GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

ÉPURES D'APPLICATION

BIBLIOTHÈQUE DE LA CONSTRUCTION MODERNE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

ÉPURES D'APPLICATION

COURS

Professé à l'École nationale supérieure des Beaux Arts

PAR

RAOUL BRANDON

ARCHITECTE EN CHEF DE DÉPARTEMENT ET DU GOUVERNEMENT

ARCHITECTE DE L'OFFICE MUNICIPAL DES HABITATIONS A BON MARCHÉ DE LA VILLE DE PARIS

(1921)

PARIS

LIBRAIRIE DE LA CONSTRUCTION MODERNE, ÉDITEURS

13, RUE DE L'ODÉON, 13

PRÉFACE

Ce cours de géométrie descriptive a été professé à l'École nationale supérieure des Beaux-Arts par un architecte et pour des architectes ; sa généralisation dans toutes les Écoles d'ingénieurs serait d'ailleurs à souhaiter.

Dans la plupart des cours, la même difficulté renaît toujours : l'emploi de notions de mathématiques supérieures pour traiter certains problèmes classiques, mais ces notions ont souvent le grave inconvénient d'habituer l'élève à considérer un problème de géométrie descriptive comme un problème d'analyse résoluble par des tracés méthodiques et des formules sans qu'il soit nécessaire de voir dans l'espace ou de raisonner sur les volumes représentés.

M. Raoul Brandon, architecte, habitué à créer des formes et des volumes, s'opposa toujours à ce système d'enseignement.

Pour lui, l'élève doit voir dans l'espace pour comprendre et travailler avec fruit ; il amène le lecteur à cette vision en volume substituée à la vision en plan de l'épure.

Pour y arriver, il commence par étudier des volumes connus dont la représentation semble toute naturelle ; il joint des croquis perspectifs à la plupart des épures et dans chaque partie du cours, après un court exposé théorique, il traite une quantité d'épures qui exigent un travail personnel de l'élève, moins passif, plus intéressant et instructif que l'effort d'apprendre par cœur certaines règles de construction.

Dans cet ouvrage, clair, simple, précis, les élèves sont ainsi habitués à traiter les cas plus divers intéressant les solides et à se familiariser rapidement avec eux.

Le cours se termine par une troisième partie (surfaces réglées et hélicoïdales), qui peut être considérée comme un des modèles du genre : par des procédés simples et des croquis perspectifs, les élèves arrivent à comprendre les problèmes les plus ardus, dont certains ne sont même pas traités en mathématiques spéciales.

Ce mode d'exposition de la Géométrie Descriptive où l'application suit immédiatement la théorie, et où la difficulté de la vision en volume est résolue par l'emploi de croquis perspectifs, semble particulièrement apte à faire comprendre la Géométrie Descriptive à ceux qui la considèrent comme un outil précieux pour la réalisation ou la lecture des projets : d'architecture, de construction, de mécanique et non pas seulement comme une théorie mathématique abstraite.

Paul Painlevé.

PREMIÈRE PARTIE

PREMIÈRE SECTION

POLYÈDRES RÉGULIERS

CHAPITRE UNIQUE

DÉFINITIONS

On appelle *polyèdre* une portion d'espace d'un seul tenant limitée exclusivement et complètement par des portions de plans en forme de polygones.

On appelle *faces du polyèdre* les polygones qui limitent le corps ; on appelle *arêtes du polyèdre* les arêtes des faces. On appelle *angles du polyèdre* les angles polyèdres formés par l'ensemble de plusieurs faces ayant un sommet commun. On appelle *sommet* les sommets des angles polyèdres dont on vient de parler ; on appelle *diagonales* les droites joignant deux sommets n'appartenant pas à une même face ; on appelle *diagonales de face* les diagonales des polygones de face du polyèdre. On dit qu'un polyèdre est *convexe* lorsqu'il est situé tout entier d'un même côté d'un quelconque de ses plans de face prolongé indéfiniment en tous sens ; il est *concave* dans le cas contraire. Dans tout ce qui suit il ne sera traité exclusivement que des polygones convexes.

La section d'un polyèdre convexe par un plan est, quel que soit le plan, un polygone convexe, il suit de là qu'une droite ne peut rencontrer un polyèdre convexe en plus de deux points. Il existe une relation remarquable due à Euler entre le nombre des faces, le nombre des sommets et le nombre des arêtes d'un polyèdre convexe quelconque : si on appelle F, S, et A les nombres en question, on a toujours

$$F + S - A = 2$$

Exemple : Une pyramide admettant pour base un polygone convexe de n côtés a $n+1$ faces, $n+1$ sommets et $2n$ arêtes, on a bien :

$$n + 1 + n + 1 - 2n = 2$$

On appelle *polyèdre régulier* un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux entre eux.

Il résulte des propriétés des faces des angles polyèdres que, comme par chaque sommet, il doit passer au moins 3 faces, ces faces étant égales, chacune d'elles doit être inférieure à $\frac{4}{3}$ d'angle droit, les polygones de face doivent donc être au plus des pentagones réguliers dont l'angle vaut 108°.

En essayant de grouper successivement 3 à 3, 4 à 4, 5 à 5, etc., les différents polygones possibles, à savoir : triangle équilatéral, carré, pentagone convexe, on ne trouve comme possible que 5 polyèdres réguliers dont les caractéristiques sont données dans le tableau suivant :

Nom du Polyèdre.	Nombre F et nature des Faces.	Nombre S et nature des sommets.	Nombre des arêtes	F + S-A
Tétraèdre.	4 triangl. éq.	4 angles trièdres.	6	4 + 4- 6 = 2
Cube.	6 carrés.	8 — —	12	6 + 8-12 = 2
Octaèdre.	8 triangl. éq.	6 angles trétraèd.	12	8 + 6-12 = 2
Dodécaèdre.	12 pentagones.	20 angles trièdres.	30	12 + 20-30 = 2
Icosaèdre.	20 triangl. éq.	12 angles pentaèd.	30	20 + 12-30 = 2

On peut remarquer de suite, à l'inspection du tableau précédent, que les 4 derniers polyèdres s'accouplent deux à deux : le nombre des arêtes étant le même et celui des faces de l'un étant égal à celui des sommets de l'autre ; le tétraèdre dans ces conditions se correspond à lui-même. Cette correspondance se poursuit en remarquant qu'en joignant convenablement par des segments de droite les centres des faces d'un polyèdre régulier, on obtient un autre polyèdre régulier ; ainsi le tétraèdre donne un second tétraèdre ; le cube donne un octaèdre et l'octaèdre donne un cube ; le dodécaèdre donne un icosaèdre et l'icosaèdre redonne le dodécaèdre.

Signalons enfin la propriété très importante suivante des polyèdres réguliers : *Tout polyèdre régulier est inscriptible à une sphère et circonscriptible à une deuxième sphère concentrique à la première.* Les points de contact de cette deuxième sphère avec le polyèdre sont les centres des faces.

Remarquons enfin que *tous les polyèdres réguliers convexes d'une même espèce sont semblables* : un seul paramètre de grandeur suffit à les définir complètement en grandeur.

Cette remarque joue un *rôle très important* en géométrie descriptive, car elle permet d'appliquer aux polyèdres réguliers la *méthode des figures semblables* quand on veut, soit les construire, soit déterminer un de leurs éléments de longueur, un autre élément étant connu.

Par exemple, pour connaître l'arête d'un octaèdre régulier connaissant le rayon r de la sphère inscrite, il suffira de construire un octaèdre régulier de *dimensions quelconques*, d'en mesurer le rayon de la sphère inscrite r' et l'arête a', l'arête a cherchée de l'octaèdre de rayon r sera donnée par la proportion :

$$a = r \times \frac{a'}{r'}$$

Les calculs peuvent d'ailleurs être remplacés par une homothétie convenable effectuée sur l'épure.

Proposons-nous maintenant de mettre en projections connaissant la longueur de leurs arêtes, les différents polyèdres réguliers placés par rapport aux plans de projection dans certaines positions particulières.

REPRÉSENTATION D'UN TÉTRAÈDRE RÉGULIER REPOSANT PAR UNE DE SES FACES SUR LE PLAN HORIZONTAL.

Par suite de la symétrie ternaire évidente que présente ce solide, la projection horizontale sera constituée par le triangle équilatéral de base et les trois segments rectilignes allant du centre de cette base aux trois sommets, segments qui représenteront les trois arêtes latérales. La projection verticale se déduit ensuite immédiatement de la projection horizontale à condition de connaître la hauteur du tétraèdre. Or, cette hauteur est le deuxième côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est une arête et le premier côté de l'angle

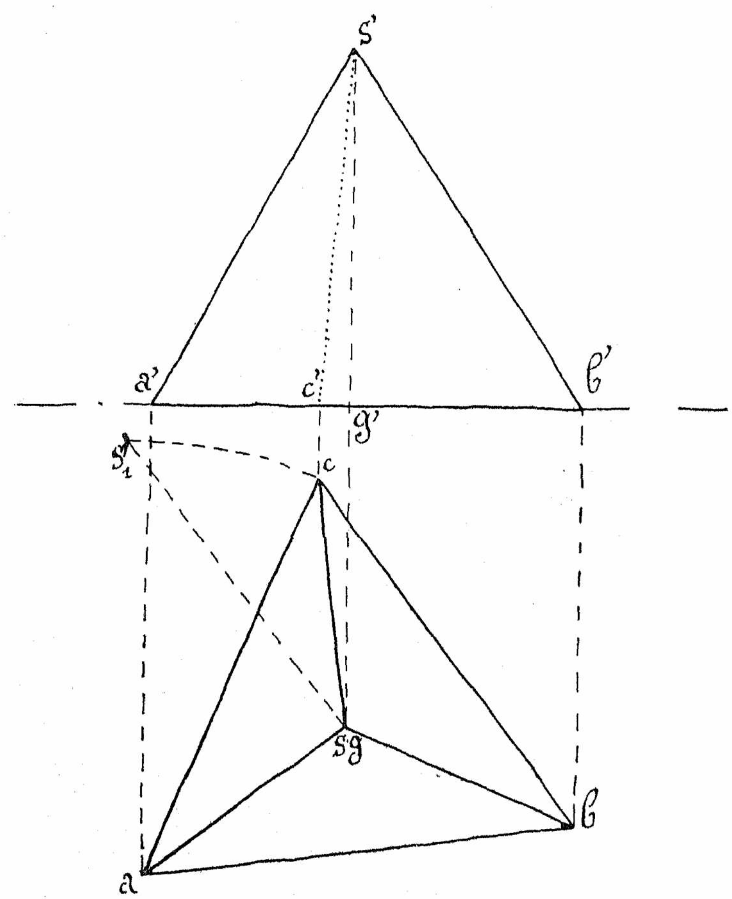


Fig. 1.

droit est la distance d'un sommet au centre de la face à laquelle il appartient. Sur l'épure (fig. 1) le triangle de base étant (abc, $a'b'c'$) et le quatrième sommet étant projeté horizontalement en s, on a rabattu le triangle SAG (G centre de la base) en $s_1\ g\ a$ et on a ainsi en gs_1 la hauteur du tétraèdre, d'où la projection verticale s' du sommet. Le calcul donnerait de même

$$ag = \frac{2}{3}\frac{ab\sqrt{3}}{2} = \frac{ab\sqrt{3}}{3}$$

et par suite $s_1g = \sqrt{\overline{ab}^2 - \frac{\overline{ab}^2}{3}} = ab\sqrt{\frac{2}{3}} = ab\frac{\sqrt{6}}{3}$

REPRÉSENTATION D'UN TÉTRAÈDRE RÉGULIER DONT UNE ARÊTE EST VERTICALE

Les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier étant *orthogonales*, si l'arête AB est verticale, l'arête opposée CD est horizontale, le plan horizontal qui passe par CD coupe AB en son milieu M la distance du milieu M de AB au milieu P de CD est la hauteur d'un triangle isocèle dont on connaît la longueur de la base CD et la longueur des côtés égaux MC et MD qui sont les hauteurs des faces du polyèdre. On a construit sur l'épure

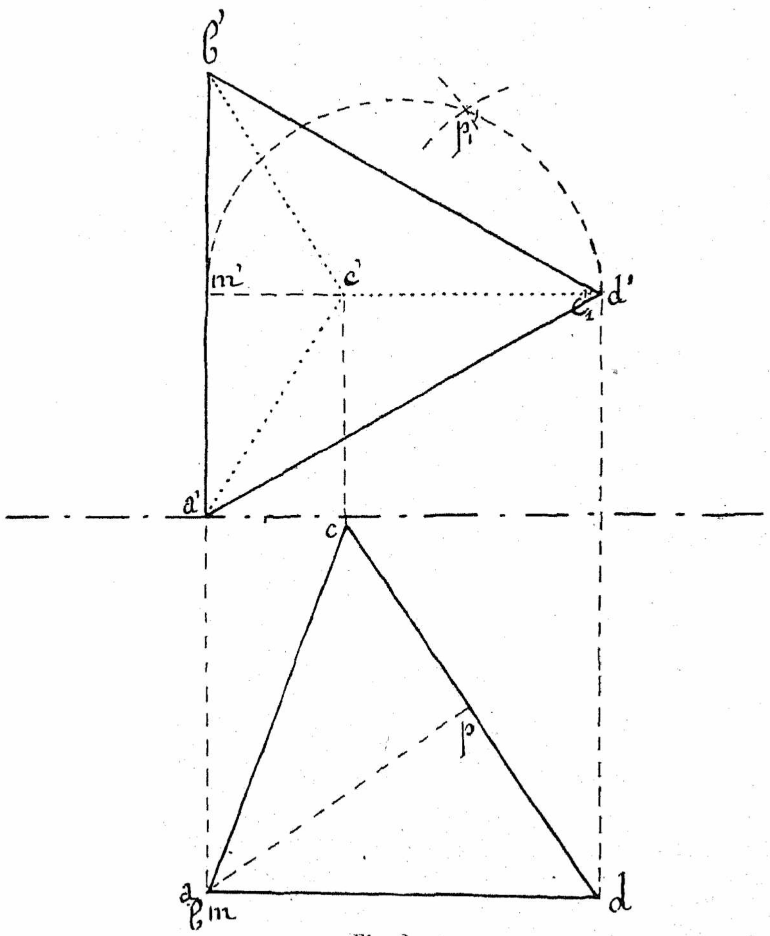


Fig. 2.

(fig. 2) la longueur MP en projection verticale dans le plan de front passant en AB, en construisant d'abord une face en $a'b'c'_1$ en prenant la hauteur $c_1'm'$ puis en construisant en $m'p_1'c'_1$ un triangle rectangle d'hypoténuse $m'c_1'$ et de côté de l'angle droit $c'_1p'_1$ égal à $\frac{\text{CD}}{2}$, le second côté $m'p'_1$ est la distance cherchée. On a alors de suite en *abcd* la projection horizontale (la direction de *cd* a été prise arbitrairement) et de la projection horizontale on déduit la projection sur le mur $a'b'c'd'$ immédiatement. Le calcul donne de suite également

$$m'c'_1 = \frac{a'b'\sqrt{3}}{2}$$

d'où

$$m'p'_1 = \sqrt{\frac{3\overline{a'b'}^2}{4} - \frac{\overline{a'b'}^2}{4}} = \frac{a'b'\sqrt{2}}{2}$$

REPRÉSENTATION D'UN TÉTRAÈDRE RÉGULIER DONT DEUX ARÊTES OPPOSÉES SONT HORIZONTALES

Dans ce cas, si AB et CD sont horizontales, le segment MP de leurs milieux est vertical. Or, dans l'épure précédente, on a calculé et construit la distance MP en

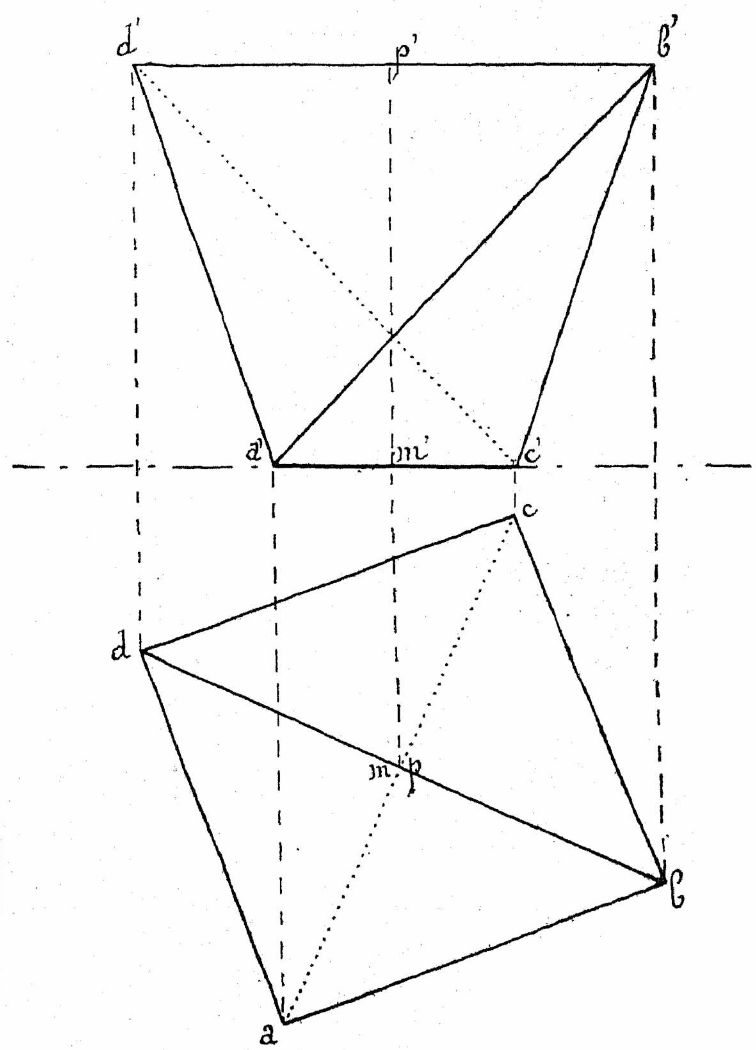


Fig. 3.

fonction de la longueur d'arête ; remarquons ici que la projection horizontale du solide est un carré *abcd* ayant pour diagonale les deux arêtes, la distance MP sera donc le côté de ce carré et M étant pris arbitrairement ainsi que la direction de ac, il est facile de construire le carré $abcd$ et d'en déduire la projection $a'b'c'd'$ sur le mur, la distance des deux parallèles $b'd'$ et $a'c'$ étant $m'p' = ac \frac{\sqrt{2}}{2} = ab$ (fig. 3).

Remarque. — Dans tous les problèmes de construction d'un tétraèdre régulier, quelles que soient les données, on peut se ramener d'abord par un calcul ou une construction à connaître l'arête, puis par un déplacement à mettre le solide dans une des positions étudiées. Le polyèdre étant ainsi construit on en déduira ensuite facilement les projections dans la position demandée.

Enfin il est bon de se souvenir que le développe-

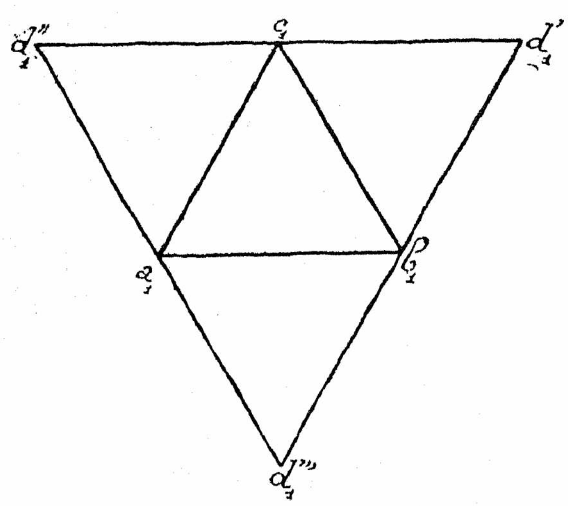


Fig. 4.

ment d'un tétraèdre régulier se compose de 4 triangles équilatéraux égaux formant un nouveau triangle équilatéral de dimensions quadruples de celles des faces (fig. 4).

REPRÉSENTATION D'UN CUBE AYANT UNE DIAGONALE VERTICALE

Nous nous appuierons sur la propriété suivante d'un cube : *les projections des sommets d'un cube sur une diagonale se font aux tiers de cette diagonale, les projections des trois sommets les plus voisins d'une extrémité de cette diagonale étant confondues au même point* (fig. 5).

Considérons en effet un cube de diagonale AG et projetons le sommet B voisin en A en B' sur cette diagonale ; le triangle ABG est rectangle en B, on a donc :

$$\overline{AB}^2 = AB' \times AG$$

or, si on pose $AB = a$,
on a : $AG = a\sqrt{3}$
et par suite :

$$AB' = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} = \frac{1}{3} AG$$

ce qui démontre le théorème énoncé, si l'on tient compte des symétries évidentes du cube.

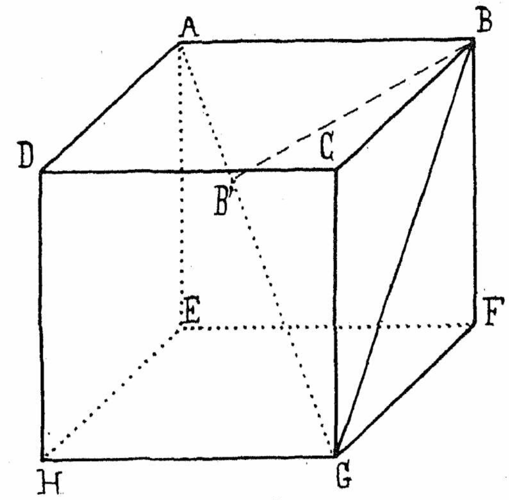


Fig. 5.

Cela posé, proposons-nous de construire un cube dont on donne la longueur de l'arête $AB = a$ sachant que la diagonale AG est verticale et supposant que l'arête AB soit de front.

On construira tout d'abord en a_1g_1 la longueur $AG = a\sqrt{3}$ de la diagonale à l'aide de deux triangles rectangles, l'un isocèle $a_1b_1f_1$ ($f_1b_1 = a_1f_1 = a$), l'autre $a_1b_1g_1$ ($\widehat{b_1g_1 = ab_1} = 90°$) puis, on tracera dans ce triangle la hauteur $b_1b'_1$ qui est égale à la longueur de la projetante BB' de B sur AG dans le cube.

Ces constructions préliminaires achevées et la diagonale AG étant mise en place, on remarquera que les 6 sommets du cube autres que A et G se projetteront tous, par suite de la symétrie du cube sur le plan horizontal à une distance de a égale à $b_1b'_1$; de plus, la remarque faite plus haut nous fera connaître les cotes de ces points 3 par 3, à savoir $\frac{a}{3}$ et $\frac{2a}{3}$: sachant que l'arête AB est de front, il sera alors facile de placer le point B et ensuite de tracer les deux projections du solide : la projection horizontale sera formée par un hexagone régulier et ses trois diagonales centrales ; la projection verticale sera formée par un rectangle traversé par la droite joignant les milieux des deux grands côtés.

On a effectué sur l'épure (fig. 6) les constructions qu'on vient de résumer.

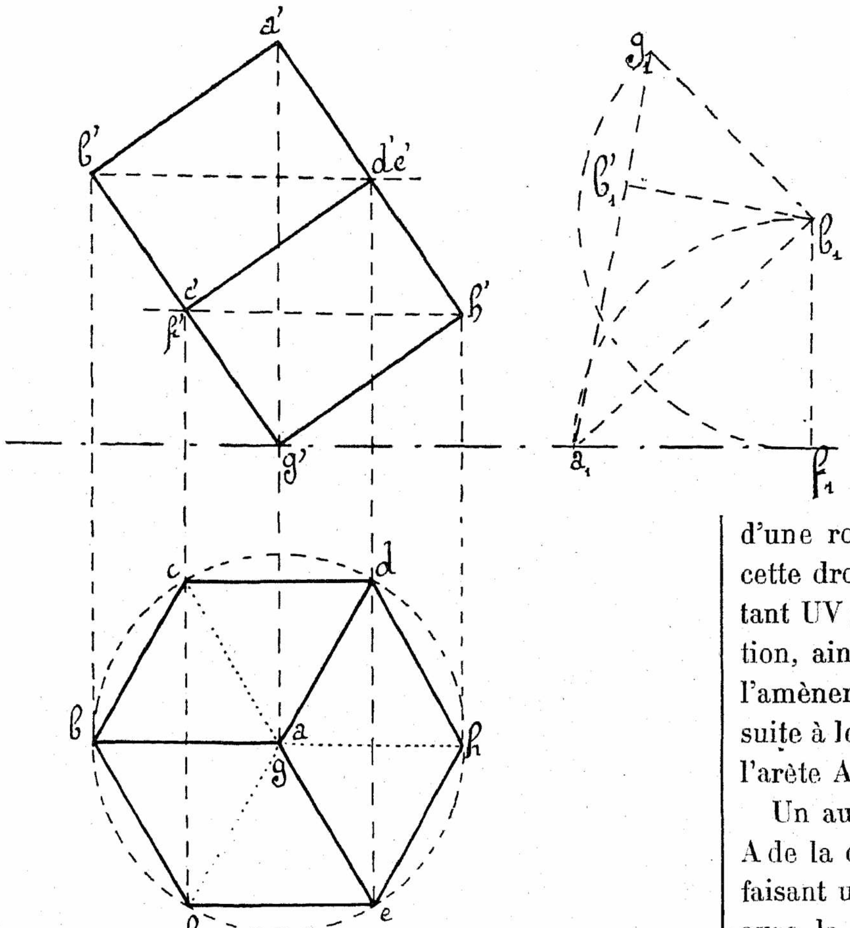


Fig. 6.

Au cas où l'arête AB, au lieu d'être de front devrait faire un angle α avec le mur, il suffirait de faire subir au cube construit dans la position précédente une rotation autour de la verticale AG d'un angle β qu'il est facile de construire (fig. 7).

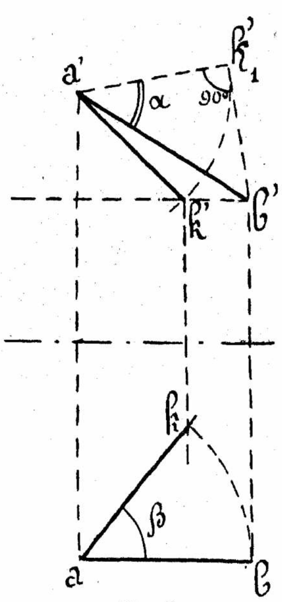


Fig. 7.

Soit $(ab, a'b')$ la génératrice de front qu'il faut amener en $(ak, a'k')$ telle que l'angle de AK avec le plan de front soit α : appelons H la projection de K sur ce plan de front, nous aurons dans le triangle KAH rectangle en H, $\widehat{KAH} = \alpha$ par définition de l'angle d'une droite et d'un plan. Comme de ce triangle on connaît déjà AK $=$ AB $= a'b'$, on peut le construire et avoir ainsi la longueur du côté AH, or, cette longueur est égale à celle de la projection verticale $a'k'$ cherchée de AK. On aura donc à exécuter les constructions suivantes :

1° Construire un triangle égal à AKH, ce qui a été fait sur l'épure en $a'b'k'_1$;

2° A porter en $a'k'$, k' étant sur l'horizontale de b' une longueur égale à $a'h'_1 =$ AH ;

3° A rappeler k' en k sur le cercle de centre a et de rayon ab ; l'angle $\widehat{kab}$ est l'angle cherché β.

Remarque. — Enfin, si l'on voulait représenter un cube dont une diagonale soit quelconque, on amènerait la droite UV, qui doit porter la diagonale à être verticale à l'aide d'une rotation autour d'un axe horizontal passant par cette droite et perpendiculaire au plan vertical projetant UV ; on construirait alors le cube dans cette position, ainsi qu'il a été indiqué, puis la rotation inverse l'amènerait à avoir UV pour diagonale, il resterait ensuite à le faire tourner autour de UV de façon à amener l'arête AB à faire l'angle α voulu avec le plan vertical.

Un autre procédé consisterait à mener par le point A de la droite UV une droite AB de longueur donnée faisant un angle α avec le plan vertical et un angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$ avec la droite UV (φ étant l'angle usuel des rayons d'ombre à 45°).

Pour avoir une telle droite, il suffit de prendre l'intersection de deux cônes de révolution de sommet A, l'un ayant un axe debout et pour demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$ l'autre ayant pour axe UV et pour demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \varphi$. On verra plus loin la méthode pour déterminer une pareille intersection. L'arête AB placée, on terminera facilement la mise en place du cube en s'aidant de la propriété énoncée au début de ce paragraphe et des symétries du cube.

REPRÉSENTATION D'UN OCTAÈDRE RÉGULIER A DIAGONALE VERTICALE

Si la diagonale AF est verticale, le plan diagonal BCDE qui forme un carré est horizontal, étant perpendiculaire au milieu O de AE. Remarquant alors que la diagonale de l'octaèdre est la diagonale du carré ayant l'arête pour côté, on peut de suite construire AF et ensuite le carré BCDE en se donnant arbitrairement la direction de OB par exemple dans le plan horizontal du

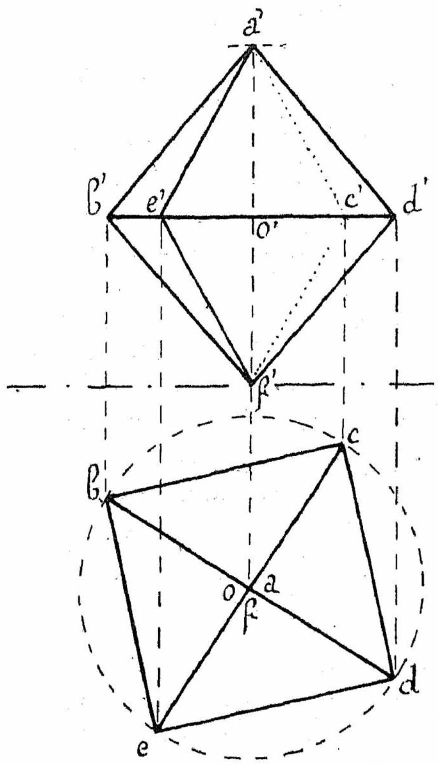


Fig. 8.

point O. L'épure (fig. 8) montre le tracé facile à effectuer dans ce cas.

REPRÉSENTATION D'UN OCTAÈDRE REPOSANT SUR LE PLAN HORIZONTAL PAR UNE DE SES FACES

ABC étant la face de base, remarquons que le centre O de l'octaèdre est projeté horizontalement au centre G de la face ABC. La distance OG est égale au rayon de la sphère inscrite dans l'octaèdre, on construit donc (ou on calcule) ce rayon par la méthode des figures semblables. Par le calcul on trouve en remarquant que OG est la hauteur d'un triangle rectangle ayant pour

côtés $\frac{AB}{2}$, $\frac{AB\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{AB\sqrt{3}}{2}$

$$OG = \frac{\frac{AB}{2} \times \frac{AB\sqrt{2}}{2}}{\frac{AB\sqrt{3}}{2}}$$

$$OG = \frac{AB\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{AB\sqrt{6}}{6}$$

Par la géométrie on construit un carré de côté AB dont on prend la diagonale AC et on construit un triangle rectangle ayant pour côtés $\frac{AB}{2}$ et $\frac{AC}{2}$ la hauteur de ce triangle est égale à OG. Cette longueur calculée on a facilement la projection verticale o' du centre de l'octaèdre et par symétrie les 3 autres sommets E, F, G

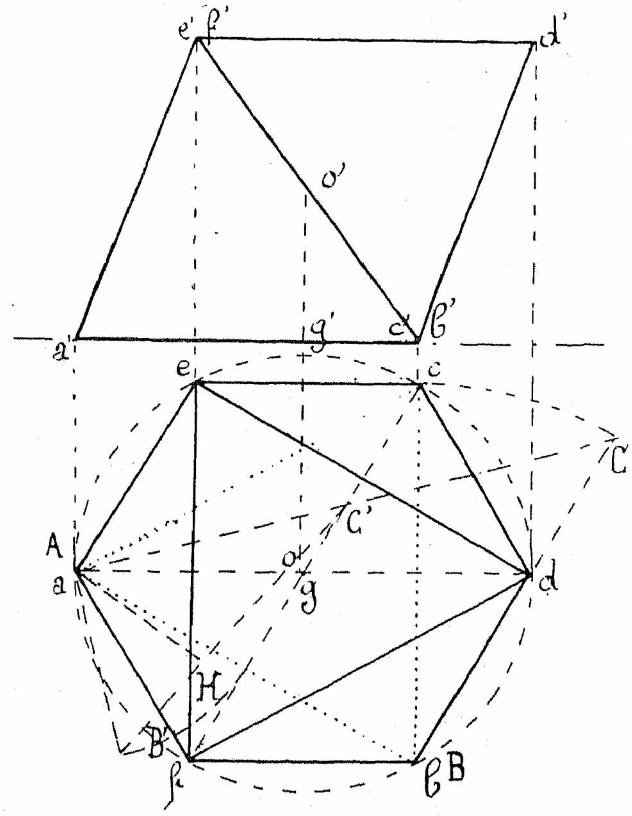


Fig. 9.

de l'octaèdre. Les constructions indiquées sont effectuées sur l'épure (fig. 9). On a placé le côté BC de bout; dans ces conditions la projection verticale est formée d'un losange et d'une de ses diagonales. On pourrait même à l'aide de cette remarque faite à priori simplifier

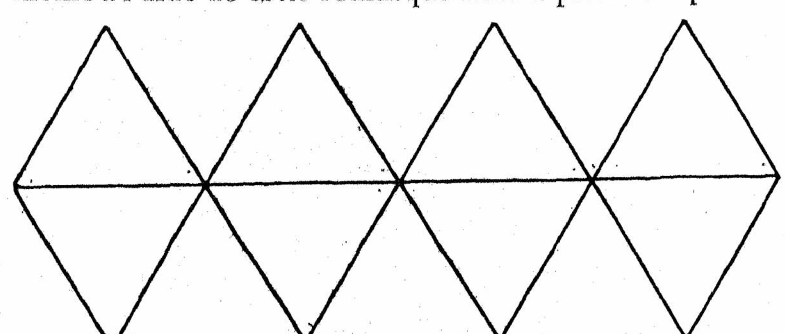


Fig. 9 *bis*.

la construction quelle que soit la position de BC, la projection horizontale est toujours formée d'un hexagone régulier et de ses diagonales non centrales. On a tracé (fig. 9 *bis*) le développement de l'octaèdre à l'échelle 1/2.

REPRÉSENTATION D'UN DODÉCAÈDRE RÉGULIER REPOSANT PAR UNE DE SES FACES SUR LE PLAN HORIZONTAL.

Autour de la face horizontale ABCDE se groupent 5 autres pentagones ayant avec le premier une arête commune et de même, de proche en proche, une arête commune entre eux. L'ensemble de ces 6 pentagones forme la moitié du dodécaèdre cherché ; il suffira de faire une symétrie autour du centre du dodécaèdre pour l'obtenir tout entier. En résumé pour construire ce solide : 1° on placera sa base dans le plan horizontal ; 2° on placera un des pentagones adjacents ; 3° on déduira les quatre autres pentagones de ce second

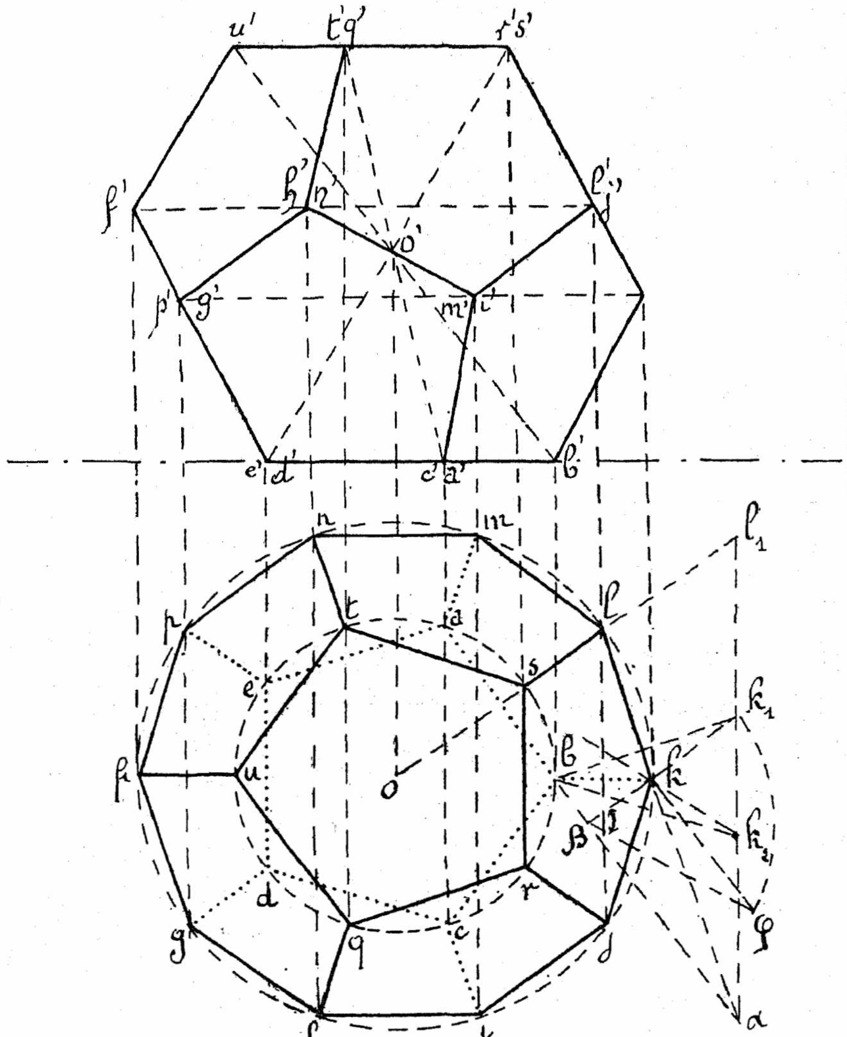


Fig. 10.

par des rotations multiples de 72° ; 4° on déterminera le centre O du dodécaèdre à l'intersection des deux axes de deux pentagones ; 5° on fera une symétrie par rapport au point O de l'ensemble déjà obtenu de la figure.

Pour placer un pentagone adjacent à celui de base, la base étant placée dans le plan horizontal, on supposera (fig. 10) qu'un des côtés de cette base DE est de bout, le pentagone oblique admettant aussi DE pour arête aura son plan de bout, il suffit pour le construire de connaître l'angle que fait ce plan avec le plan horizontal, c'est-à-dire l'*angle dièdre* du dodécaèdre. Pour cela supposons rabattus sur le plan horizontal autour de AB et de BC les deux pentagones ayant respectivement en commun avec la base les deux arêtes AB et BC, leur arête commune BK issue de B est rabattue d'une part en bk_1, d'autre part en bk_2 ; le point K est donc relevé en k. En construisant alors en $\beta k \varphi$ ce triangle de rabattement on a en $k\beta\varphi$ l'angle de rabattement qui est justement l'angle cherché.

La construction donne de plus en αkl le troisième côté du pentagone oblique, d'où on déduit la projection horizontale.

On place alors de suite les sommets du pentagone situé dans le plan de bout puis par rotation de multiples de 72° les autres pentagones ; en plan l'ensemble de ces pentagones est formé par un pentagone et un

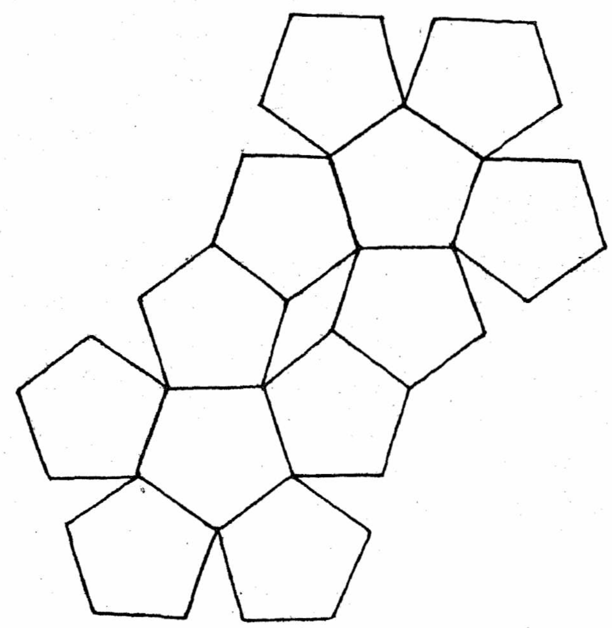


Fig. 10 *bis*.

décagone convexes concentriques les sommets de l'un étant de deux en deux sur les mêmes rayons que les sommets de l'autre, ces sommets étant rejoints par les segments correspondants.

On a également déterminé la projection verticale de cet ensemble ; en relevant les différents sommets de la projection horizontale on prend alors l'intersection O des axes du pentagone horizontal et du pentagone de bout, ce point est le centre du dodécaèdre; ainsi que nous l'avons indiqué, une symétrie termine facilement la mise en place en tenant compte des nombreuses vérifications que présentent les constructions de la figure.

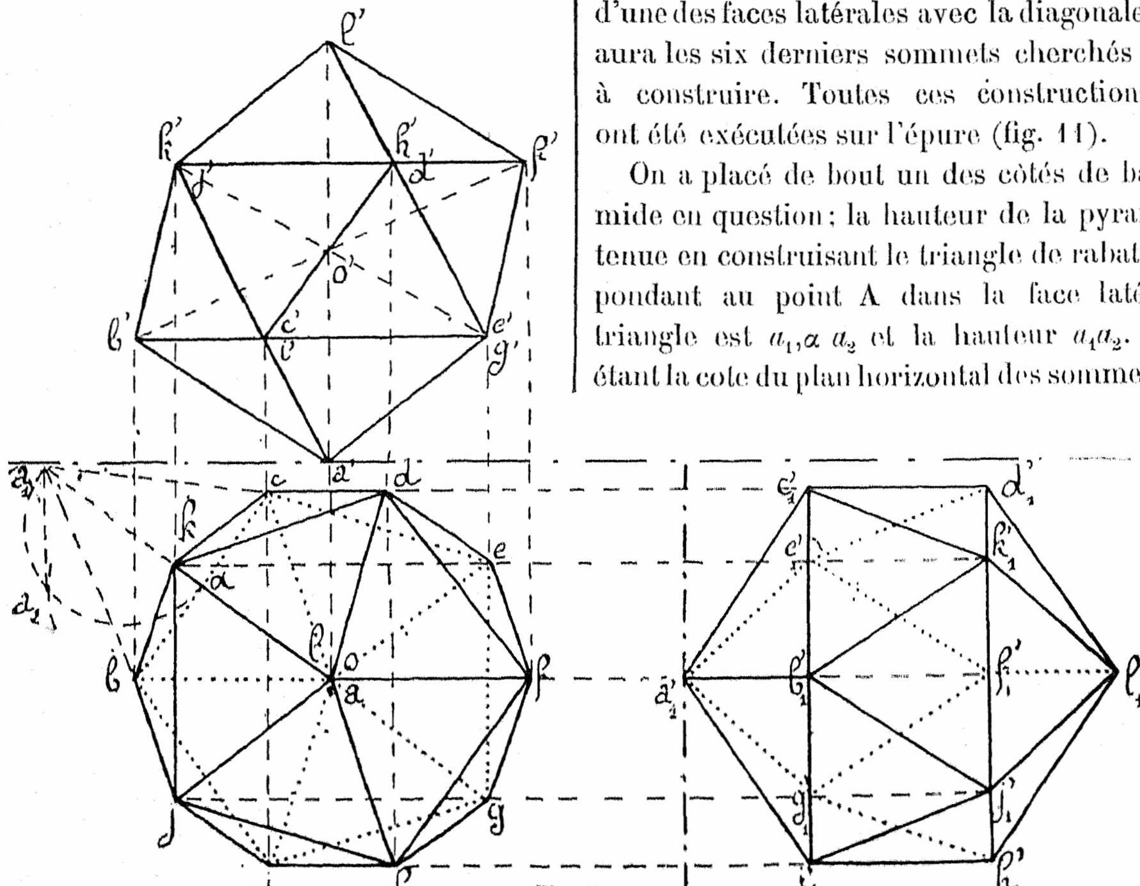


Fig. 11.

Remarque. — En rabattant les cinq pentagones adjacents à la base sur le plan de cette base on obtient le développement du demi-dodécaèdre ; en ajoutant à cette figure une figure identique accolée à elle le long d'une arête extérieure on aurait le développement du dodécaèdre entier (fig. 10 *bis*).

REPRÉSENTATION D'UN ICOSAÈDRE A DIAGONALE VERTICALE

Si l'on considère les cinq triangles équilatéraux qui ont un sommet A commun, on voit de suite que par symétrie les cinq sommets autres que A sont dans un même plan perpendiculaire à la diagonale issue de A. Si donc cette diagonale est verticale l'ensemble de ces cinq triangles forme la surface latérale d'une pyramide régulière à base pentagonale horizontale dont les arêtes de base sont égales aux arêtes latérales; leur longueur commune étant celle des arêtes de l'icosaèdre : on peut facilement construire cette pyramide, puis en en faisant la symétrie par rapport au point de rencontre O de l'axe d'une des faces latérales avec la diagonale issue de A on aura les six derniers sommets cherchés de l'icosaèdre à construire. Toutes ces constructions très faciles ont été exécutées sur l'épure (fig. 11).

On a placé de bout un des côtés de base de la pyramide en question ; la hauteur de la pyramide a été obtenue en construisant le triangle de rabattement correspondant au point A dans la face latérale ABC ; ce triangle est $a_1, a\ a_2$ et la hauteur a_1a_2. Cette hauteur étant la cote du plan horizontal des sommets contigus à A, sa connaissance permet d'obtenir la projection verticale de la pyramide. Celle-ci tracée, la construction s'achève sans difficultés. On a tracé également sur l'épure une seconde projection verticale sur un mur de profil.

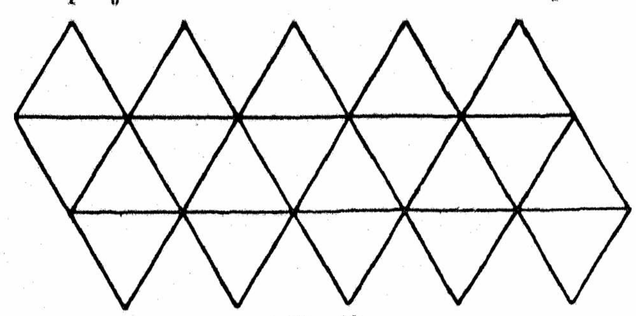


Fig. 12.

Le développement est formé par vingt triangles équilatéraux disposés comme l'indique la figure 12.

REMARQUE GÉNÉRALE SUR LA CONSTRUCTION DES POLYÈDRES RÉGULIERS CONVEXES

Au cas où la donnée de grandeur ne serait pas la longueur d'une arête, on se donnerait arbitrairement cette longueur et on construirait le polyèdre correspondant; une similitude permettrait ensuite de parvenir au solide demandé lui-même. Le rapport de cette similitude serait égal au rapport de la longueur de la dimension donnée à la longueur de la même dimension mesurée sur le premier polyèdre construit.

Au cas où la position du polyèdre à construire ne serait pas une de celles étudiées, un *déplacement* permettrait toujours de se ramener à un des cas étudiés.

DEUXIÈME SECTION

PLANS COTÉS

CHAPITRE UNIQUE

GÉNÉRALITÉS

Dans la méthode que nous allons succinctement exposer maintenant, la détermination d'un point dans l'espace n'est plus obtenue au moyen de ses deux projections orthogonales sur deux plans rectangulaires, comme dans la méthode de Monge, mais par une seule projection orthogonale sur un seul plan, qu'on nomme *plan de comparaison*, projection à laquelle on adjoint un nombre nommé *cote*, qui, à une certaine échelle, mesure la distance du point de l'espace à sa projection. Ce nombre est un nombre algébrique ; positif, il correspond à un point placé au-dessus du plan de comparaison; négatif, à un point placé au-dessous.

La géométrie cotée est employée à de nombreuses applications dont une des plus importantes est la topographie terrestre et marine : dans ce cas le plan de comparaison est le plan horizontal du niveau moyen des mers en un point choisi convenablement sur le globe.

Dans les explications purement théoriques qui vont suivre, on ne précisera pas quel est le plan de comparaison ; d'autre part, les longueurs seront exprimées directement en millimètres et représentées telles sans le secours *d'échelles* de réduction ou d'amplification comme on est naturellement obligé de le faire en topographie ; de même, les cotes seront exprimées en millimètres et indiquées ainsi sur les épures.

REPRÉSENTATION D'UNE DROITE. — GRADUATION

La projection d'une droite est une droite, sauf dans le cas où la droite est perpendiculaire au plan de comparaison, c'est-à-dire verticale, car la projection est alors un point. Mais une droite tracée sur une épure de géométrie cotée, sans autre indication, ne représente pas une droite, mais un plan vertical dont la trace est justement cette droite. Pour représenter effectivement une droite, il faut à cette projection ajouter les cotes de deux points.

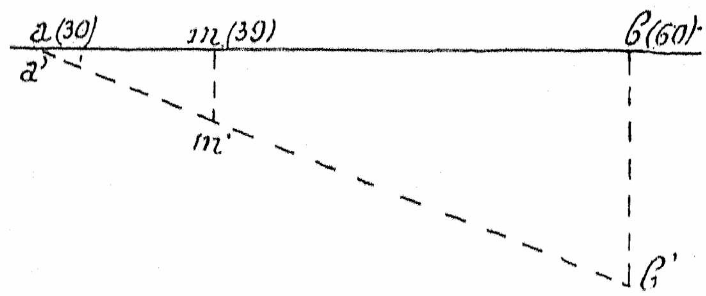


Fig. 13.

Soit, ainsi donnée, une droite AB (fig. 13), A de cote 30, B de cote 60, deux problèmes se posent immédiatement :

PROBLÈME I. — *Un point m étant arqué sur la projection d'une droite, en trouver la cote.*

Soit m la projection du point de la droite AB ci-dessus indiquée. Supposons que M soit entre A et B et que $\overline{am} = 37,5$; $\overline{ab}$ étant égal à 125, il est bien évident que les cotes varient proportionnellement aux déplacements horizontaux sur ab. On devra donc avoir, en appelant x la cote de M :

$$\frac{x-30}{37,5}=\frac{60-30}{125}$$

d'où :

$$x=30+\frac{30\times 37,5}{125}$$

$$x=\frac{30\times 162,5}{125}=\frac{4875}{125}=39.$$

Remarque. — Il faut bien remarquer que ce calcul est un calcul algébrique et non arithmétique, que les cotes sont des nombres algébriques ainsi que les nombres qui mesurent les segments $\overline{am}$ et $\overline{ab}$ comptés sur la projection de la droite ; il faudra donc choisir sur ab un sens positif avant d'établir la proportion ci-dessus.

Un *deuxième procédé* consiste à user d'une façon déguisée de la méthode de Monge en choisissant comme plan vertical le plan projetant la droite AB et un plan horizontal quelconque, par exemple le plan passant par A. Dans ces conditions les projections de A sont a, a' (fig. 13), celles de B sont b et b', $bb'=30$, les projections de M sont m et m' sur $a'b'$, la cote par rapport au plan horizontal de A est donc mm' qu'on trouve ici égale à 9 en mesurant *mm' à la même échelle que celle qui a servi à mesurer bb'*. Ordinairement on se donne à l'avance *l'échelle du dessin*, c'est-à-dire la longueur qui, sur le dessin, représente l'unité de longueur. D'après ce que nous avons dit plus haut, quand l'échelle n'est pas indiquée, l'unité de longueur dans les épures qui vont suivre est le millimètre et l'échelle est à $\frac{1}{1}$. Il faut remarquer également que certaines épures toutes descriptives, peuvent être entièrement effectuées sans utiliser l'échelle du dessin choisie (fig. 13). L'échelle en plan est $\frac{3}{5}$ et l'échelle des cotes $\frac{1}{1}$.

PROBLÈME II. — Le second problème qui se pose est le suivant :

Trouver sur la projection d'une droite la projection d'un point de cote donnée.

Soit à trouver la projection sur la droite AB, précédente du point de cote 20.

Dans ce problème encore on peut procéder en suivant les deux voies indiquées dans l'exercice précédent (fig. 14).

Tout d'abord on peut établir une proportion résultant toujours de la proportionnalité des variations des cotes aux déplacements horizontaux : appelant x le segment $\overline{am}$ (m étant le point cherché) repéré à la di-

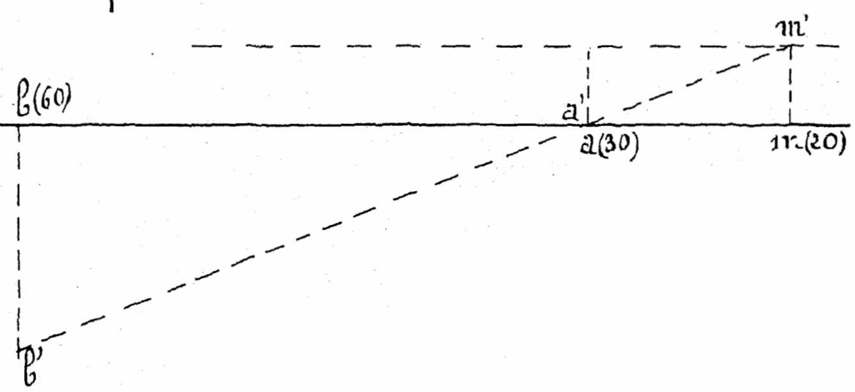


Fig. 14.

rection positive de a vers b, on a :

$$\frac{\overline{am}}{\overline{ab}}=\frac{20-30}{60-30}$$

ou :

$$\frac{x}{125}=\frac{-10}{30}$$

d'où :

$$x=\frac{-1250}{30}=-41,66$$

On aura donc m en portant à partir de a une longueur $am=41,66$ *en sens inverse du sens positif*, c'est-à-dire en sens inverse de la direction de a vers b.

Le deuxième procédé consiste encore à prendre comme plan vertical de projection le plan projetant la droite AB : la projection verticale de celle-ci est $a'b'$, les points de cote 20 de ce plan sont alors situés en projection verticale sur une parallèle à ab du côté opposé à celui où se trouve b' puisque 20 est inférieur à 30 et 60 supérieur à 30. Le point m' commun à cette parallèle et à $a'b'$ est la projection verticale du point cherché dont la projection horizontale est rappelé en m.

APPLICATION

Ce dernier problème reçoit une application importante.

D'après ce qui précède, on sait trouver sur la projection d'une droite les projections de cote donnée ; ordinairement on cherche les points dont les cotes sont des nombres entiers dits *points de cote ronde;* cette opération s'appelle *graduer* la droite ; la distance comprise entre les projections de deux points de cote ronde consécutifs mesurée à l'échelle du dessin s'appelle l'*intervalle* de la droite ; la *pente* est l'inverse de l'intervalle ; *l'équidistance* est la différence des cotes entre deux points de cote ronde successifs *représentés* sur une droite ; l'équidistance est par suite 1 si tous les points de cote ronde ont été indiqués.

Il est facile en se reportant à des formules élémentaires de trigonométrie de vérifier que si on appelle φ l'angle de la droite et du plan horizontal *la pente est égale à* $tg.\varphi$; il revient donc au même de se donner la pente d'une droite ou l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal.

La graduation d'une droite étant effectuée, les deux problèmes étudiés précédemment peuvent recevoir des solutions *approximatives* rapides grâce à la graduation :

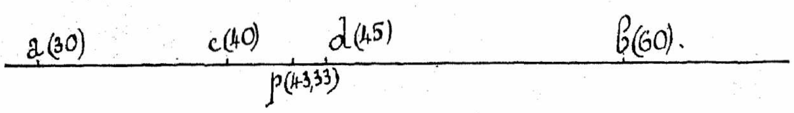


Fig. 15.

en effet (fig. 15) par exemple un point p étant placé entre deux points de cotes rondes successifs c et d de cotes 40,45 (équidistance 5) on évalue à l'œil le rapport $\frac{cp}{cd}$ égal ici à $\frac{2}{3}$ environ, la cote du point p est donc approximativement :

$$40 + \frac{2}{3} \times 5 = 43,33$$

Le problème inverse se traite évidemment de façon analogue.

PROBLÈME III. — ***Reconnaître si deux droites AB et CD se rencontrent ou non.***

Si les deux droites AB, CD données se rencontrent, le point p, commun aux deux projections ab, cd, doit avoir même cote calculée sur chacune des droites. Or (fig. 16), en appliquant deux fois le problème I on

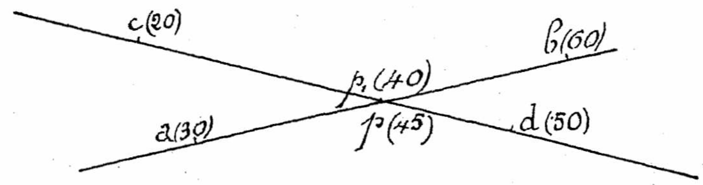


Fig. 16.

trouve pour p les deux cotes différentes 45 et 40 ; les deux droites ne se rencontrent donc pas.

DROITES PARALLÈLES

Deux droites parallèles ont des projections parallèles et leurs angles avec le plan de comparaison sont égaux et de même sens, en conséquence, on reconnaîtra sur une épure le parallélisme de deux droites à ce que :

1° *Les projections seront parallèles;*

2° *Les intervalles seront égaux;*

3° *Les cotes croîtront dans le même sens.*

Ainsi sur l'épure (fig. 17) la droite AB est parallèle à CD mais n'est pas parallèle ni à EF ni à GH, car la condition 2° n'est pas vérifiée pour EF et AB et la con-

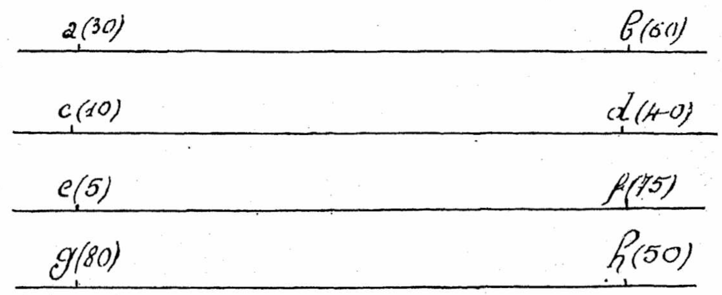


Fig. 17.

dition 3° n'est pas vérifiée pour AB et GH ; on peut toutefois remarquer que AB et GH ayant même intervalle sont également inclinées sur le plan de comparaison, mais en sens inverse.

PROBLÈME IV. — ***Mener par un point A de cote 30*** *une parallèle à la droite CD, C de cote 10, D de cote 45.*

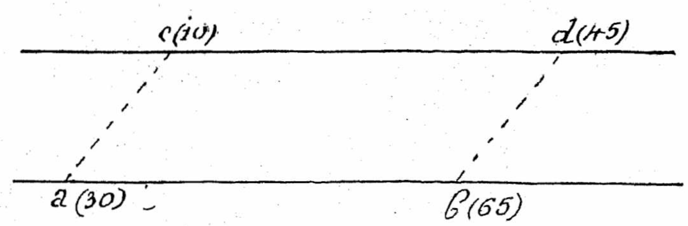


Fig. 18.

L'intervalle de la droite CD est égal à $\frac{cd}{35}$ en portant à partir de a sur une parallèle ax à cd dans le sens de c vers d une longueur ab égale à cd on aura la projection du point B de cote $30 + 35 = 65$ de la parallèle AB cherchée (fig. 18).

REPRÉSENTATION D'UN PLAN. — ECHELLE DE PENTE

Un plan étant déterminé par trois points, deux droites concourantes ou deux droites parallèles, on déduit de là immédiatement sa représentation en géométrie cotée, mais il existe une catégorie de droites de ce plan telles que la donnée d'une seule de ces droites détermine complètement le plan.

Ces droites sont *les lignes de plus grande pente* du plan qui sont perpendiculaires aux horizontales : si, en effet, on donne une droite de plus grande pente d'un plan graduée, on connaît par là même les horizontales du plan dont les projections seront perpendiculaires à la projection de la droite de plus grande pente, le plan est donc bien déterminé. On appelle *échelle de pente* du plan une ligne de pente de ce plan gradué; on appelle *pente* et *intervalle* du plan, la pente et l'intervalle d'une échelle de pente de ce plan.

PROBLÈME I. — *Déterminer l'échelle de pente du plan passant par trois points : A de cote 35, B de cote 25, C de cote 65.*

Soit (fig. 19) les trois points a (35), b (25), c (65)

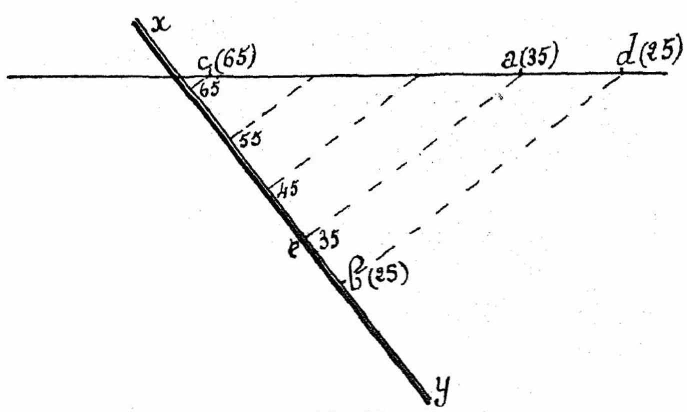


Fig. 19.

donnés. Marquons sur la droite ac le point d de cote 25 et joignons bd ; bd est la projection de l'horizontale de cote 25 du plan ABC. En menant par b la perpendiculaire xby à bd et en menant par a la parallèle à bd qui rencontre bx en e, on a deux points, B de cote 25 et E de cote 35 de l'échelle de pente cherchée : la graduation est alors immédiate. Suivant l'habitude, on a, pour distinguer l'échelle de pente, doublé sa projection d'un trait parallèle très voisin et plus gros.

On traiterait identiquement de même les problèmes où l'on demande de rechercher l'échelle de pente d'un plan donné par deux droites parallèles ou concourantes.

INTERSECTION DE DEUX PLANS

L'intersection de deux plans est une droite ; comme en géométrie descriptive on en cherchera deux points en coupant les deux plans par deux plans auxiliaires qui, ici, seront pris horizontaux.

Les deux plans étant donnés chacun par leur échelle

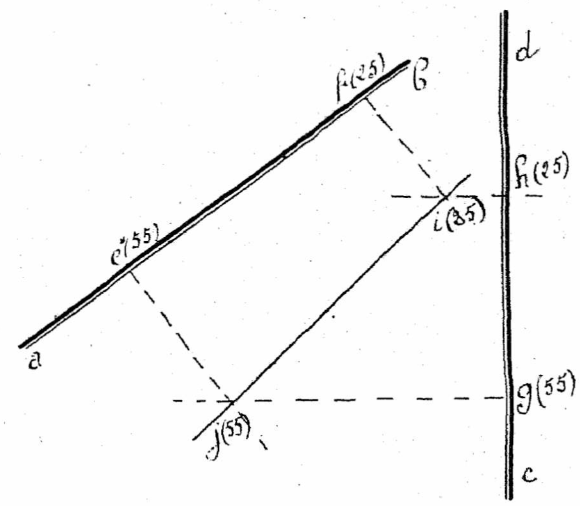


Fig. 20.

de pente (fig. 20), on trace par exemple les horizontales de cote 25 et 55 et l'on a les deux points I de cote 25 et J de la cote 55 de l'intersection cherchée aux points de rencontre des horizontales de même cote.

La méthode peut être difficilement applicable si les échelles des deux plans ont des projections *presque parallèles* ; on est quelquefois obligé, dans ce cas, de passer par l'intermédiaire d'un ou de plusieurs plans auxiliaires quelconques ainsi qu'il a été fait (fig. 21).

Au contraire, si les projections des deux échelles de pente sont *rigoureusement parallèles* (fig. 22), la construction se simplifie. En effet, dans ce cas, *l'intersection des deux plans est une horizontale* puisque les horizontales des deux plans sont alors parallèles. Il suffit donc de trouver l'horizontale commune, ce à quoi on parvient en prenant un mur xy parallèle aux deux échelles de pente, le point commun aux deux projections verticales sur ce

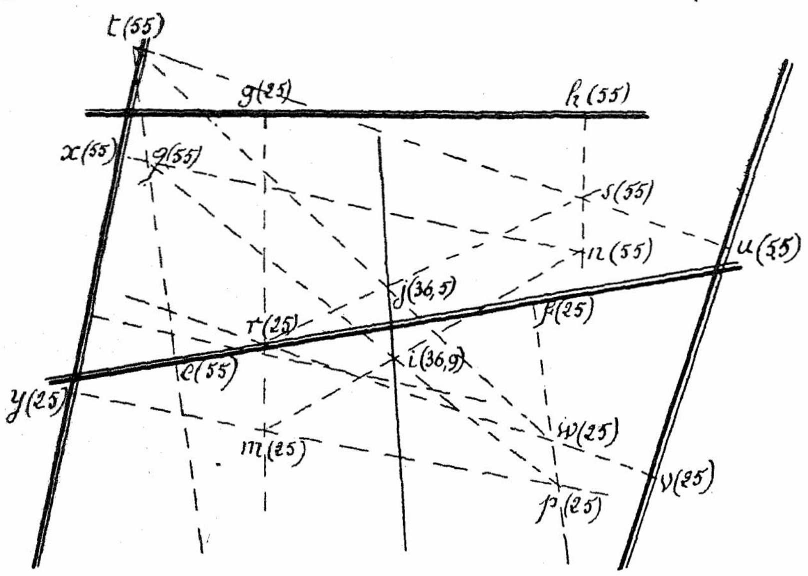


Fig. 21.

mur des deux échelles de pente est la trace de l'intersection cherchée, qu'on détermine alors immédiatement par sa projection uv et sa cote.

La construction se simplifie d'ailleurs encore en

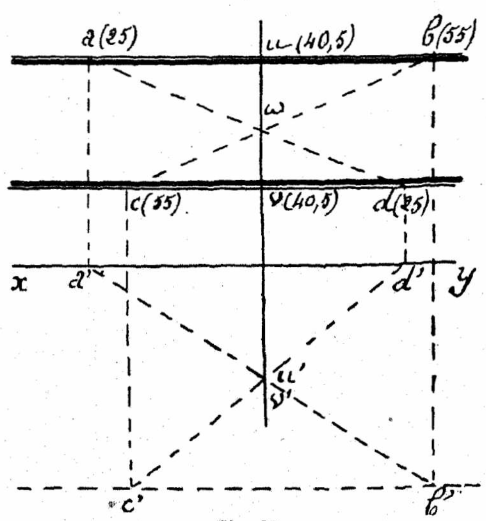


Fig. 22.

remarquant que si l'on joint les points de même cote des deux échelles de pente, les projections de ces droites concourent sur la projection de l'intersection cherchée. La démonstration de ce fait est immédiate en remarquant la similitude des triangles $u\omega b$ et $g\omega v$, le rapport $\frac{\omega u}{\omega v}$ étant constant et égal au rapport $\frac{i}{i'}$ des intervalles des deux plans.

INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

La méthode est la même naturellement qu'en géométrie descriptive ; on prend l'intersection du plan donné et d'un plan auxiliaire mené par la droite donnée. En géométrie cotée on

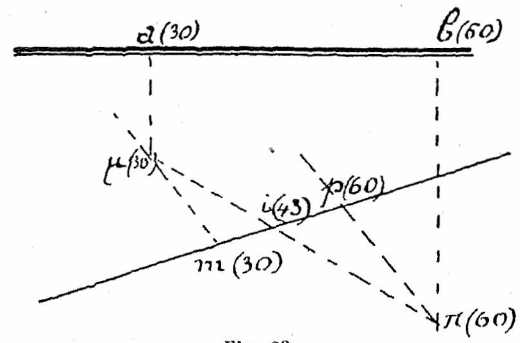


Fig. 23.

détermine ce plan auxiliaire par la direction de ses horizontales ; le point commun à l'intersection de deux plans et à la droite donnée est le point cherché (fig. 23).

Au cas où la droite donnée est parallèle à l'échelle de pente du plan donné, on peut prendre pour échelle de pente du plan auxiliaire la droite donnée, on est alors ramené pour l'intersection des deux plans au cas

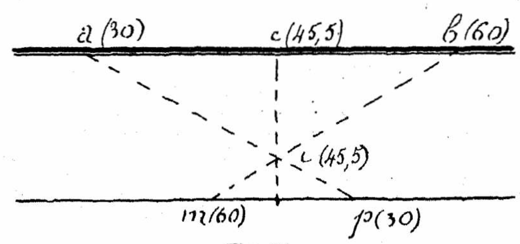


Fig. 24.

particulier étudié précédemment. On a effectué ainsi l'épure (fig. 24).

DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

Quand une droite est perpendiculaire à un plan, par définition, elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan en particulier, donc aux horizontales, par suite, la projection de cette droite sera perpendiculaire aux horizontales du plan, donc parallèle à la projection de l'échelle de pente. D'autre part, il est évident que l'angle θ de cette perpendiculaire avec le plan horizontal est complémentaire de l'angle φ du plan considéré avec ce même plan. On a donc, en tenant compte du sens des angles :

$$tg\varphi \times tg\theta = -1$$

donc :

$$v \times p' = -1$$

et par suite :

$$i \times i' = -1$$

en appelant, p et i, p' et i' les pentes et intervalles du plan et de la perpendiculaire.

Connaissant alors un point A de cote 30, pour mener par ce point A une perpendiculaire à un plan P donné par son échelle de pente UV, U de cote 0, V de cote 60, on mène par a une parallèle à uv et on porte sur cette parallèle, à partir de a, dans le sens de v vers u, une longueur ab égale à $\frac{\overline{60}^2}{uv} = \frac{60}{i} = 60i'$; le point B ainsi obtenu considéré comme point de la perpendiculaire cherchée a pour cote $30 + 60 = 90$ (fig. 25).

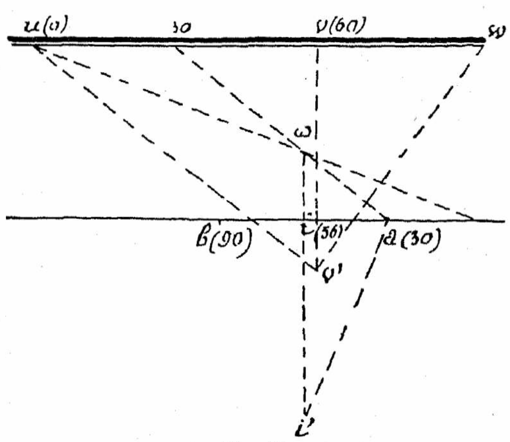


Fig. 25.

Pour avoir le pied de la perpendiculaire sur ce plan, on prendra l'intersection de AB et du plan P en considérant par exemple un plan auxiliaire dont AB soit l'échelle de pente : on trouve ainsi le point I de cote 56.

Enfin, pour avoir la longueur AI distance du point A au plan, on utilise la projection verticale de AI sur un mur constitué par son propre plan projetant, on trouve ainsi le plan horizontal étant remonté en A, $ai' =$ AI distance cherchée.

Remarque. — Pour construire sur l'épure un intervalle inverse de celui du plan, ou mieux soixante fois cet intervalle, on a élevé en v une perpendiculaire vv' de longueur 60 à uv, joint u à v' et mené en v', $v'w$ perpendiculaire à uv', d'après les propriétés du triangle rectangle on a :

$$\overline{vv'}^2 = uv \times vw$$

c'est-à-dire :

$$\overline{60}^2 = 60\,i \times vw$$

$$vw = \frac{60}{i} = 60\,i'$$

On a toujours intérêt à construire au lieu de i' un multiple aussi grand qu'on pourra de i' et à appliquer la construction indiquée à l'instant.

ANGLE DE DEUX PLANS

On appelle angle de deux plans, l'angle rectiligne d'un des dièdres formés par ces deux plans : un tel angle n'est évidemment défini d'une manière unique qu'en indiquant s'il est ou aigu ou obtus.

Remarquons que cet angle est égal à celui de deux perpendiculaires menées d'un point de l'espace sur les deux plans. On est ainsi ramené, pour trouver l'angle des deux plans, à chercher celui de deux droites qu'on obtient en rabattant le plan de ces deux droites sur un plan horizontal.

Sur l'épure (fig. 26) on a mené par le point A de

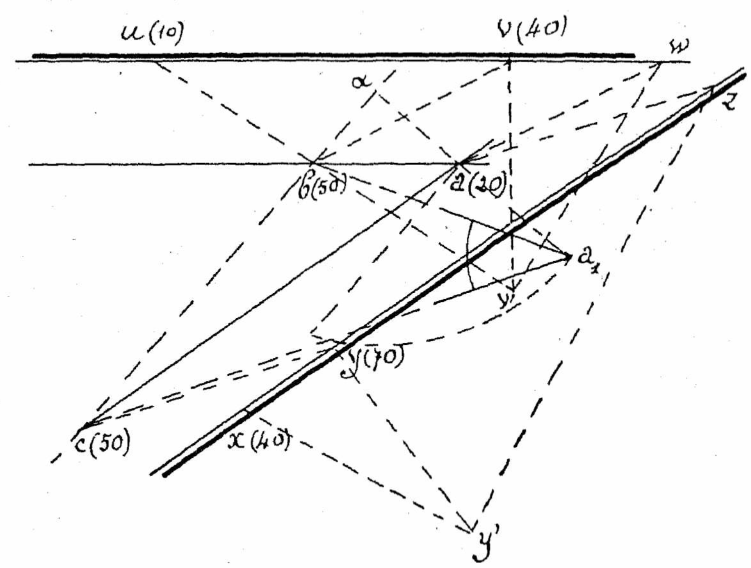


Fig. 26.

cote 20, deux perpendiculaires : AB (B de cote 50) et AC (C de cote 50) aux deux plans P et φ définis par leurs échelles de pente UV et XY, puis on a rabattu le plan ABC autour de l'horizontale BC de cote 50, sur le plan horizontal de même cote : le point A est venu en a_1 et l'angle cherché est $\widehat{ba_1c}$.

ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

On appelle angle d'une droite D et d'un plan P l'angle de la droite D et de la projection orthogonale D' de D sur P. Cet angle est le complément de l'angle de la droite D avec une perpendiculaire N au plan P. En menant donc cette perpendiculaire par un point de la droite D, on est ramené pour avoir l'angle d'une droite

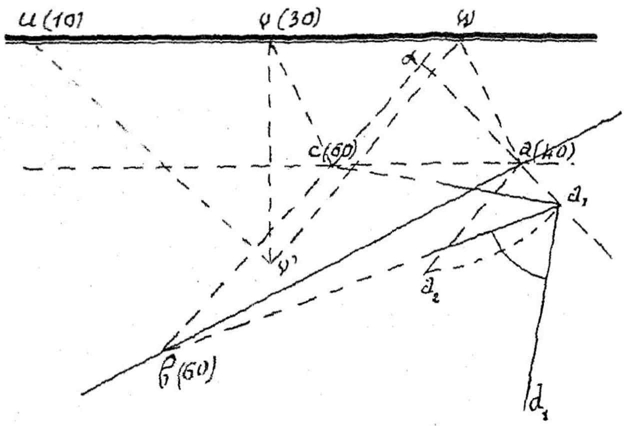


Fig. 27.

et d'un plan à rechercher l'angle de deux droites concourantes, ce qui se fait par un rabattement, comme il a été indiqué ci-dessus ; sur l'épure (fig. 27) l'angle de la droite et de la perpendiculaire est rabattu en $\widehat{ba_1c}$ l'angle cherché est donc $\widehat{ba_1d_1}$.

APPLICATIONS

PROBLÈME. — *Mener par une droite donnée un plan de pente donnée.*

Connaissant la pente p du plan on connaît son intervalle i qui en est l'inverse. Par suite, on connaît la distance qui sépare les projections des deux points de cotes données.

Prenons donc sur la droite donnée un point A de cote 30 et cherchons l'horizontale du plan demandé qui passe en B de cote 10. La distance de a à cette horizontale sera, d'après ce qui précède, égale à *vingt fois* l'intervalle i du plan ; si donc on trace de a comme centre un cercle de rayon $20\, i = \frac{20}{p}$, l'horizontale de cote 10 du plan cherché aura pour projection une des tangentes issues de b à ce cercle. Le problème comporte donc *2, 1 ou 0* solutions, selon que b sera extérieur au cercle en question, sur ce cercle ou intérieur au cercle, c'est-à-dire selon que la pente de la droite donnée sera inférieure, égale ou supérieure à la pente donnée du plan. Sur l'épure (fig. 28) il y a deux solu-

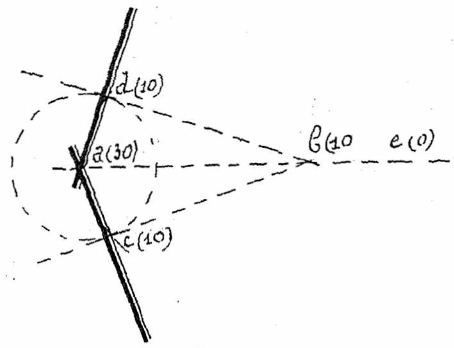


Fig. 28.

tions, on a pris la pente du plan égale à *2*, son intervalle est donc $\frac{1}{2}$ et la distance $20\, i = 10$; la distance ab étant 30, il existe deux tangentes bc, bd issues de b au cercle de centre a et de rayon *10*, qui sont les horizontales de cote *10* des deux plans ABC et ABD répondant à la question ; les échelles de pente de ces plans sont ac et ad.

PROBLÈME. — *Mener dans un plan donné une droite de pente donnée par un point donné.*

Connaissant la pente p de la droite, on connaît son intervalle i qui en est l'inverse. Par suite, on connaît la distance qui sépare les projections de deux points de cotes données sur la droite.

Prenons donc dans le plan donné le point A de cote 30 et traçons l'horizontale de cote 10 de ce plan, le point B de cote 10 de la droite cherchée devra se trouver d'une part sur cette horizontale, et d'autre part sur le cercle de centre a ayant pour rayon $20\, i = \frac{20}{p}$, puisque, la différence des cotes de A et B est 20, la distance des deux projections a et b doit être $20\, i$. On aura le point cherché en prenant un point commun à l'horizontale de cote 10 et au cercle de centre a et de rayon $\frac{20}{p}$. Le problème comporte donc *2, 1* ou *0* solutions, selon que l'horizontale en question sera ou sécante, ou tangente, ou extérieure au cercle précédent, c'est-à-dire selon que la pente du plan sera supérieure, égale ou inférieure à la pente donnée de la droite. Sur l'épure

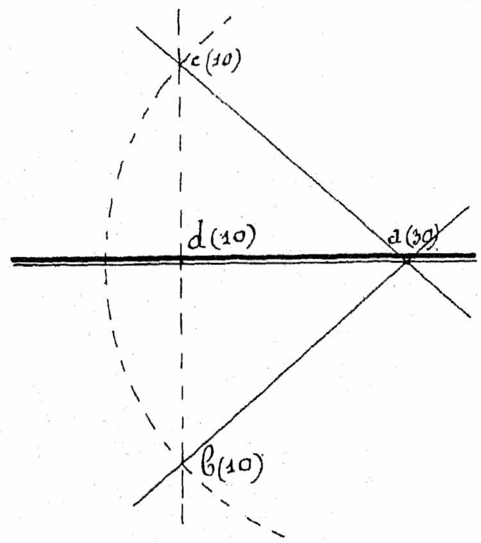


Fig. 29.

(fig. 29) il y a deux solutions ; on a pris la pente du plan égale à $\frac{2}{3}$ et on a donné celle de la droite égale à $\frac{1}{2}$, le rayon du cercle *a* est donc $20 \times 2 = 40$, et la distance de *a* à l'horizontale de cote 10 étant 20, il existe deux points communs B et C de cote 10 qui déterminent deux droites AB et AC répondant à la question.

Remarque. — Les deux problèmes qu'on vient de traiter sont identiques aux deux suivants :

1° *Mener par une droite donnée un plan faisant un angle donné avec le plan horizontal;*

2° *Mener dans un plan donné par un point donné de ce plan une droite faisant un angle donné avec le plan horizontal.*

PROBLÈME. — *Mener la perpendiculaire commune à deux droites. Plus courte distance de ces deux droites.*

Pour déterminer la perpendiculaire commune à deux droites : 1° On cherche un plan parallèle à ces deux droites en menant par un point de l'une une parallèle à l'autre ; 2° on mène à ce plan une perpendiculaire, dont la direction est celle de la perpendiculaire commune ; 3° on prend l'intersection d'une des droites avec le plan mené par l'autre parallèlement à la direction déterminée précédemment ; 4° on mène par ce point une parallèle à la direction en question : c'est la perpendiculaire commune cherchée.

Comme vérification, cette droite doit rencontrer les deux droites données, ce qu'on constate à la manière habituelle.

Sur l'épure (fig. 30), étant données les deux droites AB et CD, on a mené par A la parallèle AE à CD, puis par A la perpendiculaire AF au plan AEB.

L'intersection I du plan BAF et de la droite CD a été obtenue au moyen du plan auxiliaire dont la direction d'horizontale est CX. Par I on a mené la parallèle à AF qui rencontre AB en J (presque confondu avec B sur l'épure). IJ est la perpendiculaire commune cherchée,

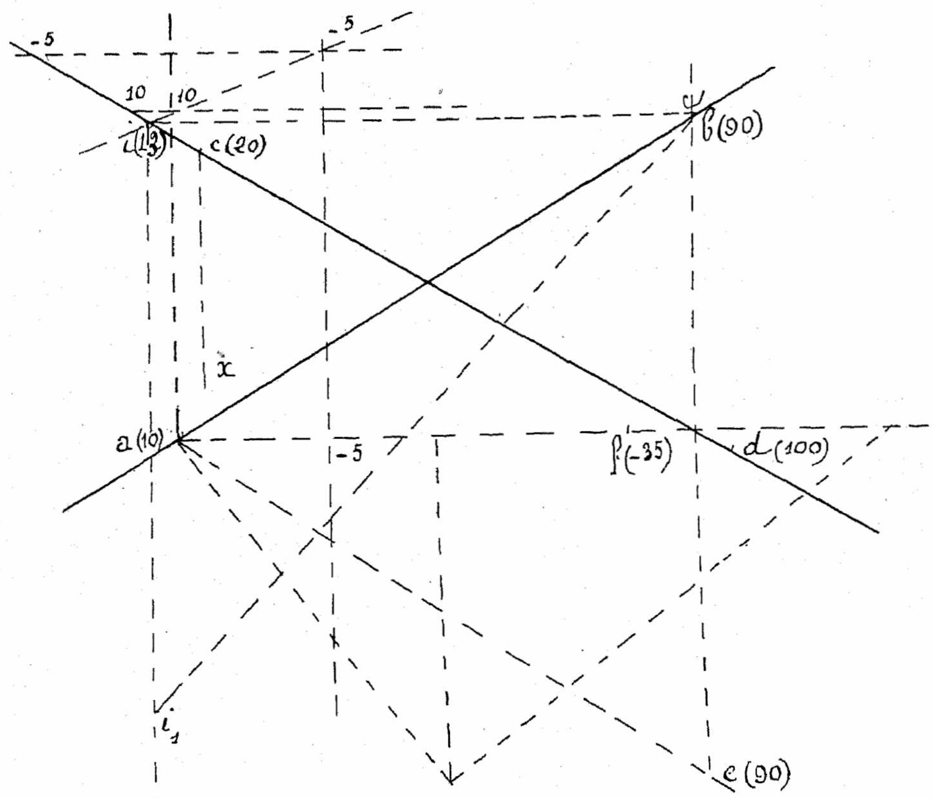


Fig. 30.

le segment IJ rabattu sur le plan horizontal du point J en *ij*, est la plus courte distance des deux droites.

TROISIÈME SECTION

GÉNÉRALITÉS SUR LES COURBES ET SURFACES

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS SUR LES COURBES

DÉFINITION

On dit qu'une courbe est plane quand tous ses points sans exception appartiennent à un même plan. Toute courbe qui n'est pas plane est gauche.

On appelle *tangente* à une courbe (C) en un point M de cette courbe, la limite MT vers laquelle tend la position d'une sécante MP à la courbe lorsque cette sécante pivotant autour de M, le second point P se rapproche indéfiniment de M sur la courbe. Toutes les courbes dont nous nous occuperons admettront une tangente en chacun de leurs points et ordinairement une seule en exceptant certains points dits *singuliers*.

Tout plan passant par une tangente MT en un point M d'une courbe (C) est appelé *plan tangent* à la courbe en M. En chacun des points d'une courbe, il y a donc une infinité de plans tangents.

Note. — *La plupart des propriétés énoncées dans ce chapitre le sont sans démonstration ; on a donné de certains autres théorèmes des démonstrations intuitives qui peuvent être considérées comme rigoureuses : seule la connaissance de la géométrie infinitésimale permettrait de compléter et rendre suffisamment précises les démonstrations en question.*

On s'est primitivement proposé, dans l'exposé qui va suivre, de donner un tableau d'ensemble des propriétés des surfaces au point de vue de leurs applications à la géométrie descriptive, sans chercher le moins du monde à faire œuvre de pur mathématicien.

Toute droite passant en M et perpendiculaire à la tangente est appelée *normale* en M à la courbe, il y a donc une infinité de normales en un point M d'une courbe ; le lieu géométrique des normales à une courbe en un point est un plan qu'on nomme le *plan normal* à

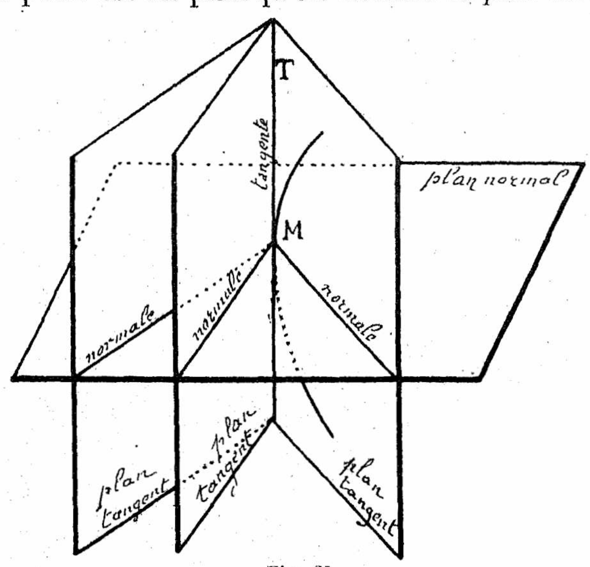


Fig. 31.

la courbe en ce point ; le plan normal est évidemment perpendiculaire à la tangente correspondante et perpendiculaire à tous les plans tangents (fig. 31).

Parmi les plans tangents à une courbe en un point il en est un qui joue un rôle important dans la théorie des courbes, c'est le *plan osculateur*. On appelle plan osculateur à une courbe (C) en un point M, la limite d'un plan passant par la tangente MT et un deuxième point Q de la courbe quand le point Q se rapproche indéfiniment du point M sur la courbe. Toutes les courbes que nous considérerons dans la suite admettent en chacun de leurs points, sauf exceptions singulières, un et un seul plan osculateur. Le plan osculateur peut être considéré comme ayant trois points communs con-

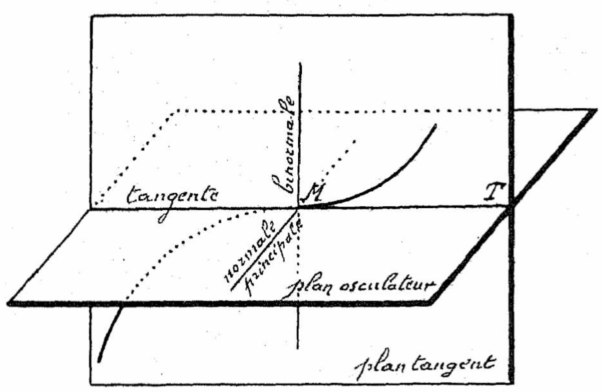


Fig. 32.

fondus en M avec la courbe, il *traverse donc cette courbe en M* (fig. 32) et c'est le seul plan tangent qui jouit de cette propriété.

La normale à la courbe en M qui est située dans le plan osculateur est appelée *normale principale*. Sur elle est situé un point remarquable appelé *centre de courbure* et qui joue pour les courbes gauches un rôle analogue au rôle que joue le point du même nom défini pour les courbes planes (voir Programme d'admission à l'École).

La normale perpendiculaire au plan osculateur est appelée *binormale;* sur elle est situé un point appelé *centre de torsion* dont le rôle se rapproche de celui du centre de courbure. On définit en chaque point M d'une courbe C, la courbure, et la torsion qui sont les inverses des rayons de courbure et de torsion, ceux-ci étant les distances des centres correspondants au point M. On peut se rendre compte d'une manière grossière de la nature de ces éléments de la façon suivante: Considérons une courbe plane, en un point M de cette courbe, nous savons ce que représente la courbure de la courbe; tordons maintenant cette courbe (supposée réalisée en fil de fer) de façon à la faire sortir de son plan, ce qu'on nomme la torsion en M représentera justement cette nouvelle déformation. Pour les raisons exposées ci-dessus on nomme souvent les courbes gauches « courbes à double courbure », la torsion portant parfois le nom de « seconde courbure ».

La courbure proprement dite est liée à la variation des normales principales à la courbe ; la torsion au contraire est liée à la variation des plans osculateurs ou, ce qui revient évidemment au même, à la variation des binormales.

PROJECTIONS D'UNE COURBE GAUCHE

En projetant soit parallèlement, soit perspectivement une courbe gauche sur un plan, on obtient évidemment une courbe plane. Cette projection est la section du cylindre ou du cône projetant par le plan de projection. Il résulte immédiatement de là que la tangente à la courbe projection, en un point m projection d'un point M est la trace sur le plan de projection du plan tangent au cône ou au cylindre projetant en M : *la tangente à la*

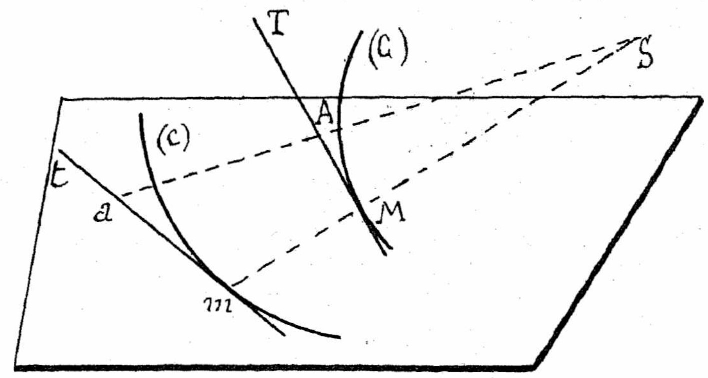


Fig. 33.

projection est donc la projection de la tangente en général (fig. 33). Mais il y a des cas d'exceptions.

Tout d'abord en général, si le point M est un point simple de la courbe (C), le point m est également un point simple à tangente simple. Mais si le plan osculateur à la courbe en M passe par le centre de projection (ou est parallèle à la direction des projetantes), comme le plan osculateur traverse la courbe en son point de contact, la courbe projection traversera en m la trace du plan projetant qui sera ici le plan osculateur: autrement dit, en m la courbe projection traverse sa tangente, m est un point d'*inflexion* (fig. 34).

Arrivons maintenant au véritable cas d'exception, celui où la tangente en M elle-même passe par le centre de projection (ou est parallèle aux projetantes) dans ce cas la projection de la tangente étant un point, le théorème général cité ci-dessus est en défaut. Pour avoir la tangente en *m* il faut prendre la limite d'une sécante

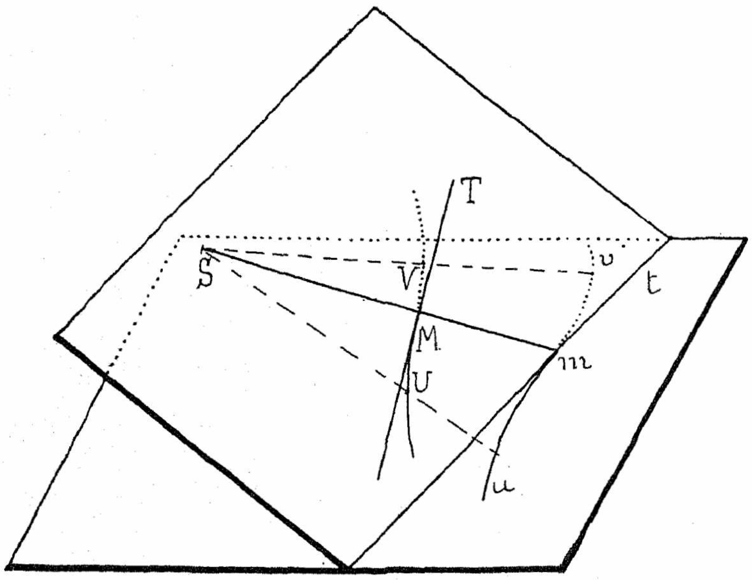


Fig. 34.

ma pivotant autour de *m* quand *a* se rapproche indéfiniment de *m* sur la courbe. Or, *a* est la projection d'un point A de la courbe (C); la limite de *ma* sera donc la trace sur le plan de projection de la limite du plan passant par M*m* et A; or ce plan, par définition, est le plan osculateur. En de tels points la tangente à la courbe

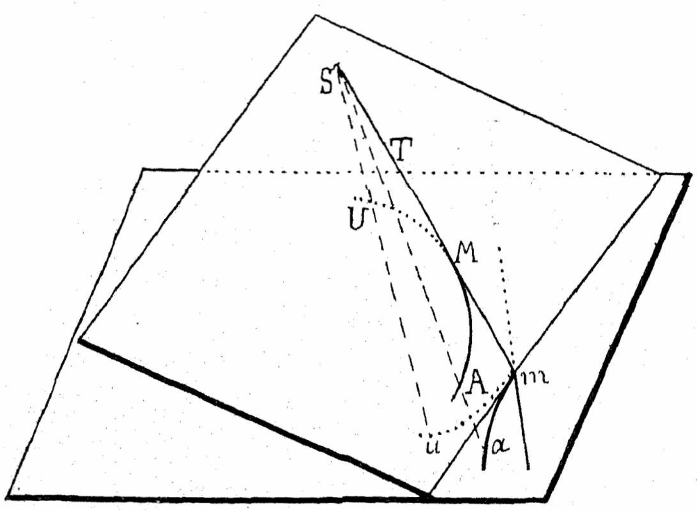


Fig. 35.

projection est donc la trace du plan osculateur sur le plan de projection (fig. 35).

Remarquons alors que : 1° la courbe traverse son plan osculateur et que, 2° elle reste d'un même côté de tout autre plan tangent. Donc en *m* la courbe traversera sa tangente tout en restant d'un même côté de toute autre droite passant en *m*; ceci exige que *m* soit un *point de rebroussement*.

APPLICATION

Comme exemple de ce que nous venons de dire, considérons une courbe gauche (C) et un de ses points M, la tangente MT, la normale principale MN, et la binormale MB. Ces trois droites forment un trièdre trirectangle, le plan BMN est le plan normal en M, le plan NMT est le plan osculateur et le plan BMT un plan tangent.

Si maintenant on projette orthogonalement la courbe (C) sur chacun de ces plans, la projection sur le plan osculateur donnera une courbe admettant MT comme tangente simple ; la projection sur le plan de la binormale admettra au contraire en M un point d'inflexion, car alors les projetantes sont parallèles à MN et MN étant situé dans le plan osculateur, on est placé dans le

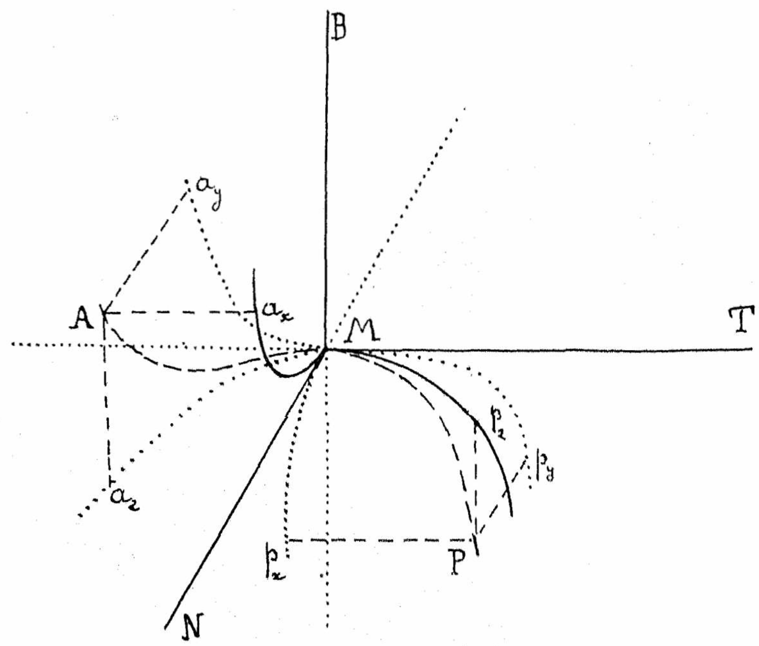


Fig. 36.

cas étudié du point d'inflexion puisque le plan osculateur est parallèle aux projetantes ; enfin la projection sur le plan normal présente en M un point de rebroussement, car alors les projetantes sont parallèles à la tangente MT perpendiculaire au plan BMN, et par suite on se trouve bien placé dans le cas particulier étudié où la tangente au point considéré est parallèle aux projetantes (fig. 36).

CHAPITRE II

GÉNÉRALITÉS SUR LES SURFACES

GÉNÉRATION

Une surface peut être déterminée comme lieu géométrique d'un point mobile ou comme lieu géométrique d'une ligne pouvant ou rester invariable dans son mouvement ou se déformer en se mouvant.

Ainsi la surface sphérique est le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'un point donné fixe ; c'est là un exemple du premier mode de détermination d'une surface. Mais on peut encore obtenir une surface sphérique en prenant le lieu géométrique d'un demi-cercle tournant de 360° autour du diamètre qui le limite. C'est un exemple de génération d'une surface par une courbe mobile, mais de grandeur invariable. Enfin si, considérant un cercle fixe de diamètre AB, on déplace un cercle de façon que l'axe de ce cercle soit toujours AB et de façon que ce cercle rencontre toujours le cercle de diamètre AB, on obtient comme lieu de ce cercle mobile et de grandeur variable à nouveau une surface sphérique. C'est là un exemple du mode de génération d'une surface par déplacement d'une ligne qui se déforme en se mouvant.

Souvent on engendre une surface en faisant varier une ligne (G) de façon à ce qu'à chaque instant elle rencontre une autre ligne (D). Dans ce cas la ligne G est dite *génératrice* et la ligne D, *directrice*. Ainsi pour les cônes et cylindres la génératrice est une droite qui pivote autour d'un point fixe ou reste parallèle à une direction fixe, tout en rencontrant une courbe quelconque fixe, la directrice.

Comme autres exemples, citons : 1° la génération de l'hyperboloïde à une nappe par une génératrice rectiligne assujettie à s'appuyer sur trois directrices rectilignes quelconques non dans un même plan deux à deux et non parallèles toutes trois à un même plan; 2° la génération de l'hyperboloïde hyperbolique par une génératrice rectiligne assujettie à rencontrer trois directrices rectilignes ne se coupant pas et parallèles toutes trois à un même plan ; 3° la génération de l'hélicoïde de vis à filet carré par une génératrice rectiligne assujettie à rester parallèle à un plan et à s'appuyer sur deux directrices, l'une rectiligne perpendiculaire au plan précédent, l'autre étant une hélice tracée sur un cylindre de révolution dont la première directrice rectiligne est l'axe.

Au lieu d'employer pour guider le mouvement d'une génératrice une directrice que la génératrice doit toujours rencontrer, on peut employer une surface à laquelle la génératrice doit toujours rester tangente. Ainsi les cônes et cylindres peuvent être engendrés par une génératrice pivotant autour d'un point fixé ou parallèle à une direction fixe qui reste de plus tangente à une surface directrice quelconque.

Comme autres exemples de ce mode de génération on peut citer les conoïdes à plan directeur et à deux noyaux engendrés par une génératrice rectiligne assujettie à rester parallèle à un plan fixe et à toucher deux surfaces fixes, les noyaux.

Enfin, nous parlerons plus loin des surfaces enveloppantes engendrées par le déplacement continu d'une autre surface.

CLASSIFICATION DES SURFACES

On ne peut donner une classification complète des surfaces, on les range cependant en plusieurs groupes tels que toutes les surfaces d'un même groupe jouissent d'un certain nombre de propriétés fondamentales communes ; mais il faut bien remarquer que ces groupes ne sont pas à définition exclusive et qu'une surface peut appartenir à la fois à plusieurs groupes. On distingue ainsi les surfaces *réglées* qui peuvent être engendrées par le mouvement d'une droite ; ce groupe se subdivise lui-même en sous-groupes (*a*), les surfaces *développables* susceptibles d'être appliquées sans déchirure ni duplicature sur un plan (*b*), les surfaces *gauches* ne jouissant pas de la propriété précédente. Parmi les surfaces développables citons le nouveau sous-groupe important des *surfaces cylindriques et coniques*.

Dans un autre ordre d'idées on considère les *surfaces moulures* engendrées par le déplacement d'un cercle dont le rayon varie suivant une loi donnée pendant que le centre décrit une ligne (C), le plan du cercle étant à chaque instant le plan normal à cette ligne ; un sous-groupe extrêmement important des surfaces moulures se compose des *surfaces de révolution* pour lesquelles la ligne C, lieu géométrique des centres, est immédiate. Encore dans un nouvel ordre d'idées on peut classer les surfaces en tenant compte du nombre de leurs points d'intersection avec une droite quelconque ; ce nombre s'appelle le *degré* de la surface, il est lié à des propriétés analytiques très importantes des surfaces.

Les surfaces du second degré, c'est-à-dire en deux points par une droite quelconque se rencontrent à chaque instant dans la théorie et les applications et jouissent de propriétés extrêmement importantes qu'on utilise très souvent en géométrie descriptive.

CONTACT DES SURFACES

Considérons une surface S que nous supposons en-

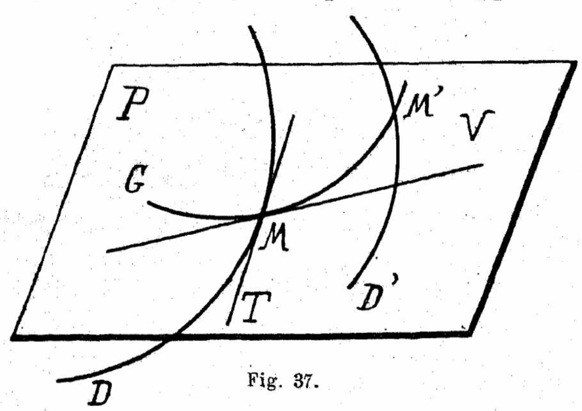


Fig. 37.

gendrée par le déplacement d'une ligne (G), s'appuyant sur une directrice (D). Dans le mouvement de G tout point M' de cette ligne décrit une ligne (D') qui pourrait en général remplacer la ligne D pour le guidage de G (fig. 37). On peut donc considérer en chaque point M d'une surface S deux lignes telles que (G) et (D) ; soient alors MT et MV les tangentes en M à (G) et à (D) ces deux droites concourantes déterminent un plan TMV qu'on nomme le *plan tangent* à la surface S au point M. A l'aide de théorèmes d'analyse, on démontre qu'en général, *le lieu des tangentes en un point* M *aux courbes tracées sur une surface* S *et passant en* M *est un plan nommé le plan tangent à la surface* S *au point* M.

Le théorème est en défaut pour certains points dits singuliers de certaines surfaces, tels sont par exemple, les sommets des cônes.

On trouve dans les cours de géométrie élémentaire des démonstrations simples du théorème énoncé dans le cas des surfaces cylindriques coniques et de révolution.

Il résulte de ce qui précède que les tangentes en M à deux lignes tracées sur une surface et se coupant en M déterminent le plan tangent à cette surface en M. Si de

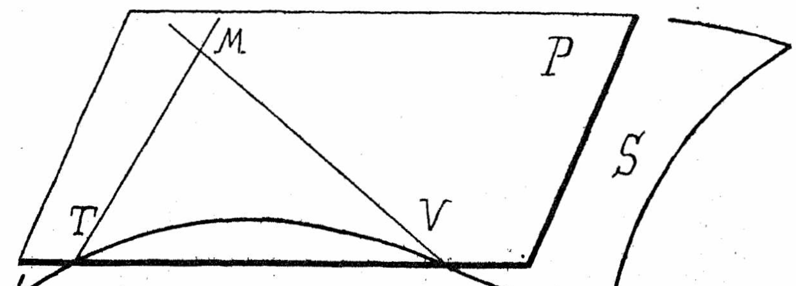


Fig. 38.

ces lignes une ou deux sont des droites le plan tangent en M les contient (fig. 38).

Inversement, si une ligne (L) est l'intersection de deux surfaces (S) et (S'), la tangente en un point M de

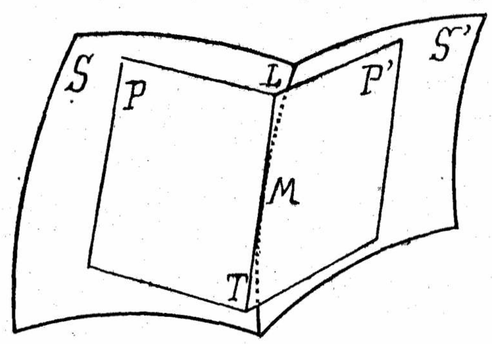


Fig. 39.

la ligne L est l'intersection des deux plans tangents en M aux surfaces (S) et (S'). On utilisera constamment ces propriétés en géométrie descriptive (fig. 39).

Comme exemple de la détermination d'une tangente en un point de l'intersection de deux surfaces (fig. 39 *bis*) considérons un cône de sommet (S,S′) de base un cercle (o,o') dans le plan horizontal et un cylindre de

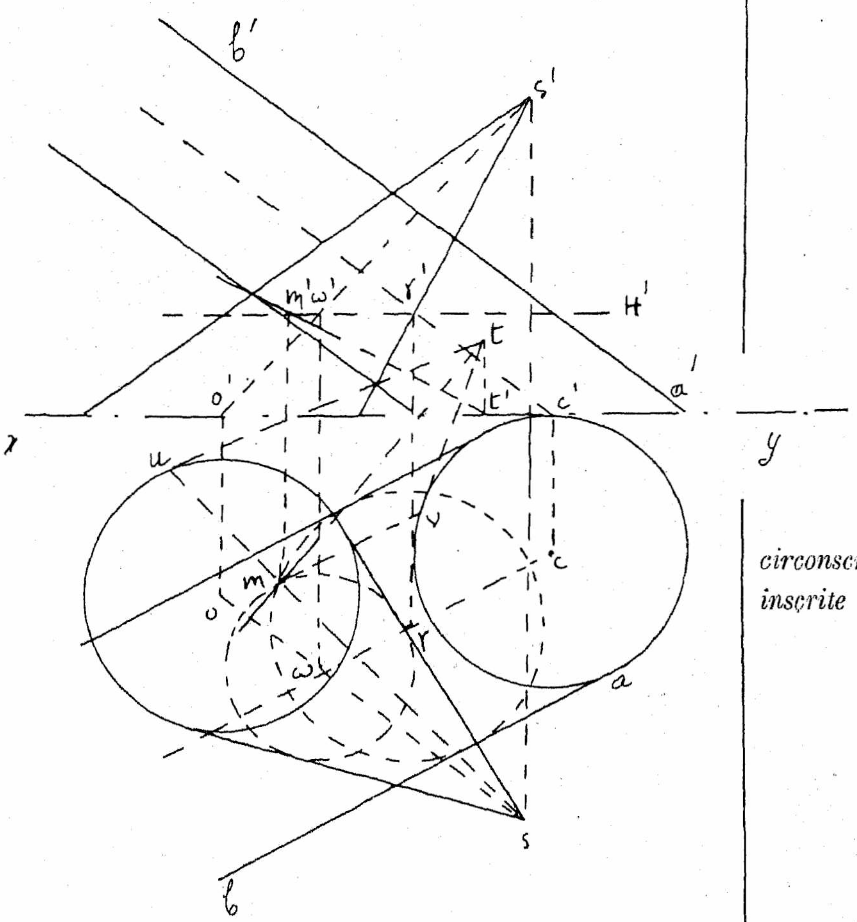


Fig. 39 *bis*.

base (c,c') circulaire dans le plan horizontal et de direction de génératrices ($ab,a'b'$).

On a un point (m,m') de l'intersection de ces deux surfaces à la rencontre des deux cercles de section (ω,ω') et $\gamma\gamma'$ des deux corps par le plan horizontal H′.

Pour avoir la tangente en m,m', on prend l'intersection des plans tangents qui ont comme traces horizontales l'un ut, l'autre vt : le point (t,t') de rencontre de ces traces est un point de la tangente cherchée, qui est donc (mt, $m't'$).

Deux surfaces qui en un de leurs points communs M ont même plan tangent sont dites *tangentes* en ce point (fig. 40).

Deux surfaces qui ont tous les points d'une ligne commune, ont même plan tangent, sont dites se *raccorder* le long de la ligne commune. Une de ces surfaces (S′) (ordinairement celle qui enveloppe l'autre) est dite

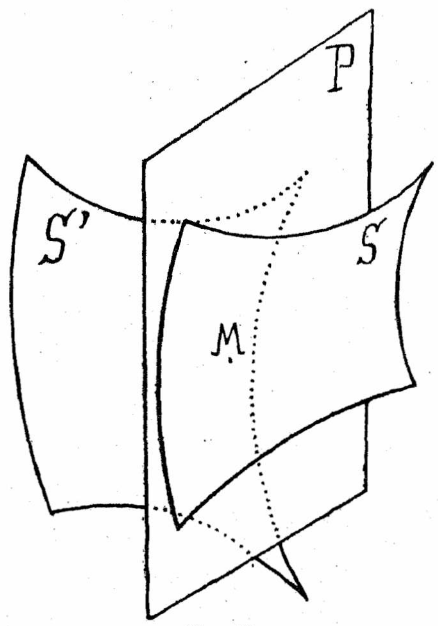


Fig. 40.

circonscrite à la seconde S, la surface S étant alors dite *inscrite* dans la surface S′ (fig. 41).

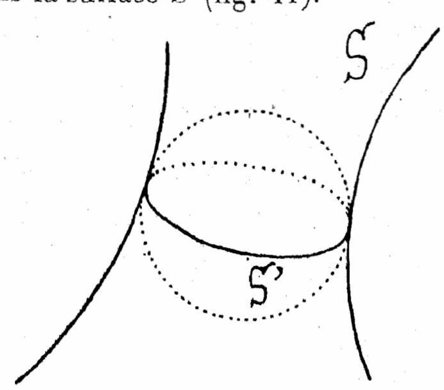


Fig. 41.

Comme cas particulier signalons le cas d'un plan tangent à une surface dont le point de contact s'est éloigné indéfiniment, le plan prend alors le nom de

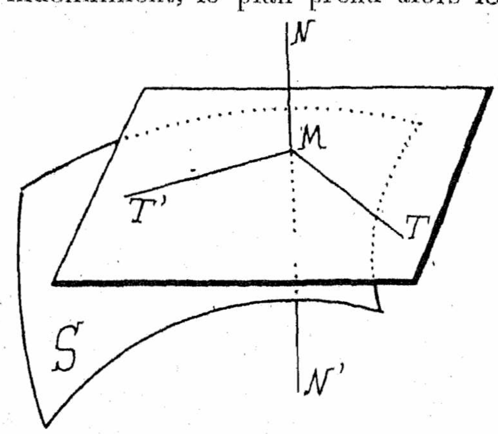


Fig. 42.

plan asymptote de la surface. De même, si la ligne (L) suivant laquelle deux surfaces se raccordent, s'éloigne tout entière à l'infini, on dit qu'une des surfaces est *asymptote* à l'autre.

On appelle *normale* à une surface la perpendiculaire au plan tangent au point de contact de ce plan avec la surface.

Tout plan passant par la normale est dit *plan normal :* il en existe évidemment une infinité en chaque point d'une surface, perpendiculaires tous au plan tangent correspondant (fig. 42).

SECTIONS NORMALES. — INDICATRICE THÉORÈME DE MEUSNIER

Pour certaines applications importantes à la géométrie descriptive, nous devons maintenant mettre en évidence plusieurs propriétés des surfaces relatives aux rayons de courbure des courbes tracées sur ces surfaces.

Tout d'abord nous indiquerons que :

Étant donnée une courbe (C) *tracée sur une surface* S, *on démontre qu'en un point* M *de* (C) *le rayon de courbure de* (C) *est le même que celui de la section plane de la surface par le plan osculateur de la courbe* (C) *en* M.

Il est donc intéressant d'étudier la courbure des sections planes d'une surface en un point. Pour cela on peut tout d'abord considérer les sections planes dont les plans passent tous par une même tangente MT et, parmi ces sections, considérer en particulier la section normale, puis on peut ne considérer que les sections normales passant au point donné ; cette double étude amène à deux notions importantes que nous allons succinctement indiquer.

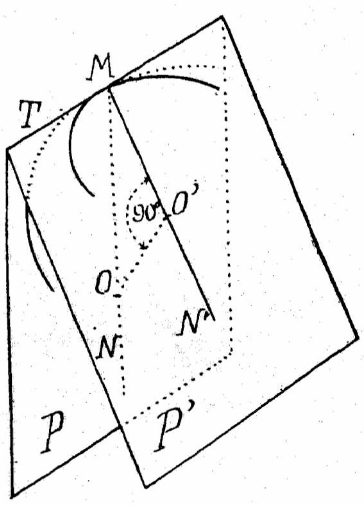


Fig. 43.

Les centres de courbure de deux sections planes d'une surface dont les plans passent par une même tangente MT sont reliés l'un à l'autre par la propriété importante suivante connue sous le nom de : Théorème de Meusnier. *Si on forme les sections d'une surface* S *par deux plans* P *et* P′ *passant par une même tangente* MT *l'un normal* P, *l'autre oblique* P′, *le centre de courbure* O *de la section oblique est la projection orthogonale sur ce plan du centre de courbure* O′ *de la section normale* (fig. 43).

Cela posé, rappelons-nous que les centres de courbure des courbes sont des points de leurs normales principales et considérons alors un point M de l'intersection de deux surfaces S et S′ et la tangente MT en ce point M.

Du théorème précédent il résulte que le lieu géométrique des centres de courbure des sections planes faites dans la surface S par des plans passant par MT est le cercle décrit sur le rayon de courbure de la section normale comme diamètre ; de même, pour la seconde surface : le point commun I à ces deux cercles, autre que M, correspond donc à deux centres de courbure confondus, c'est-à-dire à la section faite dans les deux surfaces par le plan osculateur à l'intersection au point M. La connaissance des centres de courbure des sections normales aux deux surfaces en M permet donc de déterminer le plan osculateur en M à l'intersection (fig. 44), si on se souvient alors que dans certains cas ce plan osculateur sert à déterminer la tangente à la projection de l'intersection, on voit comment on sera amené à utiliser cette propriété en géométrie descriptive.

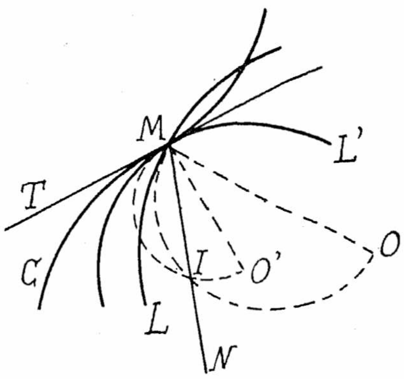


Fig. 44.

Nous l'emploierons pour déterminer les tangentes aux points de l'intersection de deux surfaces fournis par la rencontre de deux contours apparents.

Considérons maintenant les sections normales autour d'un point M d'une surface S. Dans chacun de ces plans normaux la courbe de section de la surface possède une certaine courbure $\frac{1}{R}$. Portons à partir de M dans les deux sens, sur les traces des plans normaux sur le plan tangent deux segments MP, MP′, mesurés par le nombre $\sqrt{R}$: on démontre en géométrie infinitésimale que le lieu des points A et A′ est une *conique* dont M est évidemment le centre : cette conique s'appelle *l'indicatrice de la surface au point* M. On l'utilise en géométrie descriptive pour déterminer les tangentes en un *point double* de l'intersection de deux surfaces. De tels points sont obtenus quand les surfaces ont un *plan tangent commun* en un de leurs points communs : dans ce cas, la méthode signalée pour la détermination de la tangente à l'intersection ne réussit pas et d'ailleurs il passe par le point considéré deux branches de l'intersection.

Construisons alors avec la même unité de mesure les indicatrices des deux surfaces au point M : ces deux coniques étant concentriques admettent deux sécantes communes centrales. Ces deux sécantes communes sont les traces sur le plan tangent des points osculateurs en M aux deux branches de l'intersection ; ces traces sont donc justement les tangentes cherchées. D'où un procédé de construction des tangentes aux points doubles de l'intersection de deux surfaces. La commodité du procédé dépend de la facilité de la construction des indicatrices. On peut ordinairement par des considérations de symétrie déterminer assez facilement les axes des indicatrices.

SURFACES ENVELOPPES

Considérons une surface mobile, se déformant ou non dans son mouvement, nous considérerons les deux cas où, pour fixer entièrement en grandeur et position la surface, il faut en donner soit un, soit deux points.

Dans le premier cas, appelons (C) la courbe d'intersection des positions S et S′ de la surface mobile, si nous supposons que S′ se rapproche indéfiniment de S la courbe (C) tend vers une position limite (T) qu'on appelle la *caractéristique* de la surface mobile pour la position S et on nomme *enveloppe* de la surface mobile le lieu géométrique des caractéristiques (T) pour toutes les positions de la surface.

Dans le second cas, au contraire, il existe une infinité de manières de faire tendre S′ vers S ; on ne peut plus définir la limite de la courbe commune, mais on peut mettre en évidence la position limite fixe d'un ou plusieurs points communs aux surfaces S et S′ quand S′ se rapproche de S d'une façon quelconque le lieu géométrique de ces points, appelés *points caractéristiques,* pour toutes les positions de la surface mobile se nomme encore *enveloppe* de la surface mobile.

Donnons des exemples de surfaces enveloppes dans ces deux cas. Considérons une sphère de rayon constant dont le centre décrit une ligne (C) : un point donné d'une de ces sphères suffit à la fixer ; nous sommes donc bien dans le premier cas signalé : la limite de la courbe commune à deux telles sphères infiniment voisines est le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne (C) au point correspondant, la surface enveloppe de ces deux sphères sera donc le lieu géométrique d'un cercle de rayon constant dont le centre se déplace sur une ligne, le plan de ce cercle étant constamment normal à la ligne, cette surface porte le nom de *surface canal,* c'est un cas particulier des surfaces moulures dont nous avons déjà dit un mot. Les cylindres de révolution sont des cas particuliers des surfaces canaux.

Considérons au contraire une surface quelconque *non* réglée S, les plans tangents à cette surface ne peuvent être fixés qu'en en donnant deux points, nous sommes placés pour rechercher l'enveloppe des plans tangents à cette surface dans le second cas signalé. Les points caractéristiques sont évidemment les points de la surface et l'enveloppe est la surface elle-même.

Ainsi toute surface peut être considérée comme l'enveloppe (de 2e espèce) de ses plans tangents : il ne faut donc pas dire que toute surface enveloppe d'un plan mobile est une surface réglée, cela dépend du nombre de conditions nécessaires pour fixer la position de ce plan mobile. Mais si le plan est fixé en en donnant un seul point, si, comme on dit, il ne dépend que d'un paramètre, alors les lignes caractéristiques étant évidemment des droites la surface enveloppe sera nécessairement réglée et on démontre que cette surface réglée est développable.

Signalons enfin la propriété fondamentale des surfaces enveloppes.

THÉORÈME. — *Chaque surface enveloppée est inscrite dans la surface enveloppe le long de la ligne caractéristique dans le premier cas tangente à la surface enveloppe en tous les points caractéristiques dans le second cas.*

CHAPITRE III

REPRÉSENTATION DES SURFACES

Étant donnée une surface S, considérons un point A et le cône circonscrit à la surface S de sommet A, ce cône se raccorde à la surface S le long d'une ligne (C) qu'on nomme *contour apparent perspectif dans l'espace* de la surface S par rapport au point A. Sa trace (Γ) de ce

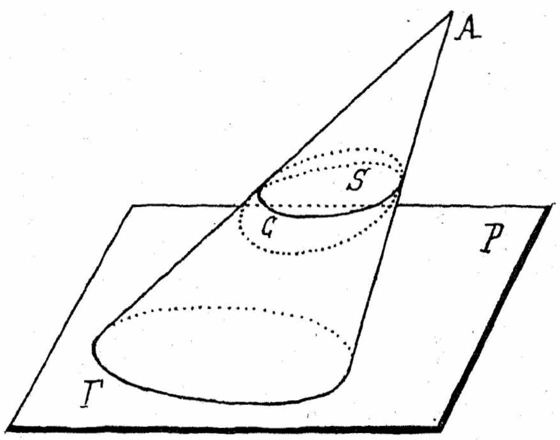


Fig. 45.

cône sur un plan P s'appelle *contour apparent perspectif en projection* de la surface S par rapport au point A sur le plan P (fig. 45).

Le contour apparent perspectif dans l'espace (C) sépare sur la surface S supposée opaque les régions vues du point A des régions cachées au point A par la surface elle-même.

Le contour apparent perspectif en projection délimite sur le plan P la région de ce plan que la surface S supposée opaque cache au point A. Si l'on suppose que A est un point lumineux (ombre au flambeau) on voit immédiatement que les courbes (C) et (Γ) sont les séparatrices d'ombres propres et d'autres portées sur la surface S et sur le plan P.

Si maintenant nous supposons que le point A se soit éloigné à l'infini dans une direction donnée, le cône circonscrit précédent à la surface S est devenu un cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à la direction dans laquelle A s'est éloigné, mais tous les résultats subsistent en remplaçant le mot « perspectif » par le mot « projectif » dans les définitions précédentes. Les applications aux questions d'ombre subsistent également en supposant que le corps est éclairé par des rayons lumineux parallèles (ombre au soleil) (fig. 46).

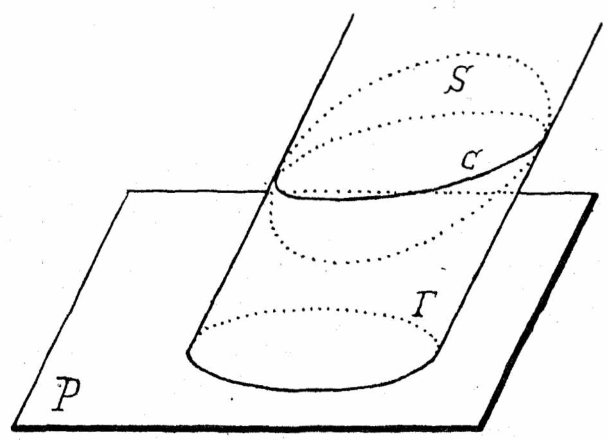


Fig. 46.

Dans le dernier cas étudié on distingue les projections en projections parallèles obliques et projections parallèles orthogonales selon que la direction des génératrices du cylindre projetant est oblique ou perpendiculaire au plan de projection. Ce sont les projections parallèles orthogonales qu'on emploie pour la représentation des corps en géométrie descriptive.

THÉORÈME. — *Toute courbe tracée sur une surface* S *et qui coupe en* M *le contour apparent dans l'espace a une projection tangente en* m, *projection de* M, *au contour apparent en projection* (fig. 47).

Soit S la surface dont le contour apparent perspectif dans l'espace par rapport au point de vue A est (C), le contour en projection sur plan P étant (Γ) ; soit, de plus, (L) une ligne tracée sur S qui coupe (C) en M ; traçons

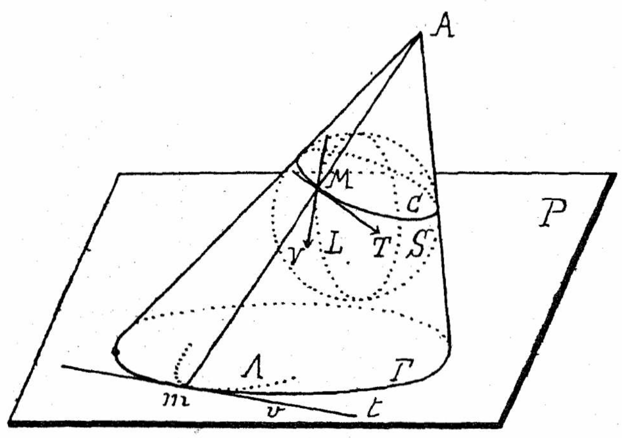


Fig. 47.

les tangentes MT, MV en M à (C) et à L, ces tangentes sont contenues toutes deux dans le plan tangent en M qui, M étant sur le contour apparent, passe par A ; ces deux tangentes ont donc toutes deux pour projection la trace mt de ce plan sur le plan P, les deux courbes (Γ) et (Λ) projection des courbes (C) et (L) sont donc bien tangentes en m.

Il y aurait exception (fig. 48) au cas où la tangente

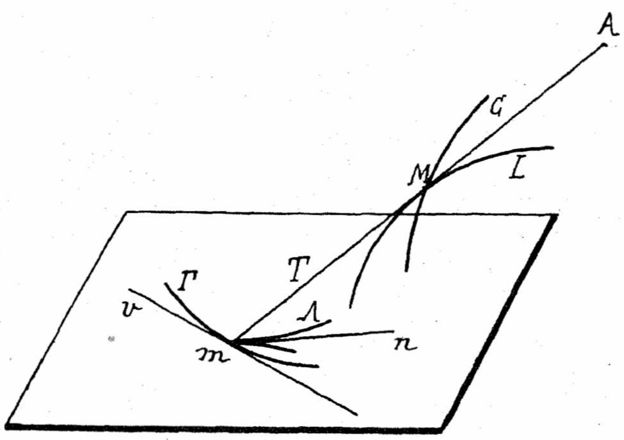


Fig. 48.

MV à la courbe (L) passerait par le point de vue A ; nous avons déjà signalé que, dans ce cas, la tangente de la projection n'est plus la projection de la tangente, mais la trace du plan osculateur à la ligne (L) en M sur le plan P ; nous avons montré de plus qu'en ce point m la projection (Λ) présente un point de rebroussement.

APPLICATION

On se sert du théorème précédent en géométrie descriptive pour tracer les contours apparents en projection de certaines surfaces ou déterminer des séparatrices d'ombres portées : il suffit, en effet, de projeter un certain nombre de lignes tracées sur la surface et d'en prendre l'enveloppe pour avoir comme enveloppe

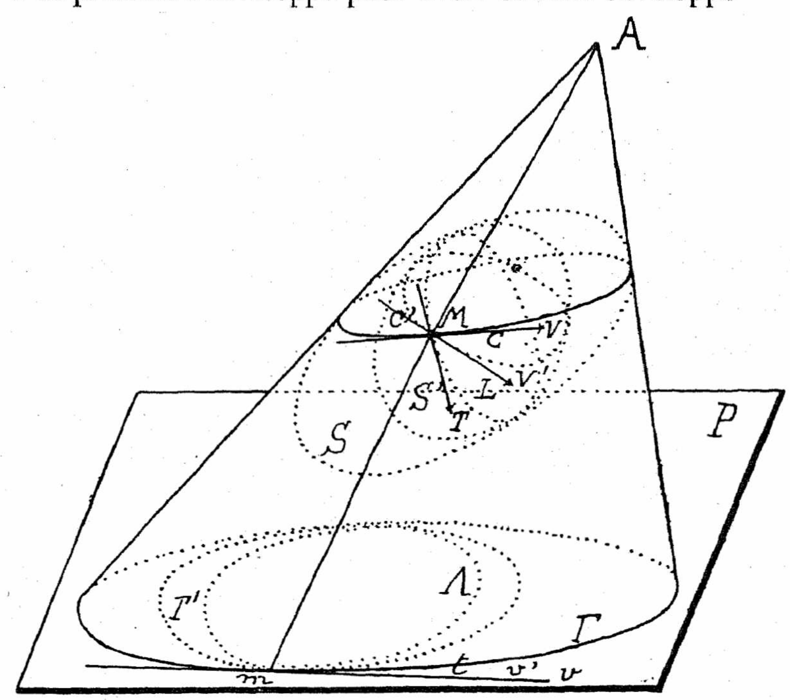


Fig. 49.

de ces projections les contours apparents ou séparatrices cherchées.

THÉORÈME. — *Lorsque deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre le long d'une ligne* (L), *les contours apparents en projection de ces deux surfaces sont tangents entre eux aux points projections des points communs à la ligne* L *et aux contours apparents* (fig. 49).

Remarquons tout d'abord que, les deux surfaces se raccordant le long de la ligne L, si le contour apparent dans l'espace (C) de la surface S coupe en M la ligne L, nécessairement le contour apparent (C′) de la surface (S′) passe également en M de la ligne (L) les plans tangents à S et S′ sont confondus.

D'après le théorème précédent en m projection de M les tangentes MT à (L), MV à (C) et MV′ à (C′) ont toutes trois pour projection la trace du plan tangent commun en M sur le plan de projection, donc les courbes (Γ) et (Γ') projections des contours (C) et (C') sont bien tangentes en m, et en ce point la projection (Λ) *de la courbe de contact* (L) *admet aussi la même tangente*.

Cette propriété sera utilisée très souvent en géométrie descriptive.

CAS PARTICULIERS

Le contour apparent d'une surface engendrée par le déplacement d'une génératrice est l'enveloppe *des projections de ses génératrices*.

Le contour apparent d'une surface enveloppe d'une surface mobile est l'enveloppe des contours apparents de la surface mobile.

QUATRIÈME SECTION

CÔNES ET CYLINDRES

CHAPITRE PREMIER

PLANS TANGENTS AUX CÔNES ET CYLINDRES

Les propriétés des prismes, pyramides, cônes et cylindres ayant été complètement vues au programme d'admission à l'École, nous ne ferons ici que rappeler rapidement les propriétés de ces surfaces. Un certain nombre d'exercices résolus à la fin de la première partie sont d'ailleurs des applications de cette section du cours.

GÉNÉRALITÉS

Un cône ou cylindre étant déterminé par le sommet ou la direction des génératrices et une directrice ligne ou surface, on obtient le plan tangent en un point M de cette surface en prenant le plan de la génératrice MP qui passe en M et de la tangente PT à la directrice au point P (fig. 50). Remarquons que si la directrice est une surface il y a une infinité de tangentes en P telles que PT. Cette construction résulte de ce que le plan tangent à un cône ou à un cylindre est le même tout le long d'une génératrice.

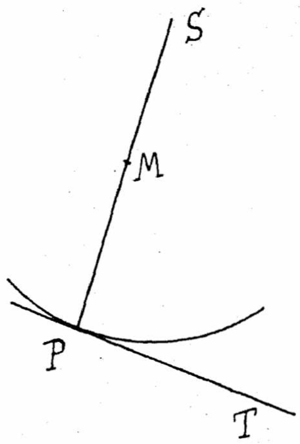


Fig. 50.

Pour *mener un plan tangent par un point* A extérieur à un cône ou à un cylindre, on mène par A la droite AB qui passe par le sommet du cône (ou est parallèle aux génératrices du cylindre), et on mène par AB des plans

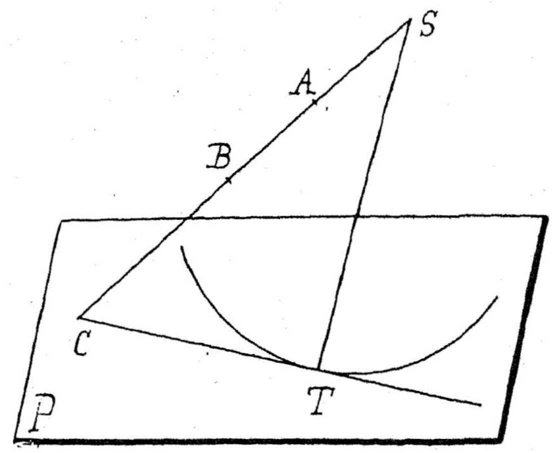


Fig. 51.

tangents à la directrice qui sont les plans cherchés ; au cas où la directrice est une courbe plane, on prend la trace C de AB sur le plan de cette courbe et on détermine les plans tangents par les tangentes issues de C à la directrice (fig. 51).

Comme exemples de plans tangents à un cône (fig. 51 *bis*), considérons le cône de sommet (S,S′) ayant pour base le cercle (o,o') dans le plan horizontal, menons lui des plans tangents par le point (a,a') ; pour cela joignons $(Sa, S'a')$ qui a pour face horizontale (c,c') ; de (c,c') menons des tangents cu, ct à la base les généra-

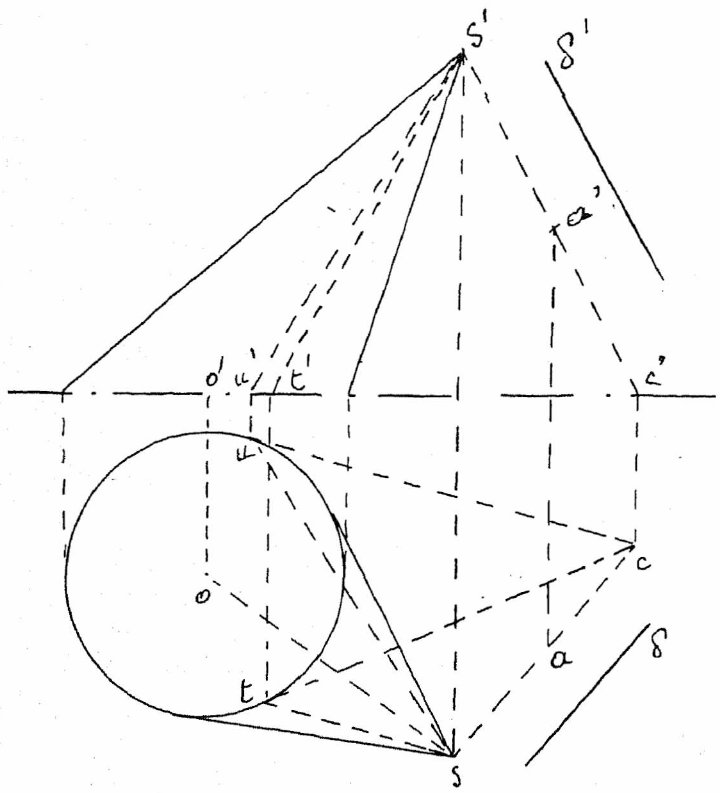


Fig. 51 *bis*.

trices de contact des plans tangents cherchés sont $(Su, S'u')$ et $(St, S't')$ les plans tangents sont $(Suac, S'u'a'c')$ $(Stac, S't'a'c')$.

Même construction si au lieu de mener les plans par (a,a') on les menait parallèle à $(\delta\delta')$.

Pour *mener un plan tangent parallèlement à une direction*

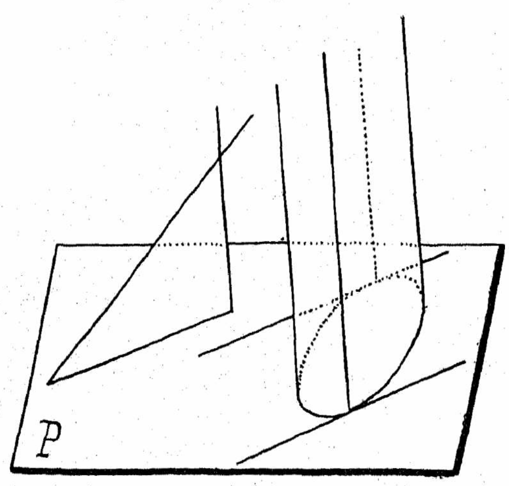


Fig. 52.

donnée à un cône on mène une parallèle à la direction par le sommet du cône et comme précédemment on détermine les plans tangents au cône qui passent par cette droite.

Pour résoudre le *même problème sur un cylindre,* on détermine un plan P parallèle à la fois à la direction donnée et aux génératrices du cylindre, on mène ensuite à la directrice du cylindre des plans tangents parallèles au plan P qu'on vient d'obtenir; au cas où la directrice du cylindre est une courbe plane on détermine les plans cherchés en menant à la directrice des tangentes parallèles à la trace du plan P sur le plan de la directrice (fig. 52).

Menons (fig. 52 *bis*) à un cylindre de base le cercle (o,o') et de direction de génératrices $(ab,a'b')$ des plans tangents parallèles à (δ,δ'). Pour cela par un point

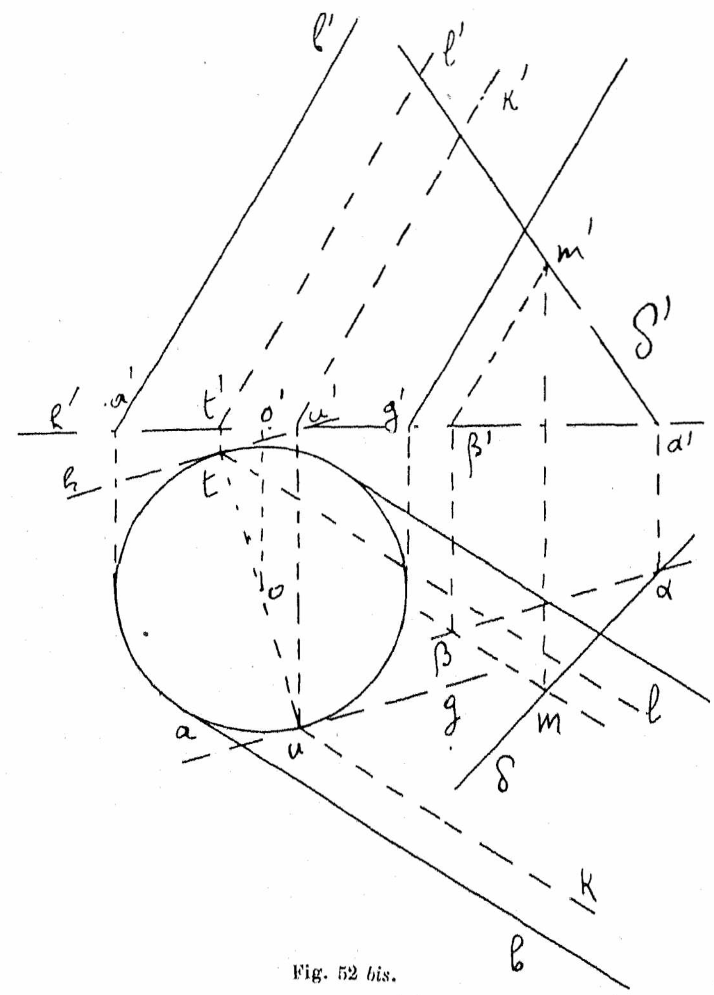


Fig. 52 *bis*.

(m, m') de (δ,δ') menons une parallèle aux génératrices du cylindre ; cette parallèle forme avec $\delta\delta'$ un plan dont la trace horizontale est $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$, les plans tangents cherchés ont leurs traces horizontales parallèles à

$\alpha\beta$ et tangentes au cercle o,o' ce sont donc les plans $(guk,g'u'k')$ et $(htl,h't'l')$ dont les génératrices de contact sont $(uk,u'k')$ et $(tl,t'l')$.

APPLICATIONS

Les problèmes précédents résolvent pour les cônes et cylindres les problèmes de recherche des séparatrices d'ombres propres et portées sur un plan dans les deux cas de rayons convergents et de rayons parallèles.

D'autre part, en menant à un cône ou à un cylindre

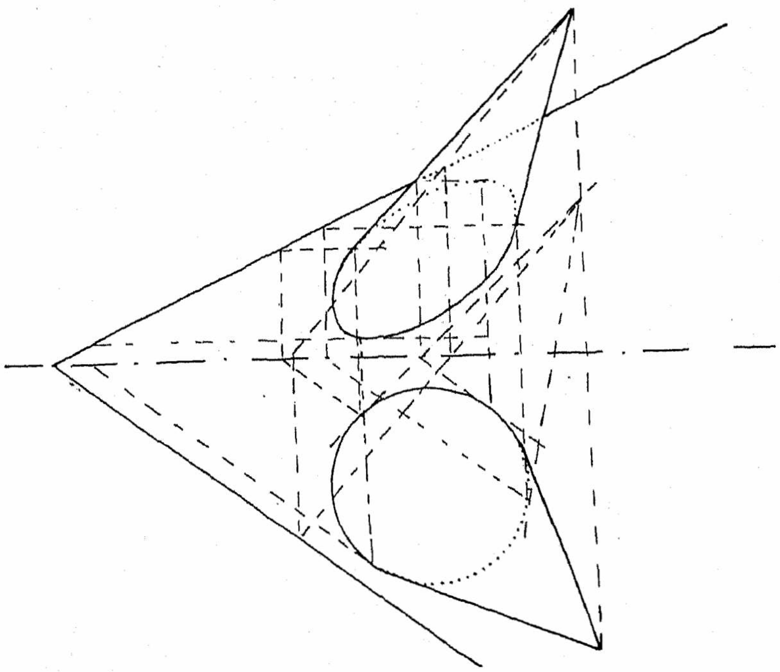


Fig. 53.

des plans tangents verticaux ou de bout, on détermine les contours apparents en projection horizontale ou verticale de ces solides (fig. 53).

PLANS TANGENTS COMMUNS OU PARALLÈLES

On ne peut pas en général mener des *plans tangents communs* à deux cônes, deux cylindres ou un cône et un cylindre. Mais le problème devient possible dans les cas suivants :

1° *Deux cones* ayant ou une *directrice commune* ou le *sommet commun :* si la directrice est commune, les plans tangents menés par la ligne des sommets à la directrice résolvent la question (fig. 54) ; si le sommet est commun, on mène des plans tangents communs par ce sommet aux deux directrices, ce qui s'effectue facilement quand

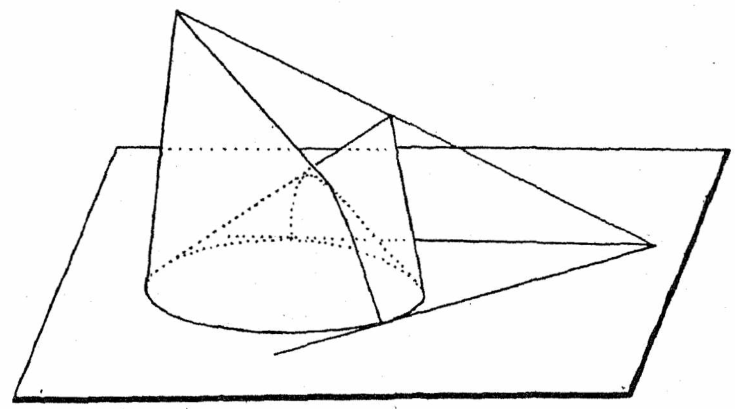


Fig. 54.

ce sont des lignes complanaires en menant des tangentes communes à ces lignes (fig. 55).

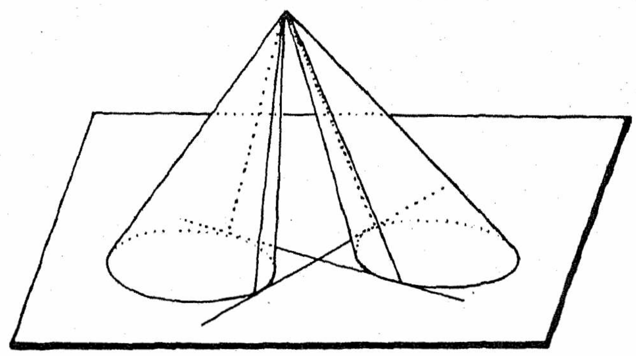


Fig. 55.

2° *Deux cylindres à génératrices parallèles ou à directrice commune :* si la directrice est commune, on mène à cette directrice des plans tangents parallèles à la fois aux génératrices des deux cylindres (fig. 56) ; si les génératrices sont parallèles, on mène des plans tangents communs aux deux directrices parallèles aux génératrices, ce qui s'effectue facilement quand les directrices sont des lignes complanaires en menant des tangentes communes à ces lignes (fig. 57) ;

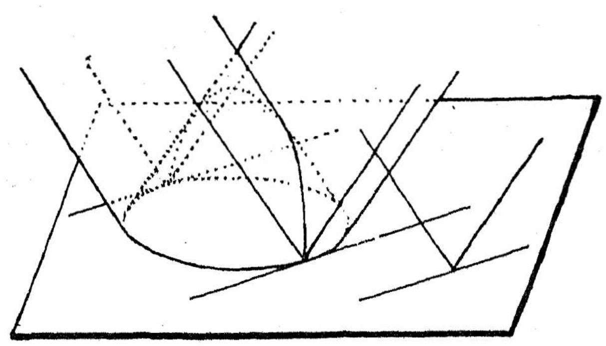


Fig. 56.

3° *Un cône et un cylindre ayant une directrice commune;*

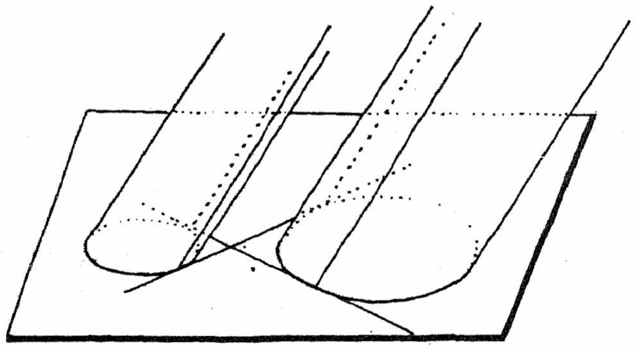


Fig. 57.

les plans tangents communs sont alors les plans tan-

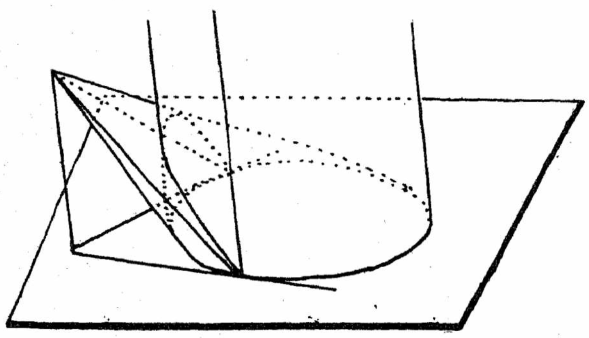


Fig. 58.

gents menés à la directrice commune par le sommet du cône parallèlement aux génératrices du cylindre (fig. 58).

Comme exemple de plans tangents communs menons (fig. 58 *bis*) à un cylindre de direction de génératrice (ab, $a'b'$) et à un cône de sommet (S, S') ayant même base le cercle (o,o') des plans tangents communs.

Pour cela par (S,S') menons une parallèle aux génératrices du cylindre dont la trace horizontale est (α,α'); du point α menons les tangentes $\alpha u, \alpha v$ à la base commune, les plans tangents cherchés sont ($\alpha uk, \alpha' u'k'$) et ($\alpha vl, \alpha' v'l'$) dont les génératrices de contact sont ($uk, u'k'$) et ($vl, v'l'$) sur le cylindre et (Su, S'u') et (Sv, S'v') sur le cône.

Les problèmes de mener des *plans tangents parallèles* à deux cônes, deux cylindres ou un cône et un cylindre se ramènent immédiatement aux problèmes des plans tangents communs aux cônes et cylindres ayant même sommet ou même directrice : il suffit, quand c'est possible, de déplacer une des surfaces homothétiquement de façon à lui donner soit sommet commun, soit directrice commune avec l'autre surface. On mène alors les plans tangents communs, puis on redéplace la surface et le plan tangent obtenu, de façon à la remettre dans sa première position et grandeur ; les plans tangents communs accouplés avec les plans déplacés, comme il est indiqué, résolvent la question.

Quant au problème de mener des *normales communes* à deux cônes, il se résout en menant d'abord des plans tangents parallèles aux deux cônes, puis en menant une perpendiculaire commune aux génératrices de contact de ces deux plans tangents parallèles, cette perpendiculaire commune est la normale commune cherchée, puisqu'étant perpendiculaire aux deux génératrices, elle est par là-même perpendiculaire aux deux plans parallèles menés par deux génératrices.

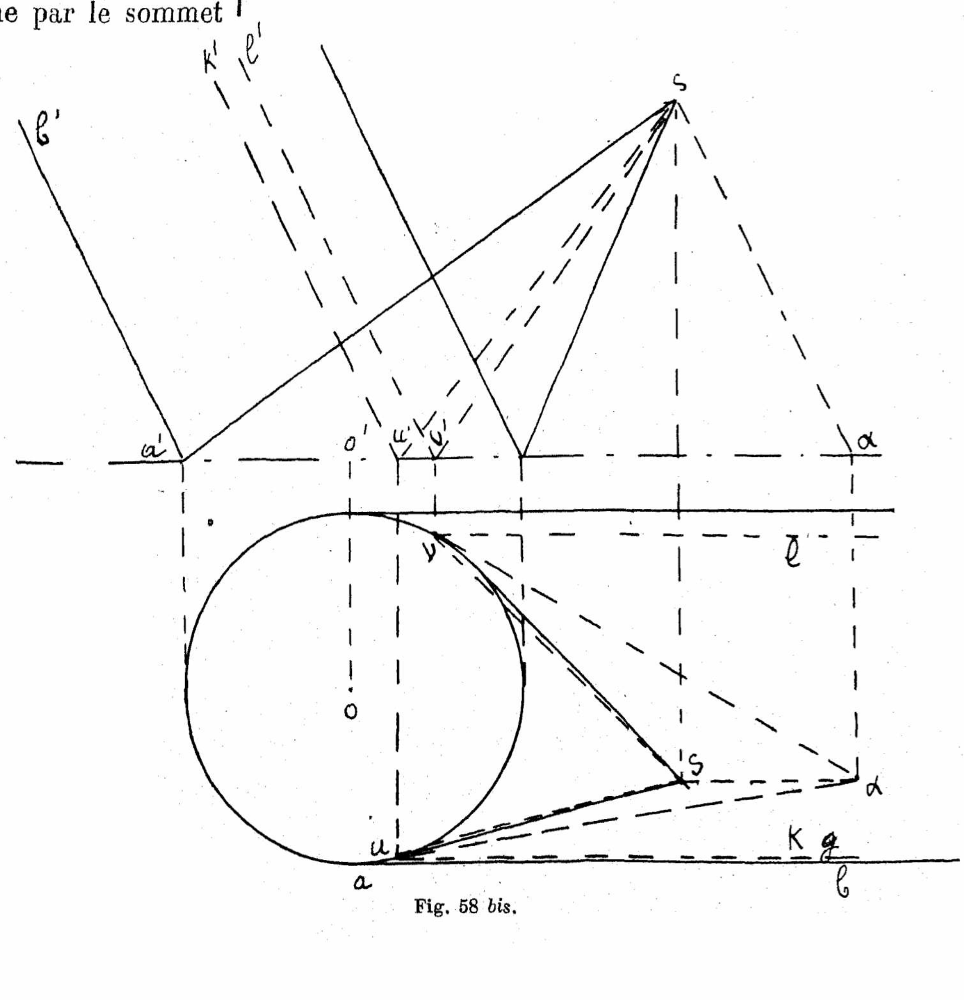


Fig. 58 *bis*.

CHAPITRE II

SECTIONS PLANES

GÉNÉRALITÉS

La méthode générale pour déterminer l'intersection de deux surfaces consiste à en rechercher des points et les tangentes en ces points en opérant comme suit : on coupe les deux surfaces par des plans auxiliaires choisis de façon que les sections planes des deux surfaces par ces plans soient les plus simples et les plus faciles à tracer possibles ; les points communs à ces deux sections planes sont des points de l'intersection cherchée, les tangentes en ces points sont les intersections des deux plans tangents aux deux surfaces aux mêmes points.

Dans le cas d'une section plane, la section du plan par le plan auxiliaire sera une droite quel que soit ce plan, on s'occupe donc seulement de choisir le plan auxiliaire de façon que la section de la deuxième surface soit simple, elle aussi : si, comme ici, on a affaire à un cône, on pourra, en faisant passer les plans auxiliaires par le sommet du cône, avoir une nouvelle section plane rectiligne ; de même, si on a affaire à un cylindre on prendra des plans auxiliaires parallèles aux génératrices ; dans ces deux cas, on pourra encore disposer de la direction du plan de façon à obtenir tel ou tel point particulier de l'intersection comme nous le verrons plus loin ; cette méthode est donc excellente pratiquement et théoriquement, systématisée elle prend le nom de *méthode des projections coniques* ou des *projections obliques*, selon la dernière condition imposée aux plans auxiliaires de passer par un point fixe ou d'être parallèles à une direction fixe.

Mais il existe encore une détermination commode des plans auxiliaires lorsque la base du cône ou du cylindre considéré est un cercle situé dans l'un des deux plans de projection ; dans ce cas, il suffira de couper par des plans horizontaux ou de front pour obtenir des sections circulaires faciles par suite à utiliser : ce procédé qui *ne peut être érigé en méthode générale* peut venir en aide au précédent et servir à la détermination de points que ne fournirait pas facilement la première méthode.

A propos des sections planes différents problèmes se posent que nous allons indiquer rapidement.

Tout d'abord, rappelons que *les points sur les contours apparents* du cône ou du cylindre seront déterminés en faisant passer les plans auxiliaires par les génératrices de contour apparent.

Proposons-nous ensuite de déterminer les points de la section plane où les tangentes ont une direction donnée.

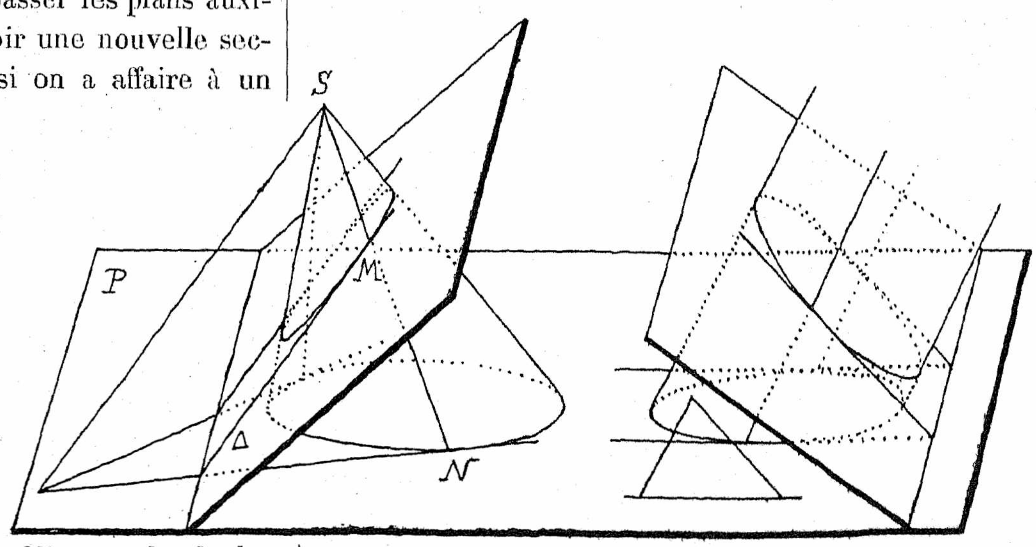


Fig. 59.

La direction donnée étant Δ dans le plan sécant, on considère les plans tangents au cône ou au cylindre parallèles à cette direction. Ces plans tangents touchent le cône ou le cylindre suivant des génératrices telles que SM, M étant le point de rencontre avec le plan sécant, en M la tangente sera parallèle à Δ et le point M répondra à la question : on est donc ramené, pour résoudre le problème posé, à résoudre un problème déjà traité sur les plans tangents aux cônes et aux cylindres (fig. 59).

On peut alors, en particularisant la direction Δ déterminer les points de la section plane, 1° *le plus haut et le plus bas*, Δ étant horizontal ; 2° *le plus en avant et le plus en arrière*, Δ étant de front ; 3° *le plus à droite, le plus à gauche*, Δ étant de profil.

BRANCHES INFINIES

Cherchons enfin si la section plane présente des *branches infinies ;* pour qu'il en soit ainsi dans le *cas du cône* il faut et il suffit que le cône ait des génératrices parallèles au plan sécant : on s'en rendra compte en menant par le sommet du cône *un plan parallèle au plan sécant :* si ce plan coupe le cône, les génératrices de section correspondent à des points de la section plane rejetés à l'infini. Pour le cylindre, s'il y avait une géné-

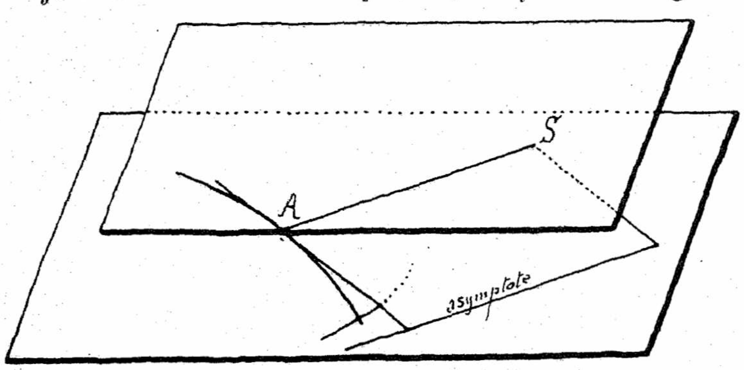


Fig. 60.

ratrice parallèle au plan sécant, toutes le seraient et la section se composerait d'une ou plusieurs génératrices, mais il peut se faire qu'une ou plusieurs génératrices du cylindre s'éloignent tout entières à l'infini ; dans ce cas la section plane aura également des points à l'infini situés sur ces génératrices.

Dans tous les cas, les *asymptotes*, c'est-à-dire les tangentes en ces points à l'infini sont obtenues en prenant les traces sur le plan sécant des plans tangents aux cônes et aux cylindres le long des génératrices correspondantes ; remarquons toutefois que dans le cas où la génératrice est entièrement rejetée à l'infini, le plan

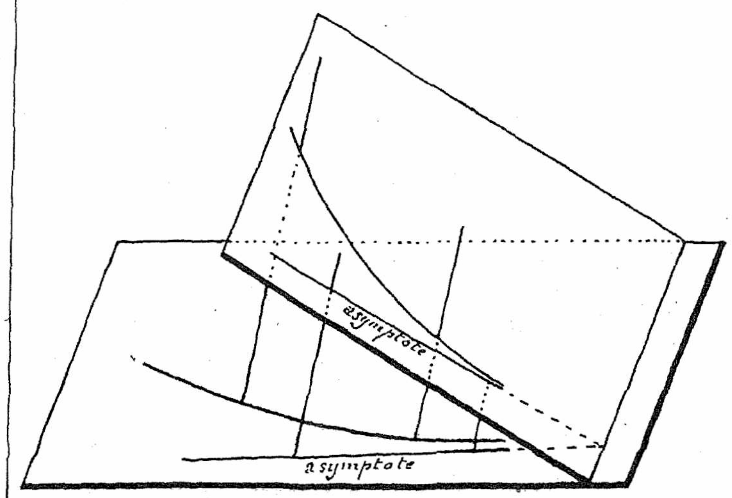


Fig. 61.

tangent ne sera autre que le plan asymptote correspondant (fig. 60 et 61).

Prenons comme exemple de recherche d'asymptote

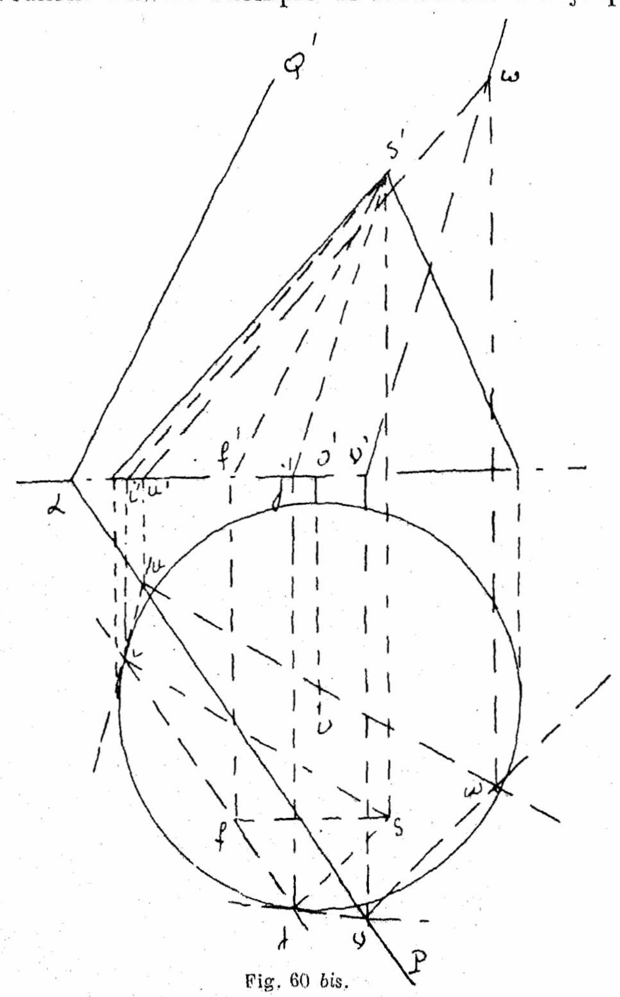


Fig. 60 *bis*.

(fig. 60 *bis*) celle de l'intersection d'un cône de sommet (S,S') de base (o,o') par un plan $P\alpha Q'$.

Pour cela menons par (S,S′) une frontale parallèle au plan sécant, dont la trace horizontale est ff'; la droite ifj parallèle à αP menée par f est la trace horizontale du plan parallèle au plan sécant mené par le sommet du cône.

Cette trace coupe la base en (i,i'), (j,j') et par suite le plan correspondant coupe le cône suivant $(Si,S'i')$ et $(Sj,S'j')$ qui sont des génératrices parallèles aux asymptotes cherchées.

Pour avoir ces dernières je trace les tangentes à la base en i et j, ce sont les traces horizontales des plans tangents au cône le long de $(Si,S'i')$ $(Sj,S'j')$. Ces tangentes rencontrent αP en u et v qui sont les traces horizontales des asymptotes cherchées qui sont donc elles-mêmes les droites $(uw,u'w')$ $(vw,v'w')$ respectivement parallèles à $(Si,S'i')$ et $(Sj,S'j')$.

DÉVELOPPEMENT

On développe un cône ou un cylindre en inscrivant dans ces surfaces une pyramide ou un prisme dont les arêtes sont suffisamment rapprochées pour que l'erreur commise en remplaçant la surface cylindrique ou conique par la surface inscrite prismatique ou pyramidale soit négligeable.

Sans insister sur le détail du développement qu'on a vu dans le Programme d'admission à l'École, rappelons les propriétés principales des développements coniques et cylindriques.

THÉORÈME. — *Lorsqu'on développe sur un plan un cône ou un cylindre, toute courbe tracée sur la surface se transforme en une courbe dite transformée telle que la longueur d'un arc de la courbe cylindrique ou conique soit égale à l'arc correspondant de la transformée.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'on développe sur un plan un cône ou un cylindre les tangentes à la courbe transformée font avec les transformées des génératrices les mêmes angles que la courbe cylindrique ou conique fait avec les génératrices correspondantes de la surface gauche.*

D'une façon plus rapide, nous dirons que les *longueurs et les angles se conservent dans le développement.*

1° TANGENTES A LA TRANSFORMÉE

Tangente en un point ordinaire. — Les angles se conservant, le problème sera résolu si on peut connaître l'angle de la tangente à la courbe *dans l'espace* avec la génératrice du point de contact.

On obtient cet angle de la façon suivante :

Soit M le point de l'espace, μ le point de la génératrice SM sur une directrice plane, T la trace de la tangente en M avec le plan de la directrice, on construit le triangle TMμ dont les éléments seront déterminés sur l'épure, au moyen d'un rabattement, par exemple.

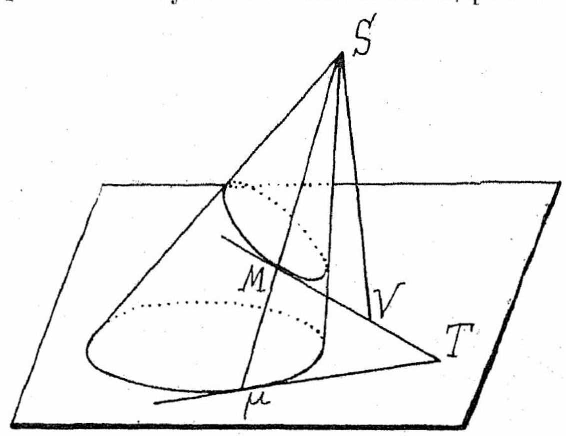


Fig. 62.

Au cas où on ne pourrait commodément utiliser une directrice plane, on choisirait sur la tangente MT un point V et on construirait le triangle SMV d'après les données de l'épure (fig. 62).

Remarque. — Le côté T μ du triangle MT μ prend ordinairement le nom de *sous-tangente*.

2° POINTS D'INFLEXION DE LA TRANSFORMÉE. TANGENTES EN CES POINTS

THÉORÈME. — *La transformée par développement d'une section plane possède un point d'inflexion aux points transformés des points de l'espace pour lesquels le plan tangent est perpendiculaire au plan sécant.*

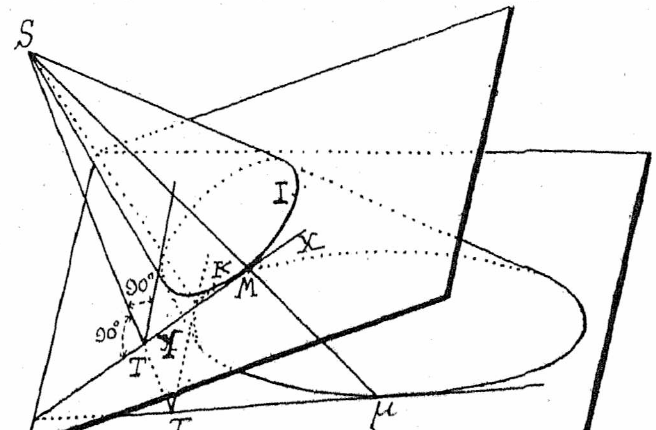


Fig. 63.

Donnons de ce théorème une simple explication sans prétention, à la rigueur nécessaire à une démonstration mathématique.

Soit M (fig. 63) un point de la section plane par un plan P d'un cône S le plan tangent en M étant perpendiculaire sur le plan P.

Appelons X et Y deux points de la tangente MT en M tels que $\widehat{SMX}$ soit obtus et $\widehat{SMY}$ aigu et prenons sur la section plane deux points I et K, I du côté de X, K du côté de Y on aura :

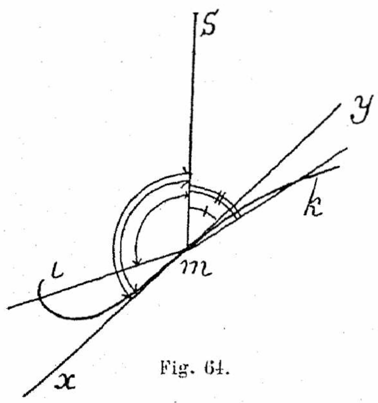


Fig. 64.

$$\widehat{SMX} > \widehat{SMI} \text{ et } \widehat{SMK} > \widehat{SMY}$$

puisque l'angle le plus petit et l'angle le plus grand que fait une droite avec un plan sont les angles formés par la droite avec sa projection orthogonale sur le plan.

Comme nous savons que les angles se conservent dans le développement, nous aurons (fig. 64) :

$$\widehat{smx} > \widehat{smi} \text{ et } \widehat{smk} > \widehat{smy}$$

Ceci étant vrai, si rapprochés que soient i et k de m, pourvu qu'ils restent de part et d'autre de m. On déduit de là immédiatement la forme de la courbe transformée dans le voisinage de m qui apparait bien être un *point d'inflexion*.

On aura donc les points de la section plane qui donneront les points d'inflexion de la transformée en menant des plans tangents au cône (ou au cylindre parallèles à une perpendiculaire au plan sécant.)

APPLICATION

Les points d'inflexion de la transformée d'une base située dans un des plans de projection sont fournis par les points sur les contours apparents correspondants ; ces points existeront donc ou non, selon qu'il y aura ou non des contours apparents sur le plan de projection considéré.

CONES ET CYLINDRES DU 2e DEGRÉ

Les méthodes et résultats généraux rappelés à l'instant sont bien naturellement applicables aux cônes du second degré.

On peut au contraire préciser certains points et donner des résultats complémentaires.

1° NATURE DE LA SECTION PLANE D'UN CONE

Cette section sera une des trois coniques : une ellipse, si le plan parallèle au plan sécant mené par le sommet du cône ne le coupe pas ; une parabole, si le même plan est tangent au cône ; une hyperbole, si le même plan coupe le cône suivant deux génératrices distinctes.

2° NATURE DE LA SECTION PLANE D'UN CYLINDRE

La section plane d'un cylindre par un plan non parallèle aux génératrices est toujours de même nature, quelle que soit la direction du plan : ellipse, si le cylindre est elliptique ; parabole, si le cylindre est parabolique ; hyperbole, si le cylindre est hyperbolique.

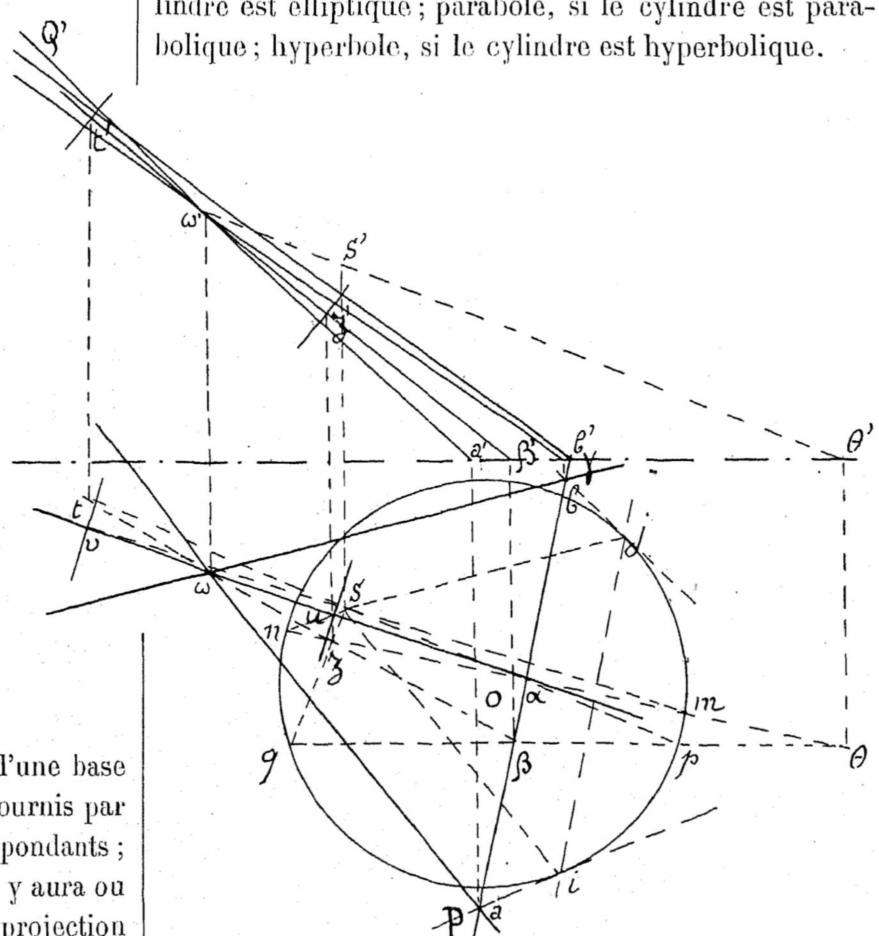


Fig. 65.

3° AXES ET SOMMETS DES PROJECTIONS DES SECTIONS PLANES D'UN CONE

Nous distinguerons trois cas selon la nature de la section.

a) *Cas de la section hyperbolique.* — On détermine

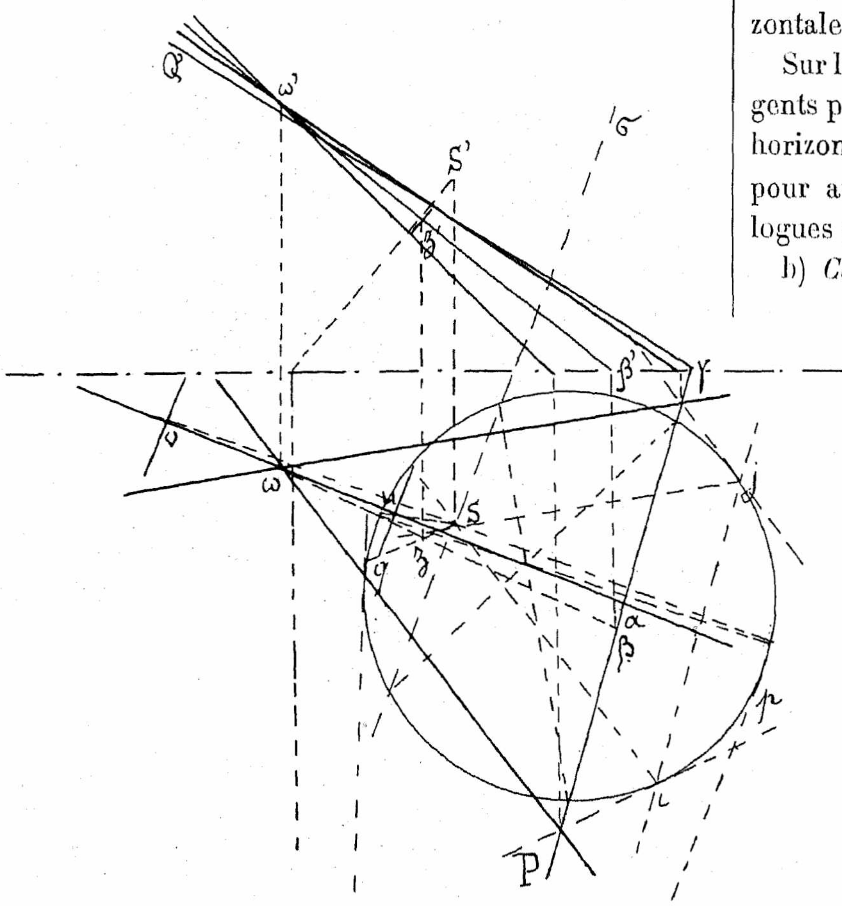


Fig. 66.

d'abord les asymptotes par la méthode habituelle, les bissectrices des projections des asymptotes sont les axes cherchés; on aura donc les sommets en prenant les points d'intersection de ces bissectrices situées dans le plan sécant avec le cône. Une seconde méthode consisterait à chercher les points de la section où les tangentes sont parallèles en projection horizontale à l'axe non transverse. Ces constructions ont été effectuées (fig. 65 et 66).

Le plan sécant est PγQ′ le cône de sommet S a pour base un cercle O dans le plan horizontal, la section est hyperbolique, car le plan parallèle à PγQ′ mené par S coupe le cercle O en I et J.

Les plans tangents au cône le long de SI et SJ donnent par leur intersection avec PγQ′ les asymptotes ΩA et ΩB tant en plan que sur le mur. On mène les bissectrices $\omega\alpha$ en plan et $\omega'\beta'$ en projection sur le mur des asymptotes : on a ainsi les axes des projections. On coupe le cône par chacune de ces droites, les traces des plans auxiliaires employés étant $\theta\alpha$ puis $\theta\beta$ et on trouve ainsi les sommets u et v de la projection horizontale et les sommets z' et t' de la projection verticale.

Sur la seconde épure (fig. 66) on a mené des plans tangents parallèles à la direction Σs parallèle en projection horizontale à la perpendiculaire à l'axe transverse $\omega\alpha$ pour avoir les sommets en plan : constructions analogues pour avoir les sommets en projection sur le mur.

b) *Cas de la section parabolique.* — La direction de l'axe est celle de la génératrice SM de contact du plan parallèle au plan sécant mené par le sommet du cône : le sommet Σ sera obtenu en cherchant la tangente à la projection perpendiculaire en projection horizontale à la direction de l'axe : c'est ΣT et l'axe est $\sigma\alpha$ en plan sur l'épure (fig. 67); le foyer est obtenu

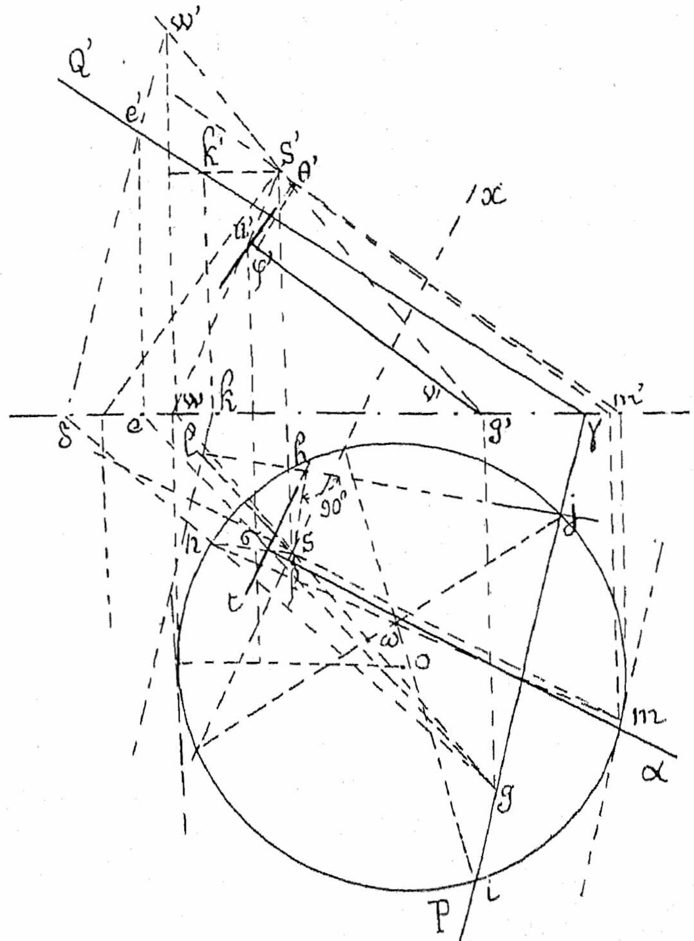


Fig. 67.

facilement puisqu'on connaît la tangente au sommet et une tangente, au point J par exemple situé dans le plan horizontal. On trouve ainsi le point F sur l'épure. Mêmes constructions pour avoir l'axe $u'v'$, la tangente $u'\theta'$ au sommet et le foyer φ' de la projection sur le mur.

c) *Cas de la section elliptique.* — La détermination des axes est assez délicate et longue ; on détermine les points de contact de deux tangentes parallèles à la section, ce qui donne un *diamètre de la conique*, puis on cherche les points situés sur le diamètre conjugué, soit en coupant directement le cône par cette droite, soit en cherchant les points de contact des tangentes à la section parallèles au premier diamètre obtenu.

Connaissant alors deux diamètres conjugués en grandeur et direction, une construction géométrique (celle

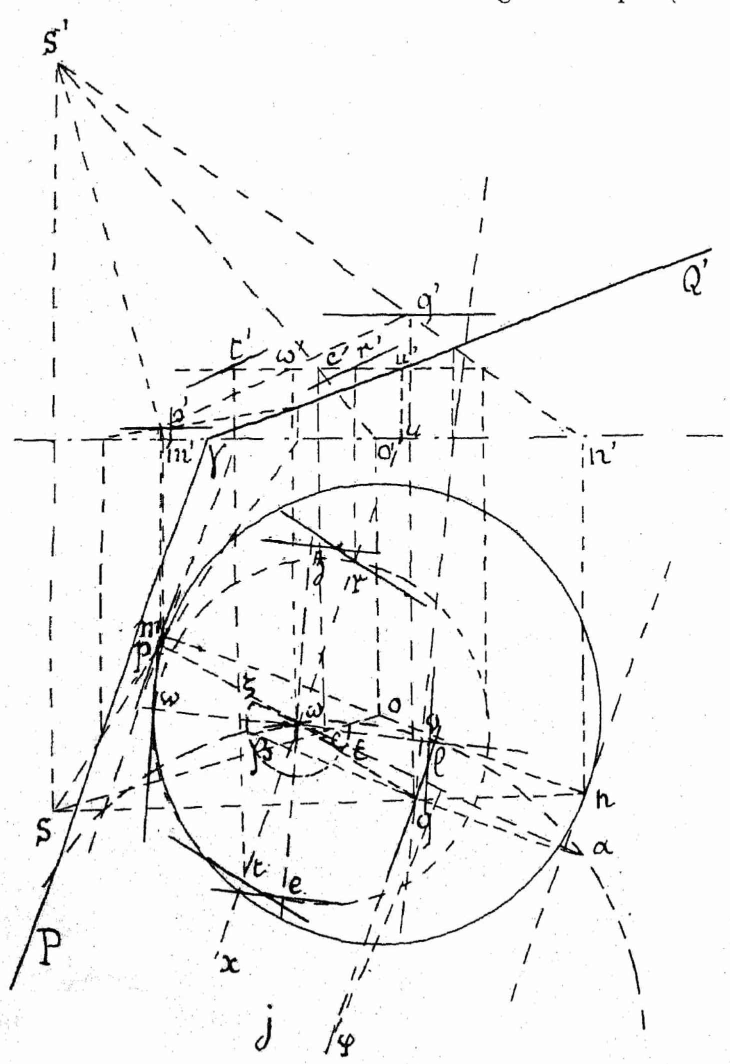


Fig. 68.

de Chasles par exemple) permettra de déterminer les deux axes. Sur l'épure (fig. 68) le cône de sommet S et de base le cercle O dans le plan horizontal a été coupé par le plan $P\gamma Q'$: on a déterminé tout d'abord les tangentes horizontales de la section en menant des tangentes au cercle O parallèles à γP dont les points de contact sont m et n ; les points P et Q sur les génératrices SM et SN donnent les points le plus haut et le plus bas à tangentes horizontales d'où un diamètre PQ, le centre Ω et la direction horizontale du diamètre conjugué. En coupant par le plan horizontal du point Ω on détermine les extrémités R et T de ce diamètre conjugué : on a donc dans les deux ellipses en projection deux diamètres conjugués en grandeur et direction. On a déterminé en plan seulement, par suite des dimensions de l'épure, les axes de la projection à l'aide du théorème de Chasles : pour cela, considérant les deux demi-diamètres conjugués ωr, ωq, on mène par q une droite perpendiculaire sur ωr et on porte sur cette droite deux longueurs $q\alpha$ et $q\beta$ égales à ωr, on trace ensuite le cercle de centre φ passant par $\omega\alpha\beta$; ce cercle coupe la tangente en q en deux points, j et l (j en dehors de l'épure), ωj et ωl sont les directions des axes cherchés ; pour avoir leur longueur on sait que $\omega\alpha$ est la somme et $\omega\beta$ la différence des demi-axes, en reportant donc $\omega\beta$ sur $\omega\alpha$ en $\omega\varepsilon$ et $\omega\zeta$ on a en $\alpha\zeta$ le grand axe et en $\alpha\varepsilon$ le petit, d'où les quatre sommets cherchés, e et z sur le grand axe, v et w sur le petit.

4° AXES ET SOMMETS DES SECTIONS PLANES D'UN CYLINDRE

Même marche à suivre que celle indiquée pour les cônes dans les trois cas selon la nature du cylindre.

5° AXES ET SOMMETS DE LA SECTION PLANE DANS L'ESPACE

Il est assez rare que l'on ait besoin de ces droites et points, mais s'ils étaient demandés on rechercherait d'abord par la méthode des tangentes parallèles, deux diamètres conjugués de la conique en grandeur et en position, et de ces diamètres on déduirait les axes ainsi qu'il l'a déjà été indiqué.

6° SECTIONS PAR DES PLANS HORIZONTAUX OU DE FRONT

On peut dans ce cas obtenir assez rapidement un tracé de la conique, comme enveloppe des projections des sections horizontales ou frontales du cône. Ces projections sont faites perspectivement à partir du sommet du

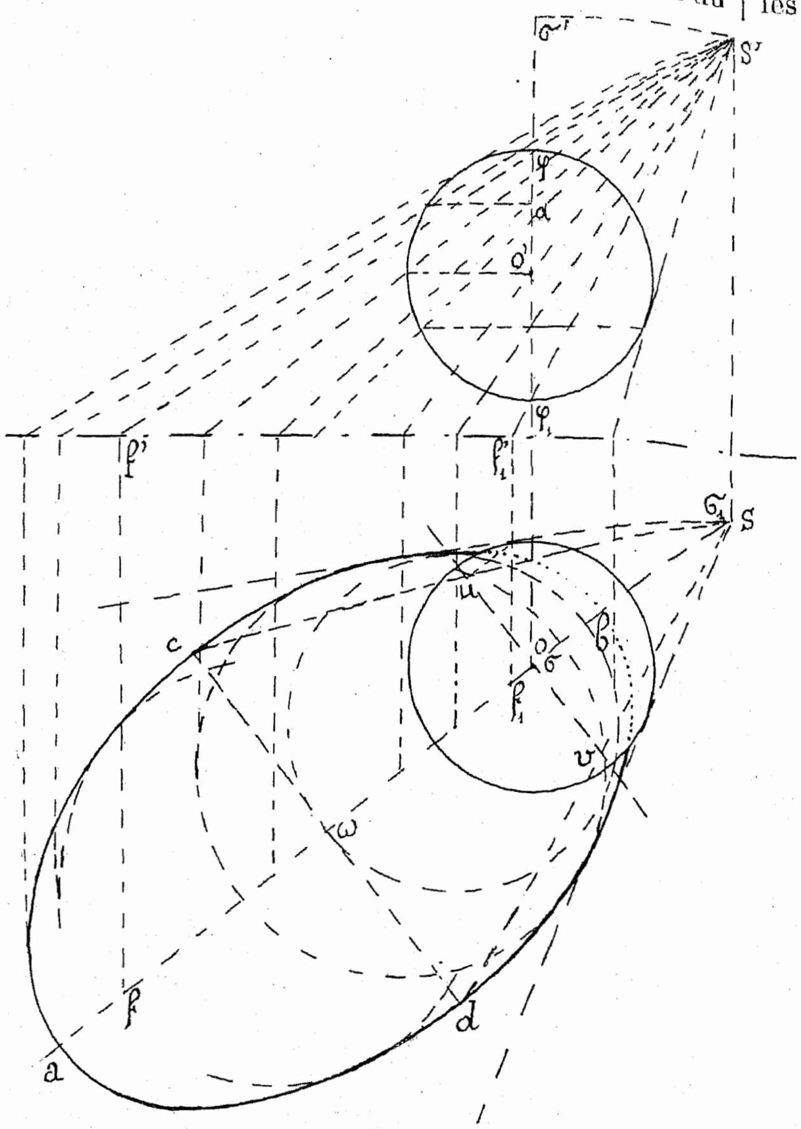


Fig. 69.

cône pris comme point de vue; s'il existe alors une sphère inscrite dans le cône (cône de révolution), les perspectives des points de contact des plans tangents à cette sphère parallèles au plan de projection seront les *foyers de la section* par le plan de projection. On a ainsi déterminé sur l'épure (fig. 69) les foyers f et f_1 de la section du cône S circonscrit à la sphère O par le plan horizontal : par raison de symétrie l'axe de la section est sf; on a, les foyers connus, le centre ω, donc le petit axe; pour avoir les sommets c et d de ce petit axe, on mène au cône des tangentes parallèles à $s\omega$ qui est horizontal : pour cela on coupe par le plan vertical perpendiculaire à $s\omega$ mené par o; le plan horizontal étant remonté en o la trace σ, sur ce plan de la parallèle à $s\omega$ menée par S est rabattue en σ_1 (ici confondu par hasard avec S). Il ne reste plus qu'à mener de σ_1 les tangentes en rabattement et à relever leurs points de contact u et v qui, projetés perspectivement, donnent les sommets c et d cherchés : on déduit alors de ωf et ωc le grand axe ab, la courbe est assurée comme nous l'avons déjà dit, par le tracé de plusieurs *cercles bitangents* perspectives des parallèles horizontaux de la sphère. Enfin les contours apparents horizontaux donnent sur la perspective de l'équateur de la sphère des points i et j et les deux tangentes en ces points.

SECTIONS CIRCULAIRES

En général un cône ou un cylindre du second degré admet deux directions de plan donnant des sections circulaires; ces deux sections sont con-

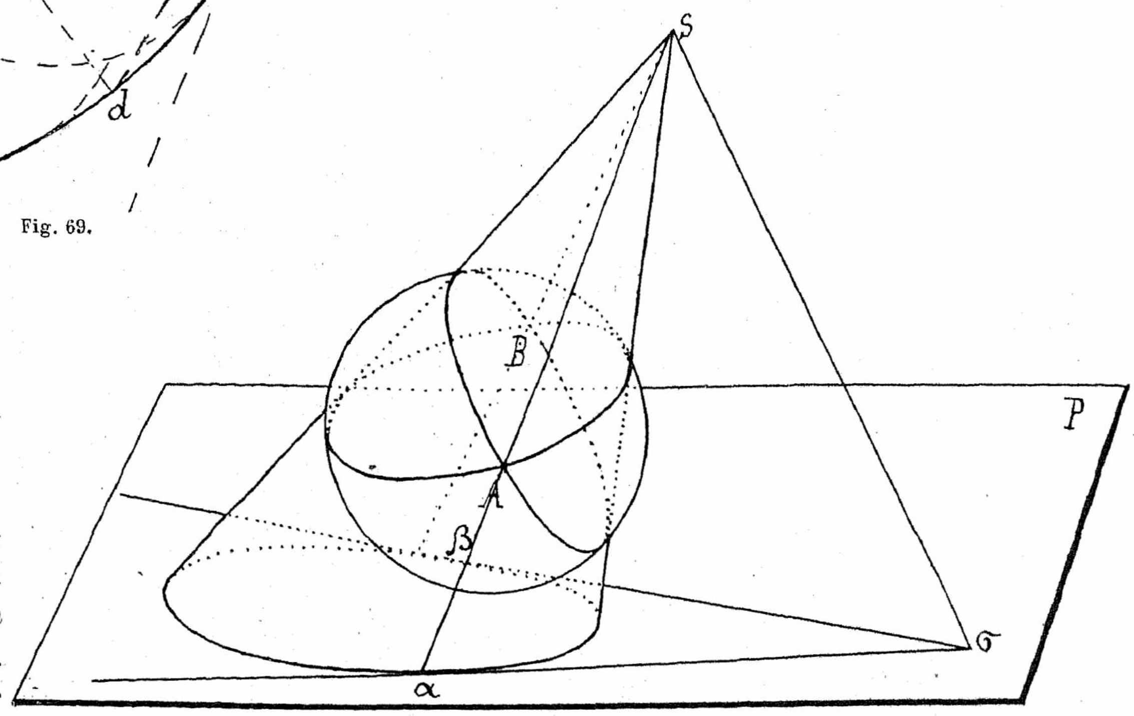


Fig. 70.

fondues en une seule quand le cône ou le cylindre est de révolution. Ces sections circulaires peuvent être obtenues de la façon suivante : on sait que deux surfaces du second degré qui sont bitangentes, c'est-à-dire tangentes en deux points distincts, se coupent suivant deux courbes planes : si donc on considère une sphère bitangente à un cône du deuxième degré l'intersection se composera de deux cercles et la question de la recherche des sections circulaires sera ainsi résolue (fig. 70).

Dans le cas où l'on connait déjà une direction de section circulaire il est alors plus simple de considérer une sphère passant par un premier cercle du cône, la seconde courbe plane commune au cône et à cette sphère est un cercle dont le plan détermine la deuxième direction de plans de section circulaire cherchée.

Ces deux directions de plans sont perpendiculaires à un plan de symétrie du cône oblique et leurs traces sur ce plan de symétrie sont *antiparallèles* par rapport aux génératrices du cône contenues dans ce plan.

CHAPITRE III

INTERSECTIONS DE CÔNES ET CYLINDRES

1° GÉNÉRALITÉS

La méthode générale indiquée s'applique naturellement aux intersections de cônes et de cylindres sans y rien changer. Ajoutons seulement qu'on peut déterminer la tangente non seulement comme intersection des plans tangents, mais aussi comme perpendiculaire au plan normal à la courbe d'intersection, ce plan normal étant déterminé lui-même par les normales aux deux surfaces au point considéré.

Dans la recherche de l'intersection de deux cônes, on prendra des plans auxiliaires passant par la ligne des sommets des deux cônes; ces plans auxiliaires couperont les deux surfaces suivant des génératrices dont les points communs seront des points de l'intersection cherchée.

D'une façon analogue dans la recherche de l'intersection d'un cône et d'un cylindre, on prendra pour plans auxiliaires des plans passant par la droite parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône et on procédera comme précédemment.

Enfin, dans le cas de deux cylindres, les plans auxiliaires seront pris parallèles à la fois aux génératrices des deux cylindres.

Au point de vue pratique, pour trouver effectivement les génératrices situées dans un plan auxiliaire donné, on devra procéder de deux façons différentes, selon que les surfaces seront déterminées au moyen de surfaces ou de lignes directrices.

Si on a affaire à une *ligne directrice*, pour avoir les génératrices cherchées, il suffira de prendre l'intersection de la ligne avec le plan auxiliaire; au contraire, si on a affaire à une *surface directrice*, on devra d'abord rechercher la section de la surface directrice par le plan auxiliaire et mener ensuite des tangentes à cette section pour avoir les génératrices cherchées : c'est là une opération toujours difficile à exécuter avec précision, si simple que soit la surface directrice; aussi, la plupart du temps, se ramènera-t-on, par des sections planes appropriées, à avoir des lignes et non des surfaces directrices.

Admettant alors que les cônes ou cylindres soient définis par des lignes *directrices planes*, deux cas sont encore à distinguer selon que les plans de ces directrices sont confondus ou non.

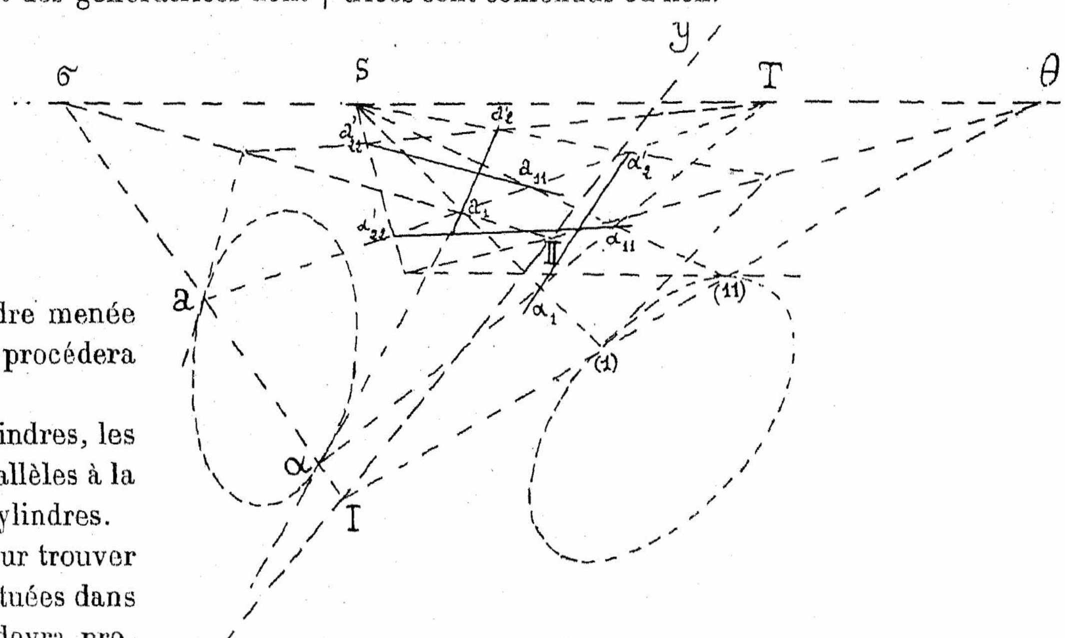


Fig. 71.

Considérons d'abord le cas où les plans des deux lignes directrices sont *différents* : soit xy l'intersection de ces deux plans (fig. 71), et supposons, pour fixer les idées, qu'on ait affaire à deux cônes de sommet S et T ; on prendra les traces σ et θ de la droite ST sur les ans dple base des cônes correspondants. Les plans auxiliaires auront des traces sur ces plans de base passant par σ et θ et se coupant au même point (I) par exemple, sur la droite xy ; on les déterminera soit par une de leurs traces, soit par leur point commun sur xy, selon la commodité. Dans le cas d'un cône et d'un cylindre, la droite ST devrait être remplacée dans l'explication précédente par la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône et enfin, dans le cas de deux cylindres, les points σ et θ n'existent plus, les plans auxiliaires étant parallèles entre eux, leurs traces seront parallèles entre elles sur chacun des plans de base ; il suffira de déterminer ces directions par le premier plan auxiliaire employé.

Considérons maintenant le cas où les lignes directricest sont complanaires, la construction se simplifie alors ; il suffit de déterminer les traces sur le *plan de base* commun, ces traces passeront, dans les cas de deux cônes ou d'un cône et d'un cylindre, par un point fixe σ, trace de la ligne des sommets ou de la ligne analogue sur le plan de base commun, ou, dans le cas de deux cylindres, seront parallèles entre elles, leur direction étant déterminée par le premier plan auxiliaire employé (fig. 72).

En général, si les deux surfaces sont convexes, les bases seront également convexes et chaque plan auxiliaire donnera quatre points de la courbe d'intersection.

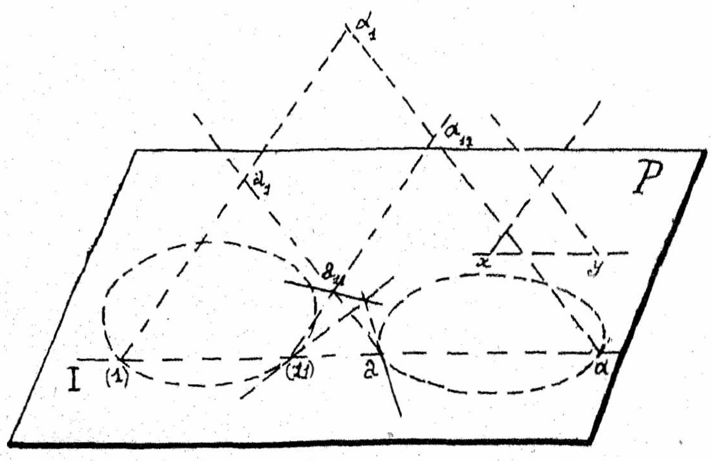


Fig. 72.

On conçoit alors qu'après avoir utilisé plusieurs plans auxiliaires, on ne pourrait plus se reconnaître sur l'épure si on ne prenait soin de numéroter avec précaution les points trouvés. Nous donnerons l'excellent *procédé de numérotage indiqué par M. Pillet* dans son remarquable Cours de géométrie descriptive, page 77.

1° Les plans auxiliaires seront indiqués par des chiffres romains ;

2° Sur une des bases les points seront numérotés :

1 et 11 s'ils sont donnés par le plan	n° I ;	
2 et 12 —	—	n° II ;
9 et 19 —	—	n° IX.

3° Sur l'autre base, les points recevront comme numéros des lettres :

a et α s'ils sont donnés par le plan n° I ;

b et β s'ils sont donnés par le plan n° II ;

4° Un point de l'intersection dans l'espace sera alors désigné à la fois par une lettre et par un numéro. Aussi le point B_2 appartiendra à la génératrice dont le pied est 2 et à la génératrice dont le pied est b situées toutes deux dans le plan auxiliaire II.

Dans chaque cas, on utilise la détermination des plans auxiliaires en *fixant leurs traces* de façon à obtenir tel ou tel point particulier. Nous allons passer en revue les différentes particularisations utiles et habituellement employées de ces plans.

2° PLANS LIMITES. — NATURE DE LA SECTION. POINTS REMARQUABLES

On appelle *plans limites* les plans auxiliaires qui sotn tangents à l'une des surfaces. La trace d'un tel plan auxiliaire sur le plan de base de la surface à laquelle il est tangent est une tangente à cette base ; on détermine donc facilement ces plans, qui jouent un rôle de première importance dans la recherche de l'intersection. Remarquons tout d'abord que la tangente en un point de l'intersection fourni par un plan limite est la génératrice de la deuxième surface sur laquelle se trouve ce point. C'est ce qui résulte de suite de la *détermination de la tangente* comme intersection des plans tangents.

D'autre part, quand nous nous déplacerons sur l'intersection dans un sens déterminé, en arrivant à un plan limite, le sens de rotation de la trace correspondante des plans auxiliaires changera, cette trace ne pouvant continuer dans le même sens si l'on veut que le plan auxiliaire correspondant continue à couper les deux surfaces.

C'est là une observation importante et très utile quand on joint par un trait continu les points isolés qu'on a déterminés : *en passant par un plan limite, les pieds des génératrices qui fournissent les points de l'intersection se déplacent dans le même sens sur la base correspondante au plan limite et rétrogradent sur l'autre base.*

L'examen des plans limites utiles permet également de se rendre compte, dans le cas des surfaces convexes, de la nature de la courbe d'intersection des deux surfaces. Si les plans auxiliaires utiles (plans qui coupent à la fois les deux surfaces) sont compris entre deux plans limites appartenant l'un à une surface, l'autre à l'autre, la courbe d'intersection pourra être tracée tout entière d'un mouvement continu ; elle ne comprendra donc qu'une boucle

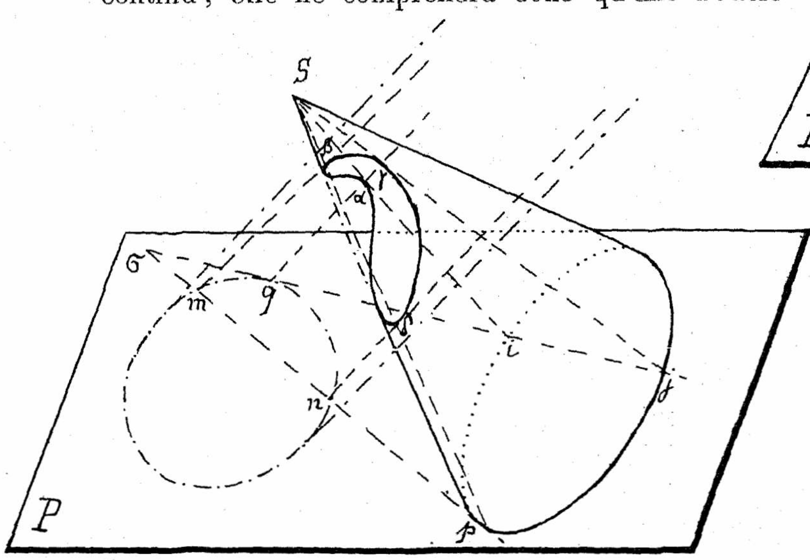


Fig. 73.

fermée de courbe : on dit que l'intersection est un *arrachement* (fig. 73). Si, au contraire, les plans auxiliaires

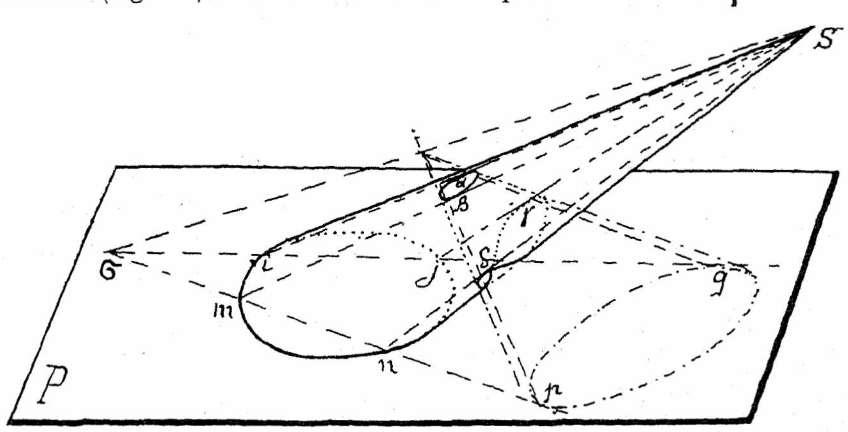


Fig. 74.

utiles sont compris entre deux plans limites appartenant tous deux à la même surface, il existe sur la base coupée par les plans limites utiles deux arcs séparés

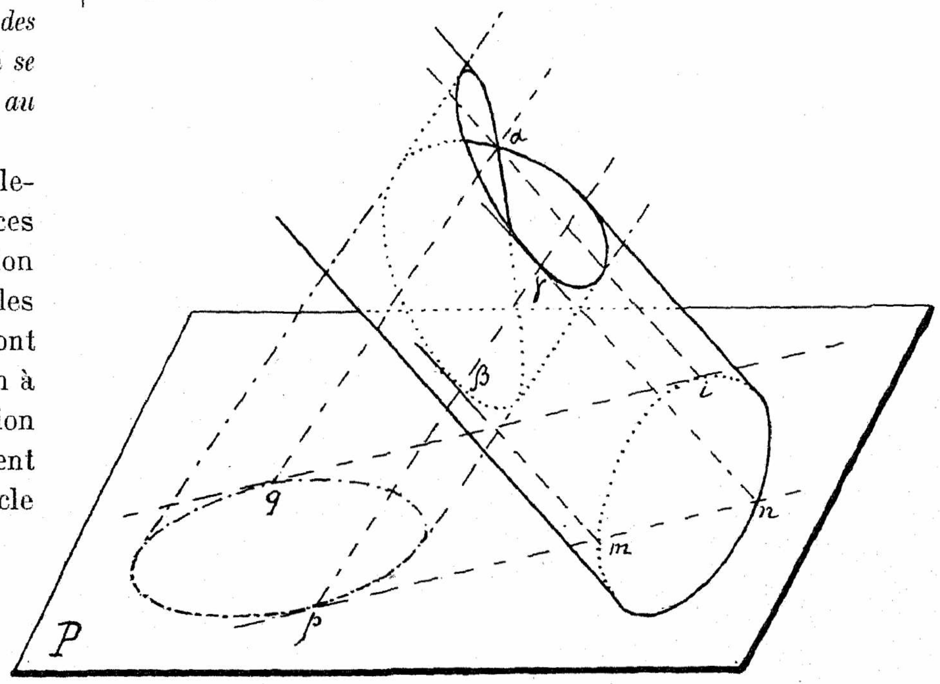


Fig. 75.

qui sont le lieu des pieds des génératrices du cône correspondant coupés par l'autre cône. Il y aura donc deux courbes séparées dont l'ensemble forme l'intersection : on dit dans ce cas qu'il y a *pénétration* (fig. 74).

Enfin il peut se faire, comme cas limite, qu'un même plan auxiliaire soit à la fois limite pour les deux surfaces ; il se trouve alors que les deux surfaces ont un *plan tangent commun*. Au point commun des génératrices de contact se trouve un point de l'intersection où viennent concourir deux branches distinctes de l'intersection (fig. 75). On se rend facilement compte du fait en

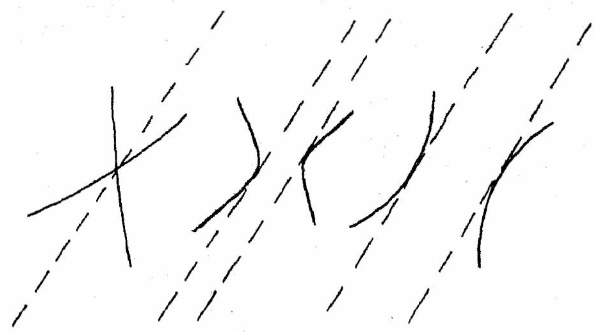


Fig. 75 *bis*.

supposant les plans limites non pas confondus, mais très rapprochés, on obtient dans ce cas deux arcs de courbe séparés par une bande très étroite comprise entre deux génératrices (fig. 75 *bis*).

Le même fait peut se produire deux fois dans le cas de deux surfaces convexes ; les surfaces sont alors bitangentes.

Le procédé d'obtention des tangentes à l'intersection ne peut plus servir en de tels points, puisque les plans tangents aux deux surfaces sont confondus. On fait alors appel au procédé déjà signalé et, à l'aide des indicatrices des deux surfaces au point double, on détermine en tant que sécantes communes centrales des deux indicatrices, les traces des plans osculateurs aux deux branches de courbe sur le plan tangent : ce seront les tangentes cherchées.

Pour joindre les plans trouvés à l'aide des plans auxiliaires, on procédera de même dans tous les cas en utilisant la remarque faite à propos des plans limites.

On imagine *deux mobiles* cheminant en même temps sur chaque base et se trouvant au même instant sur une même trace auxiliaire, les mobiles se déplaçant sur chaque base dans un sens déterminé, on joint les points correspondants de l'intersection de proche en proche, lorsqu'on arrivera à un plan limite, on devra, ainsi que nous l'avons fait remarquer, faire *revenir le mobile sur ses pas sur la base coupée* par la trace du plan limite et *continuer dans le même sens sur la base touchée* par la trace du plan auxiliaire. Enfin, au cas où on rencontrerait un pan limlite double, on continuerait dans le même sens sur les deux bases, comme si on avait affaire à un plan auxiliaire ordinaire.

En dehors des points fournis par les plans limites, il est bon de rechercher les *points situ's sur les contours apparents*, il suffit pour cela de faire passer les plans auxiliaires par les génératrices correspondantes. Les tangentes se déterminent à la façon ordinaire, à moins que le même plan limite ne coupe les deux surfaces à la fois, suivant des génératrices de contour apparent correspondant au même plan de projection. Dans ce dernier cas, les deux plans tangents étant perpendiculaires au plan de projection, il en est de même de la tangente cherchée, qui, se projetant suivant un point, ne fournit plus de tangente à la projection. On est placé dans le cas particulier signalé section III. La tangente à la projection est alors la trace sur le plan de projection considéré du plan osculateur à la courbe d'intersection au point en question. Cette trace est obtenue comme *corde commune des deux cercles de Meusnier des deux surfaces au point considéré*.

3° BRANCHES INFINIES

L'intersection de cônes et cylindres peut présenter des branches infinies dues à deux causes différentes.

1° Un point de l'intersection peut être rejeté à l'infini si les deux génératrices auxquelles il appartient sont *parallèles tout en restant à distance finie* elles-mêmes ;

2° Un point de l'intersection peut être rejeté à l'infini parce *qu'une* (ou deux) *des génératrices qui le fournissent est rejetée tout entière à l'infini*.

Dans le premier cas, on obtient la tangente en ce point infiniment éloigné, c'est-à-dire *l'asymptote* en prenant, selon l'habitude, l'intersection des plans tangents

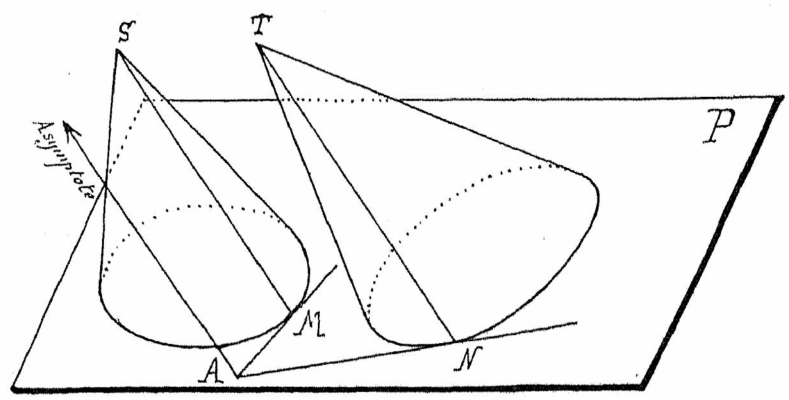


Fig. 76.

correspondants. C'est ce qui est indiqué (fig. 76) dans le cas de deux cônes.

Il peut d'ailleurs se faire que les deux plans tangents soient parallèles ; il n'y a alors pas d'asymptote, on dit que la branche infinie correspondante est *parabolique* alors qu'elle était dénommée *hyperbolique* lorsque l'asymptote existait.

Le même fait peut se produire dans le cas d'un cône

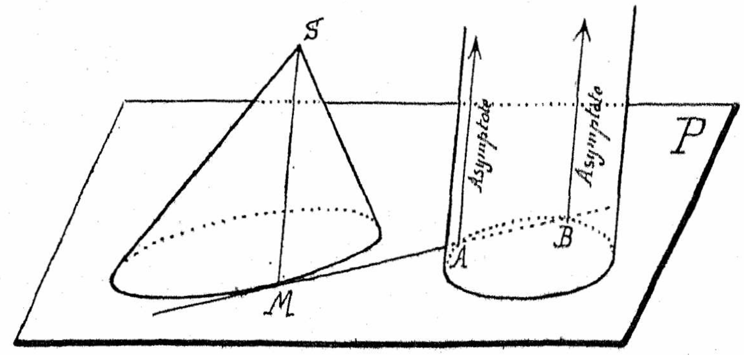


Fig. 77.

et d'un cylindre (fig. 77), quand une des génératrices du cône est parallèle aux génératrices du cylindre, les asymptotes sont les génératrices du cylindre qui se trouvent dans le plan tangent au cône le long de la génératrice en question. Il faut bien remarquer que les deux surfaces ont dans ce cas une *disposition* PARTICULIÈRE *analogue* à celle que présente l'ensemble d'un cône et d'un cylindre, le sommet du cône étant sur le cylindre. Ici on peut dire que c'est *le sommet du cylindre* qui est sur le cône.

On ne doit donc pas s'étonner de trouver plusieurs asymptotes : en général, quand le sommet d'un cône est sur une surface, ce point est point multiple pour l'intersection.

Enfin, signalons que l'intersection de deux cylindres ne présente évidemment pas de branches infinies de cette nature. Au contraire, l'intersection de deux cônes ne peut présenter des branches infinies de la seconde espèce ; il faut que, des deux surfaces, une au moins soit un cylindre dont la directrice ait des branches infinies pour que l'intersection ait elle-même des branches infinies de seconde espèce.

Ainsi considérons, pour fixer les idées, un cylindre dont la directrice a une branche infinie (*c*) d'asymptote

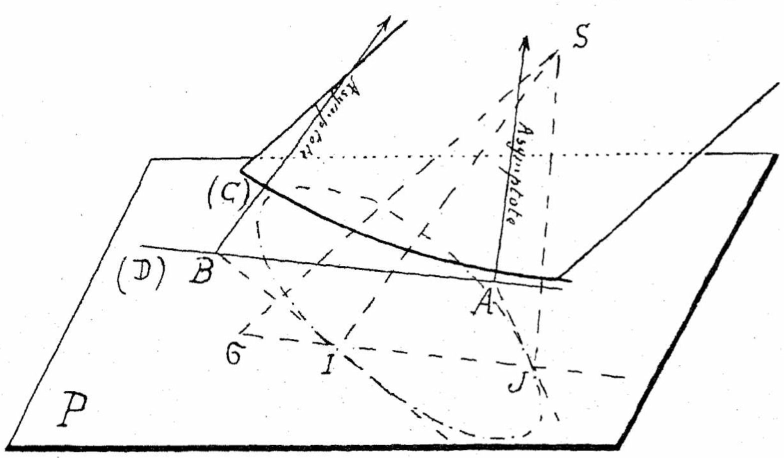


Fig. 78.

(D) (fig. 78) et un cône de sommet S de base (B), soit 6 le point fixe des traces des plans auxiliaires. Menons par 6 la parallèle à (D) et supposons que cette parallèle coupe (B) en deux points I et J, il y aura des points de l'intersection à l'infini sur les génératrices SI, SJ et les asymptotes correspondantes seront les intersections du plan asymptote au cylindre passant par (D) avec les plans tangents au cône le long de SI et SJ.

Dans le cas de deux cylindres, les traces des plans auxiliaires ne sont en général pas des directions asymptotiques de l'une ou l'autre directrice. (S'il en était ainsi on serait dans un cas particulier le sommet rejeté à l'infini d'un des cylindres pouvant être considéré comme étant sur l'autre cylindre.) Les points à l'infini de l'intersection sont fournis par les génératrices à l'infini sur les deux cylindres, les asymptotes à l'intersection sont données par les points d'intersection des plans asymptotes correspondants des deux cylindres

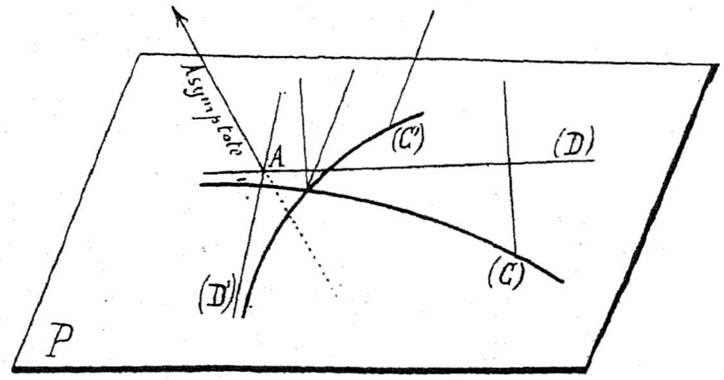


Fig. 79.

(fig. 79). Remarquons enfin que, dans ces derniers cas également, les asymptotes peuvent être rejetés à l'infini et par suite les branches correspondantes peuvent être paraboliques.

4° CONES ET CYLINDRES DU DEUXIÈME DEGRÉ

1° *Nature de la courbe d'intersection.* — La courbe d'intersection de deux surfaces du deuxième degré est constituée dans sa totalité par une ligne du quatrième degré. EN GÉNÉRAL, cette intersection est une courbe gauche qui, par suite de son degré, porte le nom de *biquadratique gauche*.

Cette courbure a comme projections tant en plan que sur le mur, deux quartiques planes. Ces courbes peuvent présenter des points doubles de deux espèces : 1° *Un point double de la projection peut être la projection d'un point double de l'espace.* Ce point double de l'espace peut provenir de deux causes : (*a*) Il peut se faire que le sommet d'un cône soit sur la seconde surface, en ce point l'intersection présentera alors un point double et les tangentes en ce point double seront obtenues en coupant le cône par le plan tangent à la seconde surface au point occupé par le sommet : ce n'est là d'ailleurs qu'une extension de la méthode générale de détermination des tangentes à l'intersection, si on veut bien se rappeler qu'en un sommet d'un cône il n'y a pas un plan tangent, mais un *cône de tangentes* qui se confond avec le cône lui-même ; (*b*) Il peut encore se faire que le point double provienne de ce que les plans tangents aux deux surfaces en un point de l'intersection soient confondus : ce cas a été étudié au moment où nous nous occupions des cônes quelconques, nous avons donné alors un procédé général de détermination des tangentes en ce point double basé sur la construction des indicatrices des surfaces en ce point. On peut, quand les surfaces sont du deuxième degré, employer un autre procédé qui est le suivant : considérons le cône ayant pour sommet le point double en question I et pour directrice la biquadratique d'intersection *ce cône est du deuxième degré* (car un plan passant en I ne coupe plus la biquadratique qu'en deux autres points) dont les tangentes IT, IV, cherchées au point double I, sont deux génératrices : pour déterminer ces deux génératrices IT, IV, puisqu'on sait qu'elles sont situées dans le plan tangent commun en I aux deux surfaces, il suffira de couper le cône de sommet I par ce plan tangent, ce à quoi on parviendra en cherchant la trace du plan tangent, qui est une droite, et la trace du cône I qui est une *conique* sur un plan approprié ; les deux points d'intersection de la droite et de la conique obtenus seront des points des deux tangentes au point double. En pratique, il n'est nullement utile de déterminer toute la conique section du cône I, il suffit d'en assurer le tracé avec soin dans le voisinage de la trace du plan tangent : c'est ce qui a été fait en prenant comme plan de base le plan horizontal (Exercices, grandes épures).

Mais il existe sur les projections de l'intersection d'autres points doubles qui ne proviennent pas de points doubles réels, ce sont des *points doubles en projection* seulement.

Il existe un procédé pour déterminer rigoureusement leur position, mais ce procédé assez long à appliquer n'est pas en général employé, on se contente de déterminer une droite sur laquelle doivent nécessairement se trouver ces points doubles en projection. Remarquons qu'il y a point double en plan, par exemple, quand deux points de la biquadratique gauche sont situés sur une même verticale, le milieu du segment de ces deux points appartiendra donc au *plan diamètral conjugué des cordes verticales dans l'une et l'autre surface.*

Les points doubles en projection horizontale doivent donc être situés sur la projection en plan de l'intersection des deux plans diamétraux conjugués des cordes verticales dans les deux surfaces. Or, ces plans ne sont autres que les *plans de contour apparent* dans l'espace des deux surfaces correspondants au plan horizontal. La construction de la droite des points doubles est donc facile et on a ainsi un procédé de vérification commode du tracé de la courbe (voir Exercices, grandes épures).

Il nous faut maintenant signaler un cas où la courbe d'intersection restant une biquadratique gauche, une des projections n'est pas une quartique, mais seulement une *conique* (ou une partie de conique le plus souvent). Ce cas se présente lorsque les deux surfaces ont en commun un plan diamétral conjugué soit des cordes verticales, soit des cordes debout et plus particulièrement un plan de symétrie commun horizontal ou de front. Dans le premier cas, c'est la projection en plan qui est une conique, dans le second cas, c'est la projection sur le mur. On peut se rendre compte facilement qu'il doit bien en être ainsi si on remarque que, dans une pareille disposition, les points de la biquadratique s'associent tous, deux par deux, sur une même projetante, tous les points d'une projection étant doubles il faut bien que le degré de cette projection s'abaisse de moitié.

Une telle remarque aide considérablement au tracé de la courbe. Ajoutons que s'il y a des points sur les contours apparents, comme ces points sont à la fois sur les deux contours apparents, il faudra déterminer les tangentes en ces points comme si la courbe présentait un rebroussement à l'aide des cercles de Meusnier. La position des points et des tangentes permet ordinairement de distinguer facilement la nature de la conique.

CAS OU L'INTERSECTION SE DÉCOMPOSE

Les différents modes de décomposition d'une biquadratique gauche sont les suivants :

1° *Une droite et une cubique gauche* (courbe du 3e degré). — Ce cas se présentera lorsque les deux surface cylindriques et coniques auront en commun une et une seule génératrice le long de laquelle les *plans tangents* aux deux surfaces seront *différents*. On détermine facilement les tangentes à la cubique gauche aux points où elle coupe la génératrice commune en considérant ces points comme des points doubles de la biquadratique.

Il y a, à la cubique gauche une asymptote qu'on détermine également suivant la méthode générale (voir Exercices, grandes épures).

2° *Deux coniques.* — Ce cas se présentera lorsque les deux surfaces seront BITANGENTES. C'est ce qui a lieu en particulier lorsqu'elles sont toutes deux *circonscrites à une même surface du deuxième degré.*

Les points de contact des deux surfaces sont les points de rencontre des deux coniques, en déterminant un point de chacune d'elles, on se ramène immédiatement à un problème de sections planes (fig. 80). Il est

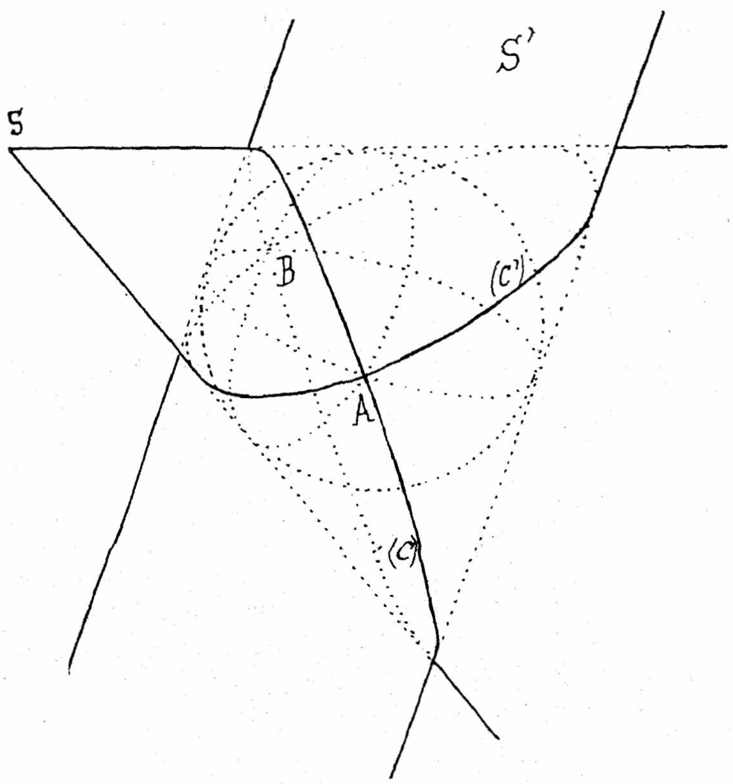


Fig. 80.

bien évident aussi que, si on sait à l'avance que les deux surfaces ont en commun une conique déterminée, c'est qu'on est placé dans le cas étudié actuellement et on n'a qu'à rechercher le plan de la deuxième conique, pour être ramené à la recherche d'une section plane (voir Exercices, petites épures).

3° *Une conique double.* — Ce cas se présentera dès que les deux surfaces seront *tangentes en trois points distincts,* non en ligne droite. Dans ce cas, elles se raccorderont tout le long de la conique de section par le plan des trois points, et cette conique sera la SEULE courbe d'intersection. *On est de suite ramené* à rechercher une section plane (fig. 81).

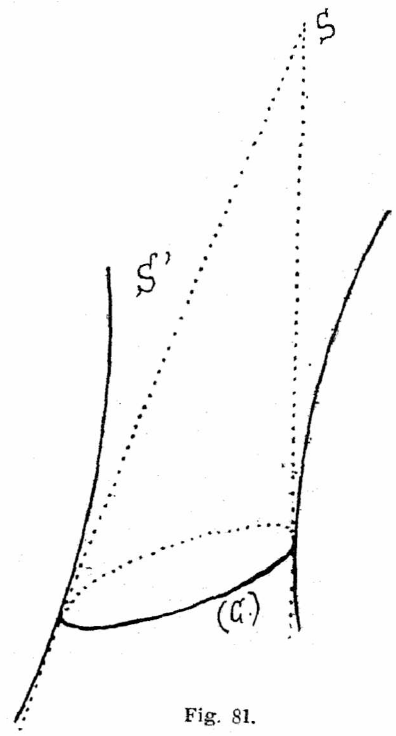


Fig. 81.

4° *Une conique et deux droites.* — Ce cas ne peut pas se présenter dans l'intersection de cônes et de cylindres, car tout d'abord cela nécessiterait que les surfaces soient de même espèce et ensuite qu'elles aient, soit le sommet commun, soit les génératrices parallèles ; or, dans ces deux cas, l'intersection ne peut se composer que de génératrices.

5° *Une conique et une droite double.* — Ce cas se présentera lorsque les deux surfaces auront en commun une et une seule génératrice *le long de laquelle les plans tangents aux deux surfaces soient confondus.* L'intersection se compose alors en dehors de cette droite double d'une conique dont on déterminera trois points pour (ayant ainsi son plan) ramener la recherche de l'intersection à celle d'une section plane (voir Exercices, grandes épures).

6° *Quatre droites.* — Ce cas se présentera dans le cas de

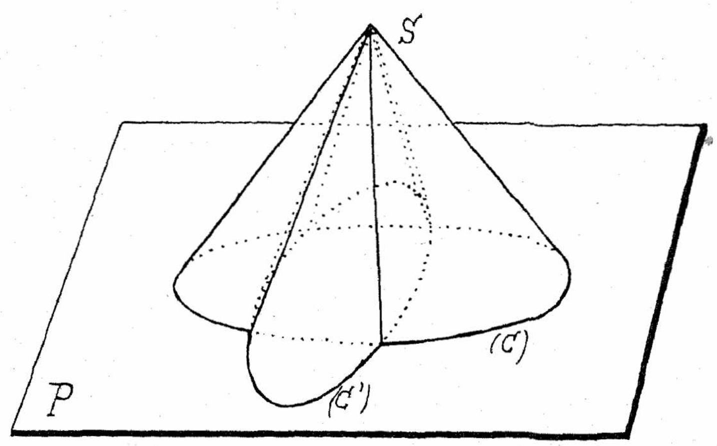


Fig. 82.

deux cônes ayant un sommet commun et dans le cas de deux cylindres ayant les génératrices parallèles (fig. 82).

La plupart de ces cas particuliers se rencontrent souvent en architecture. C'est ainsi, pour ne citer que quelques exemples, que 1° les *voûtes d'arête* et les *voûtes en arc de cloître* relèvent du deuxième cas particulier; 2° que *l'ombre autoportée d'une coupole sphérique ajourée par un cylindre de même axe* a pour séparatrice une conique et qu'en stéréotomie la *lunette cylindrique* fournit un exemple d'une biquadratique se projetant suivant une conique.

BRANCHES INFINIES

Considérons d'abord le *cas de deux cônes.*

Lorsque l'intersection semble présenter des branches infinies, on s'assure de leur existence en transportant homothétiquement un des cônes de façon à lui donner même sommet que l'autre. Si l'on considère alors les bases de ces deux cônes de même sommet situés dans un même plan, on voit de suite, ces bases étant ici des coniques, qu'elles peuvent avoir soit 4, soit 2, soit 0, points communs.

Dans le cas de quatre points communs : 1° ces quatre points peuvent être distincts et donner alors lieu à

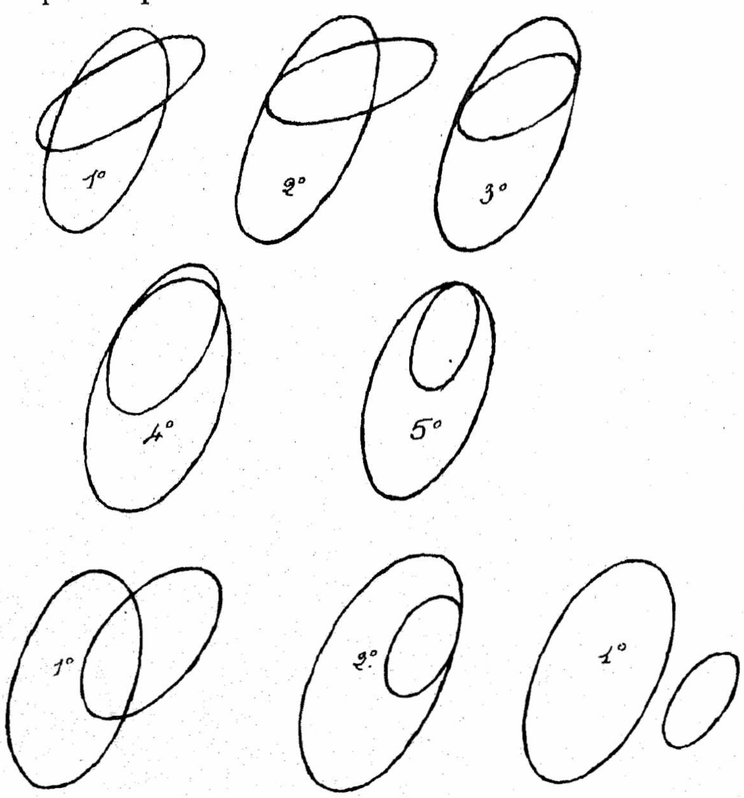


Fig. 83.

quatre branches hyperboliques; 2° deux peuvent être confondus en un seul, les coniques étant tangentes en ce point : il y a alors une *branche parabolique* correspondante à ce point et deux *branches hyperboliques;* 3° les quatre points peuvent se réduire à deux distincts, les coniques étant bitangentes, il y alors *deux branches paraboliques;* 4° trois confondus en un seul, les deux coniques sont alors osculatrices en ce point, il y a alors une *branche parabolique singulière* et une *branche hyperbolique;* 5° quatre confondus en un seul, les deux coniques sont alors surosculatrices en ce point qui est un sommet commun il n'y a plus à l'intersection qu'une *branche parabolique singulière*. Dans le cas de deux points, ou ces deux points sont distincts et il y a *deux branches hyperboliques*, ou ces deux points sont confondus en un seul, et il y a *une branche parabolique*. Dans le cas de zéro point commun il n'y a pas de *branches infinies* (fig. 83).

Considérons maintenant le *cas d'un cône ou d'un cylindre.*

En général, il n'existe pas de branches infinies si le cylindre est elliptique ; dans ce cas, cependant, il peut se faire, comme cas particulier, qu'une génératrice du cône soit parallèle aux génératrices du cylindre.

Il y a alors *deux branches infinies* correspondant à cette seule génératrice, dont le point à l'infini doit être considéré comme double, ainsi que nous l'avons déjà

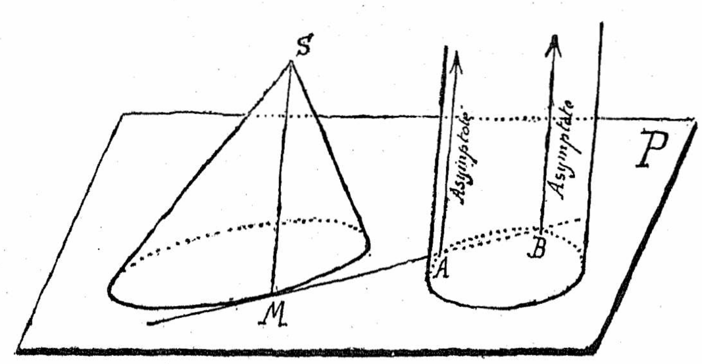


Fig. 84.

expliqué ; les asymptotes à ces branches sont les génératrices du cylindre situées dans le plan tangent au cône, le long de la génératrice en question ; elles peuvent être distinctes, confondues ou ne pas exister (fig. 84).

Si le cylindre est parabolique ou hyperbolique, le même cas particulier que nous venons d'exposer pour le cylindre elliptique peut encore se produire ; mais, en général, il existe d'autres branches infinies dues à l'éloignement à l'infini de certaines génératrices du cylindre. Ainsi, dans le cas du cylindre parabolique, le plan auxiliaire dont la trace est parallèle à l'axe de la parabole donne des points de l'intersection rejetés à l'infini, la branche étant évidemment parabolique, au

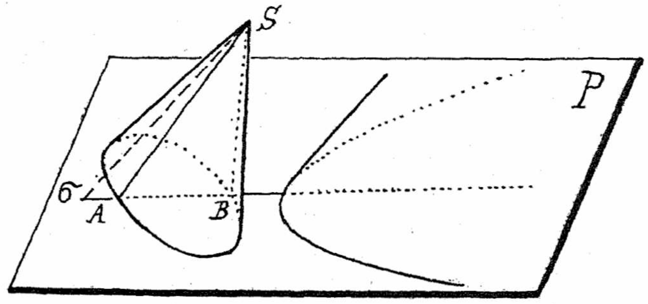


Fig. 85.

contraire, dans le cas du cylindre hyperbolique, les traces des plans auxiliaires parallèles à l'une ou l'autre direction asymptotique donnent des points de l'intersection rejetés à l'infini, les branches correspondantes étant

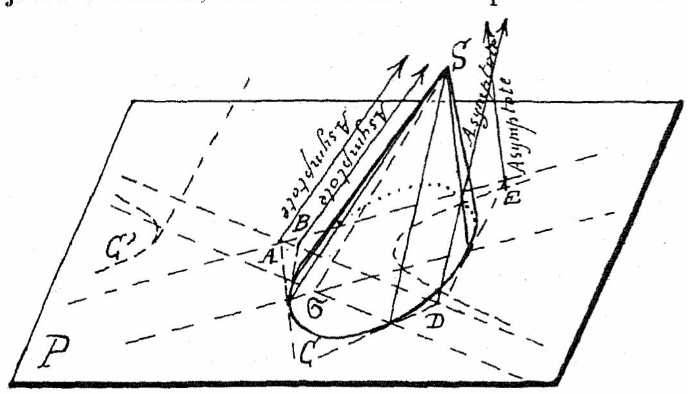


Fig. 86.

hyperboliques et les asymptotes à ces branches étant les sections des plans asymptotes correspondants par les plans tangents au cône le long des génératrices situées dans les plans auxiliaires en question (fig. 85 et 86).

Passons enfin au cas de deux cylindres.

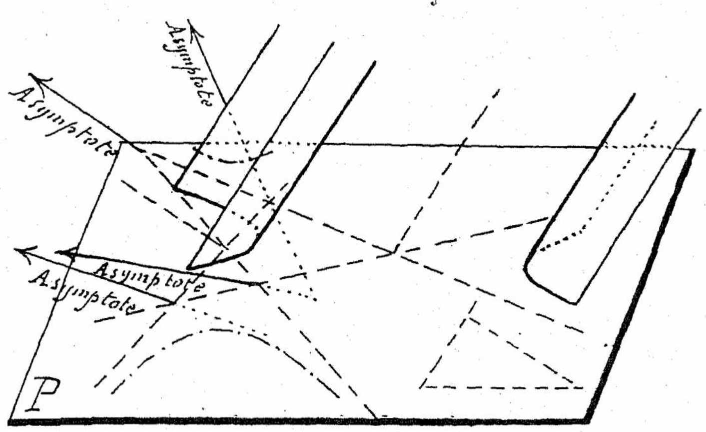


Fig. 87.

Il ne peut exister de génératrices parallèles, sinon toutes le seraient et l'intersection se composerait de droites. Pour qu'il y ait des branches infinies, il faut donc supposer qu'un au moins des cylindres est parabolique ou hyperbolique. Cette condition ne suffit d'ailleurs pas; il faut de plus, pour qu'il y ait effectivement

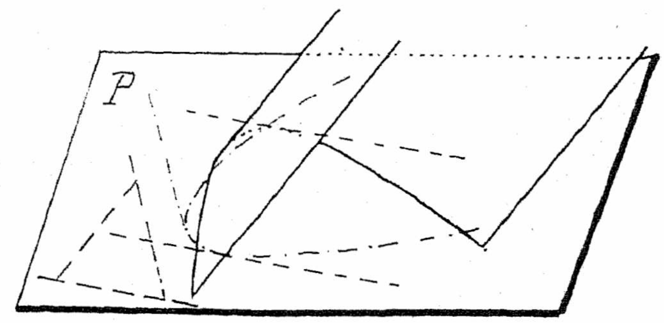


Fig. 88.

des branches infinies, qu'un *plan auxiliaire utile passe par une des génératrices à l'infini*, ce qui peut ou se produire (fig. 87), ou ne pas se produire (fig. 88).

Cherchons comme exemple (fig. 88 *bis*) les asymp-

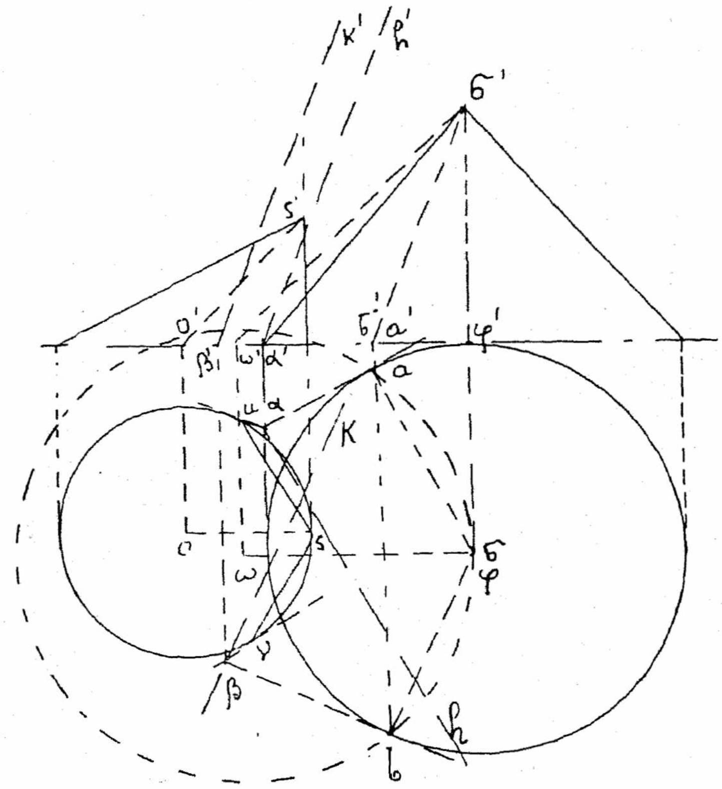


Fig. 88 *bis*.

totes de l'intersection des deux cônes, l'un de sommet (S,S′) de base le cercle (o,o'), l'autre de sommet (σ,σ') de base le cercle (φ,φ').

Le cône (S,S′) transporté par translation de façon à avoir son sommet en (σ,σ') a alors pour base horizontale le cercle (ω,ω'). Ce cercle coupe le cercle φ,φ' en deux points (a,a') et (b,b'), les génératrices $(\sigma a,\sigma' a')$ et $(Su,S'u')$ d'une part, $(\sigma b,\sigma' b')$ et $(Sv,S'v')$ d'autre part sont alors parallèles, les intersections des plans tangents le long de ces génératrices donneront donc les asymptotes cherchées.

On a pris en conséquence les points α et β communs aux tangentes aux bases d'une part en a et u, d'autre part en b et v, ces deux points sont les traces horizontales des asymptotes cherchées qui d'autre part étant parallèles à $(\sigma a,\sigma' a')$ et $(\sigma b,\sigma' b')$ sont donc les droites $(\alpha h,\alpha' h')$ et $(\beta k,\beta' k')$.

Nous n'entrerons pas dans l'exposition détaillée des nombreux cas généraux et particuliers qui peuvent se présenter ici, les applications architecturales des cylindres paraboliques ou hyperboliques étant des plus restreintes. Ce que nous avons dit suffit pour que, dans chaque cas particulier où on sera placé, on sache reconnaître facilement et rechercher le nombre et la nature des branches infinies.

REPRÉSENTATION DES SOLIDES OU SURFACES DÉDUITS DE L'ENSEMBLE DE DEUX CONES OU CYLINDRES DU DEUXIÈME DEGRÉ

Nous allons indiquer ici les différentes figures qu'on peut déduire de l'ensemble de deux surfaces du deuxième degré et nous donnerons des figurations de ces corps dans le cas de cônes et cylindres du 2e degré, sans prétendre passer en revue tous les cas possibles sans exception que présentent les combinaisons nombreuses de deux surfaces coniques et cylindriques.

Étant donnés deux corps, on peut représenter :

1° *Le solide commun à ces deux corps* limité par les portions de surface de chacun de ces corps intérieures à l'autre (fig. 89) ;

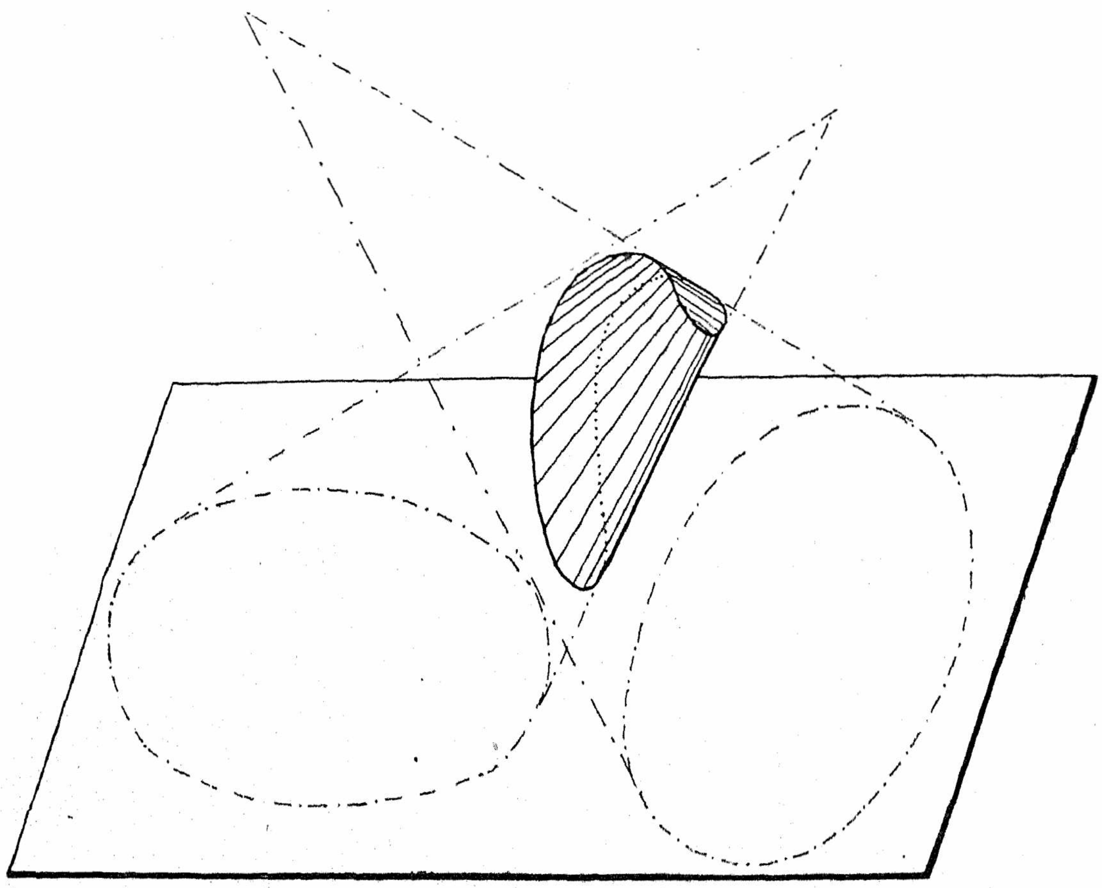


Fig. 89.

2° *Le solide formé par la portion d'un des corps supposé plein extérieure à l'autre*. Ce solide est limité d'une part par la partie de la surface du premier corps extérieur au second et, d'autre part, par la partie de la surface du second corps intérieure au premier (fig. 90) ;

3° *Le solide formé par l'ensemble des parties des deux corps extérieures les unes aux autres*. Ce solide est limité par les

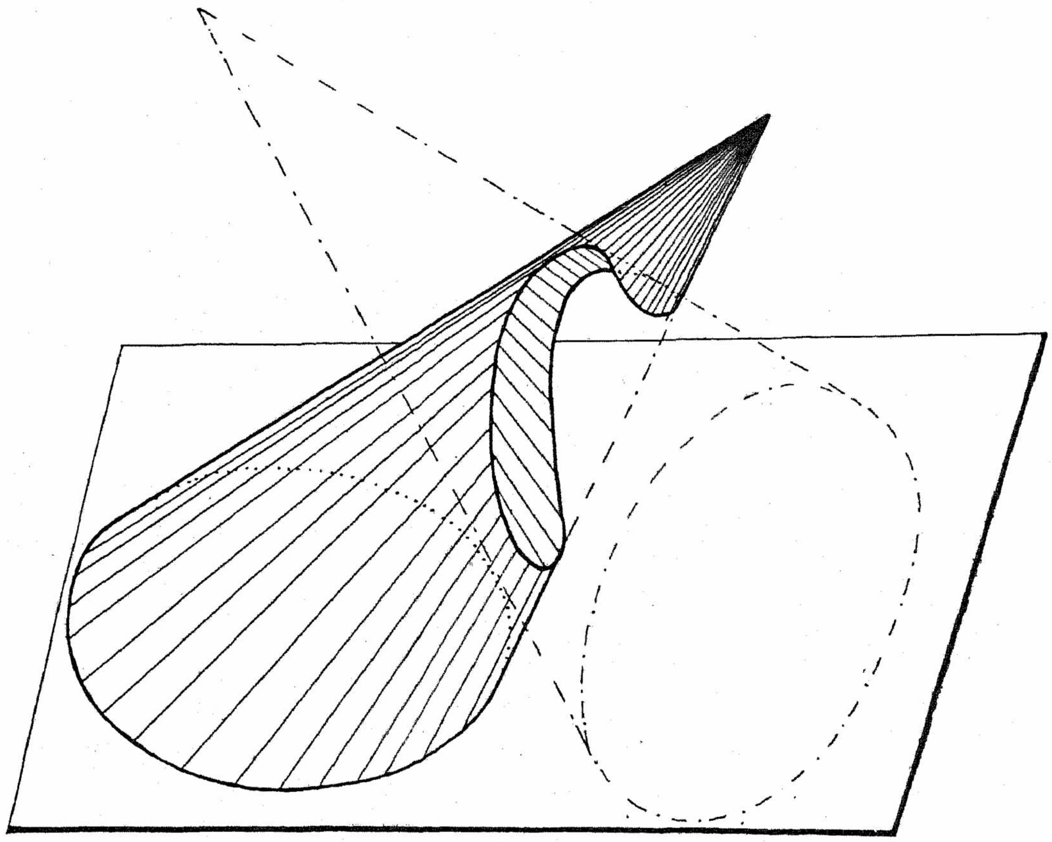


Fig. 90.

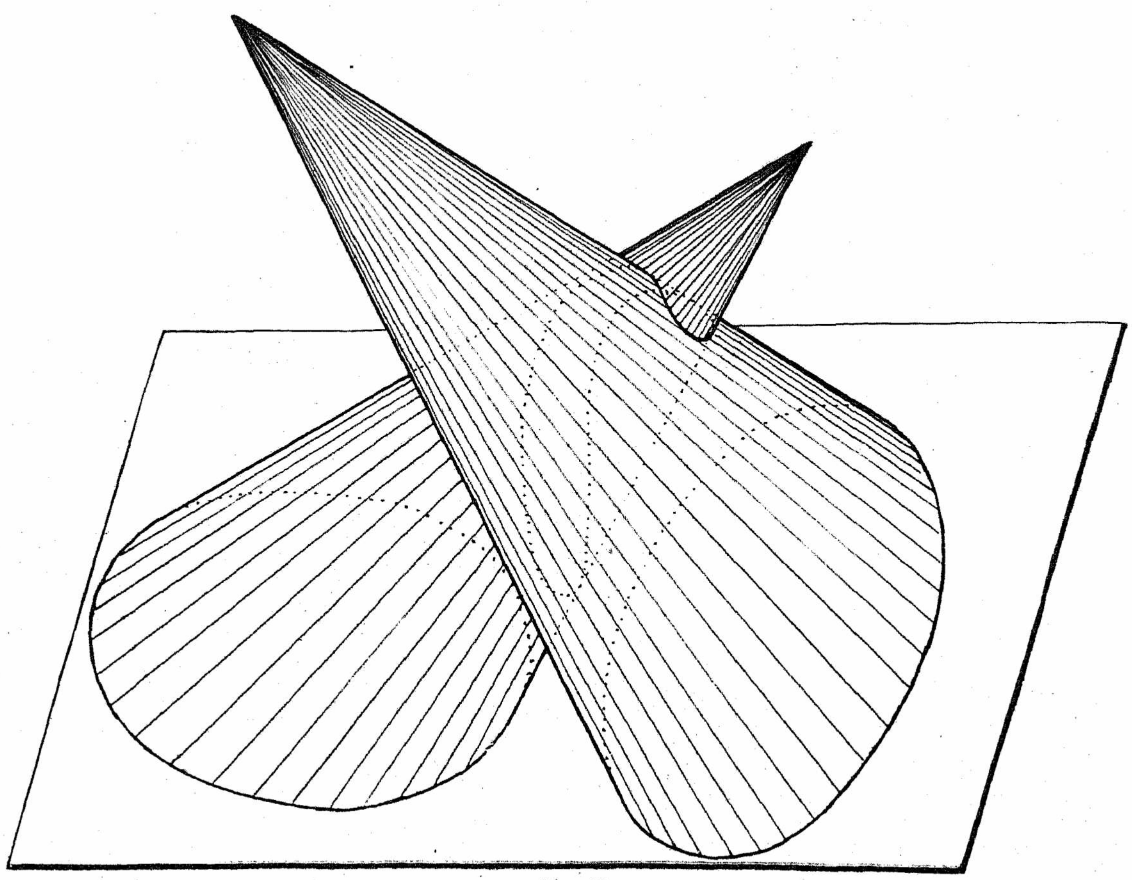


Fig. 91.

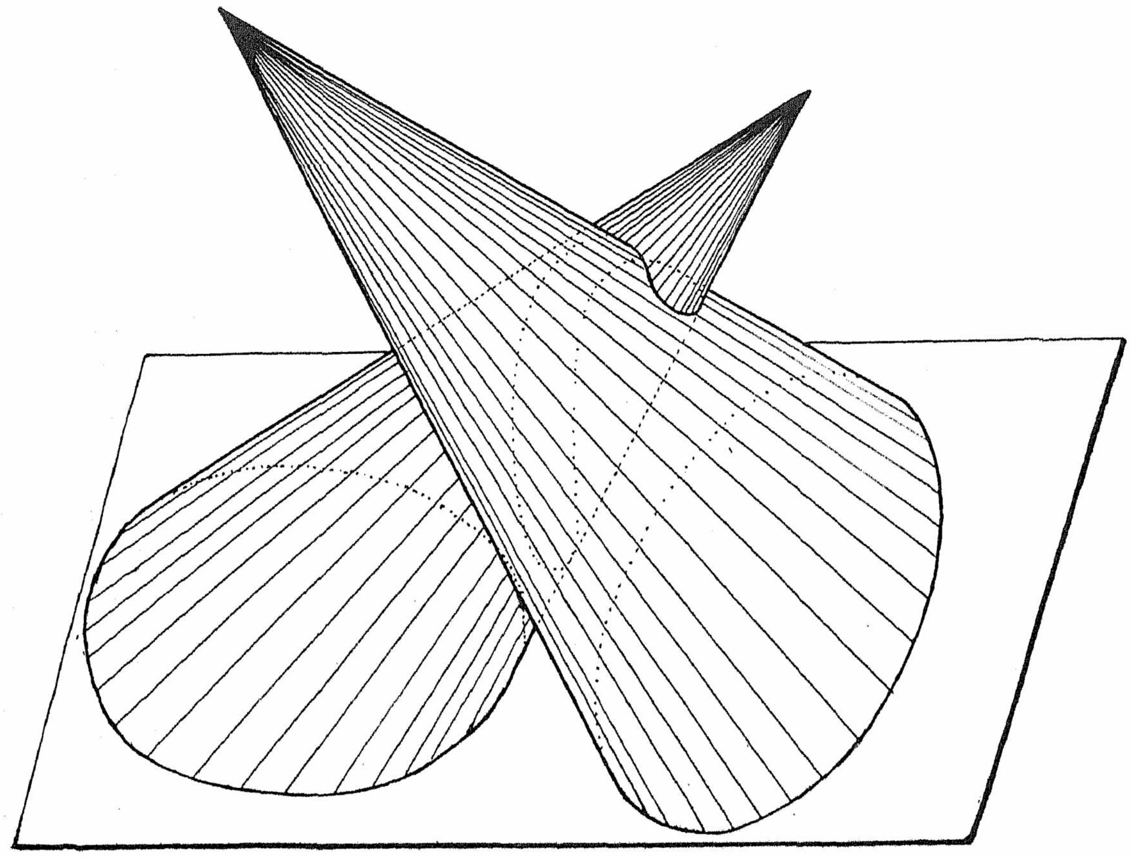


Fig. 92.

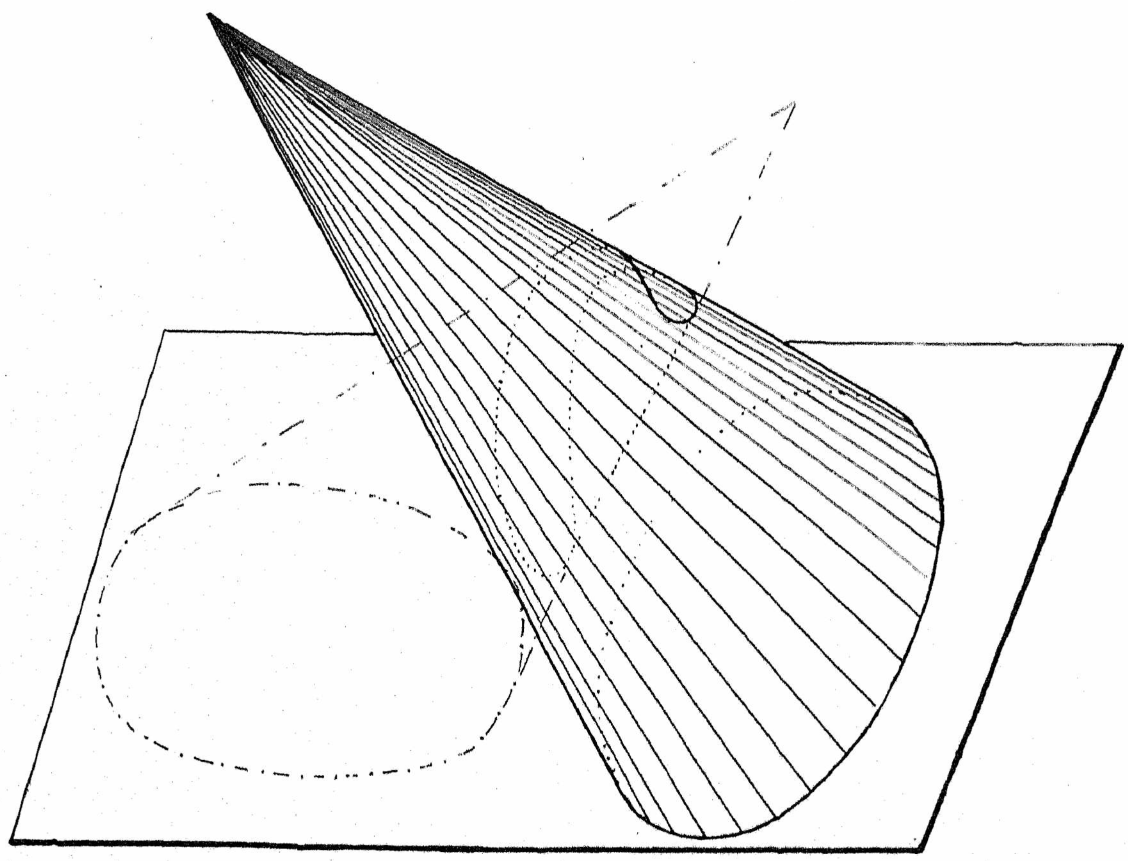


Fig. 93.

surfaces entières des deux corps, mais il faut remarquer que la partie de l'espace occupée par le solide commun est supposée évidée (fig. 91);

4° *Le solide formé par l'ensemble des parties des deux corps supposés remplis de matières différentes, l'un des corps traversant effectivement l'autre.* Ce solide sera limité d'une part par toute la surface du premier corps et, d'autre part, par la surface du second corps extérieure au premier (fig. 92);

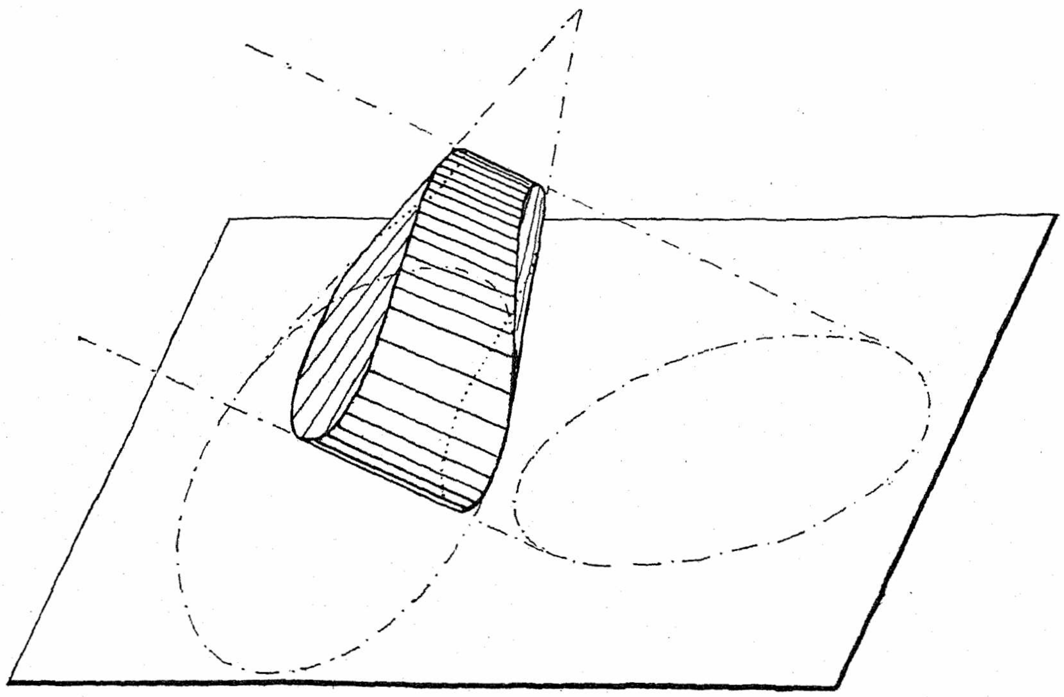


Fig. 94.

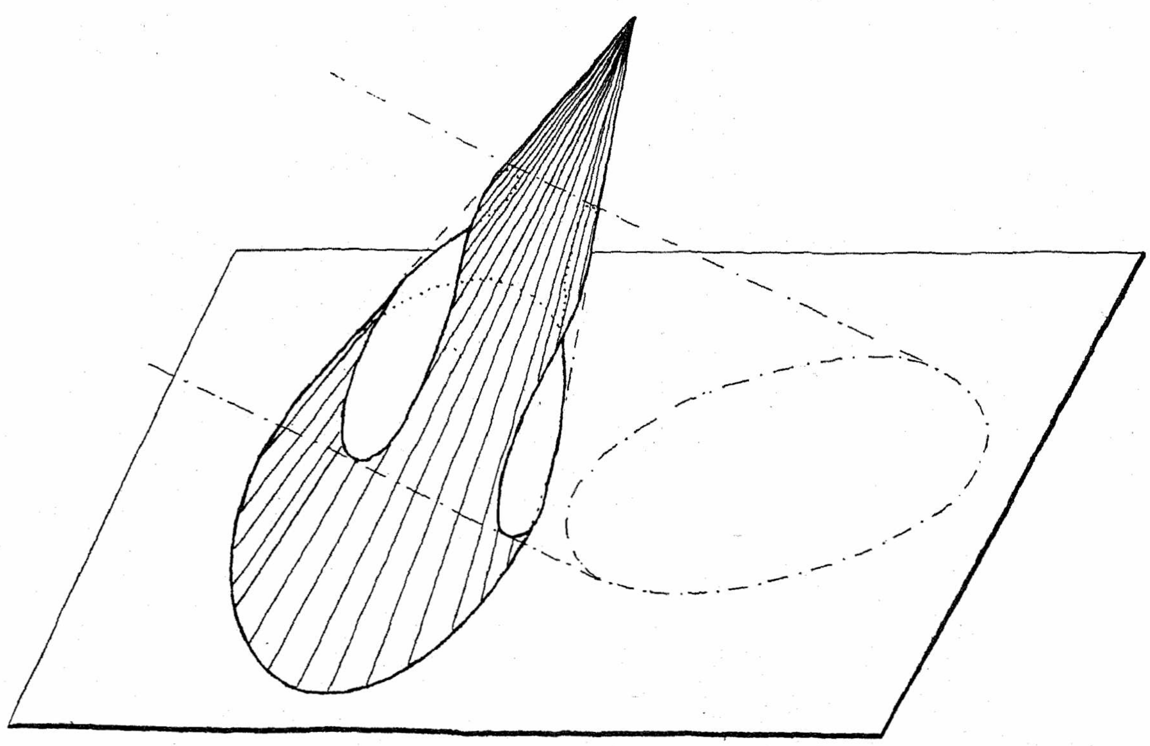


Fig. 95.

5° *Le solide formé par l'ensemble de la portion d'un corps* *extérieure à l'autre et de la portion du second intérieure au premier, ces deux corps étant supposés de matière différente.* Ce solide sera limité, d'une part, par la surface entière du premier corps et, d'autre part, traversé par la partie de la surface du second, intérieure à lui (fig. 93);

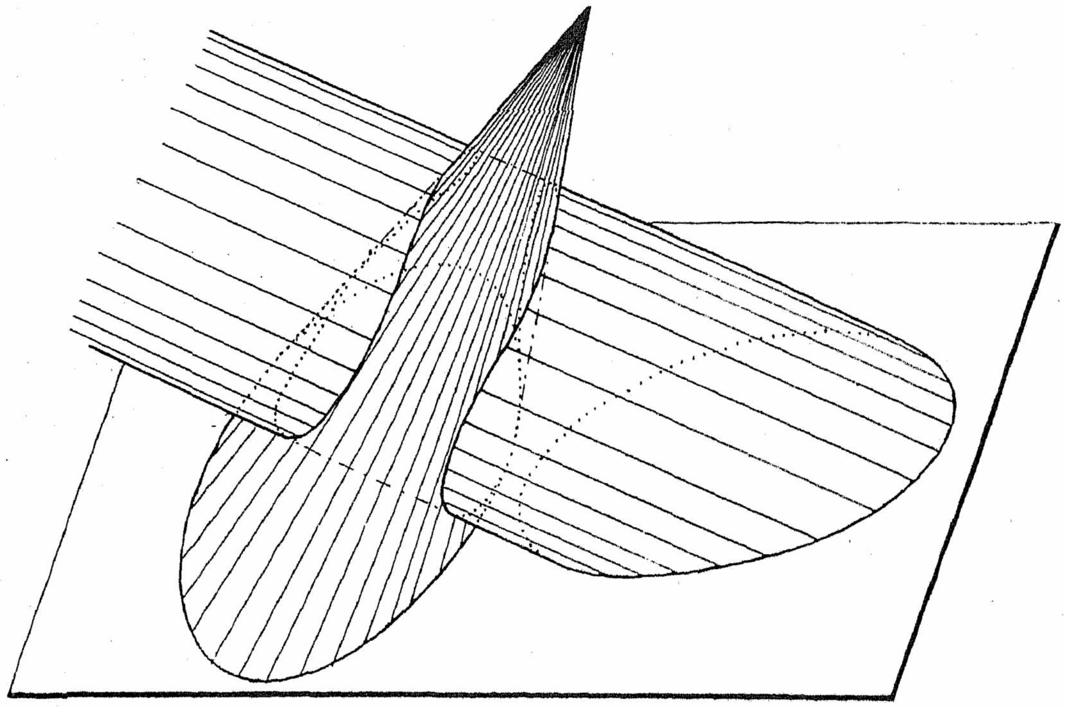


Fig. 96.

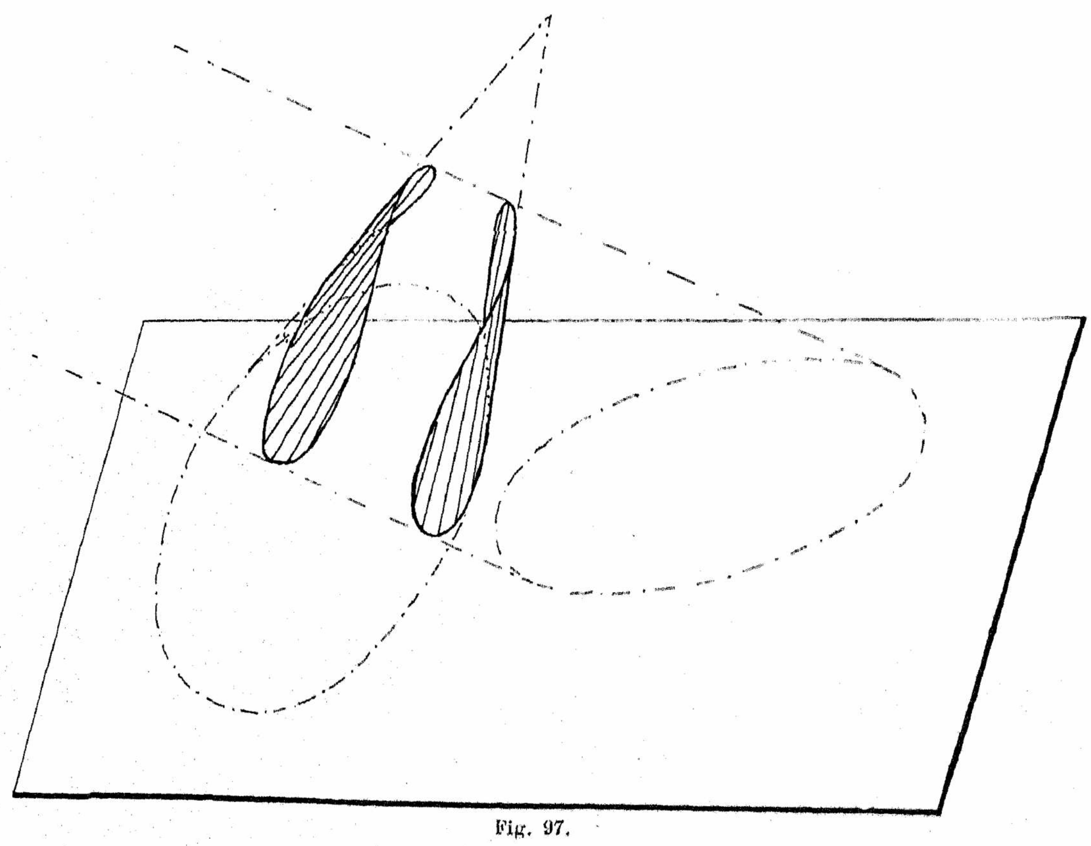


Fig. 97.

6° *L'ensemble des surfaces des deux corps supposés creux* *intérieures l'une à l'autre* (comparer à 1°) (fig. 94);

7° *La surface de l'un extérieure à l'autre* (comparer à 2°) (fig. 95);

8° *L'ensemble des surfaces des deux corps extérieures l'une à l'autre* (comparer à 3°) (fig. 96);

9° *La surface de l'un intérieure à l'autre* (fig. 97):

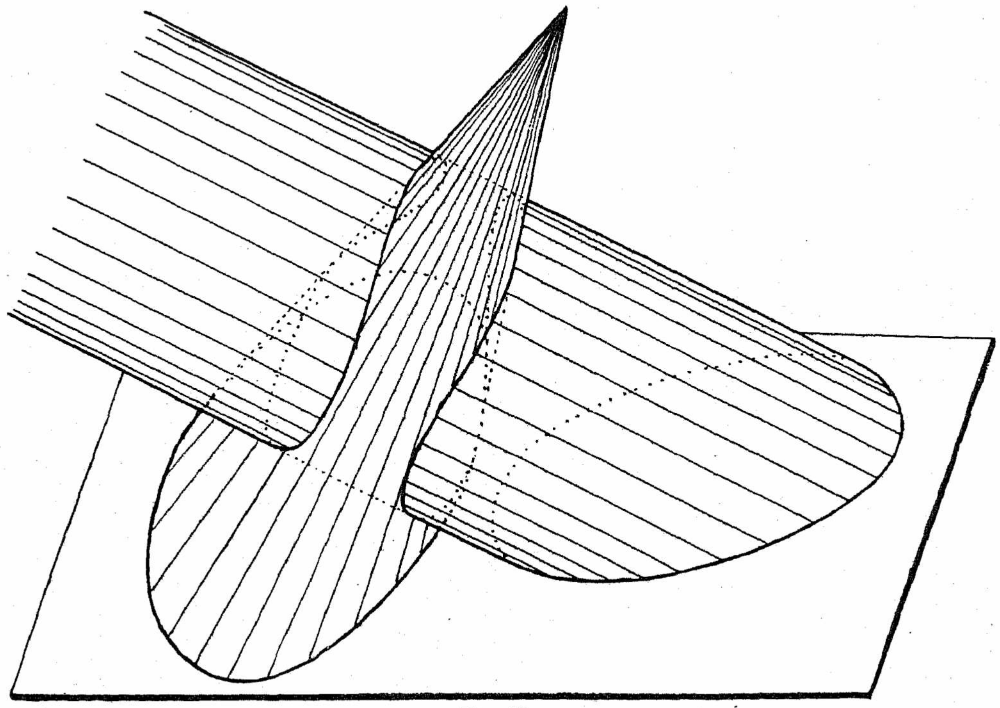


Fig. 98.

10° *L'ensemble formé par la surface entière de l'un et la partie de la surface de l'autre extérieure à la première surface* (comparer à 4°) (fig. 98);

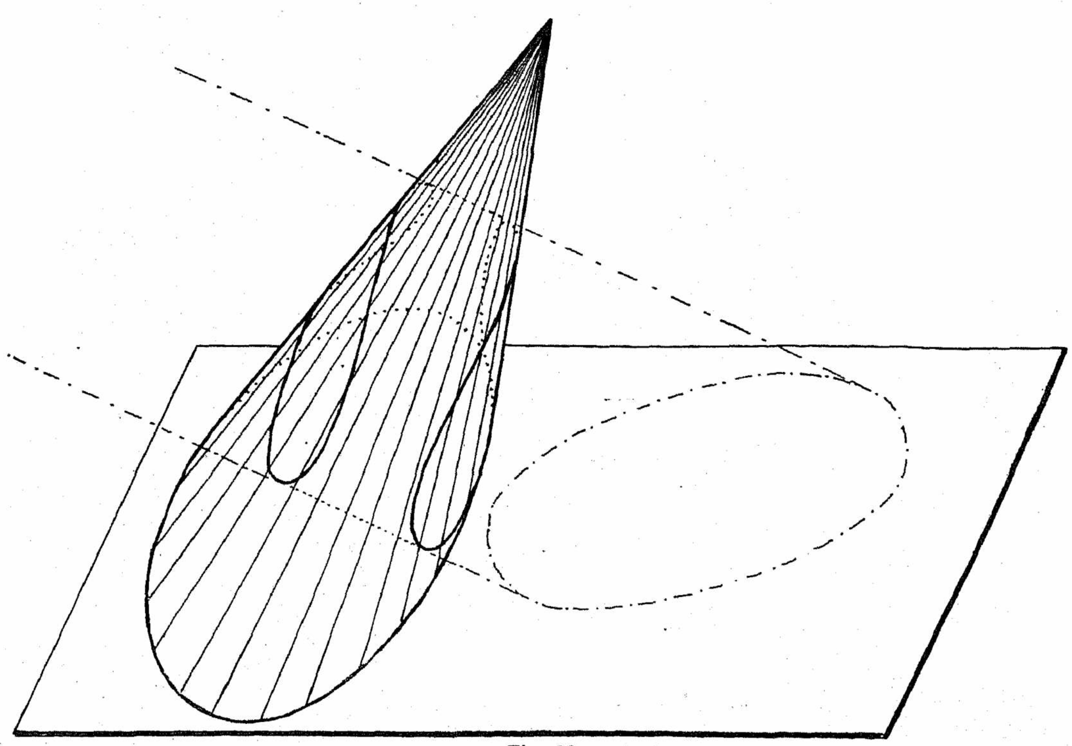


Fig. 99.

11° *L'ensemble formé par la surface entière de l'un des* *corps et la partie de la surface de l'autre intérieure à la première surface supposée de matière différente* (comparer à 5°) (fig. 99);

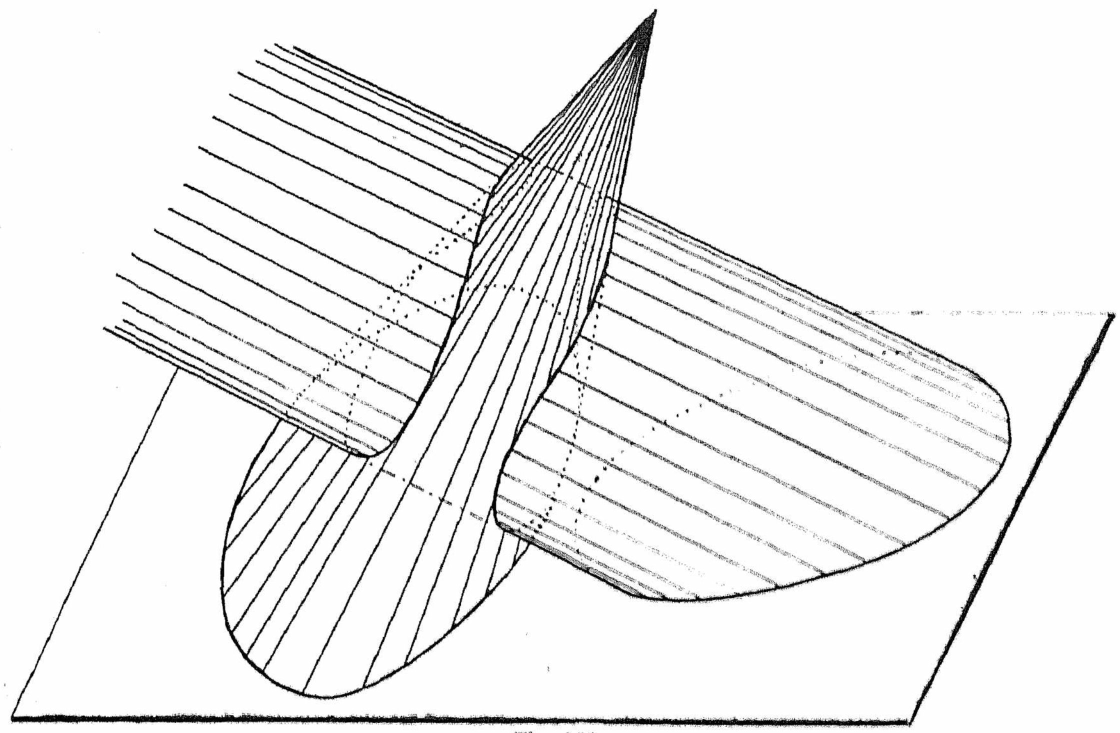


Fig. 100.

12° *L'ensemble des surfaces entières des deux corps* (fig. 100).

Remarque. — On a dessiné des exemples des douze cas énumérés pris, pour les solides, sur un arrachement de cônes et, pour les surfaces, sur une pénétration de surfaces coniques et cylindriques. Les différentes formes que peut affecter chacune de ces douze représentations varient infiniment, selon la nature et la position des deux corps.

PETITES ÉPURES

TEXTES

OBSERVATION GÉNÉRALE SUR LES ÉNONCÉS DES EXERCICES

Pour certains des exercices proposés dans ce livre, on nommera $x'x$, de gauche à droite, le petit axe de la feuille, $y'y$, de haut en bas, le grand axe. On supposera qu'un axe $z'z$ passe par le point de concours O de $x'x$ et de $y'y$ et est perpendiculaire au plan de $x'x$ et $y'y$. C'est en donnant les coordonnées des points et les équations des lignes et des surfaces sur lesquels on doit opérer, coordonnées, calculées en millimètres par rapport au trièdre des trois axes indiqués, que sera fixée la position des éléments donnés : ainsi le point A $(-30, +20, +50)$ est le point projeté horizontalement en a à 3 centimètres à gauche de $y'y$ et à 2 centimètres en avant de $x'x$, ce point ayant une cote égale à 5 centimètres au-dessus du plan de la feuille. De même, la droite du plan horizontal d'équation $x+y=0$ est la bissectrice de l'angle $x'oy$. La ligne de terre est donc, dans ces conditions, la droite $x'x$, le plan horizontal étant le plan xoy et le plan vertical, le mur étant le plan xoz. Dans d'autres épures, très rares d'ailleurs il pourra être opéré quelques changements à ces indications générales, mais ils seront signalés alors d'une façon toute spéciale et très précise.

Nota : Certaines figures ont été réduites par la reproduction, les élèves qui désirent faire les épures les rétabliront aux cotes fixées.

OBSERVATION GÉNÉRALE SUR LES SOLUTIONS DES EXERCICES

Les exercices sont solutionnés au moyen d'une *épure* et d'un *texte explicatif*. Ce dernier est donné pour faciliter la lecture de l'épure, travail toujours assez difficile : en conséquence, on n'a pas insisté dans ce texte ni sur la solution du problème de géométrie qu'on doit résoudre pour faire l'épure, ni sur le détail des opérations élémentaires, tels que rabattement, relèvement, etc., qui sont suffisamment connus des élèves grâce aux différentes explications des cours ; le texte ne contient que les renseignements suffisants pour suivre les diverses opérations successives effectuées sur l'épure depuis la mise en place des données jusqu'à la représentation de la figure demandée. L'élève qui étudiera ces exercices ne pourra donc tirer un bon profit de son étude qu'en *refaisant lui-même* l'épure et en se guidant seulement sur le corrigé lorsqu'il sera arrêté par une difficulté. Il devra donc : 1° rechercher la solution du *problème de géométrie* que soulève l'exercice proposé ; 2° déduire de cette solution les *différentes opérations de descriptive* à exécuter successivement ; 3° *exécuter* enfin toutes *ces opérations dans l'ordre* indiqué. Dans chacune des parties de ce travail, il sera guidé par le corrigé sans que ce dernier puisse cependant le dispenser de tout travail réfléchi.

PETITE ÉPURE N° 1

Énoncé :

1. — Représenter par ses deux projections un tétraèdre régulier SABC supposé en matière translucide. On donne le sommet S (45, 80, 75) et le pied H de la hauteur SH abaissée sur la base ABC : H (— 15, 25, 15). On sait de plus que le sommet A est dans le plan horizontal en avant de la ligne de terre.

Texte :

Pour construire ce tétraèdre, on mènera à l'aide de l'horizontale (hk, $h'k'$) et de la frontale (hf, $h'f'$) le plan perpendiculaire à SH en H et on en cherchera la trace horizontale uv, puis on calculera, ou on construira, à l'aide d'un tétraèdre semblable choisi arbitrairement, la distance de H au sommet A : sur l'épure cette longueur a été construite en u_2v_2. On rabattra alors sur le

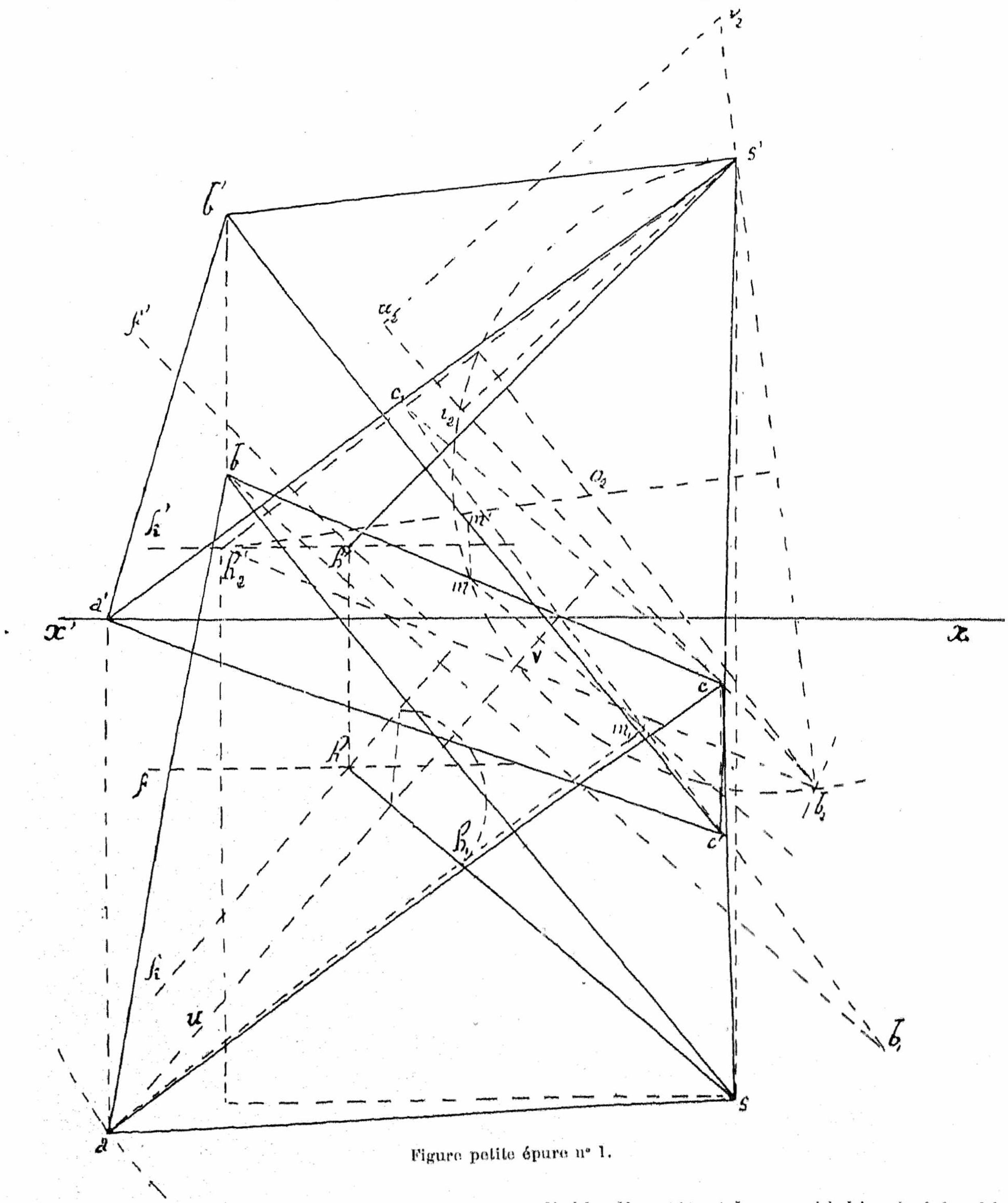


Figure petite épure n° 1.

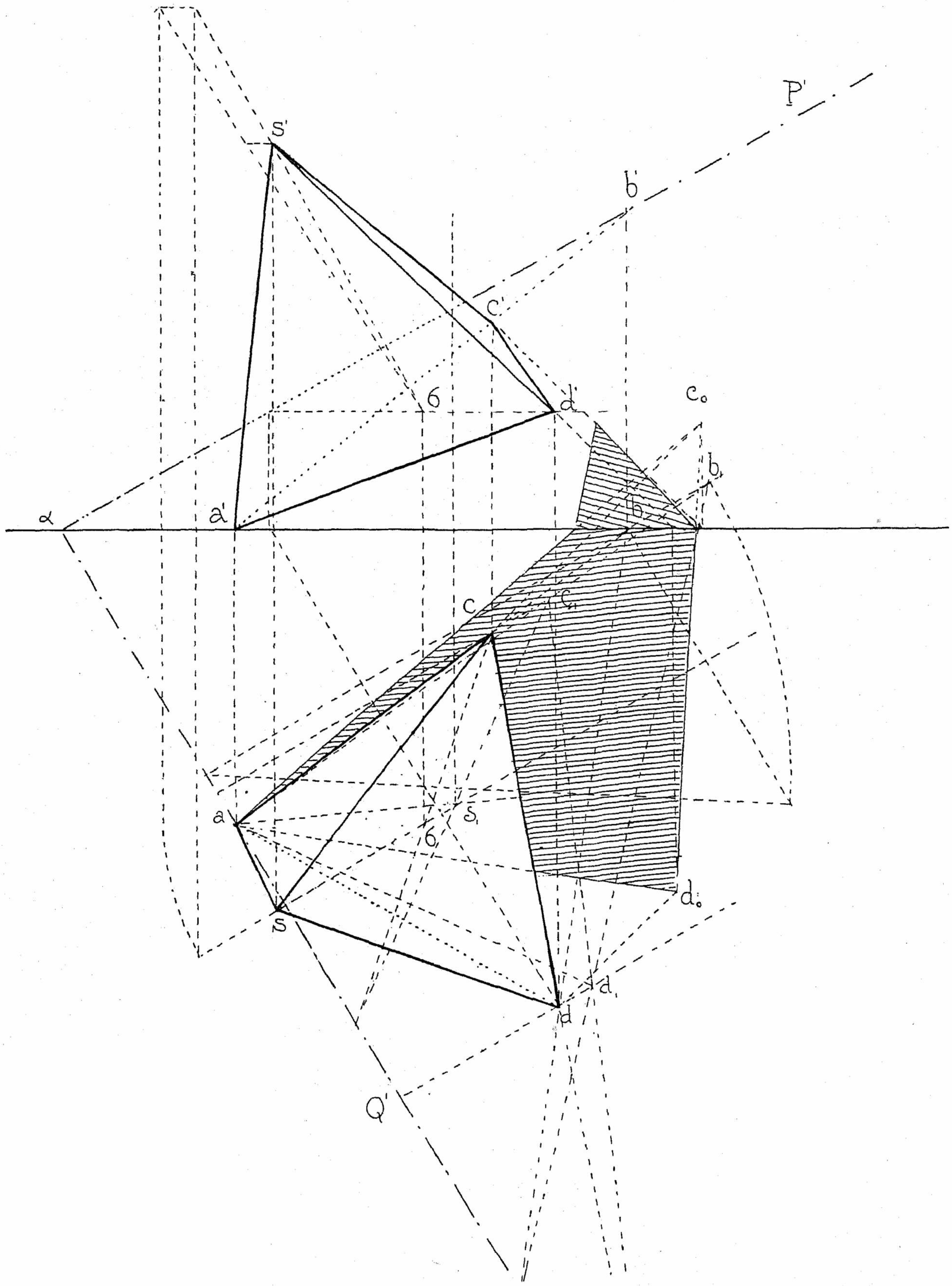


Figure petite épure n° 2.

plan horizontal le plan HKF, le point H viendra en h_1 ; de h_1 comme centre avec u_2v_2 pour rayon on décrira un arc de cercle qui coupera la trace uv en deux points dont l'un a en avant de $x'x$ est la projection horizontale du sommet cherché, la projection verticale a' est sur xy. A connu, on construit en rabattement en ab_1c_1 le triangle ABC qu'on relève ensuite dans le plan HKF en $(a,b,c,\ a',b',c')$. Le tétraèdre est alors construit : on a supposé pour la ponctuation les deux plans de projection translucides, ainsi que le tétraèdre.

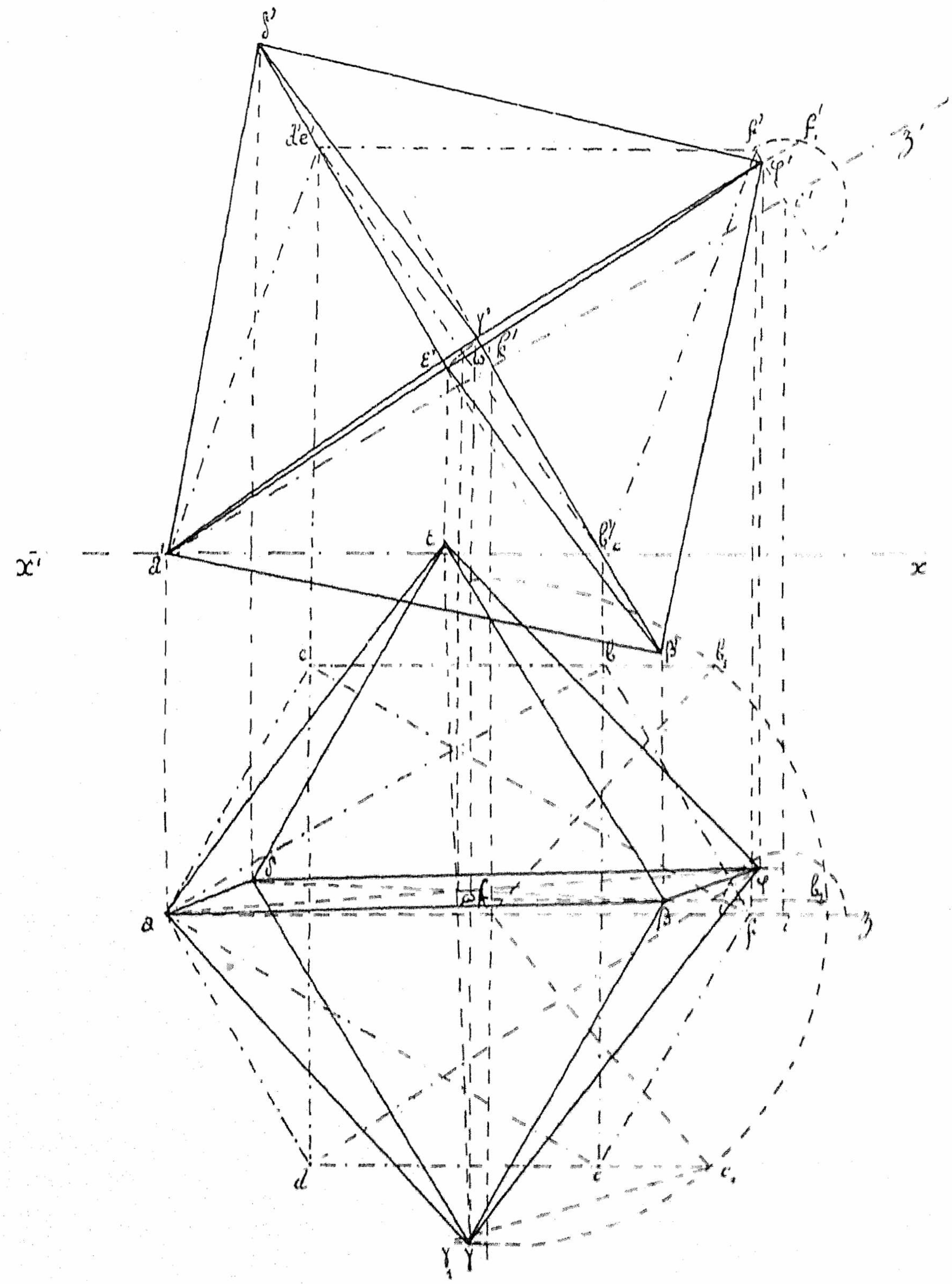


Figure petite épure n° 3.

PETITE ÉPURE N° 2

ÉNONCÉ :

2. — Représenter un tétraèdre régulier reposant par sa base sur le plan $P\alpha Q'$. Un côté coïncide avec la droite $ab,a'b'$ de ce plan. Déterminer les ombres propres et portées (rayons à 45°).

TEXTE :

Même problème que l'épure précédente, mais dans un cas plus général. On déterminera les ombres propres et portées, les rayons lumineux étant à 45°, en suivant la méthode préconisée au cours d'ombre.

PETITE ÉPURE N° 3

ÉNONCÉ :

3. — Un octaèdre régulier repose par une de ses faces ABC sur le plan horizontal de projection : A (—45, 55, 0) le centre ω du triangle ABC est ω (0, 55, 0). On considère un axe AZ de front faisant vers la droite un angle de 30° avec le plan horizontal. Rechercher les nouvelles projections de l'octaèdre après l'avoir fait tourner de 45° à partir de sa position initiale autour de AZ, dans le sens des aiguilles d'une montre pour un observateur placé sur AZ les pieds en A, la tête en Z.

TEXTE :

Le solide donné est construit en ABCDEF d'après les indications du cours (Section I). Pour en avoir la nouvelle position, on fait tourner d'abord le point F opposé du point A qui, situé sur l'axe, ne bouge pas. En remarquant que ce point F est dans le plan de front de l'axe, un rabattement du plan de bout dans lequel se produit la rotation donne immédiatement en f'_1, puis finalement en φ' la nouvelle position φ' de la projection verticale de F. On a la projection horizontale φ de ce point en prenant le rabattement du même plan de bout sur le plan horizontal qui passe par son centre (i,i'). On déduit alors facilement de là, la nouvelle position (ω,ω') du centre de l'octaèdre. En projetant c' en k' sur $a'z'$ et en rappelant K′ en K sur az on a en (K,K′) le centre du cercle décrit par le point c ; un rabattement du plan de ce cercle fait sur le plan horizontal du point (KK′) permet d'amener c' en c_1, puis de le faire tourner en γ^1 et enfin de le relever en γ d'où on déduit la projection verticale γ'. Une construction entièrement analogue permet par l'intermédiaire du même rabattement de trouver le rabattement b_1 de b, puis sa nouvelle position rabattue b_2 relevée enfin en β, la projection verticale se faisant en β'. L'octaèdre est alors facilement complété par les sommets (δ,δ') et $(\varepsilon,\varepsilon')$ à l'aide d'une symétrie des points (γ,γ') et (β,β') par rapport au centre (ω,ω'). Dans l'épure on a supposé l'octaèdre et les plans de projection translucides.

PETITE ÉPURE N° 4

ÉNONCÉ :

4. — Représenter un octaèdre régulier reposant par une de ses faces sur un plan donné $P\,\alpha\,Q'$. La trace verticale fait un angle de 40° avec xy, la trace horizontale un angle de 50° avec xy. Un côté de l'octaèdre coïncide avec la droite $\delta\delta'$ de ce plan. Déterminer les ombres propres et portées (rayons à 45°).

TEXTE :

Même problème que le précédent mais dans un cas plus général. On déterminera les ombres propres et portées les rayons lumineux étant à 45°, en suivant la méthode préconisée au cours d'ombre.

PETITE ÉPURE N° 5

ÉNONCÉ :

5. — On donne trois points A,D,Δ : A (20, 55, 65), D (33, 85, 45) et Δ(—50, 55, 45). Construire un cube dont une arête est AD, dont une deuxième arête est portée sur la demi-droite AΔ, ce cube étant situé au-dessus du plan ADΔ. On supposera ce cube plein de matière opaque et on le représentera par ses deux projections.

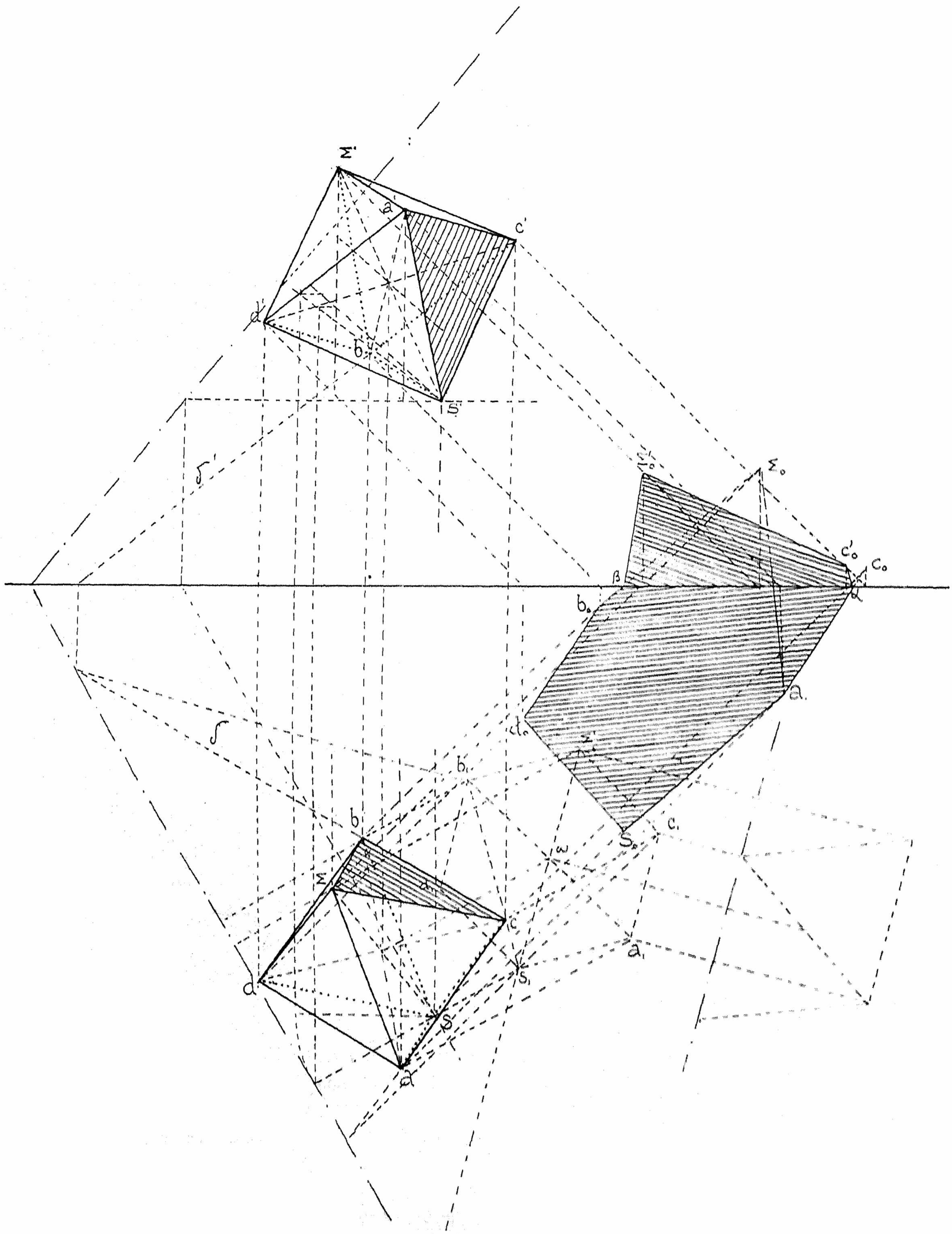


Figure petite épure n° 4.

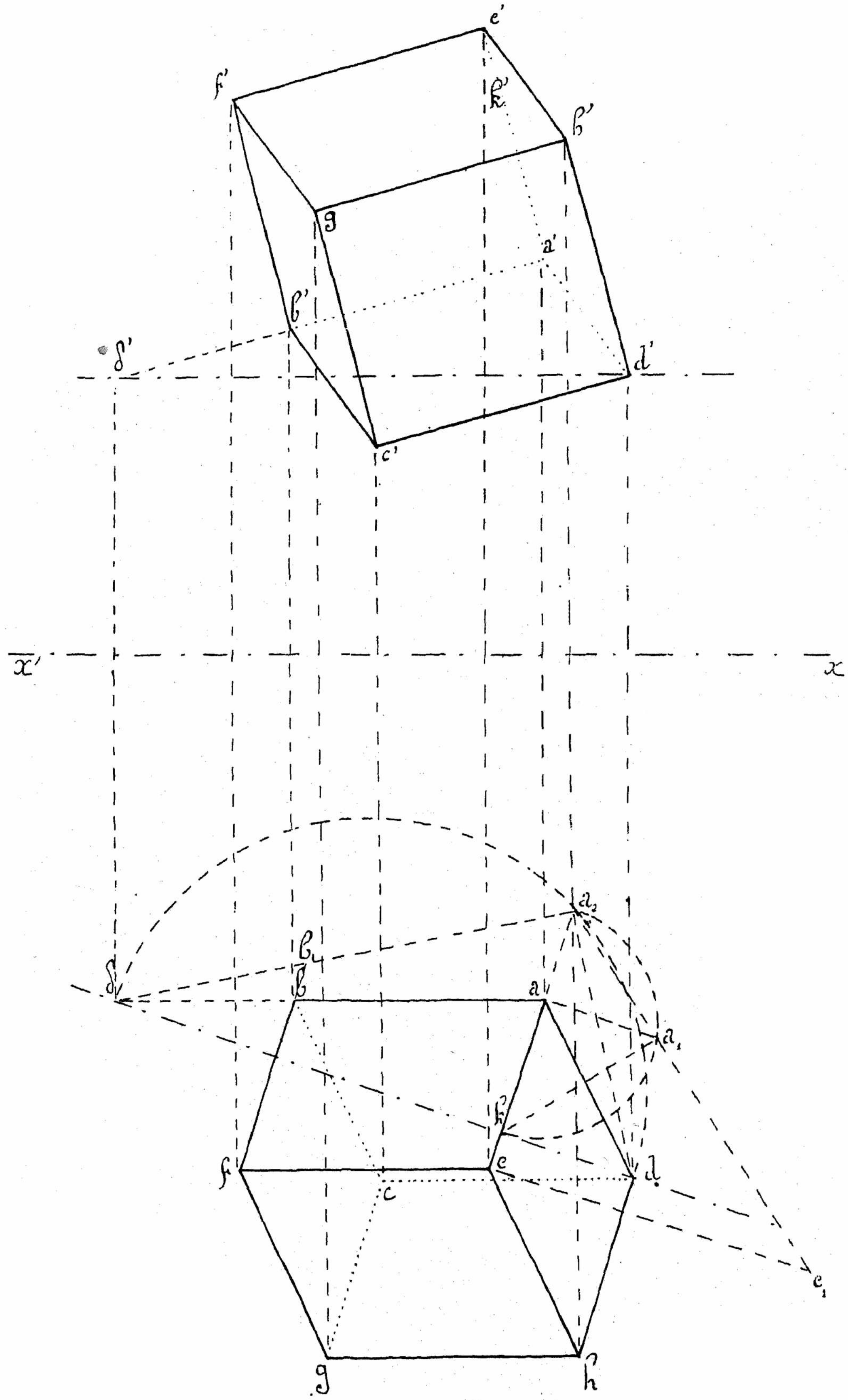


Figure petite épure n° 5.

Texte :

Tout d'abord on rabattra le plan ADΔ sur le plan horizontal DΔ et on vérifiera que l'angle ΔAD rabattu en $\delta a_2 d$ est droit. Ce rabattement permet d'obtenir le rabattement b_1 du sommet B qu'on relève horizontalement en b verticalement en b'; on a alors de suite le quatrième sommet (c,c') de cette face ABCD, en construisant le parallélogramme dont trois sommets sont A,B,D. En rabattant alors sur le plan horizontal DΔ le plan vertical projetant la perpendiculaire AK menée de A sur DΔ, on construit en rabattement la perpendiculaire a_2a_1 au plan ADΔ et on porte sur elle toujours en rabattement et à partir de a_1 une longueur a_1e_1 égale au côté du cube : en relevant ce point e_1 en (e,e') on a un cinquième sommet du cube ; la construction est alors facile à achever, à l'aide des symétries et des parallélismes qui donnent de suite les trois derniers sommets (f,f') de la face ABE, (g,g') de la face FBC, (h,h') de la face DGC.

PETITE ÉPURE N° 6

Énoncé :

6. — Une pyramide de sommet SS′ sur la ligne de terre xy a pour base, dans un plan horizontal, l'hexagone ABCDEF, dont les côtés AF et CD sont debout.

On la coupe par le plan PαQ′.

Construire l'ombre du tronc de pyramide limité par le plan horizontal de l'hexagone et le plan PαQ′.

Les rayons ne sont pas les rayons usuels mais dirigés suivant la droite Δ.

Texte :

Section plane de la pyramide. — Nous allons chercher l'intersection de chaque arête de la pyramide avec le plan PαQ′. Soit d'abord celle de l'arête SA-S′A′. Pour cela, considérons le plan de bout σSA′. Il coupe le plan PαQ′P′ suivant la droite σα-σ′α′ qui rencontre l'arête SA-S′A′ au point GG′. On obtient de même les points HH′, II′ et la section de la pyramide est la face GHIJKL-G′H′I′J′K′L′.

Ombre du tronc de pyramide. — D'abord l'ombre propre : la séparatrice d'ombre et de lumière est la ligne brisée BCDEKJIH-B′C′D′E′K′J′I′H′.

Cherchons l'ombre portée. — Le point BB′ porte ombre en b, le point HH′ porte ombre en h sur Sb.

Comme l'hexagone ABCDEF est dans un plan horizontal, BC-B′C′ porte ombre suivant une droite égale et parallèle bc, CD-C′D′ porte de même ombre suivant une droite parallèle mais interrompue en β sur la ligne de terre, le point DD′ porte ombre sur le plan vertical en d', d'où d'β. Le point EE′ porte ombre en e' et le point KK′ en k' sur S′e'. Enfin le point II′ porte ombre en i sur le plan horizontal, le point JJ′ en j sur le plan horizontal et j' sur le plan vertical, ij rencontrant xy en γ, d'où le contour d'ombre portée : $bc\beta d'e'k'j\gamma ih$.

PETITE ÉPURE N° 7

Énoncé :

7. — Étant donné un plan P par son échelle de pente MN,M (5, — 48,80), N (— 60,0,0), mener dans ce plan par un point P (— 10,0,40) une droite de pente 4/5, dont la trace horizontale ait un éloignement positif. Mener ensuite par cette droite un plan perpendiculaire au plan donné et représenter par une projection cotée l'ensemble du plan horizontal, du plan donné et du plan perpendiculaire au plan donné, *supposés tous* trois opaques.

Texte :

La droite qu'on doit mener par P dans le plan MN ayant pour pente $\frac{4}{5}$ a pour intervalle $\frac{5}{4}$, la distance de p, projection de P, à la trace de la droite cherchée est donc $\frac{5}{4} \times 40 = 50$: on aura donc cette trace en traçant de p comme centre un cercle de rayon 50 qui coupe l'horizontale de cote 0 du plan en deux points N d'éloignement O et Q d'éloignement positif, la droite PQ répond donc à la question.

Pour mener le plan demandé il suffit, par les procédés ordinaires de géométrie cotée (Section I), d'élever en P une perpendiculaire au plan MN. L'intervalle du

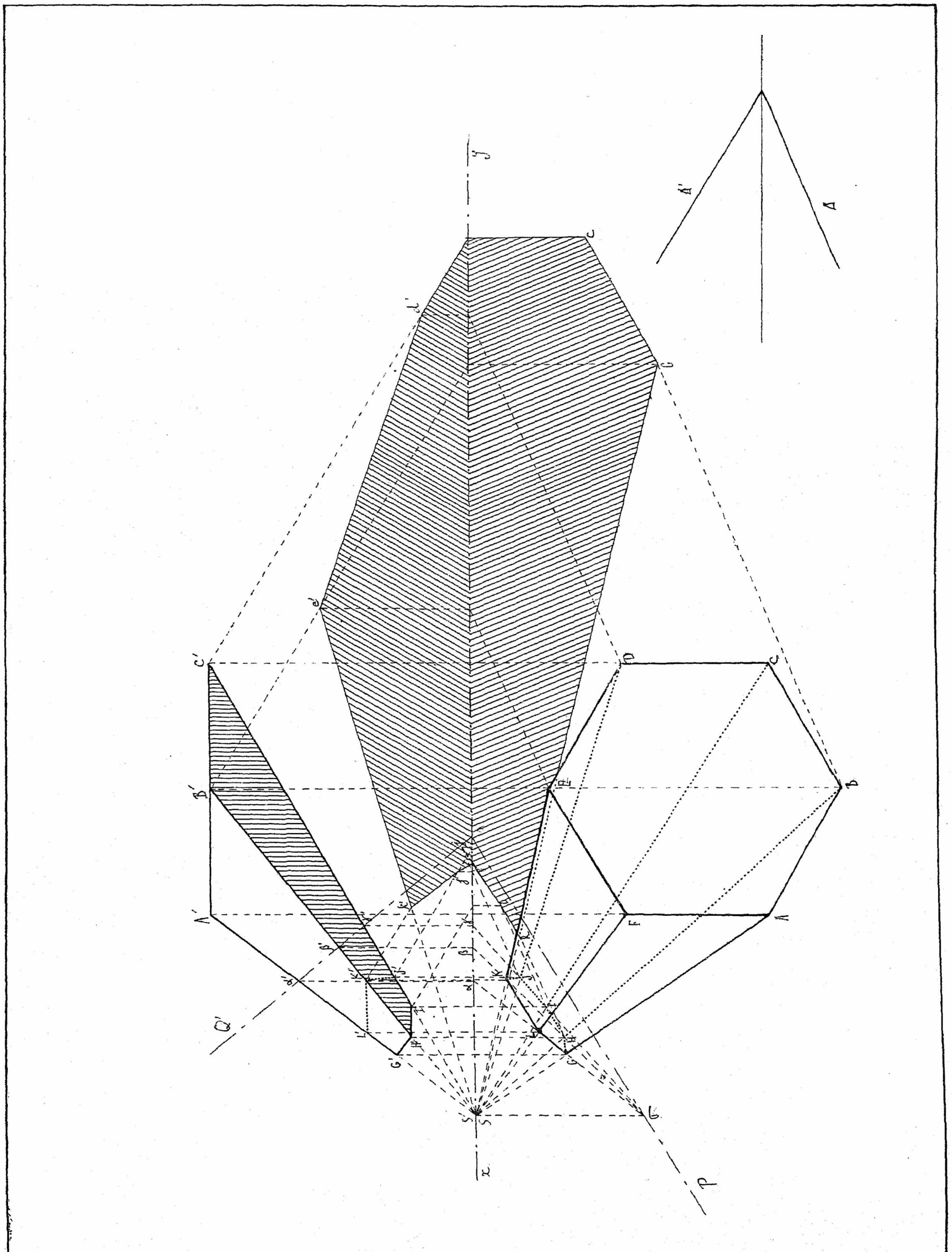


Figure petite épure n° 6

plan MN étant 1, celui de la perpendiculaire est également 1, on trouve la droite PR, R de cote 0, le plan

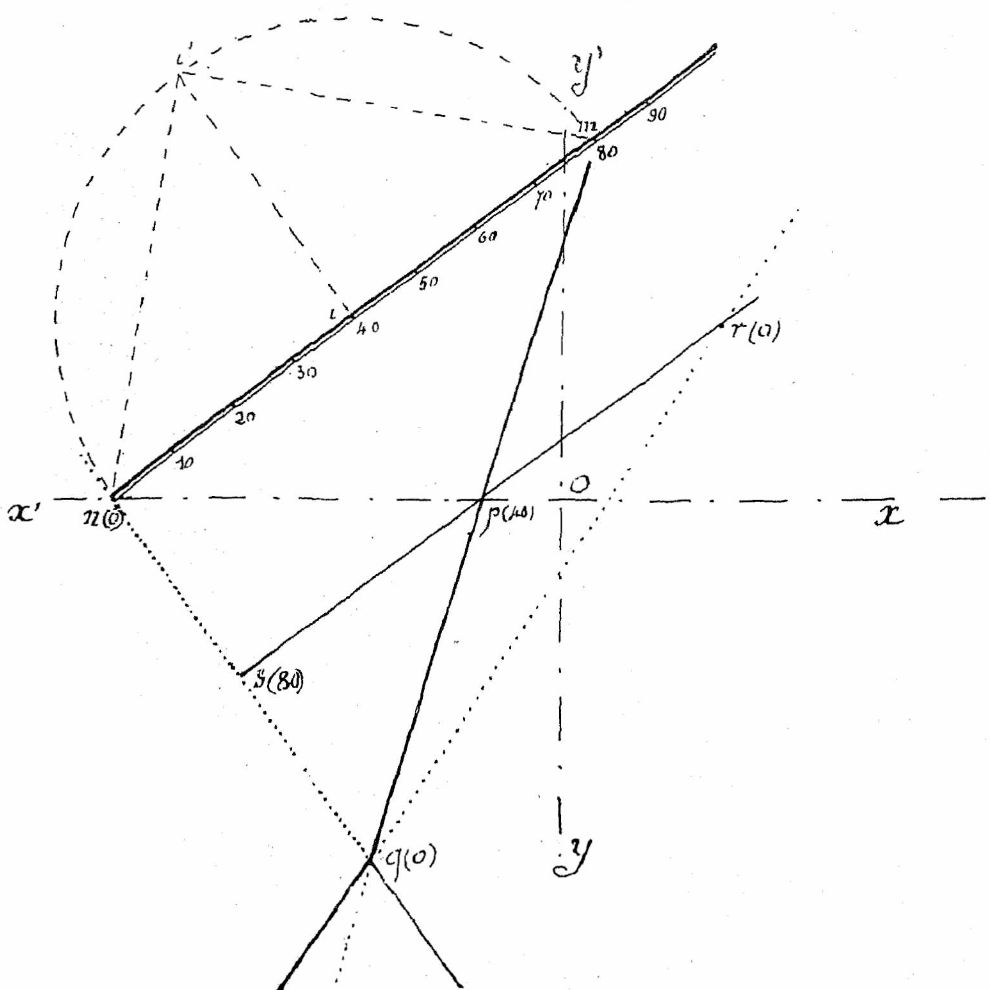


Figure petite épure n° 7.

cherché est RPQ. On ponctue l'ensemble des trois plans en traçant les horizontales de cote 0 des deux plans et l'intersection PQ des deux plans et en cachant et laissant vues alternativement les demi-droites issues du point commun Q d'après un théorème connu sur la ponctuation autour d'un point commun à trois surfaces opaques.

PETITE ÉPURE N° 8

Énoncé :

8. — Étant données trois droites concourantes OA, OB, OC, O (0, 0,50), A (— 60, 0,20), B (0, — 30,30), C (40, 20, 30) on élève en O aux trois plans AOB, BOC, COA, trois demi-droites perpendiculaires OZ, OX, OY respectivement situées du même côté de chacun de ces plans que celle des demi-droites OA, OB, OC qui n'est pas dans le plan considéré. Représenter par sa projection cotée la pyramide OXYZ, les points XYZ étant tous trois de cote 30.

Texte :

Sur l'épure, les perpendiculaires OX OY, OZ ont été obtenues en rabattant les plans menés par O perpendiculairement aux horizontales de cote 30 des plans OAB, OBC, OCA : ainsi la perpendiculaire OY au plan OAC a été obtenue en menant la perpendiculaire $O'y$ au rabattement ω O' de la ligne de plus grande pente du plan OAC passant en O. Une construction analogue a

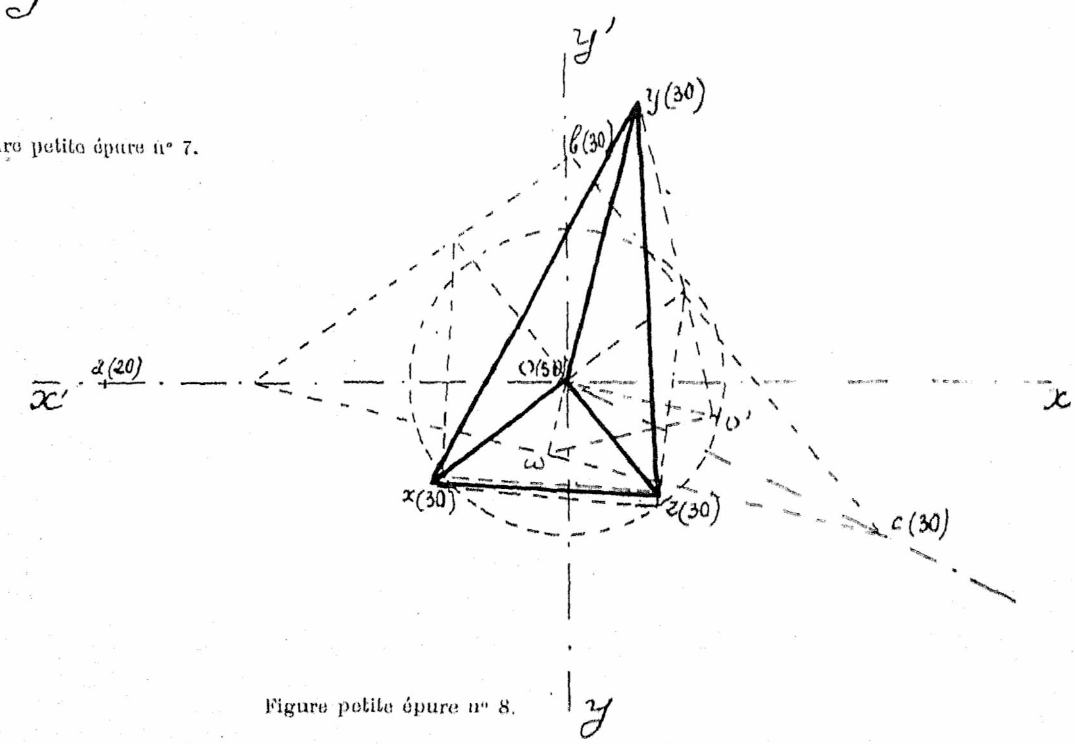


Figure petite épure n° 8.

donné OX et OZ et la construction de la pyramide est alors immédiate.

PETITE ÉPURE N° 9

Énoncé :

9. — Appuyer sur deux droites données UV et RT : 1° une droite D passant par un point ω ; 2° une droite D′ parallèle à une droite UΔ. Les deux droites D et UV forment un plan, ainsi que les deux droites D′ et RT. Indiquer l'intersection de ces deux plans. On donne U (— 50, 0, 0), V (0, — 20, 40), R (0, — 30, 60), T (30, 0, 40), Δ (— 30, — 40, 40), ω (0, 0, 60).

Texte :

La droite cherchée D est l'intersection des deux plans ωRT et ωUV, intersection dont ω est un premier point et S à la rencontre des horizontales de cote 40 un deuxième point. La droite D est donc déterminée par les deux points ω (60) et *s* (40). Elle rencontre UV et RT en A (14) et B (18).

La droite D′ cherchée passe par l'intersection du plan ΔUV mené par UV parallèlement à UΔ avec la droite RT ; cette intersection est le point T (40) ainsi qu'on le voit en menant l'horizontale ΔV de même cote du plan ΔUV. Pour avoir D′ il suffit donc de mener par T une parallèle à ΔU. Cette parallèle rencontre UV en Q (80).

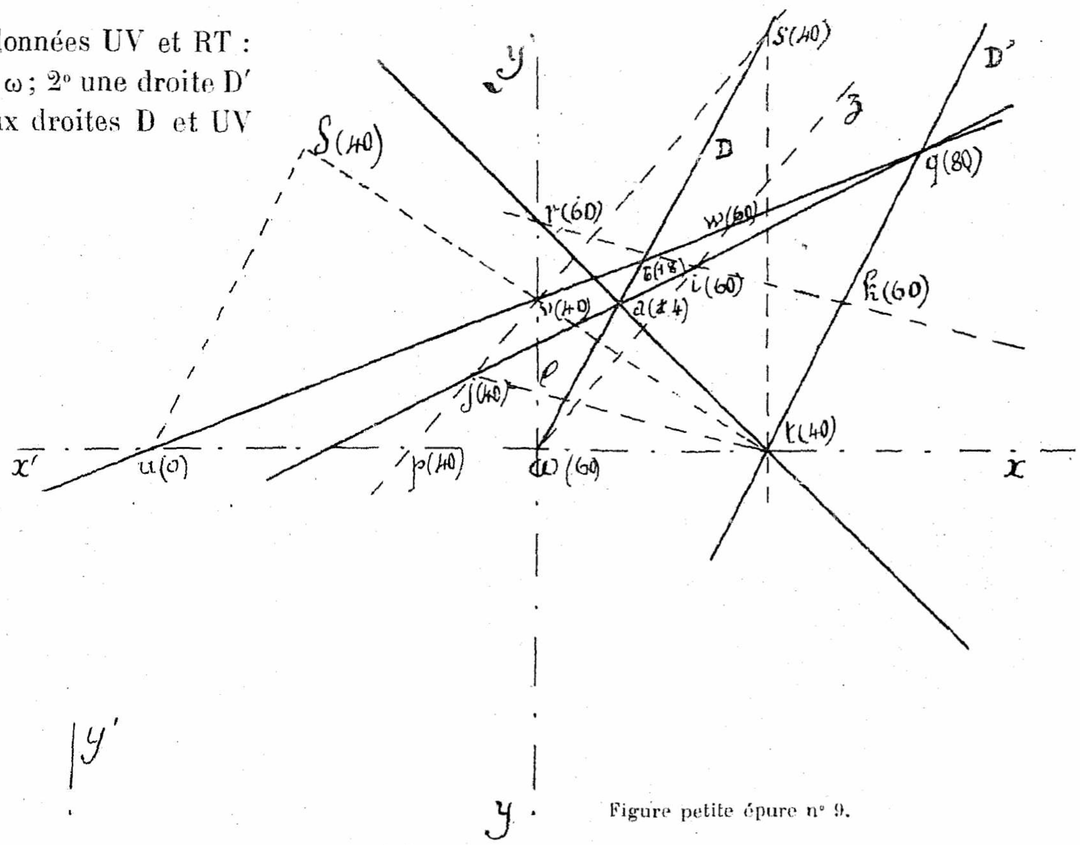


Figure petite épure n° 9.

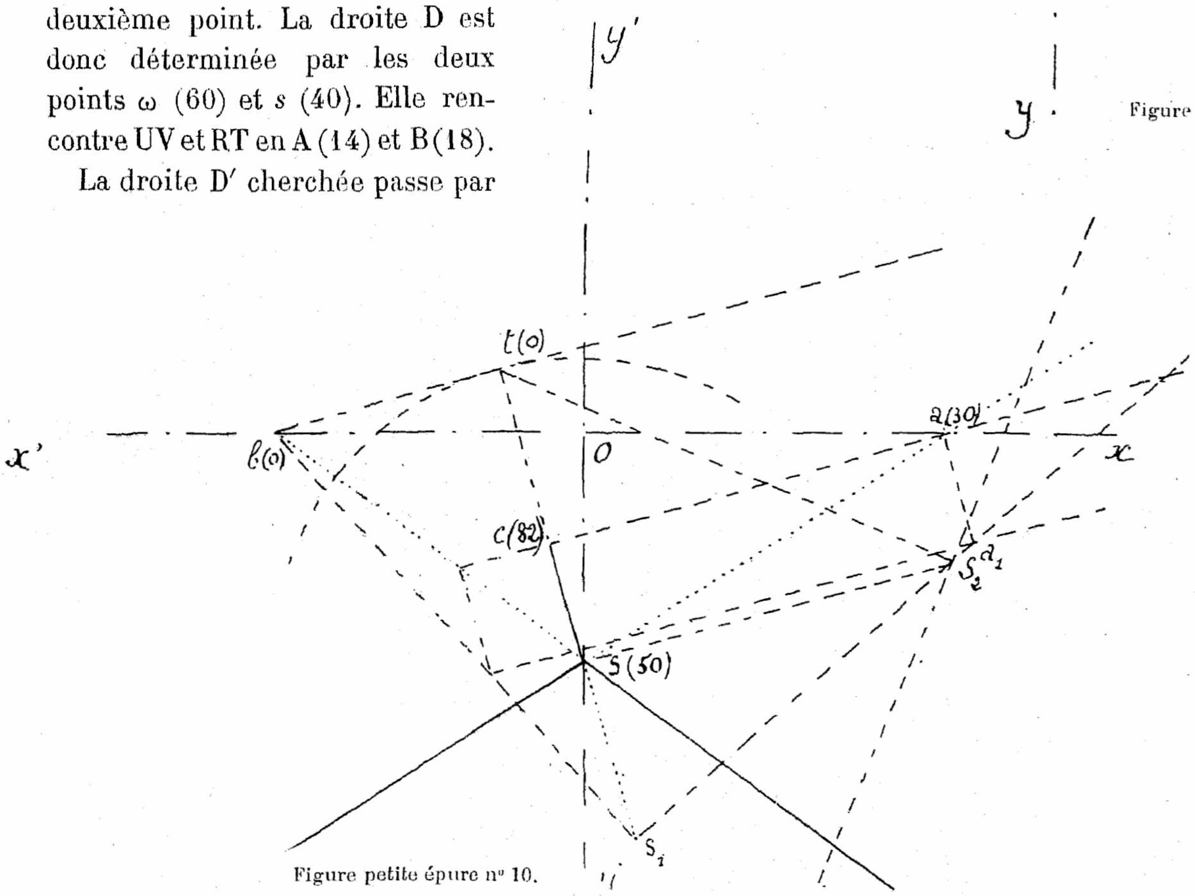


Figure petite épure n° 10.

L'intersection des deux plans (D,UV) et (D′,RT) s'obtient en les coupant par deux plans auxiliaires horizontaux : l'un de cote 60 qui, à l'intersection des horizontales RK et ωZ, donne le point I (60) : l'autre de cote 40 qui, à l'intersection des horizontales US et TL, donne le point J (40). L'intersection des deux plans est IJ.

PETITE ÉPURE N° 10

ÉNONCÉ :

10. — *Mener par une droite donnée un plan de pente donnée. La droite AB, B (— 40, 0, 0), S (0,30 50); la pente du plan cherché 5/4, la trace de ce plan coupant la demi-droite OY'. Mener dans ce plan une perpendiculaire SA à SB et à ce plan une perpendiculaire SC, la trace de SA ayant un x positif et SC étant menée au-dessus du plan. Ponctuer ce trièdre en supposant les trois plans SAB, SBC, SCA opaques.*

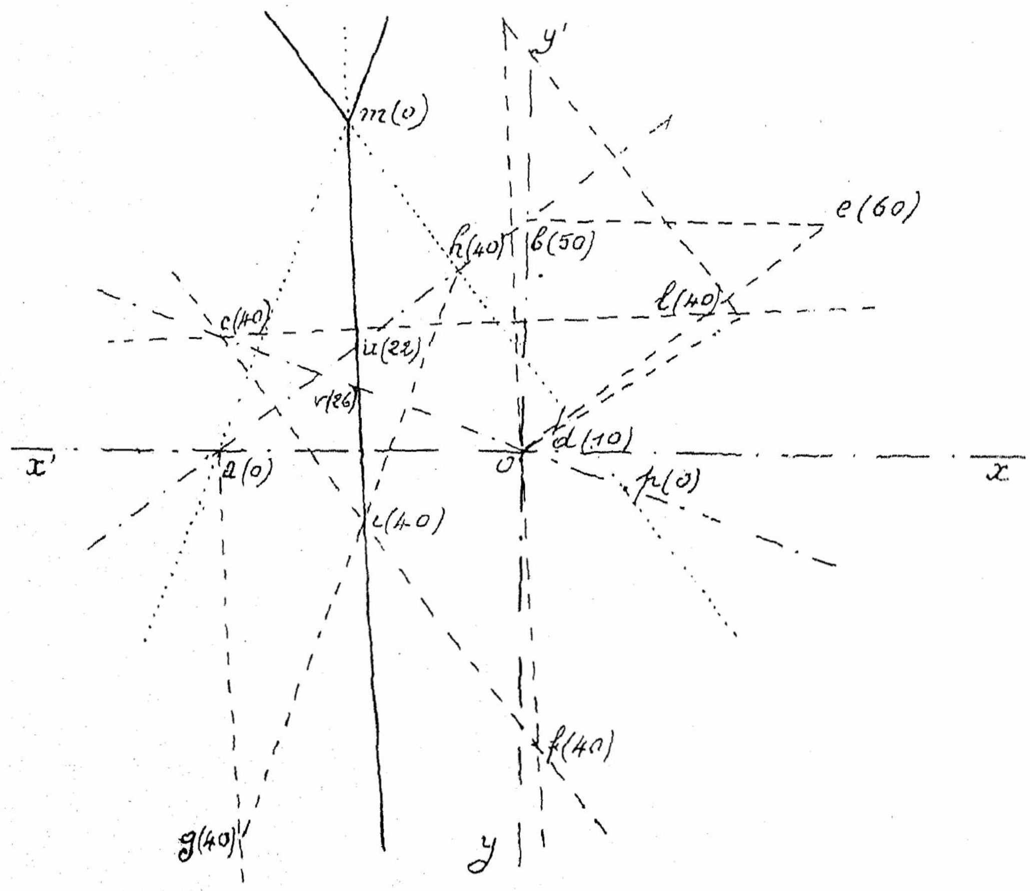


Figure petite épure n° 11.

TEXTE :

En appliquant la méthode exposée dans le cours, on trouve la trace BT du plan demandé. Un rabattement du plan BTS en BTS_1 permet de construire en rabattement S_1A la perpendiculaire à SB dans le plan BST qu'on relève de suite en SA. On mène enfin, suivant la méthode habituelle, la perpendiculaire en S au plan ASB, la pente de cette perpendiculaire étant $\frac{4}{5}$ et par suite l'intervalle $\frac{5}{4}$. La ponctuation s'obtient en appliquant le théorème des trois surfaces autour du point S.

PETITE ÉPURE N° 11

ÉNONCÉ :

11. — *Rechercher avec les données suivantes la perpendiculaire commune UV aux deux droites AB et CD.* A (— 40, 0, 0), B (0, — 30,50), C (— 40, — 15, 40), D (0, 0,10). *Ponctuer l'ensemble des plans AUV, CUV et du plan horizontal.*

TEXTE :

En suivant la méthode indiquée dans le cours, on mène la parallèle DE à AB par le point D, puis en D au plan EAB une perpendiculaire DF qui donne la direction de la perpendiculaire commune. On mène par A la parallèle AG à cette direction et on prend le point I de cote 40 commun aux deux plans GAB et CDF. Maintenant il reste à mener par I la parallèle VU à AF. On cherche les horizontales de cote O,MA et MP des deux plans AUV et CUV et on applique autour de M le théorème de ponctuation des trois surfaces.

PETITE ÉPURE N° 12

ÉNONCÉ :

12. — *On donne sur un cylindre de révolution à axe vertical dont la base est un cercle de centre* ω (0, 40,0) *de rayon* 30 *une hélice dextrorsum passant en* A (— 30, 40, 0) *de pas* 60. *Construire une spire de cette hélice.*

prendre un point M de cette spire et déterminer en ce point le plan osculateur, la normale principale, la tangente et la binormale à l'hélice.

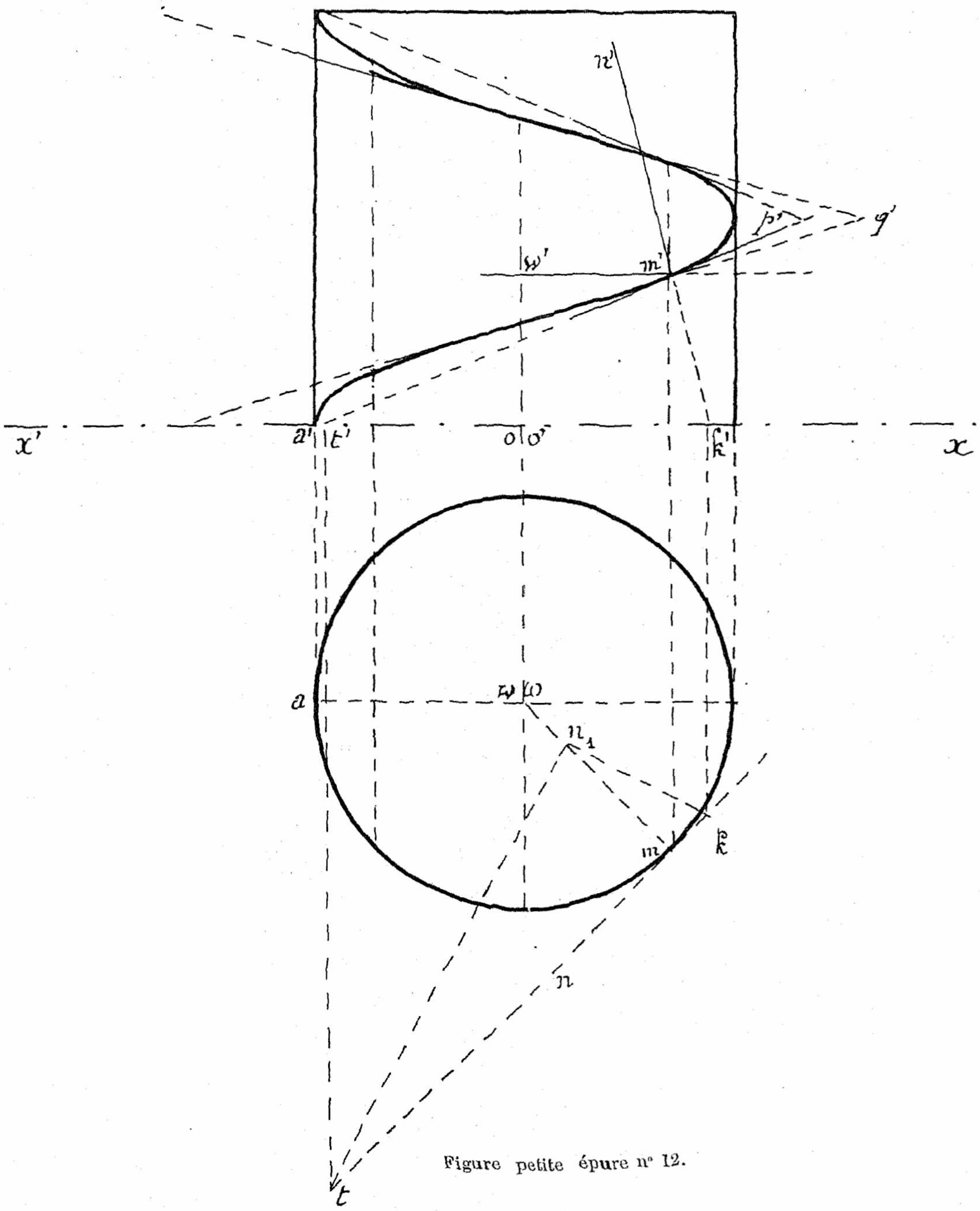


Figure petite épure nº 12.

TEXTE :

L'hélice est construite à l'aide de 8 points dont les projections horizontales sont les sommets d'un octogone régulier convexe inscrit dans le cercle ω dont un sommet est A. En un de ces points M on a mené la tangente dont la sous-tangente est $mt = \widehat{am}$. La normale principale en ce point est la droite MW horizontale allant de M à l'axe du cylindre. Quant à la binormale MN, on l'obtient en rabattant le plan tangent en M sur le plan horizontal : la tangente est rabattue en tn_1, mn_1 étant la cote de M on en déduit le rabattement n_1K de la binormale qui est relevée en (Km, K'm').

PETITE ÉPURE Nº 13

ÉNONCÉ :

13. — On donne un axe vertical $\omega\omega'z'$, $\omega\,(0, 60, 0)$, un plan de bout dont la trace verticale fait au-dessus de ox

un angle de 45° avec ox et un cylindre de révolution à axe vertical ayant pour base un cercle de centre C (30, 60, 0) passant en ω. On fait tourner l'ellipse de section du cylindre C par le plan de bout donné autour de l'axe ωz, déterminer le contour apparent vertical de la surface engendrée par l'ellipse dans la rotation indiquée.

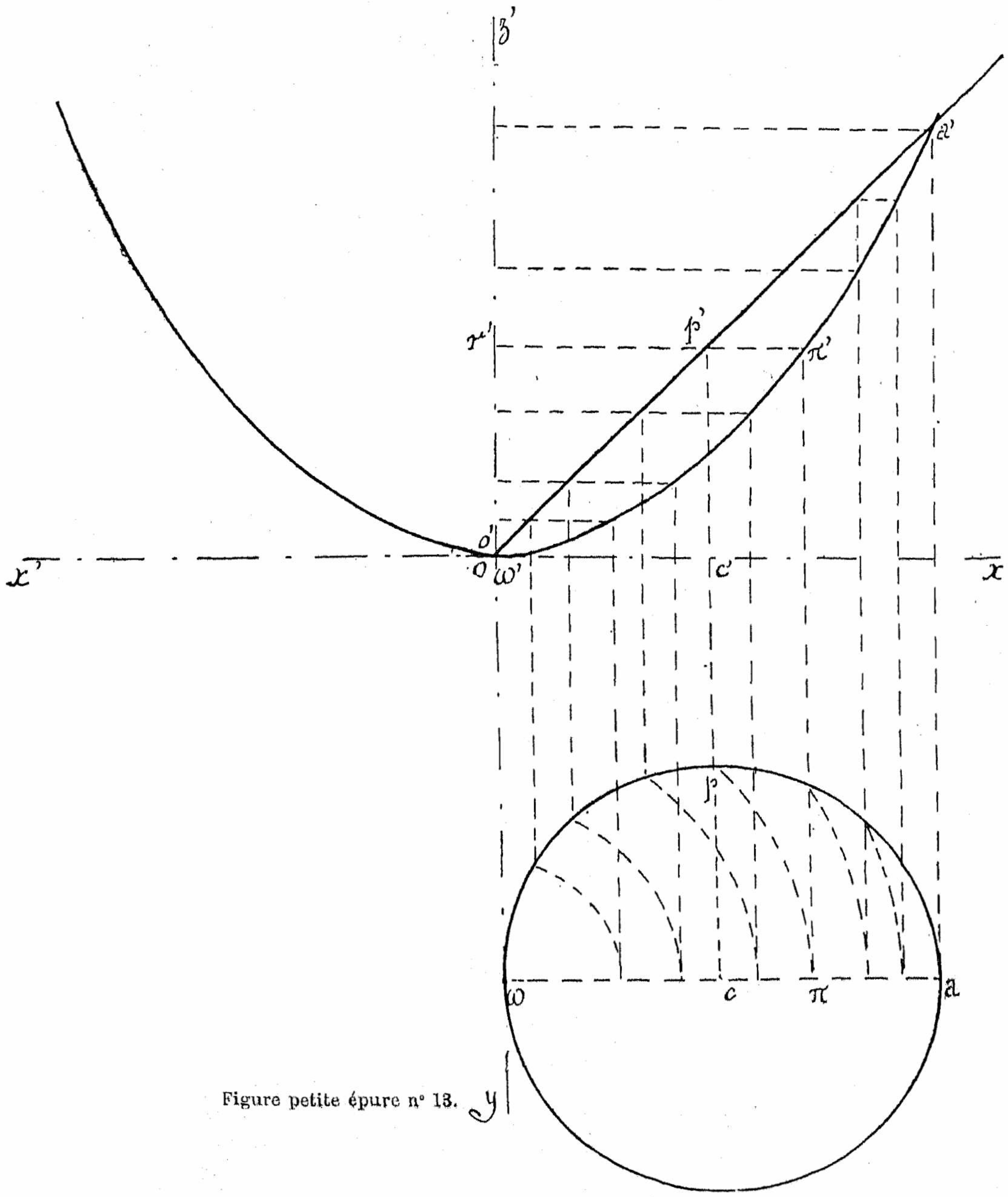


Figure petite épure n° 13.

Texte :

On détermine le contour apparent demandé point par point. Ainsi le point de l'ellipse projeté en (p, p') donne par rotation le point (π, π') du contour apparent vertical situé dans le plan de front de l'axe. On opère ainsi pour un nombre de points tel qu'on puisse tracer sans hésiter la courbe. On voit immédiatement que cette courbe a l'allure d'une parabole de sommet ω et d'axe $\omega'z'$: il est facile de se rendre compte qu'effectivement le contour apparent est exactement une parabole. Considérons en effet le point quelconque P et en projection horizontale le triangle rectangle ωpa; c étant ici la projection de p sur ωa: on a $\overline{\omega p^2} = \omega c \times \omega a$. Or $\omega p = \omega\pi = r'\pi'$ d'autre part $\omega c = r'p' = o'r'$ donc $\dfrac{\overline{r'\pi'^2}}{o'r'} = \omega a =$ constante le lieu du point π' est donc bien une parabole admettant pour sommet ω ω' et $\omega'z'$ pour axe. Le théorème est vrai, quel que soit l'angle du plan de bout avec le plan horizontal, car le rapport $\dfrac{r'p'}{o'r'}$ reste toujours constant sinon égal à 1.

PETITE ÉPURE N° 14

Énoncé :

14. — On considère un plan parallèle à la ligne de terre faisant 45° avec les plans de projection et passant en ω (0, 40, 40). Dans ce plan un cercle de centre ω a pour rayon 40. On fait mouvoir une sphère de rayon 15 de façon que son centre décrive le cercle ω, tracer le contour apparent horizontal du tore engendré par le mouvement de cette sphère.

Texte :

Tout d'abord le cercle ω se projette suivant une ellipse admettant $\omega\omega_1$ pour demi grand axe, et ωa pour demi petit axe. Cette ellipse étant tracée avec soin, on trace les contours apparents horizontaux de sphères

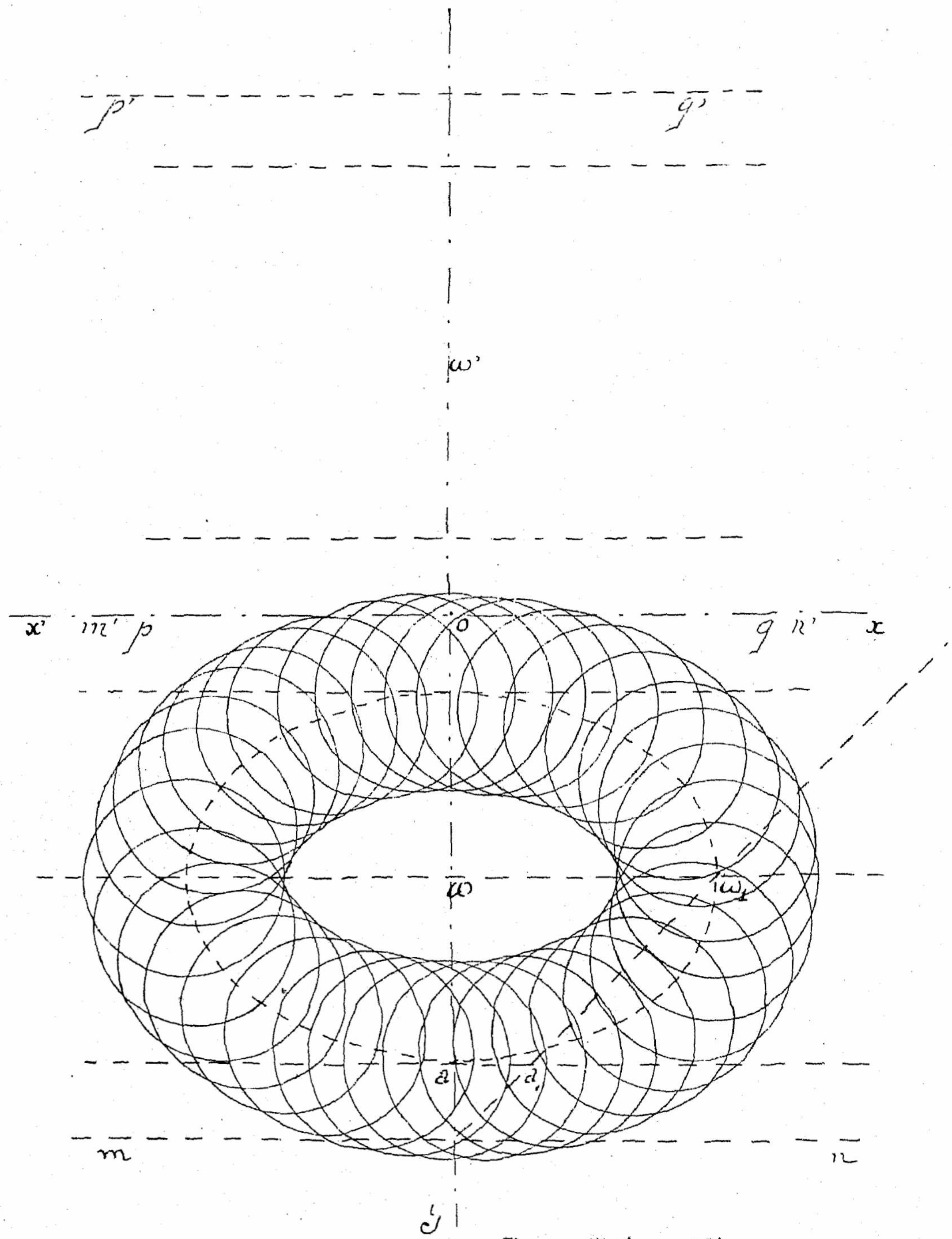


Figure petite épure n° 14.

de rayon 15 ayant leurs centres pris sur l'ellipse et suffisamment rapprochés. Remarquant d'une part que les caractéristiques de l'enveloppe de ces sphères sont les grands cercles dont les plans sont les plans normaux au cercle ω, d'autre part que les points de ces grands cercles situés dans le plan horizontal du centre de la sphère correspondante appartiennent au contour apparent du tore, on déduit alors de ce qui précède que le contour apparent cherché est l'enveloppe des contours apparents tracés des sphères mobiles. L'épure montre que l'ensemble de ces cercles donne, sans même tracer l'enveloppe, une idée approximativement fort exacte du contour apparent du tore. On n'a pas tracé le contour vertical qui serait identique au contour horizontal.

PETITE ÉPURE N° 15

Énoncé :

15. — On considère un cylindre de révolution d'axe UV fronto-horizontal passant en ω (0, 55, 30); le cylindre est tangent au plan horizontal suivant la génératrice AB. Tracer sur ce cylindre une hélice dont les tangentes font 45° avec les génératrices dextrorsum par rapport à un observateur couché sur U et V les pieds en U, la tête en V et regardant le plan horizontal. Cette hélice passe au point M (0, 55, 0). Projeter les deux arcs de l'hélice voisins du point M sur le plan osculateur, sur le plan tangent et sur le plan normal à l'hélice en M. Quelles formes de courbes obtient-on dans ces trois plans?

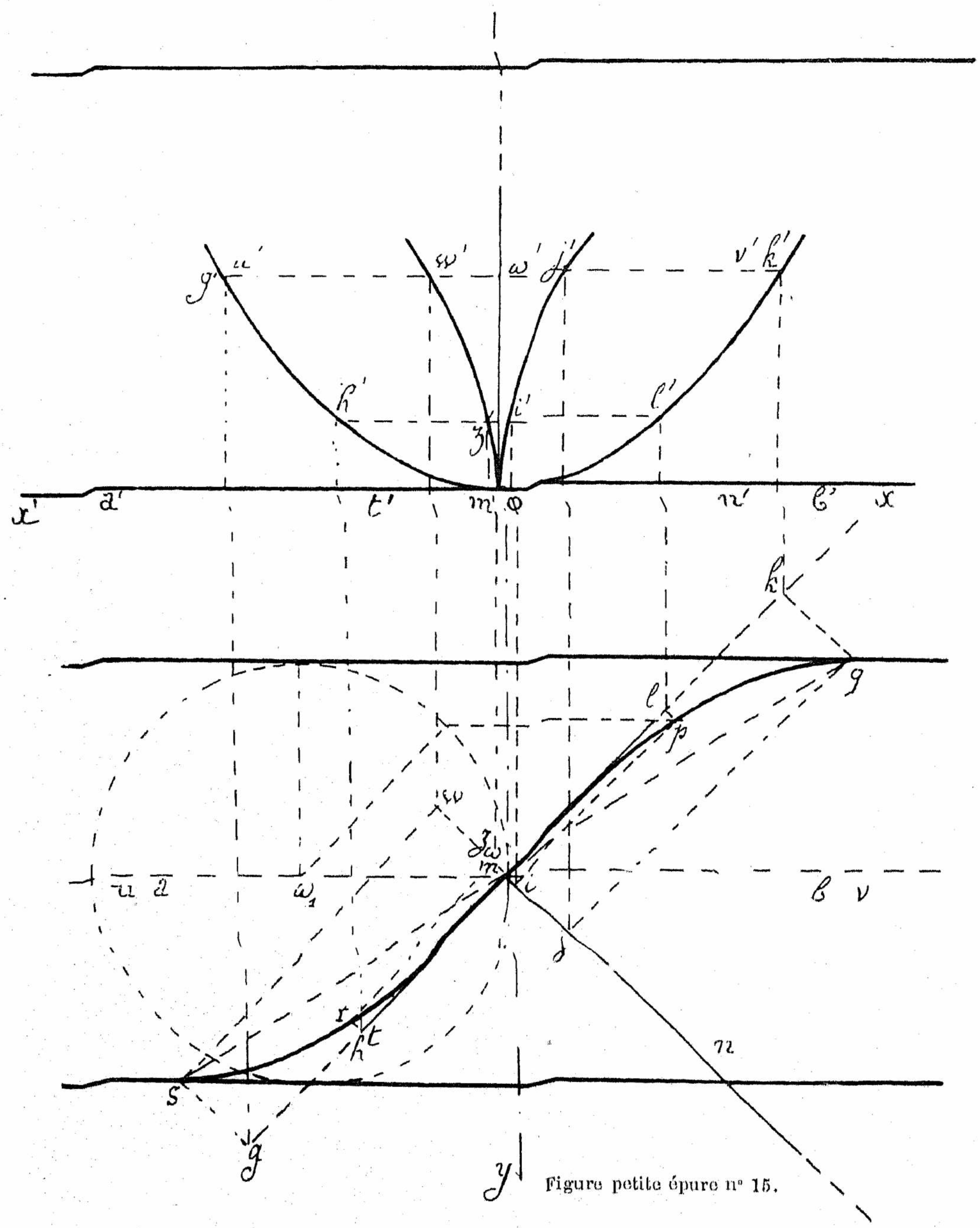


Figure petite épure n° 15.

Texte :

L'hélice donnée étant tracée suivant les principes habituels en projection horizontale à l'aide d'un rabattement de la section droite du cylindre dont le centre ω est venu en ω_1 on projette différents points de l'hélice tels que P, Q, R et S d'une part en I, J, W, Z, d'autre part en L, K, H, G sur le plan normal et sur le plan osculateur. On voit alors en projection verticale que la projection de l'hélice sur le plan osculateur ne présente en M qu'un point ordinaire, mais que la projection sur le plan normal présente en M un point de rebroussement : enfin la projection sur le plan tangent, qui est ici le plan horizontal, présente en M un point d'inflexion : ce qui vérifie le théorème du cours.

dans le plan horizontal de projection, mener au cylindre ayant pour bases ces deux cercles : 1° les plans tangents par le point A (— 76, 9, 20) ; 2° les plans tangents

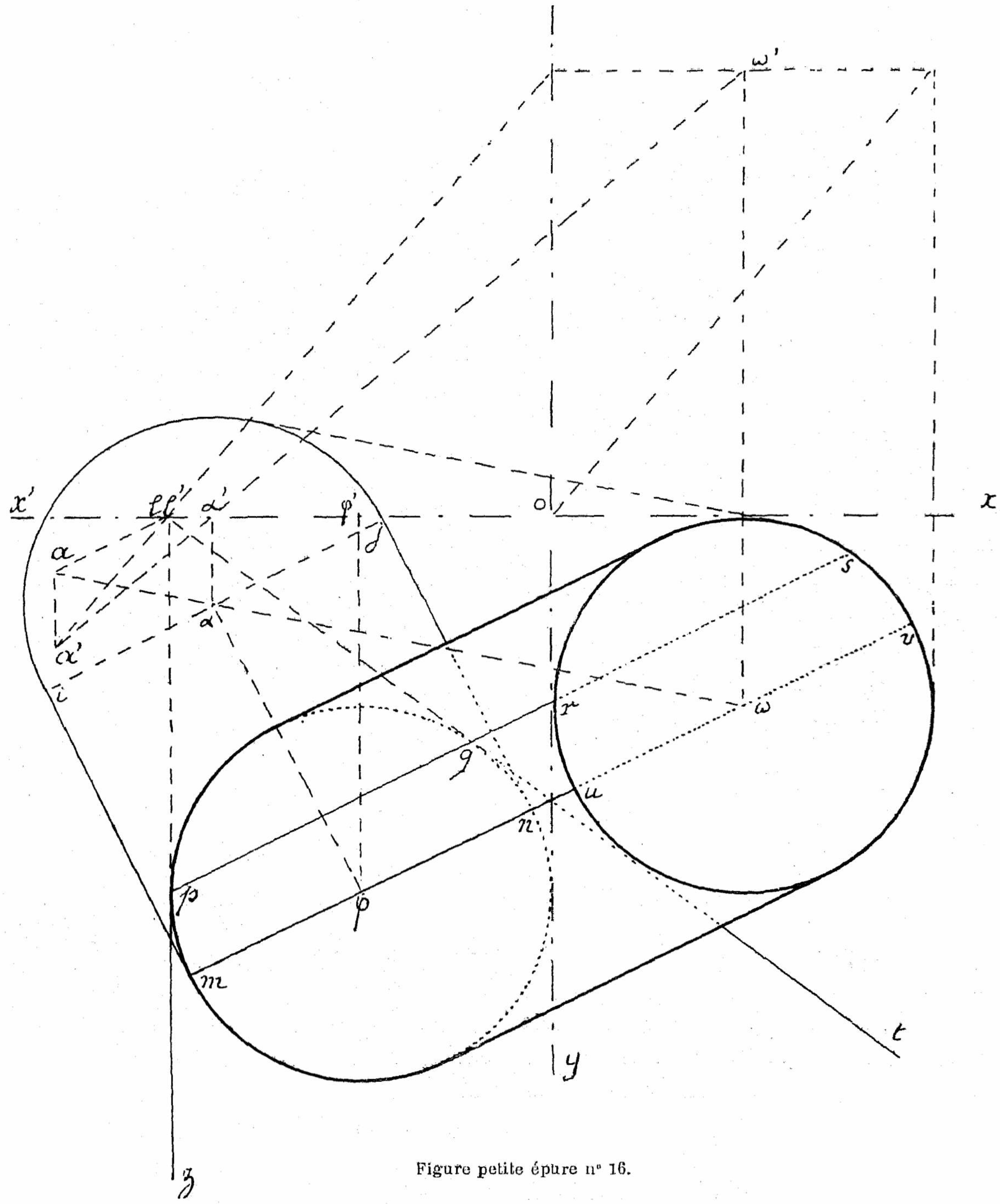


Figure petite épure n° 16.

PETITE ÉPURE N° 16

Énoncé :

16. — Étant donnés deux cercles de même rayon R = 30, l'un de centre ω (30, 30, 70) dans le plan horizontal de cote 70, l'autre de centre Φ (— 30, 60, 0) parallèles à la droite ωA. En supposant d'abord que le point A soit lumineux, ensuite que la lumière descende parallèlement dans la direction ω vers A, tracer dans ces deux cas les ombres propres et portées sur le plan horizontal du cylindre donné. On se contentera de faire les tracés demandés en projection horizontale

seulement et on ne tracera pas de hachures dans les parties ombrées.

Texte :

Pour mener les plans tangents par A, on prend la trace L de la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le point A et on mène de ce point L les tangentes LP et LQ au cercle de base φ, les génératrices PR et QS sont dans ce cas les séparatrices d'ombres propres sur le cylindre, les demi-droites PZ et QT sont les séparatrices d'ombres portées sur le plan horizontal.

Dans le cas où les rayons lumineux sont parallèles à ωA on prend la trace $\alpha\varphi$ du plan mené par ωA parallèlement aux génératrices du cylindre et on mène des tangentes au cercle φ parallèles à $\alpha\varphi$; par les points de contact M et N de ces tangentes on mène les génératrices MU et NV du cylindre ; ces génératrices sont dans ce cas les séparatrices d'ombres propres sur le cylindre : pour avoir la courbe séparatrice de l'ombre portée sur le plan horizontal, il faut tenir compte dans ce deuxième cas du fait que le cylindre est limité par le cercle ω (cette observation était inutile dans le premier cas, car la cote du point A était inférieure à celle du cercle). Le cercle ω porte une ombre limitée suivant le demi-cercle IJ de centre α et la séparatrice d'ombre portée est complétée par les segments MI et NJ des deux tangentes en M et en N au cercle φ. La ponctuation du cylindre et le tracé des ombres ont été faits en supposant le cylindre rempli d'une matière opaque.

PETITE ÉPURE N° 17

Énoncé :

17. — On donne dans le plan horizontal deux cercles, l'un de centre $\varphi(-40, 50, 0)$ de rayon 25, l'autre de centre ω (25, 50, 0) de rayon. Ces cercles sont les bases de deux cônes, l'un de révolution de hauteur $\varphi H = 50$, l'autre de sommet S (0, 50, 75) auxquels on demande de mener des plans tangents parallèles et la normale commune.

Texte :

Les deux cônes étant construits, on remarque que s'ils avaient le sommet commun on aurait les plans tangents communs en menant la tangente commune aux

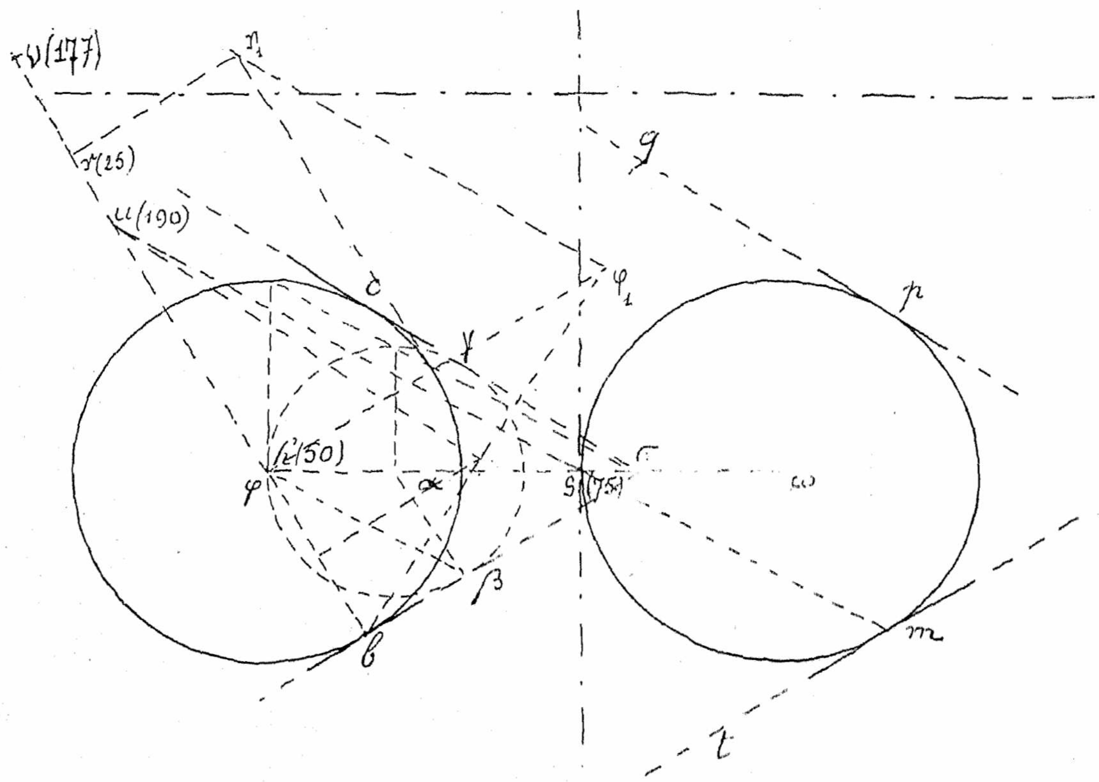


Figure petite épure n° 17.

bases ; on aura donc les plans tangents parallèles en déplaçant par translation l'un des cônes de façon à faire coïncider son sommet avec le sommet de l'autre et en menant alors les plans tangents communs aux deux cônes de même sommet : ces plans tangents et leurs parallèles tangents au cône dans sa première position répondent à la question.

Sur l'épure, on a déplacé le cône S de façon à amener son sommet en H, la base est alors devenue dans le plan horizontal le cercle de centre α et de rayon $\alpha\varphi$. Les tangentes communes aux deux bases φ et α sont $\sigma\beta b$ et $\sigma\gamma c$; les tangentes au cercle ω parallèles à ces droites sont *mt* et *pq*, et les deux couples de plan parallèles sont

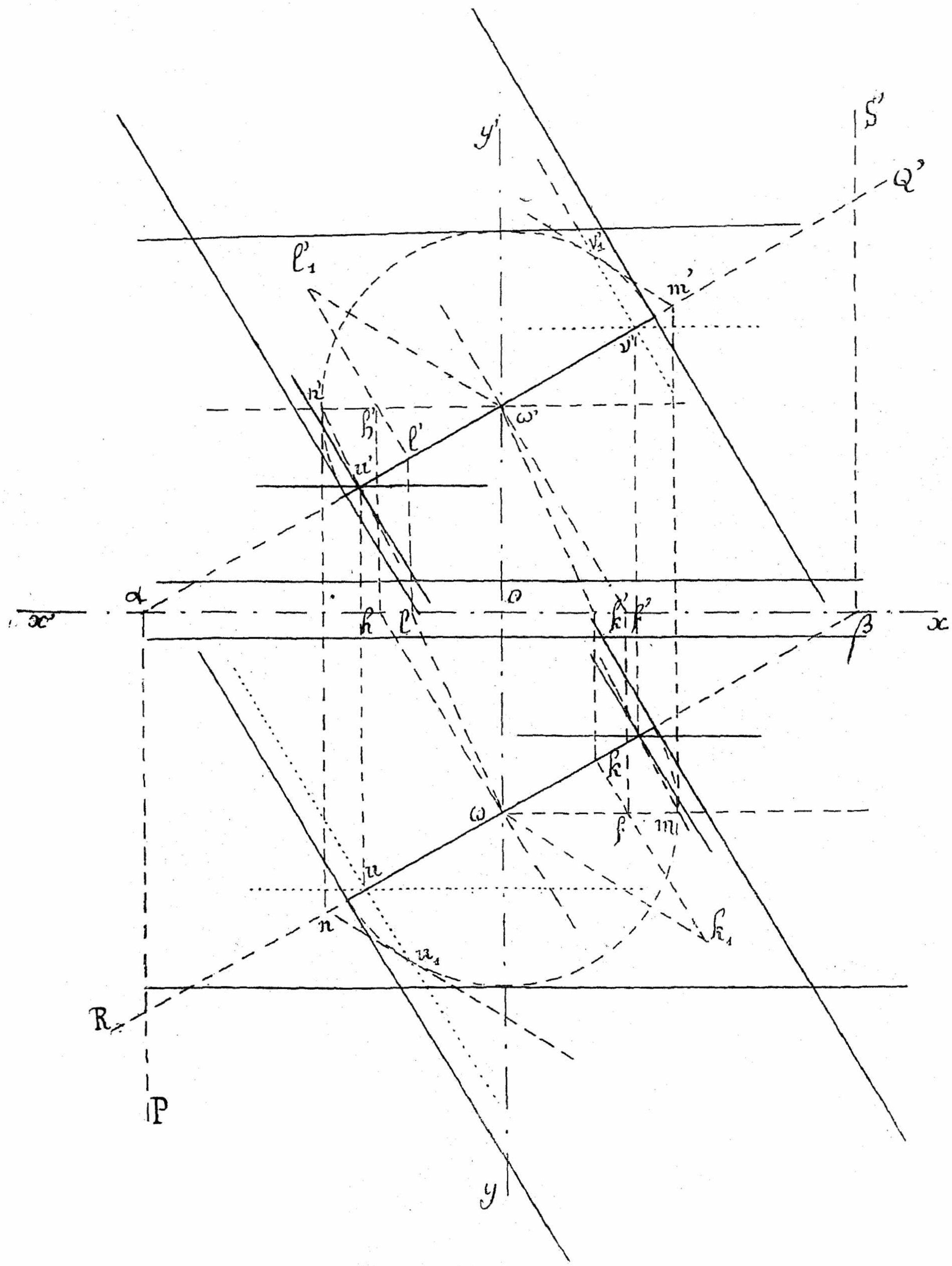


Figure petite épure n° 18.

HΣB et SMT d'une part, HΣC et SPQ d'autre part. La figure fournit deux solutions, on en aurait eu quatre si les deux cercles α et φ avaient été extérieurs, zéro si ces deux cercles avaient été intérieurs. La normale commune demandée est la droite UV perpendiculaire commune aux deux génératrices de contact HB et SM d'un couple de plans tangents parallèles. U de cote 190, V de cote 177.

PETITE ÉPURE N° 18

ÉNONCÉ :

18. — On donne dans un plan de bout $P\alpha Q'$, α $(-60, 0, 0)$ $\widetilde{X\alpha Q} = 30°$, un cercle de centre $\omega\,(0, +35, 35)$ de rayon 30, et dans le plan vertical RBS', B $(60, 0, 0)$, $\widetilde{RBx'} = 30°$ un cercle de centre ω de rayon 30. Les cercles φ et ω sont les sections droites de deux cylindres de révolution. Mener à ces deux cylindres des plans tangents communs sans tracer aucune ellipse.

TEXTE :

Les deux cylindres étant circonscrits à une même sphère, celle de centre ω et de rayon 30, le problème est possible; il suffira de chercher les plans tangents à l'un des cylindres parallèles aux génératrices de l'autre. C'est ce qui a été fait sur l'épure 18. On aurait pu chercher aussi les points communs aux deux cercles donnés et mener en ces points à la sphère ω de rayon 30, des plans tangents qui sont les plans tangents cherchés.

Le plan mené par ω parallèlement aux génératrices

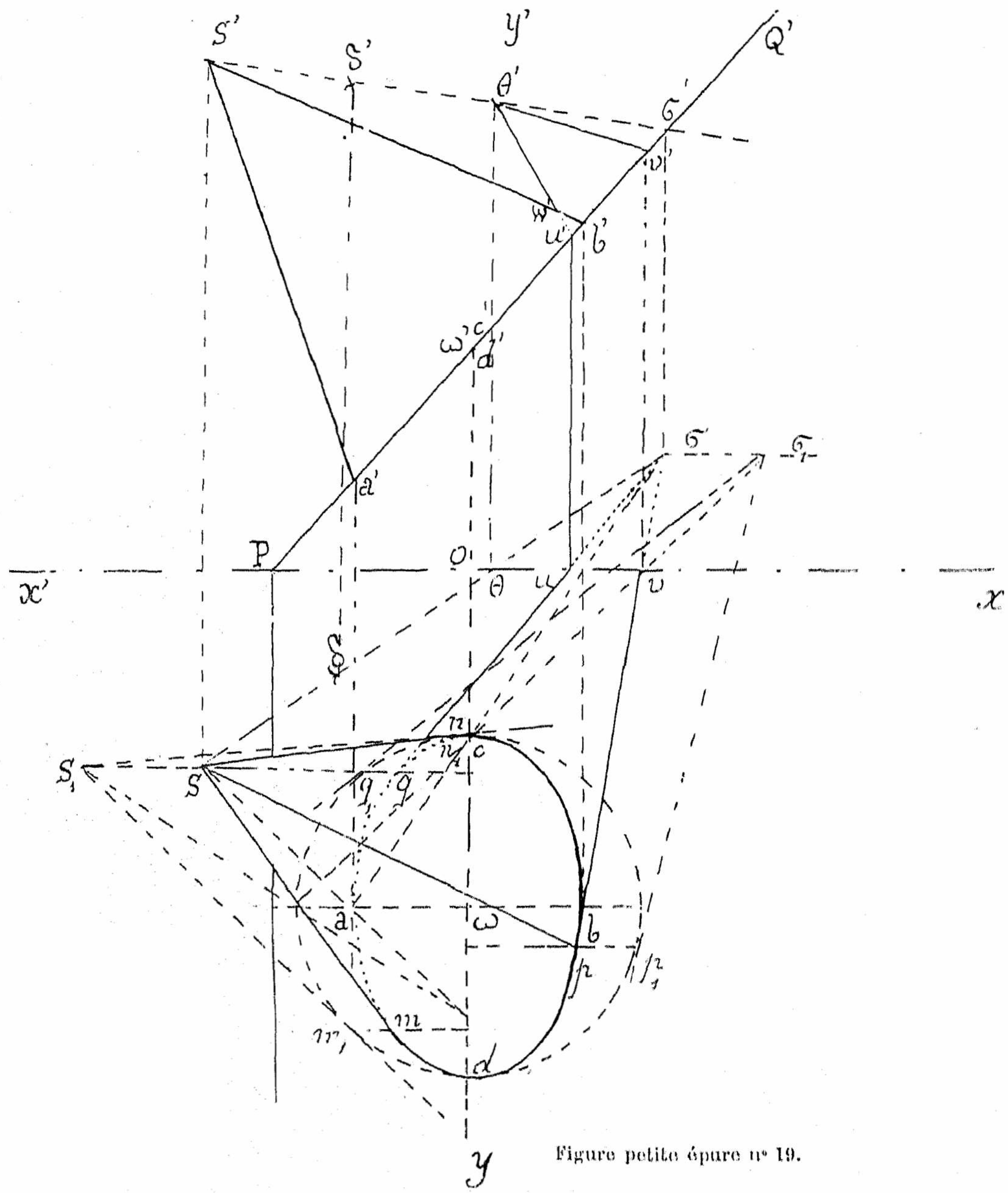


Figure petite épure n° 19.

des deux cylindres est ωFH : il coupe le plan de bout suivant ωL et le plan vertical suivant ωK. Un premier rabattement du plan vertical sur le plan horizontal du point ω donne en ωK_1 le rabattement de ωK en menant au cercle ω de ce plan rabattu des tangentes telles que $u_1 n$ parallèles à ωK_1 relevées en NU ; on obtient en U le point de contact d'un des plans cherchés qui est déterminé par les deux génératrices aux deux cylindres passant en U. On a également déterminé sur l'épure l'autre plan répondant à la question dont le point de contact est V, sans se servir des considérations de symétrie en rabattant le plan de bout sur le plan de front du point ω.

PETITE ÉPURE N° 19

Énoncé :

19. — On donne dans un plan de bout dont la trace verticale PQ′ fait avec $x'x$ un angle de 50°, P (— 25, 0, 0), un cercle de centre Ω (0,45, 30) de rayon 24 ; ce cercle est la base d'un cône de sommet S (— 35, 27, 70). On demande de représenter ce cône, de l'éclairer par des rayons lumineux parallèles à $S\Delta, \Delta$ (— 17, 15, 66) et de rechercher : 1° son ombre propre ; 2° son ombre portée sur le plan du bout P ; 3° s'il y a lieu, le repliement de l'ombre portée sur le mur. (École des Beaux-Arts, 1^{re} session 1912.)

Texte :

Le cercle de centre Ω se projette sur le plan horizontal suivant une ellipse de centre ω dont on a de suite les deux axes ab et cd. Pour avoir les contours apparents du cône, il suffit de mener en plan des tangentes de s à l'ellipse : ce qui a été fait au moyen du cercle homographique : on obtient ainsi les génératrices Sm et Sn. Sur le mur les génératrices de contour apparent sont $S'a'$ et $S'b'$.

Pour avoir les ombres on prend la trace Σ du rayon lumineux $S\Delta$ sur le plan de bout, et de Σ on mène (toujours à l'aide du cercle homographique) les tangentes σp, σq à l'ellipse.

Si maintenant on remarque que $S\Delta$ rencontre le plan vertical avant Σ en Θ, il y a un repliement de l'ombre en $U\Theta V$. Une partie de cette ombre $u'\omega'$ est sur le mur cachée par la projection du cône.

PETITE ÉPURE N° 20

Énoncé :

20. — Un cône a pour base un cercle situé dans le plan de profil α du centre ω (0, 40, 40) de rayon 40 et pour sommet C (— 80, 0, 0). Ombres propres et portées sur les deux plans de projection du cône précédent éclairé par un point lumineux S (— 80, 80, 80).

Texte :

Le cône est immédiatement construit d'après les données de l'énoncé. Les séparatrices d'ombres propres seront les génératrices de contact des plans tangents au cône menés par la droite SC.

La droite SC étant parallèle à la base du cône, les plans tangents en question auront pour trace sur le plan de base du cône des parallèles à SC, on trace ces droites en rabattement ; les points de contact étant alors m_1 et p_1, les séparatrices sont donc SM et SP. Quant aux séparatrices d'ombres portées sur chacun des plans de projection, remarquons d'abord qu'elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la ligne de terre, étant donnée la symétrie des données elles-mêmes. Chacune de ces séparatrices est composée d'une partie rectiligne et d'une partie parabolique puisque le point lumineux S est dans le plan horizontal du point le plus haut du cercle de base et dans le plan de front le plus en avant de ce même cercle de base. La partie rectiligne $S\mu$ est obtenue en cherchant la trace horizontale μ du point M de la séparatrice d'ombre propre et en joignant $S\mu$; quant à la branche parabolique, on en a l'extrémité en μ, un autre point en Υ en prenant l'ombre du point D du cercle qui a le plus grand éloignement. On n'a pas déterminé de point quelconque sur cette branche en projection horizontale, mais cette construction a été faite en projection verticale en prenant l'ombre U du point V rabattue en V_1.

En projection horizontale, on a préféré déterminer les éléments, foyer et tangente au sommet de la parabole. La détermination de ces éléments se fait au moyen de la connaissance des quatre tangentes aux points μ, f, r et l qui, prises deux fois trois à trois, ont donné deux triangles dont les cercles circonscrits φ_1 et φ_2 ont fourni par leur point commun F le foyer de la parabole. Ce foyer, projeté orthogonalement en K sur la tangente en φ, donne un point de la tangente au sommet qui est alors la perpendiculaire Kt menée par K à la direction $S\theta$ de l'axe de la parabole (θ étant le point le plus haut du cercle ω, donnant par suite une ombre à l'*infini*). Indiquons enfin que les tangentes aux divers points l, r, f, μ de la parabole ont été obtenus en projetant du point de vue S les tangentes aux points correspondants du cercle ω, ces tangentes ayant été fournies par le rabattement.

La ponctuation a été établie en supposant le cône rempli de matière opaque.

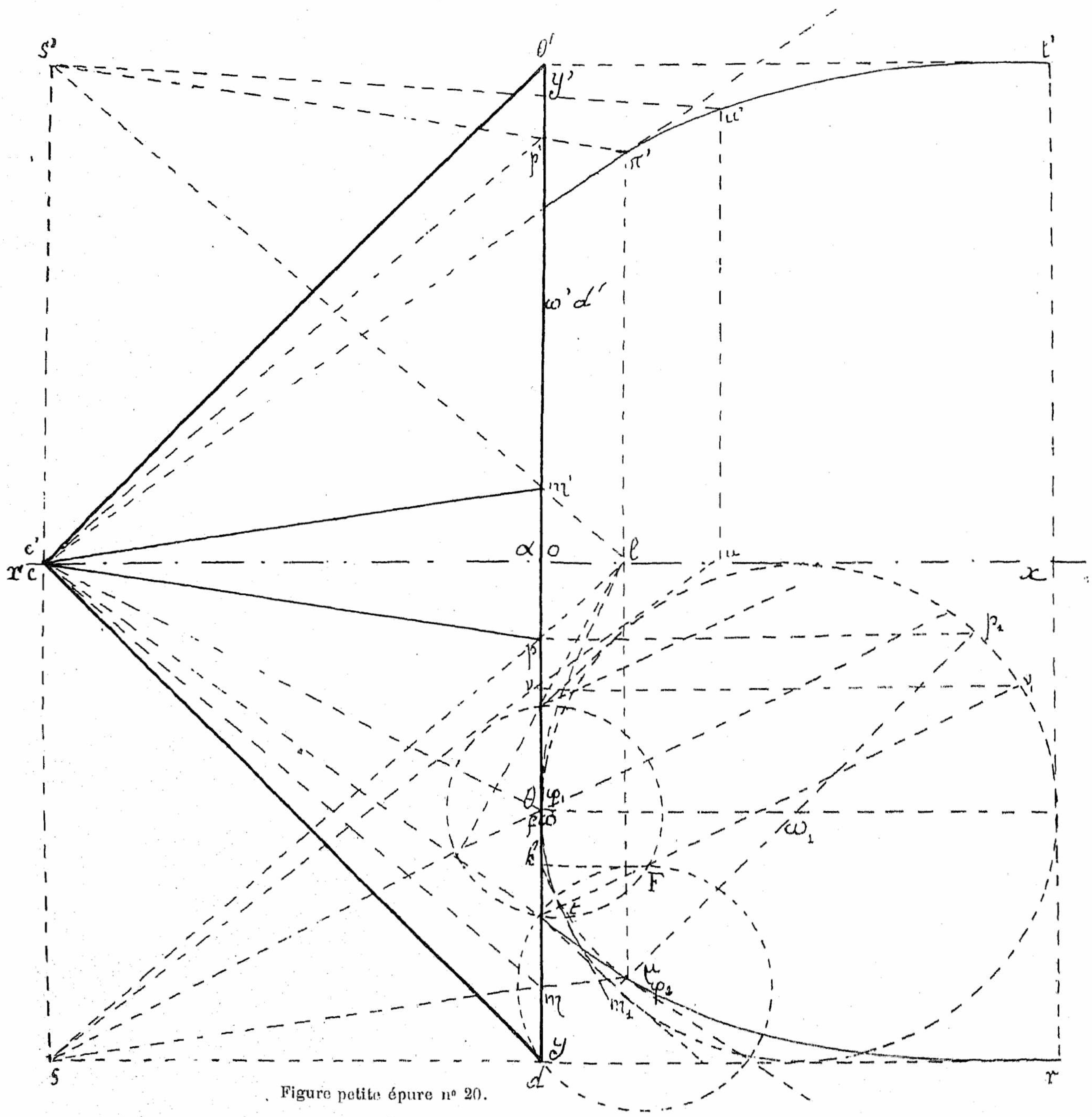


Figure petite épure n° 20.

PETITE ÉPURE N° 21

Énoncé :

21. — On donne deux cercles : l'un de centre φ (0, 30, 0) dans le plan horizontal, l'autre de centre ω (0, 0, 30) dans le plan vertical, de même rayon $R = 30$. Le cercle de centre ω est la section droite d'un cylindre de révolution. Le cercle de centre φ est la base d'un cône de sommet S (40, 0, 115).

Rechercher si l'intersection de ces deux solides est un arrachement ou une pénétration, déterminer ensuite un point courant et la tangente en ce point de l'intersection, puis les points fournis par les plans auxiliaires limites.

TEXTE :

Les génératrices du cylindre étant de bout, les plans auxiliaires seront des plans de bout passant en S. En menant de S′ les tangentes au cercle ω′, on a les traces verticales des deux plans auxiliaires limites tangents au cylindre : un seul de ces deux plans coupe la base

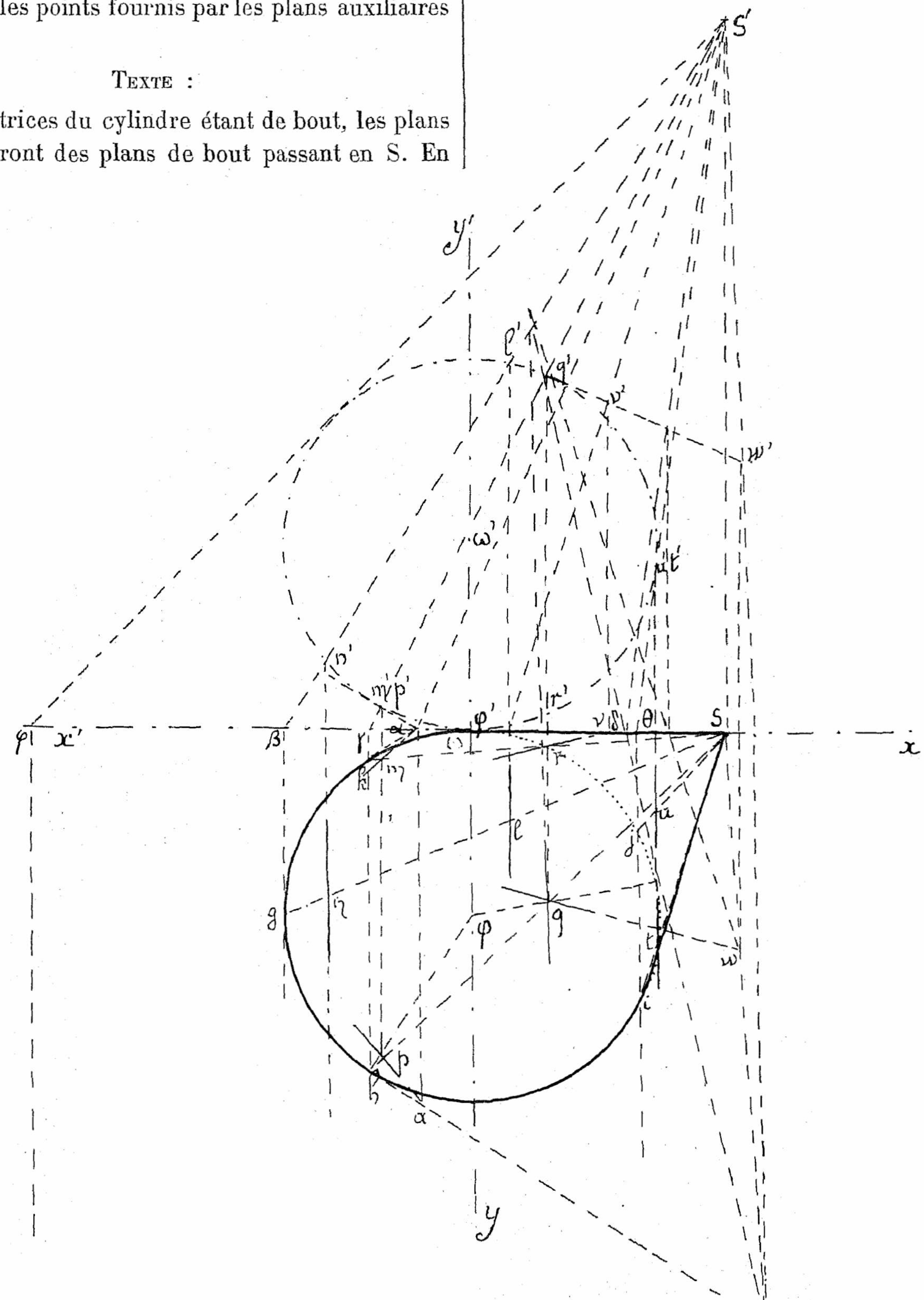


Figure petite épure n° 21.

du cône comme le montre le tracé des traces horizontales : on en conclut que l'intersection est un arrachement. Le plan auxiliaire limite $S'\theta ji$ fournit sur les deux génératrices SJ, SI du cône les deux points U et T où les tangentes sont la génératrice du cylindre. De même, le plan auxiliaire limite $S'\beta g$ tangent au cône fournit deux points N et L où les tangentes sont les génératrices correspondantes du cylindre. On a, de plus, déterminé les quatre points et les quatre tangentes fournis par le plan auxiliaire $S'\gamma kh$, ces points sont M, P, Q, R. Les tangentes en ces points fournis par l'intersection des plans tangents sont AP, αM, VR, WQ.

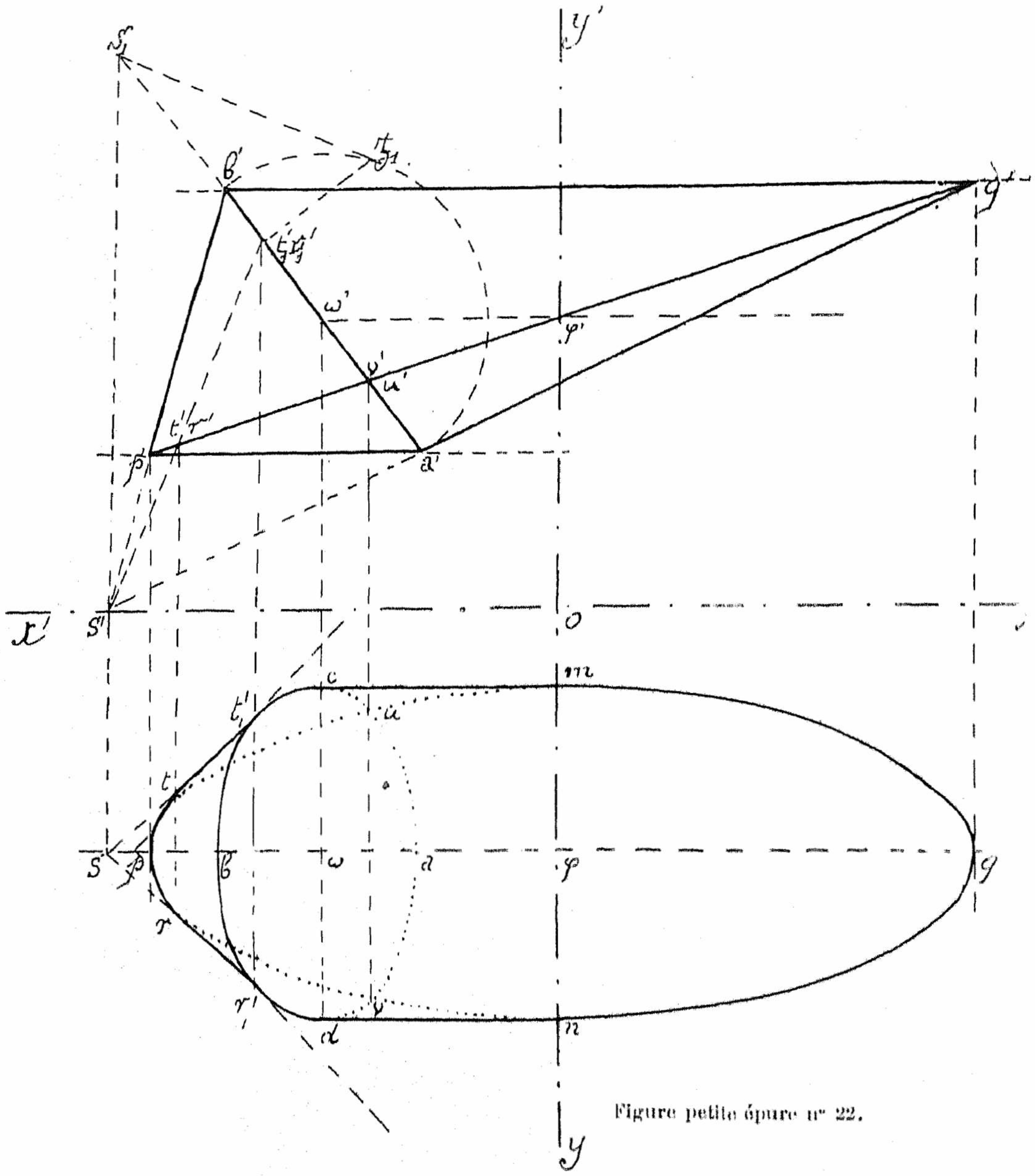


Figure petite épure n° 22.

PETITE ÉPURE N° 22

Énoncé :

22. — On considère un cône de sommet S (— 60, 0,0) ayant pour base un cercle de centre Ω(— 32, 32, 39) de rayon 22,5 dans un plan de bout ayant oy pour trace horizontale et faisant 50° avec ox' et un cylindre de même base à génératrices fronto-horizontales.

Représenter le solide commun à ces deux corps. (Beaux-Arts, octobre 1911.)

Texte :

Les deux surfaces du deuxième degré données ayant une conique, le cercle Ω en commun, se coupent suivant une deuxième conique située par raison de symétrie dans un plan de bout dont la trace verticale $p'q'$ s'obtient en joignant en croix les points d'intersection des contours apparents verticaux du cône et du cylindre. On a de suite l'ellipse de projection en plan dont les deux axes sont mn et pq. On a déterminé sur l'épure les points R et T où le contour apparent du cône touche l'ellipse d'intersection et les points R_1 et T_1, où ces mêmes contours apparents touchent la base. Il a suffi pour cela de mener au cône des plans tangents verticaux, ce qui a été fait en menant du point S_1 situé dans le plan de base sur la verticale du point S des tangentes telles que $S_1 Z_1$, à cette base rabattue sur le plan de front de symétrie : les points de contact de ces tangentes relevés d'abord en R_1 et T_1 sur la base circulaire, puis perspectivement à partir de S en R et T sur le plan de l'ellipse fournissent les points cherchés.

La ponctuation immédiate ne présente aucune difficulté tant en plan que sur le mur.

PETITE ÉPURE N° 23

Énoncé :

23. — On donne deux droites $x'\omega x$ et $y'\omega y$ tracées dans le plan horizontal par le point $\omega(0,60,0)$, la bisec-

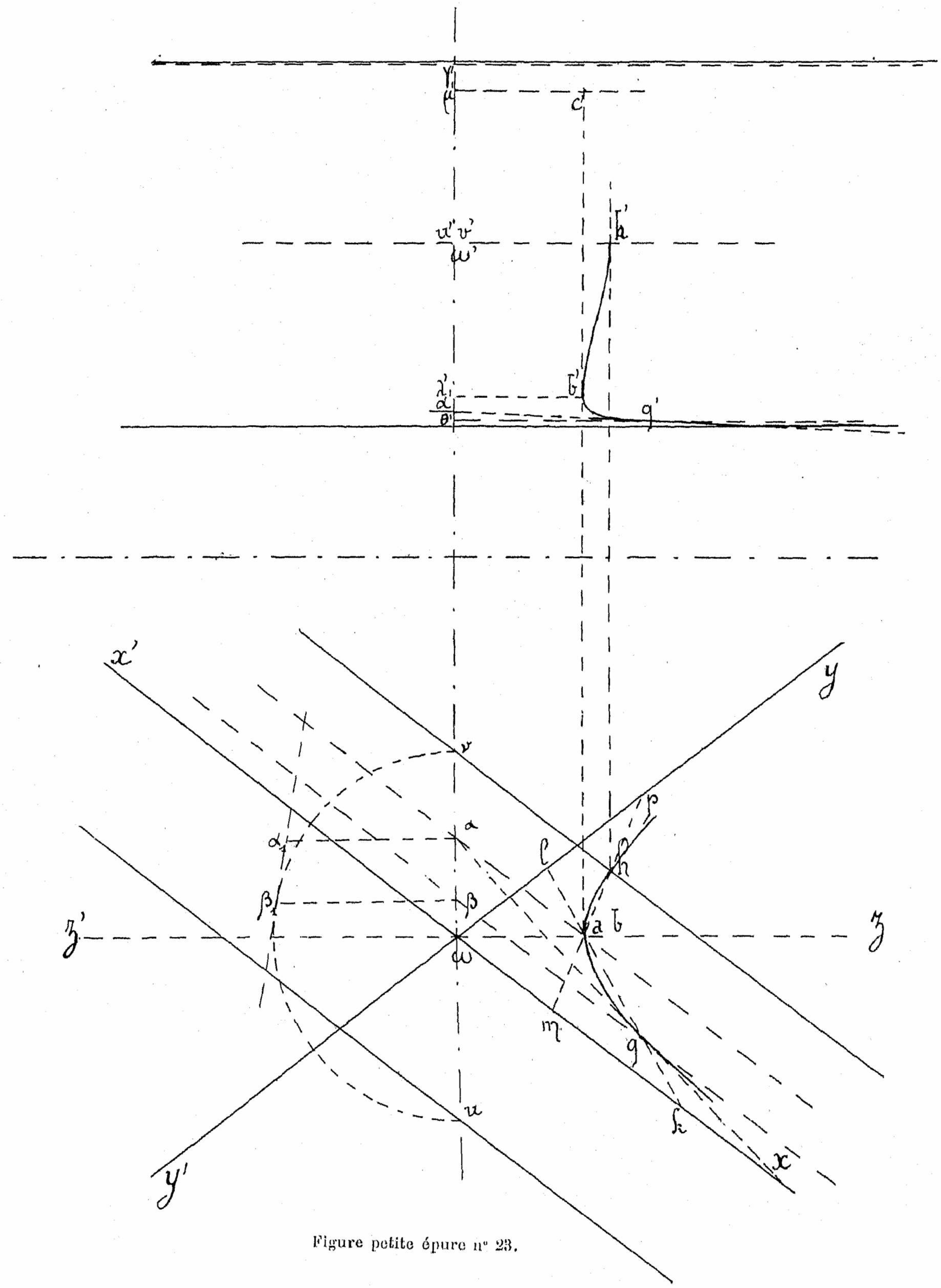


Figure petite épure n° 23.

trice $z'\omega z$ de leur angle $y\omega x$ est parallèle à la ligne de terre et l'angle aigu de ces droites est 37°30'. On considère l'hyperbole dont les asymptotes sont $x'x$ et $y'y$ et dont un sommet est A (20,60,0) ; cette hyperbole est la section droite d'un cylindre. Un autre cylindre a pour base un cercle de centre $\omega(0,60,50)$ de rayon 30 dans un plan de profil, les génératrices de ce cylindre sont parallèles à $x'x$. Trouver la projection verticale de l'intersection des deux cylindres. Branches infinies.

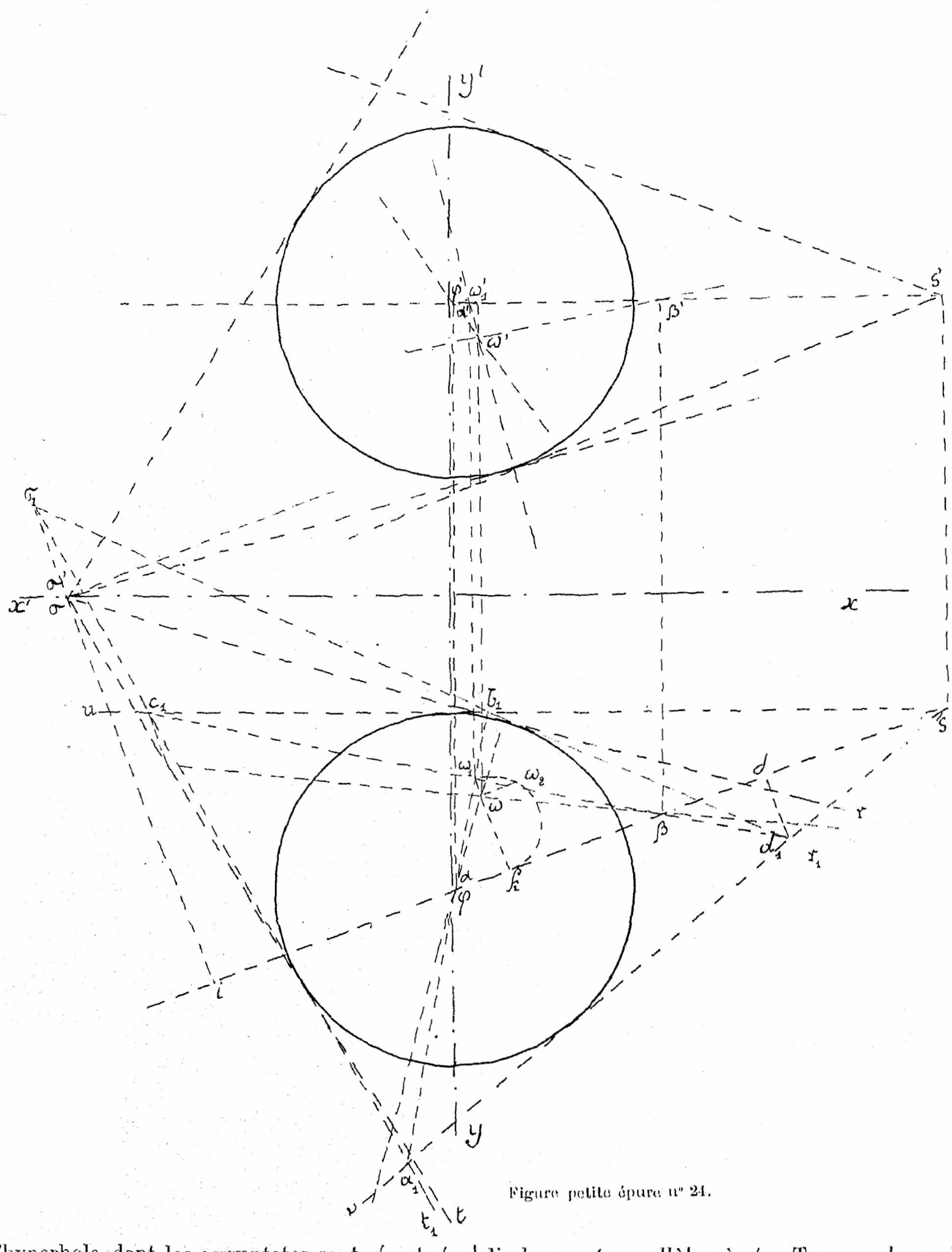


Figure petite épure n° 24.

Texte :

Pour avoir l'intersection, on coupe les deux solides par des plans verticaux parallèles aux génératrices du cylindre circulaire. C'est ainsi que sur l'épure on a déterminé le point H sur le contour apparent horizontal du cylindre circulaire, les deux points B et C le plus à gauche en se servant du plan auxiliaire passant par le sommet A de l'hyperbole. Enfin en un autre point courant Q, on a déterminé la tangente, en prenant l'intersection des deux plans tangents correspondants.

Le plan tangent au cylindre circulaire a été déterminé par sa trace sur le plan de profil UV, cette trace est rabattue en α_1 β_1 et α_1 est le rabattement d'un point de la tangente au point Q, point relevé en (α, α').

On peut, de plus, remarquer que l'intersection présente des branches infinies de deuxième espèce, les asymptotes correspondant à ces branches hyperboliques sont les intersections du plan asymptote $x'x$ du cylindre hyperbolique avec le cylindre circulaire : on trouve ainsi les deux génératrices de contour apparent vertical comme asymptotes.

Ces déterminations effectuées, la projection verticale de la courbe d'intersection est facile à obtenir ; on en a tracé un quart sur l'épure.

PETITE ÉPURE N° 24

Énoncé :

24. — Étant donnés un centre de sphère de centre $\varphi(0,50,50)$ de rayon 30 et deux cônes circonscrits à cette sphère, l'un de sommet S (80, 20, 50), l'autre de sommet $\Sigma(-65,0,0)$, déterminer les plans des deux courbes planes suivant lesquelles se coupent les deux cônes.

Texte :

Les deux cônes étant circonscrits à une même sphère se coupent suivant deux courbes planes dont les plans sont menés perpendiculairement au plan $S\Sigma\varphi$ des deux axes par les deux diagonales intérieures CD et AB du quadrilatère complet formé par les génératrices des deux cônes situées dans le plan $S\Sigma\varphi$.

On rabat donc d'abord le plan $S\Sigma\varphi$ sur le plan horizontal du centre de la sphère ; le point S ne bouge pas, σ vient en σ_1, la section de la sphère est rabattue suivant le contour apparent de la sphère. On mène alors de S et de σ_1, les tangentes au contour de la sphère, les diagonales du quadrilatère de ces quatre tangentes fournissent en a_1b_1, c_1d_1 les rabattements des droites AB et CD qui se coupent en ω_1 ; ce point se relève en ω et les deux droites en $\alpha\omega$ et $\beta\omega$; α et β étant sur la charnière.

Pour avoir les deux plans cherchés il suffit, par le point de rencontre des deux droites AB et CD d'abaisser une perpendiculaire au plan de ces deux droites ; cette perpendiculaire a été tracée d'abord au moyen du rabattement du plan vertical mené par ω sur l'horizontale IJ du plan $S\Sigma\varphi$ des axes : dans ce plan la trace du plan $S\Sigma\varphi$ est rabattue en $K\omega_2$, la perpendiculaire à ce plan est donc $\omega\omega_2$, la perpendiculaire est alors relevée en $(\omega\omega_1, \omega'\omega'_1)$ et les deux plans demandés sont, l'un déterminé par AB et $\omega\omega_1$, l'autre par CD et $\omega\omega_1$. Pour avoir l'intersection des deux cônes il suffirait donc de tracer les deux sections planes d'un des cônes par ces deux plans.

PETITE ÉPURE N° 25

Énoncé :

25. — Étant donné un segment AB, A (0, 90, 40), B (0, 30, 40), on mène par ce segment les deux plans faisant 45° avec le plan horizontal, et dans chacun de ces plans on trace le cercle de diamètre AB ; l'un de ces cercles, celui dont le point le plus haut a un x positif, est la base d'un cône de sommet S (60, 60, 40), l'autre est la section droite d'un cylindre de révolution. Quelle est la nature de la projection verticale de l'intersection de ces deux solides ? Déterminer un point et la tangente en ce point de cette projection verticale, ainsi que les tangentes aux points de cette projection situés sur les génératrices de contour apparent du cône et du cylindre.

Texte :

Les deux solides ayant un plan de symétrie commun de front, la biquadratique gauche de l'intersection se projette sur le plan vertical suivant une courbe du

2ᵉ degré qui est ici une hyperbole comme le prouveront les déterminations qui vont suivre. On a déterminé un point courant H et en coupant les deux solides par une sphère passant par une section circulaire UV du cône et ayant son centre sur l'axe du cylindre. Cette sphère coupe le cylindre suivant deux cercles dont l'un IJ coupe le cercle UV en deux points projetés verticalement en h' : la tangente $h'z'$ en ce point h' s'obtient en joignant ce point h' au point de rencontre des intersections des plans tangents au cône et au cylindre avec le plan de symétrie commun. (Ce point est ici en dehors de l'épure, les traces des deux plans tangents étant $\beta'\gamma'$ d'une part et $S'\alpha'$ d'autre part). La courbe passe par les points projetés en m', n', p', q' à l'intersection des contours apparents en projection verticale. Les méthodes habituelles pour déterminer les tangentes en ces points ne réussissent pas, la tangente étant de bout. On sait que dans ce cas la tangente à la courbe du second degré qui est la projection de l'intersection est la trace sur le plan de symétrie du plan osculateur à la courbe au point considéré. Cette trace est obtenue en traçant la corde commune des deux cercles de Meunier de chacune des surfaces. Ici, au point p' par exemple, un centre de courbure de section normale est en ω_1 pour le cône et en ω_2 pour le cylindre, les deux cercles de Meunier ont pour diamètres $p'\omega_1$ et $p'\omega_2$ la corde commune est donc la hauteur $p't$ du triangle $p'\omega_1\omega_2$. Cette tangente laissant de part et d'autre d'elle deux points m' et q' de la courbe,

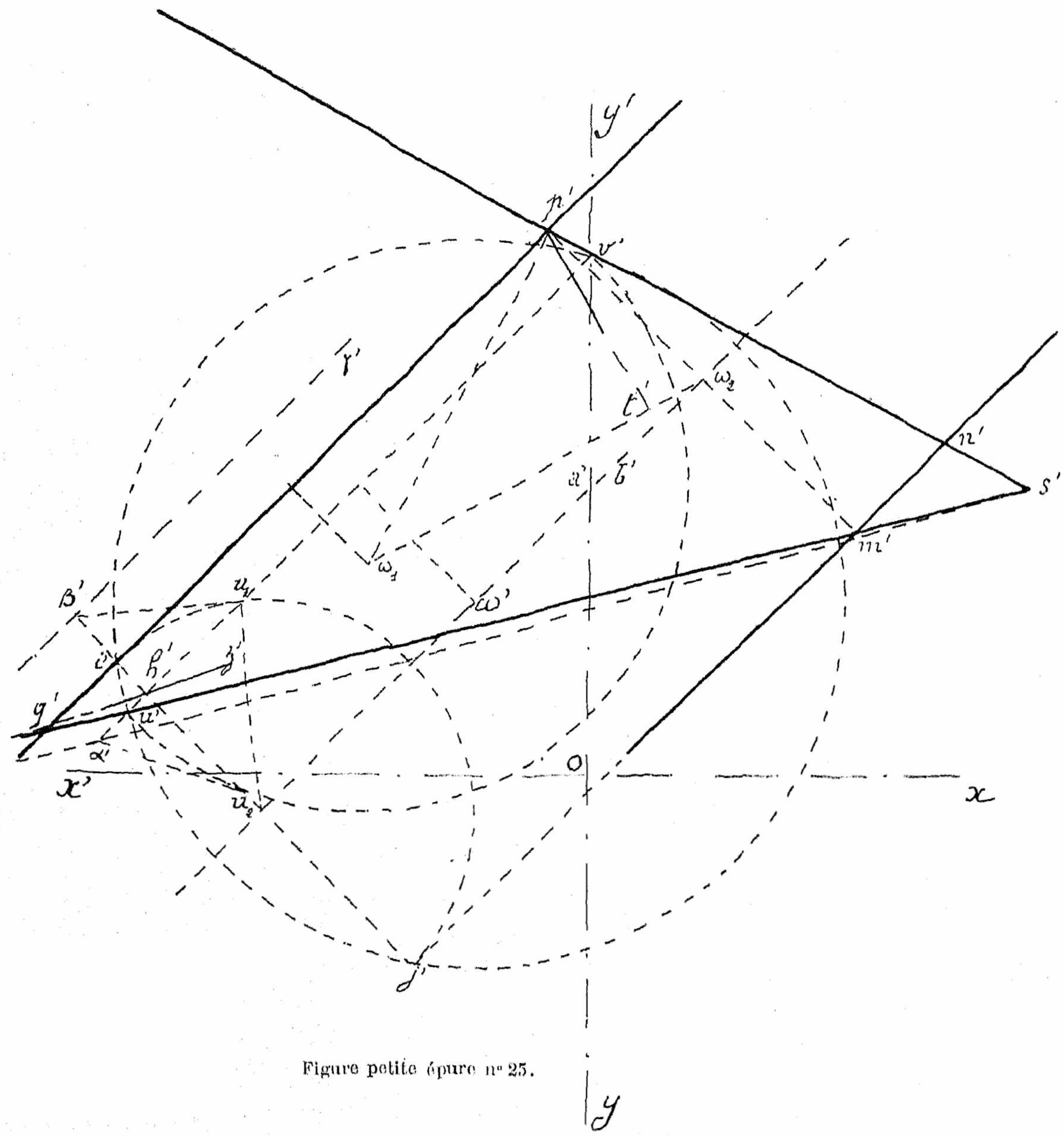


Figure petite épure n° 25.

cette courbe ne peut être qu'une hyperbole, ainsi que nous l'avions annoncé.

PETITE ÉPURE N° 26

ÉNONCÉ :

26. — On donne dans le plan horizontal deux cercles de centre φ (— 50, 50, 0) et ω (50, 50, 0) : ces cercles sont les bases, le premier d'un cône de sommet S (— 50, 0, 70), le 2e d'un cône de sommet T (50, 0, ?) dont on demande de fixer la cote de façon à ce que l'intersection présente un ou plusieurs points doubles.

TEXTE :

Pour que l'intersection présente des points doubles, il faut que la droite ST des sommets coupe le plan des bases sur une des tangentes communes aux deux bases. Les tangentes communes sont ici au nombre de quatre. Tout d'abord, par suite de la symétrie des données, si on donne à T la cote 70, la droite ST est parallèle aux deux tangentes communes extérieures et dans ces conditions, il y a deux points doubles à l'intersection aux points de rencontre des génératrices SA, TB d'une part en U de cote 35, aux points de rencontre des génératrices SC, TD d'autre part en V de cote 35 également. Mais la trace de ST peut être aussi sur l'une ou l'autre des tangentes communes intérieures. Dans l'un de ces cas, la cote de T est 9,6, dans l'autre elle est 507 : le premier de ces cas donne un seul point double N de cote 7,3 à l'intersection des génératrices SE, TF, le second donne un seul point double M de cote 47,7 à l'intersection des génératrices SG, TH. Remarquons que ces deux derniers cas qui ne donnent lieu qu'à un seul point double ne fournissent pas des solutions symétriques, car les cotes des points trouvés ne sont pas égales.

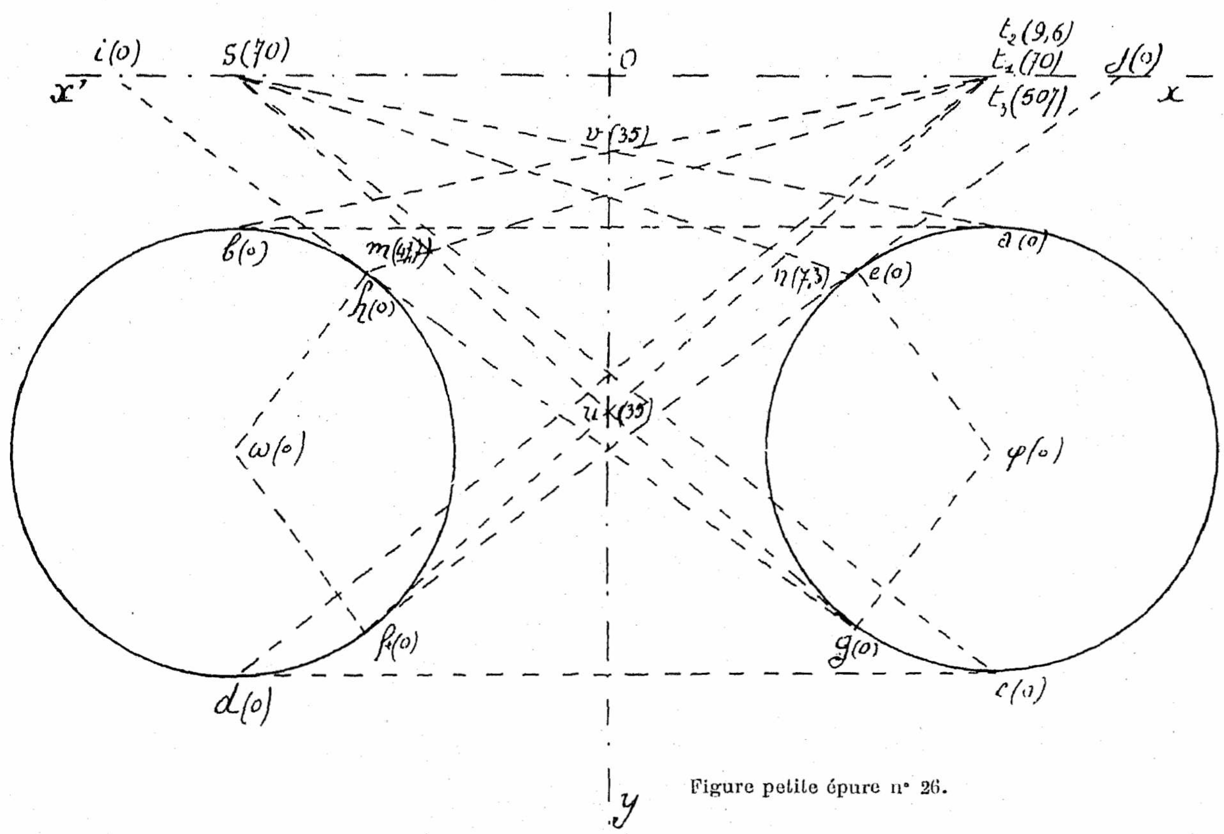


Figure petite épure n° 26.

PETITE ÉPURE N° 27

ÉNONCÉ :

27. — Un cercle de centre (0, 50, 0) de rayon 35 dans le plan horizontal est la base commune de deux cônes de sommets S (— 30, 0, 50) et T (60, 0, 200). Re-

chercher la nature de l'intersection des deux cônes et trouver un point courant et la tangente en ce point.

Texte :

Les deux cônes ayant déjà le cercle ω en commun ont encore en commun une seconde conique dont le plan est conjugué harmonique du plan du cercle ω par rapport aux deux plans passant l'un par S, l'autre par T et tous deux par la corde de contact des tangentes au cercle ω issues de la trace σ de la droite ST sur le plan du cercle ω. On a donc déterminé sur l'épure le point σ (— 60, 0, 0) on a mené de σ les deux tangentes σa, σb au cercle ω, puis on a pris le point θ conjugué harmonique de σ par rapport au segment ST ; θa, θb, sont alors, d'après ce qui précède, les tangentes à la deuxième conique en a et b. On a donc de cette conique deux points et deux tangentes, un plan auxiliaire tel que σij permet d'en déterminer, deux autres points u et v

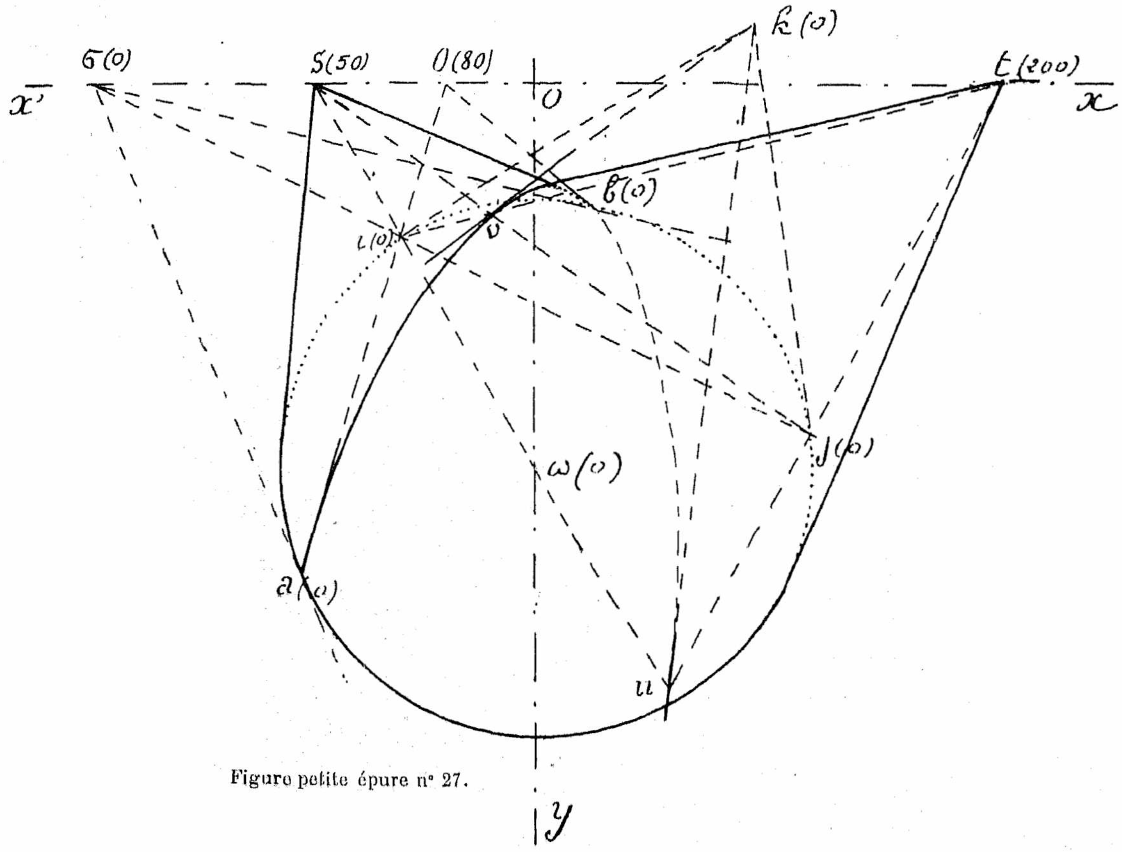


Figure petite épure n° 27.

et les tangentes en ces points : la nature de la section est ici elliptique car le plan parallèle au plan θab mené par T ne coupe évidemment pas le cône.

PETITE ÉPURE N° 28

Énoncé :

On donne un cône ayant pour base dans le plan horizontal un cercle de centre O et pour sommet le point S de cote donnée.

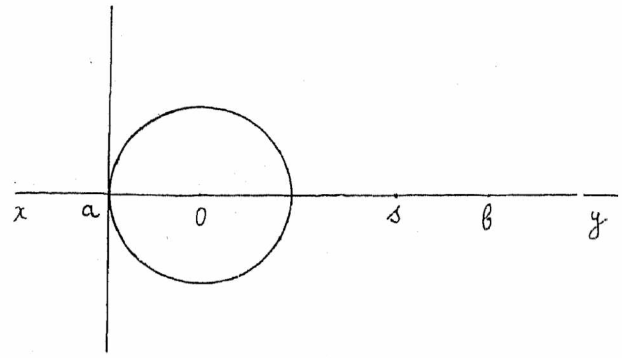
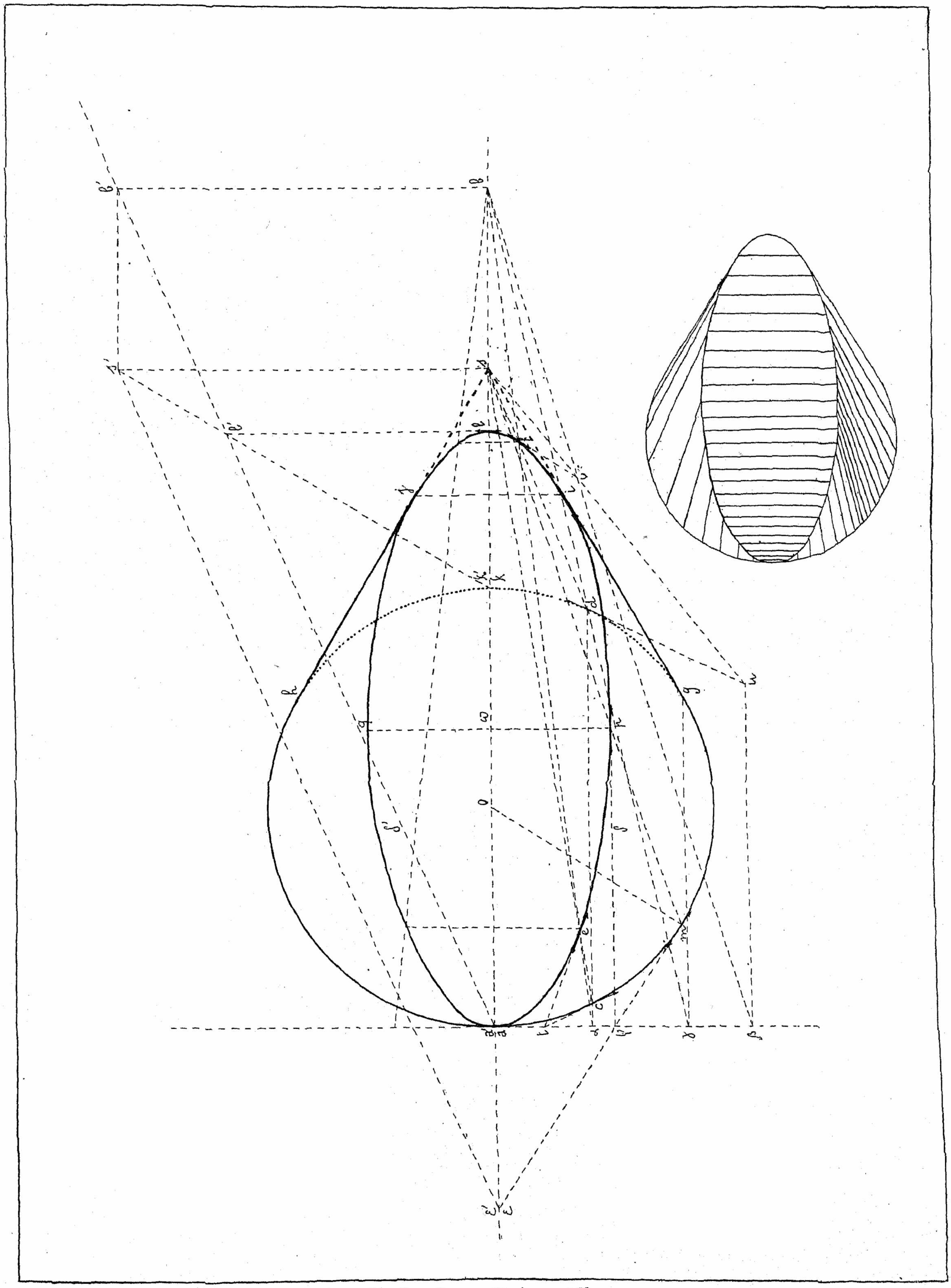


Fig. 28.

Représenter en projection horizontale la section de ce cône par un plan ayant pour trace dans le plan horizontal la tangente au cercle O au point a situé sur le prolongement de sO et passant par le point B, projeté horizontalement en b sur sO et de même cote que le point S.



Deuxième figure petite épure n° 28.

TEXTE :

La section du cône par le plan se projette horizontalement suivant une ellipse dont nous connaissons déjà la direction des axes, l'un parallèle à la tangente en a au cercle, l'autre perpendiculaire à cette direction et projeté suivant soa, car le plan vertical soa est un plan de symétrie tant pour le cône que pour le plan sécant auquel il est perpendiculaire.

Point courant et sa tangente. — Nous prendrons pour plans auxiliaires des plans passant par la droite SB. Cette droite rencontre le plan sécant au point bb' et est parallèle au plan de base du cône, par suite en projection horizontale, les traces des plans auxiliaires sur le plan sécant passeront toutes par le point b et les traces de ces plans sur le plan horizontal seront parallèles à sb.

Sur l'intersection du plan sécant et du plan horizontal, prenons un point quelconque α et considérons le plan auxiliaire passant par ce point. Son intersection avec le plan sécant se projette en $b\alpha$, sa trace sur le plan horizontal, parallèle à sO rencontre le cercle de base aux points c et d, d'où les génératrices du cône projetées sc et sd qui rencontrent $b\alpha$ aux points e et f, qui sont deux points de l'ellipse.

Cherchons la tangente en e. — C'est la projection de l'intersection du plan sécant et du plan tangent au cône le long de SE. Un premier point est le point e. Le plan tangent a pour trace horizontale la tangente en C au cercle O.

Cette tangente rencontre $a\alpha$ au point t qui est un second point de l'intersection, et la tangente en e est te. Si on veut obtenir la tangente en f de la même manière, on constate que la tangente en d au cercle ne rencontre pas $a\alpha$ dans les limites de l'épure. Dans ce cas considérons le plan tangent le long de SD comme la limite d'un cône, on se sert d'un plan auxiliaire, soit le plan passant par β ; il coupe le plan sécant suivant $b\beta$ et le plan horizontal suivant βu parallèle à as ; βu rencontre la tangente en d au cercle au point u ; le plan auxiliaire coupe donc le plan tangent suivant su, qui rencontre $b\beta$ au point v, la tangente en f est vf.

Points sur les contours apparents du cone. — Le contour apparent horizontal du cône est formé par les tangentes sg et sh menées de s au cercle et nous obtiendrons les points sur ce contour apparent en prenant pour plan auxiliaire le plan $b\gamma g$, qui donne le point i sur sg ; d'où le symétrique j sur sh.

Sommet de l'ellipse. — On obtient les sommets sur le grand axe so en coupant par le plan vertical so, et en faisant une projection verticale auxiliaire en prenant so pour ligne de terre : S se projette en s', B en b'. Ce plan vertical coupe le cône suivant les génératrices projetées verticalement en $s'a'$ et $s'k'$, et le plan sécant suivant $bab'a'$. $b'a'$ rencontre $s'a'$ et $s'k'$ en a' et l', qui se rappellent en a et l, qui sont les sommets du grand axe. D'où le centre ω de l'ellipse ; le petit axe est la perpendiculaire élevée en ω à al. Cherchons les sommets de cet axe. En ces points la tangente à l'ellipse sera parallèle à so, c'est-à-dire sera la projection horizontale d'une droite de front Δ située dans le plan tangent au cône. L'intersection de ce plan tangent avec le plan vertical so sera une droite parallèle à Δ, or la projection verticale de Δ est δ' ou $a'b'$ puisque Δ est aussi dans le plan sécant.

Par conséquent l'intersection de ce plan tangent au cône et du plan vertical sera la droite $s'\varepsilon'$-$s\varepsilon$ menée par le sommet du cône parallèlement à $a'b'$-ab. Elle rencontre la ligne de terre au point $\varepsilon\varepsilon'$. La trace horizontale du plan tangent est la tangente εm, menée de ε au cercle ; d'où la génératrice sm du cône qui rencontre le petit axe au point μ qui est un des sommets.

PETITE ÉPURE N° 29

ÉNONCÉ :

29. — On donne un cône de sommet S (— 30, 62, 68) ayant pour base une ellipse projetée verticalement suivant le cercle de centre ω(5, 35, 35) et de rayon 25 ; le plan de cette ellipse est le plan vertical PαQ, $'\alpha$, (—26, 0, 0) $\widehat{x'\alpha P} = 60°$. On coupe ce cône par le plan perpendiculaire à Sω au point ω où Sω rencontre le plan vertical PωQ'. Trouver les points le plus haut et le plus bas de la section.

TEXTE :

Pour avoir les points demandés, il faut mener des tangentes horizontales à la section. Ces tangentes seront parallèles aux horizontales du plan RβS' mené par ω

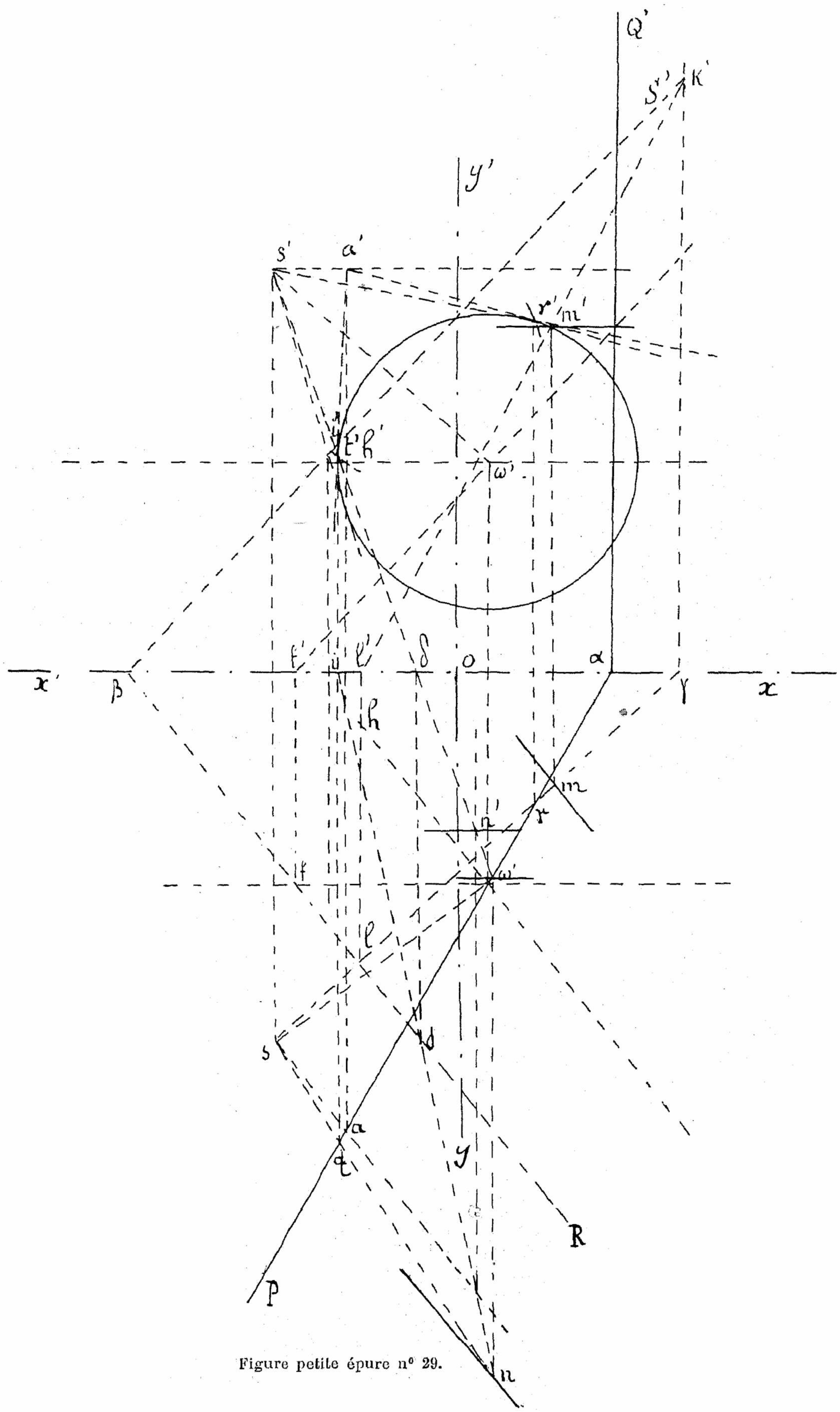


Figure petite épure n° 29.

perpendiculaire à $S\omega$. Pour avoir ces tangentes on mènera donc par S une parallèle aux horizontales du plan sécant et on en prendra la trace A sur le plan de base $P\alpha Q'$ du cône. Du point A on mènera des tangentes AR et AT à la base du cône qui est circulaire en projection verticale. Ces tangentes ont R et T pour points de contact. Les points cherchés sont sur les génératrices SR, ST aux points de rencontre avec le plan sécant. L'intersection de SR avec ce plan est obtenue en coupant par le plan vertical projetant SR : on trouve ainsi le point M. L'intersection de ST avec le plan sécant est obtenue en se servant comme plan auxiliaire du plan projetant verticalement ST, *on trouve ainsi le point* N qui fournit le second point répondant à la question. Remarquons que cette méthode est applicable non seulement à la recherche des points le plus haut et le plus bas, mais encore des points le plus à droite et le plus à gauche et plus *généralement à la recherche* des points où les tangentes ont une direction donnée parallèle au *plan sécant.*

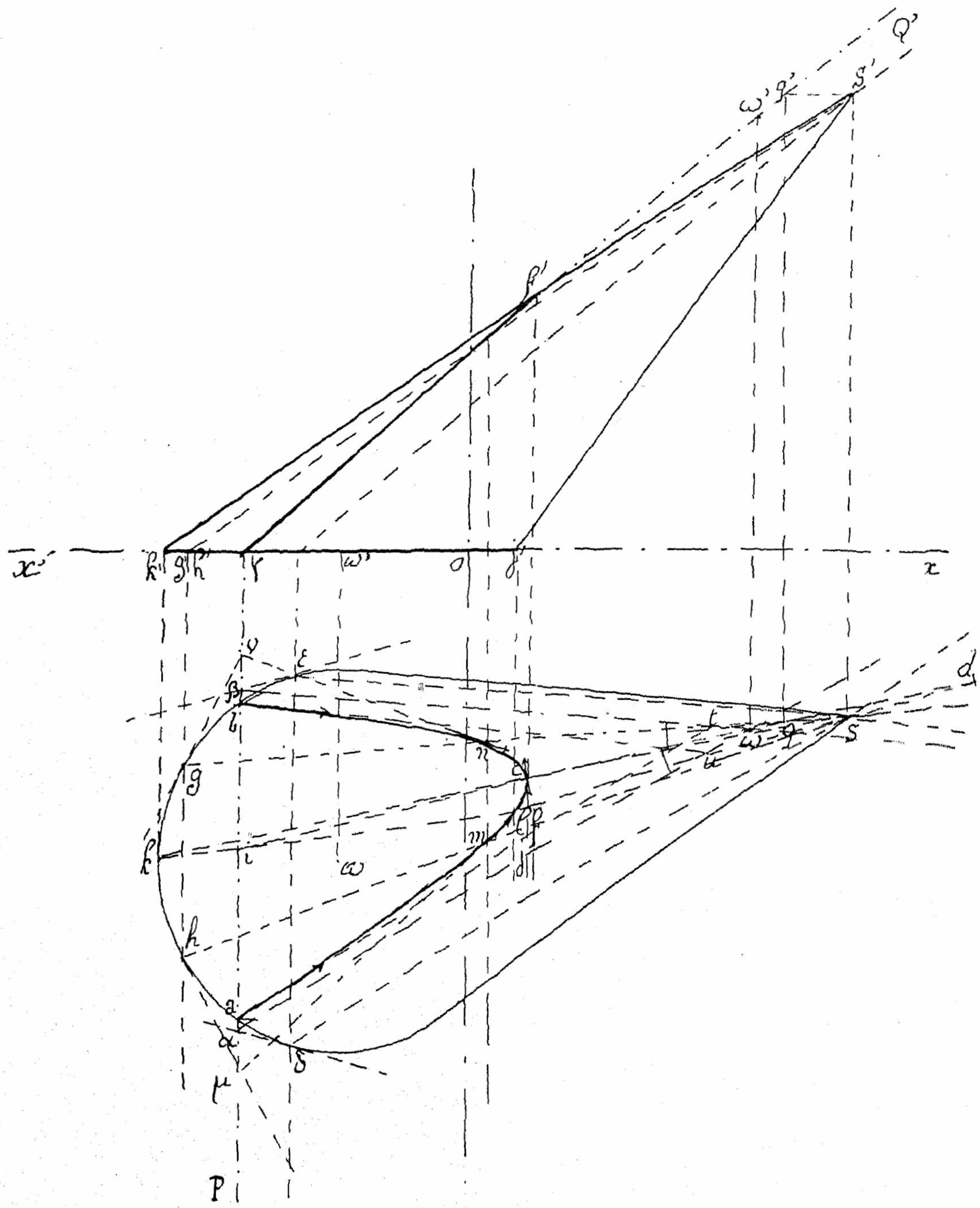


Figure petite épure n° 30.

PETITE ÉPURE N° 30

Énoncé :

30. — *On donne un cône* de sommet S (55, 25, 65) ayant pour base dans le plan horizontal un cercle de centre Ω (— 20, 45, 0) de rayon 28 et un plan $P\gamma Q'$ de bout, γ (—35, 0, 0) $\widehat{Q'\gamma x} = 40°$. Déterminer *l'intersection du cône par* le plan. (Points courants, tangentes en ces points, asymptotes, tangentes aux points de la section de cote 0) (*Beaux-Arts, 1^re^ session* 1911).

Texte :

On a mené par S le plan parallèle au plan $P\gamma Q'$: ce plan a pour trace horizontale une droite parallèle à γP qui coupe le cercle O en δ et ε : la section est donc une hyperbole de directions asymptotiques $S\varepsilon$, $S\delta$; les asymptotes sont les droites $\omega\alpha$, $\omega\beta$, intersections des plans tangents le long de $S\delta$ et $S\varepsilon$ avec $P\gamma Q'$. En menant la bissectrice ωi de $\widehat{\alpha\omega\beta}$, on a l'axe de l'hyperbole : on trouve les sommets en coupant le cône par le plan ISQ passant par S et IΩ : SQ est une horizontale de ce plan qui donne dans le cône les deux génératrices SK, SL, d'où sur ωi les sommets c et d de l'hyperbole. En coupant par le plan de bout $S'g'h'gh$ on trouve par la méthode générale les points courants M et N et les tangentes μm et νn en ces points en plan. Les tangentes en a et b ont été déterminées par une construction géométrique grâce aux asymptotes : c'est ici ce qu'il y a de plus simple.

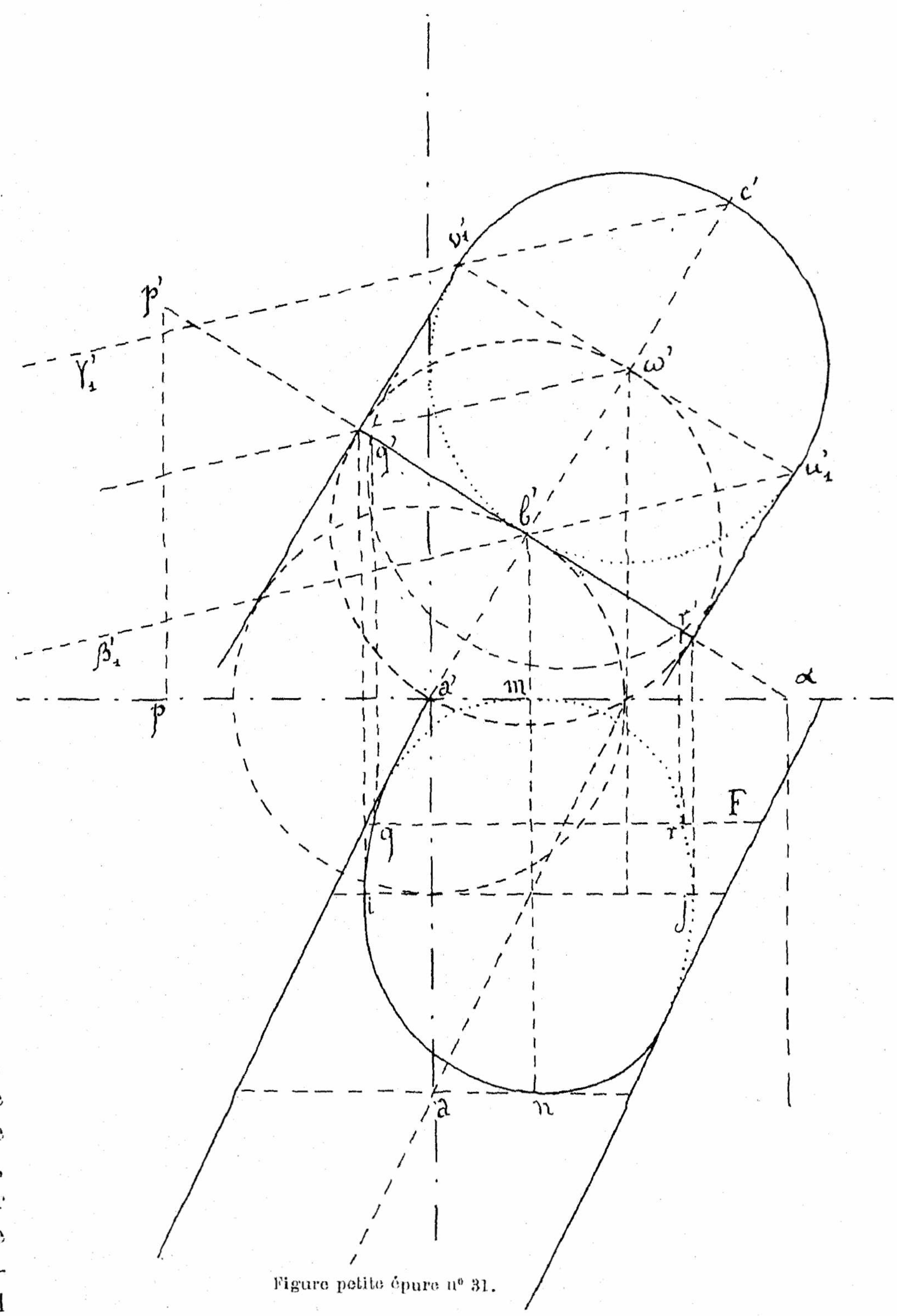


Figure petite épure n° 31.

PETITE ÉPURE N° 31

Énoncé :

31. — On donne un cylindre ayant pour base le cercle du plan vertical de centre ω (30, 0, 50) de rayon 30; la direction des génératrices de ce cylindre est ωA, A (0, 60, 0). Mener par le point P (—40, 0, 60) un plan non de front coupant ce cylindre suivant un cercle; projections de cette section.

Texte :

Le cylindre étant à base circulaire sur le plan vertical, il suffit, pour avoir la section *antiparallèle*, de mener par la base une sphère quelconque qui coupera le cylindre suivant une deuxième section plane, c'est-à-dire suivant un cercle. Par suite de la symétrie du cylindre par rapport au plan de bout projetant verticalement la ligne ωA, il suffit de considérer ce qui se passe dans ce plan, ce à quoi on arrive en rabattant ce plan sur le plan vertical; A vient en a' et ω ne bouge pas; les génératrices du cylindre situées dans ce plan viennent en $b'\beta_1'$ et $c'\gamma'_1$, la section de la sphère de diamètre $b'c'$ est rabattue suivant le cercle de même diamètre et, dans ces conditions, la trace du plan de la nouvelle section est $u'_1v'_1$. Comme ici $u'_1v'_1$ est perpendiculaire à $b'c'$, on en déduit que le deuxième plan de section circulaire est de bout. Il suffit donc, pour avoir le cercle demandé, de mener par P un plan de bout parallèle à celui qu'on vient de déterminer, sa trace verticale est $p'\alpha$. Il reste alors à tracer la projection horizontale de ce cercle : en coupant par un plan de front quelconque F le plan de section et le cylindre, on trouve deux points p et q quelconques de la projection : on aura le sommets m et n du grand axe en utilisant les plans de front passant, l'un par ω, l'autre par A ; les sommets du petit axe i et j sont fournis par le plan de front passant par le milieu de Aω, c'est-à-dire par le plan équidistant de ceux qui ont fourni les sommets du grand axe. On a alors des données suffisantes pour tracer la courbe cherchée. On a ponctué cette courbe en supposant le cylindre plein de matière opaque.

PETITE ÉPURE N° 32

Énoncé :

32. — On donne un cône de révolution de sommet S (—50, 40, 50), la base est un cercle de rayon 25 dans le plan horizontal. On coupe ce cône par le plan bissecteur du premier dièdre. Tracer sur la région libre du plan horizontal le développement de la section du cône par ce plan : on cherchera les points du développement correspondants aux points situés sur les génératrices dont les pieds sont les sommets de l'hexagone régulier convexe inscrit dans la base et dont l'un des sommets est dans le plan de profil du sommet. Points d'inflexion de la transformée.

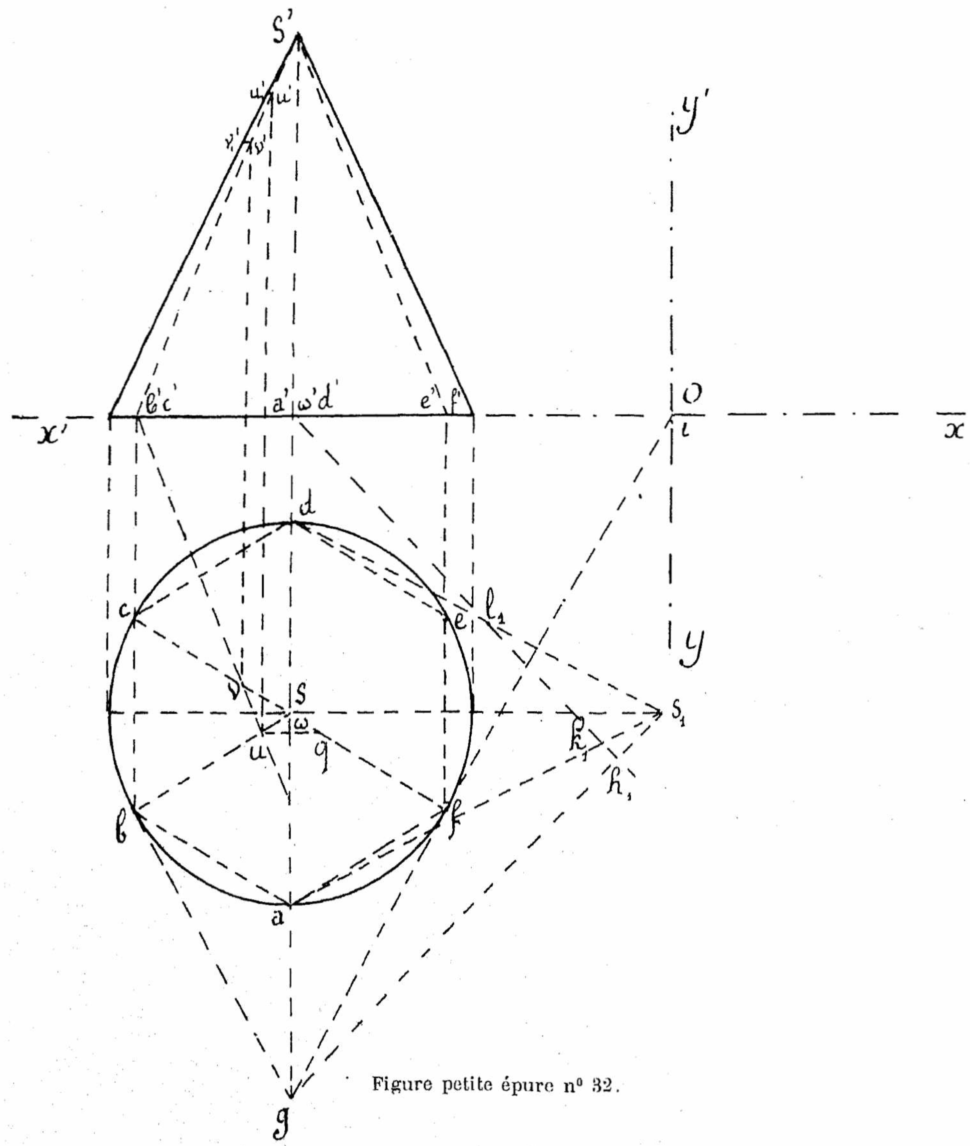
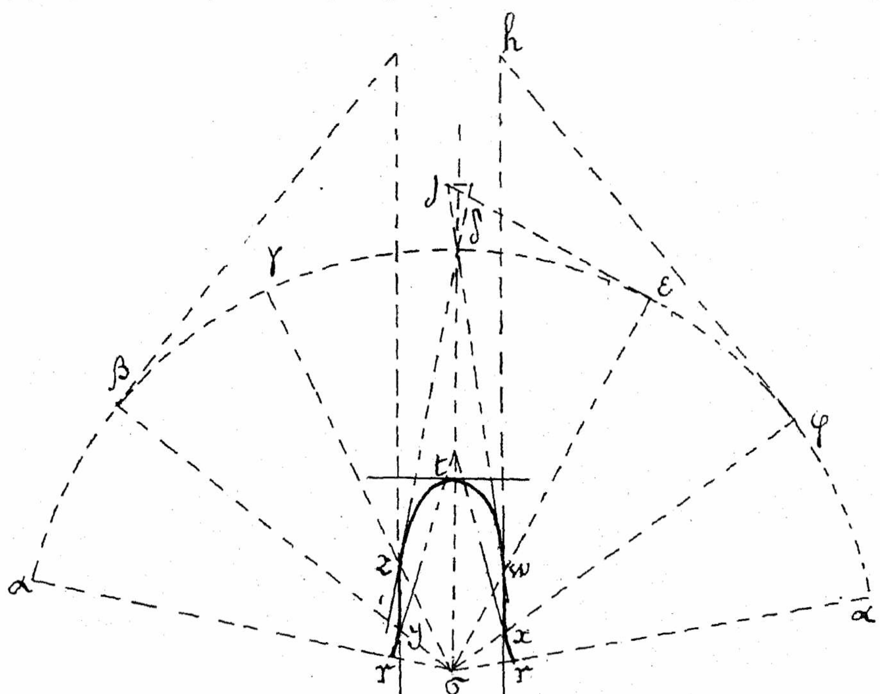


Figure petite épure n° 32.

Texte :

Le cône étant construit, on marque sur sa base les six sommets ABCDEF de l'hexagone indiqué dans l'énoncé. Un rabattement qui amène le sommet S en S_1 permet d'obtenir les points du premier bissecteur sur les génératrices SA et SD : les rabattements de ces points sont h_1 et l_1. On a donc de suite les longueurs s_1h_1 et s_1l_1 qui serviront au développement. Les points sur les génératrices sb et sc sont obtenus en u et v, $'b'p$ étant la symétrique de $s'b'$ par rapport à xx'. Une rotation donne en Su_1 et Sv_1 les longueurs à employer dans le développement. Inutile, par suite de symétrie, de s'occuper des points sur Se et Sf.

Le sommet du cône à développer étant placé en σ, l'arc qui est l'image du cercle de base est tracé en $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi\alpha$: son rayon est S_1a, apothème du cône, son ou-



Deuxième figure petite épure n° 32.

verture $\widetilde{\alpha\sigma\alpha}$ est égale à $\dfrac{Sa}{S_1a} \times 360° = \dfrac{25}{57} \times 360 = 157°, 53'$.

On reporte alors S_1K_1 en σr sur $\sigma\alpha$, $s'u_1$, en σy sur $\sigma\beta$, $s'v_1$ en σ_2 sur $\sigma\gamma$ et s_1l_1 en σt sur $\sigma\delta$, le reste se déduit de ce qui précède par symétrie. Pour avoir le point et la tangente d'inflexion de la transformée, on abaisse du sommet S une perpendiculaire sur le plan sécant et on mène de la trace de cette perpendiculaire des tangentes à la section. Pour ce faire, on a, en rabattement, mené S_1h_1, perpendiculaire sur le rabattement dh_1 du plan sécant, cette droite coupe le plan de base en g, on mène de g des tangentes gb, gf à la base dont les points de contact sont justement ici b et f, ce qui montre que U et son symétrique Q sont les points d'inflexion cherchés. Pour avoir la tangente en ces points, on se sert de la propriété de la sous-tangente en ces mêmes points. On prend le point I où gf par exemple coupe la trace du plan sécant sur le plan de base, ici $x'x$, et on reporte fi en φh en joignant h à x, point transformé du point K, on a la tangente d'inflexion. Une symétrie la donne également au deuxième point d'inflexion u. Il ne reste plus alors qu'à tracer la courbe transformée qui passe en r y, z, t, w, x et r, en r et t la tangente est perpendiculaire aux rayons correspondants. On a, de plus, déterminé les tangentes aux deux autres points connus de la transformée aux points z et w par la même méthode.

PETITE ÉPURE N° 33

Énoncé :

33. — On donne le cône de sommet S (30, 35, 70) dont la base est le cercle A (0, 35, 0) dans le plan horizontal, le rayon de ce cercle étant 35. Mener un plan passant par la parallèle à la ligne de terre située dans le premier bissecteur à une distance de la ligne de terre égale à 75 qui coupe le cône suivant une parabole.

Déterminer le sommet et la tangente au sommet de cette parabole.

Texte :

Pour qu'un plan coupe un cône suivant une parabole, il faut et il suffit que le plan parallèle mené par le sommet soit tangent au cône. Or, le plan cherché devant passer par la fronto-horizontale IJ, le plan parallèle devra avoir une trace parallèle à la ligne de terre. Ce plan sera donc déterminé par le point S et une des deux tangentes fronto-horizontales au cercle de base. Un de ces plans est le plan tangent le long de SL. Le plan cherché est alors obtenu en menant par A la parallèle AP à la génératrice SL, on obtient ainsi le plan demandé de trace PQ passant par IJ. Pour déterminer le sommet et la tangente au sommet dans l'espace de cette parabole, il suffit de mener à la section une tangente perpendiculaire à la direction de l'axe ; cette direction étant d'ailleurs celle du point de la section rejeté à l'infini, c'est-à-dire la direction de SL. En conséquence on rabat le plan sécant autour de PQ sur le plan horizontal A vient en A_1, AP parallèle à SL est venu en A_1P, la direction de la tangente rabattue est donc a_1d_1 relevée en AD. On n'a plus qu'à mener le plan tangent au cône parallèle à AD; on a, pour effectuer cette construction, pris la base du cône dans le plan horizontal H'. La parallèle à AD par S est la droite SΣ ; de Σ, on a mené deux tangentes au cercle de base ω, on trouve deux points de contact, l'un N qui correspond au point à l'infini, l'autre Q qui donne la génératrice SQ sur laquelle se trouve le sommet cherché. Pour avoir ce point on coupe la génératrice SQ *par le plan sécant* en se servant du plan vertical projetant SQ *comme plan auxiliaire* on trouve le point M *qui est le sommet demandé*, la tangente est la parallèle menée par M à la direction AD.

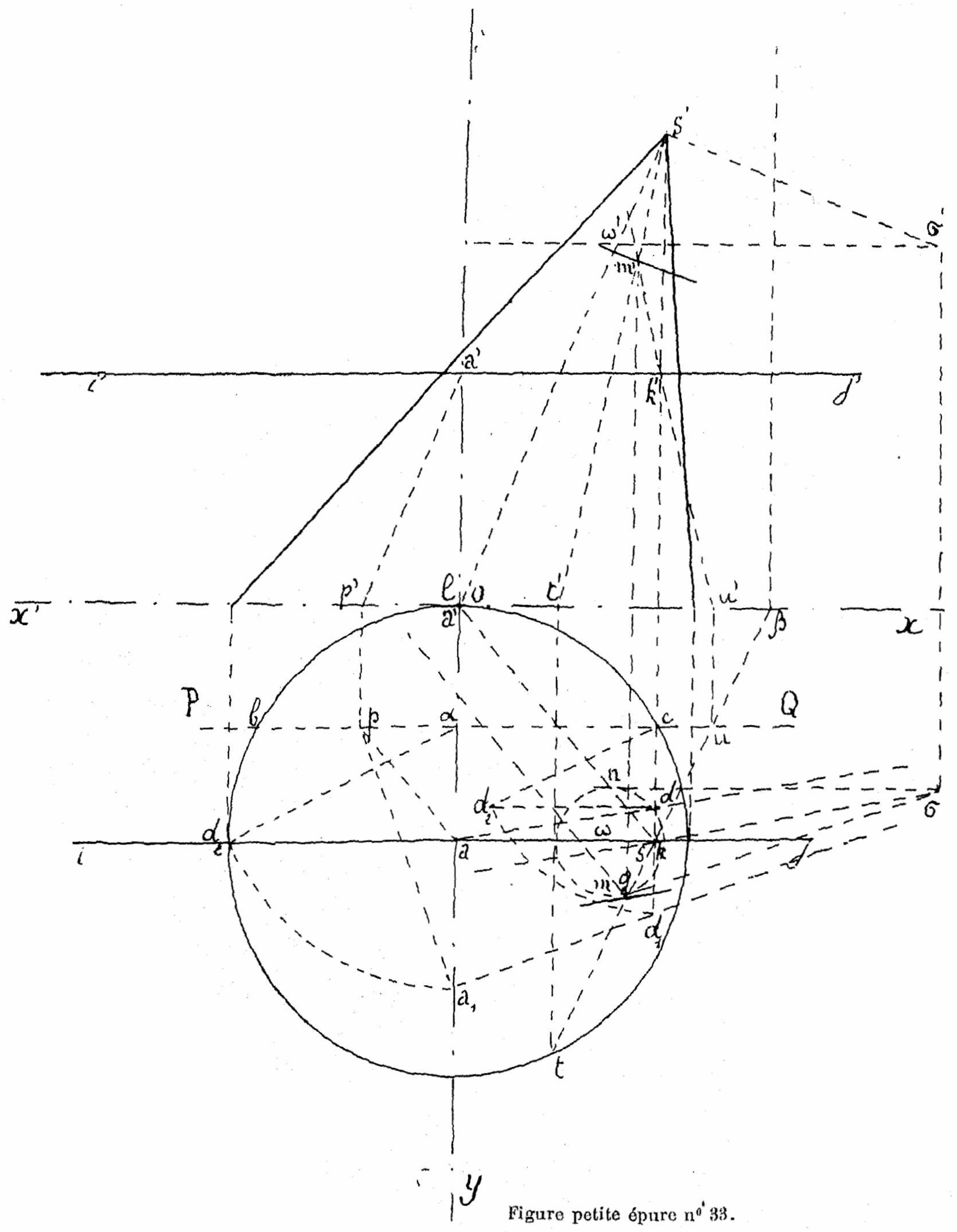


Figure petite épure n° 33.

GRANDES ÉPURES

TEXTES

GRANDE ÉPURE N° 1

Cube et Tétraèdre.

ÉNONCÉ :

1. — On donne un cube à diagonale verticale AF, A(0, 70, 120), G(0, 70, 0), le sommet C opposé à A dans la surface ABCD étant dans le plan de front de AG à gauche de A et un tétraèdre régulier dont une arête est MN, verticale passant par C, le point M étant de cote 0 et le point N de cote 120, le milieu de l'arête opposée PQ est dans le plan de front de AG. Représenter par ses deux projections le solide formé par l'ensemble du cube et du tétraèdre se pénétrant mutuellement, ce solide étant supposé rempli de matière opaque. Ombres à 45° sur les deux plans de projection du solide représenté.

TEXTE :

Il résulte du cours (1re partie — 1re section) que le cube sera projeté horizontalement suivant un hexagone régulier de centre a,g et les diagonales de cet hexagone. Le rayon de l'hexagone est obtenu en projection verticale en construisant le triangle AGC dont on connaît les trois côtés AG diagonale donnée, GC côté du cube qu'on déduit de la diagonale AG, AC diagonale de face du cube qu'on déduit également des données.

Ce triangle ACG étant placé dans le plan de front permet ensuite facilement de construire les deux projections du cube en se rappelant que les six sommets du cube, autres que A et G sont trois à trois alternativement dans les plans horizontaux de cote 40 et 80.

Le tétraèdre régulier se construit facilement en remarquant que la plus courte distance des arêtes MN et PQ est fronto-horizontale et que cette distance est égale à $\dfrac{MN\sqrt{2}}{2}$, soit $60 \times \sqrt{2}$. L'arête PQ étant horizontale, la mise en place du tétraèdre est donc immédiate.

Les intersections sont faciles à déterminer, en remarquant que des 4 faces du tétraèdre deux sont de bout et deux autres verticales. La face de bout NPQ coupe la face ABCD suivant la droite de bout $\alpha\beta$, la face AEDH suivant la frontale $\gamma\delta$, et la face symétrique AEFB suivant la frontale $\varphi\varepsilon$.

La deuxième face de bout MPQ coupe les deux faces AEDH et AEBF suivant les droites $\delta\mu$ et $\varphi\lambda$, et les deux faces GFBC et CFHD suivant $\lambda\upsilon$ et $\mu\upsilon$, υ étant le point sur CG.

D'autre part, la face verticale MNP coupe la face ABCD suivant Cβ, la face AEBF suivant $\varepsilon\sigma$ et la face GFBC suivant σc. La face MNQ donne des résultats symétriques. Les intersections sont ainsi complètement déterminées, il ne reste plus qu'à ponctuer le solide qu'on doit représenter. Les deux corps étant supposés n'en former qu'un seul de même matière, on devra ne représenter que les portions des arêtes de chacun des solides extérieurs à l'autre, en enlevant les portions intérieures. La représentation du solide demandé est alors immédiate.

Ombres à 45°. — 1° *Ombres portées.* — On a cherché séparément le contour d'ombre du tétraèdre et du cube en plan, on a trouvé pour le tétraèdre mlr_1n_1m relevé sur le mur en $l_2r_2n_2m_2$, et pour le cube $gvwa_1d_1c_1g$ relevé sur le mur en xyt_2s.

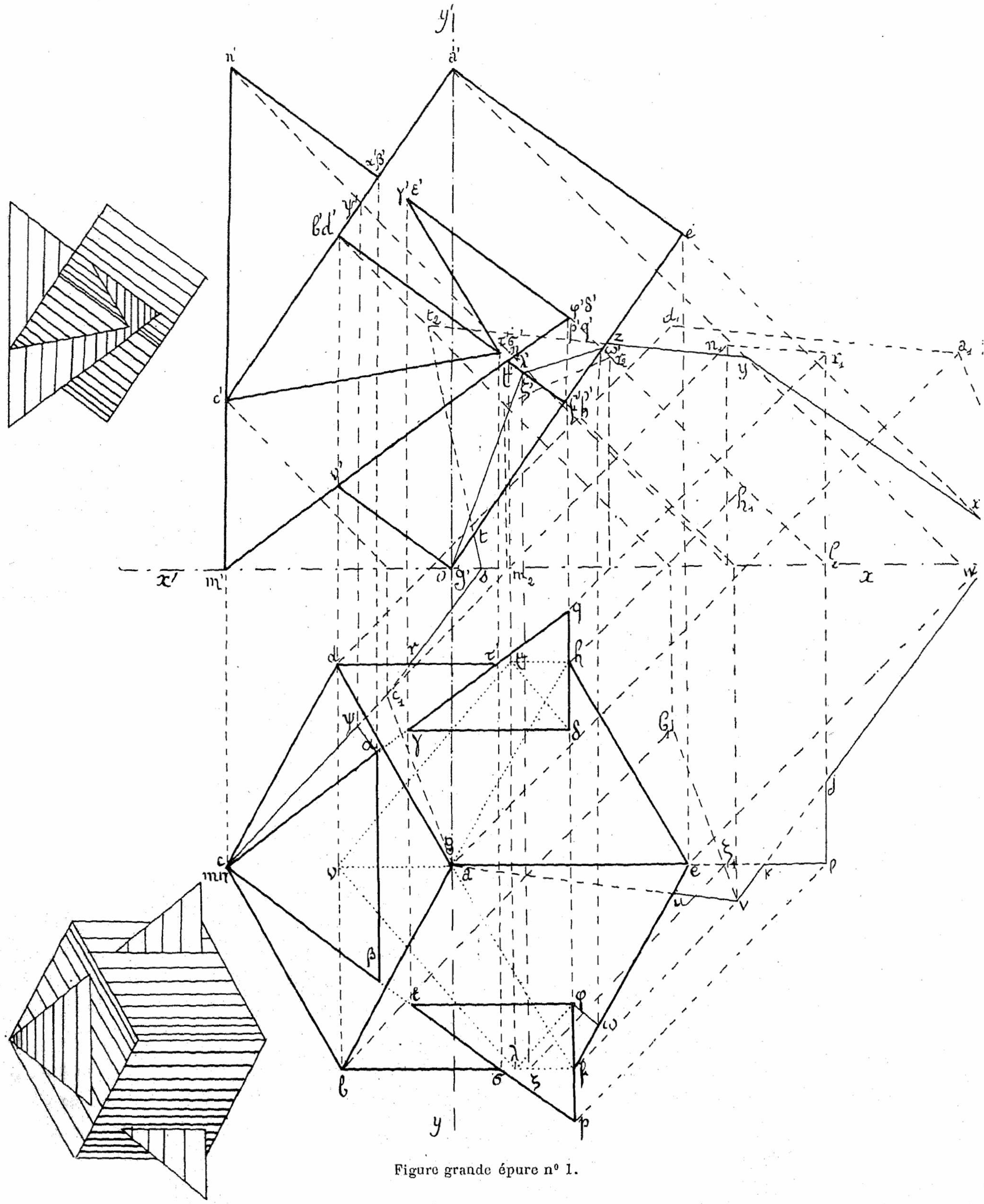


Figure grande épure n° 1.

De ces deux contours d'ombre on forme le contour total qui est dans sa partie visible *urklwsr* en plan e_1 et (hors de l'épure) *xyzts* sur le mur.

2° *Ombres propres.* — La seule face vue en plan du tétraèdre NPQ est éclairée; des trois faces vues du cube seule la face AEDH est dans l'ombre sur le mur, tout ce qui est vu est éclairé directement.

3° *Ombres autoportées.* — L'ombre portée par la face AEDH laisse dans l'ombre le triangle $\gamma\delta q$, le triangle $\varepsilon\varphi p$ porte ombre en $fq\omega$ sur la face AEBF du cube; enfin le triangle $N\alpha\beta$ porte ombre en $N\alpha\psi$ sur la face ABCD du cube.

Quant aux ombres autoportées en projection sur le mur, on les obtient en prenant l'intersection des plans d'ombre des arêtes MP et PQ avec le cube : on obtient un point ξ sur BF le point déjà trouvé Ω sur EF, d'où la séparatrice et le point G, d'où la sépératrice $g'\xi'\omega'$.

GRANDE ÉPURE N° 2

(*Géométrie cotée.*)

Emplacement rectangulaire de batterie.

Énoncé :

Sur un terrain de pente uniforme on veut construire un emplacement de batterie de forme rectangulaire; représenter les talus qu'il faut établir. On donne la pente du terrain, l'axe de l'emplacement, sa cote 10, et ses dimensions ainsi que la largeur du chemin qui y conduit, sa pente et la pente à donner aux talus.

Texte :

L'horizontale 10, de même cote que l'emplacement, rencontre le rectangle *abcd* aux points *e* et *f*; par suite, le long de la ligne brisée *ebcdf*, on aura des talus en déblai et des talus en remblai le long de la ligne *e a f*.

C'est l'intersection des plans inclinés des talus entre eux et avec le plan du terrain qu'il faut chercher.

Intersections des plans des talus entre eux. — Puisque ces plans inclinés ont même pente, leurs intersections se projettent suivant les bissectrices des angles du rectangle *abcd*. C'est ce qu'on voit facilement sur la figure ci-contre où $a\alpha$ et $a\beta$ représentent les échelles de pentes des talus, puisque les intervalles sur ces deux échelles sont égaux par hypothèse.

Intersections des talus avec le plan du terrain. — Cherchons l'intersection d'un talus qui passe par *af* avec le terrain. Le point *f* faisant partie de cette intersection, il suffit d'en trouver un second point. Pour cela prenons pour échelle de pente du talus la droite *gh* et portons à partir de *g* une longueur *gi* égale à l'intervalle donné, menons par *i* la parallèle *ij* à *af* : ce sera l'horizontale de cote 9 du talus. Elle rencontre l'horizontale 9 du terrain au point *j*. La droite *fj* est l'intersection cherchée. Elle rencontre la bissectrice de l'angle *bad* en *k*, ce qui nous donne *ke* comme intersection du plan du terrain avec le talus passant par *ae*.

Les traces du talus passant par *bc* et *cd* s'obtiennent immédiatement en remarquant que :

1° Ces plans inclinés sont respectivement parallèles aux plans passant par *af* et *ae*, et par suite leurs traces sur le plan du terrain sont parallèles à *kf* et *ke*.

2° On a de suite un point de chacune d'elles : les points *l* et *m*, intersections de *bc* et *cd* avec l'horizontale 10. D'où *mn* et *ln*.

En joignant le point *p* au point *e*, et le point *q* au point *f* on obtient les traces des deux autres talus.

Traces des talus du chemin. — Il faut déterminer des horizontales de ces plans.

Or, nous connaissons dans ces plans des points de cotes rondes tels que $g, r_9, r_8 — g', s_9, s_8$. — De plus l'intervalle de l'échelle de pente est donné : il suffira donc de décrire des points *g* et *g'* comme centres des cercles ayant pour rayons l'intervalle donné et de leur mener des tangentes, des points r_9 et s_9.

Nous obtenons ainsi une horizontale de chaque plan qui par son intersection avec l'horizontale 9 du terrain donne déjà un point de chaque trace.

Il suffira de mener une seconde horizontale pour obtenir un second point de l'intersection.

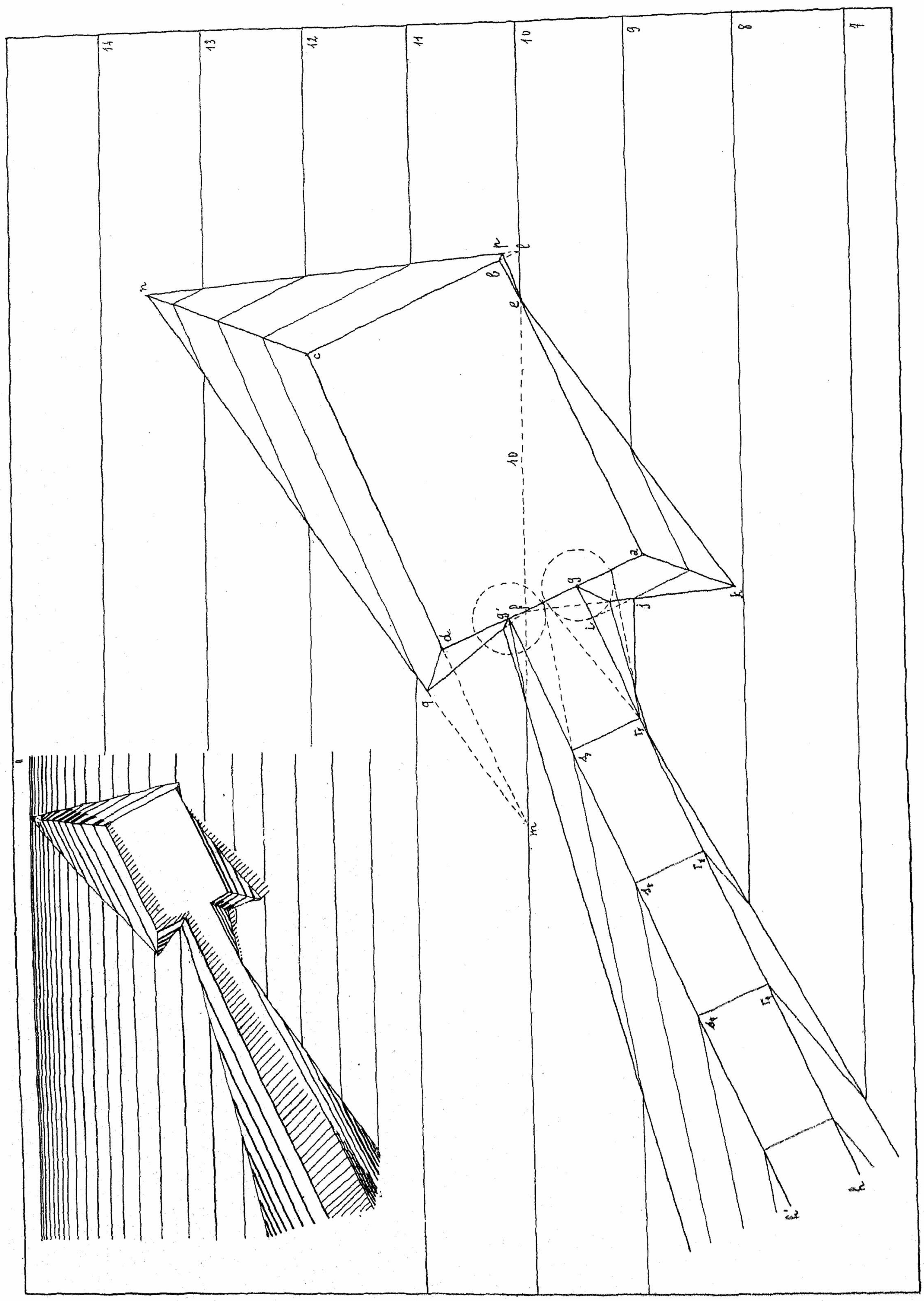


Figure grande épure n° 2

GRANDE ÉPURE N° 3

(Géométrie cotée.)

Emplacement de batterie.

ÉNONCÉ :

Sur un terrain de pente uniforme, on veut construire un emplacement de batterie ayant la forme indiquée dans le croquis ci-contre. Représenter les talus qu'il faut établir. On donne la pente du terrain, l'axe de l'emplacement, sa cote 7 et ses dimensions ainsi que la largeur du chemin d'accès, sa pente et la pente à donner aux talus.

TEXTE :

L'horizontale 7, de même cote que l'emplacement, rencontre le rectangle *abcd* aux points *g* et *h*; par suite, le long de la ligne *gbch* on aura des talus en déblai, et des talus en remblai le long de la ligne *gadh*. Le long des différentes droites qui limitent l'emplacement, les talus forment des plans inclinés; mais le long de l'arc *bc* ils forment une surface conique, dont le sommet se projette horizontalement en O.

Intersection des plans des talus entre eux. — Comme dans l'épure précédente, puisque ces plans inclinés ont la même pente, leurs intersections se projettent suivant les bissectrices *al* et *dk* des angles *a* et *d* du rectangle *abcd*.

Trace des talus sur le plan du terrain. — Occupons-nous d'abord des talus plans et en premier lieu du talus *ad*. Nous avons déjà un premier point de sa trace sur le plan du terrain, c'est le point *i*, intersection de *ad* et de l'horizontale 7 du terrain. Pour en avoir un second point, construisons l'échelle de pente de ce plan; pour cela, sur le prolongement de *ba*, portons successivement des longueurs égales à l'intervalle qui correspond à la pente de talus, nous obtenons ainsi les pointes de cote 6-5-4-3.

Menons, parallèle à *ad*, l'horizontale 3; elle rencontre l'horizontale 3 du terrain au point *j*; *ij* est la trace cherchée.

Elle rencontre les intersections *dk* et *al* des plans des talus aux points *k* et *l*; en joignant ces points respectivement à *h* et *g* on obtient les traces des talus *dh* et *ag*.

Le talus *ch* étant parallèle au talus *ag*, sa trace *hh'* sera parallèle à *gl*. De même, le talus *bg* étant parallèle au talus *dh*, sa trace *gg'* est parallèle à *kh*.

Considérons maintenant les talus du chemin d'accès.

Déterminons d'abord des horizontales du talus *ee'*. Nous connaissons sur *ee'* les points de cote 6-5-4; l'intervalle de l'échelle de pente des plans de talus est aussi connu; pour avoir l'horizontale de cote 5 du talus il suffira de tracer le point *e* de cote 7 comme centre avec un rayon égal au double de l'intervalle, un cercle auquel nous menons une tangente issue du point 5 de *ee'*. Cette horizontale rencontre l'horizontale de cote 5 du talus *ae* au point *m*, et l'horizontale 5 du terrain au point *n*. L'intersection des deux talus est donc *em*. Cette droite rencontre *kl* au point *p*, qui est un point de la trace du talus *ee'* sur le terrain; cette trace est donc *np*. La droite *np* rencontre *ee'* au point *e'*. Joignons *e'* au point *i*; la droite *ie'* rencontre *ff'* au point *f'* : *e'f'* est l'intersection des plans du chemin et du terrain.

Pour avoir un second point de la trace du talus *ff'*, menons l'horizontale de cote 5 de ce plan qui rencontre l'horizontale 5 du terrain au point *q*. D'où la trace *f'q* du talus qui rencontre *kl* au point *r*, qui, joint au point *f*, nous donne *fr*, intersection des deux talus *fd* et *ff'*.

Trace du talus limité par le demi-cercle bc. — Le talus, le long du demi-cercle *bc*, est limité par une surface conique dont l'intersection par le plan du terrain est une ellipse. Nous connaissons déjà la position du grand axe Oα de cette ellipse, car sa direction est perpendiculaire à la direction des horizontales du terrain et il passe par le point O.

Cherchons les sommets de cet axe.

Supposons que l'on coupe la figure par le plan vertical de trace Oα et que, faisant tourner ce plan autour de l'horizontale Oα du plan de l'emplacement comme charnière, on le rabatte sur ce dernier plan. Pour construire ce rabattement, au lieu de porter les différences de cotes à la grandeur voulue par l'échelle, nous allons simplifier en portant des grandeurs proportionnelles. Ainsi la trace du plan du terrain rabattue sera $\alpha\gamma_1$, γ_1 étant obtenu en portant à partir de γ sur la perpendiculaire en γ à la charnière une longueur égale à $c\delta$.

Pour avoir le sommet du cône on porte sur la perpendiculaire en O à Oα une longueur Oε égale à Oc. Les génératrices d'intersection du cône et du plan vertical

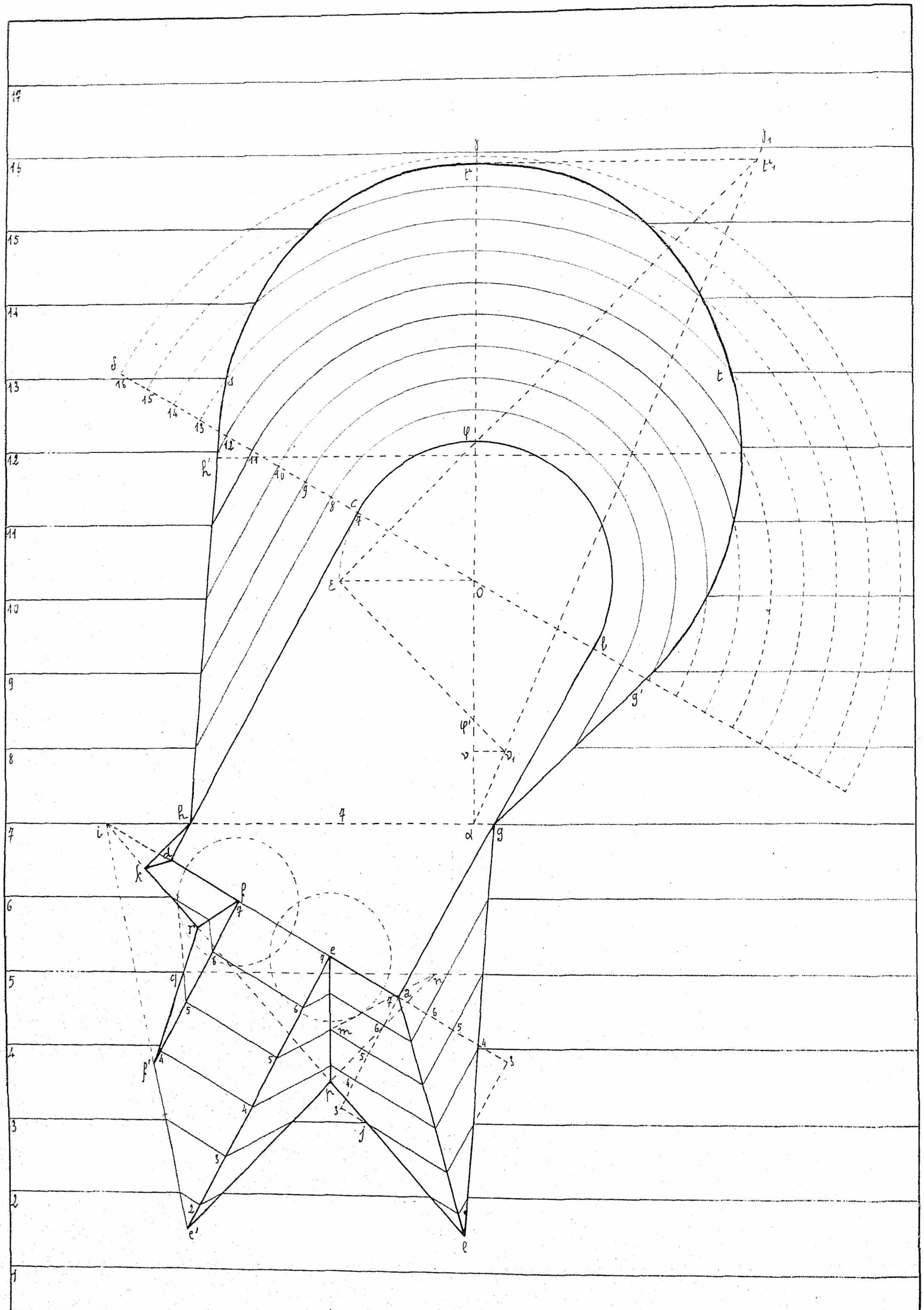


Figure grande épure n° 3.

sont rabattues en $\varphi\varepsilon$, et en $\varepsilon\varphi'$ symétrique de $\varphi\varepsilon$ par rapport à $O\varepsilon$.

Les droites rencontrent $\alpha\gamma_1$ aux points θ_1 et σ_1 qui se relèvent en θ et σ sur $\alpha\gamma$. θ et σ sont les sommets du grand axe de l'ellipse projection.

Pour avoir d'autres points de l'ellipse, coupons le cône du talus et le plan du terrain par des plans horizontaux.

Le plan horizontal de la cote 13, par exemple, coupe le plan suivant l'horizontale 13 et le cône suivant un cercle de centre O, qui rencontre l'horizontale aux deux points s et t, qui sont des points de l'intersection.

GRANDE ÉPURE N° 4

(Géométrie cotée.)

Ombres.

ÉNONCÉ :

Étant donné le tétraèdre régulier ABCD dont la face BCD est dans le plan horizontal et dont le sommet A a pour cote 7, on construit sur chacune des faces ABC, ACD, ABD un prisme droit de hauteur donnée telle que le sommet le plus haut de chaque prisme ait pour cote 13. Déterminer l'ombre propre de ce corps et l'ombre portée sur le plan horizontal, les rayons étant dirigés suivant la droite Δ.

TEXTE :

OMBRE PROPRE. — Pour savoir si une face du solide est éclairée ou non, il suffit de mener par un des points de cette face une parallèle à la direction des rayons lumineux, de chercher sa trace sur le plan horizontal et de la situer par rapport à la trace horizontale du plan de la face. Procédons ainsi pour la face HIJ par exemple. Considérons le point lumineux issu du point I de cote 6; il rencontre le plan horizontal au point i que l'on obtient en portant sur cette droite Ii une longueur égale à 6 fois l'intervalle de la droite Δ, puisque le point I a pour cote $13 - 7 = 6$. Maintenant la trace du plan HIJ est une droite parallèle à l'horizontale IH et qui passe par le point de cote 0 de l'échelle de pente du plan HIJ. Nous voyons ainsi que ce plan est dans l'ombre. Sont seules éclairées les faces ADIJ, ADLM, MLK et ABGE; encore cette dernière est-elle partiellement ombrée par la face ABKM.

Déterminons cette ombre. Le point A est à lui-même son ombre portée. Considérons le rayon Mm passant par le point M et cherchons son intersection avec le plan de la face ABGE. Graduons d'abord Mm en portant successivement sur cette droite à partir du point M des longueurs égales à l'intervalle de la droite Δ et prenons pour plan auxiliaire le plan ayant pour échelle de pente la droite graduée Mm; cherchons son intersection avec la face ABGE. L'horizontale 7 du plan auxiliaire rencontre l'horizontale 7 du plan ABGE au point p. Les horizontales 6 des deux plans se rencontrent en q. La droite pq rencontre Mm au point m' qui est l'ombre portée par le point M. L'arête MK étant parallèle au plan, ABGE se projette sur ce plan suivant la droite $m'n'$ parallèle à MK et par suite à AB.

OMBRE PORTÉE. — La séparatrice d'ombre et de lumière se compose des lignes brisées DIJAGEn' et DLKMA. Il suffit de chercher l'ombre de chaque point sur le plan horizontal. Pour cela, on opère comme nous avons fait précédemment pour le point I. Par le point donné on mène une parallèle au rayon lumineux et sur cette droite on porte à partir du point donné l'intervalle de la droite Δ un nombre de fois égal au nombre qui représente la cote du point. On obtient ainsi le contour d'ombre D*ijagen*, n' portant ombre en n sur B*e*, et le second contour d'ombre D*lkn*.

GRANDE ÉPURE N° 5

Cube et cylindre.

ÉNONCÉ :

Le cube a une diagonale verticale et quatre arêtes de front.

Le cylindre est de révolution et son axe parallèle à la ligne de terre passe par le centre ω-ω' du cube, sa section droite par le plan de profil du point ω-ω' est le cercle inscrit dans la section de la surface du cube par ce plan. Représenter le cube supposé plein entaillé par le cylindre. On donne le côté a du cube.

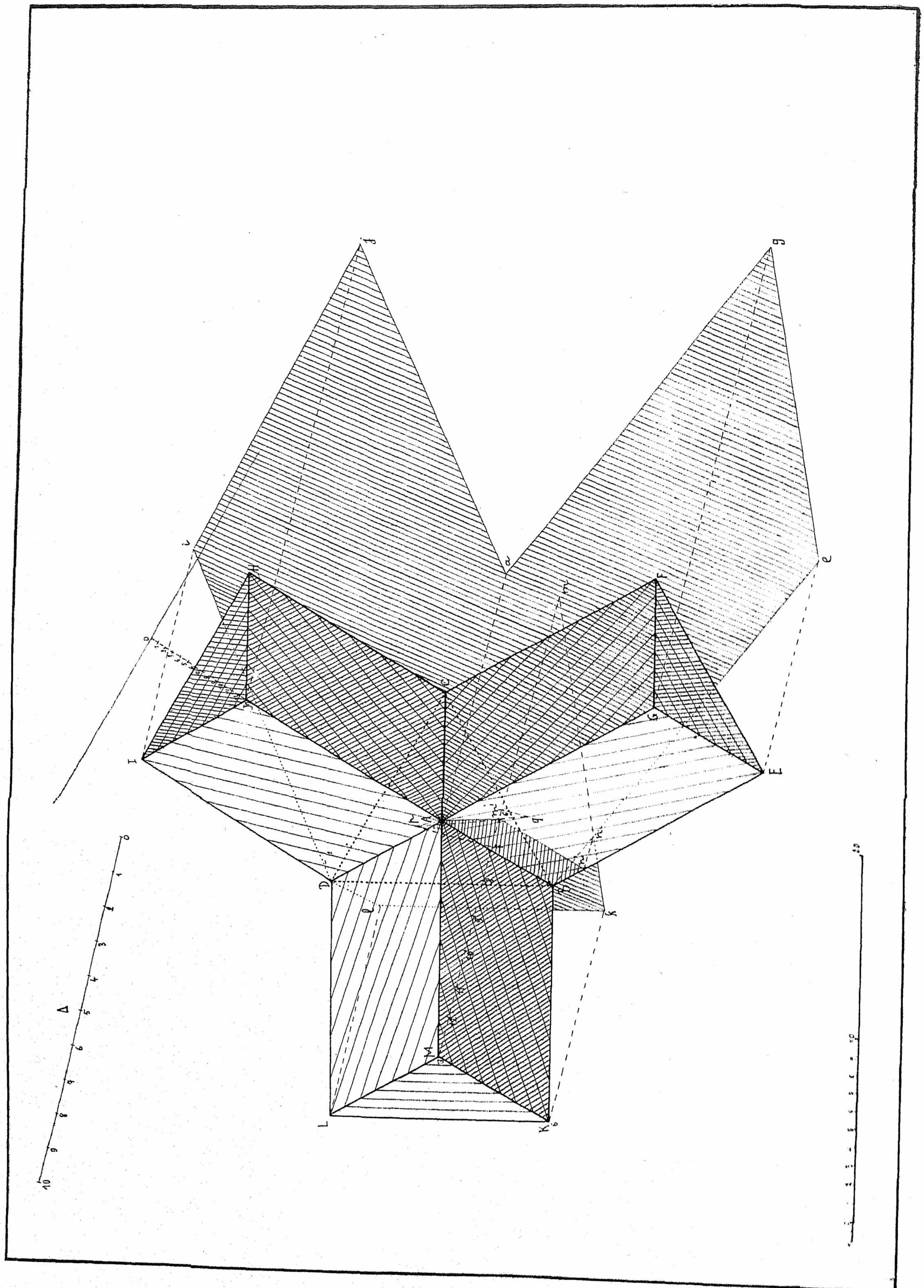


Figure grande épure n° 4

TEXTE :

MISE EN PLACE. — 1° *Cube.* — Soit ABCDEFGH, le cube donné dont la diagonale AG est verticale. Plaçons les arêtes AE et CG dans le plan de front qui contient la diagonale AG. Ce plan de front devient un plan de symétrie du cube; par suite, les faces ABCD, EFGH sont dans des plans de bout et la projection verticale du cube sera le rectangle $a'c'e'g'$.

Soit ω-ω' le centre du cube. De ω' comme centre avec la demi-diagonale pour rayon et, puisque on se donne le côté a du cube avec $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ pour rayon, décrivons un cercle. Comme les deux diagonales AG et EC du cube sont dans un même plan de front: les sommets E et C se projetteront verticalement en e' et c' sur le cercle ω' et on les obtient immédiatement puisque $a'e' = g'c' = a$.

D'où la projection verticale du cube : $a'b'c'e'f'g'$.

En partant de la projection verticale on obtient immédiatement la projection horizontale du cube qui est un hexagone inscrit dans un cercle de centre ω et ayant pour rayon $\omega c = g'c''$.

2° *Cylindre.* — Cherchons le rabattement sur le plan horizontal du centre ω de la section droite du cylindre. Pour cela, rabattons sur ce plan la section du cube par le plan de profil du point ω., gg' se rabat en g_1g_1', d'où ig_1. De ω comme centre, traçons un cercle tangent à cette droite : nous obtenons ainsi le rabattement de la section droite du cylindre. D'où ses contours apparents.

REMARQUE. — Le cube a pour centre de symétrie le point ω-ω' qui est aussi centre de symétrie pour le cylindre (puisque c'est un point de son axe); par suite, la projection verticale sera symétrique par rapport à ω' et la projection horizontale par rapport à ω. Mais, de plus, et le cube et le cylindre admettent le plan de front du centre ω pour plan de symétrie, la projection horizontale sera donc symétrique par rapport à la droite ωc.

INTERSECTION DES FACES DU CUBE ET DU CYLINDRE. — La section du cylindre par le plan de bout de la face ABCD est une ellipse qu'on peut considérer comme la projection de la section droite du cylindre sur ce plan et dont on obtient très facilement des points en prenant pour plans auxiliaires des plans horizontaux. Considérons par exemple le plan horizontal de trace verticale $j'm'$. Il coupe le plan de base du cylindre suivant la droite de bout du point j' qui, rabattue sur le plan horizontal du centre, rencontre le cercle de base rabattue en deux points, dont l'un, j_1 nous donne la génératrice jj_1 du cylindre. Il coupe la face ABCD suivant la droite de bout du point m' qui rencontre jj_1 en m, qui est un point de l'ellipse. Pour avoir la tangente de ce point, on considère la tangente en j_1 au cercle rabattu qui rencontre la charnière en t, d'où la trace $t\theta$ du plan tangent au cylindre sur le plan horizontal du centre; $t\theta$ rencontre la trace kl du plan sécant au point θ, d'où la tangente θm. Comme autres points de l'ellipse, on a immédiatement les sommets k et l du grand axe et le sommet q du petit axe en se servant des plans horizontaux de trace D′ et Δ′. Cherchons le point de l'ellipse situé sur l'arête CD. Pour cela, considérons la projection de la droite CD sur le plan du profil du point ω, rabattue sur le plan horizontal du centre; α nous donne α_1 et le point d se rabat sur σd en β_1 tel que $\sigma\beta_1 = \omega'\beta_1$. $\alpha_1\beta_1$ rencontre le cercle rabattu en λ_1 d'où la génératrice $\lambda\lambda_1$ du cylindre qui rencontre cd en p. On obtient la tangente en ce point par la méthode ordinaire.

Cherchons maintenant l'intersection du cylindre avec une autre face du cube, la face CDGH. Un point quelconque de cette intersection et la tangente en ce point s'obtiennent de la même façon que précédemment. Construisons les points importants. Nous avons d'abord le point pp'. Cherchons la tangente en ce point. Le plan CDGH coupe le plan horizontal du centre suivant la droite $\alpha\lambda$-$\lambda'\alpha'$. Le plan tangent au cylindre en p-p' a pour trace sur ce même plan la droite $\lambda\gamma$-$\lambda'\gamma'$ qui rencontre la précédente au point γ-γ'. D'où les tangentes γp et $\gamma' p'$ en p et p'. Maintenant, d'après la manière même dont on a défini le cylindre, la droite λg-$\lambda' g'$ de la face CDGH est tangente au cylindre au point s-s'.

Enfin, cherchons le point sur le contour apparent vertical du cylindre. Le point horizontal de trace L′ nous donne le point u-u' ; la tangente en u' est la génératrice de contour apparent du cylindre, et la tangente en u est la projection horizontale vu de l'intersection de la face CDGH par le plan horizontal.

Ayant construit ces deux arcs d'ellipse, on obtient les autres parties de l'intersection par les symétries indiquées.

PONCTUATION. — On veut représenter le cube entaillé

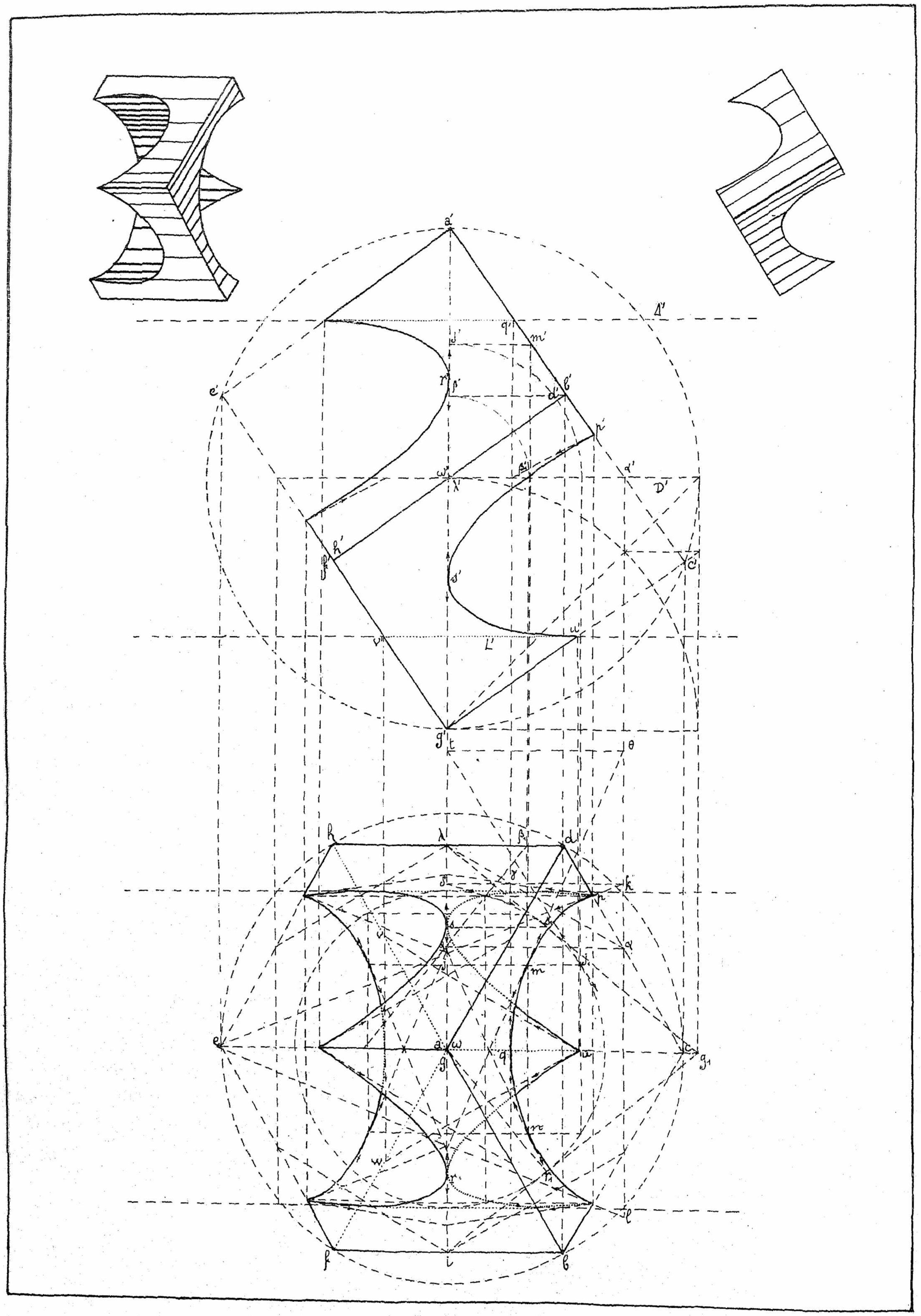


Figure grande épure n° 5

par le cylindre; pour cela on ne garde du cylindre que les contours apparents intérieurs du cube, et ne garde du cube que les arêtes extérieures au cylindre. La ponctuation des arcs de courbe est immédiate, puisque ces arcs sont dans des plans dont on voit facilement les positions respectives.

GRANDE ÉPURE N° 6

Solide commun à un cône et à un octaèdre.

ÉNONCÉ :

On donne un octaèdre régulier par sa projection horizontale qui est un carré BEDE avec ses diagonales, et un cône de révolution par son sommet (SS′) dans le plan horizontal de projection, et par une sphère inscrite ($\omega\omega'$).

Représenter le solide commun à ces deux surfaces.

TEXTE :

MISE EN PLACE. — On obtient les contours apparents du cône immédiatement. Pour l'octaèdre, on remarquera qu'on a une diagonale (af, $a'f'$) verticale dont la grandeur réelle comme la grandeur en projection est BE. Alors on a facilement les arêtes.

MÉTHODE. — On cherche l'intersection de chacune des huit faces de l'octaèdre avec le cône. On est donc ramené à huit sections planes. Les points intéressants sont situés sur les arêtes de l'octaèdre et le contour apparent du cône. Nous ne chercherons ici que la section par le plan ABC.

Pour réaliser ces constructions, il est nécessaire d'avoir une base commode dans le cône. On prendra une base de Monge.

Considérons le cylindre vertical circonscrit à la sphère $\omega\omega'$.

Ce cylindre et le cône S sont deux quadriques circonscrites à la même sphère. Ils se coupent donc suivant deux courbes planes situées dans le plan de bout $\alpha'\beta'$, $\gamma'\delta'$ et qui se projettent suivant le cercle ω. On appelle base de Monge l'une quelconque de ces courbes. Nous nous servirons de la courbe $\alpha'\beta'$.

POINT SUR LE CONTOUR APPARENT. — C'est l'intersection de la génératrice GG′ avec le plan défini par les droites BC et AC. Le plan projetant horizontalement la droite GG′ coupe ce plan suivant (ij, $i'j'$). La droite $i'j'$ coupe G′ au point h' cherché qu'on rappelle en h sur G.

POINT COURANT ET SA TANGENTE. — Cherchons la pointe située sur la génératrice ($S\varepsilon$ et $S'\varepsilon'$). On pourrait prendre l'intersection de cette droite avec le plan, mais on préfère se servir du point (hh') déjà trouvé. Pour cela on fait tourner des plans auxiliaires autour de la génératrice (Sh et $S'h'$).

La droite d'intersection du plan ABC et du plan de base du cône est (kl, $k'l'$). La trace du plan auxiliaire $\alpha\varepsilon$ coupe kl en un point π. Le point m cherché est sur la droite πh.

La tangente est l'intersection du plan tangent au cône le long de ($S\varepsilon$, $S\varepsilon'$) avec le plan sécant. On a de suite un point ($\tau\tau'$) de l'intersection, c'est le point où la tangente au cercle rencontre la droite (kl, $k'l'$).

POINTS SUR LES ARÊTES. — Cherchons par exemple le point situé sur (ab, $a'b'$). Cherchons la trace sur le plan de base du plan SAB. Nous en avons un point en kk', un autre point est la trace ($\lambda\lambda'$) de la droite (Sa, $S'a'$). La droite $k\lambda$ rencontre le cercle ω en un point μ. Le point n cherché est sur la génératrice $s\mu$.

PONCTUATION. — Considérons la projection horizontale par exemple, et numérotons les 8 arcs d'ellipse 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. On les situera sur l'octaèdre, ce qui est très facile. Puis on verra les parties d'arêtes ou de génératrices à conserver par un raisonnement analogue au suivant.

Prenons par exemple la génératrice G_1. Le point S est évidemment extérieur à l'octaèdre, la génératrice sera donc à rejeter jusqu'au point p où elle rencontre l'intersection. Par suite la portion pq sera intérieure à l'octaèdre, donc on la conservera.

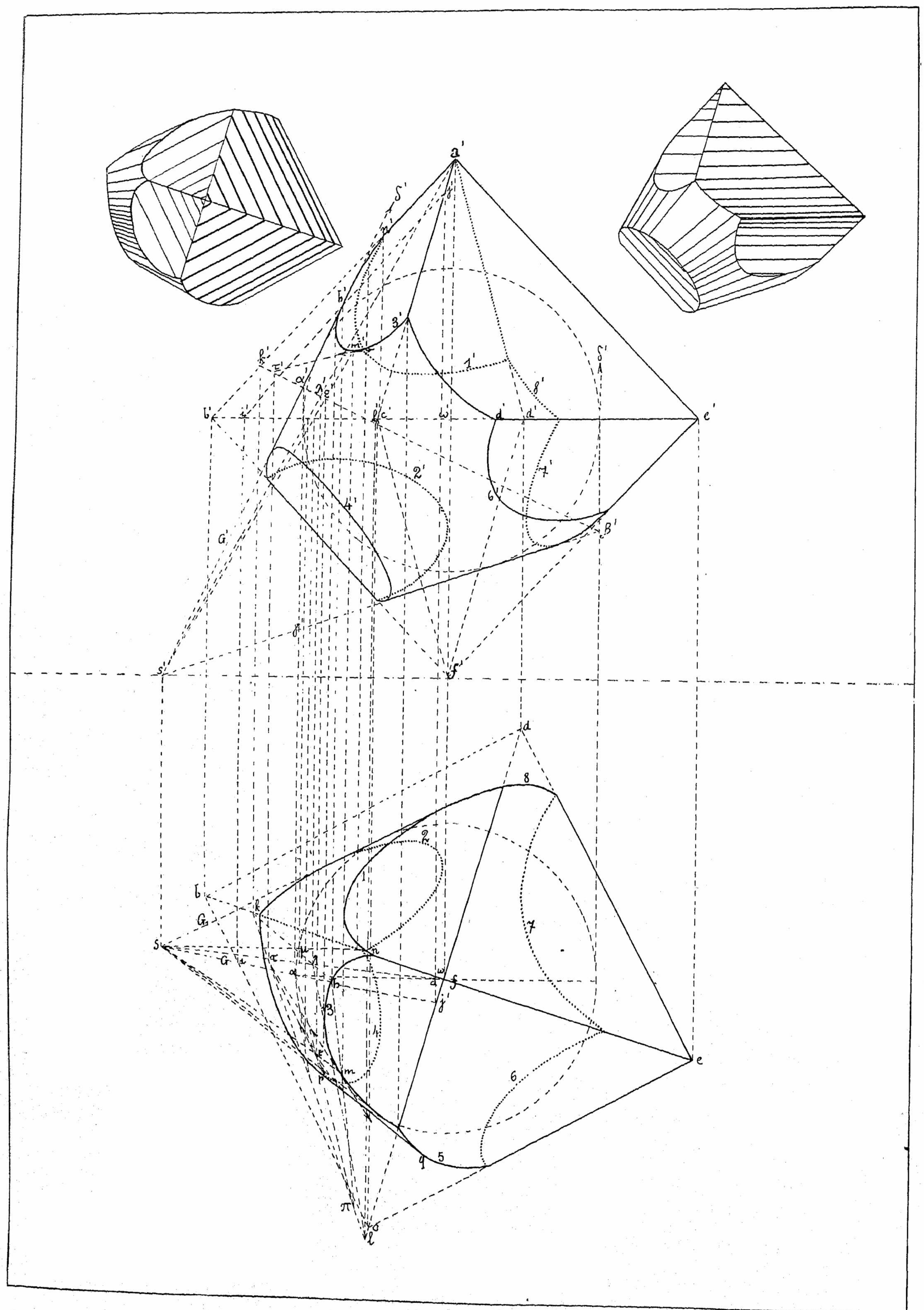


Figure grande épure n° 6.

GRANDE ÉPURE N° 7

Deux cylindres.

ÉNONCÉ :

On donne un plan par ses traces $P\alpha Q'$ et une horizontale GG' de ce plan. Un premier cylindre est tangent à ce plan le long de GG' et a pour base dans le plan vertical de projection un cercle tangent à la ligne de terre.

Un deuxième cylindre a une de ses génératrices confondue avec la droite (ab et $a'b'$) du plan $P\alpha Q'$. Il admet pour base dans le plan horizontal de projection le cercle oo' tangent en a à la trace αP, du plan $P\alpha Q$.

Représenter la partie solide du 1er cylindre située en avant du plan vertical de projection, et extérieure au 2e cylindre.

TEXTE :

MISE EN PLACE. — Le centre du cercle de base du 1er cylindre se trouve sur la perpendiculaire en G' à $\alpha Q'$ et sur la bissectrice de l'angle $\widetilde{y\alpha Q'}$. On a de suite les contours apparents.

REMARQUE. — Il résulte des données que le plan $P\alpha Q'$ est plan tangent commun aux deux cylindres. Le 1er le touche suivant GG', le 2e suivant (ab, $a'b'$). Or ces deux droites se coupent en un point (bb') qui est un point de l'intersection. Et comme en ce point le plan tangent est commun aux deux surfaces, le point (bb') est un point double réel de l'intersection.

MÉTHODE. — On coupe les surfaces par des plans parallèles aux deux ensembles de génératrices. Ces plans ont leurs traces respectivement parallèles à αP et $\alpha Q'$ puisque le plan $P\alpha Q'$ contient les génératrices GG' et (ab, $a'b'$). Comme les bases sont situées dans deux plans différents, nous sommes amenés à nous servir des deux traces des plans.

POINT COURANT ET SA TANGENTE. — On coupe les deux cylindres par le plan $P_1\alpha_1Q_1$. Le 2e cylindre est coupé suivant ($\gamma_1\gamma'_1$). Le 1er cylindre est coupé suivant ($G_1G'_1$), G_1' coupe γ'_1 au point m' cherché que nous rappelons en m sur γ_1.

La tangente en (mm') est l'intersection des plans tangents en (mm') aux deux surfaces. Connaissant le point (mm') de la tangente, il suffit d'en chercher un autre point, par exemple le point où elle coupe le plan horizontal de projection, le point est à l'intersection des traces horizontales des plans tangents.

La trace horizontale du plan tangent au 2e cylindre est $P_1\tau$.

Cherchons la trace horizontale du 1er. La trace verticale de ce dernier est Q'_1t. Ainsi donc, nous connaissons un point t' de la trace horizontale cherchée, d'autre part, nous savons qu'elle est parallèle à αP : elle est donc déterminée. Elle coupe $P_1\tau$ en c que l'on rappelle en c' sur xy (cm, $c'm'$) est la tangente au point (mm').

POINTS SUR LES CONTOURS APPARENTS. — Pour avoir les points (dd') (ee') il suffit d'employer le plan $R\beta S$ dont la trace verticale passe par le pied de la génératrice G'_1 de contour apparent. On remarque qu'il n'existe pas de point sur G'_2, car la trace horizontale $R_1\beta_1$ du plan correspondant ne coupe pas le cercle de base du 2e cylindre.

Sur le contour apparent vertical du 2e cylindre, il y a 4 points $f'g'h'i'$ qui sont donnés par les plans $R_2\beta_2S'_2$, $R_3\beta_3S'_3$.

Passons aux contours apparents horizontaux. Il existe 2 points f, k sur G_3 qui sont donnés par $R_2\beta_2S'_2$. On obtient deux points, l, n, sur γ_2 en se servant du plan $R_4\beta_4S'_4$. Pour γ_3 on prendra le plan $R_5\beta_5S'_5$ et l'on obtiendra les points p, et q.

POINTS REMARQUABLES. — Il y a deux points remarquables (rr') (ss') donnés par le plan limite $R_6B_6S'_6$ dont les tangentes sont les génératrices du cylindre coupé par le plan, c'est-à-dire le premier.

PONCTUATION. — Situons d'abord la courbe sur le premier cylindre, en projection verticale. Si l'on examine la projection horizontale, on remarque que le point b se trouve dans la moitié avant du cylindre. Il est donc vu en projection verticale. En partant du point b', suivons la courbe. Chaque fois que la courbe touchera le contour apparent vertical du 1er cylindre, elle changera d'aspect, c'est-à-dire que de vue, elle deviendra cachée, et de cachée, vue.

Considérons maintenant l'ensemble des deux cylindres et enlevons le 2e. La portion $d'e'$ de génératrice est intérieure au 2e cylindre, puisqu'elle touche la courbe d'intersection en d' et e' : cette portion disparaîtra.

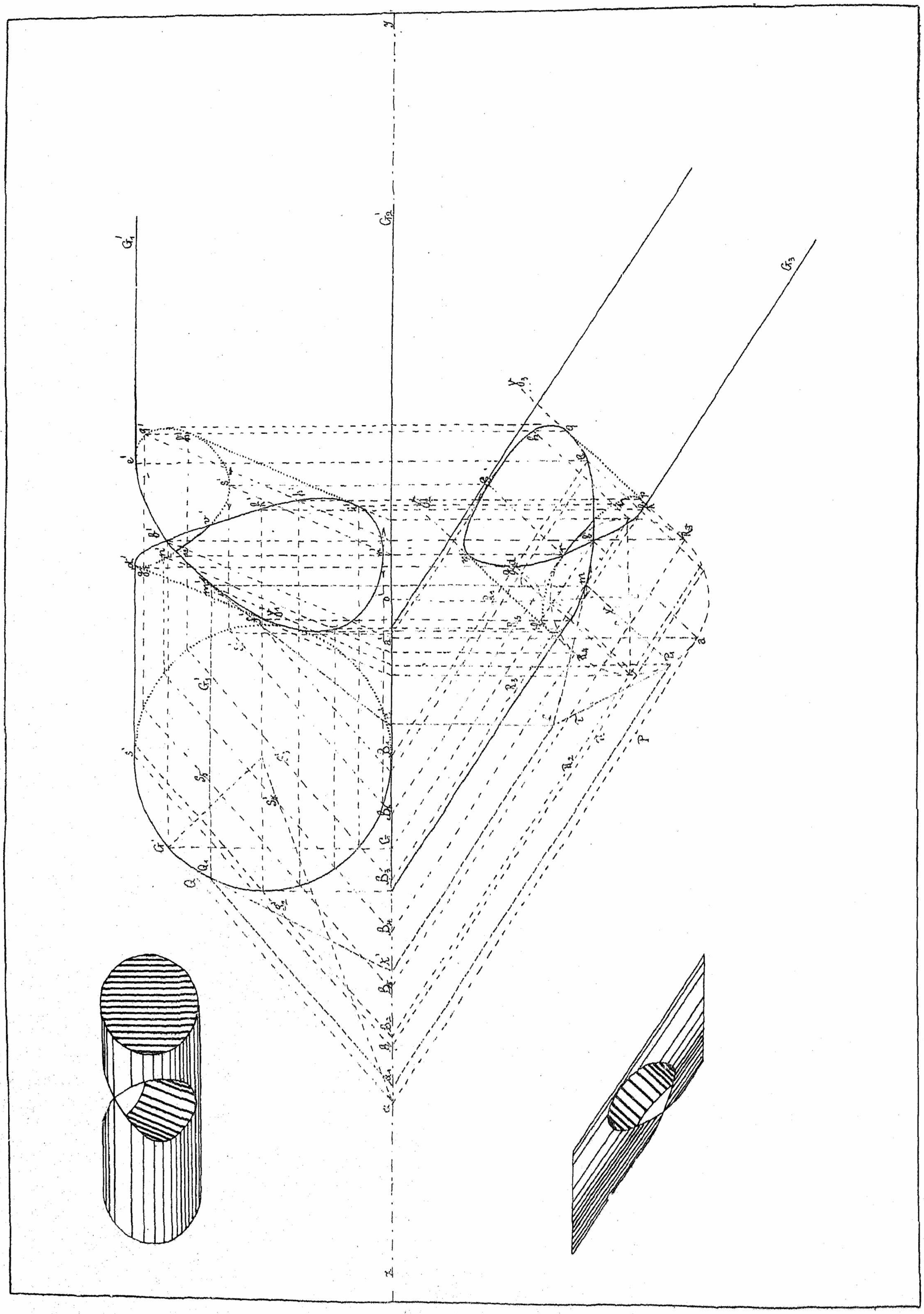


Figure grande épure n° 7.

De même la portion du 1[er] cylindre compris dans la boucle $b'l'n'p'$ est intérieure au 2[e] cylindre, elle disparaîtra donc en découvrant une partie $u'v'$ de la courbe.

Comme nous représentons un solide, il faudra marquer les portions des génératrices de contour apparent du 2[e] cylindre intérieures au 1[er].

Pour la projection horizontale, on recommencera identiquement le même raisonnement en partant toujours du point b.

GRANDE ÉPURE N° 8

Cylindre oblique et sphère.

Énoncé :

La trace horizontale du cylindre est un cercle de centre ω. Les génératrices sont de front et inclinées à 60° sur le plan horizontal de droite à gauche en montant. La sphère a pour centre le point cc' et un rayon donné. Représenter l'ensemble des deux solides supposés de même substance, le cylindre étant limité à deux plans horizontaux.

Texte :

Mise en place. — Les contours apparents des deux surfaces s'obtiennent immédiatement.

Méthode. — On prend pour plans auxiliaires des plans de front. Ils couperont la sphère suivant des cercles qui se projetteront verticalement suivant des cercles de centre c' et détermineront deux génératrices du cylindre. D'où 4 points de l'intersection.

Point courant et tangente. — Considérons le plan auxiliaire de trace A. Son intersection avec la sphère se projette verticalement en vraie grandeur suivant le cercle de centre c' et de rayon $c'\alpha' = \alpha\alpha_1$. A rencontre le cercle ω aux points a et b, d'où deux génératrices du cylindre; mais on voit en projection verticale que la génératrice passant par b-b' ne rencontre pas la sphère, d'où deux points seulement de l'intersection. Cherchons la tangente en M. Pour en déterminer un point nous allons prendre les traces des plans tangents au cylindre et à la sphère, sur le plan de contour apparent horizontal de la sphère.

La tangente en M au cercle A de la sphère rencontre ce plan au point σ-σ'. Le rayon cm-$c'm'$ de la sphère étant normal au plan tangent, la trace horizontale de ce plan sera perpendiculaire à cm; d'où σt. Le plan tangent au cylindre a pour trace dans le plan considéré la tangente en a_1 au cercle γ, section du cylindre par le plan horizontal du point c. Cette tangente rencontre σt au point t : d'où tm et en projection verticale $t'm'$.

Remarque. — Le plan de bout de trace Δ' est un plan de symétrie par rapport aux deux surfaces. La projection verticale de l'intersection est donc symétrique par rapport à Δ'.

Points sur les contours apparents. — Le plan de trace B nous donne les points E et F sur le contour apparent horizontal du cylindre. Les points G et H sur le contour apparent horizontal du cylindre sont donnés par le plan de trace D qui coupe la sphère suivant le cercle de centre c' et de rayon $c'\delta' = \delta\delta_1$. Le plan de contour apparent vertical de la sphère de trace C coupe le cylindre suivant les génératrices passant par les points k-k', l-l', d'où les 4 points d'intersection NOPQ. Enfin, le plan de contour apparent horizontal de la sphère coupe la sphère suivant le cercle C, et le cylindre suivant le cercle γ, d'où les deux points I et J.

Point double. — Le tracé de la courbe nous montre qu'on a un point double en projection horizontale. Cherchons la ligne des deux points doubles. C'est l'intersection des plans diamétraux des deux surfaces par rapport à la direction verticale.

Ces plans sont des plans de bout et ont pour trace en projection verticale les droites $\sigma'c'$ et $\omega'e'f'$ qui se rencontrent en γ', la ligne des points doubles est la droite de bout du point γ'.

Ponctuation. — 1° On établit la ponctuation de l'intersection sur l'ensemble des deux corps : un point sera vu s'il est vu à la fois sur les deux corps. Sont vus en projection horizontale l'arc $ipqf$ seulement; en projection verticale les deux arcs symétriques $o'f'q'$ et $n'e'p'$;

2° On conserve des contours apparents de chaque corps les parties extérieures à l'autre et on enlève les parties intérieures : donc on enlève le segment de

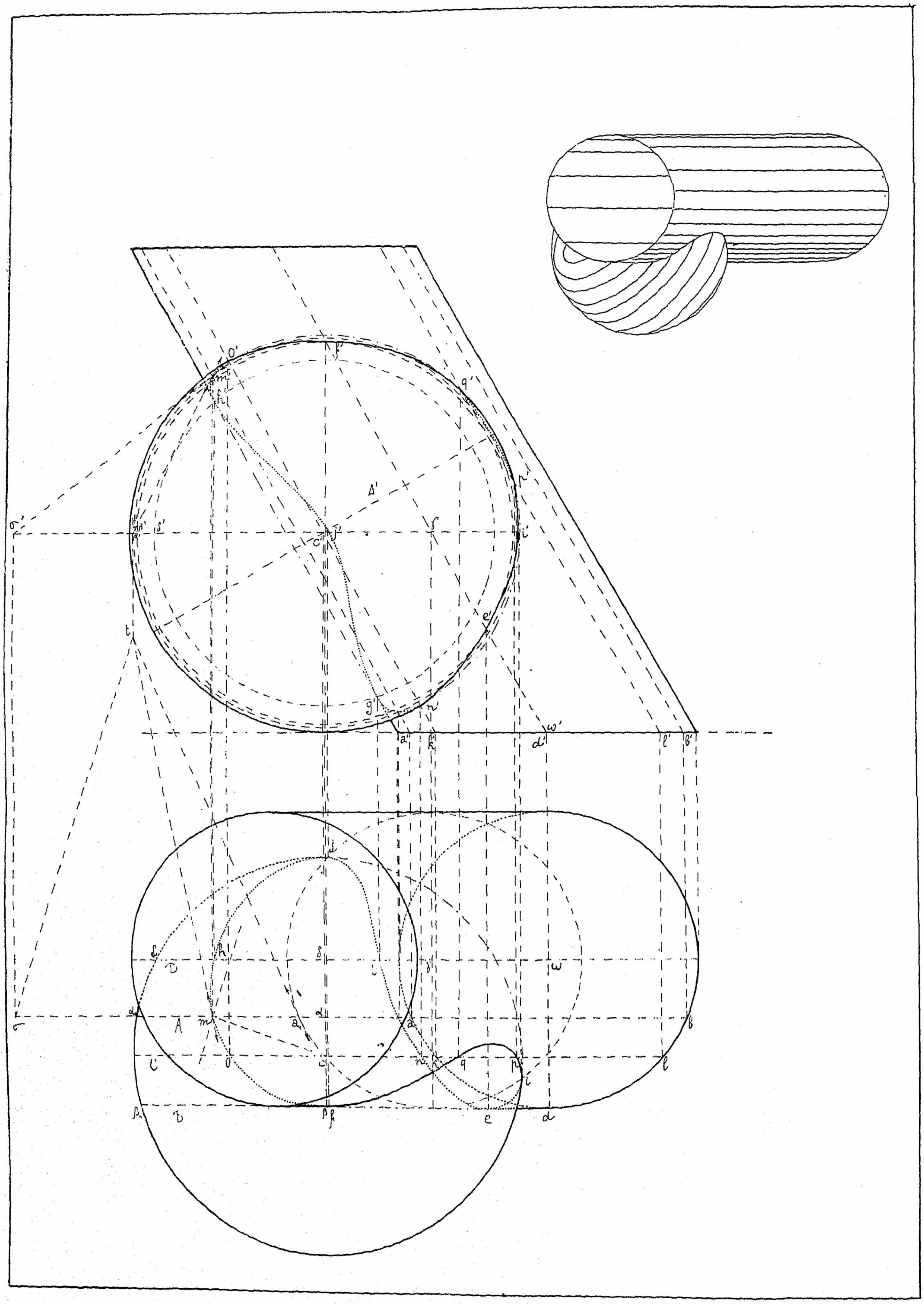


Figure grande épure n° 8.

droite ef du contour apparent horizontal du cylindre et les deux arcs symétriques $n'p'$ et $o'q'$ du contour apparent vertical de la sphère;

3° On ponctue ces contours apparents.

GRANDE-ÉPURE N° 9

Tétraèdre entaillé par un cône et un cylindre.

Énoncé :

On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté a 0,19, et dont la base ABC est située dans le plan horizontal de projection. Le point A est le sommet d'un cône qui a pour base le cercle inscrit dans le triangle BCD. L'arête BD est parallèle aux génératrices d'un cylindre dont la trace horizontale est le cercle décrit du point B comme centre avec un rayon égal à 0,06.

On demande de représenter en projection horizontale le corps qui reste lorsqu'on supprime dans le tétraèdre la partie comprise dans le cône et la partie comprise dans le cylindre.

Texte :

1° INTERSECTION DU CYLINDRE ET DU TÉTRAÈDRE

Le cylindre coupe la face ABC suivant l'arc de cercle EE_1, il coupe les faces ABD et CBD respectivement suivant les génératrices projetées horizontalement en Ee et E_1e_1. Il coupe enfin la face ACD suivant une ellipse projetée horizontalement suivant une seconde ellipse dont nous connaissons déjà les points e et e_1. Déterminons le sommet de cette ellipse situé sur la génératrice du cylindre qui passe par le point α. Pour cela, rabattons le plan vertical Bb sur le plan horizontal. L'arête BD du tétraèdre se rabat en BD_1 ; la génératrice du cylindre se rabat en αf_1 parallèlement à BD_1 ; elle rencontre D_1b en f_1 qui se rappelle en f sur Bb ; la tangente en f est f_1f.

2° INTERSECTION DU CONE ET DU TÉTRAÈDRE

Cette intersection se compose du cercle inscrit dans la face BCD et des génératrices de contact Aa, Ag et Ah. Le cercle de base se projette en projection horizontale suivant une ellipse que nous allons déterminer. Si l'on rabat la face BCD sur le plan horizontal en BCA, la base du cône se rabat suivant le cercle O_1 inscrit dans le triangle équilatéral ABC. Or $O_1a = \frac{Aa}{3}$, donc le centre de l'ellipse projection est en O tel que : $Oa = \frac{da}{3}$. Le grand axe de l'ellipse $\gamma\gamma_1$, parallèle à BC est égal au diamètre du cercle O_1 ; le petit axe est lui aussi déterminé, par le centre O et son sommet a. De plus, l'ellipse est tangente aux droites Bd et Cd aux points de rencontre g et h de ces droites avec les perpendiculaires à BC menées des points de contact b et c du cercle rabattu O_1 avec les droites AC et AB.

Contour apparent horizontal du cône. — Avant de passer à l'intersection du cylindre et du cône déterminons rigoureusement le contour apparent horizontal du cône. Il se compose des tangentes menées par le point A à l'ellipse O. On ne peut construire ces tangentes par la méthode ordinaire puisqu'on ne connaît pas les foyers de l'ellipse. Mais traçons le cercle ayant pour diamètre le petit axe de l'ellipse, il peut être considéré comme la projection de l'ellipse dont on aurait fait tourner le plan de l'angle convenable autour de l'axe Aa. Si nous menons de A les tangentes Au_1 et Av_1 à ce cercle, nous savons que les points de rencontre u et v de l'ellipse avec la droite u_1v_1 seront les points de contact des tangentes issues de A. L'ellipse étant la transformée du cercle O, chacun de ses points s'obtient en portant sur une perpendiculaire à la charnière Aa une longueur égale au triple puisque $(\Theta\gamma = 3\,oa)$ de la distance du point correspondant du cercle à la charnière ; on portera donc sur u_1v_1 les longueurs $\lambda u = \lambda v = 3\lambda u_1$.

3° INTERSECTION DU CYLINDRE ET DU CONE

a) *Point courant.* — Pour obtenir un point quelconque de cette intersection, nous coupons les deux surfaces par un plan auxiliaire passant par la droite menée par le sommet du cône parallèlement aux génératrices du cylindre. La trace horizontale $A\beta$ de ce plan coupe la

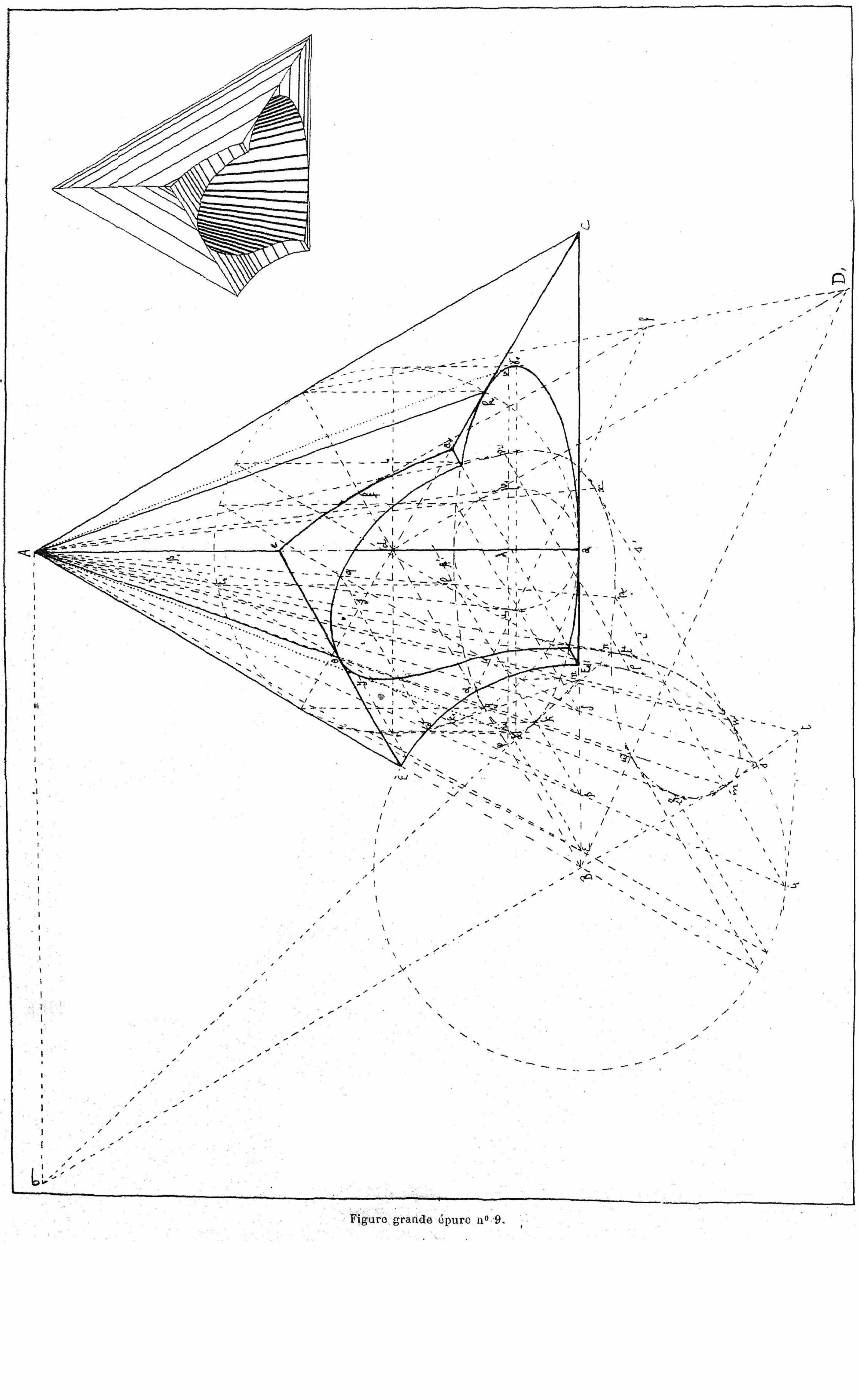


Figure grande épure n° 9.

base du cylindre en i et j, et détermine dans le cylindre deux génératrices projetées horizontalement suivant les droites ii' et jj'. Ce plan auxiliaire coupe le plan de base du cône suivant une droite $\beta\beta'$, parallèle à l'axe BD du cylindre, qui se projette horizontalement suivant $\beta\beta'$ parallèle à Bd et se rabat en $\beta\beta_1$ parallèle à AB; les points K_1 et L_1 où $\beta\beta_1$ rencontre le cercle O_1 sont les rabattements des traces des génératrices du cône sur le plan de base BCD. Ces traces se projettent horizontalement aux points de rencontre k et l des perpendiculaires à BC avec $\beta\beta'$. D'où les projections horizontales Ak et Al des génératrices du cône situées dans le plan auxiliaire considéré. Ak et Al rencontre ii' et jj' en 4 points m, n, p, q qui sont les projections horizontales de 4 points de l'intersection.

b) *Tangente au point courant.* — La tangente en M est l'intersection des plans tangents en ce point aux deux surfaces. Le plan tangent au cylindre a pour trace horizontale la tangente it au cercle de base du cylindre. Le plan tangent au cône a pour trace sur le plan BCD la tangente au cercle O projetée horizontalement suivant la tangente kr à l'ellipse et rabattue suivant la tangente K_1r au cercle O_1; Ar est la trace horizontale du plan tangent au cône. Les traces horizontales des plans tangents se coupent en t et la tangente en m est tm.

c) *Points sur le contour apparent du cylindre.* — Nous obtiendrons ces points en prenant pour plan auxiliaire le plan contenant la génératrice du contour apparent horizontal du cylindre. Ce plan a pour trace horizontale As et en opérant de même que pour le point courant on obtient les points w et x sur ss'.

d) *Points sur le contour apparent du cône.* — Nous prendrons pour plan auxiliaire le plan qui contient la génératrice Au de contour apparent du cône; ce plan coupe le plan de base du cône suivant la droite $u\varepsilon$ parallèle à Bd; sa trace horizontale est $A\varepsilon$ et on obtient les points y et z sur Au.

e) *Plans auxiliaires limites.* — Le plan auxiliaire limite pour le cylindre est le plan de trace horizontale $A\rho$ tangente à la base du cylindre. Il nous donne les points μ et ν; en ces points, les tangentes à la courbe d'intersection sont les génératrices du cône.

Le plan auxiliaire limite pour le cône est le plan de la face ABD. Il donne les points θ et ω où la courbe est tangente aux génératrices correspondantes du cylindre.

f) *Droite des points doubles.* — La courbe d'intersection du cylindre et du cône a en projection horizontale un point double réel. Cherchons la droite des points doubles. C'est l'intersection des plans diamétraux par rapport à la direction verticale, c'est-à-dire l'intersection des plans de contour apparent horizontal des 2 surfaces. Le plan diamétral du cylindre a pour trace la droite Bs et contient l'arête BD. Le plan diamétral du cône passe par le sommet A et contient la droite uv de la face BCD; sa trace horizontale est la parallèle $A\sigma$ à BC.

Les traces horizontales Bs et $A\sigma$ des 2 plans se rencontrent en σ, premier point de l'intersection. De plus, ces 2 plans ont pour trace sur le plan de la face BCD, les droites BD et uv qui se recontrent en φ. Leur intersection est donc $\sigma\varphi$. C'est sur cette droite $\sigma\varphi$ qu'on devra placer le point double π.

GRANDE ÉPURE N° 10.

Cône de révolution et cylindre oblique.

ÉNONCÉ :

Un cylindre de front supposé plein est limité par le plan horizontal sur lequel sa trace est le cercle de centre cc' et par un second plan horizontal de cote h. Les génératrices sont inclinées à 45° de gauche à droite en montant. On enlève la portion de ce cylindre située à l'intérieur d'un cône de révolution dont l'axe $\omega\omega'$ est de bout, son sommet se projetant horizontalement en s, le rayon du cercle de base étant donné. Représenter par ses projections le solide ainsi obtenu.

TEXTE :

MISE EN PLACE. — On a immédiatement les contours apparents des deux surfaces.

MÉTHODE. — On prend pour plans auxiliaires des plans passant par la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône. Cette parallèle rencontre le plan horizontal au point $\sigma\sigma'$. Les traces des

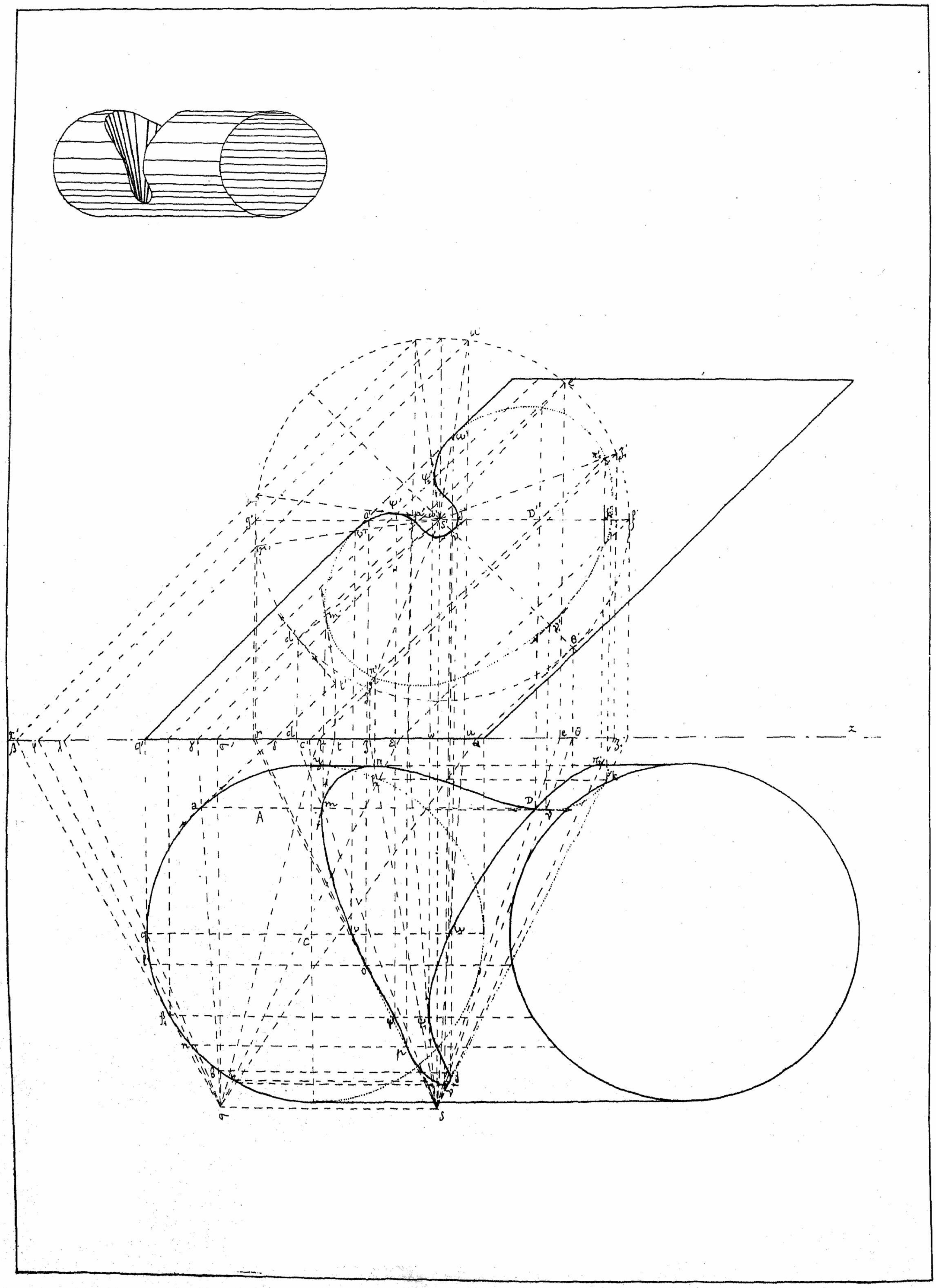


Figure grande épure n° 10.

plans auxiliaires sur le plan horizontal passeront toutes par σ; leurs traces sur le plan vertical seront parallèles à $s'\sigma'$.

Point courant et tangente. — Prenons un point quelconque γ de la ligne de terre, compris entre les points α et β où les plans auxiliaires limites rencontrent xx', et considérons le plan passant par ce point. La trace $\sigma\gamma$ rencontre en a et b le cercle c, d'où les deux génératrices du cylindre passant par ces points. Sa trace verticale rencontre le cercle ω' en d' et e' rappelés en d et e sur xx', d'où les deux génératrices Sd et Se du cône, qui rencontrent les génératrices en quatre points. Déterminons la tangente au point M, intersection de Sd et de la génératrice A du cylindre. Le plan tangent en M au cône a pour trace verticale la tangente en d' au cercle ω'. Le plan tangent au cylindre a pour trace horizontale la tangente en a au cercle c et pour trace verticale la parallèle $\delta t'$ aux génératrices du cylindre. D'où t' qui se rappelle en t, les tangentes en m et m' sont tm et $t'm'$.

Points sur les contours apparents. — On obtient les points sur le contour apparent horizontal du cône en considérant les plans auxiliaires $f'\varepsilon hi\sigma$ et $g'\varphi lh\sigma$ qui nous donnent les points JKOP. Le plan $\sigma q\lambda r'u'$ nous donne les points V et W sur le contour apparent vertical du cylindre et le plan $\sigma y\mu z' z'_1$ nous donne les points π et π_1 sur son contour apparent horizontal.

Plans auxiliaires limites. — D'abord le plan $\sigma\alpha\theta'$ qui nous donne les points V et V_1 où la tangente est la génératrice correspondante du cylindre. Puis le plan $\sigma\beta_1\beta$, limite pour le cylindre et qui nous donne les points ψ et ψ_1 où la tangente est la génératrice correspondante du cône.

Point double. — La projection horizontale de la courbe possède un point double. Construisons la ligne des points doubles. Le plan diamétral du cône pour la direction verticale est le plan horizontal de trace $f'g'$.

Le plan diamétral correspondant du cylindre a pour trace verticale $c'\pi'\pi'_1$. Ces deux plans se coupent donc suivant la droite de bout du point D'; d'où la position approximative D du point double.

Ponctuation. — Nous voulons représenter le cylindre entaillé par le cône :

1° On commence par établir provisoirement la ponctuation de l'intersection sur le cylindre. Toute la courbe est vue sauf l'arc πDKπ_1 en projection horizontale. En projection verticale l'arc $v'\psi'v'\psi_1'w'$ est seul vu;

2° On conserve les contours apparents du cylindre extérieurs au cône et on enlève les contours apparents du cylindre intérieurs au cône, donc en projection horizontale on enlève le segment $\pi\pi_1$ et en projection verticale on enlève $v'w'$. On conserve aussi les contours apparents du cône intérieurs au cylindre : ce sont les segments op et kj;

3° On voit que l'arc de courbe πD qui était primitivement caché est vu maintenant.

GRANDE ÉPURE N° 11

Cônes et cylindres.

Énoncé :

Deux cônes de révolution ont la même base dans le plan vertical H', et leur axe (st, $s't'$) est vertical. Un cylindre dont la direction de génératrice est donnée a pour base un cercle oo' dans le plan horizontal de projection.

Représenter le solide compris entre les sommets S et T des deux cônes, quand on enlève le cylindre.

Texte :

Mise en place. — Elle est immédiate.

Remarque. — Le problème étant identiquement le même pour les deux cônes, nous raisonnerons pour le cône T par exemple.

Méthode. — On prend une base auxiliaire pour le cylindre dans le plan H'. Ce sera un cercle égal au cercle (oo'), dont le centre cc' est le point où le diamètre du cylindre rencontre le plan H'. On mènera la parallèle (to, $t'o'$) aux génératrices du cylindre et on fera tourner des plans auxiliaires autour de cette droite.

Remarque. — La base du cylindre étant intérieure à celle du cône T, il y a *pénétration*. La courbe se composera de deux parties distinctes; nous ne nous occuperons que de la partie qui répond à l'énoncé.

Point courant et sa tangente. — Prenons la trace d'un plan auxiliaire $\sigma\alpha$, il y correspond la génératrice $t\alpha$ du cône et la génératrice $m\beta$ du cylindre. Ces deux généra-

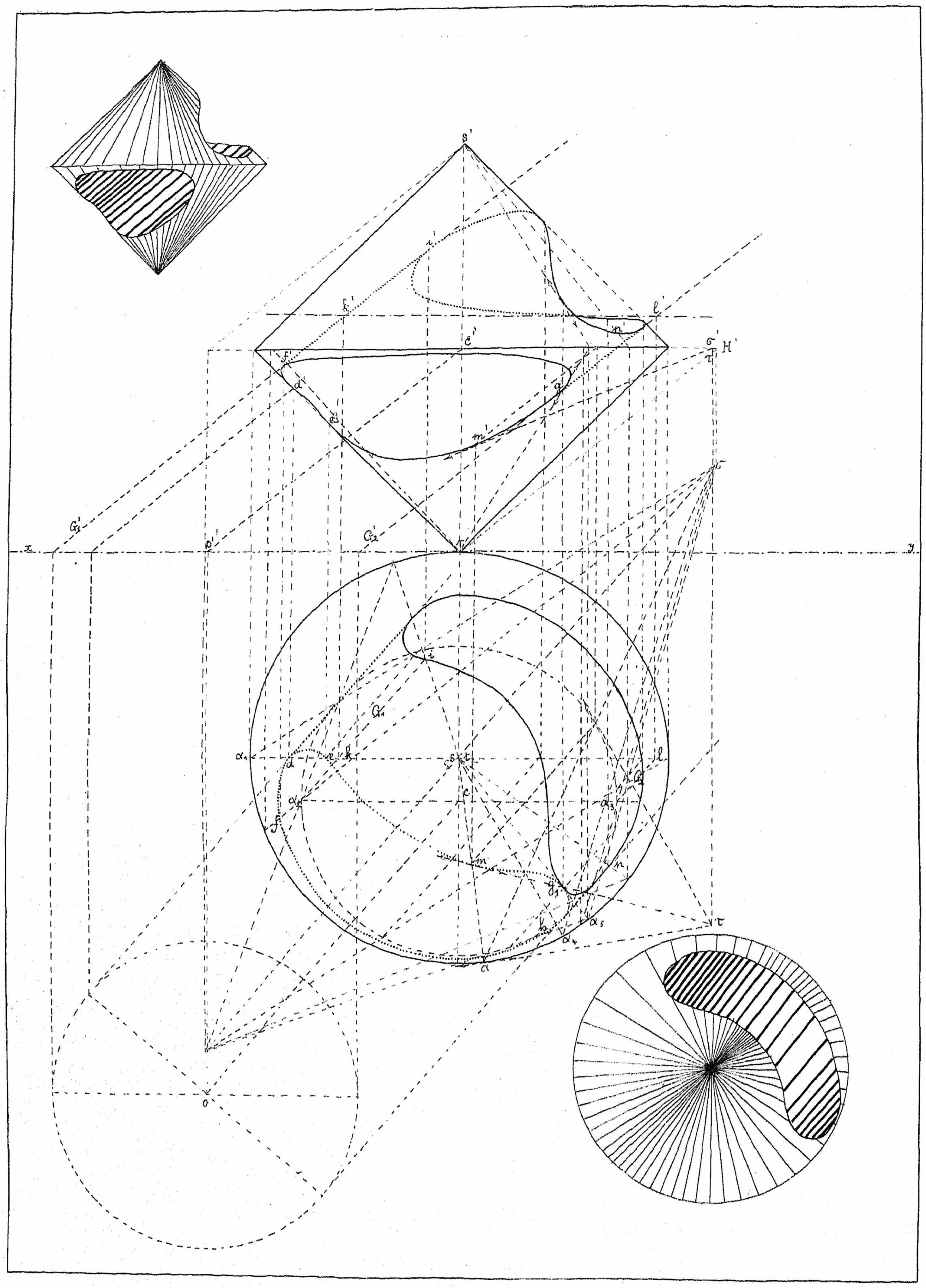


Figure grande épure n° 11.

trices se coupent au point m cherché que je rappelle en m' sur la projection verticale de la génératrice $m\beta$.

Les traces horizontales des plans tangents correspondants se coupent au point $\tau\tau'$.

Points sur les contours apparents. — En projection verticale, ce sont les points situés dans le plan de front du point t.

Ils sont donnés par le plan $\sigma\alpha_1$. On obtient ainsi les points (dd') et (ee'). Il y a aussi les points (ff') (gg') sur le contour apparent vertical du cylindre. Ils sont donnés par les plans $\sigma\alpha_2$ et $\sigma\alpha_3$. Enfin, en projection horizontale, il y a les points d et h donnés par $\sigma\alpha_1$ et $\sigma\alpha_4$.

Point remarquable. — C'est le point gg' donné par le plan limite.

Ligne des points doubles pour le cône S. — C'est l'intersection des plans de contour apparent vertical dans le cône S et dans le cylindre. Le premier est le plan de front du point S. Le deuxième plan est formé par les génératrices $G_1G'_1$ et $G_2G'_2$. Ces génératrices coupent le plan de front aux points (kk') et (ll') ; $k'l'$ est la droite des points doubles.

Ponctuation. — Ponctuons le cône S, et pour cela, situons la courbe sur ce corps en remarquant que le point $n'n$ est vu par exemple. Nous aurons la figure ci-contre. En enlevant le cylindre, la boucle $l'p'$ se trouve être vue.

Pour le cône T toute la courbe est vue en projection verticale. Enfin il faudra garder une partie des génératrices du cylindre.

Remarquons qu'en projection horizontale le cône T est entièrement caché.

GRANDE ÉPURE N° 12

Cône et cylindre.

Énoncé :

On donne un cône de révolution (SS') par son sommet et sa base circulaire (oo') dans le plan horizontal Un cylindre a pour base le cercle $\omega\omega'$ et des génératrices parallèles à $s'g'_1$ en projection verticale.

Représenter la portion solide de la nappe inférieure du cône S, extérieure au cylindre et située au-dessus du plan horizontal de projection.

Texte :

Mise en place. — Elle est immédiate.

Méthode. — On emploie des plans sécants auxiliaires qui passent par la parallèle $(s\sigma, s'\sigma')$ aux génératrices du cylindre. Leurs traces horizontales passent donc par le point σ.

Point courant et sa tangente. — Prenons un plan auxiliaire dont la trace horizontale est σg_2. Il donne 4 génératrices dans les deux surfaces. Prenons-en deux, Sg_2 et $\gamma_1 m$. Ils se coupent au point m cherché qu'on rappelle en m' sur $S'g'_2$.

Pour la tangente on cherche un point de l'intersection des deux plans tangents en prenant le point de rencontre $(\tau\tau')$ des traces horizontales.

Points sur les contours apparents. — Les points a' et b' de γ'_2 sont donnés par le plan $\sigma\gamma_2$. Les points c' et d' de g'_3 sont donnés par la trace σg_3.

En projection horizontale, il existe deux points e et f sur γ_3 donnés par le plan dont la trace horizontale est $\sigma\gamma_3$.

Points remarquables. — Ils sont donnés par les plans limites. Le plan σg_4 donne les points (ii') et (hh') et le plan $\sigma\gamma_3$ les points (jj') (kk').

Ligne des points doubles. — C'est l'intersection des plans de contour apparent vertical. Pour le cône, c'est le plan de front g_1g_3. Pour le cylindre, c'est le plan déterminé par les génératrices $(\gamma_2\gamma_2')$ et $(\gamma_4\gamma_4')$. On a immédiatement la droite d'intersection $(uv,\ u'v')$ qui est horizontale.

Ponctuation. — On situera d'abord la courbe sur le cône. Quand on enlèvera le cylindre, la portion $d'm'$ deviendra vue. Il faudra conserver en pointillé la portion $d'c'$ de génératrice. Enfin, en projection horizontale, on mettra la section du cylindre par le plan horizontal.

GRANDE ÉPURE N° 13

Cône et cylindre.

Énoncé :

On donne un cercle de centre ω (— 60, 60, 0), de rayon 40 dans le plan horizontal et une ellipse de

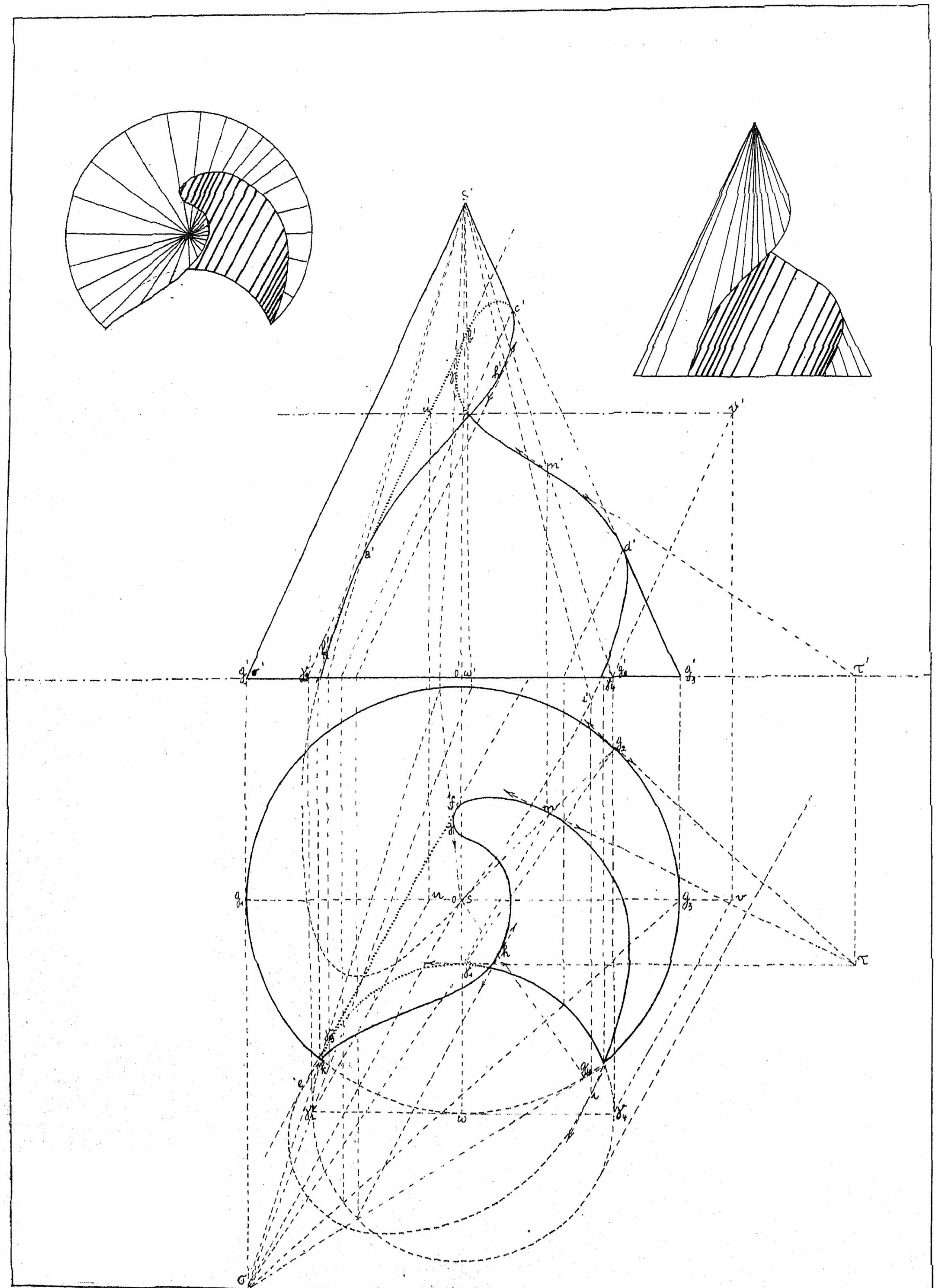


Figure grande épure n° 12.

centre φ (30, 60, 70) dans un plan de bout dont la trace horizontale est Oy, la projection horizontale de cette ellipse étant un cercle tangent à Oy. Le cercle ω est la base d'un cylindre dont les génératrices ont leurs projections verticales parallèles à la trace verticale du plan de l'ellipse; les projections horizontales de ces génératrices font avec X'X un angle de 30°. L'ellipse φ est la base d'un cône ayant pour sommet le point S (— 100,

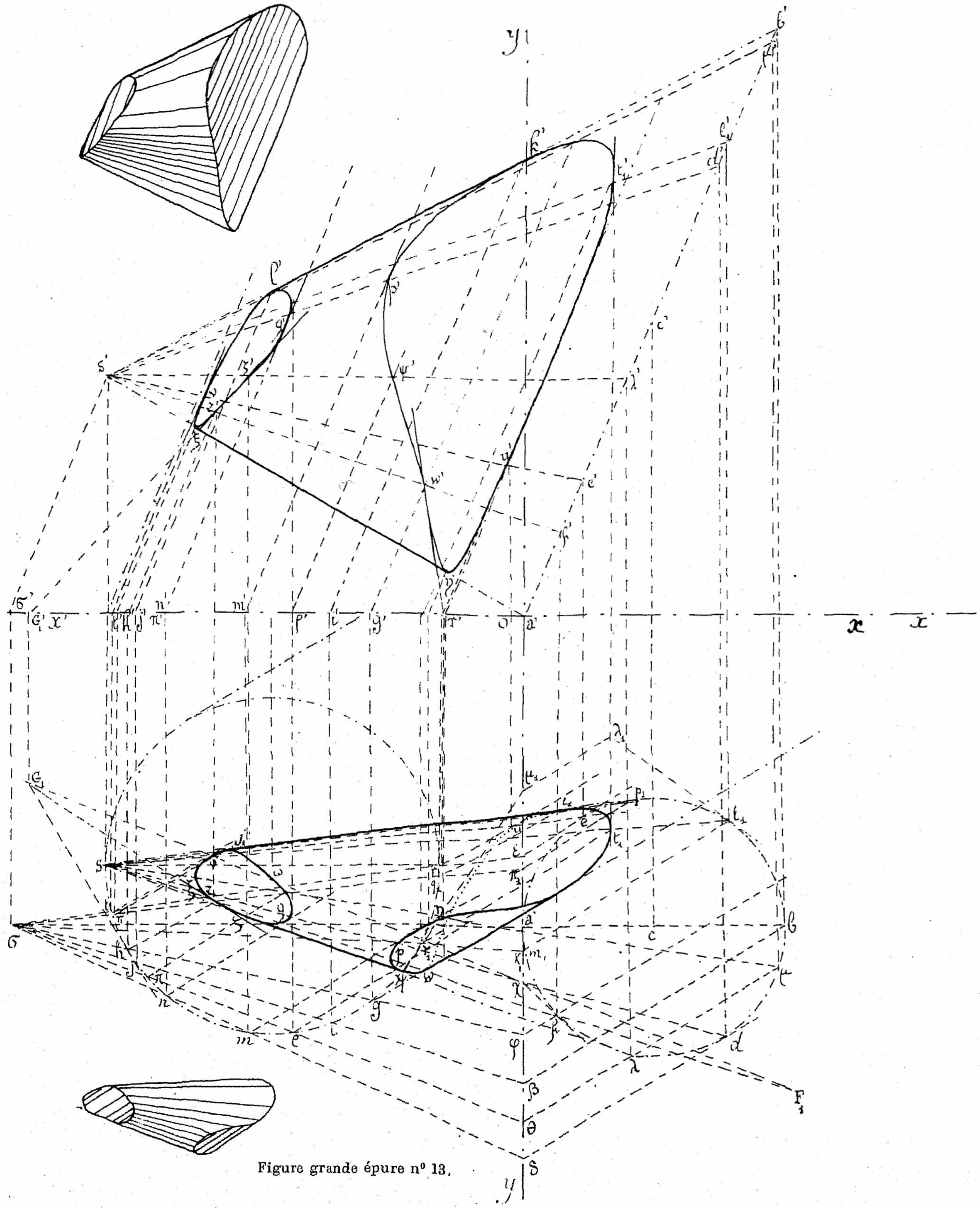


Figure grande épure n° 13.

60, 55). Représenter par ses deux projections le solide commun au cône et au cylindre supposé rempli de matière opaque.

TEXTE :

Les deux solides se mettent en place immédiatement, les points de l'intersection sont obtenus par la méthode des plans auxiliaires menés par le sommet du cône S parallèlement aux génératrices du cylindre. Ils passent donc tous par la droite $S\Sigma$ menée par S parallèlement aux génératrices du cylindre : la trace de cette droite est Σ sur le plan horizontal ; cette même droite est parallèle au plan de base du cône : en conséquence, les traces des plans auxiliaires passeront sur le plan horizontal par le point Σ et seront sur le plan de bout parallèles à $s\sigma$ en projection horizontale. On a mené :

1° Les plans auxiliaires limites, l'un d'eux a pour traces $d\delta mn\sigma$ et fournit les points P et Q, l'autre a pour traces $e\varepsilon\Upsilon t\sigma$ et donne les points U et V, tous deux étant limites pour le même corps, le cône ; l'intersection est une *pénétration ;*

2° Les plans auxiliaires qui donnent les points sur les contours apparents ; ce sont : celui dont les traces sont $b\beta ij\sigma$ qui donne les deux points K et L, puis celui dont la trace est $a\sigma$ qui donne les deux points n et ξ, puis le plan de traces $\mu\lambda\theta\rho\pi$ qui donne les points ϕ et ξ, puis le plan de traces $p_1\pi_1q_1r_1\sigma$ qui fournit les deux points I_1 et J_1 ; enfin, remarquons que le plan limite $e\varepsilon\sigma$ a fourni le point U sur le contour apparent vertical du cylindre. On a, en dehors de ces points, déterminé le point courant Z et sa tangente G_1Z par la méthode ordinaire d'intersection des plans tangents.

Pour avoir le solide commun, on conserve des contours apparents du cône la partie intérieure au cylindre, et des contours apparents du cylindre la partie intérieure au cône.

GRANDE ÉPURE N° 14

Deux cônes.

ÉNONCÉ :

On donne dans le plan horizontal un cercle de centre ω (45, 45, 0) de rayon 45 et un second cercle de centre φ (— 45, 45, 0) de même rayon, qui est tangent extérieurement au premier.

Le cercle ω est la base d'un cône ayant pour sommet le point T (0, 45, 75), et le cercle φ est la base d'un cône ayant pour sommet le point S (120, 90, 150).

Représenter par ses deux projections la portion du cône T supposé plein extérieure au cône S comprise entre le sommet T et le plan horizontal de projection.

TEXTE :

Pour obtenir les points de l'intersection, on se servira de plans auxiliaires passant par la droite qui joint les sommets des deux cônes. Cette droite rencontre le plan horizontal au point $\sigma\sigma'$ situé sur la droite xx' qui est tangente commune aux deux cercles φ et ω. Par suite, le plan passant par xx' et la droite ST, qui est un plan limite pour les deux cônes, est aussi un plan tangent commun aux deux cônes, il y aura donc un point double à l'intersection des deux cônes. On obtient ce point A en menant les génératrices correspondantes à ce plan limite $s\xi$ et $T\xi$. Il existe un second plan limite pour le cône T dont la trace est ΣB et qui donne les deux points I et J sur les génératrices SC, SD du cône S qui sont les tangentes en I et J.

Remarquons maintenant que les deux contours apparents verticaux $T\alpha$ et $S\alpha$ se rencontrent en α, on aura la tangente en ce point en prenant selon la méthode du cours la corde commune aux deux cercles de Meusnier en α. On obtient sur l'épure la droite $\alpha'\gamma'$ perpendiculaire à la ligne des centres de courbure $\omega'0'$. Les autres points sur les contours apparents sont obtenus à l'aide des plans auxiliaires suivants : 1° $\Sigma\beta$, qui donne sur la génératrice $T\beta$ les points π et λ ; 2° $\Sigma\alpha$, qui donne sur la génératrice $T\alpha$ le point ρ et sur la génératrice $S\alpha$ le point ε ; 3° ΣP, qui donne U et W sur la génératrice SP. Le plan auxiliaire de trace $\Sigma LK\Delta$ a servi à déterminer deux points courants M et N et leurs tangentes en ces points à l'aide de l'intersection des plans tangents dont les traces sur le plan horizontal sont : d'une part $\delta\mu$ et $k\mu$, d'autre part $\delta\nu$ et $l\nu$, les tangentes étant par suite $M\mu$ et $N\nu$.

Enfin on a déterminé une des tangentes au point double (les dimensions ne permettant pas de déterminer l'autre ainsi) à l'aide des traces sur le plan horizontal

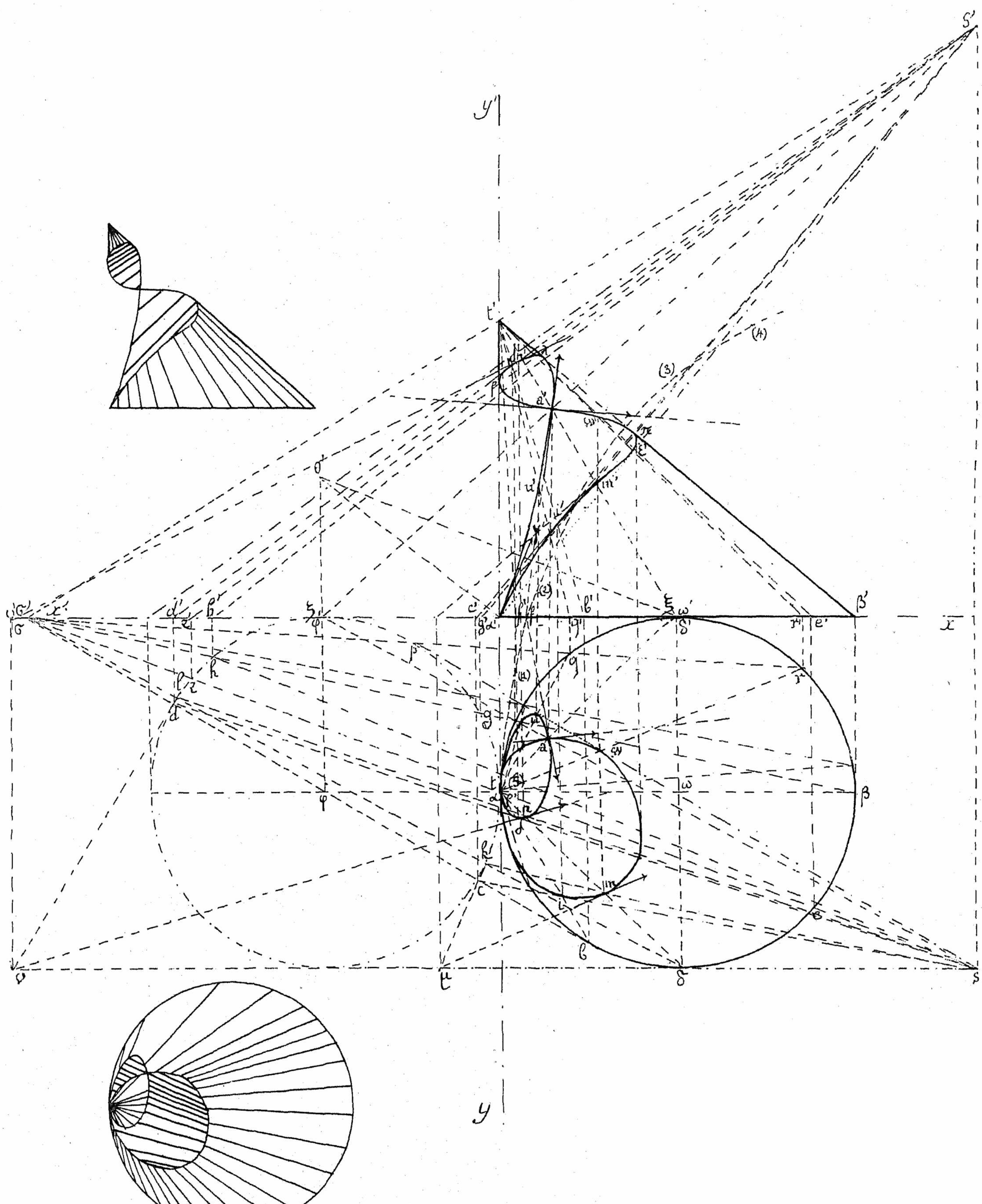


Figure grande épure n° 14.

du plan tangent commun $x'x$ et du cône du second degré dont le sommet est le point double et la directrice la biquadratique d'intersection. Cette dernière trace est une conique dont on a déterminé 5 points de part et d'autre de $x'x$, les points (1) (2) (3) (4) et α qui est (5). Les constructions, d'ailleurs immédiates, n'ont pas été tracées pour ne pas rendre l'épure illisible; il suffit, pour obtenir un point, de prendre la trace horizontale d'une droite joignant le point double A à un point de la biquadratique. L'intersection F de la conique dont on a ainsi tracé un arc avec $x'x$ donne un point d'une des tangentes AF au point double A.

GRANDE ÉPURE N° 15

Intersection de deux cônes.

ÉNONCÉ :

Les bases des deux cônes sont des cercles C et C_1 situés dans le plan horizontal de cote h. Les sommets des deux cônes se projettent en S et S_1 sur C et C_1 et sont situés dans le même plan horizontal $S'S'_1$.

Représenter le solide commun limité au plan horizontal.

TEXTE :

MISE EN PLACE. — On a immédiatement les contours apparents verticaux des deux cônes. Leurs contours apparents horizontaux se réduisent respectivement aux points s et s_1.

MÉTHODE. — On prendra pour plans auxiliaires des plans passant par la ligne des sommets SS_1 des deux cônes. Cette droite étant horizontale, les traces des plans auxiliaires sur le plan de la base des deux cônes seront parallèles à ss_1. De plus, pour que ces plans donnent des points de l'intersection, il faudra que leurs traces soient comprises entre les traces L et L_1 des plans limites à O et O_1.

POINT COURANT ET TANGENTE. — Considérons le plan auxiliaire de trace quelconque A. A rencontre C et C_1 en particulier au point a et a_1, d'où les génératrices sa et s_1a_1 des cônes qui se rencontrent au point m, qui se rappelle en m' sur $s'a'$. Les plans tangents en M aux deux cônes ont pour traces sur le plan de base les tangentes at et a_1t aux cercles C et C_1. Leur point commun t est un point de la tangente en m : d'où tm et $t'm'$ en projection verticale.

POINTS SUR LES CONTOURS APPARENTS. — Le plan auxiliaire de trace C nous donne les points E et F sur le contour apparent du cône S.

Le plan auxiliaire C_1 nous donne les points I et J sur le contour apparent vertical de l'autre cône.

POINTS REMARQUABLES. — D'abord les points P et Q, et R donnés par les plans limites L et L_1. Maintenant cherchons le point le plus haut de la courbe. Il est évident que ce point est dans le plan de trace ss_1, d'où les génératrices sr-$s'r'$, s_1u, s'_1u' qui se rencontrent au point α-α' cherché : en ce point la tangente est horizontale.

La projection verticale de l'intersection a un point double. Cherchons donc l'intersection des plans diamétraux des deux cônes par rapport à la direction de bout. Ces plans sont parallèles à la ligne de terre et définis par les points ss'-$s_1s'_1$ et les diamètres D-D', D_1-D'_1. Faisons une projection verticale auxiliaire en prenant pour ligne de terre so. D'où les nouvelles projections verticales σ,σ_1, o,ω_1, de s,s_1 ; o et o_1 ; σo rencontre $\sigma_1\omega_1$ au point β dont nous reportons la cote $\delta\gamma$ en $\delta'\gamma'$, d'où l'horizontale $\gamma'\theta'$ sur laquelle se trouve le point double.

GRANDE ÉPURE N° 16

Deux cônes.

ÉNONCÉ :

On donne deux cônes de la manière suivante :

1° *Cône S.* — On donne son sommet (ss') dans le plan vertical de projection et sa base circulaire (OO') dans le plan horizontal ;

2° *Cône T.* — On donne son sommet (tt') sur la ligne de front du plan horizontal de projection, et qui passe par le point O. Il est de révolution. Il est tangent au plan horizontal le long de ($to,t'o'$) et au plan défini par les droites ($sa,s'a'$) et ($ta,t'a'$).

Représenter l'ensemble des deux surfaces.

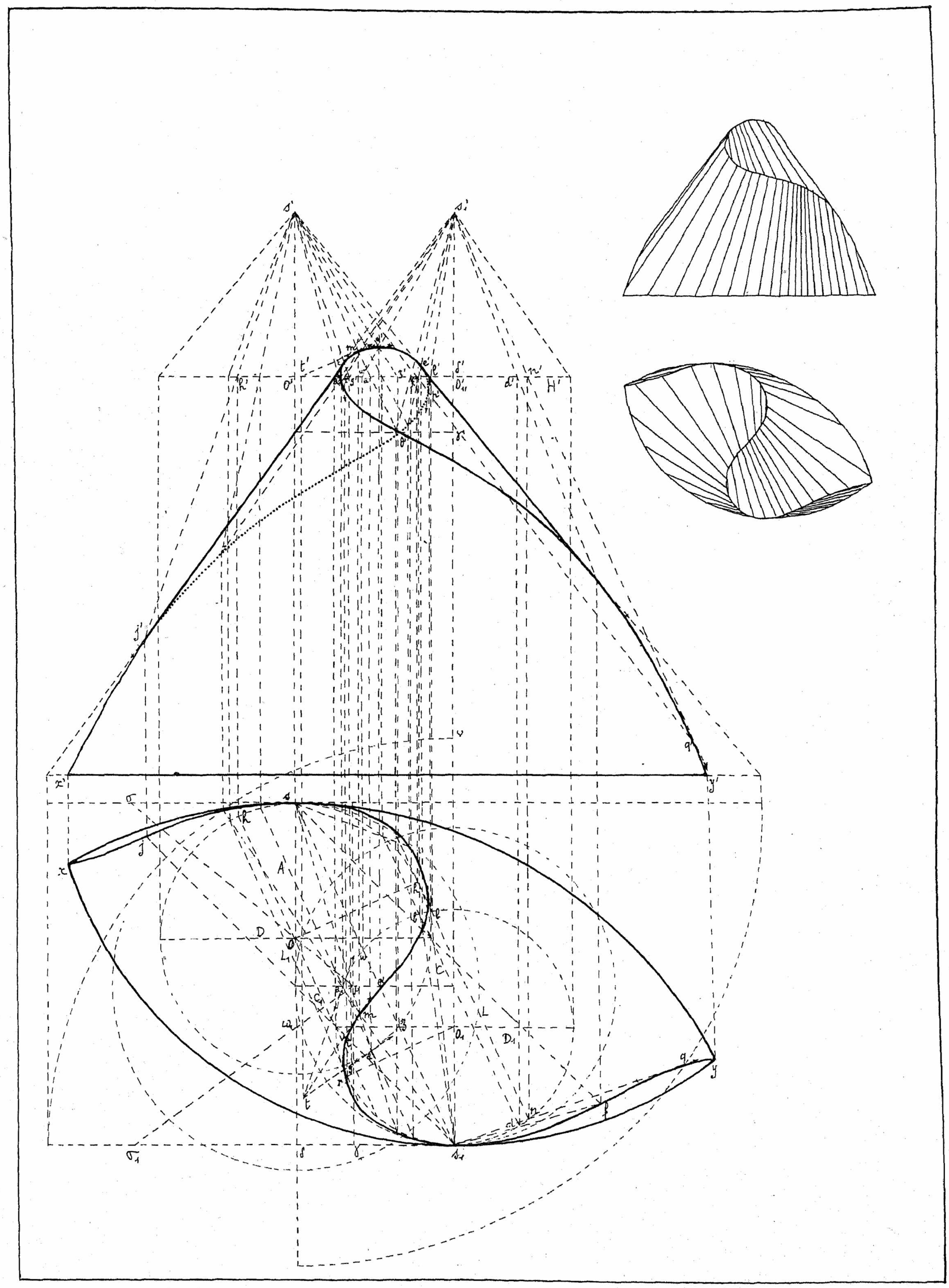


Figure grande épure n° 15.

TEXTE :

MISE EN PLACE. — Les contours apparents du cône S s'obtiennent aisément. Pour avoir ceux du cône T on se servira d'une sphère inscrite.

Le centre de cette sphère se trouve à l'intersection de la verticale du point O avec le bissecteur du dièdre formé par les plans (Oat, $O'a't'$) et (sat, $s'a't'$). Prenons une ligne de terre auxiliaire suivant ao, afin de rendre de bout le plan (sat, $s'a't'$). Le point (ss') vient en (ss'_1); as'_1 est la trace verticale du plan (sat, $s'a't'$). La trace du plan bissecteur est ab'_1. La verticale du point o coupe cette trace en un point b_1' qui est le centre de la sphère. Ce point vient dans l'ancien système en bb'. Le rayon de la sphère est Ob'_1. Une fois les contours apparents de la sphère tracés, les tangentes à ces contours issues des points t et t', donnent les contours apparents du cône T.

MÉTHODE. — On fait tourner des plans auxiliaires autour de la droite des sommets. Il faut avoir pour cela une base commode dans le cône T. On prendra une :

BASE DE MONGE. — Considérons le cylindre vertical circonscrit à la sphère bb'. Il coupe le cône T suivant 2 courbes planes situées dans des plans de front et qui se projettent horizontalement sur la circonférence b. Nous prendons pour base l'une de ces courbes, par exemple celle qui est située dans le plan $c'd'$.

La ligne des sommets ST rencontre les deux plans de base, respectivement aux points (dd') et (tt'). Les traces des plans auxiliaires sur chacun des plans de base tourneront autour de ces deux points. On se servira aussi de la ligne d'intersection des deux plans de base qui est la droite de bout ec' du plan horizontal de projection.

POINT COURANT ET SA TANGENTE. — Considérons le plan dont la trace horizontale est ft; il coupe le plan de base du cône T suivant fd. Cette droite fd coupe la base du cône T en un point g; tg est une génératrice d'intersection. On a facilement la génératrice (sh, $s'h'$) du cône S; cette génératrice coupe la précédente au point m cherché que nous rappelons sur la projection verticale $h's'$ de la génératrice hs.

Passons à la tangente. Nous nous servirons du point de rencontre des traces horizontales des plans tangents aux deux surfaces. Pour le cône S la trace correspondante est $f\tau$; voyons l'autre trace. La tangente gi à la base du cône T coupe la droite ec' en un point i qui appartient à la trace horizontale cherchée. Un autre point est le point t, puisque les plans tangents passent par le sommet et que le sommet est dans le plan horizontal. Les deux traces se coupent en un point τ que nous rappelons en τ'. (τm, $\tau' m'$) est la tangente cherchée.

POINTS SUR LES CONTOURS APPARENTS. — Il y a deux points sur chacune des génératrices γ_1 et γ_2; pour les avoir il suffit de faire passer la trace des plans sécants par les points de contact $\gamma_1 k$ des génératrices avec la base du cône T. Ces traces sont dje_1t et $dket$.

En projection verticale, on se servira de la projection horizontale des génératrices de contour apparent; γ_3 coupe la courbe aux points $lnqp$ qu'on rappellera en $l'n'q'p'$ sur les génératrices correspondantes. De même les projections G_1 et G_2 donnent les points rr' et $\mu\mu'$.

POINTS REMARQUABLES. — Il existe un plan limite dut, qui donne les points (vv') et (ww') avec leur tangente.

POINT DOUBLE RÉEL. — Par hypothèse, le plan défini par sa trace ta et la génératrice (sa, $s'a'$) est plan tangent commun pour les deux surfaces. Il y a donc un point double réel situé sur (sa, $s'a'$).

Cherchons la génératrice de contact du cône T, et pour cela revenons au changement de plan vertical qui nous donnait le plan tangent en aS'_1.

La génératrice cherchée passe par le point de contact de la sphère b avec le plan tangent. Dans la nouvelle projection, la sphère bb'_1 touche le plan aS'_1 au point β'_1 qui vient en $\beta\beta'$ dans l'ancien système.

($t\beta$, $t'\beta'$) est la génératrice cherchée. On a par suite exactement le point double ($\varepsilon\varepsilon'$).

PONCTUATION. — En projection horizontale, la courbe est vue tout entière sur le cône S. Les contours apparents figurent en entier puisqu'on représente les deux surfaces; reste à dégager les parties vues des parties cachées.

Le raisonnement étant le même pour toutes les génératrices, nous le ferons pour γ_2 en particulier. Le point γ_2 de cette génératrice est évidemment extérieur au cône S, il sera donc vu; et ceci jusqu'au point μ où elle touche la courbe d'intersection. A partir de là, elle

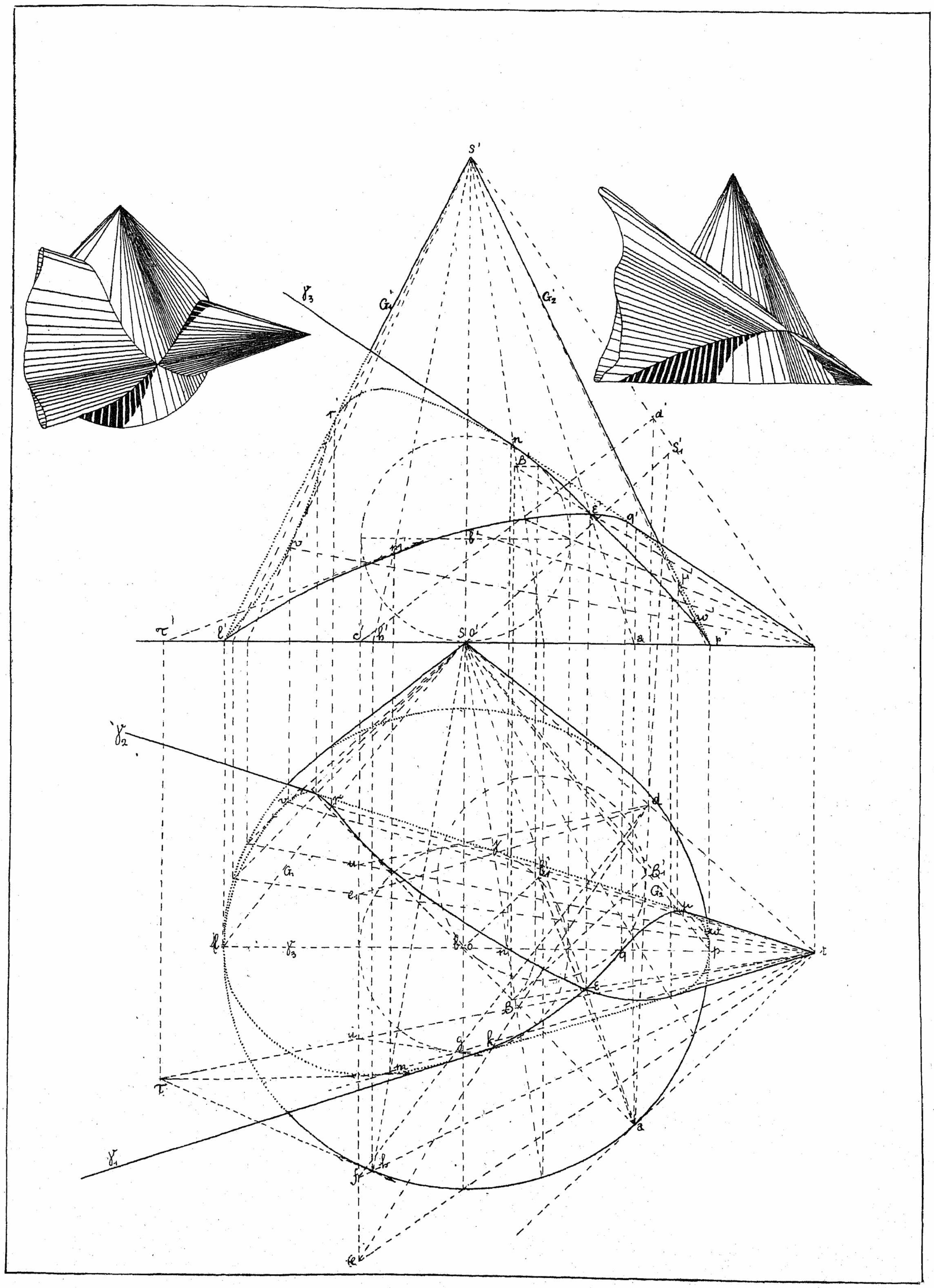


Figure grande épure n° 16.

sera cachée par le cône S, pour reparaître ensuite au point s.

En un mot, on conservera tout ce qui, du cône T, est extérieur au cône S et qui n'est pas caché par lui ; et réciproquement, tout ce qui du cône S est extérieur au cône T et n'est pas caché par lui.

GRANDE ÉPURE N° 17

Cône et cylindre.

ÉNONCÉ :

On considère 2 plans de bout $O'\alpha'$, $O'0'$ rectangulaires, passant par le point O-O' et symétrique par rapport au plan de profil O-O'.

Un cylindre a pour base, dans le plan $O'\alpha'$ une ellipse ayant pour centre le point ω-ω' et projetée horizontalement suivant un cercle de centre ω. Les génératrices sont perpendiculaires au plan de base.

Un cône a pour base dans le plan $O'0'$ un cercle de centre O-O', son sommet est en s-s'.

Représenter le demi-cylindre plein, situé au-dessus du plan de bout parallèle aux génératrices mené par le point ω-ω', entaillé par le cône. Limiter ce solide à deux plans de bout parallèles à $O'\alpha'$.

TEXTE :

MISE EN PLACE. — On a de suite les contours apparents du cylindre. Pour avoir le contour apparent vertical du cône, on porte sur $O'\delta'$ de part et d'autre de o' des longueurs $o'a'$ et $o'b'$ égales au rayon du cercle de base, d'où en projection verticale : $s'a'$ et $s'b'$.

REMARQUE. — Le sommet du cône étant sur le cylindre, le point S sera un point double de l'intersection. De plus, ce point étant sur les contours apparents verticaux des 2 surfaces sera un point de rebroussement en projection verticale. En projection horizontale, puisque les plans tangents aux 2 surfaces sont confondus suivant le plan de front de trace $s\sigma$, la courbe sera tangente en s à $s\sigma$.

MÉTHODE. — On coupe par des plans passant par la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône. Cette parallèle rencontre le plan de base du cylindre au point $\sigma\sigma'$, et est parallèle au plan de base du cône. Par suite, en projection horizontale, les traces de ces plans auxiliaires sur le plan de base du cylindre passeront toutes par le point σ, et leurs traces sur le plan de base du cône seront parallèles à la direction des génératrices du cylindre.

Pour obtenir facilement les génératrices du cône on rabat le cercle de base du cône sur le plan horizontal du point o. La base du cône ainsi rabattue a alors pour projection horizontale le cercle de centre o et de rayon os.

POINT COURANT ET SA TANGENTE. — Sur os projection horizontale de l'intersection des plans de base de deux surfaces, prenons un point quelconque β, et considérons le plan auxiliaire passant par ce point. Son intersection avec le plan de base du cylindre est projetée horizontalement en $\beta\sigma$, qui rencontre le cercle ω au point d, d'où la génératrice D-D' du cylindre. Le plan de base du cône est coupé par le plan auxiliaire suivant la droite βe-$\beta' e'$ qui se rabat en βe_1-$\beta' e'_1$ sur le plan horizontal du point O; cette droite rencontre le cercle rabattu au point e_1-e'_1 qui se relève en e-e' d'où la génératrice se-$s'e'$ du cône qui rencontre la génératrice DD' du cylindre au point m-m' qui est un point de l'intersection.

La tangente au point M est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces en ce point. Le plan tangent au cylindre est défini par la génératrice DD' et la tangente de-$d'e'$ au cercle de base. Ce plan coupe le plan de base du cône suivant la droite et-$e't'$.

Le plan tangent au cône a pour trace sur le plan de base du cône la tangente en e-e' au cercle de base. Cette tangente est rabattue en f_1e_1-$f'_1e'_1$ et se relève en fe-$f'e'$. Elle rencontre et-$e't'$ au point t-t' qui est un point de la tangente en m-m'. Cette tangente se projette donc en tm et $t'm'$.

REMARQUE. — En partant du second point d'intersection γ_1 de βe_1 avec le cercle o, on obtient le second point n-n' et on voit immédiatement que les points m et n de la projection horizontale sont symétriques par rapport à so : en effet, D est perpendiculaire à so, de plus en projection verticale, on voit que $\frac{\lambda' m'}{\lambda' n'} = \frac{o'e'}{o'\gamma'_1} = \frac{\beta e_1}{\beta\gamma_1}$, mais $\beta e_1 = \beta\gamma_1$ par suite : $\lambda' m' = \lambda' n'$ et les projections λm et λn sur D de ces 2 segments sont aussi égales.

Donc la projection horizontale de la courbe d'intersection admettra so comme axe de symétrie.

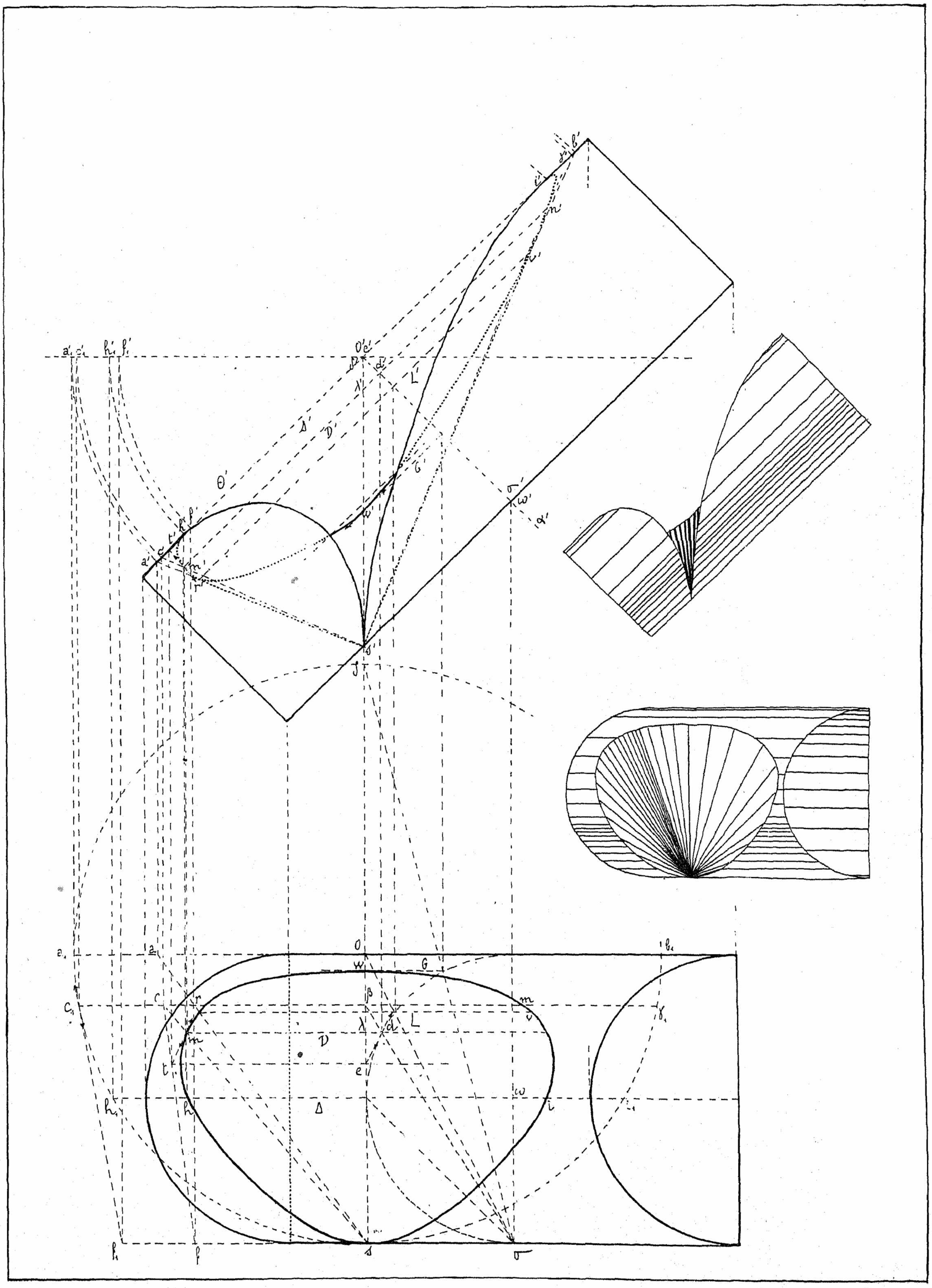


Figure grande épure nº 17.

Points sur le contour apparent vertical du cylindre. — Pour avoir ces points il faut faire passer le plan auxiliaire par la génératrice de contour apparent vertical Δ-Δ'. La trace de ce plan sur le plan de base du cône est alors la droite Δ-Δ' elle-même. Elle rencontre le cercle rabattu au points h_1-h'_1 et i_1-i'_1 qui se relèvent en h-h' et i-i'. Ce sont les points cherchés.

Points sur contour apparent vertical du cône. — Il faut prendre pour plan auxiliaire le plan qui contient les génératrices de contour apparent vertical du cône. Ce plan a pour trace sur le plan de base du cylindre la droite σo, $\sigma' o'$ et coupe le cylindre suivant la génératrice L-L'. L' rencontre $s'a'$ et $s'b'$ aux points r' et v' qui se rappellent en r et v. r-r' et v-v' sont les points cherchés.

Plans auxiliaires limites. — Ce sont d'abord le plan vertical $s\sigma$ qui nous donne le point s-s' : puis le plan tangent au cône le long de la génératrice $s\delta$-$s'\delta'$. Ce plan coupe le cylindre suivant la génératrice G-G' qui rencontre $s\delta$-$s'\delta'$ au point w-w'. La tangente en ce point est la génératrice du cylindre puisque ce plan est limite pour le cône.

Droite des points doubles. — On voit en traçant approximativement la courbe qu'elle doit avoir deux points doubles en projection verticale. Il faut donc chercher la droite des points doubles. C'est l'intersection des points diamétraux du cône et du cylindre par rapport à la direction de bout. Le plan diamétral du cylindre par rapport à cette direction est le plan vertical de trace Δ.

Le plan diamétral du cône, qui passe d'abord par le sommet s, passe aussi par le diamètre de front du cercle de base. Puisque la trace Δ du premier plan est équidistante de s et du diamètre ab, l'intersection de ces 2 plans sera la droite λ-λ' projetée horizontalement suivant Δ et verticalement suivant λ' parallèle à ab et équidistante de s' et $a'b'$.

GRANDE ÉPURE N° 18

Solide commun à deux cônes.

Énoncé :

Deux cônes ont leurs sommets (ss') (tt') sur une fronto-horizontale, et ils admettent pour bases dans le plan horizontal de projection deux paraboles données de la façon suivante. Elles ont leurs sommets (cc') et (dd') sur une même droite de bout et elles passent toutes deux par les points (aa') (bb') situés dans le plan de front st. Les projections a et b sont symétriques par rapport à la droite cd.

Représenter le solide commun aux deux surfaces situé au-dessus du plan horizontal de projection.

Texte :

Mise en place. — Pour construire les paraboles de base, il suffit d'en connaître les foyers. On a facilement la tangente en a, on porte pour cela la longueur $c\omega$ égale à oc, $a\omega$, est la tangente. Elle rencontre la tangente au sommet au point π. Le foyer f_1 est à l'intersection de la perpendiculaire en π à ωa avec l'axe cd. Ceci parce que la tangente au sommet est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes. On construit de même la deuxième parabole.

Pour avoir le contour apparent du cône S par exemple, il suffit du point S de mener des tangentes à la parabole. Il y en a deux qu'on obtient en se basant toujours sur la propriété énoncée de la tangente au sommet. Sur Sf_2 comme diamètre on décrit une circonférence. Cette circonférence coupe la tangente au sommet aux points ρ et θ. Le contour apparent horizontal est formé par les droites θS et $S\rho$. On a de même les contours du cône T.

En projection verticale les contours apparents se réduisent aux points s' et t'.

Méthode. — On fait tourner des plans sécants auxiliaires autour de la droite des sommets $(st, s't')$. Ces plans ont leur trace horizontale parallèle à xy.

Point courant et sa tangente. — Prenons une trace $g_1\gamma_1$ et parmi les 4 génératrices qu'elle fournit, choisissons en deux sg_1, $t\gamma_1$. Elles se coupent au point m cherché qu'on rappelle en m' sur $s'g'_1$. Pour la tangente on se sert du point de rencontre $\tau\tau'$ des tangentes avec paraboles de base.

Points sur les contours apparents. — Les points e et h sur γ_2 sont donnés par la trace passant par γ_2, de même la trace g_2 donne les points ij.

Points remarquables. — Ils sont donnés avec leur tangente par les plans limites dont la trace passe par les points c et d. Ce sont les points (kk') (ll') et (pp') (qq').

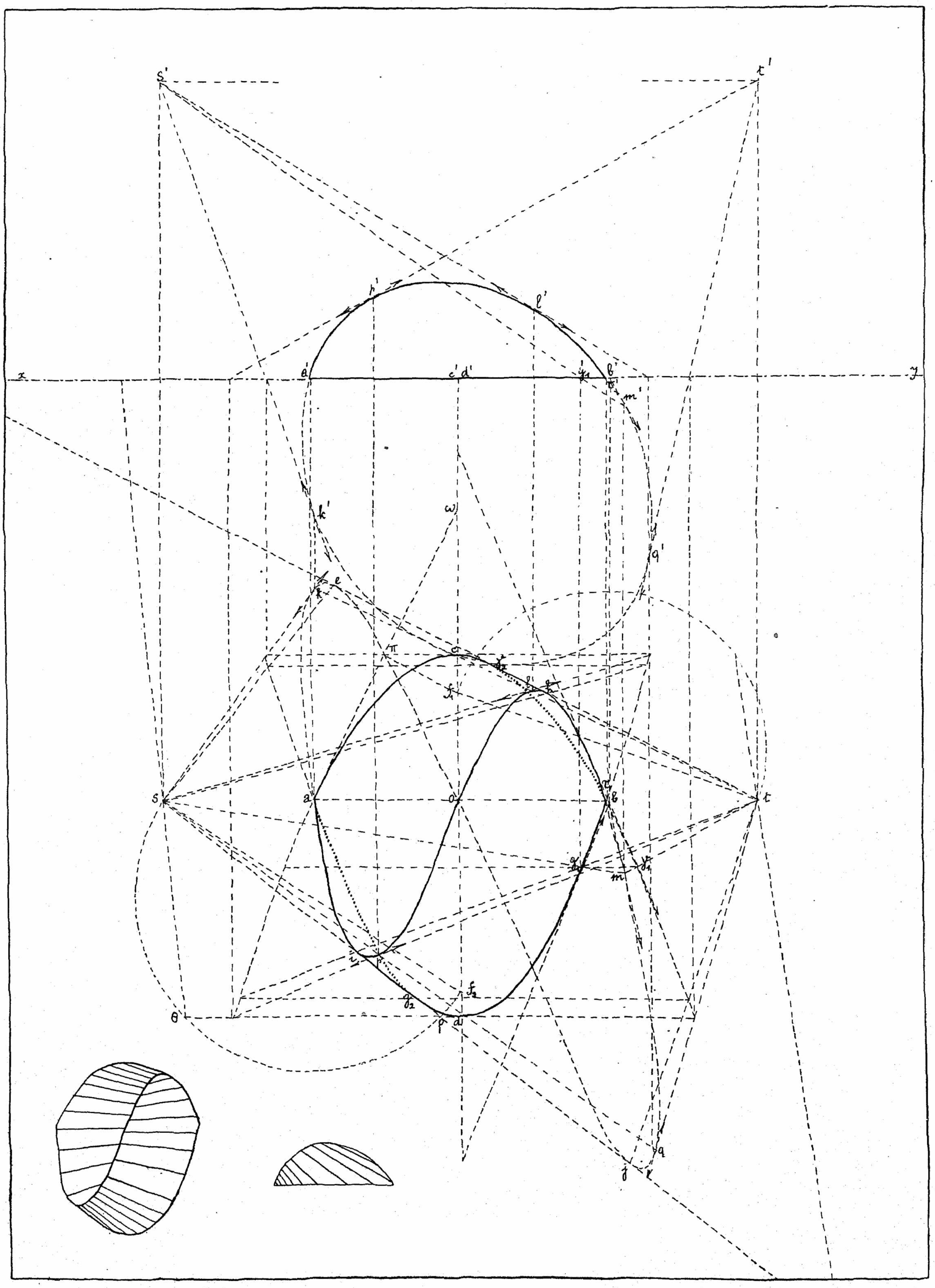


Figure grande épure n° 18.

Ponctuation. — En projection verticale c'est immédiat. En projection horizontale, il faudra faire figurer les arcs acb et adb de parabole la partie aob de l'intersection qui se trouve au-dessus du plan horizontal, enfin les portions ig_2 et $h\gamma_2$ de génératrices qu'on constate être intérieures aux deux surfaces.

GRANDE ÉPURE N° 19

Solide commun à deux cônes.

Énoncé :

Deux cônes sont définis par leurs sommets situés dans le plan de front F et par leurs bases circulaires dans le plan horizontal de projection, dont les centres sont dans ce même plan de front.

Représenter le solide commun à ces cônes, compris entre les deux nappes inférieures et le plan horizontal de projection.

Texte :

Mise en place. — En projection horizontale les contours apparents se réduisent à un point pour chaque cône.

Méthode. — On fait tourner des plans autour de la droite $(s\sigma, s'\sigma')$ qui joint les deux sommets.

Remarque. — Les surfaces admettent le plan de front F comme plan commun de symétrie. D'où les deux conséquences suivantes :

1° La projection horizontale de l'intersection est symétrique par rapport à la droite st. Il suffira donc de chercher des points situés dans l'une des deux moitiés de la figure et d'en prendre les symétriques;

2° On sait que dans ce cas la projection sur le plan de symétrie, ou, ce qui revient au même, sur le plan vertical de projection, est une hyperbole dont on connaît déjà 4 points : les points (aa') (bb') (cc') (dd') situés sur les contours apparents. On pourrait la déterminer complètement en cherchant une asymptote et rappeler les parties utiles de cette hyperbole en projection horizontale. D'où une autre solution du problème.

Point courant et sa tangente. — Prenons un plan auxiliaire dont la trace horizontale est σg_1. Les génératrices correspondantes sont tg_1 et $s\gamma_1$. Elles se coupent au point (mm') cherché. On aura le point $(\tau\tau')$ de la tangente à l'aide des traces horizontales $\tau\gamma_1, \tau g_1$ des plans tangents.

Points remarquables. — Outre les points (aa') (bb') (cc') (dd'), il y a le point ff' donné par le plan limite σg_0.

Asymptotes. — Le cône S transporté en T a pour base le cercle de diamètre $(hk, h'k')$. Cette base donne la génératrice commune tg_2, $t'g'_2$ et, par suite, la génératrice parallèle $s\gamma_2$. L'asymptote est parallèle à ces génératrices; elle est déterminée par le point $(\theta\theta')$, où les traces horizontales des plans tangents le long de $(s\gamma_2, s'\gamma'_2)$ $(tg_2, t'g'_2)$ se rencontrent. On a ainsi l'asymptote (AA'); il en existe une autre (BB'), qui lui est symétrique par rapport au plan F. Ces deux asymptotes sont dans le plan de bout $A'B'$.

Enfin il existe, en projection verticale seulement, une autre asymptote C' qu'on obtient de la manière suivante : sur la droite $a'b'$, on porte une longueur $a'i'$ égale à $j'b'$, i' en est un point. De même on porte $i'q'$ égale à $p'b'$, q' en est un autre point.

Remarque sur l'asymptote C'. — Cette asymptote est horizontale. En effet, elle correspond aux points cycliques IJ à l'infini; or, ces points sont donnés par des plans horizontaux.

Remarque. — La courbe dd' correspond à l'intersection des nappes supérieures. La partie $b'd'$ est parasite.

Ponctuation. — Les courbes sont vues entièrement. En projection horizontale, on conservera évidemment les portions $\alpha\beta\delta$ et $\beta\gamma\delta$ des cercles de base. Enfin, les raisonnements habituels montrent les portions de génératrices qu'il faut conserver en projection verticale.

GRANDE ÉPURE N° 20

Cône et cylindre.

Énoncé :

On donne un cône de sommet S (— 100, 70, 100) ayant pour base dans le plan horizontal le cercle de centre φ (50, 50, 0) de rayon 50 et un cône ayant pour

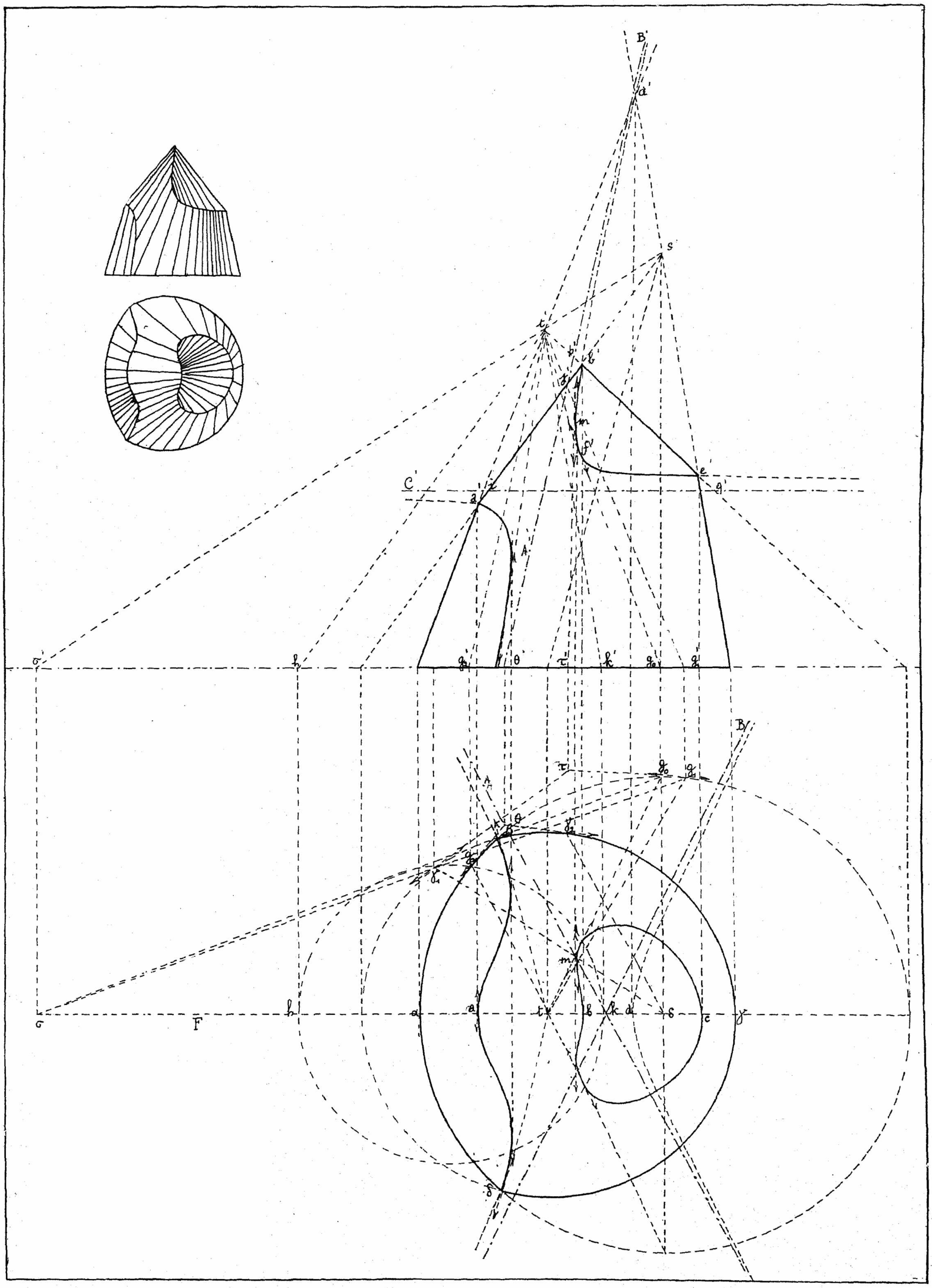


Figure grande épure n° 19.

base dans le plan horizontal le cercle de centre ω (— 50,

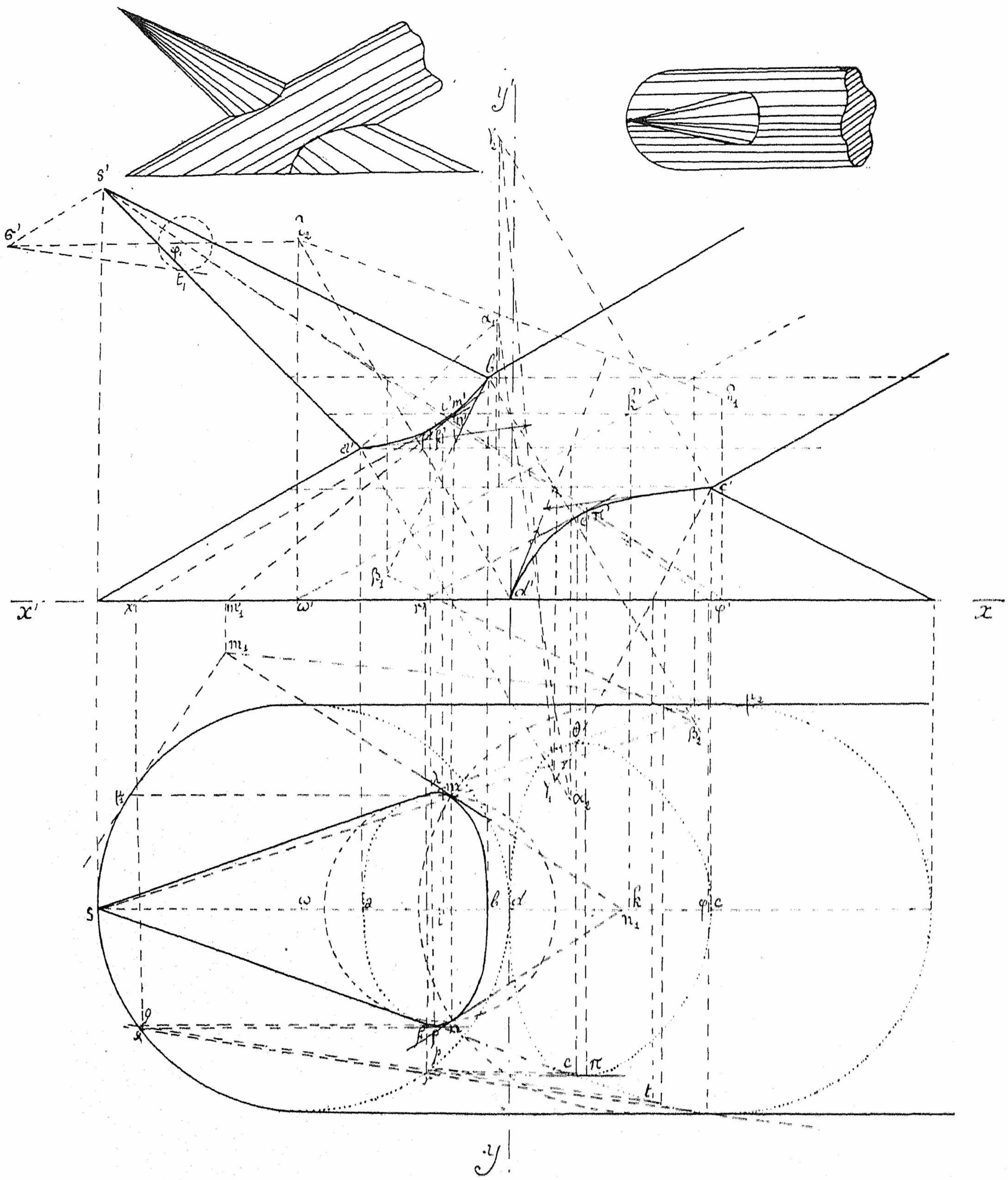


Figure grande épure n° 20.

50, 0) de rayon 50; les génératrices de ce cylindre sont de front et font un angle de 30° avec le plan horizontal.

Représenter l'ensemble des surfaces du cône et du cylindre extérieures l'une à l'autre, supposées toutes deux opaques.

Texte :

On ne pourra pas facilement ici se servir de la méthode habituelle dans les intersections de cônes et de cylindres. La droite menée par le sommet du cône parallèlement aux génératrices du cylindre coupe en effet le plan commun des bases en dehors des limites de l'épure. On a relevé le plan de base de 88 millimètres pour avoir cependant les points sur le contour apparent horizontal du cône et les plans limites, mais évidemment les constructions faites à partir du petit cercle φ_1 en déterminant le plan limite $\sigma' t_1$ ne peuvent donner de résultats précis; les points ainsi obtenus sont les points E et F sur le contour apparent et naturellement leurs symétriques par rapport à SC et les points π et ρ sur les génératrices limites ainsi encore que leurs symétriques λ et θ. Les points courants M et N ont été déterminés à l'aide d'un plan auxiliaire horizontal de cote 45. Les tangentes en ces points ont été obtenues par l'intersection des plans tangents dont les traces sur le plan horizontal $\mu_1 m_1$ et $\mu_2 m_1$ se coupent en m_1 pour la tangente en M. La tangente en N a été obtenue par symétrie.

En projection verticale, les contours apparents se rencontrent en quatre points A, B, C, D ; on aura donc à déterminer les tangentes par la méthode décrite au cours ; on trouve ainsi les tangentes marquées d'une flèche sur l'épure, menées perpendiculairement aux droites $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$, $\delta_1\delta_2$ joignant les centres de courbure des deux sections normales de bout au point considéré dans les deux surfaces. Il faut alors remarquer que les deux surfaces admettent un plan de symétrie de front commun ; la biquadratique d'intersection se projette donc verticalement suivant une conique; la connaissance des quatre points A, B, C, D et de leurs tangentes montre que cette conique est une hyperbole dont on a un nombre d'éléments suffisants pour en assurer le tracé.

GRANDE ÉPURE N° 21

Cône et cylindre.

Énoncé :

On donne une droite $A\alpha$: A (0, 52, 0), α (90, 0, 0) et deux cercles de rayon 40 tangents à $A\alpha$ en A; l'un est dans le plan horizontal, à droite de $A\alpha$, l'autre dans le plan vertical $A\alpha'$ au-dessus de $A\alpha$; le cercle horizontal C est la base d'un cône de sommet S (— 33, 0, 120) et le cercle vertical Ω la base d'un cylindre de génératrices parallèles à SA. Représenter le solide commun à ces deux surfaces limité au plan horizontal.

Texte :

Remarquons, en premier lieu, que la génératrice SA est commune au cône et au cylindre et en deuxième lieu, que les deux cercles C et Ω admettant en A la même tangente $A\alpha$, les plans tangents le long de SA sont confondus ; les deux surfaces se raccordent donc le long de cette génératrice et, par suite, n'ont d'autre part qu'une conique en commun. Pour déterminer cette conique, on a utilisé un mur auxiliaire vertical dont la trace horizontale est $S\alpha$. Ce mur est un plan de symétrie pour les deux surfaces, en conséquence la conique cherchée s'y projette suivant une droite $e_1 h_1$ obtenue en joignant en croix le point h_1, où se rencontrent les deux contours apparents non confondus au point i_1, projection sur ce mur du point I situé sur la génératrice SΦ de contour apparent vertical. Ce point I a été déterminé au préalable en cherchant la trace P de SΦ sur le plan vertical $A\alpha$; le plan SAΦ coupe ce plan suivant AP qui rencontre la base du cylindre en Q ; par Q, on mène la génératrice du cylindre qui coupe SΦ en I. On relève facilement en plan la conique projetée en $e_1 h_1$ sur le mur auxiliaire, son petit axe est eh, son centre est σ déduit de σ_1 sur l'axe du cylindre et son grand axe égal au diamètre du cylindre; les deux points G et F du plan horizontal ont été trouvés sur la ligne de rappel de F_1G_1. Les tangentes TGT_1 et $\theta F \theta_1$ en ces points ont été tracées grâce au cercle homographique. En projection verticale, le sommet h a donné le point h' le plus haut et on a déterminé, outre I, le deuxième point M sur le second contour apparent, par la même méthode que celle suivie dans la recherche du point I.

On a enfin tracé l'ellipse de base du cylindre dans le plan horizontal, et, cette ellipse tracée, la ponctuation du solide demandée est immédiate.

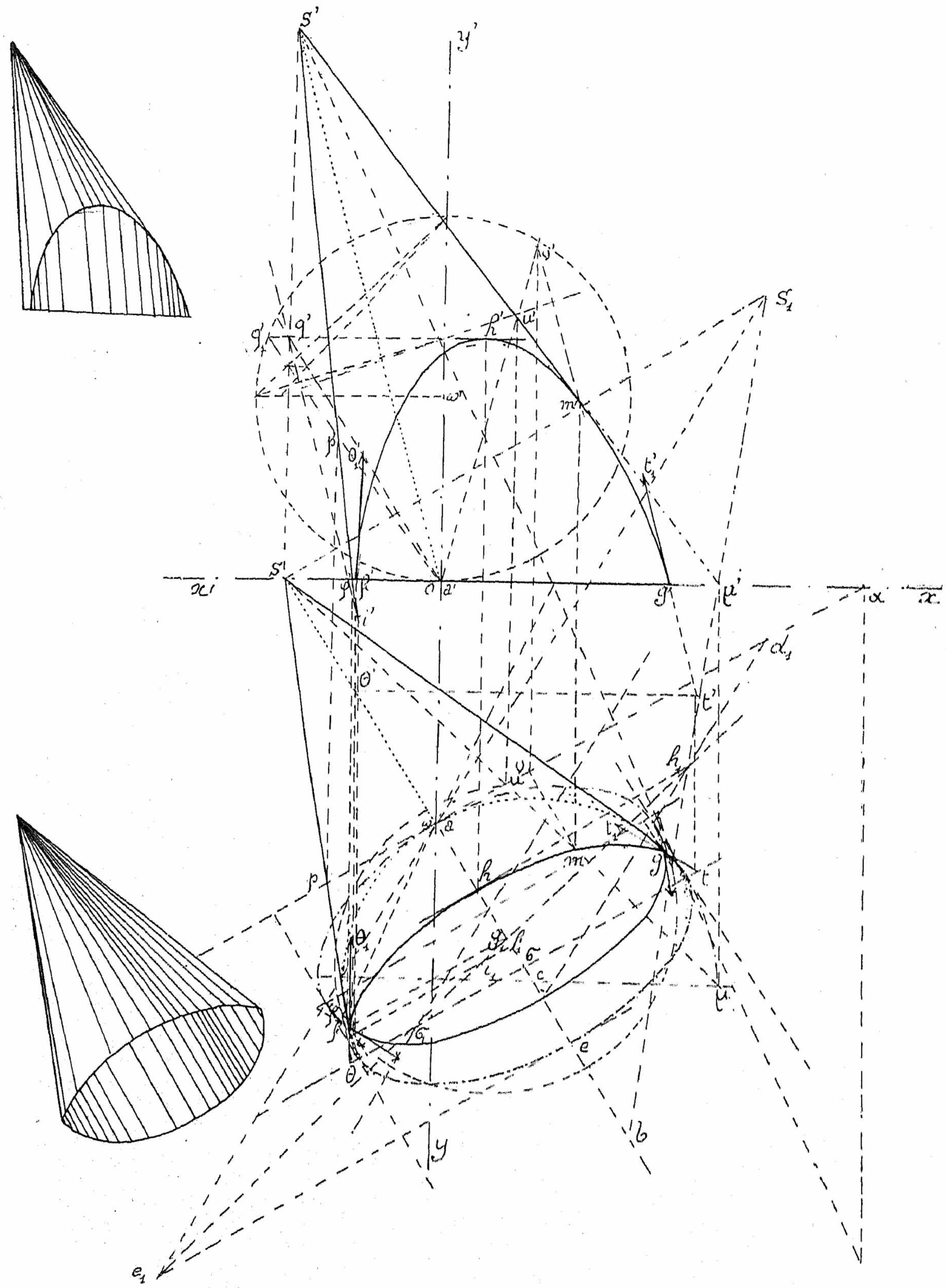


Figure grande épure n° 21.

GRANDE ÉPURE N° 22

Cône et cylindre.

Énoncé :

Un cylindre G est de révolution autour d'un axe de front AA′ situé dans le premier bissecteur. Il est, de plus, tangent aux deux plans de projection.

Sur l'axe AA′ on donne un point (ss'), le point est le sommet d'un cône dont la base est une hyperbole dans le plan horizontal de projection. On donne les deux asymptotes de l'hyperbole, dont l'une D est parallèle à xy, l'autre E lui est perpendiculaire et passe par le point S. On donne aussi l'axe bc de l'hyperbole.

Représenter la surface du cylindre G extérieure au cône S.

Texte :

Mise en place. — Le contour apparent du cylindre ne présente pas de difficultés. Pour le cône S on construira d'abord par points l'hyperbole de base en faisant tourner des sécantes autour des points b ou c. Pour avoir le contour apparent horizontal du cône, il suffit de mener par le point S des tangentes à l'hyperbole. L'une des tangentes est l'asymptote E, l'autre qu'on obtient par les procédés usuels est $S\gamma_1$. Le cône n'a pas de contour apparent vertical.

Remarque. — La génératrice de contour apparent E touchant l'hyperbole à l'infini est horizontale, par conséquent elle rencontre les génératrices de contour apparent $(G_1G'_1)$ $(G_2G'_2)$ du cylindre. Cela nous donne deux points particuliers (ff') et (gg') de l'intersection, qui sont des points de *rebroussements*.

Méthode. — On coupera par des plans passant par l'axe du cylindre ; les traces de ces plans seront parallèles à xy. On choisira une base au cylindre, par exemple, dans le plan de bout du point ss'. On la fera tourner autour de la droite de bout du point ss' ; en même temps que la trace horizontale de son plan. On l'amènera à être horizontale. Alors la base se projette suivant le cercle s et la trace suivant la droite h_1i.

Point courant et sa tangente. — Coupons par le plan dont la trace horizontale est h_1j. Il donne une génératrice $(sj, s'j')$ dans le cône. Il coupe le plan de base du cylindre suivant une droite de profil qui se projette en sh. Dans la rotation cette droite vient en sh_1. Elle coupe le cercle de base en deux points dont l'un est k_1. Ce point ramené dans le plan du profil vient en k ; d'où la génératrice kk_1 du cylindre, et par suite le point m qu'on rappelle en m' sur $s'j'$.

Le plan tangent au cône a pour trace horizontale (jl). Cherchons le plan tangent au cylindre. Sa trace sera parallèle à xy, il suffit donc d'en avoir un point; ce point sera le point n_1 où la tangente k_1n_1 au cercle rabattu coupe h_1i. Les deux traces se rencontrent au point (ll'). $(lm, l'm')$ est la tangente cherchée.

Remarque. — Les deux surfaces ont dans l'espace le point (ss') comme centre de symétrie : les projections de l'intersection seront donc symétriques par rapport aux points s et s'.

Points sur les contours apparents. — Il y a les points (ff') (gg') dont on a parlé. Il y a aussi deux points sur γ_1. Ils sont donnés par le plan dont la trace O_1O passe par le pied p de γ_1.

En projection verticale les points q' et r' sont donnés par le plan vertical A.

Asymptotes. — Quand la trace du plan sécant vient se confondre avec l'asymptote D il devient plan tangent à l'infini au cône. On sait que dans ce cas il y a des points à l'infini et que les asymptotes sont les génératrices de la surface coupée. En conséquence, on agit comme pour un point courant.

On obtient ainsi les asymptotes (TT′) (UU′) en remarquant d'autre part qu'on a leur cote à partir du plan horizontal s' en $\alpha\beta$, $\delta\varepsilon$.

Ponctuation. — Situons la courbe sur la projection horizontale du cylindre. Nous obtenons la figure ci-contre très aisément.

Conservons tout ce qui est extérieur au cône S. Le point G_1 est évidemment extérieur jusqu'au point f, donc la génératrice G_1 sera conservée. Alors la courbe $f\pi$ qui fait bordure sera vue.

Pour des raisons analogues, il faudra supprimer la partie gG_2 de la génératrice G_2.

Enfin, comme on ne représente que la surface, on ne figurera pas les génératrices de contour apparent du cône.

Même raisonnement pour la projection verticale.

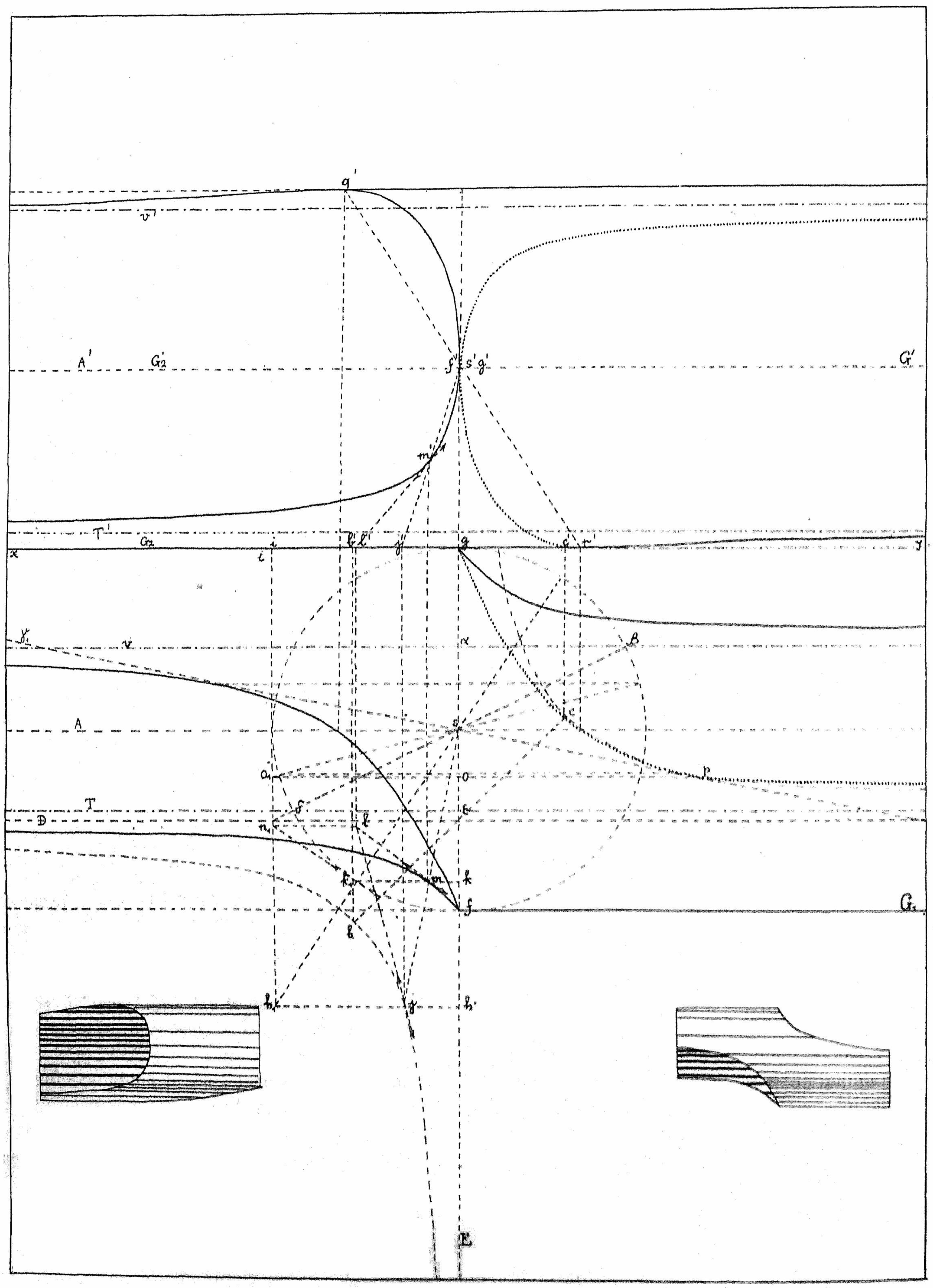


Figure grande épure n° 22

GRANDE ÉPURE N° 23

Deux cônes.

Énoncé :

On donne un cône oblique de sommet S (—45, 30, 90) ayant pour base dans le plan horizontal un cercle de centre Ω (0, 60, 0) de rayon 45 et un cône de révolution à axe vertical de sommet T (0, 45, 45) ayant pour base un cercle de rayon dans le plan horizontal. Représenter la portion du cône oblique supposé plein de matière opaque extérieure au cône de révolution comprise entre le sommet S et le plan horizontal de projection.

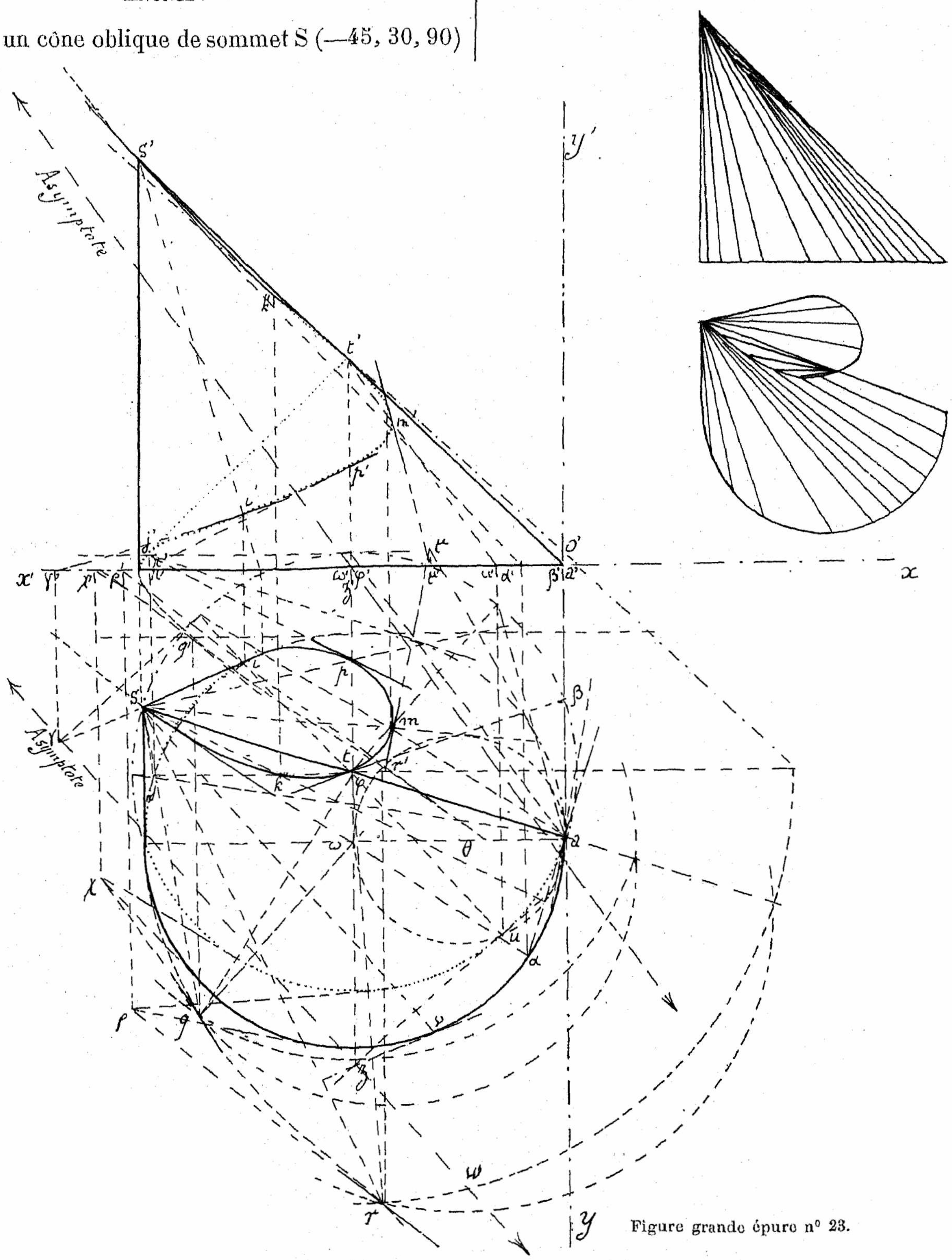


Figure grande épure n° 23.

Texte :

On remarque de suite que les deux cônes ont une génératrice STA en commun, le reste de l'intersection sera donc une cubique gauche. On a cherché tout d'abord les tangentes en S et T à la cubique, en coupant les cônes de sommet T et S par les plans tangents en S et T à l'autre cône. On a aussi les tangentes Sα et Tβ.

Puis on a recherché l'asymptote : le cône S déplacé par translation de façon à avoir T pour sommet a alors pour base dans le plan horizontal le cercle de centre θ qui coupe le cercle de centre φ au point U, d'où les génératrices parallèles TU et SV, et par suite, par intersection des plans tangents le long de SV et TU, l'asymptote ZW tant en plan qu'en projection sur le mur.

Remarquant ensuite que la droite ST coupe le plan horizontal en A, on a cherché par des plans auxiliaires appropriés et d'après la méthode générale les points I, J, K sur les contours apparents et les points courants M et P ainsi que les tangentes en ces derniers points.

Enfin, pour assurer le tracé de la courbe au-dessous du plan horizontal, on a coupé par deux plans horizontaux qui ont fourni les points Q et R et leurs tangentes.

La ponctuation a été effectuée selon les règles ordinaires en observant que la génératrice commune STA sert de contour apparent vertical au cône représenté.

GRANDE ÉPURE N° 24

Cône et cylindre.

Énoncé :

Le cône est de révolution autour d'un axe vertical et a pour base dans le plan horizontal le cercle s. Le cylindre a pour base dans ce même plan le cercle ω circonscrit au triangle sab, et l'une de ses génératrices est la droite sa-$s'a'$.

Représenter le solide commun à ces deux corps supposés pleins en le limitant à des plans horizontaux.

Texte :

Mise en place. — On a immédiatement les contours apparents des deux corps.

Méthode. — Remarquons que la droite sa, $s'a'$ est une génératrice commune aux deux surfaces, par suite leur intersection se composera de cette droite et d'une cubique. Pour obtenir les points de cette cubique, nous prendrons des plans auxiliaires passant par la génératrice commune SA. Leurs traces sur le plan de base des deux surfaces seront donc des droites passant par le point a.

Point courant et tangente. — Prenons un plan auxiliaire quelconque ; sa trace rencontre les cercles de base aux points α et α_1 ; la génératrice $s\alpha$ du cône rencontre la génératrice α_1 du cylindre au point m, qui se rappelle en m'. Le plan tangent au cône le long de sm a pour trace horizontale la tangente en α au cercle s ; le plan tangent au cylindre le long de la génératrice du cylindre a pour trace horizontale la tangente en α_1 au cercle ω ; ces deux tangentes se rencontrent en t, d'où la tangente tm en projection horizontale et $t'm'$ en projection verticale.

Plans auxiliaires limites. — Le plan auxiliaire limite pour le cône dont la trace est tangente en a au cercle s détermine dans le cylindre les deux génératrices as et cd passant par les points a et c du cercle ω et coupe le cône suivant la seule génératrice as, d'où la génératrice commune as et un point à l'infini, à l'intersection de as et cd. Le plan auxiliaire étant limité pour le cône, la tangente en ce point à l'infini est la génératrice cd du cylindre. Donc l'asymptote de la cubique est cd en projection horizontale et $c'd'$ confondu avec $s'a'$ en projection verticale.

Le plan auxiliaire limite pour le cylindre qui nous donne le point double ss' a pour trace horizontale la tangente en a au cercle ω. Cette tangente perpendiculaire à $b\omega a$ passera par le point e, extrémité du diamètre passant par b ; par suite ce plan coupe le cône suivant la génératrice située dans le plan du profil se, et comme il est limite pour le cylindre, les tangentes en s et s' sont se et $s'e'$.

Points sur les contours apparents. — Le plan auxiliaire de trace horizontale as nous donne le point H sur le contour apparent vertical du cône.

Les plans de trace ai et al nous donnent les points K et P sur le contour apparent horizontal du cylindre. A ce sujet, remarquons que par suite des données les deux génératrices du cône sj et sn se projettent horizon-

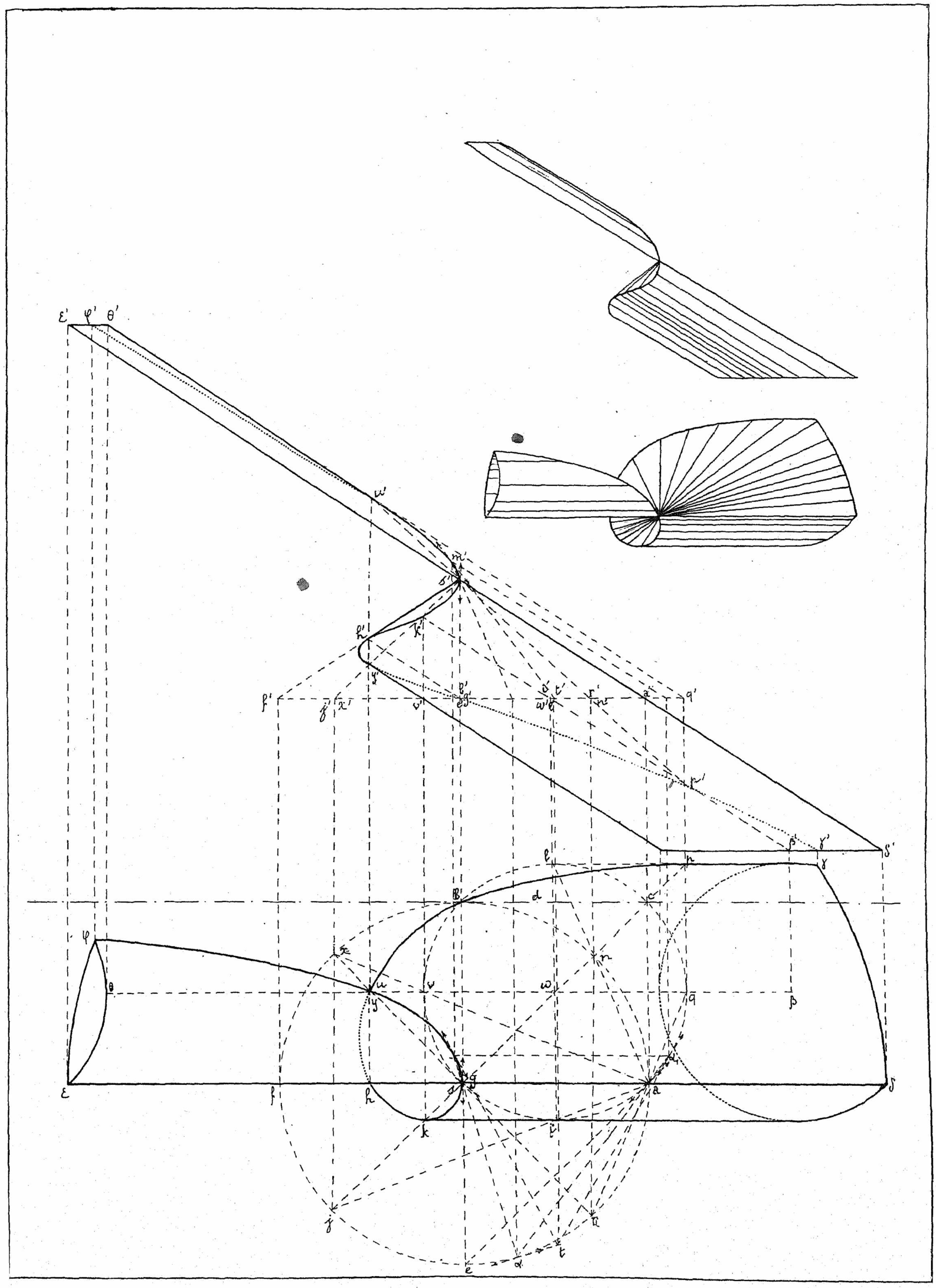


Figure grande épure n° 24.

talement suivant la même droite, c'est-à-dire sont dans un même plan vertical.

Pour avoir les points sur les deux génératrices de contour apparent vertical du cylindre, il nous faut prendre les plans auxiliaires de trace *aq* et *av*, qui déterminent dans le cône deux génératrices *sr* et *sx* qui, comme dans les cas précédents, sont dans un même plan vertical. Nous cherchons donc l'intersection de deux génératrices du cylindre situées dans un plan vertical avec deux génératrices du cône situées dans un autre plan vertical. On voit que les deux points cherchés *u* et *y* se projettent horizontalement en un même point, qui sera un point double de la projection horizontale.

Ponctuation. — Nous voulons représenter la partie du solide commun compris entre les deux plans horizontaux figurés. Ponctuons provisoirement la courbe sur le cylindre. La génératrice commune et l'arc $ks\varphi$ sont seuls vus en projection horizontale. En projection verticale la génératrice commune est vue ainsi que l'arc $u's'h'y'$. Puis nous conservons des contours apparents de chaque corps, les parties intérieures à l'autre et enlevons les parties extérieures, et ponctuons ces contours apparents ainsi que la courbe dont en projection horizontale l'arc *hy* est maintenant seul caché, sa ponctuation ne changeant pas en projection verticale.

GRANDE ÉPURE N° 25

Solide commun à deux cônes.

Énoncé :

Deux cônes ont pour génératrice commune la droite verticale (vv').

Leurs sommets sont les points (ss') et (tt'). Leurs bases dans le plan horizontal de projection sont deux cercles orthogonaux, dont les centres BB′ et CC′ sont sur une même droite de front.

Représenter le solide commun à ces deux cônes.

Texte :

Mise en place. — Pour avoir les centres des cercles de base, il suffit de faire tourner autour du point *v* un angle droit. Les points B et C où les côtés de cet angle rencontrent la droite de front donnée sont les centres cherchés. Les contours apparents s'ensuivent. Remarquons que les contours apparents en projection horizontale ne se composent que d'une seule droite, qui est la tangente en *v* au cercle de base.

Méthode. — On fait tourner des plans autour de la génératrice commune. Les traces horizontales de ces plans sont des droites passant par le point *v*.

Remarque. — L'intersection se compose de la droite (vv') et, partant, d'une cubique gauche. On sait que cette cubique doit passer par les sommets des cônes.

Point courant et sa tangente. — Considérons la trace horizontale *vd* d'un plan auxiliaire. Elle fournit les génératrices $(ct, c't')$ et $(ds, d's')$ qui se coupent au point (mm') cherché. Les traces horizontales des plans tangents au point (mm') se coupent en un point (ee') $(em, e'm')$ est la tangente au point (mm').

Points sur les contours apparents. — Le point (ff') de la génératrice $(\gamma_1 t, \gamma'_1 t')$ est donné par la trace $v\gamma_1$. Le point (hh') de $(g_2 g'_2)$ est donné par la trace (vg_2) et le point (ii') par la trace (vg_1).

Points remarquables. — Deux points remarquables sont les sommets des cônes. On sait qu'ils sont donnés avec leur tangente. C'est la génératrice du cône coupé par le plan auxiliaire. Les tangentes sont donc les droites $(t\gamma_2, t'\gamma'_2)$ et $(sg_3, s'g'_3)$.

Asymptote. — Cherchons des génératrices parallèles dans les deux cônes. Pour cela transportons le cône S parallèlement à lui-même de façon que son sommet vienne en tt'. Sa nouvelle base sera un cercle qui passera par le point *v*. Pour en avoir deux autres points, on transportera les génératrices $(sg_1, s'g'_1)$ et $(sg_2, s'g'_2)$ en $(tj, t'j')$ et $(tk, t'k')$. On a ainsi les génératrices parallèles $(tl, t'l')$ $(sn, s'n')$.

L'asymptote est l'intersection des plans tangents le long de ces génératrices. On en a donc un point (oo') à l'aide des traces horizontales (on, ol). Pour achever de la déterminer on sait qu'elle est parallèle aux génératrices $(tl, t'l')$ $(sn, s'n')$.

Remarque. — La projection horizontale de la cubique est une *strophoïde*. Nous avons démontré que c'est une cubique. Elle est circulaire, car chaque plan horizontal donne, outre deux points réels, les points cycliques IJ.

Enfin c'est une strophoïde, car les tangentes au point

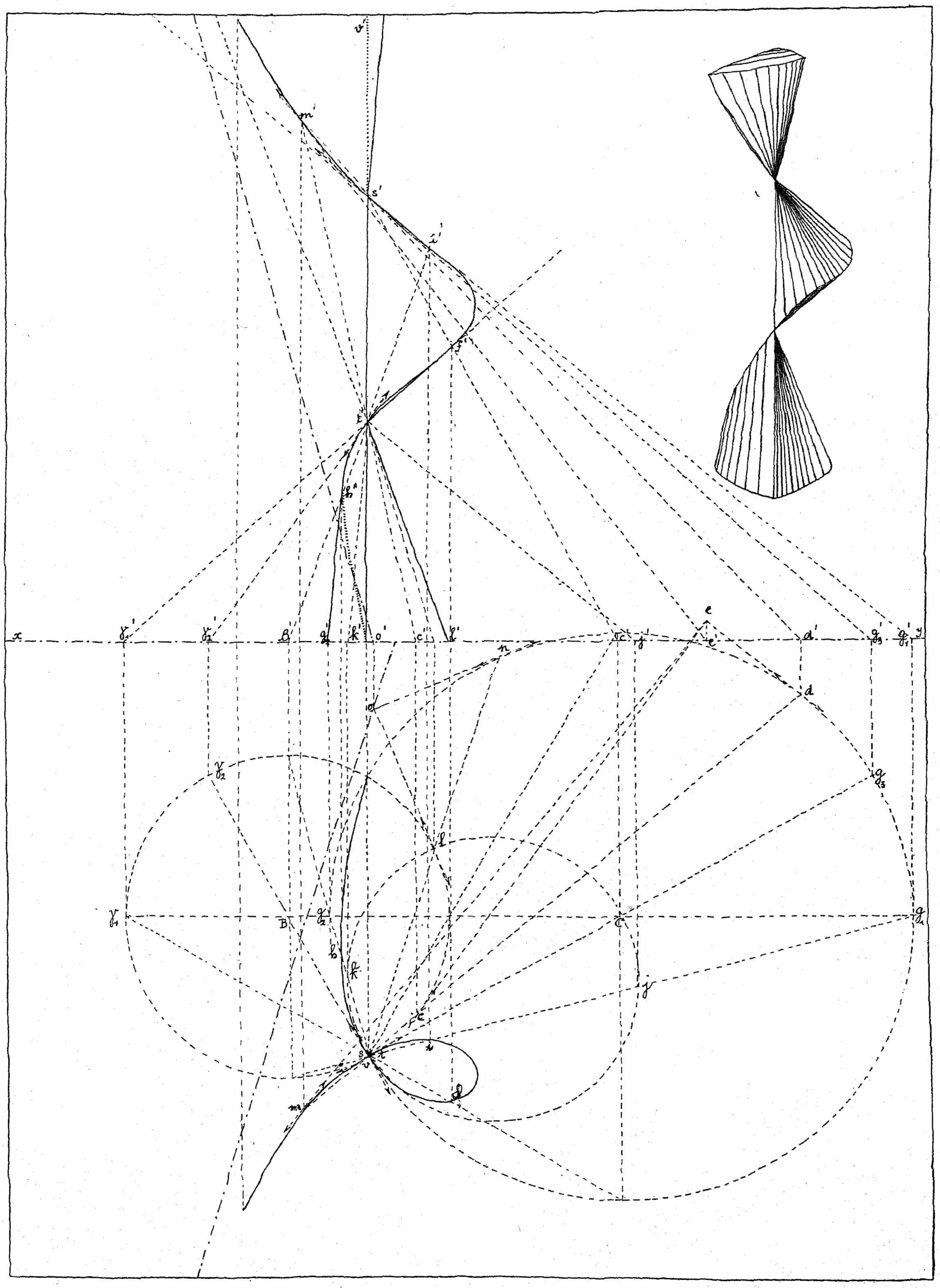


Figure grande épure n° 25.

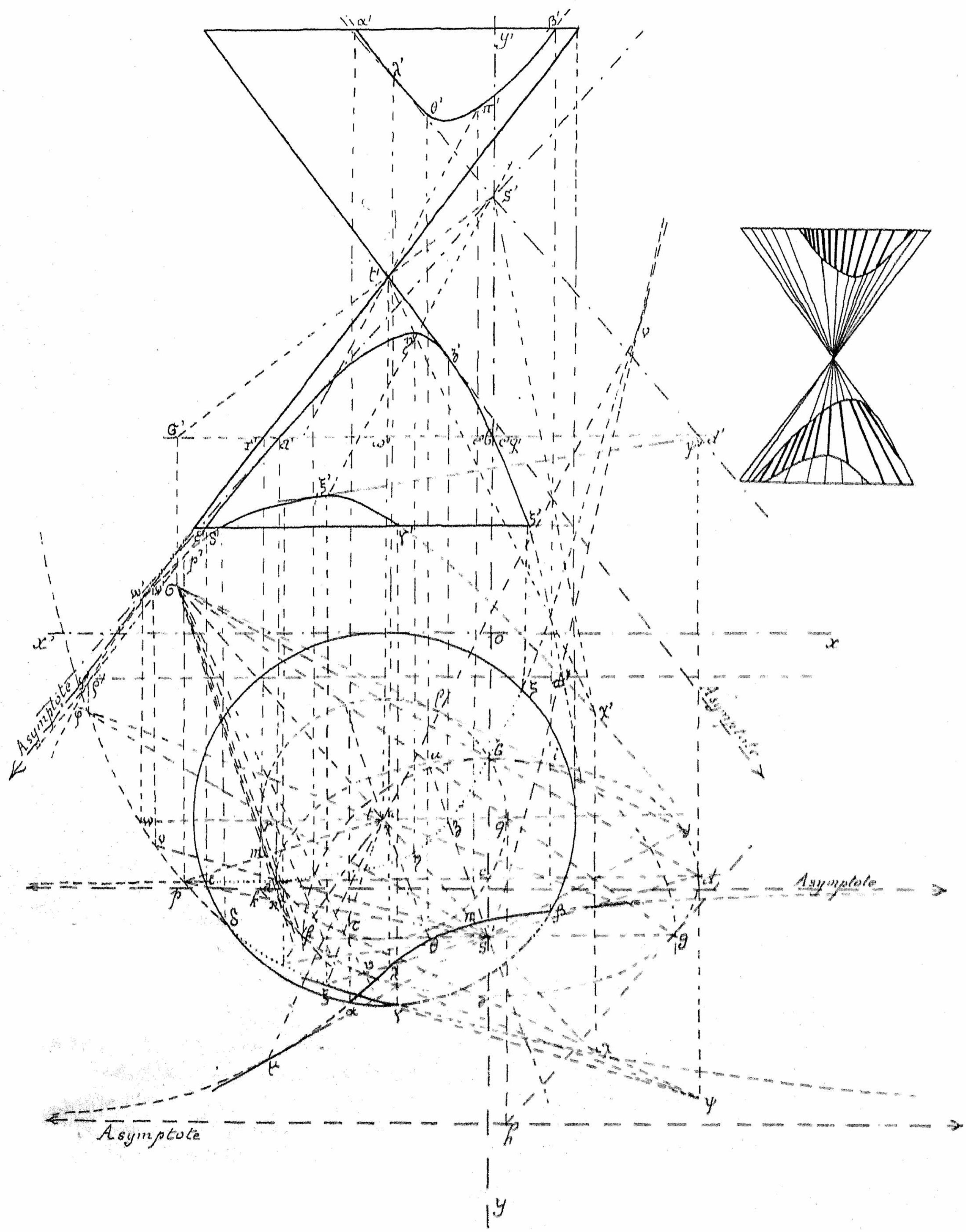


Figure grande épure n° 26.

double sont rectangulaires. Le fait résulte de ce que les deux cercles de base sont orthogonaux.

Ponctuation. — On ne s'occupera pas de la projection horizontale du solide commun qui se réduira à la courbe d'intersection. Pour voir la projection verticale on situera d'abord la courbe sur le cône S en remarquant que les points s' et t' sont vus.

Enfin on examinera les parties de génératrices qu'il faudra conserver.

Raisonnons sur g'_1 par exemple. Le point g'_1 étant évidemment extérieur au cône T, on rejettera la partie $g_1'i'$ pour conserver $i's'$ et rejeter encore la partie supérieure à s'.

GRANDE ÉPURE N° 26

Deux cônes.

Énoncé :

On donne un triangle ABC, A (—50, 60, 50), B (0, 30, 50), C (0, 60, 50) et deux points S (0, 75, 110) et T (— 25, 45, 90) et l'on considère le cône de sommet S ayant pour base l'ellipse de demi-axes CA et CB et le cône de sommet T ayant pour base le cercle circonscrit au triangle ABC. Trouver la portion de surface opaque du cône T extérieure au cône S comprise entre les plans horizontaux de cotes 27,5 et 152,5.

Texte :

On applique la méthode générale en cherchant la trace Σ de la droite ST sur le plan des bases. Les plans limites sont ΣMN qui, commun aux deux bases, donne le point double P et le plan ΣLIJ qui donnent avec leurs tangentes les deux points μ et ν.

On a déterminé de même les points V et λ sur les contours apparents verticaux du cône S et les points W et Z sur les contours apparents verticaux du cône T à l'aide des plans auxiliaires de traces σa, σd, σr et σq. On a déterminé également un point courant Ξ, et sa tangente $\Xi\Psi$ à l'aide du plan auxiliaire de trace $\sigma\imath\nu$. Enfin les points sur les plans horizontaux limites sont α, ϸ d'une part, $\delta\gamma$ et $\varepsilon\zeta$ d'autre part. En suivant le tracé de la courbe, on voit immédiatement qu'elle présente des branches infinies ; on recherche alors les asymptotes et pour cela on déplace d'abord par translation le cône T de façon à lui donner pour sommet S, sa base dans le plan ABC est alors un cercle qui coupe l'ellipse de base du cône S en f et g et touche cette même ellipse en h ; il y a donc deux branches hyperboliques et une branche parabolique.

Les asymptotes aux branches hyperboliques sont de front parallèles aux génératrices communes SF et SG, elles passent respectivement par les points h et k en plan donnés par intersection des plans tangents le long de TQ et SG d'une part, TR et SF d'autre part ; en projection sur le mur, ces mêmes asymptotes sont les génératrices de contour apparent du cône T.

Le tracé des différentes branches de courbe s'obtient en suivant la marche des deux mobiles sur les bases comme à l'ordinaire, en tenant compte cependant des passages à l'infini.

On peut remarquer qu'il y a *deux points doubles en projection verticale* ρ' et ω' situés sur l'horizontale, intersection des plans de contours apparents verticaux des deux cônes : sur l'épure ont été également déterminés les points $n, \pi\chi$; situés dans le plan vertical ST.

La ponctuation ne présente pas de difficulté.

SECTION D'ARCHITECTURE (1912-1913)

2e SESSION

CONCOURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

ÉPURE A FAIRE EN LOGES, LE 8 MARS 1913, EN 4 HEURES 1/2

(FEUILLE QUART GRAND AIGLE)

3e QUESTION

Intersection d'un cône et d'un cylindre. — Ensemble des solides. — Ombres.

Le cône a pour sommet le point S (projeté en s et s') de coordonnées ($x = -102$, $y = 75$, $z = 102$) et pour base dans le plan horizontal un cercle de centre φ (projeté en φ et φ') de coordonnées ($x = 51$, $y = 75$, $z = 0$) de rayon 51.

Le cylindre a pour base dans le plan horizontal un cercle de centre ω (projeté en ω et ω') de coordonnées ($x = -51$, $y = 75$, $z = 0$) de rayon 51. Les génératrices de ce cylindre sont de front et font 35° avec le plan horizontal, elles s'élèvent de la gauche vers la droite.

Ce cylindre est limité à sa base horizontale de cote 0 et à sa base horizontale de même cote 102 que le sommet S.

(Pour la disposition des corps, voir le croquis ci-joint.)

On demande :

1° De chercher l'intersection du cône et du cylindre, d'en déterminer un point quelconque et la tangente en ce point et particulièrement de trouver les points situés sur les divers contours apparents ainsi que les tangentes en ces points si possible et les points les plus hauts et les plus bas;

2° De représenter l'ensemble formé par les deux corps supposés pleins tous deux d'une même matière opaque;

3° De chercher :

a) Les ombres propres du solide représenté;

b) Les ombres portées sur lui-même par le solide représenté;

c) Les ombres portées sur les deux plans de projection.

Ces ombres seront prises en supposant les rayons à 45° (ombres usuelles).

Exécution graphique.

Pour les traits, se conformer aux conventions usuelles :

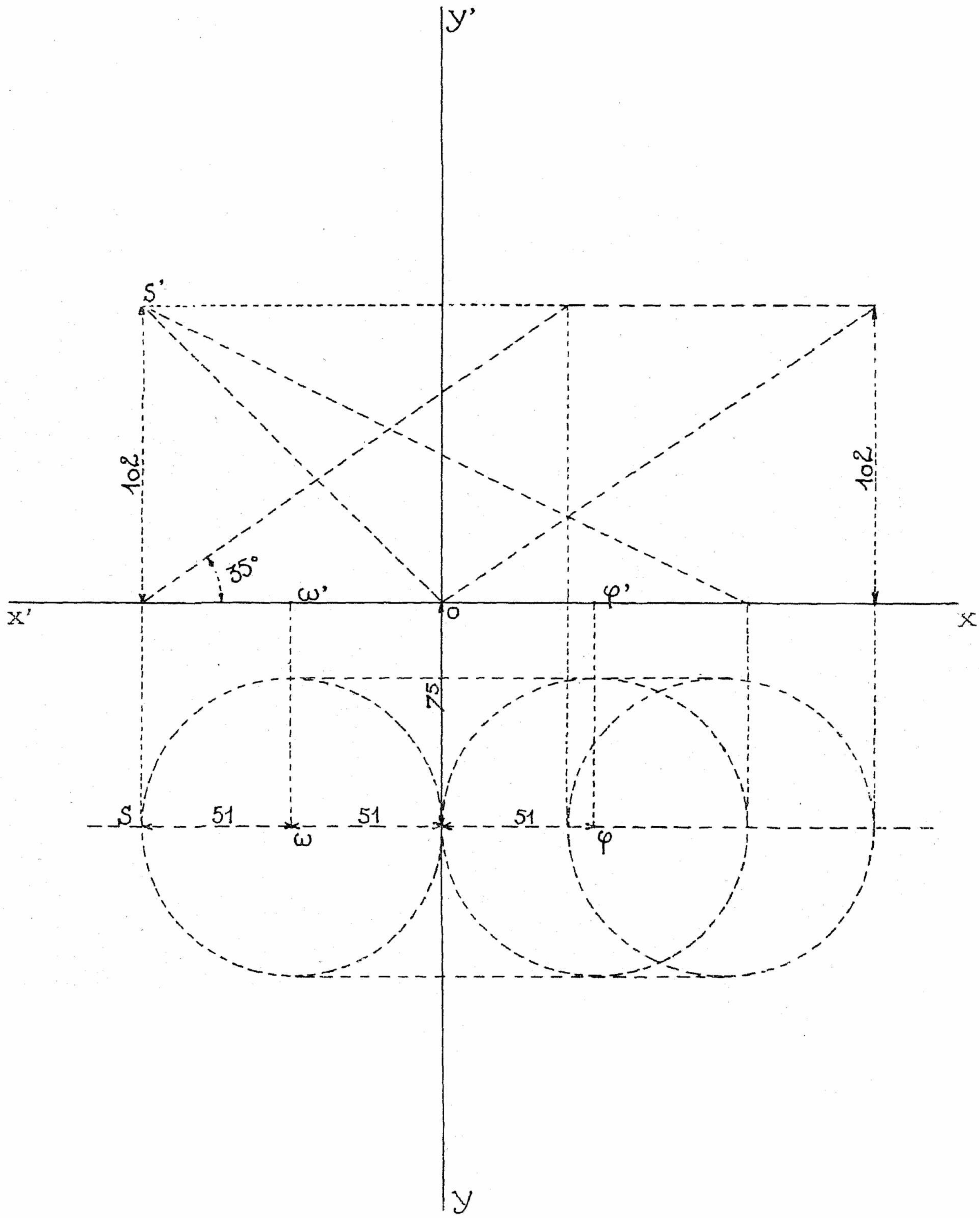
Encre noire pour les lignes existantes, encre rouge pour les constructions, encre bleue pour les ombres;

Lignes existantes vues en traits pleins, lignes cachées en ponctué;

Hachures dans les parties dans l'ombre, intervalles des hachures 1,5.

Il sera tenu le plus grand compte des *constructions*. Tout résultat NON JUSTIFIÉ par la construction correspondante sera considéré comme nul et non avenu.

On pourra mettre quelques lettres nettes et bien écrites.



ATTRIBUTION DES NOTES.

Il sera donné une note de 0 à 20, se décomposant en 4 parties :

Une pour l'exactitude et la précision de la courbe d'intersection;

Une deuxième pour la ponctuation du solide;

Une troisième pour les ombres;

Une quatrième pour l'exécution graphique.

Paris, le 20 février 1913.

RAOUL BRANDON.

ÉCOLE NATIONALE DES BEAUX-ARTS

SECTION D'ARCHITECTURE

CONCOURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

(1912-1913)

ÉPURE A FAIRE EN LOGES, EN 5 HEURES, LE 21 OCTOBRE 1912

(FEUILLE QUART GRAND AIGLE)

Intersection de deux cônes.

ENTAILLE. — OMBRES.

Les solides sont repérés à trois axes de coordonnées formant trièdre trirectangle de sommet o.

1° Un axe vertical $z'oz$, auquel on repère les cotes;

2° Un axe fronto-horizontal $x'ox$, auquel on repère les distances fronto-horizontales de gauche à droite;

3° Un axe de bout $y'oy$ auquel on repère les éloignements.

(Les longueurs sont exprimées en millimètres.)

Un des cônes a pour sommet S, projeté sur le croquis en s et s' ($x = 120$, $y = 90$, $z = 150$) et pour base un cercle dans le plan horizontal de centre C, projeté sur le croquis en c et c' ($x = -45$, $y = 45$, $z = o$) et de rayon $R = 45$.

Le deuxième cône a pour sommet T, projeté sur le croquis en t et t' ($x = o$, $y = 45$, $z = 75$) et pour base un cercle dans le plan horizontal de centre Ω, projeté en ω et ω' ($x = 45$, $y = 45$, $z = 0$) de rayon $R' = 45$.

(Voir le croquis ci-joint.)

On demande :

1° De représenter par ses deux projections la portion du cône T supposé plein de matière opaque *extérieure* au cône S.

On devra indiquer *obligatoirement*, et avec la plus grande précision possible :

a) Un point courant de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point;

b) Les points sur les divers contours apparents;

c) Les points remarquables de l'intersection et les tangentes en ces points et donner avec *clarté* toutes les constructions nécessaires pour *justifier* ces résultats.

2° De chercher les ombres à 45° du solide représenté (cône entaillé) :

(α) Ombres propres, (β) ombres portées du corps sur lui-même, (γ) ombres portées du corps sur les deux plans de projection.

On devra indiquer *obligatoirement* :

1° Un point de l'ombre propre et la tangente à la séparatrice en ce point;

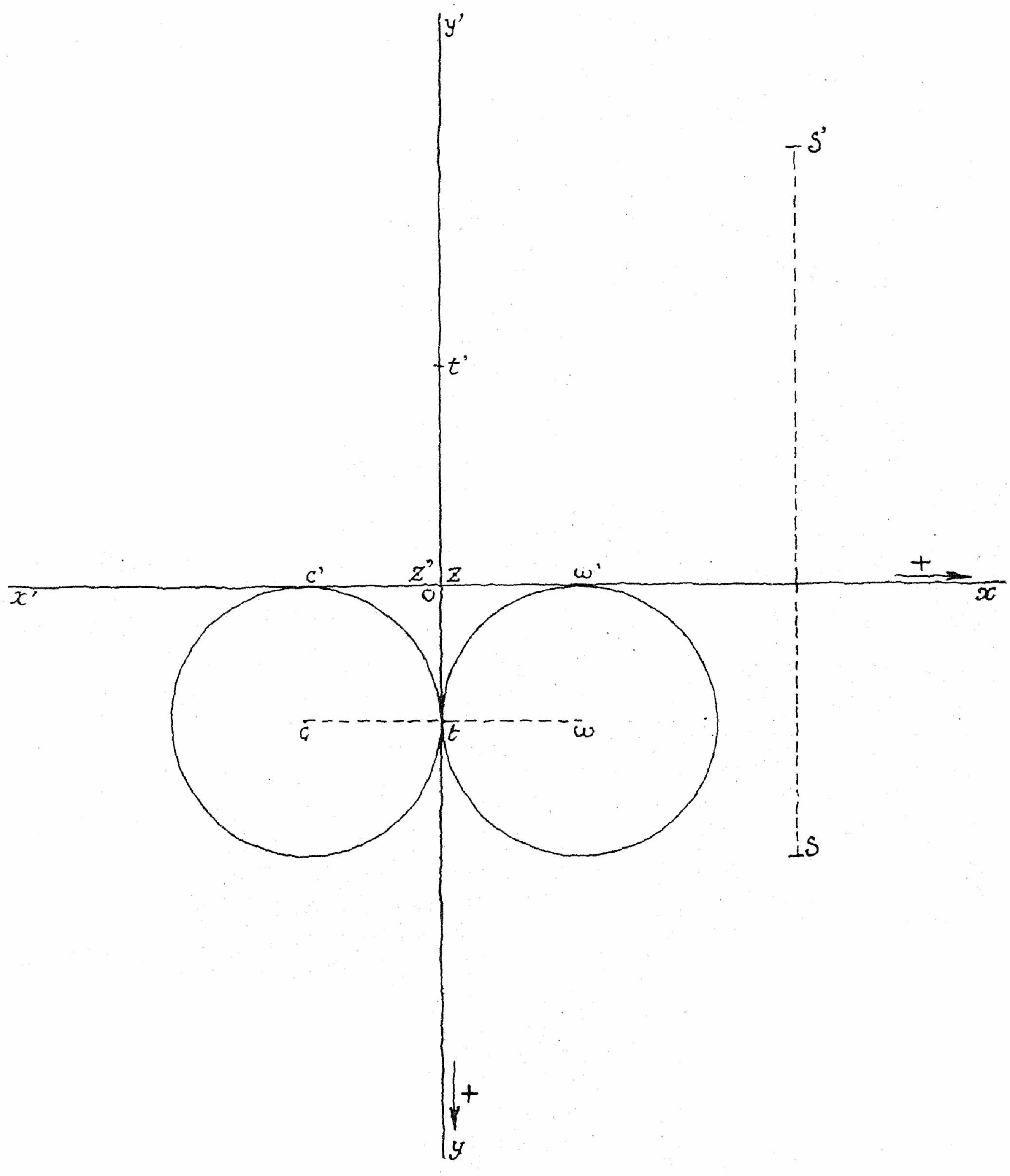
2° Un point de l'ombre autoportée;

3° Un point de l'ombre portée sur un plan de projection et la tangente en ce point et donner toutes les *constructions* nécessaires pour *justifier* ces résultats.

EXÉCUTION GRAPHIQUE.

Pour les traits, se conformer aux conventions indiquées aux cours :

Encre noire, pour les lignes existantes; encre rouge, pour les constructions diverses; encre bleue, pour les ombres;



Les lignes existantes vues, en traits pleins ; les lignes existantes cachées, en ponctué ; les lignes déterminant les corps *donnés mais non représentés* en traits mixtes —.—.— hachures bleues *très légères*, espacées de 1 millimètre et demi dans les ombres.

ATTRIBUTION DES NOTES.

On tiendra le *plus grand compte* de la *précision* des résultats demandés obligatoirement. Tout résultat porté sur l'épure et NON JUSTIFIÉ par une construction sera considéré comme nul et non avenu. On pourra employer quelques lettres pour expliquer les tracés.

Il sera donné quatre notes séparées, savoir :

1° Une, pour le tracé de la courbe d'intersection et la détermination des précisions exigées;

2° Une seconde, pour la ponctuation du solide à représenter;

3° Une troisième, pour le tracé des séparatrices d'ombres;

4° Une dernière, pour l'exécution graphique.

EXAMENS ORAUX.

Ne seront admis aux examens oraux que les élèves qui auront des notes suffisantes pour les trois petites questions et pour l'épure.

La liste de ces admissibles contenant, de plus, les dates et l'ordre de passage des examens oraux sera indiquée par une affiche spéciale.

Interdiction d'avoir sur soi aucun document relatif à la géométrie descriptive, sous peine d'exclusion du concours pouvant, de plus, entraîner des mesures disciplinaires.

Paris, le 21 octobre 1912.

RAOUL BRANDON.

DEUXIÈME PARTIE

PREMIÈRE SECTION

SURFACES DE RÉVOLUTION QUELCONQUES

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS. — PLANS TANGENTS

DÉFINITIONS

On nomme surface de révolution la surface engendrée par la rotation d'une ligne tournant de 360° autour d'un axe rectiligne. La ligne est appelée *génératrice*, et l'axe, *axe de révolution*. Dans le mouvement de rotation, tout point de la ligne décrit un cercle dont l'axe est l'axe de révolution, ces cercles sont appelés *parallèles* de la surface. Les plans passant par l'axe de révolution sont appelés plans méridiens et les sections de la surface par des plans méridiens sont des *méridiennes*, courbes planes évidemment toutes égales.

Il peut arriver que, parmi les parallèles, l'un d'eux ait un rayon ou plus grand, ou plus petit que tous ses voisins immédiats; on dit dans le premier cas que ce parallèle est un *équateur* de la surface; dans le second, que ce parallèle est un *cercle de gorge*. Les méridiennes des surfaces de révolution du 2° degré ont des coniques dont l'axe de révolution est un axe de symétrie et réciproquement.

Les définitions des tangentes, plans tangents, normales, contours apparents données pour les surfaces quelconques subsistent évidemment pour les surfaces de révolution.

PROBLÈME I. — *Étant donnée une surface de révolution par son axe vertical et une ligne génératrice, déterminer par points la méridienne de cette surface.*

Il suffit (fig. 101) de prendre un point M de la génératrice et de le faire tourner jusqu'à ce qu'il soit en μ dans le plan de front de l'axe. En répétant l'opération pour autant de points M qu'on le juge nécessaire, on aura la méridienne comme lieu géométrique des points μ du plan de front de l'axe. La projection de cette courbe se fait en vraie grandeur sur le mur.

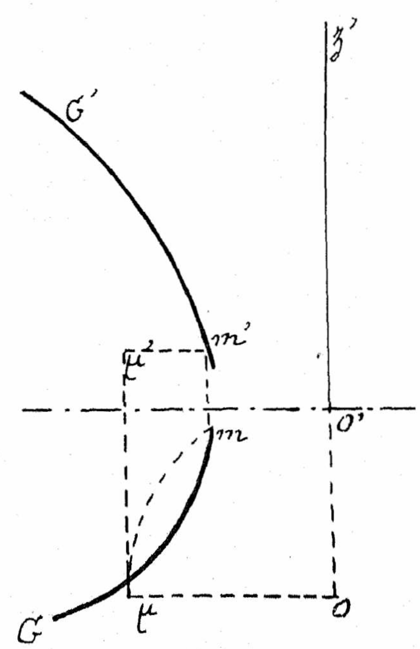


Fig. 101.

EXEMPLE : *Méridienne de la surface gauche de révolution.*

On appelle *surface gauche de révolution* ou *hyperboloïde de révolution à une nappe* la surface de révolution dont la génératrice est une droite non située dans un même plan avec l'axe. En appliquant la méthode générale indiquée à l'instant, on trouve comme méridienne une courbe d'allure analogue à celle d'une hyperbole. On peut démontrer que la méridienne est effectivement une hyperbole dont l'axe non transverse est l'axe de révolution.

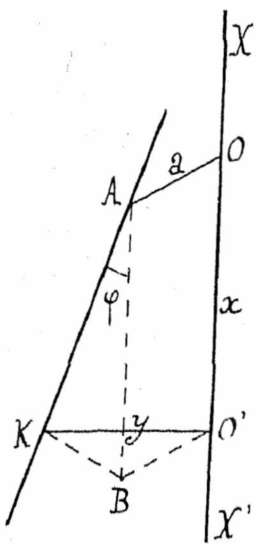


Fig. 102.

Soit en effet (fig. 102) X'X l'axe de révolution, GG' la génératrice rectiligne, OA la perpendiculaire commune à ces deux droites. Appelons OA a et prenons un parallèle o' distant du collier o de la distance OO' égale à x; soit K le point de GG' situé sur ce parallèle, appelons y le rayon o'K et projetons A en B sur le plan du parallèle O'. Il est bien évident que, puisque oA est la perpendiculaire commune à X'X et GG', l'angle $\widehat{KBo}$ est droit. On a donc

$$\overline{O'K}^2 = \overline{O'B}^2 + \overline{BK}^2$$
$$y^2 = a^2 + \overline{BK}^2$$

Or si nous appelons φ l'angle *constant* de GG' et X'X on a dans le triangle AKB :

$$BK = AB \operatorname{tg} \varphi = x \operatorname{tg} \varphi$$

donc

$$y^2 = a^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$$
$$x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - y^2 + a^2 = 0 \quad (1)$$

Or, si on considère le point C de la méridienne situé sur le parallèle o', sa distance à X'X est y et sa distance au plan du collier est x. La relation (1) précédente est donc l'équation de la courbe méridienne rapportée à X'X comme axe des x et au diamètre de front du collier comme axe des y. La forme de la relation (1) montre (*programme d'admission à l'École*) que la méridienne est une hyperbole admettant X'X pour axe non transverse et la perpendiculaire Y'oY en o à X'X pour axe transverse de longueur $2\ a$; l'angle des asymptotes étant $2\ \varphi$.

PROBLÈME II. — *Rechercher les contours apparents d'une surface de révolution à axe vertical définie par une ligne génératrice.*

Le contour apparent horizontal dans l'espace est constitué par les équateurs et les colliers de la surface, il suffira pour l'avoir de déterminer les points de la génératrice les plus proches et les plus éloignés de l'axe ; le contour horizontal en projection sera composé des cercles concentriques égaux aux équateurs et colliers trouvés à l'instant, le centre commun étant le pied de l'axe en plan.

Quant au contour apparent vertical, il n'est évidemment autre que la méridienne de front dont nous avons indiqué le mode de détermination dans le problème précédent. Le contour apparent vertical en projection est égal au contour dans l'espace puisque ce dernier est plan et de front. (Raisonnement et constructions tout à fait analogues si l'axe au lieu d'être vertical était de bout.)

PLANS TANGENTS

Étant donnée une surface de révolution d'axe X'X, de génératrice G, considérons un point A de la génératrice et le plan tangent à la surface en ce point. Ce plan tangent contient : 1° la tangente AT au parallèle ; 2° la tangente AV à la méridienne (fig. 103).

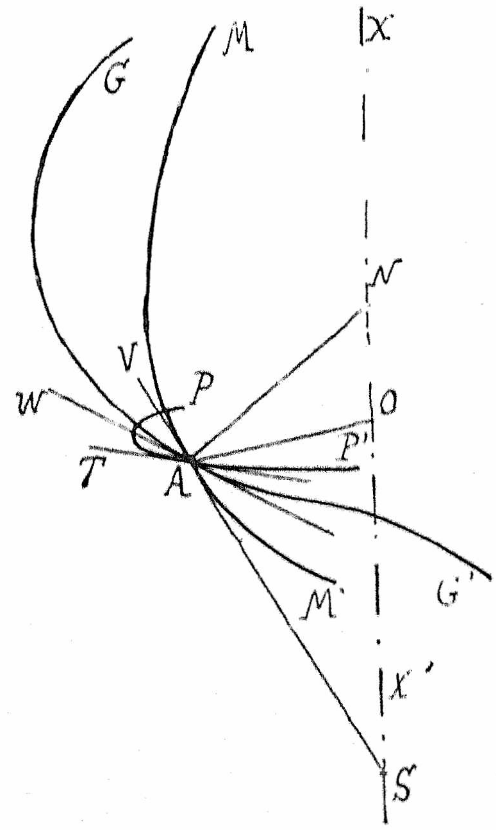


Fig. 103.

Soit S le point de rencontre de AV et de X'X. *Ce point sera commun à tous les plans tangents le long du parallèle du point A :* c'est là une propriété très importante des surfaces de révolution. Il existe un *cône circonscrit* à la surface le long de chacun de ses parallèles. Ce cône devient un cylindre pour les équateurs et les colliers.

Si de même nous considérons (fig. 103) la normale en A à la surface, cette droite est située dans le plan méridien, car elle est perpendiculaire à la tangente AT au parallèle, qui, elle, est perpendiculaire au plan méridien comme perpendiculaire à deux droites AO, AV de ce plan (théorème des 3 perpendiculaires); soit donc N, le point où cette normale rencontre X′X, ce point N *sera commun à toutes les normales dont les pieds sont les points du parallèle du point* A. Il existe donc un *cône orthogonal* en tous les points de chacun des parallèles d'une surface de révolution; ce cône se réduit à un plan pour les équateurs et les colliers. Cette propriété sera utilisée très souvent en géométrie descriptive.

Considérons maintenant une méridienne M d'une surface de révolution définie par un axe X′X et une génératrice G. En tout point A de la méridienne M le plan tangent contenant la tangente AT au parallèle qui est normale au plan méridien est lui-même *perpendiculaire à ce plan méridien*, autrement dit, il existe un *cylindre circonscrit* à une surface de révolution le long de chacune de ses méridiennes, les génératrices de ce cylindre sont perpendiculaires au plan méridien correspondant. Nous utiliserons cette propriété pour résoudre divers problèmes sur les plans tangents aux surfaces de révolution.

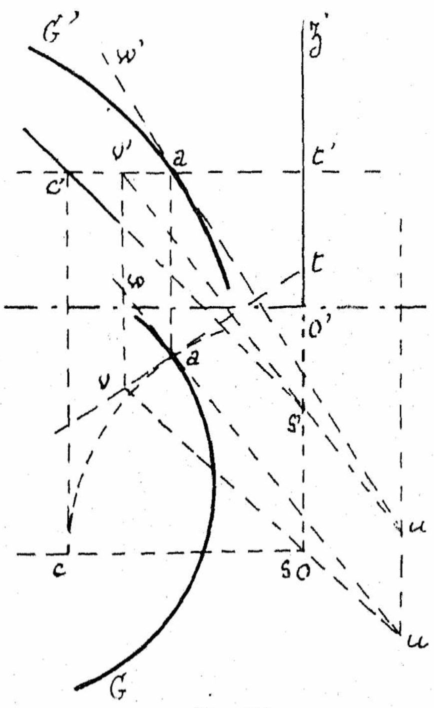


Fig. 104.

APPLICATION

Tangentes aux différents points de la méridienne d'une surface de révolution définie par son axe OZ et une génératrice G.

On a vu plus haut comment on peut déterminer par points la méridienne d'une surface de révolution donnée par son axe OZ et une génératrice G.

Le plan tangent en A à la surface est déterminé par la tangente AT au parallèle et AW à la génératrice; soit S le point de rencontre de ce plan et de l'axe OZ, ce point étant commun à tous les plans tangents le long du parallèle A appartiendra donc au plan tangent à la surface au point C de la méridienne, qui alors admettra pour tangente en C la droite CS, puisque S, étant sur l'axe, appartient au plan méridien du point C.

L'épure correspondante a été effectuée (fig. 104).

PROBLÈME I. — *Mener en un point donné A d'une surface de révolution le plan tangent en ce point.*

Nous avons vu que ce point sera en général déterminé par la tangente AW à la génératrice au point A et par la tangente AT au parallèle. Si la génératrice ne passe pas en A, on prendra le plan tangent à la surface au point B de la génératrice (fig. 105), situé sur le parallèle du point A et on déterminera le point S sur l'axe X′X de ce plan tangent, le plan tangent en A sera déterminé alors par la tangente SA à la méridienne en A et par la tangente AT au parallèle.

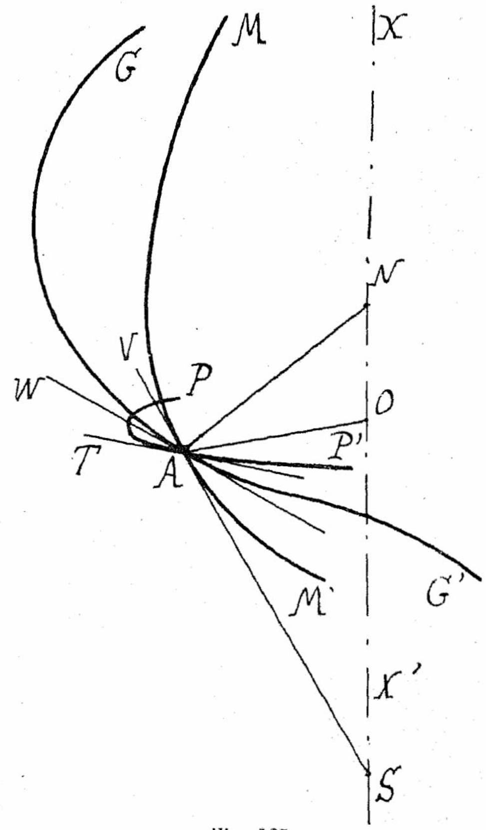


Fig. 105.

On aurait pu aussi déterminer la normale en B, en prendre le point fixe N sur l'axe et tracer le plan tangent en A comme plan perpendiculaire à la normale AN au point A.

PROBLÈME II. — *Mener par un point donné P un plan tangent à une surface de révolution donnée, le point de contact étant sur un parallèle donné.*

Soit X′X l'axe de la surface donnée, dont la ligne génératrice est G et soit A le point de la génératrice situé sur le parallèle donné (fig. 106).

On détermine le plan tangent à la surface en A et on en prend le point S sur l'axe X'X. S étant le sommet d'un cône circonscrit à la surface le long du parallèle A, il suffit, pour avoir les plans tangents cherchés de

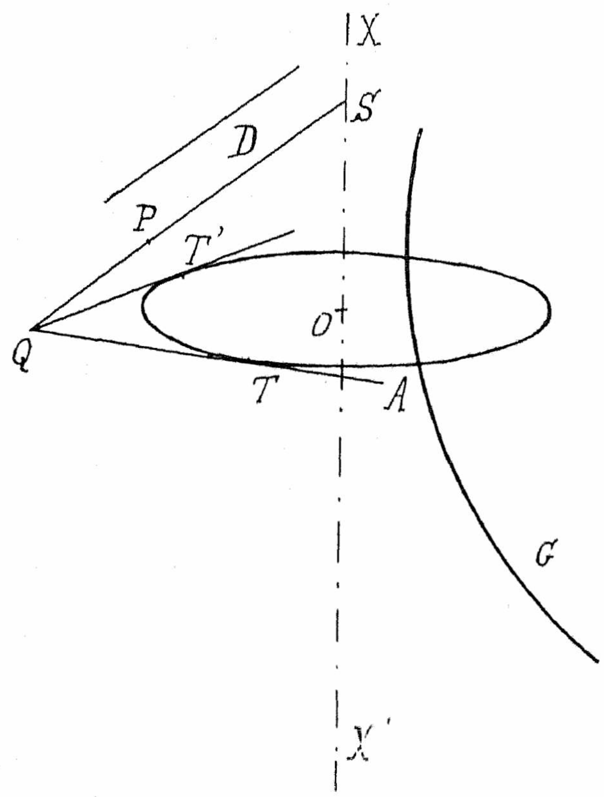


Fig. 106.

mener de P des plans tangents à ce cône, ce à quoi on arrive par la méthode ordinaire en menant, de la trace Q de la droite PS sur le plan du parallèle A, des tangents QT, QT' à ce parallèle. Les plans cherchés sont PQT, PQT'.

On aurait pu parvenir au résultat en considérant la sphère ayant pour centre le point fixe N des normales le long du parallèle A et inscrite dans la surface ; mais, en général, le premier procédé indiqué est plus facilement applicable.

PROBLÈME III. — *Mener par un point donné P un plan tangent à une surface de révolution donnée, le point de contact étant sur une méridienne donnée.*

Soit X'X l'axe de la surface donnée dont la ligne génératrice est G et soit A le point de la génératrice situé sur la méridienne donnée M (fig. 107).

On considère le cylindre circonscrit à la surface le long de la méridienne M, il suffit, pour avoir les plans tangents cherchés, de mener de P des plans tangents à ce cylindre, ce à quoi on arrive par la méthode ordinaire en menant de P la perpendiculaire au plan méridien considéré et en menant, de la trace Q de cette droite sur le plan méridien des tangentes QT, QT' à la méridienne. Les plans cherchés sont PQT, PQT'.

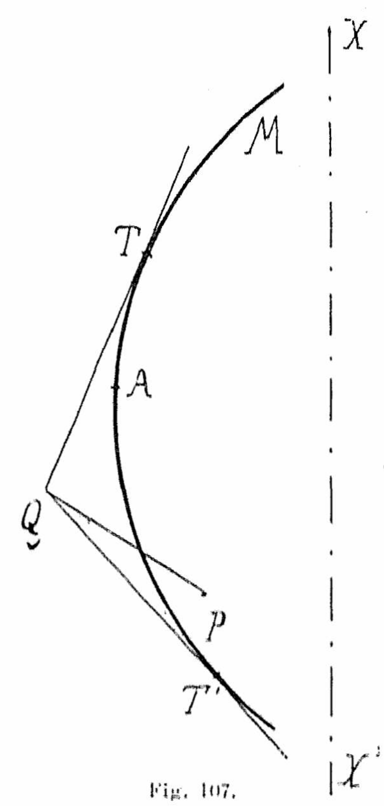


Fig. 107.

PROBLÈME IV. — *Mener parallèlement à une droite donnée D un plan tangent à une surface de révolution donnée, le point de contact étant sur un parallèle donné.*

Ce problème se résout d'une façon analogue à celle dont on a usé pour le problème II. Il suffit, au lieu de joindre le point

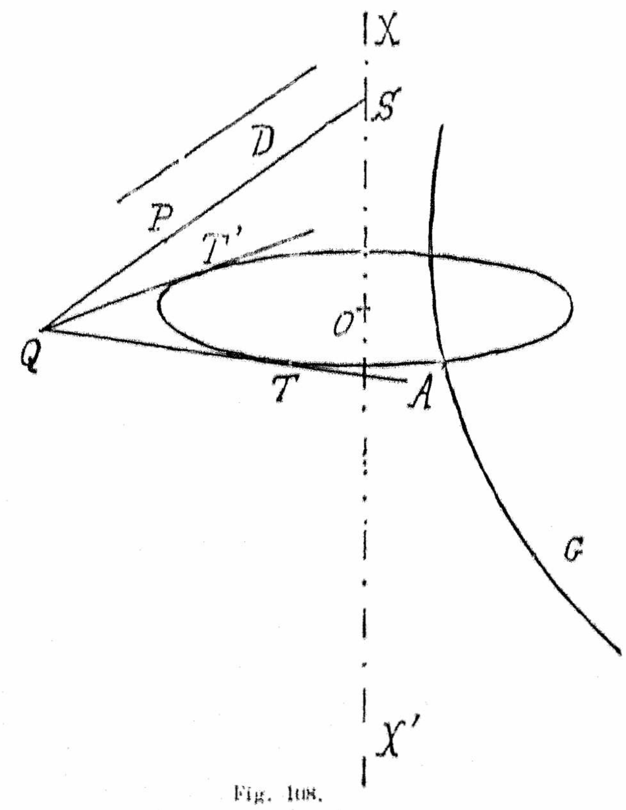


Fig. 108.

P à S, de mener par S une parallèle à la direction de la droite D (fig. 108).

On pourrait également utiliser la sphère inscrite dans la surface le long du parallèle donné.

PROBLÈME V. — *Mener parallèlement à une droite donnée D un plan tangent à une surface de révolution donnée, le point de contact étant sur une méridienne donnée M.*

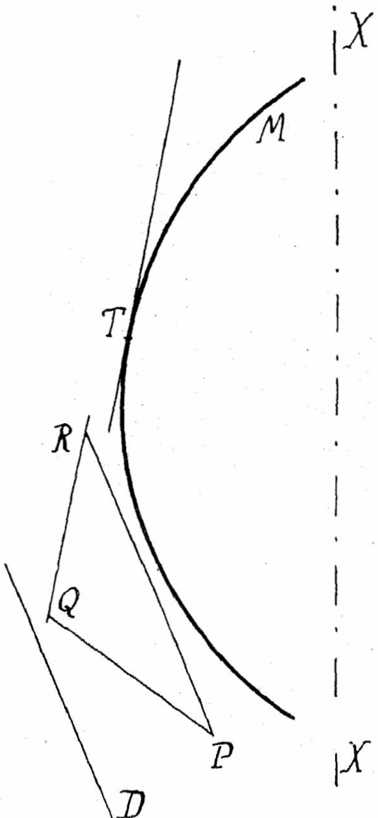


Fig. 109.

Suivant une méthode analogue à celle dont on a usé problème III, on déterminera la direction de plan parallèle à D et perpendiculaire au plan de M, on prendra la trace de cette direction de plan sur le plan de M et on mènera à M des tangentes parallèles à cette trace (fig. 109).

PROBLÈME VI. — *Mener par une droite donnée D un plan tangent à une surface de révolution donnée.*

1° On mène à la surface par un point P pris arbitrairement sur la droite D un cône circonscrit (prob. II et III) et ensuite on mène à ce cône des plans tangents par la droite D. Ces plans sont les plans tangents cherchés à la surface.

2° On peut encore considérer le cylindre circonscrit à la surface dont les génératrices sont parallèles à la droite D (prob. IV et V) et mener à ce cylindre des plans tangents par la droite D.

Cas particulier d'une surface de 2e degré à axe vertical. — On choisit comme point P pris sur D le point situé dans le plan de front de l'axe; il suffit alors de mener en élévation par ce point des tangentes à la méridienne de front, la corde de contact est la projection verticale de la courbe de contact du cône et de la surface, il reste à mener à ce cône des plans tangents par la droite D; on y arrive simplement en remplaçant la courbe de contact par une seconde base qui se projette suivant un cercle; pour cela on coupe le cône précédent par le cylindre circonscrit à la surface le long d'un équateur. Le cylindre et le cône, étant circonscrits à une même surface, se coupent suivant deux courbes planes (1re partie, 4e section), dont on prend l'une d'elles (qui se projette suivant l'équateur) comme base du cône de sommet P : l'épure se fait alors sans tracer une seule conique (fig. 110).

Du point P dans le plan de front de l'axe on a mené,

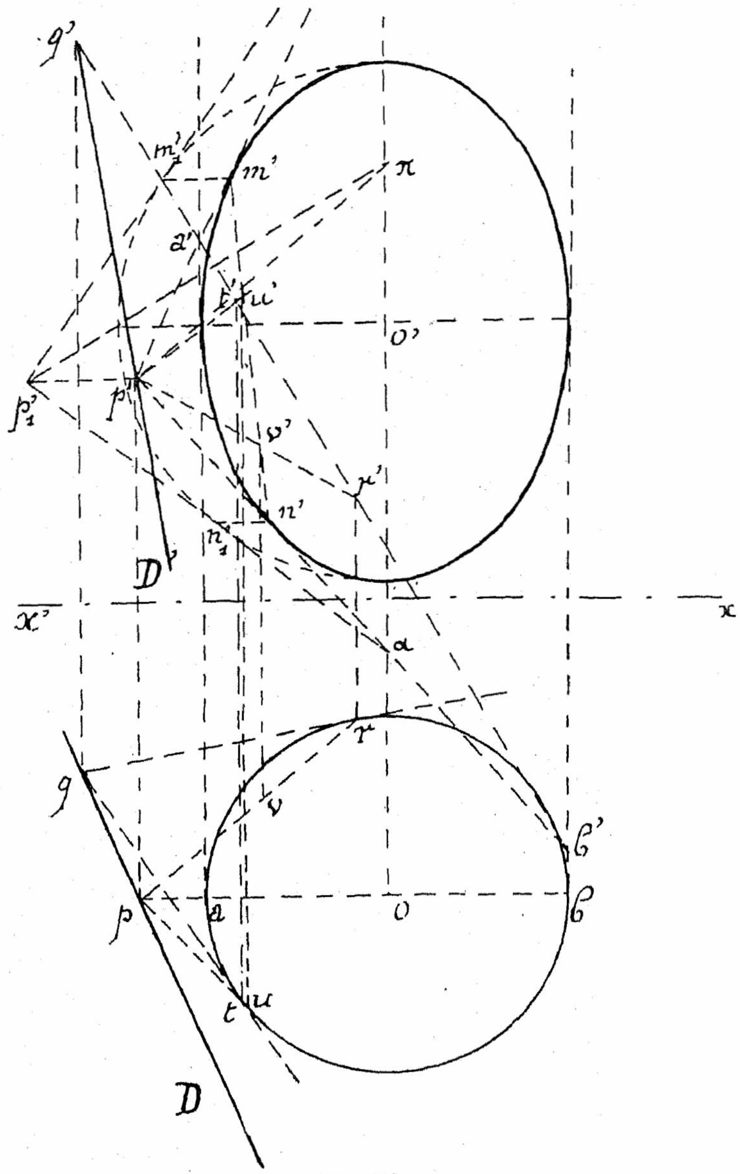


Fig. 110.

à l'aide du cercle homographique, les tangentes PM et PN à l'ellipse de contour apparent, puis au lieu d'utiliser la base dont l'élévation est $m'n'$ on a coupé par le cylindre de contour apparent horizontal et déterminé ainsi une base $a'b'$ de bout, projetée en plan suivant le cercle de contour apparent. On a pris alors la trace Q de la droite D sur ce plan et on a mené, en plan, de Q des tangentes QR et QT à cette base. Les génératrices correspondantes PR et PT coupent la base de contact MN aux points U et V qui sont les points de contact des plans tangents demandés.

PROBLÈME VII. — *Mener parallèlement à un plan donné P un plan tangent à une surface de révolution donnée à axe vertical.*

Si on se rappelle que tout plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien du point de contact, on voit qu'on connaît de suite la méridienne du point de contact du plan cherché, qui est

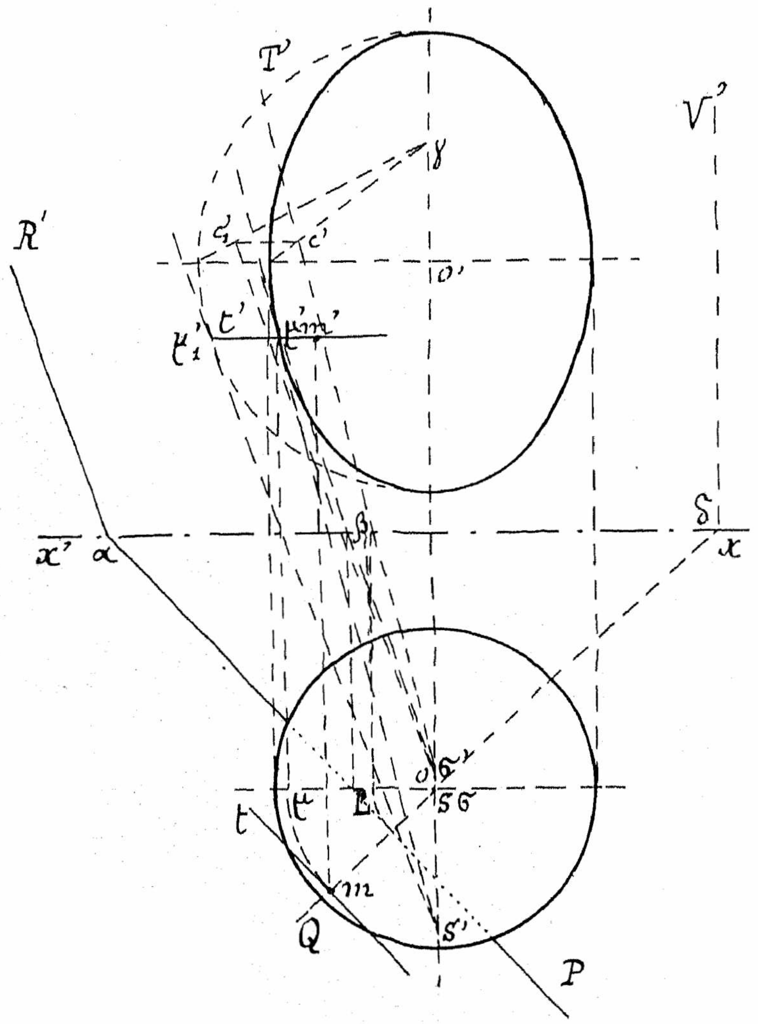


Fig. 111.

dans le plan vertical Q mené par l'axe perpendiculairement au plan P. On prendra alors la trace de ce plan vertical sur le plan P, soit Δ cette trace. Pour avoir le point de contact du plan cherché, il suffit de mener à la méridienne du plan Q des tangentes parallèles à Δ.

Sur l'épure (fig. 111), cette dernière construction a été effectuée à l'aide d'une rotation qui a amené le plan Q à être de front.

La surface donnée est un ellipsoïde de centre O, le plan donné est $P\alpha R'$. On l'a amené de bout en $L\beta T'$, en *utilisant le point fixe* Σ *sur l'axe de rotation, puis on a* mené, à l'aide du cercle homographique, une tangente $s'\mu'$ au contour apparent vertical parallèle à la trace $\beta T'$ du plan $L\beta T'$; le point de contact est (μ, μ'). Une rotation égale et de sens inverse de la précédente ramène le point de contact μ en M dans le plan Q. Le plan cherché est déterminé par la tangente MT au parallèle et le point fixe S sur l'axe de révolution.

APPLICATIONS A DIFFÉRENTES QUESTIONS D'OMBRES ET DE CONTOURS APPARENTS

I. — *Ombres propres au flambeau d'une surface de révolution.* — On applique, en les combinant convenablement (méthode des enveloppées coniques et cylindriques), les problèmes II et III traités précédemment; 1° *en déterminant un certain nombre de plans tangents* issus du flambeau P et dont les points de contact soient sur des parallèles spéciaux : équateurs, colliers, parallèles, le plus haut et le plus bas, puis 2° en déterminant un certain nombre de plans tangents issus du flambeau P et dont les points de contact soient sur des méridiens appropriés : méridiens de front (si l'axe est vertical) et de symétrie par exemple (voir exercices, petites épures).

II. — *Ombres propres au soleil d'une surface de révolution.* — On applique, en les combinant convenablement (méthode des enveloppées coniques et cylindriques) les problèmes IV et V traités précédemment : 1° en déterminant un certain nombre de plans tangents parallèles à la direction D des rayons lumineux et dont les points de contact soient sur des parallèles spéciaux : équateurs, colliers, parallèles le plus haut et le plus bas, puis 2° en déterminant un certain nombre de plans tangents parallèles à la direction D des rayons lumineux et dont les points de contact soient sur des méridiens appropriés : méridien de front si l'axe est vertical et méridien de symétrie (voir exercices, petites épures).

On peut, surtout dans ce dernier cas, si l'on veut obtenir l'ombre propre seulement en élévation, employer le procédé suivant connu sous le nom de méthode des enveloppées sphériques. On cherche tout d'abord l'ombre propre d'une sphère ω quelconque

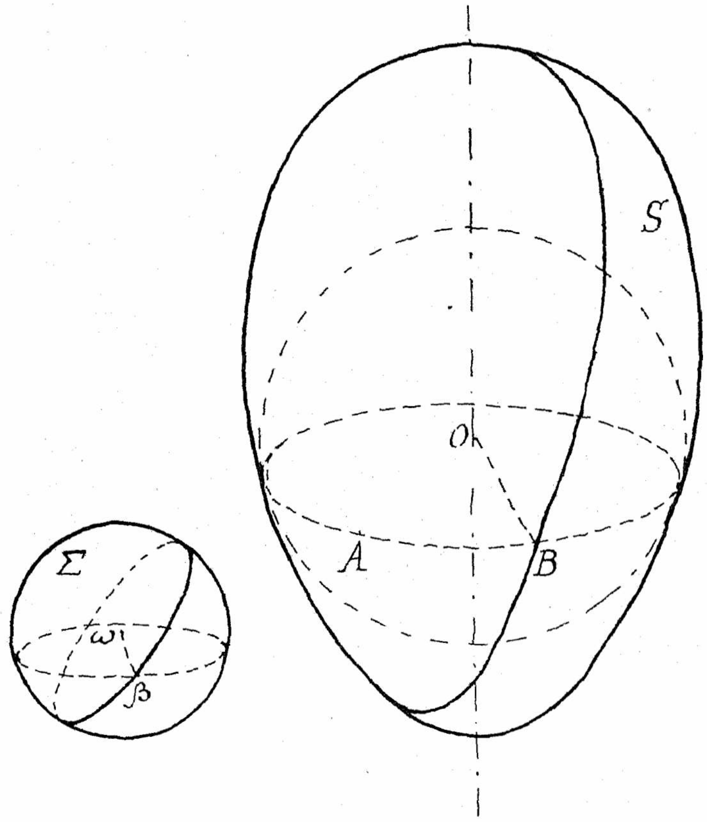


Fig. 112.

(voir programme d'admission à l'École) puis cela fait, pour obtenir le point de la séparatrice situé sur un parallèle donné A, on imagine la sphère inscrite O dans la surface le long de ce parallèle A : l'ombre propre de cette sphère est semblable à celle de ω. On mène sur la sphère auxiliaire ω le parallèle homologue du parallèle A sur la sphère O qui coupe l'ellipse d'ombre en β et on prend sur la sphère O l'homologue B du point β à l'aide des deux rayons parallèles ωB et OB, B est le point cherché de la séparatrice (fig. 112).

III. — *Contours apparents d'une surface de révolution à axe quelconque.* — Théoriquement, la recherche des contours apparents dans ce cas revient à la recherche des cylindres circonscrits à génératrices verticales (pour le plan) ou de bout (pour l'élévation).

Dans le cas où l'axe est parallèle à un des plans de projection, c'est-à-dire de front ou horizontal (sans être ni vertical ni de bout, cas déjà étudié) : 1° la projection sur le plan auquel l'axe est parallèle est la méridienne dont le plan est parallèle au plan de projection considéré ; 2° la projection sur l'autre plan est obtenue facilement par la méthode précédente des enveloppées sphériques. Les points du contour apparent sont les points communs aux cercles de contact des sphères inscrites et aux cercles de contour apparent des mêmes sphères, les contours apparents étant d'ailleurs tangents en ces points. Cette méthode n'est autre, somme toute, que celle indiquée (1^re^ partie, 3^e^ section) où l'on considère les surfaces comme enveloppes de surfaces mobiles. Sur l'épure (fig. 113), on a considéré une surface d'axe Aα horizontal et de génératrice rectiligne GH.

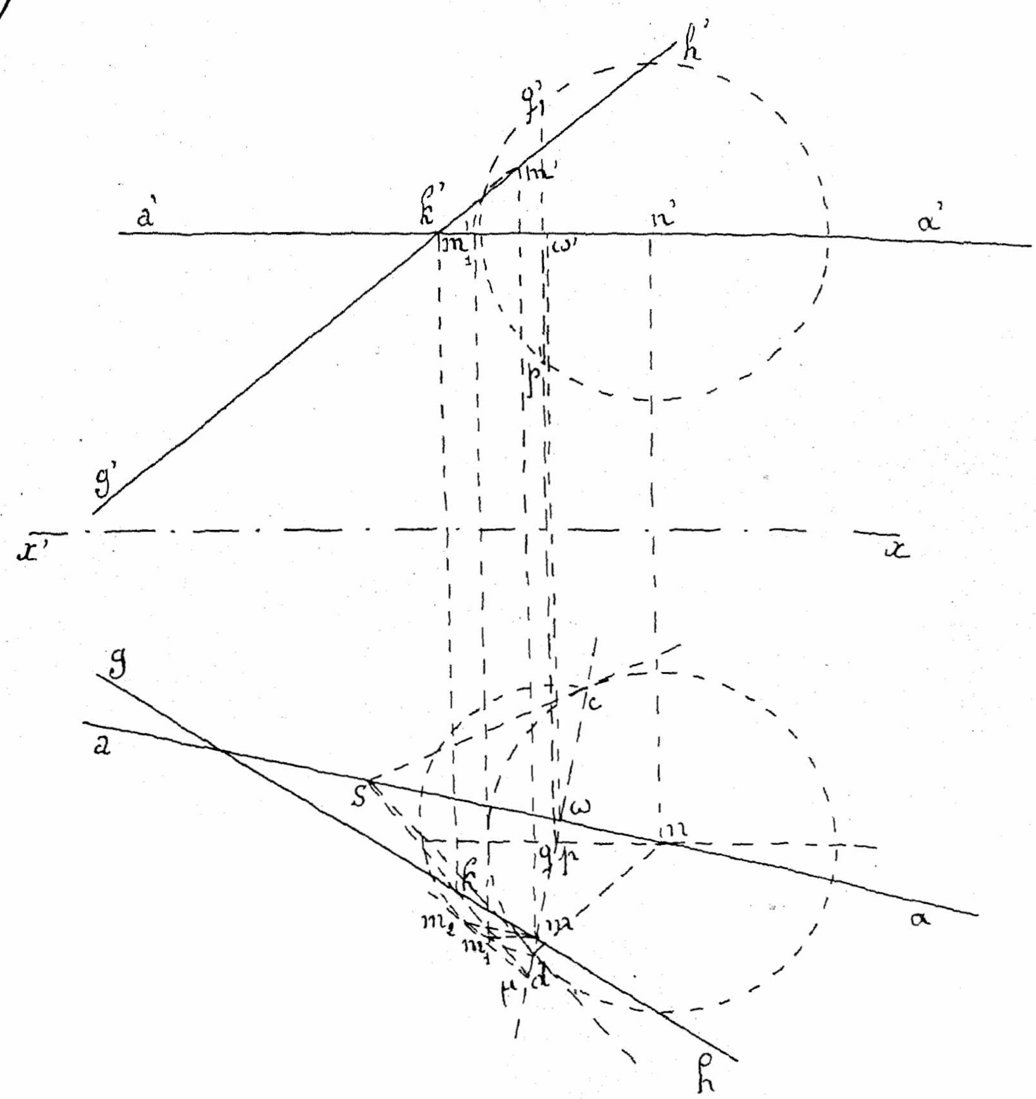


Fig. 113.

On s'est donné *a priori* le plan d'un parallèle de centre Ω. Un point de ce parallèle est en M sur la génératrice, une rotation amène M en M_1 et donne le rayon du parallèle d'où les points C et D du contour apparent horizontal, extrémités du diamètre horizontal du parallèle considéré. On a de plus par la tangente μM en M au parallèle et par la génératrice GH le plan tangent en M dont le point fixe S sur l'axe est à l'intersection de l'axe et de l'horizontale μK du plan tangent : la sphère inscrite a alors pour centre N, ND étant perpendiculaire en D à SD tangente au contour apparent. En élévation les points sur le contour apparent sont les points P et Q communs au contour apparent vertical de la sphère inscrite et au parallèle de contact.

C'est également cette même méthode qu'on applique dans le cas où l'axe de révolution est quelconque, incliné sur les deux plans de projection (voir 1re partie : exercices, petites épures, et 2e partie : exercices, petites épures).

CHAPITRE II

SECTIONS PLANES. — INTERSECTION AVEC UNE DROITE. GÉNÉRALITÉS SUR LES SECTIONS PLANES

La méthode générale donnée pour rechercher les sections planes des surfaces nous incite ici à prendre comme plans auxiliaires : les plans, soit des parallèles qui donneront des sections circulaires, soit des méridiens qui donneront, quels qu'ils soient, des sections toujours égales entre elles et qu'on pourra, par une rotation, toujours faire coïncider avec l'une d'entre elles. Ces deux séries de plans sont les plus commodes et suffisent dans tous les cas. Leur emploi est naturellement tout particulièrement recommandable quand l'axe de la surface est ou vertical ou de bout. Dans les autres cas ce sont eux qu'on devra encore utiliser à moins que certains plans ne donnent exceptionnellement des sections simples (rectilignes par exemple) auxquels cas on devra employer ces plans laissant ainsi de côté la propriété de la surface d'être de révolution.

Les tangentes aux différents points de l'intersection s'obtiendront par la méthode ordinaire de l'intersection du plan tangent à la surface et du plan sécant. On peut encore déterminer la tangente en un point de l'intersection en menant la perpendiculaire au plan des deux normales à la surface et au plan sécant. La courbe de section admet toujours un axe de symétrie qui est l'intersection du plan sécant et du plan méridien perpendiculaire au plan sécant. Ce plan méridien est en effet un plan de symétrie, pour l'ensemble de la surface et du plan sécant. Aux points de la courbe d'intersection situés dans ce plan de symétrie les tangentes sont orthogonales à l'axe (donc horizontales si l'axe est vertical), les parallèles correspondants sont tangents à la courbe d'intersection en ces points : ce sont des *parallèles limites.*

En dehors de ces points, on détermine ordinairement les points situés sur les contours apparents lorsque la chose est possible facilement, en particulier, par conséquent lorsque l'axe de révolution est vertical ou de bout (voir exercices, petites épures).

Pour avoir l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution, il n'y a qu'à appliquer la méthode générale déjà signalée en choisissant ordinairement le plan auxiliaire passant par la droite parallèle à l'axe de révolution. Ce plan sera un des plans projetants de la droite, dans les cas usuels où l'axe est vertical ou de bout. Mais on peut procéder encore comme suit : en faisant tourner la droite D dont on veut avoir les points communs avec la surface de révolution S autour de l'axe X'X de la surface S, on engendre un hyperboloïde de révolution dont on sait construire exactement l'hyperbole méridienne. En prenant alors l'intersection de cette hyperbole avec la méridienne de la surface S on aura des points situés sur les mêmes parallèles que les points d'intersection cherchés : ces points seront par suite à l'intersection de la droite D et des plans des parallèles ainsi déterminés.

Dans le cas où la droite D rencontrerait l'axe X'X de la surface S (ou lui serait parallèle) la méthode s'appliquerait encore avec cette simplification que la surface engendrée par S étant un cône (ou un cylindre) la méridienne se composerait alors de deux droites concourantes (ou parallèles).

Enfin si la droite D était orthogonale à l'axe X'X, il suffirait de couper la surface S par le plan du parallèle contenant D pour avoir de suite les points cherchés.

Nous étudierons maintenant plus spécialement les surfaces du 2ᵉ degré et le tore dont l'emploi est fréquent en architecture.

ÉTUDE DES SURFACES DE RÉVOLUTION DU 2e DEGRÉ SECTIONS PLANES

En dehors de la sphère, des cônes et des cylindres, les surfaces de révolution du 2e degré sont : 1° les deux ellipsoïdes allongé et aplati dont la méridienne est une ellipse, le grand et le petit axe étant respectivement l'axe de révolution ; 2° le paraboloïde de révolution dont la méridienne est une parabole dont l'axe est l'axe de révolution, 3° les deux hyperboloïdes à une et deux nappes dont la méridienne est une hyperbole, l'axe non transverse et l'axe transverse étant respectivement l'axe de révolution.

Les sections planes des ellipsoïdes sont toujours des ellipses.

Les sections planes du paraboloïde sont toujours des ellipses quand le plan sécant n'est pas parallèle à l'axe. Dans ce dernier cas la section est une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe de révolution.

Les sections planes des hyperboloïdes peuvent être des ellipses, des paraboles ou des hyperboles selon la position du plan sécant. Lorsqu'on engendre les hyperboloïdes par la rotation de l'hyperbole méridienne, les asymptotes engendrent dans ce mouvement un cône de révolution circonscrit à l'infini à l'hyperboloïde et qu'on nomme cône asymptote. Les sections planes des hyperboloïdes sont de même nature que les sections par le même plan du cône asymptote, nature qu'on détermine à la façon ordinaire (voir 1re partie, 4e section).

La détermination des points dans le plan de symétrie fera connaître un axe de la section en grandeur et position tant dans l'espace qu'en projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, en tout cas, fera connaître un diamètre des deux projections de l'intersection. En coupant la surface par le diamètre perpendiculaire à l'axe de révolution, on aura, dans le cas d'une ellipse, les deux autres sommets de la section, qui sera alors parfaitement déterminée. Dans le cas d'une section parabolique, un seul point en dehors de l'axe et du sommet suffit à déterminer la courbe.

Enfin, dans le cas d'une section hyperbolique, l'axe dans le plan de symétrie étant obtenu, on recherche les asymptotes. On obtient ces droites en prenant les intersections du plan sécant et des plans tangents au cône asymptote le long des génératrices de ce cône parallèles au plan sécant (voir, dans les exercices, petites épures, des exemples de ces 3 cas de section).

INTERSECTION D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION DU 2e DEGRÉ A AXE VERTICAL AVEC UNE DROITE

Dans le cas d'une surface du 2e degré à axe vertical, on peut déterminer exactement les points d'intersection avec une droite de cette surface sans tracer aucune co-

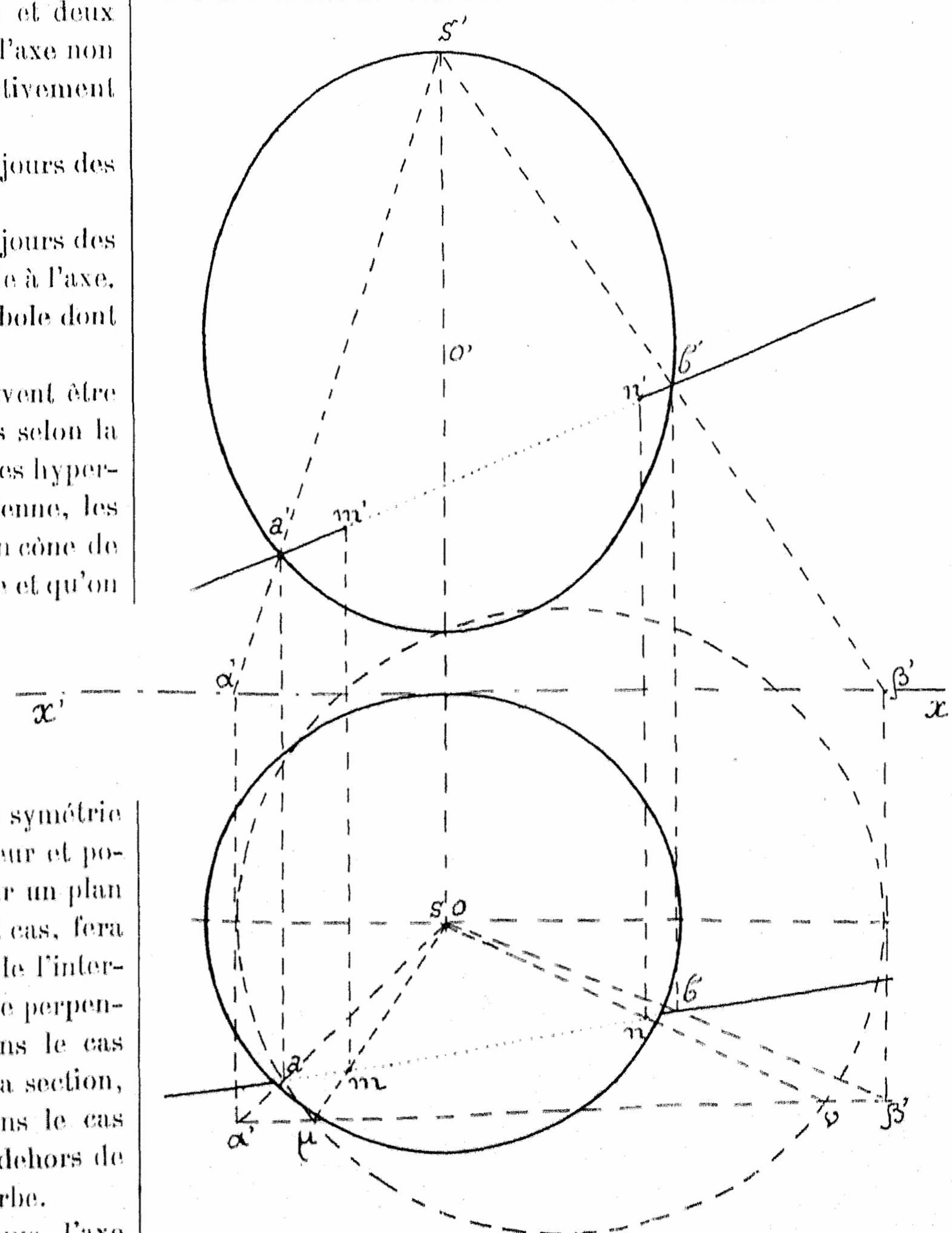


Fig. 114.

nique. Pour cela on procède comme suit (fig. 114) :

On coupe la surface par le plan projetant verticalement la droite et on considère le cône ayant pour sommet un point S de la surface sur l'axe de révolution et pour base la section par le plan précédent (un point tel que S existe toujours, sauf dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, cas où nous ferons connaître un procédé différent). Ce cône a en commun avec la surface : 1° la section précédente ; 2° le cercle de rayon nul en S. Les sections planes horizontales de ce cône sont donc des cercles et on est ramené, pour avoir l'intersection de la droite et de la surface, à rechercher les points communs à une droite et à un cône dont une base est projetée en plan suivant un cercle.

C'est là un problème facile à résoudre (fig. 114).

Remarquons enfin que, dans le cas du paraboloïde, on peut employer, au lieu du cône ayant pour sommet le sommet de la surface, le cylindre, projetant la section qui est alors de révolution ; la méthode se trouve alors encore simplifiée (voir exercices, petites épures).

SECTIONS PLANES DU TORE

Le tore est une surface de *révolution* engendrée par la rotation d'un cercle autour d'un axe situé dans son plan. Cette surface est du quatrième degré ; les sections seront donc des *quartiques planes* (sauf cas de décomposition) et ces courbes affecteront des formes fort différentes, selon la position du plan sécant par rapport au tore.

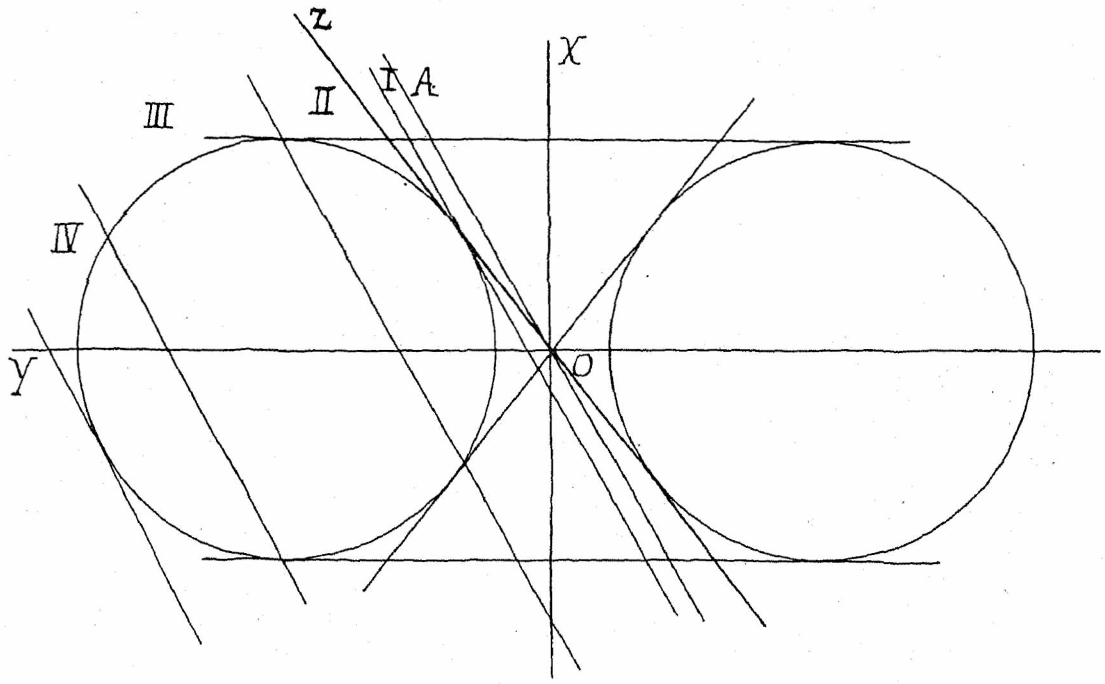


Fig. 115 A.

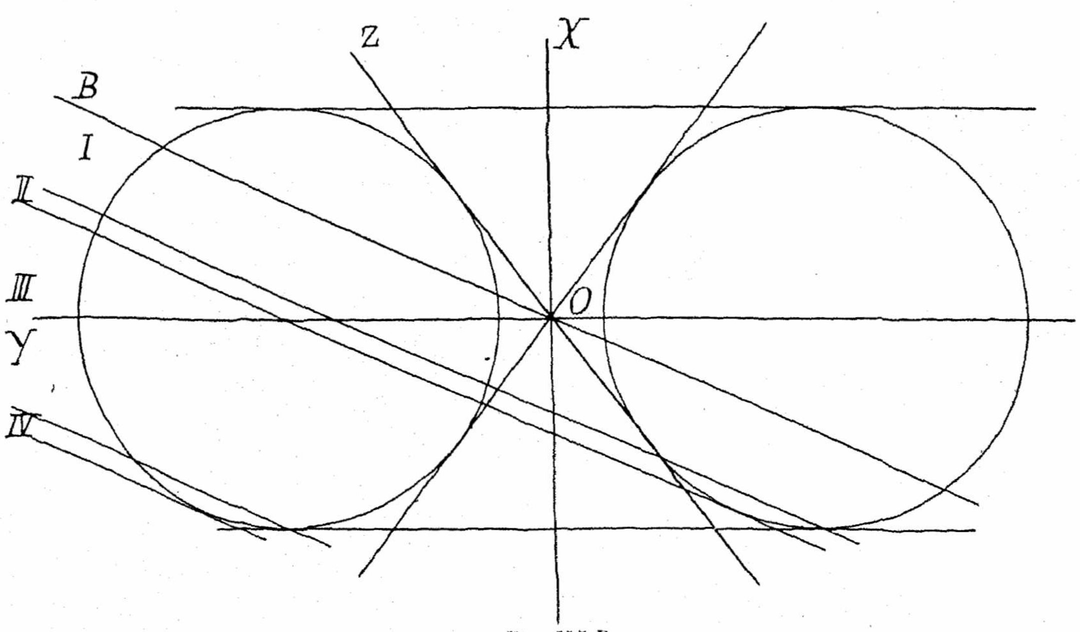
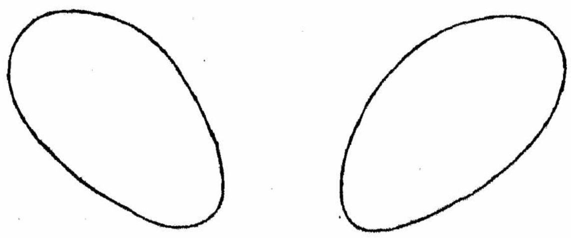


Fig. 115 B.

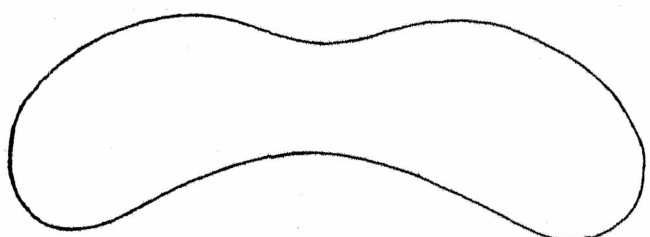
En supposant que l'axe de révolution vertical ne coupe pas les cercles méridiens (les autres cas sont des cas restreints de celui-là), nous considérerons les tangentes communes intérieures aux deux cercles méridiens de front et nous distinguerons différents cas selon la position des traces verticales des plans sécants (qu'on peut, par suite de la symétrie, supposer de bout sans restreindre la question) par rapport à ces tangentes communes. On aura tous les cas possibles en considérant les plans sécants dont les traces sont parallèles : 1° à une droite OA intérieure à l'angle XOZ (fig. 115 A); 2° à une droite OB intérieure à l'angle ZOY complémentaire du précédent (fig. 115 B), et en déplaçant ces plans parallèlement à eux-mêmes depuis la position centrale jusqu'à ne plus couper le tore.

On obtient les résultats résumés par les schémas et figures suivantes (fig. 116 à 125).



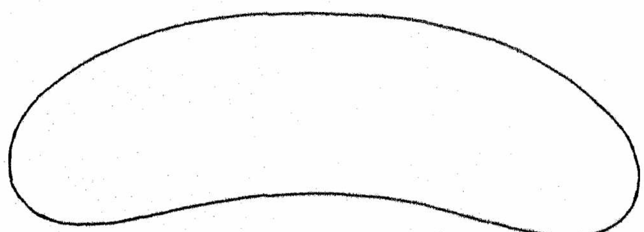
Région I

Fig. 116.



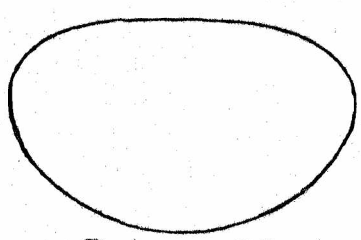
Région II

Fig. 117.



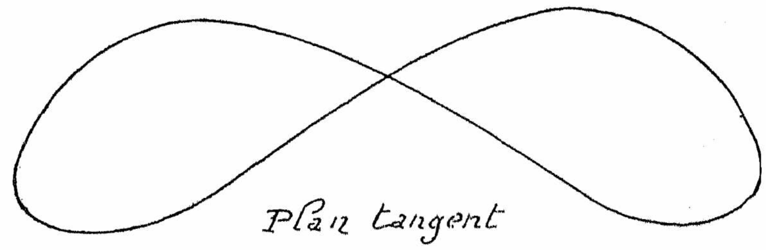
Région III

Fig. 118.



Région IV

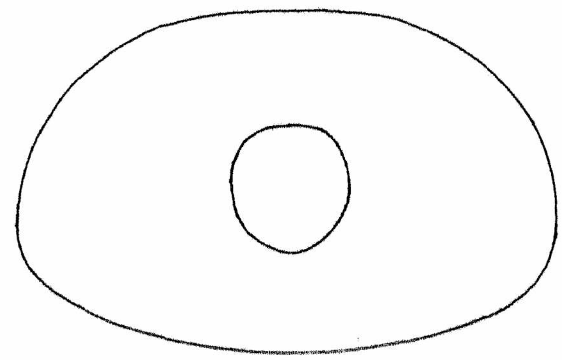
Fig. 119.



Plan tangent

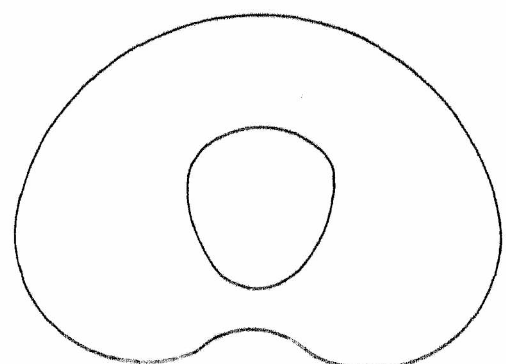
Cas limite entre les régions I & II

Fig. 120.



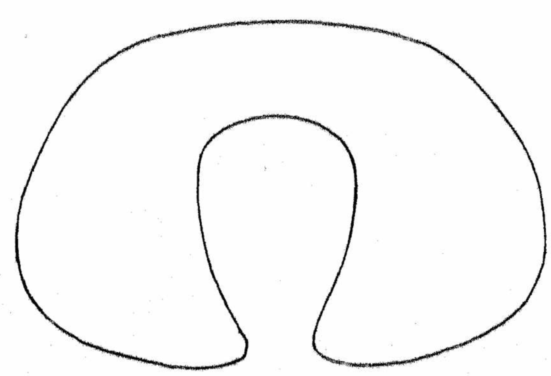
Région I

Fig. 121.



Région II

Fig. 122.



Région III

Fig. 123.

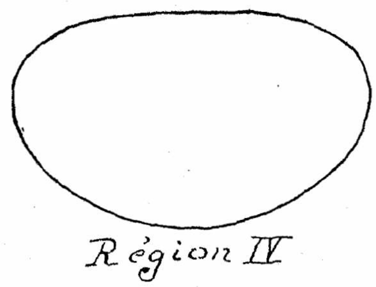


Fig. 124.

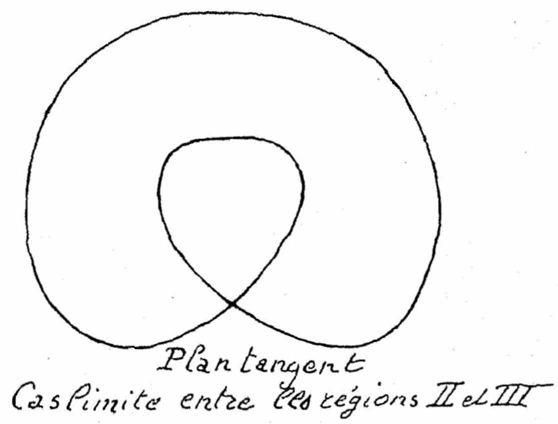


Fig. 125.

Toutes les autres positions possibles se déduisent d'une des précédentes par une symétrie convenable.

Les sections par des plans perpendiculaires à l'axe sont deux cercles.

Les sections par des plans parallèles à l'axe sont de formes analogues à celles du groupe A.

Enfin signalons à part le cas limite du plan *bitangent au tore* qui coupe cette surface suivant deux cercles égaux.

En utilisant les propriétés du cercle imaginaire de l'infini, on peut donner une démonstration très simple du théorème de Villarceau. Remarquons tout d'abord que le tore admet le cercle de l'infini comme ligne double; toute section plane du tore est par suite bicirculaire, si donc le plan choisi est bitangent, la quartique de section possède quatre points doubles, les deux points cycliques de son plan et les deux points de *contact du point sécant et du tore. Or une* quartique ne peut avoir quatre points doubles sans se décomposer. La décomposition se fait suivant deux coniques passant par les points cycliques, c'est-à-dire suivant deux cercles.

Cette propriété a été mise en évidence par Yvon de Villarceau. L'épure a été exécutée (fig. 125 *bis*).

Les deux cercles sont projetés sur le plan horizontal perpendiculaire à l'axe de révolution suivant deux ellipses égales : *tangentes aux contours apparents aux* points situés dans le plan de profil de l'axe du tore. Ces points M, N, P, Q sont les sommets des grands

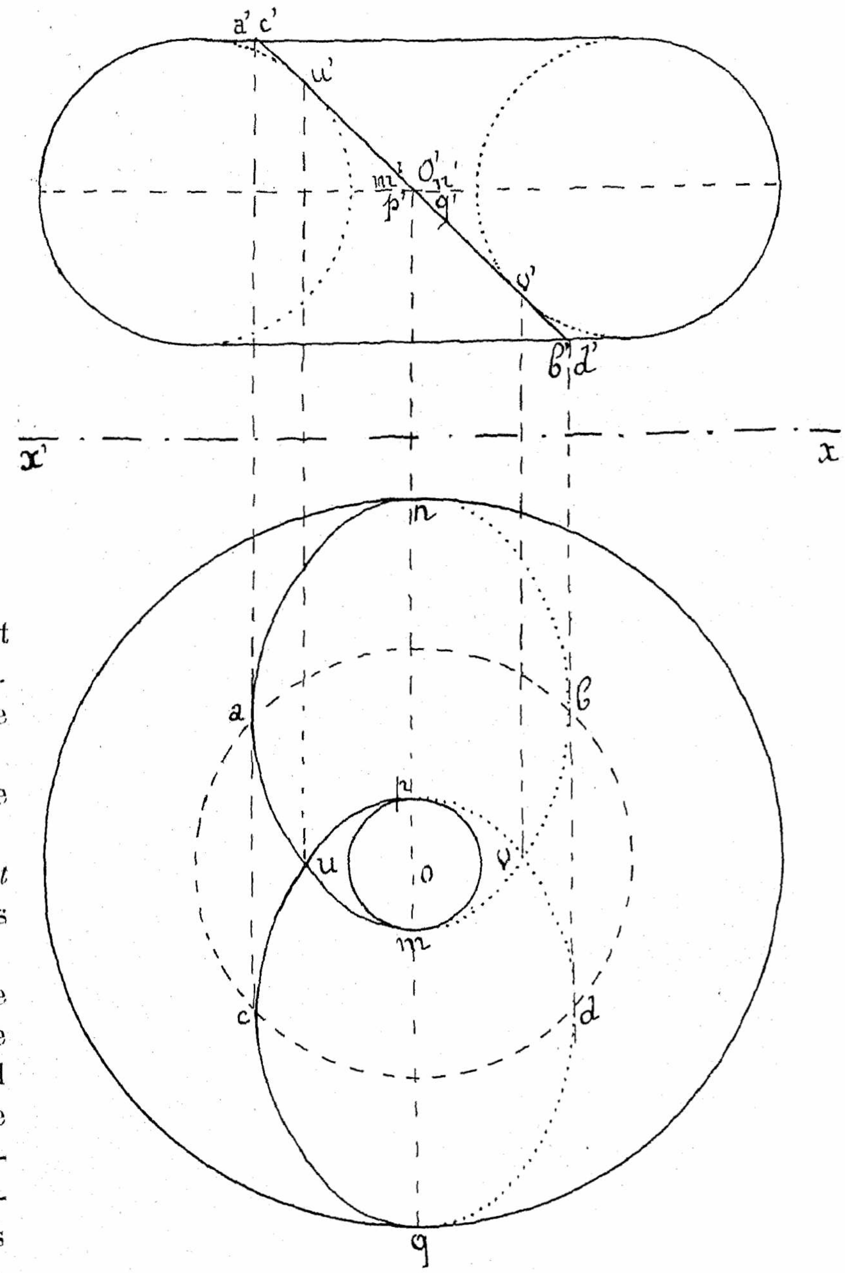


Fig. 125 *bis*.

axes. Les sommets des petits axes sont sur les deux parallèles le plus haut et le plus bas en A, B, C, D. Enfin les points de contact du plan tangent donnent en U et en V dans le plan de front méridien les deux points de rencontre des deux ellipses.

Cherchons enfin une section centrale par le plan $P\alpha Q'$ d'un tore à axe vertical de centre (o, o'), de méridienne le cercle (ω, ω'), Nous aurons les points le plus haut (f, f') et (h, h') et les points le plus bas (e, e') et

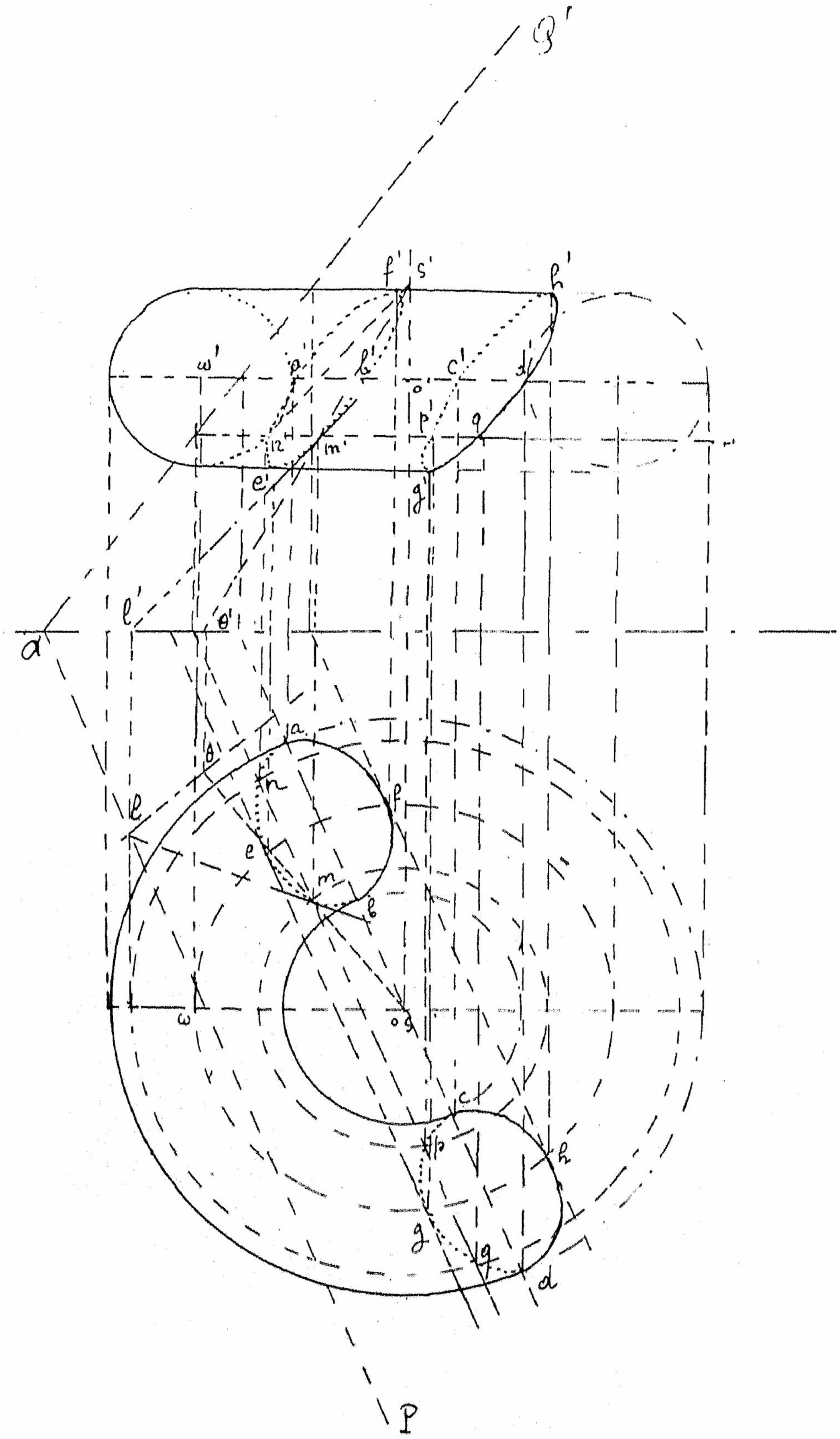


Fig. 126.

(g, g') en coupant plan et tore par les parallèles les plus haut et plus bas.

On a les points sur le contour apparent horizontal en coupant par le plan horizontal du centre, ce qui donne les points (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'). En tous ces points les tangentes à l'intersection sont connues.

On a déterminé des points courants (m, m'), (n, n'), (p, p'), (q, q') sur un plan horizontal H′ et enfin en un de ces points (m, m') on a tracé la tangente $(ml, m'l')$ en cherchant : 1° le point fixe de ces plans tangents (s, s') le long du parallèle H′, puis la trace horizontale $(\theta l, \theta l')$ du plan tangent en (m, m') qui, recoupant αP en l, a donné de suite en $(m\,l, m'\,l')$ la tangente en (m, m').

On a représenté la partie du tore plein située au-dessus du plan PαQ′.

CHAPITRE III

INTERSECTIONS DE SURFACES DONT UNE AU MOINS EST DE RÉVOLUTION

I. — INTERSECTION D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION AVEC UN CONE OU CYLINDRE

On coupera les deux surfaces par des plans perpendiculaires à l'axe de la surface et on sera ramené à chercher les points communs à des cercles, les parallèles, et à des courbes planes, sections du cône S ; pour éviter alors de tracer une nouvelle courbe pour chaque

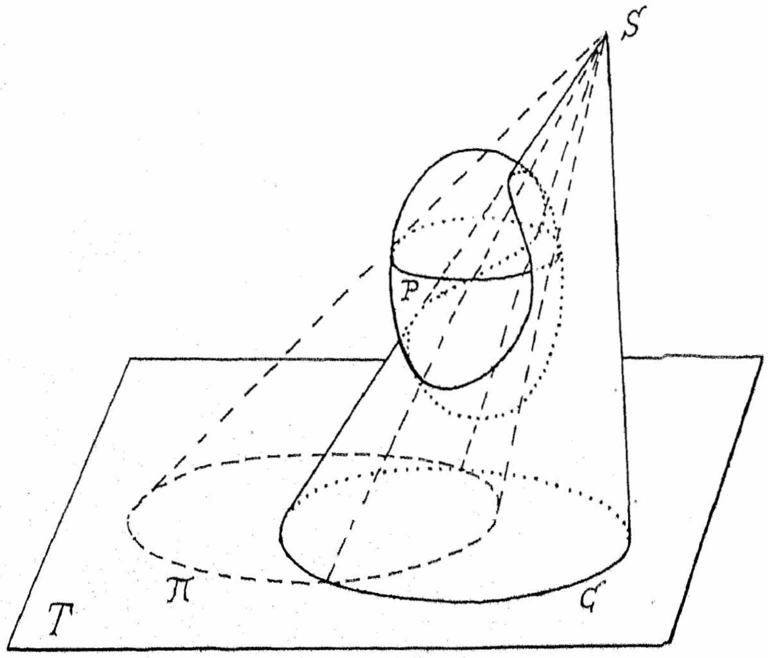


Fig. 127.

plan auxiliaire, on projette coniquement, à partir du sommet S du cône, les sections sur un plan de parallèle fixe : les parallèles donnent toujours des cercles π faciles à tracer et les sections du cône donnent toujours la même courbe C, section du cône par le plan du tableau perspectif T lui-même (fig. 127).

Cette méthode s'applique d'une manière particulièrement aisée quand la surface a un *axe vertical ou de bout* : il y a encore simplification plus grande si les plans des parallèles sont aussi plans de section circulaires pour le cône ; on peut alors ne pas user de la projection conique et prendre les intersections des projections orthogonales sur un plan d'un parallèle fixe, un des plans de projection, quand en particulier la surface a son axe ou vertical ou de bout.

Enfin on peut suivre un autre procédé quand le

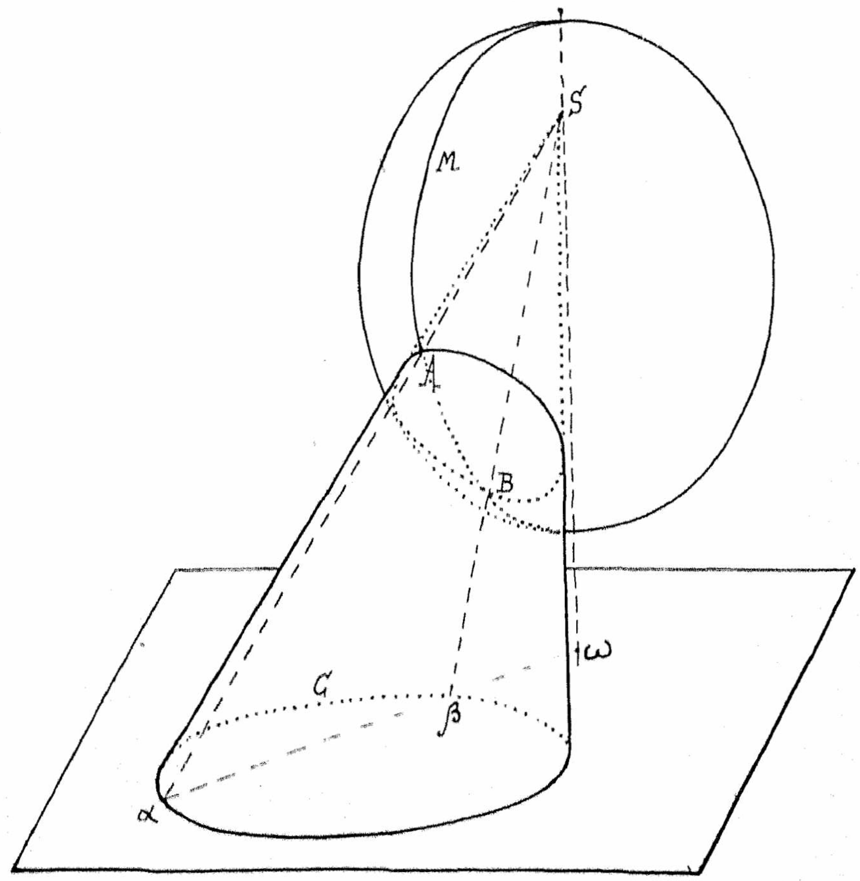


Fig. 128.

sommet du cône est sur l'axe de révolution ; on peut alors (fig. 128), employer comme plans auxiliaires les plans méridiens de la surface qui coupent tous le cône suivant des génératrices rectilignes : une rotation permet, comme d'habitude dans ce cas, de ne tracer qu'une méridienne, celle de contour apparent, par exemple, dans le cas d'un axe *de front ou horizontal*.

Il est bien entendu que, dans le cas d'un cylindre, on agirait absolument de même, sauf à projeter cylindriquement, au lieu d'employer une perspective dans les cas où une telle projection a été indiquée. Le dernier cas considéré pour le cône correspond, pour le cylindre, au cas où les génératrices sont parallèles à l'axe de révolution.

On peut, à l'aide d'une projection conique ou cylindrique, distinguer la nature de l'intersection, pénétration ou arrachement. Prenons sur un plan approprié la trace C du cône ou du cylindre et la perspective S de la surface faite du sommet du cône ou parallèlement au cylindre, on aura deux courbes qui, dans le cas des surfaces convexes, peuvent présenter les cinq positions

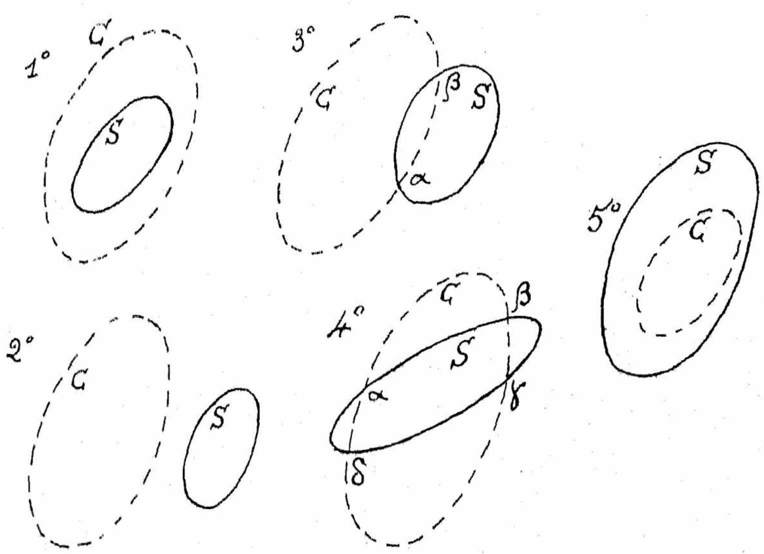


Fig. 129.

relatives suivantes (en laissant de côté les cas limites de contact simple ou supérieur) (fig. 129).

Dans les cas 1 et 2, il n'y a pas intersection où la surface de révolution est entièrement à l'intérieur du cône (cas 1), où elle est entièrement extérieure (cas 2); dans le cas 3 il y a *arrachement réciproque*, les deux points α et β sont les perpectives des points limites et aux points a et b correspondants de l'espace, les tangentes à l'intersection sont les génératrices du cône; dans le cas 4, il y a *pénétration de la surface de révolution dans le cône ou cylindre*, il y a 4 points limites fournis par les points communs α, β, γ, δ aux perpectives en ces points les tangentes sont les génératrices du cône; dans le 5e cas, il y a *pénétration du cône ou cylindre dans la surface*, les deux courbes d'entrée et de sortie peuvent, dans le cas du cône, appartenir soit à une même nappe, soit à deux nappes différentes (voir grandes épures).

II. — INTERSECTION DE DEUX SURFACES DE RÉVOLUTION DONT LES AXES SE RENCONTRENT

Recherche des points courants et des tangentes en ces points. — Laissant à part les cas particuliers qui peuvent donner lieu à des procédés spéciaux, la méthode générale consiste à couper les deux surfaces par des *sphères auxiliaires ayant pour centre le point commun aux deux axes*. Les sections des deux surfaces par de telles sphères sont des parallèles dont les points communs sont des points de l'intersection des deux surfaces. Les tangentes en ces points se déterminent, soit par intersection des plans tangents (en utilisant pour déterminer ces plans leur point fixe S sur l'axe) soit, plus souvent, par la méthode des normales, en menant au point considéré, au plan des deux normales aux deux surfaces, une perpendiculaire qui est justement la tangente cherchée.

Pour effectuer facilement toutes ces constructions, il est bien évident que le plan des deux axes doit être parallèle à un des deux plans de projection. Supposons-le par exemple de front (fig. 30), la sphère auxiliaire w' coupe les surfaces suivant des cercles qui se projettent en élévation suivant des droites $u'v'$, $r't'$; les points communs se groupent alors deux par deux en m' p' sur des droites de bout dont on a immédiatement la projection verticale $m'p'$, la courbe d'intersection en élévation est donc de degré moitié moindre que son degré réel. Si on a affaire à deux surfaces du 2e degré, l'élévation de l'intersection est une conique.

La tangente en un point M par exemple s'obtient en prenant les points fixes N et N_1 des normales correspondants aux parallèles UV et RT. La droite NN_1 est évidemment de front, étant dans le plan des axes, dont la projection verticale de la tangente en M sera $m'\theta'$ perpendiculaire à $n'n'_1$.

L'élévation ainsi déterminée, on cherche le plan au moyen de rabattements appropriés des plans des paral-

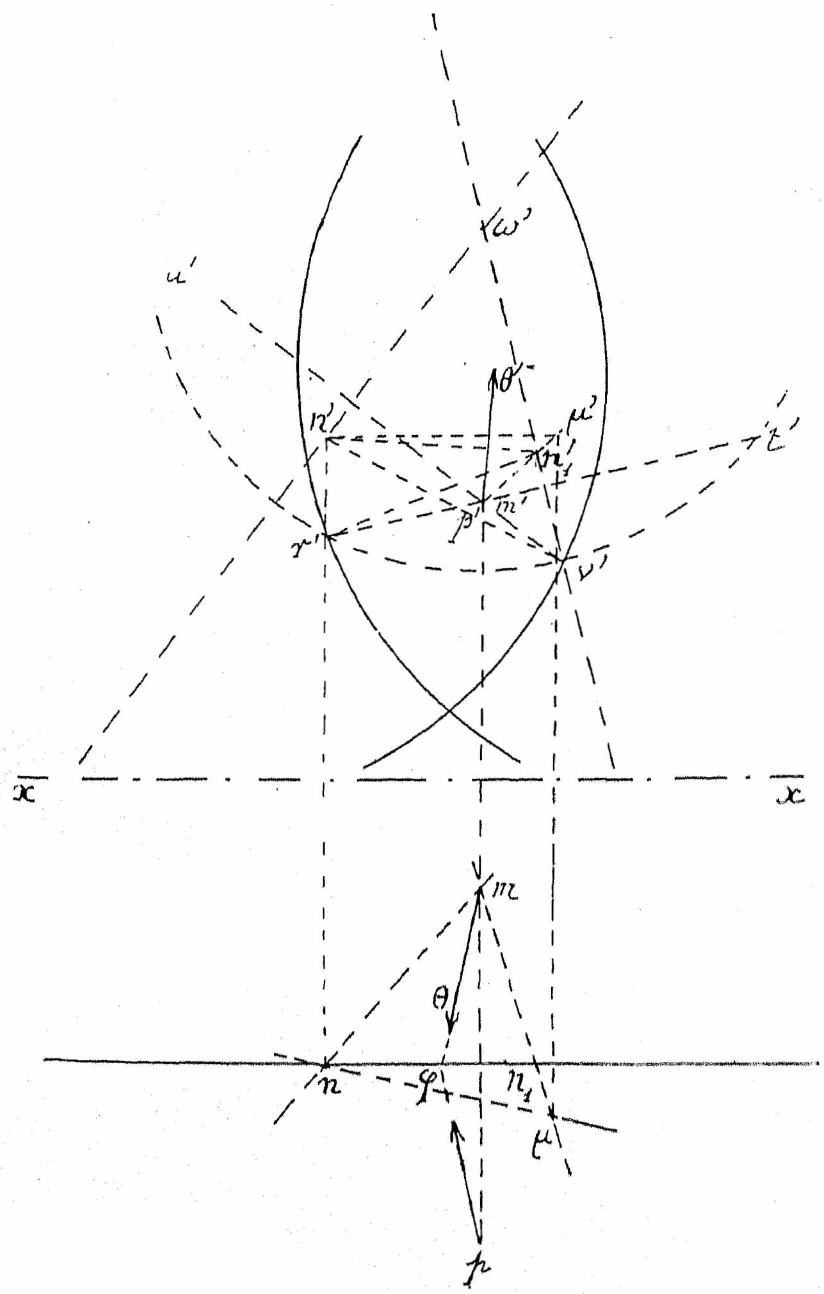


Fig. 180.

lèles. Les points P et M ont pour projection horizontale les points p et m, et la tangente en m est perpendiculaire à l'horizontale $n\mu$ du plan des normales (voir grandes épures).

Points particuliers. — Dans le cas considéré où le plan des axes est de front, les contours apparents verticaux, étant complanaires, se rencontrent et donnent lieu à des points où la tangente à l'intersection est de bout ; la tangente à l'élévation devra donc être en ces points déterminée par la méthode indiquée pour un cas semblable, à l'intersection des cônes et cylindres (1re partie, 4e section, chapitre IV). Ce sera la corde commune aux deux cercles de Meusnier des deux surfaces au point considéré.

Si une des surfaces est à axe vertical, on déterminera facilement à l'aide de sphères auxiliaires convenables les points sur les équateurs et colliers qui sont évidemment les points sur le contour apparent horizontal de cette surface.

Enfin il peut se faire que la sphère auxiliaire employée, au lieu de couper une des surfaces, lui soit *circonscrite tout le long d'un parallèle ;* on dit alors que la sphère est *limite.* Au point de l'intersection correspondant, la tangente est nécessairement la tangente au parallèle de celle des surfaces pour laquelle la sphère n'est pas limite, c'est-à-dire à laquelle la sphère n'est pas circonscrite : en effet, la tangente est l'intersection des plans tangents, d'une part et d'autre part, la sphère limite, étant circonscrite à une des surfaces, admet au point considéré même plan tangent que cette surface ; la tangente à l'intersection des deux surfaces est donc donnée par les mêmes plans que la tangente à l'intersection de la sphère auxiliaire et de la surface *non circonscrite* à cette sphère.

Il peut, pour ces surfaces, se présenter d'autres particularités, telles que points doubles réels, points doubles en projection, etc. On les étudiera comme il a été indiqué au chapitre de l'intersection des cônes et cylindres (voir, à titre d'exemple : les exercices, grandes épures).

Cas particulier où une des surfaces est une sphère. — La sphère étant de révolution par rapport à un quelconque de ses diamètres, étant données une surface de révolution et une sphère, on est toujours placé dans le cas actuellement considéré où les axes se rencontrent : il y a même, dans ce cas, indétermination, car on peut utiliser tous les diamètres de la sphère situés dans le plan diamétral de l'axe de la surface comme axes de révolution pour la sphère. On profite ordinairement de cette indétermination en inscrivant toujours la sphère auxiliaire dans la surface non sphérique ; on est alors placé à chaque instant dans le cas d'une sphère auxiliaire limite et par suite la courbe d'intersection est toujours tangente au cercle de section de la sphère donnée par la sphère auxiliaire employée (voir exercices, grandes épures).

II. — INTERSECTION DE DEUX SURFACES DE RÉVOLUTION DU DEUXIÈME DEGRÉ QUELCONQUES

Méthode de M. Geoffroy. — Le principe de la méthode consiste à couper les deux surfaces par des surfaces auxiliaires donnant des sections planes dans les deux surfaces données. Si alors on se rappelle que deux surfaces du deuxième degré circonscrites toutes deux à une même troisième surface du deuxième degré se coupent suivant deux courbes planes, on est amené à procéder comme suit (fig. 131).

On inscrira une sphère O dans la surface donnée S et une sphère O′ dans la surface S′. Le cône C circonscrit à la fois à O et à O′ coupe à la fois S et S′ suivant des courbes planes. Appelons L une de ces lignes sur la surface S et L′ une de ces lignes sur la surface S′, les points de l'intersection cherchée sont les points communs à L et à L′. Pour trouver ces points, on cherchera d'abord la droite d'intersection D des deux plans de L et de L′ puis l'intersection de cette droite D avec le cône de révolution C. Toutes ces opérations peuvent être exécutées rigoureusement, mais leur ensemble donne au total des constructions compliquées.

On peut souvent avec plus de profit employer la construction suivante. On coupe par les plans des parallèles d'une des surfaces ; on trouve dans cette surface un cercle P et dans l'autre une conique C. Quand on déplacera le plan auxiliaire C variera en restant homothétique à elle-même. On est ainsi amené à procéder comme suit :

1° On tracera avec soin dans le plan H d'un parallèle fixe une conique Γ homothétique aux coniques C de section (fig. 132) ;

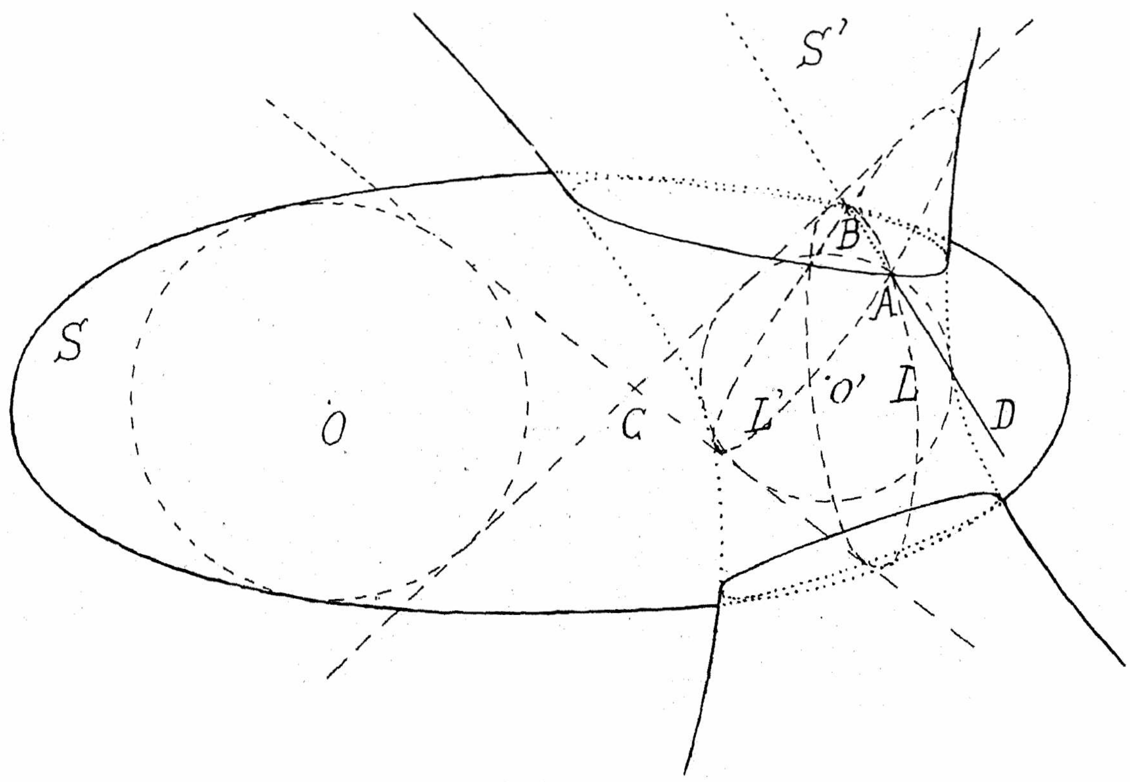


Fig. 131.

2° Étant donné dans un plan auxiliaire un parallèle P et une conique C, on cherchera le centre O d'homothétie de C et Γ, qui se trouvera sur la ligne des centres et sur la droite joignant les extrémités de deux rayons vecteurs homologues par exemple ;

3° On projettera coniquement sur H, à partir de O, le cercle P suivant un cercle π et on prendra les points communs α, β à π et à Γ qu'on relèvera coniquement sur P et C. La méthode est surtout recommandable quand un des axes est vertical ou de bout, c'est-à-dire quand on peut choisir pour plan H un plan horizontal ou de front. Remarquons enfin que la première surface dont on utilise les parallèles P n'a pas besoin d'être du 2^e degré pour qu'on puisse appliquer cette méthode (voir exercices, grandes épures).

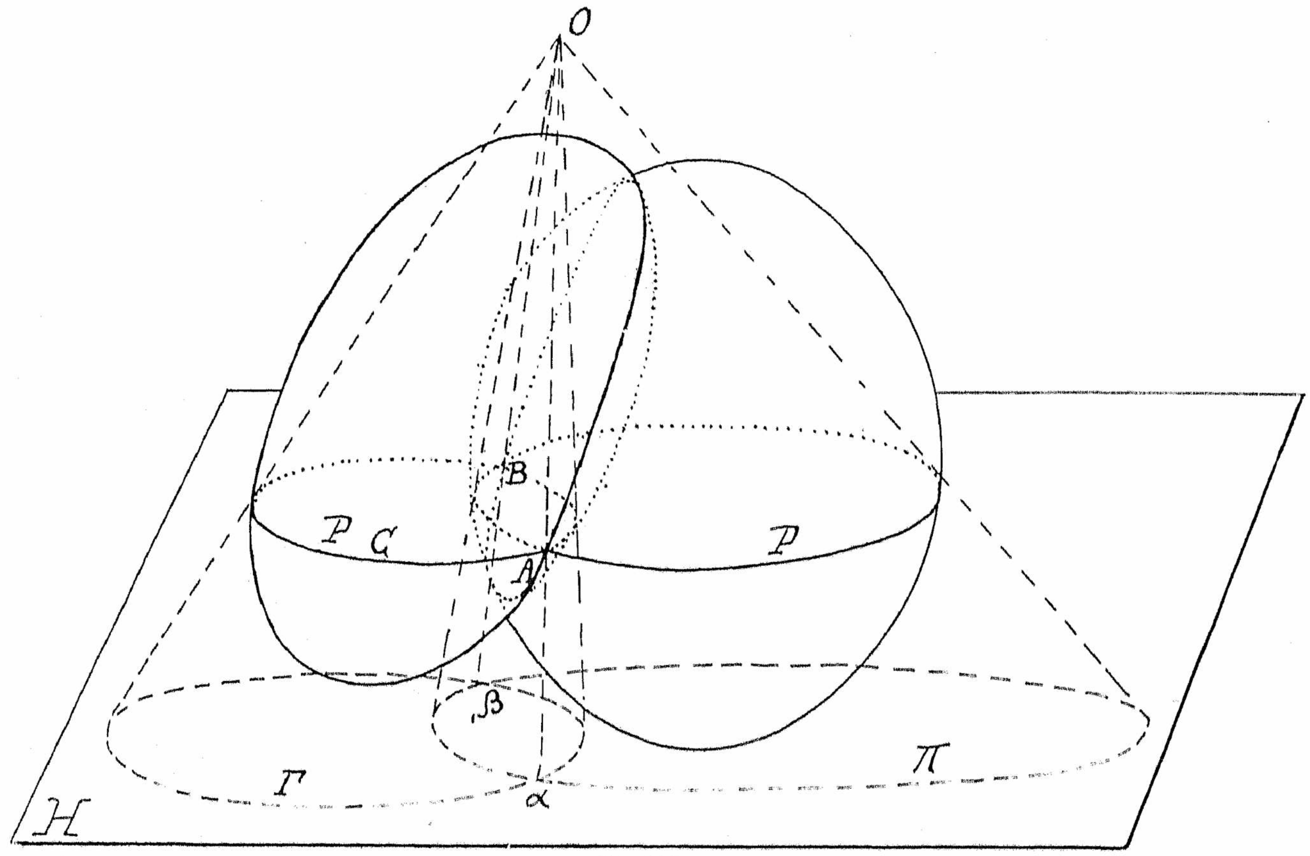


Fig. 132.

DEUXIÈME SECTION

SPHÈRE. — CÔNE ET CYLINDRE DE RÉVOLUTION

CHAPITRE PREMIER

NOTE. — L'étude de la sphère, faite dans ce chapitre et celle du cône et cylindre, faite dans le deuxième chapitre, ont été réduites aux explications strictement nécessaires afin de constituer seulement un rappel utile de l'étude semblable faite complètement au programme d'admission à l'École.

SPHÈRE

I. — GÉNÉRALITÉS

Plans tangents. — La sphère admettant chacun de ses diamètres comme axe de révolution est représentée sur les deux plans de projection par les projections de ses équateurs de front et horizontaux qui sont ses contours apparents verticaux et horizontaux; ces équateurs sont deux cercles égaux ayant pour rayon celui de la sphère et pour centre, le centre de la sphère.

On détermine un point M d'une sphère dont on connaît une projection m ou m' à l'aide du petit cercle horizontal ou frontal passant par ce point (fig. 133).

Le plan tangent en ce point est déterminé comme plan perpendiculaire au rayon OM par sa frontale MF et son horizontale MH.

On peut appliquer les procédés généraux indiqués dans la section précédente pour traiter les différents problèmes relatifs aux plans tangents à la sphère. On supposera bien naturellement dans tous ces exercices, que l'axe de révolution est le diamètre vertical ou debout de la sphère.

Le plan tangent à une sphère parallèle à un plan donné sera obtenu simplement en menant des plans tangents à la sphère aux extrémités du diamètre perpendiculaire au plan considéré.

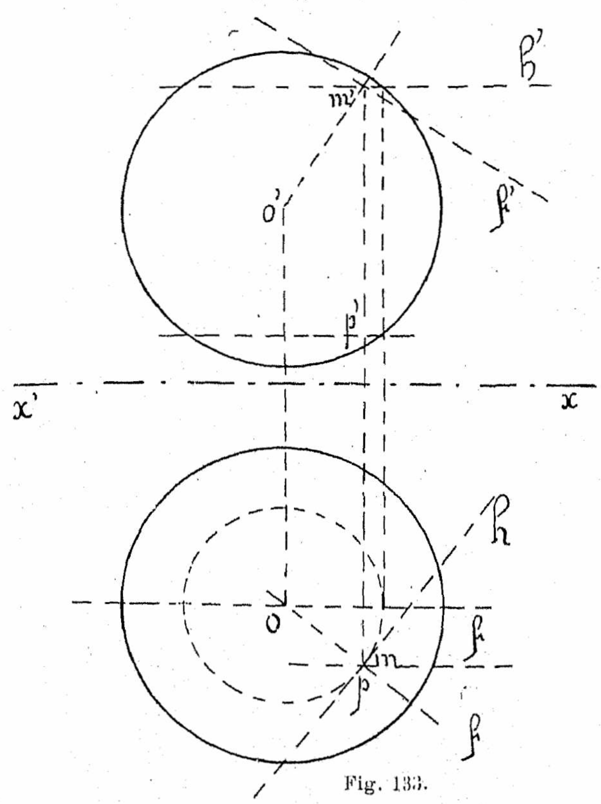


Fig. 133.

D'autre part, le procédé indiqué pour mener des plans tangents par une droite à une surface de révolution du 2e degré s'applique très facilement à une sphère.

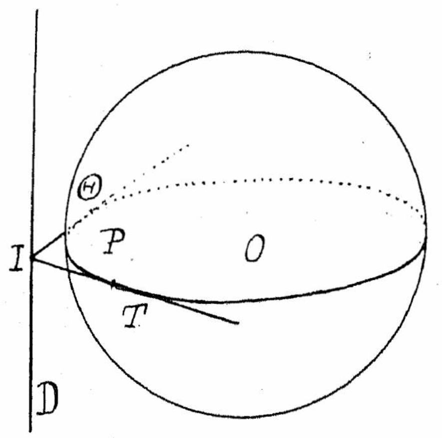


Fig. 134.

On peut cependant donner une seconde solution de ce même problème. Soit D la droite d'où l'on veut mener des plans tangents à la sphère de centre O (fig. 134).

De O on abaisse un plan P perpendiculaire sur D, qui coupe D en I et la sphère suivant le grand cercle C, on mène de I les tangentes IT, IΘ au grand

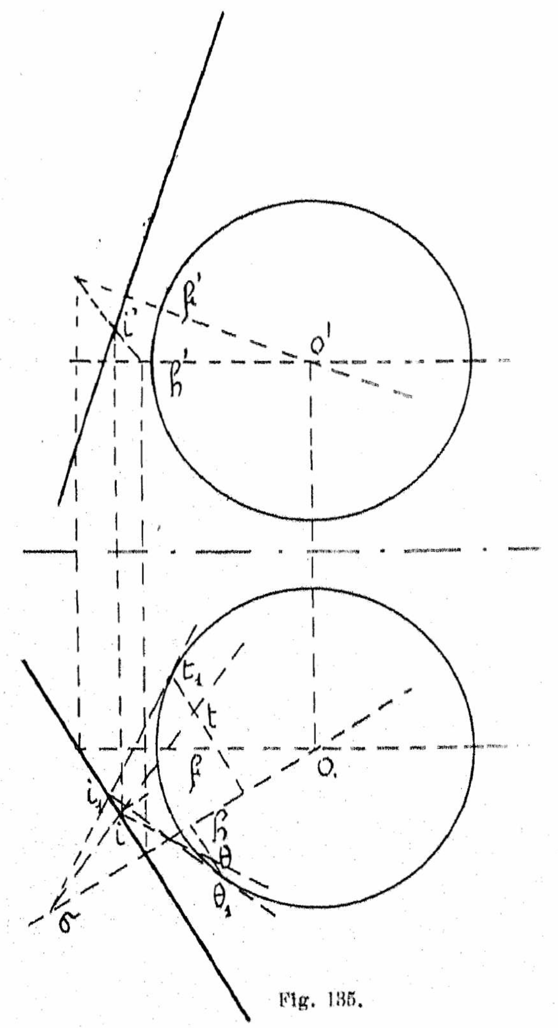


Fig. 135.

cercle C ; les points de contact T et Θ de ces tangentes sont les points de contact des plans tangents cherchés.

Sur l'épure (fig. 135) le plan P est déterminé par

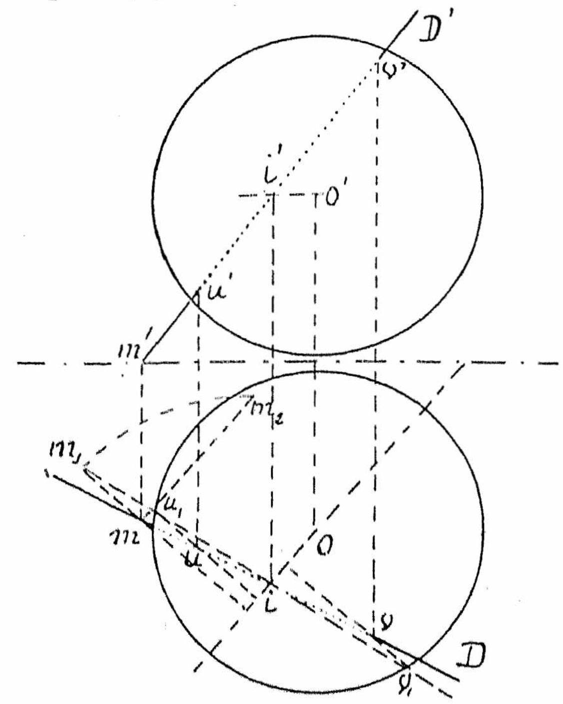


Fig. 136.

son horizontale OH et sa frontale OF. Pour mener de I des tangentes, on a rabattu le plan P sur le plan

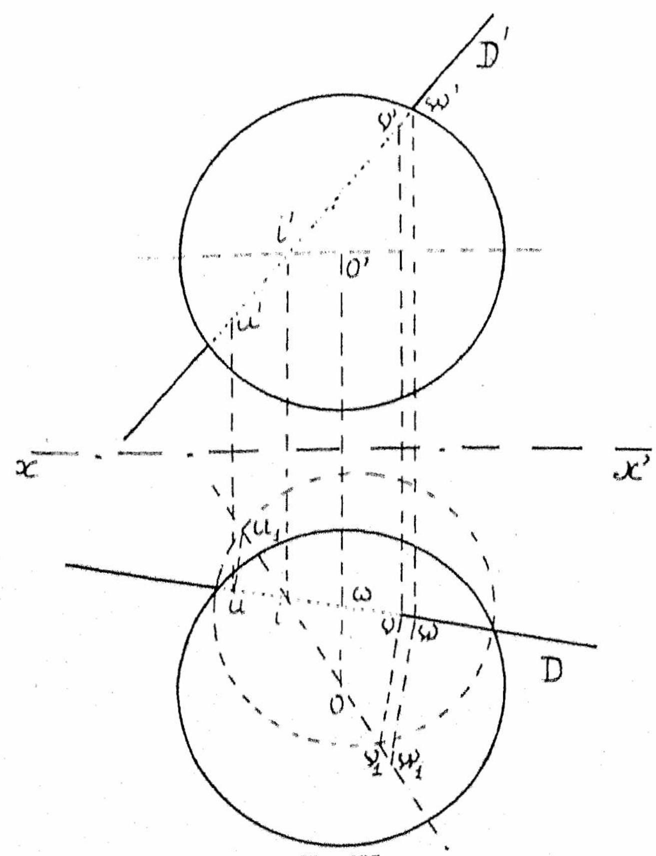


Fig. 137.

horizontal de O autour de OH. I est venu en I_1 et C s'est rabattu suivant le grand cercle de contour apparent horizontal, les points T et θ sont alors rabattus en T_1 et θ_1.

Intersection avec une droite. — La méthode donnée dans la section précédente pour une surface du 2ᵉ degré quelconque est naturellement encore applicable.

On peut en donner deux autres un peu plus simples et déjà connues, qui consistent à prendre comme plan auxiliaire un des plans projetants la droite ou le plan diamétral de la droite, et à rechercher en rabattement les points communs à la droite et au cercle de section de la sphère par le plan auxiliaire (fig. 136 et fig. 137).

Sections planes. — Les sections par des plans diamétraux sont des grands cercles de la sphère qui se projettent sur les deux plans de projection suivant les ellipses dont le grand axe est le diamètre ou horizontal ou frontal du plan sécant. Quant au petit axe, c'est la projection sous l'angle du plan sécant avec le plan horizontal du diamètre perpendiculaire au précédent.

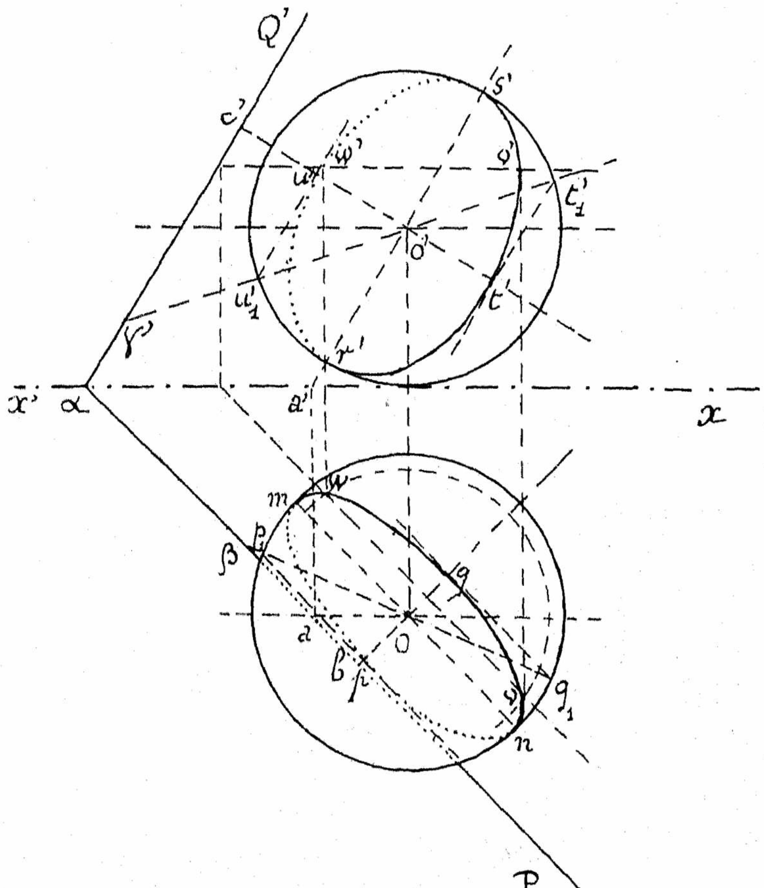


Fig. 138.

Un point courant et la tangente en ce point peuvent être obtenus à la façon ordinaire, en coupant, par exemple, par un plan horizontal (fig. 138).

Une section par un plan non diamétral est un petit cercle. On détermine les deux projections de ce petit cercle par leurs axes en utilisant un mur auxiliaire soit vertical, soit de bout perpendiculaire dans les deux cas au plan sécant (fig. 139).

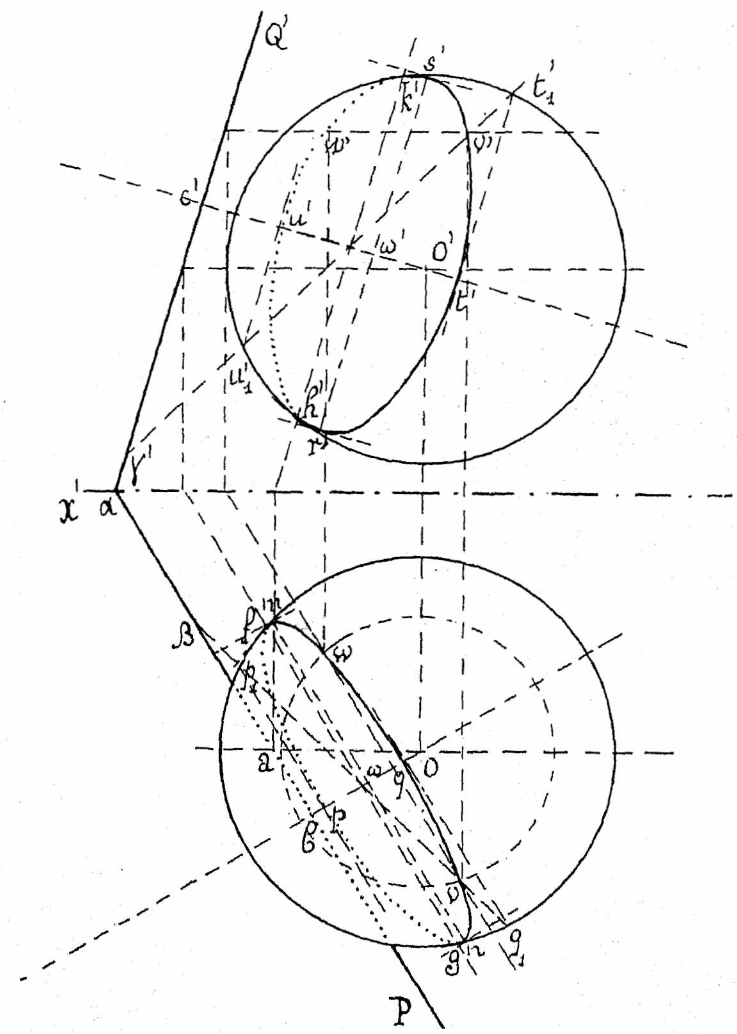


Fig. 139.

INTERSECTION DE SPHÈRES

Deux sphères. — Deux sphères se coupent suivant un cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres. En utilisant un mur auxiliaire vertical, par exemple, passant par la ligne des centres, le cercle commun est projeté sur ce mur suivant une droite, corde commune des deux contours apparents et on est ramené immédiatement à la recherche d'une section plane d'une sphère par un plan de bout (fig. 140).

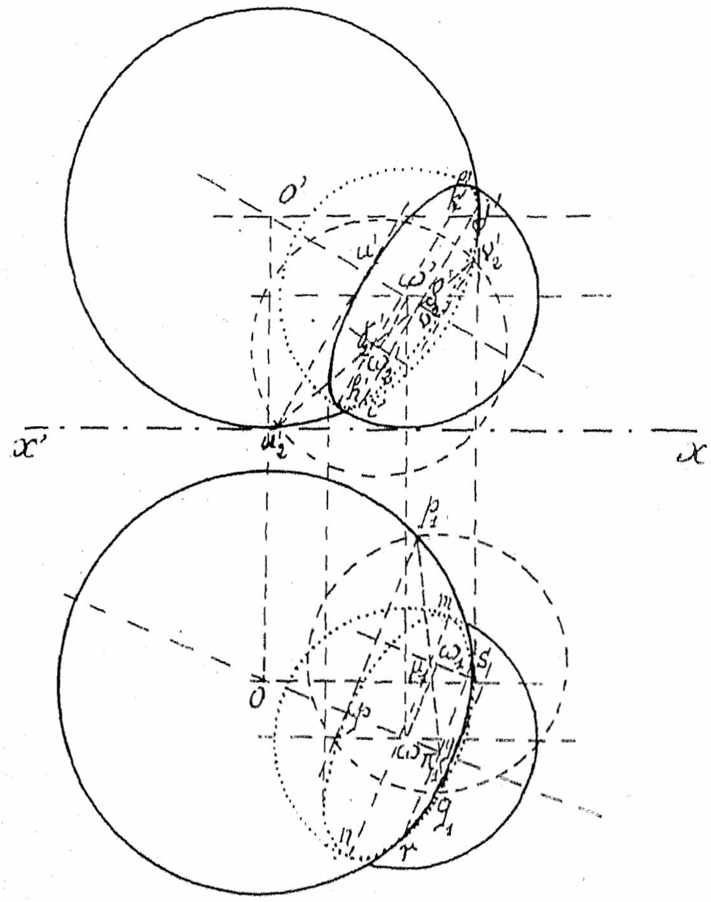


Fig. 140.

Trois sphères. — Trois sphères peuvent se couper en deux points symétriques, par rapport au plan des trois centres. Pour déterminer ces deux points, on rabat le plan des centres sur un plan horizontal et on prend alors le centre radical des trois contours apparents. Ce centre est la projection de la corde (alors verticale) commune aux trois sphères : on en détermine la longueur par un deuxième rabattement dans une des sphères et on relève ensuite les extrémités de la corde au moyen d'un *relèvement généralisé*, le plan des centres entraînant dans son mouvement de relèvement inverse de celui de rabattement la corde commune en question.

APPLICATIONS. — OMBRES PROPRES PROJECTIONS STÉRÉOGRAPHIQUES

Ombres propres. — L'ombre propre d'une sphère a pour séparatrice un grand cercle quand la lumière est à rayons parallèles (ombre au soleil). Le plan diamétral de ce grand cercle est perpendiculaire aux rayons lumineux Δ. La recherche de la séparatrice est donc

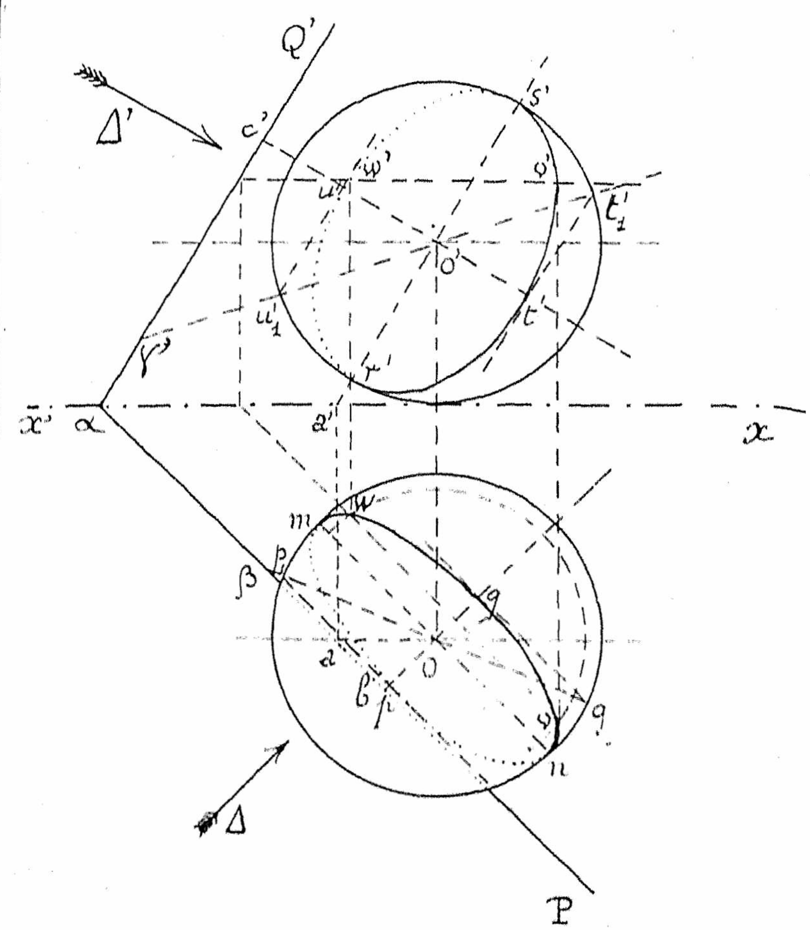


Fig. 141.

ramenée à celle d'une section plane diamétrale (fig. 141).

Au contraire, quand les rayons lumineux sont convergents à partir d'un point S (ombre au flambeau) la séparatrice d'ombre propre est un petit cercle dont le plan est perpendiculaire au rayon SO. Ce plan (qui est le plan polaire du point S) coupe SO en un point H conjugué harmonique de S par rapport au diamètre AB passant en O, ce cercle est la courbe de contact du cône des rayons tangents à la sphère issus de la source lumineuse S. Son plan étant déterminé comme nous venons de l'indiquer la recherche de la séparatrice est ramenée à celle d'une section par un plan non diamétral (fig. 142).

Les ombres portées d'une sphère sur les deux plans de projection sont étudiées à l'occasion des sections planes des cônes de révolution.

Projections stéréographiques. — Considérons une sphère de centre O, de rayon R, un point A de cette sphère, A′ son diamétralement opposé et le plan diamétral P perpendiculaire à AA′. Tout point M de la sphère doit avoir à partir du point A comme point de vue, sur le plan P une perspective m. Les perspectives des points situés

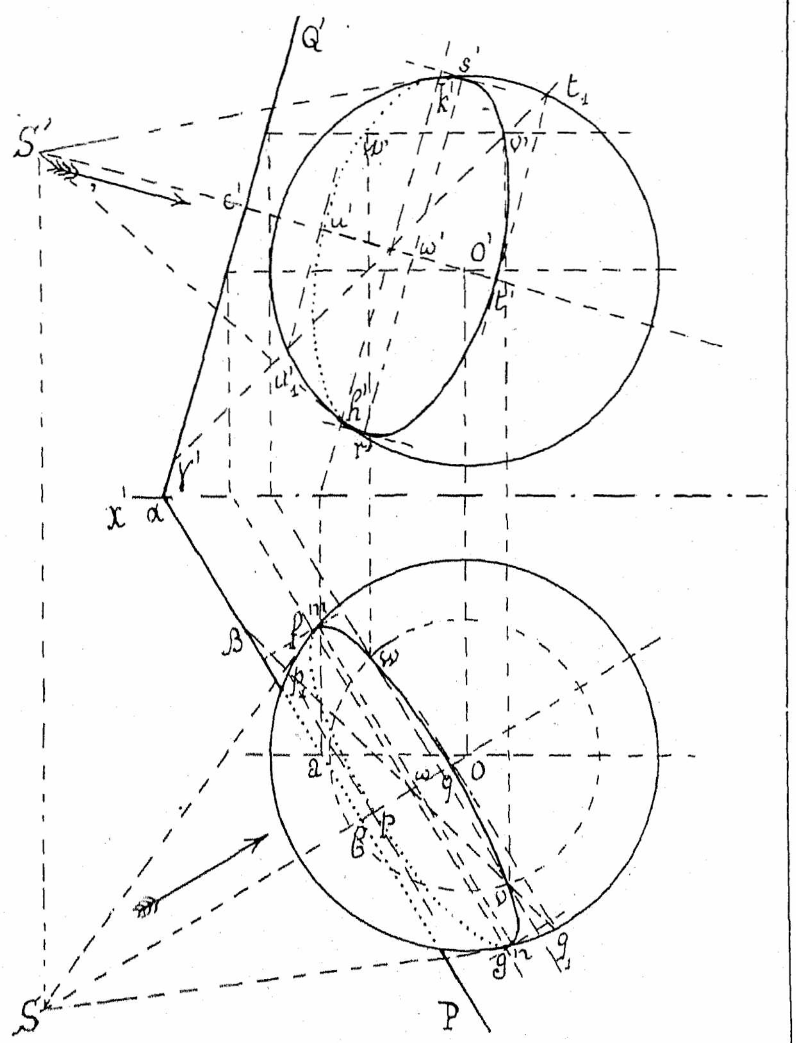


Fig. 142.

dans l'hémisphère où est A sont extérieures à la sphère, au contraire, celles des points de l'hémisphère où est A′ sont intérieures à la sphère. Le point m est dit la *projection stéréographique* du point M par rapport à la sphère O et au point A. Remarquons de suite que la perspective aurait pu être établie sur un plan parallèle à P au lieu de l'être sur P lui-même.

Les deux triangles semblables AmO et AMA′ (fig. 143) donnent de suite la relation

$$Am \,.\, AM = AO \times AA' = 2R^2.$$

Quel que soit M, le produit AM × Am est donc constant ; la projection stéréographique n'est donc qu'une *inversion* de pôle A et de puissance $2R^2$ dans le cas où le tableau est le plan P. Il résulte alors des propriétés fondamentales de l'inversion que deux courbes tracées sur la sphère auront pour projections stéréographiques sur le plan P deux courbes planes *se coupant sous le même angle* que les deux courbes sphériques. *Tout cercle tracé sur la sphère sera transformé en un cercle du plan* P,

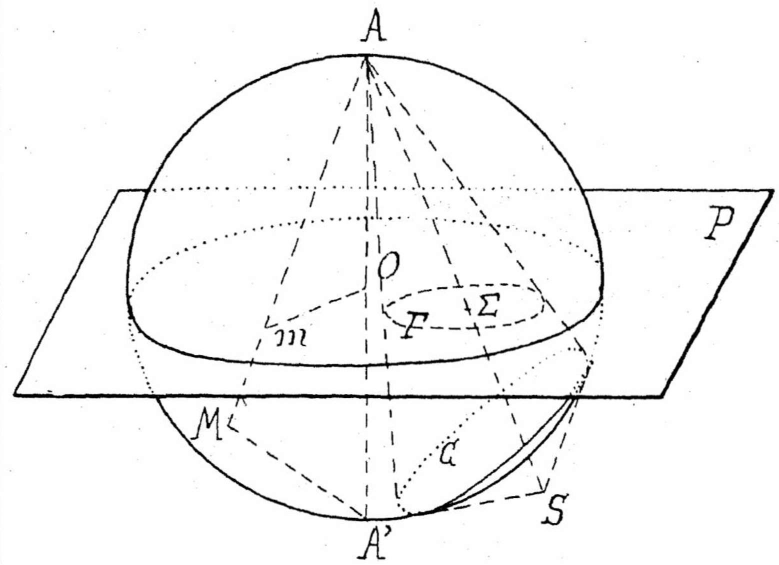


Fig. 143.

puisque l'inverse de la sphère O est le plan P et que l'inverse du plan sécant sera une sphère passant en A. On démontre que le centre Σ du cercle T transformé du cercle C est la trace sur le plan P de la droite joignant A au sommet du cône circonscrit à la sphère O le long du cercle C.

En particulier deux cercles orthogonaux sont transformés en deux cercles orthogonaux. On se sert de ces propriétés pour établir le *canevas* de certaines cartes géographiques. Les méridiens de la sphère terrestre sont des grands cercles qui passent par deux points fixes, les pôles ; les parallèles sont des cercles orthogonaux aux précédents ; en faisant une projection stéréographique d'une hémisphère terrestre par rapport à celui de ses pôles qui n'est pas dans cette hémisphère on obtient (*si le pôle de la projection n'est pas un pôle terrestre*) *deux réseaux de cercles conjugués* comme transformées des méridiens et des parallèles ; c'est le canevas cherché de la carte qu'on veut établir.

Si on prend pour pôle d'inversion un des pôles terrestres, on pourra représenter soit l'hémisphère austral, soit l'hémisphère boréal tout entiers et dans ce cas les transformées des méridiens sont des rayons convergents et celles des parallèles des cercles concentriques dont le centre commun est le point commun des rayons méridiens. On peut voir dans l'Atlas Schrader (Hachette et Cie) des exemples de projections stéréographiques appliquées à la représentation des sphères céleste et terrestre.

CHAPITRE II

CÔNE ET CYLINDRE DE RÉVOLUTION

I. — GÉNÉRALITÉS

Le cône et le cylindre de révolution ont pour méridienne deux droites concourantes sur l'axe qui est leur bissectrice pour le cône, parallèles à l'axe et équidistantes de lui pour le cylindre. Ces surfaces sont entièrement déterminées quand on donne, pour le cône : l'axe, le sommet et l'angle au sommet ; pour le cylindre : l'axe et le rayon.

Il existe naturellement, comme dans toute surface de révolution une infinité de sphères inscrites dans un cylindre ou un cône de révolution : une de ces sphères et la direction des génératrices suffisent à déterminer le cylindre qui est alors dit *circonscrit à la sphère ;* une de ces sphères et le sommet suffisent à déterminer le cône qui est alors dit *circonscrit à la sphère.* Les sphères inscrites dans les cônes ou cylindres de révolution jouent un rôle très important dans l'étude de ces surfaces : elles sont utilisées pour résoudre un grand nombre de problèmes sur ces surfaces.

PROBLÈMES SUR LES CONES ET CYLINDRES CIRCONSCRITS A UNE SPHÈRE

PROBLÈME I. — *Déterminer les contours apparents d'un cylindre dont on donne l'axe et le rayon R.*

Il suffit (fig. 144) de tracer la sphère de rayon R dont le centre est un point O de l'axe et de mener aux contours apparents de cette sphère, tant en plan qu'en élévation des tangentes parallèles aux projections de même nom de l'axe.

PROBLÈME II. — *Déterminer les contours apparents d'un cône dont on donne l'axe, le sommet et l'angle au sommet α.*

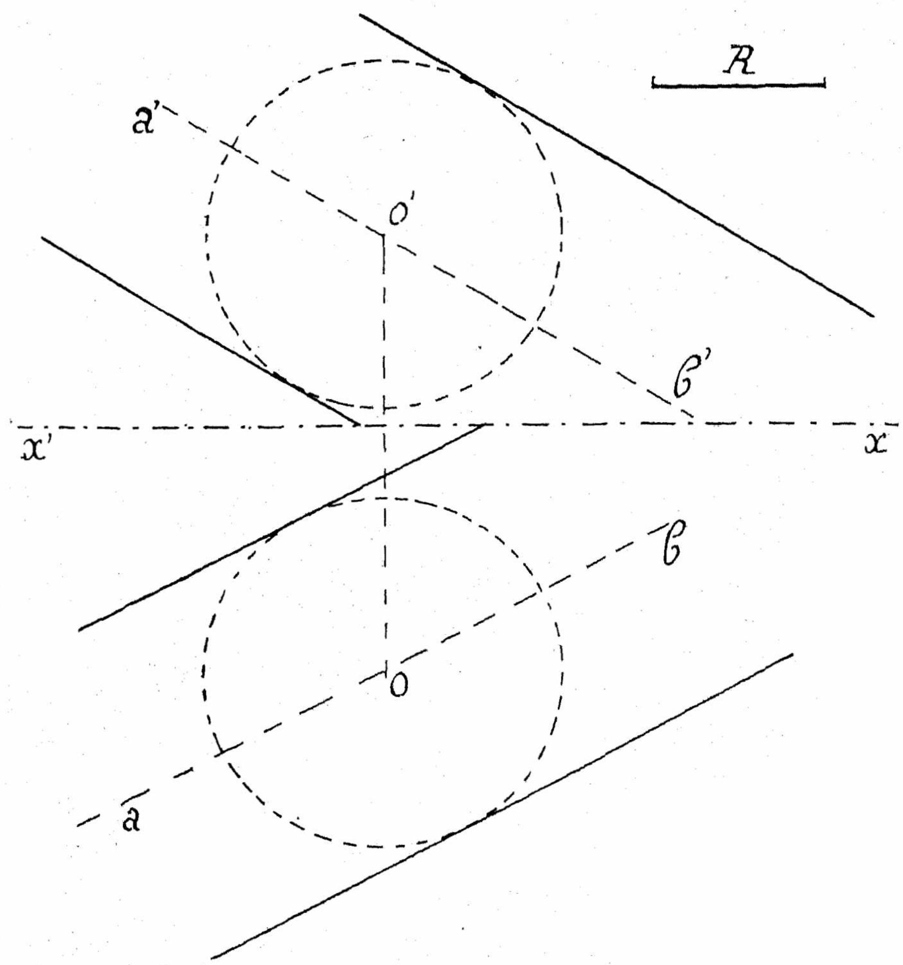


Fig. 144.

On cherche une des sphères inscrites. Pour cela S étant le sommet, on prend un point O de l'axe et on construit un triangle rectangle SOM dont l'hypoténuse est SO et l'angle $\widehat{OSM}$ est égal à α. OM est égal au rayon de la sphère inscrite de centre O. Sur l'épure (fig. 145), on a rabattu sur le plan horizontal du point O le plan projetant en plan SO pour avoir la distance de S à O, le triangle SOM est en S_1 om_1 et la sphère

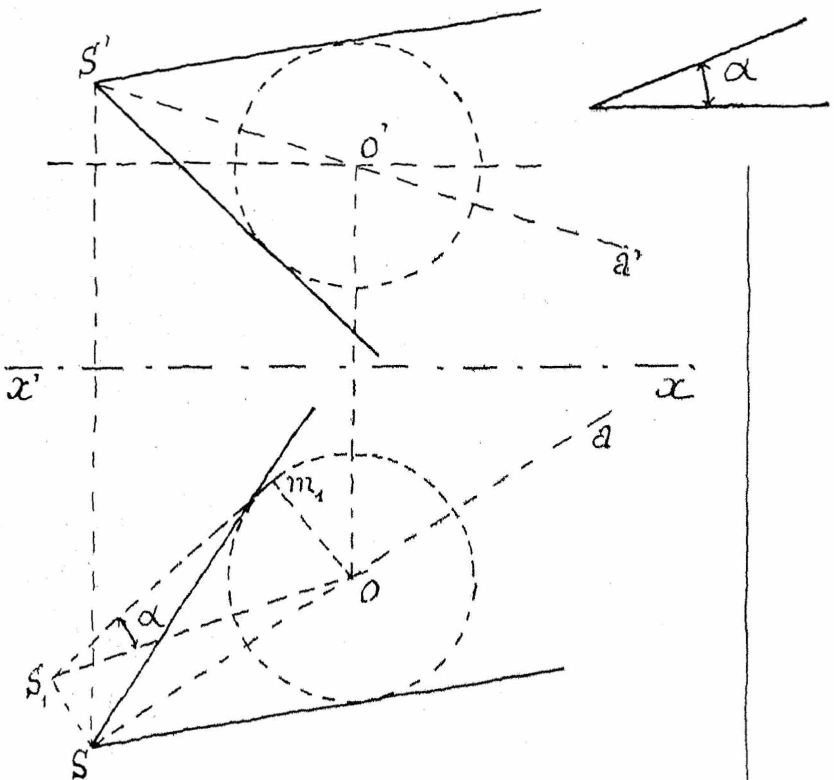


Fig. 145.

inscrite a pour rayon om_1. Des tangentes menées de s et s' aux contours apparents de cette sphère donnent les contours apparents cherchés du cône.

PROBLÈME III. — *Un cône (ou un cylindre) étant déterminé par une sphère inscrite et le sommet (ou la direction des génératrices) déterminer la deuxième projection d'un point de cette surface connaissant une de ses projections ; tracer le plan tangent en ce point.*

Soient donnés la sphère inscrite O de rayon R, le sommet S et la projection horizontale m du point M cherché (fig. 146), considérons le plan vertical sm; il coupe la sphère suivant un petit cercle (c) ; menons de S des tangentes à ce petit cercle, ce seront des génératrices du cône qui couperont la verticale de m aux points M_1 et M_2 cherchés. Les plans tangents sont déterminés par les génératrices SM_1, SM_2 et les tangentes $\mu_1 t_1$, $\mu_2 t_2$ au cercle de contact.

Sur l'épure (fig. 146 *bis*), cherchons les projections verticales des points projetés en m d'un cône de sommet (S, S') circonscrit à la sphère O, O'. Pour cela coupons par le plan vertical sur la sphère, on aura un cercle de centre (ω, ω') rabattu sur le plan horizontal du centre O' suivant le cercle de diamètre ij. S est rabattu en S_1 sur le même plan, menons de S_1 les tangentes au cercle de section rabattu, soit $s_1 t_1$ et $s_1 u_1$ ces tangentes coupent la charnière ij en α et β relevés en α' et β^1, elles ont donc pour projections verticales $S'\alpha'$ et $S'\beta'$, ces nouvelles

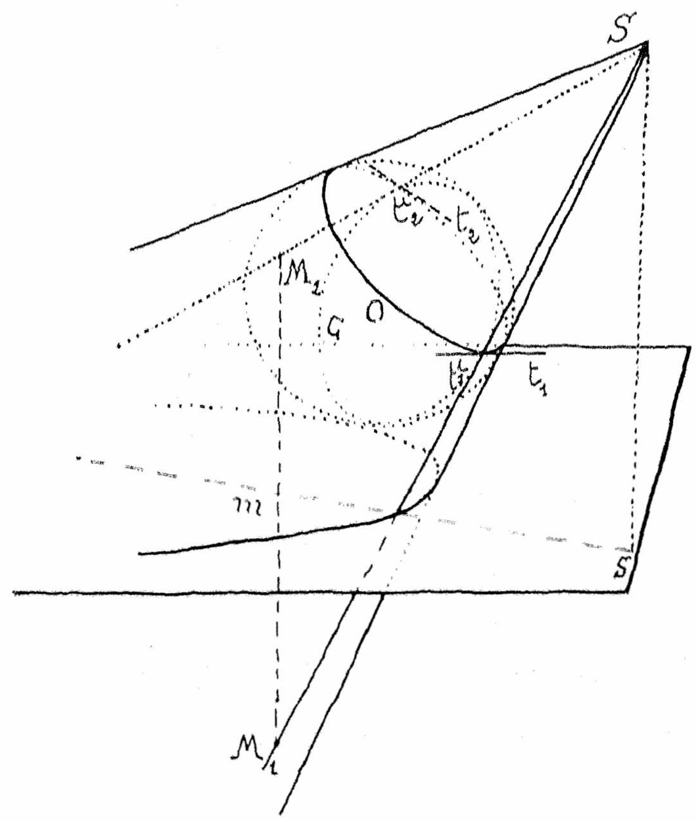


Fig. 146.

droites coupent la verticale du point m aux points m'_1 et m'_2 cherchés.

Raisonnement analogue et mêmes constructions dans le cas du cylindre (fig. 147).

PROBLÈME IV. — *Un cône (ou un cylindre) étant déterminé par une sphère inscrite et le sommet (ou la direction des génératrices) mener à cette surface un plan tangent par un point ou parallèle à une droite donnée. (Ombres propres au flambeau ou au soleil.)*

On trace la droite qui passe par le sommet du cône et le point donné ou la droite menée par le sommet du cône parallèlement à la direction donnée, et on mène à la sphère inscrite des plans tangents par la droite obtenue, ce sont les plans tangents cherchés (fig. 148).

Sur l'épure (fig. 148 *bis*), pour mener par le point $(a,\ a')$ (ou parallèlement à $\delta,\ \delta'$) des plans tangents au cône de sommet (S, S') circonscrit à la sphère (O, O')

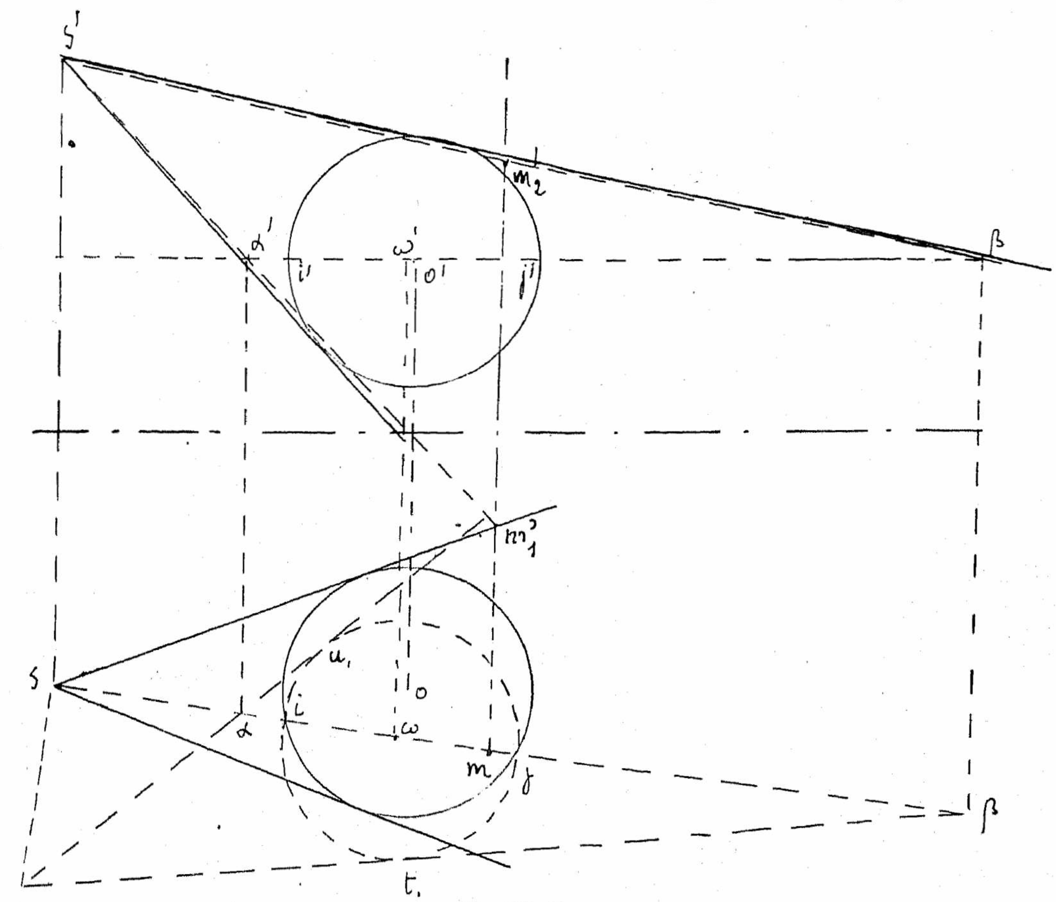


Fig. 146 *bis*.

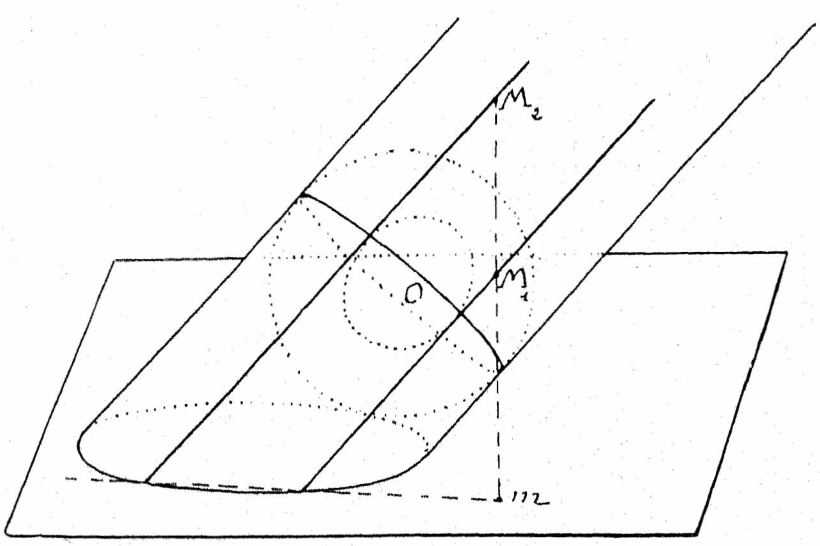


Fig. 147.

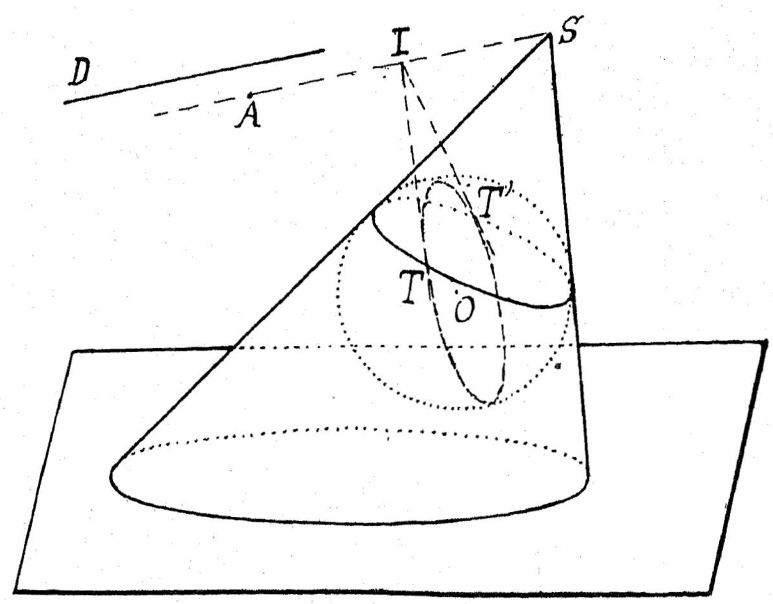


Fig. 148.

on a mené par (O, O') le plan (OKL, O'K'L') perpendiculaire sur la droite $(Sa,\ S'a')$ (ou sur la droite $\delta\delta'$) puis on a pris la rencontre $(i,\ i')$ de ce plan avec cette même droite, on a ensuite rabattu ce plan sur le plan horizontal du centre O', i est venu en i_1 et la section de la sphère par ce plan est devenue le contour apparent horizontal. De i_1 on a donc mené des tangentes i_1p_1 et i_1q_1 à ce cercle rabattu, les points de contact p_1 et q_1 relevés en (p, p')

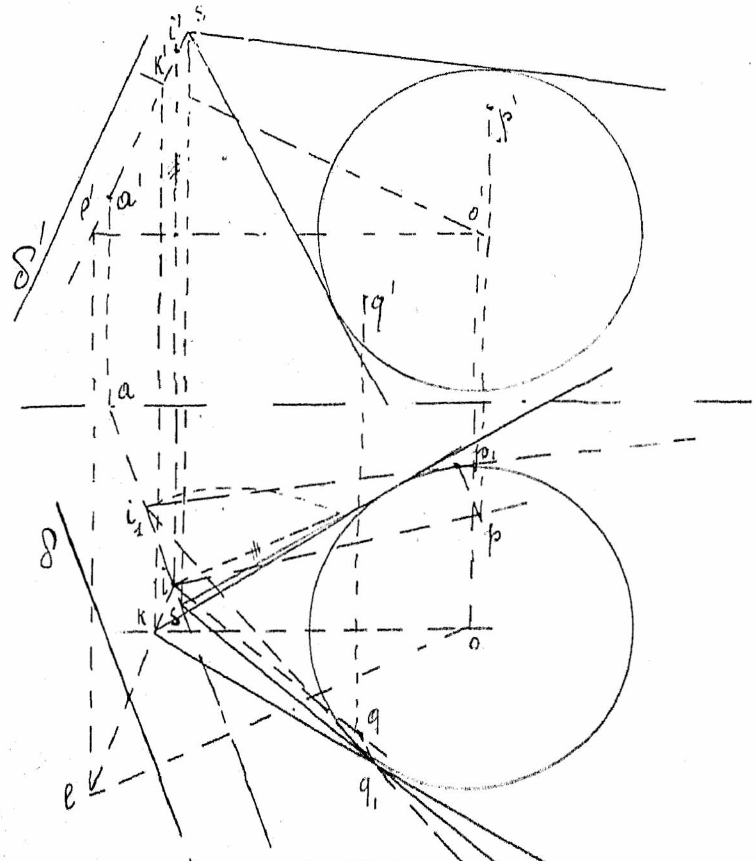


Fig. 148 *bis*.

(q, q') sont les points de contact des plans tangents cherchés qui sont donc alors bien déterminés par $(sa, s'a')$ ou $(\delta\delta')$ et par (p, p') d'une part, (q, q') d'autre part.

De même si on a affaire à un cylindre, on mène par

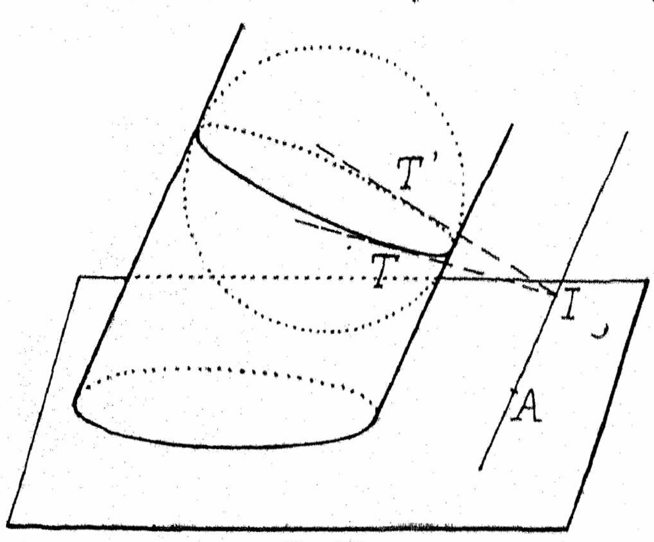


Fig. 149.

le point donné une droite parallèle aux génératrices et par cette droite des plans tangents à la sphère inscrite (fig. 149), ou bien on détermine la direction de plan parallèle à la fois à la direction de droite donnée et aux génératrices du cylindre et on mène à la sphère ins-

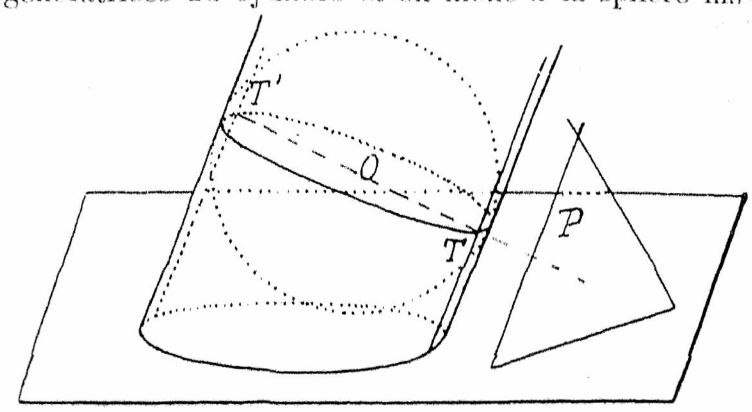


Fig. 150.

crite des plans tangents parallèles à cette direction de plan (fig. 150).

Sur l'épure (fig. 150 *bis*), menons au cylindre de direction de génératrices $(ab, a'b')$ circonscrit à la sphère

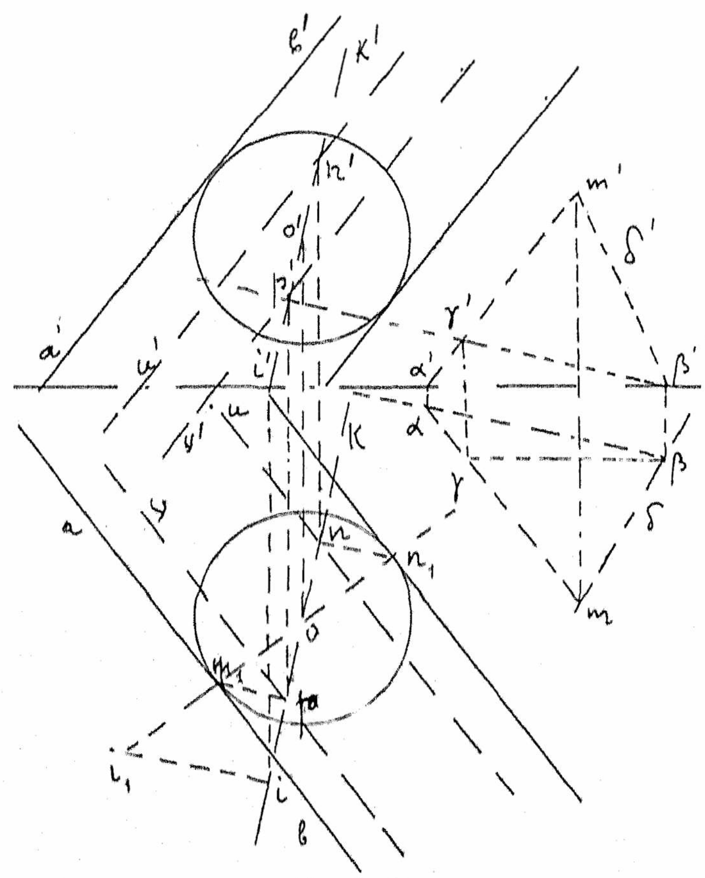


Fig. 150 *bis*.

(O, O') des plans tangents parallèles à (δ, δ'). Pour cela par un point (m, m') quelconque de (δ, δ') menons une parallèle aux génératrices, on forme un plan dont l'horizontale est ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) et la frontale ($\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$). La perpendiculaire à ce plan par (O, O′) est donc (OK, O′K′). Cette droite est rabattue sur le plan horizontal du centre O′ en Oi_1 elle coupe donc la sphère en deux points p_1 et n_1 relevés en (p, p') et (n, n'). Si on mène par ces points les génératrices (nu, $n'u'$) (pv, $p'v'$) du cylindre, on a les génératrices de contact des plans tangents cherchés.

Remarque. — En menant par les points de contact des plans tangents trouvés les génératrices du cône ou du cylindre, on a les séparatrices d'ombres propres sur ces surfaces.

PROBLÈME V. — *Un cône (ou un cylindre) étant déterminé par une sphère inscrite et le sommet (ou la direction des génératrices) trouver les points communs à cette surface et à une droite donnée* D.

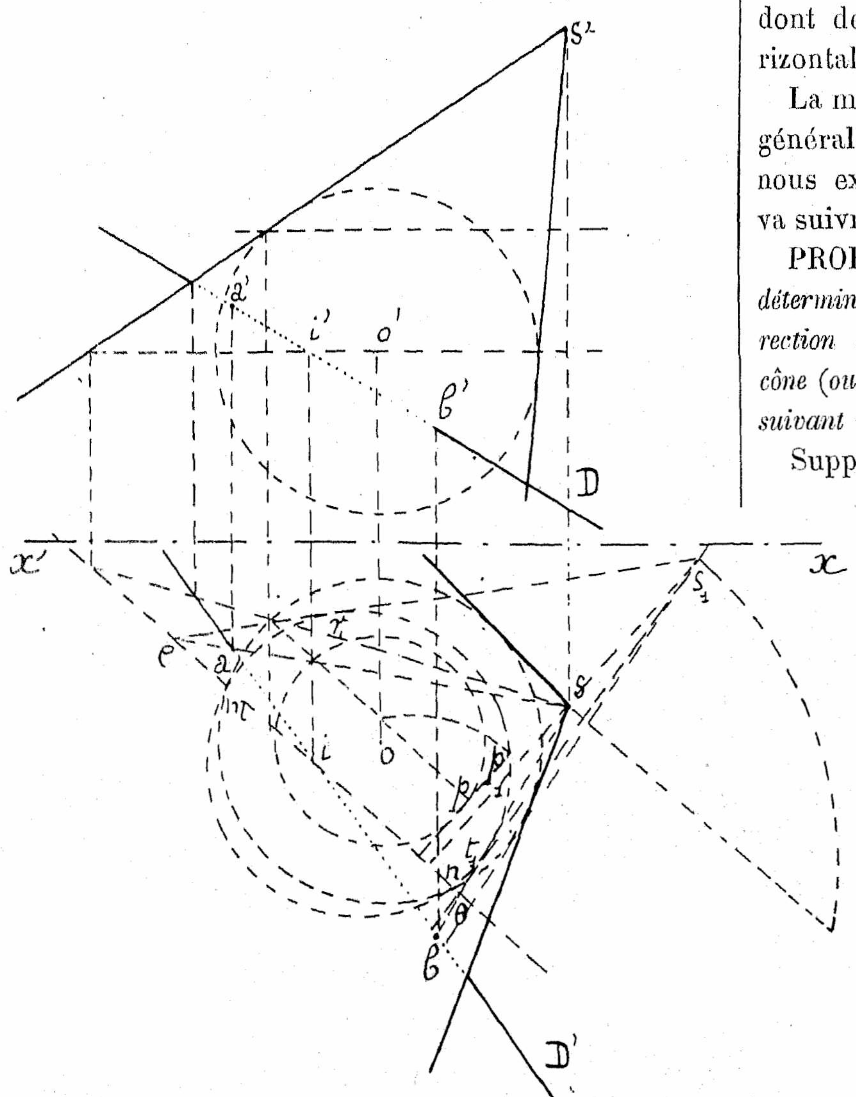


Fig. 151.

On considère le plan P qui passe par D et le sommet du cône (ou qui passe par D et est parallèle aux génératrices du cylindre) ce plan P coupe la sphère suivant un cercle (C) auquel on mène de S (ou parallèlement aux génératrices du cylindre) des tangentes, ces tangentes sont des génératrices du cône (ou du cylindre) qui coupent la droite D aux deux points A et B cherchés. Sur l'épure (fig. 151), on a tracé le cercle C en rabattement, ainsi que les tangentes issues du sommet du cône rabattu en S_1, ces tangentes $S_1 t_1 \theta$, $S_1 r_1 \rho$ ont été relevées en $S\theta$ et $S\rho$ et les points cherchés sont sur D et $S\theta$ et $S\rho$ en (a, a') (b, b') ; le rabattement du cercle C a été obtenu par le rabattement de 3 points, dont deux m et n sont sur le contour apparent horizontal.

La méthode est assez longue à appliquer dans le cas général et on lui préfère souvent une méthode que nous exposerons comme application du problème qui va suivre.

PROBLÈME VI. — *Un cône (ou un cylindre) étant déterminé par une sphère inscrite et le sommet (ou la direction des génératrices) déterminer une base plane de ce cône (ou cylindre) projetée sur un des plans de projection suivant un cercle.*

Supposons avoir affaire à un cône circonscrit à la sphère O et de sommet S et cherchons une base qui se projette en plan suivant un cercle. Pour cela rappelons-nous d'abord que 2 surfaces du 2e degré circonscrites à une même troisième se coupent suivant deux courbes planes ; prenons alors un cylindre à génératrices verticales circonscrit à la sphère O, ce cylindre coupera le cône S suivant deux coniques projetées toutes deux horizontalement suivant le cercle de base du cylindre : ces deux coniques répondent l'une et l'autre à la question (fig. 152).

Raisonnement et résultats analogues dans le cas d'un cylindre.

APPLICATION IMPORTANTE DU PROBLÈME VI

Tout cône ou cylindre de révolution peut donc être considéré comme un cône quelconque à base plane projetée suivant un cercle. Cette façon nouvelle d'envisager ces surfaces permet de résoudre autrement que

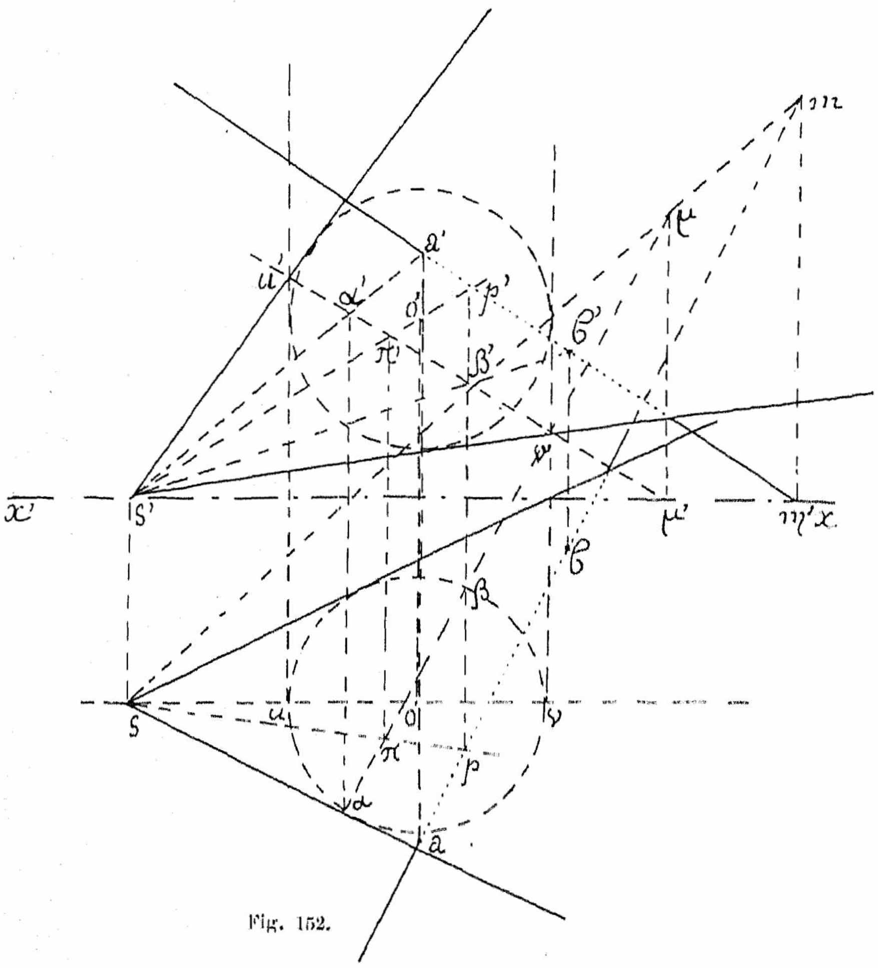


Fig. 152.

nous ne l'avons déjà fait les problèmes de plans tangents et plus particulièrement le problème V d'intersection d'un cône ou d'un cylindre de révolution avec une droite ; il suffit si la base est un cercle en plan, de projeter coniquement la droite donnée D sur le plan de la base choisie à partir du sommet S et de prendre, en plan, l'intersection de cette projection avec le cercle de base ; un relèvement conique termine la question.

Cette méthode est surtout rapide quand l'axe de la surface cylindrique ou conique est de front (fig. 152).

Un changement du mur permet toujours d'ailleurs de se placer dans ce cas particulier.

SECTIONS PLANES DES CÔNES ET CYLINDRES DE RÉVOLUTION THÉORÈME DE DANDELIN

Rappelons d'abord, sans les démontrer, les propriétés des cônes et cylindres de révolution connues sous le nom de *théorème de Dandelin*.

Toute section plane d'un cône de révolution est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

C'est une ellipse (fig. 153), si le plan sécant ne coupe qu'une nappe du cône, c'est-à-dire si le plan parallèle mené par le sommet ne coupe pas le cône.

C'est une hyperbole (fig. 154) si le plan sécant coupe les deux nappes du cône, c'est-à-dire si le plan parallèle mené par le sommet coupe le cône suivant deux génératrices distinctes.

C'est une parabole (fig. 155) quand le plan sécant est parallèle à un plan tangent au cône, c'est-à-dire quand le plan parallèle

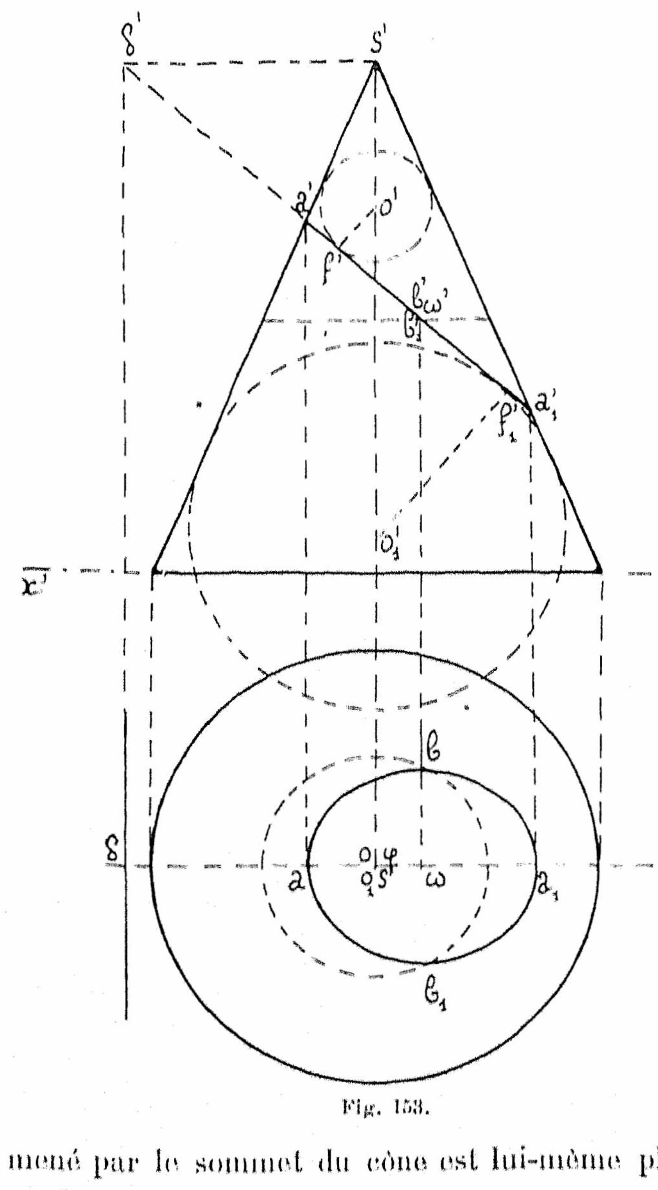


Fig. 153.

mené par le sommet du cône est lui-même plan tangent au cône.

Les *foyers* de ces coniques sont les points de contact des sphères inscrites dans le cône et tangentes au plan sécant.

Les directrices sont les intersections des plans des

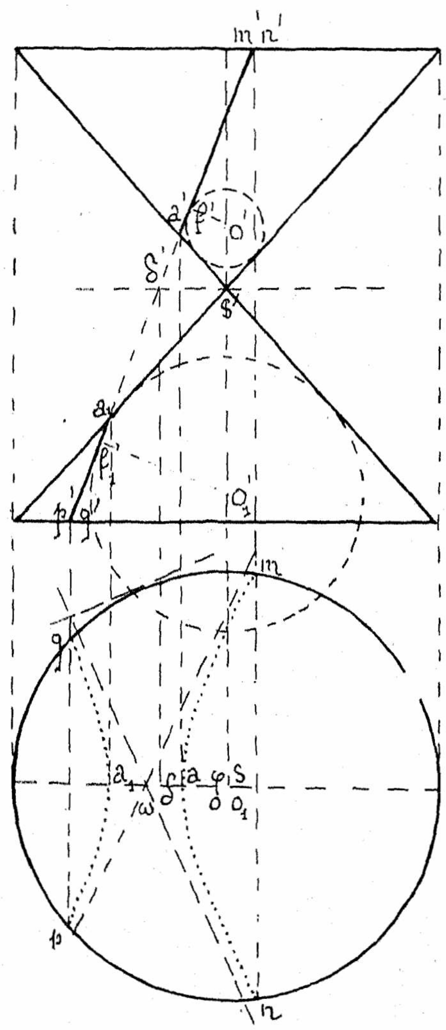


Fig. 154.

courbes de contact des sphères précédentes avec le plan sécant.

La *projection sur un plan perpendiculaire à l'axe* des sections planes est une conique dont *un foyer est au pied de l'axe* sur ce plan et dont la *directrice* correspondante est la *projection sur ce plan de l'intersection du plan sécant et du plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet du cône.*

La *réciproque* du théorème de Dandelin montre :

1° qu'on peut toujours *placer une ellipse quelconque sur un cône de révolution quelconque.*

2° Qu'on peut toujours placer une *parabole quelconque sur un cône quelconque.*

3° Qu'on peut *placer une hyperbole sur un cône de révolution à condition que l'angle des asymptotes de l'hyperbole soit inférieur à l'angle des deux génératrices méridiennes du cône.*

La *section plane d'un cylindre de révolution* est toujours une *ellipse* dont le *petit axe est égal au diamètre du cylindre.* Réciproquement on peut *placer une ellipse sur un cylindre de révolution à condition que le petit axe de l'ellipse soit égal au diamètre du cylindre.*

SECTIONS PLANES HORIZONTALES D'UN CÔNE DE RÉVOLUTION A AXE QUELCONQUE

Soit α l'angle générateur du cône et β l'angle de

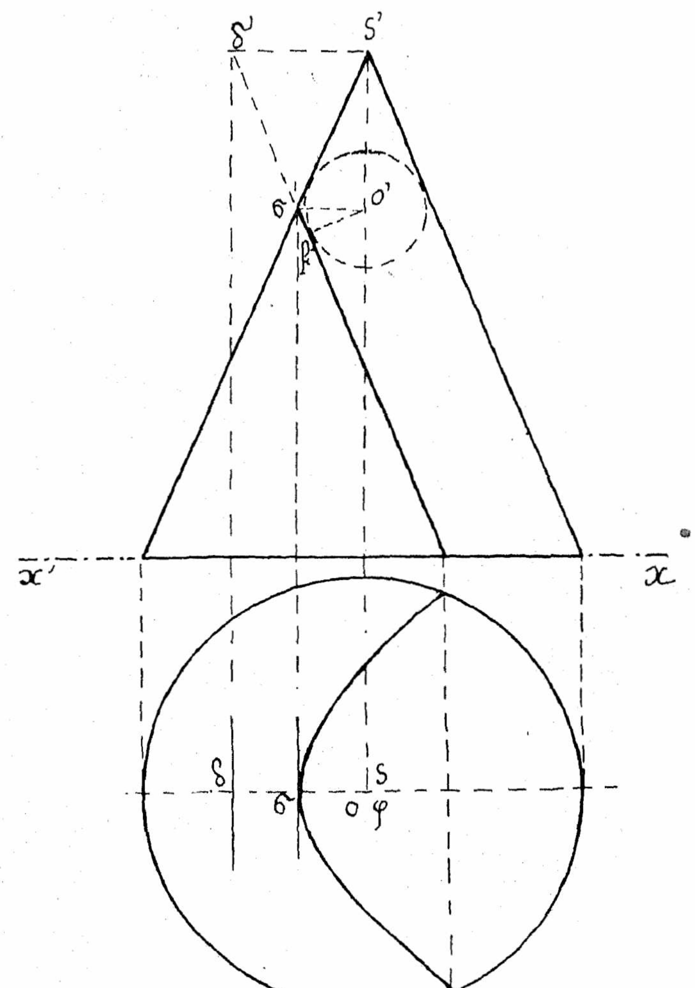


Fig. 155.

l'axe et du plan horizontal; il est évident que si α est inférieur à β le plan horizontal du sommet ne coupe pas le cône, la section est alors elliptique. Si $\alpha = \beta$ le plan horizontal du sommet est tangent au cône, la trace horizontale du cône est une parabole; enfin si α est supérieur à β le plan horizontal du sommet coupe le cône et par suite les sections horizontales sont hyperboliques dans ce cas.

On détermine la conique de section comme *enveloppe des perspectives*, faites à partir du sommet du cône, *des cercles horizontaux de la sphère inscrite*. En prenant les perspectives des points de contact des plans tangents horizontaux à la sphère inscrite on a les *foyers* de la section.

Les sommets de l'axe focal sont les points situés dans le plan de symétrie. En projetant coniquement le contour apparent horizontal de la sphère inscrite on a les points de la section sur les génératrices de contour apparent horizontal.

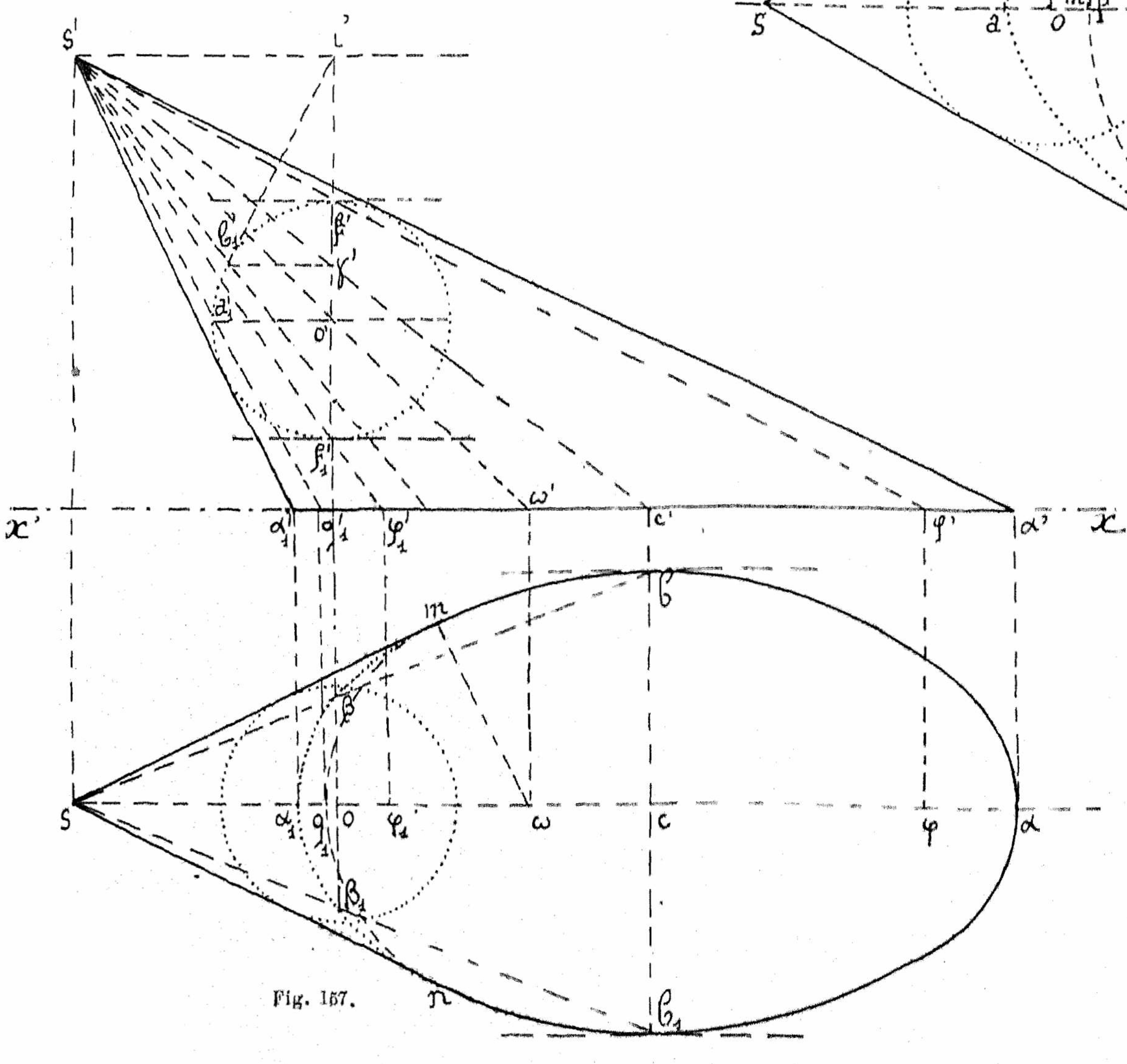


Fig. 157.

Toutes ces constructions sont applicables dans les trois cas et suffisent à tracer la courbe dans le cas de la parabole (fig. 156).

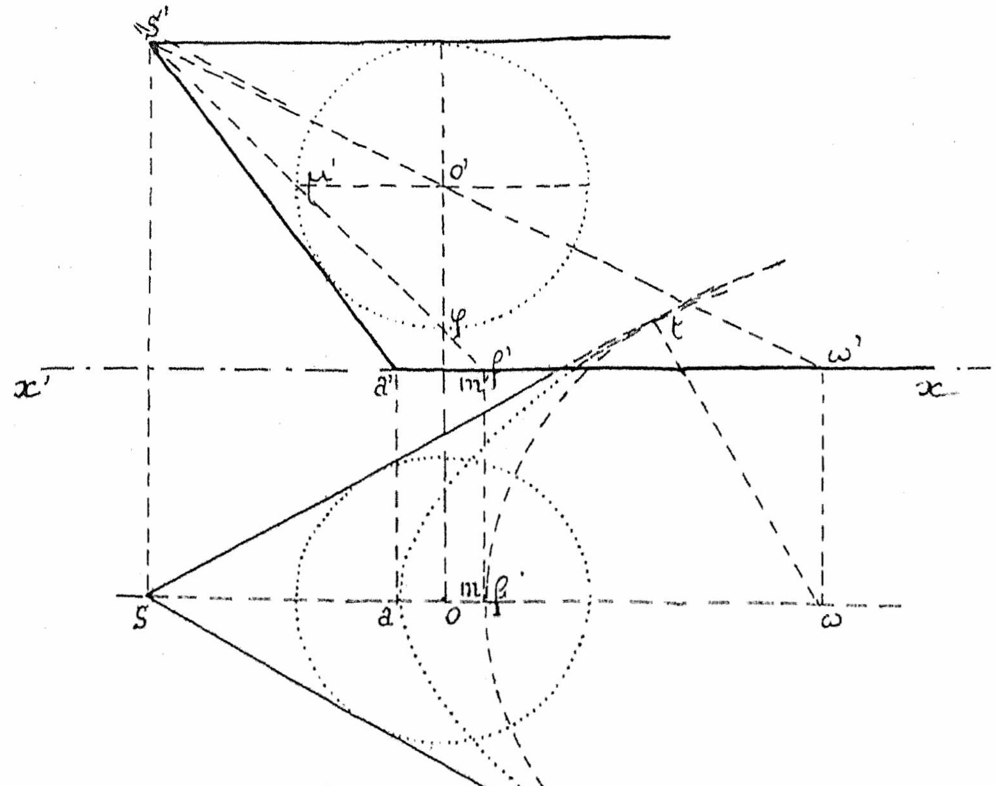


Fig. 156.

Dans le cas d'une section elliptique, on détermine les sommets du petit axe en *menant à la section des tangentes parallèles au grand axe* (fig. 157).

Dans le cas d'une section hyperbolique, on détermine les asymptotes en prenant les traces horizontales des plans tangents au cône le long des génératrices horizontales (fig. 158).

Remarquons enfin que la connaissance d'un axe et des sommets et foyers situés sur cet axe suffirait pour permettre la détermination purement géométrique des sections cherchées ; on a dans cette détermination un moyen de vérification des constructions effectuées.

Des remarques et des constructions analogues se feraient pour trouver les sections de front du même cône.

Si l'on avait affaire à un cylindre on agirait également de même en se rappelant que la section est elliptique, le petit axe étant égal au diamètre du cylindre ; la construction est alors très rapide.

Sections planes quelconques. — Le procédé le plus rapide pour déterminer les projections horizontales et verticales des coniques de section est de rechercher les asymptotes et un point dans le cas d'une section hyperbolique ; l'axe, la tangente au sommet et le foyer dans le cas d'une section parabolique, deux diamètres

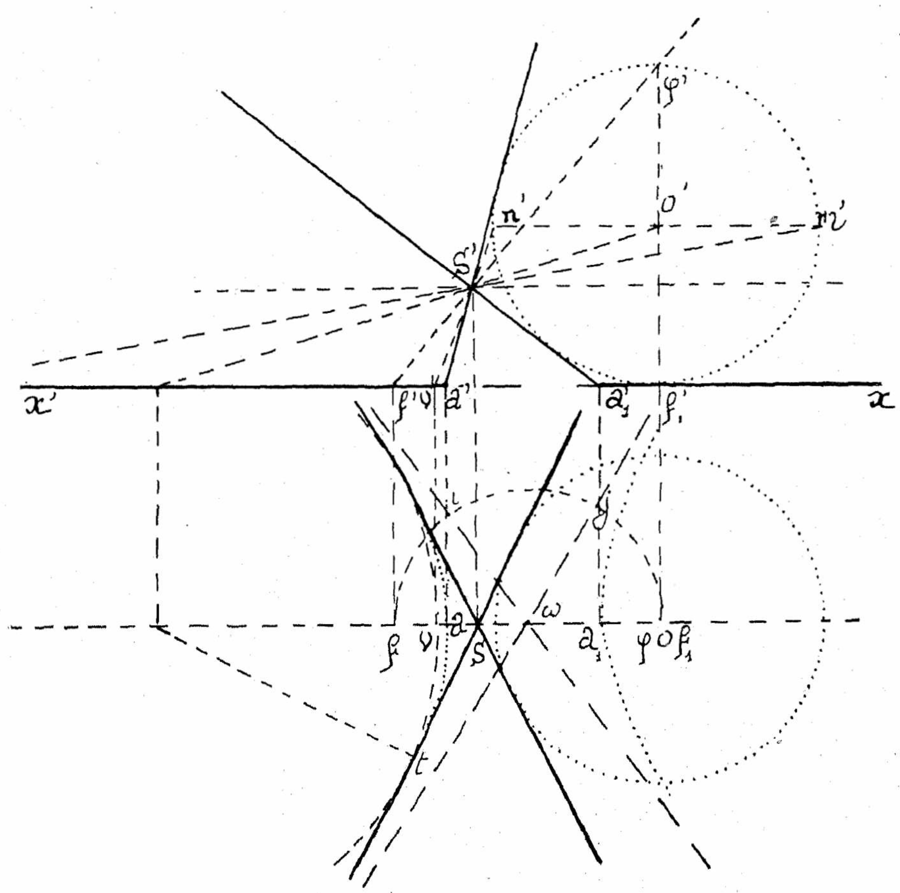


Fig. 158.

Application. — Les questions que nous avons traitées dans ces deux chapitres solutionnent entièrement les questions *d'ombres propres* et d'*ombres portées sur les plans de projection* pour les *cônes*, *cylindres de révolution* et pour la *sphère* que les rayons lumineux soient *parallèles* ou *convergents* (ombres au soleil ou au flambeau).

conjugués en grandeur et position, dans le cas d'une section elliptique. On opère dans chacun de ces cas absolument comme on a fait dans le cas d'un cône quelconque (1re partie, 4e section) *en se servant d'une base projetée circulairement* sur un des plans de projection.

PETITES ÉPURES

TEXTES

PETITE ÉPURE N° 1

(École des Beaux-Arts. Octobre 1912.)

ÉNONCÉ :

On donne un cône de révolution de sommet S ayant pour base un cercle de centre O dans le plan horizontal et de rayon 40.

Placer sur ce cône une ellipse de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$ dont le plan passe par le point M : indiquer les deux solutions.

TEXTE :

Le triangle $\alpha\beta\gamma$ donne la longueur c, distance du centre au foyer.

Plaçons d'abord l'ellipse dans un plan de bout. On sait qu'il suffit de construire le triangle $e'fg'$, où :

$$e'f' = 2c, \; f'g' = 2a \text{ et } \widehat{f'q'g'} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

α étant l'angle de génération du cône. Puis on fait glisser le côté $e'f'$ sur $e's'$ jusqu'à ce que le sommet g' vienne en $h', h'i'$ est le plan de bout en question.

Ce plan en tournant autour de $(os, o'\,s')$ enveloppe un cône de révolution de sommet tt'. Le problème revient à mener par le point (mm') des plans tangents à ce cône.

On voit que le problème admet en général deux solutions qui sont ici les plans déterminés d'une part par les droites $(m's, m's')$ $(\sigma p, \sigma' p')$ et d'autre part par les droites $(\sigma q, \sigma' q')$ $(ms, m's')$.

Si le point M est extérieur au cône T, le problème a deux solutions ; si le point M est sur le cône T, le problème a une solution double ; enfin si le point M est intérieur au cône T, il n'y a pas de solution.

PETITE ÉPURE N° 2

ÉNONCÉ :

On donne un cylindre de révolution d'axe AB, A $(-40,\ 53,\ 20)$ B $(50,\ 78,\ 95)$ et de rayon $R = 25$. 1° prendre une projection horizontale m et rechercher un point du cylindre ayant m pour projection ; 2° on donne la droite UV qui passe par le point K de l'axe AB de cote 45 et dont les deux projections sont perpendiculaires à celles des génératrices ; trouver les points communs au cylindre et à cette droite.

TEXTE :

Pour avoir les projections verticales des points du cylindre projetés en m, on coupe par le plan vertical parallèle aux génératrices et on rabat ce plan sur le plan horizontal du centre de la sphère inscrite C. La section de la sphère est rabattue suivant le cercle de centre ω_1, la direction des génératrices est rabattue suivant $m_1 z_1$; on mène alors au cercle ω_1 des tangentes parallèles à $m_1 z_1$ et la perpendiculaire menée par m à la charnière coupe ces deux tangentes (rabattements des génératrices du plan vertical rabattu) aux points m_1 et p_1 rabattements des points M et P cherchés dont on a alors immédiatement en relevant : les projections verticales.

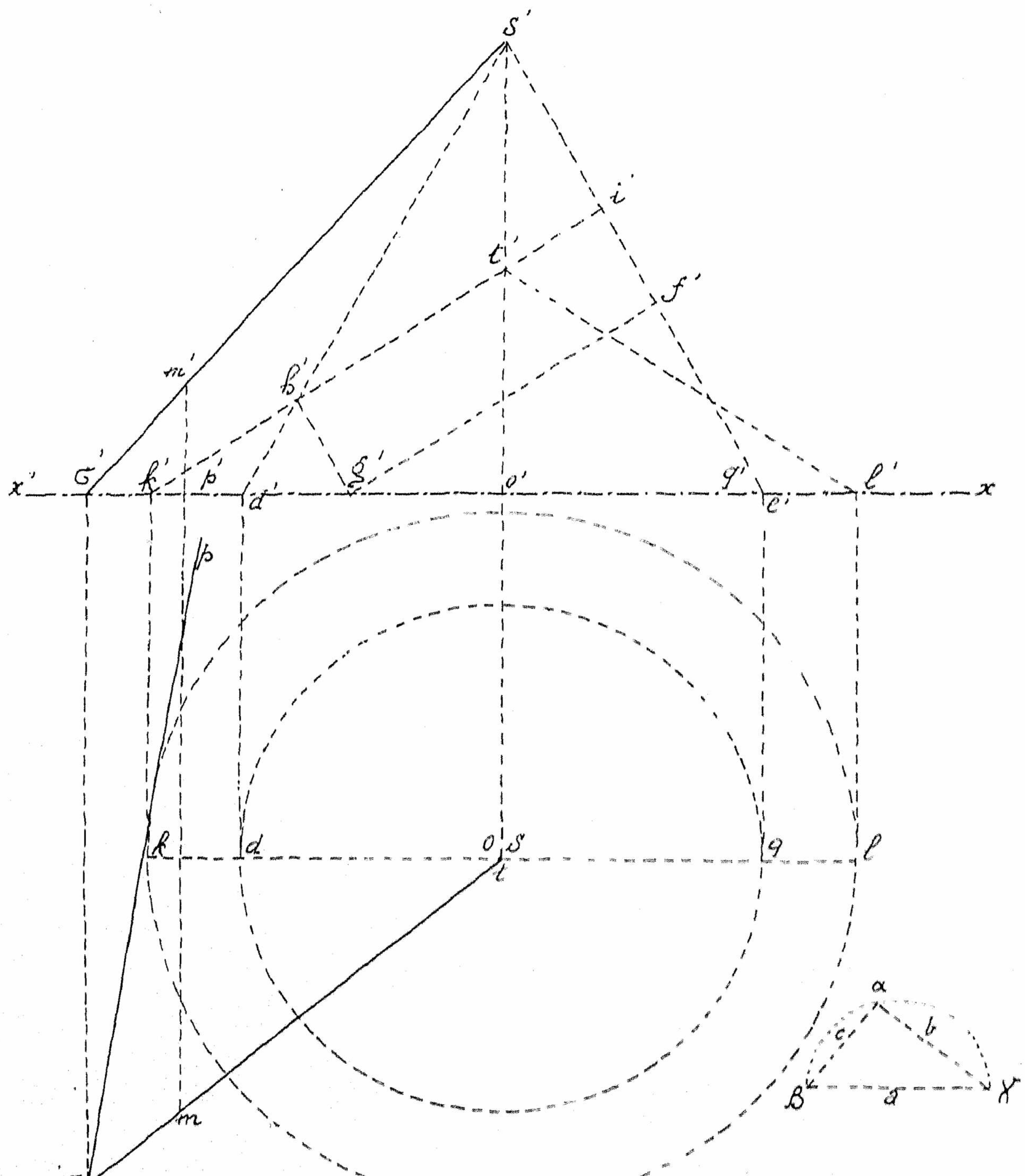


Figure petite épure n° 1.

Ici on remarque de suite que l'un des points M est sur la sphère, le plan tangent en ce point est donc le plan tangent MFH à la sphère C, l'autre point P est sur le contour apparent vertical $p'\omega'$, le plan tangent est donc de bout en P avec $p'\omega$ pour trace verticale.

Pour avoir l'intersection du cylindre et de la droite UV on a rabattu le plan UVC parallèle aux génératrices sur le plan horizontal du centre, la droite s'est rabattue en $K_1 i_1$ et la section de la sphère qui est ici diamétrale suivant le cercle de contour apparent ; les points d'intersection sont alors en rabattement à l'intersection de ces deux lignes, aux points i_1 et j_1 relevés de suite en I et J sans difficulté.

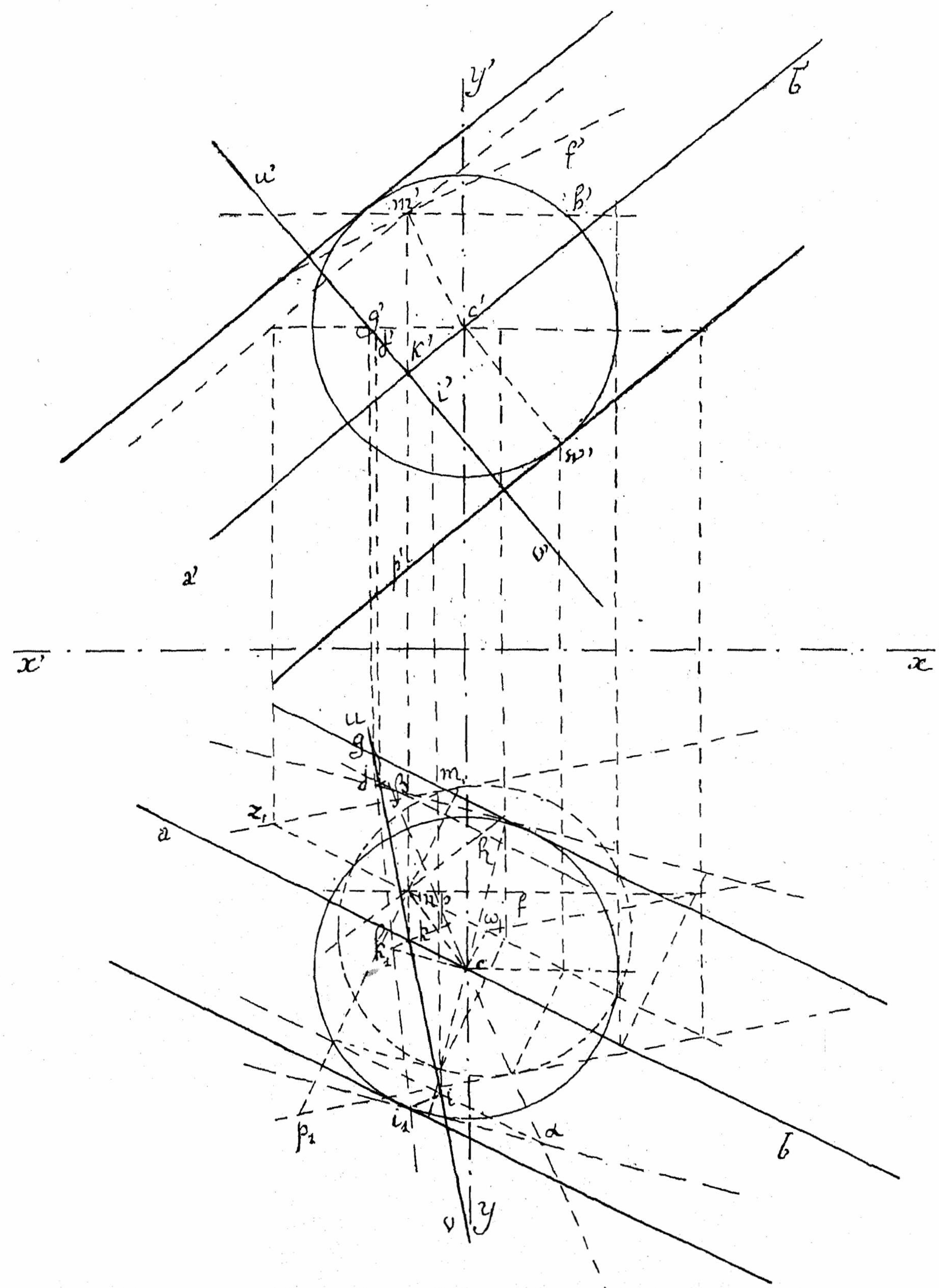


Figure petite épure n° 2.

PETITE ÉPURE N° 3

Énoncé :

On donne un ellipsoïde allongé défini par sa méridienne une ellipse de centre O′ (— 48, 40, 45) de grand axe M′Q′, soit, M′ (— 48, 40, 0), Q′ (— 48, 40, 90) de demi petit axe O′E′, E′ (— 10, 40, 45) et un ellipsoïde aplati de centre I′ (0, 40, 84) de demi grand axe I′F′, F′ (— 40, 40, 25) de petit axe R′S′, R′ (— 28, 40, 103), S′ (28, 40, 65). Trouver : 1° le point (*mm*′) de

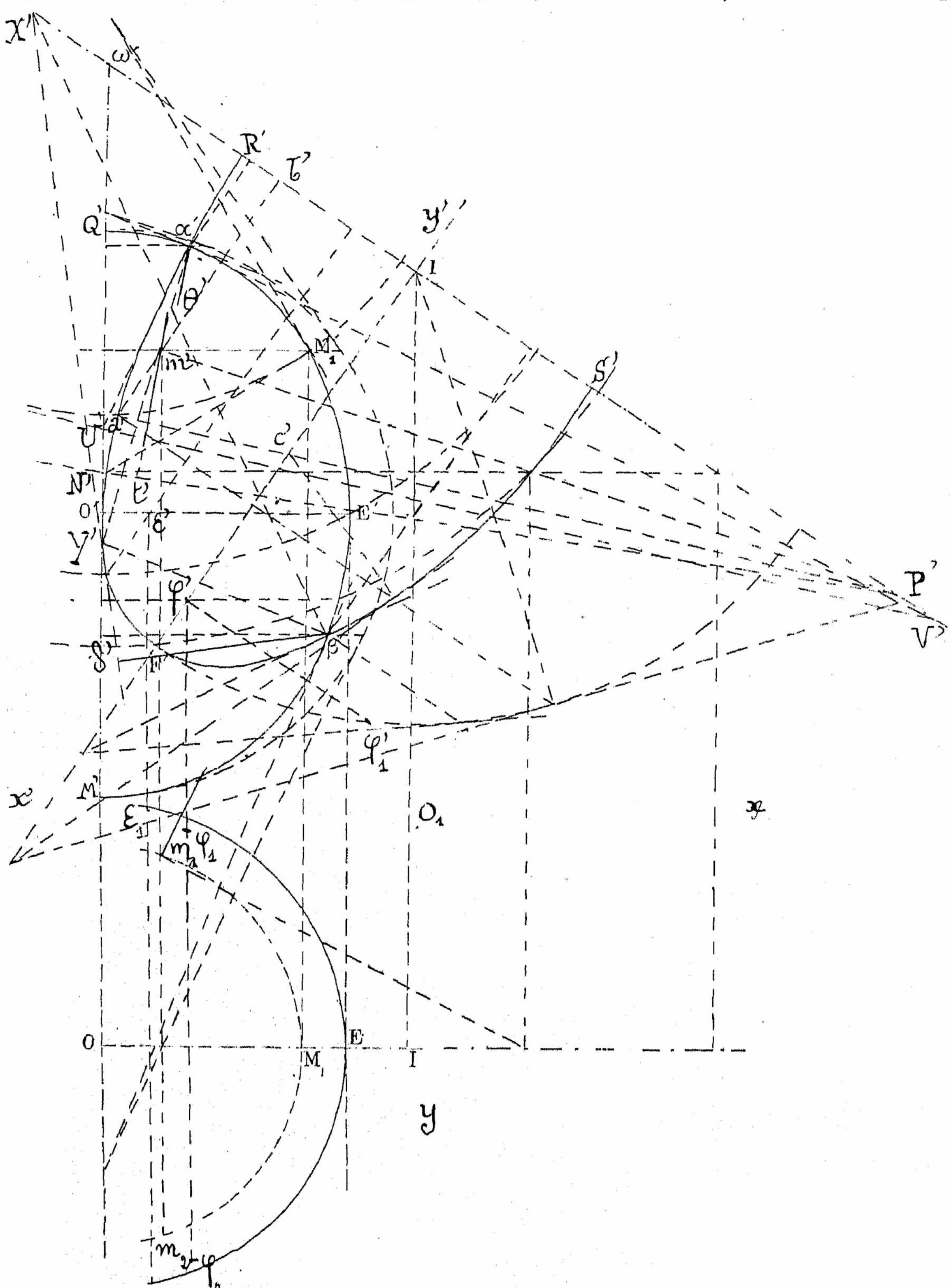


Figure petite épure n° 3.

l'intersection de ces deux solides qui sera situé sur le parallèle M'_1 de l'ellipsoïde O' et la tangente à la courbe en ce point; 2° le point situé sur l'équateur $E'O'$; 3° le point situé sur l'équateur $F'I'$; 4° les tangentes à la courbe aux points α', β' où se rencontrent les contours apparents verticaux.

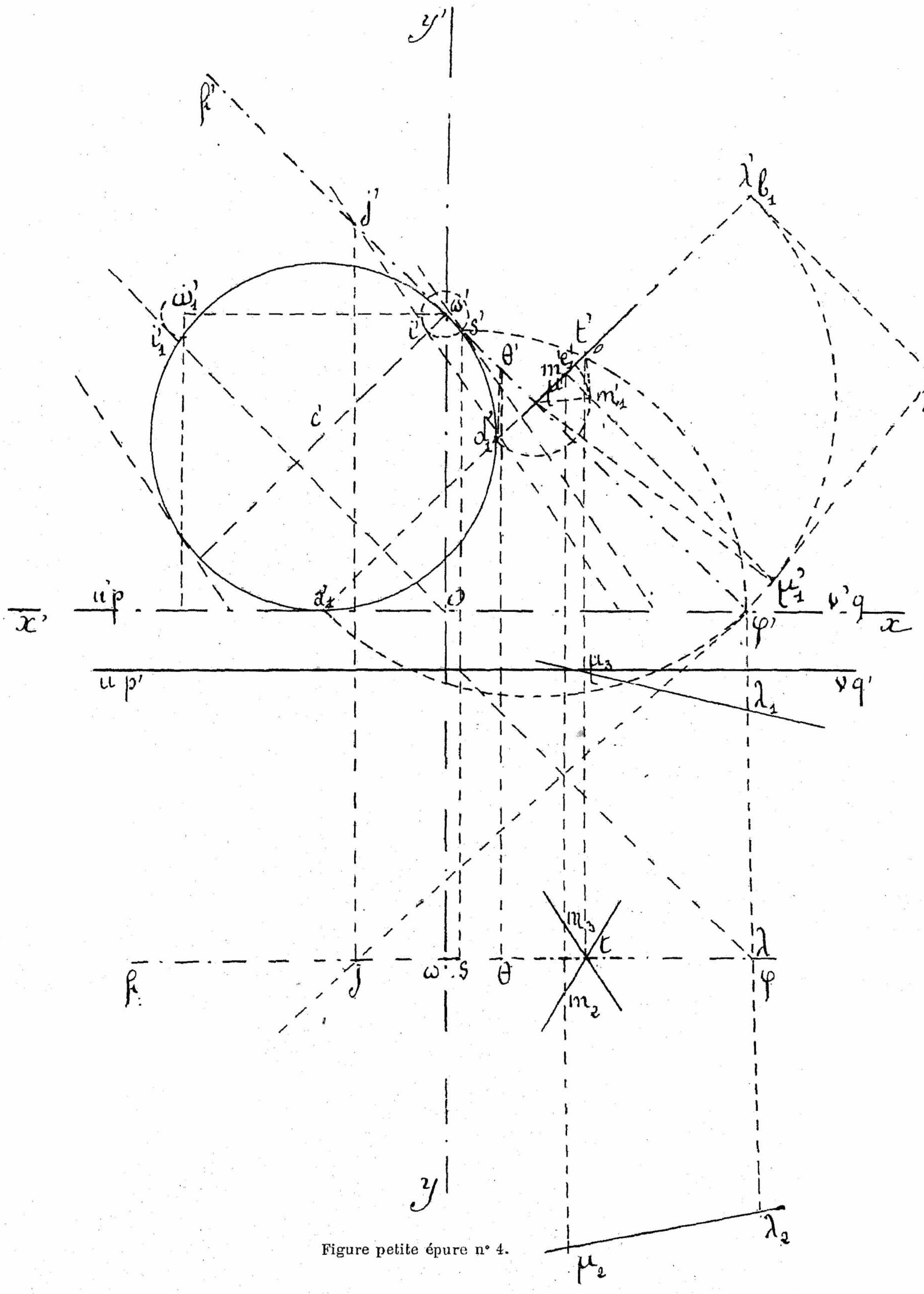


Figure petite épure n° 4.

TEXTE :

Les deux axes des surfaces $M'Q'$ et $R'S'$ se rencontrent en ω', la projection verticale de l'intersection des deux surfaces est une conique, les deux surfaces ayant un plan de symétrie de front commun. Pour déterminer les différents points demandés, il suffit d'appliquer la méthode générale du cours, c'est-à-dire de couper les deux surfaces par des sphères de centre ω' et passant par les parallèles appropriés : 1° le parallèle M'_1 ce qui donne le point m, m' où la tangente est $m't'$ perpendiculaire à la droite de front $N'P'$ des points fixes N' et P' des normales le long des parallèles correspondants ; 2° le parallèle équateur $O'E'$ qui fournit les points $\varepsilon_1\varepsilon'$ et $\varepsilon_2\varepsilon'$; 3° le parallèle équateur $I'F'$ qui donne les points $\varphi_1\varphi'$ et $\varphi_2\varphi'$. Enfin on a déterminé les tangentes aux points α' et β' par la méthode des *normales* ; on trouve ainsi $\alpha'\theta'$ perpendiculaire à la droite de front des points fixes des *normales* U' et V' et $\beta'\delta'$ perpendiculaire à la ligne de front des points fixes des normales $X'Y'$.

PETITE ÉPURE N° 4

ÉNONCÉ :

I. — On donne un tore engendré par un cercle de centre C (— 20, 58, 30) de rayon 30 situé dans un plan de front, tournant autour d'un axe de front ΦF de trace Φ (50, 58, 0) tangent au cercle précédent : 1° déterminer un point du tore connaissant sa projection verticale ; 2° déterminer le plan tangent en ce point ; 3° mener au tore un plan tangent parallèle au premier bissecteur.

TEXTE :

Le tore étant déterminé comme le dit l'énoncé : on considère la projection verticale $m'\mu'$ du point cherché et on mène la droite $a, m'd'$ qui projette les deux parallèles passant en m'. On rabat ces deux parallèles sur le plan de front de l'axe et l'on a ainsi en $m'm'_1$ et en $\mu'\mu'_1$, les éloignements à partir du plan de front des points cherchés, d'où les quatre projections horizontales m_2, m_3, μ_2, μ_3 répondant à la question. Sur le rabattement précédent on mène en m'_1 et μ'_1 les tangentes aux parallèles ce qui fournit le point t' d'une des tangentes dans le plan de front et le point $\lambda'_1\lambda'$ à un éloignement donné : de ces rabattements on déduit de suite les plans tangents à l'aide de ces tangentes TM_3, TM_2, $\lambda_1\mu_3$; $\lambda_2\mu_2$ et des points fixes sur l'axe θ pour les points projetés en m' et Φ pour les points projetés en μ.

Pour avoir les plans tangents parallèles au premier bissecteur, on rabat le plan de profil passant en ω sur l'axe $F\Phi$. On détermine ainsi en $\omega'_1 i'_1$ la distance du point ω au plan bissecteur, on trace alors la sphère ayant pour rayon cette distance et pour centre ω et on mène des plans tangents à cette sphère par le point J du premier bissecteur situé sur l'axe de front. Soit JI une de ces tangentes, il suffit maintenant de considérer une tangente au cercle c' parallèle à IJ et de ramener ce plan à être parallèle au premier bissecteur pour en trouver les traces UV, PQ sur les deux plans de projections.

GRANDES ÉPURES

TEXTES

GRANDE ÉPURE N° 1

Surface de révolution.

ÉNONCÉ :

Un cercle O du plan horizontal est la base d'un cylindre à génératrices verticales. Un deuxième cercle ω situé dans le plan vertical est la base d'un deuxième cylindre à génératrices de bout. On donne aussi un axe vertical (zz').

1° Représenter la surface engendrée par la courbe d'intersection des deux cylindres en tournant autour de (zz') ;

2° Représenter la courbe génératrice supposée placée sur la surface.

TEXTE :

REMARQUE. — Les projections de l'intersection sont d'une part le cercle ω limité aux points $a'b'$ et d'autre part le cercle O limité aux points c et d.

MÉTHODE. — On cherche la méridienne de la surface située dans le plan de front de l'axe. Pour cela on prend un point de la courbe et on l'amène par rotation dans ce plan de front.

POINT COURANT ET SA TANGENTE. — Prenons par exemple le point (mm'). Après rotation il vient en $(m_1m'_1)$; m'_1 est un point de la méridienne. Pour avoir la tangente on se sert du *cône des normales*. Le plan des normales en (mm') aux deux surfaces est déterminé par les droites $(me, m'e')$ $(mf, m'f')$. Le sommet du cône des normales est le point où l'axe (zz') perce ce plan. Pour avoir ce point on se sert du plan de front du point Z. On a immédiatement la droite d'intersection $(\pi\rho, \pi'\rho')$ de ce plan de front avec le plan des normales. Par suite le point $(\rho\rho')$ qui appartient aussi à l'axe est le sommet du cône considéré.

La tangente en m'_1 est la perpendiculaire à $m'_1\rho'$.

REMARQUE. — Le plan horizontal du point ω est un plan de symétrie pour l'intersection et comme il est perpendiculaire à l'axe, c'est aussi un plan de symétrie pour la surface. Il suffira donc de considérer les points de la courbe situés au-dessous de l'horizontale $\omega'd'$ par exemple et d'en prendre ensuite les symétriques par rapport à $\omega'd'$.

POINTS REMARQUABLES. — Il y a les points à tangentes verticales. Ils sont donnés : 1° par les points (gg') (ii') (jj') (hh') situés dans le plan vertical ρh dont la trace est normale au cercle O ; 2° par les points (cc') (dd') qui possèdent déjà dans l'intersection une tangente verticale.

Les points à tangentes horizontales sont donnés : 1° par les points (kk') (ll') (nn') (pp') situés le plus haut ou le plus bas ; 2° par les points (aa') (bb') qui possèdent déjà une tangente horizontale.

PONCTUATION. — On marquera en projection verticale les parallèles $k'_1l'_1$ a'_1 g'_1, $b'_1i'_1$, $n'_1p'_1$ et la partie de la

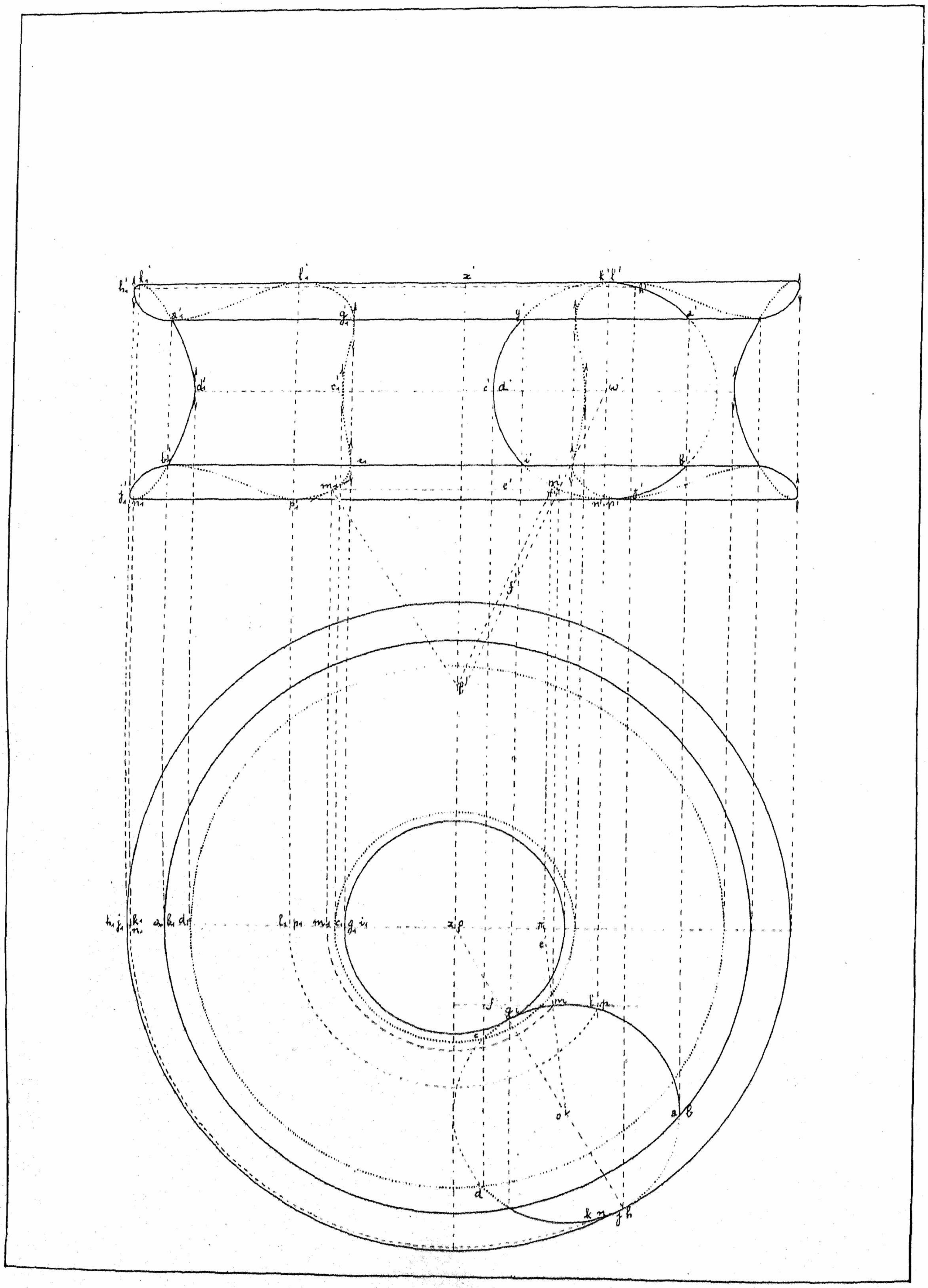


Figure grande épure n° 1.

méridienne qui forme contour. En projection horizontale on marquera les parallèles des points $g_1 c d a b j h$, en respectant la ponctuation.

Deuxième question. — Raisonnons par exemple sur la projection horizontale. Le point k étant le point le plus haut est vu. Suivons la courbe dans les deux sens en partant du point k_1, chaque fois qu'elle rencontre un contour apparent vu elle change de ponctuation. Tel est le raisonnement à faire.

GRANDE ÉPURE N° 2

Surface de révolution engendrée par une parabole.

Énoncé :

Une parabole située dans le plan de bout B'C' est donnée par sa directrice D et son foyer F. En tournant autour de la verticale OO', elle engendre une surface de révolution :

1° Déterminer la méridienne et les contours apparents de cette surface ;

2° Chercher la section par le plan de front du point (rr').

Représenter la surface quand on enlève ce qui est en avant du plan de front du point (rr') d'une part ; et de l'autre ce qui est au-dessus du plan horizontal H'.

Texte :

Point courant de la méridienne et de sa tangente. — On considère un point (aa') de la parabole, on lui fait faire une rotation jusqu'à l'amener dans le plan de front du point O. Le point (bb') ainsi obtenu appartient à la méridienne.

Pour avoir la tangente, nous nous servirons du cône des tangentes. Le plan tangent au point (aa') est déterminé par les droites $(ac\ a'c')$ et $(ad\ a'd')$. Il coupe la verticale au point e' où $c'd'$ rencontre $o'k'$.

La tangente cherchée est $e'b'$.

Points remarquables de la méridienne. — Les points $p'm'$ à tangente verticale sont donnés par les pieds des normales abaissées de O à la parabole.

Le point (qq') à tangente horizontale est donné par le point le plus bas (SS').

Section plane. — Elle est symétrique par rapport à $O'k$. Les points ff' et vv' sont donnés immédiatement. Cherchons les points sur le méridien de profil. La droite d'intersection de ce méridien avec le plan, ramené dans le plan de front du point O coupe la méridienne principale au point r'_1 et u'_1. On a par la suite les points u' et r' dont les tangentes s'obtiennent par la méthode du plan des normales.

Ponctuation. — En projection verticale, les courbes d'intersection avec le plan de front sont vues. Quand on enlève ce qui est en avant du plan de front, la portion $m'\alpha$ de la méridienne devient vue. Quant à la parabole, la partie βh disparaissant on n'a en $\beta' h'$ que la partie de la parabole tracée sur la nappe postérieure de la surface. Cette partie est donc cachée.

La projection horizontale se déduit aisément de la projection verticale.

GRANDE ÉPURE N° 3

Cône et cylindres.

DÉVELOPPEMENT

Énoncé :

Un cône de révolution de sommet (ss') qui a pour base le cercle (OO') du plan horizontal est coupé par deux cylindres à génératrices verticales dont les bases sont les cercles $(\omega\omega')$ (cc').

1° Représenter la partie solide du cône (ss') extérieure aux deux cylindres, limitée au plan horizontal de projection et au plan horizontal H'.

Texte :

Méthode. — On se base sur ce que l'on connaît la projection horizontale des courbes d'intersection, elle est composée des cercles ω et c.

Point courant et sa tangente. — Prenons une génératrice du cône $(Sg_1,\ S'g'_1)$ on a immédiatement en projection horizontale le point m, et par suite la projection m' sur $s'g'_1$.

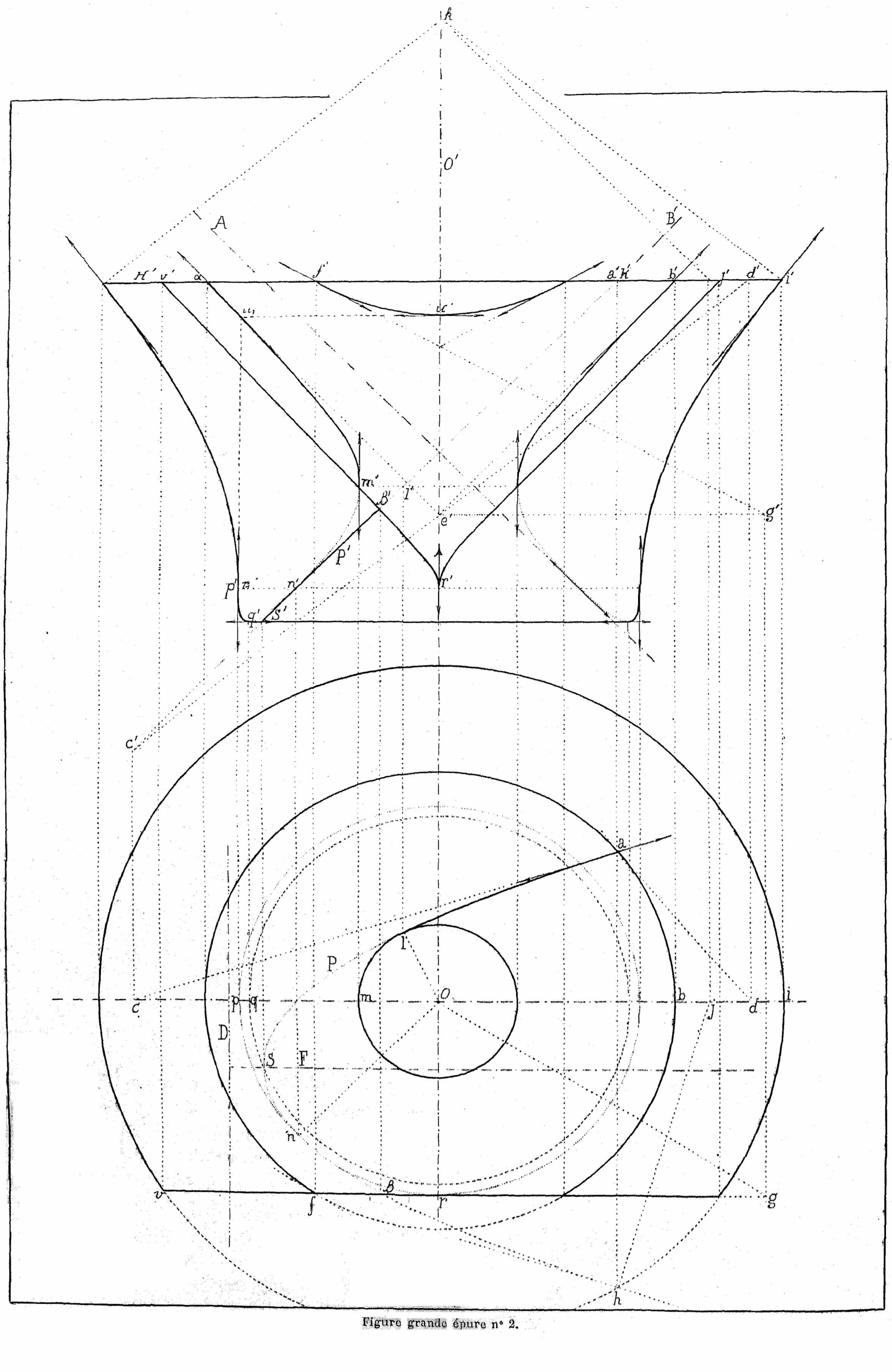


Figure grande épure n° 2.

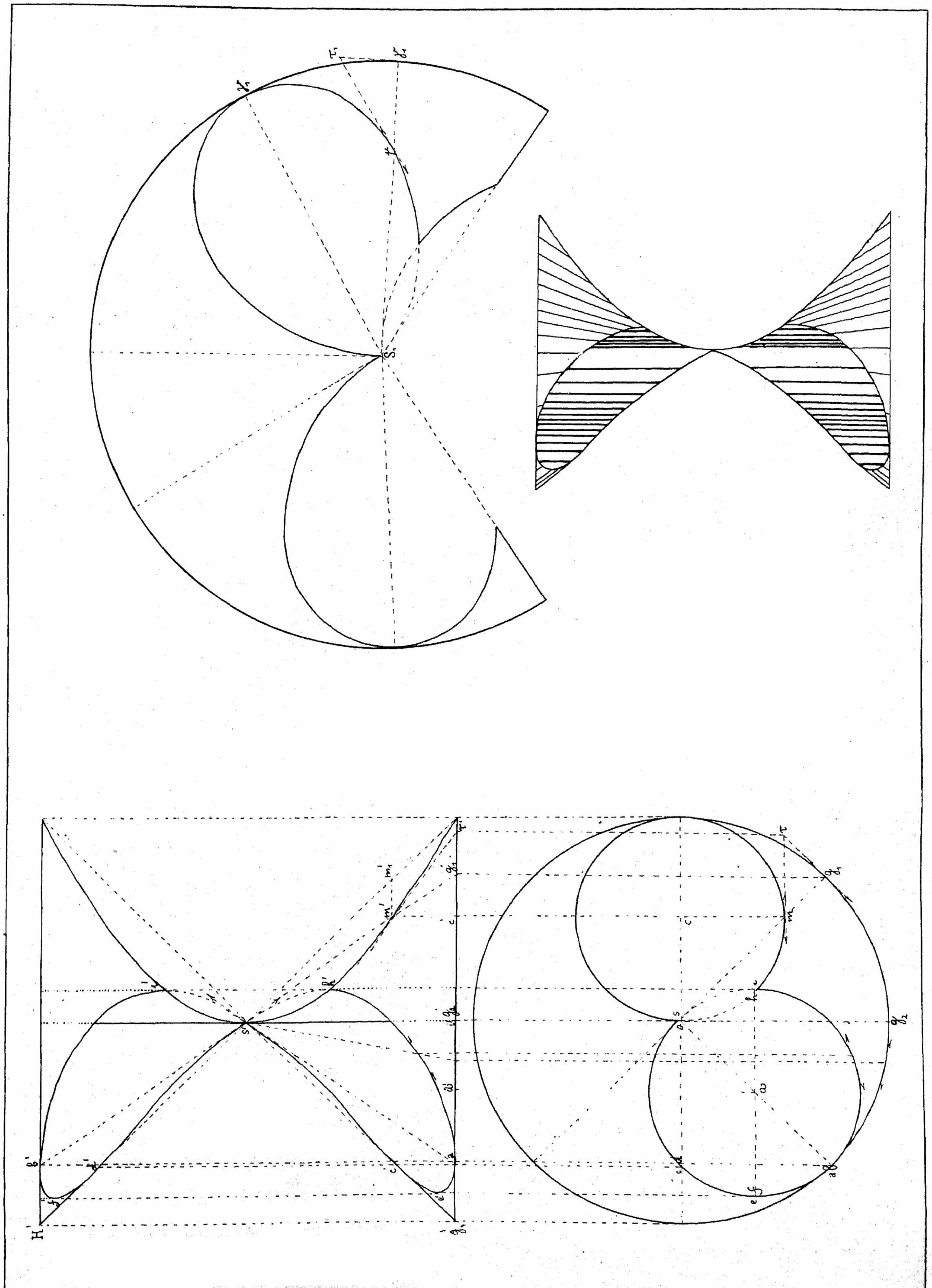


Figure grande épure n° 3.

Les traces des plans tangents se coupent en ($\tau\tau'$), on a la tangente (τm, $\tau' m'$).

Remarque. — Les courbes d'intersection ont pour plan de symétrie le plan horizontal du point (ss'). Donc en projection verticale, il y a symétrie par rapport à l'horizontale de s',

Remarque. — Le plan vertical de projection étant parallèle au plan des axes du cône et du cylindre c, la projection de l'intersection de ces quadriques est une parabole.

Points remarquables. — On peut remarquer que les points EFHI situés sur le contour apparent du cylindre; les points CD sur le contour apparent du cône; les points AB des plans horizontaux limites; enfin le sommet S où les tangentes à la courbe sont les génératrices correspondantes du cône.

Ponctuation. — Tout est vu dans le cône S. Seulement deux arcs de courbe $s'i'$, $s'h'$ intérieurs au cylindre C disparaissent. Il en est de même des parties $s'd'$, $s'c'$ des génératrices. Enfin on conservera des portions de génératrices des cylindres.

Deuxième question. — Développer la surface du cône S extérieure aux cylindres après l'avoir ouverte le long de la génératrice (Sg_2, $S'g'_2$).

Cherchons l'angle au centre du développement. Appelons R le rayon du cercle de base et l la longueur de la génératrice $s'g'_3$. La circonférence de base a pour longueur $2\pi R$.

La circonférence de développement a pour longueur $2\pi l$.

Si on appelle x l'angle au centre mesuré en degrés on a la relation :

$$\frac{2\pi R}{2\pi l} = \frac{x}{360} = \frac{R}{l}$$

d'où :

$$x = \frac{360R}{l}.$$

Pour développer la courbe, on divise le cercle O, et le développement S_1 en n parties égales. On ainsi n génératrices qui se correspondent.

Prenons-en une (sg_1, $s'g'^1$) sur le cône. La génératrice correspondante est $s_1\gamma_1$. On cherche la vraie longueur de (sm $s'm'$). On l'a après rotation en $s'm'_1$. Alors, pour avoir le développement du point (mm') il suffit de porter $S_1\mu$ égal à $S'm'_1$.

Pour la tangente en u, on se base sur la propriété de la conservation de la sous-tangente. On n'a qu'à porter $\gamma_1\tau_1$ égal à $g_1\tau$ et dans le même sens.

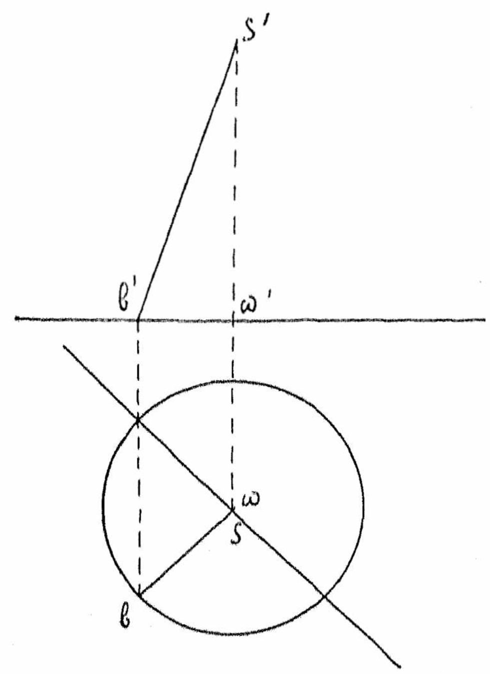
GRANDE ÉPURE N° 4

Cône et cylindre.

Énoncé :

Le cône a pour base dans le plan horizontal le cercle de centre Ω et pour sommet le point S sur la verticale de Ω.

Le cylindre repose sur le plan horizontal et a pour axe de révolution une horizontale inclinée à 45° sur la ligne de terre, son rayon r est donné. Les deux surfaces ont un plan tangent commun, le plan tangent au cône le long de la génératrice Sab — $S'a'b'$ située dans le plan vertical perpendiculaire à l'axe du cylindre. Représenter l'ensemble des deux corps supposés pleins en limitant le cône à son sommet et au plan horizontal et le cylindre à 2 plans perpendiculaires à la direction des génératrices.



Texte :

Mise en place. — Considérons la section droite faite dans le cylindre par le plan vertical de trace Sab. Cette section droite est un cercle tangent au plan horizontal et à la génératrice Sab — $S'a'b'$ du cône. Pour le construire faisons tourner le plan vertical autour de la verticale de Ω de façon à la rendre de front. La génératrice du cône Sb — $S'b'$ vient en Sd — $S'd'$; le cercle de

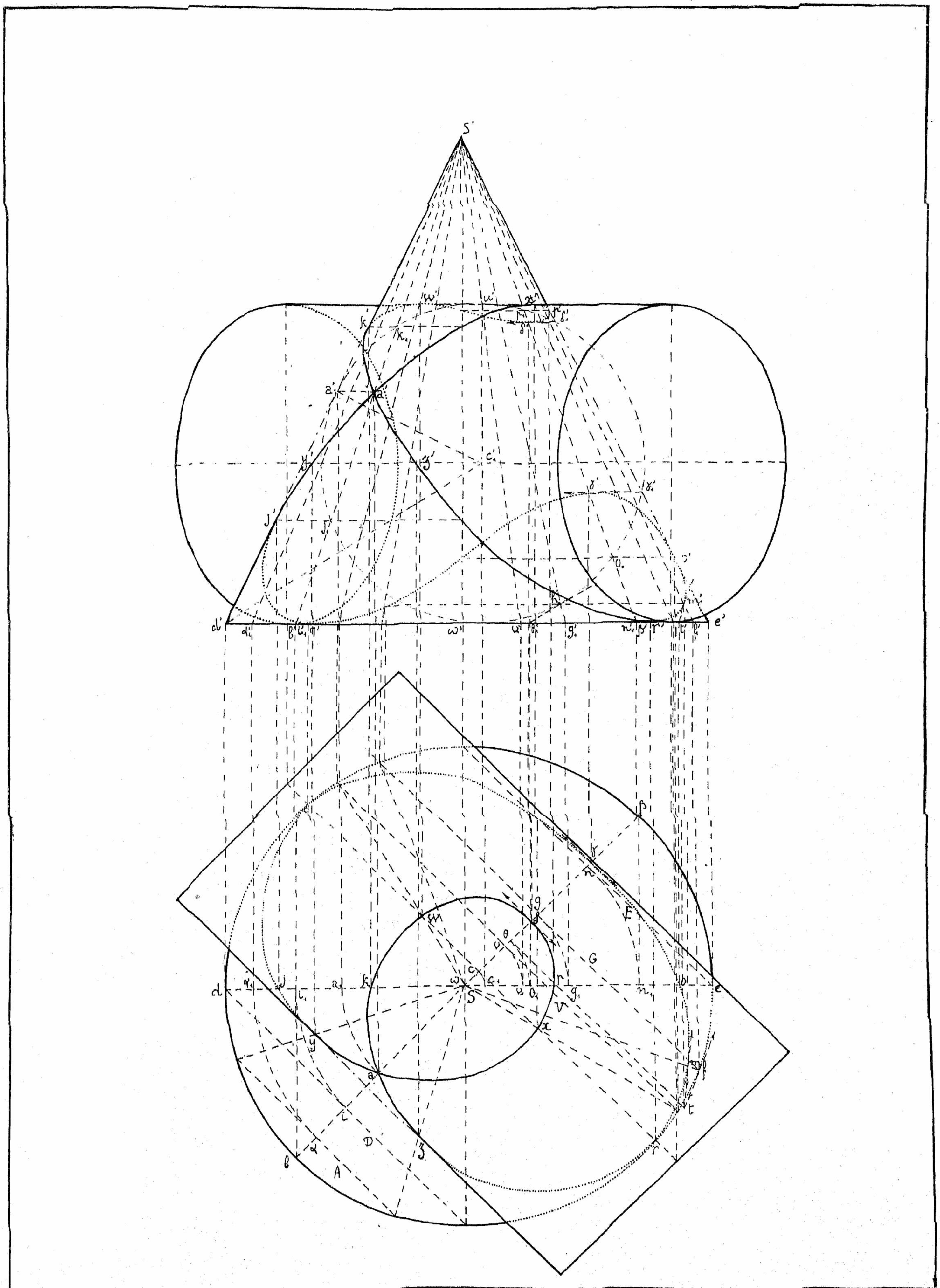


Figure grande épure n° 4.

section droite est tangent après rotation à cette droite $S'd'$ et à la ligne de terre xy, de plus son rayon r est donné, par suite son centre c'_1 est à l'intersection de la bissectrice de l'angle $S'd'c'$ et de la parallèle à $d'c'$ distante de r de $d'c'$. Par une rotation inverse $C_1C'_1$ vient en CC', d'où l'axe du cylindre, dont on obtient immédiatement les contours apparents puisqu'on connait son rayon.

Remarque. — Le point a'_1 point de tangence du cercle de centre C'_1 et de $S'd'$ ramené par rotation en $a - a'$ est un point commun au cône et au cylindre, c'est un point double réel de l'intersection.

Point courant et tangente. — On prend pour plans auxiliaires des plans passant par la parallèle aux génératrices du cylindre menés par le sommet du cône. Ils ont pour trace sur le plan horizontal des parallèles aux génératrices du cylindre, et sur le plan de section droite du cylindre des droites passant par le sommet du cône. Considérons le plan de trace horizontale G, G rencontre le cercle ω au point f, d'où la génératrice $Sf - S'f'$ du cône. Ce plan coupe le plan de section droite du cylindre suivant la droite $Sg - S'g'$, qui par rotation vient en $Sg_1 - S'g'_1$. $S'g'_1$ rencontre le cercle C'_1 en particulier au point h'_1, d'où la projection verticale h'_1m' de la génératrice correspondante du cylindre qui rencontre $S'f'$ au point m', qui se rappelle en m. Cherchons la tangente en ce point. Le plan tangent au cône le long de la génératrice SM a pour trace horizontale la tangente en f au cercle ω. Le plan tangent au cylindre en M coupe le plan vertical Sab suivant la tangente au cercle de section du cylindre ; après rotation cette tangente vient en $h'_1\theta'_1$. A $\theta_1\theta'_1$ correspond par la rotation inverse le point θ et la trace horizontale du plan tangent au cylindre est la parallèle à G menée par θ. Elle rencontre ft au point t, qui se rappelle en t' ; d'où les deux tangentes tm et $t'm'$.

Points sur les contours apparents. — Les plans de trace D et E nous donnent immédiatement les points IJO et P sur le contour apparent vertical du cône. La génératrice inférieure de contour apparent vertical rencontre le cercle de base du cône aux points R et S. Le plan de trace V nous donne les points X et W sur le contour apparent vertical supérieur du cylindre. Enfin le plan de trace A nous donne les points Y et Z sur le contour apparent horizontal du cylindre.

Plan auxiliaire limite. — Un seul plan auxiliaire limite le plan tangent au cône le long de $S\beta - S'\beta'$. Après rotation $S'\beta'$ vient en $S'c'$, d'où γ'_1 et δ'_1, qui par rotation donnent les points $\gamma\gamma'$ $\delta\delta'$. En ces points la tangente est la génératrice correspondante du cylindre.

Ponctuation. — On veut représenter l'ensemble des deux surfaces supposées pleines de matière opaque. Pour cela on ponctue la courbe sur l'ensemble des deux corps : un point étant vu, s'il est vu à la fois sur les deux surfaces. On garde des contours apparents de chaque corps les parties extérieures à l'autre et on enlève les parties intérieures. Disparaissent ainsi les segments de droite $\omega'x$, $K'j'$ et $O'p'$ en projection verticale, et yz en projection horizontale.

GRANDE ÉPURE N° 5

Deux cônes.

Énoncé :

On donne un cône S par son sommet (ss') et sa base circulaire (OO') dans le plan horizontal. Un deuxième cône T a son sommet (tt') sur la droite de front du point $(\omega\omega)$. Il est tangent au plan horizontal le long de $(tO, t'O')$ et il admet comme plan tangent le plan debout $e'f'$.

Représenter la partie solide du cône S extérieure au cône T et située au-dessus du plan horizontal.

Texte :

Mise en place. — Le cône S n'offre pas de difficultés. Pour le cône T on se servira d'une sphère inscrite (ω, ω'). Le centre (ω, ω') se trouve sur la verticale du point O d'une part, et à l'intersection de cette verticale avec le plan bissecteur du dièdre $(Og_1t, O'g'_1t')$ d'autre part.

Si on prend une ligne de terre auxiliaire suivant Og_1 le plan $(Og_1t, O'g'_1t')$ devient debout et se projette en $g_1S'_1$. Le plan bissecteur se projette suivant la bissectrice $g_1\omega'_1$. Il en résulte que le rayon de la sphère inscrite est $\omega\omega'_1$.

Maintenant qu'on a les contours apparents, les tangentes à ces contours, issues des points t et t' forment les contours apparents du cône T.

Intersection. — Le plan $(Og_1t, O'g'_1t')$ est tangent aux deux surfaces, il y a donc un point double réel. De

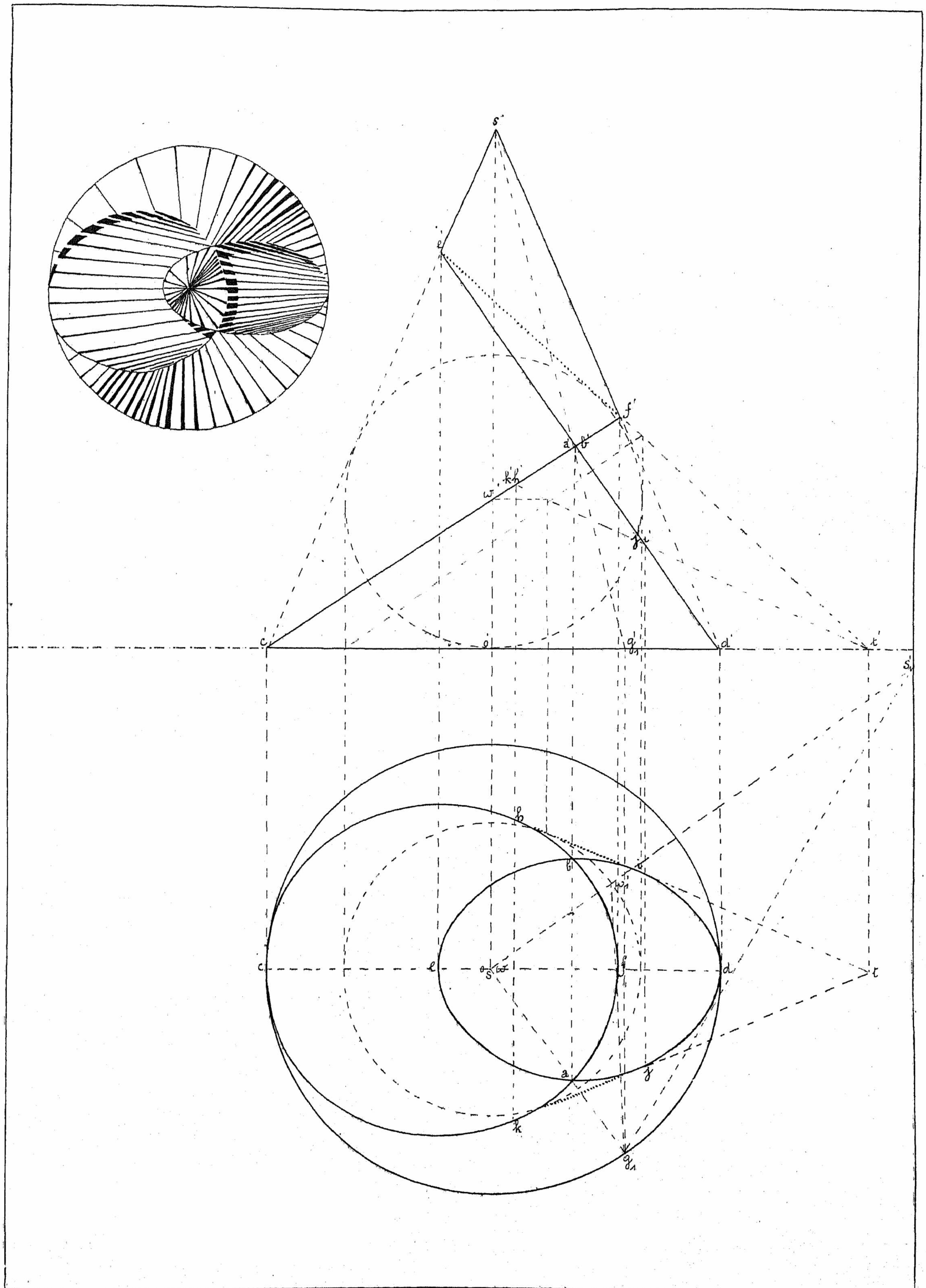


Figure grande épure n° 5.

plus les axes des surfaces se coupent et le plan ainsi déterminé est de front. La projection verticale de l'intersection est donc une hyperbole. Or, une hyperbole qui a un point double se réduit à deux droites.

On a donc de suite les projections des courbes d'intersection en $c'f'$ et $e'd'$.

L'intersection se compose ainsi de deux ellipses qui se coupent sur la ligne de rappel du point a'.

Il y a lieu de chercher les points (hh') (kk') (ii') (jj') sur le contour apparent horizontal. Il n'y a pour cela qu'à prendre la projection verticale des génératrices th et tk.

Ponctuation. — Elle est immédiate.

GRANDE ÉPURE N° 6

Solide commun à une sphère et à un cylindre.

Énoncé :

Un cylindre de révolution est donné par son rayon et son axe AA' qui est une fronto-horizontale. Une sphère de rayon donné a son centre (OO') dans le plan horizontal A'.

Représenter le solide commun aux deux surfaces.

Texte :

Mise en place. — Elle est immédiate.

Méthode. — On emploie des plans auxiliaires de profil.

Point courant et sa tangente. — Prenons le plan $\pi\sigma$. Le cylindre est coupé suivant le cercle de diamètre $\pi\varphi$, qu'on rabat; la sphère suivant le cercle de diamètre $\rho\sigma$, qu'on rabat de même. On a immédiatement le point m_1 qu'on ramène en m. Pour avoir la projection verticale m' on porte $\alpha'm'$ égal à mm_1.

Le plan des normales en (mm') est défini par les droites $(om, o'm')$ et $(\alpha m, \alpha'm')$. En projection horizontale la tangente est perpendiculaire à $O\alpha$.

En projection verticale elle sera perpendiculaire à la projection verticale de la frontale $\beta\gamma$ par exemple. Pour avoir la projection β' de β, il est nécessaire de rabattre le plan de profil qui contient $(\alpha m, \alpha'm')$ sur le plan vertical de projection. Alors $(\alpha m, \alpha'm')$ vient en $(\alpha_1 m_1, \alpha'_1 m'_1)$. Le point $(\beta\beta')$ viendrait en $(\beta_1\beta'_1)$. De β'_1 on déduit β'. La tangente est perpendiculaire à $\beta'\gamma'$.

Remarque. — L'axe du cylindre et le centre de la sphère forment un plan qui est horizontal; par conséquent la projection horizontale de la courbe est une *parabole*. On en a de suite les points (bb') (cc'). Le sommet S est donné par le plan de profil du point OO'.

La tangente en b est par *construction limite* perpendiculaire à $O\delta$.

Remarque. — Le plan horizontal A' et le plan de profil du point OO' sont des plans de symétrie pour les deux surfaces. La courbe admet donc en projection verticale les droites $b'c'$, $s't'$ comme axes de symétrie. Elle admet aussi par suite le point O' comme centre de symétrie.

Points sur les contours apparents. — Il y en a quatre (ee') (dd') (ff') (gg') sur le contour apparent vertical de la sphère. Ils sont donnés par le plan de front du point O.

Ponctuation. — Elle n'offre pas de difficultés.

GRANDE ÉPURE N° 7.

Cône et cylindre de révolution.

Texte :

Un cylindre est engendré par la droite (DD') tournant autour de l'axe de front (AA'). Ces deux droites sont dans un même plan de bout. Un cône S a un axe de bout, il admet pour base dans le plan de front F le cercle OO'.

Représenter la partie solide et opaque du cylindre extérieur au cône S.

Texte :

Mise en place. — Il résulte des données que D forme contour apparent horizontal, le reste s'ensuit.

Méthode. — On emploie des plans auxiliaires de front qui donnent des cercles dans le cône et des génératrices dans le cylindre. Pour avoir aisément ces génératrices, on peut se servir de la section droite $h'k'$ du

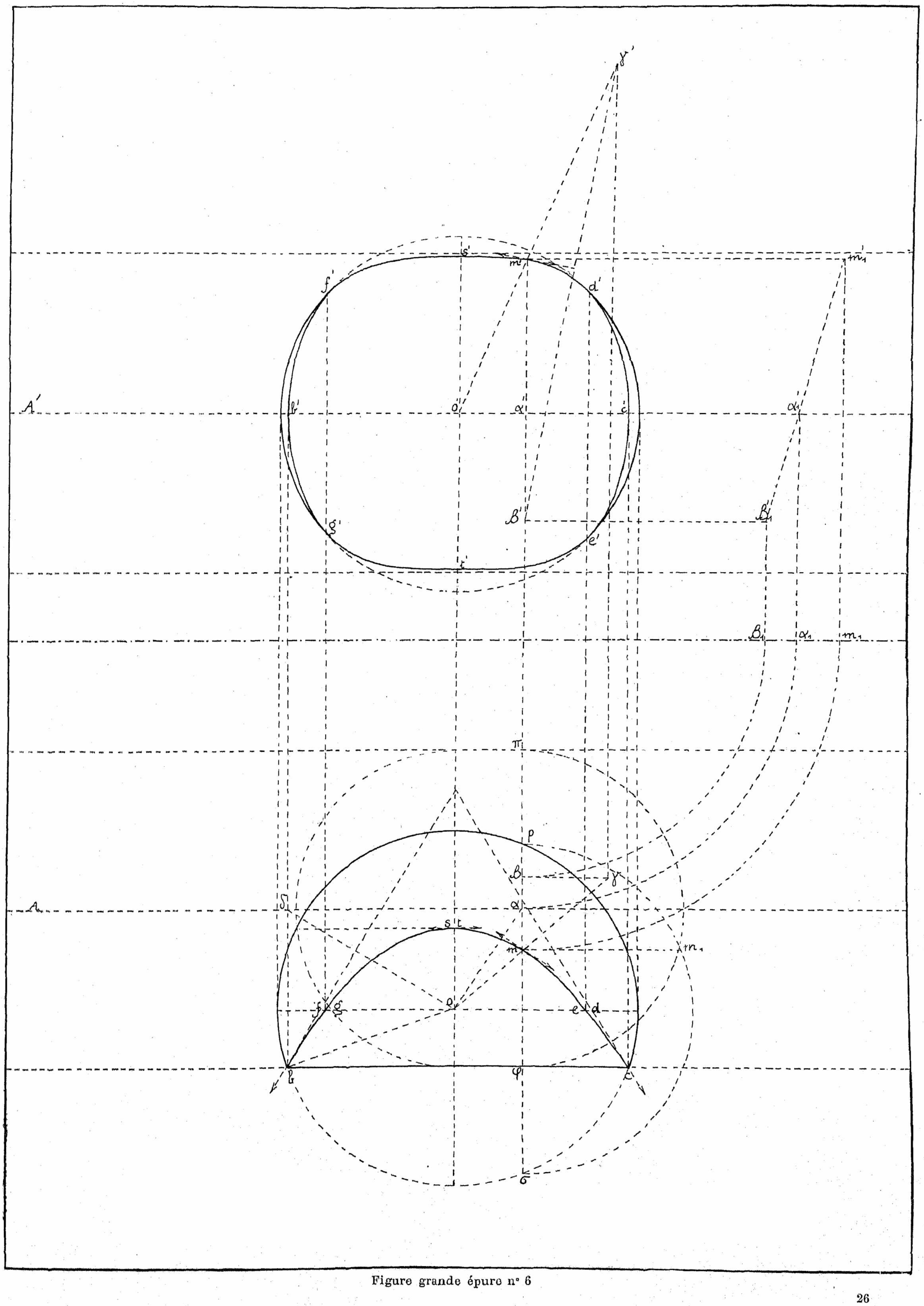


Figure grande épure n° 6

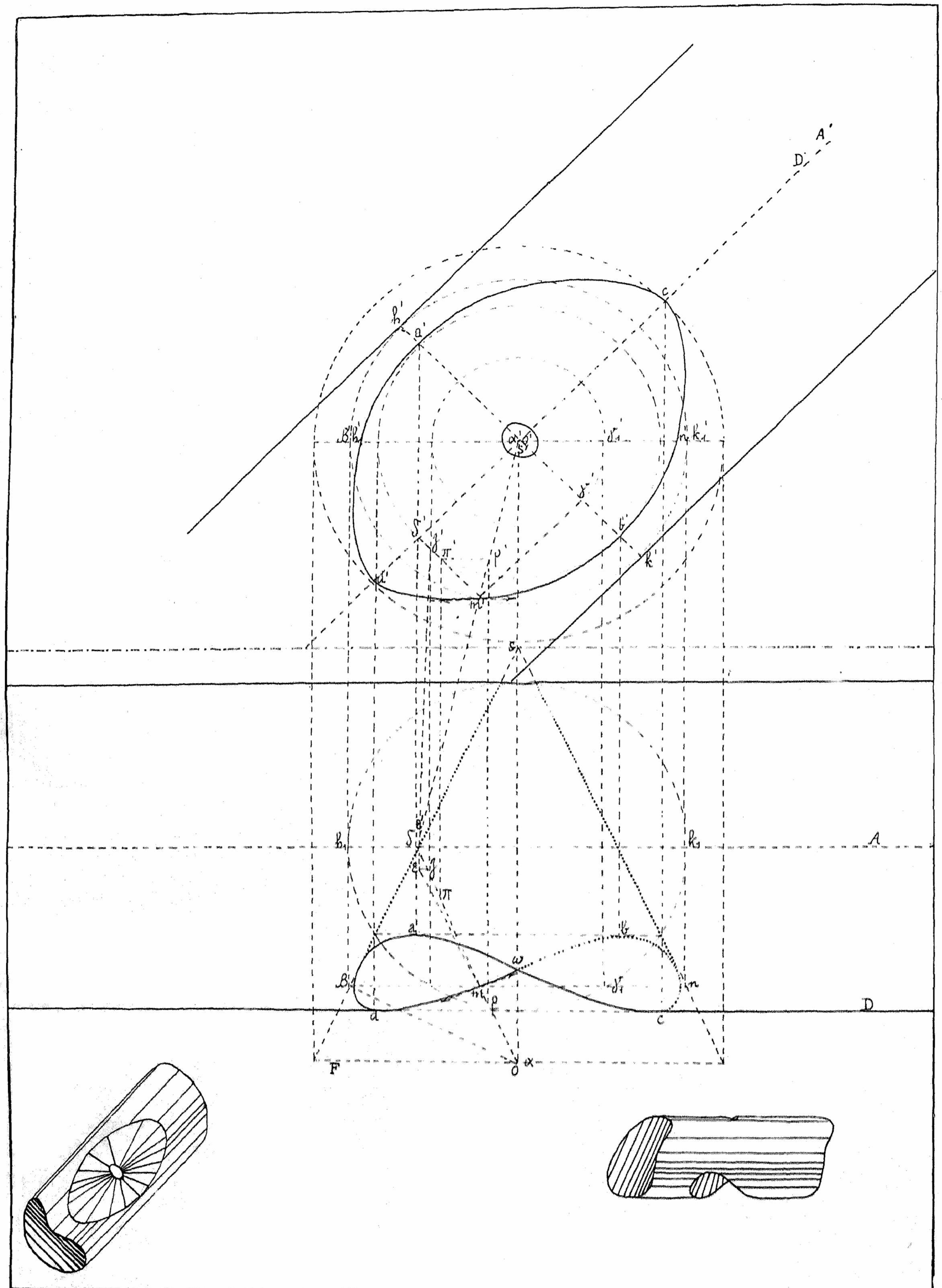


Figure grande épure n° 7.

cylindre, rabattue suivant le cercle de diamètre (h_1k_1), $(h'_1k'_1)$.

Point courant et sa tangente. — Prenons le plan βn. Le cône donne le cercle $(\beta n, \beta' n')$; la section droite du cylindre est coupée en un point $(\gamma_1\gamma'_1)$ qu'on ramène en γ' dans le plan de bout $h'k'$. La génératrice γ' coupe le cercle au point m' cherché que nous rappelons en m sur βn.

Les cônes des normales le long des parallèles du point (mm'), $m'\delta'$, $m\beta$ ont pour sommets les points $(\delta\delta')$ et $(\alpha\alpha')$. Le plan des normales est donc déterminé par les droites $(\delta m, \delta' m')$ $(\alpha m, \alpha' m')$. La tangente en (mm') aura ses projections respectivement perpendiculaires à une frontale et à une horizontale de ce plan.

Or, une horizontale est $(\pi\rho, \pi'\rho')$ et une frontale $(\varepsilon\sigma, \varepsilon'\sigma')$.

Points remarquables. — Ce sont les points (aa') et (bb') (dd') donnés par les plans limites ab et cd.

Remarque. — Il y a *pénétration*, nous n'avons pas parlé de la courbe postérieure parce qu'elle a des dimensions trop réduites.

Ponctuation. — En projection horizontale, la courbe est vue sur le cylindre du point C jusqu'au point d en passant par le point a, ce n'est que lorsqu'on enlève le cône que la portion $d\omega$ devient vue.

GRANDE ÉPURE N° 8

Solide commun à un cône et à un cylindre.

Énoncé :

Un cylindre de révolution, de rayon donné a pour axe la fronto-horizontale AA'. Un cône de révolution a son sommet (SS') sur cet axe, et il est déterminé par une sphère inscrite OO'. Cette sphère de rayon donné est tangente au plan de profil ss', et son centre se trouve dans le plan horizontal A'.

Représenter le solide commun à ces deux surfaces.

Texte :

Mise en place. — Facile.

Méthode. — Le plan des axes étant horizontal, la projection horizontale de l'intersection est une hyperbole, on se servira de cette hyperbole.

Détermination de l'hyperbole. — On en connaît de suite 4 points. Les points $abcd$ à l'intersection des contours apparents. Le centre est le point S, car ce point est centre de symétrie pour l'intersection. Il suffit pour avoir les asymptotes de chercher les directions asymptotiques.

Pour cela circonscrivons à la sphère O le cylindre qui a mêmes points à l'infini que le cylindre en question. Les directions asymptotiques sont $\alpha\delta$, $\beta\gamma$. L'hyperbole est déterminée.

Point courant et sa tangente. — Prenons dans le cône la base de Monge Cε, et choisissons un point m de l'hyperbole. La génératrice du point m est mSg_1. Elle se relève en $S'g'_1$. Il ne reste qu'à rappeler le point m en m'.

On détermine facilement à l'aide du cône des normales les normales $(m\mu, m'\mu')$, $(mv, m'v')$ aux deux surfaces. Pour avoir la tangente, il suffit de trouver une frontale et une horizontale de ce plan.

Pour cela on rabat le plan de profil de la droite $(mv, m'v')$ sur le plan vertical. Cette droite vient en (m_1v_1, m'_1, v'_1).

Alors l'horizontale $\varphi'\rho'\rho'_1$ par exemple a pour projection horizontale $\varphi\rho$.

Ponctuation. — Facile.

GRANDE ÉPURE N° 9

Paraboloïde et sphère.

Énoncé :

On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical dont la méridienne est une parabole de foyer F (0, 60, 35) et de sommet S (0, 60, 27, 5) et une sphère tangente de rayon 65 au paraboloïde en un point M, (—20, 40) de ce paraboloïde.

Représenter la portion de la sphère supposée pleine de matière opaque extérieure au paraboloïde.

Texte :

On peut obtenir un point courant de l'intersection des deux surfaces soit en coupant par des plans hori-

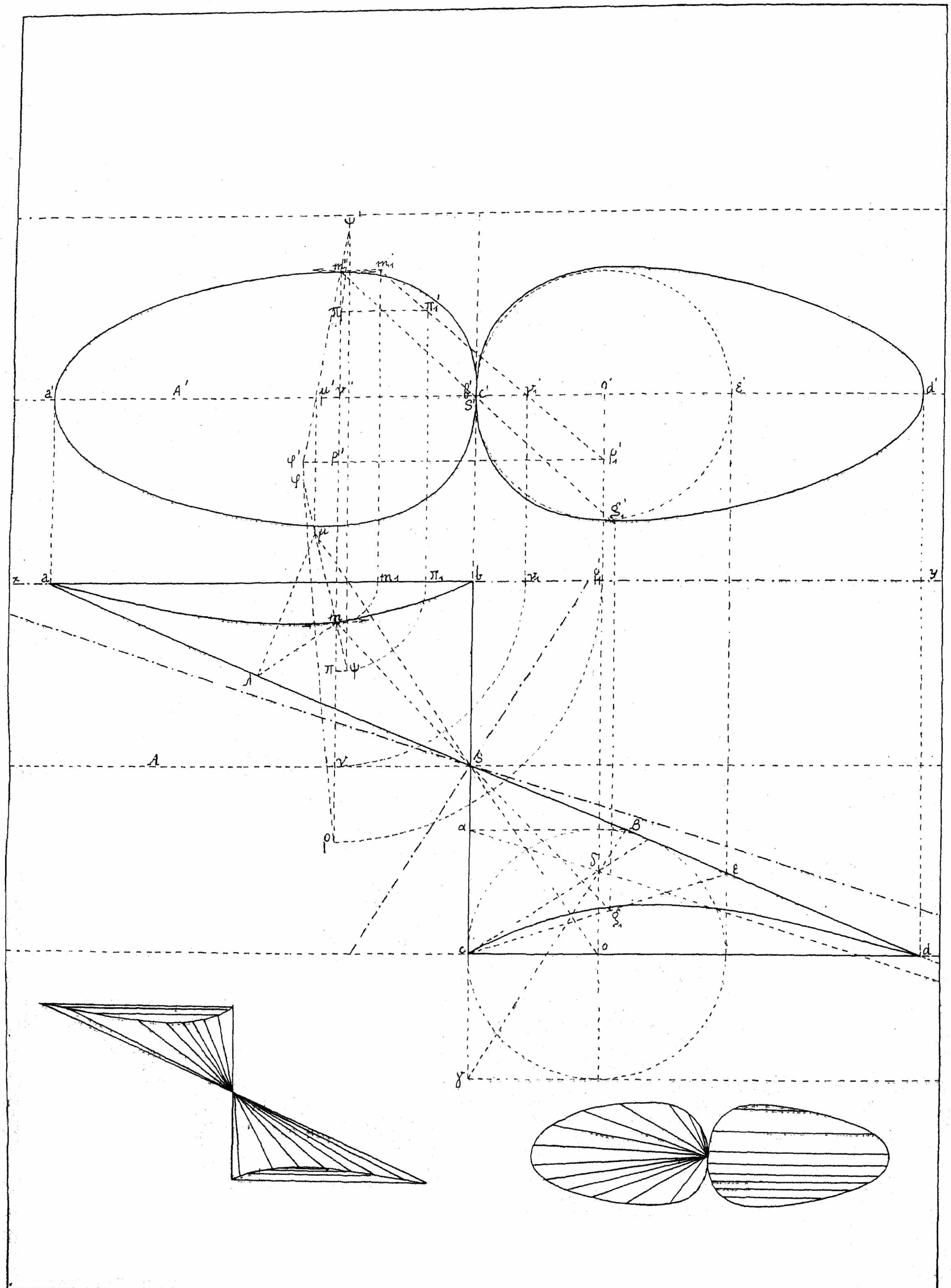


Figure grande épure n° 8.

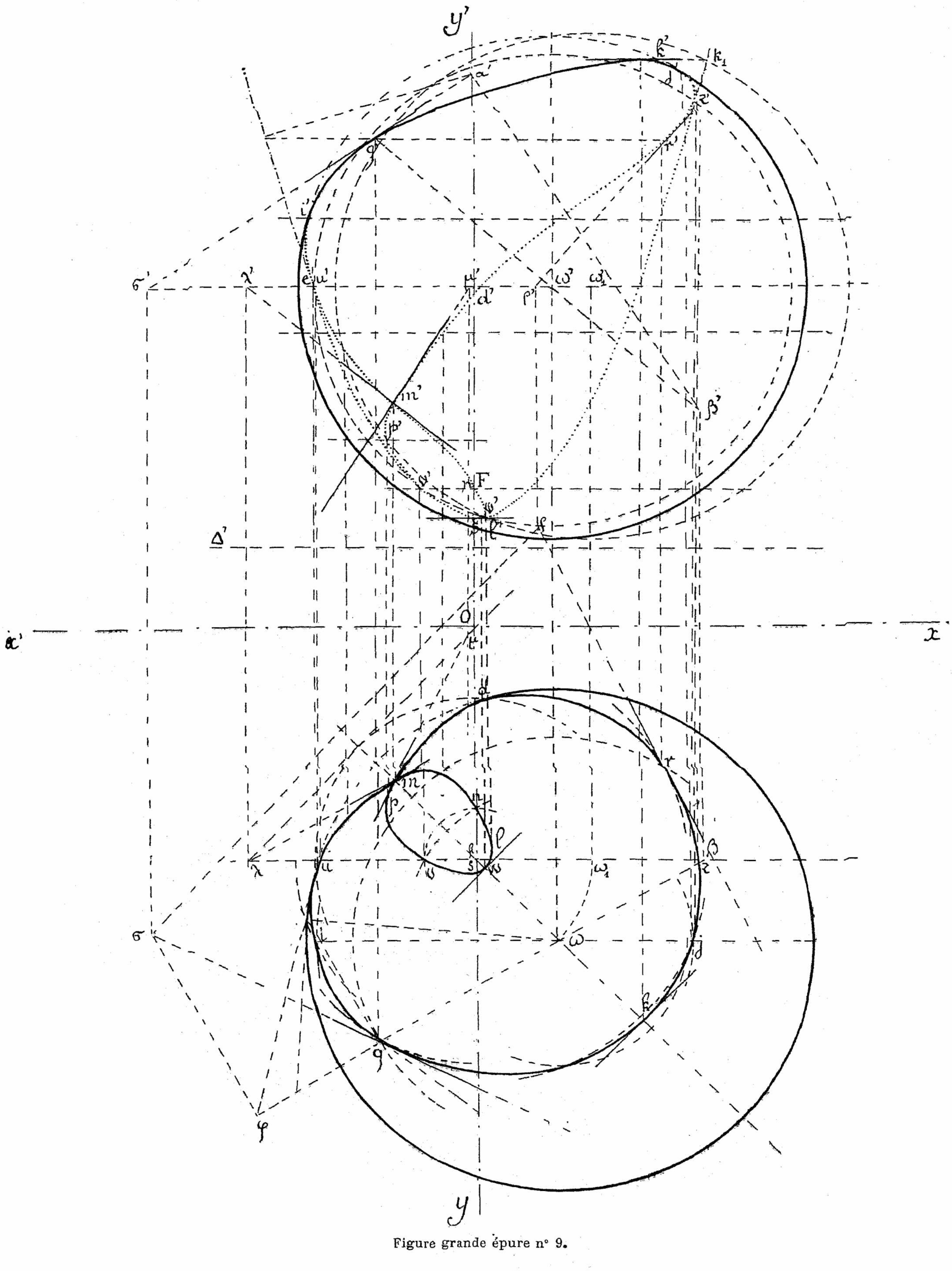


Figure grande épure n° 9.

zontaux (ce qui a été fait sur l'épure) soit en coupant par des sphères ayant leur centre sur l'axe du paraboloïde. On a déterminé les points courants Q et R et les tangentes en ces points. La tangente au point Q a été obtenue en projection verticale par la perpendiculaire à la droite de front $\alpha'\beta'$ du plan normal dans le plan de front de l'axe du paraboloïde : on a pris la trace de la tangente en Σ sur l'équateur de la sphère.

La tangente au point R a été obtenue par symétrie. On a obtenu en U, V, L, Z les points sur le contour apparent du paraboloïde en prenant l'intersection de la parabole méridienne (qui a été construite avec soin) et du cercle de section de la sphère par le plan de cette méridienne. Les points I et J sur le contour apparent vertical de la sphère ont été obtenus en cherchant par tâtonnement les plans horizontaux convenables. Les points sur le contour apparent horizontal de la sphère sont E et D. Les points le plus haut et le plus bas K et W ont été obtenus en coupant les deux surfaces par le méridien de symétrie ωM et en faisant tourner ce méridien autour de l'axe du paraboloïde jusqu'à l'amener de front. Enfin, le tracé de la courbe montre qu'il doit y avoir un point double en P. On constate en effet qu'en ce point les plans tangents aux deux surfaces sont confondus : les tangentes en P à l'intersection ont été déterminées en prenant les points communs λ et μ aux traces sur le plan horizontal W' du plan tangent en P et du cône du deuxième degré ayant P pour sommet et la biquadratique comme directrice. Cette dernière trace n'a pas été tracée sur l'épure pour n'en pas compliquer le tracé.

GRANDE ÉPURE N° 10

Paraboloïde et cône.

Énoncé :

On donne dans le plan horizontal H' une parabole par son axe qui est la droite de bout (dd') son sommet (dd') et deux points (aa') et (bb'). Un paraboloïde est engendré par cette parabole tournant autour de (dd'). D'autre part un cône de sommet (tt') est circonscrit à une sphère (OO') dont le centre est sur la droite (dd'). Représenter la partie solide du paraboloïde extérieure au cône et limitée au plan de front ab.

Texte :

Mise en place. — La parabole donnée forme contour apparent horizontal pour le paraboloïde. Pour la construire se reporter à la première partie (Grande épure, n° 18).

Méthode. — Les axes des deux surfaces se rencontrent. On fait un changement de plan horizontal en prenant pour ligne de terre $O't'$. Le plan des axes devient horizontal et l'intersection des quadriques se projette horizontalement suivant une hyperbole. On se servira de cette hyperbole. Dans la nouvelle projection la parabole de contour apparent passe par les points a_1 et b_1. La sphère inscrite vient en O_1, on a par suite le nouveau contour apparent du cône en $t'f_1$ et $t'e_1$. On a de suite 4 points c_1, e_1, f_1 h_1 de l'hyperbole. Cherchons-en les asymptotes.

Asymptotes de l'hyperbole. — Circonscrivons à la sphère O_1 le cylindre qui a mêmes points à l'infini que le paraboloïde ; les directions asymptotiques sont ij et kl. Construisons par exemple l'asymptote parallèle à kl. Il suffit d'en avoir un point. On prend le point de rencontre des diamètres des directions de cordes parallèles à kl dans la parabole et dans la conique formée de deux droites $t'f'_1$, $t'l$. Ces diamètres sont npl' et nq. Le point n étant leur point de rencontre appartient à l'asymptote, qui se trouve être ainsi déterminée.

Remarque. — Les parties de l'hyperbole extérieures aux segments c_1e_1 et f_1h_1 sont parasites.

Point courant et sa tangente. — Choisissons un point m_1 de l'hyperbole. Son parallèle m_1p_1 se projette suivant le cercle $\rho'\gamma'$. La projection m' du point se trouve sur ce cercle. En projection horizontale le parallèle se projette suivant γm. On a donc de suite la projection m.

La tangente est perpendiculaire au plan des normales aux surfaces en m. Pour avoir ces normales on se sert du cône des normales. Le sommet de ce cône pour le paraboloïde est $\delta\delta'$ et pour le cône T, $\beta\beta'$. Le plan des normales est $(m\beta\delta, m'\beta'\delta')$.

En projection horizontale la tangente sera la perpendiculaire à l'horizontale $(\lambda\mu, \lambda'\mu')$; et en projection verticale la perpendiculaire à la frontale $(\varepsilon\sigma, \varepsilon'\sigma')$.

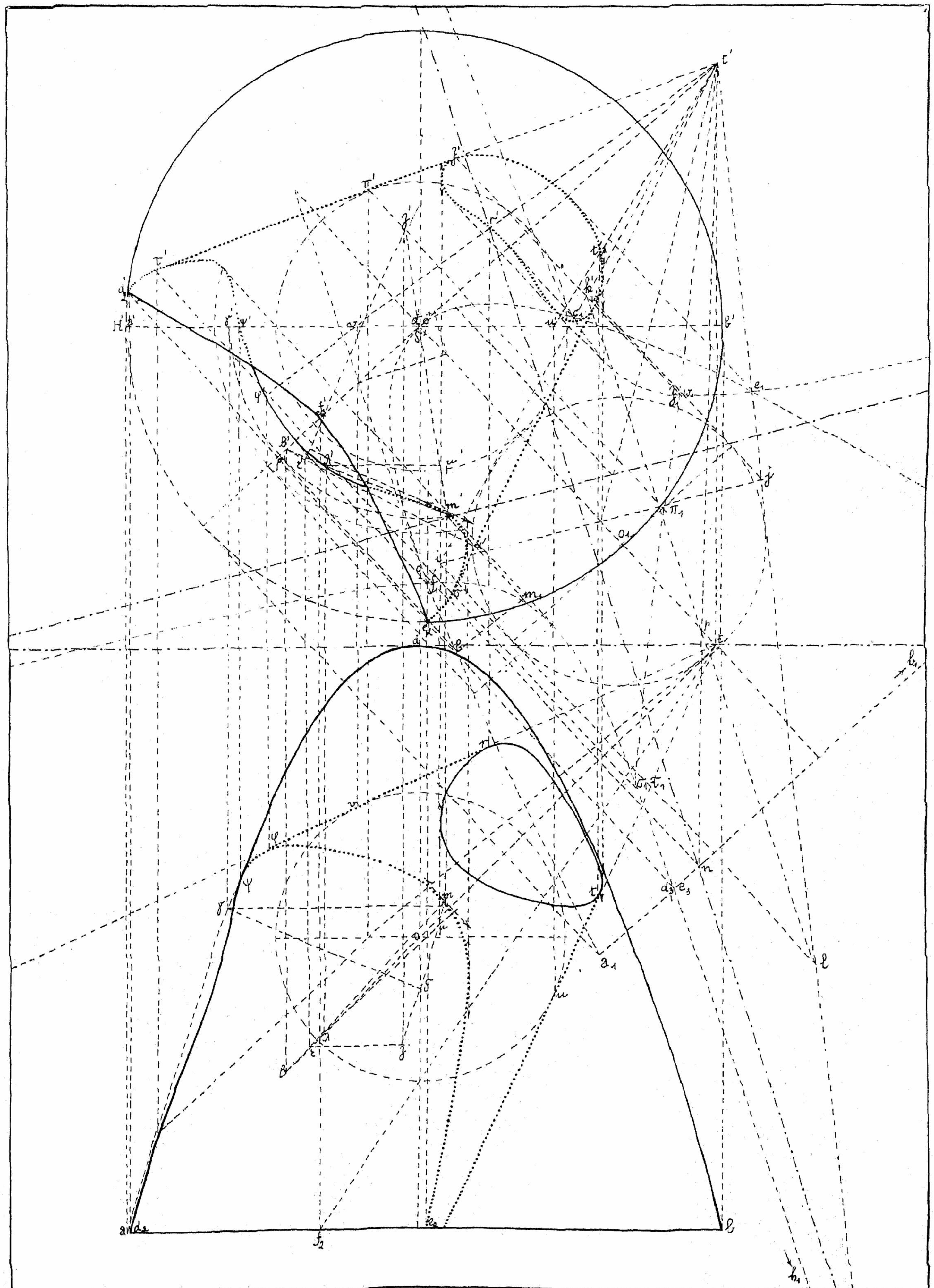


Figure grande épure n° 10.

Points remarquables. — Il y a lieu de remarquer les points $\sigma'\tau'\zeta'\omega'$ situés sur le contour apparent vertical du cône. On les obtient à l'aide de la projection auxiliaire en t' des génératrices de contour.

En projection horizontale on a de suite le point $(\Psi\Psi')$ situé dans le plan horizontal H'. Les points $(\varphi\varphi')$ (rr') (tt') sont obtenus à l'aide des génératrices $(tv, t'v')$, $(tu, t'u')$.

Hyperbole de section du cône T. — Il faut marquer une branche de cette hyperbole, section du cône par le plan de front ab. On en a des points en prenant l'intersection des génératrices du cône avec ce plan. On a cherché le sommet en $(f_2 f'_2)$ et l'on possède déjà les points (aa') et (bb'),

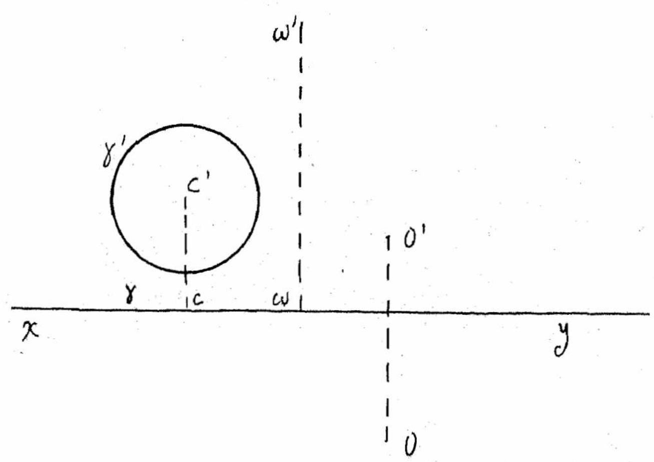
Ponctuation. — En projection verticale le plan de front ab cache tout ce qui n'est pas découvert par l'hyperbole.

GRANDE ÉPURE N° 11

Tore et sphère.

Énoncé :

Le tore est engendré par la rotation du cercle vertical $\gamma\gamma'$ autour de la verticale de ω. La sphère, tangente au plan vertical et au plan supérieur de contour appa-



rent vertical du tore, a pour centre le point OO'. Représenter le tore, supposé plein et limité par le plan vertical, entaillé par la sphère.

Texte :

Mise en place : — On obtient immédiatement les contours apparents des deux surfaces.

Méthode. — On prend pour plans auxiliaires des plans horizontaux qui coupent le tore et la sphère suivant des cercles de centre ω et O.

Point courant et sa tangente. — Considérons le plan auxiliaire de trace H'. Il coupe le tore suivant deux cercles de centre ω et la sphère suivant un cercle de centre O : d'où quatre points de l'intersection. Considérons en particulier le point M et cherchons la tangente en ce point. Le plan tangent au tore en M est défini par la tangente au parallèle et la tangente au cercle méridien du point M. Si par rotation nous amenons le plan vertical ωm à être de front, la tangente au parallèle devient la droite de bout du point m'_1, la tangente au cercle méridien devient la tangente en m'_1 au cercle c'_1. Cette dernière tangente a pour trace horizontale le point α_1 et la trace du plan tangent au tore après rotation est la droite de bout de ce point α_1. Par la rotation inverse, elle vient en αt. Déterminons le plan tangent en M à la sphère. La frontale de ce plan se projette verticalement en $m'\theta'$ perpendiculairement au rayon $O'm'$; sa trace est le point $\theta — \theta'$, la trace horizontale du plan tangent passera par ce point et sera perpendiculaire à Om, d'où θt qui rencontre αt au point t, qui se rappelle en t'. D'où les tangentes tm et $t'm'$.

Remarquons que le plan vertical de trace ωO étant plan de symétrie pour les deux surfaces, la projection horizontale de l'intersection sera symétrique par rapport à ωO.

Points sur les contours apparents. — Le plan horizontal du point O' nous donne les points A, B, D, E, sur le contour apparent horizontal de la sphère. Le plan horizontal des points G et G_1, de trace verticale $C'C'_1$ nous donne les points F, G, H, I sur les contours apparents horizontaux du tore. Enfin le plan horizontal de trace K' nous donne les points J et K sur le contour apparent vertical du tore.

Points remarquables. — Ce sont les points situés dans le plan de symétrie ωO ; en ces points la tangente est horizontale. Par rotation amenons le plan de symétrie à être de front. Le contour apparent vertical de la sphère est un cercle de centre O'_1, Le cercle méridien situé dans le plan vertical ωO coïncide avec le cercle C'_1. Les cercles O_1 et C'_1 se rencontrent aux points l'_1 et n'_1 qui, par la rotation inverse, nous donnent l' et n', qui se rappellent en l et n.

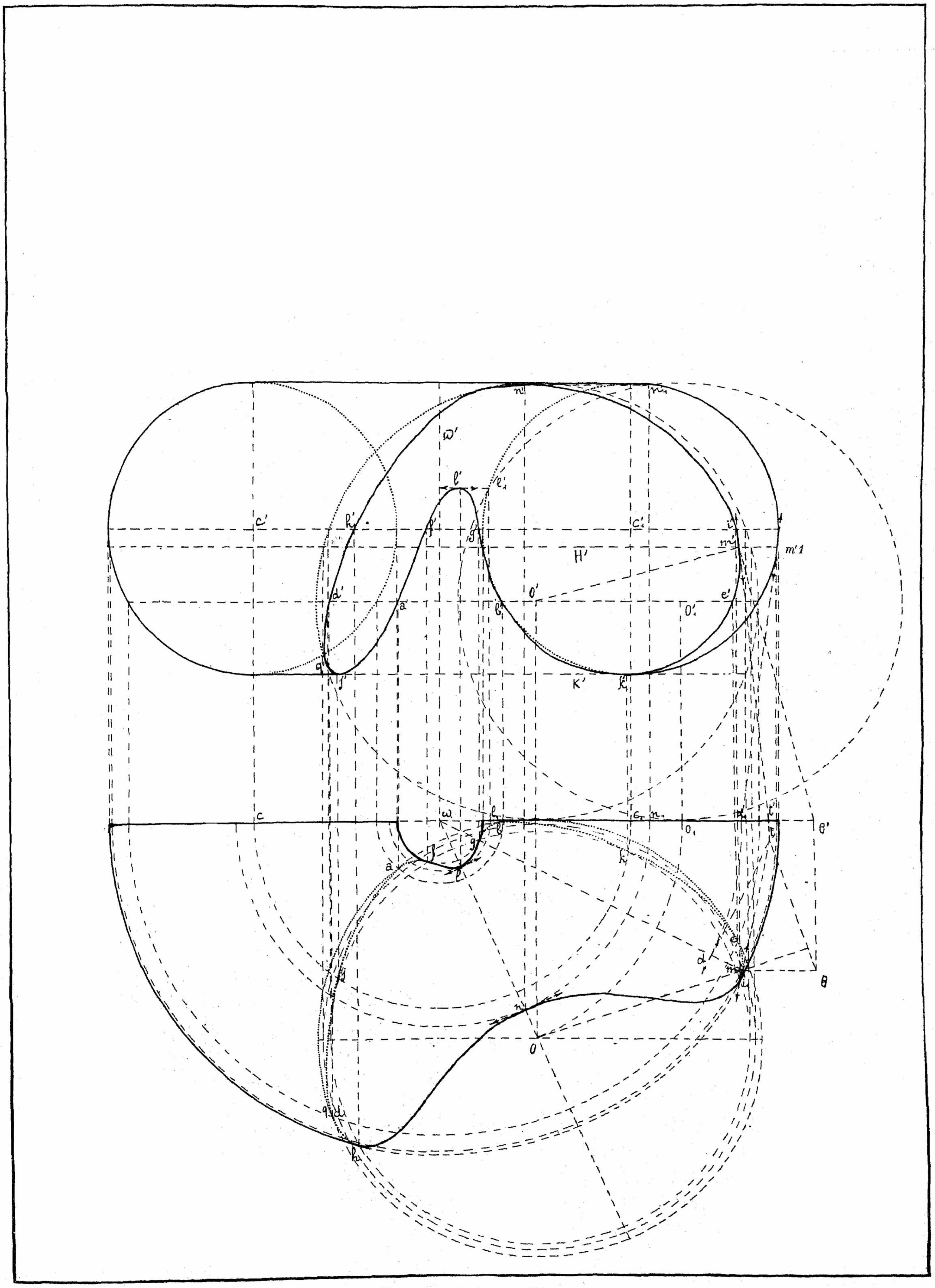


Figure grande épure n° 11.

Ponctuation. — On veut représenter le tore entaillé par la sphère. Pour cela on ponctue la courbe sur le tore : en projection horizontale sont vus les arcs *hni* et *flg* et en projection verticale l'arc $j'd'h'n'i'e'k'$. Puis on garde des contours apparents du tore les parties extérieures à la sphère et on enlève les parties intérieures. Donc en projection horizontale, on enlève les arcs *fg* et *hi*; en projection verticale on enlève $j'k'$.

On enlève des contours apparents de la sphère les parties extérieures au tore et garde les parties intérieures : ici, on garde les arcs *ad* et *be* en projection horizontale et l'arc $q'r'$ en projection verticale. Enfin, on reponctue la courbe : en projection verticale l'arc $j'l'k'$, d'abord caché, est vu maintenant.

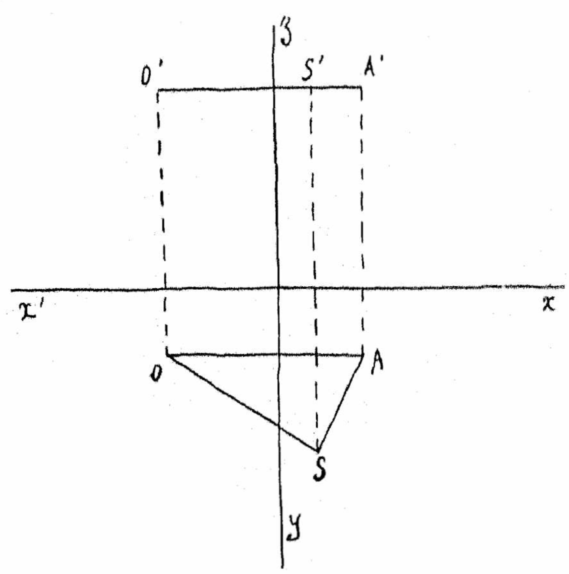
GRANDE ÉPURE N° 12

Intersection d'un cône et d'un tore.

Énoncé :

On donne un triangle SOA. Le point SS' est le point $x=2$, $y=10$, $z=10$. Le point OO' est le point $x=-6$, $y=4$, $z=10$. Le point AA' est le point $x=4$, $y=4$, $z=10$.

Le point SS' est le sommet d'un cône admettant pour



plan principal le plan horizontal du point S', pour axe de symétrie la droite SO — S'O', comme génératrice principale SA — S'A', et pour base dans le plan de front OA une certaine circonférence CC' qui est déterminée. On considère d'autre part le tore engendré par CC' tournant autour de la verticale du point O.

Représenter le solide commun au tore et au cône.

Texte :

Mise en place. — Déterminons d'abord le cercle CC'. Puisque le plan horizontal du point S' est un plan principal pour le cône, le centre CC' du cercle sera dans ce plan, donc sur OA — O'A'. On connaît un premier point de ce cercle, le point AA' trace sur le plan de front OA de la génératrice SA — S'A'. On en obtient immédiatement un second point BB' en considérant la génératrice SB — S'B' symétrique de SA — S'A' par rapport à l'axe de symétrie du cône. D'où le cercle de centre ω — ω', de diamètre A'B'. Connaissant ce cercle, on a immédiatement les contours apparents des deux surfaces.

Méthode. — Le cercle CC' est commun aux deux surfaces et comme le plan vertical OS est plan de symétrie pour le tore et pour le cône, ces deux surfaces auront en commun le second cercle $C_1C'_1$, symétrique du premier par rapport à ce plan.

Le reste de l'intersection sera donc une courbe du quatrième degré. Mais le plan horizontal du point S' étant plan de symétrie commun, l'intersection se projettera horizontalement suivant une courbe du second degré : une ellipse, puisque l'intersection n'a pas de points à l'infini réel.

Pour obtenir des points de l'intersection, on emploiera des sphères auxiliaires passant par le cercle *cc'* et qui couperont cône et tore suivant d'autres cercles.

Point courant et sa tangente. — Considérons la sphère auxiliaire de centre $\alpha\alpha'$ sur la verticale du point ω'. Elle coupe le tore suivant un cercle projeté horizontalement en *fg*. Ces deux droites se rencontrent en *m* qui est la projection horizontale de deux points de l'intersection. Pour les relever, considérons la verticale du point *m*, elle rencontre en m' et en m'_1 les parallèles du tore projetés suivant le cercle de centre O, de rayon O*m*. D'où les points mm', m_1, m'_1. On obtiendra la tangente en mm' par la méthode ordinaire.

Points sur les contours apparents. — On a obtenu en déterminant les contours apparents horizontaux des deux surfaces six points de l'intersection AA', BB, hh',

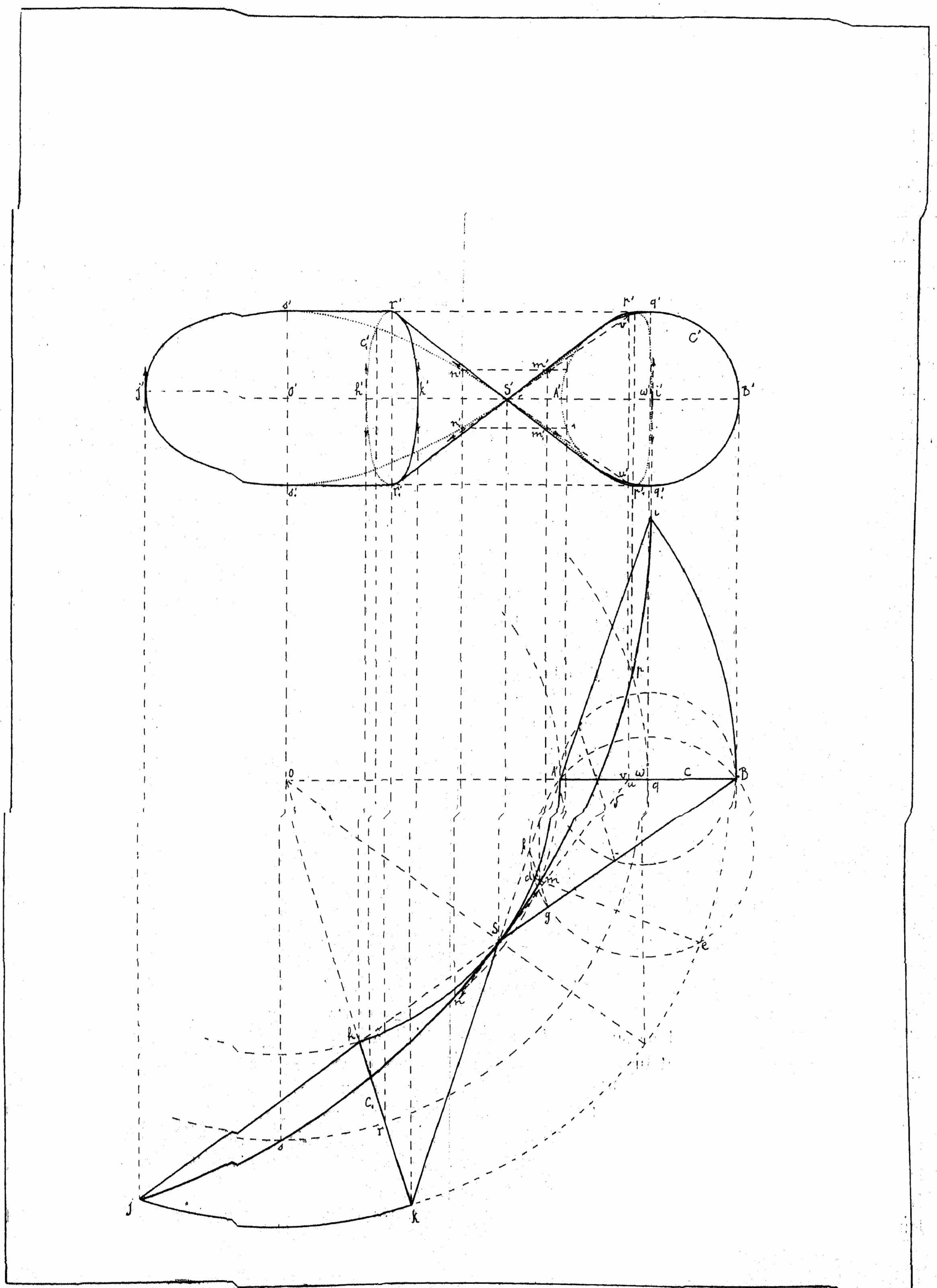


Figure grande épure n° 12.

kk', ii', jj'. Les points sur le contour apparent vertical du tore ne s'obtiennent qu'approximativement en partant des points de rencontre, p, q, r, s de la projection horizontale de l'intersection avec la projection horizontale du contour apparent vertical du tore.

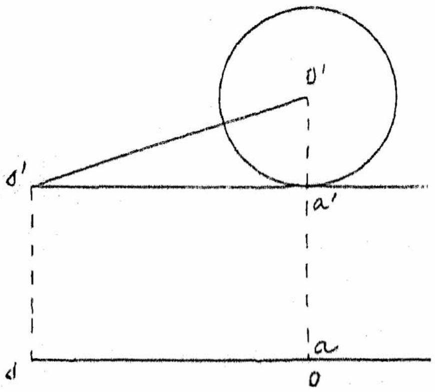
Point double. — Le sommet du cône étant sur le tore est un point double de l'intersection. Les tangentes en ce point sont les génératrices d'intersection du cône et du plan tangent en S au tore. Le plan tangent en S au tore étant le plan vertical de trace $S\delta$, la tangente en S sera $S\delta$ et en S' il y aura deux tangentes $u'S'$ et $v'S'$ symétriques par rapport à $S'A'$.

Ponctuation. — La représentation du solide commun est immédiate.

GRANDE ÉPURE N° 13

Énoncé :

On donne un cercle de centre $O - O'$ dans un plan de front et considère le cône engendré par la rotation de ce cercle autour de la tangente en son point le plus bas aa'. Sur l'axe du tore on prend un point ss'; la droite $sa - s'a'$ en tournant autour de $so - s'o'$ engendre un cône.



Représenter le solide commun au tore et au cône.

Texte :

Mise en place. — On a immédiatement les contours apparents des deux surfaces.

Méthode. — On a affaire à deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent au point ss', on prendra donc pour surfaces auxiliaires des sphères de centre ss'.

Remarque. — Les deux surfaces sont circonscrites à la sphère ayant pour grand cercle le cercle OO', le tore le long de ce cercle et le cône le long du parallèle $a'b'$. Les points A et B seront donc des points doubles de leur intersection.

Point courant et sa tangente. — Considérons la sphère auxiliaire de rayon $s'c'$. Elle coupe le cône suivant un cercle dont le plan qui est de bout a pour trace $c'd'$. Elle coupe le tore suivant deux parallèles dont les plans de bout ont pour trace les perpendiculaires abaissées de f' et e' sur $s'a'$.

Considérons le parallèle du tore passant par f'. Les plans de bout du parallèle du cône et de celui du tore se coupent suivant la droite de bout du point n', n' est la projection verticale de deux points de l'intersection. Il faut donc chercher l'intersection de cette droite de bout du point n' avec le tore ou plus simplement avec la sphère de rayon $s'c'$. Pour cela coupons cette sphère par le plan horizontal de trace verticale $n'g'$; cette intersection se projette horizontalement suivant un cercle de centre s, de rayon sg, d'où les points n et n_1. On obtient de même le point m' rappelé horizontalement en m et m_1. Cherchons la tangente en M. Elle est perpendiculaire au plan des normales en ce point. La normale au cône est $mh - m'h'$. La normale au tore est $mi - m'i'$. Une horizontale de ce plan est la droite $ij - i'j'$, d'où la tangente mo en m perpendiculaire à ij.

Une frontale de ce plan est $hi - h'i'$, d'où $m'0'$ perpendiculaire à $i'h'$.

Points sur les contours apparents. — Les sphères de rayon $s'k'$ et $s'l'$ nous donnent les points P et P_1, Q et Q_1 sur les contours apparents du tore. Sur le contour apparent vertical du cône on a les points a' et b'. Cherchons les points sur le contour apparent horizontal. Pour cela rabattons sur le plan horizontal le plan passant par so et l'une des génératrices de contour apparent horizontal du cône : la génératrice $s\alpha$ par exemple qui a pour projection verticale $s'\alpha'$. Elle se rabat en $s\beta_2$ qui rencontre le cercle O_2, rabattement de la section du tore par ce même plan, aux points r_2 et u_2 relevés en $r - r_1$, $u - u_1$ sur le contour apparent horizontal.

Points remarquables. — Les sphères limites de rayon $s'\gamma'$ et $s'\delta'$ nous donnent les points $V - V_1$, $W - W_1$.

Ponctuation. — Pour représenter le solide commun aux deux surfaces :

1° On ponctue provisoirement la courbe sur le cône par exemple. Elle est vue tout entière en projection verticale. En projection horizontale les arcs $r\mu bm_1u_1$ et $r_1\mu_1bmu$ sont seuls vus ;

2° On conserve des contours apparents de chaque

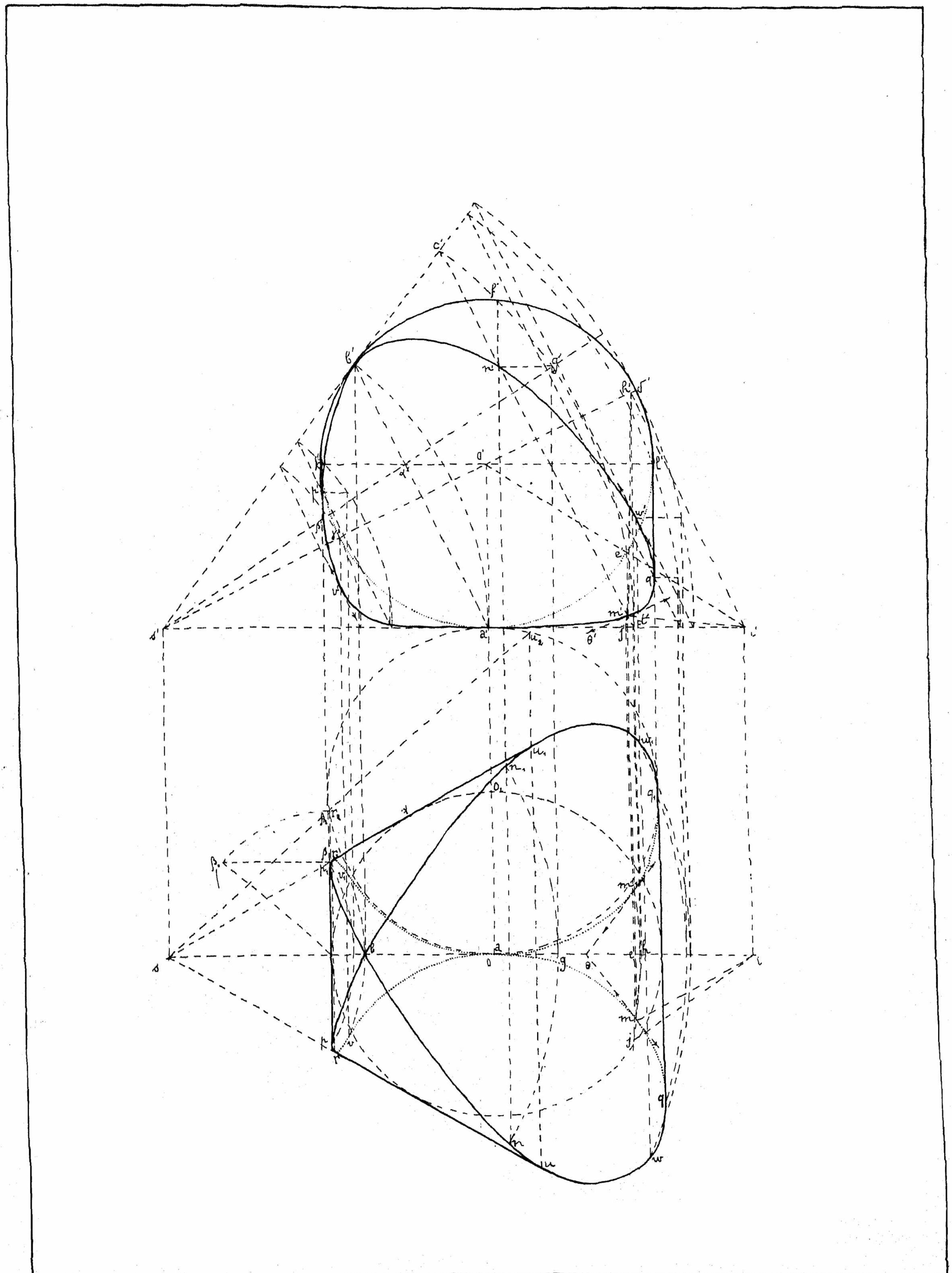


Figure grande épure n° 13.

corps les parties intérieures à l'autre et on enlève les parties extérieures ; puis on ponctue ces contours apparents ;

3° Enfin on corrige la ponctuation primitive de la courbe. Les arcs $u\omega q$ et $u_1\omega_1 q_1$ sont vus en projection horizontale.

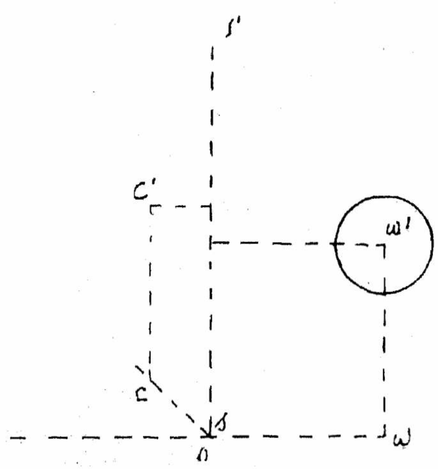
GRANDE ÉPURE N° 14

(École Polytechnique 1895.)

Énoncé :

Un tore d'axe vertical a pour centre le point OO'.

Le cercle méridien a pour rayon 2,8 et son centre est à 6,8 de l'axe du tore. Une sphère ayant 2,4 de rayon touche l'axe du tore à 4 au-dessus du centre de celui-ci. En projection horizontale, le centre c de cette sphère est sur la bissectrice de l'angle des deux droites OO' et ωO, l'une de front vers la gauche, l'autre de bout vers le haut. A cette sphère on circonscrit un cône dont le sommet est sur l'axe du tore à 9,3 au-dessus du centre de celui-ci. Représenter le solide commun.



Texte :

Mise en place. — On obtient immédiatement les contours apparents horizontal et vertical du tore, ainsi que le contour apparent vertical du cône formé par les génératrices sa — $s'a'$, sb — $s'b'$.

Méthode. — Les axes des deux surfaces se rencontrant au point ss', on prendra pour surfaces auxiliaires des sphères de centre ss'.

Point courant et sa tangente. — Considérons une sphère auxiliaire quelconque, celle de rayon $s'\alpha_0$ par exemple. Les plans des deux parallèles découpés sur les deux surfaces par cette sphère se rencontrent suivant une certaine droite. Ces plans étant respectivement perpendiculaires aux axes du tore et du cône, le plan de l'un des parallèles découpés sur le tore est le plan horizontal du point α_0 et le plan du parallèle découpé sur le cône est le plan perpendiculaire à l'axe du cône mené par le point α_0. Cette droite sera facile à obtenir, si par une rotation de 45° du cône autour de la verticale $s'o'$ nous amenons l'axe sc — $s'c'$ du cône à être de front. Le plan du parallèle du cône est alors le plan de bout $\alpha_0\alpha_2$, qui coupe le plan horizontal du parallèle du tore suivant la droite de bout du point $\alpha_1\alpha'_1$. Par une rotation inverse de 45° la projection horizontale $\alpha_1\alpha'_1$ de cette droite devient αm qui rencontre la projection horizontale du parallèle du tore aux deux points m et m_1, qui se rappellent en m' et m'_1. On voit que la projection horizontale est symétrique par rapport à sc.

Cherchons la tangente en m — m'. Elle est perpendiculaire au plan des normales en M. La normale du tore est $m\pi$ — $m'\pi'$, la normale au cône est $m\theta$ — $m'\theta'$. Une horizontale de ce plan est la droite $\mu\nu$ — $\mu'\nu'$, d'où en projection horizontale la tangente mt perpendiculaire à $\mu\nu$. Une frontale du plan des normales est $\mu\tau$ — $\mu'\tau'$ et la tangente en m' est perpendiculaire à $\mu'\tau'$.

Points sur les contours apparents du tore. — Les sphères de rayon $s'\beta_0$ et $s'\gamma_0$ nous donnent les points E et E_1, F et F_1 sur le contour apparent vertical. Les sphères de rayon $s'd_0$ et $s'\varepsilon_0$ nous donnent les points G et G_1, H et H_1 sur le contour apparent horizontal.

Points remarquables. — Ce sont les points I et I_1, J et J_1 donnés par les sphères limites de rayons $s'\varphi_0$ et $s'\lambda_0$.

On peut aussi chercher les points où la tangente est horizontale : ce sont les points L et K situés dans le plan vertical sc.

On obtient approximativement en projection verticale les points sur le contour apparent vertical du cône en relevant les points de rencontre de sa et sb avec la projection horizontale de la courbe. D'où q' et p'.

Ponctuation. — Pour représenter le solide commun :

1° On ponctue provisoirement la courbe sur le cône : en projection horizontale elle est vue tout entière ; en projection verticale l'arc $p'i'_1g'_1m'_1f'_1h'_1n'$ est seul vu.

2° On conserve des contours apparents de chaque corps, les parties intérieures à l'autre, on enlève les parties extérieures et on ponctue ces contours apparents.

3° On corrige la ponctuation de la courbe dont l'arc $e'i'g'm'f'$ est vu maintenant.

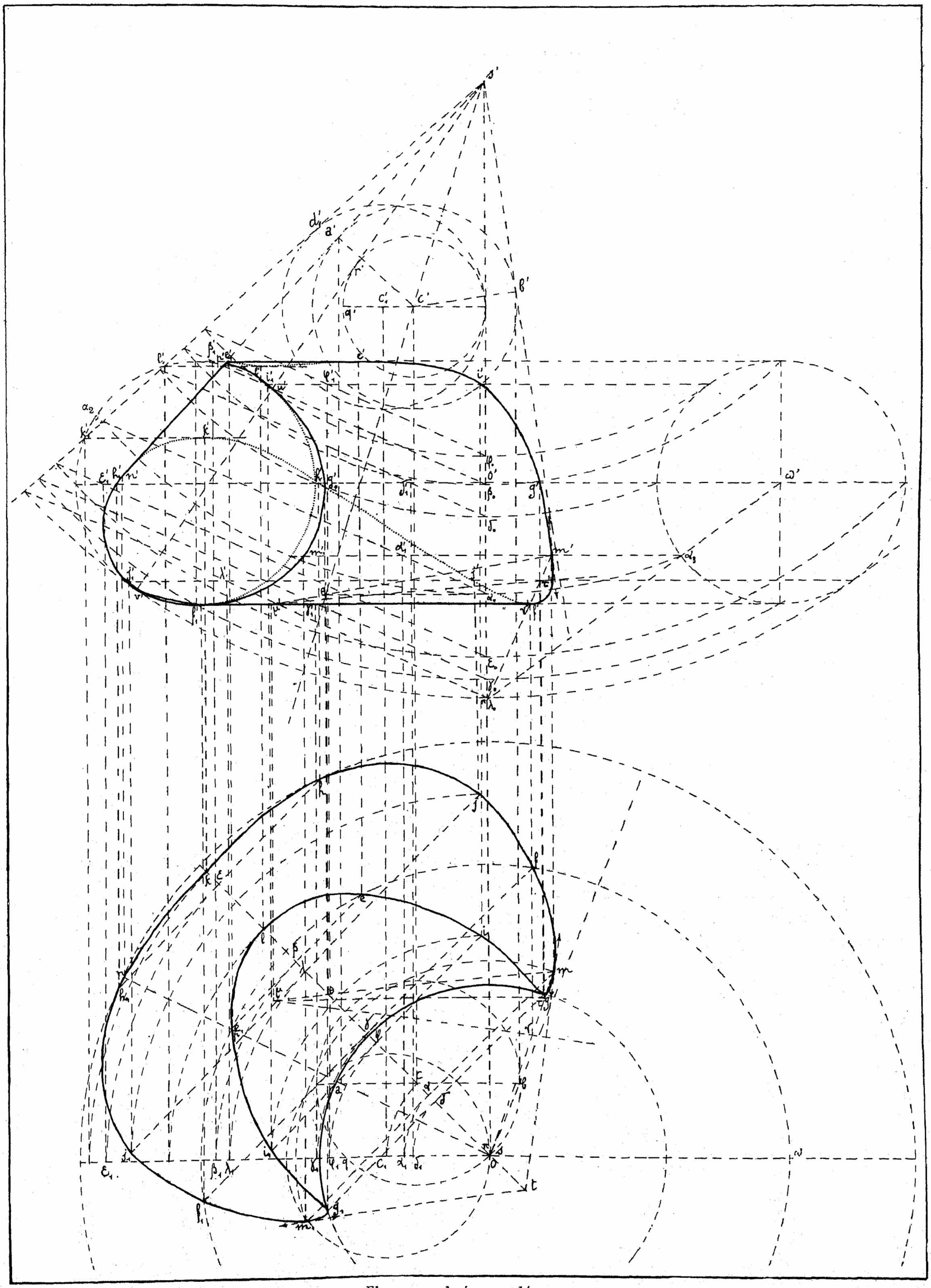


Figure grande épure n° 14.

ÉCOLE NATIONALE DES BEAUX-ARTS

SECTION D'ARCHITECTURE

CONCOURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

SESSION DE MARS 1914

ÉPURE A FAIRE EN LOGES, LE 7 MARS 1914, EN 5 HEURES

(FEUILLE DEMI GRAND AIGLE)

NOTA. — Pour toutes ces épures, les rayons lumineux sont les rayons usuels à 45°.

PREMIÈRE PARTIE

Étant donné un cône de révolution dont la base est dans le plan horizontal :

1° Déterminer l'intersection du cône de révolution par le plan de bout sécant $P\alpha Q'$, dont la trace verticale $\alpha Q'$ est parallèle à la génératrice $A'S'$ de contour apparent vertical. Rechercher le foyer et la directrice de cette intersection ;

2° Ayant conservé la partie du cône située entre le plan sécant et le plan horizontal, en rechercher les ombres propres ainsi que l'ombre portée sur le plan horizontal ;

3° Indiquer la nature de la courbe d'ombre portée et effectuer la construction de la tangente au sommet.

Données :

Rayon de la base du cône : 0 m. 055 ;

Hauteur du cône : 0 m. 090 ;

Longueur de $\alpha O'$: 0 m. 025 ,

Distance de l'axe du cône au plan vertical : 0 m. 090 ;

Distance de l'axe du cône au bord gauche du cadre : 0 m. 085.

DEUXIÈME PARTIE

Étant donné un cube ayant une diagonale verticale et reposant sur le plan horizontal :

1° Représenter ce cube, sachant qu'il est orienté de telle sorte qu'une de ses arêtes fasse un angle donné avec le mur en se dirigeant dans la direction de $a'\Delta'$ et $a\Delta$;

2° Déterminer les ombres propres et les ombres portées sur les plans de projection.

Données :

Hauteur de la diagonale : 0 m. 120 ;

Distance de cette diagonale au plan vertical : 0 m. 070 ;

Angle donné : 40 degrés ;

Distance de la diagonale du cube au bord droit du cadre : 0 m. 185.

TROISIÈME PARTIE

Étant donné un cylindre de révolution à axe fronto-horizontal :

1° Déterminer l'ombre portée sur la partie conservée du cône ;

2° Déterminer l'ombre portée sur le cube ;

3° Déterminer l'ombre portée sur le plan horizontal ;

Données :

Diamètre du cylindre : 0 m. 020 ;

Longueur du cylindre : 0 m. 285 ;

Distance de l'axe au plan horizontal : 0 m. 140 ;

Distance de l'axe au plan vertical : 0 m. 160.

Une extrémité du cylindre est confondue avec le bord gauche du cadre.

Le cadre aura pour dimensions 0 m. 34 de hauteur et 0 m. 47 de longueur.

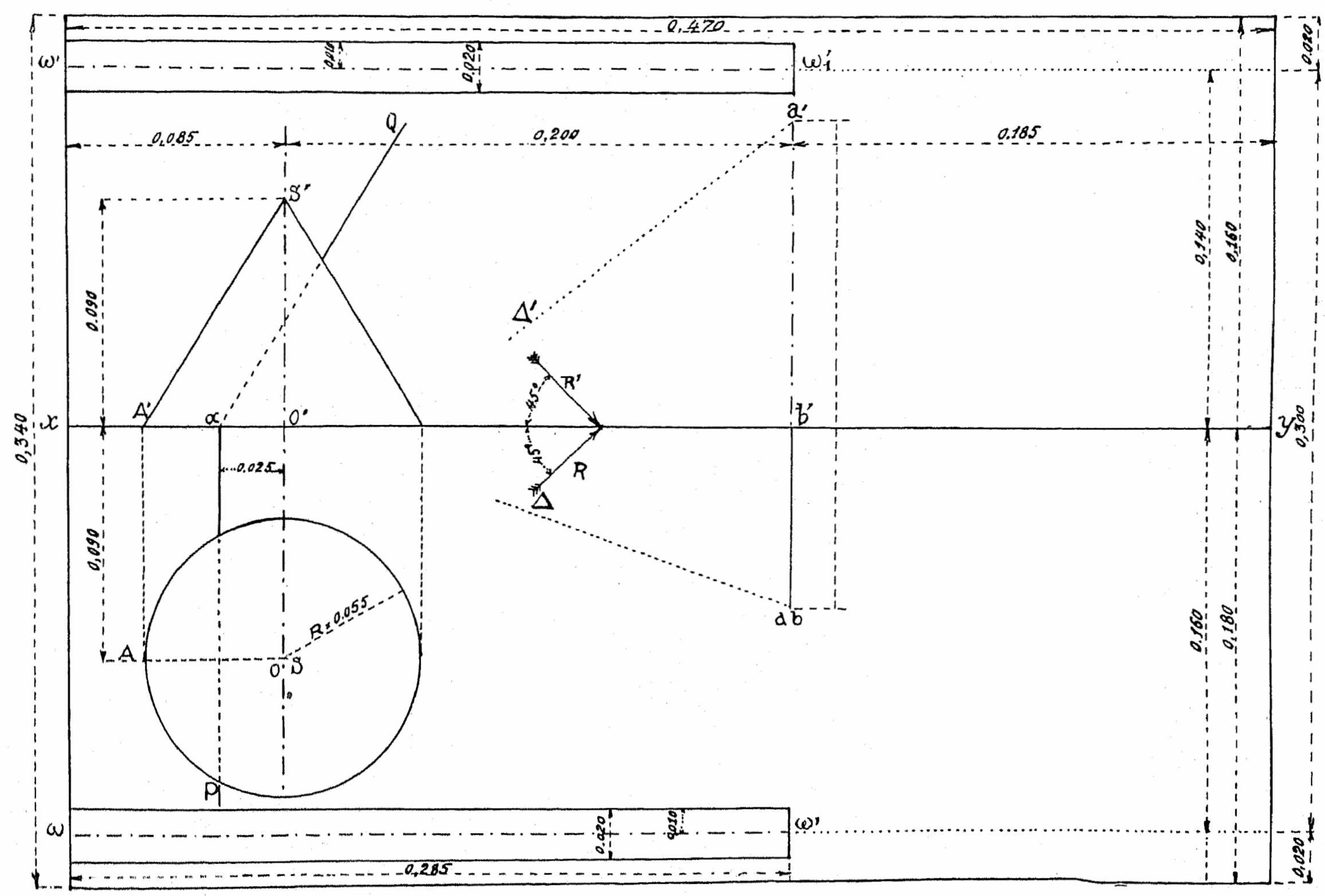
Nota. — Il sera attribué quatre notes :

1° Une pour le cône ;

2° Une pour le cube ;

3° Une pour le cylindre ;

4° Une pour l'exécution graphique de l'épure.



Exécution graphique.

Pour les traits, se conformer aux conventions usuelles :

Trait continu noir pour les parties existantes et vues ;

Trait pointillé noir pour les parties existantes et cachées ;

Trait mixte noir pour les parties enlevées et par suite non représentées ;

Trait rouge continu pour les constructions autres que les ombres ;

Trait bleu continu pour les ombres, les parties dans l'ombre étant hachurées, l'espace entre les hachures étant de 1 mm. 5.

Il sera tenu le plus grand compte de la précision des constructions et de la clarté de l'épure : on peut faire un emploi modéré de lettres bien choisies et bien écrites.

Paris, le 5 février 1914.

Raoul Brandon.

TROISIÈME PARTIE

SURFACES RÉGLÉES ET SURFACES HÉLICOÏDALES

PREMIÈRE SECTION

SURFACES RÉGLÉES DU DEUXIÈME DEGRÉ

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS. — HYPERBOLOÏDES

GÉNÉRALITÉS

On appelle *surface réglée* une surface qu'on peut engendrer par le déplacement convenable d'une droite. Les différentes positions de cette droite variable constituent les *génératrices* de la surface. Le mouvement de cette droite doit être défini par des conditions précises. Si nous remarquons qu'une droite dépend dans l'espace de *quatre* paramètres, nous voyons qu'on devra donner *trois conditions de guidage* pour que la génératrice décrive une surface. Ordinairement ces conditions sont d'être tangentes à une surface ou de rencontrer une ligne. La surface à laquelle les génératrices doivent rester tangentes s'appelle un *noyau* de la surface réglée ; la ligne sur laquelle doivent s'appuyer toutes les génératrices s'appelle une *directrice*. Il résulte de ce qui précède qu'une surface réglée sera déterminée par : 1° 3 noyaux, ou 2° 2 noyaux, 1 directrice ; ou 3° un noyau, 2 directrices ; ou 4° 3 directrices.

Ainsi pour les surfaces réglées du *deuxième degré* on peut choisir pour directrices trois droites : si ces trois droites ne sont pas dans un même plan deux à deux, ni parallèles toutes trois à un même plan on obtient la surface nommée *hyperboloïde à une nappe :* si les directrices rectilignes, tout en étant toujours non dans un même plan deux à deux sont toutes trois parallèles à un même plan, on obtient la surface nommée *paraboloïde hyperbolique*.

On démontre qu'*en dehors des cônes et cylindres*, il n'existe pas d'autres surfaces réglées du 2ᵉ degré que les hyperboloïdes à une nappe et les paraboloïdes hyperboliques.

On peut prendre pour une des directrices de la surface la courbe de cette surface située à l'infini, courbe qui est la même que la courbe à l'infini du cône lieu des parallèles aux génératrices de la surface menée par un point : ce cône se nomme *cône directeur* de la surface : il peut d'ailleurs se décomposer en plans qu'on nomme *plans directeurs :* c'est ainsi que le paraboloïde hyperbolique n'admet pas un cône directeur, mais *deux plans* directeurs, les génératrices de la surface étant parallèles à l'un ou l'autre de ces deux plans.

Il existe au contraire un cône directeur pour l'hyperboloïde à une nappe dont le sommet peut être pris en un point quelconque de l'espace : Pour un point *particulier* nommé *centre* de la surface, le cône directeur possède non seulement même courbe à l'infini que la surface, mais est encore tangent à la surface tout le long de la ligne à l'infini, on dit alors qu'on a affaire au *cône asymptote* de la surface : Ces cônes sont évidemment du second degré comme la surface puisque leur section par le plan de l'infini est une conique : celle de section de la surface par le même plan.

Un cas particulier de l'hyperboloïde à une nappe est la surface gauche de révolution dont il a été déjà parlé et que nous allons étudier à nouveau en détail.

HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION A UNE NAPPE

On nomme ainsi la surface engendrée par une droite D tournant autour d'une autre droite $x\ y$ non située dans un même plan.

Considérons alors la perpendiculaire commune AB à la droite D et à l'axe XY (fig. 159). Cette perpen-

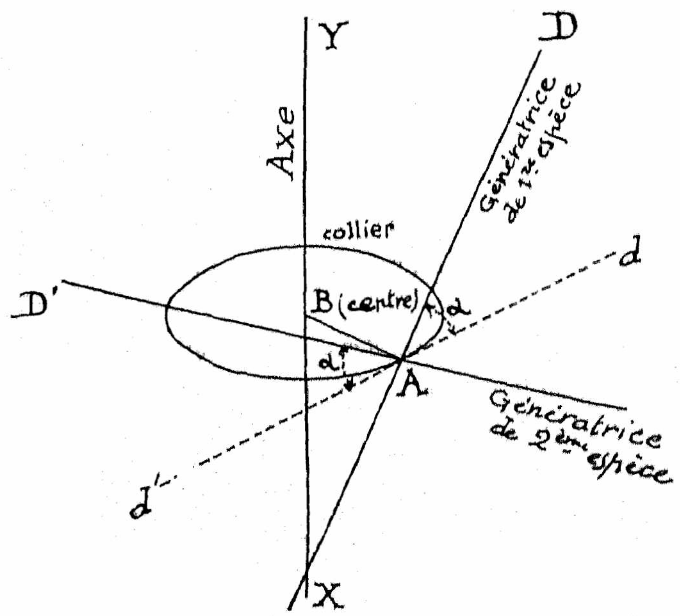


Fig. 159.

diculaire décrit dans la révolution de la droite D le cercle de gorge de la surface et la projection de D sur le plan de ce cercle est toujours tangente dans toutes ses positions au cercle de gorge. Appelons α l'angle que fait la droite D avec le plan du cercle de gorge et considérons une droite D′ menée par A projetée également suivant la tangente au cercle de gorge et faisant également un angle α avec le plan du cercle de gorge : il est bien évident qu'en faisant tourner D′ autour de XY on engendre la surface engendrée déjà par D, ce qui met en évidence sur l'hyperboloïde l'existence d'un *double système de génératrices rectilignes*. Une étude un peu plus approfondie, quoique très simple, montre de même immédiatement qu'une génératrice d'un système ne rencontre aucune génératrice du même système qu'elle et rencontre toutes les génératrices de l'autre système (fig. 159).

En un point de la surface passent deux génératrices de système différent : l'ensemble de ces deux génératrices définit donc (1re partie, section III) le plan tangent à la surface en ce point.

Les méridiennes de la surface sont des hyperboles admettant XY pour axe non transverse, B pour centre et BA pour 1/2 axe transverse (voir 2e partie, section I). Il résulte de la construction même de la surface que le point B est un centre de symétrie pour la surface, le plan du collier étant évidemment par suite de l'existence du double système de génératrices un plan de symétrie.

Les cônes directeurs sont évidemment de révolution : celui dont le sommet est B est le cône asymptote, les deux génératrices de ce cône situées dans un plan méridien sont les asymptotes de la méridienne située dans ce plan.

Les contours apparents de la surface sont *elliptiques ou hyperboliques* selon que le cône asymptote *n'a pas ou a* lui-même un contour apparent.

Si l'axe XY est vertical, le contour horizontal est la projection du collier et le contour apparent vertical la projection de la méridienne de front. Mêmes résultats, inversés, si l'axe XY était de bout.

Nous allons maintenant résoudre différents problèmes sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est vertical.

PROBLÈME I. — *Étant donnée la projection horizontale m d'un point M, déterminer la projection verticale de ce point* (fig. 160).

L'hyperboloïde de révolution donnera deux points à moins que le point m soit sur le collier. On ramène le point m sur une génératrice de front, ce point se déplace suivant un parallèle de l'hyperboloïde de révolution et m vient occuper les positions p et q sur la génératrice donnée. Soient p' et q' les projections verticales de p et de q.

Il suffit de ramener p' et q' par des parallèles à xy

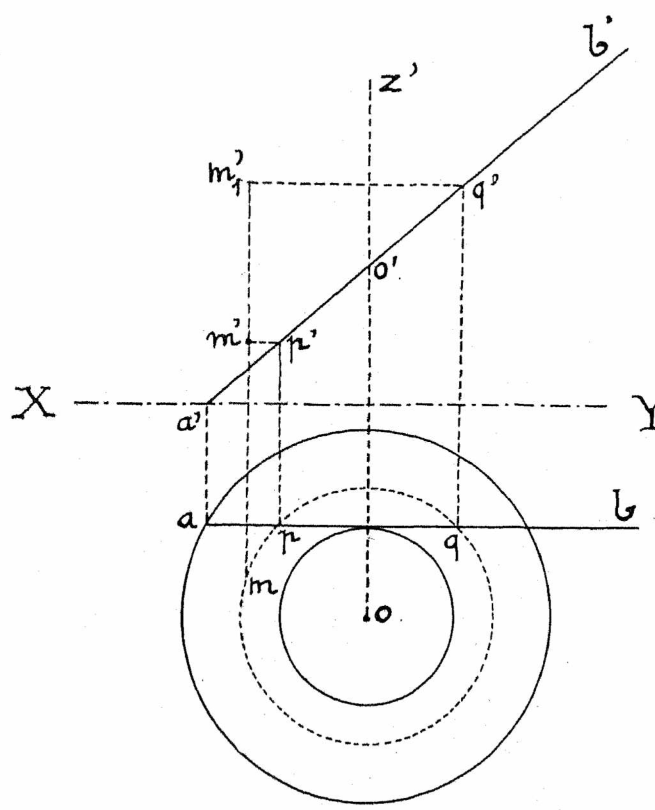


Fig. 160.

sur la ligne de rappel menée de m pour avoir en m' et m'_1, les projections verticales cherchées.

PROBLÈME II. — *Étant donnée la projection verticale*

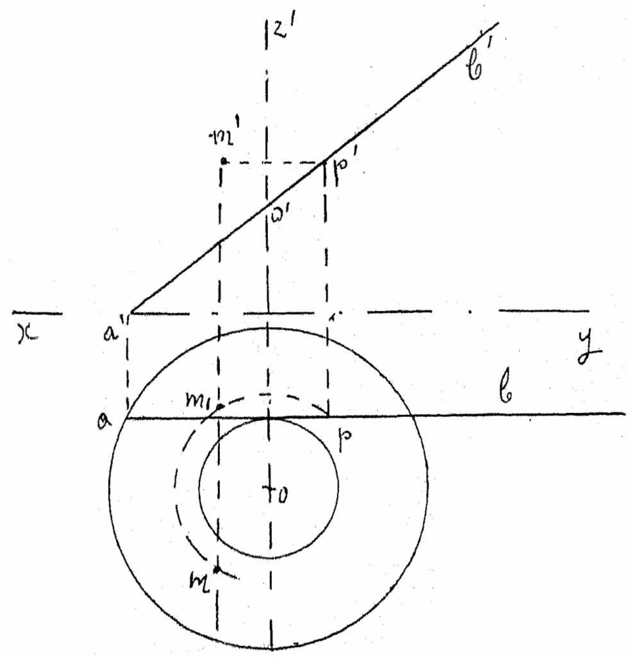


Fig. 161.

m' d'un point M trouver sa projection horizontale (fig. 161).

On mène le parallèle passant par m' qui coupe en p, p' la génératrice de front; op est le rayon de ce parallèle que nous tracerons en plan et nous rappellerons horizontalement en m_1 et m, le point cherché sur ce parallèle et la ligne de rappel du point m'.

PROBLÈME III. — *Un point M de l'hyperboloïde étant donné, déterminer le plan tangent en ce point* (fig. 162).

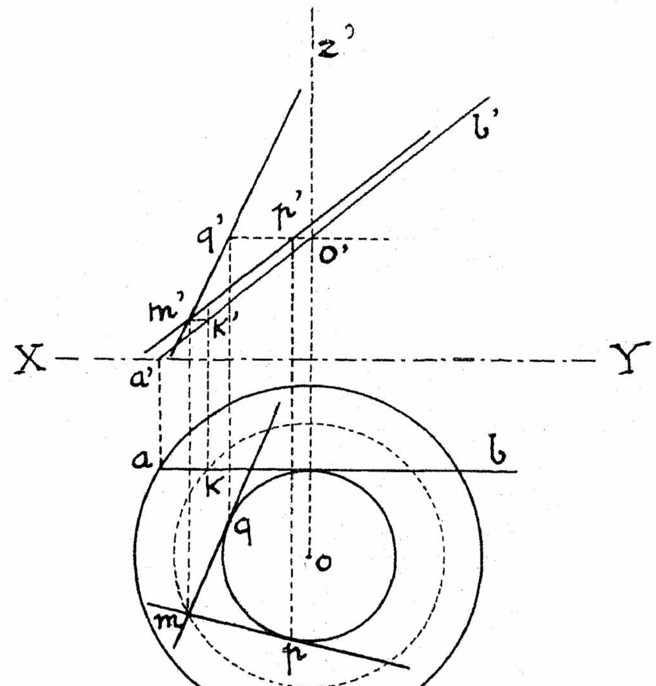


Fig. 162.

Pour avoir un plan tangent il faut en ce point deux génératrices de système différent; or ces génératrices ont leurs projections horizontales tangentes à la projection horizontale du collier d'où $m\,p$, $m\,q$, relevés en $m'p'$, $m'q'$.

PROBLÈME IV. — *Trouver sur un hyperboloïde les génératrices parallèles à un plan donné* (*Plans tangents parallèles à un plan donné*) (fig. 163).

On trace le cône asymptote et on en cherche la section par un plan parallèle au plan donné passant par son sommet, soient ou, $o'u'$ et ov, $o'v'$ les deux génératrices de section; on mène horizontalement les parallèles aux génératrices trouvées tangentes au collier, ce sont les génératrices cherchées.

En les accouplant deux à deux de système différent de façon que les traces des plans formés sur le collier soient parallèles à la trace horizontale $P\alpha$ du plan donné, on a les plans tangents cherchés qui ont sur

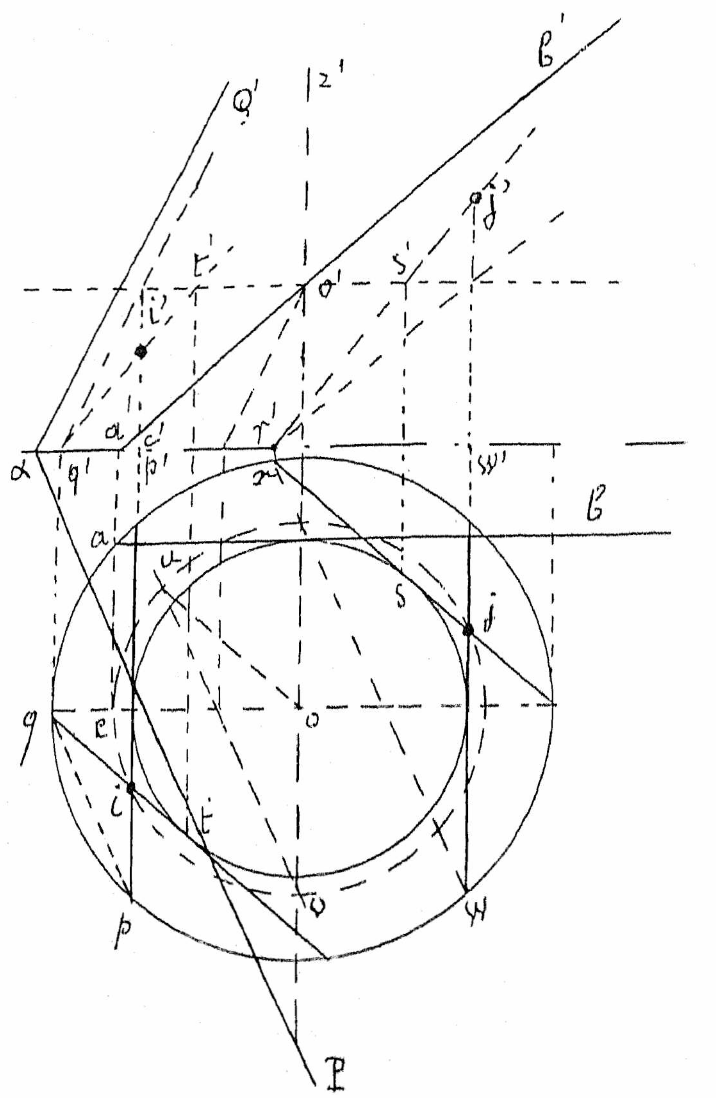


Fig. 163.

l'épure pq et wr pour traces horizontales et (i,i') (j,j') comme points de contact.

PROBLÈME V. — *Mener à l'hyperboloïde H_1 un plan tangent par le point* A *(ou parallèle à la droite D), le point de contact étant sur un parallèle donné* (fig. 164).

Le plan horizontal P est celui du parallèle donné : on cherche le point $(i'i)$ de ce parallèle situé dans le plan de front de l'axe et la tangente ik, $i'k'$ issue de i à la méridienne de front donne en S' sur l'axe le sommet du cône circonscrit le long du parallèle P. Il reste à mener des plans tangents de A (a,a') au cône de sommet (S,S') ayant pour base le parallèle P : on joint SA dont la trace sur P est (α,α') on mène, de α, αu et αv tan-

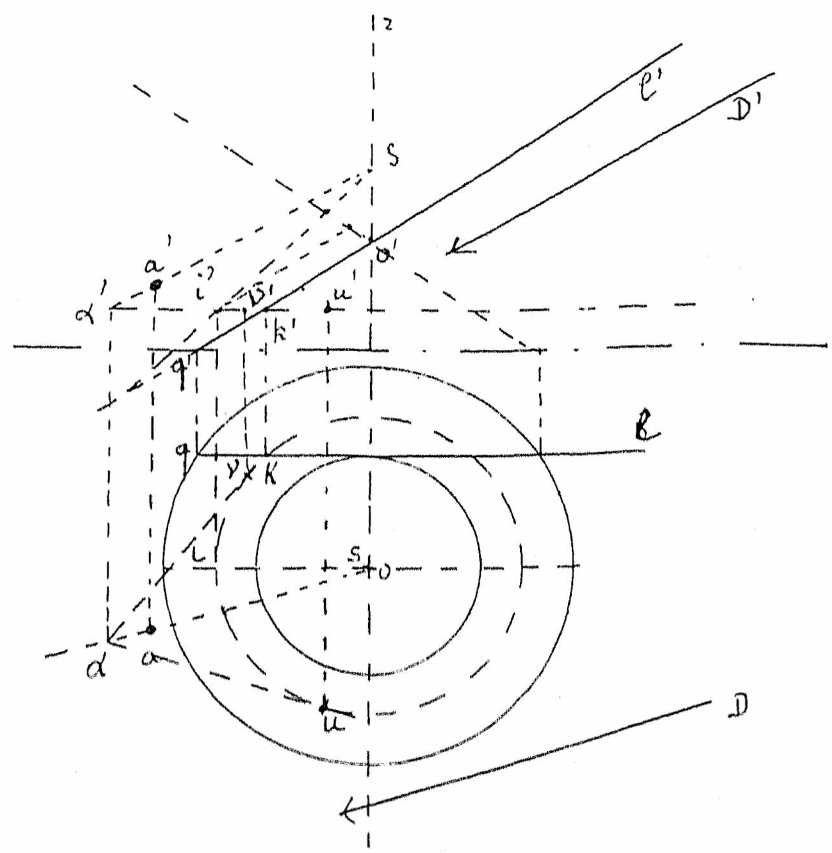


Fig. 164.

gentes à la base, U et V sont les points de contact cherchés.

PROBLÈME VI. — *Même problème, le point de contact étant dans un méridien donné* (fig. 165).

Du point donné A (a,a') on mène la perpendiculaire $(a\alpha, a'\alpha')$ sur le plan méridien donné M, on ramène α_1 en α_1, dans le plan de front de l'axe et de α', on mène une tangente $\alpha'_1u'_1$ à la méridienne de front, on ramène (u'_1, u_1) en (u,u') qui est le point de contact du plan tangent cherché.

PROBLÈME VII. — *Même problème, le point de contact étant sur une génératrice donnée* (fig. 166).

La génératrice donnée est $(bm, b'm')$ le plan de A et de BM a pour trace horizontale MC, M étant la trace de BM et C la trace de AB. Cette trace coupe la base de l'H_1 en un 2^e point (p,p') d'où on mène la tangente au collier en sens inverse de mb, cette tangente est la 2^e génératrice du plan tangent cherché, elle coupe BM en (g,g') qui est le point de contact cherché.

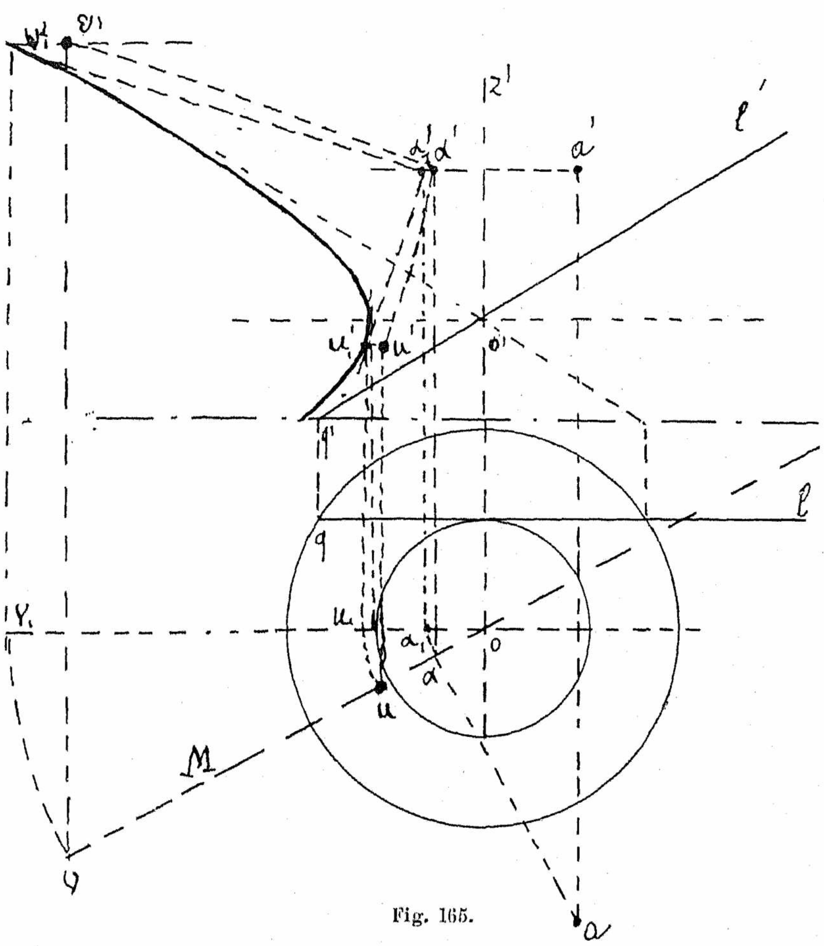


Fig. 165.

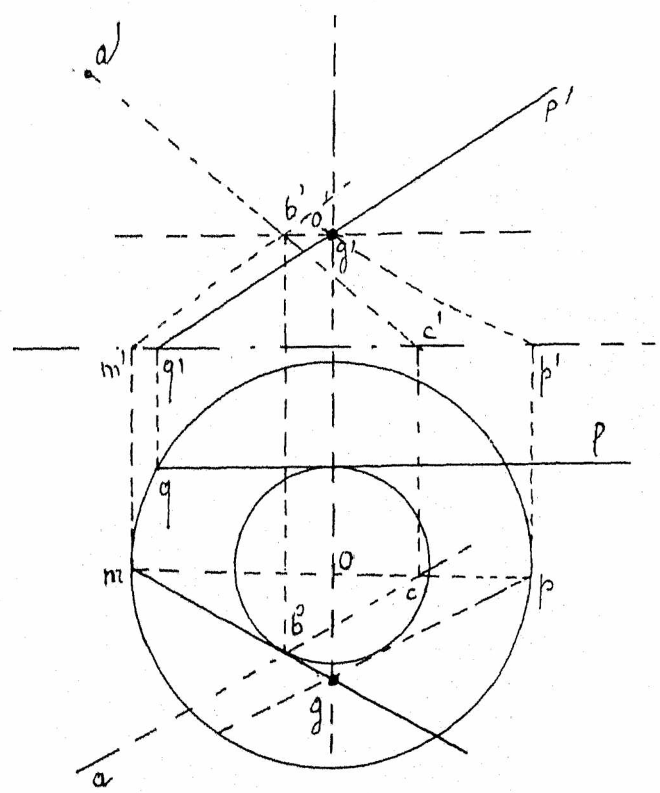


Fig. 166.

PROBLÈME VIII. — *Trouver les points communs à une droite et à l'hyperboloïde H_1* (fig. 167).

Principe de la méthode. — L'intersection de deux H_1 de révolution, dont les plans de cercle de gorge sont les mêmes, est une courbe dont la projection sur un plan parallèle au cercle de gorge est un cercle.

Ceci posé, étant donné l'hyperboloïde H_1 et la droite Δ, on prend le point A de Δ situé dans le plan du collier de H_1 et on prend sur la perpendiculaire en A à la projection horizontale de Δ un point ω, projection de l'axe vertical de révolution de l'hyperboloïde auxi-

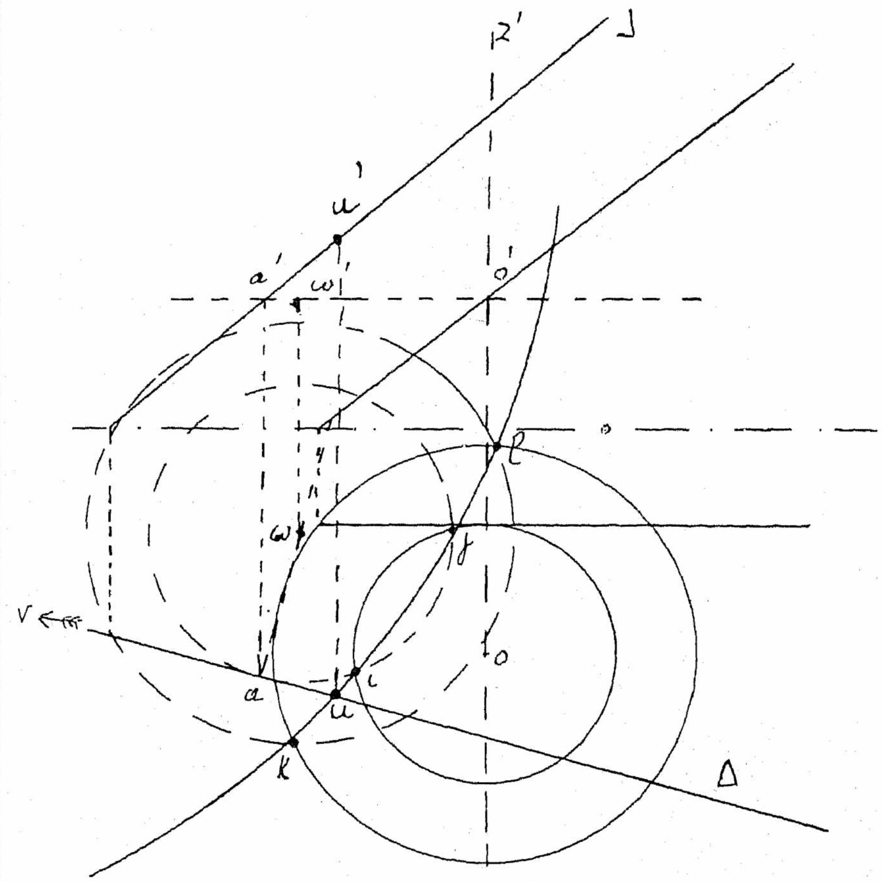


Fig. 167.

liaire dont le cercle de gorge est le cercle de centre ω et de rayon ω *a*. Ce cercle de gorge coupe le collier de H aux points *i* et *j*, points de l'intersection des deux hyperboloïdes : un deuxième plan horizontal H′ donne deux nouveaux points K et L de l'intersection à la rencontre des deux parallèles passant l'un par *d*, l'autre par *e* : le cercle qui projette l'intersection passe par *i*, *j*, *k*, *l* et coupe Δ en *u* et *v*, projections horizontales des points U et V cherchés, relevés verticalement en *u′* et *v′*.

PROBLÈME IX. — *Mener les plans tangents à un hyperboloïde H_1 passant par une droite* Δ (fig. 168.)

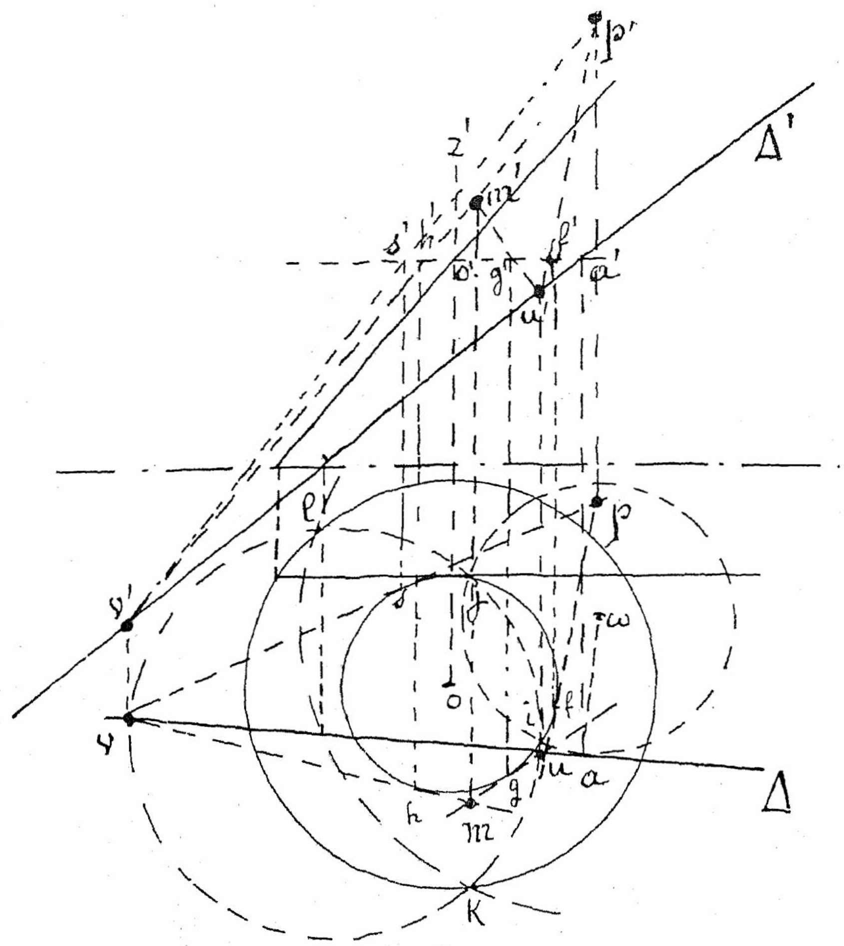


Fig. 168.

On recherche les deux points U et V où la droite Δ coupe H_1 (voir problème précédent). Par ces deux points U et V on mène les deux génératrices de H_1 qui se coupent deux à deux en M. et P.

Les plans tangents sont MUV et PUV dont les points de contact sont U et V.

SECTIONS PLANES DE L'HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION A UNE NAPPE

NATURE DE LA SECTION. — La section peut être une des trois coniques : ellipse, parabole, hyperbole; c'est une ellipse quand le plan parallèle au plan sécant, mené par le centre de l'hyperboloïde, ne coupe pas le cône asymptote; c'est une parabole quand le même plan est tangent au cône asymptote; c'est une hyperbole quand le même point coupe le cône asymptote.

Comme cas particulier : si le plan sécant est tangent, la section se compose de deux génératrices concourantes et, plus particulièrement, si le plan sécant est *tangent au plan asymptote, la section se compose de* deux génératrices parallèles :

1° *Section elliptique* (fig. 169).

On remarque que la section admet pour axe de symétrie l'intersection du plan méridien M perpendiculaire au plan sécant P α Q' avec ce plan : soit $(ij, i'j')$ cette intersection, une rotation qui amène $(ij, i'j')$ de front donne de suite les sommets de l'ellipse situés sur cet axe d'abord en a_1, b_1, ramenés dans M en a et b relevés en a', b'. Les tangentes en ces points sont horizontales. Le milieu (ω, ω') de $(ab, a'b')$ est le centre de la section, on cherche alors les points situés sur l'axe horizontal passant par (ω, ω'); il suffit pour les avoir

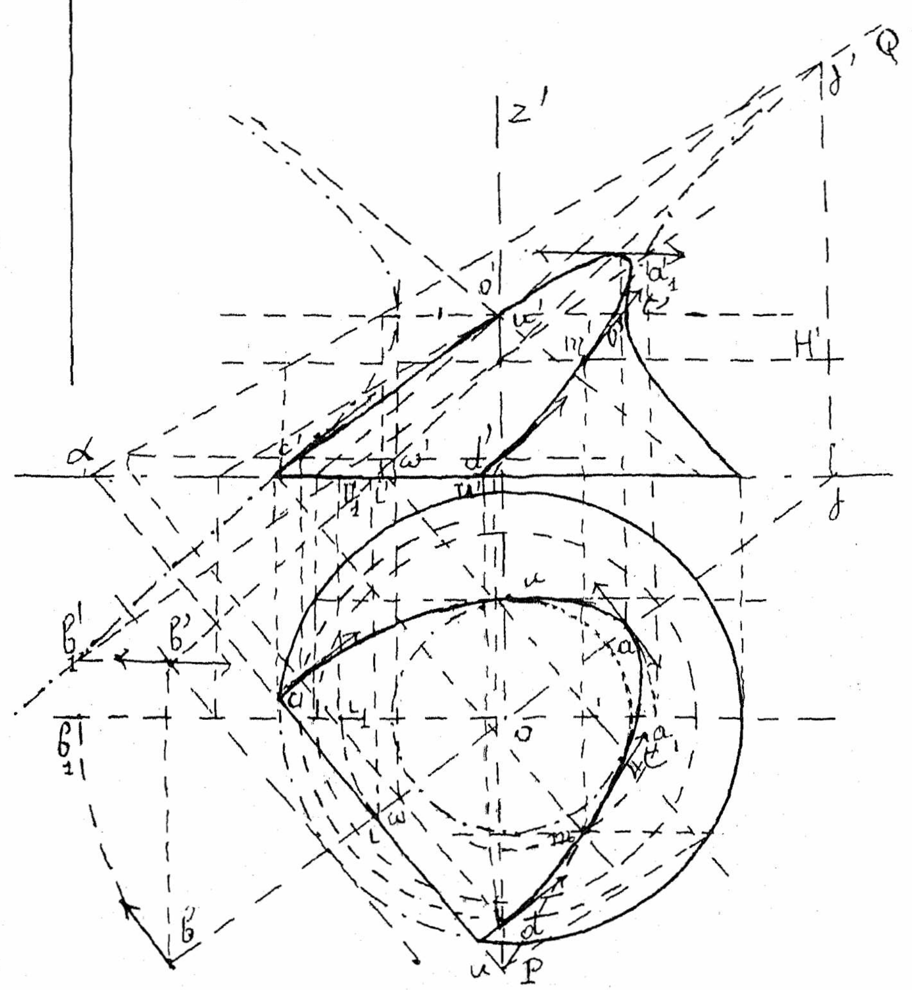


Fig. 169.

de couper H_1 et PαQ' par le plan horizontal ω' : on trouve ainsi les points (c, c') et (d, d'), l'ellipse de section est parfaitement déterminée. Si on voulait un point quelconque (m, m') et la tangente $(mt, m't')$ en ce point, il suffirait de couper par un plan horizontal H′.

2° *Section parabolique* (fig. 170).

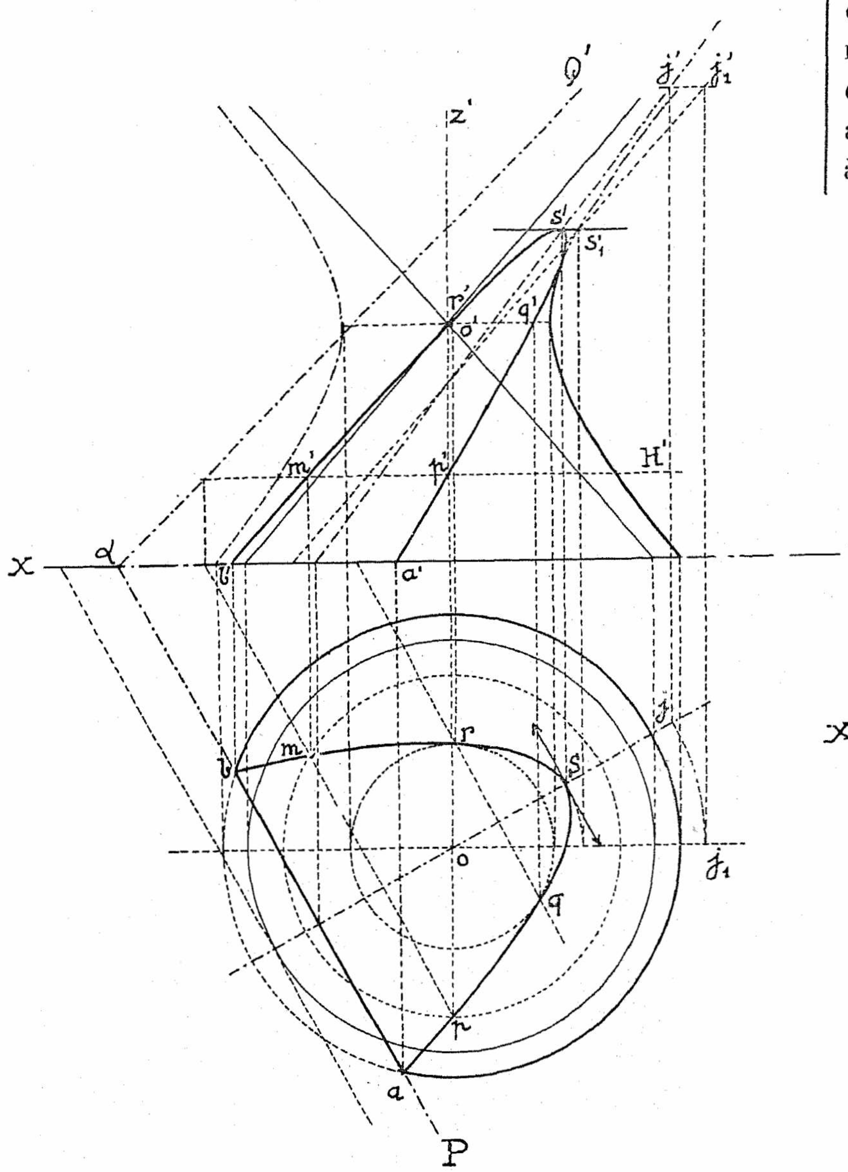


Fig. 170.

Les mêmes remarques subsistent et les mêmes constructions sont à faire pour trouver l'axe $(ij, i'j')$ situé dans le méridien M de symétrie. En cherchant les points situés sur cet axe, on ne trouve plus naturellement qu'un sommet (s, s'). On trouverait un point courant m, m' et la tangente en ce point $(mt, m't')$, comme il a été indiqué à la section elliptique.

3° *Section hyperbolique* (fig. 171).

On détermine comme précédemment l'axe de symétrie horizontal et celui de plus grande pente, mais en cherchant les sommets de la même façon que plus haut, on voit qu'un seul de ces axes coupe la section, sur l'épure (fig. 171), c'est l'axe horizontal seul qui a deux sommets (c, c') et (d, d'). On complète la détermination de la courbe, en en cherchant les asymptotes, elles sont les mêmes que celles de la section du cône asymptote par le plan sécant PαQ′, on est donc ramené à un problème déjà traité (1re partie, section IV); on

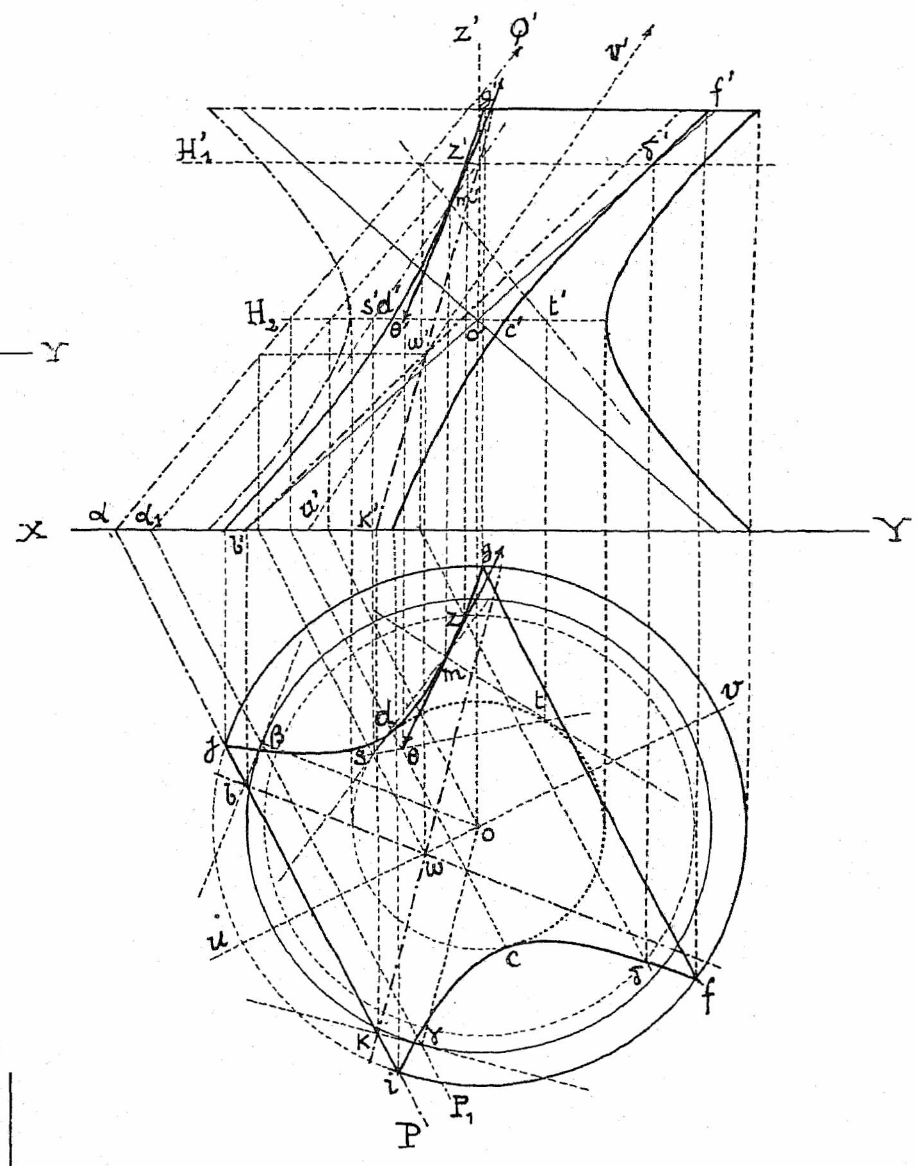


Fig. 171.

trouve ici les deux asymptotes $(K\omega, K'\omega')$ $(b\omega, b'\omega')$ qui se coupent naturellement au centre (ω, ω') de la section. Point courant (m, m') et tangente $(m\theta, m'\theta')$ comme plus haut, à l'aide d'un plan horizontal H′.

HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE SCALÈNE

Il est déterminé par trois droites directrices : A, B, C quelconques; le centre de la surface est le centre O du parallélépipède construit sur les trois droites A, B, C, six arêtes de ce parallélépipède sont des génératrices de l'hyperboloïde considéré (fig. 172).

On met ainsi en évidence les génératrices A_1, B_1, C_1 qui sont de système différent des génératrices A, B, C. La base du cône asymptote dans le plan des deux génératrices B et C_1 est une hyperbole admettant pour asymptotes les droites B et C_1 elles-mêmes; cette hyperbole passe de plus par le centre de la face du parallélépipède où se trouvent B et C_1; elle est donc parfaitement déterminée.

On peut, avec ces données, résoudre sur l'hyperboloïde scalène divers problèmes. Par exemple, pour avoir le plan tangent en un point M de la génératrice A, il suffit d'appuyer une droite passant en M sur B et C, ce qui se fait très facilement comme le montre la figure 172 en M P Q. De même pour mener un plan tangent par un point extérieur dont le point de contact soit sur une génératrice A par exemple, on prend les intersections U et V du plan A I avec les droites B et C, UV est la deuxième génératrice du plan cherché dont le point de contact est par suite J.

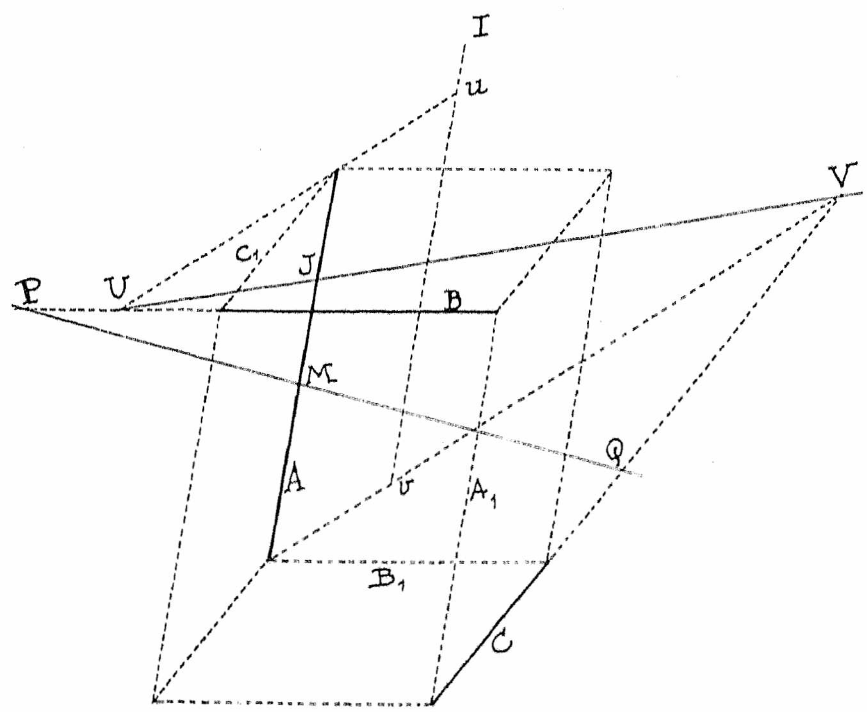


Fig. 172.

Enfin pour reconnaître si l'hyperboloïde donné par les trois génératrices A, B, C est bien scalène ou, de révolution, on regarde si le cône *de révolution* passant par les trois génératrices du cône asymptote $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ parallèles à A, B, C admet bien le long de ces génératrices les plans tangents du cône asymptote lui-même.

CHAPITRE II

PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE

GÉNÉRALITÉS

Comme nous l'avons dit, trois droites parallèles à un même plan, sans être deux à deux dans un même plan déterminent un paraboloïde hyperbolique. Il résulte de théorèmes de géométrie élémentaire qu'il existe une infinité de droites toutes parallèles à un même plan qui *rencontrent* les trois premières droites données, ce sont les génératrices du 2e système du PH (fig. 173).

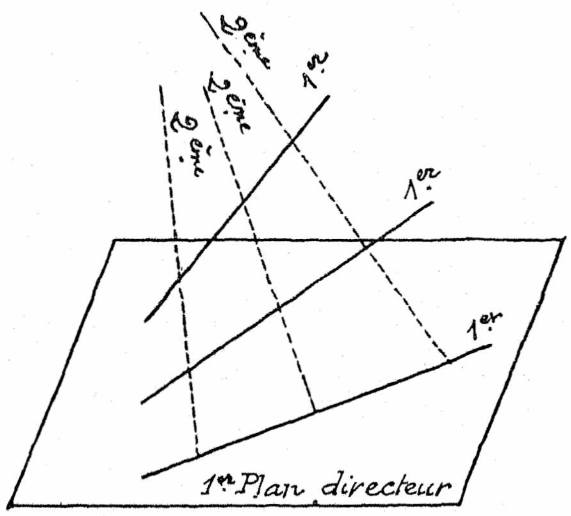


Fig. 173.

D'autre part, on peut recommencer ce même raisonnement, en prenant trois génératrices du 2e système comme point de départ, on voit alors qu'il n'y a pas que les trois premières droites, mais encore une infinité de parallèles toutes à un même plan qui rencontrent les génératrices du 2e système. Ces droites constituent les génératrices du 1er système.

Deux génératrices de même système ne se rencontrent pas, deux génératrices de système différent sont concourantes. Les plans auxquels restent parallèles les génératrices de chaque système sont les *plans directeurs* du PH. Le plan tangent en un point de la surface est déterminé naturellement par les deux génératrices qui passent en ce point. Nous allons étudier le paraboloïde hyperbolique, spécialement dans le cas où un des plans directeurs est horizontal.

PROBLÈME I. — *Trouver la projection horizontale d'un point connaissant sa projection verticale* m′ (fig. 174).

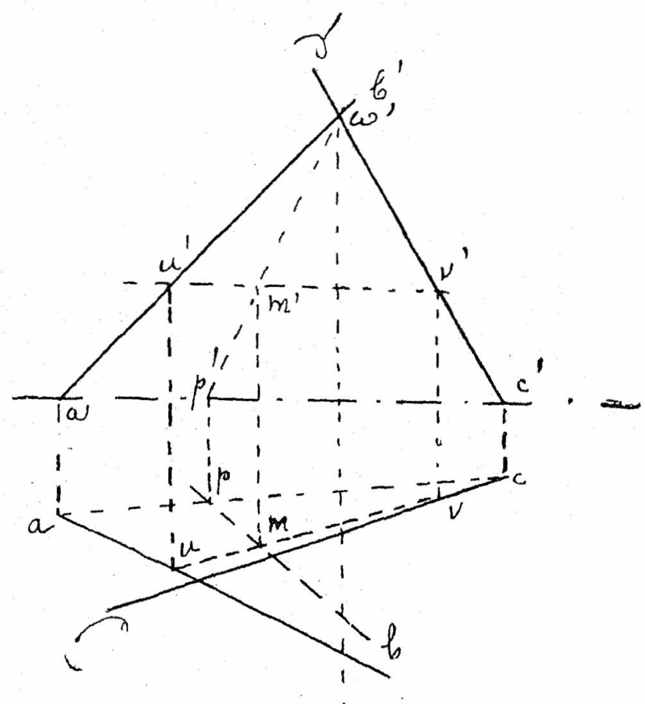


Fig. 174.

On coupe par le plan horizontal du point m' qui rencontre la génératrice $(ab,\ a'b')$ en (u, u') et la génératrice $(cd,\ c'd')$ en $(v.v')$. La droite $(uv,\ u'v')$ est la génératrice horizontale passant en m', la projection horizontale de M est donc en m sur $u\ v$.

PROBLÈME II. — *Déterminer le plan tangent en un point* (m, m′) *donné du paraboloïde.*

Prenons ce point (m,m') sur la génératrice $(u\ v,\ u'v')$ (fig. 174 *bis*); pour avoir le plan tangent, il suffit de tracer

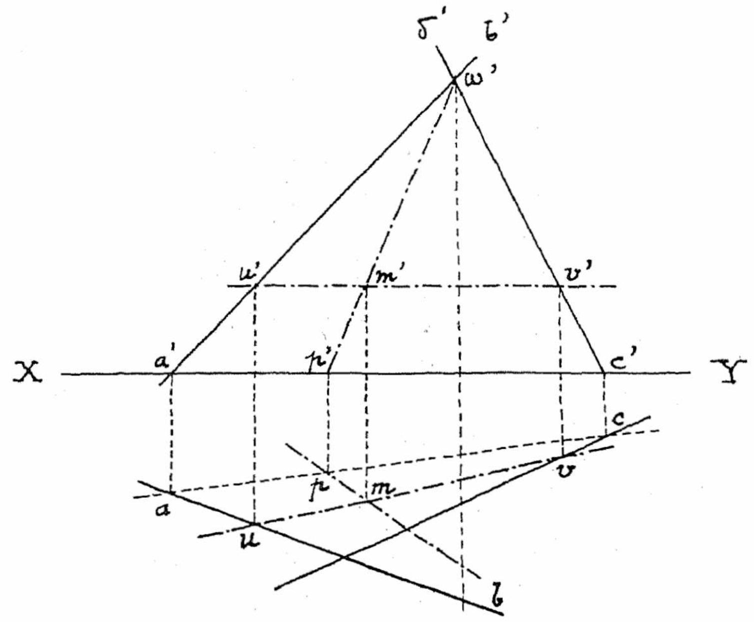


Fig. 174 *bis*.

la deuxième génératrice qui passe en (m,m'). Or, parmi les génératrices horizontales il y en a une qui est de bout, par suite en projection verticale toutes les génératrices du 2ᵉ système qui doivent rencontrer cette droite de bout passent par le point ω' qui la projette verticalement et qui nécessairement est le point de rencontre de $a'b'$ et $c'd'$. Donc on trace $\omega'm'$ dont la trace horizontale est $(p'p)$ sur la trace horizontale $a\,c$ du P. H. en joignant $m\,p$, on a en $(m\ p,\ m'p')$ la deuxième génératrice passant en (m,m') d'où le plan tangent $(u\ v\ m\ p,\ u'v'm'p')$.

PROBLEME III. — *Contours apparents du P.H.* (fig. 175).

Le contour apparent vertical est réduit au point, ω qui projette verticalement la génératrice horizontale de bout. On déterminera le contour apparent horizontal en le considérant comme l'enveloppe des projections horizontales des génératrices. Ce contour apparent est une *parabole*.

Quand donc on a 4 tangentes le procédé connu de géométrie élémentaire permet de déterminer le foyer et la directrice de cette parabole.

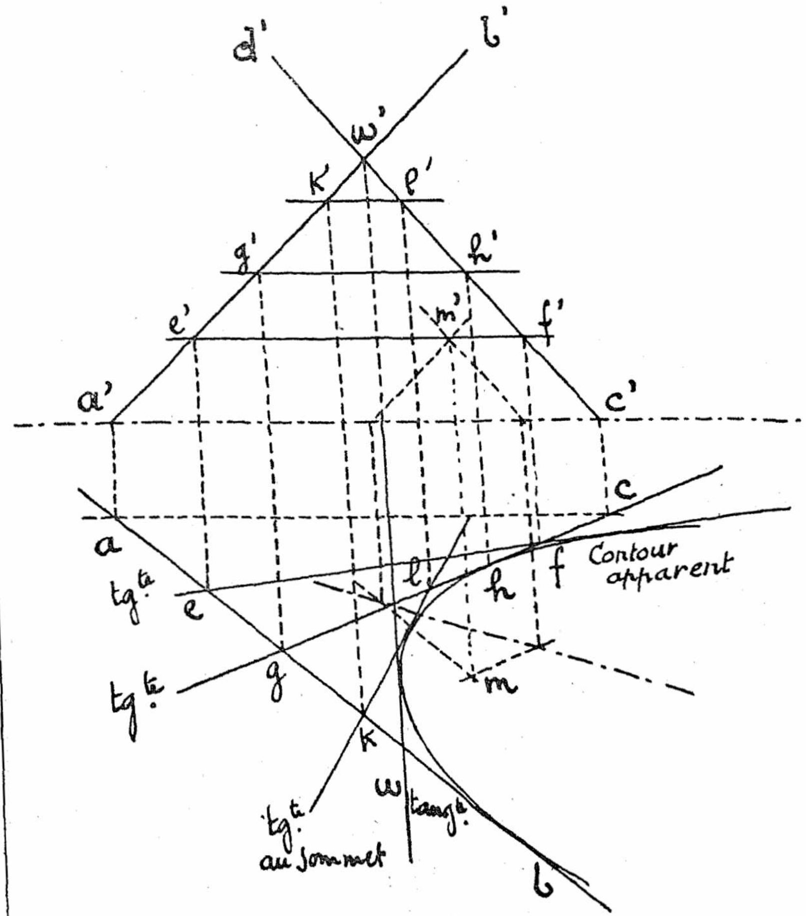


Fig. 175.

Remarque. — Si $a\,b$, et $c\,d$ étaient parallèles, le 2ᵉ plan directeur serait vertical et il existerait une génératrice du 2ᵉ système verticale. Le contour apparent horizontal se réduirait lui aussi à un point. Le P.H. est alors dit paraboloïde hyperbolique *équilatère*.

PROBLÈME IV. — *Déterminer les génératrices d'un P.H. parallèles à un plan donné* (*Plans tangents parallèles à un plan donné*) (fig. 176).

Cherchons d'abord la génératrice horizontale du paraboloïde donné parallèle au plan P α Q′ donné, pour cela menons par $(a\ b,\ a'\ b')$ et $(c\ d,\ c'\ d')$ deux plans parallèles à αP trace horizontale du plan donné. Ces plans sont déterminés par leurs traces horizontales $a\ q$ et $c\ n$, on a un point de leur intersection $(p,\ p')$ en coupant par un plan de front F, la génératrice horizontale cherchée est $(u\ p\ v,\ u'\ p'\ v')$.

Pour avoir la génératrice du 2e système parallèle à P α Q' on mène par ($u\ v$, $u'\ v'$) un plan parallèle à P α Q', pour cela on trace par u, u' une frontale parallèle à

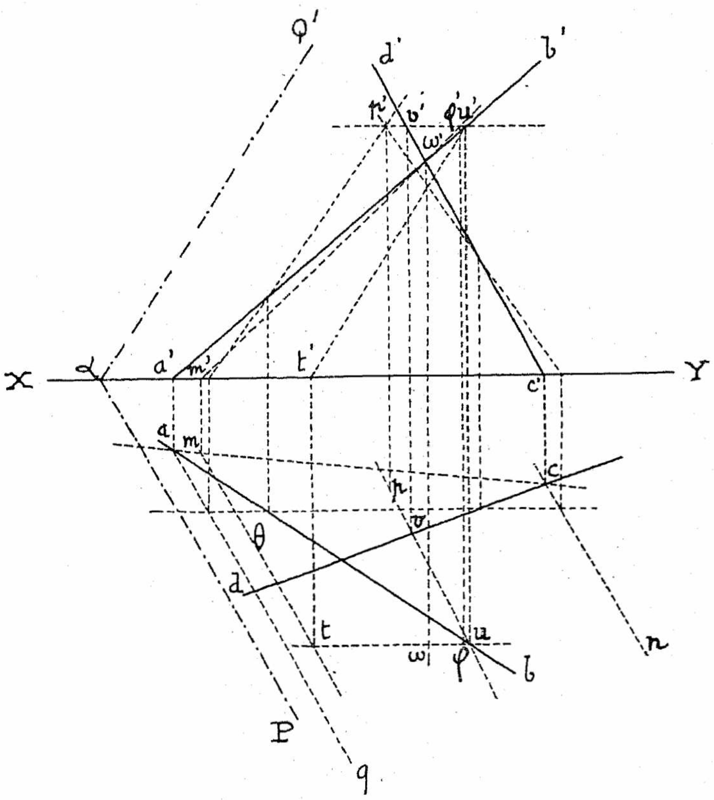


Fig. 176.

αQ' dont la trace horizontale est $t\ t'$, menant par t une parallèle $t\ \theta$ à α P et prenant le point de rencontre m de $t\ \theta$ et ac trace horizontale du paraboloïde, on a en ($m\omega$, $m'\omega'$) la 2e génératrice cherchée, ω' étant la projection verticale de la génératrice de bout et ($m\omega$, $m'\omega'$) s'appuyant sur ($u\ v$, $u'\ v'$) par exemple en (φ, φ'). Le plan $u\ v\ m\ \varphi$, $u'\ v'm'$, φ', est parallèle au plan P α Q, ce qui résout la question sous sa seconde forme.

PROBLÈME V. — *Déterminer le plan tangent issu du point A à un P. H., le point de contact étant sur une génératrice donnée* (fig. 177 et 178).

La génératrice donnée et le point A forment un plan qui coupe le P. H. suivant une 2e génératrice dont le point de rencontre avec la génératrice donnée est le point de contact cherché du plan tangent.

Il faut pour faire l'épure distinguer deux cas : 1° la génératrice donnée est horizontale ($u\ v$, $u'\ v'$) (fig. 177) on détermine alors la trace (t,t') horizontale de la 2e génératrice et le problème s'achève alors facilement (g, g') est le point de contact ; 2° la génératrice donnée est de 2e système ; dans ce dernier cas, on cherche le

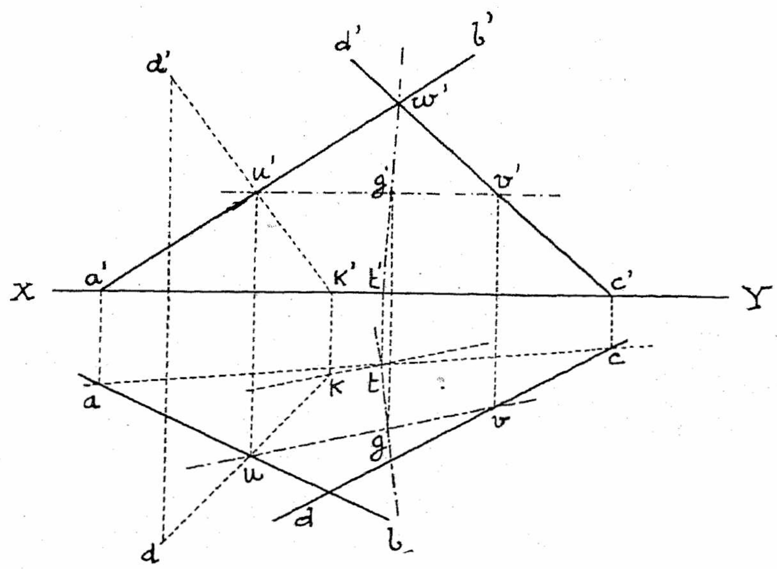


Fig. 177.

point d'intersection (f, f') du plan formé par A et la génératrice donnée (mp, $m'\ p'$) avec une deuxième génératrice ($q\ r$, $q'\ r'$) de même système et on mène par $f\ f'$, l'horizontale qui s'appuie sur ($m\ p$, $m'\ p'$) et (qr, $q'r'$)

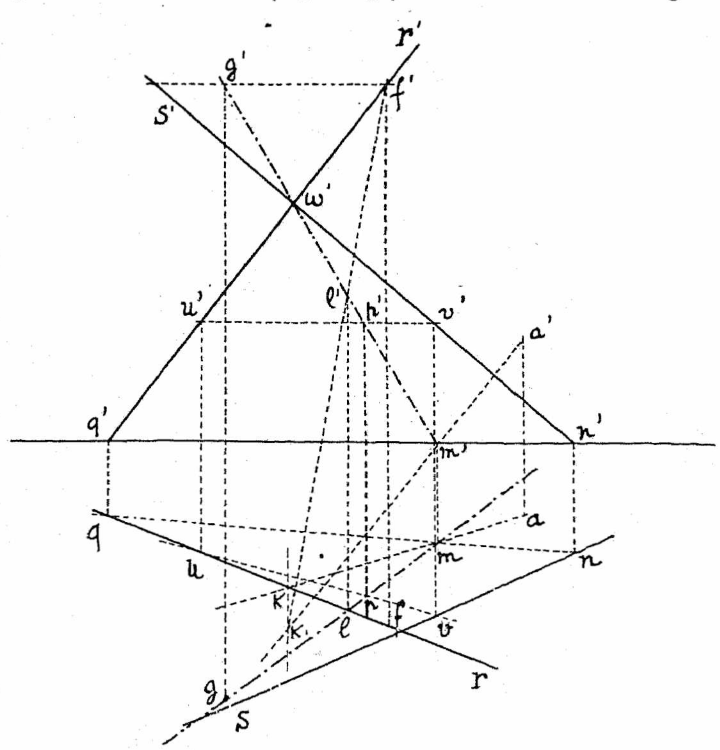


Fig. 178.

c'est la deuxième génératrice du plan A M P dont l'intersection (g, g',) avec ($m\,p$, $m'\,p'$) donne le point de contact du plan tangent A M P (fig. 178).

PROBLÈME VI. — *Trouver le 2e point de rencontre d'une droite et d'un P. H., le 1er point commun étant connu* (fig. 179).

Soit (m, m') le 1er point commun à (δ,δ') et au P. H., prenons la génératrice horizontale ($u\,v$, $u'\,v'$) passant en (m, m') le plan (δuv, $\delta' u'v'$) coupe le P. H. suivant une génératrice de 2e système qu'on détermine à l'aide des traces horizontales et du point ω', soit ($t\,l$, $t'l'$) cette génératrice, elle coupe (d, d') en (p, p') qui est le 2e point cherché.

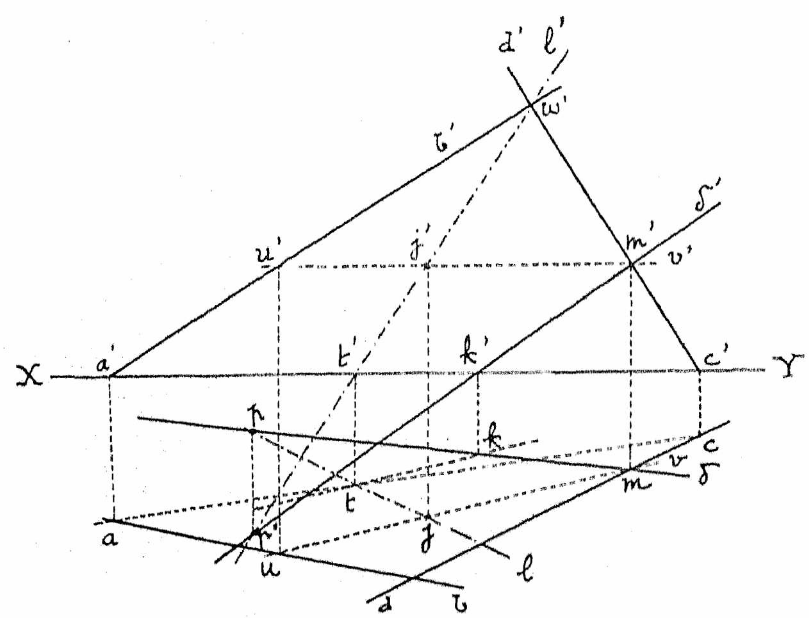


Fig. 179.

PROBLÈME VII. — *Mener les plans tangents à un P. H. par une droite donnée* (fig. 179).

Soient (m, m') et (p, p') les deux points de rencontre de la droite ($\delta\delta'$) avec le P. H. Menons les deux génératrices qui passent en (m, m') et les deux génératrices qui passent en (p, p') ; ces génératrices se rencontrent deux à deux en (i, i') et en (j, j'), formant ainsi les deux plans tangents cherchés ($i\ m\ p$, $i'\ m'\ p'$) et ($j\ m\ p$, $j'\ m'\ p'$) dont les points de contact sont (i, i') et (j, j').

Le problème n'est donc possible que si la droite donnée rencontre le P. H. et se ramène de suite au problème de l'intersection d'une droite et d'un P. H., problème traité précédemment.

SECTIONS PLANES DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE

En général, la section plane d'un paraboloïde hyperbolique est une *hyperbole;* il y a exception : 1° si le plan est tangent, la section, nous l'avons vu, est alors formée par deux génératrices de système différent; 2° si le plan sécant est parallèle à l'*axe du paraboloïde*, la section est alors une *parabole;* 3° une droite si le plan sécant est directeur.

La direction de l'axe du paraboloïde est celle de l'intersection de deux plans directeurs de système diffé-

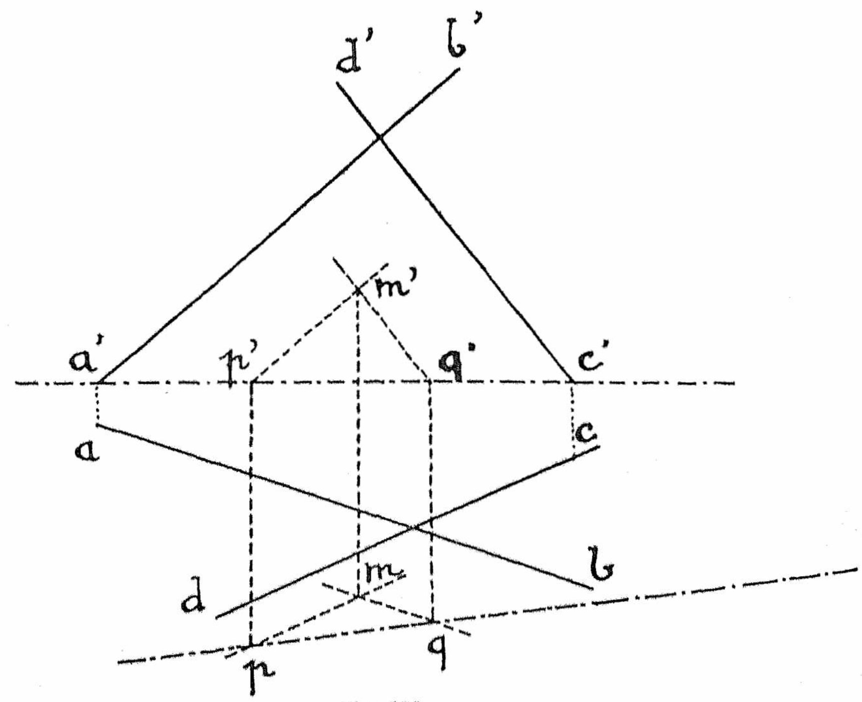


Fig. 180.

rent. Pour l'avoir, il suffit de mener par un point quelconque de l'espace (fig. 180) deux parallèles à deux génératrices de deuxième système et de prendre la trace horizontale du plan ainsi formé, cette trace (pq, $p'q'$) est la direction de l'axe.

Il est donc facile de voir si une section plane est hyperbolique ou parabolique, il suffit de regarder si le plan sécant est parallèle ou non à la direction de l'axe.

1° *Section hyperbolique* (fig. 181).

On a autant de points et de tangentes qu'on veut de la section en coupant la surface et le plan sécant par des plans horizontaux, les tangentes sont les intersections des plans tangents aux points déterminés et du plan sécant. On fixe l'allure de la courbe en cherchant les *directions asymptotiques* qui sont les intersections du plan sécant avec deux plans directeurs de système diffé-

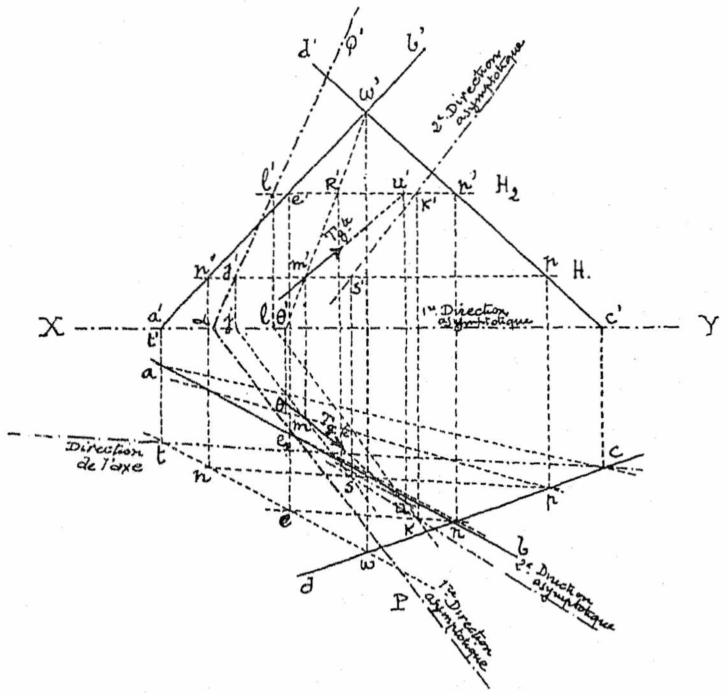


Fig. 181.

rent : sur l'épure on a trouvé ainsi le point (m, m') et sa tangente (mt, $m't'$) et les directions asymptotiques (αP, αP′) et (ks, $k's'$).

2° *Section parabolique* (fig. 182).

Comme dans le cas précédent, on détermine points et tangentes courants au moyen de sections par des plans horizontaux. L'allure de la courbe (parabole) est assurée puisqu'on connaît la direction de son axe, qui est aussi celle de l'axe du paraboloïde. Quatre tan-

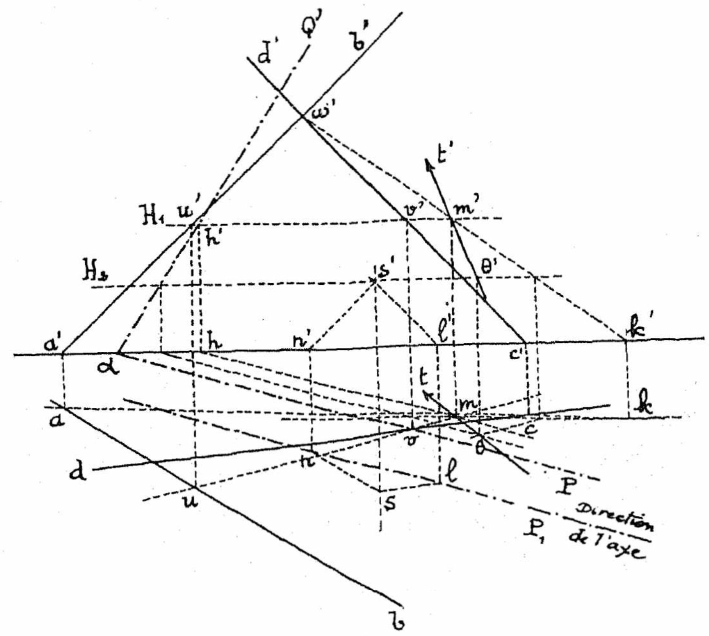


Fig. 182.

gentes étant connues, on peut, comme nous l'avons déjà rappelé, déterminer élémentairement le foyer et la directrice de la parabole de section. Plus simplement, on sait pratiquement tracer une parabole connaissant deux points et les deux tangentes en ces points.

DEUXIÈME SECTION

SURFACES RÉGLÉES QUELCONQUES GAUCHES ET DÉVELOPPABLES

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS. — ÉLÉMENTS D'UNE GÉNÉRATRICE

POINT CENTRAL

Considérons une génératrice OG et une génératrice *infiniment* voisine G_1, menons la perpendiculaire commune O O_1 (fig. 183) à ces deux droites, on nomme

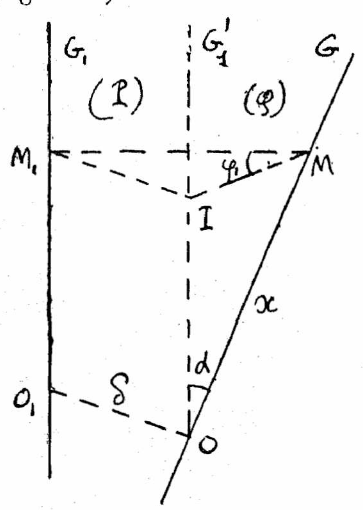


Fig. 183.

point central la limite ω de la position de O quand la génératrice G_1, se déplaçant sur la surface réglée, vient se confondre avec la génératrice G.

LIGNE DE STRICTION

On appelle *ligne de striction* d'une surface réglée le *lieu géométrique des points centraux* de toutes les génératrices G de cette surface.

PLAN ASYMPTOTE

On appelle *plan asymptote* à la surface le long de la génératrice G, la limite π vers laquelle tend le plan P mené par la génératrice G parallèlement à la génératrice G_1 quand la génératrice G_1 se déplaçant sur la surface vient se confondre avec la génératrice G. On démontre facilement que le plan asymptote, le long d'une génératrice G, est tangent à la surface au point à l'infini de cette génératrice G.

PARAMÈTRE DE DISTRIBUTION

Appelons δ la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines G et G_1 et appelons α l'angle de ces deux génératrices (fig. 183).

On appelle paramètre de distribution sur la génératrice G *la limite K du quotient* $\frac{\delta}{\alpha}$ quand G_1, se déplaçant sur la surface, vient se confondre avec G. Il faut bien remarquer que par sa définition même le paramètre de distribution n'est pas un nombre, mais une longueur.

VARIATION DU PLAN TANGENT LE LONG D'UNE GÉNÉRATRICE

1° *Formule de Chasles.* — Considérons une génératrice G et une génératrice infiniment voisine G_1, soit

$OO_1 = \delta$ la perpendiculaire commune à GG_1 (fig. 184). prenons un point M de G et menons par M le plan Q perpendiculaire à G. Ce plan Q coupera la généra-

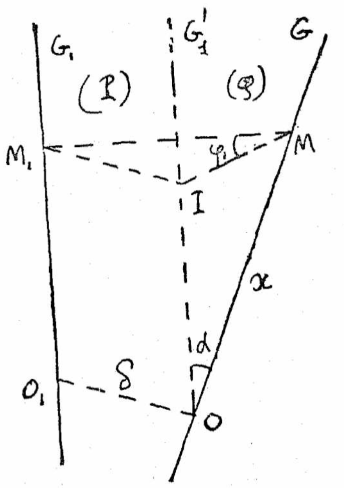


Fig. 184.

trice G_1 en M_1 et la parallèle G'_1 menée à G_1 par O en un point I, il résulte de cette construction que IM_1 est parallèle à OO_1 ; donc, comme OO_1, IM_1 est perpendiculaire au plan GOG'_1; par suite, le triangle MIM_1 est rectangle et on peut écrire en appelant φ_1 l'angle IMM_1 :

$$M_1I = MI \operatorname{tg} \varphi_1$$

d'autre part, le triangle rectangle IMO donne, en appelant α l'angle de G et de G_1

$$MI = MO \operatorname{tg} \alpha$$

donc :

$$OM \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{M_1I}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Passons maintenant à la limite en faisant tendre G_1 vers G, O tend vers le point central ω, le plan GOG'_1 tend vers le plan asymptote, le plan GMM_1 tend vers le plan tangent en M à la surface et, par suite, l'angle φ_1 tend vers l'angle φ que fait le plan asymptote avec le plan tangent en M. Si donc nous appelons x la distance ωM nous aurons :

$$\lim \omega M \operatorname{tg} \varphi_1 = x \operatorname{tg} \varphi \text{ et}$$

$$\lim \frac{M_1I}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\lim OO_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \lim \frac{\delta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \lim \frac{\delta}{\alpha} \times \lim \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$$
$$= K \times 1 = K$$

On a donc :

$$x \operatorname{tg} \varphi = K$$

K étant le paramètre de distribution, x la distance du point M au point central, φ l'angle du plan asymptote et du plan tangent en M.

Cette formule des plus importantes est connue sous le nom de *formule de Chasles*, du nom du géomètre qui la trouva.

2° *Conséquences de la formule de Chasles*. — 1° Le plan tangent au point central d'une génératrice est perpendiculaire au plan asymptote le long de cette génératrice.

En effet, pour $x = 0$ comme K est fixe $\neq 0$ il faut donc :

$$\operatorname{tg} \varphi = \infty$$

donc :

$$\varphi = 90°$$

2° *Il y a égalité entre le* RAPPORT ANHARMONIQUE DE QUATRE POINTS *sur une génératrice et le* RAPPORT ANHARMONIQUE DES QUATRE PLANS TANGENTS *à la surface en ces points.*

Cela tient à la forme *homographique* de la relation qui lie la distance x du point de contact à la tangente de l'angle φ du plan correspondant.

3° La connaissance de 4 points et de 3 des plans tangents permet de déterminer le plan tangent au 4e point; inversement, la connaissance des 4 plans tangents et de 3 des points de contact permet de déterminer le 4e point de contact.

Cette conséquence résout tous les problèmes qu'on peut se poser sur les plans tangents à une surface réglée.

CAS PARTICULIER. — Si $k = 0$, il faut $\operatorname{tg} \varphi$ toujours nul, c'est-à-dire φ toujours nul, le plan tangent reste donc toujours le même le long de la génératrice; on dit que la surface est *développable*.

THÉORÈME. — *Lorsque deux surfaces réglées ont une génératrice commune, elles se raccordent en deux points de cette génératrice, c'est-à-dire qu'en deux points elles admettent le même plan tangent.*

En effet, prenons comme origine des distances le

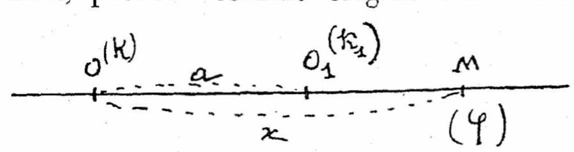


Fig. 184.

point central d'une des surfaces sur la génératrice commune, on devra avoir (fig. 184) :

$$x \operatorname{tg} \varphi = K$$
$$(x - a) \operatorname{tg} (\varphi - \alpha) = K_1$$

en appelant a la distance des deux points centraux et

α l'angle dièdre des deux *plans centraux*, c'est-à-dire des deux plans tangents aux points centraux.

Pour que les plans tangents soient confondus, il faut qu'une même valeur de φ vérifie à la fois ces deux équations; la condition pour qu'il en soit ainsi résulte de l'élimination de φ entre les deux équations, ce qui donne :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{K}{x}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha} = \frac{K_1}{x - a}$$

d'où :

$$\frac{K - x \operatorname{tg} \alpha}{x + K \operatorname{tg} \alpha} = \frac{K_1}{x - a}$$

$$Kx - Ka - x^2 \operatorname{tg} \alpha + ax \operatorname{tg} \alpha = K_1 x + KK_1 \operatorname{tg} \alpha$$

$$x^2 \operatorname{tg} \alpha + x(K_1 - K - a \operatorname{tg} \alpha) - K(a + K_1 \operatorname{tg} \alpha) = 0$$

équation du 2ᵉ degré qui fournit deux racines en x donnant les distances au point central, origine des points où les plans tangents aux deux surfaces sont confondus.

THÉORÈME. — *Lorsque deux surfaces réglées se raccordent en* TROIS *points d'une génératrice commune, elles se raccordent tout le long de cette génératrice.*

En effet une équation du 2ᵉ degré ne peut avoir 3 racines sans être une identité.

CHAPITRE II

SURFACES DE RACCORDEMENT

1° HYPERBOLOÏDE DE RACCORDEMENT

Considérons une génératrice G d'une surface réglée et trois points : M_1, M_2, M_3 de cette génératrice où les plans tangents sont T_1, T_2, T_3. Traçons une droite dans chacun de ces plans tangents. soit M_1T_1, M_2T_2, M_3T_3, (fig. 185).

Il existe un et un seul hyperboloïde à une nappe

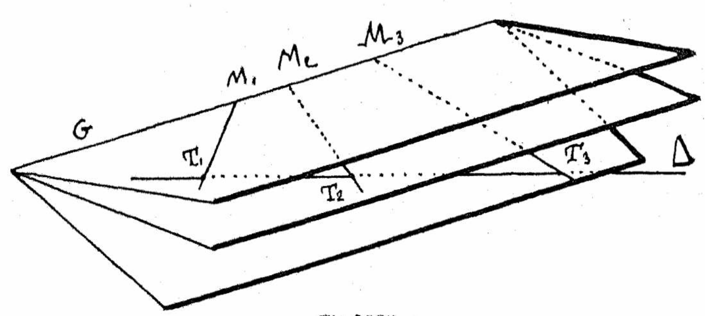


Fig. 185.

admettant ces trois droites : M_1T_1, M_2T_2, M_3T_3, pour directrice. Cet hyperboloïde se raccorde évidemment aux 3 points M_1, M_2, M_3 avec la surface, donc il s'y raccorde tout le long de la génératrice G d'après le dernier théorème démontré. En conséquence, dans tout problème sur les plans tangents à la surface réglée en un point de G, on pourra remplacer cette surface par l'hyperboloïde de raccordement et, par suite, résoudre facilement ce problème.

En général, dans les applications, on s'arrange pour que les trois droites : M_1T_1, M_2T_2, M_3T_3, qu'on peut prendre chacune arbitrairement dans un plan tangent, coupent une même droite Δ donnée; on a, par ce fait, des constructions beaucoup plus simples dans nombre de problèmes sur les plans tangents.

2° PARABOLOÏDE DE RACCORDEMENT

Si on prend les droites M_1T_1, M_2T_2 et M_3T_3 du paragraphe précédent, toutes trois parallèles à un même plan, la surface réglée du 2° degré qui passera par ces trois droites ne sera plus un hyperboloïde à une nappe, mais un paraboloïde hyperbolique qu'on nomme paraboloïde de raccordement et dont il est souvent plus facile de se servir que d'un hyperboloïde de raccordement.

3° PARABOLOÏDE DES NORMALES

Les normales aux différents points d'une même génératrice d'une surface réglée engendrent une surface du 2° degré qui ne peut être qu'un paraboloïde puisque ces normales sont toutes parallèles à un même plan : le plan normal à la génératrice considérée; c'est ce paraboloïde qu'on nomme le paraboloïde des normales. On démontre que le paraboloïde des normales est le *lieu géométrique des axes des hyperboloïdes de révolution à une nappe qui se raccordent à la surface le long de la génératrice considérée.*

CHAPITRE III

SURFACES DÉVELOPPABLES

PREMIÈRE DÉFINITION. — Reprenons la formule de Chasles :

$$x \operatorname{tg} \varphi = K$$

Si nous appelons θ l'angle d'un plan tangent en M avec le plan central, c'est-à-dire le plan tangent au point central, on a évidemment $\varphi = 90° - \theta$, donc :

$$x \operatorname{cotg} \theta = K$$
$$x = K \operatorname{tg} \theta$$

Supposons que le paramètre de distribution K soit infini, on a $\operatorname{tg} \theta = 0$, sauf pour x infini lui-même, donc le plan tangent est le même en tous les points de la génératrice, sauf à l'infini où il y a indétermination. A quoi correspond donc cette supposition.

Si K est ∞ comme on a $K = \lim \frac{\delta}{\alpha}$, cela revient à dire que l'angle de deux génératrices infiniment voisines est infiniment petit par rapport à leur plus courte distance; or, c'est ce qui a lieu pour le *cylindre* puisque pour les surfaces cylindriques α est toujours rigoureusement nul.

Supposons maintenant $K = 0$, on a $\operatorname{tg} \theta = \infty$; sauf pour $x = o$ où il y a indétermination, le plan tangent reste le même tout le long de la génératrice; au point central il est indéterminé, c'est dire que la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est infiniment petite par rapport à leur angle. C'est ce qui a lieu dans le cône puisque, pour les surfaces coniques, la quantité δ est rigoureusement nulle. Mais il faut bien remarquer que ce fait ne se produit pas que pour les cônes : il y a d'*autres surfaces que les surfaces coniques* pour lesquelles le paramètre de distribution K est nul. Ces surfaces sont nommées *surfaces développables*.

Inversement, si K n'est ni nul ni infini, le plan tangent varie en chaque point de la génératrice considérée.

DEUXIÈME DÉFINITION. — Soient G et G', deux génératrices (fig. 186) infiniment voisines de la surface le long desquelles les plans tangents sont T et T'. Si nous coupons celles-ci par un plan quelconque S qui ren-

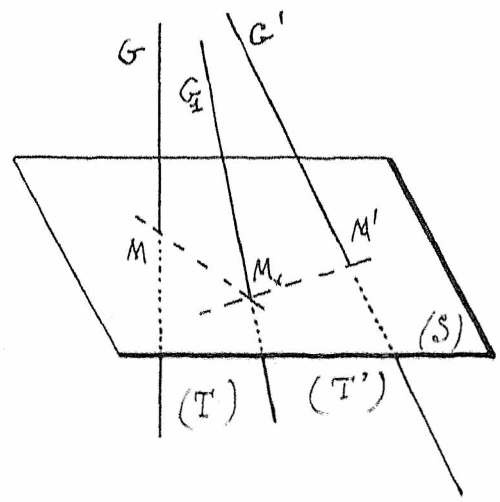


Fig. 186.

contre G en M et G' en M', les tangentes en M et en M' à la courbe d'intersection se coupent au point M_1 où le plan S rencontre la droite d'intersection G_1 des plans T et T'. A la limite, le point M_1 vient se confondre avec le point M et, comme le plan S est *qcq*, on voit que la limite de l'intersection G_1 et des plans T et T' est la génératrice G.

Donc, toute surface développable est l'enveloppe de première espèce de ses plans tangents et réciproquement, si un plan variable dépend d'un SEUL *paramètre, son enveloppe est une développable.*

TROISIÈME DÉFINITION. — *L'enveloppe des plans osculateurs à une courbe gauche est une surface nécessairement développable d'après ce qui précède.*

Réciproquement, toute surface développable, c'est-à-dire toute surface dans laquelle la distance de deux génératrices infiniment voisines est infiniment petite par rapport à l'angle de ces génératrices *peut être considérée comme le lieu géométrique des tangentes à une courbe gauche.*

On démontre que cette courbe gauche est la *ligne de striction* de la surface en montrant que le lieu des tangentes à la ligne de striction se confond avec l'enveloppe des plans osculateurs à la surface (fig. 187).

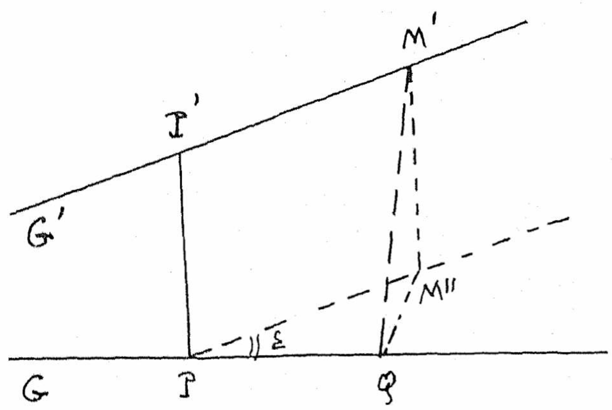


Fig. 187.

En résumé : *Toute surface développable peut être considérée comme le lieu des tangentes à une courbe gauche qui constitue sa ligne de striction;* en outre, *le plan tangent, le long de chaque génératrice, se confond avec le plan osculateur à la ligne de striction au point où cette génératrice touche cette ligne.*

4° Propriétés. — Deux des propriétés les plus importantes des surfaces développables sont les suivantes :

1° *Toute section plane d'une surface développable présente un point de rebroussement au point où le plan sécant coupe la ligne de striction qui, pour cette raison, est appelée* ARÊTE DE REBROUSSEMENT *de la surface;*

2° *Toute surface développable est applicable sans déchirure ni duplicature sur un plan.*

On peut se rendre compte *par approximation* de ce dernier théorème, en remplaçant la surface développable par une surface polyédrale dont les arêtes sont les cordes infiniment petites de la ligne de striction (fig. 188).

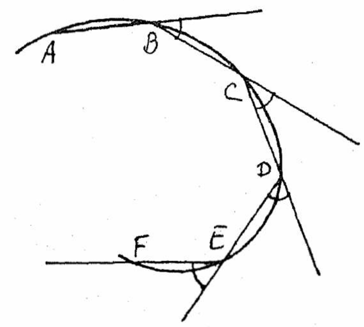


Fig. 188.

GÉNÉRATION DES SURFACES DÉVELOPPABLES

Le fait d'être développable équivaut pour une surface réglée à *une* condition, il suffit donc ensuite de deux conditions pour définir une telle surface d'où les modes de génération usuels suivants :

1° 2 directrices;

2° 1 directrice, 1 noyau;

3° 2 noyaux.

Remarque I. — En prenant pour une directrice la *courbe à l'infini* de la surface, on définit la surface au moyen de son *cône directeur*.

Remarque II. — *En général* la développable est l'enveloppe des plans tangents *communs* aux directrices ou noyaux qui la déterminent.

Remarque III. — Toute développable est l'enveloppe des cônes directeurs de la surface ayant pour sommet les différents points d'une courbe quelconque tracée sur cette développable.

TROISIÈME SECTION

ÉTUDE DE SURFACES SPÉCIALES

CHAPITRE PREMIER

I. — SURFACES A CÔNE DIRECTEUR DE RÉVOLUTION

1° Surfaces gauches à cône directeur de révolution

Étudions tout d'abord la *ligne de striction* d'une surface gauche à cône directeur de révolution, les plans centraux étant toujours orthogonaux aux différents plans asymptotes, c'est-à-dire aux plans tangents au cône directeur, tous ces plans sont parallèles à l'axe du cône

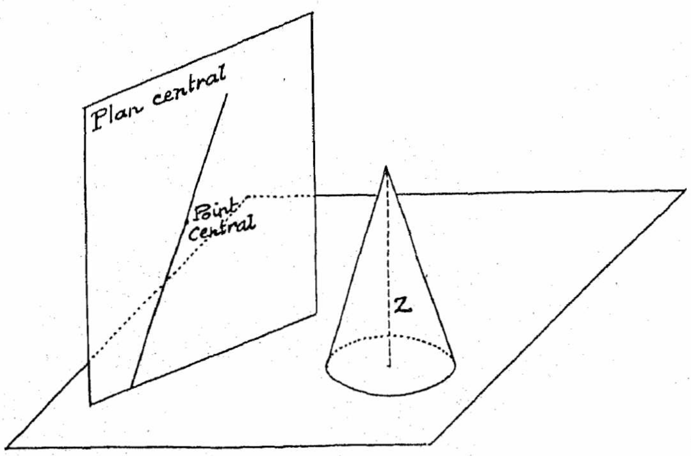


Fig. 189.

directeur, et par suite enveloppent un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe du cône directeur (fig. 189).

Les points de contact de ces plans, c'est-à-dire les points centraux sont alors les points où les tangentes parallèles à l'axe du cône directeur touchent la surface, d'où la propriété :

THÉORÈME. — *La ligne de striction d'une surface gauche à cône directeur de révolution est la courbe de contact du cylindre circonscrit à la surface parallèlement à l'axe du cône directeur.*

Corollaire. — Le contour apparent sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône directeur est la projection sur ce plan de la ligne de striction et réciproquement.

En conséquence, on a comme cas particulier la proposition suivante :

Le lieu des tangentes à un cylindre le long d'une courbe quelconque et faisant avec les génératrices de ce cylindre un angle constant est une surface à cône directeur de révolution.

Remarque. — Il ne faudrait pas croire que cette surface est développable, ceci ne se produirait que si les

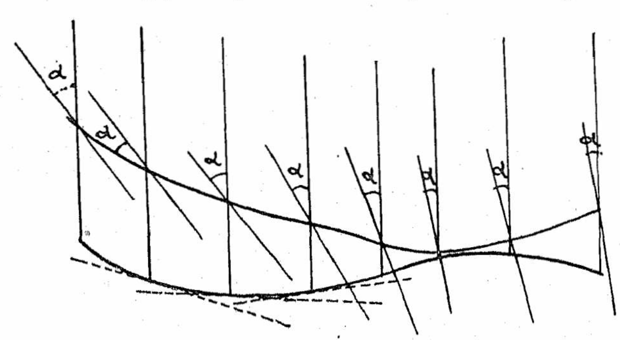


Fig. 190.

tangentes au cylindre étaient en même temps tangentes à la courbe en question, ce qui n'a pas lieu ordinairement (fig. 190).

Distribution des plans tangents. Pole d'une génératrice. — On détermine le plan tangent au point $(m\,m')$ (fig. 191)

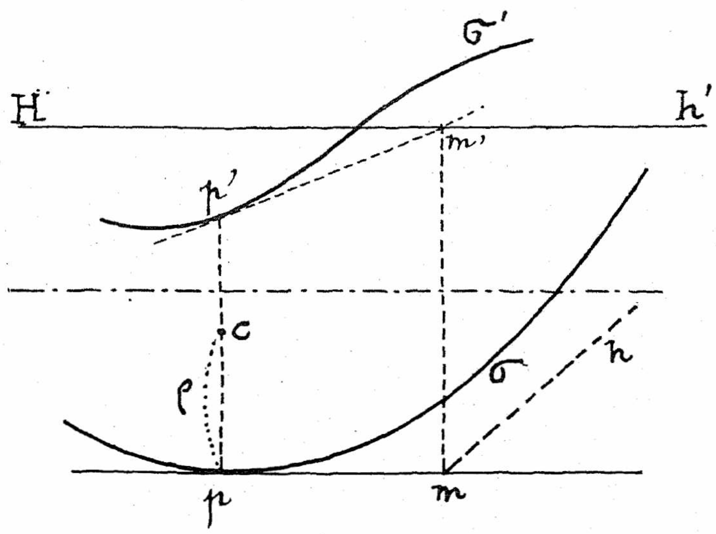


Fig. 191.

par la génératrice $p\,m$, $p'm'$ (prise de front ici) et par la tangente à la section de la surface par le plan horizontal H'. La ligne de striction est projetée en (σ, σ') ; (p, p') est donc le point central de la génératrice $(p\ m,\ p'\ m')$. Quant au plan central, il est pris ici vertical.

Ceci posé la tangente à la section horizontale qui sert à fixer le plan tangent en $(m\,m')$ est déterminée par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La projection* n *du point où les normales aux sections horizontales aux points de la génératrice P M rencontrent la normale au point central P est un point fixe qu'on nomme le pôle de la génératrice.*

Si donc on connaît une section horizontale de la surface, ou même seulement la tangente au point de cette section situé sur P M, on a le point N et par suite tous les plans tangents le long de P M. Par là même sont résolues toutes les applications des plans tangents et en particulier *les problèmes d'ombres*.

2° Surfaces développables a cônes directeurs de révolution.

Ces surfaces sont nommées *surfaces d'égale pente*. En considérant la surface comme l'enveloppe de ces cônes directeurs ayant pour sommet une section horizontale, on trouve :

Que *toutes les sections horizontales sont des courbes* parallèles *et que les plans tangents font en chaque point d'une section horizontale le même angle avec l'horizon*, ce qui justifie le nom de surfaces d'égale pente. Ce sont de telles surfaces qui forment les *limites de terrains meubles en déblai ou en remblai*.

On démontre que :

Toute surface d'égale pente est le lieu des tangentes à une hélice tracée sur un cylindre quelconque et la section de la surface par un plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre est une développante de la section du cylindre par ce plan.

Il résulte alors immédiatement de là et de la propriété des plans osculateurs à l'hélice que toute surface d'égale pente est orthogonale à son noyau cylindrique.

On peut en résumé dire que les surfaces d'égale pente sont des hélicoïdes généraux développables (voir chapitre suivant).

Intersection de deux surfaces d'égale pente (fig. 192).

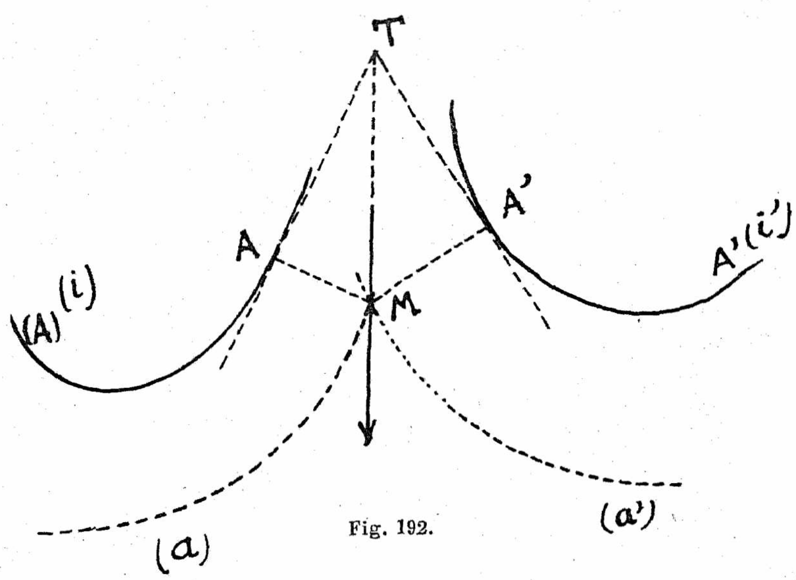


Fig. 192.

On a bien évidemment en appelant i et i' les deux angles de pente :

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{A'M}} = \frac{\mathrm{Z}\cot g\, i}{\mathrm{Z}\cot g\, i'} = \frac{\cot g\, i}{\cot g\, i'}$$

d'où le lieu de M, projection horizontale de l'intersection. La tangente à l'intersection est déterminée comme intersection des plans tangents dont les traces sur le plan horizontal H sont A V, A' V' qui se coupent en T. La tangente en M est donc T M.

Cas particulier. — (fig. 193).

Si une des directrices *se réduit à un point* F et l'autre à une droite D, on trouve pour intersection une conique, car on a :

$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MD}} = \mathrm{K},$$

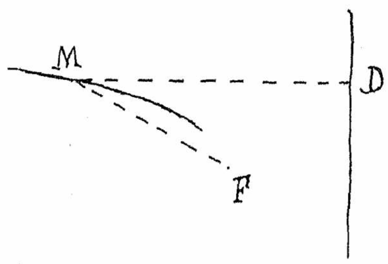


Fig. 193.

ce qui est bien la définition des coniques au moyen d'un foyer et d'une directrice.

Problèmes sur les plans tangents (ombres).

PROBLÈME I. — *Mener à une surface d'égale pente un plan tangent par un point donné* P.

On considère sur le plan horizontal (A) la base C du cône directeur de la surface de sommet P. La trace du plan tangent mené par P sur le plan (A) est la tangente

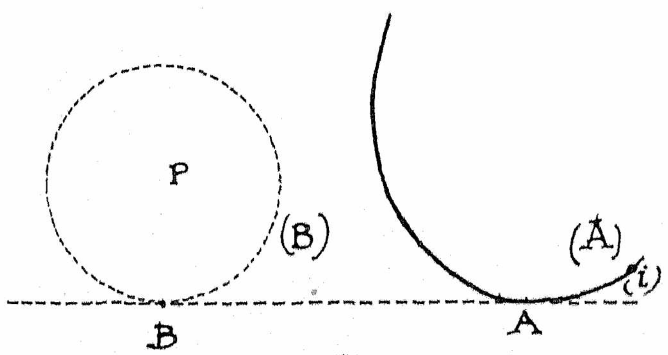


Fig. 194.

commune à la section (A) de la surface et au cercle (B), *à condition que les deux courbes* (A) *et* (B) *soient du même côté par rapport à la tangente A B* (fig. 194).

PROBLÈME II. — *Mener à une surface d'égale pente un plan tangent parallèle à une droite* D.

On considère toujours la section de la surface par un plan horizontal (A) et on prend un cône directeur de sommet arbitraire S, soit (B) la base de ce cône sur le plan (A), on mène à ce cône des plans tangents parallèles à la direction donnée D : soit α B et α B′ les traces de ces plans, on mène des tangentes à la section horizontale (A) parallèles à α B (fig. 195) et α B′, ce sont les traces des plans tangents cherchés à condition que

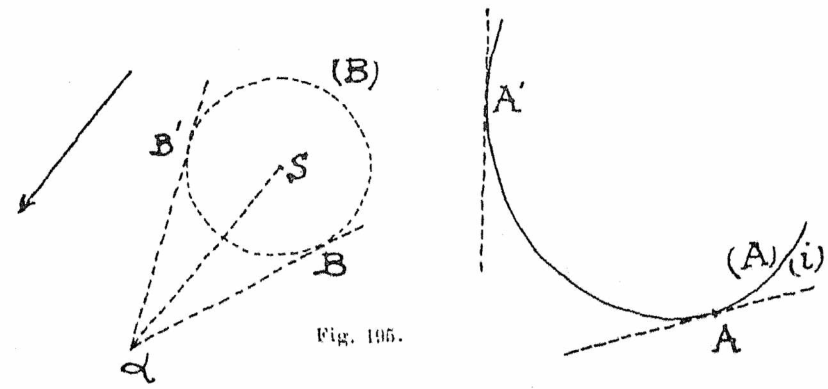


Fig. 195.

(A) et (B) soient d'un même côté des plans tangents parallèles.

II. — SURFACES A PLANS DIRECTEURS

Un cas particulier des surfaces à cône directeur de révolution est celui où ce cône se réduit à un plan. Ceci n'est d'ailleurs à supposer que dans le cas des surfaces gauches, car dans le cas des surfaces développables l'arête de rebroussement se réduirait alors à un point à l'infini et la surface ne serait autre qu'un cylindre.

La surface réglée la plus simple à plan directeur est le P. H. que nous avons déjà étudié.

Il résulte de la loi de distribution des plans tangents le long d'une génératrice que les plans asymptotiques de toutes les génératrices sont parallèles au plan directeur puisque tous perpendiculaires aux plans centraux correspondants.

Parmi les surfaces à plan directeur les plus usuelles,

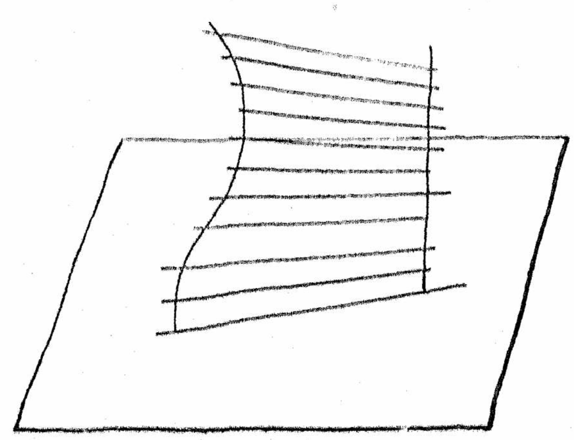


Fig. 196.

nous citerons les *Conoïdes*. Ce sont des surfaces à plan directeur et dont une directrice est une droite. Quand cette droite est perpendiculaire au plan directeur le conoïde est dit *droit* (fig. 196), sinon il est oblique (fig. 197).

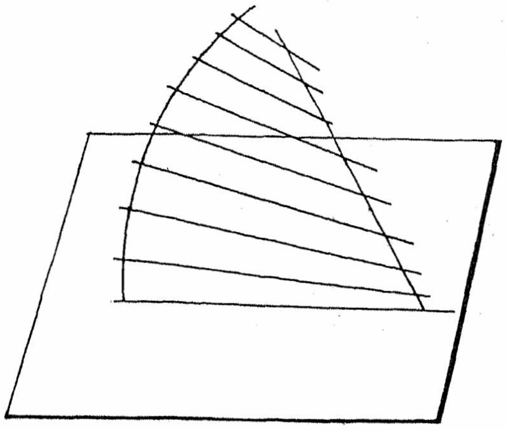


Fig. 197.

Les figures montrent deux exemples de conoïdes droits, l'un à noyau sphérique, l'autre à directrice circulaire de symétrie par rapport à la directrice rectiligne.

Problèmes sur les plans tangents dans les surfaces a plan directeur.

On connaît sur chaque génératrice trois points et les trois plans tangents en ces points, savoir, les points sur les noyaux ou directrices et les plans tangents en ces points et, de plus le point à l'infini où le plan tangent est parallèle au plan directeur. On peut donc, comme conséquence de la formule de Chasles, traiter sur ces surfaces les problèmes de plans tangents et d'ombres. Donnons trois exemples.

1° *Surface à deux noyaux:* les deux noyaux sont des sphères égales (o, o') et (c, c'), le plan directeur est le plan horizontal. On construit le plan tangent en (m, m') de la génératrice $(a\,b,\ a'\,b')$ en égalant au rapport anharmonique $(\infty,\ a',\ m',\ b')$ le rapport anharmonique des traces des plans tangents aux mêmes points sur un plan perpendiculaire en (m, m') à $(a\,b,\ a'\,b')$: de ces quatre traces on en connaît trois, il est facile de déterminer la 4° qui est la trace du plan tangent en (m, m'), on trouve ainsi $(m\,t,\ m'\,t')$ qui détermine le plan tangent cherché (fig. 198).

2° *Surface à un noyau et une directrice.* — Le noyau est un cône S et la directrice une droite verticale, le plan directeur est horizontal. Menons à cette surface un plan tangent parallèle à une droite (δ, δ') dont le point de contact soit sur la génératrice $(b\,a,\ b'\,a')$; on connaît trois points et quatre plans tangents, savoir ∞, b, a et les plans tangents en ∞, b, m, a, le plan tangent en m étant le plan déterminé par (δ, δ') et $(b\,a,\ b'\,a')$ dont (m, m') est justement le point de contact cherché : la conservation du rapport anharmonique fixe donc de suite la position du point m sur $b\,c$ (fig. 199).

On a :

$$\frac{m\,b}{m\,a} = \frac{m_1\,b_1}{m_1\,a_1} = (\infty\,b,\ m\,a) = (z\,\infty_1,\ z\,b_1,\ z\,\delta_1,\ z\,a_1)$$

Surface à deux directrices. — L'une est une droite verticale, l'autre un cercle dans le plan vertical, le plan

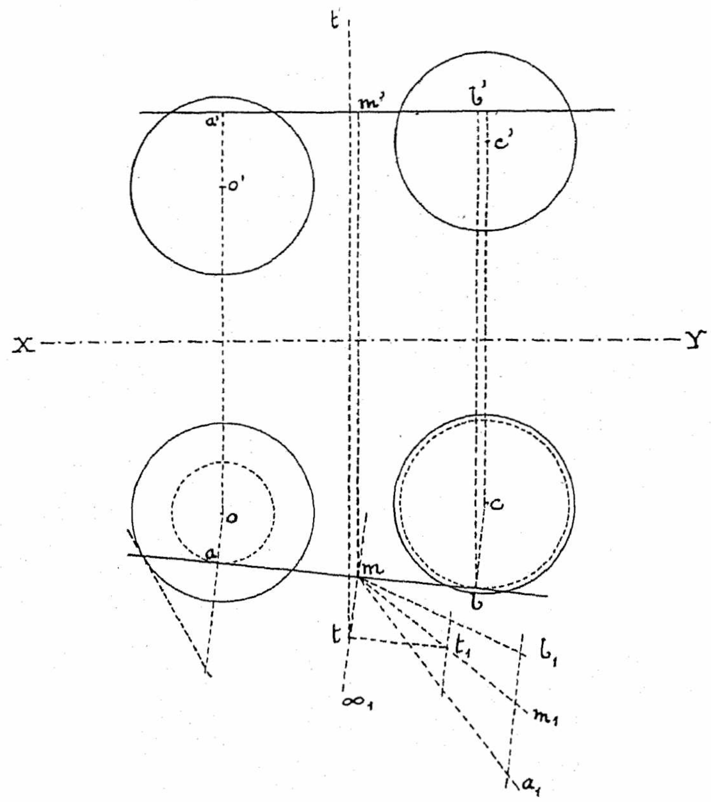


Fig. 198.

directeur est horizontal ; menons à cette surface un plan tangent par un point donné (a, a') dont le point de contact soit sur une génératrice $(b\,c,\ b'\,c')$. Là encore on connaît trois points $(\infty,\ b,\ c,)$ et quatre plans tangents ceux en (∞, b, m, c) en appelant (m, m') le point de contact du plan tangent passant par (a, a') et dont le point de contact soit sur $b\,c,\ b'\,c'$. La conservation du rapport anharmonique permet de déterminer la position (m, m') du point de contact absolument de façon pareille au cas précédent (fig. 200).

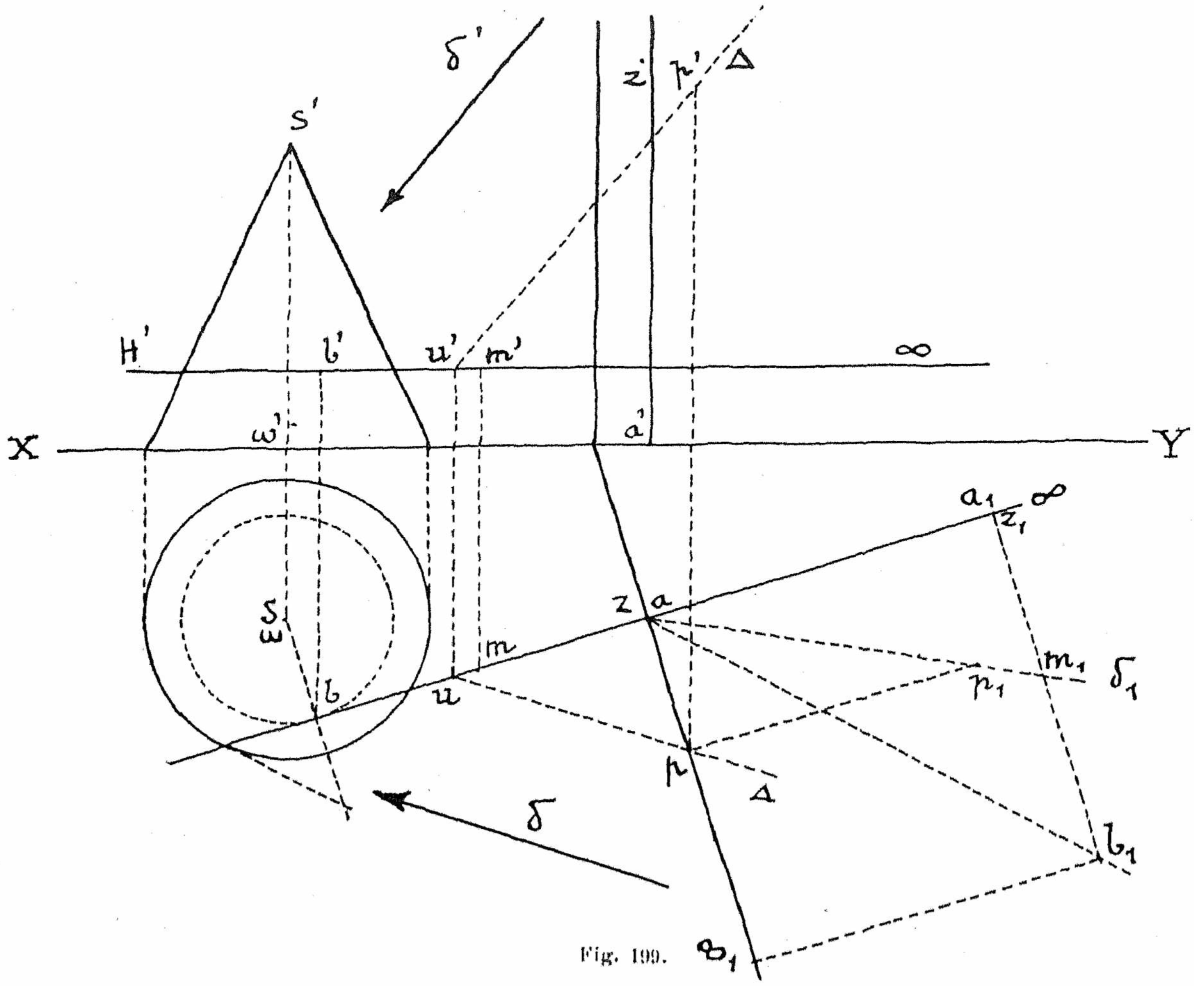


Fig. 199.

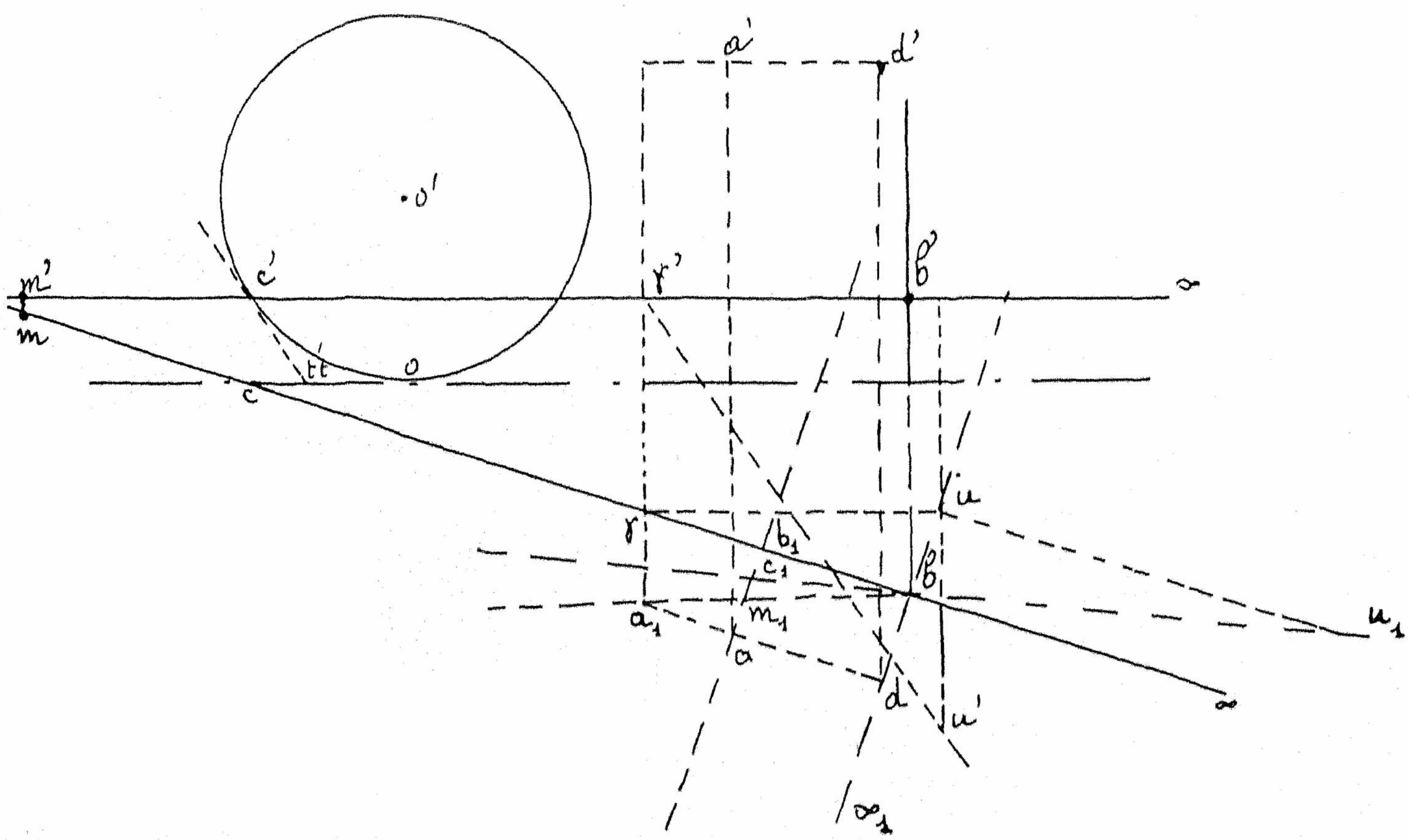


Fig. 200.

CHAPITRE II

HÉLICOÏDES

On peut distinguer 7 sortes d'hélicoïdes que nous allons passer en revue :

1° *Hélicoïde gauche général*. — C'est une surface gauche à cône directeur de révolution dont la ligne de striction

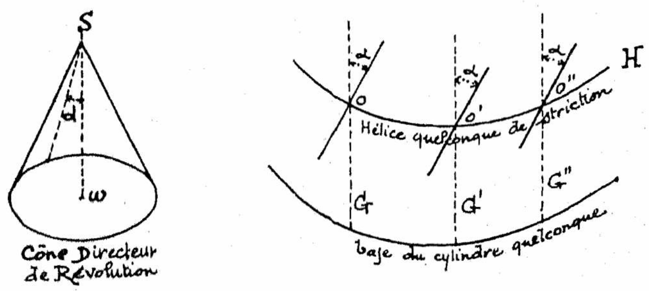


Fig. 201.

est une hélice tracée sur un noyau cylindrique de cette surface (fig. 201).

2° *Hélicoïde gauche ordinaire*. — C'est le cas particulier du précédent en supposant que le noyau, au lieu

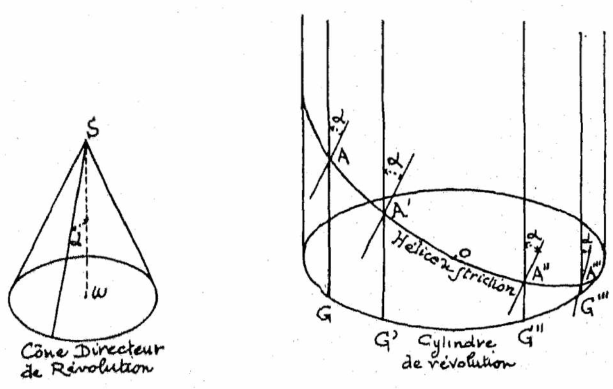


Fig. 202.

d'être un cylindre quelconque, est un cylindre de révolution.

Cet hélicoïde jouit d'une propriété importante : sa section par un cylindre coaxial au noyau est une hélice de même pas que l'hélice de striction (fig. 202).

3° *Surface de vis à filet triangulaire*. — C'est un cas particulier du précédent (2°) lorsque, non seulement le

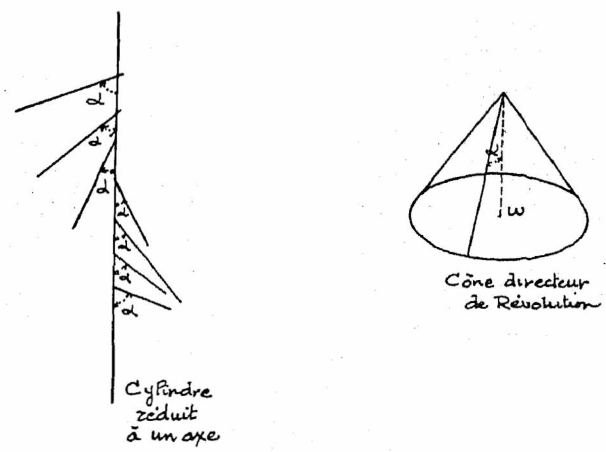


Fig. 203.

noyau cylindrique est de révolution, mais lorsqu'il se réduit à une droite (fig. 203).

4° *Hélicoïde gauche à plan directeur*. — C'est encore un

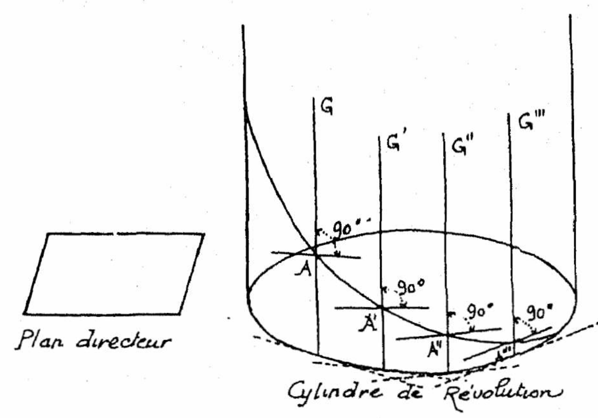


Fig. 204.

cas particulier de (2°); dans ce cas, le cône directeur est réduit à un plan (fig. 204).

5° *Surface de vis à filet carré.* — C'est un cas particulier encore du précédent (4°); donc à fortiori de 1°, 2° et

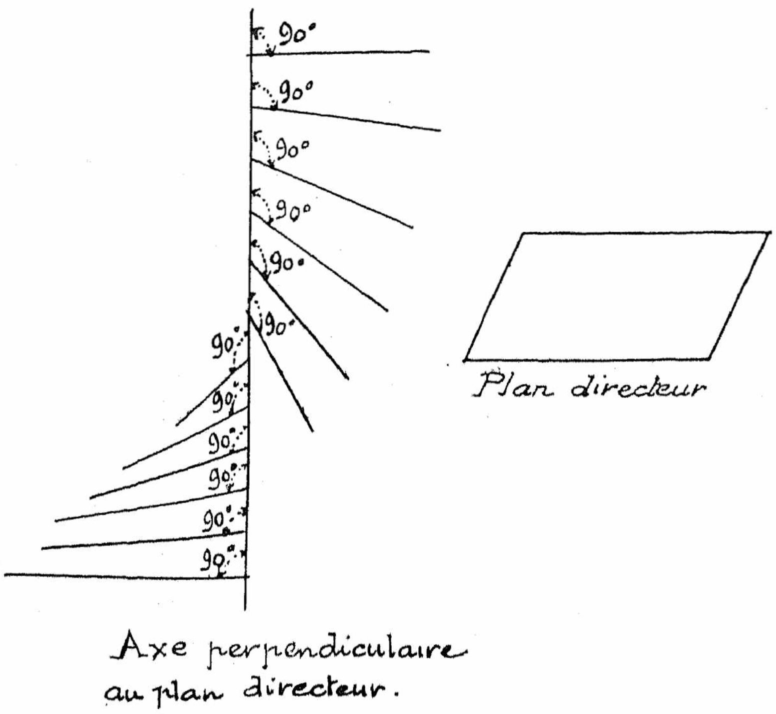


Fig. 205.

aussi même de 3° : il y a un plan directeur et non un cône directeur et le noyau cylindrique est réduit à une droite (fig. 205).

6° *Hélicoïde développable quelconque.* — C'est un cas particulier de 1° obtenu en supposant que les génératrices

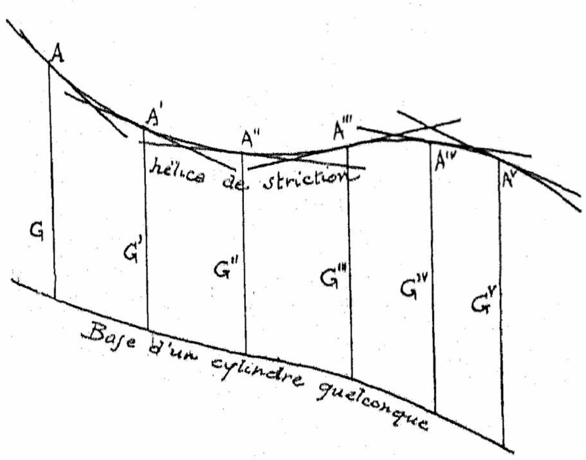


Fig. 206.

de la surface sont des tangentes à l'hélice de striction (fig. 206).

7° *Hélicoïde développable ordinaire.* — C'est un cas par-

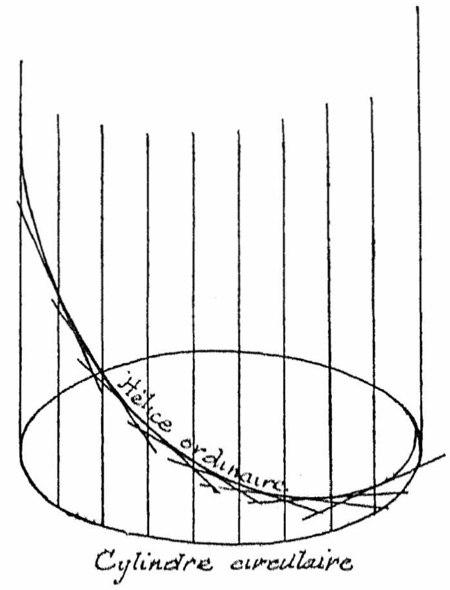


Fig. 207.

ticulier du précédent en supposant le cylindre noyau de révolution (fig. 207).

GÉNÉRATION DES DIFFÉRENTS HÉLICOÏDES PAR LE MOUVEMENT HÉLICOÏDAL D'UNE DROITE

Dans le premier cas (fig. 201), la génératrice G se déplace d'un *mouvement hélicoïdal*, c'est-à-dire d'un mouvement résultant à la fois d'une translation et d'une rotation ayant un axe parallèle à la translation. Dans ce mouvement le point central O décrit une hélice générale quelconque H tracée sur un cylindre quelconque C.

Dans le deuxième cas (fig. 202), c'est le même mouvement, mais le cylindre est de révolution.

Dans le troisième cas (fig. 203), le cylindre est réduit à une droite.

Dans le quatrième cas, le cône directeur est réduit à un plan (fig. 204) perpendiculaire à l'axe du cylindre de contour apparent.

Dans le cinquième cas (fig. 205), le noyau est réduit à une droite et le cône directeur à un plan, les génératrices s'appuient sur une droite perpendiculaire au plan auquel elles restent parallèles tout en se déplaçant d'un mouvement hélicoïdal.

Dans le sixième cas (fig. 206), les génératrices se déplacent d'un mouvement hélicoïdal en restant tangentes à l'hélice de striction.

Dans le septième cas, c'est le même mode de génération, mais le cylindre noyau est de révolution.

Ce dernier hélicoïde possède des propriétés qui méritent d'être signalées (voir fig. 207).

Une section de cette surface par un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre noyau est une développante de cercle.

Si on développe cette surface sur un plan, toutes les hélices trajectoires d'un point invariablement fixé sur une génératrice se transforment en des cercles y compris l'hélice de striction elle-même.

Le rayon ρ du cercle transformé par développement de l'hélice de striction est donné par la formule

$$\rho = \frac{r}{\cos^2 \alpha}$$

en appelant r le rayon du cylindre et α l'angle des génératrices avec le plan perpendiculaire à l'axe.

Applications des hélicoïdes et des surfaces gauches. — Les arêtes des marches d'un escalier en tour ronde forment une vis à filet carré (5°).

Le dessous des mêmes marches, c'est-à-dire l'intrados de l'escalier, est, dans le cas d'un escalier à noyau plein, un hélicoïde gauche à plan directeur (4°). Si le noyau est très mince, l'intrados peut être considéré approximativement comme formé par l'hélicoïde (5°) (vis à filet carré).

Dans la voûte dite vis de Saint-Gilles, les surfaces de lit des voussoirs sont formés de vis à filet triangulaire.

Enfin dans les voûtes biaises, on appareillait autrefois, à l'aide d'une surface dite *biais passé gauche*, surface

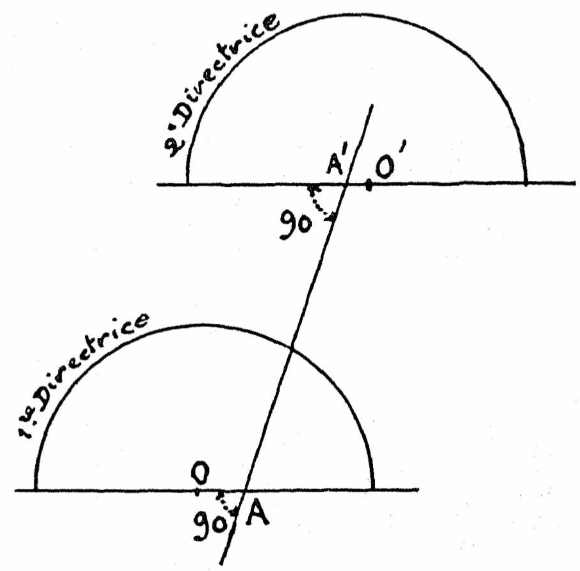


Fig. 208.

gauche à trois directrices : deux circulaires égales à plans parallèles, la troisième rectiligne dans un plan passant par les centres et à égale distance de ces deux centres (fig. 208).

Aujourd'hui on appareille les voûtes biaises par un appareil hélicoïdal; les surfaces de lit et de joint sont des vis à filet carré (5°).

PETITES ÉPURES

TEXTES

PETITE ÉPURE N° 1

Enoncé :

On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal dont deux génératrices sont AB, A (— 60, 50, 0), B (0, 50, 70) et CD C (40, 80, 0) D (0, 40, 50) : 1° trouver le deuxième plan directeur ; 2° étant donnée la projection verticale m' d'un point, en trouver la projection horizontale et 3° étant donnée une droite MΔ passant en M, Δ (0, 18, 42) trouver le second point d'intersection G de cette droite avec le paraboloïde.

Texte :

1° On obtient le deuxième plan directeur en menant par le point B de AB une parallèle BF à CD. Ce deuxième plan directeur est ABF.

2° On coupe le paraboloïde par le plan horizontal du point M′, on obtient la génératrice PQ ce qui donne la projection horizontale M.

3° On coupe le paraboloïde et le plan PMΔ par deux plans horizontaux, l'un passant en ω' qui donne la génératrice de bout dans le paraboloïde et l'horizontale KL dans le plan, d'où le point commun L, l'autre $r's'$ qui donne la génératrice RD et l'horizontale SU d'où le point U. L'intersection du paraboloïde et du plan PMΔ étant une droite, c'est la droite UL qui coupe elle-même la droite MΔ au point G cherché. Le plan tangent en G est MGΩ.

PETITE ÉPURE N° 2

Énoncé :

On donne une surface gauche à plan directeur horizontal, dont une directrice est la droite AB, A (0, 90, 0), B (0, 40, 70) et l'autre directrice un cercle de rayon $R = 30$ placé dans un plan de front de centre ω (— 40, 50, 30). 1° trouver un point M de cette surface connaissant la projection verticale m' de ce point ; 2° déterminer le plan tangent au point M.

Texte :

Les deux directrices de la surface étant placées d'après les données, on coupe par le plan horizontal du point m', ce qui donne deux génératrices PQ et RQ de la surface et sur une ligne de rappel deux points M et M_1 répondant à la question.

Pour avoir le plan tangent en M par exemple, il suffit de se rappeler (3e partie, 2e section) que sur une génératrice d'une surface gauche, le rapport anharmonique de quatre points est égal au rapport anharmonique des quatre plans tangents en ces points. Si sur la surface on connaît trois points avec leurs plans tangents, à savoir P, où le plan tangent est déterminé par la tangente au cercle, Q où le plan tangent est déterminé par la directrice elle-même, l'infini ou le plan tangent est horizontal ; pour avoir le plan tangent en M coupons les trois plans tangents en question par un plan vertical passant en M qu'on rabat sur le plan horizontal du point M, on obtient de suite les rabattements ml_1 de la trace du plan tangent en P, mi_1, du plan tangent en Q, mz du plan tangent à l'infini si alors on remarque que le rapport anharmonique $(PQM\ \infty) = \frac{MP}{MQ}$; il suffit donc de prendre sur une sécante $u_1\ v_1$, parallèle à $m\ z$ un point w_1, tel que $\frac{w_1 u_1}{w_1 v_1} = \frac{MP}{MQ}$. On relève ensuite la droite $w_1 m$ en $(mt, m't')$ en prenant sur

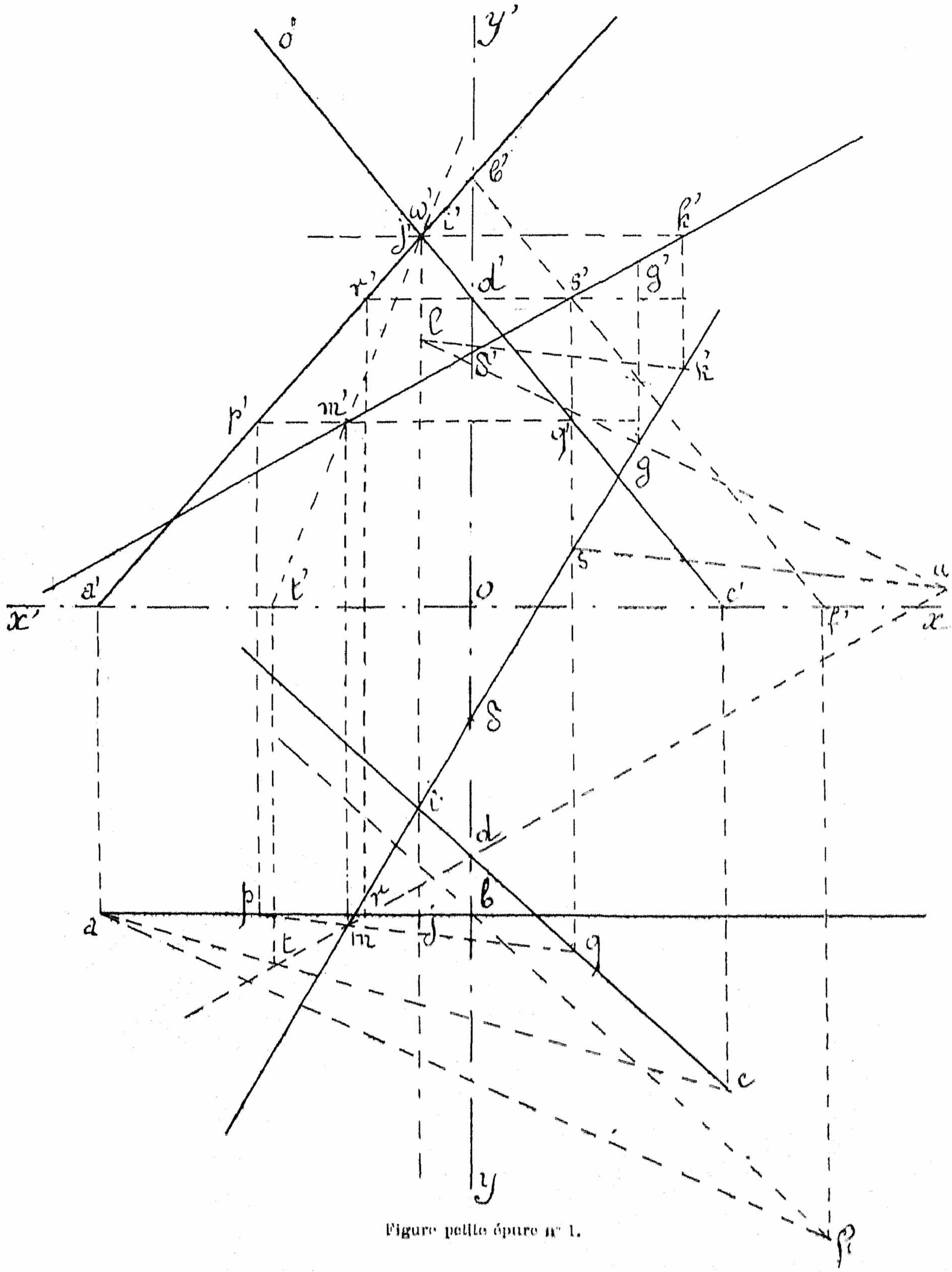


Figure petite épure n° 1.

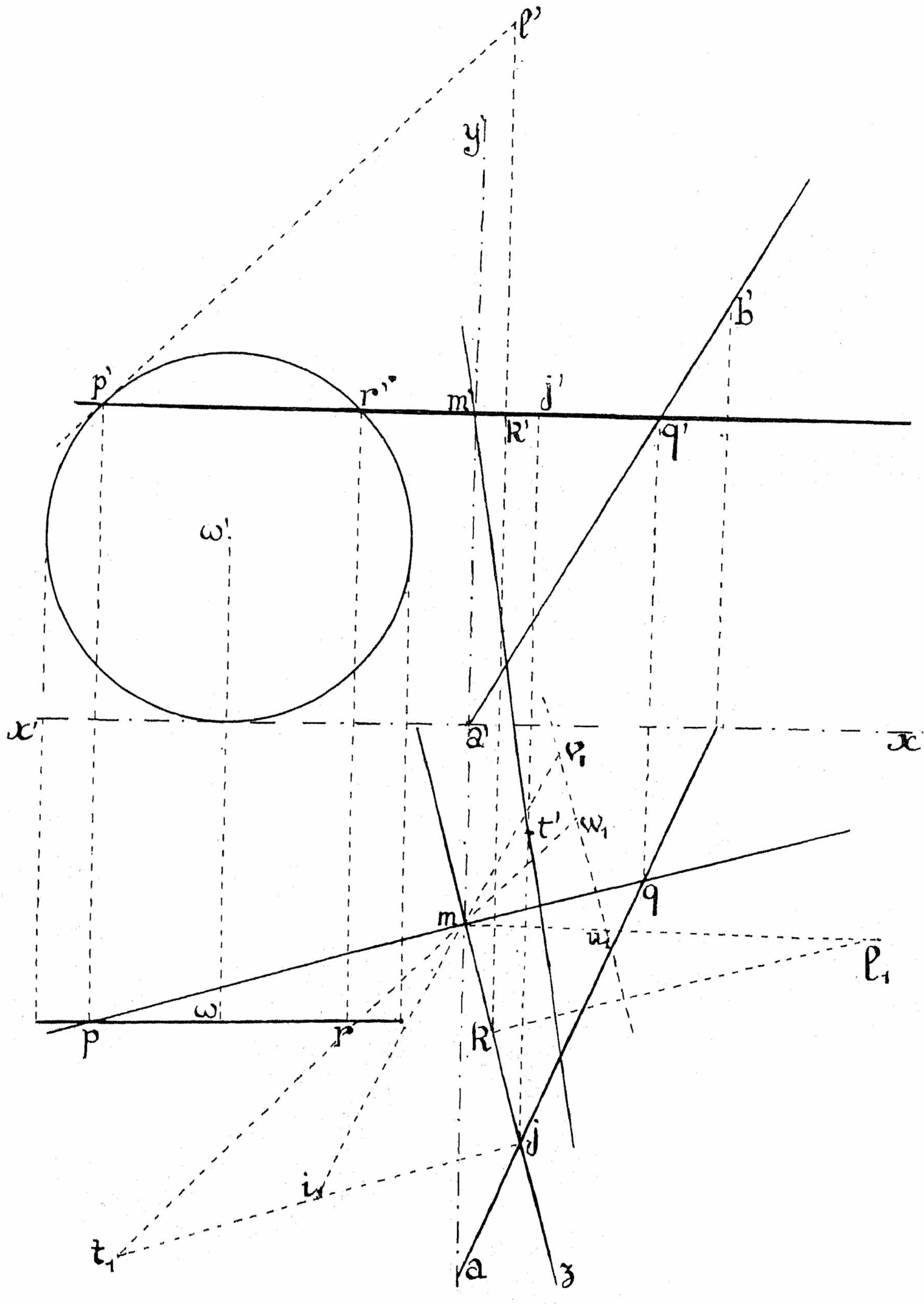


Figure petite épure n° 2.

la verticale du point J, $j't' = jt_1$. Le plan tangent est donc déterminé par la génératrice MP et la droite MT.

Cette génératrice M T est la deuxième génératrice en M du paraboloïde.

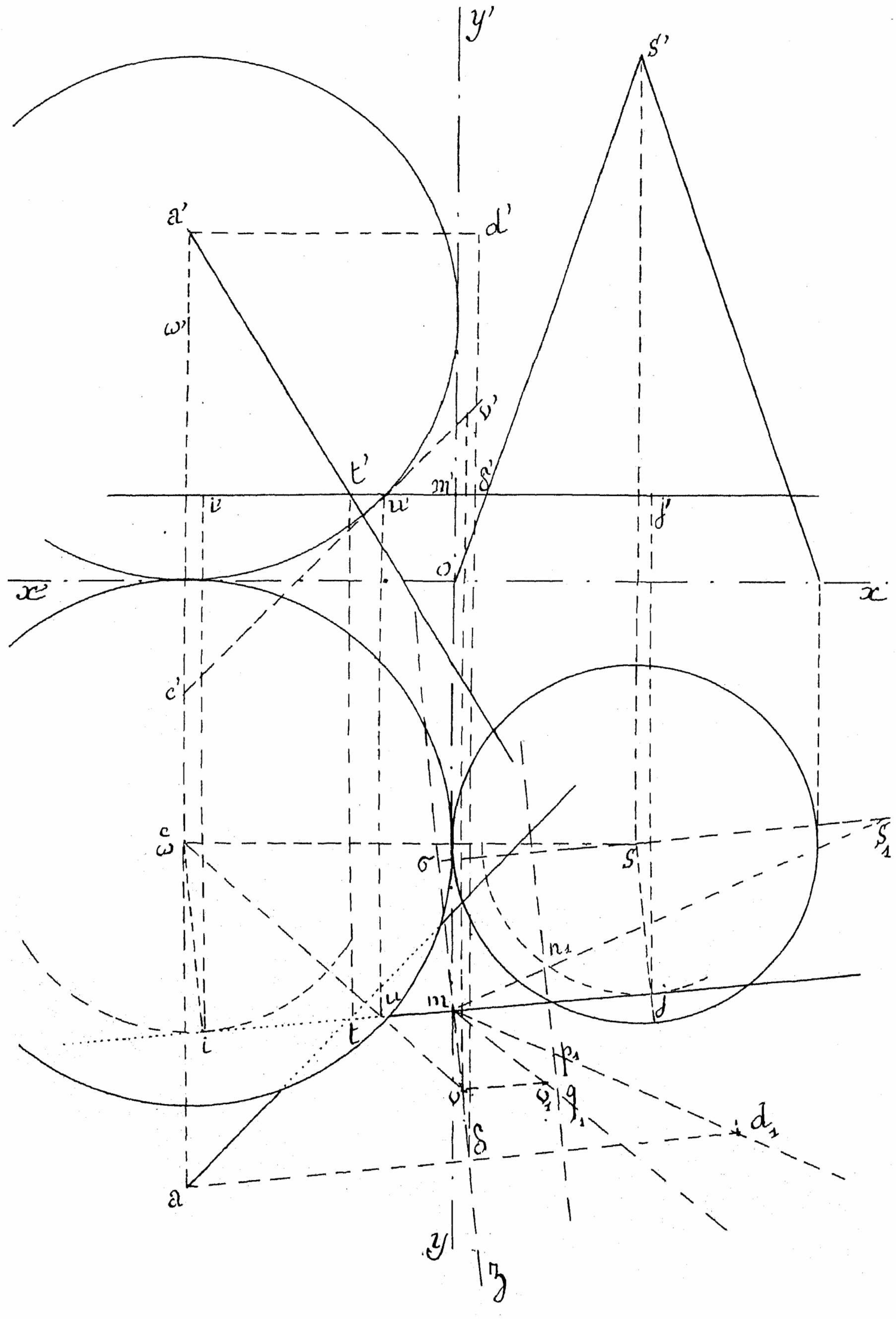


Figure petite épure n° 3.

PETITE ÉPURE N° 3

Énoncé :

On donne une surface gauche à plan directeur horizontal déterminée par deux noyaux, l'un une sphère de centre ω (— 45, 45, 45) de rayon $R = 45$, l'autre un cône de révolution de sommet S (30, 45, 90) ayant pour base un cercle de rayon 30 dans le plan horizontal. 1° prendre une génératrice quelconque de cette surface ; 2° étant donné un point A (— 45, 104, 60) trouver sur la génératrice choisie le point de la séparatrice d'ombre propre en supposant que la lumière émane du point A considéré comme lumineux.

Texte :

Pour avoir une génératrice quelconque il suffit de couper par un plan horizontal et de mener une tangente commune aux courbes de section des deux noyaux par ce plan horizontal; c'est ainsi que sur l'épure on a trouvé la génératrice IJ. Pour avoir le point limite d'ombre propre, il suffit de chercher le point de contact du plan tangent passant par A et IJ. Ce plan tangent AIJ détermine avec les plans tangents en I, J et l'infini un rapport anharmonique qui devra être égal au rapport anharmonique des quatre points de contact. On construit en rabattement les traces des quatre plans sur le plan vertical du point M et on obtient ainsi mS_1 pour le rabattement de la trace du plan tangent en J, mU_1 pour le plan tangent en I, $m\varepsilon$ pour le plan à l'infini, md_1 pour le plan AIJ. On prend le rapport $(n_1 q_1 p_1 \infty) = \frac{p_1 q_1}{p_1 n_1}$ et on détermine sur $i'j'$ le point t' tel que $\frac{t'i'}{t'j'} = \frac{p_1 q_1}{p_1 n_1}$ t' est le point cherché.

PETITE ÉPURE N° 4

Énoncé :

On donne un hyperboloïde de révolution défini par un axe $\alpha\beta$, α (— 40, 0, 0) β (25, 100, 82) et une génératrice AB, A (— 60, 35, 0), B (50, 30, 50). Déterminer le cercle de gorge de cet hyperboloïde ainsi que la génératrice du système opposé à celui de AB qui croise AB en M sur le cercle de gorge.

Texte :

On mène en MΩ la perpendiculaire commune à l'axe et à la génératrice AB. La plus courte distance est obtenue de front en $m'\omega'_1$. On mène alors par le point Ω sur l'axe le plan perpendiculaire à l'axe et on construit dans ce plan le cercle de centre Ω et de rayon $m'\omega'_1$, c'est le cercle de gorge. Sur l'épure le point M se trouve être le sommet du petit axe en projection horizontale. On a déterminé les axes de la projection verticale au moyen d'un rabattement qui a donné en $n'_1 n'$ le sommet du petit axe. On a tracé également une tangente $t_1 m'$ à l'aide de son rabattement $t_1 m'_1$. Pour avoir la deuxième génératrice passant en M, il suffit de mener par M la parallèle MU à l'axe $\alpha\beta$ et de prendre le symétrique d'un point de AB par rapport à cette droite MU. Sur l'épure on s'est servi du point C de AB qui se trouve être sur une horizontale perpendiculaire à MU, on a donc en G le pied de cette perpendiculaire et en H le point cherché : la deuxième génératrice est MH. Si au lieu d'employer le point C on avait pris tout autre point, on aurait dû mener de ce point le plan perpendiculaire sur MU et prendre le symétrique du point par rapport au pied du plan perpendiculaire sur MU.

PETITE ÉPURE N° 5

Énoncé :

On donne un hyperboloïde de révolution ayant pour axe $\alpha\beta$, α (— 40, 0, 0), β (0, 70, 70), dont une génératrice est AB, A (— 70, 45, 0), B (0, 45, 35). Trouver l'intersection de cet hyperboloïde avec la droite CD, C (0, 65, 50), D (47, 120, 0).

Texte :

On emploiera comme surface auxiliaire le cône de sommet S ayant même axe que l'hyperboloïde et dont une génératrice est la droite CD. On choisit comme base de ce cône le cercle situé dans le plan perpendiculaire à l'axe au point ω ; la droite CD coupe ce plan

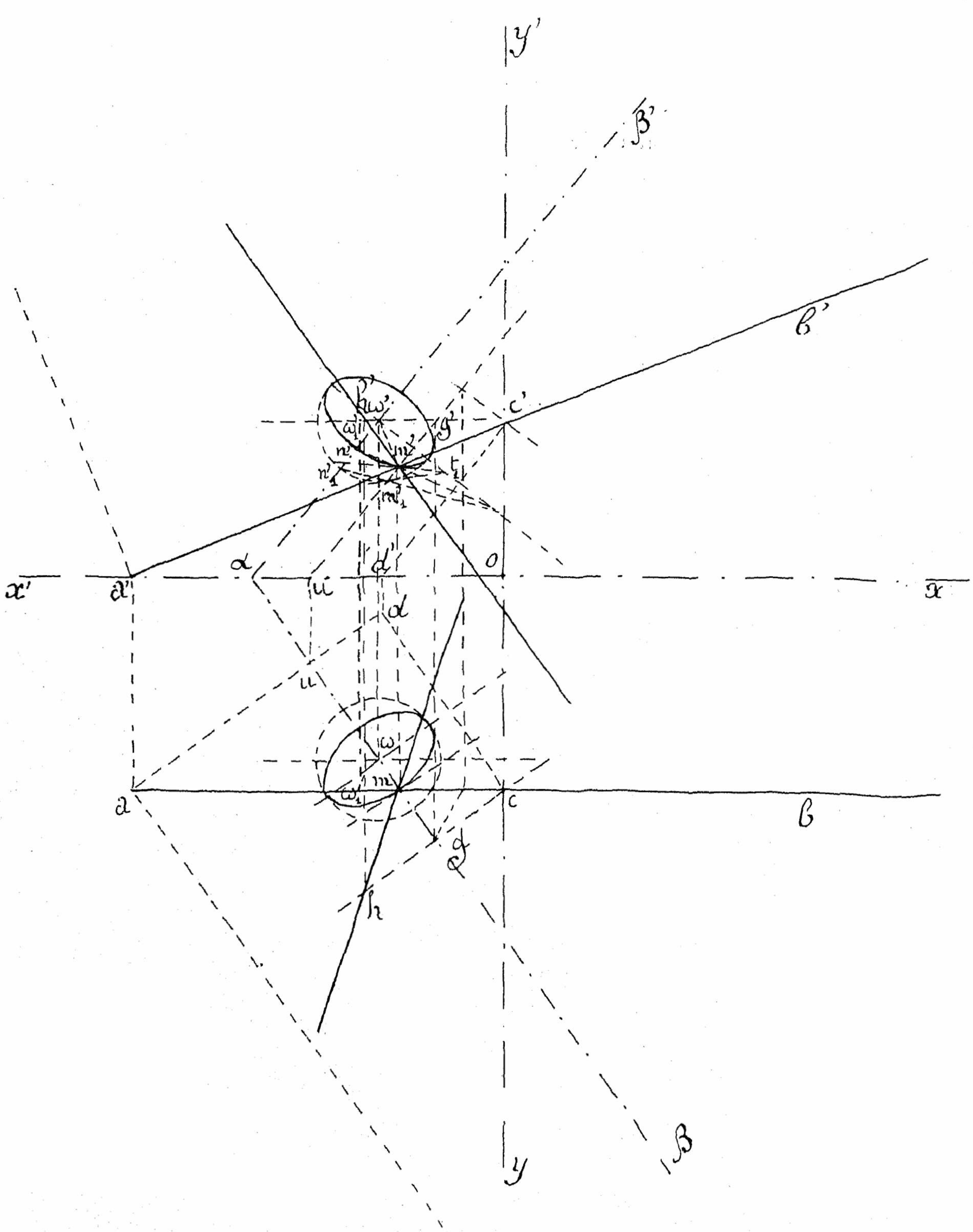


Figure petite épure n° 4.

en M et une rotation, amenant M en M_1, place de front ω M_1 de telle sorte que ωM représente le rayon du cercle de base du cône qu'on rabat immédiatement sur le plan horizontal de son centre ω. On cherche alors l'intersection de la génératrice AB de l'hyperboloïde avec ce cône, pour cela on prend la trace du plan SAB sur le plan de base du cône, cette trace est PT, son rabattement φt_1 coupe le cercle de base rabattu en K_1 relevé en K : (le deuxième point d'intersection du cercle et de φt_1 est en dehors des limites de l'épure) ; une homo-

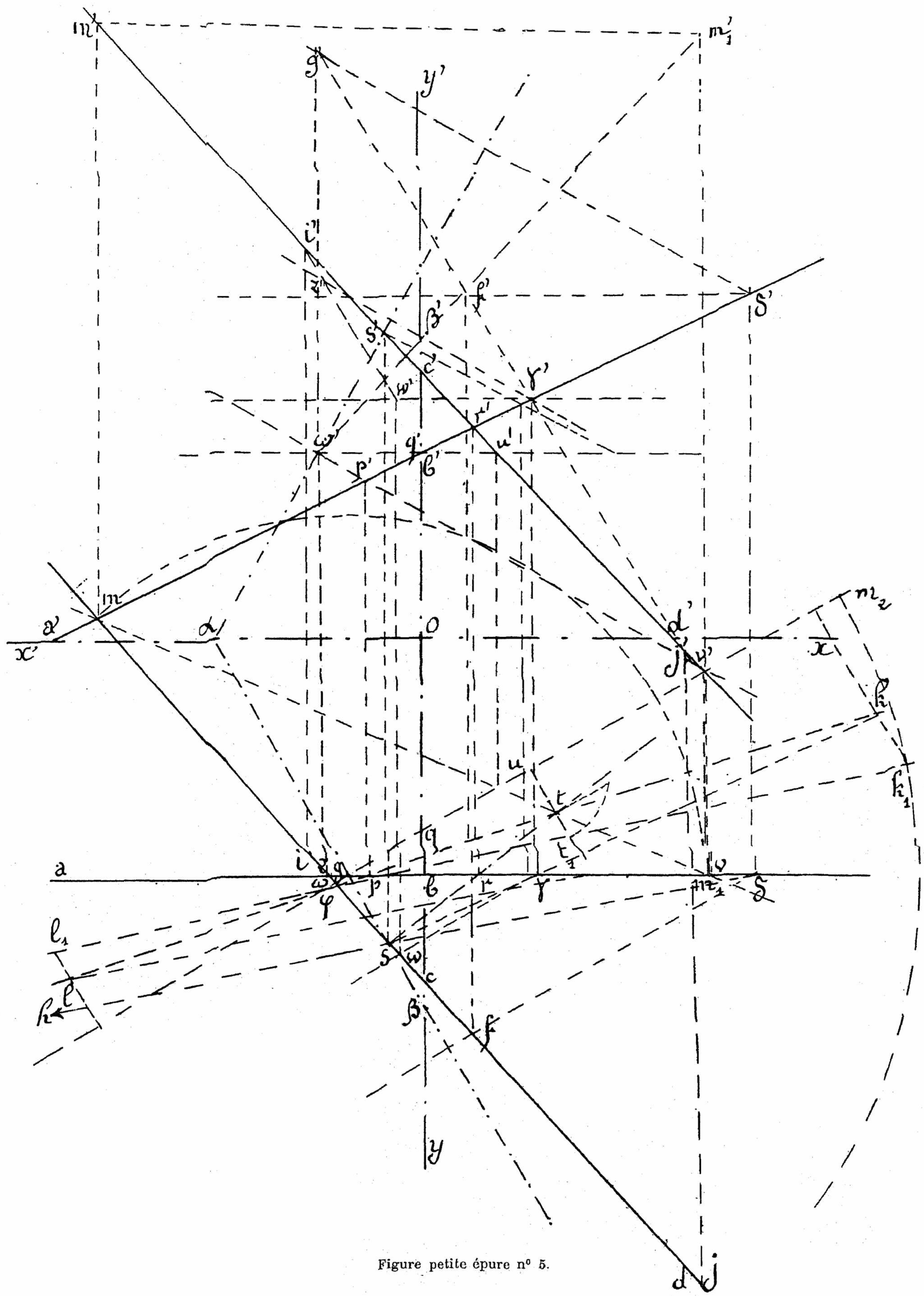


Figure petite épure n° 5.

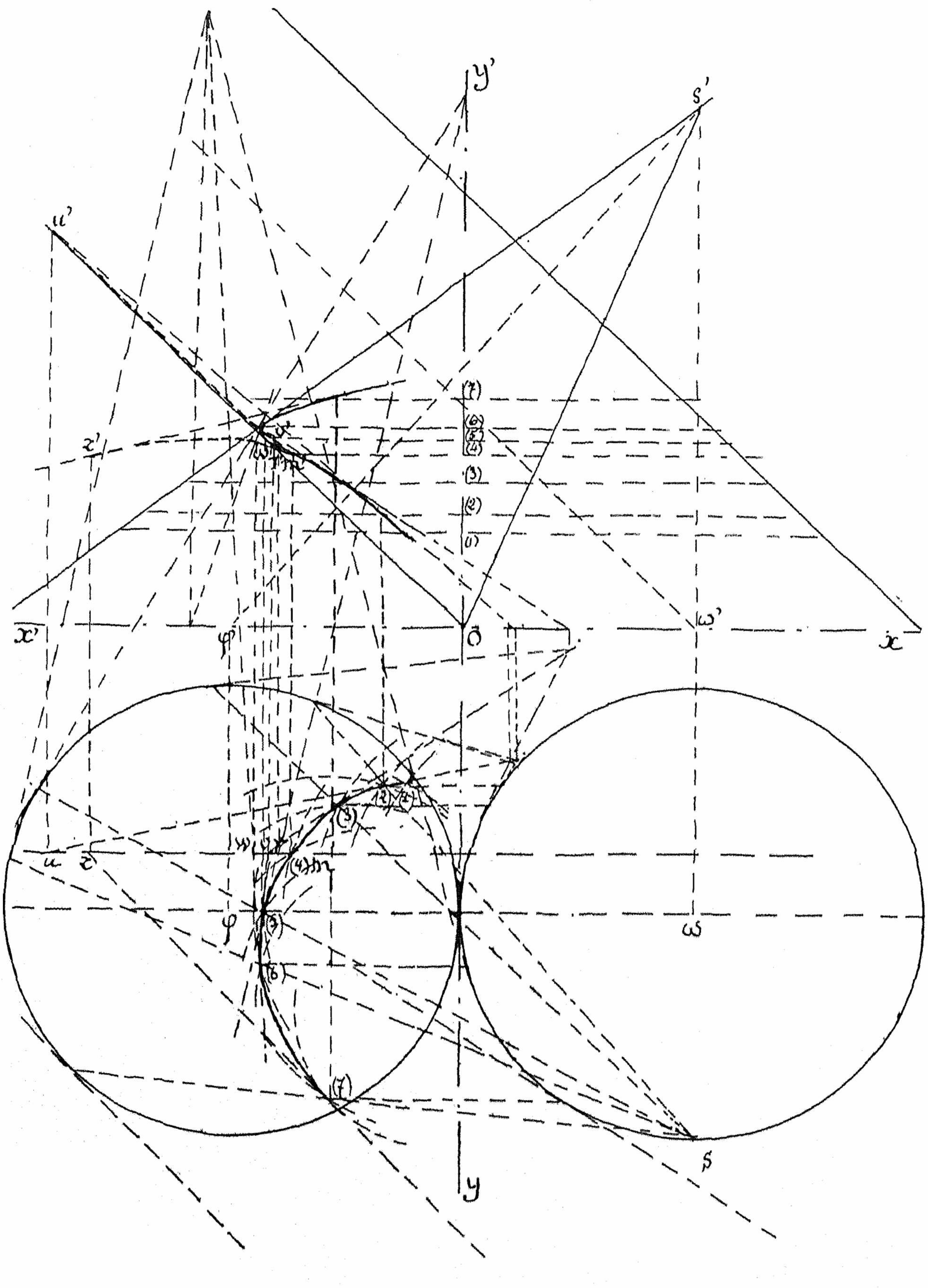


Figure petite épure n° 6.

thétie de rapport $1/2$ l'y place en I_1 relevé en I; les deux points I et K donnent de suite, le premier par homothétie, le deuxième directement les points γ et δ où la génératrice AB coupe le cône, il suffit de prendre les intersections des génératrices SK et SH du cône avec AB. De ces points δ et γ on mène alors des plans perpendiculaires sur l'axe, les points d'intersection de ces plans avec la droite CD qui sont les points I et J sur l'épure sont les points cherchés.

PETITE ÉPURE N° 6

Énoncé :

On donne un cône de sommet S (40, 90, 90) ayant pour base dans le plan horizontal un cercle de centre φ (—40, 50, 0) et de rayon 40 et un cylindre ayant pour base également dans le plan horizontal le cercle de centre ω (40, 50, 0) et de rayon 40; les génératrices sont de front et font 45° avec le plan horizontal. Prendre un point M commun à ces deux surfaces et couper la surface développable dont l'arête de rebroussement est l'intersection du cône et du cylindre par le plan de front du point M : vérifier en construisant cette nouvelle intersection dans le voisinage de M, qu'elle présente en ce point M un rebroussement.

Texte :

On a déterminé l'intersection du cône et du cylindre dans le voisinage du point M à l'aide de plans horizontaux numérotés (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) les points de l'intersection correspondants portant en projection horizontale les mêmes numéros. On a construit, par la méthode ordinaire de l'intersection de plans tangents, les tangentes aux points (2) (3) (4) (5) (6) (7) et on a pris les intersections de ces tangentes avec le plan de front du point M, ce qui a donné les points U, V, R, W et Z pour l'intersection de la développable et de ce plan de front; en joignant ces points, on vérifie bien que cette intersection présente en M un rebroussement ainsi que le veut la théorie du cours. (3ᵉ partie, 2ᵉ section.)

GRANDES ÉPURES

TEXTES

GRANDE ÉPURE N° 1

Hyperboloïde et sphère.

ÉNONCÉ :

On donne deux points A et B situés sur une verticale. Le point A est à 6 centimètres au-dessus du plan horizontal et le point B à 2 au-dessus du point A. La verticale AB est l'axe de l'hyperboloïde de révolution. Le cercle de gorge a pour centre le point A et pour rayon 4. Le parallèle P de centre B a pour rayon 5. On prend sur P un point C tel que le rayon BC soit incliné à 45° sur le plan vertical. Puis on décrit une sphère de centre C et de rayon 8. Représenter le solide compris entre la surface de l'hyperboloïde, le plan du parallèle P et le plan horizontal en supposant enlevée la partie de ce corps comprise dans la sphère.

TEXTE :

MISE EN PLACE. — On a immédiatement les contours apparents et horizontaux ; cherchons le contour apparent vertical de l'hyperboloïde, dont nous connaissons déjà le centre a', les sommets e' et d', et les deux points symétriques b'_1 et b'_2 du parallèle du point B. On sait que les sections d'une quadrique par des plans parallèles sont homothétiques, et que par conséquent elles ont mêmes directions asymptotiques; or, considérons le plan de front tangent à l'hyperboloïde au point F du cercle de gorge, il coupe la surface suivant les deux génératrice hf, $h'f'$, gf, $g'f'$; les directions asymptotiques de l'hyperbole sont donc $h'f'$ et $g'f'$ et comme de plus elles passent par le centre a' ce sont les asymptotes cherchées.

MÉTHODE. — On prend pour surfaces auxiliaires des plans horizontaux, ils coupent les deux surfaces suivant des cercles, d'où deux points de l'intersection. Remarquons de suite que le plan vertical de trace ac étant plan de symétrie pour les deux surfaces, la projection horizontale de l'intersection admettra ac pour axe de symétrie.

POINT COURANT ET SA TANGENTE. — Coupons par le plan horizontal H'. Il détermine sur les deux surfaces deux parallèles projetés horizontalement suivant les cercles de rayon αa et $c\beta$, d'où les deux points m et n en projection horizontale. En particulier, m se relève en m' sur H'. Cherchons la tangente en M. Elle est perpendiculaire au plan des normales en M aux deux surfaces. La normale à la sphère est cm-$c'm'$, la normale à l'hyperboloïde est γm-$\gamma' m'$. Une frontale de ce plan est $\gamma\delta$-$\gamma'\delta'$, d'où la projection verticale $m'\theta'$ de la tangente perpendiculaire à $\gamma'\delta'$. Une horizontale de ce plan est $\lambda\varepsilon$-$\lambda'\varepsilon'$, d'où la tangente $m\theta$ en m perpendiculaire à $\lambda\varepsilon$.

POINTS REMARQUABLES. — D'abord les points I et J sur le contour apparent horizontal de la sphère. Puis les points K et L sur le cercle de gorge. On obtient le

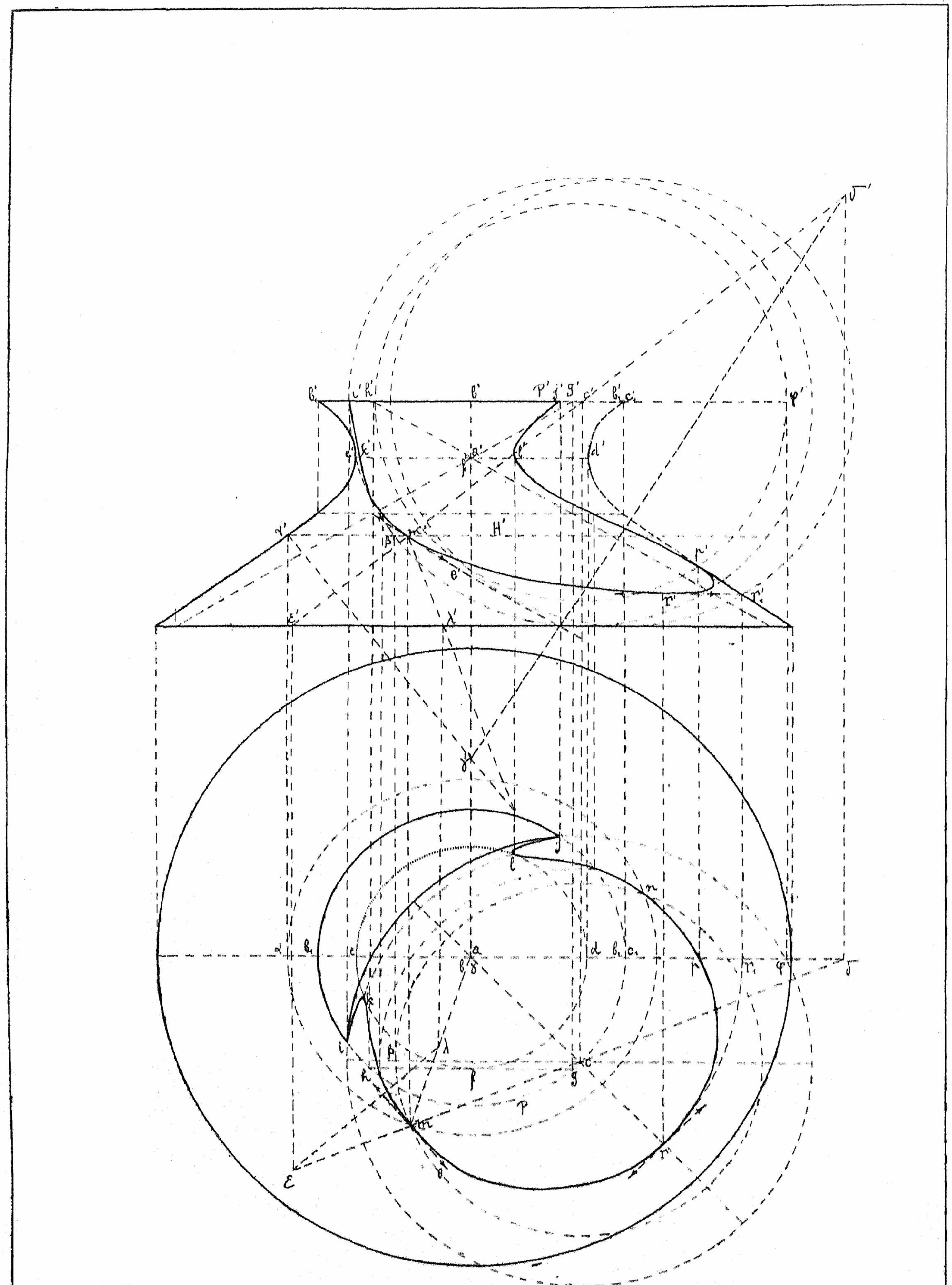


Figure grande épure n° 1.

point P sur le contour apparent vertical de l'hyperboloïde en coupant par le plan de front $a\varphi$, qui coupe la sphère suivant le cercle de rayon $c'\varphi'$, d'où le point p-p'. Enfin cherchons le point situé sur l'axe de symétrie ac. Pour cela faisons tourner la figure autour de la verticale du point a de façon à rendre le plan vertical ac de front. La section de l'hyperboloïde par ce plan est l'hyperbole méridienne, la section de la sphère est le cercle de centre c'_1, d'où le point r_1-r_1', qui par la rotation inverse vient en r-r'. En r la tangente est perpendiculaire à ac par raison de symétrie, et en r' elle est horizontale.

Ponctuation. — On se représente facilement le solide demandé.

GRANDE ÉPURE N° 2

Cylindre de révolution et hyperboloïde à une nappe.

Énoncé :

Représenter le solide commun à un cylindre de révolution et à un hyperboloïde à une nappe d'axe vertical. Le centre de l'hyperboloïde se projette horizontalement à 21 centimètres au-dessous de sa projection verticale. Les génératrices rectilignes font un angle de 45° avec le plan horizontal ; le rayon du cercle de gorge est égal à 3 centimètres. Le cylindre a 6 centimètres de rayon, son axe est de front et sa pente est égale à 1/3 de droite à gauche en montant. Cet axe rencontre l'axe de l'hyperboloïde à 1 centimètre au-dessus du plan de cercle de gorge.

Texte :

Mise en place. — Ayant construit les projections Δ et Δ' de l'axe du cylindre qui rencontrent en c et c' l'axe vertical de l'hyperboloïde, on obtient les contours apparents de ce cylindre en menant des tangentes respectivement parallèles à Δ et à Δ' aux deux cercles de contour apparent horizontal et vertical de la sphère de centre C C' et de rayon 6.

Quant à l'hyperboloïde, pour le définir, traçons son cercle de gorge en projection horizontale et la projection verticale de sa méridienne principale. Cette dernière est une hyperbole de centre O' et dont les asymptotes font 45° avec la ligne de terre ; de plus nous connaissons ses sommets a' et b', nous savons la donc construire.

Méthode. — On a affaire à deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent au point cc', on emploiera donc comme surfaces auxiliaires des sphères de centre cc'.

Point courant et tangente. — Considérons la sphère auxiliaire de rayon $c'\alpha'$. Elle coupe l'hyperboloïde suivant deux parallèles projetés verticalement en $d'd'_1$ et $e'e'_1$. Elle coupe aussi le cylindre suivant deux parallèles projetés en $f'f'_1$ et $g'g'_1$. D'où en projection verticale 4 points de l'intersection m', n', p', q', dont deux seulement les points m' et n' situés à l'intérieur du contour apparent vertical du cylindre sont réels. A chacun des points m' et n' correspondent en projection horizontale deux points de l'intersection ; ainsi la droite de bout du point m' rencontre le parallèle de l'hyperboloïde projeté horizontalement suivant le cercle de centre O, de rayons Oe aux deux points m et m_1 symétriques par rapport à Δ. Δ sera donc un axe de symétrie pour la projection horizontale.

Cherchons les tangentes en m et m_1. La tangente en M est perpendiculaire au plan des normales. Or la normale au cylindre est $m\beta$ et $m'\beta'$, la normale à l'hyperboloïde est $m\gamma$-$m'\gamma'$; par suite la tangente en m' est $m'\theta'$ perpendiculaire à la frontale $\beta'\gamma'$ de ce plan, et la tangente en m est $m\theta$ perpendiculaire à l'horizontale $\delta\varepsilon$.

Remarquons que la projection verticale de l'intersection est du second degré ; en effet l'intersection de deux surfaces du second degré est du quatrième degré ; mais le plan de front Δ est plan de symétrie pour les deux surfaces, chaque point est donc un point double en projection verticale, et cette projection sera donc du second degré. C'est ici une hyperbole dont nous allons déterminer et le centre et les asymptotes.

Son centre est le point d'intersection des diagonales du parallélogramme formé par les quatre points m', n', p', q'. Cherchons maintenant les directions asymptotiques ; pour cela nous devons considérer deux surfaces homothétiques à l'hyperboloïde et au cylindre et

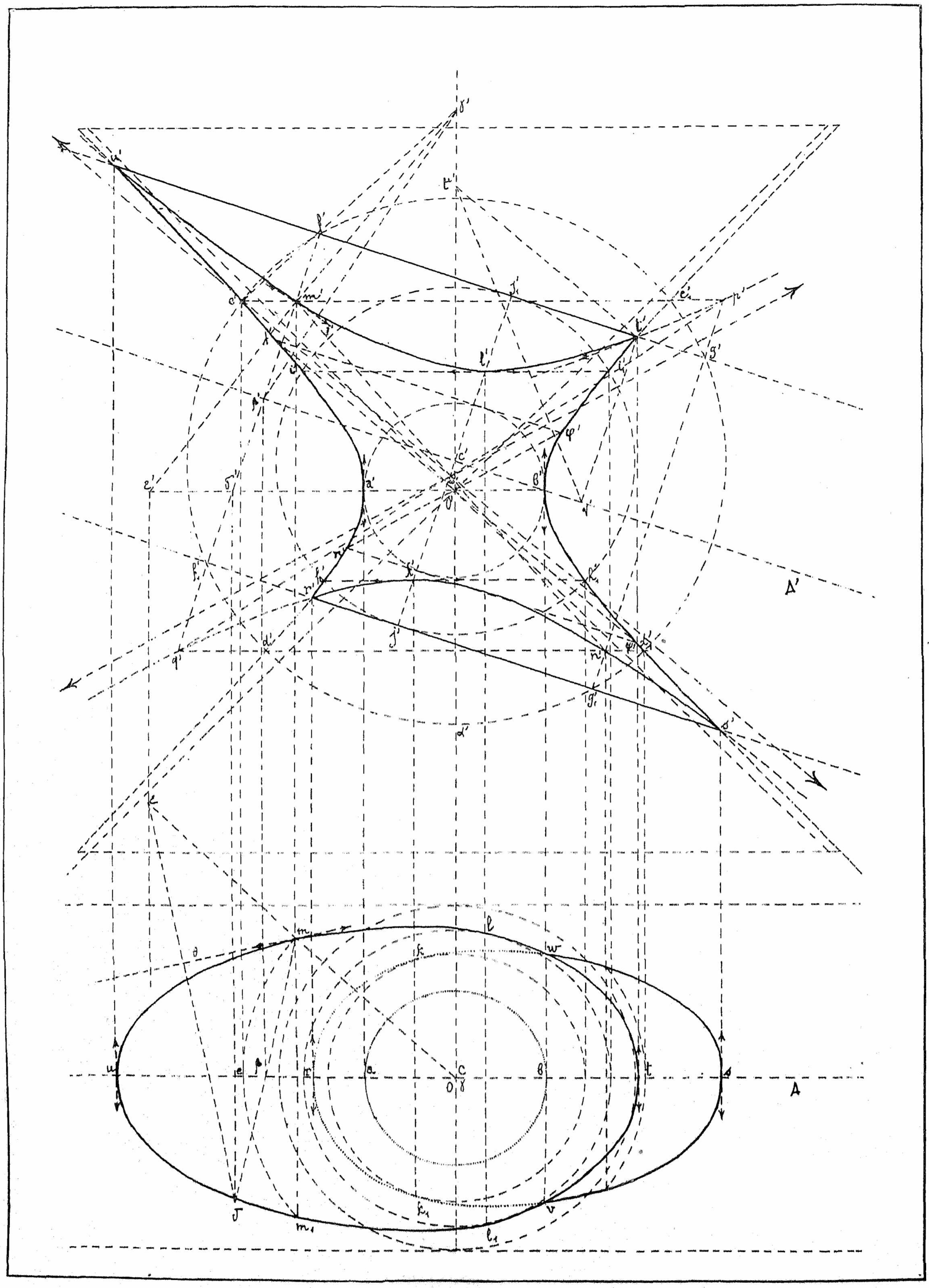


Figure grande épure n° 2.

circonscrites à une même sphère, nous prendrons comme sphère inscrite la sphère ayant pour grand cercle le cercle de gorge de l'hyperboloïde, l'hyperboloïde lui est donc circonscrit et le cylindre homothétique du cylindre donné et circonscrit à cette sphère s'obtient immédiatement. Les contours apparents verticaux de ces deux surfaces se rencontrent aux points φ', λ', ψ' et π'; ces deux surfaces se coupent donc suivant deux coniques ayant pour projections verticales les plans de bout $\varphi'\pi'$ et $\psi'\lambda'$. Ces deux droites $\varphi'\pi'$ et $\psi'\lambda'$ sont les directions asymptotiques cherchées. D'où les asymptotes en menant par ω' les parallèles à ces droites.

Points doubles. — La projection horizontale de l'intersection admet deux points doubles. Les plans diamétraux des deux surfaces par rapport à la direction verticale se rencontrant suivant la droite de bout du point b', les points doubles seront v et w sur bb'.

Points remarquables. — D'abord les points r', s', t', u', sur le contour apparent vertical du cylindre, rappelés horizontalement en r, s, t, u, sur Δ, la tangente en ces points étant perpendiculaire à Δ puisqu'ils sont dans le plan vertical de trace Δ, plan de symétrie pour les deux surfaces.

Enfin la sphère auxiliaire limite pour le cylindre, inscrite dans le cylindre le long du parallèle $j'j'_1$, et qui coupe l'hyperboloïde suivant les deux parallèles $h'h'_1$, $i'i'_1$, nous donne les points K' et l' en projection verticale où les tangentes sont horizontales, et les points K-K_1-l-l_1 en projection horizontale où la courbe est tangente au parallèle correspondant.

Ponctuation. — Nous voulons représenter le solide commun aux deux corps. Pour cela on garde des contours apparents de chaque corps les parties intérieures à l'autre et les ponctue. Puis on ponctue la courbe. Ici la courbe est entièrement vue en projection verticale. En projection horizontale l'arc vrw est seul caché.

GRANDE ÉPURE N° 3

Hyperboloïde, Cône et Sphère.

ÉNONCÉ :

Un cône de révolution a pour axe la droite (AA') située dans un plan de front A, et son contour apparent vertical est formé de deux droites rectangulaires dont l'une $S'a'$ est horizontale.

Un hyperbole de révolution d'autre part à son axe BB' dans le même plan de front A et il est engendré par la fronto-horizontale (DD').

On demande de représenter le solide commun aux deux surfaces limité à une sphère de rayon R et dont le centre est le point ω d'intersection des deux axes.

TEXTE :

Mise en place. — Il faut déterminer le contour apparent vertical de l'hyperboloïde. Pour en avoir un point on considère un point (pp') de la génératrice (DD') et on le fait tourner autour de l'axe (BB') jusqu'à ce qu'il vienne dans le plan de front de cet axe.

Si l'on rabat le plan de bout du point $\mu\mu'$ perpendiculaire à B B' sur le plan de front A, le point $\mu\mu'$ vient en μ'_1 à une distance $\mu'\mu'_1$ égale à $\lambda\mu$. Il suffit alors de décrire une circonférence de rayon $\omega\mu'_1$ pour avoir deux points $e'f'$ du contour.

Il faut remarquer que le cercle de gorge se rabat suivant le cercle ν. Par conséquent le centre de l'hyperbole de contour est le point ν'. D'autre part, il existe dans la surface d'une manière évidente deux génératrices parallèles passant par les points (rr') (DD') et qui sont horizontales. Donc une direction asymptotique de l'hyperbole de contour est horizontale. Comme il existe aussi deux génératrices verticales, une autre direction asymptotique est verticale. Les asymptotes de l'hyperbole de contour sont donc déterminées.

Méthode. — On coupe par des sphères ayant pour centre le point ω.

Point courant et sa tangente. — Prenons une sphère auxiliaire qui coupe le cône suivant le parallèle $a'b'$ et l'hyperboloïde suivant le parallèle $c'd'$. Le point m' est à l'intersection de $a'b'$ et $c'd'$. Pour avoir la projection horizontale on cherchera l'éloignement à partir de l'axe. Il suffit pour cela de rabattre le parallèle $a'b'$ $m'm'_1$ égale à Am est l'éloignement cherché.

Pour avoir la tangente il suffit d'appliquer la méthode du plan des normales.

Section des quadriques par la sphère. — En projection verticale ces sections sont deux paraboles évanouis-

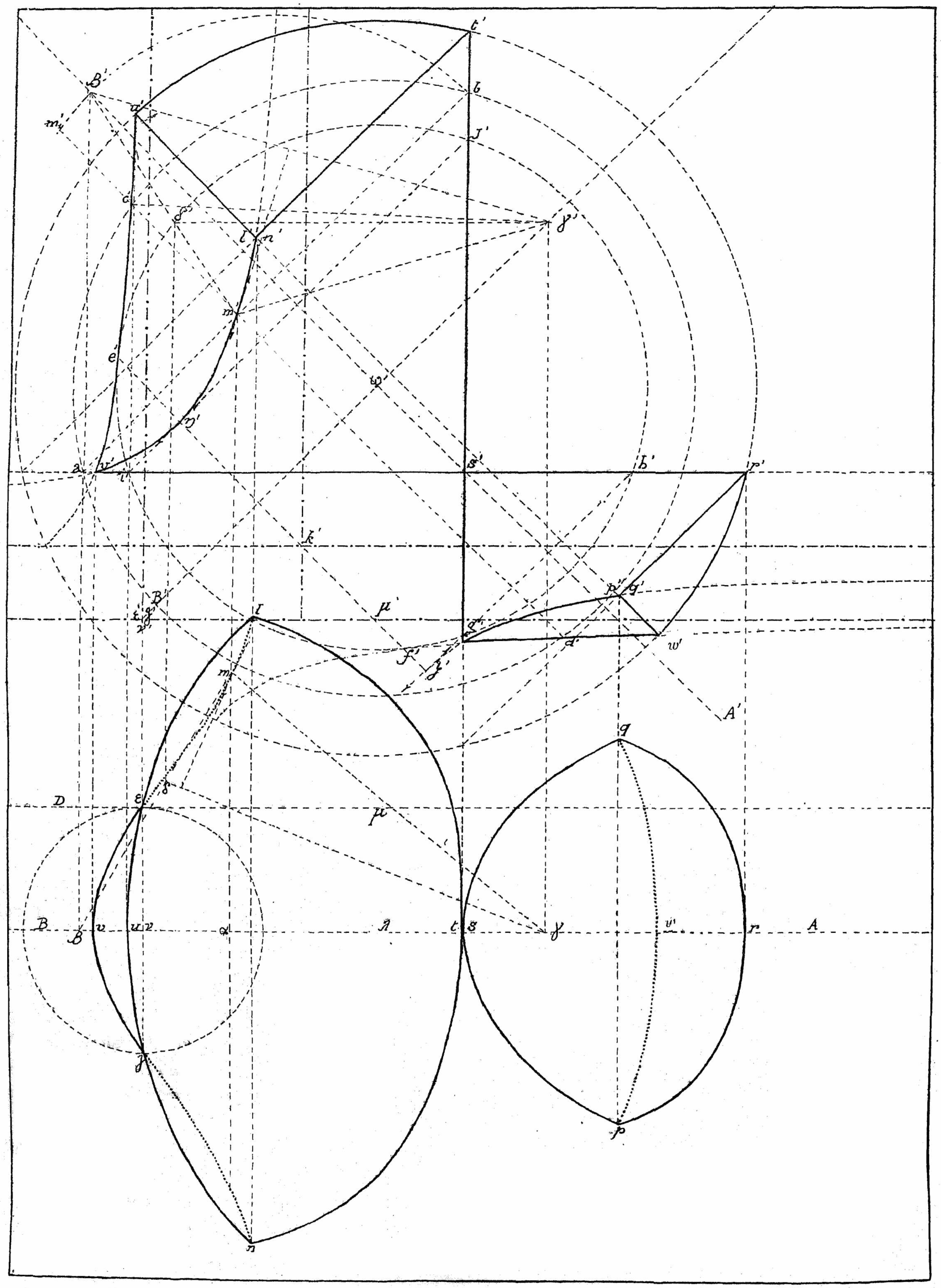


Figure grande épure n° 3.

santes, c'est-à-dire réduites à deux droites. Nous n'aurons besoin que de la projection n' w' pour l'hyperboloïde. Pour le cône la section se compose des droites $t'l'$ et $r'q'$.

Les points des projections horizontales se déterminent comme pour l'intersection du cône avec l'hyperboloïde.

Points remarquables. — On peut remarquer les points (ll') (nn') (pp') (qq') qui s'obtiennent immédiatement; et de même les points (vv') (gg') qui sont à l'intersection des contours apparents.

Remarque. — La projection verticale de l'intersection du cône et de l'hyperboloïde est une hyperbole dont on peut avoir facilement les asymptotes. Et d'abord, le cône asymptote et le cône S étant superposables par translation les directions asymptotiques sont la verticale et l'horizontale. Il suffit donc d'avoir le centre. Ce point sera donné par la sphère limite ω qui est inscrite à l'hyperboloïde. Cette sphère donne le point η' et y' avec leurs tangentes, qui sont, on le voit, perpendiculaires à la corde $\eta'y'$. Par conséquent le point k' milieu de $\eta'y'$ est le centre de l'hyperbole.

Ponctuation. — Elle est immédiate en projection verticale. En projection horizontale, tout ce qui se trouve dans la moitié supérieure de la sphère est vu; plus tout ce qui forme contour.

GRANDE ÉPURE N° 4

Paraboloïde hyperbolique et surface de révolution.

Énoncé :

1° Un solide opaque est engendré par la révolution autour de la verticale du point a de la surface $a'b'c'd'e'$. située dans le plan de front, de cette verticale, $c'd'$ est un arc de cercle ayant pour centre le point f' symétrique de c' par rapport à l'axe.

2° Un paraboloïde hyperbolique est défini par un plan directeur qui est de profil et par deux génératrices horizontales ab-$a'b'$, ec-$e'c'$ inclinées à 45° sur ce plan de profil. La surface du paraboloïde partage ce solide en deux parties. On demande de représenter celle qui contient l'arc $c'd'$. On se conformera pour la mise en place aux données du croquis.

Texte :

Méthode. — Les deux génératrices AB et AC du paraboloïde étant horizontales, le second plan directeur de la surface est horizontal; tout plan horizontal coupera donc le paraboloïde suivant une génératrice horizontale à distance finie. Nous prendrons donc pour plans auxiliaires des plans horizontaux qui couperont le paraboloïde suivant une génératrice et la surface de révolution suivant un cercle, d'où deux points de l'intersection.

Point courant et tangente. — Le plan directeur de profil coupe le paraboloïde suivant la génératrice bc-$b'c'$ inclinée à 45° sur le plan horizontal à cause des données particulières de l'épure. Il nous sera, par suite, facile de trouver l'intersection G de cette génératrice avec le plan horizontal de cote h, sa projection horizontale sera le point g tel que $bg = b'g' = h$.

La génératrice d'intersection de ce plan et du paraboloïde hyperbolique est donc complètement déterminée, elle est horizontale, d'où sa projection verticale et sa projection horizontale passera par le point a, pied de la génératrice verticale du paraboloïde. D'où, en projection horizontale, le point m relevé sur H'.

On opère de même pour obtenir un point de l'intersection du paraboloïde et de la surface de révolution engendrée par l'arc $c'd'$ et on obtient le point n-n' et son symétrique n_1-n'_1; on voit par les constructions que la projection horizontale admet le point a comme centre de symétrie et que la projection verticale est symétrique par rapport à $a'd'$.

Cherchons la tangente en M; c'est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces. Le plan tangent au cylindre a pour trace mt, tangente en m au cercle. Le plan tangent en M au paraboloïde hyperbolique est déterminé par les deux génératrices qui passent par ce point; l'une mg-$m'g'$ vous donne la direction am de la trace horizontale du plan tangent, l'autre est de profil et rencontre la génératrice ab du système horizontal au point B, qui est un point de la trace horizontale du plan tangent, d'où Bt parallèle à am, t se rappelle en t'. d'où $t'm'$.

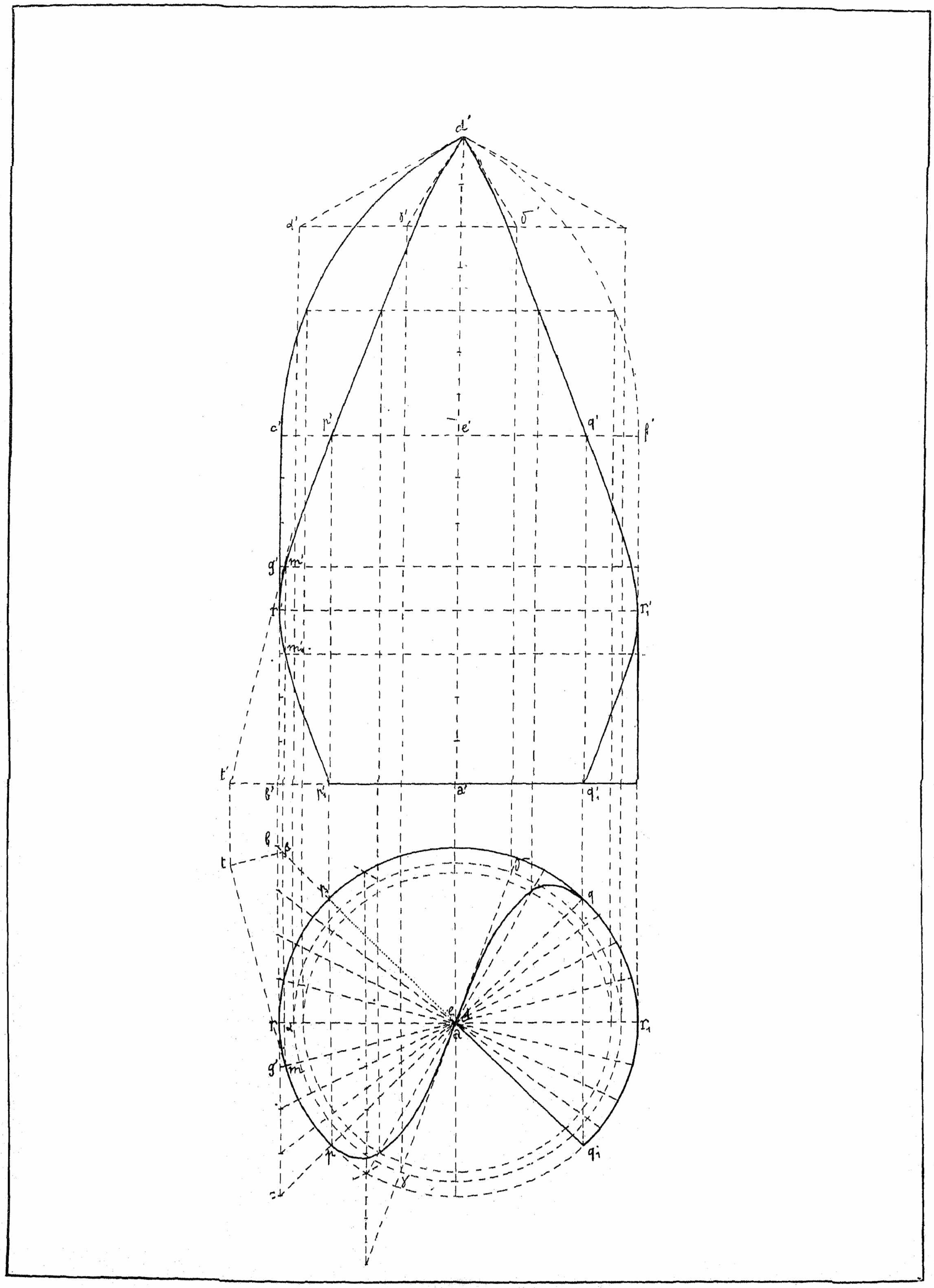


Figure grande épure n° 4.

Points remarquables. — D'abord les points sur le contour apparent horizontal de la surface. Ce sont les points P et Q situés sur EC et P_1, Q_1 sur AB. Puis les points sur le contour apparent vertical R et R_1 qu'on obtient facilement, le plan de front de l'axe coupant le paraboloïde hyperbolique suivant la génératrice fronto-horizontale RR' équidistante de AB et EC.

Enfin, cherchons les tangentes en D. On voit en projection horizontale, par passage à la limite, que la tangente en d est la génératrice horizontale du paraboloïde passant par D; par suite les tangentes en d' seront les projections de génératrices d'intersection du plan vertical $\chi\, a\, d$ avec le cône de tangence en D à la surface de révolution, d'où $\delta'\ d'$ et $\delta'\ d'$ symétriques par rapport à $a'd'$.

Ponctuation. — On ponctue d'abord la courbe d'intersection sur la surface de révolution : en projection horizontale elle est vue tout entière; en projection verticale les arcs $r'p'$ et $d'q'r'_1$ sont cachés, mais deviennent vus lorsque l'on enlève la partie du solide placée en avant du paraboloïde.

GRANDE ÉPURE N° 5

Paraboloïde hyperbolique et sphère.

Énoncé :

On donne une sphère (OO') par son rayon. Un paraboloïde hyperbolique admet comme génératrices les droites AB et CD, et pour plan directeur le plan horizontal.

Représenter le solide commun aux deux surfaces.

Texte :

Remarque. — Il y a deux plans de symétrie communs aux deux surfaces. Le plan horizontal du point O' et le plan de front du point O. Tout sera donc symétrique par rapport aux droites $O'n'$ et On.

Mise en place. — Le paraboloïde admet un contour apparent horizontal, qui est une parabole à priori. Ce contour apparent est la projection du lieu des points de contact des plans tangents verticaux. Cherchons un de ces points.

Considérons par exemple la génératrice ($g_3\gamma_3$, $g'_3\gamma'_3$). Le plan vertical projetant cette droite coupe le paraboloïde suivant une génératrice de système différent de G_3F_3. Or une telle génératrice passe en projection verticale par le point ω' et rencontre toutes les génératrices horizontales. Le plan vertical coupant (ad, $a'd'$) au point (pp'). Cette génératrice sera en projection verticale $\omega'p'$. On en déduit immédiatement le point (μ, μ').

Méthode. — On coupe par les plans horizontaux. Ces plans donnent un cercle dans la sphère et une génératrice horizontale dans le paraboloïde hyperbolique.

Point courant et sa tangente. — Considérons le plan $g'_1\gamma'_1$. Il coupe la sphère suivant le cercle de diamètre ($\lambda\nu$, $\lambda'\nu'$) et le paraboloïde suivant la génératrice ($g_1\gamma_1$, $g'_1\gamma'_1$). On a immédiatement deux points de l'intersection. Prenons le point (mm'). La tangente est l'intersection des plans tangents. Le plan tangent à la sphère est perpendiculaire au rayon (om, $o'm'$). On le détermine par l'horizontale ($m\beta$, $m'\beta'$) et la frontale ($m\gamma$, $m'\gamma'$).

Le plan tangent au paraboloïde est formé par la génératrice $G_1\Gamma_1$ et par la deuxième génératrice du point (m, m'). Cette génératrice passant par le point ω' en projection verticale, se détermine facilement en ($m\alpha$, $m'\alpha'$).

Pour avoir un point ($\tau\tau'$) de la tangente autre que (mm') il suffit de couper par le plan horizontal γ'.

Points sur les contours apparents de la sphère. — En projection horizontale les points (hh') (ii') sont évidents. Examinons la projection verticale.

Le plan du contour apparent vertical étant de front, on coupera par ce plan. On obtiendra le cercle o' dans la sphère, et dans le paraboloïde une hyperbole. On déterminera deux points de cette hyperbole voisins de la circonférence o'. Il suffit pour cela de couper par les plans horizontaux g'_1 et g'_2. Ces plans donnent les points (qq') (rr'). En assimilant l'arc $q'r'$ d'hyperbole à une droite, on a de suite le point e' et par symétrie le point f'.

Remarque. — Les points e' et f étant sur une même verticale, leurs projections horizontales sont confondues. Le point (ef) est donc un point double en projection horizontale.

Points sur le contour apparent du paraboloïde. — Le plan de contour apparent du paraboloïde passe en rai-

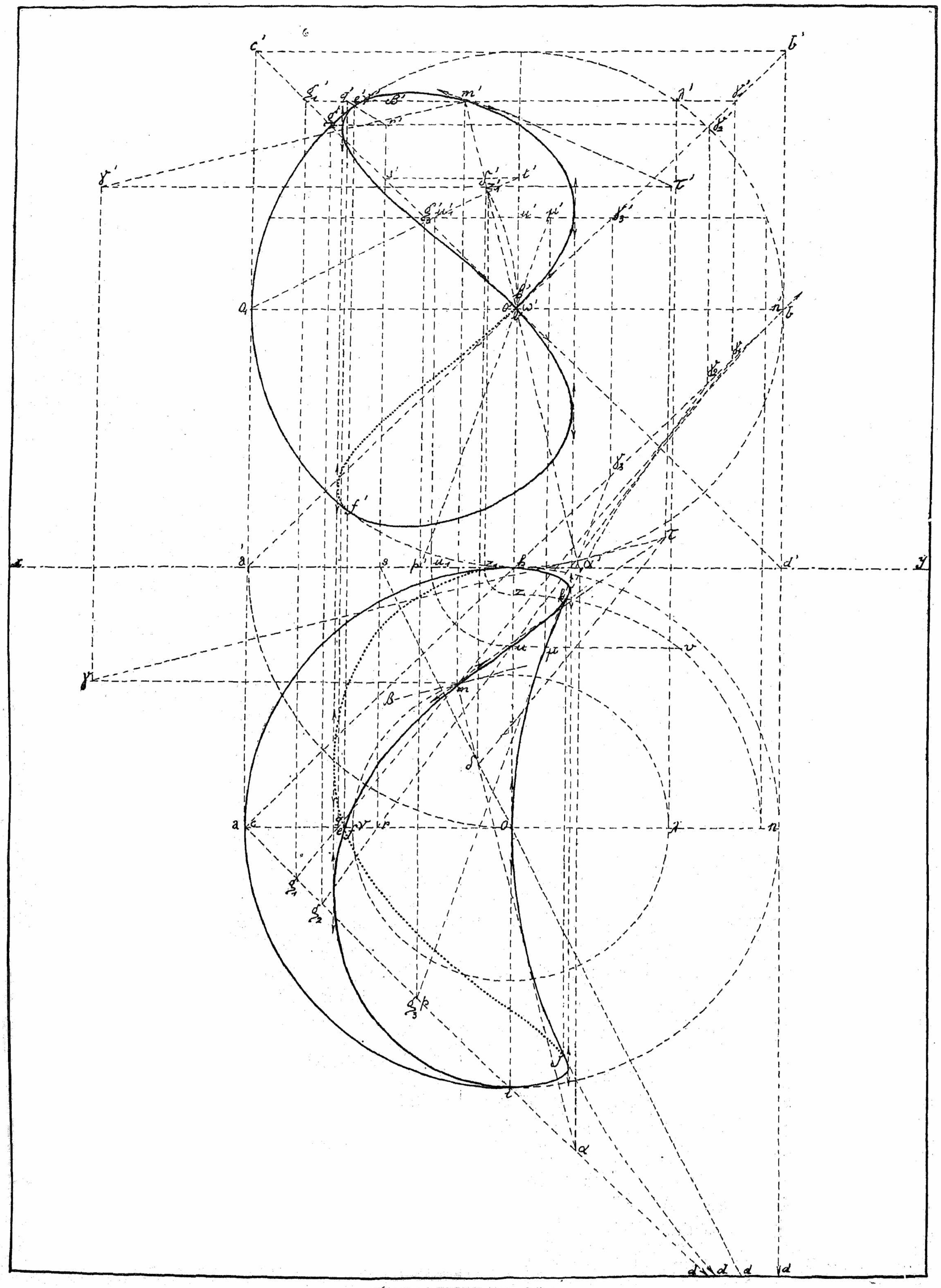


Figure grande épure n° 5.

son des symétries par la droite (on, $o'n'$). Il est parallèle à la ligne de terre. Pour avoir un point de sa trace verticale, considérons une droite qu'il contient (do, $d'o'$). La trace verticale de cette droite étant (ss'), la trace cherchée sera $s't'$. Ainsi le plan de contour apparent est déterminé par les droites (on, $o'n'$), (st, $s't'$).

On coupera par ce plan. Le paraboloïde donnera comme courbe d'intersection la parabole de contour apparent, et la sphère sera coupée suivant une ellipse dont on déterminera deux points voisins de la parabole.

Sur l'épure on a cherché le point (zz') situé dans le plan de profil (oo') en coupant par ce plan et en le rabattant sur le plan vertical. La droite (ot, $o't'$) vient en (ot, o'_1t') et le cercle d'intersection est un grand cercle tangent en o' à la verticale. Le point (zz') rabattu est à l'intersection de ce cercle et de o_1t'.

Le point (u) a été obtenu à l'aide d'un plan horizontal.

Ponctuation. — Il suffit d'appliquer les règles ordinaires.

GRANDE ÉPURE N° 6

Hyperboloïde et paraboloïde hyperbolique.

Énoncé :

On donne un hyperboloïde de révolution défini par un axe vertical ω (0, 75, 0), et une génératrice de front MN, M (—69, 105, 0), N (69, 105, 100), et un paraboloïde hyperbolique dont une génératrice est MN, une autre la droite UV intersection du deuxième bissecteur et du plan du cercle de gorge de l'hyperboloïde, un des plans directeurs étant de profil.

Représenter la partie de la surface de l'hyperboloïde supposée constituée de matière opaque qui est située au-dessous du paraboloïde.

Texte :

D'après les données, on trouve pour cercle de gorge de l'hyperboloïde : un cercle de rayon 30 dans le plan horizontal de la cote 50.

Le paraboloïde admet évidemment comme second plan directeur un plan de front.

L'intersection se composera en dehors de la génératrice MN qui est commune, d'une cubique gauche ; mais si on remarque que les deux surfaces admettent un axe de symétrie, de bout commun, l'axe ΩP on voit de suite que l'intersection se projettera sur le plan vertical suivant une cubique gauche dont le point ω' sera le centre et le point d'inflexion.

Pour avoir des points courants tels que E on s'est donné par sa trace horizontale mi un plan auxiliaire passant par MN, ce plan coupe l'hyperboloïde suivant une seconde génératrice IG et le paraboloïde suivant la génératrice de profil $\varepsilon'e'e$ obtenue en déterminant le point ε situé sur UV. Ces deux génératrices se coupent au point E. La tangente en ce point est obtenue en prenant l'intersection des deux plans tangents dont les traces sur le plan du cercle de gorge sont $\alpha\beta$ pour le plan tangent à l'hyperboloïde et $\pi\gamma'$ pour le plan tangent au paraboloïde ; ces deux traces se coupent en θ et la tangente est θe. Au point d'inflexion Q la tangente est obtenue en cherchant la trace ΨP du plan tangent en P au paraboloïde (à l'aide d'un rabattement qui donne Ψ_1), sur le plan tangent de front en P à l'hyperboloïde. Aux points M et N les plans tangents aux deux surfaces sont confondus, on pourrait y déterminer les tangentes par une des deux méthodes du cours, il est plus rapide de prendre la tangente en projection horizontale à l'aide d'un calcul analytique simple, et de la relever ensuite en projection verticale comme droite du plan tangent commun.

La ponctuation ne présente d'autre part aucune difficulté.

GRANDE ÉPURE N° 7

Cône et Conoïde.

Énoncé :

On donne un conoïde à plan directeur horizontal admettant pour directrices : 1° une verticale V (70, 70, 0) et un cercle dans un plan de profil de centre ω (—70, 70, 35) de rayon 35 et un cône de sommet S (70, 0,

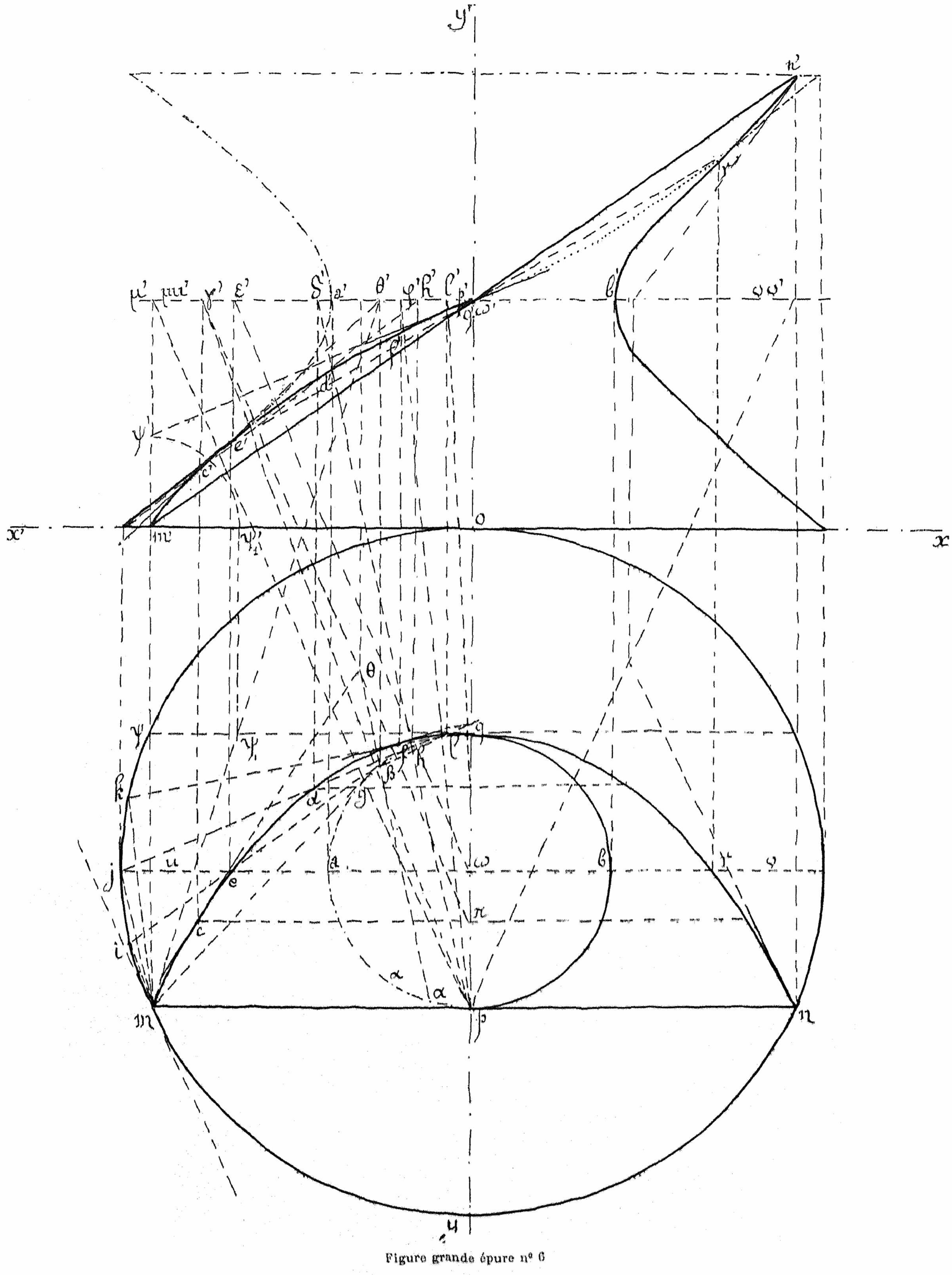


Figure grande épure n° 6

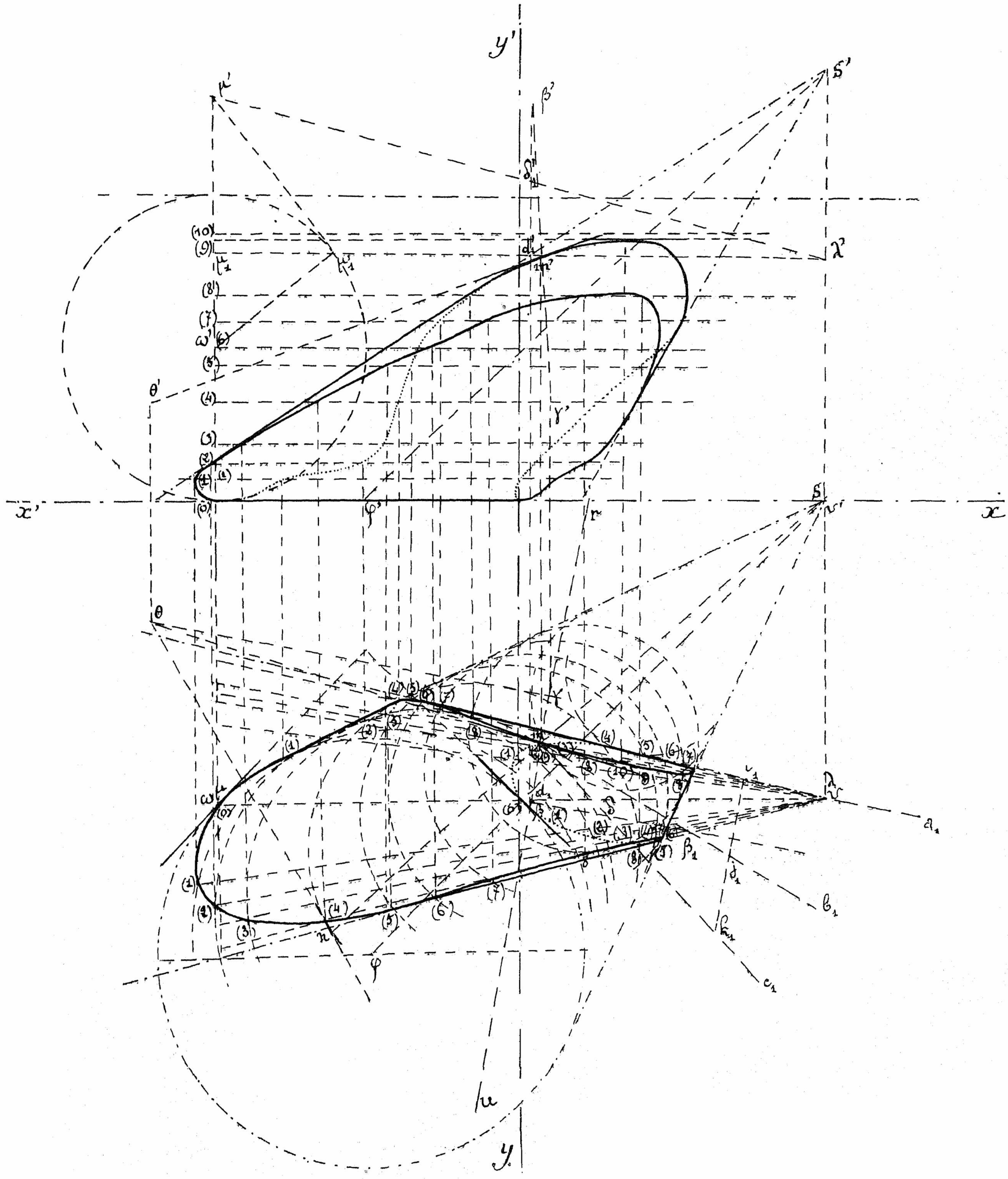


Figure grande épure n° 7.

100) ayant pour base dans le plan horizontal un cercle de centre φ (—35, 104, 0) de rayon 50. Représenter le solide commun à ces deux corps supposés remplis de matière opaque.

Texte :

On aura facilement exécuté la mise en place des deux corps; toute la difficulté de l'épure consiste ici à bien déterminer la courbe gauche de l'intersection qui est ici du 8e degré; on y est arrivé en cherchant un grand nombre de points courants obtenus en coupant les deux surfaces par des plans horizontaux numérotés de 0 à 10. On a également numéroté par les nombres correspondants la projection horizontale des points obtenus. De cette façon, il est facile, les points étant obtenus, de tracer la courbe. On peut remarquer que le plan de cote 0 étant limité pour le conoïde les deux tangentes aux points (0) sont les tangentes à la base du cône.

D'autre part la courbe présente deux tangentes horizontales dont on a déterminé les points de contact en cherchant par tâtonnement les plans horizontaux correspondants (10) et voisin de (8). Enfin, les tangentes aux points courants ont été obtenues par la méthode ordinaire d'intersection des plans tangents, on a laissé sur l'épure subsister les constructions ayant servi à la recherche du point M (9). On a pris d'abord la trace M0 du plan tangent au cône en M sur le plan horizontal (4); puis, à l'aide du théorème de Chasles on a recherché le plan tangent en M au conoïde en coupant les plans tangents en μ, λ et ∞ le long de la génératrice du point M par le plan vertical perpendiculaire en M à cette génératrice; on a trouvé ainsi les traces *ma*, *mc*, *mu* en prenant sur une parallèle i_1K_1 un point j_1 tel que $\dfrac{j_1i_1}{j_1K_1} = \dfrac{m'\lambda'}{m'\mu_1'}$; on détermine la trace sur le vertical en question du plan tangent en M, on relève cette trace en $m'\beta'$ à l'aide du point rabattu en β_1, dont la projection horizontale est β confondu avec *dl*. On a ensuite facilement la trace $\gamma 0$ de ce plan tangent sur le plan horizontal (4) d'où la tangente en M : 0M. Les autres points remarquables, tels que les points sur les contours apparents ne peuvent être déterminés qu'approximativement.

GRANDE ÉPURE N° 8

Hyperboloïdes et sphère.

Énoncé :

On considère une sphère (OO′) et un hyberboloïde engendré par la fronto-horizontale BB′ en tournant autour de l'axe de front AA′.

Cet hyperboloïde étant supposé plein de matière opaque dans la partie de l'espace qui contient son centre, on demande de représenter ce corps limité : 1° à la sphère OO′; 2° à l'hyperboloïde conjugué du premier.

Texte :

Mise en place. — Il faut déterminer les contours apparents des hyperboloïdes. Pour avoir un point courant du premier hyperboloïde on prend un point quelconque $\mu\mu'$ de la génératrice et on l'amène par rotation en μ_1' dans le plan de front de l'axe. Le cône des normales ayant son sommet en λ', $\lambda'\mu_1'$ est la perpendiculaire à la tangente au point trouvé.

Les asymptotes sont B′ et sa symétrique C′ par rapport à A′. Le sommet de l'hyperbole est à une distance du centre égale à $\alpha_1\mu$.

Cherchons le contour apparent horizontal. Pour avoir les asymptotes on prend une sphère inscrite O_1O_1' dans le cône asymptote. Pour le sommet on a également $\omega\sigma_1$ égale à $\alpha\mu$. Enfin pour avoir un point courant avec sa tangente il suffit de prendre une sphère $(\omega_1\omega_1')$ inscrite dans l'hyperboloïde. Le point (ξ,ξ') cherché est à l'intersection de la courbe de contact et du contour apparent horizontal de la sphère.

Les contours apparents de l'hyperboloïde conjugué sont les hyperboles conjuguées des hyperboles de contour précédentes.

Intersections. — On se basera sur le fait que les projections verticales des intersections sont des paraboles, et l'on passera à la projection horizontale en considérant le parallèle de la sphère qui passe par un point quelconque de ces paraboles.

Prenons par exemple l'intersection de la sphère avec l'hyperboloïde à une nappe. On en connaît déjà les 4 points $d'b'e'f'$ situés sur les contours apparent des deux surfaces, la parabole est donc géométriquement déter-

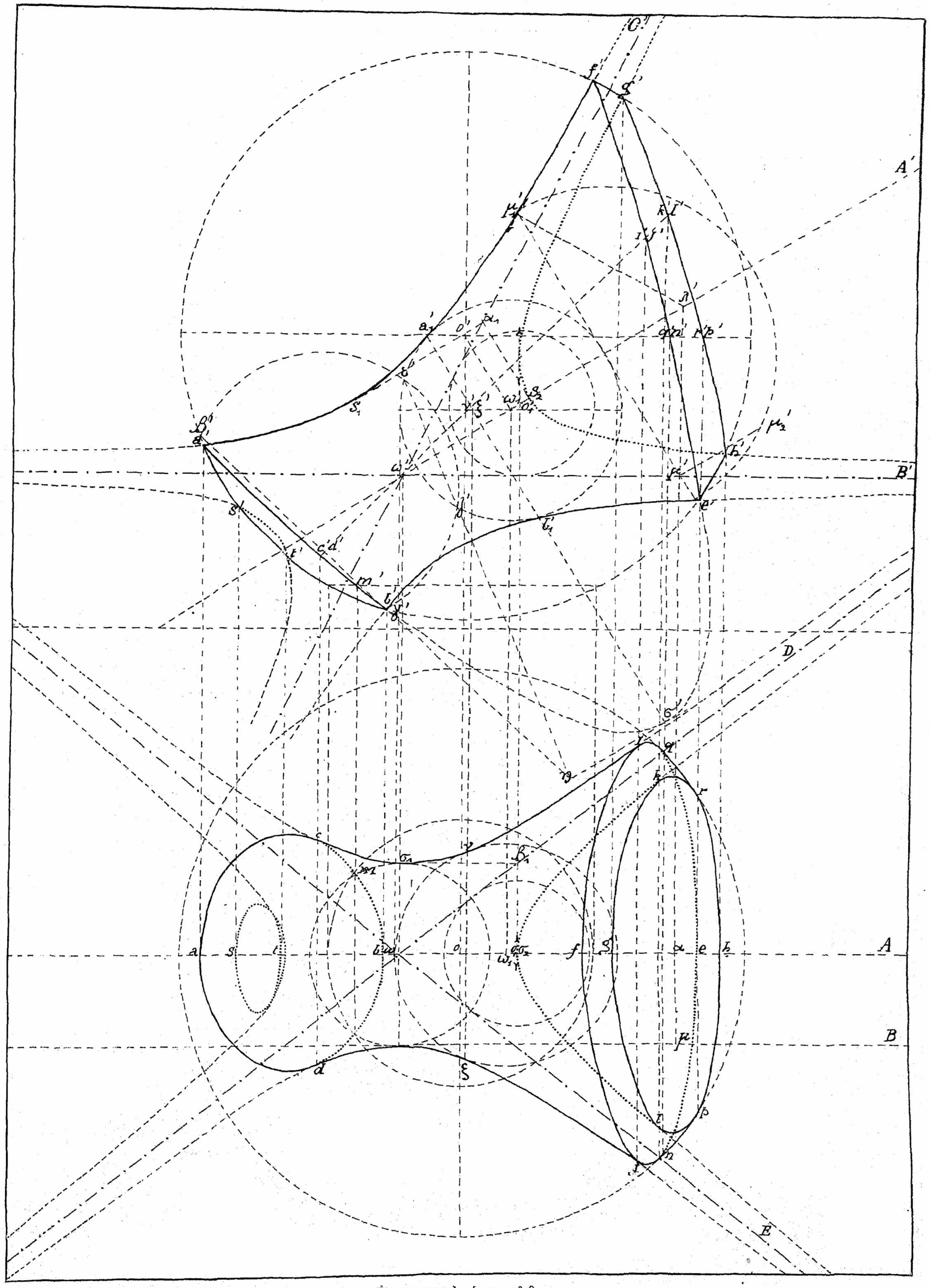


Figure grande épure n° 8.

minée. Nous allons en chercher l'axe et le sommet. Si on abaisse la perpendiculaire $O'\omega'_1$ sur l'axe et si on considère la sphère inscrite ω', on sait que l'axe est la corde de contact $a'_1b'_1$. Le sommet sera le pied de l'axe radical $n\sigma'$ des circonférences.

Points remarquables. — Il faut déterminer les points sur le contour apparent horizontal des hyperboloïdes. On considère pour cela le plan de contour apparent dans l'espace. Ce plan étant de bout on l'a immédiatement en $\omega'V'$. Les points cherchés sont à l'intersection de ce plan avec les courbes d'intersection.

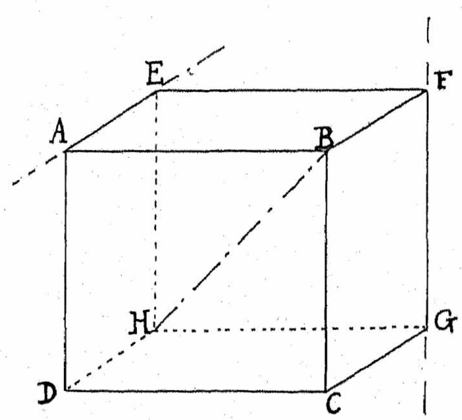
Ponctuation. — L'application des règles usuelles ne présente aucune difficulté.

GRANDE ÉPURE N° 9

Hyperboloïdes de révolution.

Énoncé :

On donne un cube ABCD de la manière suivante : la face ABCD est de front, le point A a un éloignement donné et l'arête du cube a une longueur donnée a.



On fait tourner la diagonale HB : 1° autour de l'arête AE ; 2° autour de l'arête FG.

Déterminer l'intersection des surfaces ainsi engendrées et représenter le solide commun à ces deux surfaces, limité d'une part aux plans de projection, et d'autre part au plan horizontal supérieur, tangent à la surface d'axe AE.

Texte :

Mise en place. — Il faut déterminer les contours apparents des surfaces. Comme les contours apparents de nom différent sont égaux, c'est-à-dire que l'hyperbole de contour apparent horizontal de l'hyperboloïde à axe de bout est égale à l'hyperbole de contour apparent vertical de l'hyperboloïde à axe vertical et de même pour les cercles de gorge, il suffira de raisonner dans un cas seulement.

Prenons, par exemple, l'hyperboloïde à axe vertical. Le rayon du cercle de gorge est la plus courte distance $(\omega i, \omega' i')$ de l'axe à la génératrice.

La trace horizontale kk' de la génératrice décrit un cercle de centre g qui est la section de l'hyperboloïde par le plan horizontal. En rappelant les points $e_1 f_1$, qui se trouvent dans le plan de front de l'axe, en $e'_1f'_1$ on a 2 points de l'hyperbole de contour. De même si on rappelle β en β' on a des sommets de l'hyperbole, et par conséquent l'autre par symétrie par rapport à ω. Cherchons les asymptotes. Pour cela, par le point $\omega\omega'$ menons $(\omega\pi_1\ \omega'\pi'_1)$ parallèle à la génératrice, on sait que la trace horizontale $(\pi_1\pi'_1)$ de cette droite décrit la base du cône asymptote. En rappelant les points g_1 et h_1 en $g'_1h'_1$ on a en $\omega h'_1$ et $\omega g'_1$ les asymptotes cherchées.

L'hyperbole est ainsi déterminée. On peut en chercher un point quelconque, en prenant une position quelconque de la génératrice et en cherchant le point qui se trouve dans le plan de front de l'axe. On a en même temps la tangente au contour apparent. Cette tangente est la génératrice elle-même. C'est là la vraie méthode.

Méthode. — Il faut remarquer que la génératrice HB est commune aux deux surfaces. On coupera donc par des plans auxiliaires passant par cette génératrice, ces plans couperont chaque surface suivant une génératrice l'intersection de ces deux génératrices est un point de l'intersection.

Point courant et sa tangente. — Prenons un plan auxiliaire dont la trace horizontale est $K\alpha$. Cherchons sa trace verticale, pour l'avoir il suffira de chercher la trace verticale d'une droite quelconque du plan ; par exemple l'horizontal du point $(\alpha_2\alpha'_2)$. On a immédiatement la trace $\beta\beta'$ d'où la trace verticale $k'\beta'_2$.

En menant de α la tangente au cercle de gorge, on a en $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ la génératrice de l'hyperboloïde vertical. Pour avoir la génératrice de la 2° surface, on se reporte à la projection verticale et on recommence la construction à partir du point γ_1. Ces deux génératrices se coupent au point mm' cherché.

La tangente sera l'intersection des plans définis par les deux génératrices du point (mm') pour chaque sur-

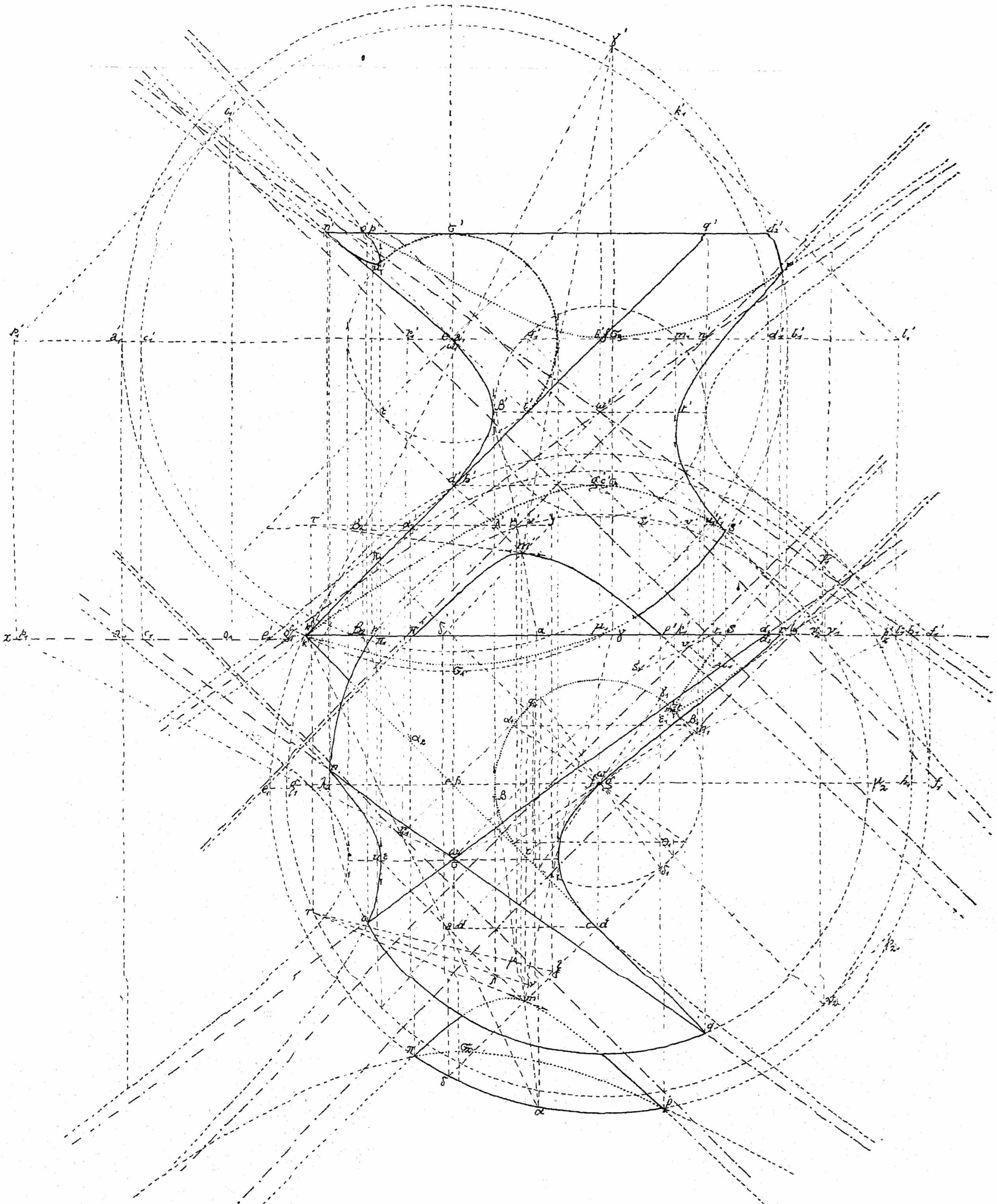


Figure grande épure n° 9

face. Ces génératrices sont d'une part ($m\beta$, $m'\beta'$) ($m\delta$, $m'\delta'$) et d'autre part ($m\gamma$ $m'\gamma'$) ($m\varepsilon$ $m'\varepsilon'$).

Asymptotes. — L'intersection aura au plus 4 asymptotes, comme la génératrice HB en est une, il n'y en aura que 3 au plus. Ce sont, on le sait, les asymptotes de l'intersection des deux cônes asymptotes.

Si on transporte les deux cônes en ω on peut les faire tourner de façon qu'ils viennent en $\omega\alpha_1\beta_1$, $\omega\gamma_1\delta_1$. On voit alors qu'ils se coupent suivant 4 génératrices dont les projections, deux à deux confondues sont inclinées à 45° sur la ligne de terre.

Cette direction ne changera pas quand on ramènera les cônes dans leurs positions premières.

Nous aurons donc 4 génératrices parallèles deux à deux qui se projettent suivant $\omega'_1O'_1$, $\omega'_1k'_1$, $\omega'\pi'_1$, $\omega'Q'_1$, en projection verticale et suivant $\omega\pi_1,\omega\nu_1$, ω_1O_1, O_1k_1 en projection horizontale. (Pour avoir les asymptotes on les associera deux à deux et on prendra l'intersection des plans tangents le long des génératrices choisies).

Prenons par exemple, les génératrices (ω_1O_1, $\omega'_1O'_1$) et ($\omega\nu_2$, $\omega\nu'_2$). Les plans tangents sont ($\omega_1O_1p_1$, $\omega'_1O'_1p'_1$) et ($\omega\nu_2\gamma_2$, $\omega'\nu'_2\gamma'_2$). Coupons par le plan horizontal du point ω_1. Le premier plan est coupé suivant $p_1\omega_1$ le 2e suivant Q_1r_1, les deux droites se coupent au point r_1, qu'on rappelle en r'_1. L'asymptote est la parallèle menée par $r_1r'_1$ à la génératrice.

On obtient ainsi trois asymptotes.

Sections planes. — Le plan horizontal coupe l'hyperboloïde vertical suivant un cercle et l'hyperboloïde de bout suivant l'hyperbole de sommet $\sigma_1\sigma_2$ et dont les asymptotes sont les asymptotes du contour apparent.

Le plan vertical donnera de même un cercle et une hyperbole de sommets s_3s_4.

Enfin le plan horizontal tangent donnera dans l'hyperboloïde vertical le cercle de diamètre $\lambda_2\mu_2$ et dans l'autre surface deux droites confondues avec les asymptotes de contour apparent.

Ponctuation. — Pour ponctuer on prendra successivement chaque portion de courbe et on conservera les parties intérieures aux deux surfaces, en pointillant les parties cachées sur l'une ou l'autre des surfaces et qui ne forment pas contour.

GRANDE ÉPURE N° 10

Hélicoïde de vis à filet triangulaire.

I. — La surface est représentée par 12 génératrices équidistantes : $\alpha_1\alpha'_11'$, $\alpha_2\alpha'_22'$... s'appuyant d'une part sur l'hélice directrice $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$..., $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$..., et sur la verticale 123... 1'2'3'...

La surface est limitée à sa première hélice double.

II. — La construction des paramètres d'ombre et de tangence : $q = h$ cotg φ et $p = h$ cotg π (h pas réduit de l'hélicoïde) montre que $p = q$.

Le point I est sur le cercle des pôles; sur une perpendiculaire au rayon lumineux.

III. — Joignant I au pôle de chaque génératrice on obtient le point *d'ombre propre* correspondant. On a ainsi la première branche de courbe $\lambda_7\lambda_6\lambda_5$... $\lambda_1\lambda_{12}\lambda_{11}$... $\lambda'_7\lambda'_6\lambda'_5$... $\lambda'_1\lambda'_{12}\lambda'_{11}$... qui passe par I. — D'un autre côté l'égalité des angles π et φ montre que l'hélicoïde a une génératrice parallèle aux rayons lumineux : $m\mu$-$m'\mu'$, deuxième branche de la courbe d'ombre propre, asymptote d'ailleurs de la première branche.

IV. — Les portions $\beta\delta$-$\beta'\delta'$, $\varepsilon\gamma$-$\varepsilon'\gamma'$ de la courbe d'ombre sont extérieures à la surface.

GRANDE ÉPURE N° 11

Hélicoïde de vis à filet triangulaire.

I. — La surface est représentée par 12 génératrices d'égale pente $\alpha_1\alpha'_11'$, $\alpha_2\alpha'_22'$... s'appuyant sur l'hélice directrice $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$... $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$... et sur la verticale 123... 1'2'3'...

La surface est limitée à sa première hélice double qu'on a pris d'ailleurs pour directrice.

II. — La construction des paramètres de tangence $p = h$ cotg π et d'ombre $q = h$ cotg φ (h étant le pas réduit de l'hélicoïde) montre que $q < p$. Par suite I, centre d'ombre, est intérieur au cercle des pôles, sur une perpendiculaire au rayon lumineux.

III. — Joignant I au pôle de chaque génératrice, on obtient le point d'ombre propre correspondant. La courbe d'ombre $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$... $\lambda'_1\lambda'_2\lambda'_3$... est fermée; pas d'asymptotes.

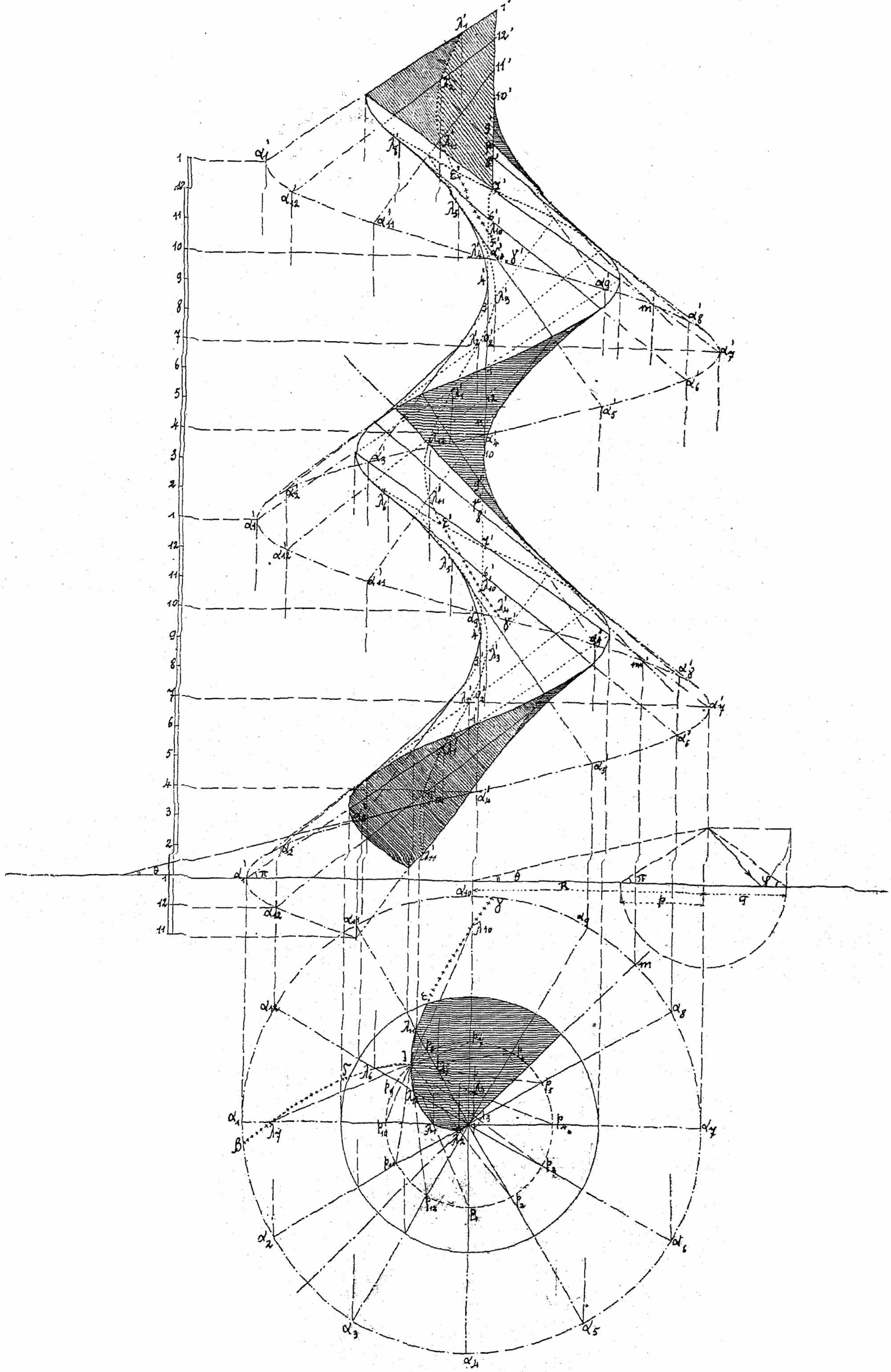


Figure grande épure n° 10

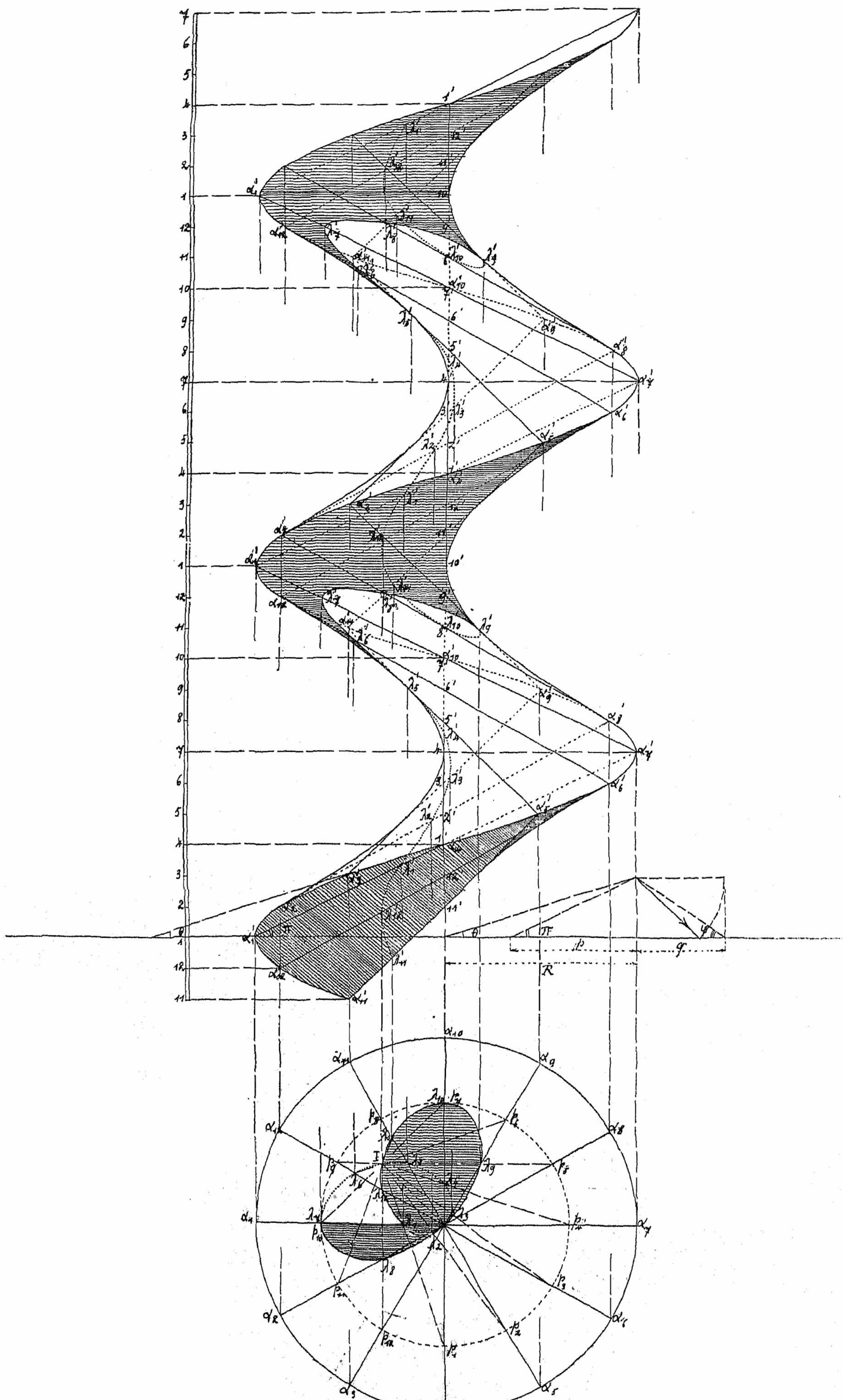


Figure grande épure nº 11.

IV. — L'hélicoïde étant limité à la génératrice $\alpha_1\alpha'_1 1'$, en plan, la portion $\alpha_1\alpha_{12}\alpha_{11}\alpha_{10}\alpha_9\alpha_8\alpha_7$ représente l'extérieur de la surface de l'hélicoïde supposée opaque et la portion $\alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1$ l'intérieur; par suite les hachures sont toutes intérieures à la courbe d'ombre.

V. — L'hélicoïde étant limité à la génératrice $\alpha_7 7$-$\alpha'_7 7'$, en plan la génératrice $\alpha_7 7$ sépare les parties vues intérieure et extérieure de la surface supposée opaque, ce qui détermine facilement les positions des parties dans l'ombre.

GRANDE ÉPURE N° 12

Hélicoïde gauche quelconque.

I. — L'hélicoïde est représenté par 12 génératrices d'égale pente π et équidistantes $\alpha_1 1$-$\alpha'_1 1'$, $\alpha_2 2$-$\alpha'_2 2'_1$... s'appuyant sur l'hélice directrice 123... 1'2'3'... La surface est limitée à sa première hélice double.

II. — La construction des paramètres de tangence $p = h \operatorname{cotg} \pi$ et d'ombre $q = h \operatorname{cotg} \varphi$ (h étant le pas réduit de l'hélice directrice) nous montre que l'on a $q > p$. Par suite I, centre d'ombre, est extérieur au cercle paramétrique.

III. — Joignant I au pôle de chaque génératrice, on obtient par recoupement avec cette même génératrice le point d'ombre propre correspondant, d'où les points λ et les deux branches de la courbe d'ombre propre : 1° $\lambda_2\gamma\delta\varepsilon$, $\lambda'_2\gamma'\delta'\varepsilon'$, 2° $\lambda_6\lambda_7\lambda_9\lambda_{10}\lambda_{11}$... $\lambda'_6\lambda'_7$... λ'_{11}...

IV. — Si de I on mène Iγ8, tangentes au cercle paramétrique, ces deux rayons polaires donneront des points d'ombre à l'infini par suite les génératrices correspondantes $n\nu$ et $m\mu$ sont les deux asymptotes de la courbe d'ombre. On les relève en $n'\nu'$ et $m'\mu'$.

GRANDE ÉPURE N° 13

Hélicoïde gauche quelconque.

I. — L'hélicoïde est représenté par 12 génératrices équidistantes, d'égale pente π : $\alpha_1 1$-$\alpha'_1 1'$, $\alpha_2 2$-$\alpha'_2 2'$... s'appuyant sur l'hélice directrice 123... 1'2'3'... La surface est limitée à sa première hélice double.

II. — Construction des paramètres de tangence $p = h \operatorname{cotg} \pi$ et d'ombre $q = h \operatorname{cotg} \varphi$ (h pas réduit de l'hélice directrice). On a $q < h$. Par suite le centre d'ombre I est intérieur au cercle paramétrique.

III. — Joignant I au pôle de chaque génératrice, on obtient par recoupement du rayon polaire et de la génératrice les différents points de la courbe *d'ombre propre*, d'où les points λ et la *courbe fermée* $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$... $\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_1$, $\lambda'_1\lambda'_2$... $\lambda'_{12}\lambda'_1$.

IV. — Les positions $\varepsilon\delta$-$\varepsilon'\delta'$ et $\psi\gamma$-$\psi'\gamma'$ sont extérieures à la surface.

V. — L'hélicoïde étant limité à la génératrice $\alpha_6 6$-$\alpha'_6 6'$ du plan, la génératrice $\alpha_6 6$ sépare les parties intérieure et extérieure de la surface supposée opaque, ce qui détermine les positions des parties dans l'ombre.

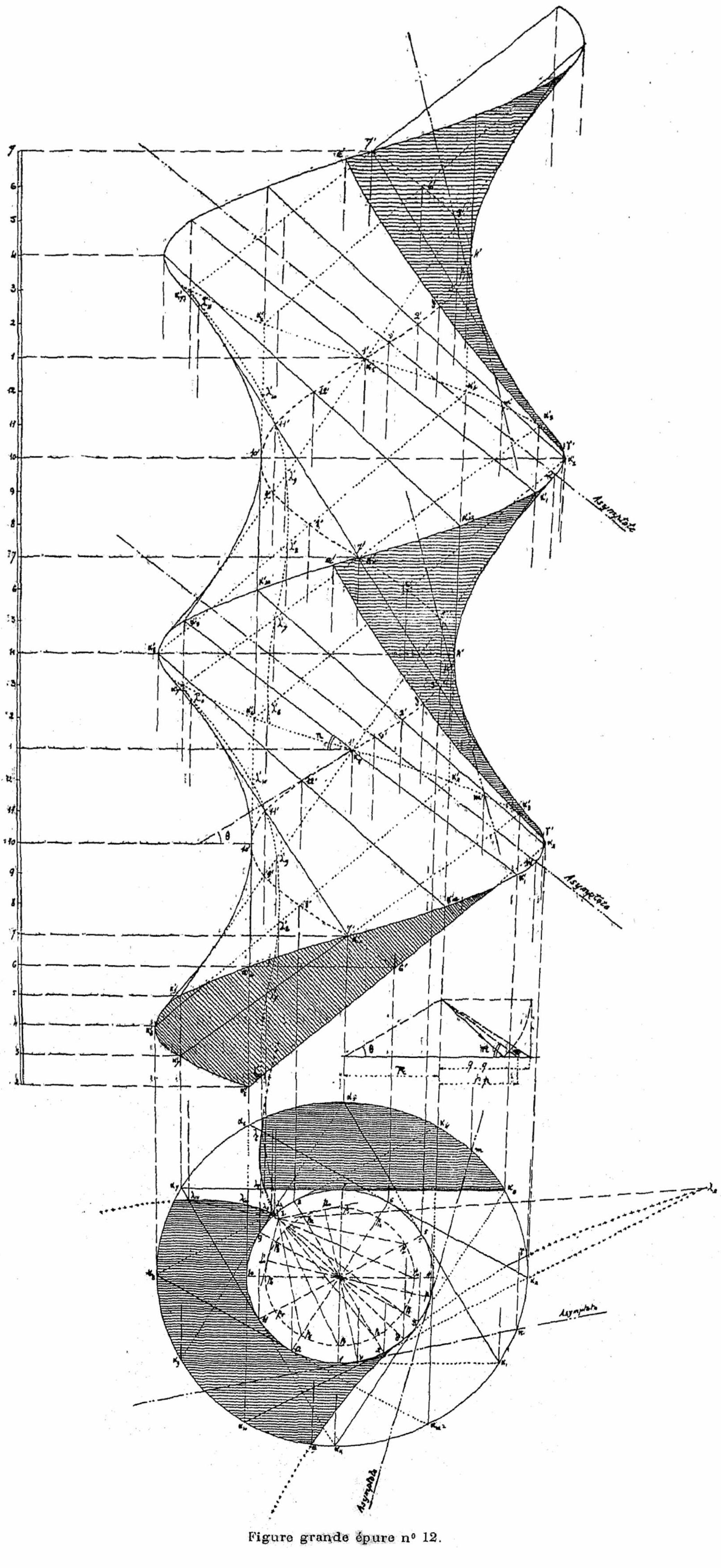


Figure grande épure n° 12.

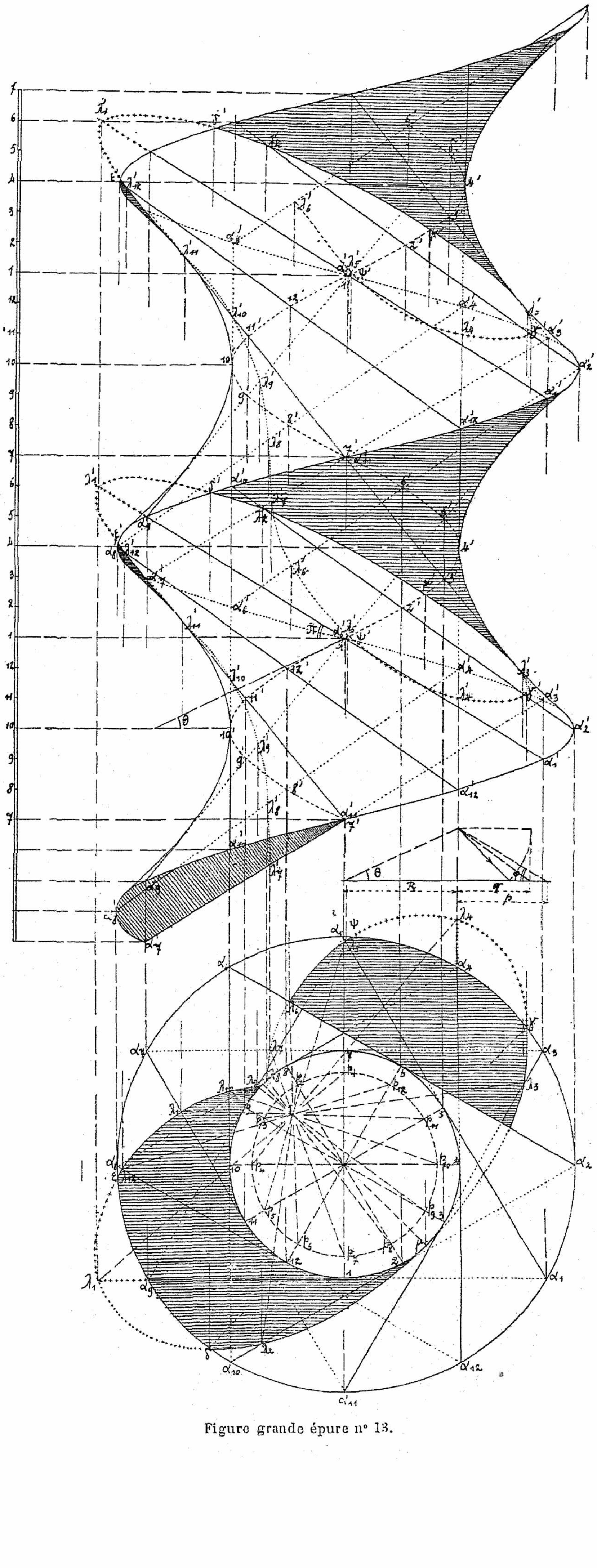


Figure grande épure n° 13.

ERRATA

	Au lieu de :	*Lire :*
Page 4, colonne 2, ligne 14.	$(b_1g_1 = ab_1 = 90^\circ)$	$(b_1g_1 = b_1f_1$ et $g_1b_1a_1 = 90^\circ)$.
Page 4, colonne 2, ligne 23.	à savoir : $\frac{a}{3}$ et $\frac{2}{3}a$	à savoir : $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Page 20, colonne 2, ligne 15.	la projection sur le plan de la binormale	la projection sur le plan déterminé par la binormale et la tangente.
Page 21, colonne 2, ligne 2.	de l'hyperboloïde hyperbolique	du paraboloïde hyperbolique.
Page 24, colonne 1, ligne 1 en remontant.	Le centre de courbure O	Le centre de courbure O'.
Page 24, colonne 2, ligne 1.	Le centre de courbure O'	Le centre de courbure O.
Page 24, colonne 2, ligne 7 en remontant.	Deux segments MP_1 MP'	Deux segments MA, MA'.
Page 25, colonne 1, ligne 11.	des points osculateurs	des plans osculateurs.
Page 36, colonne 1, ligne 3 en remontant.	au cône (ou au cylindre parallèles à une perpendiculaire au plan sécant)	au cône (ou au cylindre) parallèles à une perpendiculaire au plan sécant.
Page 37, colonne 2, ligne 4 en remontant.	la tangente à la projection perpendiculaire en projection horizontale à la direction de l'axe	la tangente perpendiculaire en projection horizontale à la projection de la direction de l'axe.
Page 68, colonne 1, ligne 2.	la droite AB	la droite SB.

Au lieu de : *Lire :*

Page 94, colonne 1, ligne 5 en remontant.

sur le plan horizontal A vient en A_1 — sur le plan horizontal. A vient en A_1.

Page 130, colonne 2, ligne 20.

iq' égale à $p'b'$ — $b'q'$ égale à $p'e'$.

Page 130, colonne 2, ligne 1 en remontant.

un cône — un cylindre

Page 135, colonne 2, ligne 9 en remontant.

le point G_1 — la génératrice G_1.

Page 135, colonne 2, ligne 5 en remontant.

la partie gG_2 de la génératrice G_2 — la partie gy de la génératrice G_2.

Page 137, colonne 2, ligne 2.

Un cercle de rayon dans le plan horizontal — Un cercle de rayon 50 dans le plan horizontal.

Page 150, colonne 1, ligne 21.

l'angle KBO — l'angle KBO'.

Page 196, colonne 2, ligne 1.

la tangente en n — la tangente en p.

Page 210, colonne 2, ligne 12 en remontant.

la verticale — la droite de bout.

Page 210, colonne 2, ligne 10 en remontant.

en fg — en ed, et le cône suivant un cercle projeté horizontalement en fg.

Page 212, colonne 1, ligne 11.

deux tangentes $u'S'$ et $u'S'$ — deux tangentes $n'S'$ et n'_1S'.

Page 225, colonne 2, ligne 1 en remontant.

Un plan horizontal H' — Un plan horizontal H'_1.

Page 261, colonne 2, ligne 3.

Un hyperbole — Un hyperboloïde.

Page 265, colonne 2, ligne 6 en remontant.

f'.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

PLANS COTÉS -- CONES -- CYLINDRES

PREMIÈRE SECTION

POLYÈDRES RÉGULIERS

DEUXIÈME SECTION

PLANS COTÉS

TROISIÈME SECTION

GÉNÉRALITÉS SUR LES COURBES ET SURFACES

CHAPITRE PREMIER. — Généralités sur les courbes.

CHAPITRE II. — Généralités sur les surfaces.

QUATRIÈME SECTION

CONES ET CYLINDRES

PETITES EPURES

GRANDES ÉPURES

DEUXIÈME PARTIE

SURFACES DE RÉVOLUTION

PREMIÈRE SECTION

SURFACES DE RÉVOLUTION QUELCONQUES

Chapitre premier. — **Généralités. Plans tangents.**

PETITES ÉPURES

GRANDES ÉPURES

TROISIÈME PARTIE

SURFACES RÉGLÉES ET SURFACES GAUCHES

PREMIÈRE SECTION

SURFACES RÉGLÉES DU DEUXIÈME DEGRÉ

CHAPITRE PREMIER. — Généralités. Hyperboloïdes.

CHAPITRE II. — Paraboloïde hyperbolique.

GRANDES ÉPURES

3-3-20. — Tours, imprimerie E. Arrault et C^ie.