Architectus

2005
Nr 1-2(17-18)

Prezentacje

Witold Szymański

*Anamorficzne przekształcenie sferyczne jako szczególny przypadek rzutu środkowo-refleksyjnego względem sfery**

Artykuł przedstawia wyniki badań autora w dziedzinie odbić sferycznych, które określono jako *rzut środkowo-refleksyjny względem sfery*. Zostały w nim zwłaszcza zaprezentowane wyniki eksperymentów dotyczące jednej z klas tego rzutu, zwanej anamorficznym przekształceniem sferycznym[1]. Wynikiem tego przekształcenia jest anamorfoza[2] sferyczna. Wspomniane przekształcenie nie zostało dotychczas opisane w literaturze przedmiotu.

Geometrycznie anamorfoza sferyczna jest obrazem punktu (lub dowolnego zbioru punktów), przyjętego w przestrzeni wewnątrzsferycznej lub nazewnątrzsferycznej, powstającym w rzucie środkowo-refleksyjnym względem sfery. Fizycznie zaś jest przeciwobrazem obrazu pozornego, powstającego poprzez odbicie anamorfozy względem sfery refleksyjnej. W wyniku takiego odbicia obraz pozorny tworzy iluzję założonego obiektu przestrzennego.

Na uwagę zasługuje też wspomniany ogólny problem odbić sferycznych. Zagadnienie to jest jednym z klasycznych problemów geometrii oraz optyki i nazywa się problemem Alhazena[3], który podał pierwsze jego rozwiązanie. Christiaan Huygens[4] uogólnił rozwiązanie Alhazena uzupełniając je o pewne warianty. Od tego czasu w literaturze przedmiotu spotyka się różne określenia tego zagadnienia. Najbardziej znane to: *Alhazen's Optical Problem* i *Billiard Problem*; wciąż znajdują one nowe interpretacje i metody rozwiązań.

W pracy *Odwzorowanie punktów przestrzeni w rzucie środkowo-refleksyjnym na sferę* autor niniejszego opracowania zdefiniował i podał oryginalne rozwiązanie problemu odbić sferycznych. Wykorzystał w nim odkrytą przez siebie na gruncie geometrii wykreślnej pewną krzywą trzeciego stopnia, która jednocześnie spełnia dwa postulaty Jacoba Steinera, ustalone przez niego dla pewnej rodziny krzywych: *isoptic*[5] (dwa dowolne odcinki płaszczyzny, są „widoczne" pod jednakowymi kątami z punktów tych krzywych) oraz *supplementary*[6] (kąty tworzone przez punkty tych krzywych i końce wspomnianych odcinków dopełniają się do 180°).

Rodzina krzywych Steinera, znana pod nazwą *Apollonian isoptic cubics curves*, została zbadana także przez Van Reesa i współcześnie przez Gomesa Teixeirę. Nie były one jednak dotychczas zastosowane w zakresie: *Alhazen's optical problem* oraz *Billiard problem.*

W następnej swojej pracy, *Anamorfoza sferyczna jako szczególny przypadek rzutu środkowo-refleksyjnego na sferę* autor zdefiniował przekształcenie anamorficzne i zastosował je do tworzenia anamorfoz sferycznych dowolnych zbiorów punktów przestrzeni.

Niniejsza praca natomiast w syntetycznym ujęciu przedstawia problem anamorfoz sferycznych nieznanych i nieopisanych dotychczas, mimo długiej i bogatej tradycji tego szczególnego odwzorowania perspektywicznego, jakie stanowi przekształcenie anamorficzne.

Bogaty materiał ilustracyjny dobrze określa charakter odbić sferycznych, a na tym tle zwłaszcza odwzorowań

---

* Artykuł został przedstawiony na konferencji Les Journess'ees de l'Action Culturelle OEUVRE ULTIME na Uniwersytecie Marca Blocha w Strasburgu 28. 04. 2005 r.

[1] *Przekształceniem anamorficznym* nazwiemy proces tworzenia anamorfozy, natomiast anamorfozą skutek tego przekształcenia, czyli uzyskany obraz.

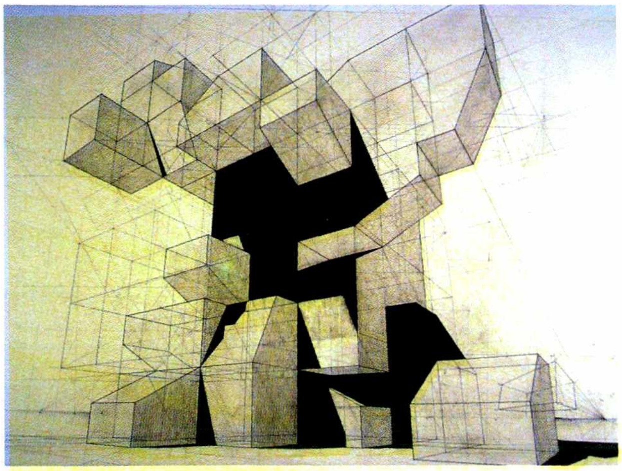
[2] Anamorfoza (gr. *anamorphosis* – odkształcenie) – obraz, którego proporcje wypaczono wg określonych zasad tak, że tylko oglądany w pewnych warunkach zyskuje wygląd czytelny.

[3] Ibn al-Hajsam, Alhazen (965–1038) – najwybitniejszy fizyk islamu. Zajmował się teorią światła, załamywaniem i rozszczepianiem się promieni słonecznych.

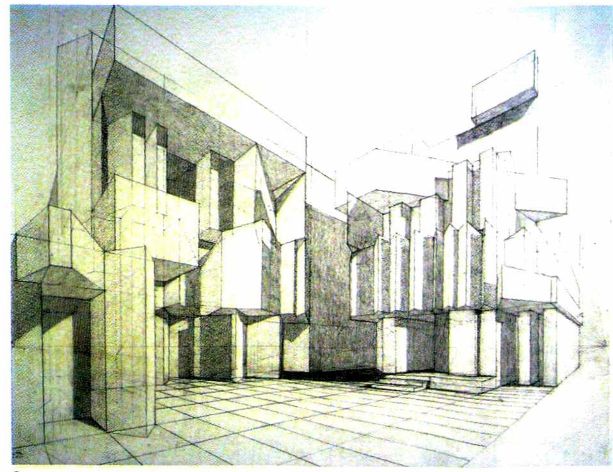
[4] Christiaan Huygens (1629–1695) – holenderski fizyk, astronom i matematyk. W dziedzinie matematyki zajmował się badaniem krzywych.

[5] *iso-* (gr. *isos* «równy»), *optic* (gr. *optikós* «wzrokowy»).

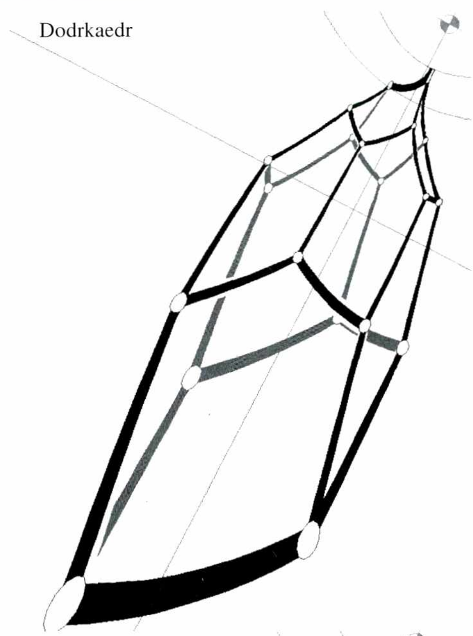
[6] *Supplementary* (ang. uzupełniający).



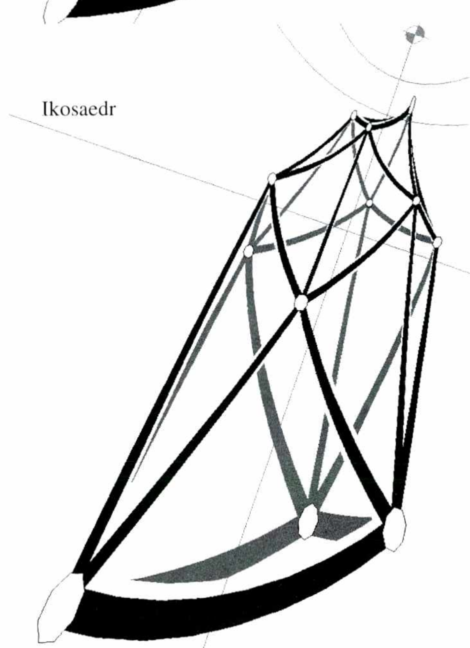
1



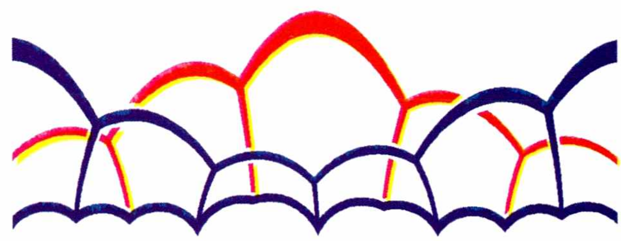
2



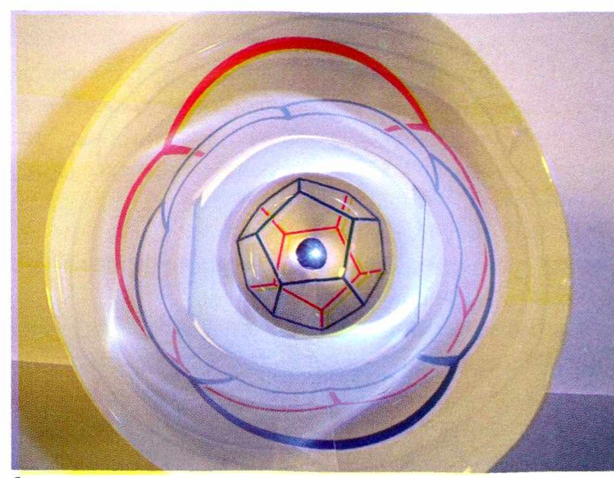
3a



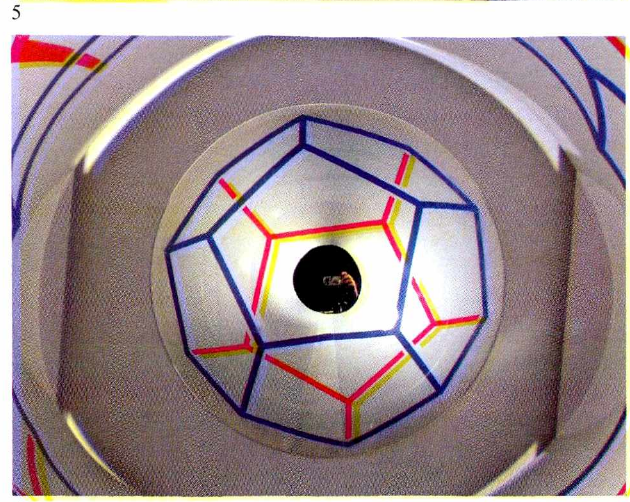
3b



4

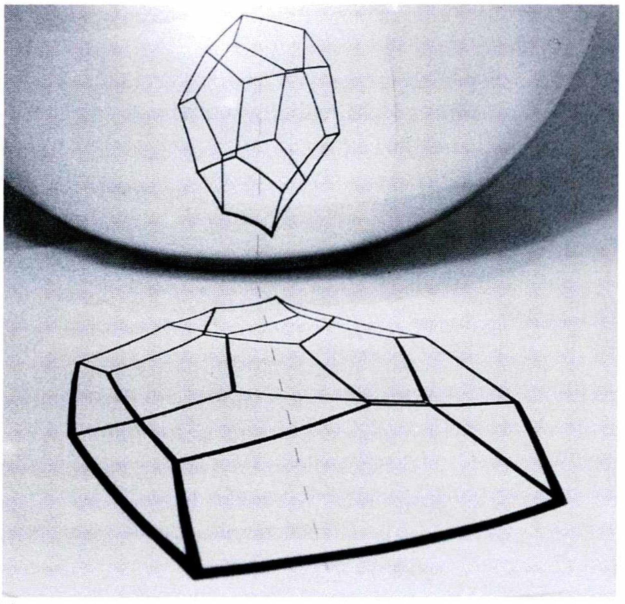


5

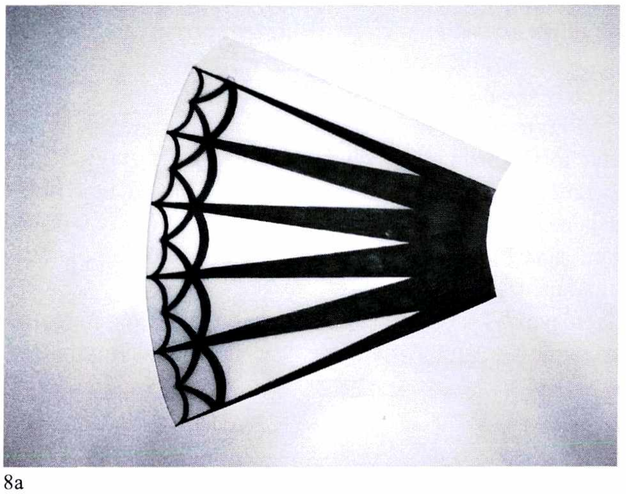


6

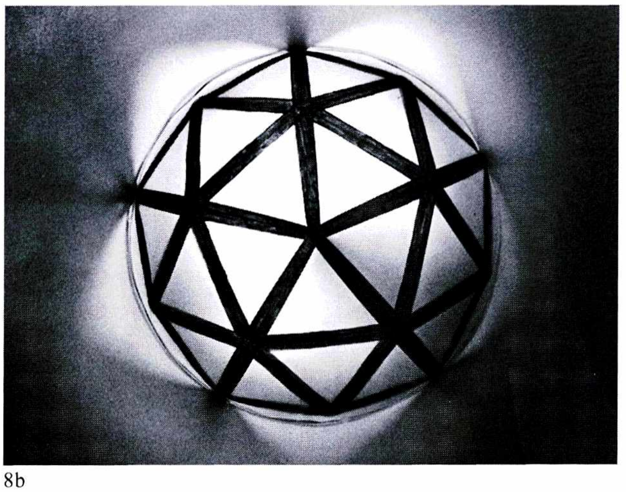
Ryciny: 1. Projekt układu przestrzennego w perspektywie na tło pochyłe, 2. Projekt układu przestrzennego w perspektywie na tło pionowe, 3. Anamorfoza sferyczna na płaszczyźnie: a) dwunastościanu foremnego, b) dwudziestościanu foremnego, 4. Anamorfoza na powierzchni walcowej dwunastościanu foremnego w rozwinięciu na płaszczyźnie, 5. Anamorfoza na powierzchni walcowej dwunastościanu foremnego odbita względem zwierciadła sferycznego, 6. Anamorfoza na powierzchni walcowej dwunastościanu foremnego odbita względem zwierciadła sferycznego



7



8a



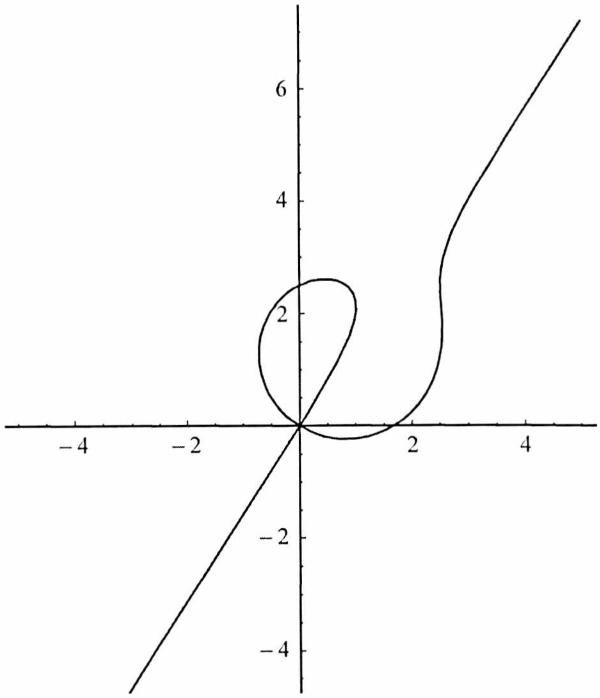
8b

9

10

Ryciny: 7. Odbicie anamorfozy płaskiej względem zwierciadła sferycznego, 8. Anamorfoza na powierzchni stożkowej kopuły Fullera (będącej przekształceniem dwunastościanu foremnego): a) w rozwinięciu na płaszczyźnie, b) odbita względem zwierciadła sferycznego, 9, 10. Odbicie obiektów przestrzennych względem zwierciadła sferycznego

$$10x^2 - 6x^3 + 10xy + 4x^2y - 10y^2 - 6xy^2 + 4y^3 = 0$$



Ryc. 11. Przykład *isoptic cubic curve*

anamorficznych. Podano przykłady anamorfoz wielościanów foremnych i półforemnych zrealizowane na płaszczyźnie, powierzchni walcowej i stożkowej oraz obrazy odbić niektórych spośród nich, co w pełni uwidocznia charakter tego odwzorowania.

Perspektywa malarska, nazwijmy ją klasyczną, to potoczna nazwa przekształcenia perspektywicznego. Dzieli się ono na wiele klas i typów. Przekształcenie anamorficzne jest jedną z klas tego przekształcenia.

Przekształcenie perspektywiczne jest rzutem środkowym. W rzucie tym jest realizowana pewna zależność między środkiem rzutu (w projekcji fizycznej jest nim oko), obiektem a jego obrazem. Owa zależność decyduje o klasie tego przekształcenia.

W perspektywie klasycznej obiektem jest forma przestrzenna o wymiarze 3, która jest rzutowana zwykle na płaszczyznę, co w wyniku daje obraz o wymiarze 2, np. rysunek, fotografię, (ryc. 1, 2).

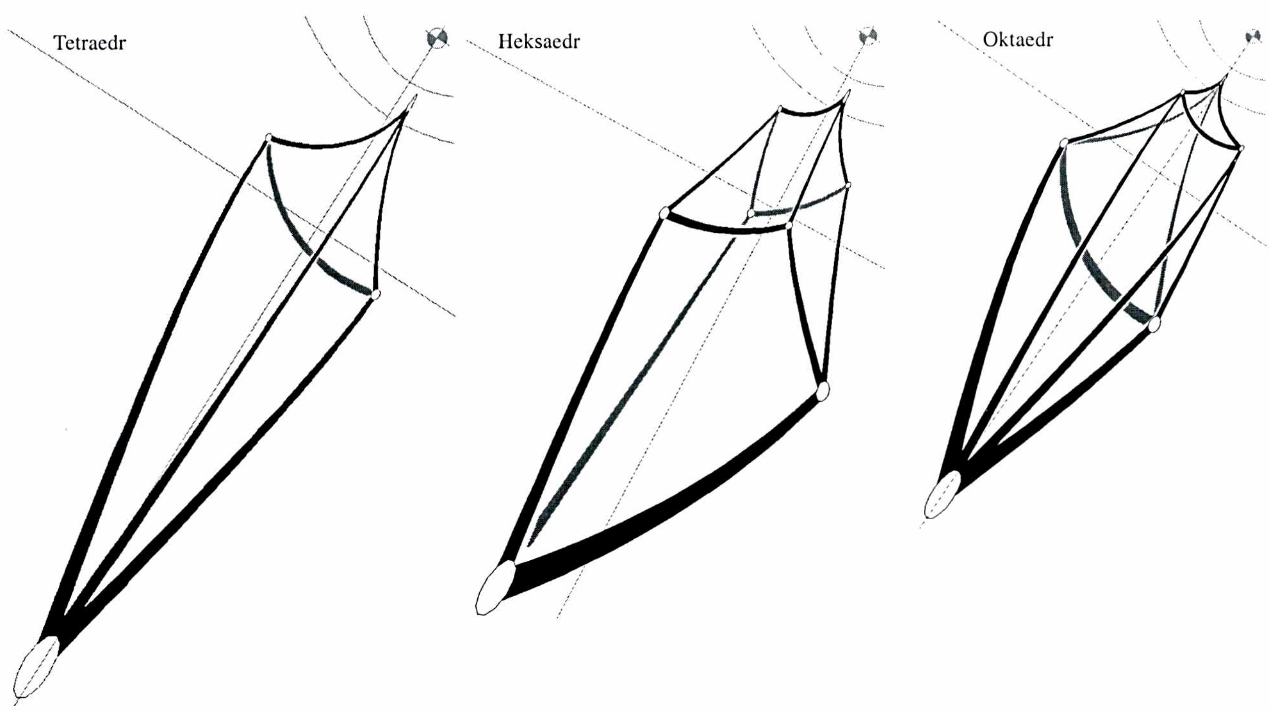
W przekształceniu anamorficznym obiektem jest – umieszczona na płaszczyźnie lub innej powierzchni – forma (rysunek) zwana anamorfozą, ma ona wymiar 2 (ryc. 3–5). W wyniku jej perspektywicznego przekształcenia powstaje przestrzenny obraz o wymiarze 3 (ryc. 6–8).

Ponieważ celem przekształcenia perspektywicznego jest obraz, więc żyjąc w trójwymiarowym świecie nasze zainteresowanie w naturalny sposób skierujemy w stronę anamorfozy i jej trójwymiarowej wizualizacji. Jak dokonuje się odwzorowanie, w którym obrazem przestrzeni dwuwymiarowej jest przestrzeń trójwymiarowa? Czy to jest możliwe, czy aby nie są to „czary z hiszpańskiego zamku"[7]?

Przyjrzyjmy się dokładniej aparatowi przekształcenia anamorficznego. Tym, co różni rzut w perspektywie klasycznej od rzutu anamorficznego jest lustro. Alicja przeszła na drugą stronę lustra do Krainy Czarów, my właśnie tam zajrzymy; tam powstaje przestrzenny obraz płaskiej anamorfozy.

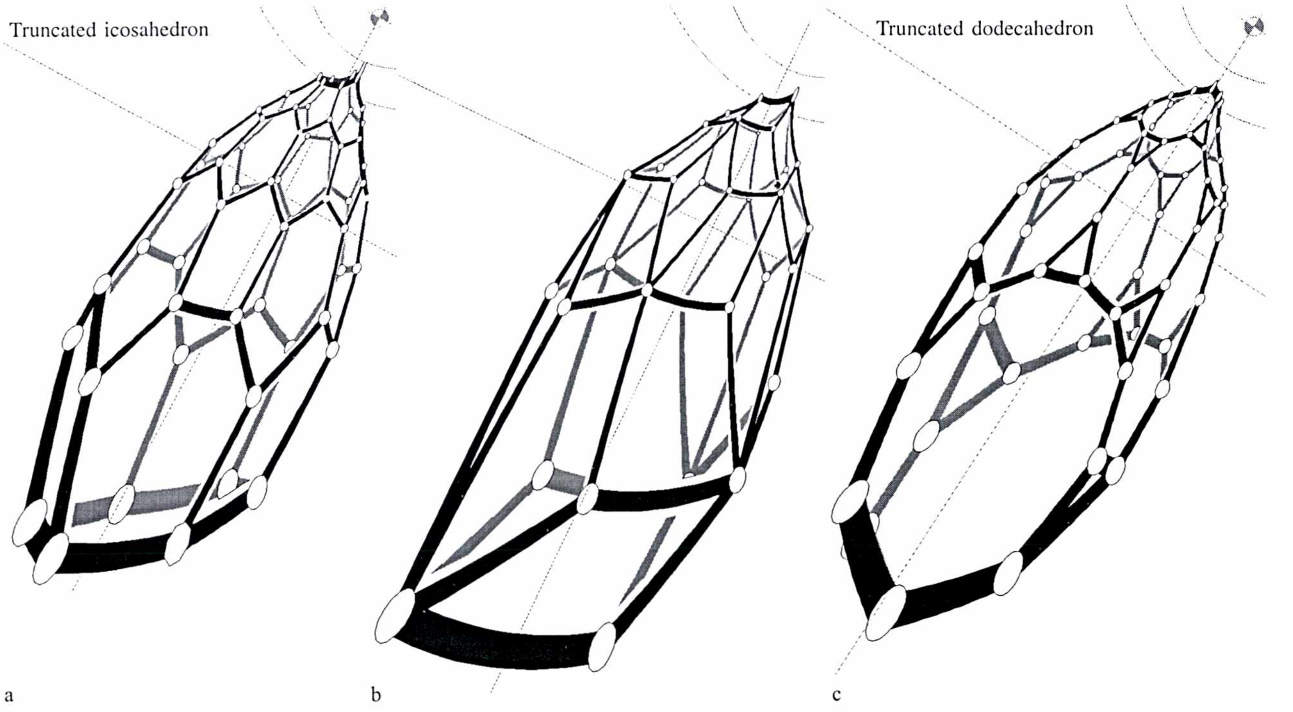
Czym więc są odbicia zwierciadlane? Geometrycznie nazwiemy je rzutem perspektywiczno-refleksyjnym. Sta-

[7] Jimi Hendrix, *Spanish castle magic*, The Jimi Hendrix experience, Axis: Bold as Love, MCD 11601, MCA, (USA), 1997.



a b c

Ryc. 12. Anamorfoza sferyczna na płaszczyźnie a) czworościanu foremnego, b) sześcianu foremnego, c) ośmiościanu foremnego



Ryc. 13. Anamorfoza sferyczna na płaszczyźnie: a) dwudziestościanu ściętego (trzydziestodwuścianu półforemnego), b) trzydziestościanu rombowego, c) dwunastościanu ściętego (trzydziestodwuścianu półforemnego)

nowi on jeden z typów rzutu perspektywicznego. Nie wnikając zbytnio w naturę odbić stwierdzimy, że tylko odbicia względem płaskich luster o zerowej krzywiźnie zachowują kształt, a więc formę obiektu odbijanego, np. obrazem linii prostej jest prosta (przekształcenie ma charakter liniowy). Gdy jednak zakrzywiamy powierzchnię lustra, wówczas spowoduje to deformację obrazu, np. obrazem prostej jest krzywa (przekształcenie ma charakter nieliniowy), (ryc. 10, 14). Wraz ze zwiększeniem krzywizny lustra zwiększa się też deformacja obrazu.

Obiekty, których obrazy tworzymy w wyniku odbić, mogą istnieć na płaszczyźnie, dowolnych powierzchniach lub w przestrzeni. Co do luster natomiast, to poza płaskimi, do najprostszych zakrzywionych zaliczymy lustra stożkowe, walcowe i sferyczne.

Powróćmy teraz do przekształcenia anamorficznego; odpowiedzmy na pytanie, czemu one służą, jakie cele realizujemy poprzez anamorfozy, na czym polega magia tego tajemniczego rzutu, który nieco w ukryciu towarzyszy już od 500 lat rozwojowi klasycznej perspektywy?

Anamorfozy oczywiście też ewoluują w czasie. Dotychczas służą one do swoistej gry z widzem, jak się to dzieje na obszarze sztuki i architektury, ale stosowane były także do celów szyfrowania informacji (kodowanie tekstów i rysunków za pomocą układów luster, jak u Leonarda da Vinci, czy też na potrzeby wojska).

Ta gra z widzem to iluzyjna gra formą przestrzenną, ale też (co jest może i ważniejsze) tworzeniem obrazu zniekształconej, nierozpoznawalnej w swym kształcie anamorfozy, która dopiero w wyniku odbicia względem przyjętego lustra dla stałego punktu obserwacji przekształca się w formy znane i niezdeformowane (ryc. 4, 14).

Przeciwnie jest w odniesieniu do odbić obiektów, które anamorfozami nie są, deformacji bowiem ulega ich obraz (ryc. 9, 10).

Interesująca jest więc odpowiedź na kolejne pytanie: jak przebiegała ewolucja rzutu anamorficznego? W wyniku bardzo prostej analizy uzyskamy w konkluzji zaskakującą odpowiedź na to pytanie.

Ustalmy dwie zmienne, warunkujące obraz anamorficzny. Pierwszą z nich są własności obiektu, a więc anamorfozy, drugą – rodzaj użytego lustra.

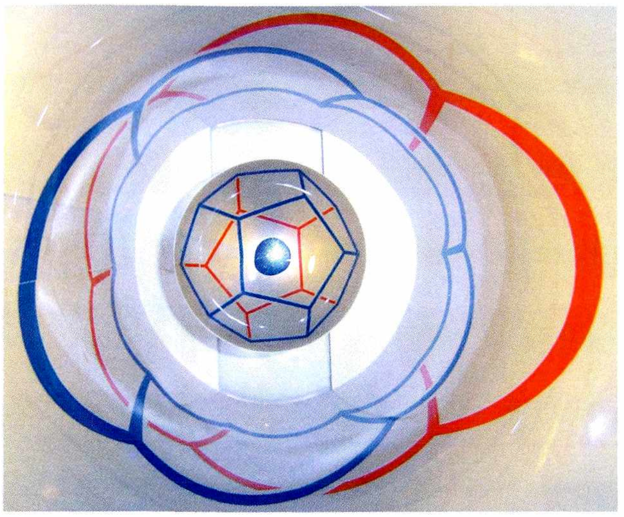
Znane anamorfozy są formami geometrycznymi, zbiorami punktów i linii na płaszczyźnie. Ale tę dwuwymiarową płaszczyznę można przecież dowolnie zakrzywić czy przekształcić. Zdziwienie budzi fakt, że żaden z twórców anamorfoz dotychczas tego ani nie zbadał, ani nie opisał. A przecież najprostszymi zakrzywionymi dwuwymiarowymi powierzchniami są rozwijalne powierzchnie walca i stożka, nie wspominając już o sferze, bądź dowolnie zakrzywionych powierzchniach wypukłych.

Drugą zmienną stanowi lustro. Oprócz płaskich, istnieją lustra walcowe stożkowe, sferyczne, i inne, o zmiennej krzywiźnie, choćby takie, jakie spotykamy w gabinecie luster czy współczesnej architekturze (ryc. 15).

W wyniku tego przeglądu przykładów uzyskamy dziewięć par anamorfoza – lustro: anamorfoza płaska – lustra: stożkowe, walcowe i sferyczne, anamorfoza na powierzchni stożkowej – lustra jak poprzednio, anamorfoza na powierzchni walcowej – lustra jak poprzednio.

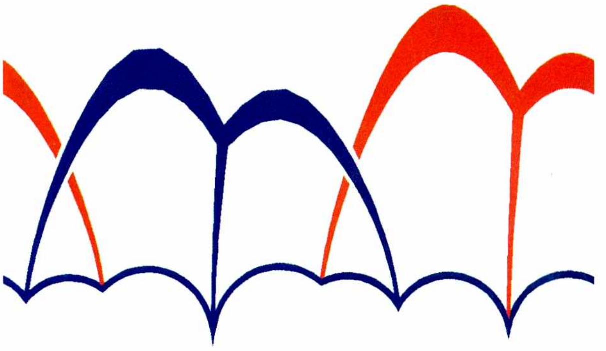
Historia anamorfoz zna zaledwie dwie spośród tych dziewięciu: anamorfozę płaską odbijaną względem lustra stożkowego i walcowego. Odpowiedź na pytanie, dlaczego rozwój przekształcenia anamorficznego przebiegał właśnie tak, wymaga oddzielnego omówienia.

Chcąc choćby w części wypełnić siedem pustych miejsc zbadano i skonstruowano m.in. prezentowane tu: anamorfozę na powierzchni stożkowej odbitą względem lustra sferycznego oraz anamorfozę na powierzchni walcowej odbitą względem tegoż lustra. Pierwsza z nich przedsta-

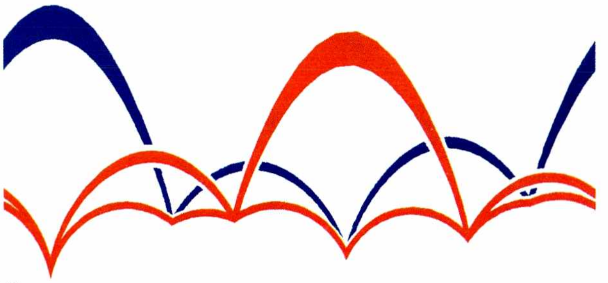


14

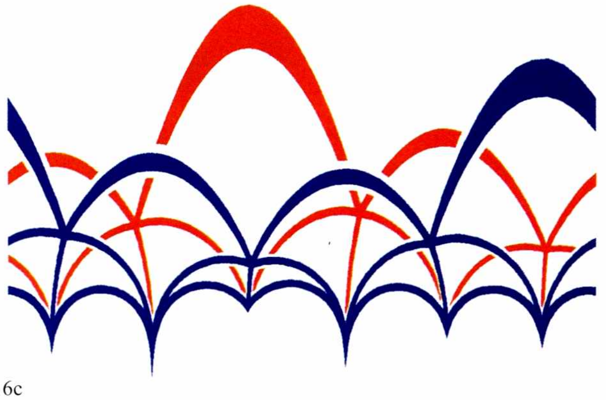
15



16a



16b



16c

Ryciny: 14. Odbicie anamorfozy względem powierzchni refleksyjnej, 15. Przykłady najpopularniejszych form zwierciadeł, 16. Anamorfoza sferyczna na powierzchni walcowej: a) sześcianu foremnego w rozwinięciu na płaszczyźnie, b) ośmiościanu foremnego w rozwinięciu na płaszczyźnie, c) dwudziestościanu foremnego w rozwinięciu na płaszczyźnie

wia kopułę Fullera, druga zaś dwunastościan platoński, (ryc. 4–6, 8a, b).

Przytoczone rozwiązania anamorfoz sferycznych zostały poprzedzone rozwiązaniem przez autora na gruncie geometrii wykreślnej problemu odbić sferycznych, zarówno dla zwierciadeł wypukłych, jak i wklęsłych.

Rozwiązanie tego problemu stało się możliwe po stworzeniu i zbadaniu pewnej krzywej trzeciego stopnia, spełniającej warunki *isoptic* oraz *supplementary* (ryc. 11). Interesujące, że podobną krzywą posłużyli się starożytni Grecy do innych jednak celów. Twórca geometrii rzutowej Jakob Steiner zdefiniował tę krzywą, nie dostrzegł jednak możliwości zastosowania jej w teorii odbić sferycznych.

Można sądzić, że dalsze badania umożliwią realizację anamorfoz na dowolnych powierzchniach wypukłych (okołosferycznych), jak i zastosowanie luster o dowolnej geometrii, do zastosowań w sztuce i architekturze.

Rozwój grafiki komputerowej umożliwi zastosowanie przekształceń anamorficznych w układach dynamicznych, ruchomych, które będą mogły być wykorzystane w technikach filmowych.

Snując refleksję filozoficzną możemy stwierdzić, że Wszechświat jest bez wątpienia swoistą anamorfozą, którą rozszyfrowujemy, używając jednak dotychczas niecałkiem właściwych „luster".

Na koniec przykłady anamorfoz sferycznych płaskich. Zainteresowany Czytelnik może przeprowadzić własne doświadczenia z odbiciami przedstawionych anamorfoz używając do tego celu np. bombki choinkowej średnicy około 135 mm, umieszczonej nad wskazanym na rysunku punktem. Niezbędne jednak jest przy tym powiększenie rysunku do formatu A4.

Ryciny przedstawiają anamorfozy: 3, 14 – wielościanów platońskich na płaszczyźnie, 13 – wielościanów półforemnych Archimedesa, 16 – wielościanów platońskich na powierzchni walcowej.

Ryciny: 1 – Daniel Dudek, 2 – Magdalena Kalita, 3, 4, 14–16 (realizacja techniczna) – Andrzej Indzierowski, 5, 6, 11, 12 – Marek Hamera, Witold Szymański, 7, 8b – Jerzy Olek, 8a – Paweł Karpa, 9, 10, 13 – Witold Szymański.

Figures: 1 – Daniel Dudek, 2 – Magdalena Kalita, 3, 4, 14–16 (technical realization) – Andrzej Indzierowski, 5, 6, 11, 12 – Marek Hamera, Witold Szymański, 7, 8b – Jerzy Olek, 8a – Paweł Karpa, 9, 10, 13 – Witold Szymański.

Bibliografia

[1] Glaeser Georg, *Reflections on spheres and cylinders of revolution*, „Journal for Geometry and Graphics", 1999, t. 3, nr 2.

[2] Lapaine Miljenko, *Valentin's problem, Eight international conference on engineering design graphics and descriptive geometry*, t. 1, Austin (Texas) 1998.

[3] Baltrusaitis Jurgis, *Anamorphoses les perspectives depravees*, Flammarion, Paryż 1984.

[4] *Mały słownik terminów plastycznych*, pod red. Krystyny Zwolińskiej, Zasława Malickiego, WP, Warszawa 1974.

[5] Szymański Witold, *Odwzorowanie punktów przestrzeni w rzucie środkowo-refleksyjnym na sferę*, Prace Naukowe Instytutu Architektury i Urbanistyki Politechniki Wrocławskiej nr 23, Seria: Studia i Materiały nr 6, Prace Studialne Zakładu Geometrii Wykreślnej i Perspektywy Malarskiej, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1987.

[6] Szymański Witold, *Anamorfoza sferyczna jako szczególny przypadek rzutu środkowo-refleksyjnego na sferę,* Raport Zakładu Geometrii Wykreślnej i Perspektywy Malarskiej Politechniki Wrocławskiej, Seria: SPR nr 624, Wrocław 2004.