Dr JAN RALSKI.

ZASADY RACHUNKU
RÓŻNICZKOWEGO i CAŁKOWEGO
DLA UŻYTKU SZKÓŁ ŚREDNICH.

JAROSŁAW.
KSIĘGARNIA JÓZEFA MEINHARTA.
1911.

Odbito czcionkami L. Wiśniewskiego w Jarosławiu.

SPIS RZECZY.

I.

Uwagi ogólne.

Matematyka jako nauka, która rozumuje ściśle i wnioski wynikające z rozumowania jasno wyraża, używa za podstawę rozumowania liczb dających się *jasno* określić i uważa za użyteczne tylko takie wnioski, które można wyrazić w liczbach dających się również jasno określić. Aby liczba dała się jasno określić, musi być skończona t. j. musi mieć wartość skończoną. Liczba skończona może być dokładna lub przybliżona. N. p. liczby: $0, 1, -2, 5, -307; \frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, 0\cdot8, -5\cdot46$ są dokładne, liczby:

$$0.\dot{3}\dot{7} = 0\cdot373737\ldots, \qquad \sqrt{2} = 1\cdot41421356\ldots,$$

są przybliżone.

Z liczb przybliżonych tylko takie mogą być jasno określone i tylko takie mają zastosowanie w matematyce, które dadzą się wyrazić zapomocą liczb dokładnych z tak małym błędem, jak się nam podoba – innymi słowy – z dokładnością zależną od nas.

N. p. pisząc $0\cdot\dot{3}\dot{7} = 0\cdot3737$, $\sqrt{2} = 1\cdot4142$, popełniamy błąd mniejszy niż $0\cdot0001$, pisząc $0\cdot\dot{3}\dot{7} = 0\cdot373737$, $\sqrt{2} = 1\cdot414214$ popełniamy błąd mniejszy, niż $0\cdot000001$ i t. d.; liczby $0\cdot\dot{3}\dot{7}$, $\sqrt{2}$ możemy wyrazić tak dokładnie, jak się nam podoba.

Przy niektórych liczbach przybliżonych możemy podać całkiem dokładnie granicę, do której się zbliżamy, jeżeli je coraz dokładniej wyrażamy; przy innych możemy podać granicę tylko w sposób przybliżony. N. p. pisząc $0\cdot\dot{3}\dot{7} = 0\cdot3737$, $0\cdot\dot{3}\dot{7} = 0\cdot373737$ i t. d. zbliżamy się coraz bardziej do liczby $\frac{37}{99}$; gdy wyrażamy $\sqrt{2}$ coraz dokładniej, zbliżamy się do granicy, której nie możemy całkiem dokładnie podać, ale o której wiemy, że się znajduje

między 1·4142 a 1·4143,

między 1·414213 a 1·414214 i t. d.

Liczby mogą być szczególne lub ogólne.

Liczby szczególne wyrażamy zapomocą cyfr n. p. 5, — 7, $\frac{2}{3}$, — $\frac{5}{6}$, 0·64 ; liczby ogólne zapomocą głosek n. p. a, b, e, x, y, α, β, π.

Wyrażając liczbę zapomocą głosek, przyjmujemy, że ma ona pewną szczególną wartość n. p. $e = 2{\cdot}71828.$, $\pi = 3{\cdot}14159.$, lub też, że może przybierać różne wartości, czyli że się może zmieniać. Pierwsze liczby nazywamy *stałemi*, drugie *zmiennemi*.

W ogóle głoska może wyrażać *wielkość* czyli *ilość* wszelkiego rodzaju n. p. liczbę, długość, czas, siłę i t. p; jakoż w tem znaczeniu będziemy w przyszłości używać głosek.

II.

Pojęcie funkcyi.

Wyrażenie, w którem się znajduje jakaś ilość, nazywa się jej *funkcyą*. N. p. wyrażenie $3x^2 - 8x + 5$ jest funkcyą ilości x, wyrażenie $3.4^2 - 8.4 + 5$ taką samą funkcyą liczby 4. Pisze się to w ten sposób:

$$3x^2 - 8x + 5 = f(x),$$
$$3.4^2 - 8.4 + 5 = f(4),$$

lub

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 5,$$
$$f(4) = 3.4^2 - 8.4 + 5.$$

Czyta się zaś: $f(x)$ jest funkcyą ilości x, $f(4)$ jest funkcyą liczby 4. Oczywista, że funkcya $f(x)$ zależy od ilości x, funkcya $f(4)$ od liczby 4.

W ogóle, gdy ilość się zmienią, to jej funkcya $f(x)$ przybiera różne wartości a zatem zmienia się również. N. p. funkcya $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$ dla $x = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$ przybiera wartości $f(0) = 5$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 8$, $f(-1) = 16$, $f(-2) = 33$, $f(-3) = 56$.

Jak na powyższym przykładzie widzimy, ilości x i $f(x)$ zmieniają się, czyli są ilościami *zmiennemi* z tą różnicą, że ilości x

nadajemy dowolne wartości a na $f(x)$ wypadają wartości pewne. Z tego powodu ilość x nazywa się *zmienną niezależną* a $f(x)$ *zmienną zależną*.

Na wyrażenie funkcyi używamy głosek: f, F, φ, ψ i t. p. N. p. $f(x) = x^n$, $F(r) = \frac{4}{3} r^3\pi$, $\varphi(x) = a^x$, $\psi(x) = \sin x.$, $f_1(r) = \frac{mm_1}{r}$, $F(t) = \frac{1}{2} gt^2$.

Na bliższą uwagę zasługuje przypadek, kiedy funkcya $F(x)$ nie zmienia swej wartości C, jakkolwiek x się zmienia, czyli kiedy funkcya $F(x)$ jest *od x niezależna.*

Wtenczas funkcya $F(x)$ jest *ilością stałą* (ze względu na x) i pisze się:

$$F(x) = C.$$

N. p.
$$F(x) = \frac{5(x+3)^2}{x^2+6x+9} = 5,$$

$$\varphi(x) = \frac{a(x-b)^2}{x^2-2bx+b^2} = a,$$

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{x+a} + \frac{2a}{b} - \frac{1}{x-a}\right)\frac{b}{2} + \frac{ab}{x^2-a^2} = a.$$

III.

Funkcye elementarne.

Najprostszemi funkcyami są: funkcya od x niezależna a, funkcya potęgowa x^m, wykładnicza a^x, logarytmiczna $lg_b x$, funkcye goniometryczne $\cos x$, $\sin x$, $tg\, x$, $ctg\, x$, i nadto tak zwane funkcye cyklometryczne, które niżej poznamy. Są to *funkcye elementarne.*

W funkcyach goniometrycznych będziemy wyrażać zmienną x nie zapomocą kąta, lecz zapomocą łuku koła o promieniu 1, odpowiadającego kątowi stósownie do proporcyi.

$x : 2\pi. = \alpha^0 : 360^0$ (fig. 1), skąd wypada

$$x = \frac{2\pi\alpha}{360} = \frac{\pi\alpha}{180}$$

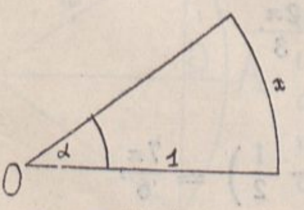

Fig. 1.

Według tego można n. p. napisać:

$$\cos 60^0 = \cos\frac{\pi}{3} = \cos(1{\cdot}0472),$$

$$\sin 30^0 = \sin\frac{\pi}{6} = \sin(0{\cdot}5236),$$

$$tg\, 45^0 = tg\frac{\pi}{4} = tg(0{\cdot}7854),$$

$$ctg\, 90^0 = ctg\frac{\pi}{2} = ctg(1{\cdot}5708).$$

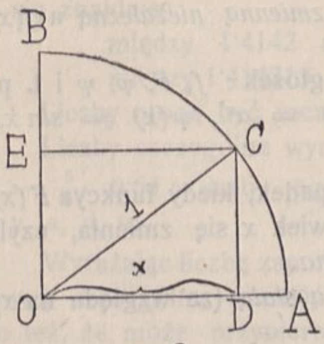

Fig. 2.

Jeżeli x jest *dostawą (cosinus)* łuku $\widehat{AC}$ (fig. 2.) koła o promieniu 1, natenczas naodwrót łuk $\widehat{AC}$ jest łukiem, którego *dostawa (cos)* jest równa x. Pisze się to krótko: $\widehat{AC} = arc\cos x$, (czyta się *arcus cosinus* x). *Arc* jest początkiem słowa łacińskiego *arcus*, co znaczy *łuk*. Podobnież $arc\sin x$ oznacza łuk (koła o promieniu 1), którego *wstawa (sinus)* jest równa x, $arc\,tg\,x$ oznacza łuk, którego *styczna (tangens)* jest równa x, $arc\,ctg\,x$ łuk, którego *dotyczna (cotangens)* jest równa x.

Funkcye $arc\cos x$, $arc\sin x$, $arc\,tg\,x$, $arc\,ctg\,x$ nazywają się funkcyami *cyklometrycznemi*.

Jeżeli $x = \cos \widehat{AC}$, to także $x = \cos(\widehat{AC} + 2n\pi)$, gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatnią lub ujemną. Jest przeto ogólnie

$$\widehat{AC} + 2n\pi = arc\cos x,$$

z czego poznajemy, że takich łuków, których *dostawa (cos)* jest równa x, jest nieskończenie wiele. Celem ustrzeżenia się wieloznaczności przyjmuje się najmniejszy łuk w obszarze od 0 do 2π, który spełnia warunek $\widehat{AC} = arc\cos x$.

N. p. $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos 120^0 = -\frac{1}{2}$,

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos 240^0 = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{8\pi}{3} = \cos 480^0 = -\frac{1}{2} \text{ i t. d.}$$

t. j. dla dostawy $-\frac{1}{2}$ wypadają łuki $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$ i t. d.

Bierzemy najmniejszy łuk i piszemy

$$arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Podobnież $arc\cos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$,

$$arc\sin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad arc\sin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7\pi}{6},$$

$$arc\,tg\,(1) = \frac{\pi}{4}, \quad arc\,tg\,(-1) = \frac{3\pi}{4},$$

$$arc\,ctg\,(1) = \frac{\pi}{4}, \quad arc\,ctg\,(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

Na fig. 2. widzimy, że

$$x = \cos \widehat{AC} = \sin \widehat{BC},$$

skąd wypada

$$\widehat{AC} = arc\cos x, \quad \widehat{BC} = arc\sin x.$$

$$\widehat{AC} + \widehat{BC} = arc\cos x + arc\sin x.$$

Lecz $\widehat{AC} + \widehat{BC} = \frac{\pi}{2}$, zatem

$$arc\cos x + arc\sin x = \frac{\pi}{2}.$$

To samo otrzymamy z równań

$$x = \cos \widehat{AC} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{AC} \right),$$

albowiem z nich wypada, że

$$\widehat{AC} = arc\cos x, \quad \frac{\pi}{2} - \widehat{AC} = arc\sin x.$$

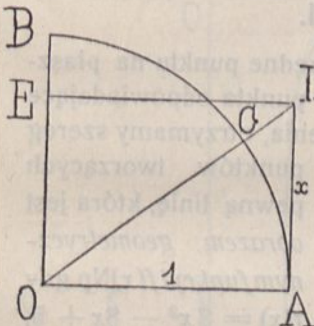

Fig. 3.

Z fig. 3. poznajemy, że

$$x = tg\,\widehat{AC} = ctg\,\widehat{BC},$$

skąd wypada

$$\widehat{AC} = arc\,tg\,x, \quad \widehat{BC} = arc\,ctg\,x,$$

$$\widehat{AC} + \widehat{BC} = \frac{\pi}{2} = arc\,tg\,x + arc\,ctg\,x.$$

To samo otrzymuje się z równań

$$x = tg\,\widehat{AC} = ctg\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{AC} \right),$$

bo z nich wypływa $\widehat{AC} = arc\,tg\,x, \ \frac{\pi}{2} - \widehat{AC} = arc\,ctg\,x.$

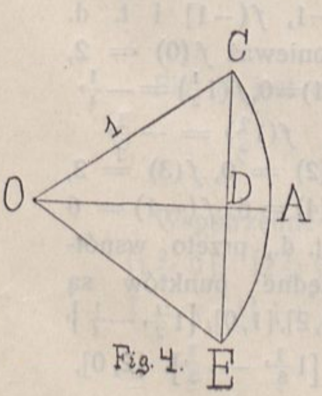

Fig. 4.

Weźmy łuki $\widehat{AC}$, $\widehat{AE}$ równe co do bezwzględnej wartości (fig. 4) w kole o promieniu 1. Przy ich mierzeniu kierujemy się tą samą zasadą, co przy mierzeniu kątów t. j. przyjmujemy, że kątom dodatnim odpowiadają łuki dodatnie, kątom ujemnym ujemne. Według tego łuk $\widehat{AC}$ uważa się za dodatni, łuk $\widehat{AE}$ za ujemny. Jest więc

$$\widehat{AE} = -\widehat{AC}.$$

Jeżeli $DC = x$, to $DE = -x$, zatem

$$\widehat{AE} = arc\sin x, \quad \widehat{AE} = arc\sin(-x).$$

Podstawiwszy to w równanie $\widehat{AE} = -\widehat{AC}$, otrzymamy

$$arc\sin(-x) = -arc\sin x.$$

Podobnie rzecz się ma z $arc\,tg\,x$. (fig. 5.) Jest bowiem

$$\widehat{AE} = -\widehat{AC}.$$

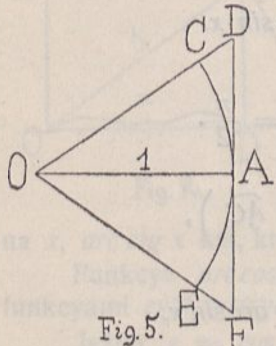

Fig. 5.

Jeżeli $AD = x$, to $AF = -x$,

$$\widehat{AC} = arc\,tg\,x, \quad \widehat{AE} = arc\,tg(-x),$$

a po podstawieniu w równanie $\widehat{AE} = -\widehat{AC}$ wypada

$$arc\,tg(-x) = -arc\,tg\,x.$$

IV.

Obraz funkcyi.

Uważajmy ilości x, $f(x)$ jako współrzędne punktu na płaszczyznie w układzie prostokątnym. Kreśląc punkta odpowiadające każdej parze ilości w miarę jak się x zmienia, otrzymamy szereg punktów tworzących pewną linię, która jest *obrazem geometrycznym funkcyi f(x)* Np. gdy $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$, współrzędne punktów są $[0, f(0)]$, $[1, f(1)]$ $[-1, f(-1]$ i t. d. Ponieważ $f(0) = 2$, $f(1) = 0$, $f(1\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, $f(1\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$, $f(2) = 0$, $f(3) = 2$, $f(4) = 6$, $f(-1) = 6$ i t. d., przeto współrzędne punktów są $[0, 2]$, $[1, 0]$, $[1\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$, $[1\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]$, $[2, 0]$,

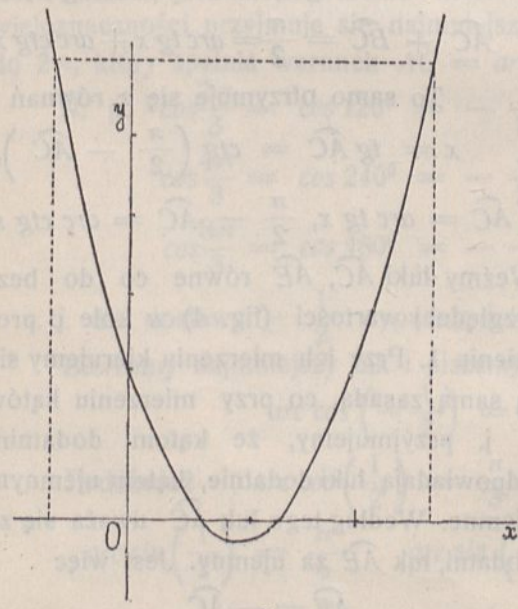

Fig. 6.

[3, 2], [4, 6], [—1, 6] i t. d. Kreśląc te punkta, otrzymamy linię przedstawioną na fig. 6.

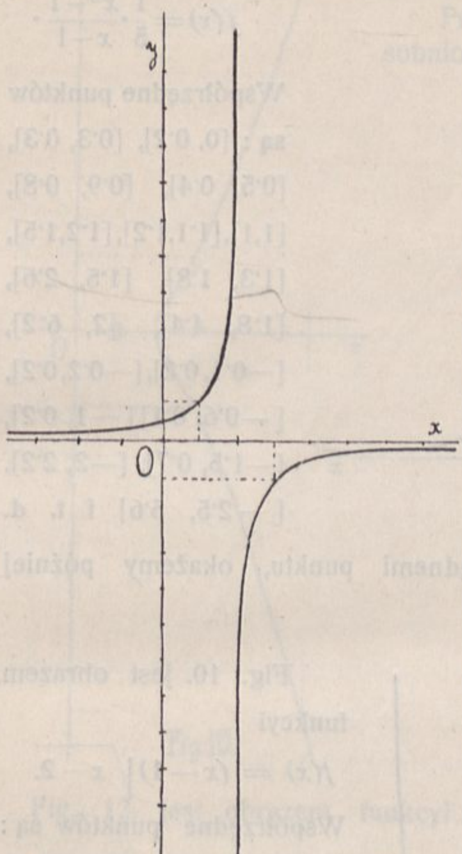

Fig. 7.

Obrazem funkcyi może być linia ciągła, przerywana, składająca się z osobnych punktów, kawałków i t. p. odpowiednio do kształtu funkcyi, jak to można widzieć na dalszych figurach.

Fig. 7. jest obrazem funkcyi $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

Współrzędne punktów są: $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, \frac{4}{5}]$, $[1, 1]$, $[1\frac{1}{2}, 2]$, $[1\frac{2}{3}, 3]$, $[1\frac{4}{5}, 5]$, $[1\frac{9}{10}, 10]$, $[2\frac{1}{10}, -10]$, $[2\frac{1}{5}, -5]$, $[2\frac{1}{4}, -4]$, $[2\frac{1}{3}, -3]$, $[2\frac{1}{2}, -2]$, $[3, -1]$, $[4, -\frac{1}{2}]$, $[5, -\frac{1}{3}]$, $[6, -\frac{1}{5}]$, $[-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}]$, $[-1, \frac{1}{3}]$, $[-2, \frac{1}{4}]$, $[-3, +\frac{1}{5}]$ i t. d.

Fig. 8. jest obrazem funkcyi

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Współrzędne punktów są: $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{4}{9}]$, $[1, 1]$, $[1\frac{1}{2}, 4]$, $[1\frac{2}{3}, 9]$, $[2\frac{1}{3}, 9]$, $[2\frac{1}{2}, 4]$, $[3, 1]$, $[3\frac{1}{2}, \frac{4}{9}]$, $[4, \frac{1}{4}]$, $[5, \frac{1}{9}]$, $[-1, \frac{1}{9}]$ i t. d.

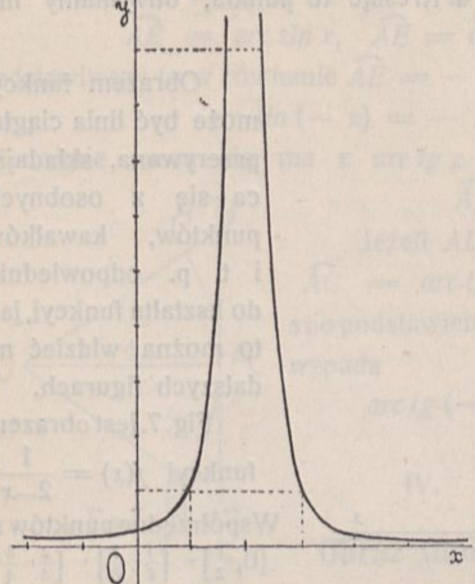

Fig. 8

Fig. 9. jest obrazem funkcyi

$$f(x)=\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5-1}{x-1}.$$

Współrzędne punktów są: [0, 0·2], [0·3, 0·3], [0·5, 0·4], [0·9, 0·8], [1,1], [1·1, 1·2], [1·2, 1·5], [1·3, 1·8], [1·5, 2·6], [1·8, 4·4], [2, 6·2], [—0·1, 0·2], [—0·2, 0·2], [—0·6, 0·1] [—1, 0·2], [—1·5, 0·7], [—2, 2·2], [—2·5, 5·6] i t. d.

Że [1, 1] są współrzędnemi punktu, okażemy później (V. 5).

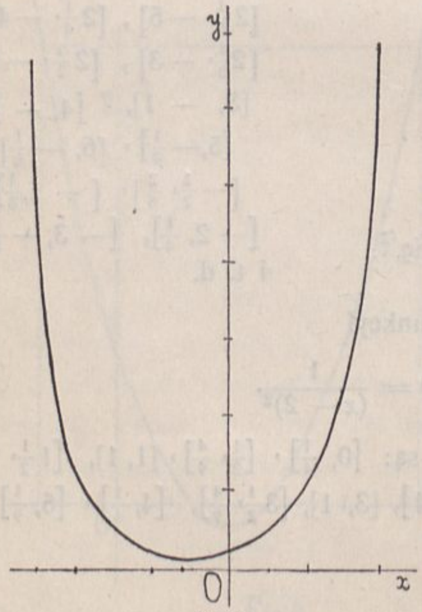

Fig. 9

Fig. 10. jest obrazem funkcyi

$$f(x)=(x-1)\sqrt{x-2}.$$

Współrzędne punktów są: [1, 0], [2, 0], [2·3, ±0·7], [2·5, ±1·1], [2·7, ±1·4], [3, ±2], [4, ±4·2], [5, ±6·9], [6, ±10] i t. d. Punkt [1, 0] jest odosobniony.

Fig. 11. jest obrazem funkcyi

$$f(x)=(x-1)(x-2)\sqrt{x-3}.$$

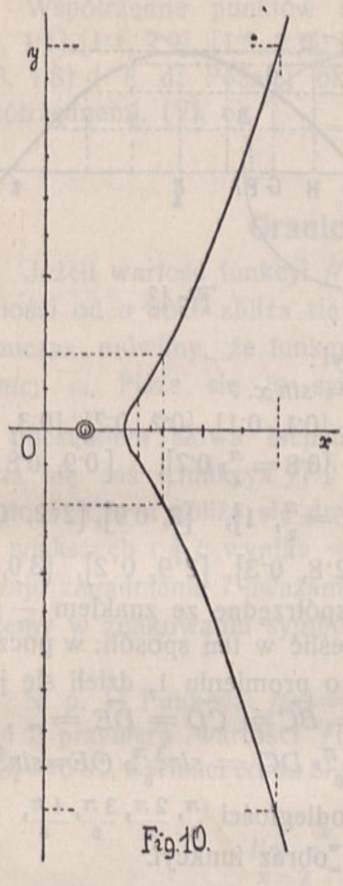

Fig. 10.

Współrzędne punktów są: [1, 0], [2, 0], [3, 0], [3·3, ± 1·5], [3·5, ± 2·7], [4, ± 6] i t. d. Punkta [1 0], [2, 0] są odosobnione.

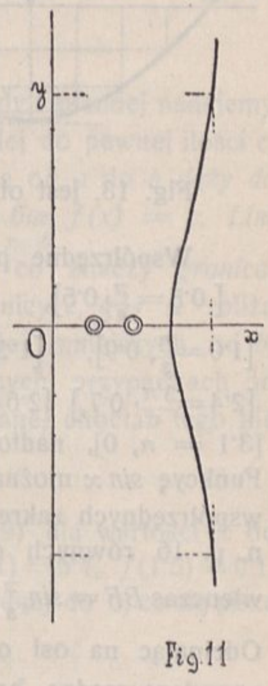

Fig. 11

Fig. 12. jest obrazem funkcyi: $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}.$

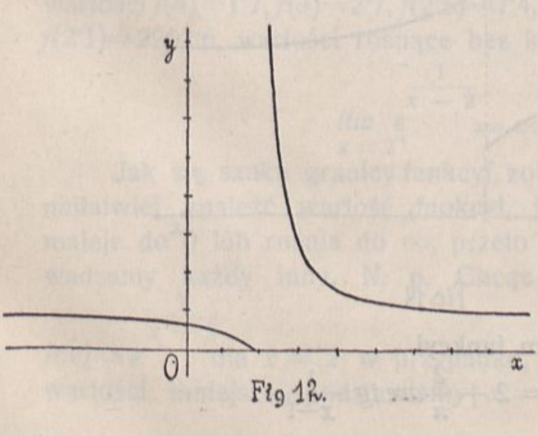

Fig. 12.

Współrzędne punktów są: [0, 0·6,], [1, 0·4], [1·5, 0·1], [2, 0], [2, ∞], [2·5, 7·4], [3, 2·7], [4, 1·7], [5, 1·4], [6, 1·3], [7, 1·2], [10, 1·1], [—1, 0·7], [—2·5, 0·8], [—5, 0·9 i t. d. Że [2, 0], [2, ∞] są współrzędnemi, okażemy później (V, 1.)

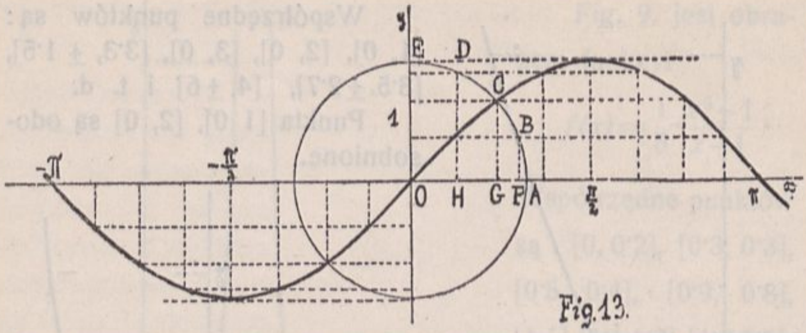

Fig. 13.

Fig. 13. jest obrazem funkcyi:

$$f(x) = \sin x.$$

Współrzędne punktów są: [0·1, 0·1], [0·2, 0·2], [0·3, 0·3], $[0{\cdot}5 = \frac{\pi}{6}, 0{\cdot}5]$, [0·7, 0·6], $[0{\cdot}8 = \frac{\pi}{4}, 0{\cdot}7]$, [0·9, 0·8], $[1{\cdot}0 = \frac{\pi}{3}, 0{\cdot}9]$, [1·2, 0·9], $[1{\cdot}6 = \frac{\pi}{2}, 1]$, [2, 0·9], [2·2, 0·8], $[2{\cdot}4 = \frac{3\pi}{4}, 0{\cdot}7,]$ $[2{\cdot}6 = \frac{5\pi}{6}, 0{\cdot}5]$, [2·8, 0·3], [2·9, 0·2], [3·0, 0·1], $[3{\cdot}1 = \pi, 0]$, nadto te same współrzędne ze znakiem — i t. d. Funkcyę $\sin x$ można także wykreślić w ten sposób: w początku współrzędnych zakreśla się koło o promieniu 1, dzieli się je na n. p. 16 równych części $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \ldots$, wtenczas $BF = \sin\frac{\pi}{8}$, $CD = \sin\frac{2\pi}{8}$, $DC = \sin\frac{3\pi}{8}$, $OE = \sin\frac{4\pi}{8} \ldots$ Odcinając na osi odciętych w odległości $\frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \ldots$ powyższe rzędne, będziemy mieć obraz funkcyi.

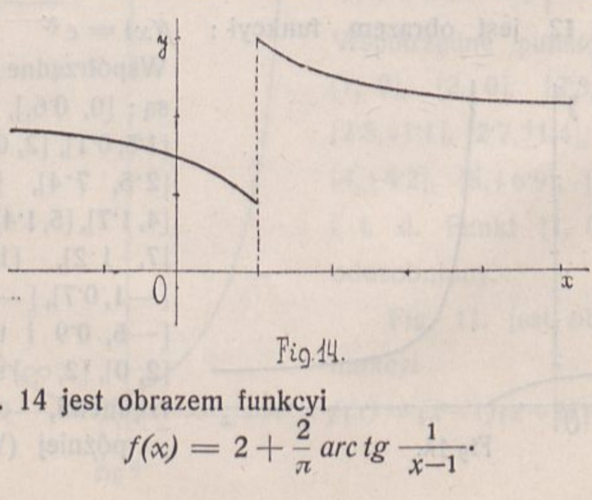

Fig. 14.

Fig. 14 jest obrazem funkcyi

$$f(x) = 2 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x-1}.$$

Współrzędne punktów są [0, 1·5], [0·5, 1·3], [0·7, 1·2], [0·9, 1·1], [1·1, 2·9], [1·5, 2·7], [2, 2·5], [3, 2·3], [5, 2·2], [—1, 1·7], [—3, 1·8] i t. d. Później okażemy, że [1, 1], [1, 3] są także współrzędnemi. (VI, 6).

V.

Granica funkcyi.

Jeżeli wartość funkcyi $f(x)$ w miarę gdy zmiennej nadajemy wartości od a do b zbliża się coraz bardziej do pewnej ilości c, natenczas mówimy, że funkcya w obszarze od a do b *dąży do granicy* c. Pisze się to symbolicznie: $\lim\limits_{x=b} f(x) = c$. *Lim* jest początkiem słowa łacińskiego *limes*, co znaczy *granica*. Czyta się zaś: funkcya $f(x)$ dąży do granicy c, gdy x zbliża się do b. Czy x zbliża się do b od wartości mniejszych od b, czy większych od b wynika w poszczególnych przypadkach od rodzaju zagadnienia i uważamy to jako znane, chociaż tego nie piszemy w znakowaniu symbolicznem.

N. p. 1) Funkcya $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ (str. 9) dla wartości x od 0 do 2 przybiera wartości $f(0) = 0·6$, $f(1) = 0·4$, $f(1·5) = 0·1$, $f(1·8) = 0·01$, wartości coraz bliższe 0, zatem dąży do 0, co się pisze

$$\lim_{x=2} e^{\frac{1}{x-2}} = 0.$$

Lecz ta sama funkcya dla wartości x od 4 do 2 przybiera wartości $f(4) = 1·7$, $f(3) = 2·7$, $f(2·5) = 7·4$, $f(2·3) = 28·0$. $f(2·2) = 148·4$, $f(2·1) = 2202·6$, wartości rosnące bez końca, co się pisze

$$\lim_{x=2} e^{\frac{1}{x-2}} = \infty.$$

Jak się szuka granicy funkcyi, zobaczymy poniżej. Ponieważ najłatwiej znaleźć wartość funkcyi, jeżeli zmienna niezależna maleje do 0 lub rośnie do ∞, przeto do tego przypadku sprowadzamy każdy inny. N. p. Chcąc znaleźć wartość funkcyi $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ dla $x = 2$ w przypadku, gdy x zbliża się do 2 od wartości mniejszej, podstawiamy $x = 2 - \delta$, gdzie δ oznacza liczbę dodatnią. Otrzymamy $f(x)=f(2-\delta)=e^{-\frac{1}{\delta}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{\delta}}}$.

Ponieważ δ zbliża się do zera, gdy x zbliża się do 2, przeto

$$\lim_{x=2} f(x)=\lim_{\delta=0} f(2-\delta)=\lim_{\delta=0}\frac{1}{e^{\frac{1}{\delta}}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{0}}}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Chcąc znaleźć wartość tejże funkcyi dla $x=2$ w przypadku, gdy wartość x zbliża się do 2 od wartości większej, podstawiamy $x=2+\delta$, gdzie δ oznacza liczbę dodatnią.

Otrzymamy $f(x)=f(2+\delta)=e^{\frac{1}{\delta}}$.

Ponieważ δ zbliża się do 0, gdy x zbliża się do 2, przeto

$$\lim_{x=2} f(x)=\lim_{\delta=0} f(2+\delta)=\lim_{\delta=0} e^{\frac{1}{\delta}}=e^{\frac{1}{0}}=e^{\infty}=\infty$$

zgodnie z poprzedzającem.

Widzimy z tego, że funkcya $e^{\frac{1}{x-2}}$ ma dwie wartości 0 i ∞ dla $x=2$.

2) Do jakiej granicy dąży funkcya $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$, jeżeli x rośnie bez końca?

$$\lim_{x=\infty} f(x)=\lim_{x=\infty} e^{\frac{1}{x-2}}=e^{\frac{1}{\infty}}=e^{0}=1$$

zgodnie z tem, cośmy podali na str. 9, gdzie widzimy, że $f(2{\cdot}5)=7{\cdot}4$, $f(3)=2{\cdot}7$, $f(4)=1{\cdot}7$, $f(5)=1{\cdot}4$, $f(6)=1{\cdot}3$, $f(7)=1{\cdot}2$, $f(10)=1{\cdot}1$.

3) Do jakiej granicy dąży funkcya

$$F(k)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}=2\left(1-\frac{1}{2^k}\right),$$

jeżeli k jest liczbą całkowitą dodatnią, rosnącą bez końca?

$$\lim_{k=\infty} F(k)=\lim_{k=\infty}\left[\left(2\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{2^{\infty}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\infty}\right)$$

$$=2(1-0)=2,$$

co też można poznać z przebiegu wartości funkcyi $F(k)$, n. p. $F(20)=2\left(1-\frac{1}{2^{20}}\right)$, $F(30)=2\left(1-\frac{1}{2^{30}}\right)$, $F(100)=2\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right)\ldots$

4) Do jakiej granicy dąży funkcya

$$\psi(k) = \frac{m-k}{k+1} x,$$

jeżeli k jest liczbą całkowitą dodatnią, rosnącą bez końca?

Ponieważ $\frac{m-k}{k+1} x = \frac{\frac{m}{k} - 1}{1 + \frac{1}{k}} x$, przeto

$$\lim_{k=\infty} \psi(k) = \lim_{k=\infty} \frac{\frac{m}{k} - 1}{1 + \frac{1}{k}} x = \frac{\frac{m}{\infty} - 1}{1 + \frac{1}{\infty}} x = \frac{0-1}{1+0} x = -x.$$

5) Do jakiej granicy dąży funkcya

$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

dla $x = 1$?

Podstawiając $x = 1 - \delta$, otrzymamy

$$\lim_{x=1} f(x) = \lim_{\delta=0} f(1-\delta) = \lim_{\delta=0} \left[\frac{1}{5} \cdot \frac{(1-\delta)^5 - 1}{-\delta}\right]$$

$$= \lim_{\delta=0} \left[1 - 2\delta + 2\delta^2 - \delta^3 + \frac{\delta^4}{5}\right] = 1.$$

Podstawiając zaś $x = 1 + \delta$, otrzymamy

$$\lim_{x=1} f(x) = \lim_{\delta=0} f(1+\delta) = \lim_{\delta=0} \left[\frac{1}{5} \cdot \frac{(1+\delta)^5 - 1}{\delta}\right]$$

$$= \lim_{\delta=0} \left[1 + 2\delta + 2\delta^2 + \delta^3 + \frac{\delta^4}{5}\right] = 1.$$

Zatem $f(1) = 1$.

Do tego samego wyniku dochodzimy, pamiętając, że

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \frac{1}{5}(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

VI.

Ciągłość funkcyi.

O ciągłości można mówić tylko przy takich funkcyach, w których zmienna niezależna może mieć wszelkie możliwe wartości. Są bowiem funkcye, w których zmienna niezależna podlega pewnemu ograniczeniu n. p. może być tylko liczbą całkowitą dodatnią, jak to ma miejsce przy wzorze binomialnym

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{k-1}x^{k-1} + \ldots,$$

gdzie współczynnik wyrazu $k$go jest funkcyą liczby całkowitej k

$$\psi(k) = \binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.2\ldots(k-1)}.$$

Jeżeli zmienna niezależna jest poddana pewnemu ograniczeniu, jest to zawsze wyraźnie zaznaczone, jeżeli nie ma żadnego zastrzeżenia, natenczas przyjmuje się, że zmienna niezależna może przyjmować wszelkie możliwe wartości.

W dalszym ciągu ograniczymy się na rozważaniu ilości rzeczywistych i skończonych, zatem we funkcyi będziemy zmiennej niezależnej przypisywać wartości rzeczywiste i skończone i takie wartości funkcyi będziemy uważać za użyteczne, które będą ilościami rzeczywistemi i skończonemi ; jednem słowem będziemy rozważać funkcye w obszarach, w których mają wartości rzeczywiste i skończone.

Funkcya $f(x)$ jest *ciągła dla pewnej wartości zmiennej niezależnej* a, jeżeli wartości, jakie przybierze funkcya dla wartości zmiennej niezależnej bardzo mało różniących się od a, mianowicie dla $a-\delta$ i $a+\delta$, gdzie δ wyraża bardzo małą ilość, bardzo mało się różnią od $f(a)$ i to tem mniej, im δ jest mniejsze, czyli jeżeli $\lim\limits_{\delta=0} f(a-\delta) = \lim\limits_{\delta=0} f(a+\delta) = f(a)$.

Co do ilości a, $f(a)$, $f(a-\delta)$, $f(a+\delta)$ przyjmujemy, że są rzeczywiste i skończone.

Geometrycznie znaczy to : jeżeli funkcya $f(x)$ jest ciągła dla $x=a$, to w jej obrazie punkta

$$[a-\delta, f(a-\delta)], \ [a, f(a)], \ [a+\delta, f(a+\delta)]$$

są rzeczywiste bardzo blizko siebie położone i to tem bliżej, im δ jest mniejsze (fig 15).

Jeżeli funkcya $f(x)$ jest ciągłą dla wszystkich wartości zmiennej niezależnej od $x=a$ do $x=b$, natenczas jest ciągłą w obszarze od $f(a)$ do $f(b)$.

Geometrycznie znaczy to: jeżeli funkcya $f(x)$ jest ciągłą w obszarze od $f(a)$ do $f(b)$, natenczas w jej obrazie wszystkie punkta od $[a, f(a)]$ do $[b, f(b)]$ tworzą linię nieprzerwaną (fig. 15).

Jeżeli nie wszystkie wartości funkcyi $f(a)$, $f(a-\delta)$, $f(a+\delta)$, są skończone, rzeczywiste i bardzo mało różniące się od siebie i to tem mniej, im δ jest mniejsze, wtenczas funkcya dla $x=a$ nie jest ciągłą, lecz doznaje przerwy.

Geometrycznie znaczy to, że w obrazie funkcyi linia w punkcie $[a, f(a)]$ jest przerwana, czyli robi skok (fig. 16).

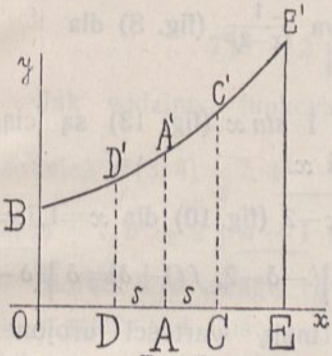

Fig.15

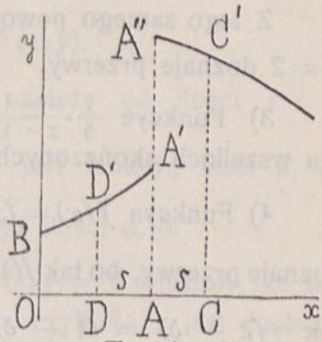

Fig. 16

Objaśnienie geometryczne.

Jeżeli (fig. 15.) $BD'A'C'E'$ jest obrazem funkcyi $f(x)$, $OA=a$, $DA=AC=\delta$, natenczas $AA'=f(a)$, $DD'=f(a-\delta)$, $CC'=f(a+\delta)$. Gdy δ maleje, punkta C' i D' zbliżają się ustawicznie do punktu A', aż w końcu dla $\delta=0$ nań padną. W punkcie $[a, f(a)]$ linia jest ciągła; również w punktach aż do $[OE=b,\ EE'=f(b)]$. Widzimy, że linia jest ciągła od punktu A' do E'.

Jeżeli (fig. 16), $BD'A'A''C'$ jest obrazem funkcyi $f(x)$, $OA=a$, $DA=AC=\delta$, $DD'=f(a-\delta)$, $CC'=f(a+\delta)$, $f(a)$ ma dwie wartości AA' i AA'' różne od siebie. Gdy δ maleje, punkt D' zbliża się do punktu A', punkt C' do punktu A''. Dla $\delta=0$ punkt D' padnie na punkt A', punkt C' na punkt A''. Linia w punkcie $[a, f(a)]$ jest przerwana i czyni skok.

Przykłady.

1) Funkcya $f(x)=3x^2-8x+5$ (fig. 6.) jest ciągłą dla wszystkich wartości skończonych zmiennej niezależnej.

Dowód. Ponieważ $f(x+\delta)=3(x+\delta)^2-8(x+\delta)+5$
$$=3x^2-8x+5+(6x-8)\delta+3\delta^2,$$

przeto $\lim\limits_{\delta=0} f(x+\delta)=\lim\limits_{\delta=0}\,[3x^2-8x+5+(6x-8)\delta+3\delta^2]=f(x)$,

podobnież $\lim\limits_{\delta=0} f(x-\delta)=\lim\limits_{\delta=0}\,[3x^2-8x+5-(6x-8)\delta+3\delta^2]=f(x)$.

2) Funkcya $f(x)=\frac{1}{2-x}$ (fig. 7.) dla $x=2$ doznaje przerwy, bo $f(2)=\frac{1}{0}=\infty$.

Z tego samego powodu funkcya $\frac{1}{(x-2)^2}$ (fig. 8) dla $x=2$ doznaje przerwy.

3) Funkcye $\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5-1}{x-1}$ (fig. 9) i $\sin x$ (fig. 13) są ciągłe dla wszelkich skończonych wartości x.

4) Funkcya $f(x)=(x-1)\sqrt{x-2}$ (fig. 10) dla $x=1$, i $x=2$ doznaje przerwy, bo tak $f(1-\delta)=-\delta\sqrt{-\delta-2}$, $f(1+\delta)=\delta\sqrt{\delta-2}$ jak $f(2-\delta)=(1-\delta)\sqrt{-\delta}$ mają wartości urojone.

Z tego samego powodu funkcya $(x-1)(x-2)\sqrt{x-3}$ (fig. 11) doznaje przerwy dla $x=1$, $x=2$ i $x=3$.

5) Funkcya $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$ doznaje przerwy dla $x=2$, bo $\lim\limits_{\delta=0} f(2-\delta)=0$, $\lim\limits_{\delta=0} f(2+\delta)=\infty$ (fig. 12) (V, 1).

6) Funkcya $f(x)=2+\frac{2}{\pi}\,arc\,tg\,\frac{1}{x-1}$ (fig. 14) dla $x=1$ doznaje przerwy, bo

$$\lim_{\delta=0} f(1-\delta)=\lim_{\delta=0}\left[2+\frac{2}{\pi}\,arc\,tg\left(-\frac{1}{\delta}\right)\right]=\lim_{\delta=0}\left[2-\frac{2}{\pi}\,arc\,tg\,\frac{1}{\delta}\right]$$

$$=2-\frac{2}{\pi}\,arc\,tg\,\frac{1}{0}=2-\frac{2}{\pi}\,arc\,tg\infty=2-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=2-1=1,$$

zaś
$$\lim_{\delta=0} f(1+\delta)=\lim_{\delta=0}\left[2+\frac{2}{\pi}\,arc\,tg\,\frac{1}{\delta}\right]=2+1=3.$$

Na przedstawionych obrazach wymienionych funkcyi widoczną jest rzeczą, jak linia robi skok w punktach odpowiadających przerwom funkcyi.

VII.

Funkcya uwikłana.

Wyrażenie, w którem się znajdują dwie ilości x, y, jest ich funkcyą. N. p. $7y^5+2\sqrt[3]{x}-1$ jest funkcyą ilości x, y. Pisze się to:

$$7y^5+2\sqrt[3]{x}-1=F(x,y).$$

Jak widzimy, funkcya $F(x,y)$ zależy od ilości x i y. Podobnież $F(3,4)=7.4^5+2\sqrt[3]{3}-1$ jest funkcyą liczb 3, 4; $F(a,b)=7.b^5+2\sqrt[3]{a}-1$ jest funkcyą ilości a, b.

Biorąc pod uwagę równanie $F(x,y)=0$ widzimy, że tak ilość x zależy od ilości y, jak y od x, czyli że x jest funkcyą ilości y i naodwrót y jest funkcyą ilości x.

Funkcya, jaką jest jedna ilość względem drugiej w równaniu $F(x,y)=0$ nazywa się funkcyą *uwikłaną*. Gdybyśmy to równanie rozwiązali ze względu na jedną ilość, otrzymalibyśmy funkcyę *wyraźną* drugiej ilości. N. p. w równaniu

$$7y^5+2\sqrt[3]{x}-1=0$$

y jest funkcyą uwikłaną ilości x, a x jest funkcyą uwikłaną ilości y. Rozwiązawszy to równanie otrzymamy

$$y=\sqrt[5]{\frac{1-2\sqrt[3]{x}}{7}}=f(x)$$

t. j. y jako funkcyę wyraźną $f(x)$ ilości x i

$$x=\left(\frac{1-7y^5}{2}\right)^3=\varphi(y)$$

t. j. x jako funkcyę wyraźną ilości y.

Jeżeli ilości x, y są zmienne, to jeżeli jedną z nich przyjmiemy jako zmienną niezależną, druga jest zmienną zależną. N. p. w równaniu $y=f(x)$ ilość x jest zmienną niezależną, zaś w równaniu $x=\varphi(y)$ ilość y jest zmienną niezależną.

Bardzo często funkcya uwikłana jest tego rodzaju, że się żadna zmienna nie da przedstawić jako funkcya wyraźna drugiej. N. p.

$$3(x-1)-4y+5.e^{\frac{5}{4(x-1)+3y}}=0.$$

VIII.

Obraz funkcyi uwikłanej.

Uważając ilość x jako zmienną niezależną, otrzymamy y jako jej funkcyę.

Kreśląc linię wyrażoną przez równanie $F(x,y)=0$, otrzymamy geometryczny obraz ilości y uważanej jako funkcyę zmiennej niezależnej x. Fig. 17. przedstawia nam linię

$$3(x-1)-4y+5.e^{\frac{5}{4(x-1)+3y}}=0.$$

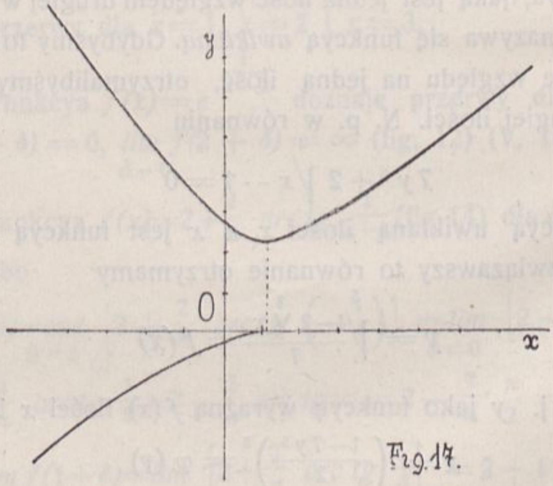

Fig. 17.

Współrzędne punktów linii są: [0,—0·3], [0·4,—0·2], [0·8,—0·1], [1, 0] [—0·5,—0·5], [—1,—0·7], [—2,—1·3], [—3,—2], [—4,—2·7], [—4,7·4], [—3,6·2], [—2,5], [—1,3·8], [—0·5,3·3], [0,2·9], [0·4, 2·6], [0·8,2·5], [1,2·46], [1·5,2·5], [2,2·7], [2·5,2·9], [3,3 2], [4,3·8], [5,4·5], [6,5·2], [7,5·9] i t. d.

IX.

Ciągłość funkcyi uwikłanej.

To cośmy mówili o ciągłości funkcyi wyraźnej, odnosi się także do funkcyi uwikłanej. Chcąc zbadać, czy w równaniu $F(x,y)=0$ ilość y uważana jako funkcya zmiennej niezależnej x jest ciągłą dla $x=a$, postępujemy w następujący sposób: Szukamy ilości $y=b$ takiej, aby było spełnione równanie $F(a,b)=0$. Wtenczas wiemy, że dla wartości $x=a$, wartość funkcyi jest $y=b$.

Szukamy następnie wartości funkcyi dla $x=a-\delta$ i $x=a+\delta$, gdzie δ oznaczą ilość dodatnią. Niech niemi będą $y=b-\varepsilon$ i $y=b+\varepsilon'$, to znaczy, niech $b-\varepsilon$ i $b+\varepsilon'$ spełniają równania

$$F(a-\delta,\ b-\varepsilon)=0 \quad \text{i} \quad F(a+\delta,\ b+\varepsilon')=0.$$

Jeżeli dla δ malejącego do 0 także ε i ε' maleją do 0, t. j. jeżeli jest spełniony warunek

$$\lim_{\delta=0} F(a-\delta,\ b-\varepsilon)=F(a,b)=0,$$

$$\lim_{\delta=0} F(a+\delta,\ b+\varepsilon')=F(a,b)=0,$$

natenczas funkcya y jest *ciągłą dla* $x=a$. Geometrycznie znaczy to, że około punktu (a,b) znajdują się punkta bardzo blizko położone $[a-\delta, b-\varepsilon]$ i $[a+\delta, b+\varepsilon']$ i to tem bliżej, im δ jest mniejsze. Jeżeli powyższy warunek nie jest spełniony, funkcya doznaje przerwy, co geometrycznie znaczy, że linia w punkcie $[a,b]$ jest przerwana.

Przykład. $F(x,y)=3(x-1)-4y+5.e^{\frac{5}{4(x-1)+3y}}$. Zbadać, czy gdy $F(x,y)=0$, funkcya y jest ciągła dla $x=1$.

Szukamy wartości funkcyi y dla $x=1$, to znaczy szukamy wartości y spełniającej równanie $F(1,y)=0$. Podstawiając $x=1-\delta$, otrzymamy

$$F(1-\delta,y)=-3\delta-4y+5.e^{\frac{5}{-4\delta+3y}}=0 \text{ czyli}$$

$$-3\delta-4y+\frac{5}{e^{\frac{5}{+4\delta-3y}}}=0.$$

Widzimy tu, że dla $\delta=0$, $y=0$ równanie to jest spełnione, bo

$$0+\frac{5}{e^{\frac{5}{0}}}=\frac{5}{e^{\infty}}=\frac{5}{\infty}=0.$$

Mamy zatem $F(1,0)=0$, czyli wiemy, że dla $x=1$ funkcya ma wartość $y=0$.

Weźmy teraz pod uwagę ilości $1-\delta$, $0-\varepsilon$ spełniające równanie

$$F(1-\delta,\ 0-\varepsilon)=-3\delta+4\varepsilon+5.\,e^{\frac{5}{-4\delta-3\varepsilon}}=0,$$

lub $-3\delta+4\varepsilon+\dfrac{5}{e^{\frac{5}{4\delta+3\varepsilon}}}=0.$

Gdy δ maleje do 0, to ε również maleje do 0, jeżeli powyższe równanie ma być spełnione; zatem ilości $1-\delta$, $0-\varepsilon$ zbliżają się do liczb 1, 0, i mamy

$$\lim_{\delta=0} F(1-\delta,\ 0-\varepsilon)=F(1,0)=0.$$

Weźmy następnie pod uwagę ilości $1+\delta$, $0+\varepsilon'$ spełniające równanie

$$F(1+\delta,\ 0+\varepsilon')=3\delta-4\varepsilon'+5.\,e^{\frac{5}{4\delta+3\varepsilon'}}=0.$$

Jeżeli δ maleje do 0, to ε' nie może maleć do 0, boby było

$$5.\,e^{\frac{5}{0}}=5.\,5^{\infty}=\infty=0,$$

co jest sprzecznem. W tym przypadku ε' zbliża się do takiej ilości, która spełnia równanie

$$F(1,\ 0+\varepsilon')=-4\varepsilon'+5.\,e^{\frac{5}{3\varepsilon'}}=0.$$

Rachunkiem znajduje się, że $\varepsilon'=2{\cdot}46$.

Widzimy zatem, że

$\lim\limits_{\delta=0} F(1+\delta,\ 0+\varepsilon')=F(1,\ 2{\cdot}46)=0.$, z czego wynika, że funkcya y dla $x=1$ doznaje przerwy.

Na fig. 17. widzimy, że linia w punkcie [1, 0] jest przerwana.

Z kształtu linii na fig. 17. łatwo poznać, że jestto ta sama linia, co na fig. 12, tylko odniesiona do innego układu współrzędnych.

Twierdzenia, jakie poniżej wyprowadzimy dla funkcyi, będą się odnosić do takich obszarów, w których rozważane funkcye są ciągłe.

X.

Szereg nieskończony.

Szereg, którego liczba wyrazów nie jest ograniczona, lecz rośnie bez końca, nazywa się *nieskończonym*.

N. p. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots$

Wyrazy szeregu nieskończonego będziemy oznaczać głoskami

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots a_k,\ a_{k+1}, \ldots,$$

gdzie k oznacza liczbę całkowitą dodatnią.

Oznaczywszy

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots$$

$$S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k,$$

$$R_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$$

mamy

$$S = S_k + R_k.$$

S nazywa się *sumą szeregu nieskończonego*, S_k *sumą k pierwszych wyrazów*, R_k *resztą* czyli *uzupełnieniem szeregu po wyrazie ktym*.

Jeżeli k rośnie bez końca, to S_k dąży do S a R_k maleje do 0. Można przeto napisać

$$\lim_{k=\infty} S_k = S, \qquad \lim_{k=\infty} R_k = 0.$$

W dalszym ciągu będziemy mówić o szeregach, których wyrazy a_1, a_2, $a_3 \ldots$ są ilościami dodatniemi i skończonemi.

Szeregu nieskończonego nie możemy wyrazić inaczej, tylko w sposób przybliżony. Jeżeli jednak taki szereg ma mieć zastosowanie w matematyce, jako jasno określony, musi się dać suma jego wyrazić zapomocą ilości skończonej z taką dokładnością, jak się nam podoba.

To może być spełnione w dwojaki sposób; albo suma S_k tem bardziej zbliża się do pewnej ilości skończonej, im k jest liczbą większą, albo też szereg jest tego rodzaju, że od pewnego

k począwszy reszta R_k może się stać mniejszą od dowolnie małej ilości ε, podczas gdy S_k ma wartość skończoną. N. p.

1) Szereg nieskończony

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = 2,$$

albowiem suma pierwszych k wyrazów dąży do granicy 2, gdy k rośnie bez końca (V, 3)

Ogólnie: postęp geometryczny nieskończony

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1-q},$$

jeżeli $0 < q < 1$. Albowiem

$$S_k = a\frac{q^k - 1}{q-1} = \frac{a}{1-q} - \frac{a\,q^k}{1-q}, \quad S_{k+s} = \frac{a}{1-q} - \frac{a\,q^{k+s}}{1-q},$$

gdzie s jest liczbą całkowitą, dodatnią.

Ponieważ $q < 1$, przeto

$$q^{k+s} < q^k, \quad \frac{q^{k+s}}{1-q} < \frac{q^k}{1-q},$$

to znaczy: biorąc sumę $k+s$ pierwszych wyrazów, popełniamy błąd mniejszy, niż biorąc sumę k pierwszych wyrazów postępu. Gdy k rośnie bez końca, q^k maleje do 0 a S_k dąży do granicy

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

2) W szeregu nieskończonym

$$S = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

$$S_9 = 2{\cdot}7182788, \qquad R_9 < 0{\cdot}0000031,$$
$$S_{10} = 2{\cdot}71828153, \qquad R_{10} < 0{\cdot}00000031,$$
$$S_{11} = 2{\cdot}71828180, \qquad R_{11} < 0{\cdot}00000003$$

i t. d. R_k może się stać mniejsze od dowolnie małej liczby. ($2! = 1.2$, $3! = 1.2.3$, ... $n! = 1.2.3. \ldots (n-1).n$.)

W obu przypadkach możemy szereg wyrazić z dowolną dokładnością; albowiem w pierwszym przypadku znamy granicę, do której S_k dąży, gdy k rośnie bez końca, w drugim możemy k tak dobrać, że gdy weźmiemy S_k zamiast S, popełnimy błąd tak mały, jak się nam podoba, n. p. w ostatnim przykładzie biorąc S_9 zamiast S popełnimy błąd mniejszy, niż 0·0000031, biorąc S_{10} popełnimy błąd mniejszy, niż 0·00000031 i t. d.

Szereg nieskończony, który się da wyrazić zapomocą ilości skończonych z dowolną dokładnością, nazywa się *zbieżny*.

XI.

Dwa znamiona zbieżności szeregu.

W szeregu zbieżnym muszą wyrazy od pewnego miejsca począwszy maleć. Gdyby bowiem nie malały, nie mogłaby suma nieskończenie wielu takich wyrazów stać się mniejszą od dowolnie małej ilości.

Ten warunek jest konieczny, ale nie wystarczający. N. p. szereg $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ nie jest zbieżny, chociaż jest malejący.

Pierwsze znamię zbieżności szeregu.

Gdy w szeregu nieskończonym

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots$$

iloraz $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} < b$, *gdzie* $0 < b < 1$, *jakkolwiek k rośnie bez końca, to szereg jest zbieżny.*

Albowiem z nierówności

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < b, \quad \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} < b, \quad \frac{a_{k+3}}{a_{k+2}} < b, \ldots$$

wynikają następujące

$$a_{k+1} < b.a_k, \quad a_{k+2} < b.a_{k+1}, \quad a_{k+3} < b.a_{k+2}, \ldots$$

Z tych zaś przez mnożenie otrzymamy

$$a_{k+1} < b.a_k, \quad a_{k+2} < b^2.a_k, \quad a_{k+3} < b^3.a_k, \ldots$$

Dodawszy te nierówności, mamy

$$R_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots < a_k (b + b^2 + b^3 + \ldots)$$

czyli, ponieważ $0 < b < 1$

$$R_k < a_k \cdot \frac{b}{1-b} \quad (X, 1).$$

Ponieważ szereg jest malejący, można k tak dobrać, iż $a_k \cdot \frac{b}{1-b}$ a zatem R_k stanie się mniejsze od dowolnie małej ilości ε a ponieważ suma pierwszych k wyrazów szeregu jest ilością skończoną, gdyż mamy do czynienia z szeregiem, którego wyrazy są ilościami skończonemi, przeto szereg jest zbieżny.

Drugie znamię zbieżności szeregu.

Dotychczas mówiliśmy o szeregach, których wyrazy są dodatnie, *teraz weźmiemy pod uwagę szereg nieskończony malejący, którego wyrazy od pewnego miejsca począwszy zmieniają kolejno znaki. Taki szereg jest zbieżny.*

Aby to udowodnić, weźmy pod uwagę szereg nieskończony, w którym reszta

$$R_k = a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} - \dots$$

$$\text{i} \quad a_{k+1} > a_{k+2} > a_{k+3} > \dots$$

Resztę R_k możemy napisać

$$R_k = (a_{k+1} - a_{k+2}) + (a_{k+3} - a_{k+4}) + \dots$$

$$\text{lub} \quad R_k = a_{k+1} - [(a_{k+2} - a_{k+3}) + (a_{k+4} - a_{k+5}) + \dots]$$

Ponieważ dwumiany w nawiasach będące są dodatnie, przeto

$$a_{k+1} > R_k > a_{k+1} - a_{k+2}.$$

Lecz wyrazy maleją bez końca, zatem można k tak dobrać, że a_{k+1} a więc i R_k staną się mniejsze od dowolnie małej ilości ε.

Jeżeli szereg mający wyrazy dodatnie jest zbieżny, to również szereg różniący się od poprzedzającego tylko tem, że niektóre wyrazy mają znaki ujemne, jest zbieżny. Tem bardziej bowiem jest wtenczas spełniony warunek zbieżności.

Gdyby wszystkie wyrazy miały zmienione znaki, toby cały drugi szereg różnił się tylko znakiem od pierwszego.

XII.

Zastosowanie znamion zbieżności szeregu.

1) Szereg $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\ldots$ jest zbieżny dla wszelkich wartości skończonych x tak dodatnich jak ujemnych.

Dowód. Gdy x jest dodatnie, natenczas ponieważ

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{x}{k},$$

dla $k>x$ będzie $\frac{a_{k+1}}{a_k}<1$, jakkolwiek k rośnie bez końca, gdyż $\lim\limits_{k=\infty}\frac{x}{k}=0$. Szereg jest zbieżny na mocy pierwszego znamienia.

Gdy x jest ujemne, szereg

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^k}{k!}+\ldots$$

począwszy od $k>x$ jest malejący, a zatem jest zbieżny na mocy drugiego znamienia.

Dla $x=1$ szereg pierwszy przechodzi na

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

Wartość tego szeregu jest 2·718281828459..., oznacza się głoską e i jest zasadą logarytmów naturalnych.

2) Szereg $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.\,3}{2.\,4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots$

$$+\frac{1.\,3\ldots(2k-3)(2k-1)}{2.\,4\,\ldots\,(2k-2)\,2k}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\ldots$$

jest zbieżny dla $-1<x<1$ na zasadzie pierwszego znamienia, albowiem $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(2k-1)^2}{2k(2k+1)}x^2$ jest mniejsze od 1, mimo że k rośnie bez końca, gdyż

$$\lim_{k=\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k=\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{k}\right)^2}{2.\left(2+\frac{1}{k}\right)}x^2=\frac{2.^2}{2.2}x^2=x^2.$$

3) Szeregi: $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \ldots,$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots,$$

dla wszelkich skończonych wartości x;

szeregi: $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots,$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots,$$

dla $-1 < x < 1$;

szeregi: $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots,$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots,$$

dla $0 < x < 1$;

jakoteż szeregi: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots,$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

są zbieżne na mocy drugiego znamienia zbieżności.

4) Jeżeli m jest liczbą ujemną lub ułamkową, to rozwinięcie potęgi

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \ldots + \binom{m}{k} x^k + \ldots$$

jest szeregiem nieskończonym. Szereg ten jest zbieżny, gdy $-1 < x < 1$.

Aby to okazać, weźmy najpierw pod uwagę przypadek, kiedy $0 < x < 1$, a m jest liczbą dodatnią. Jest wtenczas

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{m-k+1}{k} x = -\frac{k-m-1}{k} x = -\left(1 - \frac{m+1}{k}\right) x.$$

Gdy $k > m+1$, natenczas $1 > \frac{m+1}{k}$, $1 - \frac{m+1}{k} > 0$, zatem i $\left(1 - \frac{m+1}{k}\right) x > 0$. Ponieważ zaś $\left(1 - \frac{m+1}{k}\right) < 1$, zatem i $\left(1 - \frac{m+1}{k}\right) x \lesseqgtr 1$; to znaczy, że od wyrazu a_k, gdy $k > m+1$, rozpoczyna szereg maleć.

Gdy $0 < x < 1$ a m jest ujemne, t. j: gdy $m = -m'$, gdzie m' jest liczbą dodatnią, rozróżniamy dwa przypadki $m' < 1$ i $m' > 1$.

W przypadku, gdy $m' < 1$, jest

$$\frac{k+m'-1}{k} = 1 + \frac{m'-1}{k} = \left(1 - \frac{1-m'}{k}\right) < 1,$$

zatem $\frac{k+m'-1}{k}\,x < 1$; to znaczy, że szereg jest malejący od początku.

Gdy $m' > 1$, można znaleźć k tak wielkie, iż będzie spełniony warunek

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+m'-1}{k}\,x = \left(1 + \frac{m'-1}{k}\right) x < 1.$$ $-1<x<1$

Jeżeli bowiem weźmiemy pod uwagę liczbę k_1 spełniającą równanie $\left(1 + \frac{m'-1}{k_1}\right) x = 1$, a jest nią $k_1 = \frac{(m'-1)\,x}{1-x}$, natenczas dla każdej liczby $k > k_1$ jest spełniona nierówność $\left(1 + \frac{m'-1}{k}\right) x < 1$ i to tem bardziej, im k jest większe.

Widzimy zatem, że w każdym przypadku, gdy $0 < x < 1$, szereg

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \ldots$$

od pewnego miejsca jest malejący, a wyrazy zmieniają kolejno znaki; jest zatem zbieżny według drugiego znamienia zbieżności.

Gdy x jest ujemne, mniejsze od 1, natenczas szereg powyższy przechodzi na

$$(1-x)^m = 1 - \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 - \ldots + (-1)^k \binom{m}{k} x^k + \ldots,$$

$$\text{gdzie } \frac{a_{k+1}}{a_k} = -\,\frac{m-k+1}{k} = \left(1 - \frac{m+1}{k}\right) x,$$

który tem się różni od poprzedniego, że od pewnego miejsca począwszy wyrazy jego maleją, zachowując jednakowe znaki.

Ponieważ jednak $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, mimo to, że k rośnie bez końca, gdyż

$$\lim_{k=\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k=\infty} \left(1 - \frac{m+1}{k}\right) x = \left(1 - \frac{m+1}{\infty}\right) x$$

$$= (1-0)\,x = x,$$

przeto szereg jest zbieżny na mocy pierwszego znamienia zbieżności.

Udowodniliśmy więc, że *rozwinięcie potęgi* $(1+x)^m$ *jest szeregiem zbieżnym, gdy* $-1 < x < 1$.

Przykłady.

α) $(1+x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - 0{\cdot}333\,x + 0{\cdot}222\,x^2 - 0{\cdot}173\,x^3 + 0{\cdot}144\,x^4 - 0{\cdot}125\,x^5 + \ldots,$
wyrazy maleją od początku, znaki kolejno się zmieniają.

β) $(1-x)^{-\frac{1}{3}} = 1 + 0{\cdot}333\,x + 0{\cdot}222\,x^2 + 0{\cdot}173\,x^3 + 0{\cdot}144\,x^4 + 0{\cdot}125\,x^5 + \ldots$

γ) $(1+x)^{-5} = 1 - 5\,x + 15\,x^2 - 35\,x^3 + 70\,x^4 - 126\,x^5 + 210\,x^6 - 330\,x^7 + 495\,x^8 - 715\,x^9 + \ldots$

Gdy $x = 0{\cdot}99$, wyrazy zaczynają maleć od wyrazu 397, albowiem $m' = 5$, $k_1 = 396$, $\dfrac{a_{397}}{a_{396}} = \left(1 + \frac{4}{396}\right) \cdot 0{\cdot}99 = 1$,
$\dfrac{a_{398}}{a_{397}} = \left(1 + \frac{4}{397}\right) \cdot 0{\cdot}99 < 1$ i t. d.

δ) $(1-x)^{-5} = 1 + 5\,x + 15\,x^2 + 35\,x^3 + 70\,x^4 + 126\,x^5 + 210\,x^6 + 330\,x^7 + 495\,x^8 + 715\,x^9 + \ldots$

ε) $(1+x)^{\frac{2}{3}} = 1 + 0{\cdot}0667\,x - 0{\cdot}1111\,x^2 + 0{\cdot}0494\,x^3 - 0{\cdot}0288\,x^4 + 0{\cdot}0192\,x^5 - 0{\cdot}0139\,x^6 + \ldots,$
wyrazy zaczynają zmieniać znak, gdy $k > \frac{2}{3} + 1$ t. j. począwszy od drugiego wyrazu.

ζ) $(1-x)^{\frac{2}{3}} = 1 - 0{\cdot}0667\,x - 0{\cdot}1111\,x^2 - 0{\cdot}0494\,x^3 - 0{\cdot}0284\,x^4 - 0{\cdot}0192\,x^5 - 0{\cdot}0139\,x^6 - \ldots,$
wyrazy od drugiego począwszy mają jednakowe znaki.

η) $(1+x)^{\frac{16}{3}} = 1 + 5{\cdot}3333\,x + 11{\cdot}5556\,x^2 + 12{\cdot}8395\,x^3 + 7{\cdot}4897\,x^4 + 1{\cdot}9973\,x^5 + 0{\cdot}1110\,x^6 - 0\,0106\,x^7 + 0{\cdot}0022\,x^8 - 0{\cdot}0006\,x^9 + 0{\cdot}0002\,x^{10} - \ldots,$
wyrazy zaczynają zmieniać znak, gdy $k > \frac{16}{3} + 1$ t. j. od siódmego wyrazu.

ϑ) $(1-x)^{\frac{16}{3}} = 1 - 5{\cdot}3333\,x + 11{\cdot}5556\,x^2 - 12{\cdot}8395\,x^3$
$+ 7{\cdot}4897\,x^4 - 1{\cdot}9973\,x^5 + 0{\cdot}1110\,x^6 + 0{\cdot}0106\,x^7 + 0{\cdot}0022\,x^8$
$+ 0{\cdot}0006\,x^9 + 0{\cdot}0002\,x^{10} + \ldots,$
wyrazy od siódmego począwszy mają znaki jednakowe.

ι) Szereg

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1.\,(1-x)}{1.\ 2} + \frac{1.\,(1-x)\,(1-2\,x)}{1.\ 2.\ 3.} + \ldots$$
$$+ \frac{1.\ (1-x)\ldots(1-(k-1)\,x)}{1.\ 2\ldots k} + \ldots$$

jest zbieżny dla $-1 < x < 1$. Gdy x maleje do 0, szereg dąży do

$$\lim_{x=0}\,(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots,$$

co jest równe $2{\cdot}718281828459\ldots = e$ (XII, 2).

N. p. $(1+0{\cdot}1)^{10} = 2 + 0.45 + 0{\cdot}12 + 0{\cdot}021 + 0{\cdot}00252$
$+ 0{\cdot}000210 + 0{\cdot}000012 = 2{\cdot}593742,$

$(1+0{\cdot}001)^{1000} = 2 + 0{\cdot}4995 + 0{\cdot}166167 + 0{\cdot}041417$
$+ 0{\cdot}008250 + 0{\cdot}001368 + 0{\cdot}000194 + 0{\cdot}000024 + 0{\cdot}000003$
$= 2{\cdot}716923,$

$(1+0{\cdot}000001)^{1000000} = 2 + 0{\cdot}5 + 0{\cdot}166666 + 0{\cdot}041666$
$+ 0{\cdot}008333 + 0{\cdot}001389 + 0{\cdot}000198 + 0{\cdot}000025 + 0{\cdot}000003$
$= 2{\cdot}718280$

$(1-0{\cdot}1)^{-10} = 2 + 0{\cdot}55 + 0{\cdot}22 + 0{\cdot}0715 + 0{\cdot}02002$
$+ 0{\cdot}005005 + 0{\cdot}001144 + 0{\cdot}000243 + 0{\cdot}000049 + 0{\cdot}000009$
$+ 0{\cdot}000002 = 2{\cdot}867972,$

$(1-0{\cdot}001)^{-1000} = 2 + 0{\cdot}5005 + 0{\cdot}167167 + 0{\cdot}041917$
$+ 008417 + 0{\cdot}001410 + 0{\cdot}000203 + 0{\cdot}000026 + 0{\cdot}000003$
$= 2{\cdot}719643,$

$(1-0{\cdot}000001)^{-1000000} = 2 + 0{\cdot}500001 + 0{\cdot}166667$
$+ 0{\cdot}041667 + 0{\cdot}008333 + 0{\cdot}001389 + 0{\cdot}000198 + 0{\cdot}000025$
$+ 0{\cdot}000003 = 2{\cdot}718283.$

Ogólnie: Ponieważ

$$(a+x)^n = \left[a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n,$$

przeto szereg

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} x^3 + \ldots$$

jest zbieżny, gdy $-a < x < a$.

XIII.

Pojęcie funkcyi pochodnej.

Funkcya $f(x)$ ma pewną wartość. Jeżeli x wzrośnie o δ, czyli jeżeli będzie mieć wartość $x+\delta$, funkcya będzie mieć wartość $f(x+\delta)$ a jej *przyrost* będzie $f(x+\delta) - f(x)$. Gdy δ maleje do zera, stosunek

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

dąży do pewnej granicy, która się nazywa *funkcyą pochodną* lub krótko *pochodną* funkcyi $f(x)$. Funkcya zaś $f(x)$ jest *pierwotną* względem swojej pochodnej. Znakiem pochodnej jest $f'(x)$ lub $\frac{d}{dx}f(x)$. Pisze się

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\delta=0} \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

a czyta się: $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ jest pochodną funkcyi $f(x)$ co do zmiennej x.

Symbol $\frac{d}{dx}$ oznacza działanie dokładnie określone; co nas naprowadziło do używania tego symbolu, zobaczymy później (XVIII).

XIV.

Pochodne niektórych funkcyi elementarnych.

1) Pochodna ilości stałej.

Jeżeli $f(x) = a$, gdzie a jest ilością od x niezależną, natenczas $f(x+\delta) = a$, $f(x+\delta) - f(x) = a - a = 0$, a zatem $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = 0$, jakkolwiek δ maleje.

Jest przeto $\frac{d}{dx}[a] = 0$.

t. j. *pochodna ilości stałej jest równa zeru.*

2) *Pochodna potęgi* x^n.

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right] = \lim_{\delta=0} \frac{(x+\delta)^n - x^n}{\delta}.$$

Ponieważ δ maleje do zera, więc jest mniejsze od x, szereg $(x+\delta)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\delta + \binom{n}{2} x^{n-2}\delta^2 + \ldots$ jest zbieżny (XII, 4).

Można napisać $(x+\delta)^n = x^n + n\,x^{n-1}\,\delta + M\,\delta^2$.
To uwzględniwszy otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right] = \lim_{\delta=0} \frac{x^n + n\,x^{n-1}\,\delta + M\,\delta^2 - x^n}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta=0}\left[n\,x^{n-1} + M\,\delta\right] = n\,x^{n-1}.$$

Mamy zatem wzór: $\frac{d}{dx}\left[x^n\right] = n\,x^{n-1}$.

3) *Pochodna funkcyi wykładniczej* a^x.

$$\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = \lim_{\delta=0} \frac{a^{x+\delta} - a^x}{\delta} = \lim_{\delta=0} a^x . \frac{a^\delta - 1}{\delta}.$$

Kładąc $a^\delta - 1 = \mu$ i bacząc, że gdy $\delta = 0$, to także $\mu = 0$, otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = \lim_{\delta=0,} a^x . \frac{\mu}{\delta}.$$

Z równania $a^\delta - 1 = \mu$ wynika $a^\delta = 1 + \mu$,

$$\delta\, lg_b\, a = lg_b\,(1+\mu),$$

$$\frac{\delta}{\mu}\, lg_b\, a = \frac{lg_b(1+\mu)}{\mu} = lg_b \sqrt[\mu]{1+\mu},$$

$$\frac{\mu}{\delta} = \frac{lg_b\, a}{lg_b \sqrt[\mu]{1+\mu}}$$

Lecz według XII, 4, ι)

$$\lim_{\mu=0} \sqrt[\mu]{1+\mu} = \lim_{\mu=0} (1+\mu)^{\frac{1}{\mu}} = e = 2{\cdot}71828\ldots,$$

zatem

$$\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = \lim_{\mu=0} a^x \frac{lg_b\, a}{\dfrac{\mu}{lg_b \sqrt[\mu]{1+\mu}}} = a^x \cdot \frac{lg_b\, a}{lg_b\, e}.$$

Gdy $b = e$, wtenczas

$$\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = a^x \,.\, lg_e\, a.$$

$lg_e\, a$ jest *logarytmem naturalnym* liczby a. Na przyszłość logarytm naturalny będziemy krótko oznaczać przez *ln*.

Mamy więc wzory:

$$\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = a^x \,.\, ln\, a, \quad \frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x. \quad (\text{gdyż } ln\, e = 1).$$

4) *Pochodna funkcyi logarytmicznej* $lg_b\, x$.

$$\frac{d}{dx}\left[lg_b x\right] = \lim_{\delta=0} \frac{lg_b(x+\delta) - lg_b x}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta=0} \frac{lg_b \dfrac{x+\delta}{x}}{\delta} = \lim_{\delta=0} \frac{lg_b\left[1+\dfrac{\delta}{x}\right]}{x.\dfrac{\delta}{x}}$$

Kładąc $\frac{\delta}{x} = \mu$ i bacząc, że gdy $\delta = 0$, to także $\mu = 0$, a uwzględniwszy przytem XII, 4, ι), otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\left[lg_b x\right] = \lim_{\mu=0} \frac{lg_b(1+\mu)}{\mu\, x} = \lim_{\mu=0} \frac{lg_b \sqrt[\mu]{1+\mu}}{x} = \frac{lg_b e}{x}.$$

Gdy $b = e$, wypada

$$\frac{d}{dx}\left[ln\, x\right] = \frac{1}{x}.$$

5) *Pochodna funkcyi sin x.*

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x\right] = \lim_{\delta=0} \frac{\sin(x+\delta) - \sin x}{\delta}.$$

Stosując wzór

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2},$$

otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x\right] = \lim_{\delta=0} \frac{2\cos\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{\delta}{2}}{\delta}.$$

Kładąc $\frac{\delta}{2} = \varepsilon$ i bacząc, że gdy $\delta = 0$, to także $\varepsilon = 0$, mamy

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x\right] = \lim_{\varepsilon=0} \cos(x+\varepsilon)\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}.$$

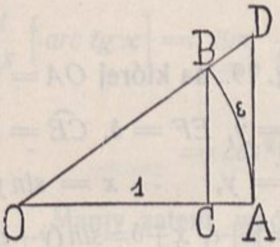

Fig. 18.

Chcąc wyznaczyć granicę, do której dąży iloraz $\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$, gdy ε maleje do 0, weźmy pod uwagę fig. 18., na której $OA = 1$, $\widehat{AB} = \varepsilon$, $OC = \cos\varepsilon$, $BC = \sin\varepsilon$, $AD = tg\,\varepsilon$. Widzimy, że

$$BC < \widehat{AB} < AD$$

czyli $\sin\varepsilon < \varepsilon < tg\,\varepsilon$.

Z tego wypada $\frac{1}{\sin\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} > ctg\,\varepsilon$,

a po pomnożeniu przez $\sin\varepsilon$, $1 > \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} > \cos\varepsilon$.

Jeżeli łuk ε maleje, natenczas punkt C zbliża się do punktu A, to znaczy $\cos\varepsilon$ dąży do 1. Mamy zatem

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = 1.$$

Ponieważ $\lim\limits_{\varepsilon=0} \cos(x+\varepsilon) = \cos x$, przeto wypada

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x\right] = \cos x.$$

6) *Pochodna funkcyi tg x.*

$$\frac{d}{dx}\left[tg\,x\right] = \lim_{\delta=0} \frac{tg(x+\delta) - tg\,x}{\delta}.$$

Lecz $tg(x+\delta) - tg\,x = \dfrac{\sin(x+\delta)}{\cos(x+\delta)} - \dfrac{\sin x}{\cos x} =$

$$\frac{\sin(x+\delta)\cos x - \cos(x+\delta)\sin x}{\cos(x+\delta)\cos x} = \frac{\sin\delta}{\cos(x+\delta)\cos x},$$

$$\text{przeto } \frac{d}{dx}\Big[tg\,x\Big] = \lim_{\delta=0} \frac{1}{\cos(x+\delta)\cos x} \cdot \frac{\sin\delta}{\delta}.$$

Uwzględniwszy to, cośmy w poprzednim ustępie mówili, otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\Big[tg\,x\Big] = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

7) *Pochodna funkcyi arc sin x.*

$$\frac{d}{dx}\Big[arc\sin x\Big] = \lim_{\delta=0} \frac{arc\sin(x+\delta) - arc\sin x}{\delta}.$$

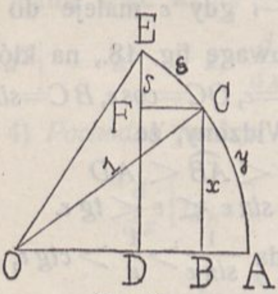

Fig. 19.

Lecz według fig. 19., na której $OA = 1$, $BC = x$, $\widehat{AC} = y$, $EF = \delta$, $\widehat{CE} = \varepsilon$, jest $arc\sin x = y$, $x = \sin y$, $arc\sin(x+\delta) = y+\varepsilon$, $x+\delta = \sin(y+\varepsilon)$,

$$arc\sin(x+\delta) - arc\sin x = \varepsilon,$$

$$\delta = \sin(y+\varepsilon) - \sin y.$$

Z ostatnich równań wypada zarazem, że jeżeli $\delta = 0$, natenczas $\varepsilon = 0$. Uwzględniwszy wartości na ε i δ, otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\Big[arc\sin x\Big] = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon}{\sin(y+\varepsilon) - \sin y} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\dfrac{\sin(y+\varepsilon) - \sin y}{\varepsilon}}$$

$$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Mamy zatem wzór:

$$\frac{d}{dx}\Big[arc\sin x\Big] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8) *Pochodna funkcyi arc tg x.*

$$\frac{d}{dx}\left[arc\, tg\, x\right] = \lim_{\delta=0} \frac{arc\, tg\,(x+\delta) - arc\, tg\, x}{\delta}.$$

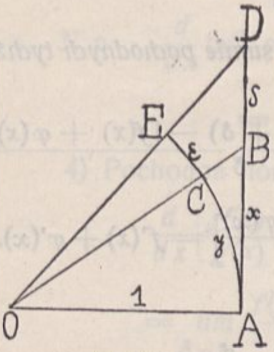

Fig. 20.

Lecz według fig. 20., na której $AO=1$, $AB=x$, $\widehat{AC}=y$, $BD=\delta$, $\widehat{CE}=\varepsilon$, jest $arc\, tg\, x = y$, $x = tg\, y$, $arc\, tg\,(x+\delta) = y+\varepsilon$, $x+\delta = tg\,(y+\varepsilon)$,

$$arc\, tg\,(x+\delta) - arc\, tg\, x = \varepsilon,$$
$$\delta = tg\,(y+\varepsilon) - tg\, y.$$

Z ostatnich równań wynika, że gdy $\delta=0$, natenczas $\varepsilon=0$. Uwzględniwszy wartości na ε i δ, otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\left[arc\, tg\, x\right] = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon}{tg\,(y+\varepsilon) - tg\, y} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\frac{tg\,(y+\varepsilon) - tg\, y}{\varepsilon}}$$

$$= \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Mamy zatem wzór:

$$\frac{d}{dx}\left[arc\, tg\, x\right] = \frac{1}{1+x^2}.$$

XV.

Pochodne funkcyi złożonych.

1) *Jeżeli funkcyę $f(x)$ pomnożymy przez stałą (czyli niezależną od x) ilość a, to jej pochodna zostaje pomnożona przez tę ilość.* Albowiem

$$\frac{d}{dx}\left[a f(x)\right] = \lim_{\delta=0} \frac{a f(x+\delta) - a f(x)}{\delta} = \lim_{\delta=0} a . \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = a f'(x).$$

Mamy zatem wzór:

$$\frac{d}{dx}\left[a f(x)\right] = a \frac{d}{dx} f(x).$$

N. p. $\frac{d}{dx}\left[a x^n\right] = a \frac{d}{dx}\left[x^n\right] = a\, n\, x^{n-1}$,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dx}\left[x^{n+1}\right] = x^n .$$

2) *Pochodna sumy funkcyi równa się sumie pochodnych tychże funkcyi.* Albowiem

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) + \varphi(x)\right] = \lim_{\delta = 0} \frac{f(x+\delta) + \varphi(x+\delta) - [f(x) + \varphi(x)]}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta=0}\left[\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} + \frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta}\right] = f'(x) + \varphi'(x).$$

Mamy zatem wzór:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) + \varphi(x)\right] = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx}\varphi(x).$$

N. p.

α) $\frac{d}{dx}\left[3 + 2x - x^2\right] = \frac{d}{dx}[3] + \frac{d}{dx}[2x] + \frac{d}{dx}\left[-x^2\right] = 2 - 2x.$

β) Ponieważ $\mathrm{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arc}\sin x$ (III), przeto

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{arc}\cos x\right] = -\frac{d}{dx}\left[\mathrm{arc}\sin x\right] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

γ) Ponieważ $\mathrm{arc}\,\mathrm{ctg}\, x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\, x$, (III), przeto

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{arc}\,\mathrm{ctg}\, x\right] = -\frac{d}{dx}\left[\mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\, x\right] = -\frac{1}{1+x^2}.$$

3) Pochodna iloczynu dwóch funkcyi.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) . \varphi(x)\right] = \lim_{\delta=0} \frac{f(x+\delta) . \varphi(x+\delta) - f(x) . \varphi(x)}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta=0} \frac{f(x+\delta) . \varphi(x+\delta) - f(x) . \varphi(x+\delta) + f(x)\,\varphi(x+\delta) - f(x) . \varphi(x)}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta=0}\left[\varphi(x+\delta) . \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} + f(x) . \frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta}\right]$$

$$= \varphi(x) . f'(x) + f(x) . \varphi'(x).$$

Mamy więc wzór:

$$\frac{d}{dx}\Big[f(x).\ g(x)\Big] = g(x).\ \frac{d}{dx}f(x) + f(x).\ \frac{d}{dx}g(x).$$

N. p. $\frac{d}{dx}[x^n.\ \sin x] = \sin x.\ \frac{d}{dx}[x^n] + x^n.\ \frac{d}{dx}[\sin x]$

$$= n\,x^{n-1}.\ \sin x + x^n \cos x.$$

4) Pochodna ilorazu dwóch funkcyi.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{\delta=0}\frac{1}{\delta}\left[\frac{f(x+\delta)}{g(x+\delta)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

$$= \lim_{\delta=0}\frac{f(x+\delta)\,g(x) - f(x)\,g(x+\delta)}{\delta.\ g(x+\delta).\ g(x)}$$

$$= \lim_{\delta=0}\frac{f(x+\delta)\,g(x) - f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\delta) + f(x)\,g(x)}{\delta\ g(x+\delta)\ g(x)}$$

$$= \lim_{\delta=0}\left[\frac{1}{g(x+\delta)\,g(x)}\left\{g(x)\frac{f(g+\delta) - f(x)}{\delta} - \right.\right.$$

$$\left.\left. f(x).\ \frac{g(x+\delta) - g(x)}{\delta}\right\}\right] = \frac{g(x).\ f'(x) - f(x).\ g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Mamy więc wzór:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{1}{[g(x)]^2}.\ \left[g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)\right].$$

N. p. $\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin x}{x^m}\right] = \frac{1}{x^{2m}}\left\{x^m\frac{d}{dx}[\sin x] - \sin x\frac{d}{dx}[x^m]\right\}$

$$= \frac{1}{x^{2m}}\left(x^m \cos x - m\,x^{m-1}\sin x\right) = \frac{\cos x}{x^m} - \frac{m \sin x}{x^{m+1}}.$$

XVI.

Pochodna funkcyi funkcyi.

$$\frac{d}{dx}f[\varphi(x)] = \lim_{\delta=0}\frac{f[\varphi(x+\delta)] - f[\varphi(x)]}{\delta}.$$

Podstawiwszy $\varphi(x) = u$, otrzymamy $\varphi(x + \delta) = u + \varepsilon$. Z tego równania wynika, że gdy $\delta = 0$, to także $\varepsilon = 0$. Uwzględniwszy, że $\varphi(x + \delta) - \varphi(x) = \varepsilon$, można napisać

$$\frac{d}{dx} f[\varphi(x)] = \lim_{\delta=0,\ \varepsilon=0} \frac{f(u+\varepsilon) - f(u)}{\delta} = \lim_{\delta=0,\ \varepsilon=0} \frac{f(u+\varepsilon) - f(u)}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta=0,\ \varepsilon=0} \left[\frac{f(u+\varepsilon) - f(u)}{\varepsilon} \cdot \frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta}\right]$$

$$= \frac{d}{du} f(u) \cdot \frac{d}{dx} \varphi(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Mamy więc wzór:

$$\frac{d}{dx} f[\varphi(x)] = \frac{d}{d[\varphi(x)]} f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

$$= \frac{d}{d[\varphi(x)]} f[\varphi(x)] \cdot \frac{d}{dx} \varphi(x).$$

N. p.

1) $$\frac{d}{dx}\left[(a + b x^2)^3\right] = \frac{d}{d[a + b x^2]}\left[(a + b x^2)^3\right] \cdot \frac{d}{dx}[a + b x^2]$$

$$= 3(a + b x^2)^2 \cdot 2 b x = 6 b x (a + b x^2)^2.$$

Lub też podstawiwszy $a + b x^2 = u$,

$$\frac{d}{dx}\left[(a + b x^2)^3\right] = \frac{d}{du}\left[u^3\right] \cdot \frac{d}{dx}\left[a + b x^2\right] = 3 u^2 \cdot 2 b x$$

$$= 6 b u^2 x = 6 b x (a + b x^2)^2.$$

2) $$\frac{d}{dx}[\sin(a - b x)] = \frac{d}{[d\, a - b x]}[\sin(a - b x)] \cdot \frac{d}{dx}[a - b x]$$

$$= \cos(a - b x) \cdot (-b) = -b \cos(a - b x).$$

Lub też podstawiwszy $a - b x = u$

$$\frac{d}{dx}[\sin(a - bx)] = \frac{d}{du}[\sin u] \cdot \frac{d}{dx}(a - b x) = \cos u \cdot (-b)$$

$$= -b \cos u = -b \cdot \cos(a - b x).$$

3) $$\frac{d}{dx}[\cos x] = \frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \frac{d}{d\left[\frac{\pi}{2} - x\right]}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

$$4)\ \frac{d}{dx}[ctg\,x]=\frac{d}{dx}\left[tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\frac{d}{d\left[\frac{\pi}{2}-x\right]}\left[tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{\pi}{2}-x\right]$$

$$=\frac{1}{cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot(-1)=-\frac{1}{cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\frac{1}{sin^2 x}.$$

$$5)\ \frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\right]=\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{d}{d[1-x^2]}\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right].\ \frac{d}{dx}[1-x^2]$$

$$=\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.\ (-2x)=-x.\ (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

XVII.

Pojęcie różniczki.

Dla wartości zmiennej niezależnej x funkcya ma wartość $f(x)$, dla wartości $x+\delta$ funkcya ma wartość $f(x+\delta)$, to znaczy: jeżeli zmienna niezależna powiększy się o δ, funkcya powiększy się o $f(x+\delta)-f(x)$, czyli jeżeli δ jest *przyrostem zmiennej niezależnej*, to $f(x+\delta)-f(x)$ jest *przyrostem funkcyi.* Na przyszłość jako znak przyrostu będziemy uważać symbol $\triangle$, więc $\triangle x$ będzie oznaczać przyrost zmiennej x, oznaczony poprzednio przez δ a $\triangle f(x)$ będzie oznaczać przyrost funkcyi $f(x)$, oznaczony poprzednio przez $f(x+\delta)-f(x)$; innymi słowy $\triangle x$ będzie oznaczać *różnicę zmiennej niezależnej* x a $\triangle f(x)$ odpowiedną *różnicę funkcyi* $f(x)$. Jest tędy

$$f(x+\triangle x)-f(x)=\triangle f(x),$$

$$f'(x)=\lim_{\triangle x=0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x=0}\frac{\triangle f(x)}{\triangle x}$$

t. j. pochodna jestto granica, do której dąży stosunek różnicy czyli przyrostu funkcyi do różnicy czyli przyrostu zmiennej niezależnej, gdy różnica czyli przyrost zmiennej niezależnej maleje do 0.

Na wyrażenie, że przyrost czyli różnica Δx maleje do 0, jakkolwiek jest ilością różną od 0, używamy symbolu dx, podobnie na wyrażenie granicy, do której dąży $\Delta f(x)$, gdy Δx maleje do 0, używamy symbolu $df(x)$.

Według tego można napisać

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Ilości dx, $df(x)$ są *nieskończenie malejące* i nazywają się *różniczkami*, dx jest *różniczką zmiennej niezależnej*, $df(x)$ *różniczką funkcyi* $f(x)$. Mówi się także, że różniczki są ilościami *nieskończenie małemi*, jakkolwiek pod tą nazwą rozumie się ilości nieskończenie malejące.

XVIII.

Związek między różniczką funkcyi a pochodną.

Dotychczas różniczki dx, $df(x)$ nie występowały samodzielnie, lecz tylko w granicy stosunku $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ dla Δx malejącego do 0. Aby poznać związek między różniczkami uważanemi samodzielnie, weźmy pod uwagę równanie $f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, z którego wynika

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

gdzie ε jest ilością dążącą do 0, gdy Δx maleje do 0.

Z tego równania wypada następujące:

$$\Delta f(x) = f'(x) . \Delta x + \varepsilon . \Delta x.$$

Pisząc $\Delta f(x) = f'(x) . \Delta x$ popełniamy błąd $\varepsilon . \Delta x$, który możemy zrobić tak mały, jak się nam podoba, gdy Δx weźmiemy odpowiednio małe.

N. p. Gdy $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, wtenczas $f'(x) = 6x - 5$,

$$\Delta f(x) = (6x - 5) . \Delta x + \varepsilon . \Delta x.$$

Dla $x = 2, \quad \Delta x = 0{\cdot}1$ jest

$$f(2) = 3, \quad f(2{\cdot}1) = 3{\cdot}73, \quad f'(2) = 7,$$

$$\Delta f(2) = f(2{\cdot}1) - f(2) = 0{\cdot}73 = 7.0{\cdot}1 + \varepsilon.\ 0{\cdot}1,$$

skąd wynika $\varepsilon_1 = 0{\cdot}3$.

Gdy $\Delta x = 0{\cdot}01$, jest $f(2{\cdot}01) = 3{\cdot}0703$,

$$\Delta f(2) = f(2{\cdot}01) - f(2) = 0{\cdot}0703 = 7.0{\cdot}01 + \varepsilon_1\ 0.01,$$

skąd wypada $\varepsilon_1 = 0{\cdot}03$.

Gdy $\Delta x = 0{\cdot}001$, jest $f(2{\cdot}001) = 3{\cdot}007003$,

$$\Delta f(2) = f(2{\cdot}001) - f(2) = 0{\cdot}007003 = 7.0{\cdot}001 + \varepsilon_2.\ 0{\cdot}001,$$

skąd wynika $\varepsilon_2 = 0{\cdot}003$ i t. d.

Gdy Δx maleje do 0, t. j. gdy Δx zamienia się na różniczkę dx, błąd również maleje do 0 i możemy napisać:

$$df(x) = f'(x)\ dx.$$

to znaczy: *różniczka funkcyi równa się iloczynowi pochodnej przez różniczkę zmiennej niezależnej.*

Pamiętając, że dx jest ilością nieskończenie malejącą jednak różną od 0, możemy podzielić obie strony ostatniego równania przez dx i otrzymamy

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x),$$

z czego poznajemy, że *pochodna jest stosunkiem różniczki funkcyi do różniczki zmiennej niezależnej, czyli jest stosunkiem różniczkowym.* Zarazem mamy tu wytłómaczenie, dlaczego dla wyrażenia działania służącego do wyznaczenia pochodnej używamy symbolu $\frac{d}{dx}$ (XIII).

Równanie $df(x) = f'(x)\,dx$ okazuje, że znając pochodną, znamy różniczkę funkcyi i naodwrót; z tego powodu wyznaczanie pochodnych wchodzi w zakres *rachunku różniczkowego* a symbole d, $\frac{d}{dx}$ wyrażają działanie zwane *różniczkowaniem.*

XIX.

Wzory wyrażające różniczki funkcyi.

Uwzględniwszy wzory wyrażające pochodne, wyprowadzone w XIV, XV i XVI otrzymamy następujące wzory wyrażające różniczki funkcyi:

1) $da = 0$, gdzie a jest ilością stałą (od x niezależną),

2) $dx^n = n x^{n-1} dx$,

3) $da^x = a^x . \ln a dx$,

4) $de^x = e^x . dx$,

5) $d \ln x = \frac{dx}{x}$,

6) $d \sin x = \cos x \, dx$,

7) $d \cos x = - \sin x \, dx$,

8) $d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$,

9) $d \operatorname{ctg} x = - \frac{dx}{\sin^2 x}$,

10) $d \operatorname{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

11) $d \operatorname{arc} \cos x = - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

12) $d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{dx}{1+x^2}$,

13) $d \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = - \frac{dx}{1+x^2}$,

14) $d[a f(x)] = a \, df(x) = a f'(x) \, dx$, gdzie a jest ilością stałą,

15) $d[f(x) + g(x)] = df(x) + dg(x) = f'(x) dx + g'(x) dx$,

16) $d[f(x) . g(x)] = g(x) df(x) + f(x) dg(x)$

$= g(x) f'(x) dx + f(x) g'(x) dx$,

17) $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x) df(x) - f(x) dg(x)}{[g(x)]^2}$

$= \frac{g(x) f'(x) dx - f(x) g'(x) dx}{[g(x)]^2}$,

18) $df[\varphi(x)] = \frac{d}{du} f(u) d\varphi(x) = f'(u)\varphi'(x)dx$, gdzie $u = \varphi(x)$,

lub $df[\varphi(x)] = \frac{d}{d\varphi(x)} f[\varphi(x)] . \frac{d}{dx} \varphi(x) dx$

$= \frac{d}{d\varphi(x)} f[\varphi(x)] . \varphi'(x)\, dx$,

XX.

Różniczka funkcyi dwu zmiennych.

Jeżeli $F(x, y)$ jest funkcyą zmiennych x, y, natenczas gdy te zmienne wzrosną o $\triangle x$, $\triangle y$, przyrost funkcyi będzie $\triangle F(x, y) = F(x + \triangle x, y + \triangle y) - F(x, y)$. N. p. jeżeli $F(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$, $x = 2$, $y = 3$, natenczas $F(2, 3) = 3.\ 2^2 + 2.\ 2.\ 3 + 3^2 = 12 + 12 + 9 = 33$.

Gdy $\triangle x = 0{\cdot}01$, $\triangle y = 0{\cdot}02$, tedy

$F(2{\cdot}01, 3{\cdot}02) = 3.2{\cdot}01^2 + 2.2{\cdot}01.\ 3{\cdot}02 + 3{\cdot}02^2 = 33{\cdot}3811$,

$\triangle F(2, 3) = F(2{\cdot}01, 3{\cdot}02) - F(2, 3) = 33{\cdot}3811 - 33 = 0{\cdot}3811$,

Równanie wyrażające przyrost funkcyi można przerobić w sposób następujący:

$$\triangle F(x, y) = F(x + \triangle x, y + \triangle y) - F(x, y + \triangle y) + F(x, y + \triangle y)$$

$$- F(x, y) = \frac{F(x + \triangle x, y + \triangle y) - F(x, y + \triangle y)}{\triangle x} . \triangle x$$

$$+ \frac{F(x, y + \triangle y) - F(x, y)}{\triangle y} . \triangle y.$$

Gdy $\triangle x$ i $\triangle y$ nieskończenie maleją, różnica $\triangle F(x, y)$ przechodzi na różniczkę

$$dF(x, y) = \frac{dF(x, y)}{dx} . dx + \frac{dF(x, y)}{dy} . dy.$$

$\frac{dF(x, y)}{dx}$, $\frac{dF(x, y)}{dy}$ nazywają się *pochodnemi cząstkowemi* co do zmiennych x względnie y i oznaczają się symbolami

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \text{ lub krótko } \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y},$$

Mamy więc wzór

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

To twierdzenie można rozszerzyć na funkcyę o większej ilości zmiennych n. p. na $F(x, y, z...)$. Wtenczas

$$dF(x, y, z..) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \ldots$$

Ponieważ według XVIII

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) = \Delta F(x, y + \Delta y)$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x + \varepsilon_1 . \Delta x,$$

$$F(x, y + \Delta y) - F(x, y) = \Delta F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon_2 . \Delta y,$$

gdzie ε_1, ε_2 są ilościami dążącemi do 0, gdy Δx, Δy nieskończenie maleją, przeto można napisać

$$\Delta F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

W ostatnim przykładzie mamy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x + 2y = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y = \psi(x, y),$$

$F(2{\cdot}01, 3{\cdot}02) - F(2, 3{\cdot}02) = \Delta F(2\ 3{\cdot}02) = \varphi(2, 3) . 0{\cdot}01 + \varepsilon_1 . 0{\cdot}01,$

$F(2, 3{\cdot}02) - F(2, 3) = \Delta F(2, 3) = \psi(2, 3) . 0{\cdot}02 + \varepsilon_2 . 0{\cdot}02,$

Lecz $\Delta F(2, 3{\cdot}02) = 0{\cdot}1807$, $\Delta F(2, 3) = 0{\cdot}2004$, $\varphi(2, 3) = 18$, $\psi(2, 3) = 10$, zatem $0{\cdot}1807 = 0{\cdot}18 + \varepsilon_1 . 0{\cdot}01$, $0{\cdot}2004 = 0{\cdot}2 + \varepsilon_2 . 0{\cdot}02$, skąd wypada $\varepsilon_1 = 0{\cdot}07$, $\varepsilon_2 = 0{\cdot}02$. $\Delta F(2, 3) = \varphi(2, 3) . 0{\cdot}01 + \psi(2, 3) . 0{\cdot}02 + \varepsilon_1 . 0{\cdot}01 + \varepsilon_2\ 0{\cdot}02$ $= 0{\cdot}18 + 0{\cdot}20 + 0{\cdot}0007 + 0{\cdot}0004 = 0{\cdot}3811$ zgodnie z poprzedniem.

XXI.

Różniczka funkcyi uwikłanej.

Jeżeli zmienne x, y są w takiej od siebie zależności, że $F(x. y) = 0$, t. j., że funkcya $F(x, y)$ jest ilością stałą, natenczas różniczka funkcyi $dF(x,y)=0$ i według XX wypada równanie

$$0=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

Z tego równania można obliczyć różniczkę funkcyi uwikłanej i stosunek różniczkowy

$$dy=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\cdot dx,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

N. p. $F(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=0.$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2ax+2by,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2bx+2cy,$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2bx+2cy}{2ax+2by}=-\frac{bx+cy}{ax+by},\ dy=-\frac{bx+cy}{ax+by}dx.$$

XXII.

Znaczenie różnicy funkcyi.

Funkcye $f(x)$, $F(x,y)$ mają pewne wartości. Gdy ilości x, y weźmiemy z błędami $\triangle x$, $\triangle y$, natenczas wartości funkcyi staną się $f(x+\triangle x)$, $F(x+\triangle x, y+\triangle y)$ a błędy funkcyi będą $f(x+\triangle x)-f(x)=\triangle f(x)$, $F(x+\triangle x, y+\triangle y)-F(x,y)=\triangle F(x,y)$. Lecz $\triangle f(x)=f'(x)\triangle x+\varepsilon\triangle x$, $\triangle F(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}\triangle x+\frac{\partial F}{\partial y}\triangle y+\varepsilon_1\triangle x+\varepsilon_2\triangle y$, zatem równań $\triangle f(x)=f'(x)\triangle x$ i $\triangle F(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}\triangle x+\frac{\partial F}{\partial y}\triangle y$, można użyć do obliczenia błędu funkcyi. Wyrazy opuszczone $\varepsilon.\triangle x$, $\varepsilon_1\triangle x$, $\varepsilon_2.\triangle y$ nie mają znaczenia, bo się przyczyniają do błędu na dalszych miejscach dziesiętnych, na czem nam nie zależy, skoro wiemy, że popełniamy błąd na bliższem miejscu dziesiętnem.

Przykłady: 1) Bok sześcianu zmierzono na 5 m; jaki jest błąd przy obliczeniu objętości tego sześcianu, jeżeli pomiar długości boku jest dokładny α) do 0·01 m, β) do 0·001 m ?

Objętość sześcianu $= x^3 = f(x)$, $f'(x) = 3x^2$, $\triangle f(x) = 3x^2 . \triangle x$.

Błąd wynosi α) $\triangle f(5) = f'(5) . 0{\cdot}01 = 75 . 0{\cdot}01 = 0{\cdot}75\ m^3$. β) $\triangle f(5) = f'(5) . 0{\cdot}001 = 0{\cdot}075\ m^3$.

Błąd w zwykły sposób obliczony jest

$$\alpha)\ f(5{\cdot}01) - f(5) = 125{\cdot}75 - 125 = 0{\cdot}75\ m^3,$$

$$f(5 - 0{\cdot}01) - f(5) = (125 - 0{\cdot}75) - 125 = -0{\cdot}75\ m^3$$

z dokładnością do dwóch miejsc dziesiętnych.

$$\beta)\ f(5{\cdot}001) - f(5) = 125{\cdot}075 - 125 = 0{\cdot}075\ m^3$$

$$f(5 - 0{\cdot}001) - f(5) = (125 - 0{\cdot}075) - 125 = -0{\cdot}075\ m^3$$

z dokładnością do trzech miejsc dziesiętnych.

Widzimy tu zgodność z poprzedniem obliczeniem.

2) Jaki jest błąd przy obliczeniu $\cos x$, $\sin x$, dla kątów 30^0 i 60^0, jeżeli pomiar kąta jest dokładny do $0{\cdot}5^0$?

Ponieważ $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$, $\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$, mamy wzory do obliczenia błędów

$$\triangle \cos x = -\sin x . \triangle x, \quad \triangle \sin x = \cos x . \triangle x.$$

Podstawiając wartości za x, $\triangle x$ i bacząc, że kątowi $0{\cdot}5^0$ odpowiada w kole o promieniu 1 łuk 0·00873, mamy

$$\triangle \cos 30^0 = -\sin 30^0 . 0{\cdot}5^0 = -0{\cdot}5 . 0{\cdot}00873 = -0{\cdot}0044,$$

$$\triangle \cos 60^0 = -\sin 60^0 . 0{\cdot}5^0 = -0{\cdot}866 . 0{\cdot}00873 = -0{\cdot}0076,$$

$$\triangle \sin 30^0 = \cos 30^0 . 0{\cdot}5^0 = 0{\cdot}866 . 0{\cdot}00873 = 0{\cdot}0076,$$

$$\triangle \sin 60^0 = \cos 60^0 . 0{\cdot}5^0 = 0{\cdot}5 . 0{\cdot}00873 = 0{\cdot}0044.$$

3) Obliczyć błąd kwadratu liczby 5·948...

Kwadrat liczby $= x^2 = f(x)$, $f'(x) = 2x$, $\triangle f(x) = 2x . \triangle x$.

W naszym przypadku $x = 5{\cdot}948$, $\triangle x = 0{\cdot}001$, zatem błąd

$$\triangle f(5{\cdot}948) = 11{\cdot}896 . 0{\cdot}001 = 0{\cdot}012.$$

Podobnie się oblicza błąd sześcianu tej samej liczby.

$$f(x) = x^2,\ f'(x) = 3x^2,\ \triangle f(x) = 3x^2 .\ \triangle x,$$

$$\triangle f(5\cdot948) = 3.6^2 .\ 0\cdot001 = 0\cdot11.$$

4) Obliczyć błąd pierwiastka kwadratowego liczby 4·756...

$$\text{Pierwiastek liczby} = \sqrt{x} = f(x),\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\triangle f(x) = \frac{\triangle x}{2\sqrt{x}}.$$

$$\triangle f(4\cdot756) = \frac{1}{2.\sqrt{4\cdot756}} .\ 0\cdot001 = \frac{0\cdot001}{2.2} = 0\cdot0002 .$$

Podobnie się oblicza błąd pierwiastka sześciennego tej samej liczby.

$$f(x) = \sqrt[3]{x},\ f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ \triangle f(x) = \frac{\triangle x}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

$$\triangle f(4\cdot756) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4\cdot756^2}} \cdot 0\cdot001 = \frac{0\cdot001}{3.2\cdot8} = \frac{0\cdot001}{8\cdot4} = 0\cdot0001 .$$

5) Obliczyć błąd iloczynu liczb 6·345.., 1328..

$$\text{Stosujemy wzór: } \triangle F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial F}{\partial y} \triangle y.$$

$$\text{Mamy } F(x, y) = xy,\ \frac{\partial F}{\partial x} = y,\ \frac{\partial F}{\partial y} = x.$$

$$\triangle F(x,y) = y \triangle x + x \triangle y .$$

Lecz $x = 6\cdot345$, $y = 13\cdot28$, $\triangle x = 0\cdot001$, $\triangle y = 0\cdot01$,

zatem $\triangle F(6\cdot345,\ 13\cdot28) = 13\cdot28.0\cdot001 + 6\cdot345.0\cdot01$

$= 0\cdot013 + 0\cdot063 = 0\cdot076.$

Podobnie się oblicza błąd ilorazu liczb 6·345... 13·28...

$$F(x, y) = \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$\triangle F(x, y) = \frac{\triangle x}{y} - \frac{x \triangle y}{y^2}.$$

Biorąc pod uwagę przypadek najniekorzystniejszy, kiedy się błędy dodają, otrzymamy

$$\triangle F(x, y) = \frac{\triangle x}{y} + \frac{x \triangle y}{y^2} = \frac{y \triangle x + x \triangle y}{y^2} = \frac{0{\cdot}076}{13^2}$$

$$= \frac{0{\cdot}076}{169} = 0{\cdot}00045.$$

6) Przeciwprostokątnia trójkąta prostokątnego wynosi 320·14 m, jeden kąt 30^0, z jakim błędem obliczymy przyprostokątnię przeciwległą kątowi, jeżeli długość zmierzono z dokładnością 0·01 m a kąt z dokładnością $0{\cdot}5^0$?

Długość szukanej przyprostokątni jest $x \sin \alpha$, zatem

$$F(x, \alpha) = x \sin \alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \sin \alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = x \cos \alpha,$$

$$\triangle F(x, \alpha) = \sin \alpha . \triangle x + x \cos \alpha . \triangle \alpha.$$

Podstawiwszy $x = 320{\cdot}14\, m$, $\alpha = 30^0$, $\triangle x = 0{\cdot}01\, m$, $\triangle \alpha = 0{\cdot}5^0 = 0{\cdot}00873$, otrzymamy

$$\triangle F\, (320{\cdot}14, 30) = 0{\cdot}5 .\, 0{\cdot}01 + 320{\cdot}14 .\, 0{\cdot}866 .\, 0{\cdot}00873 = 2{\cdot}4\ m.$$

7) Bok rombu wynosi 50 m, kąt 60^0, z jakim błędem obliczymy powierzchnię rombu, jeżeli jest taka sama dokładność pomiaru, jak w poprzedzającym przykładzie?

Powierzchnia rombu jest $x^2 . \sin \alpha$, zatem

$$F(x, \alpha) = x^2 \sin \alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2 x \sin \alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = x^2 \cos \alpha,$$

$$\triangle F(x, \alpha) = 2 x \sin \alpha \triangle x + x^2 \cos \alpha \triangle \alpha.$$

$$\triangle F\, (50, 60) = 2 . 50 .\, 0.866 .\, 0{\cdot}01 + 50^2 .\, 0{\cdot}5 .\, 0{\cdot}00873 = 11{\cdot}8\ m^2 .$$

8) Boki równoległe trapezu są 120 m, 80 m, bok nierównoległy 100 m, jeden kąt 60^0, z jakim błędem obliczymy powierzchnię, jeżeli jest taka dokładność pomiaru, jak w poprzedzającym przykładzie?

Powierzchnia trapezu jest $\frac{1}{2}\,(x+y)\,z \sin\alpha$, zatem

$$F(x, y, z, \alpha) = \tfrac{1}{2}\,(x+y)\,z \sin\alpha,\quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \tfrac{1}{2}\,z \sin\alpha,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \tfrac{1}{2}\,(x+y) \sin\alpha,\quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \tfrac{1}{2}(x+y)\,z \cos\alpha,\quad \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0{\cdot}01,$$

$$\Delta\alpha = 0{\cdot}5^0 = 0{\cdot}00873,\quad \Delta F(x, y, z, \alpha) = \tfrac{1}{2}\,z \sin\alpha\,(\Delta x + \Delta y)$$

$$+\tfrac{1}{2}\,(x+y) \sin\alpha\,\Delta z + \tfrac{1}{2}\,(x+y)\,z \cos\alpha\,\Delta\alpha,$$

$$\Delta F(120, 80, 100, 60^0) = \tfrac{1}{2}\,.\,100\,.\,0{\cdot}866\,.\,2\,.\,0{\cdot}01$$

$$+\tfrac{1}{2}\,.\,200\,.\,0{\cdot}866\,.\,0{\cdot}01 + \tfrac{1}{2}\,.\,200\,.\,100\,.\,0{\cdot}5\,.\,0{\cdot}00873 = 45{\cdot}4\,m^2.$$

XXIII.

Znaczenie pochodnej.

Znaczenie pochodnej poznamy w następujących zagadnieniach:

1) Funkcya $f(x)$ wyraża rzędną y punktu odpowiadającego odciętej x w układzie prostokątnym, czyli $y = f(x)$ jest równaniem linii; co wyraża pochodna $f'(x)$?

Aby na to pytanie odpowiedzieć, weźmy pod uwagę obraz funkcyi BCE na fig. 21. Mamy tu $OA = x$, $AC = y = f(x)$,

$$AD = \Delta x,\quad EF = \Delta y,$$

$$DE = y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

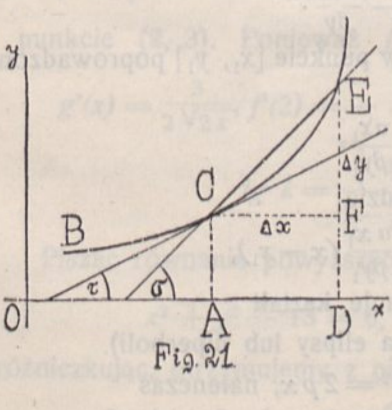

Fig. 21

Widzimy dalej na figurze, że

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y.$$

Oznaczywszy kąt, jaki tworzy sieczna CE z osią odciętych przez σ, mamy

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\sigma.$$

Gdy Δx maleje, punkt E zbliża się do punktu C a sieczna zbliża się coraz bardziej do stycznej w punkcie C poprowadzonej. Oznaczywszy przez τ kąt, jaki tworzy styczna w punkcie C po-z dodatnim kierunkiem

prowadzona z osią odciętych, mamy w granicy dla $\triangle x$ nieskończenie małego

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx} = tg\,\tau.$$

$Tg\,\tau$ nazywa się *stałą kierunkową* stycznej. Zatem, *jeżeli* $f(x)$ *wyraża rzędną w pewnym punkcie linii, natenczas pochodna* $f'(x)$ *wyraża stałą kierunkową stycznej w tymże punkcie do linii poprowadzonej.*

Gdy funkcya jest uwikłana, wtenczas na zasadzie równania

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\tau$$

stosunek różniczkowy wyznacza stałą kierunkową w danym punkcie linii i ułatwia wyprowadzenie równania tejże stycznej. Wyjaśniają nam to bliżej następujące przykłady:

α) Wyprowadzić równanie stycznej w punkcie $[x_1, y_1]$ linii $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ poprowadzonej.

Ponieważ punkt $[x_1, y_1]$ znajduje się na linii, więc jego współrzędne spełniają równanie

$$\alpha x_1{}^2 + \beta y_1{}^2 = 1.$$

Różniczkując równanie $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$, mamy

$$2\,\alpha x\,dx + 2\,\beta y\,dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha x}{\beta y}.$$

Stała kierunkowa stycznej w punkcie $[x_1, y_1]$ poprowadzonej jest zatem

$$-\frac{\alpha x_1}{\beta y_1},$$

a szukane równanie stycznej będzie:

$$y - y_1 = -\frac{\alpha x_1}{\beta y_1}(x - x_1),$$

które po przekształceniu przyjmuje kształt

$$\alpha x_1 x + \beta y_1 y = 1 \text{ (dla elipsy lub hiperboli).}$$

Jeżeli równanie linii jest $y^2 = 2px$, natenczas

$$2ydy = 2pdx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

a równanie stycznej $y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$ w punkcie $[x_1, y_1]$ po przekształceniu i uwzględnieniu, że $y_1^2 = 2px_1$, przyjmuje kształt

$y_1 y = p(x_1 + x)$ (dla paraboli).

β) Wyznaczyć kąt, jaki tworzą linie $y = f(x)$ i $y = g(x)$ w punkcie przecięcia się (x_1, y_1).

Kąt, jaki tworzą dwie linie przecinające się, wyraża się zapomocą kąta λ, jaki tworzą styczne do obu linii w punkcie ich przecięcia się $(x_1\ y_1)$ poprowadzone. Ponieważ stałe kierunkowe tychże stycznych są $f'(x_1)$, $g'(x_1)$, przeto

$$tg\ \lambda = \frac{g'(x_1) - f'(x_1)}{1 + f'(x_1)\,g'(x_1)}.$$

Jeżeli równania linii są: $F(x,y) = 0$, $G(x,y) = 0$ i jeżeli stosunek różniczkowy $\frac{dy}{dx}$ z pierwszego równania wypada $\varphi(x, y)$, z drugiego $\psi(x, y)$, natenczas stałe kierunkowe stycznych w punkcie $(x_1\ y_1)$ są $\varphi(x_1, y_1)$, $\psi(x_1, y_1)$, zaś

$$tg\ \lambda = \frac{\psi(x_1, y_1) - \varphi(x_1\ y_1)}{1 + \varphi(x_1, y_1)\,\psi(x_1, y_1)}.$$

Np. Linie, których równania są $x^2 + y^2 = 13$, $y^2 = \frac{9}{2}x$, czyli $y = \sqrt{13 - x^2} = f(x)$, $y = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{x} = g(x)$, przecinają się w punkcie (2, 3). Ponieważ $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{13 - x^2}}$,

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{2x}},\ f'(2) = -\frac{2}{3},\ g'(2) = \frac{3}{4},\ \text{przeto}$$

$$tg\ \lambda = \frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{17}{6}.$$

Pisząc równania powyższych linii w kształcie

$$x^2 + y^2 - 13 = 0,\quad y^2 - \frac{9}{2}x = 0$$

i różniczkując, otrzymujemy z pierwszego

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0,\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = \varphi(x, y),$$

z drugiego: $2y dy = \frac{9}{2}\,dx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{4y} = \psi(x, y)$; skąd wypada: $\varphi(2, 3) = -\frac{2}{3}$, $\psi(2, 3) = \frac{3}{4}$ zgodnie z poprzedzającem.

2) Funkcya $f(x)$ wyraża powierzchnię F zawartą w pierwszej ćwiartce między osiami współrzędnych, rzędną odpowiadającą odciętej x i linią. Co wyraża pochodna $f'(x)$?

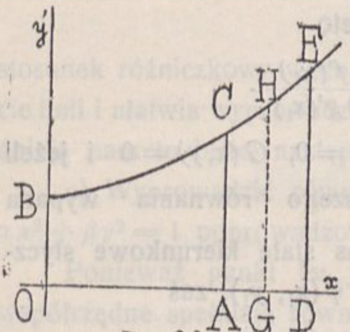

Fig. 22.

Weźmy pod uwagę fig. 22, na której $OA = x$, powierzchnia $BOACB = F = f(x)$, $AD = \triangle x$, pow. $ADECA = \triangle F$, pow. $BODEB = F + \triangle F = f(x + \triangle x)$. Mamy zatem
$\triangle f(x) = f(x + \triangle x) - f(x) = \triangle F$.
Lecz $\triangle F = \triangle x.\ GH$, gdzie $AC < GH < DE$, co uwzględniwszy otrzymamy $\frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \frac{\triangle F}{\triangle x} = GH$.

Jeżeli $\triangle x$ maleje, punkt E a zatem i punkt H zbliża się do punktu C. W granicy dla $\triangle x$ nieskończenie małego

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{dF}{dx} = AC,$$

to znaczy: *pochodna $f'(x)$ wyraża rzędną, odpowiadającą odciętej x, zamykającą powierzchnię.*

3) Funkcya $f(x)$ wyraża objętość $\mathscr{V}$ bryły zawartej między płaszczyzną YOZ, powierzchnią bryły i płaszczyzną ABC będącą w odległości x od płaszczyzny YOZ (fig. 23). Co wyraża pochodna $f'(x)$?

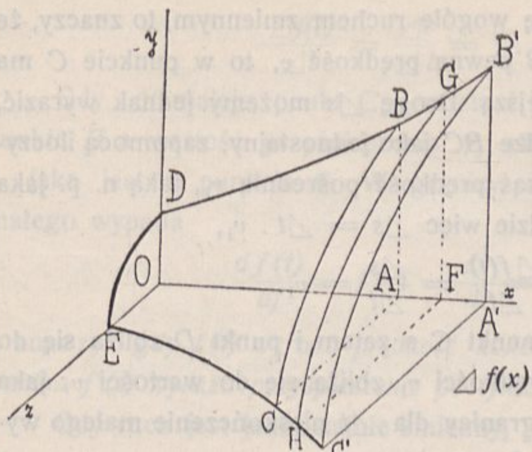

Fig. 23

Jeżeli $OA = x$, objętość bryły $ABCODE = \mathscr{V} = f(x)$, natenczas gdy x wzrośnie o $AA' = \Delta x$, objętość bryły powiększy się o $ABCA'B'C' = \Delta \mathscr{V}$. Będzie zatem

$$\mathscr{V} + \Delta \mathscr{V} = f(x + \Delta x),$$

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta \mathscr{V}.$$

Lecz objętość $\Delta \mathscr{V}$ otrzymamy, mnożąc Δx przez przekrój FGH większy od ABC a mniejszy od $A'B'C'$, czyli

$$\Delta \mathscr{V} = \Delta x \,.\, FGH.$$

To uwzględniwszy, będziemy mieć

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta \mathscr{V}}{\Delta x} = FGH.$$

Gdy Δx maleje, przekrój $A'B'C'$ a zatem i przekrój FGH zbliża się do przekroju ABC. W granicy dla Δx nieskończenie małego wypada

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{d\mathscr{V}}{dx} = ABC,$$

to znaczy: *pochodna $f'(x)$ wyraża przekrój bryły równoległy do płaszczyzny YOZ będący od niej w odległości x.*

4) Funkcya $f(t)$ wyraża drogę s, jaką punkt poruszający się odbył w czasie t. Co wyraża pochodna $f'(t)$?

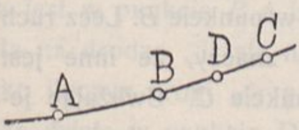

Fig. 24

Jeżeli (fig. 24.) $AB = s = f(t)$ oznacza drogę, jaką punkt odbył w czasie t, $BC = \Delta s$ drogę odbytą w czasie Δt, natenczas

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t),$$

$$\Delta f(t) = f(t + \Delta t) - f(t) = \Delta s.$$

Punkt porusza się wogóle ruchem zmiennym, to znaczy, że jeżeli ma w punkcie B pewną prędkość v, to w punkcie C ma inną, większą lub mniejszą. Drogę $\triangle s$ możemy jednak wyrazić, uważając ruch na drodze BC jako jednostajny, zapomocą iloczynu czasu $\triangle t$ przez jakąś prędkość pośrednią v_1, taką n. p. jaka jest w punkcie D. Będzie więc $\triangle s = \triangle t \,.\, v_1$,

$$\frac{\triangle f(t)}{\triangle t} = \frac{\triangle s}{\triangle t} = v_1.$$

Gdy $\triangle t$ maleje, punkt C a zatem i punkt D zbliża się do punktu B a wartość prędkości v_1 zbliża się do wartości v, jaka jest w punkcie B. W granicy dla $\triangle t$ nieskończenie małego wypada

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) = \frac{ds}{dt} = v,$$

to znaczy: *jeżeli $f(t)$ wyraża drogę przebytą w czasie t, natenczas pochodna $f'(t)$ wyraża prędkość końcową po czasie t.*

Gdy ruch jest jednostajny t. j. gdy $s = ct$, prędkość jest ilością stałą, bo $\frac{ds}{dt} = c$;

gdy $s = ct + \frac{\gamma t^2}{2}$, wtenczas $\frac{ds}{dt} = v = c + \gamma t$.

5) Funkcya $f(t)$ wyraża prędkość końcową v punktu po czasie t; co wyraża pochodna $f'(t)$?

Jeżeli po czasie t punkt znajduje się w punkcie B (fig. 24) i ma prędkość końcową $v = f(t)$, natenczas po czasie $t + \triangle t$ będzie się znajdował w punkcie C i będzie mieć prędkość końcową większą o $\triangle v$. Mamy więc: $v + \triangle v = f(t + \triangle t)$,

$$\triangle f(t) = f(t + \triangle t) - f(t) = \triangle v.$$

Gdyby ruch był jednostajnie zmienny, byłoby $\triangle v$ proporcyonalne do przyspieszenia γ, jakie jest w punkcie B. Lecz ruch jest wogóle niejednostajnie zmienny, to znaczy, że inne jest przyśpieszenie w punkcie B a inne w punkcie C. Uważając jednak ruch w czasie $\triangle t$ jako jednostajnie zmienny, można $\triangle v$ wyrazić jako iloczyn czasu $\triangle t$ przez przyśpieszenie pośrednie γ_1 takie n. p. jakie jest w punkcie D. Jest zatem $\triangle v = \triangle t \,.\, \gamma_1$,

$$\frac{\triangle f(t)}{\triangle t} = \frac{\triangle v}{\triangle t} = \gamma_1.$$

Gdy $\triangle t$ maleje, punkt C a zatem i punkt D zbliża się do punktu B a wartość przyśpieszenia γ_1 zbliża się do wartości γ, jaka jest w punkcie B. W granicy dla $\triangle x$ nieskończenie małego wypada

$$\frac{df(t)}{df} = f'(t) = \frac{dv}{dt} = \gamma,$$

o znaczy: *gdy $f(t)$ wyraża prędkość końcową po czasie t, pochodna $f'(t)$ wyraża przyśpieszenie po tymże czasie.*

Gdy ruch jest jednostajnie zmienny, przyśpieszenie jest ilością stałą. N p. gdy $v = c + \gamma t$, wtenczas $\frac{dv}{dt} = \gamma$.

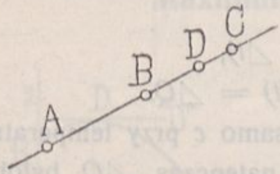

Fig 25

6) Funkcya $f(r)$ wyraża pracę L, jaką wykonuje siła skierowana do punktu A (fig. 25), przy przesunięciu punktu materyalnego B do odległości r od punktu A. Co wyraża pochodna $f'(r)$.?

Jeżeli $AB = r$, $BC = \triangle r$, natenczas praca wykonana przy przeprowadzeniu punktu materyalnego do punktu B jest $L = f(r)$, zaś przy przeprowadzeniu do punktu C jest $L + \triangle L = f(r + \triangle r)$, skąd wypada

$$\triangle f(r) = f(r + \triangle r) - f(r) = \triangle L.$$

Gdyby siła na całej drodze $\triangle r$ była taka sama P, jak w punkcie B, natenczas praca $\triangle L$ dałaby się wyrazić jako iloczyn siły P przez drogę $\triangle r$. Lecz wogóle siła się zmienia, inna jest w punkcie B a inna w punkcie C. Uważając jednak, że siła na drodze $\triangle r$ się nie zmienia, możemy pracę $\triangle L$ wyrazić jako iloczyn drogi $\triangle r$ przez jakąś pośrednią siłę P_1 taką n. p. jaka działa w punkcie D. Będzie więc $\triangle L = \triangle r \,.\, P_1$,

$$\frac{\triangle f(r)}{\triangle r} = \frac{\triangle L}{\triangle r} = P_1.$$

Gdy $\triangle r$ maleje, punkt C a zatem i punkt D zbliża się do punktu B a wartość siły P_1 zbliża się do wartości siły P działającej w punkcie B. W granicy dla $\triangle r$ nieskończenie małego wypada

$$\frac{df(r)}{dr} = f'(r) = \frac{dL}{dr} = P,$$

to znaczy: *jeżeli $f(r)$ wyraża pracę w odległości r, natenczas pochodna $f'(r)$ wyraża siłę działającą w tejże odległości.*

Jeżeli $L = \frac{m}{r}$, natenczas $P = \frac{dL}{dr} = -\frac{m}{r^2}$.

7) Funkcya $f(t)$ wyraża ilość ciepła Q, jaką posiada ciało o ciężarze 1 przy temperaturze t; co wyraża pochodna $f'(t)$?

Aby temperaturę ciała podnieść o $\triangle t$ stopni, trzeba dodać $\triangle Q$ kaloryi ciepła. Będzie zatem

$$Q + \triangle Q = f(t + \triangle t),$$
$$\triangle f(t) = f(t + \triangle t) - f(t) = \triangle Q.$$

Gdyby ciepło właściwe było takie samo c przy temperaturze t jak i przy temperaturze $t + \triangle t$, natenczas $\triangle Q$ byłoby równe iloczynowi $\triangle t$ stopni przez ciepło właściwe. Lecz wogóle ciepło właściwe się zmienia razem z temperaturą. Przyjmując, że przy podwyższeniu temperatury o $\triangle t$ stopni ciepło właściwe się nie zmieniło, możemy $\triangle Q$ wyrazić jako iloczyn $\triangle t$ przez ciepło właściwe c_1 pośrednie między ciepłem właściwem przy temperaturze t a temperaturze $t + \triangle t$. Mamy więc

$$\triangle Q = \triangle t \,.\, c_1,$$
$$\frac{\triangle f(t)}{\triangle t} = \frac{\triangle Q}{\triangle t} = c_1.$$

Gdy $\triangle t$ maleje, ciepło właściwe c_1 zbliżą się do ciepła właściwego c, jakie jest przy temperaturze t. W granicy dla $\triangle t$ nieskończenie małego wypada

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) = \frac{dQ}{dt} = c,$$

to znaczy: *pochodna $f'(t)$ wyraża w tym przypadku ciepło właściwe ciała przy temperaturze t^0.*

XXIV.

Znaczenie różniczki funkcyi.

Różniczka funkcyi wyraża nieskończenie mały przyrost tej ilości, co funkcya; n. p. jeżeli funkcya wyraża powierzchnię, to jej różniczka wyraża nieskończenie małą część powierzchni, jeżeli funkcya wyraża pracę, to jej różniczka wyraża nieskończenie małą pracę i t. p. Różniczkę często nazywa się *elementem*; mówi się: element powierzchni, element drogi i t. p.

XXV.

Maximum lub minimum funkcyi.

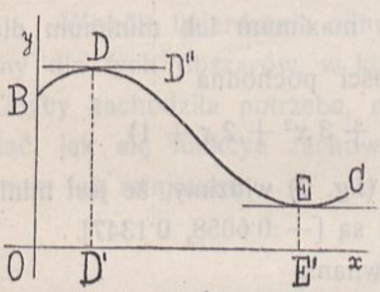

Fig 26.

Jeżeli linią *BDEC* przedstawia obraz funkcyi $f(x)$, lub równania $F(x, y) = 0$, natenczas tak pochodna $f'(x)$ jak stosunek różniczkowy $\frac{dy}{dx}$ wyraża stałą kierunkową stycznej poprowadzonej w punkcie odpowiadającym zmiennej x. Na fig. 26. widzimy, że linia się wznosi od *B* do *D*, potem zniża się od *D* do *E*, wznosi się od *E* do *C*. Punkta *D, E* są *punktami zwrotu*, w punkcie *D* jest *maximum*, w punkcie *E minimum* funkcyi. Styczne w punktach zwrotu *D* i *E* poprowadzone są równoległe do osi odciętych, a więc ich stałe kierunkowe są równe zeru.

Z tego powodu, jeżeli oznaczymy $OD' = x_1$, $OE' = x_2$, muszą być spełnione równania: $f'(x_1) = 0$ i $f'(x_2) = 0$. Jeżeli funkcya jest uwikłana, natenczas $\frac{dy}{dx}$ jest wogóle funkcyą zmiennych *x i y*, to znaczy: $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$, a gdy punkt $[x_1, y_1]$ jest punktem zwrotu, musi być spełnione równanie: $\varphi(x_1, y_1) = 0$.

Ogólnie: *funkcya osięga maximum lub minimum dla takich wartości zmiennej x, dla których jest*

$$f'(x)=0, \text{ lub } \frac{dy}{dx}=0.$$

Przykłady.

1) Funkcya $3x^2-8x+5$ osięga maximum lub minimum dla $x=1\frac{1}{3}$, bo dla tej wartości pochodna $\frac{d}{dx}[3x^2-8x+5]=2(3x-4)$ jest równą 0. Na obrazie funkcyi (fig. 6) widzimy, że jest minimum. Współrzędne punktu zwrotu są $[1\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]$.

2) Funkcya $\sin x$ osięga maximum lub minimum dla $x=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}$ i t. d., bo dla tych wartości pochodna $\frac{d \sin x}{dx}=\cos x$ jest równą 0. Współrzędne punktów zwrotu są $\left[\pm\frac{\pi}{2}, \pm 1\right], \left[\pm\frac{3\pi}{2}. \pm 1\right], ..$ i t. d. (fig. 13).

3) Funkcya $\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5-1}{x-1}$ osięga maximum lub minimum dla $x=-0{\cdot}6058$, bo dla tej wartości pochodna

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5-1}{x-1}\right]=\frac{1}{5}(4x^3+3x^2+2x+1)$$

jest równą 0. Na obrazie funkcyi (fig. 9) widzimy, że jest minimum. Współrzędne punktu zwrotu są $[-0{\cdot}6058, 0{\cdot}1347]$.

4) Funkcya uwikłana y w równaniu

$$3(x-1)-4y+5.\,e^{\sqrt[5]{4(x-1)+3y}}=0$$

osięga maximum lub minimum dla $x=1{\cdot}138$, bo dla tej wartości stosunek różniczkowy $\frac{dy}{dx}=\frac{3[4(x-1)+3y]^2-100.\,e^{\sqrt[5]{4(x-1)+3y}}}{4[4(x-1)+3y]^2+75.\,e^{\sqrt[5]{4(x-1)+3y}}}$

jest równy zeru. Na figurze 17. widzimy, że jest minimum. Współrzędne punktu zwrotu są $[1{\cdot}138, 2.455]$.

5) Weźmy pod uwagę równania elipsy, hiperboli i paraboli: Mamy dla elipsy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}=\pm\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

dla hiperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y} = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}};$$

dla paraboli

$$y^2 = 2px, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \pm \frac{p}{\sqrt{2px}}.$$

Widzimy z tego, że tylko w elipsie jest maximum lub minimum i to dla $x = 0$. Współrzędne punktów zwrotu są $[0, b]$, $[0, -b]$.

Ani hiperbola, ani parabola nie posiadają punktu rzeczywistego, w którymby było maximum lub minimum.

(Punkt rzeczywisty jest wtenczas, jeżeli jego współrzędne są rzeczywiste i skończone).

Wiedząc, kiedy funkcya osięga maximum lub minimum, możemy poznać obszary, w których rośnie lub maleje.

Wogóle twierdzenia odnoszące się do funkcyi wyprowadzamy dla tych obszarów, w których funkcye rosną lub maleją. Gdyby zachodziła potrzeba, musiałoby się szczegółowo rozważać, jak się funkcye zachowują wtenczas, gdy osięgają maximum lub minimum.

XXVI.

Pochodne i różniczki wyższych rzędów.

Z funkcyi pierwotnej $f(x)$ otrzymamy pochodną $f'(x)$ zapomocą działania

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Podobnie postępując otrzymamy

$$\frac{d}{dx} f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = f''(x),$$

$$\frac{d}{dx} f''(x) = f'''(x) \text{ i t. d.}$$

Pochodne $f''(x)$, $f'''(x)$... są pochodnemi 2go, 3go... rzędu. Oznacza się to także tak:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{df(x)}{dx} = \frac{d^2f(x)}{dx^2},$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d^3f(x)}{dx^3} \text{ i t. d.}$$

mówi się zaś: $f''(x)$ jest drugą pochodną funkcyi $f(x)$,

$f'''(x)$ „ trzecią „ „ i t. d.

Analogicznie: pochodną $f'(x)$ nazywa się pierwszą pochodną funkcyi $f(x)$.

Różniczki $df(x)$, $d^2f(x)$, $d^3f(x)$... nazywają się różniczkami pierwszego, drugiego, trzeciego... rzędu.

Z równań poprzednich wynikają następujące:

$$df(x) = f'(x)\,dx,\ d^2f(x) = f''(x)\,dx^2,\ d^3f(x) = f'''(x)\,dx^3, \ldots \text{ i t. d.}$$

Przykłady:

1) Jeżeli $f(x) = x^5$, natenczas

$$\frac{dx^5}{dx} = 5x^4, \quad \frac{d^2x^5}{dx^2} = 20\,x^3, \quad \frac{d^3x^5}{dx^3} = 60\,x^2, \ldots$$

$$dx^5 = 5\,x^4\,dx, \quad d^2x^5 = 20\,x^3\,dx^2, \quad d^3x^5 = 60\,x^2\,dx^3, \ldots$$

2) Jeżeli $f(x) = \cos x$, natenczas

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d^2\cos x}{dx^2} = -\cos x, \quad \frac{d^3\cos x}{dx^3} = \sin x, \ldots$$

$$d\cos x = -\sin x\,dx, \quad d^2\cos x = -\cos x\,dx^2, \quad d^3\cos x = \sin x\,dx^3, \ldots$$

3) Jeżeli $s = f(t)$, to znaczy, jeżeli droga jest funkcyą czasu (XXIII, 4), wtedy

$\frac{ds}{dt} = f'(t) = v$ jest prędkością końcową, a

$\frac{d^2s}{dt^2} = f''(t) = \frac{dv}{dt} = \gamma$ jest przyśpieszeniem (XXIII, 5).

XXVII.

Przejście od funkcyi pochodnej do pierwotnej.

Z przykładów w XXIII. przytoczonych dowiadujemy się, jakie zadania możemy rozwiązać, umiejąc wyznaczyć pochodną, jak również jakiebyśmy potrafili rozwiązać, gdybyśmy mogli wyznaczyć funkcyę pierwotną, znając jej pochodną. To też umiejętność wyznaczania funkcyi pierwotnej, czyli przejście od funkcyi pochodnej do pierwotnej jest rzeczą wielkiej doniosłości i tem się obecnie zajmiemy.

Ze $f(x)$ jest funkcyą pierwotną pochodnej $f'(x)$, napiszmy na razie symbolicznie

$$f(x) = \mathit{pierw}\ f'(x).$$

Ponieważ jednak tak funkcya $f(x)$, jak $[f(x) + C]$, gdzie C jest ilością stałą (ze względu na x) ma tę samą pochodną $f'(x)$, przeto najogólniejszym kształtem funkcyi pierwotnej jest: $f(x) + C$, co się pisze

$$f(x) + C = \mathit{pierw}\ f'(x).$$

Z tego poznajemy, że takich funkcyi, które mają tę samą pochodną, jest nieskończenie wiele, wszystkie jednak różnią się między sobą tylko ilością stałą. Jaka jest ilość stała, zależy od rodzaju zagadnienia. Rzecz się ma podobnie, jak przy rozwiązaniu równania $x^2 - 4 = 0$, gdzie tak $+2$, jak -2 jest pierwiastkiem równania; który zaś należy wziąć, zależy od rodzaju zadania.

XXVIII.

Znaczenie ilości stałej C.

Znaczenie ilości stałej C pojmiemy najlepiej, gdy ją na paru przykładach wyznaczymy.

1) Przez punkt $[x_1\ y_1]$ przechodzi linia mająca tę własność, że stała kierunkowa stycznej w punkcie $[x_1\ y_1]$ do linii poprowadzonej jest funkcyą $f'(x)$. Jakie jest równanie linii?

Według (XXIII, 1) szukane równanie jest

$$y = pierw\ f'(x) = f(x) + C.$$

Ilość stałą znajdziemy z warunku, że linia ma przechodzić przez punkt $[x_1, y_1]$. Będzie więc

$$y_1 = f(x_1) + C,$$

skąd wypada $C = y_1 - f(x_1)$; zatem

$$y = f(x) + y_1 - f(x_1)$$

jest szukanem równaniem.

Jak z tego widzimy, takich linii, w których styczne poprowadzone w punktach odpowiadających tej samej odciętej x tworzą z osią odciętych równe kąty, jest nieskończenie wiele. Ilość stałą C indywidualizuje jednę z tych linii.

2) Dane jest równanie linii: $y = f'(x)$, jaka jest powierzchnia F zamknięta między osią odciętych, rzędnemi odpowiadającemi odciętym a i x w pierwszej ćwiartce i daną linią, jeżeli wiemy, że dla $x = a$, powierzchnia ma wartość F_1 ?

Niech (fig. 27) BLC przedstawia linię $y = f'(x)$, niech będzie $OK = a$, $OA = x$, $AC = y$, natenczas według XXIII, 2) powierzchnia $BOACB = F$ da się wyrazić zapomocą równania

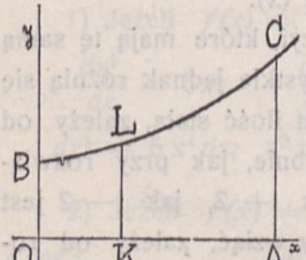

Fig. 27.

$$F = pierw\ f'(x) = f(x) + C.$$

Ponieważ dla $x = a$, $F = F_1$, przeto

$F_1 = f(a) + C$, skąd wypada

$C = F_1 - f(a)$, a szukana powierzchnia jest: $F = f(x) + F_1 - f(a)$.

Najczęściej odciętą a tak się dobiera, aby było $F_1 = o$, wtenczas jest $C = -f(a)$, $F = f(x) - f(a)$.

Ilość stała zależy tu od tego, od jakiej odciętej a zaczynamy liczyć powierzchnię.

Gdybyśmy nie wiedzieli, jaką wartość ma powierzchnia dla pewnej odciętej, nie moglibyśmy ilości stałej C wyznaczyć i zadanie nie byłoby rozwiązane.

Podobnie się wyznacza ilość stałą C w innych zagadnieniach a wyznaczając ją, poznaje się jej znaczenie.

XXIX.

Pojęcie całki.

Inne przejście od funkcyi pochodnej do funkcyi pierwotnej zrozumiemy na następującym przykładzie.

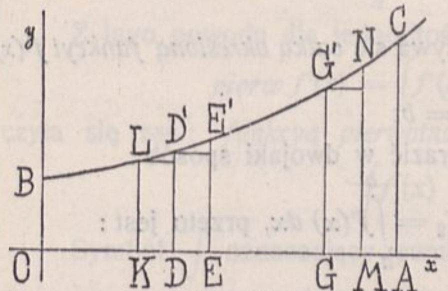

Fig. 28.

Funkcya $f(x) = F$ wyraża powierzchnię $OACB$, gdzie $AC = y = f'(x)$ (XXIII, 2). Rozchodzi się nam o obliczenie powierzchni $F_2 = KMNL$.

Oznaczywszy $OK = a$, $OM = b$, mamy

$$KMNL = OMNB - OKLB.$$

Lecz $OMNB = f(b)$, $OKLB = f(a)$, zatem wypada

$$F_2 = f(b) - f(a).$$

Tę powierzchnię możemy także w inny sposób wyrazić. Aby to uskutecznić, podzielmy ją na wązkie paski

$KDD'L$, $DEE'D'$,... $GMNG'$ o podstawie $\triangle x$.

Oznaczywszy $OD = x_1$, $OE = x_2$,... $OG = x_n$ i bacząc na to, że $KL = f'(a)$, $DD' = f'(x_1)$... $GG' = f'(x_n)$, otrzymamy powierzchnię $KMNL$ jako granicę, do której się zbliża suma pasków

$$f'(a)\triangle x + f'(x_1)\triangle x + f'(x_2)\triangle x + \cdots + f'(x_n)\triangle x = \sum_{x=a}^{x=x_n} f'(x)\triangle x$$

dla $\triangle x$ nieskończenie malejącego.

Ponieważ x_n zbliża się do b, gdy $\triangle x$ maleje do 0, wypada

$$F_2 = \lim_{\triangle x = 0} \sum_{x=a}^{x=b} f'(x)\triangle x = \sum_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx.$$

Używając na wyrażenie sumy symbolu $\int$ zamiast Σ, możemy napisać:

$$F_2 = \int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx, \text{ lub krótko } F_2 = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

Widzimy z tego, że powierzchnia od $x = a$ do $x = b$ równa się sumie różniczek powierzchni od $x = a$ do $x = b$, co uogólniając pojmujemy, iż funkcya pierwotna w obszarze od $x = a$ do $x = b$ równa się sumie jej różniczek w tymże samym obszarze.

Wyrażenie $\int_a^b f'(x)\, dx$ nazywa się *całką określoną funkcyi* $f'(x)$ *w granicach od* $x = a$ *do* $x = b$.

Ponieważ F_2 można wyrazić w dwojaki sposób:

$$F_2 = f(b) - f(a), \text{ i } F_2 = \int_a^b f'(x)\, dx, \text{ przeto jest:}$$

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Jest także przyjęte znakowanie: $f(b) - f(a) = \Big/_a^b f(x)$. Wobec tego można napisać $\int_a^b f'(x)\, dx = \Big/_a^b f(x)$.

To równanie podaje nam związek zachodzący między całką określoną a funkcyą pierwotną, czyli uczy nas, w jaki sposób całkę określoną można wyrazić zapomocą funkcyi pierwotnej.

Jeżeli $b = x$, natenczas $\int_a^x f'(x)\, dx = f(x) - f(a)$; gdzie $f(a)$ jest ilością stałą i zależy od tego, od której wartości x zaczynamy dodawać różniczki.

Oznaczywszy $f(a) = -C$, możemy napisać:

$$\int_a^x f'(x)\, dx = f(x) + C.$$

Poznaliśmy na przykładach, że jeżeli $f'(x) = y$ jest równaniem linii, natenczas na wyrażenie powierzchni mamy dwa wzory: *pierw* $f'(x)$ w obszarze od $x = a$ do x, i $\int_a^x f'(x) dx$, co uogólniając poznajemy, że dla pochodnej $f'(x)$ wypada funkcya pierwotna, która się da napisać:

$$pierw\ f'(x) \text{ w obszarze od } x=a \text{ do } x,$$

$$\text{lub} \int\limits_a^x f'(x)\,dx.$$

Z tego powodu dla jednolitości znakowania pisze się:

$$pierw\ f'(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C;$$

czyta się zaś: *funkcyą pierwotną pochodnej* $f'(x)$ jest *całka*:

$$\int f'(x)\,dx.$$

Symbol $\int$ oznaczający sumę nazywa się *całką*, a wzór

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

wyraża, że funkcya pierwotnà jest sumą różniczek funkcyi. Symbol $\int$ tem się różni od symbolu *pierw*, że gdy ten ostatni nic nie określa, tylko wypowiada, iż trzeba znaleźć funkcyę pierwotną pochodnej $f'(x)$, symbol $\int$ wyraża, w jaki sposób funkcyi pierwotnej należy szukać; mianowicie określa, że trzeba znaleźć sumę różniczek. Z tego powodu symbol $\int$ wyraża działanie, które się nazywa *całkowaniem*, a rachunek, zapomocą którego wyznacza się funkcye pierwotne czyli całki funkcyi uważanych za pochodne, nazywa się *rachunkiem całkowym*.

Funkcyę pierwotną czyli całkę wystarczy wyznaczyć bez względu na ilość stałą C, albowiem tę ostatnią odpowiednio do rodzaju zagadnienia trzeba osobno wyznaczyć.

Przy całkach określonych obojętną jest rzeczą, czy wprowadzimy ilość stałą, czy nie, jak to poznamy w dalszym ciągu.

Jeżeli $f(x) = \int f'(x)\,dx$,

natenczas będziemy oznaczać

$$f(a) = \int\limits_{x=a} f'(x)\,dx, \text{ lub krótko } f(a) = \int\limits_a f'(x)\,dx,$$

podobnież

$$f(b) = \int_b f'(x)\, dx.$$

Możemy tedy napisać:

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a) = \int_b f'(x)\, dx - \int_a f'(x)\, dx.$$

Gdybyśmy zamiast równania $f(x) = \int f'(x)\, dx$ użyli równania $f(x) = \int f'(x)\, dx + C$, otrzymalibyśmy:

$$f(a) = \int_a f'(x)\, dx + C,\ f(b) = \int_b f'(x)\, dx + C,$$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) = \int_b f'(x)\, dx - \int_a f'(x)\, dx,$$

t. j. to samo, co przedtem. Można to także w ten sposób wyrazić:

$$\Big/_a^b f(x) = \Big/_a^b [f(x) + C] \text{ (str. 64).}$$

XXX.

Wpływ działań d i $\int$.

Chcąc okazać wpływ, jaki wywierają działania d i $\int$ po sobie wykonane, weźmy pod uwagę równania:

$$df(x) = f'(x)\, dx \quad \text{(XVIII)},$$

$$f(x) = \int f'(x)\, dx \quad \text{(XXIX)}.$$

Jeżeli obie strony pierwszego równania zcałkujemy, otrzymamy, nie uwzględniając ilości stałej całkowania, równanie:

$$\int df(x) = \int f'(x)\, dx = f(x),$$

$$\text{czyli: } \int d\, f(x) = f(x).$$

Jeżeli obie strony drugiego równania zróżniczkujemy, będziemy mieć równanie:

$$df(x) = d\int f'(x)\,dx = f'(x)\,dx,$$

$$\text{czyli: } d\int f'(x)\,dx = f'(x)\,dx.$$

Widzimy z tego, że działania d i $\int$ kolejno po sobie wykonane znoszą się, bez względu na porządek, w jakim następują po sobie.

XXXI.

Całki niektórych funkcyi.

Uwzględniwszy wzory wymienione w XIX, otrzymamy następujące całki, z tą uwagą, że do każdej z nich należy pewna ilość stała C, której nie piszemy.

1) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (XV, 1),

2) $\int a^x\,dx = \frac{lg_b e}{lg_b a} \cdot a^x = \frac{a^x}{lna}$,

3) $\int \frac{dx}{x} = \frac{lg_b x}{lg_b e} = lnx$,

4) $\int \cos x\,dx = \sin x$,

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x$,

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x$,

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x$.

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,sin\,x = -arc\,cos\,x$,

9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x = -arc\,ctg\,x$.

We wzorach powyższych brakuje jeszcze całek niektórych funkcyi elementarnych. Chcąc je otrzymać musimy poznać niektóre ogólniejsze zasady całkowania, polegające przeważnie na zastosowaniu równań 14) — 18) w XIX. przytoczonych. Całkując bowiem obie strony tychże równań, otrzymamy:

10) Jeżeli a jest ilością stałą, natenczas

$$\int a f'(x)\, dx = a \int f'(x)\, dx,$$

albowiem $\int a f'(x)\, dx = a f(x) = a \int f'(x)\, dx.$

N. p. $\int 5 x^3\, dx = 5 \int x^3\, dx = \frac{5}{4} x^4.$

11) $\int [f'(x)\, dx + \varphi'(x)\, dx] = \int f'(x)\, dx + \int \varphi'(x)\, dx,$

albowiem lewa strona równania równa się $f(x) + \varphi(x)$.

N. p. $\int (a x^2\, dx + b \cos x\, dx) = a \int x^2\, dx + b \int \cos x\, dx$

$$= \frac{ax^3}{3} + b \sin x.$$

12) $f(x).\ \varphi(x) = \int \varphi(x) f'(x)\, dx + \int f(x)\, \varphi'(x)\, dx.$

N. p. α) $x \ln x = \int \ln x\, dx + \int x\, d[\ln x] = \int \ln x\, dx + \int dx = \int \ln x\, dx + x$, skąd wypada: $\int \ln x\, dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1).$

β) $x \arcsin x = \int \arcsin x\, dx + \int x\, d[\arcsin x]$

$$= \int \arcsin x\, dx + \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

γ) $x \operatorname{arc\,tg} x = \int \operatorname{arc\,tg} x\, dx + \int x\, d[\operatorname{arc\,tg} x]$

$$= \int \operatorname{arc\,tg} x\, dx + \int \frac{x\, dx}{1+x^2}.$$

δ) $x \sqrt{1-x^2} = \int \sqrt{1-x^2}\, dx + \int x\, d[\sqrt{1-x^2}]$

$$= \int \sqrt{1-x^2}\, dx - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \sqrt{1-x^2}\, dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$+ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \sqrt{1-x^2} - \arcsin x + \int \frac{(1-x^2)\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2 \int \sqrt{1-x^2}\, dx - \arcsin x, \text{ skąd wypada:}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x.$$

13) $$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{f'(x)\, dx}{\varphi(x)} - \int \frac{f(x)\, \varphi'(x)\, dx}{[\varphi(x)]^2}.$$

N. p. $$\frac{e^x}{x^n} = \int \frac{d[e^x]}{x^n} - \int \frac{e^x\, d[x^n]}{x^{2n}} = \int \frac{e^x\, dx}{x^n} - n \int \frac{e^x\, x^{n-1}\, dx}{x^{2n}}$$

$$= \int \frac{e^x\, dx}{x^n} - n \int \frac{e^x\, dx}{x^{n+1}},$$

skąd wypada wzór redukcyjny

$$\int \frac{e^x dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n} \int \frac{e^x dx}{x^n} - \frac{e^x}{n x^n}.$$

14) $f[\varphi(x)] = \int \frac{df(u)}{du} \varphi'(x)\, dx$, gdzie $u = \varphi(x)$, lub

$$f[\varphi(x) = \int \frac{d}{d\varphi(x)} f[\varphi(x)]. \varphi'(x)\, dx.$$

N. p. $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \int \frac{d}{du}\left[u^{\frac{1}{2}}\right] \cdot \frac{d}{dx}[1-x^2]\, dx$

$= \int \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} (-2x)\, dx = -\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$, gdzie $u = 1 - x^2$,

lub też

$$\sqrt{1-x^2} = \int \frac{d}{d[1-x^2]} [1-x^2]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx} [1-x^2]\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x)\, dx = -\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

15) Czasem przy wyznaczaniu całki $\int F(x)\, dx$ korzystnie jest użyć podstawienia: $x = \psi(y)$. Wtenczas $dx = \psi'(y)\, dy$, a

$$\int F(x)\, dx = \int F[\psi(y)]\, \psi'(y)\, dy.$$

Przykłady. α) Chcąc wyznaczyć całkę $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$, podstawiamy: $x = \sin y$. Wskutek tego wypada: $dx = \cos y\, dy$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 y} = \cos y$, i otrzymamy

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin y \cos y\, dy}{\cos y} = \int \sin y\, dy = -\cos y$$

$$= -\sqrt{1-x^2}.$$

β) Używszy tego samego podstawienia, co w poprzedzającym przykładzie, otrzymamy

$$\int \sqrt{1-x^2}\,.\, dx = \int \cos^2 y\, dy = \int \frac{1+\cos 2y}{2} dy = \frac{1}{2} \int dy$$

$$+ \frac{1}{4} \int \cos 2y\, d\, 2y = \frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4}.$$

Lecz $y = arc\ sin\ x$, $sin\ 2y = 2\ sin y\ cos\ y = 2x\sqrt{1+x^2}$, zatem

$$\int\sqrt{1-x^2}.dx = \frac{1}{2}\ arc\ sin\ x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

zgodnie z wzorem w przykładzie 12) otrzymanym.

γ) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$.

Podstawiając $x = ay$, $\frac{x}{a} = y$, będziemy mieć

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = arc\ sin\ y = arc\ sin\ \frac{x}{a}.$$

16) Czasem przy wyznaczaniu całki $\int F(x)\,dx$ korzystnie jest podstawić: $\varphi(x) = y$. Wtenczas $x = \psi(y)$, $dx = \psi'(y)\,dy$, a

$$\int F(x)\,dx = \int F[\psi(y)]\,\psi'(y)\,dy.$$

N. p. α) Chcąc wyznaczyć całkę $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{1+x^2}$, podstawiamy: $1+x^2 = y$. Wtenczas $xdx = \frac{1}{2}dy$, a

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\,lny = \frac{1}{2}\,ln\,(1+x^2).$$

W tym przypadku postępuje się prościej w ten sposób:

$$\varphi(x) = y,\quad \varphi'(x)\,dx = dy,\quad dx = \frac{dy}{\psi'(x)},$$

$$\int F(x)\,dx = \int\frac{F(x)}{\varphi'(x)}\,dy = \int f(y)\,dy,\ \text{gdzie}\ f(y) = \frac{F(x)}{\varphi'(x)}.$$

β) $\displaystyle\int tgx dx = \int\frac{sin\ x\,dx}{cos\ x}$.

Podstawiwszy $cos\,x = y$, wypada: $-\ sin\,x\,dx = dy$,

$$\int tg\,x\,dx = -\int\frac{dy}{y} = -\ ln\ y = -\ ln\ cos\ x.$$

γ) $\displaystyle\int ctg\ x\ dx = \int\frac{cos\ x\ dx}{sin\ x}$.

Podstawiwszy $sin\ x = y$, wypada: $cos\ x\ dx = dy$,

$$\int ctg\ x\ dx = \int\frac{dy}{y} = ln\ y = ln\ sin\ x.$$

17) Wyznaczenie całek funkcyi cyklometrycznych:

α) Według przykł. 12), β)

$$\int arc\sin x\,dx = x\,arc\sin x - \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lecz według przykł. 15), α)

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}, \text{ zatem}$$

$$\int arc\sin x\,dx = x\,arc\sin x + \sqrt{1-x^2}.$$

β) Ponieważ $arc\cos x = \frac{\pi}{2} - arc\sin x$ (III), przeto

$$\int arc\cos x\,dx = \int\left(\frac{\pi}{2} - arc\sin x\right)dx$$

$$= \int\frac{\pi\,dx}{2} - \int arc\sin dx = \frac{\pi x}{2} - x\,arc\sin x - \sqrt{1-x^2}$$

$$= x\left(\frac{\pi}{2} - arc\sin x\right) - \sqrt{1-x^2} = x\,arc\cos x - \sqrt{1-x^2}.$$

γ) Według przykł. 12), γ)

$$\int arc\,tg\,x\,dx = x\,arc\,tg\,x - \int\frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Lecz według przykł. 16), α)

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2), \text{ zatem}$$

$$\int arc\,tg\,x\,dx = x\,arc\,tg\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

δ) Ponieważ $arc\,ctg\,x = \frac{\pi}{2} - arc\,tg\,x$ (III), przeto

$$\int arc\,ctg\,x = \int\left(\frac{\pi}{2} - arc\,tg\,x\right)dx = \int\frac{\pi}{2}dx - \int arc\,tg\,x\,dx$$

$$= \frac{\pi x}{2} - x\,arc\,tg\,x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$= x\left(\frac{\pi}{2} - arc\,tg\,x\right) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$= x\,arc\,ctg\,x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

XXXII.

Znaczenie całki.

Z przykładów w XXIII przytoczonych można poznać, jakie jest znaczenie całki i jakie można rozwiązywać zagadnienia, gdy się umie zcałkować daną funkcyę. Bliżej to zrozumiemy przechodząc poszczególne przykłady.

1) Zadanie ogólne jest wyrażone i rozwiązane w XXVIII, 1). Dla objaśnienia dodamy kilka szczegółowych przykładów:

α) Jakie jest równanie linii przechodzącej przez punkt (1, 5), jeżeli $tg\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$?

$$y = \int \frac{2dx}{\sqrt[3]{x}} + C = 2\int x^{-\frac{1}{3}}\, dx + C = \frac{2 . 3\, x^{\frac{2}{3}}}{2} + C = 3\sqrt[3]{x^2} + C.$$

Lecz $5 = 3 + C$, stąd: $C = 2$, zatem szukane równanie jest: $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2$.

β) Jakie jest równanie linii przechodzącej przez punkt (1, 3), jeżeli $tg\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{15x^2}{2y}$?

$$2y\, dy = 15x^2\, dx,$$

$$\int 2y\, dy = \int 15x^2\, dx,$$

$$y^2 = 5x^3 + C.$$

Lecz $9 = 5 + C$, stąd: $C = 4$, zatem szukane równanie jest: $y^2 = 5x^3 + 4$.

γ) Jakie jest równanie linii przechodzącej przez punkt (x_1, y_1), jeżeli $tg\tau = \frac{dy}{dx} = a$ (ilość stała)?

$$dy = a dx,$$

$$\int dy = a \int dx,$$

$$y = ax + C,$$

Lecz $y_1 = ax_1 + C$, zatem

$$y - y_1 = a(x - x_1) \text{ (linia prosta).}$$

δ) Jakie jest równanie linii przechodzącej przez punkt $(0, b)$, jeżeli $tg\tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$?

$$a^2y\,dy = -b^2x\,dx,$$
$$a^2\int y\,dy = -b^2\int x\,dx,$$
$$a^2y^2 = -b^2x^2 + C.$$

Lecz $a^2b^2 = C$, zatem szukane równanie jest

$$a^2y^2 = -b^2x^2 + a^2b^2 \text{ (elipsa).}$$

ε) Jakie jest równanie linii przechodzącej przez punkt $(a, 0)$, jeżeli $tg\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$?

$$a^2y\,dy = b^2x\,dx, \quad a^2\int y\,dy = b^2\int x\,dx,$$
$$a^2y^2 = b^2x^2 + C,\ 0 = a^2b^2 + C,\ C = -a^2b^2.$$

Zatem $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ jest szukanem równaniem (hiperbola).

ζ) Jakie jest równanie linii przechodzącej przez punkt $(0, 0)$, jeżeli $tg\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$?

$$y\,dy = p\,dx,$$
$$\int y dy = p\int dx,$$
$$y^2 = 2px + C.$$

Lecz $C = 0$, zatem szukane równanie jest

$$y^2 = 2px \text{ (parabola).}$$

2) Zadanie ogólne jest wyrażone i rozwiązane w XXVIII; dodajemy kilka szczegółowych przykładów.

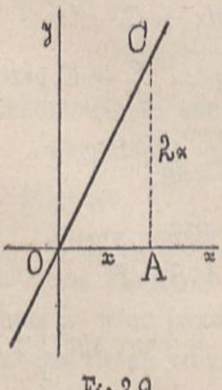

Fig. 29.

α) $y = 2x$. Fig. 29. $0A = x$, $AC = y = 2x$.

$$F = \int 2x\,dx + C = x^2 + C.$$

Dla $x = 0$, jest $F = 0$, zatem $C = 0$.

$$F = x^2.$$

β) $y = 2x + 1$. Fig. 30. $0A = x$, $AC = y = 2x + 1$.

$$F = \int (2x + 1)\,dx + C = x^2 + x + C.$$

Dla $x = 0$, jest $F = 0$, zatem $C = 0$.

$$F = x^2 + x.$$

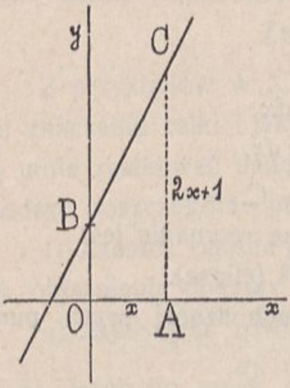

Fig. 30.

γ) $y = 2x - 3$. Fig. 31. $OA = x$,

$$OD = 1{\cdot}5,\ DA = x - 1{\cdot}5,$$

$$AC = y = 2x - 3.$$

$$F = \int (2x - 3)\,dx + C = x^2 - 3x + C.$$

Dla $x = 1{\cdot}5$, jest $F = 0$,

$$0 = 2{\cdot}25 - 4{\cdot}5 + C, \text{ stąd } C = 2{\cdot}25.$$

$$F = x^2 - 3x + 2{\cdot}25.$$

δ) $y^2 = 2px$. Fig. 32. $OA = x$,

$$AC = y = \sqrt{2px}.$$

$$F = \int y\,dx + C = \int \sqrt{2px}\,.\,dx + C$$

$$= \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + C = \frac{\sqrt{2p}\,.\,2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{2px} + C.$$

Dla $x = 0$, jest $F = 0$, zatem $C = 0$.

$$F = \frac{2}{3}x\sqrt{2px} = \frac{2}{3}xy.$$

To równanie wyraża kwadraturę paraboli.

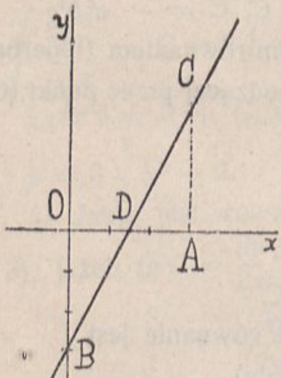

Fig. 31.

ε) Obliczyć powierzchnię elipsy, której równanie jest $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$F = \int y\,dx + C.$$

Ponieważ $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C$, przeto

$$F = \int b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx + C$$

$$= ab\int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,d\frac{x}{a} + C$$

$$= ab\left[\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{1}{2}\,arc\,sin\frac{x}{a}\right] + C.$$

(XXXI, 15, β).

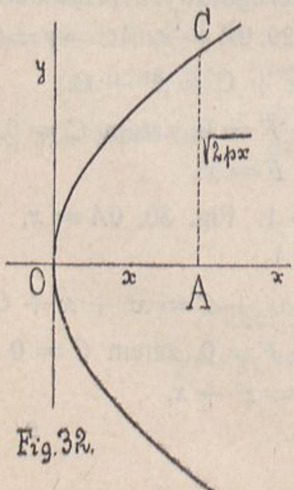

Fig. 32.

Lecz dla $x = 0$, jest $F = 0$, $C = 0$, zatem

$$F = ab\left[\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{1}{2}\,arc\ sin\frac{x}{a}\right].$$

Gdy $x = a$, wypada na czwartą część powierzchni elipsy wyrażenie:

$$ab\,.\,\frac{1}{2}\,.\,arc\ sin\ 1 = ab\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi}{2} = \frac{ab\pi}{4},$$

a stąd na powierzchnię całej elipsy F_e wzór:

$$F_e = ab\pi.$$

3) Funkcya $f(x)$ wyraża powierzchnię przekroju bryły prostopadłego do osi odciętych, w odległości x od początku współrzędnych. Obliczyć objętość bryły.

Według XXIII, 3)

$$\mathcal{V} = \int f(x)\,dx + C.$$

Chcąc obliczyć ilość stałą C, musimy znać objętość bryły dla pewnej odciętej. Zwykle bierze się taką odciętą $x = a$, dla której objętość $\mathcal{V} = O$. Mamy wtenczas

$$0 = \int_a f(x)\,dx + C, \quad C = -\int_a f(x)\,dx,$$

wskutek czego wypada

$$\mathcal{V} = \int f(x)\,dx - \int_a f(x)\,dx.$$

W kształcie całki określonej równanie

$$\mathcal{V} = \int_a^x f(x)\,dx$$

przedstawia to samo, co poprzedni wzór.

Przykłady: α) Obliczyć objętość ostrosłupa *a)* całego $\mathcal{V}$, *b)* ściętego $\mathcal{V}_1$.

Niech podstawa F ostrosłupa spoczywa na płaszczyźnie YOZ, oś odciętych niech przechodzi przez wierzchołek ostrosłupa a więc wzdłuż jego wysokości. Podzieliwszy ostrosłup płaszczyznami równoległemi do podstawy na warstwy o grubości dx, otrzymamy

$$\mathcal{V} = \int_0^H b\,dx, \qquad \mathcal{V}_1 = \int_0^h b\,dx,$$

gdzie b oznacza powierzchnię przekroju w odległości x od podstawy, H wysokość całego, a h wysokość ściętego ostrosłupa.

Lecz $b : F = (H - x)^2 : H^2$, skąd wypada

$$b = \frac{F}{H^2}(H - x)^2, \text{ zatem}$$

$$\int b\,dx = \frac{F}{H^2}\int (H - x)^2\,dx = \frac{F}{H^2}\int (H^2 - 2Hx + x^2)\,dx$$

$$= \frac{F}{H^2}\left(H^2x - Hx^2 + \frac{x^3}{3}\right).$$

Uwzględniwszy to, otrzymamy

$$\mathcal{V} = \frac{F}{H^2}\left(H^3 - H^3 + \frac{H^3}{3}\right) = \frac{FH}{3},$$

$$\mathcal{V}_1 = \frac{F}{H^2}\left(H^2h - Hh^2 + \frac{h^3}{3}\right) = Fh\left(1 - \frac{h}{H} + \frac{h^2}{3H^2}\right).$$

Gdy f oznacza podstawę mniejszą ostrosłupa ściętego, mamy

$$f : F = (H - h)^2 : H^2,$$

$$\sqrt{f} : \sqrt{F} = (H - h) : H = 1 - \frac{h}{H},$$

$$\frac{h}{H} = 1 - \sqrt{\frac{f}{F}},$$

co uwzględniwszy, otrzymamy

$$\mathcal{V}_1 = Fh\left[\sqrt{\frac{f}{F}} + \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{\frac{f}{F}}\right)^2\right]$$

$$= h\left[\sqrt{Ff} + \frac{F}{3}\left(1 - 2\sqrt{\frac{f}{F}} + \frac{f}{F}\right)\right]$$

$$= h\left[\sqrt{Ff} + \frac{F}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{Ff} + \frac{f}{3}\right]$$

$$= \frac{h}{3}(F + \sqrt{Ff} + f).$$

Podobnie można postąpić przy obliczeniu objętości stożka prostego.

β) Linia $y = F(x)$ obraca się około osi odciętych. Znaleźć objętość $\mathcal{V}$ powstałej bryły obrotowej od $x = a$ do x,

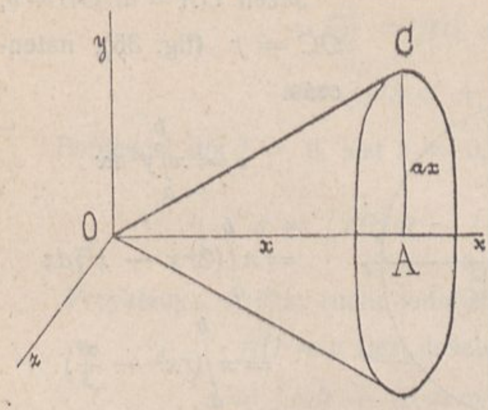

Fig. 33

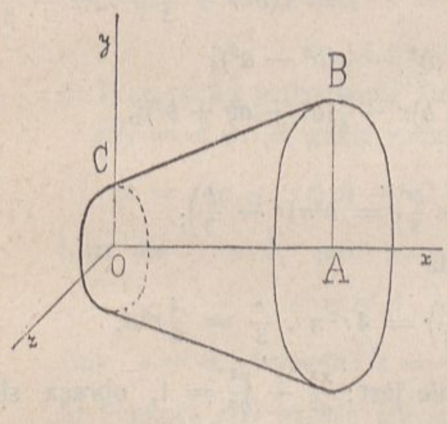

Fig. 34.

Powierzchnia przekroju w odległości x od początku współrzędnych jest $y^2\pi = [F(x)]^2\pi$, zatem

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^x [F(x)]^2 dx.$$

Przykłady szczegółowe.

$\alpha)$ Obliczyć objętość stożka obrotowego, jeżeli $y = ax$, $OA = x$, $AC = y = ax$ (fig. 33).

$$\mathcal{V} = \int_0^x y^2\pi \, dx = \int_0^x a^2\pi x^2 dx$$

$$= \frac{a^2\pi x^3}{3} = \frac{a^2x^2\pi x}{3}.$$

$\beta)$ Obliczyć objętość stożka obrotowego ściętego, jeżeli $y = ax + b$, $OA = x$, $OC = b$, $AB = y = ax + b$ (fig. 34).

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^x y^2 dx = \pi \int_0^x (a^2x^2 + 2abx + b^2)\, dx$$

$$= \pi\left(\frac{a^2x^3}{3} + abx^2 + b^2x\right) = \frac{\pi x}{3}(a^2x^2 + 3abx + 3b^2)$$

$$= \frac{\pi x}{3}[(ax + b)^2 + (ax + b)b + b^2].$$

$\gamma)$ Koło, którego równanie wierzchołkowe jest $y^2 = 2rx - x^2$, obraca się około osi odciętych. Obliczyć objętość kloca sferycznego v, odcinka kuli v_1 objętość kuli $\mathcal{V}$.

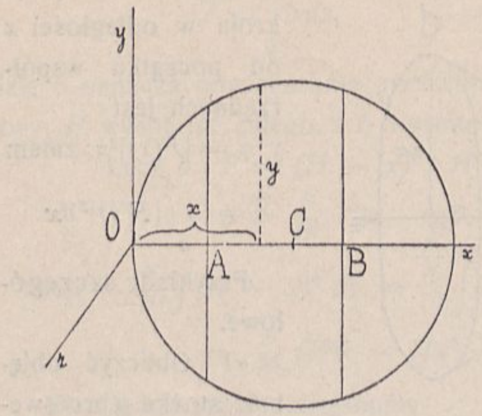

Fig 35.

Jeżeli $OA = a$, $OB = b$, $OC = r$ (fig. 35), natenczas

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$= \pi \int_a^b (2rx - x^2)\, dx$$

$$= \pi \Big|_a^b \left(rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$$

$$= \pi \left(b^2 r - \frac{b^3}{3} - a^2 r + \frac{a^3}{3}\right)$$

$$= \pi [r(b^2 - a^2) - \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3)]$$

$$= (b - a)\pi\, [(a + b)r - \tfrac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)].$$

Gdy $a = 0$, mamy

$$v_1 = b\pi\left(br - \frac{b^2}{3}\right) = b^2\pi\left(r - \frac{b}{3}\right);$$

gdy $a = 0$, $b = 2r$, wypada

$$\mathscr{V} = 4r^2\pi\left(r - \frac{2r}{3}\right) = 4r^2\pi \,.\, \frac{r}{3} = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

δ) Elipsa, której równanie jest: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, obraca się około osi odciętych; obliczyć objętość powstałej bryły (elipsoidu obrotowego).

$$\frac{v}{2} = \pi \int_0^a y^2 dx = b^2 \pi \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = b^2 \pi \Big|_0^a \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)$$

$$= b^2 \pi \left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{2ab^2\pi}{3}; \text{ zatem}$$

$$v = \frac{4ab^2\pi}{3}.$$

4) Funkcya $f(t)$ wyraża prędkość końcową punktu po czasie t; jaka jest droga s przebyta w czasie t?

Według XXIII, 4)

$$v = \frac{ds}{dt} = f(t), \text{ stąd}$$

$$s = \int f(t)\,dt + C.$$

Ponieważ dla $t = 0$, jest $s = 0$, zatem: $C = -\int\limits_0 f(t)\,dt$, a

$$s = \int f(t)\,dt - \int\limits_0 f(t)\,dt.$$

Przykłady: α) Przy ruchu jednostajnym

$$f(t) = c \text{ (jest ilością stałą).}$$

$$s = \int c\,dt + C = ct + C.$$

Lecz dla $t = 0$, jest $s = 0$, $C = 0$, zatem

$$s = ct.$$

β) Przy ruchu jednostajnie zmiennym

$$f(t) = c + \gamma t, \text{ gdzie } \gamma \text{ oznacza przyśpieszenie.}$$

$$s = \int (c + \gamma t)\,dt + C = ct + \gamma \frac{t^2}{2} + C.$$

Lecz dla $t = 0$, jest $s = 0$, $C = 0$, zatem

$$s = ct + \tfrac{1}{2}\gamma t^2.$$

Gdy $c = 0$, wypada: $s = \frac{1}{2}\gamma t^2$.

5) Funkcya $f(t)$ wyraża przyśpieszenie ruchu po czasie t, jaka jest prędkość końcowa v po tymże czasie?

Według XXIII, 5)

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = f(t), \text{ zatem}$$

$$v = \int f(t)\,dt + C.$$

Jeżeli dla $t = t_0$ jest $v = v_0$, natenczas

$$C = v_0 - \int\limits_{t_0} f(t)\,dt.$$

N. p. przy ruchu jednostajnie przyśpieszonym γ jest ilością stałą. Mamy wtenczas

$$v = \int \gamma\,dt + C = \gamma t + C.$$

Jeżeli dla $t = 0$, jest $v = c$, natenczas: $C = c$, a

$$v = c + \gamma t;$$

gdy $c = 0$, wypada: $v = \gamma t$.

6) Na punkt materyalny B będący w odległości $AB = r$ (fig. 25) od punktu A działa siła $f(r)$ skierowana do punktu A. Jaką pracę wykona ta siła, jeżeli przesunie punkt materyalny B z odległości r_0 do r, i jeżeli $r_0 > r$?

Według XXIII, 6)

$$\frac{dL}{dr} = f(r), \text{ zatem}$$

$$L = \int_{r_0}^{r} f(r)\, dr.$$

Jeżeli w punkcie A znajduje się masa m, w punkcie B masa m_1, natenczas te punkta przyciągają się według prawa Newtona z siłą: $f(r) = -\frac{m\, m_1}{r^2}$. Wówczas

$$L = \int_{r_0}^{r} -\frac{m\, m_1}{r^2} dr = -m\, m_1 \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2} = m\, m_1 \Big/_{r_0}^{r} \frac{1}{r}$$

$$= \frac{m\, m_1}{r} - \frac{m\, m_1}{r_0} = m_1\, (V - V_0),$$

gdzie oznaczyliśmy: $V = \frac{m}{r}$, $V_0 = \frac{m}{r_0}$. Gdy $r_0 = \infty$, wypada: $L = m_1 V$.

Wyrażenie: $V = \frac{m}{r}$ nazywa się potencyałem i wyraża pracę, jaką wykonuje masa m, gdy jednostkę masy z odległości nieskończenie wielkiej przeniesie do odległości r. Równanie $L = m_1 (V - V_0)$ wyraża, że praca w tym przypadku jest proporcyonalna do różnicy potencyałów; gdy $m_1 = 1$, praca równa się różnicy potencyałów.

7) Funkcya $f(t)$ wyraża ciepło właściwe ciała; jakiej potrzeba ilości ciepła Q, aby jednostkę masy tego ciała ogrzać od temperatury t_0^0 do t^0, jeżeli $t > t_0$?

Według XXIII, 7)

$$c = \frac{dQ}{dt} = f(t), \text{ zatem}$$

$$Q = \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt.$$

N. p. Jeżeli $c = c_0 + at + bt^2$, natenczas

$$Q = \int_{t_0}^{t} (c_0 + at + bt^2)\, dt = \Big/_{t_0}^{t} \left[c_0 t + \frac{at^2}{2} + \frac{bt^3}{3}\right]$$

$$= c_0 (t - t_0) + \frac{a}{2}(t^2 - t_0^2) + \frac{b}{3}(t^3 - t_0^3)$$

$$= (t - t_0) \left[c_0 + \frac{a}{2}(t + t_0) + \frac{b}{3}(t^2 + t_0 t + t_0^2)\right].$$

XXXIII.

Zastosowanie rachunku całkowego.

Inne zastosowanie rachunku całkowego poznamy przy rozwiązywaniu następujących zagadnień:

1) Dane jest równanie linii: $y = f(x)$, obliczyć długość łuku od $x = a$ do $x = b$.

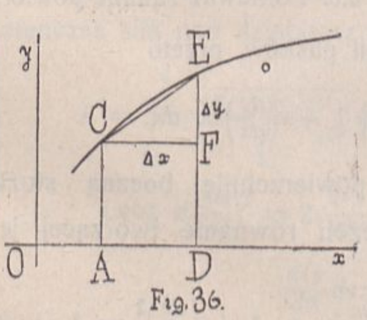

Fig. 36.

Według fig. 36.

$$\overline{CE}^2 = \triangle x^2 + \triangle y^2$$

$$= \triangle x^2 \left[1 + \left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2\right],$$

$$CE = \triangle x \sqrt{1 + \left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2}.$$

Gdy $\triangle x$ maleje, punkt E zbliża się do punktu C, a cięciwa CE coraz bardziej zbliża się do łuku $\widehat{CE}$. Dla $\triangle x$ nieskończenie małego CE przechodzi w nieskończenie mały element łuku ds, a $\triangle y$ w dy. Mamy więc

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ponieważ szukany łuk s jest sumą elementów łuku, przeto

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, dx.$$

Przykład: Obliczyć ćwierć obwodu koła wyrażonego równaniem: $x^2 + y^2 = r^2$.

Po zróżniczkowaniu ostatniego równania otrzymamy

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}, \text{ zatem}$$

$$s = \int_0^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \int_0^r \frac{d\frac{x}{r}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}} = r \Big|_0^r \operatorname{arc} \sin \frac{x}{r} = \frac{r\pi}{2}.$$

Cały obwód koła jest $4s = 2r\pi$.

2) Linia $y = f(x)$ obraca się około osi odciętych; obliczyć powstałą powierzchnię obrotową P od $x = a$ do $x = b$.

Element łuku wskutek obrotu opisze pasek kształtu obręczy o długości $2y\pi$ a o szerokości ds. Powierzchnia takiego paska jest $2y\pi\,ds = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$. Ponieważ żądana powierzchnia obrotowa P jest sumą takich pasków, przeto

$$P = 2\pi \int_a^b y\,ds = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, dx.$$

Przykłady: α) Obliczyć powierzchnię boczną stożka obrotowego od $x = 0$ do x, jeżeli równanie tworzącej jest $y = ax$ (fig. 33).

Rozwiązanie: $dy = a\,dx$, $\frac{dy}{dx} = a$, $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + a^2$,

$$P = 2\pi \int_0^x a x \sqrt{1 + a^2} \, . \, dx = a \pi x^2 \sqrt{1 + a^2}.$$

β) Obliczyć powierzchnię boczną stożka obrotowego ściętego od $x = 0$ do x, jeżeli równanie tworzącej jest $y = ax + b$ (fig 34).

Rozw: $\frac{dy}{dx} = a, \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + a^2,$

$$P = 2\pi \int_0^x (ax + b)\sqrt{1+a^2}\,.\,dx = \pi x(ax + 2b)\sqrt{1+a^2}.$$

γ) Obliczyć powierzchnię pasa sferycznego p, czaszy sferycznej p_1 i powierzchnię kuli P powstałej przez obrót koła $y^2 = 2rx - x^2$ około osi odciętych (fig. 35).

Rozw: $2y\,dy = 2r\,dx - 2x\,dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{r - x}{y},$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2 + (r-x)^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}, \quad ds = \frac{r\,dx}{y}, \quad y\,ds = r\,dx,$$

$$p = 2\pi \int_a^b y\,ds = 2\pi r \int_a^b dx = 2\pi r \Big/_a^b x = 2\pi r(b - a).$$

Gdy $a = 0$, mamy powierzchnię czaszy

$$p_1 = 2\pi br,$$

gdy $a = 0$, $b = 2r$, mamy powierzchnię kuli

$$P = 4\pi r^2.$$

3) Wyprowadzić związek zachodzący między pracą a energią kinetyczną.

Jeżeli punkt materyalny o masie m zrobił drogę $s - s_0$, natenczas siła nań działająca wykonała pracę

$$L = \int_{s_0}^{s} m\gamma ds = \int_{s_0}^{s} m \frac{d^2s}{dt^2} ds = m \int_{s_0}^{s} \frac{d^2s}{dt^2} ds, \quad \text{(XXVI, 3).}$$

Lecz $d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt}dt = 2\frac{d^2s}{dt^2}ds$, zatem

$$\frac{d^2s}{dt^2}ds = \frac{1}{2}d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

$$\int_{s_0}^{s} m\frac{d^2s}{dt^2}ds = \int_{s_0}^{s} \frac{m}{2}\,d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\Big/_{s_0}^{s}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Ponieważ $\frac{ds}{dt}$ wyraża prędkość v, przeto jeżeli v_0 wyraża prędkość nabytą po przebyciu drogi s_0 a v prędkość po przebyciu drogi s, można napisać

$$\frac{m}{2}\int_{s_0}^{s}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\int_{v_0}^{v} v^2 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Mamy przeto

$$L = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

$\frac{mv^2}{2}$ nazywa się energią kinetyczną masy m. Ostatnie równanie wyraża, że zmiana energii kinetycznej masy m na drodze $s - s_0$ równa się pracy wykonanej na tejże drodze.

4) Wyprowadzić prawo ruchu punktu materyalnego, wychylonego z pierwotnego położenia, jeżeli siła usiłująca go doprowadzić do pierwotnego położenią jest proporcyonalna do wychylenia.

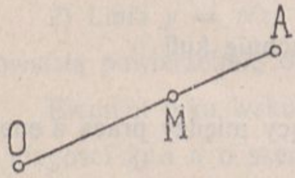

Fig. 37.

Jeżeli $OA = a$ (fig. 37) oznacza *największe wychylenie (amplitudę), $OM = x$ wychylenie* liczone od punktu O do M, natenczas siła p skierowana od punktu M do O usiłująca punkt materyalny sprowadzić do punktu O da się wyrazić zapomocą równania: $p = - kx$, gdzie k jest liczbą stałą. Znak — wyraża, że siła działa w przeciwnym kierunku a nie w tym, w którym liczymy x. Jeżeli m oznacza masę punktu materyalnego, natenczas można napisać

$$p = m\gamma = m\frac{d^2x}{dt^2} = - kx.$$

Z tego równania wynika następujące

$$m\frac{d^2x}{dt^2}dx = - kx\,dx.$$

W poprzedzającym przykładzie okazaliśmy, że

$$\frac{d^2x}{dt^2}dx = \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right],$$

co wstawiwszy do przedostatniego równania otrzymamy

$$\frac{m}{2}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = - kx\,dx.$$

Po wykonaniu całkowania na obu stronach równania wypada

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -kx^2 + C.$$

Zważywszy, że $\frac{dx}{dt} = v$ i że dla $x = a$, jest prędkość końcowa $v = 0$, otrzymamy: $C = ka^2$,

$$mv^2 = k(a^2 - x^2), \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{a^2-x^2}, \text{ czyli}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Z tego równania wypada

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,dt,$$

a po zcałkowaniu obu stron wyniknie

$$\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} = t\sqrt{\frac{k}{m}} + C.$$

Lecz dla $t = 0$, jest $x = 0$, zatem i $C = 0$.

Mamy więc

$$\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} = t\sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$\frac{x}{a} = \sin\left[t\sqrt{\frac{k}{m}} + 2n\pi\right],$$

$$x = a\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\left(t + 2n\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right),$$

gdzie n wyraża liczbę całkowitą dodatnią.

Ostatnie równanie okazuje. że ruch jest *okresowy*, gdyż w czasach t, $t + 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $t + 4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ldots$ stan ruchu uważanego punktu jest jednakowy.

Taki ruch nazywa się *drgający prosty* czyli *harmoniczny*. Czas $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = T$ nazywa się *okresem* lub *czasem drgania*.

Ten rodzaj ruchu występuje także przy wahadle matematycznem wychylonem o mały kąt (mniejszy od 2^0). Albowiem jeżeli l oznacza długość wahadła, g przyśpieszenie siły ciężkości, natenczas siła usiłująca sprowadzić wahadło do pierwotnego położenia jest: $-\frac{mgx}{l}$. W tym przypadku siła jest proporcyonalna do wychylenia x, a $k = \frac{mg}{l}$.

Z ostatniego równania wyniką: $\frac{m}{k} = \frac{l}{g}$, co podstawiwszy do równania $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, otrzymamy na czas pełnego wahnienia wyrażenie: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, a na *czas wahnienia* wzór

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

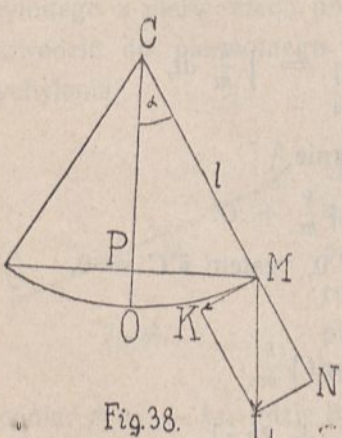

Fig. 38.

Objaśnienie.

Jeżeli fig. 38. przedstawia wahadło matematyczne o długości $OC = CM = l$, wychylone o $\sphericalangle\, \alpha$. natenczas widzimy na figurze, że składowa KM ciężaru wahadła usiłuje sprowadzić punkt M do O.

Lecz $KM : PM = ML : CM$, czyli $KM : PM = mg : l$, skąd wypada

$$KM = \frac{PM \cdot mg}{l}.$$

Gdy $\sphericalangle\, \alpha < 2^0$, można przyjąć z popełnieniem małego błędu, że $PM = OM = x$, wskutek czego staje się $KM = \frac{mgx}{l}$ co do bezwzględnej wartości. Uwzględniając kierunek działania tej siły do kierunku liczenia wychylenia x, otrzymamy $-\frac{mgx}{l}$ na wyrażenie siły usiłującej doprowadzić wahadło do pierwotnego położenia.

5) Wyznaczenie położenia środka ciężkości ciała.

Jeżeli $p_1, p_2, p_3 \ldots$ oznaczają ciężary punktów materyalnych układu stałego, $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ich odległości od pewnej płaszczyzny, $P = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$ ciężar całego układu, a odległość jego *środka ciężkości* od tejże płaszczyzny, natenczas jest równanie

$$aP = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \ldots = \Sigma a p.$$

Zapomocą tego równania można wyznaczyć położenie środka ciężkości ciała, bo

$$a = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \ldots}{P} = \frac{\Sigma a p}{P}.$$

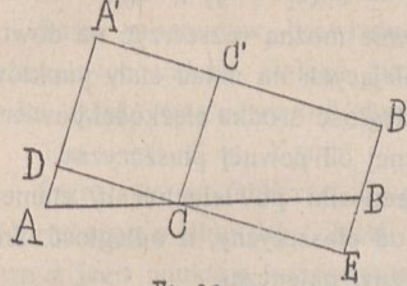

Fig. 39.

Objaśnienie.

Jeżeli w punktach A, B (fig. 39) działają siły równoległe q_1, q_2, natenczas można je zastąpić wypadkową $(q_1 + q_2)$ przyłożoną w punkcie C, byleby był spełniony warunek

$$AC \,.\, q_1 = BC \,.\, q_2.$$

Punkta A, B, C należą do układu stałego i leżą na linii prostej. Punkt C nazywa się środkiem sił równoległych q_1, q_2.

Niech $d_1 = AA'$, $d_2 = BB'$, $b = CC'$ oznaczają odległości punktów A, B, C od płaszczyzny, której rzutem jest $A'B'$. Można okazać, że

$$d_1 q_1 + d_2 q_2 = b(q_1 + q_2).$$

Albowiem jest

$$\begin{aligned} d_1 q_1 + d_2 q_2 &= AA' \,.\, q_1 + BB' \,.\, q_2 \\ &= (A'D + AD) q_1 + (B'E - BE) q_2 \\ &= (b + AD) q_1 + (b - BE) q_2 \\ &= b(q_1 + q_2) + AD \,.\, q_1 - BE \,.\, q_2. \end{aligned}$$

Lecz $AD : BE = AC : BC$, $AD = \dfrac{AC \,.\, BE}{BC}$,

$$AD \,.\, q_1 = \frac{AC \,.\, q_1 \,.\, BE}{BC} = \frac{BC \,.\, q_2 \,.\, BE}{BC} = BE \,.\, q_2,$$

$$AD \,.\, q_1 - BE \,.\, q_2 = 0, \text{ zatem}$$

$$d_1 q_1 + d_2 q_2 = b(q_1 + q_2).$$

Gdy przyjmiemy siłę trzecią q_3, równoległą do poprzednich, przyłożoną w odległości d_3 od płaszczyzny, natenczas według poprzedniego

$$b(q_1 + q_2) + d_3 q_3 = b_1 (q_1 + q_2 + q_3),$$

gdzie b_1 oznacza odległość środka sił równoległych $(q_1 + q_2)$ i q_3 od płaszczyzny.

Wstawiwszy do ostatniego równania wartość na $b(q_1 + q_2)$, otrzymamy

$$d_1 q_1 + d_2 q_2 + d_3 q_3 = b_1 (q_1 + q_2 + q_3).$$

W ten sposób to twierdzenie można rozszerzyć na dowolną liczbę sił równoległych działających na układ stały punktów.

Przykłady. α) Obliczyć odległość środka ciężkości powierzchni f figury płaskiej, jednorodnej od pewnej płaszczyzny.

Jeżeli μ wyraża ciężar jednostki powierzchni, df element powierzchni, x jego odległość od płaszczyzny, a odległość środka ciężkości od tejże płaszczyzny, natenczas

$$a = \frac{\int x\mu df}{\mu f} = \frac{1}{f}\int x\,df,$$

gdzie całkowanie odnosi się do wszystkich elementów figury.

β) Obliczyć odległość środka ciężkości ostrosłupa jednorodnego od podstawy.

Niech H oznacza wysokość, F powierzchnię podstawy, μ ciężar właściwy ostrosłupa, natenczas $\frac{\mu FH}{3}$ wyraża jego ciężar. Podzielimy go na warstwy równoległe do podstawy o grubości dx. Natenczas ciężar warstwy w odległości x od podstawy i o przekroju f jest $\mu f dx$.

Lecz $f : F = (H - x)^2 : H^2$, stąd $f = \frac{F(H-x)^2}{H^2} = F\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2$; $\mu f dx = \mu F\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 dx$, zatem odległość środka ciężkości wynosi

$$a = \int_0^H \frac{\mu F\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 x\,dx}{\frac{FH\mu}{3}} = \frac{3}{H}\int_0^H \left(1 - \frac{2x}{H} + \frac{x^2}{H^2}\right) x\,dx$$

$$= \frac{3}{H}\Big/_0^H \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3H} + \frac{x^4}{4H^2}\right] =$$

$$= \frac{3}{H}\left(\frac{H^2}{2} - \frac{2\,H^3}{3\,H} + \frac{H^4}{4\,H^2}\right) = 3\,H\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{H}{4}.$$

6) Obliczenie momentu bezwładności.

Jeżeli m oznacza masę punktu materyalnego, r jego odległość od osi obrotu, natenczas mr^2 nazywa się *momentem bezwładności* tegoż punktu względem osi obrotu.

Suma momentów bezwładności poszczególnych punktów materyalnych układu stałego nazywa się momentem bezwładności układu względem osi obrotu i oznacza się głoską T.

Jest więc: $T = \Sigma\, mr^2$.

Przykłady. α) Obliczyć T odcinka materyalnego (pręta) jednorodnego o długości l, jeżeli oś obrotu znajduje się w jednym z jego punktów końcowych i jest doń prostopadła.

Jeżeli μ oznacza masę jednostki długości pręta, natenczas $\mu\,dx$ jest masą elementu dx będącego w odległości x od osi obrotu, a $x^2\mu\,dx$ jego momentem bezwładności. Wtedy

$$T = \int_0^l \mu\, x^2\, dx = \frac{\mu\, l^3}{3}.$$

Oznaczywszy masę pręta przez M, mamy: $M = \mu\, l$, a

$$T = \frac{M}{3}\,.\,l^2.$$

Gdy oś obrotu jest w środku pręta, natenczas

$$T_0 = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \mu x^2 dx = \frac{2\mu\, l^3}{8} = \frac{M}{12}\, l^2 = \frac{T}{4}.$$

β) Obliczyć T linii kołowej materyalnej (pierścienia) jednorodnej, jeżeli oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny koła i jeżeli przechodzi przez jego środek.

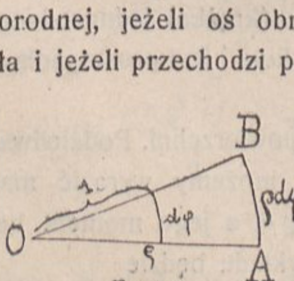

Fig. 40.

Jeżeli (fig. 40) ϱ oznacza promień koła, natenczas łuk koła odpowiadającego różniczce kąta $d\varphi$ jest $\varrho d\varphi$ (stosownie do proporcyi: $\widehat{AB} : d\varphi = \varrho : 1$), element masy jest $\mu\varrho\, d\varphi$, a

$$T = \int_0^{2\pi} \varrho^2 \cdot \mu \varrho \, d\varphi = \mu \varrho^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \varrho^3 \mu = M \varrho^2,$$

gdzie $M = 2\pi \varrho \mu$ oznacza masę pierścienia (μ ma takie samo znaczenie, jak w poprzednim przykładzie).

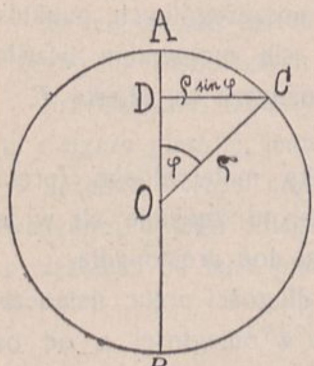

Fig. 41.

Gdy osią obrotu jest średnica AB (fig. 41.) i gdy φ oznacza kąt, jaki tworzy promień koła poprowadzony do uważanego elementu C masy $\mu \varrho \, d\varphi$ z osią obrotu, natenczas odległość tegoż elementu masy od osi obrotu jest $\varrho \sin \varphi$, a

$$T_0 = 2 \int_0^{\pi} \varrho^2 \sin^2 \varphi \, \mu \varrho \, d\varphi$$

$$= \cancel{2}\mu \varrho^3 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \cancel{2}\mu \varrho^3 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi$$

$$= \mu \varrho^3 \int_0^{\pi} \left(d\varphi - \frac{\cos 2\varphi \, d\,[2\varphi]}{2} \right) = \mu \varrho^3 \Big/_0^{\pi} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) = \mu \varrho^3 \pi$$

$$= \frac{M}{2} \varrho^2 = \frac{T}{2}.$$

γ) Obliczyć T koła materyalnego (krążka) jednorodnego, jeżeli oś obrotu znajduje się w środku koła i jest prostopadła do jego płaszczyzny.

Niech μ oznacza masę jednostki powierzchni. Podzieliwszy krążek na pierścienie o szerokości $d\varrho$, możemy wyrazić masę pierścienia o promieniu ϱ przez $2\pi \varrho \, d\varrho \, \mu$, a jego moment bezwładności według poprzedzajacego przykładu będzie

$$2\pi \varphi \, d\varrho \, \mu \varrho^2, \quad \text{zaś}$$

$$T = \int_0^\varrho 2\pi\varrho\, d\varrho\, \mu \varrho^2 = 2\pi\mu \int_0^\varrho \varrho^3 d\varrho = \frac{\pi\mu\varrho^4}{2} = \frac{M\varrho^2}{2},$$

gdzie M oznacza masę krążka.

Jeżeli osią obrotu jest średnica, natenczas

$$T_0 = \frac{T}{2}.$$

δ) Obliczyć T dla powłoki (skorupy) kulistej jednorodnej, nieskończenie cienkiej, obracającej się około średnicy.

Powłokę kulistą można podzielić na pierścienie kołowe płaszczyznami prostopadłemi do średnicy. Jeżeli μ ma takie znaczenie, jak w poprzedzającym przykładzie, natenczas długość pierścienia o promieniu $\varrho \sin\varphi$ (fig. 41) jest $2\pi\varrho \sin\varphi$, jego masa $2\pi\varrho \sin\varphi\, \varrho\, d\varrho\, \mu$, a według przykł. β) jego moment bezwładności jest: $2\pi \sin\varphi\, \varrho\, d\varphi\, \mu\varrho^2 \sin^2\varphi = 2\pi\mu\varrho^4 \sin^3\varphi\, d\varphi$; zatem

$$T = 2\pi\mu\varrho^4 \int_0^\pi \sin^3\varphi\, d\varphi.$$

Lecz $\sin 3\varphi = \sin\varphi \cos 2\varphi + \cos\varphi \sin 2\varphi$

$$= \sin\varphi\,(1 - 2\sin^2\varphi) + 2\cos\varphi \sin\varphi \cos\varphi$$

$$= \sin\varphi - 2\sin^3\varphi + 2\sin\varphi\,(1 - \sin^2\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi,$$

skąd wypada: $4\sin^3\varphi = 3\sin\varphi - \sin 3\varphi$, przeto

$$T = 2\pi\mu\varrho^4 \int_0^\pi \frac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{\mu\pi\varrho^4}{2} \int_0^\pi \left(3\sin\varphi\, d\varphi - \frac{1}{3}\sin 3\varphi\, d\, 3\varphi\right)$$

$$= \frac{\mu\pi\varrho^4}{2} \Big/_0^\pi \left(-3\cos\varphi + \frac{\cos 3\varphi}{3}\right) = \frac{\mu\pi\varrho^4}{2} \cdot \frac{16}{3}$$

$$= \frac{8}{3}\pi\varrho^4\mu = \frac{2}{3} M\varrho^2,$$

gdzie $M = 4\varrho^2\pi\mu$ oznacza masę powłoki.

ε) Obliczyć T kuli jednorodnej, jeżeli oś obrotu przechodzi przez środek kuli.

Niech μ oznacza masę jednostki objętości (gęstość).

Podzieliwszy kulę na powłoki (skorupy) współśrodkowe o grubości $d\varrho$, mamy na masę powłoki o promieniu ϱ wyrażenie $4\varrho^2\pi\, d\varrho\, \mu$, a jej moment bezwładności według poprzedzającego przykładu wynosi

$$\tfrac{2}{3}\cdot 4\varrho^2\pi\, d\varrho\, \mu\, .\, \varrho^2;\ \text{zatem}$$

$$T=\int_0^\varrho \tfrac{2}{3}\, .\, 4\varrho^2\pi\, d\varrho\, \mu\, .\, \varrho^2=\tfrac{8}{3}\pi\mu\int_0^\varrho \varrho^4\, d\varrho=\tfrac{8}{15}\pi\mu\varrho^5=\tfrac{2}{5}M\varrho^2,$$

gdzie $M=\frac{4}{3}\varrho^3\pi\mu$.

T można obliczyć na drugi sposób podzieliwszy kulę płaszczyznami równoległemi do osi obrotu na krążki o grubości dx. Krążek, który jest w odległości x od środka kuli, ma promień $\sqrt{\varrho^2-x^2}$ (jeżeli na fig. 41. $OD=x$, to $DC=\sqrt{\varrho^2-x^2}$), masę $(\varrho^2-x^2)\pi\, dx\, \mu$, a jego moment bezwładności według przykł. γ) wynosi:

$$\tfrac{1}{2}(\varrho^2-x^2)\pi\, dx\, \mu\, (\varrho^2-x^2),=\frac{\pi\mu}{2}(\varrho^2-x^2)^2\, dx;\ \text{zatem}$$

$$T=2\int_0^\varrho \frac{\mu\pi}{2}(\varrho^2-x^2)^2dx=\mu\pi\int_0^\varrho (\varrho^2-x^2)^2\, dx$$

$$=\mu\pi\int_0^\varrho (\varrho^4-2\varrho^2x^2+x^4)dx=\mu\pi\Big|_0^\varrho\left(\varrho^4x-\frac{2\varrho^2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)$$

$$=\mu\pi\varrho^5\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{15}\mu\pi\varrho^5$$

zgodnie z poprzedzającem.

7) Obliczenie potencyału.

Jeżeli m_1, m_2, m_3,.. oznaczają masy punktów materyalnych układu stałego, r_1 r_2, r_3,... ich odległości od pewnego punktu, w którym jest jednostka masy, natenczas suma

$$\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\frac{m_3}{r_3}+\ldots=\Sigma\frac{m}{r}\quad \text{(XXXII, 6)}$$

wyraża *potencyał* układu względem owego punktu i oznacza się głoską V.

Przykłady. a) Obliczyć potencyał powłoki (skorupy) kulistej jednorodnej, nieskończenie cienkiej względem punktu zewnątrz kuli położonego.

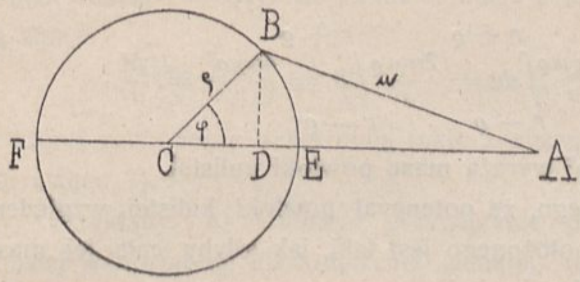

Fig. 42.

Fig. 42. przedstawia przekrój kuli o promieniu ϱ, której środek znajduje się w punkcie C. Kładąc $AC = r$, $AB = u$, $\sphericalangle ACB = \varphi$, oznaczmy masę jednostki powierzchni powłoki przez μ i podzielmy powłokę na pierścienie nieskończenie cienkie płaszczyznami prostopadłemi do AC. Jeżeli ds wyraża element łuku (długości) pierścienia, to ponieważ szerokość pierścienia jest $\varrho d\varphi$ (fig. 40), element powierzchni cząstki pierścienia jest $\varrho d\varphi ds$, masa cząstki $\mu\varrho d\varphi ds$, a jej potencyał względem punktu A wynosi $\frac{\mu\varrho d\varphi ds}{u}$; zatem potencyał całego pierścienia po uwzględnieniu, że pierścień ma obwód 2. $BD\pi = 2\varrho sin\varphi\pi$, jest

$$\int_0^{2.BD.\pi} \frac{\mu\varrho d\varphi ds}{u} = \frac{\mu\varrho d\varphi}{u} \int_0^{2\varrho sin\varphi\pi} ds, = \frac{\mu\varrho d\varphi}{u} \Big/_0^{2\pi\varrho sin\varphi} s$$

$$= \frac{\mu\varrho d\varphi}{u} . 2\pi\varrho sin\varphi = 2\pi\mu\varrho^2 . \frac{sin\varphi d\varphi}{u} .$$

Lecz z trójkąta ABC wynika: $u^2 = \varrho^2 + r^2 - 2r\varrho\cos\varphi$, skąd po zróżniczkowaniu otrzymujemy: $2u\,du = 2r\varrho\sin\varphi\,d\varphi$, $\varrho\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{u} = \frac{du}{r}$, co uwzględniwszy, otrzymamy na potencyał pierścienia wyrażenie: $\frac{2\pi\mu\varrho du}{r}$. Dodając potencyały poszczególnych pierścieni począwszy od najbliższego, który jest w punkcie E w odległości $r - \varrho$ od punktu A, aż do najdalszego, który jest w punkcie F w odległości $r + \varrho$ od punktu A, otrzymamy na potencyał V powłoki kulistej wyrażenie

$$V = \frac{2\pi\mu\varrho}{r}\int_{r-\varrho}^{r+\varrho} du = \frac{2\pi\mu\varrho}{r}\Big/_{r-\varrho}^{r+\varrho} u = \frac{4\pi\mu\varrho^2}{r} = \frac{M}{r},$$

gdzie $M = 4\pi\mu\varrho^2$ wyraża masę powłoki kulistej.

Widzimy z tego, że potencyał powłoki kulistej względem punktu zewnątrz położonego jest taki, jak gdyby cała jej masa była skupiona w środku kuli.

β) Obliczyć potencyał kuli jednorodnej względem punktu zewnątrz niej położonego.

Niech μ oznacza masę jednostki objętości (gęstość). Podzielmy kulę na powłoki nieskończenie cienkie współśrodkowe o grubości $d\varrho$. Masa powłoki o promieniu ϱ wynosi $4\varrho^2\pi\mu d\varrho$, a według poprzedzającego przykładu jej potencyał względem punktu będącego w odległości r od środka kuli i zewnątrz kuli położonego będzie $\frac{4\varrho^2\pi\mu d\varrho}{r}$. Dodawszy potencyały poszczególnych powłok, otrzymamy na potencyał kuli o promieniu R wyrażenie

$$V = \frac{4\pi\mu}{r}\int_0^R \varrho^2 d\varrho = \frac{4\pi\mu}{r}\Big/_0^R \frac{\varrho^3}{3}$$

$$= \frac{4\pi\mu R^3}{3\,r} = \frac{M}{r},$$

gdzie $M = \frac{4}{3}\pi R^3\mu$ wyraża masę kuli.

Tu również widzimy, że potencyał kuli względem punktu zewnątrz niej położonego jest taki, jak gdyby cała masa kuli była skupiona w jej środku.

8) Obliczenie przyciągania.

Punkt materyalny o masie m przyciąga drugi o masie 1, będący odeń w odległości r, według prawa Newtona siłą $-\frac{m}{r^2}$, gdzie znak $-$ wyraża, iż przyciąganie odbywa się w przeciwnym kierunku od tego, w którym r liczymy. Przyciąganie układu stałego wywarte na punkt o masie 1 wyraża się zapomocą sumy

$$-\frac{m_1}{r_1^2}-\frac{m_2}{r_2^2}-\frac{m_3}{r_3^2}-\ldots=-\Sigma\frac{m}{r^2},$$

w której zachodzące ilości mają takie znaczenie, jak na początku ustępu 7).

Przykłady. α) Obliczyć przyciąganie powłoki (skorupy) kulistej jednorodnej, nieskończenie cienkiej, wywarte na punkt zewnątrz kuli położony.

Postępując tak, jak w przykładzie α) ustępu 7) i mając na uwadze fig. 42. otrzymamy $-\frac{\mu\varrho\, d\varphi\, ds}{u^2}$ jako wyrażenie na przyciąganie elementu cząstki pierścienia w punkcie B na punkt A. Przyciąganie to można rozłożyć na dwa składowe: jedno działające w kierunku AC, drugie prostopadłe do tegoż kierunku. Przyciągania składowe cząstek pierścienia prostopadłe do AC znoszą się nawzajem, gdyż dla każdego punktu pierścienia znajdzie się drugi w tej samej odległości, lecz w kierunku wprost przeciwnym od prostej AC położony. Te zatem składowe przyciągania nie wchodzą w rachubę, rozchodzi się tylko o składowe przyciągania działające w kierunku AC.

Składowe przyciąganie cząstki B w kierunku AC jest

$$-\frac{\mu\varrho\, d\varphi\, ds}{u^2}\cos BAD=-\frac{\mu\varrho\, d\varphi\, ds}{u^2}\cdot\frac{AD}{u}$$

$$=-\frac{\mu\varrho\, d\varphi\, ds}{u^3}(AC-CD)=-\frac{\mu\varrho\, d\varphi\, ds}{u^3}(r-\varrho\cos\varphi),$$

zatem przyciąganie całego pierścienia wynosi

$$-\frac{\mu\varrho\, d\varphi\,(r-\varrho\cos\varphi)}{u^3}\int_0^{2\pi\varrho\sin\varphi}ds=-\frac{2\pi\mu\varrho^2(r-\varrho\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}{u^3}.$$

Lecz z równania: $u^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \, Cos \varphi$ wypada

$$\varrho \, Cos \varphi = \frac{r^2 + \varrho^2 - u^2}{2r}, \quad r - \varrho \, Cos \varphi = \frac{r^2 - \varrho^2 + u^2}{2r},$$

$$\frac{\varrho \sin \varphi \, d\varphi}{u} = \frac{du}{r},$$

co uwzględniwszy otrzymamy na przyciąganie całego pierścienia wyrażenie

$$-\frac{\pi \mu \varrho (r^2 - \varrho^2 + u^2)}{r^2} \cdot \frac{du}{u^2} = -\frac{\pi \mu \varrho}{r^2} \left[(r^2 - \varrho) \frac{du}{u^2} + du \right].$$

Dodając przyciągania wszystkich pierścieni, otrzymamy na przyciąganie F całej powłoki kulistej wyrażenie

$$P = -\frac{\pi \mu \varrho}{r^2} \left[(r^2 - \varrho^2) \int_{r-\varrho}^{r+\varrho} \frac{du}{n} + \int_{r-\varrho}^{r+\varrho} du \right]$$

$$= -\frac{\pi \varphi \varrho}{r^2} \left[(r^2 - \varrho^2) \Big/_{r-\varrho}^{r+\varrho} - \frac{1}{u} + \Big/_{r-\varrho}^{r+\varrho} u \right] = -\frac{4 \pi \mu \varrho^2}{r^2} = -\frac{M}{r^2}.$$

Widzimy z tego, że przyciąganie, jakie wywiera powłoka kulista na punkt zewnątrz kuli położony jest takie, jak gdyby cała jej masa była skupioną w środku kuli.

Ponieważ $\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr} \cdot \frac{M}{r} = -\frac{M}{r^2}$, przeto

$$\frac{dV}{dr} = P.$$

β) Obliczyć przyciąganie kuli jednorodnej wywarte na punkt zewnątrz niej położony.

Postępując tak jak w przykł. β) ust. 7), otrzymamy $-\frac{4\pi \mu \varrho^2 d\varrho}{r^2}$ jako wyrażenie na przyciąganie powłoki nieskończenie cienkiej, której cząstki znajdują się w odległości ϱ od środka kuli. Dodając przyciągania poszczególnych powłok, otrzymujemy na przyciąganie P całej kuli wyrażenie

$$P = -\frac{4\pi \mu}{r^2} \int_0^R \varrho^2 \, d\varrho = -\frac{4 \pi \mu R^3}{3r^2} = -\frac{M}{r^2}.$$

Widoczna, że o przyciąganiu całej kuli możemy to samo powiedzieć, cośmy udowodnili o przyciąganiu powłoki w poprzedzającym przykładzie.

9) Obliczyć ciśnienienie hydrostatyczne wywarte na powierzchnię figury płaskiej zanurzonej w cieczy.

Jeżeli powierzchnia danej figury jest f, ciężar właściwy cieczy s, natenczas ciśnienie cieczy wywarte na element figury df będący w odległości x od powierzchni wolnej jest $s\,x\,df$ a ciśnienie wywarte na powierzchnię całej figury jest

$$P = \int s\,x\,df = s\int x\,df,$$

gdzie całkowanie trzeba wykonać na elementa powierzchni całej figury. Lecz według przykł. 5) α)

$$\int x\,df = a\,.\,f,$$

gdzie a oznacza odległość środka ciężkości danej figury od powierzchni wolnej. Mamy zatem

$$P = a\,f\,s,$$

to znaczy: Ciśnienie cieczy wywarte na powierzchnię figury płaskiej zanurzonej w cieczy równa się ciężarowi słupa cieczy, którego podstawą jest powierzchnia figury a wysokością odległość środka ciężkości cieczy od powierzchni wolnej.

10) Wyprowadzić prawo zmiany ciśnienia atmosferycznego w miarę wznoszenia się nad poziom morza.

Jeżeli w naczyniu ciecz wznosi się nad dnem do wysokości h, natenczas ciśnienie wywarte na jednostkę powierzchni będącej w odległości x od dna wynosi

$$p = s\,(h - x),$$

gdzie s oznacza ciężar właściwy cieczy. Różniczkując ostatnie równanie otrzymamy na zmianę ciśnienia przy zmianie odległości wyrażenie

$$dp = -\,s\,dx.$$

Podobnie rzecz się ma z ciśnieniem atmosferycznem z tą różnicą, że s się zmienia, gdyż powietrze jest gazem.

Według prawa Mariotta $s = kp$, gdzie k jest ilością stałą, co wstawiwszy w poprzednie równanie otrzymamy

$$dp = -kp\,dx,$$

$$\frac{dp}{p} = -k\,dx,$$

a po zcałkowaniu ostatniego równania wypada

$$\ln p = -kx + C.$$

Jeżeli dla $x = x_0$ jest $p = p_0$, natenczas

$$C = \ln p_0 + kx_0,$$

$$\ln p = -kx + \ln p_0 + kx_0,$$

$$k(x - x_0) = \ln p_0 - \ln p,$$

$$k(x - x_0) = \ln p_0 - \ln p; \text{ zatem}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{k}(\ln p_0 - \ln p).$$

Ponieważ x_0, x oznaczają wysokości liczone od poziomu morza, p_0, p odpowiedne ciśnienia powietrza, przeto według tego wzoru można obliczyć wysokość góry, jeżeli się zna ilość stałą $\frac{1}{k}$ i ciśnienie barometryczne u podnóża i na wierzchołku góry.

Ponieważ $\ln p - \ln p_0 = \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = k(x_0 - x_1)$, przeto

$$\frac{p}{p_0} = e^{k(x_0 - x)} = e^{kx_0}\cdot\left(\frac{1}{e^k}\right)^x, \quad \text{a} \quad p = p_0 e^{kx_0}\cdot\left(\frac{1}{e^k}\right)^x.$$

Ilości p_0, e, k, x_0 są dodatnie, $e = 2{\cdot}718\ldots > 1$, zatem

$$e^k > 1, \quad \frac{1}{e^k} < 1.$$

Oznaczywszy: $p_0 e^{kx_0} = a$, $\frac{1}{e^k} = q$, otrzymamy

$$p = a\,.\,q^x.$$

Dla $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ wypada

$$p = a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$$

Postęp geometryczny: $a, aq, aq^2, \ldots$ jest malejący, bo $q < 1$.

Widzimy zatem, że ciśnienie powietrza maleje według postępu geometrycznego, gdy wysokość nad poziomem morza wzrasta według postępu arytmetycznego.

XXXIV.

Zastosowanie rachunku różniczkowego do rozwijania funkcyi na szeregi.

Zapomocą różniczkowania można zamienić funkcyę na szereg nieskończony kształtu

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

jak to poznamy na następnych przykładach.

1) Funkcyę e^x rozwinąć na szereg.

Niech będzie $e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots$; rozchodzi się o obliczenie współczynników $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Gdy $x = 0$, wypada: $e^0 = 1 = a_0$. Chcąc wyznaczyć inne współczynniki, różniczkujemy równanie

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots; \text{ otrzymamy}$$

$$e^x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + k a_k x^{k-1} + \ldots$$

Z porównania współczynników obu równań wypada

$$a_1 = a_0 = 1,$$
$$2a_2 = a_1,$$
$$3a_3 = a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$k a_k = a_{k-1}.$$

Mnożąc obie strony równań otrzymamy

$$a_k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k = 1, \text{ skąd wypada}$$

$$a_k = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = \frac{1}{k!}.$$

Zatem szukany szereg jest

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Według XII, 1) szereg ten jest zbieżny.

2) Rozwinąć na szereg $\cos x$ i $\sin x$.

Niech będzie

$$\cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_k x^k + \ldots,$$

$$\sin x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots + b_k x^k + \ldots$$

Dla $x = 0$ wypada: $\cos 0 = 1 = a_0$, $\sin 0 = 0 = b_0$.

Różniczkując powyższe równania, otrzymamy

$$\sin x = - a_1 - 2a_2 x - 3a_3 x^2 - 4a_4 x^3 - \ldots - k a_k x^{k-1} - \ldots,$$

$$\cos x = \quad b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + 4b_4 x^3 + \ldots + k b_k x^{k-1} + \ldots$$

Z porównania współczynników wynika

$$a_1 = - b_0 = 0, \quad b_1 = a_0 = 1,$$

$$k b_k = a_{k-1}, \quad b_k = \frac{a_{k-1}}{k},$$

$$(k+1) b_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = \frac{a_k}{k+1},$$

$$k a_k = - b_{k-1}, \quad a_k = - \frac{b_{k-1}}{k},$$

$$(k+1) a_{k+1} = - b_k, \quad a_{k+1} = - \frac{b_k}{k+1},$$

$$a_{k+1} = - \frac{a_{k-1}}{k(k+1)}, \quad b_{k+1} = - \frac{b_{k-1}}{k(k+1)}.$$

Z tych wzorów wypada, że: $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = a_{2k+1} = 0$, i również $b_2 = b_4 = b_6 = \ldots = b_{2k} = 0$, (ponieważ $b_0 = a_1 = 0$); to znaczy, że w rozwinięciu $\cos x$ znajdują się tylko potęgi parzyste a w rozwinięciu $\sin x$ tylko potęgi nieparzyste.

Podstawiając za k liczby: 1, 3, 5, ... $(2k - 1)$, otrzymamy

$$a_2 = -\frac{a_0}{1\,.\,2} = -\frac{1}{1\,.\,2},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{3\,.\,4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k-1)\,2k},$$

z czego wynika

$$a_{2k} = (-1)^k \,.\, \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2k-1)\,2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)\,!}\,.$$

Podobnież podstawiając za k liczby: 2, 4, 6. . . . $2k$, otrzymamy

$$b_3 = -\frac{b_1}{2\,.\,3} = -\frac{1}{2\,.\,3},$$

$$b_5 = -\frac{b_3}{4\,.\,5},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{2k+1} = -\frac{b_{2k-1}}{2k\,(2k+1)},$$

z czego wypada

$$b_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,.$$

Uwzględniwszy otrzymane wartości współczynników, mamy

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \ldots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} + \ldots$$

Według XII, 3) oba szeregi są zbieżne.

Podstawiając w ~~ostatnich równaniach~~ wzorze $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ zamiast x raz ix drugi raz $-ix$, gdzie $i^2 = -1$, otrzymamy

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \ldots,$$

$$e^{-ix} = 1 - \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \ldots.$$

Z tych równań łatwo wyprowadzić następujące

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\cos x,$$

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=\frac{ix}{1}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{ix^5}{5!}-\ldots=i\sin x,$$

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$$

XXXV.

Zastosowanie rachunku całkowego do rozwijania funkcyi na szeregi.

Rozwijając potęgi dwumianu według wzoru binomialnego i całkując otrzymane równania, możemy niektóre funkcye rozwinąć na szeregi, jak to poznamy na kilku przykładach.

Weźmy pod uwagę następujące szeregi powstałe z rozwinięcia zapomocą wzoru binomialnego:

$$1)\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^6+\ldots$$

$$+\frac{1\,.\,3\ldots(2k-3)(2k-1)}{2\,.\,4\ldots(2k-2)\,2k}x^{2k}+\ldots,$$

$$2)\ \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots+(-1)^k x^{2k}+\ldots,$$

$$3)\ \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots+(-1)^k x^k+\ldots,$$

zbieżne dla $-1<x<1$.

Całkując równanie 1), otrzymamy

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots$$

$$+\frac{1\,.\,3\ldots(2k-1)}{2\,.\,4\ldots2k}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\ldots;$$

Według XII, 2) ten szereg jest zbieżny dla $-1<x<1$.

Lecz $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ sin\ x$, zatem

$$arc\ sin\ x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Ilość stała całkowania odpada, bo dla $x = 0$ jest $arc\ sin\ x = 0$.

Całkując równanie 2) otrzymamy

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots;$$

według XII, 3) ten szereg jest zbieżny dla $-1 < x < 1$.

Lecz $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\ tg\ x$, przeto

$$arc\ tg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Ilość stała całkowania odpada, bo dla $x = 0$ jest $arc\ tg\ x = 0$.

Całkując równanie 3) otrzymamy

$$\int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \ldots;$$

według XII, 3) ten szereg jest zbieżny dla $0 < x < 1$.

Lecz $\int \frac{dx}{1+x} = \int \frac{d(1+x)}{1+x} = ln\,(1+x)$, zatem

$$ln\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots$$

Ilość stała całkowania odpada, bo dla $x = 0$ jest $ln\,(1+x) = 0$.

Ostatniego wzoru możnaby użyć do obliczenia logarytmów naturalnych liczb, lecz w stosownem przekształceniu n. p.

$$ln\,2 = ln\,(1{\cdot}5 + 0{\cdot}5) = ln\,1{\cdot}5\left(1 + \frac{0{\cdot}5}{1{\cdot}5}\right)$$

$$= ln\,1{\cdot}5 + ln\left(1 + \frac{1}{3}\right),$$

$$ln\,3 = ln\,(2+1) = ln\,2\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= ln\,2 + ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \text{ i t. p.}$$

XXXVI.

Obliczenie liczby π.

Wzorów:

$$1)\ arc\,tg\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$2)\ arc\,sin\,x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

można użyć do obliczenia liczby π, albowiem dla $x = 1$

$$arc\,tg\,1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

jest szeregiem zbieżnym według XII, 3), również dla $x = \frac{1}{2}$

$$arc\,sin\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

jest szeregiem zbieżnym według XII, 2).

Wzór: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

nie jest jednak dogodny do obliczenia, bo szereg w nim jest bardzo powoli zbieżny, wzór

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots$$

jest dogodniejszy. Wykonawszy rachunek do dziewięciu miejsc dziesiętnych otrzymamy

$$
\begin{array}{r}
\frac{\pi}{6} = 0{\cdot}500\ 000\ 000 \\
20\ 833\ 333 \\
2\ 343\ 750 \\
348\ 771 \\
59\ 339 \\
10\ 922 \\
2\ 117 \\
425 \\
88 \\
19 \\
4 \\
1 \\
\hline
0{\cdot}523\ 598\ 769,
\end{array}
$$

skąd wypada: $\pi = 3{\cdot}141\ 592\ 614$ z dokładnością do siedmiu miejsc dziesiętnych.

Alfabetyczny rejestr rzeczy.

Liczba oznacza stronicę. Skrócenia: „*p.* = patrz, *fn.* = funkcya, *cał.* = całka, *poch.* = pochodna, *róż.* = różniczka".

*) Ten termin przy nauce szkolnej jest niezbędny. Ocenienie bowiem, czy punkt jest najwyższy czy najniższy, pociągnęłoby za sobą wprowadzenie znaczenia drugiej pochodnej, a to znów powiększyłoby znacznie materyał nauki. Nazwa „*punkt zwrotu*" wydała mi się najodpowiedniejszą. Punkt podwójny o tej nazwie może mieć termin: „*punkt podwójny zwrotu*". Przyp. aut.

Wskazówki przy nauce:

a) w gimnazyach:

Przerobić: rozdział I, II, niektóre przykłady z roz. IV, rozdziały V — VII, X — XIII, z roz. XIV przykłady 1) 2), z roz. XV przykład 1) i część α) z przykł. 2), rozdziały XVII, XVIII, z rozdz. XIX przykłady 1), 2), 14), 15), rozdziały XXIII i XXIV, z rozdz. XXV przykłady 1) i 5), rozdziały XXVI — XXX, z rozdz. XXXI przykłady 1), 10), 11), z rozdz. XXXII przykłady 1), 2) z opuszczeniem ustępu ε), 3) — 7), z rozdz. XXXIII z przykładu 1) rzecz ogólną, przykład 2).

Wymieniony materyał naukowy jest zawarty na 55 stronicach rozprawy, lecz czas potrzebny do jego przerobienia wynosi zaledwie piątą część czasu potrzebnego do przerobienia całej rozprawy.

W miarę czasu możnaby przerobić: rozdziały XX, XXI, z rozdz. XXII przykłady 1), 3) — 5), z rozdz. XXXIII przykłady 3), 5), 6 α β), 9), co jest zawarte na 9 stronicach.

b) w szkołach realnych:

Przerabiać po porządku materyał całej rozprawy. W braku czasu można opuścić: niektóre przykłady z rozdziału IV, rozdziały VIII, IX, niektóre przykłady z rozdziałów XIV — XVI, XIX, XXII, XXV, XXXI -- XXXIII, rozdziały XXXIV — XXXVI; a mimo to część przerobiona stanowić będzie organiczną całość.

Omyłki.

Str. 1. wiersz 12. z góry zamiast „$0.\dot{3}\dot{7}$“ ma być „$0{\cdot}\dot{3}\dot{7}$“.

„ 1. „ 12. od dołu „ „ innymi “ „ „ „innemi“.

„ 3. „ 7. „ „ „ „$2\pi.$“ „ „ „2π“.

„ 6. „ 15. z góry „ „płaszczyznie“ „ „ „płaszczyźnie“.

„ 6. „ 13. od dołu „ $3x^2-8x+5$ „ „ x^2-3x+2.

„ 6. „ 1. i 7. „ „ „ „$\frac{1}{3}$“ „ „ „$\frac{2}{9}$“.

„ 7. „ 9. „ „ „ „$\frac{1}{5}$“ „ „ „$\frac{1}{4}$“.

„ 7. „ 7. „ „ „ „$-\frac{1}{5}$“ „ „ „$+\frac{1}{5}$“.

„ 10. „ 6. „ „ „ „CD“ „ „ „CG“.

„ 10. „ 6. „ „ „ „DC“ „ „ „DH“.

„ 11. „ 7. i 14. z góry po „miarę“ i „b“ „ „ przecinek.

„ 12. „ 6. od dołu ma być: „$F(k)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}$“

„ 15. „ 14. „ „ zamiast „w końcu“ ma być „wkońcu“.

„ 15. „ 4. „ „ „(fig. 6.)“ opuścić.

„ 16. „ 10. z góry zamiast „2“ ma być „1“.

„ 18. „ 8. „ ma być „$F(x, y)$“.

„ 20. „ 8. „ po „0“ ma być przecinek.

„ 20. „ 9. od dołu zamiast „$\delta=0.$“ ma być „$\delta=0$“.

„ 21. „ 3. „ „ „ „;“ „ „ „:“.

„ 22. „ 10. z góry „ „1 — 1“ „ „ „1 — q“.

„ 26. „ 2. „ „ „k^5“ „ „ „x^5“.

„ „ „ 4. „ „ „x^4“ „ „ „x^2“.

„ „ „ 8. od dołu „ „a^{k+1}“ „ „ „a_{k+1}“.

„ „ „ 5. „ „ „ „$>$“ „ „ „$<$“.

„ 29. „ 8. z góry ma być „$-1 < x < 1$“.

„ „ „ 10. „ „ „ „(XII, 1)“.

„ 30. „ 2. „ „ „ „$\left[a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]^n$“.

„ 33. „ 2. „ „ „ „$\sin(x+\delta)$“.

„ 37. „ 8. od dołu ma być znak „] “ przed znakiem „=“.

„ 38. „ 7. „ „ zamiast „$[da-bx]$“ ma być „$d[a-bx]$“.

Str. 39. wiersz 8. od dołu zamiast „innymi" ma być „innemi".

„ 41. „ 4. z góry „ „ε_1" „ „ „ε".

„ „ „ 13. „ ma być „$df(x) = f'(x)\, dx$".

„ 47. „ 10. z góry „ „ „$\Delta f(x) = \frac{\Delta x}{3 \sqrt[3]{x^2}}$".

„ „ „ 8. od dołu zamiast „1328" ma być „13·28".

„ 48. „ 12. z góry ma być „$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = x \cos \alpha$".

„ 50. „ 1. „ po „odciętych" wstawić „(z dodatnim kierunkiem)".

„ „ „ 5. od dołu i str. 51. w. 2. z góry zamiast „kształt" ma być „postać".

„ 58. „ 5. z góry ma być „Funkcya $x^2 - 3x + 2$".

„ „ „ 6. „ „ „ „$x=1\frac{1}{2}$," „$\frac{d}{dx}\left[x^2-3x+2\right]=2x-3$".

„ „ „ 8. „ „ „ „$\left[1\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$".

„ 62. „ 4. od dołu zamiast „mogliśmy" ma być „moglibyśmy".

„ 65. „ 14. „ „ przed „symbol" położyć „to".

„ „ „ 13. „ „ zamiast „ ; " ma być „ : ".

„ 67. „ 11. z góry ma być „$\frac{x^{n+1}}{n+1}$".

„ 68. „ 6. od dołu zamiast „$\int \sqrt{1-x^2}$" ma być „$\int \sqrt{1-x^2}\, dx$".

„ 70. „ 7. „ „ ma być „$\int F(x)\, dx$".

„ 71. „ 9. z góry zamiast „$\arcsin x$" ma być „$x \arcsin x$".

„ 77. „ 6. od dołu ma być „$\frac{\pi x}{3}\left(a^2 x^2 + 3ab\, x + 3b^2\right)$".

„ 78. „ 8. z góry „ „ „$\pi \left[r\,(b^2 - a^2) - \frac{1}{3}\,(b^3 - a^3)\right]$".

„ 81. „ 5. „ zamiast „$\frac{dt^2}{2}$" ma być „$\frac{at^2}{2}$".

„ „ „ 9. od dołu ma być „$\overline{CE}^2$".

„ 82. „ 7. z góry zamiast „$\frac{x^2}{y^2}$" ma być „$\frac{x^2}{r^2}$".

„ 90. „ 11. od dołu „ „2π" „ „ „2μ".

„ 91. „ 12. z góry „ „ϱ" „ „ „ϱ^2".

„ „ „ 4. od dołu „ „$d3\varphi^3$" „ „ „$d[3\varphi]$".

„ „ „ 3. „ „ „ „$\frac{\mu \pi \varrho^3}{2}$" „ „ „$\frac{\mu \pi \varrho^4}{2}$".

Str. 93.	wiersz 13.	z góry	zamiast	„AB,“	ma być	„AB“.
„ 96.	„ 1. i 2.	„	„	„$Cos\,\varrho$“	„ „	„$\cos\varphi$“.
„ „	„ 2.	„	„	„μ^2“	„ „	„u^2“.
„ „	„ 3.	„	ma być	„$\frac{\varrho \sin\varphi \, d\varphi}{u}$“.		
„ „	„ 6.	„	zamiast	„$\frac{du}{u}$“	ma być	„$\frac{du}{u^2}$“.
„ „	„ 10.	„	„	„$r+\pi$“	„ „	„$r+\varrho$“.
„ „	„ 5.	od dołu	„	„$d\varphi$“	„ „	„$d\varrho$“.
„ 100.	„ 10.	„ „	ma być	„$a_k = -\frac{b_{k-1}}{k}$“.		
„ 101.	„ 4.	„ „	zamiast	„w ostatnich równaniach“		
			ma być	„we wzorze: $e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$“		
„ 104.	„ 4.	z góry	zamiast	„$\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}$“	ma być	„$\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$“.

50,-