

POLITECHNIKA OPOLSKA  
WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI  
I INFORMATYKI

mgr inż. Marek Rydel

**Zredukowane hierarchiczne modele  
złożonych obiektów sterowania  
na przykładzie kotła energetycznego**

**ROZPRAWA DOKTORSKA**

promotor:  
**dr hab. inż. Włodzimierz Stanisławski, prof. PO**

OPOLE 2008

# SPIS TREŚCI

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ .....	4
<b>1. WSTĘP.....</b>	<b>6</b>
1.1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU.....	6
1.2. HIERARCHICZNA BUDOWA MODELI MATEMATYCZNYCH ZŁOŻONYCH OBIEKTÓW STEROWANIA .....	7
1.3. KLASY ZŁOŻONOŚCI MODELI.....	8
1.4. AGREGACJA MODELI .....	10
CEL, TEZA I ZAKRES PRACY .....	12
<b>2. MODELE MATEMATYCZNE KOTŁÓW PRZEPLYWOWYCH BLOKÓW ENERGETYCZNYCH JAKO OBIEKTÓW STEROWANIA.....</b>	<b>13</b>
2.1. BLOK ENERGETYCZNY.....	13
2.2. ANALIZA SYSTEMOWA I PODEJŚCIE HIERARCHICZNE DO MODELOWANIA KOTŁÓW ENERGETYCZNYCH.....	16
2.3. FORMALIZACJA OPISU STRUKTURY MODELU PAROWNIKA KOTŁA .....	17
2.4. MODELE MATEMATYCZNE PODSYSTEMÓW PAROWNIKA .....	21
2.4.1. Rury ekranowe.....	21
2.4.2. Separator .....	29
2.5. WERYFIKACJA MODELI PAROWNIKA .....	30
2.6. WNIOSKI .....	32
<b>3. REDUKCJA MODELI ZŁOŻONYCH OBIEKTÓW STEROWANIA.....</b>	<b>33</b>
3.1. WPROWADZENIE .....	33
3.2. METODY REDUKCJI OPARTE NA DEKOMPOZYCJI SVD .....	35
3.2.1. Algorytmy wyznaczania macierzy transformacji .....	37
3.2.2. <i>Balanced Truncation Approximation (BTA)</i> .....	42
3.2.3. <i>Singular Perturbation Approximation (SPA)</i> .....	43
3.2.4. <i>Metody wprowadzające wagi częstotliwościowe</i> .....	43
3.2.5. <i>Hankel Norm Approximation (HNA)</i> .....	50
3.3. METODY REDUKCJI OPARTE NA METODACH MOMENTÓW .....	51
3.3.1. <i>Asymptotic Waveform Evaluation (AWE)</i> .....	52
3.3.2. <i>Algorytmy Lanczosa oraz Arnoldiego</i> .....	53
3.3.3. <i>Wielopunktowe metody momentów</i> .....	57
3.3.4. <i>Fourier Model Reduction</i> .....	58
3.4. WNIOSKI .....	60
<b>4. ALGORYTMY DOBORU PARAMETRÓW METOD REDUKCJI.....</b>	<b>61</b>
4.1. MIARY BŁĘDU APROKSYMACJI MODELI ZREDUKOWANYCH.....	61
4.1.1. <i>Analiza wpływu kryterium optymalizacji na właściwości modelu zredukowanego</i> .....	63
4.1.2. <i>Wpływ liczby punktów aproksymacji na wartość miar błędów</i> .....	64
4.2. PARAMETRY METOD REDUKCJI.....	65
4.2.1. <i>Wpływ parametrów metody FW na wyniki redukcji</i> .....	67
4.2.2. <i>Wpływ parametrów metody FD na wyniki redukcji</i> .....	71
4.2.3. <i>Wpływ parametrów metody FMR na wyniki redukcji</i> .....	73
4.2.4. <i>Wpływ parametrów metody RK na wyniki redukcji</i> .....	74
4.2.5. <i>Algorytmy doboru parametrów dla metod redukcji</i> .....	77
4.3. ALGORYTMY EWOLUCYJNE .....	78
4.3.1. <i>Podstawowe operacje algorytmu ewolucyjnego</i> .....	79
4.3.2. <i>Strategie ewolucyjne</i> .....	82
4.4. WYZNACZANIE OPTIMALNYCH PARAMETRÓW METOD REDUKCJI Z WYKORZYSTANIEM AE .....	84
4.4.1. <i>Strategia ewolucyjna <math>1 + \lambda</math></i> .....	87
4.4.2. <i>Strategie ewolucyjne <math>\mu, \lambda</math> oraz <math>\mu + \lambda</math></i> .....	90
4.4.3. <i>Algorytm ewolucyjny o zmiennej liczebności populacji</i> .....	96
4.4.4. <i>Algorytm ewolucyjny z kosztowną funkcją celu</i> .....	97
4.5. WNIOSKI .....	100

<b>5.</b>	<b>REDUKCJA MODELI PODSYSTEMÓW KOTŁA ENERGETYCZNEGO .....</b>	<b>102</b>
5.1.	ZAKRESY ADEKWATNOŚCI MODELI PODSYSTEMÓW PAROWNIKA NA POSZCZEGÓLNYCH POZIOMACH HIERARCHII .....	102
5.2.	REDUKCJA MODELI PIERWSZEGO POZIOMU HIERARCHII .....	104
5.3.	REDUKCJA MODELI DRUGIEGO POZIOMU HIERARCHII .....	106
5.3.1.	<i>Wrażliwość właściwości dynamicznych modelu rur ekranowych na wariacje połączeń podsystemów .....</i>	<i>107</i>
5.3.2.	<i>Wpływ sprzężeń zwrotnych na stabilność hierarchicznego modelu zredukowanego rur ekranowych .....</i>	<i>109</i>
5.3.3.	<i>Wpływ błędów aproksymacji podsystemów na błędy aproksymacji modelu rur ekranowych parownika .....</i>	<i>114</i>
5.3.4.	<i>Redukcja hierarchicznego modelu rur ekranowych parownika .....</i>	<i>116</i>
5.3.5.	<i>Pozostałe podsystemu drugiego poziomu hierarchii .....</i>	<i>117</i>
5.4.	PAROWNIK KOTŁA ENERGETYCZNEGO BP-1150 .....	118
5.4.1.	<i>Redukcja hierarchicznego modelu parownika .....</i>	<i>121</i>
5.5.	PROJEKTOWANIE UKŁADU STEROWANIA PAROWNIKA NA PODSTAWIE MODELI ZREDUKOWANYCH ...	122
5.6.	WNIOSKI .....	124
<b>6.</b>	<b>PODSUMOWANIE .....</b>	<b>127</b>
	<b>LITERATURA .....</b>	<b>131</b>
<b>A.</b>	<b>DODATEK A .....</b>	<b>137</b>
<b>B.</b>	<b>DODATEK B .....</b>	<b>140</b>
B.1.	ALGORYTMY WYZNACZANIA MACIERZY TRANSFORMACJI .....	140
B.2.	BŁĘDY APROKSYMACJI ZREDUKOWANYCH MODELI STREFY DOGRZEWU RUR EKRAWOWYCH PAROWNIKA .....	148
B.3.	WPLYW PARAMETRÓW METODY FW NA WYNIKI REDUKCJI .....	153
<b>C.</b>	<b>DODATEK C .....</b>	<b>154</b>
C.1.	TABELE WYNIKÓW .....	154
C.2.	STRATEGIE EWOLUCYJNE $\mu$ , $\lambda$ ORAZ $\mu + \lambda$ - WYKRESY .....	169
<b>D.</b>	<b>DODATEK D .....</b>	<b>172</b>
D.1.	CHARAKTERYSTYKI AMPLITUDOWE, FAZOWE ORAZ BŁĘDY APROKSYMACJI MODELI POZIOMU PIERWSZEGO .....	172
D.2.	CHARAKTERYSTYKI AMPLITUDOWE, FAZOWE ORAZ BŁĘDY APROKSYMACJI MODELI POZIOMU DRUGIEGO .....	181
D.3.	CHARAKTERYSTYKI AMPLITUDOWE, FAZOWE ORAZ BŁĘDY APROKSYMACJI MODELU PAROWNIKA ..	186

## Wykaz ważniejszych oznaczeń

Wykaz oznaczeń dla modeli parownika:

Indeksy:	sep – separator; w – woda wpływająca do rur ekranowych; kond – kondensat; m – mieszalnik; f – filtr; pom – pompa cyrkulacyjna; S1 – schładzacz pary;
$h \left[ \frac{kJ}{kg} \right]$	- Entalpia czynnika roboczego odniesiona do jednostki masy czynnika roboczego
$M \left[ \frac{kg}{m^2 s} \right]$	- Przepływ masowy czynnika roboczego odniesiony do jednostki powierzchni przekroju i jednostki czasu
$h^* \left[ \frac{kJ}{kg} \right]$	- Entalpia czynnika roboczego odniesiona do jednostki masy czynnika roboczego przepływającego przez określony przekrój poprzeczny
$M^* \left[ \frac{kg}{s} \right]$	- Przepływ masowy czynnika roboczego odniesiony do jednostki czasu
$P [kPa]$	- Ciśnienie
$q \left[ \frac{kW}{m} \right]$	- Strumień cieplny odniesiony do jednostki długości rury
$q^{\sim} [-]$	- Względna wartość strumienia cieplnego
$\lambda \left[ \frac{kJ}{msK} \right]$	- Współczynnik przewodności cieplnej
$D, d [m]$	- Średnica zewnętrzna i wewnętrzna ścianki rury
$r [m]$	- Promień ścianki rury
$V \left[ \frac{m^3}{kg} \right]$	- Objętość właściwa czynnika roboczego
$v', v'' \left[ \frac{m^3}{kg} \right]$	- Objętość właściwa wrzącej wody i pary nasyconej suchej
$S = \frac{w_2}{w_1} [-]$	- Współczynnik poślizgu w przepływie dwufazowym
$\rho_{st} \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	- Gęstość stali
$c_{st} \left[ \frac{kJ}{kgK} \right]$	- Ciepło właściwe stali
$\Delta [m]$	- Grubość warstwy (elementu skończonego) dla ścianki rury i płaszcza separatora
$V [m^3]$	- Objętość separatora
$\Theta [K]$	- Temperatura ścianki rury
$v [K]$	- Temperatura czynnika roboczego
$\rho \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	- Gęstość czynnika roboczego
$q'_d \left[ \frac{kW}{m^3} \right]$	- Strumień cieplny dopływający do czynnika roboczego odniesiony do jednostki objętości czynnika roboczego
$g \left[ \frac{m}{s^2} \right]$	- Przyspieszenie ziemskie
$\beta [^\circ]$	- Kąt nachylenia rur ekranowych względem kierunku pionowego
$f \left[ \frac{1}{m} \right]$	- Współczynnik strat ciśnienia
$Q_w [K]$	- Temperatura wewnętrznej powierzchni ścianki rury



$\alpha \left[ \frac{kJ}{m^2 s K} \right]$	- Współczynnik przejmowania ciepła między ścianką rury a czynnikiem roboczym
$L [m]$	- Długość rur ekranowych parownika
$Z_l [m]$	- Położenie przekroju z wrzącą wodą
$w, w_2 \left[ \frac{m}{s} \right]$	- Prędkość przepływu czynnika roboczego / pary
$h', h'' \left[ \frac{kJ}{kg} \right]$	- Entalpia wrzącej wody i pary nasyconej suchej
$h_{21} \left[ \frac{kJ}{kg} \right]$	- Ciepło parowania
$c [-]$	- Stopień suchości mieszaniny parowo-wodnej

Wykaz oznaczeń dla redukcji modeli:

<b>A, B, C, D</b>	- Opis modelu pierwotnego w przestrzeni stanu
<b>A<sub>r</sub>, B<sub>r</sub>, C<sub>r</sub>, D<sub>r</sub></b>	- Opis modelu zredukowanego w przestrzeni stanu
$p, m$	- Liczba wejść / wyjść modelu
$n, k$	- Liczba zmiennych stanu modelu pierwotnego / zredukowanego
<b>P, Q</b>	- Gramian sterowalności / obserwowalności
<b>S, R</b>	- Dekompozycja Choleskiego gramianu sterowalności / obserwowalności
<b>T, L</b>	- Macierze transformacji
$\sigma_i$	- $i$ -ta wartość szczególna Hankela
<b>W<sub>i</sub>, W<sub>o</sub></b>	- Wejściowa / wyjściowa funkcja wagowa dla metody <b>FW</b>
$n_f, \omega_f$	- Rząd oraz częstotliwość graniczna filtra dolnoprzepustowego (funkcja wagowa dla metody <b>FW</b> )
$\omega_1, \omega_2$	- Częstotliwości graniczne dla metody <b>FD</b>
$m_F, \omega_0$	- Liczba dyskretno czasowych współczynników Fouriera / parametr transformacji biliniowej dla metody <b>FMR</b>
$J, s_j, I_j$	- Liczba punktów interpolacji / wartość $j$ -tego punktu interpolacji / liczba momentów przypadających na $j$ -ty punkt interpolacji dla metody <b>RK</b>

Wykaz oznaczeń dla algorytmów ewolucyjnych:

$\mu, \lambda$	- liczebność populacji bazowej / potomnej
$\sigma$	- standardowe odchylenie mutacji (zasięg mutacji)
$\sigma_{pocz}^{n_f}, \sigma_{pocz}^{\omega_f}$	- początkowy zasięg operatora mutacji dla chromosomu określającego rząd / częstotliwość graniczną filtra dolnoprzepustowego
$\sigma_{min}^{n_f}, \sigma_{min}^{\omega_f}$	- minimalny (kryterium zatrzymania algorytmu) zasięg operatora mutacji dla chromosomu określającego rząd / częstotliwość graniczną filtra
$C$	- stała służąca do sterowania naciskiem selektywnym ( $C=0$ – duży nacisk selektywny, $C=1$ – mały nacisk selektywny)
$M$	- maksymalny koszt AE (określony przez maksymalną liczbę wykonanych operacji wyznaczenia przystosowania osobników)
$M_{bp}$	- minimalna szybkość poprawy uzyskanego wyniku (określona przez maksymalną liczbę wykonanych operacji wyznaczenia przystosowania bez poprawy najlepszego uzyskanego wyniku)
$M_{min}$	- minimalny koszt AE – kryterium zapobiegające przedwczesnemu zakończeniu algorytmu

# 1. WSTĘP

---

## 1.1. Sformułowanie problemu

Dla celów sterowania systemami niezbędna jest znajomość ich modeli matematycznych, które są adekwatne w zadanym przedziale amplitud i częstotliwości sygnałów. Modele matematyczne mogą być tworzone poprzez modelowanie zjawisk zachodzących w obiekcie oraz na podstawie identyfikacji. W pierwszym przypadku model otrzymywany jest w oparciu o opis matematyczny procesów np. fizykochemicznych zachodzących w rzeczywistym obiekcie. Identyfikacja polega natomiast na wyznaczeniu matematycznego modelu w oparciu o znajomość sygnałów uzyskanych z obiektu (danych eksperymentalnych).

Od wielu lat mamy do czynienia z bardzo intensywnym wzrostem mocy obliczeniowych komputerów oraz rozwojem oprogramowania służącego do modelowania i symulacji złożonych obiektów sterowania. Ograniczona moc obliczeniowa oraz pojemność pamięci komputerów powodują, że praktyka modelowania polega na upraszczaniu opisu zjawisk zachodzących w modelowanych obiektach sterowania. Odbywa się to poprzez przyjmowanie założeń upraszczających (np.: równowaga termodynamiczna czynnika roboczego, jednorodny rozkład temperatury itp.) oraz pomijaniu zjawisk mających niewielki wpływ na właściwości obiektu sterowania w zadanym zakresie adekwatności. Na skutek rosnących możliwości obliczeniowych komputerów liczba nakładanych założeń upraszczających stale się zmniejsza, co powoduje coraz większą złożoność otrzymywanych modeli.

Szczególnie istotny wpływ na wzrost złożoności modeli ma rozwój programów do modelowania układów o czasoprzestrzennej dynamice z zastosowaniem metody elementów skończonych. Programy takie automatycznie generują tysiące elementów skończonych, a uzyskane modele matematyczne zawierają tysiące zmiennych stanu [Ant01, CD02, WM03, WM05, Her05, IRS08]. Tak wysoka złożoność modelu matematycznego pociąga za sobą długie czasy symulacji komputerowej, znaczne zapotrzebowanie mocy obliczeniowej procesorów oraz problemy numeryczne występujące szczególnie dla modeli o dużej sztywności.

Łatwość uzyskiwania złożonych modeli opisujących właściwości obiektów sterowania pociąga za sobą konieczność zastosowania wielopoziomowej (hierarchicznej) struktury oraz dekompozycję na szereg prostszych do zamodelowania podsystemów. Istotą tak skonstruowanego modelu jest fakt, że jedynie podsystemy najniższego (zerowego) poziomu opisywane są zestawem równań różniczkowych oraz algebraicznych. Na wszystkich wyższych poziomach model zawiera podsystemy należące do poziomu niższego wraz z określoną topologią powiązań między nimi.

Programy symulacyjne (np.: MATLAB/*Simulink*) udostępniają technologię budowy modeli hierarchicznych poprzez mechaniczne łączenie podsystemów o ukierunkowanym działaniu. Należy jednak zwrócić uwagę, że hierarchiczna budowa modeli w środowiskach obliczeniowych związana jest wyłącznie z funkcjonowaniem edytora graficznego (operacje zagnieżdżenia oraz maskowania modeli podsystemów). W pamięci komputera model przechowywany jest jednak w postaci jednopoziomowej, jako układ równań różniczkowych zwyczajnych oraz algebraicznych. Taki model matematyczny jest bardzo złożony i trudny do analizy ze względu na wysoki rząd. Z tego względu wyciągnięcie jakichkolwiek wniosków o właściwościach obiektu jest praktycznie niemożliwe.

Wielowarstwowa konstrukcja modelu wraz z dekompozycją modeli na poszczególnych poziomach hierarchicznej struktury daje możliwość analizy przez zastosowanie procedury

agregacji. Agregacja jest przeciwieństwem dekompozycji. Jest to proces komponowania funkcjonalnej całości z podsystemów składowych. Jednym z zasadniczych jej środków jest redukcja modelu na poszczególnych poziomach hierarchicznej struktury. Podejście takie umożliwia stworzenie *zredukowanego modelu hierarchicznego*, zawierającego zbiór modeli na każdym z poziomów hierarchii charakteryzujących się różnymi zakresami adekwatności oraz dokładnością aproksymacji właściwości obiektu sterowania.

Podczas redukcji, model pierwotny jest aproksymowany przez model niższego rzędu, który zapewnia wymaganą dokładność aproksymacji. Operacja redukcji pozwala na wyeliminowanie złożonych zjawisk i procesów dynamicznych nie mających istotnego znaczenia na danym poziomie hierarchii. Model zredukowany nie uwzględnia zatem części zjawisk mających miejsce w obiekcie rzeczywistym. Charakteryzuje się on ograniczonym zakresem adekwatności, który dla modeli liniowych określa się przez przedział częstotliwości w którym aproksymuje właściwości obiektu zadaną dokładnością. Dolnym przedziałem zakresu adekwatności modelu dla obiektów sterowania jest częstotliwość zerowa, co zapewnia zgodność modelu zredukowanego z modelem pierwotnym dla stanu ustalonego.

Modele matematyczne zredukowanego rzędu, adekwatne w ograniczonym przedziale częstotliwości są niezbędne ze względu na:

- skrócenie czasu symulacji komputerowej,
- umożliwienie zastosowania modeli w systemach sterowania w czasie rzeczywistym,
- zastosowanie do projektowania układów sterowania.

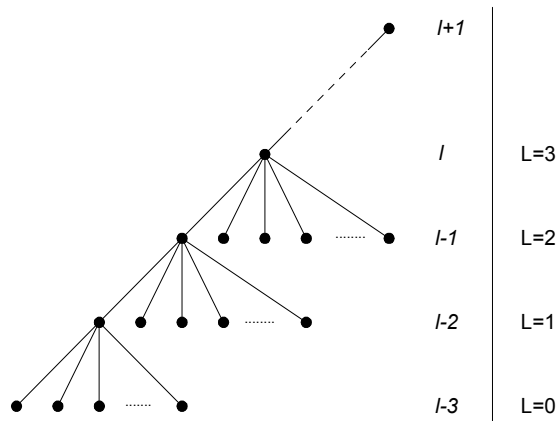
Redukcja modelu nie jest operacją jednoznaczną. Dlatego też istnieje cały szereg technik pozwalających na przeprowadzenie redukcji modelu złożonego [Moo81, Glo84, Enn84, LA89, GJ90, PR90, FNG92, FF95, Gri97, OA01, WM03, Ant05, GA06]. Dla modeli obiektów sterowania, które charakteryzują się określonym zakresem adekwatności szczególnie użyteczne są metody redukcji umożliwiające minimalizację błędu aproksymacji w zadanym przedziale częstotliwości. Odbywa się to poprzez wprowadzenie częstotliwościowych funkcji wagowych (dla metod bazujących na dekompozycji SVD) lub określenia punktów wokół których następuje rozwinięcie transmitancji w szereg Laurenta (dla metod momentów).

Poważny problemem praktyczny stanowi wybór algorytmu doboru optymalnych parametrów dla metod redukcji, ze względu na występowanie znacznej liczby minimów lokalnych błędu aproksymacji oraz czasochłonności operacji redukcji modeli matematycznych, zawierających znaczną liczbę zmiennych stanu [SRZ04, SR06, IRS08].

## 1.2. Hierarchiczna budowa modeli matematycznych złożonych obiektów sterowania

Dekompozycja modelu systemu na szereg prostszych podsystemów jest szeroko stosowaną metodą modelowania złożonych obiektów i układów sterowania. Procedura dekompozycji wykonywana jest tak długo, aż będzie możliwe i celowe wyznaczenie modeli podsystemów najniższego (zerowego) poziomu. Na rys. 1.1 przedstawiono graf, ilustrujący schemat dekompozycji modelu złożonego obiektu sterowania (wielką literą  $L$  oznaczono bezwzględną numerację poziomów modelu, natomiast małą literą  $l$  – względną). W przypadku modelowania analitycznego modele podsystemów zerowego poziomu opisywane są układami równań różniczkowych (różnicowych) i algebraicznych (w przypadku modelowania w sposób analityczny), natomiast dla identyfikacji modelami typu WE/WY.

Z reguły procedura dekompozycji nie jest złożona. Programy symulacyjne (np.: MATLAB/*Simulink*) udostępniają technologię budowy modeli hierarchicznych poprzez mechaniczne łączenie podsystemów o ukierunkowanym działaniu.



Rys. 1.1. Struktura połączeń modeli podsystemów złożonego obiektu sterowania

Istotą tak skonstruowanego modelu jest fakt, że jedynie podsystemy zerowego poziomu opisywane są zestawem równań różniczkowych oraz algebraicznych. Na wszystkich wyższych poziomach model zawiera podsystemy należące do poziomu niższego, z określoną strukturą powiązań między nimi. Na tej podstawie model na  $l$ -tym poziomie może być przedstawiony jako zbiór podsystemów poziomu  $l-1$  oraz zestawu połączeń między tymi podsystemami (nie mogą w tym opisie wystąpić podsystemy innych poziomów):

$$S_l = \langle S_{l-1}^i, P_l \rangle \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n_l \quad (1.1)$$

gdzie:  $n_l$  - liczba podsystemów na  $l$ -tym poziomie hierarchii,  $P_l$  - zbiór powiązań między podsystemami na poziomie  $l$ .

Poszczególne podsystemy na poziomie  $l-1$  ( $S_{l-1}^i$ ) są układami o ukierunkowanym działaniu [KIA96], posiadającymi wektor wielkości wejściowych  $\mathbf{U}_{l-1}^i = [u_{l-1}^{i,1}, u_{l-1}^{i,2}, \dots, u_{l-1}^{i,m}]$ , wektor wielkości wyjściowych  $\mathbf{Y}_{l-1}^i = [y_{l-1}^{i,1}, y_{l-1}^{i,2}, \dots, y_{l-1}^{i,p}]$  oraz wektor stanu  $\mathbf{X}_{l-1}^i = [x_{l-1}^{i,1}, x_{l-1}^{i,2}, \dots, x_{l-1}^{i,n}]$ . Każdy z podsystemów opisany jest operatorami przejść i wyjść  $\mathbf{H}_{l-1}^i, \mathbf{G}_{l-1}^i$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{l-1}^i &= \mathbf{H}_{l-1}^i(\mathbf{U}_{l-1}^i) \\ \mathbf{Y}_{l-1}^i &= \mathbf{G}_{l-1}^i(\mathbf{U}_{l-1}^i, \mathbf{X}_{l-1}^i) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Połączenia poszczególnych podsystemów na poziomie  $l$  można opisywać różnymi metodami, a w szczególności:

- schemat blokowy (graficzna metoda prezentacji struktury modelu na poziomie  $l$ ),
- lista wielkości wyjściowych i wejściowych poszczególnych podsystemów,
- zero-jedynkowa macierz połączeń.

### 1.3. Klasy złożoności modeli

Kluczowe z punktu widzenia pracy jest określenie, co rozumie się pod pojęciem modelu złożonego. Należy podkreślić, że pojęcie złożoności modeli matematycznych nie jest jednoznaczne. Związane jest ono z przyjętą metodologią badań, poziomem rozwoju metod analitycznych i obliczeniowych oraz technologii komputerowych. Z tego powodu ocena złożoności może być wyłącznie względna, posiada charakter ekspertowy oraz jest poddana czasowym modyfikacjom.

Można wyróżnić *jakościową* oraz *ilościową* złożoność modeli matematycznych. Złożoność *jakościowa* modelu określa poziom złożoności klasy modelu. Pod pojęciem złożoności *ilościowej* należy rozumieć rząd odpowiadającego równania różniczkowego/różnicowego.

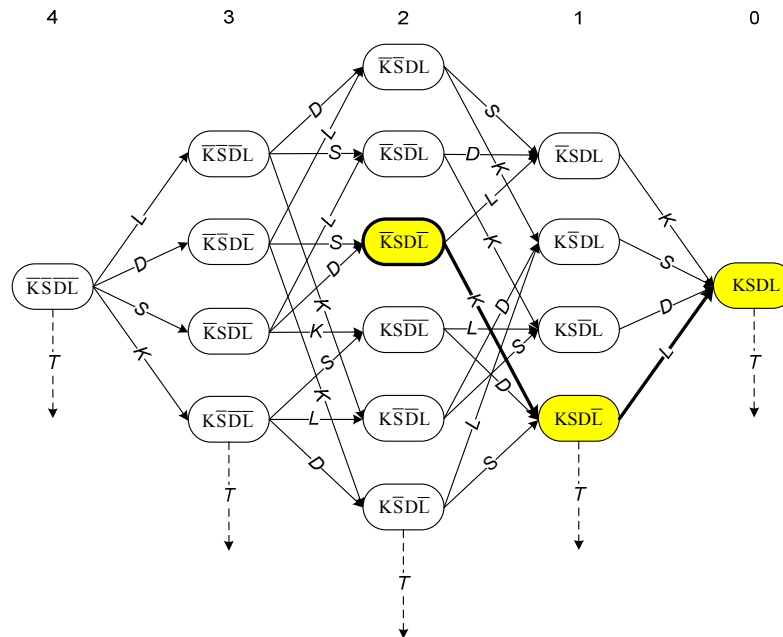
Jakościową złożoność modeli określa się zmiennymi logicznymi (klasą złożoności), natomiast ilościową złożoność – liczbami całkowitymi (liczbą zmiennych stanu) [IRS08].

W celu systematyzacji klas złożoności modeli przyjęto następujące oznaczenia dla cech modeli:

$K$ – skończeniowość,	$\bar{K}$ – nieskończeniowość,
$S$ – stacjonarność,	$\bar{S}$ – niestacjonarność,
$D$ – deterministyczność,	$\bar{D}$ – stochastyczność,
$L$ – liniowość.	$\bar{L}$ – nieliniowość.

Przedstawione cztery cechy modeli są niezależne oraz bialternatywne. Na tej podstawie można stwierdzić, że istnieje  $2^4$  klas modeli z czasem ciągłym oraz tyle samo z czasem dyskretnym.

Jakościowy poziom złożoności modeli można powiązać z liczbą negacji cech – im większa liczba negacji w oznaczeniu klasy, tym wyższy poziom złożoności modelu. Najprostsza jest klasa 0-poziomu  $KSDL$  – klasa modeli skończeniowych, stacjonarnych, deterministycznych, liniowych typu LTI. Najwyższy poziom złożoności stanowią modele klasy  $\bar{K}\bar{S}\bar{D}\bar{L}$  w postaci cząstkowych nieliniowych równań różniczkowych/różnicowych ze zmiennymi przypadkowo współczynnikami. Na rys. 1.2 przedstawiono graf zorientowany, którego wierzchołki reprezentują poszczególne klasy modeli.



Rys. 1.2. Graf redukcji klasy złożoności modeli (zaznaczono operacje redukcji klasy złożoności dla modeli podsystemów parownika)

Redukcja jakościowej złożoności modeli oznacza zdejmowanie negacji w oznaczeniach klas. Operacje te oznaczono literami:  $K$  – dyskretyzacja zmiennej przestrzennej – przejście do modelu o parametrach skupionych;  $S$  – „stacjonaryzacja” – „zamrożenie” współczynników na określonych interwałach czasu;  $D$  – zamiana przypadkowych współczynników przez ich średnie wartości;  $L$  – linearyzacja. Na rys. 1.2 liniami punktowymi zaznaczono możliwe łuki grafu, odpowiadające dyskretyzacji czasu – przejście do równań różnicowych (operację tą zaznaczono literą  $T$ ). Dla modeli z czasem dyskretnym graf redukcji jest analogiczny do grafu modeli z czasem ciągłym.

Modelowanie związane jest z przyjęciem szeregu założeń upraszczających. W wyniku tego modele wyjściowe nie zawsze posiadają najwyższą klasę złożoności. Modele parownika przepływowego z czasem ciągłym, przedstawione w pracach [Sta01, Sta03], posiadają drugi stopień złożoności i odnoszą się do klasy  $\bar{K}\bar{S}\bar{D}\bar{L}$  – nieliniowe równania różniczkowe cząst-

kowe o stałych współczynnikach. Redukcję klasy modeli podsystemów parownika przepływowego przeprowadzono w wyniku operacji (operacje redukcji klasy modelu zaznaczono na rys. 1.2):

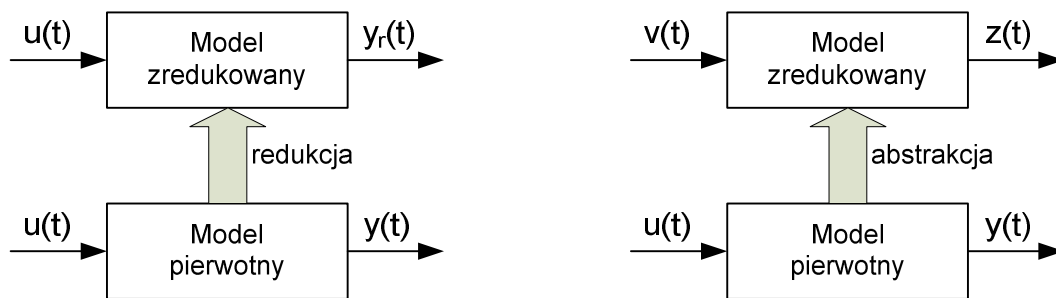
- dyskretyzacji zmiennej przestrzennej (uzyskano model klasy  $KSDL$ ),
- linearyzacji modelu (uzyskano model klasy  $KSDL$ ).

## 1.4. Agregacja modeli

Pod pojęciem agregacji rozumie się wnioskowanie o właściwościach modelu na danym poziomie hierarchii, na podstawie modeli podsystemów poziomu bezpośrednio niższego oraz topologii połączeń pomiędzy nimi (poszczególne podsystemy opisane są blokami o ukierunkowanym działaniu). Modele podsystemów wyższych poziomów hierarchii są modelami zagregowanymi, które reprezentują istotne dla danego poziomu właściwości modelu.

Agregację modelu można przeprowadzać na dwa sposoby, stosując redukcję lub abstrakcję modeli na poszczególnych poziomach hierarchii [SR05a]. Tak przy zastosowaniu jednej jak i drugiej procedury, na danym poziomie hierarchii uzyskuje się model o uproszczonej strukturze w stosunku do modelu uzyskanego na podstawie połączenia modeli podsystemów niższego poziomu.

W wyniku redukcji, w modelu zredukowanym zbiór zmiennych wejściowych pozostaje niezmienny w stosunku do modelu pierwotnego. Zmianie ulegają współrzędne stanu tak, aby z założoną dokładnością aproksymować zmienne wyjściowe modelu pierwotnego (rys. 1.3). W wyniku, abstrakcji konstruowany jest model o niższym rzędzie, charakteryzujący się innymi wielkościami wejściowymi, wyjściowymi oraz współrzędnymi wektora stanu. Celem abstrakcji jest wyznaczenie takiego przekształcenia wektora stanu  $x$  w wektor  $g = Px$ , aby nowy model (nazywany abstrakcją) posiadał określone właściwości wtedy i tylko wtedy, gdy model pierwotny posiada określone właściwości. Określa się to mianem propagacji danej właściwości od makro-modelu (abstrakcji) do mikro-modelu (modelu pierwotnego) [Pap00] (rys. 1.3).



Rys. 1.3. Idea redukcji i abstrakcji modelu

Zadanie redukcji modelu liniowego może być przedstawione następująco: na podstawie stabilnego (lub niestabilnego) modelu rzędu  $n$ , przedstawionego w przestrzeni stanu (1.3), należy wyznaczyć model zredukowany rzędu  $k$  (1.4), gdzie  $k < n$ , taki aby określona norma błędu aproksymacji  $\|y(t) - y_r(t)\|$  przyjmowała wartość minimalną. Schemat poglądowy redukcji przedstawiony został na rys. 1.4.

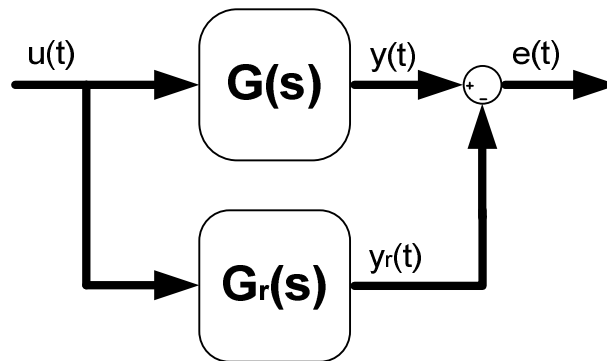
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.3)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t) \quad (1.4)$$

$$y_r(t) = C_r x_r(t) + D_r u(t)$$

gdzie:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_r \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^{k \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $C_r \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $D_r \in \mathbb{R}^{m \times p}$ .



Rys. 1.4. Idea redukcji modelu

Wektor stanu modelu zredukowanego  $x_r$  jest związany z wektorem stanu modelu pierwotnego  $x$  nieosobliwym przekształceniem  $x_r = T x$ , gdzie macierz  $T$  jest określana mianem macierzy transformacji. W literaturze można znaleźć wiele algorytmów wyznaczania tej macierzy [Moo81, PS82, Glo84, LHP87, SC89, Var91a, Var93, Pen98, WSL99, LWW99, LW99, HY00, BQQ00, Var00, OA01, VA01, WP02, ASG03, Ant05, Gug05, UDE07]. W podrozdziale 3.2.1 przedstawiono i porównano wybrane algorytmy.

Istnieje cały szereg metod pozwalających na przeprowadzenie redukcji modelu złożonego. Dla modeli o złożoności mniejszej niż  $10^4$  zmiennych stanu największą dokładnością aproksymacji (zapewniającą zachowanie stabilności modelu zredukowanego) charakteryzuje się grupa metod oparta na dekompozycji SVD [GA00].

W przeciwieństwie do redukcji, abstrakcja nie aproksymuje właściwości modelu pierwotnego (złożonego) jego przybliżeniem o niższym rzędzie. Jej celem jest wyznaczenie nowego modelu o właściwościach jakie posiada model pierwotny. Z punktu widzenia teorii sterowania interesującymi właściwościami są między innymi: sterowalność, obserwowalność, stabilność.

Dla określenia sterowalności modelu wyznaczono warunki, przy których sterowalność modelu będącego abstrakcją implikuje sterowalność modelu pierwotnego [Pap00]. Dokonując abstrakcji modelu o dużej złożoności, możliwe jest określenie sterowalności modelu złożonego na podstawie określenia sterowalności jego abstrakcji. Procedura abstrakcji może być przeprowadzana iteracyjnie, co daje możliwość analizy sterowalności modeli o bardzo dużej złożoności.

## **Cel, teza i zakres pracy**

Celem pracy jest:

- opracowanie metod, algorytmów i programów redukcji modeli złożonych obiektów sterowania,
- opracowanie hierarchicznie zorganizowanej rodziny modeli podsystemów kotła energetycznego BP-1150 jako obiektu sterowania.

Aby osiągnąć postawiony cel pracy należy rozwiązać następujące zadania:

1. Opracowanie metod i algorytmów redukcji liniowych modeli złożonych obiektów sterowania,
2. Opracowanie algorytmów i programów adaptacji parametrów modeli zredukowanych w oparciu o algorytmy ewolucyjne,
3. Ocena metod i algorytmów redukcji oraz algorytmów ewolucyjnych dla celów redukcji modeli podsystemów kotła energetycznego,
4. Opracowanie zredukowanych, hierarchicznych modeli podsystemów kotła energetycznego dla bloku o mocy 360 MW Elektrowni Opole S.A.
5. Weryfikacja modeli zredukowanych podsystemów kotła energetycznego bloku o mocy 360 MW Elektrowni Opole S.A.,
6. Opracowanie biblioteki programów dla celów redukcji liniowych modeli złożonych obiektów sterowania.

Wobec tego teza pracy może zostać sformułowana następująco:

**Zastosowanie procedury redukcji z wykorzystaniem odpowiednich algorytmów i programów komputerowych jest efektywną metodą opracowania hierarchicznych modeli złożonych obiektów sterowania. Otrzymane w ten sposób modele matematyczne mogą służyć do analizy właściwości dynamicznych złożonego obiektu sterowania na poszczególnych poziomach hierarchii, a także do projektowania układów sterowania.**



## 2. MODELE MATEMATYCZNE KOTŁÓW PRZEPLYWOWYCH BLOKÓW ENERGETYCZNYCH JAKO OBIEKTÓW STEROWANIA

---

### 2.1. Blok energetyczny

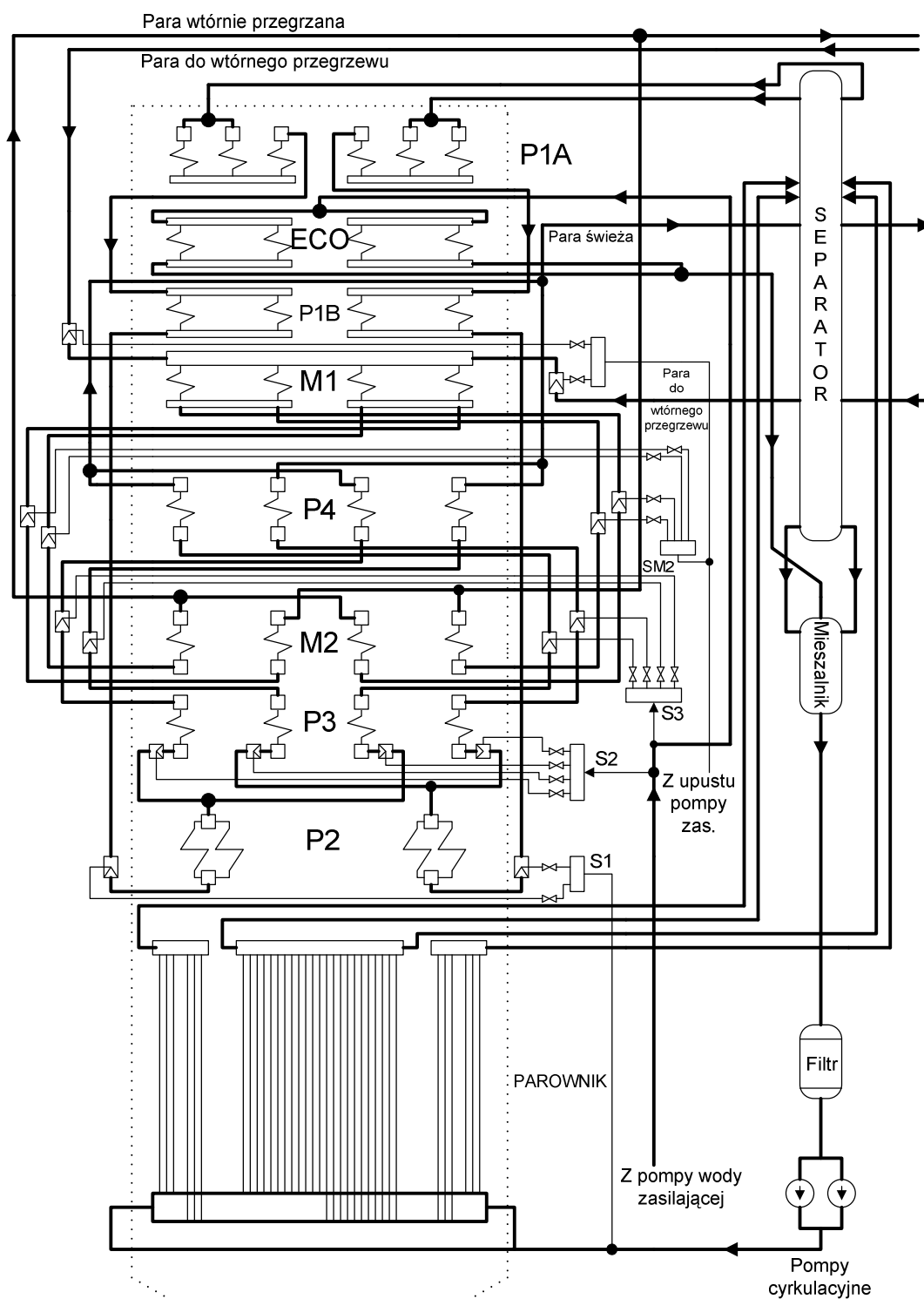
Kotły BB-1150 oraz BP-1150 wchodzące w skład bloków energetycznych o mocy 360 MW są kotłami przepływowymi opartymi na konstrukcji firmy *SULZER*, ze stałym punktem końcowym strefy odparowania. Separacja wody od pary na wylocie z parownika odbywa się w pionowym wodooddzielaczu. Kotły przystosowane są do pracy w układzie blokowym z turbiną parową o mocy znamionowej 360 MW. W zakresie obciążeń 30 – 85 % blok pracuje przy ciśnieniu poślizgowym, natomiast dla obciążeń większych od 85 % praca bloku odbywa się przy stałym ciśnieniu. Kotły BB-1150 oraz BP-1150 są kotłami jednociagowymi o wysokości ok. 100 m. Usytuowanie poszczególnych urządzeń w kotle, ze szczególnym uwzględnieniem wymienników ciepła przedstawiono na rys. 2.1.

Kocioł BP-1150 opalany jest węglem kamiennym, który po zmieleniu w młynach misowo-rolkowych wdmuchiwany jest w postaci pyłu do komory paleniskowej przez dysze czterech narożnikowych palników pyłowych. Powietrze do spalania dostarczane jest przez jeden wentylator powietrza pierwotnego oraz dwa wentylatory powietrza wtórnego. Powietrze pierwotne, przeznaczone do suszenia i transportu pyłu węglowego jest podgrzewane do temperatury ok. 350 °C w obrotowym podgrzewaczu powietrza młynowego oraz wdmuchiwane do młynów przez wentylatory młynowe. Powietrze wtórne, podgrzewane w dwóch obrotowych podgrzewaczach powietrza, dostarczane jest wprost do komory paleniskowej kotła.

Komora paleniskowa, usytuowany nad nią kanał konwekcyjny oraz strop wykonane są ze ścian membranowych szczelnie spawanych. Przekrój komory paleniskowej wynosi 14.3 × 15.7 m.

Podstawowe dane techniczne kotła BP-1150 są następujące [dok\_tech]:

- wydajność maksymalna trwała 1150 [ton/godz] ≈ 320 [kg/sek]
- wydajność cieplna 750 [Gcal/godz] ≈ 873 [MW]
- ciśnienie pary na wylocie z przegrzewacza pierwotnego 18.3 [MPa]
- temperatura pary przegrzanej 540 ±5 [°C]
- temperatura wody zasilającej 255 [°C]
- ciśnienie w separatorze 20.3 [MPa]
- ciśnienie pary wtórnie przegrzanej 4.5/4.3 [MPa]
- temperatura pary wtórnie przegrzanej 335/540 ±5 [°C]



Rys. 2.1. Uproszczony schemat technologiczny kotła BP-1150 w przekroju

Oznaczenia na rys. 2.1 są następujące:

- P1A – wewnętrzne rury wieszakowe,
- P1B – przegrzewacz konwekcyjny wysokiego ciśnienia;  
temp. pary - 367/388 °C; temp.spalin - 600/455 °C,
- P2 – przegrzewacz naścienny opromieniowany;  
temp. pary - 378/414 °C,
- P3 – przegrzewacz grodziowy;  
temp. pary - 414/500 °C; temp. spalin - 1200/1000 °C,

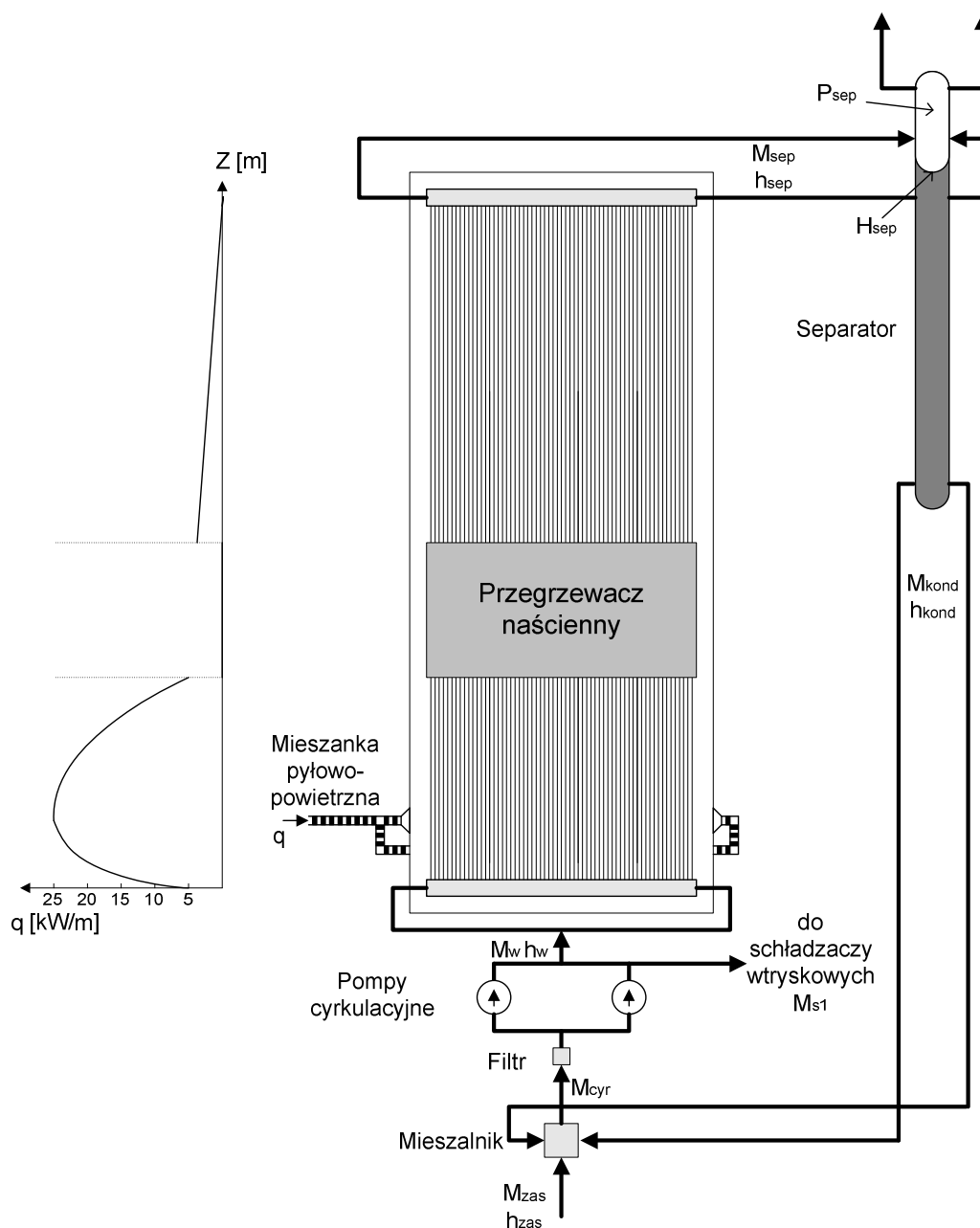
- P4 – przegrzewacz końcowy pary świeżej;  
temp. pary - 480/540 °C; temp. spalin - 900/780 °C,
- M1 – przegrzewacz początkowy niskiego ciśnienia (wtórny);  
temp. pary - 335/463 °C; temp. spalin - 780/600 °C,
- M2 – przegrzewacz końcowy niskiego ciśnienia (wtórny);  
temp. pary - 463/540 °C; temp. spalin - 1000/900 °C,
- ECO – podgrzewacz wody;  
temp. wody - 255/285 °C; temp. spalin - 455/342 °C.

W skład parownika kotła BP-1150 wchodzi: pionowe rury ekranowe parownika stanowiące ekran komory paleniskowej, separator, mieszalnik, filtr, pompa cyrkulacyjna oraz rurociągi łączące (rys. 2.2). Cały ekran komory paleniskowej jest podzielony na cztery szczelnie spawane ściany. Szczelność ścian uzyskano przez połączenie sąsiednich rur ekranowych wspawaną płetwą (dodatek rys. A.1). Ekran komory paleniskowej został podzielony na sekcje w celu właściwego doboru przepływu czynnika roboczego. Każda sekcja zasilana jest z kolektora pierścieniowego przez rury łączące. W poszczególnych rurach łączących określono właściwy przepływ czynnika poprzez wspawanie kryz dławiących. Strukturę ekranu komory paleniskowej przedstawiono w dodatku na rys. A.2. Ponadto każda rura ekranu komory paleniskowej jest kryzowana w celu uniknięcia oscylacji przepływu dwufazowego w równoległych rurach parownika (ang. parallel flow oscillations) [AAI77].

Do poziomu 51.4 m. ekrany parownika wykonane są z rur  $\Phi$  30\*5 o podziałce 44.5 mm. Na ścianach bocznych liczba rur równoległych wynosi  $320 \times 2 = 640$  szt., natomiast na ścianie przedniej i tylnej  $352 \times 2 = 704$  szt. W pasie najwyższych obciążeń cieplnych (od poziomu 23.1 m. do 36.2 m.) ekrany wykonane są ze stali 15 HM ze względu na możliwość wystąpienia odparowania filmowego. Na poziomie 51.4 m. na wszystkich ścianach ekranowych wykonane są trójniki. Powyżej linii trójnikowania ściany kotła wykonane są z rur  $\Phi$  44.5\*5 o podziałce 89 mm. Na rys. 2.2 przedstawiono przybliżony rozkład strumienia ciepłego wzdłuż rur parownika dla sekcji umieszczonych w środkowej części ścian ekranu. Maksymalny strumień ciepły występuje w pasie palników pyłowych i przy maksymalnym obciążeniu wynosi ok. 25 [kW/m] (w odniesieniu do 1 m. pojedynczej rury). Między poziomem 36.5 m. a 47.3 m. rury ekranowe parownika są przykryte przegrzewaczem naściennym, co powoduje że w pasie tym strumień ciepły dopływający do rur parownika wynosi zero.

Para mokra po opuszczeniu górnych kolektorów ekranowych płynie czterema rurociągami  $\Phi$  324\*36 i wpływa do wodooddzielacza czterema króćcami wspawanymi w jego górnej części. Wodooddzielacz o długości całkowitej 33.8 m. usytuowany jest pionowo między poziomem 57.4 m. a 91 m. Średnica wewnętrzna separatora wynosi 800 mm, a grubość ścianki 50 - 70 mm. Króćce wlotowe usytuowane są stycznie do separatora z lekkim odchyleniem w dół, co powoduje powstanie wiru i separację pary od wody. W górnej części separatora wspawano stycznie dwa króćce wylotowe pary  $\Phi$  356, natomiast w dolnej części dwa króćce odprowadzające wodę do mieszalnika  $\Phi$  406. Pomiaru poziomu wody w separatorze dokonuje się poprzez pomiar różnicy ciśnień statycznych pomiędzy wyprowadzeniami wykonanymi w dolnej i górnej części separatora. Nominalna wysokość wody w separatorze wynosi 12 m. (mierzona względem dna separatora).

W mieszalniku o wymiarach  $\Phi$  930\*65 i długości całkowitej 2.8 m. odbywa się mieszanie ze sobą dwóch strumieni wody: wody zasilającej płynącej z podgrzewacza wody oraz kondensatu płynącego z separatora. Z mieszalnika woda przepływa do filtra o wymiarach  $\Phi$  930\*65 i długości całkowitej 4.6 m. W filtrze umieszczony jest wkład sitowy z otworami  $\Phi$  4.



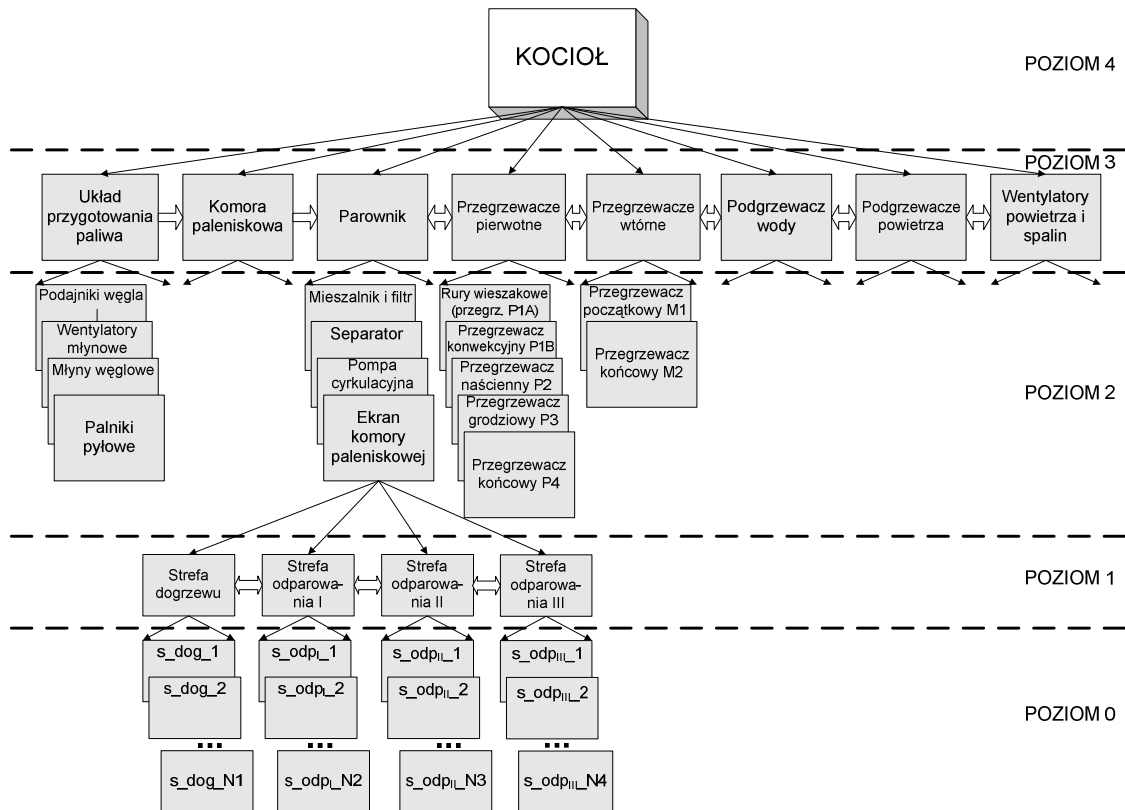
Rys. 2.2. Uproszczony schemat parownika kotła BP-1150

## 2.2. Analiza systemowa i podejście hierarchiczne do modelowania kotłów energetycznych

Ogólny schemat hierarchicznej struktury modelu kotła BP-1150, ze szczególnym uwzględnieniem modelu parownika, przedstawiono na rys. 2.3 [Sta03].

Na poziomie o bezwzględnym numerze 3, model parownika połączony jest z modelami pozostałych urządzeń kotła. Opis operatora agregatu o nazwie *parownik* ma następującą postać:

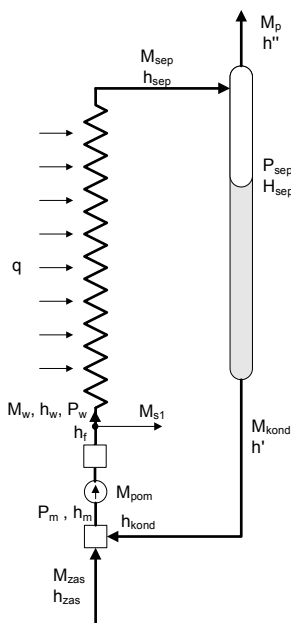
$$[P_{sep} \ H_{sep}]^T = \text{parownik} \left( [M_p \ q \ M_{S1} \ M_{zas} \ h_{zas}]^T \right) \quad (2.1)$$



Rys. 2.3. Hierarchiczna struktura modelu kotła BP-1150

### 2.3. Formalizacja opisu struktury modelu parownika kotła

Uproszczony schemat przepływu wody i pary w parowniku kotła BP-1150 przedstawiono na rys. 2.4. Schemat ten jest podstawą do opracowania modelu parownika na poziomie nr 3 (rys. 2.3). Model parownika zawiera modele następujących podsystemów: mieszalnik, filtr, ekran komory paleniskowej, separator, pompa cyrkulacyjna, węzeł zasilania schładzaczy pary, rurociągi łączące.



Rys. 2.4. Uproszczony schemat przepływu wody i pary w parowniku kotła BP-1150

Poszczególne podsystemy modelu parownika mogą być opisane poprzez podanie wektorów wejściowych  $U_2^i$ , wyjściowych  $Y_2^i$  oraz określenie operatorów opisujących poszczególne podsystemy  $F_2^i$ :

Ekran komory paleniskowej

$$[h_{sep} \ M_{sep} \ P_w]^T = \text{parownik. ekran} \left( [M_w \ q \ h_w \ P_{sep}]^T \right)$$

Separator

$$[P_{sep} \ H_{sep}]^T = \text{parownik. separator} \left( [M_{kond} \ M_{sep} \ h_{sep} \ M_p]^T \right)$$

Mieszalnik

$$[M_{kond} \ h_m]^T = \text{parownik. mieszalnik} \left( [M_{pom} \ M_{zas} \ h_{zas} \ h_{kond}]^T \right)$$

Filtr

$$h_f = \text{parownik. filtr} \left( [M_{pom} \ h_{we\_f}]^T \right) \quad (2.2)$$

Pompa cyrkulacyjna

$$M_{pom} = \text{parownik. pompa} \left( [P_{sep} \ P_w \ H_{sep} \ M_{kond}]^T \right)$$

Węzeł zasilania schładzaczy pary

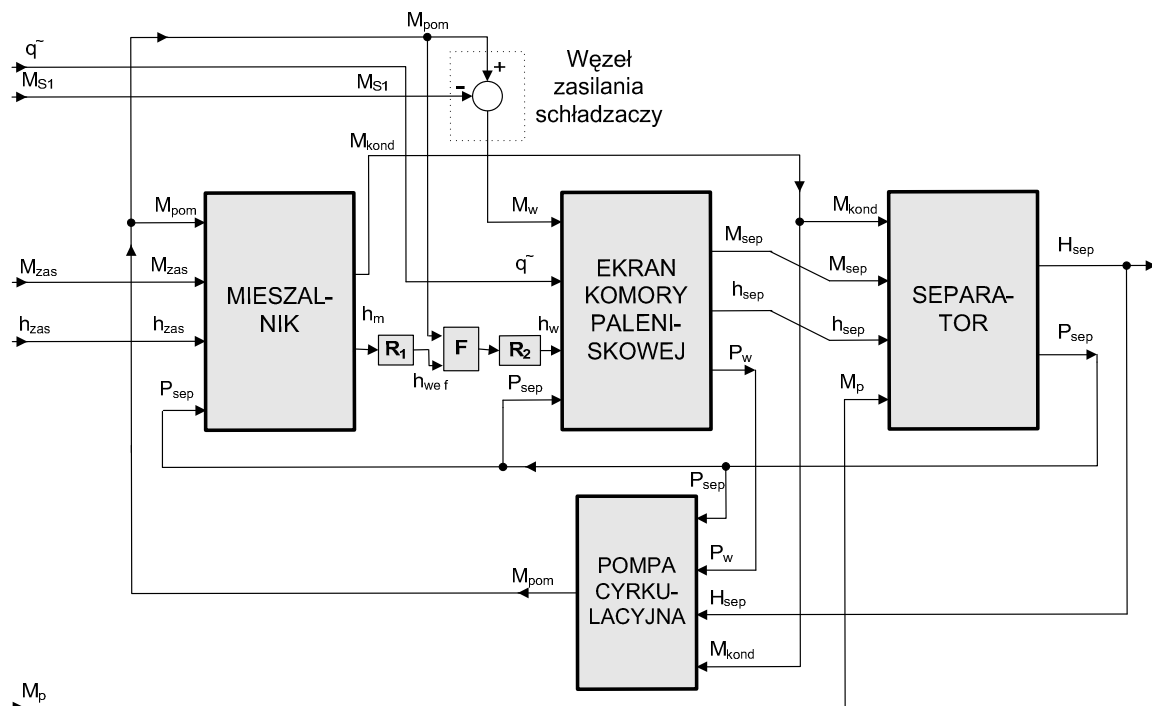
$$M_w = \text{parownik. węzeł\_zasilania\_schładzaczy} \left( [M_{pom} \ M_{S1}]^T \right)$$

Rurociągi łączące

$$h_{we\_f} = \text{parownik. rurociąg1} (h_m)$$

$$h_w = \text{parownik. rurociąg2} (h_f)$$

Na rys. 2.5 przedstawiono model parownika kotła BP-1150 w postaci schematu blokowego.



Rys. 2.5. Struktura modelu parownika kotła BP-1150 ( $R_1$ ,  $R_2$  -rurociągi łączące, F - filtr)

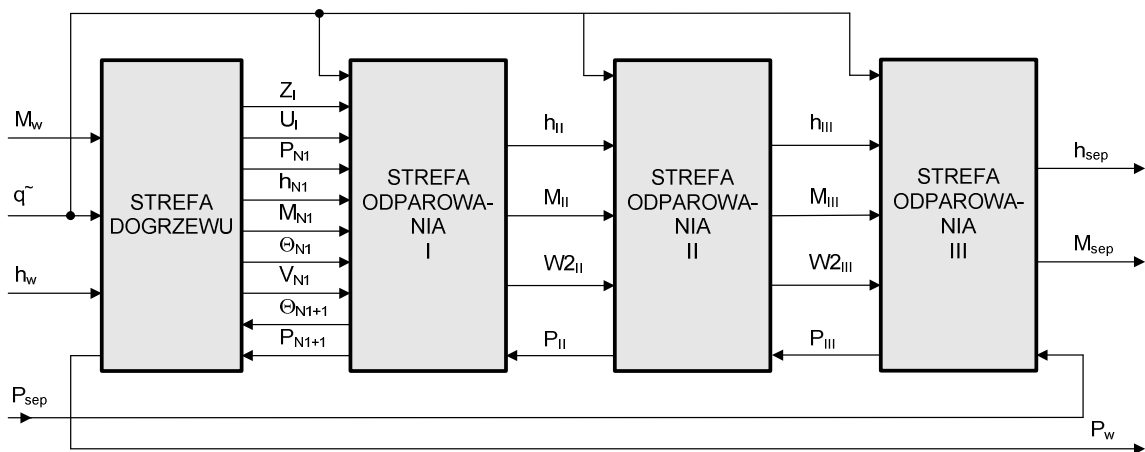
Podsystemy modelu parownika: MIESZALNIK, SEPARATOR, POMPA CYRKULACYJNA, RUROCIĄGI ŁĄCZĄCE nie zawierają podsystemów niższego poziomu i opisane są układami równań różniczkowych, przedstawionymi w dalszej części pracy. Natomiast w modelu ekranu komory paleniskowej wyróżniane są trzy podsystemy: STREFA DOGRZEWU oraz STREFA ODPAROWANIA I, STREFA ODPAROWANIA II i STREFA

ODPAROWANIA III (są to podsystemy poziomu pierwszego). Strukturę modelu rur ekranowych parownika kotła BP-1150 w postaci schematu blokowego przedstawiono na rys 2.6.

W modelu rur ekranowych parownika można wyróżnić trzy podsystemy o istotnie różniących się właściwościach:

- strefa dogrzewu rozciągająca się od przekroju wlotowego rur ekranowych do przekroju, w którym rozpoczyna się objętościowe wrzenie wody (entalpia wody osiąga entalpię  $h'(P)$  - przekrój współrzędnej  $Z_I$ ,
- strefa odparowania I z dużym obciążeniem cieplnym w której występuje intensywna generacja pary, rozciągająca się od przekroju o współrzędnej  $Z_I$  do miejsca gdzie rury ekranowe parownika są przykryte przez przegrzewacz naścienny (poziom 36.5 m.),
- strefa odparowania II z zerowym obciążeniem cieplnym ze względu na przykrycie przegrzewaczem naściennym,
- strefa odparowania III z niewielkim obciążeniem cieplnym oraz mniejszą prędkością przepływu czynnika (rury ekranowe o większej średnicy).

Przekrój graniczny między strefą dogrzewu i odparowania posiada zmienne położenie  $Z_I$ , oraz przemieszcza się z prędkością  $U_I$ . Poszczególne wielkości z indeksem  $NI$  określają parametry przepływu wrzącej wody w przekroju granicznym między strefami. Wielkości z indeksem  $II$  dotyczą wlotu do strefy odparowania II,  $sep$  - wlotu do separatora, natomiast  $w$  - wlotu do rur ekranowych.



Rys. 2.6. Struktura modelu rur ekranowych komory paleniskowej parownika kotła BP-1150

Opis poszczególnych podsystemów ekranu komory paleniskowej jest następujący:

Strefa dogrzewu:

$$[Z_I \ U_I \ P_{NI} \ h_{NI} \ M_{NI} \ \Theta_{NI} \ V_{NI} \ P_w]^T = \text{parownik.ekran.dog} ([M_w \ q \ h_w \ \Theta_{NI+1} \ P_{NI+1}]^T)$$

Strefa odparowania I:

$$[M_{II} \ h_{II} \ W2_{II} \ \Theta_{NI+1} \ P_{NI+1}]^T = \text{parownik.ekran.odpI} ([q \ Z_I \ U_I \ P_{NI} \ h_{NI} \ M_{NI} \ \Theta_{NI} \ V_{NI} \ P_{II}]^T) \quad (2.3)$$

Strefa odparowania II:

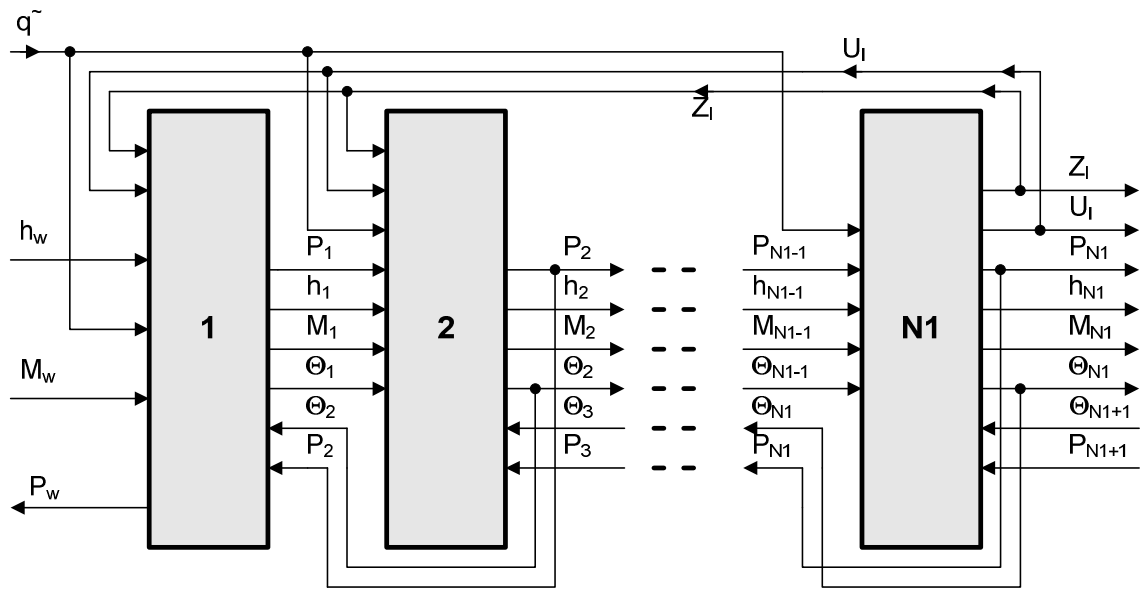
$$[M_{III} \ h_{III} \ W2_{III} \ P_{II}]^T = \text{parownik.ekran.odpII} ([q \ M_{II} \ h_{II} \ P_{III} \ W2_{II}]^T)$$

Strefa odparowania III:

$$[M_{sep} \ h_{sep} \ P_{III}]^T = \text{parownik.ekran.odpIII} ([q \ M_{III} \ h_{III} \ P_{sep} \ W2_{III}]^T)$$

Na poziomie  $nr\ 1$  modelu parownika przepływowego występują modele poszczególnych stref, określonych przez różne rodzaje przepływu czynnika roboczego w rurach ekranowych parownika przepływowego: STREFA DOGRZEWU, STREFA ODPAROWANIA I, STREFA ODPAROWANIA II oraz STREFA ODPAROWANIA III. Poszczególne podsystemy rur ekranowych parownika są układami o parametrach rozłożonych wzdłuż jednej zmiennej przestrzennej, jaką jest długość rur ekranowych parownika. W modelu parownika o parametrach skupionych, poszczególne strefy parownika dzielone są wzdłuż ich długości na elementarne sekcje. Długości sekcji dobierane są tak, aby możliwe było założenie, że każda z nich jest

opisana układem równań różniczkowych zwyczajnych, czyli jest układem o parametrach skupionych. Strukturę modelu strefy dogrzewu przedstawiono na rys. 2.7.



Rys. 2.7. Struktura modelu strefy dogrzewu

Opis poszczególnych sekcji strefy dogrzewu jest następujący:

sekcja nr 1:

$$[P_1 \ h_1 \ M_1 \ \Theta_1 \ P_w]^T = \text{parownik.ekran.dog.s1} ([Z_1 \ U_i \ h_w \ q \ M_w \ \Theta_2 \ P_2]^T)$$

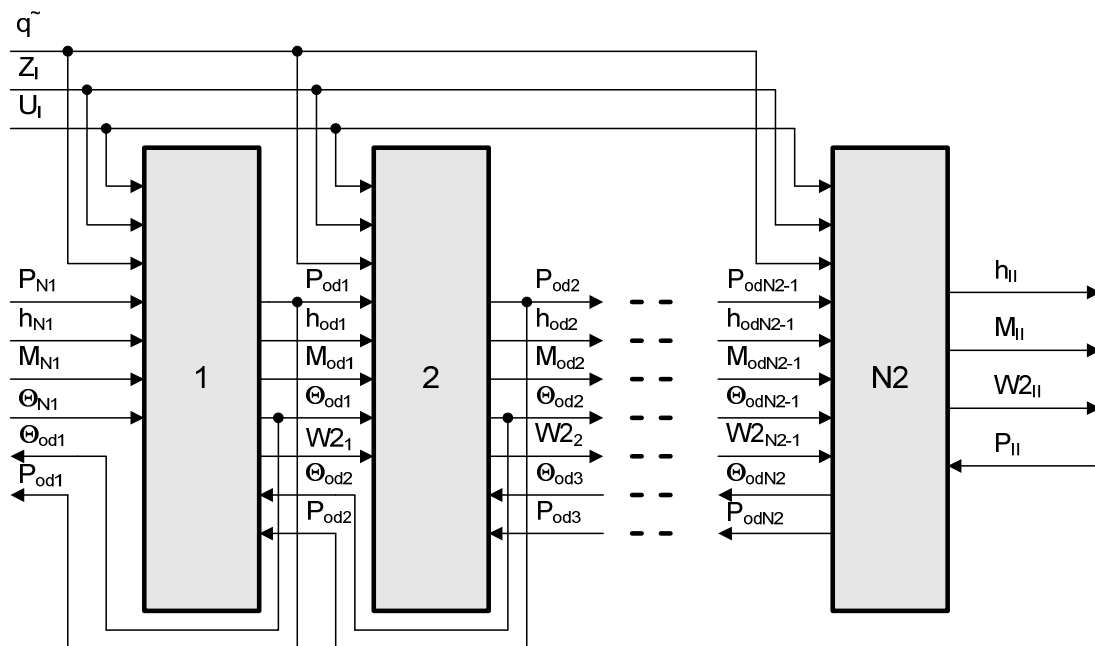
sekcja nr k:

$$[P_k \ h_k \ M_k \ \Theta_k]^T = \text{parownik.ekran.dog.sk} ([Z_1 \ U_i \ q \ P_{k-1} \ h_{k-1} \ M_{k-1} \ \Theta_{k-1} \ \Theta_{k+1} \ P_{k+1}]^T) \quad (2.4)$$

sekcja nr N1:

$$[Z_1 \ U_i \ P_{N1} \ h_{N1} \ M_{N1} \ \Theta_{N1}]^T = \text{parownik.ekran.dog.sN1} ([q \ P_{N1-1} \ h_{N1-1} \ M_{N1-1} \ \Theta_{N1-1} \ \dots \ \Theta_{N1+1} \ P_{N1+1}]^T)$$

Strukturę modelu podsystemu STREFA ODPAROWANIA I przedstawiono na rys. 2.8.



Rys. 2.8. Struktura modelu podsystemu STREFA ODPAROWANIA I

Natomiast opis poszczególnych sekcji wchodzących w skład modelu podsystemu STREFA ODPAROWANIA I jest następujący:



sekcja nr 1:

$$[P_{od1} \ h_{od1} \ M_{od1} \ \Theta_{od1} \ W2_1]^T = \text{parownik.ekran.odpI.s1} ([q \ Z_I \ U_I \ P_{N1} \ h_{N1} \ M_{N1} \ \Theta_{N1} \ \dots \ \Theta_{od2} \ P_{od2}]^T)$$

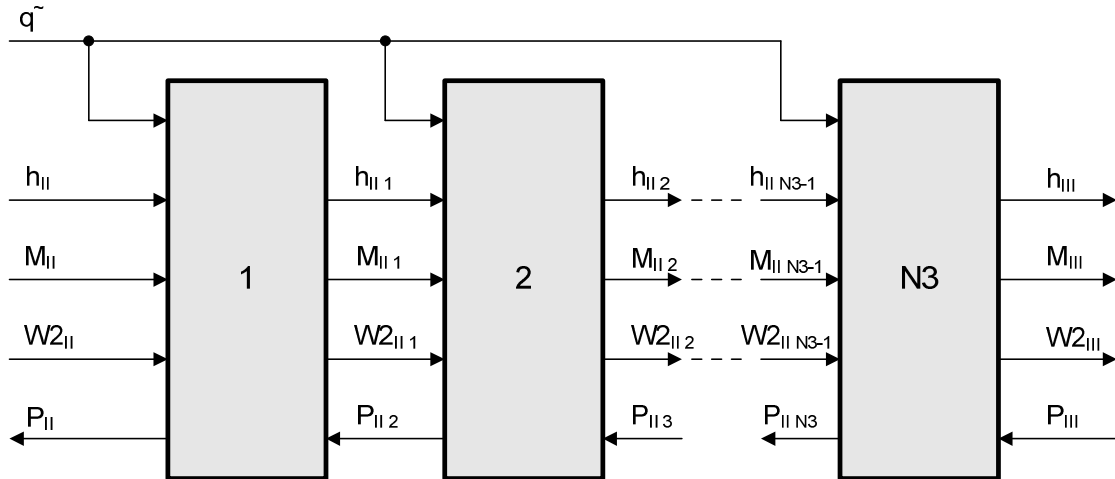
sekcja nr k:

$$[P_{odk} \ h_{odk} \ M_{odk} \ \Theta_{odk} \ W2_k]^T = \text{parownik.ekran.odpI.sk} ([q \ Z_I \ U_I \ P_{odk-1} \ h_{odk-1} \ M_{odk-1} \ \dots \ \Theta_{odk-1} \ W2_{odk-1} \ \Theta_{odk+1} \ P_{odk+1}]^T) \quad (2.5)$$

sekcja nr N2:

$$[h_{II} \ M_{II} \ W2_{II} \ \Theta_{odN2} \ P_{odN2}]^T = \text{parownik.ekran.odpI.sN2} ([q \ Z_I \ U_I \ P_{odN2-1} \ h_{odN2-1} \ \dots \ M_{odN2-1} \ \Theta_{odN2-1} \ W2_{N2-1} \ P_{II}]^T)$$

Strukturę modelu podsystemu STREFA ODPAROWANIA II przedstawiono na rys. 2.9.



Rys. 2.9. Struktura modelu podsystemu STREFA ODPAROWANIA II

Natomiast opis poszczególnych sekcji wchodzących w skład podsystemu STREFA ODPAROWANIA II jest następujący:

sekcja nr 1:

$$[P_{II} \ h_{II,1} \ M_{II,1} \ W2_{II,1}]^T = \text{parownik.ekran.odpII.s1} ([q \ P_{II,2} \ h_{II} \ M_{II} \ W2_{II}]^T)$$

sekcja nr k:

$$[P_{II,k} \ h_{II,k} \ M_{II,k} \ W2_{II,k}]^T = \text{parownik.ekran.odpII.sk} ([q \ h_{II,k-1} \ M_{II,k-1} \ W2_{II,k-1} \ P_{II,k+1}]^T) \quad (2.6)$$

sekcja nr N3:

$$[h_{III} \ M_{III} \ W2_{III} \ P_{II,N3}] = \text{parownik.ekran.odpII.sN3} ([q \ h_{II,N3-1} \ M_{II,N3-1} \ W2_{II,N3-1} \ P_{III}]^T)$$

Struktura modelu podsystemu STREFA ODPAROWANIA III jest analogiczna jak na rys. 2.9.

## 2.4. Modele matematyczne podsystemów parownika

### 2.4.1. Rury ekranowe

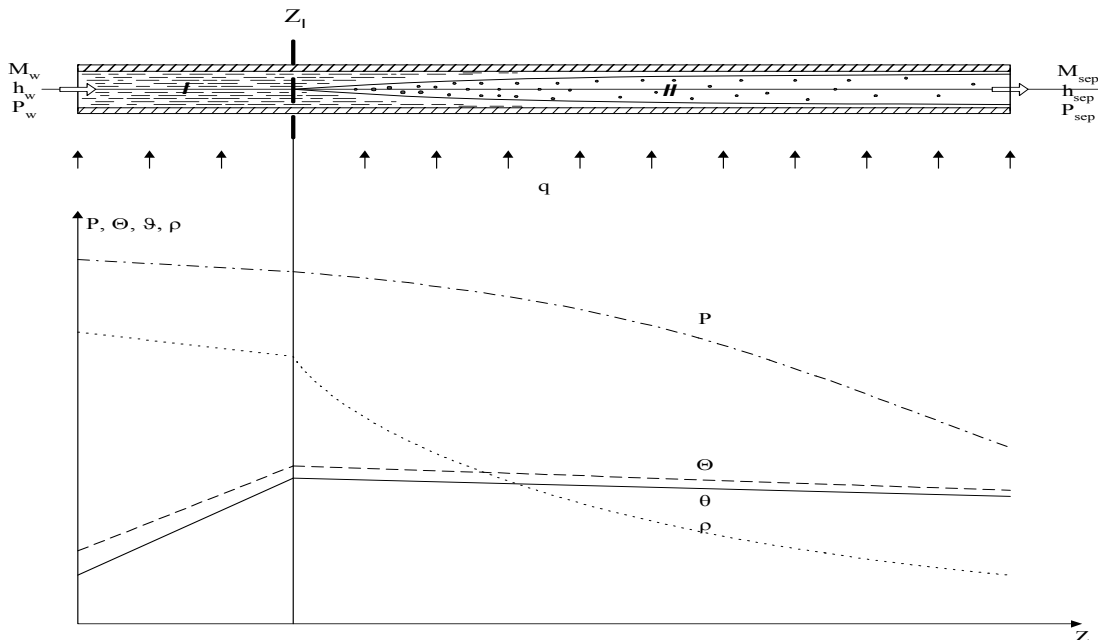
W rurach ekranowych parownika przepływowego czynnik roboczy przepływa w znacznej liczbie równoległych rur połączonych kolektorami dolnym i górnym. Z punktu widzenia dynamiki kotła przepływowego istotny jest efekt sumaryczny procesów termodynamicznych zachodzących w poszczególnych rurach, ujawniający się w zmianach parametrów czynnika roboczego w kolektorach dolnym i górnym parownika przepływowego. Z tego powodu, przy opracowaniu modelu matematycznego parownika przepływowego wzięto pod uwagę jedną zastępczą rurę parownika o średnim obciążeniu cieplnym i średnim przepływie masowym

czynnika roboczego. Do analizy właściwości dynamicznych parownika przepływowego pracującego przy ciśnieniu podkrytycznym przyjęto model strefowy.

Ze względu na stan czynnika roboczego w modelu parownika kotła BP-1150 wyróżniono dwie strefy:

- I - strefę dogrzewu wody do temperatury nasycenia,
- II - strefę odparowania wody.

Woda zasilająca parownik ma temperaturę mniejszą od temperatury nasycenia, odpowiadającej ciśnieniu panującemu w parowniku. Z tego powodu na początkowym odcinku rury ekranowej parownika następuje dogrzew wody do temperatury nasycenia. Odcinek ten nosi nazwę strefy dogrzewu. Przyjęto, że przekrojem granicznym strefy dogrzewu jest przekrój, w którym rozpoczyna się proces objętościowego wrzenia wody (entalpia czynnika roboczego przyjmuje wartość entalpii wrzącej wody, odpowiadającej ciśnieniu panującemu w tym przekroju). Począwszy od tego przekroju (oznaczonego na rys. 2.10 współrzędną  $Z_I$ ) następuje proces stopniowego odparowania wody. Bardzo istotną cechą charakterystyczną parownika przepływowego są zmiany położenia przekroju granicznego między strefą dogrzewu i odparowania przy zmieniających się warunkach pracy parownika (zmiany strumienia cieplnego, przepływu wody zasilającej, entalpii wlotowej, itd.).



Rys. 2.10. Model strefowy parownika przepływowego przy ustalonym końcu strefy odparowania oraz podstawowe parametry czynnika roboczego

Na podstawie pracy [Sta01, Sta03], równania różniczkowe cząstkowe opisujące jednowymiarowy przepływ wody w strefie dogrzewu, otrzymane na podstawie bilansu masy, energii oraz pędu, przyjmują następującą postać różniczkową:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial z} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \rho \frac{\partial h}{\partial t} + M \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{M}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= q'_d \\ \frac{\partial M}{\partial t} + 2 \frac{M}{\rho} \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{M^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho g \cos \beta + 10^3 \frac{\partial P}{\partial z} + f \frac{M^2}{\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdzie:

$$M = M(z, t) = \rho w, \quad \rho = \rho(z, t) = \rho(P, h), \quad h = h(z, t), \quad P = P(z, t), \quad q'_d = \frac{4(\Theta_w - \vartheta)\alpha}{d},$$

$$\vartheta = \vartheta(P, h), \quad \alpha = \alpha(P, h, M, q).$$

Natomiast jednowymiarowy przepływ dwufazowy (mieszanka parowo-wodna) w strefie odparowania opisany jest następującym układem równań różniczkowych cząstkowych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial z} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \rho \frac{\partial h}{\partial t} + M \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{M}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= q'_d - \frac{\partial}{\partial z} \left[ M \left( \frac{w_2}{w} - 1 \right) (h - h') \right] \\ \frac{\partial M}{\partial t} + 2 \frac{M}{\rho} \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{M^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho g \cos \beta + 10^3 \frac{\partial P}{\partial z} + f \frac{M^2}{\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

gdzie:  $M = M(z, t) = \rho w$ ,  $\rho = \rho(z, t) = \rho(P, h)$ ,  $h = h(z, t)$ ,  $P = P(z, t)$ ,  $c = \frac{h-h'}{h_{21}}$ ,

$$\frac{w_2}{w} = \frac{1}{c + \frac{1-c}{S}} = f(M, P, h)$$

Warunki brzegowe dla rur ekranowych są następujące:

$$M(0, t) = M_w(t), \quad h(0, t) = h_w(t), \quad P(L, t) = P_{sep}(t).$$

Transport energii cieplnej wzdłuż promienia ścianki rury opisany jest następującą zależnością (przy założeniu, że właściwości materiału rury nie ulegają zmianie przy zmianach temperatury:  $\lambda, \rho_r, c_r = const$ ):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = a \nabla^2 \Theta \quad (2.9)$$

W warunkach pracy parownika, gradienty temperatury w kierunku osiowym są pomijalnie małe w stosunku do gradientów w kierunku promieniowym. Ponadto przy założeniu symetrii kątowej w laplasjanie można pominąć pochodną  $\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha^2}\right)$ . Na tej podstawie analizę przewodzenia ciepła w ściance rury parownika oparto na następującym równaniu różniczkowym:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \quad (2.10)$$

Warunki brzegowe dla tego równania są następujące:

$$\pi D \lambda \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)_{r=\frac{D}{2}} = q \left[ \frac{kW}{m} \right], \quad \pi d \lambda \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)_{r=\frac{d}{2}} = \pi d \alpha (\Theta_w - \Theta) = q_d \left[ \frac{kW}{m} \right]$$

gdzie:  $\Theta_w$  - temperatura wewnętrznej powierzchni ścianki rury.

W przypadku parownika kotła BP-1150, poszczególne rury połączone są pletwą zapewniającą szczelność komory paleniskowej kotła o przekroju prostokątnym (rys. A.1). Transport energii cieplnej wzdłuż pletwy jest opisany następującym równaniem przewodnictwa, z uwzględnieniem ciepła dopływającego z komory paleniskowej:

$$\frac{1}{Podz p \varrho_{st} c_{st}} q + a \frac{\partial^2 \Theta_p}{\partial x^2} = \frac{\partial \Theta_p}{\partial t} \quad (2.11)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\frac{\partial \Theta_p}{\partial t} \Big|_{x=0} = 0, \quad \Theta_p \Big|_{x=L_p} = \Theta_p \Big|_{r=\frac{D}{2}}$$

gdzie:  $a = \frac{\lambda}{\varrho_{st} c_{st}} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$  - współczynnik wyrównywania temperatur,

$L_p = \frac{Podz-D}{2}$  [m] - połowa długości pletwy,

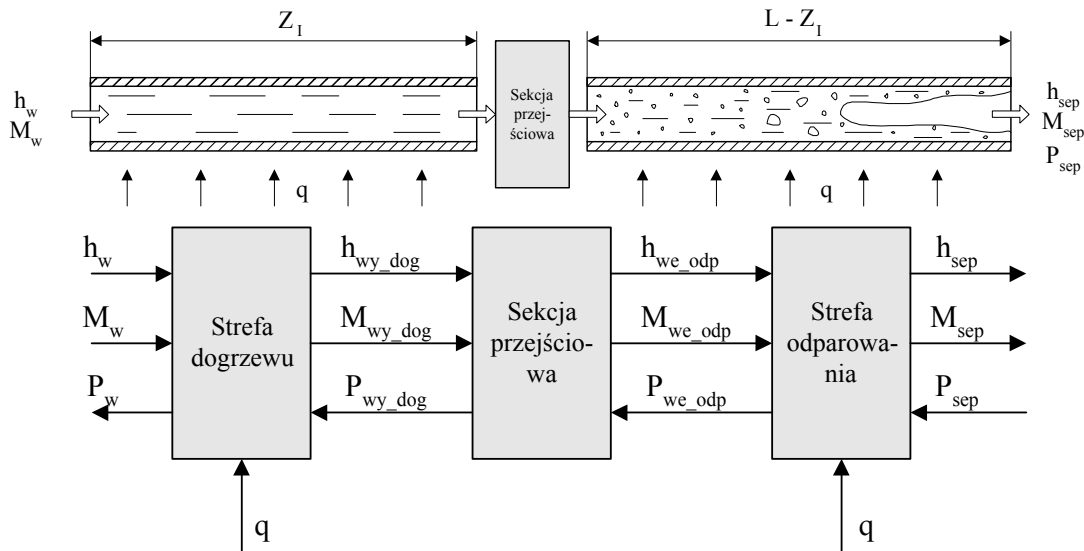
$Podz$  [m] - podziałka rozmieszczenia rur ekranowych,

$p$  [m] - grubość pletwy.

**Zlinearyzowane modele o parametrach rozłożonych**

W stanach nieustalonych przekrój graniczny między strefami przemieszcza się. Jednak dla modelu zlinearyzowanego, słusznego dla małych odchyłeń od stanu ustalonego, przemieszczenia przekroju granicznego są niewielkie. Z tego powodu zlinearyzowany model o parametrach rozłożonych rur ekranowych parownika zawiera (rys. 2.11):

- strefę dogrzewu o długości  $Z_{I_0}$  i nieruchomym prawym brzegu,
- strefę odparowania o długości  $L - Z_{I_0}$  i nieruchomym lewym brzegu,
- sekcję przejściową między strefami, w której przeliczane są wielkości wyjściowe strefy dogrzewu na wielkości wejściowe strefy odparowania. Zależności te mają postać liniowych równań algebraicznych (nie jest brana pod uwagę dynamika ze względu na małe rozmiary sekcji przejściowej).



Rys. 2.11. Budowa modelu o parametrach rozłożonych rur ekranowych parownika

Sekcja przejściowa opisana jest następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned}
 \Delta M_{we\_odp} &= \Delta M_{wy\_dog} \\
 \Delta P_{wy\_dog} &= \Delta P_{we\_odp} \\
 \Delta h_{we\_odp}^* &= \Delta h_{wy\_dog}
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

W równaniach różniczkowych opisujących strefę odparowania występuje entalpia  $h(z, t)$ , która związana jest z entalpią  $h^*(z, t)$  następującą zależnością:  $h^* = h' + \frac{w_2}{w}(h - h')$ . Na tej podstawie uzyskuje się następującą zależność, słuszną dla niewielkich odchyłeń poszczególnych wielkości od ich wartości w stanie ustalonym, w przekroju granicznym między strefą dogrzewu i odparowania ( $h = h'$ ):

$$\Delta h^* = \left(\frac{w_2}{w}\right)_0 \Delta h + \left(\left(\frac{w_2}{w}\right)_0 - 1\right) \left(\frac{dh'}{dP}\right)_0 \Delta P
 \tag{2.13}$$

skąd otrzymano następującą zależność określającą przyrost entalpii wlotowej do strefy odparowania:

$$\Delta h_{we\_odp} = \frac{1}{\left(\frac{w_2}{w}\right)_0} \Delta h_{wy\_dog} + \frac{\left(\frac{w_2}{w}\right)_0 - 1}{\left(\frac{w_2}{w}\right)_0} \left(\frac{dh'}{dP}\right)_0 \Delta P_{wy\_dog}
 \tag{2.14}$$

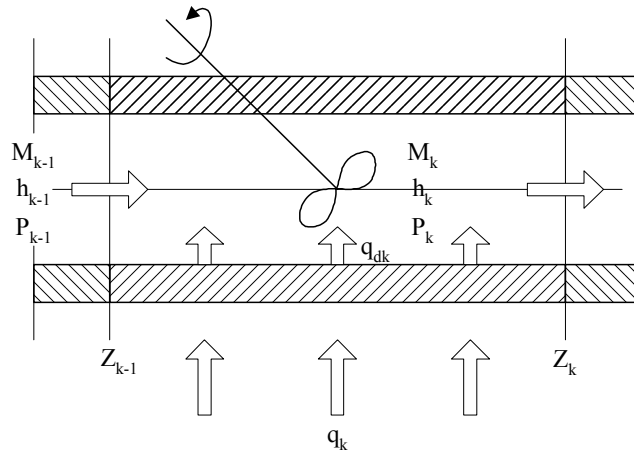
Dla niewielkich odchyłeń poszczególnych wielkości od ich wartości w stanie ustalonym, zlinearyzowany model rur ekranowych parownika otrzymuje się poprzez złożenie zlinearyzowanych modeli strefy dogrzewu i odparowania, a sposób połączenia tych modeli określa

sekcja przejściowa opisana równaniami (2.12, 2.14). Operacja taka jest niemożliwa dla modelu nieliniowego, w którym przekrój graniczny między strefą dogrzewu i odparowania może przemieszczać się w szerokim przedziale.

Przy analizach dynamiki strefy odparowania rozdziela się strefę odparowania na trzy części o różniących się właściwościach dynamicznych: część dolna strefy odparowania z dużym obciążeniem cieplnym w której wytwarzana jest większość pary, część pośrednia z zerowym obciążeniem cieplnym oraz część górna strefy odparowania z małym obciążeniem cieplnym i większą średnicą rur ekranowych, zapewniająca wysoką zdolność akumulacyjną kotła.

### Modele o parametrach skupionych rur ekranowych parownika

W celu uzyskania modelu o parametrach skupionych rur ekranowych parownika, podzielono zastępczą rurę parownika wzdłuż jej długości na pewną liczbę sekcji o wymiarach na tyle małych, aby można było założyć, że pojedyncza sekcja stanowi układ dynamiczny o parametrach skupionych (opisany układem równań różniczkowych zwyczajnych) (rys. 2.12).



Rys. 2.12. Pojedyncza sekcja modelu o parametrach skupionych

Na podstawie [Sta01, Sta03] równania bilansowe opisujące przepływ wody w  $k$ -tej sekcji wchodzącej w skład strefy dogrzewu przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned} \Delta Z_k \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_k \frac{dP_k}{dt} + \Delta Z_k \left( \frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_k \frac{dh_k}{dt} &= M_{k-1} - M_k \\ \Delta Z_k \rho_k \frac{dh_k}{dt} - \Delta Z_k \frac{dP_k}{dt} &= M_{k-1} (h_{k-1} - h_k) - \frac{M_{k-1}}{\rho_{k-1}} (P_{k-1} - P_k) + \frac{q_{dk}}{A} \Delta Z_k \\ \Delta Z_k \rho_k \frac{dM_k}{dt} &= \frac{M_{k-1}^2}{\rho_{k-1}} - \frac{M_k^2}{\rho_k} - \Delta Z_k \rho_k g \cos \beta - (P_{k+1} - P_k) 10^3 - \Delta Z_k f_k \frac{M_k^2}{\rho_k} \end{aligned} \quad (2.15)$$

gdzie:  $q_{dk} = \pi d \alpha_k (\Theta_{wk} - \vartheta_k)$ ,

natomiast dla  $k$ -tej sekcji strefy odparowania:

$$\begin{aligned} \Delta Z_k \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_k \frac{dP_k}{dt} + \Delta Z_k \left( \frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_k \frac{dh_k}{dt} &= M_{k-1} - M_k \\ \Delta Z_k \rho_k \frac{dh_k}{dt} + \Delta Z_k \frac{dP_k}{dt} &= M_{k-1} (h_{k-1} - h_k) - \frac{M_{k-1}}{\rho_{k-1}} (P_{k-1} - P_k) + \frac{q_{dk}}{A} \Delta Z_k + \dots \\ \dots + M_{k-1} \left( \left( \frac{w_2}{w} \right)_{k-1} - 1 \right) (h_{k-1} - h') &- M_k \left( \left( \frac{w_2}{w} \right)_k - 1 \right) (h_{k-1} - h') \\ \Delta Z_k \rho_k \frac{dM_k}{dt} &= \frac{M_{k-1}^2}{\rho_{k-1}} - \frac{M_k^2}{\rho_k} - \Delta Z_k \rho_k g \cos \beta - (P_{k+1} - P_k) 10^3 - \Delta Z_k f_k \frac{M_k^2}{\rho_k} \end{aligned} \quad (2.16)$$

gdzie:  $q_{dk} = \pi d \alpha_k (\Theta_{wk} - \vartheta_k)$ ,  $\frac{w_2}{w} = \frac{1}{\frac{1-c}{S} + c}$ ,  $S = f(P, h, M)$

Parametry czynnika roboczego w strefie dogrzewu jak również odparowania są funkcjami ciśnienia  $P$  oraz entalpii  $h$ :  $\varrho(P, h)$ ,  $\frac{\partial \varrho}{\partial P} = f(P, h)$ ,  $\frac{\partial \varrho}{\partial h} = g(P, h)$  i przedstawiono je w dodatku na rys. A.3–A.4 (dla strefy dogrzewu) oraz rys. A.5–A.7 (dla strefy odparowania):

$$\varrho = f(P, h) = \frac{1}{(1-c)v' + cv''} = \frac{h_{21}}{v_{21}} \frac{1}{h - \frac{h'v'' - h''v'}{v_{21}}}$$

$$h_{21} = h'' - h', \quad v_{21} = v'' - v'$$

$$c = \frac{h - h'}{h_{21}}, \quad h' = h'(P), \quad h'' = h''(P)$$
(2.17)

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial h}\right)_k = -\frac{\varrho_k^2 v_{21}}{h_{21}}$$

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial P}\right)_k = -\frac{\varrho_k v_{21}}{h_{21}} \frac{d}{dP} \left(\frac{h_{21}}{v_{21}}\right) + \frac{\varrho_k^2 v_{21}}{h_{21}} \frac{d}{dP} \left(\frac{h'v'' - h''v'}{v_{21}}\right)$$

$$w_2 = \frac{S_k}{1 + c_k(S_k - 1)} w$$

$$S_k = \frac{w_{2k}}{w_{1k}} = f(P_k, c_k, w_k)$$
(2.18)

Model elementarnej sekcji dla strefy dogrzewu przedstawiono w dodatku na rys. A.8. Trzy współrzędne stanu są związane z czynnikiem roboczym:  $P_k$ ,  $h_k$ ,  $M_k$ , natomiast pozostałe współrzędne stanu są związane ze ścianką rury i płetwą łączącą. Do 20-to wejściowego multipleksera podano następujące wielkości:  $Z_I$ ,  $U_I$ ,  $q_k$ ,  $P_{k-1}$ ,  $h_{k-1}$ ,  $M_{k-1}$ ,  $\Theta_{k-1}$ ,  $v_{k-1}$ ,  $P_{k+1}$ ,  $\Theta_{k+1}$ ,  $\alpha_k$ ,  $T_k$ ,  $f_k$ ,  $v_k$ ,  $\left(\frac{\partial \varrho}{\partial h}\right)_k$ ,  $\left(\frac{\partial \varrho}{\partial P}\right)_k$ ,  $P_k$ ,  $h_k$ ,  $M_k$ ,  $q_{dk}$ . Do symulacji komputerowych oraz wyznaczania modeli zlinearyzowanych i charakterystyk częstotliwościowych parownika wykorzystywano trzy modele ścianki rury wraz z płetwą łączącą:

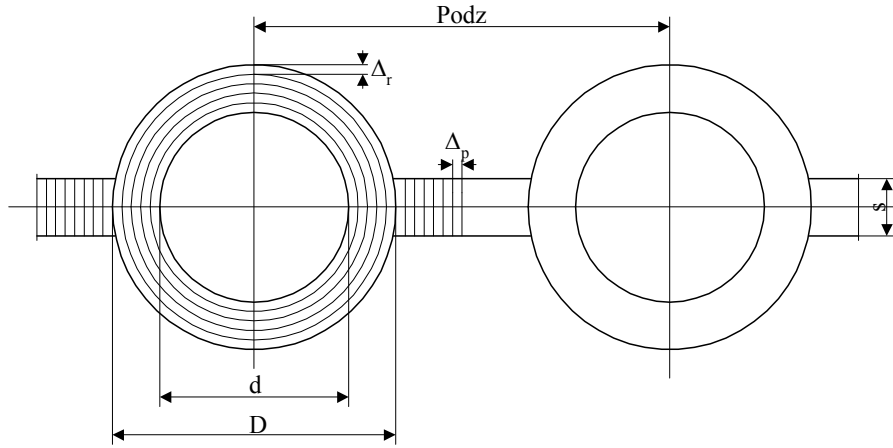
- model 1-go rzędu opisujący ściankę rury wraz z płetwą jako układ o parametrach skupionych [SRZ04, SR05],
- model 12-go rzędu opisujący rozkład temperatury ścianki rury wzdłuż promienia oraz płetwy wzdłuż jej długości (przy założeniu równomiernego rozkładu strumienia cieplnego wzdłuż obwodu ścianki rury) [IRS08],
- model 52-go rzędu opisujący rozkład temperatury ścianki rury wzdłuż promienia i obwodu oraz płetwy wzdłuż jej długości.

### **Model o parametrach skupionych ścianki rury wraz z płetwą łączącą**

Ekran komory paleniskowej kotła BP-1150 stanowią rury ekranowe parownika, połączone płetwą zapewniającą szczelność komory paleniskowej (rys. A.1). Energia cieplna wytwarzana w komorze paleniskowej dopływa do ekranu od strony wewnętrznej, podczas gdy od strony zewnętrznej ekran jest izolowany termicznie. W znanych z literatury modelach matematycznych kotłów przyjmuje się, że ścianka rury ekranowej wraz z płetwą stanowią układ o parametrach skupionych, opisany równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu (np.: [Sta01]). Założenie takie zapewnia jednak niewielki zakres adekwatności modelu rur ekranowych parownika. Na podstawie [Sta03] można stwierdzić, że zakres adekwatności wynosi w takim przypadku ok. 1 [rad/s].

W celu poszerzenia zakresu adekwatności modelu rur ekranowych niezbędne staje się uwzględnienie rozłożenia parametrów modelu wzdłuż promienia ścianki rury oraz wzdłuż płetwy łączącej. Dla modelu o parametrach skupionych, przy założeniu symetrii osiowej (zakłada się, że strumień cieplny jest jednakowy wzdłuż obwodu ścianki rury), ściankę rury oraz płetwę podzielono na zadaną liczbę elementów skończonych zgodnie z rys. 2.13 ( $N_r$  – liczba

elementów skończonych w ściance rury,  $N_p$  – liczba elementów skończonych w płetwie łączącej).



Rys. 2.13. Dyskretyzacja modelu ścianki rury

Równania bilansu energii cieplnej dla poszczególnych elementów skończonych ścianki rury przyjmują następującą postać:

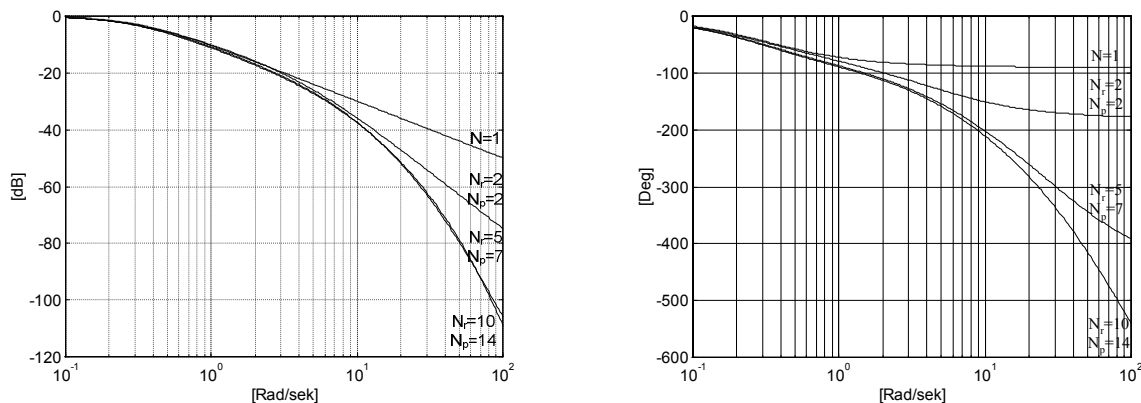
$$\begin{aligned}
 \frac{d\Theta_{rk}^1}{dt} &= \frac{4}{((d + 2\Delta_r)^2 - d^2)\rho_{st}c_{st}} \left[ d\alpha_k(\vartheta_k - \Theta_{rk}^1) - \frac{(d + 2\Delta_r)\lambda}{\Delta_r}(\Theta_{rk}^1 - \Theta_{rk}^2) \right] \\
 &\vdots \\
 \frac{d\Theta_{rk}^j}{dt} &= \frac{4\lambda[(d + 2(j-1)\Delta_r)(\Theta_{rk}^{j-1} - \Theta_{rk}^j) - (d + 2j\Delta_r)(\Theta_{rk}^j - \Theta_{rk}^{j+1})]}{[(d + 2j\Delta_r)^2 - (d + 2(j-1)\Delta_r)^2]\rho_{st}c_{st}\Delta_r} \\
 &\vdots \\
 \frac{d\Theta_{rk}^{N_r}}{dt} &= \frac{4\lambda(d + 2(N_r - 1)\Delta_r)(\Theta_{rk}^{N_r-1} - \Theta_{rk}^{N_r})}{(D^2 - (D - 2\Delta_r)^2)\rho_{st}c_{st}\Delta_r} + \frac{8s\lambda(\Theta_{pk}^1 - \Theta_{rk}^{N_r})}{\pi(D^2 - (D - 2\Delta_r)^2)\rho_{st}c_{st}\Delta_r} + \\
 &\quad \dots + \frac{\frac{4D}{Podz}q}{\pi(D^2 - (D - 2\Delta_r)^2)\rho_{st}c_{st}}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

natomiast dla płetwy łączącej:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Theta_{pk}^1}{dt} &= \frac{\lambda}{\Delta_p^2\rho_{st}c_{st}} (\Theta_{rk}^{N_r} - 2\Theta_{pk}^1 + \Theta_{pk}^2) + \frac{q}{Podz s \rho_{st}c_{st}} \\
 &\vdots \\
 \frac{d\Theta_{pk}^j}{dt} &= \frac{\lambda}{\Delta_p^2\rho_{st}c_{st}} (\Theta_{pk}^{j-1} - 2\Theta_{pk}^j + \Theta_{pk}^{j+1}) + \frac{q}{Podz s \rho_{st}c_{st}} \\
 &\vdots \\
 \frac{d\Theta_{pk}^{N_p}}{dt} &= \frac{\lambda}{\Delta_p^2\rho_{st}c_{st}} (\Theta_{pk}^{N_p-1} - \Theta_{pk}^{N_p}) + \frac{q}{Podz s \rho_{st}c_{st}}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

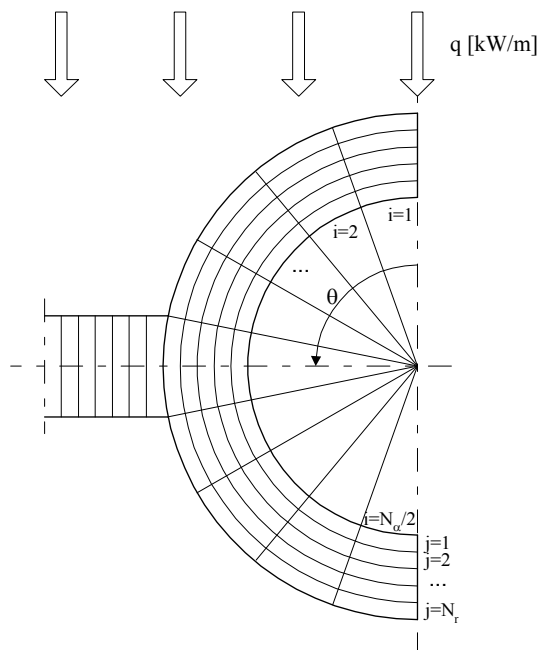
gdzie:  $\Theta_{rk}^j$  - temperatura ścianki rury w  $k$ -tej sekcji, w  $j$ -tej warstwie,  $\Theta_{pk}^j$  - temperatura płetwy w  $k$ -tej sekcji, w  $j$ -tej warstwie.

W celu określenia liczby elementów skończonych w modelu ścianki rury wyznaczono charakterystyki częstotliwościowe układu dla wielkości wejściowej  $q$  [ $kW/m$ ] i wielkości wyjściowej  $q_d$  [ $kW/m$ ] przy różnej liczbie elementów dla ścianki rury oraz płetwy łączącej. Z charakterystyk przedstawionych na rys. 2.14 wynika, że w celu zapewnienia zakresu adekwatności modelu równej 20 [rad/s] niezbędna liczba elementów skończonych wynosi:  $N_r = 5$ ,  $N_p = 7$ .



Rys. 2.14. Charakterystyki częstotliwościowe dla wielkości wejściowej  $q$  [kW/m] i wielkości wyjściowej  $q_d$  [kW/m] uzyskane dla modeli o różnej liczbie elementów skończonych

Aby sprawdzić jaki wpływ na model ścianki rury wraz z pletwą łączącą ma nierównomierność strumienia ciepłego wzdłuż obwodu rury, opracowano model ścianki rury, w którym uwzględnia się przewodnictwo ciepłe wzdłuż obwodu ścianki rury poprzez podział każdej z warstw w modelu na  $N_\alpha$  elementów (rys. 2.15). Możliwe jest przy tym uwzględnienie symetrii osiowej.

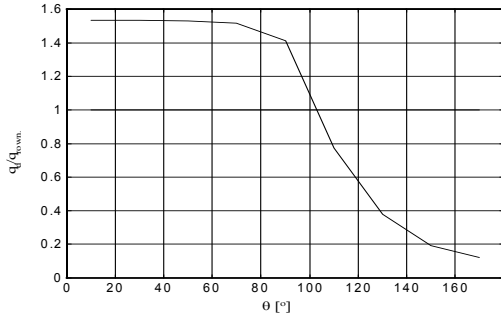


Rys. 2.15. Dyskretyzacja ścianki rury z uwzględnieniem nierównomierności strumienia ciepłego wzdłuż obwodu rury

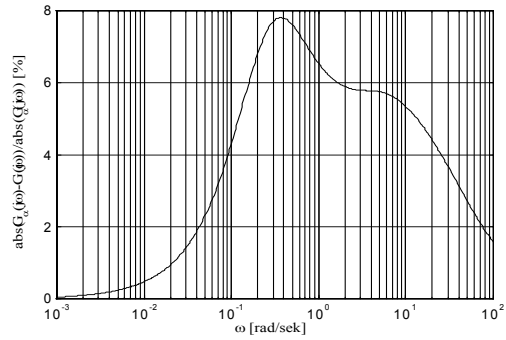
Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że jednostronne doprowadzanie ciepła do rur ekranowych ma bardzo istotny wpływ na rozkład strumienia ciepłego dopływającego do czynnika roboczego  $q_d$  wzdłuż obwodu rury. Na rys. 2.16 przedstawiono względną wartość strumienia ciepłego  $q_d/q_{równ}$  w stanie ustalonym w funkcji kąta  $\theta$ , uzyskaną dla  $N_\alpha = 18$  oraz  $N_r = 5$  oraz  $\alpha = 12.43 \left[ \frac{kW}{m^2K} \right]$ .

W oparciu o uzyskany model ścianki rury parownika wraz z pletwą łączącą wyznaczono charakterystyki częstotliwościowe dla wielkości wejściowej  $q$  i wielkości wyjściowej  $q_d$  oraz porównano z charakterystykami częstotliwościowymi przedstawionymi na rys. 2.14 dla  $N_r = 5$  oraz  $N_p = 7$ . Względną różnicę obydwu transmitancji widmowych:  $\frac{|G_\alpha(j\omega) - G(j\omega)|}{G_\alpha(j\omega)}$  przedstawiono na rys. 2.17.





Rys. 2.16. Rozkład strumienia ciepłego dopływającego do czynnika roboczego wzdłuż obwodu rury



Rys. 2.17. Względny błąd modelu ścianki rury z płetwą łączącą spowodowany założeniem równomiernego rozkładu ciepła wzdłuż obwodu rury

Z rys. 2.17 wynika, że maksymalny błąd modelu występuje dla częstotliwości średnich, z przedziału 0,1-10 [rad/s] i wynosi ok. 8%.

### 2.4.2. Separator

Rola separatora w kotłach przepływowych firmy SULZER polega na oddzielaniu wody z mieszaniny parowo-wodnej opuszczającej rury ekranowe parownika. Separator stanowi wydłużony, pionowy zbiornik cylindryczny o długości  $L_{sep} \cong 34 \text{ m}$ . i średnicy wewnętrznej  $d = 0.8 \text{ m}$ . oraz średnicy zewnętrznej  $D = 0.94 \text{ m}$ . Do górnej części separatora doprowadzana jest mieszanina parowo-wodna z prędkością ok. 16 m/s, stycznie usytuowanymi króćcami. Dolnymi króćcami, również usytuowanymi stycznie, jest odprowadzana woda do mieszalnika z prędkością ok. 2.5 m/s. Mechanizm rozdziału faz w polu sił odśrodkowych występujących w separatorze jest bardzo złożonym procesem, zależnym od szeregu wielkości fizycznych oraz parametrów konstrukcyjnych i eksploatacyjnych.

Separator jako obiekt sterowania jest układem o czterech wielkościach wejściowych:  $M_p$ ,  $M_{sep}$ ,  $h_{sep}$ ,  $M_{kond}$  i dwóch wielkościach wyjściowych:  $P_{sep}$ ,  $H_{sep}$ . W pracy zastosowano model separatora o parametrach skupionych, wyznaczony na podstawie równań bilansu masy oraz energii wewnętrznej czynnika roboczego, a także bilansu energii cieplnej w grubościennym płaszczu zewnętrznym [Sta03].

Na podstawie powyższych równań bilansowych uzyskuje się następujące równania stanu opisujące bilans masy oraz energii cieplnej czynnika roboczego w separatorze:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dP_{sep}}{dt} \\ \frac{dH_{sep}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{sep}^* - M_p^* - M_{kond}^* \\ M_{sep}^* h_{sep}^* - M_p^* h'' - M_{kond}^* h' - \pi d \alpha L_{sep} (\vartheta - \Theta_1) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

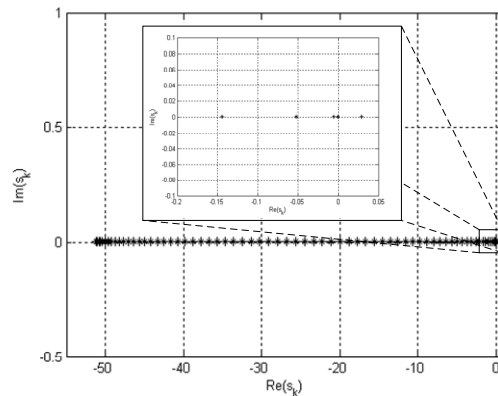
gdzie:

$$\begin{aligned} a &= A_z H_{sep} \frac{dq'}{dP} + (V - A_z H_{sep}) \frac{d(\rho'' h'')}{dP} \\ b &= A_z (\rho' - \rho'') \\ c &= A_z H_{sep} \frac{d(\rho' h')}{dP} + (V - A_z H_{sep}) \frac{d(\rho'' h'')}{dP} \\ d &= A_z (\rho' h' - \rho'' h'') \end{aligned}$$

Natomiast płaszcz separatora opisany jest następującym wektorem stanu:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_k \\ \vdots \\ \Theta_N \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} \frac{d\alpha\Delta(\vartheta - \Theta_1) - (d + 2\Delta)\lambda(\Theta_1 - \Theta_2)}{[(d + 2\Delta)^2 - d^2]\rho_{st}c_{st}\Delta} \\ \vdots \\ \frac{(d + 2(k - 1)\Delta)\lambda(\Theta_{k-1} - \Theta_k) - (d + 2k\Delta)\lambda(\Theta_k - \Theta_{k+1})}{[(d + 2k\Delta)^2 - (d + 2(k - 1)\Delta)^2]\rho_{st}c_{st}\Delta} \\ \vdots \\ \frac{(d + 2(N - 1)\Delta)\lambda(\Theta_{N-1} - \Theta_N)}{[D^2 - (D - 2\Delta)^2]\rho_{st}c_{st}\Delta} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że separator jest podsystemem niestabilnym. Niestabilność ta związana jest z zależnością parametrów pary nasyconej suchej oraz wrzącej wody od ciśnienia. Wartość bieguna dodatniego decydującego o niestabilności separatora jako obiektu sterowania silnie zależy od obciążenia kotła i jest największa dla obciążenia 100% (rys. 2.18). Niestabilność separatora rzutuje na niestabilność parownika jako obiektu sterowania.



Rys. 2.18. Wartości własne modelu separatora

Modele matematyczne pozostałych podsystemów parownika (mieszalnik, filtr, rurociągi łączące oraz pompa cyrkulacyjna) zostały opisane w [Sta03] i ze względu na ich prostotę nie zostały zawarte w pracy.

## 2.5. Weryfikacja modeli parownika

W pracach [Sta01, Sta03] przedstawiono szereg ciągłych oraz deterministycznych modeli parownika kotła energetycznego BP-1150. Modele te można zaklasyfikować do różnych klas (modele o parametrach rozłożonych oraz skupionych, modele nieliniowe oraz zlinearyzowane).

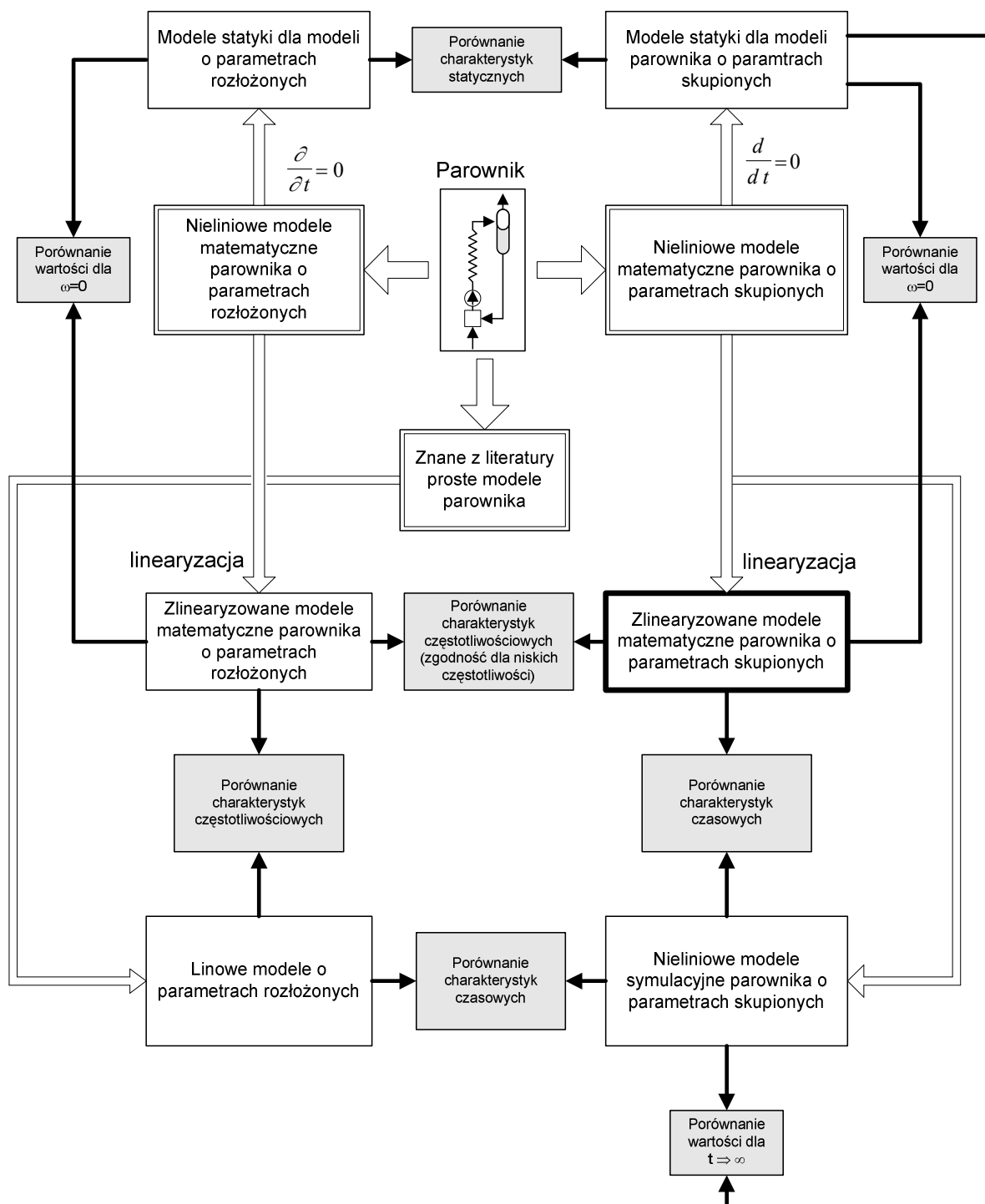
Uzyskane modele można poddać weryfikacji na drodze eksperymentalnej w ograniczonym zakresie [SM98, SM99]. Wynika to przede wszystkim z faktu, że ingerencja w pracę bloku energetycznego podczas normalnej eksploatacji może mieć bardzo ograniczony charakter. Ponadto podczas eksploatacji bloku energetycznego, w kotle działają układy regulacji, których wyłączenie jest niemożliwe.

Brak możliwości pomiarowej weryfikacji modeli parownika powoduje, że dużego znaczenia nabiera weryfikacja formalna, polegająca na porównywaniu wyników uzyskanych na podstawie modeli należących do różnych klas oraz otrzymanych niezależnymi metodami. Na rys. 2.19 przedstawiono schemat weryfikacji modeli parownika. Porównywaniu podlegały następujące wyniki:

## 2. Modele matematyczne kotłów przepływowych bloków energetycznych jako obiektów ...

- wartości w stanie ustalonym, oraz charakterystyki statyczne,
- charakterystyki częstotliwościowe,
- charakterystyki czasowe.

Uzyskane modele matematyczne, zostały porównane również z uproszczonymi modelami znanymi z literatury, poprzez porównanie charakterystyk częstotliwościowych oraz charakterystyk czasowych [Sta03].



Rys. 2.19. Schemat weryfikacji modeli parownika

## **2.6. Wnioski**

1. Nieliniowy model rur ekranowych parownika kotła BP-1150 opisany jest zestawem równań różniczkowych cząstkowych stanowiących bilans masy, energii oraz pędu wody i mieszaniny parowo-wodnej, a także równaniem przewodnictwa cieplnego wzdłuż promienia ścianki rury oraz płetwy łączącej.
2. W celu zapewnienia adekwatności modelu o parametrach skupionych do 20 [rad/s] niezbędne jest zastosowanie znacznej liczby elementów skończonych, a także zastosowanie wysokiego rzędu modelu ścianki rury.
3. Model pierwotny o parametrach skupionych (wysokiego rzędu) opisuje zjawiska fizyczne związane z przemieszczaniem się zmian przepływu masowego, gęstości, entalpii oraz ciśnienia wzdłuż rur ekranowych, a także transportu ciepła w elementach metalowych. Przy czym zmiany ciśnienia czynnika roboczego przemieszczają się wzdłuż rur ekranowych w obu kierunkach.
4. W równaniach bilansowych założono równowagę termodynamiczną czynnika dwufazowego. Model taki może być stosowany w zakresie częstotliwości do 100 [rad/s].
5. Model rur ekranowych parownika charakteryzuje się dużą sztywnością (stosunek maksymalnej do minimalnej wartości własnej jest większy od 1000), gdyż opisuje wolnozmiennne procesy cieplne oraz szybkie procesy dźwiękowe (transport zmian ciśnienia). Pociąga to za sobą znaczne problemy numeryczne związane z rozwiązywaniem układów równań różniczkowych.
6. Błąd wynikły z nieuwzględnienia niesymetrycznego dopływu ciepła do rur ekranowych nie przekracza 8%.
7. Separator wnosi do modelu parownika dodatnią wartość własną, wynikającą z dynamiki ciśnienia oraz zerową wartość własną, związaną z poziomem wody w separatorze. Powoduje to niestabilność całego modelu parownika. Stawia to bardzo wysokie wymagania dla układów regulacji ciśnienia oraz zasilania w kotle.

# 3. REDUKCJA MODELI ZŁOŻONYCH OBIEKTÓW STEROWANIA

---

## 3.1. Wprowadzenie

Prace nad zaawansowanymi metodami redukcji modeli rozpoczęły się w końcu lat 60. ubiegłego stulecia (np. metoda agregacji <ang. aggregation methods>) [Aok68]. Znaczna większość wczesnych metod redukcji opierała swoje działanie na aproksymacji właściwości modelu za pomocą wielomianów (ang. polynomial approximations) [FNG92]. Współczynniki wielomianów wybierano na podstawie: kryterium stabilności Routha (ang. model reduction using the Routh stability criterion) [HF75, KS76, FNG92], wartości momentów modelu pierwotnego (np.: metoda Asymptotic Waveform Evaluation) [PR90] lub minimalizowano błąd aproksymacji dobierając współczynniki za pomocą algorytmów genetycznych [LTG97, TL00, HTW01, SMM05, DY05, RS05] itp.

Większość współcześnie wykorzystywanych metod redukcji modeli liniowych można podzielić na trzy grupy [AS01, Ant05]:

- metody bazujące na dekompozycji SVD (rozkładzie względem wartości szczególnych, ang. *Singular Value Decomposition*). Wykorzystują one teorię zrównoważonej realizacji modelu. Grupa tych metod została przedstawiona w rozdziale 3.2.
- metody momentów, które opierają swoje działanie na możliwości przedstawienia transmitancji modelu w postaci rozwinięcia w szereg Laurenta wokół jednego lub wielu punktów. Ze względów numerycznych największe znaczenie pośród metod momentów uzyskały algorytmy bazujące na wyznaczeniu podprzestrzeni Kryłowa. Grupa tych metod została przedstawiona w rozdziale 3.3.
- metody łączące zalety obydwu grup – SVD-Kryłowa

Metody redukcji modelu bazujące na dekompozycji SVD zapoczątkowane zostały pracami Moore'a [Moo81]. Koncepcja zrównoważonej realizacji modelu (ang. *Balanced Realization*) była przełomem w dziedzinie redukcji liniowych modeli dynamicznych. Umożliwia ona w prosty sposób wydzielenie części dominującej oraz redukcję modelu poprzez „obcięcie” macierzy opisujących dynamikę modelu w przestrzeni stanów (ang. *Balanced Truncation*). Koncepcja zrównoważonej realizacji modelu stała się podstawą opracowania metody redukcji **BTA** (ang. *Balanced Truncation Approximation*) [Moo81, PS82]. Do podstawowych zalet tej metody redukcji można zaliczyć zagwarantowanie zachowania stabilności modelu zredukowanego oraz możliwość oszacowania błędu aproksymacji. Metoda ta, pierwotnie opracowana dla liniowych modeli asymptotycznie stabilnych, stała się podstawą do opracowania metod redukcji modeli niestabilnych [Zil91, Chi96, BB97].

Stworzono również wiele modyfikacji metody **BTA** eliminujących jej wady np.: **SPA** (ang. *Singular Perturbation Approximation*) [LA89, Pra94, Chi96]. Metoda ta znacznie poprawia aproksymację charakterystyk częstotliwościowych dla stanu ustalonego oraz niskich częstotliwości.

W 1984 roku opublikowana została innowacyjna praca, w której przedstawiono optymalną metodę redukcji względem normy Hankela (ang. *Hankel Norm Approximation*) [Glo84, Zho95, WSL98, BQQ04] oraz zależności umożliwiające oszacowanie błędu aproksymacji.

Metoda **HNA** gwarantuje dwukrotnie mniejszy maksymalny błąd aproksymacji niż **BTA**, jednak okupione jest to większą złożonością obliczeniową algorytmu.

Uogólnieniem metody **BTA** są metody **FW** (ang. *Frequency Weighted*), wprowadzające częstotliwościowe funkcje wagowe ( $W_i$  – wejściową funkcję wagową oraz  $W_o$  – wyjściową funkcję wagową). Przy odpowiednim dobraniu współczynników wagowych metoda ta umożliwia znaczne poprawienie wyników aproksymacji modelu dla zadanego przedziału częstotliwości. Pierwszą tego typu metodę zaproponował Enns w 1984 r. [Enn84], jednakże przedstawiony algorytm nie gwarantował zachowania stabilności modelu zredukowanego dla jednoczesnego zastosowania obu funkcji wagowych. Wada ta została usunięta w algorytmach zaproponowanych w pracach Lin i Chiu [LC92] oraz Wanga [WSL99].

Wprowadzenie wag częstotliwościowych jest możliwe również w sposób pośredni, poprzez modyfikację zależności, z których wyznaczane są gramiany. Wyróżnić można dwie metody: **FD** (ang. *Frequency Domain*) [GJ90, WB92, AZN03, SSG06, Ant05], gdy gramiany są wyznaczane w dziedzinie częstotliwościowej oraz **TLBT** (ang. *Time Limited Balanced Truncation*) [GJ90, GA03, GA04] dla dziedziny czasu.

Osobną grupę metod stanowią metody *Balanced Stochastic Truncation* [Var00, OA01, BQQ01, Ant05, SSG06], wyznaczające gramiany z równań Riccatiego. Umożliwiają one wyznaczenie modelu zredukowanego o założonym względnym błędzie aproksymacji. Zastosowanie metody **BST** możliwe jest jednak wyłącznie dla stabilnych modeli kwadratowych ( $p = m$ ) [Ant05].

Wadą metod opartych na dekompozycji SVD jest znaczna złożoność algorytmów redukcji, gdyż charakteryzują się one większą niż wielomianowa złożonością obliczeniową. Pomimo swoich niewątpliwych zalet, do których w pierwszej kolejności można zaliczyć zachowanie stabilności modelu zredukowanego, metody te nie są praktycznie wykorzystywane dla modeli o liczbie współrzędnych stanu większej niż  $10^4$ . Spowodowane jest to znaczną złożonością obliczeniową oraz niepraktycznością algorytmów wyznaczania gramianów dla tak olbrzymich modeli. W literaturze [Ant05] dla systemów większych niż  $10^4$  zmiennych stanu, proponowane jest wykorzystanie metod momentów. Charakteryzują się one znacznie mniejszą złożonością obliczeniową. Głównymi wadami tych metod redukcji jest jednak brak gwarancji zachowania stabilności modelu zredukowanego (dla znacznej części opracowanych algorytmów). Zazwyczaj charakteryzują się także mniejszą dokładnością aproksymacji charakterystyki amplitudowo-fazowej w porównaniu z metodami **BT**, a w szczególności z metodami wprowadzającymi wagi częstotliwościowe [GA00].

Jedną z najprostszych metod redukcji bazującą na metodzie momentów jest **AWE** (ang. *Asymptotic Waveform Evaluation*). Zaproponowana została przez Pillage oraz Rohrer w 1990 roku [Pil90]. Metoda wykorzystuje fakt, że transmitancję modelu pierwotnego, przedstawioną w postaci rozwinięcia asymptotycznego wokół dwóch punktów  $s = 0$  oraz  $s = \infty$  można dobrze aproksymować wielomianem Pade. Bezpośrednie wyznaczenie wartości momentów powoduje jednakże znaczne problemy natury numerycznej. Ogranicza to w znacznym stopniu przydatność tej metody dla celów redukcji [GGD94, Doo95, FF95, GGS96, Her05, Gil06].

Znacznie większe znaczenie praktyczne osiągnęły algorytmy opierające swoje działanie na wyznaczeniu podprzestrzeni Kryłowa [Bol94, Gri97, Ant05]. Metody te wymagają wyznaczenia bazy ortonormalnej. Klasyczna ortogonalizacja Grama-Schmidta jest jednak mało dokładna numerycznie. Dlatego też duże znaczenie osiągnęły dwa algorytmy: algorytm Arnoldiego (zmodyfikowana ortogonalizacja Grama-Schmidta) oraz niesymetryczny algorytm Lanczosa.

Większość opracowanych metod opartych na metodach momentów jest zdefiniowana wyłącznie dla modeli o jednym wejściu i wyjściu, gdy wartości momentów są skalarami. Zaledwie kilka metod zostało uogólnionych na modele o wielu wejściach i wyjściach (momenty są

macierzami). Do takich metod można zaliczyć m.in.: MPVL (ang. *Matrix Pade via Lanczos*) [FRE03] oraz metody blokowe Arnoldiego oraz Lanczosa [Sal05].

Po raz pierwszy metodę wykorzystującą przekształcenia Fouriera dla celów redukcji modeli zaprezentowano w 1989 roku [GKL89]. Wymagała ona wykorzystania algorytmu IDtFT (odwrotnego dyskretnoczasowego przekształcenia Fouriera – ang. *Inverse Discrete Time Fourier Transform*) w celu wyznaczenia modelu zredukowanego w przestrzeni stanów. Metoda **FMR** (ang. *Fourier Model Reduction*) bazuje na iteracyjnym algorytmie wyznaczenia współczynników Fouriera [WM03, WM05], natomiast jej modyfikacja (Rational Krylov–FMR) umożliwia pominięcie bezpośredniego wyznaczenia współczynników Fouriera i wyznaczenie baz ortonormalnych za pomocą algorytmu Arnoldiego [GW08].

Opracowano również metody łączące dotychczas dwie oddzielne grupy metod (metody Krylov-SVD). Umożliwiają one na zastąpienie bardzo czasochłonnego obliczania gramianów z równań Lapunowa przez wyznaczenie ich aproksymacji [Saa90, JKL92, GL94, Pen06, Li00, LW01, ASG03, LW04, Ant05]). Na podobnej zasadzie opracowano metody wyznaczające dekompozycję gramianów za pomocą algorytmu POD (ang. *Proper Orthogonal Decomposition*) [Row05, IR06, Sin08].

### 3.2. Metody redukcji oparte na dekompozycji SVD

Do podstawowych pojęć dla metod redukcji opartych na dekompozycji SVD należą: gramian sterowalności  $\mathbf{P}$  i obserwowalności  $\mathbf{Q}$ , wartości szczególne Hankela oraz zrównoważona realizacja modelu (ang. *Balanced Realization*). Gramiany sterowalności i obserwowalności stabilnego modelu liniowego opisują jego właściwości (sterowalność oraz obserwowalność) w następujący sposób.

Model jest sterowalny/obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy gramian sterowalności/obserwowalności jest dodatnio określony:

$$\mathbf{P} > 0 \Leftrightarrow \lambda_i(\mathbf{P}) > 0, \quad \mathbf{Q} > 0 \Leftrightarrow \lambda_j(\mathbf{Q}) > 0 \quad (3.1)$$

Fizyczna interpretacja odwrotności gramianu sterowalności związana jest z minimalną energią sygnału wejściowego (w sensie normy  $L_2$ ), konieczną do osiągnięcia stanu  $x(0) = x_0$  [Glo84]:

$$\int_{-\infty}^0 u^*(t)u(t)dt = x_0^* \mathbf{P}^{-1} x_0 \quad (3.2)$$

Jeżeli gramian sterowalności jest bliski osobliwemu, to minimalna energia dla osiągnięcia pewnych stanów  $x_0$  może mieć znaczną wartość. Oznacza to, że pewne stany mogą być trudne do osiągnięcia.

Gramian obserwowalności związany jest z energią sygnału wyjściowego przy braku sterowania ( $u(t) = 0$  dla  $t > 0$ ) dla stanu początkowego  $x(0) = x_0$  [Glo84]:

$$\|y\|_2^2 = \int_0^{\infty} y^*(t)y(t)dt = x_0^* \mathbf{Q} x_0 \quad (3.3)$$

Z równań (3.2) oraz (3.3) można wyznaczyć zależności opisujące gramiany sterowalności oraz obserwowalności dla stacjonarnego modelu liniowego w następującej postaci [Moo81]:

$$\mathbf{P} = \int_0^{\infty} e^{A^t} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{A^* t} dt \quad (3.4)$$

$$\mathbf{Q} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^*t} \mathbf{C}^* \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt \quad (3.5)$$

W praktyce wyznaczenie gramianów z podanej definicji jest trudne nawet dla modeli o niskim rzędzie. Podstawę ich numerycznego wyznaczenia stanowi rozwiązanie równania macierzowego Lapunowa:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^* = -\mathbf{W} \quad (3.6)$$

gdzie:  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  oraz  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Równanie to ma jednoznaczne rozwiązanie (3.7), gdy suma dwóch dowolnych wartości własnych macierzy  $\mathbf{A}$  jest różna od zera ( $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$  dla  $1 \leq i, j \leq n$ ) [Kac98]. Warunek ten jest zawsze spełniony w przypadku modeli stabilnych, których wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$  leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej ( $Re\{\lambda_i(\mathbf{A})\} < 0$  dla  $i = 1 \dots n$ ):

$$\mathbf{X} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{W} e^{\mathbf{A}^*t} dt \quad (3.7)$$

Na podstawie otrzymanego rozwiązania równania macierzowego można wyznaczyć zależności będące podstawą numerycznego obliczenia gramianów sterowalności oraz obserwowalności:

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^* = -\mathbf{B}\mathbf{B}^* \quad (3.8)$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A} = -\mathbf{C}^*\mathbf{C} \quad (3.9)$$

Dla nieosobliwych przekształceń liniowych w przestrzeni stanów  $x \rightarrow \mathbf{T}x$  (gdzie  $\mathbf{T}$  jest kwadratową macierzą nieosobliwą) gramiany sterowalności i obserwowalności modelu zostają przekształcone według zależności [Glo84]:

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{T}^* \quad (3.10)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = (\mathbf{T}^*)^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{T}^{-1} \quad (3.11)$$

Pomimo, że postacię gramianów zależą od przekształcenia  $\mathbf{T}$ , wartości własne ich iloczynu są niezmiennikami nieosobliwych przekształceń liniowych. Ich pierwiastki nazywane są wartościami szczególnymi Hankela.

Jednym z podstawowych pojęć redukcji modeli metodami SVD jest koncepcja zrównoważonej realizacji modelu [Moo81]. Z matematycznego punktu widzenia, zrównoważenie bazuje na takim nieosobliwym przekształceniu liniowym  $x \rightarrow \mathbf{T}x$ , aby gramiany sterowalności i obserwowalności modelu były identycznymi macierzami diagonalnymi, na diagonalu których znajdują się wartości szczególne Hankela :

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_i) \quad (3.12)$$

gdzie:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$  dla modeli asymptotycznie stabilnych.

Przedstawienie modelu w takiej postaci ma szereg zalet. Umożliwia w prosty sposób usunięcie niesterowalnych oraz nieobserwowalnych modów, a także redukcję modelu stabilnego zapewniającą zachowanie stabilności modelu zredukowanego. Gramiany każdego z podukładów ( $\mathbf{\Sigma}_i$ ) modelu zrównoważonego są również macierzami diagonalnymi:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{\Sigma}_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k), \mathbf{\Sigma}_2 = \text{diag}(\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n) \quad (3.13)$$

Jeżeli wartości szczególne Hankela podukładu ( $\mathbf{\Sigma}_2$ ) mają wartości równe zero, wówczas zawiera on wyłącznie mody niesterowalne bądź nieobserwowalne. W ten sposób wszystkie te mody zostają usunięte z podukładu ( $\mathbf{\Sigma}_1$ ). W identyczny sposób możliwe jest usunięcie składowych wektora stanu, którym odpowiadają niewielkie wartości szczególne Hankela. Ich usunięcie jest równoznaczne redukcji modelu.



Celem redukcji jest usunięcie takiej części zmiennych stanu, aby zachowane zostały właściwości modelu pierwotnego (tj. stabilność, sterowalność, obserwowalność) oraz miały one jak najmniejszy wpływ na charakterystykę częstotliwościową modelu pierwotnego. Wpływ poszczególnych współrzędnych wektora stanu na właściwości modelu można określić przez porównanie związanych z nimi wartości szczególnych Hankela [Glo84]. Dla modeli asymptotycznie stabilnych przedstawionych w postaci zrównoważonej (wartości Hankela są uporządkowane nierosnąco) redukcja polega na wydzieleniu dominującego podsystemu  $\Sigma_1$ .

Ważną cechą redukcji jest zagwarantowanie zachowania stabilności modelu zredukowanego. Podczas redukcji modeli niestabilnych możliwy jest podział modelu na część stabilną (bieguny układu leżące w lewej półpłaszczyźnie  $Re\{\lambda_i(\mathbf{A})\} < 0$ ) i antystabilną (bieguny układu w prawej półpłaszczyźnie  $Re\{\lambda_i(\mathbf{A})\} > 0$ ). Redukcja przeprowadzana jest natomiast wyłącznie dla stabilnej części modelu. Model uzyskuje pierwotne cechy w wyniku połączenia zredukowanego modelu części stabilnej z wydzieloną częścią antystabilną [Chi96].

Dla modelu sterowalnego i obserwowalnego stabilność można określić poprzez analizę wartości własnych gramianów. Jeśli przez  $\pi$ ,  $\delta$  oraz  $\nu$  oznaczyć odpowiednio liczbę dodatnich, zerowych oraz ujemnych wartości własnych, to dla modelu sterowalnego i obserwowalnego zachodzą następujące zależności [Glo84]:

$$\pi(\mathbf{A}) = \nu(\mathbf{P}); \nu(\mathbf{A}) = \pi(\mathbf{P}); \delta(\mathbf{A}) = \delta(\mathbf{P}) = 0 \quad (3.14)$$

Oznacza to, że dla modelu sterowalnego i obserwowalnego, liczba dodatnich wartości własnych gramianów odpowiada liczbie stabilnych modów modelu. Jeżeli układ jest asymptotycznie stabilny, wtedy gramiany sterowalności i obserwowalności posiadają wyłącznie dodatnie wartości własne (są dodatnio określone).

Podsystemy  $\Sigma_1$  oraz  $\Sigma_2$  uzyskane w wyniku podziału modelu zrównoważonego mają zagwarantowaną stabilność wyłącznie wtedy, gdy nie mają one identycznych wartości szczególnych Hankela.

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{A}) = 0, \lambda_i(\mathbf{P}_1) \neq \lambda_j(\mathbf{P}_2) \text{ dla } 1 \leq i, j \leq n \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta(\mathbf{A}_{ii}) = 0, \nu(\mathbf{A}_{ii}) = \pi(\mathbf{P}_i), \pi(\mathbf{A}_{ii}) = \nu(\mathbf{P}_i) \text{ dla } i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

gdzie:  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}.$

Oznacza to, że dla modelu asymptotycznie stabilnego, którego wszystkie wartości szczególne Hankela są różne i większe od zera ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n > 0$ ), dowolnie wybrany podukład jest również asymptotycznie stabilny.

Wartości szczególne Hankela mają również zastosowanie dla określenia błędu aproksymacji modelu zredukowanego [Moo81, Glo84]. Norma ta jest stosowana do oceny maksymalnego błędu modelu zredukowanego w stosunku do modelu pierwotnego. Większa wartość normy Hankela błędu aproksymacji oznacza większy maksymalny błąd charakterystyki częstotliwościowej modelu zredukowanego.

### 3.2.1. Algorytmy wyznaczania macierzy transformacji

Podstawowym zadaniem algorytmów redukcji opartych na dekompozycji SVD jest wyznaczenie przekształcenia nieosobliwego  $x \rightarrow \mathbf{T}x$ , które zrównoważy model pierwotny. Przekształcenie to nie jest jednoznaczne i w literaturze opisanych jest wiele różnych algorytmów wyznaczania macierzy transformacji  $\mathbf{T}$  (o wymiarach  $n \times n$ ) oraz jej odwrotności  $\mathbf{T}^{-1}$ . Dla modeli o znacznej liczbie zmiennych stanu, macierz transformacji często ma właściwości zbliżone do macierzy osobliwej, co powoduje duże błędy numeryczne podczas wyznaczania jej odwrotności. Dlatego też większość odpornych numerycznie algorytmów bazuje na jedno-

czesnym wyznaczeniu dwóch macierzy transformacji ( $T$  i  $L$ ) w postaci macierzy prostokątnych o wymiarach odpowiednio  $k \times n$  oraz  $n \times k$ . Umożliwia to jednoczesne zrównoważenie oraz wydzielenie części dominującej modelu pierwotnego:

$$TPT^* = L^*QL = \text{diag}(\sigma_1 \cdots \sigma_k) \quad (3.16)$$

W kolejnych punktach przedstawiono podstawowe algorytmy numeryczne oraz dokonano oceny ich właściwości numerycznych oraz złożoności obliczeniowej.

#### **Algorytmy RPR, SR oraz BFSR**

Działanie przedstawionych algorytmów wyznaczania macierzy transformacji opiera się na dekompozycji Choleskiego gramianów. Wadą metody **RPR** [Glo84, Ant05] w stosunku do **SR** (ang. square-root) [LHP87, Ant05] jest konieczność inwersji macierzy  $T$ , co dla systemów o wysokim rzędzie wiąże się ze znacznymi problemami numerycznymi. Algorytmy **RPR** oraz **SR** zostały przedstawione w dodatku (tab. B.1 oraz tab. B.2). Warunkiem wykonania dekompozycji Choleskiego (wynikiem jej jest macierz trójkątna górna) jest dodatnia określoność gramianów, która spełniona jest dla modeli asymptotycznie stabilnych.

W 1991r. A. Varga opracował modyfikację algorytmu **SR** znacznie poprawiającą uwarunkowanie macierzy transformacji - algorytm **BFSR** (ang. *balanced-free square root*) [Var91, Var91a, VA01, Ant05]. Algorytm ten łączy zalety algorytmu **SR** z algorytmami typu **BF** (ang. *balanced-free*) [SC89]. Wynik działania algorytmu **SR** poddany zostaje faktoryzacji QR oraz następnej dekompozycji SVD, w wyniku których wyznaczona macierz transformacji ma znacznie lepsze uwarunkowanie numeryczne. Algorytm przedstawiony został w tab. B.3.

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów dla modeli podsystemów kotła energetycznego, stwierdzono trudności związane z wyznaczaniem dekompozycji Choleskiego gramianów dla modeli powyżej 40. rzędu [Ryd05]. Wynika to z występowania w modelu pierwotnym wielu modów, które mają znikomy wpływ na właściwości modelu pierwotnego (związane są one z bardzo małymi wartościami Hankela). Powoduje to złe uwarunkowanie numeryczne gramianów i przy ograniczonej dokładności numerycznej niektóre mody modelu mogą zostać uznane za niesterowalne lub nieobserwowalne ( $\sigma_i = 0$ ), a nawet za mody niestabilne ( $\sigma_i < 0$ ). Klasyczny algorytm wyznaczania macierzy transformacji (wyznaczenie gramianów, a następnie ich dekompozycja) można zastosować wyłącznie dla modeli o małej złożoności. Modele o dużej złożoności wymagają zastosowania algorytmów Lapunowa, które umożliwiają bezpośrednie wyznaczenie dekompozycji Choleskiego gramianów (np. algorytm Hammarlinga [Ham82] lub bazujący na funkcji signum [BQ99, BQQ00, SB08]):

$$AS^*S + S^*SA^* = -BB^* \quad (3.17)$$

$$A^*R^*R + R^*RA = -C^*C \quad (3.18)$$

Zaimplementowany w przyborniku *SLICOT* [Var01a, Var02] oraz w pakiecie MATLAB/*Simulink* algorytm Hammarlinga wymaga około  $25n^3$  operacji zmiennoprzecinkowych [Ham82, Pen98, Pen98a]. Dla modeli o dużej złożoności kolejne wartości własne gramianów ( $\sigma_i$ ) zazwyczaj bardzo szybko maleją [Pen99]. Gramiany można zatem aproksymować z dużą dokładnością za pomocą dodatnio określonych macierzy niskiego rzędu. Umożliwia to zastosowanie iteracyjnych algorytmów niskiego rzędu (ang. low-rank, o złożoności obliczeniowej  $\mathcal{O}(n^2)$ ) [LW04], które wyznaczają macierze  $R$  oraz  $S$  o znacznie niższej liczbie wierszy niż rząd modelu. Algorytmy niskiego rzędu bazują na wyznaczeniu podprzestrzeni Kryłowa [Saa90, JKL92, GL94, LW04], metodach ADI (ang. alternating direction implicate) [Pen06, Li00, LW01, LW04], *Smith* [ASG03, Pen06] lub wyznaczając dekompozycję w bazie funkcji własnych POD (ang. Proper Orthogonal Decomposition) [WP02, Row05, IR06, Sin08]. Algorytmy te łączą w sobie zalety metod redukcji SVD oraz Kryłowa (metody SVD-Kryłowa), tj. przy zachowaniu porównywalnej z metodami Kryłowa złożoności obliczeniowej gwarantują zachowanie stabilności modelu zredukowanego.

Dla stabilnych modeli wysokiego rzędu ( $n \geq 500$ ) i małej liczbie wejść i wyjść ( $\frac{n}{p}, \frac{n}{m} \geq 100$ ) algorytmy niskiego rzędu ADI oraz *Smith* zaimplementowano dla pakietu *MATLAB/Simulink* w przyborniku *LYAPACK* [Pen00].

#### Algorytm BF Schura [SC89, Pen06]

Wyznaczenie macierzy transformacji  $\mathbf{T}$  przy użyciu algorytmu  $\mathbf{SR}$  w niektórych przypadkach wiąże się z dużymi problemami numerycznymi. Kosztowny obliczeniowo algorytm Schura umożliwia prawidłowe wyznaczenie macierzy transformacji, pomimo złego uwarunkowania gramianów. Algorytm ten należy do metod typu  $\mathbf{BF}$  (ang. balanced free). Oznacza to, że model zredukowany wyznaczany jest bez wcześniejszego zrównoważenia modelu, poprzez projekcję lewej i prawej bazy macierzy własnej (uporządkowany zbiór wektorów własnych) związanych z „dużymi” wartościami Hankela. Metoda ta korzysta z dekompozycji Schura oraz ortogonalnej rotacji Givensa. Algorytm przedstawiono w tab. B.4 (dodatek). Opracowany został również algorytm Schura niskiego rzędu (LRSM – ang. Low Rank Schur Method) [Pen06], który zaimplementowano dla pakietu *MATLAB/Simulink* w przyborniku *LYAPACK* [Pen00].

#### Algorytm Huanga [HY00]

W pracy [HY00] przedstawiono podejście wykorzystujące wektory własne do wyznaczenia macierzy transformacji. Polega ono na takim przekształceniu wektorów własnych, aby iloczyn  $l_i^* \mathbf{P}^{-1} l_i$  był równy jedności. Przekształcenie to można wyznaczyć z następującej zależności:

$$l_i = \frac{v_i}{\sqrt{v_i^* \mathbf{P}^{-1} v_i}} \quad (3.19)$$

gdzie:  $v_i$  jest wektorem własnym iloczynu gramianów

Macierz transformacji  $\mathbf{T}$  uzyskuje się jako iloczyn macierzy diagonalnej zawierającej na głównej przekątnej pierwiastki wartości szczególnych Hankela oraz odwrotnej macierzy wektorów własnych  $\mathbf{L}$ . Wadą tej metody jest konieczność wyznaczenia inwersji gramianu sterowalności oraz macierzy wektorów własnych. Powoduje to małą przydatność metody dla układów wysokiego rzędu. Algorytm redukcji został przedstawiony w tab. B.5.

#### Algorytm EIG-SR, EIG-BFSR

Zastosowana w algorytmach  $\mathbf{SR}$  oraz  $\mathbf{BFSR}$  dekompozycja Choleskiego gramianów sterowalności i obserwowalności może być wyznaczona wyłącznie dla macierzy dodatnio określonych. Na skutek błędów numerycznych algorytm ten nie zawsze może być zastosowany. Dekompozycję gramianów do postaci  $\mathbf{Z} = \mathbf{X}^* \mathbf{X}$  można również uzyskać wyznaczając ortogonalną bazę wektorów własnych oraz diagonalną, która zawiera wartości własne macierzy:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}_c \mathbf{S}_c \mathbf{U}_c^* = \left( \mathbf{U}_c \mathbf{S}_c^{1/2} \right) \left( \mathbf{U}_c \mathbf{S}_c^{1/2} \right)^* = \mathbf{S}^* \mathbf{S} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}_o \mathbf{S}_o \mathbf{U}_o^* = \left( \mathbf{U}_o \mathbf{S}_o^{1/2} \right) \left( \mathbf{U}_o \mathbf{S}_o^{1/2} \right)^* = \mathbf{R}^* \mathbf{R} \quad (3.21)$$

Obinata oraz Anderson zaproponowali algorytm wyznaczania macierzy transformacji bazujący na wyznaczeniu bazy wektorów własnych (dodatek tab. B.6), lecz jego wadą jest konieczność wyznaczenia inwersji macierzy transformacji  $\mathbf{T}$  [OA01].

Dla modeli o wielkiej złożoności często występują błędy numeryczne podczas wyznaczania najmniejszych wartości własnych gramianów sterowalności oraz obserwowalności. Efektem tego może być pojawienie się ujemnych wartości własnych gramianów (najczęściej o wartości nie większej niż  $-10^{-10}$ ), co dla modelu asymptotycznie stabilnego jest sprzeczne

z warunkiem (3.14). Mody związane z tymi wartościami własnymi mają jednak znikomy wpływ na właściwości modelu pierwotnego i mogą być pominięte podczas wyznaczania aproksymacji macierzy  $\mathbf{P}$  oraz  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{P} \cong \tilde{\mathbf{P}}_z = \tilde{\mathbf{U}}_c \tilde{\mathbf{S}}_c \tilde{\mathbf{U}}_c^* = \tilde{\mathbf{S}}^* \tilde{\mathbf{S}} \quad (3.22)$$

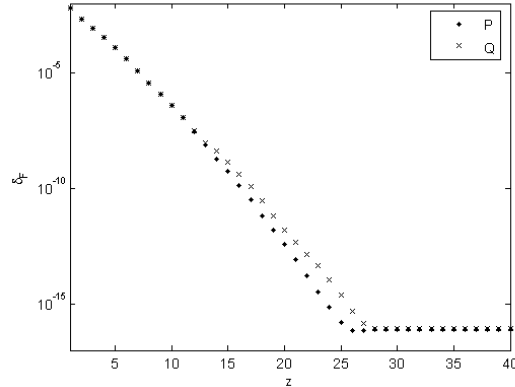
$$\mathbf{Q} \cong \tilde{\mathbf{Q}}_z = \tilde{\mathbf{U}}_o \tilde{\mathbf{S}}_o \tilde{\mathbf{U}}_o^* = \tilde{\mathbf{R}}^* \tilde{\mathbf{R}} \quad (3.23)$$

gdzie:  $\tilde{\mathbf{S}}_c = \text{diag}[\gamma_1, \dots, \gamma_z, 0 \dots 0]$   $\tilde{\mathbf{S}}_o = \text{diag}[\kappa_1, \dots, \kappa_z, 0 \dots 0]$  są macierzami diagonalnymi zawierającymi dodatnie wartości własne gramianów  $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_z > 0$ ,  $\kappa_1 > \kappa_2 > \kappa_z > 0$ .

Na rys. 3.1 przedstawiono normę błędu aproksymacji gramianów (3.24) w funkcji  $z$  (liczby zastosowanych wektorów oraz wartości własnych gramiana) do wyznaczenia jego aproksymacji dla modelu *head-cont* (SLICOT benchmark collection [CD02]).

$$\delta_{F_P} = \|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}|^2} \quad \delta_{F_Q} = \|\mathbf{Q} - \tilde{\mathbf{Q}}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\mathbf{Q} - \tilde{\mathbf{Q}}|^2} \quad (3.24)$$

Jak można zauważyć, poprawne oszacowanie wartości gramianów  $\mathbf{P}$  oraz  $\mathbf{Q}$  rośnie wraz z liczbą uwzględnionych wartości i wektorów własnych ( $z$ ). Na skutek błędów numerycznych aż 85 spośród 200 wartości własnych gramianów sterowalności oraz obserwowalności przyjmuje wartości ujemne. Rzędy gramianów wynoszą jednak odpowiednio 24 (dla  $\mathbf{P}$ ) oraz 26 (dla  $\mathbf{Q}$ ), a więc poprawna aproksymacja elementów macierzy gramianów wymaga dokładnego wyznaczenia około 25 największych wartości własnych gramianów.



Rys. 3.1. Dokładność aproksymacji gramianów  $\|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_z\|_F$  oraz  $\|\mathbf{Q} - \tilde{\mathbf{Q}}_z\|_F$  dla modelu *head-cont*

Dekompozycja gramianów względem bazy wektorów oraz wartości własnych może również zastąpić dekompozycję Choleskiego w algorytmach **SR** oraz **BFSR**. Zaproponowana modyfikacja standardowych algorytmów umożliwia wyznaczenia macierzy transformacji również dla modeli wysokiego rzędu (algorytmy **EIG-SR** oraz **EIG-BFSR** zaprezentowano w dodatku tab. B.7).

#### Porównanie algorytmów wyznaczania macierzy transformacji

Przedstawione algorytmy zrównoważenia modelu zostały porównane pod względem właściwości numerycznych określających ich przydatność dla redukcji modeli o dużej złożoności. Jednym z parametrów oceny właściwości numerycznych otrzymanej macierzy transformacji jest jej uwarunkowanie numeryczne. W przypadku dużej wartości tego parametru macierz ma właściwości macierzy osobliwej.

Sprawdzenie uwarunkowania macierzy transformacji  $\mathbf{T}$  oraz jej odwrotności  $\mathbf{L}$  wykonano dla dwóch przykładów:

- losowo generowanych modeli (rzęd modelu  $n=10 \div 1000$ ), dla których model zredukowany zawierał 1/5 zmiennych stanu modelu pierwotnego (rys. 3.2),

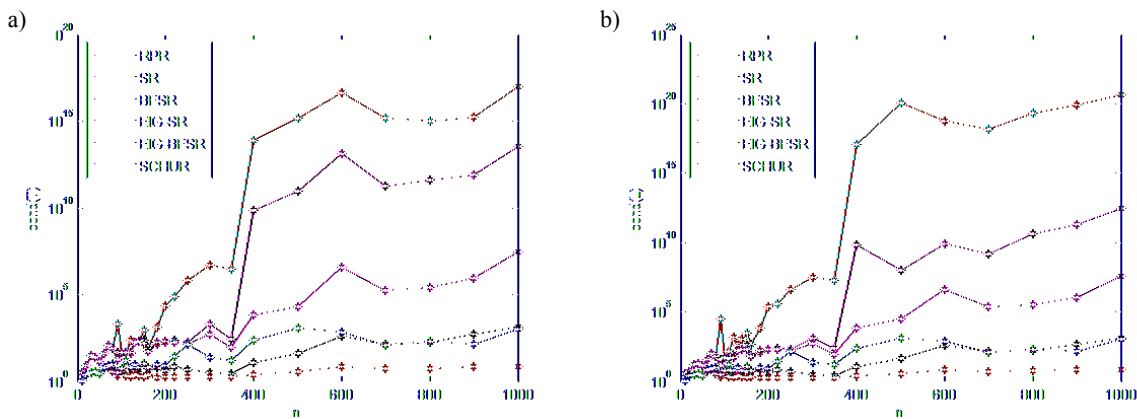
### 3. Redukcja modeli złożonych obiektów sterowania

- losowego wygenerowanego modelu rzędu  $n=300$  oraz zmianie rzędu modelu zredukowanego  $k$  (rys. 3.3).

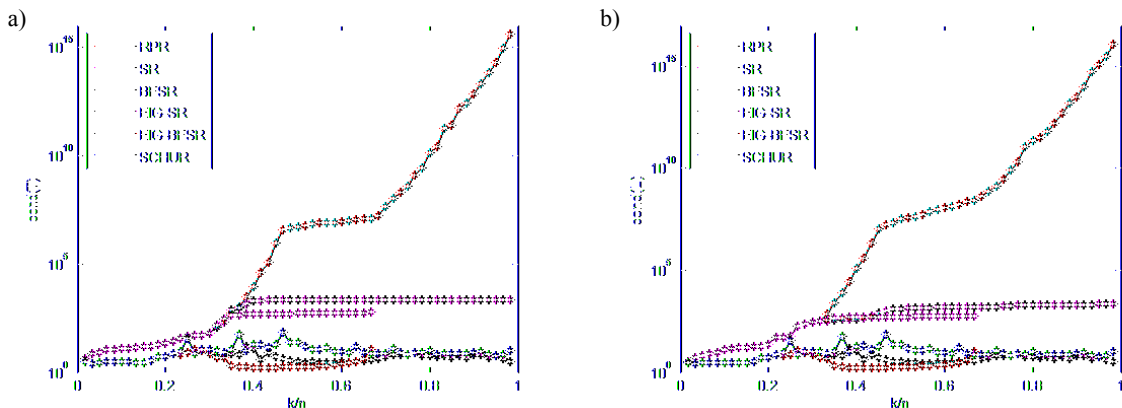
Ze względu na uwarunkowanie macierzy transformacji algorytmy można podzielić na trzy grupy :

- algorytmy o dobrym uwarunkowaniu macierzy (**BFSR**, **EIG-BFSR** oraz **Schura**),
- algorytmy o złym uwarunkowaniu (**RPR**, **SR**, **EIG-SR**),
- algorytmy nieprzydatne do redukcji modeli o rzędzie większym niż kilkanaście, ze względu na błędy numeryczne (algorytm Huang).

Na podstawie przedstawionych charakterystyk można stwierdzić, że wykorzystanie ortonormalnej dekompozycji względem bazy wektorów oraz wartości własnych charakteryzuje się lepszymi właściwościami numerycznymi niż analogiczny algorytm z dekompozycją Choleskiego (uwarunkowanie macierzy transformacji dla algorytmów **EIG-SR** oraz **EIG-BFSR** jest niższe niż od **SR** oraz **BFSR**).



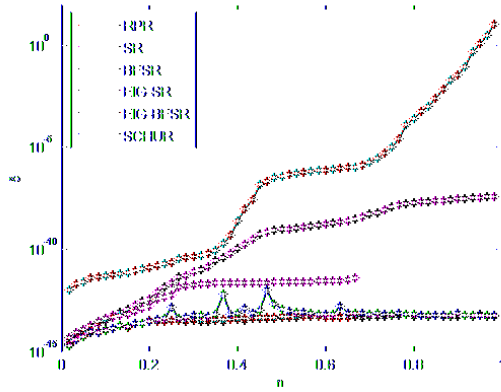
Rys. 3.2. Uwarunkowanie macierzy transformacji w funkcji rzędu modelu pierwotnego: a) macierz **T** b) macierz **L**



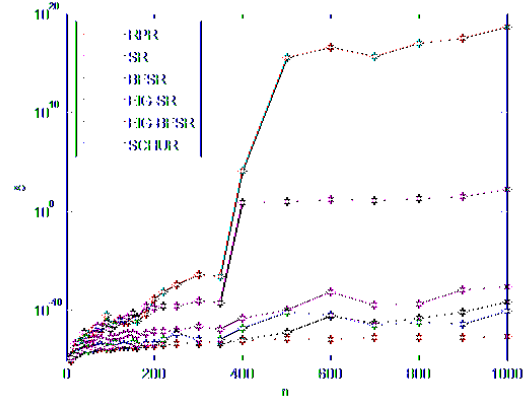
Rys. 3.3. Uwarunkowanie macierzy transformacji w funkcji rzędu modelu zredukowanego: a) macierz **T** b) macierz **L**

Algorytmy porównano również pod względem błędów numerycznych występujących w macierzach transformacji. W celu oceny algorytmów wyznaczono normę błędu aproksymacji, jako różnicę macierzy jednostkowej z iloczynem macierzy transformacji **T** oraz **L** [Ant05]:

$$\delta = \|TL - I\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |TL - I|^2} \quad (3.25)$$



Rys. 3.4.  $\|TL - I\|_F$  w funkcji rzędu modelu zredukowanego (model pierwotny - model losowy rząd 300)



Rys. 3.5.  $\|TL - I\|_F$  w funkcji rzędu modelu pierwotnego (rząd zredukowany  $k=n/5$ )

Przeprowadzone eksperymenty dowodzą, że algorytm **RPR** charakteryzuje się najslabzymi właściwościami numerycznymi. Dla modeli o rzędzie większym niż 200 algorytm ten nie daje poprawnych wyników redukcji. Najmniejszą normą błędów charakteryzują algorytmy **EIG-BFSR**, **BFSR** oraz Schura.

Najlepszymi właściwościami numerycznymi, zarówno pod względem uwarunkowania macierzy transformacji, jak również błędów numerycznych w macierzach **T** oraz **L**, charakteryzuje się algorytm **EIG-BFSR**. Jedyną wadą metody **EIG-BFSR** jest ograniczenie maksymalnego rzędu modelu zredukowanego do około 60% – 70% zmiennych modelu pierwotnego. W praktycznych zastosowaniach redukcji, rząd modelu zredukowanego  $k$  jest zazwyczaj znacznie niższy od rzędu modelu pierwotnego ( $n \gg k$ ). Nie powoduje to zatem znacznego ograniczenia przydatności metody **EIG-BFSR** dla redukcji modeli o znacznej złożoności.

### 3.2.2. Balanced Truncation Approximation (BTA)

Pierwszą metodę redukcji bazującą na teorii zrównoważonej realizacji modelu i jego redukcji poprzez usunięcie części zmiennych stanu (ang. Balanced Truncation Approximation) przedstawił Moore [Moo81]. Macierz transformacji uzyskana za pomocą jednego z algorytmów przedstawionych w rozdziale (3.2.1) pozwala zrównoważyć model. Macierze modelu zrównoważonego uzyskuje się poprzez przekształcenie macierzy modelu pierwotnego według następujących zależności:

$$\bar{A} = TAL, \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{C} = CL, \quad \bar{D} = D \quad (3.26)$$

Z modelu zrównoważonego można następnie wydzielić dwa podsystemy: dominujący  $\Sigma_1$  oraz niedominujący  $\Sigma_2$  (3.27). Kryterium podziału stanowią wartości szczególne Hankela, które umożliwiają jednoczesne oszacowanie błędów aproksymacji. Za model zredukowany przyjmuje się część dominującą  $\Sigma_1$  modelu zrównoważonego (3.28).

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} z \quad (3.27)$$

$$y = [\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Du$$

$$A_r = \bar{A}_{11}, \quad B_r = \bar{B}_1, \quad C_r = \bar{C}_1, \quad D_r = D \quad (3.28)$$

Odrzucenie składowych wektora stanu, którym odpowiadają małe wartości szczególne Hankela oznacza odrzucenie składowych, które mają mały wpływ na charakterystyki impulsowe układu wiążące wektor wyjść ( $y$ ) z wektorem wejść ( $u$ ). Dla dziedziny częstotliwości

ściowej norma błędu aproksymacji modelu zredukowanego została wyznaczona w pracy Glovera [Glo84]. Górnym oszacowaniem błędu aproksymacji jest podwojona suma tych wartości Hankela, które zostają odrzucone w wyniku redukcji modelu.

$$\|G(j\omega) - G_r(j\omega)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq 2 \sum_{i=k+1}^n \sigma_i \quad (3.29)$$

### 3.2.3. Singular Perturbation Approximation (SPA)

Metoda **BTA** stała się podstawą do opracowania innych algorytmów redukcji eliminujących jej wady. Jednym z algorytmów, który znacząco poprawia aproksymację dla stanu ustalonego oraz „niskich” częstotliwości jest metoda **SPA** (ang. Singular Perturbation Approximation) opracowana przez Liu oraz Andersona [LA89] na podstawie wcześniejszych badań [KS68] (inna nazwa metody to Low-Frequency Approximation Balancing) [Pra94, Chi96]. W wielu praktycznych zastosowaniach redukcji ważnym parametrem oceny poprawności modelu zredukowanego jest wartość błędu aproksymacji dla stanu ustalonego. Akceptowalny poziom błędu aproksymacji dla stanu ustalonego jest zazwyczaj wielokrotnie niższy niż wartość błędu na granicy zakresu adekwatności modelu. Metoda **BTA**, nie wprowadzając częstotliwościowych funkcji wagowych, powoduje konieczność przyjęcia najmniejszej z akceptowalnych wartości błędu (najczęściej będzie to maksymalny błąd aproksymacji dla stanu ustalonego). Wynikiem przyjęcia małej wartości błędu aproksymacji jest stosunkowo wysoki rząd modelu zredukowanego.

Metoda ta, identycznie jak metoda **BTA**, bazuje na zrównoważonej realizacji modelu, który można przedstawić w postaci równań (3.27). Jeżeli wektor  $x_2$  opisuje mody mające znaczny wkład dla „wysokich” częstotliwości (dla których dokładność aproksymacji ma małe znaczenie), jego pochodną można przyjąć za równą zero.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mathbf{A}_{11}x_1 + \mathbf{A}_{12}x_2 + \mathbf{B}_1u \\ 0 &= \mathbf{A}_{21}x_1 + \mathbf{A}_{22}x_2 + \mathbf{B}_2 \\ y_1 &= \mathbf{C}_1x_1 + \mathbf{C}_2x_2 + \mathbf{D}u \end{aligned} \quad (3.30)$$

Na podstawie tak przyjętego założenia, wprowadzane są poprawki dla macierzy modelu zredukowanego. Zmniejszają one znacznie błąd aproksymacji dla „niskich” częstotliwości, natomiast dla stanu ustalonego błąd ten dąży do zera.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r &= \bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{A}}_{21} \\ \mathbf{B}_r &= \bar{\mathbf{B}}_1 - \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2 \\ \mathbf{C}_r &= \bar{\mathbf{C}}_1 - \bar{\mathbf{C}}_2\bar{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{A}}_{21} \\ \mathbf{D}_r &= \mathbf{D} - \bar{\mathbf{C}}_2\bar{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dla metody **SPA** konieczne jest zrównoważenie części dominującej i niedominującej modelu, co oznacza że należy wyznaczyć macierz transformacji o wymiarze  $n \times n$ . W przypadku wykorzystania algorytmów typu **BF**, konieczne jest osobne wyznaczenie macierzy transformacji dla części dominującej oraz niedominującej modelu.

### 3.2.4. Metody wprowadzające wagi częstotliwościowe

Metody redukcji oparte na algorytmach **BTA** mają za zadanie minimalizację błędu aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej w całej dziedzinie częstotliwości. W wielu prak-

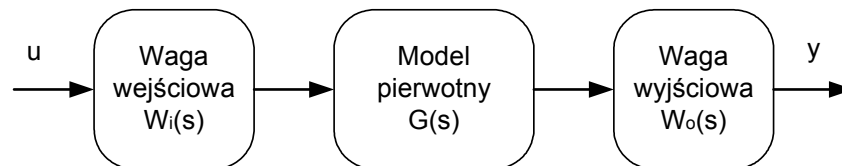
tycznych zadaniach redukcji szczególnie istotna jest minimalizacja błędu aproksymacji w określonym przedziale częstotliwości. Można to osiągnąć poprzez wprowadzenie częstotliwościowych funkcji wagowych.

Funkcje wagowe powodują modyfikację zmiennych stanu modelu, w wyniku której tłumione są mody odpowiedzialne za przebieg charakterystyki częstotliwościowej modelu poza wybranym zakresem częstotliwości. Ma to wpływ na zmniejszenie związanych z nimi wartości szczególnych Hankela, co w efekcie umożliwia usunięcie tych modów z dominującego podsystemu ( $\Sigma_1$ ).

W zależności od sposobu dołączenia funkcji wagowych do modelu pierwotnego można je podzielić na wejściowe ( $\mathbf{W}_i$ ) i wyjściowe ( $\mathbf{W}_o$ ) (rys. 3.6). Mogą one być wprowadzone zarówno w sposób bezpośredni (przez wprowadzenie filtrów o odpowiednim kształcie charakterystyki częstotliwościowej), jak również w sposób pośredni (przez modyfikację zależności, z których wyznaczane są gramiany sterowalności i obserwowalności).

Wśród metod wprowadzających funkcje wagowe można wyróżnić:

- metodę Frequency Weighted (**FW**) [Enn84, LC92, WSL99, VA01],
- metodę Frequency Domain (**FD**) [GJ90, AZN03, GA04],
- metodę time-limited balanced reduction (**TLBR**) [GJ90, GA03, GA04],



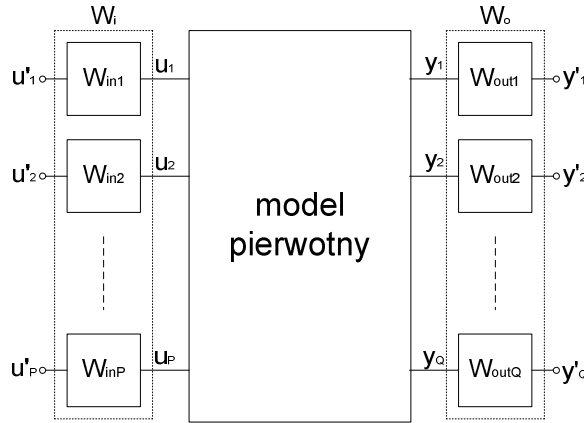
Rys. 3.6. Idea modyfikacji modelu pierwotnego poprzez wprowadzenie częstotliwościowych funkcji wagowych na wejściu i wyjściu modelu

### Metoda Frequency Weighted

Metoda **FW** jest uogólnieniem metody **BTA**, polegającym na bezpośrednim wprowadzeniu częstotliwościowych funkcji wagowych. Pierwszą tego typu metodę zaproponował Enns w 1984 roku [Enn84]. Właściwości funkcji wagowych określa się na podstawie znajomości charakterystyk amplitudowych modelu oraz zakresu częstotliwości, dla którego model ma być adekwatny. Dla modeli matematycznych podsystemów parownika (dla których ważnym parametrem jest błąd aproksymacji dla stanu ustalonego) poprawne wyniki redukcji uzyskano, wprowadzając filtry dolnoprzepustowe o określonej częstotliwości granicznej [SRZ04, Ryd05, SR05, SR06, IRS08]. Przy odpowiednim dobraniu współczynników wagowych, metoda **FW** umożliwia znaczne ograniczenie błędów aproksymacji modelu zredukowanego dla zadanego przedziału częstotliwości. Poważnym problemem praktycznym pozostaje wyznaczenie odpowiednich funkcji wagowych.

Metoda **FW** daje dużą swobodę w projektowaniu transmitancji częstotliwościowych funkcji wagowych. Jedynym warunkiem jest identyczna liczba wyjść funkcji wagowej  $\mathbf{W}_i$  oraz wejść modelu pierwotnego (analogicznie liczba wejść funkcji  $\mathbf{W}_o$  musi być równa liczbie wyjść modelu). Dla modeli matematycznych podsystemów parownika zdecydowano się na wprowadzenie funkcji wagowych w postaci filtrów dolnoprzepustowych na wszystkich wejściach i wyjściach modelu pierwotnego (rys. 3.7).





Rys. 3.7. Model zmodyfikowany poprzez wprowadzenie filtrów częstotliwościowych dla każdego z wejść i wyjść modelu pierwotnego

Metoda **FW** została opracowana dla stabilnych modeli oraz stabilnych transmitancji filtrów wagowych wejściowych  $W_i$  (macierze stanu  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ) i wyjściowych  $W_o$  (macierze stanu  $A_o$ ,  $B_o$ ,  $C_o$ ,  $D_o$ ). Wprowadzenie filtrów wagowych modyfikuje opis modelu pierwotnego w przestrzeni stanu, który można przedstawić następująco:

$$GW_i = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A}_i & \hat{B}_i \\ \hline \hat{C}_i & \hat{D}_i \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A & BC_i & BD_i \\ \mathbf{0} & A_i & B_i \\ \hline C & DC_i & DD_i \end{array} \right] \quad (3.32)$$

$$W_oG = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A}_o & \hat{B}_o \\ \hline \hat{C}_o & \hat{D}_o \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ \hline B_oC & A_o & B_oD \\ D_oC & C_o & D_oD \end{array} \right] \quad (3.33)$$

Gramian sterowalności obliczany jest wówczas na podstawie transmitancji modelu z uwzględnieniem wagi wejściowej ( $GW_i$ ), natomiast obserwowalności z uwzględnieniem wagi wyjściowej ( $W_oG$ ).

$$\hat{A}_i \hat{P} + \hat{P} \hat{A}_i^* = -\hat{B}_i \hat{B}_i^* \quad (3.34)$$

$$\hat{A}_o^* \hat{Q} + \hat{Q} \hat{A}_o = -\hat{C}_o^* \hat{C}_o \quad (3.35)$$

#### Algorytm Ennsa [Enn84]

W wyniku wprowadzenia wag częstotliwościowych gramiany sterowalności obserwowalności modelu zmodyfikowanego funkcjami wagowymi mają wymiar większy niż model pierwotny (gdyż uwzględniają dynamikę wprowadzonych filtrów wagowych). Na ich podstawie nie jest możliwe wyznaczenie macierzy transmitancji, gdyż jej wymiar byłby większy niż model podlegający zrównoważeniu. W algorytmie zaproponowanym przez Ennsa, za gramiany sterowalności i obserwowalności modelu pierwotnego przyjęto podmacierze gramianów (o wymiarze  $n \times n$ ) modeli zmodyfikowanych wprowadzeniem funkcji wagowych:

$$P = \hat{P}_{11}, \text{ gdzie: } \hat{P} = \left[ \begin{array}{cc} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{12}^* & \hat{P}_{22} \end{array} \right], \hat{P}_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.36)$$

$$Q = \hat{Q}_{11}, \text{ gdzie: } \hat{Q} = \left[ \begin{array}{cc} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} \\ \hat{Q}_{12}^* & \hat{Q}_{22} \end{array} \right], \hat{Q}_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.37)$$

Przyjęcie gramianów wyznaczonych na podstawie zależności (3.36) oraz (3.37) umożliwia uzyskanie poprawnych wyników redukcji dla modeli podsystemów parownika na poszczególnych poziomach hierarchii. Wartości szczególne Hankela modelu oraz filtrów wagowych umożliwiają również oszacowanie błędu aproksymacji modelu zredukowanego [KAM95]. Algorytm Ennsa gwarantuje zachowanie stabilności modelu zredukowanego wy-

łącznie przy zastosowaniu jednej wagi częstotliwościowej (ang. one-side weighting), druga z wag częstotliwościowych musi być filtrem wszechprzepustowym.

Gramiany wyznaczone z zależności (3.36) oraz (3.37) podstawiane są w miejsce gramianów modelu pierwotnego. Wszystkie kolejne kroki algorytmów redukcji są identyczne jak dla metod nie wprowadzających wag częstotliwościowych.

#### Algorytm LIN-CHIU [LC92]

Modyfikacja algorytmu Ennsa, która gwarantuje stabilność modelu zredukowanego w przypadku zastosowania obu wag częstotliwościowych (ang. two-sided weighting), zaprezentowana została przez C. Lin i T. Chiu w 1992r [LC92]. Celem modyfikacji jest uwzględnienie podmacierzy, które były pomijane w algorytmie Ennsa. Jeżeli podmacierze  $\hat{P}_{22}$  i  $\hat{Q}_{22}$  nie są macierzami osobliwymi, wówczas gramiany sterowalności i obserwowalności możemy przekształcić w identyczny sposób jak macierze modelu zredukowanego metodą SPA. Główną wadą tego podejścia jest konieczność dobrania takich transmitancji filtrów wagowych, aby żadne z zer i biegunów modelu pierwotnego nie uległo redukcji z transmitancją modelu pierwotnego [VA01].

$$P = \hat{P}_{11} - \hat{P}_{12} \hat{P}_{22}^{-1} \hat{P}_{12}^* \quad (3.38)$$

$$Q = \hat{Q}_{11} - \hat{Q}_{12} \hat{Q}_{22}^{-1} \hat{Q}_{12}^* \quad (3.39)$$

Zaproponowany został również metoda pośrednia pomiędzy algorytmami Ennsa i Lin-Chiu [VA01] wprowadzająca dodatkowe współczynniki  $\alpha_c$  oraz  $\alpha_o$ :

$$P = \hat{P}_{11} - \alpha_c \hat{P}_{12} \hat{P}_{22}^{-1} \hat{P}_{12}^* \quad (3.40)$$

$$Q = \hat{Q}_{11} - \alpha_o \hat{Q}_{12} \hat{Q}_{22}^{-1} \hat{Q}_{12}^* \quad (3.41)$$

Dla  $\alpha_c = \alpha_o = 0$  gramiany przyjmują wartość jak w metodzie Ennsa, natomiast  $\alpha_c = \alpha_o = 1$  są równe gramianom wyznaczonym metodą Lin-Chiu. Stabilność zredukowanego modelu jest gwarantowana, gdy współczynniki są równe jedności. Można oczekiwać, że w praktycznych zastosowaniach będzie ona również zachowana dla wartości zbliżonych do jedności.

#### Algorytm Wanga [WSL99, VA01, GA04]

Kolejna modyfikacja metody FW, gwarantująca stabilność modelu zredukowanego z zastosowaniem obu funkcji wagowych, zaproponowana została przez Wanga [WSL99].

Uwzględniając podział gramianów modelu zmodyfikowanego funkcjami wagowymi na podmacierze (3.32 oraz 3.33), równania Lapunowa (3.34 oraz 3.35) można przekształcić do następującej postaci:

$$A \hat{P}_{11} + \hat{P}_{11} A^* = -(BC_i \hat{P}_{12} + \hat{P}_{12}^* C_i^* B^* + BD_i D_i^* B^*) \quad (3.42)$$

$$A^* \hat{Q}_{11} + \hat{Q}_{11} A = -(\hat{Q}_{12} B_o C + C^* B_o^* \hat{Q}_{12} + C^* D_o^* D_o C) \quad (3.43)$$

Aby możliwe było zastosowanie algorytmu wyznaczenia dekompozycji Choleskiego gramianów bezpośrednio z równań Lapunowa (3.17 oraz 3.18), konieczna jest dekompozycja prawej strony równań (3.42) oraz (3.43) do postaci:

$$\tilde{B} \tilde{B}^* = BC_i \hat{P}_{12} + \hat{P}_{12}^* C_i^* B^* + BD_i D_i^* B^* \quad (3.44)$$

$$\tilde{C}^* \tilde{C} = \hat{Q}_{12} B_o C + C^* B_o^* \hat{Q}_{12} + C^* D_o^* D_o C \quad (3.45)$$

W ogólnym przypadku prawa strona równań (3.44) oraz (3.45) nie jest dodatnio określona i konieczne jest przyjęcie aproksymacji macierzy  $\tilde{B}$  oraz  $\tilde{C}$ . Wang zaproponował dekompozycję prawej strony równań (3.44) oraz (3.45) względem wektorów oraz wartości własnych, a następnie zastąpienie wszystkich ujemnych wartości własnych przez ich wartości bezwzględne [WSL99] (lub zera [VA01]):

$$\begin{aligned} USU^* &= BC_i \hat{P}_{12} + \hat{P}_{12}^* C_i^* B^* + BD_i D_i^* B^* \\ \tilde{B} &= U \operatorname{diag}(\sqrt{|s_1|}, \dots, \sqrt{|s_i|}, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} VHV^* &= \hat{Q}_{12} B_o C + C^* B_o^* \hat{Q}_{12}^* + C^* D_o^* D_o C \\ \tilde{C} &= \operatorname{diag}(\sqrt{|h_1|}, \dots, \sqrt{|h_j|}, 0, \dots, 0) V \end{aligned} \quad (3.47)$$

gdzie:  $S = \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n)$ ,  $H = \operatorname{diag}(h_1, \dots, h_n)$ ,  $|s_1| \geq |s_2| \geq \dots \geq |s_n| \geq 0$ ,  $|h_1| \geq |h_2| \geq \dots \geq |h_n| \geq 0$ ,  $i = \operatorname{rz\ddot{a}d}(BC_i \hat{P}_{12} + \hat{P}_{12}^* C_i^* B^* + BD_i D_i^* B^*)$ ,  $j = \operatorname{rz\ddot{a}d}(\hat{Q}_{12} B_o C + C^* B_o^* \hat{Q}_{12}^* + C^* D_o^* D_o C)$ .

Oszacowanie wartości macierzy  $\tilde{B}$  oraz  $\tilde{C}$  szybko rośnie wraz z liczbą uwzględnionych wartości i wektorów własnych, co umożliwia usunięcie części wektorów oraz wartości własnych bez zwiększenia błędu aproksymacji elementów macierzy. W celu wyznaczenia dekompozycji gramianów modelu zmodyfikowanego funkcjami wagowymi macierze  $\tilde{B}$  oraz  $\tilde{C}$  podstawia się w miejsce macierzy  $B$  oraz  $C$  w równaniach (3.17 oraz 3.18).

### Metoda Frequency-domain [GJ90, WB92, AZN03, GA04]

Przedstawione metody redukcji modeli (**BTA**, **SPA**, **FW**) bazują na gramianach sterowalności i obserwowalności obliczanych w dziedzinie czasu (3.4 oraz 3.5). Równanie Parsewala, wiążące dziedzinę czasu oraz częstotliwości, umożliwia przedstawienie gramianów w dziedzinie częstotliwości:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H B B^* H^* d\omega \quad (3.48)$$

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H^* C^* C H d\omega \quad (3.49)$$

gdzie:  $H = (j\omega I - A)^{-1}$ ,  $H^* = (-j\omega I - A)^{-1}$ .

Metoda **FD** (ang. Frequency Domain) wprowadza pojęcia gramianów sterowalności i obserwowalności dla określonego przedziału częstotliwości  $[\omega_1, \omega_2]$ . Przedział częstotliwości, dla którego liczone są gramiany, można przedstawić jako funkcję wagową równą 1 dla przedziału częstotliwości  $[\omega_1, \omega_2]$  oraz 0 poza tym przedziałem. Z tego względu metodę **FD** można rozpatrywać jako szczególny przypadek metody **FW**, w której zastosowane zostały idealne filtry pasmowo-przepustowe [GA04].

Gramiany sterowalności i obserwowalności dla przedziału częstotliwości  $[\omega_1, \omega_2]$  przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned} P_{[\omega_1, \omega_2]} &= P(\omega_2) - P(\omega_1) \\ P(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} H B B^* H^* d\omega \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} Q_{[\omega_1, \omega_2]} &= Q(\omega_2) - Q(\omega_1) \\ Q &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} H^* C^* C H d\omega \end{aligned} \quad (3.51)$$

Identycznie, jak dla gramianów w dziedzinie czasu, podstawę numerycznego wyznaczenia stanowi rozwiązanie macierzowego równania Lapunowa [GA04]:

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_{[\omega_1, \omega_2]} + \mathbf{P}_{[\omega_1, \omega_2]}\mathbf{A}^* = \mathbf{W}_{P[\omega_1, \omega_2]} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{Q}_{[\omega_1, \omega_2]} + \mathbf{Q}_{[\omega_1, \omega_2]}\mathbf{A} = \mathbf{W}_{Q[\omega_1, \omega_2]} \quad (3.53)$$

gdzie:  $\mathbf{W}_{P[\omega_1, \omega_2]} = \mathbf{W}_P(\omega_2) - \mathbf{W}_P(\omega_1)$ ,  $\mathbf{W}_{Q[\omega_1, \omega_2]} = \mathbf{W}_Q(\omega_2) - \mathbf{W}_Q(\omega_1)$ ,  
 $\mathbf{W}_P(\omega) = \mathbf{B}\mathbf{B}^*\mathbf{S}^* + \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{B}^*$ ,  $\mathbf{W}_Q(\omega) = \mathbf{C}^*\mathbf{C}\mathbf{S} + \mathbf{S}^*\mathbf{C}^*\mathbf{C}$ ,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} \mathbf{H}d\omega = \frac{j}{2\pi} \ln((j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})(-j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1})$$

Algorytm redukcji metodą **FD** jest analogiczny do metody **BTA**, z tą różnicą że w miejsce gramianów modelu podstawiane są gramiany obliczone dla zadanego przedziału częstotliwości.

W ogólnym przypadku macierze  $\mathbf{W}_{P[\omega_1, \omega_2]}$  oraz  $\mathbf{W}_{Q[\omega_1, \omega_2]}$  nie są dodatnio określone, co uniemożliwia wykorzystanie algorytmu Lapunowa, wyznaczającego dekompozycję gramianów sterowalności i obserwowalności ((3.17) oraz (3.18)). Problem ten może być rozwiązany identycznie jak w metodzie **FW** z wykorzystaniem algorytmu Wanga [GA04]:

- dekompozycja macierzy  $\mathbf{W}_{P[\omega_1, \omega_2]}$  oraz  $\mathbf{W}_{Q[\omega_1, \omega_2]}$  względem wektorów oraz wartości własnych:

$$\mathbf{W}_{P[\omega_1, \omega_2]} = \mathbf{M}\mathbf{\Delta}\mathbf{M}^* \quad (3.54)$$

$$\mathbf{W}_{Q[\omega_1, \omega_2]} = \mathbf{N}\mathbf{\Lambda}\mathbf{N}^* \quad (3.55)$$

gdzie:  $\mathbf{M}\mathbf{M}^* = \mathbf{N}\mathbf{N}^* = \mathbf{I}$  oraz  $\mathbf{\Delta}$  i  $\mathbf{\Lambda}$  macierze diagonalne wartości własnych:

$\mathbf{\Delta} = \text{diag}(|\delta_1|, \dots, |\delta_n|)$ ,  $|\delta_1| \geq |\delta_2| \geq \dots \geq |\delta_n| \geq 0$ ,

$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$ ,  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0$ ,

- Zamiana ujemnych wartości własnych na ich wartości bezwzględne (lub zera) i wyznaczenie aproksymacji macierzy  $\tilde{\mathbf{B}}$  oraz  $\tilde{\mathbf{C}}$ .

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{M} \text{diag}(\sqrt{|\delta_1|}, \dots, \sqrt{|\delta_i|}, 0, \dots, 0) \quad (3.56)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \text{diag}(\sqrt{|\lambda_1|}, \dots, \sqrt{|\lambda_j|}, 0, \dots, 0)\mathbf{N}^* \quad (3.57)$$

gdzie:  $i$  oraz  $j$  są rzędami macierzy:  $\mathbf{W}_{P[\omega_1, \omega_2]}$  oraz  $\mathbf{W}_{Q[\omega_1, \omega_2]}$ .

- Zastosowanie aproksymacji macierzy  $\tilde{\mathbf{B}}$  oraz  $\tilde{\mathbf{C}}$  w algorytmie wyznaczenia dekompozycji Choleskiego gramianów dla określonego przedziału częstotliwości (3.17) oraz (3.18).

Innym sposobem uniknięcia dekompozycji Choleskiego jest wykorzystanie algorytmu **EIG-BRSR**. W przeciwieństwie do przedstawionej metody, ujemne wartości własne macierzy  $\mathbf{W}_{P[\omega_1, \omega_2]}$  oraz  $\mathbf{W}_{Q[\omega_1, \omega_2]}$  nie są usuwane przed obliczaniem gramianów częstotliwościowych. Uzyskane zatem gramiany modelu stabilnego mogą nie być dodatnio określone. Aby możliwe była dekompozycja gramianów do postaci:  $\mathbf{P}_{[\omega_1, \omega_2]} = \mathbf{S}\mathbf{S}^*$  oraz  $\mathbf{Q}_{[\omega_1, \omega_2]} = \mathbf{R}^*\mathbf{R}$ , konieczne jest wprowadzenie dekompozycji względem wartości i wektorów własnych, a następnie zastąpieniu ujemnych wartości własnych zerami:

$$\mathbf{P}_{[\omega_1, \omega_2]} = \mathbf{U}_c \mathbf{S}_c \mathbf{U}_c^* \quad (3.58)$$

$$\mathbf{S} \cong \hat{\mathbf{S}} = \mathbf{U}_c \hat{\mathbf{S}}_c^{1/2} \mathbf{Z}$$

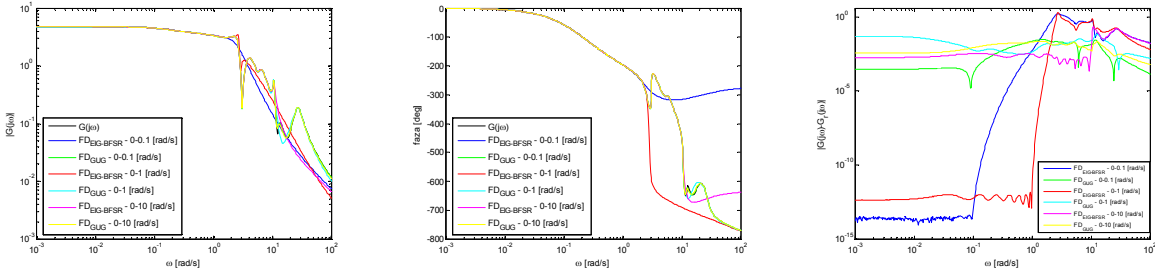
$$\mathbf{Q}_{[\omega_1, \omega_2]} = \mathbf{U}_o \mathbf{S}_o \mathbf{U}_o^* \quad (3.59)$$

$$\mathbf{R} \cong \hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{S}}_o^{1/2} \mathbf{U}_o^*$$

gdzie:  $\hat{\mathbf{S}}_c$  oraz  $\hat{\mathbf{S}}_o$  są macierzami diagonalnymi zawierającymi wyłącznie dodatnie wartości własne gramianów.

Połączenie metody **FD** z algorytmem **EIG-BFSR** umożliwiło poprawienie rezultatów redukcji w porównaniu do metody zaproponowanej przez Gugercina [GA04]. Na rys. 3.8 przed-

stawiono przykładowe wyniki redukcji dla losowo wygenerowanego modelu zawierającego 100 zmiennych stanu. Wykreślono charakterystyki modeli zredukowanych (rzęd  $k=10$ ) dla trzech funkcji wagowych określonych przedziałami częstotliwości  $(\omega_1, \omega_2)$  0-0,1 [rad/s], 0-1 [rad/s] oraz 0-10 [rad/s].



Rys. 3.8. Charakterystyka częstotliwościowa (a) modułu, (b) fazy oraz (c) błąd aproksymacji dla modelu rzędu  $n=100$  zredukowanego metodą **FD**

Analogicznie do metody **FW** (metoda **FD** stanowi szczególny przypadek metody **FW**, w której zastosowane zostały idealne filtry pasmowo-przepustowe) stabilność modelu zredukowanego można zagwarantować, wprowadzając wyłącznie jedną funkcję wagową (jeden gramian obliczony dla określonego zakresu częstotliwości). Zastosowanie w algorytmie redukcji gramianu sterowalności w zakresie częstotliwości  $[\omega_1, \omega_2]$  odpowiada wprowadzeniu idealnego filtra pasmowo-przepustowego na wejściu modelu, natomiast gramianu obserwowalności w zakresie częstotliwości  $[\omega_1, \omega_2]$  jest równoważne zastosowaniu filtra wyjściowego.

### Metoda Time-Limited Balanced Reduction [GJ90, GA03, GA04, Ant05]

Metoda **FD** wprowadza pojęcia gramianów sterowalności i obserwowalności dla zadanego przedziału częstotliwości  $[\omega_1, \omega_2]$ . Komplementarną do niej jest metoda **TLBR** (ang. Time-Limited Balanced Reduction), która wprowadza gramiany dla zadanego przedziału czasu  $[t_1, t_2]$ . Wprowadzenie granic całkowania można traktować jako funkcję wagi równą 1 dla przedziału czasu  $[t_1, t_2]$  oraz równą 0 poza tym przedziałem. Gramiany time-limited sterowalności i obserwowalności dla zadanego przedziału czasu  $[t_1, t_2]$  są definiowane następującymi zależnościami:

$$P_T = \int_{t_1}^{t_2} e^{A\tau} B B^* e^{A^*\tau} d\tau \quad (3.60)$$

$$Q_T = \int_{t_1}^{t_2} e^{A^*\tau} C^* C e^{A\tau} d\tau \quad (3.61)$$

gdzie:  $t_2 > t_1 \geq 0$ .

Identycznie jak w przypadku gramianów dla określonego przedziału częstotliwości, gramiany sterowalności i obserwowalności dla założonego przedziału czasu wyznaczone są na podstawie równania Lapunowa [GA03, GA04]:

$$A P_T + P_T A^* + V_c(T) = 0 \quad (3.62)$$

$$A^* Q_T + Q_T A + V_o(T) = 0 \quad (3.63)$$

gdzie:  $V_c(T) = e^{A t_1} B B^* e^{A^* t_1} - e^{A t_2} B B^* e^{A^* t_2}$ ,  $V_o(T) = e^{A^* t_1} C^* C e^{A t_1} - e^{A^* t_2} C^* C e^{A t_2}$ .

W ogólnym przypadku nie jest zagwarantowana dodatnia określoność macierzy  $V_c(T)$  oraz  $V_o(T)$ . Problem ten można jednak rozwiązać identycznie jak dla metody **FD** [GA04].

### 3.2.5. Hankel Norm Approximation (HNA)

Celem operacji redukcji jest uzyskanie modelu o jak mniejszej liczbie zmiennych stanu, która umożliwi poprawną aproksymację właściwości modelu pierwotnego. Zastosowanie redukcji **BTA** nie jest jednak optymalne względem żadnej z określonych norm błędu [Glo84]. W 1984 roku opublikowana została praca Glovera, w której przedstawiono metodę redukcji optymalną ze względu na normę Hankela (ang. Optimal approximation in the Hankel-norm) [Glo84]. Metoda **HNA** jest jednak bardziej złożona obliczeniowo w stosunku do metody **BTA**.

Pierwszym krokiem algorytmu **HNA** jest permutacja modelu zrównoważonego, która polega na przesunięciu modów związanych z  $k+1$  wartością Hankela:

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+r+1}, \dots, \sigma_n, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{k+r}) = \text{diag}(\Sigma_1, \sigma_{k+1} \mathbf{I}_r) \quad (3.64)$$

gdzie:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_{k+r} > \sigma_{k+r+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ .

Permutacja modelu pozwala na blokowy podział macierzy (3.65), które następnie zostają przekształcone według zależności (3.66) [Glo84].

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2] \quad (3.65)$$

gdzie:  $\bar{\mathbf{A}}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_1 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times p}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n-r)}$ .

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \Gamma(\sigma_{k+1}^2 \bar{\mathbf{A}}_{11}^* + \Sigma_1 \bar{\mathbf{A}}_{11} \Sigma_1 - \sigma_{k+1} \bar{\mathbf{C}}_1^* \mathbf{U} \bar{\mathbf{B}}_1^*) \\ \hat{\mathbf{B}} &= \Gamma^{-1}(\Sigma_1 \bar{\mathbf{B}}_1 + \sigma_{k+1} \bar{\mathbf{C}}_1^* \mathbf{U}) \\ \hat{\mathbf{C}} &= \bar{\mathbf{C}}_1 \Sigma_1 + \sigma_{k+1} \mathbf{U} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \hat{\mathbf{D}} &= \mathbf{D} - \sigma_{k+1} \mathbf{U} \end{aligned} \quad (3.66)$$

gdzie:  $\mathbf{U} = -\frac{(\bar{\mathbf{C}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2)}{(\bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2^*)}$ ,  $\Gamma = (\Sigma_1^* - \sigma_{k+1}^2 \mathbf{I})$

Przekształcony model  $\hat{\mathbf{G}}(s)$  charakteryzuje się  $k$  stabilnymi oraz  $(n-k-r)$  niestabilnymi biegunami. Celem redukcji jest wyznaczenie stabilnego podsystemu  $\hat{\mathbf{G}}(s)$ :

$$\hat{\mathbf{G}}(s) = \hat{\mathbf{G}}_-(s) + \hat{\mathbf{G}}_+(s) \quad (3.67)$$

gdzie:  $\lambda_i(\hat{\mathbf{G}}_-(s)) < 0$ ,  $\lambda_i(\hat{\mathbf{G}}_+(s)) > 0$ .

Dekompozycję modelu, który nie posiada wartości własnych na osi urojonej na część stabilną i antystabilną można wyznaczyć wprowadzając funkcję signum [Rob80].

Funkcję signum można wyznaczyć wykorzystując blokową diagonalizację Jordana macierzy  $\hat{\mathbf{A}}$ . W praktycznych obliczeniach wykorzystywana jest jednak iteracyjna metoda Newtona. W celu przyspieszenia zbieżności algorytmu należy wprowadzić dodatkowe skalowanie [BHV03, BQQ04]. Algorytm Newtona nie działa stabilnie, jeżeli macierz  $\hat{\mathbf{A}}$  jest źle uwarunkowana i posiada wartości własne bliskie osi urojonej. Jednym ze sposobów poprawienia stabilności działania algorytmu jest zastosowanie algorytmu Newtona z przesunięciem [BHV03].

Wprowadzenie wag częstotliwościowych umożliwia również modyfikację innych niż **BTA** metod redukcji np.: metody **HNA** lub **SPA**, przekształcając je w metody **FWHNA** [Var01] i **FWSPA** [VA01].

### 3.3. Metody redukcji oparte na metodach momentów

Do niewątpliwych zalet metod redukcji opartych na dekompozycji SVD należy zaliczyć gwarancję zachowania stabilności modelu zredukowanego. Metody te nie są jednak praktycznie wykorzystywane dla systemów większych niż  $10^4$  współrzędnych stanu [AS01, Ant05]. Spowodowane jest to znaczną złożonością obliczeniową oraz niepraktycznością algorytmów wyznaczenia gramianów tak olbrzymich modeli. W literaturze dla systemów większych niż  $10^4$  zmiennych stanu, proponowane jest wykorzystanie metod momentów (bazujących na wyznaczeniu podprzestrzeni Kryłowa) oraz SVD-Kryłowa, które charakteryzują się znacznie mniejszą złożonością obliczeniową. Głównymi wadami metod momentów jest brak zagwarantowania zachowania stabilności modelu zredukowanego (dla znacznej części opracowanych algorytmów). Zazwyczaj charakteryzują się także mniejszą dokładnością aproksymacji właściwości modelu w porównaniu z metodami bazującymi na dekompozycji SVD, a w szczególności z metodami wprowadzającymi wagi częstotliwościowe [GA00].

Uogólniony  $k$ -ty moment odpowiedzi impulsowej układu wokół punktu  $s = s_0$  definiowany jest zależnością (3.68) [Ant05]. Odpowiedź impulsową z transmitancją łączy transformata Laplace'a, więc moment można również zdefiniować jako  $k$ -tą różniczkę transmitancji modelu wokół punktu  $s = s_0$  (3.69).

$$\eta_k(s_0) = \int_0^{\infty} t^k \mathbf{h}(t) e^{-s_0 t} dt \quad (3.68)$$

$$\eta_k(s_0) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \mathbf{G}(s) \Big|_{s=s_0} = \begin{cases} \eta_0(s_0) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(s_0 \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} & \text{dla } k = 0 \\ \eta_k(s_0) = \mathbf{C}(s_0 \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-(k+1)} \mathbf{B} & \text{dla } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.69)$$

Redukcja metodą momentów opiera swoje działanie na możliwości przedstawienia transmitancji modelu w postaci rozwinięcia w szereg Laurenta wokół punktu  $s = s_0$  (3.70). Współczynniki tego rozwinięcia ( $\eta_i$ ) nazywane są momentami modelu w punkcie  $s_0$ . W wyniku operacji redukcji, z modelu pierwotnego wydzielone zostaje pierwszych  $l$  momentów, na podstawie których wyznaczona zostaje transmitancja modelu zredukowanego (3.71).

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{I} - (s_0 \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(s_0 - s))^{-1} (s_0 \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \\ &= \eta_0 + \eta_1(s_0 - s) + \eta_2(s_0 - s)^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i (s_0 - s)^i \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{G}_r(s) = \sum_{i=0}^l \eta_i (s_0 - s)^i \quad (3.71)$$

Z uogólnionej definicji momentów można wydzielić dwa szczególne przypadki, gdy  $s_0$  jest równe 0 oraz  $\infty$ . Jeżeli transmitancja modelu  $\mathbf{G}(s)$  zostaje rozwinięta w szereg MacLaurina (3.72) wokół punktu  $s_0 = 0$ , to momenty związane są z chwilami czasu odpowiedzi impulsowej. Zastosowanie rozwinięcia wokół punktu  $s_0 = 0$  nazwane jest *aproksymacją Padé*. Model zredukowany dobrze aproksymuje właściwości modelu pierwotnego dla stanu ustalonego i niskich częstotliwości. Transmitancję można również przedstawić w postaci rozwinięcia asymptotycznego wokół punktu  $s = \infty$  (3.73). Momenty nazywane są wówczas parametrami Markowa, natomiast metoda określana jest mianem *parital realization* lub „Pade at  $\infty$ ”.

$$\mathbf{G}_0(s) = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}s - \dots - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-(k+1)}\mathbf{B}s^k - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k s^k \quad (3.72)$$

gdzie:  $\eta_0 = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ ,  $\eta_k = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-(k+1)}\mathbf{B}$  dla  $k > 0$

$$\mathbf{G}_\infty(s) = \mathbf{D} + \mathbf{C}\mathbf{B}s^{-1} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}s^{-2} + \dots + \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B}s^{-(k+1)} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\eta}_k s^{-k} \quad (3.73)$$

gdzie:  $\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{D}$ ,  $\boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}$  dla  $k > 0$ .

Przy użyciu parametrów Markowa ma miejsce poprawna aproksymacja charakterystyki impulsowej wokół punktu  $t = 0$ . Model zredukowany zawiera więc mody odpowiedzialne za „procesy szybkie” (dobra aproksymacja właściwości modelu dla wysokich częstotliwości).

W ogólnym przypadku, gdy  $s_0 \neq 0$  oraz  $s_0 \neq \infty$ , metoda nazywana jest *przesuniętą aproksymacją Padé* [GGD94, FF95, Doo95, GGS96] (tab. 3.1). Metody momentów umożliwiają również przedstawienie transmitancji modelu w postaci rozwinięcia w szereg Laurenta wokół wielu punktów  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ . Metody wielopunktowe określa się mianem *rational interpolation* [Gri97, ABF99, Ant05, Her05, Sal05] i umożliwiają poprawną aproksymację w szerokim zakresie częstotliwości.

Tab. 3.1. Metody momentów

Częstotliwość wokół której następuje rozwinięcie		Rozwinięcie transmitancji	Wartość $i$ -tego momentu
parital realization (Padé at $\infty$ )	$s_0 = \infty$	$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{m}_{-i} s^{-i}$	$\mathbf{C}(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A})^{i-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}$
aproksymacja Padé	$s_0 = 0$	$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{m}_{i-1} s^{i-1}$	$-\mathbf{C}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E})^{i-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$
przesunięta aproksymacja Padé (ang. shifted Padé)	$s_0 = \sigma$	$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{m}_{i-1} (s - \sigma)^{i-1}$	$-\mathbf{C}((\mathbf{A} - \sigma\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E})^{i-1}(\mathbf{A} - \sigma\mathbf{E})^{-1}\mathbf{B}$
wielopunktowa aproksymacja Padé (ang. mulipoint Padé)	$s_0 = \sigma_k$ dla $k = 1, \dots, K$	$\sum_{i_k=1}^{\infty} \mathbf{m}_{i_k-1} (s - \sigma_k)^{i_k-1}$ dla $k = 1, \dots, K$	$-\mathbf{C}((\mathbf{A} - \sigma_k\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E})^{i_k-1}(\mathbf{A} - \sigma_k\mathbf{E})^{-1}\mathbf{B}$

### 3.3.1. Asymptotic Waveform Evaluation (AWE)

Jedna z najprostszych metod redukcji bazująca na metodzie momentów, zaproponowana została przez Pillage oraz Rohrera w 1990 roku [PR90]. Metoda wykorzystuje fakt, że transmitancję modelu można przedstawić w postaci rozwinięcia asymptotycznego wokół punktów  $s=0$  oraz  $s = \infty$  (3.72, 3.73). Opiera ona swoje działanie na aproksymacji właściwości modelu pierwotnego wielomianem *Padé*.

$$\mathbf{G}_r(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{q-1} b_k s^k}{\sum_{k=0}^q a_k s^k} = \frac{b_{q-1} s^{q-1} + b_{q-2} s^{q-2} + \dots + b_1 s + b_0}{a_q s^q + a_{q-1} s^{q-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0} \quad (3.74)$$

Współczynniki wielomianu  $P(s)$  oraz  $Q(s)$  można wyznaczyć na podstawie  $2q$  momentów modelu pierwotnego (3.75), z czego  $2q - r$  jest parametrami Markowa (indeksy ujemne) oraz  $r$  parametrów związanych z momentów odpowiedzi impulsowej (indeksy dodatnie). Przy założeniu, że współczynnik  $a_0$  jest równy jedności, pozostałe współczynniki wielomianu można wyznaczyć z następujących zależności [PR90, Lee90, Doo95, Bre00, Her05]:



$$\begin{bmatrix} m_{-(2q-r)} & m_{-(2q-r-1)} & \cdots & m_{-(q-r+1)} \\ m_{-(2q-r-1)} & m_{-(2q-r-2)} & \cdots & m_{-(q-r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{-(q-r+1)} & m_{-(q-r)} & \cdots & m_{(r-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_q \\ a_{q-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_{-(q-r)} \\ m_{-(q-r-1)} \\ \vdots \\ m_{(r-1)} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$\begin{cases} b_0 = m_0 a_0 \\ b_1 = m_0 a_1 + m_1 a_0 \\ b_2 = m_0 a_2 + m_1 a_1 + m_2 a_0 \\ \dots \\ b_{r-1} = m_0 a_{r-1} + m_1 a_{r-2} + \dots + m_{r-1} a_0 \\ b_r = -m_{-(q-r)} a_q - m_{-(q-r-1)} a_{q-1} - \dots - m_{-1} a_{r+1} \\ \dots \\ b_{q-2} = -m_{-2} a_q - m_{-1} a_{q-1} \\ b_{q-1} = -m_{-1} a_q \end{cases} \quad (3.76)$$

gdzie:  $m_k = -\mathbf{CA}^{-k-1}\mathbf{B}$ , dla  $k \geq 0$  są momentami czasu odpowiedzi impulsowej, dla  $k < 0$  parametrami Markowa.

Równanie z którego wyznaczane są współczynniki  $a_i$  (3.75) często jest źle uwarunkowane, co powoduje małą przydatność metody dla redukcji złożonych modeli dynamicznych.

Opracowany algorytm może być rozszerzony także na układy **MIMO**, dla których momenty  $m_x$  są macierzami o rozmiarach  $m \times p$ . Współczynniki  $a_i$  wielomianu  $Q(s)$  są identyczne dla wszystkich torów modelu **MIMO**. Można je wyznaczyć, rozwiązując zestaw  $q$  równań skalarnych spośród dostępnych  $q \times p \times m$  równań (3.75). Metoda **AWE** umożliwia dowolny wybór równań [Bre00]. Dla modeli o dużej liczbie wejść i wyjść, powoduje to wyznaczenie współczynników wielomianu mianownika transmitancji na podstawie niewielkiej części równań. Sposób wyboru równań ma znaczny wpływ na wartość otrzymanych współczynników  $a_i$  oraz  $b_i$ .

### 3.3.2. Algorytmy Lanczosa oraz Arnoldiego

Bezpośrednie wyznaczenie wartości momentów powoduje znaczne problemy natury numerycznej. Ogranicza to w znacznym stopniu przydatność metody **AWE** dla celów redukcji. Znacznie większe znaczenie praktyczne osiągnęły metody redukcji opierające swoje działanie na wyznaczeniu podprzestrzeni Kryłowa (ang. Krylov-based Approximation Methods). Metody te wymagają wyznaczenia bazy ortonormalnej. Klasyczna ortogonalizacja Grama-Schmidta jest mało dokładna numerycznie. Dlatego też duże znaczenie osiągnęły dwa algorytmy:

- algorytm Arnoldiego,
- niesymetryczny algorytm Lanczosa.

#### Algorytm Lanczosa

Algorytm Lanczosa opracowany został w celu wyznaczenia wartości własnych macierzy symetrycznych oraz niesymetrycznych. Może on być również wykorzystany do wyznaczenia ortogonalnych podprzestrzeni Kryłowa (3.77) związanych z macierzami sterowalności  $\mathbf{O}_k$

(podprzestrzeń wejściowa Kryłowa) i obserwowalności  $\mathbf{R}_k$  (podprzestrzeń wyjściowa Kryłowa) [Ant05].

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, b) &= \text{span}\{b, \mathbf{A}b, \dots, \mathbf{A}^{k-1}b\} \\ \mathcal{K}_k(\mathbf{A}^*, c^*) &= \text{span}\{c^*, \mathbf{A}^*c^*, \dots, (\mathbf{A}^*)^{k-1}c^*\}\end{aligned}\quad (3.77)$$

$$\mathbf{O}_k = \begin{bmatrix} c \\ c\mathbf{A} \\ \vdots \\ c\mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_k = [b \quad \mathbf{A}b \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1}b] \quad (3.78)$$

Bazując na rozwinięciu transmitancji modelu w szereg Laurenta wokół punktu  $s = \infty$ , można zdefiniować macierz Hankela  $\mathbf{H}_k$ , która jest równa iloczynowi macierzy sterowalności i obserwowalności [Ant05, Gil06]:

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_k \\ m_2 & m_3 & \dots & m_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_k & m_{k+1} & \dots & m_{2k-1} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_k \mathbf{R}_k \quad (3.79)$$

Jeżeli wyznaczniki macierzy Hankela są niezerowe ( $\det(\mathbf{H}_i) \neq 0$  dla  $i = 1, \dots, k$ ), możliwe jest zastosowanie dekompozycji  $LU$ , w wyniku której wartości bezwzględne elementów na diagonalu macierzy  $\mathbf{L}$  oraz  $\mathbf{U}$  są sobie równe:

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad \mathbf{L}_{(i,i)} = \pm \mathbf{U}_{(i,i)} \quad (3.80)$$

Na podstawie uzyskanej dekompozycji macierzy Hankela można zdefiniować dwie bazy biortogonalne (tzn. że zachodzi równość  $\mathbf{W}^*\mathbf{V} = \mathbf{I}$ ) w postaci:

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{O}_k \quad (3.81)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}_k \mathbf{U}^{-1} \quad (3.82)$$

W wyniku zastosowania procedury Lanczosa dla modelu **SISO** otrzymuje się model zredukowany, którego macierz stanu  $\mathbf{A}_r$  jest macierzą trójdiagonalną rzędu  $k$ , natomiast wektory  $b_r$  oraz  $c_r^*$  zawierają jeden element niezerowy:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_r = \mathbf{W}_k^* \mathbf{A} \mathbf{V}_k = \mathbf{T}_k &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & 0 \\ \delta_2 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_k \\ 0 & & \delta_k & \alpha_k \end{bmatrix} \quad b_r = \mathbf{W}_k^* b = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ c_r = c \mathbf{V}_k &= [\beta_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]\end{aligned}\quad (3.83)$$

Bezpośrednie wyznaczenie wartości momentów jest trudne ze względów numerycznych. Klasyczny algorytm Lanczosa wyznacza kolejne wektory macierzy  $\mathbf{W}$  oraz  $\mathbf{V}$ , które są rozwiązaniem układu równań w postaci:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \mathbf{V}_k &= \mathbf{V}_k \mathbf{T}_k + v_{k+1} [0, \dots, 0, 1] \\ \mathbf{A}^* \mathbf{W}_k &= \mathbf{W}_k \mathbf{T}_k^* + w_{k+1} [0, \dots, 0, 1]\end{aligned}\quad (3.84)$$

gdzie:  $\mathbf{V}_k = [v_1, v_2, \dots, v_k]$ ,  $\mathbf{W}_k = [w_1, w_2, \dots, w_k]$ ,  $\mathbf{T}_k = \mathbf{W}_k^* \mathbf{A} \mathbf{V}_k$ ,  $\mathbf{W}_k^* \mathbf{V}_k = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{W}_k^* v_{k+1} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{V}_k^* w_{k+1} = \mathbf{0}$ .

Wynikiem działania algorytmu są biortogonalne macierze  $\mathbf{W}_k$ ,  $\mathbf{V}_k$  oraz trójdiagonalna macierz  $\mathbf{T}_k$ . Algorytm Lanczosa przedstawiono w dodatku w tab. B.8 [Sal05].

Algorytm Lanczosa (dla modeli **SISO**) wymaga podania dwóch wektorów oraz jednej macierzy startowej ( $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\tilde{b}$  oraz  $\tilde{c}$ ). Jeżeli charakterystyka częstotliwościowa modelu powinna poprawnie aproksymować „wysokie” częstotliwości, to parametrami startowymi algorytmu są macierz stanu oraz wektory wejścia i wyjścia modelu. W ogólnym przypadku, gdy transmi-

tancję modelu  $\mathbf{G}(s)$  przedstawiono w postaci rozwinięcia wokół punktu  $s = s_0$  (3.70), wektory oraz macierz startowa przyjmują następującą postać [Her05]:

$$\tilde{\mathbf{A}} = (s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}, \tilde{\mathbf{b}} = (s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \quad (3.85)$$

Macierze modelu zredukowanego, uzyskane z zastosowaniem algorytmu Lanczosa, można przedstawić w następującej postaci [FF95, Her05]:

$$\mathbf{E}_r = -\mathbf{T}_k, \mathbf{A}_r = -(\mathbf{I} + s_0\mathbf{T}_k), \mathbf{b}_r = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_r = [\delta_1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (3.86)$$

Przedstawiony klasyczny algorytm Lanczosa jest potencjalnie niestabilny. Jeżeli podczas wykonywania kolejnych pętli algorytmu nastąpi utrata biortogonalności ( $\hat{\mathbf{v}}^*\hat{\mathbf{w}} = 0$ ), niemożliwe jest prowadzenie kolejnych obliczeń i algorytm musi zostać zakończony. Uniemożliwia to zwiększenie liczby kolumn macierzy  $\mathbf{V}$  oraz  $\mathbf{W}$ , co w efekcie ogranicza możliwy do uzyskania rząd modelu zredukowanego. Problem ten można rozwiązać poprzez zastosowanie reortogonalizacji [Bol94].

### Algorytm Arnoldiego

Drugim powszechnie stosowanym algorytmem wyznaczenia podprzestrzeni Kryłowa jest algorytm Arnoldiego. Wyznacza on bazę ortonormalną w wyniku dekompozycji  $QR$  macierzy sterowalności  $\mathbf{R}_k$  (3.78):

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{V}\mathbf{U} \quad (3.87)$$

gdzie:  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times k}$  oraz  $\mathbf{V}^*\mathbf{V} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{U}$  jest macierzą trójkątną górną.

Wyznaczona baza ortonormalna umożliwia uzyskanie modelu zredukowanego, którego macierz stanu  $\mathbf{A}_r$  jest macierzą Hessenberga [Ant05].

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{V}_k^*\mathbf{A}\mathbf{V}_k = \mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,k} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,k} \\ & h_{3,2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & h_{k-1,k-1} & h_{k-1,k} \\ & & & h_{k,k-1} & h_{k,k} \end{bmatrix}, \mathbf{b}_r = \mathbf{V}_k^*\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\mathbf{c}_r = \mathbf{c}\mathbf{V}_k = [\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_k]$$

Pierwotnie algorytm Arnoldiego (identycznie jak algorytm Lanczosa) opracowany został w celu wyznaczenia wartości własnych macierzy. W klasycznym algorytmie Arnoldiego dla układów **SISO**, w każdym kroku wyznaczany jest wektor ortonormalny  $v_i$ , który jest rozwiązaniem równania w postaci:

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_k\mathbf{T}_k + [0, \cdots, 0, v_{k+1}] \quad (3.89)$$

gdzie:  $\mathbf{V}_k = [v_1, v_2, \cdots, v_k]$ ,  $\mathbf{V}_k^*\mathbf{V}_k = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{T}_k$  – macierz Hessenberga.

Algorytm Arnoldiego przedstawiono w dodatku w tab. B.9 [Gil06].

Przedstawiony algorytm wyznacza bazę ortonormalną, bazując na wyznaczeniu wyłącznie jednej (wejściowej) podprzestrzeni Kryłowa ( $\mathcal{K}_Q(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ). Oczywiście możliwe jest wybranie komplementarnej bazy ortonormalnej, bazującej na wyznaczeniu wyjściowej podprzestrzeni Kryłowa ( $\mathcal{K}_Q(\mathbf{A}^*, \mathbf{c}^*)$ ). W obu przypadkach w celu wyznaczenia macierzy ortonormalnej wykorzystywane jest pierwszych  $Q$  momentów modelu. Z tego względu klasyczny algorytm Arnoldiego nazywany jest jednostronnym (*ang. one-side*). Metody, które wykorzystują obie podprzestrzenie Kryłowa, nazywane są dwustronnymi (*ang. two-side*). Należy od nich algorytm Lanczosa oraz metoda *two-side Arnoldi*. Algorytm ten wyznacza ortogonalne macierze

$W$  i  $V$  na podstawie dwóch niezależnych algorytmów Arnoldiego (dla wejściowej i wyjściowej podprzestrzeni Kryłowa):

$$\begin{aligned} W_k &= \mathcal{K}_k(A, b), V_k = \mathcal{K}_k(A^*, c^*) \\ A_r &= W_k^* A V_k, b_r = W_k^* b, c_r = c V_k \end{aligned} \quad (3.90)$$

### Algorytmy Lanczosa oraz Arnoldiego dla modeli MIMO

Klasyczne algorytmy Lanczosa oraz Arnoldiego opracowane dla modeli SISO, zostały uogólnione na modele o wielu wejściach i wyjściach. Wśród opracowanych algorytmów można wyróżnić MPVL (ang. *Matrix Pade via Lanczos*) [Fre03] oraz blokowe algorytmy Lanczosa i Arnoldiego [Bol94, ABF99, Her05, Sal05].

Dla modelu MIMO momenty są macierzami o rozmiarach  $p \times m$ . Dlatego też każda następna kolumna macierzy biortogonalnych  $W$  oraz  $V$  związana jest z kolejnymi elementami momentu. Uogólniony klasyczny algorytm Lanczosa dla modeli MIMO polega na wyznaczeniu blokowych podprzestrzeni Kryłowa, które można zdefiniować następująco:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_Q(\check{A}, \check{B}) &= \text{span}\{\check{B}, \check{A}\check{B}, \dots, \check{A}^{Q-1}\check{B}\} \\ \mathcal{K}_Q(\check{A}^*, \check{C}^*) &= \text{span}\{\check{C}^*, \check{A}^*\check{C}^*, \dots, (\check{A}^*)^{Q-1}\check{C}^*\} \end{aligned} \quad (3.91)$$

gdzie:  $\check{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  oraz wektory macierzy  $\check{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$   $\check{C}^* \in \mathbb{R}^{n \times m}$  są wektorami startowymi algorytmu.

Celem algorytmu Lanczosa jest wyznaczenie biortogonalnych macierzy  $W$  oraz  $V$  o liniowo niezależnych wektorach. W tym celu konieczne jest usunięcie wszystkich liniowo zależnych wektorów startowych, a następnie po każdej iteracji algorytmu (która wyznacza kolejne kolumny macierzy  $W$  oraz  $V$ ) należy wykonać następujące operacje [Sal05]:

- sprawdzenie biortogonalności wektorów

Utrata biortogonalności wektorów ( $v_j^* w_j = 0$ ) uniemożliwia wyznaczenie kolejnych wektorów macierzy  $W$  oraz  $V$ . Algorytm musi zostać przerwany, co ogranicza możliwy do uzyskania rząd modelu zredukowanego. Ze względu na niedokładności numeryczne obliczeń, przyjmuje się, że wektory utraciły biortogonalność, jeśli norma iloczynu wektorów  $r_j$  i  $l_j$  (wektory przed normalizacją) jest mniejsza niż przyjęta niewielka wartość dodatnia  $\varepsilon_1$  ( $\|r_j^* l_j\|_2 \leq \varepsilon_1$ ).

- sprawdzenie liniowej niezależności wektorów

Wraz ze wzrostem liczby wektorów macierzy  $W$  oraz  $V$  rośnie prawdopodobieństwo pojawienie się liniowo zależnych wektorów (jeżeli norma wektora  $r_j$  jest równa zero oznacza to, że jest on liniową kombinacją wektorów macierzy  $V$ ). Wszystkie liniowo zależne kombinacje wektorów należy usunąć (ang. *deflation*). Identycznie jak dla sprawdzenia biortogonalności, wektory uznaje się za liniowo zależne, jeśli norma wektora  $r_j$  jest mniejsza niż przyjęta niewielka dodatnia wartość  $\varepsilon_2$  ( $\|r_j\|_2 \leq \varepsilon_2$ ). W takim przypadku wektor taki usuwa się z macierzy  $V$ , a jego miejsce zastępuje kolejny wyznaczony wektor. Identycznie sprawdza się niezależność wektorów macierzy  $W$  poprzez sprawdzenie normy wektora  $l_j$ .

W blokowym algorytmie Lanczosa (dodatek tab. B.10) wyznaczone są dwie podprzestrzenie Kryłowa:  $\mathcal{K}_Q(\check{A}, \check{B})$  oraz  $\mathcal{K}_Q(\check{A}^*, \check{C}^*)$ , gdzie  $\check{A}, \hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\check{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\check{C}^* \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Umożliwia to uzyskanie baz biortogonalnych dla dwóch różnych rozwinięć transmitancji wokół punktów  $s_0$  ( $\check{A}, \check{B}$ ) oraz  $s_1$  ( $\check{A}^*, \check{C}^*$ ).

Ze względu na utratę biortogonalności algorytm Lanczosa umożliwia zazwyczaj wyznaczenie stosunkowo ograniczonej bazy wektorów. Uniemożliwia to uzyskanie wysokich rzędów modelu zredukowanego. W porównaniu z tym algorytmem, metoda *two-sided Arnoldi* (dodatek tab. B.11 oraz tab. B.12) charakteryzuje się większą stabilnością numeryczną oraz prostotą implementacji.

Metoda Arnoldiego dla układów **MIMO** związana jest z niezależnym wyznaczeniem dwóch blokowych podprzestrzeni Kryłowa (3.91). Identycznie jak dla metody Lanczosa, po każdej pętli algorytmu Arnoldiego sprawdzana jest liniowa niezależność obliczonego wektora macierzy ortogonalnej. Innym sposobem usunięcia liniowo zależnych wektorów jest zastosowanie dekompozycji QR [Bol94].

#### 3.3.3. Wielopunktowe metody momentów

Przedstawione w poprzednim rozdziale metody redukcji, bazujące na podprzestrzeniach Kryłowa, opierały swoje działanie na rozwinięciu transmitancji modelu w szereg Laurenta wokół jednego zadanego punktu  $s_0$  (3.70). W ogólnym przypadku możliwe jest przedstawienie transmitancji jako zbioru rozwinięć wokół szeregu punktów  $s_i$  (ang. Rational Krylov).

Metodę momentów umożliwiającą zastosowanie interpolacji wokół wielu punktów  $\{s_0, s_1, \dots, s_j\}$ , można przestawić jako uogólnienie koncepcji rozwinięcia wokół jednego punktu  $s_0$ . Transmitancja takiego modelu przedstawiona może być w następujących sposób:

$$G(s) = \sum_j \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(j) (s_j - s)^i \quad (3.92)$$

gdzie:  $\eta_i(j)$  jest kolejnym  $i$ -tym momentem związanym z  $j$ -tym punktem interpolacyjnym.

W metodach jednopunktowych, ze względu na konieczność prawidłowej aproksymacji właściwości modelu układu sterowania w stanie ustalonym, najczęściej wybierany jest punkt  $s_0 = 0$ . Powoduje to jednak ograniczenie zakresu adekwatności modelu nawet dla stosunkowo wysokiego rzędu modelu zredukowanego. Zastosowanie wielu punktów rozwinięcia  $\{s_0, s_1, \dots, s_j\}$  powoduje, że właściwości dynamiczne obiektu liniowego są identyfikowane w wielu punktach jego charakterystyki częstotliwościowej, co znacznie rozszerza zakres adekwatności modelu zredukowanego. Dobór odpowiednich punktów interpolacji umożliwia zmniejszenie błędu aproksymacji dla określonego przedziału częstotliwości (identycznie jak dobór parametrów filtrów wagowych dla metody **FW**). W tym celu w pracy [GA03a] zaproponowano wybór punktów interpolacji równych zanegowanym wartościom biegunów modelu pierwotnego ( $s_j = -\lambda_j(A)$ ).

Optymalny model zredukowanego można wyznaczyć poprzez dobór trzech parametrów:

- liczby punktów interpolacji –  $J$ ,
- wartości poszczególnych punktów interpolacji –  $s_j$ ,
- liczby momentów przypadających na jeden punkt interpolacji –  $I_j$ .

Identycznie jak dla metod jednopunktowych największe znaczenie praktyczne osiągnęły procedury Lanczosa i Arnoldiego.

#### Dual Rational Arnoldi

Wielopunktowy algorytm Arnoldiego dla modeli **SISO** jest prostym uogólnieniem algorytmu jednopunktowego. Przedstawiony w dodatku (tab B.13) algorytm umożliwia jednoczesne wyznaczenie obu macierzy ortogonalnych **V** oraz **W**. Wyszczególnić można w nim dwa podstawowe kroki:

- wyznaczenie wektora startowego  $v_1$  dla kolejnych punktów interpolacji,
- klasyczny algorytm Arnoldiego dla wybranego punktu interpolacji, który wyznacza  $I_j$  kolumn macierzy ortonormalnych **V** oraz **W**.

Algorytm może być również w łatwy sposób uogólniony na układy **MIMO**. Pojawiają się jednak problemy numeryczne związane z wystąpieniem liniowo zależnych wektorów. Blo-

kowe podprzestrzenie Kryłowa gwarantują pełny rząd macierzy  $\mathbf{W}$  oraz  $\mathbf{V}$  wyłącznie dla układów **SISO**. Dla modeli **MIMO** konieczne jest zatem dodanie dodatkowych warunków sprawdzających liniową niezależność wyznaczonych kolumn macierzy ortonormalnych. Innym sposobem usunięcia liniowo zależnych wektorów jest wykorzystanie dekompozycji QR zaproponowanej przez Boley'a [Bol94]. Wielopunktowy algorytm *two-sided Arnoldi* dla modeli **MIMO** z dekompozycją QR przedstawiony został w dodatku (tab. B.14 oraz tab. B.15). Liczby punktów interpolacji, liczby momentów przypadających na jeden punkt interpolacji oraz wartości punktów interpolacji mogą być różne dla obu baz ortonormalnych.

### 3.3.4. Fourier Model Reduction

Algorytm **FMR** bazuje na rozwinięciu transmitancji modelu liniowego w szereg dyskretno-czasowych współczynników Fouriera [WM03, WM05]. Otrzymany tą metodą model zredukowany dobrze aproksymuje właściwości dynamiczne obiektu zwłaszcza dla niskich częstotliwości. Ze względu na brak możliwości zastosowania filtrów wagowych jest on jednak zazwyczaj mniej dokładny niż otrzymany za pomocą metod **FW**.

Metoda **FMR**, opracowana dla modeli dyskretnych, umożliwia również redukcję modeli ciągłych poprzez zastosowanie konwersji modelu pierwotnego z dziedziny ciągłej do dyskretnej i odwrotnej konwersji dla uzyskanego modelu zredukowanego. Konwersję tą można uzyskać poprzez transformację biliniową. W literaturze zaproponowano zastosowanie transformacji biliniowej w postaci:  $s = \omega_0 \frac{z-1}{z+1}$  [GKL89, WM03, WM05, GW08].

Transmitancja dyskretna  $\mathbf{G}(z)$  jest stosunkiem transformat  $\mathcal{Z}$  odpowiedzi  $y(k)$  do wymuszenia  $u(k)$ . Gdy sygnał wejściowy jest impulsem Kroneckera (3.93), wówczas transformata sygnału wyjściowego (tj. jego odpowiedź impulsowa (3.94)) jest równa transmitancji modelu  $G(z) = Y(z)$ .

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{dla } k \neq 0 \end{cases} \quad U(z) = 1 \quad (3.93)$$

$$y(k) = h(k) = \begin{cases} c\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b} & \text{dla } k \geq 1 \\ d & \text{dla } k = 0 \end{cases} \quad (3.94)$$

Próbki sygnału wyjściowego modelu dyskretnego  $y(k)$  są współczynnikami rozwinięcia jego transmitancji  $Y(z)$  w szereg Laurenta. Transmitancję modelu  $Y(z)$  można zatem rozwinąć w szereg kolejnych malejących potęg  $z$ .

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k} \quad (3.95)$$

Na podstawie właściwości transformaty  $\mathcal{Z}$ , dla której oś urojona  $j\omega$  rozszerza się na płaszczyznę zespoloną ( $z = e^{j\omega T}$ ), zależność (3.95) jest równoważna dyskretno-czasowemu przekształceniu Fouriera (ang. DtFT - Discrete-time Fourier Transform).

$$Y(e^{j\omega T_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(k)e^{-j\omega k T_s} \quad (3.96)$$

Transmitancja dyskretnego modelu pierwotnego jest zatem nieskończonym szeregiem dyskretno-czasowych współczynników przekształcenia Fouriera z odpowiedzi impulsowej modelu (3.94). Za transmitancję dyskretnego modelu zredukowanego, który aproksymuje właściwości pierwotnego modelu dyskretnego, przyjmuje się pierwszych  $m$  dyskretno-czasowych współczynników Fouriera (3.97). Transmitancję tą można przedstawić w przestrzeni stanu w postaci równań (3.98).

$$\hat{Y}(z) = \sum_{k=0}^m y(k)z^{-k} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{b}u(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{c}\hat{x}(t) + \hat{d}u(t) \end{aligned} \quad (3.98)$$

gdzie:  $\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \end{bmatrix}$ ,  $\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$ ,  $\hat{c} = [\mathcal{G}_1 \quad \cdots \quad \mathcal{G}_m]$ ,  $\hat{d} = [\mathcal{G}_0]$ .

Dla modeli **MIMO** współczynniki  $\mathcal{G}_k$  są macierzami o wymiarach  $p \times m$ . W tworzonym dyskretnym modelu zredukowanym każdy element (skalar) macierzy  $\hat{A}$  oraz wektora  $\hat{b}$  jest zastąpiony przez odpowiednią macierz zerową lub jednostkową o wymiarze  $p \times p$ . Gramian sterowalności tego modelu jest macierzą jednostkową. Dekompozycję gramianu obserwowalności można przedstawić w następującej postaci [WM05]:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1 & \mathcal{G}_2 & \mathcal{G}_3 & \cdots & \mathcal{G}_{m-1} & \mathcal{G}_m \\ \mathcal{G}_2 & \mathcal{G}_3 & \mathcal{G}_4 & \cdots & \mathcal{G}_m & 0 \\ \mathcal{G}_3 & \mathcal{G}_4 & \mathcal{G}_5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathcal{G}_{m-1} & \mathcal{G}_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathcal{G}_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

Dyskretny model zredukowany, utworzony za pomocą  $m_F$  dykretnoczasowych współczynników Fouriera, ma rząd będący wielokrotnością liczby wejść modelu  $p$ . Aby możliwe było uzyskanie dowolnego rzędu modelu zredukowanego, konieczne jest wykonanie dodatkowej redukcji modelu dyskretnego. Zastosowanie transformacji biliniowej nie zmienia wartości szczególnych Hankela modelu, co umożliwia zastosowanie metod bazujących na dekompozycji SVD.

W pracy [WM05] zaproponowano redukcję względem bazy wektorów własnych związanych z największymi wartościami własnymi gramianu obserwowalności (ang. reduction via the Dominant Controllable Subspace) [LWW99, Li00]:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{U}_k^* \hat{\mathbf{A}} \mathbf{U}_k, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{U}_k^* \hat{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}} \mathbf{U}_k \end{aligned} \quad (3.100)$$

Możliwe jest również zastosowanie dowolnego z algorytmów przedstawionych w rozdziale 3.2.1. (w badaniach własnych autor wykorzystywał w tym celu algorytmy **BFSR** oraz **EIG-BFSR**) lub wyznaczenie bazy wektorów własnych związanej z największymi wartościami własnymi gramianów obserwowalności oraz sterowalności (ang. reduction via the Union of Dominant Gramian Eigenspaces) [LW99, LW04].

Ostatnim krokiem algorytmu redukcji jest konwersja zredukowanego modelu dyskretnego rzędu  $k$  na model ciągły poprzez wykorzystanie odwrotnej transformaty biliniowej.

Bezpośrednie wyznaczanie dykretnoczasowych współczynników przekształcenia Fouriera (3.95), które są w istocie parametrami Markowa modelu dyskretnego, nie zawsze daje poprawne wyniki. Możliwa jest modyfikacja algorytmu redukcji, którego celem jest bezpośrednio wyznaczenie ortonormalnych baz za pomocą algorytmu Arnoldiego [GW08].

#### 3.4. Wnioski

1. W ostatnich latach opublikowano wiele nowych metod i modyfikacji aktualnie istniejących. Rozwój technik obliczeniowych umożliwia ich zastosowanie do coraz bardziej złożonych modeli, których rzędy przekraczają nawet 100 tys. zmiennych stanu. Podstawowym problemem staje się więc wybór najbardziej odpowiedniego algorytmu redukcji dla konkretnego zadania.
2. Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów dla modeli podsystemów kotła energetycznego, stwierdzono trudności związane z wyznaczaniem dekompozycji Choleskiego gramianów dla modeli powyżej 40. rzędu. Modele o dużej złożoności wymagają zastosowania algorytmów Lapunowa, które umożliwiają bezpośrednie wyznaczenie dekompozycji Choleskiego gramianów lub bazują na rozkładach przybliżonych.
3. Najlepszymi właściwościami numerycznymi, zarówno pod względem uwarunkowania macierzy transformacji, jak również błędów numerycznych w macierzach  $T$  oraz  $L$ , charakteryzuje się algorytm **EIG-BFSR**. Jego jedyną wadą jest ograniczenie maksymalnego rzędu modelu zredukowanego. W praktycznych zastosowaniach redukcji, rząd modelu zredukowanego  $k$  jest zazwyczaj znacznie niższy od rzędu modelu pierwotnego ( $n \gg k$ ). Nie powoduje to zatem znacznego ograniczenia przydatności metody **EIG-BFSR** dla redukcji modeli o znacznej złożoności.
4. Metoda **FW** wprowadzając częstotliwościowe funkcje wagowe umożliwia znaczne ograniczenie błędów aproksymacji modelu zredukowanego dla danego przedziału częstotliwości. Właściwości funkcji wagowych określa się na podstawie znajomości charakterystyk amplitudowych modelu oraz zakresu częstotliwości, dla którego model ma być adekwatny.
5. Wielopunktowe metody momentów umożliwiają znaczne rozszerzenie zakresu adekwatności modelu zredukowanego w stosunku do metod jednopunktowych. Dobór odpowiednich punktów interpolacji umożliwia zmniejszenie błędu aproksymacji dla określonego przedziału częstotliwości w identyczny sposób, jak dobór funkcji wagowych dla metody **FW**.



## 4. ALGORYTMY DOBORU PARAMETRÓW METOD REDUKCJI

---

### 4.1. Miary błędu aproksymacji modeli zredukowanych

Modele matematyczne obiektów sterowania charakteryzują się określonym zakresem adekwatności, który dla modeli liniowych określa się poprzez podanie maksymalnej częstotliwości, dla której model poprawnie aproksymuje charakterystyki częstotliwościowe obiektu [KIA96]. Dla częstotliwości większych od zakresu adekwatności błąd aproksymacji może znacznie wzrosnąć, nie wpływając negatywnie na ocenę przydatności modelu dla celów sterowania. Celem redukcji jest zatem wyznaczenie modelu zredukowanego o jak najniższym rzędzie, który będzie się charakteryzował określonym błędem aproksymacji dla zadanego zakresu adekwatności.

Metody redukcji, bazujące na dekompozycji SVD, umożliwiają wyznaczenie normy błędu aproksymacji modelu zredukowanego. Model zredukowany metodą **BTA** lub **SPA** charakteryzuje się normą błędu mniejszą niż podwojona suma wartości Hankela modów, które zostają odrzucone (3.29). Dla metody **HNA** błąd ten jest dwukrotnie mniejszy [Glo84].

Z literatury znane są również oszacowania błędów aproksymacji dla metod wprowadzających wagi częstotliwościowe (**FW** [KAM95], **FD** [GA04], **TLBT** [GA03]). Zależności te wprowadzają dodatkowe współczynniki pochodzące od wartości Hankela filtrów wagowych. Umożliwiają one oszacowanie maksymalnego błędu aproksymacji w całej dziedzinie częstotliwości. Dobór odpowiednich wag częstotliwościowych umożliwia zmniejszenie błędu aproksymacji dla zadanego przedziału częstotliwości. Nie istnieje jednak żadna zależność, która umożliwiałaby oszacowanie wartości błędu aproksymacji dla określonego zakresu częstotliwości.

Ocena zredukowanych modeli matematycznych obiektów sterowania, uzyskanych z zastosowaniem różnych technik redukcji, wymaga wprowadzenia odpowiednich miar błędu aproksymacji. Ze względu na ograniczony zakres adekwatności modelu zredukowanego, miary te powinny określać wartość błędu aproksymacji wyłącznie dla określonego przedziału częstotliwości.

Modele **MIMO** mogą charakteryzować się znacznymi różnicami wartości modułów transmitancji dla poszczególnych torów. Dodatkowo wartości modułów transmitancji dla poszczególnych torów mogą podlegać znacznej zmienności w funkcji częstotliwości. Z tego względu zastosowanie wyłącznie bezwzględnej miary błędu aproksymacji nie zawsze pozwala poprawnie ocenić jakość aproksymacji modelu zredukowanego.

Na podstawie przeprowadzonych analiz wprowadzono następujące miary błędu:

- błąd bezwzględny,
- znormalizowany błąd bezwzględny (wprowadzający współczynniki dla poszczególnych torów),
- błąd względny.

Kryterium oceny poprawności aproksymacji modelu zredukowanego może być błąd maksymalny oraz średniokwadratowy, który lepiej opisuje dokładność aproksymacji w całym zakresie adekwatności modelu. Poszczególne miary błędu aproksymacji można przedstawić następującymi zależnościami:

- maksymalny błąd aproksymacji dla zakresu adekwatności modelu:

$$\Delta_1 = \max_{\omega_i \in (0-\omega_{\max})} \left( \max_{x,y} |G_{(x,y)}(j\omega_i) - G_r(x,y)(j\omega_i)| \right) \quad (4.1)$$

- znormalizowany maksymalny błąd aproksymacji dla zakresu adekwatności modelu:

$$\Delta_2 = \max_{\omega_i \in (0-\omega_{\max})} \left( \max_{x,y} \left| \left( G_{(x,y)}(j\omega_i) - G_r(x,y)(j\omega_i) \right) ./ \mathbf{W} \right| \right) \quad (4.2)$$

- maksymalny względny błąd aproksymacji dla zakresu adekwatności modelu:

$$\Delta_3 = 100 \max_{\omega_i \in (0-\omega_{\max})} \left( \max_{x,y} \left| \left( G_{(x,y)}(j\omega_i) - G_r(x,y)(j\omega_i) \right) ./ |G_{(x,y)}(j\omega_i)| \right| \right) \quad (4.3)$$

- średniokwadratowy błąd aproksymacji dla zakresu adekwatności modelu:

$$\Delta_4 = \sqrt{\frac{1}{pmN} \sum_{i=1}^N \sum_{x=1}^p \sum_{y=1}^m |G_{(x,y)}(j\omega_i) - G_r(x,y)(j\omega_i)|^2} \quad (4.4)$$

- znormalizowany średniokwadratowy błąd aproksymacji dla zakresu adekwatności modelu:

$$\Delta_5 = \sqrt{\frac{1}{pmN} \sum_{i=1}^N \sum_{x=1}^p \sum_{y=1}^m \left( |G_{(x,y)}(j\omega_i) - G_r(x,y)(j\omega_i)| ./ \mathbf{W} \right)^2} \quad (4.5)$$

- średniokwadratowy względny błąd aproksymacji dla zakresu adekwatności modelu:

$$\Delta_6 = \sqrt{\frac{1}{pmN} \sum_{i=1}^N \sum_{x=1}^p \sum_{y=1}^m \left( |G_{(x,y)}(j\omega_i) - G_r(x,y)(j\omega_i)| ./ |G_{(x,y)}(j\omega_i)| \right)^2} \quad (4.6)$$

- średniokwadratowy względny błąd aproksymacji dla zakresu adekwatności modelu z częstotliwościowym współczynnikiem wagowym:

$$\Delta_7 = \sqrt{\frac{1}{pmN} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{x=1}^p \sum_{y=1}^m \left( |G_{(x,y)}(j\omega_i) - G_r(x,y)(j\omega_i)| .* \mathbf{W}_\omega(i) \right)^2 \right)} \quad (4.7)$$

gdzie:  $N$  – liczba punktów aproksymacji w dziedzinie częstotliwości,

$\mathbf{W}$  – macierz wag normalizujących (zależna od wartości modułu transmitancji poszczególnych torów modelu). Dla modelu rur ekranowych parownika oraz jego podsystemów macierz wag normalizujących ma następującą postać:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} |G(0)| & |G(0)| & |G(0)| & |G(0)| \\ \max_{\omega_i \in (0.01-20)} |G(j\omega_i)| & \max_{\omega_i \in (0.01-20)} |G(j\omega_i)| & |G(0)| & \max_{\omega_i \in (0.01-20)} |G(j\omega_i)| \\ |G(0)| & |G(0)| & |G(0)| & |G(0)| \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$\mathbf{W}_\omega$  – macierz częstotliwościowej funkcji wagowej o wymiarach  $(p \times m \times N)$ . Dla modelu parownika oraz jego podsystemów macierz  $\mathbf{W}_\omega$  przyjmuje następującą postać:

$$\mathbf{W}_\omega(i) = 1 ./ (|G(j\omega_i)| * \omega_i) \quad (4.9)$$

Operacje  $( ./ )$  oraz  $( .* )$  oznaczają odpowiednio:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} ./ \mathbf{B} &= \mathbf{A}_{(x,y)} / \mathbf{B}_{(x,y)} \\ \mathbf{A} .* \mathbf{B} &= \mathbf{A}_{(x,y)} * \mathbf{B}_{(x,y)} \end{aligned} \right\} \text{ dla } x = 1, \dots, m \quad y = 1, \dots, p \quad (4.10)$$

### 4.1.1. Analiza wpływu kryterium optymalizacji na właściwości modelu zredukowanego

Za pomocą zależności (4.1) – (4.7) wprowadzonych zostało 7 miar błędu aproksymacji modelu zredukowanego dla określonego zakresu adekwatności. Trudno jest zatem sformułować zadanie optymalizacji w postaci jednej funkcji celu. Zamiast skalarnej wartości kryterium oceny, należy uwzględniać cały zbiór wartości (w postaci wektora celów [MF06]), których jednoczesna minimalizacja nie zawsze jest możliwa z powodu ich wzajemnej sprzeczności.

W ogólnym przypadku optymalizacja wielokryterialna polega na wyznaczeniu możliwie wielu rozwiązań niezdominowanych. Punktem niezdominowanym (Pareto-optymalnym) dla zadania minimalizacji nazywamy rozwiązanie  $x_o$  wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje inny punkt  $x_i$  w przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych  $\Omega$  taki, że  $f(x_i) \leq f(x_o)$  dla wszystkich kryteriów oraz  $f(x_i) < f(x_o)$  dla co najmniej jednego kryterium [Mic92]. Wyboru rozwiązania spośród punktów niezdominowanych można dokonać metodą punktu idealnego lub punktu najgorszych oczekiwań [Ara01].

Niektóre przypadki optymalizacji wielokryterialnej dają się sprowadzić do problemu optymalizacji ze skalarnym wskaźnikiem jakości. Najprostszym z nich jest wybór jednego z kryteriów wraz z przeniesieniem pozostałych jako ograniczeń, co prowadzi do klasycznej postaci problemu optymalizacji z ograniczeniami.

Innym prostym sposobem jest metoda celów ważonych polegająca na obliczeniu sumy poszczególnych kryteriów przy założonych współczynnikach wagowych (4.11). Wadą tego podejścia jest trudność związana z określeniem wartości poszczególnych wag.

$$f(f_1(x), \dots, f_m(x)) = \sum_{j=1}^m c_j f_j(x) \quad (4.11)$$

gdzie:  $c_j$ - współczynnik wagowy,  $f_j(x)$  –  $j$ -te kryterium optymalizacji

W pracy zastosowano optymalizację jednokryterialną z uwzględnieniem pozostałych miar błędów jako ograniczeń. Podstawowym problemem pozostaje wybór odpowiedniej miary błędu aproksymacji jako kryterium, które podlegać będzie minimalizacji.

W dodatku B.2 przedstawiono błędy aproksymacji (wartość bezwzględna oraz względna) zredukowanych modeli strefy dogrzewu rur ekranowych parownika, wybranych na podstawie minimalnej wartości błędów aproksymacji (4.1) – (4.7) o zakresie adekwatności 0-20[rad/s]. Wszystkie modele zredukowane (rzędu  $k = 15$ ) zostały uzyskane metodą **FW** z zastosowaniem wagi wyjściowej w postaci filtrów dolnoprzepustowych Butterwortha. W tab. 4.1 przedstawiono wartości miar błędów aproksymacji, uzyskane dla poszczególnych modeli zredukowanych.

Tab. 4.1. Błąd aproksymacji modeli zredukowanych

	model zredukowany						
	A $\min(\Delta_1)$	B $\min(\Delta_2)$	C $\min(\Delta_3)$	D $\min(\Delta_4)$	E $\min(\Delta_5)$	F $\min(\Delta_6)$	G $\min(\Delta_7)$
$\Delta_1$	0.3144	17.06	20.38	0.9256	18.09	35.10	88.12
$\Delta_2$	54.36	0.3486	1.941	24.45	0.4303	1.154	1.485
$\Delta_3$	37129	2053	194.9	15634	1595	230.1	479.1
$\Delta_4$	0.1209	0.8947	1.438	0.09988	0.9305	2.240	4.799
$\Delta_5$	9.360	0.06006	0.2374	4.718	0.04821	0.07229	0.1143
$\Delta_6$	29.33	1.812	0.4369	13.24	1.434	0.1812	0.3168
$\Delta_7$	2801	1.036	24.68	2101	1.379	2.536	0.1030

Na podstawie przedstawionych wyników redukcji dla modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika, można wyprowadzić kilka ogólnych wniosków dotyczących wyboru poszczególnych miar błędów jako kryterium optymalizacji:

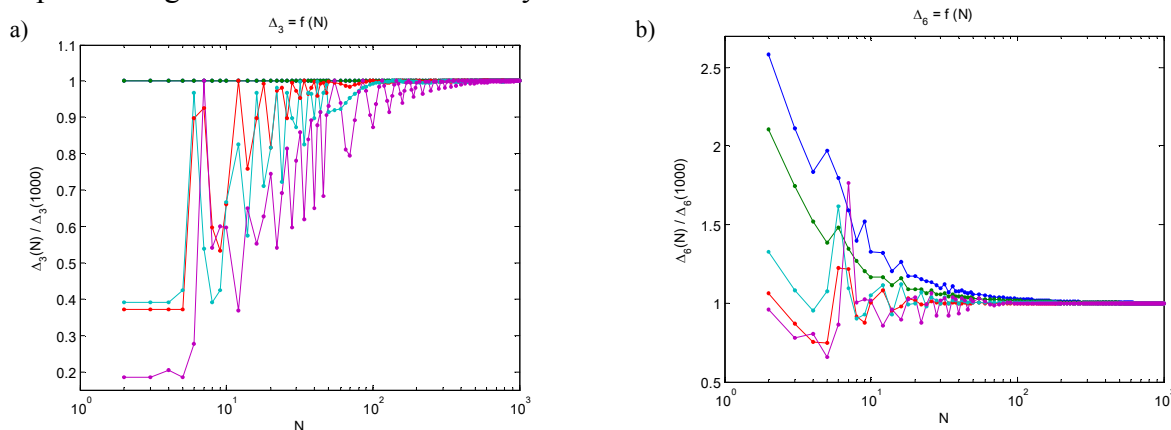
- Model zredukowany charakteryzujący się najmniejszą wartością bezwzględnego błędu aproksymacji (4.1) oraz (4.4) poprawnie aproksymuje wyłącznie zakresy częstotliwości, które charakteryzują się największą wartością modułu transmitancji (dla tych zakresów występują największe w mierze bezwzględnej błędy aproksymacji i model dobierany jest pod kątem ich minimalizacji). Algorytm optymalizacji bazujący na błędzie bezwzględnym, może prowadzić do niepoprawnej aproksymacji tych torów oraz zakresów częstotliwości, które charakteryzują się małą wartością modułu transmitancji.
- Wprowadzenie macierzy wag normalizujących (4.2) oraz (4.5) ma za zadanie odniesienie wartości błędu aproksymacji do wartości maksymalnej (lub do wartości dla stanu ustalonego) modułu transmitancji poszczególnych torów modelu. Umożliwia to poprawną aproksymację charakterystyk częstotliwościowych wszystkich torów modelu, niezależnie od występujących różnic wartości modułu transmitancji dla poszczególnych torów. Poważnym problemem jest odpowiedni wybór wag normalizujących, gdyż w głównej mierze od tego zależą właściwości modelu zredukowanego.
- Minimalizacja błędu względnego modelu zredukowanego (4.3) oraz (4.6) umożliwia poprawną aproksymację torów niezależnie od różnic modułów transmitancji poszczególnych torów, jak również znacznej ich zmienności w zakresie adekwatności modelu. Minimalizacja tej miary błędu może jednak powodować, że model zredukowany dobierany jest na podstawie wartości błędu dla zakresów częstotliwości o najmniejszej wartości modułu transmitancji, gdyż statystycznie dla tych zakresów częstotliwości występują największe błędy względne. W wyniku tego może nastąpić pogorszenie jakości aproksymacji dla stanu ustalonego oraz niskich częstotliwości w stosunku do algorytmu bazującego na znormalizowanej wartości błędu.
- Zastosowanie kryterium w postaci błędu maksymalnego powoduje wybranie modelu na podstawie minimalizacji błędu w jednym (najgorzej aproksymowanym) punkcie charakterystyki częstotliwościowej modelu. Zaletą jest prosty do zinterpretowania wynik, np. błąd aproksymacji dla zakresu adekwatności nie przekracza 10%. W zamian za to zastosowanie miary średniokwadratowej umożliwia rozłożenie kryterium oceny na wiele punktów w całym przedziale adekwatności modelu.
- Wprowadzenie częstotliwościowej funkcji wagowej umożliwia zmniejszenie błędów aproksymacji dla określonych torów modelu w wybranych zakresach częstotliwości. Miara ta jest najbardziej uniwersalna w zastosowaniu, jednak wartość liczbowa tego błędu jest trudna do interpretacji fizycznej.

Na podstawie przedstawionych wyników redukcji dla modeli podsystemów parownika kotła przepływowego, za najbardziej celowe uznano minimalizację średniokwadratowego błędu względnego. Pozostałe kryteria (zwłaszcza maksymalny błąd względny, ze względu na prostą interpretację fizyczną) mogą zostać uwzględnione jako ograniczenia.

#### 4.1.2. Wpływ liczby punktów aproksymacji na wartość miar błędów

Poprawne wyznaczenie miar błędów aproksymacji (4.1 – 4.7) wymaga określenia odpowiednio dużej liczby błędów dla poszczególnych częstotliwości ( $\omega_i$ ) w zakresie adekwatności modelu. Zwiększanie liczby punktów aproksymacji powoduje jednak wzrost nakładów obliczeniowych. Na rys 4.1 przedstawiono wpływ liczby punktów aproksymacji (liczby częstotliwości  $\omega_i$ ) na wartość maksymalnego oraz średniokwadratowego błędu względnego dla pięć-

ciu różnych modeli zredukowanych strefy dogrzewu o zakresie adekwatności w przedziale 0,001-20 [rad/s]. Wartości błędów dla poszczególnej liczby punktów zostały odniesione do błędu uzyskanego dla  $N=1000$  punktów aproksymacji. Na podstawie przedstawionych wyników redukcji, poprawne oszacowanie poszczególnych miar błędów wymaga minimum 100 punktów, dla których wyznaczone zostają różnice charakterystyk częstotliwościowych modelu pierwotnego oraz modeli zredukowanych.



Rys. 4.1. Wpływ liczby punktów aproksymacji na wartość (a) maksymalnego błędu względnego, (b) średniokwadratowego błędu względnego

Na wartość błędu średniokwadratowego ma również wpływ sposób rozłożenia punktów aproksymacji na osi częstotliwości. Nierównomierny sposób rozłożenia punktów można uznać za równoważny wprowadzeniu wagi częstotliwościowej. Zwiększenie liczby punktów dla pewnych przedziałów częstotliwości powoduje, że algorytmy minimalizujące średniokwadratową wartość błędu będą dążyć do zmniejszenia błędów aproksymacji dla wybranego przedziału częstotliwości.

## 4.2. Parametry metod redukcji

Zadaniem redukcji jest wyznaczenie modelu charakteryzującego się odpowiednim błędem aproksymacji oraz możliwie niskim rzędem. Przedstawione w rozdziale 3 metody redukcji tj.: **FW**, **FD**, **FMR** oraz **RK**, umożliwiają znaczną zmianę właściwości modelu zredukowanego poprzez dobór parametrów redukcji. Za wyjątkiem metody **FW** parametry te mają wartość liczbową i są następujące:

- dla metody **FD** jest to określony przedział częstotliwości  $[\omega_1, \omega_2]$ , dla którego obliczane są częstotliwościowe gramiany sterowalności i (lub) obserwowalności,
- dla metody **FMR** jest to częstotliwość  $\omega_0$ , która jest parametrem transformacji biliniowej oraz liczba dyskretnoczasowych współczynników Fouriera, na podstawie których tworzony jest dyskretny model zredukowany ( $m$ ),
- dla wielopunktowych metod momentów (**RK**) jest to liczba punktów interpolacji ( $J$ ), wartości poszczególnych punktów interpolacji ( $s_j$ ) oraz liczba momentów przypadających na jeden punkt interpolacji ( $I_j$ ).

Problem doboru optymalnych parametrów dla metody **FW** jest trudniejszy, gdyż konieczne jest odpowiednie ukształtowanie charakterystyk częstotliwościowych filtrów wagiowych dołączonych do wejść i (lub) wyjść modelu pierwotnego.

Dla modeli **SISO** wyznaczenie optymalnej transmitancji filtru jest zazwyczaj proste. Znacznie trudniejszym zadaniem jest wyznaczenie charakterystyk częstotliwościowych wielu filtrów dla modeli **MIMO**, gdyż poprawa aproksymacji jednego z torów zazwyczaj powoduje pogorszenie aproksymacji dla innych torów modelu.

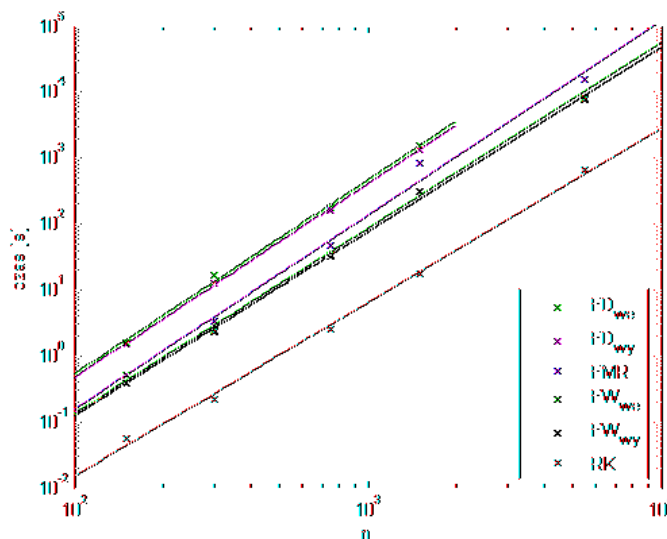
#### 4. Algorytmy doboru parametrów metod redukcji

Dla modeli obiektów sterowania, których przedział adekwatności określony jest przez częstotliwość maksymalną, najbardziej naturalnym wydaje się dobór funkcji wagowych w postaci filtrów dolnoprzepustowych. Ich charakterystyki można opisać za pomocą dwóch parametrów: częstotliwości granicznej  $\omega_f$  oraz rzędu filtru  $n_f$ . Dodatkową zaletą wyboru takiego opisu charakterystyk częstotliwościowych funkcji wagowych jest możliwość zastosowania identycznych algorytmów optymalizacji jak dla pozostałych metod redukcji.

Wybór algorytmu optymalizacji parametrów dla poszczególnych metod redukcji wymaga analizy wpływu parametrów redukcji na wartość błędu aproksymacji. W szczególności istotna jest odpowiedź na następujące pytania:

- Jaka jest wrażliwość funkcji błędu aproksymacji na niewielkie zmiany wartości parametrów redukcji? Innymi słowy, czy minima funkcji błędu aproksymacji są „ostre” i niewielka zmiana powoduje znaczną różnicę błędu aproksymacji?
- Czy występuje więcej niż jedno minimum?
- Czy wybór sposobu dołączenia filtrów wagowych (na wejściu, wyjściu lub jednoczesnego dołączenia filtrów na wejściu i wyjściu) w znaczący sposób wpływa na uzyskane błędy modeli zredukowanych (dla metod **FW** oraz **FD**)?
- Czy istnieją wyraźne różnice wyników redukcji przy zastosowaniu filtrów dolnoprzepustowych różnego typu (dla metody **FW**)?
- Czy stabilne wyniki redukcji dla metod *two-sided* **FW** i **FD** oraz dla metody **RK** w jakikolwiek sposób się grupują?

Na rys 4.2 przedstawiono zależność czasu wyznaczenia modelu zredukowanego (rzędu  $k = 15$ ) w funkcji rzędu modelu pierwotnego strefy dogrzewu rur ekranowych parownika. Na tej podstawie można stwierdzić, że algorytmy redukcji **FW**, **FD** oraz **FMR** charakteryzują się złożonością obliczeniową  $\mathcal{O}(n^3)$ . Z powodu dużej złożoności obliczeniowej algorytmów oraz konieczności wykonania ogromnej liczby redukcji w celu wyznaczenia wpływu parametrów metod redukcji na uzyskiwane wyniki, w rozdziale 4.2 oraz 4.4, zastosowano uproszczony model strefy dogrzewu rur ekranowych parownika. Model ten otrzymano w wyniku dyskretyzacji, a następnie linearyzacji modelu klasy  $\bar{KSDL}$  na 20 (w miejsce 150) sekcji o parametrach skupionych. Uzyskany model zawiera 300 zmiennych stanu. Umożliwia to wyznaczenie modelu zredukowanego w czasie około 400-krotnie krótszym w porównaniu do operacji wykonanej na modelu pierwotnym.



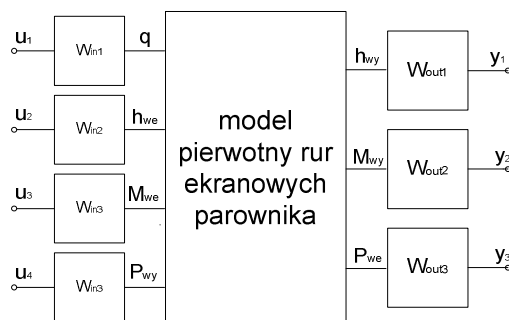
Rys. 4.2. Czas wyznaczenia modelu zredukowanego w funkcji rzędu modelu pierwotnego dla komputera klasy Pentium IV 3GHz, 1Gb RAM, MATLAB 7.5.0

## 4.2.1. Wpływ parametrów metody FW na wyniki redukcji

Dla modeli podsystemów parownika dobre wyniki redukcji daje wybór funkcji wagowych w postaci filtrów dolnoprzepustowych [SRZ04, Ryd05, SR06, IRS08]. Określenie *filtr dolnoprzepustowy* nie jest jednak precyzyjne, gdyż dla identycznych wartości częstotliwości granicznej  $\omega_f$  oraz rzędu filtru  $n_f$  istnieje możliwość wygenerowania filtrów o różnych transmittancjach. Oznacza to, że filtry takie będą miały różny przebieg charakterystyki amplitudowej i fazowej w zakresie pasma przepustowego oraz zaporowego. Ze względu na swoje zalety najpowszechniej stosowane są następujące rodzaje filtrów: Bessela (filtr o najbardziej liniowej charakterystyce fazowej), Butterwortha (filtr o najbardziej liniowej charakterystyce amplitudowej), Czebyszewa typ 1 (filtr o równomiernie pofalowanej charakterystyce amplitudowej w zakresie pasma przepustowego).

Do opisu transmittancji filtru Czebyszewa konieczne jest określenie maksymalnej nierównomierności charakterystyki w zakresie przepustowym. W pracy ustalono ją na wartość 1dB, co umożliwiło opisanie filtru za pomocą 2 parametrów (identycznie jak dla filtrów Bessela oraz Butterwortha).

Najbardziej uniwersalne wydaje się wprowadzenie wag w postaci filtrów dolnoprzepustowych osobno na wszystkich wejściach i (lub) wyjściach modelu (rys. 4.3). Wymagane jest zatem wyznaczenie od 2 (przy założeniu, że wszystkie filtry będą posiadać identyczne parametry  $n_f$  oraz  $\omega_f$ ), poprzez 6 lub 8 (dla metod *one-side weighting FW*) do aż 14 parametrów (w przypadku zastosowania metody *two-side weighting FW*).

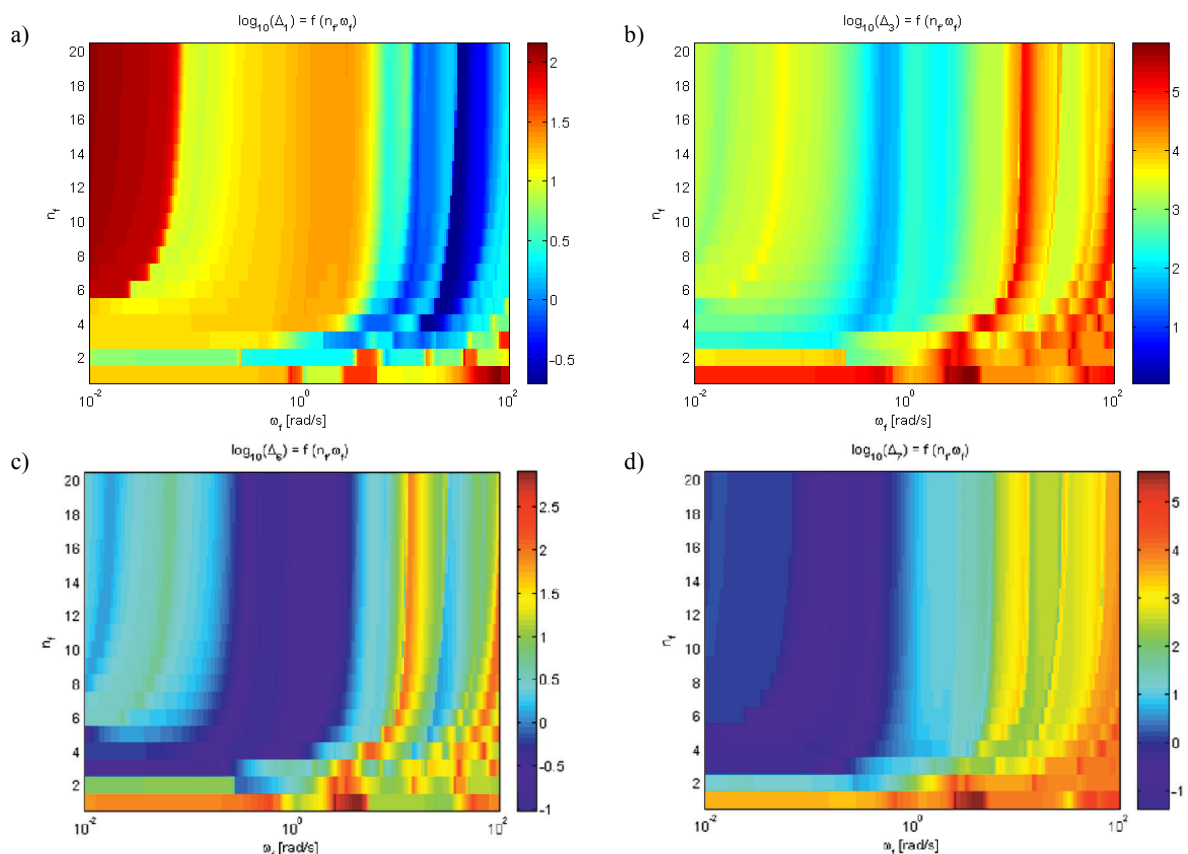


Rys. 4.3. Model zmodyfikowany poprzez wprowadzenie częstotliwościowych funkcji wagowych

Na rys. 4.4 przedstawiono zależność czterech miar błędów aproksymacji (4.1, 4.3, 4.6, 4.7) modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika w funkcji parametrów wyjściowego filtru wagowego (w postaci dolnoprzepustowych filtrów Butterwortha o identycznych parametrach rzędu filtru  $n_f$  oraz częstotliwości granicznej  $\omega_f$ ). Jak można zaobserwować na przedstawionych charakterystykach, zastosowanie optymalnych wartości parametrów ( $n_f$  oraz  $\omega_f$ ) umożliwia poprawę błędów aproksymacji nawet o kilka rzędów. Jednocześnie minima błędów aproksymacji nie są szczególnie ostre, co oznacza że nie ma potrzeby precyzyjnego wyznaczenia wartości ekstremum, gdyż wybranie parametrów zbliżonych do optymalnych tylko nieznacznie pogarsza uzyskany wynik. Problemem jest natomiast występowanie wielu minimów lokalnych. Konieczne jest zatem zastosowanie algorytmów optymalizacji odpornych na minima lokalne, które umożliwią przeszukiwanie szerokiego zakresu potencjalnych rozwiązań.

Zbadano również wpływ sposobu rozmieszczenia funkcji wagowych (na wejściu lub wyjściu modelu oraz jednocześnie na wejściach i wyjściach) na wynik redukcji. Wykonano obliczenia błędów aproksymacji modelu zredukowanego, uzyskanego metodą **FW** dla szerokiego zakresu rzędu filtrów dolnoprzepustowych (1-20) oraz częstotliwości granicznych (0,01 – 100 [rad/s]) dla 3 typów filtrów: Butterwortha, Bessela oraz Czebyszewa. W tab. 4.2 zaprezentowano wartości błędów aproksymacji oraz parametry optymalnych filtrów wagowych dla jakich zostały one uzyskane (najlepsze zaznaczono).

#### 4. Algorytmy doboru parametrów metod redukcji



Rys. 4.4. Błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 w funkcji parametrów filtra wagowego  $\mathbf{W}_o$  (filtry Butterwortha) dla metody FW (a) maksymalny błąd aproksymacji, (b) maksymalny względny błąd aproksymacji, (c) średniokwadratowy względny błąd aproksymacji, (d) średniokwadratowy względny błąd aproksymacji z częstotliwościowym współczynnikiem wagowym

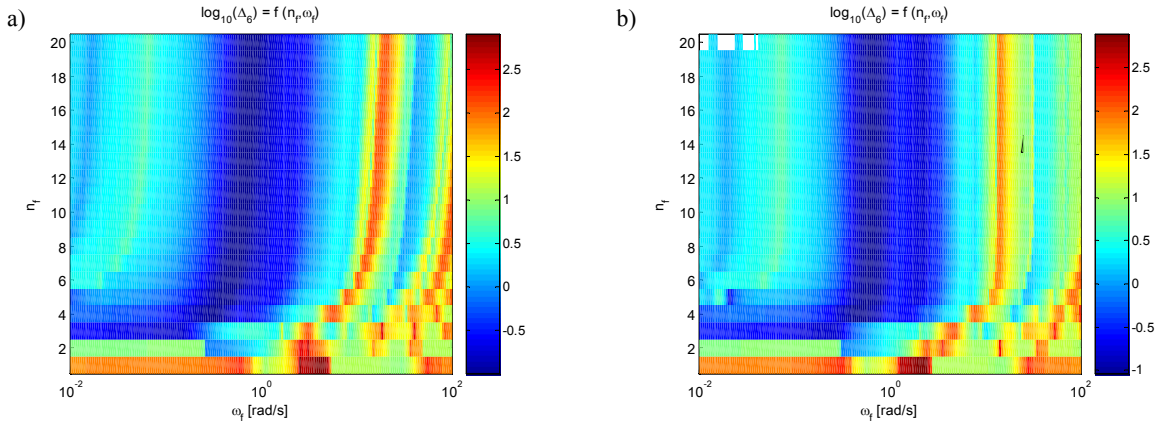
Tab. 4.2. Błąd aproksymacji modelu zredukowanego (rzęd modelu  $k=15$ ) w funkcji typu filtra oraz sposobu ich dołączenia (metoda *one-sided*)

Optymalny filtr względem miary:							
	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$	$\Delta_6$	$\Delta_7$
Buterworth $\mathbf{W}_i$	0.1901	0.3523	115.9	0.05648	0.03003	0.1212	0.08667
	$n_f=20$ $\omega_f=21,88$	$n_f=13$ $\omega_f=21,88$	$n_f=2$ $\omega_f=0,363$	$n_f=20$ $\omega_f=21,88$	$n_f=2$ $\omega_f=0,363$	$n_f=2$ $\omega_f=0,363$	$n_f=20$ $\omega_f=0,0151$
Bessel $\mathbf{W}_i$	0.4198	0.3947	116.9	0.1430	0.03001	0.1227	0.07956
	$n_f=4$ $\omega_f=19,05$	$n_f=2$ $\omega_f=0,331$	$n_f=2$ $\omega_f=0,331$	$n_f=3$ $\omega_f=8,71$	$n_f=2$ $\omega_f=0,331$	$n_f=2$ $\omega_f=0,331$	$n_f=18$ $\omega_f=0,0166$
Czebyszew $\mathbf{W}_i$	0.1881	0.2959	114.6	0.05610	0.02999	0.1193	0.08556
	$n_f=8$ $\omega_f=20,89$	$n_f=8$ $\omega_f=21,88$	$n_f=2$ $\omega_f=0,380$	$n_f=20$ $\omega_f=21,88$	$n_f=2$ $\omega_f=0,380$	$n_f=2$ $\omega_f=0,380$	$n_f=20$ $\omega_f=0,0501$
Buterworth $\mathbf{W}_o$	0.1879	0.7041	40.59	0.04702	0.04598	0.08856	0.03848
	$n_f=6$ $\omega_f=27,54$	$n_f=4$ $\omega_f=0,174$	$n_f=6$ $\omega_f=0,501$	$n_f=4$ $\omega_f=15,14$	$n_f=4$ $\omega_f=0,174$	$n_f=6$ $\omega_f=0,501$	$n_f=3$ $\omega_f=0,0631$
Bessel $\mathbf{W}_o$	0.1850	0.7081	44.00	0.04663	0.04608	0.09343	0.03797
	$n_f=20$ $\omega_f=47,86$	$n_f=4$ $\omega_f=0,159$	$n_f=12$ $\omega_f=0,692$	$n_f=20$ $\omega_f=43,65$	$n_f=4$ $\omega_f=0,159$	$n_f=8$ $\omega_f=0,575$	$n_f=3$ $\omega_f=0,0575$
Czebyszew $\mathbf{W}_o$	0.1880	0.7025	40.65	0.04841	0.03678	0.08574	0.04053
	$n_f=19$ $\omega_f=34,67$	$n_f=4$ $\omega_f=0,263$	$n_f=4$ $\omega_f=0,479$	$n_f=4$ $\omega_f=19,95$	$n_f=5$ $\omega_f=0,209$	$n_f=4$ $\omega_f=0,479$	$n_f=3$ $\omega_f=0,0871$

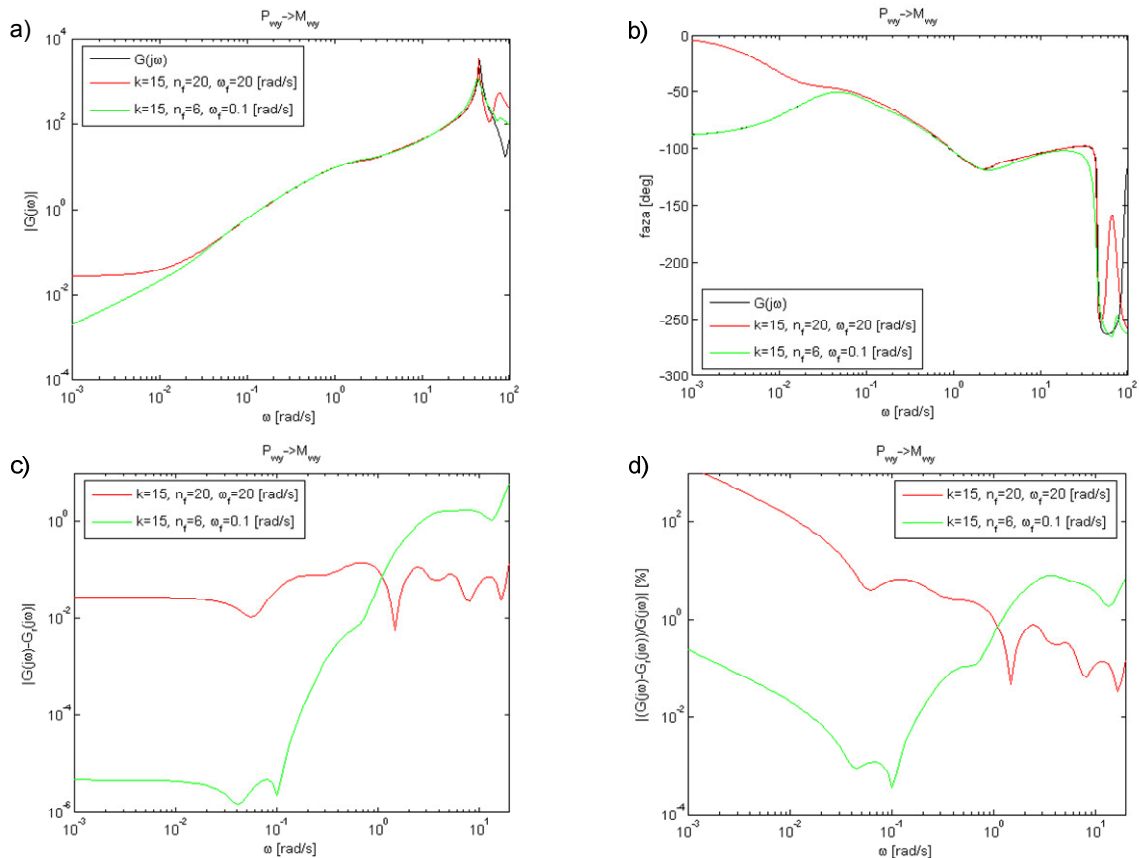


#### 4. Algorytmy doboru parametrów metod redukcji

Przedstawione wyniki wskazują, że typ filtra ma minimalny wpływ na uzyskany błąd aproksymacji. Pomimo, że charakterystyki błędu aproksymacji dla poszczególnych typów filtrów różnią się nieznacznie (rys. 4.4c oraz rys. 4.5 przedstawiają charakterystyki średniokwadratowego błędu aproksymacji w funkcji  $n_f$  oraz  $\omega_f$  dla filtrów Butterwortha, Bessela oraz Czebyszewa), to może zmienić się położenie ekstremum globalnego (dla znormalizowanego błędu maksymalnego optymalne parametry dla filtra Butterwortha wynoszą:  $n_f=13$ ,  $\omega_f=21,88$  [rad/s], natomiast dla filtra Bessela:  $n_f=2$ ,  $\omega_f=0,331$  [rad/s]).



Rys. 4.5. Średniokwadratowy względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 w funkcji parametrów filtra wagowego  $\mathbf{W}_o$  (a) Bessela (b) Czebyszewa



Rys. 4.6. (a) Charakterystyka amplitudowa, (b) fazowa, (c) bezwzględny błąd aproksymacji (d) względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla toru  $P_{wy} \rightarrow M_{wy}$

Jak można zauważyć, optymalne częstotliwości graniczne filtrów dla błędów znormalizowanych oraz względnych są znacznie niższe od zakresu adekwatności. Spowodowane jest to małymi wartościami modułu transmitancji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parow-

#### 4. Algorytmy doboru parametrów metod redukcji

nika w zakresie niskich częstotliwości, dla torów  $h_{we} \rightarrow M_{wy}$ ,  $h_{we} \rightarrow P_{we}$ ,  $M_{we} \rightarrow P_{we}$ ,  $P_{wy} \rightarrow M_{wy}$  (dodatek rys. D.1). Dobra aproksymacja właściwości modelu w zakresie niskich częstotliwości wymaga zatem znacznego tłumienia modów odpowiedzialnych za przebieg charakterystyk częstotliwościowych w zakresie częstotliwości rezonansowych. Zastosowanie filtrów dolnoprzepustowych o wysokim rzędzie oraz częstotliwości granicznej porównywalnej z zakresem adekwatności, nie umożliwi dostatecznego tłumienia procesów rozprzestrzeniania się zmian ciśnienia. Wartości Hankela tych modów są więc nadal na tyle duże, aby znaleźć się w części dominującej modelu kosztem modów odpowiedzialnych za przebieg charakterystyki częstotliwościowej dla niskich częstotliwości (rys. 4.6) [Ryd09]. Otrzymany model charakteryzuje się zatem małymi wartościami błędów bezwzględnych i znormalizowanych, lecz znacznymi błędami względnymi.

Duży wpływ na wartość błędu aproksymacji może mieć sposób umieszczenia filtrów wagowych (wejściowe lub wyjściowe). Dla modelu strefy dogrzewu zastosowanie wagi wyjściowej umożliwia ponad 2-krotne zmniejszenie błędu maksymalnego względnego oraz średniokwadratowego względnego z częstotliwościowym współczynnikiem wagowym. Umożliwiło również niewielką poprawę błędów maksymalnego, średniokwadratowego i średniokwadratowego względnego. Wybór wagi wejściowej umożliwił natomiast uzyskanie modeli charakteryzujących się mniejszymi błędami znormalizowanymi (maksymalnym oraz średniokwadratowym).

Porównanie wyników redukcji, uzyskanych w wyniku zastosowania wejściowych i wyjściowych funkcji wagowych, nie umożliwia jednoznacznego stwierdzenia przewagi zastosowania wejściowej lub wyjściowej funkcji wagowej. Oznacza to, że wyznaczenie optymalnych parametrów filtrów dla modeli obiektów sterowania wymaga wyznaczania najlepszych rozwiązań dla obu sposobów dołączania filtrów i następnie wybór tego, które charakteryzuje się najmniejszą wartością błędu.

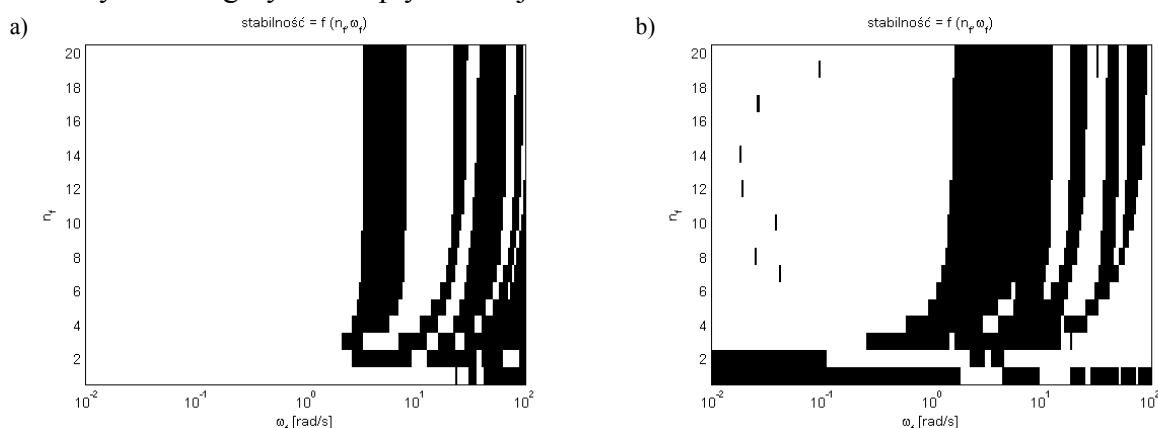
Wynikiem jednoczesnego zastosowania obu wag częstotliwościowych w algorytmie Ennsa może być utrata stabilności modelu zredukowanego. Zastosowanie algorytmu Wanga umożliwia zachowanie stabilności modelu zredukowanego, jednak na skutek usunięcia ujemnych wartości własnych w równiach (3.46) oraz (3.47) znaczna część uzyskanych wyników redukcji ulega znacznemu pogorszeniu. W tab. 4.3 zaprezentowano błędy aproksymacji oraz parametry optymalnych filtrów dla filtrów Butterwortha, Bessela oraz Czebyszewa. Jak można zaobserwować, dla modelu zredukowanego rzędu  $k=15$  zastosowanie obu wag częstotliwościowych nie skutkuje zmniejszeniem błędów aproksymacji (za wyjątkiem znacznej poprawy błędu maksymalnego i średniokwadratowego). Dodatkowym problemem dla algorytmu optymalizacji jest znaczna liczba niestabilnych rozwiązań (ponad 2/3 uzyskanych modeli zredukowanych było niestabilnych).

Tab. 4.3. Błąd aproksymacji modelu zredukowanego (rzęd modelu  $k=15$ ) w funkcji typu filtrów oraz sposobu ich dołączenia (metoda *two-sided*)

		Optymalny filtr względem miary:						
		$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$	$\Delta_6$	$\Delta_7$
Buterworth Wi Wo		0.01756	0.7109	108.4	0.004925	0.1141	0.1845	15.74
	$n_f=10$ $\omega_f=26,30$	$n_f=2$ $\omega_f=5,01$	$n_f=11$ $\omega_f=5,25$	$n_f=15$ $\omega_f=22,91$	$n_f=4$ $\omega_f=57,54$	$n_f=16$ $\omega_f=4,17$	$n_f=20$ $\omega_f=3,63$	
Bessel Wi Wo		0.02097	0.7327	115.8	0.004829	0.1120	0.1983	20.41
	$n_f=6$ $\omega_f=30,20$	$n_f=2$ $\omega_f=4,79$	$n_f=10$ $\omega_f=6,31$	$n_f=10$ $\omega_f=30,20$	$n_f=8$ $\omega_f=95,50$	$n_f=9$ $\omega_f=5,25$	$n_f=10$ $\omega_f=4,79$	
Czebyszew Wi Wo		<b>0.01649</b>	0.6364	106.5	<b>0.004820</b>	0.1181	0.1839	15.23
	$n_f=9$ $\omega_f=28,84$	$n_f=2$ $\omega_f=5,25$	$n_f=15$ $\omega_f=5,49$	$n_f=19$ $\omega_f=23,99$	$n_f=4$ $\omega_f=69,18$	$n_f=8$ $\omega_f=4,17$	$n_f=6$ $\omega_f=3,47$	

Tak znaczna liczba uzyskanych modeli niestabilnych oraz brak poprawy uzyskanych wyników redukcji nie musi być regułą. W dodatku (tab. B.17) przedstawiono wyniki uzyskane dla modelu zredukowanego rzędu  $k=25$ . Jak można zaobserwować, jednoczesne zastosowanie obu funkcji wagowych umożliwiła uzyskanie modeli zredukowanych, charakteryzujących się również mniejszymi błędami względnymi.

Na rys. 4.7 (oraz w dodatku na rys. B.13) zaprezentowano mapę stabilnych rozwiązań dla modeli zredukowanych rzędu  $k=15$  oraz  $k=25$  dla 3 typów filtrów dolnoprzepustowych. Rozwiązania stabilne grupują się w podobnych obszarach dla wszystkich rodzajów filtrów i dla różnych rzędów modeli zredukowanych. Na podstawie wyznaczonych map stabilności nie można zagwarantować stabilności modelu zredukowanego w przypadku, gdy wszystkie filtry będą miały różne parametry. Dodatkowo stworzenie takiej mapy dla większej liczby zmiennych niezależnych, wymaga wykonania ogromnej liczby eksperymentów. Mapy stabilności przedstawione na rys. 4.7 dają jednak pewne przesłanki do sposobu wyboru punktów startowych dla algorytmów optymalizacji.



Rys. 4.7. Mapa stabilności modeli zredukowanych z zastosowaniem filtrów dolnoprzepustowych Butterwortha (a)  $k=15$ , (b)  $k=25$  (stabilne – kolor czarny)

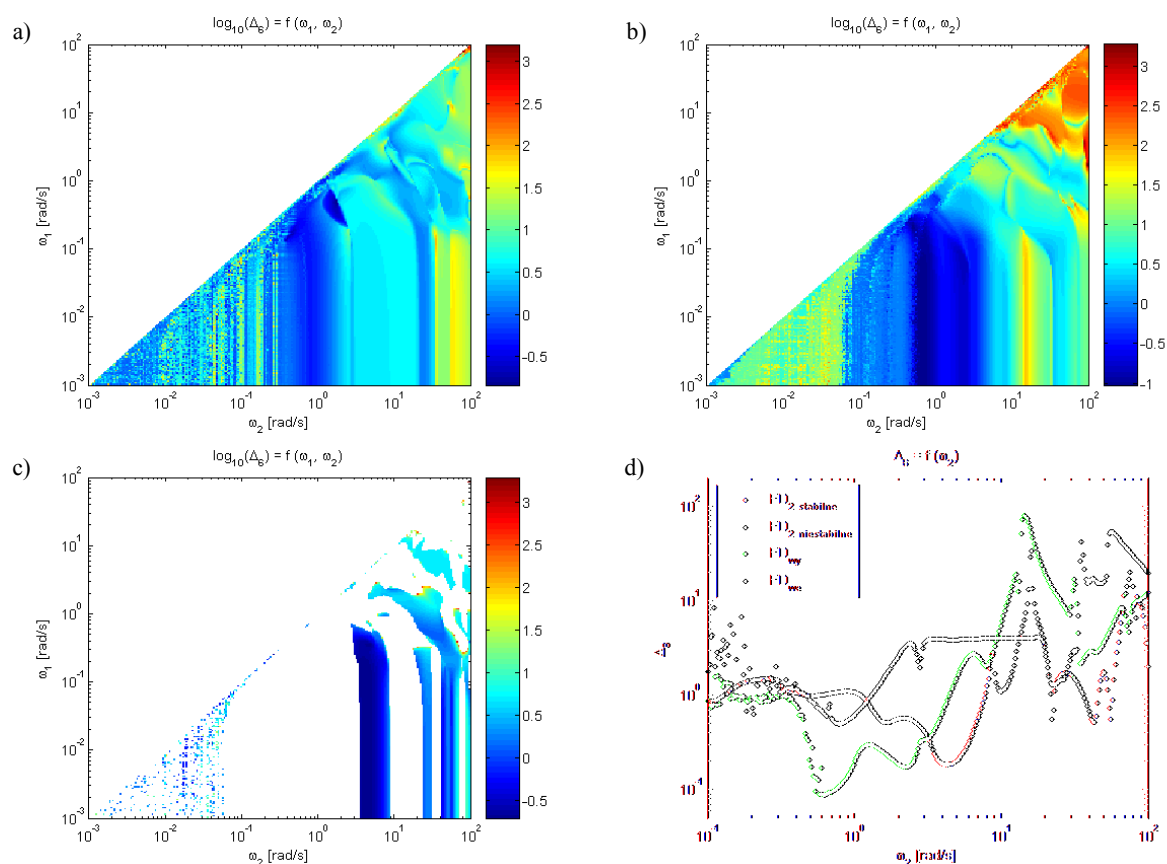
#### 4.2.2. Wpływ parametrów metody FD na wyniki redukcji

Jak zostało przedstawione w rozdziale (3.2.4) metodę **FD** można przyjąć jako szczególny przypadek metody **FW** z funkcjami wagowymi w postaci idealnych filtrów pasmowo-przepustowych [GA04] o identycznych parametrach umieszczonych na wszystkich wejściach i (lub) wyjściach modelu. Identycznie jak dla metody **FW**, możliwe jest zastosowanie funkcji wagowej na wejściu (poprzez zastosowanie gramianu sterowalności w ograniczonym zakresie częstotliwości), wyjściu (gramianu obserwowalności w ograniczonym zakresie częstotliwości) lub obu wag jednocześnie. Metoda gwarantuje zachowanie stabilności modelu zredukowanego jedynie w przypadku zastosowania jednej wagi.

Na rys. 4.8 przedstawiono zależność średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji w funkcji przedziału częstotliwości  $[\omega_1, \omega_2]$  dla modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika przy zastosowaniu jednej (na wejściu lub wyjściu) oraz obu funkcji wagowych. Zastosowanie obu funkcji wagowych powoduje, że znaczna liczba uzyskanych modeli zredukowanych jest niestabilna.

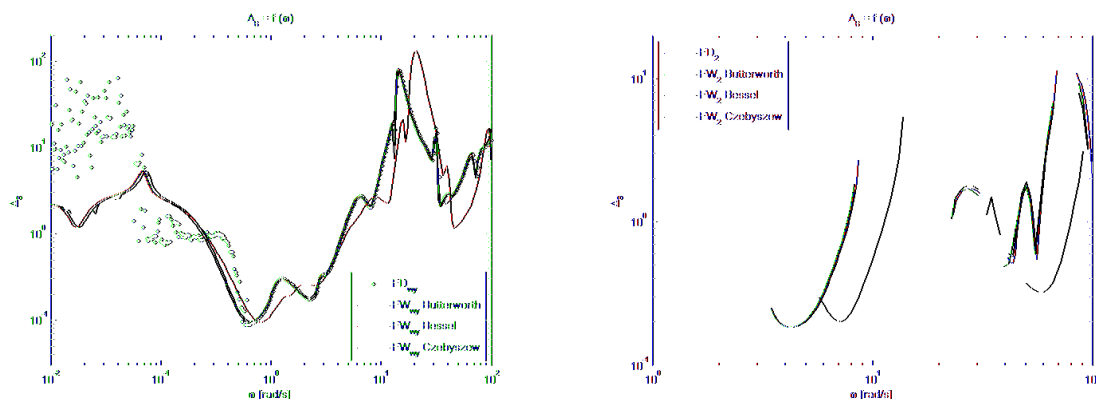
Dla modeli obiektów sterowania, których zakres adekwatności definiowany jest od częstotliwości zerowej, celowym wydaje się wybór częstotliwości  $\omega_1$  równej zero oraz optymalizacja jedynie parametru  $\omega_2$  (rys 4.8d). Uzyskane wyniki błędu aproksymacji są wówczas porównywalne z otrzymanymi za pomocą metody **FW** z zastosowaniem filtrów dolnoprzepustowych o wysokim rzędzie.

#### 4. Algorytmy doboru parametrów metod redukcji



Rys. 4.8. Średniokwadratowy względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 w funkcji częstotliwości  $\omega_1, \omega_2$  dla metody **FD** (a) *one-sided* z zastosowaniem wagowego filtr wyjściowego, (b) *one-sided* z zastosowaniem wagowego filtr wejściowego (c) *two-sided*, (d) w funkcji częstotliwości  $\omega_2$  ( $\omega_1=0$ )

Na rys. 4.9 przedstawiono błąd aproksymacji w funkcji  $\omega_2$  dla metody **FD** oraz w funkcji  $\omega_f$  dla metody **FW** (rzęd filtru  $n_f=20$ ). Dla metody *two-sided* wykreślono wyłącznie stabilne rozwiązania.



Rys. 4.9. Średniokwadratowy względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 w funkcji częstotliwości  $\omega_2$  dla metody **FD** oraz  $\omega_f$  dla metody **FW** oraz rzędu filtru  $n_f=20$

Ustalenie  $\omega_1$  równej zero umożliwia znacznie szybsze wyznaczenie optymalnych parametrów (ze względu na konieczność wyznaczenie wyłącznie jednego parametru). Dla modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika założenie stałej wartości  $\omega_1 = 0$  nie spowodowało znacznego pogorszenia błędów aproksymacji w porównaniu do modeli uzyskanych za po-

#### 4. Algorytmy doboru parametrów metod redukcji

mocą obu optymalnych wartości parametrów (przypadki dla których błąd wzrósł o ponad 50% zaznaczone zostały w tab. 4.4). Pośrednio potwierdza to również poprawność wyboru funkcji wagowych dla metody **FW** w postaci filtrów dolnoprzepustowych.

Tab. 4.4. Błąd aproksymacji modelu zredukowanego (rzęd modelu  $k=15$ ) w funkcji parametrów  $\omega_1, \omega_2$

		Optymalne parametry $\omega_1, \omega_2$ względem miary błędu:						
		$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$	$\Delta_6$	$\Delta_7$
FD <sub>wy</sub>		0.1922	0.2958	41.62	0.05140	0.04079	0.08730	0.2092
	$\omega =$	$\omega = , 2$	$\omega = , 9$	$\omega =$	$\omega = ,282$	$\omega = , 67$	$\omega = , 279$	
	$\omega_2=34,6$	$\omega_2= , 9$	$\omega_2= ,49$	$\omega_2=34,6$	$\omega_2= ,6 8$	$\omega_2= ,6 8$	$\omega_2= ,234$	
		0.1922	0.4400	42.00	0.05140	0.06651	0.08789	0.2881
	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	
	$\omega_2=34,6$	$\omega_2= , 84$	$\omega_2= ,6$	$\omega_2=34,6$	$\omega_2= , 88$	$\omega_2= ,62$	$\omega_2= ,2 4$	
FD <sub>we</sub>		0.1884	0.2643	132.0	0.05644	0.02871	0.1342	0.1578
	$\omega = ,$	$\omega = , 847$	$\omega = , 28$	$\omega =$	$\omega = ,4 8$	$\omega = ,469$	$\omega = , 4$	
	$\omega_2=2 ,74$	$\omega_2=2 ,74$	$\omega_2= ,372$	$\omega_2=2 ,8$	$\omega_2= ,79$	$\omega_2= ,7$	$\omega_2= , 6 3$	
		0.1886	0.3161	330.4	0.05644	0.06395	0.4963	0.2025
	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	
	$\omega_2=2 ,8$	$\omega_2=22,84$	$\omega_2= ,99$	$\omega_2=2 ,8$	$\omega_2= ,$	$\omega_2= ,787$	$\omega_2= , 76$	
FD <sub>2</sub>		0.01737	0.3716	105.4	0.004930	0.02918	0.1843	0.09679
	$\omega = , 2$	$\omega = ,24$	$\omega = , 4$	$\omega =$	$\omega = , 243$	$\omega =$	$\omega = , 386$	
	$\omega_2=28,7$	$\omega_2= ,2 7$	$\omega_2= ,46$	$\omega_2=23,92$	$\omega_2= , 4 4$	$\omega_2=4,24$	$\omega_2= , 8$	
		0.01742	0.4569	107.3	0.004930	0.05115	0.1843	0.1796
	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	$\omega =$	
	$\omega_2=28,77$	$\omega_2= , 96$	$\omega_2= ,46$	$\omega_2=23,92$	$\omega_2= , 96$	$\omega_2=4,24$	$\omega_2= , 96$	

#### 4.2.3. Wpływ parametrów metody FMR na wyniki redukcji

Jak zostało przedstawione w rozdziale 3.3.4, metoda **FMR** wymaga dwukrotnego przekształcenia modelu raz z dziedziny ciągłej do dyskretnej (dla modelu pierwotnego) oraz po raz drugi z dziedziny dyskretnej do ciągłej (dla modelu zredukowanego). Konwersję modelu można uzyskać poprzez zastosowanie transformacji biliniowej w postaci  $s = \omega_0 \frac{z-1}{z+1}$  [Guo89, WM03, WM05, Gug07]. Dyskretny model zredukowany tworzy się na podstawie  $m_F$  dyskretnoczasowych współczynników Fouriera. Model taki może być następnie poddany kolejnej redukcji np. poprzez zastosowanie metody **BTA**.

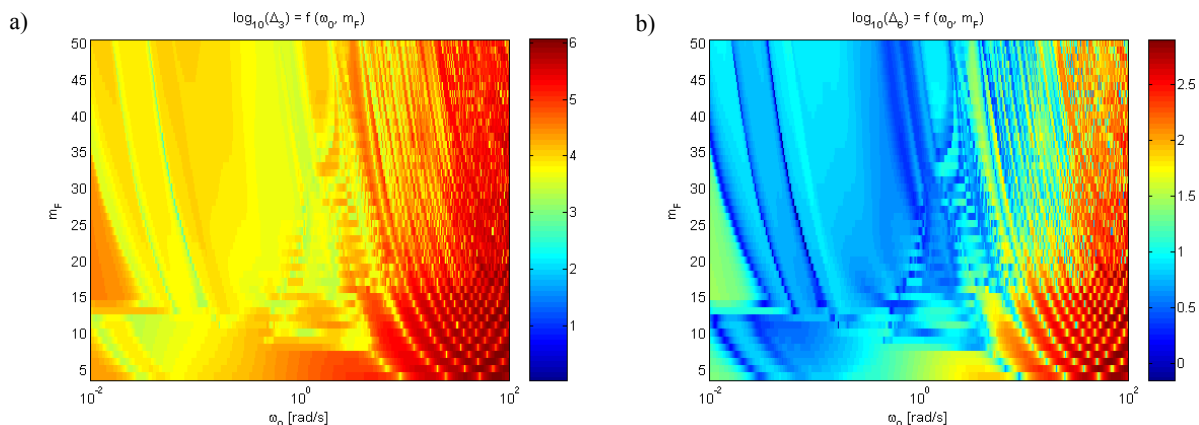
Metoda **FMR** umożliwia zatem zmianę właściwości modelu zredukowanego poprzez dobór dwóch parametrów:

- częstotliwości  $\omega_0$ , która jest parametrem transformacji biliniowej,
- liczby dyskretnoczasowych współczynników Fouriera, na podstawie których tworzony jest dyskretny model zredukowany ( $m_F$ )

Pomimo znacznego wpływu parametrów  $\omega_0$  oraz  $m_F$  na wartość błędu aproksymacji, w literaturze nie określono w jaki sposób dobierać te parametry. Jedynym zaleceniem jest wybór „dużej” wartości  $\omega_0$ , dla modeli których zakres adekwatności obejmuje wysokie częstotliwości [WM05]. Wpływ liczby dyskretnoczasowych współczynników Fouriera na błąd aproksymacji modelu zredukowanego nie był w literaturze rozważany.

Aby możliwe było wybranie najniższego rzędu modelu zredukowanego, spełniającego przyjęte kryteria błędu aproksymacji modelu, konieczne jest wyznaczenie optymalnych parametrów  $m_F$  oraz  $\omega_0$ . Dla modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika zależność błędu aproksymacji w funkcji  $m_F$  oraz  $\omega_0$  wykazuje znaczną liczbę minimów lokalnych (rys. 4.10),

które pojawiają się cyklicznie wraz ze wzrostem  $\omega_0$ . Obszary wokół ekstremów lokalnych są bardzo ostre i już niewielkie zwiększenie bądź zmniejszenie tego parametru powoduje znaczny wzrost błędu aproksymacji. Liczba współczynników  $m_F$  ma mniejszy wpływ na wartość błędu aproksymacji. Parametr ten wpływa jednak na zmianę optymalnej wartości  $\omega_0$  (dla modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika zwiększenie liczby dyskretnoczasowych współczynników Fouriera powoduje konieczność zmniejszenia  $\omega_0$ ).



Rys. 4.10. (a) Maksymalny (b) średniokwadratowy względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 w funkcji  $m_F$  oraz  $\omega_0$

W tab. 4.5 przedstawiono wartości błędów aproksymacji dla modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika dla dwóch kryteriów doboru liczby dyskretno czasowych współczynników Fouriera:

- minimalnego błędu aproksymacji dla najmniejszej liczby dyskretnoczasowych współczynników Fouriera, umożliwiających utworzenie modelu zredukowanego (dla  $k = 15 \Rightarrow m_F =$  ),
- minimalnego błędu aproksymacji niezależnie od liczby współczynników Fouriera, wykorzystanych do utworzenia zredukowanego modelu dyskretnego.

Jak można zauważyć zwiększenie liczby współczynników, na podstawie których wyznaczany jest dyskretny model zredukowany, umożliwia nawet kilkukrotne zmniejszenie wartości błędu aproksymacji. Wadą takiego rozwiązania jest zwiększenie złożoności obliczeniowej algorytmu ze względu na konieczność wyznaczenia większej liczby dyskretnoczasowych współczynników Fouriera oraz konieczność redukcji uzyskanego modelu dyskretnego np. metodą **BTA**.

Tab. 4.5. Błąd aproksymacji modelu zredukowanego (rząd modelu  $k=15$ ) w funkcji parametrów  $m_F$  oraz  $\omega_0$

Optymalne parametry $m_F$ oraz $\omega_0$ względem miary błędu:							
	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$	$\Delta_6$	$\Delta_7$
FMR	26.78	1.186	390.5	1.701	0.3241	0.6659	10.37
	$\omega_0 = 55$ $m_F =$	$\omega_0 =$ $m_F =$	$\omega_0 = 0.05$ $m_F =$	$\omega_0 = 0$ $m_F = 50$	$\omega_0 = 6.1$ $m_F =$	$\omega_0 = 0.05$ $m_F = 0$	$\omega_0 = 0.01$ $m_F =$
	91.77	5.354	2783	9.195	0.5502	2.512	542.6
	$\omega_0 = 0$ $m_F =$	$\omega_0 = 1$ $m_F =$	$\omega_0 = 0.0$ $m_F =$	$\omega_0 = 0.16$ $m_F =$	$\omega_0 = 1$ $m_F =$	$\omega_0 = 0.05$ $m_F =$	$\omega_0 = 0.01$ $m_F =$

#### 4.2.4. Wpływ parametrów metody RK na wyniki redukcji

Optymalizacja parametrów dla wielopunktowych metod Kryłowa charakteryzuje się największym stopniem skomplikowania. Transmitancja modelu zredukowanego przedstawiona



jest w postaci zbioru rozwinięć wokół kolejnych punktów interpolacji. Oznacza to, że optymalny model zredukowany można wyznaczyć poprzez dobór trzech parametrów: liczby punktów interpolacji ( $J$ ), wartości poszczególnych punktów interpolacji ( $s_j$ ) oraz liczby momentów przypadających na jeden punkt interpolacji ( $I_j$ ). Dla algorytmu przedstawionego w dodatku (tab. B.14) parametry te mogą mieć różne wartości podczas wyznaczania ortonormalnej bazy  $\mathbf{V}$  oraz  $\mathbf{W}$ . Algorytm Arnoldiego dla każdego punktu interpolacji wyznacza  $I_j$  liniowo zależnych kolumn baz ortonormalnych  $\mathbf{V}$  oraz  $\mathbf{W}$ . Ze względu na ograniczoną liczbę kolumn macierzy na parametry redukcji nałożone są pewne ograniczenia, które można scharakteryzować następująco:

- liczba punktów interpolacji może być co najwyżej równa najbliższej wartości całkowitej większej bądź równej ilorazowi rzędu modelu zredukowanego oraz liczby wejść modelu (dla bazy  $\mathbf{V}$ ) oraz wyjść modelu (dla bazy  $\mathbf{W}$ ):

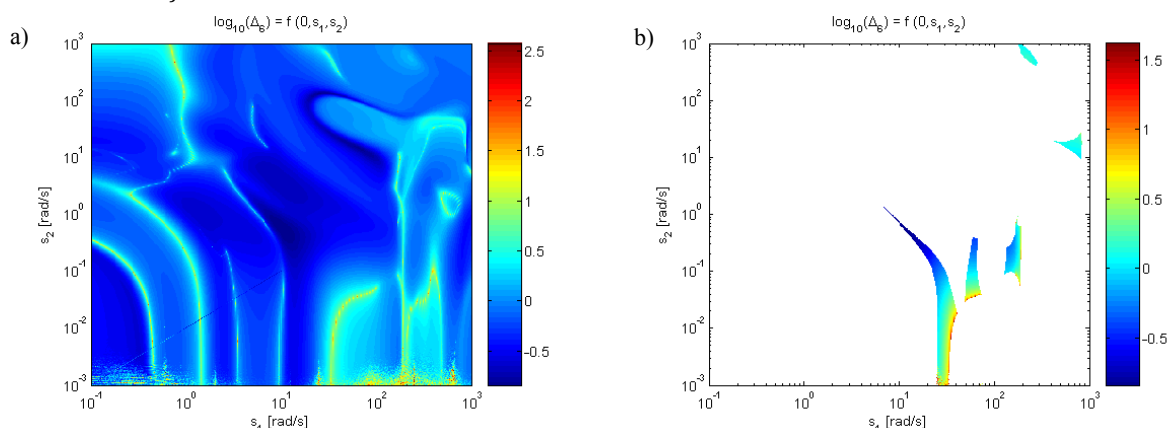
$$\begin{aligned} J &\leq \text{ceil}\left(\frac{k}{p}\right) \text{ dla bazy } \mathbf{V} \\ J &\leq \text{ceil}\left(\frac{k}{m}\right) \text{ dla bazy } \mathbf{W} \end{aligned} \quad (4.12)$$

- suma liczby momentów  $\sum I_j$  musi być równa najbliższej wartości całkowitej większej bądź równej ilorazowi rzędu modelu zredukowanego oraz liczby wejść modelu dla bazy  $\mathbf{V}$  (wyjść modelu dla bazy  $\mathbf{W}$ ):

$$\begin{aligned} \sum I_j &= \text{ceil}\left(\frac{k}{p}\right) \text{ dla bazy } \mathbf{V} \\ \sum I_j &= \text{ceil}\left(\frac{k}{m}\right) \text{ dla bazy } \mathbf{W} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Na rys 4.11 przedstawiono zależność średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji w funkcji wartości dwóch punktów interpolacji dla modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika. Pozostałe parametry algorytmu ustalono następująco:

- rząd modelu zredukowanego –  $k = 15$ ,
- liczba punktów interpolacji –  $J = 3$  (dla obu baz ortogonalnych),
- wartości punktów interpolacji –  $\{0, s_1, s_2\}$ ,
- liczba momentów przypadająca na jeden punkt interpolacji  $I_j = \{2,1,1\}$  dla bazy  $\mathbf{V}$  oraz  $I_j = \{2,2,1\}$  dla bazy  $\mathbf{W}$ .

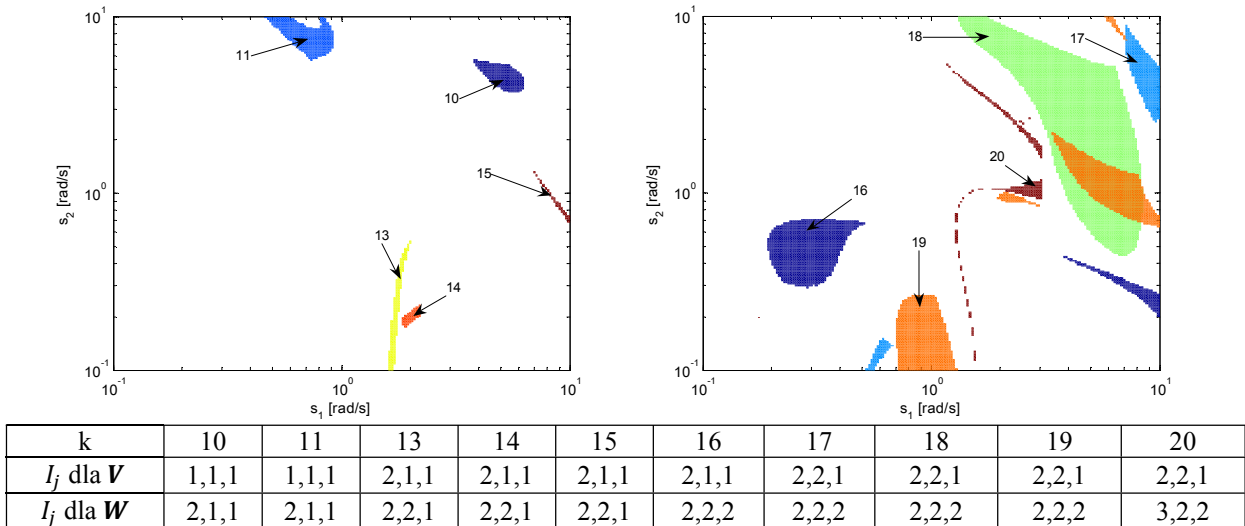


Rys. 4.11. Średniokwadratowy względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 (a) wszystkie wyniki (b) wyniki stabilne

Jak można zaobserwować na rys. 4.11, zastosowanie optymalnych parametrów redukcji umożliwia poprawę błędu aproksymacji nawet o kilka rzędów. Identyfikacja jak dla innych metod redukcji, wartość błędu aproksymacji w funkcji parametrów posiada kilka wyraźnych minimów lokalnych. W przeciwieństwie do metod redukcji przedstawionych w poprzednich

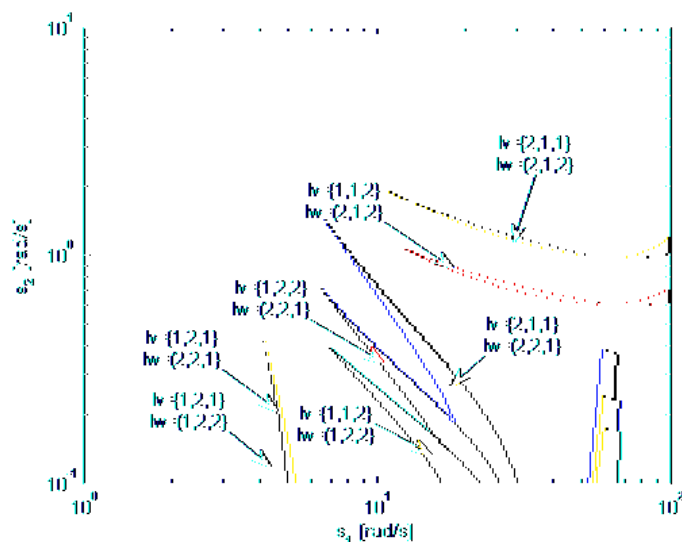
#### 4. Algorytmy doboru parametrów metod redukcji

podrozdziałach (4.2.1 - 4.2.3), zastosowanie wielopunktowych metod Kryłowa nie gwarantuje zachowania stabilności modelu zredukowanego. Jedynie niewielka część uzyskanych modeli zredukowanych jest stabilna (rys. 4.11b). Można jednak zauważyć grupowanie się stabilnych rozwiązań. Na rys. 4.12 przedstawiono obszary uzyskanych stabilnych rozwiązań dla rzędów modelu zredukowanego w zakresie od  $k=10$  do  $k=20$ .



Rys. 4.12. Zakresy stabilnych rozwiązań dla modeli rzędów od  $k=10$  do  $k=20$

Pomimo grupowania się stabilnych rozwiązań, nie można wydzielić żadnych zakresów wartości parametrów, które gwarantowałyby uzyskanie stabilnego rozwiązania (ani żadnej korelacji pomiędzy nimi). Każda zmiana dowolnego z parametrów (rzędu modelu zredukowanego, liczby punktów interpolacji, liczby momentów przypadających na punkt interpolacji itp.), całkowicie zmienia mapę stabilnych rozwiązań. Na rys. 4.13 przedstawiono stabilne rozwiązania dla modelu zredukowanego rzędu  $k=15$  i różnej liczby momentów przypadających na jeden punkt interpolacji  $I_j$ , dobranych osobno dla ortogonalnej bazy  $V$  (oznaczono  $I_v$ ) oraz  $W$  (oznaczono  $I_w$ ). Na podstawie przedstawionych charakterystyk można stwierdzić, że podczas optymalizacji parametrów redukcji dla metody **RK**, podstawowe znaczenie będzie miało wyznaczenie punktów startowych algorytmu optymalizacji.



Rys. 4.13. Zakresy stabilnych rozwiązań dla modeli rzędu  $k=15$  oraz różnej liczby momentów przypadających na jeden punkt interpolacji  $I_j$



### 4.2.5. Algorytmy doboru parametrów dla metod redukcji

Poważnym problemem praktycznym jest wybór algorytmu optymalizacji parametrów dla metod redukcji. Najprostszą, ale jednocześnie najbardziej złożoną obliczeniowo metodą, jest przeszukiwanie części zakresu fizycznie możliwych do realizacji rozwiązań. Wiąże się to z wykonaniem ogromnej liczby operacji redukcji. Jednocześnie metoda ta nie gwarantuje odnalezienia minimum globalnego w przypadku, gdy wybrany został zbyt duży krok z jakim przeszukiwana jest dziedzina rozwiązań.

Opracowanych zostało wiele różnych metod wyznaczania ekstremum funkcji, która dla badanego problemu jest wartością miary błędu aproksymacji w funkcji parametrów redukcji. Wiele z nich wyznacza najlepszy kierunek poszukiwań na podstawie właściwości funkcji w poszczególnych punktach roboczych algorytmu. W zależności od sposobu wyznaczania kierunku poszukiwań, możemy rozróżnić m.in.: metody bezgradientowe, gradientowe oraz newtonowskie [MF06].

W metodach bezgradientowych kierunki poszukiwania ekstremum są równoległe do osi układu współrzędnych badanej funkcji. Bardziej efektywne metody gradientowe bazują na metodzie największego spadku, polegające na wyznaczeniu nowego kierunku poszukiwań na podstawie wyznaczonego gradientu funkcji w punkcie roboczym. W metodach newtonowskich wykorzystywana jest dodatkowo macierz odwrotna (lub jej aproksymacja) pochodnych cząstkowych i nowy kierunek wyznaczany jest na podstawie iloczynu tej macierzy oraz gradientu funkcji. Przedstawione algorytmy są efektywne i szybko zbiegają się do ekstremum funkcji. Ich podstawową wadą jest ich duża wrażliwość na lokalne minima, wynikająca z określenia kierunku poszukiwań na podstawie lokalnych właściwości funkcji. Działanie algorytmu wyłącznie na podstawie danych w punkcie roboczym powoduje, że algorytm nie potrafi opuścić „obszaru przyciągania” lokalnego minimum, ponieważ kolejny punkt roboczy wyznaczany jest zawsze w jego kierunku.

Występowanie wielu minimów lokalnych w charakterystykach błędu aproksymacji w funkcji parametrów poszczególnych metod redukcji oznacza, że algorytmy bazujące na lokalnych właściwościach funkcji są mało przydatne do wyznaczenia minimum funkcji. Konieczne jest użycie metod optymalizacji globalnej, które najczęściej dają rozwiązania przybliżone. W celu uzyskania dokładnego wyniku ekstremum konieczne jest wykorzystanie algorytmów hybrydowych. Łączą one w sobie oba algorytmy tj. przeszukiwania globalnego i lokalnego. Celem działa algorytmu przeszukiwania globalnego jest wyznaczenie rozwiązania przybliżonego, które jest następnie punktem startowym dla algorytmu przeszukiwania lokalnego.

Wiele metod optymalizacji globalnej jest modyfikacją algorytmów optymalizacji lokalnej polegającą na wielokrotnym użyciu algorytmu dla różnych punktów startowych [HY97]. Dodatkowo możliwa jest modyfikacja funkcji, w celu usunięcia odnalezionych już przez algorytm minimów (metody z Tabu [MF06]). Inne metody bazują na „symulacji bezwładności”, co oznacza że na kierunek przeszukiwania oddziałuje zarówno wartość gradientu w kierunku lokalnego minimum jak i siła bezwładności wynikająca z ruchu wykonanego w poprzednich krokach. Dzięki tak zdefiniowanej bezwładności algorytm ma możliwość opuszczenia obszarów przyciągania „płytkich” minimów lokalnych. Oprócz metod deterministycznych istnieją także algorytmy niedeterministycznej optymalizacji, które charakteryzują się wykorzystaniem elementu losowości w procesie optymalizacji. Dodatkową ich zaletą jest możliwość zastosowania do rozwiązywania problemów zarówno ciągłych jak i dyskretnych (np. dla metody **FW** rząd filtru jest wartością dyskretną, natomiast częstotliwość graniczna wartością ciągłą).

Najprostszą z metod niedeterministycznych jest algorytm Monte Carlo, w którym dokonuje się losowania kolejnych punktów przestrzeni rozwiązań. Wynikiem metody jest najlepsze

odnalezione rozwiązanie. Algorytm ten ma niewielką efektywność przeszukiwania ze względu na przypadkowe przeszukiwanie całej przestrzeni rozwiązań. Znacznie bardziej efektywne obliczeniowo są algorytmy genetyczne [Gol03, Mic92], ewolucyjne [Mich92, Ara01, MF06] oraz symulowanego wyżarzania [KGV83, MF06].

Prace nad algorytmami inspirowanymi genetyką oraz ewolucją prowadzone były w kilku niezależnych ośrodkach naukowych już od lat 60. Wśród najważniejszych rozwijanych technik można wymienić programowanie ewolucyjne (któremu początek dały prace Fogela) [Gol03], strategie ewolucyjne (opracowane przez Rechenberga oraz Schwefela) oraz algorytmy genetyczne, który powstały w wyniku prac Hollanda nad modelowaniem ewolucji osobników wyposażonych w binarny kod genetyczny. Stworzony algorytm genetyczny następnie spopularyzowany został przez Goldberga [Gol03].

Zainteresowanie algorytmami ewolucyjnymi znacznie wzrosło w latach 80., o czym zdecydowała prostota schematu oraz łatwość praktycznego zastosowania w wielu różnorodnych dziedzinach. Na początku lat 90. zaczęto dostrzegać ograniczenia algorytmów ewolucyjnych, spowodowane identycznym podejściem do rozwiązania różnych problemów. Duża uniwersalność algorytmów powoduje niewielką efektywność rozwiązania konkretnych problemów. W celu zwiększenia efektywności zaczęto uwzględniać specyfikę zadania poprzez stosowanie specjalizowanego kodowania i operatorów genetycznych [Mic92]. Sam algorytm ewolucyjny zaczął być traktowany jako ramowy sposób postępowania (metaheurystyka).

W wyniku wzajemnego upodobniania się różnorodnych technik ewolucyjnych (strategii ewolucyjnych, algorytmów genetycznych oraz programowania ewolucyjnego) przyjęła się nowa nazwa: algorytmy ewolucyjne (lub obliczenia ewolucyjne ang. *evolutionary computation*).

### 4.3. Algorytmy ewolucyjne

Algorytmy ewolucyjne (AE) są jedną z metod rozwiązania zadania optymalizacji globalnej. Nie można ich jednak traktować jako algorytmów optymalizacji w ich ścisłym znaczeniu. Realizują one proces adaptacji, co oznacza że głównym celem jest znalezienie rozwiązania lepszego od dotychczas uzyskanego [Gol03]. Nie można zagwarantować, że wynikiem tego procesu będzie znalezienie najlepszego rozwiązania. Wraz ze zwiększaniem liczby iteracji algorytmu prawdopodobieństwo wyznaczenia wartości ekstremum globalnego wzrasta i asymptotycznie dąży do jedności.

Charakteryzują się one dużą uniwersalnością zastosowania, która jest okupiona niewielką efektywnością dla rozwiązania konkretnych problemów. Jeżeli wiedza o problemie jest wystarczająca do sformułowania specjalnych algorytmów, wówczas najczęściej są one bardziej efektywne niż algorytmy ewolucyjne. Jeżeli jednak nie jest możliwe opracowanie takich algorytmów, zastosowanie algorytmów ewolucyjnych ze względu na ich uniwersalność jest jak najbardziej uzasadnione. Uwzględnienie nawet bardzo ograniczonej wiedzy na temat rozwiązywanego problemu podczas projektowania algorytmu ewolucyjnego (poprzez wprowadzenie odpowiedniego kodowania lub sposobu generowania punktów startowych), umożliwia znaczne zwiększenie jego efektywności.

Algorytmy ewolucyjne powstały w wyniku inspiracji genetyką i ewolucją, co spowodowało powstanie szczególnej terminologii, która łączy język biologii oraz informatyki. AE jest wykorzystywany do przeszukania przestrzeni alternatywnych rozwiązań. Każde z rozwiązań nazywane jest **osobnikiem**. Algorytm przetwarza zatem **populację** osobników. Osobnik jest wyposażony w informację stanowiącą jego **genotyp** (jest to zbiór cech np.: częstotliwość graniczna filtru, rząd filtru dolnoprzepustowego itd.). Każda z tych cech nazywana jest **chromosomem**. Chromosomy składają się natomiast z elementarnych jednostek zwanych **genami**.

Punkt w przestrzeni rozwiązań problemu (zestaw konkretnych cech) nazywany jest **fenotypem**. Co najmniej jeden z chromosomów zawiera kod określający fenotyp. Pozostałe mogą natomiast zawierać informacje istotne dla algorytmu.

AE działa w **środowisku**, które definiowane jest na podstawie postawionego problemu optymalizacji. Środowisko można opisać za pomocą **funkcji przystosowania** (ang. fitness), która zawsze jest maksymalizowana w trakcie działania algorytmu. Każdemu z osobników przyporządkowywana jest wartość liczbowa, która określa jakość reprezentowanego przez niego rozwiązania. Wartość ta jest nazwana **przystosowaniem osobnika**.

Przystosowanie osobników nie może być liczbą ujemną, dlatego też funkcja przystosowania musi być tak zdefiniowana, aby przyjmowała wyłącznie wartości dodatnie. Jeżeli funkcja celu może przyjmować wartości ujemne, wówczas konieczne jest wprowadzenie przekształcenia funkcji celu w funkcję przystosowania np. poprzez przekształcenie liniowe.

Działanie algorytmu ewolucyjnego sprowadza się do wykonywania następujących po sobie operacji: **reprodukcji**, **operacji genetycznych**, **oceny** i **sukcesji**. **Cykl ewolucji** może skończyć się wówczas, gdy przystosowanie osiągnie odpowiednio dużą wartość lub stan populacji bazowej świadczy o stagnacji algorytmu.

W wyniku przeprowadzanych operacji możemy rozróżnić następujące populacje:

- populację bazową  $P_T$ , która poddawana jest reprodukcji w wyniku której otrzymuje się populację tymczasową,
- populację tymczasową  $T_T$ , która w wyniku operacji genetycznych przekształcana jest w populację potomną,
- populacja potomna  $O_T$ , która poprzez operację sukcesji staje się nową populacją bazową.

### 4.3.1. Podstawowe operacje algorytmu ewolucyjnego

#### Kodowanie

Pierwsze algorytmy genetyczne wykorzystywały kodowanie binarne do reprezentacji chromosomów [Gol03]. Umożliwia to wprowadzenie krzyżowania oraz mutacji działających na podobnych zasadach jak w biologii. Krzyżowanie binarne jest jednak operatorem obciążonym, który może powodować, że osobniki potomne w przestrzeni fenotypu są bardziej oddalone niż chromosomy rodzicielskie. Wykazać to można na prostym przykładzie:

Dla funkcji liniowej  $f(x) = x$  para chromosomów kodowanych binarnie:  $X_T^1 = [1100]$ ,  $X_T^2 = [0011]$  daje wartości funkcji przystosowania równe  $f(x^1) = 12$  oraz  $f(x^2) = 3$ .

W wyniku krzyżowania jednopunktowego możliwe jest otrzymanie pary chromosomów potomnych w postaci:  $Y_T^1 = [1111]$ ,  $Y_T^2 = [0000]$ , dla których funkcja przystosowania jest odpowiednio równa  $f(y^1) = 15$  oraz  $f(y^2) = 0$ .

Reprezentacja binarna ma istotne wady, gdy stosuje się ją do rozwiązywania wielowymiarowych zadań o dużej dokładności [Mic92]. Szczególnie w zadaniach optymalizacji parametrycznej z ciągłymi dziedzinami, dużą zaletą jest zastosowanie kodowania za pomocą liczb rzeczywistych. Przeprowadzone przez Michalewicza eksperymenty wykazały, że reprezentacja zmiennopozycyjna (rzeczywisto liczbowa) jest szybsza, daje bardziej zbliżone wyniki w różnych przebiegach algorytmu oraz prowadzi do większej dokładności (zwłaszcza przy dużych dziedzinach, które wymagają długich reprezentacji binarnych) [Mic92].

Reprezentacja rzeczywista (bliższa przestrzeni zadania ze względu na jednoznaczność zależności między zmienną a genem) umożliwia również opracowanie operatorów genetycznych uwzględniających specyfikę zadania i ograniczenia z nią związane. Zastosowanie kodowania rzeczywistoliczbowego umożliwia obejście problemów związanych z krawędziami Hammin-

ga [Ara01] oraz pozwala uniknąć związanych z tym niebezpieczeństw wprowadzenia dodatkowych ekstremów lokalnych.

Na podstawie rozważań zawartych w [Mic92] i [Ara01] w pracy zdecydowano się zastosować kodowanie rzeczywisto liczbowe, nawet w przypadku kodowania wartości całkowitych jakimi są rząd filtru dolnoprzepustowego ( $n_f$ ) dla metody **FW**, liczba współczynników dyskretnoczasowych Fouriera ( $m_f$ ) dla metody **FMR**.

### Reprodukcja

Zadaniem reprodukcji jest utworzenie populacji tymczasowej  $T_T$ , która jest następnie poddawana operacjom genetycznym. W jej wyniku zostają powielone wybrane osobniki populacji bazowej (możliwe jest wielokrotne powielanie tego samego osobnika). Osobniki populacji tymczasowej nazywane są osobnikami rodzicielskimi. Prawdopodobieństwo wyboru osobnika do reprodukcji uwzględnia wartość jego przystosowania. Im większa wartość przystosowania tym większe prawdopodobieństwo powielenia. Związane jest to z pojęciem nacisku selektywnego, które określa tendencję do poprawiania średniej wartości przystosowania populacji bazowej.

Rozróżnić można następujące rodzaje reprodukcji:

- Reprodukacja proporcjonalna (ruletkowa)

Prawdopodobieństwo reprodukcji każdego osobnika do populacji tymczasowej jest wprost proporcjonalne do jego wartości funkcji przystosowania i wynosi:

$$p_r(x_i) = \frac{f(x_i)}{\sum_{x \in P^t} f(x)} \quad (4.14)$$

- Rangowa

Reprodukcja rangowa umożliwia z dużą swobodą kształtowanie nacisku selektywnego. W tej metodzie prawdopodobieństwo reprodukcji zależne jest od rangi określającej jakość osobnika. Z rangą związane jest określone prawdopodobieństwo reprodukcji. Wybór funkcji określającej prawdopodobieństwo reprodukcji w zależności od rangi, dokonywany jest przez projektanta algorytmu. Główną trudność stanowi prawidłowe wyznaczenie liczby przewidywanych kopii na podstawie rangi.

- Turniejowa

Reprodukcja turniejowa korzysta z dwustopniowej selekcji. W pierwszym kroku dokonuje się wyboru populacji turniejowej  $Q \subset P_T$ . Zawiera ona  $q$  osobników, które są wybrane z jednakowym prawdopodobieństwem z populacji bazowej. Następnym krokiem jest turniej, którego zwycięzcą zostaje osobnik o największej wartości funkcji przystosowania. Zwycięzcy umieszczani są w populacji tymczasowej aż do jej wypełnienia. Parametrem sterującym intensywnością nacisku selektywnego jest liczność turnieju  $q$ .

### Przekształcenie funkcji celu w funkcję przystosowania

Celem optymalizacji parametrów metod redukcji jest minimalizacja błędu aproksymacji modelu zredukowanego. Algorytmy ewolucyjne dążą jednak do maksymalizowania funkcji przystosowania, co powoduje konieczność odpowiedniego przekształcenia funkcji celu w funkcję przystosowania. Najprostszym sposobem jest przekształcenie liniowe w postaci:

$$f(x_i) = C - g(x_i) \quad (4.15)$$

gdzie:  $f(x_i)$  jest funkcją przystosowania, natomiast  $g(x_i)$  jest funkcją celu.

Przystosowanie osobników jest zawsze liczbą dodatnią co oznacza, że  $C$  musi być większa od wartości funkcji celu najgorszego z osobników. Wartość ta może być stała w całym cyklu algorytmu lub dobierana dynamicznie w każdym pokoleniu.

Stała wartość  $C$  powoduje zmniejszanie się nacisku selektywnego wraz z kolejnymi generacjami algorytmu. Powodem są coraz mniejsze różnice wartości funkcji przystosowania po-

między osobnikami populacji. Zapobiec temu może dynamiczne wyznaczanie wartości  $C$ , które jednak zawodzi w momencie pojawienia się osobnika o przystosowaniu wyraźnie gorszym od przeciętnego. Następuje wówczas drastyczne obniżenie nacisku selektywnego. Można to wykazać na następującym prostym przykładzie:

Dla trzech osobników mających następujące wartości funkcji celu:

$$g(x_1) = 0,1 \qquad g(x_2) = 0,2 \qquad g(x_3) = 4,7$$

W wyniku przekształcenia funkcji celu w funkcję przystosowania wg zależności (4.15) dla  $C=5$  otrzymuje się następujące wartości przystosowania:

$$f(x_1) = 4,9 \qquad f(x_2) = 4,8 \qquad f(x_3) = 0,3$$

Oznacza to, że prawdopodobieństwa reprodukcji (dla reprodukcji proporcjonalnej) wynoszą odpowiednio:

$$p_r(x_1) = 49\% \qquad p_r(x_2) = 48\% \qquad p_r(x_3) = 3\%$$

Dwukrotna różnica w wartości funkcji celu pomiędzy pierwszym a drugim osobnikiem daje w rezultacie zaledwie 1% różnicę w prawdopodobieństwie reprodukcji. W efekcie obniżenia nacisku selektywnego w następnych pokoleniach może zmniejszyć się średnie przystosowanie populacji i przeszukiwanie upodobni się do błędzenia przypadkowego. Ostatecznie powoduje to zmniejszenie się szybkości zbieżności algorytmu i pogorszenie jakości znalezionych rozwiązań.

Z tego względu w pracy zdecydowano się na przyjęcie następującej funkcji przekształcającej funkcję celu w funkcję przystosowania:

$$f(x_i) = \frac{1}{C + g(x_i)} \qquad (4.16)$$

gdzie wartość  $C$  służy do sterowania naciskiem selektywnym.

Zastosowanie takiego przekształcenia umożliwi sterowanie w szerokim stopniu naciskiem selektywnym. Dla identycznych wartości funkcji celu jak w przykładzie powyżej, możliwe jest sterowanie naciskiem selektywnym w szerokim zakresie (tab. 4.6).

Tab. 4.6. Prawdopodobieństwo reprodukcji w funkcji parametru  $C$  sterującego naciskiem selektywnym

	$C=0$	$C=0,1$	$C=0,2$	$C=0,5$	$C=1$
$p_r(x_1)$	65,73%	58,54%	55,21%	50,70%	47,40%
$p_r(x_2)$	32,87%	39,02%	41,41%	43,45%	43,45%
$p_r(x_3)$	1,40%	2,44%	3,38%	5,85%	9,15%

Przekształcenie funkcji celu w funkcję przystosowania jest jednym ze sposobów zmiany nacisku selektywnego. W początkowej fazie algorytmu spotyka się często tendencję do dominowania w procesie selekcji ze strony jednego superosobnika (lub niewielkiej ich liczby). Powoduje to zmniejszenie eksploracyjności algorytmu, co skutkuje szybką zbieżnością do lokalnego ekstremum. W takiej sytuacji zwiększenie wartości parametru  $C$  umożliwia zmniejszenie nacisku selektywnego poprzez zmniejszenie liczby kopii superosobnika w populacji tymczasowej. W późnej fazie algorytmu, gdy skład populacji jest bardziej jednorodny, zmniejszenie wartości  $C$  umożliwia uwydatnienie różnic pomiędzy osobnikami populacji i odpowiednie promowanie najlepszych rozwiązań. W ten sposób zwiększa się nacisk selektywny co poprawia uzyskiwane wyniki.

### Operacje genetyczne

Do podstawowych operacji genetycznych należą krzyżowanie (ang. crossover) oraz mutacja. Mutacja polega na perturbacji genotypu jednego osobnika. Przyjmuje się, że niewielkie perturbacje są bardziej prawdopodobne niż duże. W zależności od sposobu kodowania genotypu osobnika, może ona polegać na zamianie pojedynczego genu na przeciwny (dla kodowania binarnego) lub dodanie wartości losowej o zadanym rozkładzie np. normalnym (dla ko-

dowania rzeczywistoliczbowego). Krzyżowanie jest natomiast operacją działającą na wielu osobnikach. W jego wyniku powstaje jeden lub wielu osobników potomnych. Ich chromosomy powstają w wyniku wymieszania chromosomów dwóch lub więcej osobników rodzicielskich.

#### Sukcesja

Sukcesja polega na utworzeniu nowej populacji bazowej  $P_{T+1}$ . Rozróżnić możemy dwie odmiany sukcesji:

- z całkowitym zastępowaniem (trywialna)

Nowa populacja bazowa  $P_{T+1}$  tworzona jest wyłącznie na podstawie populacji potomnej  $O_T$ .

- z częściowym zastępowaniem (sukcesja elitarna)

Nowa populacja bazowa  $P_{T+1}$  tworzona jest ze starej populacji bazowej  $P_T$  oraz populacji potomnej  $O_T$ . W sukcesji elitarniej wybiera się  $\mu$  osobników do nowej populacji bazowej spośród  $\eta$  najlepszych osobników dotychczasowej populacji bazowej  $P_T$  oraz populacji potomnej.

Sukcesja elitarna jest pomocna przy dowodzeniu zbieżności  $\mathbf{AE}$ , jednakże algorytm ten jest mniej odporny na minima lokalne w porównaniu z algorytmem sukcesji trywialnej. Podstawowym mechanizmem pozwalającym opuścić pułapkę ewolucyjną jest makromutacja (mutacja o dużym zasięgu). Zastosowanie niewielkiej liczebnie elity (jednego lub co najwyżej kilku najlepszych osobników) statystycznie powoduje odnalezienie lepszego przybliżenia ekstremum. Sukcesja trywialna jest bardziej odporna, lecz jednocześnie algorytm wolniej zbliża się do maksimów lokalnych i globalnych.

### 4.3.2. Strategie ewolucyjne

Podstawą wykorzystanych w pracy algorytmów są strategie ewolucyjne opracowane przez Rechenberga oraz Schwefela). Najprostszym z nich jest algorytm wzrostu, który jest identyczny z algorytmem symulowanego wyżarzania z zerową temperaturą.

#### Algorytm wzrostu ( $1 + 1$ , $1 + \lambda$ )

Podstawą strategii ewolucyjnych jest algorytm nazwany strategią  $1 + 1$ . Schemat strategii można przedstawić następująco:

Pojedynczy chromosom bazowy  $X_T$  podlega mutacji w każdej kolejnej generacji algorytmu. Każdy gen chromosomu potomnego  $Y_T^i$  jest generowany poprzez dodanie losowej wartości o rozkładzie normalnym:

$$Y_T^i = X_T^i + \sigma_i \xi_{N(0,1)}^i \quad (4.17)$$

gdzie: wartość  $\sigma$  określa zasięg mutacji.

Otrzymany chromosom potomny  $Y_T$  podlega ocenie i wyznaczana jest dla niego wartość funkcji przystosowania. Podczas sukcesji porównywane są wartości przystosowania obu chromosomów i nowym chromosomem bazowym  $X_{T+1}$  zostaje lepiej przystosowany.

W początkowej fazie działania algorytmu pożądane są duże perturbacje przetwarzanego chromosomu, gdyż umożliwia to zlokalizowanie obszaru przyciągania ekstremum globalnego. Przyjęcie zbyt małej wartości zasięgu mutacji powoduje wyłącznie lokalne działanie algorytmu. W końcowej fazie działania algorytmu należy zmniejszyć zasięg mutacji, aby umożliwić zbieżność do ekstremum funkcji. Przyjęcie zbyt małej wartości  $\sigma$  powoduje jednak małą szybkość zbieżności.

Konieczne jest więc wprowadzenie mechanizmu adaptacji zasięgu mutacji. Najprostszą metodą jest ustalanie zasięgu mutacji według określonego scenariusza (zasięg mutacji modyfikowany jest na podstawie liczby iteracji algorytmu). Istnieje również algorytm samoczynnej

adaptacji zasięgu nazwany regułą 1/5 sukcesów [Ara01]. W wyniku jej działania zasięg mutacji zmienia się po określonej liczbie iteracji algorytmu według następującej zależności:

$$\sigma' = c \sigma \quad (4.18)$$

Jeżeli przez  $i$  oraz  $j$  oznaczone zostaną liczba mutacji zakończonych sukcesem (po których nastąpiło zwiększenie wartości przystosowania osobnika) oraz ogólna liczba wykonanych mutacji, to wartość współczynnika  $c_i$  przyjmuje następujące wartości:

$$\begin{aligned} c &= 0,82 \text{ dla } i < \frac{1}{5}j \\ c &= 1 \text{ dla } i = \frac{1}{5}j \\ c &= \frac{1}{0,82} \text{ dla } i > \frac{1}{5}j \end{aligned} \quad (4.19)$$

Wartości te zostały dobrane eksperymentalnie dla wielowymiarowych funkcji testowych [Ara01].

Strategia 1+1 przejawia niewielką odporność na minimum lokalne, dlatego też powstały modyfikacje schematu generujące więcej osobników potomnych (strategia 1 +  $\lambda$ ) oraz metody wielopunktowe, przetwarzające jednocześnie wielu punktów bazowych.

### Strategia ewolucyjna $\mu + \lambda$

Strategia  $\mu + \lambda$  wprowadza adaptację zasięgu mutacji oraz operator krzyżowania. Osobnik w tej strategii posiada parę chromosomów. Pierwszy z nich określa wartość zmiennej niezależnej, drugi natomiast zawiera wartość standardowego odchylenia wykorzystywanego podczas mutacji ( $\sigma_i$ ).

W strategiach ewolucyjnych operator krzyżowania polega na uśrednianiu lub wymianie wartości pomiędzy parą chromosomów, zawierających zmienne niezależne ( $X_T^{(1)}$  i  $X_T^{(2)}$ ) oraz standardowe odchylenia mutacji ( $\sigma^{(1)}$  i  $\sigma^{(2)}$ ). W pracy zdecydowano się zastosować schemat, w którym geny chromosomów  $X_T^i$  i  $\sigma_i$  podlegają uśrednianiu ze współczynnikiem  $\alpha$  wylosowanym z rozkładu jednostajnego:

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_{U(0,1)} \\ Y_T^{i(1)} &= \alpha X_T^{i(1)} + (1 - \alpha) X_T^{i(2)} \\ Y_T^{i(2)} &= \alpha X_T^{i(2)} + (1 - \alpha) X_T^{i(1)} \\ \sigma_i'^{(1)} &= \alpha \sigma_i^{(1)} + (1 - \alpha) \sigma_i^{(2)} \\ \sigma_i'^{(2)} &= \alpha \sigma_i^{(2)} + (1 - \alpha) \sigma_i^{(1)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Adaptacyjny algorytm modyfikacji zasięgu mutacji opiera swoje działanie na mechanizmie selekcji, zakładając, że lepiej przystosowane osobniki będą się charakteryzować również odpowiednio dostosowanym zasięgiem mutacji. Założenie to nie zawsze działa w sposób zgodny z oczekiwaniami. Problemy pojawiają się, gdy w populacji znajdzie się osobnik o wyraźnie większej wartości funkcji przystosowania oraz zdecydowanie nieodpowiednich wartościach odchyłeń standardowych. Osobnik taki nie zostanie usunięty z populacji do momentu, gdy nie zostanie znalezionych  $\mu$  osobników o większej wartości funkcji przystosowania. Do tego czasu osobnik ten ma wpływ na kolejne pokolenia, a więc jego wartości odchyłeń standardowych są powielane i utrwalane w populacji. Wytwarza to niepożądane dodatnie sprzężenie zwrotne.

Strategia ewolucyjna  $\mu, \lambda$  tworzy nową populację bazową wyłącznie na podstawie osobników potomnych. Osobniki rodzicielskie ulegają zapomnieniu, co poprawia odporność na ekstrema lokalne. Zastosowanie niewielkiej ilościowo elity (wybranej z dotychczasowej populacji bazowej) powoduje jednak lepszą zbieżność algorytmu.

Mutacja w strategii ewolucyjnej przebiega w dwóch etapach. W pierwszym kroku dokonuje się modyfikacji standardowych odchyleń mutacji osobnika:

$$\sigma'_i = \sigma_i e^{(\tau_1 \xi_{N(0,1)} + \tau_2 \xi_{N(0,1)}^i)} \quad (4.21)$$

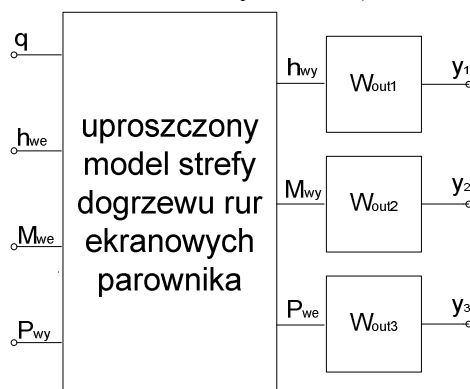
gdzie:  $\xi_{N(0,1)}$ ,  $\xi_{N(0,1)}^i$  – jednowymiarowa oraz wielowymiarowa (dla każdego elementu wektora  $\sigma$ ) wartości losowe o rozkładzie normalnym;  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  parametry algorytmu [Ara01].

Zmodyfikowane wartości  $\sigma'_i$  wykorzystywane są następnie do mutacji wartości zmiennych niezależnych:

$$Y_T^i = X_T^i + \sigma'_i \xi_{N(0,1),i} \quad (4.22)$$

#### 4.4. Wyznaczanie optymalnych parametrów metod redukcji z wykorzystaniem AE

Podczas rozwiązywania praktycznych zadań optymalizacji powstaje problemem dobrania algorytmu, który prowadziłby do rozwiązania zadania jak najmniejszym kosztem obliczeń. Stochastyczny charakter AE wymaga wykonania wielu niezależnych przebiegów algorytmu i statystycznego opracowania otrzymanych wyników. Związane jest to ze znacznym nakładem obliczeniowym związanym z wyznaczeniem funkcji celu, który rośnie ze zwiększeniem rzędu modelu pierwotnego (rys. 4.2). Z tego względu porównanie poszczególnych strategii ewolucyjnych wykonano wyłącznie metodą FW z wagą wyjściową w postaci 3 filtrów dolnoprzepustowych Butterwortha (rys. 4.14) dla uproszczonego modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika (model zawiera 300 zmiennych stanu).



Rys. 4.14. Model strefy dogrzewu rur ekranowych parownika wraz z funkcją wagi wykorzystywany dla porównania wyników redukcji z zastosowaniem algorytmów ewolucyjnych

#### Kodowanie

Genotyp każdego osobnika przedstawiony został w tab. 4.7. Sześć chromosomów zawiera kod określający fenotyp (rzędy oraz częstotliwości graniczne filtrów dolnoprzepustowych Butterwortha), pozostałe natomiast odpowiadają za zasięg mutacji dla poszczególnych chromosomów.

Tab. 4.7. Genotyp osobnika

$n_f$ dla $W_{out1}$	$\omega_f$ dla $W_{out1}$	$n_f$ dla $W_{out2}$	$\omega_f$ dla $W_{out2}$	$n_f$ dla $W_{out3}$	$\omega_f$ dla $W_{out3}$	$\sigma^{n_f}$ dla $W_{out1}$	$\sigma^{\omega_f}$ dla $W_{out1}$	$\sigma^{n_f}$ dla $W_{out2}$	$\sigma^{\omega_f}$ dla $W_{out2}$	$\sigma^{n_f}$ dla $W_{out3}$	$\sigma^{\omega_f}$ dla $W_{out3}$



Wartości chromosomów zostały zakodowane liczbami rzeczywistymi. Rzędy poszczególnych filtrów dolnoprzepustowych ( $n_f$ ) podczas obliczania funkcji celu są zaokrąglane do najbliższej liczby całkowitej. Ze względów numerycznych maksymalny rząd filtru ograniczony został do wartości 25, a w przypadku jej przekroczenia chromosom zostaje „naprawiony” poprzez przyporządkowanie mu wartości brzegowej.

Rzędy filtrów dolnoprzepustowych zakodowano wartościami rzeczywistymi, pomimo niewielkiej liczby możliwych do przyjęcia wartości. Nie zdecydowano się na kodowanie binarne ze względu na obciążenie operatora binarnego krzyżowania (osobniki potomne w przestrzeni fenotypu mogą być bardziej oddalone od siebie niż chromosomy rodzicielskie) oraz jednakowe prawdopodobieństwo mutacji wszystkich bitów chromosomu (makromutacja jest tak samo prawdopodobna jak mutacja o małym zasięgu). Zastosowanie liczb rzeczywistych zwiększa również uniwersalność algorytmu, który w prosty sposób może być zaadoptowany dla innych metod redukcji.

#### Kryteria zatrzymania algorytmu

Sformułowanie kryterium zatrzymania algorytmu jest zadaniem trudnym. Zwiększanie liczby iteracji algorytmu zwiększa prawdopodobieństwo wyznaczenia wartości ekstremum globalnego, jednak jest to związane ze wzrostem nakładów obliczeniowych. Ogólnie kryteria zatrzymania można podzielić na dwie grupy:

- polegające na monitorowaniu wartości funkcji przystosowania osobników

Wynikają one z asymptotycznego charakteru zbieżności algorytmów ewolucyjnych. Oznacza to, że początkowo można zaobserwować częste i znaczne poprawy wartości funkcji przystosowania. Wraz z kolejnymi pokoleniami algorytmu generowanie kolejnych osobników prowadzi do coraz rzadszych i mniejszych zysków (rys. 4.15).

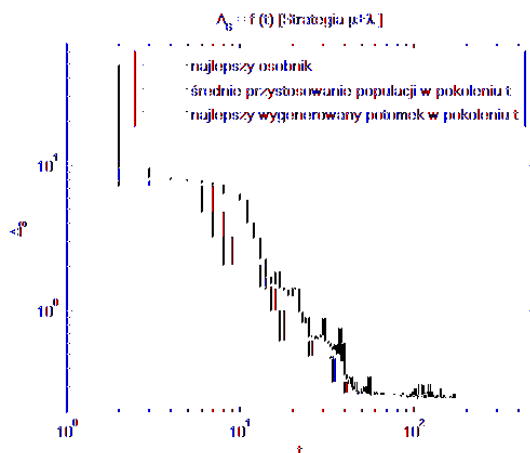
Wyróżnić można następujące trzy podkryteria:

- maksymalnego kosztu (liczonego w iteracjach lub liczbie wykonanych operacji wyznaczenia wartości przystosowania osobników),
- zadowalającego poziomu funkcji przystosowania,
- minimalnej szybkości poprawy uzyskiwanych wyników.

- monitorujące zdolność algorytmu do eksploracji przestrzeni genotypów

Zdolność eksploracji algorytmu jest czynnikiem warunkującym odporność algorytmu na ekstrema lokalne. Wyróżnić można następujące podkryteria:

- oceny różnorodności populacji bazowej (mała różnorodność populacji powoduje lokalne działanie operatora krzyżowania),
- zasięgu operatora mutacji (mały zasięg mutacji powoduje, że jedynie makromutacje mogą spowodować opuszczenie obszaru przyciągania lokalnego ekstremum).



Rys. 4.15. Przykładowa krzywa zbieżności algorytmu ewolucyjnego

##### Ocena algorytmów ewolucyjnych

Ze względu na element losowości w algorytmach niedeterministycznych, ocena algorytmu wymaga wykonania wielu niezależnych uruchomień algorytmu, a następnie analizy statystycznej uzyskanych wyników. Ocenie mogą podlegać następujące cechy:

- dokładność uzyskiwanych rozwiązań

Jakość uzyskiwanych rozwiązań można wyznaczyć, oceniając odległość od poszukiwanego minimum ( $|x' - x|$ ) lub przybliżenie wartości funkcji celu w poszukiwanym minimum  $|f(x') - f(x)|$ . Kryteria te są jednak mało praktyczne, gdy nie jest znana wartość ekstremum globalnego (miary te są przydatne przy ocenie algorytmów dla funkcji testowych). Ocena dokładności dla praktycznych zadań (dla których nie jest znana wartość globalnego ekstremum) może odbywać się wyłącznie na podstawie analizy statystycznej wyników.

- koszt symulacji

Koszt symulacji wiąże się z nakładem obliczeń potrzebnych od osiągnięcia rozwiązania. Często jest utożsamiany z liczbą iteracji metody, jednak tak postawione kryterium nie uwzględnia wpływu liczebności populacji potomnej.

W tab. C.1 (dodatek) przedstawiono wyniki redukcji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika dla identycznych wartości kryteriów zatrzymania algorytmu odniesionych do liczby iteracji algorytmu oraz liczby wykonanych operacji redukcji. Gdy kryteria zatrzymania oraz koszt algorytmu wyznaczane są na podstawie liczby iteracji, wówczas analiza danych z tab. C.1 umożliwia stwierdzenie, że zwiększanie liczebności populacji dla strategii  $1 + \lambda$  w prosty sposób prowadzi do polepszenia właściwości algorytmu (poprawie ulega mediana oraz wartość średnia uzyskiwanych wyników). Odbywa się to jednak z proporcjonalnym do liczebności populacji wzrostem nakładu kosztownych obliczeniowo operacji wyznaczenia funkcji przystosowania. Oznacza to, że stosunek jakości uzyskanych wyników do czasu trwania algorytmu znacznie się pogarsza. Z tego względu znacznie bardziej przydatne jest określenie warunków zatrzymania oraz kosztu algorytmu za pomocą liczby wykonanych operacji redukcji. Dla przedstawionego algorytmu  $1 + \lambda$  najlepszy stosunek jakości wyników redukcji do czasu trwania algorytmu uzyskano dla populacji złożonej z czterech osobników.

Spośród przedstawionych kryteriów zatrzymania algorytmu ewolucyjnego w pracy zastosowano następujące:

- maksymalny koszt (określony przez maksymalną liczbę wykonanych operacji wyznaczenia przystosowania osobników –  $M$ ),
- minimalna szybkość poprawy uzyskiwanych wyników (określona przez maksymalną liczbę wykonanych operacji wyznaczenia przystosowania bez poprawy najlepszego uzyskanego wyniku –  $M_{bp}$ ),
- minimalny zasięg operatora mutacji –  $\sigma_{min}$  (wyłącznie dla strategii  $1 + \lambda$ ).

Ocenę algorytmów przeprowadzono na podstawie następujących cech określających dokładność oraz koszt uzyskania rozwiązania:

- najlepszy uzyskany wynik - średniokwadratowy względny błąd aproksymacji modelu zredukowanego,
- najlepszy uzyskany wynik - maksymalny względny błąd aproksymacji (błąd ten nie jest kryterium optymalizacji, jednak ze względu na prostotę interpretacji wyniku może zostać uwzględniony jako kryterium graniczne),
- liczba uzyskanych wyników charakteryzujących się błędem mniejszym od ustalonej wartości (np. 0,06 oraz 0,1 dla zredukowanego modelu strefy dogrzewu rzędu  $k=15$  uzyskanego w wyniku redukcji modelu pierwotnego rzędu  $n=300$ ),
- mediana oraz wartość średnia uzyskanych wyników,

- odchylenie standardowe uzyskanych wyników,
- medianę oraz wartość średnią kosztu wyznaczenia rozwiązania wyrażonego w liczbie obliczonych funkcji przystosowania osobników,
- odchylenie standardowe kosztu wyznaczenia rozwiązania.

#### 4.4.1. Strategia ewolucyjna $1 + \lambda$

Porównanie poszczególnych wersji algorytmów ewolucyjnych wymaga precyzyjnego ustalenie kryteriów zatrzymania algorytmu. Aby możliwe było prowadzenie efektywnych poszukiwań ekstremum funkcji, konieczne jest określenie wpływu wartości kryteriów zatrzymania algorytmu na otrzymane wyniki redukcji. W tab. 4.8 porównano wyniki redukcji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika dla 100 niezależnych uruchomień strategii  $1 + \lambda$  z następującymi kryteriami zatrzymania algorytmu:

A -  $M=50$ ,  $M_{bp}=5$

B -  $M=500$ ,  $M_{bp}=50$

C -  $M=2500$ ,  $M_{bp}=250$

Pozostałe parametry, jak również populacje startowe były identyczne dla wszystkich trzech algorytmów, tj.:

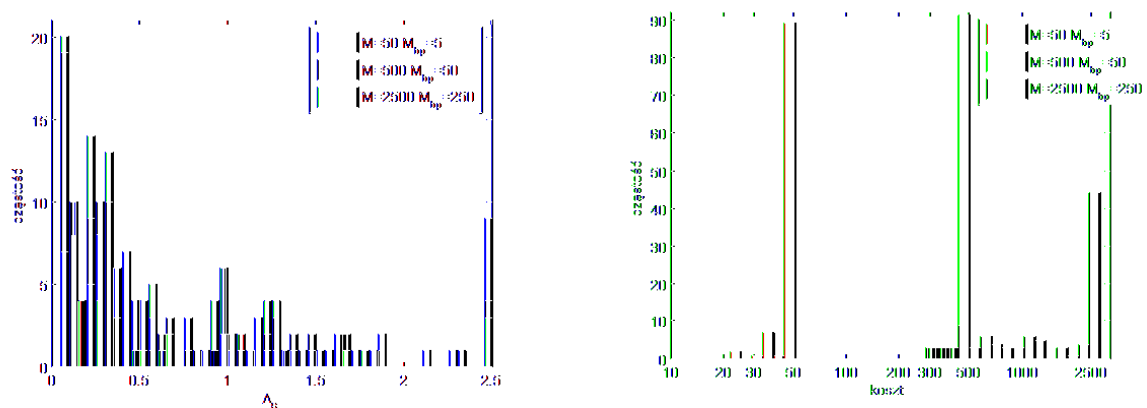
- $\lambda=5$ ,
- modyfikacja zasięgu mutacji co 10 redukcji (reguła 1/5 sukcesów),
- początkowy zasięg mutacji  $\sigma_{pocz}^{nf} = 2$  oraz  $\sigma_{pocz}^{\omega f} = 2$ ,
- minimalny zasięg mutacji  $\sigma_{min}^{nf} = 0$  oraz  $\sigma_{min}^{\omega f} = 0$

Tab. 4.8. Porównanie wyników redukcji dla różnych kryteriów zatrzymania strategii  $1 + \lambda$

	A	B	C
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik [ $\cdot 10^{-3}$ ]	55.63	53.72	53.72
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	43.58	43.39	43.39
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	1	14	14
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	7	19	20
$\Delta_6$ - mediana	0.4938	0.3049	0.2795
$\Delta_6$ – średnia	1.079	0.7045	0.6228
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	1.527	1.218	1.181
$\Delta_3$ - mediana	384.4	223.0	203.9
Koszt symulacji – mediana	50	500	1685
Koszt symulacji - średnia	47.80	483.9	1593
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	5.519	42.31	901.9

Na rys. 4.16 przedstawiono histogram uzyskanych wyników. Jak można zauważyć, zwiększenie wartości kryteriów zatrzymania algorytmu umożliwia poprawienie uzyskiwanych wyników. Zwiększenie kryterium maksymalnego kosztu z 500 do 2500 oraz maksymalnego kosztu bez poprawy wyniku z 50 do 250 spowodowało jednak tylko nieznaczną poprawę wartości średniej uzyskanych wyników, pomimo ponad trzykrotnego zwiększeniu nakładów obliczeniowych. Oznacza to, że dla zadań o kosztownej funkcji celu (której wyznaczenie dla pojedynczego osobnika może trwać nawet kilkadziesiąt minut), bardzo ważne jest wyznaczenie odpowiednich kryteriów zatrzymania algorytmu. W głównej mierze są one podyktowane maksymalnym możliwym do zaakceptowania czasem trwania algorytmu. W wielu wypadkach znacznie lepsze rezultaty można osiągnąć poprzez zastosowanie wielokrotnego uruchomienia AE o małej liczbie iteracji oraz różnymi punktami startowymi niż jednokrotnego o dużej liczbie iteracji.

Jak już zostało przedstawione w rozdziale 4.3.2, strategia ewolucyjna  $1 + \lambda$  wykorzystuje wyłącznie operację mutacji do przeszukiwania dziedziny rozwiązań. Wadą tego najprostszego z algorytmów ewolucyjnych jest jego wrażliwość na zmianę początkowego zasięgu mutacji. Przyjęcie zbyt małej wartości zasięgu mutacji powoduje lokalne działanie algorytmu, a więc



Rys. 4.16. Porównanie wyników redukcji dla różnych kryteriów zatrzymania strategii  $1 + \lambda$  – histogram

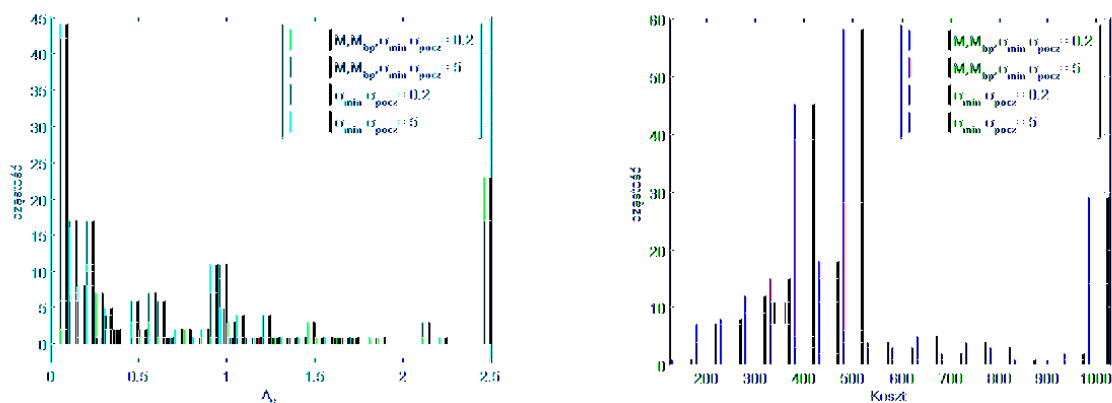
również małą odporność na ekstrema lokalne. Duże wartości początkowego zasięgu mutacji powodują, że algorytm w początkowej fazie przypomina działaniem algorytm błędzenia przypadkowego. Stan taki poprawia odporność algorytmu na minima lokalne, jednak odnalezienie supersobnika w początkowej fazie algorytmu (gdy zasięg mutacji ma dużą wartość) może spowodować, że algorytm eksplorując znaczny obszar potencjalnych rozwiązań może nie potrafić odnaleźć lepszego rozwiązania w następnych pokoleniach. Ostre kryterium zatrzymania algorytmu, na skutek braku poprawy uzyskiwanych wyników ( $M_{bp}$ ), może zakończyć działanie algorytmu jeszcze w fazie eksploracji. Konieczne jest zatem wprowadzenie dodatkowego kryterium sterującego pracą algorytmu - minimalnej liczby wygenerowanych osobników ( $M_{min}$ ), którego zadaniem jest zapobieganie przedwczesnemu zakończeniu algorytmu (parametr ten został również zastosowany dla pozostałych algorytmów ewolucyjnych).

W końcowej fazie działania algorytmu należy odpowiednio zmniejszać zasięg mutacji, w celu umożliwienia szybkiej zbieżności do ekstremum. Mechanizm adaptacji zasięgu mutacji (reguła 1/5 sukcesów) statystycznie powoduje zmniejszanie się zasięgu mutacji wraz z kolejnymi iteracjami. Możliwe jest więc zrezygnowanie z kryteriów określających maksymalną liczbę iteracji algorytmu na rzecz kryteriów monitorujących zdolność algorytmu do eksploracji przestrzeni genotypów ( $\sigma_{min}$ ). Wartość minimalnego zasięgu mutacji powinna gwarantować zakończenie fazy eksploracji i przejście do eksploatacji w lokalnym otoczeniu znalezionej odpowiedzi. Precyzyjne określenie tej wartości wymaga określenia obszarów przyciągania poszczególnych ekstremów lokalnych. Wiedza ta jest jednak znacznie bardziej szczegółowa, niż sama znajomość wartości ekstremów funkcji. W praktyce jest ona niedostępna dla zadań innych niż testowe. Wybranie zbyt dużej wartości powoduje zakończenie algorytmu w fazie eksploracji, co negatywnie wpływa na uzyskane wyniki. Zbyt mała wartość minimalnego zasięgu mutacji powoduje znaczne wydłużenie działania algorytmu poprzez pojawienie się długotrwałego i mało efektywnego etapu eksploatacji (tab. C.2).

W tab. C.3 zestawiono wyniki przedstawiające wpływ wartości początkowego zakresu mutacji na wyniki redukcji metodą **FW**. Zastosowano dwa kryteria zatrzymania algorytmu:

- określone wyłącznie przez minimalny zasięg mutacji ( $\sigma_{min}=0,01$ ),
- bazujące na kryteriach maksymalnego kosztu ( $M=500$ ,  $M_{bp}=50$ ) i minimalnego zasięgu mutacji ( $\sigma_{min}=0,01$ ).

Na rys. 4.17 przedstawiono przykładowe histogramy średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji oraz kosztu algorytmu dla małej ( $\sigma_{pocz}=0,2$ ) oraz dużej ( $\sigma_{pocz}=5$ ) początkowej wartości zasięgu mutacji.



Rys. 4.17. Histogram średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji oraz kosztu algorytmu w funkcji początkowej wartości zasięgu mutacji i kryteriów zatrzymania algorytmu

Na podstawie analizy otrzymanych wyników, można potwierdzić zwiększanie się odporności algorytmu wraz ze zwiększaniem początkowego zakresu mutacji. Wprowadzenie trzech warunków zatrzymania algorytmu ( $M$ ,  $M_{bp}$  oraz  $\sigma_{min}$ ), powoduje tylko nieznaczne pogorszenie uzyskanych wyników, w porównaniu z przyjęciem wyłącznie kryterium minimalnego zasięgu mutacji. Jednocześnie dwukrotnie ograniczyło średni koszt algorytmu. Spowodowane jest to tym, że znaczna część niezależnych uruchomień algorytmu kończy swoje działanie ze względu na przekroczenie kryterium minimalnego zasięgu mutacji. Odsetek ten rośnie wraz ze wzrostem początkowego zasięgu mutacji (tab. 4.9). Taką tendencję oraz niewielkie pogorszenie uzyskanych wyników przy znacznej redukcji kosztu algorytmu można wyjaśnić następująco:

- Dla małej wartości  $\sigma_{pocz}$  proces przeszukiwania ma charakter lokalny. Na skutek szybkiego odnajdywania coraz lepszych rozwiązań reguła 1/5 sukcesów zwiększa zakres mutacji. Aby proces przeszukiwania mógł się zakończyć ze względu na minimalny zasięg mutacji, musi być on ponownie zmniejszony regułą 1/5 sukcesów. Więcej niż połowa przebiegów algorytmu kończy się zatem przekroczeniem maksymalnego kosztu. Zasięg mutacji rzadko jednak osiąga poziom konieczny do przejścia z fazy eksploatacji do eksploracji, co powoduje że nie następuje wyraźna poprawa uzyskanych wyników, gdy proces nie jest przerwany ze względu na przekroczenie kosztu maksymalnego.
- Dla dużych wartości  $\sigma_{pocz}$  algorytm rozpoczyna poszukiwania od fazy eksploracji i w miarę upływu kolejnych pokoleń odnajduje obiecujące obszary. Większość przebiegów algorytmu znajduje rozwiązania w zakresie przyciągania ekstremum globalnego (lub jednego z bliskich globalnemu). Zastosowanie jedynie kryterium zatrzymania w postaci małej wartości minimalnego zasięgu mutacji powoduje, że na skutek częstego, ale niewielkiego poprawiania wyników redukcji, algorytm przez wiele pokoleń może utrzymywać wartość mutacji powyżej kryterium zatrzymania. Przedłuża to jednak fazę eksploatacji, a więc może przyczynić się tylko do stosunkowo niewielkiego polepszenia uzyskanych wyników redukcji.

Tab. 4.9. Sposób zakończenia strategii  $1 + \lambda$  przy zastosowaniu 3 kryteriów zatrzymania

	$\sigma_{pocz}=0,1$	$\sigma_{pocz}=0,2$	$\sigma_{pocz}=0,35$	$\sigma_{pocz}=0,5$	$\sigma_{pocz}=0,75$	$\sigma_{pocz}=1$	$\sigma_{pocz}=2$	$\sigma_{pocz}=3,5$	$\sigma_{pocz}=5$	$\sigma_{pocz}=7,5$
$M, M_{bp}$	56%	55%	50%	44%	49%	52%	42%	35%	23%	28%
$\sigma_{min}$	44%	45%	50%	56%	51%	48%	58%	65%	77%	72%

W twierdzeniu o zbieżności algorytmu ewolucyjnego nie przyjmuje się żadnych założeń dotyczących sposobu doboru początkowej populacji bazowej. Chromosomy należące do startowej populacji bazowej są zazwyczaj losowane z jednakowym prawdopodobieństwem z określonego przedziału wartości. Odpowiedni dobór przedziału lub nierównomierny posiew

(w przypadku, gdy można wskazać miejsca bardziej prawdopodobnego występowania dobrych rozwiązań) może mieć jednak znaczenie ze względu na szybkość dochodzenia algorytmu do zadowalających rozwiązań [Ara01]. Dla algorytmów o kosztownej funkcji celu (gdy ze względu na czas trwania obliczeń konieczne jest wprowadzenie ostrych kryteriów zatrzymania algorytmu) sposób inicjacji startowej populacji staje się bardzo ważny.

W tab. C.4 przedstawiono wyniki redukcji dla 3 różnych populacji startowych uzyskanych w wyniku posiewu równomiernego na przedziałach: 0–50 [rad/s], 0–20 [rad/s] oraz 0–2 [rad/s] dla chromosomów określających częstotliwości graniczne filtrów wagowych (zakres rzędów filtrów wybrany był z przedziału  $n_f \in 0 - 20$ ).

Zakresy dobrano tak, aby możliwe było porównanie wyników dla trzech przypadków:

- wartości chromosomów startowych losowane są z przedziału znacznie szerszego od zakresu adekwatności modelu (przedział szerszy niż prawdopodobny zakres występowania dobrych rozwiązań),
- wartości chromosomów startowych z przedziału równego zakresowi adekwatności modelu (w przypadku braku wiedzy na temat położenia prawdopodobnych obszarów występowania zadowalających rozwiązań jest to najbardziej właściwy zakres posiewu populacji startowej),
- wartości chromosomów startowych losowane na przedziale prawdopodobnych obszarów występowania zadowalających rozwiązań (na podstawie analizy występowania ekstremów przeprowadzonej w rozdziale 4.2.1, a w szczególności na podstawie rys. 4.4).

Wybór zbyt dużego zakresu populacji bazowej (znacznie większego niż zakres adekwatności modelu) powodował znaczne pogorszenie wartości średniej oraz mediany uzyskanych wyników redukcji. Ogromna większość odnalezionych rozwiązań znacznie różniła się od ekstremum globalnego. Wartość mediany błędu aproksymacji dla dużego początkowego zakresu mutacji była kilkudziesięciokrotnie większa niż najlepszy uzyskany wynik. Zbyt szeroki zakres startowej populacji powodował znaczne ograniczenie przydatności algorytmu ewolucyjnego. Wybranie wartości początkowych chromosomów z zakresu adekwatności (0-20 rad/s) spowodowało znaczną poprawę uzyskiwanych wyników. Można zauważyć, że zwiększanie początkowego zasięgu mutacji, powoduje zwiększanie odporności algorytmu i mediana uzyskiwanych wyników zmniejsza się z wartości 0,91 (dla  $\sigma_{pocz}=0,1$ ) do wartości 0,12 dla  $\sigma_{pocz}=5$ . Oznacza to, że im bardziej globalny charakter przeszukiwania w początkowym stadium, tym więcej uzyskanych jest zadowalających wyników redukcji (maksymalnie 28% przebiegów algorytmu kończyło się znalezieniem rozwiązania charakteryzującego się średniokwadratowym błędem aproksymacji mniejszym od 0,06).

Zawężenie wartości startowych chromosomów (określających częstotliwość graniczną filtrów dolnoprzepustowych) do wartości z przedziału 0–2 [rad/s], umożliwiło odnalezienie ekstremum globalnego o wartości 0,04005 oraz znaczne zmniejszenie mediany uzyskiwanych wyników. Dla  $\sigma_{pocz}=3,5$  prawie wszystkie przebiegi algorytmu kończyły się znalezieniem zadowalającego rozwiązania (błąd mniejszy niż 0,1). W porównaniu do poprzednich zakresów punktów startowych zmniejszył się również średni koszt obliczeń. Oznacza to, że nawet ograniczona i przybliżona znajomość prawdopodobnych obszarów występowania zadowalających wyników umożliwia znaczne zwiększenie efektywności algorytmu.

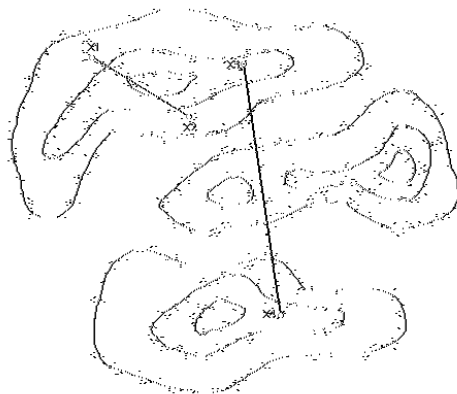
#### 4.4.2. Strategie ewolucyjne $\mu$ , $\lambda$ oraz $\mu + \lambda$

Strategie  $\mu + \lambda$  oraz  $\mu, \lambda$  są najczęściej wykorzystywanymi schematami strategii ewolucyjnych. Wprowadzona w tych strategiach operacja krzyżowania umożliwia, zwłaszcza w początkowej fazie działania algorytmu, globalne przeszukiwanie rozwiązań.

Możliwości optymalizacji globalnej w strategiach  $\mu + \lambda$  oraz  $\mu, \lambda$  wynikają zarówno z losowego przeszukiwania wykorzystującego genetyczne operatory krzyżowania oraz mutacji, jak również z utrzymywania różnorodności populacji. Gdy populacja bazowa zawiera podobne do siebie chromosomy, wówczas przeszukiwanie ma charakter lokalny. Duże zróżnicowanie chromosomów prowadzi do przeszukiwań globalnych.

Zasięg krzyżowania jest zależny od więcej niż jednego chromosomu, co oznacza że sterowanie zasięgiem zależy od sposobu wyboru osobników rodzicielskich. Duży zasięg krzyżowania wymaga dobrania chromosomów rodzicielskich z oddalonych od siebie obszarów. Umożliwia to wygenerowanie osobników potomnych należących do obszarów przyciągania ekstremów innych niż te, do których należą osobniki rodzicielskie (rys. 4.18). Nie jest możliwe zagwarantowanie, że chromosomy rodzicielskie pochodzą z obszarów przyciągania różnych ekstremów, lecz jest to tym bardziej prawdopodobne, im większa dzieli je odległość.

Mały zasięg operatora krzyżowania oznacza, że zbiór chromosomów potomnych w całości zawiera się w obszarze przyciągania jednego ekstremum. Lokalne działanie operatora krzyżowania ma również swoje zalety. Umożliwia szybszą zbieżność algorytmu, co jest widoczne zwłaszcza wtedy, gdy osobniki rodzicielskie znajdują się po przeciwległych stronach wypukłego obszaru przyciągania jednego ekstremum (rys 4.18).



Rys. 4.18. Globalny ( $X^3-X^4$ ) oraz lokalny ( $X^1-X^2$ ) zasięg operatora krzyżowania

Zbieżność asymptotyczną algorytmu ewolucyjnego można dowiedzieć dla dowolnej niezerowej populacji. Istnieją jednak wyraźne różnice zdań dotyczące doboru liczebności populacji bazowych. W literaturze można znaleźć zalecenia wyboru od bardzo małych populacji (nawet jednego osobnika) [Kwa99] do liczonej w tysiącach osobników (głównie w programowaniu genetycznym). Do najczęściej spotykanych w literaturze zaleceń należą:

- dla prostego algorytmu genetycznego 100 osobników ( $\mu = \lambda = 100$ ) oraz prawdopodobieństwa krzyżowania i mutacji odpowiednio:  $p_c = 0,7$  i  $p_m = 0,01$  [Gol03],
- dla strategii ewolucyjnych stosunek liczebności populacji potomnej do bazowej równy 7 (np.  $\mu = 15, \lambda = 100$ ) [Bac96].

Przedstawiony został również pogląd, że odporność algorytmów ewolucyjnych rośnie monotonicznie i ma charakter nasycający się wraz z liczebnością populacji [Ara01]. Ze względu na koszt symulacji najbardziej celowe jest więc wybranie populacji o takiej liczebności, że jej zwiększenie nie powoduje już znacznego poprawienia odporności. Optymalna wartość zależy jednak od wielu czynników (liczba wymiarów rozwiązywanego problemu, liczba ekstremów lokalnych funkcji przystosowania, zasięg mutacji, intensywność krzyżowania itp.).

Większość autorów zaleca stosunkowo dużą liczebność populacji (np.: 100 osobników na pokolenie) w porównaniu do przedstawionych w rozdziale 4.4 kryteriów zakończenia algorytmu ewolucyjnego. Przyjęcie tak licznej populacji dla algorytmu z kosztowną funkcją celu, jaką jest wyznaczenie błędu aproksymacji modelu zredukowanego, nie jest w praktyce moż-

liwe do zrealizowania. Konieczne jest wybranie małej populacji, która nie przekroczy kilkunastu osobników bazowych.

Odporność algorytmu jest wynikiem złożenia dwóch zjawisk: zdolności opuszczenia obszaru przyciągania maksimum lokalnego oraz prawdopodobieństwa wygenerowania osobnika populacji startowej, który znajduje się w obszarze przyciągania maksimum globalnego [Ara01, AJJ03]. Wraz ze wzrostem liczebności populacji bazowej zmniejsza się zdolność opuszczenia obszaru przyciągania maksimum lokalnego tym silniej, im większy jest nacisk selektywny. Spowodowane jest to dużą konkurencją w populacji, która powoduje, że mało prawdopodobny jest ciąg mutacji o niewielkim zasięgu prowadzący do przekroczenia „siodła” i przejścia do obszaru przyciągania kolejnego ekstremum. Zmniejsza się również prawdopodobieństwo makromutacji, w efekcie której powstanie osobnik będący w stanie konkurować z najlepszymi wyznaczonymi rozwiązaniami z otoczenia lokalnego ekstremum. Z drugiej strony większa populacja startowa zwiększa prawdopodobieństwo wygenerowania osobników z obszaru przyciągania maksimum globalnego oraz (przy stosunkowo małym nacisku selektywnym w początkowej fazie przeszukiwania) możliwość przeszukiwania globalnego w wyniku krzyżowania osobników należących do obszarów przyciągania różnych ekstremów.

Dla algorytmu ewolucyjnego z kosztowną funkcją celu, konieczne jest uwzględnienie stosunkowo dużych ograniczeń nałożonych na liczbę przeprowadzonych operacji wyznaczenia funkcji celu, co przekłada się na niewielką liczbę pokoleń algorytmu. Z tego względu należy spodziewać się, że na odporność algorytmu będzie miała znacznie większy wpływ liczebność populacji startowej, niż zdolność opuszczania obszaru przyciągania lokalnego maksimum.

W dodatku (tab. C.5 oraz tab. C.6) zestawiono wyniki redukcji modelu metodą **FW** z wykorzystaniem filtrów wagowych, uzyskanych algorytmami ewolucyjnymi o różnej liczebności populacji bazowej i potomnej oraz różnym nacisku selektywnym. Nacisk selektywny sterowany jest przez zmianę wartości  $C$  w zależności przekształcającej funkcję celu w funkcję przystosowania (4.16). W tab. C.5 przyjęto mały nacisk selektywny ( $C=1$ ), natomiast tab. C.6 przedstawia wyniki uzyskane przy dużym nacisku selektywnym ( $C=0$ ). Na podstawie uzyskanych wyników można wyciągnąć następujące wnioski:

- Wyniki symulacji jednoznacznie wskazują na znacznie stabilniejszą pracę algorytmu ewolucyjnego z sukcesą elitarną niż sukcesą trywialną. Zwiększenie elity może jednak powodować wzrost tendencji do osiadania algorytmu na lokalnych maksimach funkcji przystosowania (mediana oraz wartość średnia błędu aproksymacji modelu zredukowanego rośnie wraz ze zwiększaniem liczebności elity).
- Wraz ze wzrostem liczebności populacji bazowej rośnie odporność algorytmu (rys. 4.19). Oznacza to, że dla niewielkiej liczby pokoleń (dla przeprowadzonych badań średnia liczba pokoleń wynosiła od kilkunastu do około 100 pokoleń) podstawowego znaczenia nabiera wybór licznej i zróżnicowanej populacji startowej. Zwiększa to prawdopodobieństwo wygenerowania punktów z obszaru przyciągania ekstremum globalnego. Zróżnicowana populacja umożliwia natomiast krzyżowanie o dużym zasięgu.
- Zwiększenie liczebności populacji potomnej przy identycznej populacji startowej ma niewielki wpływ na wyniki redukcji (mediana i wartość średnia błędu aproksymacji wyraźnie zmniejszyła się wyłącznie dla strategii  $\mu, \lambda$  (tab. C.7). Potwierdza to wniosek, że na odporność algorytmu ewolucyjnego o niewielkiej liczbie pokoleń największy wpływ ma liczna i zróżnicowana populacja startowa.
- Wartość mediany błędu aproksymacji uzyskana za pomocą algorytmu wielopunktowego o licznej populacji jest porównywalna do otrzymanej metodami jednopunktowymi o dużym początkowym zasięgu mutacji. Liczba uzyskanych wyników redukcji o zadowalającym poziomie (średniokwadratowy błąd aproksymacji mniejszy od 0,06) jest jednak ponad 2-krotnie większa dla strategii  $1 + \lambda$ . Oznacza to znacznie bardziej efektywną fazę eksploatacji algorytmów jednopunktowych.





Pierwsza z metod polega na tym, że po każdorazowym utworzeniu nowego osobnika usuwa się z populacji jednego z osobników rodzicielskich (preselekcja) lub najbliższego w dziedzinie genotypu (preselekcja ze ścisaniem) [Gol03, Ara01].

Zróznicowanie populacji można osiągnąć również przez wprowadzenie funkcji kary, która zmniejsza przystosowanie osobników oddalonych od siebie na niewielką odległość w dziedzinie genotypu. Oznacza to, że grupa osobników znajdujących się na niewielkim obszarze (np. wokół lokalnego maksimum) będzie miała zmniejszone prawdopodobieństwo reprodukcji na rzecz osobników oddalonych od lokalnego maksimum. Zastosowanie tak prostego mechanizmu mogłoby jednak powodować niestabilną pracę algorytmu. W wyniku zmniejszenia wartości przystosowania wszystkich chromosomów znajdujących się w otoczeniu maksimum istnieje niebezpieczeństwo, że nawet najlepiej dostosowane mogą zostać usunięte z populacji. Zjawiska tego można uniknąć poprzez zastosowanie funkcji kary, która będzie zmniejszała przystosowanie wyłącznie jednego z pary osobników znajdujących się we własnym bliskim sąsiedztwie. Wprowadzona funkcja kary może również powodować usunięcie osobnika z populacji („kara śmierci”) i zastąpić go przez losowo wygenerowanego.

W celu zbadania szybkości skupiania się populacji oraz wpływu procesu rozpraszania na uzyskane wyniki optymalizacji, w pracy zastosowano następujący algorytm rozpraszania:

- wyznaczenie wzajemnej odległości genotypów w całej populacji bazowej oraz potomnej,
- wyznaczenie par genotypów których odległość jest mniejsza od granicznej wartości,
- zmodyfikowanie wartości przystosowania jednego z osobników (lub jego usunięcie) według zależności:

$$\begin{aligned} f(x_i) > f(x_j) &\Rightarrow f(x_j) = \frac{f(x_j)}{c} \\ f(x_i) < f(x_j) &\Rightarrow f(x_i) = \frac{f(x_i)}{c} \end{aligned} \quad (4.23)$$

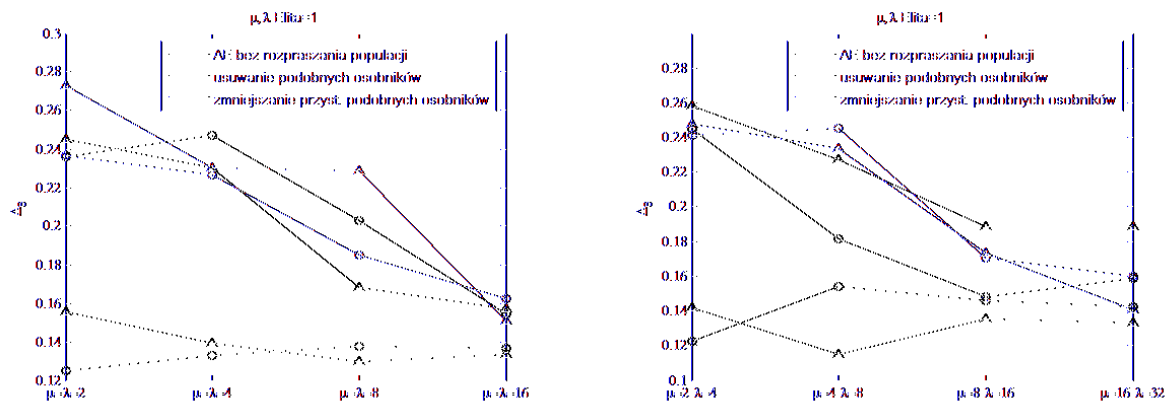
Poważnym problemem w przedstawionej metodzie jest ustalenie granicznej odległości, dla której wprowadzona zostaje funkcja kary. Wprowadzenie zbyt małej granicznej odległości nie spowoduje zadziałania procesu rozpraszania. Z kolei zbyt duża wartość może doprowadzić do zmniejszania przystosowania osobników (lub usuwania osobników), które nawet nie należą obszaru przyciągania tego samego ekstremum.

W tabelach C.9 – C.12 przedstawione zostały wyniki redukcji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika z zastosowaniem obu algorytmów rozpraszania populacji. Badania przeprowadzono dla identycznych populacji startowych z zastosowaniem funkcji kary o wartości  $c=2$  (tab. C.9 - C.10) oraz usuwaniem podobnych osobników (tab. C.11 - C.12). W strategiach ewolucyjnych przedstawionych w tab. C.9 i tab. C.11 przyjęto mały ( $C=1$ ), natomiast w tab. C.10 oraz tab. C.12 duży ( $C=0$ ) nacisk selektywny. Za sąsiadujące ze sobą osobniki przyjęto takie pary, których wszystkie chromosomy określające rząd filtru nie różniły się o więcej niż o trzy, natomiast różnica częstotliwości granicznych nie przekraczała 10%.

Na podstawie przedstawionych wyników można wyciągnąć następujące wnioski:

- Zanik różnorodności populacji następuje bardzo szybko. Im mniejsza populacja tym gwałtowniej może dochodzić do sytuacji w której cała populacja znajduje się w bardzo bliskim sąsiedztwie i nowe rozwiązania mogą być generowane wyłącznie na skutek mutacji.
- Zastosowanie funkcji kary, która zmniejsza przystosowanie osobników znajdujących się w bliskim sąsiedztwie, praktycznie nie przynosi żadnej korzyści. W populacji nie pojawiają się nowe osobniki, a jedynie zmienia się prawdopodobieństwo reprodukcji. Mediana błędu aproksymacji nieznacznie się tylko zmienia w stosunku do algorytmu bez mechanizmu rozpraszania populacji (rys. 4.20 oraz rys. C.1).

#### 4. Algorytmy doboru parametrów metod redukcji



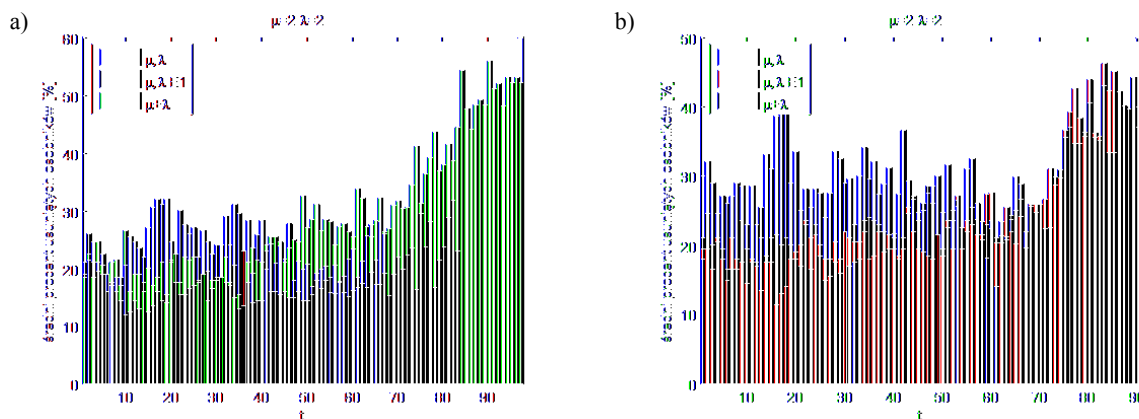
Rys. 4.20. Wpływ liczebności populacji bazowej na uzyskaną medianę średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji ( $\Delta$  – mały nacisk selektywny, o – duży nacisk selektywny)

- Ujednolicanie małych populacji następuje szybciej niż populacji dużych. Mechanizm usuwania podobnych osobników spowodował wymianę średnio od 10,5% (dla dużych populacji) do 33% (dla populacji małych) populacji potomnej na osobniki losowe (tab. 4.10). Zwiększenie nacisku selektywnego miało niewielki wpływ na szybkość ujednolicenia populacji.

Tab. 4.10. Średni procent populacji usunięty ze względu na bliskie sąsiedztwo innego rozwiązania

	mały nacisk selektywny			duży nacisk selektywny		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda E1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda E1$	$\mu + \lambda$
$\mu = 2, \lambda = 2$	23.12	23.39	32.95	26.88	32.64	28.95
$\mu = 2, \lambda = 4$	21.49	31.38	32.57	19.42	31.78	32.31
$\mu = 4, \lambda = 4$	19.95	20.88	24.80	17.76	25.89	26.95
$\mu = 4, \lambda = 8$	21.38	24.92	23.56	23.52	21.08	27.33
$\mu = 8, \lambda = 8$	14.74	14.53	18.76	14.78	18.53	17.86
$\mu = 8, \lambda = 16$	20.93	20.88	18.22	18.71	21.18	18.90
$\mu = 16, \lambda = 16$	11.13	10.56	13.50	13.32	12.54	15.15
$\mu = 16, \lambda = 32$	14.09	10.98	13.12	14.57	13.26	13.09

- Na rys. 4.21 (oraz w dodatku na rys. C.2) przedstawiono procent populacji potomnej podlegającej usunięciu na skutek działania algorytmu rozpraszania w kolejnych pokoleniach algorytmu (wykres został wykreślony na podstawie uśrednionych danych ze 100 niezależnych uruchomień algorytmu). Jak można zauważyć, pomimo zastosowania algorytmu rozpraszania, nadal następuje proces ujednolicenia populacji i w kolejnych pokoleniach wzrasta liczba usuwanych osobników.



Rys. 4.21. Procent populacji usunięty ze względu na bliskie sąsiedztwo innych rozwiązań (a – mały nacisk selektywny, b – duży nacisk selektywny)

- Wprowadzenie algorytmu rozpraszania populacji poprzez usunięcie podobnych osobników znacznie poprawiło medianę uzyskanych wyników redukcji (zwłaszcza dla AE o małej populacji bazowej). Uzyskane wyniki są ponadto prawie niezależne od liczebności populacji (rys. 4.20), co spowodowane jest znacznie większą liczbą wprowadzonych osobników losowych (tab. 4.11). Zastąpienie osobników o podobnych genotypach przez losowo wygenerowane można porównać do zwiększenia populacji startowej algorytmu (należy jednak podkreślić, że osobniki dodane pod koniec przebiegu algorytmu mają o wiele mniejsze szanse reprodukcji ze względu na konkurencję z dobrze przystosowanymi osobnikami populacji bazowej), przy jednoczesnym braku wad przetwarzania dużej liczby osobników (zwiększenie prawdopodobieństwa osiadania na maksimach lokalnych).

Tab. 4.11. Średnia liczba populacji startowej z uwzględnieniem osobników dodanych w wyniku rozpraszania populacji

	mały nacisk selektywny			duży nacisk selektywny		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda E1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda E1$	$\mu + \lambda$
$\mu = 2, \lambda = 2$	33.7	47.0	74.2	37.6	69.3	63.0
$\mu = 2, \lambda = 4$	34.4	70.9	74.8	33.0	71.6	71.3
$\mu = 4, \lambda = 4$	33.2	44.6	56.2	29.9	57.6	62.0
$\mu = 4, \lambda = 8$	40.5	58.3	57.2	45.7	51.1	69.3
$\mu = 8, \lambda = 8$	31.3	38.3	46.4	31.6	44.3	46.7
$\mu = 8, \lambda = 16$	49.2	53.7	49.9	44.5	56.1	50.9
$\mu = 16, \lambda = 16$	35.7	38.4	44.7	41.6	42.6	49.1
$\mu = 16, \lambda = 32$	44.9	41.8	47.2	48.3	48.5	46.1

- Wartość mediany błędu aproksymacji uzyskana za pomocą algorytmów wielopunktowych z rozpraszaniem populacji jest porównywalna do otrzymanej metodami jednopunktowymi o dużym początkowym zasięgu mutacji. Liczba uzyskanych wyników redukcji o zadowalającym poziomie (średniokwadratowy błąd aproksymacji mniejszy od 0,06) jest jednakże nadal mniejsza niż dla strategii  $1 + \lambda$ . Z tego też powodu za celowe wydaje się połączenie obu algorytmów, w wyniku którego faza eksploracji wykonywana będzie przez algorytm wielopunktowy, natomiast eksploatacji przez algorytm jednopunktowy.

#### 4.4.3. Algorytm ewolucyjny o zmiennej liczebności populacji

Porównując strategie ewolucyjne zastosowane w celu wyznaczenia optymalnych parametrów filtrów wagowych dla metody **FW**, można zauważyć małą odporność algorytmów jednopunktowych na początkową wartość zasięgu mutacji. Związane jest to z wyborem wyłącznie jednego punktu startowego. Jeżeli punkt ten wylosowany zostanie w dużej odległości od zadowalających rozwiązań, konieczny jest duży zasięg mutacji, który umożliwi zbliżenie się do obszaru przyciągania ekstremum. Adaptacja zasięgu mutacji regułą  $1/5$  sukcesów (lub sterowanie wg scenariusza) umożliwia natomiast lepszą eksploatację w obszarze przyciągania znalezionej ekstremum.

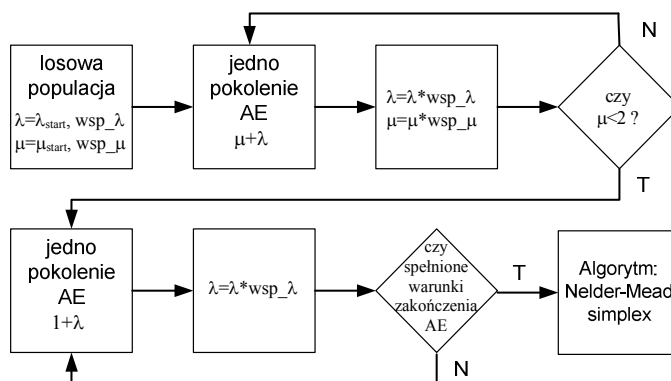
Zastosowanie samoczynnej adaptacji zasięgu mutacji w strategiach wielopunktowych nie umożliwia tak dobrej eksploatacji obszaru przyciągania ekstremum. Zasięg mutacji dla poszczególnych osobników wyznaczony jest za pomocą operacji genetycznych. Oznacza to założenie, że dobrze przystosowane osobniki będą także charakteryzować się odpowiednim zasięgiem mutacji. Założenie takie nie zawsze jest spełnione.

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów można stwierdzić przewagę strategii wielopunktowych w początkowej fazie algorytmu, gdy operacja krzyżowania ma zasięg glo-

balny. Podczas eksploatacji rola krzyżowania jest już drugorzędna. Cała populacja znajduje się wówczas w niewielkiej odległości od siebie i główną rolę odgrywa mutacja osobników. W takiej sytuacji sterowanie zasięgiem mutacji umożliwia szybszą zbieżność do ekstremum funkcji.

W celu zwiększenia efektywności przeszukiwania dziedziny rozwiązań konieczne jest połączenie zalet obu strategii [Ryd08]. Algorytm powinien charakteryzować się zmienną liczebnością populacji. W początkowej fazie procesu populacja bazowa powinna być liczna, gdyż głównym operatorem genetycznym jest operacja krzyżowania o dużym zasięgu. Z każdym kolejnym pokoleniem algorytmu następuje skupianie się początkowo rozproszonej populacji. Jak można zaobserwować na rys. 4.21, algorytm rozpraszania populacji nie do końca może przeciwdziałać temu procesowi. Operator krzyżowania traci więc na znaczeniu i w celu zwiększenia efektywności obliczeń należy ograniczyć liczebność populacji. Na skutek przekroczenia kryteriów zatrzymania algorytmu wielopunktowego, lub w wyniku zmniejszenia populacji bazowej poniżej dwóch osobników, uruchomiony zostaje algorytm jednopunktowy. Algorytm ten jest znacznie mniej wrażliwy na zbyt mały początkowy zasięg mutacji (tab. C.14), gdyż osobnik startowy nie jest już losowany, lecz jest wynikiem działania algorytmu wielopunktowego.

Dokładną wartość ekstremum można wyznaczyć poprzez zastosowanie dowolnego algorytmu optymalizacji lokalnej. Dla niewielkiej liczby zmiennych niezależnych dobre rezultaty można uzyskać stosując metodę sympleksu, np. Nelder-Mead simplex (rys. 4.22).



Rys. 4.22. Hybrydowy algorytm ewolucyjny o zmiennej populacji

Wyniki przeprowadzonych eksperymentów dla redukcji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika z wykorzystaniem metody **FW**, z wagą wyjściową przedstawiono w tab. C.14. Jak można zauważyć, zastosowanie algorytmu o zmiennej populacji umożliwiło uzyskanie najbardziej korzystnego stosunku mediany rozwiązań do kosztu obliczeń. Zawężenie wartości startowych chromosomów określających częstotliwość graniczną filtrów dolno-przepustowych do wartości z przedziału 0 – 2 rad/s (obszar prawdopodobnego występowania zadowalających rozwiązań) spowodowało, że wszystkie przebiegi algorytmu ewolucyjnego zakończyły się uzyskaniem modelu zredukowanego charakteryzującego się błędem aproksymacji mniejszym niż 0,1 (80% wszystkich modeli posiada błąd aproksymacji mniejszy niż 0,06).

#### 4.4.4. Algorytm ewolucyjny z kosztowną funkcją celu

Zwiększanie złożoności modelu pierwotnego powoduje ogromny wzrost kosztu obliczenia funkcji celu. Dla modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika liczącego 2250 zmiennych stanu wyznaczenie modelu zredukowanego oraz wartości błędu aproksymacji w zależ-

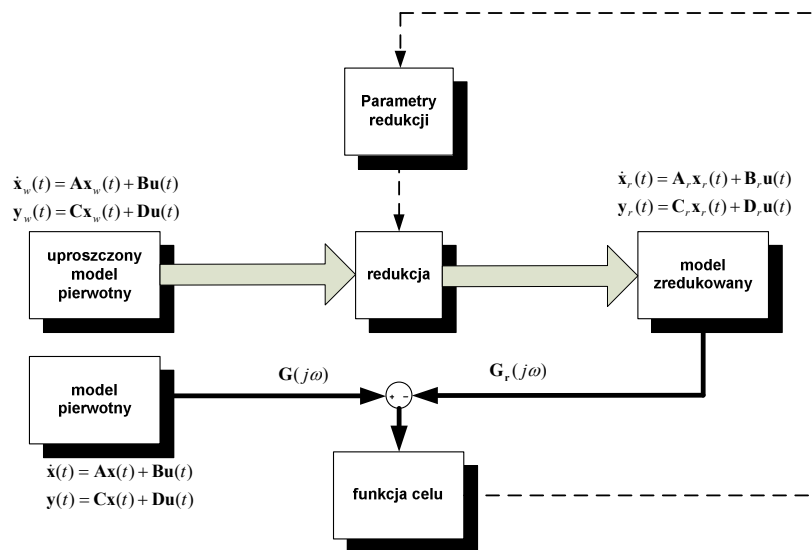
ności od metody redukcji, trwa od kilku do kilkudziesięciu minut (rys. 4.2). Czas pojedynczej redukcji przekłada się na czas trwania algorytmu ewolucyjnego służącego wyznaczeniu optymalnych parametrów dla poszczególnych metod redukcji. Dla tak złożonego modelu czas ten wynosi kilkadziesiąt godzin.

Redukcja bardzo złożonych modeli stanowi zatem poważny problem nie tylko ze względu na właściwości numeryczne algorytmów redukcji, ale również z powodu czasu trwania algorytmu ewolucyjnego. Zwiększanie rzędu modelu powyżej  $10^3$  zmiennych stanu (dla komputera o przedstawionej mocy obliczeniowej) staje się już bardzo czasochłonne.

Dla modeli dynamicznych o bardzo dużej złożoności znacznie bardziej efektywny jest algorytm dwustopniowy, który wyznacza parametry metod redukcji na podstawie modelu aproksymującego właściwości modelu pierwotnego (model ten można nazwać wstępnym modelem pierwotnym). Wstępną aproksymację modelu pierwotnego można uzyskać na dwa sposoby:

- podczas procesu modelowania poprzez zmniejszenie siatki dyskretyzacji, pominięcie części modelowanych zjawisk lub uproszczenie ich opisu matematycznego [Mia03],
- poprzez wstępną redukcję modelu pierwotnego (np.: z 2250 na 300 zmiennych stanu).

Model zredukowany uzyskiwany jest w wyniku redukcji wstępnego modelu pierwotnego, natomiast funkcja celu wyznaczana jest jako różnica charakterystyk częstotliwościowych modelu pierwotnego oraz zredukowanego (rys. 4.23). Podstawową zaletą takiego podejścia jest szybkość uzyskania wyniku, gdyż pojedyncze wyznaczenie funkcji przystosowania trwa wielokrotnie krócej.



Rys. 4.23. Algorytm wyznaczenia wartości funkcji przystosowania dla algorytmu dwustopniowego

Algorytm taki nie jest oczywiście pozbawiony wad, gdyż parametry metod redukcji wyznaczone są na podstawie modelu uproszczonego, którego charakterystyki aproksymują właściwości modelu pierwotnego. Oznacza to, że zależność błędu aproksymacji od parametrów metod redukcji może różnić się zarówno liczbą ekstremów lokalnych (część z ekstremów może nie istnieć dla modelu wstępnego lub mogą występować dodatkowe), jak również ich położeniem.

Na rys. 4.24 przedstawiono błąd aproksymacji w funkcji parametrów filtrów wagowych dla metody FW wokół jednego z wyznaczonych minimów. Błąd aproksymacji modelu zredukowanego przedstawiono w funkcji częstotliwości granicznej filtrów  $\omega_{f1}$  oraz  $\omega_{f2}$  (pozostałe parametry redukcji przyjmują wartości:  $n_{f1}=9$ ,  $n_{f2}=4$ ,  $n_{f3}=16$ ,  $\omega_{f3}=0,688$  [rad/s]). Na rys. 4.24 wykreślono charakterystyki błędu aproksymacji (minima poszczególnych funkcji błędu

#### 4. Algorytm doboru parametrów metod redukcji

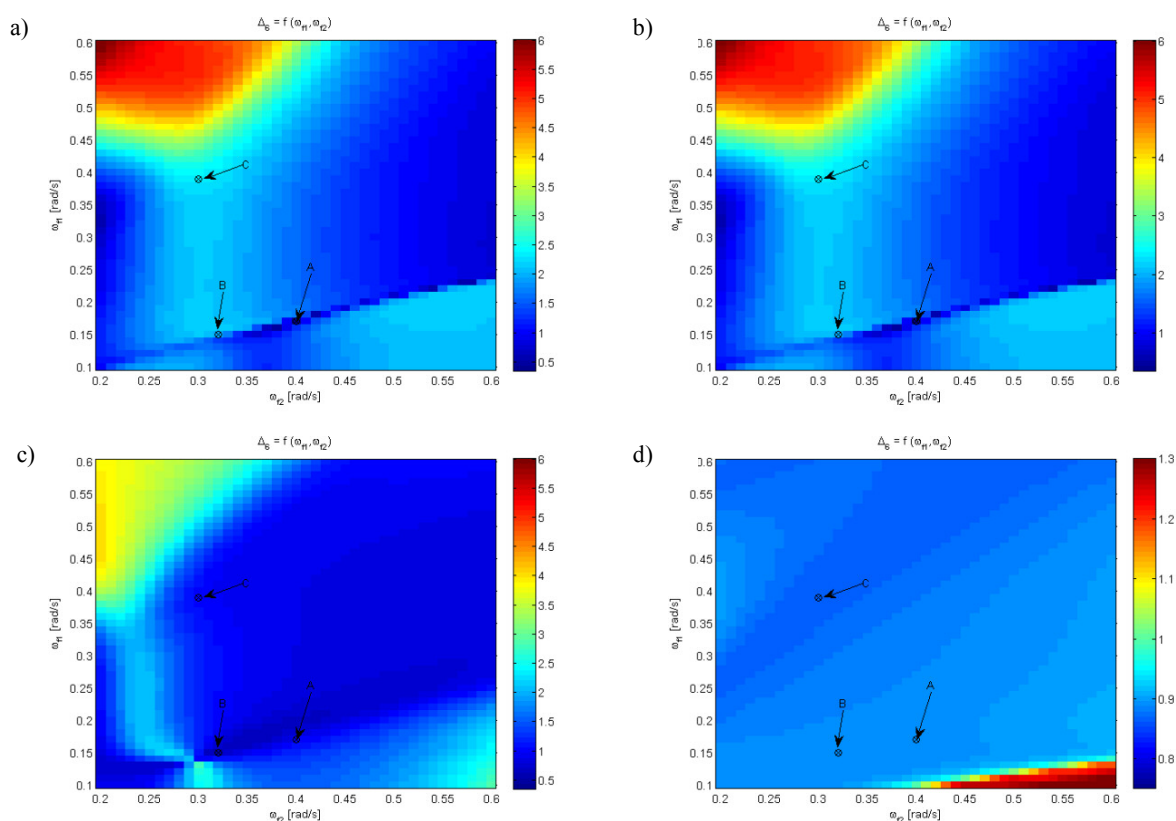
aproxymacji zaznaczono) dla modelu pierwotnego oraz trzech uproszczonych modeli pierwotnych:

- (A) model rzędu 300 uzyskany w wyniku redukcji modelu pierwotnego metodą **BTA**,
- (B) model rzędu 50 uzyskany w wyniku redukcji modelu pierwotnego metodą **FW** z wagą wyjściową (trzy dolnoprzepustowe filtry Butterwortha o parametrach  $n_f=3$ ,  $w_f=20$  [rad/s]),
- (C) modelu rzędu 300 uzyskany w wyniku dyskretyzacji, a następnie linearyzacji modelu klasy  $\bar{KSD\bar{L}}$  na 20 sekcji o parametrach skupionych.

Uproszczone modele pierwotne *A* oraz *B* zostały dobrane tak, aby jeden z nich charakteryzował się identycznym rzędem modelu, natomiast drugi porównywalnym poziomem względnego błędu approxymacji (tab. 4.12) jak model *C*.

Tab. 4.12. Błędy approxymacji uproszczonych modeli pierwotnych

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
$\Delta_3$	1.449e-006	615.6	493.1
$\Delta_6$	2.374e-009	0.6678	0.8601



Rys. 4.24. Błąd approxymacji modelu zredukowanego w funkcji  $\omega_{f1}$  oraz  $\omega_{f2}$  dla (a) modelu pierwotnego (b) uproszczonego modelu pierwotnego *A*, (c) modelu *B*, (d) modelu *C*

Dla modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika uproszczone modele pierwotne *A* oraz *B* z dobrym przybliżeniem approxymują charakterystykę błędu approxymacji w funkcji parametrów redukcji. Zastosowanie wstępnego modelu pierwotnego, uzyskanego w wyniku zmniejszenia liczby sekcji modelu klasy  $\bar{KSD\bar{L}}$ , spowodowało jednak pojawienie się znacznych różnic w przebiegu charakterystyki błędu approxymacji (rys. 4.24).

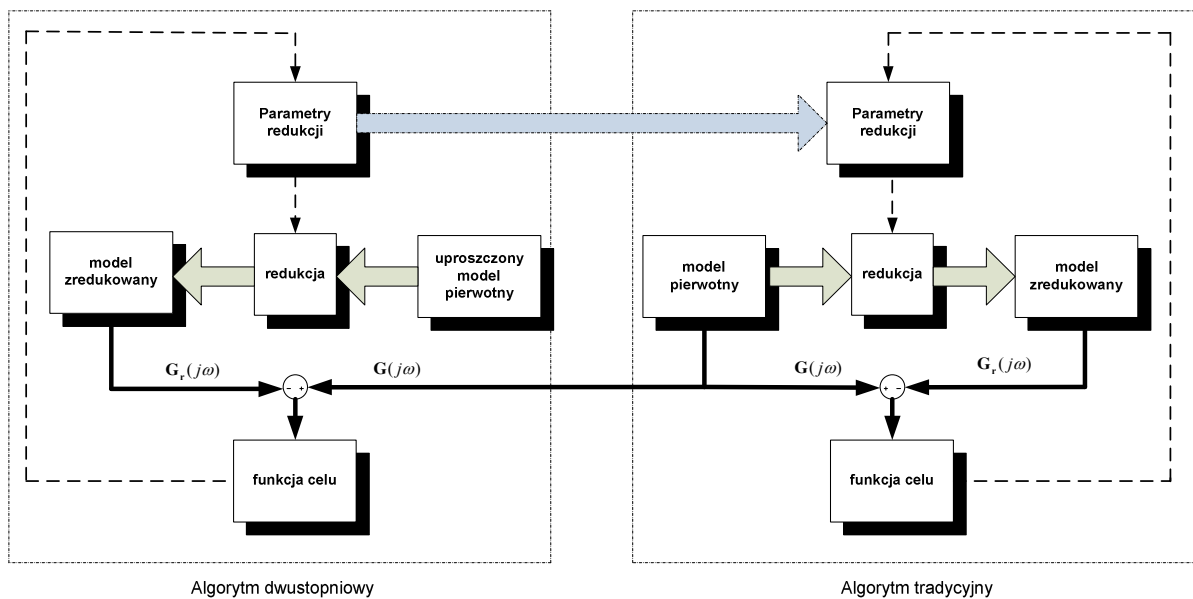
Zastosowanie uproszczonego modelu pierwotnego, który w niedostateczny sposób approxymuje właściwości modelu pierwotnego może powodować wyznaczenie parametrów redukcji, które znacznie różnią się od optymalnych. Wykorzystanie tych parametrów podczas re-



dukcji modelu pierwotnego może powodować, że model zredukowany charakteryzował się będzie większym błędem aproksymacji od modelu, uzyskanego w wyniku redukcji uproszczonego modelu pierwotnego. Przykładem może być model C, na podstawie którego wyznaczono parametry redukcji oraz model zredukowany o błędzie aproksymacji  $\Delta_6=0,8618$ . Zastosowanie identycznych parametrów do redukcji modelu pierwotnego powoduje uzyskanie modelu charakteryzującego się prawie trzykrotnie większym błędem aproksymacji  $\Delta_6=2,386$  (tab. C.14).

Ograniczenie wpływu jakości aproksymacji uproszczonego modelu pierwotnego na wyniki redukcji, możliwe jest poprzez zastosowanie algorytmu hybrydowego (rys. 4.25). Łączy on w sobie algorytm dwustopniowy oraz tradycyjny (bazujący na redukcji modelu pierwotnego). Zadaniem pierwszego z algorytmów jest wyznaczenie wstępnych wartości parametrów redukcji na podstawie uproszczonego modelu pierwotnego. Uzyskane parametry służą jako punkt startowy kolejnego algorytmu optymalizacji. Drugi z algorytmów bazuje na redukcji modelu pierwotnego, więc umożliwia wyznaczenie dokładnej wartości ekstremum funkcji błędu aproksymacji. W celu zmniejszenia kosztu obliczeń całego algorytmu konieczne jest nałożenie ostrych ograniczeń na liczbę kroków drugiego z algorytmów.

Dla przedstawionego algorytmu hybrydowego porównano wyniki redukcji uzyskane dla wstępnych modeli pierwotnych oraz średni czas trwania algorytmu (tab. C.14). Na ich podstawie można stwierdzić, że dobrze dobrany wstępny model pierwotny (model A) umożliwia uzyskanie identycznych wyników redukcji jak przy zastosowaniu modelu pierwotnego, przy jednoczesnym znacznym ograniczeniu czasu trwania algorytmu ewolucyjnego. Algorytm hybrydowy zapewnia natomiast uzyskanie poprawnych wyników redukcji, nawet w przypadku gdy algorytm dwustopniowy nie daje poprawnych wyników (ze względu na duże błędy aproksymacji wstępnego modelu pierwotnego).



Rys. 4.25. Dwustopniowy algorytm hybrydowy

## 4.5. Wnioski

1. Modele MIMO mogą charakteryzować się znacznymi różnicami wartości modułów transmitancji dla poszczególnych torów. Dodatkowo wartości modułów transmitancji dla poszczególnych torów mogą podlegać znacznej zmienności w funkcji częstotliwości. Z tego względu zastosowanie wyłącznie bezwzględnej miary błędu aproksymacji



nie zawsze pozwala poprawnie ocenić jakość aproksymacji modelu zredukowanego. Z tego powodu wprowadzono szereg miar błędu aproksymacji, wśród których najbardziej korzystne jest zastosowanie średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji.

2. Występowanie wielu minimów lokalnych na charakterystykach błędu aproksymacji w funkcji parametrów poszczególnych metod redukcji oznacza, że algorytmy bazujące na lokalnych właściwościach funkcji są mało przydatne do wyznaczenia minimum funkcji. Konieczne jest użycie metod optymalizacji globalnej. Ze względu na uniwersalność oraz łatwość praktycznego zastosowania w wielu dziedzinach, dobrym rozwiązaniem jest wybór algorytmu ewolucyjnego.
3. Strategia ewolucyjna  $1 + \lambda$  wykorzystuje wyłącznie operację mutacji do przeszukiwania dziedziny rozwiązań. Wadą tego najprostszego z algorytmów ewolucyjnych jest jego wrażliwość na zmianę początkowego zasięgu mutacji. Przyjęcie zbyt małej wartości zasięgu mutacji powoduje lokalne działanie algorytmu, a więc również małą odporność na ekstrema lokalne. Duże wartości początkowego zasięgu mutacji powodują, że algorytm w początkowej fazie przypomina działaniem algorytm błądzenia przypadkowego.
4. Dla strategii ewolucyjnych wielopunktowych o niewielkiej liczbie pokoleń, wraz ze wzrostem liczebności populacji bazowej rośnie odporność algorytmu. Oznacza to, że podstawowego znaczenia nabiera wybór licznej i zróżnicowanej populacji startowej. Zwiększa to prawdopodobieństwo wygenerowania punktów z obszaru przyciągania ekstremum globalnego. Zróżnicowana populacja umożliwia natomiast krzyżowanie o dużym zasięgu, która ułatwia dobrą eksplorację dziedziny rozwiązań.
5. Nierównomierny posiew wartości genów startowych (uwzględniający obszary prawdopodobnego występowania zadowalających rozwiązań) umożliwia znaczne poprawienie wartości średniej uzyskiwanych wyników redukcji. Nie powinien on jednak wpływać na zmniejszenie różnorodności populacji startowej, która wpływa na zdolności eksploracyjne algorytmu ewolucyjnego.
6. Zanik różnorodności populacji następuje bardzo szybko. Im mniejsza populacja tym gwałtowniej może dochodzić do sytuacji, w której cała populacja znajduje się w bardzo bliskim sąsiedztwie. Wprowadzenie algorytmu rozpraszania populacji poprzez usunięcie podobnych osobników znacznie poprawiło medianę uzyskanych wyników redukcji. Algorytm ten zwiększa również odporność algorytmu na ekstrema lokalne (zwłaszcza dla małych populacji), co spowodowane zastępowaniem osobników o podobnych genotypach przez losowo wygenerowane.
7. Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów można stwierdzić przewagę strategii wielopunktowych w początkowej fazie algorytmu, gdy operacja krzyżowania ma zasięg globalny. Adaptacja zasięgu mutacji regułą  $1/5$  sukcesów (algorytmy jednopunktowe) umożliwia natomiast lepszą eksploatację w obszarze przyciągania znalezionej ekstremum. W celu zwiększenia efektywności przeszukiwania dziedziny rozwiązań konieczne jest połączenie zalet obu strategii. Algorytm powinien się charakteryzować zmienną liczebnością populacji.
8. Redukcja bardzo złożonych modeli stanowi poważny problem, nie tylko ze względu na właściwości numeryczne algorytmów redukcji, ale również z powodu czasu trwania algorytmu ewolucyjnego. Dla modeli dynamicznych o bardzo dużej złożoności znacznie bardziej efektywny jest algorytm dwustopniowy, który wyznacza parametry metod redukcji na podstawie uproszczonego modelu pierwotnego. Dobrze dobrany wstępny model pierwotny umożliwia uzyskanie identycznych wyników redukcji jak przy zastosowaniu modelu pierwotnego, przy jednoczesnym znacznym ograniczeniu czasu trwania algorytmu ewolucyjnego.

# 5. REDUKCJA MODELI PODSYSTEMÓW KOTŁA ENERGETYCZNEGO

---

## 5.1. Zakresy adekwatności modeli podsystemów parownika na poszczególnych poziomach hierarchii

Modele matematyczne parowników przepływowych (opracowane na podstawie praw mechaniki płynów oraz termodynamiki, w postaci równań bilansu masy, energii i pędu) charakteryzują się wysokim stopniem złożoności. W znacznym stopniu utrudnia to bezpośrednie wykorzystanie metod i środków programowych analizy obiektów oraz syntezy algorytmów sterowania. W wyniku tego, podstawowym staje się problem wyboru odpowiednich metod redukcji tak, aby przy maksymalnym zachowaniu właściwości dynamicznych (istotnych na danym poziomie hierarchii) ograniczyć złożoność modelu.

Podstawowym zadaniem projektanta przed przystąpieniem do redukcji jest określenie wymagań stawianych modelom zredukowanym, które zależą głównie od przewidzianego ich zastosowania. W szczególności konieczne jest określenie zakresu adekwatności oraz maksymalnego błędu aproksymacji. Należy przyjąć je arbitralnie na podstawie znajomości zjawisk fizycznych zachodzących w rzeczywistym obiekcie.

Opracowane modele parownika badano w szerokim zakresie częstotliwości (do 1000 [rad/s]), jednak zakres adekwatności modelu pierwotnego jest ograniczony ze względu na przyjęte założenia upraszczające:

- mieszanina parowo-wodna znajduje się w stanie równowagi termodynamicznej (złożenie to jest słuszne dla  $\omega < 100$  [rad/s]),
- uproszczenie dynamiki transportu energii cieplnej wzdłuż promienia ścianki rury (zastosowany model 12-ego rzędu przestaje być adekwatny dla częstotliwości  $\omega > 20$  [rad/s]),
- redukcja klasy modelu w wyniku operacji dyskretyzacji zmiennej przestrzennej oraz linearyzacji zapewnia adekwatność do 20 [rad/s].

Podczas analizy właściwości dynamicznych parownika dla celów sterowania konieczne jest stworzenie modeli opisujących właściwości dynamiczne obiektu, które są istotne na danym poziomie hierarchii. Poszczególne procesy dynamiczne mają miejsce w różnych zakresach częstotliwości, jednak granice między tymi zakresami nie są ostro zdefiniowane i należy je traktować jako wartość średnią rozmytej granicy:

- $\omega < 0,2$  [rad/s]

W tym zakresie częstotliwości mają miejsce procesy dynamiczne, związane z akumulacją ciepła w ściankach rur oraz czynnika roboczego, a także wymianą ciepła między ścianką rury a czynnikiem roboczym. Wartość częstotliwości granicznej dla tego przedziału wynika z czasu przelotu cząstki czynnika roboczego przez rury ekranowe parownika ( $\tau_p \cong 30$  [s]). Oznacza to, że w tym przedziale częstotliwości mają miejsce procesy dynamiczne trwające dłużej od czasu przebywania cząstki czynnika roboczego w rurach ekranowych i nie są zauważalne procesy transportu masy.

- $2 > \omega > 0,2$  [rad/s]

W tym przedziale częstotliwości obserwowane są zjawiska dynamiczne związane z transportem czynnika roboczego wzdłuż rur ekranowych, a wraz z nim zmian gęstości oraz entalpii czynnika roboczego. Maksymalna częstotliwość dla tego przedziału częstotliwości wynika

z czasu przebywania cząstki czynnika roboczego w pierwszej strefie odparowania ( $\tau_{odp1} \cong 3,0$  [s]).

- $\omega > 2$  [rad/s]

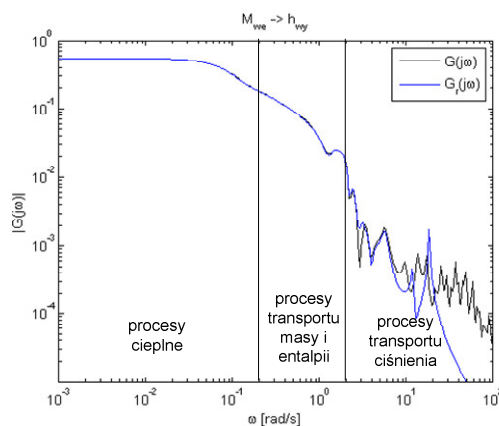
W tym przedziale częstotliwości obserwowane są zjawiska związane z przemieszczaniem się zmian przepływu i ciśnienia wzdłuż rur ekranowych parownika. Czas przemieszczenia się zmian ciśnienia przez rury ekranowe parownika wynosi  $\tau_{dzw} \cong 0,5$  [s]. Zmiany ciśnienia po odbiciu się od drugiego brzegu rur ekranowych powracają po czasie ok. 1 [s], co powoduje że pierwsze ekstremum w charakterystykach częstotliwościowych, spowodowane przemieszczaniem się fal ciśnienia, występuje dla częstotliwości  $\omega = \frac{2\pi}{2\tau_{dzw}} \approx 6$  [ $\frac{rad}{s}$ ].

Na rys. 5.1 przedstawiono wybraną charakterystykę częstotliwościową modułu dla rur ekranowych parownika kotła BP-1150 w celu zobrazowania zdefiniowanych powyżej przedziałów częstotliwości.

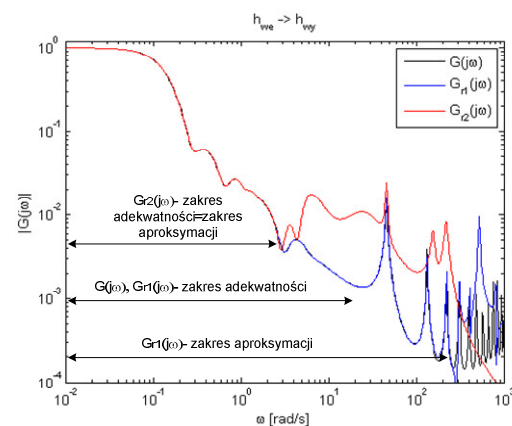
Zredukowane modele podsystemów parownika powinny uwzględniać procesy cieplne oraz procesy transportu czynnika roboczego i entalpii. Procesy te mają istotne znaczenie dla dynamiki parownika. Mniej istotne są natomiast szybkie procesy dynamiczne związane z przemieszczaniem się zmian ciśnienia wzdłuż rur ekranowych.

Dla każdego poziomu modelu hierarchicznego zakres adekwatności może być inny. Im wyższy poziom hierarchii, tym górna częstotliwość graniczna jest mniejsza. Dla wszystkich poziomów dolną częstotliwością zakresu adekwatności jest zero, gdyż modele muszą poprawnie opisywać właściwości statyczne obiektu. Granica zakresu adekwatności dla modeli pierwszego poziomu hierarchii (strefa dogrzewu oraz trzy strefy odparowania), nie powinna być jednak niższa niż  $\omega = \frac{2\pi}{\tau_{odp1}} \approx 2,1$  [rad/s].

Przedstawione w rozdziale 4 połączenie metod redukcji z algorytmami ewolucyjnymi (których celem jest wyznaczenia optymalnych parametrów dla metod redukcji), umożliwiła proste oraz efektywne wyznaczenie modeli zredukowanych dla wybranych wartości błędów aproksymacji oraz zakresów adekwatności. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń stwierdzono, że w wyniku 2-krotnego zwiększenia rzędu modelu zredukowanego możliwie jest 10-krotne poszerzenie zakresu adekwatności modelu (np.: z 2 do 20 [rad/s]). Oznacza to, że kosztem stosunkowo niewielkiego zwiększenia złożoności (w stosunku do modeli wyznaczonych dla celów sterowania o zakresie adekwatności 0-2 [rad/s]) model zredukowany posiada zakres adekwatności wynikający z przyjętych założeń upraszczających. Uzyskane modele mogą być użyteczne nie tylko dla celów sterowania, lecz również do symulacji i analizy właściwości dynamicznych parownika wraz z częścią zamodelowanych procesów transportu ciśnienia.



Rys. 5.1. Charakterystyka częstotliwościowa modułu entalpii na wylocie rur ekranowych dla wymuszenia przepływem masowym czynnika roboczego



Rys. 5.2. Zakres adekwatności oraz aproksymacji modelu zredukowanego

W wyniku przeprowadzonych badań dotyczących zagadnienia stabilności hierarchicznego modelu zredukowanego (rozdział 5.3.2), konieczne stało się wprowadzenie pojęcia *zakresu aproksymacji*. Pojęcie to jest bliskie *zakresowi adekwatności* i dla układów linowych można je zdefiniować jako zakres częstotliwości, dla którego model zredukowany poprawnie aproksymuje właściwości modelu pierwotnego. Dla modeli podsystemów parownika oba pojęcia są tożsame do częstotliwości 20 [rad/s]. Powyżej tej częstotliwości model zredukowany nie można nazwać już adekwatnym (model pierwotny dla tego zakresu częstotliwości jest nieadekwatny), lecz poprawnie aproksymującym właściwości modelu pierwotnego. Na rys. 5.2 przedstawiono przykładowe zakresy adekwatności oraz aproksymacji modeli zredukowanych.

### 5.2. Redukcja modeli pierwszego poziomu hierarchii

Ogólny schemat hierarchicznej struktury modelu parownika kotła BP-1150 przedstawiono na (rys. 2.5). Na najniższym poziomie modelu parownika znajdują się modele opisujące poszczególne odcinki rur ekranowych parownika. W wyniku analizy zachodzących zjawisk fizycznych modele poszczególnych sekcji zlinearyzowano dla małych odchyłeń od rozpatrywanego punktu równowagi. W wyniku przeprowadzonych eksperymentów obliczeniowych zaproponowano model o parametrach skupionych ścianki rury wraz z płetwą łączącą (rys. 2.12 oraz rys. 2.13). Każdy fragment rury ekranowej opisano zestawem 15. równań różniczkowych zapisanych w postaci równań stanu (modele zerowego poziomu). Ze względu na niski rząd otrzymane modele nie podlegały redukcji.

Na pierwszym poziomie modelu parownika znajdują się modele strefy dogrzewu i odparowania wchodzące w skład modelu rur ekranowych. Zawierają one szereg połączonych ze sobą sekcji, w wyniku czego uzyskano modele o następującej liczbie zmiennych stanu:

- strefa dogrzewu – 150 sekcji – 2250 zmiennych stanu,
- strefa odparowania I – 50 sekcji – 750 zmiennych stanu,
- strefa odparowania II – 75 sekcji – 1125 zmiennych stanu,
- strefa odparowania III – 200 sekcji – 3000 zmiennych stanu.

Modele otrzymane na podstawie dyskretyzacji i opisu poszczególnych elementów skończonych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi są bardzo rozbudowane i wysuwanie jakichkolwiek wniosków na ich podstawie jest praktycznie niemożliwe. Jednocześnie podczas analizy właściwości dynamicznych parownika na wyższych poziomach hierarchii, nieistotne są bardzo szybkie procesy dynamiczne. Niezbędna jest zatem redukcja modelu pozwalająca na wyeliminowanie z modelu szybkich procesów związane z przemieszczaniem się zmian ciśnienia wzdłuż rur ekranowych.

Często ważnym kryterium optymalizacji jest rząd modelu zredukowanego ( $k$ ). Optymalizacja jedno lub wielokryterialna zmienia się zatem z zadania wyznaczenia optymalnego rozwiązania (modelu o jak najniższym błędzie aproksymacji), w zadanie wyznaczenia modelu o jak najniższym rzędzie, który spełnia założone kryteria dokładności aproksymacji.

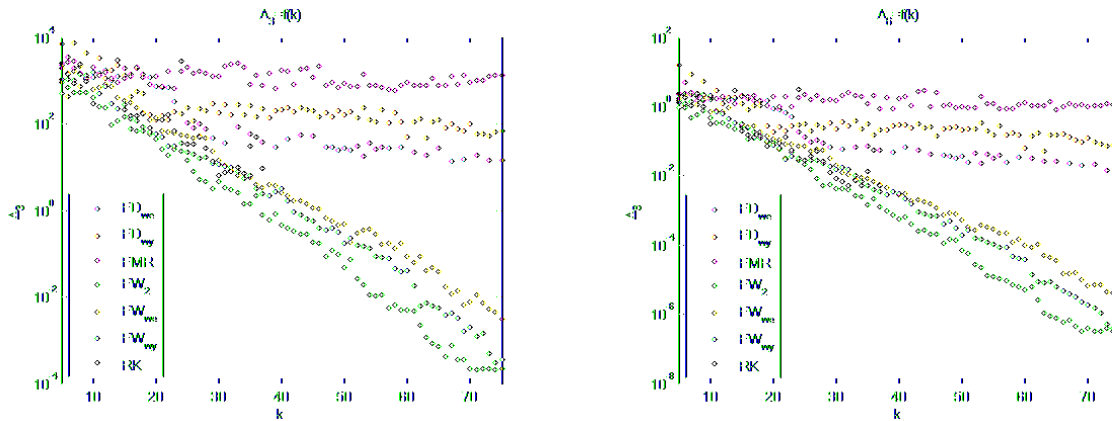
Zadanie takie można rozwiązać algorytmem ewolucyjnym poprzez zakodowanie w genotypie osobnika rzędu modelu zredukowanego oraz wprowadzeniu odpowiedniej funkcji kary. Znacznie prostsze od eksperymentalnego doboru funkcji kary jest zastosowanie optymalizacji wielokryterialnej. Rząd modelu staje się wówczas jednym z kryteriów optymalizacji. Umożliwia to przedstawienie w formie graficznej odnalezionych rozwiązań i wybór najlepszego wśród niezdominowanych np. metoda punktu idealnego [MF06].

W celu wyznaczenia najbardziej przydatnej metody redukcji dla modeli podsystemów parownika porównano wyniki uzyskane przy użyciu następujących metod:

- **FW** z wagą wejściową, wyjściową oraz z jednoczesnym zastosowaniem obu wag częstotliwościowych,

- **FD** z wagą wejściową oraz wyjściową,
- **FMR**,
- **RK** z zastosowaniem wielopunktowego algorytmu Arnoldiego.

Na rys. 5.3 przedstawiono wykres maksymalnego oraz średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji dla zakresu częstotliwości 0-20 [rad/s] w funkcji rzędu modelu zredukowanego dla strefy dogrzewu rur ekranowych.



Rys. 5.3. Błąd aproksymacji modelu w funkcji rzędu modelu zredukowanego dla metod **FW**, **FD**, **FMR**, **RK**

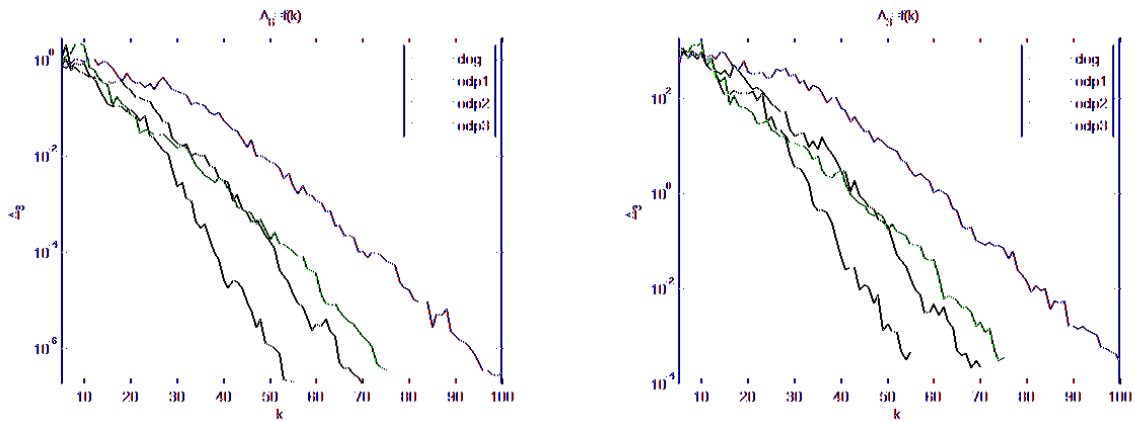
Spośród wszystkich przedstawionych metod redukcji najbardziej korzystne jest zastosowanie metody **FW**. Duża złożoność obliczeniowa oraz złe uwarunkowanie macierzy transformacji dla modeli zredukowanych o rzędzie  $k > 20$ , powoduje nieprzydatność metody **FD** do redukcji złożonych modeli obiektów dynamicznych.

Rozwinięcie transmitancji modelu wokół jednego punktu interpolacji (parametr  $\omega_0$ ) uniemożliwia uzyskanie dobrych wyników redukcji dla modeli zredukowanych o szerokim zakresie adekwatności (np.: 0-20 [rad/s]) dla metody **FMR**. Dlatego też, pomimo zwiększania rzędu modelu zredukowanego błędy aproksymacji pozostają na stałym poziomie.

Metoda **RK** posiada najmniejszą złożoność obliczeniową spośród zastosowanych algorytmów. Nie gwarantuje ona jednak zachowania stabilności modelu zredukowanego. Jak można zauważyć (pomimo uruchomienia 25 niezależnych algorytmów ewolucyjnych mających na celu wyznaczenie optymalnych punktów interpolacji) dla  $k > 42$  nie uzyskano stabilnego wyniku redukcji. Oznacza to, że bardzo trudne jest uzyskanie tą metodą modeli o szerokim zakresie adekwatności oraz bardzo dużej dokładności aproksymacji.

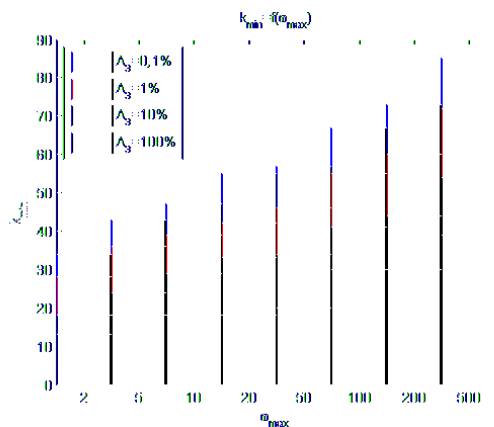
Dla modeli podsystemów parownika najbardziej korzystne jest zastosowanie metody **FW** z wagą wyjściową, ponieważ wymaga ona wyznaczenia najmniejszej liczby parametrów (metoda **FW** wymaga wyznaczenia odpowiednio: 6 parametrów przy zastosowaniu wagi wyjściowej, 8 parametrów w przypadku zastosowania wagi wejściowej oraz 14 parametrów dla obu wag jednocześnie). Algorytm **FW** z wagą wyjściową został zastosowany podczas redukcji wszystkich podsystemów parownika kotła energetycznego.

Na rys. 5.4 przedstawiono zależność błędu aproksymacji w funkcji rzędu modelu zredukowanego dla poszczególnych stref parownika. W celu wyznaczenia charakterystyki zastosowano algorytm ewolucyjny minimalizujący średniokwadratowy względny błąd aproksymacji ( $\Delta_6$ ) w zakresie częstotliwości 0-20 [rad/s]. Jak można zauważyć, dla wszystkich stref rur ekranowych parownika błąd aproksymacji maleje eksponencjalnie wraz ze wzrostem rzędu modelu zredukowanego. Na podstawie kilku wyników redukcji możliwe jest określenie przybliżonego rzędu modelu zredukowanego o zadanym poziomie błędu aproksymacji. Umożliwia to szybkie i efektywne wyznaczenie optymalnego modelu zredukowanego.



Rys. 5.4. Błąd aproksymacji modelu w funkcji rzędu modelu zredukowanego

Poszerzenie zakresu adekwatności (przy założeniu stałej wartości błędu aproksymacji np.:  $\Delta_3 = 10\%$ ) wymaga zwiększenia liczby zmiennych stanu opisujących model zredukowany. Na rys. 5.5 przedstawiono przykładowe rzędy modelu strefy dogrzewu rur ekranowych o różnych zakresach aproksymacji, dla których uzyskano identyczną wartość maksymalnego błędu aproksymacji. Jak można zauważyć, 2-krotne zwiększenie rzędu modelu zredukowanego umożliwia 10-krotnie poszerzenie zakresu aproksymacji.

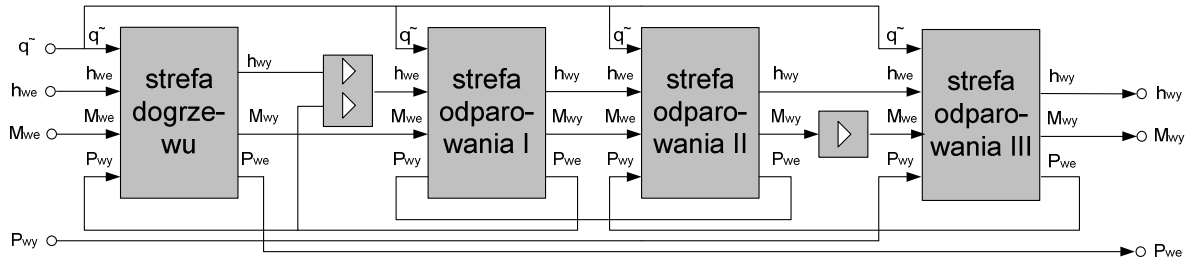


Rys. 5.5. Minimalny rząd modelu zredukowanego dla wybranych zakresów aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika

W dodatku D.1 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe modeli poszczególnych stref rur ekranowych o porównywalnym poziomie maksymalnego błędu aproksymacji ( $\Delta_3 \cong 10\%$ ) i różnych zakresach aproksymacji (2, 20 oraz 500 [rad/s]). Na podstawie charakterystyk można wskazać bardzo dobra zbieżność modelu o zredukowanym rzędzie do częstotliwości równej adekwatności modelu. Powyżej tej częstotliwości błędy gwałtownie wzrastają.

### 5.3. Redukcja modeli drugiego poziomu hierarchii

W wyniku wzajemnego połączenia poszczególnych stref uzyskano model rur ekranowych parownika (drugi poziom modelu parownika) składający się z 475 sekcji, którego rząd wynosi 7125 zmiennych stanu (rys. 5.6). Pozostałe podsystemy modelu parownika: MIESZALNIK, SEPARATOR, POMPA CYRKULACYJNA, RUROCIĄGI ŁĄCZĄCE nie zawierają podsystemów niższego poziomu i opisane są układami równań różniczkowych przedstawionymi w rozdziale 2.4.



Rys. 5.6. Model rur ekranowych parownika

Redukcja bardzo rozbudowanego modelu rur ekranowych parownika jest zadaniem bardzo czasochłonnym. Dla modeli o jeszcze większej złożoności ( $>10^4$  zmiennych stanu) zastosowanie metod bazujących na dekompozycji SVD może okazać się już niemożliwe [Ant05]. Uzyskanie wysokich rzędów modeli zredukowanych (o dużej dokładności aproksymacji charakterystyk i szerokim zakresie adekwatności) metodami Kryłowa jest trudne w realizacji, ze względu na znaczną liczbę niestabilnych wyników.

Trudności związane z redukcją modeli o dużej złożoności można pokonać poprzez realizację koncepcji hierarchicznego modelu zredukowanego, w której redukcja modeli na wyższych poziomach hierarchii jest przeprowadzana na podstawie zredukowanych modeli podsystemów poziomu niższego. Wstępnie zredukowany model rur ekranowych uzyskuje się w drodze połączenia zredukowanych modeli poszczególnych odcinków rur ekranowych. Tak uzyskany model rur ekranowych poddany zostaje kolejnej operacji redukcji.

### 5.3.1. Wrażliwość właściwości dynamicznych modelu rur ekranowych na wariacje połączeń podsystemów

Opracowany model rur ekranowych parownika, przedstawiony na rys. 5.6, posiada określoną topologię, podczas gdy struktura operatorów poszczególnych podsystemów nie jest w pełni określona. Wynika to z przyjęcia w modelu pierwotnym szeregu współczynników (np. współczynnik przejmowania ciepła  $\alpha$ , współczynnik przewodnictwa cieplnego  $\lambda$ , itp.), które wyznaczone są eksperymentalnie z określoną dokładnością (od ułamka procenta do kilkudziesięciu procent). Dodatkowo, opracowane modele podsystemów podlegają redukcji, w wyniku której aproksymują właściwości modelu pierwotnego z dokładnością od ułamka procenta do kilkudziesięciu procent (dla zadanego zakresu adekwatności).

Aby ocenić, w jakim stopniu niepewność wyznaczenia modeli poszczególnych podsystemów wpływa na niepewność całego modelu, można zastosować teorię wrażliwości opracowaną przez Kokotowicza [KR65, KIA96]. Analiza wrażliwości w dziedzinie częstotliwościowej pozwala na określenie roli poszczególnych podsystemów oraz niepewności ich charakterystyk na właściwości całego układu. Do badania wpływu uzmiennionych podsystemów na charakterystyki systemu wykorzystuje się funkcje wrażliwości transmitancji  $S_i^G(j\omega)$ , pozwalające ocenić względny wpływ zmian transmitancji podsystemów na transmitancję modelu:

$$\frac{\Delta|G(j\omega)|}{|G(j\omega)|} \cong |S_i^G(j\omega)| \frac{\Delta|G_i(j\omega)|}{|G_i(j\omega)|} \quad (5.1)$$

Moduły funkcji wrażliwości  $|S_i^G(j\omega)|$  w postaci charakterystyk częstotliwościowych przedstawiają zależność względnych przyrostów charakterystyki częstotliwościowej systemu dla każdej częstotliwości.

W celu wyznaczenia funkcji wrażliwości  $|S_i^G(j\omega)|$  do toru, gdzie znajduje się  $i$ -ty podsystem wprowadzany jest element o transmitancji 1 (określany jako tzw. dipol wrażliwości).

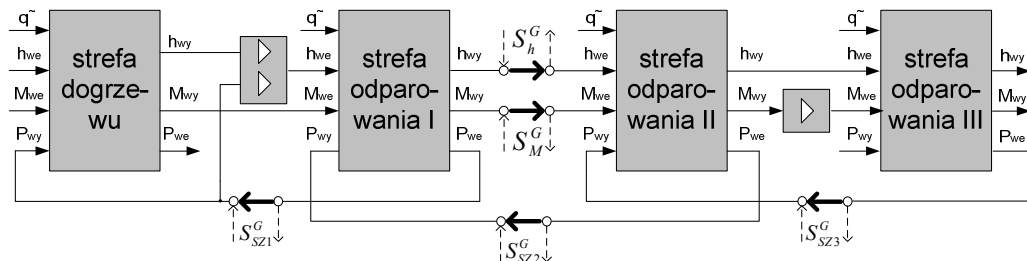
Jeżeli podsystem poddany uzmiennieniu należy do toru głównego, to funkcja wrażliwości jest równa transmitancji pomiędzy wejściem dipola wrażliwości a jego wyjściem. W przypadku gdy uzmienniony podsystem należy do toru sprzężenia zwrotnego związanego z torem głównym, to funkcja wrażliwości jest równa transmitancji pomiędzy wyjściem dipola wrażliwości a jego wejściem.

Funkcje wrażliwości można również wyznaczyć obliczeniowo. W tym celu konieczne jest wyznaczenie transmitancji widmowych dla danej wielkości wejściowej oraz wyjściowej przy wzmacnieniu toru równemu 1 ( $G_0(j\omega)$ ) oraz  $1+\delta$  ( $G_0(j\omega) + \Delta G(j\omega)$ ). Na ich podstawie można wyznaczyć funkcję wrażliwości:

$$S_i^G(j\omega) = \frac{\Delta G(j\omega)}{\delta G_0(j\omega)} \quad (5.2)$$

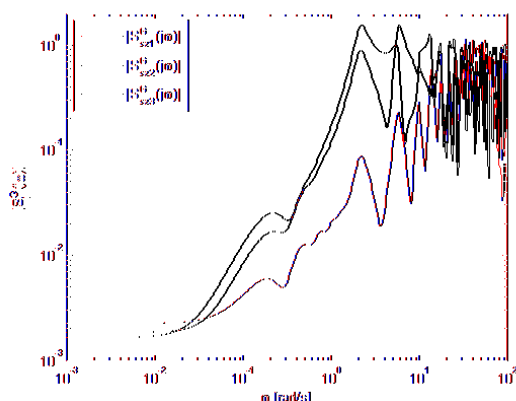
Wartość  $\delta$  powinna być możliwie mała, aby zapewnić różniczkowy charakter zależności (5.1), ale jednocześnie na tyle duża, aby nie spowodować błędów numerycznych przy wyznaczaniu funkcji wrażliwości.

Sposób wyznaczenia funkcji wrażliwości dla sprzężenia zwrotnego występującego między poszczególnymi strefami rur ekranowych [ $S_{sz1}^G(j\omega) - S_{sz3}^G(j\omega)$ ] oraz w torze głównym ( $S_M^G(j\omega), S_h^G(j\omega)$ ) przedstawiono na rys. 5.7.

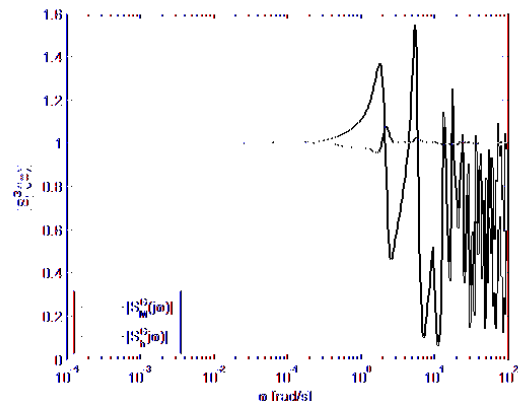


Rys. 5.7. Schemat blokowy wyznaczenia funkcji wrażliwości określających zależności transmitancji modelu rur ekranowych parownika od wariacji podsystemów

Na podstawie zależności (5.1) oraz (5.2) wyznaczono funkcje wrażliwości modelu rur ekranowych parownika na wariacje poszczególnych sprzężeń zwrotnych oraz torów głównych. Dla sprzężeń zwrotnych moduł funkcji wrażliwości ma bardzo małe wartości dla częstotliwości niskich ( $\omega < 1$  [rad/s]) oraz wartości bliskie 1 dla częstotliwości wysokich (rys. 5.8).



Rys. 5.8. Wyznaczanie funkcji wrażliwości  $S_{sz}^G(j\omega)$  określającej zależność transmitancji modelu od wariacji sprzężenia zwrotnego



Rys. 5.9. Wyznaczanie funkcji wrażliwości  $S^G(j\omega)$  określającej zależność transmitancji modelu od wariacji torach głównych

Oznacza to, że wrażliwość modelu rur ekranowych na wariacje transmitancji układu sprzężenia zwrotnego (tor zmian ciśnienia) jest bardzo niska. Można więc powiedzieć, że dokładność torów  $M_{we} \rightarrow P_{we}$  oraz  $h_{we} \rightarrow P_{we}$  ma nieznaczny wpływ na model rur ekranowych dla niskich częstotliwości. Natomiast dla wysokich częstotliwości wariacje transmitan-

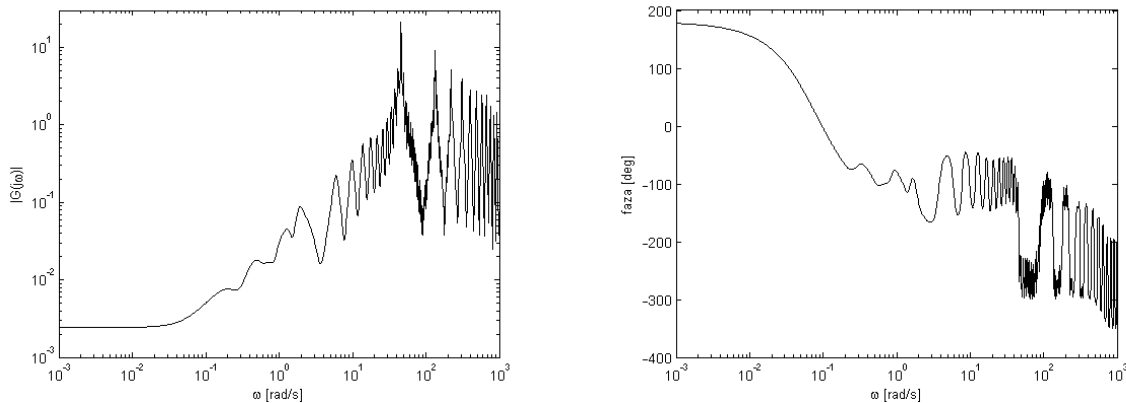


cji torów sprzężenia zwrotnego przenoszą się w takim samym stopniu na model rur ekranowych. Wynika to z faktu, że sprzężenie zwrotne praktycznie nie funkcjonuje dla niskich częstotliwości, natomiast jest bardzo silne dla częstotliwości wysokich (rys. 5.10).

Inna sytuacja występuje dla torów głównych ( $h_{we} \rightarrow h_{wy}$ ,  $M_{we} \rightarrow M_{wy}$ ,  $h_{we} \rightarrow M_{wy}$ ,  $M_{we} \rightarrow h_{wy}$ ). W tym przypadku funkcja wrażliwości przyjmuje wartości bliskie 1, co oznacza że wariacje transmitancji tych torów przenoszą się wprost na wariacje charakterystyk rur ekranowych.

### 5.3.2. Wpływ sprzężeń zwrotnych na stabilność hierarchicznego modelu zredukowanego rur ekranowych

W modelu rur ekranowych parownika występują sprzężenia zwrotne, które związane są z przemieszczaniem się zmian ciśnienia wzdłuż rur ekranowych, tak w kierunku zgodnym, jak i przeciwnym do przepływu czynnika roboczego. Wykreślenie charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego (rys. 5.10) pozwala zaobserwować, że sprzężenia zwrotne bardzo silnie oddziałuje w zakresie wysokich częstotliwości.

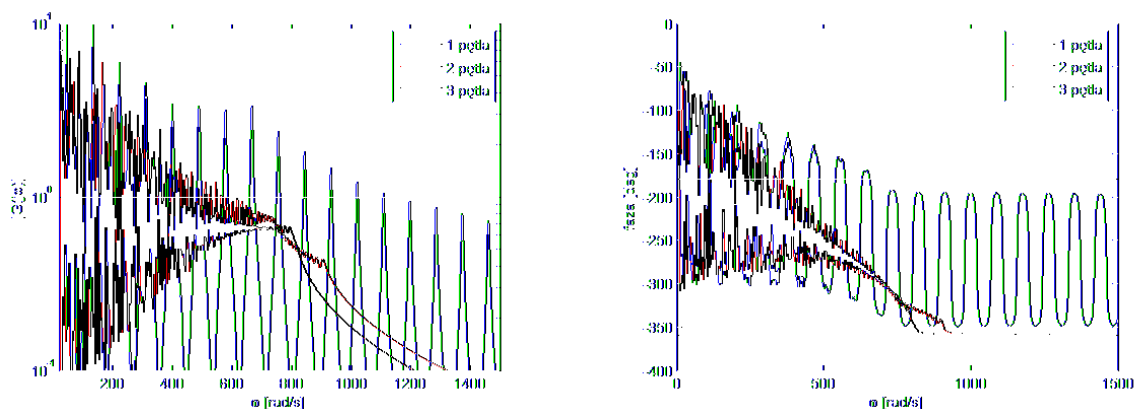


Rys. 5.10. Charakterystyka częstotliwościowa modułu oraz fazy układu otwartego dla pętli sprzężenia zwrotnego między strefą dogrzewu i pierwszym odcinkiem strefy odparowania

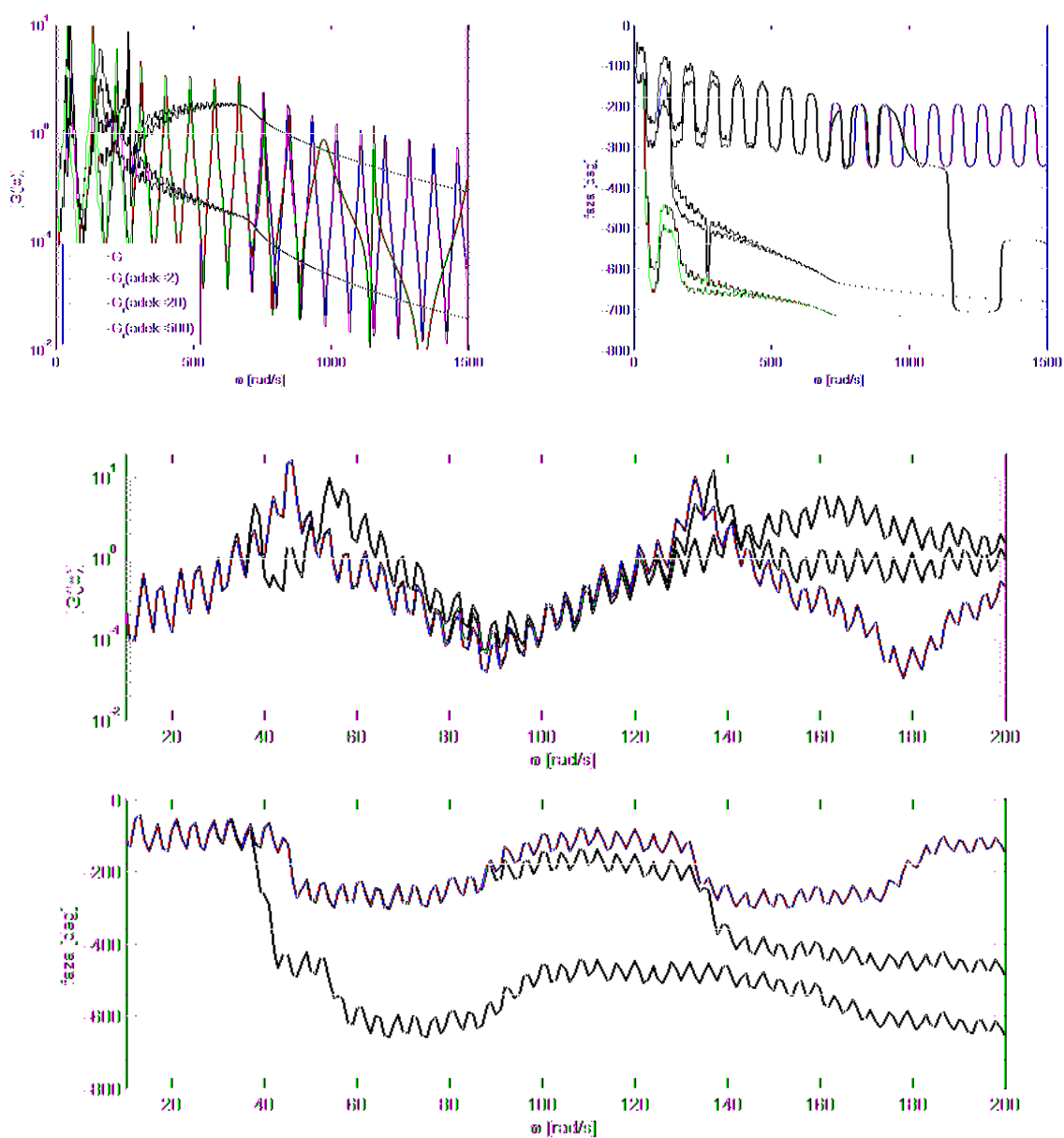
Zredukowane modele strefy dogrzewu oraz poszczególnych odcinków strefy odparowania poprawnie aproksymują charakterystyki częstotliwościowe wyłącznie dla częstotliwości  $\omega < 20$  [rad/s]. W trakcie wyznaczania parametrów redukcji, błędy aproksymacji w zakresie częstotliwości rezonansowych nie były brane pod uwagę jako kryterium doboru modelu zredukowanego. Może więc okazać się, że po zamknięciu pętli sprzężeń zwrotnych dla modeli zredukowanych, model rur ekranowych będzie niestabilny. Wynika to z faktu, że dla wysokich częstotliwości moduł charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego znacznie przekracza wartość 1, co przy przesunięciu fazowym przekraczającym  $0^\circ$  (dla dodatniego sprzężenia zwrotnego) prowadzi do niestabilności. Modele o zakresie adekwatności do 20 [rad/s] mogą być zatem przydatne jedynie do analizy zjawisk dynamicznych zachodzących w poszczególnych odcinkach rur ekranowych.

Na rys. 5.11 przedstawiono częstotliwościowe charakterystyki amplitudowe i fazowe układów otwartych sprzężeń zwrotnych dla pierwszej, drugiej i trzeciej pętli sprzężenia zwrotnego (rys. 5.6). Wzmocnienie układu otwartego dla wysokich częstotliwości przekracza znacznie wartość 1 w zakresie do ok. 1000 [rad/s] dla pierwszej pętli oraz do częstotliwości 400-500 [rad/s] dla pozostałych pętli sprzężeń zwrotnych. Różnica ta wynika z faktu, że woda w strefie dogrzewu stanowi czynnik o mniejszej ściślności niż mieszanina parowo-wodna w strefie odparowania, co pociąga za sobą większą prędkość rozprzestrzeniania się dźwięku (zmian ciśnienia) w strefie dogrzewu.

## 5. Redukcja modeli podsystemów kotła energetycznego



Rys. 5.11. Charakterystyki częstotliwościowe modułu i fazy układów otwartych dla pierwszego, drugiego i trzeciego sprzężenia zwrotnego



Rys. 5.12. Charakterystyki częstotliwościowe modułu i fazowy układu otwartego modelu rur ekranowych (uzyskanego w wyniku połączenia modeli pierwotnych trzech stref odparowania oraz zredukowanego modelu strefy dogrzewu) dla pierwszej pętli sprzężenia zwrotnego

Na rys. 5.12 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe modułu i fazy układu otwartego pierwszej pętli sprzężenia zwrotnego dla modelu rur ekranowych, uzyskanego w wyniku połączenia modeli pierwotnych trzech stref odparowania oraz zredukowanego modelu strefy dogrzewu (charakteryzującego się błędem aproksymacji  $\Delta_3 = 10\%$  dla zakresów aproksymacji 2, 20 oraz 500 [rad/s]). Na podstawie przebiegu charakterystyk układu otwartego dla modelu zredukowanego o zakresie aproksymacji 20 [rad/s] wynika, że po zamknięciu sprzężenia zwrotnego model rur ekranowych parownika będzie niestabilny (dla częstotliwości 140 [rad/s] moduł transmitancji układu otwartego jest większy od 1 przy przesunięciu fazowym równym  $0^\circ$ ). Zredukowany model strefy dogrzewu nie może być zatem użyty do tworzenia modelu rur ekranowych. Jeżeli jednak wygenerować dużą liczbę zredukowanych modeli poszczególnych odcinków rur ekranowych o zakresie aproksymacji do 20 [rad/s], to niewielka ich część może być użyta do budowy zredukowanego modelu rur ekranowych, gdyż zamknięcie sprzężeń zwrotnych nie powoduje niestabilności. Można to zaobserwować na histogramach przedstawionych na rys. 5.14.

Bardzo silne działanie sprzężenia zwrotnego dla wysokich częstotliwości oznacza, że zagwarantowanie stabilności modelu rur ekranowych wymaga poprawnej aproksymacji charakterystyk podsystemów w zakresie do 500 [rad/s], a dla strefy dogrzewu do 1000 [rad/s]. Tak szeroki zakres aproksymacji modeli podsystemów rur ekranowych pociąga z sobą ich wysoki rząd i znaczną komplikację modelu rur ekranowych przy niezmiennym zakresie adekwatności 0-20 [rad/s].

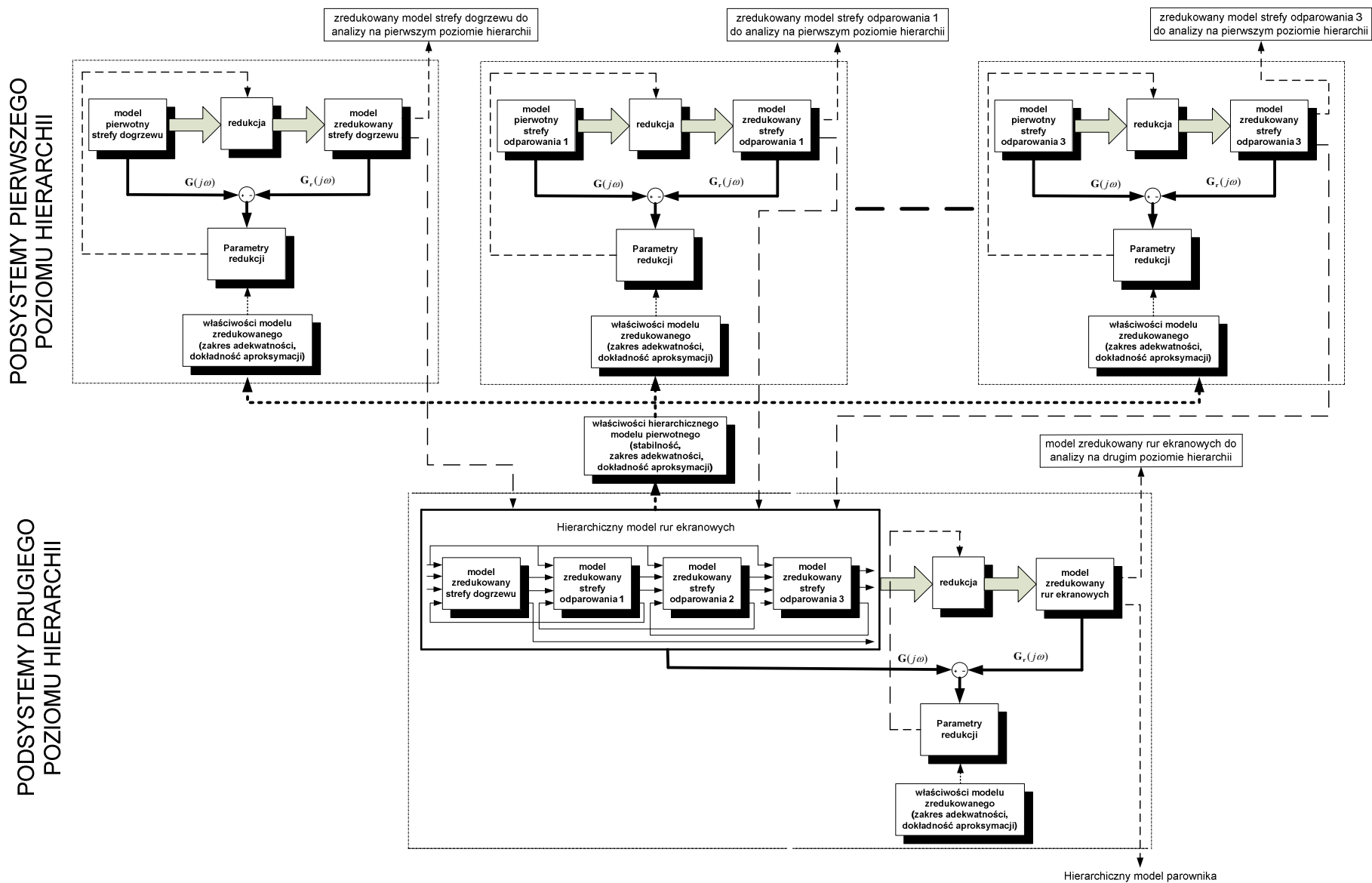
Z punktu widzenia stabilności modelu rur ekranowych, otrzymanego na podstawie modeli zredukowanych poszczególnych podsystemów, znacznie korzystniej jest zastosować zredukowane modele strefy dogrzewu i poszczególnych odcinków strefy odparowania otrzymane dla zakresu adekwatności 2 [rad/s]. Uzyskane w ten sposób modele podsystemów są niskiego rzędu, co powoduje że moduł charakterystyki częstotliwościowej szybko maleje, a po zamknięciu sprzężeń zwrotnych model rur ekranowych jest stabilny. Odbywa to się niestety kosztem ograniczenia zakresu adekwatności modelu rur ekranowych do 2 [rad/s].

Znacznie prostszym sposobem uzyskania stabilnego modelu rur ekranowych jest wygenerowanie odpowiednio dużej liczby zredukowanych modeli podsystemów o różnym zakresie adekwatności oraz wartościach błędów aproksymacji. Z odpowiednio licznego zbioru rozwiązań można następnie wybrać takie, które dadzą stabilne rozwiązanie na wyższym poziomie hierarchii, przy jednoczesnym zapewnieniu odpowiedniej jakości aproksymacji.

Pożądane właściwości hierarchicznego modelu rur ekranowych parownika (np.: model stabilny, zakres aproksymacji  $\omega_{max} \geq 20$  [rad/s], błędy aproksymacji  $\Delta_3 < 1\%$  oraz  $\Delta_6 < 10^{-3}$ ) mogą zatem wpływać na określenie wymagań stawianych modelom zredukowanym strefy dogrzewu oraz trzech części strefy odparowania. Konieczny jest algorytm iteracyjny, w którym właściwości modelu na wyższym poziomie hierarchii wpływając na kryteria oceny modeli podsystemów (np. na określając zakres częstotliwości dla którego wyznaczana jest funkcja przystosowania) pośrednio wpływają również na parametry redukcji i właściwości modelu na niższym poziomie (rys. 5.13).

W pracy wygenerowano znaczną liczbę modeli pierwszego poziomu o zakresach adekwatności 0-2 [rad/s], 0-20 [rad/s] oraz aproksymacji 0-200 [rad/s] i 0-500 [rad/s]. Na rys. 5.14 przedstawiono prawdopodobieństwo uzyskania stabilnego modelu rur ekranowych w wyniku połączenia jednego zredukowanego oraz trzech pierwotnych modeli poszczególnych stref rur ekranowych parownika.

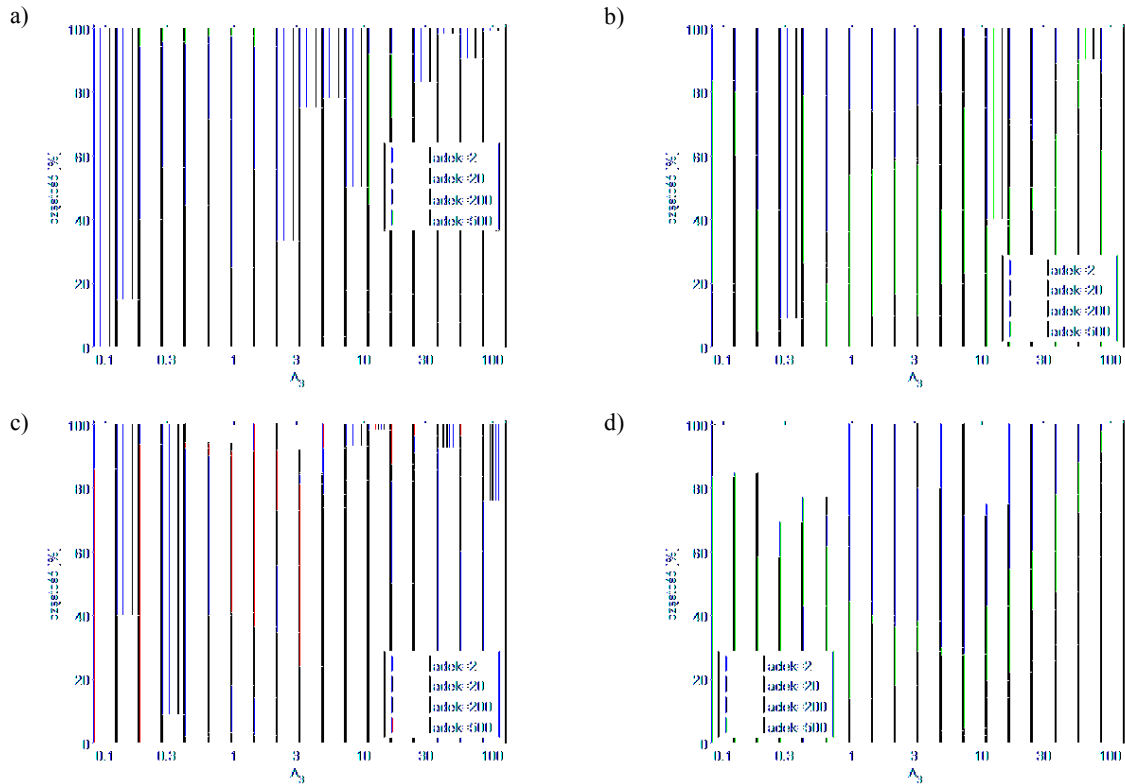
Jak można zauważyć, przyjęcie zakresu aproksymacji równego 2 oraz 500 [rad/s], umożliwia z dużym prawdopodobieństwem uzyskanie stabilnych modeli rur ekranowych. Wyjątkiem są zredukowane modele trzeciego odcinka strefy odparowania dla zakresu adekwatności 2 [rad/s] i błędów aproksymacji  $\Delta_3 < 0,3\%$ , wśród których nie udało się uzyskać stabilnych



Rys. 5.13. Hierarchiczna struktura redukcji modeli podsystemów rur ekranowych parownika

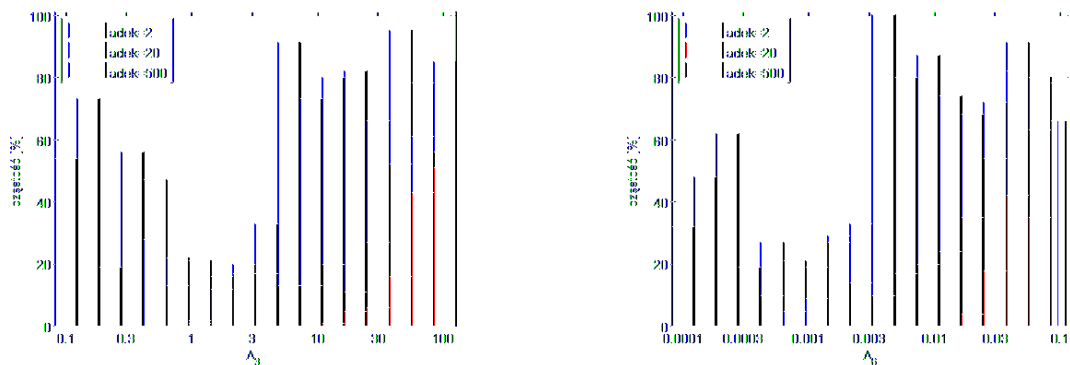
rozwiązań. Uzyskanie stabilnych modeli rur ekranowych dla pozostałych dwóch zakresów aproksymacji o małych błędach aproksymacji jest praktycznie niemożliwe.

Największym ograniczeniem dla uzyskania stabilnych modeli rur ekranowych o zakresie adekwatności 20 [rad/s] są zredukowane modele strefy dogrzewu, gdyż stabilne rozwiązania uzyskano jedynie dla modeli o maksymalnym błędzie aproksymacji większym od 5%. Identyczne ograniczenie dla zakresu aproksymacji 200 [rad/s] występuje w wyniku braku stabilnych rozwiązań dla trzeciego odcinka strefy odparowania.



Rys. 5.14. Histogram stabilnych rozwiązań modelu rur ekranowych uzyskanego w wyniku połączenia jednego modelu zredukowanego [(a) strefa dogrzewu, (b) pierwsza strefa odparowania, (c) druga strefa odparowania, (d) trzecia strefa odparowania] oraz 3 modeli pierwotnych

Częstość uzyskiwania stabilnego modelu rur ekranowych parownika z zastosowaniem czterech modeli zredukowanych o porównywalnych poziomach błędzie aproksymacji oraz identycznych zakresach adekwatności jest iloczynem histogramów z rys. 5.14 i została przedstawiona na rys. 5.15.



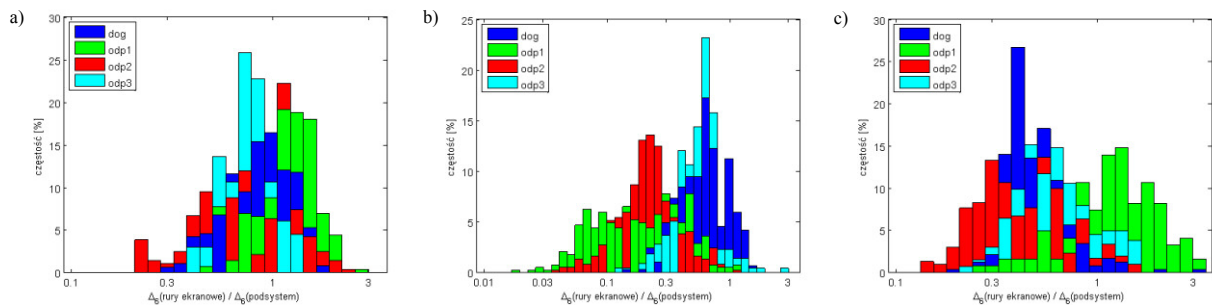
Rys. 5.15. Histogram stabilnych rozwiązań modeli zredukowanych dla zakresów aproksymacji 2, 20, 500 [rad/s]

Jak można zaobserwować, otrzymanie stabilnego modelu rur ekranowych opartego na zredukowanych modelach podsystemów jest praktycznie niemożliwe dla błędów  $\Delta_3 < 10\%$  i zakresu adekwatności 20 [rad/s] oraz błędzie 0,5% i zakresu adekwatności 2 [rad/s]. Modele

o dużej dokładności oraz zakresie adekwatności 20 [rad/s] można uzyskać wyłącznie przez znaczne zwiększenie zakresu aproksymacji modeli podsystemów (np.: do wartości 500 [rad/s]). Otrzymany w ten sposób model rur ekranowych może być następnie poddany kolejnej operacji redukcji, w wyniku której ograniczony zostanie rząd modelu.

### 5.3.3. Wpływ błędów aproksymacji podsystemów na błędy aproksymacji modelu rur ekranowych parownika

Hierarchiczny model zredukowany na każdym (poza najniższym) poziomie może być przedstawiony jako zbiór podsystemów poziomu bezpośrednio niższego oraz zestawu wzajemnych ich połączeń. Każdy ze zredukowanych modeli podsystemów charakteryzuje się określonym zakresem adekwatności oraz błędem aproksymacji (zależności 4.1 - 4.7). W wyniku łączenia zredukowanych modeli podsystemów pojawia się problem przenoszenia się błędu aproksymacji podsystemu na błąd modelu na wyższym poziomie hierarchii. Poznanie tego mechanizmu umożliwia dobranie odpowiednich modeli podsystemów tak, aby uzyskany model rur ekranowych charakteryzował się założonym zakresem adekwatności oraz poziomem błędu aproksymacji.



Rys. 5.16. Histogramy stosunku błędu aproksymacji modelu rur ekranowych do błędu aproksymacji podsystemu dla zakresów adekwatności/aproksymacji (a) 0-2 [rad/s], (b) 0-20 [rad/s], (c) 0-500 [rad/s]

Na rys. 5.16 przedstawiono histogramy wpływu błędu aproksymacji poszczególnych podsystemów (model rur ekranowych uzyskano w wyniku połączenia jednego zredukowanego oraz trzech pierwotnych modeli stref rur ekranowych parownika) na średniokwadratowy względny błąd aproksymacji rur ekranowych parownika. W tab. 5.1 zestawiono mediany stosunku błędu aproksymacji rur ekranowych do błędu podsystemu.

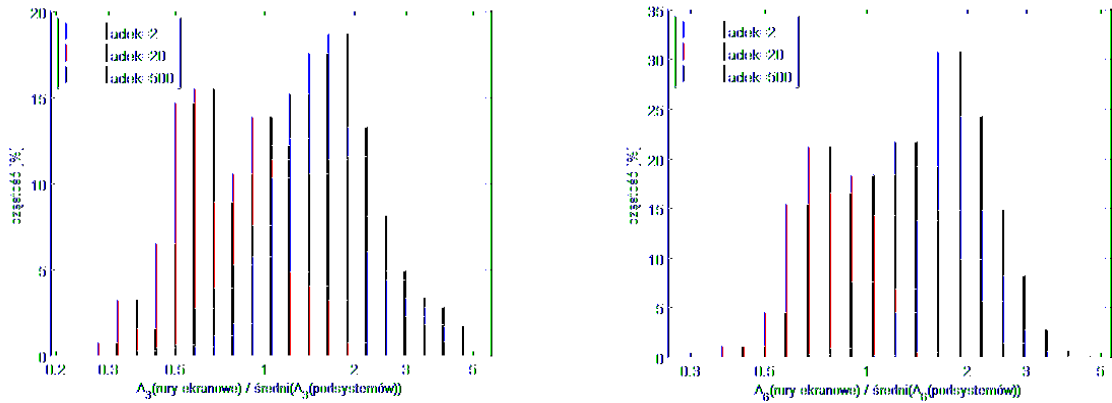
Tab. 5.1. Mediana stosunku średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji rur ekranowych do błędu podsystemu

Zakres adekwatności	strefa dogrzewu	pierwsza strefa odparowania	druga strefa odparowania	trzecia strefa odparowania
2 [rad/s]	0.8748	1.1842	0.7393	0.7625
20 [rad/s]	0.6103	0.1837	0.2185	0.5669
500 [rad/s]	0.4512	1.2249	0.4168	0.5837

Jak można zauważyć, wszystkie histogramy mają w przybliżeniu kształt rozkładu normalnego, jednak wyniki nie są w pełni jednoznaczne, np.: wpływ modelu pierwszego odcinka strefy odparowania jest najmniejszy ze wszystkich podsystemów dla zakresu adekwatności 20 [rad/s], ale jednocześnie największy dla 2 oraz 500 [rad/s]. Na podstawie przedstawionych wyników można stwierdzić, że statystycznie błąd aproksymacji każdej ze stref ma porównywalny wpływ na błąd rur ekranowych parownika.

Na rys. 5.17 przedstawiono histogram stosunku błędu modelu rur ekranowych uzyskanego w wyniku połączenia zredukowanych modeli podsystemów o porównywalnych wartościach

błędu aproksymacji (różnica błędów aproksymacji podsystemów nie przekraczała  $\pm 20\%$ ). Wyniki przedstawione w tab. 5.2 wskazują, że uzyskany model rur ekranowych statystycznie charakteryzuje się większym błędem aproksymacji niż średni błąd modeli podsystemów. Zakres adekwatności 20 [rad/s] stanowi wyjątek, lecz może być to spowodowane najmniejszą liczbą uzyskanych stabilnych modeli rur ekranowych oraz ich stosunkowo dużymi wartościami błędu aproksymacji (rys. 5.15). Analiza histogramów umożliwia jednak stwierdzenie, że odpowiedni dobór zredukowanych modeli podsystemów umożliwi kompensowanie się błędów aproksymacji zastosowanych modeli niższego poziomu hierarchii. W wyniku tego możliwe jest uzyskanie modelu rur ekranowych parownika o mniejszym błędzie aproksymacji niż użyte modele podsystemów.



Rys. 5.17. Histogramy stosunku błędu aproksymacji modelu rur ekranowych do średniej wartości błędu podsystemów niższego poziomu

Tab. 5.2. Mediana stosunku średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji rur ekranowych do średniego błędu podsystemów niższego poziomu

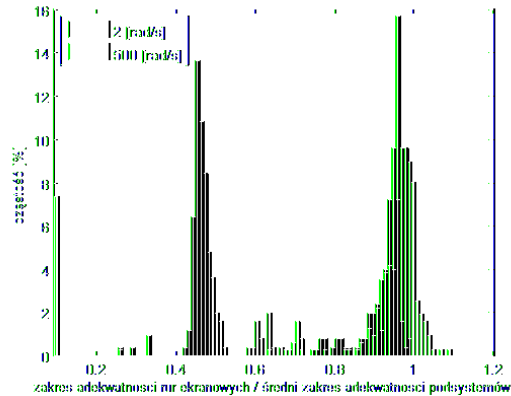
Zakres aproksymacji	2 [rad/s]	20 [rad/s]	500 [rad/s]
$\Delta_3 \text{ rury ekranowe} / \Delta_3 \text{ podsystem}$	1,64	0,76	1,45
$\Delta_6 \text{ rury ekranowe} / \Delta_6 \text{ podsystem}$	1,90	0,83	1,42

Zwiększenie błędu aproksymacji modelu na wyższym poziomie hierarchii w stosunku do modeli podsystemów można także sprowadzić do zmniejszenia się zakresu adekwatności otrzymanego modelu. Zmiana zakresu adekwatności modelu na wyższym poziomie hierarchii nie jest jednak tak jednoznaczna, jak wartość błędu aproksymacji dla z góry założonego zakresu adekwatności. Związane jest to ze stochastycznym rozkładem błędu w funkcji częstotliwości, co powoduje że maksymalne wartości błędu niekoniecznie muszą wystąpić na końcu założonego zakresu.

Na rys. 5.18 przedstawiono histogram stosunku zakresu aproksymacji modelu rur ekranowych do średniej wartości zakresu adekwatności jego podsystemów. Modele podsystemów spełniały następujące warunki:

- w wyniku połączenia modeli podsystemów uzyskano stabilny model rur ekranowych parownika,
- modele podsystemów charakteryzowały się porównywalnym poziomem średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji dla założonego zakresu aproksymacji (np.  $\Delta_6 = 0,01 \pm 20\%$  dla zakresu 2 [rad/s]),
- modele podsystemów charakteryzowały się porównywalną wartością zakresu adekwatności dla założonej wartości błędu aproksymacji (np. zakres adekwatności wynosił  $\omega_{max} = 2 \pm 0,2$  [rad/s] dla  $\Delta_6 = 0,01$ ).

Na podstawie przedstawionych wyników można stwierdzić, że dla modeli rur ekranowych uzyskanych w wyniku połączenia modeli podsystemów o zakresie aproksymacji 500 [rad/s], statystycznie nieznacznie zmniejszył się zakres aproksymacji (jednocześnie jednak dla ok. 8% rezultatów zakres aproksymacji zmniejszył się ponad 10-krotnie). Natomiast dla modeli podsystemów o zakresie adekwatności 2 [rad/s] widoczne są dwa ekstrema, przy czym najczęściej model rur ekranowych miał zmniejszony zakres adekwatności do około 1 [rad/s].



Rys. 5.18. Histogramy stosunku zakresu aproksymacji modelu rur ekranowych do średniej wartości zakresu aproksymacji jego podsystemów

### 5.3.4. Redukcja hierarchicznego modelu rur ekranowych parownika

Hierarchiczny model rur ekranowych parownika uzyskany w wyniku wzajemnego połączenia zredukowanych modeli podsystemów charakteryzuje się nadal stosunkowo dużą złożonością. Połączenie modeli podsystemów powoduje pojawienie się wielu zmiennych stanu, które mają niewielki wpływ na charakterystykę modelu na wyższym poziomie hierarchii i opisują właściwości dynamiczne obiektu, które nie są już istotne na danym poziomie. Złożoność modelu rur ekranowych można w znaczny sposób ograniczyć w wyniku kolejnej operacji redukcji.

Na rys. 5.19 przedstawiono wykres maksymalnego względnego błędu aproksymacji dla zakresu częstotliwości 0-2 oraz 0-20 [rad/s] w funkcji rzędu modelu zredukowanego, dla modeli uzyskanych w następujący sposób:

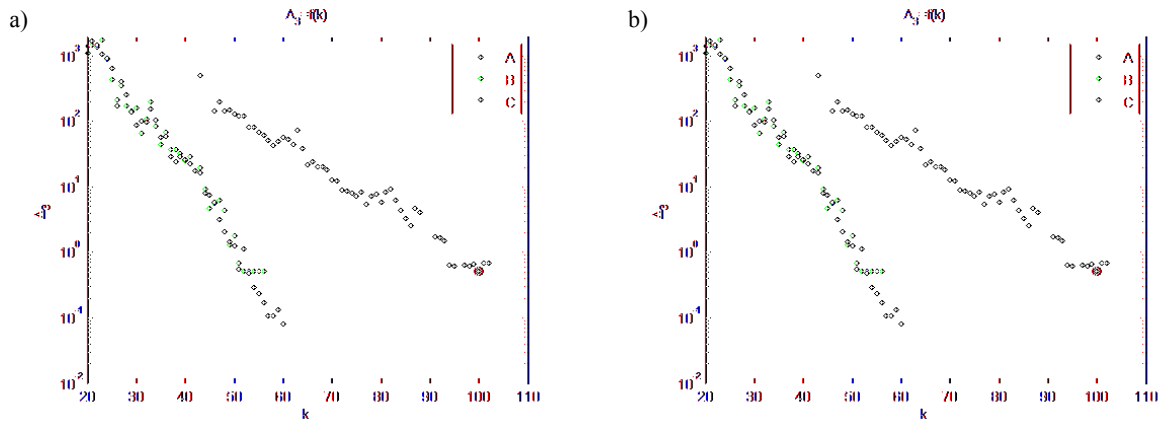
- *A* - model rur ekranowych uzyskany w wyniku połączenia zredukowanych modeli podsystemów o zakresie adekwatności 2 [rad/s] (20 [rad/s]),
- *B* - model rur ekranowych charakteryzujący się najmniejszym błędem aproksymacji uzyskany w wyniku połączenia zredukowanych modeli podsystemów o zakresie adekwatności 2 [rad/s] (20 [rad/s]), a następnie poddany kolejnej operacji redukcji rzędu modelu,
- *C* - model rur ekranowych charakteryzujący się najmniejszym błędem aproksymacji uzyskany w wyniku połączenia zredukowanych modeli podsystemów o zakresie aproksymacji 500 [rad/s], a następnie poddany operacji redukcji rzędu modelu w wyniku której ograniczono zakresu aproksymacji do 2 [rad/s] (20 [rad/s]).

Jak można zauważyć w przypadkach *B* oraz *C* uzyskano porównywalne wyniki. Jedynym ograniczeniem jest minimalna wartość błędu aproksymacji, która nie może być mniejsza od błędu modelu uzyskanego w wyniku połączenia modeli podsystemów. Dla obu zakresów adekwatności brak stabilnych rozwiązań uniemożliwia uzyskanie modeli rur ekranowych o maksymalnym względnym błędzie aproksymacji mniejszym niż 0,5% (dla zakresu adekwatności 0-2 [rad/s]) oraz 1,5% (dla 0-20 [rad/s]). Zmniejszenie błędów aproksymacji poni-



żej tej wartości wymaga przyjęcia za model pierwotny modelu charakteryzującego się mniejszym błędem aproksymacji, a taki można uzyskać wyłącznie przez przyjęcie modeli podsystemów o zakresie aproksymacji równej 500 [rad/s] (rys. 5.15).

W dodatku D.2 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe pierwotnego oraz zredukowanych modeli rur ekranowych parownika.

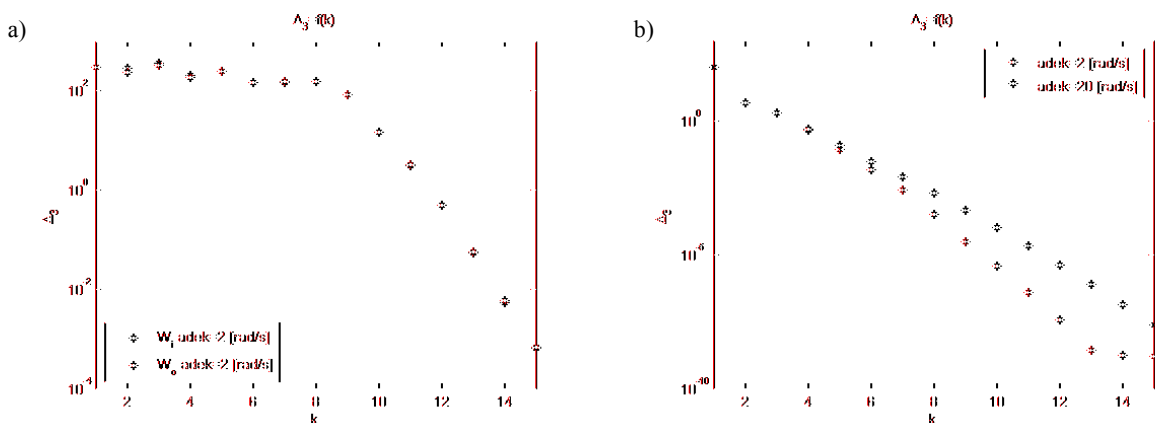


Rys. 5.19. Błąd aproksymacji modelu rur ekranowych w funkcji rzędu modelu zredukowanego (a) 2 [rad/s], (b) 20 [rad/s]

### 5.3.5. Pozostałe podsystemu drugiego poziomu hierarchii

Model mieszalnika, filtru oraz rurociągów łączących przedstawiony w [Sta03] jest rozbudowany ze względu na znaczną długość rurociągów łączących (niemal 50 m) oraz konieczność uwzględnienia przewodnictwa ciepła w grubościennych płaszczach tych elementów. Zakres adekwatności modelu obejmuje częstotliwości  $\omega < [\text{rad/s}]$ . Poszerzenie zakresu adekwatności powyżej tej wartości wymaga już zastosowania metod redukcji, które wprowadzą człon opóźniający [LA87].

Na rys. 5.20 przedstawiono zależność błędu aproksymacji w funkcji rzędu modelu zredukowanego z zastosowaniem wejściowej (pięć filtrów dolnoprzepustowych Butterwortha) oraz wyjściowej (jeden filtr dolnoprzepustowy Butterwortha) funkcji wagowej.



Rys. 5.20. Błąd aproksymacji w funkcji rzędu modelu zredukowanego (a) podsystem mieszalnika, filtru oraz rurociągów łączących (b) separator

Separator jest podsystemem niestabilnym, a jego niestabilność wynika z zależności parametrów pary nasyconej suchej oraz wrzącej wody od ciśnienia. Niestabilność separatora rzutuje na niestabilność parownika jako obiektu sterowania. W obu przypadkach konieczna jest redukcja modeli zawierających jedną dodatnią wartość własną w przestrzeni stanu.

Przedstawione w rozdziale 3 metody redukcji umożliwiają redukcję wyłącznie modeli stabilnych, jednak możliwe jest wprowadzenie podziału modelu na dwa podsystemy: stabilny ( $\lambda_i(\mathbf{G}_-(s)) < 0$ ) oraz antystabilny ( $\lambda_i(\mathbf{G}_+(s)) > 0$ ) [SC87, Chi96, BHV03]:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_-(s) + \mathbf{G}_+(s) \quad (5.3)$$

Redukcji podlega wyłącznie stabilny podsystem, a model zredukowany uzyskuje się łącząc wynik redukcji części stabilnej z wyodrębnioną częścią niestabilną (która nie podlega redukcji).

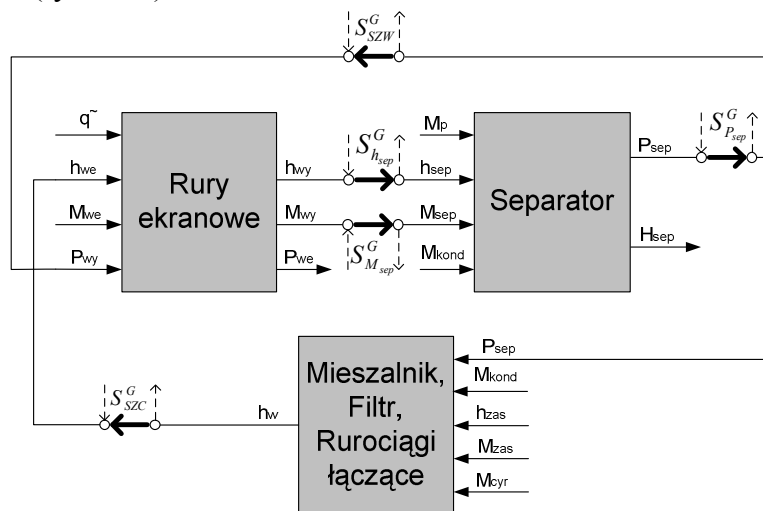
$$\mathbf{G}_r(s) = \mathbf{G}_{r-}(s) + \mathbf{G}_+(s) \quad (5.4)$$

Na rys. 5.20 przedstawiono zależność błędu aproksymacji w funkcji rzędu modelu zredukowanego separatora. W dodatku 0 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe pierwotnego oraz zredukowanych modeli podsystemu mieszalnika, filtru, rurociągów łączących oraz podsystemu separatora.

### 5.4. Parownik kotła energetycznego BP-1150

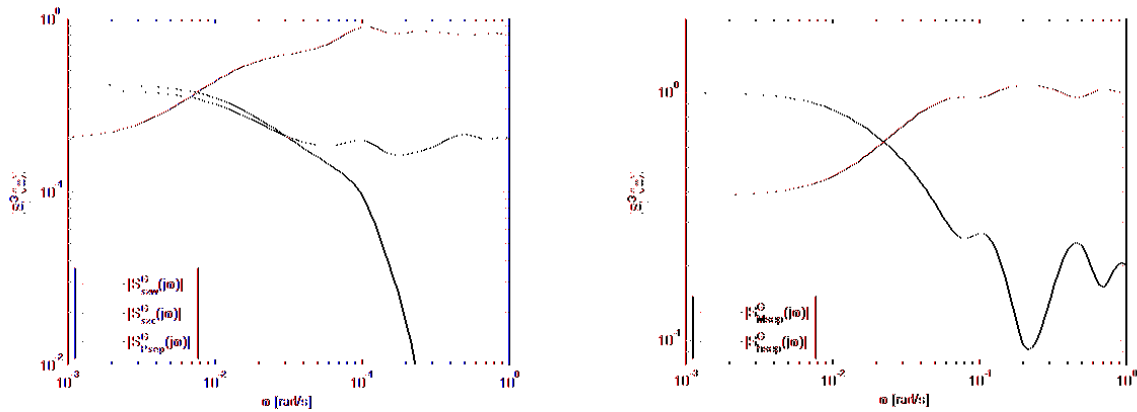
Model parownika kotła BP-1150 zawiera pięć wielkości wejściowych:  $M_p$ ,  $q$ ,  $M_{s1}$ ,  $M_{zas}$ ,  $h_{zas}$  oraz dwie wielkości wyjściowe:  $P_{sep}$  i  $H_{sep}$ . Strukturę powiązań poszczególnych podsystemów w modelu parownika przedstawiono na rys. 2.5. W modelu parownika decydujące znaczenie dla właściwości dynamicznych parownika mają procesy cieplne, dlatego też podczas wyznaczania modeli zredukowanych brano pod uwagę przedział częstotliwości  $\omega < 2$  [rad/s].

W celu zbadania wrażliwości modelu parownika na wariacje powiązań podsystemów wyznaczono następujące funkcje wrażliwości:  $S_{SZW}^G$  – wpływ wariacji układu „wewnętrznego” sprzężenia zwrotnego na transmitancję parownika,  $S_{SZC}^G$  – wpływ wariacji układu „cyrkulacyjnego” sprzężenia zwrotnego na transmitancję parownika,  $S_{P_{sep}}^G$  – wpływ wariacji transmitancji separatora dla wielkości wyjściowej  $P_{sep}$  na transmitancję parownika,  $S_{M_{sep}}^G$  – wpływ wariacji transmitancji rur ekranowych dla wielkości wyjściowej  $M_{sep}$  na transmitancję parownika,  $S_{h_{sep}}^G$  – wpływ wariacji transmitancji rur ekranowych dla wielkości wyjściowej  $h_{sep}$  na transmitancję parownika. Podstawą do wyznaczania poszczególnych funkcji wrażliwości dla parownika jest schemat blokowy przedstawiający powiązania modeli poszczególnych podsystemów parownika (rys. 5.21).



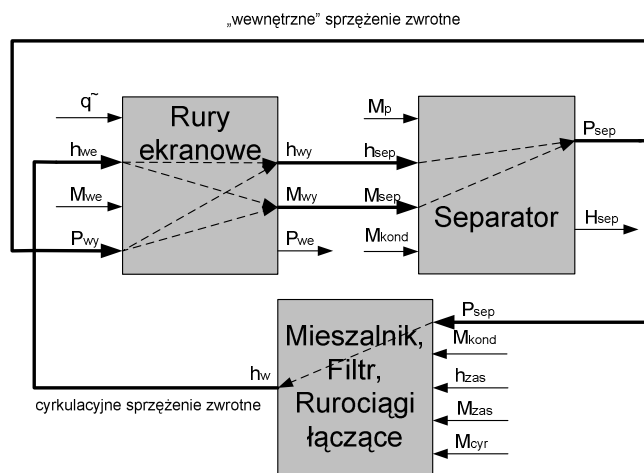
Rys. 5.21. Schemat blokowy wyznaczania funkcji wrażliwości określających zależności transmitancji modelu parownika od wariacji podsystemów

Moduły wszystkich funkcji wrażliwości mają wartości mniejsze od 1 co oznacza, że względna jednostkowa zmiana transmitancji widmowej danego toru powoduje ułamkową zmianę transmitancji widmowej parownika (rys. 5.22). Wynika z tego, że model parownika jest mało wrażliwy na zmiany charakterystyk podsystemów. Mała wrażliwość modelu parownika na wariacje charakterystyk podsystemów wynika przede wszystkim z funkcjonowania sprzężeń zwrotnych.



Rys. 5.22. Moduły funkcji wrażliwości  $S_{szw}^G$ ,  $S_{szc}^G$ ,  $S_{psep}^G$ ,  $S_{msep}^G$ ,  $S_{hsep}^G$

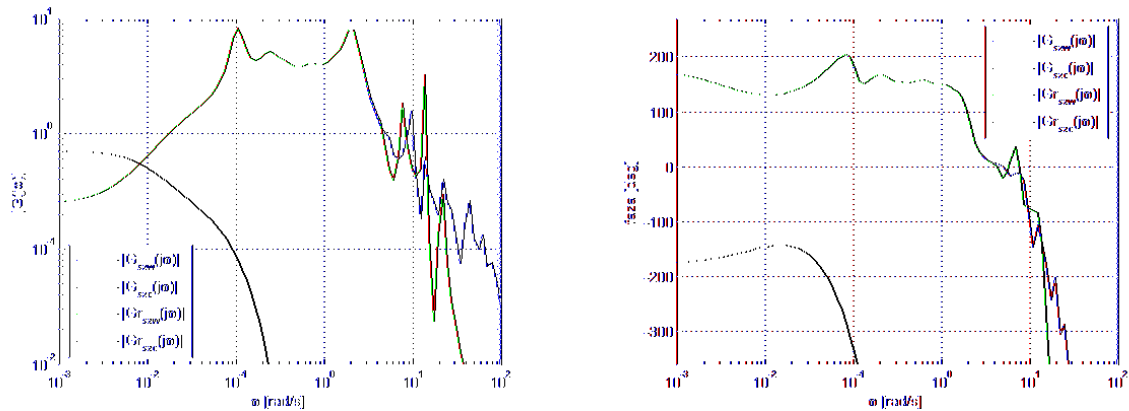
W modelu parownika występują dwa sprzężenia zwrotne, które mają istotny wpływ na właściwości dynamiczne parownika (rys. 5.23). Pierwsze z nich opisuje wpływ zmian ciśnienia w separatorze na zmiany przepływu masowego i entalpii mieszaniny parowo-wodnej na wylocie z rur ekranowych, które z kolei powodują zmiany ciśnienia w separatorze. To ujemne sprzężenie zwrotne ma charakter „wewnętrzny” i wynika ze specyfiki procesu generacji pary. Drugie sprzężenie zwrotne związane jest ze zmianami entalpii wlotowej do rur ekranowych parownika (spowodowanymi zmianami ciśnienia w separatorze). Wynika ono z recyrkulacji czynnika roboczego w parowniku [Sta03] i jest dodatnim sprzężeniem zwrotnym.



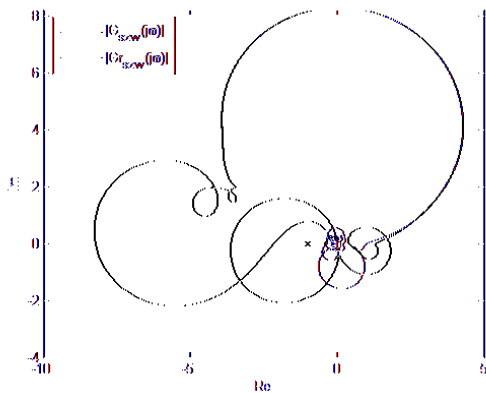
Rys. 5.23. Struktura „wewnętrznego” oraz „cyrkulacyjnego” sprzężenia zwrotnego w parowniku

Model parownika jest niestabilny i macierz stanu zawiera jedną dodatnią wartość własną. Modele zredukowane podsystemów charakteryzują się ograniczonym zakresem adekwatności i dokładnością aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych, co powoduje że w wyniku działania sprzężeń zwrotnych, część ujemnych wartości własnych modelu może zostać przesunięta na prawą półpłaszczyznę zmiennej zespolonej. Jak wynika z charakterystyk częstotliwościowych, przebiegi dynamiczne mające miejsce w rurach ekranowych są w znacznym stopniu tłumione przez separator. W wyniku tego, problem pojawienia się kolejnych dodatnich wartości własnych w zredukowanym hierarchicznym modelu parownika jest znacznie mniejszy niż dla rur ekranowych (rozdział 5.3.2).

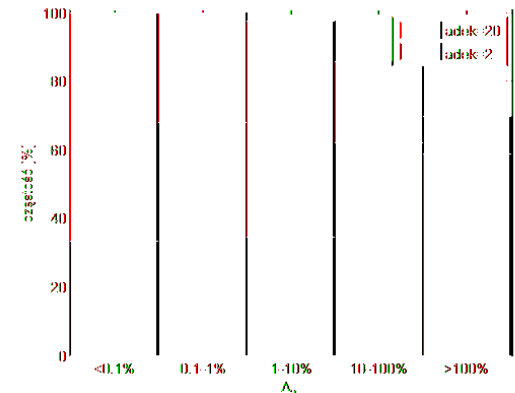
Na rys. 24 wykreślono charakterystyki częstotliwościowe układu otwartego dla „wewnętrzny” oraz „cyrkulacyjny” sprzężenia zwrotnego, dla modeli pierwotnych oraz modeli zredukowanych o zakresie aproksymacji do 2 [rad/s]. Na podstawie przedstawionych charakterystyk można stwierdzić, że dokładność aproksymacji w torze cyrkulacyjnego sprzężenia zwrotnego nie ma wpływu na uzyskanie poprawnego modelu parownika. Problem przesunięcia ujemnych wartości własnych na prawą półpłaszczyznę zmiennej zespolonej wynika głównie z dokładności aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych rur ekranowych parownika w zakresie 2-20 [rad/s] (w wyniku zastosowania modelu zredukowanego o zakresie adekwatności do 2 [rad/s] uzyskano niepoprawny model parownika, który zawiera trzy dodatnie wartości własne co widoczne jest zwłaszcza na charakterystyce amplitudowo-fazowej układu otwartego rys. 5.25).



Rys. 5.24. Charakterystyka amplitudowa oraz fazowa modelu rur ekranowych z rozpiętą pętlą wewnętrznego oraz cyrkulacyjnego sprzężenia zwrotnego



Rys. 5.25. Charakterystyka amplitudowo-fazowa modelu rur ekranowych z rozpiętą pętlą wewnętrznego sprzężenia zwrotnego

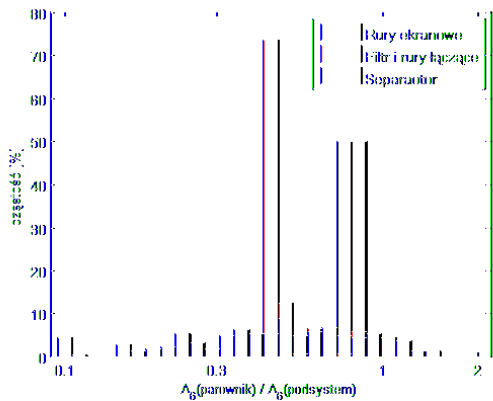


Rys. 5.26. Częstość uzyskiwania poprawnego modelu parownika w wyniku połączenia zredukowanego modelu rur ekranowych oraz pierwotnych modeli pozostałych podsystemów

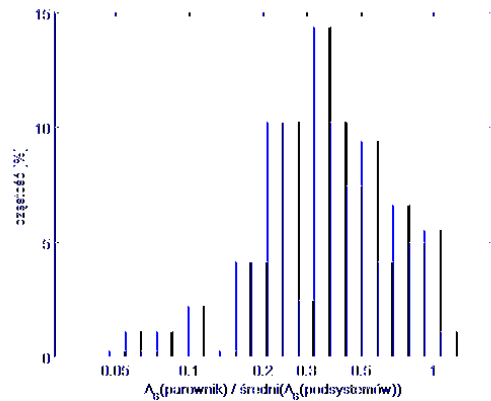
Na rys. 5.26 przedstawiono prawdopodobieństwo uzyskania poprawnego (zawierającego wyłącznie jedną dodatnią wartość własną) modelu parownika w wyniku połączenia zredukowanych modeli rur ekranowych (o zakresach adekwatności 2 oraz 20 [rad/s] oraz różnych błędach aproksymacji) oraz pierwotnych modeli pozostałych podsystemów. Jak można zaobserwować, przyjęcie zakresu adekwatności na poziomie 20 [rad/s] w praktyce gwarantuje uzyskanie poprawnego modelu parownika.

Identycznie jak dla modelu rur ekranowych (drugi poziom hierarchii) przeanalizowano wpływ błędów podsystemów na błąd modelu parownika. Na rys. 5.27 przedstawiono stosunek błędu aproksymacji parownika do błędu podsystemu (modele parownika uzyskano łącząc jeden zredukowany oraz dwa pierwotne modele podsystemów). Największy wpływ na błąd

aproxymacji parownika ma wartość błędu separatora. Ze względu występujące sprzężenia zwrotne błędy approxymacji kompensują się i wartość mediany stosunku średniokwadratowego względnego błędu parownika do błędów podsystemów są mniejsze od jedności.



Rys. 5.27. Histogramy stosunku błędu approxymacji modelu parownika do wartości błędu approxymacji podsystemu niższego poziomu



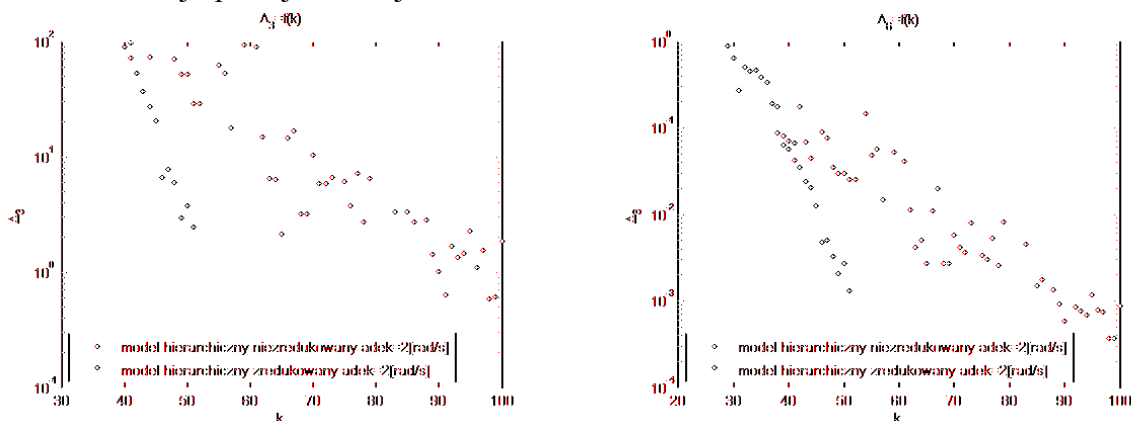
Rys. 5.28. Histogramy stosunku błędu approxymacji modelu parownika do średniej wartości błędu podsystemów niższego poziomu

Na rys. 5.28 przedstawiono histogram stosunku błędu modelu rur ekranowych uzyskanego w wyniku połączenia zredukowanych modeli podsystemów o porównywalnych poziomach błędu approxymacji (różnica błędów approxymacji podsystemów nie przekraczała  $\pm 20\%$ ). W przeciwieństwie do zredukowanego modelu rur ekranowych, statystycznie błąd approxymacji zredukowanego hierarchicznego modelu parownika jest mniejszy niż średni błąd modeli podsystemów. Wynika to z małej wrażliwości modelu parownika na wariacje modeli podsystemów (rys. 5.22) i jest związane z silnie działającym dla niskich częstotliwości wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym.

### 5.4.1. Redukcja hierarchicznego modelu parownika

Hierarchiczny model parownika uzyskany w wyniku połączenia zredukowanych modeli podsystemów charakteryzuje się znaczną liczbą zmiennych stanu, które opisują właściwości dynamiczne obiektu istotne na drugim poziomie hierarchii. Identycznie jak dla modelu rur ekranowych, rząd otrzymanego modelu parownika można w znaczny sposób ograniczyć w wyniku kolejnej operacji redukcji.

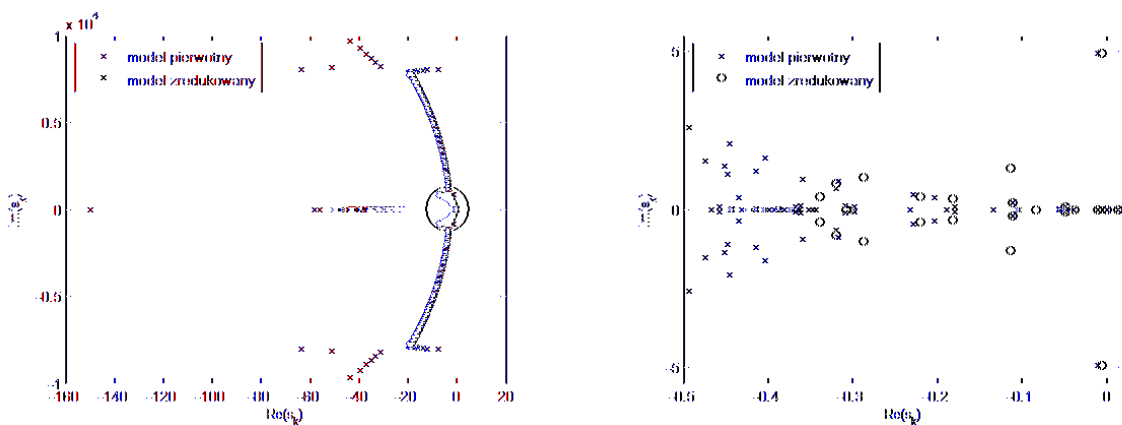
Na rys. 5.29 przedstawiono wykres maksymalnego oraz średniokwadratowego względnego błędu approxymacji (dla zakresu adekwatności 0-2 [rad/s]) w funkcji rzędu modelu zredukowanego, dla modeli uzyskanych w wyniku połączenia podsystemów oraz modeli poddanej dodatkowej operacji redukcji.



Rys. 5.29. Błąd approxymacji modelu parownika w funkcji rzędu modelu zredukowanego

W dodatku 0 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe pierwotnego oraz zredukowanych modeli parownika o zakresie adekwatności 2 [rad/s].

W modelu parownika (trzeci poziom hierarchii) decydujące znaczenie mają procesy ciepłne, natomiast praktycznie nie mają znaczenia procesy dynamiczne związane z transportem czynnika roboczego wzdłuż rur ekranowych. Jak wynika z charakterystyk częstotliwościowych, przebiegi dynamiczne mające miejsce w rurach ekranowych, są w znacznym stopniu tłumione przez separator charakteryzujący się dużą pojemnością cieplną. Decydujący wpływ na dynamikę parownika ma niestabilność separatora, co powoduje że dodatnia wartość własna występująca w modelu separatora, znajduje się także w modelu parownika. Model pierwotny zawiera jednak znaczną liczbę wartości własnych, które odpowiadają za właściwości dynamiczne modelu dla procesów związanych z transportem czynnika roboczego, jak również z przemieszczaniem się zmian ciśnienia (rys. 5.30a). W modelach zredukowanych (np. rzędu  $k=25$ ) usuwane są mody odpowiedzialne za właściwości dynamiczne dla wysokich częstotliwości oraz pozostawiane są wartości własne, które odpowiadają za procesy ciepłne (rys. 5.30b).



Rys. 5.30. Wartości własne modelu parownika

## 5.5. Projektowanie układu sterowania parownika na podstawie modeli zredukowanych

W pracach Andersona [And93, OA01] przedstawiono dwie koncepcje projektowania układów sterowania:

- projektowanie regulatora na podstawie zredukowanego modelu obiektu [HBN06],
- projektowanie regulatora na podstawie pierwotnego modelu obiektu, a następnie redukcja regulatora [KCS02, Gil06].

Na podstawie praktycznych doświadczeń uznano za bardziej korzystną drugą z możliwości, ze względu na utratę informacji o właściwościach dynamicznych obiektu (zwłaszcza dla zakresów częstotliwości, które odpowiedzialne są za przebieg charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego dla sprzężenia zwrotnego w pobliżu punktu  $-1+j0$ ) [And93]. Jeżeli jednak zakres adekwatności modelu zredukowanego jest dobrany odpowiednio, to może być on zastosowany do projektowania układów regulacji.

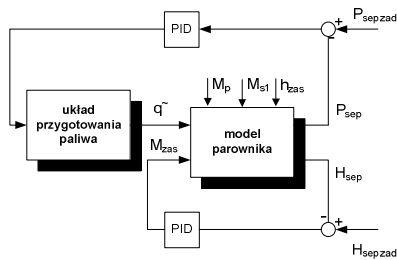
W wyniku badań wpływu sprzężeń zwrotnych na stabilność zredukowanego modelu hierarchicznego, zaproponowano znaczne poszerzenie zakresu aproksymacji modeli zredukowanych niższych poziomów hierarchii. Uzyskane modele na wyższych poziomach hierarchii charakteryzują się zatem dobrą aproksymacją właściwości dynamicznych zarówno w zakresie adekwatności modelu, jak również dla zakresów częstotliwości, które odpowiedzialne są za przebieg charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego dla sprzężenia zwrotnego

w pobliżu punktu  $-1+j0$ . Oznacza to, że redukcja modelu dla celów projektowania układów sterownia musi zostać przeprowadzona w sposób właściwy i szczególnie uwzględniający wpływ sprzężeń zwrotnych na poszczególnych poziomach hierarchii.

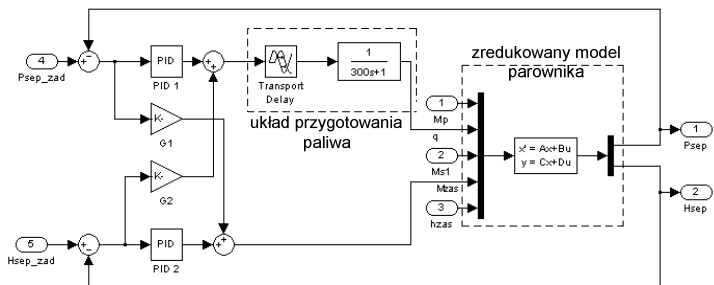
W parowniku kotła BP-1150 występują dwie wielkości sterujące  $q$ ,  $M_{zas}$  oraz szereg wielkości zakłócających, mających istotny wpływ na zmiany wielkości wyjściowych: ciśnienia  $P_{sep}$  oraz poziomu wody  $H_{sep}$  w separatorze. Ciśnienie oraz poziom wody w separatorze są miarami aktualnego stanu bilansu energii cieplnej i masy w kotle. Ich zmiany świadczą o aktualnym braku równowagi w energii cieplnej dopływającej do parownika i energii cieplnej strugi pary wypływającej z separatora oraz masy wody dopływającej do parownika i masy pary wypływającej z separatora. Układ regulacji ciśnienia w kotle zapewnia bilansowanie energii cieplnej w parowniku poprzez oddziaływanie na ilość paliwa dostarczanego do kotła, natomiast układ regulacji poziomu wody w separatorze zapewnia bilansowanie masy poprzez oddziaływanie na przepływ wody dopływającej do parownika.

W układzie regulacji ciśnienia w kotle BP-1150 występuje bardzo niekorzystna sytuacja, związana z bardzo dużym opóźnieniem oraz stałą czasową układu przygotowania paliwa (stała czasowa 300 [s], opóźnienie transportowe 50 [s]) [SM99, Sta03]. Dodatkowo, warunki pracy układu regulacji ciśnienia pogarsza fakt, że obiekt regulacji jest niestabilny. Jednocześnie na parownik oddziałuje silne zakłócenie w postaci zmian ilości pary pobieranej z separatora  $M_p$ , którego widmo sięga częstotliwości  $\omega_{max} = 0,01$  [rad/s] [Sta03]. Im większe jest obciążenie kotła, tym trudniejsze zadanie stoi przed układem sterowania ciśnienia w kotle, gdyż niespełnienie bilansu energii i masy w separatorze powoduje bardzo szybkie zmiany ciśnienia [Sta03, SRT04].

Na rys. 5.31 przedstawiono uproszczony schemat blokowy układu regulacji ciśnienia oraz poziomu wody w separatorze. Na podstawie zredukowanych modeli parownika (model rzędu  $k=2$  oraz  $k=25$ ) zaprojektowano układy regulacji, minimalizując kryterium całki z kwadratu błędu. W celu poprawienia właściwości układu sterowania, wprowadzono bloki odprzegające  $G_1$  oraz  $G_2$  (rys. 5.32).



Rys. 5.31. Schemat blokowy układu regulacji kotła BP-1150



Rys. 5.32. Schemat blokowy służący do projektowania układu regulacji z zastosowaniem zredukowanego modelu parownika

Do optymalizacji parametrów regulatorów wykorzystano algorytm ewolucyjny, w wyniku czego uzyskano znaczną liczbę nastaw regulatorów, będących wynikami niezależnych uruchomień AE dla różnych populacji startowych [Lie01]. Zaprojektowane układy regulacji poddano weryfikacji. Polegała ona na zastosowaniu regulatorów wyznaczonych na podstawie modelu zredukowanego w układach regulacji z wykorzystaniem pierwotnego modelu parownika (wysokiego rzędu).

Parametry regulatorów uzyskane dla modelu zredukowanego drugiego rzędu w zastosowaniu w układzie regulacji z modelem pierwotnym dają w zdecydowanej większości przypadków niestabilne układy regulacji, natomiast parametry regulatorów uzyskane dla modelu parownika 25-tego rzędu dają poprawne wyniki. W tab. 5.3. zestawiono parametry regulatoro-



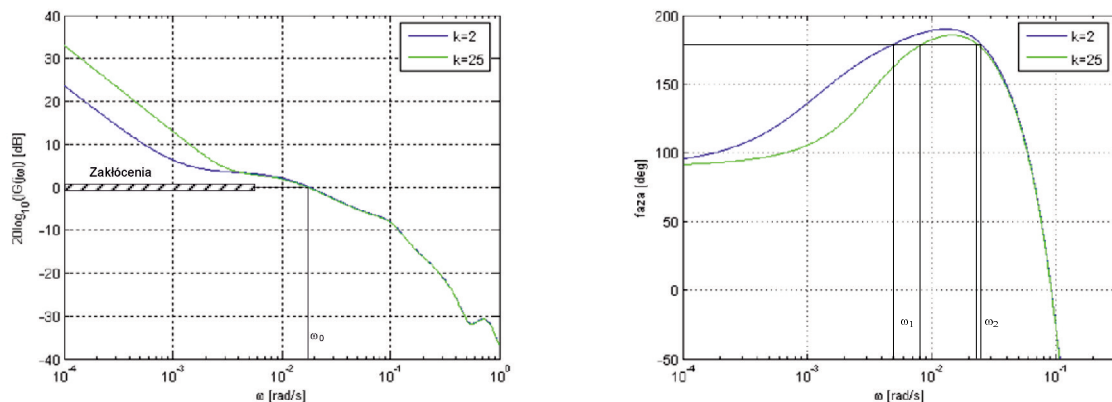
rów charakteryzujące się najmniejszą całką kwadratu błędu w układach regulacji z modelami zredukowanymi.

Tab. 5.3. Parametry układów regulacji

rzęd modelu parownika	$k = 25$	$k = 2$	$k = 2$ stabilny układ regulacji dla modelu wysokiego rzędu
PID <sub>1</sub>	K= 1,374*10 <sup>-2</sup> I= 2,628*10 <sup>-5</sup> D= 2,696	K= 1,303*10 <sup>-2</sup> I= 3,001*10 <sup>-5</sup> D= 3,305	K= 1,110*10 <sup>-2</sup> I= 8,960*10 <sup>-6</sup> D= 2,724
PID <sub>2</sub>	K= 1,436 I= 2,689*10 <sup>-2</sup> D= 133,5	K= 6,917 I= 0,1458 D= 18,62	K= 1,001 I= 1,504*10 <sup>-2</sup> D= 27,95
G <sub>1</sub>	K= 3.849*10 <sup>-2</sup>	K= 6,544*10 <sup>-2</sup>	K= 1,700*10 <sup>-2</sup>
G <sub>2</sub>	K= 3.010*10 <sup>-3</sup>	K= 3.134*10 <sup>-3</sup>	K= 2,599*10 <sup>-3</sup>

Regulatory opracowane na podstawie modeli zredukowanych rzędu 25 zapewniają stabilność układu regulacji oraz dokładność regulacji dla bardzo niskich częstotliwości (wzmocnienie w układzie otwartym dla  $\omega = 10^{-4}$  [rad/s] wynosi 33dB). Stabilny układ regulacji, opracowany na podstawie zredukowanych modeli parownika rzędu drugiego, charakteryzuje się znacznie mniejszym tłumieniem zakłóceń dla niskich częstotliwości, w porównaniu do układu opracowanego na podstawie modelu zredukowanego rzędu 25 (rys. 5.33).

Regulator ciśnienia realizujący algorytm PID zapewnia stabilność układu regulacji (mimo niestabilności obiektu) oraz dużą dokładność regulacji dla bardzo niskich częstotliwości. Jednak dla częstotliwości z przedziału  $\omega = 5 \cdot 10^{-4} \div 10^{-2}$  [rad/s] wzmocnienie w układzie otwartym jest zbyt małe dla zapewnienia odpowiedniego tłumienia zakłóceń (rys. 5.33). Niestety, zwiększenie wzmocnienia w układzie otwartym nie jest w tym układzie regulacji możliwe, ze względu na spełnienie warunku stabilności oraz zapewnienie minimalnego zapasu stabilności.



Rys. 5.33. Charakterystyki częstotliwościowe układu otwartego dla układu regulacji ciśnienia

## 5.6. Wnioski

1. Spośród wszystkich przedstawionych metod redukcji najlepsze rezultaty uzyskano w wyniku zastosowania metody **FW**. Ze względu na mniejszą liczbę wyjść modelu w stosunku do liczby wejść, dla modeli podsystemów parownika zastosowano wagę wyjściową w postaci filtrów dolnoprzepustowych.



2. Metoda **RK** posiada najmniejszą złożoność obliczeniową spośród zastosowanych algorytmów. Nie gwarantuje ona jednak zachowania stabilności modelu zredukowanego. W związku z tym bardzo trudne okazało się uzyskanie tą metodą modeli o szerokim zakresie adekwatności oraz bardzo dużej dokładności aproksymacji.
3. Dla modeli podsystemów parownika błąd aproksymacji maleje eksponencjalnie wraz ze wzrostem rzędu modelu zredukowanego. Na podstawie kilku wyników redukcji możliwe jest określenie przybliżonego rzędu modelu zredukowanego o zadanym poziomie błędu aproksymacji. Umożliwia to szybkie i efektywne wyznaczenie optymalnego modelu zredukowanego o jak najniższym rzędzie, który spełnia założone kryteria dokładności aproksymacji.
4. Trudności związane z redukcją modeli o bardzo dużej złożoności można pokonać poprzez realizację koncepcji hierarchicznego modelu zredukowanego, w której modele na wyższych poziomach hierarchii budowane są na podstawie zredukowanych modeli podsystemów poziomu niższego. Uzyskany model zawiera nadal znaczną liczbę zmiennych stanu opisujących właściwości dynamiczne obiektu, które nie są istotne na danym poziomie hierarchii. Złożoność modelu można w znaczny sposób ograniczyć w wyniku kolejnej operacji redukcji.
5. Moduły wszystkich funkcji wrażliwości modelu parownika oraz rur ekranowych parownika mają wartości mniejsze od 1 co oznacza, że względna jednostkowa zmiana transmitancji widmowej danego toru powoduje ułamkową zmianę transmitancji widmowej modelu. Wynika z tego, że modele są mało wrażliwe na zmiany charakterystyk podsystemów. Mała wrażliwość modeli na wariacje charakterystyk podsystemów wynikają przede wszystkim z funkcjonowania sprzężeń zwrotnych.
6. Model rur ekranowych parownika objęty jest bardzo silnie działającymi sprzężeniami zwrotnymi dla wysokich częstotliwości, natomiast model parownika objęty jest silnie działającym sprzężeniem „wewnętrzny” w zakresie częstotliwości 0,1-20 [rad/s]. Zagwarantowanie stabilności modelu rur ekranowanych wymaga poprawnej aproksymacji charakterystyk podsystemów w zakresie do około 500 [rad/s]. Uzyskanie poprawnego modelu parownika wymaga zapewnienia dobrej aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych modelu rur ekranowych parownika w zakresie do 20 [rad/s]. Szeroki zakres aproksymacji modeli podsystemów pociąga z sobą ich wysoki rząd. Złożoność modelu na wyższym poziomie hierarchii można jednak w znaczny sposób ograniczyć w wyniku kolejnej operacji redukcji.
7. Pożądane właściwości hierarchicznego modelu rur ekranowych parownika (np.: założony zakres oraz błędy aproksymacji) oddziałują na określenie wymagań stawianych modelom zredukowanym poziomu bezpośrednio niższego. Konieczny jest zatem algorytm iteracyjny, w którym ocena jakości modeli na wyższym poziomie hierarchii wpływa na kryteria doboru zredukowanych modeli podsystemów tworzących wraz z określoną topologią model na wyższym poziomie hierarchii.
8. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń, dla modeli podsystemów parownika kotła energetycznego BP-1150 można stwierdzić, że statystycznie błąd aproksymacji każdego z podsystemów ma porównywalny wpływ na błąd modelu na wyższym poziomie hierarchii (każda ze stref ma porównywalny wpływ na błąd modelu rur ekranowych parownika, a także rury ekranowe, separator oraz podsystem filtru wraz z rurami łączącymi ma porównywalny wpływ na błąd modelu parownika).
9. Zredukowany hierarchiczny model rur ekranowych najczęściej charakteryzuje się większym błędem aproksymacji niż średni błąd modeli jego podsystemów. Analiza histogramów umożliwia jednak stwierdzenie, że odpowiedni dobór zredukowanych modeli podsystemów umożliwia kompensowanie się błędów aproksymacji zastosowanych modeli niższego poziomu hierarchii. W wyniku tego możliwe jest uzyskanie

modelu rur ekranowych parownika o mniejszym błędzie aproksymacji niż użyte modele podsystemów.

10. W przeciwieństwie do zredukowanego modelu rur ekranowych, średni błąd aproksymacji zredukowanego hierarchicznego modelu parownika jest mniejszy niż średni błąd modeli podsystemów. Wynika to z małej wrażliwości modelu parownika na wariacje modeli podsystemów i jest związane z silnie działającym dla niskich częstotliwości „wewnętrznym” sprzężeniem zwrotnym.
11. Redukcja modelu parownika uzyskanego w wyniku połączenia pierwotnych, jak również zredukowanych modeli podsystemów umożliwia otrzymanie porównywalnych wyników. Zastosowanie zredukowanych modeli podsystemów umożliwia natomiast znaczne ograniczenie liczby zmiennych stanu pierwotnego modelu parownika (co przekłada się na czas wyznaczenia modelu zredukowanego).
12. Układ regulacji opracowany na podstawie modeli zredukowanych rzędu 25 zapewnia stabilność układu regulacji oraz dokładność regulacji dla bardzo niskich częstotliwości (wzmocnienie w układzie otwartym dla  $\omega = 10^{-4}$  [rad/s] wynosi 33dB). Zmniejszenie dokładności aproksymacji modelu parownika (model zredukowany drugiego rzędu) powodowało jednak znaczne pogorszenie właściwości układu regulacji, w porównaniu do układu opracowanego na podstawie modelu zredukowanego rzędu 25.
13. Zaprojektowany na podstawie modeli zredukowanych parownika system regulacji ciśnienia zapewnia stabilność układu regulacji (mimo niestabilności obiektu) oraz dużą dokładność regulacji dla bardzo niskich częstotliwości. Jednak dla częstotliwości z przedziału  $\omega = 5 * 10^{-4} \div 10^{-2}$  [rad/s] wzmocnienie w układzie otwartym jest zbyt małe dla zapewnienia odpowiedniego tłumienia zakłóceń. Analiza uzyskanych wyników wskazuje, że systemy sterownia są niedoskonałe i niewątpliwie istnieją możliwości ich znaczącej poprawy.

## 6. PODSUMOWANIE

---

Dla celów sterowania systemami niezbędna jest znajomość ich modeli matematycznych, które mogą być tworzone poprzez modelowanie zjawisk zachodzących w obiekcie oraz na podstawie identyfikacji. Złożoność tworzonych modeli stale rośnie, co w znacznym stopniu utrudnia bezpośrednie wykorzystanie metod i środków programowych analizy obiektów oraz syntezy algorytmów sterowania.

Łatwość uzyskiwania złożonych modeli opisujących właściwości obiektów sterowania pociąga za sobą konieczność zastosowania hierarchicznej struktury oraz dekompozycję na szereg prostszych do zamodelowania podsystemów. Na wszystkich wyższych poziomach model hierarchiczny zawiera podsystemy należące do poziomu niższego wraz z określoną topologią powiązań między nimi. Ze względu na wysoki rząd modelu, analiza właściwości modelu na poszczególnych poziomach hierarchii jest trudna i wyciągnięcie wniosków o właściwościach obiektu jest praktycznie niemożliwe.

Wielopoziomowa konstrukcja modelu daje możliwość analizy przez zastosowanie procedury agregacji. Jednym z zasadniczych jej środków jest redukcja modelu na poszczególnych poziomach hierarchicznej struktury. Podejście takie umożliwia stworzenie *zredukowanego modelu hierarchicznego*, zawierającego zbiór modeli na każdym z poziomów hierarchii charakteryzujących się różnymi zakresami adekwatności oraz dokładnością aproksymacji właściwości obiektu sterowania.

W rozdziale drugim przedstawiono strukturę modelu parownika, która zawiera cztery poziomy hierarchii:

- Poziom 0 - opis równaniami różniczkowymi oraz algebraicznymi elementów skończonych tworzących modele o parametrach skupionych poszczególnych stref rur ekranowych (sekcje strefy dogrzewu oraz odparowania).
- Poziom 1 - strefy rur ekranowych zdefiniowane przez rodzaj przepływu czynnika roboczego - strefa dogrzewu (przepływ jednofazowy), trzy części strefy odparowania (przepływ dwufazowy): część dolna z dużym obciążeniem cieplnym w której wytwarzana jest większość pary, część pośrednia z zerowym obciążeniem cieplnym oraz część górna strefy odparowania z małym obciążeniem cieplnym i większą średnicą rur ekranowych, która zapewnia wysoką zdolność akumulacyjną kotła.
- Poziom 2 - podsystemy parownika do których zalicza się: rury ekranowe, separator, mieszalnik, filtr, rurociągi łączące, pompa cyrkulacyjna.
- Poziom 3 - parownik przepływowy.

Każdy z podsystemów na poszczególnych poziomach hierarchii modelu (z wyłączeniem poziomu zerowego) jest wielowejściowym oraz wielowyjściowym układem o ukierunkowanym działaniu

W pracy analizowane są właściwości dynamiczne parownika w warunkach normalnej eksploatacji. Zmiany wartości poszczególnych wielkości są niewielkie w stosunku do wartości w stanie ustalonym, ze względu na funkcjonujące układy regulacji. Pozwala to na analizę właściwości dynamicznych parownika przepływowego na podstawie modeli zlinearyzowanych, słusznych dla niewielkich odchyłeń poszczególnych wielkości wokół wartości w stanie ustalonym. Istotnym rozwinięciem przedstawionych w pracy wyników, może być przeniesienie przedstawionej metodologii na systemy nieliniowe. Rozwiązanie to można zrealizować poprzez połączenie statycznego elementu nieliniowego oraz dynamicznego elementu liniowego lub konstrukcję modelu nieliniowego, jako zespołu modeli zlinearyzowanych wokół tra-

jektorii  $\bar{x}(t)$  i sterowania  $\bar{u}(t)$ . Równania zlinearyzowane są wtedy słuszne w dostatecznie bliskim otoczeniu punktów linearyzacji [RW03].

Model rur ekranowych parownika kotła BP-1150 (uzyskany na podstawie dyskretyzacji i opisu poszczególnych elementów skończonych) jest opisany zestawem równań różniczkowych stanowiących bilans masy, energii oraz pędu wody i mieszaniny parowo-wodnej, a także równaniem przewodnictwa cieplnego wzdłuż promienia ścianki rury oraz płetwy łączącej. W celu zapewnienia adekwatności modelu o parametrach skupionych do 20 [rad/s] niezbędne jest zastosowanie znacznej liczby elementów skończonych, a także zastosowanie wysokiego rzędu modelu ścianki rury. W wyniku tego model rur ekranowych parownika charakteryzuje się znaczną złożonością i jego podsystemy zawierają znaczną liczbę zmiennych stanu (strefa dogrzewu – 2250, strefa odparowania I – 750, strefa odparowania II – 1125, strefa odparowania III – 3000).

W wyniku tak dużej złożoności, podstawowym staje się problem wyboru odpowiednich metod redukcji tak, aby przy maksymalnym zachowaniu właściwości dynamicznych (istotnych na danym poziomie hierarchii) ograniczyć złożoność modelu.

Ze względu na znaczną złożoność modeli matematycznych ogromne znaczenie ma redukcja modeli, która zapewnia wymagany zakres adekwatności oraz dokładność aproksymacji właściwości obiektu. Operacja ta nie jest jednoznaczna i w ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat powstała znaczna liczba metod redukcji. Większość współcześnie wykorzystywanych metod redukcji modeli liniowych opiera się na metodach bazujących na dekompozycji SVD lub metodach momentów. W pracy przedstawiono powszechnie wykorzystywane algorytmy oraz zaproponowano ich modyfikacje. Opracowano algorytm **EIG-BFSR** charakteryzujący się najlepszymi (spośród przedstawionych algorytmów) właściwościami numerycznymi, zarówno pod względem uwarunkowania, jak również błędów numerycznych w macierzach transformacji. Zastosowanie tego algorytmu w metodzie **FD** (zamiast algorytmu Wang'a) umożliwiło również (dla wybranych zadań) znaczne zmniejszenie błędu aproksymacji modeli zredukowanych. Niezbędne w ramach dalszych prac jest przeanalizowanie kolejnych algorytmów redukcji tj.: Proper Orthogonal Decomposition, metody SVD-Kryłowa i innych.

Wiele z opracowanych metod umożliwia znaczne ograniczenie błędów aproksymacji dla zadanego przedziału częstotliwości poprzez wybór odpowiednich wartości parametrów redukcji (np.: funkcji wagowych dla metod **FW** lub punktów interpolacji dla metod Kryłowa). Parametry redukcji można określić na podstawie charakterystyk amplitudowych modelu matematycznego oraz jego zakresu adekwatności. Nie jest to zadanie proste, gdyż modele mogą charakteryzować się znacznymi różnicami wartości modułów transmitancji dla poszczególnych torów oraz znaczną zmiennością modułu transmitancji w zakresie adekwatności modelu. Z tego względu, konieczne okazało się wprowadzenie szeregu miar błędu aproksymacji, które umożliwiają ocenę jakości aproksymacji obiektu przez model zredukowany. Dla modeli podsystemów kotła energetycznego za najbardziej użyteczne kryterium oceny, uznano wartość średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji, jaką charakteryzuje się model zredukowany.

Występowanie wielu minimów lokalnych na charakterystykach błędu aproksymacji w funkcji parametrów poszczególnych metod redukcji oznacza, że algorytmy bazujące lokalnymi właściwościami funkcji są mało przydatne do wyznaczenia minimum błędu aproksymacji w funkcji parametrów redukcji. Ze względu na uniwersalność oraz łatwość praktycznego zastosowania w celu doboru parametrów redukcji zastosowano algorytmy ewolucyjne.

Podczas rozwiązywania praktycznych zadań optymalizacji powstaje problemem dobrania algorytmu, który prowadziłby do rozwiązania zadania jak najmniejszym kosztem obliczeń. Stochastyczny charakter AE wymaga wykonania wielu niezależnych przebiegów algorytmu i statystycznego opracowania otrzymanych wyników. Związane jest to ze znacznym nakładem obliczeniowym wynikającym z wyznaczenia funkcji celu, który rośnie ze zwiększeniem

rzędu modelu pierwotnego. Z tego względu w rozdziale czwartym porównano poszczególne strategie ewolucyjne wyłącznie dla redukcji metodą **FW** z wagą wyjściową, dla uproszczonego modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika (model zawiera 300 zmiennych stanu).

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów można stwierdzić dużą wrażliwość algorytmu  $1 + \lambda$  na zmianę początkowego zasięgu mutacji. Przyjęcie zbyt małej wartości zasięgu mutacji powoduje lokalne działanie algorytmu, a więc również małą odporność na ekstrema lokalne. Duże wartości początkowego zasięgu mutacji powodują, że algorytm w początkowej fazie przypomina działaniem algorytm błędzenia przypadkowego.

Dla wielopunktowych strategii ewolucyjnych o niewielkiej liczbie pokoleń, podstawowego znaczenia nabiera wybór licznej i zróżnicowanej populacji startowej. Zwiększa to prawdopodobieństwo wygenerowania punktów z obszaru przyciągania ekstremum globalnego oraz umożliwia krzyżowanie o dużym zasięgu. Na skutek operacji genetycznych następuje zanik różnorodności populacji, w wyniku której zmniejsza się zdolność eksploracji rozwiązań. Wprowadzenie algorytmu rozpraszania populacji (poprzez usunięcie podobnych osobników) umożliwia w pewnym stopniu zahamowanie tego procesu, co wpływa na znaczne poprawienie uzyskiwanych wyników redukcji. Duże znaczenie na uzyskiwane wyniki ma również sposób dobierania populacji startowej algorytmu ewolucyjnego. Nierównomierny posiew wartości genów startowych (uwzględniający obszary prawdopodobnego występowania zadowalających rozwiązań) umożliwia znaczne poprawienie wartości średniej uzyskiwanych wyników redukcji. Nie powinien on jednak wpływać na zmniejszenie różnorodności populacji startowej, która wpływa na zdolności eksploracyjne algorytmu ewolucyjnego.

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów można stwierdzić przewagę strategii wielopunktowych w początkowej fazie algorytmu, gdy operacja krzyżowania ma zasięg globalny. Adaptacja zasięgu mutacji regułą 1/5 sukcesów (algorytmy jednopunktowe) umożliwia natomiast lepszą eksploatację w obszarze przyciągania znalezionej ekstremum. W celu zwiększenia efektywności przeszukiwania dziedziny rozwiązań konieczne jest połączenie zalet obu strategii. Zaproponowany w pracy algorytm charakteryzuje się zmienną liczebnością populacji, która umożliwiła uzyskanie najbardziej korzystnego stosunku jakości wyznaczonych rozwiązań do kosztu obliczeń.

Redukcja bardzo złożonych modeli stanowi poważny problem nie tylko ze względu na właściwości numeryczne algorytmów redukcji, ale również z powodu czasu trwania algorytmu ewolucyjnego. Dla modeli dynamicznych o bardzo dużej złożoności zaproponowano algorytm dwustopniowy, który wyznacza parametry metod redukcji na podstawie uproszczonego modelu pierwotnego. Dobrze dobrany wstępny model pierwotny umożliwia uzyskanie identycznych wyników redukcji jak przy zastosowaniu modelu pierwotnego, przy jednoczesnym znacznym ograniczeniu czasu trwania algorytmu ewolucyjnego. Algorytm hybrydowy, będący połączeniem algorytmu dwustopniowego oraz tradycyjnego, zapewnia natomiast uzyskanie poprawnych wyników redukcji nawet w przypadku, gdy algorytm dwustopniowy nie daje poprawnych wyników (ze względu na duże błędy aproksymacji wstępnego modelu pierwotnego).

Przedstawione w rozdziale czwartym połączenie metod redukcji z algorytmami ewolucyjnymi umożliwia efektywne wyznaczenie modeli zredukowanych podsystemów parownika kotła energetycznego BP-1150 dla wybranych wartości błędów aproksymacji oraz zakresów adekwatności na poszczególnych poziomach hierarchii. Najlepsze rezultaty redukcji uzyskano w wyniku zastosowania metody **FW**, a ze względu na mniejszą liczbę koniecznych do wyznaczenia parametrów redukcji (dla wszystkich modeli podsystemów parownika liczba wyjść modelu jest mniejsza od liczby jego wejść) za najbardziej właściwe uznano wprowadzenie wagi wyjściowej w postaci filtrów dolnoprzepustowych.

Modele rur ekranowych oraz parownika objęte są silne działającymi sprzężeniami zwrotnymi dla częstotliwości wyższych od zakresu adekwatności. Wyznaczenie poprawnych mode-

li na wyższym poziomie hierarchii wymaga zatem poszerzenia zakresu aproksymacji modeli podsystemów. Innym sposobem jest wygenerowanie odpowiednio dużej liczby modeli podsystemów, tak aby możliwe było wybranie spośród nich takich, które w wyniku wzajemnego połączenia dadzą poprawny model na wyższym poziomie hierarchii, charakteryzujący się założonym zakresem adekwatności oraz poziomem błędu aproksymacji. Tworzone jest w ten sposób swoiste sprzężenie zwrotne, w którym ocena jakości modeli na wyższym poziomie hierarchii wpływa na kryteria doboru zredukowanych modeli podsystemów.

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów numerycznych dla modeli podsystemów parownika kotła energetycznego BP-1150 można stwierdzić, że statystycznie błąd aproksymacji każdego z podsystemów ma porównywalny wpływ na błąd modelu na wyższym poziomie hierarchii (każda ze stref ma porównywalny wpływ na błąd modelu rur ekranowych parownika, a także rury ekranowe, separator oraz podsystem filtru wraz z rurami łączącymi ma porównywalny wpływ na błąd modelu parownika). Odpowiedni dobór zredukowanych modeli podsystemów umożliwia natomiast kompensowanie się błędów aproksymacji zastosowanych modeli niższego poziomu hierarchii. W wyniku tego możliwe jest uzyskanie modeli na wyższych poziomach hierarchii charakteryzujących się błędem aproksymacji mniejszym od średniego błędu zastosowanych modeli podsystemów.

Zastosowanie modeli zredukowanych dobrze aproksymujących właściwości obiektu w szerokim zakresie częstotliwości (np.: zredukowany model rur ekranowych rzędu 25) umożliwia opracowanie poprawnych układów regulacji. Zmniejszenie dokładności aproksymacji modelu parownika (model zredukowany 2. rzędu) powodowało jednak znaczne pogorszenie właściwości układu regulacji obiektu, a nawet niewłaściwego doboru nastaw regulatorów, która nie gwarantowała stabilności modelu wysokiego rzędu wraz z układem regulacji.

Zaprojektowany na podstawie modeli zredukowanych parownika system regulacji ciśnienia zapewnia stabilność układu regulacji (mimo niestabilności obiektu) oraz dużą dokładność regulacji dla bardzo niskich częstotliwości. Jednak dla częstotliwości z przedziału  $\omega = 5 * 10^{-4} \div 10^{-2}$  [rad/s] wzmocnienie w układzie otwartym jest zbyt małe dla zapewnienia odpowiedniego tłumienia zakłóceń. Analiza uzyskanych wyników wskazuje, że systemy sterownia są niedoskonałe i niewątpliwie istnieją możliwości ich znaczącej poprawy w wyniku zastosowania nowoczesnych układów sterownia. Zredukowane modele podsystemów parownika umożliwiają poszerzenie wiedzy nie tylko o własnościach obiektu, ale także jego ulepszonego sterownia (w stosunku do istniejących klasycznych regulatorów).

Dorobek praktyczny rozprawy obejmuje natomiast implementację szeregu algorytmów redukcji oraz doboru parametrów poszczególnych metod redukcji, dla pakietu *MATLAB/Simulink*. Opracowane algorytmy oraz programy mogą stanowić podstawę do opracowania przybornika dla pakietu *MATLAB/Simulink*.

# LITERATURA

---

- [AZN03] AGHAEI P., ZILOUCHIAN A., NIKE-RAVESH S., ZADEGAN A.: *Principle of frequency-domain balanced structure in linear systems and model reduction*, Computers and Electrical Engineering, vol. 29, no. 3, 2003, pp. 463-477.
- [ABF99] ALIAGA J., BOLEY D., FREUND W., HERNANDEZ V.: *A Lanczos Type Method for Multiple Starting Vector*, Mathematics of Computation, vol. 69, no. 232, 1999, pp. 1577-1601.
- [And93] ANDERSON B.: *Controller Design: Moving from Theory to Practice*, IEEE Contr. Syst. vol. 13, no. 4, 1993, pp. 16-25.
- [AS01] ANTOULAS A., SORENSEN D.: *Approximation of Large-Scale Dynamical System: An overview*. Int. J. Appl. Comput. Sci., vol. 11, no. 5, 2001, pp. 1093-1121.
- [ASG03] ANTOULAS A., SORENSEN D., GUGERCIN S.: *A modified low-rank Smith method for large-scale Lyapunov equations*, Numerical Algorithms, vol.32 no.1, 2003, pp. 27-55.
- [Ant05] ANTOULAS A.: *Approximation of Large-Scale Dynamical System*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 2005.
- [Aok68] AOKI M.: *Control of Large-Scale Dynamic Systems by Aggregation*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-13, no. 3, 1968, pp. 246-253.
- [Ara01] ARABAS J.: *Wykłady z algorytmów ewolucyjnych*, WNT, Warszawa 2001.
- [AJJ03] ARABAS J., JAKUBOWSKI R., JÓZWIĄK R.: *Odporność algorytmu ewolucyjnego a licznosc populacji bazowej*, Warsztaty algorytmów genetycznych, 2003, str. 7-10.
- [AAI77] ARITOMI M., AOKI S., INOUE A.: *Instabilities in parallel channel of forced convection boiling up-flow system. Mathematical model*, Journal of Nuclear Science and Technology, no. 2, 1977, pp. 88-96.
- [Bac96] BACK T.: *Evolutionary algorithm in theory and practice*. Oxford University Press, 1996.
- [BB97] BECK C., BENDOTII P.: *Model reduction methods for unstable uncertain systems*, Proc. of the 36<sup>th</sup> IEEE Conf. Decision and Control, vol. 4, 1997, pp. 3298-3303.
- [BQ99] BENNER P., QUINTANA-ORTI E.: *Solving stable generalized Lyapunov equations with the matrix sign function*, Numerical Algorithms, vol.20, no.1, 1999, pp. 75-100.
- [BQQ00] BENNER P., QUINTANA-ORTI E., QUINTANA-ORTI G.: *Balanced Truncation Model Reduction of Large-Scale Dense Systems on Parallel Computers*, Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, vol. 6, no 4, 2000, pp. 383-405.
- [BQQ01] BENNER P., QUINTANA-ORTI E., QUINTANA-ORTI G.: *Efficient numerical algorithms for balanced stochastic truncation*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., vol. 11, no. 5, 2001, pp. 1123-1150.
- [Bol94] BOLEY D.: *Krylov space methods on state-space control models*, Circuits Syst. Signal Process, vol. 13, no. 6, 1994, pp. 733-758.
- [Bre00] BREZINSKI C.: *Model reduction of MIMO systems and Pade approximants*, The Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2000.
- [CD02] CHAHLAOUY Y., VAN DOOREN P.: *A collection of benchmark examples for model reduction of linear time invariant dynamical systems*, SLICOT Working Note 2002-2, 2002
- [Chi96] CHIU T. Y.: *Model Reduction by the Low-Frequency Approximation Balancing Method for Unstable Systems*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 41, no. 7, 1996, pp 995-997.
- [CG01] CHORAŻYCZEWSKI A., GALAR, R.: *Evolutionary dynamics of population states*, Proc. of Congress on Evolutionary Computation, vol. 2, 2001, pp. 1366 - 1373.
- [Cho03] CHORAŻYCZEWSKI A.: *Losowy wybór a zawartość populacji*. Warsztaty algorytmów genetycznych, 2003, str. 13-14.
- [DY05] DEGHANI, M, YAZDANPANAH, M.: *Model Reduction Based on the Frequency Weighted Hankel-Norm Using Genetic Algorithm and Its Application to the Power Systems*, Proc. of IEEE Conf. on Control Applications, 2005, pp. 245-250.

- [Doo95] VAN DOOREN P.: The Lanczos algorithm and Pade approximations, Conf. Short Course, Benelux Meeting on Systems and Control, 1995.
- [Enn84] Enns D.: *Model reduction with balanced realizations: An error bound and frequency weighted generalization*, Proc 23<sup>rd</sup> IEEE Conf. Decision and Control, 1984, pp. 127-132.
- [FF95] FELDMANN P., FREUND R.W.: *Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process*, IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, vol. 14 no. 5, 1995, pp. 639-649.
- [Fre03] FREUND R.W.: *Model reduction methods based on Krylov subspaces*, Acta Numerica vol.12, 2003, pp. 267-319.
- [FNG92] FORTUNA L., NUNNARI G., GALLO A.: *Model order reduction techniques with Applications in electrical engineering*, Springer-Verlag, London 1992.
- [GGD94] GALLIVAN K., GRIMME E., VAN DOOREN P.: *Asymptotic Waveform Evaluation via a Lanczos Method*, Appl. Math. Lett. vol.7, no.5, 1994, pp. 75-80.
- [GGS96] GALLIVAN K., GRIMME E., SORENSEN D., VAN DOOREN P.: *On some modifications of the Lanczos algorithm and the relation with Pade approximations*. Mathematical Research Series, Akademie Verlag Berlin, 1996, pp. 87–116.
- [GJ90] GAWRONSKI W., JUANG J.: *Model reduction in limited time and frequency intervals*, Int. J. System Sci., vol. 21, no.2, 1990, pp. 349-376.
- [Gil06] GILDIN E.: *Model and Controller reduction of Large-Scale Structures Based on Projection Method*, Ph.D. Thesis, University of Texas at Austin, 2006.
- [Glo84] GLOVER K.: *All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $L_{inf}$  error bounds*, Int. J. Contr., vol. 39, no. 6, 1984, pp. 1115-1193.
- [Gol03] GOLDBERG D.: *Algorytmy genetyczne i ich zastosowanie*, WNT, wyd.3, Warszawa 2003.
- [Gri97] GRIMME E. J.: *Krylov projection methods for model reduction*, Ph.D. Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign 1997.
- [GKL89] Gu G., Khargonekar, P., Lee E.: Approximation of infinite-dimensional systems, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 34, no. 6, 1989, pp. 610-618.
- [GL94] GUDMUNDSSON T., LAUB A.: *Approximate solution of large sparse Lyapunov equations*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 39, no. 5, 1994, pp. 1110-1114.
- [GA00] GUGERCIN S., ANTOULAS A.: *A Comparative Study of 7 Algorithms for Model Reduction*. Proc. of the 39<sup>th</sup> IEEE Conf. Decision and Control, vol. 3, 2000, pp. 2367-2372.
- [GA03] GUGERCIN S., ANTOULAS A.: *A time-limited balanced reduction method*, Proc. of the 42<sup>nd</sup> IEEE Conference on Decision and Control, vol.5, 2003, pp. 5250 - 5253.
- [GA03a] GUGERCIN S., ANTOULAS A.: *An  $H_2$  error expression for the Lanczos procedure*, Proc. 42<sup>nd</sup> IEEE Conf. Decision and Control, vol. 2, 2003, pp. 1869-1872.
- [GA04] Gugercin S., Antoulas A.: *A survey of model reduction by balanced truncation and some new results*, Int. J. of Control, vol. 77, no. 8, 2004, pp. 748-766.
- [Gug05] GUGERCIN S.: *An iterative SVD-Krylov based method for model reduction of large-scale dynamical systems*, 44<sup>th</sup> IEEE Decision and Control and European Control Conf., 2005, pp. 5905-5910.
- [GA06] GUGERCIN S., ANTOULAS A.: *Model reduction of large-scale systems by least squares*. Linear Algebra and its Applications, vol. 415, no. 2-3, 2006, pp. 290-321.
- [GW08] GUGERCIN S., WILLCOX K.: *Krylov Projection Framework for Fourier Model Reduction*. Automatica, vol. 44, no. 1, 2008, pp. 209-215.
- [Ham82] HAMMARLING S.: *Numerical Solution of the Stable, Non-negative Definite Lyapunov Equation*, IMA Journal of Numerical Analysis 2, 1982, pp. 303-323.
- [HBN06] HAIPING D., BOFFA J., NONG Z.: *Active seismic response control of tall buildings based on reduced order model*, Proc. of American Control Conference, 2006, pp.1132-1137.
- [Her05] HERES P. J.: *Robust and efficient Krylov subspace methods for Model Order Reduction*, Ph.D. Thesis, Eindhoven University of Technology, 2005.
- [HY97] HICKERNELL F., YUAN Y.: *A Simple Multistart Algorithm for Global Optimization*, OR Transactions, vol.1, no.2, 1997.
- [HTW01] Hsu C., Tse K., Wang W.: *Discrete-time model reduction of sampled systems using an enhanced multiresolutional dynamic genetic algorithm*, IEEE Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics, vol. 1, 2001, pp. 280-285.



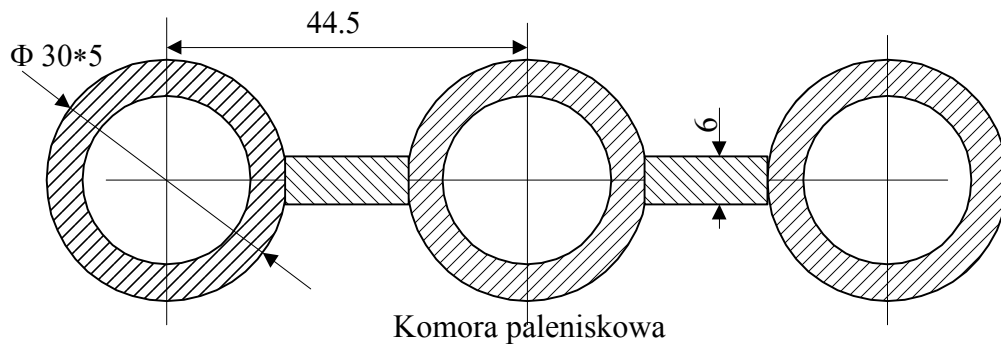
- [HY00] HUANG H., YEH F.: *A New Approach on the Balanced Realization of Linear Time-Invariant Systems*, Tunghai Science, vol. 2, 2000, pp. 83-95.
- [HF75] HUTTON M., FREDLAND B.: *Routh approximations for reducing order of linear, time-invariant systems*, IEEE Trans. Automat Contr., vol. AC-20, no.3, 1975, pp. 329-337.
- [IR06] ILAK M., ROWLEY C.: *Reduced-Order Modeling of Channel Flow Using Traveling POD and Balanced POD*, 3<sup>rd</sup> AIAA Flow Control Conf., San Francisco, 2006.
- [IRS08] IMAEV D., RYDEL M., STANISŁAWSKI W.: *Redukcja modeli parowników przepływowych jako obiektów sterowania*, XVI Krajowa Konferencja Automatyki, 2008, s.198-207.
- [JKL92] JAIMOUKHA I.M., KASENALLY E., LIMEBEER D.: *Numerical solution of large scale Lyapunov equations using Krylov subspace methods*, Proc. of 31st IEEE Conf. on Decision and Control, vol. 2, 1992, pp. 1927-1932.
- [Kac98] KACZOREK T.: *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*, WNT, Warszawa 1998.
- [KCS02] KAJI B., CHEN G., SHIBATA H.: *Designing reduced-order H-infinity controller via genetic algorithm*, Proc. of the 41st SICE Annual Conference, vol. 5, 2002, pp. 3183-3187.
- [Kar03] KARCZ-DULĘBA I.: *Analiza zjawiska skupiania się populacji w ewolucji fenotypowej*, Warsztaty algorytmów genetycznych, 2003, str. 25-26.
- [KAM95] KIM S., ANDERSON B., MADIEVSKI A.: *Error bound for transfer function order reduction using frequency weighted balanced truncation.*, Systems&Control Letters, vol. 24, no. 3, 1995, pp. 183-192.
- [KGV83] KIRKPATRICK S., GELATT C.D., VECCHI M.P.: *Optimization by simulated annealing*, Science, vol. 220, 1983, pp. 671-680.
- [KR65] KOKOTOVIC P., RUTMAN R.: *Sensitivity of automatic control systems*, Automation and Remote Contr., vol. 26, 1965, pp. 730-750.
- [KS68] KOKOTOVIC P., SANNUTI P.: *Singular perturbation method for reducing the model order in optimal control design*. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 13, 1968, pp. 377-384.
- [KIA96] KOWALSKI Z., IMAJEW D., ARENDT R., POSZECHONOW L.: *Częstotliwościowe metody analizy i syntezy układów sterowania*, Skrypt Wydawnictwa Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1996.
- [KS76] KRISHNAMURTHY V., SHESHADRI V.: *A simple and direct method for reducing order of systems using routh approximations in frequency domain*, IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. 21, no. 5, 1976, pp. 797-799.
- [Kwa99] Kwaśnicka H.: *K-model: rozmiar populacji a charakter ewolucji*, III Krajowa Konferencja Algorytmy Ewolucyjne i Optymalizacja Globalna, 1999, s.191-202.
- [LHP87] LAUB A., HEATH M., PAIGE C., WARD R.: *Computation of System Balancing Transformations and Other Applications of Simultaneous Diagonalization Algorithms.*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, no. 2, 1987, pp. 115-122.
- [Lee90] LEE J.Y.: *Efficient Pole Zero Sensitivity Calculation using Asymptotic Waveform Evaluation*. Carnegie Mellon University 1990.
- [LWW99] LI J. R., WANG F., WHITE J.: *An efficient Lyapunov equation-based approach for generating reduced-order models of interconnect*, Proc. of 36<sup>th</sup> IEEE/ACM Design Automation Conference, New Orleans, 1999, pp. 1-6.
- [LI00] LI J. R.: *Model Reduction of Large Linear Systems via Low Rank System Gramians*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- [LW01] LI J. R., WHITE J.: *Reduction of Large Circuit Models via Low Rank Approximate Gramians*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., vol. 11, no. 5, 2001, pp. 1151-1171.
- [LW04] LI J. R., WHITE J.: *Low-Rank Solution of Lyapunov Equations*, SIAM Review, vol. 46, no. 4, 2004, pp. 693-713.
- [LTG97] LI Y., TAN K., GONG M.: *Global Structure Evolution and Local Parameter Learning for Control System Model Reduction*, Evolutionary Algorithms in Engineering Applications (eds. DASGUPTA D., MICHALEWICZ Z.), Springer-Verlag, 1997, pp. 345-361.
- [Lie01] LIESLEHTO J.: *PID controller tuning using evolutionary programming*, Proc of American Control Conference, vol. 4, 2001, pp. 2828-2833.
- [LC92] LIN C., CHIU T.: *Model reduction via frequency weighted balanced realization*, Control Theory and Advanced Technol., vol. 8, 1992, pp. 341-451.

- [LA87] LIU Y., ANDERSON B.: *Model reduction with time delay*, IEE Proceedings - Control Theory and Applications, vol.134, no.6, 1987, pp. 349-367.
- [LA89] LIU Y., ANDERSON B.: *Singular perturbation approximation of balanced system*, Proc. of 28<sup>th</sup> IEEE Conf. Decision and Control, vol. 2, 1989, pp. 1355-1360.
- [Mia03] Miazga P.: *Algorytm ewolucyjny do optymalizacji zadań z kosztowną funkcją celu*. Warsztaty algorytmów genetycznych, 2003, str. 37-38.
- [Mic92] MICHAŁEWICZ Z.: *Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne*, WNT, Warszawa 1992.
- [MF06] MICHAŁEWICZ Z., FOGEL D.: *Jak to rozwiązać czyli nowoczesna heurystyka*, WNT, Warszawa 2006.
- [Moo81] MOORE B.: *Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction*. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, no. 1, 1981, pp. 17-32.
- [OA01] OBINATA G., ANDERSON B.: *Model Reduction for Control System Design*, Springer-Verlag London 2001.
- [Pap00] PAPPAS G.: *Hierarchically Consistent Control Systems*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 45, no. 6, 2000, pp. 1144-1160.
- [Pen98] PENZL T.: *A Cyclic Low Rank Smith Method for Large Sparse Lyapunov Equations with Applications in Model Reduction and Optimal Control*, SIAM J. Sci. vol. 21, 1998, pp. 1401-1418.
- [Pen98a] PENZL T.: *Numerical solution of generalized Lyapunov equations*, Advances in Computational Mathematics vol. 8, no. 1-2, 1998, pp. 33-48.
- [Pen99] PENZL T.: *Eigenvalue Decay Bounds for Solutions of Lyapunov Equations: The Symmetric Case*, Numerische Simulation auf Massiv Parallelen Rechnern, 1999.
- [Pen00] Penzl T.: *Lyapack – A MATLAB Toolbox for Large Lyapunov and Riccati Equations, Model Reduction Problems and Linear-Quadratic Optimal Control Problem, Users Guide*, Reihe des Chemnitzer, 2000.
- [Pen06] PENZL T.: *Algorithms for Model Reduction of Large Dynamical Systems*, Linear Algebra and its Applications, vol. 415, 2006, pp. 322-343.
- [PS82] PERNEBO L., SILVERMAN L.: *Model Reduction via Balanced State Space Representations*, IEEE Trans. Automat. Contr. vol. 27, no. 2, 1982, pp. 382-387.
- [PR90] PILLAGE L.T., ROHRER R.A.: *Asymptotic Waveform Evaluation for Timing Analysis*, IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, vol.9 no.4, 1990, pp. 352-366.
- [Pra94] PRAKASH R.: *Properties of a Low-Frequency Approximation Balancing Method of Model Reduction*, IEEE Trans. Automat. Contr. vol. 39, no. 5, 1994, pp. 1135-1141.
- [RW03] REWIEŃSKI M., WHITE J.: *A Trajectory Piecewise-Linear Approach to Model Order Reduction and Fast Simulation of Nonlinear Circuits and Micromachined Devices*, IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, vol. 22, no. 2, 2003, pp. 155-170.
- [Rob80] ROBERTS J. : *Linear model reduction and solution of the algebraic Riccati equation by use of the sign function*, Int. J. Control, vol. 32, 1980, pp. 121-165.
- [Row05] Rowley C.: *Model reduction for fluids, using Balanced Proper Orthogonal Decomposition*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol.15, no. 3, 2005, pp. 997-1013.
- [Ryd05] RYDEL M.: *Analiza algorytmów redukcji liniowych modeli złożonych obiektów dynamicznych*, Zesz.Nauk.PO, s.Informatyka, nr 302, z.2, 2005, s.69-90.
- [RS05] RYDEL M., STANISŁAWSKI W.: *Redukcja liniowych modeli obiektów dynamicznych z zastosowaniem algorytmów genetycznych*, X Konferencja Metrologia-Ekologia-Dydaktyka, Vrbno 2005.
- [Ryd08] Rydel M.: *Redukcja zlinearyzowanych modeli obiektów sterowania metodą Frequency Weighted z wykorzystaniem algorytmów ewolucyjnych*, Zesz.Nauk.PO (w druku)
- [Saa90] SAAD Y.: *Numerical solution of large Lyapunov equations*, Proc. of Signal Processing, Scattering and Operator Theory, and Numerical Methods, vol. 3, 1990, pp. 503-511.
- [SC89] SAFONOV M. G., CHIANG R. Y.: *A Schur Method for Balanced-Truncation Model Reduction*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 34, no. 7, 1989, pp. 729-733.

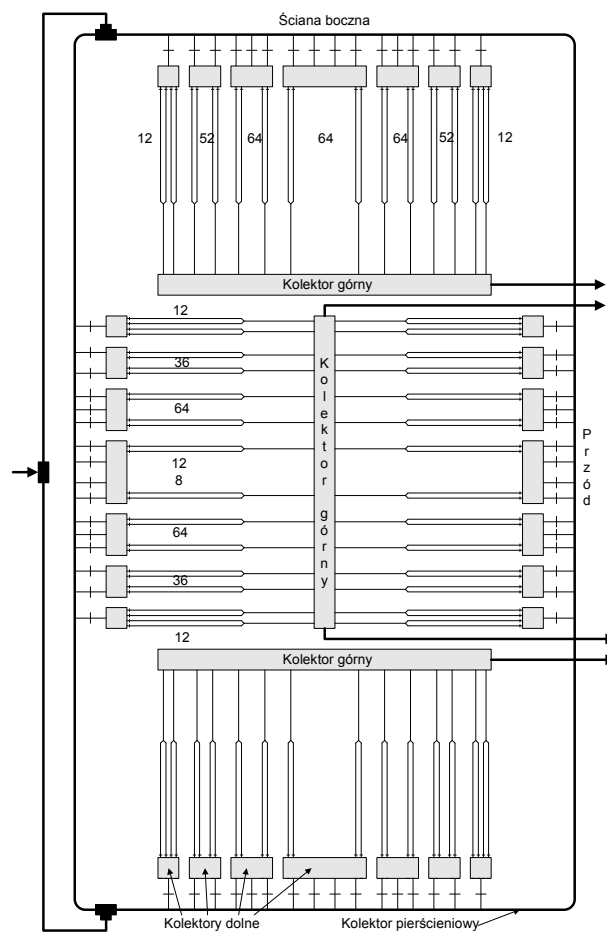
- [Sal05] SALIMBAHRAMI B.: *Structure Preserving Order Reduction of Large Scale Second Order Models*, Ph.D. Thesis, Technische Universitat Munchen, 2005.
- [SMM05] SATAKSHI, MUKHERJEE S., MITTAL R.: *Order reduction of linear discrete systems using a genetic algorithm*, Applied Mathematical Modelling, vol. 29, no. 6, 2005, pp. 565-578.
- [SB08] SIMA V., BENNER P.: *Experimental evaluation of new SLICOT solvers for linear matrix equations based on the matrix sign function*, IEEE International Conference on Computer-Aided Control Systems, 2008, pp. 606-606.
- [Sin08] SINGLER J.: *Approximate low rank solutions of Lapunov equations via Proper Orthogonal Decomposition*, American Control Conference, 2008, pp. 267-272.
- [SSG06] SHAKER H., SAMAVAT, M., GHAREVEISI, A.: *Frequency Domain Stochastic Balanced Truncation: An Accuracy Enhanced Large Scale Model Reduction Technique*, IEEE Int. Symposium on Computer-Aided Control Systems Design, 2006, pp. 3003-3006.
- [SM98] STANISŁAWSKI W., MINKINA W.: *Pomiarowa weryfikacja modelu matematycznego parownika przepływowego kotła BP-1150 dla celów sterowania*, VIII Sympozjum: Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych, Krynica 1998, s. 91-102.
- [SI98] STANISŁAWSKI W., IMAJEW D.: *Hierarchical Approach to the Steam Boiler Modelling and Simulation.*, 12<sup>th</sup> European Simulation Multiconference. Simulation-Past, Present and Future. Manchester 1998, pp. 171-175.
- [SM99] STANISŁAWSKI W., MINKINA W.: *Weryfikacja modelu matematycznego parownika kotła BP-1150, do celów sterowania*, Pomiary Automatyka Robotyka, nr 3, 1999, s.7-10.
- [Sta01] STANISŁAWSKI W.: *Modelowanie i symulacja komputerowa parowników przepływowych kotłów energetycznych*, Studia i monografie z.124, Opole, 2001.
- [Sta03] STANISŁAWSKI W.: *Opracowanie hierarchiczne, agregatywne modeli i analiza możliwości poprawy dynamicznych charakterystyk przepływowych kotłów energetycznych jako obiektów sterowania*, Praca habilitacyjna, Państwowy Uniwersytet Elektoniczny w Sankt Petersburgu, 2003.
- [SRT04] STANISŁAWSKI W., RYDEL M., TESKA J.: *Właściwości układu regulacji ciśnienia w kotle BP-1150 oraz analiza możliwości ich poprawy*, Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna: Energetyka 2004, Journal of Transdisciplinary Systems Science, vol. 9, 2004, s. 900-907.
- [SRZ04] STANISŁAWSKI W., RYDEL M., ZYGARLICKI J.: *Problemy redukcji modeli parownika kotła BP-1150*, Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna: Energetyka 2004, Journal of Transdisciplinary Systems Science, vol. 9, 2004, s. 908-915.
- [SR05] STANISŁAWSKI W., RYDEL M.: *Modele hierarchiczne złożonych obiektów sterowania*, XV Krajowa Konferencja Automatyki, 2005, s.149-154.
- [SR05a] STANISŁAWSKI W., RYDEL M.: *Aggregation of Hierarchical Models of Complex Control Objects Based on a Power Plant*, Proc. of 11<sup>th</sup> IEEE Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, 2005. 2005, s. 985-990.
- [SR06] STANISŁAWSKI W., RYDEL M.: *Redukcja zlinearyzowanych modeli podsystemów kotła energetycznego jako obiektu sterowania*, Pomiary Automatyka Kontrola, nr 10, 2006, s. 17-18.
- [TL00] TAN, K., LI Y.: *Evolutionary  $L_{inf}$  identification and model reduction for robust control*, Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Journal of Systems and Control Engineering, vol. 214, no. 3, 2000, pp. 231-238.
- [UDE07] UNNELAND, K., VAN DOOREN P., EGELAND O.: *A Novel Scheme for Positive Real Balanced Truncation*, Proc. of the American Control Conference 2007, pp. 947-952.
- [Var91] VARGA A.: *Balancing-free square-root algorithm for computing singular perturbation approximations*, Proc. of 30<sup>th</sup> IEEE Decision and Control, vol. 2, 1991, pp. 1062-1065.
- [Var91a] VARGA A.: *Efficient Minimal Realization Procedure Based on Balancing*, Proc. of IMACS/IFAC Symposium on Modeling and Control of Technological Systems, vol. 2, 1991, pp. 42-47.
- [Var93] VARGA A.: *Coprime factors model reduction based on accuracy enhancing techniques* Source, Systems Analysis Modeling Simulation, vol. 11, no. 4, 1993, pp. 303-311.
- [Var00] VARGA A.: *On stochastic balancing related model reduction*, Proc. of the 39<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision and Control, vol. 3, 2000, pp. 2385-2390.

- [VA01] VARGA A., ANDERSON B.: *Accuracy enhancing methods for the frequency-weighted balancing related model reduction*, Proc. of 40<sup>th</sup> IEEE Decision and Control, 2001, pp. 3659-3664.
- [Var01] VARGA A.: *Numerical approach for frequency-weighted Hankel-norm approximation*, Proc. of European Control Conf., 2001, pp. 640-645.
- [Var01a] VARGA A.: *Model reduction software in the SLICOT library*. Applied and Computational Control, Signals, and Circuits, Kluwer Academic Publishers, Boston 2001, vol. 2, pp. 239-282.
- [Var02] VARGA A.: *New numerical software for model and controller reduction*, SLICOT Working Note SLWN2002-5, 2002.
- [WSL99] WANG G., SREERAM V., LIU W. Q.: *A New Frequency-Weighted Balanced Truncation Method and an Error Bound*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 44, no. 9, 1999, pp. 1734-1737.
- [WP02] WILLCOX K., PERAIRE J.: *Balanced Model Reduction via the Proper Orthogonal Decomposition*, AIAA Journal, vol. 40, no. 11, 2002, pp.2323-2330.
- [WM03] WILLCOX K., MAGRETSKI A.: *Fourier series for accurate, stable, reduced-order models for linear CFD application*, 15<sup>th</sup> Computational Fluid Dynamic Conf., 2003.
- [WM05] WILLCOX K., MAGRETSKI A.: *Fourier Series for Accurate, Stable, Reduced-Order Models in Large-Scale Applications*, SIAM Journal for Scientific Computing, vol. 26, no. 3, 2005, pp. 944-962.
- [WB92] WORTELBOER P., BOSGRA O.: *Generalized frequency weighted balanced reduction*, Proc. of the 31st IEEE Conf. on Decision and Control, vol. 3, 1992, pp. 2848-2849.
- [Zil91] ZILOUCHIAN A.: *Balanced structures and model reduction of unstable systems*, IEEE Proc. of Southeastcon'91, vol. 2, 1991, pp. 1198-1201.
- [dok\_tech] *Dokumentacja Techniczno-Ruchowa Kotła BP-1150*, Raciborska Fabryka Kotłów.

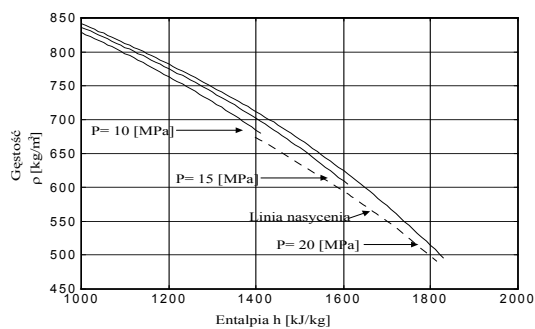
# A. DODATEK A



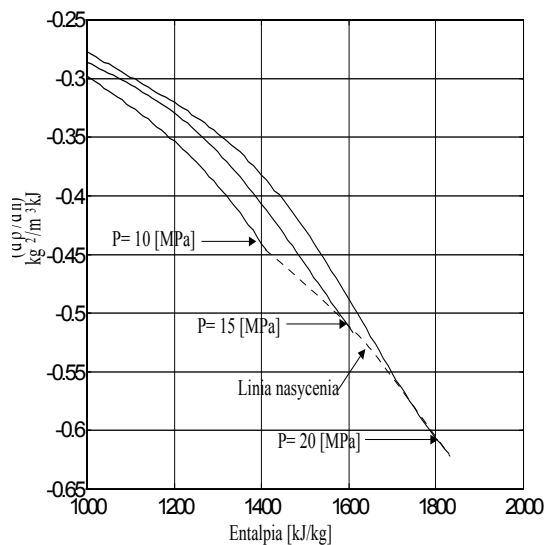
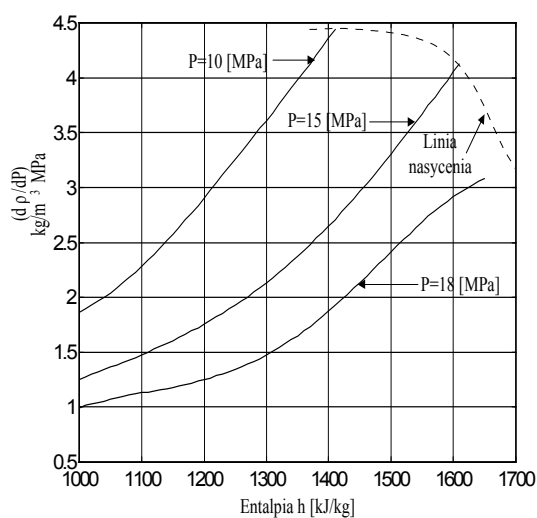
Rys. A.1. Szczelnie spawana ściana komory paleniskowej kotła BP-1150



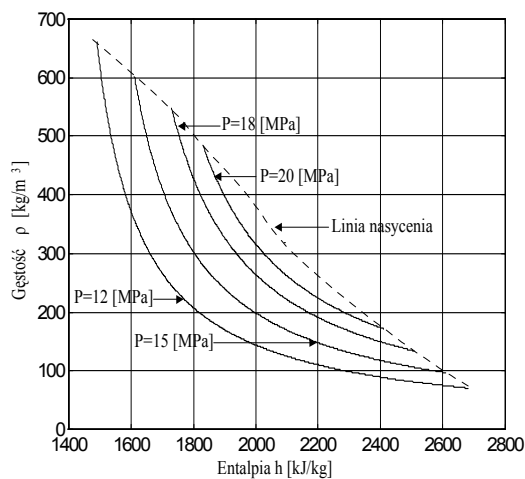
Rys. A.2. Uproszczony schemat ekranu komory paleniskowej kotła BP-1150



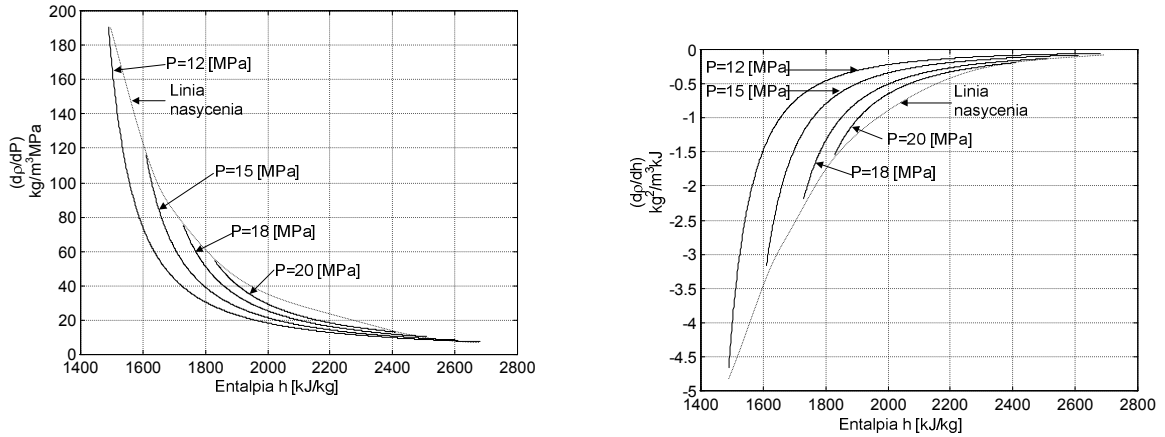
Rys. A.3. Gęstość wody w funkcji entalpii i ciśnienia



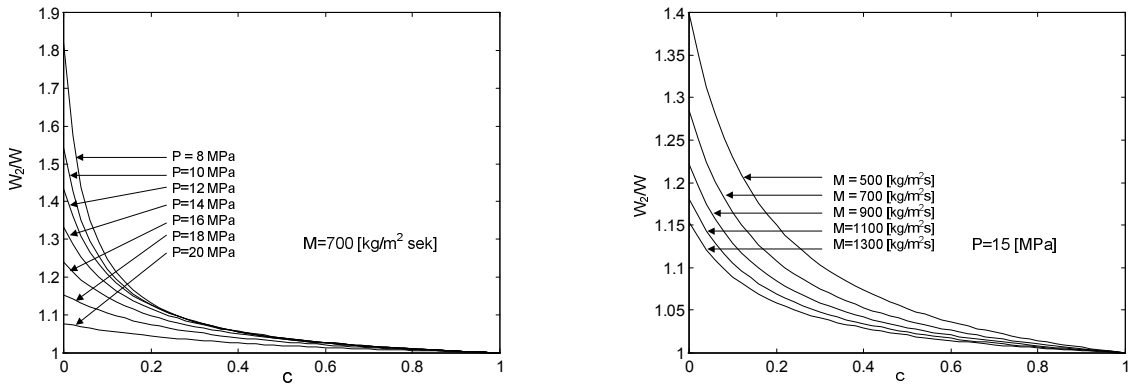
Rys. A.4. Pochodne  $\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)$ ,  $\left(\frac{\partial\rho}{\partial h}\right)$  w funkcji entalpii oraz ciśnienia dla wody



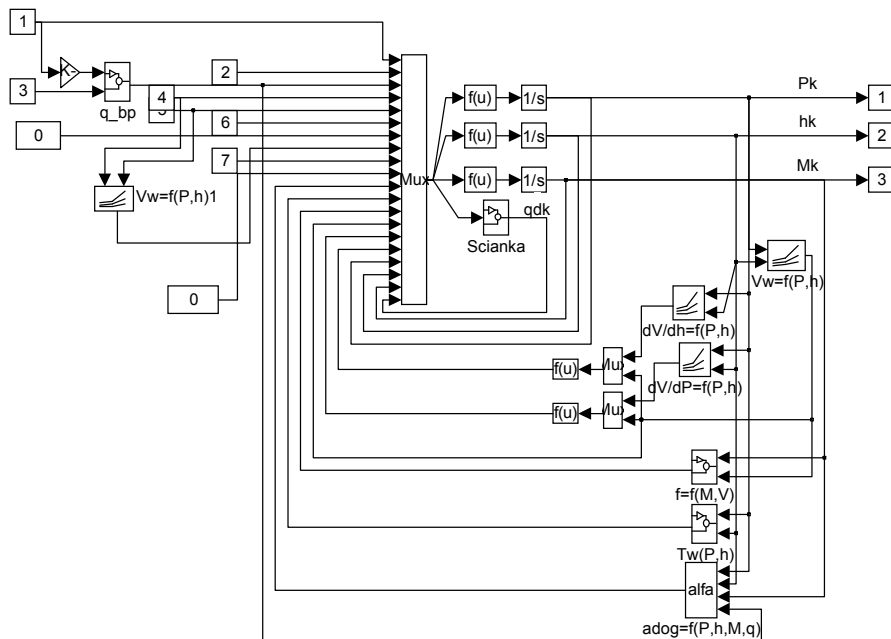
Rys. A.5. Gęstość mieszaniny parowo-wodnej w funkcji entalpii i ciśnienia



Rys. A.6. Pochodne  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)$ ,  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)$  w funkcji entalpii oraz ciśnienia dla mieszaniny parowo-wodnej



Rys. A.7. Zależność  $\left(\frac{w_2}{w}\right)$  od stopnia suchości mieszaniny parowo-wodnej  $c$ , ciśnienia  $P$  oraz przepływu masowego  $M$



Rys. A.8. Model elementarnej sekcji strefy dogrzewu w środowisku MATLAB/Simulink

## B. DODATEK B

### B.1. Algorytmy wyznaczania macierzy transformacji

Tab. B.1. Algorytm RPR

- |  |
|--|
| <p>1) Wyznaczenie gramianów sterowalności <math>\mathbf{P}</math> i obserwowalności <math>\mathbf{Q}</math> z równań (3.8) oraz (3.9)</p> <p>2) Dekompozycja Choleskiego gramianu obserwowalności:<br/> <math display="block">\mathbf{Q} = \mathbf{R}^* \mathbf{R}</math></p> <p>3) Dekompozycja SVD iloczynu macierzy:<br/> <math display="block">\mathbf{RPR}^* = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{U}^*</math> gdzie: <math>\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}</math>, <math>\mathbf{\Sigma}^2 = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2)</math>, <math>\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_n^2 &gt; 0</math></p> <p>4) Wyznaczenie macierzy transformacji:<br/> <math display="block">\mathbf{T} = \mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{U}^*\mathbf{R}</math></p> |
|--|

Tab. B.2. Algorytm SR

- |   |
|---|
| <p>1) Wyznaczenie gramianów sterowalności <math>\mathbf{P}</math> i obserwowalności <math>\mathbf{Q}</math> z równań (3.8) oraz (3.9)</p> <p>2) Dekompozycja Choleskiego gramianów sterowalności i obserwowalności:<br/> <math display="block">\mathbf{Q} = \mathbf{R}^* \mathbf{R}, \mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{S}^*</math></p> <p>3) Dekompozycja SVD iloczynu macierzy:<br/> <math display="block">\mathbf{R}\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*</math> gdzie: <math>\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n)</math>, <math>\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n &gt; 0</math></p> <p>4) Wyznaczenie macierzy transformacji:<br/> <math display="block">\mathbf{T} = \mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{U}^*\mathbf{R}, \mathbf{L} = \mathbf{S}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1/2}</math></p> |
|---|

Tab. B.3. Algorytm BFSR

- |   |
|---|
| <p>1) Wyznaczenie gramianów sterowalności <math>\mathbf{P}</math> i obserwowalności <math>\mathbf{Q}</math> z równań (3.8) oraz (3.9)</p> <p>2) Dekompozycja Choleskiego gramianów sterowalności i obserwowalności:<br/> <math display="block">\mathbf{Q} = \mathbf{R}^* \mathbf{R}, \mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{S}^*</math></p> <p>3) Dekompozycja SVD iloczynu macierzy:<br/> <math display="block">\mathbf{S}\mathbf{R}^* = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 &amp; \mathbf{0} \\ \mathbf{0} &amp; \mathbf{\Sigma}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}</math> gdzie: <math>\mathbf{\Sigma}_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_k)</math>, <math>\mathbf{\Sigma}_2 = \text{diag}(\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2} \dots \sigma_n)</math>, <math>\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n &gt; 0</math></p> <p>4) Dekompozycja QR iloczynów macierzy:<br/> <math display="block">\mathbf{S}^*\mathbf{U}_1 = [\mathbf{W}_1 \quad \mathbf{W}_2]\mathbf{X}, \mathbf{R}^*\mathbf{V}_1 = [\mathbf{Z}_1 \quad \mathbf{Z}_2]\mathbf{Y}</math> gdzie: <math>\mathbf{W}</math> i <math>\mathbf{Z}</math> są macierzami ortonormalnymi, <math>\mathbf{X}</math> i <math>\mathbf{Y}</math> są macierzami unitarnymi.</p> <p>5) Dekompozycja SVD iloczynu macierzy:<br/> <math display="block">\mathbf{Z}_1^*\mathbf{W}_1 = \mathbf{U}_E\mathbf{\Sigma}_E\mathbf{V}_E^*</math></p> <p>6) Wyznaczenie macierzy transformacji:<br/> <math display="block">\mathbf{T} = \mathbf{\Sigma}_E^{-1/2}\mathbf{U}_E^*\mathbf{Z}_1^*\mathbf{R}, \mathbf{L} = \mathbf{W}_1\mathbf{V}_E\mathbf{\Sigma}_E^{-1/2}</math></p> |
|---|



Tab. B.4. Algorytm **BF** (Schura)

<p>1) Wyznaczenie gramianów sterowalności <math>\mathbf{P}</math> i obserwowalności <math>\mathbf{Q}</math> z równań (3.8) oraz (3.9)</p> <p>2) Dekompozycja Schura - wyznaczenie ortogonalnej macierzy <math>\mathbf{V}</math> takiej, aby iloczyn <math>\mathbf{V}^*\mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{V}</math> był równy macierzy trójkątnej górnej</p> $\mathbf{V}^*\mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$ <p>3) Wykorzystanie ortogonalnej rotacji Givensa do wyznaczenia ortogonalnych macierzy <math>\mathbf{V}_A</math> oraz <math>\mathbf{V}_D</math> takich, aby macierz trójkątna górna była w porządku rosnącym i malejącym:</p> $\mathbf{V}_A^*\mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{V}_A = \begin{bmatrix} \sigma_n^2 & * & \dots & * & * \\ 0 & \sigma_{n-1}^2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \sigma_2^2 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_D^*\mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{V}_D = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & * & \dots & * & * \\ 0 & \sigma_2^2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \sigma_{n-1}^2 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$ <p>gdzie: <math>\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_n^2 &gt; 0</math></p> <p>4) Podział macierzy <math>\mathbf{V}_A</math> oraz <math>\mathbf{V}_D</math></p> $\mathbf{V}_A = \left[ \overbrace{\mathbf{V}_{R,small}}^{n-k} \overbrace{\mathbf{V}_{L,big}}^k \right] \quad \mathbf{V}_D = \left[ \overbrace{\mathbf{V}_{R,big}}^k \overbrace{\mathbf{V}_{L,small}}^{n-k} \right]$ <p>gdzie: kolumny <math>\mathbf{V}_{R,big}</math> oraz <math>\mathbf{V}_{R,small}</math> są ortonormalną bazą dla prawej macierzy własnej iloczynu gramianów, związanej z dużymi (<math>\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2</math>) oraz małymi (<math>\sigma_{k+1}^2, \dots, \sigma_n^2</math>) wartościami własnymi. Identycznie kolumny <math>\mathbf{V}_{L,big}</math> oraz <math>\mathbf{V}_{L,small}</math> związane są z ortonormalną bazą dla lewej macierzy własnej.</p> <p>5) Dekompozycja SVD iloczynu macierzy</p> $\mathbf{V}_{L,big}^*\mathbf{V}_{R,big} = \mathbf{U}_{E,big}\mathbf{\Sigma}_{E,big}\mathbf{V}_{E,big}^*$ <p>6) Wyznaczenie macierzy transformacji</p> $\mathbf{T}^* = \mathbf{V}_{L,big}\mathbf{U}_{E,big}\mathbf{\Sigma}_{E,big}^{-1/2} \quad \mathbf{L} = \mathbf{V}_{R,big}\mathbf{U}_{E,big}\mathbf{\Sigma}_{E,big}^{-1/2}$
--

Tab. B.5. Algorytm Huang

<p>1) Wyznaczenie gramianów sterowalności <math>\mathbf{P}</math> i obserwowalności <math>\mathbf{Q}</math> z równań (3.8) oraz (3.9)</p> <p>2) Wyznaczenie wektorów własnych iloczynu gramianów sterowalności i obserwowalności</p> $\mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$ <p>gdzie: <math>\mathbf{\Sigma}</math> jest macierzą wartości własnych, natomiast <math>\mathbf{V}</math> macierzą wektorów własnych</p> <p>3) Przekształcenie macierzy wektorów własnych</p> $l_i = \frac{v_i}{\sqrt{v_i^*\mathbf{P}^{-1}v_i}}$ <p>gdzie: <math>v_i</math> jest wektorem własnym iloczynu gramianów</p> <p>4) Wyznaczenie macierzy transformacji</p> $\mathbf{T} = \mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{L}^{-1}$
---

Tab. B.6. Algorytm Obiata-Anderson

- 1) Wyznaczenie gramianów sterowalności  $\mathbf{P}$  i obserwowalności  $\mathbf{Q}$  z równań (3.8) oraz (3.9)
- 2) Wyznaczenie macierzy wektorów oraz wartości własnych gramianów sterowalności i obserwowalności:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}_c \mathbf{S}_c \mathbf{U}_c^*, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{U}_o \mathbf{S}_o \mathbf{U}_o^*$$

gdzie  $\mathbf{S}_c$  i  $\mathbf{S}_o$  są macierzami diagonalnymi wartości własnych gramianów,  $\mathbf{U}_c$  i  $\mathbf{U}_o$  macierzami wektorów własnych

- 3) Dekompozycja SVD iloczynu macierzy:

$$\mathbf{S}_o^{1/2} \mathbf{U}_o^* \mathbf{U}_c \mathbf{S}_c^{1/2} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^*$$

gdzie:  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{V}$  są macierzami ortogonalnymi, natomiast  $\mathbf{\Sigma}$  jest macierzą diagonalną  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$

- 4) Wyznaczenie macierzy transformacji:

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}_o \mathbf{S}_o^{-1/2} \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}^{1/2}$$

Tab. B.7. Algorytm **EIG-SR**, **EIG-BFSR**

- 1) Wyznaczenie gramianów sterowalności  $\mathbf{P}$  i obserwowalności  $\mathbf{Q}$  z równań (3.8) oraz (3.9)
- 2) Wyznaczenie macierzy wektorów oraz wartości własnych gramianów sterowalności i obserwowalności

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{U}}_c \tilde{\mathbf{S}}_c \tilde{\mathbf{U}}_c^* = \left( \tilde{\mathbf{U}}_c \tilde{\mathbf{S}}_c^{1/2} \right) \left( \tilde{\mathbf{U}}_c \tilde{\mathbf{S}}_c^{1/2} \right)^* = \tilde{\mathbf{S}}^* \tilde{\mathbf{S}}$$

$$\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{U}}_o \tilde{\mathbf{S}}_o \tilde{\mathbf{U}}_o^* = \left( \tilde{\mathbf{U}}_o \tilde{\mathbf{S}}_o^{1/2} \right) \left( \tilde{\mathbf{U}}_o \tilde{\mathbf{S}}_o^{1/2} \right)^* = \tilde{\mathbf{R}}^* \tilde{\mathbf{R}}$$

gdzie:  $\tilde{\mathbf{S}}_c = \text{diag}[\gamma_1, \dots, \gamma_z, 0 \dots 0]$   $\tilde{\mathbf{S}}_o = \text{diag}[\kappa_1, \dots, \kappa_z, 0 \dots 0]$  oraz  $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_z > 0$ ,  $\kappa_1 > \kappa_2 > \kappa_z > 0$

- 3) Dekompozycja SVD iloczynu macierzy:

$$\tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{R}}^* = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_2 \end{bmatrix} [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2]^*$$

gdzie:  $\mathbf{\Sigma}_1 \in \mathbb{R}^{k \times k}$

- 4) Dekompozycja QR iloczynów macierzy

$$\tilde{\mathbf{S}}^* \mathbf{U}_1 = [\mathbf{W}_1 \quad \mathbf{W}_2] \mathbf{X}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}^* \mathbf{V}_1 = [\mathbf{Z}_1 \quad \mathbf{Z}_2] \mathbf{Y}$$

gdzie:  $\mathbf{W}$  oraz  $\mathbf{Z}$  są macierzami ortonormalnymi,  $\mathbf{X}$  i  $\mathbf{Y}$  są macierzami unitarnymi.

- 5) Dekompozycja SVD iloczynu macierzy:

$$\mathbf{Z}_1^* \mathbf{W}_1 = \mathbf{U}_E \mathbf{\Sigma}_E \mathbf{V}_E^*$$

- 6) Wyznaczenie macierzy transformacji:

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Sigma}_E^{-1/2} \mathbf{U}_E^* \mathbf{Z}_1^* \quad \mathbf{L} = \mathbf{W}_1 \mathbf{V}_E \mathbf{\Sigma}_E^{-1/2} \text{ – dla algorytmu BFSR}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Sigma}^{-1/2} \mathbf{U}^* \tilde{\mathbf{S}}_o^{1/2} \tilde{\mathbf{U}}_o^* \quad \mathbf{L} = \tilde{\mathbf{S}}_c^{1/2} \tilde{\mathbf{U}}_c^* \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1/2} \text{ – dla algorytmu SR}$$

Tab. B.8. Algorytm Lanczosa

<p>1) Dane wejściowe: <math>\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}}</math></p> <p>2) Wyznaczenie wektorów startowych</p> $v_0 = w_0 = 0 \quad \beta_1 = \delta_1 = 0 \quad v_1 = \frac{\tilde{\mathbf{b}}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{c}}^* \tilde{\mathbf{b}}}} \quad w_1 = \frac{\tilde{\mathbf{c}}}{-\sqrt{\tilde{\mathbf{c}}^* \tilde{\mathbf{b}}}}$ <p>3) for <math>j = 1, 2, \dots, k - 1</math></p> $\alpha_j = w_j^* \tilde{\mathbf{A}} v_j$ $\hat{v} = \tilde{\mathbf{A}} v_j - \alpha_j v_j - \delta_j v_{j-1}$ $\hat{w} = \tilde{\mathbf{A}}^* w_j - \alpha_j w_j - \delta_j w_{j-1}$ $\delta_{j+1} = \sqrt{\hat{v}^* \hat{w}}$ $\beta_{j+1} = \frac{\hat{v}^* \hat{w}}{\sqrt{\hat{v}^* \hat{w}}}$ $v_{j+1} = \frac{\hat{v}}{\beta_{j+1}}$ $w_{j+1} = \frac{\hat{w}}{\delta_{j+1}}$ <p>4) Dane wyjściowe:</p> $\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & 0 \\ \delta_2 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_k \\ 0 & & \delta_k & \alpha_k \end{bmatrix} \quad b_r = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_r = [\beta_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$ $\mathbf{V}_k = [v_1 \dots v_k] \quad \mathbf{W}_k = [w_1 \dots w_k]$
--

Tab. B.9. Algorytm Arnoldiego [Gil06]

<p>1) Dane wejściowe: <math>\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}</math></p> <p>2) Wyznaczenie wektora startowego <math>v_1 = \frac{\tilde{\mathbf{b}}}{\ \tilde{\mathbf{b}}\ }</math></p> <p>3) pętla: <math>j = 1, 2, \dots, k</math></p> $h_{i,j} = v_i^* \tilde{\mathbf{A}} v_j \quad \text{dla } i = 1, \dots, j$ $w = \tilde{\mathbf{A}} v_j - \sum_{i=1}^j h_{i,j} v_i$ $h_{j+1,j} = \ w\ _2$ <p>if <math>h_{j+1,j} = 0 \rightarrow \text{stop}</math></p> $v_{j+1} = \frac{w}{h_{j+1,j}}$
--

Tab. B.10. Blokowy algorytm Lanczosa

1)	Usunięcie liniowo zależnych wektorów startowych $\tilde{\mathbf{B}}$ oraz $\tilde{\mathbf{C}}$ ( $m_1$ – liczba liniowo niezależnych wektorów macierzy startowej $\tilde{\mathbf{B}}$ , $p_1$ – liczba liniowo niezależnych wektorów macierzy startowej $\tilde{\mathbf{C}}$ )
2)	Wyznaczenie wektorów startowych $v_1 = \frac{\tilde{b}_1}{\sqrt{ \hat{\mathbf{C}}_1^* \tilde{b}_1 }} \quad w_1 = \frac{\hat{c}_1}{-\sqrt{ \hat{\mathbf{C}}_1^* \tilde{b}_1 }} \quad j=2$
3)	Wyznaczenie $j$ -ego wektora macierzy $\mathbf{V}$ $r_j = \begin{cases} \tilde{b}_j & \text{dla } j \leq m_1 \\ \tilde{\mathbf{A}}v_{j-m_1} & \text{dla } j > m_1 \end{cases}$
4)	Wyznaczenie $j$ -ego wektora macierzy $\mathbf{W}$ $l_j = \begin{cases} \hat{c}_j & \text{dla } j \leq p_1 \\ \hat{\mathbf{A}}w_{j-p_1} & \text{dla } j > p_1 \end{cases}$
5)	Ortogonalizacja $\left. \begin{aligned} \tilde{h}_{i,j-1} &= r_j^* w_i \\ r_j &= r_j - \tilde{h}_{i,j-1} v_i \end{aligned} \right\} \text{dla } i=1 \dots j-1$ $\left. \begin{aligned} \hat{h}_{i,j-1} &= l_j^* v_i \\ l_j &= l_j - \hat{h}_{i,j-1} w_i \end{aligned} \right\} \text{dla } i=1 \dots j-1$
6)	Normalizacja $\ r_j^* l_j\ _2 > \varepsilon_1 \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{h}_{j,j-1} &= \sqrt{ \hat{w}_j^* \hat{v}_j } \\ v_j &= \frac{r_j}{\tilde{h}_{j,j-1}} \\ \hat{h}_{j,j-1} &= -\sqrt{ \hat{w}_j^* \hat{v}_j } \\ w_j &= \frac{l_j}{\hat{h}_{j,j-1}} \end{aligned} \right.$ $\ r_j^* l_j\ _2 \leq \varepsilon_1 \Rightarrow \text{koniec algorytmu}$
7)	Usunięcie liniowo zależnych wektorów (ang. <i>deflation</i> ) $\ r_j^*\ _2 \leq \varepsilon_2 \Rightarrow m_1 = m_1 - 1$ $m_1 \Rightarrow \begin{cases} = 0 & \text{koniec algorytmu} \\ \neq 0 & \text{skok do punktu 3} \end{cases}$ $\ l_j\ _2 \leq \varepsilon_2 \Rightarrow p_1 = p_1 - 1$ $p_1 \Rightarrow \begin{cases} = 0 & \text{koniec algorytmu} \\ \neq 0 & \text{skok do punktu 3} \end{cases}$
8)	Sprawdzenie warunku końca pętli $j = j + 1 \quad \begin{cases} < k & \text{skok do punktu 3} \\ = k & \text{koniec algorytmu} \end{cases}$

Tab. B.11. Algorytm two-sided Arnoldi

1) Wyznaczenie wektorów startowych dla blokowego algorytmu Arnoldiego (osobno dla wejściowej $\mathcal{K}_Q(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ oraz wyjściowej $\mathcal{K}_Q(\hat{\mathbf{A}}^*, \hat{\mathbf{C}}^*)$ podprzestrzeni Kryłowa) $\tilde{\mathbf{A}} = (s_0 \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = (s_0 \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$ $\hat{\mathbf{A}} = (s_1 \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{E}, \quad \hat{\mathbf{C}}^* = (s_1 \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{C}^*$
2) Wyznaczenie ortonormalnej bazy $\mathbf{V}$ algorytm Tab. B.12, parametry startowe $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$
3) Wyznaczenie ortonormalnej bazy $\mathbf{W}$ algorytm Tab. B.12, parametry startowe $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{C}}^*$
4) Wyznaczenie modelu zredukowanego $\mathbf{E}_r = \mathbf{W}^* \mathbf{E} \mathbf{V}, \quad \mathbf{A}_r = \mathbf{W}^* \mathbf{A} \mathbf{V}, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{W}^* \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{C} \mathbf{V}$

Tab. B.12. Blokowy algorytm Arnoldiego

1) Usunięcie liniowo zależnych wektorów startowych $\tilde{\mathbf{B}}$ ( $m_1$ – liczba liniowo niezależnych wektorów macierzy startowej $\tilde{\mathbf{B}}$ )
2) Wyznaczenie wektorów startowych $v_1 = \frac{\tilde{b}_1}{\ \tilde{b}_1\ }$
3) Wyznaczenie j-ego wektora macierzy $\mathbf{V}$ $r_j = \begin{cases} \tilde{b}_j & \text{dla } j \leq m_1 \\ \tilde{\mathbf{A}} v_{j-m_1} & \text{dla } j > m_1 \end{cases}$
4) Ortogonalizacja $\left. \begin{aligned} h_{i,j-1} &= r_j^* r_i \\ r_j &= r_j - h_{i,j-1} r_i \end{aligned} \right\} \text{dla } i = 1 \dots j-1$
5) Normalizacja i usunięcie liniowo zależnych wektorów if $\ r_j^*\ _2 > \varepsilon$ : $\tilde{h}_{j,j-1} = \ r_j\ _2$ $v_j = \frac{r_j}{\tilde{h}_{j,j-1}}$ $j = j+1 \begin{cases} < k & \text{skok do punktu 3} \\ = k & \text{koniec algorytmu} \end{cases}$ else: $m_1 = m_1 - 1$ $m_1 \Rightarrow \begin{cases} = 0 & \text{koniec algorytmu} \\ \neq 0 & \text{skok do punktu 3} \end{cases}$

Tab. B.13. Wielopunktowy algorytm Arnoldiego dla modeli **SISO**

1) Zainicjowanie parametrów startowych	$\mathbf{V} = [], \mathbf{W} = [], m = 0$
2) Wyznaczenie $I$ kolumn dla $j$ -tego punktu ( $j = 1 \dots J$ )	
3) Wyznaczenie $i$ -tej kolumny dla $j$ -tego punktu ( $i = 1 \dots I$ )	
if $i < p$	$\tilde{\mathbf{v}}_m = (\mathbf{A} - s_j \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}_i$
else:	$\tilde{\mathbf{v}}_m = (\mathbf{A} - s_j \mathbf{I})^{-1} \mathbf{v}_{m-i}$
if $i < m$	$\tilde{\mathbf{w}}_m = ((\mathbf{A} - s_j \mathbf{I})^*)^{-1} \mathbf{C}_i^*$
else:	$\tilde{\mathbf{w}}_m = ((\mathbf{A} - s_j \mathbf{I})^*)^{-1} \mathbf{w}_{m-i}$
4) Ortogonalizacja	
	$\tilde{\mathbf{v}}_m = \tilde{\mathbf{v}}_m - \mathbf{V} \mathbf{V}^* \tilde{\mathbf{v}}_m$
	$\tilde{\mathbf{w}}_m = \tilde{\mathbf{w}}_m - \mathbf{W} \mathbf{W}^* \tilde{\mathbf{w}}_m$
5) Normalizacja	
	$\mathbf{V} = \left[ \mathbf{V} \quad \frac{\tilde{\mathbf{v}}_m}{\ \tilde{\mathbf{v}}_m\ } \right]$
	$\mathbf{W} = \left[ \mathbf{W} \quad \frac{\tilde{\mathbf{w}}_m}{\ \tilde{\mathbf{w}}_m\ } \right]$
6) Sprawdzenie warunków zakończenia algorytmu	
	$m = m + 1$
	$i = i + 1$
if $i \leq I$	skok do punktu 3
	$j = j + 1$
if $j \leq J$	skok do punktu 2
7) Wyznaczenie ortogonalnej macierz $\mathbf{W}$	
	$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{V}^* \mathbf{W})^{-1}$

Tab. B.14. Algorytm two-sided Arnoldi dla modeli **MIMO**

<p>1) Wyznaczenie ortonormalnej bazy <math>\mathbf{V}</math> algorytm Tab. B.15, parametry startowe <math>\mathbf{A}, \mathbf{B}, J, s_j, I_j</math></p> <p>2) Wyznaczenie ortonormalnej bazy <math>\mathbf{W}</math> algorytm Tab. B.15, parametry startowe <math>\mathbf{A}, \mathbf{C}^*, J, s_j, I_j</math></p> <p>3) Wyznaczenie modelu zredukowanego <math>\mathbf{E}_r = \mathbf{W}^* \mathbf{E} \mathbf{V}, \mathbf{A}_r = \mathbf{W}^* \mathbf{A} \mathbf{V}, \mathbf{B}_r = \mathbf{W}^* \mathbf{B}, \mathbf{C}_r = \mathbf{C} \mathbf{V}</math></p>
--

Tab. B.15. Wielopunktowy blokowy algorytm Arnoldiego z dekompozycją QR

<p>1) Parametry startowe algorytmu:  <math>J</math> – liczba punktów interpolacji  <math>s_j</math> – wartość <math>j</math>-tego punktu interpolacji  <math>I_j</math> – liczba momentów przypadających na <math>j</math>-ty punkt interpolacji  <math>j = 1, i = 1</math></p> <p>2) Wyznaczenie wektorów startowych <math>j</math>-tego punktu interpolacji  if <math>s_j = \infty</math> <math>\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}</math>  <math>\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}</math>  else: <math>\tilde{\mathbf{A}} = (s_j \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}</math>  <math>\tilde{\mathbf{B}} = (s_j \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}</math></p> <p>3) Normalizacja wektorów startowych <math>j</math>-tego punktu interpolacji  <math>[\mathbf{X}_0 \quad \mathbf{R}] = qr(\tilde{\mathbf{B}})</math></p> <p>4) Rozwinięcie przestrzeni Kryłowa  <math>\mathbf{X}_i^0 = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{X}_{i-1}</math></p> <p>5) Ortogonalizacja  <math display="block">\left. \begin{aligned} h_{i-m,i-1} &amp;= \mathbf{V}_{i-m}^* \mathbf{X}_i^{m-1} \\ \mathbf{X}_i^m &amp;= \mathbf{X}_i^{m-1} - \mathbf{V}_{i-i} \tilde{h}_{i-m,i-1} \end{aligned} \right\} \text{dla } m=1 \dots i</math></p> <p>6) Normalizacja  <math>[\mathbf{X}_i \quad h_{m,i-1}] = qr(\mathbf{X}_i^i)</math></p> <p>7) Sprawdzenie warunków zakończenia algorytmu  <math>i = i + 1</math>  if <math>i &lt; I_j</math> skok do punktu 4  <math>\mathbf{V} = [\mathbf{V} \quad [\mathbf{X}_0 \quad \dots \quad \mathbf{X}_{I_j-1}]]</math>  <math>j = j + 1</math>  if <math>j \leq J</math> skok do punktu 2</p>
--

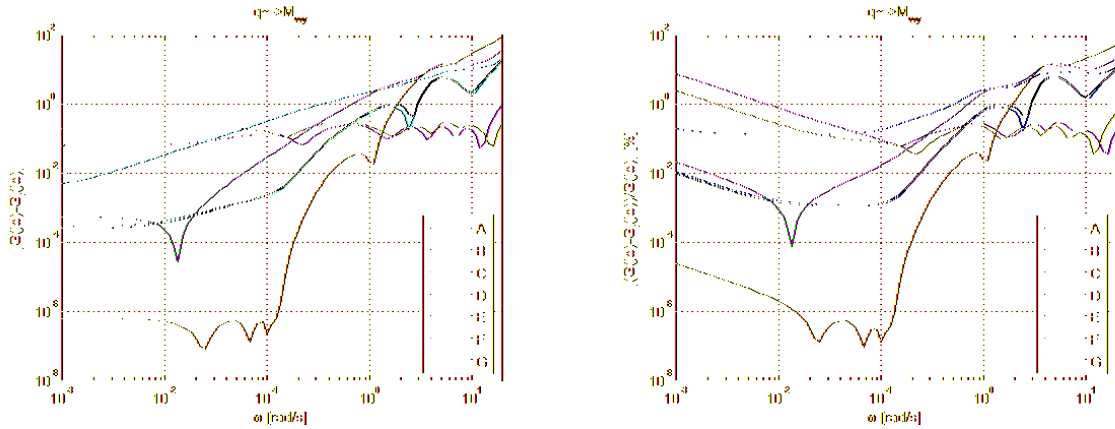
## B.2. Błędy aproksymacji zredukowanych modeli strefy dogrzewu rur ekranowych parownika

Na rys. B.1 – B.12 przedstawiono błędy aproksymacji (wartość bezwzględna oraz względna) zredukowanych modeli strefy dogrzewu rur ekranowych parownika (o zakresie adekwatności 0-20 [rad/s]), wybranych na podstawie minimalnej wartości błędów aproksymacji (4.1 – 4.7). Wszystkie modele zredukowane (rząd  $k = 15$ ) zostały uzyskane metodą FW z zastosowaniem wagi wyjściowej w postaci filtrów dolnoprzepustowych Butterwortha (parametry filtrów przedstawione zostały w tab. B.16).

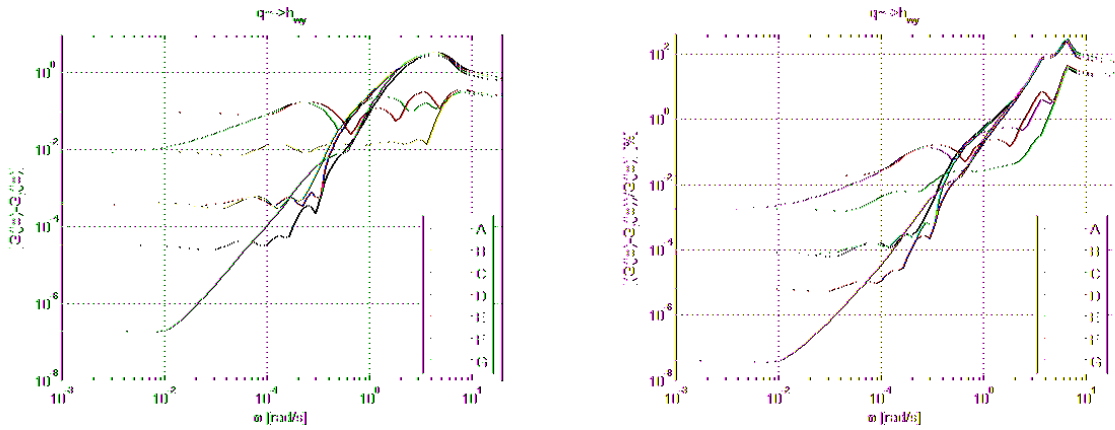
Tab. B.16. Optymalne parametry filtrów dla poszczególnych miar błędu aproksymacji dla modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika

		rząd filtru	częstotliwość graniczna [rad/s]
A Model optymalny ze względu na $\Delta_1$	$W_{out1}$	$n_f = 19$	$\omega_f = 4,04$
	$W_{out2}$	$n_f = 9$	$\omega_f = 18,72$
	$W_{out3}$	$n_f = 15$	$\omega_f = 2,99$
B Model optymalny ze względu na $\Delta_2$	$W_{out1}$	$n_f = 5$	$\omega_f = 0,227$
	$W_{out2}$	$n_f = 2$	$\omega_f = 0,0383$
	$W_{out3}$	$n_f = 7$	$\omega_f = 0,950$
C Model optymalny ze względu na $\Delta_3$	$W_{out1}$	$n_f = 8$	$\omega_f = 3,97$
	$W_{out2}$	$n_f = 11$	$\omega_f = 0,312$
	$W_{out3}$	$n_f = 8$	$\omega_f = 15,63$
D Model optymalny ze względu na $\Delta_4$	$W_{out1}$	$n_f = 1$	$\omega_f = 0,954$
	$W_{out2}$	$n_f = 25$	$\omega_f = 15,04$
	$W_{out3}$	$n_f = 7$	$\omega_f = 2,20$
E Model optymalny ze względu na $\Delta_5$	$W_{out1}$	$n_f = 22$	$\omega_f = 0,351$
	$W_{out2}$	$n_f = 2$	$\omega_f = 0,0359$
	$W_{out3}$	$n_f = 12$	$\omega_f = 1,84$
F Model optymalny ze względu na $\Delta_6$	$W_{out1}$	$n_f = 4$	$\omega_f = 0,144$
	$W_{out2}$	$n_f = 12$	$\omega_f = 0,0225$
	$W_{out3}$	$n_f = 19$	$\omega_f = 3,54$
G Model optymalny ze względu na $\Delta_7$	$W_{out1}$	$n_f = 3$	$\omega_f = 0,0133$
	$W_{out2}$	$n_f = 14$	$\omega_f = 0,1213$
	$W_{out3}$	$n_f = 17$	$\omega_f = 0,0428$

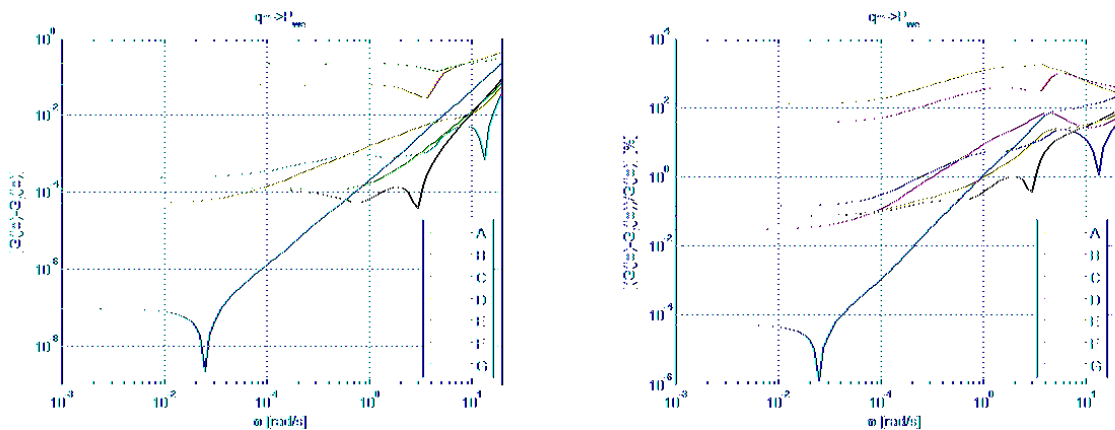




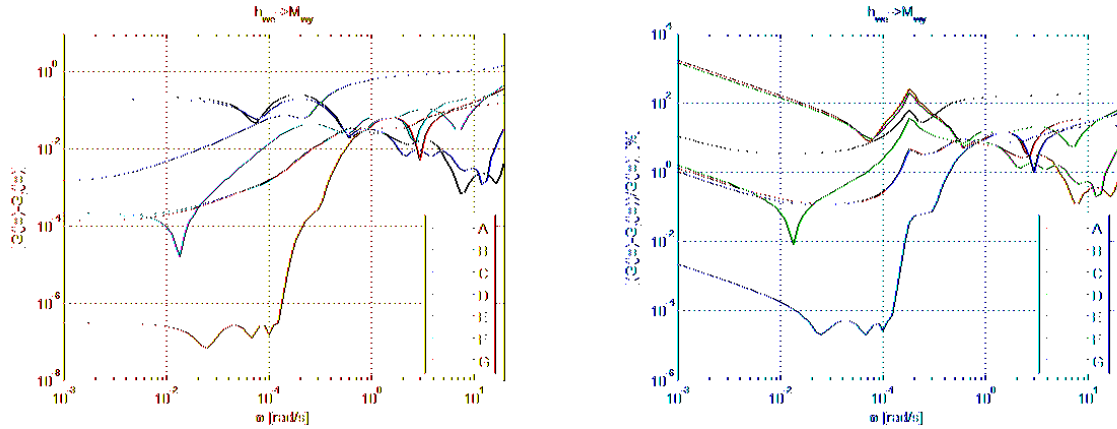
Rys. B.1. Bezwzględny oraz względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla toru  $q \sim \rightarrow M_{wy}$



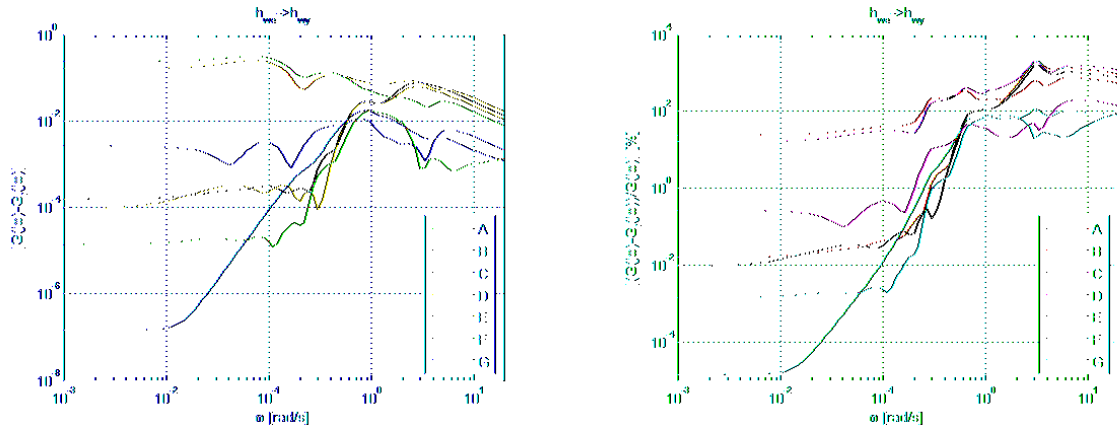
Rys. B.2. Bezwzględny oraz względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla toru  $q \sim \rightarrow h_{wy}$



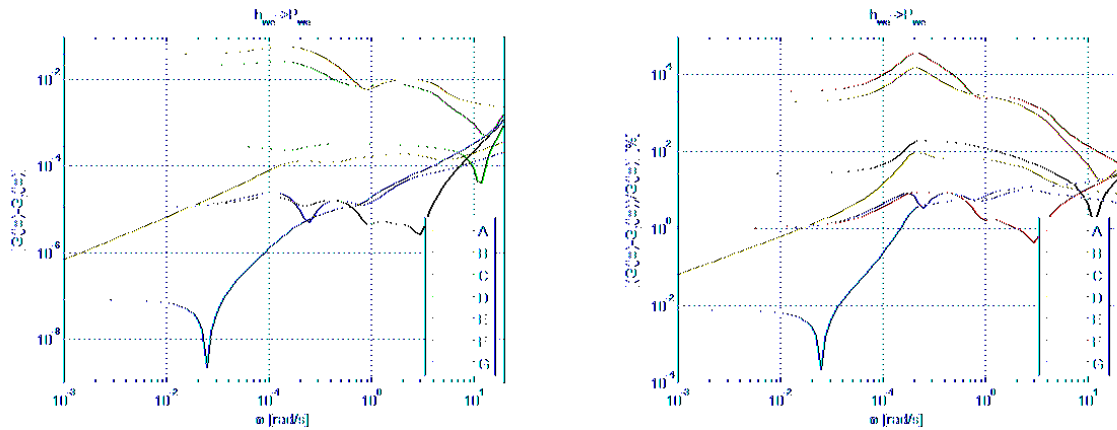
Rys. B.3. Bezwzględny oraz względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla toru  $q \sim \rightarrow P_{we}$



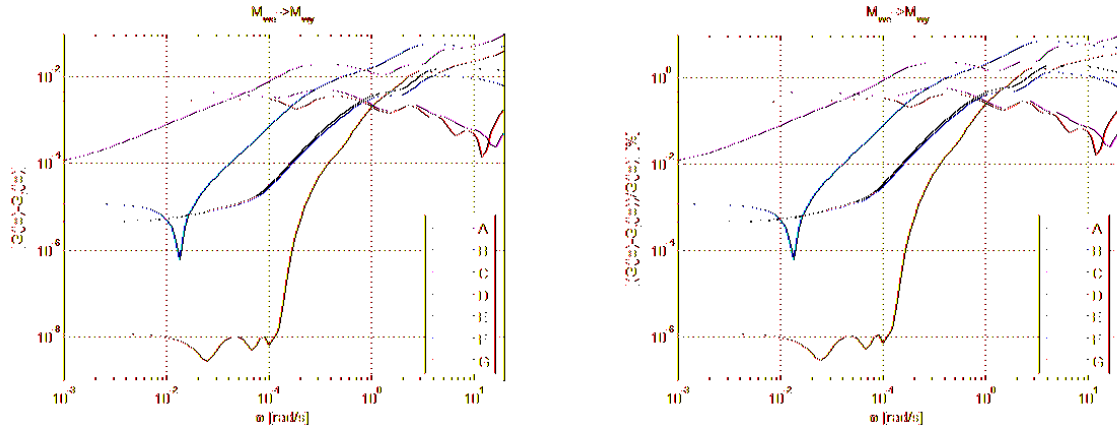
Rys. B.4. Bezwzględny oraz względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla toru  $h_{we} \rightarrow M_{wy}$



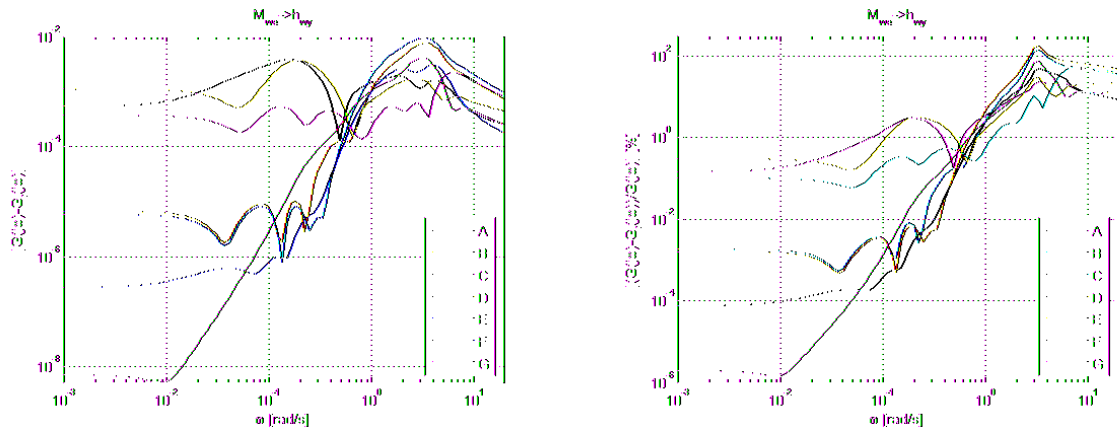
Rys. B.5. Bezwzględny oraz względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla toru  $h_{we} \rightarrow h_{wy}$



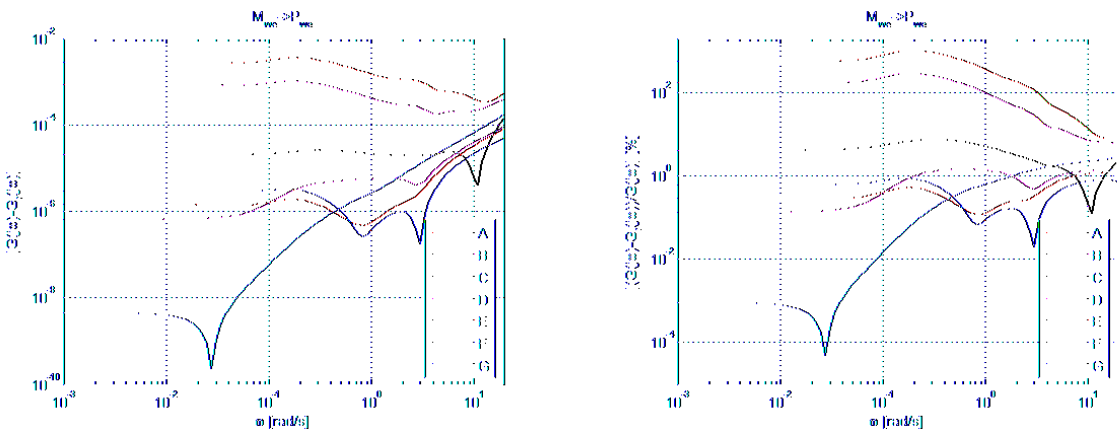
Rys. B.6. Bezwzględny oraz względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla toru  $h_{we} \rightarrow P_{we}$



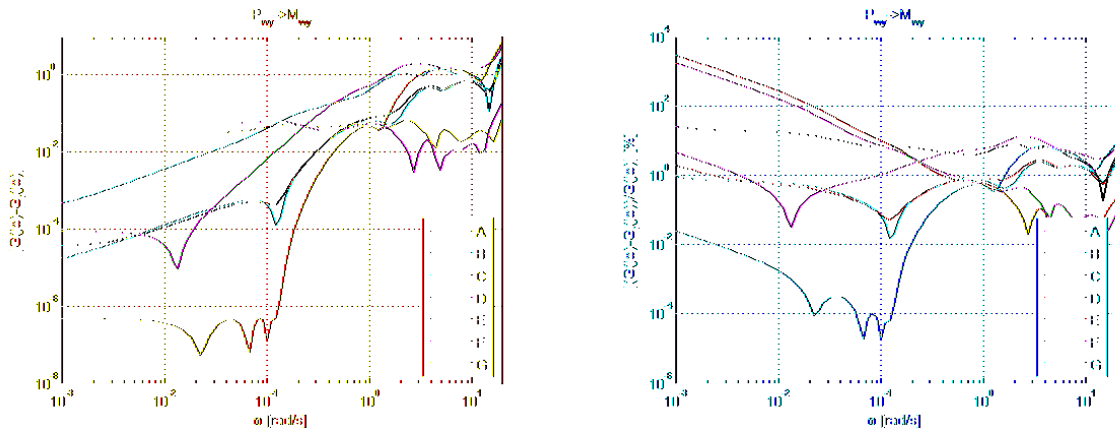
Rys. B.7. Bezwzględny oraz względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla toru  $M_{we} \rightarrow M_{wy}$



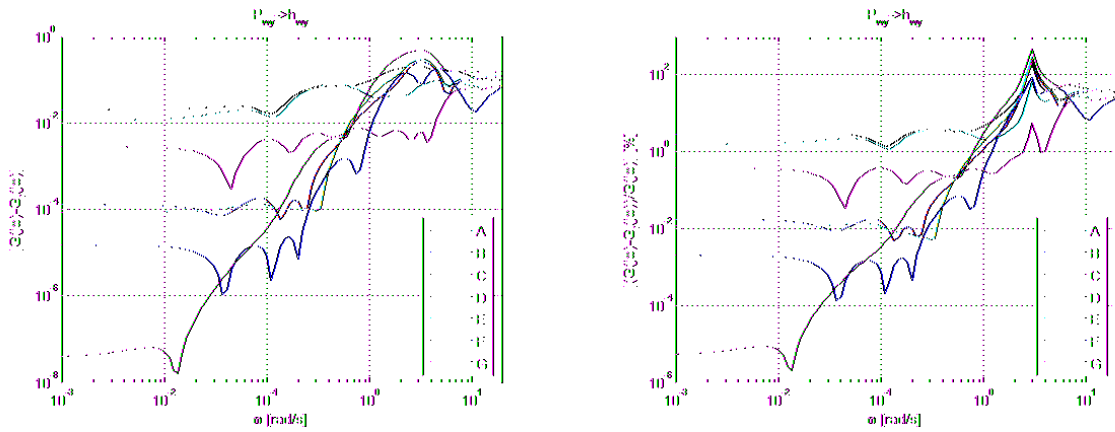
Rys. B.8. Bezwzględny oraz względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla toru  $M_{we} \rightarrow h_{wy}$



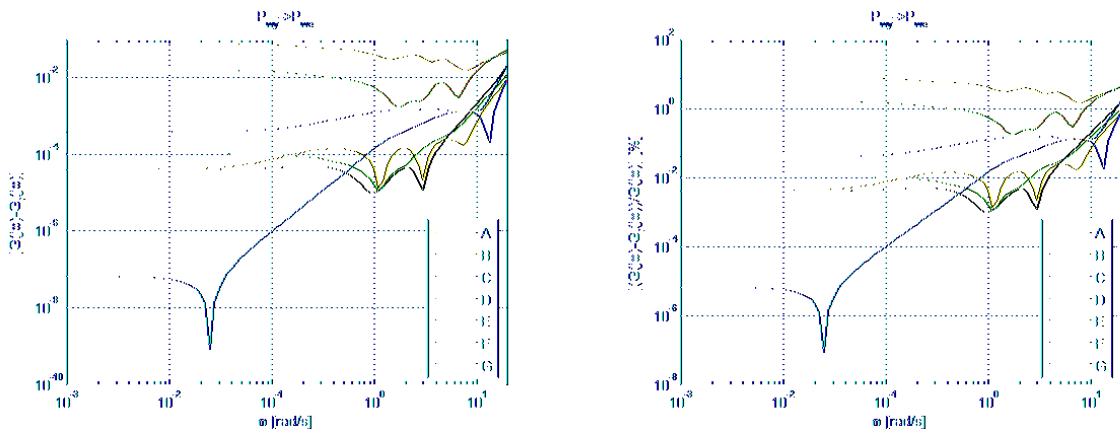
Rys. B.9. Bezwzględny oraz względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla toru  $M_{we} \rightarrow P_{we}$



Rys. B.10. Bezwzględny oraz względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla toru  $P_{wy} \rightarrow M_{wy}$



Rys. B.11. Bezwzględny oraz względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla toru  $P_{wy} \rightarrow h_{wy}$

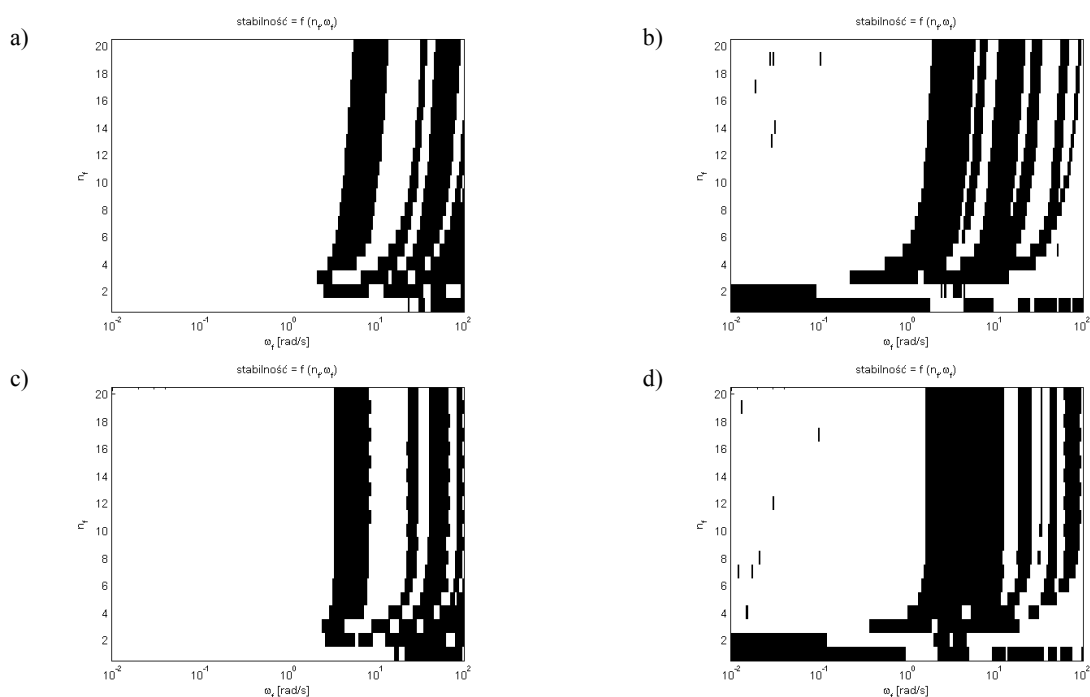


Rys. B.12. Bezwzględny oraz względny błąd aproksymacji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla toru  $P_{wy} \rightarrow P_{we}$

### B.3. Wpływ parametrów metody FW na wyniki redukcji

Tab. B.17. Błąd aproksymacji modelu zredukowanego (rzęd modelu  $k=25$ ) w funkcji typu filtru

		Optymalny Filtr względem miary:						
		$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$	$\Delta_6$	$\Delta_7$
		$*10^{-4}$	$*10^{-2}$		$*10^{-4}$	$*10^{-3}$	$*10^{-3}$	$*10^{-3}$
Buterworth Wi	$n_f=15$	7.221	2.809	7.472	2.226	4.347	10.03	14.84
	$\omega_f=19,95$		$n_f=20$ $\omega_f=25,12$	$n_f=4$ $\omega_f=3,31$	$n_f=10$ $\omega_f=19,05$	$n_f=14$ $\omega_f=21,88$	$n_f=5$ $\omega_f=4,57$	$n_f=3$ $\omega_f=0,0115$
Bessel Wi	$n_f=12$	6.952	3.019	7.294	2.222	4.749	9.505	14.86
	$\omega_f=25,12$		$n_f=4$ $\omega_f=3,02$	$n_f=5$ $\omega_f=3,47$	$n_f=13$ $\omega_f=25,12$	$n_f=4$ $\omega_f=2,88$	$n_f=5$ $\omega_f=4,37$	$n_f=3$ $\omega_f=0,01$
Czebyszew Wi	$n_f=19$	7.167	2.471	8.227	2.439	4.532	10.04	14.88
	$\omega_f=20,89$		$n_f=8$ $\omega_f=13,80$	$n_f=4$ $\omega_f=4,57$	$n_f=7$ $\omega_f=20,89$	$n_f=19$ $\omega_f=22,91$	$n_f=4$ $\omega_f=4,57$	$n_f=3$ $\omega_f=0,0229$
Buterworth Wo	$n_f=20$	9.504	3.154	8.121	1.908	3.747	10.61	5.175
	$\omega_f=20,89$		$n_f=5$ $\omega_f=15,85$	$n_f=5$ $\omega_f=14,45$	$n_f=9$ $\omega_f=15,14$	$n_f=5$ $\omega_f=15,14$	$n_f=20$ $\omega_f=11,48$	$n_f=3$ $\omega_f=0,0331$
Bessel Wo	$n_f=8$	15.61	2.006	7.919	1.691	3.688	9.415	5.122
	$\omega_f=34,67$		$n_f=6$ $\omega_f=26,30$	$n_f=5$ $\omega_f=15,14$	$n_f=15$ $\omega_f=19,95$	$n_f=5$ $\omega_f=14,45$	$n_f=6$ $\omega_f=26,30$	$n_f=3$ $\omega_f=0,0331$
Czebyszew Wo	$n_f=9$	9.253	3.010	7.432	1.983	5.650	11.16	4.685
	$\omega_f=20,89$		$n_f=11$ $\omega_f=16,60$	$n_f=5$ $\omega_f=26,30$	$n_f=7$ $\omega_f=17,38$	$n_f=19$ $\omega_f=14,45$	$n_f=8$ $\omega_f=11,48$	$n_f=4$ $\omega_f=0,01$
Buterworth Wi+Wo (stabilne)	$n_f=19$	2.195	13.96	5.377	0.2472	17.90	6.399	7.208
	$\omega_f=19,95$		$n_f=1$ $\omega_f=0,01$	$n_f=20$ $\omega_f=19,95$	$n_f=20$ $\omega_f=19,95$	$n_f=1$ $\omega_f=0,01$	$n_f=20$ $\omega_f=19,05$	$n_f=8$ $\omega_f=0,0251$
Bessel Wi+Wo (stabilne)	$n_f=4$	3.672	13.96	6.823	0.5373	16.67	9.230	8.684
	$\omega_f=19,95$		$n_f=1$ $\omega_f=0,01$	$n_f=3$ $\omega_f=8,71$	$n_f=4$ $\omega_f=19,05$	$n_f=7$ $\omega_f=14,45$	$n_f=3$ $\omega_f=8,71$	$n_f=2$ $\omega_f=0,0912$
Czebyszew Wi+Wo (stabilne)	$n_f=8$	2.058	7.914	4.721	0.2339	11.22	6.196	7.942
	$\omega_f=19,95$		$n_f=20$ $\omega_f=95,50$	$n_f=19$ $\omega_f=19,05$	$n_f=19$ $\omega_f=19,95$	$n_f=20$ $\omega_f=95,50$	$n_f=20$ $\omega_f=19,05$	$n_f=4$ $\omega_f=0,0151$



Rys. B.13. Mapa stabilności modeli zredukowanych z zastosowaniem filtrów dolnoprzepustowych Bessela (a)  $k=15$ , (b)  $k=25$  oraz Czebyszewa (c)  $k=15$ , (d)  $k=25$  (stabilne – kolor czarny)

# C. DODATEK C

---

## C.1. Tabele wyników

Tab. C.1. Porównanie wyników redukcji uzyskanych strategią  $1 + \lambda$  w wyniku zastosowania kryteriów zatrzymania algorytmu odniesionych do liczby iteracji oraz liczby wykonanych operacji redukcji

Tab. C.2. Wpływ wartości minimalnego zasięgu mutacji na wyniki redukcji

Tab. C.3. Porównanie wyników redukcji dla różnych kryteriów zatrzymania algorytmu i różnego początkowego zasięgu mutacji strategii  $1 + \lambda$

Tab. C.4. Porównanie wyników redukcji dla różnych zakresów populacji startowych oraz różnego początkowego zasięgu mutacji dla strategii  $1 + \lambda$

Tab. C.5. Porównanie wyników redukcji dla różnej liczebności populacji bazowej oraz potomnej (mały nacisk selektywny)

Tab. C.6. Porównanie wyników redukcji dla różnej liczebności populacji bazowej oraz potomnej (duży nacisk selektywny)

Tab. C.7. Porównanie wyników redukcji dla różnej liczebności populacji potomnej (mały nacisk selektywny)

Tab. C.8. Porównanie wyników redukcji dla różnej liczebności populacji bazowej oraz potomnej (mały nacisk selektywny)

Tab. C.9. Porównanie wyników redukcji dla różnej liczebności populacji bazowej oraz potomnej (mały nacisk selektywny, rozpraszanie populacji – zmniejszanie przystosowania podobnych osobników)

Tab. C.10. Porównanie wyników redukcji dla różnej liczebności populacji bazowej oraz potomnej (duży nacisk selektywny, rozpraszanie populacji – zmniejszanie przystosowania podobnych osobników)

Tab. C.11. Porównanie wyników redukcji dla różnej liczebności populacji bazowej oraz potomnej (mały nacisk selektywny, rozpraszanie populacji – usuwanie podobnych osobników)

Tab. C.12. Porównanie wyników redukcji dla różnej liczebności populacji bazowej oraz potomnej (duży nacisk selektywny, rozpraszanie populacji – usuwanie podobnych osobników)

Tab. C.13. Porównanie wyników redukcji dla różnych zakresów populacji startowych oraz różnego początkowego zasięgu mutacji (strategia  $1 + \lambda$ ) dla algorytmu o zmiennej populacji

Tab. C.14. Redukcja dwustopniowa – porównanie wyników

Tab. C.1. Porównanie wyników redukcji uzyskanych strategią  $1 + \lambda$  w wyniku zastosowania kryteriów zatrzymania algorytmu odniesionych do liczby iteracji oraz liczby wykonanych operacji redukcji

	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$		$\lambda = 3$		$\lambda = 4$		$\lambda = 5$		$\lambda = 7$		$\lambda = 10$	
	KR/KI	KR	KI	KR	KI	KR	KI	KR	KI	KR	KI	KR	KI
$\Delta_6$ – najlepszy wynik [ $10^{-3}$ ]	53.41	53.63	51.76	53.58	53.45	53.41	53.51	53.50	53.37	53.71	53.32	53.67	53.42
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik [%]	37.96	43.68	43.57	43.20	43.28	43.36	43.47	43.34	43.41	43.38	43.39	43.30	43.35
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	13	13	29	19	32	33	36	22	36	25	43	19	37
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	26	21	37	30	43	41	46	30	49	33	57	29	53
$\Delta_6$ – mediana [ $10^{-3}$ ]	204.8	226.6	128.9	225.3	115.5	137.6	104.0	195.4	102.2	143.6	91.56	164.1	98.63
$\Delta_6$ – średnia [ $10^{-3}$ ]	396.0	456.7	272.1	381.0	286.6	321.8	271.6	460.2	310.2	338.0	267.4	338.3	262.5
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe [ $10^{-3}$ ]	397.1	670.6	331.1	394.6	343.3	380.1	342.0	696.9	378.8	390.1	349.7	381.7	344.5
$\Delta_3$ – mediana [%]	157.7	168.1	82.25	164.9	78.14	97.68	70.91	148.3	70.79	119.3	66.30	119.7	71.09
Koszt symulacji – mediana (liczba wykonanych redukcji)	300	425	650	456	960	456	1210	415	1600	497	2240	425	3200
Koszt symulacji – mediana (liczba iteracji algorytmu)	300	212.5	325	152	320	114	302.5	83	320	71	320	42.5	320
Czas trwania algorytmu - mediana [s]	708	1003	1534	1076	2265	1076	2855	979	3775	1173	5285	1003	7549

KR – kryteria zatrzymania określone w liczbie redukcji

KI – kryteria zatrzymania określone w liczbie iteracji algorytmu

100 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

$M=500$ ,  $M_{bp}=50$ ,  $M_{min}=150$  redukcji / iteracji

modyfikacja zasięgu mutacji co 10 redukcji / iteracji

początkowy zasięg mutacji  $\sigma_{pocz}^{n_f} = 3,5$  oraz  $\sigma_{pocz}^{\omega_f} = 3,5$

minimalny zasięg mutacji  $\sigma_{min}^{n_f} = 0,01$  oraz  $\sigma_{min}^{\omega_f} = 0,01$ .

Tab. C.2. Wpływ wartości minimalnego zasięgu mutacji na wyniki redukcji

Warunki zakończenia algorytmu	$\sigma_{min} = 0,001$	$\sigma_{min} = 0,005$	$\sigma_{min} = 0,01$	$\sigma_{min} = 0,02$	$\sigma_{min} = 0,05$	$\sigma_{min} = 0,1$
$\Delta_6$ – najlepszy wynik [ $*10^{-3}$ ]	53.69	53.70	53.50	53.65	53.56	53.45
$\Delta_3$ – najlepszy wynik [%]	43.36	43.88	43.37	43.64	43.92	43.43
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	20	17	22	23	18	14
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	31	28	30	32	29	28
$\Delta_6$ – mediana	0.2134	0.1519	0.1711	0.1558	0.1586	0.1718
$\Delta_6$ – średnia	0.4233	0.3174	0.3578	0.3825	0.3239	0.3949
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.5300	0.3417	0.3840	0.4073	0.3529	0.4036
$\Delta_3$ – mediana [%]	162.5	113.9	138.4	126.1	119.6	129.5
Koszt symulacji – mediana	695	470	410	370	300	245
Koszt symulacji - średnia	1856	1124	842.5	661.4	407.1	289.6
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	2158	1492	903.9	683.5	321.0	146.5

100 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

$M_{min}=150$  redukcji

modyfikacja zasięgu mutacji co 10 redukcji

początkowy zasięg mutacji  $\sigma_{pocz}^{n_f} = 3,5$  oraz  $\sigma_{pocz}^{\omega_f} = 3,5$



Tab. C.3. Porównanie wyników redukcji dla różnych kryteriów zatrzymania algorytmu i różnego początkowego zasięgu mutacji strategii  $1 + \lambda$

Kryteria zakończenia algorytmu	$\sigma_{pocz}=0,1$		$\sigma_{pocz}=0,2$		$\sigma_{pocz}=0,35$		$\sigma_{pocz}=0,5$		$\sigma_{pocz}=0,75$	
	$\sigma_{min}$	M, M <sub>bp</sub> , $\sigma_{min}$	$\sigma_{min}$	M, M <sub>bp</sub> , $\sigma_{min}$	$\sigma_{min}$	M, M <sub>bp</sub> , $\sigma_{min}$	$\sigma_{min}$	M, M <sub>bp</sub> , $\sigma_{min}$	$\sigma_{min}$	M, M <sub>bp</sub> , $\sigma_{min}$
$\Delta_6$ – najlepszy wynik [ $\cdot 10^{-3}$ ]	53.75	53.84	53.69	53.74	53.61	53.79	53.73	53.77	53.76	53.64
$\Delta_3$ – najlepszy wynik [%]	43.39	43.40	44.05	43.39	43.87	43.40	43.35	43.34	43.40	43.96
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	2	2	3	2	4	2	4	5	5	4
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	3	3	6	2	7	4	7	9	8	7
$\Delta_6$ – mediana [ $10^{-3}$ ]	682.6	908.3	593.0	935.5	603.9	791.6	543.3	902.9	581.5	485.9
$\Delta_6$ – średnia	3.061	3.094	2.557	3.232	2.185	1.793	1.581	1.890	0.9692	1.259
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	8.282	7.795	6.474	7.783	6.229	2.667	2.747	2.739	1.581	2.046
$\Delta_3$ – mediana [%]	542.3	703.2	452.0	1049	464.4	606.8	366.3	914.0	416.6	334.8
Koszt symulacji – mediana	635	500	530	500	500	500	455	470	495	500
Koszt symulacji - średnia	947.1	428.8	832	417.3	756	414.7	874	415.8	942	424.5
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	977.7	107.9	736.4	109.8	692.6	100.5	997.2	97.97	1007	90.04

Warunki zakończenia algorytmu	$\sigma_{pocz}=1$		$\sigma_{pocz}=2$		$\sigma_{pocz}=3,5$		$\sigma_{pocz}=5$		$\sigma_{pocz}=7,5$	
	$\sigma_{min}$	M, M <sub>bp</sub> , $\sigma_{min}$	$\sigma_{min}$	M, M <sub>bp</sub> , $\sigma_{min}$	$\sigma_{min}$	M, M <sub>bp</sub> , $\sigma_{min}$	$\sigma_{min}$	M, M <sub>bp</sub> , $\sigma_{min}$	$\sigma_{min}$	M, M <sub>bp</sub> , $\sigma_{min}$
$\Delta_6$ – najlepszy wynik [ $10^{-3}$ ]	53.73	53.72	53.63	53.68	53.50	53.50	53.71	53.63	53.38	53.65
$\Delta_3$ – najlepszy wynik [%]	43.79	44.03	43.60	43.84	43.37	43.34	38.60	43.31	43.38	42.79
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	8	4	15	12	22	22	26	28	30	23
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	11	8	17	19	30	30	44	42	42	36
$\Delta_6$ – mediana [ $10^{-3}$ ]	350.2	478.1	228.2	237.7	171.1	195.4	117.2	119.3	111.1	136.7
$\Delta_6$ – średnia	1.076	0.9940	0.5282	0.6160	0.3578	0.4602	0.2748	0.2982	0.2715	0.3334
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	1.823	1.610	0.7192	0.9607	0.3840	0.6969	0.3349	0.3578	0.3359	0.3691
$\Delta_3$ – mediana [%]	279.1	299.1	164.0	172.9	138.4	148.3	96.66	89.05	84.35	104.7
Koszt symulacji – mediana	545	500	415	460	410	415	420	420	425	440
Koszt symulacji - średnia	985.9	433	990	440.1	842.5	424.5	869.5	429	683.1	441.3
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	1126	81.43	1181	66.19	903.9	65.31	1317	50.28	676.0	48.05

100 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

M=500, M<sub>bp</sub>=50, M<sub>min</sub>=150 redukcji,  $\lambda = 5$ , modyfikacja zasięgu mutacji co 10 redukcji,

minimalny zasięg mutacji:  $\sigma_{min}^{n_f} = 0,01$  oraz  $\sigma_{min}^{\omega_f} = 0,01$ .

Tab. C.4 Porównanie wyników redukcji dla różnych zakresów populacji startowych oraz różnego początkowego zasięgu mutacji dla strategii 1 + λ

Zakres wartości punktów	$\sigma_{pocz}=0,1$			$\sigma_{pocz}=0,2$			$\sigma_{pocz}=0,35$			$\sigma_{pocz}=0,5$			$\sigma_{pocz}=0,75$		
	0-2	0-20	0-50	0-2	0-20	0-50	0-2	0-20	0-50	0-2	0-20	0-50	0-2	0-20	0-50
$\Delta_6$ – najlepszy wynik [ $10^{-3}$ ]	49.14	53.84	53.67	40.05	53.74	108.6	44.18	53.79	117.1	48.87	53.77	89.66	53.47	53.64	90.42
$\Delta_3$ – najlepszy wynik	27.93	43.40	44.21	27.44	43.39	76.25	28.42	43.40	83.46	27.77	43.34	80.44	28.93	43.96	86.09
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	6	2	1	8	2	0	15	2	0	29	5	0	48	4	0
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	70	3	1	77	2	0	82	4	0	89	9	1	96	7	1
$\Delta_6$ – mediana [ $10^{-3}$ ]	75.99	908.3	992.4	75.26	935.5	982.1	73.90	791.6	979.6	67.84	902.9	972.1	61.47	485.9	957.5
$\Delta_6$ – średnia [ $10^{-3}$ ]	626.4	3094	4936	376.1	3232	5127	204.0	1793	3462	190.5	1890	3395	67.14	1259	3108
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	1.911	7.795	16.36	1.193	7.783	16.28	0.8108	2.667	9.732	0.8106	2.739	9.683	0.02431	2.046	10.14
$\Delta_3$ – mediana	38.41	703.2	2056	38.73	1049	2097	45.21	606.8	2032	44.10	914.0	2073	44.19	334.8	2018
Koszt symulacji – mediana	170	500	410	198	500	360	208	500	355	230	470	345	248	500	355
Koszt symulacji - średnia	180.5	428.8	364.4	200.1	417.3	342.3	209.4	414.7	351.8	228.9	415.8	352.9	242.8	424.5	355.8
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	34.14	107.9	146.5	38.19	109.8	136.0	41.21	100.5	136.6	57.19	97.97	132.9	64.37	90.04	126.4

Zakres wartości punktów	$\sigma_{pocz}=1,0$			$\sigma_{pocz}=2,0$			$\sigma_{pocz}=3,5$			$\sigma_{pocz}=5,0$			$\sigma_{pocz}=7,5$		
	0-2	0-20	0-50	0-2	0-20	0-50	0-2	0-20	0-50	0-2	0-20	0-50	0-2	0-20	0-50
$\Delta_6$ – najlepszy wynik [ $10^{-3}$ ]	50.41	53.72	54.26	53.37	53.68	53.83	53.38	53.50	53.89	53.28	53.63	53.78	53.46	53.65	53.78
$\Delta_3$ – najlepszy wynik	28.11	44.03	44.05	36.23	43.84	44.09	43.20	43.34	43.90	42.99	43.31	44.11	43.39	42.79	44.11
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	63	4	1	87	12	1	86	22	3	69	28	1	65	23	4
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	97	8	1	97	19	2	96	30	6	85	42	3	79	36	6
$\Delta_6$ – mediana [ $10^{-3}$ ]	55.49	478.1	965.1	54.30	237.7	942.9	54.37	195.4	944.0	54.63	119.3	938.8	55.46	136.7	935.3
$\Delta_6$ – średnia [ $10^{-3}$ ]	73.68	994.0	2901	58.19	616.0	1250	63.33	460.2	789.5	74.95	298.2	788.1	86.80	333.4	772.1
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe [ $10^{-3}$ ]	89.17	1610	9628	12.56	960.7	1831	35.58	696.9	327.8	47.34	357.8	321.8	61.55	369.1	331.0
$\Delta_3$ – mediana	44.29	299.1	2019	44.11	173.0	2010	44.13	148.3	2005	44.15	89.05	2001	44.69	104.7	2003
Koszt symulacji – mediana	255	500	330	278	460	335	255	415	325	258	420	400	250	440	500
Koszt symulacji - średnia	249.4	433.0	341.4	263.1	440.1	350.5	271.6	424.5	355.3	279.7	429.0	383.4	279.4	441.3	482.6
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	76.06	81.43	125.6	84.57	66.19	109.5	92.65	65.31	107.2	96.09	50.28	98.32	112.3	48.05	37.94

100 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

M=500,  $M_{bp}=50$ , MM=150 redukcji, modyfikacja zasięgu mutacji co 10 redukcji,  $\lambda = 5$ , minimalny zasięg mutacji  $\sigma_{min}^{nf} = 0,01$  oraz  $\sigma_{min}^{\omega f} = 0,01$ .

Tab. C.5. Porównanie wyników redukcji dla różnej liczebności populacji bazowej oraz potomnej (mały nacisk selektywny)

Rodzaj algorytmu	$\mu = 2, \lambda = 2$			$\mu = 2, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 8$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik [ $10^{-3}$ ]	67.16	53.72	53.50	58.02	53.30	53.59	56.58	53.57	53.66	54.12	53.73	53.87
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	60.25	43.46	43.86	43.78	43.96	44.09	44.45	44.00	44.08	44.34	44.01	43.85
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	0	13	9	1	12	7	1	10	13	7	13	8
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	3	22	15	7	18	13	7	20	25	20	26	19
$\Delta_6$ - mediana	0.4339	0.2449	0.2939	0.3167	0.2583	0.2537	0.2767	0.2301	0.2465	0.2327	0.2271	0.2346
$\Delta_6$ – średnia	0.7888	0.4057	0.6444	0.5664	0.6250	0.7376	0.4276	0.3174	0.4448	0.3165	0.2884	0.3514
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.9521	0.4736	1.162	0.7291	0.9872	1.435	0.4699	0.3635	0.6091	0.3125	0.2577	0.3454
$\Delta_3$ - mediana	345.5	180.1	227.7	277.9	202.5	182.9	204.6	163.8	179.7	165.2	162.1	168.1
Koszt symulacji – mediana	152	211	256	154	216	270	152	210	228	176	236	232
Koszt symulacji - średnia	164.3	280.6	313.0	202.4	277.2	312.1	163.4	254.0	299.4	210.6	270.0	289.7
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	21.05	141.4	150.1	87.87	134.0	142.0	21.03	114.6	143.1	85.68	120.7	133.4

Rodzaj algorytmu	$\mu = 8, \lambda = 8$			$\mu = 8, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 32$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik [ $10^{-3}$ ]	54.78	53.65	53.78	54.47	53.90	53.31	54.88	54.42	53.41	53.63	53.77	53.63
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	42.87	43.13	43.25	44.00	43.95	42.95	44.66	43.88	44.12	43.33	44.13	43.39
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	7	13	10	8	13	19	5	7	12	7	13	15
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	18	25	24	30	29	26	21	30	29	23	29	27
$\Delta_6$ - mediana	0.2336	0.1681	0.2257	0.1816	0.1884	0.2334	0.2024	0.1571	0.1772	0.1888	0.1888	0.1594
$\Delta_6$ – średnia	0.3277	0.2769	0.2247	0.2380	0.2373	0.2421	0.2538	0.2098	0.1963	0.2264	0.2053	0.1960
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.3671	0.4084	0.1548	0.2461	0.2674	0.1795	0.2720	0.1651	0.1253	0.1579	0.1492	0.1323
$\Delta_3$ - mediana	165.5	122.5	151.9	145.8	128.7	164.1	145.9	131.7	119.6	136.7	140.0	121.7
Koszt symulacji – mediana	152	192	216	184	216	264	184	200	208	208	240	240
Koszt symulacji - średnia	178.5	221.9	261.9	217.6	250.6	285.6	196.0	220.8	241.3	223.0	245.8	263.0
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	39.71	84.81	123.3	90.09	106.9	123.1	42.45	65.68	97.57	56.89	75.89	89.25

100 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

Algorytm bez rozpraszania populacji. Mały nacisk selektywny ( $C=1$ ). Populacja startowa:  $\omega_f$  - posiew równomierny na przedziale 0 – 20 rad/s.

Parametry zatrzymania algorytmu  $M=500$ ,  $M_{bp}=50$ ,  $M_{min}=150$  redukcji.

Tab. C.6. Porównanie wyników redukcji dla różnej liczebności populacji bazowej oraz potomnej (duży nacisk selektywny)

Rodzaj algorytmu	$\mu = 2, \lambda = 2$			$\mu = 2, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 8$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik	66.16	53.60	53.63	54.01	53.83	54.20	59.64	53.59	53.62	53.76	53.32	53.33
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	48.50	44.00	43.94	44.22	42.78	43.74	44.36	43.28	44.09	44.20	44.02	43.78
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	0	5	6	3	7	9	1	12	7	4	15	12
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	3	16	12	7	12	16	7	23	16	19	27	24
$\Delta_6$ - mediana	0.5939	0.2358	0.2680	0.3394	0.2450	0.2382	0.4169	0.2473	0.2626	0.2296	0.1818	0.2193
$\Delta_6$ – średnia	1.110	0.5280	0.6323	0.6310	0.5548	0.4951	0.6233	0.4013	0.3653	0.3244	0.2653	0.3467
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	1.860	0.8455	1.045	0.9194	0.9293	0.6631	0.6679	0.5350	0.3782	0.3025	0.2634	0.5412
$\Delta_3$ - mediana	452.8	175.7	201.7	252.9	182.2	175.7	343.0	178.9	178.1	175.1	147.6	160.7
Koszt symulacji – mediana	152	198	218	154	222	220	152	210	224	172	212	252
Koszt symulacji - średnia	159.1	276.3	297.8	198.6	281.0	285.6	164.9	258.8	295.4	206.7	269.8	302.8
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	20.69	139.9	149.5	87.96	134.9	136.4	32.70	113.3	145.0	79.03	123.7	129.8

Rodzaj algorytmu	$\mu = 8, \lambda = 8$			$\mu = 8, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 32$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik	54.18	53.61	53.57	53.69	53.85	53.37	53.97	53.82	53.89	53.57	53.83	54.50
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	43.30	43.28	43.58	43.56	43.74	43.24	44.17	43.06	43.48	43.49	43.78	43.74
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	8	16	18	7	18	13	6	14	14	16	12	10
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	18	29	28	22	37	20	17	36	33	40	32	34
$\Delta_6$ - mediana	0.2417	0.2028	0.1878	0.2199	0.1485	0.2284	0.2387	0.1543	0.1608	0.1375	0.1588	0.1616
$\Delta_6$ – średnia	0.3378	0.2321	0.2041	0.2801	0.2103	0.2483	0.2471	0.1947	0.1808	0.1854	0.1933	0.1965
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.3009	0.1837	0.1419	0.2985	0.1939	0.2000	0.1552	0.1536	0.1135	0.1446	0.1306	0.1313
$\Delta_3$ - mediana	187.5	148.7	128.0	162.1	118.8	160.4	163.3	111.7	120.7	109.4	131.7	125.4
Koszt symulacji – mediana	152	200	208	200	232	232	176	224	224	240	240	240
Koszt symulacji - średnia	174.9	223.4	267.9	232.0	254.7	266.2	197.0	241.1	241.1	259.8	252.2	256.0
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	40.33	88.54	120.2	91.62	100.8	117.8	52.68	82.32	86.51	92.63	86.87	88.95

100 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

Algorytm bez rozpraszania populacji. Duży nacisk selektywny ( $C=0$ ). Populacja startowa:  $\omega_f$  - posiew równomierny na przedziale 0 – 20 rad/s.

Parametry zatrzymania algorytmu  $M=500$ ,  $M_{bp}=50$ ,  $M_{min}=150$  redukcji.

Tab. C.7. Porównanie wyników redukcji dla różnej liczebności populacji potomnej (mały nacisk selektywny)

Rodzaj algorytmu	$\mu = 2, \lambda = 2$			$\mu = 2, \lambda = 4$			$\mu = 2, \lambda = 6$			$\mu = 2, \lambda = 10$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik [ $*10^{-3}$ ]	67.16	53.72	53.50	58.02	53.30	53.59	53.64	54.15	53.86	53.83	53.60	53.83
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	60.25	43.46	43.86	43.78	43.96	44.09	44.01	43.90	43.40	43.98	44.06	42.56
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	0	13	9	1	12	7	8	5	11	7	6	10
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	3	22	15	7	18	13	17	14	15	16	12	22
$\Delta_6$ - mediana	0.4339	0.2449	0.2939	0.3167	0.2583	0.2537	0.3085	0.2575	0.2688	0.2848	0.2572	0.2573
$\Delta_6$ – średnia	0.7888	0.4057	0.6444	0.5664	0.6250	0.7376	0.5000	0.5964	0.4366	0.4597	0.4954	0.5673
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.9521	0.4736	1.162	0.7291	0.9872	1.435	0.6376	1.153	0.4401	0.5542	0.6339	0.7726
$\Delta_3$ - mediana	345.5	180.1	227.7	277.9	202.5	182.9	232.8	202.5	203.1	227.7	180.9	196.2
Koszt symulacji – mediana	152	211	256	154	216	270	164	209	248	192	207	262
Koszt symulacji - średnia	164.3	280.6	313.0	202.4	277.2	312.1	220.7	278.1	310.0	235.1	249.0	297.7
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	21.05	141.4	150.1	87.87	134.0	142.0	103.3	135.6	145.3	108.4	114.2	134.5

Rodzaj algorytmu	$\mu = 2, \lambda = 14$			$\mu = 2, \lambda = 20$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik [ $*10^{-3}$ ]	53.93	54.01	54.88	53.35	53.64	53.54
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	43.87	43.85	43.34	42.78	43.51	43.93
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	8	11	4	8	8	9
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	16	17	12	19	15	19
$\Delta_6$ - mediana	0.2416	0.2444	0.2649	0.2316	0.2821	0.2232
$\Delta_6$ – średnia	0.4622	0.4716	0.6845	0.4337	0.4625	0.4681
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.6241	0.6581	1.250	0.6085	0.4683	0.7136
$\Delta_3$ - mediana	179.1	184.4	194.5	181.2	221.0	166.6
Koszt symulacji – mediana	226	240	226	242	262	262
Koszt symulacji - średnia	262.5	265.5	278.8	287.4	301.4	310.6
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	118.0	114.8	128.4	123.3	127.8	135.3

100 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

Algorytm bez rozpraszania populacji. Mały nacisk selektywny ( $C=1$ ). Populacja startowa:  $\omega_f$  - posiew równomierny na przedziale 0 – 20 rad/s.

Parametry zatrzymania algorytmu  $M=500$ ,  $M_{bp}=50$ ,  $M_{min}=150$  redukcji.

Tab. C.8. Porównanie wyników redukcji dla różnej liczebności populacji bazowej oraz potomnej (mały nacisk selektywny)

Rodzaj algorytmu	$\mu = 2, \lambda = 2$			$\mu = 2, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 8$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik	55.51	50.16	44.28	54.44	53.71	54.02	54.90	53.77	54.39	53.69	53.58	54.35
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	30.57	29.67	28.81	30.35	29.35	28.73	32.85	29.35	29.79	29.97	28.39	29.43
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	7	14	16	17	12	7	2	21	13	9	11	10
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	61	86	86	83	88	89	78	95	95	94	98	93
$\Delta_6$ - mediana	90.32	75.12	75.50	75.05	75.69	75.79	81.16	74.68	75.09	75.63	75.09	75.29
$\Delta_6$ – średnia	114.2	93.03	92.80	83.01	83.36	95.66	92.58	73.04	75.24	77.44	72.65	75.51
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	100.6	75.14	128.1	33.45	40.70	128.0	43.58	12.54	14.19	15.22	11.02	11.79
$\Delta_3$ - mediana	58.71	40.54	39.17	46.93	38.84	38.62	53.23	39.18	37.71	40.95	38.71	37.76
Koszt symulacji – mediana	152	190	294	158	206	320	152	188	246	156	188	252
Koszt symulacji - średnia	158.9	251.8	332.0	191.8	278.1	335.9	162.0	234.2	298.7	207.0	233.9	288.4
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	16.52	128.4	151.2	70.69	141.1	150.8	19.59	105.2	142.0	91.81	110.1	135.1

Rodzaj algorytmu	$\mu = 8, \lambda = 8$			$\mu = 8, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 32$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik	58.62	56.33	55.06	54.78	56.76	57.37	58.53	58.48	58.24	59.06	58.16	53.44
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	33.63	29.85	32.00	33.10	32.57	32.88	32.83	33.87	31.41	33.18	32.17	28.23
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	3	8	11	4	8	7	3	2	4	2	3	5
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	94	99	100	99	98	99	99	100	100	100	100	100
$\Delta_6$ - mediana	75.30	74.27	73.01	75.74	75.05	73.98	76.02	75.35	75.13	75.60	75.02	73.36
$\Delta_6$ – średnia	77.59	72.87	71.54	75.37	73.53	72.61	75.92	74.37	73.52	74.80	73.70	72.05
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	14.43	7.891	7.295	8.189	8.426	6.917	7.604	6.263	6.819	6.094	6.145	6.178
$\Delta_3$ - mediana	42.13	37.46	37.20	38.22	37.74	37.08	38.26	37.61	37.47	37.63	37.34	37.29
Koszt symulacji – mediana	152	184	184	168	200	200	160	160	192	176	176	176
Koszt symulacji - średnia	167.8	220.0	244.4	190.7	222.2	236.6	183.0	189.1	198.4	206.4	209.3	214.1
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	27.91	92.54	118.5	59.96	88.25	100.6	37.25	42.81	42.18	50.72	50.84	56.20

100 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

Algorytm bez rozpraszania populacji. Mały nacisk selektywny ( $C=1$ ). Populacja startowa:  $\omega_f$  - posiew równomierny na przedziale 0 – 2 rad/s.

Parametry zatrzymania algorytmu  $M=500$ ,  $M_{bp}=50$ ,  $M_{min}=150$  redukcji.

Tab. C.9. Porównanie wyników redukcji dla różnej liczebności populacji bazowej oraz potomnej (mały nacisk selektywny, rozpraszanie populacji – zmniejszanie przystosowania podobnych osobników)

Rodzaj algorytmu	$\mu = 2, \lambda = 2$			$\mu = 2, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 8$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik [ $*10^{-3}$ ]	57.59	53.54	53.67	54.14	53.72	53.62	56.05	54.10	53.32	55.74	53.90	53.59
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	44.25	43.93	44.12	44.71	43.02	42.10	48.36	43.71	43.81	43.71	39.35	44.12
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	1	8	10	3	8	11	1	10	15	4	9	9
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	4	14	17	8	16	13	6	19	24	11	19	16
$\Delta_6$ - mediana	0.3466	0.2729	0.2692	0.2987	0.2479	0.2762	0.3645	0.2303	0.2302	0.2483	0.2334	0.2444
$\Delta_6$ – średnia	0.6552	0.6190	0.4703	0.6882	0.4558	0.7278	0.5532	0.2782	0.3086	0.3568	0.3069	0.3218
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	1.253	0.9818	0.6058	1.369	0.5830	1.250	0.6260	0.2424	0.2902	0.3434	0.2843	0.3151
$\Delta_3$ - mediana	282.3	230.3	193.3	221.9	189.1	207.6	254.3	151.0	162.5	187.8	169.9	172.1
Koszt symulacji – mediana	152	187	197	154	238	210	152	208	204	164	204	212
Koszt symulacji - średnia	161.4	250.1	249.5	195.1	282.8	262.8	172.2	250.8	239.6	190.2	242.6	239.4
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	23.83	131.2	120.4	74.47	129.1	124.1	54.44	106.2	99.90	64.77	100.3	88.90

Rodzaj algorytmu	$\mu = 8, \lambda = 8$			$\mu = 8, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 32$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik [ $*10^{-3}$ ]	57.89	54.06	53.60	53.84	54.72	53.72	54.35	55.69	54.35	54.26	54.55	54.31
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	43.98	42.98	43.95	43.51	43.59	43.82	43.99	43.46	43.11	43.75	43.74	42.60
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	2	6	9	7	10	19	5	10	14	8	14	12
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	16	20	22	25	28	33	16	36	33	31	36	37
$\Delta_6$ - mediana	0.2333	0.2284	0.2350	0.1917	0.1734	0.1765	0.2010	0.1509	0.1384	0.1761	0.1407	0.1519
$\Delta_6$ – średnia	0.2891	0.2539	0.2470	0.2372	0.2253	0.2172	0.2320	0.2105	0.1878	0.2073	0.1800	0.1893
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.2044	0.2074	0.1776	0.2181	0.2388	0.1951	0.1449	0.1888	0.1482	0.1338	0.1184	0.1496
$\Delta_3$ - mediana	171.1	149.1	175.7	130.8	124.2	134.5	151.5	113.0	106.7	137.8	104.8	125.0
Koszt symulacji – mediana	160	188	192	184	216	232	176	208	216	208	240	240
Koszt symulacji - średnia	187.0	220.8	222.0	214.4	235.5	264.0	197.0	229.4	236.8	235.2	258.9	250.6
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	55.45	85.87	78.55	80.45	93.23	105.1	55.22	72.17	84.94	72.68	85.47	79.05

100 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

Algorytm z rozpraszaniem populacji (zmniejszanie przystosowania podobnych osobników). Mały nacisk selektywny ( $C=1$ ). Populacja startowa:  $\omega_f$  - posiew równomierny na przedziale 0 – 20 rad/s. Parametry zatrzymania algorytmu  $M=500$ ,  $M_{bp}=50$ ,  $M_{min}=150$  redukcji.

Tab. C.10. Porównanie wyników redukcji dla różnych liczebności populacji bazowej oraz potomnej (duży nacisk selektywny, rozpraszanie populacji – zmniejszanie przystosowania podobnych osobników)

Rodzaj algorytmu	$\mu = 2, \lambda = 2$			$\mu = 2, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 8$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik [ $*10^{-3}$ ]	94.25	53.57	53.69	53.75	54.16	53.67	56.82	53.75	53.93	55.94	53.72	53.66
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	72.10	43.83	44.05	44.02	37.63	41.88	44.15	43.61	43.21	44.42	43.02	44.04
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	0	8	7	1	8	8	3	14	13	6	14	18
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	1	20	10	10	15	15	9	24	22	15	24	22
$\Delta_6$ - mediana	0.3621	0.2364	0.3132	0.3065	0.2415	0.2596	0.2798	0.2267	0.1760	0.2244	0.2452	0.2260
$\Delta_6$ – średnia	0.7039	0.6829	0.5945	0.5993	0.4672	0.4654	0.5574	0.3317	0.3689	0.3259	0.3139	0.3557
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.8126	1.143	0.7083	1.128	0.6444	0.4596	0.7187	0.4050	0.5886	0.3156	0.2947	0.5296
$\Delta_3$ - mediana	317.8	212.8	237.2	237.9	169.2	195.9	224.0	158.0	146.1	164.6	168.5	166.1
Koszt symulacji – mediana	152	200	201	154	208	218	152	204	216	164	200	204
Koszt symulacji - średnia	163.7	248.5	254.8	193.2	280.7	277.0	173.3	260.0	247.8	192.1	248.4	245.8
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	34.82	114.7	123.7	79.53	142.1	133.1	55.57	120.1	102.3	59.33	113.0	105.6

Rodzaj algorytmu	$\mu = 8, \lambda = 8$			$\mu = 8, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 32$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik [ $*10^{-3}$ ]	54.78	53.79	53.76	53.62	53.48	53.55	53.70	54.43	54.11	54.71	54.04	53.64
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	44.29	43.26	40.21	44.30	44.02	43.51	43.85	43.93	42.73	43.82	43.78	43.71
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	5	12	16	14	18	16	9	13	14	10	18	16
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	12	29	28	26	33	24	28	30	42	25	34	36
$\Delta_6$ - mediana	0.2559	0.1852	0.2210	0.1992	0.1706	0.2077	0.1809	0.1626	0.1294	0.1777	0.1597	0.1477
$\Delta_6$ – średnia	0.2920	0.2348	0.2302	0.2314	0.2290	0.2061	0.2182	0.2120	0.1852	0.2170	0.1900	0.1744
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.2450	0.2315	0.2029	0.1874	0.2326	0.1343	0.1568	0.1659	0.1475	0.1607	0.1208	0.1134
$\Delta_3$ - mediana	188.5	135.2	144.8	149.2	123.8	148.0	129.2	130.5	99.18	125.0	113.7	103.3
Koszt symulacji – mediana	152	200	184	200	232	216	192	224	224	208	240	240
Koszt symulacji - średnia	187.7	238.6	212.0	223.0	258.6	246.4	210.7	242.4	241.4	238.7	254.7	264.3
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	60.99	102.4	70.84	74.33	100.6	85.95	72.49	86.13	85.58	74.86	76.84	93.45

100 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

Algorytm z rozpraszaniem populacji (zmniejszanie przystosowania podobnych osobników). Duży nacisk selektywny ( $C=0$ ). Populacja startowa:  $\omega_f$  - posiew równomierny na przedziale 0 – 20 rad/s. Parametry zatrzymania algorytmu  $M=500$ ,  $M_{bp}=50$ ,  $M_{min}=150$  redukcji.



Tab. C.11. Porównanie wyników redukcji dla różnych liczebności populacji bazowej oraz potomnej (mały nacisk selektywny, rozpraszanie populacji – usuwanie podobnych osobników)

Rodzaj algorytmu	$\mu = 2, \lambda = 2$			$\mu = 2, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 8$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik [ $*10^{-3}$ ]	54.95	53.60	53.83	54.98	53.64	53.67	56.91	53.44	53.47	54.27	53.98	53.41
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	44.45	43.22	43.22	42.45	39.42	43.36	43.97	43.93	43.43	43.81	43.92	43.33
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	3	15	19	3	16	17	2	15	19	9	21	22
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	7	28	36	18	32	32	7	34	34	21	42	33
$\Delta_6$ - mediana	0.2953	0.1556	0.1317	0.2063	0.1420	0.1415	0.2227	0.1391	0.1439	0.2146	0.1147	0.1343
$\Delta_6$ – średnia	0.3303	0.1893	0.1660	0.2336	0.1560	0.1783	0.3305	0.1632	0.1777	0.2425	0.1432	0.1635
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.2054	0.1407	0.1117	0.1616	0.0882	0.1526	0.8356	0.1005	0.1169	0.1631	0.0905	0.1042
$\Delta_3$ - mediana	234.7	122.1	95.70	157.9	88.44	97.40	162.4	105.4	99.30	161.8	87.53	105.0
Koszt symulacji – mediana	152	188	226	157	252	238	155	202	214	185	232	246
Koszt symulacji - średnia	171.0	239.3	293.4	185.0	290.6	298.2	179.7	239.3	266.8	211.2	276.1	282.9
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	36.86	121.7	143.5	56.97	137.3	144.1	41.61	102.9	119.8	74.11	122.2	119.8

Rodzaj algorytmu	$\mu = 8, \lambda = 8$			$\mu = 8, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 32$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik [ $*10^{-3}$ ]	53.80	53.72	53.34	54.20	53.75	53.41	56.80	53.56	53.88	55.32	54.81	54.04
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	43.90	43.92	43.21	44.70	43.00	43.80	44.41	43.21	43.88	42.94	43.88	43.86
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	4	20	17	7	20	20	3	10	21	8	11	15
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	20	40	26	25	35	32	29	35	35	22	37	32
$\Delta_6$ - mediana	0.2335	0.1295	0.1616	0.1723	0.1355	0.1526	0.1600	0.1332	0.1550	0.1865	0.1329	0.1676
$\Delta_6$ – średnia	0.2589	0.1607	0.1856	0.1979	0.1688	0.1795	0.1961	0.1667	0.1658	0.2091	0.1581	0.1777
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.2097	0.1141	0.1090	0.1104	0.1110	0.1322	0.1408	0.1018	0.09642	0.1242	0.1055	0.1097
$\Delta_3$ - mediana	171.8	89.42	124.1	134.1	105.1	103.0	129.4	105.3	103.9	144.9	96.00	120.2
Koszt symulacji – mediana	163	202	221	201	231	247	186	216	230	218	251	251
Koszt symulacji - średnia	189.6	246.8	251.3	246.2	272.8	279.8	213.0	250.4	257.2	250.0	276.3	284.9
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	51.03	106.7	97.35	110.4	123.6	121.7	65.43	100.6	93.80	89.14	95.83	111.7

100 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

Algorytm z rozpraszaniem populacji (usuwanie podobnych osobników). Mały nacisk selektywny ( $C=1$ ). Populacja startowa:  $\omega_f$  - posiew równomierny na przedziale 0 – 20 rad/s. Parametry zatrzymania algorytmu  $M=500$ ,  $M_{bp}=50$ ,  $M_{min}=150$  redukcji.

Tab. C.12. Porównanie wyników redukcji dla różnych liczebności populacji bazowej oraz potomnej (duży nacisk selektywny, rozpraszanie populacji – usuwanie podobnych osobników)

Rodzaj algorytmu	$\mu = 2, \lambda = 2$			$\mu = 2, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 4$			$\mu = 4, \lambda = 8$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik [ $*10^{-3}$ ]	58.24	53.66	53.64	56.22	53.65	53.75	54.73	53.26	53.40	53.37	53.58	53.63
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	45.58	43.27	40.36	45.00	32.87	43.38	43.49	43.63	42.65	43.51	43.98	42.95
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	1	21	18	4	19	12	2	20	18	11	23	27
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	16	39	34	14	43	29	15	39	33	27	37	46
$\Delta_6$ - mediana	0.2685	0.1251	0.1283	0.1871	0.1227	0.1480	0.2099	0.1330	0.1354	0.1525	0.1538	0.1156
$\Delta_6$ – średnia	0.3215	0.1763	0.1625	0.2426	0.1578	0.1773	0.2473	0.1599	0.1637	0.1882	0.1848	0.1493
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.2412	0.1640	0.1068	0.1749	0.1143	0.1559	0.1654	0.1003	0.1149	0.1135	0.1421	0.0961
$\Delta_3$ - mediana	197.7	92.49	95.34	154.3	81.76	115.3	160.5	94.76	92.94	119.8	105.0	83.51
Koszt symulacji – mediana	152	193	212	156	241	232	155	215	210	192	236	270
Koszt symulacji - średnia	169.9	275.6	273.6	192.5	290.7	285.8	175.4	264.9	277.2	222.8	274.5	308.5
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	37.04	146.0	129.5	57.42	134.7	136.4	34.92	124.1	132.8	87.04	122.6	121.6

Rodzaj algorytmu	$\mu = 8, \lambda = 8$			$\mu = 8, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 16$			$\mu = 16, \lambda = 32$		
	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$	$\mu, \lambda$	$\mu, \lambda e1$	$\mu + \lambda$
$\Delta_6$ – najlepszy znaleziony wynik [ $*10^{-3}$ ]	53.87	53.85	53.40	54.23	53.89	53.52	56.16	53.80	53.51	54.93	54.64	53.96
$\Delta_3$ – najlepszy znaleziony wynik	43.89	42.15	43.03	42.61	43.62	43.26	43.80	42.94	42.89	43.64	43.79	38.51
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	7	13	27	11	19	16	9	15	23	13	13	18
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	24	35	45	32	36	34	26	38	40	32	38	42
$\Delta_6$ - mediana	0.1810	0.1377	0.1070	0.1620	0.1456	0.1253	0.1694	0.1368	0.1181	0.1536	0.1425	0.1305
$\Delta_6$ – średnia	0.2194	0.1636	0.1562	0.1917	0.1693	0.1514	0.1979	0.1760	0.1561	0.1820	0.1687	0.1643
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.1488	0.1002	0.1145	0.1404	0.1149	0.09026	0.1223	0.1338	0.1102	0.1196	0.1084	0.1033
$\Delta_3$ - mediana	132.0	93.87	87.30	108.2	104.4	96.88	126.4	109.0	97.54	113.1	102.8	106.6
Koszt symulacji – mediana	162	194	204	201	248	245	209	218	235	242	269	243
Koszt symulacji - średnia	191.4	240.3	263.2	239.5	283.1	277.8	233.4	254.9	267.3	270.1	294.0	276.2
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	50.04	104.7	117.9	97.63	126.5	108.4	85.89	95.16	102.7	101.1	103.4	104.9

100 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

Algorytm z rozpraszaniem populacji (usuwanie podobnych osobników). Duży nacisk selektywny ( $C=0$ ). Populacja startowa:  $\omega_f$  - posiew równomierny na przedziale 0 – 20 rad/s. Parametry zatrzymania algorytmu  $M=500$ ,  $M_{bp}=50$ ,  $M_{min}=150$  redukcji.

Tab. C.13. Porównanie wyników redukcji dla różnych zakresów populacji startowych oraz różnego początkowego zasięgu mutacji (strategia 1 +  $\lambda$ ) dla algorytmu o zmiennej populacji

	$\sigma_{pocz}=0,05$		$\sigma_{pocz}=0,1$		$\sigma_{pocz}=0,2$		$\sigma_{pocz}=0,35$		$\sigma_{pocz}=0,5$	
	0-2	0-20	0-2	0-20	0-2	0-20	0-2	0-20	0-2	0-20
Populacja startowa										
$\Delta_6$ – najlepszy wynik [ $*10^{-3}$ ]	53.67	53.70	53.62	53.52	47.29	53.65	49.47	53.62	53.61	53.76
$\Delta_3$ – najlepszy wynik	31.82	43.38	29.71	43.35	31.59	43.31	32.16	43.96	32.12	43.35
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	82	25	79	32	70	25	82	29	82	24
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	100	40	100	43	100	41	100	42	100	37
$\Delta_6$ – mediana [ $*10^{-3}$ ]	54.08	155.3	54.01	134.7	54.14	144.9	54.01	121.2	54.20	143.1
$\Delta_6$ – średnia [ $*10^{-3}$ ]	56.99	167.0	56.89	159.6	58.23	152.6	56.56	144.5	57.03	158.3
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe [ $*10^{-3}$ ]	6.008	114.3	5.417	123.3	6.318	91.12	5.222	92.06	6.045	96.42
$\Delta_3$ – mediana	44.10	122.2	44.11	90.03	44.11	89.38	44.12	76.37	44.11	96.81
Koszt symulacji – mediana	294	398	283	329	304	374	313	350	323	354
Koszt symulacji - średnia	294.5	390.3	288.6	355.5	308.8	380.4	315.2	369.3	321.4	375.3
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	60.19	96.05	38.11	102.5	35.75	93.22	39.60	79.29	46.96	91.39

	$\sigma_{pocz}=0,75$		$\sigma_{pocz}=1$		$\sigma_{pocz}=2$		$\sigma_{pocz}=3,5$		$\sigma_{pocz}=5$	
	0-2	0-20	0-2	0-20	0-2	0-20	0-2	0-20	0-2	0-20
Populacja startowa										
$\Delta_6$ – najlepszy wynik [ $*10^{-3}$ ]	53.69	53.62	53.40	53.59	50.40	53.70	53.42	53.49	53.38	53.60
$\Delta_3$ – najlepszy wynik	31.25	43.37	32.21	43.36	32.06	43.05	31.47	43.28	43.31	43.52
Liczba $\Delta_6 < 0,06$	80	19	82	31	82	28	88	43	92	37
Liczba $\Delta_6 < 0,1$	100	33	100	41	100	42	100	50	100	51
$\Delta_6$ – mediana [ $*10^{-3}$ ]	54.14	140.8	54.15	124.8	54.35	127.3	54.10	99.36	54.28	99.54
$\Delta_6$ – średnia [ $*10^{-3}$ ]	57.30	161.4	56.48	146.3	56.95	147.4	56.18	126.6	55.71	124.6
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe [ $*10^{-3}$ ]	6.324	89.90	5.095	82.85	5.712	94.41	4.687	81.41	4.219	77.71
$\Delta_3$ – mediana	44.11	97.27	44.12	93.65	44.12	78.94	44.11	70.64	44.12	70.50
Koszt symulacji – mediana	343	374	350	379	348	394	332	302	339	341
Koszt symulacji - średnia	333.3	372.6	338.2	385.8	345.7	384.3	352.1	349.4	348.6	368.7
Koszt symulacji - odchylenie standardowe	48.53	84.10	56.03	81.36	69.89	83.49	80.19	89.55	79.38	92.88

100 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

Algorytm ze zmienną populacją. Mały nacisk selektywny ( $C=1$ ). Populacja startowa:  $\omega_f$  - posiew równomierny na przedziale 0 – 20 [rad/s] oraz 0 – 2 [rad/s]. Parametry zatrzymania algorytmu  $M=500$ ,  $M_{bp}=50$ ,  $M_{min}=150$  redukcji.

Tab. C.14. Redukcja dwustopniowa – porównanie wyników

rodzaj algorytmu / wynikowy model zredukowany	Model pierwotny	A			B			C		
	AE m.p	AE w.m.p	AE m.p	AH m.p.	AE w.m.p	AE m.p	AH m.p.	AE w.m.p	AE m.p	AH m.p.
$\Delta_6$ – najlepszy wynik	0.1830	0.1932	0.1932	0.1832	0.4521	0.3822	0.2534	0.8618	2.386	0.2117
$\Delta_3$ – najlepszy wynik	127.1	126.7	126.7	127.1	230.3	243.1	141.6	493.0	2658	156.1
Liczba $\Delta_6 < 0,2$	1	2	2	2	0	0	0	0	0	0
Liczba $\Delta_6 < 0,3$	13	10	10	11	0	0	2	0	0	1
$\Delta_6$ – mediana	0.2708	0.2995	0.2995	0.2746	0.5951	2.161	0.4213	0.8647	4.560	0.4488
$\Delta_6$ – średnia	0.2783	0.2907	0.2907	0.2759	0.6024	2.062	0.5186	0.8639	53.04	0.6777
$\Delta_6$ – odchylenie standardowe	0.07374	0.07377	0.07377	0.06799	0.05575	1.028	0.3072	0.00143 1	56.77	0.5370
$\Delta_3$ – mediana	192.0	226.1	226.1	203.3	407.5	2237	497.6	493.1	5104	545.6
Koszt symulacji – mediana model pierwotny	311	0	1	50	0	1	50	0	1	50
Koszt symulacji – mediana wstępny model pierwotny	0	255	255	255	255	255	255	296	296	296
Czas uzyskania modelu zredukowanego [min]	3772	11,2	23,4	618	0,52	12,6	607	13,0	25,2	619,4

Model pierwotny strefy dogrzewu rur ekranowych parownika (2250 zmiennych stanu),

A – model rzędu 300 uzyskany w wyniku redukcji modelu pierwotnego metodą **BTA**,

B – model rzędu 50 uzyskany w wyniku redukcji modelu pierwotnego metodą **FW** z wagą wyjściową ( $n_f=3$ ,  $w_f=20$  [rad/s]),

C – modelu rzędu 300 uzyskany w wyniku dyskretyzacji, a następnie linearyzacji modelu klasy  $\bar{KSDL}$  na 20 sekcji o parametrach skupionych.

20 niezależnych uruchomień AE o następujących parametrach:

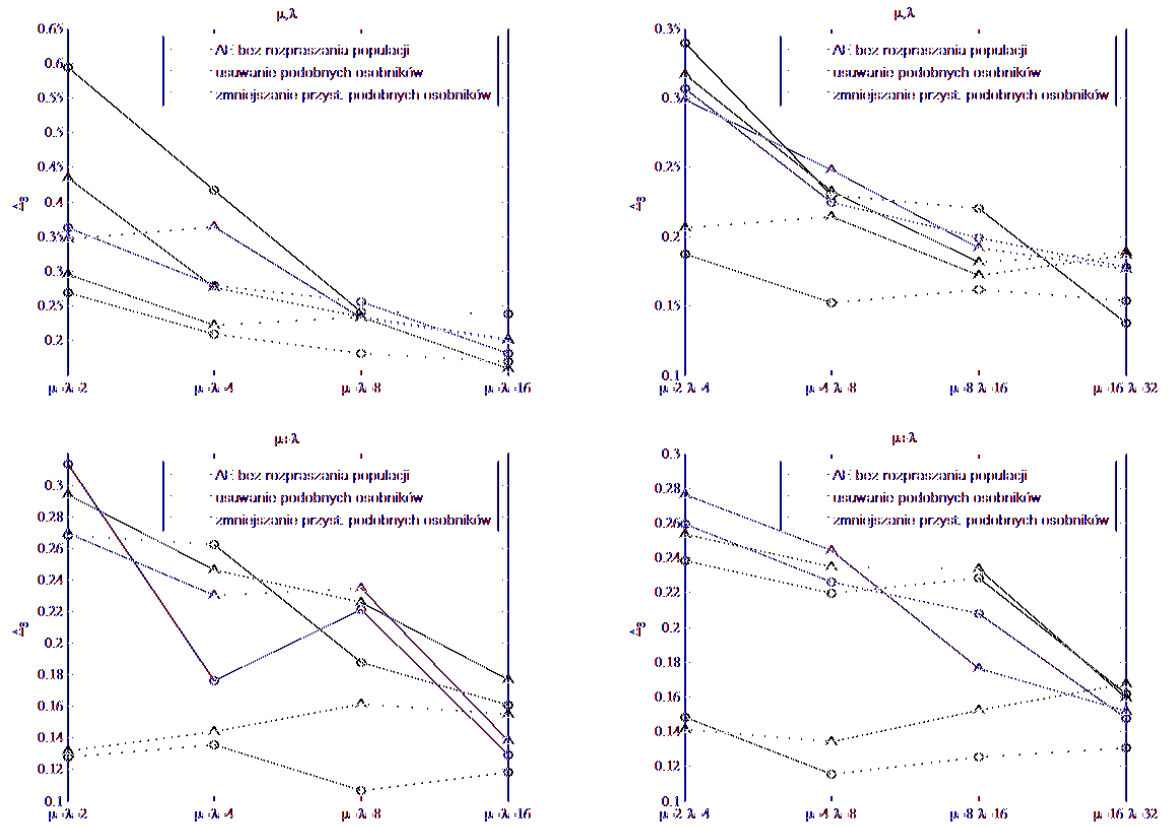
Algorytm dwustopniowy ze zmienną populacją. Mały nacisk selektywny ( $C=1$ ). Populacja startowa:  $\omega_f$  - posiew nierównomierny na przedziale 0 – 20 [rad/s]. Parametry zatrzymania algorytmu  $M=500$ ,  $M_{bp}=50$ ,  $M_{min}=150$  redukcji.

oznaczenia:

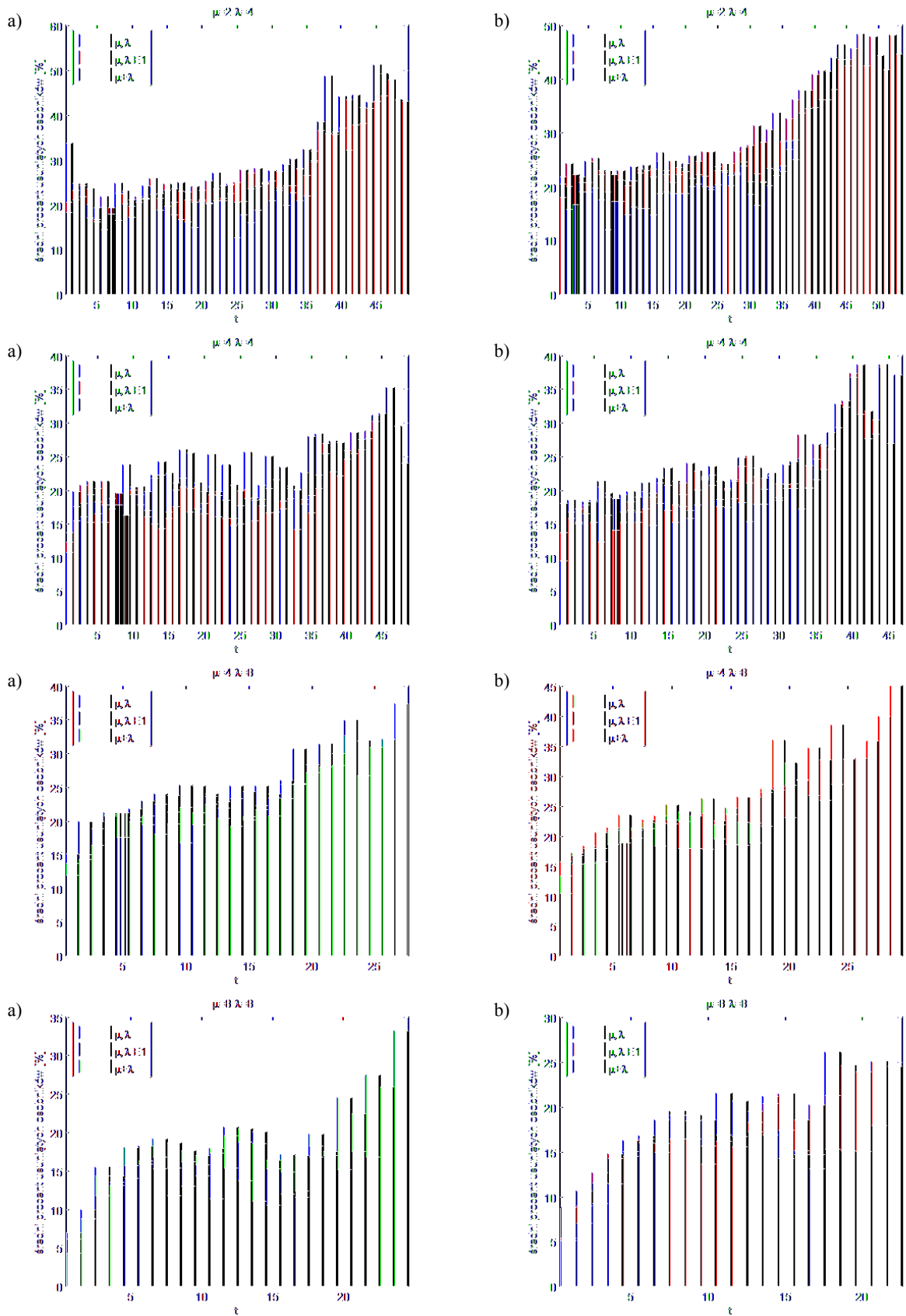
w.m.p. – model zredukowany uzyskany na podstawie redukcji uproszczonego modelu pierwotnego

m.p. – model zredukowany uzyskany na podstawie redukcji model pierwotnego

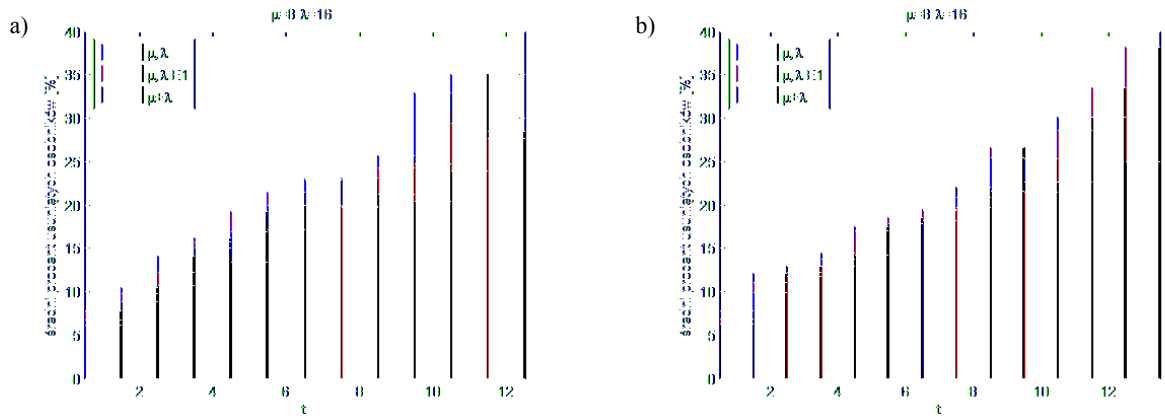
## C.2. Strategie ewolucyjne $\mu, \lambda$ oraz $\mu + \lambda$ - wykresy



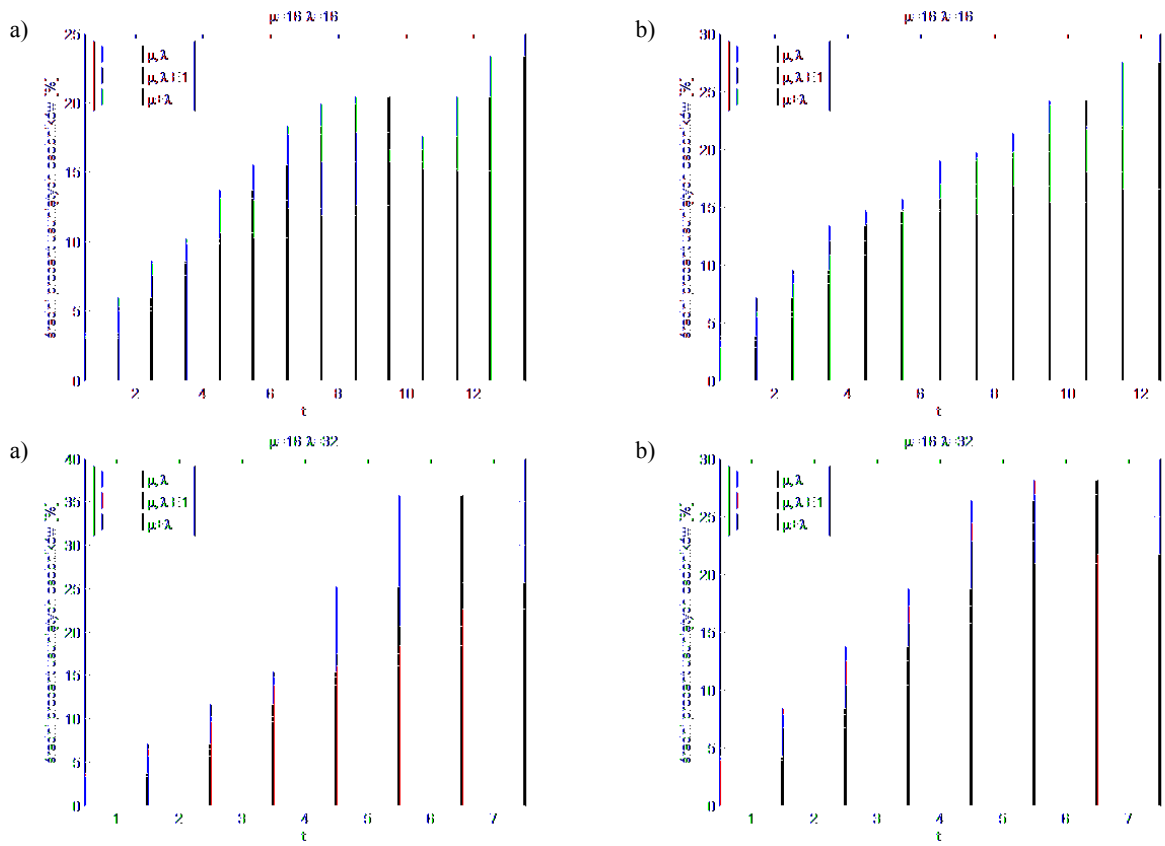
Rys. C.1. Wpływ liczebności populacji bazowej na uzyskaną medianę średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji ( $\Delta$  – mały nacisk selektywny,  $\circ$  – duży nacisk selektywny)



Rys. C.2 Procent populacji usunięty ze względu na bliskie sąsiedztwo innych rozwiązań (a – mały nacisk selektywny, b– duży nacisk selektywny)



Rys. C.2. Procent populacji usunięty ze względu na bliskie sąsiedztwo innych rozwiązań (a – mały nacisk selektywny, b– duży nacisk selektywny)



Rys. C.2. Procent populacji usunięty ze względu na bliskie sąsiedztwo innych rozwiązań (a – mały nacisk selektywny, b– duży nacisk selektywny)

## D. DODATEK D

### D.1. Charakterystyki amplitudowe, fazowe oraz błędy aproksymacji modeli poziomu pierwszego

Tab. D.1. Błędy aproksymacji zredukowanych modeli strefy dogrzewu rur ekranowych parownika (macierz wag normalizujących wg zależności 4.8)

	$k = 18, \omega_{max} = 2$ [rad/s]	$k = 33, \omega_{max} = 20$ [rad/s]	$k = 68, \omega_{max} = 500$ [rad/s]
$\Delta_1$	0.2548	0.1063	0.3913
$\Delta_2$	0.02858	0.04636	0.03365
$\Delta_3$	6.789	7.790	6.7868
$\Delta_4$	0.01479	0.004515	0.03116
$\Delta_5$	0.004450	0.007108	0.004581
$\Delta_6$	0.01057	0.01123	0.006744
$\Delta_7$	1.063	2.322	0.7278

Tab. D.2. Błędy aproksymacji zredukowanych modeli pierwszej części strefy odparowania rur ekranowych parownika (macierz wag normalizujących wg zależności 4.8)

	$k = 13, \omega_{max} = 2$ [rad/s]	$k = 29, \omega_{max} = 20$ [rad/s]	$k = 78, \omega_{max} = 500$ [rad/s]
$\Delta_1$	0.2956	0.08688	1.981
$\Delta_2$	2.321	2.2119	2.892
$\Delta_3$	4.943	8.154	9.856
$\Delta_4$	0.02348	0.003861	0.05650
$\Delta_5$	0.1517	0.1652	0.1146
$\Delta_6$	0.003942	0.007695	0.006575
$\Delta_7$	0.3917	1.338	0.4646

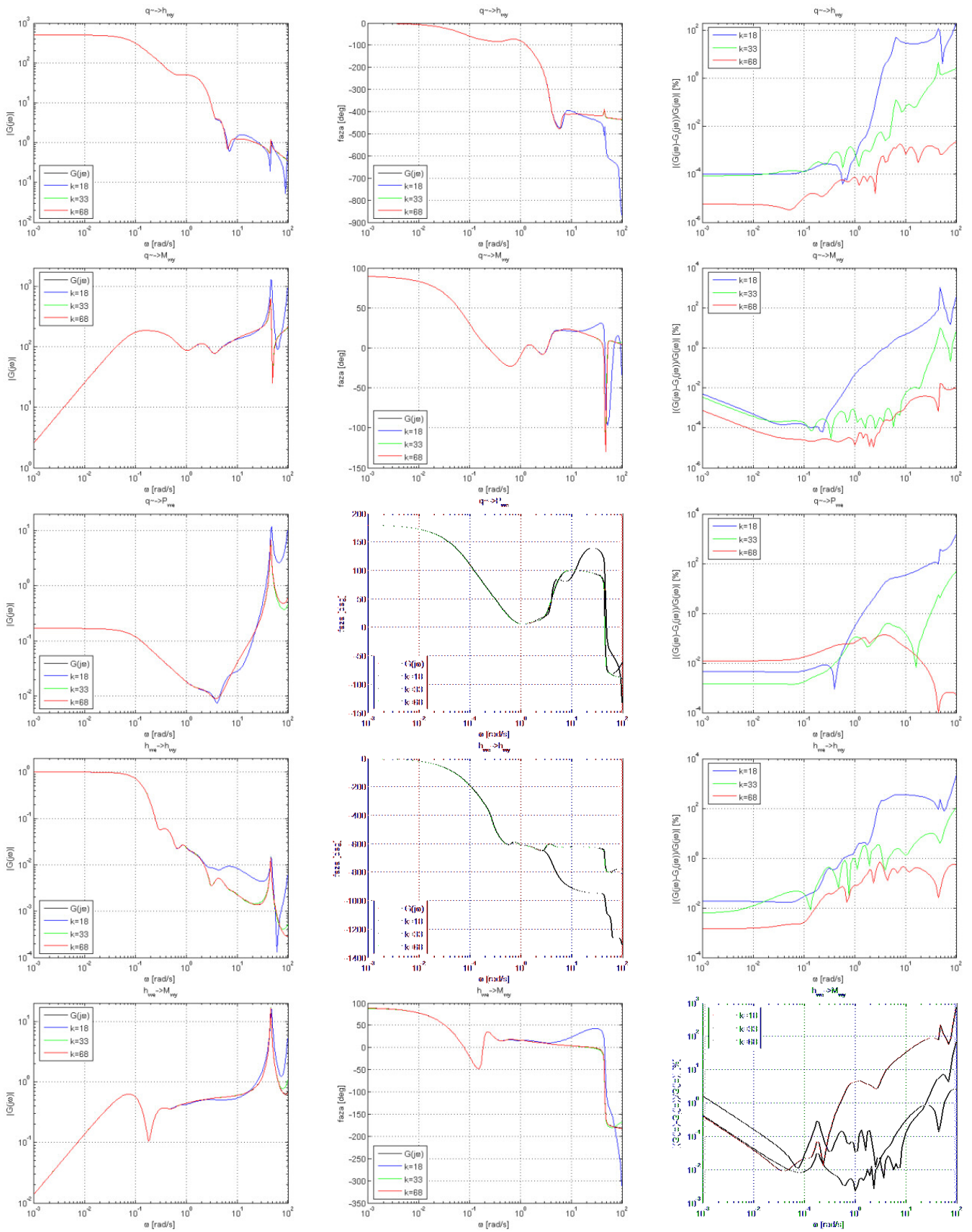
Tab. D.3. Błędy aproksymacji zredukowanych modeli drugiej części strefy odparowania rur ekranowych parownika (macierz wag normalizujących wg zależności 4.8)

	$k = 17, \omega_{max} = 2$ [rad/s]	$k = 35, \omega_{max} = 20$ [rad/s]	$k = 113, \omega_{max} = 500$ [rad/s]
$\Delta_1$	0.1417	2.5358	0.7657
$\Delta_2$	0.3174	0.8494	0.4148
$\Delta_3$	7.6420	8.9732	7.9211
$\Delta_4$	0.009655	0.09347	0.01882
$\Delta_5$	0.024743	0.05669	0.01906
$\Delta_6$	0.0106	0.01094	0.007226
$\Delta_7$	3.9944	1.5993	2.0824

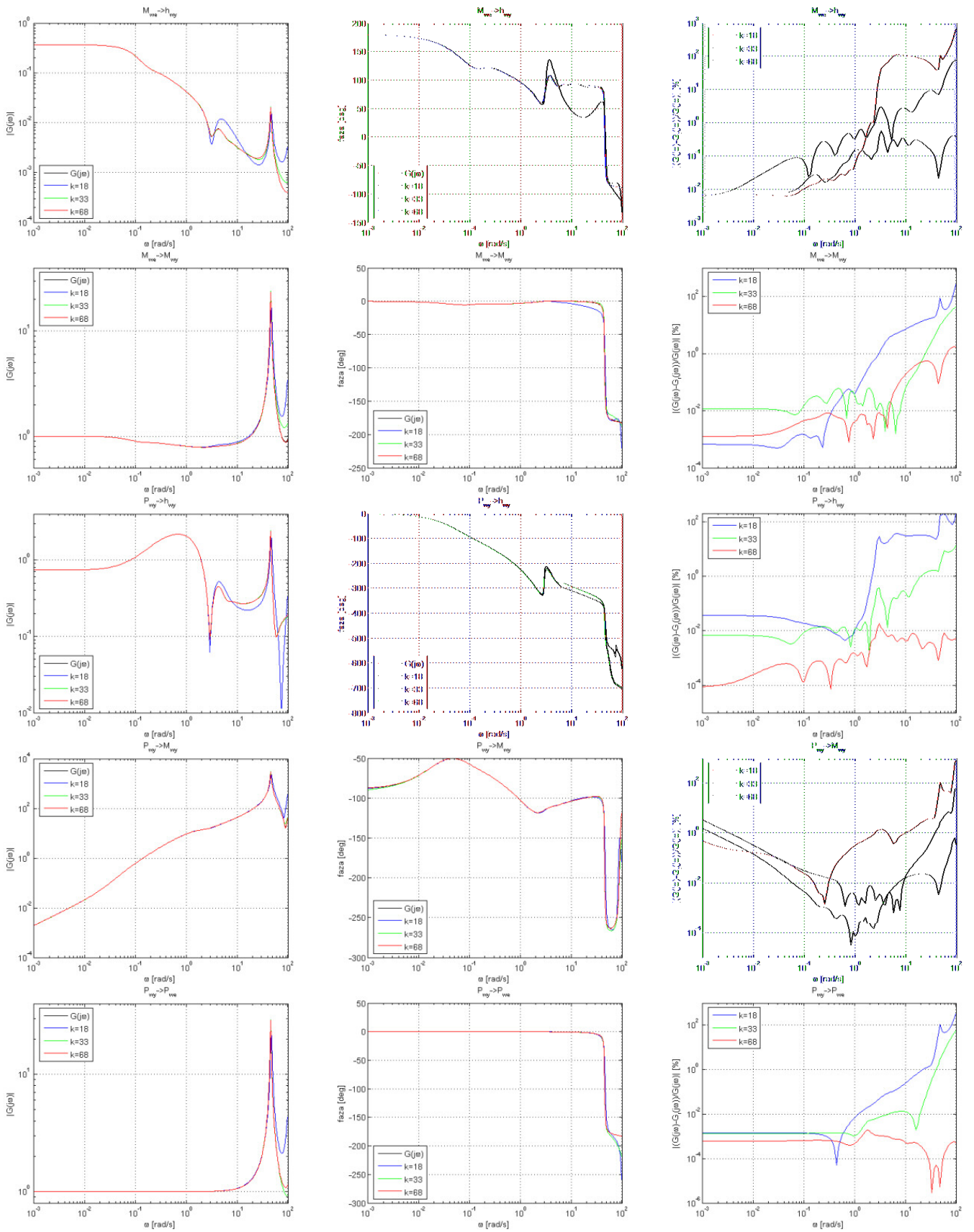
Tab. D.4. Błędy aproksymacji zredukowanych modeli trzeciej części strefy odparowania rur ekranowych parownika (macierz wag normalizujących wg zależności 4.8)

	$k = 22, \omega_{max} = 2$ [rad/s]	$k = 52, \omega_{max} = 20$ [rad/s]	$k = 242, \omega_{max} = 500$ [rad/s]
$\Delta_1$	1.0687	0.3336	0.1590
$\Delta_2$	6.7544	0.06869	0.4355
$\Delta_3$	9.0556	7.6755	7.3245
$\Delta_4$	0.06066	0.01615	0.003854
$\Delta_5$	0.2384	0.01573	0.01119
$\Delta_6$	0.01039	0.005873	0.002947
$\Delta_7$	0.5912	0.5357	0.3205

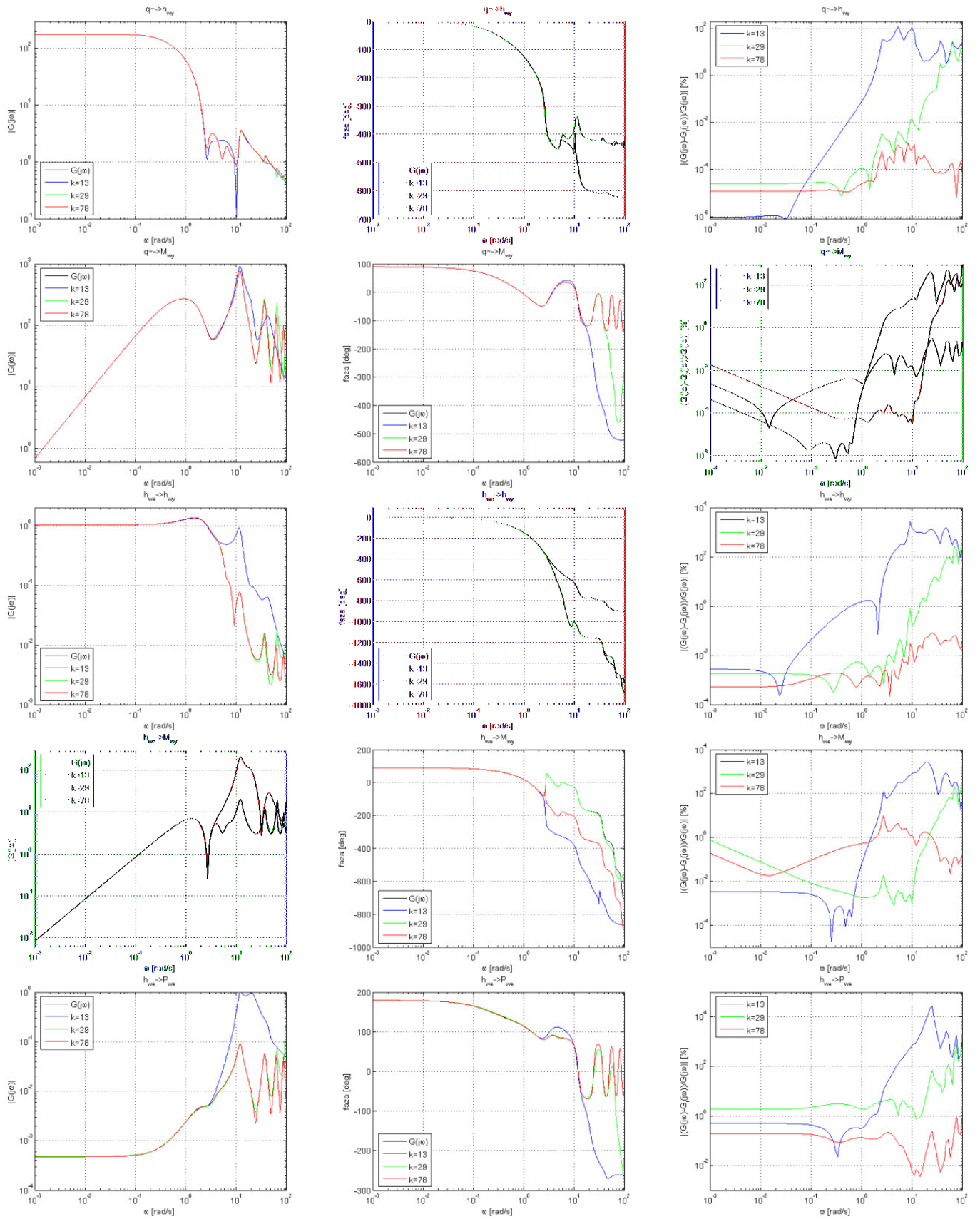




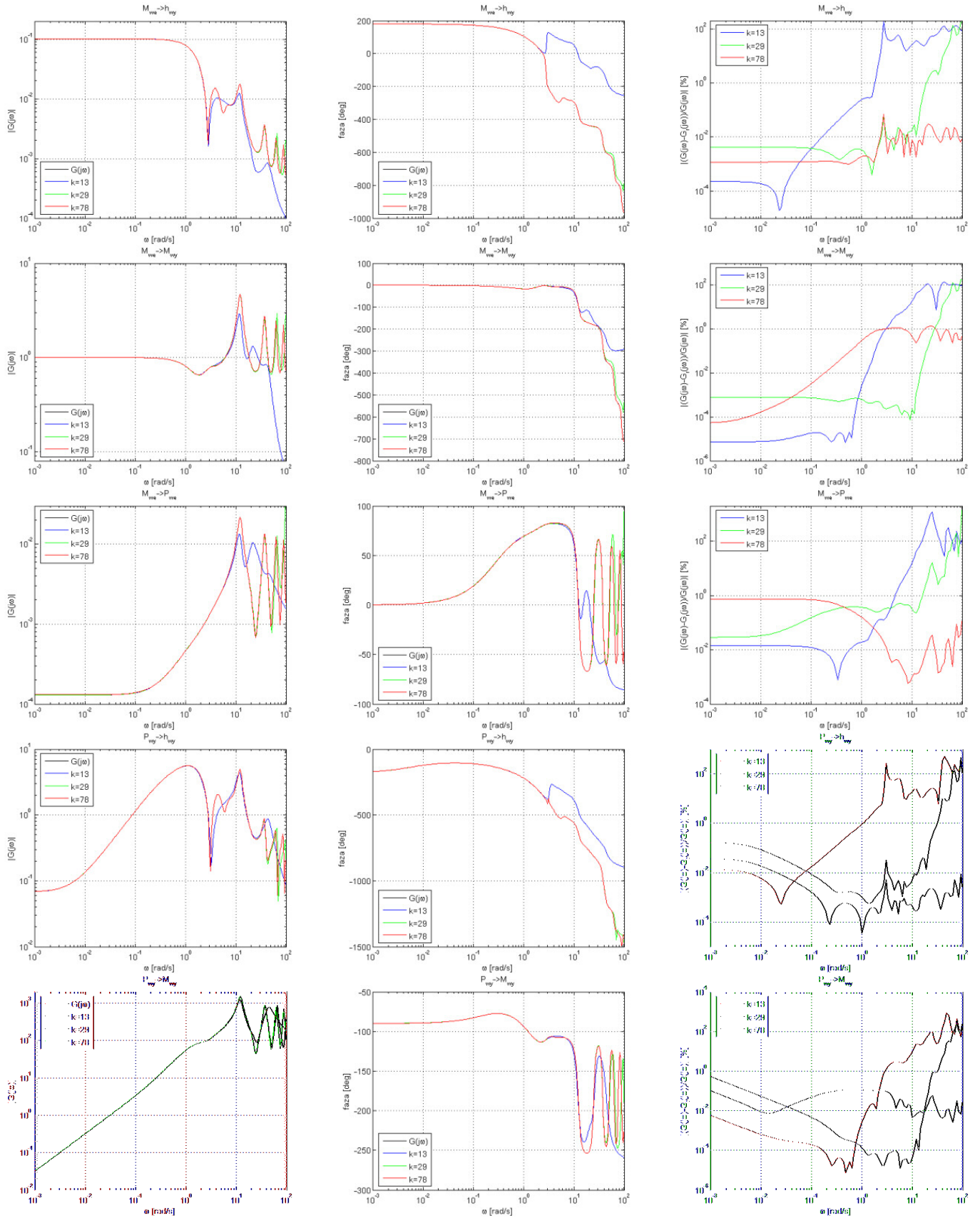
Rys. D.1. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli strefy do-grzewu rur ekranowych parownika



Rys. D.1. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli strefy dogrzewu rur ekranowych parownika

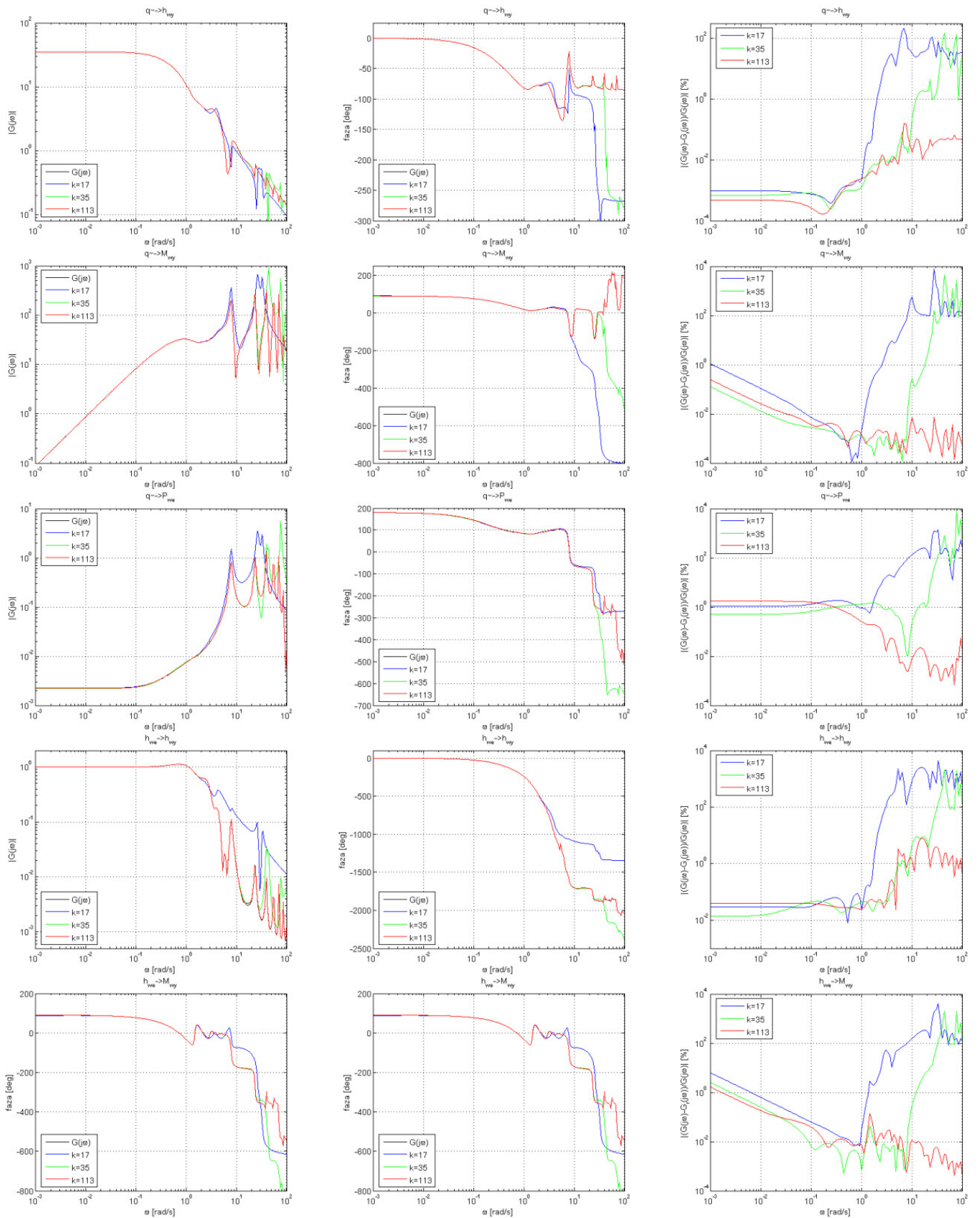


Rys. D.2. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli pierwszej części strefy odparowania rur ekranowych parownika

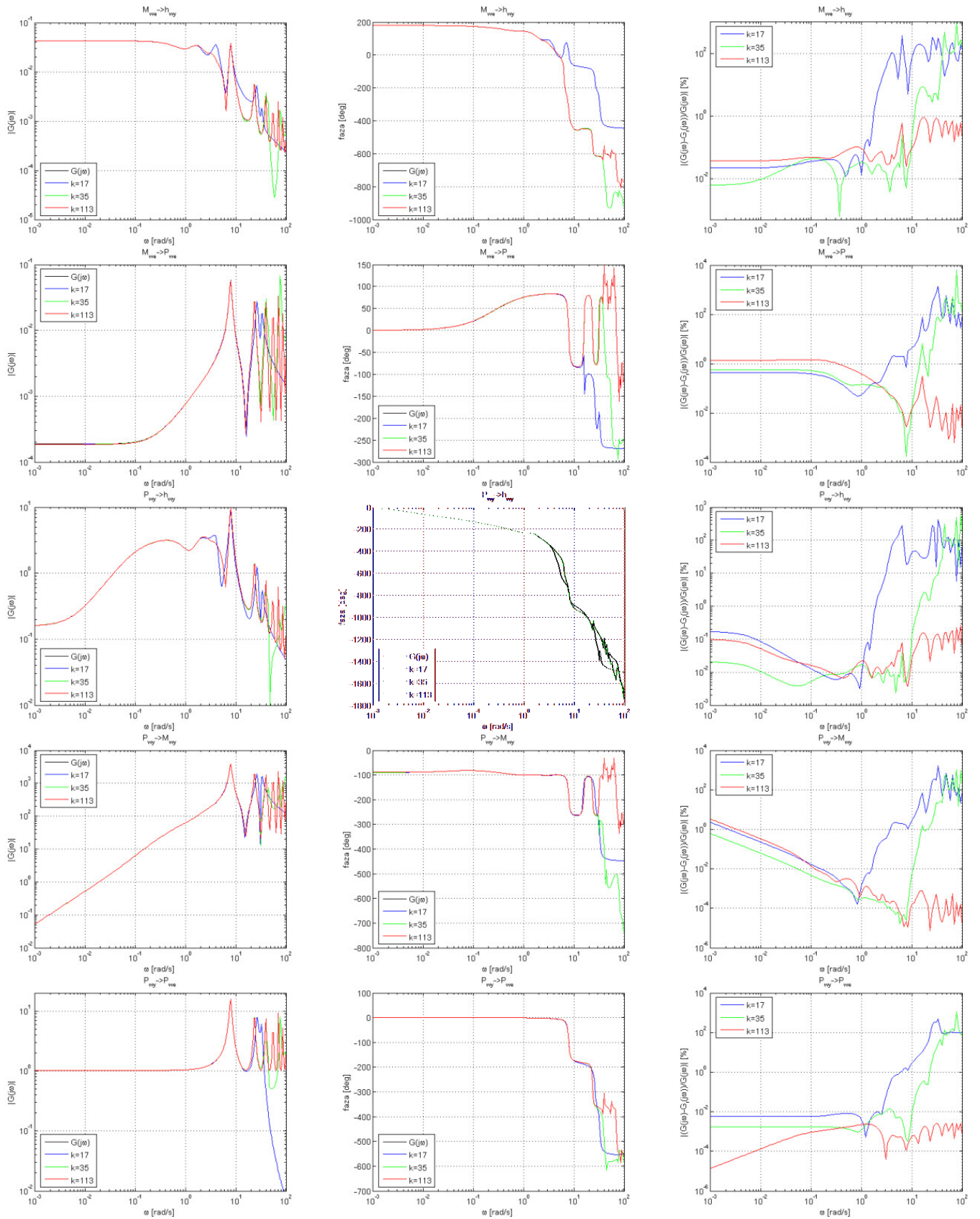


Rys. D.2. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli pierwszej części strefy odparowania rur ekranowych parownika

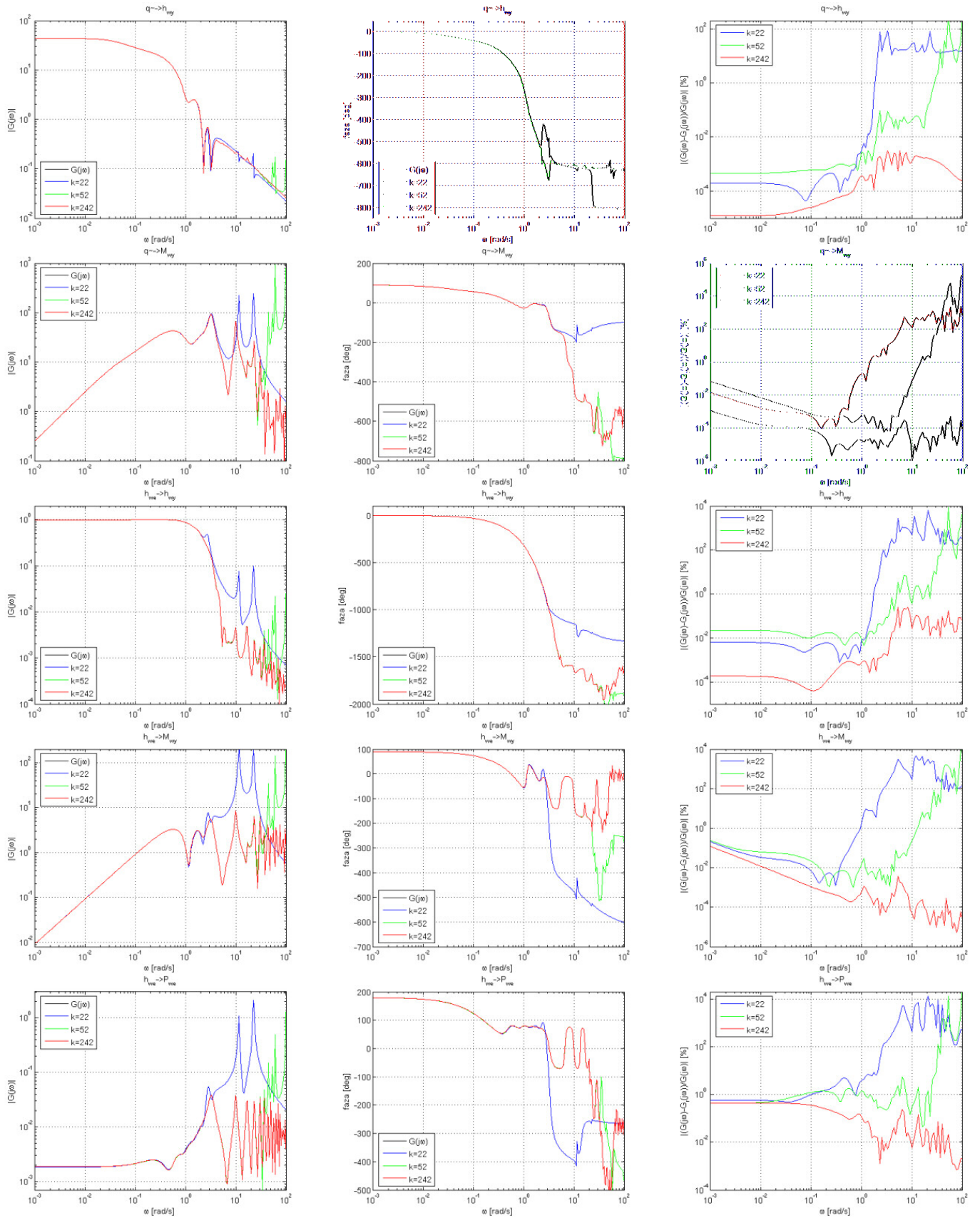




Rys. D.3. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli drugiej części strefy odparowania rur ekranowych parownika

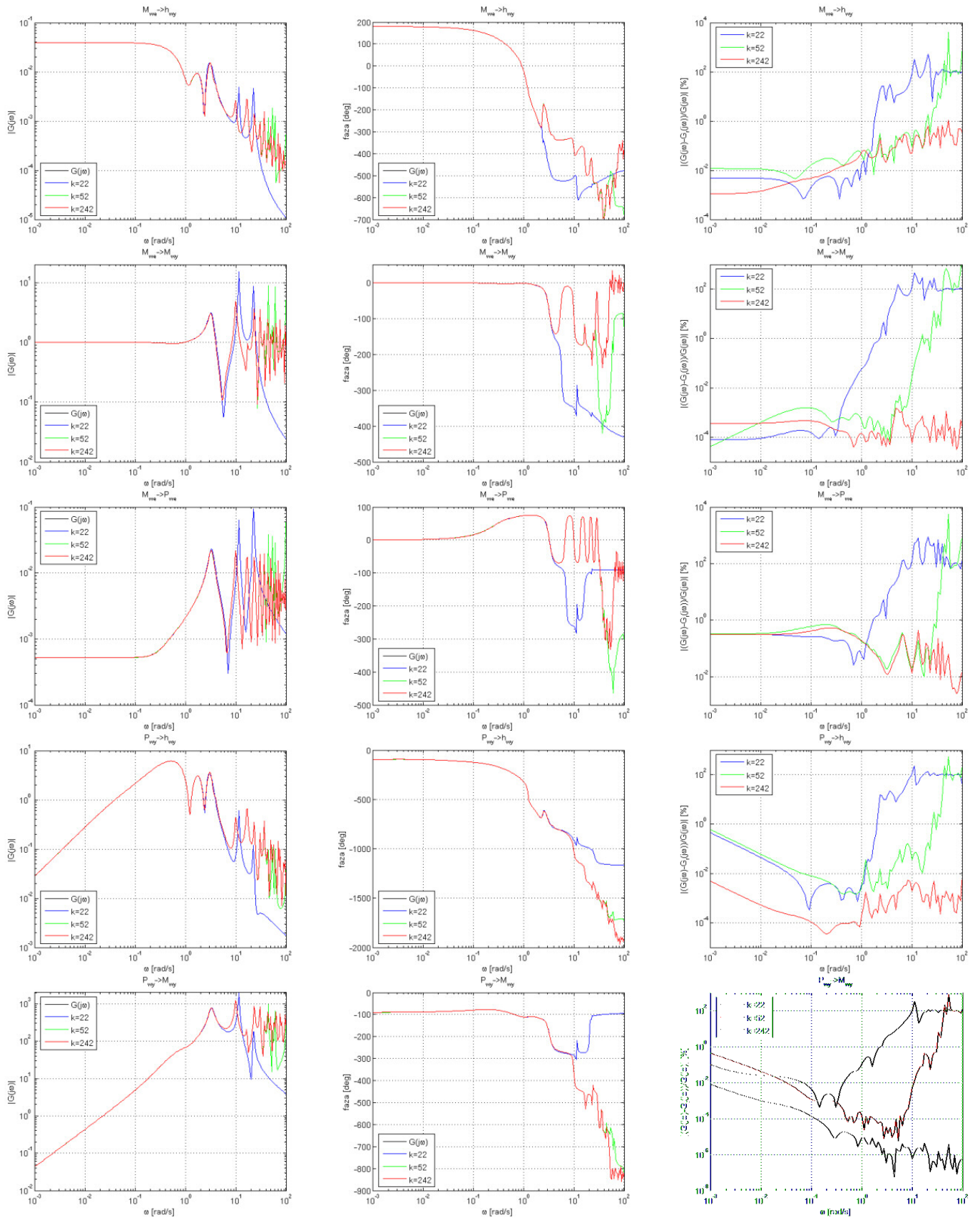


Rys. D.3. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli drugiej części strefy odparowania rur ekranowych parownika



Rys. D.4. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli trzeciej części strefy odparowania rur ekranowych parownika





Rys. D.4. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli trzeciej części strefy odparowania rur ekranowych parownika



## D.2. Charakterystyki amplitudowe, fazowe oraz błędy aproksymacji modeli poziomu drugiego

Tab. D.5. Błędy aproksymacji zredukowanych modeli rur ekranowych parownika (macierz wag normalizujących wg zależności 4.8)

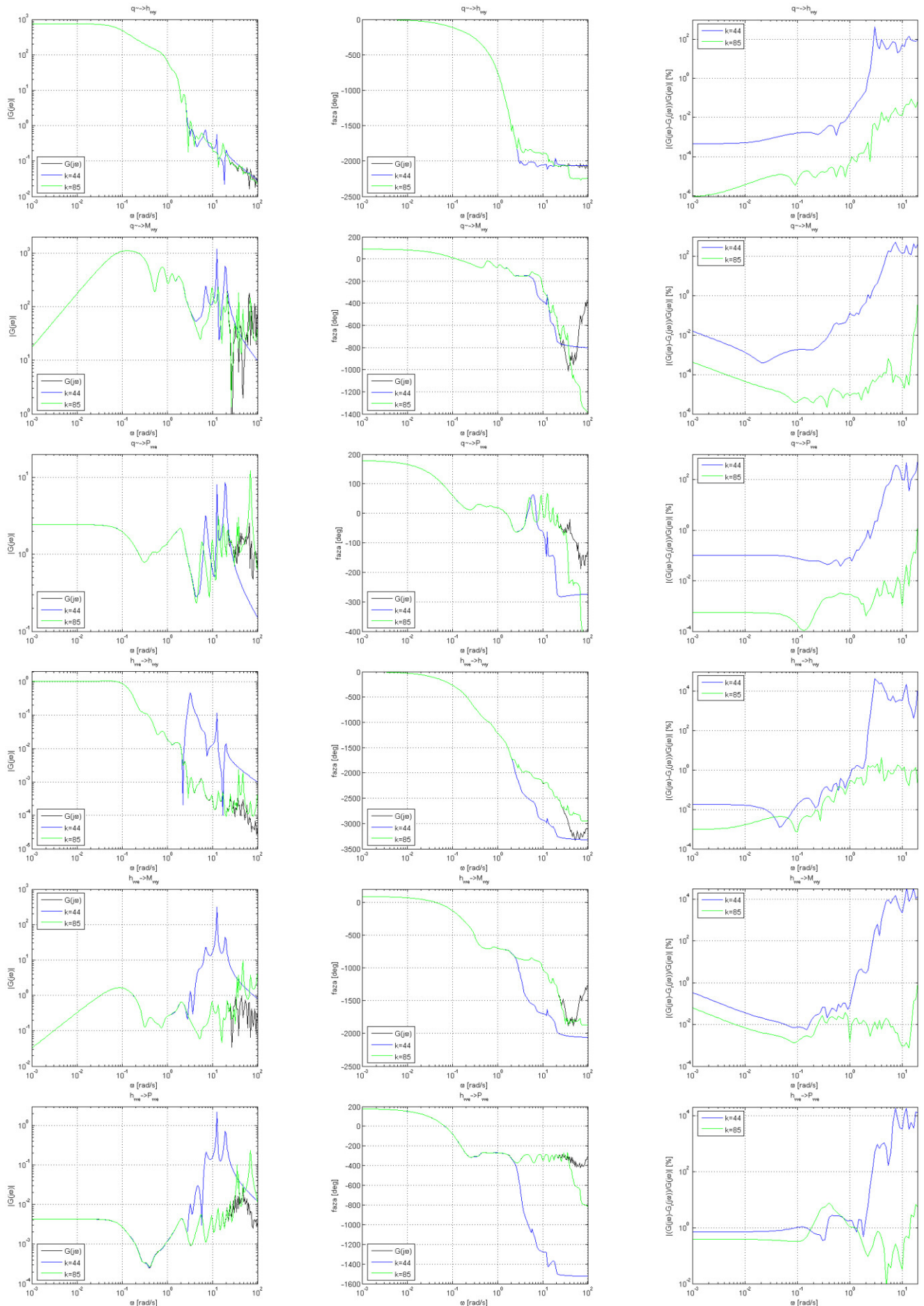
	$k = 44$ $\omega_{max} = 2$ [rad/s]	$k = 85$ $\omega_{max} = 20$ [rad/s]
$\Delta_1$	1.443	0.5958
$\Delta_2$	$26.00 \cdot 10^{-3}$	0.1126
$\Delta_3$	4.538	8.282
$\Delta_4$	$80.97 \cdot 10^{-3}$	$17.39 \cdot 10^{-3}$
$\Delta_5$	$2.786 \cdot 10^{-3}$	$5.980 \cdot 10^{-3}$
$\Delta_6$	$6.164 \cdot 10^{-3}$	$7.694 \cdot 10^{-3}$
$\Delta_7$	0.6034	0.2858

Tab. D.6. Błędy aproksymacji zredukowanych modeli podsystemu filtru oraz rur łączących dla zakresu adekwatności  $\omega_{max} = 2$  [rad/s] (macierz wag normalizujących  $W = |G(0)|$ )

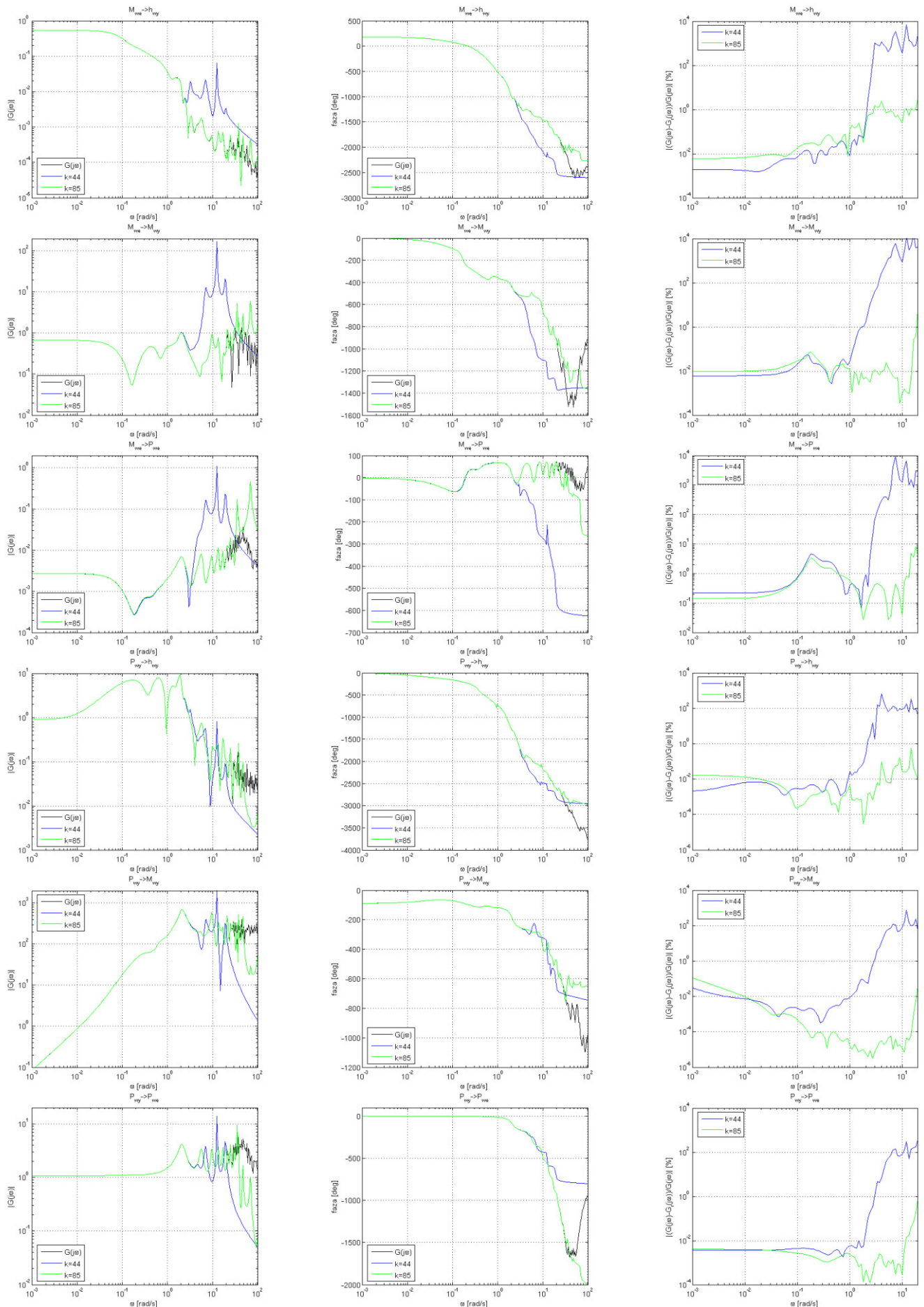
	$k = 2$	$k = 10$	$k = 15$
$\Delta_1$	1.783	$5.422 \cdot 10^{-3}$	$3.311 \cdot 10^{-7}$
$\Delta_2$	0.487	$1.481 \cdot 10^{-3}$	$9.045 \cdot 10^{-8}$
$\Delta_3$	285.8	14.91	$6.579 \cdot 10^{-4}$
$\Delta_4$	1.056	$2.944 \cdot 10^{-3}$	$1.261 \cdot 10^{-7}$
$\Delta_5$	0.415	$1.158 \cdot 10^{-3}$	$4.962 \cdot 10^{-8}$
$\Delta_6$	0.796	$24.37 \cdot 10^{-3}$	$1.096 \cdot 10^{-6}$
$\Delta_7$	125.0	0.3576	$4.317 \cdot 10^{-6}$

Tab. D.7. Błędy aproksymacji zredukowanych modeli separatora dla zakresu adekwatności  $\omega_{max} = 2$  [rad/s] (macierz wag normalizujących  $W = |G(0)|$ )

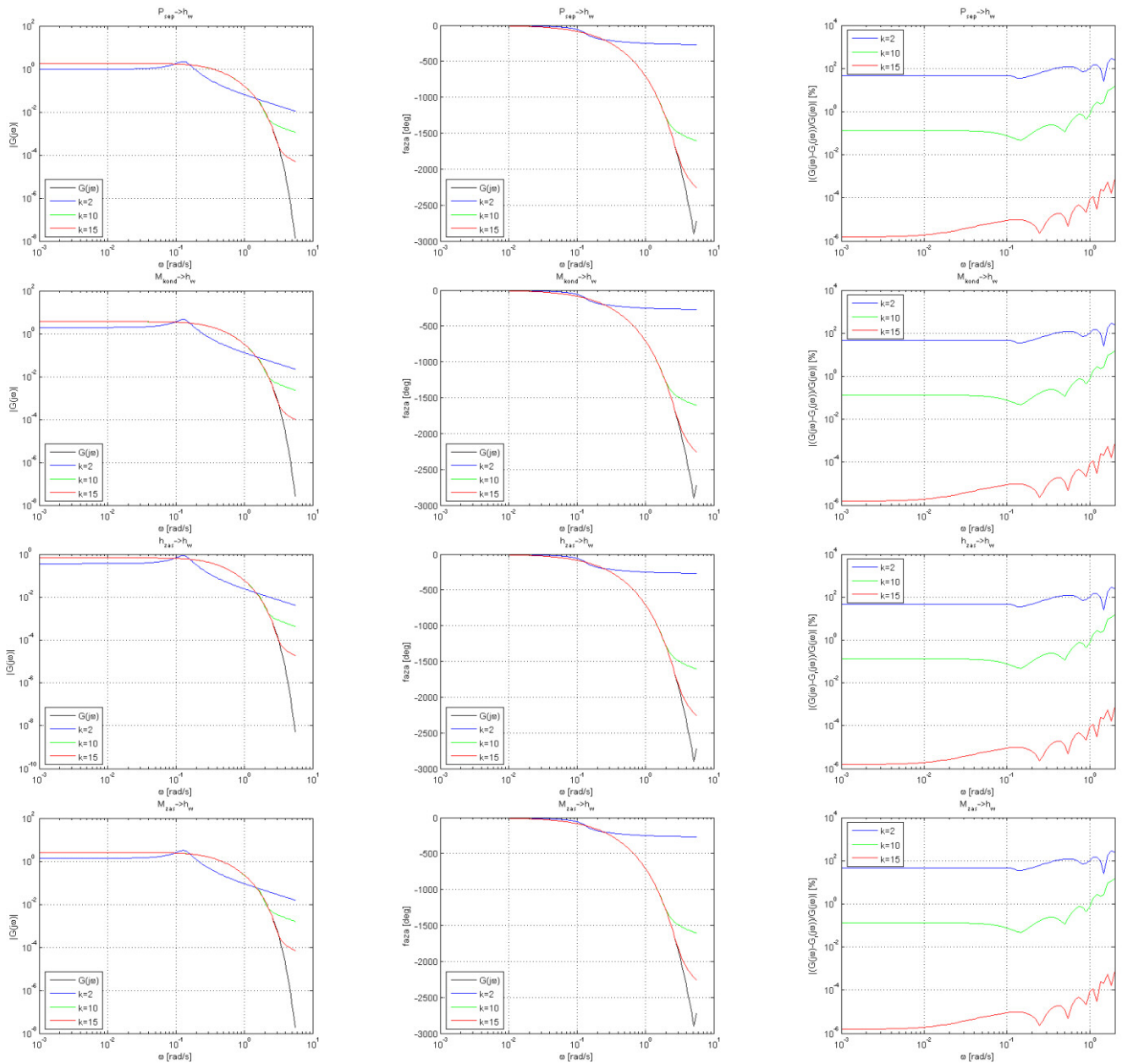
	$k = 2$	$k = 3$
$\Delta_1$	5.3999e-002	6.7940e-003
$\Delta_2$	5.1841e-002	6.7302e-003
$\Delta_3$	5.1837e+000	2.1067e+000
$\Delta_4$	1.1960e-002	2.0564e-003
$\Delta_5$	1.2053e-002	2.0726e-003
$\Delta_6$	2.5334e-002	1.1151e-002
$\Delta_7$	8.1786e+000	1.0297e+000



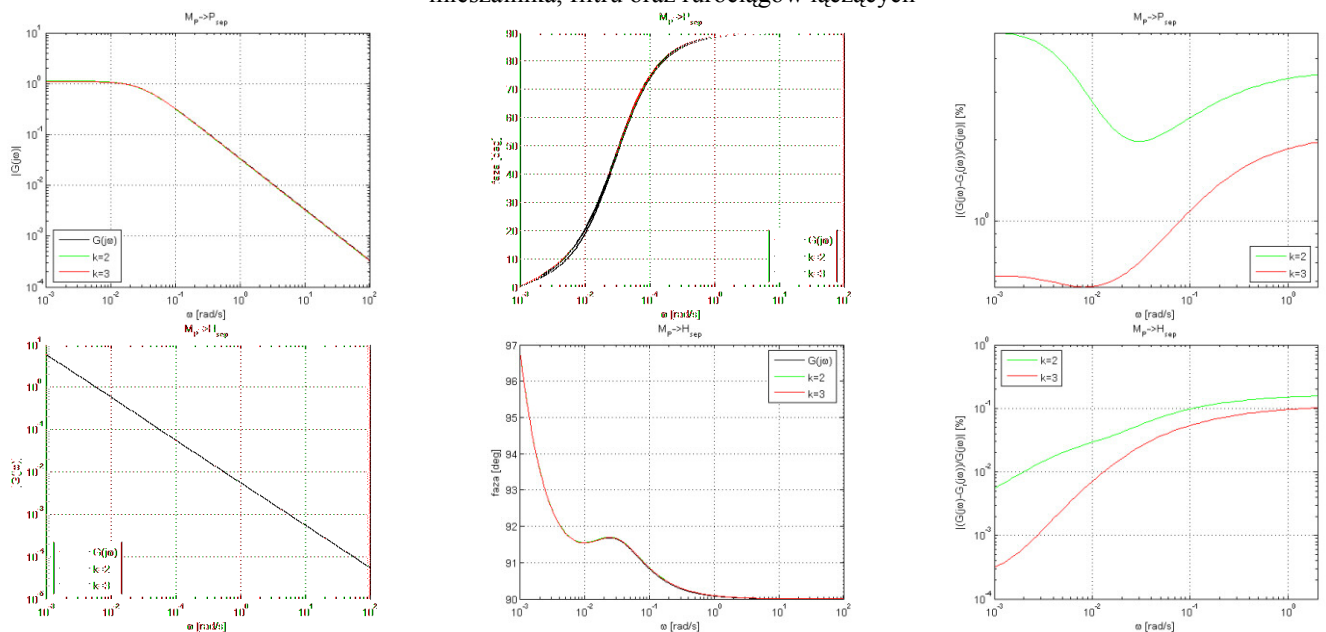
Rys. D.5. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli rur ekranowych parownika



Rys. D.5. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli rur ekranowych parownika

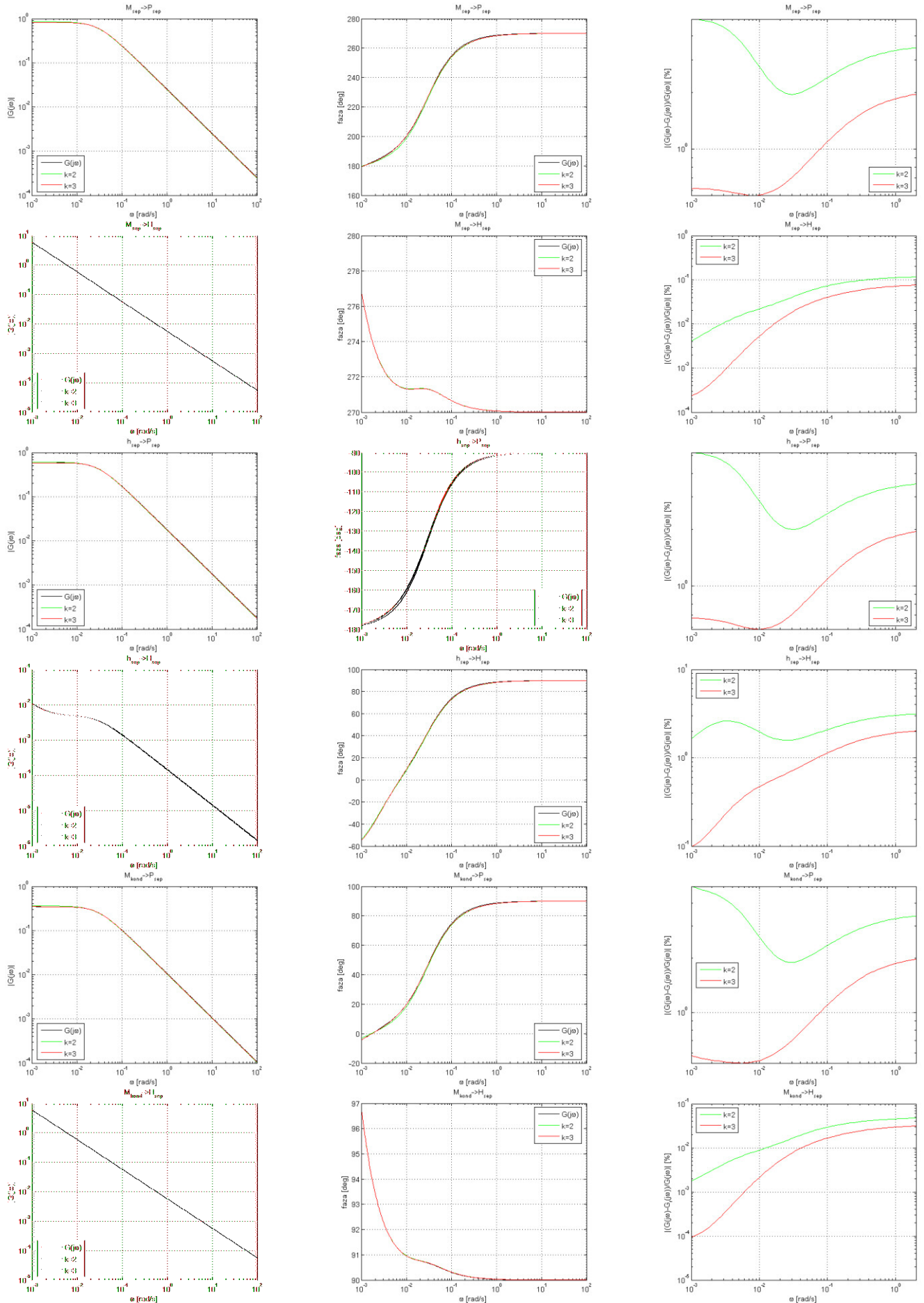


Rys. D.6. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli podsystemu mieszalnika, filtra oraz rurowciągów łączących



Rys. D.7. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli separatora



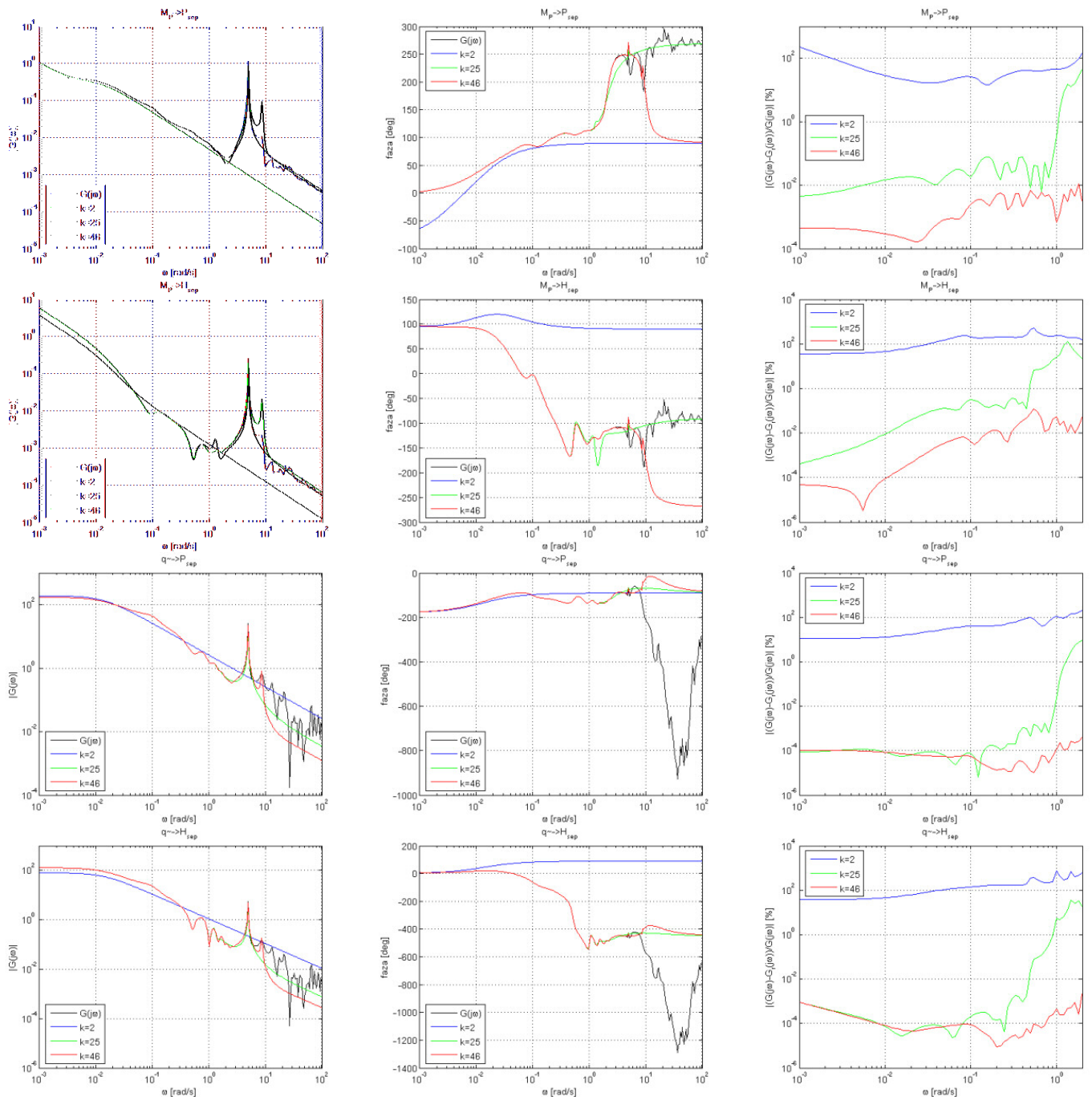


Rys. D.7. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli separatora

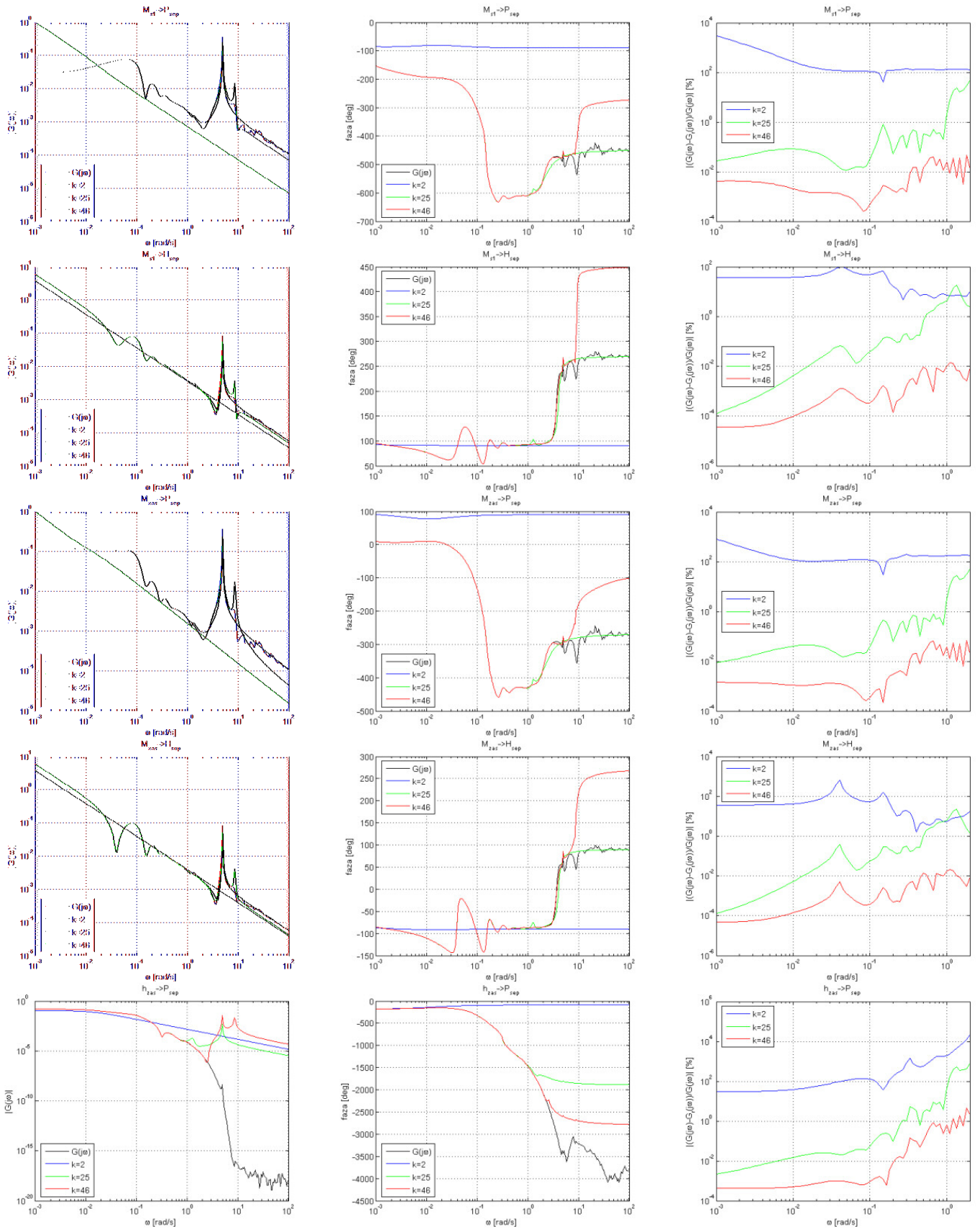
### D.3. Charakterystyki amplitudowe, fazowe oraz błędy aproksymacji modelu parownika

Tab. D.8. Błędy aproksymacji zredukowanych modeli parownika dla zakresu adekwatności  $\omega_{max} =$  [rad/s] (macierz wag normalizujących  $W = |G(0)|$ )

	$k = 2$	$k = 25$	$k = 46$
$\Delta_1$	48,27	0,05447	$1,143 \cdot 10^{-3}$
$\Delta_2$	63,98	0,02641	$1,395 \cdot 10^{-4}$
$\Delta_3$	36980	3997	6,663
$\Delta_4$	12,36	$4,744 \cdot 10^{-3}$	$1,002 \cdot 10^{-4}$
$\Delta_5$	5,794	$2,112 \cdot 10^{-3}$	$2,557 \cdot 10^{-5}$
$\Delta_6$	21,21	2,882	$5,047 \cdot 10^{-3}$
$\Delta_7$	2010	2,163	$5,891 \cdot 10^{-3}$



Rys. D.8. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli parownika kotła energetycznego



Rys. D.8. Charakterystyka częstotliwościowa modułu, fazy oraz względny błąd aproksymacji zredukowanych modeli parownika kotła energetycznego