam odwrotności spółczynników Q o parze wskaźników jednakowych:

$$P_x=\frac{\mu^2_0}{\mu_x^2}=\frac{1}{Q_{1.1}},\quad P_y=\frac{\mu^2_0}{\mu_y^2}=\frac{1}{Q_{2.2}},\quad P_z=\frac{\mu^2_0}{\mu_z^2}=\frac{1}{Q_{3.3}}. \tag{26}$$

Nakoniec wspomnieć należy o związkach, jakie zachodzą między niewiadomemi ξ, η, ζ i spółczynnikami Q.

Mnożąc równania normalne, pierwsze przez $Q_{1.1}$, drugie przez $Q_{1.2}$, trzecie przez $Q_{1.3}$ i dodając je razem, otrzymamy:

$$\{Q_{1.1}[paa]+Q_{1.2}[pab]+Q_{1.3}[pac]\}\,\xi+\{Q_{1.1}[pab]+Q_{1.2}[pbb]+Q_{1.3}[pbc]\}\,\eta+$$
$$+\{Q_{1.1}[pac]+Q_{1.2}[pbc]+Q_{1.3}[pcc]\}\,\zeta+Q_{1.1}[pal]+Q_{1.2}[pbl]+Q_{1.3}[pcl]=0.$$

Ze względu na równania (19) jest spółczynnik przy niew. ξ równy jedności, a spółczynniki przy η i ζ są równe zerom, przeto

$$-\xi=Q_{1.1}[pal]+Q_{1.2}[pbl]+Q_{1.3}[pcl]; \tag{27}$$

analogicznie otrzymamy, mnożąc równania normalne przez $Q_{1.2}$, $Q_{2.2}$, $Q_{2.3}$, a następnie przez $Q_{1.3}$, $Q_{2.3}$, $Q_{3.3}$, ze względu na związki (19*) i (19**):

$$-\eta=Q_{1.2}[pal]+Q_{2.2}[pbl]+Q_{2.3}[pcl] \quad \text{i} \tag{27*}$$
$$-\zeta=Q_{1.3}[pal]+Q_{2.3}[pbl]+Q_{3.3}[pcl]. \tag{27**}$$

Są to wzory odnoszące się do t. zw. *nieoznaczonego rozwiązania* równań normalnych.

§ 6. Wyprowadzenie wzoru na jednostkowy błąd średni μ_0 sposobem drugim (krótszym).

*** Weźmy na uwagę związki między prawdziwą wartością spostrzeżenia $L_i+\varepsilon_i$ i prawdziwemi wartościami niewiadomych X, Y, Z,..., oraz między wyrównaną wartością spostrzeżenia $L_i+\delta_i$ i wartościami niewiadomych, uzyskanemi z wyrównania x, y, z,... (w ogólnej liczbie k):

$$L_i+\varepsilon_i=f_i(X,\ Y,\ Z,\ldots) \tag{1}$$
$$L_i+\delta_i=f_i(x,\ y,\ z,\ldots). \tag{2}$$

Znając odpowiednie wartości przybliżone niewiadomych

$$\left.\begin{array}{l} x_0,\ y_0,\ z_0,\ldots, \text{ przyczem niech będzie } X=x_0+\xi',\ Y=y_0+\eta', \\ Z=z_0+\zeta',\ldots, \text{ zaś } x=x_0+\xi,\ y=y_0+\eta,\ x=z_0+z_0,\ldots, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

możemy oba związki (1) i (2) rozwinąć w szereg Taylora z pominięciem wyrazów rzędu wyższego niż pierwszy.

Otrzymamy wówczas:

$$L_i+\varepsilon_i=f_i(x_0,\ y_0,\ z_0,\ldots)+a_i\xi'+b_i\eta'+c_i\zeta'+\ldots \qquad (1^*)$$

$$L_i+\delta_i=f_i(x_0,\ y_0,\ z_0,\ldots)+a_i\xi+b_i\eta+c_i\zeta+\ldots, \qquad (2^*)$$

$$\text{przyczem } \frac{\partial f_i}{\partial x_0}=a_i,\ \frac{\partial f_i}{\partial y_0}=b_i,\ \frac{\partial f_i}{\partial z_0}=c_i\ldots.$$

Odejmując równanie (2*) od równ. (1*), otrzymamy

$$\varepsilon_i-\delta_i=a_i(\xi'-\xi)+b_i(\eta'-\eta)+c_i(\zeta'-\zeta)+\ldots, \qquad (4)$$

lub ze względu na równania (3):

$$\varepsilon_i-\delta_i=a_i(X-x)+b_i(Y-y)+c_i(Z-z)\ldots \qquad (4^*)$$

Przyjmijmy, że każdemu spostrzeżeniu L odpowiada inna waga p. Mnożąc równanie (4*) przez $p_i\ \varepsilon_i$, otrzymamy:

$$p_i\varepsilon_i\varepsilon_i-p_i\varepsilon_i\delta_i=p_i a_i\varepsilon_i(X-x)+p_i b_i\varepsilon_i(Y-y)+p_i c_i\varepsilon_i(Z-z)+\ldots, \qquad (5)$$

zaś mnożąc je przez $p_i\delta_i$:

$$p_i\varepsilon_i\delta_i-p_i\delta_i\delta_i=p_i a_i\delta_i(X-x)+p_i b_i\delta_i(Y-y)+p_i c_i\delta_i(Z-z)+\ldots \qquad (5^*)$$

Sumy tych związków dla i od 1 do n wypadną:

$$[p\varepsilon\varepsilon]-[p\varepsilon\delta]=[pa\varepsilon](X-x)+[pb\varepsilon](Y-y)+[pc\varepsilon](Z-z)+\ldots \qquad (6)$$

$$[p\varepsilon\delta]-[p\delta\delta]=[pa\delta](X-x)+[pb\delta](Y-y)+[pc\delta](Z-z)+\ldots \qquad (6^*)$$

Wobec tego, że $[pa\delta]=[pb\delta]=[pc\delta]=\ldots=0$, otrzymamy dalej, sumując oba równania (6) i (6*):

$$[p\varepsilon\varepsilon]-[p\delta\delta]=[pa\varepsilon](X-x)+[pb\varepsilon](Y-y)+[pc\varepsilon](Z-z)+\ldots \qquad (7)$$

Kładąc ze względu na równanie (14) § 5-go (str. 90.)

$$X-x=[\alpha\varepsilon],\ Y-y=[\beta\varepsilon],\ Z-z=[\gamma\varepsilon],\ldots,$$

przekształcimy związek (7) na następujący:

$$[p\varepsilon\varepsilon]-[p\delta\delta]=[pa\varepsilon][\alpha\varepsilon]+[pb\varepsilon][\beta\varepsilon]+[pc\varepsilon][\gamma\varepsilon]+\ldots. \qquad (8)$$

Weźmy na uwagę iloczyn sum $[pa\varepsilon][\alpha\varepsilon]$.

$$[pa\varepsilon][\alpha\varepsilon]=(p_1a_1\varepsilon_1+p_2a_2\varepsilon_2+\ldots+p_na_n\varepsilon_n)(\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\ldots\alpha_n\varepsilon_n).$$

Po wymnożeniu, otrzymamy wyrazy dwojakiego kształtu:

$$p_ia_i\alpha_i\varepsilon_i\varepsilon_i,\ \text{oraz}\ (p_ia_i\alpha_k+p_ka_k\alpha_i)\varepsilon_i\varepsilon_k.$$

Ze względu na założenie, że funkcja prawdopodobieństwa błędów ε przedstawia się jako funkcja parzysta, suma wyrazów kształtu drugiego będzie zdążała — przy rosnącej liczbie spostrzeżeń n — w przecięciu do wartości granicznej zero; a zatem otrzymamy w tym przypadku:

$$[pa\varepsilon][\alpha\varepsilon]=[pa\alpha\varepsilon\varepsilon]=p_1a_1\alpha_1\varepsilon_1^2+p_2a_2\alpha_2\varepsilon_2^2+\ldots+p_na_n\alpha_n\varepsilon_n^2. \qquad (9)$$

Przeciętną wartość tej sumy wyznaczymy, zastępując, ze względu na $\mu_0^2 = \frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n}$, każdy wyraz $p_i \varepsilon_i^2$ kwadratem jedn. błędu śr. μ_0^2. Połóżymy zatem w przecięciu:

$$[pa\varepsilon][a\varepsilon] = [aa]\mu_0^2. \tag{10}$$

Analogicznie otrzymamy:

$$[pb\varepsilon][\beta\varepsilon] = [b\beta]\mu_0^2,\ [pc\varepsilon][\gamma\varepsilon] = [c\gamma]\mu_0^2 \ldots \tag{10*}$$

Wedle równ. (11) § 5-go (str. 89.) są jednak sumy

$$[a\alpha] = [b\beta] = [c\gamma] = \ldots = 1;$$

zatem wracając do równania (8), otrzymamy:

$$[p\varepsilon\varepsilon] = [p\delta\delta] + \mu_0^2 + \mu_0^2 + \ldots \mu_0^2 = [p\delta\delta] + k\mu_0^2, \tag{11}$$

$n\mu_0^2 = [p\delta\delta] + k\mu^2$, a wreszcie:

$$\mu_0^2 = \frac{[p\delta\delta]}{n-k}, \text{ względnie } \mu_0 = \sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-k}}. \quad * \, * \, * \tag{12}$$

§ 7. Przykłady wyrównania spostrzeżeń pośrednich.

1. **Przykład pierwszy** (o znaczeniu dydaktycznem).

W celu wyznaczenia α, kąta skrzyżowania się dwu kierunków, pomierzono taśmą stalową, przyjąwszy punkt skrzyżowania za początkowy, a jedną z prostych za oś xx-ów, odcięte X i rzędne Y, otrzymując

$X=$	5·00 m	10·00 m	15·00 m	20·00 m
$Y=$	23·54 m	47·03 m	70·54 m	94·14 m

Ponieważ odcięte nie przekraczają 20 m, t. j. długości taśmy stalowej, przeto możemy je uważać za bezbłędne, natomiast przyjmiemy wagi spostrzeżeń Y wedle znanego wzoru $p_Y = \frac{\mu_0^2}{\mu_Y^0} = \frac{\nu^2\,100}{\nu^2\,Y} = 100 : Y$. (Zatem waga dla $Y = 100\,m$ równa się 1).

Równania błędów mają tu kształt:

$$Y + \delta = m.X,\quad \delta = X.m - Y.$$

Kładąc $X = a$, $m = x$, $-Y = l$, otrzymujemy je w znanej nam formie:

$$\delta = ax + l.$$

Aby *nie przeprowadzać rachunku liczbami wielkiemi*, wprowadzimy *wartość przybliżoną* x_0, tak że wyrównanie będzie się odnosiło tylko do poprawki ξ, przy pomocy której otrzymamy wartość x ze związku $x = x_0 + \xi$.

Wartość przybliżoną x_0 wyznaczymy z pierwszego równania, zatem

$$x_0 = \frac{23{\cdot}54}{5} = \backsim 4{\cdot}71.$$

Wstawiając do równań błędów wartość $x_0 + \xi$, zmienimy je na

$$\delta = a\xi + l + ax_0 = a\xi + \lambda,$$

przyczem
$$\lambda = ax_0 + l = ax_0 - Y.$$

Schematycznie zestawiony rachunek wyrównawczy przedstawia się następująco:

L. p.	$X=a$	$Y=-l$	$\lambda=ax_0-Y$	$p=\frac{100}{Y}$	paa	$pa\lambda$	$p\lambda\lambda$	δ	$pa\delta$	$p\delta\delta$
1	5·00 *m*	23·54 *m*	1·0 *cm*	4·3	107·5	21·5	4·3	−1·48	−31·82	9·42
2	10·00 „	47·03 „	7·0 „	2·1	210·0	147·0	102·9	+2·04	+42·84	8·74
3	15·00 „	70·54 „	11·0 „	1·4	315·0	231·0	169·4	+3·57	+74·97	17·84
4	20·00 „	94·14 „	6·0 „	1·1	440·0	132·0	39·6	−3·91	−86·02	16·82
					$\Sigma=$ 1072·5	531·5	316·2		−0·03	52·82

$\xi'=-\frac{531{\cdot}5}{1072{\cdot}5}=-0{\cdot}4956,$ kontrola: $316{\cdot}2-0{\cdot}4956\times 531{\cdot}5=52{\cdot}79.$

Ze względu na to, że przy wyznaczaniu ξ' wyraziliśmy λ w *cm*, podczas gdy *a* pozostały w *m*, należy dla uzyskania właściwej wielkości ξ podzielić ξ' przez 100:

$$\xi=-\frac{\xi'}{100}=-0{\cdot}004956,$$

a ostateczna wartość na tang α jest:

$$\operatorname{tang}\alpha=x=4{\cdot}71-0{\cdot}004956=4{\cdot}705044;$$
$$\alpha=78^0 0' 3''{\cdot}7.$$

Błąd średni spostrzeżeń Y wynosi:

$$\mu_0=\sqrt{\frac{52{\cdot}82}{4-1}}=\sqrt{17{\cdot}61}=\pm 4{\cdot}2\ cm=\pm 0{\cdot}042\ m.$$

Błąd średni niewiadomej x, t. j. tang α, otrzymamy z równania

$$\mu_x=\mu_0\sqrt{Q_{1.1}},$$

przyczem $1072{\cdot}5\, Q_{1.1}=1,\quad Q_{1.1}=\frac{1}{1072{\cdot}5}=0{\cdot}00093.$

Ze względu, że $\sqrt{Q_{1.1}}$ przedstawia odwrotność metrów $\frac{1}{m}$, musimy do wzoru na μ_x wstawić μ, nie w *cm* lecz w *m*, a przeto

$$\mu_x=0{\cdot}042\sqrt{0{\cdot}00093}=\pm 0{\cdot}001281,$$

w obec czego wynosi

$$\mu_\alpha=\pm 11''{\cdot}4.$$

2. **Przykład drugi.** Aby mieć możność sprowadzenia stałej C biegunowego planimetru kompensacyjnego Coradiego l. 11419 — będącego własnością I. Kat. Miernictwa Politechniki Lwowskiej — do jednostki powierzchni, dokonano 50 spostrzeżeń przez planimetrowanie jednej i tej samej powierzchni $P=15.005\ m/m^2$ przy 5-ciu różnych długościach ramienia wodzącego.

Łącząc 10 spostrzeżeń dokonanych przy tej samej długości ramienia wodzącego w średnie, otrzymano ostatecznie pięć spostrzeżeń wypadkowych, a zarazem i ich błędy średnie, których użyto dla wyznaczenia wag.

Przy użyciu planimetru biegunowego mamy dla wyznaczenia powierzchni P związek zasadniczy:

$$P = C . o,$$

przyczem C oznacza stałą planimetru (powierzchnię odpowiadającą jednemu obrotowi kółeczka liczbowego), zaś o ilość obrotów tegoż kółeczka.

Ponieważ $C = 2\rho\pi r$, (ρ promień kółeczka liczb., r długość ramienia wodzącego), zaś $r = r_0 + mi$, przyczem r_0 jest odstępem punktu początkowego podziału od wodzika, i wartością odstępu podziału, zaś m ilością odstępów podziału (odczytem na ramieniu wodzącem), przeto:

$$C = 2\rho\pi r_0 + 2\rho\pi i . m = x + my,$$

a dalej $\quad P = C . o = (x + my)\, o, \quad o = \frac{P}{x + my}.$

Ze względu na to, że spostrzegano ilości obrotów kółeczka liczbowego, odnoszą się równania błędów do ilości obrotów o, które były (średnie z 10 spostrzeżeń):

$$\begin{aligned}
&\text{dla } m = 100, && o = 1{\cdot}9989, && \mu = \pm 0{\cdot}00010,\\
&\text{,, } \ m = 125, && o = 1{\cdot}5982, && \mu = \pm 0{\cdot}00025,\\
&\text{,, } \ m = 150, && o = 1{\cdot}3304, && \mu = \pm 0{\cdot}00015,\\
&\text{,, } \ m = 175, && o = 1{\cdot}1408, && \mu = \pm 0{\cdot}00033,\\
&\text{,, } \ m = 200, && o = 0{\cdot}9965, && \mu = \pm 0{\cdot}00017.
\end{aligned}$$

Równania błędów mają kształt następujący:

$$\vartheta_i = \frac{P}{x + m_i y} - o_i \quad \text{z wagą} \quad \frac{\text{const.}}{\mu_i^2}.$$

Aby uzyskać kształt liniowy można, albo użyć *rozwinięcia w szereg Taylora*, albo *pomnożyć* każde równanie *przez* $(x + m_i y)$, *dzieląc* równocześnie *wagi równań przez* $(x + m_i y)^2$, przyczem należy użyć wartości przybliżonych x_0 i y_0.[1]

Wartości przybliżone niewiadomych uzyskujemy z *pierwszego* i *ostatniego* równania, mianowicie ponieważ $P = 10005\ m/m^2$,

$$x_0 + 100\, y_0 = \frac{10005}{1{\cdot}9989} = 5006{\cdot}25\ m/m^2,$$

$$x_0 + 200\, y_0 = \frac{10005}{0{\cdot}9965} = 10040{\cdot}14\ m/m^2:$$

$$x_0 = -28{\cdot}00\ m/m^2, \quad y_0 = 50{\cdot}34\ m/m^2.$$

Po pomnożeniu równań błędów przez $(x_0 + m_i y_0)$, uzyskujemy równania błędów kształtu:

$$\delta_i = P - o_i x - o_i m_i y \quad \text{z wagą} \quad \frac{\text{const.}}{\mu_i^2 (x_0 + m_i y_0)^2}.$$

Po wstawieniu liczebnych wartości i przyjęciu stałej w liczniku wyrażenia na wagi $= 1$ (t. j. $\mu_0 = 1$), otrzymamy:

$$\begin{aligned}
-1{\cdot}9989\,x - 199{\cdot}89\ \ y + 10005 &= \delta_1, & p_1 &= 3{\cdot}98,\\
-1{\cdot}5982\,x - 199{\cdot}77_5\, y + 10005 &= \delta_2, & p_2 &= 0{\cdot}41,\\
-1{\cdot}3304\,x - 199{\cdot}56\ \ y + 10005 &= \delta_3, & p_3 &= 0{\cdot}79,\\
-1{\cdot}1408\,x - 199{\cdot}64\ \ y + 10005 &= \delta_4, & p_4 &= 0{\cdot}12,\\
-0{\cdot}9965\,x - 199{\cdot}30\ \ y + 10005 &= \delta_5, & p_5 &= 0{\cdot}39.
\end{aligned}$$

[1]) Porównaj § 9-ty niniejszego rozdziału strona 115—117.

Wstawiejąc do powyższych równań wartości przybliżone na x i y, oraz mnożąc je przez —1, otrzymujemy (pomijając przy δ znaki ujemne jako bezprzedmiotowe):

$$
\begin{aligned}
1{\cdot}9989\,\xi + 199{\cdot}89\,\eta + 1{\cdot}4934 &= \delta_1, \quad p_1 = 3{\cdot}98,\\
1{\cdot}5982\,\xi + 199{\cdot}77_5\,\eta + 4{\cdot}9239 &= \delta_2, \quad p_2 = 0{\cdot}41,\\
1{\cdot}3304\,\xi + 199{\cdot}56\,\eta + 3{\cdot}5992 &= \delta_3, \quad p_3 = 0{\cdot}79,\\
1{\cdot}1408\,\xi + 199{\cdot}64\,\eta + 12{\cdot}9352 &= \delta_4, \quad p_4 = 0{\cdot}12,\\
0{\cdot}9965\,\xi + 199{\cdot}30\,\eta + 0{\cdot}1400 &= \delta_5, \quad p_5 = 0{\cdot}39.
\end{aligned}
$$

Dalszy rachunek przeprowadzimy z uwzględnieniem dwu miejsc dziesiętnych, wprowadzając równoczesnie dla uniknięcia wielkich różnic spółczynników równań błędów nową niewiadomą $\eta' = 10\,\eta$.

Prowadząc rachunek schematycznie, otrzymamy:

	a	b	l	s
	2·00	2·00	1·49	—5·49
	1·60	2·00	4·92	—8·52
	1·33	2·00	3·60	—6·93
	1·14	2·00	12·94	—16·08
	1·00	1·99	—0·14	—2·85
Σ	7·07	9·99	22·81	—39·87

	a]	b]	l]	s]	
[pa	18·92	20·38	20·59	—59·88	= +0·01
[pb	20·38	22·74	24·58	—67·71	= —0·01
[pl	20·59	24·58	49·10	—94·27	= 0·00
[ps	—59·88	—67·71	—94·27	+221·86	= 0·00
	+0·01	—0·01	0·00	0·00	

Schemat rozwiązania równań normalnych.

	a]	
[pa	18·92	
[pb	20·38	$\frac{[pab]}{[paa]} = 1{\cdot}0772$
[pl	20·59	$\frac{[pal]}{[paa]} = 1{\cdot}0883$
[ps	—59·88	$\frac{[pas]}{[paa]} = -3{\cdot}1649$

	b]	wyraz redukujący	b.1]	
[pb	22·74	—21·95	+0·79	
[pl	24·58	—22·18	+2·40	$\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]} = 3{\cdot}0380$
[ps	—67·71	+64·50	—3·21	$\frac{[pbs.1]}{[pbb.1]} = -4{\cdot}0632$

Kontrole spółczynników zreduk. równań normalnych.

	b.1]	l.1]	s.1]	
[pb	+0·79	+2·40	—3·21	= —0·02
[pl	+2·40	+26·69	—29·10	= —0·01
[ps	—3·21	—29·10	+32·35	= +0·04
	—0·02	—0·01	+0·04	

	l.2]	s.2]	
[pl	+19·40	—19·35	= +0·05
[ps	—19·35	+19·31	= —0·04
	+0·05	—0·04	

*

	$l]$	wyraz redukujący	$l.1]$	wyraz redukujący	$l.2]$
$[bl$	$49{\cdot}10$	$-22{\cdot}41$	$+26{\cdot}69$	$-7{\cdot}29$	$+19{\cdot}40$
$[bs$	$-94{\cdot}27$	$+65{\cdot}17$	$-29{\cdot}10$	$+9{\cdot}75$	$-19{\cdot}35$

Z ostatniej kolumny 2-giej części schematu otrzymujemy:

$$\eta' = -3{\cdot}0380, \quad \eta = \frac{\eta'}{100} = -0{\cdot}0304.$$

	$s]$	wyraz redukujący	$s.1]$	wyraz redukujący	$s.2]$
$[ps$	$+221{\cdot}86$	$-189{\cdot}51$	$+32{\cdot}35$	$-13{\cdot}04$	$+19{\cdot}31$

zaś z ostatniej kolumny 1-wszej części schematu:

$$\xi = -1{\cdot}0772\,\eta' - 1{\cdot}0883 = 2{\cdot}1842.$$

$$x = x_0 + \xi = -25{\cdot}8158\ m/m^2, \quad y = y_0 + \eta = 50{\cdot}3096\ m/m^2.$$

Wartości na ξ i η', wstawione do ostatnio przekształconych równań błędów, dostarczają nam poszczególne δ, z których urabiamy $[p\,\delta\delta]$.

$$\delta_1 = -0{\cdot}153,\ \delta_2 = 2{\cdot}406,\ \delta_3 = +0{\cdot}502,\ \delta_4 = +9{\cdot}422,\ \delta_5 = -3{\cdot}958,$$

$$[p\,\delta\delta] = 0{\cdot}093 + 2{\cdot}373 + 0{\cdot}199 + 10{\cdot}653 + 6{\cdot}110 = 19{\cdot}428$$

z dostateczną zgodnością z wyrazem $[pll.2] = 19{\cdot}40$.

$$\text{Błąd średni } \mu_0 = \sqrt{\frac{19{\cdot}428}{3}} = \sqrt{6{\cdot}476} = \pm 2{\cdot}545\ m/m^2.$$

Błędy średnie obu niewiadomych obliczymy, posługując się spółczynnikami $Q_{1.1}$ i $Q_{2.2}$.

Dla wyznaczenia tych spółczynników ustawimy równania wag wedle wzoru (25) § 5-go (str. 94.):

$$18{\cdot}92\ Q_{1.1} + 20{\cdot}38\ Q_{1.2} = 1$$
$$18{\cdot}92\ Q_{1.2} + 20{\cdot}38\ Q_{2.2} = 0$$
$$20{\cdot}38\ Q_{1.2} + 22{\cdot}74\ Q_{2.2} = 1, \text{ lub po redukcji } 0{\cdot}79\ Q_{2.2} = 1.$$

Z równań tych otrzymamy:

$$Q_{2.2} = 1{\cdot}266, \quad Q_{1.2} = -1{\cdot}363_5, \quad Q_{1.1} = 1{\cdot}522,$$

a w następstwie będą błędy średnie niewiadomych

$$\mu_x = \mu_0 \sqrt{Q_{1.1}} = \pm 3{\cdot}265\ m/m^2, \quad \mu_y = \pm \frac{\mu_{\eta'}}{100} = \frac{\mu_0}{100} \sqrt{Q_{2.2}} = \pm 0{\cdot}0282.$$

Błędy średnie spostrzeżeń przekształconych przed wyrównaniem obliczymy wedle wzoru znanego $\mu_i = \dfrac{\mu_0}{\sqrt{p_i}}$:

$$\mu_1 = \pm 1{\cdot}28\ m/m^2, \quad \mu_2 = \pm 3{\cdot}98\ m/m^2, \quad \mu_3 = \pm 2{\cdot}86\ m/m^2, \quad \mu_4 = \pm 7{\cdot}36\ m/m^2,$$
$$\mu_5 = \pm 4{\cdot}08\ m/m^2.$$

Odczyt na ramieniu wodzącem m_0, odpowiadający stałej C_0 = jednostce powierzchni, otrzymamy z równania:

$$m_0 = \frac{C_0 - x}{y},$$

zatem przyjmując $C_0 = 10000\ m/m^2$, otrzymamy

$$m_0 = \frac{10025{\cdot}8168}{50{\cdot}3096} = 199{\cdot}28,$$

zaś w razie przyjęcia $C_0 = 5000\ m/m^2$

$$m_0 = \frac{5025{\cdot}8168}{50{\cdot}3096} = 99{\cdot}90.$$

3. **Przykład trzeci** przeprowadzony z kontrolą odmienną.

Z mimośrodkowego stanowiska D sieci tryangulacyjnej wykonał prof.

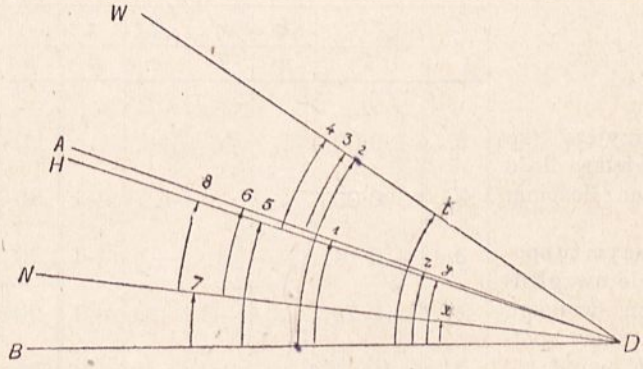

Fig 7.

Schwerd[1]) pomiar ośmiu kątów metodą repetycyjną. Wyniki pomiarów wraz z ilością repetycyj podaje nam następujące zestawienie.

Ponieważ do ustalenia pięciu kierunków wychodzących z D potrzeba tylko czterech kątów, przeto z ośmiu mierzonych kątów są cztery niezależne, zaś reszta kątów (tj. również cztery) pozostaje z tamtemi w związkach.

Oznaczając wyrównane wartości kątów: BN przez x, BH przez y, BA przez z, BW przez t i wyrażając resztę kątów przez nie, otrzymamy 8 równań błędów, które po uwzględnieniu przybliżonych wartości tych kątów

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 6^0 59' 34''\cdot 51, \\ y_0 &= 18^0 43' 45''\cdot 60, \\ z_0 &= 19^0 25' 59''\cdot 42 \\ \text{i } t_0 &= 34^0 18' 43''\cdot 61 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

i wprowadzeniu wyrazów kontrol-

L. porz.	Kąt	Ilość repetycyj	Wyniki spostrzeżeń 0	′	″
1	*BA*	90	19	25	59·42
2	*BW*	80	34	18	43·61
3	*AW*	70	14	52	44·33
4	*HW*	20	15	34	58·80
5	*BH*	20	18	43	45·60
6	*NA*	40	12	26	24·65
7	*BN*	60	6	59	34·51
8	*NH*	20	11	44	11·60

(1)

[1]) *F. M. Schwerd.* Die kleine Speyerer Basis. Speyer 1822, obacz także *F. R. Helmert,* Die Ausgleichungsrechnung nach d. Methode d. kl. Qu., Lipsk 1907. Wyd. II-gie, str. 43 oraz 159 i dalsze.

nych $s_i = a_i + b_i + c_i + d_i$ *bez uwzględnienia wyrazu wolnego* l przedstawiają się zestawione schematycznie:

Wagi przyjęto (ze względu na wielką ilość repetycyj) równe ilościom repetycyj.

Przy podanym tu sposobie kontroli nie uwzględnia się wyrazu wolnego przy tworzeniu sumy spółczynników a, b, c i d.

Liczby uwidocznione drukiem półtłustym stanowią kontrolę.

Równania błędów							
		ξ	η	ζ	τ		
	l	a	b	c	d	p	s
	″						
δ_1	0·00	.	.	+1	.	90	+1
δ_2	0·00	.	.	.	+1	80	+1
δ_3	−0·14	.	.	−1	+1	70	0
δ_4	−0·79	.	−1	.	+1	20	0
δ_5	0·00	.	+1	.	.	20	+1
δ_6	+0·26	−1	.	+1	.	40	0
δ_7	0·00	+1	.	.	.	60	+1
δ_8	−0·51	−1	+1	.	.	20	0
	Σ	**−1**	**+1**	**+1**	**+3**		→ **4** ↓

(3)

Kontrola wyrazów równań normalnych jest przedstawiona w naszym przypadku z powodu czterech niewiadomych pięcioma tabelami.

ξ					
	paa	*pab*	*pac*	*pad*	*pas*
1	.	.	.	.	.
2	.	.	.	.	.
3	.	.	.	.	.
4	.	.	.	.	.
5	.	.	−40	.	.
6	+40	.	.	.	.
7	+60	.	.	.	+60
8	+20	−20	.	.	.
Σ	**+120**	**−20**	**−40**	.	**+60** → ↓

η					
	pab	*pbb*	*pbc*	*pbd*	*pbs*
1	.	.	.	.	.
2	.	.	.	.	.
3	.	.	.	.	.
4	.	+20	.	−20	.
5	.	+20	.	.	+20
6	.	.	.	.	.
7	.	.	.	.	.
8	−20	+20	.	.	.
Σ	**−20**	**+60**	.	**−20**	**+20** → ↓

(4)

	ζ				
	pac	*pbc*	*pcc*	*pcd*	*pcs*
1	.	.	+90	.	+90
2	.	.	.	.	.
3	.	.	+70	−70	.
4	.	.	.	.	.
5	.	.	.	.	.
6	−40	.	+40	.	.
7	.	.	.	.	.
8	.	.	.	.	.
Σ	**−40**	.	**+200**	**−70**	**+90** ↓ →

	τ				
	pad	*pbd*	*pcd*	*pdd*	*pds*
1	.	.	.	.	.
2	.	.	.	+80	+80
3	.	.	−70	+70	.
4	.	−20	.	+20	.
5	.	.	.	.	.
6	.	.	.	.	.
7	.	.	.	.	.
8	.	.	.	.	.
Σ	.	**−20**	**−70**	**+170**	**+80** ↓ →

(4)

	Wyrazy wolne ze znakiem przeciwnym				
	−pal	*−pbl*	*−pcl*	*−pdl*	*−psl*
1	.	.	.	.	.
2	.	.	.	.	.
3	.	.	−9·8	+ 9·8	.
4	.	−15·8	.	+15·8	.
5	.	.	.	.	.
6	+10·4	.	−10·4	.	.
7	.	.	.	.	.
8	−10·2	+10·2	.	.	.
Σ	**+0·2**	**−5·6**	**−20·2**	**+25·6**	**0** ↓ →

(4)

Kontrolę stanowią tu również liczby uwidocznione drukiem półtłustym.

Równania normalne wraz z systemem równań wag, odnoszącym się do ξ, przedstawiają się schematycznie:

ξ	η	ζ	τ	Wyrazy wolne (znak —)	(ξ)
+120	—20	— 40	.	+0·20	+1
— 20	+60	.	— 20	—5·60	.
— 40	.	+200	— 70	—20·20	.
.	—20	— 70	+170	+25·60	.
+ 60	**+20**	**+ 90**	**+ 80**	**0·00**	+1

(5)

Wyrazy ostatniego wiersza *(druk półtłusty)* przepisane z schematów (4), (gdzie zajmowały ostatnie miejsca na prawo), są jako [*pas*], [*pbs*], [*pcs*], [*pds*] i — [*pls*] sumami pierwszych 4-ech kolumn schematu (5), stanowiąc temsamem *kontrolę rachunkową.* Kolumna, oznaczona w nagłówku (ξ), odnosi się *do równań wag* związanych z niewiadomą ξ.

Dzieląc pierwsze równanie przez [*paa*] = +120·0, otrzymamy:

ξ—0·1667 η—0·3333 ζ+0·0 τ = +0·001667; oraz +0·008333 w kolumnie (ξ).

Równanie to mnożymy kolejno przez [*pab*] = —20, [*pac*] = —40, [*pad*] = 0, [*pas*] = +60 i podpisujemy pod odpowiednie wyrazy równań sum (5). Pod wyrazami wiersza pierwszego równ. (5) podpiszemy zatem: +1, —0·1667, —0·3333, 0·0, +0·001667 i 0·008333; pod wyrazami wiersza drugiego te same liczby, pomnożone przez [*pab*] = —20 i t. d., otrzymując następujący schemat:

ξ	η	ζ	τ	Wyrazy wolne (znak —)	(ξ)
+120·0 + *1·0*	—20·0 — *0·1667*	— 40·0 — *0·3333*	. *0·0000*	+ 0·20 + 0·001667	+ 1·00 + 0.008333
— 20·0 — 20·0	+60·0 + 3·3333	. + 6.6667	— 20·0 .	— 5·60 — 0·03333	. — 0·1667
— 40·0 — 40·0	. + 6·6667	+200·0 + 13·3333	— 70·0 .	—20·20 — 0 06667	. — 0·3333
. .	+20·0 .	— 70·0 .	+170·0 .	+25·60 .	. .
+ 60·0 + 60·0	**+20·0** — 10·0	**+ 90·0** — 20·0	**+ 80·0** .	**0·00** + 0·10000	+ 1·00 + *0·5000*

(5*)

Kontrolę stanowi tu ostatnie równanie sum (drukiem półtłustym) oraz równanie: +1·0 —0·1667 —0·3333 +0·0 = +0·5000, (4. cyfry wzięte z wiersza pierwszego i ostatnia cyfra u dołu na prawo oznaczone drukiem pochyłym), które jest identyczne z równaniem: $\frac{[paa]}{[paa]}+\frac{[pab]}{[paa]}+\frac{[pac]}{[paa]}+\frac{[pad]}{[paa]}=\frac{1}{[paa]}[pas]$.

Odejmując, począwszy od 2-giej kolumny drugiego wiersza, wyrazy redukcyjne, t. j. cyfry podpisane, od właściwych cyfr równ. (5*), otrzymujemy system raz zredukowanych równ. normalnych oraz raz zred. system równań wag dla niew. ξ i η.

η	ζ	τ	Wyrazy wolne (znak —)	(ξ)	(η)
+56·6667	— 6·6667	— 20·0000	— 5·5667	+ 0·1667	+1
— 6·6667	+186·6667	— 70·0000	—20·1333	+ 0·3333	.
—20·0000	— 70·0000	+170·0000	+25·6000	.	.
+30·0000	**+110·0000**	**+ 80·0000**	**— 0·1000**	**+ 0·5000**	+1

(6)

Cyfry (drukiem półtłustym) ostatniego wiersza, otrzymane jak i inne drogą redukcji ze schematu (5*) (patrz ostatni wiersz (5*)) są równocześnie sumami kolumn schematu (6), stanowią przeto kontrolę rachunkową.

Redukcja wyrazów ostatniego wiersza daje nam wyniki następujące:

$$+60{\cdot}0-60{\cdot}0=0,\quad +20{\cdot}0+10{\cdot}0=\mathbf{30{\cdot}0},\quad +90{\cdot}0+20{\cdot}0=\mathbf{110{\cdot}0},\quad \mathbf{+80{\cdot}0},$$
$$0{\cdot}0-0{\cdot}1=\mathbf{-0{\cdot}1},\ \text{oraz}\ +1{\cdot}0-0{\cdot}5=+0{\cdot}5.$$

Sumy kolumn dają wyniki identyczne.

Pod cyfry systemu równ. (6) wpisujemy odpowiednie wyrazy redukcyjne analogicznie, jak to miało miejsce w schematycznem zestawieniu równ. (5*), otrzymując dalszy schemat (6*), przyczem ze względu na symetrję wyrazów zreduk. równ. normalnych podajemy go w formie nieco uproszczonej:

η	ζ	τ	Wyrazy wolne (znak —)	(ξ)	(η)
+56·6667 *1·0*	— 6·6667 — *0·11765*	—20·00000 — *0·35294*	— 5·5667 — 0·09823	+ 0·1667 + 0·00294	+ 1·0000 + 0·01765
— 6·6667	+186·6667 + 0·7843	— 70·0000 + 2·3529	—20·1333 + 0·6549	+ 0·3333 — 0·0197	. — 0·1176
—20·0000	— 70·0000	+170·0000 + 7·0588	+25·6000 + 1·9646	. — 0·0588	. — 0·3529
+30·0000	**+110·0000** — 3·5295	**+ 80·0000** — 10·5882	**— 0·1000** — 2·9469	**+ 0·5000** + 0·0882	+ 1·0000 + *0·5295*

(6*)

Schemat ten zawiera również dwie kontrole. Pierwsza polega na zgodności (półtłustych) cyfr ostatniego wiersza, otrzymanych drogą redukcji z liczb ostatniego wiersza schematu (5*) z sumami kolumn schematu (6*), o czem była mowa poprzednio; druga jest zawarta w równaniu (druk pochyły):

$$1{\cdot}0 - 0{\cdot}11765 - 0{\cdot}35294 = 0{\cdot}5204_1 \quad \text{(zgodność dostat.)}.$$

Analogicznie otrzymamy dalsze dwa schematy:

ξ	τ	Wyrazy wolne (— znak)	(ξ)	(η)	(ζ)	
+184·8824 + *1·0*	— 72·3529 — *0·389240*	—20·7882 — 0·111836	+ 0·3530 + 0·001899	+ 0·1176 + 0·000632	+ 1·0000 + 0·005380	(7)
— 72·3529	+162·9412 + 28·1627	+23·6354 + 8 0917	+ 0·0588 — 0·1374	+ 0·3529 — 0·0458	. — 0·3892	
+113·5295	**+ 90·5882** — 44·1904	+ 2 8469 — 12·6967	+ **0·4118** 0·2156	+ **0·4705** + 0·0719	+ 1·0000 + *0·6108*	

Kontrola: 1·0—0·38924=+0·61076, oraz zgodność sum kolumn z wyrazami otrzymanemi z ostatniego wiersza syst. (6*) przy pomocy redukcji. (Zgodność osiągnęło w tym przypadku dostateczną, gdyż różnice są dopiero na czwartem miejscu dziesiętnem n. p. w 3-ej kolumnie mamy +2.8469 z redukcji zaś —20·7882+23·6354=+2·8472 z sumowania kolumn, różnica wynosi 0·0003).

τ	Wyrazy wolne (znak —)	(ξ)	(η)	(ζ)	(τ)	
+134·7785 + *1·0*	+15·5437 + 0·11533	+0·1962 + 0·00146	+0·3987 + 0·00296	+0·3892 + 0·00289	+1·0000 + 0·00742	(8)
+134·7786	**+15·5436**	**+0·1962**	**+0·3986**	**+0·3892**	+ *1·000*	

Kontrola: 1·0=1·0; wyrazy otrzymane drogą redukcyjną z przedostatniego i ostatniego wiersza syst. (7) zgadzają się dostatecznie (różnice na 4-tem miejscu dziesiętnem).

Z systemów (5)—(8) tworzymy następnie schematyczne zestawienie systemu zredukowanych równań normalnych i równań wag.

ξ	η	ζ	τ	Wyrazy wolne (znak —)	(ξ)	(η)	(ζ)	(τ)
+120·0000 1·0	—20·0000 — 0·11667	— 40·0000 — 0·33333	. .	+ 0·2000 + 0·00167	+1·0000 + 0·00833			
	+56·6667 1·0	— 6·6667 — 0·11765	— 20·0000 — 0·35294	— 5·5667 — 0·09823	+0·1667 + 0·00294	+1·0000 + 0·01765		
		+185·8824 1·0	— 72·3529 — 0·38924	—20·7882 — 0·11184	+0·3530 + 0·00190	+0·1176 + 0·00063	+1·0000 + 0·00538	
			+134·7785 1·0	+15·5437 + 0·11533	+0·1962 + 0·00146	+0·3987 + 0·00296	+0·3892 + 0·00289	+1·0000 + 0·00742
+60	+20	+90	+80	0·00	+1·0	+1·0	+1·0	+1·0

(9)

Ostatni wiersz przedstawia równanie sum, które po wstawieniu wartości niewiadomych oraz liczb Q musi być spełnione jako ostateczna kontrola.

Wyznaczenie wartości niewiadomych oraz liczb Q przeprowadzimy wedle następujących schematów:

	$+0{\cdot}11533$ $=\tau$	$+0{\cdot}00146$ $=Q_{1.4}$	$+0{\cdot}00296$ $=Q_{2.4}$	$+0{\cdot}00289$ $=Q_{3.4}$	$+0{\cdot}00742$ $=Q_{4.4}$	[z (9)]	(10)

	$-0{\cdot}11184$	$+0{\cdot}00190$	$+0{\cdot}00063$	$+0{\cdot}00538$	[z (9)]	
$(+0{\cdot}38924\,\tau=)$	$+0{\cdot}04489$	$+0{\cdot}00057$	$+0{\cdot}00115$	$+0{\cdot}00112$	$0{\cdot}38924\times$ liczby z (10)]	
	$-0{\cdot}06695$ $=\zeta$	$+0{\cdot}00247$ $=Q_{1.3}$	$+0{\cdot}00178$ $=Q_{2.3}$	$+0{\cdot}00650$ $=Q_{3.3}$		(11)

(wartości powyższe otrzymuje się przez dodanie cyfr w poszcz. kolumnach).

	$-0{\cdot}09823$	$+0{\cdot}00294$	$+0{\cdot}01765$	[z (9)]	
$(+0{\cdot}35294\,\tau=)$	$+0{\cdot}04070$	$+0{\cdot}00052$	$+0{\cdot}00104$	[$0{\cdot}35294\times$ liczby z (10)]	
$(+0{\cdot}11765\,\zeta=)$	$-0{\cdot}00788$	$+0{\cdot}00029$	$+0{\cdot}00021$	[$0{\cdot}11765\times$ liczby z (11)]	(12)
	$-0{\cdot}06541$ $=\eta$	$+0{\cdot}00375$ $=Q_{1.2}$	$+0{\cdot}01890$ $=Q_{2.2}$		

	$+0{\cdot}00167$	$+0{\cdot}00833$	[z (9)]	
$(+0{\cdot}33333\,\zeta=)$	$-0{\cdot}02232$	$+0{\cdot}00082$	[$0{\cdot}33333\times$ liczby z (11)]	
$(+0{\cdot}16667\,\eta=)$	$-0{\cdot}01090$	$+0{\cdot}00063$	[$0{\cdot}16667\times$ liczby z (12)]	(13)
	$-0{\cdot}03155$ $=\xi$	$+0{\cdot}00978$ $=Q_{1.1}$		

Kontrole przy pomocy równ. sum wykazują:

$60\,\xi\;+20\,\eta\;+90\,\zeta\;+80\,\tau=-0{\cdot}0003$ (ma być $0{\cdot}0000$)
$60\,Q_{1.1}+20\,Q_{1.2}+90\,Q_{1.3}+80\,Q_{1.4}=1{\cdot}0000$ („ „ $1{\cdot}0000$)
$60\,Q_{1.2}+20\,Q_{2.2}+90\,Q_{2.3}+80\,Q_{2.4}=1{\cdot}0000$ („ „ $1{\cdot}0000$)
$60\,Q_{1.3}+20\,Q_{2.3}+90\,Q_{3.3}+80\,Q_{3.4}=1{\cdot}0000$ („ „ $1{\cdot}0000$)
$60\,Q_{1.4}+20\,Q_{2.4}+90\,Q_{3.4}+80\,Q_{4.4}=1{\cdot}0005$ („ „ $1{\cdot}0000$)

(Zatem zgodność dostateczna).

Suma $[p\,\delta\delta]$ obliczona bezpośrednio z równań błędów z uwzględnieniem wag wynosi:

$$[p\,\delta\delta]=17{\cdot}0953.$$

Kontrolę stanowi wyraz $[pll.4]$, obliczony w sposób następujący:

bezpośr. z równ. błędów z uwzględnieniem wag mamy $[pll]=21{\cdot}7600$, od tej liczby należy odjąć wyrażenia, otrzymane z 5-tej kolumny syst. (9):

$$-(0{\cdot}2\times0{\cdot}00167+5{\cdot}5667\times0{\cdot}09823+20{\cdot}7882\times0{\cdot}11184+15{\cdot}5437\times0{\cdot}11533);$$
$$[pll.4]=[p\,\delta\delta]=17{\cdot}0952.$$

Błąd średni jednostkowy $\mu_0=\sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{n-k}}=\sqrt{\frac{17{\cdot}0953}{8-4}}=\sqrt{4{\cdot}2738}=\pm\,2''{\cdot}067.$

Ponieważ wagi przyjęto równe ilościom repetycyj, przeto jest to błąd średni kąta uzyskanego z *jednej* repetycji.

(Błąd ten ma w tym przypadku znaczenie teoretyczne, gdyż tylko przy znaczniejszych ilościach repetycyj można przyjmować wagi równe ilościom repetycyj. Wskazanem byłoby tu raczej przyjęcie wagi równej jedności dla kąta 50 lub 100 razy repetowanego, w naszym przypadku otrzymalibyśmy wówczas inne wagi na początku; błąd średni kąta 50 razy repet. $\mu_{(50)}=\sqrt{\frac{4{\cdot}2738}{50}}=\pm 0''{\cdot}292$, zaś 100 razy repet. $\mu_{(100)}=\sqrt{\frac{4{\cdot}2738}{100}}=\pm 0''{\cdot}2067$).

Wartości niewiadomych uzyskane wyrównaniem są: (por. związki (2))

$$x=x_0+\xi=\ 6^0 59' 34''{\cdot}478,\quad y=y_0+\eta=18^0 43' 45''{\cdot}535,$$
$$z=z_0+\zeta=19^0 25' 59''{\cdot}353,\quad t=t_0+\tau=34^0 18' 43''{\cdot}725.$$

Błędy średnie niewiadomych otrzymujemy na podstawie związków (23) § 5-go:

$$\mu_x=\mu_0\sqrt{Q_{1.1}}=2''{\cdot}067\sqrt{0{\cdot}00978}=\pm 0''{\cdot}204,$$
$$\mu_y=\mu_0\sqrt{Q_{2.2}}=2''{\cdot}067\sqrt{0{\cdot}01890}=\pm 0''{\cdot}284,$$
$$\mu_z=\mu_0\sqrt{Q_{3.3}}=2''{\cdot}067\sqrt{0{\cdot}00650}=\pm 0''{\cdot}167,$$
$$\mu_t=\mu_0\sqrt{Q_{4.4}}=2''{\cdot}067\sqrt{0{\cdot}00742}=\pm 0''{\cdot}178.$$

Wartości wyrównane spostrzeżeń uzyskujemy, wyrażając kąty spostrzegane przez kąty wyrównane x, y, z i t:

$BA=19^0 25' 59''{\cdot}353$, $HW=15^0 34' 58''{\cdot}191$, $BN=\ 6^0 59' 34''{\cdot}478$,
$BW=34^0 18' 43''{\cdot}725$, $BH=18^0 43' 45''{\cdot}535$, $NH=11^0 44' 11''{\cdot}057$,
$AW=14^0 52' 44''{\cdot}372$, $NA=12^0 26' 24''{\cdot}875$.

§ 8. Równoważne systemy równań błędów. Błąd średni funkcji niewiadomych.

Równania normalne można ustawić *nietylko* w przypadku, *gdy* liczba spostrzeżeń *n jest większą* od liczby *niewiadomych k*, lecz także, gdy $n=k$. *Korzyść* zastosowania w tym przypadku równań normalnych do wyznaczenia niewiadomych polega na *równoczesnem uzyskaniu wartości* Q_{11}, Q_{22}, ... Q_{kk}. Przyjmując następnie jedn. błąd śr. μ_0 wedle odpowiedniego wzoru empirycznego (wyprowadzonego na podstawie licznych doświadczeń), jesteśmy wstanie, znając wartości poszczególnych Q, *obliczyć błędy śr. niewiadomych.*

Przypuśćmy, że wyrównując dwa systemy równań błędów, otrzymaliśmy identyczne równania normalne. Obu tym systemom odpowiadają te same wartości niewiadomych oraz wag, a Helmert nazywa je *równoważnemi systemami błędów.*

Specjalne znaczenie ma w rachunku wyrównawczym *system zredukowanych równań normalnych.* System składający się ogólnie z k równań o k niewiadomych, odpowiadający zatem ilości spostrzeżeń koniecznie potrzebnych do wyznaczenia wartości niewiadomych x, y, z, ..., możemy uważać za system równań błędów o *błędach pozornych* $\delta=0$.

Dzieląc każde zredukowane równanie normalne przez *spółczynnik* jego pierwszej *niewiadomej*, a więc przez $[paa]$, $[pbb.1]$, $[pcc.2]$ i t. d., oraz przyjmując owe wartości jako *wagi* poszczególnych *równań*, otrzymujemy system równań, który, jak to łatwo można stwierdzić, jest *systemem równoważnym z pierwotnym systemem równań błędów,* oraz powstałemi z niego równaniami normalnemi. Ten specjalny system równoważny nazywamy systemem *zupełnie równoważnym.*

Ograniczając się tylko do 3 niewiadomych, otrzymamy dla systemu błędów

$$\begin{array}{lll} \delta_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 & \text{o wadze:} & p_1 \\ \delta_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 & \text{„ „} & p_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \text{„ „} & . \\ \delta_n = a_n x + b_n y + c_n z + l_n & \text{„ „} & p_n, \end{array} \tag{1}$$

zupełnie równoważmy system równań błędów w kształcie:

$$\begin{array}{lll} x + \frac{[pab]}{[paa]} y + \frac{[pac]}{[paa]} z + \frac{[pal]}{[paa]} = 0 & \text{o wadze:} & [paa] \\ y + \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} z + \frac{[pbl.1]}{[pbb.1]} = 0 & \text{„ „} & [pbb.1] \\ z + \frac{[pcl.2]}{[pcc.2]} = 0 & \text{„ „} & [pcc.2]. \end{array} \tag{2}$$

$$\text{Połóżmy } -\frac{[pal]}{[paa]} = \chi_1, \ -\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]} = \chi_2, \ -\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]} = \chi_3. \tag{3}$$

Ponieważ wielkości te są od siebie *niezależne,* możemy je uważać za *niezależne spostrzeżenia* o wagach $[paa]$, $[pbb.1]$, $[pcc.2]$ i poddać je w połączeniu *z innemi* odpowiedniemi spostrzeżeniami *na nowo wyrównaniu* (drugiemu). Z powodu przeprowadzenia ponownego wyrównania, otrzymają spostrzeżenia χ_1, χ_2 i χ_3 pewne poprawki, czyli błędy pozorne Δ_1, Δ_2 i Δ_3; w ten sposób otrzymamy związki dla (pozornych) spostrzeżeń χ:

$$\begin{array}{lll} \chi_1 + \Delta_1 = x + \frac{[pab]}{[paa]} y + \frac{[pac]}{[paa]} z & \text{o wadze} & [paa] \\ \chi_2 + \Delta_2 = y + \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} z & \text{„ „} & [pbb.1] \\ \chi_3 + \Delta_3 = z & \text{„ „} & [pcc.2], \end{array} \tag{4}$$

odpowiadające ogólnemu kształtowi równań błędów:

$$L_i + \delta_i = f_i(x, y, z, \dots\dots).$$

Metoda ta wyrównania, wprowadzona przez *Helmerta*, ma bardzo doniosłe znaczenie przy *wyrównaniu sieci tryangulacyjnych*, szczególnie w przypadkach, *gdy kąty (kierunki),* obserwowane na poszczególnych stanowiskach (stacjach) sieci, *nie mogą być uważane jako niezależne spostrzeżenia.*

Z powodu zależności od siebie kątów na poszczególnych stanowiskach przybywają do warunków geometrycznych sieci tryangulacyjnych jeszcze i warunki stacyjne, komplikując w wysokim stopniu przeprowadzenie wyrównania. Otóż metoda *Helmerta* dozwala nam przeprowadzić wyrównanie na każdem stanowisku stacji *osobno*, a otrzymane wyniki wstawić ***przy pomocy równoważnego systemu*** zredukowanych równań normalnych ***z odpowiedniemi wagami do warunków sieci, poddając je ponownemu wyrównaniu.***

Sprawę tę omówimy obszerniej w § 3-cim rozdz. VI-go *A*, § 3-cim rozdz. IX-go, oraz w § 8-ym rozdz. XI-go *B*.

System równoważny (4) posłuży nam do *wyznaczenia błędu średniego funkcji niewiadomych uzyskanych wyrównaniem.*

Weźmy na uwagę funkcję niewiadomych uzyskanych wyrównaniem, a zatem

$$U = F(x, y, z).$$

Kwadratu błędu średniego tej funkcji nie możemy urobić wedle wzorów podanych w § 3-im rozdz. II-go, gdyż wielkości x, y, z, jako uzyskanie z wyrównania, *nie są niezależne*, powstały bowiem z warunku $[p\delta\delta] = \min$.

Natomiast możemy przy pomocy zredukowanych równań normalnych wyrazić x, y i z przez *niezależne wielkości* χ_1, χ_2 i χ_3, uważane za spostrzeżenia o błędach pozornych równych zeru, t. zn. przez niezależne spostrzeżenia zupełnie równoważnego systemu równ. bł.

Możemy zatem położyć ogólnie

$$U = F(x, y, z) = \varphi(\chi_1, \chi_2, \chi_3),$$

(przyczem oczywiście $\mu_F^2 = \mu_\varphi^2$) i zastosować przy obliczaniu μ_φ^2 wzory omawiane w § 3-cim rozdz. II-go, więc:

$$\mu_u^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial \chi_1}\right)^2 \mu_{\chi_1}^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \chi_2}\right)^2 \mu_{\chi_2}^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \chi_3}\right)^2 \mu_{\chi_3}^2. \tag{5}$$

Wyrażając w systemie zredukowanych równań normalnych

$$\begin{aligned} x + \frac{[pab]}{[paa]} y + \frac{[pac]}{[paa]} z &= \chi_1 \quad \text{o wadze } P_1 = [paa]. \\ y + \frac{[pbc.1]}{[pbb.2]} z &= \chi_2 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad P_2 = [pbb.1] \\ z &= \chi_3 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad P_3 = [pcc.2] \end{aligned} \tag{6}$$

niewiadome x, y i z przez χ_1, χ_2 i χ_3, otrzymamy:

$$\begin{aligned} z &= \chi_3 \\ y &= \chi_2 - \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} \chi_3 \\ x &= \chi_1 - \frac{[pab]}{[paa]} \chi_2 - \left\{ \frac{[pac]}{[paa]} - \frac{[pab][pbc.1]}{[paa][pbb.1]} \right\} \chi_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Oznaczmy dla uproszczenia:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=F_1,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=F_2,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=F_3 \tag{8}$$

i utwórzmy pochodne równania (5);

χ_1 jest zawarte tylko w trzecim związku równań (7), zatem

$$\frac{\partial U}{\partial \chi_1}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \chi_1}=F_1\frac{\partial x}{\partial \chi_1},$$

natomiast χ_2 jest w drugim i trzecim związku równań (7), przeto:

$$\frac{\partial U}{\partial \chi_2}=\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \chi_2}+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \chi_2}=F_2\frac{\partial y}{\partial \chi_2}+F_1\frac{\partial x}{\partial \chi_2}, \tag{9}$$

wreszcie χ_3 znajduje się we wszystkich trzech związkach (7), zatem:

$$\frac{\partial U}{\partial \chi_3}=\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \chi_3}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \chi_3}+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \chi_3}=F_3\frac{\partial z}{\partial \chi_3}+F_2\frac{\partial y}{\partial \chi_3}+F_1\frac{\partial x}{\partial \chi_3}.$$

Pochodne występujące w równaniach (9) znajdziemy przy pomocy równań (7).

$$\frac{\partial x}{\partial \chi_1}=1,\ \frac{\partial y}{\partial \chi_2}=1,\ \frac{\partial x}{\partial \chi_2}=-\frac{[pab]}{[paa]},\ \frac{\partial z}{\partial \chi_3}=1,\ \frac{\partial y}{\partial \chi_3}=-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]},$$
$$\frac{\partial x}{\partial \chi_3}=-\left\{\frac{[pac]}{[paa]}-\frac{[pab]}{[paa]}\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}\right\}. \tag{10}$$

Po wstawieniu tych wartości do związków (9) otrzymamy:

$$\frac{\partial U}{\partial \chi_1}=F_1,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \chi_2}=F_2-\frac{[pab]}{[paa]}F_1 \tag{11}$$
$$\frac{\partial U}{\partial \chi_3}=F_3-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}\left\{F_2-\frac{[pab]}{[paa]}F_1\right\}-\frac{[pac]}{[paa]}F_1.$$

Oznaczmy dla uproszczenia

$$F_2-\frac{[pab]}{[paa]}F_1=(F_2.1),\quad F_3-\frac{[pac]}{[paa]}F_1=(F_3.1),$$

$$\text{oraz } (F_3.1)-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}(F_2.1)=(F_3.2), \tag{12}$$ wówczas będzie:

$$\frac{\partial U}{\partial \chi_1}=F_1,\quad \frac{\partial U}{\partial \chi_2}=(F_2.1),\ \text{zaś}\ \frac{\partial U}{\partial \chi_3}=(F_3.2). \tag{13}$$

Wstawiając te wartości do wzoru (5), otrzymamy:

$$\mu_U^2=F_1^2\mu_{\chi_1}^2+(F_2.1)^2\mu_{\chi_2}^2+(F_3.2)^2\mu_{\chi_3}^2. \tag{14}$$

Ze względu na wagi spostrzeżeń χ_1, χ_2 i χ_3 [por. równ. (6)] będzie

$$\mu_{\chi_1}{}^2=\frac{\mu_0{}^2}{P_1}=\frac{\mu_0{}^2}{[paa]},\quad \mu_{\chi_2}{}^2=\frac{\mu_0{}^2}{P_2}=\frac{\mu_0{}^2}{[pbb.1]}\quad \text{i}\quad \mu_{\chi_3}{}^2=\frac{\mu_0{}^2}{P_3}=\frac{\mu_0{}^2}{[pcc.2]},\tag{15}$$

przeto związek (14) przejdzie na związek:

$$\mu_U{}^2=\left\{\frac{F_1{}^2}{[paa]}+\frac{(F_2.1)}{[pbb.1]}+\frac{(F_3.2)^2}{[pcc.2]}\right\}\mu_0{}^2,\tag{16}$$

a waga „wyrównanej“ funkcji $U=F(x, y, z)$, t. zn. waga tej funkcji po wstawieniu za x, y, z wartości uzyskanych z wyrównania przedstawi się wzorem:

$$P_U=1:\left\{\frac{F_1{}^2}{[paa]}+\frac{(F_2.1)^2}{[pbb.1]}+\frac{(F_3.2)^2}{[pcc.2]}\right\}\tag{17}$$

O ile wszystkim spostrzeżeniom L odpowiadały wagi $p=1$, odpadają wagi we wszystkich tu przytoczonych wzorach z wyjątkiem oczywiście wag $P_1=[aa]$, $P_2=[bb.1]$, $P_3=[cc.2]$; związki (16) i (17) przedstawią się wówczas we formie nieco uproszczonej, a mianowicie:

$$\mu_U{}^2=\left\{\frac{F_1{}^2}{[aa]}+\frac{(F_2.1)^2}{[bb.1]}+\frac{(F_3.2)^2}{[cc.2]}\right\}\mu^2,\tag{18}$$

$$P_U=1:\left\{\frac{F_1{}^2}{[aa]}+\frac{(F_2.1)^2}{[bb.1]}+\frac{(F_3.2)^2}{[cc.2]}\right\}.\tag{19}$$

F_1, F_2, F_3 są, jak podaliśmy w formułach (8), pochodnemi cząstkowemi funkcji $U=F(x, y, z)$ względem niewiadomych x, y, z; redukcję F_2 na $(F_2.1)$, oraz F_3 na $(F_3.2)$ przeprowadzamy wedle równ. (12) (przy wagach równych jedności oczywiście z opuszczeniem wag p).

Prócz tej formuły na błąd śr. funkcji x, y, z, mamy jeszcze i drugą, którą wyprowadzimy drogą inną, za pośrednictwem niezależnych spostrzeżeń L.

Kładąc $x=x_0+\xi$, $y=y_0+\eta$, $z=z_0+\zeta$, otrzymamy

$$U=F(x, y, z)=F(x_0+\xi, y_0+\eta, z_0+\zeta),$$

a po rozwinięciu w szereg Taylora z zachowaniem wyrazów tylko rzędu pierwszego:

$$U=F(x_0, y_0, z_0)+\frac{\partial F}{\partial x}\xi+\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial z},\tag{20}$$

lub ze względu na związki (6) § 5-go, (str. 88.), oraz (8) § 8-go:

$$U=F(x_0, y_0, z_0)=F_1[\alpha l]-F_2[\beta l]-F_3[\gamma l].\tag{21}$$

Ponieważ spostrzeżenia L, a zatem i wielkości l są niezależne, możemy zastosować przy tworzeniu błędu średniego μ_U wzory na przenoszenie się błędów, wymienione w § 3-cim rozdz. II-go.

Zatem otrzymamy wedle wzoru (16) (str. 41.):

$$\mu_U^2=\left(\frac{\partial U}{\partial l_1}\right)^2\mu^2_1+\left(\frac{\partial U}{\partial l_2}\right)^2\mu^2_2+\ldots\ldots+\left(\frac{\partial U}{\partial l_n}\right)^2\mu_n^2. \tag{22}$$

$$\frac{\partial U}{\partial l_i}=-(F_1\alpha_i+F_2\beta_i+F_3\gamma_i),$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l_i}\right)^2=F_1^2\alpha_i^2+2F_1F_2\alpha_i\beta_i+2F_1F_3\alpha_i\gamma_i+$$
$$+\quad F_2^2\beta_i^2+2F_2F_3\beta_i\gamma_i+$$
$$+\quad F^2_3\gamma_i^2,$$

a ponieważ $\mu_i^2=\frac{\mu^2_0}{p_i}$:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l_i}\right)^2\mu_i^2=\left\{\begin{array}{r}F_1^2\frac{\alpha_i\alpha_i}{p_i}+2F_1F_2\frac{\alpha_i\beta_i}{p_i}+2F_1F_3\frac{\alpha_i\gamma_i}{p_i}\\+\quad F_2^2\frac{\beta_i\beta_i}{p_i}+2F_2F_3\frac{\beta_i\gamma_i}{p_i}\\+\quad F_3^2\frac{\gamma_i\gamma_i}{p_i}\end{array}\right\}\mu_0^2. \tag{23}$$

Tworząc sumę wyrażeń zawartych we wzorze (23), otrzymamy:

$$\mu_U^2=\left\{\begin{array}{r}F_1^2\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]+2F_1F_2\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]+2F_1F_3\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right]\\+\quad F_2^2\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]+2F_2F_3\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]\\+\quad F_3^2\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]\end{array}\right\}\mu_0^2, \tag{24}$$

lub ze względu na związki (22), (22*) i (24) § 5-go (str. 92. i 93.):

$$\mu_U^2=\left\{\begin{array}{r}F_1^2Q_{1.1}+2F_1F_2Q_{1.2}+1F_1F_3Q_{1.3}\\+\quad F_2^2Q_{2.2}+2F_2F_3Q_{2.3}\\F_3^2Q_{3.3}\end{array}\right\}\mu_0^2. \tag{25}$$

Wyrażenie ujęte w klamrę jest zarazem odwrotnością wagi funkcji U, a więc $\frac{1}{P_U}$.

W praktyce używamy wzoru (16) lub (25) zależnie od tego, który w danym przypadku przysparza *mniej* pracy rachunkowej.

Przykład. (Ciąg dalszy ust. 3-go § 7-go, str. 101—109.).

Wyrównana wartość kąta NH wynosi:

$$U=11^0 44' 11''{\cdot}057=y-x.$$

Licząc wedle wzoru (16), otrzymamy $F_1=-1$, $F_2=+1$, $F_3=0$, $F_4=0$.

Wartości wyrazów, wchodzących w skład wzoru (16), przedstawiają się następująco:

$$\frac{[pab]}{[paa]} = -0{\cdot}1667, \quad \frac{[pac]}{[paa]} = -0{\cdot}3333, \quad \frac{[pad]}{[paa]} = 0$$

$$\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} = -0{\cdot}11765, \quad \frac{[pbd.1]}{[pbb.1]} = -0{\cdot}3529, \quad \frac{[pcd.2]}{[pcc.2]} = -0{\cdot}3892,$$

zatem: $(F_2.1) = 1 - 0{\cdot}1667 = 0{\cdot}8333$, $(F_3.1) = 0 - 0{\cdot}3333 = -0{\cdot}3333$
$(F_4.1) = 0 - 0 = 0$
$(F_3.2) = -0{\cdot}3333 + 0{\cdot}11765 . 0{\cdot}8333 = -0{\cdot}2353$
$(F_4.2) = 0 + 0{\cdot}3529 . 0{\cdot}8333 = 0{\cdot}2941$
$(F_4.3) = 0{\cdot}2941 - 0{\cdot}3892 . 2353 = 0{\cdot}2025.$

Odwrotność wagi $\frac{1}{P}$ jest więc:

$$\frac{1}{P_U} = \frac{1^2}{120{\cdot}0} + \frac{0{\cdot}8333^2}{56{\cdot}6667} + \frac{0{\cdot}2353^2}{135{\cdot}8824} + \frac{0{\cdot}2025^2}{134{\cdot}7785} = 0{\cdot}02119,$$

$$\mu_U^2 = 4{\cdot}2738 . 0{\cdot}02119, \quad \mu_U = \pm 0''{\cdot}301.$$

Waga $\frac{1}{0{\cdot}02119} = 47$ odpowiada 47 pomiarom repetycyjnym, podczas gdy przed wyrównaniem wynosiła tylko 20 (wykonano tylko 20 pomiarów repetycyjnych).

Wedle wzoru (25) przedstawia się rachunek prościej w tym przypadku ze względu, że U jest funkcją tylko *dwu* niewiadomych x i y:

$$\mu_U^2 = \mu_0^2 (F_1^2 Q_{1.1} + 2 F_1 F_2 Q_{1.2} + F_2^2 Q_{2.2}).$$

Wstawiając wartości szczegółowe otrzymamy:

$\mu_U = 4{\cdot}2738 (0{\cdot}00978 - 0{\cdot}00750 + 0{\cdot}01890) = 4{\cdot}2738 . 0{\cdot}02118 = 0{\cdot}09052,$
$\mu_U = \pm 0,''301.$

Jak widzimy, wypadł wynik zgodny przy zastosowaniu obu wzorów.

§ 9. Dodatkowe uwagi o wagach spostrzeżeń pośrednich.

Wagi spostrzeżeń omówiliśmy obszernie w § 4-tym rozdz. II-go, mimoto powracamy jeszcze do tej sprawy, a to w tym celu, aby rozprószyć wszelkie wątpliwości, jakie mogłyby nasunąć się czytelnikowi w tej kwestji.

Wedle teorji są w równaniach błędów spółczynniki przy niewiadomych *bezbłędne*, natomiast w praktyce pochodzą one często albo ze spostrzeżeń, albo — przy funkcjach nieliniowych — tworzy się je jako pochodne cząstkowe przy użyciu przybliżonych wartości niewiadomych; w obu tych przypadkach są zatem spółczynniki przy niewiadomych wielkościami ***błędnemi***[1]).

[1]) Dokładne omówienie tej kwestji znajdzie czytelnik w rozprawie: *Dr. K. Weigel*, „Ueber die Behandlung d. Fehlergl., deren Koeffizienten b. d. Unbekannten nicht fehlerfrei sind". Oester. Zeitschr. f. Vermessungswesen t. XI, 1913.

W pierwszym przypadku, o ile mamy funkcję liniową, przedstawi się związek między *prawdziwemi* wartościami spostrzeżenia spółczynników oraz niewiadomych następująco:

$$\varepsilon_l = (a+\varepsilon_a)X + (b+\varepsilon_b)Y + (c+\varepsilon_c)Z + \ldots. - L$$

lub $$\varepsilon_l = (a+\varepsilon_a)X + (b+\varepsilon_b)Y + (c+\varepsilon_c)Z + \ldots. + l,$$

a wreszcie: $$\varepsilon = \varepsilon_l - X\varepsilon_a - Y\varepsilon_b - Z\varepsilon_c - \ldots = aX + bY + cZ + \ldots + l. \quad (1)$$

Przechodząc z błędów prawdziwych na średnie, otrzymamy dalej:

$$\mu^2 = X^2\mu_a^2 + Y^2\mu_b^2 + Z^2\mu_c^2 + \ldots. + \mu_l^2 \quad (2)$$

$$p = \frac{\mu_0^2}{X^2\mu_a^2 + Y^2\mu_b^2 + Z^2\mu_c^2 + \ldots. + \mu_l^2}, \quad (3)$$

gdzie jedn. błąd średni μ_0 jest urobiony w ten sam sposób dla pewnego ściśle określonego l_0 i związanych z tą wielkością spółczynników $a, b, c\ldots$, przyczem często, o ile nam nie zależy na wartości μ_0, kładziemy go równym dowolnej stałej C.

Z powodu nieznajomości prawdziwych wartości niewiadomych, zastępujemy je wartościami przybliżonemi, otrzymując zamiast wzoru (3):

$$p = \frac{\mu_0^2}{x_0^2\mu_a^2 + y_0^2\mu_b^2 + z_0^2\mu_c^2 + \ldots. + \mu_l^2},$$

lub ew. $$p = \frac{C}{x_0^2\mu_a^2 + y_0^2\mu_{b_2} + z_0^2\mu_c^2 + \ldots. + \mu_l^2}. \quad (4)$$

Wzór (4) odnosi się także i do funkcyj nieliniowych, przyczem jednak — jak wiadomo —

$$a = \frac{\partial F}{\partial x_0}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial y_0}, \quad c = \frac{\partial F}{\partial z_0}, \ldots;$$

zatem $\mu_a, \mu_b, \mu_c, \ldots$, są błędami śr. pochodnych cząstkowych, o ile w nich zachodzą wielkości obserwowane (t. j. błędne).

W ten sposób urobione wagi równań błędów *wystarczają z reguły* przy zastosowaniu rachunku wyr. *w praktyce.*

W przypadku funkcyj nieliniowych należałoby — biorąc rzecz ściślej — uwzględnić przy spółczynnikach równań błędów błędy, powstałe wskutek zaniedbania przy rozwijaniu funkcji w szereg Taylora wyrazów rzędu wyższego niż pierwszy.

W sprawie ostatnio poruszonej, która ma jednak w praktyce wyrównawczej z reguły znaczenie niewielkie, odsyłam czytelnika do powyżej zacytowanej rozprawy.

Natomiast może być poprzednio opisana metoda, uwzględniająca błędy spółczynników równań błędów, zastosowana z korzyścią w praktyce.

Weźmy jeszcze raz na uwagę przykład omawiany przy końcu ustępu 2-go § 2-go rozdz. II-go (str. 33.—35.).

Dla wyznaczenia stałych tachymetru ustawiliśmy tam przyjmując, że odległości D są bezbłędne, równania błędów kształtu:

$$\delta_i = -\frac{D_i - y_0}{x_0^2}\xi - \frac{1}{x_0}\eta + \left(\frac{D_i - y_0}{x_0} - l_i\right) \text{ o wagach } \left(\frac{100}{D_i}\right)^2.$$

W tym przypadku jednak możemy je utworzyć, ze względu na zasadniczy związek liniowy $D = Kl + k$, w sposób bardziej prosty, mianowicie:

$$\Delta_i = Kl_i + k - D_i = l_i x + y - D_i,$$

przyczem Δ oznacza całkowity błąd pozorny tego związku.

Wedle poprzednich uwag o tworzeniu wag, otrzymamy dla wag związek:

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{x_0^2 \mu_{a_i}^2 + \mu_{D_i}} = \frac{\mu_0^2}{x_0^2 \mu_{l_i} + \mu_{D_i}^2}, \tag{4*}$$

przyczem μ_0^2, jako kwadrat błędu średn. dla 100 m długości, będzie:

$$\mu_0^2 = x_0^2 \mu_{l_{100}}^2 + \mu_{_{100}}^2 = x_0^2 (0{\cdot}0025)^2 100^2 + (0{\cdot}03)^2 . 100,$$

ponieważ wedle uproszczonych wzorów empirycznych:

$$\mu_l = \pm \nu' D = \pm 0{\cdot}0025 D, \quad \mu_D = \pm \nu \sqrt{D} = \pm 0{\cdot}03 \sqrt{D}.$$

Z powyższych uwag wynika, że wpływ błędu μ_D jest zaniedbywalny w obec wpływu błędu μ_l; w praktyce możemy zatem przyjąć

$$p_i = \frac{x_0^2 \nu'^2 100^2}{x_0^2 \nu'^2 D^2} = \left(\frac{100}{D}\right)^2, \tag{4**}$$

jak to ma miejsce w przykładzie na str. 33.—35.

Jak z powyższego wynika, może być metoda opisana w niniejszym paragrafie użyta także do nadawania równaniom błędów kształtu bardziej prostego, o ile — jak w tym przypadku — da się ustawić przy jej pomocy związek liniowy, przez co unika się rozwijania związków w szereg Taylora.

Należy jednak pamiętać, że w takich przypadkach, tak błędy Δ, jak i błąd średni μ_0 odnoszą się do całego wyrażenia $Kl + k - D$, a nie do l, jak poprzednio.

O ile stała K jest równą w przybliżeniu 100, jest także w przybliżeniu $D = \backsim 100\, l$, zatem

$$p_i = \left(\frac{100}{D}\right)^2 = \frac{1}{l^2};$$

dzieląc przeto równanie błędów przez l, otrzymamy:

$$\vartheta_i = \frac{\Delta_i}{l_i} = K + \frac{1}{l_i}k - \frac{D_i}{l_i}, \text{ przyczem } p = 1.$$

Ostatnio podany kształt równań błędów nadaje się najlepiej dla celów praktycznych.

ROZDZIAŁ PIĄTY.

Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych.

§ 1. Równania odchyłek.

Z uwag przytoczonych w ust. 3-cim § 2-go rozdz. II-go wynika, że spostrzeżenia zawarunkowane odnoszą się do wielkości, których wartości prawdziwe nie są niezależne, lecz *czynią zadość pewnym* określonym (lecz między sobą niezależnym) *związkom*.

Oczywiście może być mowa o *wyrównaniu* tylko wówczas, gdy *ilość spostrzeżeń n przewyższa* ilość *związków* czyli *warunków r*.

Przypuszczając, że czytelnik nabrał już pewnej rutyny w dziedzinie rachunku wyrównawczego, przeprowadzimy wszelkie wywody w formie ogólnej i nieco zwięźlejszej, niż to dotychczas miało miejsce.

Związki, którym czynią zadość prawdziwe wartości spostrzeżeń, zestawmy w formie ogólnej:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2, \ldots\ldots l_n+\varepsilon_n)=0 \\ f_2(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2, \ldots\ldots l_n+\varepsilon_n)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_r(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2, \ldots\ldots l_n+\varepsilon_n)=0 \end{array}\right\} \text{ ilość } r. \qquad (1)$$

Związki te nazywamy *równaniami warunkowemi*, lub krótko *warunkami*.

Spostrzegane wartości $l_1, l_2, \ldots l_n$, wstawione do równań warunkowych, nie spełnią ich do zera. Różnice ω powstałe w ten sposób, nazywamy *odchyłkami* równań warunkowych, które to ostatnie przechodzą na *r równań odchyłek* (w kształcie ogólnym):

$$\left.\begin{array}{l} f_1(l_1,\ l_2, \ldots\ldots l_n)=\omega_1 \\ f_2(l_1,\ l_2, \ldots\ldots l_n)=\omega_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_r(l_1,\ l_2, \ldots\ldots l_n)=\omega_r. \end{array}\right\} \text{ ilość } r. \qquad (2)$$

Rachunek wyrównawczy ma nam dostarczyć zamiast błędów prawdziwych ε takie błędy pozorne δ, — które w tym przypadku nazywamy *poprawkami,* — aby spostrzeżenia uzupełnione niemi spełniły warunki (1), zatem:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(l_1+\delta_1,\ l_2+\delta_2,\ldots\ldots l_n+\delta_n)=0 \\ f_2(l_1+\delta_1,\ l_2+\delta_2,\ldots\ldots l_n+\delta_n)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_r(l_1+\delta_1,\ l_2+\delta_2,\ldots\ldots l_n+\delta_n)=0. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Zastosowując do równań (3) rozwinięcie w szereg Taylora z pominięciem wyrazów rzędów wyższych niż pierwszy, otrzymamy je w kształcie liniowym:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(l_1,\ l_2,\ldots\ldots l_n)+\dfrac{\partial f_1}{\partial l_1}\delta_1+\dfrac{\partial f_1}{\partial l_2}\delta_2+\ldots\ldots+\dfrac{\partial f_1}{\partial l_n}\delta_n=0 \\ f_2(l_1,\ l_2,\ldots\ldots l_n)+\dfrac{\partial f_2}{\partial l_1}\delta_1+\dfrac{\delta f_2}{\partial l_2}\delta_2+\ldots\ldots+\dfrac{\partial f_2}{\partial l_n}\partial_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_r(l_1,\ l_2,\ldots\ldots l_n)+\dfrac{\partial f_r}{\partial l_1}\delta_1+\dfrac{\delta f_r}{\delta l_2}\delta_2+\ldots\ldots+\dfrac{\partial f_r}{\partial l_n}\partial_n=0, \end{array}\right\} \quad (3^*)$$

zaś kładąc $\qquad \dfrac{\partial f_1}{\partial l_i}=a_i,\ \dfrac{\partial f_2}{\partial l_i}=b_i,\ldots\ldots\dfrac{\partial f_r}{\partial l_i}=r_i$, oraz $\qquad$ (4)

zastępując poszczególne f_i przez ω_i (równ. (2)), będziemy mieli r *liniowych równań odchyłek wyrażonych poprawkami:*

$$\left.\begin{array}{l} a_1\delta_1+a_2\delta_2+\ldots\ldots+a_n\delta_n+\omega_1=0 \\ b_1\delta_1+b_2\delta_2+\ldots\ldots+b_n\delta_n+\omega_2=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1\delta_1+r_2\delta_2+\ldots\ldots+r_n\delta_n+\omega_r=0. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Jak widać z równań (5), jest w ogólnej liczbie n poprawek tylko r *poprawek zależnych,* zaś pozostałe $(n-r)$ *są niezależne.*

Jeśli tedy wybierzemy z pośród n poprawek $(n-r)$ niezależnych, oznaczymy je przez x, y, z,...., możemy utworzyć n związków między poprawkami a niewiadomemi, które będą niczem innem, jak dobrze nam znanemi *równaniami błędów.*

Z tego wynika, że *spostrzeżenia zawarunkowane można wyrównać metodą spostrzeżeń pośrednich.*

Prócz tej metody wyrównania możemy zastosować jeszcze i drugą, która wynika z *utworzenia* $[p\delta\delta]=$ *min. przy równoczesnem uwzględnieniu* r *warunków* postawionych na początku zagadnienia, t. j. równań (5).

§ 2. Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych metodą spostrzeżeń pośrednich. Jednostkowy błąd średni μ_0.

Na podstawie związków (3*) lub (5) (ewentualnie na podstawie odpowiedniej figury przedstawiającej związki wykreślnie) można się łatwo zorjentować, które poprawki w liczbie $(n-r)$ są niezależne. Bardzo często spotykamy tego rodzaju związki, że pozwalają na wybór kilku systemów $(n-r)$ niezależnych poprawek. Oczywiście zdecydujemy się wybrać taki system poprawek jako niewiadome równań błędów, który będzie wymagał *najmniejszego nakładu pracy rachunkowej* przy wyrównaniu, t. zn. taki, któremu będą odpowiadały równania normalne o *największej ilości spółczynników* przy niewiadomych *równych zeru*.

Dla uproszczenia wywodów przypuśćmy, że obrany przez nas system niezależnych $(n-r)$ poprawek zawiera początkowe poprawki od δ_1 do δ_{n-r}; w tym przypadku otrzymamy $(n-r)$ równań błędów kształtu:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = x \\ \delta_2 = y \\ \delta_3 = z \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots, \end{array}\right\} \quad n-r \text{ równ. błędów}$$

oraz r równań odchyłek (5) ogólnego kształtu:

$$\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots\ldots + l_i;$$

razem n równań błędów, przyczem na wyrazy wolne l_i złożą się pewne odchyłki ω.

O ile spostrzeżeniom odpowiadają różne wagi p, przeprowadzimy wyrównanie na podstawie warunku $[p\,\delta\delta] = \text{min.}$, uzyskując przy pomocy równań normalnych wartości niewiadomych, a następnie i błędy średnie. Jednostkowy średni błąd μ_0 spostrzeżeń pośrednich jest określony związkiem:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{n-k}}, \tag{1}$$

przyczem k jest ilością niewiadomych.

W przypadku sprowadzenia wyrównania spostrzeżeń zawarunkowanych do wyrównania spostrzeżeń pośrednich o $(n-r)$ niewiadomych będzie zatem:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{n-(n-r)}} = \sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{r}}. \tag{2}$$

Ponieważ jednostkowy błąd średni pozostaje ten sam przy zastosowaniu dowolnej metody wyrównania, opartej na metodzie najmniejszych kwadratów, przeto wzór (2) jest ważny i dla metody wyrównania, którą przedstawimy w § 3-cim.

Przykład. Dla ustalenia czterech kierunków zmierzono na stanowisku O sześć kątów.

Ponieważ trzy kąty wystarczają do ustalenia czterech kierunków, przeto tylko 3 kąty są niezależne.

Między wszystkiemi 6 kątami zachodzą trzy związki:

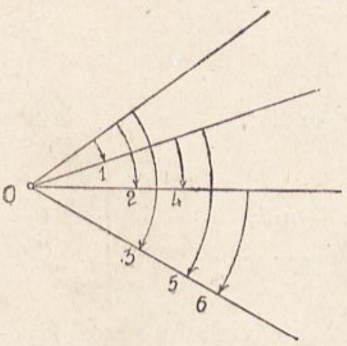

Fig 8.

$$\begin{aligned}(1)+\varepsilon_1-(2)-\varepsilon_2+(4)+\varepsilon_4&=0\\(1)+\varepsilon_1-(3)-\varepsilon_3+(5)+\varepsilon_5&=0\\(2)+\varepsilon_2-(3)-\varepsilon_3+(6)+\varepsilon_6&=0,\end{aligned}\qquad(3)$$

które spełniają także i wyrównane wartości kątów:

$$\begin{aligned}(1)+\delta_1-(2)-\delta_2+(4)+\delta_4&=0\\(1)+\delta_1-(3)-\delta_3+(5)+\delta_5&=0\\(2)+\delta_2-(3)-\delta_3+(6)+\delta_6&=0.\end{aligned}\qquad(4)$$

Równania odchyłek otrzymamy, wstawiając do związków (4) niepoprawione wartości spostrzeżeń:

$$\begin{aligned}(1)-(2)+(4)&=\omega_1\\(1)-(3)+(5)&=\omega_2\\(2)-(3)+(6)&=\omega_3,\end{aligned}\qquad(5)$$

zaś równania odchyłek wyrażone poprawkami będą:

$$\begin{array}{l}\delta_1-\delta_2\quad .\quad+\delta_4\quad .\quad .\quad+\omega_1=0\\\delta_1\quad .\quad-\delta_3\quad .\quad+\delta_5\quad .\quad+\omega_2=0\\.\quad\delta_2\quad-\delta_3\quad .\quad .\quad+\delta_6+\omega_3=0\end{array}\qquad(6)$$

(powstałe przez odjęcie związków (5) od (4)).

Kładąc $\delta_1=x$, $\delta_2=y$, $\delta_3=z$, (możemy to uczynić, ze względu, że niema żadnego związku odnoszącego się do wszystkich tych *poprawek*, czyli że są one *niezależne*, co zresztą widać z fig. 8), otrzymamy równania błędów:

$$\begin{array}{l}\delta_1=+x\quad .\quad .\\\delta_2=\quad .+y\quad .\\\delta_3=\quad .\quad .+z\\\delta_4=-x+y\quad .+l_4\\\delta_5=-x\quad .+z+l_5\\\delta_6=\quad .-y+z+l_6,\end{array}\qquad\text{przyczem}\qquad\begin{array}{l}l_1=l_2=l_3=0\\l_4=-\omega_1=-(1)+(2)-(4)\\l_5=-\omega_2=-(1)+(3)-(5)\\l_6=-\omega_3=-(2)+(3)-(6);\end{array}\qquad(7)$$

zaś jedn. błąd średni ogólnie (dla wag różnych) $\mu_0=\sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{3}}$.

Dalsze szczegóły wyrównania nie wymagają bliższych objaśnień.

§ 3. Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych przy pomocy metody spółczynników nieoznaczonych (korelat).

Jak już wspomniano przy końcu § 1-go, należy w tym przypadku utworzyć $[p\,\delta\delta]=\min.$ *przy równoczesnem uwzględnieniu* r *równań odchyłek* (równ. (5) § 1-go, str. 119.).

Opierając się na zasadach analizy, utworzymy dla uzyskania *względnego min. sumy* $[p\,\delta\delta]$, podobnie jak to miało miejsce w § 5-tym rozdz. IV przy tworzeniu równania 17-go, funkcję $\Omega=\min.$, na którą złożą się: $[p\,\delta\delta]$, oraz wszystkie równania poprawek, pomnożone przez (na razie nieoznaczone) spółczynniki (korelaty), przyczem dla uzyskania równań, podobnych kształtem do równań normalnych, oznaczymy owe spółczynniki: $-2k_1,\ -2k_2,\ldots.-2k_r$.

Zatem otrzymamy z uwzględnieniem związków (5) § 1-go:

$$\Omega=[p\delta\delta]-2k_1([a\delta]+\omega_1)-2k_2([b\delta]+\omega_2)-\ldots-2k_r([r\delta]+\omega_r)=\min. \quad (1)$$

Bezwzględne min. tej funkcji wymaga spełnienia n warunków:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\delta_1}=0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial\delta_2}=0,\ldots\ldots\frac{\partial\Omega}{\partial\delta_n}=0, \text{ czyli:} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2p_1\delta_1-2(a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3+\ldots+r_1k_r)=0 \\ 2p_2\delta_2-2(a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3+\ldots+r_2k_r)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2p_n\delta_n-2(a_nk_1+b_nk_2+c_nk_3+\ldots+r_nk_r)=0. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Po uproszczeniu każdego równania przez 2 i podzieleniu przez odpowiednią wagę p, otrzymamy n równań poprawek kształtu:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1=\dfrac{1}{p_1}(a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3+\ldots+r_1k_r) \\ \delta_2=\dfrac{1}{p_2}(a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3+\ldots+r_2k_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_n=\dfrac{1}{p_n}(a_nk_1+b_nk_2+c_nk_3+\ldots+r_nk_r). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Celem wyznaczenia r spółczynników nieoznaczonych k_1, k_2, ...k_r, wyrugujemy przy pomocy równań poprawek (4) wszystkie poprawki w równaniach (5) § 1-go, t. j. w równaniach odchyłek, uzyskując ***r równań korelat o r niewiadomych.***

Pierwsze równanie korelat, urobione z pierwszego równania odchyłek kształtu: $a_1\delta_1+a_2\delta_2+\ldots+a_n\delta_n+\omega_1=0$, przedstawi się następująco:

$$\begin{array}{l} \dfrac{a_1^2}{p_1}k_1+\dfrac{a_1b_1}{p_1}k_2+\dfrac{a_1c_1}{p_1}k_3+\ldots+\dfrac{a_1r_1}{p_1}k_r+ \\ +\dfrac{a_2^2}{p_2}k_1+\dfrac{a_2b_2}{p_2}k_2+\dfrac{a_2c_2}{p_2}k_3+\ldots+\dfrac{a_2r_2}{p_2}k_r+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\dfrac{a_n^2}{p_n}k_1+\dfrac{a_nb_n}{p_n}k_2+\dfrac{a_nc_n}{p_n}k_3+\ldots+\dfrac{a_nr_n}{p_n}k_r+\omega_1=0. \end{array}$$

Równanie to, uporządkowane wedle korelat k, przybiera postać analogiczną jak *pierwsze równanie normalne:*

$$\left[\frac{aa}{p}\right]k_1+\left[\frac{ab}{p}\right]k_2+\left[\frac{ac}{p}\right]k_3+\ldots+\left[\frac{ar}{p}\right]k_r+\omega_1=0, \quad (5)$$

(z tą różnicą, że wagi znajdują się tu w mianownikach).

Analogicznie otrzymamy drugie równanie korelat z drugiego równania odchyłek:

$$\frac{a_1 b_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1^2}{p_1} k_2 + \frac{b_1 c_1}{p_1} k_3 + \ldots + \frac{b_1 r_1}{p_1} k_r +$$

$$+ \frac{a_2 b_2}{p_1} k_1 + \frac{b_2^2}{p_2} k_2 + \frac{b_2 c_2}{p_2} k_3 + \ldots + \frac{b_2 r_2}{p_2} k_r +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{a_n b_n}{p_n} k_1 + \frac{b_n^2}{p_n} k_2 + \frac{b_n c_n}{p_n} k_3 + \ldots + \frac{b_n r_n}{p_n} k_r + \omega_2 = 0,$$

lub ostatecznie:

$$\left[\frac{ab}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{br}{p}\right] k_r + \omega_2 = 0. \tag{6}$$

Postępując w ten sposób utworzymy, jak wspomnieliśmy, ***r* równań korelat;** równania te zestawione poniżej, posłużą nam do wyznaczenia wszystkich r niewiadomych, któremi są w tym przypadku korelaty.

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{aa}{p}\right] k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{ar}{p}\right] k_r + \omega_1 = 0 \\
&\left[\frac{ab}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{br}{p}\right] k_r + \omega_2 = 0 \\
&\left[\frac{ac}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bc}{p}\right] k_2 + \left[\frac{cc}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{cr}{p}\right] k_r + \omega_3 = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\left[\frac{ar}{p}\right] k_1 + \left[\frac{br}{p}\right] k_2 + \left[\frac{cr}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{rr}{p}\right] k_r + \omega_r = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Równania (7) mają kształt równań normalnych, a różnią się od nich tylko tem, że przy tworzeniu spółczynników równań korelat bierzemy na uwagę zamiast wag p ich *odwrotności* $\frac{1}{p}$, któremi posługujemy się w ten sam sposób, jak wagami przy równaniach normalnych. Mając obliczone wartości $\frac{1}{p}$, utworzymy n. p.:

$$\left[\frac{bc}{p}\right] = \frac{1}{p_1} b_1 c_1 + \frac{1}{p_2} b_2 c_2 + \ldots + \frac{1}{p_n} b_n c_n.$$

Sposoby rozwiązania równań korelat są oczywiście identyczne ze sposobami rozwiązywania równań normalnych.

Z reguły posługujemy się w tym celu ***systemem zredukowanych równań korelat*** kształtu:

$$\left[\frac{aa}{p}\right]k_1+\left[\frac{ab}{p}\right]k_2+\left[\frac{ac}{p}\right]k_3+\ldots+\left[\frac{ar}{p}\right]k_r+\omega_1 \quad =0$$
$$\left[\frac{bb}{p}.1\right]k_2+\left[\frac{bc}{p}.1\right]k_3+\ldots+\left[\frac{br}{p}.1\right]k_r+(\omega_2.1)=0$$
$$+\left[\frac{cc}{p}.2\right]k_3+\ldots+\left[\frac{cr}{p}.2\right]k_r+(\omega_3.2)=0 \qquad (8)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left[\frac{rr}{p}.(r-1)\right]k_r+\Big(\omega_r.(r-1)\Big)=0,$$

przyczem znaczenie użytych tu symbolów jest następujące n. p.:

$$\left[\frac{bc}{p}.1\right]=\left[\frac{bc}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]},\quad (\omega_2.1)=\omega_2-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\omega_1}{\left[\frac{aa}{p}\right]},$$

$$\left[\frac{cr}{p}.2\right]=\left[\frac{cr}{p}.1\right]-\frac{\left[\frac{bc}{p}.1\right]\left[\frac{br}{p}.1\right]}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]},\quad (\omega_3.2)=(\omega_3.1)-\frac{\left[\frac{bc}{p}.1\right](\omega_2.1)}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}, \qquad (9)$$

$$(\omega_3.1)=\omega_3-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]\omega_1}{\left[\frac{aa}{p}\right]},\quad (\omega_4.3)=(\omega_4.2)-\frac{\left[\frac{cd}{p}.2\right](\omega_3.2)}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]},\ \text{i t. d.}$$

O ile *wagi wszystkich spostrzeżeń są równe jedności*, upraszczają się przytoczone tu wzory; w szczególności przybierają równania poprawek (4), równania korelat (7), oraz system zreduk. równ. korelat (8) kształt:

$$\delta_i=a_i k_1+b_i k_2+c_i k_3+\ldots\ldots r_i k_r, \qquad (4^*)$$

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\,k_1+[ab]\,k_2+\ldots\ldots[ar]\,k_r+\omega_1=0\\ [ab]\,k_1+[bb]\,k_2+\ldots\ldots[br]\,k_r+\omega_2=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [ar]\,k_1+[br]\,k_2+\ldots\ldots[rr]\,k_r+\omega_r=0, \end{array}\right\} \quad (7^*)$$

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\,k_1+[ab]\,k_2+\ldots\ldots+[ar]\,k_r+\omega_1 \qquad =0\\ \qquad [bb.1]\,k_2+\ldots+[br.1]\,k_r+(\omega_2.1) \quad =0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \qquad\qquad [rr.(r-1)]\,k_r+(\omega_r.(r-1))=0. \end{array}\right\} \quad (8^*)$$

Po wyznaczeniu wartości korelat z równań (8) wstawiamy je do równań poprawek (4), uzyskując poszczególne poprawki przy pomocy związków kształtu (ogólnie):

$$\delta_i=\frac{1}{p_i}(a_i k_1+b_i k_2+c_i k_3+\ldots\ldots+r_i k_r).$$

Jedn. błąd średni przed wyrównaniem wyznaczamy wedle wzoru (2) § 2-go (str. 120), zatem:

$$\mu_0=\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{r}}\quad\left(\text{dla przyp. wag } p=1,\ \mu=\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{r}}\right),\tag{10}$$

zaś *błąd średni przed wyrównaniem spostrzeżenia* o wadze p_i wedle znanego wzoru:

$$\mu_i^2=\frac{\mu_0^2}{p_i}.\tag{11}$$

Błędów śr. określonych wzorem (11) zazwyczaj *nie obliczamy*, zadowalając się wyznaczeniem jedn. błędu śr. μ_0 jako miary dokładności spostrzeżeń.

Wracając do *przykładu* opisanego w § 2-gim (str. 120.—121.) przedstawimy przebieg wyrównania przy zastosowaniu metody spółczynników nieoznaczonych. Napiszmy równania odchyłek (6) § 2-go w formie schematu:

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	ω		
a	$+1$	-1	.	$+1$	.	.	ω_1	$(=0)$	
b	$+1$	.	-1	.	$+1$	.	ω_2	$(=0)$	(12)
c	.	$+1$	-1	.	.	$+1$	ω_3	$(=0)$	
$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p_1}$	$\frac{1}{p_2}$	$\frac{1}{p_3}$	$\frac{1}{p_4}$	$\frac{1}{p_5}$	$\frac{1}{p_6}$			

który nam ułatwi utworzenie spółczynników równań korelat (7):

$$\begin{gathered}\left[\frac{aa}{p}\right]=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_4},\ \left[\frac{ab}{p}\right]=\frac{1}{p_1},\ \left[\frac{ac}{p}\right]=-\frac{1}{p_2},\\ \left[\frac{bb}{p}\right]=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_5},\ \left[\frac{bc}{p}\right]=\frac{1}{p_3},\ \left[\frac{cc}{p}\right]=\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_6}.\end{gathered}\tag{13}$$

O ile wszystkie wagi są równe jedności, przyjmują związki (13) kształt uproszczony:

$$[aa]=3,\ [ab]=1,\ [ac]=-1,\ [bb]=3,\ [bc]=1,\ [cc]=3.\tag{14}$$

§ 4. Równania kontrolne.

1. Kontrola spółczynników równ. korelat.

Kontrolę tę możnaby przeprowadzić, urabiając równania kontrolne analogiczne do równań zestawionych w ust. 1-szym § 3-go rozdz. IV. (str. 80.); przypuszczając jednak, że czytelnik nabrał już pewnej wprawy w przeprowadzaniu rachunków wyrównawczych, pominiemy sposób „szkolny" kontroli, opisany w powyższym ustępie, podając go w formie używanej *przez biura tryangulacyjne* i t. p. instytucje; wzory i sposoby, które tu przytoczymy będą analogiczne do wymienionych w końcowym przykładzie § 7-go rozdz. IV-go (str. 101.—109.).

Dla uproszczenia wywodów przyjmiemy, że mamy tylko 3 równania warunkowe, a więc i 3 równania poprawek kształtu równań (5) § 1-go, natomiast ilość spostrzeżeń niech wynosi n.

Przedewszystkiem utworzymy sumy spółczynników równań poprawek, odnoszących się do poszczególnych spostrzeżeń kształtu:

$$s_i = a_i + b_i + c_i,$$

jednak bez odchyłki ω_i, zatem w naszym przypadku przedstawią się tak utworzone związki (z kontrolą sumaryczną) schematycznie:

Kontrola spółczynników równ. odchyłek i poprawek.

a_1	b_1	c_1	s_1	$\frac{1}{p_1}$
a_2	b_2	c_2	s_2	$\frac{1}{p_2}$
a_3	b_3	c_3	s_3	$\frac{1}{p_3}$
.	.	.	.	.
a_n	b_n	c_n	s_n	$\frac{1}{p_n}$
$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[s]$	

(1)

Następnie utworzymy schemat dla kontroli współczynników równań korelat:

$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	$\left[\frac{as}{p}\right]$
$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{bb}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	$\left[\frac{bs}{p}\right]$
$\left[\frac{ac}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	$\left[\frac{cc}{p}\right]$	$\left[\frac{cs}{p}\right]$
$\left[\frac{as}{p}\right]$	$\left[\frac{bs}{p}\right]$	$\left[\frac{cs}{p}\right]$	

(2)

Sumy $\left[\frac{as}{p}\right]$, $\left[\frac{bs}{p}\right]$ i $\left[\frac{cs}{p}\right]$ wypisane we wierszach *ostatniej kolumny,* tworzone bezpośrednio ze współczynników a, b, c i $\frac{1}{p}$, muszą się *zgodzić ze sumami* odpowiedniemi *ostatniego wiersza* powstałemi przez sumowanie wyrazów poszczególnych kolumn.

Równania korelat wraz z kontrolnem równaniem sum przedstawiają się schematycznie:

ku redukcji

	k_1	k_2	k_3	Wyrazy wolne		
	$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	ω_1	$(=0)$	
	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{bb}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	ω_2	$(=0)$	(3)
	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	$\left[\frac{cc}{p}\right]$	ω_3	$(=0)$	
Σ	$\left[\frac{as}{p}\right]$	$\left[\frac{bs}{p}\right]$	$\left[\frac{cs}{p}\right]$	$[\omega]$	$(=0)$	

Ostatnie równanie służy nam dla kontroli wyrazów równań korelat raz zredukowanych, gdyż suma wyrazów raz redukowanych każdej kolumny równań (4) musi nam dać wyniki zgodne z wyrazami otrzymanemi z redukcji równania sum; przeprowadzając zatem redukcję wszystkich wyrazów schematu (3)-go, otrzymujemy schemat raz zredukowanych równań korelat wraz z kontrolą sum:

raz zreduk.

	k_2	k_3	Wyrazy wolne		
	$\left[\frac{bb}{p}.1\right]$	$\left[\frac{bc}{p}.1\right]$	$(\omega_2 . 1)$	$(=0)$	
	$\left[\frac{bc}{p}.1\right]$	$\left[\frac{cc}{p}.1\right]$	$(\omega_3 . 1)$	$(=0)$	(4)
Σ	$\left[\frac{bs}{p}.1\right]$	$\left[\frac{cs}{p}.1\right]$	$[\omega . 1]$	$(=0)$	

W ten sam sposób otrzymamy schemat dwa razy zreduk. równania korelat (w przypadku trzech korelat ostatniego) wraz z kontrolą sum:

	k_3	Wyrazy wolne			
	$\left[\frac{cc}{p}.2\right]$	$(\omega_3 .2)$	$(=0)$	*Wyrazy* umieszczone *nad sobą*, otrzymane niezależnie drogą redukcji z schematu (4-go), *muszą być sobie równe.*	(5)
Σ	$\left[\frac{cs}{p}.2\right]$	$[\omega .2]$	$(=0)$		

Schemat zredukowanych równań korelat z dodaną ze schematu kontrolą sum przedstawia się zatem:

	k_1	k_2	k_3	Wyrazy wolne		
	$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	ω_1	$(=0)$	
		$\left[\frac{bb}{p}.1\right]$	$\left[\frac{bc}{p}.1\right]$	$(\omega_2 .1)$	$(=0)$	(6)
			$\left[\frac{cc}{p}.2\right]$	$(\omega_3 .2)$	$(=0)$	
Σ	$\left[\frac{as}{p}\right]$	$\left[\frac{bs}{p}\right]$	$\left[\frac{cs}{p}\right]$	$[\omega]$	$(=0)$ {ze schematu (3)-go.}.	

Po *wyznaczeniu* wartości *korelat* z równań schematu (6)-go (lub pierwszych równań schematów (5)-go, (4)-go i (3)-go) *wstawiamy je do równania sum* schematu 6-go (lub (3)-go), otrzymując w razie zgodności *dostateczną kontrolę* uzyskanych wyników.

Ten sposób prowadzenia i kontrolowania rachunku jest analogiczny ze sposobem przeprowadzonym cyfrowo w ostatnim przykładzie § 7-go rozdz. IV-go (str. 101. i dalsze).

Kto nie posiada dostatecznej wprawy w rachowaniu, może obrać drogę wprawdzie dłuższą, lecz obfitującą w liczniejsze kontrole, mianowicie sposób analogiczny do podanego w ust. pierwszym § (3)-go rozdz. IV-go (str. 80. i dalsze).

2. Kontrola sumy $[p\,\delta\delta]$.

Prócz zwykłego sposobu *uzyskania* $[p\,\delta\delta]$ z równań (4) § 3-go kształtu ogólnego $\delta_i = \frac{1}{p_i}(a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + \ldots + r_i k_r)$, przez podniesienie poszczególnych δ do kwadratu pomnożenie przez odpowiednie wagi i zesumowanie, mamy jeszcze *drugi sposób* urobienia wspomnianej sumy, którego użyjemy *jako kontrolnego.*

Mnożąc każde równanie poprawek (4) § 3-go przez odpowiednie $p\,\delta$, otrzymamy po zesumowaniu wszystkich równań:

$$\begin{aligned}
p_1\,\delta_1{}^2 &= a_1\,\delta_1\,k_1 + b_1\,\delta_1\,k_2 + \ldots + r_1\,\delta_1\,k_r \\
p_2\,\delta_2{}^2 &= a_2\,\delta_2\,k_1 + b_2\,\delta_2\,k_2 + \ldots + r_2\,\delta_2\,k_r \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_n\,\delta_n{}^2 &= a_n\,\delta_n\,k_1 + b_n\,\delta_n\,k_2 + \ldots + r_n\,\delta_n\,k_r \\
\hline
[p\,\delta\delta] &= [a\,\delta]\,k_1 + [b\,\delta]\,k_2 + \ldots + [r\,\delta]\,k_r. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Ponieważ wedle równań (5) § 1-go są:

$$[a\,\delta] = -\omega_1,\ [b\,\delta] = -\omega_2, \ldots [r\,\delta] = -\omega_r,$$

przeto wzór (5) przeistacza się na:

$$[p\,\delta\delta] = -[\omega\,k] \qquad (6)$$

{dla przypadku wag równych ($p=1$) będzie $[\delta\delta] = -[\omega\,k]$}.

Związek powyższy (6) *stanowi* prawie całkowitą *kontrolę dla przebiegu rachunku* począwszy od równań odchyłek, zawiera bowiem tak poprawki jak i korelaty w połączeniu z odchyłkami. Kontrola, dostarczona wzorem (6), jest zatem *najważniejszą* dla całkowitego rachunku. Prócz tej kontroli używa się również i wzoru kontr., podanego w następnym paragrafie pod 1).

§ 5. Bezpośredni sposób wyprowadzenia wzoru na jedn. błąd średni μ_0.

W § 2-gim niniejszego rozdziału wyprowadziliśmy wzór na jednostkowy błąd średni drogą *pośrednią* [(2) § 2]. Mimo zupełnej ścisłości powyższego dowodu, podaję w krótkości sposób wyprowadzenia na jednostk. błąd śr. drogą *bezpośrednią.*

Eliminując w związku (6) § 4-go:

$$[p\,\delta\delta] = -[\omega\,k]$$

poszczególne k przy pomocy systemu zredukowanych równań korelat (4) § 4-go, otrzymamy po odpowiedniem zgrupowaniu wyrazów zredukowanych związek:

$$[p\,\delta\delta] = \frac{\omega_1{}^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{(\omega_2.1)^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]} + \frac{(\omega_3.2)^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]} + \ldots + \frac{(\omega_r.(r-1))^2}{\left[\frac{rr}{p}.(r-1)\right]}. \qquad (1)$$

Ponieważ równania odchyłek (5) § 1-go odnoszą się oczywiście także i do błędów prawdziwych ε, przeto:

$$[a\varepsilon]=\omega_1,\ [b\varepsilon]=\omega_2,\ [c\varepsilon]=\omega_3, \dots [r\varepsilon]=\omega_r, \tag{2}$$

a w następstwie:

$$[b\varepsilon.1]=(\omega_2.1),\ [c\varepsilon.2]=(\omega_3.2)\dots[r\varepsilon.(r-1)]=(\omega_r.(r-1)). \tag{2*}$$

W obec tego można przekształcić związek (1) w następujący:

$$[p\delta\delta]=\frac{[a\varepsilon]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{[b\varepsilon.1]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}+\frac{[c\varepsilon.2]^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]}+\dots\frac{[r\varepsilon.(r-1)]^2}{\left[\frac{rr}{p}.(r-1)\right]}. \tag{3}$$

Przeciętna wartość każdego wyrazu prawej strony równania (3) wynosi μ_0^2, o czem można się łatwo przekonać przez odpowiednie przekształcenie ich liczników. I tak n. p., biorąc na uwagę $[a\varepsilon]^2$, zastąpimy ten wyraz ze względu na wywody, przeprowadzone przy końcu § 4-go rozdz. IV-go (wzór (6), str. 86.), sumą

$$[a^2\varepsilon^2]=[aa\varepsilon\varepsilon], \tag{4}$$

a kładąc w miejsce kwadratów błędów prawdziwych kwadraty błędów średnich, sumą

$$[aa\mu\mu]. \tag{4*}$$

Z uwagi na znany związek $\mu_i^2=\frac{\mu_0^2}{p}$, równa się

$$[aa\mu\mu]=\left[\frac{aa}{p}\right]\mu_0^2, \tag{5}$$

w obec czego otrzymamy, wstawiając $\left[\frac{aa}{p}\right]\mu_0^2$ za licznik pierwszego wyrazu po prawej stronie związku (3):

$$\frac{[a\varepsilon]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}=\frac{\left[\frac{aa}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\mu_0^2=\mu_0^2. \tag{6}$$

W analogiczny sposób można dowieść, że wartości przeciętne wszystkich r wyrazów, znajdujących się po prawej stronie równania (3) [1]), są równe μ_0^2; zatem

---

1) I tak biorąc na uwagę $[b\varepsilon.1]^2=\left([b\varepsilon]-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right][a\varepsilon]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right)^2=[b\varepsilon]^2-2\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}[a\varepsilon][b\varepsilon]+$ $+\left(\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right)^2[a\varepsilon]^2$, łatwo dowieść, że przeciętna wartość $[b\varepsilon]^2$ równa się $[bb\varepsilon\varepsilon]$, a ostatecznie $\left[\frac{bb}{p}\right]\mu_0^2$; ponieważ wartość przeciętna iloczynu $[a\varepsilon][b\varepsilon]$ równa się

$$[p\,\delta\delta] = r\,\mu_0^2$$

$$\mu_0^2 = \frac{[p\,\delta\delta]}{r}, \quad \mu_0 = \sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{r}}.$$

Przykłady wyrównania spostrzeżeń zawarunkowanych podano *w § 8. niniejszego rozdziału.*

§ 6. Błąd średni funkcji wyrównanych spostrzeżeń.

Na wyznaczeniu wartości wyrównanych spostrzeżeń i jednostkowego błędu śr. *nie kończymy* zazwyczaj rachunku wyrównawczego. Z reguły bowiem stanowią wyrównane spostrzeżenia lub ich funkcje bądź to przedmiot dalszych wyrównań, bądź też zależy nam z innych względów na *wyznaczeniu ich błędów średnich.*

Weźmy na uwagę dowolną funkcję wyrównanych spostrzeżeń

$$F(l_1 + \delta_1,\ l_2 + \delta_2, \ldots . l_n + \delta_n); \tag{1}$$

rozwijając ją w szereg Taylora z opuszczeniem wyrazów rzędów wyższych niż pierwszy, otrzymamy:

$$F(l_1,\ l_2, \ldots . l_n) + \frac{\partial F}{\partial l_1}\delta_1 + \frac{\partial F}{\partial l_2}\delta_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial l_n}\delta_n. \tag{2}$$

Nazwijmy F' prawdziwą wartość funkcji F, a zatem funkcję, utworzoną przy pomocy wartości prawdziwych $l + \varepsilon$:

$$F' = F(l_1 + \varepsilon_1,\ l_2 + \varepsilon_2, \ldots . l_n + \varepsilon_n), \tag{3}$$

którą rozwińmy jak pod (2) w szereg Taylora z zachowaniem wyrazów rzędu pierwszego:

$$F' = F(l_1,\ l_2, \ldots . l_n) + \frac{\partial F}{\partial l_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial F}{\partial l_2}\varepsilon_2 + \ldots . \frac{\partial F}{\partial l_n}\varepsilon_n. \tag{4}$$

Błąd prawdziwy funkcji F jest różnicą związków (3) i (1), lub (4) i (2), zatem, jeśli położymy dla uproszczenia wzorów $\frac{\partial F}{\partial l_1} = F_1$, $\frac{\partial F}{\partial l^2} = F_2$ $\ldots . \frac{\partial F}{\partial l_n} = F_n$, będziemy mieli na ε_f wyrażenie następujące:

$\left[\frac{ab}{p}\right]\mu_0^2$, zaś $[a\varepsilon]^2$ odpowiednio $\left[\frac{aa}{p}\right]\mu_0^2$, przeto wartość przeciętna $[b\varepsilon\,.\,1]^2$ równa się: $\mu_0^2\left(\left[\frac{bb}{p}\right] - 2\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{\left[\frac{ab}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right) = \mu_0^2\left[\frac{bb}{p}.1\right]$, a co zatem idzie, możemy położyć zamiast $\frac{[b\varepsilon\,.\,1]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}$ kwadrat jedn. bł. śr. μ_0^2. W ten sam sposób można przeprowadzić dowód dla wszystkich wyrazów prawej strony równania (3), uzyskując wzór (7).

*

$$\varepsilon_f = [F\varepsilon] - [F\partial], \text{ lub po podniesieniu} \tag{5}$$

do kwadratu:

$$\varepsilon_f^2 = [F\varepsilon]^2 - 2[F\varepsilon][F\partial] + [F\delta]^2. \tag{6}$$

Do pierwszego wyrazu prawej strony równania (6) możemy zastosować prawo przenoszenia się błędów, zastępując je wartością przeciętną, nie możemy jednak tego sposobu postępowania uwzględnić na razie przy dalszych dwu wyrazach, ponieważ oba zawierają poprawki δ, uzyskane z wyrównania, a więc wielkości zależne.

Chcąc więc uzyskać wzór na błąd średni funkcji na podstawie równania (6), należy w niem zastąpić sumy $[F\partial]$ przez odpowiednie sumy wielkości *niezależnych.*

Jak już wspomnieliśmy w § 5-tym, ***spełniają*** także i ***błędy prawdziwe równania poprawek,*** zatem, ograniczając się dla uproszczenia wzorów tylko do trzech warunków, otrzymamy:

$$[a\varepsilon] = -\omega_1,\ [b\varepsilon] = -\omega_2,\ [c\varepsilon] = -\omega_3, \tag{7}$$

a po wstawieniu tych wartości do równań korelat, związki:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right]k_3 - [a\varepsilon] = 0\\
&\left[\frac{ab}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_3 - [b\varepsilon] = 0\\
&\left[\frac{ac}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_2 + \left[\frac{cc}{p}\right]k_3 - [c\varepsilon] = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Równania (8), rozwiązane metodą eliminacyjną Gaussa, dostarczają nam korelat k, wyrażonych wielkościami *niezależnemi:*

$$\left.\begin{aligned}
k_1 &= [a\varepsilon] - \frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\cdot\frac{[b\varepsilon.1]}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]} - \left\{\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\,\frac{\left[\frac{bc}{p}.1\right]}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}\right\}\frac{[c\varepsilon.2]}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]}\\
k_2 &= \frac{[b\varepsilon.1]}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]} - \frac{\left[\frac{bc}{p}.1\right]}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}\,\frac{[c\varepsilon.2]}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]}\\
k_3 &= \frac{[c\varepsilon.2]}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]}.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Weźmy na uwagę równania poprawek (4) § 3-go kształtu:

$$\delta_i = \frac{1}{p_i}(a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3),$$

pomnóżmy każde z nich przez odpowiednie wyrażenie F, zatem (w naszym przypadku dla δ_i przez F_i):

$$F_i\delta_i = \frac{1}{p_i}(a_i F_i k_1 + b_i F_i k_2 + c_i F_i k_3), \tag{10}$$

a wstawiając za k wartości ze związków (9) i sumując wszystkie $F\delta$, otrzymamy:

$$[F\delta]=\frac{\left[\frac{aF}{p}\right][a\varepsilon]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{\left[\frac{bF}{p}.1\right][b\varepsilon.1]}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}+\frac{\left[\frac{cF}{p}.2\right][c\varepsilon.2]}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]}. \tag{11}$$

Rugując ze związku (6) sumy $[F\delta]$ przy pomocy równania (11), możemy utworzyć wartości przeciętne prawej strony równania (6), zastępując równocześnie $\varepsilon_f{}^2$ wartością błędu średniego $\mu_f{}^2$.

Weźmy nasamprzód na uwagę $[F\varepsilon]^2$.

Przeciętna wartość $[F\varepsilon]^2$ równa się ze względu na końcowe wywody § 4-go rozdz. IV-go (str. 86.) sumie:

$$[FF\mu\mu];$$

że jednak $\mu_i{}^2=\frac{\mu_0{}^2}{p_i}$, przeto

$$[FF\mu\mu]=\left[\frac{FF}{p}\right]\mu_0{}^2. \tag{12}$$

Jest to ***błąd średni funkcji przed wyrównaniem***, to jest błąd śr. jakibyśmy uzyskali, wstawiając do funkcji niewyrównane wartości l.

Przejdźmy następnie do wyznaczenia przeciętnej wartości drugiego wyrazu wzoru (6).

Wedle związku (11) jest

$$-2[F\varepsilon][F\delta]=$$

$$=-2\left\{\frac{\left[\frac{aF}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}[F\varepsilon][a\varepsilon]+\frac{\left[\frac{bF}{p}.1\right]}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}[F\varepsilon][b\varepsilon.1]+\frac{\left[\frac{cF}{p}.2\right]}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]}[F\varepsilon][c\varepsilon.2]\right\}. \tag{13}$$

Przeciętne wartości iloczynów sum, zawierających błędy prawdziwe ε, są:

$$\left.\begin{aligned}
&[F\varepsilon][a\varepsilon]=\infty[aF\mu\mu]=\left[\frac{aF}{p}\right]\mu_0{}^2,\\
&[F\varepsilon][b\varepsilon.1]=[F\varepsilon][b\varepsilon]-[F\varepsilon]\frac{\left[\frac{ab}{p}\right][a\varepsilon]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}=\infty\left[\frac{bF}{p}\right]\mu_0{}^2-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{aF}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\mu_0{}^2=\\
&\qquad=\left[\frac{bF}{p}.1\right]\mu_0\\
&[F\varepsilon][c\varepsilon.2]=[F\varepsilon]\left\{[c\varepsilon]-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right][a\varepsilon]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{bc}{p}.1\right][b\varepsilon.1]}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}\right\}=\infty\\
&\qquad=\infty\mu_0{}^2\left\{\left[\frac{cF}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]\left[\frac{aF}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{bc}{p}.1\right]\left[\frac{bF}{p}.1\right]}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}\right\}=\left[\frac{cF}{p}.2\right]\mu_0{}^2.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Po wstawieniu tych wartości do równania (13) otrzymamy wartość przeciętną wyrażenia $-2[F\varepsilon][F\delta]$:

$$-2\left\{\frac{\left[\frac{aF}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{\left[\frac{bF}{p}.1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}+\frac{\left[\frac{cF}{p}.2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]}\right\}\mu_0^2. \tag{15}$$

Pozostaje jeszcze wyznaczenie przeciętnej wartości trzeciego wyrazu wzoru (6), t. j. $[F\delta]^2$.

Podnosząc związek (11) do potęgi drugiej, otrzymamy prócz 3 wyrazów w potędze drugiej, jeszcze i 3 podwójne iloczyny (w przypadku tylko 3 warunków).

Przeciętna wartość każdego podwójnego iloczynu będzie jednak, — przy rosnącej liczbie spostrzeżeń n — dążyła do granicznej wartości zera (ponieważ $\varphi(\varepsilon)=\varphi(-\varepsilon)$), przeto pozostają do omówienia tylko wyrazy w potędze drugiej.

Przeciętne wartości wyrazów:

$$\left.\begin{array}{l}[a\varepsilon]^2\\[2ex] [b\varepsilon.1]^2\\[2ex] [c\varepsilon.2]^2\end{array}\right\} \text{ są: } \left\{\begin{array}{l}\left[\frac{aa}{p}\right]\mu_0^2\\[2ex] \left[\frac{bb}{p}.1\right]\mu_0^2\\[2ex] \left[\frac{cc}{p}.2\right]\mu_0^2,\end{array}\right. \tag{16}$$

zatem wartość przeciętna $[F\delta]^2$ jest z uwzględnieniem wzoru (11):

$$\left\{\frac{\left[\frac{aF}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{\left[\frac{bF}{p}.1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}+\frac{\left[\frac{cF}{p}.2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]}\right\}\mu_0^2. \tag{17}$$

Wstawiając do wzoru (6) w ten sposób uzyskane wartości przeciętne (12), (15) i (17) i równocześnie zastępując ε_f^2 przez kwadrat błędu śr. μ_F, otrzymamy ostatecznie:

$$\mu_F^2=\mu_0^2\left\{\left[\frac{FF}{p}\right]-\frac{\left[\frac{aF}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{bF}{p}.1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}-\frac{\left[\frac{cF}{p}.2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]}\right\}. \tag{18}$$

Wyrażenie zawarte w klamrze $\{\ldots\}$ jest równocześnie *odwrotnością wagi funkcji F* $\left(\text{t. j. } =\frac{1}{P_F}\right)$.

Wzór (18) bywa używany także i w innej formie, a to dla zaznaczenia, że wyraz, ujęty w klamrę, składa się z dwu części, z których pierwsza, pomnożona przez μ_0^2, daje μ_f^2, kwadrat błędu śr. funkcji F

przed wyrównaniem, zaś druga, pomnożona również przez μ_0^2, wykazuje *wpływ wyrównania na* μ_F^2; aby to uwydatnić we wzorze piszą często:

$$\mu_F^2 = \mu_0^2 \{\mathrm{I} - \mathrm{II}\},$$

$$\text{przyczem } \mathrm{I} = \left[\frac{FF}{p}\right], \text{ zaś } \mathrm{II} = \frac{\left[\frac{aF}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{\left[\frac{bF}{p}.1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]} + \frac{\left[\frac{cF}{p}.2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]}. \tag{19}$$

W przypadku *wyznaczania błędu średniego wyrównanego spostrzeżenia* l_i, *należy położyć* $F_i = 1$, zaś *resztę* $F = 0$, a następnie *obliczyć* μ_L^2 *wedle wzoru* (18).

O ile spostrzeżenia l były dokonane z tą samą dokładnością, otrzymamy w miejsce wzoru (18) wzór nieco uproszczony z powodu, że wszystkie wagi będą równe jedności; a zatem w tym przypadku będzie:

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left\{ [FF] - \frac{[aF]^2}{[aa]} - \frac{[bF.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cF.2]^2}{[cc.2]} \right\}. \tag{20}$$

Zazwyczaj zależy nam na wartości nie kilku różnych, lecz tylko jednej funkcji F spostrzeżeń l, oraz wyznaczeniu jej błędu średniego. *Wyrażenie,* ujęte we wzorze (18) *w klamrę,* jest przy r *warunkach* r-*tą redukcją sumy* $\left[\frac{FF}{p}\right]$, zatem ogólnie $\left[\frac{FF}{p}.r\right]$; otóż redukcję tę przeprowadzamy automat., redukując wyrazy równań korelat.

Kładąc *dla uzyskania kontroli* (przy 3 warunkach):

$$s_i' = a_i + b_i + c_i + F_i = s_i + F_i, \tag{21}$$

możemy przedstawić równania korelat wraz z wyrazami, odnoszącemi się do błędu średniego funkcji, następującym schematem:

k_1	k_2	k_3	Wyrazy wolne	k_F
$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	ω_1	$\left[\frac{aF}{p}\right]$
$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{bb}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	ω_2	$\left[\frac{bF}{p}\right]$
$\left[\frac{ac}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	$\left[\frac{cc}{p}\right]$	ω_3	$\left[\frac{cF}{p}\right]$
$\left[\frac{aF}{p}\right]$	$\left[\frac{bF}{p}\right]$	$\left[\frac{cF}{p}\right]$	.	$\left[\frac{FF}{p}\right]$
$\left[\frac{as'}{p}\right]$	$\left[\frac{bs'}{p}\right]$	$\left[\frac{cs'}{p}\right]$	$[\omega]$	$\left[\frac{Fs'}{p}\right]$

(22)

Ostatnie równanie jest równaniem kontrolnem dla korelat k.

Wyrównana wartość funkcji F jest wedle wz. (2):

$$F(l_1, l_2 \ldots\ldots l_n) + [F\delta], \text{ przyczem kontrolę} \tag{21}$$

stanowi równanie:
$$[F\delta] = \left[\frac{aF}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bF}{p}\right] k_2 + \left[\frac{cF}{p}\right] k_3, \tag{22}$$

uzyskane na podstawie równania (4) § 3-go.

Wreszcie wspomnieć należy, że prócz równań kontrolnych: $[p\delta\delta] = -[\omega k]$, oraz $[a\delta] + \omega_1 = 0$, $[b\delta] + \omega_2 = 0$, $[c\delta] + \omega_3 = 0$ itd., *mamy* jeszcze *ogólnie r kontrol w początkowych równaniach warunkowych* kształtu: $f_i(l_1 + \delta_1, l_2 + \delta_2, \ldots\ldots l_n + \delta_n) = 0$, które dają nam możność sprawdzenia, *czy opuszczenie wyrazów rzędów wyższych*, niż pierwszy w równaniu (3*) § 1-go było *uzasadnione*.

§ 7. Związek między spostrzeżeniami pośredniemi a zawarunkowanemi. Wybór metody wyrównania.

Pod koniec § 1-go zaznaczyliśmy, że wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych można sprowadzić do wyrównania spostrzeżeń pośrednich. Sprawę tę omówiliśmy dokładnie w § 2-gim, podając równocześnie odpowiedni przykład.

Uzupełniając wywody § 2-go, należy stwierdzić, że i odwrotnie każde wyrównanie spostrzeżeń pośrednich można sprowadzić do wyrównania spostrzeżeń zawarunkowanych metodą spółczynników nieoznaczonych czyli korelat.

Weźmy na uwagę n równań błędów o k niewiadomych. Otóż ilość k jest równocześnie ilością spostrzeżeń *„koniecznych"*, t. j. ilością spostrzeżeń, które koniecznie (niezbędnie) należy wykonać, aby wyznaczyć wartości niewiadomych bez rachunku wyrównawczego; reszta spostrzeżeń w liczbie $(n-k)$ są to spostrzeżenia *„nadliczbowe"*, t. j. przekraczające ilość niezbędnych spostrzeżeń, a przez to właśnie *powodujące wyrównanie*.

Rugując k niewiadomych z reszty $(n-k)$ równań błędów, przy pomocy k równań błędów, otrzymamy $n-k=r$ *związków między n poprawkami* δ, poczem zastosujemy przy wyrównaniu *metodę spółczynników nieoznaczonych*.

Zazwyczaj nie potrzeba przechodzić z jednej metody wyrównania na drugą dopiero po ustawieniu równań błędów, względnie równań odchyłek, lecz można od początku zastosować jedną z podanych metod wyrównania.

Oczywiście obieramy *zawsze tę metodę*, która nastręcza *mniej pracy rachunkowej*. Dla wyboru metody łatwiejszej mamy tedy następujące ogólne wskazówki.

Zazwyczaj zabiera przy wyrównaniu najwięcej czasu rozwiązanie równań normalnych, względnie korelat. Biorąc ten moment głównie na uwagę, obierzemy w przypadkach:

$$\left.\begin{array}{lll} k>r & \text{metodę spostrzeżeń} & \text{zawarunkowanych (korelat)} \\ k=r & \text{,, ,,} & \text{pośrednich lub zawarunk.} \\ k<r & \text{,, ,,} & \text{pośrednich.} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Wstawiając za k ilość $(n-r)$, otrzymamy regułę (1)-szą we formie:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{jeżeli } n-r>r, & \text{lub } n>2r, & \text{należy obrać metodę sp.} & \textit{zawarunkowanych} \\ n-r=r, & \text{,, } n=2r, & \text{można ,, ,,} & \text{,, } \textit{pośredn. lub zawar.} \\ n-r<r, & \text{,, } n<2r, & \text{należy ,, ,,} & \text{,, } \textit{pośrednich.} \end{array}\right\} \quad (2)$$

Są to oczywiście tylko ogólne wskazówki, gdyż prócz reguły (2)-giej względnie (1)-szej należy jeszcze wziąć na uwagę pracę rachunkową przy tworzeniu wag, jakoteż i okoliczność, przy której metodzie otrzymamy więcej spółczynników równań normalnych, względnie równ. korelat równych zeru.

Sprawę obioru metody przy wyrównaniu sieci tryangulacyjnych, omówimy w rozdziałach traktujących o sieciach tryangulacyjnych.

§ 8. Przykłady wyrównania spostrzeżeń zawarunkowanych.

Przykład pierwszy. Weźmy jako przykład pierwszy wyrównanie spostrzeżeń podanych jako wyrównanie do stałej sumy w § 4-tym rozdz. III-go (przykład pierwszy, str. 70.—71.).

Wyniki pomiarów kątów trójkąta płaskiego wynosiły tam przy wagach $p=1$:

$$\begin{aligned} \alpha &= 44^0\,15'\,30'' \\ \beta &= 70^0\,38'\,15'' \\ \gamma &= 65^0\,05'\,30'' \\ \hline \Sigma &= 179^0\,59'\,35''. \end{aligned}$$

Równanie warunkowe — w tym przypadku jedno — [por. równanie (3) § 1-go) opiewa:

$$\alpha+\delta_\alpha+\beta+\delta_\beta+\gamma+\delta_\gamma-180^0=0,$$

zaś równanie odchyłki [por. równ. (2) § 1-go]:

$$\alpha+\beta+\gamma-180^0=\omega=-25'';$$

zatem równanie odchyłki wyrażonej poprawkami δ [por. równanie (5) § 1-go]:

$$\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma-25''=0,$$

(przyczem $a_1=a_2=a_3=1$).

Jednemu warunkowi odpowiada jedno równanie korelat [(7) § 3-go]:

$\left[\frac{aa}{p}\right]k+\omega=0$, zatem w naszym przypadku, gdy wszystkie a i p są równe 1

$3k-25''=0, \quad k=\frac{25''}{3}=8''{\cdot}33.$

Równania poprawek są w obec tego [por. równanie (4) § 3-go]:

$$\begin{aligned} \delta_\alpha &= k = 8''{\cdot}33 \\ \delta_\beta &= k = 8''{\cdot}33 \\ \delta_\gamma &= k = 8''{\cdot}33. \end{aligned}$$

Dodając poprawki do spostrzeżeń, otrzymujemy ich wartości wyrównane, które tu (jak i poprzednio) odpowiednio zaokrąglamy:

$$(\alpha) = 44^0\,15'\,38''\cdot3$$
$$(\beta) = 70^0\,38'\,23''\cdot4$$
$$(\gamma) = 65^0\,05'\,58''\cdot3$$
$$\Sigma = 180^0\,00'\,00''.$$

Błąd śr. μ otrzymamy — ze względu na wagi $p=1$ — wspólny dla wszystkich 3 spostrzeżeń wedle wzoru (10) § 3-go, lub (7) § 5-go:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{r}} = \sqrt{[\delta\delta]} = \sqrt{208\cdot17} = \pm 14''\cdot4.$$

Kontrola $[\delta\delta] = -\omega k = 25 \times 8\cdot33 = 208\cdot25$ (różnica 0·08 w tym przypadku dopuszczalna; rachując przy pomocy $k=8\cdot333$, otrzymalibyśmy wyniki 208·317 i 208·325, zatem z różn. 0·008).

Błąd śr. wyrównanych spostrzeżeń, wspólny w tym przypadku dla wszystkich 3 kątów, obliczymy z wzoru (20) § 6-go:

$$\mu_{(\alpha)}{}^2 = \mu_{(\beta)}{}^2 = \mu_{(\gamma)}{}^2 = \mu^2 \left\{[FF] - \frac{[aF]^2}{[aa]}\right\}.$$

Weźmy na uwagę funkcję F, przedstawiającą wyrównany kąt (α):

$$(\alpha) = 180^0 - (\beta) - (\gamma) = F.$$

Ponieważ: $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = F_1 = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \beta} = F_2 = -1$, $\frac{\partial F}{\partial \gamma} = F_3 = -1$,

zaś $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, przeto

$$[aa] = 3,\quad [aF] = 0-1-1 = -2,\ \text{a}\ [FF] = 0+1+1 = +2;$$

wstawiając te wartości do wzoru na $\mu_{(\alpha)}{}^2$, otrzymamy:

$$\mu_{(\alpha)}{}^2 = \mu^2\left\{2 - \tfrac{4}{3}\right\} = \mu^2\tfrac{2}{3},\ \text{a}\ \mu_{(\alpha)} = \mu\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \pm 14''\cdot4 \times 0\cdot818 = \pm 11''\cdot8.$$

Analogicznie postępując, otrzymamy te same wartości dla $\mu_{(\beta)}$ i $\mu_{(\gamma)}$.

Przykład drugi. W sieci niwelacyjnej, którą wykreślono schematycznie na fig. 9-tej, przedstawiając ciągi niwelacyjne między poszczególnemi punktami linjami prostemi, pomierzono następujące wzniesienia:

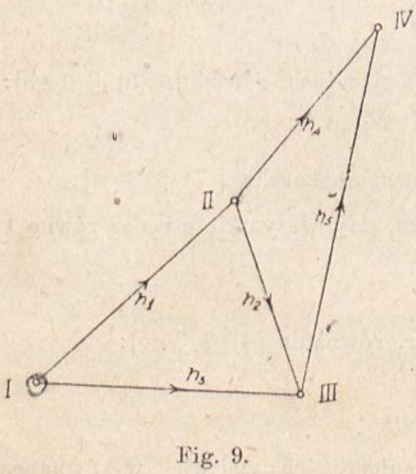

Fig. 9.

(I—II) $= h_1 = 2\cdot515\ m$, dł. ciągu $L_1 = 3\cdot2\ km$
(II—III) $= h_2 = 3\cdot862$ „ „ „ $L_2 = 1\cdot5$ „
(I—III) $= h_3 = 6\cdot369$ „ „ „ $L_3 = 2\cdot7$ „
(II—IV) $= h_4 = 6\cdot585$ „ „ „ $L_4 = 2\cdot4$ „
(III—IV) $= h_5 = 2\cdot714$ „ „ „ $L_5 = 3\cdot6$ „

Przyjmując, że wysokość p. I-go jest znana, należy dla wyznaczenia wysokości pozostałych trzech punktów sieci pomierzyć *co najmniej trzy niezależne wzniesienia*, n. p. h_1, h_3 i h_4, lub h_1, h_2 i h_5 i t. p. Ilość wzniesień k koniecznych (do wyznaczenia wys. punkt.) jest w tym przypadku 3; ponieważ pomierzono $n=5$ wzniesień, przeto ilość warunków r otrzymujemy ze związku:

$$r = n - k = 2.$$

(Wyrównując metodą spostrz. pośredn., otrzymalibyśmy 3 równania normalne).

Dokładne zdanie sobie sprawy z ilości warunków jak i ich kształtu jest rzeczą pierwszorzędnej wagi.

Nieuwzględnienie pewnego warunku przy wyrównaniu powoduje *niespełnienie* go przez spostrzeżenia wyrównane. *Dodanie warunku nadliczbowego,* a więc *identycznego* z jednym lub z kilku już zastosowanemi, powinno nam dostarczyć korelatę (współcz. nieozn.) dla tego warunku jako *wyraz nieoznaczony* $\frac{0}{0}$; w praktyce wypadnie jednak owa korelata z powodu zaokrągleń rachunkowych *zamiast* $\frac{0}{0}$ *n. p.* $\frac{0{\cdot}0003}{0{\cdot}0001}=3$ i w rezultacie skazi wyniki wyrównania (w tym przypadku nawet znacznie).

W obu przypadkach tak nieuwzględnienia, jak i dodania nadliczbowego warunku, będą przeto rezultaty wyrównania błędne.

Aby tego uniknąć, mamy odpowiednie wzory określające nam przy poszczególnych zagadnieniach wyrównania ilość i rodzaj warunków. Wzory te poznamy później w części drugiej niniejszej książki, przy omawianiu wyrównania sieci niwelacyjnych i tryangulacyjnych.

W każdym razie należy zwrócić baczną uwagę na to, aby znając już liczbę warunków r, nie użyć przy wyrównaniu warunków od siebie zależnych (identycznych).

W omawianym przykładzie można użyć przy wyrównaniu trzech par niezależnych warunków, odnoszących się do wzniesień wyrównanych, a mianowicie:

$$\left.\begin{aligned} h_1+\delta_1+h_2+\delta_2-h_3-\delta_3 \qquad\qquad\qquad\qquad &=0 \\ +h_2+\delta_2 \qquad\qquad -h_4-\delta_4+h_5+\delta_5 &=0 \end{aligned}\right\} 1).$$

$$\left.\begin{aligned} h_1+\delta_1 \qquad\quad -h_3-\delta_3+h_4+\delta_4-h_5-\delta_5 &=0 \\ h_1+\delta_1+h_2+\delta_2-h_3-\delta_3 \qquad\qquad\qquad\qquad &=0 \end{aligned}\right\} 2).$$

$$\left.\begin{aligned} h_1+\delta_1 \qquad\quad -h_3-\delta_3+h_4+\delta_4-h_5-\delta_5 &=0 \\ +h_2+\delta_2 \qquad\qquad -h_4-\delta_4+h_5+\delta_5 &=0 \end{aligned}\right\} 3).$$

Oczywiście, że można jeszcze ułożyć zestawienia nowe, zmieniając wszystkie znaki w poszczególnych warunkach, co jednak pomijamy jako rzecz bez znaczenia.

Z zestawionych trzech par warunków wybierzemy taką, która przysporzy nam jak najmniej pracy rachunkowej przy wyrównaniu, t. j. zawierającą najmniejszą ilość spółczynników równań odchyłek, a przez to ułatwiającą ustawienie równań korelat; w naszym przypadku zatem pierwszą.

Równania odchyłek przedstawią się zatem z uwzględnieniem wartości poszczególnych wzniesień:

$$\begin{aligned} h_1+h_2-\ h_3 \qquad\qquad &=\omega_1=+8\ m/m \\ h_2 \quad -h_4+h_5 &=\omega_2=-9\ m/m, \end{aligned}$$

zaś równania odchyłek wyrażone przez poprawki δ:

$$\begin{aligned} \delta_1+\delta_2-\delta_3 \qquad\qquad +8{\cdot}0 &=0 \\ +\delta_2 \qquad -\delta_4+\delta_5-9{\cdot}0 &=0. \end{aligned}$$

Przyjmując przy wyrównaniu wzniesień (wzgl. spadów) — jak dotychczas — wagi $p_i = \frac{1\,km}{L\,km}$, (aby jedn. błąd średni wypadł na 1 *km* długości ciągów), otrzymujemy ich odwrotności równe poszczególnym L, zatem

$$\frac{1}{p_i} = L_i,$$

rozumiejąc w tym związku pod L_i ilość *km*.

Wyrównanie przeprowadzimy jak zwykle przy pomocy schematów.

Nasamprzód zestawimy spółczynniki równań odchyłek wraz z wyrazami s i odwrotnościami wag $\frac{1}{p}$, tworząc dla kontroli wyrazów s także i równanie sum; na podstawie tego schematu ułożymy drugi dla kontroli spółczynników równań korelat.

	a	b	s	$\frac{1}{p}$
1	+1	.	+1	3·2
2	+1	+1	+2	1·5
3	—1	.	—1	2·7
4	.	—1	—1	2·4
5	.	+1	+1	3·6
Σ	+1	+1	+2	

		$a]$	$b]$	$s]$
	$\left[\frac{a}{p}\right.$	+7·4	+1.5	+8·9
	$\left[\frac{b}{p}\right.$	+1·5	+7·5	+9·0
Σ=	$\left[\frac{s}{p}\right.$	+8·9	+9·0	

(Kontrola polega na zgodności wyrazów $\left[\frac{as}{p}\right]$ i $\left[\frac{bs}{p}\right]$, utworzonych w ostatniej kolumnie bezpośrednio z poprzedniego schematu z temi samemi wyrazami, otrzymanemi przez sumowanie kolumn; n. p.

$$\left[\frac{as}{p}\right] = 1 \times 1 \times 3{\cdot}2 + 1 \times 2 \times 1{\cdot}5 + (-1) \times (-1) \times 2{\cdot}7 = 3{\cdot}2 + 3{\cdot}0 + 2{\cdot}7 = 8{\cdot}9,$$

którą to liczbę otrzymujemy również, sumując liczby kolumny pierwszej: $7{\cdot}4 + 1{\cdot}5 = 8{\cdot}9$ i t. d.).

Następnie przechodzimy do ustawienia schematów równań korelat:

	k_1	k_2	Wyrazy wolne
	+7·4 + 1·0	+ 1·5 + 0·2027	+ 8·0 + 1·0811
	+1·5 + 1·5	+ 7·5 + 0·304	— 9·0 + 1·622
Σ	+8·9 + 8·9	+ 9·0 + 1·804	— 1·0 + 9·622

	k_2	Wyrazy wolne
	+ 7·196 + 1·0	—10·622 — 1·4761
Σ	+7·196 (+ 7·196)	—10·622 (— 10·622)

	k_1	k_2	Wyrazy wolne
	+7·4 + 1·0	+1·500 + 0·2027	+ 8·000 + 1·0811
		+7·196 + 1·0	—10·622 + 1·4761
Σ	(+8·9)	(+9·0)	(— 1·0)

Pierwszy z trzech ostatnich schematów przedstawia równanie korelat bez redukcji, drugi — raz zredukowane, trzeci — system zredukowanych równań korelat. Rozwiązanie przeprowadzono jak w trzecim przykładzie wyr. spostrz. pośr. w § 7-mym rozdz. IV-go. Liczby pierwszego wiersza schematu równ. korelat dzielimy przez $+7{\cdot}4=\left[\frac{aa}{p}\right]$, uzyskując $+1{\cdot}0$, $+0{\cdot}2027$ i $+1{\cdot}0811$; liczby te mnożymy przez $+1{\cdot}5=\left[\frac{ab}{p}\right]$, dla otrzymania wyrażeń redukcyjnych wiersza drugiego: $(1{\cdot}5)$, $+0{\cdot}304$ i $+1{\cdot}622$, analogicznie postępujemy z wierszem trzecim, mnożąc te same liczby przez $+8{\cdot}9=\left[\frac{as}{p}\right]$. Odejmując wyrażenia redukcyjne od spółczyn. równ. korelat, otrzymujemy raz zreduk. równ. korelat, zatem $+7{\cdot}5-0{\cdot}304=+7{\cdot}196$, $-9{\cdot}0-1{\cdot}622=-10{\cdot}622$; ze względu, że mamy tu tylko jeden wiersz do sumowania, musi nam dać te same wyniki zredukowane równanie sum, zatem $+9{\cdot}0-1{\cdot}804=7{\cdot}196$, $-1{\cdot}0-9{\cdot}622=-10{\cdot}622$. W schemacie drugim dzielimy wyraz wolny $-10{\cdot}622=(\omega^2.1)$ przez $+7{\cdot}196=\left[\frac{bb}{p}.1\right]$ dla uzyskania ostatniej korelaty.

Z ostatniego schematu otrzymujemy k_2 i k_1, (zmieniając odpowiednio znaki):

$$k_2=1{\cdot}4761,$$
$$k_1=-1{\cdot}0811-0{\cdot}2027\,k_2=-1{\cdot}0811-0{\cdot}2992=-1{\cdot}3803.$$

Dołączone do ostatniego schematu równanie sum wykazuje po wstawieniu wartości na k_1 i k_2 dostateczną zgodność:

$$8{\cdot}9\,k_1+9{\cdot}0\,k_2-1{\cdot}0=-12{\cdot}2847+13{\cdot}2849-1{\cdot}0=+0{\cdot}0002.$$

Sumę $[p\delta\delta]$ wyznaczymy dla kontroli podwójnie $[p\delta\delta]=-[\omega k]=11{\cdot}0424+$ $+13{\cdot}2849=24{\cdot}3273$ i z wzoru redukcyjnego $[p\delta\delta]=\frac{\omega_1^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{(\omega_2.1)^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}$; odpowiednie wyrazy dla rachunku znajdujemy w ostatniej kolumnie ostatniego schematu mianowicie ω_1, $\frac{\omega_1}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$, $(\omega_2.1)$ i $\frac{(\omega_2.1)}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}$, $[p\delta\delta]=8{\cdot}0\times1{\cdot}0811+10{\cdot}622\times1{\cdot}4761=$ $=24{\cdot}3279$.

$$\mu_0=\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{2}}=\sqrt{12{\cdot}165}=\backsim\pm3{\cdot}5\ m/m$$ (błąd śr. niwel. na 1 *km* dług. ciągu).

Z schematu dla równań poprawek obliczymy następnie:

	k_1	k_2	δ
1	3·2	.	$=-4{\cdot}42$ *m/m*
2	1·5	1·5	$=+0{\cdot}12$ „
3	—2·7	.	$=+3{\cdot}72$ „
4	.	—2·4	$=-3{\cdot}54$ „
5	.	3·6	$=+5{\cdot}31$ „

Wartości poszczeg. δ, wstawione do równań odchyłek, powinny je sprawdzić do zera:

$$(\delta_1+\delta_2-\delta_3+\omega_1=0)$$
$$-4{\cdot}42+0{\cdot}14-3{\cdot}72+8{\cdot}00=0{\cdot}00\ (m/m)$$
$$(\delta_2-\delta_4+\delta_5+\omega_2=0)$$
$$+0{\cdot}14+3{\cdot}54+5{\cdot}31-9{\cdot}00=-0{\cdot}01\ (m/m).$$

Wreszcie otrzymamy wzniesienia wyrównane ze schematu:

	1	2	3	4	5
Wzniesienia spostrzegane	2·515	3·862	6·369	6·585	2·714
Poprawki δ	$-4,4$	$+0,1$	$+3,7$	$-3,5$	$+5,3$
Wzniesienia wyrównane	$2{\cdot}510,_6$	$3{\cdot}862,_1$	$6{\cdot}372,_7$	$6{\cdot}581,_5$	$2{\cdot}719,_6$

Wyrównane wzniesienia spełniają warunki (do zera wzgl. do 0·1 *m/m*):

$$\begin{array}{rl|rl}
+h_1+\delta_1 = & +2{\cdot}510,_6\ m & (h_2+\delta_2) = & +3{\cdot}862,_1\ m \\
+h_2+\delta_2 = & +3{\cdot}862,_1\ „ & -(h_4+\delta_4) = & -6{\cdot}581,_5\ „ \\
-(h_3+\delta_3) = & -6{\cdot}372,_7\ „ & +(h_5+\delta_5) = & +2{\cdot}719,_3\ „ \\
\hline
 & 0{\cdot}000,_0\ m & & -0{\cdot}000,_1\ m.
\end{array}$$

Przykład trzeci. Przeprowadzając we wrześniu r. 1918-go pomiary stereofotogrammetryczne nad Morskiem Okiem w Tatrach, założył autor następującą sieć tryangulacyjną o znaczeniu lokalnem.

$$\begin{aligned}
b &= 92{\cdot}06\ m \\
\alpha_1 &= 49^0 15' 02''{\cdot}5 \text{ [1]} \\
\alpha_2 &= 78\ 58\ 45\ {\cdot}0 \\
\alpha_3 &= 48\ 31\ 02\ {\cdot}5 \\
\alpha_4 &= 39\ 57\ 09\ {\cdot}5 \\
\alpha_5 &= 12\ 33\ 07\ {\cdot}5 \\
\alpha_6 &= 111\ 52\ 22\ {\cdot}5 \\
\alpha_7 &= 15\ 37\ 18\ {\cdot}0 \\
\alpha_8 &= 3\ 15\ 17\ {\cdot}5
\end{aligned}$$

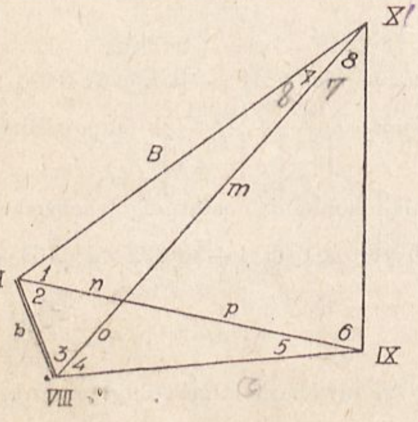

Fig. 10.

Ponieważ dla wyznaczenia kształtu wieloboku o p punktach wierzchołkowych wystarczy $2p-3$ niezależnych elementów konstrukcyjnych, przeto ilość spostrzeżeń koniecznych k jest 5; ilość warunków r otrzymamy zatem ze związku:

$$n-k=n-2p+3=9-8+3=4.$$

Trzy warunki otrzymujemy z dowolnych trzech trójkątów czworoboku, których suma kątów daje nam 180⁰. Uwzględniając tylko te trzy warunki, t. zw. *trójkątowe* wynikające n. p. z trójkątów VII—VIII—XI, VIII—IX—XI i VII—IX—XI nie otrzymalibyśmy zamkniętego czworoboku, tworząc go przy pomocy kątów wyrównanych, gdyż kierunek IX—VIII nie przechodziłby przez punkt VIII-my, choć byłby równoległy do kierunku VIII—IX. Aby te dwa przeciwne sobie kierunki zeszły się na jednej prostej, należy uwzględnić jeszcze warunek boków, czyli „*boczny*" lub „*sinusowy*". Warunek ten otrzymamy, obierając dowolny wierzchołek czworoboku lub punkt

[1]) Wyrównanie przeprowadzono tak, jak gdyby spostrzeżeniami były kąty; w rzeczywistości dokonano spostrzeżeń metodą kierunkową, a właściwe wyrównanie tej sieci podano w § 6-tym rozdz. XI-go.

przecięcia się przekątni jako punkt „*środkowy*“ („*centralny*“) i tworząc dla stosunku boków schodzących się w tym punkcie stosunek iloczynów sinusów odpowiednich kątów równy jedności, n. p.:

$$\frac{m}{n}\,\frac{n}{o}\,\frac{o}{p}\,\frac{p}{m}=1=\frac{\sin(\alpha_1+\delta_1)\sin(\alpha_3+\delta_3)\sin(\alpha_5+\delta_5)\sin(\alpha_7+\delta_7)}{\sin(\alpha_8+\delta_8)\sin(\alpha_2+\delta_2)\sin(\alpha_4+\delta_4)\sin(\alpha_6+\delta_6)},\ \text{lub ewent.}$$

dla punktu centr. VIII-go:

$$\frac{(m+o)}{b}\,\frac{b}{c}\,\frac{c}{(m+o)}=1=\frac{\sin(\alpha_1+\delta_1+\alpha_2+\delta_2)\sin(\alpha_5+\delta_5)\sin(\alpha_7+\delta_7)}{\sin(\alpha_8+\delta_8)\sin(\alpha_2+\delta_2)\sin(\alpha_5+\delta_5+\alpha_6+\delta_6)}\ \text{i t. p.}$$

Warunki boczne sprowadzamy ze względu na ich kształt do kształtu linjowego przy pomocy logarytmowania, uwzględniając, że

$$\log\sin(\alpha_i+\delta_i)=\log\sin\alpha_i+df\delta_i'',$$

przyczem df oznacza *poprawkę logarytmiczną na* $1''$.

Teoretycznie jest obojętnem, który punkt obierzemy za centralny; natomiast dla dokładności rachunkowej jest najkorzystniejszy warunek, odpowiadający punktowi skrzyżowania się przekątni jako punktowi centralnemu. Po nim jest najkorzystniejszym warunek utworzony ze względu na punkt centralny, leżący poza polem największego trójkąta czworoboku, a więc utworzony ze względu na punkt VIII-my. Ponieważ warunek boczny pierwszy zawiera 8 poprawek kątów, zaś drugi tylko 6, obierzemy warunek drugi, t. j. utworzony dla punktu centralnego VIII, nastręczający mniej pracy przy układaniu spółczynników równań korelat, jako czwarty warunek sieci [1]).

Zestawiając wszystkie cztery równania warunkowe, otrzymamy:

1. $\alpha_1+\delta_1+\alpha_2+\delta_2+\alpha_3+\delta_3+\alpha_8+\delta_8-180^0=0$
2. $\alpha_4+\delta_4+\alpha_5+\delta_5+\alpha_6+\delta_6+\alpha_7+\delta_7-180^0=0$
3. $\alpha_1+\delta_1+\alpha_6+\delta_6+\alpha_7+\delta_7+\alpha_8+\delta_8-180^0=0$
4. $\dfrac{\sin(\alpha_1+\delta_1+\alpha_2+\delta_2)\sin(\alpha_5+\delta_5)\sin(\alpha_7+\delta_7)}{\sin(\alpha_2+\delta_2)\sin(\alpha_5+\delta_5+\alpha_6+\delta_6)\sin(\alpha_8+\delta_8)}-1=0.$

Warunek czwarty sprowadzamy do kształtu linjowego przy pomocy *logarytmowania*, zmieniając go na:

$$4^*)\ \log\sin(\alpha_1+\alpha_2)+df_{1,2}(\delta_1+\delta_2)+\log\sin\alpha_5+df_5\delta_5+\log\sin\alpha_7+df_7\delta_7+$$
$$-\log\sin\alpha_2-df_2\delta_2-\log\sin(\alpha_5+\alpha_6)-df_{5,6}(\delta_5+\delta_6)-\log\sin\alpha_8-df_8\delta_8=0.$$

Kąty spostrzegane nie spełniają tych warunków do zera, dostarczając nam odchyłek ω:

1. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \;.\;\;.\;\;.\;\;.\; +\alpha_8-180^0=\omega_1$
2. $.\;\;.\;\;.\; \alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7 \;.\; -180^0=\omega_2$
3. $\alpha_1 \;.\;\;.\;\;.\;\;.\; +\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8-180^0=\omega_3$
4. $\log.\sin(\alpha_1+\alpha_2)+\log\sin\alpha_5+\log\sin\alpha_7-\log\sin\alpha_2-\log\sin(\alpha_5+\alpha_6)-$
$-\log\sin\alpha_8=\omega_4.$

1)	α_1	49°	15′	02″·5		2)	α_4	39°	57′	09″·5		3)	α_1	49°	15′	02″·5	
	α_2	78	58	45 ·0			α_5	12	33	07 ·5			α_6	111	52	22 ·5	
	α_3	48	31	02 ·5			α_6	111	52	22 ·5			α_7	15	37	18 ·0	
	α_8	3	15	17 ·5			α_7	15	37	18 ·0			α_8	3	15	17 ·5	
	Σ	180°	00′	07″·5			Σ	179°	59′	57″·5			Σ	180°	00′	00″·5	
				$\omega_1=+7''\cdot5,$						$\omega_2=-2''\cdot5,$						$\omega_3=+0''\cdot5.$	

[1]) Dokładne omówienie sieci tryangulacyjnej znajdzie czytelnik w rozdziale poświęconym sieciom tryangulacyjnym XI-tym A (§ 2).

Ze względu, że bok najdłuższy sieci wynosi zaledwie około 1300 *m*, użyjemy przy logarytmowaniu warunku czwartego logarytmów *6-ciocyfrowych*, zestawiając równocześnie odpowiednie *df*, t. j. poprawki logarytmiczne na 1″. (*Poprawki*, odnoszące się do *kątów między* 90° a 180°, mają oczywiście znaki *ujemne*).

		popr. na 1″
$\log\sin(\alpha_1+\alpha_2) = \log\sin\ 128^0\ 13'\ 47''{\cdot}5$	9·895165	−1·7
$\log\sin\alpha_5 = \log\sin\ 12^0\ 33'\ 07''{\cdot}5$	9·337114	+9·4
$\log\sin\alpha_7 = \log\sin\ 15^0\ 37'\ 18''{\cdot}0$	9·430211	+7·6
$\log L$ (licznika)	28·662490	

		popr. na 1″
$\log\sin\alpha_2 = \log\sin\ 78^0\ 58'\ 45''{\cdot}0$	9·991916	+ 0·4
$\log\sin(\alpha_5+\alpha_6) = \log\sin\ 124^0\ 25'\ 30''{\cdot}0$	9·916384	− 1·5
$\log\sin\alpha_8 = \log\sin\ 3^0\ 15'\ 17''{\cdot}5$	8·754177	+37·0
$\log M$ (mianownika)	28·662477	

$$28{\cdot}662490 - 28{\cdot}662477 = +0{\cdot}000013;$$

$\omega_4 = +13{\cdot}0$ *w jednostkach 6-go miejsca log.*

Równanie odchyłki, wyrażone przez poprawki δ, otrzymamy dla warunku czwartego (wedle 4*) w jednostkach 6-go miejsca log.:

$$-1{\cdot}7(\delta_1+\delta_2)+9{\cdot}4\,\delta_5+7{\cdot}6\,\delta_7-0{\cdot}4\,\delta_2+1{\cdot}5(\delta_5+\delta_6)-37{\cdot}0\,\delta_8+13{\cdot}0=0,$$

zaś po uporządkowaniu wedle poszczególnych δ:

$$-1{\cdot}7\,\delta_1-2{\cdot}1\,\delta_2+10{\cdot}9\,\delta_5+1{\cdot}5\,\delta_6+7{\cdot}6\,\delta_7-37{\cdot}0\,\delta_8+13{\cdot}0=0;$$

dodając do niego 3 pierwsze, będziemy mieli równania odchyłek w następującem zestawieniu schematycznem:

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	ω	
a	+1·0	+1·0	+1·0	.	.	.	.	+ 1·0	+ 7·5	(=0)
b	.	.	.	+1·0	+ 1·0	+1·0	+1·0	.	− 2·5	(=0)
c	+1·0	.	.	.	.	+1·0	+1·0	+ 1·0	+ 0·5	(=0)
d	−1·7	−2·1	.	.	+10·9	+1·5	+7·6	−37·0	−13·0	(=0).

Ponieważ *równania warunkowe,* a tem samem i równania odchyłek, możemy w *przeciwieństwie do równań błędów* (przy wyrówn. spostrz. pośr.) *pomnożyć lub podzielić przez dowolną liczbę*, pomnożymy 3 pierwsze równania przez 10, aby uzyskać we wszystkich równaniach spółczynniki niewiele różniące się; równania odchyłek przybiorą tedy ostatecznie kształt następujący:

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	ω'
a	+10·0	+10·0	+10·0	.	.	.	.	+10·0	+75·0
b	.	.	.	+10·0	+10·0	+10·0	+10·0	.	—25·0
c	+10·0	.	.	.	.	+10·0	+10·0	+10·0	+ 5·0
d	— 1·7	— 2·1	.	.	+10·9	+ 1·5	+ 7·6	—37·0	+13·0

Chcąc uzyskać przy wyrównaniu równocześnie i *błąd średni boku* (VII—XI)$=B$, wyrazimy B przez podstawę b i kąty spostrzegane (najprościej w tym przypadku):

$$B = b\frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_8} = \frac{\sin 48^0\ 31'\ 02''\cdot 5}{\sin\ 3^0\ 15'\ 17''\cdot 5}\ 92\cdot 06\ m,$$

$\log B = 3\cdot 084467$, $B = 1{,}214\cdot 69\, m$, a następnie obliczymy cząstkowe pochodne tej funkcji podług α_3'' i α_8'', zatem:

$$F_3 = \frac{\partial B}{\partial \alpha_3''} = \frac{b}{\rho''} \frac{\cos \alpha_3}{.\sin \alpha_8} = \frac{B}{\rho''} \operatorname{ctg} \alpha_3 = +0\cdot 0052 \left(\frac{m}{1''}\right)$$

$$F_8 = \frac{\partial B}{\partial \alpha_8''} = -\frac{b}{\rho''} \frac{\sin \alpha_3 \cos \alpha_8}{.\sin^2 \alpha_8} = -\frac{B}{\rho''} \operatorname{ctg} \alpha_8 = -0\cdot 1036 \left(\frac{m}{1''}\right).$$

Schemat kontrolny spółczynników równań odchyłek wraz z pochodnemi F przedstawia się następująco:

a)

	a	*b*	*c*	*d*	*F*	*s'*
1	+10·0	.	+10·0	— 1·7	.	+18·3
2	+10·0	.	.	— 2·1	.	+ 7·9
3	+10·0	.	.	.	+0·0052	+10·0052
4	.	+10·0	.	.	.	+10·0
5	.	+10·0	.	+10·9	.	+20·9
6		+10·0	+10·0	+ 1·5	.	+21·5
7	.	+10·0	+10·0	+ 7·6	.	+27·6
8	+10·0	.	+10·0	—37·0	—0·1036	—17·1036
Σ	+40·0	+40·0	+40·0	—20·8	—0·0984	+99·1016
(ω	+75·0	—25·0	+ 5·0	+13·0)		

Na podstawie schematu *a)* ułożymy schemat *b)*, który nam dostarczy spółczynników równań korelat (z kontrolą).

b)

		$a]$	$b]$	$c]$	$d]$	$F]$	$s']$
	$[a$	+400·0000	.	+200 0000	— 408·0000	—0·98400	+ 191·01600
	$[b$	.	+400·0000	+200·0000	+ 200·0000	.	+ 800·00000
	$[c$	+200·0000	+200·0000	+400·0000	— 296·0000	—1·03600	+ 502·96400
	$[d$	—408·0000	+200·0000	—296·0000	+1555·1200	+3·83320	+1054·95320
	$[F$	— 0·9840	.	— 1·0360	+ 3·8332	+0·01076	+ 1·82396
Σ	$[s'$	+191·0160	+800·0000	+502·9640	+1054·9532	+1·82396	

Dalszy przebieg rachunku jest analogiczny do przeprowadzonego w przykładzie poprzednim z tą tylko różnicą, że wagi p mamy w obecnym przykładzie równe jedności. Tworzymy zatem jak poprzednio schemat równań korelat, dodając jednak i wyrazy odnoszące się do funkcji (pod kolumną k_F):

c)

	k_1	k_2	k_3	k_4	Wyrazy wolne	k_F
	+400·0000 + 1·0	. .	+200·0000 + 0 5000	— 408 0000 — 1·0200	+75·0000 + 0·1875	—0·98400 — 0·00246
	. .	+400·0000 .	+200·0000 .	+ 200·0000 .	—25·0000 .	. .
	+200·0000 + 200·0000	+200·0000 .	+400·0000 + 100·0000	— 296·0000 — 204·0000	+ 5·0000 + 37·5000	—1·03600 — 0·49200
	—408·0000 — 408·0000	+200·0000 .	—296·0000 — 204·0000	+ 1555·1200 + 416·1600	+13·0000 — 76·5000	+3·83320 + 1·00368
	— 0 9840 — 0·9840	. .	+ 1·0360 — 0 4920	+ 3·83320 + 1·00368	. — 0·1845	+0·01076 + 0·00242
Σ	+191·0160 + 191·0160	+800·0000 .	+502·9640 + 95·5080	- 1054·95320 — 194 83632	+68·0000 + 35·8155	+1·82396 — 0·46990

c)*

	k_2	k_3	k_4	Wyrazy wolne	k_F
	+400·0000 + 1·0	+200·0000 + 0 5000	+ 200·0000 + 0 5000	—25·0000 — 0·0625	. .
	+200·0000 + 200 0000	+300·0000 + 100·0000	— 92·0000 + 100·0000	—32·5000 — 12·500	—0·54400 .
	+200·0000 + 200·0000	— 92·0000 + 100·0000	+ 1138·9600 + 100·0000	+89·5000 — 12·500	+2·82952 .
	. .	— 0 5440 .	+ 2·82952 .	+ 0·1845 .	+0·00834 .
Σ	+800·0000 + 800·0000	+407·4560 + 400·0000	+1249·78952 + 400·0000	+32·1845 — 50·0000	+2·29386 .

(Rachunek przeprowadzono na 4 miejsca dziesiętne prócz wyrazów związanych z pochodnemi F, które obliczono ze względu na dokładność i zgodność rachunku na 5 miejsc dziesiętnych).

$c^{**})$

	k_3	k_4	Wyrazy wolne	k_F
	+200·0000 + 1·0	− 192·0000 − 0·9600	− 20·0000 − 0·1000	− 0·54400 − 0·00272
	−192·0000 − 192·0000	+1038·9600 + 184·3200	+102·0000 19·2000	+ 2·82952 + 0·52224
	− 0·5440 − 0·5440	+ 2·82952 + 0·52224	+ 0·1845 + 0·0544	+ 0·00834 + 0·00148
Σ	+ 7·4560 + 7·4560	+849·78952 − 7·15776	+ 82·1845 + 0·7456	+ 2·29386 − 0·02028

$c^{***})$

	k_4	Wyrazy wolne	k_F
	+ 854·6400 + 1·0	+ 82·8000 + 0·096883	+ 2·30728 + 0·0026997
	+ 2·30728 + 2·30728	+ 0·1301 + 0·2235	+ 0·00686 + 0·00623
Σ	+856·94728 + 856·94728	+ 82·9301 + 83·0236	+ 2·31414 + 2·31350

$c^{****})$

	Wyrazy wolne	k_F
	− 0·0934	+ 0·00063
Σ	− 0·0935	+ 0·00064

Zredukowane równania korelat układamy w schemat

d)

k_1	k_2	k_3	k_4	Wyrazy wolne	k_F
+400·0000 + 1·0000	. .	+200·0000 + 0·5000	−408·0000 − 1·0200	+ 75·0000 + 0·1875	− 0·98400 − 0·00246
	+400·0000 − 1·0000	+200·0000 + 5·0000	+200·0000 + 0·5000	− 25·0000 − 0·0625	. .
		+200·0000 + 1·0000	−192·0000 − 0·9600	− 20·0000 − 0·1000	− 0.54400 − 0·00272
			+854·6400 1·0000	+ 82·8000 + 0·096883	+ 2·30728 + 0·0026997
−0·187500					
−0·098821	+0·062500				
−0·003496	+0·048442	+0·100000		− 0·0934	+ 0·00063
.	−0·003496	−0·093008			
−0·289817 $=k_1$	+0·107446 $=k_2$	+0·006992 $=k_3$	−0·096883 $=k_4$		

Przy pomocy podpisanych spółczynników redukcyjnych obliczamy wszystkie k, począwszy od k_4.

Wartości korelat wstawione do równań korelat sprawdzają je w przybliżeniu do zer:

1) −115·9268 + 1·3984 + 39·5283 + 75·0 = −0·0001
2) 42·9784 − 1·3984 − 19·3766 − 25·0 = +0·0002
3) −57·9634 + 21·4892 + 2·7968 + 28·6774 + 5·0 = 0·0000
4) +118·2453 + 21·4892 − 2·0696 − 150·6647 + 13·0 = +0·0002.

Wartości poprawek obliczone wedle schematu *a)* są:

	1	2	3	4	5	6	7	8
δ	$-2''{\cdot}6636$	$-2''{\cdot}6947$	$-2''{\cdot}8982$	$+1''{\cdot}0745$	$+0''{\cdot}0185$	$+0''{\cdot}9991$	$+0''{\cdot}4081$	$+0''{\cdot}7564$
δ zaokr. na 2 m. dz.	$-2''{\cdot}66$	$-2''{\cdot}69$	$-2''{\cdot}90$	$+1''{\cdot}07$	$+0''{\cdot}02$	$+1''{\cdot}00$	$+0''{\cdot}41$	$+0''{\cdot}76$

Suma $[\delta\delta]$ uzyskana w sposób bezpośredni wynosi 25·645, zaś kontrolnym wzorem redukcyjnym 25·647 (jako suma iloczynów 5-tej kolumny schematu *d*: $75{\cdot}0 \times 0{\cdot}1875 + \ldots\ldots + 82{\cdot}8 \times 0{\cdot}096883$).

Jednostkowy błąd średni $\mu = \sqrt{\frac{25{\cdot}645}{4}} = \pm 2''{\cdot}53.$

Poprawki δ, zaokrąglone na 2 miejsca dziesiętne, spełniają początkowe równanie odchyłek w przybliżeniu do zer:

1) $-2''{\cdot}66 - 2''{\cdot}69 - 2''{\cdot}90 + 0''{\cdot}76 + 7''{\cdot}50 = +0''{\cdot}01,$
2) $1''{\cdot}07 + 0''{\cdot}02 + 1''{\cdot}00 + 0''{\cdot}41 + 2''{\cdot}50 = 0''{\cdot}00,$
3) $-2''{\cdot}66 + 1''{\cdot}00 + 0''{\cdot}41 + 0''{\cdot}76 + 0''{\cdot}50 = +0''{\cdot}01,$
4) $4{\cdot}52 + 5{\cdot}65 + 0{\cdot}22 + 1{\cdot}50 + 3{\cdot}12 - 28{\cdot}12 + 13{\cdot}0 = -0{\cdot}11.$
(warunek boczny bez różnicy na 6-tem miejscu log.).

Wartości kątów wyrównanych (α) podaje nastepujące zestawienie:

1) 49°14′59″·84	3) 48°30′59″·60	5) 12°33′07″·52	7) 15°37′18″·41
2) 78°58′42″·31	4) 39°57′10″·57	6) 111°52′23″·50	8) 3°15′18″·26

Jak widzimy spełniają kąty (α) warunki sieci 0″·01 (z powodu zaokrągleń):

(α_1)	49°14′59″·84	(α_4)	39°57′10″·57	(α_1)	49°14′59″·84
(α_2)	78 58 42 ·31	(α_5)	12 33 07 ·52	(α_6)	111 52 23 ·50
(α_3)	48 30 59 ·60	(α_6)	111 52 23 ·50	(α_7)	15 37 18 ·41
(α_8)	3 15 28 ·26	(α_7)	15 37 18 ·41	(α_8)	3 15 18 ·26
Σ	180°00′00″·01	Σ	180°00′00″·00	Σ	180°00′00″·00

log sin $\{(\alpha_1)+(\alpha_2)\}$	9·895174	log sin (α_2)	9·991915
log sin (α_5)	9·337114	log sin $\{(\alpha_5)+(\alpha_6)\}$	9·916382
log sin (α_7)	9·430214	log sin (α_8)	8·754205
(log (L) liczn.)	28·662502	(log (M) mian.)	28·662502

$$\log (L) - \log (M) = 0{\cdot}000000.$$

Długość boku sieci B przed wyrównaniem wynosi: $B = 1{,}214{\cdot}69\ m$, zaś po wyrówn. (B) (t. j. obliczona przy pomocy kątów wyr.): $(B) = 1{,}214{\cdot}60\ m$.

Błąd średni tej długości przed wyr. $\mu_B = \mu\sqrt{\mathrm{I}} = 2{\cdot}53\sqrt{0{\cdot}01076} = \pm 0{\cdot}26_2\ m$, zaś po wyrównaniu $\mu_B = \mu\sqrt{\mathrm{I}-\mathrm{II}} = 2{\cdot}53\sqrt{0{\cdot}00063} = \pm 0{\cdot}06_4\ m$; przyczem $\mathrm{I} = [FF]$, (patrz schemat *b*), $\mathrm{I}-\mathrm{II} = [FF.4]$ (patrz schemat *d*); kontrolę otrzymamy, tworząc II jako sumę iloczynów wyrazów ostatniej kolumny schem. *d*: $0{\cdot}984 \times 0{\cdot}00246 + \ldots\ldots + 2{\cdot}30778 \times 0{\cdot}0026997 = 0{\cdot}01013$, zatem: $\mathrm{I}-\mathrm{II} = 0{\cdot}01076 - 0{\cdot}01013 = 0{\cdot}00063$.

ROZDZIAŁ SZÓSTY.

A) Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich z warunkami.
B) Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych o niewiadomych.

A)

§ 1. Sprowadzenie zagadnienia *A)* do wyrównania spostrzeżeń pośrednich.

Jak wiadomo z ustępu 4-go § 2-go rozdz. II-go, ma wyrównanie *A)* bardzo ważne znaczenie przy wyrównaniu większych systemów *sieci tryangulacyjnych*. Kąty względnie kierunki należy w tym przypadku wyrównać nietylko na poszczególnych stacjach (stanowiskach), ale także i z uwzględnieniem geometrycznych warunków sieci.

Niewiadome (t. j. kąty względnie kierunki) uczestniczą tu zatem tak w równaniach błędów, jak i w równaniach warunkowych.

Dla ilości niewiadomych k, spostrzeżeń n i warunków r, przyczem $n > k - r$, zaś $k > r$ przedstawia się zagadnienie *A)* w formie następującej:

$$\left(\begin{array}{c}\text{równ. bł.}\\ \text{w ilości } = n\end{array}\right)\left\{\begin{array}{l}\delta_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots\ldots + l_1\\ \delta_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots\ldots + l_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \delta_n = \underbrace{a_n x + b_n y + c_n z + \ldots\ldots}_{\text{(ilość niewiadomych } k)} + l_n\end{array}\right. \tag{1}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{warunki}\\ \text{w ilości } r\end{array}\right)\left\{\begin{array}{l}A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z + \ldots\ldots = 0\\ B_0 + \underbrace{B_1 x + B_2 y + B_3 z + \ldots\ldots}_{\text{(ilość niewiadomych } k)} = 0\end{array}\right. \tag{2}$$

$$\text{(warunek wyrówn.)} \quad [p\,\delta\delta] = \text{min., względnie } [\delta\delta] = \text{min.} \tag{3}$$

Wyrażając przy pomocy r związków (2) pozostałą resztę niewiadomych, t. j. $(k-r)$, rugujemy w równaniach błędów (1) r niewiadomych, otrzymując w ten sposób n równań błędów o $(k-r)$ niewiadomych.

N. p., jeśli ilość warunków $r=2$, przedstawiają się równania, służące do rugowania dwu niewiadomych, następująco:

$$\left(\begin{array}{c}\text{ilość}\\ \text{warunk. } r=2\end{array}\right)\left\{\begin{array}{l} x=A_1'z+A_2't+\ldots\ldots \\ y=\underbrace{B_1'z+B_2't+\ldots\ldots}_{} \end{array}\right. \qquad (2^*)$$

(ilość niewiadomych $k-2$).

Po wstawieniu związków (2*) do równań błędów otrzymamy zatem:

$$\left(\begin{array}{c}\text{ilość równ.}\\ \text{błędów } n\end{array}\right)\left\{\begin{array}{l} \delta_1=c_1'z+d_1't+\ldots\ldots+l_1' \\ \delta_2=c_2'z+d_2't+\ldots\ldots+l_2' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_n=\underbrace{c_n'z+d_n't+\ldots\ldots}_{}+l_n \end{array}\right. \qquad (1^*)$$

(ilość niewiadomych $k-2$).

W ten sposób *zredukowaliśmy* powyższe zagadnienie *do wyrównania spostrzeżeń pośrednich.*

Aby wyrównanie mogło mieć miejsce musi być — jak wspomnieliśmy $k>r$, oraz $n>(k-r)$.

Błąd średni jest — ze względu na $(k-r)$ niewiadomych — określony wzorem:

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_0=\sqrt{\dfrac{[p\,\delta\delta]}{n-(k-r)}}=\sqrt{\dfrac{[p\,\delta\delta]}{n-k+r}},\ \text{względnie} & a) \\ \mu=\sqrt{\dfrac{[\delta\delta]}{n-(k-r)}}=\sqrt{\dfrac{[\delta\delta]}{n-k+r}}, & b) \end{array}\right\} \qquad (4)$$

przyczem zauważyć należy, że w praktyce zachodzi z reguły przypadek wyrównania spostrzeżeń o wagach $p=1$, w obec czego ma zastosowanie wzór (4) *b*.

Wzór (4) jest oczywiście ważny dla każdej formy wyrównania spostrzeżeń pośrednich z warunkami.

Metoda opisana w § 1-szym nadaje się do zastosowania gdy *warunków r* jest *niewiele;* zazwyczaj jest ich ilość w większych sieciach tryangulacyjnych dość znaczna i wtedy posługujemy się inną metodą bezpośrednią, która może być przeprowadzoną w różnych formach.

§ 2. Rozwiązanie bezpośrednie.

Biorąc na uwagę systemy równań (1) i (2) § 1-go i zakładając dla ogólności, że spostrzeżeniom odpowiadają różne wagi p, wyznaczymy niewiadome z warunku: $[p\,\delta\delta]=\min.$ z uwzględnieniem rachunków (2) § 1-go.

Mnożąc poszczególne warunki przez spółczynniki nieoznaczone kształtu $2k_i$ i dodając je do sumy $[p\delta\delta]$, utworzymy funkcję:

$$\Omega=[p\delta\delta]+2k_1(A_0+A_1x+A_2y+\ldots)+2k_2(B_0+B_1x+B_2y+\ldots)+\ldots, \quad (1)$$

której pochodne cząstkowe podług x, y, z... zrównamy z zerem.

W ten sposób otrzymamy k równań kształtu:

$$\text{ilość równ. } k \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial\Omega}{\partial x}=[pa\delta]+A_1k_1+B_1k_2+C_1k_3+\ldots=0 \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y}=[pb\delta]+A_2k_1+B_2k_2+C_2k_3+\ldots=0 \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial z}=[pc\delta]+A_3k_1+B_3k_2+C_3k_3+\ldots=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \quad (2)$$

Po wyrugowaniu w równaniach (2) wszystkich δ przy pomocy n równań błędów {równ. (1) § 1-go} i dodaniu do nich r równań warunkowych uzyskamy razem $(k+r)$ równań:

$$(\text{ilość } k+r) \left| \begin{array}{ll} (k) \left\{ \begin{array}{l} [paa]x+[pab]y+[pac]z+\ldots+A_1k_1+B_1k_2+C_1k_3+\ldots+[pal]=0 \\ [pab]x+[pbb]y+[pbc]z+\ldots+A_2k_1+B_2k_2+C_2k_3+\ldots+[pbl]=0 \\ [pac]x+[pbc]y+[pcc]z+\ldots+A_3k_1+B_3k_2+C_3k_3+\ldots+[pcl]=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \\ (r) \left\{ \begin{array}{l} A_1x+A_2y+A_3z+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+A_0=0 \\ B_1x+B_2y+B_3z+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+B_0=0 \\ C_1x+C_2y+C_3z+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+C_0=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (3)$$

z których obliczymy wartości tak niewiadomych jak i korelat.

Równania te rozwiązujemy metodą eliminacyjną Gaussa. Jednostkowy błąd średni, utworzony w tym przypadku dla k niewiadomych równań błędów i r warunków, będzie zgodnie z wzorem (4) § 1-go:

$$\mu_0=\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-k+r}}.$$

Metoda wyrównania przedstawiona w niniejszym paragrafie jest w praktycznem zastosowaniu *uciążliwą*, a przytem *mało przejrzystą;* z tego powodu posługujemy się nią w formach odmiennych, jednej podanej w § 3-cim, drugiej w 4-tym. W obu przypadkach składa się wyrównanie z *dwu oddzielnych części.*

§ 3. Metoda pierwsza (Hansena i Helmerta) z zastosowaniem równoważnych systemów błędów.

1. Część pierwsza.

Pod założeniem, że równania błędów wystarczają do wyznaczenia niewiadomych, wyrównujemy je oddzielnie od połączonych z niemi warunków, oznaczając w ten sposób uzyskane wartości niewiadomych przez x_0, y_0, z_0

Zredukowane równania normalne, wynikające z tego wyrównania, kształtu (2) § 8-go rozdz. IV-go (dla $k=3$):

$$\begin{aligned} x_0+\frac{[pab]}{[paa]}y_0+\frac{[pac]}{[paa]}z_0&=\chi_1 \quad \text{o wadze } [paa] \\ y_0+\frac{[bc.1]}{[bb.1]}z_0&=\chi_2 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad [pbb.1] \\ z_0&=\chi_3 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad [pcc.2] \end{aligned} \tag{1}$$

$$\left(\text{przyczem } \chi_1=-\frac{[pal]}{[paa]},\ \chi_2=-\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]},\ \chi_3=-\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}\right)$$

są wedle § 8-go rozdz. IV-go systemem *zupełnie równoważnym* z pierwotnym systemem błędów δ.

Wartości x_0, y_0, z_0 są uzyskane *bez uwzględnienia* warunków kształtu (2) § 1-go, musimy je przeto *poprawić o pewne wielkości* ξ, η i ζ, aby mogły czynić zadość tym warunkom.

Przyjmując, że mamy przy spostrzeżeniach pośrednich dwa warunki, które mają spełnić niewiadome, otrzymamy do uwzględnienia w drugiej części wyrównania warunki kształtu (przyjmując $r=2$):

$$\begin{aligned} A_0+A_1(x_0+\xi)+A_2(y_0+\eta)+A_3(z_0+\zeta)&=0 \\ B_0+B_1(x_0+\xi)+B_2(y_0+\eta)+B_3(z_0+\zeta)&=0. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Część druga.

Chcąc uzyskać wartości poprawionych niewiadomych równania (2), należałoby uwzględnić równocześnie równania błędów części pierwszej; aby tego uniknąć, *wyrazimy poprawione niewiadome przez niezależne spostrzeżenia pozorne* χ_1, χ_2 i χ_3 równ. (1), poprawione o Δ_1, Δ_2 i Δ_3 ze względu na dodane do niewiadomych poprawki ξ, η i ζ; związki wzoru (1) przejdą zatem na następujące:

$$\begin{aligned} (x_0+\xi)+\frac{[pab]}{[paa]}(y_0+\eta)+\frac{[pac]}{[paa]}(z_0+\zeta)&=\chi_1+\Delta_1 \quad \text{o wadze } [paa] \\ (y_0+\eta)+\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}(z_0+\zeta)&=\chi_2+\Delta_2 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad [pbb.1] \\ (z_0+\zeta)&=\chi_3+\Delta_3 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad [pcc.2]. \end{aligned} \tag{3}$$

Odejmując związki wzoru (1) od związków wzoru (3), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \xi+\frac{[pab]}{[paa]}\eta+\frac{[pac]}{[paa]}\zeta&=\Delta_1 \quad \text{o wadze } [paa] \\ \eta+\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}\zeta&=\Delta_2 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad [pbb.1] \\ \zeta&=\Delta_3 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad [pcc.2], \end{aligned} \tag{4}$$

lub w formie uproszczonej:

$$\begin{aligned} \xi+\alpha_2'\eta+\alpha_3'\zeta&=\Delta_1 \quad \text{o wadze } [paa] \\ \eta+\beta_3''\zeta&=\Delta_2 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad [pbb.1] \\ \zeta&=\Delta_3 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad [pcc.2]. \end{aligned} \tag{4*}$$

Po wyznaczeniu Δ_1, Δ_2 i Δ_3, otrzymamy niewiadome ξ, η i ζ ze związków (4) względnie (4*), wyrażone przez Δ w sposób następujący.

Dla wyznaczenia poprawki ξ pomnożymy związki wzoru (4) kolejno przez 1, $-\frac{[pab]}{[paa]}=-\alpha_2'$ i $-\frac{[pac]}{[paa]}+\frac{[pab]}{[paa]}\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}=-\alpha_3'+\alpha_2'\beta_3''=-\alpha_3''$, otrzymując po ich zesumowaniu:

$$\xi=\Delta_1-\frac{[pab]}{[paa]}\Delta_2-\left\{\frac{[pac]}{[paa]}-\frac{[pab]}{[paa]}\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}\right\}\Delta_3=\Delta_1-\alpha_2'\Delta_2-\alpha_3''\Delta_3. \quad (5)$$

Aby otrzymać poprawkę η, pomnożymy związki wzoru (4) kolejno przez 0, 1 i $-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}=-\beta_3''$, a po ich dodaniu wypadnie nam:

$$\eta=\Delta_2-\frac{[pbc.1]}{[pab.1]}\Delta_3=\Delta_2-\beta_3''\Delta_3, \quad (5^*)$$

zaś mnożąc związki (4) kolejno przez 0, 0 i 1, otrzymamy ostatnią poprawkę

$$\zeta=\Delta_3. \quad (5^{**})$$

Przy większej ilości niewiadomych muszą być obliczone dla użycia wzorów (5) odpowiednie wyrazy α_3'', α_4''', $\alpha_5''''\ldots$, β_4''', $\beta_5''''\ldots$, $\gamma_5''''\ldots$ i t. d. Ponieważ wyrazy te są potrzebne zresztą tylko dla obliczenia wag niewiadomych, przeto w przypadku, gdy nam nie zależy na wagach niewiadomych, *nie obliczamy* ξ, η i ζ przy pomocy związków (5); natomiast użyjemy ich do wyprowadzenia dalszych wzorów.

Niepoprawione wartości niewiadomych x_0, y_0 i z_0, wstawione do równań warunkowych (2), *nie spełniają* ich do zera, wywołując odchyłki ω:

$$\begin{aligned}A_0+A_1x_0+A_2y_0+A_3z_0&=\omega_1\\ B_0+B_1x_0+B_2y_0+B_3z_0&=\omega_2.\end{aligned} \quad (6)$$

Z porównania związków (6) i (2) wynika dalej:

$$\begin{aligned}A_1\xi+A_2\eta+A_3\zeta+\omega_1&=0\\ B_1\xi+B_2\eta+B_3\zeta+\omega_2&=0.\end{aligned} \quad (7)$$

Rugując w równaniach wzoru (7) niewiadome przy pomocy związków (5), otrzymamy:

$$\begin{aligned}A_1(\Delta_1-\alpha_2'\Delta_2-\alpha_3''\Delta_3)+A_2(\Delta_2-\beta_3''\Delta_3)+A_3\Delta_3+\omega_1&=0\\ B_1(\Delta_1-\alpha_2'\Delta_2-\alpha_3''\Delta_3)+B_2(\Delta_2-\beta_3''\Delta_3)+B_3\Delta_3+\omega_2&=0,\end{aligned}$$

a ostatecznie po uporządkowaniu wyrazów podług Δ równania odchyłek:

$$\begin{aligned}A_1\Delta_1+(A_2-\alpha_2'A_1)\Delta_2+(A_3-\alpha_3''A_1-\beta_3''A_2)\Delta_3+\omega_1&=0\\ B_1\Delta_1+(B_2-\alpha_2'B_1)\Delta_2+(B_3-\alpha_3''B_1-\beta_3''B_2)\Delta_3+\omega_2&=0.\end{aligned} \quad (8)$$

Po zastąpieniu wyrazów α i β odpowiedniemi wyrazami redukcyjnemi wedle związków (4) i (5) przemienią się wyrazy, zawarte w klamrach, w sposób następujący:

$$\left.\begin{aligned}
&A_2-\alpha_2' A_1=A_2-\frac{[pab]}{[paa]}A_1=(A_2.1)\\
&B_2-\alpha_2' B_1=B_2-\frac{[pab]}{[paa]}B_1=(B_2.1)\\
&A_3-\alpha_3'' A_1-\beta_3'' A_2=A_3-\frac{[pac]}{[paa]}A_1-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}\left\{A_2-\frac{[pab]}{[paa]}A_1\right\}=(A_3.2)\\
&B_3-\alpha_3'' B_1-\beta_3'' B_2=B_3-\frac{[pac]}{[paa]}B_1-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}\left\{B_2-\frac{[pab]}{[paa]}B_2\right\}=(B_3.2)
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Po wstawieniu tych wartości do równań (8), otrzymamy równania odchyłek we formie:

$$\begin{aligned}
&A_1\Delta_1+(A_2.1)\Delta_2+(A_3.2)\Delta_3+\omega_1=0\\
&B_1\Delta_1+(B_2.1)\Delta_2+(B_3.2)\Delta_3+\omega_2=0, \text{ do których}
\end{aligned} \quad (10)$$

dołączymy wagi: $[paa]$, $[pbb.1)$, $[pcc.2]$.

Z równań odchyłek (10) tworzymy następnie w znany sposób równania korelat:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\frac{A_1^2}{[paa]}+\frac{(A_2.1)^2}{[pbb.1]}+\frac{(A_3.2)^2}{[pcc.2]}\right\}k_1+\left\{\frac{A_1B_1}{[paa]}+\frac{(A_2.1)(B_2.1)}{[pbb.1]}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{(A_3.2)(B_3.2)}{[pcc.2]}\right\}k_2+\omega_1=0\\
&\left\{\frac{A_1B_1}{[paa]}+\frac{(A_2.1)(B_2.1)}{[pbb.1]}+\frac{(A_3.2)(B_3.2)}{[pcc.2]}\right\}k_1+\left\{\frac{B_1^2}{[paa]}+\frac{(B_2.1)^2}{[pbb.1]}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{(B_3.2)^2}{[pcc.2]}\right\}k_2+\omega_2=0,
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

które zazwyczaj piszemy w formie uproszczonej:

$$\begin{aligned}
&\{\mathbf{AA}\}k_1+\{\mathbf{AB}\}k_2+\omega_1=0\\
&\{\mathbf{AB}\}k_1+\{\mathbf{BB}\}k_2+\omega_2=0.
\end{aligned} \quad (12)$$

Po wyznaczeniu wartości korelat z równań (12) obliczamy poszczególne poprawki Δ z równań poprawek

$$\begin{aligned}
&\Delta_1=\frac{1}{[paa]}\Big(A_1k_1+B_1k_2\Big)\\
&\Delta_2=\frac{1}{[pbb.1]}\Big((A_2.1)k_1+(B_2.1)k_2\Big)\\
&\Delta_3=\frac{1}{[pcc.2]}\Big((A_3.2)k_1+(B_3.2)k_2\Big),
\end{aligned} \quad (13)$$

zaś wartości ξ, η i ζ ze związków (4) względnie (5).

Zazwyczaj wyznaczamy niewiadome x_0, y_0 i z_0 w pierwszej części wyrównania na podstawie równań normalnych (1), tak że po obliczeniu poprawek ξ, η i ζ będą wartości niewiadomych $x=(x_0+\xi)$, $y=(y_0+\eta)$ i $z=(z_0+\zeta)$; można jednak *obliczenie niewiadomych* x, y i z zupełnie *pominąć,* a odchyłki ω wyznaczyć na podstawie równań odchyłek kształtu:

$$\begin{aligned} A_0+A_1\chi_1+(A_2.1)\chi_2+(A_3.2)\chi_3&=\omega_1\\ B_0+B_1\chi_1+(B_2.1)\chi_2+(B_3.2)\chi_3&=\omega_2, \end{aligned} \tag{6*}$$

urobionych w analogiczny sposób z równań (6), jak urobiliśmy równania (10) z równań (7).

Po obliczeniu odchyłek ω wyznaczamy k_1 i k_2 z równań (12), poprawki Δ_1, Δ_2 i Δ_3 z równań (13) a wreszcie $(x_0+\xi)$, $(y_0+\eta)$ i $(z_0+\zeta)$ z równań (3).

Błąd średni jednostkowy μ_0 możemy utworzyć wedle trzech formuł:

$$\mu_0=\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-k+r}} \tag{14}$$

$$\mu_0=\sqrt{\frac{[p\delta'\delta']}{n-k}} \qquad \left(\begin{array}{l} n=\text{ ilości spostrzeżeż,}\\ k=\text{ „ niewiadomych,}\\ r=\text{ „ warunków}\end{array}\right) \tag{15}$$

$$\mu_0=\sqrt{\frac{\{\Delta\Delta\}}{r}}; \tag{16}$$

wzór (14) odnosi się do całkowitego wyrównania, wzór (15) do pierwszej, wzór (16) do drugiej części wyrównania, zatem

$$\begin{aligned} \delta_i&=a_i(x_0+\xi)+b_i(y_0+\eta)+c_i(z_0+\zeta)+\ldots\ldots+l_i\\ \delta_i'&=a_ix_0\qquad\quad +b_iy_0\qquad\quad +c_iz_0\qquad\ +\ldots\ldots+l_i, \end{aligned}$$

zaś Δ są określone wzorami (4) względnie (13).

Prócz bezpośrednich sposobów tworzenia sum $[p\delta\delta]$, $[p\delta'\delta']$ i $\{\Delta\Delta\}=$ $=[paa]\Delta_1^2+[pbb.1]\Delta_2^2+[pcc.2]\Delta_3^2+\ldots\ldots$ (przyczem Δ są poprawkami pozornych spostrzeżeń $\chi_1, \chi_2, \chi_3,\ldots$), urabiamy je dla kontroli w sposób następujący:

$$\left.\begin{aligned} &[p\delta'\delta']=[pll.k] \quad \text{(dla ilości niewiadomych } =k)\\ &\{\Delta\Delta\}=-[\omega k]=\frac{\omega_1^2}{\{AA\}}+\frac{\{\omega_2.1\}^2}{\{BB.1\}}+\frac{\{\omega_3.2\}^2}{\{CC.2\}}+\ldots\left(\begin{array}{l}\text{ilość wyrazów odpo-}\\ \text{wiada ilości war. } r\end{array}\right)\\ &[p\delta\delta]=[p\delta'\delta']+\{\Delta\Delta\}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Biorąc rzecz teoretycznie, powinniśmy otrzymać tesame wyniki na μ_0 przy użyciu wszystkich trzech wzorów (14), (15) i (16); w rzeczywistości będą wartości otrzymane z tych wzorów z reguły nieco różne.

Błąd średni μ_F *funkcji niewiadomych* $F(x, y, z,\ldots\ldots)$, wyznaczymy łatwo, posługując się pozornemi spostrzeżeniami $(\chi_1+\Delta_1)$, $(\chi_2+\Delta_2)$, $(\chi_3+\Delta_3)\ldots\ldots$; sposób ten dozwala nam uwzględnić tylko drugą część wyrównania.

Oznaczając pochodne cząstkowe funkcji podług niewiadomych przez $F_1, F_2, F_3,\ldots$, zaś pochodne podług pozornych spostrzeżeń $\chi_1, \chi_2, \chi_3,\ldots$ przez $f_1, f_2, f_3,\ldots$, przyczem wedle wzoru (13) § 8-go rozdz. IV. jest

$$f_1=F_1,\ f_2=(F_2.1),\ f_3=(F_3.2),\ldots, \tag{18}$$

otrzymamy wedle wzoru (18) § 6-go rozdz. V-go zastosowując go zamiast do spostrzeżeń $(l+\delta)$ do pozornych spostrzeżeń $(\chi+\Delta)$:

$$\mu_F{}^2 = \mu_0{}^2\Big\{\{ff\} \underbrace{- \frac{\{Af\}^2}{\{AA\}} - \frac{\{Bf.1\}^2}{\{BB.1\}} - \frac{\{Cf.2\}}{\{CC.2\}} - \ldots}_{\text{(ilość wyrazów równa ilości war. } r)}\Big\}, \tag{19}$$

lub w formie uproszczonej:

$$\mu_F{}^2 = \mu_0{}^2(\mathrm{I}-\mathrm{II}); \tag{19*}$$

przyczem $\{ff\} = \mathrm{I}$, zaś $-\mathrm{II}$ jest sumą wszystkich wyrazów ujemnych wzoru (19).

Wedle związków wzoru (18) z uwzględnieniem wag poszczególnych χ jest:

$$\{ff\} = \underbrace{\frac{F_1{}^2}{[paa]} + \frac{(F_2.1)^2}{[pbb.1]} + \frac{(F_3.2)^2}{[pcc.2]} + \ldots..}_{\text{(ilość wyrazów równa ilości niew.)}}; \tag{20}$$

inne wyrazy zawarte w klamrach $\{\ldots.\}$ należy urabiać przez redukcje wyrazów pierwotnych:

$$\left.\begin{aligned}
\{Af\} &= \frac{A_1F_1}{[paa]} + \frac{(A_2.1)(F_2.1)}{[pbb.1]} + \frac{(A_3.2)(F_3.2)}{[pcc.2]} + \ldots.\\
\{AA\} &= \frac{A_1{}^2}{[paa]} + \frac{(A_2.1)^2}{[pbb.1]} + \frac{(A_3.2)^2}{[pcc.2]} + \ldots\ldots..\\
\{Bf\} &= \frac{B_1F_1}{[paa]} + \frac{(B_1.1)(F_2.1)}{[pbb.1]} + \frac{(B_3.2)(F_3.2)}{[pcc.2]} + \ldots.\\
\{BB\} &= \frac{B_1{}^2}{[paa]} + \frac{(B_2.1)^2}{[pbb.1]} + \frac{(B_3.2)^2}{[pcc.2]} + \ldots\ldots..\\
\{Cf\} &= \frac{C_1F_1}{[paa]} + \frac{(C_2.1)(F_2.1)}{[pbb.1]} + \frac{(C_3.2)(F_3.2)}{[pcc.2]} + \ldots.\\
\{CC\} &= \frac{C_1{}^2}{[paa]} + \frac{(C_2.1)^2}{[pbb.1]} + \frac{(C_3.2)^2}{[pcc.2]} + \ldots\ldots..
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\text{Waga funucji } \boldsymbol{P}_F = \frac{\mu_0{}^2}{\mu_F{}^2} = \frac{1}{\mathrm{I}-\mathrm{II}}. \tag{22}$$

Wzorów (19) i (22) można użyć do wyznaczenia błędów średnich i wag niewiadomych, kładąc, gdy chodzi o $\mu_x: F_1 = 1$, $F_2 = F_3 = 0$, gdy o μ_y: $F_1 = 0$, $F_2 = 1$, $F_3 = 0$ i t. d.

Metodę powyższą stosujemy także, gdy równania błędów zawierają *niewiadome brakujące w równaniach warunkowych;* w tym przypadku bowiem możemy przyjąć, że równania warunkowe zawierają wszystkie niewiadome, lecz że spółczynniki niewiadomych, niewystępujących w równaniach warunkowych, są *zerami.*

Wówczas należy jednak niewiadome brakujące w równaniach warunkowych umieścić w równaniach błędów jako *niewiadome początkowe,* aby wypadły z wyrównania przy redukcjach początkowych. Dalszy przebieg wyrównania przeprowadzamy tak, jakby tych niewiadomych nie było.

Oczywiście, że przy obliczaniu jedn. błędu średniego μ_0 należy w ilości k uwzględnić *wszystkie* niewiadome, a zatem także i te które wypadły przy początkowych redukcjach.

Cały rachunek daje się przeprowadzić wygodnie schematami.

§ 4. Metoda druga (Bessela).

Dopiero od czasu wprowadzenia przez Helmerta do rachunku wyrównawczego pojęcia równoważnych systemów równań błędów zyskała metoda opisana w § 3-cim ogólne uznanie, podczas gdy dawniej posługiwano się w praktyce przeważnie metodą Bessela, zastosowaną przez niego przy pomiarze stopni w Prusiech Wschodnich w latach 1832—1835. Ponieważ nakład pracy jest przy metodzie Bessela większy, niż przy metodzie opisanej poprzednio, należy przeprowadzać wyrównania nowych sieci tryang. wedle § 3-go. Natomiast nie można pominąć metody Bessela ze względu na to, że wielką ilość wyrównań dotychczasowych sieci przeprowadzono właśnie tą metodą; że zatem przy studjum tryangulacji, która nie da się pomyśleć bez wyrównania, napotka czytelnik na przykłady wyrównania tryangulacji obliczonej metodą Bessela [1]).

Dla uproszczenia zestawimy wzory dla $k=3$ i $r=2$.

W części pierwszej rozwiązujemy równania normalne, wynikające z równań błędów, bez spółudziału równań warunkowych

$$\begin{aligned}
[paa]x_0+[pab]y_0+[pac]z_0+[pal]&=0\\
[pab]x_0+[pbb]y_0+[pbc]z_0+[pbl]&=0\\
[pac]x_0+[pbc]y_0+[pcc]z_0+[pcl]&=0
\end{aligned} \tag{1}$$

uzyskując wartości niewiadomomych, odpowiadające części pierwszej x_0, y_0, z_0.

Ponieważ możemy znaki spółczynników nieoznaczonych przyjmować jako dodatnie lub ujemne, przyjął Bessel spółczynniki nieoznaczone o znakach ujemnych, zatem: $-2k_1$, $-2k_2, \ldots$, przez co warunek (1) §-go zmienia się (przy $k=3$, a $r=2$) na:

$$\Omega=[p\delta\delta]-2k_1(A_0+A_1x+A_2y+A_3z)-2k_2(B_0+B_1x+B_2y+B_3z)=\min. \tag{2}$$

W konsekwencji otrzymamy równania (2) i (3) § 2-go w kształcie następującym:

$$\left.\begin{aligned}
[pa\delta]-A_1k_1-B_1k_2&=0\\
[pb\delta]-A_2k_1-B_2k_2&=0\\
[pc\delta]-A_3k_1-B_3k_2&=0
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
[paa]x+[pab]y+[pac]z+[pal]&=A_1k_1+B_1k_2=[1]\\
[pab]x+[pbb]y+[pbc]z+[pbl]&=A_2k_1+B_2k_2=[2]\\
[pac]x+[pbc]y+[pcc]z+[pcl]&=A_3k_1+B_3k_2=[3]
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1]) Die k. Preußische Landestriangulation, *Hauptdreiecke*. I Teil, Berlin 1870.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_0 = 0 \\ B_1 x + B_2 y + B_3 z + B_0 = 0 \end{array}\right\} \qquad (4^*)$$

Ostatnie równania przechodzą po uwzględnieniu równań (1) na:

$$\left.\begin{array}{l} [paa]\,\xi + [pab]\,\eta + [pac]\,\zeta = A_1 k_1 + B_1 k_2 = [1] \\ [pab]\,\xi + [pbb]\,\eta + [pbc]\,\zeta = A_2 k_1 = B_2 k_2 = [2] \\ [pac]\,\xi + [pbc]\,\eta + [pcc]\,\zeta = A_3 k_1 + B_3 k_2 = [3] \end{array}\right\} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \xi + A_2 \eta + A_3 \zeta + \omega_1 = 0 \\ B_1 \xi + B_2 \eta + B_3 \zeta + \omega_2 = 0, \end{array}\right\} \qquad (5^*)$$

przyczem ω_1 i ω_2 określa wzór (6) § 3-go.

Oznaczając błędy pozorne pierwszej części wyrównania przez δ', drugiej przez δ'', mamy kształt równań błędów odnoszących się do części pierwszej wyrównania:

$$\delta_i' = a_i x_0 + b_i y_0 + c_i z_0 + l_i; \qquad (6)$$

natomiast kształt równań błędów odnoszących się do całkowitego równania jest:

$$\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z + l_i. = \delta' + \delta''. \qquad (7)$$

Równania błędów pierwszej części wyrównania w odniesieniu do niewiadomych x, y i z są zatem (wedle (7)):

$$\delta_i' = a_i x + b_i y + c_i z + (l_i - \delta''). \qquad (8)$$

Po przeprowadzonej pierwszej części wyrównania możemy wyrazić niewiadome x_0, y_0, z_0 ze względu na związki (27) § 5-go rozdz. IV-go (zastępując we wzorach tam użytych ξ przez x_0, η przez y_0, ζ przez z_0):

$$\begin{array}{l} -x_0 = [pal]\,Q_{1.1} + [pbl]\,Q_{1.2} + [pcl]\,Q_{1.3} \\ -y_0 = [pal]\,Q_{1.2} + [pbl]\,Q_{2.2} + [pcl]\,Q_{2.3} \\ -z_0 = [pal]\,Q_{1.3} + [pbl]\,Q_{2.3} + [pcl]\,Q_{3.3}, \end{array} \qquad (9)$$

zaś niewiadome x, y i z (w obec kształtu równań (7)):

$$\begin{array}{l} -x = [pa(l-\delta'')]\,Q_{1.1} + [pb(l-\delta'')]\,Q_{1.2} + [pc(l-\delta'')]\,Q_{1.3} \\ -y = [pa(l-\delta'')]\,Q_{1.2} + [pb(l-\delta'')]\,Q_{2.2} + [pc(l-\delta'')]\,Q_{2.3} \\ -z = [pa(l-\delta'')]\,Q_{1.3} + [pb(l-\delta'')]\,Q_{2.3} + [pc(l-\delta'')]\,Q_{3.3}, \end{array} \qquad (10)$$

(przyczem wartości poszczególnych Q są nam znane z pierwszej części wyrównania).

Z porównania związków (9) i (10) wynikają dalej równania:

$$\begin{array}{l} \xi = [pa\,\delta'']\,Q_{1.1} + [pb\,\delta'']\,Q_{1.2} + [pc\,\delta'']\,Q_{1.3} \\ \eta = [pa\,\delta'']\,Q_{1.2} + [pb\,\delta'']\,Q_{2.2} + [pc\,\delta'']\,Q_{2.3} \\ \zeta = [pa\,\delta'']\,Q_{1.3} + [pb\,\delta'']\,Q_{2.3} + [pc\,\delta'']\,Q_{3.3}. \end{array} \qquad (11)$$

Ponieważ

$$\begin{array}{l} [pa\,\delta''] = [pa\,\delta] - [pa\,\delta'] \\ [pb\,\delta''] = [pb\,\delta] - [pb\,\delta'] \\ [pc\,\delta''] = [pc\,\delta] - [pc\,\delta'], \end{array} \qquad (12)$$

zaś z powodu dokonania pierwszej części wyrównania

$$[pa\,\delta'] = [pb\,\delta'] = [pc\,\delta'] = 0,$$

przeto uwzględniając równania (3) i (4) otrzymamy:

$$\begin{aligned} [pa\,\delta''] &= A_1 k_1 + B_1 k_2 = [1] \\ [pb\,\delta''] &= A_2 k_1 + B_2 k_2 = [2] \\ [pc\,\delta''] &= A_3 k_1 + B_3 k_2 = [3], \end{aligned} \tag{13}$$

a ostatecznie:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= Q_{1.1}[1] + Q_{1.2}[2] + Q_{1.3}[3] = Q_{1.1}(A_1 k_1 + B_1 k_2) + Q_{1.2}(A_2 k_1 + B_2 k_2) + \\ &\quad + Q_{1.3}(A_3 k_1 + B_3 k_2) \\ \eta &= Q_{1.2}[1] + Q_{2.2}[2] + Q_{2.3}[3] = Q_{1.2}(A_1 k_1 + B_1 k_2) + Q_{2.2}(A_2 k_1 + B_2 k_2) + \\ &\quad + Q_{2.3}(A_3 k_1 + B_3 k_2) \\ \zeta &= Q_{1.3}[1] + Q_{2.3}[2] + Q_{3.3}[3] = Q_{1.3}(A_1 k_1 + B_1 k_2) + Q_{2.3}(A_2 k_1 + B_2 k_2) + \\ &\quad + Q_{3.3}(A_3 k_1 + B_3 k_2). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Wartości te, wstawione do równań (5*), przeistoczą je na:

$$\left.\begin{aligned} &A_1(Q_{1.1}[1] + Q_{1.2}[2] + Q_{1.3}[3]) + A_2(Q_{1.2}[1] + Q_{2.2}[2] + Q_{2.3}[3]) + \\ &\quad + A_3(Q_{1.3}[1] + Q_{2.3}[2] + Q_{3.3}[3] + \omega_1 = 0 \\ &B_1(Q_{1.1}[1] + Q_{1.2}[2] + Q_{1.3}[3]) + B_2(Q_{1.2}[1] + Q_{2.2}[2] + Q_{2.3}[3]) + \\ &\quad + B_3(Q_{1.3}[1] + Q_{2.3}[2] + Q_{3.3}[3] + \omega_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Wprowadzając do rachunku t. zw. *spółczynniki przenoszące:*

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= A_1 Q_{1.1} + A_2 Q_{1.2} + A_3 Q_{1.3} \\ \mathfrak{A}_2 &= A_1 Q_{1.2} + A_2 Q_{2.2} + A_3 Q_{2.3} \\ \mathfrak{A}_3 &= A_1 Q_{1.3} + A_2 Q_{2.3} + A_3 Q_{3.3}, \\ \mathfrak{B}_1 &= B_1 Q_{1.1} + B_2 Q_{1.2} + B_3 Q_{1.3} \\ \mathfrak{B}_2 &= B_1 Q_{1.2} + B_2 Q_{2.2} + B_3 Q_{2.3} \\ \mathfrak{B}_3 &= B_1 Q_{1.3} + B_2 Q_{2.3} + B_3 Q_{3.3}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

otrzymamy równania (15)-te we formie następującej:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1[1] + \mathfrak{A}_2[2] + \mathfrak{A}_3[3] + \omega_1 &= 0 \\ \mathfrak{B}_1[1] + \mathfrak{B}_2[2] + \mathfrak{B}_3[3] + \omega_2 &= 0; \end{aligned} \tag{17}$$

zaś po wstawieniu wartości za [1], [2] i [3] z równań (4) względnie (5) (wyrażając je przez k_1 i k_2):

$$\begin{aligned} [\mathfrak{A}\,A]\,k_1 + [\mathfrak{A}\,B]\,k_2 + \omega_1 &= 0 \\ [A\,\mathfrak{B}]\,k_1 + [\mathfrak{B}\,B]\,k_2 + \omega_2 &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

z których znajdziemy wartości obu korelat k_1 i k_2.

Analogicznie otrzymamy, wstawiając z równań (16) wartości na $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ do równań (14):

$$\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{A}_1 k_1 + \mathfrak{B}_1 k_2 \\ \eta &= \mathfrak{A}_2 k_1 + \mathfrak{B}_2 k_2 \\ \zeta &= \mathfrak{A}_3 k_1 + \mathfrak{B}_3 k_2 \end{aligned} \tag{19}$$

i rugując przy ich pomocy ξ, η i ζ w równaniach (5*):

$$\left.\begin{array}{l} A_1(\mathfrak{A}_1 k_1+\mathfrak{B}_1 k_2)+A_2(\mathfrak{A}_2 k_1+\mathfrak{B}_2 k_2)+B_3(\mathfrak{A}_3 k_1+\mathfrak{B}_3 k_2)+\omega_1=0 \\ B_1(\mathfrak{A}_1 k_1+\mathfrak{B}_1 k_2)+B_2(\mathfrak{A}_2 k_1+\mathfrak{B}_2 k_2)+B_3(\mathfrak{A}_3 k_1+\mathfrak{B}_3 k_2)+\omega_2=0, \end{array}\right\} \quad (20)$$

a po uporządkowaniu podług k:

$$\left.\begin{array}{l} [\mathfrak{A}A]k_1+[A\mathfrak{B}]k_2+\omega_1=0 \\ [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]k_1+[\mathfrak{B}B]k_2+\omega_2=0. \end{array}\right\} \quad (18^*)$$

Z porównania równań (18) i (18*) wynika, że

$$[\mathfrak{A}B]=[A\mathfrak{B}], \text{ czyli} \quad (20)$$

$$\mathfrak{A}_1 B_1+\mathfrak{A}_2 B_2+\mathfrak{A}_3 B_3=A_1\mathfrak{B}_1+A_2\mathfrak{B}_2+A_3\mathfrak{B}_3,$$

który to związek służy nam za kontrolę.

W obec równania (20) można równania (18) napisać w dwu postaciach:

$$\begin{array}{l} [\mathfrak{A}A]k_1+[A\mathfrak{B}]k_2+\omega_1=0 \\ [\mathfrak{A}B]k_1+[B\mathfrak{B}]k_2+\omega_2=0, \end{array} \quad (18^{**})$$

lub:

$$\begin{array}{l} [A\mathfrak{A}]k_1+[A\mathfrak{B}]k_2+\omega_1=0 \\ [A\mathfrak{B}]k_1+[A\mathfrak{B}]k_2+\omega_1=0. \end{array} \quad (18^{***})$$

Po wyznaczeniu wartości korelat otrzymamy z równań (19) wartości ξ, η i ζ, które, dodane do poprzednio uzyskanych wartości x_0, y_0 i z, dostarczą nam wartości x, y i z, odnoszących się do całkowitego wyrównia.

Obliczenie błędów średnich przeprowadzamy wedle wzorów podanych przy metodzie poprzedniej; zatem na jednostkowy błąd średni mamy trzy formuły:

$$\begin{array}{l} \mu_0=\sqrt{\dfrac{[p\delta\delta]}{n-k+r}} \\ \mu_0=\sqrt{\dfrac{[p\delta'\delta']}{n-k}} \\ \mu_0=\sqrt{\dfrac{[p\delta''\delta'']}{r}}, \end{array} \quad \left(\begin{array}{ll} n= & \text{ilości spostrzeżeń} \\ k= & \text{„ niewiadomych} \\ r= & \text{„ warunków} \end{array}\right) \quad (21)$$

przyczem równania kontrolne na sumy, zawarte w licznikach, są:

$$\left.\begin{array}{l} [p\delta'\delta']=[pll.k] \quad (k=\text{ ilości niewiadomych}) \\ [p\delta'\delta']=-[\omega k]=\underbrace{\dfrac{\omega_1{}^2}{[\mathfrak{A}A]}+\dfrac{(\omega_2.1)^2}{[\mathfrak{B}B.1]}+\dfrac{(\omega_3.2)^2}{[\mathfrak{B}C.2]}+\dots{}^{1)}}_{\text{ilość wyrazów }=r} \\ [p\delta\delta]=[p\delta'\delta']=[p\delta''\delta'']. \end{array}\right\} \quad (22)$$

---

1) W wyrazie $[pll.k]$ oznacza k ilość redukcyj, odpowiadającą ilości niewiadomych, zaś w wyrazie $-[\omega k]$ oznaczają k wartości korelat, zatem $[\omega k]=\omega_1 k_1+\omega_2 k_2+ +\dots+\omega_r k_r$.

Błąd średni μ_F funkcji niewiadomych $F(x, y, z, \ldots)$ obliczamy wedle formuły (19) § 3-go, przyczem znaczenia poszczególnych wyrazów podają wzory (18), (20) i (21) § 3-go. Wzory te nadają się również do obliczenia błędów średnich samych niewiadomych.

Zauważyć należy, że użyte w tych wzorach wyrażenia $\{AA\}$, $\{BB\}$, $\{CC\}$ są nam znane, gdyż

$$\{AA\}=[\mathfrak{A}A],\ \{BB\}=[\mathfrak{B}B],\ \{CC\}=[\mathfrak{C}C]\ldots \tag{23}$$

$$\text{Waga funkcji } P_F=\frac{\mu_0^2}{\mu_F^2}=\frac{1}{\mathrm{I-II}}, \tag{24}$$

przyczem I—II oznacza wyrażenie we wzorze (19) § 3-go, ujęte w klamrę nawiasową $\{\ \}$.

§ 5. Specjalne przypadki wyrównania spostrzeżeń pośrednich z warunkami.

Przy wyrównywaniu powyżej określonych spostrzeżeń mogą zajść trzy szczególne przypadki, które choć w krótkości omówić należy.

a) Równania warunkowe *nie zawierają niektórych niewiadomych* równań błędów.

b) Równania warunkowe wykazują *więcej niewiadomych niż równania błędów.*

c) Spostrzeżenia pośrednie *nie wystarczają* bez uwzględnienia warunków *do wyznaczenia niewiadomych.*

a) Sposób postępowania, jaki w tym przypadku należy zastosować, omówiliśmy już przy końcu § 3-go. Przypadek ten zachodzi bardzo często przy wyrównaniach sieci tryangulacyjnych.

b) Jeżeli warunki wykazują więcej niewiadomych niż równania błędów, wówczas należy przy rozwiązaniu bezpośredniem wedle § 2-go zestawić niewiadome w takim porządku, aby *niewiadome brakujące* w równaniach błędów znalazły się przy rozwiązywaniu równań normalnych na samym końcu, a więc *po korelatach.*

Przy podziale wyrównania na części, otrzymujemy po wstawieniu do warunków spostrzeżeń równoważnych χ, uzyskanych z wyrównania pierwszego, spostrzeżenia zawarunkowane z niewiadomemi, które omówimy w § 6-tym.

c) W przypadku, gdy spostrzeżenia pośrednie nie wystarczają do wyznaczenia ich niewiadomych, należy przy rozwiązaniu bezpośredniem wedle § 2-go przestawić porządek niewiadomych, tak aby niewiadome, których nie można wyznaczyć przy pomocy równań błędów, stały się *niewiadomemi końcowemi.*

Przy podziale wyrównania na dwie części przechodzimy również na wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych z niewiadomemi.

B)

§ 6. Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych z niewiadomemi.

Choć spostrzeżenia tego rodzaju spotykamy w praktyce dość rzadko, mimoto należy je omówić, choć w krótkości, o to tak, ze względu na możliwość natrafienia w praktyce na tego rodzaju zagadnienia, jak i ze względu na to, że wyrównanie tych spostrzeżeń stanowi *najogólniejszą formę wyrównania,* z której wszystkie dotychczas omawiane dadzą się wyprowadzić.

Liniowe równania warunkowe mają w tym przypadku kształt następujący:

$$\text{ilość warunków } r \left\{ \begin{array}{l} A_0+A_1(l_1+\delta_1)+A_2(l_2+\delta_2)+\ldots A_n(l_n+\delta_n)+a_1x+b_1y+\ldots=0 \\ B_0+B_1(l_1+\delta_1)+B_2(l_2+\delta_2)+\ldots B_n(l_n+\delta_n)+a_2x+b_2y+\ldots=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \quad (1)$$

ilość spostrzeżeń n ilość niewiad. k

przyczem $n>r-k$, $k<r$.

Oznaczając w każdem równaniu odpowiednio

$$\left. \begin{array}{l} A_0+A_1 l_1+A_2 l_2+\ldots\ldots A_n l_n=\omega_1 \\ B_0+B_1 l_1+B_2 l_2+\ldots\ldots B_n l_n=\omega_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right\} \quad (2)$$

otrzymamy równania (1) we formie następującej:

$$\left. \begin{array}{l} A_1\delta_1+A_2\delta_2+\ldots\ldots A_n\delta_n+a_1x+b_1y+\ldots\ldots+\omega_1=0 \\ B_1\delta_1+B_2\delta_2+\ldots\ldots B_n\delta_n+a_2x+b_2y+\ldots\ldots+\omega_2=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right\} \quad (3)$$

O ile wprowadzimy do rachunku wartości przybliżone niewiadomych x_0, $y_0\ldots$, będą poszczególne ω zawierały oczywiście wyrazy ax_0, $by_0,\ldots$, a w miejsce niewiadomych x, $y,\ldots$ należy umieścić ich poprawki ξ, $\eta,\ldots$

Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych z niewiadomemi można przeprowadzić *trzema* sposobami:

a) sprowadzając je do wyrównania spostrzeżeń *zawarunkowanych bez niewiadomych,*

b) przechodząc na wyrównanie *spostrzeżeń pośrednich* i

c) metodą *bezpośrednią.*

a) Przejście do wyrównania *spostrzeżeń zawarunkowanych bez niewiadomych* osiągamy łatwo, *rugując niewiadome* ze związków (1) lub (3) przy pomocy odpowiednio z nich wybranych k związków; pozostałe związki w liczbie $(r-k)$ nie zawierają wówczas niewiadomych. Dalszy ciąg wyrównania następuje wedle § 3-go rozdz. V-go, przyczem ilość równań korelat będzie $(r-k)$, a więc jedn. bł. śr.:

$$\mu_0=\sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{r-k}}. \quad (4)$$

b) Przy *sprowadzaniu* zagadnienia *do wyrównania spostrzeżeń pośrednich* należy wziąć na uwagę, że r warunków uzależnia tylko r spostrzeżeń, zatem pozostała reszta, t. j. $(n-r)$ spostrzeżeń niezależnych w połączeniu z k danemi niewiadomemi, a więc razem $(n+k-r)$ niewiadomych będzie do uwzględnienia przy wyrównaniu spostrzeżeń pośrednich. Dalsze przeprowadzenie wyrównania następuje wedle § 1-go i § 2-go rozdz. IV-go.

Jednostkowy błąd średni jest określony wzorem:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{n-(n+k-r)}} = \sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{r-k}}. \tag{4*}$$

c) Metoda bezpośrednia polega na wyznaczeniu związków, wynikających z $[p\,\delta\delta]=\min.$ przy uwzględnieniu równań (3). Tworzymy zatem funkcję Ω, na którą składają się $[p\,\delta\delta]$ i równanie (3), pomnożone przez spółczynniki nieoznaczone i wyznaczymy jej względne minimum.

$$\begin{aligned}\Omega=[p\,\delta\delta]-2k_1(\omega_1+[A\,\delta]+a_1x+b_1y+\ldots)-2k_2(\omega_2+[B\,\delta]+\\ +a_2x+b_2y+\ldots)+\ldots=\min.\end{aligned} \tag{5}$$

Warunek (5) powoduje $(n+k)$ równań kształtu:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Omega}{\partial\delta_1}&=0=2p_1\delta_1-2A_1k_1-2B_1k_2-2C_1k_3\ldots\ldots\\
\frac{\partial\Omega}{\partial\delta_2}&=0=2p_2\delta_2-2A_2k_1-2B_2k_2-2C_2k_3\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial\Omega}{\partial\delta_n}&=0=2p_n\delta_n-2A_nk_1-2B_nk_2-2C_nk_3\ldots\ldots\\
\frac{\partial\Omega}{\partial x}&=0=-2a_1k_1-2a_2k_2-2a_3k_3\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial\Omega}{\partial y}&=0=-2b_1k_1-2b_2k_2-2b_3k_3\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

które możemy napisać także we formie następującej:

$$\left.\begin{aligned}
p_1\delta_1&=A_1k_1+B_1k_2+C_1k_3+\ldots\\
p_2\delta_2&=A_2k_2+B_2k_2+C_2k_3+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_n\delta_n&=A_nk_1+B_nk_2+C_nk_3+\ldots\\
0&=a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3+\ldots\\
0&=b_1k_1+b_2k_2+b_3k_3+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{6*}$$

Równania te w połączeniu z równaniami (3) (celem wyrugowania poszczególnych δ) dostarczają nam — dla wyznaczenia r korelat i k niewiadomych — $(r+k)$ równań kształtu:

*

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{AA}{p}\right]k_1+\left[\frac{AB}{p}\right]k_2+\left[\frac{AC}{p}\right]k_3+\ldots+a_1x+b_1y+\ldots+\omega_1=0\\
&\left[\frac{AB}{p}\right]k_1+\left[\frac{BB}{p}\right]k_2+\left[\frac{BC}{p}\right]k_3+\ldots+a_2x+b_2y+\ldots+\omega_2=0\\
&\left[\frac{AC}{p}\right]k_1+\left[\frac{BC}{p}\right]k_2+\left[\frac{CC}{p}\right]k_3+\ldots+a_3x+b_3y+\ldots+\omega_3=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0\\
&b_1k_1+b_2k_2+b_3k_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Rozwiązanie tych równań przeprowadza się sposobem, podanym przy rozwiązywaniu równań normalnych względnie korelat.

Jednostkowy błąd średni określa nam poprzednio podany wzór (4).

Wzory kontrolne na $[p\delta\delta]$ są:

$$[p\delta\delta]=-\omega k, \quad (8)$$

$$\text{i } [p\delta\delta]=\frac{\omega_1^2}{\left[\frac{AA}{p}\right]}+\frac{(\omega_2.1)^2}{\left[\frac{BB}{p}.1\right]}+\frac{(\omega_3.2)^2}{\left[\frac{CC}{p}.2\right]}+\ldots-\frac{\{a\omega\}^2}{\{aa\}}-\frac{\{b\omega.1\}^2}{\{bb.1\}}-\ldots, \quad (8^*)$$

przyczem wyrazy ujemne pochodzą ze zredukowanych równań (7) po wyeliminowaniu wszystkich korelat; równania te mają następujący kształt ogólny:

$$\begin{aligned}
-\{aa\}x-\{ab\}y-\ldots\ldots+\{a\omega\}=0\\
-\{ab\}x-\{bb\}y-\ldots\ldots+\{b\omega\}=0
\end{aligned} \quad (9)$$

(wyrazy ujęte w klamry nawiasowe mają znaczenie symboliczne).

Wzór na błąd średni funkcji niewiadomych x, y,... i wyrównanych spostrzeżeń $l_1+\delta_1$, $l_2+\delta_2$..., zatem dla:

$$F(x, y, \ldots l_1+\delta_1,\ l_2+\delta_2, \ldots l_n+\delta_n)$$

podajemy dla $r=3$, $k=2$, odsyłając czytelnika dla poznania szczegółów i wyprowadzenia go do dzieła Helmerta [1]):

$$\mu_F^2=\mu_0^2\left\{\left[\frac{ff}{p}\right]-\frac{\left[\frac{Af}{p}\right]^2}{\left[\frac{AA}{p}\right]}+\frac{\left[\frac{Bf}{p}.1\right]^2}{\left[\frac{BB}{p}.1\right]}+\frac{\left[\frac{Cf}{p}.2\right]^2}{\left[\frac{CC}{p}.2\right]}-\frac{(F_1.3)^2}{\{aa\}}-\frac{(F_2.4)^2}{\{bb.1\}}\right\}, \quad (10)$$

$$\text{przyczem } f_i=\frac{\partial F}{\partial l_i},\ \text{zaś } F_1=\frac{\partial F}{\partial x},\ F_2=\frac{\partial F}{\partial y}.$$

1) *F. R. Helmert.* Die Ausgleichungsrechnung n. d. M. d. kl. Qu. Lipsk i Berlin 1907. wyd. 2-gie, str. 288—290.

Wyrażenie zawarte w klamrze nawiasowej we wzorze (10) jest oczywiście odwrotnością wagi funkcji $\frac{1}{P_F}$.

Jak już wspomniano na wstępie, jest *zastosowanie* wyrównania powyżej opisanych spostrzeżeń w praktyce mierniczej dość *ograniczone;* spotykamy się z niem przy wyrównywaniu sieci trójkątów o kątach, mierzonych *metodą repetycyjną*, (o ile nie mierzono ich uzupełnień do kątów pełnych), przy wcinaniu *wstecz z wyrównaniem*, o ile użyjemy przy wyrównaniu *równań warunkowych,* które zawierają w sobie *niewiadomę* t. zw. *orjentacyjną* i w przypadkach, omawianych w § 5-tym pod *b)* i *c).*

ROZDZIAŁ SIÓDMY.

Uzupełnienia i wskazówki dotyczące rachunku wyrównawczego.

§ 1. Możliwość zastosowania metody najmn. kwadratów. Warunek Gaussa dla błędów spostrzeżeń.

Wszystkie dotychczas wyprowadzone wzory i metody wyrównawcze, oparte na zasadzie teorji najmniejszych kwadratów, są ważne, o ile błędy wyrównywanych spostrzeżeń są przypadkowe, t. j., gdy ich prawdopodobieństwo jest określone *funkcją parzystą:*

$$\varphi(+\varepsilon)=\varphi(-\varepsilon). \tag{1}$$

Warunek (1) ma miejsce, gdy błędy spostrzeżeń zależą od składających się na nie przypadkowych błędów elementarnych w sposób *liniowy;* natomiast przy *nieliniowej* zależności od błędów elementarnych *nie muszą* mieć błędy spostrzeżeń *charakteru czysto przypadkowego,* który może być zakłócony przez *jednostronnie* działające przyczyny błędów.

Ponieważ musimy się liczyć z tym przypadkiem w praktyce, nasuwa się pytanie, czy i wówczas można stosować przy wyrównaniu metodę najmn. kwadratów, osiągając przezto wartości zbliżające się bardziej do prawdziwych, niż uzyskane innemi sposobami.

Na pytanie to odpowiemy ogólnikowo, że *im silniejszy* wpływ mają przy powstawaniu błędów spostrzeżeń przyczyny działające *jednostronnie, tem bardziej oddala się* kształt funkcji prawdopodobieństwa tych błędów *od kształtu* (1) (t. j. tem mniej mamy prawo uważać ją w praktyce jako parzystą), a zarazem *tem bardziej odbiegają wyniki,* uzyskane metodą najmn. kwadratów, *od wyników najbardziej prawdopodobnych.*

Wyjątek stanowią przypadki, w których można z błędów ε wydzielić ich *część stałą* $\varkappa$, odpowiadającą jednostronnie działającym przyczynom, tak aby:

$$\varkappa=\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon. \qquad (2)$$

Oznaczając pozostałą po wydzieleniu $\varkappa$ część błędów przez ε', t. j. $\varepsilon-\varkappa=\varepsilon'$, otrzymamy ze względu na znany warunek

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon=1, \qquad (3)$$

wstawiając do równania (2) wartość $\varepsilon=\varepsilon'+\varkappa$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon'\varphi(\varepsilon'+\varkappa)\,d\varepsilon'=0, \text{ lub} \qquad (4)$$

$$\int_{0}^{\infty}\varepsilon'\,\varphi(\varepsilon'+\varkappa)\,d\varepsilon'=\int_{0}^{-\infty}\varepsilon'\,\varphi(\varepsilon'+\varkappa)\,d\varepsilon'. \qquad (4^*)$$

Równania (4) okrejlają nam t. zw. *warunek Gaussa,* który spełniają pozostałe po wydzieleniu stałej części $\varkappa$ błędy ε'.

$\varphi(\varepsilon'+\varkappa)=\varphi'(\varepsilon')$ nie jest wprawdzie funkcją parzystą ani ε, ani ε', ma jednak tę własność, że momenty statyczne powierzchni, zawartych między krzywą $y'=\varphi'(\varepsilon')$ a *osią* ε' po obu stronach osi y', są sobie równe, lub co na jedno wychodzi, że środek ciężkości całkowitej w ten sposób powstałej powierzchni leży na osi y', oraz że ***przeciętna wartość sumy iloczynów*** $[\varepsilon_i'\,\varepsilon_k']$ — ***dla ilości spostrzeżeń rosnącej do*** ∞ — ***dąży do zera.***

Ta ostatnia właściwość jest bardzo ważną, uprawnia nas bowiem do tworzenia z błędów ε' wartości średnich, jak i do stosowania przy wyrównaniu metody najmn. kwadratów, tak jak gdybyśmy mieli do czynienia z błędami czysto przypadkowemi.

Wydzielenie części stałej błędów $\varkappa$ uskuteczniamy albo przy pomocy ***przeciętnej wartości*** bardzo wielu (teoretycznie ∞ wielu) błędów ε, albo (najczęściej w praktyce) przez wprowadzenie do wyrównania *nowej niewiadomej*. W tym drugim przypadku muszą być oczywiście warunki pomiarów i z niemi związany kształt równań błędów tak dobrane, aby wyznaczenie owej niewiadomej było ***możliwe.***

§ 2. Wyłączanie spostrzeżeń. Błąd maksymalny.

Obie w nagłówku wymienione kwestje, stojące ze sobą w ścisłym związku, należą do *najdrażliwszych* w teorji błędów. Zajmowało się niemi mnóstwo autorów między innymi Peirce, Gould, Airy, Winlock, Chauvenet, Stone, Jordan, Helmert, Newcomb, Lehmann-Filhès, Bertrand, Czuber i Wellisch. Aby otrzymać pewne kryterjum w tej sprawie, budowano mniej lub bardziej zawiłe teorje, oparte na zasadach rachunku prawdopodobieństwa.

Ze względu na nikłe znaczenie obu kwestyj dla rachunku wyrównawczego możnaby całą sprawę pominąć milczeniem, gdyby nie niektóre teorje wygłaszane na ten temat, mogące wprowadzić studjującego na zupełnie fałszywe tory.

Ponieważ prawo Gaussa dopuszcza istnienie błędów w granicach od $-\infty$ do $+\infty$, ***nie możemy***, opierając się na niem, wyprowadzić wzoru na błąd *maksymalny* o wielkości *skończonej*.

Aby jednak uzyskać pewną orjentację na powyżej poruszone kwestje, możemy zgodnie z prawem Gaussa obrać drogę następującą [1]).

Prawdopodobieństwo, że pewien błąd ε jest zawarty w granicach między $-m$, a $+m$ jest określone wzorem (o ile ma zastosowanie prawo Gaussa):

$$P_{-m}^{+m}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-m}^{+m} e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon, \tag{1}$$

który zmieni się dla wartości ε i m wziętych absolutnie (t. j. bez względu na znak) na następujący:

$$P_0^m=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^m e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon. \tag{2}$$

Kładąc $h\varepsilon=t$, więc $\varepsilon=\frac{t}{h}$, $d\varepsilon=\frac{dt}{h}$ i uwzględniając zmienioną górną granicę całki, otrzymamy

$$P_0^m=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{mh} e^{-t^2}d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{\mu\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt. \tag{3}$$

Natomiast prawdopodobieństwo, że błąd ε, wzięty absolutnie, jest większy od m, przedstawia się wzorem:

$$P_m^{\infty}=1-P_0^m=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{m}{\mu\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2}dt=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{\mu\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt. \tag{4}$$

Wartość wyrażenia $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{\mu\sqrt{2}}}$ można znaleść w tablicach, obliczonych dla różnych stosunków $\frac{m}{\mu}=i$, t. j. w tablicach, podających prawdopodo-

[1]) Porówn. *F. R. Helmert*. Ueber d. Maximalfehler einer Beobachtung. Zeitschr. f. Vermessungsw. (niem.) tom VI. 1877. str. 131 i d., oraz tegoż autora: Die Ausgl. n. d. M. d. kl. Qu., Lipsk, Berlin 1907 wyd. 2-gie, str. 364—366.

bieństwo pojawienia się błędu ε w granicach między 0 a $i\mu$; odejmując od jedności wartości P_0^m, wyszukane w tablicy dla różnych i, otrzymujemy dla różnych i wartości P_m^∞.

Kładąc $P_m^\infty = \frac{1}{n_i}$, możemy ze związku

$$n_i = \frac{1}{P_m^\infty} \tag{5}$$

obliczyć n_i t. j. tę ilość spostrzeżeń (obarczonych błędami prawdziwemi), przy której należałoby spodziewać się błędu *większego* od $m = i\mu$.

Dla wartości i od 1·5 do 5 otrzymujemy następujące zestawienie:

$m = 1{\cdot}50\,\mu$,	$P = 0{\cdot}1336$,	n (w zaokrągl.) = 8	
„ $= 1{\cdot}75\,\mu$,	„ $= 0{\cdot}0801$,	„ = 13	
„ $= 2{\cdot}00\,\mu$,	„ $= 0{\cdot}0455$,	„ = 22	
„ $= 2{\cdot}25\,\mu$,	„ $= 0{\cdot}0244$,	„ = 41	
„ $= 2{\cdot}50\,\mu$,	„ $= 0{\cdot}0124$,	„ = 81	(6)
„ $= 2{\cdot}75\,\mu$,	„ $= 0{\cdot}0060$,	„ = 167	
„ $= 3{\cdot}00\,\mu$,	„ $= 0{\cdot}0027$,	„ = 370	
„ $= 4{\cdot}00\,\mu$,	„ $= 0{\cdot}000063$,	„ = 15.800	
„ $= 5{\cdot}00\,\mu$,	„ $= 0{\cdot}00000057$	„ = 1,740·400	

Ostatnie dwie wartości na P są wyznaczone przy pomocy wzoru *Schlömilcha* na P_m^∞.

Zestawienie powyższe, które ma wartość *orjentacyjną* i to tylko dla *większej* liczby n (począwszy od kilkunastu spostrz.), poucza nas, że przy 22 spostrzeżeniach można oczekiwać *jednego* błędu ε większego niż 2μ; pojawienie się *dwu* (lub ewent. *więcej*) błędów większych niż 2μ może zatem *wzbudzić podejrzenie*, czy przy wykonywaniu tych spostrzeżeń nie zaszły takie okoliczności, które uprawniałyby nas *do wykluczenia* owych spostrzeżeń. Dopiero, gdyby odpowiednio przeprowadzona rewizja okoliczności, towarzyszących pewnemu spostrzeżeniu (o ile to jest możliwem do wykonania po skończonym pomiarze), dowiodła prawdziwości naszych podejrzeń, należy owe spostrzeżenie wykluczyć. Oczywiście ***najpewniej*** można *wyłączyć* pewne ***spostzzeżenie*** już ***podczas pomiaru***, a nie dopiero na podstawie teoretycznych rozumowań.

Jak tedy widzimy, mają wzór (5) względnie zestawienie (6) znaczenie tylko *orjentacyjne* i to właściwie dla błędów ***prawdziwych*** ε, mogą nam jednak być *wskazówką* i w przypadku błędów pozornych, o ile n nie jest zbyt *małem*.

Tak zw. błąd „*dozwolony*", nie mający nic wspólnego z błędem maksymalnym, ma ważne znaczenie przy układaniu ***instrukcyj pomiarowych***. Przy określaniu wartości tego rodzaju błędów nie należy brać na uwagę błędów maksymalnych, lecz jedynie *minimalną dokładność*, jakiej dostarczyć nam powinne przeprowadzane pomiary.

§ 3. Wyznaczenie niewiadomych przy pomocy redukowania równań błędów.

Znany geodeta niemiecki jenerał *Schreiber* wprowadził do rachunku wyrównawczego zredukowane równania błędów z *wagami ujemnemi.*

Sposób ten bywa używany z korzyścią przy wyrównaniach dotyczących tryangulacji (przy wyrównaniu spółrzędnych punktów, wciętych wstecz i t. p. zagadnieniach).

Postępowanie przy sposobie Schreibera jest następujące.

Mając danych n równań błędów (dla uproszczenia wzorów o 3 niewiadomych) kształtu:

$$\begin{array}{ll} \delta_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 & \text{z wagą } p_1 \\ \delta_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 & \quad " \quad " \quad p_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ \delta_n = a_n x + b_n y + c_n z + l_n & \quad " \quad " \quad p_n, \end{array} \tag{1}$$

którym odpowiada pierwsze równanie normalne

$$[paa]x + [pab]y + [pac]z + [pal] = 0, \tag{2}$$

tworzymy $(n+1)$ *równanie błędów*

$$\Delta_1' = [pab]y + [pac]z + [pal] \text{ z wagą } \frac{-1}{[paa]}, \tag{3}$$

a dołączając je do równań (1), w których opuszczono wyrazy zawierające pierwszą niewiadomą, otrzymujemy $(n+1)$ równań błędów, *zawierających o jedną niewiadomą mniej,* niż system (1):

$$\begin{array}{llll} \delta_1' = & b_1 y + & c_1 z + l_1 & \text{z wagą } p_1 \\ \delta_2' = & b_2 y + & c_2 z + l_2 & \quad " \quad " \quad p_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \delta'_n = & b_n y + & c_n z + l_n & \quad " \quad " \quad p_n \\ \Delta_1' = & [pab]\, y + & [pac]\, z + [pal] & \quad " \quad " \quad \frac{-1}{[paa]}. \end{array} \tag{4}$$

System błędów (4) jest *równoważny* z systemem (1) ze względu na niewiadome y i z; a można się o tem łatwo przekonać, tworząc równania normalne dla systemu (4), które będą *identyczne* z raz zredukowanemi równaniami normalnemi systemu (1).

Ze względu, że oba te systemy dostarczają tychsamych niewiadomych y i z, wynika z ich porównania z uwzględnieniem równ. (2):

$$\begin{array}{l} \delta_i' = \delta_i - a_i x \\ \Delta_1' = -[paa]x, \text{ a dalej} \end{array} \tag{5}$$

$$[p\delta'\delta'] = [p\delta\delta] - 2[pa\delta]x + [paa]x^2; \tag{6}$$

ponieważ $[pa\delta] = 0$, zaś $[paa]x^2 = -\Delta_1' x = \frac{\Delta_1'^2}{[paa]}$, przeto

$$[p\delta'\delta'] = [p\delta\delta] + \frac{\Delta_1'^2}{[paa]}, \text{ a ostatecznie}$$

$$[p\delta\delta] = [p\delta'\delta'] - \frac{\Delta_1'\Delta_1'}{[paa]}. \tag{7}$$

System (4) daje nam zatem *niezmienioną* sumę kwadratów błędów pozornych przy uwzględnieniu odpowiednich wag.

Zamiast systemu (4) można, postępując analogicznie jak przy systemie (1), utworzyć nowy system $(n+2)$ podwójnie zredukowanych równań błędów o niewiadomej z:

$$\begin{array}{lll}
\delta_1'' = & c_1 z + l_1 & \text{z wagą } p_1 \\
\delta_2'' = & c_2 z + l_2 & \;\;,, \;\;,, \;\; p_2 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\delta_n'' = & c_n z + l_n & \;\;,, \;\;,, \;\; p_n \\
\Delta_1'' = & [pac]z + [pal] & \;\;,, \;\;,, \;\; \dfrac{-1}{[paa]} \\
\Delta_2'' = & [bc.1]z + [bl.1] & \;\;,, \;\;,, \;\; \dfrac{-1}{[bb.1]},
\end{array} \tag{8}$$

który jest równoważny z systemem (1) ze względu na niewiadomą z, przyczem podobnie jak poprzednio można udowodnić że:

$$[p\delta\delta] = [p\delta''\delta''] - \frac{[\Delta_1''\Delta_1'']}{[paa]} - \frac{[\Delta_2''\Delta_2'']}{[pbb.1]}. \tag{9}$$

System równań błędów (8) dostarcza nam oczywiście ostatniego równania normalnego kształtu

$$[pcc.2]z - [pcl.2] = 0. \tag{10}$$

Przeprowadzając jeszcze jedną redukcję równań błędów, otrzymujemy $(n+3)$ równań błędów kształtu:

$$\begin{array}{ll}
\delta_1''' = l_1 & \text{z wagą } p_1 \\
\delta_2''' = l_2 & \;\;,, \;\;,, \;\; p_2 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\delta_n''' = l_n & \;\;,, \;\;,, \;\; p_n \\
\Delta_1''' = [pal] & \;\;,, \;\;,, \;\; \dfrac{-1}{[paa]} \\
\Delta_2''' = [pbl.1] & \;\;,, \;\;,, \;\; \dfrac{-1}{[pbb.1]} \\
\Delta_3''' = [pcl.2] & \;\;,, \;\;,, \;\; \dfrac{-1}{[pcc.2]}.
\end{array} \tag{11}$$

Suma kwadratów błędów, mnożonych przez odpowiednie wagi, dostarcza nam jak przy sposobie Gaussa:

$$[pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pbl.1]^2}{[pbb.1]} - \frac{[pcl.2]^2}{[pcc.2]} = [pll.3] = [p\delta\delta]. \tag{12}$$

ROZDZIAŁ ÓSMY.

Zastosowanie rachunku wyrównawczego do pomiarów wysokości.

§ 1. Rodzaje zagadnień.

Przy wyrównywaniu pomiarów wysokości, a więc wzniesień lub spadów, napotykamy w praktyce na *cztery rodzaje zagadnień* rachunku wyrównawczego, które należy bliżej omówić.

a) Najprostszy przypadek zachodzi, gdy ciąg niwelacyjny, założony wzdłuż drogi, rzeki i t. p. jest tylko w jednym swym końcu nawiązany do pewnego punktu *stałego* (reperu) o wysokości znanej z innych pomiarów, lub gdy w braku punktu stałego, przyjęto wysokość jednego z punktów ciągu.

Jak wiadomo składa się ciąg niwelacyjny z szeregu wzniesień względnie spadów między poszczególnemi punktami, które po wyrównaniu pomiarów służą jako punkty stałe dla dalszych celów. Ponieważ niwelujemy między poszczególnemi punktami ciągu conajmniej *dwa razy,* już choćby ze względu na błędy grube, przedstawia się omówione tu zagadnienie rachunku wyrówn. jako wyrównanie *par spostrzeżeń.*

b) Również często zdarza się w praktyce zagadnienie wyrównania, spowodowane przez założenie ciągu *zamkniętego,* t. j. powracającego po przejściu przez szereg punktów do punktu *początkowego (stałego).* W tym przypadku wyrównujemy wzniesienia względnie spady, uwzględniając warunek $[h]=0$, względnie $[s]=0$. Zastosujemy tedy metodę wyrównania do stałej sumy, lub spostrzeżeń zawarunkowanych.

Oba wspomniane sposoby wyrównania stosujemy także w przypadku, gdy ciąg niwelacyjny jest nawiązany obu końcami do punktów stałych.

c) O ile mamy do dyspozycji kilka punktów stałych odpowiednio rozmieszczonych, staramy się złączyć ciągi, nawiązane do nich, w jednym wspólnym punkcie, zwanym „*węzłowym*". Wyrównanie redukuje się w tym przypadku do utworzenia średniej arytmetycznej ogólnej i kilku wyrównań do stałej sumy, (choć można w tym przypadku i podobnych zastosować wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych).

d) Najbardziej zawiły problem wyrównania przedstawiają ***sieci niwelacyjne***, powstające przez zespolenie kilku ciągów. Sieci niwelacyjne wyrównujemy metodą spostrzeżeń zawarunkowanych lub pośrednich, zależnie od tego, która metoda nastręcza mniej pracy rachunkowej. O ile sieć ma tylko jeden lub bardzo mało punktów stałych, okazuje się z reguły wyrównanie metodą spostrzeżeń zawarunkowanych jako korzystniejsze, przy większej ilości punktów stałych jest zazwyczaj wskazana metoda wyrównania spostrzeżeń pośrednich. W poszczególnych przypadkach ***należy zawsze zbadać sprawę obioru metody przed wyrównaniem***, jak to zrobiono poniżej przy dokładnem omawianiu wyrównania sieci niwelacyjnych.

Omówione tu rodzaje wyrównania mogą być zastosowane także i przy ***trygonometrycznych*** pomiarach wysokości, które również krótko omówimy.

§ 2. Ciąg niwelacyjny, wyrównany metodą par spostrzeżeń.

Ponieważ ten przypadek wyrównania omówiliśmy dość wyczerpująco w ust. 2. § 3-go rozdz. III-go (str. 64), podając ponadto także i przykład liczbowy, przeto pozostaje już niewiele szczegółów do omówienia.

Dla przypomnienia zestawiono raz jeszcze wzory dotyczące tego sposobu wyrównania.

Pary spostrzeżeń, otrzymane przy pomiarze, niech będą:

$$h_1,\ h_1';\ h_2,\ h_2';\ldots\ldots h_r,\ h_r';\ \text{(wzniesienia), lub}$$

$$s_1,\ s_1';\ s_2,\ s_2';\ldots\ldots s_r,\ s_r',\ \text{(spady).}$$

dla każdej pary spostrzeżeń tworzymy

$$x_i=\frac{h_i+h_i'}{2},\ \text{ewent.}\ x_i=\frac{s_i+s_i'}{2},\ \text{oraz}$$

różnice $d_i=h_i'-h_i$, ewent. $d_i=s_i'-s_i$.

Następnie urabiamy wagi p dla wyznaczenia błędów średnich. Aby te ostatnie otrzymać na 1 km długości, należy przyjąć wagi

$$p=\frac{1}{L},$$

przyczem L oznacza ilość kilometrów długości, wzdłuż której niwelowano między poszczególnemi punktami. L najłatwiej obliczyć, przyjmując przy niwelacji stały odstęp o łaty od przyrządu (w m) i mnożąc go przez podwójną ilość przestawień przyrządu $2i$; wówczas ilość L przydatna do dalszych wzorów przedstawi się:

$$L=0{\cdot}002\,io \qquad \text{(o ile } o \text{ przyjęto w } m).$$

(Zazwyczaj przyjmujemy $o=50\,m$ wówczas $L=0{\cdot}1.i$).

Dalsze wzory są $d_0 = \sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{dd}{L}\right]}$,

bł. śr. $\mu_0 = \pm\frac{d_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2r}\left[\frac{dd}{L}\right]}$ przed wyrówn.

bł. śr. $\mu_{x_0} = \pm\frac{d_0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{dd}{L}\right]}$ po wyrówn.

O ile chodzi o pomiary bardzo dokładne, należy jeszcze przy wynikach x uwzględnić odpowiednie poprawki ortometryczne (patrz § 8-my niniejszego rozdziału).

§ 3. *a)* Wyrównanie ciągu niwelacyjnego zamkniętego. *b)* Wyrównanie ciągu niw., nawiązanego na początku i końcu do punktów stałych.

a) Wyrównanie ciągu niwelacyjnego *zamkniętego* przeprowadzamy, posługując się wzorami § 4-go rozdz. III-go.

Ze względu, że warunek ma tu kształt sumy

$$\Sigma(h+\delta)=0, \text{ względnie } \Sigma(s+\delta)=0,$$

mają zastosowanie wzory (11*) i (12*) § 4-go tego rozdz. (str. 70).

Po wyznaczeniu odchyłki

$$\omega = \Sigma h, \text{ ewent. } \omega = \Sigma s,$$

ustawiamy równanie odchyłki

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots\ldots \delta_n + \omega = 0;$$

wzory (11*) i (12*) § 4-go wspomn. rozdz. przybierają ze względu na

$p = \frac{1}{L}$ (jak poprzednio) kształty następujące:

$$x_i = h_i - \omega\frac{L_i}{[L]}, \text{ względnie } x_i = s_i - \omega\frac{L_i}{[L]},$$

$\mu_0 = \frac{\omega}{\sqrt{[L]}}$, (błąd śr. jedn. na 1 km długości),

$\mu_i = \omega\sqrt{\frac{L_i}{[L]}}$ błąd śr. wzniesienia h_i (wzgl. spadu s_i) przed wyrównaniem, zaś

$\mu_{xi} = \omega\sqrt{[L]-L_i}\,.\sqrt{L_i}$ błąd śr. wzniesienia h_i (wzgl. spadu s_i) po wyrównaniu.

Oczywiście, że i w tym przypadku należy uwzględnić przy wzniesieniach względnie spadach poprawki ortometryczne, o ile mamy do czynienia z pierwszorzędnym ciągiem niwelacyjnym, założonym dla celów rozmierzania kraju.

b) Sposób wyrównania nie ulega zmianie, gdy ciąg niwelacyjny jest nawiązany *na początku i końcu* do dwu punktów stałych.

Zamiast poprzednio podanego rachunku mamy w tym przypadku do uwzględnienia:

$$[h+\delta]-\Delta H=0, \text{ ewent. } [s+\delta]-\Delta s_{PK}=0,$$

przyczem $\Delta H = H_K - H_P$ (t. j. różnicy wysokości stałego punktu końcowego mniej wysokość punktu stałego początkowego), zaś Δs_{AB} oznacza spad z punktu P na K.

Odchyłkę ω otrzymujemy z równań:

$$[h] - \Delta H = \omega, \text{ ewent. } [s] - \Delta s_{PK} = \omega.$$

Szczegółowy przykład wyrównania tego przypadku podaliśmy w § 4-tym rozdz. III (przykład drugi str. 71).

§ 4. Wyrównanie punktu węzłowego.

I ten przypadek wyrównania jest nam znany; omówiliśmy go w § 2-gim rozdz. III-go, podając jako przykład wyrównanie punktu węzłowego 5-ciu ciągów niwelacyjnych (przykład drugi str. 60).

Mimoto, że wspomniany przykład odnosi się do niwelacji zwyczajnej (μ_0, błąd śr. na 1 km wynosi tam około ± 25 m/m), używa się tego sposobu w praktyce bardzo często i przy wyrównywaniu drugorzędnych sieci niwelacyjnych krajowych, a to ze względu na wielkie uproszczenie pracy rachunkowej, jakie pociąga za sobą użycie tej metody.

Aby wykazać, jak znaczne uproszczenie nakładu pracy rachunkowej następuje przy zastosowaniu metody wyrównania przy pomocy punktu węzłowego, omówimy następujący *przykład*.

Z sześciu punktów I, II, III, IV, V i VI niwelacyjnej sieci I-rzędnaj (uważanych w tym przypadku jako stałe) poprowadzono ciągi niwelacyjne do wspólnego punktu węzłowego W, wyznaczając wysokości punktów sieci drugorzędnej.

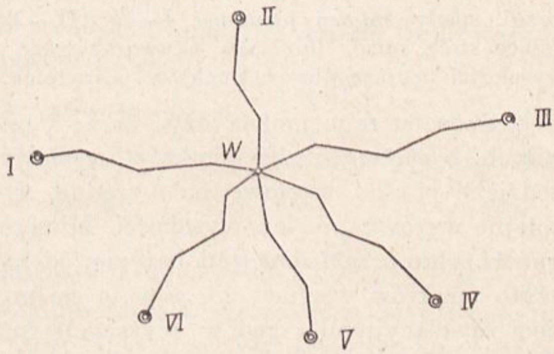

Fig. 11.

Użycie przy wyrównaniu powyższej sieci II-rzędnej metody spostrzeżeń zawarunkowanych wymaga, wedle wskazówek udzielonych w paragrafie następnym, uwzględnienia 5-ciu warunków n. p.

$$[h+\delta]_{I}^{W} + [h+\delta]_{W}^{II} - (H_{II} - H_{I}) = 0, \quad [h+\delta]_{II}^{W} + [h+\delta]_{W}^{III} - (H_{III} - H_{II}) = 0,$$

$$[h+\delta]_{III}^{W} + [h+\delta]_{W}^{IV} - (H_{IV} - H_{III}) = 0, \quad [h+\delta]_{IV}^{W} + [h+\delta]_{W}^{V} - (H_{V} - H_{VI}) = 0,$$

$$[h+\delta]_{V}^{W} + [h+\delta]_{W}^{VI} - (H_{VI} - H_{V}) = 0,$$

a w następstwie obliczenia 5-ciu spółcz. nieoznacz. k (korelat).

Natomiast przedstawia się wyrównanie tej sieci przy zastosowaniu wyrównania wysokości punktu węzłowego bardzo prosto.

Oznaczając długości poszczególnych ciągów:

$\mathrm{I}W = L_1$, $\mathrm{II}W = L_2$, $\mathrm{III}W = L_3$, $\mathrm{IV}W = L_4$, $\mathrm{V}W = L_5$ i $\mathrm{VI}W = L_6$,

otrzymamy wysokość wyrównaną punktu W z wzoru:

$$H_W = \frac{\frac{H_1}{L_1} + \frac{H_2}{L_2} + \frac{H_3}{L_3} + \frac{H_4}{L_4} + \frac{H_5}{L_5} + \frac{H_6}{L_6}}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} + \frac{1}{L_5} + \frac{1}{L_6}},$$

przyczem $H_1 = H_{\mathrm{I}} + [h]_{\mathrm{I}}^{W}$, $H_2 = H_{\mathrm{II}} + [h]_{\mathrm{II}}^{W}$ i t. d.

Jedn. błąd średni na 1 km μ_0 będzie (przy uwzględnieniu poszczególnych L jako liczb, odpowiadających długościom poszczególnych ciągów w km):

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\left[\frac{\Delta\Delta}{L}\right]}{5}},$$

przyczem przez Δ_i oznaczono różnice $H_W - H_i$.

Zaś błąd średni wysokości wyrównawczej H_W przedstawia się:

$$\mu_W = \sqrt{\frac{\left[\frac{\Delta\Delta}{L}\right]}{5 \cdot \left[\frac{1}{L}\right]}}.$$

Po wyrównaniu wysokości punktu węzłowego H_W wyrównujemy wzniesienia (wzgl. spady) *między punktami* I — W, II — W, ... IV — W, jako spostrzeżenia dające stałą sumę, lub jako zawarunkowane (o jednym warunku), uzyskując wysokości poszczególnych punktów pośrednich.

Sposobu tego można użyć także i przy sieciach niwel. bardziej zawiłych, *o większej* ilości punktów węzłowych; w tym przypadku należy podzielić punkta węzłowe na I-rzędne, II-rzędne i t. d. i przeprowadzić kolejno wyrównanie ich wysokości. Mimoto, że sposób ten daje nam wtedy ***wyniki*** tylko ***przybliżone*** (tem bardziej odchylające się od ścisłych, im więcej użyto punktów węzłowych), stosuje się go z reguły przy wyrównywaniu sieci niwelacyjnych rzędów wyższych niż II-gi, a nawet przy sieciach II-rzędnych, głównie ze względu na bardzo znaczne uproszczenie pracy rachunkowej. Sposób ***ściślejszy*** wyrównania przy większej ilości punktów węzłowych przedstawiono w § 7-mym (str. 182.).

§ 5. Sieci niwelacyjne. Wybór metody wyrównania.

Jak już wspomnieliśmy w ustępie *d* § 1-go, wyrównujemy sieci niwelacyjne metodą spostrzeżeń zawarunkowanych lub pośrednich. Ponieważ wybór metody wyrównania jest przy sieciach niwelacyjnych okolicznością bardzo ważną, mogącą spowodować znaczne uproszczenie pracy rachunkowej, omówimy tę sprawę nieco szerzej.

Aby w sieci niwelacyjnej składającej się z p punktów, z których jeden jest stały (lub którego wysokość przyjęto), wyznaczyć *jednoznacznie* wysokości $(p-1)$ pozostałych punktów sieci, należy pomierzyć $(p-1)$ odpowiednich ***niezależnych*** wzniesień (spadów).

Jeśli więc w sieci niwelacyjnej, składającej się z p punktów, z których jeden jest stały (lub jako taki przyjęty), pomierzono ***n wzniesień (spadów),*** otrzymamy w razie zastosowania metody spostrzeżeń zawarunkowanych ***n—(p—1) nadliczbowych pomiarów,*** a zatem ***ilość warunków r*** będzie określona związkiem:

$$r = n-(p-1) = n-p+1; \tag{1}$$

stosując zaś w tym samym przypadku metodę spostrzeżeń pośrednich, otrzymamy n równań błędów o

$$k = p-1 \tag{2}$$

(niezależnych) niewiadomych.

Dociekania te dają się łatwo uogólnić dla sieci niwelacyjnych o p' ilości punktów stałych.

Przyjmując, że sieć niwel., składająca się z p punktów, posiada p' punktów stałych, należy dla wyznaczenia jednoznacznego wysokości reszty $(p-p')$ punktów pomierzyć tylko $(p-p')$ odpowiednich niezależnych wzniesień (spadów).

O ile zatem pomierzymy n wzniesień (spadów), będzie ilość warunków (przy zastosowaniu met. spostrz. zawar.).

$$r = n-(p-p') = n-p+p', \tag{1*}$$

zaś (przy zastosowaniu met. spostrz. pośredn.) ilość równań błędów n o

$$k = p-p' \tag{2*}$$

niewiadomych.

Ponieważ najwięcej czasu zabiera przy wyrównaniu zazwyczaj rozwiązywanie równań korelat względnie ***równań normalnych,*** wybieramy tę metodę wyrównania, dla której wypadnie ***mniejsza ilość*** wspomnianych równań; zatem

$$\left.\begin{array}{l} \text{metodą spostrzeżeń zawarunkowanych, gdy} \\ \qquad n-(p-p') < p-p' \text{ lub } n < 2(p-p') \\ \text{metodę spostrzeżeń pośrednich, gdy} \\ \qquad n-(p-p') > p-p' \text{ lub } n > 2(p-p'). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Gdy $n = 2(p-p')$, należy obrać tę metodę, dla której w danym przypadku wypadną spółczynniki równań korelat wzgl. normalnych bardziej wygodne dla rachunku; zazwyczaj obieramy wówczas jednak metodę spostrz. ***pośrednich,*** a to ze względu na łatwiejszy sposób wyznaczenia błędów średnich wyrównanych wysokości punktów.

§ 6. Wyrównanie sieci niwelacyjnej metodą spostrzeżeń zawarunkowanych.

Wyznaczywszy ilość warunków sieci ze związku

$$r = n - p + p',$$

należy zwrócić baczną uwagę, aby wszystkie, użyte przy wyrównaniu warunki, były *niezależne*, t: j. aby żaden warunek nie mógł być wyprowadzonym z pozostałych, (co można łatwo stwierdzić). Mając do wyboru kilka systemów warunków, wybieramy oczywiście ten, który nastręcza najmniej pracy rachunkowej, a więc warunki o *jaknajmniejszej ilości spółczynników*, względnie takie, dla których wypadnie *największa ilość spółczynników* równań korelat *równa zeru*.

Dla zrozumienia powyższych wskazówek objaśnimy tę sprawę na przykładach, przedstawionych na fig. 12. (I i II oznaczają tu punkta stałe).

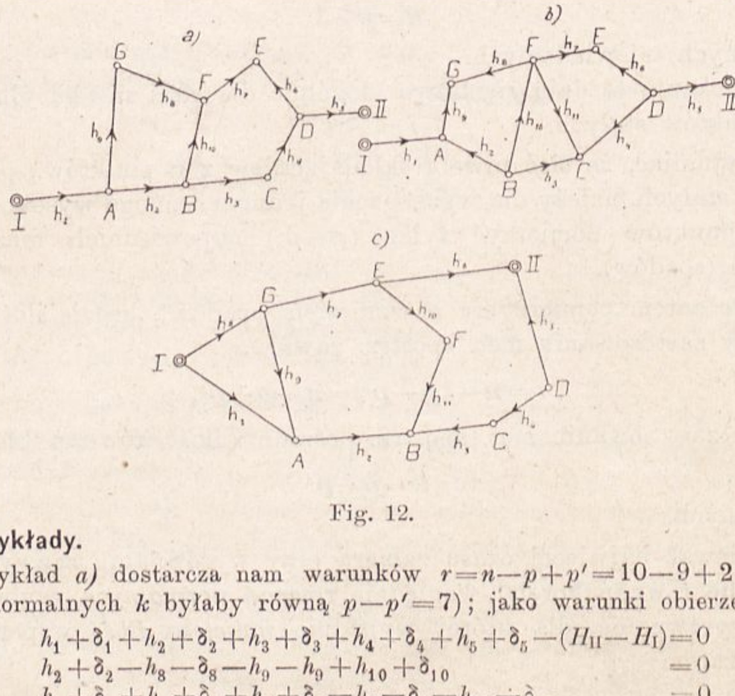

Fig. 12.

Przykłady.

Przykład *a)* dostarcza nam warunków $r = n - p + p' = 10 - 9 + 2 = 3$ (ilość równań normalnych k byłaby równą $p - p' = 7$); jako warunki obierzemy:

$$\begin{aligned}
&h_1 + \delta_1 + h_2 + \delta_2 + h_3 + \delta_3 + h_4 + \delta_4 + h_5 + \delta_5 - (H_{II} - H_I) = 0 \\
&h_2 + \delta_2 - h_8 - \delta_8 - h_9 - h_9 + h_{10} + \delta_{10} = 0 \\
&h_3 + \delta_3 + h_4 + \delta_4 + h_6 + \delta_6 - h_7 - \delta_7 - h_{10} - \delta_{10} = 0.
\end{aligned}$$

Przykład *b)* Ilość warunków $r = n - p + p' = 11 - 9 + 2 = 4$:

$$\begin{aligned}
&h_1 + \delta_1 - h_2 - \delta_2 + h_3 + \delta_3 - h_4 - \delta_4 + h_5 + \delta_5 - (H_{II} - H_I) = 0 \\
&-h_2 - \delta_2 + h_8 + \delta_8 - h_9 - \delta_9 + h_{10} + \delta_{10} = 0 \\
&h_3 + \delta_3 - h_{10} - \delta_{10} - h_{11} - \delta_{11} = 0 \\
&-h_4 - \delta_4 + h_6 + \delta_6 - h_7 - \delta_7 + h_{11} + \delta_{11} = 0.
\end{aligned}$$

Przykład *c)* Ilość warunków $r = n - p + p' = 11 - 9 + 2 = 4$:

$$\begin{aligned}
&h_1 + \delta_1 - h_8 - \delta_8 - h_9 - \delta_9 = 0 \\
&h_2 + \delta_2 - h_7 - \delta_7 + h_9 + \delta_9 - h_{10} - \delta_{10} - h_{11} - \delta_{11} = 0 \\
&-h_3 - \delta_3 - h_4 - \delta_4 + h_5 + \delta_5 - h_6 - \delta_6 + h_{10} + \delta_{10} + h_{11} + \delta_{11} = 0 \\
&h_6 + \delta_6 + h_7 + \delta_7 + h_8 + \delta_8 - (H_{II} - H_I) = 0.
\end{aligned}$$

Jako *większy* przykład liczbowy podajemy wyrównanie sieci niwelacyjnej, założonej na obszarze *delty Wisły i Nogatu,* opierając się na publikacji Biura dla przepr. głównej niwelacji [1]) i dziele A. Abendrotha (patrz fig. 13).

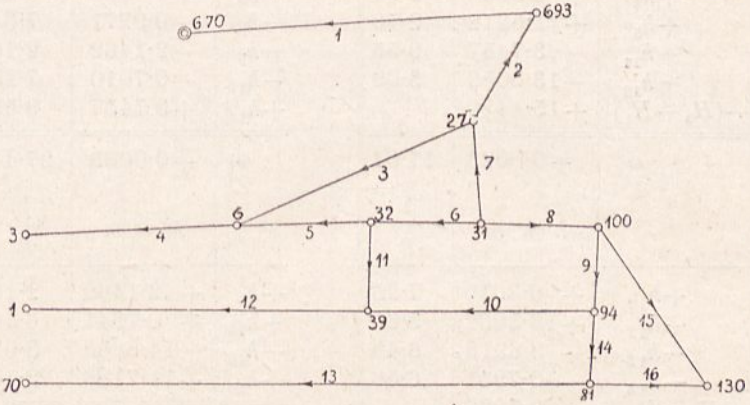

Fig. 13.

Punkty 670, 3, 1, 70 i 130, pochodzące z poprzednio wyrównanych ciągów wzgl. sieci, przyjęto jako stałe. Strzałki oznaczają wzniesienia.

Ponieważ $n=16$, $p=14$, $p'=5$, przeto ilość warunków

$$r=n-p+p'=16-14+5=7.$$

(Metoda spostrz. pośrednich wymagałaby $k=p-p'=14-5=9$ równań normalnych).

Przy wyrównaniu uwzględniono następujących 7 warunków niezależnych.

$$\begin{aligned}
&-h_4-\delta_4-h_3-\delta_3+h_2+\delta_2+h_1+\delta_1-(H_{670}-H_3) &&=0\\
&-h_5-\delta_5-h_6-\delta_6+h_7+\delta_7+h_3+\delta_3 &&=0\\
&-h_{12}-\delta_{12}-h_{11}-\delta_{11}+h_5+\delta_5+h_4+\delta_4-(H_3-H_1) &&=0\\
&-h_{10}-\delta_{10}-h_9-\delta_9-h_8-\delta_8+h_6+\delta_6+h_{11}+\delta_{11} &&=0\\
&-h_{13}-\delta_{13}-h_{14}-\delta_{14}+h_{10}+\delta_{10}+h_{12}+\delta_{12}-(H_1-H_{70}) &&=0\\
&+h_{16}+\delta_{16}-h_{15}-\delta_{15}+h_9+\delta_9+h_{14}+\delta_{14} &&=0\\
&-h_{16}-\delta_{16}+h_{13}+\delta_{13}-(H_{70}-H_{130}) &&=0.
\end{aligned}$$

Schematyczne zestawienie wzniesień wedle warunków dostarcza nam 7 odchyłek ω:

	h w m	$\frac{1}{p}$
$+h_1$	+3·4276	8·30
$+h_2$	+0·7559	5·30
$-h_3$	−1·4526	4·81
$-h_4$	−0·5900	1·07
$-(H_{670}-H_3)$	−2·1320	.
ω_1	+0·0089	19·48

	h w m	$\frac{1}{p}$
$+h_3$	+1·4526	4·81
$-h_5$	−1·5212	2·73
$-h_6$	−0·0289	0·84
$+h_7$	+0·0917	1·75
ω_2	−0·0058	10·13

[1]) *Höhen* über N. N. *von Festpunkten und Pegeln an Wasserstrassen.* Zeszyt XVII, Berlin 1913. i *A. Abendroth,* Die Ausgleichungspraxis in der Landesvermessung, Berlin 1916. (str. 230 i dalsze).

*

	h w m	$\frac{1}{p}$
$+h_4$	$+$ 0·5900	1·07
$+h_5$	$+$ 1·5212	2·73
$-h_{11}$	$-$ 3·7457	9·55
$-h_{12}$	$-$13·5052	3·69
$-(H_3-H_1)$	$+$15·1420	.
ω_3	$+$0·0023	17·04

	h w m	$\frac{1}{p}$
$+h_6$	$+$0·0289	0·84
$-h_8$	$-$0·9271	7·64
$-h_9$	$-$2·1462	2·16
$-h_{10}$	$-$0·7010	7·25
$+h_{11}$	$+$3·7457	9·55
ω_4	$+$0·0003	27·44

	h w m	$\frac{1}{p}$
$+h_{10}$	$+$ 0·7010	7·25
$+h_{12}$	$+$13·5052	3·69
$-h_{13}$	$-$ 3·6913	6·48
$-h_{14}$	$-$ 0·7941	6·56
$-(H_1-H_{70})$	$-$ 9·7260	.
ω_5	$-$ 0·0052	23·98

	h w m	$\frac{1}{p}$
$+h_9$	$+$ 2·1462	2·16
$+h_{14}$	$+$ 0·7941	6·56
$-h_{15}$	$-$14·6605	8·09
$+h_{16}$	$+$11·7186	2·10
ω_6	$-$ 0·0016	18·91

	h w m	$\frac{1}{p}$
$+h_{13}$	$+$ 3·6913	6·48
$-h_{16}$	$-$11·7186	2·10
$-(H_{70}-H_{130})$	$+$ 8·0280	.
ω_7	$+$ 0·0007	8·58

Ponieważ każde wzniesienie niwelowano tam i z powrotem i to nie zawsze przy użyciu zupełnie tej samej drogi, wypisane powyżej spady są średniemi arytmetycznemi ogólnemi wzniesień, mierzonych tam h' i z powrotem h'':

$$h = \frac{p'\,h' + p''\,h''}{p' + p''},$$

przyczem $p' = \frac{1}{L'}$, $p'' = \frac{1}{L''}$. (L' liczba km przy pomiarze w jednym kierunku, zaś L'' liczba km przy pomiarze w kierunku powrotnym).

Dla utworzenia odwrotności wagi każdego wzniesienia należy przeto wziąć na uwagę błąd średni wzniesienia h (jako średniej arytm. ogólnej):

$$\mu_h^2 = \frac{\mu_0^2}{p' + p''};$$

zatem $\frac{1}{p_h} = \frac{1}{p'+p''} = \frac{1}{\frac{1}{L'} + \frac{1}{L''}} = \frac{L'L''}{L'+L''}$, a w razie $L' = L'' = L$, $\frac{1}{p_h} = \frac{L}{2}$.

W ten sposób utworzono odwrotności wag $\frac{1}{p}$ dla wszystkich wzniesień; ponieważ, jak łatwo wykazać, $\left[\frac{aa}{p}\right] = \left[\frac{1}{p}\right]$ jest sumą odwrotności wag wzniesień zawartych w pierwszym warunku, $\left[\frac{bb}{p}\right]=\left[\frac{1}{p}\right]$ jest sumą odwrotności wag wzniesień zawartych w drugim warunku i t. d., zestawiono zarazem sumy odwrotności wag dla każdego warunku.

Schematyczne zestawienie równań odchyłek przedstawia się:

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9	δ_{10}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	δ_{16}	ω	$\left[\frac{1}{p}\right]$
																	m/m	
I	+1	+1	−1	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+8·9	19·48
II	.	.	+1	.	−1	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−5·8	10·13
III	.	.	.	+1	+1	.	.	.	.	.	−1	−1	.	.	.	.	+2·3	17·04
IV	.	.	.	.	.	+1	.	−1	−1	−1	+1	.	.	.	.	.	+0·3	27·44
V	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	+1	−1	−1	.	.	−5·2	23·98
VI	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	+1	−1	+1	−1·6	18·91
VII	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	−1	+0·7	8·58
$\frac{1}{p}$	8·30	5·30	4·81	1·07	2·73	0·84	1·75	7·64	2·16	7·25	9.55	3·69	6·48	6·56	8·09	2·10		

Jeżeli przy układaniu warunków pamiętano o tem, żeby wzniesienia wspólne dwom warunkom wystąpiły w nich ze znakami przeciwnemi, można i spółczynniki *„niekwadratowe"* równań korelat utworzyć mechanicznie, mianowicie będzie:

$$\left[\frac{ab}{p}\right]=-\frac{1}{p_3}=-4{\cdot}81,\quad \left[\frac{ac}{p}\right]=-\frac{1}{p_4}=-1{\cdot}07,\quad \left[\frac{bc}{p}\right]=-\frac{1}{p_5}=-2{\cdot}73 \text{ i t. d.}$$

Schemat równań korelat będzie zatem:

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	Wyrazy wolne
I	+19·48	− 4·81	− 1·07					+8·9
II	− 4·81	+10·13	− 2·73	− 0·84				−5·8
III	− 1·07	− 2·73	+17·04	− 9·55	− 3·69			+2·3
IV		− 0·84	− 9·55	+27·44	− 7·25	− 2·16		+0·3
V			− 3·69	− 7·25	+23·08	− 6·56	− 6·48	−5·2
VI				− 2·16	− 6·56	+18·91	− 2·10	−1·6
VII					− 6·48	− 2·10	+ 8·58	+0·7
Σ	+13·60	+ 1·75	0·00	+ 7·64	− 0·90	+ 8·09	0·00	−0·4

Równania powyższe spełniają następujące wartości korelat:

$$k_1 = -0{\cdot}3334,$$
$$k_2 = +0{\cdot}4690,$$
$$k_3 = +0{\cdot}1397,$$
$$k_4 = +0{\cdot}2057,$$
$$k_5 = +0{\cdot}4860,$$
$$k_6 = +0{\cdot}3209,$$
$$k_7 = +0{\cdot}3613,$$

które wstawione do równań poprawek kształtu $\delta_i = \frac{1}{p_i}(a_i k_1 + b_i k_2 + \ldots)$ (przyczem a, b, c i t. d. są tu $+1$ wzgl. -1) dostarczają poprawek:

$\delta_1 = -2{\cdot}8\ m/m,$	$\delta_5 = -0{\cdot}9\ m/m,$	$\delta_9 = +0{\cdot}2\ m/m,$	$\delta_{13} = -0{\cdot}8\ m/m,$
$\delta_2 = -1{\cdot}7\ m/m,$	$\delta_6 = -0{\cdot}2\ m/m,$	$\delta_{10} = +2{\cdot}0\ m/m,$	$\delta_{14} = -1{\cdot}1\ m/m,$
$\delta_3 = +3{\cdot}9\ m/m,$	$\delta_7 = +0{\cdot}8\ m/m,$	$\delta_{11} = +0{\cdot}6\ m/m,$	$\delta_{15} = -2{\cdot}6\ m/m,$
$\delta_4 = +0{\cdot}5\ m/m,$	$\delta_8 = -1{\cdot}5\ m/m,$	$\delta_{12} = +1{\cdot}3\ m/m,$	$\delta_{16} = -0{\cdot}1\ m/m.$

Sumę $[p\delta\delta] = -[\omega k] = \frac{\omega_1^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{(\omega_2 . 1)^2}{\left[\frac{bb}{p} . 1\right]} + \ldots\ldots$ otrzymujemy (z dostateczną zgodnością kontroli) 8·08, zatem

jedn. błąd średni pojedynczego pomiaru na 1 *km* dł. $\mu_0' = \sqrt{\frac{8{\cdot}08}{7}} = \pm 1{\cdot}07\ m/m,$

zaś jedn. bł. śr. podwójnego pomiaru na 1 *km* dł. $\mu_0'' = \frac{\mu_0'}{\sqrt{2}} = \pm 0{\cdot}76\ m/m.$

W obu błędach średnich μ_0 jest zawarty *przymus nawiązania* t. zn., że na ich wielkość wpływają także błędy punktów stałych.

§ 7. Wyrównanie sieci niwelacyjnej metodą spostrzeżeń pośrednich.

W sieciach o *wielkiej* ilości punktów stałych może być często

$$n > 2(p - p');$$

w takich przypadkach należy je wyrównać wedle (3) § 5-go metodą spostrzeżeń *pośrednich*.

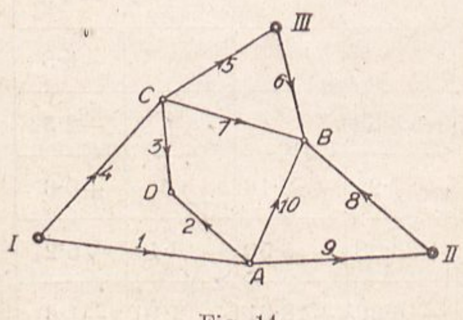

Fig. 14.

Jako niewiadome równań błędów występują tu:

a) poprawki (p—p') niezależnych wzniesień (spadów), lub lepiej

b) poprawki wysokości (p—p') punktów sieci.

Sposób ustawienia n równań błędów objaśni najlepiej następujący przykład (patrz fig. 14.).

Punkty *A, B, C* i *D* związano siecią niwelacyjną z punktami stałemi I, II i III.

$n=10$, $p=7$, $p'=3$; w obec czego:
$n>2(p-p')$
$10>2(7-3)$.

Ilość warunków (dla spostrz. zawar.) byłaby $r=n-p+p'=10-7+3=6$, zaś ilość niewiadomych $k=p-p'=7-3=4$. Obieramy zatem metodę wyr. spostrz. pośrednich.

a) Poprawki $(p-p')$ wzniesień (spadów) jako niewiadome.

Dla 6-ciu niezależnych warunków ustawiamy 6 równań odchyłek wyrażonych *poprawkami,* a wybierając z nich *4 niezależne jako niewiadome,* ustawiamy 10 równań błędów. (Por. § 2 rozdz. V-go, str. 119.).

$$
\begin{array}{lccccccccccl}
1) & +\delta_1 & +\delta_2 & -\delta_3 & -\delta_4 & . & . & . & . & . & . & +\omega_1=0 \\
2) & . & -\delta_2 & +\delta_3 & . & . & . & -\delta_7 & . & . & +\delta_{10} & +\omega_2=0 \\
3) & . & . & . & . & -\delta_5 & -\delta_6 & +\delta_7 & . & . & . & +\omega_3=0 \\
4) & . & . & . & . & . & . & . & +\delta_8 & +\delta_9 & -\delta_{10} & +\omega_4=0 \\
5) & -\delta_1 & . & . & . & . & . & . & . & -\delta_9 & . & +\omega_5=0 \\
6) & . & . & . & +\delta_4 & +\delta_5 & . & . & . & . & . & +\omega_6=0 \\
\hline
p & {}^1/L_1, & {}^1/L_2, & {}^1/L_3, & {}^1/L_4, & {}^1/L_5, & {}^1/L_6, & {}^1/L_7, & {}^1/L_8, & {}^1/L_9, & {}^1/L_{10} &
\end{array}
$$

(przyczem $\omega_5=-h_1-h_9-(H_{\rm I}-H_{\rm II})$ $\omega_6=h_4+h_5-(H_{\rm III}-H_{\rm I})$.

Dla ustawienia równań błędów jest korzystnem, przyjęcie takich *poprawek* jako niewiadome, które, należąc do wzniesień (spadów) niezależnych, znajdują się w *największej ilości równań odchyłek;* w naszym przypadku przyjmiemy zatem

$$\delta_1=x,\ \delta_2=y,\ \delta_3=z \text{ i } \delta_7=t.$$

Podstawiając te wartości w równaniach poprawek, otrzymujemy:

$\delta_4=x+y-z+\omega_1$, $\delta_5=-\omega_6-\delta_4=-x-y+z-\omega_1-\omega_6$
$\delta_6=-\delta_5+\delta_7+\omega_3=+x+y-z+t+\omega_1+\omega_3+\omega_6$, $\delta_{10}=+y-z+t-\omega_2$
$\delta_9=-x+\omega_5$, $\delta_8=-\delta_9+\delta_{10}-\omega_4=+x+y-z+t-\omega_2-\omega_5$, $-\omega_4$ lub po uporządkowaniu:

$$
\begin{array}{lllll}
\delta_1 & =+x \quad . \quad . \quad . \quad . & \text{z wagą} & & {}^1/L_1 \\
\delta_2 & = \quad . +y \quad . \quad . \quad . & \text{,,} & \text{,,} & {}^1/L_2 \\
\delta_3 & = \quad . \quad . +z \quad . \quad . & \text{,,} & \text{,,} & {}^1/L_3 \\
\delta_4 & =+x+y-z \quad . +\omega_1 & \text{,,} & \text{,,} & {}^1/L_4 \\
\delta_5 & =-x-y+z \quad . -(\omega_1+\omega_6) & \text{,,} & \text{,,} & {}^1/L_5 \\
\delta_6 & =+x+y-z+t+(\omega_1+\omega_3+\omega_6) & \text{,,} & \text{,,} & {}^1/L_6 \\
\delta_7 & = \quad . \quad . \quad . +t \quad . & \text{,,} & \text{,,} & {}^1/L_7 \\
\delta_8 & =+x+y-z+t-(\omega_2+\omega_5)\ \omega_4 & \text{,,} & \text{,,} & {}^1/L_8 \\
\delta_9 & =-x \quad . \quad . \quad +\omega_5 & \text{,,} & \text{,,} & {}^1/L_9 \\
\delta_{10} & = \quad . +y-z+t-\omega_2 & \text{,,} & \text{,,} & {}^1/L_{10}.
\end{array}
$$

Po znalezieniu wartości niewiadomych z 4 równań normalnych otrzymujemy wyrównane wartości wzniesień: h_1+x, h_2+y, h_3+z i h_7+t, a zarazem wyrównane wysokości punktów A, B, C i D.

Jedn. błąd średni na 1 km będzie (o ile L przyjęto jako liczby, odpowiadające odpowiednim długościom ciągów w km):

$$\mu_0=\sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{n-k}}=\sqrt{\frac{\left[\frac{\delta\delta}{L}\right]}{6}}.$$

Również łatwo można wyznaczyć błędy średnie wzniesień wyrównanych wzgl. wysokości wyrównanych (H_A, H_B, H_C i H_D).

(Szczegółowe omówienie wyrównania spostrzeżeń pośrednich nastąpiło w rozdz. IV-tym).

b) Poprawki $(p-p')$ wysokości jako niewiadome.

Sposób ten jest bardzo przejrzysty i dozwala szybciej ustawić ***równania błędów wprost z figury.***

Weźmy na uwagę przykład omawiany poprzednio. Z wzniesień spotrzeganych obliczamy nasamprzód przybliżone wartości wysokości punktów A, B, C i D n. p.:

$$H_A'=H_\mathrm{I}+h_1,\quad H_B'=H_\mathrm{II}+h_8,\quad H_C'=H_\mathrm{III}-h_5,\quad H_D'=H_\mathrm{I}+h_1+h_2.$$

Oznaczając *poprawki wysokości punktów* A, B, C i D przez $x=\Delta H_A$, $y=\Delta H_B$, $z=\Delta H_C$ i $t=\Delta H_D$, otrzymujemy równania błędów ze związków między wyrównanemi wzniesieniami i wysokościami:

$$\begin{array}{lll}
h_1+\delta_1=H_A'+x-H_\mathrm{I}, & \text{zatem:}\ \delta_1=+x & \ldots \\
h_2+\delta_2=H_D'+t-H_A'-x, & \delta_2=-x\ \ldots+t & \\
h_3+\delta_3=H_D'+t-H_C'-z, & \delta_3=\ \ldots-z+t & +(H_\mathrm{I}-H_\mathrm{III}+h_1+h_2-h_3+h_5) \\
h_4+\delta_4=H_C'+z-H_\mathrm{I}, & \delta_4=\ \ldots+z & .+(H_\mathrm{III}-H_\mathrm{I}-h_4-h_5) \\
h_5+\delta_5=H_\mathrm{III}-H_C'-z, & \delta_5=\ \ldots-z & . \\
h_6+\delta_6=H_B'+y-H_\mathrm{III}, & \delta_6=\ .+y & ..+(H_\mathrm{II}-H_\mathrm{III}-h_6+h_8) \\
h_7+\delta_7=H_B'+y-H_C'-z, & \delta_7=\ .+y-z & .+(H_\mathrm{II}-H_\mathrm{III}+h_5-h_7+h_8) \\
h_8+\delta_8=H_B'+y-H_\mathrm{II}, & \delta_8=\ .+y & .. \\
h_9+\delta_9=H_\mathrm{II}-H_A'-x, & \delta_9=-x & \ldots+(H_\mathrm{II}-H_\mathrm{I}-h_1-h_9) \\
h_{10}+\delta_{10}=H_B'+y-H_A'-x, & \delta_{10}=-x+y & ..+(H_\mathrm{II}-H_\mathrm{I}-h_1+h_8-h_{10}).
\end{array}$$

Wagi tych równań są jak poprzednio $p_1=\frac{1}{L_1}$, $p_2=\frac{1}{L_2}, \ldots p_{10}=\frac{1}{L_{10}}$, przyczem L odpowiada ilości *km* drogi, odbytej przy niwelowaniu między poszczególnemi punktami.

Jedn. błąd średni $\mu_0=\sqrt{\frac{\left[\frac{\delta\delta}{L}\right]}{6}}$, gdyż $n-k=10-4=6$.

Wyznaczając przy rozwiązywaniu równocześnie i wartości spółczynników $Q_{1.1}$, $Q_{1.2}$, $Q_{1.3}$, $Q_{1.4}$, $Q_{2.2}$ i t. d. aż do $Q_{4.4}$, obliczamy łatwo i błędy średnie wysokości punktów:

$$\mu_A = \mu_x = \mu_0 \sqrt{Q_{1.1}}, \quad \mu_C = \mu_z = \mu_0 \sqrt{Q_{3.3}},$$
$$\mu_B = \mu_y = \mu_0 \sqrt{Q_{2.2}}, \quad \mu_D = \mu_t = \mu_0 \sqrt{Q_{4.4}}.$$

Szczegółowe omówienie wyrównania spostrzeżeń pośrednich znajdzie czytelnik w ustępach rozdziału IV-go.

Metoda spostrzeżeń pośrednich bywa często używaną w przypadkach, gdy sieci niwelacyjne mają wprawdzie dość dużo punktów, których wysokości należy wyznaczyć, lecz stosunkowo *niezbyt wiele punktów węzłowych*. Dzielimy wówczas wyrównanie na *dwie* części. Nasamprzód wyznaczamy tylko punkty węzłowe metodą *spostrzeżeń pośrednich;* następnie wyrównujemy poszczególne ciągi między punktami węzłowemi, względnie między punktami stałemi i węzłowemi jako *spostrzeżenia,* których *suma jest stałą.*

§ 8. Uwzględnienie przy niwelacji wpływu zmiany przyspieszenia ciężkości.

Warunki występujące przy wyrównaniu sieci, względnie ciągów niwelacyjnych układaliśmy w poprzednich ustępach pod założeniem, że poziomy geodezyjne są powierzchniami *równoległemi.*

Założenie to, wystarczające przy niwelacji dla celów technicznych, nie może mieć miejsca przy niwelacji sieci lub ciągów I-rzędnych, które mają służyć także i celom naukowym.

Jak bowiem wiadomo, poziomy geodezyjne *nie są* w rzeczywistości powierzchniami *równoległemi* z powodu zmiany przyspieszenia siły ciężkości wraz z szerokością geograficzną; nie jest więc rzeczą obojętną, w którem miejscu weźmiemy na uwagę odstęp dwu poziomów geodezyjnych.

Dokładne omówienie tej sprawy należy do geodezji wyższej i możnaby ją tu zupełnie pominąć, gdyby nie konieczność zastosowania przy warunkach sieci i ciągów niwelacyjnych I-rzędnych pewnych poprawek, bez których uwzględnienia, wyniki wyrównania byłyby błędne. W geodezji wyższej rozróżniamy wzniesienia *dynamiczne* i *ortometryczne,* jakoteż dwie odpowiadające tym wzniesieniom *poprawki,* t. j. *dynamiczną* i *ortometryczną,* przy pomocy których zmieniamy wzniesienia uzyskane z niwelacji ścisłej, uważane za bezbłędne, na odpowiednie wzniesienia dynamiczne względnie ortometryczne.

Ponieważ poprawki dynamiczne wymagają wykonania szeregu pomiarów grawimetrycznych w punktach rozmieszczonych wzdłuż ciągu niwelacyjnego, *poprzestajemy* zazwyczaj przy przeprowadzaniu niwelacji I-rzędnej *na uwzględnieniu poprawek ortometrycznych,* tembardziej, że po dokonaniu potrzebnych pomiarów grawimetrycznych możemy zawsze łatwo przejść ze wzniesień ortometrycznych na dynamiczne.

Ponieważ poprawki ortometryczne muszą być uwzględnione w warunkach wyrównania, przeto podajemy dwa wzory (przybliżone), z których pierwszy zawiera poprawkę ortometryczną wzniesienia między dwoma punktami A i B, drugi poprawkę, jaką trzeba uwzględnić przy obliczaniu wysokości ortometrycznej (ponad poz. morza) punktu B z danej wysokości ortom. punktu A.

Oznaczając wzniesienia między poszczególnemi punktami ciągu AB otrzymane z niwelacji ścisłej przez $\delta h'$, szerokość graficzną punktu B przez φ_B, średnią arytmetyczną szerokości geograficznej punktów A i B przez φ_0, oraz szerokości geograficzne punktów pośrednich tego ciągu przez φ (zmienne), otrzymujemy następujący wzór na h_A^B *wzniesienie ortometryczne punktu B nad A*:

$$h_A^B = \Sigma(\delta h') + \beta \sin(\varphi_0 + \varphi_B) \Sigma_A^B (\varphi - \varphi_B) \delta h',$$

przyczem spółczynnik $\beta = \backsim 0{\cdot}0053$.

Drugi wyraz strony prawej tego wzoru jest *poprawką ortometryczną* wzniesienia punktu B nad punktem A.

Przy niwelacji z północy w kierunku południa odpowiada znak poprawki znakowi wzniesienia, t. j. gdy punt B leży wyżej niż A, należy ją dodać, gdy zaś leży niżej niż A, odjąć; przeciwnie ma się rzecz przy niwelacji z południa na północ *znak poprawki* jest *zawsze przeciwny znakowi wzniesienia.*

Drugi wzór, który tu podajemy odnosi się do wysokości ortom. (ponad poziom morza) H_A i H_B punktów A i B.

Z pojęcia wysokości ortometrycznej wynika, że dla uzyskania H_B nie wystarcza dodać do H_A wzniesienia ortom. h_A^B, lecz trzeba *uwzględnić* jeszcze *nierównoległość poziomu geodezyjnego A z poziomem morza* (geoidą zerową), co uzyskujemy przy pomocy w praktyce używanego wzoru (przybliżonego):

$$H_B = H_A + h_A^B + \beta \sin(\varphi_A + \varphi_B) \sin(\varphi_A - \varphi_B) H_A.$$

§ 9. Wyrównanie trygonometrycznych pomiarów wysokości.

Aby przy trygonometrycznym pomiarze wysokości *zmniejszyć niekorzystny wpływ spółczynnika refrakcji k*, staramy się wykonać pomiar wzniesienia punktu B nad punktem A ze stanowiska, znajdującego się mniej więcej *na osi symetrji* obu tych punktów.

Wyznaczając z jednego stanowiska wzniesienia między kilku punktami, nie jesteśmy w stanie uczynić zadość temu warunkowi, co ma ten skutek, że poszczególnym wzniesieniom odpowiadają różne wagi.

Wzór przybliżony na *trygonometrycznie wyznaczone wzniesienie* h_A punktu A nad punktem obserwacyjnym I (wysokością przyrządu na stanowisku I) przedstawia się:

$$h_A = d_A \operatorname{tg} \alpha_A + \frac{1-k}{2R} d_A^2, \tag{1}$$

przyczem d_A oznacza odległość poziomą punktów I i A, α_A kąt wysokości kierunku IA, zaś R średni promień ziemski dla odpowiedniej szerokości geograficznej.

Analogicznie jest $h_B = d_B \operatorname{tg} \alpha_B + \frac{1-k}{2R} d_B^2$.

Różnica $h_B - h_A = h_A^B$ daje nam wzniesienie punktu B nad A.

Przy pomiarze staramy się tak obierać stanowiska, aby można było wyznaczyć jak największą ilość wzniesień, które Jordan w tym przypadku nazywa *„przekątniami“ wysokości.*

W ten sposób wyznaczone wzniesienia (przekątnie) tworzą zazwyczaj sieci, które możemy nazwać *„sieciami wysokości"*.

Wyrównanie sieci wysokości przeprowadzamy w sposób analogiczny jak wyrównanie sieci niwelacyjnych; wszystkie wskazówki, jakie podaliśmy poprzednio przy niwelacji, mają więc i tu pełne zastosowanie. Natomiast musimy omówić dokładniej sprawę przyjmowania wag dla poszczególnych wzniesień.

Jeżeli pominiemy stosunkowo nieznaczny wpływ błędów odległości IA i IB, a przyjmując błędy średnie kątów α_A i α_B równe, oznaczymy je przez μ_α, zaś błąd średni spółczynnika k przez $\mu_\varkappa$, otrzymamy na μ_h, *błąd średni wzniesienia* z A na B

$$h_B^A = h_B - h_A = d_B \operatorname{tg} \alpha_B - d_A \operatorname{tg} \alpha_A + \frac{d_B^2 - d_A^2}{2R} - \left(\frac{d_B^2 - d_A^2}{2R}\right) k \tag{2}$$

wzór następujący:

$$\mu_h^2 = \left\{\left(\frac{d_B}{\cos^2 \alpha_B}\right)^2 + \left(\frac{d_A}{\cos^2 \alpha_A}\right)^2\right\} \frac{\mu_\alpha^2}{\varrho^2} + \left(\frac{d_B^2 - d_A^2}{2R}\right)^2 \mu_\varkappa^2. \tag{3}$$

Ponieważ kąty α_A i α_B są zazwyczaj stosunkowo małe tak, że $\cos \alpha_A = \backsim \cos \alpha_B = \backsim 1$, możemy dla wyznaczenia wag użyć wzoru jeszcze bardziej uproszczonego, mianowicie

$$\mu_h^2 = (d_A^2 + d_B^2) \frac{\mu_\alpha^2}{\varrho^2} + \left(\frac{d_B^2 - d_A^2}{2R}\right) \mu_\varkappa^2. \tag{4}$$

Biorąc R dla $\varphi = 50^0$ (co mniej więcej odpowiada i naszym warunkom), oraz przyjmując $\mu_\alpha = \pm 5''$ zaś $\mu_\varkappa = 0{\cdot}0325$, ułożył Jordan następujący wzór na μ_h^2, którego odwrotności możemy użyć jako wagi po wstawieniu odpowiednich d_A i d_B w km:

$$\mu_h^2 = 0{\cdot}0005876\,(d_A^2 + d_B^2) + 0{\cdot}000006485\,(d_B^2 - d_A^2)^2. \tag{5}$$

Wzór (5) dostarcza nam $\pm \mu_h$ w m.

ROZDZIAŁ DZIEWIĄTY.

Tryangulacja (Część pierwsza). Wyrównania stacyjne.

§ 1. Pomiar kątów a kierunków.

W ustępie 5-tym § 3-go rozdz. II-go (str. 44.) zastanawialiśmy się nad dokładnością kąta, wyznaczonego metodą kątową i metodą kierunkową. Z uwag tam przytoczonych wynika, że z wyjątkiem pomiarów bardzo dokładnych, jak to ma miejsce przy tryangulacji I-rzędnej, należy posługiwać się w *praktyce raczej* metodą *kierunkową*, jak kątową.

Mimoto używamy w pewnych przypadkach także i przy pomiarach mniej dokładnych metody kątowej, n. p. gdy mamy powody przypuszczać, że stanowisko przyrządu jest niedostatecznie stałe, kąty małe i t. p. Z tego powodu należy dorzucić parę uwag o obu metodach.

Jeśli na pewnem stanowisku (pewnej stacji) są do pomiaru tylko dwa kierunki, pomiar ich jest (pomijając zastosowanie metody repetycyjnej) identyczny z pomiarem kąta, zawartego między obu temi kierunkami. Natomiast występuje różnica obu metod pomiarów już przy trzech kierunkach; w tym przypadku, jakoteż ogólnie, gdy K_r kierunków zbiega się na stacji, należy zdecydować się na jedną z obu metod.

Podczas gdy przy pomiarach kątowych mierzymy *każdy* z poszczególnych *kątów osobno*, polega metoda kierunkowa na uzyskaniu odczytów, odpowiadających poszczególnym kierunkom. Odczyty odnoszące się do K_r kierunków, zbiegających się na stacji, nazywamy *serją (pocztem)* [1]) kierunków. Takich seryj dokonujemy zazwyczaj kilka lub kilkanaście zależnie od dokładności, jaką zamierzamy osiągnąć.

Przy wyrównywaniu spostrzeżeń, dokonanych obu omawianemi metodami, należy uwzględnić następujące uwagi.

---

[1]) Nazwa używana w „Przepisach obow. przy pomiarach metodą tryg. i polig...." M. R. P. Warszawa 1920.

O ile przy pomiarach zastosowano metodę kątową, wyrównanie może się odnosić tak do kątów jak i do kierunków, gdyż każdy kąt możemy rozłożyć na dwa odpowiednie kierunki. Uważając kąty jako wielkości spostrzegane, przeprowadzamy wyrównanie kątów; równie dobrze możemy jednak, zastępując kąty różnicami kierunków ($kt = kr_p - kr_l$), uważać kierunki jako wielkości spostrzegane i w konsekwencji przeprowadzić wyrównanie kierunków.

Wynik wyrównania będzie w obu przypadkach jednakowy, tylko w przypadku pierwszym otrzymamy *jednostkowy błąd średni* μ_0, odnoszący się *do kąta,* zaś w drugim *do kierunku.*

Oznaczając jedn. błąd średni kątowy przez $(\mu_0)_{kt}$, zaś jedn. błąd śr. kierunkowy przez $(\mu_0)_{kr}$, otrzymamy związek:

$$(\mu_0)_{kt} = (\mu_0)_{kr}\sqrt{2}, \tag{1}$$

odpowiadający wzorowi (20) w ust. 5-tym § 3-go rozdz. II-go (str. 44.), z którego równocześnie wynika, *że pomiar kierunku ma wagę dwa razy większą niż pomiar kąta.*

Ze stanowiska teoretycznego jest zatem zupełnie obojętnem, czy przy pomiarach, wykonanych metodą kątową, wyrównamy kąty, czy też kierunki; natomiast biorąc rzecz ze strony praktycznej, należy obrać w tym przypadku sposób nastręczający mniej pracy rachunkowej.

Przejdźmy następnie do wyrównania spostrzeżeń dokonanych *metodą kierunkową.*

O ile na stacji zbiega się więcej kierunków niż dwa, co ma zresztą miejsce z reguły w sieciach tryangulacyjnych, musimy ze względu na metodę spostrzegania przeprowadzić *wyrównanie kierunków,* a nie kątów.

Po tych uwagach o kątach i kierunkach możemy przyjść do wyrównań stacyjnych.

§ 2. Wyrównanie stacyjne w przypadku, gdy suma kątów powinna być równa kątowi pełnemu. (Warunek kołowy).

Dokładniejsze pomiary kątowe przeprowadzano *dawniej* bardzo często metodą *repetycyjną* (z powtarzaniem).

Dla uzyskania kontroli mierzono tą metodą prócz ($K_r - 1$) kątów, utworzonych przez bezpośrednio po sobie następujące kierunki, także i *kąt między kierunkami: ostatnim* i *pierwszym.*

Kontrola wynikająca z tego sposobu pomiaru miała na celu nietylko wyrównanie błędów przypadkowych pomiaru, lecz także i wyrugowanie błędu, powstającego przy pomiarach repetycyjnych wskutek bardzo nieznacznego *przesuwania się limbusu pod wpływem ruchów alhidady.*

Ze względu na to, że i dziś jeszcze musimy się czasem posługiwać repetycyjnemi pomiarami kątów (przy sieciach tryangulacyjnych o znaczeniu lokalnem jest użycie tej metody przy braku precyzyjniejszych teodolitów nawet i dziś wskazane), omówimy krótko ten przypadek wyrównania.

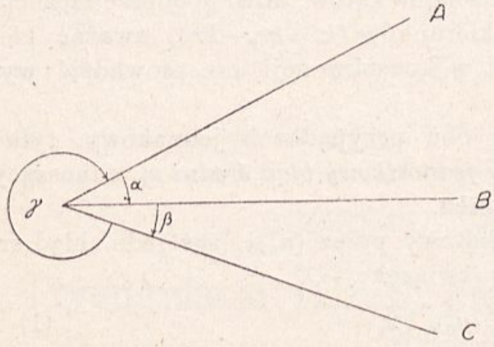

Fig. 15.

Jeżeli ilość repetycyj poszczególnych kątów nie była jednakowa, należy wprowadzić do rachunku wagi, które przyjmujemy przy *niewielkiej* liczbie powtarzań, t. j. 2 lub 3, równe r^2, zaś przy *większej* liczbie powtarzań, równe *wprost* r. Żadne z tych przyjęć *nie jest ściśle*, dlatego podajemy także i właściwy wzór, aby czytelnik mógł się zorjentować, które z nich jest odpowiedniejsze w pewnym konkretnym przypadku, mianowicie:

$$p_r = \frac{\mu_1^2}{\mu_r^2} = \frac{\mu_n^2 + \mu_0^2}{\frac{1}{r}\left(\mu_n^2 + \frac{\mu_0^2}{r}\right)} = r^2 \frac{\mu_n^2 + \mu_0^2}{r\,\mu_n^2 + \mu_0^2}, \tag{1}$$

przyczem μ_1 oznacza błąd śr. pojedynczego pomiaru kąta, (uważany tu jako jednostk. bł. śr.), μ_r błąd średni r razy repetowanego kąta, μ_n błąd średni nastawienia na cel, μ_0 błąd średni odczytu, przy pomiarze kierunku.

Po obiorze odpowiednich wag przystępujemy do wyrównania kątów na podstawie warunku:

$$(\alpha + \delta_\alpha) + (\beta + \delta_\beta) + (\gamma + \delta_\gamma) - 360^0 = 0. \tag{2}$$

Znalazłszy następnie wartość odchyłki ω ze związku

$$\alpha + \beta + \gamma - 360^0 = \omega, \tag{3}$$

układamy równanie odchyłki wyrażonej przez poprawki δ: (4)

$$\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma + \omega = 0,$$

poczem wyrównanie następuje wedle zasad wyłuszczonych w § 4-tym rozdziału III-go (jako spostrzeżeń mających dostarczyć stałą sumę), lub wedle metody opisanej w § 3-cim rozdz. V-go (jako spostrzeżeń zawarunkowanych).

W analogiczny sposób postępujemy przy wyrównaniu kątów, których *suma* jest nam z góry *daną*. Przypadek ten ma miejsce, gdy kąty mierzone na pewnej stacji są zawarte między dwoma kierunkami „stałemi", t. j. ustalonemi na podstawie poprzednio przeprowadzonego wyrównania.

Oznaczając kąt zawarty między kierunkami stałemi przez φ, otrzymujemy jako warunek wyrównania:

$$(\alpha + \delta_\alpha) + (\beta + \delta_\beta) + (\gamma + \delta_\gamma) - \varphi = 0; \tag{2*}$$

następnie wyznaczywszy odchyłkę ω ze związku:

$$\alpha+\beta+\gamma-\varphi=\omega, \tag{3*}$$

ułożymy, jak poprzednio, równanie odchyłki wyrażonej przez poprawki δ:

$$\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma+\omega=0. \tag{4*}$$

Choć obie metody wyrównania były omówione wyczerpująco w poprzednio zacytowanych rozdziałach z podaniem przykładów (dla spostrz. zawarunkowanych w § 8 rozdz. V-go str. 137.), podajemy w krótkości przebieg wyrównania oraz odnośne wzory.

Poprawki poszczególnych kątów obliczamy przy użyciu metody pierwszej wyrównania z wzoru

$$\delta_i=-\omega\frac{\frac{1}{p_i}}{\left[\frac{1}{p}\right]}, \tag{5}$$

przy użyciu metody drugiej z równań poprawek, które w tym przypadku przybierają kształt:

$$\delta_i=\frac{1}{p_i}k; \tag{6}$$

ponieważ jednak z jedynego równania korelat

$$\left[\frac{1}{p}\right]k+\omega=0 \tag{7}$$

można wyznaczyć

$$k=-\frac{\omega}{\left[\frac{1}{p}\right]}, \tag{8}$$

jest ostatecznie ***poprawka*** δ_i, obliczona przy użyciu metody spostrzeżeń zawarunkowanych, także równa

$$\delta_i=-\omega\frac{\frac{1}{p_i}}{\left[\frac{1}{p}\right]}. \tag{5*}$$

Z powyższego wynika, że odchyłkę ω rozdzielamy na poszczególne kąty odwrotnie proporcjonalnie do ich wag, a więc przy wagach jednakowych równo na poszczególne kąty.

Jednostkowy błąd średni μ_0 obliczamy wedle znanej formuły:

$$\mu_0=\frac{\omega}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}. \tag{9}$$

Błędy średnie kątów są:

$$\text{przed wyrównaniem} \quad \mu_i = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{p_i}} = \omega \sqrt{\frac{\frac{1}{p_i}}{\left[\frac{1}{p}\right]}}, \tag{10}$$

$$\text{po wyrównaniu} \quad \mu_{x_i} = \mu_0 \sqrt{\frac{\frac{1}{p_i}\left(\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p_i}\right)}{\left[\frac{1}{p}\right]}} = \frac{\omega}{\left[\frac{1}{p}\right]} \sqrt{\frac{1}{p_i}\left(\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p_i}\right)}. \tag{11}$$

Stosunek błędu średniego po wyrówn. do błędu średn. przed wyrównaniem wynosi

$$\frac{\mu_{x_i}}{\mu_i} = \sqrt{\frac{\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p_i}}{\left[\frac{1}{p}\right]}}. \tag{12}$$

Jeżeli wagi przyjęto przed wyrównaniem jednakowe, przechodzą powyższe wzory na następujące, o ile ilość kątów mierzonych wynosi n:

$$\mu_i = \mu_0 = \frac{\omega}{\sqrt{n}} \tag{10*}$$

$$\mu_{x_i} = \mu_0 \sqrt{\frac{n-1}{n}} = \frac{\omega}{n}\sqrt{n-1}, \tag{11*}$$

zaś stosunek błędów średnich po i przed wyrównaniem jest:

$$\frac{\mu_{x_i}}{\mu_i} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}. \tag{12*}$$

Przy *znaczniejszej liczbie n* jest zatem zysk dokładności *niezbyt wielki*

§ 3. Wyrównanie kątów mierzonych w różnych kombinacjach.

Kontrolę kątów mierzonych na stacji możemy uzyskać nietylko przez pomiar kąta dopełniającego do 360^0, ale także mierząc sumy pewnych kątów, czyli wykonując pomiar kątów w *różnych kombinacjach.*

Sposób ten pomiaru okazał się w praktyce *niekorzystnym,* (z wyjątkiem pomiaru kątów we wszystkich kombinacjach, czyli t. zw. metody Schreibera, której wyrównanie omówimy obszernie w następnym paragrafie), z tego względu, że komplikuje w znacznym stopniu późniejsze wyrównanie sieci, obejmującej tę stację.

Choć w obec tego staramy się nie wykonywać pomiarów kątów w różnych kombinacjach, może zajść ten przypadek w praktyce (n. p. przy uzupełnianiu dawniejszych spostrzeżeń nowemi, o ile nie można z powodu zniszczenia niektórych punktów tryang. pomierzyć wszystkich poprzednio obserwowanych kierunków i t. p.).

Wyrównanie możemy przeprowadzić metodą spostrzeżeń ***pośrednich*** lub ***zawarunkowanych***, o ile jednak ma nastąpić później ***wyrównanie sieci tryangulacyjnej*** obejmującej tę stację, wyrównujemy spostrzeżenia stacyjne wyłącznie metodą ***spostrzeżeń pośrednich***.

Ustalenie ilości niewiadomych (spostrzeżeń niezależnych) względnie warunków wynika z następującego rozumowania.

Jeśli na stacji zbiega się K_r kierunków, wystarcza do jednorazowego ich ustalenia (K_r—1) niezależnych kątów, ilość niewiadomych jest zatem wtedy:

$$k = K_r - 1; \tag{1}$$

zaś ilość niezależnych warunków:

$$r = n - (K_r - 1) = n - K_r + 1, \tag{2}$$

przyczem n oznacza liczbę kątów spostrzeganych.

Biorąc na uwagę także i ten przypadek, że na ogólną liczbę K_r kierunków jest K_r' kierunków stałych, otrzymamy ***ilość niewiadomych***

$$k = K_r - K_r', \tag{1*}$$

zaś ilość ***warunków***

$$r = n - (K_r - K_r') = n - K_r + K_r'. \tag{2*}$$

Ilość warunków r podajemy, aby w przypadkach, w których ograniczamy się wyłącznie do wyrównania stacyjnego, można było wybrać metodę wygodniejszą, t. j. nastręczającą mniej pracy rachunkowej.

Równania błędów układamy na podstawie spostrzeżeń kątów, zestawionych w raptularzu polowym, posługując się z reguły dla uniknięcia pomyłek odpowiednim szkicem polowym. Można je także ułożyć, posługując się warunkami, jakie kąty mają spełniać na odnośnej stacji; sposób ten jako dłuższy bywa jednak używany bardzo rzadko.

Najczęściej obieramy jako niewiadome x, y, z,.... kąty (wyrównane), które poszczególne kierunki zawierają z jednym przez nas (jako początkowym) obranym kierunkiem, a wyrażając wszystkie pomierzone kąty przez niewiadome, uzyskujemy w łatwy sposób n równań błędów, odpowiadających n spostrzeżeniom.

Tak też postąpiliśmy w 3-cim przykładzie § 7-go rozdziału IV-go (str. 101.), na który powołujemy się w tem miejscu.

W wspomnianym przykładzie przyjęto ze względu na niejednakową ilość repetycyj poszczególnych kątów wagi spostrzeżeń różne; zazwyczaj mierzymy każdy kąt jednakową ilość razy i przyjmujemy w takim razie wagi spostrzeżeń jednakowe.

O ile ma nastąpić później wyrównanie sieci tryangulacyjnej, której jeden z punktów stanowi powyższa stacja, ***wyrównanie stacyjne stanowi pierwszą część wyrównania sieci*** przy pomocy spostrzeżeń pośrednich z warunkami. Po wyrównaniu stacyjnem następuje dalsze wyrównanie sieci metodą Hansena-Helmerta, opisaną w § 3-cim rozdz. VI-go (str. 151.), lub — jak to zazwyczaj dawniej miało miejsce — metodą Bessela, wyszczególnioną w § 4-tym (str. 157.) wspomnianego rozdziału.

O ile miałaby być przy wyrównaniu sieci użyta metoda druga (Bessela), muszą być obliczone także i wartości spółczynników nieoznaczonych równań wag, t. j. poszczególne $Q_{1.1}$, $Q_{2.2}$ i t. d., co też uczyniono w przykładzie, na który się powołujemy.

W rzadkich przypadkach, gdy celem naszym jest przeprowadzenie tylko wyrównania stacyjnego, posługujemy się metodą spostrzeżeń *zawarunkowanych* jeżeli

$$r < k, \tag{3}$$

t. j. gdy

$$n-(K_r-K_r') < K_r-K_r' \tag{4}$$

lub

$$\boldsymbol{n < 2\,(K_r-K_r')}. \tag{4*}$$

Gdy ***niema*** na pewnej stacji ***kierunków stałych*** należy położyć $K_r'=1$.

Biorąc na uwagę **przykład 3-ci** § 7-go rozdz. 7-go rozdz. IV-go (str. 101., wyrównanie stacyjne dla punktu D sieci prof. *Schwerda)*, otrzymujemy w obec 8-miu pomierzonych kątów przy $K_r=5$-ciu kierunkach (w obec braku kierunków stałych) ilość warunków r ze związku (2):

$$r=n-K_r+1=8-5+1=4,$$

t. j. $r=k$, gdyż wedle związku (4):

$$n=2\,(K_r-1) \text{ t. j. } 8=2\,(5-1).$$

O ile nie miałoby nastąpić później wyrównanie całkowitej sieci tryangulacyjnej, możnaby w tym przypadku przeprowadzić wyrównanie równie dobrze metodą spostrzeżeń zawarunkowanych.

4, w grę tu wchodzące, warunki ułożylibyśmy również na podstawie szkicu kierunków (patrz fig. 6-ta str. 72), otrzymując:

$$\begin{array}{rl}
\text{I.} & \alpha_1+\delta_1-\alpha_6-\delta_6-\alpha_7-\delta_7=0 \\
\text{II.} & \alpha_2+\delta_2-\alpha_4-\delta_4-\alpha_5-\delta_5=0 \\
\text{III.} & \alpha_5+\delta_5-\alpha_7-\delta_7-\alpha_8-\delta_8=0 \\
\text{IV.} & -\alpha_1-\delta_1+\alpha_2+\delta_2-\alpha_3-\delta_3=0.
\end{array}$$

Następnie po wyznaczeniu odchyłek ω z analogicznych związków:

$$\alpha_1-\alpha_6-\alpha_7=+0''{\cdot}26 \qquad \alpha_5-\alpha_7-\alpha_8=-0''{\cdot}51$$
$$\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5=-0''{\cdot}79 \qquad -\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=-0''{\cdot}14$$

wypadłby schemat równań odchyłek następująco:

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	ω
a	+1	.	.	.	.	−1	−1	.	+0·26
b	.	+1	.	−1	−1	.	.	.	−0·79
c	.	.	.	.	+1	.	−1	−1	−0·51
d	−1	+1	−1	.	.	.	.	.	−0·14
$1/p$	$1/90$ 0·0111	$1/80$ 0·0125	$1/70$ 0·0173	$1/20$ 0·0500	$1/20$ 0·0500	$1/40$ 0·0250	$1/60$ 0·0167	$1/20$ 0·0500	

Zaś równania korelat przybrałyby kształt:

$$\begin{array}{rrrrr}
0{\cdot}0528\,k_1 & . & +0{\cdot}0167\,k_3 & -0{\cdot}0111\,k_4 & +0{\cdot}26=0 \\
. & 0{\cdot}1125\,k_2 & -0{\cdot}0500\,k_3 & +0{\cdot}0125\,k_4 & -0{\cdot}79=0 \\
0{\cdot}0167\,k_1 & -0{\cdot}0500\,k_2 & +0{\cdot}1167\,k_3 & . & -0{\cdot}51=0 \\
-0{\cdot}0111\,k_1 & +0{\cdot}0125\,k_2 & . & +0{\cdot}0379\,k_4 & -0{\cdot}14=0
\end{array}$$

Ostatecznie otrzymalibyśmy wartości poprawek po wyznaczeniu z równań korelat wartości k_1, k_2, k_3 i k_4 ze związków kształtu

$$\delta_i=\frac{1}{p_i}(a_i k_1+b_i k_2+c_i k_3+d_i k_4),$$

oraz jednostkowy błąd średni (kąta raz mierzonego):

$$\mu_0=\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{4}},\ (\text{gdyż } r=4).$$

Aby natomiast wyznaczyć błędy średn. kątów wyrównanych, należałoby użyć wzoru (18) § 6-go rozdz. V-go, kładąc przy wyznaczaniu błędu średniego kąta α_1, (oraz jego wagi) $F_1=1$ zaś resztę $F=0$; analogicznie należy postąpić przy wyznaczaniu błędów średnich innych kątów wyrównanych.

§ 4. Wyrównanie kątów mierzonych we wszystkich kombinacjach (metodą Schreibera).

Metoda ta polega na pomiarze kątów, powstałych ze *wszystkich kombinacyj* kierunków zbiegających się na stacji, jak to przedstawiono na figurze 16-tej.

Przy K_r kierunkach należy zatem pomierzyć $\frac{K_r(K_r-1)}{2}$ kątów.

Na załączonej figurze przyjęto $K_r=4$, przeto $\frac{K_r(K_r-1)}{2}=\frac{4.3}{2}=6$ kątów, a mianowicie (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4) i (3,4).

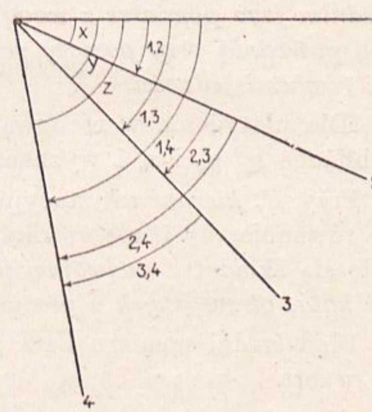

Fig. 16.

Oznaczając wartości wyrównane trzech pierwszych kątów x, y i z, otrzymamy wedle wywodów § 2-go rozdz. V-go sześć równań błędów:

$$\begin{array}{ll}
\delta_{1,2}= x\ .\ .-(1,2) & \\
\delta_{1,3}=\ .\ y\ .-(1,3) & \\
\delta_{1,4}=\ .\ .\ z-(1,4) & (1) \\
\delta_{2,3}=-x+y\ .-(2,3) & \\
\delta_{2,4}=-x\ .+z-(2,4) & \\
\delta_{3,4}=\ .-y+z-(3,4) &
\end{array}$$

Oczywiście, że równania (1) możemy urobić *odrazu z figury* załączonej, biorąc na uwagę kąty wyrównane, n. p.: $(1,2)+\delta_{1,2}=x$, zatem $\delta_{1,2}=x-(1,2)$; $(2,3)+\delta_{2,3}=y-x$, zatem $\delta_{2,3}=-x+y-(2,3)$ i t. d.

*

Równania normalne, wraz z dodanem do nich równaniem sum, przedstawiają się następująco:

$$\begin{array}{r} 3x-\ y-\ z-(1,2)+(2,3)+(2,4)=0 \\ -\ x+3y-\ z-(1,3)-(2,3)+(3,4)=0 \\ -\ x-\ y+3z-(1,4)-(2,4)-(3,4)=0 \\ \hline x+\ y+\ z-(1,2)-(1,3)-(1,4)=0. \end{array} \tag{2}$$

Zamiast rozwiązywać równania normalne algorytmem Gaussa, t. j. sposobem podanym w § 2-gim rozdz. IV-go, otrzymujemy wartości niewiadomych, dodając do każdego równania normalnego podpisane równanie sum. Zatem będzie:

$$\begin{array}{l} 4x-2.(1,2)-(1,3)+(2,3)-(1,4)+(2,4)=0 \\ 4y-2.(1,3)-(1,2)-(2,3)-(1,4)+(3,4)=0 \\ 4z-2.(1,4)-(1,2)-(2,4)-(1,3)-(3,4)=0 \end{array} \tag{3}$$

lub ostatecznie:

$$\begin{aligned} x&=\frac{2.(1,2)+\{(1,3)-(2,3)\}+\{(1,4)-(2,4)\}}{4} \\ y&=\frac{2.(1,3)+\{(1,2)+(2,3)\}+\{(1,4)-(3,4)\}}{4} \\ z&=\frac{2.(1,4)+\{(1,2)+(2,4)\}+\{(1,3)+(3,4)\}}{4}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wartość wyrównana kąta, mierzonego metodą Schreibera, równa się średniej arytmetycznej ogólnej, utworzonej z wartości otrzymanej przy bezpośrednim jego pomiarze z wagą 2 i z wartości tegoż kąta, otrzymanych drogą pośrednią przy pomocy reszty kątów, obranych za niewiadome, z wagami równemi jedności.

(Dla ułatwienia w rachowaniu można przyjąć na x, y i z wartości przybliżone x_0, y_0 i z_0 i wyznaczyć ich poprawki ξ, η i ζ).

Przy K_r *kierunkach* stacyjnych będziemy mieli w mianowniku każdego równania (4) *liczbę równą ilości kierunków zatem* K_r, zaś licznik będzie się składał z *podwójnej wartości kąta mierzonego* i *(K_r—2) wartości tegoż kąta, otrzymanych z pomiarów pośrednich jak wyżej.*

Błąd średni pomiaru kąta przed wyrównaniem otrzymamy ze znanego wzoru

$$\mu_0=\sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{n-k}};$$

zatem w omawianym przypadku ze względu na wagi równe, $n=6$, $k=3$:

$$\mu=\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{3}}. \tag{4}$$

W przypadku K_r kierunków stacyjnych jest $n=\frac{K_r(K_r-1)}{2}$, $k=K_r-1$; zatem ze względu na wagi równe

$$\mu=\sqrt{\frac{2[\delta\delta]}{(K_r-1)(K_r-2)}}, \tag{4*}$$

ponieważ $n-k=\frac{K_r(K_r-1)}{2}-(K_r-1)=\frac{(K_r-1)(K_r-2)}{2}$.

Natomiast jest błąd średni kierunku (przed wyrównaniem) μ'

$$\mu'=\frac{\mu}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{(K_r-1)(K_s-2)}}. \tag{5}$$

* * * Przechodząc do równań wag, otrzymamy ze względu na przyjęcie wag równych przy pomiarze poszczególnych kątów (więc $Q_{1.1}=[\alpha\alpha]$, $Q_{1.2}=[\alpha\beta]$, $Q_{1.3}=[\alpha\gamma]$,.... $Q_{2.2}=[\beta\beta]$, $Q_{2.3}=[\beta\gamma]$.... $Q_{3.3}=[\gamma\gamma]$....), biorąc na uwagę K_r kierunków stacyjnych:

$$\begin{array}{c|llll}
 & (K_r-1)[\alpha\alpha]- & [\alpha\beta]- & [\alpha\gamma]\ldots=1 & \\
K_r-1 & -[\alpha\alpha]+(K_r-1)[\alpha\beta]- & & [\alpha\gamma]\ldots=0 & \\
\text{równań} & -[\alpha\alpha]- & [\alpha\beta]+(K_r-1)[\alpha\gamma]\ldots=0 & & (6)\\
\text{wag} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
\hline
 & \text{Równ. sum:}\quad [\alpha\alpha]+ & [\alpha\beta]+ & [\alpha\gamma]+\ldots=1. &
\end{array}$$

Po dodaniu równania sum do poszczególnych równań wyniknie:

$$[\alpha\alpha]=\frac{2}{K_r},\quad [\alpha\beta]=\frac{1}{K_r},\quad [\alpha\gamma]=\frac{1}{K_r},\ldots. \tag{7}$$

Analogicznie otrzymamy z równań wag o niewiadomych $[\alpha\beta]$, $[\beta\beta]$, $[\beta\gamma]$ i t. d.:

$$[\alpha\beta]=\frac{1}{K_r},\quad [\beta\beta]=\frac{2}{K_r},\quad [\beta\gamma]=\frac{1}{K_r}\ldots, \tag{7*}$$

z równań wag o niewiadomych $[\alpha\gamma]$, $[\beta\gamma]$, $[\gamma\gamma]$:

$$[\alpha\gamma]=\frac{1}{K_r},\quad [\beta\gamma]=\frac{1}{K_r},\quad [\gamma\gamma]=\frac{2}{K_r},\ldots \text{i t. d.} \tag{7**}$$

Błędy średnie *kątów wyrównanych* (po wyrównaniu) są zatem

$$\mu_x=\mu\sqrt{[\alpha\alpha]}=\mu\sqrt{\frac{2}{K_r}},\quad \mu_y=\mu\sqrt{[\beta\beta]}=\mu\sqrt{\frac{2}{K_r}},\quad \mu_z=\mu\sqrt{[\gamma\gamma]}=\mu\sqrt{\frac{2}{K_r}}\ \text{i td.} \tag{8}$$

Zaś wagi *kątów wyrównanych* są:

$$P_x=P_y=P_z=\ldots.=\frac{K_r}{2}, \tag{9}$$

o ile przyjęto wagę *kąta* $p=1$.

Analogicznie otrzymamy błędy średnie *kierunków wyrównanych*

$$\mu_1'=\mu_2'=\mu_3'=\mu_4'=\ldots.=\mu'\sqrt{\frac{2}{K_r}}=\mu\sqrt{\frac{1}{K_r}}, \tag{8*}$$

zatem wagi *kierunków wyrównanych:*

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_4 = \ldots\ldots = \boldsymbol{K}_r, \tag{9*}$$

o ile, jak wyżej wspomnieliśmy, waga *kąta* raz mierzonego $p=1$.

Przyjmując wagę *kierunku raz mierzonego* $p'=1$, otrzymamy *błędy średnie kątów wyrównanych,* wstawiając do wzorów (8) $\mu=\mu'\sqrt{2}$:

$$\mu_x = \mu_y = \mu_z = \ldots = \mu'\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{K_r}} = \mu'\sqrt{\frac{4}{K_r}}, \tag{8**}$$

zaś *błędy średnie kierunków wyrównanych:*

$$\mu_1' = \mu_2' = \mu_3' = \mu_4' \ldots = \mu'\sqrt{\frac{2}{K_r}}, \text{ (jak wyżej);}$$

w obec tego, o ile przyjęto wagę *kierunku* raz mierzonego $p'=1$, będą wagi *kątów wyrównanych:*

$$\boldsymbol{P}_x' = \boldsymbol{P}_y' = \boldsymbol{P}_z' = \ldots = \frac{\boldsymbol{K}_r}{4}, \tag{9**}$$

zaś kierunków wyrównanych:

$$\boldsymbol{P}_1' = \boldsymbol{P}_2' = \boldsymbol{P}_3' = \boldsymbol{P}_4' \ldots = \frac{\boldsymbol{K}_r}{2}. \tag{9***}$$

W **przykładzie**, omawianym powyżej, będą zatem wagi kątów i kierunków wyrównanych dla przyjęcia $p=1$ (ponieważ $K_r=4$):

$$P_x = P_y = P_z = 2,$$
$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1;$$

natomiast dla przyjęcia $p'=1$:

$$P_x' = P_y' = P_z' = 1,$$
$$P_1' = P_2' = P_3' = P_4' = 2.$$

Zamiast wyrównania kątów możemy przeprowadzić *wyrównanie kierunków.* Oznaczając kierunki wyrównane przez 1′, 2′, 3′, 4′, otrzymamy biorąc na uwagę przykład tu omawiany (dla $K_r=4$), z równań (4), napisanych w kształcie:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{(2,1)+(2,3)+(2,4)}{4} + \frac{(1,2)+(1,3)+(1,4)}{4} = 2'-1' \\ y &= -\frac{(3,1)+(3,2)+(3,4)}{4} + \frac{(1,2)+(1,3)+(1,4)}{4} = 3'-1' \\ z &= -\frac{(4,1)+(4,2)+(4,3)}{4} + \frac{(1,2)+(1,3)+(1,4)}{4} = 4'-1': \end{aligned}\right. \tag{4*}$$

$$\left.\begin{aligned} 1' &= -\frac{(1,2)+(1,3)+(1,4)}{4}, \quad 3' = -\frac{(3,1)+(3,2)+(3,4)}{4} \\ 2' &= -\frac{(2,1)+(2,3)+(2,4)}{4}, \quad 4' = -\frac{(4,1)+(4,2)+(4,3)}{4}. \end{aligned}\right| \tag{10}$$

Wzór (10) będzie opiewał przy K_r kierunkach stacyjnych:

$$\left.\begin{aligned} 1' &= \frac{(1,2)+(1,3)+(1,4)+(1,5)+\ldots}{K_r}, \\ 2' &= \frac{(2,1)+(2,3)+(2,4)+(2,5)+\ldots}{K_r}, \\ 3' &= \frac{(3,1)+(3,2)+(3,4)+(3,5)+\ldots}{K_r}, \\ 4' &= \frac{(4,1)+(4,2)+(4,3)+(4,5)+\ldots}{K_r}. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Biorąc na uwagę wzory (9*) i (9***), widzimy, że pomiary kątów we wszystkich kombinacjach, dokonane *w dwu położeniach lunety*, są *równoważne z* $\frac{K_r}{2}$*-krotnym* pomiarem *serji,* obejmującej *wszystkie* K_r *kierunki,* czyli t. zw. *pełnej* serji kierunków; albowiem w obu przypadkach przysługują wyrównanym kierunkom wagi $\frac{K_r}{2}$, o ile wagę pojedynczego kierunku, obserwowanego w dwu położeniach lunety, przyjęto równą jedności.

Przyjmując za Schreiberem *wagę kierunku,* mierzonego tylko *w jednem położeniu lunety,* równą jedności, otrzymamy przy v pomiarach kątów w jednem i v pomiarach kątów w drugiem położeniu lunety, (a więc przy $2v$ pomiarach w jednem położeniu lunety)

wagę *wyrównanego kąta* $\qquad P_{2v} = \frac{v\,K_r}{2}$, $\qquad$ (11)

zaś wagę *wyrównanego kierunku* $P'_{2v} = v\,K_r$. $\qquad$ (11*)

Ponieważ na stacjach, należących do jednej sieci tryangulacyjnej, ilość kierunków *nie będzie* w ogólności *jednakowa,* a zatem i wagi kierunków wyrównanych na każdej stacji mogłyby wypaść różne, o ileby każdy kąt na każdej stacji pomierzono tę samą ilość razy, (co skomplikowałoby znacznie wyrównanie sieci), obmyślił Schreiber sposób pomiaru, dostarczający nam *prawie* zupełnie *równych wag* kierunków wyrównanych na każdej stacji.

Przyjmując, że przy tryangulacji I-rzędnej, (przy której używamy dziś prawie wyłącznie tej metody) *waga kierunku* wyrównanego ma wynosić *około 24,* oraz że kąty mają być obserwowane tam i z powrotem tę samą ilość razy w pierwszem, jak i w drugiem położeniu lunety, ułożył Schreiber dla spostrzeżeń kątów tabelę następującą.

K_r ilość kierunków stacyjn.	$K_r \frac{K_r-1}{2}$ ilość kątów	Waga kierunku pomierzonego	Waga kierunku wyrównanego	2 ν liczba powtarzań (pomiarów)	$P'_{x,y,z...}$ waga kątów wyrównanych	P_i waga kierunków wyrównanych
		(z jednego pomiaru w jednem położeniu lunety)			z 2 ν pomiarów (po ν w obu położ. lunety)	
2	1	1	1·0	24	12·0	24
3	3	1	1·5	16	12·0	24
4	6	1	2·0	12	12·0	24
5	10	1	2·5	10	12·5	25
6	15	1	3·0	8	12·0	24
7	21	1	3·5	8	14·0	28
8	28	1	4·0	6	12·0	24

Ze względu na to, że każdy kąt ma być obserwowany w obu położeniach lunety (I i II) tę samą ilość razy, przyjął Schreiber w powyższej tabeli ilość powtarzań 2ν zawsze równą liczbie *parzystej,* przez co wypadły wagi przy 5-ciu i 7-miu kierunkach 25, względnie 28.

Aby jednak dokonać pomiaru każdego kąta w jednym i drugim kierunku (tam i z powrotem) w obu położeniach lunety, należałoby przyjąć ν jako liczbę *parzystą.*

W powyższej tabeli Schreibera ma to miejsce z wyjątkiem pomiarów przy 5-ciu i 8-miu kierunkach stacyjnych. W tych przypadkach należy przeprowadzić $\frac{\nu-1}{2}$ pomiarów tam i z powrotem (t. j. $\nu-1$ pojedynczych) w pierwszem, $\frac{\nu-1}{2}$ takichsamych pomiarów w drugiem położeniu lunety, oraz jeden pomiar (pojedynczy) w jednym kierunku w pierwszem, zaś drugi pomiar (pojedynczy) w kierunku powrotnym w drugiem położeniu lunety.

Dla wyeliminowania systematycznych, a zmniejszenia wpływu przypadkowych błędów podziału mierzymy każdy kąt *tam i z powrotem* (t. j. podwójnie) na tem samem miejscu limbusu[1]), przesuwając po każdem

[1]) *Sposób* wykonania pomiaru podaliśmy tu wiernie wedle *Schreibera,* zaznaczyć jednak należy, że sposób tu podany można zastąpić *lepszym,* rugującym prócz innych błędów także i systematyczny błąd, powstający wskutek posuwania się limbusu pod wpływem ruchu alhidady; w tym celu należy, zamiast mierzyć każdy kąt w kierunku odwrotnym (z powrotem), pomierzyć (w tem samem położeniu) kąt *uzupełniający go do kąta pełnego.*

powtarzaniu (podwójnem) limbus o $\frac{180^0}{\nu}=d^0$, a prócz tego baczymy, aby żadnego kierunku nie obserwować 2 razy w tem samem położeniu limbusu. Aby uczynić zadość temu *ostatniemu* żądaniu, należy zmienić dla poszczególnych kątów początkowe położenia limbusu przy parzystej ilości K_r o $\delta^0=\frac{d^0}{K_r-1}=\frac{180^0}{\nu(K_r-1)}$, przy nieparzystej o $\delta^0=\frac{d^0}{K_r}=\frac{180^0}{\nu K_r}$.

Dla lepszego zrozumienia powyższych uwag podajemy *plany obserwacyj* dla $K_r=2$, 3, 4 i 5, (przyczem, jak wspomnieliśmy, przy 5-ciu kier. stac. podobnie jak przy 8-miu nie wypadają wszystkie pomiary tam i z powrotem w tem samem położeniu lunety).

$$K_r=2,\ K_r\frac{K_r-1}{2}=1,\ 2\nu=24,\ \nu=12,\ d^0=\frac{180^0}{12}=15^0.$$

Kąt	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$
1,2	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
Pomiar	podwójny w jednym i drugim kierunku											

$$K_r=3,\ K_r\frac{K_r-1}{2}=3,\ 2\nu=16,\ \nu=8,\ \nu K_r=24,\ d^0=\frac{180^0}{8}=22{\cdot}5^0,\ \delta^0=\frac{180^0}{24}=7{\cdot}5^0.$$

Kąt	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$
1,2	0°	22·5°	45°	67·5°	90°	112·5°	135°	157·5°
1,3	7·5	30	52·5	75	97·5	120	142·5	165
2,3	15	37·5	60	82·5	105	127·5	150	172·5
Pomiar	podwójny j. w.							

$$K_r=4,\ K_r\frac{K_r-1}{2}=6,\ 2\nu=12,\ \nu=6,\ \nu(K_r-1)=18,\ d^0=\frac{180^0}{6}=30^0,\ \delta^0=\frac{180^0}{18}=10^0.$$

Kąt	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$
1,2	0°	30°	60°	90°	120°	150°
1,3	10°	40°	70°	100°	130°	160°
1,4	20°	50°	80°	110°	140°	170°
2,3	20°	50°	80°	110°	140°	170°
2,4	10°	40°	70°	100°	130°	160°
3,4	0°	30°	60°	90°	120°	150°
Pomiar	podwójny j. w.					

$$K_r=5,\ K_r\frac{K_r-1}{2}=10,\ 2\nu=10,\ \nu=5,\ \nu K_r=25,\ d^0=\frac{180^0}{5}=36^0,\ \delta^0=\frac{180^0}{25}=7{\cdot}2^0.$$

Kąt	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	$\mathbf{I_1}$	$\mathbf{II_2}$	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$
1,2	0°	36°	72°	72°	108°	144°
1,3	7·2	43·2	79·2	79·2	115·2	151·2
1,4	14·4	50·4	86·4	86·4	122·4	158·4
1,5	21·6	57·6	93·6	93·6	129·6	165·6
2,3	14·4	50·4	86·4	86·4	122·4	158·4
2,4	21·6	57·6	93·6	93·6	129·6	165·6
2,5	28·8	64·8	100·8	100·8	136·8	172·8
3,4	28·8	64·8	100·8	100·8	136·8	172·8
3,5	0	36	72	72	108	144
4,5	7·2	43·2	79·2	79·2	115·2	151·2
Pomiar	podw.	podw.	pojed.	pojed. (powr.)	podw.	podw.

(Pomiary, odnoszące się do kolumn 1-szej, 2-giej, 5-tej i 6-tej, należy wykonać w jednym i drugim kierunku, odnoszące się do 3-ciej w jednym, zaś odnoszące się do 4-tej w powrotnym kierunku).

Jedn. błąd średni *kąta mierzonego w obu położeniach lunety*, lub co na jedno wychodzi, jedn. błąd średni *kierunku, obserwowanego w jednem poł. lunety*, znajdujemy z wzoru

$$\mu_0=\sqrt{\frac{2\nu[\delta\delta]}{(K_r-1)(K_r-2)}}, \tag{12}$$

zaś błąd śr. średniej wartości kątów z wzoru

$$\mu_s=\sqrt{\frac{2[\delta\delta]}{(K_r-1)(K_r-2)}}. \tag{13}$$

Jeśli pomiędzy K_r kierunkami stacyjnemi znajdują się *2 kierunki stałe*, pochodzące z tryangulacji dawniejszej, do której nawiązujemy nasze pomiary, należy uważać oba kierunki *stałe jako jeden kierunek* i w obec tego pomierzyć każdy kąt, wynikający z kombinacji kierunków niestałych w ilości 2 razy tak wielkiej, jak kąty wynikające z kombinacji kierunków stałych i niestałych, zaś pomiaru kąta stałego nie włączać do wyrównania. (Kąt stały mierzymy tylko dla upewnienia się, czy z czasem nie zmieniło się położenie odnośnych punktów tryangulacyjnych).

Aby mieć możność zastosowania w tym przypadku wzorów (4) (t. j. średni arytmetycznej ogólnej), należy wszystkie kąty, powstałe z kombinacji z drugim kierunkiem stałym, odjąć od kąta stałego, otrzymując w ten sposób kąty, z których jeden kierunek jest pierwszym kierunkiem stałym. Jeśli zatem kierunki pierwszy i piąty są stałemi, zaś drugi, trzeci i czwarty niestałemi, należy ze względu na $(5)-(1)=\varphi$, utworzyć różnice:

$$\varphi-(2,5)=(1,2),\ \varphi-(3,5)=(1,3),\ \varphi-(4,5)=(1,4).$$

Po tej przemianie będzie każdy kąt spostrzegany tę samą ilość razy i wyrównanie następuje jak przy czterech kierunkach, z których jeden tylko jest stały, a zatem w myśl uwag podanych na początku paragrafu niniejszego.

Plan obserwacyj będzie w tym przypadku następujący.

Kąt	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	I_1	II_2	I_1	II_2	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$
1,2	0°	.	60°	60°	.	.	120°	.
2,5	.	30°	.	.	90°	90°	.	150°
1,3	10	.	70	70	.	.	130	.
3,5	.	40	.	.	100	100	.	160
1,4	20	.	80	80	.	.	140	.
4,5	.	50	.	.	110	110	.	170
Pomiar	podwójny tam i z powrotem		pojed. w jednym kierunku	pojed. w drugim kierunku	pojed. w jednym kierunku	pojed. w drugim kierunku	podwójny tam i z powrotem	

Kąt	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	$I_{1,2}$	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$	$II_{1,2}$
2,3	20°	50°	80°	110°	140°	170°
2,4	10	40	70	100	130	160
3,4	0	30	60	90	120	150
Pomiar	podwójny tam i z powrotem					

To samo postępowanie można zastosować przy większej ilości kierunków stałych.

Przy tryangulacji II-rzędnej przyjmujemy ilość powtarzań $2n=12$ (zamiast 24), przez co waga kierunku wyrównanego spada do 12 (przy założeniu, że waga raz obserwowanego kąta równa się jedności). Plan obserwacyj układamy na tych samych zasadach jak przy tryangulacji I-rzędnej.

* * *

Zalety pomiarów kątów we wszystkich kombinacjach wyszczególnił Schreiber w kilku publikacjach[1]); najważniejsze z nich są następujące:

1. *Wszystkim kierunkom sieci odpowiadają po wyrównaniach stacyjnych w przybliżeniu jednakowe wagi.*

[1]) „Die Kgl. Preuß. Landestriangulation", *Hauptdreiecke,* II część, 2 rozdz. Berlin 1874. *Schreiber,* „Ueber die Anordnung von Horizontalwinkelbeobachtungen auf d. Station" Zeitschrift f. Vermessungswesen (niem.) 1878 i *Schreiber* „Richtungsbeobachtungen u. Winkelbeobachtungen", Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1879.

2. *Wpływ błędów podziału limbusu jest zmniejszony do nieszkodliwego minimum.*

3. *Wyrównanie daje się przeprowadzić w sposób nadzwyczaj prosty i łatwy.*

4. *Możliwość wykonywania obserwacyj na stanowiskach mniej pewnych (n. p. na wysokich wieżach obserwacyjnych) ze względu na krótkotrwały pomiar każdego kąta z osobna.*

5. *Osiągnięcie znacznej dokładności, przy wyzyskaniu odpowiedniem czasu poświęconego obserwacjom.*

§ 5. Pomiary kierunkowe. Wyrównanie pełnych seryj kierunków.

Wyrównanie pełnych seryj kierunków przedstawia się bardzo prosto. Jak wiadomo obserwujemy przy zastosowaniu metody kierunkowej po koleji *wszystkie* kierunki nasamprzód w jednem położeniu lunety, a następnie po jej przerzuceniu powtarzamy tę samą czynność w porządku odwrotnym. Dla kontroli, czy położenie przyrządu nie uległo zmianie podczas pomiarów, rozpoczynamy i kończymy każdy pomiar kierunków w jednem położeniu lunety, *celując do tego samego sygnału.*

Tworząc z odczytów obu mikroskopów (nonjuszów) średnie, otrzymujemy z pełnej serji po dwa spostrzeżenia dla każdego kierunku z wyjątkiem dla kierunku pierwszego, któremu odpowiadają cztery spostrzeżenia.

Spostrzeżeń kontrolnych *nie używa* się z reguły do dalszych rachunków, natomiast, gdyby okazała się między niemi a odpowiedniemi spostrzeżeniami początkowemi różnica większa, niżby spodziewać się należało po przypuszczalnych błędach odczytu i nastawienia, powtarza się pomiar na nowo. Przy pomiarach, dokonywanych teodolitami o przypuszczalnie minimalnych błędach nastawienia i odczytu można wspomnianą różnicę, o ile *jest niewielka,* przypisać nieznacznemu przesunięciu się limbusu pod wpływem ruchu alhidady i *rozdzielić* ją na poszczególne kierunki, usuwając w ten sposób ze spostrzeżeń wspomniany błąd *systematyczny.*

Przypuśćmy, że wykonaliśmy na pewnej stacji s seryj pomiarów kierunkowych pełnych (t. j. nie opuściliśmy przy pomiarach żadnego kierunku), przesuwając po ukończeniu każdej serji limbus o $\frac{180^0}{s}$ dla wyeliminowania systematycznych błędów podziału.

Jeżeli ilość kierunków stacyjnych będzie K_r, otrzymamy dla każdej serji K_r spostrzeżeń jako *średnie* obserwacyj, dokonanych w obu położeniach lunety z uwzględnieniem wartości odczytanych na obu (ewentualnie więcej) mikroskopach (noniuszach).

Wszystkie tak otrzymane serje kierunków *redukujemy do jednego kierunku* (teoretycznie dowolnego), przyjmując go równym $0^0 0' 0''$, lub równym azymutowi (ewent. pozornemu) tegoż kierunku.

Po redukcji będą zatem wszystkie spostrzeżenia, odnoszące się do obranego przez nas kierunku, jednakowe.

Redukując kierunki poszczególnych seryj do kierunku pierwszego otrzymamy

$$\begin{array}{r} \\ \text{ilość} \\ K_r \end{array} \left\{ \underbrace{\begin{array}{cccc} \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} & (s) \\ l_1' & l_1'' & l_1''' & . \\ l_2' & l_2'' & l_2''' & . \\ l_3' & l_3'' & l_3''' & . \\ l_4' & l_4'' & l_4''' & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{array}}_{\text{ilość } s,} \right. \tag{1}$$

przyczem, jak wspomnieliśmy, $l_1' = l_1'' = l_1''' = \ldots\ldots = \frac{[l_1]}{s}$. $\Big\}$ (2)

Oznaczmy kąty, zawarte między kierunkami wyrównanemi 2-gim a 1-wszym przez x, 3-cim a 1-wszym y, 4-tym a 1-wszym z i t. d., czyli

$$\left.\begin{array}{l} l_2'+\delta_2'-l_1'-\delta_1'=l_2''+\delta_2''-l_1''-\delta_1''=l_2'''+\delta_2'''-l_1'''-\delta_1'''=\ldots=x \\ l_3'+\delta_3'-l_1'-\delta_1'=l_3''+\delta_3''-l_1''-\delta_1''=l_3'''+\delta_3'''-l_1'''-\delta_1'''=\ldots=y \\ l_4'+\delta_4'-l_1'-\delta_1'=l_4''+\delta_4''-l_1''-\delta_1''+l_4'''+\delta_4'''-l_1'''-\delta_1'''=\ldots=z \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{3}$$

i utwórzmy $K_r.s$ równań błędów o $(s+K_r-1)$ niewiadomych $\underbrace{\delta_1', \delta_1'', \delta_1''' \ldots\ldots}_{s}$ $\underbrace{x, y, z, \ldots\ldots}_{K_r-1}$, kształtu:

$$\begin{array}{r} \\ \text{ilość} \\ K_r \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \qquad\text{(I)} & \qquad\text{(II)} \\ \delta_1'=\delta_1', & \delta_1''=\delta_1'', \\ \delta_2'=\delta_1'+x+l_1'-l_2', & \delta_2''=\delta_1''+x+l_1''-l_2'', \\ \delta_3'=\delta_1'+y+l_1'-l_3', & \delta_3''=\delta_1''+y+l_1''-l_3'', \\ \delta_4'=\delta_1'+z+l_1'-l_4', & \delta_4''=\delta_1''+z+l_1''-l_4'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\text{III)} & \qquad(s) \\ \delta_1'''=\delta_1''', & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_2'''=\delta_1'''+x+l_1'''-l_2''', & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_3'''=\delta_1'''+y+l_1'''-l_3''', & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_4'''=\delta_1'''+z+l_1'''-l_4''', & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array} \right\} \tag{4}$$

Równania normalne, odpowiadające równaniom błędów (4), przedstawiają się w schematycznem zestawieniu następująco (przy przyjęciu *wagi kierunku*, mierzonego ***w jednej serji, równej jedności):***

	δ_1'	δ_1''	δ_1'''	....	x	y	z	....	Wyrazy wolne	
s	K_r	.	.	....	1	1	1	....	$K_r l_1' - [l']$	(5)
	.	K_r	.	....	1	1	1	....	$K_r l_1'' - [l'']$	
	.	.	K_r	....	1	1	1	....	$K_r l_1''' - [l''']$	
	...	...	...	...	...	...	...	...	....	
$K^r - 1$	1	1	1	....	s	.	.	....	$[l_1]-[l_2]$	(5*)
	1	1	1	....	.	s	.	....	$[l_1]-[l_3]$	
	1	1	1	....	.	.	s	....	$[l_1]-[l_4]$	
	...	...	...	...	...	...	...	...	....	

Po odjęciu drugiej części (5*) od pierwszej części (5) równań normalnych otrzymamy:

$$\delta_1' + \delta_1'' + \delta_1''' + \ldots . = [l_1] - [l] + [l_2] + [l_3] + [l_4] + \ldots . = 0, \qquad (6)$$

w obec czego dostarczą nam równania (5*) wartości niewiadomych x, y, z, ..., t. j. wartości kątów wyrównanych:

$$x = \frac{[l_2]-[l_1]}{s}, \; y = \frac{[l_3]-[l_1]}{s}, \; z = \frac{[l_4]-[l_1]}{s}, \ldots . \qquad (7)$$

Dla wyznaczenia jednostk. błędu średn. postąpimy w sposób następujący.

Po znalezieniu wartości niewiadomych x, y, z, ... wyznaczymy z s początkowych równań normalnych po koleji niewiadome δ_1', δ_1'', δ_1''', ... (uwzględniając, że $-\frac{x+y+z+\ldots}{K_r} = \frac{[l_1]}{s} - \frac{[l]}{K_r . s}\Big)$.

$$\left.\begin{aligned}
\delta_1' &= -\frac{x+y+z+\ldots}{K_r} + \frac{[l']}{K_r} - l_1' = \frac{[l_1]}{s} - \frac{[l]}{K_r . s} + \frac{[l']}{K_r} - l_1' \\
\delta_1'' &= -\frac{x+y+z+\ldots}{K_r} + \frac{[l'']}{K_r} - l_1'' = \frac{[l_1]}{s} - \frac{[l]}{K_r . s} + \frac{[l'']}{K_r} - l_1'' \\
\delta_1''' &= -\frac{x+y+z+\ldots}{K_r} + \frac{[l''']}{K_r} - l_1''' = \frac{[l_1]}{s} - \frac{[l]}{K_r . s} + \frac{[l''']}{K_r} - l_1''' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Z uwagi na równanie (2) przedstawią się równania (8) we formie uproszczonej następująco:

$$\delta_1' = \frac{[l']}{K_r} - \frac{[l]}{K_r . s}, \; \delta_1'' = \frac{[l'']}{K_r} - \frac{[l]}{K_r . s}, \; \delta_1''' = \frac{[l''']}{K_r} - \frac{[l]}{K_r . s}, \ldots . \qquad (8^*)$$

Aby otrzymać poszczególne δ, potrzebne dla obliczenia jednostkowego błędu średniego, należy każdą serję skręcić o odpowiednią wartość $-\delta_1$.

Pierwsza serja skręcona o $-\delta_1'$ dostarczy nam z uwagi na równ. (3)

$$\begin{aligned} l_1'-\delta_1' &= l_1'-\delta_1' \\ l_2'-\delta_1' &= l_1'+x-\delta_2' \\ l_3'-\delta_1' &= l_1'+y-\delta_3' \\ l_4'-\delta_1' &= l_1'+z-\delta_4' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

serja druga: (9)

$$\begin{aligned} l_1''-\delta_1'' &= l_1''-\delta_1'' \\ l_2''-\delta_1'' &= l_1''+x-\delta_2'' \\ l_3''-\delta_1'' &= l_1''+y-\delta_3'' \\ l_4''-\delta_1'' &= l_1''+z-\delta_4'' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

analogicznie wszystkie pozostałe.

Odejmując kierunki skręcone od odpowiadających im kierunków wyrównanych (wedle równania (7)), t. j. od

$$[1]=\frac{[l_1]}{s},\quad [2]=\frac{[l_2]}{s},\quad [3]=\frac{[l_3]}{s},\quad [4]=\frac{[l_4]}{s} \text{ i t. d.,} \tag{7*}$$

otrzymamy (ze względu na równanie (2) i (7)) dla serji I-wszej

$$\begin{aligned} &\frac{[l_1]}{s}-l_1'+\delta_1'=\delta_1' \\ &\frac{[l_2]}{s}-l_1'-x+\delta_2'=\frac{[l_2]}{s}-l_1'+\frac{[l_1]}{s}-\frac{[l_2]}{s}=\delta_2' \\ &\frac{[l_3]}{s}-l_1'-y+\delta_3'=\frac{[l_3]}{s}-l_1'+\frac{[l_1]}{s}-\frac{[l_3]}{s}=\delta_3' \\ &\frac{[l_4]}{s}-l_1'-z+\delta_4'=\frac{[l_4]}{s}-l_1'+\frac{[l_1]}{s}-\frac{[l_4]}{s}=\delta_4' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned} \tag{10}$$

analogicznie wyznaczymy poszczególne δ reszty seryj.

Wzór ogólny na jednostkowy błąd średni

$$\mu=\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-k}}, \tag{11}$$

przedstawimy we formie następującej:

$$\mu=\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{(s-1)(K_r-1)}}, \tag{11*}$$

a to ze względu, że $n=K_r.s$, zaś $k=s+K_r-1$, przeto $n-k=K_r s-$ $-(s+K_r-1)=s(K_r-1)-(K_r-1)=(s-1)(K_r-1)$.

* * * Wagi kątów wyrównanych x, y, z i t. d. otrzymamy z równań wag, które możemy ustawić w liczbie $k^2=(s+K_r-1)^2$.

Aby wyznaczyć wagę kąta x, weźmiemy na uwagę system równań wag, pozostający w związku z niewiadomą x, zatem:

	(δ_1') $[\alpha'\beta]$	(δ_1'') $[\alpha''\beta]$	(δ_1''') $[\alpha'''\beta]$	....	(x) $[\beta\beta]$	(y) $[\beta\gamma]$	....	Wyrazy wolne	
s	K_r	.	.	....	1	1	....	$=0$	(12)
	.	K_r	.	....	1	1	....	$=0$	
	.	.	K_r	....	1	1	....	$=0$	
	.	.	.	....	....	....	....	...	
K_r-1	1	1	1	....	s	.	....	$=1$	(12*)
	1	1	1	....	.	s	....	$=0$	
	....	....	....	....	....	....	....	...	

Mnożąc pierwsze równanie drugiej części (t. j. równań (12*)) przez 2, a następnie tworząc sumę drugiej części równań, otrzymamy

$$K_r[\alpha'\beta]+K_r[\alpha''\beta]+K_r[\alpha'''\beta]+\ldots\ldots+2s[\beta\beta]+s[\beta\gamma]+\ldots\ldots=2. \quad (13)$$

Odejmując od powyższego związku sumę równań części pierwszej, t. j.

$$K_r[\alpha'\beta]+K_r[\alpha''\beta]+K_r[\alpha'''\beta]+\ldots\ldots+s[\beta\beta]+s[\beta\gamma]+\ldots\ldots=0. \quad (14)$$

dochodzimy do związku

$$s[\beta\beta]=2$$

$$[\beta\beta]=\frac{2}{s},\quad \frac{1}{[\beta\beta]}=\frac{s}{2}=\boldsymbol{P}_x. \quad (15)$$

Dla wyznaczenia $[\beta\gamma]$ pomnożymy drugie równanie części drugiej przez 2 i postąpimy jak poprzednio. W tym przypadku zmieni się związek (13) na

$$K_r[\alpha'\beta]+K_r[\alpha''\beta]+K_r[\alpha'''\beta]+\ldots\ldots+s[\beta\beta]+2s[\beta\gamma]+\ldots\ldots=1, \quad (13^*)$$

a po odjęciu od niego związku (14), wypadnie

$$s[\beta\gamma]=1$$

$$[\beta\gamma]=\frac{1}{s},\quad \frac{1}{[\beta\gamma]}=s. \quad (16)$$

W analogiczny sposób możemy wyznaczyć wszystkie spółczynniki równań wag, odnoszące się do dalszych kątów y, z,..., otrzymując:

$$[\beta\beta]=[\gamma\gamma]=\ldots\ldots=\frac{2}{s},\quad \boldsymbol{P}_x=\boldsymbol{P}_y=\boldsymbol{P}_z=\ldots\ldots=\frac{s}{2} \quad (17)$$

$$[\beta\gamma]=\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{s};$$

przechodząc wreszcie z wag kątów P_{kt} na wagi kierunków P_{kr}, dochodzimy ze względu na znany związek $P_{kt}=\frac{P_{kr}}{2}=\frac{s}{2}$ do wzoru na wagę kierunku (wyrównanego na stacji)

$$P_{kr}=s. \tag{18}$$

* * *

Pomiary kierunkowe, dokonane w s pełnych serjach, dostarczają nam, przy przyjęciu wagi kierunku obserwowanego w dwu położeniach lunety równej jedności, kierunków o jednakowych wagach równych ilości seryj s.

Wyrównanie stacyjne przedstawia się zatem, jak już wspomnieliśmy, bardzo prosto.

Po przeprowadzeniu redukcji wszystkich seryj do jednego wspólnego kierunku, tworzymy sumy $[l_1]$, $[l_2]$, $[l_3]$, $[l_4]$ i t. d., a dzieląc je przez ilość seryj, otrzymujemy kierunki wyrównane [1], [2], [3], [4] (wedle wzoru (7)). (Dla uproszczenia rachunku bierzemy na uwagę tylko sekundy względnie dziesiętne minut i t. p.).

Kierunki, w ten sposób wyrównane, mogą być użyte jako *niezależne spostrzeżenia z odpowiedniemi wagami* $=s$ przy dalszem wyrównaniu sieci tryangulacyjnej.

Chcąc wyznaczyć jednostkowy błąd średni kierunku (na stacji), należy obliczyć wedle wzoru (8*) skręty dla poszczególnych seryj; odejmując je od poszczególnych spostrzeżeń, otrzymamy po koleji wszystkie δ, przy pomocy których urobimy następnie μ wedle wzoru (11*).

Postępowanie to, przeprowadzone na przykładzie zaczerpniętym z tryangulacji (IV-rzędnej), wykonanej przez autora w roku 1920 w Zakopanem, uwidocznia nam schemat podany poniżej.

{Stanowisko (stacja) 7, celowe do p.: ♁ (kościoła parafialnego), S (willi Sanato, wieżyczki półn.), VIII i VI; seryj dokonano 3, zatem $s=3$, $K_r=4$; spółrzędne dwu pierwszych punktów były znane z poprzednio przeprowadzonej tryangulacji IV-rzędnej}.

St. 7.

	Celowe do p.:		S e r j a: I (l')	II (l'')	(III l''')	$[l_i]$	$[l_i]:s$
1	♁ *Kp*	359°59′	60″	60″	60″	180	60
2	*S*	14 34	51	51	57	159	53
3	VIII	43 44	21	18	18	57	19
4	VI	73 32	69	69	57	195	65
		$\Sigma=$	$201=[l']$	$198=[l'']$	$192=[l''']$	$591=[l]$	$197=\frac{[l]}{s}$
		$\Sigma:K_r=$	$50{\cdot}25=\frac{[l']}{K_r}$	$49{\cdot}5=\frac{[l'']}{K^r}$	$48{\cdot}0=\frac{[l''']}{K_r}$	$147{\cdot}75=\frac{[l]}{K_r}$	$49{\cdot}25=\frac{[l]}{K_r.s}$

$$\frac{197}{4}=49{\cdot}25=\frac{[l]}{K_r.s}.$$

	Serja: I	II	III	$[l_i-\delta_i]$
	$\frac{[l]}{K_r s}-\frac{[l']}{K_r}=-\delta_1'=-1{\cdot}00$	$\frac{[l]}{K_r s}-\frac{[l'']}{K_r}=-\delta_1''=-0{\cdot}25$	$\frac{[l]}{K_r s}-\frac{[l''']}{K_r}=-\delta_1'''=+1{\cdot}25$	
$l_1-\delta_1$	59·00	59·75	61·25	180·00
$l_2-\delta_2$	50·00	50·75	58·25	159·00
$l_3-\delta_3$	20·00	17·75	19·25	57·00
$l_4-\delta_4$	68·00	68·75	58·25	195·00
Σ	197·00	197·00	197·00	591·00 : 3 = 197,
$\frac{\Sigma}{K_r}$	49·25	49·25	49·25	197 : 4 = 49·25

δ

1	+1·00	+0·25	−1·25	=0
2	+3·00	+2·25	−5·25	=0
3	−1·00	+1·25	−0·25	=0
4	−3·00	−3·75	+6·75	=0
Σ	0·00	0·00	0·00	

δ^2

1	1·00	0·06	1·56	$s-1=3-1=2$
2	9·00	5·06	27·56	$K_r-1=4-1=3$
3	1·00	1·56	0·06	$(s-1)(K_r-1)=2.3=6$
4	9·00	14·06	45·56	
Σ	20·00	20·74	74·74	$=115{\cdot}48,\ \mu=\sqrt{\frac{115{\cdot}48}{6}}=\pm 4''{\cdot}39.$

Kierunki wyrównane: (i pierwszy zredukowany do $0^0 0' 0''$)

$[1]=\ 0^0\ 0'\ 0''$ o wagach $P_{kr}=3$.
$[2]=14^0 34' 53''$
$[3]=43^0 44' 19''$
$[4]=73^0 33'\ 5''$.

Powyżej opisanej metody obserwacyjnej używa się przeważnie przy tryangulacjach *II-go-, III-cio-* i *IV-to-rzędnych.* Ze względu na to, że wszystkie kierunki muszą być po koleji spostrzegane, co nie jest zawsze możliwem, szczególnie gdy posługujemy się heliotropami, *nie stosujemy jej z reguły* przy tryangulacjach I-rzędnych.

Opuszczenie pewnego kierunku w serji czyni ją częściową lub niepełną, powodując w następstwie *skomplikowane wyrównanie* tak stacyjne, jak i sieci tryangulacyjnej.

Ze względu na ewentualny nieznaczny ruch teodolitu podczas pomiaru *nie należy tworzyć seryj o wielu kierunkach* (nie ponad 6—8); z tego samego powodu powinniśmy się starać wykonać każdy pomiar, obejmujący wszystkie kierunki, w *jaknajkrótszym* czasie, co oczywiście wymaga dość znacznej wprawy.

§ 6. Pomiary kierunkowe. (Ciąg dalszy). Wyrównanie częściowych (niepełnych) seryj kierunków.

a) Metoda przybliżona. (Yollanda i Clarka).

Jak wspomnieliśmy, nastręcza spostrzeganie wszystkich kierunków po koleji dość znaczne trudności, szczególnie przy długich celowych, tak że czasem musimy przy pomiarach kierunkowych zrezygnować z obserwacji wszystkich kierunków, w następstwie czego powstają serje *częściowe*.

Ścisłe wyrównanie stacyjne częściowych seryj kierunków jest dość uciążliwe i powoduje ponadto bardzo zawiłe wyrównanie sieci tryangulacyjnej [1]), gdyż wyniki wyrównania stacyjnego mogą być użyte przy wyrównaniu sieci tylko w połączeniu z odpowiednim systemem równań wag, za pomocą t. zw. spółczynników przenoszących (str. 159).

Wprawdzie Helmert podał dwa sposoby, upraszczające wyrównanie sieci tryangulacyjnych (jeden dla wyrównania kątów sieci, uwidoczniony na str. 151. i d., drugi dla wyrównania kierunków, opracowany na str. 223. i d., mimoto stosujemy przy wyrównywaniu sieci IV-to, III-cio a nawet bardzo często i II-rzędnych, zamiast metody ścisłej przybliżone metody wyrównania, a najczęściej metodę Yollanda i Clarka, ogłoszoną w „*Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland*“ [2]).

Dla lepszego zrozumienia tej metody powróćmy na chwilę jeszcze raz do ostatnio omawianego *przykładu*.

Po wyznaczeniu wartości $\frac{[l_i]}{s}$, można dla uzyskania poszczególnych skrętów $\mathfrak{z}_1'$, $\mathfrak{z}_1''$, $\mathfrak{z}_1'''$ postąpić także i w sposób następujący.

Nasamprzód odejmuje się kierunki wyrównane $\frac{[l_i]}{s}$ od kierunków spostrze-

[1]) Patrz rozdz. VI. § 4. (str. 157 i d.) Metoda *Bessela*.

[2]) London 1858 str. 62—66.

*

ganych l_i' l_i'' i t. d., uzyskując w powyższym przykładzie następujące zestawienie:

1.	0''·00	0''·00	0''·00
2.	—2·00	—2·00	+4·00
3.	+2·00	—1·00	—1·00
4.	+4·00	+4·00	—8·00
Σ:	+4·00	+1·00	—5·00.

Zesumowane kolumny dostarczają nam wyrażeń

$$[l']-\frac{[l]}{s},\ [l'']-\frac{[l]}{s},\ [l''']-\frac{[l]}{s},$$

a dzieląc je przez ilość kierunków K_r, otrzymujemy:

$$\underbrace{\frac{[l']}{K_r}-\frac{[l]}{K_r.s}}_{\delta_1'},\ \underbrace{\frac{[l'']}{K_r}-\frac{[l]}{K_r.s}}_{\delta_1''},\ \underbrace{\frac{[l''']}{K_r}-\frac{[l]}{K_r.s}}_{\delta_1'''}, \text{ t. j. wedle (8*) § 5-go:}$$

Zatem w przypadku omawianym jest:

$$\delta_1=+\frac{4\cdot00}{4}=+1\cdot00,\ \delta_1''=+\frac{1\cdot00}{4}=+0\cdot25,\ \delta_1'''=-\frac{5\cdot00}{4}=-1\cdot25;$$

odejmując każde δ, od spostrzeżeń odpowiednich seryj, otrzymujemy serje skręcone, jak to miało miejsce poprzednio, a więc

59·00, 59·75, 61·25,
50·00, 50·75, 58·25,
i t. d.,

a ostatecznie przez odjęcie wartości kierunków skręconych od wyrównanych błędy pozorne:

+1·00, +0·25, —1·25,
+3·00, +2·25, —5·25,
i t. d.

Na tem postępowaniu opiera się *metoda przybliżona Clarka,* którą podajemy dla lepszego zrozumienia w odpowiednio opracowanej formie.

Przypuśćmy, że obserwowaliśmy w poprzednim przykładzie (§ 5-ty str. 209.) podane kierunki w 6-ciu serjach, z których dwie pierwsze były *pełne,* zaś cztery dalsze *częściowe.* Dla łatwiejszego rachunku łączymy serje o jednakowych kierunkach w serje *wypadkowe* o wagach równych ilości seryj składających się na nie, na podstawie zasady, omówionej w poprzednim paragrafie. Wyniki w ten sposób urobionych spostrzeżeń niech będą następujące:

Śr. z I-szej i II-giej serji				Śr. z III-ej, IV-tej i V-tej serji			Serja VI-ta		
1	0°	0'	0''	0°	0°	0''	—		
2	14	34	51	14	34	51	0°	0'	00
3	43	44	21	43	44	18	29	09	21
4	73	33	9	—			58	58	0
	waga = 2,			waga = 3,			waga = 1.		

Serję VI-tą, w której brakuje kierunku pierwszego, należy zorjentować do dowolnego kierunku, zawartego w poprzednich serjach, (przyjmując ów kierunek w odpowiedniem zaokrągleniu). W naszym przypadku obierzemy w tym celu kierunek 3-ci, zaokrąglając go do 43° 44' 20''.

Dalszy rachunek prowadzimy tylko w *trzech* serjach z uwzględnieniem odpowiednich *wag* poszczególnych seryj.

I *a)*

		Serje			$[pl_i]$	$[p_i]$	$\frac{[pl_i]}{[p_i]}$
		1. $p'=2$	2. $p''=3$	3. $p'''=1$			
1	359°59′	60″	60″	.	300	5	60·00
2	14 34	51	51	59	314	6	52·33
3	43°44	21	18	20	116	6	19·33
4	73 32	69	.	59	197	3	65·67
		$201=[l']$	$129=[l'']$	$138=[l''']$			$197·33=\left[\frac{[pl]}{[p]}\right]$

Kąty x, y i z przedstawiają się w pierwszem przybliżeniu:

$$x'=14^0 34'52''·33,\quad y'=43^0 44'19''·33,\quad z'=73^0 33'5''·67.$$

Odejmując $\frac{[pl_i]}{[p_i]}$ od spostrzeżeń, zawartych w odpowiednich wierszach, otrzymujemy — jak przy serjach pełnych (sposobem drugim) — następujące zestawienie.

I *b)*

	1.	2.	3.
1	0″·00	0″·00	.
2	−1·33	−1·33	+6″·67
3	+1·67	−1·33	+0·67
4	+3·33	.	−0·67
$\Sigma=$	+3″·67	−2″·66	+0″·67
$:K_r=$	:4	:3	:3
$(\delta_1)=\frac{\Sigma}{K_r}=$	+0″·92	−0″·89	+0″·22

(K_r oznacza tu ilość kierunków każdej serji, więc $K_r'=4$, $K_r''=3$, $K_r'''=3$).

Skręcając spostrzeżenia zestawione w tabeli I *a* o uzyskane wielkości $-\frac{\Sigma}{K_r}$, poddajemy je dalszemu wyrównaniu dla uzyskania dokładniejszych wyników.

II *a)*

		1. $p'=2$	2. $p''=3$	3. $p'''=1$	$[pl_i]$	$[p_i]$	$\frac{[pl_i]}{[p_i]}$	
1	359°59′	59″·08	60″·89	.	300·83	5	60·17	
2	14 34	50·08	51·89	58″·78	314·61	6	52·44	$x''=14^0 34'52''·27$
3	43 44	20·08	18·89	19·78	116·61	6	19·44	$y''=43\ 44\ 19\ ·27$
4	73 32	68·08	.	58·78	194·94	3	64·98	$z''=73\ 33\ 4\ ·81$

Wyniki wyrównania drugiego, odjęte od spostrzeżeń pierwotnych, dostarczają nam nowych różnic, z których obliczamy — jak poprzednio — ponowne skręty, uwidocznione w tabeli II *b*.

II *b)*

	1.	2.	3.
1	$-0''\cdot17$	$-0''\cdot17$	.
2	$-1\cdot44$	$-1\cdot44$	$+6''\cdot56$
3	$+1\cdot56$	$-1\cdot44$	$+0\cdot56$
4	$+4\cdot02$	.	$-5\cdot98$
$\Sigma=$	$+3''\cdot97$	$-3''\cdot05$	$+1''\cdot14$
$:K_r=$	$:4$	$:3$	$:3$
$(\delta_1)=\frac{\Sigma}{K}=$	$+0''\cdot99$	$-1''\cdot02$	$+0''\cdot38$

Postępowanie to powtarzamy tak długo, aż wyniki, osiągnięte z dwu ostatnich wyrównań, będą się różniły między sobą o wielkości zaniedbywalne.

III *a)*

		1. $p'=2$	2. $p''=3$	3. $p'''=1$	$[pl_i]$	$[p_i]$	$\frac{[pl_i]}{[p_i]}$
1	$359^0 59'$	$59''\cdot01$	$61''\cdot02$	.	$301\cdot08$	5	$60\cdot22$
2	14 34	$50\cdot01$	$52\cdot02$	$58''\cdot62$	$314\cdot70$	6	$52\cdot45$
3	43 44	$20\cdot01$	$19\cdot02$	$19\cdot62$	$116\cdot70$	6	$19\cdot45$
4	73 32	$68\cdot01$	.	$58\cdot62$	$194\cdot64$	3	$64\cdot88$

III *b)*

	1.	2.	3.
1	$-0''\cdot22$	$-0''\cdot22$	.
2	$-1\cdot45$	$-1\cdot45$	$+6''\cdot55$
3	$+1\cdot55$	$-1\cdot45$	$+0\cdot55$
4	$+4\cdot12$	.	$-5\cdot88$
	$\Sigma=+4''\cdot00$	$-3''\cdot12$	$+1''\cdot22$
	$:K_r=\ :4$	$:3$	$:3$
	$(\delta_1)=\frac{\Sigma}{K_r}=+1''\cdot00$	$-1''\cdot04$	$+0''\cdot41$

IV *a)*

		1. $p'=2$	2. $p''=3$	3. $p'''=1$	$[pl_i]$	$[p_i]$	$\frac{[pl_i]}{[p_i]}$	
1	359°59′	59″·00	61″·04	.	301·12	5	60·22	
2	14 34	50·00	52·04	58″·59	314·71	6	52·45	$x^{IV}=14°34'52''{\cdot}23$
3	43 44	20·00	19·04	19·59	116·71	6	19·45	$y^{IV}=43°44'19''{\cdot}23$
4	73 32	68·00	.	58·59	194·59	3	64·86	$z^{IV}=73°33'04''{\cdot}64$

Ze względu na minimalne różnice wyrównanych kierunków w obu ostatnich tabelach, uważamy wyrównanie za *skończone.*

Dla uzyskania poszczególnych δ należałoby właściwie jeszcze raz obliczyć skręty poszczególnych seryj i otrzymane w ten sposób wyniki odjąć od kierunków wyrównanych; ze względu jednak na minimalny efekt tej czynności, obliczamy je, odejmując spostrzeżenia zestawione w tabeli IV *a)* od wyników końcowych, wskutek czego otrzymujemy następujące zestawienie.

	δ'	δ''	δ'''	$p'\delta^{2\prime}$	$p''\delta^{2\prime\prime}$	$p'''\delta^{2\prime\prime\prime}$	
1	+1″·22	−0″·82	.	2·9768	2·0172	.	$\mu=\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-k}}$
2	+2·45	+0·41	−6″·14	12·0050	0·5043	37·6996	$n=10$ (tj. ilości spostrzeżeń wyrównyw.)
3	−0·55	+0·41	−0·14	0·6050	0·5043	0·0196	$k=s+[K_r]-1=3+$
4	−3·14	.	+6·27	19·7192	.	39·3129	$+4-1=6$
Σ	−0·02	0·00	−0·01	35·3060	3·0258	77·0321	$\mu=\sqrt{\frac{115{\cdot}3639}{10-6}}=$
p	2	3	1	$[p\delta\delta]=115{\cdot}3639$			$=\pm5''{\cdot}37.$

Identyczne wyniki (z pominięciem drobnych różnic, powstających wskutek zaokrąglania obliczeń) otrzymujemy, stosując wzory, podane w dziele p. t. „*Przepisy obowiązujące przy pomiarach metodą trygon. i poligon. i t. d., część II-ga*", wydanem przez Ministerstwo Robót Publicznych w Warszawie 1920).

Rozpoczynamy wyrównanie od zestawienia I *a*, które uzupełniamy sumami odpowiednich kolumn $[l']=201$, $[l'']=129$, $[l''']=138$ i $\left[\frac{[pl]}{[p]}\right]=197{\cdot}33$.

O ile serja jest pełną, należy obliczyć skręt dla niej wedle odpowiednio przekształconego wzoru (8*) § 5-go:

$$-\delta^{(i)}=\frac{\left[\frac{[pl]}{[p]}\right]-[l^{(i)}]}{K_r};$$

przy serji częściowej należy od sumy $\left[\frac{[pl]}{[p]}\right]$ odjąć te sumy $\left(\frac{[pl_i]}{[p]}\right)^0$, które odpowiadają brakującym kierunkom serji, zaś od ilości wszystkich kierunków K_r, kierunki brakujące $(K_r)^0$.

W tym przypadku będzie opiewał wzór na skręt serji:

$$-\delta^{(i)} = \frac{\left[\frac{[pl]}{[p]}\right] - \left(\frac{[pl_i]}{p}\right)^0 - [l^{(i)}]}{K_r - (K_r)^0}.$$

Wracając do poprzednio omawianego przykładu, otrzymamy skręty dla poszczególnych seryj.

	1.	2.	3.
	197·33	197·33	197·33
	—0·00	—65·67	—60·00
	—201·00	—129·00	—138·00
	—3·67	+2·66	—0·67
$K_r-(K_r)^0=$	4	3	3
$-(\delta_1)=$	—0·92	+0·89	—0·22

Dalszy rachunek polega na obliczaniu *poprawek* dla *wartości*, uzyskanych w pierwszem wyrównaniu i *poprawek* dla *skrętów* poszczególnych seryj.

Poprawki wyników pierwszego wyrównania (zest. I *a*) uzyskujemy dla każdego kierunku, tworząc średnie arytmetyczne ogólne ze skrętów z uwzględnieniem wag seryj.

$$\left.\begin{array}{lll}
1. & -2\times0{\cdot}92+3\times89 \quad . \quad = +0{\cdot}83; & +\frac{0{\cdot}83}{5} = +0''{\cdot}17, \\
2. & -2\times0{\cdot}92+3\times0{\cdot}89-1\times0{\cdot}22 = +0{\cdot}61; & +\frac{0{\cdot}61}{6} = +0''{\cdot}10, \\
3. & -2\times0{\cdot}92+3\times0{\cdot}89-1\times0{\cdot}22 = +0{\cdot}61; & +\frac{0{\cdot}61}{6} = +0''{\cdot}10, \\
4. & -2+0{\cdot}92 \quad . \quad -1\times0{\cdot}22 = -2{\cdot}06; & -\frac{2{\cdot}06}{3} = -0''{\cdot}69.
\end{array}\right\}\text{(poprawki kierunków)}$$

W podobny sposób otrzymujemy poprawki skrętów z poprawek kierunków.

1.	+0''·17,	+0''·17,	.
2.	+0·10,	+0·10,	+0''·10
3.	+0·10,	+0·10,	+0·10
4.	—0·69,	.	—0·69
$\Sigma=$	—0''·32,	+0''·37,	—0''·49
	:4	:3	:3
	—0''·08,	+0''·12,	—0''·16 (poprawki skrętów).

Z uzyskanych poprawek skrętów obliczamy — jak poprzednio ze skrętów seryj — dalsze poprawki kierunków:

$+0''\cdot20:5=+0''\cdot04,\ 0''\cdot04:6=0''\cdot01,\ 0''\cdot04:6=0''\cdot01,\ -0''\cdot32:3=-0''\cdot11,$

a z nich dalsze poprawki skrętów:

$$\begin{array}{ccc} -0''\cdot05, & +0''\cdot06, & -0''\cdot09 \\ :4 & :3 & :3 \\ \hline -0''\cdot01, & +0''\cdot02, & -0''\cdot03. \end{array}$$

Przeprowadzając raz jeszcze to samo postępowanie, otrzymujemy dalej popr. kier.: $+0''\cdot04:5=+0''\cdot01$, $+0''\cdot01:6=0''\cdot00$, $+0''\cdot01:6=0''\cdot00$, $-0''\cdot05:3=-0''\cdot02$, które możemy uważać za *ostateczne*.

Dodając do każdego kierunku, uzyskanego z wyrównania pierwszego, sumę odpowiadających mu poprawek kierunkowych, oraz do skrętów, obliczonych na początku, sumę poprawek skrętów dla każdej serji osobno, otrzymujemy *kierunki wyrównane* i serje definitywnie ustalone.

Kierunki *wyrównane:*

$$\begin{array}{llllllll}
1. & 0^0 & 0' & 0''\cdot00+0''\cdot17+0''\cdot04+0''\cdot01= & \mathbf{0^0\ 0'\ 0''\cdot22,} \\
2. & 14 & 34 & 52\ \cdot33+0\ \cdot10+0\ \cdot01+0\ \cdot00= & \mathbf{14^0 34' 52''\cdot44,} \\
3. & 43 & 44 & 19\ \cdot33+0\ \cdot10+0\ \cdot01+0\ \cdot00= & \mathbf{43^0 44' 19''\cdot44,} \\
4. & 73 & 33 & 5\ \cdot67-0\ \cdot69-0\ \cdot11-0\ \cdot02= & \mathbf{73^0 33'\ 4''\cdot85.}
\end{array}$$

Sumaryczne skręty poszczególnych seryj wynoszą:

l'	l''	l'''
$-0''\cdot92$	$+0''\cdot89$	$-0''\cdot22$
$-0\cdot08$	$+0\cdot12$	$-0\cdot16$
$-0\cdot01$	$+0\cdot02$	$-0\cdot03$
$\Sigma-1''\cdot01$	$+1''\cdot03$	$-0''\cdot41$

Ustalone kierunki spostrzegane są zatem (po odjęciu skrętów od spostrzeżeń pierwotnych):

		l'	l''	l'''
1	$359^0\ 59'$	$58''\cdot99$	$61''\cdot03$	.
2	14 34	49·99	52·03	$58''\cdot59$
3	43 44	19·99	19·03	19·59
4	73 32	67·99	.	58·59

Odejmując je od kierunków wyrównanych otrzymujemy błędy pozorne δ.

	δ'	δ''	δ'''	$p'\delta'^2$	$p''\delta''^2$	$p'''\delta'''^2$	
1	$+1''{\cdot}23$	$-0''{\cdot}81$	.	3·0258	1·9683	.	$\mu = \sqrt{\dfrac{[p\delta\delta]}{n-k}}$
2	$+2{\cdot}45$	$+0{\cdot}41$	$-6''{\cdot}15$	12·0050	0·5043	37·8225	$n = 10,\ k = 3 + 4 -$ $- 1 = 6$
3	$-0{\cdot}55$	$+0{\cdot}41$	$-0{\cdot}15$	0·6050	0·5043	0·0225	
4	$-3{\cdot}14$	.	$+6{\cdot}26$	19·7192	.	39·1876	$\mu = \sqrt{\dfrac{115.3645}{4}} =$
Σ	$-0{\cdot}01$	$+0{\cdot}01$	$-0{\cdot}04$	35·3550	2·9769	77·0326	$= \pm 5''{\cdot}37.$
p	2	3	1	$[p\delta\delta] = 115{\cdot}3645$			

Metoda przybliżona Yollanda i Clarka *nie podaje dokładności* wyników, t. j. błędów średnich względnie wag wielkości wyrównanych.

Przy dalszem wyrównaniu sieci tryangulacyjnej używamy zazwyczaj wyników uzyskanych powyższą metodą, tak jakby pochodziły ze seryj pełnych. Wagi kierunków można także przyjąć równe ilościom spostrzeżeń poszczególnych kierunków, co jest jednak tylko dość grubem przybliżeniem. (Porówn. zestawienie wag w ustępie *c)* we wzorach (39) i (41).

b) Metoda ścisła.

Głównym twórcą metody ścisłej jest znany geodeta niemiecki *F. W. Bessel,* który zastosował ją przy tryangulacji, przeprowadzonej w latach 1832—1835 w Prusiech Wschodnich dla pomiarów stopni [1]).

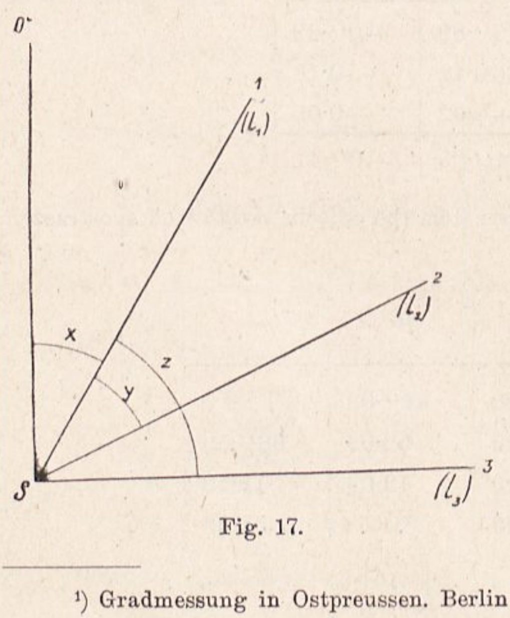

Fig. 17.

Całość wyrównania, obejmującą w części pierwszej wyrównanie stacyjne, zaś w części drugiej wyrównanie sieci tryang., przedstawiliśmy w ogólnych zarysach w § 4-tym rozdziału VI-go.

Równania błędów ustawiał Bessel w sposób następujący. Jako niewiadome wprowadził *kąt,* zawarty między *kierunkiem* 0° *limbusu a kierunkiem do pierwszego celu,* oraz *kąty,* zawarte między *kierunkiem pierwszym i resztą kierunków.*

[1]) Gradmessung in Ostpreussen. Berlin 1838.

W ten sposób uzyskiwał dla poszczególnych seryj następujące równania błędów.

$$\left.\begin{array}{ll|ll|ll}
\multicolumn{2}{c|}{\text{Serja I.}} & \multicolumn{2}{c|}{\text{Serja II.}} & \multicolumn{2}{c}{\text{Serja III. i t. d.}} \\
\delta_1'=x'-l_1', & p_1' & \delta_1''=x''-l_1'', & p_1'' & \delta_1'''=x'''-l_1''', & p_1''' \\
\delta_2'=x'+y-l_2', & p_2' & \delta_2''=x''+y-l_2'', & p_2'' & \delta_2'''=x'''-y-l_2''', & p_2''' \\
\delta_3'=x'+z-l_3', & p_3' & \delta_3''=x''+z-l_3'', & p_3'' & \delta_3'''=x'''-z-l_3''', & p_3''' \\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \\
 & [p'] & & [p''] & & [p''']
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Niewiadome t. zw. orjentacyjne x', x'', x''', .. są *różne* dla każdej serji, natomiast pozostają kąty y, z,... niezmienione. Wprowadzenie wag jest tylko potrzebne dla urobienia ogólnych wzorów, przyczem kierunki niespostrzegane otrzymują wagi $=0$; zresztą są wszystkie wagi $p=1$. Zatem $[p']+[p'']+[p''']+\ldots=[p_1]+[p_2]+[p_3]+\ldots=[p]$, a $[p]$ równa się ilości obserwacyj kierunków.

Równania normalne będą miały kształt ogólny:

$$\left.\begin{array}{l}
[p']x' \quad . \quad . \quad \ldots+p_2'y+p_3'z+\ldots-[p'l']=0 \\
. \quad [p'']x'' \quad . \quad \ldots+p_2''y+p_3''z+\ldots-[p''l'']=0 \\
. \quad . \quad [p''']x'''\ldots+p_2'''y+p_3'''z+\ldots-[p'''l''']=0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_2'x'+p_2''x''+\ldots\ldots+[p_2]y \quad . \quad +\ldots-[p_2l_2]=0 \\
p_3'x'+p_3''x''+\ldots\ldots \quad . \quad +[p_3]z+\ldots-[p_3l_3]=0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Z pierwszej części równań normalnych (2) wyznaczymy z łatwością:

$$\begin{aligned}
-x' &= \frac{p_2'y+p_3'z+\ldots-[p'l']}{[p']}, \\
-x'' &= \frac{p_2''y+p_3''z+\ldots-[p''l'']}{[p'']}, \\
-x''' &= \frac{p_2'''y+p_3'''z+\ldots-[p'''l''']}{[p''']}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \quad (3)$$

Wartości te, wstawione do reszty równań normalnych (2), dostarczą nam równań kształtu:

$$\begin{aligned}
(bb)y+(bc)z+\ldots(bl)&=0 \\
(bc)y+(cc)z+\ldots(cl)&=0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots&,
\end{aligned} \quad (4)$$

przyczem

$$\begin{aligned}
(bb)&=[p_2]-\frac{p_2'}{[p']}p_2'-\frac{p_2''}{[p'']}p_2''-\ldots \\
(bc)&=\quad -\frac{p_2'}{[p']}p_3'-\frac{p_2''}{[p'']}p_3''-\ldots \\
(cc)&=[p_3]-\frac{p_3'}{[p']}p_3'-\frac{p_3''}{[p'']}p_3''-\ldots
\end{aligned} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}(bl) &= -[p_2 l_2] + \frac{p_2'}{[p']}[p'l'] + \frac{p_2''}{[p'']}[p''l''] + \dots \\ (cl) &= -[p_3 l_3] + \frac{p_3'}{[p']}[p'l'] + \frac{p_2''}{[p'']}[p''l''] + \dots\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Rozwiązując równania (4), otrzymujemy wartości kątów wyrównanych $y=[1, 2]$, $z=[1, 3]$ i t. d.

Przy tworzeniu spółczynników równań (4) można *łączyć ze sobą* serje jednakowo spostrzegane. Natomiast przy wyznaczaniu $[\delta\delta]$ należy brać na uwagę *każdą serję osobno.*

Błąd średni kierunkowy (odpowiadający obserwacji kierunku w jednej serji) urabiamy wedle wzoru:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{[p]-s-(K_r-1)}}; \quad (6)$$

$[p]$ odpowiada ilości spostrzeżeń kierunków, s ilości wszystkich seryj, zaś K_r ilości kierunków stacyjnych.

Dla użytku późniejszego wyrównania sieci tryangulacyjnej, obejmującej omawianą stację, należy utworzyć równania wag, posługując się spółczynnikami równań (4).

Jako niewiadome wystąpią w nich

$$[\beta\beta]=Q_{2.2}, \ [\beta\gamma]=Q_{2.3}, \ [\gamma\gamma]=Q_{3.3} \text{ i t. d.}:$$

$$\begin{aligned}(bb)\,Q_{2.2}+(bc)\,Q_{2.3}+\dots\dots &= 1 \\ (bb)\,Q_{2.3}+(bc)\,Q_{3.3}+\dots\dots &= 0 \\ (bc)\,Q_{2.3}+(cc)\,Q_{3.3}+\dots\dots &= 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned} \quad (7)$$

(W § 4-tym rozdziału VI-go oznaczono niewiadome ogólnie przez $x, y, z\dots$, przeto i niewiadome równań wag były tam

$$Q_{1.1},\ Q_{1.2},\ Q_{1.3},\dots Q_{2.2},\ Q_{2.3}\dots \text{ i t. d}).$$

Zamiast ustawiać równania błędów w sposób podany powyżej, możemy ułożyć je na wzór związków (3) i (4) § 5-go (str. 205.), otrzymując dla poszczególnych seryj następujące równania błędów.

Serja I.	Serja II.	
$\delta_1'=\delta_1'$	$\delta_1''=\delta_1''$	
$\delta_2'=\delta_1'+x+l_1'-l_2'$	$\delta_2''=\delta_1''=x+l_1''-l_2''$	(8)
$\delta_3'=\delta_1'+y+l_1'-l_3'$	$\delta_3''=\delta_1''+y+l_1''-l_3''$ i t. d.,	
$\dots\dots\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots\dots\dots$	

przyczem można dla uproszczenia rachunku złączyć spostrzeżenia seryj o wszystkich tych samych kierunkach, poddając ich średnie wyniki wyrównaniu z wagami, odpowiadającemi ilości seryj złączonych.

Dalsze postępowanie uwidoczniono na następującym przykładzie.

	Celowe do p	S. I. $p'=3$	S. II. $p''=2$	S. III. $p'''=1$
1	$0^0\ 0'$	$0''\cdot0$	$0''\cdot0$	.
2	41 12	25·5	25·5	29·5
3	104 23	39·0	40·5	40·0
4	158 41	.	49·5	44·5

W serji I. złączono 3 serje, w serji II. 2 serje. (9)

Dla ułatwienia rachunkowego przyjmiemy jako przybliżone wartości kątów:

$$(1,2)=41^0 12' 25'',\ (1,3)=104^0 23' 35'' \text{ i } (1,4)=158^0 41' 40''; \qquad (10)$$

przybliżone wartości kierunków odpowiednich przedstawiają te same wartości, jeżeli kierunek (1) obierzemy $0^0 0' 0''$. Oznaczając dalej poprawki kątów przybliżonych, uzyskane wyrównaniem, przez x, y i z, otrzymamy na podstawie zestawienia (11):

	S. I. $p'=3$	S. II. $p''=2$	S. III. $p'''=1$
	l'	l''	l'''
1	$0''\cdot0$	$0''\cdot0$	.
2	0·5	0·5	$4''\cdot5$
3	4·0	5·5	5·0
4	.	9·5	4·5

(11)

następujące równania błędów:

Serja I. $p'=3$	Serja II. $p''=2$	Serja III. $p'''=1$
$\delta_1'=\delta_1'$	$\delta_1''=\delta_1''$	.
$\delta_2'=\delta_1'+x-0\cdot5$	$\delta_2''=\delta_1''+x-0\cdot5$	$\delta_2'''=\delta_1'''+x-4\cdot5$
$\delta_3'=\delta_1'+y-4\cdot0$	$\delta_3''=\delta_1''+y-5\cdot5$	$\delta_3'''=\delta_1'''+y-5\cdot0$
.	$\delta_4''=\delta_1''+z-9\cdot5$	$\delta_4'''=\delta_1'''+z-4\cdot5$

(12)

Równania *normalne* z uwzględnieniem wag poszczególnych seryj przedstawia następujące zestawienie schematyczne:

δ_1'	δ_1''	δ_1'''	x	y	z	Wyrazy wolne
3.3	.	.	3	3	.	−13·5
.	4.2	.	2	2	2	−31·0
.	.	3	1	1	1	−14·0
3	2	1	6	.	.	− 7·0
3	2	1	.	6	.	−28·0
.	2	1	.	0	3	−23·5

(13)

Z trzech pierwszych równań wyznaczymy:

$$\delta_1' = \frac{-3x-3y+13\cdot5}{9},\ \delta_1'' = \frac{-2x-2y-2z+31\cdot0}{8}$$

$$\text{i } \delta_1''' = \frac{-x-y-z+14{,}0}{3}, \qquad (14)$$

a po wstawieniu tych związków do trzech ostatnich, otrzymamy równania normalne o niewiadomych x, y i z.

$$\begin{aligned} 4\cdot1667x - 1\cdot8333y + 0\cdot8333z + 9\cdot9167 &= 0 \\ -1\cdot8333x + 4\cdot1667y - 0\cdot8333z - 11\cdot0833 &= 0 \\ -0\cdot8333x - 0\cdot8333y + 2\cdot1667z - 11\cdot0833 &= 0. \end{aligned} \qquad (15)$$

Równania te dostarczają nam wartości *niewiadomych:* $\boldsymbol{x = 1''\cdot1136}$, $\boldsymbol{y = 4''\cdot6136}$, $\boldsymbol{z = 7''\cdot3181}$, zatem i *kątów wyrównanych:*

[1,2]=41°12′26·″114, [1,3]=104°23′39″·614, [1,4]=158°41′47″·318. (16)

Dla wyznaczenia poszczególnych δ należałoby właściwie obliczyć wartości δ_1', δ_1'' i δ_1''' i użyć równań błędów (12); można je jednak wyznaczyć sposobem prostszym.

Odejmując od kierunków uzyskanych wyrównaniem (przyjmując pierwszy 0°0′·00″) *kierunki przybliżone, otrzymamy:*

0″·000, 1″·114, 4″·614, 7″·318;

poszczególne $l^{(i)}$ (patrz zestawienie (11)), odjęte od tych wartości, dostarczają nam następujących wyników w zestawieniu schematycznem:

	Serja I	Serja II	Serja III
1	0·000	0·000	.
2	+0·614	+0·614	−3·386
3	+0·614	−0·886	−0·386
4	.	−2·182	+2·818
$\Sigma=$	+1·228	−2·454	−0·954
$:K_r=$	:3	:4	:3
$\frac{\Sigma}{K_r}=$	+0·409	−0·614	−0·318

(17)

Odejmując $\frac{\Sigma}{K_r}$ *od wartości, zestawionych w kolumnach schematu (17), otrzymujemy poszczególne* δ.

	δ'	δ''	δ'''	$p'\delta'^2$	$p''\delta''^2$	$p'''\delta'''^2$
1	−0·409	+0·614	.	0·5019	0·7540	.
2	+0·205	+1·228	−3·068	0·1260	3·0160	9·4126
3	+0·205	−0·272	−0·068	0·1260	0·1480	0·0046
4	.	−1·568	+3·136	.	4·9172	9·8345
Σ	+0·001	+0·002	0·000	0·7539	8·8352	19·2517
	$p'=3$	$p''=2$	$p'''=1$	$[p\delta\delta]=28\cdot8408$		

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-k}} \qquad (18)$$

$n=10$, $k=6$

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{28\cdot8408}{4}} = \pm 2''\cdot685.$$

(μ_0 jest błędem śr. kierunku serji pojedynczej, czyli błąd średni kierunku, spostrzeganego w obu położeniach lunety).

Oznaczając niewiadome równań wag

dla kąta [1,2] przez $Q_{2.2}$, $Q_{2.3}$, $Q_{2.4}$
" " [1,3] " $Q_{2.3}$, $Q_{3.3}$, $Q_{3.4}$
" " [1,4] " $Q_{2.4}$, $Q_{3.4}$, $Q_{4.4}$,

otrzymamy dla ich wyznaczenia 6 następujących równań wag:

$$\begin{aligned}
4{\cdot}1667\, Q_{2.2} - 1{\cdot}8333\, Q_{2.3} - 0{\cdot}8333\, Q_{2.4} &= 1 \\
\hline
4{\cdot}1667\, Q_{2.3} - 1{\cdot}8333\, Q_{3.3} - 0{\cdot}8333\, Q_{3.4} &= 0 \\
-1{\cdot}8333\, Q_{2.3} + 4{\cdot}1667\, Q_{3.3} - 0{\cdot}8333\, Q_{3.4} &= 1 \\
\hline
4{\cdot}1667\, Q_{2.4} - 1{\cdot}8333\, Q_{3.4} - 0{\cdot}8333\, Q_{4.4} &= 0 \\
-1{\cdot}8333\, Q_{2.4} + 4{\cdot}1667\, Q_{3.4} - 0.8333\, Q_{4.4} &= 0 \\
-0{\cdot}8333\, Q_{2.4} - 0{\cdot}8333\, Q_{3.4} + 4{\cdot}1667\, Q_{4.4} &= 1.
\end{aligned} \tag{19}$$

Równaniom tym odpowiadają następujące wartości poszczególnych Q:

$$\begin{aligned}
&Q_{2.2} = 0{\cdot}3788, \\
&Q_{2.3} = 0{\cdot}2121, \quad Q_{3.3} = 0{\cdot}3788, \\
&Q_{2.4} = 0{\cdot}2273, \quad Q_{3.4} = 0{\cdot}2273, \quad Q_{4.4} = 0{\cdot}6364.
\end{aligned} \tag{20}$$

Błędy średnie i wagi kątów wyrównanych są wedle § 5-go rozdz. IV-go (str. 92.):

$$\begin{aligned}
\mu_x &= \mu_0\sqrt{Q_{2.2}} = 2''{\cdot}685\sqrt{0{\cdot}3788} = \pm 1''{\cdot}651, & P_x &= \frac{1}{Q_{2.2}} = 2{\cdot}64, \\
\mu_y &= \mu_0\sqrt{Q_{3.3}} = 2''{\cdot}685\sqrt{0{\cdot}3788} = \pm 1''{\cdot}651, & P_y &= \frac{1}{Q_{3.3}} = 2{\cdot}64, \\
\mu_z &= \mu_0\sqrt{Q_{4.4}} = 2''{\cdot}685\sqrt{0{\cdot}6364} = \pm 2''{\cdot}143, & P_z &= \frac{1}{Q_{4.4}} = 1{\cdot}57.
\end{aligned} \tag{21}$$

Wartości poszczególnych Q są potrzebne dla wyznaczenia ***spółczynników przenoszących,*** o ile ma później nastąpić wyrównanie sieci tryangulacyjnej, obejmującej kąty [1,2], [1,3] i [1,4] metodą Bessela. (Porównaj równ. (16) § 4-go rozdz. VI-go, (str. 159). Natomiast przy zastosowaniu metody *Helmerta* (§ 3-ci rozdz. VI-go) nie potrzeba przeprowadzać wyrównania stacyjnego w całości, poprzestając na utworzeniu ***systemu równoważnego z odpowiedniemi wagami.***

c) Przemiana wyników wyrównania stacyjnego w serję pełną (wedle Helmerta)[1]).

Jak już wspomnieliśmy poprzednio, powoduje wyrównanie stacyjne, przeprowadzone metodą Bessela, ***komplikacje*** w późniejszem wyrównaniu sieci tryangulacyjnej.

[1]) Die europäische Längengradmessung in 52⁰ Breite von Greenwich bis Warschau. I. Heft, ***Hauptdreiecke*** und Grundlinienanschlüsse von England bis Polen. Berlin 1893, str. 37—42; oraz *Helmert,* Astronom. Nachr. tom 134, w 1893, str. 281—296 ***„Über eine Vereinfachung bei der Einführung von Stationsergebnissen in der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes.***

To było powodem, dla którego Helmert przy zestawieniu tryangulacyj dla pomiaru stopni równoleżnika (52^0) w Europie, mając do dyspozycji wiele wyrównań stacyjnych, przeprowadzonych metodą Bessela, zastosował przy wyrównaniach sieci tryang. *nową metodę*, zmniejszającą znacznie nakład pracy rachunkowej.

Metoda ta dozwala nam przemienić wyniki wyrównania stacyjnego w *pełną serję kierunków o odpowiednich wagach*, przyczem każdy kierunek w połączeniu z przysługującą mu wagą wstawiamy do późniejszego wyrównania sieci jako spostrzeżenie niezależne (a zatem bez spółudziału spółczynników przenoszących i t. d.).

Przypuśćmy, że wyrównanie stacyjne (przy K kierunkach) dostarczyło nam kątów [1,2], [1,3], [1,4], ... [1, K], oraz z niemi związanych spółczynników równań wag:

$$\begin{array}{llll} Q_{2.2}, & Q_{2.3}, & Q_{2.4}, \ldots\ldots & Q_{2.K}, \\ & Q_{3.3}, & Q_{3.4}, \ldots\ldots & Q_{3.K}, \\ & & Q_{4.4}, \ldots\ldots & Q_{4.K}, \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ & & & Q_{K.K}. \end{array} \qquad (22)$$

Przy pomocy wzoru (25) § 8-go rozdz. IV-go (st. 114.) można wyznaczyć odwrotności wag $q_{h.i}$ wszystkich kątów, zawartych między powyżej danemi kierunkami; np. $q_{2.3}=F_2^{\,2}\,Q_{2.2}+2\,F_2 F_3\,Q_{2.3}+F_3^{\,2}\,Q_{3.3}$, a ponieważ $F=[1,3]-[1,2]=y-x$, $F_2=\frac{\partial F}{\partial x}=-1$, $F_3=\frac{\partial F}{\partial y}=+1$, przeto $q_{2.3}=Q_{2.2}-2\,Q_{2.3}+$ $+\,Q_{3.3}$.

Postępując analogicznie z innemi kątami, otrzymamy

$$\left.\begin{array}{lll} \text{dla kąta } [1,2] & \text{odwrotność wagi} & q_{1.2}=Q_{2.2} \\ \quad\text{,, ,, } [1,3] & \text{,, ,,} & q_{1.3}=Q_{3.3} \\ \quad\text{,, ,, } [1,4] & \text{,, ,,} & q_{1.4}=Q_{4.4} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \quad\text{,, ,, } [2,3] & \text{,, ,,} & q_{2.3}=Q_{2.2}-2\,Q_{2.3}+Q_{3.3} \\ \quad\text{,, ,, } [2,4] & \text{,, ,,} & q_{2.4}=Q_{2.2}-2\,Q_{2.4}+Q_{4.4} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \quad\text{,, ,, } [3,4] & \text{,, ,,} & q_{3.4}=Q_{3.3}-2\,Q_{3.4}+Q_{4.4} \\ & \text{i t. d.} & \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Chcąc zastąpić wyniki równania serją kierunków niezależnych o wagach różnych, należałoby, oznaczając odwrotności wag kierunków przez $q_1, q_2, \ldots q_K$, położyć wedle prawa przenoszenia się błędów:

$$\left.\begin{array}{l} q_{1.2}=q_1+q_2,\ q_{1.3}=q_1+q_3, \ldots\ldots\ldots\ldots q_{1.K}=q_1+q_K, \\ \qquad\qquad q_{2.3}=q_2+q_3, \ldots\ldots\ldots\ldots q_{2.K}=q_2+q_K, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad q_{(K-1).K}=q_{K-1}+q_K. \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Dla $K_r > 3$ mogą być równania, objęte wzorem (24), spełnione tylko w przybliżeniu, natomiast dla $K_r = 3$ otrzymujemy związki ścisłe:

$$q_{1.2} = q_1 + q_2, \quad q_{1.3} = q_1 + q_3 \qquad (K_r = 3). \qquad (25)$$
$$q_{2.3} = q_2 + q_3$$

Ztąd wynika ważne twierdzenie, odnoszące się do wyrównania stacyjnego o trzech kierunkach:

Wyniki wyrównania stacyjnego przy trzech kierunkach można zawsze zastąpić ściśle jedną serją kierunków o odpowiednich wagach, wyznaczonych wzorem (25).

Aby otrzymać jednoznaczne wartości poszczególnych q dla $K_r > 3$, postąpił *Helmert* w sposób następujący.

Kładąc

$$s_i = \Sigma q_{i.h} \qquad (26)$$

dla stałego wskaźnika i, a h zmieniającego się od 1 do K z wyłączeniem i, oblicza się na podstawie związków, zestawionych we wzorze (23), bezpośrednio:

$$s_i = \Sigma Q_{i.i} + (K_r - 2)\, Q_{i.i} - 2\, \Sigma Q_{i.h}, \qquad (27)$$

kontrolując obliczone s_i przy pomocy wzoru:

$$S = \Sigma s_i = 2\,(K_r - 1)\, \Sigma Q_{i.i} - 3\, \Sigma Q_{i.h}. \qquad (28)$$

Ponieważ wskaźniki poszczególnych Q rozpoczynają się od 2, przeto w obu ostatnich wzorach należy położyć $Q_{1.1} = 0$, $Q_{1.h} = 0$; poszczególne $Q_{i.h}$ wstawiamy do powyższych wzorów bez powtarzania.

Jak już wspomnieliśmy, nie mogą nam dostarczyć związki wzoru (24) dla $K_r > 3$ wartości ścisłych; najodpowiedniejsze wartości poszczególnych q_i uzyskujemy sposobem *Helmerta,* zastosowując do powyższych związków metodę najmniejszych kwadratów, t. j. wyznaczając poszczególne q_i z warunku, że suma kwadratów różnic lewych i prawych stron związków (24) ma być najmniejszą (minimum).

Wynikają ztąd równania normalne, którym poszczególne q_i muszą czynić zadość, mianowicie:

$$\left.\begin{array}{l} (K_r - 1)\, q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + q_K = s_1 \\ q_1 + (K_r - 1)\, q_2 + q_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + q_K = s_2 \\ q_1 + q_2 + (K_r - 1)\, q_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + q_K = s_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots + (K_r - 1)\, q_K = s_K. \end{array}\right\} \qquad (29)$$

Równań tych nie ma potrzeby ustawiać i rozwiązywać w konkretnych przypadkach, gdyż ogólny wzór na q_i dla znanych wartości poszczególnych s_i oraz ich sumy S opiewa:

$$q_i = \frac{s_i}{K_r - 2} - \frac{S}{2\,(K_r - 1)(K_r - 2)}. \qquad (30)$$

Dla kontroli posługujemy się wzorem:

$$\Sigma q_i = \frac{S}{2(K_r - 1)}. \tag{31}$$

Po obliczeniu odwrotności wag dla poszczególnych kierunków stacyjnych wedle wzoru (30), a następnie i wag kierunków, wstawiamy uzyskane wyrównaniem stacyjnem kierunki w połączeniu z obliczonemi wagami jako *niezależne spostrzeżenia* do warunków sieci tryangulacyjnej, uzyskując znaczne uproszczenie rachunkowe.

Przy *trzech* kierunkach stacyjnych otrzymujemy z równań, zestawionych we wzorze (25), ściśle:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{q_{1.2} + q_{1.3} - q_{2.3}}{2} = Q_{2.3}, \\ q_2 &= \frac{q_{1.2} - q_{1.3} + q_{2.3}}{2} = Q_{2.2} - Q_{2.3}, \\ q_3 &= \frac{-q_{1.2} + q_{1.3} + q_{2.3}}{2} = Q_{3.3} - Q_{2.3}, \end{aligned} \tag{32}$$

W tym przypadku obliczamy odwrotności wag kierunków wprost z wartości spółczynników równań wag Q.

Stosując powyżej opisaną metodę do wyników liczbowych przykładu, podanego w ustępie *b)* (poprzednim), otrzymamy ze względu na wartości poszczególnych Q, zestawione na str. 223., opierając się na związkach (23):

$$\begin{aligned} q_{1.2} &= Q_{2.2} = 0{\cdot}3788, \\ q_{1.3} &= Q_{3.3} = 0{\cdot}3788, \\ q_{1.4} &= Q_{4.4} = 0{\cdot}6364, \\ q_{2.3} &= Q_{2.2} - 2\,Q_{2.3} + Q_{3.3} = 0{\cdot}3788 - 0{\cdot}4242 + 0{\cdot}3788 = 0{\cdot}3334, \\ q_{2.4} &= Q_{2.2} - 2\,Q_{2.4} + Q_{4.4} = 0{\cdot}3788 - 0{\cdot}4546 + 0{\cdot}6364 = 0{\cdot}5606, \\ q_{3.4} &= Q_{3.3} - 2\,Q_{3.4} + Q_{4.4} = 0{\cdot}3788 - 0{\cdot}4546 + 0{\cdot}6364 = 0{\cdot}5606. \end{aligned} \tag{33}$$

Uwzględniając, że $q_{i.h} = q_{h.i}$, zestawimy następnie wartości poszczególnych s_i wedle wzoru (26):

$$\begin{aligned} s_1 &= q_{1.2} + q_{1.3} + q_{1.4} = 1{\cdot}3940, \\ s_2 &= q_{2.1} + q_{2.3} + q_{2.4} = 1{\cdot}2728, \\ s_3 &= q_{3.1} + q_{3.2} + q_{3.4} = 1{\cdot}2728, \\ s_4 &= q_{4.1} + q_{4.2} + q_{4.3} = 1{\cdot}7576, \end{aligned} \tag{34}$$

lub lepiej wedle wzoru (27) wprost z poszczególnych Q (bez obliczania $q_{i.h}$):

$$\begin{aligned} s_1 &= 1{\cdot}3940 + 0{\cdot}0 + 0{\cdot}0 &&= 1{\cdot}3940, \\ s_2 &= 1{\cdot}3940 + 2 \times 0{\cdot}3788 - 2 \times 0{\cdot}4394 &&= 1{\cdot}2728, \\ s_3 &= 1{\cdot}3940 + 2 \times 0{\cdot}3788 - 2 \times 0{\cdot}4394 &&= 1{\cdot}2728, \\ s_4 &= 1{\cdot}3940 + 2 \times 0{\cdot}6364 - 2 \times 0{\cdot}4546 &&= 1{\cdot}7576, \\ & && S = \Sigma s_i = 5{\cdot}6972. \end{aligned} \tag{35}$$

Kontrola sumy S wedle wzoru (28) daje wynik identyczny:

$$S = 2 \times 3 \times 1{\cdot}3940 - 4 \times 0{\cdot}6667 = 5{\cdot}6972. \tag{36}$$

Następnie obliczymy ostateczne wartości poszczególnych q wedle wzoru (30):

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1\cdot3940}{2} - \frac{5\cdot6972}{2\times3\times2} = 0\cdot2222,\\
q_2 &= \frac{1\cdot2728}{2} - \frac{5\cdot6972}{2\times3\times2} = 0\cdot1616,\\
q_3 &= \frac{1\cdot2728}{2} - \frac{5\cdot6972}{2\times3\times2} = 0\cdot1616,\\
q_4 &= \frac{1\cdot7576}{2} - \frac{5\cdot6972}{2\times3\times2} = 0\cdot4040.\\
&\qquad\qquad \Sigma q_i = 0\cdot9494.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Kontrola Σq_i wedle wzoru (31) wykazuje zgodność dostateczną:

$$\Sigma q_i = \frac{5\cdot6972}{2\times3} = 0\cdot9495. \tag{38}$$

Wyrównanie sieci możemy przeto przeprowadzić kierunkami, uzyskanemi z wyrównania stacyjnego, nadając im wagi:

$$
\begin{aligned}
&\text{kierunkowi [1]}, \quad p_1 = \frac{1}{q_1} = 4\cdot50,\\
&\qquad ,,\qquad [2], \quad p_2 = \frac{1}{q_2} = 6\cdot19,\\
&\qquad ,,\qquad [3], \quad p_3 = \frac{1}{q_3} = 6\cdot19,\\
&\qquad ,,\qquad [4], \quad p_4 + \frac{1}{q_4} = 2\cdot48.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Stopień przybliżenia powyżej podanej metody możemy skontrolować, tworząc z powrotem z q_i odwrotności wag kątów i porównując je z wartościami, uzyskanemi wyrównaniem ścisłem.

Wedle wyrówn. *ścisłego* (33):	Wedle sposobu *Helmerta*:	Różnica w %:	
$q_{1.2} = 0\cdot3788$	$q_{1.2} = q_1 + q_2 = 0\cdot3878$	0·53	
$q_{1.3} = 0\cdot3788$	$q_{1.3} = q_1 + q_3 = 0\cdot3878$	0·53	(40)
$q_{1.4} = 0\cdot6364$	$q_{1.4} = q_1 + q_4 = 0\cdot6262$	1·60	
$q_{2.3} = 0\cdot3334$	$q_{2.3} = q_2 + q_3 = 0\cdot3232$	3·06	
$q_{2.4} = 0\cdot5606$	$q_{2.4} = q_2 + q_4 = 0\cdot5656$	0·89	
$q_{3.4} = 0\cdot5606$	$q_{3.4} = q_3 + q_4 = 0\cdot5656$	0·89.	

Różnice te są nieznaczne i nie mogą mieć wpływu praktycznego na wyniki wyrównania.

Dawniej przed poznaniem metody *Helmerta* przyjmowano w niektórych przypadkach wagi równe ilości spostrzeżeń poszczególnych kierunków; w naszym przykładzie otrzymalibyśmy wedle tego sposobu wagi następujące [por. *b)* (9)]:

$$(p_1) = 5, \; (p_2) = 6, \; (p_3) = 6, \; (p_4) = 3, \tag{41}$$

które spowodowałyby obniżenie dokładności wyrównania sieci tryangulacyjnej.

*

Przy poszczególnych wyrównaniach stacyjnych, należących do jednej sieci tryangulacyjnej, wypadają zazwyczaj ***nierówne jednostkowe błędy średnie*** μ_0, mimoto nie uwzględniamy z reguły tej okoliczności przy wyrównaniu sieci.

W niektórych — zresztą rzadkich — przypadkach może być to jednak wskazanem; jak wtedy postąpić, poucza *Helmert* w swem dziele o rachunku wyrównawczym [1]), przyczem uwzględnia również źródła błędów sieci tryangulacyjnej.

F. R. Helmert, Ausgleichungsrechnung n. d. Methode der kl. Quadrate, 2-gie wydanie, Lipsk i Berlin, 1907, str. 533—535.

ROZDZIAŁ DZIESIĄTY.

Tryangulacja (Część druga). Wyrównanie przy trygonometrycznem oznaczeniu punktów przez wcinanie. (Wyrównanie spółrzędnych).

§ 1. Wiadomości wstępne. Związek między zmianą kierunku i spółrzędnych.

Trygonometryczne oznaczenie punktów przez wcinanie ma miejsce, gdy chodzi o *wyznaczenie spółrzędnych* bądźto punktów pojedynczych, bądźto naraz całego systemu punktów w nawiązaniu do już istniejącej sieci tryangulacyjnej.

Sieci wypełniające I-rzędne (ewent. poszczególne punkty sieci I-rzędnej), jakoteż sieci rzędów wyższych wyrównywamy, posługując się z reguły tą metodą.

Jako niewiadome występują tu *poprawki spółrzędnych,* oraz t. zw. *niewiadome orjentacyjne,* znane nam z wyrównań stacyjnych, a wyrównanie odnosi się do spostrzeżeń pośrednich, któremi są zazwyczaj kierunki, rzadziej kąty (kąty n. p. przy tryang. I-wszo- i II-go-rzędnej); oba rodzaje spostrzeżeń wchodzą do równań błędów ostatecznie jako azymuty kierunków.

O ile wyrównanie dotyczy punktów I-wszo-, II-go- i III-ciorzędnych, należy je przeprowadzić na *płaszczyźnie* przy zastosowaniu wiernokątnego odwzorowania, t. j. po odpowiednio przeprowadzonej *redukcji kierunków;* przy punktach IV-rzędnych przeprowadzamy całkowity rachunek wyrównawczy z reguły bez żadnych redukcyj na płaszczyźnie, stosując *płaskie* spółrzędne prostokątne.

Dodać również należy, że przy punktach rzędu I-go i II-go uskutecznia się nasamprzód wyrównanie stacyjne, które, ze względu na zastosowanie w tych przypadkach z reguły metody pomiaru kątów we wszystkich kombinacjach z uwzględnieniem kierunków stałych [1]), przedstawia się bardzo prosto.

---

[1]) Patrz końcowy ustęp § 4-go rozdziału IX-go, str. 202. i 203.

Omawiana tu metoda bywa jednak najczęściej używaną w praktyce przy tryangulacji IV-rzędnej i wyznaczaniu punktów nawiązywanych do niej, przyczem najchętniej wyrównywamy spółrzędne poszczególnych punktów dla siebie, choć nierzadko stosujemy wyrównanie do kilku punktów naraz (n. p. do t. zw. par punktów, trójek i t. p.).

Pomijając sprawę przejścia z kierunków sferoidalnych na kierunki na płaszczyźnie[1]), jako należącą do dziedziny geodezji wyższej, omówimy problem wyrównania na płaszczyźnie przy użyciu spółrzędnych prostokątnych.

Równania błędów układamy, biorąc na uwagę *azymuty pozorne (a)* (kąty zawarte między dodatnim kierunkiem osi x-ów, a danym kierunkiem, liczone w umówionym sensie, t. j. w kierunku posuwania się wskazówek zegarów).

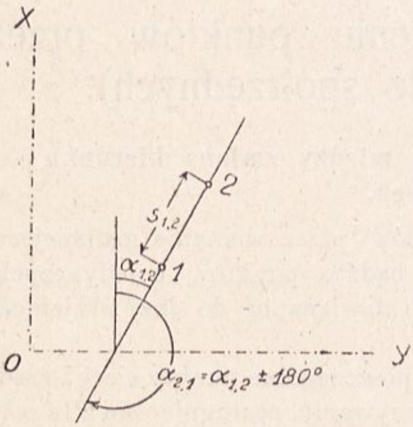

Fig. 18.

Ponieważ $\operatorname{tg}(a)_{1.2}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-y_1}$ (patrz fig. 18.), przeto

$$(a)_{1.2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Zmiana spółrzędnych o nieznaczne wielkości δx_1, δy_1, δx_2, δy_2, mogące być uważane w przybliżeniu jako wielkości nieskończone małe, wywołuje nieznaczną zmianę azymutu pozornego o δa, przyczem zmiana ta, liczona w kierunku (1.2) czyli zmiana azymutu $(a)_{1.2}$, wynosi:

$$\delta(a)_{1.2}=\frac{\partial \operatorname{arc\,tg}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial \operatorname{arc\,tg}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial \operatorname{arc\,tg}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{\partial x_2}\delta x_2+$$
$$+\frac{\partial \operatorname{arc\,tg}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{\partial y_2}\delta y_2. \tag{2}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial \operatorname{arc\,tg}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{\partial x_1}=\frac{1}{1+\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2}\,\frac{y_2-y_1}{(x_2-x_1)^2}=\frac{y_2-y_1}{s^2_{1.2}}=\frac{\sin(a)_{1.2}}{s_{1.2}}$$

zaś

$$\frac{\partial \operatorname{arc\,tg}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{\partial y_1}=\frac{1}{1+\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2}\left(-\frac{x_2-x_1}{(x_2-x_1)^2}\right)=-\frac{x_2-x_1}{s^2_{1.2}}=-\frac{\cos(a)_{1.2}}{s_{1.2}}, \tag{3}$$

[1]) Dla przemiany tej, dotyczącej tak kierunków stałych, jak i spostrzeganych, należy nasamprzód obliczyć spółrzędne przybliżone punktów wyznaczanych.

a analogicznie:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{\partial x_2}&=-\frac{y_2-y_1}{s^2_{1.2}}=-\frac{\sin(a)_{1.2}}{s_{1.2}},\\ \frac{\partial \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{\partial y_2}&=\frac{x_2-x_1}{s^2_{1.2}}=\frac{\cos(a)_{1.2}}{s_{1.2}},\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

przeto będzie ostatecznie:

$$\delta(a)_{1.2}=\frac{\sin(a)_{1.2}}{s_{1.2}}\delta x_1-\frac{\cos(a)_{1.2}}{s_{1.2}}\delta y_1-\frac{\sin(a)_{1.2}}{s_{1.2}}\delta x_2+\frac{\cos(a)_{1.2}}{s_{1.2}}\delta y_2. \quad (5)$$

Zmiana azymutu pozornego $(a)_{2.1}$, a więc liczona w kierunku przeciwnym, przedstawia się zatem:

$$\delta(a)_{2.1}=-\frac{\sin(a)_{2.1}}{s_{2.1}}\delta x_1+\frac{\cos(a)_{2.1}}{s_{2.1}}\delta y_1+\frac{\sin(a)_{2.1}}{s_{2.1}}\delta x_2-\frac{\cos(a)_{2.1}}{s_{2.1}}\delta y_2, \quad (6)$$

przyczem, ze względu na użycie płaskich spółrzędnych prostokątnych $(a)_{1.2}=(a)_{2.1}\pm180^0$, zaś $s_{1.2}=s_{2.1}$.

Chcąc mieć poszczególne $\delta(a)$ wyrażone w sekundach kątowych, należy równania (5) i (6) pomnożyć przez zamiennik $\varrho''=206265''$; związki między zmianą azymutu a zmianami spółrzędnych przedstawią się wówczas następująco:

$$\delta(a)''_{1.2}=\frac{\sin(a)_{1.2}}{s_{1.2}}\varrho''\delta x_1-\frac{\cos(a)_{1.2}}{s_{1.2}}\varrho''\delta y_1-\frac{\sin(a)_{1.2}}{s_{1.2}}\varrho''\delta x_2+$$
$$+\frac{\cos(a)_{1.2}}{s_{1.2}}\varrho''\delta y_2, \quad (5^*)$$

$$\delta(a)''_{2.1}=-\frac{\sin(a)_{2.1}}{s_{2.1}}\varrho''\delta x_1+\frac{\cos(a)_{1.2}}{s_{2.1}}\varrho''\delta y_1+\frac{\sin(a)_{2.1}}{s_{2.1}}\varrho''\delta x_2-$$
$$-\frac{\cos(a)_{2.1}}{s_{2.1}}\varrho''\delta y_2. \quad (6^*)$$

Wzory powyższe są pierwszorzędnej wagi dla rachunku wyrównawczego spółrzędnych, przeto niejednokrotnie będziemy z nich korzystali w niniejszym rozdziale.

W dalszych wywodach będziemy zajmowali się głównie pomiarami *kierunkowemi*, dodając tylko niezbędne uwagi, jak należy postępować w razie dokonania pomiarów kątowych.

§ 2. Wyrównanie wcinania wprzód.

Wcinanie wprzód bez wyrównania polega na rozwiązaniu trójkąta z następujących wielkości danych: ***podstawy i dwu kątów przyległych.***

W praktyce tryangulacyjnej dostarczają nam długości podstawy spółrzędne dwu punktów tryangulacyjnych (ustalone na podstawie pomiarów i wyrównań poprzednio przeprowadzonych), a zamiast kątami posługujemy się pozornemi azymutami odpowiednich kierunków.

Jednoznaczne wyznaczenie punktu P na miejsce, gdy przy pomocy odpowiednich pomiarów ustalimy położenie dwu kierunków (t. j. ich azymuty pozorne), zdążających z dwu punktów tryangulacyjnych do punktu P.

Wykonanie pomiarów *nadliczbowych* (t. j. w liczbie większej, jak to jest konieczne) powoduje wyrównanie.

Pomiary nadliczbowe mogą tu być rodzaju dwojakiego.

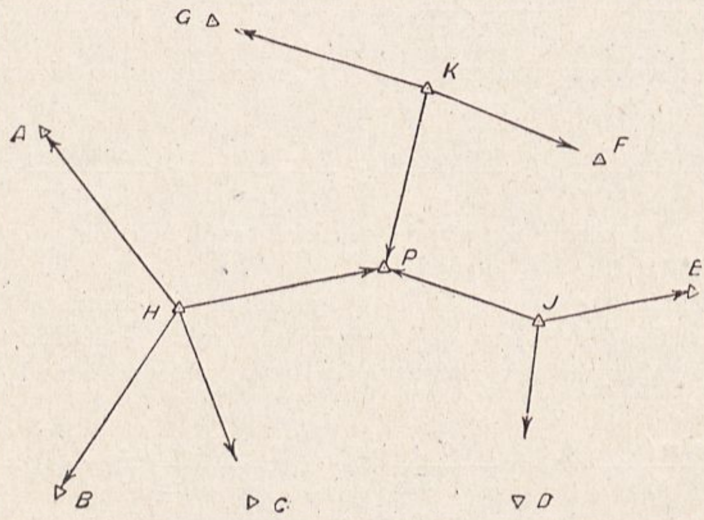

Fig. 19.

Przedewszystkiem możemy ustalić kierunki *wcinające* punkt P, t. zn. kierunki *zewnętrzne*, (bo zmierzające doń z zewnątrz), przez nawiązanie ich do kilku kierunków stałych, t. j. kierunków między ustalonemi punktami tryangulacyjnemi. Ponieważ wystarczyłoby nawiązanie każdego kierunku zewnętrznego (wcinającego) tylko do *jednego* kierunku stałego, przeto (patrz fig. 19.) nawiązanie kierunków HP, JP, KP..., do *więcej niż jednego* kierunku stałego, powoduje na każdej z tych stacyj H, J, K..., wyrównanie *stacyjne*.

Prócz tego wystarczają dla ustalenia położenia punktu P tylko *dwa* kierunki zewnętrzne, zatem wcięcie punktu P z więcej punktów tryangulacyjnych, które będziemy dla krótkości nazywali stałemi, niż *dwu*, powoduje również *wyrównanie*.

Z tego powodu dzielimy wyrównanie na dwie części, z których pierwsza obejmuje wyrównanie *stacyjne*, druga właściwe *wyrównanie spółrzędnych* szukanego punktu P.

a) Wyrównanie stacyjne ze względu na nawiązanie do kierunków stałych.

Przypuśćmy, że pomierzyliśmy na stanowisku O, z którego wcinamy punkt P, prócz kierunku do P jeszcze m kierunków stałych w serjach *pełnych*.

Azymuty pozorne kierunków mierzonych możemy wyrazić przy pomocy związków

$$(a)_i = \text{arc tang}\,\frac{y_i - y_0}{x_i - y_0}\,\varrho, \tag{1}$$

(opuszczając przy (a) wspólny wskaźnik o), przyczem $(a)_i$ należy rozumieć w mierze kątowej.

Związków tych mamy tyle ile spostrzeżeń, zatem $m+1$ (m kierunków stałych i jeden do punktu P).

$$\text{Ilość } m+1 \left|\begin{aligned} (a)_1 &= \text{arc tang}\,\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,\varrho \\ (a)_2 &= \text{arc tang}\,\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}\,\varrho \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a)_m &= \text{arc tang}\,\frac{y_m - y_0}{x_m - x_0}\,\varrho \\ (a)_p &= \text{arc tang}\,\frac{y_p - y_0}{x_p - x_0}\,\varrho. \end{aligned}\right. \tag{1*}$$

Oznaczając przez K z odpowiednim wskaźnikiem *średnią*, utworzoną dla każdego kierunku z s seryj (t. zw. kierunek średni) i uzupełniając ją odpowiednią poprawką (błędem pozornym) ϑ, nietrudno zauważyć, że różnice odpowiednich azymutów pozornych $(a)_i - (a)_1$ równają się różnicom odpowiednich kierunków wyrównanych $K_i + \vartheta_i - K_1 - \vartheta_1$.

Możemy zatem utworzyć m różnic kształtu:

$$\begin{aligned} (a)_2 - (a)_1 &= K_2 + \vartheta_2 - K_1 - \vartheta_1 \\ (a)_3 - (a)_1 &= K_3 + \vartheta_3 - K_1 - \vartheta_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a)_m - (a)_1 &= K_m + \vartheta_m - K_1 - \vartheta_1 \\ (a)_p - (a)_1 &= K_p + \vartheta_p - K_1 - \vartheta_1 \end{aligned} \tag{2}$$

W każdem z tych równań mamy wyraz *stały*

$$(a)_1 - K_1 - \vartheta_1 = z; \tag{3}$$

przyjąwszy to oznaczenie do dalszych wywodów, ustawimy $m+1$ równań błędów:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= -K_1 - z + (a)_1 \\ \vartheta_2 &= -K_2 - z + (a)_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vartheta_m &= -K_m - z + (a)_m \\ \vartheta_p &= -K_p - z + (a)_p = -K_p - z + \varrho\,\text{arc tang}\,\frac{y_p - y_0}{x_p - x_0}. \end{aligned} \tag{4}$$

Ze względu, że wszystkie (a) z wyjątkiem $(a)_p$ są bezbłędne, a w wyrażeniu $\frac{y_p-y_0}{x_p-x_0}$ tylko x_p i y_p są niewiadomemi, zawierają powyższe równania błędów trzy niewiadome x_p, y_p i z (t. zw. niewiadomą orjentacyjną).

Stosując metodę równoważnych systemów błędów, wyznaczymy z początkowych m równań z_0 przybliżoną wartość, niewiadomej z.

Odnośne równanie normalne będzie:

$$m\,z_0=[(a)-K]_1^m, \text{ zaś}$$

$$z_0=\frac{[(a)-K]_1^m}{m}. \tag{5}$$

Metoda równoważnych systemów równań błędów dozwala nam uważać uzyskaną wartość z_0 za spostrzeżenie o wadze m, (o ile wagi poszczeg. równań $p=1$), które może być użyte do dalszego wyrównania dla wyznaczenia poprawki δz.

Wstawiając

$$z=z_0+\delta z \tag{6}$$

do ostatniego równania błędów we wzorze (4), otrzymamy

$$\vartheta_p=-K_p-z_0-\delta_z+\varrho \operatorname{arc\,tang} \frac{y_p-y_0}{x_p-x_0}, \text{ lub}$$

$$\delta_p=\vartheta_p+\delta_z=-K_p-z_0+\varrho \operatorname{arc\,tang} \frac{y_p-y_0}{x_p-x_0}. \tag{7}$$

Błędy ϑ_p i δ_z są od siebie *niezależne,* zatem wedle prawa przenoszenia się błędów będzie:

$$\mu_\delta^2=\mu_\vartheta^2+\mu_z^2; \tag{8}$$

przyczem błędy równania (7) zastąpiliśmy odpowiedniemi błędami średniemi.

Równanie (8) posłuży nam do wyznaczenia wagi równania (7), o ile zastąpimy kwadraty błędów średnich odwrotnościami odpowiednich wag, gdyż:

$$\frac{1}{p_\delta}=\frac{1}{p_\vartheta}+\frac{1}{p_z}, \text{ lub} \tag{8*}$$

$$p_\delta=\frac{p_\vartheta \cdot p_z}{p_\vartheta+p_z}. \tag{9}$$

W przypadku, gdy wagi równań (4) są równe jedności, a co za tem idzie waga $p_z=m$, otrzymamy wagę równania (7)

$$p_\delta=\frac{m}{m+1}. \tag{9*}$$

Natomiast, jeżeli pomiary przeprowadzono w s serjach, będzie waga

$$p_\delta=s\frac{m}{m+1}. \tag{9**}$$

Jeżeli serje były *niezupełne* i przeprowadzono wyrównania stacyjne (bez uwzględnienia kątów stałych) wedle wskazówek § 6-go *b)* rozdz. IX-go (str. 218. i d.), należy wyznaczyć wagi poszczególnych kierunków metodą Helmerta wedle § 6-go *c)* powyższego rozdziału (str. 223. i d.) i uwzględnić je tak przy obliczaniu średniej wartości z_0, jak i przy tworzeniu wagi p_δ.

Wzór (5) otrzyma wówczas kształt:

$$z_0 = \frac{[p\{(a)-K\}]_1^m}{[p]_1^m}, \tag{5*}$$

$$\text{zaś } p_\delta = \frac{p_p \cdot [p]_1^m}{p_p + [p]_1^m}; \tag{9***}$$

przyczem $[p\{(a)-K\}]_1^m = p_1\{(a)_1 - K_1\} + p_2\{(a)_2 - K_2\} + \ldots + p_m\{(a)_m - K_m\}$, $[p]_1^m = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$, zaś p_p jest wagą ostatniego równania błędów.

Wyrównania stacyjne, przeprowadzone w sposób podobny na wszystkich n stanowiskach, z których wcięliśmy punkt P, dostarczają nam ostatecznie równań błędów kształtu (7) w ilości n.

Dla dalszego wyrównania przemieniamy zazwyczaj [1]) kierunki *zewnętrzne* na *wewnętrzne* (t. j. na kierunki z P do punktów stałych).

Oznaczając dla uproszczenia punkty tryangulacyjne, z których wcięliśmy punkt P przez 1, 2, ... n i przyjmując, że przeprowadziliśmy na każdym z nich pomiary kierunkowe o $s_1, s_2, \ldots s_n$ serjach pełnych z nawiązaniem do $m_1, m_2, \ldots m_n$ punktów stałych, otrzymamy do dalszego wyrównania n równań błędów kształtu:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \varrho \operatorname{arc\,tang} \frac{y_1 - y_p}{x_1 - x_p} - (K_1 + z_0) \pm 180^0 \quad \text{o wadze } p_1 = s_1 \frac{m_1}{m_1+1} \\
\delta_2 &= \varrho \operatorname{arc\,tang} \frac{y_2 - y_p}{x_2 - x_p} - (K_2 + z_0) \pm 180^0 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad p_2 = s_2 \frac{m_2}{m_2+1} \qquad (10) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta_n &= \varrho \operatorname{arc\,tang} \frac{y_3 - y_p}{x_3 - x_p} - (K_n - z_0) \pm 180^0 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad p_n = s_n \frac{m_n}{m_n+1}.
\end{aligned}$$

W równaniach powyższych przemieniono kierunki zewnętrzne na wewnętrzne przez przestawienie w wyrażeniach arc tang porządku spółrzędnych i przez dodanie do poszczególnych K kąta $\pm 180^0$.

W szczególnym przypadku nawiązania kierunku wcinającego tylko *do jednego* kierunku stałego, otrzymamy przy pomiarach, dokonanych jedną serją, wagę kierunku

$$p = \frac{1}{2},$$

zaś o ile spostrzegaliśmy kierunki w s serjach

$$p = \frac{s}{2}.$$

[1]) *Przepisy obowiązujące* i t. d. Min. R. P. Warszawa, 1920, oraz austr. *instrukcja polig.* z roku 1904-go uwzględniają wspomnianą przemianę kierunków; niewiadomą z_0 oznaczono tam literą o (średnia orjentacja).

b) Wyrównanie spółrzędnych.

Po ukończeniu *pierwszej części* wyrównania, która polega na *wyznaczeniu niewiadomej* z_0, przedstawiającej się w przypadku wag równych jako średnia arytmetyczna, utworzona z różnic $(a)-K$ (por. wzór (5)), przystępujemy do dalszego wyrównania, posługując się równaniami błędów, zestawionemi we wzorze (10).

Weźmy na uwagę równanie błędów, odpowiadające kierunkowi wewnętrznemu $P-I$; wedle wzoru (10) napiszemy zatem

$$\delta_i = \varrho \operatorname{arc\,tang} \frac{y_i - y_p}{x_i - x_p} - (K_i + z_0) \pm 180^0 \text{ z wagą } p_i. \tag{10*}$$

Kładąc $K_i + z_0 = (K_0)_i$, t. j. kierunkowi zorjentowanemu, zatem $K_i + z_0 \pm \pm 180^0 = (K_0 \pm 180^0)_i$ i rozwijając arc tang $\frac{y_i - y_p}{x_i - x_p}$ w szereg Taylora, z pominięciem wyrazów rzędu wyższego niż pierwszy, przekształcimy równanie (10*) na:

$$\delta_i = \varrho \operatorname{arc\,tang} \frac{y_i - y_p'}{x_i - x_p'} + \varrho'' \frac{\sin (a)_i'}{s_i'} \delta x - \varrho'' \frac{\cos (a)_i'}{s_i'} \delta y - K_0 \pm 180^0)_i; \tag{11}$$

przyczem x_p', y_p', są spółrzędnemi przybliżonemi punktu P, $(a)_i'$ oznacza przybliżony azymut pozorny kierunku $P-I$, s_i' przybliżoną odległość między punktami P i I (na płaszczyźnie), zaś δx i δy są poprawkami, które, dodane do spółrzędnych przybliżonych x_p' i y_p',[1]) dostarczą nam spółrzędnych wyrównanych punktu P: x_p i y_p. (δ_i należy rozumieć w sek. kątowych).

Zamiast rozwijania powyższej funkcji w szereg Taylora można, korzystając z poprzednio wyprowadzonego wzoru (5*), dojść do tych samych wyników, kładąc

$$\varrho \operatorname{arc\,tang} \frac{y_i - y_p}{x_i - x_p} = \varrho \operatorname{arc\,tang} \frac{y_i - y_p'}{x_i - x_p'} + \delta(a)''_{p.i} \tag{12}$$

(ze względu na to, że punkt I jest stałym); następnie, ponieważ (przy stałym punkcie I)

$$\delta(a)''_{p.i} = \varrho'' \frac{\sin (a)_i}{s_i} \delta x - \varrho'' \frac{\cos (a)_i}{s_i} \delta y, \text{ lub w przybliżeniu}$$

$$\delta(a)''_{p.i} = \varrho'' \frac{\sin (a)_i'}{s_i'} \delta x - \varrho'' \frac{\cos (a)_i'}{s_i} \delta y,$$

otrzymamy po dokonaniu podstawienia wartości za $\delta(a)''_{p.i}$ wzór identyczny z (11).

[1]) Spółrzędne przybliżone x_p' i y_p' obliczamy z dwu kierunków wyznaczających najkorzystniej punkt P, (t. j. z celowych niezbyt długich i mniej więcej prostopadłych do siebie).

Dla uproszczenia wzoru (11), położymy następnie

$$\varrho'' \frac{\sin(\alpha)_i'}{s_i'} = a_i, \quad -\varrho'' \frac{\cos(\alpha)_i'}{s_i'} = b_i, \text{ oraz } \varrho \operatorname{arc\,tang} \frac{y_i - y_p'}{x_i - x_p'} = (\alpha)_i',$$

a równanie (11) przejdzie na:

$$\delta_i = a_i\,\delta x + b_i\,\delta_y + (\alpha)_i' - (K_0 \pm 180^0)_i; \qquad (11^*)$$

kładąc wreszcie $(\alpha)_i' - (K_0 \pm 180^0) = l_i$, otrzymamy dla wszystkich n kierunków zewnętrznych n równań błędów w postaci:

$$\delta_i = a_i\,\delta x + b_i\,\delta y + l_i \text{ z wagą } p_i. \qquad (13)$$

Wartości δx i δy, uzyskane z wyrównania, otrzymamy w tych samych dymensjach, w jakich wyraziliśmy s', a zatem zazwyczaj w metrach.

Ponieważ δx i δy będą zazwyczaj znacznie mniejsze od jednego metra, przeto, chcąc je otrzymać w *dm*, należy s' pomnożyć przez 10. Gdy ponadto wyrazimy długości nie w metrach lecz w kilometrach, kładąc $s'\,(m) = S'\,(km)$, otrzymamy:

$$a_i = \frac{20.6265 \sin(\alpha)_i'}{S_i'}, \quad b_i = -\frac{20{\cdot}6265 \cos(\alpha)_i'}{S_i'}, \qquad (14)$$

lub oznaczając $20.6265 \sin(\alpha)_i' = \mathfrak{x}$, $-20{\cdot}6265 \cos(\alpha)_i' = \mathfrak{y}$:

$$a_i = \frac{\mathfrak{x}}{S_i'}, \quad b_i = -\frac{\mathfrak{y}}{S_i'}. \qquad (15)$$

Przy użyciu tak obliczonych spółczynników otrzymujemy δx i δy w decymetrach.

Wartości $20{\cdot}6265 \sin(\alpha)_i'$ i $-20{\cdot}6265 \cos(\alpha)_i'$, t. zw. spółczynników kierunkowych na odległość jednego kilometra można znaleść w dziele *Jordana* Handbuch d. Vermessungskunde w dodatku tomu I-go (1920), na stronach [10]-tej i [11]-tej.

Ponieważ *Jordan* podał je dla kierunków *zewnętrznych*, należy tam podane znaki zmienić na przeciwne.

Z równań normalnych kształtu

$$\begin{aligned} [paa]\,\delta x + [pab]\,\delta y + [pal] &= 0 \\ [pab]\,\delta x + [pbb]\,\delta y + [pbl] &= 0 \end{aligned} \qquad (16)$$

otrzymamy obie niewiadome δx i δy.

Jednostkowy błąd średni kierunku określa wzór:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{n-2}}. \quad \text{[Por. następny ustęp } c)]. \qquad (17)$$

Dla wyznaczenia błędów średnich niewiadomych, układamy równania wag (w kształcie zredukowanym):

$$\begin{aligned} [paa]\,Q_{1.1} + [pab]\,Q_{1.2} &= 1 \\ [paa]\,Q_{1.2} + [pab]\,Q_{2.2} &= 0 \\ [pbb.1]\,Q_{2.2} &= 1, \end{aligned} \qquad (18)$$

z których wyznaczamy spółczynniki $Q_{1.1}$ i $Q_{2.2}$,

$$Q_{2.2}=\frac{1}{[pbb.1]},\quad Q_{1.1}=\frac{[pbb]}{[paa]}Q_{2.2}=\frac{[pbb]}{[paa][pbb.1]},\tag{19}$$

a następnie błędy średnie spółrzędnych.

$$\mu_y=\mu_0\sqrt{Q_{2.2}}=\mu_0\sqrt{\frac{1}{[pbb.1]}},\quad \mu_x=\mu_0\sqrt{Q_{1.1}}=\mu_0\sqrt{\frac{[pbb]}{[paa][pbb.1]}}=$$
$$=\mu_y\sqrt{\frac{[pbb]}{[paa]}},\tag{20}$$

oraz błąd średni położenia punktu:

$$\mu_p=\sqrt{\mu_x{}^2+\mu_y{}^2}.\tag{21}$$

W zacytowanych poprzednio instrukcjach pomiarowych: polskiej i austrjackiej, obowiązującej dotychczas w Małopolsce, oznaczono

$$[paa]=a_1,\ [pab]=b_1,\ [pbb]=b_2,\ \frac{[pbb]}{[pab]}-\frac{[pab]}{[paa]}=B,$$

przeto $[pbb.1]=b_1.B$; wzory na błędy średnie spółrzędnych mają w obec tego kształt następujący:

$$\mu_y=\mu_0\sqrt{\frac{1}{b_1.B}},\quad \mu_x=\mu_y\sqrt{\frac{b_2}{a_1}}.$$

Spółrzędne wyrównane punktu P otrzymujemy, dodając do spółrzędnych przybliżonych x' i y' poprawki δx i δy, zatem

$$x=x'+\delta x,\quad y=y'+\delta y.\tag{21}$$

Kontrole rachunkowe, omawiane w § 3-cim rozdz.) IV-go na str. 80.—83. (a przynajmniej najniezbędniejsze z nich), powinne znaleść zastosowanie w ciągu rachunku.

$[p\delta\delta]$ możemy skontrolować albo wzorem:

$$[p\delta\delta]=[pll.2],\ \text{lub:}\ [p\delta\delta]=[pll]+[pal]\,\delta x+[pbl]\,\delta y,\tag{22}$$

(ostatni wzór patrz (4) § 3. rozdz. IV-go, str. 82.).

O ile wagi spostrzeżeń są równe, t. z. zastosowano przy pomiarach kierunkowych tę samą ilość seryj s i nawiązano się do tej samej ilości m punktów stałych, można je przyjąć równe jedności bez uszczerbku rachunku; natomiast jedn. błąd średni μ_0 będzie miał wówczas znaczenie inne, jak też i wartość inną.

Nie będzie to już błąd średni kierunku, obserwowanego w obu położeniach lunety (z jednej serji), lecz błąd średni kierunków, użytych przy wyrównywaniu spółrzędnych; a zatem błąd średni kierunku, otrzymany przy *pomiarze* w s *serjach przy nawiązaniu się do* m *punktów stałych.*

Wartość tego błędu będzie oczywiście odpowiednio mniejszą niż wartość błędu średniego omawianego poprzednio.

Przy wyznaczaniu spółrzędnych mniej ważnych punktów rzędu IV. można pominąć wagi kierunków wcinających, o ile nawiązano je do kilku kierunków stałych. N. p. przy nawiązaniu kierunku wcinającego do trzech kierunków stałych otrzymujemy bez uwzględnienia ilości dokonanych seryj wagę $\frac{3}{4}=0{\cdot}75$, przy nawiązaniu do kierunków czterech $\frac{4}{5}=0{\cdot}80$, zaś do kierunków pięciu $\frac{5}{6}=0{\cdot}83$. Wynikające z przyjęcia wag równych różnice spółrzędnych są przy krótkich celowych dla punktów podrzędniejszych bez praktycznego znaczenia.

c) Wzór ścisły na błąd średni jednostkowy.

* * * Błąd średni jednostkowy μ_0 obliczamy w praktyce wedle wzoru (17) ustępu *b)*.

Aczkolwiek używany w praktyce, *nie jest on* jednak *ścisłym;* nie należy bowiem zapominać, że właściwe równania błędów mają kształt podany wzorem (4) ust. *a)*.

Wprowadzając do rachunku wartość przybliżoną $z_0=\frac{[(a)-K]_1^m}{m}$, otrzymamy powyższe związki (dotyczące na każdym punkcie stałym kierunków zewnętrznych) w kształcie następującym:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 &= -\delta z+(a)_1-K_1-z_0=-\delta z+l_1' \\
\vartheta_2 &= -\delta z+(a)_2-K_2-z_0=-\delta z+l_2' \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (23)\\
\vartheta_m &= -\delta_z+(a)_m-K_m-z_0=-\delta z+l_m' \\
\vartheta_p &= +a_p\,\delta x+b_p\,\delta y-\delta z+(a)_p'-K_p-z_0=+a_p\,\delta x+b_p\,\delta y-\delta z+l_p,
\end{aligned}$$

przyczem ze względu na kierunki *zewnętrzne:*

$$a_p=-\varrho''\frac{\sin(a)_p'}{s_p'},\quad b_p=+\varrho''\frac{\cos(a)_p'}{s_p'}. \tag{24}$$

Związków podanych wzorem (23) mamy $m+1$ dla każdego punktu stałego, z którego dokonaliśmy wcięcia p. P, przyczem m odpowiada ilości kierunków stałych, więc dla punktu stałego I-go będziemy mieli m_1+1, dla II-go m_2+1 równań i t. d.

W całym tym systemie równań błędów o liczbie N będziemy mieli $[m]$ równań dla kierunków stałych i n równań dla kierunków do punktu P, zatem $N=[m]+n$; zaś niewiadomemi będą δx, δy punktu P, oraz tyle różnych δz, z ilu stanowisk wcięliśmy p. P, zatem n.

Stosując do równań błędów, zestawionych we wzorze (23), metodę rugowania niewiadomych wprost z równań błędów przy pomocy wag ujemnych, podaną w § 3-cim rozdz. VII-go (str. 170.), otrzymamy dla każdego stanowiska $m+2$ równań, z których bierzemy do dalszego rachunku tylko dwa ostatnie (jako zawierające niewiadome δx i δy):

$$\begin{aligned}
\vartheta_p' &= a_p\,\delta x+b_p\,\delta y+l_n &&\text{z wagą}\quad 1\\
\Delta &= a_p\,\delta x+b_p\,\delta y+[l']+lp &&\text{,,}\quad\text{,,}\quad -\frac{1}{m+1},
\end{aligned} \tag{25}$$

przyczem $[l']$ oznacza sumę poszczególnych l' od l_1' do l_m' włącznie, która równa się zeru, albowiem $[l']=[(a)-K]_1^m-m\frac{[(a)-K]_1^m}{m}=0$.

Pary równań błędów, ustawione w podobny sposób dla wszystkich punktów stałych, dostarczają nam tych samych równań normalnych, jak poprzednio (por. wzór (12)), mianowicie (przy przyjęciu, że poszczególnym ϑ odpowiadają wagi $=1$):

$$\begin{aligned} \left[\frac{m}{m+1}aa\right]\delta x+\left[\frac{m}{m+1}ab\right]\delta y+\left[\frac{m}{m+1}al\right]&=0 \\ \left[\frac{m}{m+1}ab\right]\delta x+\left[\frac{m}{m+1}bb\right]\delta y+\left[\frac{m}{m+1}bl\right]&=0\,^{1)}. \end{aligned} \tag{26}$$

Chociaż równania normalne wypadły przy użyciu obu sposobów jednakowe, otrzymamy jednak *inne wzory* na błędy średnie.

Wzór na jednostkowy błąd średni, uwzględniający tak pomiary kierunków stałych jak i kierunków wyznaczających punkt P (a zatem ściślejszy od wzoru (17), ma kształt ogólny:

$$\mu_0'=\sqrt{\frac{[\vartheta\vartheta]}{N-2-n}}. \tag{27}$$

($N=$ ilości wszystkich kierunków, $n+2=$ ilości niewiadomych).

Ponieważ $N=[m]+n$, przeto $N-2-n=[m]-2$, a

$$\mu_0'=\sqrt{\frac{[\vartheta\vartheta]}{[m]-2}}. \tag{27*}$$

Sumę $[\vartheta\vartheta]$ można przekształcić przy pomocy wzoru (4) § 3-go rozdz. IV-go ($[p\delta\delta]=[pal]x+[pbl]y+\ldots+[pll]$) następująco (przyczem trzeba uwzględnić w sumie $[pll]$ tak poszczególne l' jak i l):

$$[\vartheta\vartheta]=\left[\frac{m}{m+1}al\right]\delta x+\left[\frac{m}{m+1}bl\right]\delta y+[l'l']+[ll]-\left[\frac{ll}{m+1}\right], \tag{28}$$

$$\text{lub } [\vartheta\vartheta]=\left[\frac{m}{m+1}al\right]\delta x+\left[\frac{m}{m+1}bl\right]\delta y+[l'l']+\left[\frac{m}{m+1}ll\right]. \tag{28*}$$

Wzór (27*) wyprowadziliśmy pod założeniem, że poszczególnym ϑ przysługiwały wagi $=1$; o ileby dokonano pomiaru każdego kierunku w s serjach, należy sumę $[\vartheta\vartheta]$ pomnożyć przez liczbę s.

Porównując wzór (27) z wzorem (17):

$$\mu_0=\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-2}},$$

[1]) O ile z pewnego punktu stałego wcięto ν punktów $P_1, P_2 \ldots P_\nu$, będą miały spółczynniki równań normalnych (26) kształt $\left[\frac{m+\nu-1}{m+\nu}aa\right]$ i t. d., względnie trzeba przy obliczaniu spółczynników równań (16) uwzględnić wagi $p=\frac{m+\nu-1}{m+\nu}$. W praktyce postępujemy tak z reguły tylko przy zagadnieniu opisanem w § 8-mym.

należy zauważyć, że

$$[p\,\delta\delta]=[pal]\,\delta x+[pbl]\,\delta y+[pll],$$

lub ponieważ $p_i=\dfrac{m_i}{m_i+1}$, będzie w następstwie:

$$[p\,\delta\delta]=\left[\frac{m}{m+1}al\right]\delta x+\left[\frac{m}{m+1}bl\right]\delta y+\left[\frac{m}{m+1}ll\right]. \qquad (29)$$

Oba wzory (27*) i (17) różnią się zatem tem, że w pierwszym są uwzględnione wszystkie kierunki, tak do punktów stałych jak i do punktu P, w drugim zaś tylko te ostatnie (odwrócone o $\pm 180^0$).

Pierwszy wzór ma znaczenie *teoretyczne*, jako wzór ścisły, drugi bywa używany *w praktyce*, jako określający dokładność kierunków, użytych bezpośrednio do wcięcia punktu P.

* * *

§ 3. Przykład wyrównania wcinania wprzód.

W celu wyznaczenia spółrzędnych punktu S (półn. wieżyczki willi Sanato) w Zakopanem, wcięto go z czterech punktów o znanych spółrzędnych, mianowicie *pp.* 8, *p. tr.* 22, *p. tr.* IX i *p. tr.* 7.

Spółrzędne tych punktów są:

$$x_8=\ 53692{\cdot}50,\quad x_{22}=\ 52788{\cdot}70,\quad x_{\mathrm{IX}}=\ 55191{\cdot}70,\quad x_7=\ 53153{\cdot}22$$
$$y_8=296286{\cdot}65,\quad y_{22}=297018{\cdot}84,\quad y_{\mathrm{IX}}=296793{\cdot}34,\quad y_7=298125{\cdot}96.$$

Dla uzyskania kierunków wcinających, zestawiono spostrzeżenia K oraz wyrównania stacyjne na każdym z tych punktów w następujących czterech zestawieniach.

Stanowisko *p. p.* 8.

	K	$(a)-K$	(a)	K_0	l'
Gwt. †	0⁰00′00″	28⁰53′32″·2	28⁰53′32″·2	28⁰53′37″·5	−5″·3
p. tr. II	196⁰44′27″	28⁰53′42″·7	225⁰38′09″·7	225⁰38′04″·5	+5″·3
S	248⁰55′13″			277⁰48′50″·5	

$$\frac{[(a)-K]''}{m}=\frac{74''{\cdot}9}{2}=37''{\cdot}5,\quad z_0=28^0 53' 37''{\cdot}5$$

Stanowisko *p. tr.* 22.

	K	$(a)-K$	(a)	K_0	l'
Gwt. †	0⁰00′00″	17⁰54′52″·7	17⁰54′52″·7	17⁰54′52″·7	0″·0
S	295⁰26′41″			313⁰21′33″·7	

Stanowisko *p. tr.* IX.

	K	$(a)-K$	(a)	K_0	l'
Gub. †	0°00′00″	153°37′00″·2	153°37′00″·2	153°37′00″·1	—0″·1
S	54°37′47″			208°14′47″·1	
p. tr. 2	69°27′38″	153°37′00″·0	223′04′38″·0	223°04′38″·1	+0″·1

$$\frac{[(a)-K]}{m}=\frac{0''\cdot2}{2}=0''\cdot1,\quad z_0=153^0 37'00''\cdot1.$$

Stanowisko *p. tr.* 7.

	K	$(a)-K$	(a)	K_0	l'
K. p. ♁	0°00′00″	270°43′43″·4	270°43′43″·4	270°43′42″·0	—1″·4
S	14°34′53″			285°18′35″·0	
p.tr.VIII	43°44′19″	270°43′40″·6	314°27′59″·6	314°28′01″·0	+1″·4

$$\frac{[(a)-K]}{m}=\frac{84\cdot''0}{2}=42''\cdot0,\quad z_0=270^0 43'42''\cdot0.$$

Wszystkie tu wymienione punkty należą prócz wyznaczanego punktu S do sieci IV-rzędnej.

Po wyznaczeniu spółrzędnych przybliżonych punktu S w naszym przypadku z obu trójkątów IX, S, 8 i 22, S, IX (zazwyczaj wyznaczamy je, rozwiązując tylko jeden trójkąt), a mianowicie:

$$x'=53728\cdot64\ m,\quad y'=296023\cdot45\ m,$$

przystępujemy do obliczenia azymutów przybliżonych $(a)'$ oraz spółczynników równań błędów a, b i l, przyczem przemieniamy kierunki zewnętrzne na wewnętrzne.

Obliczenie to (Nr. 1) przedstawia się dla punktów 8 i S następująco.

pp. 8 S	$y_8=296286\cdot65$ $y_S=296023\cdot45$	$x_8=53692\cdot50$ $x_S=53728\cdot64$	$\lg\Delta y=2\cdot4202859$ $\lg\Delta x=1\cdot5579881\ n$
Nr 1	$y_8-y_S=\Delta y=+263\cdot20$ $\Delta x+\Delta y=+227\cdot06$	$x_8-x_S=\Delta x=-\ 36\cdot14$ $\Delta x-\Delta y=-299\cdot34$ $(a)'_{S.8}=$ $(a)'_{8.S}=$	$\lg\operatorname{tg}\varphi=0\cdot8622978$ $\varphi=82^0 10'53''\cdot8$ $97^0 49'06''\cdot2$ $277^0 49'06''\cdot2$

pp. 8 S	$\lg\sin\varphi=9\cdot9959$ $\lg\cos\varphi=9\cdot1336$	$\lg a=2\cdot8850$ $\lg b=2\cdot0237$	$\lg(\Delta x+\Delta y)=2\cdot3561406$ $\lg(\Delta x-\Delta y)=2\cdot4761648\,n$
Nr 1	compl $\lg s=7\cdot5756$ $\lg\rho=5\cdot3144$ $\lg s=2\cdot4244$	$a=+767\cdot4$ $b=+105\cdot6$ (a znak Δy, b zn. przeciwny jak Δx)	$\lg\operatorname{tg}\psi=9\cdot8799758$ $\psi=37^0 10'53''\cdot8$ $(a)_{S.8}+45^0=142^0 49'06''\cdot2$ (kontrola).

W analogiczny sposób obliczamy spółczynniki a i b, azymuty pozorne, oraz odległości, odnoszące się do resztujących kierunków.

Dalszy rachunek przeprowadzimy przy pomocy schematów, zalecanych przez poprzednio zacytowane przepisy pomiarowe (polskie i austr.).

Punkt	a	b	$(a)'_{s,i}$	$K_0 \pm 180^0$	$l=(a)'-(K_0 \pm 180^0)$
pp. 8.	+767·4	+105·6	97°49′06″·7	97°48′50″·5	+15″·7
p. tr. 22	+109·5	+103·4	133°21′31″·8	133°21′33″·7	− 1″·9
p. tr. IX	+ 60·0	−111·7	28°14′46″·5	28°14′47″·1	− 0″·6
p. tr. 7	+ 91·3	+ 25·0	105°18′21″·8	105°18′35″·0	−13″·2

p	paa	pab	pal	pbb	pbl
$\frac{2}{3}$	392601	54025	8032	7434	1105
$\frac{1}{2}$	5995	5661	− 104	5346	− 98
$\frac{2}{3}$	2400	4468	− 24	8318	+ 45
$\frac{2}{3}$	5557	1522	− 803	417	− 220
Σ	406554	56740	7101	21515	+ 832
	$=a_1$	$=b_1$	$=l_1$	$=b_2$	$=l_2$

$$s_1=-(a_1+b_1+l_1)=-470395$$
$$s_2=-(b_1+b_2+l_2)=-79087.$$

Wprowadzając do rachunku wielkości:

$$\frac{[pbb]}{[pab]}-\frac{[pab]}{[paa]}=\frac{b_2}{b_1}-\frac{b_1}{a_1}=B,\quad \frac{[pbl]}{[pab]}-\frac{[pal]}{[paa]}=\frac{l_2}{b_1}-\frac{l_1}{a_1}=L,$$

oraz $\frac{s_2}{b_1}-\frac{s_1}{a_1}=S$, otrzymamy w dalszych schematach:

Logarytmy:

a_1	5·60912	b_1	4·75389	l_1	3·85132	s_1	5·67246 n
b_1	4·75389	b_2	4·33274	l_2	2·92012	s_2	4·89811 n
		$\frac{b_1}{a_1}$	9·14477	$\frac{l_1}{a_1}$	8·24220	$\frac{s_1}{a_1}$	0·06334 n
		$\frac{b_2}{b_1}$	9·57885	$\frac{l_2}{b_1}$	8·16623	$\frac{s_2}{b_1}$	0·14422 n
		B	9·37952	L	7·44871		
	$(\log \delta y) = -$	$\frac{L}{B}$	8·06918				

$a\delta x$	$b\delta y$	$a\delta x + b\delta y = \delta(a)$	l	$\delta(a)+l = \delta$	pll	$p\delta\delta$
−14·66	+1·24	−13·42	+15·7	+ 2·28	164·33	3·46
− 2·09	+1·21	− 0·88	− 1·9	− 2·78	1·81	3·86
− 1·15	−1·31	− 2·46	− 0·6	− 3 06	0·24	6·24
− 1·74	+0·29	− 1·45	−13·2	−14·65	116·16	143·08
					282·54	156·64

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{156·64}{4-2}} = 8''·8$$

Liczby:

$\frac{a_1}{a_1}$	+1	$\frac{b_1}{a_1}$	0·13956	$\frac{l_1}{a_1}$	0·01747	$\frac{s_1}{a_1}$	−1·15703
$\frac{b_1}{b_1}$	+1	$\frac{b_2}{b_1}$	0·37918	$\frac{l_2}{b_1}$	0·01466	$\frac{s_2}{b_1}$	−1·39385
		B	+0·23962	L	−0·00281	S	−0·23682
	$\delta y = -$	$\frac{L}{B}$	+0·01173				

$\log \frac{b_1}{a_1} \delta y$	7·21395	$\log \frac{b_2}{b_1} \delta y$	7·64804
$\frac{b_1}{a_1} \delta y$	0·00164	$\frac{b_2}{b_1} \delta y$	0·00445
$\frac{l_1}{a_1}$	0·01747	$\frac{l_2}{b_1}$	0·01466
$-\left(\frac{b_1}{a_1}\delta y + \frac{l_1}{a_1}\right) = \delta x$	−0·01911	$-\left(\frac{b_2}{b_1}\delta y + \frac{l_2}{b_1}\right) = \delta x$	−0·01911
(pierwsze równ. normalne)		(drugie równ. normalne)	

$\log \mu_0$	0·94693	$\log l_1$	3·85132
$-\frac{1}{2}\log b_1$	2·37694	$\log \delta x$	0·28126−2
$-\frac{1}{2}\log B$	0·68976−1	$\log l_1 \delta x$	2·13258
$\log \mu_y$	0·98023−2	$\log l_2$	2·92012
$+\frac{1}{2}\log \frac{b_1}{a_1}$	0·57239−1	$\log \delta y$	0·06918−2
$+\frac{1}{2}\log \frac{b_2}{b_1}$	0·78942−1	$\log l_2 \delta y$	0·98930
$\log \mu_x$	0·34204−2	$l_1 \delta x = -135·70$	(kontr.)
$\mu_y =$ [1]	$\pm 0·096\ m$	$l_2 \delta y = +\ \ 9·76$	$[p\delta\delta] =$
$\mu_x =$	$\pm 0·022\ m$	$[pll] = +282·54$	$= 156·6$

$$Y_S = 296023·45 + 0·01 = 296023·46 \pm 0·10\ m$$

$$X_S = 53728·64 - 0·02 = 53728·62 \pm 0·02\ m$$

$$\mu_s = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2} = \pm 0·098\ m.$$

[1]) Wzory te odpowiadają poprzednio wyprowadzonym wzorom, zestawionym pod (20) w § 2-gim.

Chcąc wyznaczyć błąd średni μ_0' wedle wzoru ścisłego (27*), należy uwzględnić jeszcze $[l'l']$, oraz zmienić mianownik na $[m]-2$. Obliczenie μ_0' możemy przeprowadzić w sposób dwojaki.

Ponieważ $[l'l']$ wynosi wedle schematów stacyjnych:

$$[l'l'] = 2\times 5{\cdot}3^2 + 2\times 0{\cdot}1^2 + 2\times 1{\cdot}4^2 = 60{\cdot}12, \text{ przeto}$$

$$[\vartheta\vartheta] = [pal]\,\delta x + [pbl]\,\delta y + [pll] + [l'l'] = 156{\cdot}6 + 60{\cdot}12 = 216{\cdot}72.$$

Drugi sposób wyznaczenia $[\vartheta\vartheta]$ polega na wyznaczeniu wartości poszczególnych ϑ dla każdej stacji.

Dodając związki objęte wzorem (23) i dzieląc je przez m_i+1, otrzymujemy w obec tego, że $[l']$ jest dla każdej stacji równą zeru, niewiadome orjentacyjne dla każdej stacji: $\delta z_i = \dfrac{a_{i.s}}{m_i+1}\,\delta x + \dfrac{b_{i.s}}{m_i+1}\,\delta y + \dfrac{l_{i.s}}{m_i+1}$.

Znając wartości δz dla każdej stacji, obliczamy poszczególne ϑ wedle wzorów: $\vartheta_{i.k} = l'_{i.k} - \delta z_i$ (dla kier. nawiązujących), oraz $\vartheta_{i.s} = m_i\,\delta z_i$; (dla kierunków wcinających).

$$\text{Zatem: } \delta z_1 = \frac{2{\cdot}28}{3} = 0{\cdot}76,\ \delta z_2 = -\frac{2{\cdot}78}{3} = -1{\cdot}39,\ \delta z_3 = -\frac{3{\cdot}06}{3} = -1{\cdot}02,$$

$$\delta z_4 = -\frac{14{\cdot}65}{3} = -4{\cdot}88,$$

a w następstwie wartości ϑ, zestawione stacjami są:

$-5{\cdot}3-0{\cdot}76=-6{\cdot}06$	$+1{\cdot}39$	$-0{\cdot}1+1{\cdot}02=+0{\cdot}92$	$-1{\cdot}4+4{\cdot}88=+3{\cdot}48$
$+5{\cdot}3-0{\cdot}76=+4{\cdot}54$	$-1{\cdot}39$	$+0{\cdot}1+1{\cdot}02=+1{\cdot}12$	$+1{\cdot}4+4{\cdot}88=+6{\cdot}28$
$+2\times 0{\cdot}76\ =+1{\cdot}52$		$-2\times 1{\cdot}02\ =-2{\cdot}04$	$-2\times 4{\cdot}88\ =-9{\cdot}76$
$\Sigma=0,$	$\Sigma=0,$	$\Sigma=0,$	$\Sigma=0.$

Sumy kwadratów błędów, zestawione dla poszczególnych stacyj, są:

36·724	1·932	0·846	12·110
20·612	1·932	1·254	39·438
2·310		4·162	95·258

$$59{\cdot}646 + 3{\cdot}864 + 5{\cdot}202 + 147{\cdot}806 = 216{\cdot}58 = [\vartheta\vartheta]$$

z wystarczającą zgodnością z poprzedniem obliczeniem.

$$\mu_0' = \sqrt{\frac{[\vartheta\vartheta]}{[m]-2}} = \sqrt{\frac{216{\cdot}6}{7-2}} = \pm 6''{\cdot}6,$$

$[m]$ ilość kierunków do punktów stałych.

§ 4. Wyrównanie wcinania wstecz.

Przy zagadnieniu wcinania wstecz punktu P wykonujemy pomiary kierunkowe względnie kątowe teodolitem (ew. przyrządem uniwersalnym), ustawionym w punkcie P.

Ustalone temi pomiarami trzy kierunki do punktów stałych wyznaczają jednoznacznie położenie punktu P względem trzech punktów stałych, do których celowano, (o ile wszystkie cztery punkty nie leżą na obwodzie tegosamego koła, t. zn. niebezpiecznego).

Ustalenie kierunków w liczbie *większej jak trzy* powoduje *wyrównanie.*

Równania błędów odnoszą się do kierunków *wewnętrznych* (z punktu P do punktów stałych), a jako niewiadome występują poprawki spółrzędnych punktu P: δx, δy oraz niewiadoma orjentacyjna δz.

Przedewszystkiem należy dla przybliżonego zorjentowania kierunków pomierzonych wyznaczyć spółrzędne ***przybliżone*** x', y' punktu P przy pomocy trzech najkorzystniej do tego nadających się kierunków.

Po obliczeniu spółrzędnych przybliżonych punktu P, a następnie i przybliżonych azymutów kierunku z punktu P do punktów stałych, orjentujemy kierunki pomierzone, skręcając je tak, ***aby przynajmniej jeden*** z nich był zgodny ***z odpowiadającym mu azymutem*** (przybliżonym).

W przypadku użycia do tego celu kierunku, przy pomocy którego wyznaczono poprzednio x' i y', będą oczywiście 3 kierunki zgodne z odpowiadającemi im azymutami.

Skręt ten odpowiada kątowi

$$z_0=(a)_h'-K_h \tag{1}$$

przy użyciu do orjentacji kierunku $(P-H)$; dodając zatem z_0 do wszystkich innych kierunków K, otrzymamy kierunki zorjentowane ***w przybliżeniu***

$$(k_0)_i=K_i+z_0. \tag{2}$$

W ten sposób przeprowadzona orjentacja kierunków jest jednak tylko ***przybliżoną;*** właściwą $(K_0)_i$ uzyskalibyśmy, skręcając poszczególne kierunki o skręt z, zatem

$$(K_0)_i=K_i+z=K_i+z_0+\delta z=(k_0)_i+\delta z. \tag{2*}$$

Aby kierunki $(K_0)_i$, obarczone błędami spostrzeżeń K_i, odpowiadały wyrównanym pozornym azymutom $(a)_i$, należy je poprawić o błędy pozorne δ_i; w obec czego równania błędów przybiorą kształt następujący:

$$\delta_i=(a)_i-(K_0)_i=(a)_i-(k_0)_i-\delta z, \tag{3}$$

przyczem $(a)_i=\varrho \operatorname{arc\,tang} \dfrac{y_i-y_p}{x_i-x_p}$.

Przekształcając wzór (3) analogicznie, jak to miało miejsce przy wcinaniu wprzód, otrzymamy:

$$\delta_i=\boldsymbol{a}_i\,\delta x+\boldsymbol{b}_i\,\delta y-\delta z+\boldsymbol{l}_i, \tag{4}$$

przyczem

$$\boldsymbol{a}_i=\varrho''\frac{\sin(a)_i'}{s_i'},\quad \boldsymbol{b}_i=-\varrho''\frac{\cos(a)_i'}{s_i'},\quad \boldsymbol{l}_i=(a)_i'-(k_0)_i; \tag{5}$$

wagi równań błędów (4) należy przyjąć równe ***jedności,*** o ile spostrzeżenia pochodzą z jednej serji. Wagi spostrzeżeń, dokonanych w s serjach, są równe s; ma to jednak wpływ tylko na wielkość błędu średniego μ_0 bez zmiany błędów μ_x i μ_y.

W praktyce przyjmuje się zazwyczaj przy pomiarach, dokonanych w s serjach pełnych, również wagi równe jedności; chcąc otrzymać właściwą wartość jednostkowego błędu średniego (t. zn. dla jednej serji) należy otrzymaną wartość na μ_0 pomnożyć przez $\sqrt{s}$[1]).

Z równań błędów, odpowiadających n kierunkom do punktów stałych

$$\left.\begin{array}{ll} \delta_1=a_1\,\delta x+b_1\,\delta y-\delta z+l_1 & p_1=1 \\ \delta_2=a_2\,\delta x+b_2\,\delta y-\delta z+l_2 & p_2+1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \delta_n=a_n\,\delta x+b_n\,\delta y-\delta z+l_n & p_n=1 \end{array}\right. \tag{4}$$

o sumie: $[\delta]=[a]\delta x+[b]\delta y-ndz+[l]$,

rugujemy niewiadomą δz przy pomocy równania sum, podzielonego przez liczbę spostrzeżeń.

Ponieważ $[a\delta]=[b\delta]=[c\delta]=0$ (jako równania normalne), zaś w obec $c_1=c_2=\dots=c_n=-1$ jest $[c\delta]=-[\delta]=0$, przeto i

$$\frac{[\delta]}{n}=\frac{[a]}{n}\delta x+\frac{[b]}{n}\delta y-\delta z+\frac{[l]}{n}=0. \tag{6}$$

Odejmując równanie (6) od poszczególnych równań błędów, otrzymujemy zatem równania błędów zredukowane:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1=\left(a_1-\frac{[a]}{n}\right)\delta x+\left(b_1-\frac{[b]}{n}\right)\delta y+l_1-\frac{[l]}{n} \\ \delta_2=\left(a_2-\frac{[a]}{n}\right)\delta x+\left(b_2-\frac{[b]}{n}\right)\delta y+l_2-\frac{[l]}{n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_n=\left(a_n-\frac{[a]}{n}\right)\delta x+\left(b_n-\frac{[b]}{n}\right)\delta y+l_n-\frac{[l]}{n}, \end{array}\right| \tag{7}$$

które, kładąc $a_i-\frac{[a]}{n}=A_i$, $b_i-\frac{[b]}{n}=B_i$, $l_i-\frac{[l]}{n}=L_i$, możemy napisać we formie uproszczonej:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1=A_1\,\delta x+B_1\,\delta y+L_1 \\ \delta_2=A_2\,\delta x+B_2\,\delta y+L_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \delta_n=A_n\,\delta x+B_n\,\delta y+L_n \end{array}\right| \tag{7*}$$

(wagi jak poprzednio $=1$).

Następnie tworzymy równania normalne niewiadomych δx i δy:

$$\begin{array}{l} [AA]\,\delta x+[AB]\,\delta y+[AL]=0 \\ [AB]\,\delta x+[BB]\,\delta y+[BL]=0, \end{array} \tag{8}$$

z których wyznaczamy δx i δy.

Błąd średni jest tu ściśle

$$\mu=\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-3}} \tag{9}$$

ze względu na 3 niewiadome.

[1]) Por. uwagi końcowe ustępu *b)* § 2-go.

O ile spostrzeżeń dokonano w s serjach pełnych, zmienia się błąd średni na

$$\mu' = \sqrt{\frac{s[\delta\delta]}{n-3}} = \mu\sqrt{s}. \tag{9*}$$

Następnie wyznaczamy na podstawie równań wag (por. wzory (18) i (19) § (2)-go):

$$Q_{2.2} = \frac{1}{[BB.1]}, \quad Q_{1.1} = \frac{[BB]}{[AA]}\, Q_{2.2} = \frac{[BB]}{[AA][BB.1]}, \tag{10}$$

$$\mu_y = \mu\sqrt{Q_{2.2}} = \mu\sqrt{\frac{1}{[BB.1]}}, \quad \mu_x = \mu\sqrt{Q_{1.1}} = \mu\sqrt{\frac{[BB]}{[AA][BB.1]}} = \mu_y\sqrt{\frac{[BB]}{[AA]}}, \tag{11}$$

$$\mu_p = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}. \tag{12}$$

Jeżeli kierunkom K przysługują wagi różne, natenczas należy do wyrugowania niewiadomej $-\delta z$ użyć zamiast równania (6), równania następującego:

$$\frac{[p\delta]}{[p]} = \frac{[pa]}{[p]}\,\delta x + \frac{[pb]}{[p]}\,\delta y - \delta z + \frac{[pl]}{[p]} = 0. \tag{13}$$

Spółczynniki równań błędów zredukowanych mają wtedy znaczenie:

$$A_i = a_i - \frac{[pa]}{[p]}, \quad B_i = b_i - \frac{[pb]}{[p]}, \quad L_i = l_i - \frac{[pl]}{[p]};$$

zaś równania normalne dla wyznaczenia δx i δy są:

$$\begin{aligned} [pAA]\delta x + [pAB]\delta y + [pAL] &= 0 \\ [pAB]\delta x + [pBB]\delta y + [pBL] &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Błąd średni jednostkowy obliczymy z wzoru:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{n-3}}, \tag{15}$$

zaś błędy średnie spółrzędnych z wzorów:

$$\mu_y = \mu_0\sqrt{\frac{1}{[pBB.1]}}, \quad \mu_x = \mu_y\sqrt{\frac{[pBB]}{[pAA]}}, \text{ a wreszcie:} \tag{16}$$

$$\mu_p = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}. \tag{17}$$

Przyjęcie różnych wag kierunków jest konieczne (z wyjątkiem, gdy chodzi o wyznaczenie podrzędnych punktów IV-rzędnych), o ile pomiary kierunków przeprowadzono serjami *częściowemi* (niezupełnemi).

Po przeprowadzeniu ścisłego wyrównania stacyjnego wedle wskazówek, podanych w § 6-tym *b)* rozdz. IX-go, wyznacza się wagi kierunków metodą Helmerta, opisaną w § 6-tym *c)* rozdz. IX-go.

Wzór (15) $\mu_0 = \frac{[p\,\delta\delta]}{n-3}$ określa nam wówczas ***jednostkowy błąd średni kierunku***, mierzonego ***w obu*** położeniach lunety.

Wyrugowanie niewiadomej orjentacyjnej $-\delta z$ można także przeprowadzić metodą, podaną w § 3-cim rozdz. VII-go. Do n równań błędów, w których opuszczamy niewiadomą $-\delta z$, kształtu:

$$\delta_i'' = a_i \delta x + b_i \delta y + l_i \quad \text{z wagą } 1,$$

należy wtedy dołączyć $n+1$ równanie

$$\Delta'' = [a]\delta x + [b]\delta y + [l] \quad \text{z wagą } -\frac{1}{n}. \tag{18}$$

Równania normalne, odpowiadające temu systemowi błędów:

$$\begin{aligned} &\left([aa] - \frac{[a]^2}{n}\right)\delta x + \left([ab] - \frac{[a][b]}{n}\right)\delta x + [al] - \frac{[a][l]}{n} = 0 \\ &\left([ab] - \frac{[a][b]}{n}\right)\delta x + \left([bb] - \frac{[b]^2}{n}\right)\delta y + [bl] - \frac{[b][l]}{n} = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

są identyczne z równaniami, zestawionemi we wzorze (8).

I tak

$$[AA] = \left[\left(a^2 - \frac{[a]}{n}\right)^2\right] = [aa] - 2\frac{[a]^2}{n} + n\frac{[a]^2}{n^2} = [aa] - \frac{[a]^2}{n},$$

$$[AB] = [ab] - \frac{[a][b]}{n} - \frac{[a][b]}{n} + n\frac{[a][b]}{n^2} = [ab] - \frac{[a][b]}{n} \text{ i t. d.}$$

O ile równaniom błędów odpowiadają wagi *różne*, należy, zestawiając je z opuszczeniem niewiadomej $-\delta z$, dodać do nich $n+1$ równanie z wagą $-\frac{1}{[p]}$.

Tak utworzony system równań błędów będzie zawierał n równań kształtu:

$$\delta_i'' = a_i \delta x + b_i \delta y + l_i \quad \text{z wagą } p_i$$

i $n+1$ równanie:

$$\Delta'' = [pa]\delta x + [pb]\delta y + [pl] \quad \text{z wagą } -\frac{1}{[p]}. \tag{18*}$$

Równania normalne dla tego systemu są identyczne z zestawionemi pod (14), gdyż w obu przypadkach otrzymujemy zgodnie:

$$\begin{aligned} &\left([paa] - \frac{[pa]^2}{[p]}\right)\delta x + \left([pab] - \frac{[pa][pb]}{[p]}\right)\delta y + \left([pal] - \frac{[pa][pl]}{[p]}\right) = 0 \\ &\left([pab] - \frac{[pa][pb]}{[p]}\right)\delta x + \left([pbb] - \frac{[pb]^2}{[p]}\right)\delta y + \left([pbl] - \frac{[pb][pl]}{[p]}\right) = 0. \end{aligned} \tag{19*}$$

§ 5. Przykład wyrównania wcinania wstecz[1]).

Dla wyznaczenia spółrzędnych p. 53-go, spostrzeżono z tego punktu 5 kierunków do punktów stałych: 2, 15, 16, 4 i 1, należących do sieci tryang. IV-rzędnej.

[1]) Przykład ten wzięto z instrukcji polig. austr. „*Instruktion z. Ausf. d. trigon. und polygon. Vermessungen*", Wiedeń 1904. str. 110 i 111, wzór XI *b*.

Wyniki średnie spostrzeżeń:	Spółrzędne punktów stałych:	
$K_2 = 0^0\,00'05''$	$x_2 = -111178{\cdot}68,$	$y_2 = -20272{\cdot}86$
$K_{15} = 80^0\,23'03''$	$x_{15} = -110873{\cdot}76,$	$y_{15} = -18722{\cdot}27$
$K_{16} = 120^0\,47'30''$	$x_{16} = -111044{\cdot}47,$	$y_{16} = -18152{\cdot}68$
$K_4 = 146^0\,40'56''$	$x_4 = -111354{\cdot}16,$	$y_4 = -17784{\cdot}32$
$K_1 = 245^0\,53'23''$	$x_1 = -112370{\cdot}96,$	$y_1 = -18755{\cdot}73.$

Do wyznaczenia spółrzędnych przybliżonych x' i y' punktu 53-go użyto kierunków do p. 2-go, 16-go i 1-go, uzyskując:

$$x' = -111643{\cdot}57, \qquad y' = -18834{\cdot}72.$$

Dalszy rachunek przeprowadzimy we formie nieco skróconej.

	$\mathrm{tg}\,(a)' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}$	$(a)'$	$\lg \frac{\Delta y}{\sin (a)'} = \lg \frac{\Delta x}{\cos (a)'} = \lg s'$	$k_0 = K_i + z$
2	$\frac{-1438{\cdot}14}{+\ 464{\cdot}89}$	287⁰54′50″	3·1794	287⁰54′50″
15	$\frac{+\ 112{\cdot}45}{+\ 769{\cdot}81}$	8⁰18′39″	2·8910	8⁰18′18″
16	$\frac{+\ 682{\cdot}04}{+\ 599{\cdot}10}$	48⁰42′15″	2·9580	48⁰42′15″
4	$\frac{+1050{\cdot}40}{+\ 289{\cdot}41}$	74⁰35′45″	3·0372	74⁰35′41″
1	$\frac{+\ 78{\cdot}99}{-\ 727{\cdot}39}$	173⁰48′08″	2·8643	173⁰48′08″

Dla uzyskania poszczególnych k_0, skręcono cały pęk promieni o

$$z_0 = 287^0 54'45'' = (a)'_{p.2} - K_2 = 287^0 54'50'' - 0^0 00'05''.$$

Następnie oblicza się w sposób analogiczny, jak to miało miejsce przy wcinaniu wprzód (§ 3-ci), spółczynniki równań błędów *a*, *b*, *l*, które redukujemy na *A*, *B* i *L*.

	$a = \rho'' \frac{\sin (a)'}{s'}$	$b = -\rho'' \frac{\cos (a)'}{s'}$	$l = (a)' - k_0$	$A = a - \frac{[a]}{n}$	$B = b - \frac{[b]}{n}$	$L = l - \frac{[l]}{n}$
2	−129·8	− 42·0	0	−188·2	+ 2·9	− 5·0
15	+ 38·3	−262·3	+21	− 20·1	−217·4	+16·0
16	+170·7	−150·0	0	+112·3	−105·1	− 5·0
4	+182·5	− 50·3	+ 4	+124·1	− 5·4	− 1·0
1	+ 30·4	+280·3	0	− 28·0	+325·2	− 5·0
Σ	+292·1	−224·3	+25	+ 0·1	+ 0·2	0·0
$\frac{\Sigma}{n} =$	+ 58·4	− 44·9	+ 5			

Schemat dla utworzenia spółczynników równań normalnych przedstawia się:

	AA	AB	AL	BB	BL	LL
2	+35419	− 546	+941	+ 8	− 15	+ 25
15	+ 404	+ 4370	−322	+ 47263	−3478	+256
16	+12611	−11803	−562	+ 11046	+ 526	+ 25
4	+15401	− 670	−124	+ 29	+ 5	+ 1
1	+ 784	− 9106	+140	+105755	−1626	+ 25
Σ	+64916	−17755	+ 73	+164101	−4588	+332

Rozwiązanie równań normalnych:

	$A]$		
$[A$	+64916		
$[B$	−17755	$\frac{[AB]}{[AA]}=-0{\cdot}27349$	$0{\cdot}27349 \times 0{\cdot}0287 = +0{\cdot}0079$
$[L$	+ 73	$\frac{[AL]}{[AA]}=+0{\cdot}00113$	$-0{\cdot}0011$
			$\delta x = +0{\cdot}0068$

	$B]$		$B.1]$		
$[B$	+164101	−4855·8	+159245·2		
$[L$	− 4588	+ 20·0	− 4568·0	$\frac{[BL.1]}{[BB.1]}=-0{\cdot}02869$	$\delta y = +0{\cdot}0287$

	$L]$		$L.1]$		$L.2]$
$[L$	+ 332	− 0·08	331·92	−131·06	200·86

Spółrzędne wyrównane punktu 53-go są:

$$x_{53} = -111643{\cdot}57 + 0{\cdot}01 = -111643{\cdot}56$$
$$y_{53} = -\ 18834{\cdot}72 + 0{\cdot}03 = -\ 18834{\cdot}69.$$

O ile zależy nam na wyznaczeniu niewiadomej orjentacyjnej δz, wyznaczamy ją z równania normalnego (pierwszego):

$$\delta z = \frac{[a]}{n}\,\delta x + \frac{[b]}{n}\,\delta y + \frac{[l]}{n}, \quad \text{(por. zw. (6) § 4-go)}$$
$$\delta z = 58{\cdot}4 \times 0{\cdot}0068 - 44{\cdot}9 \times 0{\cdot}0287 + 5{\cdot}0 = 4''{\cdot}11.$$

Sumę $[\delta\delta]$ można wyznaczyć bezpośrednio albo z równań błędów zredukowanych, lub z pierwotnych; aby w tym drugim przypadku nie obliczać δz, przeprowadzamy pozorną redukcję spółczynników równań pierwotnych. Oba te sposoby zestawiliśmy na str. 252.

	$A\delta x$	$B\delta y$	L	δ	$a\delta x$	$b\delta y$	$a\delta x+b\delta y =\delta(a)$	$\delta(a)-\frac{[\delta(a)]}{n}$	L	δ	$\delta\delta$
2	−1·28	+0·08	− 5	−6·20	−0·88	−1·21	−2·09	−1·20	− 5	−6·20	38·44
15	−0·14	−6·24	+16	+9·62	+0·26	−7·53	−7·27	−6·38	+16	+9·62	92·54
16	+0·76	−3·02	− 5	−7·26	+1·16	−4·31	−3·15	−2·26	− 5	−7·26	52·71
4	+0·84	−0·15	− 1	−0·31	+1·24	−1·44	−0·20	+0·69	− 1	−0·31	0·10
1	−0·19	+9·33	− 5	+4·14	+0·21	+8·04	+8·25	+9·14	− 5	+4·14	17·14
Σ	−0·01	0·00	0	−0·01			−4·46 :5	−0·01	0	−0·01	200·93

$$\frac{[\delta(a)]}{n}=-0{\cdot}89 \quad ([LL.2]=200{\cdot}86 \text{ kontr.})$$

$$\mu=\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-3}}=\sqrt{\frac{200{\cdot}93}{2}}=\pm 10{\cdot}''0_2,$$

$$Q_{2.2}=\frac{1}{[BB.1]}=0{\cdot}0000063,\quad Q_{1.1}=\frac{[BB]}{[AA]}\,Q_{2.2}=\frac{164101}{64916}\,0{\cdot}0000063=0{\cdot}0000159.$$

$$\mu_x=\mu\sqrt{Q_{1.1}}=\pm 10{\cdot}0\times 0{\cdot}0040=\pm 0{\cdot}040\,m,\quad \mu_y=\mu\sqrt{Q_{2.2}}=\pm 10{\cdot}0\times 0{\cdot}0025=\pm 0{\cdot}025\,m,$$

$$\mu_{53}=\sqrt{\mu_x^2+\mu_y^2}=\pm 0{\cdot}047\ m.$$

Przeprowadzając wyrównanie metodą podaną w § 4-tym, objaśnioną wzorami (18), (18*), (19) i (19*), otrzymamy jako równania błędów (por. zw. (18)):

$$\left.\begin{aligned}
\delta_2'' &= -129{\cdot}8\,\delta x - 42{\cdot}0\,\delta y \quad .\\
\delta_{15}'' &= +\ 38{\cdot}3\,\delta x - 262{\cdot}3\,\delta y + 21\\
\delta_{16}'' &= +170{\cdot}7\,\delta x - 150{\cdot}0\,\delta y \quad .\\
\delta_4'' &= +182{\cdot}5\,\delta x - 50{\cdot}3\,\delta y + 4\\
\delta_1'' &= +\ 30{\cdot}4\,\delta x + 280{\cdot}3\,\delta y \quad .
\end{aligned}\right\} p=1$$

$$\Delta'' = +292{\cdot}1\,\delta x - 224{\cdot}3\,\delta y + 25 \quad p=-\tfrac{1}{5}.$$

Równania normalne, odpowiadające związkom objętym wzorem (19), są:

$$\begin{aligned} +64619\,\delta x - 17754\,\delta y + 72 &= 0\\ -17754\,\delta x + 164101\,\delta y - 4588 &= 0 \end{aligned}$$

(dostatecznie zgodne z poprzedniemi), zaś niewiadome nie różnią się od poprzednio wyznaczonych:

$$\delta x=+0{\cdot}0068,\quad \delta y=+0{\cdot}0287.$$

Sumę kwadratów błędów utworzymy z uwzględnieniem odpowiednich wag; a zatem

$a\delta x$	$b\delta y$	l	δ''	p	$p\delta''\delta''$
−0·88	−1·21	0	− 2·09	1	+ 4·37
+0·26	−7·53	+21	+13·73	1	+188·51
+1·16	−4·31	0	− 3·15	1	+ 9·92
+1·24	−1·44	+ 4	+ 3·80	1	+ 14·44
+0·21	+8·04	0	+ 8·25	1	+ 68·06
+1·99	−6·45	+25	+20·54	$-\frac{1}{5}$	− 84·38 $\left(=-\frac{\Delta''^2}{n_w}\right)$

$$[p\delta''\delta'']-\frac{\Delta''^2}{n_w}=+200{\cdot}92$$

(zgodność dostateczna z rachunkiem poprzednim).

Dalszy rachunek identyczny jak przy metodzie pierwszej.

§ 6. Wcinanie obustronne (skombinowane).

Jeżeli dla wyznaczenia położenia punktu P użyto kierunków *zewnętrznych* i *wewnętrznych*, a więc *obustronnych*, będziemy mieli przy wyrównaniu równania błędów *dwojakiego rodzaju:* dla kierunków zewnętrznych i wewnętrznych.

a) Postępowanie używane w praktyce przy wyznaczaniu punktów mniej ważnych.

Po wyznaczeniu spółrzędnych przybliżonych x' i y' punktu P, ustawiamy równania błędów dla kierunków zewnętrznych, przemienionych przez dodanie do nich względnie odjęcie od nich kąta 180^0 [1]).

Dla w ten sposób przemienionych kierunków zewnętrznych w ilości n_z otrzymamy n_z równań błędów kształtu:

$$\delta_i' = a_i\,\delta x + b_i\,\delta y + l_i' \text{ z wagą } p_i = \frac{m_i}{m_i+1}, \tag{1}$$

$$\text{przyczem } a_i = \varrho''\frac{\sin(a)_i'}{s_i'},\ b_i = -\varrho''\frac{\cos(a)_i'}{s_i'},\ l_i = (a)_i - (K_0 \pm 180^0)$$

a m_i oznacza ilość kierunków stałych, użytych przy nawiązaniu. (Por. wzory (9*), (10), (11), (11*) i (13) § 2-go).

Równania błędów w ilości n_w odnoszące się do kierunków wewnętrznych (właściwych, t. j. wciętych wstecz) mają wedle wzoru (4) § 4-go kształt

$$\delta_i = a_i\,\delta x + b_i\,\delta y - \delta z + l_i \text{ z wagą } = 1 \tag{2}$$

przyczem $l_i = (a)_i' - (k_0)_i$, zaś a_i i b_i mają znaczenie jak wyżej.

Po wyrugowaniu z równań (2) niewiadomej $-\delta z$ przy pomocy równania

$$\frac{[\delta]}{n_w} = \frac{[a]}{n_w}\,\delta x + \frac{[b]}{n_w}\,\delta y - \delta z + \frac{[l]}{n_w} = 0, \tag{3}$$

otrzymamy $n = n_z + n_w$ równań błędów o niewiadomych δx i δy, a mianowicie n_z równań kształtu:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_i' = a_i\,\delta x + b_i\,\delta y + l_i' \quad \text{z wagą } p_i = \dfrac{m_i}{m_i+1} \\ \text{i } n_w \text{ równań kształtu:} \\ \delta_i = A_i\,\delta x + B_i\,\delta y + L_i \text{ z wagą } = 1, \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\text{przyczem } A_i = a_i - \frac{[a]}{n_w},\ B_i = b_i - \frac{[b]}{n_w},\ L_i = l_i - \frac{[l]}{n_w}.$$

[1]) Przemiana kierunków zewnętrznych nie jest konieczną; przeprowadza się ją dla ujednostajnienia znaków spółczynników a_i i b_i, zatem tylko dla uniknięcia ewent. pomyłek. (Por. przytoczone poprzednio przepisy pomiarowe polskie i austr.).

Równania normalne możemy utworzyć albo dla wszystkich równań (4) naraz, albo lepiej osobno dla każdej grupy równań n_z i n_w osobno, a wyniki razem zesumować.

Pierwsza grupa dostarcza nam równań normalnych:

$$[paa]\,\delta x+[pab]\,\delta x+[pal']=0$$
$$[pab]\,\delta x+[pbb]\,\delta y+[pbl']=0,$$

zaś druga:

$$[AA]\,\delta x+[AB]\,\delta y+[AL]=0$$
$$[AB]\,\delta x+[BB]\,\delta y+[BL]=0,$$

a obie razem:

$$\begin{aligned}&([paa]+[AA])\,\delta x+([pab]+[AB])\,\delta y+[pal']+[AL]=0\\&([pab]+[AB])\,\delta x+([pbb]+[BB])\,\delta y+[pbl']+[BL]=0.\end{aligned}\qquad(5)$$

O ile kierunkom wewnętrznym przysługują wagi różne, należy użyć przy rugowaniu niewiadomej $-\delta z$ równania (13) § 4-go, spółczynniki drugiej grupy równań normalnych będą wówczas zawierały odpowiednie wagi.

Jednostkowy błąd średni należy obliczyć wedle wzoru:

$$\mu_0=\sqrt{\frac{[p\,\delta'\delta']+[\delta\delta]}{n-3}}\,^{1)},\qquad(6)$$

a to ze względu na trzy niewiadome δx, δy i δz.

(Niewiadome orjentacyjne kierunków zewnętrznych odpadają, gdyż wzór (6) odnosi się tylko do kierunków, użytych do wcięcia punktu P. Wzór *ścisły* na μ_0 podajemy poniżej przy omawianiu sposobu *b)*.

Dalsze szczegółowe omawianie toku wyrównania jest zbyteczne.

Po wyznaczeniu spółczynników $Q_{1.1}$ i $Q_{2.2}$ z równań wag, utworzorzonych na wzór równań normalnych (5), obliczamy

$$\mu_y=\mu_0\sqrt{Q_{2.2}},\quad \mu_x=\mu_0\sqrt{Q_{1.1}},\quad \text{a następnie i}\quad \mu_p=\sqrt{\mu_x^2+\mu_y^2}.$$

μ_y i μ_x można wyznaczyć bez rozwiązywania równań wag przy pomocy wzorów, urobionych analogicznie jak (20) § 2-go i (16) § 4-go.

W praktyce przyjmują często wagi kierunków zewnętrznych równe $\frac{1}{2}$ przy nawiązaniu do kierunków: od 1-go do 4-rech, natomiast równe 1, gdy nawiązanie nastąpiło do więcej kierunków.

b) Wyrównanie ścisłe. Postępowanie nadające się przy wyznaczaniu punktów ważniejszych.

* * * Przyjmijmy dla uproszczenia, że wagi kierunków zewnętrznych jak i wewnętrznych, wynikające z pomiarów, są równe jedności.

[1]) Przepisy pomiarowe polskie, austr. i niemieckie podają jako mianownik wyrażenia pod pierwiastkiem $n-2$; przyjęcie to nie wytrzymuje krytyki, jak to wykazano w rozprawie: Dr. K. Weigel „Zur Berechnung des mittl. Fehlers einer beobacht. Richtung beim Einschn. u. Einschal. von Punkten“, austr. Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1912. W ostatniem wydaniu Handb. d. Vermessungskunde Jordana z r. 1920 str. 413. uwzględniono pow. uwagi.

Wedle uwag § 2-go *c)* możemy przedstawić wpływ kierunków zewnętrznych (nieprzemienionych) na wyrównanie punktu *P*, ustawiając dla każdego stanowiska zewnętrznego dwa równania błędów kształtu przedstawionego wzorem (25) § 2-go.

Oznaczając spółczynniki tych równań wedle stanowisk zewnętrznych, otrzymamy n. p. dla stanowiska *I*:

$$\left.\begin{aligned} \delta_i' &= a_i\,\delta x + b_i\,\delta y + l_i' \quad \text{z wagą} = 1 \\ \Delta_i' &= a_i\,\delta x + b_i\,\delta y + l_i' \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad p_i' = -\frac{1}{m_i+1}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

jeżeli z punktu *I* nawiązano się do do m_i punktów stałych.

Dla n_z stanowisk zewnętrznych będziemy mieli zatem $2n_w$ równań błędów, przyczem należy pamiętać, że liczba wyrugowanych $-\delta z$ wynosi n_z.

Dla uniknięcia pomyłek, podajemy znaczenie spółczynników równ. (7):

$$a_i = -\varrho''\frac{\sin(a)_i'}{s_i'}, \quad b_i = +\varrho''\frac{\cos(a)_i'}{s_i'}, \quad l_i' = (a)_i - (K_0)_i.$$

Kierunki wewnętrzne w liczbie n_w dostarczą nam wedle wzoru (18) § 4-go n_w+1 równań kształtu

$$\text{liczba: } n_w+1 \left|\begin{array}{l} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_i'' = a_i''\,\delta x + b_i''\,\delta y + l_i'' \quad \text{z wagą} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta'' = [a'']\,\delta x + [b'']\,\delta y + [l''] \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad p'' = -\frac{1}{n_w}, \end{array}\right| \quad (8)$$

przyczem $a_i'' = +\varrho''\dfrac{\sin(a)_i'}{s_i'}$, $b_i'' = -\varrho''\dfrac{\cos(a)_i'}{s_i'}$, $l_i'' = (a)_i' - (k_0)_i$.

Równania normalne, utworzone dla każdego stanowiska zewnętrznego osobno i odpowiednio zesumowane, a zatem dla wszystkich n_z kierunków zewnętrznych są (por. wzór 26) § 2-go):

$$\begin{aligned} \left[\frac{m}{m+1}aa\right]\delta x + \left[\frac{m}{m+1}ab\right]\delta y + \left[\frac{m}{m+1}al'\right] &= 0 \\ \left[\frac{m}{m+1}ab\right]\delta x + \left[\frac{m}{m+1}bb\right]\delta y + \left[\frac{m}{m+1}bl'\right] &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

zaś dla n_z kierunków wewnętrznych (wedle wzoru (19) § 4-go):

$$\left.\begin{aligned} \left([a''a''] - \frac{[a''][a'']}{n_w}\right)\delta x + \left([a''b''] - \frac{[a''][b'']}{n_w}\right)\delta y + [a''l''] - \frac{[a''][l'']}{n_w} &= 0 \\ \left([a''b''] - \frac{[a''][b'']}{n_w}\right)\delta x + \left([b''b''] - \frac{[b''][b'']}{n_w}\right)\delta y + [b''l''] - \frac{[b''][l'']}{n_w} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Ostateczne równania normalne dla wyznaczenia δx i δy otrzymujemy przez zesumowanie odpowiednich spółczynników obu równań (9) i (10); a zatem $\left\{\left[\frac{m}{m+1}aa\right]+\left([a''a'']-\frac{[a''][a'']}{n_w}\right)\right\}\delta x$ i t. d.

Ścisły wzór na jednostkowy błąd średni musi uwzględniać nietylko błędy kierunków, użytych dla *wcięcia* punktu P, ale także i błędy, popełnione przy spostrzeganiu kierunków *stałych*, których ilość na poszczególnych stanowiskach zewn. jest wedle poprzednio przyjętego oznaczenia: m_1, m_2, ... i t. d., a zatem razem $[m]$.

W tym celu powróćmy do *pierwotnych* równań błędów na stanowiskach zewnętrznych.

Dla stanowiska I przedstawiają się te równania w sposób następujący:

$$\left.\begin{array}{ll}
\vartheta_{i.1}=-\delta z_i+(a)_{i.1}-K_{i.1}-z_i' & =-\delta z_i+l_{i.1} \\
\vartheta_{i.2}=-\delta z_i+(a)_{i.2}-K_{i.2}-z_i' & =-\delta z_i+l_{i.2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\vartheta_{i.m}=-\delta z_i+(a)_{i.m}-K_{i.m}-z_i' & =-\delta z_i+l_{i.m} \\
\vartheta_{i.p}=-\delta z_i+a_i\,\delta x+b_i\,\delta y+(a)_{i.p}'-K_{i.p}-z_i' & =-\delta z_i+a_i\,\delta x+b_i\,\delta y+l_i'
\end{array}\right\} \quad (11)$$

(z_i' oznacza wielkość przybliżonego (średniego skrętu na stanowisku I, $-\delta z_i$ niew. orjentacyjną; aby uniknąć zbyt zawikłanych oznaczeń, przyjęto ilość kierunków stałych m zamiast m_i).

Znając po rozwiązaniu równań normalnych wartości na δx i δy, możemy wyznaczyć δz_i z równania, utworzonego przez zesumowanie równań wzoru (11) i podzielenie wyniku przez ilość równań. Zatem ze względu że

$$\frac{(a)_{i.1}-K_{i.1}+(a)_{i.2}-K_{i.2}+\dots+(a)_{i.m}-K_{i.m}}{m}=z_i', \qquad (12)$$

a w następstwie $\qquad l_{i.1}+l_{i.2}+\dots+l_{i.m}=0, \qquad (13)$

otrzymamy (jako pierwsze równanie normalne):

$$0=\frac{[\vartheta]_{i.1}^{i.m}+\vartheta_{i.p}}{m+1}=-\delta z_i+\frac{a_i}{m+1}\,\delta x+\frac{b_i}{m+1}\,\delta y+\frac{l_i'}{m+1} \qquad (14)$$

a ztąd: $$\delta z_i=\frac{a_i}{m+1}\delta x+\frac{b_i}{m+1}\delta y+\frac{l_i'}{m+1}. \qquad (15)$$

Wstawiając tę wartość na δz_i do równań, zestawionych we wzorze (11), otrzymamy:

$$\left.\begin{array}{l}
\vartheta_{i.1}=l_{i.1}-\left(\frac{a_i}{m+1}\,\delta x+\frac{b_i}{m+1}\,\delta y+\frac{l_i'}{m+1}\right) \\
\vartheta_{i.2}=l_{i.2}-\left(\frac{a_i}{m+1}\,\delta x+\frac{b_i}{m+1}\,\delta y+\frac{l_i'}{m+1}\right) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\vartheta_{i.m}=l_{i.m}-\left(\frac{a_i}{m+1}\,\delta x+\frac{b_i}{m+1}\,\delta y+\frac{l_i'}{m+1}\right) \\
\vartheta_{i.p}=\frac{m}{m+1}\left(a_i\,\delta x+b_i\,\delta y+l_i'\right).
\end{array}\right\} \quad (16)$$

Oznaczając sumę kwadratów wszystkich ϑ, uzyskanych w ten sposób dla wszystkich stanowisk zewnętrznych przez $[\vartheta\vartheta]$, otrzymamy z uwagi, że ilość wszystkich kierunków spostrzeganych $N=[m]+n_z+n_w$, wzór na jednostkowy błąd średni:

$$\mu_0'=\sqrt{\frac{[\vartheta\vartheta]+[\delta''\delta'']-\frac{\Delta''^2}{n_w}}{N-(2+1+n_z)}}=\sqrt{\frac{[\vartheta\vartheta]+[\delta''\delta'']-\frac{\Delta''^2}{n_w}}{[m]+n_w-3}}. \qquad (17)$$

Suma $\left([\delta''\delta'']-\frac{\Delta''^2}{n_w}\right)$ odpowiada sumie $[\delta\delta]$, zawartej we wzorze (6).

Dalszy rachunek, jako analogiczny do przeprowadzonych poprzednio, nie wymaga bliższych objaśnień.

* * *

§ 7. Przykład obustronnego wyrównania.

Jako przykład podajemy wyrównanie punktu I w Zakopanem.

Punkt ten wcięto wprzód ze stanowiska p. tr. 8, nawiązując się do kierunków (p. tr. 8—† Gwt.) oraz (p. tr. 8—† Gb.), i wstecz, celując do punktów † Gb. oraz p. tr. 8.

Spółrzędne wymienionych punktów, należących do sieci IV-rzędnej, są:

	† Gwt. (Giewont)	p. tr. 8	† Gb. (Krzyż na Gubałówce)
y	298759·74	295529·13	298386·63
x	58173·92	54288·92	51949·70

Wyrównanie stacyjne na stanowisku p. tr. 8:

Celowe do p.:	K	$(a)-K$	(a)	$K_0=K+z_0$	l
† Gwt.	0°00′00″	39°44′44″	39°44′44″	39°44′41″	+3
† Gb.	89°33′39″	39°44′38″	129°18′17″	129°18′20″	—3
I	344°10′20″			23°55′01″	

$[(a)-K]\ldots 1'22''$

$:2=41''$ waga kierunku (p. tr. 8—I) jest $\frac{2}{3}$.

$z_0=39^\circ 44'41''$.

Kierunki wewnętrzne, spostrzegane na stanowisku p. tr. 8, są:

† Gwt.	0°00′00″
† Gb.	93°17′04″
p. tr. 8	163°05′02″.

Dla uzyskania spółrzędnych przybliżonych punktu I-go, rozwiązano trójkąt p. tr. 8—I—† Gb., otrzymując:

$$x'=54590{\cdot}69, \quad y'=295662{\cdot}97.$$

Przy pomocy spółrzędnych przybliżonych obliczono następnie azymuty (pozorne) przybliżone:

$(a)'_{\mathrm{I,\,Gwt}}=40^{0}50'05''{\cdot}6$, $(a)'_{\mathrm{I,\,Gb}}=134^{0}07'01''{\cdot}7$ i $(a)'_{\mathrm{I,\,8}}=203^{0}55'05''{\cdot}1$,

jak też i spółczynniki poszczególnych równań błędów, zestawione poniżej w schemacie.

(Obliczenie spółczynników przeprowadzono w sposób identyczny jak przy poprzednich przykładach w § 3-cim i § 5-tym).

Orjentację kierunku zewnętrznego (p. tr. 8—I) uzyskano przy wyrównaniu stacyjnem na punkcie tr. 8-mym.

Kierunki wewnętrzne zorjentowano, skręcając je o kąt $203^{0}55'05''{\cdot}1-163^{0}05'02''{\cdot}0=40^{0}50'03''{\cdot}1$ (kierunek 3-ci).

Przy tworzeniu spółczynników równań normalnych zmieniono kierunek zewnętrzny o $\pm 180^{0}$.

Równania błędów.

Kierunki zewnętrzne (przemienione o $\pm 180^{0}$)

Punkt	a	b	p	$(a)'$		$K_0 \pm 180^{0}$	$l' = (a)'-(K_0 \pm 180^{0})$
p. tr. 8	−253·3	+571·1	$\frac{2}{3}$	203°55'05''·1		203°55'01''·0	+4''·1

Kierunki wewnętrzne

Punkt	a	a zreduk.	b	b zreduk.	p	$(a)'$	K	$k_0=K+z_0$	$l''=(a)'-k_0$	l'' zreduk.
†Gwt.	+28·5	+90·4	−33·0	−225·0	1	40°50'05''·6	0°00'00''	40°50'03''·1	+2·5''	+3·5''
†Gb.	+39·0	+100·9	+37·8	−154·2	1	134°07'01''·7	93°17'04''	134°07'07''·1	−5·4	−4·4
p. tr. 8	−253·3	−191·4	+571·1	+379·1	1	203°55'05''·1	163°03'02''	203°55'05''·1	0·0	+1·0
Σ	−185·8 : 3	−0·1	+575·9 : 3	−0·1		$z_0=203^{0}55'05''{\cdot}1-163^{0}03'02''{\cdot}0 = 40^{0}50'03''{\cdot}1$		Σ	−2·9 : 3	
$\frac{[a]}{n}=$	−61·9	$\frac{b}{n}=$	+192·0					$\frac{[l'']}{n}=$	−1·0	

Następnie tworzymy spółczynniki równań normalnych, oznaczając je $[pAA]$, $[pAB]$ i t. d.

Spółczynniki równań normalnych:

	pAA	pAB	pAL	pBB	pBL	pLL
1	+42774	− 96440	− 693	+217438	+1561	+11·21
2	+ 8172	− 20340	+ 316	+ 50625	− 788	+12·25
3	+10181	− 15559	− 444	+ 23778	+ 678	+19·38
4	+36634	− 72560	− 191	+143717	+ 379	+ 1·00
Σ	+97761	−204899	−1012	+435558	+1830	+43·82

Dla kontroli można było utworzyć wyrazy $[pAS]$, $[pBS]$ i t. d. i wprowadzić je do późniejszego rachunku, co jednak pominięto, aby nie powiększać materjału rachunkowego.

Schemat rozwiązania równań normalnych:

	$A]$		
$[pA$	$+\ 97761$		
$[pB$	-204899	$\dfrac{[pAB]}{[pAA]}=-2{\cdot}09592$	$2{\cdot}09592\times 0{\cdot}04767=0{\cdot}09991$
$[pL$	$-\ \ 1012$	$\dfrac{[pAL]}{[pAA]}=-0{\cdot}01035$	$0{\cdot}01035$
			$\delta x=+0{\cdot}110\,m$

	$B]$		$B.1]$		
$[pB$	$+435558$	$-429451{\cdot}9$	$+6106{\cdot}1$		
$[pL$	$+\ \ 1830$	$-\ \ 2121{\cdot}1$	$-\ \ 291{\cdot}1$	$\dfrac{[pBL.1]}{[pBB.1]}=-0{\cdot}04767$	$\delta y=+0{\cdot}048\,m$

	$L]$		$L.1]$		$L.2]$
$[pL$	$+\ 43{\cdot}82$	$-\ 10{\cdot}47$	$+\ 33{\cdot}35$	$-\ 13{\cdot}88$	$+\ 19{\cdot}47$

$$y_1=295662{\cdot}97+0{\cdot}05=295663{\cdot}02,\quad x_1=54590{\cdot}69+0{\cdot}11=54590{\cdot}80.$$

Obliczenie błędów średnich.

	$a\delta x$	$b\delta y$	$\delta(a)'=a\delta x+b\delta y$	zreduk.	L	$\delta=L-\delta(a)'$	p	$p\delta\delta$
1	$-27{\cdot}929$	$+27{\cdot}224$	$-0{\cdot}71$	———	$+4{\cdot}1$	$+3{\cdot}39$	$^2/_3$	$7{\cdot}66$
2	$+\ 3{\cdot}142$	$-\ 1{\cdot}573$	$+1{\cdot}57$	$-0{\cdot}75$	$+3{\cdot}5$	$+2{\cdot}75$	1	$7{\cdot}56$
3	$+\ 4{\cdot}300$	$+\ 1{\cdot}802$	$+6{\cdot}10$	$+3{\cdot}78$	$-4{\cdot}4$	$-0{\cdot}62$	1	$0{\cdot}38$
4	$-27{\cdot}929$	$+27{\cdot}224$	$-0{\cdot}71$	$-3{\cdot}03$	$+1{\cdot}0$	$-2{\cdot}03$	1	$4{\cdot}12$
Σ		Σ	$+6{\cdot}96$	$0{\cdot}00$	$+0{\cdot}1$	$+0{\cdot}1$		$19{\cdot}72$
			$:3$			(kontrola $19{\cdot}47$)		
			$2{\cdot}32$					

$$\mu_0=\sqrt{\frac{19{\cdot}72}{4-3}}=\pm 4''{\cdot}42$$

$$Q_{2.2}=\frac{1}{6106{\cdot}1}=0{\cdot}000163,\quad Q_{1.1}=\frac{435558}{97761\times 6106{\cdot}1}=0{\cdot}000730.$$

$$\mu_x=4{\cdot}42\sqrt{0{\cdot}00073}=\pm 0{\cdot}119\ m,\quad \mu_y=4{\cdot}42\sqrt{0{\cdot}000163}=\pm 0{\cdot}057\ m$$

$$\mu_p=\sqrt{\mu_x^2+\mu_y^2}=\pm 0{\cdot}132\ m.$$

*

Aby wyznaczyć wartość błędu średniego, obliczonego wedle wzoru ścisłego (z uwzględnieniem kierunków nawiązania), napiszemy wedle wzoru (15) § 6-go str. 256:

$$\delta z_8 = \frac{a}{m+1}\,\delta x + \frac{b}{m+1}\,\delta y + \frac{l'}{m+1} = \frac{\delta}{m+1} = +\frac{3\cdot 39}{3} = +1''13.$$

Błędy pozorne kierunków zewnętrznych otrzymamy zatem wedle związków wzoru (16) § 6-go:

	$\vartheta\vartheta$
$\vartheta_1 = 3-1\cdot13 = +1\cdot87$	3·50
$\vartheta_2 = -3-1\cdot13 = -4\cdot13$	17·06
$\vartheta_3 = \frac{2}{3}\times 3\cdot39 = +2\cdot26$	5·11
$\Sigma = 0\cdot00$	$\Sigma = 25\cdot67$

Dodając do $[\vartheta\vartheta] = 25\cdot67$ kwadraty błędów pozornych (zreduk.) kierunków wewnętrznych:

$7\cdot56 + 0\cdot38 + 4\cdot12 = 12\cdot06$, otrzymamy $\{(17)$ § $6\}$:

$$\mu_0' = \sqrt{\frac{25\cdot67 + 12\cdot06}{2+3-3}} = \pm 4''\cdot34.$$

§ 8. Wyrównanie przy równoczesnem wyznaczeniu spółrzędnych kilku punktów. (Wyrównanie sieci wypełniających).

Przy wyrównaniu spółrzędnych kilku punktów postępujemy podobnie, jak to miało miejsce przy wyrównaniu spółrzędnych jednego punktu.

Ilość punktów wyznaczanych $P, R, S,\ldots$ niech będzie ν. Na ilość wszystkich kierunków spostrzeganych N składają się tu również kierunki *stałe* i do *wyznaczanych punktów* na stanowiskach *zewnętrznych:* $[m] + n_z$, oraz kierunki *wewnętrzne* na ν stanowiskach wewnętrznych: n_w. Te ostatnie tworzą także *dwie* grupy, z których jedna obejmuje kierunki do punktów *stałych,* zaś druga do punktów *wyznaczanych.*

Kształt równań błędów dla kierunków *stałych* i *zewuętrznych* będzie zatem dla stanowiska (zewn.) I następujący:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{ilość } m_i \left\{\begin{array}{l}
\vartheta_{i.1} = -\delta z_i + l_1 \\
\vartheta_{i.2} = -\delta z_i + l_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vartheta_{i.m} = -\delta z_i + l_m
\end{array}\right. \\
\text{ilość } \nu_i \left\{\begin{array}{l}
\vartheta_{i.p} = -\delta z_i + a_{i.p}\,\delta x_p + b_{i.p}\,\delta y_p + l'_{i.p} \\
\vartheta_{i.r} = -\delta z_i + a_{i.r}\,\delta x_r + b_{i.r}\,\delta y_r + l'_{i.r} \\
\vartheta_{i.s} = -\delta z_i + a_{i.s}\,\delta x_s + b_{i.s}\,\delta y_s + l'_{i.s} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

przyczem δx_p, δy_p są poprawki spółrzędnych przybliżonych punktu P, δx_r, δy_r punktu R, zaś δx_s, δy_s punktu S.

Równania błędów dla kierunków *wewnętrznych* w ilości n_w' dla stanowiska (wewn.) P wraz z dodanem do nich $(n_w'+1)$-wszem równaniem (sumy) o wadze $p''=-\frac{1}{n_w'}$ przedstawią się:

$$\text{ilość } n_w' \left\{\begin{array}{l}
\delta''_{p.1}=a_{p.1}\,\delta x_p+b_{p.1}\,\delta y_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad +l''_{p.1}\\
\delta''_{p.2}=a_{p.2}\,\delta x_p+b_{p.2}\,\delta y_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad +l''_{p.2}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\delta''_{p.r}=a_{p.r}\,\delta x_p+b_{p.r}\,\delta y_p-a_{p.r}\,\delta x_r-b_{p.r}\,\delta y_r \quad . \quad . \quad +l''_{p.r}\\
\delta''_{p.s}=a_{p.s}\,\delta x_p+b_{p.s}\,\delta y_p \quad . \quad . \quad -a_{p.s}\,\delta x_s-b_{p.s}\,\delta y_s+l''_{p.s}\\
\Delta'' =[a]\,\delta x_p+[b]\,\delta y_p-a_{p.r}\,\delta x_r-b_{p.r}\,\delta y_r-a_{p.s}\,\delta x_s-b_{p.s}\,\delta y_s+[l'']\\
\qquad\qquad \text{ostatnie równanie z wagą } p''=-\frac{1}{n_w'}.
\end{array}\right\} \tag{2}$$

(Przez dodanie ostatniego równania z wagą $p''=-\frac{1}{n_w'}$, wyrugowaliśmy z powyższych n_w' równań błędów niewiadomą orjentacyjną $-\delta z_p$ na stanowisku P. Znaczenie poszczególnych spółczynników a i b objaśnia wzór (5*) § 1-go).

W podobny sposób rugujemy z równań (1) niewiadomą δz_i, przyczem *m pierwszych równań*, jako niezawierających po wyrugowaniu niewiadomych, *odpada*.

Do dalszego rachunku pozostają zatem na stanowisku (zewn.) I następujące równania:

$$\text{ilość } \nu_i \left\{\begin{array}{l}
\delta'_{i.p}=a_{i.p}\,\delta x_p+b_{i.p}\,\delta y_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad +l'_{i.p}\\
\delta'_{i.r}= \quad . \quad . \quad +a_{i.r}\,\delta x_r+b_{i.r}\,\delta y_r \quad . \quad . \quad +l'_{i.r}\\
\delta'_{i.s}= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad +a_{i.s}\,\delta x_s+b_{i.s}\,\delta y_s+l'_{i.s}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Delta' =a_{i.p}\,\delta x_p+b_{i.p}\,\delta y_p+a_{i.r}\,\delta x_r+b_{i.r}\,\delta y_r+a_{i.s}\,\delta x_s+b_{i.s}\,\delta y_s+[l']\\
\qquad\qquad \text{ostatnie równanie z wagą } p'=-\frac{1}{m_i+\nu_i}.
\end{array}\right\} \tag{3}$$

(Waga $p'=-\frac{1}{m_i+\nu_i}$ pochodzi ztąd, że ilość wszystkich kierunków zewnętrznych na stanowisku I wynosi $m_i+\nu_i$).

Wzorując się na równaniach objętych wzorem (2), ustawiamy równania błędów dla wszystkich stanowisk zewnętrznych; dla wszystkich ν stanowisk wewnętrznych układamy równania błędów wedle wzoru (3).

Dla utrzymania przejrzystości rachunku najlepiej utworzyć równania normalne dla każdego stanowiska osobno, a następnie złączyć je w jeden system równań normalnych przez dodanie do siebie odpowiednich wyrazów poszczególnych systemów [1]).

---

[1]) Obacz przykład, podany dla ustawiania ostatecznych równań błędów przy końcu § 9-go.

Postępowanie to objaśnimy na następującym przykładzie. Przypuśćmy, że ilość stanowisk wewnętrznych wynosi 4, t. j. I, II, III, IV, zaś ilość stanowisk wewnętrznych (punktów wyznaczanych) 2, t. j. P i R.

Napiszmy pierwsze równania normalne dla każdego z tych 6-ciu punktów, w sposób następujący:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{dla p. I:} & [A_1A_1]\delta x_p+[A_1B_1]\delta y_p+ \quad . \quad . \quad +[A_1L_1]=0 \\
\text{„ „ II:} & [A_2A_2]\delta x_p+[A_2B_2]\delta y_p+[A_2C_2]\delta x_r+[A_2D_2]\delta y_r+[A_2L_2]=0 \\
\text{„ „ III:} & [A_3A_3]\delta x_p+[A_3B_3]\delta y_p+[A_3C_3]\delta x_r+[A_3D_3]\delta y_r+[A_3L_3]=0 \\
\text{„ „ IV:} & \quad . \quad . \quad +[A_4C_4]\delta x_r+[A_4D_4]\delta y_r+[A_4L_4]=0 \\
\text{„ „ } P\text{:} & [A_pA_p]\delta x_p+[A_pB_p]\delta y_p+[A_pC_p]\delta x_r+[A_pD_p]\delta y_r+[A_pL_p]=0 \\
\text{„ „ } R\text{:} & [A_rA_r]\delta x_p+[A_rB_r]\delta y_p+[A_rC_r]\delta x_r+[A_rD_r]\delta y_r+[A_rL_r]=0,
\end{array}\right\} \quad (4)$$

to pierwsze równanie normalne dla systemu całego będzie:

$$[AA]\delta x_p+[AB]\delta y_p+[AC]\delta x_r+[AD]\delta y_r+[AL]=0, \qquad (5)$$

przyczem $[AA]=[A_1A_1]+A_2A_2]+[A_3A_3]+\,.\,+[A_pA_p]+[A_rA_r]$, zaś $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ i $[AL]$ są utworzone w sposób analogiczny.

Z równań normalnych, utworzonych w ten sposób, uzyskujemy poprawki spółrzędnych punktów wyznaczanych P, R, S,....

Jednostkowy błąd średni możemy wyznaczyć przy pomocy dwu wzorów, z których każdy ma inne znaczenie, a więc także i inną wartość.

Jeżeli użyjemy przy wyznaczaniu błędu średniego tylko kierunków wcinających, a więc kierunków zewnętrznych i wewnętrznych, wyznaczających bezpośrednio położenie punktów P, R, S,...., otrzymamy wzór

$$\mu=\sqrt{\frac{[p\,\delta'\delta']+[\delta''\delta'']-\left[\frac{\Delta''^2}{n_w}\right]}{n-3\nu}}, \qquad (6)$$

przyczem $n=n_z+n_w$, t. j. sumie wszystkich kierunków spostrzeganych z wyłączeniem kierunków stałych $[m]$, zaś poszczególne p_i dla każdego kierunku zewnętrznego obliczamy wedle wzoru:

$$p_i=1-\frac{1}{m_i+\nu_i}=\frac{m_i+\nu_i-1}{m_i+\nu_i}\text{ [1]}. \qquad (7)$$

Jeśli zatem na stanowisku I nawiązaliśmy się do $m_i=4$ kierunków stałych, a prócz tego spostrzegliśmy dwa kierunki zewnętrzne do punktów wyznaczanych, będzie waga owych kierunków:

$$p_i=1-\tfrac{1}{6}=\tfrac{5}{6}.$$

(O ile zamiast δ'' użyjemy δ, określonych wzorem (4) § 6-go, odpada wyraz $\left[\frac{\Delta''^2}{n_w}\right]$ we wzorze (6)).

---

[1]) Waga p_i wynika z dodania do równań (3) równania $\Delta'=\ldots$ z wagą $-\frac{1}{m_i+\nu_i}$, przyczem ν_i opatrzyliśmy wskaźnikiem i ze względu, że ze stanowiska I niezawsze można spostrzegać kierunki do wszystkich ν punktów wyznaczanych.

Powyższy wzór na μ bywa zazwyczaj stosowany w praktyce, choć wzór *ścisły* musi uwzględniać także błędy, popełnione przy spostrzeganiu kierunków *stałych*.

Jeśli ilość wszystkich spostrzeżeń jest $N=[m]+n=[m]+n_z+n_w$, punktów stałych czyli stanowisk zewn. S, *wzór ścisły* na jednostkowy błąd średni przedstawia się:

$$\mu'=\sqrt{\frac{[\vartheta\vartheta]+[\delta''\delta'']-\left[\frac{\Delta''^2}{n_w}\right]}{N-3\nu-S}}. \tag{8}$$

(Na ilość niewiadomych składają się po 3 niewiadome dla p. wyznaczanych, oraz S niewiadomych orj. na stanowiskach zewnętrznych).

Wyrażenie $[p\delta'\delta']+[\delta''\delta'']-\left[\frac{\Delta''^2}{n_w}\right]$, znajdujące się we wzorze (6) można obliczyć także z *redukcji* $[LL]$, utworzonej dla ostatecznego kształtu równań normalnych.

Ponieważ ilość niewiadomych tych równań wynosi (po poprzednim wyrugowaniu wszystkich niewiadomych orjentacyjnych) 2ν, przeto tyle razy należy przeprowadzić redukcję wyrazu $[LL]$.

Ostatecznie będzie zatem

$$[p\delta'\delta']+[\delta''\delta'']-\left[\frac{\Delta''^2}{n_w}\right]=[LL.(2\nu)]. \tag{9}$$

Sumy, potrzebne dla obliczenia błędu μ', wyznaczymy w sposób podany w § 6-tym *b)*.

Po znalezieniu wartości poszczególnych δx_p, δy_p, δx_r, δy_r, δx_s, δy_s, obliczamy niewiadome orjentacyjne każdego stanowiska zewnętrznego.

Na stanowisku I otrzymamy zatem dla wyznaczenia niewiadomej δz_i równanie następujące (por. równ. (1)):

$$\frac{[\vartheta]_{i.1}^{i.m}+\vartheta_{i.p}+\vartheta_{i.r}+\vartheta_{i.s}+\ldots}{m_i+\nu_i}=0=-\delta z_i+\frac{a_{i.p}}{m_i+\nu_i}\delta x_p+\frac{b_{i.p}}{m_i+\nu_i}\delta y_p+$$
$$+\frac{a_{i.r}}{m_i+\nu_i}\delta x_r+\frac{b_{i.r}}{m_i+\nu_i}\delta y_r+\frac{a_{i.s}}{m_i+\nu_i}\delta x_s+\frac{b_{i.s}}{m_i+\nu_i}\delta y_s+\frac{[l']}{m_i+\nu_i}. \tag{10}$$

Suma $[l]=0$ ze względu na przeprowadzoną poprzednio orjentację przybliżoną. [Por. (12) i (13) § 6 *b)*].

Po znalezieniu wartości niewiadomej δz_i, wyznaczamy z równań (1) poszczególne ϑ na stanowisku I.

W analogiczny sposób uzyskujemy poszczególne ϑ dla wszystkich stacyj zewnętrznych, z których tworzymy sumę $[\vartheta\vartheta]$.

$[\delta''\delta'']-\frac{\Delta''^2}{n_w}$ wyznaczamy z równań (2).

Wzory wyprowadzone powyżej odnoszą się do przypadku, gdy wagi wszystkich kierunków przyjęto na wstępie równe jedności.

O ile spostrzegano kierunki serjami pełnemi, lub gdy zamiast kierunków wykonano pomiary kątowe we wszystkich kombinacjach (wedle metody Schreibera), przyjmujemy przy przeprowadzaniu wyrównania wagi równe jedności, natomiast jeśli jedn. błąd średni ma się odnosić do jednego pomiaru kierunku, należy błąd μ_0, uzyskany rachunkiem, pomnożyć przez pierwiastek właściwej wagi. N. p. przy pomiarach w s serjach pełnych przez $\sqrt{s}$.

Jeżeli z jakichkolwiek słusznych powodów musiano przyjąć dla poszczególnych kierunków wagi *różne* (n. p. z powodu spostrzegania kierunków serjami częściowemi), — należy wedle uwag § 3-go rozdz. VII-go przyjąć $\frac{1}{[p'']}$ jako wagę Δ'' ostatniego równania błędów (2), zaś $\frac{1}{[p']}$ jako wagę Δ' ostatniego równania błędów (3), o ile wagi kierunków wewnętrznych były p_1'', p_2''...., zaś zewnętrznych p_1', p_2'....

W przypadku pomiarów *kątowych w różnych kombinacjach* lepiej *nie stosować* powyżej opisanej metody wyrównania spółrzędnych, lecz albo postąpić wedle wskazówek § 3-go rozdz. VI-go, t. j. ustawić dla każdego stanowiska system *równoważny spostrzeżeń* i spostrzeżenia te, jako *niezależne* wprowadzić do dalszego wyrównania sieci tryangulacyjnej, opisanego w rozdziale następnym, albo po ułożeniu warunków sieci wraz z warunkami stacyjnemi, *przejść na wyrównanie spostrzeżeń pośrednich* sposobem, opisanym w § 2-gim rozdz. V-go.

Wybór metody zależy od tego, która z nich wymaga *mniej* pracy rachunkowej.

Chcąc wyznaczyć błędy średnie niewiadomych, należy utworzyć (z ostatecznych równań normalnych) równania wag, które dostarczą nam wartości spółczynników: $Q_{1.1}$, $Q_{1.2}$, $Q_{1.3}$,.... $Q_{2.2}$, $Q_{2.3}$.... i t. d.

Błędy śr. spółrzędnych punktów $P, R, S,$... będą wówczas określone wzorami:

$$(\mu_x)_p^2=\mu_0^2\,Q_{1.1},\ (\mu_y)_p^2=\mu_0^2\,Q_{2.2};\ (\mu_x)_r^2=\mu_0^2\,Q_{3.3},\ (\mu_y)_r^2=\mu_0^2\,Q_{4.4},\ (\mu_x)_s^2=\mu_0^2\,Q_{5.5},\ (\mu_y)_s^2=\mu_0^2\,Q_{6.6},\ldots; \tag{11}$$

zaś dla obliczenia błędów śr. wyznaczenia poszczególnych punktów, użyjemy wzorów:

$$\mu_p^2=(\mu_x)_p^2+(\mu_y)_p^2,\ \mu_r^2=(\mu_x)_r^2+(\mu_y)_r^2,\ \mu_s^2=(\mu_x)_s^2+(\mu_y)_s^2. \tag{12}$$

Błędy śr. odległości punktów obliczamy jako błędy funkcji niewiadomych wedle wzorów (16) lub (25) § 8-go rozdz. IV-go.

Jako wzór *przybliżony*, wystarczający zazwyczaj dla praktyki, podaję:

$$\mu_{p.r}^2=\frac{\mu_p^2+\mu_r^2}{2},\ \mu_{p.s}^2=\frac{\mu_p^2+\mu_s^2}{2},\ \mu_{r.s}^2=\frac{\mu_r^2+\mu_s^2}{2},\ \text{i t. d.} \tag{13}$$

Ze względu na oszczędność miejsca nie podajemy przykładu liczbowego, odsyłając czytelników do dzieł, podających je w formie przystępnej [1]) i ustępu ostatniego § 9-go.

§ 9. Zredukowane równania błędów w zastosowaniu do metody wyrównania spółrzędnych. (Zred. równ. Schreibera).

Metoda wyrównania spółrzędnych ma bardzo wielkie zastosowanie przy tryangulacji państwowej.

Jak już wspomnieliśmy poprzednio, używamy jej prawie wyłącznie przy wyznaczaniu punktów rzędu III-go i IV-go, bardzo często przy wyrównywaniu spółrzędnych punktów rzędu II-go, a także niekiedy, gdy wyrównanie dotyczy punktów rzędu I-go.

Aby zmniejszyć nakład pracy, spowodowanej wielką ilością równań błędów, ustawił Schreiber *6 twierdzeń*, dla układania zredukowanych równań błędów, których treść da się także ująć w *3 względnie 5-ciu regułach*, podających wskazówki dla niejako *mechanicznego* tworzenia równań błędów.

Twierdzenie I.

Jeżeli niewiadoma δz znajduje się we *wszystkich n* równaniach bł. kształtu:

$$\delta_1 = -\delta z + a_1\delta x + b_1\delta y + \ldots \text{ z wagą} = 1$$

. . . .

$$\delta_n = -\delta z + a_n\delta x + b_n\delta y + \ldots \quad \text{,,} \quad = 1,$$

można je zastąpić *(n+1) równaniami bł., wolnemi od niewiadomej* δz, kształtu:

$$\delta_1' = a_1\delta x + b_1\delta y + \ldots + l_1 \text{ z wagą} = 1$$

. . . .

$$\delta_n' = a_n\delta x + b_n\delta y + \ldots + l_n \quad \text{,,} \quad = 1$$

$$\Delta = [a]\delta x + [b]\delta y + \ldots + [l]_n \quad \text{,,} \quad -\frac{1}{n}.$$

Równanie normalne dla późniejszego (t. j., gdy się zna δx i δy) wyznaczenia δz, opiewa:

$$0 = -n\delta z + [a]\delta x + [b]\delta y + \ldots + [l].$$

Twierdzenie II.

Równania błędów, różniące się ze sobą tylko wyrazami *wolnemi* i *wagami*, kształtu:

$$\delta_1 = a\delta x + b\delta y + \ldots + l_1 \text{ z wagą } p_1$$

. . . .

$$\delta_n = a\delta x + b\delta y + \ldots + l_n \quad \text{,,} \quad p_n,$$

można zastąpić przez *jedno* o wyglądzie:

$$\Delta = a\delta x + b\delta y + \ldots + \frac{[pl]}{[p]} \text{ z wagą} = [p].$$

[1]) *Jordan.* Handb. d. Verm. tom I 1920 *a)* sposób mniej ścisły (używany często w praktyce) str. 432—441, *b)* sposób ścisły str. 445—448; dla punktów IV-rzędnych: *Wellisch.* Th. u. Prax. d. Ausgl. t. II 1910 str. 120—130 (wedle instr. pomiar. austr.).

Twierdzenie III.

Równanie błędów:

$\delta_1 = a\,\delta x + b\,\delta y + \ldots + l_1$ z wagą $= p$,

można zastąpić równaniem:

$\Delta = ra\,\delta x + rb\,\delta y + \ldots + rl$ z wagą $= \frac{p}{r^2}$.

Twierdzenie IV.

O ile niewiadoma δz znajduje się tylko w *dwu* równ. kształtu:

$\delta_1 = -\delta z$ z wagą $= 1$

$\delta_2 = -\delta z + a\,\delta x + b\,\delta y + \ldots + l$ „ $= 1$,

można oba te równania zastąpić *jednem*, uwolnieniem od niewiad. δz:

$\Delta = a\,\delta x + b\,\delta y + \ldots + l$ z wagą $= \frac{1}{2}$.

Twierdzenie V.

Dwa równania bł., różniące się między sobą tylko wyrazami *wolnemi*, kształtu:

$\delta_1 = a\,\delta x + b\,\delta y + \ldots + l_1$ z wagą $= 1$

$\delta_2 = a\,\delta x + b\,\delta y + \ldots + l_2$ „ $= 1$,

równoważy równanie zastępcze:

$\Delta = 2a\delta x + 2b\,\delta y + \ldots + l_1 + l_2$ z w. $= \frac{1}{2}$.

Twierdzenie VI.

Jeśli w *szeregu* równań błędów znajdują się *dwa*, z których jedno różni się tem od drugiego, że prócz innego wyrazu *wolnego* odpowiada mu *waga* $= 1/2$ (przyczem reszta wag $= 1$):

$\delta_1 = a\,\delta x + b\,\delta y + \ldots + l_1$ z wagą $= 1$

$\delta_2 = a\,\delta x + b\,\delta y + \ldots + l_2$ „ $= 1/2$,

zastępujemy owe dwa równania błędów *jednem:*

$\Delta = 3\,a\,\delta x + 3\,b\,\delta y + \ldots + 2\,l_1 + l_2$ z wagą $= \frac{1}{6}$.

(Twierdzenie to wynika z twierdz. II-go i III-go; wedle II-go: jest $\Delta' = a\,\delta x + b\,\delta y + \ldots \frac{l_1 + \frac{1}{2}\,l_2}{1{\cdot}5}$ z wagą $= 1{\cdot}5$, a mnożąc je przez 3, otrzymamy wedle III-go: $\Delta = 3\,a\,\delta x + 3\,b\,\delta y + \ldots + 2\,l_1 + l_2$ z wagą $= \frac{1{\cdot}5}{9} = \frac{1}{6}$).

Wszystkie tu przytoczone twierdzenia opierają się na rozumowaniu, przeprowadzonem w § 3-cim rozdz. VII-go, względnie można je wyprowadzić, stosując zasady równoważnych systemów równań błędów.

Aby ułatwić ustawianie równań błędów, podał Schreiber 3, względnie 5 reguł, które są właściwie tylko *ścisłemi*, o ile na stanowiskach stałych nawiązano się wyłącznie do *jednego* kierunku stałego.

Łatwo jednak można wykazać, że reguły te są, biorąc rzecz praktycznie, do użycia i w przypadkach nawiązania się do kilku kierunków stałych.

Wzory ścisłe, których należałoby właściwie użyć dla określenia wag kierunków zewnętrznych przy nawiązaniu się do m kierunków stałych, są:

$$p=\frac{m}{m+1},\ \{(9^*)\ \S\ 2\text{-go } a)\}\ \text{i}\ p+\frac{m+\nu-1}{m+\nu},\ \{(7)\ \S\ 8\text{-go}\}.$$

Wzór *pierwszy* ma zastosowanie, gdy na stanowisku stałem zmierzono prócz m kierunków stałych tylko *jeden* kierunek wcinający (t. zn. do punktu wyznaczanego), *drugi,* gdy pomierzono ν *kierunków wcinających;* wzór pierwszy jest zatem zawarty w ogólniejszym wzorze drugim, o ile $\nu=1$.

Przyjmując, że w praktyce nawiązujemy się przeciętnie do *dwu* kierunków stałych, otrzymamy następujące wagi dla kierunków zewnętrznych (dla $m=1$, $=2$, i $=3$, oraz $\nu=1$, $=2$, $=3$):

	$m=1$	$m=2$	$m=3$
$\nu=1$,	$p=\frac{1}{2}=0{\cdot}50$,	$p=\frac{2}{3}=0{\cdot}67$,	$p=\frac{3}{4}=0{\cdot}75$
$\nu=2$,	$p=\frac{2}{3}=0{\cdot}67$,	$p=\frac{3}{4}=0{\cdot}75$,	$p=\frac{4}{5}=0{\cdot}80$
$\nu=3$,	$p=\frac{3}{4}=0{\cdot}75$,	$p=\frac{4}{5}=0{\cdot}80$,	$p=\frac{5}{6}=0{\cdot}83$.

Dla uproszczenia przyjmuje Schreiber, zastosowując poprzednio podane twierdzenia równań błędów, wagę kierunku zewnętrznego $=\frac{1}{2}$, o ile $\nu=1$, zaś wagi kierunków zewnętrznych $=1$, o ile $\nu>1$, co odpowiada w przybliżeniu powyższemu zestawieniu.

Reguły Schreiberowskie, oparte na tem założeniu, są następujące:

Reguła I.

Równania błędów δ_1 i δ_2, odpowiadające *kierunkom przeciwnym,* dostarczają jednego równania bł.:

$$\Delta=\delta_1+\delta_2 \text{ z wagą } =\tfrac{1}{2}, \text{ (porówn. twierdz. V-te)}$$

z wyjątkiem, gdy δ_1 lub δ_2 odpowiadają *jedynemu* kierunkowi wcinającemu stanowiska *stałego;* jeżeli n. p. δ_2 odpowiada jedynemu kierunkowi wcinającemu, zamienia się reguła I na:

Regułę I *a).*

$$\Delta=2\delta_1+\delta_2 \text{ z wagą } =\tfrac{1}{6} \text{ (porówn. twierdz. VI-te).}$$

Reguła II.

Każdemu kierunkowi *jednostronnemu* (wzdłuż którego celowano tylko w jednym kier.) odpowiada, o ile $\nu>1$, równanie:

$$\delta_1=\ldots\ldots \text{ z wagą 1 (porówn. poprzednie uwagi).}$$

Reguła II *a).*

O ile natomiast $\nu=1$, t. j. kierunek ów jest *jedynym* kierunkiem wcinającym, zmienia się wzór poprzedni na:

$$\delta_1=\ldots\ldots \text{ z wagą } \tfrac{1}{2} \text{ (porówn. poprzednie uwagi).}$$

Reguła III.

Prócz tego należy dołączyć na każdej stacji o *v kierunkach wcinających* równanie (wynik. z twierdz. I-go):

$$\Delta=\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots .\quad a)\ \text{z wagą} = -\frac{1}{v},\quad b)\ \text{z wagą} = -\frac{1}{v+1};$$

waga $-\frac{1}{v}$ odnosi się do przypadku, gdy stanowisko stanowi *jeden z punktów wyznaczanych,* zatem gdy kierunki wcinające są *wewnętrznemi;* waga $-\frac{1}{v+1}$, gdy stanowiskiem jest punkt *stały,* t. j., gdy kierunkami wcinającemi są kierunki *zewnętrzne* (w liczbie v).

Równanie dodatkowe (reg. III) *odpada* w tym drugim przypadku, *gdy $v=1$,* gdyż jest wówczas *zawarte* całkowicie w regule II *a).*

Dla lepszej orjentacji podajemy następujący przykład, odpowiadający przykładowi liczbowemu, przytoczonemu w I-szym tomie Handb. f. Vermessungskunde Jordana 1920. § 109 str. 435 (kier. wewnętrzne) oraz § 111 str. 445 (kier. zewnętrzne).

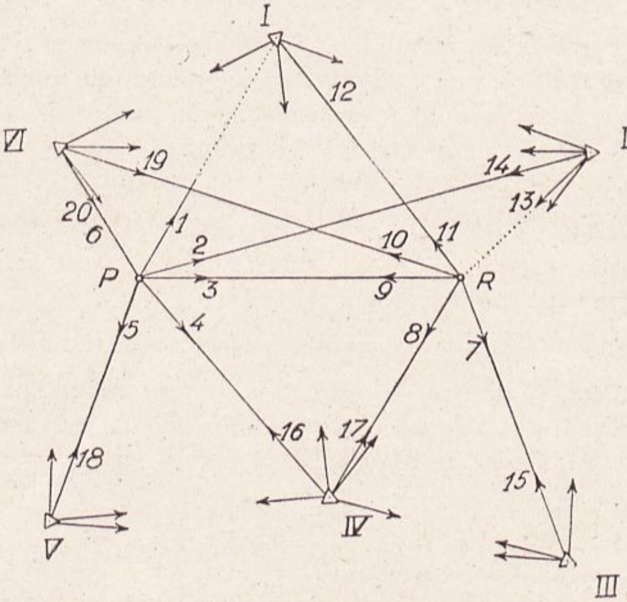

Fig. 20.

Ogólna ilość spostrzeżeń wynosi 42, z tego przypada na stanowisko

P	 6	kier.	wewnetrzn.
R	 5	„	„
I	 1	„	zewnętrzny i 3 kier. stałe
II	 2	„	zewnętrzn. i 4 „ „
III	 1	„	zewnętrzny i 3 „ „

IV .....2 kier. zewnętrzne i 5 kier. stałych
V .....1 „ zewnętrzny i 3 „ stałe
VI .....2 „ zewnętrzne i 4 „ „ .

(Porównaj fig. 20; kierunki do punktów stałych oznaczono dla przejrzystości rysunku krótkiemi strzałkami).

Ze względu na *opuszczenie równań błędów, odnoszących się do kierunków stałych, oraz wyrugowanie wszystkich niewiadomych orjentacyjnych* δz, należy wedle metody *ścisłej*, podanej w § 8-mym, ustawić pozostałe równania błędów, odnoszące się do kierunków wcinających, w sposób następujący:

stanowisko P.

$\delta_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; p = 1,$
$\delta_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; p = 1,$
$\delta_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; p = 1,$
$\delta_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; p = 1,$
$\delta_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; p = 1,$
$\delta_6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; p = 1,$
$\Delta p = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6, \; p = -\frac{1}{6},$

stanowisko R.

$\delta_7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; p = 1$
$\delta_8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; p = 1$
$\delta_9 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; p = 1$
$\delta_{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; p = 1$
$\delta_{11} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; p = 1$
$\Delta_r = \delta_7 + \delta_8 + \delta_9 + \delta_{10} + \delta_{11}, \; p = -\frac{1}{5},$

stanowisko I.

$\delta_{12} = \ldots\ldots p = 1$
$\Delta_{\mathrm{I}} = \delta_{12} \quad p = -\frac{1}{4}$
(lub tylko: $\delta_{12} = \ldots\ldots p = \frac{3}{4}$),

stanowisko II.

$\delta_{13} = \ldots\ldots\ldots p = 1$
$\delta_{14} = \ldots\ldots\ldots p = 1$
$\Delta_{\mathrm{II}} = \delta_{13} + \delta_{14}, \; p = -\frac{1}{6}$
$\left(\text{lub tylko: } \begin{cases} \delta_{13} = \ldots\ldots\ldots p = \frac{5}{6} \\ \delta_{14} = \ldots\ldots\ldots p = \frac{5}{6} \end{cases}\right),$

stanowisko III.

$\delta_{15} = \ldots\ldots p = 1$
$\Delta_{\mathrm{III}} = \delta_{15} \quad p = -\frac{1}{4}$
(lub tylko: $\delta_{15} = \ldots\ldots, \; p = \frac{3}{4}$),

stanowisko IV.

$\delta_{16} = \ldots\ldots\ldots p = 1$
$\delta_{17} = \ldots\ldots\ldots p = 1$
$\Delta_{\mathrm{IV}} = \delta_{16} + \delta_{17}, \; p = -\frac{1}{7}$
$\left(\text{lub tylko: } \begin{cases} \delta_{16} = \ldots\ldots\ldots p = \frac{6}{7} \\ \delta_{17} = \ldots\ldots\ldots p = \frac{6}{7} \end{cases}\right),$

stanowisko V.

$\delta_{18} = \ldots\ldots p = 1$
$\Delta_{\mathrm{V}} = \delta_{18} \quad p = -\frac{1}{4}$
(lub tylko: $\delta_{18} = \ldots\ldots, \; p = \frac{3}{4}$),

stanowisko VI.

$\delta_{19} = \ldots\ldots\ldots p = 1$
$\delta_{20} = \ldots\ldots\ldots p = 1$
$\Delta_{\mathrm{VI}} = \delta_{19} + \delta_{20}, \; p = -\frac{1}{6}$
$\left(\text{lub tylko: } \begin{cases} \delta_{19} = \ldots\ldots\ldots p = \frac{5}{6} \\ \delta_{20} = \ldots\ldots\ldots p = \frac{5}{6}. \end{cases}\right).$

Natomiast stosując *reguły Schreiberowskie,* należy ustawić następujących 16 równań błędów (wolnych również, jak i poprzednie od niewiadomych orjentacyjnych):

a) równ. bł. kierunków spostrzeganych obustronnie jako: kierunki tylko wewnętrzne, lub wewnętrzne i zewnętrzne lecz nie jedyne,

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta_8 + \delta_{17} & p = \frac{1}{2} \\ \delta_9 + \delta_3 & p = \frac{1}{2} \\ \delta_{10} + \delta_{19} & p = \frac{1}{2} \\ \delta_2 + \delta_{14} & p = \frac{1}{2} \\ \delta_4 + \delta_{16} & p = \frac{1}{2} \\ \delta_6 + \delta_{20} & p = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \qquad \text{(reguła I)}$$

b) równ. bł. kierunków spostrzeganych obustronnie jako: kier. wewn. i jedyne kierunki zewnętrzne,
$$\left.\begin{array}{ll} 2\delta_7+\delta_{15} & p=\frac{1}{6} \\ 2\delta_{11}+\delta_{12} & p=\frac{1}{6} \\ 2\delta_5+\delta_{18} & p=\frac{1}{6}, \end{array}\right. \quad \text{(reguła I}\,a)$$

c) równ. bł. kierunków spostrzeganych jednostronnie,
$$\left\{\begin{array}{ll} \delta_1=\ldots\ldots, & p=1 \\ \delta_{13}=\ldots\ldots, & p=1, \end{array}\right. \quad \text{(reguła II)}$$

d) równania dodatkowe dla kierunków wewnętrznych,
$$\left\{\begin{array}{ll} \delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4+\delta_5+\delta_6, & p=-\frac{1}{6}, \\ \delta_7+\delta_8+\delta_9+\delta_{10}+\delta_{11}, & p=-\frac{1}{5}, \end{array}\right. \quad \text{(reguła III}\,a)$$

e) równania dodatkowe dla kierunków zewnętrznych.
$$\left.\begin{array}{ll} \delta_{13}+\delta_{14} & p=-\frac{1}{3} \\ \delta_{19}+\delta_{20} & p=-\frac{1}{3} \\ \delta_{16}+\delta_{17} & p=-\frac{1}{3} \end{array}\right. \quad \text{(reguła III}\,b).$$

§ 10. Dokładność wyznaczenia punktu. Elipsa błędu średniego.

Przy wszystkich wyrównaniach, omawianych w niniejszym rozdziale, określa nam dokładność wyznaczenia punktu P wzór (21) § 2-go *b*):

$$\mu_p^2=\mu_x^2+\mu_y^2$$

(przyczem μ_x i μ_y oznaczają błędy śr. spółrzędnych punktu P).

Taksamo mają znaczenie ogólne wzory (11) § 8-go:

$$\mu_x^2=Q_{1.1}\,\mu_0^2,\quad \mu_y^2=Q_{2.2}\,\mu_0^2.$$

O ile wyrównanie dotyczy tylko jednego punktu (wyrównywanego pojedynczo), a równania normalne mają kształt:

$$[paa]\,\delta x+[pab]\,\delta y+[pal]=0$$
$$[pab]\,\delta x+[pbb]\,\delta y+[pbl]=0,$$

można przedstawić $Q_{1.1}$ i $Q_{2.2}$ we formie następującej (por. (20) § 2-go *b*)):

$$Q_{1.1}=\frac{[pbb]}{[paa]\,[pbb.1]}=\frac{[pbb]}{\sigma}$$
$$Q_{2.2}=\frac{[paa]}{[paa]\,[pbb.1]}=\frac{[paa]}{\sigma},$$

$$\text{przyczem } \sigma=[paa][pbb.1]=[paa][pbb]-[pab]^2. \tag{1}$$

Przechodząc do błędów średnich spółrzędnych, otrzymamy w tym przypadku

$$\mu_x^2=\mu_0^2\frac{[pbb]}{\sigma},\quad \mu_y^2=\mu_0^2\frac{[paa]}{\sigma}, \tag{2}$$

a błąd średni wyznaczenia punktu P będzie określony wzorem:

$$\mu_p^2=\frac{[paa]+[pbb]}{\sigma}\mu_0^2. \tag{3}$$

Chcąc omówić wyczerpująco sprawę dokładności wyznaczenia punktów, należałoby, idąc za wzorem Helmerta[1]), rozpatrywać ją ze stano-

[1]) *Helmert.* Ausgleichungsrechn. n. d. M. d. kl. Qu. 1907 (wyd. 2-gie) str. 293—327, § 6. Partiell äquivalente Beobachtungsreihen. § 7. Fehlerelipsen.

wiska znacznie ogólniejszego, uwzględniając nietylko *dowolną ilość niewiadomych,* ale także *dowolny sposób wyrównania* (zgodny z zasadą teorji najmniejszych kwadratów), co jednak wymagałoby wprowadzenia nowych pojęć pomocniczych, jak również i dość wiele miejsca, które ze względu na ograniczone rozmiary całości, musi być zarezerwowane na inne partje, o większem znaczeniu praktycznem.

Z tych powodów *ograniczymy* dalsze wywody do przypadku wyrównania spółrzędnych punktu *pojedynczego,* jednym ze sposobów, podanych w §§: 2-gim, 4-tym lub 6-tym.

Nasamprzód zastanówmy się nad wpływem zmiany układu spółrz. na błędy μ_p, μ_x i μ_y.

O ile jest zupełnie jasnem, że przez *równoległe* przesunięcie osi układu *nie nastąpi* zmiana żadnego z błędów μ_p, μ_x i μ_y, należy zbadać, czy sprawa ma się tak samo przy *skręceniu* układu spółrzędnych.

Weźmy na uwagę $\mu_p{}^2 = \frac{[paa]+[pbb]}{\sigma}\mu_0{}^2$.

Licznik $[paa]+[pbb]$ możemy ze względu na

$$a_i = -\varrho\frac{\sin(\alpha)_i}{s_i},\quad b_i = \varrho\frac{\cos(\alpha)_i}{s_i}\ \text{zastąpić}$$

$$\text{przez } \varrho^2\left[\frac{p\sin^2(\alpha)}{s^2}\right]+\varrho^2\left[\frac{p\cos^2(\alpha)}{s^2}\right]=\varrho^2\left[\frac{p}{s^2}\right];\ \text{zatem} \tag{4}$$

$$[paa]+[pbb]=\varrho^2\left[\frac{p}{s^2}\right]. \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}\text{Mianownik}\quad &\sigma=[paa][pbb.1]=[paa][pbb]-[pab]^2=\\ =&(p_1a_1{}^2+p_2a_2{}^2+\ldots+p_n a_n{}^2)(p_1b_1{}^2+p_2b_2{}^2+\ldots+p_nb_n{}^2)-\\ &-(p_1a_1b_1+p_2a_2b_2+\ldots+p_na_nb_n)^2;\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

po wykonaniu zaznaczonych działań otrzymamy zatem:

$$\left.\begin{aligned}
&p_1a_1{}^2p_1b_1{}^2+p_1a_1{}^2p_2b_2{}^2+\ldots\ldots\ldots+p_1a_1{}^2p_nb_n{}^2\\
&p_2a_2{}^2p_1b_1{}^2+p_2a_2{}^2p_2b_2{}^2+\ldots\ \ldots\ldots+p_2a_2{}^2p_nb_n{}^2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_na_n{}^2p_1b_1{}^2+p_na_n{}^2p_2b_2{}^2+\ldots\ldots\ldots+p_na_n{}^2p_nb_n{}^2\\
&-p_1a_1{}^2p_1b_1{}^2-p_2a_2{}^2p_2b_2{}^2+\ldots\ldots\ldots-p_na_n{}^2p_nb_n{}^2\\
&-2p_1a_1b_1p_2a_2b_2-2p_2a_2b_2p_3a_3b_3+\ldots\ldots\\
&-2p_1a_1b_1p_3a_3b_3-2p_2a_2b_2p_4a_4b_4+\ldots\\
&-2p_1a_1b_1p_4a_4b_4\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

a następnie, łącząc ze sobą odpowiednie wyrazy:

$$\left.\begin{array}{r}
p_1 a_1^2 p_2 b_2^2 - 2 p_1 a_1 b_1 p_2 a_2 b_2 + p_2 a_2^2 p_1 b_1^2 = p_1 p_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\
p_1 a_1^2 p_3 b_3^2 - 2 p_1 a_1 b_1 p_3 a_3 b_3 + p_3 a_3^2 p_1 b_1^2 = p_1 p_3 (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
p_1 a_1^2 p_n b_n^2 - 2 p_1 a_1 b_1 p_n a_n b_n + p_n a_n^2 p_1 b_1^2 = p_1 p_n (a_1 b_n - a_n b_1)^2, \\
\text{a w sposób analogiczny):} \qquad p_2 p_3 (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 \\
p_2 p_4 (a_2 b_4 - a_4 b_2)^2 \\
\dots\dots\dots \\
p_2 p_n (a_2 b_n - a_n b_2)^2, \\
\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots \\
p_{n-1} p_n (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1})^2.
\end{array}\right\} \quad (8)$$

Biorąc na uwagę dowolny człon, n. p. o wskaźnikach $i.k$, przekształcimy go analogicznie jak poprzednio licznik wzoru (3):

$$\left.\begin{array}{l}
p_i p_k (a_i b_k - a_k b_i) = p_i p_k \varrho^2 \left(\dfrac{-\sin(a)_i \cos(a)_k + \sin(a)_k \cos(a)_i}{s_i . s_k} \right)^2 = \\
\qquad = \dfrac{p_i p_k}{s_i^2 s_k^2} \varrho^2 \sin^2 \{(a)_k - (a)_i\}.
\end{array}\right\} \quad (9)$$

Poszczególne człony wzoru (8) są zatem zależne tylko od kątów, zawartych między poszczególnemi kierunkami, zaś *niezależne* od wielkości azymutów pozornych, t. j. *od skręcenia układu* spółrzędnych.

Na błąd średni wyznaczenia punktu

$$\mu_p = \mu_0 \sqrt{\frac{[paa] + [pbb]}{\sigma}}$$

nie wpływa przeto zupełnie skręt układu spółrzędnych, t. zn., że μ_p, obliczony przy dowolnie przyjętym układzie osi spółrzędnych, pozostaje bez zmiany.

Natomiast ze względu na związki:

$$\left.\begin{array}{l}
\mu_x^2 = \mu_0^2 \dfrac{[pbb]}{\sigma} = \mu_0^2 \dfrac{\varrho^2}{\sigma} \left[p \dfrac{\cos^2(a)}{s^2} \right], \\
\mu_y^2 = \mu_0^2 \dfrac{[paa]}{\sigma} = \mu_0^2 \dfrac{\varrho^2}{\sigma} \left[p \dfrac{\sin^2(a)}{s^2} \right],
\end{array}\right\} \quad (10)$$

wykazujące zależność μ_x i μ_y od sum $\left[p \dfrac{\cos^2(a)}{s^2}\right]$ i $\left[p \dfrac{\sin^2(a)}{s^2}\right]$, *błędy spółrzędnych* μ_x i μ_y są *zależne od przyjęcia kierunków osi spółrzędnych,* a temsamem mogą być i z reguły są w każdym kierunku inne, mimo że *suma kwadratów błędów śr. dwu kierunków prostopadłych jest zawsze równa kwadratowi błędu średniego* μ_p^2.

Aby znaleść kierunki, w których błędy średnie osiągają swą *największą* i *najmniejszą* wartość, postąpimy w sposób następujący.

Przypuśćmy, że dla uzyskania pary błędów średnich spółrzędnych, składającej się z błędów najmniejszego i największego, trzeba obrać układ spółrzędnych, skręcony od poprzednio obranego o kąt φ.

Przez skręcenie układu spółrzędnych o kąt φ zmienimy poszczególne (a) na $(a)+\varphi$, zatem spółczynniki równań błędów przejdą na:

$$a'=-\varrho\frac{\sin\{(a)+\varphi\}}{s},\quad b'=+\varrho\frac{\cos\{(a)+\varphi\}}{s},$$

a w następstwie zmienią się także i odpowiedne spółczynniki równań normalnych

$$[pa'a']=\varrho^2\left(\frac{p_1}{s_1{}^2}\sin^2\{(a)_1+\varphi\}+\frac{p_2}{s_2{}^2}\sin^2\{(a)_2+\varphi\}+\ldots\ldots\right)=$$

$$=\varrho^2\left\{\left[\frac{p}{s^2}\sin^2(a)\right]\cos^2\varphi+\left[\frac{p}{s^2}\cos^2(a)\right]\sin^2\varphi+\left[\frac{p}{s^2}\sin(a)\cos(a)\right]\sin 2\varphi\right\}=$$

$$[pa'a']=[paa]\cos^2\varphi+[pbb]\sin^2\varphi+[pab]\sin 2\varphi;\qquad(11)$$

$$[pb'b']=\varrho^2\left(\frac{p_1}{s_1{}^2}\cos^2\{(a)_1+\varphi\}+\frac{p_2}{s_2{}^2}\cos^2\{(a_2+\varphi\}+\ldots\ldots\right)=$$

$$=\varrho^2\left\{\left[\frac{p}{s^2}\cos^2(a)\right]\cos^2\varphi+\left[\frac{p}{s^2}\sin^2(a)\right]\sin^2\varphi-\left[\frac{p}{s^2}\sin(a)\cos(a)\right]\sin 2\varphi\right\}$$

$$[pb'b']=[pbb]\cos^2\varphi+[paa]\sin^2\varphi-[pab]\sin 2\varphi.\qquad(11^*)$$

Natomiast, jak wykazano, jest σ niezależne od skręcenia układu.

Pochodne obu związków (11) względem φ, przyrównane do zera, dostarczają nam równań:

$$\frac{\partial[pa'a']}{\partial\varphi}=-\{[paa]-[pbb]\}\sin 2\varphi+2[pab]\cos 2\varphi=0\qquad(12)$$

$$\frac{\partial[pb'b']}{\partial\varphi}=\{[paa]-[pbb]\}\sin 2\varphi-2[pab]\cos 2\varphi=0,\qquad(12^*)$$

z których obu wynika zgodnie:

$$\operatorname{tang} 2\varphi=\frac{2[pab]}{[paa]-[pbb]}.\qquad(13)$$

Równaniu temu odpowiadają dwie wartości kątów, t, j. φ i $\varphi\pm 90^0$.

Oznaczając błędy średnie spółrzędnych w układzie, skręconym o kąt φ, przez μ_x' i μ_y', otrzymamy ze względu na związki (11):

$$\left.\begin{aligned}\mu_{x'}{}^2&=\mu_0{}^2\frac{[pb'b']}{\sigma}=\frac{\mu_0{}^2}{\sigma}\{[paa]\sin^2\varphi+[pbb]\cos^2\varphi-2[pab]\sin\varphi\cos\varphi\}\\ \mu_{y'}{}^2&=\mu_0{}^2\frac{[pa'a']}{\sigma}=\frac{\mu_0{}^2}{\sigma}\{[paa]\cos^2\varphi+[pbb]\sin^2\varphi-2[pab]\sin\varphi\cos\varphi\}.\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Biorąc na uwagę

$$\sin^2\varphi=\frac{1-\cos 2\varphi}{2},\quad\cos^2\varphi=\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\ \text{ i}\qquad(15)$$

$$\cos 2\varphi=(1+\operatorname{tang}^2 2\varphi)^{-1/2}=\left\{1+\frac{4[pab]^2}{([paa]-[pbb])^2}\right\}^{-1/2}=1:\sqrt{\frac{([paa]-[pbb])^2+4[pab]^2}{([paa]-[pbb])^2}},$$

otrzymamy po podstawieniu

$$\sqrt{([paa]-[pbb])^2+4[pab]^2}=W: \tag{16}$$

$$\cos 2\varphi=\frac{[paa]-[pbb]}{W}, \tag{17}$$

a następnie ze względu na równanie (13):

$$\sin 2\varphi=\frac{2[pab]}{W}. \tag{18}$$

Wstawiając te wartości do związków (15), uzyskamy

$$\sin^2\varphi=\frac{W-[paa]+[pbb]}{2W}, \quad \cos^2\varphi=\frac{W+[paa]-[pbb]}{2W}, \tag{19}$$

a rugując te wartości w równ. (14), po odpowiedniem uporządkowaniu wyrazów, ostatecznie:

$$\mu_{x'}{}^2=\mu_0{}^2\frac{[paa]+[pbb]-W}{2\sigma}, \quad \mu_{y'}{}^2=\mu_0{}^2\frac{[paa]+[pbb]+W}{2\sigma}; \tag{20}$$

przyczem oczywiście $\mu_{x'}{}^2+\mu_{y'}{}^2=\mu_p{}^2$.

Przyjmując wartość W z równania (16) jako *bezwzględną*, otrzymujemy na podstawie równania (13) kąt φ, o który należałoby skręcić obraną oś x-ów, aby po wprowadzeniu jej do położenia x', uzyskać w kierunku tak otrzymanej osi *najmniejszy* błąd śr. $\mu_{x'}$.

W praktyce przyjmujemy zazwyczaj jako oś x-ów kierunek, odpowiadający największemu błędowi średniemu. Aby znaleść kąt $\psi=\varphi\pm 90^0$, jaki ten kierunek zawiera z kierunkiem, przyjętym początkowo jako oś x-ów, należy ze względu, że $2\psi=2\varphi\pm 180^0$, położyć:

$$\operatorname{tang} 2\psi=\frac{-2[pab]}{-\{[paa]-[pbb]\}}, \tag{21}$$

przyczem właściwy kwadrat kąta 2ψ wynika ze znaków licznika i mianownika.

Po obliczeniu W z wzoru (z ewent. kontrolą):

$$W=+\sqrt{\{[paa]-[pbb]\}^2+4[pab]^2}=\frac{-2[pab]}{\sin 2\psi}=\frac{-\{[paa]-[pbb]\}}{\cos 2\psi}, \tag{22}$$

otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} \mu^2_{max}&=\mu_0{}^2\frac{[paa]+[pbb]+W}{2\sigma}, \text{ (w kierunku } \psi)\\ \mu^2_{min}&=\mu_0{}^2\frac{[paa]+[pbb]-W}{2\sigma} \text{ (w kierunku } \psi\pm 90^0). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Znając kąt ψ, μ_{max} i μ_{min}, możemy wyznaczyć błędy średnie w każdym kierunku przy pomocy związków:

$$\left.\begin{aligned} \mu_x{}^2&=\mu^2_{max}\cos^2\alpha+\mu^2_{min}\sin^2\alpha\\ \mu_y{}^2&=\mu^2_{max}\sin^2\alpha+\mu^2_{min}\cos^2\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

przyczem μ_x oznacza błąd śr. w kierunku, zawierającym z kierunkiem μ_{max} kąt α, zaś μ_y kąt $\alpha+90^0$.

Na załączonej figurze przedstawia krzywa kreskowana, odpowiadająca równ. (24) *t. zw. krzywę błędów średnich,* powstałą wskutek naniesienia w każdym kierunku odpowiedniego błędu średniego.

Przyjmując początek układu spółrzędnych w punkcie P, a kierunek osi x-ów zgodny z kierunkiem μ_{max}, określimy *elipsę* o półosiach μ_{max} i μ_{min} i środku spadającym z punktem P równaniem następującem:

$$\frac{x^2}{\mu^2_{max}}+\frac{y^2}{\mu^2_{min}}=1. \quad (25)$$

Elipsa ta może nam również posłużyć *do wyznaczenia błędu średniego w dowolnym* kierunku α (licząc od osi μ_{max}), a to z powodu, że styczna do owej elipsy, poprowadzona pod kierunkiem $90^0+\alpha$, odcina na prostopadłej, przechodzącej przez punkt P, odcinek równy błędowi średniemu w kierunku α.

W myśl tego twierdzenia przedstawia PC błąd średni w kierunku α, zaś PD błąd średni w kier. $90^0+\alpha$. (Patrz fig. 21).

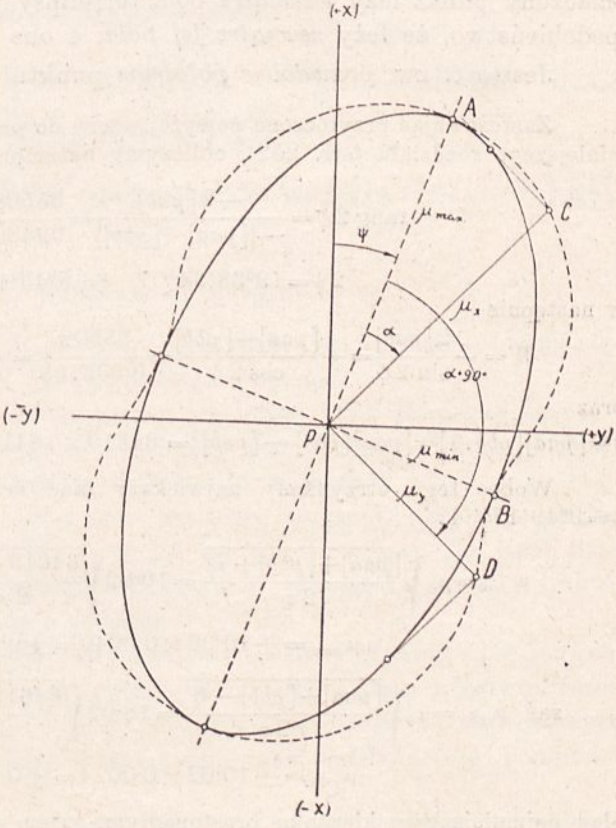

Fig. 21.

Elipsę tę nazywamy przeto elipsą błędu średniego.

Przedstawienie dokładności wyznaczenia punktu przy pomocy elipsy bł. śr. ma tę wyższość nad równaniami (25), że dla narysowania elipsy potrzebną jest nam tylko znajomość kąta ψ, oraz obu półosi μ_{max} i μ_{min}, podczas, gdy krzywą błędów średnich trzeba wyznaczać na podstawie równania (24) punkt za punktem.

W praktyce poprzestajemy zatem tylko na wyznaczeniu (i ewent. narysowaniu w odpowiedniej skali) elipsy błędu średniego.

*

Prócz wymienionej elipsy możemy wyobrazić sobie nieskończoną ilość spółśrodkowych podobnych elips (o środku P) t. zw. elips błędów.

Rachunek prawdopodobieństwa, zastosowany do elips błędów, poucza nas, że każda elipsa błędu jest miejscem geometrycznem *równoprawdopodobnych* położeń wyznaczanego punktu. Powiększając liniowo wymiary poprzednio wyznaczonej elipsy w stosunku 1 : 1·17741, otrzymamy t. zw. *elipsę prawdopodobnego położenia punktu P;* prawdopodobieństwo, że wyznaczony punkt leży *wewnątrz* pola tej elipsy jest *takiesame* jak prawdopodobieństwo, że leży *zewnątrz jej pola,* a oba są równe $^1/_2$.

Jestto t. zw. *prawdobne położenie* punktu P[1]).

Zastosowując przytoczone powyżej wzory do *przykładu*, podanego w § 5-tym niniejszego rozdziału (str. 252), obliczymy nasamprzód

$$\operatorname{tang} 2\psi = \frac{-2[pab]}{-\{[paa]-[pbb]\}} = \frac{35508}{99482} = 0{\cdot}356929$$

$$2\psi = 19^0 38' 34''{\cdot}7, \quad \psi = 9^0 49' 17''{\cdot}4,$$

a następnie

$$W = -\frac{2[pab]}{\sin 2\psi} = -\frac{[paa]-[pbb]}{\cos 2\psi} = \frac{35508}{0{\cdot}336158} = \frac{99482}{0{\cdot}941806} = 105629,$$

oraz

$$\sigma = [paa][pbb.1] = [paa][pbb] - [pab]^2 = 64619 \times 164101 - 17754^2 = 10288838003.$$

Wobec tego otrzymamy największy błąd średni w kierunku o azymucie $\psi = 9^0 49' 17''{\cdot}4$:

$$\mu_{max} = \mu_0 \sqrt{\frac{[paa]+[pbb]+W}{2\sigma}} = 10{\cdot}02 \sqrt{\frac{64619+164101+105629}{2 \times 10288838003}} =$$

$$\mu_{max} = \pm 10{\cdot}02 \times 0{\cdot}0040 = \pm 0{\cdot}040\ m,$$

zaś $$\mu_{min} = \mu_0 \sqrt{\frac{[paa]+[pbb]-W}{2\sigma}} = 10{\cdot}02 \sqrt{\frac{64619+164101-105629}{2 \times 10288838003}} =$$

$$\mu_{min} = \pm 10{\cdot}02 \times 0{\cdot}0024 = \pm 0{\cdot}024\ m$$

błąd najmniejszy w kierunku prostopadłym, zatem o azymucie: $99^0 49' 17''{\cdot}4$.

Wymiary elipsy prawdopodobnego położenia punktu P są:

półoś wielka $= \pm 0{\cdot}047\ m$, półoś mała $+ \pm 0{\cdot}028\ m$.

---

[1]) Literatura, traktująca o elipsach błędów, jest bardzo rozległą. Prócz poprzednio wymienionego miejsca w zacytowanem dziele *Helmerta,* należy tu wyszczególnić: *A. Bravais,* Sur les probabilités des erreurs de situation d'un point, Mém. prés.... à l'Academie d. sc. de l' Inst. de France t. IX.; *Andrae,* Fehlerbest. b. d. Aufl. d. Pothenotschen Aufgabe, Astr. Nachr. tom 47, 1857, Nr. 1117; *Schols,* Théorie des erreurs d. le plan et d. l'espace w rocznikach Szkoły politechn. w Delft, t. II 1886; *Helmert,* Studien ü. rat. Verm. im Gebiete d. h. Geodäsie, Zeitschr. f. Math. u. Physik, 1868. str. 73 i dalsze, i t. d.

ROZDZIAŁ JEDENASTY.

Tryangulacja (Część trzecia). Wyrównanie sieci tryangulacyjnych.

A) O znaczeniu lokalnem, B) obejmujących większe obszary (kraje).

A)

§ 1. Wiadomości wstępne.

Sieci tryangulacyjnych używamy tak przy zagadnieniach, dotyczących dziedziny miernictwa, jak i geodezji wyższej.

W geodezji wyższej posługujemy się niemi przy pomiarze stopni[1]) (południków, wzgl. równoleżników) i przy rozmierzaniu kraju, w miernictwie przy pomiarach miast, wykonywaniu większych zdjęć i t. p. Podczas gdy sieci, zakładane dla celów geodezji wyższej, obejmują często *całe kraje*, lub przynajmniej *znaczne ich połacie*, mieszczą się sieci używane w miernictwie na *niewielkich* obszarach, tak, że mogą być traktowane w praktyce jako *utwory płaskie*.

Mimoto, że zasady ogólne wyrównywania sieci tryang. są w jednym i drugim przypadku tesame, występują przecież w ciągu wyrównywania obu typów sieci różnice, spowodowane wielkością obszaru, kształtem sieci, ewent. uwzględnieniem zakrzywienia ziemi, oraz dokładnością pomiarów i rachunku.

Z powodu tych różnic, okazało się wskazanem, omówić oba rodzaje sieci oddzielnie, rozpoczynając od sieci łatwiejszych do opanowania, t. j. tych, które nazwaliśmy sieciami o znaczeniu lokalnem, lub krótko „*lokalnemi*“, w przeciwieństwie do sieci, obejmujących wielkie obszary, które, jako zakładane dla celów państwowych, możemy nazwać krótko „*państwowemi*“.

Dokładność wyników, osiągniętych w sieciach państwowych jest z reguły o wiele większą od dokładności wyników, otrzymanych przy pomocy sieci lokalnych. W wyjątkowych przypadkach może być jednak odwrotnie; trafia się to w bardzo wielkich miastach o gruntach bardzo

1) Wyrównanie tych sieci, jako zbyt specjalnych, pomijamy.

drogich, jakoteż przy wytyczaniu osi długich tunelów, gdzie pomiary, oparte na sieci tryang. państwowej, okazują się często *za mało* dokładne; natomiast mogą w tych przypadkach sieci lokalne, jako obejmujące stosunkowo niewielki obszar, dostarczyć wyników zadowalających przy zastosowaniu odpowiednich metod pomiarowych.

Pomiary przeprowadzane w sieciach lokalnych są dwojakiego rodzaju: *długościowe* i *kątowe* ewent. *kierunkowe*.

Uniknąć można pomiarów długościowych przez nawiązanie się do dwu punktów sieci państwowej (lub włączenie ich wprost do sieci), przez co uzyskuje się zarazem i *orjentację* całej sieci (na podstawie azymutu kierunku, łączącego dwa punkty).

Jeżeli łączność sieci lokalnej z siecią państwową nie ogranicza się do owych dwu punktów podstawowych, lecz prócz tego nawiązano się do innych kierunków stałych, należy przeprowadzić wyrównanie sieci wedle § 8-go rozdz. X-go (str. 260).

Sieć tak założona jest właściwie siecią *wypełniającą*. Najczęstszym powodem założenia sieci lokalnej jest *brak* odpowiedniej ilości punktów tryangulacyjnych (ewent. brak wszelkiej tryangulacji), lub *niewystarczająca ich dokładność*.

W obu tych przypadkach należy przeprowadzić pomiar przynajmniej *jednej* długości, t. z. *podstawy* (bazy) i to oczywiście z dokładnością odpowiednią dla celu.

(Przy pomiarach dokładnych należy długość podstawy zredukować do poziomu morza, lub innego przyjętego w państwie poziomu odniesienia).

Orjentacja sieci następuje przy pomocy wyznaczenia *azymutu jednego boku sieci* jedną z metod, używanych w geodezji wyższej (najczęściej z korespondujących wysokości słońca) [1]).

Bardzo często nie jest możliwy pomiar żadnego z boków sieci; wówczas należy obrać podstawę poza właściwą siecią i przejść z niej pomiarami kątowemi na jeden z boków sieci.

Sieć, łączącą podstawę z bokiem właściwej sieci, nazywamy *siecią podstawową*, lub także rozwinięciem podstawy.

Odkładając dokładne omówienie sieci podstawowych do drugiej części *B* niniejszego rozdziału, zauważymy tylko, że najkorzystniejszy kształt sieci postawowych jest *rombowy*, względnie *podwójnie rombowy*.

Przy racjonalnem rozwinięciu należy mierzyć poszczególne kąty *odpowiednią ilość razy*, którą można wyznaczyć rachunkowo, co jednak

---

[1]) Przy pomiarach o dokładności odpowiadającej sieciom IV-rzędnym, można użyć sposobu podanego w dziele *F. G. Gauss*, Die trigon. u. polygon. Rechnungen in d. Feldmesskunst 1893. rozdz. IX-ty, str. 613, lub w *„Przepisach obowiąz. przy pomiarach met. tryg. i poligon....“* M. R. P. Warszawa 1920. cz. I str. 35—37 i cz. II str. 160—162.

czynimy tylko przy rozwinięciach podstawy dla sieci państwowych lub sieci o bardzo ważnem znaczeniu. (Porównaj część *B* § 9-ty).

Przy spostrzeganiu kątów sieci lokalnej używamy zazwyczaj metody *kierunkowej*; z powodu stosunkowo krótkich celowych nie zachodzi obawa, aby przy pomiarze serji kierunków niektóre z nich nie mogły być obserwowane, (jak to ma miejsce przy długich celowych); serje będą tu zatem z reguły *pełne*.

W przypadkach wyjątkowych (stanowisko chwiejne) stosujemy metodę pomiarów kątowych, która zajmuje jednak nieco więcej czasu.

Aby uniknąć zawiłych wyrównań stacyjnych, spostrzegamy kierunki w serjach *pełnych*, lub kąty *niezależne* (ewent. wyjątkowo we wszystkich kombinacjach).

Seryj częściowych lub pomiarów kątów w różnych kombinacjach należy, o ile możności, unikać.

(Sprawę tę omówiono krótko w części *B* niniejsz. rozdz.). Jako metodę wyrównawczą będziemy stosowali metodę spostrzeżeń *zawarunkowanych*.

§ 2. Warunki sieci tryangulacyjnej.

Warunki, które musimy wziąć na uwagę przy wyrównywaniu sieci są pochodzenia *dwojakiego*.

Jedne z nich mają swe śródło w pomiarach *stacyjnych* (na stanowiskach), drugie wynikają z *geometrycznego kształtu sieci*.

Od warunków rodzaju pierwszego *uwalniamy* się, wykonując na stanowiskach pomiary wielkości niezależnych, więc albo *kątów niezależnych* lub kierunków w *serjach pełnych*.

Jeżeli jednak, jak to ma często miejsce przy pomiarach kątowych, pomierzymy na stanowiskach wewnętrznych sieci wszystkie *kąty* dookoła, powstaje t. zw. warunek *kołowy* (zamknięcie horyzontu).

Jak uwzględnić warunki stacyjne, wynikające z pomiarów kątów w różnych kombinacjach i seryj częściowych, podajemy w części *B* niniejszego rozdziału.

Taksamo powstają warunki *stacyjne* na stanowiskach o kierunkach *stałych*[1]), o ile je wciągnięto do pomiarów.

Bez względu na to, jakiemi pomiarami posługiwaliśmy się, czy jak to z reguły ma miejsce, kierunkowemi, czy też w wyjątkowym przypadku kątowemi, należy przy wywodach, odnoszących się do warunków, wziąć na uwagę *kąty*, jako elementy konstrukcyjne danej sieci.

Niech będzie ilość punktów sieci p, to ilość niezależnych elementów, koniecznie potrzebnych do utworzenia p-boku wynosi, jak wiadomo:

$$k = 2p - 3; \tag{1}$$

[1]) W takich przypadkach należy sprawdzić, czy nie byłoby ekonomiczniej, przeprowadzić wyrównanie spółrzędnych metodą, podaną w § 8-mym, rozdz. X-go (str. 260).

oznaczając ilość elementów danych przez d (znanych z pomiarów poprzednich i obecnie spostrzeganych), otrzymamy na ilość warunków sieci (w) wzór:

$$(w)=d-k=d-2p+3. \quad (2)$$

Na ilość d składają się znane lub pomierzone podstawy (bazy) b i kąty (K_t), (również znane lub pomierzone) zatem:

$$(w)=b+(K_t)-2p+3. \quad (3)$$

Wzór ten nie może być zastosowany w powyższej formie przy sieciach, wiążących sobą sieci tryangulacyjne już wyrównane, t. j. przy t. zw. sieciach łącznych.

Bardzo często oddzielamy dla przejrzystości nietylko warunki, wynikające z przymusu nawiązania, ale także powstałe z pomiaru więcej jak jednej postawy, t. zw. warunki podstawowe, posługując się wzorem, który jest ważny dla *jednopodstawowych sieci, wolnych od warunków nawiązania:*

$$w=1+K_t-2p+3=K_t-2p+4, \quad (4)$$

przyczem K_t odnosi się tylko do kątów mierzonych; *każda* dodatkowo dana (pomierzona) *podstawa,* jakoteż *kąt stały* powodują *tyleż nowych* warunków, które trzeba dodać do ogólnej liczby warunków, określonej wzorem (4).

Przy sieciach zawiłych nadaje się ten sposób wyznaczania ilości warunków lepiej, niż wzór (3).

Na ilość ogólną warunków sieci składają się następujące warunki:

a) trójkątowe, czyli poligonowe w_{tr},

b) stacyjne, w_{st},

c) boczne, w_b,

d) podstawowe, w_p, a prócz tego, o ile zachowano łączność z pomiarami dawniejszemi:

e) war., wynikające z nawiązania w_n, (spowodowane przymusem nawiązania).

Przy omawianiu spostrzeżeń zawarunkowanych zwróciliśmy uwagę, że przeprowadzenie wyrównania sieci z *nieuwzględnieniem* pewnych warunków, lub wprowadzenie do wyrównania warunków *identycznych* (zawartych w już uwzględnionych) powoduje *fałszywy* wynik całkowitego rachunku.

Dlatego niedość jest wyznaczyć ilość *ogólną* warunków wzorem (3) lub (4), lecz trzeba wiedzieć dokładnie ilości warunków *każdego rodzaju,* przyczem musi być:

$$(w)=w_{tr}+w_{st}+w_b+w_p+w_n. \quad (5)$$

Jeżeli do określenia ilości warunków użyto wzoru (4), będzie:

$$w=w_{tr}+w_{st}+w_b. \quad (6)$$

a ponadto trzeba będzie do w dodać warunki, wynikające z *nawiązania* w_n *i warunki podstawowe* w_p.

§ 3. Wyprowadzenie wzorów na ilość warunków sieci tryang.

Przy dalszych wywodach będziemy posługiwali się następującemi określeniami. Niech oznaczają

l *linie* sieci, wzdłuż których celowano,

l_1 „ „ obserwowane tylko *w jednym* kierunku,

l_2 „ „ „ *obustronnie,* zatem $l = l_1 + l_2$,

(linie, obserwowane *jednostronnie* na punktach *stałych* celem nawiązania sieci, nie wchodzą tu w rachubę).

p ilość *wszystkich* punktów sieci,

p_i „ punktów sieci, będących zarazem *stanowiskami,*

p_w „ „ , *wciętych tylko wprzód* (z zewnątrz), zatem $p = p_i + p_w$,

K_t „ *kątów,* pomierzonych w sieci,

K_r „ *kierunków,* spostrzeganych w sieci,

zatem $K_t = K_r - p_i$, $K_r = 2l_2 + l_1$, $K_t = 2l_2 + l_1 - p_i$.

Wzór (4) § 2-go, określający ogólną sumę warunków *bez uwzględnienia warunków podstawowych i nawiązania,* możemy napisać przy pomiarach

kierunkowych:
$$\left.\begin{aligned} w &= K_t - 2p + 4 = 2l_2 + l_1 - 2p - p_i + 4, \text{ lub} \\ w &= 2l_2 + l_1 - 3p + p_w + 4. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

a) Warunki trójkątowe czyli poligonowe.

Jeżeli w wieloboku o p_i wierzchołkach pomierzymy p_i kątów, t. zn. wykonamy pomiary, celując *obustronnie* wzdłuż p_i linij, będziemy mieli do uwzględnienia *jeden* warunek, odnoszący się do kątów wewnętrznych lub zewnętrznych p_i- boku, a to ze względu na to, że jeden (obustronny) kierunek jest tu nadliczbowy.

Celując obustronnie nie wzdłuż p_i, lecz wzdłuż l_2 *kierunków,* mamy tyle kierunków nadliczbowych, a więc i warunków, ile wynosi różnica

$$l_2 - (p_i - 1), \text{ zatem}$$
$$w_{tr} = l_2 - p_i + 1. \qquad (2)$$

(Punkta, wcięte w liczbie p_w, nie wchodzą tu w rachubę).

Kształt tych warunków jest liniowy. (Obacz § 4-ty).

b) Warunki stacyjne.

Jak już wspomnieliśmy, redukują się warunki stacyjne w_{st} przy spostrzeżeniach kątowych do warunków kołowych; ilości warunków stacyjnych, wynikających z istnienia stałych kątów, względnie kierunków na stacjach, najlepiej nie uwzględniać przy obliczaniu ogólnej liczby warunków, lecz po ustaleniu liczby warunków bez przymusu nawiązania, dodać do niej warunki w_n, wynikające z nawiązania.

Przy pomiarach kątowych wyrównywanych jako kątowe, będzie zatem liczba warunków stacyjnych w_{st} równą ilości warunków *kołowych,* zaś przy wyrównaniach *kierunkowych, odpada* ten rodzaj warunków zupełnie.

c) Warunki boczne (sinusowe).

Szereg trójkątów, z których leżące obok siebie mają tylko *jeden bok wspólny*, a trójkąty początkowy i końcowy nie przylegają do siebie żadnym bokiem, tworzy t. zw. *łańcuch trójkątów*.

Łańcuch trójkątów, składający się z p punktów, wymaga (prócz podstawy) $2p-3$ linij, które nie muszą być celowemi obustronnemi.

Obliczenie w łańcuchu trójkątów długości dowolnego boku z danej podstawy przy zastosowaniu twierdzenia sinusowego, można przeprowadzić tylko przy pomocy związku *jednych i tych samych kątów*, czyli, jak to nazywamy, jedną drogą.

Natomiast powoduje pomiar $\{(2p-3)+1\}$ linij w łańcuchu tryang. o p punktach możliwość obliczenia pewnego boku sieci dwoma drogami, t. j. z zastosowaniem *innych kątów* w twierdzeniach sinusowych.

Ponieważ stosunek owego boku sieci do jej podstawy można wyrazić dwoma stosunkami iloczynów sinusów pewnych kątów, otrzymujemy, porównując oba te stosunki ze sobą, t. zw. warunek *boczny lub sinusowy* o kształcie nieliniowym. (Obacz § 4-ty).

Ilość warunków bocznych sieci otrzymujemy z różnicy między ilością wszystkich linij sieci, a $(2p-3)$:

$$w_b = l - 2p + 3. \tag{3}$$

d) Warunki podstawowe.

Pomiar względnie istnienie drugiej podstawy w sieci powoduje również możliwość obliczania pewnego boku dwoma drogami, zatem warunek kształtu analogicznego jak warunek *c)*.

Ilość warunków podstawowych równa się zatem ilości podstaw sieci, zmniejszonej o jedność:

$$w_p = b - 1. \tag{4}$$

e) Warunki wynikające z nawiązania.

Każdy kąt przejęty do sieci z dawniejszych wyrównań jako stały, a taksamo nawiązanie sieci do więcej, niż jednego kierunku stałego, powoduje po jednym warunku nawiązania.

Przy wielkich systemach, łączących dwie już poprzednio wyrównane sieci, powstają warunki *„zamknięcia poligonu“*, o których będzie mowa w części *B* niniejszego rozdziału.

Kontroli, czy ustalona ilość warunków każdego rodzaju jest właściwą, dostarcza nam do pewnego stopnia związek

$$(w) = w_{tr} + w_{st} + w_b + w_p + w_n, \tag{5}$$

lub z wyłączeniem warunków podstawowych i nawiązania:

$$w = w_{tr} + w_{st} + w_b. \tag{6}$$

§ 4. Kształt warunków sieci.

a) Warunki *trójkątowe* czyli *poligonowe* dostarczają równań odchyłek o kształcie liniowym.

I tak będzie przy wyrównaniu

α) *kątowem* (wedle fig. 22-giej, przyjmując że trójkąty są płaskie):

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2+\delta_2+\alpha_3+\delta_3+\alpha_4+\delta_4-180^0=0\\ \alpha_1+\delta_1+\alpha_5+\delta_5+\alpha_6+\delta_6-180^0=0\end{array}\right\}\text{(warunki)}$$

$$\left.\begin{array}{l}.\ \delta_2+\delta_3+\delta_4\ \ .\ \ .\ +\omega_1=0\\ \delta_1\ .\ \ .\ \ .\ +\delta_5+\delta_6+\omega_2=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{(równ.}\\ \text{odchyłek),}\end{array}$$

$$\text{przyczem } \omega_1=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-180$$
$$\omega_2=\alpha_1+\alpha_5+\alpha_6-180.$$

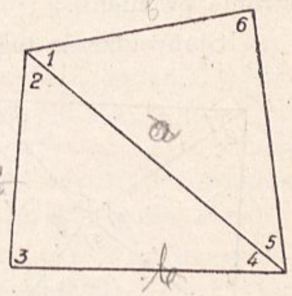

Fig. 22.

Zamiast równań (1) możemy użyć także następujących dwu równań:

$$\begin{array}{l}\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4+\delta_5+\delta_6+\omega_1'=0\\ \delta_1\ \ .\ \ .\ \ .\ +\delta_5+\delta_6+\omega_2=0.\end{array}\qquad(1^*)$$

Równania (1) są jednak korzystniejsze dla rachunku niż równ. (1*).

β) Przy wyrównaniu *kierunkowem* będą się odnosiły poszczególne δ do kierunków, zatem będzie wedle fig. 23-ciej:

$$\left.\begin{array}{l}.\ \ -\delta_2+\delta_3-\delta_4+\delta_5-\delta_6+\delta_7\ \ .\ \ .\ \ .\ +\omega_1=0\\ -\delta_1+\delta_2\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ -\delta_7+\delta_8-\delta_9+\delta_{10}+\omega_2=0,\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{równ.}\\ \text{odchyłek}\end{array}\qquad(3)$$

$$\text{przyczem: } \omega_1=\{(3)-(2)\}+\{(5)-(4)\}+\{(7)-(6)\}$$
$$\omega_2=\{(2)-(1)\}+\{(8)-(7)\}+\{(10)-(9)\},$$
$$\text{lub } \omega_1=\alpha_{2.3}+\alpha_{4.5}+\alpha_{6.7}\,[1])$$
$$\omega_2=\alpha_{1.2}+\alpha_{7.8}+\alpha_{9.10}.$$

b) Warunki *stacyjne kołowe* mają również kształt *liniowy*, a równ. odchyłek nie różnią się od równ. (1); *przy wyrównaniach kierunków odpada* ten rodzaj warunków.

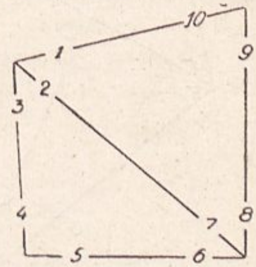

Fig. 23.

c) Warunki *boczne*.

α) Wyrównanie *kątowe*.

Punkty sieci, dookoła których grupują się trójkąty, nazywamy punktami środkowemi (centralnemi).

Tworząc stosunek boków sieci, schodzących się w punkcie środkowym E (na fig. 24.), otrzymujemy warunek boczny

$$\frac{a.b.c.d}{b.c.d.a}=1=\frac{\sin(\alpha_3+\delta_3)\sin(\alpha_5+\delta_5)\sin(\alpha_7+\delta_7)\sin(\alpha_1+\delta_1)}{\sin(\alpha_2+\delta_2)\sin(\alpha_4+\delta_4)\sin(\alpha_6+\delta_6)\sin(\alpha_8+\delta_8)}.\qquad(4)$$

[1]) Pisowni tej jako prostszej będziemy używali nadal.

(Stosunek iloczynu kątów po jednej stronie promieni, wychodzących z punktu środkowego, do iloczynu kątów, znajdujących się po drugiej stronie promieni).

Sprowadzenie tego warunku do kształtu liniowego przeprowadzamy z reguły, nadając mu formę logarytmiczną; otrzymamy zatem ze względu, że

$$\log \sin (\alpha_i + \delta_i) = \log \sin \alpha_i + df_i \delta_i , \qquad (5)$$

przyczem df oznacza poprawkę logarytmiczną dla 1'' na 7-em, względnie przy sieciach o znaczeniu podrzędniejszem na 6-em miejscu:

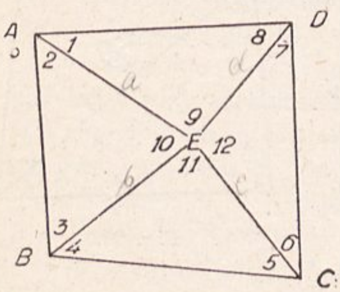

Fig. 24.

$$\log \sin \alpha_1 + \log \sin \alpha_3 + \log \sin \alpha_5 + \log \sin \alpha_7 - \\ - \log \sin \alpha_2 - \log \sin \alpha_4 - \log \sin \alpha_6 - \log \sin \alpha_8 + \\ + df_1 \delta_1 - df_2 \delta_2 + df_3 \delta_3 - df_4 \delta_4 + df_5 \delta_5 - df_6 \delta_6 + \\ + df_7 \delta_7 - df_8 \delta_8 = 0. \qquad (6)$$

Oznaczając sumę logarytmów ω, otrzymamy ostatecznie:

$$df_1 . \delta_1 - df_2 . \delta_2 + df_3 . \delta_3 - df_4 . \delta_4 + df_5 . \delta_5 - df_6 . \delta_6 + df_7 . \delta_7 - df_8 . \delta_8 + \omega = 0. \quad (7)$$

W braku *rzeczywistego* punktu środkowego, można przyjąć za punkt środkowy dowolny punkt danej figury, o ile stosunek zbiegających się w nim boków możemy wyrazić stosunkiem sinusów odpowiednich kątów; w czworoboku może być nim także i *przecięcie się obu przekątni,* a zatem punkt *pozorny.*

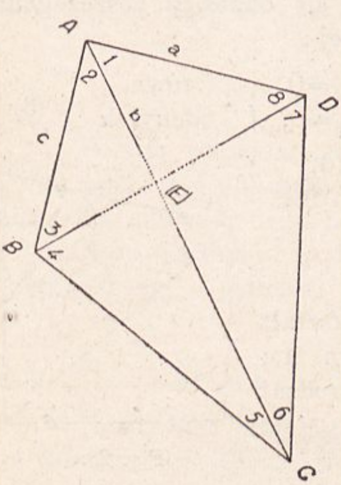

Fig. 25.

W czworoboku obierając (E) jako punkt środkowy (patrz fig. 25), będziemy mieli wedle równania (7):

$$df_1 \delta_1 - df_2 \delta_2 + df_3 \delta_3 - df_4 \delta_4 + df_5 \delta_5 - df_6 \delta_6 + \\ + df_7 d_7 - df_8 \delta_8 + \omega = 0; \qquad (7^*)$$

natomiast obierając jako środkowy punkt A, otrzymamy, biorąc na uwagę stosunek boków, przecinających się w tym punkcie:

$$\frac{a.b.c}{b.c.a} = \frac{\sin (\alpha_6 + \delta_6) \sin (\alpha_3 + \delta_3 + \alpha_4 + \delta_4) \sin (\alpha_8 + \delta_8)}{\sin (\alpha_7 + \delta_7 + \alpha_8 + \delta_8) \sin (\alpha_5 + \delta_5) \sin (\alpha_3 + \delta_3)} = 1, \qquad (8)$$

w obec czego równanie poprawek będzie:

$$df_6 \delta_6 + df_{3.4} (\delta_3 + \delta_4) + df_8 \delta_8 - df_{7.8} (\delta_7 + \delta_8) - df_5 \delta_5 - df_3 \delta_3 + \omega = 0, \quad (9)$$

¹) Przy wartościach kątów między 90⁰, a 180⁰ zmieniają poprawki logarytmiczne *znaki na przeciwne.*

lub po uporządkowaniu:

$$(df_{3.4}-df_3)\,\delta_3+df_{3.4}\,\delta_4-df_5\,\delta_5+df_6\,\delta_6-df_{7.8}\,\delta_7+(df_8-df_{7.8})\,\delta_8+\omega=0. \quad (10)$$

Poprawki log. $df_{3.4}$ i $df_{7.8}$ odnoszą się do kątów $(\alpha_3+\alpha_4)$ i $(\alpha_7+\alpha_8)$. Równanie poprawek, utworzone w czworoboku dla punktów zewnętrznych, uważanych za środkowe, wykazują prócz wyrazu wolnego tylko 6 członów, podczas gdy równ. popr., odniesione do punktu środkowego pozornego, 8 członów. Ostatnie jest zatem mniej korzystne, o ile chodzi o nakład pracy rachunkowej, gdyż im mniej wyrazów zawierają równania odchyłek, tem prostszy kształt przybierają zazwyczaj równania korelat.

Natomiast, o ile chodzi o dokładność rachunkową, jest równanie odchyłek, ustawione ze względu na punkt E, ***najkorzystniejsze.***

Z innych punktów, t. j. właściwych czworoboku, dostarcza nam ten ***rachunkowo najdokładniejszego*** równania odchyłek, który leży ***poza polem największego trójkąta*** (utworzonego z trzech pozostałych punktów).

O ile zatem nie chcemy mieć równania odchyłek o 8-miu członach, należy obrać zamiast punktu (E) punkt A dla sieci, zaznaczonej na fig. 25-tej.

Jordan wykazał, że stosunek dokładności rachunkowej równań odchyłek, ustawianych ze względu na punkty E, A, B, C, D, obierane jako środkowe, równa się stosunkowi powierzchni

$$\square(ABCD):\triangle(BCD):\triangle(ACD):\triangle(ABD):\triangle(ABC).\text{[1]}$$

Najdokładniejsze (pod względem rachunkowym) równanie poprawek otrzymamy ze względu na punkt środkowy E, a przy 6-ciu członach ze względu na punkt A; coraz mniej dokładne wynikną kolejno dla punktów B, D i C (jak to widać na fig. 25-tej).

β) W podobny sposób otrzymamy warunki boczne przy wyrównaniu *kierunkowem,* zastępując kąty różnicami odpowiednich kierunków.

Biorąc na uwagę ten sam kształt sieci jak poprzednio, otrzymamy zamiast 12 kątów 16 kierunków (fig. 26-ta).

Otrzymamy zatem ze względu na punkt wewnętrzny jako ***środkowy:***

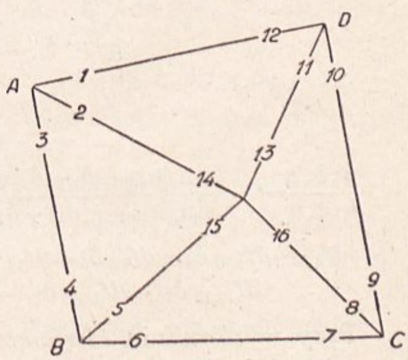

Fig. 26.

$$1=\frac{\sin(\alpha_{1.2}-\delta_1+\delta_2)\sin(\alpha_{4.5}-\delta_4+\delta_5)\sin(\alpha_{7.8}-\delta_7+\delta_8)\sin(\alpha_{10.11}-\delta_{10}+\delta_{11})}{\sin(\alpha_{2.3}-\delta_2+\delta_3)\sin(\alpha_{5.6}-\delta_5+\delta_6)\sin(\alpha_{8.9}-\delta_8+\delta_9)\sin(\alpha_{11.12}-\delta_{11}+\delta_{12})}, \quad (11)$$

---

[1]) Pierwszym, który podał teorję, dotyczącą tej kwestji, w nieco odmiennej formie jak *Jordan,* był jenerał duński *Zachariae* (Den danske Gradmaaling tom II-gi str. 483—487).

zaś w kształcie liniowym:

$$0=df_{1.2}\,\delta_2-df_{1.2}\,\delta_1+df_{4.5}\,\delta_5-df_{4.5}\,\delta_4+df_{7.8}\,\delta_8-df_{7.8}\,\delta_7+df_{10.11}\,\delta_{11}-$$
$$-df_{10.11}\,\delta_{10}+df_{2.3}\,\delta_3+df_{2.3}\,\delta_2-df_{5.6}\,\delta_6+df_{5.6}\,\delta_5-df_{8.9}\,\delta_8+df_{8.9}\,\delta_9-$$
$$-df_{11.12}\,\delta_{12}+df_{11.12}\,\delta_{11}+\omega, \qquad (12)$$

przyczem $\omega=\log\sin\alpha_{1.2}+\log\sin\alpha_{4.5}+\ldots\ldots-\log\sin\alpha_{2.3}-\log\sin\alpha_{5.6}\ldots\ldots$ (13)

Równanie odchyłek *uporządkowane* będzie zatem:

$$-df_{1.2}\,\delta_1+(df_{1.2}+df_{2.3})\,\delta_2-df_{2.3}\,\delta_3-df_{4.5}\,\delta_4+(df_{4.5}+df_{5.6})\,\delta_5-df_{5.6}\,\delta_6-$$
$$-df_{7.8}\,\delta_7+(df_{7.8}+df_{8.9})\,\delta_8-df_{8.9}\,\delta_9-df_{10.11}\,\delta_{10}+(df_{10.11}+df_{11.12})\,\delta_{11}-$$
$$-df_{11.12}\,\delta_{12}+\omega=0. \qquad (14)$$

W analogiczny sposób ustawiamy równania odchyłek w przypadku, gdy *nie ma właściwego punktu środkowego;* w czworoboku otrzymamy na tej samej zasadzie jak związek (8) równanie warunkowe względnie odchyłki w kształcie następującym (patrz fig. 27-ma), obierając jako środkowy punkt A:

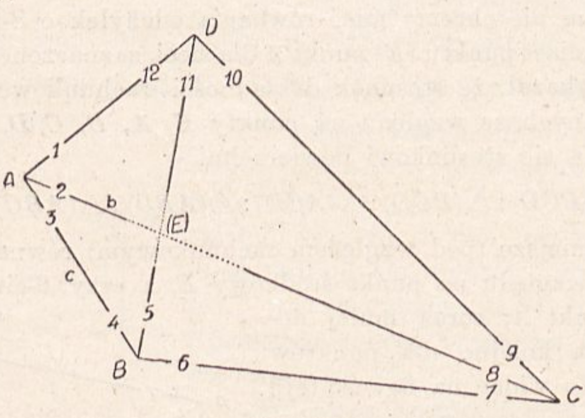

Fig. 27.

$$\frac{a.b.c}{b.c.a}=1=\frac{\sin(\alpha_{8.9}-\delta_8+\delta_9)\sin(\alpha_{4.6}-\delta_4+\delta_6)\sin(\alpha_{11.12}-\delta_{11}+\delta_{12})}{\sin(\alpha_{10.12}-\delta_{10}+\delta_{12})\sin(\alpha_{7.8}-\delta_7+\delta_8)\sin(\alpha_{4.5}-\delta_4+\delta_5)}, \qquad (15)$$

$$(df_{4.5}-df_{4.6})\,\delta_4-df_{4.5}\,\delta_5+df_{4.6}\,\delta_6+df_{7.8}\,\delta_7-(df_{7.8}+df_{8.9})\,\delta_8+df_{8.9}\,\delta_9+$$
$$df_{10.12}\,\delta_{10}-df_{11.12}\,\delta_{11}-(df_{10.12}-df_{11.12})\,\delta_{12}+\omega=0. \qquad (16)$$

Przy wyrównaniu *kierunkowem* dostarcza nam punkt środkowy (E) równanie odchyłki o 12 członach, zaś inne punkty tylko o 9 członach.

d) Warunki *podstawowe* tworzymy analogicznie jak warunki boczne z tą różnicą, że stosunek iloczynów sinusów odpowiednich kątów równa się tu nie jedności, lecz *stosunkowi podstaw.*

Ponieważ podstawy uważamy za bezbłędne, przeto kształt równań odchyłek będzie takisam, jak przy warunkach bocznych, z tą tylko zmianą, że wyraz wolny równa się tu:

$$\omega=[\log\sin\alpha]-(\log b_1-\log b_2),$$

przyczem [log sin α] oznacza sumę logarytmów sinusów odpowiednich kątów z uwzględnieniem znaków jak poprzednio, zaś ($\log b_1 - \log b_2$) odpowiada logarytmowi stosunku podstaw $\frac{b_1}{b_2}$.

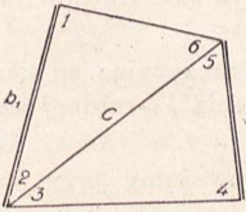

Fig. 28.

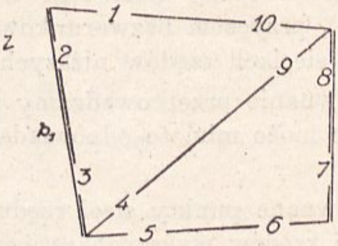

Fig. 29.

Dla sytuacji, przedstawionej na fig. 28-mej, otrzymamy ze względu na:

$$\frac{b_1 c}{c b_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{\sin(\alpha_6 + \delta_6)\sin(\alpha_4 + \delta_4)}{\sin(\alpha_1 + \delta_1)\sin(\alpha_3 + \delta_3)} \tag{17}$$

$$-df_1\,\delta_1 - df_3\,\delta_3 + df_4\,\delta_4 + df_6\,\delta_6 + \omega = 0, \tag{18}$$

przyczem:

$$\omega = -\log\sin\alpha_1 - \log\sin\alpha_3 + \log\sin\alpha_4 + \log\sin\alpha_6 - \log b_1 + \log b_2. \tag{19}$$

Przy wyrównaniu kierunkowem będzie analogicznie (patrz fig. 29-ta):

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{\sin(\alpha_{9.10} - \delta_9 + \delta_{10})\sin(\alpha_{6.7} - \delta_6 + \delta_7)}{\sin(\alpha_{1.2} - \delta_1 + \delta_2)\sin(\alpha_{4.5} - \delta_4 + \delta_5)}, \tag{20}$$

a ostatecznie:

$$df_{1.2}\delta_1 - df_{1.2}\delta_2 + df_{4.5}\delta_4 - df_{4.5}\delta_5 - df_{6.7}\delta_6 + df_{6.7}\delta_7 - df_{9.10}\delta_9 + df_{9.10}\delta_{10} + \omega = 0, \tag{21}$$

przyczem

$$\omega = -\log\sin\alpha_{1.2} - \log\sin\alpha_{4.5} + \log\sin\alpha_{6.7} + \log\sin\alpha_{9.10} - \log b_1 + \log b_2. \tag{22}$$

e) Warunki, spowodowane nawiązaniem, są, o ile nawiązanie dotyczy kątów lub kierunków stałych, kształtu liniowego.

O warunkach *zamknięcia poligonu*, występujących przy sieciach nawiązanych do sieci, ustalonych na podstawie wcześniejszych pomiarów i wyrównań, lub przy sieciach „wieńcowych“ będzie mowa w części *B* niniejszego rozdziału.

Liczbowy przykład wyrównania sieci o znaczeniu lokalnem podano w § 6-ym na str. 293).

§ 5. Wskazówki praktyczne, odnoszące się do sieci tryangulacyjnych.

a) Podział systemu większego na sieci różnych rzędów. b) Przykłady ustawiania równań warunkowych sieci. c) Wybór najkorzystniejszych warunków w sieciach promienistych i w czworoboku.

a) W niektórych przypadkach może się zdarzyć, że sieć tryangulacyjna (n. p. miejska) zawiera *dość znaczną* liczbę punktów

W takich razach przeprowadzenie wyrównania *w całej sieci odrazu* byłoby bardzo niepraktyczne, a to tak ze względu na wielkość pracy, jak i łatwość wkradnięcia się choćby pozornie małego błędu do rachunków, odpowiadających całemu systemowi.

Dlatego dzielimy sieci tego rodzaju na rzędy (podobnie jak sieci państwowe), przyczem bezwarunkowo muszą być sieci rzędów wyższych zawarte w sieciach rzędów niższych.

Wyrównanie przeprowadzamy stopniowo, zaczynając od sieci rzędu I-go, (które może mimoto odpowiadać dokładnością IV-rzędnej sieci państwowej).

Wyrównane punkty sieci rzędu niższego uważamy przy wyrównywaniu sieci rzędów wyższych za bezbłędne.

Jeżeli jakaś większa sieć o znaczeniu *lokalnem* składa się z sieci rzędu I-go, II-go, III-go i IV-go (co tylko jest możliwem przy sieciach tryangulacyjnych wielkomiejskich, wówczas są punkty I- i II-rzędne *stanowiskami,* punkty III-rzędne punktami z reguły *wciętymi tylko wprzód,* zaś punkty IV-rzędne znów stanowiskami, wyznaczonemi przy pomocy *wcięcia wstecz.*

Sieć II-rzędną wyrównywamy w nawiązaniu do ustalonych punktów sieci I-rzędnej metodą, podaną w poprzednim rozdziale. (Porównaj § 8-my rozdz. X-go). Wyrównanie to przeprowadzamy częściami, w obrębie poszczególnych partyj sieci pierwszorzędnej (nie całej sieci II-rzędnej naraz).

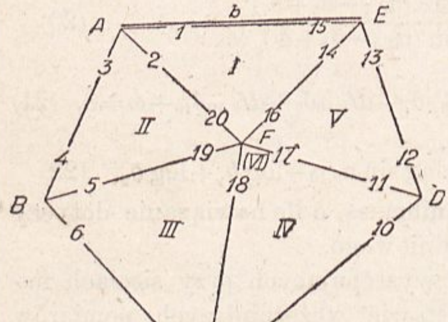

Fig. 30.

W ten sposób uzyskuje się nawet w bardzo trudnych przypadkach *stosunkowo niewielkie* systemy i tak sieci I-rzędne miasta Berlina i Lipska obejmowały wszystkiego po 8 punktów.

Podział na sieci różnych kategoryj należy przeprowadzić przed rozpoczęciem pomiarów na podstawie rekonesansu i na każdem stanowisku wykonać *oddzielnie* pomiary, odnoszące się do sieci różnych rzędów. (Im wyższego rzędu sieć tem mniejsza ilość seryj kierunków)

b) Figura 30-ta przedstawia nam sieć „*promienistą*", często używaną jako sieć o znaczeniu lokalnem.

Przypuszczając, że wykonaliśmy pomiary kierunkowe (serjami pełnemi), otrzymamy ilość warunków wedle równania (6) § 3-go, ze względu że

$$l_2 = l = 10,$$
$$l_1 = 0,$$
$$p = p_i = 6,$$
$$p_w = 0,$$
$$b = 1,$$
$$w = 2 \times 10 - 3 \times 6 + 4 = 6;$$

ponieważ $w_p = w_n = 0$, przeto ilość wszystkich warunków wynosi 6.

Kontrola przy pomocy wzoru (5) § 3-go dostarcza nam, ze względu że $(K_t) = 14$ (na stanowiskach zewn. po 2 kąty, zaś na stanowisku F 4 kąty niezależne, razem 14), oraz ze względu, że $b = 1$:

$$(w) = 1 + 14 - 12 + 3 = 6.$$

Na ogólną ilość warunków składa się:

$$w_{tr} = l_2 - p_i + 1 = 10 - 6 + 1 = 5 \text{ warunków}$$
$$w_b = l - 2p + 3 = 10 - 12 + 3 = 1 \quad \text{"}$$

razem 6 warunków.

Równania odchyłek, odpowiadające tej sieci, są:

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9	δ_{10}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	δ_{16}	δ_{17}	δ_{18}	δ_{19}	δ_{20}	ω	
I	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	+1	.	.	.	−1	ω_1	=0
II	.	−1	+1	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	ω_2	=0
III	.	.	.	.	−1	+1	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	.	ω_3	=0
IV	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	−1	+1	.	.	.	.	.	−1	+1	.	.	ω_4	=0
V	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	−1	+1	.	−1	+1	.	.	.	ω_5	=0
VI	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	.	.	.	.	.	ω_6	=0

przyczem

$f_1 = -df_{1.2}$, $f_2 = df_{1.2} + df_{2.3}$, $f_3 = -df_{2.3}$, $f_4 = -df_{4.5}$, $f_5 = df_{4.5} + df_{5.6}$, $f_6 = -df_{5.6}$, $f_7 = -df_{7.8}$, $f_8 = df_{7.8} + df_{8.9}$, $f_9 = -df_{8.9}$, $f_{10} = -df_{10.11}$, $f_{11} = df_{10.11} + df_{11.12}$, $f_{12} = -df_{11.12}$, $f_{13} = -df_{13.14}$, $f_{14} = = df_{13.14} + df_{14.15}$, $f_{15} = -df_{14.15}$.

Figura 31-a przedstawia nam sieć, nawiązaną do *dwu punktów stałych* (n. p. tryangulacji państwowej); prócz tego *zorjentowano* sieć dodatkowo do dwu kierunków stałych, co spowodowało dwa warunki nawiązania.

Ilość wszystkich kierunków pomierzonych $(K_r) = 22$, ilość kierunków pomierzonych w samej sieci $K_r = 20$.

Ilość linij bez uwzględnienia linij nawiązania

$$l = l_2 = 10, \quad l_1 = 0;$$

a dalej $p = p_i = 6$, $p_w = 0$, $b = 1$, w obec tego:

$$w = 2\,l_2 - 3\,p + 4 = 20 - 18 + 4 = 6;$$

ponieważ $w_p = b - 1 = 0$, $w_n = 2$, gdyż kierunki (1) i (5), jak też (6) i (9) mają spełniać stałe kąty, przeto ogólna ilość warunków jest **8**.

Równanie kontrolne:

$$(w) = b + (K_t) - 2\,p + 3,$$

a ponieważ $(K_t) = (K_r) - p_i = 22 - 6 = 16$, przeto

$$(w) = 1 + 16 - 12 + 3 = 8.$$

Przechodząc do poszczególnych kategoryj warunków, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
w_{tr} &= l_2 - p_i + 1 = 10 - 6 + 1 = 5 \text{ warunków}\\
w_b &= l - 2p + 3 = 10 - 12 + 3 = 1 \text{ warunek}\\
w_n & = 2 \text{ warunki}\\
\hline
& \text{razem } 8 \text{ warunków.}
\end{aligned}$$

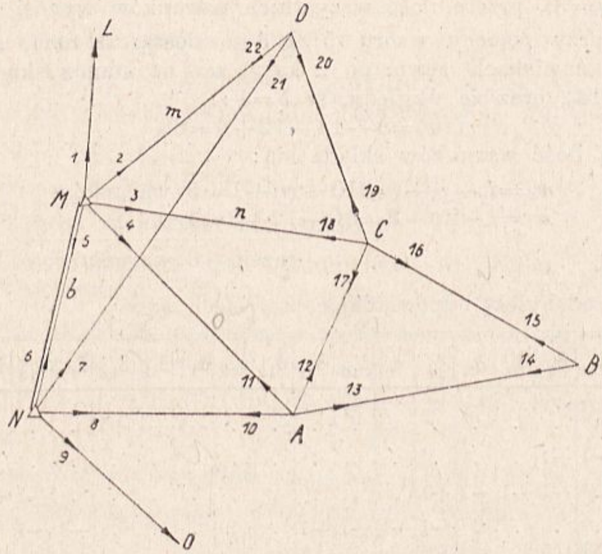

Fig. 31.

Warunek boczny wynika ze stosunku boków, zbiegających się w punkcie M:

$$1 = \frac{m \,.\, n \,.\, o \,.\, b}{n \,.\, o \,.\, b \,.\, m} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha_{18.19} - \delta_{18} + \delta_{19}) \sin(\alpha_{11.12} - \delta_{11} + \delta_{12}) \sin(\alpha_{6.8} - \delta_6 + \delta_8) \sin(\alpha_{21.22} - \delta_{21} + \delta_{22}}{\sin(\alpha_{20.22} - \delta_{20} + \delta_{22}) \sin(\alpha_{17.18} - \delta_{17} + \delta_{18}) \sin(\alpha_{10.11} - \delta_{10} + \delta_{11}) \sin(\alpha_{6.7} - \delta_6 + \delta_7)},$$

zaś warunki nawiązania są: $\begin{array}{l} \alpha_{1.5} - \delta_1 + \delta_5 - \sphericalangle LMN = 0 \\ \alpha_{6.9} - \delta_6 + \delta_9 - \sphericalangle MNO = 0. \end{array}$

Schematyczne zestawienie równań odchyłek, wyrażonych poprawkami, przedstawia się:

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9	δ_{10}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	δ_{16}	δ_{17}	δ_{18}	δ_{19}	δ_{20}	δ_{21}	δ_{22}	ω	
I	.	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	−1	.	+1	ω_1	=0
II	.	.	−1	+1	.	.	.	.	.	.	−1	+1	.	.	.	.	−1	+1	.	.	.	.	ω_2	=0
III	.	.	.	−1	+1	−1	+1	.	.	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	ω_3	=0
IV	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	−1	+1	−1	+1	.	.	.	.	.	ω_4	=0
V	.	−1	.	.	+1	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	ω_5	=0
VI	−1	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	ω_6	=0
VII	.	.	.	.	.	−1	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	ω_7	=0
VIII	.	.	.	.	.	h_6	h_7	h_8	.	h_{10}	h_{11}	h_{12}	.	.	.	.	h_{17}	h_{18}	h_{19}	h_{20}	h_{21}	h_{22}	ω_8	=0

przyczem

$$h_6=df_{6.7}-df_{7.8},\ h_7=-df_{6.7},\ h_8=df_{6.8},\ h_{10}=df_{10.11},\ h_{11}=-df_{10.11}-df_{11.12},\ h_{12}=$$
$$=df_{11.12},\ h_{17}=df_{17.18},\ h_{18}=-df_{17.18}-df_{18.19},\ h_{19}=df_{18.19},\ h_{20}=df_{20.22},\ h_{21}=-df_{21.22},$$
$$h_{22}=-df_{20.22+21.22}.$$

c) O ile ze stanowiska teorji jest zupełnie obojętne, które warunki uwzględnimy przy wyrównaniu, byleby tylko wszystkie były niezależne (i co z tego wynika, była zachowana odpowiednia ilość każdej kategorji), nie tak się przedstawia rzecz w praktyce.

Tak ze względu na nakład pracy przy obliczeniach, jak i na dokładność, staramy się dobrać takie warunki, dla których ułożone równania korelat wykazywałyby jak ***największą ilość spółczynników równych zeru.*** O ile w sieci nie zachodzą warunki boczne, da się to przeprowadzić bez trudności; natomiast istnienie tych ostatnich komplikuje wyrównanie, nadając spółczynnikom kształt mniej wygodny do liczenia.

Z tych powodów umieszczamy warunki boczne (i w ogóle sinusowe) z reguły jako ***ostatnie,*** a resztę warunków tak dobieramy, aby o ile możności spółczynniki $[ab]$, $[ac]$.... $[bc]$ i t. d. były zerami.

Da się to uskutecznić w sieciach *promienistych;* n. p. sieci pierwszej ustępu *b)* fig. 30-ta) odpowiadają ze względu na:

$$[aa]=[bb]=[cc]=[dd]=[ee]=6,$$
$$[ab]=[ac]=[ad]=[ae]=[bc]=[bd]=[be]=[cd]=[ce]=[de]=0,$$

następujące równania korelat:

$$\begin{array}{cccccl}
6k_1 & . & . & . & . & +[af]k_6+\omega_1=0 \\
. & 6k_2 & . & . & . & +[bf]k_6+\omega_2=0 \\
. & . & 6k_3 & . & . & +[cf]k_6+\omega_3=0 \\
. & . & . & 6k_4 & . & +[df]k_6+\omega_4=0 \\
. & . & . & . & 6k_5 & +[ef]k_6+\omega_5=0 \\
\end{array}$$
$$[af]k_1+[bf]k_2+[cf]k_3+[df]k_4+[ef]k_5+[ff]k_6+\omega_6=0.$$

Pięć pierwszych równań dostarcza nam związków:

$$k_1=-\frac{[af]k_6+\omega_1}{6},$$
$$k_2=-\frac{[bf]k_6+\omega_2}{6},$$
$$k_3=-\frac{[cf]k_6+\omega_3}{6},$$
$$k_4=-\frac{[df]k_6+\omega_4}{6},$$
$$k_5=-\frac{[ef]k_6+\omega_5}{6};$$

wartości te, wstawione do ostatniego równania, dostarczą nam jednego równania o niewiadomej k_6:

$$\{[ff]-\tfrac{1}{6}([af]^2+[bf]^2+[cf]^2+[df]^2+[ef]^2)\}k_6+\omega_6-\tfrac{1}{6}([af]\omega_1+[bf]\omega_2+[cf]\omega_3+$$
$$+[df]\omega_4+[ef]\omega_5)=0.$$

*

Po wyznaczeniu wartości na k_6 obliczamy z poprzednich pięciu równań wszystkie pozostałe korelaty.

Postępowanie to można zastosować także i w sieci o kształcie *czworobocznym.*

Przyjmując, że spostrzegaliśmy (jak zazwyczaj) kierunki[1]), otrzymamy ze względu na

$$K_r = 12,\ p = p_i = 4,\ p_w = 0,$$
$$l_2 = l = 6,\ l_1 = 0,\ b = 1,$$
$$w = 2\,l_2 + l_1 - 3\,p + p_w + 4 = 12 + 0 - 12 + 4 = 4 \textit{ warunki.}$$
$$w_{tr} = l_2 - p_i + 1 = 6 - 4 + 1 = 3 \text{ warunki,}$$
$$w_b = l - 2\,p + 3 = 6 - 8 + 3 = 1 \text{ warunek}$$

razem 4 warunki.

Kontrola: $(w) = b + (K_t) - 2\,p + 3 = b + (K_r) - p_i - 2\,p + 3 = 1 + 12 - 4 - 8 + 3 = 4.$

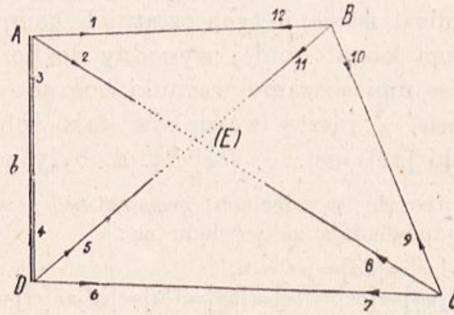

Fig. 32.

Aby $[ab] = [ac] = [bc] = 0$, należy obrać następujące warunki trójkątowe (poligonowe):

$$-(1) - \delta_1 + (2) + \delta_2 - (11) - \delta_{11} + (12) + \delta_{12} - \{-(5) - \delta_5 + (6) + \delta_6 - (7) - \delta_7 + \\ + (8) + \delta_8\} = 0,$$
$$-(2) - \delta_2 + (3) + \delta_3 - (4) - \delta_4 + (5) + \delta_5 - \{-(8) - \delta_8 + (9) + \delta_9 - (10) - \delta_{10} + \\ + (11) + \delta_{11}\} = 0,$$
$$-(1) - \delta_1 + (3) + \delta_3 - (4) - \delta_4 + (6) + \delta_6 - (7) - \delta_7 + (9) + \delta_9 - (10) - \delta_{10} + \\ + (12) + \delta_{12} = 0;$$

warunek boczny można utworzyć, albo ze względu na pozorny punkt środkowy (E), lub o 6-ciu członach, uwzględniając uwagi (dotyczące dokładności) § 4-go *c).*

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9	δ_{10}	δ_{11}	δ_{12}	ω	
I	-1	$+1$	.	.	$+1$	-1	$+1$	-1	.	.	-1	$+1$	ω_1	$=0$
II	.	-1	$+1$	-1	$+1$	.	.	$+1$	-1	$+1$	-1	.	ω_2	$=0$
III	-1	.	$+1$	-1	.	$+1$	-1	.	$+1$	-1	.	$+1$	ω_3	$=0$
IV	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	ω_4	$=0$

[1]) O ile spostrzegano *kąty,* nie zmienia to wcale zasad opisanego tu postępowania.

Spółczynniki ostatniego równania odchyłek są wypisane w równaniu (14) § 4-go *c*), β).

Równania korelat są w tym przypadku:

$$\begin{array}{ccccc} 8k_1 & . & . & +[ad]k_4+\omega_1=0 \\ . & 8k_2 & . & +[bd]k_4+\omega_2=0 \\ . & . & 8k_3 & +[cd]k_4+\omega_3=0 \\ [ad]k_1 & +[bd]k_2 & +[cd]k_3 & +[dd]k_4+\omega_4=0. \end{array}$$

Postępując analogicznie jak poprzednio przy wyrównaniu sieci promienistej, otrzymamy dla wyznaczenia ostatniej korelaty k_4:

$$\{[dd]-\tfrac{1}{8}([ad]^2+[bd]^2+[cd]^2)\}k_4+\omega_4-\tfrac{1}{8}([ad]\omega_1+[bd]\omega_2+[cd]\omega_3)=0,$$

a następnie, znając wartość na k_4:

$$k_1=-\tfrac{1}{8}([ad]k_4+\omega_1),\quad k_2=-\tfrac{1}{8}([bd]k_4+\omega_2),\quad k_3=-\tfrac{1}{8}([cd]k_4+\omega_3).$$

§ 6. Przykład wyrównania sieci tryangulacyjnej o znaczeniu lokalnem.

W § 8-ym rozdz. V-go podaliśmy na str. 142. jako trzeci przykład wyrównania spostrzeżeń zawarunkowanych wyrównanie sieci, założonej przez autora we wrześniu 1918. r. nad Morskiem Okiem w Tatrach dla zdjęć stereofotogrammetrycznych.

Wyrównanie to, mające znaczenie przykładu „szkolnego“, jest tak przeprowadzone, jakby należało postępować, gdyby spostrzeżeniami były kąty (niezależne na każdem stanowisku).

Ponieważ w rzeczywistości przeprowadzono pomiary metodą *kierunkową*, przeto obecnie podajemy *właściwe* wyrówanie sieci, zastosowując równocześnie uwagi, podane w § 5-ym.

Prócz podstawy $b=92{\cdot}06\,m$ z błędem średnim $\pm 0{\cdot}9\,cm$ (z ośmiu pomiarów łatami), pomierzono 12 kierunków na czterech stanowiskach sieci: VII, VIII, IX i XI; wyniki tych pomiarów podajemy poniżej.

Stan. VII. Stan. VIII.

	Cel do	Kierunki spostrzegane	Kąty			Cel do	Kierunki spostrzegane	Kąty	
1	XI	0° 0′ 0″	49°15′02·″5	$\alpha_{1.2}$	4	VII	0° 0′ 0″	48°31′02″·5	$\alpha_{4.5}$
2	IX	49 15 2·5	78 58 45·0	$\alpha_{2.3}$	5	XI	48 31 2·5	39 57 09·5	$\alpha_{5.6}$
3	VIII	128 13 47·5			6	IX	88 28 12·0		

Stan. IX. Stan. XI.

	Cel do	Kierunki spostrzegane	Kąty			Cel do	Kierunki spostrzegane	Kąty	
7	VIII	0° 0′ 0″	12°33′07·″5	$\alpha_{7.8}$	10	IX	0° 0′ 0″	15°37′18″·0	$\alpha_{10.11}$
8	VII	12 33 7·5	111 52 22·5	$\alpha_{8.9}$	11	VIII	15 37 18·0	3 15 17·5	$\alpha_{11.12}$
9	XI	124 25 30·0			12	VII	18° 52 35·5		

Ponieważ mamy tu tylko jedną podstawę, a sieci nie nawiązywano do tryangulacji państwowej (w obec czego *niema warunków nawiązania)*, wyznaczymy ilość warunków z równania

$$w = 2\,l_2 + l_1 - 3\,p + p_w + 4.$$
$$l_2 = l = 6,\ l_1 = 0,\ p = p_i = 4,\ p_w = 0,\ \text{zatem}$$
$$w = 12 - 12 + 4 = 4.$$

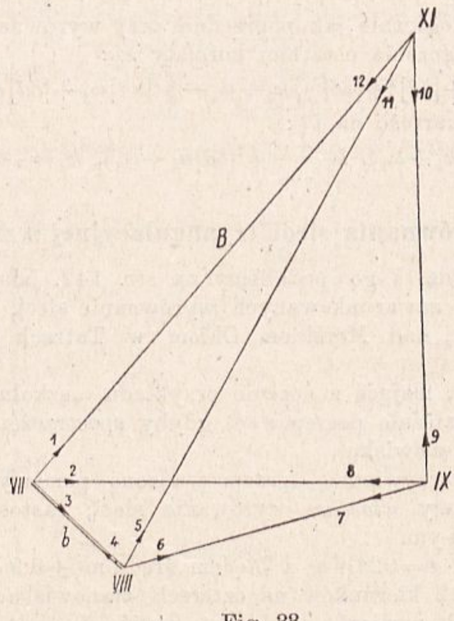

Fig. 33.

Z tego będzie $w_{tr} = l_2 - p_i + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ [warunki trójk. (polig.)]
i $w_b = l - 2p + 3 = 6 - 8 + 3 = 1$ (warunek boczny).

Warunki trójkątowe obierzemy ściśle wedle sposobu, podanego w § 5-ym, a warunek boczny ten sam, jak w trzecim przykładzie § 8-go rozdz. V-go str. 143).

W obec czego będą poszczególne odchyłki ω:

$$\omega_1 = \alpha_{1.2} + \alpha_{11.12} - \alpha_{5.6} - \alpha_{7.8} = 52^0 30' 20''{\cdot}0 - 52^0 30' 17''{\cdot}0 = +\ 3''{\cdot}0,$$
$$\omega_2 = \alpha_{2.3} + \alpha_{4.5} - \alpha_{8.9} - \alpha_{10.11} = 127^0 29' 47''{\cdot}5 - 127^0 29' 40''{\cdot}5 = +\ 7''{\cdot}0,$$
$$\omega_3 = \alpha_{1.3} + \alpha_{4.6} + \alpha_{7.9} + \alpha_{10.12} - 360^0 = 360^0 00' 05''{\cdot}0 - 360^0 = +\ 5''{\cdot}0,$$
$$\text{(z § 8-go rozdziału V-go)} \ldots\ldots \omega_4 = +13''{\cdot}0.$$

Spółczynniki (i ω_4) warunku czwartego otrzymamy najwygodniej na podstawie następującego rachunku schematycznego.

(Punkt środkowy: VIII).

		Poprawka log na 1″
$\log\sin\alpha_{1.3} = \log\sin 128^0 13' 47''{\cdot}5$	9·895165	−1·7
$\log\sin\alpha_{7.8} = \log\sin\ \ 12\ 33\ \ 7{\cdot}5$	9·337114	+9·4
$\log\sin\alpha_{10.11} = \log\sin\ \ 15\ 37\ 18{\cdot}0$	9·430211	+7·6
	28·662490	

			Poprawka log na 1″
$\log \sin \alpha_{2.3}$	$= \log \sin\ 78^0 58' 45''\cdot 0$	9·991916	+ 0·4
$\log \sin \alpha_{7.9}$	$= \log \sin 124\ 25\ 30\cdot 0$	9·916384	− 1·5
$\log \sin \alpha_{11.12}$	$= \log \sin\ 3\ 15\ 17\cdot 5$	8·754177	+ 37·0
		28·662477	

$$28\cdot662490 - 28\cdot662477 = +0\cdot000013;$$

zatem (w jednostkach 6-go miejsca log.) $\omega_4 = +13\cdot0$.

Łącząc ze sobą spółczynniki przy tychsamych poprawkach, otrzymamy czwarte równanie odchyłek w jednostkach 6-go miejsca log:

$$+1\cdot7\,\delta_1 + 0\cdot4\,\delta_2 - 2\cdot1\,\delta_3 - 10\cdot9\,\delta_7 + 9\cdot4\,\delta_8 + 1\cdot5\,\delta_9 - 7\cdot6\,\delta_{10} + 44\cdot6\,\delta_{11} - 37\cdot0\,\delta_{12} + \\ + 13\cdot0 = 0.$$

Dodając do niego 3 pierwsze, urobione wedle wskazówek § 5-go, otrzymamy *3 równania odchyłek* w zestawieniu schematycznem:

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9	δ_{10}	δ_{11}	δ_{12}	ω
a	−1	+1	.	.	+1	−1	+1	−1	.	.	−1	+1	+3·0
b	.	−1	+1	−1	+1	.	.	+1	−1	+1	−1	.	+7·0
c	−1	.	+1	−1	.	+1	−1	.	+1	−1	.	+1	+5·0
d	+1·7	+0·4	−2·1	.	.	.	−10·9	+9·4	+1·5	−7·6	+44·6	−37·0	+13·0

Prócz wyrównania powyższej sieci wyznaczymy także i błąd średni (po wyrówn.) boku B (patrz fig. 33); ponieważ

$$B = b\frac{\sin \alpha_{4.5}}{\sin \alpha_{11.12}}, \text{ przeto:}$$

$$F_4 = -\frac{B}{\rho''}\operatorname{ctg}\alpha_{4.5} = -0\cdot0052,\quad F_5 = \frac{B}{\rho''}\operatorname{ctg}\alpha_{4.5} = +0\cdot0052,$$

$$F_{11} = \frac{B}{\rho''}\operatorname{ctg}\alpha_{11.12} = +0\cdot1036,\quad F_{12} = \frac{B}{\rho''}\operatorname{ctg}\alpha_{11.12} = -0\cdot1036.$$

(Porówn. odnośne pozycje w przykładzie 3-cim § 8-go rozdz. V-go, str. 145.).

Równania *korelat* przedstawiają się w zestawieniu schematycznem:

	k_1	k_2	k_3	k_4	Wyrazy wolne	
	8·0	.	.	−103·2	+3·0	(=0)
	.	8·0	.	− 46·8	+7·0	(=0)
	.	.	8·0	− 20·8	+5·0	(=0)
	−103·2	−46·8	−20·8	+3632·8	+13·0	(=0)
Σ	−95·2	−38·8	−12·8	+3462·0	+28·0	(=0)

Powołując się na wzory § 5-go, wyznaczymy k_4 z równania:

$$\left\{[dd] - \tfrac{1}{8}([ad]^2 + [bd]^2 + [cd]^2)\right\} k_4 + \omega_4 - \tfrac{1}{8}([ad]\,\omega_1 + [bd]\,\omega_2 + [cd]\,\omega_3) = 0,$$

a mianowicie:

$[dd] = 3632{\cdot}80$ $\qquad$ $[ad]\,\omega_1 = -309{\cdot}60$

$[dd]^2 : 8 = 1331{\cdot}28$ $\qquad$ $[bd]\,\omega_2 = -327{\cdot}60$

$[bd]^2 : 8 = 273{\cdot}78$ $\qquad$ $[cd]\,\omega_3 = -104{\cdot}00$

$[cd]^2 : 8 = 54{\cdot}08$ $\qquad$ $-741{\cdot}20 : 8 = \mathbf{-92{\cdot}65}$

$\mathbf{1659{\cdot}14}$

$3632{\cdot}80 - 1659{\cdot}14 = \mathbf{1973{\cdot}66}$ $\qquad$ $1973{\cdot}66\,k_4 + 13{\cdot}0 + 92{\cdot}65 = 0,$

$k_4 = \mathbf{-0{\cdot}05353},$

następnie obliczymy k_1, k_2 i k_3:

$$k_1 = -\frac{\omega_1 + [ad]\,k_4}{8} = \mathbf{-1{\cdot}06554},$$

$$k_2 = -\frac{\omega_2 + [bd]\,k_4}{8} = \mathbf{-1{\cdot}18815},$$

$$k_3 = -\frac{\omega_3 + [cd]\,k_4}{8} = \mathbf{-0{\cdot}76418}.$$

Sprawdzając z powyższemi wartościami na k równanie sum, otrzymamy:

$$-95{\cdot}2\,k_1 - 38{\cdot}8\,k_2 - 12{\cdot}8\,k_3 + 3462{\cdot}0\,k_4 + 28{\cdot}0 =$$
$$101{\cdot}4394 + 46{\cdot}1002 + 9{\cdot}7815 - 185{\cdot}3209 + 28{\cdot}0 = +0{\cdot}0002.$$

Poprawki δ, obliczone na podstawie równań

$$\delta_i = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + d_i k_4, \text{ są:}$$

$\delta_1 = +1''{\cdot}739$, $\delta_4 = +1''{\cdot}952$, $\delta_7 = +0''{\cdot}281$, $\delta_{10} = -0''{\cdot}017$

$\delta_2 = +0{\cdot}101$, $\delta_5 = -2{\cdot}254$, $\delta_8 = -0{\cdot}625$, $\delta_{11} = -0{\cdot}134$

$\delta_3 = -1{\cdot}840$, $\delta_6 = +0{\cdot}302$, $\delta_9 = +0{\cdot}344$, $\delta_{12} = +0{\cdot}151$.

Poprawki te spełniają wszystkie 4 warunki w przybliżeniu do zera, powodując odchyłki zaledwie na 3-ciem miejscu:

$[a\delta] + \omega_1 = -0{\cdot}003$, $[b\delta] + \omega_2 = +0{\cdot}001$, $[c\delta] + \omega_3 = +0{\cdot}002$, $[d\delta] + \omega_4 = +0{\cdot}007$,

Bezpośrednie obliczenie $[\delta\delta]$ z błędów powyżej wymienionych dostarcza nam:

$$[\delta\delta] = 16{\cdot}033,$$

kontrolny wzór: $[\delta\delta] = -\omega k = 16{\cdot}031$ (zgodność dostateczna); w obec czego otrzymamy błąd średni jednego kierunku:

$$\mu = \sqrt{\frac{16{\cdot}0328}{4}} = \pm 2''{\cdot}02.$$

Zestawienie *kierunków i kątów wyrównanych.*

Stan. VII.

Kierunki			Kąty	
1	XI	0° 00′ 01″·74	49° 15′ 00″·86	$\alpha_{1.2}$
2	IX	49 15 02·60	78 58 43·06	$\alpha_{2.3}$
3	VIII	128 13 45·66		

Stan. VIII.

Kierunki			Kąty	
4	VII	$0^0\ 00'\ 01''{\cdot}95$	$48^0\ 30'\ 58''{\cdot}30$	$\alpha_{4.5}$
5	XI	48 31 00·25		
			$39^0\ 57\ \ 12{\cdot}05$	$\alpha_{5.6}$
6	IX	88 28 12·30		

Stan. IX.

Kierunki			Kąty	
7	VIII	$0^0\ 00'\ 00''{\cdot}28$	$12^0\ 33'\ 06''{\cdot}59$	$\alpha_{7.8}$
8	VII	12 33 06·87		
			111 52 23·47	$\alpha_{8.9}$
9	XI	124 25 30·34		

Stan. XI.

Kierunki			Kąty	
10	IX	$359^0\ 59'\ 59''{\cdot}98$	$15^0\ 37'\ 17''{\cdot}89$	$\alpha_{10.11}$
11	VIII	15 37 17·87		
			3 15 17·78	$\alpha_{11.12}$
12	VII	18 52 35·65		

Długość boku VII—XI, obliczona przy pomocy kątów *wyrównanych,* wynosi

$$(B) = 92{\cdot}06 \frac{\sin 48^0 30' 58''{\cdot}30}{\sin 3^0 15' 17''{\cdot}78}\, m = 1214{\cdot}64\, m.$$

Błąd średni (po wyrównaniu) długości (B) obliczymy na podstawie wzoru:

$$\mu^2_{(B)} = \mu^2 \left\{ [FF] - \frac{[aF]^2}{[aa]} - \frac{[bF.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cF.2]^2}{[cc.2]} - \frac{[dF.3]^2}{[dd.3]} \right\},$$

przyczem $[aa] = [bb.1] = [cc.2] = 8$, $[bF.1] = [bF]$, $[cF.2] = [cF]$,

$$[aF] = +0{\cdot}0052 - 0{\cdot}1036 - 0{\cdot}1036 \quad = -0{\cdot}2020,$$
$$[bF] = +0{\cdot}0052 + 0{\cdot}0052 - 0{\cdot}1036 \quad = -0{\cdot}0932,$$
$$[cF] = +0{\cdot}0052 - 0{\cdot}1036 \quad = -0{\cdot}0984,$$
$$[dF] = +44{\cdot}6 \times 0{\cdot}1036 + 37{\cdot}0 \times 0{\cdot}1036 = +8{\cdot}4537_6,$$

$$[dF] = +8{\cdot}45376$$
$$-\frac{[ad][aF]}{8} = -2{\cdot}60580$$
$$-\frac{[bd][bF]}{8} = -0{\cdot}54522$$
$$-\frac{[cd][cF]}{8} = -0{\cdot}25584$$
$$[dF.3] = +5{\cdot}04690,$$

$[dd.3] = 1973{\cdot}66$ (spółczynnik przy k_4 po wyeliminowaniu k_1, k_2, k_3)

$$[dF.3]^2 : [dd.3] = 25{\cdot}47120 : 1973{\cdot}66 = 0{\cdot}01291,$$

$$[FF] = 0{\cdot}02152$$
$$-\frac{[aF]^2}{8} = -0{\cdot}00510$$
$$-\frac{[bF]^2}{8} = -0{\cdot}00109$$
$$-\frac{[cF]^2}{8} = -0{\cdot}00121$$
$$-\frac{[dF.3]^2}{[dd.3]} = -0{\cdot}01291$$
$$[FF.4] = +0{\cdot}00121,$$

$$\mu_{(B)}' = \mu\sqrt{0{\cdot}00121} = \pm 0{\cdot}0703\,m$$
$$\mu'_{(B)} = \pm 7{\cdot}0_3\,cm.$$

Błąd $\mu_{(B)}$ jest to błąd średni (B), pochodzący *z tryangulacji;* chcąc wyznaczyć *całkowity* błąd średni tego boku, wynikający tak z tryangulacji jak i z *pomiarów długości b,* należy uwzględnić jeszcze wpływ błędu podstawy b na bok (B).

Ponieważ $(B):b = 1214{\cdot}64 : 92{\cdot}06 = 13{\cdot}194$, a $\mu_b = \pm 0{\cdot}9\,cm$, przeto:

$$\mu''_{(B)} = \pm 13{\cdot}194 \times 0{\cdot}9\,cm = \pm 11{\cdot}83\,cm.$$

Całkowity błąd średni długości (B) jest zatem:

$$\mu_{(B)} = \sqrt{7{\cdot}03^2 + 11{\cdot}83^2}\,cm = \pm 13{\cdot}7_6\,cm.$$

Jak tedy widzimy, przeprowadzono pomiary *tryangulacyjne* znacznie *dokładniej,* niż *pomiary długościowe,* co tłumaczy się użyciem zwyczajnych łat mierniczych do pomiaru podstawy.

B)

§ 7. Nieco o rozmierzaniu kraju. Powierzchnia odniesienia. Rodzaje sieci I-rzędnych.

Rozmierzanie kraju polega na wyznaczeniu sytuacji punktów, oznaczonych na terenie w sposób trwały, na podstawie pomiarów, dokonanych w sieci je łączącej.

W tym celu obieramy pewną powierzchnię (dającą się matematycznie określić) jako podłoże i odrzutowujemy na nią wszystkie punkty, zaznaczone przez nas na terenie.

Powierzchnię tę nazywamy *powierzchnią odniesienia.*

Wielkości, które nam oznaczają położenie rzutów owych punktów na przyjętej przez nas powierzchni odniesienia są długości i kąty, mianowicie odległości rzutów poszczególnych punktów i kąty między niemi zawarte.

Przy rozmierzaniu kraju obieramy jako powierzchnię odniesienia *elipsoidę obrotową spłaszczoną* o wymiarach, wyznaczonych z dotychczasowych pomiarów stopni południków.

Elipsoid takich mamy kilka [1]). W Europie zastosowujemy zazwyczaj *elipsoidę Bessela,* utworzoną na podstawie pomiarów 10 południków, a to głównie dlatego, że mamy dla niej obliczoną największą ilość tablic pomocniczych.

Po wyborze elipsoidy odniesienia musimy ją jeszcze ułożyć w pewien ściśle określony sposób względem punktów, zaznaczonych na obszarze zdjęcia.

Przypuśćmy, że *przystosowanie* elipsoidy odniesienia do obszaru zdjęcia ma nastąpić w punkcie P.

O ile punkt ten leży na geoidzie zerowej (w poziomie morza), wówczas przykładamy do niego tak elipsoidę, aby *kierunek normalnej do elipsoidy zlewał się z pionem punktu P, a oś biegunowa elipsoidy zachowała położenie równoległe do kierunku osi obrotu ziemi;* w tym przypadku będzie astronomiczna szerokość geograficzna (otrzymana z obserw. astron.) punktu P identyczną z szerokością geograficzną tego punktu na elipsoidzie odniesienia.

Gdy punkt P nie znajduje się na geoidzie zerowej, przykładamy elipsoidę *do punktu* P_0, znajdującego się *na geoidzie w pionie punktu P*, przyczem normalna do elipsoidy w punkcie P_0 musi się zgadzać z kierunkiem pionu punktu P.

Z przytoczonych tu uwag wynika, że w państwie, w którem zamierzamy przeprowadzić tryangulację, obejmującą cały jego obszar, obieramy *jeden* punkt P, jako punkt wyjścia i dostosowujemy w nim przyjętą przez nas elipsoidę odniesienia; w tym celu musimy przeprowadzić na tym punkcie pomiary: *szerokości geograficznej* (astron.), *azymutu dowolnego kierunku,* wychodzącego z owego punktu, będącego zarazem *kierunkiem boku sieci tryangulacyjnej* (I-rzędnej), oraz *długości geograficznej* (astronom.)

Aby rozmierzanie kraju przeprowadzić w sposób — o ile możności — *jednolity,* a zarazem nie obliczać i nie wyrównywać *zbyt wielkich i zawiłych* sieci tryangulacyjnych, należy nadać najgłówniejszej sieci taki kształt, by obejmowała *jaknajwiększe* obszary, nie składając się ze stosunkowo znacznej liczby punktów. Sieci tej nadajemy przeto ogólny kształt wieńca, opasującego znaczny obszar kraju i stąd jej nazwa sieć „*wieńcowa*".

[1]) Prócz wspomnianej elipsoidy *Bessela* (1841) używano także elipsoidę *Clarkea* (1880); w nowszych czasach podali *Helmert* (1907) i *Hayford* (1909) wymiary elipsoid na podstawie dalszych pomiarów; którą z elipsoid obierzemy przy rozmierzaniu pewnego kraju, jest dość obojętne.

Sieć wieńcowa musi zawierać w sobie punkt P o znanych spółrzędnych geograficznych i bok o wyznaczonym azymucie.

Dla wyznaczenia długości poszczególnych boków nie mierzymy prawie nigdy jednego z nich w całości, lecz zakładamy *osobną podstawę* (bazę), której długość mierzymy bardzo starannie przyrządami precyzyjnemi.

Z podstawy przechodzimy szeregiem trójkątów do jednego boku sieci wieńcowej, podobnie jak to miało miejsce przy sieciach o znaczeniu lokalnem; sieci, służące temu celowi, nazywamy, jak wiadomo, siećmi *podstawowemi.*

Ponieważ sieć wieńcowa pozostawia wewnątrz wielkie obszary, nie objęte pomiarami, przecinamy je siećmi „*łącznemi*“.

Sieci te, nawiązane obu swemi końcami do boków sieci wieńcowej, zachowują zazwyczaj w całej swej rozciągłości mniej więcej jeden kierunek i zmiejszają znacznie obszary, nie objęte tryangulacją.

Mimoto pozostają jeszcze nieuwzględnione dość znaczne obszary, na których zakładamy sieci *wypełniające,* które w pewnych przypadkach mogą redukować się tylko do poszczególnych punktów.

Sieci I-rzędne mogą być zatem siećmi:

a) wieńcowemi,

b) łącznemi,

c) wypełniającemi.

Pierwsze dwie grupy sieci wyrównujemy każdą z osobna zazwyczaj jako spostrzeżenia zawarunkowane; natomiast w wyjątkowych przypadkach, w których przeprowadzamy wyrównanie obu sieci *a)* i *b)* równocześnie, może się okazać wskazane zastosowanie metody spostrzeżeń pośrednich.

Sieci, należące do grupy *c)* wyrównujemy, albo w sposób, podany w rozdziale X-ym, albo metodą spostrzeżeń zawarunkowanych; zazwyczaj wypadnie tu korzystniejszą metoda wyrównania spółrzędnych (wedle § 8-go rozdz. X-go str. 260.), a tylko wyjątkowo metoda spostrzeżeń zawarunkowanych (ze względu na liczne warunki nawiązania).

Dodać jednak należy, że *równoczesne wyrównywanie* systemu, złożonego z sieci *a)* i *b),* jako zbyt wielkiego, *nie jest wskazanem,* a to ze względu na to, że mały błąd, który mimo wszelkich rachunków kontrolnych może pojawić się czasami w obliczeniach, obraca wtedy w niwec pracę kilkunastu lat, gdyż powoduje fałszywe wyniki w całej sieci, złożonej z systemów *a)* i *b).*

Sieci rzędów *wyższych,* jako sieci *wypełniające,* należy wyrównywać wedle sposobu, podanego w § 8-mym rozdz. X-go; *wyjątkowo* tylko mogą zajść przypadki, w których okazałoby się korzystniejszem przeprowadzenie wyrównania sieci II-rzędnej metodą spostrzeżeń zawarunkowanych.

§ 8. Wpływ metody spostrzegania na postępowanie przy wyrównaniu sieci tryangulacyjnej.

Przy tryangulacji pierwszorzędnej używamy dziś prawie wyłącznie metody pomiarów kątów *we wszystkich kombinacjach* (patrz § 4-ty rozdz. IX-go str. 195.), a to głównie dlatego, że metoda ta dostarcza nam kątów względnie kierunków, które wolne prawie zupełnie od błędów systematycznych, mogą być użyte jako niezależne spostrzeżenia do wyrównania sieci tryangulacyjnej.

Dawniej posługiwano się przeważnie *metodą kierunkową (Bessel)*, choć nie brak i w nowszych czasach tryangulacyj, dokonanych tą metodą.

Metoda ta, nie rugująca błędów systematycznych w tym stopniu jak poprzednia, dostarcza nam także na każdej stacji kierunków niezależnych o wagach równych, o ile spostrzeżeń dokonano serjami *pełnemi*.

Zazwyczaj jest to prawie nie do osiągnięcia przy tryangulacji pierwszorzędnej, tak że serje zamieniają się na częściowe, co powoduje znaczną komplikację w wyrównaniu stacyjnem i sieci.

Trzeci przypadek, dostarczający nam z wyrównania stacyjnego kierunków niezależnych o wagach różnych ma miejsce wtedy, gdy ilość kierunków stacyjnych wynosi 3. [Por. rozdz. IX-ty § 6 *c)* (25)].

Przypadek ten niema jednak znaczenia w sieciach I-rzędnych, w których zazwyczaj schodzą się na stacjach conajmniej 4 kierunki.

Z tych to powodów odgrywa metoda *Schreibera* (spostrz. kątów we wszystkich kombinacjach) tak *ważną rolę* przy tryangulacji *I-rzędnej*.

Mimoto należy omówić i te przypadki, w których spostrzeżeń dokonaliśmy innemi metodami, nie dostarczającemi nam na każdej stacji niezależnych wielkości.

Ma to miejsce przy spostrzeganiu kierunków w serjach *częściowych*, lub kątów w *różnych*, dowolnych *kombinacjach*.

O ile spostrzegano kierunki w serjach częściowych, należy przeprowadzić wyrównania stacyjne wedle § 6 *b)* rozdz. IX-go, najlepiej sposobem podanym tam na przykładzie. (Str. 221. i dalsze).

Po przeprowadzeniu wyrównań stacyjnych można przy dalszem wyrównaniu obrać trzy sposoby postępowania.

Pierwszy sposób najdawniejszy, używany przez Bessela, wymaga dla przeprowadzenia dalszego wyrównania utworzenia t. zw. spółczynników *przenoszących*, [patrz (16) związek § 4-go rozdz. VI-go *A)*], które są zależne od spółczynników równań wag $Q_{1.1}$, $Q_{2.2}$, i t. d., znanych nam z wyrównań stacyjnych.

Kąty, uzyskane wyrównaniami stacyjnemi, nie spełnią warunków sieci, wywołując w poszczególnych równaniach warunkowych (liniowych) odchyłki ω [patrz równ. (6) § 3-go rozdz. VI-go *A)* str. 153].

Ostateczne równania korelat tworzymy przy pomocy tak *spółczyn-*

ników przenoszących, jak i ***spółczynników równań warunkowych*** [patrz równ. (18) § 4-go rozdz. VI-go *A)* str. 159].

Po wyznaczeniu korelat otrzymujemy poprawki kątów stacyjnych ze związków, zestawionych we wzorze (19) § 4-go zacytowanego ustępu.

Przeprowadzenie całkowitego wyrównania tą metodą jest jednak bardzo ***uciążliwe.***

O wiele ***bardziej przejrzystego,*** a zarazem prędzej do celu wiodącego sposobu dostarczył nam w nowszych czasach *Helmert;* sposób ten polega na zastosowaniu ***równoważnych systemów równań błędów.***

Wyrównanie stacyjne nie musi być przeprowadzone w całej pełni; wystarczy tylko ***urobić na każdej stacji pozorne spostrzeżenia*** $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots$ z odpowiedniemi wagami.

Zamiast wyznaczać poszczególne odchyłki ω, odnoszące się do warunków (liniowych) sieci z równań (6) § 3-go rozdz. VI *A)*, wyznaczamy je najszybciej z równań (6*) § 3-go (str. 155.) tego rozdziału, t. j. ze zredukowanych równań odchyłek, w których miejsce wyznaczanych kątów zajmują równoważne spostrzeżenia χ_1, χ_2, χ_3 i t. d.

Znając wartości poszczególnych odchyłek ω, tworzymy równania korelat, których spółczynniki urabiamy przez odpowiednią ***redukcję*** spółczynników równań warunkowych sieci. (Patrz zw. (11) i (12) § 3-go rozdz. VI-go *A)* str. 154.).

Po znalezieniu wartości korelat wyznaczamy przy pomocy związków (13) i (3) wartości wyrównanych kątów sieci.

Natomiast, o ile przeprowadzono wyrównania stacyjne z wyznaczeniem wartości *przybliżonych* kątów, wyznaczamy poszczególne ω z *równań* (6) a dalsze wyrównanie sieci przeprowadzamy przy pomocy równań (10) i (11).

Trzecia metoda (również Helmerta) polega na zamianie wyników wyr. stac. na ***pełną serję kierunków.***

Metoda ta wymaga wprawdzie przeprowadzenia całkowitych wyrównań stacyjnych wraz ze spółczynnikami równań wag $Q_{2.2}$, $Q_{2.3}$ i t. d., zamienia jednak wyniki wyrównania stacyjnego w serje pełne kierunków (o wagach różnych), a temsamem ułatwia w wysokim stopniu przeprowadzenie wyrównania samej sieci.

Sposób ten podaliśmy dokładnie wraz z odpowiednim przykładem w § 6 *c)* rozdz. IX-go, str. 223.

Wprawdzie wagi kierunków, dostarczone tą metodą nie są ***zupełnie ściste,*** o ile ilość kierunków stacyjnych jest większa niż 3, mimoto są wyniki, otrzymane tą metodą, zupełnie zadowalające w porównaniu z wynikami dostarczonemi metodami poprzedniemi.

Szczególnie dobre wyniki otrzymujemy, o ile ilość kierunków stacyjnych jest niewiele większą niż 3, a więc n. p. 4 lub 5. Jest to dość szczęśliwa okoliczność, gdyż sieci wieńcowe i łączne mają przeważnie stacje o 4 kierunkach.

Podobnie ma się sprawa, gdy na stacjach spostrzegano *kąty* w *różnych kombinacjach.* Nasamprzód przeprowadzamy wyrównanie stacyjne (jako wyrówn. spostrzeżeń pośrednich) i to albo kompletne wraz z wyznaczeniem spółczynników równań wag, jeżeli dalsze wyrównanie miałoby być przeprowadzone przy pomocy spółczynników przenoszących, lub polegające tylko na wyznaczeniu równoważnych spostrzeżeń $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots$ i ich wag, o ile zastosowalibyśmy przy dalszym rachunku sposób Helmerta, podany w § 3-cim rozdz. VI *A)*.

Prócz obu tu wymienionych sposobów można także przemienić wyniki wyrównania stacyjnego w pełną serję kierunków sposobem, opisanym w § 6 *c)* rozdz. IX-go.

W praktyce należałoby użyć sposobu *drugiego* (równ. syst. równ. błędów), o ile zależałoby nam na osiągnięciu możliwie *największej dokładności* (n. p. przy sieciach wieńcowych), zaś sposobu *trzeciego* przy wyrównaniu sieci I-rzędnych o *znaczeniu mniejszem* (n. p. krótkich sieci łącznych i t. p.).

Sposobu, podanego jako pierwszy, nie używamy dziś ze względu na wymagany przezeń wielki nakład pracy rachunkowej.

Obecnie posługujemy się w praktyce najchętniej sposobem drugim.

§ 9. Sieci podstawowe. Wyznaczenie odpowiedniej ilości spostrzeżeń kątów w sieci o danym kształcie.

Jak wiadomo z poprzednich uwag nazywamy *siecią podstawową sieć trójkątów, łączącą pomierzoną podstawę b, z bokiem właściwej sieci tryangulacyjnej B.*

Ponieważ długość boku *B* wyznaczamy z długości *b* za pośrednictwem trójkątów sieci podstawowej, przeto na dokładność wyznaczenia długości *B* mają wpływ: *kształt trójkątów* sieci podstawowej, *dokładność pomiarów kątowych,* a także i *ilość pomiarów kątów* sieci.

Kształt sieci podstawowej zależy przedewszystkiem od warunków *terenowych.* Nie jest rzeczą łatwą znaleść prostą 5—10 *km* długą w poziomie lub spadku nieprzekraczającym 3%, który należy przyjąć jako możliwie największy przy pomiarze łatami sztywnemi.

Nie badając bliżej wpływu kształtu sieci na dokładność przeniesienia, należy zaznaczyć, że najkorzystniejsze przenoszenie się błędów wykazują sieci t. zw. *rombowe,* t. j. o kształcie *pojedynczego* lub *podwójnego romba.* (Patrz fig. 34-ta *a)* i *b)*).

Między siećmi rombowemi są najkorzystniejsze sieci: pojedyncze, składające się z dwu przystających równoramiennych trójkątów, zbudowanych po obu stronach podstawy *b*, względnie sieci podwójne, składające się z dwu sieci pojedynczych, zbudowanych symetrycznie jak wyżej.

Helmert dowiódł[1]), że najkorzystniejsze warunki przeniesienia są w sieci rombowej, gdy *kąty* φ, *leżące naprzeciw* podstawy, wynoszą 33°32′. Uwagi tu przytoczone mogą być jednak uważane tylko jako ogólne *dyrektywy* przy zakładaniu sieci, gdyż kształt ich zależy, — jak wspomniałem, — głównie od terenu.

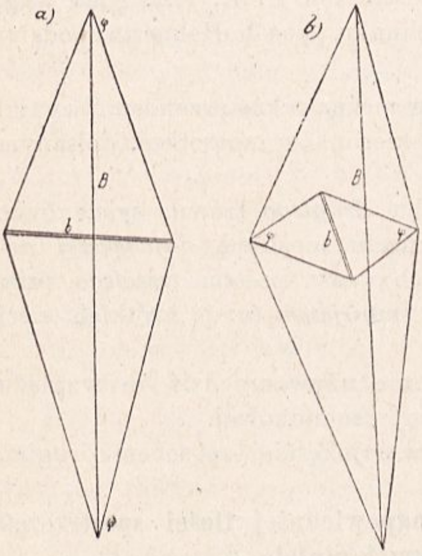

Fig. 34.

Natomiast jest zawsze w naszej mocy zwiększenie dokładności przeniesienia przez zastosowanie odpowiedniej dokładności przy spostrzeganiu kątów, jak też przez dokonanie spostrzeżeń poszczególnych kątów w odpowiedniej ilości.

Chcąc zatem uzyskać najlepsze warunki przeniesienia dla pewnej sieci, należy wprzód zbadać, które kąty sieci mają większy, a które mniejszy wpływ przy przenoszeniu się błędu podstawy b na błąd boku B i stosownie do tego każdy kąt sieci pomierzyć odpowiednią ilość razy.

Przeznaczając na pomiary kątowe sieci pewną ilość spostrzeżeń, wyzyskamy je tylko wówczas w sposób odpowiedni, jeśli w danym przypadku potrafimy oznaczyć takie ilości pomiarów poszczególnych kątów sieci, które spowodują przy zastosowaniu pewnej dokładności stosunkowo *najmniejszy* błąd boku B.

Stosunek $\frac{B}{b}$ da się, podobnie jak warunek boczny w sieci, wyrazić stosunkiem iloczynów sinusów odpowiednich kątów; jeżeli zatem

$$\frac{B}{b}=\frac{\sin(\alpha_i+\delta_i)\sin(\alpha_l+\delta_l)\ldots}{\sin(\alpha_k+\delta_k)\sin(\alpha_m+\delta_m)\ldots}, \tag{1}$$

to postępując analogicznie, jak przy warunkach podstawowych, otrzymamy:

$$\log\frac{B}{b}=\log\sin\alpha_i+\log\sin\alpha_l+\ldots.-\log\sin\alpha_k-\log\sin\alpha_m\ldots.. \\ +df_i\delta_i+df_l\delta_l+\ldots..-df_k\delta_k-df_m\delta_m-\ldots.., \tag{2}$$

przyczem df są poprawki logarytmiczne dla 1″, które w tym przypadku, jak w ogóle przy wyrównaniach sieci, dokładniejszych niż rzędu IV-go, należy wziąć na 7-em miejscu log.

[1]) *Fr. R. Helmert,* „Studien über rationelle Vermessungen"... III str. 45. Zeitschr. f. Math. u. Physik 1868.

Wzór na błąd średni funkcji kątów (kierunków) wyrównanych (por. wzór (18) § 6-go rozdz. V-go) opiewa:

$$\mu_F^2=\mu_0^2\left\{\left[\frac{FF}{p}\right]-\frac{\left[\frac{aF}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{bF}{p}.1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}-\frac{\left[\frac{cF}{p}.2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]}-\ldots\right\} \tag{3}$$

Wzór ten możemy zastosować także i dla wyznaczenia błędu funkcji $\log\frac{B}{b}$, nadając poszczególnym df_i znaczenie F_i.

Zastępując zatem w dalszych wywodach df_i przez F_i, oraz kładąc dla uproszczenia

$$\Delta_F=\log\frac{B}{b}-(\log\sin\alpha_i+\log\sin\alpha_l+\ldots-\log\sin\alpha_k-\log\sin\alpha_m-\ldots), \tag{4}$$

czyli
$$\Delta_F=[df\delta]=[F\delta], \tag{5}$$

będziemy się starali znaleść dla poszczególnych kątów (kierunków) takie wagi p, aby odwrotność wagi funkcji $\log\frac{B}{b}$:

$$\frac{1}{P}=\left[\frac{FF}{p}\right]-\frac{\left[\frac{aF}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{bF}{p}.1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]}-\frac{\left[\frac{cF}{p}.2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]}-\ldots \tag{6}$$

była *minimum*.

Wyznaczenie poszczególnych p, spełniających powyższy warunek, przeprowadzamy w następujący sposób pośredni.

Wzór (6) możemy przy r warunkach wyrównania określić także przy pomocy symbolu:

$$\frac{1}{P}=\left[\frac{FF}{p}.r\right]. \tag{6*}$$

Jeśli jednak we wzorze (6*) położymy $p_i=\frac{1}{p_i'}$, a $F_i=l_i$, przejdziemy na wzór, kontrolujący przy wyrównaniu spostrzeżeń pośrednich sumę

$$[p'\delta\delta]=[p'll.r], \tag{7}$$

o ile liczba niewiadomych wynosi r.

Korzystając z analogicznego wyglądu związków (6*) i (7), możemy położywszy $p_i=\frac{1}{p_i'}$, utworzyć pozorne równania błędów:

$$\delta_i=a_i\mathrm{I}+b_i\mathrm{II}+c_i\mathrm{III}+\ldots+F_i,\ \text{o wagach}\ p_i'=\frac{1}{p_i}, \tag{8}$$

a następnie przez rozwiązanie odpowiadających im równań normalnych kształtu:

$$\left[\frac{aa}{p}\right]\mathrm{I}+\left[\frac{ab}{p}\right]\mathrm{II}+\left[\frac{ac}{p}\right]\mathrm{III}+\ldots.+\left[\frac{aF}{p}\right]=0$$
$$\left[\frac{ab}{p}\right]\mathrm{I}+\left[\frac{bb}{p}\right]\mathrm{II}+\left[\frac{bc}{p}\right]\mathrm{III}+\ldots.+\left[\frac{bF}{p}\right]=0 \qquad (9)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\text{wyznaczyć } [p'\delta\delta]=\left[\frac{\delta\delta}{p}\right]=\left[\frac{FF}{p}.r\right]=\frac{1}{P}=min. \qquad (10)$$

Dla lepszego zrozumienia wytłumaczymy sprawę przy pomocy następującego przykładu.

Przypuśćmy, że równania odchyłek sieci podstawowej, sprowadzone do kształtu liniowego, są następujące:

$$\left.\begin{aligned}
a_1\,\vartheta_1+a_2\,\vartheta_2+a_3\,\vartheta_3+\ldots..+\omega_1&=0\\
b_1\,\vartheta_1+b_2\,\vartheta_2+b_3\,\vartheta_3+\ldots..+\omega_2&=0\\
c_1\,\vartheta_1+c_2\,\vartheta_2+c_3\,\vartheta_3+\ldots..+\omega_3&=0\\
d_1\,\vartheta_1+d_2\,\vartheta_2+d_3\,\vartheta_3+\ldots..+\omega_4&=0;
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

zaś równanie, powstałe ze stosunku $\frac{B}{b}$ (w kształcie liniowym), opiewa:

$$F_1\,\vartheta_1+F_2\,\vartheta_2+F_3\,\vartheta_3+\ldots..=\Delta. \qquad (12)$$

Ze spółczynników równań (11) i (12) tworzymy następujące pozorne równania błędów:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1\,\mathrm{I}+b_1\,\mathrm{II}+c_1\,\mathrm{III}+d_1\,\mathrm{IV}+F_1=\delta_1,\ \frac{1}{p_1}=p_1',\\
&a_2\,\mathrm{I}+b_2\,\mathrm{II}+c_2\,\mathrm{III}+d_2\,\mathrm{IV}+F_2=\delta_2,\ \frac{1}{p_2}=p_2',\\
&a_3\,\mathrm{I}+b_3\,\mathrm{II}+c_3\,\mathrm{III}+d_3\,\mathrm{IV}+F_3=\delta_3,\ \frac{1}{p_3}=p_3'\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Następnie na podstawie powyższych równań błędów układamy równania normalne {o kształcie równ. (9)} o czterech niewiadomych I, II, III i IV.

Rozwiązanie powyższych równań normalnych dostarczyłoby nam: $\left[\frac{\delta\delta}{p}\right]=$min., jednak dla z góry obranych wag p.

Ponieważ mamy właśnie za zadanie wyznaczyć owe wagi, trzeba przeto zastosować jeszcze następujące rozumowanie, aby dojść do żądanego celu.

Wagi kątów przyjmiemy równe ilości spostrzeżeń, a przeznaczając na całą sieć pewną ilość spostrzeżeń W, otrzymamy warunek:

$$[p]=W \text{ (ilości stałej).} \qquad (14)$$

Równania normalne (9) spełniają przy pewnych przyjętych wagach p warunek $\left[\frac{\delta\delta}{p}\right] =$ min.; przy zmianie poszczególnych wag, zmienią się spółczynniki równań (9), t. j. $\left[\frac{aa}{p}\right], \left[\frac{ab}{p}\right]$ i t. d., a w konsekwencji dalszej niewiadome I, II, . . ., poprawki δ, a wreszcie i suma $\left[\frac{\delta\delta}{p}\right]$.

Zmiana poszczególnych p jest jednak ograniczona warunkiem $[p] = W$, oraz tem, że wagi p mogą być tylko liczbami *dodatniemi*.

Przypuśćmy, że zestawiliśmy wszelkie możliwe kombinacje wag p, których $[p] = W$ i — zastosowując je do równań normalnych (9), utworzonych z pozornych równań (13) — znaleźliśmy, że ze wszystkich sum $\left[\frac{\delta\delta}{p}\right]$ pewna z nich jest *najmniejszą*, czyli, że obrawszy pewne wagi p, znaleźliśmy takie δ, które, spełniając $\left[\frac{\delta\delta}{p}\right] =$ min., dostarczają nam $\frac{1}{P} =$ min.

Starajmy się następnie zbadać, w jakim stosunku pozostają ze sobą odpowiadające sobie p_i i δ_i.

W tym celu połóżmy $p_i = w_i^2$ (na znak, że wagi są liczbami dodatniemi) i szukajmy $\left[\frac{\delta\delta}{p}\right] =$ min. z uwzględnieniem warunku $[p] = [w^2] = W$, uważając znalezione δ za wielkości *stałe*.

Wedle zasad analizy należy wyznaczyć warunki, wynikające z następującego związku:

$$\Phi = \left[\frac{\delta\delta}{w^2}\right] + k^2([w^2] - W) = \text{min.}, \tag{15}$$

dla zmieniających się wartości w.

Otrzymamy zatem n związków, odpowiadających n równaniom błędów, kształtu:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_i} = 0 = -\frac{\delta_i^2}{w_i^3} + k^2 w_i, \text{ lub}$$

$$\delta_i^2 = k^2 w_i^4. \tag{16*}$$

Oznaczając przez $|\delta_i|$ wartość absolutną błędu δ_i, napiszemy dalej na podstawie równania ostatniego:

$$|\delta_i| = k w_i^2, \; w_i^2 = \frac{|\delta_i|}{k}; \tag{17}$$

ponieważ jednak $[w_i^2] = W$, przeto

$$W = \frac{[|\delta|]}{k}, \; k = \frac{[|\delta|]}{W}, \text{ oraz} \tag{18}$$

$$p_i = w_i^2 = \frac{|\delta_i|}{[|\delta|]} W, \; \frac{1}{p_i} = \frac{[|\delta|]}{|\delta_i| . W}. \tag{19}$$

Tworząc z poszczególnych $\frac{\delta_i^2}{p_i} = |\delta_i| \frac{[|\delta|]}{W}$ sumą $\left[\frac{\delta\delta}{p}\right]$, otrzymamy ostatecznie:

$$\left[\frac{\delta\delta}{p}\right] = \frac{[|\delta|]^2}{W} = \frac{1}{P} = \text{min.} \tag{20}$$

Kształt związku (20) wskazuje, że warunek $\frac{1}{P} =$ min. będzie spełniony, gdy $[|\delta|]^2 =$ min., względnie gdy

$$[|\delta|] = \mathbf{min.} \tag{21}$$

Ze związków (19) i (21) wynika, że wagi kątów, przyjęte przy tworzeniu równań normalnych, muszą być proporcjonalne do bezwzględnych wartości błędów $|\delta|$, obliczonych na podstawie niewiadomych, uzyskanych z tychże równań normalnych.

Ponieważ analiza *nie podaje* nam sposobów dla utworzenia $[|\delta|] =$ min., posługujemy się w praktyce sposobem, zdążającym do tego przez stopniowe przybliżanie się.

Jak to wykazał *Helmert*, muszą wypaść *wagi niektórych kątów* sieci, (a conajmniej waga jednego kąta) *równe zeru*, przeto należy po ustawieniu równań błędów zastanowić się, które z wag przyjmiemy równe zeru.

Dla sieci rombowych daje nam w tym kierunku dyrektywy Helmert, wykazując, że kąty po obu stronach przekątni rombów nie mają być wcale mierzone.

Przy innych kształtach sieci możemy również zazwyczaj korzystać z doświadczeń, zrobionych w podobnych warunkach.

W przypadkach, w których nie możemy z góry określić, których kątów nie należy obserwować, przyjmujemy wagi wszystkich kątów (kierunków) równe *jedności*, a po rozwiązaniu równań normalnych, obliczamy poszczególne δ. Wagi kątów (kierunków), dla których wypadły δ bardzo małe w stosunku do innych, przyjmujemy równe 0, zaś wagi innych kątów (kierunków) równe absolutnym wartościom otrzymanych δ; zatem $p = |\delta|$. Postępowanie to powtarzamy tak długo, aż $|\delta|$, obliczone z ostatnich równań normalnych, będą w przybliżeniu równe ostatnio przyjętym wagom.

Właściwe wagi względnie ilości pomiarów obliczamy następnie na podstawie związku

$$p_i = \frac{|\delta_i|}{[|\delta|]} W. \tag{22}$$

Przyjęcie wag kątów (kierunków), odpowiadających bardzo małym $|\delta|$ jako równych zeru, powoduje ułatwienie rozwiązania równań normalnych, gdyż są to kąty (kierunki) o bardzo małym wpływie na dokładność długości boku *B*, co się objawia w rachunku przez to, że przeważna ilość spółczynników równania błędów, odpowiadającego temu kątowi (kierunkowi) jest równa zeru. Z równań błędów, których δ przyjęliśmy równe zeru, wyznaczamy zatem łatwo tyleż niewiadomych, przez co pozostała ilość niewiadomych zmniejsza się z wielką korzyścią dla przeprowadzenia rachunku.

Jeżeli sieć ma kształt rombowy, ułatwiają nam zadanie w wysokim stopniu wskazówki Helmerta.

W sieciach tych należy wedle nich:

a) nie mierzyć wcale kątów po obu stronach dłuższych przekątni obu rombów,

b) kąty, leżące *naprzeciw* dłuższej przekątni rombu małego, pomierzyć *tem większą ilość* razy, *im bardziej są rozwarte,*

c) kąty *po obu stronach podstawy* mierzonej obserwować stosunkowo *małą ilość* razy,

d) kąty w obu rombach *naprzeciw podstawy,* a szczególnie kąty te *rombu drugiego,* pomierzyć *największą ilość razy* i to w tem większej ilości, *im bardziej są ostre.*

Pozostałe 4 kąty, wiążące romb mały z dużym w obu wierzchołkach mniejszej przekątni dużego rombu, należy wreszcie pomierzyć tem *większą* ilość razy, im są *bardziej ostre.*

Inne metody wyznaczania *wag kątów* w sieciach podstawowych podaje prof. L. Krüger w publ. pruskiego Instytutu geod. [1]).

§ 10. Przykład wyznaczenia ilości spostrzeżeń kątów w sieci podstawowej.

Jako **przykład** podajemy projekt sieci podstawowej wraz z obliczeniem ilości spostrzeżeń kątów, odpowiadającej *najkorzystniejszemu* rozwinięciu podstawy, opracowany przez grupę studentów III-go roku oddziału mierniczego Politechniki Lwowskiej.

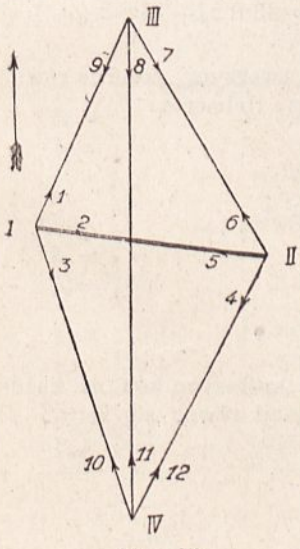

Fig. 35.

Na podstawie prowizorycznych wyników spostrzeżeń, dokonanych z dokładnością $10''-20''$, a mianowicie:

$$\text{St. I}\begin{cases}(1)=\ \ 0^0\ 0'\ 0''\\(2)=\ 74^0 29' 50''\\(3)=149^0 19' 50''\end{cases}\quad \text{St. II}\begin{cases}(4)=\ \ 0^0\ 0' 0''\\(5)=\ 73^0 15' 0''\\(6)=146^0 55' 0''\end{cases}$$

$$\text{St. III}\begin{cases}(7)=\ 0^0\ 0'\ 0''\\(8)=16^0 32' 10''\\(9)=31^0 50' 10''\end{cases}\quad \text{St. IV}\begin{cases}(10)=\ 0^0\ 0'\ 0''\\(11)=15^0 22' 10''\\(12)=31^0 55'\ 0''\end{cases}$$

obliczono kąty:

$$\alpha_{1.2}=74^0 29' 50'',\quad \alpha_{2.3}=74^0 50' 0'',\quad \alpha_{4.5}=73^0 15' 0'',$$
$$\alpha_{5.6}=73^0 40' 0'',\quad \alpha_{7.8}=16^0 32' 10'',\quad \alpha_{8.9}=15^0 18' 0'',$$
$$\alpha_{10.11}=15^0 22' 10'',\quad \alpha_{11.12}=16^0 32' 50'';$$

podstawa $b=8560{\cdot}102\,m$.

[1]) *L. Krüger*. Ueber d. Bestimmung der Winkelgewichte in Basisnetzen. Berlin 1920. (Veröff. d. preuss. geod. Institutes).

Sieć podstawowa wymagałaby przy wyrównaniu uwzględnienia czterech warunków, trzech trójkątowych, n. p. z trójkątów (I, II, III), (I, II, IV) i (II, III, IV) i jednego bocznego, ustawionego n. p. ze względu na punkt II jako centralny.

Równania warunkowe we formie linjowej są zatem:

1. $\alpha_{1.2}+\alpha_{5.6}+\alpha_{7.9}+\delta_2-\delta_1+\delta_6-\delta_5+\delta_9-\delta_7-180^0 \quad =0,$
2. $\alpha_{2.3}+\alpha_{4.5}+\alpha_{10.12}+\delta_3-\delta_2+\delta_5-\delta_4+\delta_{12}-\delta_{10}-180^0=0,$
3. $\alpha_{4.6}+\alpha_{7.8}+\alpha_{11.12}+\delta_6-\delta_4+\delta_8-\delta_7+\delta_{12}-\delta_{11}-180^0=0,$
4. $\log\sin\alpha_{1.2}+\log\sin\alpha_{10.12}+\log\sin\alpha_{7.8}-\log\sin\alpha_{7.9}-\log\sin\alpha_{2.3}-\log\sin_{11.12}$
$+df_{1.2}\vartheta_2-df_{1.2}\vartheta_1+df_{10.12}\vartheta_{12}-df_{10.12}\vartheta_{10}+df_{7.8}\vartheta_8-df_{7.8}\vartheta_7-df_{7.9}\vartheta_9$
$+df_{7.9}\vartheta_7-df_{2.3}\vartheta_3+df_{2.3}\vartheta_2-df_{11.12}\vartheta_{12}+df_{11.12}\vartheta_{11}=0,$

(przyczem, jak wiadomo df oznacza poprawkę log na 7-em miejscu log sin $\alpha_{i.k}$ dla 1″).

Ostatni warunek da się przedstawić krócej:

4. $\omega_4-df_{1.2}\vartheta_1+(df_{2.3}-df_{1.2})\vartheta_2-df_{2.3}\vartheta_3-(df_{7.8}-df_{7.9})\vartheta_7+df_{7.8}\vartheta_8+$
$-df_{7.9}\vartheta_9-df_{10.12}\vartheta_{10}+df_{11.12}\vartheta_{11}-(df_{11.12}-df_{10.12})\vartheta_{12}=0.$

Po wstawieniu wartości liczebnych poszczególnych df, otrzymamy ze względu, że

$df_{1.2}=5{\cdot}8,\ df_{2.3}=5{\cdot}7,\ df_{7.8}=70{\cdot}9,\ df_{7.9}=33{\cdot}9,\ df_{10.12}=33{\cdot}8,\ df_{11.12}+70{\cdot}9:$

4. $5{\cdot}8\vartheta_1+11{\cdot}5\vartheta_2-5{\cdot}7\vartheta_3-37{\cdot}0\vartheta_7+70{\cdot}9\vartheta_8-33{\cdot}9\vartheta_9-33{\cdot}8\vartheta_{10}+70{\cdot}9\vartheta_{11}+$
$-37{\cdot}1\vartheta_{12}+\omega_4=0.$

Funkcja: $\log\frac{B}{b}=\log\frac{B.(\mathrm{I-III})}{(\mathrm{I-III}).b}=\log\frac{\sin\alpha_{1.3}\sin\alpha_{5.6}}{\sin\alpha_{10.11}\sin\alpha_{7.9}}+df_{1.3}\vartheta_3-df_{1.3}\vartheta_1+df_{5.6}\vartheta_6+$
$-df_{5.6}\vartheta_5-df_{10.11}\vartheta_{11}+df_{10.11}\vartheta_{10}-df_{7.9}\vartheta_9+df_{7.9}\vartheta_7;$

zatem równanie dodatkowe będzie we formie skróconej, po uwzględnieniu wartości liczebnych poszczególnych df, ponieważ $df_{1.3}=-35{\cdot}5$, $df_{5.6}=6{\cdot}1$, $df_{10.11}=76{\cdot}6$:

5. $\Delta=35{\cdot}5\vartheta_1-35{\cdot}5\vartheta_3-6{\cdot}1\vartheta_5+6{\cdot}1\vartheta_6+33{\cdot}9\vartheta_7-33{\cdot}9\vartheta_9+76{\cdot}6\vartheta_{10}+$
$-76{\cdot}6\vartheta_{11}.$

Przy pomocy spółczynników owych pięciu równań tworzymy pozorne równania błędów, przyjmując wagi kierunków w myśl uwag Helmerta:

	I (a)	II (b)	III (c)	IV (d)	(F)	p_I
$\delta_1=$	−1	.	.	− 5·8	+35·5	5
$\delta_2=$	+1	−1	.	+11·5	.	1
$\delta_3=$	.	+1	.	− 5·7	−35 5	4
$\delta_4=$	.	−1	−1	.	.	5
$\delta_5=$	−1	+1	. .	.	− 6·1	1
$\delta_6=$	+1	.	+1	.	+ 6·1	4
$\delta_7=$	−1	.	−1	−37·0	+33·9	8
$\delta_8=$	.	.	+1	+70·9	.	0
$\delta_9=$	+1	.	.	−33·9	−33·9	8
$\delta_{10}=$	.	−1	.	−33·8	+76·6	8
$\delta_{11}=$	.	.	−1	+70·9	−76·6	0
$\delta_{12}=$	.	+1	+1	−37·1	.	8

(Suma spółczynników na każdej stacji równa się zeru).

Wagi kierunków wynikają z ilości spostrzeżeń kątów, które przyjęto:

$$i_{1.2}=1,\ i_{1.3}=4,\ i_{4.5}=1,\ i_{4.6}=4,\ i_{7.8}=0,\ i_{7.9}=8,\ i_{10.11}=0,\ i_{11.12}=8,$$

w obec czego wagi kierunków, odpowiadające ilości spostrzeżeń, są:

$$p_1=i_{1.2}+i_{1.3}=5,\quad p_2=i_{1.2}=1,\quad p_3=i_{1.3}=4,\quad p_4=i_{4.5}+i_{4.6}=5,\quad p_5=i_{4.5}=1,$$
$$p_6=i_{4.6}=4,\quad p_7=i_{7.8}+i_{7.9}=8,\quad p_8=i_{7.8}=0,\quad p_9=i_{7.9}=8,\quad p_{10}=i_{10.11}+i_{10.12}=8,$$
$$p_{11}=i_{10.11}=0,\quad p_{12}=i_{10.12}=8.$$

Z powodu przyjęcia $p_8=p_{11}=0$, są wedle uwag, przytoczonych w § 9-tym, także i:

$$\delta_8=\delta_{11}=0.$$

Okoliczność ta daje nam możność wyznaczenia obu ostatnich niewiadomych IV i III z odpowiednich równań błędów, a mianowicie:

$$\mathrm{III}+70{\cdot}9\ \mathrm{IV}=0$$
$$-\mathrm{III}+70{\cdot}9\ \mathrm{IV}-76{\cdot}6=0,$$

w obec czego

$$\mathrm{IV}=76{\cdot}6:141{\cdot}8=0{\cdot}5402,$$
$$\mathrm{III}=-70{\cdot}9\times 0{\cdot}5402=-38{\cdot}300.$$

Wartości te, wstawione do poprzednio ustawionych równań błędów, przekształcają je na równania o dwu niewiadomych.

Poniżej zestawiono w ten sposób zredukowane równania błędów, dodając w zestawieniu schematycznem wagi p_{I} i ich odwrotności, przyjęte do wyrównania I-go, δ_{I}, wynikające z pierwszego wyrównania, oraz $\frac{1}{p_{\mathrm{II}}}$ i δ_{II}, odpowiadające wyrównaniu powtórnemu.

	I (a)	II (b)	(F')	Wagi dla wyr. I-go p_{I}	$\frac{1}{p_{\mathrm{I}}}$	Błędy pozorne wyr. I-go δ_{I}	Wagi dla wyr. II-go p_{II}	$\frac{1}{p_{\mathrm{II}}}$	Błędy pozorne wyr. II-go δ_{II}
$\delta_1=$	−1	.	+32·367	5	0·200	− 7·03	7·0	0·143	− 7·12
$\delta_2=$	+1	−1	+ 6·212	1	1·000	+ 0·05	0·1	10·000	+ 0·06
$\delta_3=$	.	+1	−38·579	4	0·250	+ 6·98	6·9	0·145	+ 7·06
$\delta_4=$	.	−1	+38·300	5	0·200	− 7·26	7·3	0·137	− 7·34
$\delta_5=$	−1	+1	− 6·100	1	1·000	+ 0·06	0·1	10·000	+ 0·05
$\delta_6=$	+1	.	−32·200	4	0·250	+ 7·20	7·2	0·135	+ 7·29
$\delta_7=$	−1	.	+52·213	8	0·125	+12·81	13·0	0·077	+12·72
δ_9	+1	.	−52·213	8	0·125	−12·81	13·0	0·077	−12·72
δ_{10}	.	−1	+58·341	8	0·125	+12·78	13.0	0·077	+12·70
δ_{12}	.	+1	−58·341	8	0·125	−12·78	13·0	0·077	−12·70
					$[\|\delta\|]_{\mathrm{I}}$	=79·76		$[\|\delta\|]_{\mathrm{II}}$	=79·76

Równania normalne pierwszego wyrównania są:

$$2{\cdot}700\ \mathrm{I}-2{\cdot}000\ \mathrm{II}-15{\cdot}265=0$$
$$-2{\cdot}000\ \mathrm{I}+2{\cdot}700\ \mathrm{II}-44{\cdot}207=0,$$

zaś wartości niewiadomych:

$$\mathrm{I}=39{\cdot}401,\quad \mathrm{II}=45{\cdot}559.$$

Po wstawieniu tych wartości do równań błędów otrzymamy powyżej wyszczególnione δ_{I} (t. j. z pierwszego wyrównania), których wartości bezwzględne, odpowiednio zaokrąglone, przyjmujemy jako wagi dla wyrównania drugiego (p_{II}). Ze względu na zmienione w ten sposób wagi zmienią się równania normalne II-go wyrównania na następujące:

$$20{\cdot}432\,\mathrm{I}-20{\cdot}000\,\mathrm{II}+105{\cdot}992=0$$
$$-20{\cdot}000\,\mathrm{I}+20{\cdot}436\,\mathrm{II}-142{\cdot}934=0.$$

Równania te dostarczają nam następujących wartości niewiadomych:

$$\mathrm{I}=39{\cdot}489,\quad \mathrm{II}=45{\cdot}642,$$

przy pomocy których obliczamy δ_{II} (błędy pozorne wyrównania drugiego).

Suma $[|\delta|]$ jest w obu przypadkach jednakową i wynosi 79·76; okoliczność ta (jakoteż minimalne różnice między przyjętemi wagami p_{II}, a bezwzględnemi wartościami $|\delta_{\mathrm{II}}|$) jest dowodem, że osiągnęliśmy $[|\delta|]=\min$.

Aby wyznaczyć ilości spostrzeżeń kątów sieci podstawowej, należy przyjąć pewną stałą ilość spostrzeżeń (nastawień na cel) W.

Chcąc tę ilość przyjąć odpowiednio, należy ją tak dobrać, aby błąd boku B przy przyjęciu pewnego błędu kątowego μ_0 nie przekraczał pewnej przez nas ustalonej maksymalnej granicy.

Długość B, obliczona przy pomocy prowizorycznie pomierzonych kątów i podstawy b, wynosi:

$$B=b\frac{\sin\alpha_{1.3}\sin\alpha_{5.6}}{\sin\alpha_{7.9}\sin\alpha_{10.11}}=29970{\cdot}924\,m.$$

Nie chcąc, aby błąd boku B, pochodzący z tryangulacji, przenosił n. p. $B:750000$, przyjmiemy

$$\mu_B=\pm0{\cdot}04\,m.$$

Zmianie długości B o $0{\cdot}04\,m$, odpowiada zmiana $\log\left(\frac{B}{1\,m}\right)=4{\cdot}4767001$ o 5·8 jednostek na 7-em miejscu log.

Jeżeli błąd $\log\left(\frac{B}{1\,m}\right)$, który oznaczmy przez μ_{lB}, wynosi $\pm5{\cdot}8$, a średni błąd jednostkowy kątowy $\mu_0=\pm1''{\cdot}5$ (przyjęcie dość niekorzystne), otrzymamy ze względu na związek

$$\mu_{lB}=\mu_0\sqrt{\frac{1}{P}}=\mu_0\frac{[|\delta|]}{\sqrt{W}};$$

$$W=\left(\frac{\mu_0}{\mu_{lB}}[|\delta|]\right)^2=\left(\frac{1{\cdot}5}{5{\cdot}8}79{\cdot}76\right)^2=425{\cdot}5\text{ [1]}.$$

Wobec tego przeznaczamy 440 spostrzeżeń, t. j. nastawień na cel, dla powyżej omówionej sieci. (Gdybyśmy mieli podstawę przypuszczać, że μ_0 będzie większy, lub chcieli uzyskać dokładność większą niż $B:750000$, należałoby zwiększyć odpowiednio liczbę spostrzeżeń).

[1] Liczba ta ma być ze względu, że na jedną serję przypada 4 nastawienia, a ilość seryj musi być parzystą, podzielną przez 8.

Ilość spostrzeżeń I poszczególnych kierunków otrzymamy zatem:

$$\text{dla kierunku } i \text{ — } I_i = |\delta_i| \frac{W}{[|\delta|]},$$

$$\text{„ „ } k \text{ — } I_k = |\delta_k| \frac{W}{[|\delta|]},$$

$$\text{„ „ } l \text{ — } I_l = |\delta_l| \frac{W}{[|\delta|]}, \text{ i t. d.}$$

Ponieważ chcemy wykonać pomiary kątowe, a nie kierunkowe, należy przejść na każdem stanowisku z kierunków na kąty.

Uskuteczniamy to, biorąc na uwagę na każdem stanowisku δ o znakach dodatnich i ujemnych i przeznaczając dla każdego kąta taką samą ilość dodatnich jak i ujemnych δ, zamienionych oczywiście również na dodatnie. I tak biorąc na uwagę stanowisko I, otrzymamy, ze względu, że

$$\delta_1 = -7.12, \quad \delta_2 = +0{\cdot}06, \quad \delta_3 = +7{\cdot}06,$$

ilość nastawień przeznaczonych

$$\text{dla kąta } \alpha_{1.2} \text{ — } I_{1.2} = 2|\delta_2| \frac{W}{[|\delta|]} = 0{\cdot}06 . \frac{2W}{[|\delta|]},$$

$$\text{zaś dla kąta } \alpha_{1.3} \text{ — } I_{1.3} = 2|\delta_3| \frac{W}{[|\delta|]} = 7{\cdot}06 \frac{2W}{[|\delta|]}.$$

Postępując w ten sposób na wszystkich czterech stanowiskach, wyznaczymy poszczególne $I_{i.k}$ ze względu na $\frac{2W}{[|\delta|]} = \frac{880}{79{\cdot}76} = 11{\cdot}03$:

$$I_{1.2} = 0{\cdot}66, \; I_{1.3} = 77{\cdot}87, \; I_{4.5} = 0{\cdot}55, \; I_{4.6} = 80{\cdot}41, \; I_{7.9} = 140{\cdot}30, \; I_{10.12} = 140{\cdot}08,$$

przyczem jako kontrolę mamy związek $\Sigma I = W = 440$.

Z ilości nastawień obliczymy następnie ilość seryj dla każdego kąta, uwzględniając, że obserwowanie kąta w jednej serji wymaga czterech nastawień [dwu w jednem, dwu w drugiem położeniu lunety (w kierunku odwrotnym)].

Dzieląc uzyskane poprzednio liczby przez 4, otrzymamy ilość seryj. Aby jednak ilości seryj były liczbami parzystemi, a najmniejsza ilość seryj była równa 4, zaokrąglamy odpowiednio ścisłe wyniki obliczeń, jak to uwidoczniono w następującem zestawieniu.

Kąt α	Ilość		
	nastawień teoretyczna	seryj teoretyczna	seryj ustalona ostat.
(1.2)	0·66	0·17	4
(1.3)	77·87	19·47	18
(4.5)	0·55	0·14	4
(4.6)	80·41	20·10	20
(7.9)	140·30	35·08	32
(10.12)	140·08	35·02	32
Σ	439·87	109·98	110 [1])

[1]) Nie chcąc obniżać ilości seryj kątów $\alpha_{1.3}$, $\alpha_{4.6}$, $\alpha_{7.9}$ i $\alpha_{10.12}$, należałoby przyjąć je: 20, 20, 36 i 36 przy ogólnej sumie 120 seryj.

O ile możnaby przypuszczać, że z powodu nie dość licznej ilości spostrzeżeń μ_0 przekroczy wartość $1''\cdot5$, należałoby ilość nastawień, a tém samem i seryj odpowiednio zwiększyć, gdyż błąd długości B byłby wówczas większy od $B : 750000$.

Ponieważ prócz błędów tu omawianych wpływa na dokładność wyznaczenia długości B także i błąd pomiaru podstawy b, przeto jest wskazanem, przyjmować dla rombów pojedynczych ilość W conajmniej równą 400, zaś dla rombów podwójnych conajmniej równą 1000.

Przypuszczalny błąd średni wyrażenia $\log \frac{B}{b}$, a zarazem i $\log B$ (ze względu na przyjęcie postawy b jako bezbłędnej) będzie w jednostkach 7-go miejsca log:

$$\mu_{lB} = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{P}} = \mu_0 \frac{[|\delta|]}{\sqrt{W}} = \frac{79\cdot76}{\sqrt{440}} \mu_0 = \pm 3\cdot8024\, \mu_0;$$

o ile zatem $\mu_0 = 1''\cdot5$, wynosi $\mu_{lB} = \pm 5\cdot703$ (na 7-em miejscu log.).

Długość B, obliczona z kątów obserwowanych prowizorycznie, wynosi

$$29970\cdot924\, m, \quad \log\left(\frac{B}{1\, m}\right) = 4\cdot4767001.$$

Jeśli zatem wyznaczyliśmy poprzednio $W = 440$ dla $\mu_0 = 1''\cdot5$ i $\mu_B : B = 1 : 750000$, powinniśmy otrzymać obecnie B z tą właśnie dokładnością.

Zmianie długości B o $1\, m$ odpowiada zmiana logarytmu o 145 jednostek 7-go miejsca, zatem zmianie logarytmu $\frac{B}{1\, m}$ o $5\cdot703$ jednostek 7-go miejsca odpowiada zmiana B o $\frac{1}{145} \times 5\cdot703\, m = 0\cdot0393\, m$, t. j. $\mu_B : B = 1 : 760000$, a zatem $< 1 : 750000$.

Rachunek ostatnio przeprowadzony jest tylko *kontrolą* rachunkową, czy przyjęcie $W = 440$ było odpowiednie dla dokładności B.

Błąd średni μ_B nie jest jednak *całkowitym* błędem długości B; dla otrzymania całkowitego błędu średniego należy uwzględnić obok błędu tu obliczonego, pochodzącego z tryangulacji, jeszcze błąd, powstały wskutek bezpośredniego pomiaru podstawy, pomnożony przez stosunek powiększenia $\frac{B}{b}$.

Oznaczając błąd długości B, powstały z tryangulacji, przez μ_t, zaś błąd podstawy (z pomiaru bezpośredniego) przez μ_p, otrzymamy całkowity błąd średni wedle wzoru

$$(\mu_B) = \sqrt{\mu_t^2 + \left(\frac{B}{b} \mu_p\right)^2}.$$

Po wyznaczeniu ilości seryj dla każdego kąta należy sporządzić *plan przeprowadzenia spostrzeżeń* (obserwacyjny) każdego kąta.

Dla wyrugowania błędów systematycznych i przypadkowych podziału limbusu postąpimy tu analogicznie, jak przy spostrzeganiu metodą Schreibera.

Jeżeli ilość seryj pewnego kąta wynosi s, to ilość pomiarów tegoż kąta (obserwacyj lewego i prawego ramienia) jest $2s$, co odpowiada przy metodzie Schreibera ilościom ν i 2ν.

Kładąc $s=\nu$, możemy zastosować plany spostrzeżeń, przedstawione w § 4-ym rozdz. IX-go (str. 201 i d.), oraz wszelkie wzory tam wyprowadzone.

Zamiast spostrzegać kąt w każdej serji w obu położeniach lunety, obserwujemy go 2 razy, zmieniając jednak kierunek pomiaru (tam i z powrotem), przez $s/_2$ seryj w jednem, a przez dalszych $s/_2$ seryj w drugiem położeniu lunety. Jestto sposób używany przez Schreibera.

Zdaniem autora jest *lepiej* spostrzegać pewien kąt α raz *bezpośrednio*, a drugi raz w tem samem położeniu lunety *pośrednio* przez obserwację kąta $(360-\alpha)$, gdyż w ten sposób ruguje się błąd systematyczny, powstający przez przesunięcie się limbusu pod wpływem ruchu alhidady.

Prócz tego przy pomiarze więcej kątów na pewnem stanowisku, nie należy spostrzegać *więcej niż raz* pewnego kierunku na temsamem miejscu limbusu.

W myśl tych uwag będzie *plan obserwacyjny* kątów dla poprzednio omawianego przykładu następujący:

Stanowisko	Kąt α	Ilość		$d^0 = \frac{180^0}{s}$	δ^0	Podwójne pomiary w położeniu lunety	
		seryj s	pomiarów $2s$			I-em	II-em
I	(1.2)	4	8	45^0		0^0 45^0	90^0 135^0
„	(1.3)	18	36	10^0	$2{\cdot}5^0$	$2{\cdot}5^0$, $12{\cdot}5^0$, $22{\cdot}5^0$, $32{\cdot}5^0$, $42{\cdot}5^0$ i t. d.	$92{\cdot}5^0$, $102{\cdot}5^0$, $112{\cdot}5^0$, $122{\cdot}5$, $132{\cdot}5$ i t. d.
II	(4.5)	4	8	45^0		0^0 45^0	90^0 135^0
„	(4.6)	20	40	9^0	$4{\cdot}5^0$	$4{\cdot}5^0$, $13{\cdot}5^0$, $22{\cdot}5^0$, $31{\cdot}5^0$ $40{\cdot}5^0$ i t. d.	$94{\cdot}5^0$, $103{\cdot}5^0$, $112{\cdot}5^0$, $121{\cdot}5^0$, $130{\cdot}5$ i t. d.
III	(7.9)	32	64	$5^0 37'{\cdot}2$	—	$5{\cdot}37'$, $11^0 04'$, $16^0 42'$, $22^0 19$ i t. d.	$95^0 37'$, $101^0 04'$, $106^0 42'$, $112^0 19'$ i t. d.
IV	(10.12)	32	64	$5^0 37{\cdot}'2$	—	„	„

§ 11. Sieci wieńcowe.

Jak już wspomnieliśmy w § 7-ym, *opierają się wszelkie inne sieci*, założone celem rozmierzania kraju, zazwyczaj *na sieci wieńcowej*. (fig. 36).

Z tego powodu, jak też i ze względu na znaczną jej długość, musi być sieć wieńcowa szczególnie *dokładnie pomierzona i obliczona.*

Pomiary przeprowadzamy dziś prawie wyłącznie metodą Schreibera, mierząc kąty we wszystkich kombinacjach (str. 195. i d.) i przemieniamy je następnie na każdem stanowisku na kierunki niezależne o wadze około 24.

Wyrównanie sieci wieńcowych można przeprowadzić dwoma metodami: jako wyrównanie spostrzeżeń *pośrednich,* lub (z reguły) *zawarunkowanych.*

Przy zastosowaniu metody *pierwszej* występują jako *niewiadome w ilości 2(p—2) spółrzędne geograficzne* poszczególnych punktów sieci z wyjątkiem dwu początkowych punktów wyjścia, gdyż azymuty geograficzne

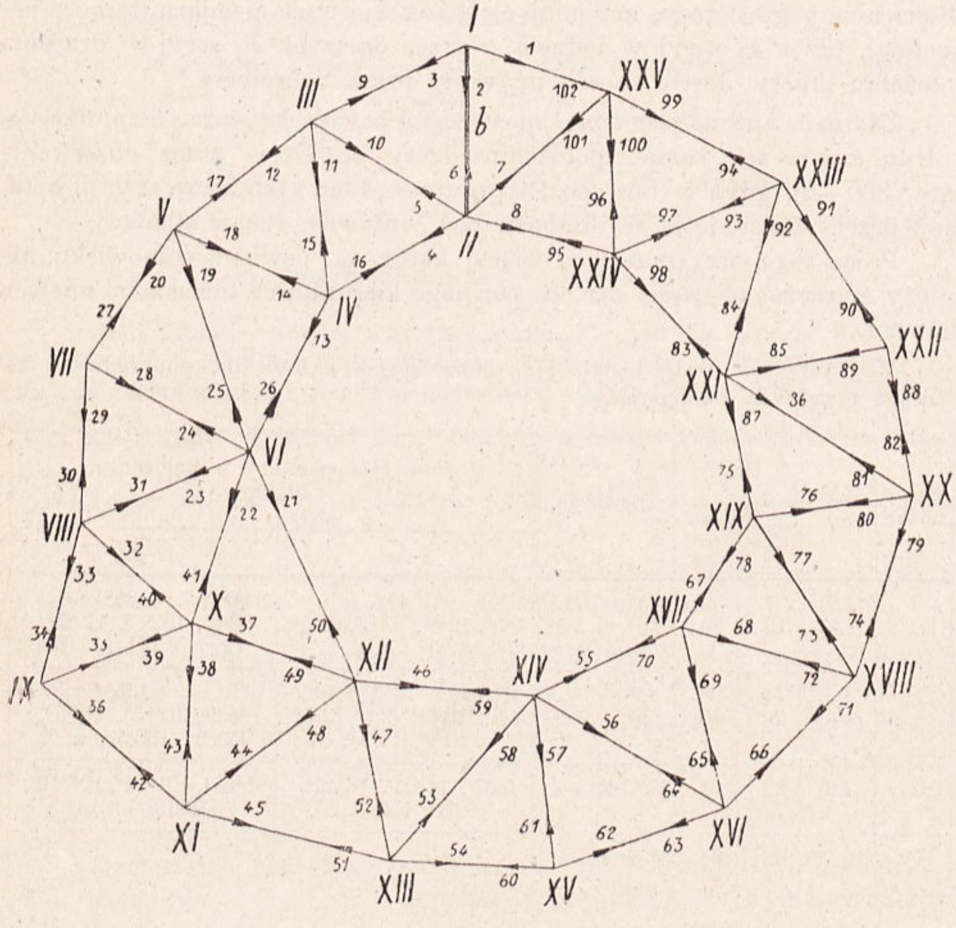

Fig. 36.

poszczególnych kierunków, uzyskane ze spostrzeganych kątów, są funkcjami szerokości i długości geogr. odpowiednich punktów. Tym sposobem należy posługiwać się w przypadkach, gdy *różnice długości geograficznych* między skrajnemi punktami zachodniemi względnie wschodniemi a punktem początkowym *przekraczają* 8°. O ile *różnice te* są *mniejsze,* okazuje się z reguły *korzystniejszą* metoda *druga,* przy której przeprowadzamy wyrównanie najodpowiedniej na płaszczyźnie; wzory Krügera[1]) któremi się wtedy posługujemy, wystarczają jednak tylko, o ile wyżej wymienione różnice długości geogr. nie przekraczają $\pm 8^0$.

W przypadku, przedstawionym na fig. 36., wymaga użycie metody spostrzeżeń pośrednich rozwiązania $2(25-2)=46$ równań normalnych.

Przy zastosowaniu *drugiej* metody wyrównawczej, t. j. *spostrzeżeń zawarunkowanych* występują w sieciach wieńcowych prócz znanych nam warunków sieci jeszcze *warunki zamknięcia poligonu* i one to właśnie powodują, że wyrównanie przeprowadzamy najkorzystniej po uskutecznionej redukcji kierunków na płaszczyźnie. Ilość warunków sieci otrzymujemy wedle wzoru (3) § 2-go, lub (1) § 3-go.

W sieci, przedstawionej na fig. 36-tej, mamy kierunków pomierzonych 102, punktów (stanowisk) $p_i=25$, przeto kątów pomierzonych $(K_t)=102-25=77$. Ponieważ $p_w=0$, przeto $p=p_i$.

Wobec tego, że prócz kątów pomierzono jeszcze i jedną podstawę b (względnie otrzymano jej długość z rozwinięcia sieci podstawowej), jest ilość warunków sieci (wedle wzoru (3) § 2-go):

$$(w)=1+77-50+3=31. \qquad (1)$$

Ponieważ nie mamy tu warunków nawiązania, otrzymujemy tę samą ilość warunków także przy pomocy wzoru (1) § 3-go (ze względu że $l=l_2=51$, $l_1=0$, $p_w=0$):

$$w=102-75+4=31. \qquad (1^*)$$

Warunków ściśle *trójkątowych* mamy tyle, ile trójkątów, t. j. 26, natomiast *poligonowych:* $l_2-p_i+1=51-25+1=27$.

Różnica ta powstaje stąd, że jeden warunek poligonowy należy do warunków zamknięcia poligonu, jaki tworzy sieć wieńcowa.

Ponieważ staramy się, aby warunki zawierały, jaknajmniejszą ilość spółczynników, przeto będzie korzystniej dla rachunku, jeśli uwzględnimy przy wyrównaniu warunek, zawierający kąty poligonu wewnętrznego. Otrzymamy zatem, wychodząc z (pozornego) azymutu podstawy, po przeprowadzeniu *redukcji kierunków na płaszczyznę:*

$$\alpha_{8.4}+\delta_4-\delta_8+\alpha_{16.13}+\delta_{13}-\delta_{16}+\ldots+\alpha_{98.95}+\delta_{95}-\delta_{98}-(9-2)\,180^0=0). \qquad (3)$$

Ilość warunków *bocznych* określa nam wzór:

$$w_b=l-2p+3=51-50+3=4. \qquad (4)$$

Dwa z nich wynikają z *iloczynu stosunków boków:*

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\text{I}-\text{II}}{\text{I}-\text{III}}\cdot\dfrac{\text{II}-\text{III}}{\text{III}-\text{IV}}\cdots\dfrac{\text{XXIV}-\text{XXV}}{\text{XXV}-\text{II}}\cdot\dfrac{\text{XXV}-\text{II}}{\text{I}-\text{II}}=1,\\[2ex] \dfrac{\text{VI}-\text{X}}{\text{VIII}-\text{X}}\cdot\dfrac{\text{VIII}-\text{X}}{\text{IX}-\text{X}}\cdot\dfrac{\text{IX}-\text{X}}{\text{XI}-\text{X}}\cdot\dfrac{\text{XI}-\text{X}}{\text{XII}-\text{X}}\cdot\dfrac{\text{XII}-\text{X}}{\text{VI}-\text{X}}=1;\end{array}\right| \qquad (5)$$

zaś *dwa dalsze* należą do warunków *zamknięcia poligonu.*

[1]) *Dr. L. Krüger.* Konforme Abbildung d. Erdellipsoids in d. Ebene, Potsdam 1912.

O ile przeprowadzono redukcję kierunków na płaszczyznę, dają się i dwa ostatnie warunki przedstawić we formie bardzo prostej, jako *rzuty boków* wewnętrznego (lub zewnętrznego) poligonu *na* przyjęte *osie układu;* zatem, oznaczając boki poligonu wewnętrznego przez s z odpowiedniemi wskaźnikami, zaś przez (a) pozorne azymuty kierunków, otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} &\{s_{II.IV}+\Delta_{II.IV}\}\sin\{(a)_{II.IV}+\delta_{II.IV}\}+\{s_{IV.VI}+\Delta_{IV.VI}\}\sin\{(a)_{IV.VI}+\delta_{IV.VI}\}+\ldots\\ &\qquad\ldots+\{s_{XXIV.II}+\Delta_{XXIV.II}\}\sin\{(a)_{XXIV.II}+\delta_{XXIV.II}\}=0,\\ &\{s_{II.IV}+\Delta_{II.IV}\}\cos\{(a)_{II.IV}+\delta_{II.IV}\}+\{s_{IV.VI}+\Delta_{IV.VI}\}\cos\{(a)_{IV.VI}+\delta_{IV.VI}\}+\ldots\\ &\qquad\ldots+\{s_{XXIV.II}+\Delta_{XXIV.II}\}\cos\{(a)_{XXIV.II}+\delta_{XXIV.II}\}=0,\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

przyczem Δ oznaczają poprawki boków, a δ poprawki azymutów.

Tak poprawki boków, jak i poprawki azymutów należy zastąpić poprawkami odpowiednich kierunków.

I tak biorąc na uwagę pierwszy wyraz przedostatniego warunku

$$\{s_{II.IV}+\Delta_{II.IV}\}\sin\{(a)_{II.IV}+\delta_{II.IV}\}=y_{IV}-y_{II}, \quad (7)$$

zastąpimy $\Delta_{II.IV}$, oraz $\delta_{II.IV}$ przez poprawki odpowiednich kierunków.

Ponieważ

$$\frac{s_{II.IV}}{b}=\frac{s_{II.IV}}{s_{II.III}}\cdot\frac{s_{II.III}}{b}=\frac{\sin\alpha_{10.11}\sin\alpha_{2.3}}{\sin\alpha_{15.16}\sin\alpha_{9.10}}, \quad (8)$$

zaś $(a)_{II.IV}=(a)_{II.I}+\alpha_{6.4}$ (przyczem $(a)_{II.I}$ jest azymutem pozornym, otrzymanym z redukcji azymutu astronom.), przeto

$$\left.\begin{aligned} &\log\{s_{II.IV}+\Delta_{II.IV}\}=\log b+\log\frac{\sin\alpha_{10.11}\sin\alpha_{2.3}}{\sin\alpha_{15.16}\sin\alpha_{9.10}}+df_{10.11}\,\delta_{11}+\\ &-df_{10.11}\,\delta_{10}+df_{2.3}\,\delta_3-df_{2.3}\,\delta_2-df_{15.16}\,\delta_{16}+df_{15.16}\,\delta_{15}-df_{9.10}\,\delta_{10}+\\ &\qquad+df_{9.10}\,\delta_9;\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

tak samo jest

$$\log\sin\{(a)_{II.IV}+\delta_{II.IV}\}=\log\sin(a)_{II.IV}+df'_{II.IV}\,\delta_4-df'_{II.IV}\,\delta_6\,.^{1)} \quad (10)$$

Z równań (7), (9) i (10) otrzymujemy

$$\left.\begin{aligned} &\log(y_{IV}-y_{II})=\log S_{II.IV}-df_{2.3}\,\delta_2+df_{2.3}\,\delta_3+\delta f'_{II.IV}\,\delta_4-\delta f'_{II.IV}\,\delta_6+\\ &+df_{9.10}\,\delta_9-(df_{9.10}+df_{10.11})\,d_{10}+df_{10.11}\,\delta_{11}+df_{15.16}\,\delta_{15}-df_{15.16}\,\delta_{16},\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

przyczem

$$\log S_{II.IV}=\log b+\log\frac{\sin\alpha_{10.11}\sin\alpha_{2\cdot3}}{\sin\alpha_{15.16}\sin\alpha_{9.10}}+\log\sin(a)_{II.IV}\,. \quad (12)$$

Oznaczając zmianę $\log S_{II.IV}$, odpowiadającą ***zmianie długości*** $S_{II.IV}$ *o 1 m* przez $\Delta S_{II.IV}$, otrzymamy, ***delogarytmując*** równanie (11):

---

1) Znaki $df'_{i.k}$ i $df''_{i.k}$ zależą od tego, w której ćwiartce znajduje się azymut $\alpha_{i.k}$ w pierwszej jest $df'=+$, $df''=-$, w drugiej $df'=-$, $df''=+$, w trzeciej $df'=+$, $df''=-$, w czwartej $df'=-$, $df''=+$.

$$\left.\begin{aligned} y_{IV}-y_{II}=S_{II.IV}-\frac{df_{2.3}}{\Delta S_{II.IV}}\delta_2+\frac{df_{2.3}}{\Delta S_{II.IV}}\delta_3+\frac{df'_{II.IV}}{\Delta S_{II.IV}}\delta_4-\frac{df'_{II.IV}}{\Delta S_{II.IV}}\delta_6+\frac{df'_{9.10}}{\Delta S_{II.IV}}\delta_9+ \\ -\frac{df_{9.10}+df_{10.11}}{\Delta S_{II.IV}}\delta_{10}+\frac{df_{10.11}}{\Delta S_{II.IV}}\delta_{11}+\frac{df_{15.16}}{\Delta S_{II.IV}}\delta_{15}-\frac{df_{15.16}}{\Delta S_{II.IV}}\delta_{16}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Analogicznie postąpimy z wyrażeniem

$$\{s_{II.IV}+\Delta_{II.IV}\}\cos\{(a)_{II.IV}+\delta_{II.IV}\}=x_{IV}-x_{II}. \quad (14)$$

Ponieważ

$$\log\cos\{(a)_{II.IV}+\delta_{II.IV}\}=\log\cos(a)_{II.IV}+df''_{II.IV}\delta_4-df''_{II.IV}\delta_6,\ ^{1)} \quad (15)$$

otrzymamy, kładąc

$$\log C_{II}^{IV}=\log b+\log\frac{\sin\alpha_{10.11}\sin\alpha_{2.3}}{\sin\alpha_{15.16}\sin\alpha_{9.10}}+\log\cos(a)_{II.IV}: \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} \log(x_{IV}-x_{II})=\log C_{II}^{IV}-df_{2.3}\delta_2+df_{2.3}\delta_3+df''_{II.IV}\delta_4-df''_{II.IV}\delta_6+ \\ +df_{9.10}\delta_9-(df_{9.10}+df_{10.11})\delta_{10}+df_{10.11}\delta_{11}+df_{15.16}\delta_{15}-df_{15.16}\delta_{16}. \end{aligned}\right. \quad (17)$$

Wprowadzając do rachunku $\Delta C_{II.IV}$, zmianę $\log C_{II}^{IV}$, odpowiadającą zmianie długości C_{II}^{IV} o 1 *m*, przemienimy związek (16) przez delogarytmowanie na następujący:

$$\begin{aligned} x_{IV}-x_{II}=C_{II}^{IV}-\frac{df_{2.3}}{\Delta C_{II.IV}}\delta_2+\frac{df_{2.3}}{\Delta C_{II.IV}}.\delta_3+\frac{df''_{II.IV}}{\Delta C_{II.IV}}\delta_4-\frac{df''_{II.IV}}{\Delta C_{II.IV}}\delta_6+\frac{df_{9.10}}{\Delta C_{II.IV}}\delta_9+ \\ -\frac{df_{9.10}+df_{10.11}}{\Delta C_{II.IV}}\delta_{10}+\frac{df_{10.11}}{\Delta C_{II.IV}}\delta_{11}+\frac{df_{15.16}}{\Delta C_{II.IV}}\delta_{15}-\frac{df_{15.16}}{\Delta C_{II.IV}}\delta_{16}. \end{aligned} \quad (18)$$

W podobny sposób utworzymy różnice spółrzędnych innych, bezpośrednio po sobie następujących, punktów poligonu wewnętrznego; sumując je, otrzymamy:

$$\begin{array}{ll} x_{IV}-x_{II}=C_{II}^{IV}+\frac{1}{\Delta C_{II.IV}}\Sigma df\,\delta & y_{IV}-y_{II}=S_{II}^{IV}+\frac{1}{\Delta S_{II.IV}}\Sigma df\,\delta \\ x_{VI}-x_{IV}=C_{IV}^{VI}+\frac{1}{\Delta C_{IV.VI}}\Sigma df\,\delta & y_{VI}-y_{IV}=S_{IV}^{VI}+\frac{1}{\Delta S_{V.VII}}\Sigma df\,\delta \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ x_{II}-x_{XXIV}=C_{XXIV}^{II}+\frac{1}{\Delta C_{XXIV.II}}\Sigma df\,\delta & y_{II}-y_{XXIV}=S_{XXIV}^{II}+\frac{1}{\Delta S_{XXIV.II}}\Sigma df\,\delta \\ \hline 0=\omega_C+\Sigma\frac{df}{\Delta C}\delta, & 0=\omega_S+\Sigma\frac{df}{\Delta S}\delta. \end{array} \quad (19)$$

W ten sposób będą miały warunki zamknięcia poligonu również kształt *liniowy*.

---

1) Patrz uwaga na str. 318.

Zaznaczyć wypada, że tak warunki boczne (5) jak i trójkątowe muszą zawierać *kąty,* względnie *kierunki zredukowane na płaszczyznę,* tak że całe wyrównanie przeprowadzamy na płaszczyźnie.

Przeprowadzenie tej redukcji nie należy wprawdzie do rachunku wyrównawczego, mimoto podajemy ogólne zasady, dotyczące tej kwestji, a to ze względu na trudności, które mogą tu się wyłonić.

Najkorzystniej postąpimy, zastosowując *Gaussowskie odwzorowanie wiernokątne* (hanowerskie) na płaszczyznę [1]).

W tym celu przeprowadzamy *redukcję* wszystkich kierunków *spostrzeganych* do kierunków *linij prostych,* łączących punkty w *płaszczyźnie odwzorowania.*

Ponieważ wzory redukcyjne kierunków zawierają spółrzędne płaskie odnośnych punktów, musimy mieć do dyspozycji dostatecznie przybliżone spółrzędne płaskie poszczególnych punktów sieci.

Postępowanie będzie zatem następujące.

Przypuśćmy, że wyznaczyliśmy w punkcie II-gim (patrz fig. 36-ta), przyjętym jako początek układu spółrzędne geograficznego oraz $a_{\mathrm{II.I}}$, azymut kierunku II.I. Znając z rozwinięcia sieci podstawowej długość II—I równą b (zredukowaną na poziom morza), obliczamy spółrzędne *geograficzne,* oraz spółrzędne *płaskie* punktu I-go.

Po wyznaczeniu przepełnień sferycznych w poszczególnych trójkątach, jest wskazane przeprowadzić prowizoryczne wyrównanie kątów w trójkątach, aby przy ich pomocy obliczyć z dostatecznem przybliżeniem tak spółrzędne geograficzne [2]), jak i płaskie wszystkich punktów sieci.

Po uskutecznieniu wyżej wspomnianej redukcji wszystkich kierunków spostrzeganych, przeprowadzamy wyrównanie sieci na płaszczyźnie, najlepiej sposobem, podanym przez *Krügera* [3]). Jestto t. zw. *wyrównanie grupami.*

Sposób ten przedstawia się w ogólnych zarysach następująco.

---

[1]) Patrz: *Dr. L. Krüger.* „Konforme Abbildung d. Erdellipsoids in d. Ebene“, Potsdam 1912. lub *Krüger,* „Formeln z. konformen Abbildung d. Erdellipsoids in. d. Ebene“, Berlin 1919. Zamiast powyższego odwzorowania, można zastosować także *podwójne odwzorowanie wiernokątne* na płaszczyznę; mniej wygodnem dla rachunku jest użycie spółrzędnych niepłaskich, a więc *geograficznych* lub *Soldnerowskich.* Natomiast należy dodać, że przy bardzo rozległych sieciach jest wskazane zastosowanie spółrzędnych, geograficznych.

[2]) O ile rozporządzamy kartami, z których można odczytać spółrzędne geograficzne poszczególnych punktów z dokładnością 1″, można przy zastosowaniu wzorów, podanych w zacytowanej poprawie Krügera, wyznaczyć z nich wprost przybliżone spółrzędne płaskie.

[3]) Ueber d. Ausgleichung v. bedingten Beobacht. in 2 Gruppen, 1905. Publikacja Inst. Geod. w Potzdamie.

Równania poprawek, pochodzące z zamknięć trójkątowych, niech będą:

$$
\begin{aligned}
&a_1\delta_1+a_2\delta_2+a_3\delta_3\ldots\ldots\ldots+a_0=0\\
&b_1\delta_1+b_2\delta_2+b_3\delta_3\ldots\ldots\ldots+b_0=0\\
&c_1\delta_1+c_2\delta_2+c_3\delta_3\ldots\ldots\ldots+c_0=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{20}
$$

zaś równania odchyłek powstałe z reszty warunków:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2+\alpha_3\delta_3\ldots\ldots\ldots=\alpha_0=0\\
&\beta_1\delta_1+\beta_2\delta_2+\beta_3\delta_3\ldots\ldots\ldots=\beta_0=0.
\end{aligned}
\tag{20*}
$$

Równania odchyłek zamknięć trójkątowych są względem siebie t. zw. *funkcjami wolnemi*[1]), t. j.

$$\left[\frac{ab}{p}\right]=\left[\frac{ac}{p}\right]=\ldots\ldots=\left[\frac{bc}{p}\right]=\ldots\ldots=0.$$

O ile *wszystkie* równania byłyby funkcjami wolnemi, rozwiązanie równań korelat byłoby nadzwyczaj łatwe; każdą korelatę wyznaczylibyśmy *niezależnie* od innych przy pomocy związków

$$k_1=-\frac{a_0}{\left[\frac{aa}{p}\right]},\ k_2=-\frac{b_0}{\left[\frac{bb}{p}\right]},\ k_3=-\frac{c_0}{\left[\frac{cc}{p}\right]},\ldots\ldots \tag{21}$$

Aby i równania (20*) przemienić na funkcje wolne, pomnożymy równania (20) przez spółczynniki nieoznaczone $\varrho_{1.1}$, $\varrho_{1.2}$, $\varrho_{1.3}\ldots$ i dodamy do pierwszego równania (20*), następnie przez $\varrho_{2.1}$, $\varrho_{2.2}$, $\varrho_{2.3}\ldots$ i dodamy do drugiego równania (20*) i t. d.

W rezultacie otrzymamy zamiast równań (20*) równania:

$$
\begin{aligned}
&A_1\delta_1+A_2\delta_2+A_3\delta_3+\ldots\ldots\ldots+A_0=0\\
&B_1\delta_1+B_2\delta_2+B_3\delta_3+\ldots\ldots\ldots+B_0=0,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

przyczem

$$
\begin{aligned}
&A_i=a_i\varrho_{1.1}+b_i\varrho_{1.2}+c_i\varrho_{1.3}+\ldots\ldots+\alpha_i\\
&B_i=a_i\varrho_{2.1}+b_i\varrho_{2.2}+c_i\varrho_{2.3}+\ldots\ldots+\beta_i.{}^{2})
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Aby tak równania (20), jak i przekształcone związki (22) były funkcjami wolnemi, muszą być *spełnione warunki:*

$$\left[\frac{aA}{p}\right]=\left[\frac{bA}{p}\right]=\left[\frac{cA}{p}\right]=\ldots=0,\ \left[\frac{aB}{p}\right]=\left[\frac{bB}{p}\right]=\left[\frac{cB}{p}\right]=\ldots=0, \tag{24}$$

które z powodu w tym przypadku wag równych przechodzą na

$$[aA]=[bA]=[cA]=\ldots=0,\ [aB]=bB]=[cB]=\ldots=0. \tag{25}$$

Równania (24) dostarczają nam jednak dla związków (20) równań korelat o kształcie równań (21).

[1]) Nazwę tę wprowadził duński uczony T. N. Thiele.

[2]) $\varrho_{i.k}$ nie jest tu ogólnie równe $\varrho_{k.i}$.

Kładąc zatem w powyższych równaniach zamiast a_0, b_0, c_0,...... sumy $[a\alpha]$, $[b\alpha]$, $[c\alpha]$,.... a zamiast k_1, k_2, k_3,.... $\varrho_{1.1}$, $\varrho_{1.2}$, $\varrho_{1.3}$......, a następnie zamiast a_0, b_0, c_0,.... sumy $[a\beta]$, $[b\beta]$, $[c\beta]$,....., a zamiast k_1, k_2, k_3,.... $\varrho_{2.1}$, $\varrho_{2.2}$. $\varrho_{2.3}$....., otrzymamy wartości wszystkich spółczynników ϱ; a mianowicie wobec wag równych:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{1.1} &= -\frac{[a\alpha]}{[aa]}, \quad \varrho_{1.2} = -\frac{[b\alpha]}{[bb]}, \quad \varrho_{1.3} = -\frac{[c\alpha]}{[cc]}, \dots \\ \varrho_{2.1} &= -\frac{[a\beta]}{[aa]}, \quad \varrho_{2.2} = -\frac{[b\beta]}{[bb]}, \quad \varrho_{2.3} = -\frac{[c\beta]}{[cc]}, \dots \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Związki te mają w rzeczywistości kształt jeszcze ***prostszy*** ze względu na to, że sumy $[aa]$, $[bb]$, $[cc]$ są utworzone ze spółczynników równań odchyłek, powstałych z zamknięć trójkątowych; sumy te wynoszą zatem przy wyrównaniu kątów 3, zaś przy wyrównaniu kierunków 6.

Po wyznaczeniu poszczególnych ϱ wstawiamy ich wartości do związków (23), a po obliczeniu wartości A i B, ustawiamy równania korelat, odpowiadające równaniom odchyłek (22).

Ilość równań korelat, które muszą być rozwiązane równocześnie, wynosi zatem ***tylko tyle,*** ile mamy ***warunków oprócz warunków,*** odpowiadających zamknięciom ***trójkątowym.***

Dla lepszego zrozumienia tego sposobu podajemy następujący przykład. Niech będą równania odchyłek, odnoszące się do kątów pięcioboku, przedstawionego na fig. 37-ej, następujące:

		δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9	δ_{10}	δ_{11}	δ_{12}	ω	
(a)	I	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	ω_1	=0
(b)	II	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	ω_2	=0
(c)	III	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	ω_3	=0
(d)	IV	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	ω_4	=0
(α)	V	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	1	ω_5	=0
(β)	VI	df_1	$-df_2$	.	df_4	$-df_5$	.	df_7	$-df_8$	.	df_{10}	$-df_{11}$	.	ω_6	=0

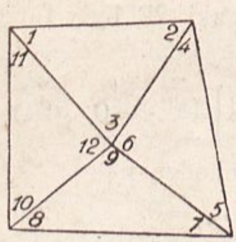

Fig. 37.

Cztery równania początkowe odpowiadają warunkom, wynikającym z zamknięć trójkątowych, piąte warunkowi kołowemu, zaś ostatnie warunkowi bocznemu.

Przyjmując wagi spostrzeżeń równe, otrzymamy cztery pierwsze korelaty:

$$k_1 = -\frac{\omega_1}{2}, \quad k_2 = -\frac{\omega_2}{3}, \quad k_3 = -\frac{\omega_3}{3}, \quad k_4 = -\frac{\omega_4}{3},$$

co odpowiada rozdzieleniu odchyłek w poszczególnych trójkątach na równe części, t. j. przeprowadzeniu wyrównania pierwszej grupy.

Dla przekształcenia obu ostatnich równań odchyłek i wyznaczenia k_5 i k_6 obliczymy nasamprzód:

$$[a\alpha]=1,\ [b\alpha]=1,\ [c\alpha]=1,\ [d\alpha]=1,$$
$$[a\beta]=df_1-df_2,\ [b\beta]=df_4-df_5,\ [c\beta]=df_7-df_8,\ [d\beta]=df_{10}-df_{11},$$
a następnie:
$$\rho_{1.1}=-\tfrac{1}{3},\qquad \rho_{1.2}=-\tfrac{1}{3},\qquad \rho_{1.3}=-\tfrac{1}{3},\qquad \rho_{1.4}=-\tfrac{1}{3},$$
$$\rho_{2.1}=\frac{df_2-df_1}{3},\ \rho_{2.2}=\frac{df_5-df_4}{3},\ \rho_{2.3}=\frac{df_8-df_7}{3},\ \rho_{2.4}=\frac{df_{11}-df_{10}}{3}.$$

Spółczynniki obu ostatnich równań zmienią się zatem na:
$$A_1=-\tfrac{1}{3},\ A_2=-\tfrac{1}{3},\ A_3=\tfrac{2}{3},\ A_4=-\tfrac{1}{3},\ A_5=-\tfrac{1}{3},\ A_6=\tfrac{2}{3},\ A_7=-\tfrac{1}{3},\ A_8=-\tfrac{1}{3},$$
$$A_9=\tfrac{2}{3},\ A_{10}=-\tfrac{1}{3},\ A_{11}=-\tfrac{1}{3},\ A_{12}=\tfrac{2}{3},$$
$$B_1=df_1+\frac{df_2-df_1}{3},\ B_2=-df_2+\frac{df_2-df_1}{3},\ B_3=\frac{df_2-df_1}{3},\ B_4=df_4+\frac{df_5-df_4}{3},$$
$$B_5=-df_5+\frac{df_5-df_4}{3},\ B_6=\frac{df_5-df_4}{3},\ B_7=df_7+\frac{df_8-df_7}{3},\ B_8=-df_8+\frac{df_8-df_7}{3},$$
$$B_9=\frac{df_8-df_7}{3},\ B_{10}=df_{10}+\frac{df_{11}-df_{10}}{3},\ B_{11}=-df_{11}+\frac{df_{11}-df_{10}}{3},\ B_{12}=\frac{df_{11}-df_{10}}{3}.$$
(ω_5 i ω_6 pozostają bez zmiany).

Korelaty k_5 i k_6 obliczymy zatem z dwu równań:
$$[AA]k_5+[AB]k_6+\omega_5=0$$
$$[Ab[k_5+[BB]k_6+\omega_6=0.$$

Ogólne równanie poprawek przedstawia się wobec przekształcenia obu ostatnich równań poprawek:
$$\delta_i=a_i k_1+b_i k_2+c_i k_3+d_i k_4+A_i k_5+B_i k_6;$$
a ponieważ przez rozdział odchyłek w poszczególnych trójkątach uwzględniliśmy już pierwsze cztery człony w związku na δ, przeto kąty, uzyskane z wyrównania pierwszej grupy, należy jeszcze tylko poprawić o:
$$A_i k_5+B_i k_6,$$
aby otrzymać ich ostateczne wartości.

Przez uwzględnienie tych poprawek nie zmienia się sumy kątów w poszczególnych trójkątach, gdyż jak łatwo zauważyć jest:
$$A_1+A_2+A_3=0,\ A_4+A_5+A_6=0,\ A_7+A_8+A_9=0,\ A_{10}+A_{11}+A_{12}=0,$$
$$B_1+B_2+B_3=0,\ B_4+B_5+B_6=0,\ B_7+B_8+B_9=0,\ B_{10}+B_{11}+B_{12}=0.$$

Gdy się zważy, że w sieciach tryangulacyjnych, a szczególnie we wieńcowych, *większą ilość warunków* stanowią właśnie *warunki,* wynikające z *zamknięć trójkątów,* musi się przyznać, że sposób ten *zmniejsza* znacznie *nakład pracy rachunkowej* bez uszczerbku jego dokładności[1]).

[1]) Inny sposób, upraszczający w równej mierze wyrównanie sieci tryangulacyjnych przez zastosowanie warunków kierunkowych, podaje *S. Wellisch* w swej książce: „Theorie u. Praxis d. Ausgleichungsrechn.“ Wiedeń, Lipsk 1910, str. 148, oraz w rozprawach: „Netzorientierung durch Einführung v. Richtungsbedingungsgl.“ austr. Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1913, str. 178 i „Neue Methode d. sphärischen Netzausgleichung....“ 1915, Rozpr. Akademji Umiejętności we Wiedniu, t. 92.

*

W przypadku wag różnych przechodzą równania (26) na:

$$\left.\begin{array}{l}
\varrho_{1.1}=-\dfrac{\left[\dfrac{a\alpha}{p}\right]}{\left[\dfrac{aa}{p}\right]},\ \varrho_{1.2}=-\dfrac{\left[\dfrac{b\alpha}{p}\right]}{\left[\dfrac{aa}{p}\right]},\ \varrho_{1.3}=-\dfrac{\left[\dfrac{c\alpha}{p}\right]}{\left[\dfrac{aa}{p}\right]},\dots \\
\varrho_{2.1}=-\dfrac{\left[\dfrac{a\beta}{p}\right]}{\left[\dfrac{aa}{p}\right]},\ \varrho_{2.2}=-\dfrac{\left[\dfrac{b\beta}{p}\right]}{\left[\dfrac{bb}{p}\right]},\ \varrho_{2.3}=-\dfrac{\left[\dfrac{c\beta}{p}\right]}{\left[\dfrac{bb}{p}\right]},\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \qquad (26^*)$$

§ 12. Sieci łączne i wypełniające.

W sieciach łącznych występują prócz innych warunków, także i warunki *zamknięcia poligonu*, a to z tego powodu, że mamy tu z góry dane spółrzędne conajmniej dwu punktów po obu końcach sieci (patrz fig. 38).

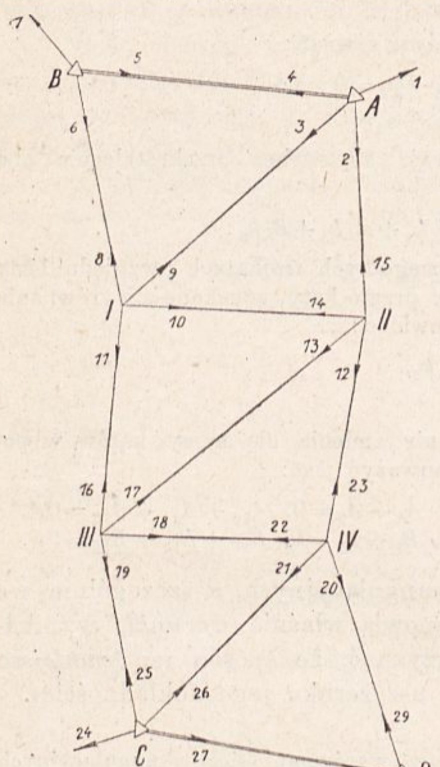

Fig. 38.

Ilość warunków otrzymamy najpewniej wedle wzoru (1) § 3-go, uwzględniając ponadto warunki kątowe, nawiązania i warunki zamknięcia polig.

W sieci, przedstawionej na fig. 38., jest ilość linij (bez kierunków nawiązujących) $l=l_2=13$, $l_1=0$, a dalej $p=p_i=8$, $p_w=0$, zatem: $w=26-24+4=6$, (jest to zarazem i w_{tr}, gdyż $w_{tr}=13-8+1=6$).

Prócz tego należy uwzględnić (wobec tego, że ilość warunków bocznych $w_b=13-16+3=0$, $w_p=b-1=1$), jeszcze jeden warunek podstawowy, cztery warunki z powodu obserwacji 4 kątów stałych sieci wieńcowej i trzy warunki zamknięcia polig., zatem razem $6+1+4+3=14$.

Ze względu na warunki zamknięcia poligonowego należy wyrównanie sieci łącznych przeprowadzić również na *płaszczyźnie*.

Oprócz 6-ciu warunków, wynikających z zamknięć trójkątów, będziemy mieli zatem jeszcze:

$$\frac{\sin(\alpha_{8.9}-\delta_8+\delta_9)\sin(\alpha_{14.15}-\delta_{14}+\delta_{15})\sin(\alpha_{16.17}-\delta_{16}+\delta_{17})\sin(\alpha_{22.23}-\delta_{22}+\delta_{23})}{\sin(\alpha_{5.6}-\delta_5+\delta_6)\sin(\alpha_{2.3}-\delta_2+\delta_3)\sin(\alpha_{10.11}-\delta_{10}+\delta_{11})\sin(\alpha_{12.13}-\delta_{12}+\delta_{13}}\times$$

$$\times\frac{\sin(\alpha_{25.26}-\delta_{25}+\delta_{26})\sin(\alpha_{28.29}-\delta_{28}+\delta_{29})}{\sin(\alpha_{18.19}-\delta_{18}+\delta_{19})\sin(\alpha_{20.21}-\delta_{20}+\delta_{21})}=\frac{BA}{CD},$$

$$\alpha_{1.4}-(A)-\delta_1+\delta_4=0,\ \alpha_{5.7}-(B)-\delta_5+\delta_7=0,\ \alpha_{24.27}-(C)-\delta_{24}+\delta_{27}=0,$$
$$\alpha_{28.29}-(D)-\delta_{28}+\delta_{29}=0,$$

$$(\alpha)_{B.A}+\alpha_{5.6}-\delta_5+\delta_6+\alpha_{8.11}-\delta_8+\delta_{11}+\alpha_{16.19}-\delta_{16}+\delta_{19}+\alpha_{25.27}-\delta_{25}+\delta_{27}+$$
$$\pm 2\times 180^0-(\alpha)_{C.D}=0,$$

$$\{s_{B.I}+\Delta_{B.I}\}\sin\{(\alpha)_{B.I}+\delta_{B.I}\}+\{s_{I.III}+\Delta_{I.III}\}\sin\{(\alpha)_{I.III}+\delta_{I.III}\}+$$
$$+\{s_{III.C}+\Delta_{III.C}\}\sin\{(\alpha)_{III.C}+\delta_{III.C}\}-(y_C-y_B)=0,$$

$$\{s_{B.I}+\Delta_{B.I}\}\cos\{(\alpha)_{B.I}+\delta_{B.I}\}+\{s_{I.III}+\Delta_{I.III}\}\cos\{(\alpha)_{I.III}+\delta_{I.III}\}+$$
$$+\{s_{III.C}+\Delta_{III.C}\}\cos\{(\alpha)_{III.C}+\delta_{III.C}\}-(x_C-x_B)=0.$$

Po sprowadzeniu warunków do kształtu liniowego przeprowadzamy wyrównanie w sposób podany w § 11-ym.

Krótkie sieci łączne mogą być wyrównane korzystniej metodą spostrzeżeń *pośrednich.*

Prócz sieci *łącznych,* założonych między dwoma bokami jednej i tej samej sieci wieńcowej, zakładamy je w pewnych przypadkach także między siećmi, których *orjentację astronomiczną* przeprowadzono *oddzielnie.* Przypadek ten może zajść przy rozmierzaniu bardzo obszernych krajów, których nie można objąć jedną siecią wieńcową.

Dla połączenia obu istniejących sieci w jedną całość należy zatrzymać spółrzędne sieci ważniejszej (większej) jako wielkości stałe i dołączyć przy pomocy sieci łącznej drugą, istniejącą (mniejszą) sieć z zachowaniem jej kształtu, ustalonego poprzedniem wyrównaniem, (pomijając natomiast jej orjentację astronomiczną).

Wobec tego, że uważamy spółrzędne *jednej* tylko sieci za stałe, *odpadają tu warunki zamknięcia poligonowego* i nie ma potrzeby przeprowadzać wyrównania na płaszczyźnie, lecz na przyjętej *elipsoidzie odniesienia.*

Ze względu na bardzo małą ekscentryczność elipsoidy odniesienia, ułatwiamy sobie rozwiązanie poszczególnych trójkątów elipsoidalnych A, B, C, o krzywiznach w odnośnych punktach: k_A, k_B i k_C, obierając *dla każdego trójkąta kulę o krzywiźnie* $k=\frac{k_A+k_B+k_C}{3}$ i odtwarzając na niej trójkąty $(A'B'C')$ o bokach równych odpowiednim bokom trójkątów elipsoidalnych (ABC).

Oczywiście, że suma kątów w poszczególnych trójkątach wynosi tu $180^0+\varepsilon$, przyczem ε oznacza przepełnienie (eksces) sferyczne.

W warunkach podstawowych i (bocznych) zastępują długości boków sinusy, odpowiadających im kątów środkowych.

Sieci *wypełniające* wyrównywamy zazwyczaj metodą, podaną dokładnie w § 8-mym rozdziału X-go (str. 260), lub przechodząc ze spostrzeżeń *zawarunkowanych* na *pośrednie*.

W pewnych przypadkach może się jednak okazać korzystniejszą metoda spostrzeżeń zawarunkowanych.

Sposób przeprowadzenia wyrównania jest wówczas analogiczny, jak przy sieciach łącznych.

O ile sieci wypełniające I-rzędne, a także czasami i sieci II-rzędne wyrównywamy w niektórych przypadkach metodą spostrzeżeń zawarunkowanych, należy przeprowadzać wyrównanie sieci *III-* i *IV-rzędnych bezwarunkowo* jako *wyrównanie spółrzędnych*.

ROZDZIAŁ DWUNASTY.

Nieco o formułach interpolacyjnych, urobionych na podstawie doświadczeń.

§ 1. Uwagi wstępne.

Zagadnienia, związane ze zjawiskami przyrody lub naukami technicznemi, wymagają od nas często ustalenia *przybliżonego kształtu funkcyj* o jednej lub większej ilości zmiennych.

O ile znalibyśmy prawdziwy kształt funkcji, powodowałoby zastosowanie kształtu przybliżonego (bez oglądania się na spostrzeżenia) tylko *błędy teorji;* natomiast w przypadkach ustalania kształtu funkcji na podstawie doświadczeń, występują prócz błędów teorji także i *błędy spostrzeżeń.*

Tak w jednym jak i drugim przypadku możemy zastosować metodę najmniejszych kwadratów, (wychodząc z założenia, że *suma kwadratów różnic między wartościami danemi, a obliczonemi formułą przybliżoną, ma być minimum.*

Pomijając przypadki, gdzie chodzi tylko o błędy teorji, zajmiemy się w tym ustępie sposobami urabiania formuł przybliżonych na podstawie doświadczeń jako sprawą, mającą w praktyce bardzo ważne znaczenie.

W tym ostatnim przypadku postępujemy w sposób następujący.

Po zorjentowaniu się co do ilości zmiennych niezależnych funkcji, przedstawiamy ją, zależnie od jej charakteru, jako *szereg wedle rosnących potęg zmiennych niezależnych,* a zatem jako szereg *potęgowy,* lub (o ile funkcja ma charakter okresowy) jako szereg *trygonometryczny Fouriera.*

Ze względu na to, że omawiana tu sprawa nie wchodzi ściśle w zakres niniejszej książki, a czytelnik znajdzie ją przedstawioną wyczerpująco w dziełach i rozprawach specjalnych [1]), poprzestaniemy tylko na krótkim opisie obu tu zacytowanych sposobów.

[1]) Helmert, Ausgleichungsrechnung n. d. M. d. kl. Qu., Lipsk i Berlin 1907. str. 376—434; I. P. Gram, Ueber d. Entwickelung reeller Funkt. in Reihen mittels d. M. d. kl. Qu., Journal f. d. reine u. angew. Mathem. tom 94, 1883; C. Runge, Ueber die Vergleichung empir. Formeln, Zeistchr. f. Math. und Physik, tom 45, 1900. i. i.

§ 2. Zastosowanie szeregu potęgowego jako formuły interpolacyjnej.

O ile spostrzegana przez nas wielkość $f(p,q)$ *nie posiada* cech funkcji okresowej, rozwijamy ją w *szereg potęgowy*, otrzymując:

$$f(p,q)=\varrho_0+\varrho_1 p+\varrho_2 q+\varrho_3 p^2+\varrho_4 q^2+\varrho_5 p q+\ldots, \tag{1}$$

przyczem poszczególne ϱ są wielkościami stałemi.

Ponieważ szereg, przedstawiony wzorem (1), odpowiada szeregowi Taylora, przeto przedstawienie powyższe funkcji $f(p, q)$ jest tylko wówczas usprawiedliwione, gdy *funkcja* $f(p,q)$ i jej w grę wchodzące *pochodne* są w interwale, odpowiadającym naszym spostrzeżeniom, *ciągłe i skończone.*

Pomimo, że stwierdzenie tego *a priori* jest dla nas zazwyczaj niemożliwe i często tylko funkcja sama jest w obrębie naszych spostrzeżeń ciągła, a o jej pochodnych nie możemy stwierdzić niczego pewnego, używamy sposobu niniejszego (ewentualnie z pewnemi modyfikacjami) tak, jakby wszystkie poprzednio określone warunki były ściśle wypełnione.

Jest to możliwem z tego powodu, że spostrzegane wartości funkcji $f(p, q)$ nie są bezbłędne i że wobec tego formuła na funkcję będzie wyznaczona w granicach błędów spostrzeżeń.

Oczywiście, że w tych przypadkach ma formuła, w ten sposób uzyskana, charakter czysto *interpolacyjny* i nie można jej używać do wyznaczania wartości pochodnych.

W praktyce postępujemy w sposób następujący.

Bez pomocy zasady najmniejszych kwadratów obliczylibyśmy przy n spostrzeżeniach tyleż stałych ϱ. Z drugiej strony chcemy mieć formułę wprawdzie odpowiednio dostosowaną do spostrzeżeń, ale także i — o ile możności — jak najbardziej *prostą.*

Na podstawie prowizorycznych obliczeń względnie wykazów możemy się zawsze zorjentować, które stałe mają dla formuły znaczenie największe; tę też ilość stałych uwzględniamy w pierwszym naszym rachunku głównym.

Równania błędów, odpowiadające temu rachunkowi, o ile przyjmiemy na razie tylko 3 stałe i oznaczymy $\varrho_0=x$, $\varrho_1=y$, $\varrho_2=z$, $p_i=b_i$, $q_i=c_i$, $f(p_i q_i)=-l_i$, niech będą:

$$\delta_i=x+b_i y+c_i z+l_i. \tag{2}$$

Po wyznaczeniu niewiadomych x, y i z obliczamy błąd średni μ, który jest tu *średniem odchyleniem funkcji od wartości spostrzeganych,* przy pomocy wzoru:

$$\mu=\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-k}}=\sqrt{\frac{[ll.k]}{n-k}}, \tag{3}$$

t. j. przy trzech niewiadomych $\mu=\sqrt{\frac{[ll.3]}{n-3}}$.

O ile błąd μ wypada *większy*, niż przypuszczalny błąd średni spostrzeżeń, należy *ponawiać rachunek* z uwzględnieniem dalszej względnie dalszych stałych (jako niewiadomych), tak długo aż μ stanie się *mniejszym* od przypuszczalnego błędu średniego spostrzeżeń.

Przeprowadzając wyznaczenie niewiadomych wedle schematów, zastosowanych w trzecim przykładzie § 7-go rozdz. IV-go, mamy tę korzyść, że rachunki, użyte przy obliczeniu pierwszem, mogą być w całości użyte przy obliczeniu drugiem i t. d., przez co żadne obliczenie nie jest zmarnowanem, (chociaż wartości stałych, wyznaczonych poprzednio, zmieniają się). Taksamo i obliczenie każdorazowej sumy $[\delta\delta]$ z wzoru $[ll.k]$ wymaga tylko za każdem dorzuceniem nowej niewiadomej uwzględnienia dalszego wyrazu redukcyjnego.

Aby się zorjentować, które stałe mają *większy wpływ* na formułę, ułatwiamy sobie przy większej ilości zmiennych $p, q, r, \ldots$, spostrzegając funkcję $f(p, q, r \ldots)$ w warunkach, dla których nasamprzód wszystkie zmienne prócz p są zerami, następnie wszystkie zmienne prócz q są zerami i t. d., uzyskując w ten sposób przybliżone wartości stałych. Ostateczne wartości stałych wyznaczamy następnie, biorąc na uwagę wszystkie spostrzeżenia [1]).

Wreszcie zaznaczyć należy, że formuły tak uzyskane mają ważność *tylko w obrębie wykonanych doświadczeń* i użycie ich ekstrapolacyjne może doprowadzić do wyników bezużytecznych.

§ 3. Formuły interpolacyjne w przypadku zjawisk okresowych.

W tym przypadku przyjmiemy jako ogólny kształt funkcji *okresowej* następujący:

$$F(\varphi) = \varrho_0 + \varrho_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) + \varrho_2 \sin(\alpha_2 + 2\varphi) + \varrho_3 \sin(\alpha_3 + 3\varphi) + \ldots, \quad (1)$$

przyczem φ jest zmienną niezależną, a poszczególne ϱ i α wielkościami stałemi.

Związek (1) przybiera kształt liniowy, przydatny do rachunku przy użyciu metody najmniejszych kwadratów, po rozwinięciu poszczególnych wyrazów:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\alpha_1 + \varphi) = \sin\alpha_1 \cos\varphi + \cos\alpha_1 \sin\varphi \\ \sin(\alpha_2 + 2\varphi) = \sin\alpha_2 \cos 2\varphi + \cos\alpha_2 \sin 2\varphi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (3)$$

[1]) W niektórych przypadkach jest raczej wskazanem nie wyznaczać stałych przy pomocy wszystkich spostrzeżeń; n. p. przy wyznaczaniu stałych aneroidu wyznaczamy przy stałej temperaturze stałą nastawienia wskazówki i stałą posuwania się wskazówki, a następnie przy stałem ciśnieniu jeszcze raz stałą nastawienia wskazówki i stałą temperatury. Powodem tego jest możliwość zmiany stałej nastawienia wskazówki przy wysokich ciśnieniach.

Kładąc:
$$\left.\begin{array}{ll} \varrho_1 \sin\alpha_1 = y_1 & \varrho_1 \cos\alpha_1 = x_1 \\ \varrho_2 \sin\alpha_2 = y_2 & \varrho_2 \cos\alpha_2 = x_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots, \end{array}\right\} \quad (3)$$

otrzymamy z uwagi, że $F(\varphi)$, wielkość spostrzegana, jest obarczona pewnym błędem δ:

$$\left.\begin{array}{l} F(\varphi)+\delta=\varrho_0+y_1\cos\varphi+y_2\cos 2\varphi+y_3\cos 3\varphi+\dots \\ \quad +x_1\sin\varphi+x_2\sin 2\varphi+x_3\sin 3\varphi+\dots \end{array}\right\} \quad (4)$$

Rachunek przedstawia się bardzo prosto, jeśli amplitudę φ będziemy zmieniali o *jednakowy interwał*, wyczerpując w ten sposób spotrzeżeniami całkowity okres.

Zmieniając φ, otrzymujemy odpowiednie F; zatem

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{amplitudzie} & \varphi=0 & \text{niech odpowiada} & \text{spostrzeżenie} & F_0 \\ \quad " & \varphi=i & \quad " & \quad " & F_1 \\ \quad " & \varphi=2i & \quad " & \quad " & F_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ \quad " & \varphi=(n-1)i & \quad " & \quad " & F_{n-1}, \end{array}\right\} \quad (5)$$

przyczem $ni=2\pi$, (ewentualnie $ni=360^0$).

Równania błędów, przedstawione ogólnie równaniom (4), przedstawią się po oznaczeniu dla uproszczenia:

$$a=1,\ b=\cos\varphi,\ c=\sin\varphi,\ d=\cos 2\varphi,\ e=\sin 2\varphi, \dots l=-F_i, \quad (6)$$

w zestawieniu schematycznem:

	a	b	c	d	e	......	l
$\delta_1=$	1	$\cos 0$	$\sin 0$	$\cos 0$	$\sin 0$	......	$-F_0$
$\delta_2=$	1	$\cos i$	$\sin i$	$\cos 2i$	$\sin 2i$	......	$-F_1$
$\delta_3=$	1	$\cos 2i$	$\sin 2i$	$\cos 4i$	$\sin 4i$	......	$-F_2$
$\delta_4=$	1	$\cos 3i$	$\sin 3i$	$\cos 6i$	$\sin 6i$	......	$-F_3$
....	....	......	......	......	......	......	......

(7)

Równania normalne, utworzone na podstawie powyższych równań błędów, mają ze względu, że:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]=n, \quad [ab]=[ac]=[ad]=[ae]=\dots=0, \\ \quad [bb]=\frac{n}{2}, \quad [bc]=[bd]=[be]=\dots=0, \\ \quad\quad [cc]=\frac{n}{2}, \quad [cd]=[ce]=\dots=0, \\ \quad\quad\quad [dd]=\frac{n}{2}, \quad [de]=\dots=0, \\ \quad\quad\quad\quad [ee]=\frac{n}{2}, \dots\dots\dots \\ \quad\quad\quad\quad\quad \dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (8)$$

postać następującą:

$$
\left.\begin{array}{llllll}
n\varrho_0 & . & . & . & . & . \quad -[F]=0 \\
. & \frac{n}{2}y_1 & . & . & . & . \quad -[bF]=0 \\
. & . & \frac{n}{2}x_1 & . & . & . \quad -[cF]=0 \\
. & . & . & \frac{n}{2}y_2 & . & . \quad -[dF]=0 \\
. & . & . & . & \frac{n}{2}x_2 & . \quad -[eF]=0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right\} \tag{9}
$$

Wartości poszczególnych niewiadomych liczymy zazwyczaj, ponieważ

$$\varrho_0=\frac{[F]}{n}, \tag{10}$$

t. j. *średniej arytmetycznej wszystkich spostrzeżeń* F, od tejże wartości, zatem

$$F_0=\varrho_0+f_0,\ F_1=\varrho_0+f_1,\ F_2=\varrho_0+f_2\ldots, \tag{11}$$

przyczem ze względu na równania (10) i (11) jest

$$[f]=0.$$

Podstawiając w równaniach (9) wartości na F, określone wzorem (11), otrzymujemy:

$$y_1=\frac{2}{n}(f_0+f_1\cos i+f_2\cos 2i+\ldots)+\frac{2}{n}\varrho_0(1+\cos i+\cos 2i+\ldots), \tag{13}$$

a ostatecznie ze względu że $(1+\cos i+\cos 2i+\ldots)=[ab]=0$:

$$y_1=\frac{2}{n}(f_0+f_1\cos i+f_2\cos 2i+\ldots.),$$

a analogicznie

$$x_1=\frac{2}{n}(f_0+f_1\sin i+f_2\sin 2i+\ldots.). \tag{14}$$

Podobnych wzorów użyjemy do wyznaczenia dalszych stałych więc n. p.

$$
\left.\begin{array}{l}
y_2=\frac{2}{n}(f_0+f_1\cos 2i+f_2\cos 4i+\ldots.),\\
x_2=\frac{2}{n}(f_0+f_1\sin 2i+f_2\sin 4i+\ldots.),
\end{array}\right\} \tag{15}
$$

Błąd średni μ określa nam wzór:

$$\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-k}}, \tag{16}$$

przyczem k oznacza ilość niewiadomych.

Sumę $[\delta\delta]$ można tu również otrzymać w sposób bardzo prosty, wychodząc z wzoru $[\delta\delta]=[ll.k]$; po wprowadzeniu wartości średniej ϱ_0 i przeprowadzeniu nieznacznej transformacji, otrzymamy ostatecznie

$$[\delta\delta]=[ff]-\frac{n}{2}[\varrho\varrho], \tag{17}$$

przyczem $\varrho_i^2=x_i^2+y_i^2$.

Ponieważ każdą niewiadomą możemy wyznaczyć oddzielnie, przeto i tu będziemy postępowali jak w § 2-im, wyznaczając nasamprzód n. p. 3 niewiadome i tworząc błąd średni μ.

O ile błąd ten wypadnie *większy,* niż przypuszczalny błąd średni spostrzeżeń, wyznaczymy dwie następne niewiadome. Postępowanie to powtarzamy tak długo, aż wreszcie sprowadzimy wartość błędu μ *poniżej* przypuszczalnego błędu średniego samych spostrzeżeń, co będzie dla nas rękojmią, że błędy teorji są w tym przypadku *zaniedbywalne,* a kształt funkcji jest *dostatecznie dostosowany* do dokonanych spostrzeżeń.

Tak uzyskana formuła ma jednak tylko charakter *interpolacyjny.*

Lwów, 21/IV 1922.

Tablice kwadratów i pierwiastków

od $n=0$ do $n=8$.

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
0·01	0·0001	0·1000	0·51	0·2601	0·7141	1·01	1·0201	1·0050	1·51	2·2801	1·2288
0·02	0·0004	0·1414	0·52	0·2704	0·7211	1·02	1·0404	1·0100	1·52	2·3104	1·2329
0·03	0·0009	0·1732	0·53	0·2809	0·7280	1·03	1·0609	1·0149	1·53	2·3409	1·2369
0·04	0·0016	0·2000	0·54	0·2916	0·7348	1·04	1·0816	1·0198	1·54	2·3716	1·2410
0·05	0·0025	0·2236	0·55	0·3025	0·7416	1·05	1·1025	1·0247	1·55	2·4025	1·2450
0·06	0·0036	0·2449	0·56	0·3136	0·7483	1·06	1·1236	1·0296	1·56	2·4336	1·2490
0·07	0·0049	0·2646	0·57	0·3249	0.7550	1·07	1·1449	1·0344	1·57	2·4649	1·2530
0·08	0·0064	0·2828	0·58	0·3364	0·7616	1·08	1·1664	1·0392	1·58	2·4964	1·2570
0·09	0·0081	0·3000	0·59	0·3481	0·7681	1·09	1·1881	1·0440	1·59	2·5281	1·2610
0·10	0·0100	0·3162	0·60	0·3600	0·7746	1·10	1·2100	1·0488	1·60	2·5600	1·2649
0·11	0·0121	0·3317	0·61	0·3721	0·7810	1·11	1·2321	1·0536	1·61	2·5921	1·2689
0·12	0·0144	0·3464	0·62	0·3844	0·7874	1·12	1·2544	1·0583	1·62	2·6244	1·2728
0·13	0·0169	0·3606	0·63	0·3969	0·7937	1·13	1·2769	1·0630	1·63	2·6569	1·2767
0·14	0·0196	0·3742	0·64	0·4096	0·8000	1·14	1·2996	1·0677	1·64	2·6896	1·2806
0·15	0·0225	0·3873	0·65	0·4225	0·8062	1·15	1·3225	1·0724	1·65	2·7225	1·2845
0·16	0·0256	0·4000	0·66	0·4356	0·8124	1·16	1·3456	1·0770	1·66	2·7556	1·2884
0·17	0·0289	0·4123	0·67	0·4489	0·8185	1·17	1·3689	1·0817	1·67	2·7889	1·2923
0·18	0·0324	0·4243	0·68	0·4624	0·8246	1·18	1·3924	1·0863	1·68	2·8224	1·2961
0·19	0·0361	0·4359	0·69	0·4761	0·8307	1·19	1·4161	1·0909	1·69	2·8561	1·3000
0·20	0·0400	0·4472	0·70	0·4900	0·8367	1·20	1·4400	1·0954	1·70	2·8900	1·3038
0·21	0·0441	0·4583	0·71	0·5041	0·8426	1·21	1·4641	1·1000	1·71	2·9241	1·3077
0·22	0·0484	0·4690	0·72	0·5184	0·8185	1·22	1·4884	1·1045	1·72	2·9584	1·3115
0·23	0·0529	0·4796	0·73	0·5329	0·8544	1·23	1·5129	1·1091	1·73	2·9929	1·3153
0·24	0·0576	0·4899	0·74	0·5476	0·8602	1·24	1·5376	1·1136	1·74	3·0276	1·3191
0·25	0·0625	0·5000	0.75	0·5625	0·8660	1·25	1·5625	1·1180	1·75	3·0625	1·3229
0·26	0·0676	0·5099	0·76	0·5776	0·8718	1·26	1·5876	1·1225	1·76	3·0976	1·3266
0·27	0·0729	0·5196	0·77	0·5929	0·8775	1·27	1·6129	1·1269	1·77	3·1329	1·3304
0·28	0·0784	0·5292	0·78	0·6084	0·8832	1·28	1·6384	1·1314	1·78	3·1684	1·3342
0·29	0·0841	0·5385	0·79	0·6241	0·8888	1·29	1·6641	1·1358	1·79	3·2041	1·3379
0·30	0·0900	0·5477	0·80	0·6400	0·8944	1·30	1·6900	1·1402	1·80	3·2400	1·3416
0·31	0·0961	0·5568	0·81	0·6561	0·9000	1·31	1·7161	1·1446	1·81	3·2761	1·3454
0·32	0·1024	0·5657	0·82	0·6724	0·9055	1·32	1·7424	1·1489	1·82	3·3124	1·3491
0·33	0·1089	0·5745	0·83	0·6889	0·9110	1·33	1·7689	1·1533	1·83	3·3489	1·3528
0·34	0·1156	0·5831	0·84	0·7056	0·9165	1·34	1·7956	1·1576	1·84	3·3856	1·3565
0·35	0·1225	0·5916	0·85	0·7225	0·9220	1·35	1·8225	1·1619	1·85	3·4225	1·3601
0·36	0·1296	0·6000	0·86	0·7396	0·9274	1·36	1·8496	1·1662	1·86	3·4596	1·3638
0·37	0·1369	0·6083	0·87	0·7569	0.9327	1·37	1·8769	1·1705	1·87	3·4969	1·3675
0·38	0·1444	0·6164	0·88	0·7744	0·9381	1·38	1·9044	1·1747	1·88	3·5344	1·3711
0·39	0·1521	0·6245	0·89	0·7921	0·9434	1·39	1·9321	1·1790	1·89	3·5721	1·3748
0·40	0·1600	0·6325	0·90	0·8100	0·9487	1·40	1·9600	1·1832	1·90	3·6100	1·3784
0·41	0·1681	0·6403	0·91	0·8281	0·9539	1·41	1·9881	1·1874	1·91	3·6481	1·3820
0·42	0·1764	0·6481	0·92	0·8464	0·9592	1·42	2·0164	1·1916	1·92	3·6864	1·3856
0·43	0·1849	0·6557	0·93	0·8649	0·9644	1·43	2·0449	1·1958	1·93	3·7249	1·3892
0·44	0·1936	0·6633	0·94	0·8836	0·9695	1·44	2·0736	1·2000	1·94	3·7636	1·3928
0·45	0·2025	0·6708	0·95	0·9025	0·9747	1·45	2·1025	1·2042	1·95	3·8025	1·3964
0·46	0·2116	0·6782	0·96	0·9216	0·9798	1·46	2·1316	1·2083	1·96	3·8416	1·4000
0·47	0·2209	0·6856	0·97	0·9409	0·9849	1·47	2·1609	1·2124	1·97	3·8809	1·4036
0·48	0·2304	0·6928	0·98	0·9604	0·9899	1·48	2·1904	1·2166	1·98	3·9204	1·4071
0·49	0·2401	0·7000	0·99	0·9801	0·9950	1·49	2·2201	1·2207	1·99	3·9601	1·4107
0·50	0·2500	0·7071	1·00	1·0000	1·0000	1·50	2·2500	1·2247	2·00	4·0000	1·4142

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
2·01	4·0401	1·4177	2·51	6·3001	1·5843	3·01	9·0601	1·7349	3·51	12·3201	1·8735
2·02	4·0804	1·4213	2·52	6·3504	1·5875	3·02	9·1204	1·7378	3·52	12·3904	1·8762
2·03	4·1209	1·4248	2·53	6·4009	1·5906	3·03	9·1809	1·7407	3·53	12·4609	1·8788
2·04	4·1616	1·4283	2·54	6·4516	1·5937	3·04	9·2416	1·7436	3·54	12·5316	1·8815
2·05	4·2025	1·4318	2·55	6·5025	1·5969	3·05	9·3025	1·7464	3·55	12·6025	1·8841
2·06	4·2436	1·4353	2·56	6·5536	1·6000	3·06	9·3636	1·7493	3·56	12·6736	1·8868
2·07	4·2849	1·4387	2·57	6·6049	1·6031	3·07	9·4249	1·7521	3·57	12·7449	1·8894
2·08	4·3264	1·4422	2·58	6·6564	1·6062	3·08	9·4864	1·7550	3·58	12·8164	1·8921
2·09	4·3681	1·4457	2·59	6·7081	1·6093	3·09	9·5481	1·7578	3·59	12·8881	1·8947
2·10	4·4100	1·4491	2·60	6·7600	1·6125	3·10	9·6100	1·7607	3·60	12·9600	1·8974
2·11	4·4521	1·4526	2·61	6·8121	1·6155	3·11	9·6721	1·7635	3·61	13·0321	1.9000
2·12	4·4944	1·4560	2·62	6·8644	1·6186	3·12	9·7344	1·7664	3·62	13·1044	1.9026
2·13	4·5369	1·4595	2·63	6·9169	1·6217	3·13	9·7969	1·7692	3·63	13·1769	1.9053
2·14	4·5796	1·4629	2·64	6·9696	1·6248	3·14	9·8596	1·7720	3·64	13·2496	1.9079
2·15	4·6225	1·4663	2·65	7·0225	1·6279	3.15	9·9225	1·7748	3·65	13·3225	1.9105
2·16	4·6656	1·4697	2·66	7·0756	1·6310	3·16	9·9856	1·7776	3·66	13·3956	1·9131
2·17	4·7089	1·4731	2·67	7·1289	1·6340	3·17	10·0489	1·7804	3·67	13·4689	1·9157
2·18	4·7524	1·4765	2·68	7·1824	1·6371	3·18	10·1124	1·7833	3·68	13·5424	1·9183
2·19	4·7961	1·4799	2·69	7·2361	1·6401	3·19	10·1761	1·7861	3·69	13·6161	1·9209
2·20	4·8400	1·4832	2·70	7·2900	1·6432	3·20	10·2400	1·7889	3·70	13·6900	1·9235
2·21	4·8841	1·4866	2·71	7·3441	1·6462	3·21	10·3041	1·7916	3·71	13·7641	1·9261
2·22	4·9284	1·4900	2·72	7·3984	1·6492	3·22	10·3684	1·7944	3·72	13·8384	1·9287
2 23	4·9729	1·4933	2·73	7·4529	1·6523	3·23	10·4329	1·7972	3·73	13·9129	1·9313
2·24	5·0176	1·4967	2·74	7·5076	1·6553	3·24	10·4976	1·8000	3·74	13·9876	1·9339
2·25	5·0625	1·5000	2·75	7·5625	1·6583	3·25	10·5625	1·8028	3·75	14·0625	1·9365
2·26	5·1076	1·5033	2·76	7·6176	1·6613	3·26	10·6276	1·8055	3·76	14·1376	1·9391
2·27	5·1529	1·5067	2·77	7·6729	1·6643	3·27	10·6929	1·8083	3·77	14·2129	1·9416
2·28	5·1984	1·5100	2·78	7·7284	1·6673	3·28	10·7584	1·8111	3·78	14·2884	1·9442
2·29	5·2441	1·5133	2·79	7·7841	1·6703	3·29	10·8241	1·8138	3·79	14·3641	1·9468
2·30	5·2900	1·5166	2·80	7·8400	1·6733	3·30	10·8900	1·8166	3·80	14·4400	1·9494
2·31	5·3361	1·5199	2·81	7·8961	1·6763	3·31	10·9561	1·8193	3·81	14·5161	1·9519
2·32	5·3824	1·5232	2·82	7·9524	1·6793	3·32	11·0224	1·8221	3·82	14·5924	1·9545
2·33	5·4289	1·5264	2·83	8·0089	1·6823	3·33	11·0889	1·8248	3·83	14·6689	1·9570
2·34	5·4756	1·5297	2·84	8·0656	1·6852	3·34	11·1556	1·8276	3·84	14·7456	1·9596
2·35	5·5225	1·5330	2·85	8·1225	1·6882	3·35	11·2225	1·8303	3·85	14·8225	1·9621
2·36	5·5696	1·5362	2·86	8·1796	1·6912	3·36	11·2896	1·8330	3·86	14·8996	1·9647
2·37	5·6169	1·5395	2·87	8·2369	1·6941	3·37	11·3569	1·8358	3·87	14·9769	1·9672
2·38	5 6644	1·5427	2·88	8·2944	1·6971	3·38	11·4244	1·8385	3·88	15·0544	1·9698
2·39	5·7121	1·5460	2·89	8·3521	1·7000	3·39	11·4921	1·8412	3·89	15·1321	1·9723
2·40	5·7600	1·5492	2·90	8·4100	1·7029	3·40	11·5600	1·8439	3·90	15·2100	1·9748
2·41	5·8081	1·5524	2·91	8·4681	1·7059	3·41	11·6281	1·8466	3·91	15·2881	1·9774
2·42	5·8564	1·5556	2·92	8·5264	1·7088	3·42	11·6964	1·8493	3·92	15·3664	1·9799
2·43	5·9049	1·5588	2·93	8·5849	1·7117	3·43	11·7649	1·8520	3·93	15·4449	1·9824
2·44	5·9536	1·5620	2·94	8·6436	1·7146	3·44	11·8336	1·8547	3·94	15·5236	1·9849
2·45	6·0025	1·5652	2·95	8·7025	1·7176	3·45	11·9025	1·8574	3·95	15·6025	1·9875
2·46	6·0516	1·5684	2·96	8·7616	1·7205	3·46	11·9716	1·8601	3·96	15·6816	1·9900
2·47	6·1009	1·5716	2·97	8·8209	1·7234	3·47	12·0409	1·8628	3·97	15·7609	1·9925
2·48	6·1504	1·5748	2·98	8·8804	1·7263	3·48	12·1104	1·8655	3·98	15·8404	1·9950
2·49	6·2001	1·5780	2·99	8·9401	1·7292	3·49	12·1801	1·8682	3·99	15·9201	1·9975
2·50	6·2500	1·5811	3·00	9·0000	1·7321	3·50	12·2500	1·8708	4·00	16·0000	2·0000

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
4·01	16·0801	2·0025	4·51	20·3401	2·1237	5.01	25·1001	2·2383	5·51	30·3601	2·3473
4·02	16·1604	2·0050	4·52	20·4304	2·1260	5·02	25·2004	2·2405	5·52	30·4704	2·3495
4·03	16·2409	2·0075	4·53	20·5209	2·1284	5·03	25·3009	2·2428	5·53	30·5809	2·3516
4·04	16·3216	2·0100	4·54	20·6116	2·1307	5·04	25·4016	2·2450	5·54	30·6916	2·3537
4·05	16·4025	2·0125	4·55	20·7025	2·1331	5·05	25·5025	2·2472	5·55	30·8025	2·3558
4·06	16·4836	2·0149	4·56	20·7936	2·1354	5·06	25·6036	2·2494	5·56	30·9136	2·3580
4·07	16·5649	2·0174	4·57	20·8849	2·1378	5·07	25·7049	2·2517	5·57	31·0249	2·3601
4·08	16·6464	2·0199	4·58	20·9764	2·1401	5·08	25·8064	2·2539	5·58	31·1364	2·3622
4·09	16·7281	2·0224	4·59	21·0681	2·1424	5·09	25·9081	2·2561	5·59	31·2481	2·3643
4·10	16·8100	2·0248	4·60	21·1600	2·1448	5·10	26·0100	2·2583	5·60	31·3600	2·3664
4·11	16·8921	2·0273	4·61	21·2521	2·1471	5·11	26·1121	2·2605	5·61	31·4721	2·3685
4·12	16·9744	2·0298	4·62	21·3444	2·1494	5·12	26·2144	2·2627	5·62	31·5844	2·3707
4·13	17·0569	2·0322	4·63	21·4369	2·1517	5·13	26·3169	2·2650	5·63	31·6969	2·3728
4·14	17·1396	2·0347	4·64	21·5296	2·1541	5·14	26·4196	2·2672	5·64	31·8096	2·3749
4·15	17·2225	2·0372	4·65	21·6225	2·1564	5·15	26·5225	2·2694	5·65	31·9225	2·3770
4·16	17·3056	2·0396	4·66	21·7156	2·1587	5·16	26·6256	2·2716	5·66	32·0356	2·3791
4·17	17·3889	2·0421	4·67	21·8089	2·1610	5·17	26·7289	2·2738	5·67	32·1489	2·3812
4·18	17·4724	2·0445	4·68	21·9024	2·1633	5·18	26·8324	2·2760	5·68	32·2624	2·3833
4·19	17·5561	2·0469	4·69	21·9961	2·1656	5·19	26·9361	2·2782	5·69	32·3761	2·3854
4·20	17·6400	2·0494	4·70	22·0900	2·1679	5·20	27·0400	2·2804	5·70	32·4900	2·3875
4·21	17·7241	2·0518	4·71	22·1841	2·1703	5·21	27·1441	2·2825	5·71	32·6041	2·3896
4·22	17·8084	2·0543	4·72	22·2784	2·1726	5·22	27·2484	2·2847	5·72	32·7184	2·3917
4·23	17·8929	2·0567	4·73	22·3729	2·1749	5·23	27·3529	2·2869	5·73	32·8329	2·3937
4·24	17·9776	2·0591	4·74	22·4676	2·1771	5·24	27·4576	2·2891	5·74	32·9476	2·3958
4·25	18·0625	2·0616	4·75	22·5625	2·1794	5·25	27·5625	2·2913	5·75	33·0625	2·3979
4·26	18·1476	2·0640	4·76	22·6576	2·1817	5·26	27·6676	2·2935	5·76	33·1776	2·4000
4·27	18·2329	2·0664	4·77	22·7529	2·1840	5·27	27·7729	2·2956	5·77	33·2929	2·4021
4·28	18·3184	2·0688	4·78	22·8484	2·1863	5·28	27·8784	2·2978	5·78	33·4084	2·4042
4·29	18·4041	2·0712	4·79	22·9441	2·1886	5·29	27·9841	2·3000	5·79	33·5241	2·4062
4·30	18·4900	2·0736	4·80	23·0400	2·1909	5·30	28·0900	2·3022	5·80	33·6400	2·4083
4·31	18·5761	2·0761	4·81	23·1361	2·1932	5·31	28·1961	2·3043	5.81	33·7561	2·4104
4·32	18·6624	2·0785	4·82	23·2324	2·1954	5·32	28·3024	2·3065	5.82	33·8724	2·4125
4·33	18·7489	2·0809	4·83	23·3289	2·1977	5·33	28·4089	2·3087	5.83	33·9889	2·4145
4·34	18·8356	2·0833	4·84	23·4256	2·2000	5·34	28·5156	2·3108	5.84	34·1056	2·4166
4·35	18·9225	2·0857	4·85	23·5225	2·2023	5·35	28·6225	2·3130	5.85	34·2225	2·4187
4·36	19·0096	2·0881	4·86	23·6196	2·2045	5·36	28·7296	2·3152	5·86	34·3396	2·4207
4·37	19·0969	2·0905	4·87	23·7169	2·2068	5·37	28·8369	2·3173	5·87	34·4569	2·4228
4·38	19·1844	2·0928	4·88	23·8144	2·2091	5·38	28·9444	2·3195	5·88	34·5744	2·4249
4·39	19·2721	2·0952	4·89	23·9121	2·2113	5·39	29·0521	2·3216	5·89	34·6921	2·4269
4·40	19·3600	2·0976	4·90	24·0100	2·2136	5·40	29·1600	2·3238	5·90	34·8100	2·4290
4·41	19·4481	2·1000	4·91	24·1081	2·2159	5·41	29·2681	2·3259	5·91	34·9281	2·4310
4·42	19·5364	2·1024	4·92	24·2064	2·2181	5·42	29·3764	2·3281	5·92	35·0464	2·4331
4·43	19·6249	2·1048	4·93	24·3049	2·2204	5·43	29·4849	2·3302	5·93	35·1649	2·4352
4·44	19·7136	2·1071	4·94	24·4036	2·2226	5·44	29·5936	2·3324	5·94	35·2836	2·4372
4·45	19·8025	2·1095	4·95	24·5025	2·2249	5·45	29·7025	2·3345	5·95	35·4025	2·4393
4·46	19·8916	2·1119	4·96	24·6016	2·2271	5·46	29·8116	2·3367	5·96	35·5216	2·4413
4·47	19·9809	2·1142	4·97	24·7009	2·2293	5·47	29·9209	2·3388	5·97	35·6409	2·4434
4·48	20·0704	2·1166	4·98	24·8004	2·2316	5·48	30·0304	2·3409	5·98	35·7604	2·4454
4·49	20·1601	2·1190	4·99	24·9001	2·2338	5·49	30·1401	2·3431	5·99	35·8801	2·4474
4·50	20·2500	2·1213	5·00	25·0000	2·2361	5·50	30·2500	2·3452	6·00	36·0000	2·4495

n	n²	√n	n	n²	√n	n	n²	√n	n	n²	√n
6·01	36·1201	2·4515	6·51	42·3801	2·5515	7·01	49·1401	2·6476	7·51	56·4001	2·7404
6·02	36·2404	2·4536	6·52	42·5104	2·5534	7·02	49·2804	2·6495	7·52	56·5504	2·7423
6·03	36·3609	2·4556	6·53	42·6409	2·5554	7·03	49·4209	2·6514	7·53	56·7009	2·7441
6·04	36·4816	2·4576	6·54	42·7716	2·5573	7·04	49·5616	2·6533	7·54	56·8516	2·7459
6·05	36·6025	2·4597	6·55	42·9025	2·5593	7·05	49·7025	2·6552	7·55	57·0025	2·7477
6·06	36·7236	2·4617	6·56	43·0336	2·5612	7·06	49·8436	2·6571	7·56	57·1536	2·7495
6·07	36·8449	2·4637	6·57	43·1649	2·5632	7·07	49·9849	2·6589	7·57	57·3049	2·7514
6·08	36·9664	2·4658	6·58	43·2964	2·5652	7·08	50·1264	2·6608	7·58	57·4564	2·7532
6·09	37·0881	2·4678	6·59	43·4281	2·5671	7·09	50·2681	2·6627	7·59	57·6081	2·7550
6·10	37·2100	2·4698	6·60	43·5600	2·5690	7·10	50·4100	2·6646	7·60	57·7600	2·7568
6·11	37·3321	2·4718	6·61	43·6921	2·5710	7·11	50·5521	2·6665	7·61	57·9121	2·7586
6·12	37·4544	2·4739	6·62	43·8244	2·5729	7·12	50·6944	2·6683	7·62	58·0644	2·7604
6·13	37·5769	2·4759	6·63	43·9569	2·5749	7·13	50·8369	2·6702	7·63	58·2169	2·7622
6·14	37·6996	2·4779	6·64	44·0896	2·5768	7·14	50·9796	2·6721	7·64	58·3696	2·7641
6·15	37·8225	2·4799	6·65	44·2225	2·5788	7·15	51·1225	2·6739	7·65	58·5225	2·7659
6·16	37·9456	2·4819	6·66	44·3556	2·5807	7·16	51·2656	2·6758	7·66	58·6756	2·7677
6·17	38·0689	2·4839	6·67	44·4889	2·5826	7·17	51·4089	2·6777	7·67	58·8289	2·7695
6·18	38·1924	2·4860	6·68	44·6224	2·5846	7·18	51·5524	2·6796	7·68	58·9824	2·7713
6·19	38·3161	2·4880	6·69	44·7561	2·5865	7·19	51·6961	2·6814	7·69	59·1361	2·7731
6·20	38·4400	2·4900	6·70	44·8900	2·5884	7·20	51·8400	2·6833	7·70	59·2900	2·7749
6·21	38·5641	2·4920	6·71	45·0241	2·5904	7·21	51·9841	2·6851	7·71	59·4441	2·7767
6·22	38·6884	2·4940	6·72	45·1584	2·5923	7·22	52·1284	2·6870	7·72	59·5984	2·7785
6·23	38·8129	2·4960	6·73	45·2929	2·5942	7·23	52·2729	2·6889	7·73	59·7529	2·7803
6·24	38·9376	2·4980	6·74	45·4276	2·5962	7·24	52·4176	2·6907	7·74	59·9076	2·7821
6·25	39·0625	2·5000	6·75	45·5625	2·5981	7·25	52·5625	2·6926	7·75	60·0625	2·7839
6·26	39·1876	2·5020	6·76	45·6976	2·6000	7·26	52·7076	2·6944	7·76	60·2176	2·7857
6·27	39·3129	2·5040	6·77	45·8329	2·6019	7·27	52·8529	2·6963	7·77	60·3729	2·7875
6·28	39·4384	2·5060	6·78	45·9684	2·6038	7·28	52·9984	2·6981	7·78	60·5284	2·7893
6·29	39·5641	2·5080	6·79	46·1041	2·6058	7·29	53·1441	2·7000	7·79	60·6841	2·7911
6·30	39·6900	2·5100	6·80	46·2400	2·6077	7·30	53·2900	2·7019	7·80	60·8400	2·7928
6·31	39·8161	2·5120	6·81	46·3761	2·6096	7·31	53·4361	2·7037	7·81	60·9961	2·7946
6·32	39·9424	2·5140	6·82	46·5124	2·6115	7·32	53·5824	2·7055	7·82	61·1524	2·7964
6·33	40·0689	2·5159	6·83	46·6489	2·6134	7·33	53·7289	2·7074	7·83	61·3089	2·7982
6·34	40·1956	2·5179	6·84	46·7856	2·6153	7·34	53·8756	2·7092	7·84	61·4656	2·8000
6·35	40·3225	2·5199	6·85	46·9225	2·6173	7·35	54·0225	2·7111	7·85	61·6225	2·8018
6·36	40·4496	2·5219	6·86	47·0596	2·6192	7·36	54·1696	2·7129	7·86	61·7796	2·8036
6·37	40·5769	2·5239	6·87	47·1969	2·6211	7·37	54·3169	2·7148	7·87	61·9369	2·8054
6·38	40·7044	2·5259	6·88	47·3344	2·6230	7·38	54·4644	2·7166	7·88	62·0944	2·8071
6·39	40·8321	2·5278	6·89	47·4721	2·6249	7·39	54·6121	2·7185	7·89	62·2521	2·8089
6·40	40·9600	2·5298	6·90	47·6100	2·6268	7·40	54·7600	2·7203	7·90	62·4100	2·8107
6·41	41·0881	2·5318	6·91	47·7481	2·6287	7·41	54·9081	2·7221	7·91	62·5681	2·8125
6·42	41·2164	2·5338	6·92	47·8864	2·6306	7·42	55·0564	2·7240	7·92	62·7264	2·8142
6·43	41·3449	2·5357	6·93	48·0249	2·6325	7·43	55·2049	2·7258	7·93	62·8849	2·8160
6·44	41·4736	2·5377	6·94	48·1636	2·6344	7·44	55·3536	2·7276	7·94	63·0436	2·8178
6·45	41·6025	2·5397	6·95	48·3025	2·6363	7·45	55·5025	2·7295	7·95	63·2025	2·8196
6·46	41·7316	2·5417	6·96	48·4416	2·6382	7·46	55·6516	2·7313	7·96	63·3616	2·8213
6·47	41·8609	2·5436	6·97	48·5809	2·6401	7·47	55·8009	2·7331	7·97	63·5209	2·8231
6·48	41.9904	2·5456	6·98	48·7204	2·6420	7·48	55·9504	2·7350	7·98	63·6804	2·8249
6·49	42·1201	2·5475	6·99	48·8601	2·6439	7·49	56·1001	2·7368	7·99	63·8401	2·8267
6·50	42·2500	2·5495	7·00	49·0000	2·6458	7·50	56·2500	2·7386	8·00	64·0000	2·8284