

Na prawach rękopisu

Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego  
Politechniki Wrocławskiej

**Nośność stężonych poprzecznie,  
dwuteowych słupów stalowych  
ze skokową niesymetryczną  
zmianą przekroju**

**Raport serii PRE nr 4/2017  
Praca doktorska**

mgr inż. Michał Redeki

Słowa kluczowe:

konstrukcja metalowa, dwuteowy słup schodkowy, stężenie poprzeczne,  
ustalona oś obrotu, wyboczenie giętno-skrętne, nośność krytyczna  
i graniczna, badania doświadczalne, analizy numeryczne MES,  
rozwiązanie analityczne

Promotor: prof. dr hab. inż. Bronisław Gosowski

Wrocław, lipiec 2017

Autor:

mgr inż. Michał Redecki

.....

Politechnika Wrocławska  
Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego  
Katedra Konstrukcji Metalowych  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław  
tel. 71 320 38 15  
e-mail: [michal.redecki@pwr.edu.pl](mailto:michal.redecki@pwr.edu.pl)

Raport został złożony w Redakcji Wydawnictw Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej w lipcu 2017 r.

Lista odbiorców:	Recenzenci	2 egz.
	Promotor	1 egz.
	Autor	1 egz.
	CWiINT PWr	1 egz.
	Archiwum W-2	1 egz.
	Przew. Komisji Doktorskiej	1 egz.
	Razem	<hr/> 7 egz.

*Pragnę złożyć serdecznie podziękowania mojemu Promotorowi  
Panu prof. dr hab. inż. Bronisławowi Gosowskiemu, przede wszystkim za inspirację  
tematyką oraz za nieocenioną pomoc udzieloną w trakcie przygotowywania rozprawy,  
a także za cały okres naszej współpracy, cenne rady i wskazówki.  
Bez nich ta praca nigdy by nie powstała.*

*Chciałbym podziękować Rodzicom,  
którzy zawsze mnie wspierali i na których zawsze mogłem liczyć.*

*Dziękuję Kasi za niezliczone pokłady cierpliwości i wyrozumiałości ♥*



---

# Spis treści

---

<b>1. Wprowadzenie</b>	<b>1</b>
1.1. Wstęp . . . . .	1
1.2. Przedmiot, cel i zakres pracy . . . . .	3
1.3. Podstawowe oznaczenia . . . . .	4
<b>2. Analiza literatury przedmiotu</b>	<b>6</b>
2.1. Wprowadzenie . . . . .	6
2.2. Wyboczenie prętów o zmiennym przekroju poprzecznym . . . . .	8
2.2.1. Pręty schodkowe . . . . .	8
2.2.2. Pręty niepryzmatyczne . . . . .	17
2.3. Stateczność przestrzenna elementów konstrukcji metalowych . . . . .	20
2.3.1. Wyboczenie giętno-skrętne . . . . .	20
2.3.2. Wpływ dodatkowych więzi . . . . .	26
2.4. Podsumowanie rozpoznania literatury . . . . .	30
2.5. Założenia . . . . .	30
2.6. Tezy rozprawy . . . . .	31
<b>3. Badania modeli fizycznych</b>	<b>32</b>
3.1. Program badań . . . . .	32
3.1.1. Badane modele . . . . .	33
3.1.2. Stanowisko badawcze . . . . .	34
3.1.3. Opracowanie wyników . . . . .	39
3.2. Modele serii Sg . . . . .	40
3.2.1. Przebieg badań . . . . .	40
3.2.2. Analiza wyników . . . . .	48
3.3. Modele serii Sd . . . . .	53
3.3.1. Przebieg badań . . . . .	53
3.3.2. Analiza wyników . . . . .	61
3.4. Modele serii Sgd . . . . .	67
3.4.1. Przebieg badań . . . . .	67
3.4.2. Analiza wyników . . . . .	71
3.5. Badania materiałowe . . . . .	76
3.5.1. Statyczna próba rozciągania . . . . .	77
3.5.2. Badania składu chemicznego . . . . .	78
3.6. Podsumowanie badań doświadczalnych . . . . .	79
<b>4. Wstępne analizy numeryczne</b>	<b>81</b>
4.1. Zastosowane oprogramowanie . . . . .	81

4.1.1.	LTBeamN . . . . .	81
4.1.2.	SOFiSTiK . . . . .	82
4.1.3.	Abaqus FEA . . . . .	83
4.2.	Porównanie modeli numerycznych . . . . .	84
4.2.1.	Modele z elementów belkowych i powłokowych . . . . .	84
4.2.2.	Modele z elementów bryłowych . . . . .	91
4.3.	Budowa modelu numerycznego z elementów bryłowych . . . . .	93
4.4.	Wybór modelu numerycznego najlepiej odwzorowującego modele fizyczne . . . . .	97
<b>5.</b>	<b>Badania na modelach numerycznych</b>	<b>105</b>
5.1.	Analizy parametryczne w zakresie nośności krytycznej . . . . .	105
5.1.1.	Wpływ sposobu podparcia . . . . .	110
5.1.2.	Wpływ liczby stężeń . . . . .	114
5.1.3.	Wpływ sposobu obciążenia . . . . .	118
5.1.4.	Wpływ lokalizacji stężenia . . . . .	120
5.2.	Analizy parametryczne modeli obciążonych siłą poziomą . . . . .	122
5.3.	Nieliniowe analizy w celu wyznaczenia nośności granicznej . . . . .	127
5.4.	Podsumowanie badań numerycznych . . . . .	136
<b>6.</b>	<b>Rozwiązanie analityczne</b>	<b>138</b>
6.1.	Sformułowanie i opis rozwiązania problemu . . . . .	138
6.2.	Weryfikacja procedury . . . . .	142
6.2.1.	Stałe siły przekrojowe . . . . .	142
6.2.2.	Zmienne siły przekrojowe . . . . .	144
6.2.3.	Porównanie z rozwiązaniami numerycznymi . . . . .	147
6.3.	Przykłady zastosowania . . . . .	150
6.4.	Rozwiązania modeli z badań doświadczalnych . . . . .	153
6.4.1.	Model Sg . . . . .	155
6.4.2.	Model Sd . . . . .	156
6.5.	Rozwiązanie w przypadku obciążeń dwuparametrowych . . . . .	158
6.5.1.	Poziome obciążenie wspornika . . . . .	159
6.5.2.	Poziome obciążenie z rygli ściennych . . . . .	163
6.6.	Podsumowanie rozważań analitycznych . . . . .	167
<b>7.</b>	<b>Podsumowanie i wnioski</b>	<b>168</b>
7.1.	Podsumowanie . . . . .	168
7.2.	Wnioski ogólne . . . . .	169
7.3.	Wnioski szczegółowe . . . . .	170
	<b>Bibliografia</b>	<b>172</b>
	Normy . . . . .	187
	<b>Streszczenie/Summary</b>	<b>188</b>

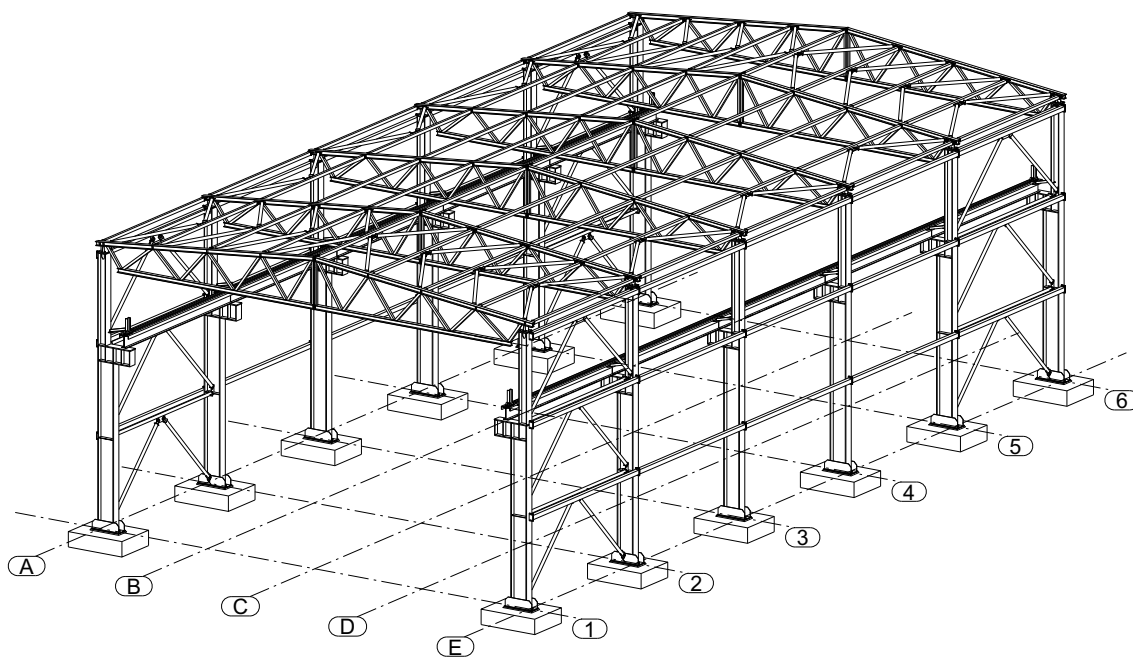
## Rozdział 1

# Wprowadzenie

### 1.1. Wstęp

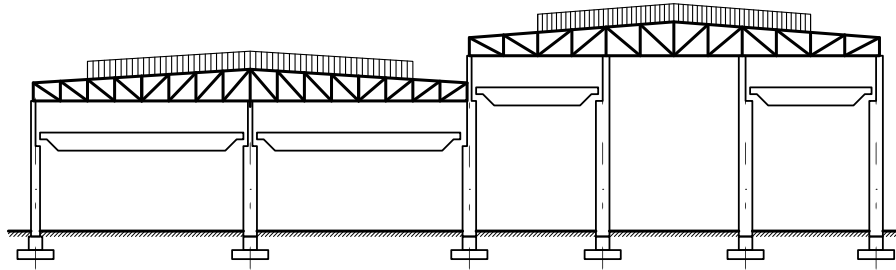
Stalowe budynki halowe są obiektami szeroko stosowanymi w wielu gałęziach przemysłu (hale produkcyjne), w rolnictwie, budownictwie czy handlu (hale składowe, magazynowe, towarowe). Projektując je, należy odpowiednio ukształtować ich nośny ustrój poprzeczny [20, 70, 121, 122, 125]. Szczególną budową charakteryzują się hale przemysłowe z transportem wewnętrznym w postaci suwnic natorowych lub podwieszonych, podnośników, ciągów transportowych. Odpowiednią konstrukcją lub dodatkowymi elementami muszą być przystosowane do montażu belek podsufitowych, pomostów itp.

Zasadnicze elementy konstrukcyjne obiektu są ze sobą połączone tworząc w ten sposób główny ustrój nośny hali (por. rys. 1.1). Analizując wyodrębnione komponenty należy pamiętać o ich wzajemnej przestrzennej współpracy. Wyróżnić należy nie tylko ograniczenia przemieszczeń w węzłach, ale również na ich długości. Przykładem mogą być płatwie lub rygle ścienne stężone poszyciem, pełnościennie dźwigary dachowe przytrzymane w płaszczyźnie mniejszej sztywności, belki podsufitowe usztywnione pomostem czy słupy stężone ryglami lub niezależną konstrukcją [28, 73, 74, 81, 82, 168, 235, 247]. W przykładach



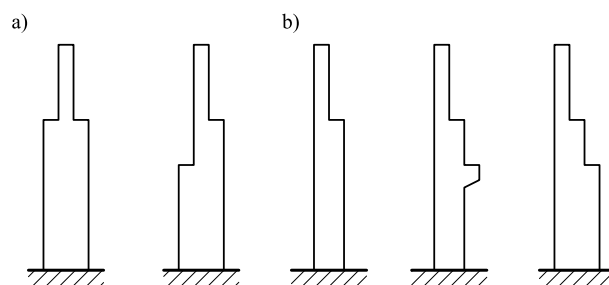
Rys. 1.1. Układ konstrukcji nośnej stalowej hali przemysłowej z suwnicą natorową

tych przemieszczenia liniowe pośrednich przekrojów elementów konstrukcyjnych zostały ograniczone z płaszczyzny ich mniejszej sztywności. Ponadto, w zależności od sposobu rozwiązania połączeń, mogą również ograniczać przemieszczenia kątowe (skręcenia) tych przekrojów.



Rys. 1.2. Schemat układu poprzecznego hali wielonawowej z suwnicami natorowymi na wielu poziomach

Hale przemysłowe z transportem poziomym, wyposażone w suwnice natorowe, charakteryzują się odmienną budową słupów ustroju nośnego (por. rys. 1.2). Przeważnie są to słupy o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym. Zmiana przekroju słupa następuje na poziomie oparcia belki podsuwnicowej. W zależności od liczby i rodzaju suwnic słupy mogą być dwustopniowe, dwustopniowe ze wspornikiem lub trzystopniowe. Na ry-



Rys. 1.3. Typy słupów o skokowo zmiennym przekroju: a) międzynawowe, b) skrajne [122]

sunku 1.3a pokazano schematy słupów mających zastosowanie w halach przemysłowych w osiach międzynawowych, natomiast na rysunku 1.3b słupy występujące w osiach skrajnych. Tego typu elementy konstrukcji nośnej hali projektuje się jako pełnościenne, kratowe lub mieszane (por. rys. 1.4). W słupach pełnościennych zarówno części podsuwnicowe, jak i nadsuwnicowe wykonane są z dwuteowników walcowanych IPE, HEA, HEB lub blachownic (por. rys. 1.4a). W starszych konstrukcjach przekroje te powstają poprzez znitowanie poszczególnych kształtowników i blach ze sobą. Słupy kratowe są zwykle dwugałęziowe skratowane w jednej bądź w dwóch płaszczyznach (por. rys. 1.4b). Zazwyczaj zarówno gałęzie słupów, jak i wykratowanie są z kształtowników walcowanych. Jeżeli chodzi o konstrukcje mieszane, to część podsuwnicowa jest kratowa, a część nadsuwnicowa z dwuteownika walcowanego bądź spawanego z blach (por. rys. 1.4c).

Jak już wspomniano, elementy konstrukcji układu nośnego hal tworzą geometrycznie niezmienny system przestrzenny. Dotyczy to m.in. słupów ustroju, ponieważ odpowiednio ukształtowany system rygli ściennych i stężeń wpływa na ich pracę statyczną. Podczas wymiarowania (oceny nośności) tych słupów należy uwzględnić te ograniczenia, ponieważ wymuszają przestrzenną postać utraty stateczności.





Rys. 1.4. Skrajne słupy hal przemysłowych: a) pełnościennie, b) kratowe, c) mieszane

## 1.2. Przedmiot, cel i zakres pracy

Przedmiotem pracy doktorskiej są stalowe słupy układów poprzecznych, stężone z płaszczyny na długości ryglami ściennymi ograniczającymi przemieszczenia liniowe bądź kątowe. Są to słupy dwuteowe, o skokowej, niesymetrycznej zmianie przekroju poprzecznego. W praktyce taki model mają skrajne słupy głównych ustrojów nośnych (układów poprzecznych) hal z suwnicami.

Celem pracy jest określenie nośności granicznej, a także sprężystego obciążenia krytycznego stateczności przestrzennej (wyboczenia giętno-skrętnego) elementów o skokowej, niesymetrycznej zmianie przekroju poprzecznego, stężonych punktowo na długości. Przeprowadzone badania modelowe pozwolą na zidentyfikowanie mechanizmów zniszczenia przedmiotowych słupów poddanych zróżnicowanym obciążeniom zewnętrznym.

Swoim zakresem praca obejmuje: badania doświadczalne, symulacje numeryczne w zakresie sprężystym i nieliniowym z wykorzystaniem metody elementów skończonych oraz analizy teoretyczne stateczności przestrzennej przedmiotowych słupów.

Badania doświadczalne przeprowadzono na wykonanych ze stali modelach skrajnych słupów hal przemysłowych. Swoim zakresem obejmowały one sześć modeli, które podzielono na trzy grupy różniące się sposobem obciążenia. Pierwszą grupę stanowiły trzy słupy, które obciążane były na poziomie głowicy (seria Sg). Drugą słupy obciążane na poziomie wspornika belki podsuwnicowej (seria Sd). Trzecia seria badań modelowych Sgd obejmowała swoim zakresem badania jak serii drugiej, lecz przeprowadzone na słupach po badaniach serii Sg. Na podstawie badań określono ścieżki równowagi statycznej, stopień wyęteżenia oraz nośność graniczną. Wyznaczono charakterystyki wytrzymałościowe i skład chemiczny zastosowanej stali. Zidentyfikowano przebieg oraz schematy zniszczenia badanych modeli. Na podstawie wyników badań wyznaczono doświadczalne obciążenie krytyczne sprężystej stateczności przestrzennej.

Analizy numeryczne z wykorzystaniem MES pozwoliły na precyzyjne określenie sposobu zniszczenia stężonych poprzecznie słupów o skokowo, niesymetrycznie zmiennym przekroju poprzecznym. Przeprowadzono je na dwóch typach elementów skończonych:

prętowych jednowymiarowych oraz bryłowych. Stosowano przy tym sprężystą analizę stateczności oraz analizę w zakresie nieliniowości geometrycznych i materiałowych. Rezultaty pozwoliły na ocenę i konfrontację przyjmowanych na etapie projektowania założeń z jego rzeczywistym schematem pracy.

Przeprowadzone rozważania analityczne polegały na opisie zagadnienia stateczności przestrzennej w postaci dystrybucyjnego równania różniczkowego równowagi. Wykorzystano do tego pakiet *Mathematica*, w którym napisany algorytm umożliwia uzyskanie rozwiązania problemów stateczności przestrzennej prętów z ustaloną osią obrotu.

### 1.3. Podstawowe oznaczenia

W pracy, jeżeli nie podano inaczej, przyjęto poniższe podstawowe oznaczenia:

#### Małe litery alfabetu łacińskiego

- $k_{yw,i}$  — współczynnik sprężystości liniowej  $i$ -tego węzła,
- $k_{\varphi w,i}$  — współczynnik sprężystości skrętnej  $i$ -tego węzła,
- $k_{\varphi,i}$  — współczynnik sprężystości skrętnej ośrodka obrotowo-sprężystego  $i$ -tego segmentu,
- $k_{\varphi',i}$  — współczynnik sprężystości ze względu na spaczenie (deplanację)  $i$ -tego węzła,
- $l$  — długość elementu,
- $q_y, q_z$  — wypadkowe z obciążeń przyłożonych wzdłuż linii środkowej  $s$  przekroju  
 $q_y = \int_s p_y(x,s) ds, \quad q_z = \int_s p_z(x,s) ds,$
- $r_S^2$  — kwadrat biegunowego promienia bezwładności względem środka ścinania  $S$  opisany równaniem (2.5),
- $s$  — linia środkowa przekroju,
- $u_i, v_i, w_i$  — przemieszczenia odpowiednio na kierunkach  $x_i, y_i, z_i$ ,
- $x_i$  — oś podłużna  $i$ -tego segmentu słupa,
- $y_i, z_i$  — główne centralne osie bezwładności przekroju poprzecznego  $i$ -tego segmentu słupa.

#### Wielkie litery alfabetu łacińskiego

- $A$  — pole przekroju elementu
- $C$  — narzucona (ustalona) oś obrotu,
- $E$  — moduł Younga (sprężystości podłużnej),
- $G$  — wyrażony poprzez  $E/(2(1 + \nu))$  moduł Kirchhoffa (sprężystości poprzecznej),
- $I_i$  — moment bezwładności  $i$ -tego segmentu słupa,
- $I_{y,i}, I_{z,i}$  — momenty bezwładności elementu względem osi  $y_i, z_i$ ,
- $I_{\omega,i}$  — wycinkowy moment bezwładności przekroju  $i$ -tego segmentu słupa,
- $I_{T,i}$  — moment bezwładności czystego skręcania  $i$ -tego segmentu słupa,
- $M_{y,i}$  — moment zginający względem osi  $y_i$ ,
- $N_i$  — siła osiowa,
- $O$  — początek układu współrzędnych,
- $N_{cr}$  — obciążenie krytyczne,
- $N_{cr,T}$  — obciążenie krytyczne wyboczenia skrętnego,
- $N_{cr,TF}$  — obciążenie krytyczne wyboczenia giętno-skrętnego,

**Wielkie litery alfabetu łacińskiego**

$S$  — oś środków ścinania.

**Małe litery alfabetu greckiego**

$\beta_y, \beta_z, \beta_\omega$  — ramiona asymetrii przekroju zdefiniowane równaniami (2.6),

$\delta$  — błąd względny,

$\delta(x)$  — delta Diraca,

$\xi^{(k)}$  — alternatywny sposób zapisu pochodnych  $d^k \xi(x)/dz^k$ , gdzie  $\xi$  jest dowolną funkcją związaną z przemieszczeniami lub obciążeniami,

$\varphi_i$ , — kąt skrzywienia przekrojów poprzecznych względem osi środków ścinania lub

$\varphi_i(x)$  — wymuszonej osi obrotu elementu.

**Wielkie litery alfabetu greckiego**

$\Delta$  — błąd bezwzględny.

**Akronimy**

GMNA — analiza geometrycznie i fizycznie nieliniowa (geometrically and materially nonlinear analysis),

GMNIA — analiza geometrycznie i fizycznie nieliniowa z imperfekcjami (geometrically and materially nonlinear analysis with imperfections included),

LBA — liniowo-sprężysta analiza bifurkacyjna (linear elastic bifurcation (eigenvalue) analysis),

MES — metoda elementów skończonych (finite element method — FEM),

ŚRS — ścieżka równowagi statycznej,

WCSS — Wrocławskie Centrum Sieciowo-Superkomputerowe.

## Rozdział 2

---

# Analiza literatury przedmiotu

---

### 2.1. Wprowadzenie

Za prekursora zajmującego się zagadnieniami utraty stateczności giętej należałoby uznać szwajcarskiego naukowca — *Eulera*. Jak podano w pracy [221], rozważał on różne przypadki zginania i klasyfikował odpowiednie krzywe odkształcenia sprężystego w zależności od wielkości kąta między kierunkiem siły  $P$  i styczną w punkcie jej przyłożenia. Gdy kąt ten jest mały, uzyskuje się powszechnie znany przypadek wyboczenia pręta wspornikowego pod działaniem osiowej siły ściskającej. Podaje on wyrażenie na „obciążenie  $P$ , przy którym nie należy obawiać się zginania” znane obecnie jako siła krytyczna *Eulera*. Ogólniejszą postać rozwiązania pręta pryzmatycznego obciążonego siłą osiową, z przegubami na końcach, podał *Lagrange*. To on w swojej pracy udowodnił, że teoretycznie możliwa jest nieskończona liczba postaci wyboczenia. Próbował również analizować słupy o zmiennym przekroju poprzecznym. Szukał takiej krzywej, której obrót wokół osi słupa będzie najefektywniejszy, a za jej miarę przyjął stosunek obciążenia krytycznego  $P$  do kwadratu objętości słupa  $V$ . Potwierdzeniem teoretycznych rozważań nad elementami ściskanymi były badania wykonane przez *van Musschenbroek'a*.

Wraz z wprowadzeniem na przełomie XVIII i XIX wieku do budownictwa konstrukcji żelaznych, zagadnienia stateczności sprężystej smukłych prętów nabrały znaczenia praktycznego. Francuski uczony *Duleau* przeprowadził serię badań nad wyboczeniem prętów pryzmatycznych. Przy bardzo smukłych prętach uzyskał dużą zgodność z teorią *Eulera*. Zwrócił też uwagę na duże znaczenie warunków brzegowych. Z kolei *Young* wykazał, że wyrażenie to ma jedynie zastosowanie do słupów smukłych. Rozpatrywał również zagadnienie wyboczenia poprzecznego słupów o zmiennym przekroju poprzecznym. Duże znaczenie praktyczne przyniosła praca *Lamerle'a*, ponieważ on jako pierwszy podał granicę stosowalności wzoru *Eulera*.

Wprowadzenie w drugiej połowie XIX wieku stali do konstrukcji inżynierskich sprawiło, że zniszczenie konstrukcji mogło nastąpić nie wskutek nadmiernych naprężeń, lecz w wyniku utraty stateczności. Pierwsze badania doświadczalne na elementach stalowych wykonał *Bauschinger*. Kontynuatorem tych badań był *Tetmajer*, który dla słupów o mniejszej smukłości zaproponował wzór liniowy. Wielkim wkładem w rozwój nauki wykazał się pod koniec XIX wieku *Jasiński*. Oprócz jego licznych publikacji, na wyróżnienie zasługuje rozwiązanie problemu katastrof mostów otwartych, które w owym czasie nawiedziły zachodnią Europę i Rosję.

Rozpowszechnienie stali i stopów o wysokiej wytrzymałości spowodowało wzrost znaczenia zagadnień stateczności sprężystej. Początek XX wieku przyniósł gwałtowny roz-

wój lotnictwa, dla którego stopy te wydawały się idealne. Stosowanie cienkościennych przekrojów otwartych wiązało się z zaobserwowaniem nowej, skrajnej postaci wyboczenia. Najprostszy przypadek kątownika rozwiązał *Timoshenko*. Badania doświadczalne nad wyboczeniem skrajnym prowadził *Wagner*, natomiast nad ściślejszą teorią pracował *Kappus*. Od tego czasu zagadnienia wyboczenia skrajnego i zwichrzenia belek zaczęło interesować coraz większą liczbę naukowców. Wśród wielu należałoby wspomnieć m.in. *Goodiera*, który badał stateczność pręta w różnych warunkach, *Nylandera*, który prowadził obszerne badania doświadczalne zwichrzenia belek dwuteowych, *Chwallę*, który interesował się belkami o przekroju monosymetrycznym, czy *Southwella*. Ten ostatni w swojej pracy [209] podał metodę doświadczalnego wyznaczania obciążeń krytycznych stateczności sprężystej wyboczenia giętnego.

Duży wkład w rozwój zagadnień stateczności sprężystej prętów cienkościennych ma *Własow*, który w swojej monografii [232] (jej pierwsze wydanie pochodzi z 1940 roku), opracował techniczną teorię prętów cienkościennych. Ogólną teorią zginania, skręcania i wyboczenia cienkościennych elementów o otwartych przekrojach poprzecznych zajmował się także *Timoshenko* w [221].

W pierwszej połowie XX wieku nastąpił gwałtowny rozwój badań nad zagadnieniami stateczności. Wynikało to ze stosowania coraz to bardziej udoskonalonych stopów stali. Podstawy nowej teorii wyprowadzonej przez *Własowa*, dały ogromne możliwości dalszego jej rozwijania. Z tego okresu, w Polsce należałoby wyróżnić nawiązujące tematyką do zagadnień stateczności prace m.in. *Ruteckiego* [194], *Naleszkiewicza* [158] czy *Brzoski* [28], które stanowią podsumowanie ówczesnego stanu wiedzy.

Równoległe do teorii pręta cienkościennego *Własowa* pojawiła się *teoria nośności nadkrytycznej*, która została opracowana przez amerykańskiego naukowca *Wintera* [237]. Znalazła ona zastosowanie do kształtowników złożonych z płaskich ścianek, które połączone są ze sobą pod kątem prostym lub zbliżonym do kąta prostego. Jej podstawą jest stwierdzenie, że osiągnięcie naprężeń krytycznych cienkiej ścianki nie powoduje utraty jej zdolności do dalszego przenoszenia obciążeń, jeżeli jedna lub więcej jej krawędzi podłużnych pozostają nadal proste. Warto nadmienić, że rozwiązania zaproponowane przez *Wintera* znalazły zastosowanie praktyczne w normach dotyczących projektowania konstrukcji stalowych zarówno w Polsce [252, 253], jak i w obowiązujących normach z serii Eurokodów [257–259].

Literatura dotycząca sprężystej stateczności elementów cienkościennych o zmiennym przekroju poprzecznym (zmiana ta może być skokowa lub liniowa) lub stężonych na długości jest dosyć obszerna. Jednakże większość prac dotyczących tych słupów jest związana z ich wyboczeniem giętnym. Natomiast zagadnienia utraty stateczności przestrzennej elementów stężonych na długości liniowo lub punktowo odnoszą się jedynie do elementów przyrzutowych.

Niżej omówiono pozycje literaturowe, które ukazały się w XX oraz na początku XXI wieku. W ogólnodostępnej literaturze nie ma zagadnień związanych ze statecznością elementów ze skokowo, niesymetrycznie zmiennym przekroju poprzecznym i dodatkowo stężonych poprzecznie na długości. W kolejnych punktach rozeznanie literaturowe oparto na publikacjach, które najtrafniej nawiązują do tematyki rozprawy. Natomiast do najbardziej aktualnych prac o stateczności należałoby zaliczyć publikacje mające charakter monografii m.in. *Chena* i *Atsuty* [32], *Galambosa* [58], *Gambhira* [59], *Gosowskiego* [82], *Kindmanna* [115], *Meistera* [147], *Petersena* [185], *Pflügera* [186], *Rykaluka* [195], *Simitsea* i *Hodgesa* [205], *Trahaira i in.* [225, 226], *Weissa i Giżejowskiego* [235], *Yoo i Lee* [243] czy *Żmudy* [248].

## 2.2. Wyboczenie prętów o zmiennym przekroju poprzecznym

### 2.2.1. Pręty schodkowe

Kompleksowy sposób wyznaczania obciążeń krytycznych wyboczenia giętnego prętów o przekroju poprzecznym zmieniającym się skokami znaleźć można w pracach o charakterze monograficznym [59, 195, 222, 235, 243, 248]. Przy czym jednymi z pierwszych, którzy analizowali słupy schodkowe byli w latach czterdziestych XX wieku *Timoshenko i Gere*. W słupach przez nich rozważanych zmiana sztywności była osiowa oraz analizowano najprostsze schematy statyczne, a mianowicie wspornika oraz symetrycznego słupa podpartego na końcach w sposób przegubowy (por. rys. 2.1b). Żeby wyznaczyć krytyczną wartość obciążenia  $P$  wspornikowego lub przegubowo zamocowanego słupa przedstawionego na rysunku 2.1b, sformułowali oni równania różniczkowe linii ugięcia oddzielnie dla każdej części słupa

$$\begin{aligned} EI_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= P(\delta - y_1), \\ EI_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} &= P(\delta - y_2), \end{aligned} \quad (a)$$

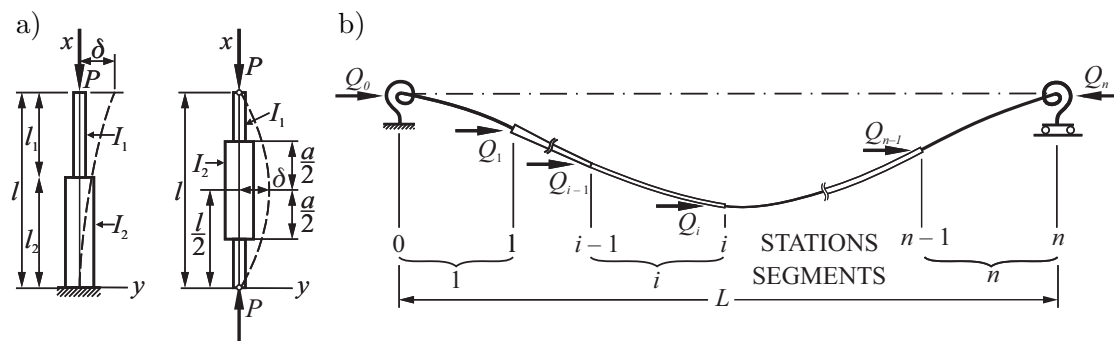
gdzie  $I_1$  oraz  $I_2$  są momentami bezwładności odpowiednich segmentów, a pozostałe oznaczenia pokazano na rysunku 2.1a. Całkując równania (a) otrzymuje się rozwiązania ogólne, z których to na podstawie warunków brzegowych i warunku ciągłości przemieszczeń w miejscu styku obu odcinków uzyskuje się ostatecznie równanie przestępne

$$\operatorname{tg} k_1 l_1 \operatorname{tg} k_2 l_2 = \frac{k_1}{k_2}. \quad (b)$$

Wiedząc, że  $k_1^2 = P/EI_1$  oraz  $k_2^2 = P/EI_2$  równanie (b) można dla przypadków szczególnych rozwiązać metodą prób. Dla słupa podpartego w sposób przegubowy na obu końcach (por. rys. 2.1b) krytyczna wartość obciążenia wyraża się następująco

$$P_{kr} = \frac{mEI_2}{l^2}, \quad (2.1)$$

gdzie za  $m$  należy przyjąć współczynnik liczbowy zależny od  $a/l$  i  $I_1/I_2$ . Podobne rozwiązania oraz wartości współczynnika znaleźć można również w [28, 235, 243].



Rys. 2.1. Pręty o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym rozpatrywane przez: a) *Timoshenkę i Gere'go* [222], b) *Hoblit'a* [100],

Autorzy w swojej pracy [222] nie ograniczyli się do powyżej opisanej metody, lecz przedstawili kolejne. Stosując metodę energetyczną, zapisano wyrażenie dla energii sprężystej

zginania i dla pracy wykonanej przy wyboczeniu przez siły ściskające  $P$

$$\Delta U = \int_0^{l_2} \frac{M^2}{2EI_2} dx + \int_{l_2}^l \frac{M^2}{2EI_1} dx, \quad (c)$$

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad (d)$$

Przyrównując wyrażenie (c) do wyrażenia (d) i po podstawieniu odpowiednich wartości dla pręta przegubowo podpartego (por rys. 2.1a) otrzymuje się wzór na jego obciążenie krytyczne

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_2}{l^2} \frac{1}{\frac{a}{l} + \frac{l-a}{l} \frac{I_2}{I_1} - \frac{1}{\pi} \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \sin \frac{\pi a}{l}}. \quad (2.2)$$

Wielką zaletą stosowania metod energetycznych w zagadnieniach stateczności równowagi odkształcalnych prętów ściskanych [59, 158, 195, 222, 225, 243] jest to, że jest ona metodą bardzo uniwersalną. Jedynym warunkiem jest przyjęcie przybliżonej funkcji ugięcia tak, aby spełniała warunki brzegowe lub, jeżeli nie wszystkie, przynajmniej kinematyczne. Im przyjęta funkcja jest bardziej zbliżona do rzeczywistej postaci odkształcenia elementu, tym rozwiązanie jest dokładniejsze. W przypadku, gdy przyjęta funkcja pokrywa się z rzeczywistą linią ugięcia, to wręcz możemy mówić o rozwiązaniu ścisłym. Jej wadą jest to, że w złożonych przypadkach, gdy mamy do czynienia ze skomplikowanymi warunkami podparcia pręta, oszacowanie funkcji ugięcia może być trudne. Bywa również tak, że wartość obciążenia czasami nie wystarcza, ponieważ interesuje nas również kształt postaci utraty stateczności, którego z metody energetycznej nie uzyskamy.

Na uwagę zasługują jeszcze dwie wymienione w pracy [222] metody. Mianowicie metoda numeryczna, znana również jako iteracyjna metoda *Newmarka* [59, 161, 235] oraz metoda graficzna. Ta pierwsza nie jest nowa i opiera się na znanej relacji pomiędzy geometrią elementu zginanego i jego stosunku momentu zginającego do sztywności. Ale jej innowacyjność polega na jej zastosowaniu w statyce oraz zagadnieniach stateczności ustrojów konstrukcyjnych. W kolejnych latach była rozwijana m.in. przez *Basu i Hill'a*, którzy analizowali słupy w postaci elementów kompozytowych oraz przez *Cranstena*, który ją zmodyfikował i rozszerzył do stosowania w przypadku dwukierunkowego zginania belek o zwartym lub skrzynkowym przekroju poprzecznym. Jej zmodyfikowana i rozszerzona wersja, w której uwzględniono m.in. mimośrodowe przyłożenie siły ściskającej, zróżnicowane warunki brzegowe, zmienność przekroju poprzecznego czy nawet nieliniowość materiałową, została opublikowana w [23].

Idea metody *Newmarka* polega na podziale słupa na segmenty i przyjęciu wartości wstępnego wygięcia w poszczególnych punktach tak, aby zachowane były kinematyczne warunki brzegowe. Następnie wyznacza się wartość momentu zginającego  $M_i$  w  $i$ -tym punkcie i w przypadku sprężysto-liniowego materiału dzieli przez sztywność  $EI_i$ . Dalej konieczne jest wyznaczenie ugięcia i kąta nachylenia stycznej pręta stosując metodę momentów wtórnych. Uzyskane w ten sposób przemieszczenia są porównywane z uzyskanymi w kroku wcześniejszym aż do uzyskania zadowalającej zbieżności. Ostatecznie wartość obciążenia krytycznego jest ilorazem ugięć przedostatniej i ostatniej iteracji.

Metoda graficzna jest ideowo zbieżna z metodą *Newmarka*, ponieważ również polega na graficznym odwzorowaniu przyjętej linii ugięcia, następnie odwzorowaniu w skali wykresu

momentów i podzieleniu przez  $EI_i$ . Przyjmując otrzymaną wartość za obciążenie fikcyjne i wykreślając odpowiedni wielobok sznurowy otrzymuje się nową linię ugięcia. Procedurę należy powtarzać tak długo, aż otrzymane w dwóch ostatnich krokach linie zblizną się do siebie. Im bardziej się będą pokrywać, tym rozwiązanie będzie dokładniejsze.

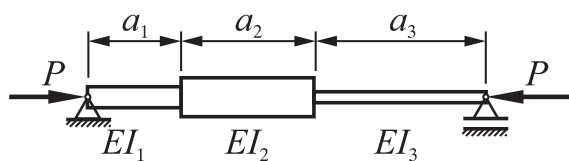
Tabela 2.1. Porównanie wartości współczynnika  $m$  otrzymanego wg metod podanych w [222] dla pręta o schemacie jak na rys. 2.1a przy  $I_1/I_2 = 0,4$  oraz  $a/l = 0,4$

	Rozwiązanie ścisłe	Metoda energetyczna	Metoda <i>Newmarka</i>	Metoda graficzna
$m$	8,51	8,61	8,55	8,48

W tabeli 2.1 porównano metody wyznaczania obciążeń krytycznych przedstawionych w [222]. Dokonano tego na przykładzie słupa o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym w środku rozpiętości (por. rys. 2.1a). Przy czym ograniczono się do podania współczynnika  $m$  jak w wyrażeniu (2.2).

Bez wątpienia, do niesamowitego postępu w zagadnieniach utraty stateczności elementów cienkościennych przyczynił się gwałtowny rozwój lotnictwa. To w tej branży, w celu jak największej redukcji masy stosowano coraz lepsze komponenty służące do budowy statków powietrznych. Nie dziwi więc, że jedna z prac [100] na temat obciążenia krytycznego słupów schodkowych powstała w związanej z lotnictwem korporacji *Lockheed Aircraft*. Autor pracy [100] otrzymał rozwiązanie dla pręta składającego się z  $n$  segmentów o różnych sztywnościach, obciążonego siłą osiową w dowolnym punkcie podziału, a także obciążonego siłą tnącą. Wprowadzono również sprężyste i niesymetryczne podparcia na obu końcach. Model rozważanego przez *Hoblita* pręta pokazano na rysunku 2.1b.

Pojawienie się w drugiej połowie XX komputerów, najpierw analogowych, a później cyfrowych pchnęło problematykę wyboczenia na zupełnie nowe tory. Klasyczne metody analizy, zarówno ścisłe jak i przybliżone rozwinęły się w stronę ich implementacji na maszynach cyfrowych. Pojawiły się również nowe metody, których zastosowanie pozwoliło na efektywną analizę problemu. Do współczesnych metod badania wyboczenia sprężystego w ujęciu komputerowym autorzy pracy [235] zaliczają m.in. metodę macierzy całkowych, metodę różnic skończonych (MRS lub FDM od finite-difference method), metodę macierzy przeniesienia, metodę sił i przemieszczeń w ujęciu macierzowym, wspomnianą już metodę *Newmarka* czy metodę elementów skończonych (MES lub FEM od finite element method). Ta ostatnia jest chyba najszerszej stosowaną i najbardziej popularną w zagadnieniach analizy konstrukcji. Głównie dlatego, że umożliwia uzyskanie wyników dla skomplikowanych kształtów, dla których metody analityczne nie mają rozwiązania. Nie jest ona oczywiście pozbawiona wad, ale jej wszechstronność i prostota programowania zdaje się te wady niwelować. Przykładem wykorzystania MES w ujęciu metody *Galerkina* jest praca *Vrabie i in.* [233].



Rys. 2.2. Słup o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym rozpatrzony w pracy [167]

ści na wysokości słupa (por. rys. 2.2). Jak na owe czasy, nie budzącą wątpliwości zaletą

To właśnie wykorzystując metodę różnic skończonych *O'Rourke i Zebrowski* [167] przedstawili sposób otrzymania obciążenia krytycznego prętów niepryzmatycznych. Rozpatrzyli oni znany już słup wspornikowy, jednak nowością było wprowadzenie niesymetrycznej zmiany sztywności

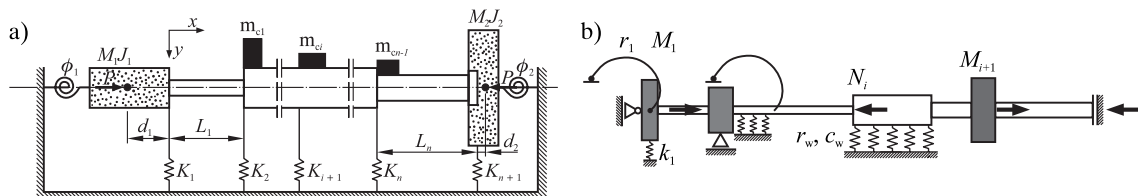


przedstawionego algorytmu, była możliwość wykorzystania go na kalkulatorach programowalnych z możliwością zapamiętania 15 zmiennych oraz wykonania 200 kroków obliczeń.

Analiza obciążeń krytycznych słupów o skokowo zmiennym przekroju została zdemontowana przez *Iremongera* w pracy [103]. Zastosował założenia MRS w połączeniu z metodą iteracji macierzowej. Przeanalizowano zbieżność obciążenia krytycznego w zależności od ich liczby segmentów. Żaden z zaprezentowanych przykładów nie wymagał gęstszego podziału niż na 5 elementów w celu uzyskania dokładności rzędu 1% albo na 8 segmentów dla dokładności rzędu 0,1%.

Syntetyczne zestawienie przybliżonych sposobów ustalania obciążeń krytycznych, do jakich należą metody energetyczne, znaleźć można w [158]. W pracy tej omówiono m.in. podstawy pierwszej metody *Rayleigha*, która następnie została zmodyfikowana przez *Ritza*. Z kolei *Bert* [18] zaproponował modyfikację metody *Rayleigha* do zastosowania w stateczności nie tylko słupów pryzmatycznych, ale i o zmiennym przekroju. Porównał także wyniki przez nie otrzymywane w zależności od przyjętych funkcji bazowych. Pokazał, że dla pręta pryzmatycznego względna różnica w stosunku do rozwiązania ścisłego wynosi nawet 21,6% dla podstawowej metody *Rayleigha* do 0,008% dla metody po uwzględnieniu modyfikacji wprowadzonych przez *Ritza* i *Schmidta*. Nie ograniczył się wyłącznie do wyznaczania obciążeń krytycznych i wraz z *Jangiem* rozszerzyli modyfikację swojej metody stosując ją w analizie drgań elementu o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym [109, 110]. *Nowak i in.* [164] poddali ocenie wpływ sztywności sprężystego zamocowania słupa o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym na częstości drgań własnych oraz na wartości obciążeń krytycznych. Swoje zainteresowania w stronę wyznaczania częstotliwości drgań własnych prętów odcinkowo pryzmatycznych skierowali także autorzy prac [16, 60, 210].

Ponadto *Farghaly* [55] (por. rys. 2.3a) oraz *Lee i Ng* [129] w swoich publikacjach oprócz analizowania drgań prętów, podali również rozwiązania dla wartości obciążeń krytycznych. *Naguleswaran* opublikował praktyczne z mechanicznego punktu widzenia tablice umożli-



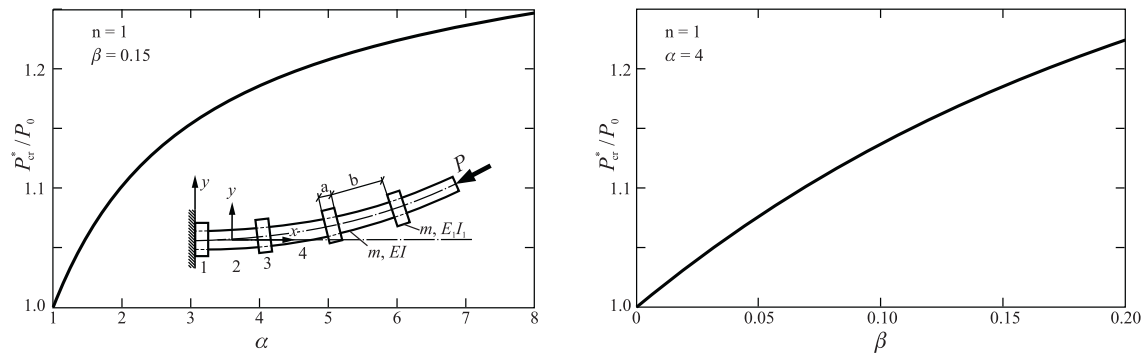
Rys. 2.3. Schematy prętów analizowanych przez: a) *Farghaly'a* [55], b) *Glabisza* [72]

wiające wyznaczanie obciążenia krytyczne wałów o jednokrotnej [156], a następnie trzykrotnej [157] zmianie sztywności przekroju poprzecznego. Podobne tablice, jak i wykresy obciążeń krytycznych w zależności od stosunku sztywności poszczególnych segmentów oraz stosunków ich długości podali *Gadalla i Abdalla* [57]. W kraju, zarówno analizą zmienności częstości drgań własnych jak i statecznością giętą prętów schemacie przedstawionym na rysunku 2.3b, zajmował się *Glabisz* [72]. Jego praca stanowi szerszy zbiór opisu wybranych zagadnień mechaniki konstrukcji, a przedstawione w niej problemy rozwiązano za pomocą pakietu *Mathematica* [2, 93, 238].

Rozpowszechnienie komputerów klasy PC pozwoliło *Arbabi i Li* na przedstawienie w pracy [8] półanalitycznej procedury pozwalającej na analizę wyboczenia elementów konstrukcyjnych z ciągłymi lub nieciągłymi zmianami przekroju poprzecznego oraz materiału. Ich procedura, w której do opisu zagadnienia zamiast równań różniczkowych stosuje się równania całkowe została napisana w środowisku *muMATH*. Był to system algebry kom-

puterowej, który tak jak np. *Mathematica* [93, 146, 238] pozwalał na obliczenia symboliczne. Rozważali oni dwustopniowe słupy ze zróżnicowanymi warunkami brzegowymi. Swoje rozwiązania porównali ze znanymi rozwiązaniami ścisłymi uzyskując błąd rzędu 0,1%.

Bardzo ciekawą propozycję ścisłego rozwiązania problemu wyboczenia przedstawili *Dube i in.* [43]. Inspiracją dla autorów były rurociągi, które traciły stateczność w wyniku obciążenia temperaturą. Aby temu zapobiec, stosuje się w pewnych odstępach pierścienie usztywniające. Schemat jednego z rozważanych przez nich modeli pokazano na rysunku 2.4. W pracy tej, poza ścisłym rozwiązaniem problemu stateczności, otrzymano również częstości drgań własnych słupa odcinkowo usztywnionego i obciążonego siłą śledzącą. W celu znalezienia zarówno optymalnego rozmieszczenia jak i długości tych pierścieni została przeprowadzona obszerna analiza parametryczna. Rezultaty dla całkowitej liczby pierścieni  $n = 1$  i parametrów  $\alpha = EI_1/EI$  oraz  $\beta = b/a$  pokazano jako stosunek obciążenia krytycznego  $P_{cr}^*$  słupa wzmocnionego do obciążenia krytycznego  $P_0$  słupa bez jakichkolwiek pierścieni. Rozszerzony model pręta z nagłą, skokową zmianą przekro-



Rys. 2.4. Wpływ parametru sztywności  $\alpha$  i długości  $\beta$  na obciążenie krytyczne słupa obciążonego siłą śledzącą [43]

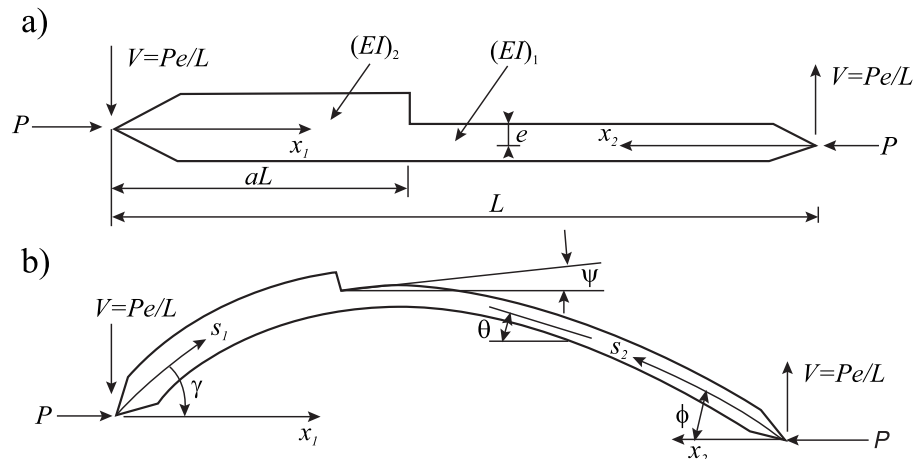
ju poprzecznego obciążonego siłą osiową oraz ze zróżnicowanymi warunkami brzegowymi przedstawili również *Au i in.* [14]. Autorzy przeanalizowali pręt obciążony siłą wodzącą oraz znajdujący się w ośrodku typu *Winklera* o zmiennej sprężystości. Celem ich pracy było wyznaczenie częstości drgań własnych jak i obciążeń krytycznych. Dokonali tego stosując zunifikowaną metodę bazującą na równaniach *Eulera-Lagrangea*. Jako postaci drgań własnych wykorzystali funkcje klasy  $C^1$ , których zaletą jest szybkie uzyskanie zbieżności poszukiwanych rozwiązań oraz możliwość odcinkowego zastosowania wielomianów trzeciego stopnia, które spełniają warunki funkcji klasy  $C^1$  oraz warunki ciągłości pręta w miejscach nagłej zmiany sztywności przekroju. Rozwiązaniem zagadnień stateczności giętej i częstotliwości drgań własnych wielosegmentowego słupa obciążonego zarówno zmiennym na wysokości obciążeniem osiowym oraz punktową siłą wodzącą na wierzchołku zajmował się również *Li* [139].

W serii swoich prac *Aristizabal-Ochoa* [9–12] sprowadza problem stateczności giętej słupów dwustopniowych do odpowiednich zagadnień na wartości własne. Przyjęty przez autora model poza zmianą sztywności cechują się wprowadzeniem sprężystych więzi, które ograniczają przemieszczenia liniowe oraz kąty obrotu pręta w płaszczyźnie wyboczenia. Statyczne kryterium stateczności przyjmuje zatem postać

$$\det \mathbf{K} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \text{Symetria} & \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} = 0, \quad (2.3)$$

gdzie  $[K]$  oznacza symetryczną kwadratową macierz sztywności. Rozwiązaniem wyrażenia (2.3) będzie odpowiednie równanie stateczności. Nowością jest praktyczne wykorzystanie wyprowadzonych zależności, co pokazano przykładzie przechyłowej ramy portalowej. Udowodniono m.in., że korzystniejsze jest wprowadzenie ograniczenia liniowych przemieszczeń na poziomie zmiany sztywności niż w narożu ramy.

Wpływ sił ścinających na wyboczenie giętne pręta wieloskokowego przedstawił *Li* w [137]. Równanie stateczności otrzymano w formie zamkniętej wykorzystując metodę macierzy przeniesienia, której możliwości w zastosowaniu do zagadnień dynamiki i stateczności prętów cienkościennych przedstawił już w latach siedemdziesiątych *Świtoński* [217].



Rys. 2.5. Geometria słupa analizowanego w pracach [15, 143, 189]: a) niezdeformowanego, b) zdeformowanego

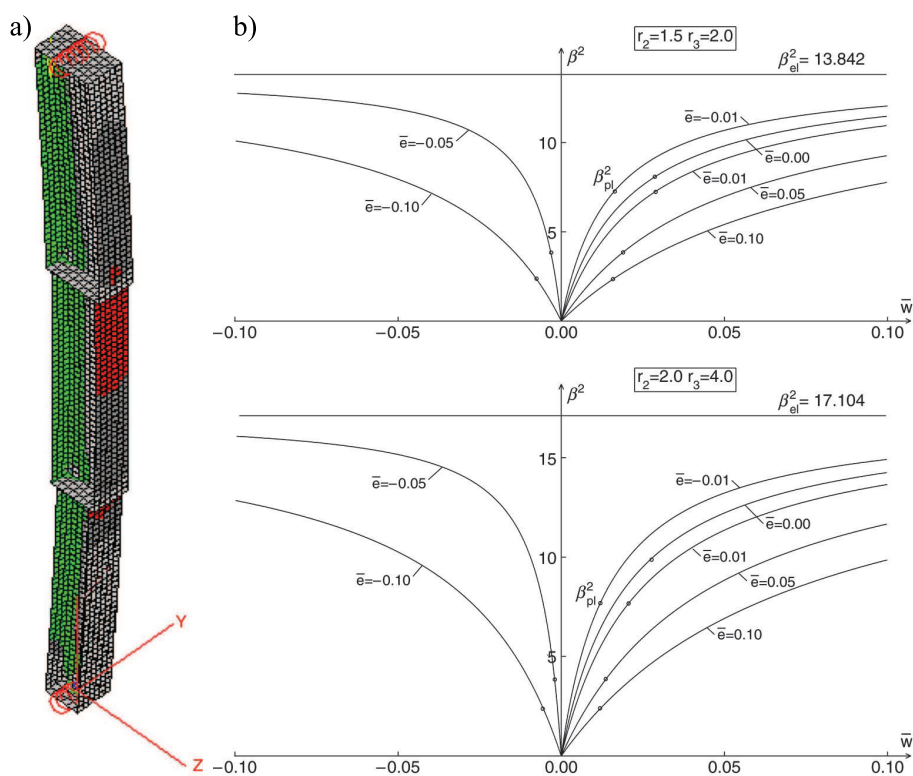
Opisu zagadnienia wyboczenia pozasprężystego słupów schodkowych, obciążonych nie tylko punktową ale i ciągłą siłą osiową, podjęli się *Madhusudan i in.* w pracy [143]. Sformułowanie problemu zostało przez nich oparte na zależności krzywizny pręta i momentu zginającego. Problem dwupunktowego zagadnienia brzegowego opisano odpowiednimi równaniami różniczkowymi zależnymi od parametru częstotliwości oraz dwóch rodzajów obciążeń. Zastosowano przy tym iteracyjną metodę konwersji zagadnienia brzegowego na problem zagadnienia początkowego i rozwiązano nieliniowe równania różniczkowe wykorzystując metodę *Rungego-Kutty* czwartego rzędu. Przytoczony przez nich przykład bazuje na doświadczalnych badaniach *Babcocka i Waasa* [15] (por. rys. 2.5). Prowadzone przez nich badania dotyczyły co prawda materiałów kompozytowych, ale ich praca jest jedną z niewielu, która porusza problem nieosiowej zmiany przekroju poprzecznego nawet jeżeli dotyczy wyboczenia giętnego. Również *Rahai i Kazemi* [189] zainspirowani tymi pracami, dokonali porównania wcześniej uzyskanych wyników z uzyskanymi przez siebie wykorzystującymi zmodyfikowane postacie funkcji kształtu częstotliwości drgań własnych (modified vibrational mode – MVM) oraz metodę energetyczną. Otrzymane przez autorów wartości zostały dodatkowo zweryfikowane przy wykorzystaniu metody elementów skończonych zaimplementowanej w programie *ANSYS*. Porównanie wyników badań doświadczalnych [15] oraz rozważań analitycznych i numerycznych przedstawiono w tabelicy 2.2. Badanie doświadczalne z zakresu pozasprężystego oraz pozakrytycznego zachowania stalowych kątowników prowadzili w pracy [69] *Gizejowski i in.*

Kolejną interesującą pracą z zakresu stateczności giętniej jest [240], w której to *Yang i Park* rozpatrują analityczne podejście do problemu wyboczenia stężonych słupów ze skokową zmianą sztywności oraz słupów o dowolnym przekroju poprzecznym. Stosują przy

Tabela 2.2. Porównanie wartości obciążeń krytycznych  $P_{cr}$  otrzymanych w pracach [15, 143, 189] dla pręta o schemacie jak na rys. 2.5

Wymiary próbek		$P_{cr}$ (N)			
$L$ (m)	$\alpha$	<i>Babcock i Waas</i> [15]	<i>Madhusudan i in.</i> [143]	<i>Rahai i Kazemi</i> [189]	
				FEM	MVM
0,2032	0,38	169,032	185,490	185,513	187,142
0,2286	0,33	146,791	139,674	140,221	145,786
0,1905	0,40	204,618	215,738	215,680	220,064
0,1842	0,41	209,066	233,531	233,442	234,915
0,1778	0,43	262,445	256,662	256,493	261,578
0,1715	0,44	289,134	279,348	279,334	284,673

tym komputerową wersję metody przemieszczeń (Effective Stiffness Method). W artykule przedstawiono ściśle rozwiązania problemu wybożenia giętnego. W celu opisanego słupów niejednorodnych (ze względu na sztywność), obciążonych w sposób mimośrodowy, z dowolnymi warunkami podparcia, z uwzględnieniem globalnych, jak i lokalnych deformacji wstępnych oraz z uwzględnieniem wpływu pozostałych sił przekrojowych, rozszerzono napisany algorytm. Otrzymane wyniki porównano z wartościami obciążeń krytycznych uzyskanych metodą elementów skończonych (MES) w zależności od liczby przyjętych segmentów. Rozwiązania te uzyskano z wykorzystaniem platformy obliczeniowej *MATLAB*, co pokazano w znacznie obszerniejszej pozycji [241]. Dodatkowo do niej są także odpowiednie m-pliki, które można modyfikować i kompilować w programie.



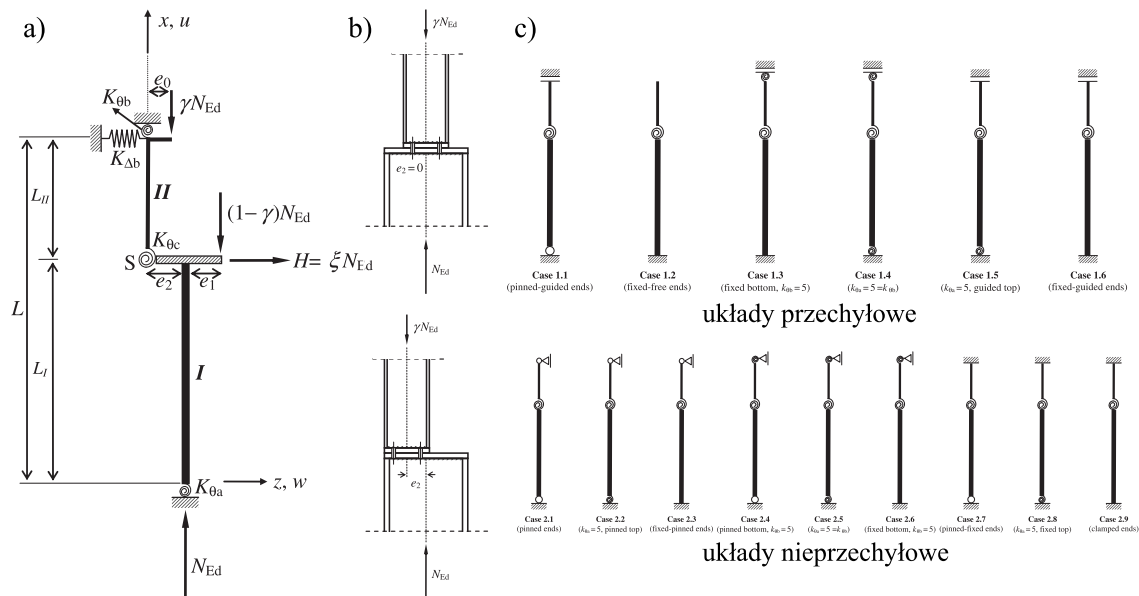
Rys. 2.6. Naprężenia zredukowane *Hubera-Misesa* w numerycznym modelu MES (a) oraz wybrane ŚRS (b) uzyskane w [188]

Stateczność zbieżnych i skokowych stalowych słupów z uwzględnieniem wstępnych imperfekcji oraz mimośrodowego obciążenia była również przedmiotem analiz *Raftoyiannisa i Ermopoulou* w [188]. Sformułowania problemu dokonano w oparciu o ściśle rozwiązanie równań różniczkowych opisujących poszczególne segmenty słupa. Zgodnie z zaleceniami norm [258, 259] przyjęto paraboliczny kształt imperfekcji wstępnej. Rozwiązania analityczne porównano z rozwiązaniami numerycznymi uzyskanymi w programie *Algor* za pomocą MES. Jako kryterium zniszczenia przyjęto uplastycznienie materiału. Widok uplastycznionego modelu przedstawiono na rysunku 2.6a. Z kolei rysunek 2.6b prezentuje rozwiązanie ścieżki równowagi statycznej przegubowo podpartego słupa w zależności od mimośrodu przyłożonego obciążenia oraz dla przyjętego przez autorów bezwymiarowego współczynnika imperfekcji  $\bar{\alpha}_0 = 0,02$ . Bardziej rozszerzoną analizę stateczności, w postaci ścieżek równowagi statycznej, przedstawili w rozszerzonym zespole *Konstantakopoulos i in.* [120].

Model pręta o skokowo zmiennym przekroju z uwzględnieniem pęknięć lub rys analizowali *Lellep i Sakkov* [130]. Uwzględniono je jako lokalne nieciągłości, które odwzorowane zostały poprzez sprężystą więź łączącą poszczególne segmenty. Wpływ rozmiaru i ich lokalizacji rozważano na przykładzie dwusegmentowego wspornika obciążonego stałą siłą osiową. Ten sam model, w ujęciu zagadnienia na optymalizację rozpatrzyli *Lellep i Kraav* [131]. Warunkiem na optimum była dla nich minimalna masa rozważanego słupa. Model ściskanego dwusegmentowego słupa z punktem nieciągłości, który nie przenosi ścinania, analizowany był również przez *Williamsa* [236]. *Yavari i Sarkani*, autorzy pracy [242], również rozpatrzyli model pręta nieciągłego, o różnych charakterystykach przekroju poprzecznego zmieniających się skokowo. Do opisu zagadnień zginania i stateczności elementu zastosowali równanie różniczkowe belki *Eulera-Bernoulliego* obciążonej siłą poprzeczną oraz siłą osiową. Obciążenia te zdefiniowali w miejscach zmiany sztywności i opisali je stosując teorii dystrybucji *Schwartz*a. Przemieszczenia belki oraz obciążenia krytyczne rozważanego słupa uzyskali z zastosowaniem transformacji *Laplace'a* w przestrzeni funkcji uogólnionych. Zagadnieniami statyki w ujęciu teorii dystrybucji m.in. belek ciągłych o skokowo zmiennym przekroju zajmował się *Gosowski* [81, 86], a także *Failla i in.* [53, 54].

Wśród polskich uczonych zagadnieniem stateczności, ale i częstotliwości drgań własnych zarysowanego pręta schodkowego zajmował się *Kukla* [123]. Rozwiązanie problemu otrzymał również wykorzystując właściwości funkcji *Greena*. Porównał wartości obciążeń krytycznych analizowanego słupa w zależności od stosunku sztywności i długości poszczególnych segmentów oraz charakterystyki przyjętej nieciągłości. Charakterystyczny punkt wzdłuż pręta, jakim jest zmiana jego sztywności, jak wykazano już we wspomnianych pracach [123, 130, 131], nie wpływa istotnie na wartość obciążenia krytycznego. Do podobnych wniosków doszli *Akbulut i in.*, którzy poddali analizie sposób wykonstruowania zmiany sztywności na stateczność słupa [4]. Co prawda swoje rozważania prowadzili nad elementem z materiałów kompozytowych, ale płynące z nich wnioski można również odnieść równie dobrze do konstrukcji stalowych lub drewnianych. Problem wyboczenia opisali stosując MES oraz napisany algorytm w języku programowania Fortran. Jedną ze zmiennych, którą poddali analizie, był promień wyokrąglenia przejścia zmiany sztywności elementu. Promień ten ma istotne znaczenie jeżeli chodzi o koncentracje naprężeń, ale jego wpływ na wartości obciążeń krytycznych jest znikomy. Również badania doświadczalne, które przeprowadzili *Snijder i Hoenderkamp* [206], potwierdzają powyższy wniosek. Nie zajmowali się oni co prawda słupami o skokowo zmiennym przekroju, ale analizowali wpływ wybranych typów połączeń (m.in. doczołowe połączenie o różnych grubościach

blach) słupa na wartości obciążeń krytycznych. Większą różnorodność ze względu na rodzaj połączeń i ich rotacyjną podatność w modelu obliczeniowym przeanalizowali *Girão Coelho i in.* w serii swoich publikacji. W artykule [66] uwzględnili wpływ na wartości obciążeń krytycznych takich elementów jak: sztywność więzi, jej lokalizacja, rodzaj warunków brzegowych. Wyniki przedstawili w postaci tabel, wykresów, a nawet powierzchni. W kolej-



Rys. 2.7. Rozważane w pracy [204]: a) model słupa, b) rodzaje nieosiowej zmiany przekroju, c) przypadki schematów dla opracowanych tablic projektowych

nej pracy [203] rozbudowano model słupa i uwzględniono odcinkową zmienność sztywności przekroju poprzecznego oraz wpływ imperfekcji. Natomiast bardzo praktycznym podejściem charakteryzującą się [65, 204]. Zaproponowano rozbudowany model słupa o skokowo zmiennej sztywności, który cechuje się podatnością giętną oraz nieosiowością poszczególnych segmentów w miejscu połączenia (por. rys. 2.7a). Na rysunku 2.7b zaprezentowano fizyczną interpretację przyjętej nieosiowości, choć z punktu widzenia przestrzennej pracy konstrukcji, należy krytycznie ocenić konstrukcję przedstawionego węzła. Obszerną częścią pracy [204] jest załącznik, w którym w zależności od poszczególnych parametrów (por. rys. 2.7a) i schematów (por. rys. 2.7c), podano wartości zmodyfikowanych odpowiedników współczynników długości wybozeniowych poszczególnych segmentów oraz całego układu. Bazując na uzyskanych rezultatach podjęto również problem wymiarowania takich konstrukcji w oparciu o normę [257]. Uprozczone formuły wymiarowania słupów schodkowych podali także *Castiglioni* [29] oraz *Lui i Sun* [142]. Długości wybozeniowe słupów hal z suwnicami pojawiły się również w pierwszej powojennej normie dotyczącej projektowania i obliczania konstrukcji stalowych z 1951 roku [251] (norma PN-B-190 [254] z 1946 roku uznana została w swoim założeniu za tymczasową). *Bogucki i Żenczykowski*, którzy byli członkami zespołu opracowującego powojenne normy wydali również tablice [249], z których długości wybozeniowe słupa dwustopniowego również można odczytać. Także *Marcinowski* podał w [144] wartości obciążeń krytycznych takich słupów w zależności stosunku zmiany sztywności i długości poszczególnych odcinków. Przedstawił je w postaci tabel i nomogramów. Podobne opracowania można znaleźć w pracy *Kurzwawy* [125], w której to podaje współczynniki długości wybozeniowych słupów dwu i trójstopniowych z zależności od stosunku sztywności poszczególnych części.

Wytyczne projektowania i budowania przemysłowych hal z suwnicami znaleźć można w publikacjach wydanych przez *Association of Iron and Steel Engineers* [3] oraz *American Institute of Steel Construction* [56]. Rozwiązanie w postaci kodu, napisanego w środowisku *MATLAB*, mającego praktyczne zastosowanie podali *Vasquez i Riddell* [230]. Kod ten również umożliwia wyznaczenie wartości obciążeń krytycznych wyboczenie giętnego słupów schodkowych, ich współczynników długości wyboczeniowych oraz wykreśla jego postać utraty stateczności.

Konstrukcje o skokowej zmianie sztywności mają zastosowanie nie tylko w budownictwie. Również w innych dziedzinach zjawisko utraty stateczności elementów ściskanych należy wziąć pod uwagę. Może się tak zdarzyć w urządzeniach mechanicznych, czego przykładem może być praca *Du i in.* [42], w której jako przykład opisu zjawiska podano wysięgniki teleskopowe urządzeń dźwigowych.

Również metody wariacyjne cieszą się uznaniem i są skutecznie wykorzystywane w zagadnieniach stateczności. Należałoby w tym miejscu zwrócić uwagę na iteracyjną metodę wariacyjną (VIM — variational iteration method), która jest efektywnym narzędziem służącym do rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych jak i cząstkowych. Wykorzystana ona została do analizy słupów i belek o zmiennej sztywności m.in. przez *Coşkuna i Ataya* [37], *Pinarbasi i in.* [187], a Polsce przez *Glabisza i in.* w pracy [71].

### 2.2.2. Pręty niepryzmatyczne

W inżynierskiej praktyce, poza słupami pryzmatycznymi lub odcinkowo pryzmatycznymi, spotyka się również pręty, których przekrój poprzeczny zmienia się w sposób ciągły. Mimo wielu prac poruszających zagadnienia wyboczenia giętnego tych prętów, ze względu na tematykę rozprawy wymieniono jedynie podstawowe prace oraz te, w których nawiązano do elementów schodkowych.

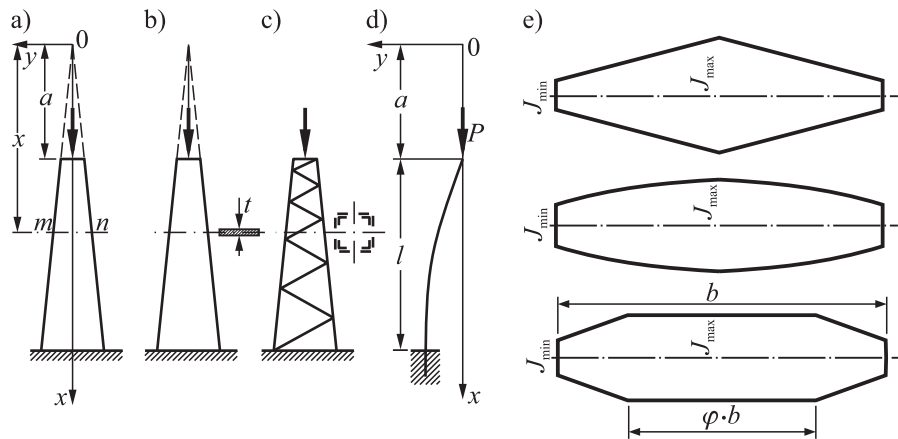
*Timoshenko i Gere* w swojej pracy [222] podali za *Dinnikiem* rozwiązanie dla pręta utwierdzonego na dolnym końcu i swobodnego na górze (por. rys. 2.8a). Wyrazili moment bezwładności funkcją potęgową postaci

$$I_x = I_1 \left( \frac{x}{a} \right)^n, \quad (\text{a})$$

gdzie  $I_1$  jest minimalnym momentem bezwładności przekroju. A dzięki różnym wartościom  $n$  w wyrażeniu (a) można uzyskać różne kształty słupa. Dla  $n = 1$  uzyskuje się przypadek o stałej grubości i zmiennej szerokości (2.8b). W przypadku  $n = 2$  otrzymuje się w przybliżeniu słup o stałym polu przekroju złożony z czterech kątowników połączonych krzyżulcami (por. rys. 2.8c). Z kolei przyjęcie  $n = 4$  jest przypadkiem ściętego stożka lub ostrosłupa. Wówczas równanie różniczkowe linii ugięcia pręta o schemacie jak na rysunku 2.8d przyjmuje postać

$$EI_1 \left( \frac{x}{a} \right)^n \frac{d^2y}{dx^2} = -Py. \quad (\text{b})$$

Równanie różniczkowe (b) ze zmiennymi współczynnikami postaci (a) dla dowolnego  $n$  można rozwiązać za pomocą funkcji *Bessela*. Rozwiązania elementów wspornikowych (por. rys. 2.8) przedstawiono w postaci tabelaryzowanej w zależności od wartości parametru  $n = 1, \dots, 4$ , stosunku  $I_1/I_2$ , i stosunku  $a/l$  poprzez sprowadzenie wartości obciążeń krytycznych do współczynnika  $m$  ze wzoru (2.1). Współczynniki te podano również dla pręta przegubowo podpartego, symetrycznego względem środkowego przekroju poprzecznego.



Rys. 2.8. Przykłady słupów o zbieżnych przekrojach (opis w tekście)

Rozszerzone rozwiązania do współczynnika  $n = 6$  w postaci nomogramów podał *Gatwood* [62]. Warto nadmienić, że odpowiednie współczynniki, które sprowadzały pręty o zmiennym momencie bezwładności (por. rys. 2.8e) do prętów o równoważnym momencie bezwładności, pojawiły się już w tymczasowej powojennej normie dotyczącej projektowania konstrukcji metalowych [254]. Ścisłe rozwiązanie konkretnego przypadku znaleźć można w pracy *Chen i in.* [33]. Zajmowali się oni statecznością słupa o współczynniku  $n = 2$ . Wykorzystana przez nich metoda sprowadzała się do transformacji problemu zagadnienia własnego do problemu na zagadnienie początkowe.

W zdecydowanej większości przypadków prętów o zmiennej sztywności, ścisłe rozwiązanie zagadnienia wybożenia nie są możliwe do uzyskania w dziedzinie funkcji elementarnych. Dlatego tego typu elementach bardziej praktyczne wykorzystanie mają przybliżone metody rozwiązywania równań różniczkowych. Metodę różnic skończonych zastosował *Iremonger* [103]. Rozwiązania w zakresie statyki, częstotliwości drgań własnych oraz wartości obciążeń krytycznych w ujęciu metody elementów skończonych przedstawili *Eisenberger i Reich* [47] oraz uzupełniając rozwiązanie o zmienną siłę osiową *Eisenberger* [46]. Problem wybożenia słupów o zmiennym przekroju z zastosowaniem MES w ujęciu metody *Galerkina* zajmowali się również *Vrabie i in.* [233]. *Wei i in.* [234] podali nomogramy umożliwiające określenie obciążeń krytycznych prętów o zbieżnym przekroju. Wspomniana już praca *Arbabi i Li* [8] podaje sposób rozwiązania słupów przedstawionych na rysunku 2.8b poprzez dyskretyzację rozważanego modelu. Przyjęcie podziału pręta na sześć odcinków dało autorowi błąd względny rzędu  $\delta = 5\%$ . Zamknięte rozwiązanie wybożenia słupa niepryzmatycznego, którego moment bezwładności zapisano w postaci wielomianu drugiego stopnia, podali *Elishakoff i Rollot* [49, 50]. Wykorzystali do tego możliwości pakietu *Mathematica* [2, 146, 238], a wyniki w zależności od przyjętej postaci wielomianu, zaprezentowali w postaci tabelaryzowanej podając wartość obciążenia krytycznego i postać funkcji odkształcenia pręta. W analizie stateczności prętów niepryzmatycznych wykorzystanie znajduje również pakiet *MATLAB*. Jego wykorzystania w zagadnieniach mechaniki, w tym wybożenia poprzez dyskretyzację elementu o zmiennej sztywności, przedstawił *Yang* w swojej obszernej publikacji [241]. Niecodzienne podejście zaproponował *Elishakoff* w pracy [51]. Sformułował problem odwrotnego zagadnienia utraty stateczności. Autor szukał bowiem takich współczynników przy zadanej klasie funkcji, aby spełniały kryterium minimalnej wartości obciążenia krytycznego. W swoich rozważaniach, poza statecznością



słupów schodkowych, analizą elementów niepryzmatycznych zajmowali się wspomniani już *Raftoyiannis i Ermopoulos* [188] oraz *Konstantakopoulos i in.* [120].

Bardziej urozmaicony model słupa m.in. z wprowadzonymi sprężystymi więziami rotacyjnymi i liniowymi, z uwzględnieniem wpływu osiowej równomiernie rozłożonej i skupionej siły niezachowawczej, siły poprzecznej, lokalnych nieciągłości, rozważał *Li* [132–136, 138, 139], a swoje rozwiązania porównał z uzyskanymi za pomocą metody elementów skończonych. Kompleksowe podejście do tematu znajdziemy także w pracy *Girgina i Girgina* [67], ponieważ analizowali model charakteryzujący się: zmiennością charakterystyk przekroju poprzecznego, uwzględnieniem wpływu zginania i ścinania, poprzeczną oraz rotacyjną bezwładnością mas, rozłożonym lub/i skupionym obciążeniem osiowym lub/i poprzecznym, opartym na sprężystym podłożu typu Winklera uwzględniającym ścinanie.

Szerokie zastosowanie znalazły również metody energetyczne, m.in. *Bert* [18] zastosował zmodyfikowaną metodę *Rayleigh'a* oraz porównał uzyskane rezultaty ze znanymi ówczesnie rozwiązaniami.

Zmodyfikowaną metodę *Newmarka* w zastosowaniu do zagadnień stateczności prętów zbieżnych przedstawili *Bradford i Abdoli Yazdi* w pracy [23]. Analizowane przez nich elementy dyskretyzowali na 3, 5 i 9 odcinków, a zbieżność wyników otrzymali przy siedmiu iteracjach.

Bardzo skutecznym narzędziem w analizie nie tylko zagadnień utraty stateczności, ale ogólnie w zagadnieniach brzegowych z narzuconymi warunkami jest metoda strzałów. Jest to metoda numeryczna, która pozwała na rozwiązywanie problemów brzegowych zarówno liniowych jak i nieliniowych. W zagadnieniach mechaniki konstrukcji narzucone ograniczenia przyjmują postać kinematycznych warunków brzegowych analizowanego pręta. Z ideą metody można się zapoznać m.in. pracy *Chena* [31] oraz *Glabisza* [72]. Ten drugi podaje rozwiązania w postaci komend do zaimplementowania w pakiecie *Mathematica* [2, 146, 238]. Praktyczne wykorzystanie metody strzałów dla jednoodcinkowego słupa o zmiennym przekroju poprzecznym przedstawili *Hołubowski i Glabisz* [101], natomiast rozszerzenie metody w zastosowaniu do elementów wielosegmentowych również o zmiennym przekroju poprzecznym podali *Hołubowski i Merena* [102].

Wśród współczesnych prac na temat wyboczenia prętów niepryzmatycznych należałoby zwrócić uwagę na publikację *Bazeos'a i Karabalis'a* [17], w której podali przybliżony sposób otrzymywania wartości obciążeń krytycznych słupów o zbieżnym środku. Rozwiązania przedstawili w postaci bezwymiarowych nomogramów, dzięki którym można szybko określić zastępczy przekrój analizowanego słupa i oszacować dla niego wartość obciążenia krytycznego. Różnice w otrzymanych rezultatach względem rozwiązań ścisłych nie przekraczały 5%. Podobnie postąpili *Serna i in.* [202], którzy na podstawie przeprowadzonej obszernej analizy parametrycznej przedstawili swoje rozwiązania dla elementów o zróżnicowanych współczynnikach zbieżności. Z kolei *Tong i Ji* [223] sprowadzili wielokondygnacyjny układ ramowy ze zróżnicowanymi słupami do słupa o liniowo zmiennym przekroju i obciążeniu osiowym. Wspomniani już *Rahai i Kazemi* [189] stosując zmodyfikowane postacie funkcji kształtu częstotliwości drgań własnych (modified vibrational mode — MVM) podali również rozwiązania dla słupów o zbieżnym środku. W pracy [37], *Coşkun i Atay*, wykorzystali VIM, w celu uzyskania wartości obciążeń krytycznych. Porównali uzyskane przez siebie wartości z rozwiązaniami ścisłymi. Inną równie interesującą metodą przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych jest metoda WKB (*Wentzla-*

*Kramersa-Brillouina*). Jej zastosowanie przedstawili *Darbandi i in.* [40] na przykładzie słupów obciążonych zmienną siłą osiową o zbieżnym przekroju poprzecznym.

Jak wiadomo, określenie obciążeń krytycznych prętów niepryzmatycznych jest niezbędne w procesie ich wymiarowania. Norma [257] podaje kilka metod, dzięki którym można sprawdzić stany graniczne nośności elementów niepryzmatycznych. Zostały one opisane przez *Naumes'a* [159] oraz przez *Naumes'a i in.* [160], którzy również podali propozycje modyfikacji niektórych z nich. Sposób wymiarowania elementów ze zbieżnym przekrojem przedstawili również *Marques i in.* [145].

### 2.3. Stateczność przestrzenna elementów konstrukcji metalowych

Upowszechnienie zastosowania stali, gwałtowny rozwój mostownictwa, lotnictwa i okrętownictwa, wszystko to miało wpływ na rozwój teorii stateczności na początku XX wieku. Zaobserwowano bowiem, że przy pewnych parametrach geometrycznych pręta możliwe są inne postaci niestateczności, aniżeli znane dotychczas wyboczenie giętne. Jedną z nich jest deformacja ściskanego pręta, polegająca na tym, że jego oś pozostaje prostoliniowa, a utrata stateczności jest związana z odkształceniem skrętnym przekroju poprzecznego, stąd mowa o wyboczeniu skrętnym. Drugą jest deformacja łącząca zakrzywienie osi pręta z jednoczesnym skręceniem przekroju poprzecznego, dlatego mówimy o przestrzennej utracie stateczności lub wyboczeniu giętno-skrętnym. Zaobserwowanie tych zjawisk, nie tylko w dziedzinie zagadnień utraty stateczności, ale również zagadnień wytrzymałościowych, dało podwaliny znanej współcześnie teorii pręta cienkościennego *Własowa*.

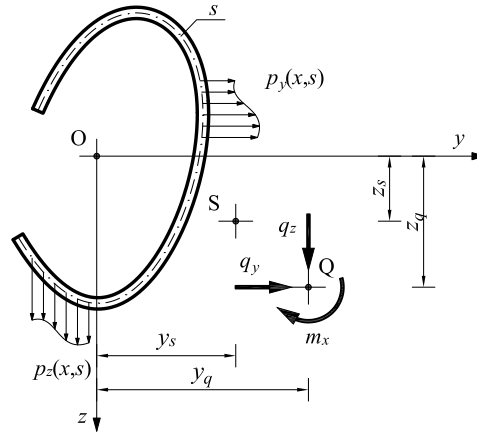
Prekursorami zajmującymi się problemami niestateczności prętów cienkościennych byli m.in. *Timoshenko*, *Weber*, *Wagner* i *Kappus*. Ten pierwszy rozwiązał problem stateczności skrętnej kątownika oraz wyraził, a następnie potwierdził doświadczalnie zależności między kątem skręcenia przekroju a sztywnościami czystego skręcania i skręcania skrępowanego. Drugi określił dodatkowe naprężenia giętne w skręcanych półkach dwuteowników, ceowników i zetowników. *Wagner*, który był profesorem aeronautyki, wprowadził hipotezę nieodkształcalności giętnej przekrojów w swych płaszczyznach. W latach trzydziestych, *Bleich*, stosując metodę energetyczną, podał układ trzech równań różniczkowych równowagi pręta. W swym rozwiązaniu nie ustrzegł się błędów, które następnie skorygował *Kappus* podając ścisłą teorię wyboczenia skrętnego osiowo ściskanych prętów o dowolnym przekroju poprzecznym. Niezależnie od niego podstawy teorii pręta cienkościennego podali również *Lundquist* i *Fligg*. Niewątpliwie największy wkład w nową wówczas teorię prętów cienkościennych miał *Własow* [232], który ugruntował, uporządkował i podał rozwiązania szeregu nowych zagadnień. Szczegółowe osiągnięcia naukowców, którzy przyczynili się do rozwoju teorii prętów cienkościennych można znaleźć w pracach *Timoshenki* [221], *Weissa* i *Gizejowskiego* [235] oraz *Kurrera* [124].

W środowisku polskich badaczy, którzy zajmowali się teorią stateczności prętów cienkościennych, na wyróżnienie zasługują prace m.in. *Dąbrowskiego*, *Cywińskiego* (por. [235]), *Ruteckiego* [194], *Naleszkiewicza* [158], *Brzoski* [28] i *Bródki* i *Łubińskiego* [27].

#### 2.3.1. Wyboczenie giętno-skrętne

Założmy ogólny model pręta cienkościennego o dowolnym przekroju poprzecznym, obciążony podłużnie siłą osiową  $N$  i poprzecznie siłami  $p_y$ ,  $p_z$  zmiennymi na długości. Dla

którego wypadkowe tych obciążeń w postaci  $q_y$ ,  $q_z$ ,  $m_x$  zostały sprowadzone do osi środków ścinania, i którego przekrój poprzeczny pokazano na rysunku 2.9.



Rys. 2.9. Przekrój poprzeczny pręta cienkościennego

Układ równań różniczkowych stateczności, z rozwiązania którego można otrzymać siły krytyczne, wyprowadzony przez *Własowa* [232], znaleźć można m.in. w pracach [158, 190, 194, 195, 235]. Natomiast jego ogólniejszą postać podał *Březina* [26] oraz, w odniesieniu do zagadnień statyki, także *Gosowski* [81, 86]:

$$(EI_z v^{(2)})^{(2)} - [N(v^{(1)} + \varphi^{(1)} z_s)]^{(1)} + (M_y \varphi)^{(2)} = 0, \quad (2.4a)$$

$$(EI_y w^{(2)})^{(2)} - [N(w^{(1)} - \varphi^{(1)} y_s)]^{(1)} + (M_z \varphi)^{(2)} = 0, \quad (2.4b)$$

$$(EI_\omega \varphi^{(2)})^{(2)} - (GI_T \varphi^{(1)})^{(1)} - [(r_s^2 N + 2\beta_z M_y - 2\beta_y M_z + \beta_\omega B) \varphi^{(1)}]^{(1)} + [q_y[w + (y_q - y_s)] + q_z[v - (z_q - z_s)]] \varphi - z_s (Nv^{(1)})^{(1)} + y_s (Nw^{(1)})^{(1)} + M_y v^{(2)} - M_y^{(2)} v + M_z w^{(2)} - M_z^{(2)} w = 0. \quad (2.4c)$$

Występujące w równaniach (2.4) wielkości przyjmują następujące znaczenie:

$$r_s^2 = \frac{I_y + I_z}{A} + y_s^2 + z_s^2 \quad (2.5)$$

jest kwadratem biegunowego promienia bezwładności względem środka ścinania, natomiast:

$$\beta_y = \frac{1}{2I_z} \int_A y(y^2 + z^2) dA - y_s, \quad \beta_z = \frac{1}{2I_y} \int_A z(y^2 + z^2) dA - z_s, \quad (2.6)$$

$$\beta_\omega = \frac{1}{I_\omega} \int_A \omega(y^2 + z^2) dA$$

są tzw. ramionami asymetrii przekroju, natomiast pozostałe wielkości wynikają z rysunku 2.9. Pierwsze dwa równania (2.4a) i (2.4b) opisują przemieszczenia przekroju, natomiast równanie (2.4c) opisuje jego kąt skręcenia.

Równania (2.4) w ogólnym przypadku mają zmienne współczynniki (charakterystyki przekrojowe oraz obciążenia występują w postaci funkcji zależnej od  $x$ ). W związku z tym, ich całkowanie w dziedzinie funkcji elementarnych nie zawsze jest możliwe. Ścisłe rozwiązania problemu stateczności przestrzennej elementów cienkościennych są możliwe do

uzyskanie jedynie w szczególnych przypadkach prętów pryzmatycznych dla których działające obciążenie przyjmuje wartość stałą na długości. Alternatywą dla rozwiązań ścisłych są różnego rodzaju metody przybliżone.

W drugiej połowie XX wieku zaczęło przybywać publikacji na temat stateczności prętów cienkościennych w ujęciu zaproponowanym przez *Własowa* [232]. Elementy jednoprzęsłowe o dowolnych warunkach brzegowych obciążonych stałą siłą osiową były przedmiotem rozważań *Świtońskiego* [216, 217]. Do uzyskania wartości obciążeń krytycznych w [216] autor zastosował transformację *Laplace'a*, natomiast w [217] wykorzystał metodę macierzy przeniesienia i rozszerzył jej wykorzystanie do zagadnień dynamiki pręta składającego się z dwóch odcinków o stałym przekroju. *Szymczak* [215] zajmował się problem stateczności skrętnej dwuteowego skokowego słupa, natomiast w pracy [213] analizował pręt o dowolnym przekroju oraz szukał dla niego optymalnego kształtu.

Problemem niestateczności przestrzennej interesowali się również *Joshi i Suryanarayan* [111], którzy wartości obciążeń krytycznych pręta obciążonego stałą siłą osiową oraz stałym momentem zginającym uzyskali numerycznie. Próby oszacowania obciążeń wyboczenia giętno-skrętnego podjął się *Attard* [13], który podał odpowiednie długości efektywne słupa ze względu na wygięcie i skręcenie.

Ciekawą pozycją jest również praca *Eisenbergera i Cohena* [48]. Autorzy wyprowadzili w niej odpowiednie funkcje kształtu i stosując metodę elementów skończonych podali rozwiązania dla poszczególnych przypadków problemów przestrzennej utraty stateczności prętów cienkościennych oraz porównali je z innymi znanymi rozwiązaniami.

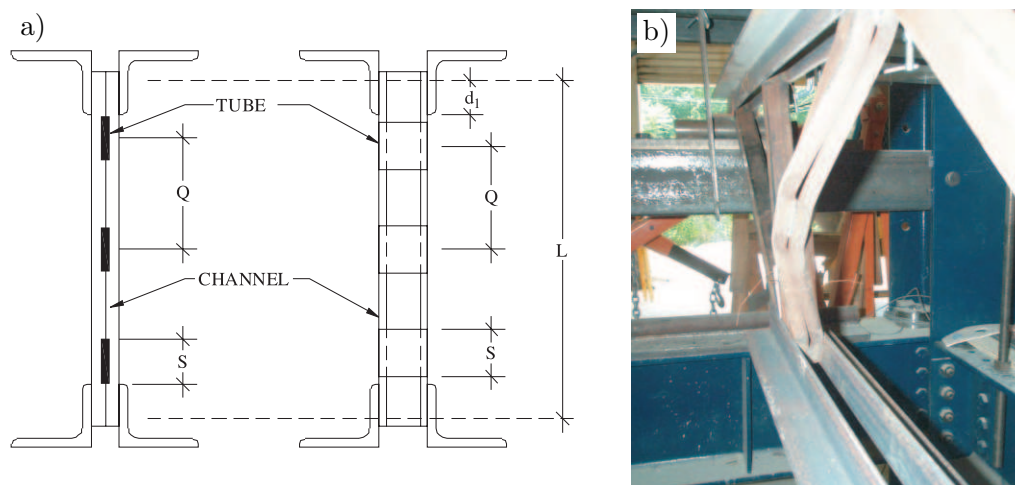
Warto również nadmienić, że równania stateczności pręta cienkościennego w ujęciu teorii *Własowa* miały i nadal mają swoich krytyków, jak i zwolenników. Pierwszym, który poddał pod wątpliwość człon  $(Nr_S^2 \varphi^{(1)})^{(1)}$  z równania (2.4c), był 1981 roku *Ojalvo*. Jego rozumowanie podczas wyprowadzania równań różniczkowych zostało poddane krytyce m.in. ze strony *Kitipornchai'a*, *Trahair'a* (por. [5]) czy przez *Yoshiaki'ego i Chena* [244]. W opozycji do promowanej przez *Ojalvo* hipotezy byli także *Kang i in.* [112] oraz *Alwis i Wang* [5, 6], którzy przedstawili swoje racje w cytowanych pozycjach. Jednakże na początku XXI wieku krytyczne spojrzenie na teorię pręta cienkościennego w ujęciu *Własowa* znów dało się zauważyć w pracy *Saucha i Radosa* [201]. Autorzy opisując równaniami równowagi elementarny wycinek pręta cienkościennego otrzymali zmodyfikowane równania różniczkowe stateczności różniące się od układu (2.4). Rozważania na temat słuszności teorii pręta cienkościennego wg *Własowa* znaleźć można także m.in w pracach [97–99].

Bazując się na metodzie energetycznej oraz wykorzystując metodę *Galerkina*, *Xie i in.* podali przybliżone wyrażenia na wyboczenie giętno-skrętne słupów o liniowo zmieniającym się przekroju poprzecznym [239]. Natomiast w pracach *Kollára* [118, 119] poruszone zostały zagadnienia wyboczenia oraz drgań cienkościennych otwartych elementów konstrukcyjnych. Stosowne rozwiązania również bazowały na metodzie energetycznej, ale uwzględniono w nich wpływ deformacji wynikających ze ścinania. Analizę parametryczną wpływu zbieżności przekroju na wartości obciążeń krytycznych wyboczenia giętno-skrętnego przeprowadzili *Guo i in.* [95]. Przy czym wzięto pod uwagę zarówno pojedynczy słup jak i ramę portalową. Rozwiązania uzyskano stosując równania MES.

Wśród polskich badaczy zajmującymi się wyboczeniem giętym oraz giętno-skrętnym należy zwrócić uwagę na prace *Szymczaka i in.* oraz *Chróścielewskiego i in.* Pierwszy zespół autorów wykazał w [212], że w pewnych przypadkach siła krytyczna wyboczenia skrętnego może przekraczać granice wyznaczone przez siły odpowiadające prętom o stałych ekstremalnych szerokościach pól. Natomiast drugi, w pracy [34] rozważał wybra-

ne aspekty wybożenia skretnego cienkościennych elementów dwuteowych. Zastosowano przy tym dwa podejścia: pierwsze z zastosowaniem jednowymiarowego elementu słupowego oraz drugie z zastosowaniem nieliniowych elementów powłokowych. Ponadto badano wpływ wstępnych imperfekcji, a także zachowanie modeli w zakresie pozasprężystej utraty stateczności. Zwrócono również uwagę na kształt i lokalizację poszczególnych form utraty stateczności. Z kolei na potrzeby metody elementów skończonych *Cywiński* [39] przedstawia ogólne oraz poszczególne macierze sztywności elementów wynikających z teorii pręta cienkościennego.

Wiadomym jest fakt, że do opisu zachowania elementów konstrukcyjnych stosuje się wyidealizowane modele obliczeniowe. Oceny poprawności przyjętych modeli, w oparciu o metodę elementów skończonych, podjęli się *Andrade i in.* [7]. Porównali wartości obciążeń krytycznych wyprowadzonego przez nich jednowymiarowego cienkościennego elementu skończonego o zmiennym przekroju poprzecznym z wynikami otrzymanymi za pomocą komercyjnego oprogramowania Abaqus FEA. W większości analizowanych przez nich przypadków otrzymali zbieżne rezultaty, ale przy pewnych wartościach granicznych — głównie krótkich belek o dużym współczynniku zbieżności przekroju — różnice sięgały nawet 25%. Do podobnych wniosków doszli *Gosowski i Niżniowski* [79], którzy zweryfikowali rozwiązania z zakresu stateczności i skrećania uzyskane różnymi modelami numerycznymi MES. Należy nadmienić, że rozwiązania przybliżone porównano z rozwiązaniami ścisłym użytymi na drodze analitycznej.

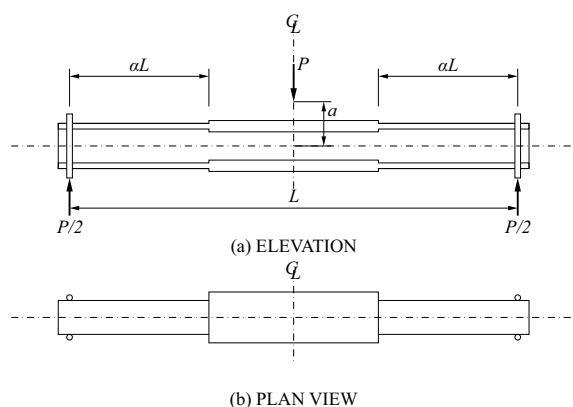


Rys. 2.10. Skokowo zmienna geometria prętów kratownicy (a) oraz wybożenie giętno-skretnie złożonego krzyżulca (b) w [175]

Wśród nielicznych prac o charakterze doświadczalnym interesująca jest pozycja [175] autorstwa *Parent'a i in.* Zawiera ona opis badań przeprowadzonych na 36 modelach będących słupkami lub krzyżulcami kratownicy wykonanej w naturalnej skali. Jak pokazano na rysunku 2.10a, odcinkowo skokowa zmienność przedmiotowych elementów polega na zamknięciu przekroju ceowego blachą lub na połączeniu dwóch ceowników odcinkową spoiną przerywaną. W obu przypadkach tworząc w ten sposób na pewnej odległości przekroje zamknięte. Z kolei rysunek 2.10b przedstawia widok krzyżulca, który utracił stateczność w postaci wybożenia giętno-skretnego. Badania eksperymentalne prowadzili również *Di Egidio i Vestroni* [41] i *Hamdouni i in.* [97], jednak główny nacisk położyli na zagadnienia związane ze statyką oraz dynamiką elementów monosymetrycznych obciążonych punkto-

wym momentem skręcającym. Badania skręcanych elementów dwugązgowych w znacznie szerszym zakresie prowadził także *Lorkowski* [140].

Przestrzenna niestateczność prętów pryzmatycznych z uwzględnieniem deformacji poprzecznych w ujęciu MES była również przedmiotem pracy *Erkmen'a i Mohareb'a* [52]. Podobnie jak *Kim i in.* [114], przy czym wyprowadzone przez siebie rozwiązania zaadaptowali na potrzeby słupów warstwowych z materiałów kompozytowych. *Mohri i in.* [153] analizują bisymetryczne elementy w zakresie nieliniowym tworząc i porównując odpowiednie ścieżki równowagi statycznej. Wyboczenie skrętne oraz giętno-skrętne pryzmatycznego elementu cienkościennego jest też przedmiotem pracy *Ruty i in.* [193].



Rys. 2.11. Wolnopodparta skokowa belka rozważana w [227]

skręcania, zginania, interakcji obu sił, a także wywołanej nimi niestateczności [229]. Również w pracach *Papangelisa i in.* znaleźć można rozwiązania problemów stateczności przestrzennej elementów ściskanych jak i zginanych. W [171] znajduje się podsumowanie metod wymiarowania giętych na zimno ceowników oraz zetowników w ujęciu australijskiej normy AS/NZS 4600. Ponadto jest również opisem możliwości stworzonego przez autorów programu *PRFELB*, który stworzony został do analizy stateczności przestrzennej układów ramowych oraz ich wymiarowania. Dodatkowe informacje na temat programu znaleźć można w [172].

Rozpowszechnione już w latach dziewięćdziesiątych XX wieku maszyny cyfrowe pozwoliły *Gupcie i in.* [96] na sformułowanie równań metody elementów skończonych w zagadnieniach problemów niestateczności niepryzmatycznych belek dwuteowych. Analizowano elementy o linowej i kwadratowej zbieżności przekroju poprzecznego. Badano również wpływ deformacji związanych z deplanacją oraz wpływ lokalizacji obciążenia względem przekroju poprzecznego. Podsumowaniem ich pracy jest analiza parametryczna obciążeń krytycznych w zależności od kształtu i stopnia zbieżności, obciążeń i warunków podparcia. Obszerne rozwiązania w zakresie stateczności niestężonych monosymetrycznych belek cienkościennych przedstawili *Mohri i in.* [151]. Wykorzystali przybliżone metody *Galerkina*, *Ritza* do rozwiązania równań stateczności (2.4), a rozwiązania porównano z otrzymanymi komercyjnym oprogramowaniem Abaqus FEA. Problemy nieswobodnego skręcania oraz niestateczności sprężystej cienkościennych belek z wykorzystaniem MES były poruszane w pracy *Saadé i in.* [196] oraz *Teh'a* [220]. Natomiast *Torkamani i Roberts* [224] wyprowadzili równania energii potencjalnej wyboczenia giętno-skrętnego, które mogą służyć do zaimplementowania w metodzie elementów skończonych. Także *Sahraei i in.* w pracy [197] wyprowadzają równania stateczności z zasady stacjonarności całkowitej energii potencjal-

Zagadnienie utraty stateczności przestrzennej w nawiązaniu do równania (2.4) również dotyczy belek, czyli elementów zginanych momentem. Symetryczną dwuteową belkę o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym analizowali *Trahair i Kitipornchai* [227]. Z kolei samodzielnie praca pierwszego z autorów są podsumowaniem ówczesnego stanu wiedzy: w zakresie problemów zwichrzenia, wpływu imperfekcji, naprężeń własnych niestężonych stalowych cienkościennych belek o przekrojach ceowym i zetowym [228] oraz w zakresie

nej, a następnie w oparciu o MES podają rozwiązania przestrzennych form wyboczenia elementów zginanych i obciążonych siłą osiową uwzględniając deformacje poprzeczne.

Innowacyjne podejście do rozwiązywania problemu zwichrzenia belek pryzmatycznych jak i ze zbieżnym środkiem zaproponowali *Zhang i Tong* [245, 246]. Otrzymane rezultaty porównano z innymi znanymi w literaturze rozwiązaniami oraz z otrzymanymi numerycznie za pomocą komercyjnego pakietu *ANSYS* stosując powłokowe i belkowe modele pręta.

Do grona numerycznych metod służących do rozwiązywania równań oraz układów równań różniczkowych należy również metoda elementów brzegowych (MEB lub BEM od boundary element method). Jej możliwości w zakresie analizy stateczności przestrzennej elementów o przekroju poprzecznym opisanym sinusoidą przedstawili *Sapountzakis i Tsias-tas* [199] oraz analizując również drgania skrętne w [198, 200].

Skokowa zmiana sztywności w stateczności belek była przedmiotem rozważań *Parka i in.* [64, 176, 177, 180, 181]. Autorzy przeprowadzili obszerną analizę parametryczną tych elementów w zależności od ich sposobu podparcia, obciążenia oraz zaproponowali wytyczne do ich projektowania w oparciu o wytyczne American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO). Natomiast w publikacji [183] *Park i Park* zwerifikowali wcześniejsze rozważania teoretyczne przeprowadzając badania doświadczalne.

Sporym zainteresowaniem wśród naukowców cieszą się również problemy przestrzennej niestateczności w zakresie pozasprężystym, czego przykładem może być praca *Vin-nakoty* [231], który wykorzystał w tym celu metodę różnic skończonych. Nad problemem szerzej pochyłili się również *Ronagh i in.* [191, 192]. Co prawda ich głównym przedmiotem rozważań była nieliniowa analiza elementów cienkościennych ze zmiennym przekrojem poprzecznym, ale sporo miejsca poświęcili także zagadnieniom stateczności przestrzennej. Wychodząc z twierdzenia o minimum całkowitej energii potencjalnej sformułowali równania energii pojedynczego elementu, a następnie wykorzystali je w rozwiązaniu problemu stateczności definiując nieliniowe równania MES. Pokrytyczną analizę ściskanych elementów cienkościennych przeprowadzili także *Mohri i in.* w [150, 152, 154, 155, 208]. Zdefiniowali oni nieliniowy model wykorzystując relację pomiędzy krzywizną a momentem zginającym. Uwzględniono ponadto wpływ deplanacji oraz skrócenia elementu. Bazowano na metodzie *Galerkina*, a do kontroli przemieszczeń zaadoptowano algorytm *Newtona-Raphsona*. Rezultatem rozważań autorów są ścieżki równowagi statycznej otrzymane dla przekrojów mono i bisymetrycznych. W pracy [94] autorzy, *Gu i Chan*, zajmują się geometrycznie nieliniowym belkowo-słupowym przestrzennym elementem skończonym, dla którego podają rozwiązanie na obciążenia krytyczne wyboczenia skrętnego, giętno-skrętnego, a także zwichrzenia. Zagadnienia nieliniowej przestrzennej pracy elementów cienkościennych w odniesieniu do analiz w zakresie ich dynamiki znaleźć można w pracach *Orloske i in.* [166] oraz *Paolone i in.* [169, 170].

Przybliżoną metodą badania wyboczenia giętno-skrętnego belki/słupa o zbieżnym liniowo przekroju prostokątnym zajmowali się *Challamel i in.* [30]. Ogólne sformułowane równanie stateczności rozwiązywali stosując metodę *Frobenius'a*. Dla pewnych szczególnych przypadków, gdy ta metoda nie znalazła zastosowania, zagadnienie sprowadzono do problemu zagadnienia brzegowego i rozwiązano stosując metodę kolokacji.

Osobnym zagadnieniem jest wymiarowanie elementów narażonych na przestrzenną utratę stateczności. Aktualnie obowiązująca norma dotycząca projektowanie konstrukcji stalowych [257] nie ułatwia pracy projektantom, ponieważ  $N_{cr}$  definiuje jako obciążenie krytyczne odpowiadające miarodajnej postaci wyboczenia sprężystego. Stosowne wyrażenia znaleźć można w części dotyczącej kształtowników i blach profilowanych na zim-

no [258]. Więcej na temat ich wyznaczania mówiła wycofana norma [252] w dołączonym do niej załączniku. Swego rodzaju uzupełnieniem tego załącznika może być praca *Gosowskiego* [78], w której omówiono wybrane problemy stateczności przestrzennej, istotne w świetle obowiązujących ówczynie zasad wymiarowania zawartych w polskiej normie. Z kolei uzupełnieniem Eurokodu 3 [257] mogą być prace *Boissonnade'a i in.* [22], którzy w przypadku wyboczenia skrętnego lub giętno-skrętnego sugerują odpowiednie współczynniki amplifikacji oraz *Naumes'a i in.* [159, 160], którzy wyprowadzają nowe krzywe wyboczeniowe m.in. dla elementów ściskanych zmienną siłą osiową lub o zmiennych przekroju poprzecznym. Kolejne rozważania na temat stosowności normowych rozwiązań zawarte zostały w pracach *Szalai'a i Pappa* [211], *Kindmanna i in.* [116, 117], *Tarasa i in.* [219] oraz *Pappa* [173]. Natomiast wymiarowanie elementów z uwagi na stateczność przestrzenną w oparciu o normalizację amerykańską przedstawił *Miller* [149]. Więcej na temat wymiarowania uwzględniającego przestrzenne formy niestateczności znaleźć można w pracach o charakterze monograficznym [58, 59, 61, 68, 147, 190, 226, 247, 248].

### 2.3.2. Wpływ dodatkowych więzi

Wprowadzenie do elementu dodatkowych więzi ograniczających przemieszczenia ma zasadnicze znaczenie podczas analizowania jego stateczności. Ich właściwe ukształtowanie może całkowicie zabezpieczyć przed utratą stateczności lub skutecznie zminimalizować ryzyko jej wystąpienia. Także w przypadku odpowiedniego ich ukształtowania można takiemu elementowi narzucić stosowną postać wyboczenia.

Konstrukcje więzi można usystematyzować w dwojaki sposób: poprzez kontakt dyskretny i/lub kontakt ciągły. W szczególnych przypadkach, kiedy mamy do czynienia z punktowymi więzami rozmieszczonymi regularnie i dostatecznie gęsto, można sprowadzić taki układ do jednolitego modelu pręta cienkościennego w ciągłym ośrodku sprężystym.

Cechy kinematyczno-sprężyste więzów wynikają z ich możliwych przemieszczeń (por. [235]). Dlatego więzy, które sprężyste ograniczają w sposób ciągły przemieszczenia liniowe  $v$  i  $w$  określa się mianem więzi liniowo-sprężystych, a ich układ na długości pręta ciągłym ośrodkiem liniowo-sprężystym. Natomiast więzy sprężyste ograniczające kąt skręcenia  $\varphi$  określono więzami obrotowo sprężystymi, których układ wzdłuż pręta tworzy ciągły ośrodek obrotowo sprężysty. Łączne ograniczenie przemieszczeń  $v$ ,  $w$ ,  $\varphi$  tworzy ośrodek ciągły liniowo-obrotowo sprężysty (lub typu *Winklera*). Przedstawienie jak najogólniejszej postaci układu równań stateczności pręta cienkościennego wymaga również scharakteryzowania dyskretnych więzi ograniczających przemieszczenia. W celu punktowego ograniczenia liniowych przemieszczeń na kierunkach  $v$  i  $w$  wprowadzono podpory o liniowo sprężystej charakterystyce. Z kolei punktowe ograniczenie kątów skręcenia przekroju poprzecznego  $\varphi$  wiąże się z zastosowaniem podpory o liniowym charakterze obrotowo-sprężystym. Ponadto wprowadzono więzy, których ograniczają podłużne przemieszczenia związane z deplanacją przekroju  $\varphi'$ , a których charakter również przyjmuje zależność liniowo-sprężystą.

Można rozpatrzeć zatem pręt niepryzmatyczny o przekroju otwartym, podparty i obciążony w dowolny sposób, znajdujący się w ośrodku liniowo-obrotowo sprężystym o dowolnej intensywności, podparty w sposób dyskretny dowolną liczbą sprężystych więzi translacyjnych, rotacyjnych i deplanacyjnych rozmieszczonych wzdłuż prostej  $C$ . Przekrój tego pręta oraz jego ogólny ideowy schemat pokazano na rysunku 2.12.

Równania różniczkowe stateczności pręta cienkościennego znajdującego się w ośrodku obrotowo-sprężystym wyprowadzone zostały już przez *Timoshenkę* [222] i *Własowa* [232].



Można je uzupełnić o wpływ więzów dyskretnych, wykorzystując jak *Gosowski* rachunek dystrybucyjny, tworząc model dowolnego pręta wieloprzęsłowego [75, 83, 87]. Zatem układ (2.4) przedstawiony w ogólniejszej formie, przybiera postać dystrybucyjną:

$$\begin{aligned} & \left( EI_z v^{(2)} \right)^{(2)} - \left[ N \left( v^{(1)} + \varphi^{(1)} z_s \right) \right]^{(1)} + (M_y \varphi)^{(2)} + \\ & + k_y [v - (z_c - z_s) \varphi] + \sum_{i=1}^m R_y(a_{y,i}) \cdot \delta(x - a_{y,i}) = 0 \quad (2.7a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( EI_y w^{(2)} \right)^{(2)} - \left[ N \left( w^{(1)} - \varphi^{(1)} y_s \right) \right]^{(1)} + (M_z \varphi)^{(2)} + \\ & + k_z [w - (y_c - y_s) \varphi] + \sum_{j=1}^n R_z(a_{z,j}) \cdot \delta(x - a_{z,j}) = 0 \quad (2.7b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( EI_\omega \varphi^{(2)} \right)^{(2)} - \left( GI_T \varphi^{(1)} \right)^{(1)} - \left[ (r_s^2 N + 2\beta_z M_y - 2\beta_y M_z + \beta_\omega B) \varphi^{(1)} \right]^{(1)} + \\ & + \left[ q_y [w + (y_q - y_s)] + q_z [v - (z_q - z_s)] \right] \varphi - z_s \left( N v^{(1)} \right)^{(1)} + y_s \left( N w^{(1)} \right)^{(1)} + \\ & + M_y v^{(2)} - M_y^{(2)} v + M_z w^{(2)} - M_z^{(2)} w - k_y (z_c - z_s) v + k_z (y_c - y_s) w + \\ & + \left[ k_y (z_c - z_s)^2 + k_z (y_c - y_s)^2 + k_\varphi \right] \varphi + \\ & + \sum_{p=1}^k M_p(a_p) \cdot \delta(x - a_p) - \sum_{r=1}^s B_r(b_r) \cdot \delta^{(1)}(x - b_r) = 0, \quad (2.7c) \end{aligned}$$

gdzie:  $R_y(a_{y,i})$ ,  $R_z(a_{z,j})$ ,  $M_p(a_p)$  i  $B_r(b_r)$  są składowymi obciążeniami pręta reakcjami — w przypadku trzech pierwszych wyrażień (2.8a,b,c) — podpór sprężystych zlokalizowanych w odległościach  $a_{y,i}$ ,  $a_{z,i}$ ,  $a_p$  i w przypadku wyrażenia ostatniego (2.8d) — podpór o charakterystyce bimomentowej zlokalizowanych w odległościach  $b_r$ . W ogólnym przypadku wyrazić je można następującymi wzorami

$$R_y(a_{yi}) = k_{yi} [v(a_{zi}) - (z_c - z_s) \varphi(a_{zi})], \quad (2.8a)$$

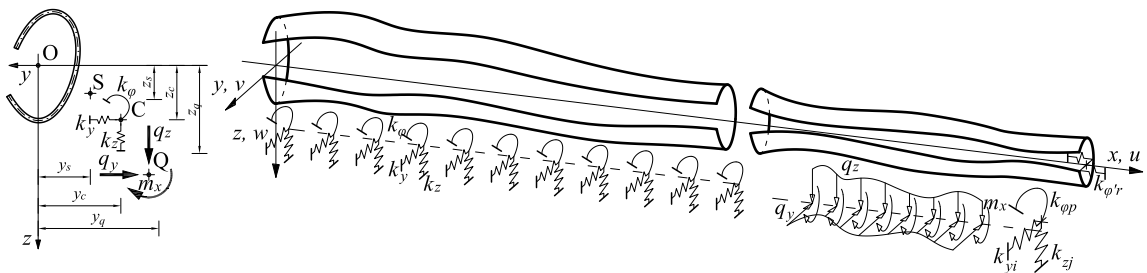
$$R_z(a_{zj}) = k_{zj} [v(a_{zj}) - (y_c - y_s) \varphi(a_{zj})], \quad (2.8b)$$

$$M_p(a_p) = k_{\varphi p} + (y_s - y_c) R_z(a_{z,j}) - (z_s - z_c) R_y(a_{y,i}), \quad (2.8c)$$

$$B_r(b_r) = k_{\varphi' r} \varphi^{(1)}(b_r). \quad (2.8d)$$

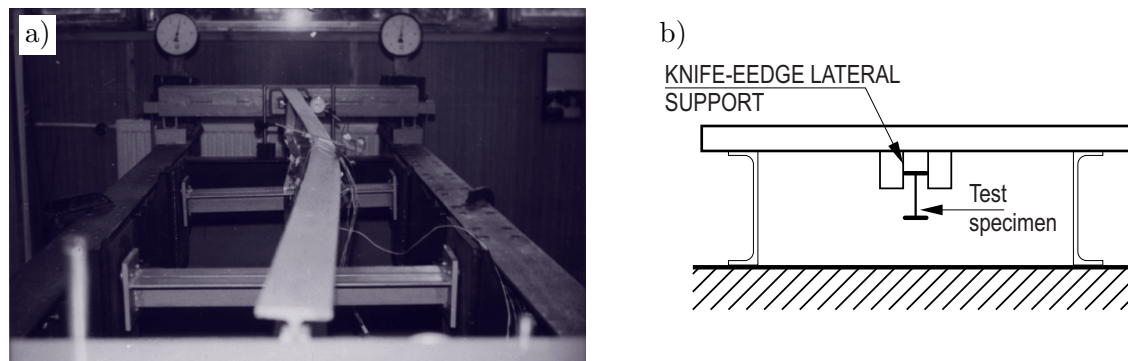
Układ równań różniczkowych stateczności (2.8) jest układem nieliniowym o zmiennych współczynnikach, stąd jego ogólne rozwiązanie w dziedzinie funkcji elementarnych nie jest możliwe. Dlatego podejmowane były przez uczonych próby uproszczenia powyższego układu, które pozwoliły na uzyskanie rozwiązań przypadków szczególnych.

Wśród polskich prac stanowiących o przestrzennej stateczności należałoby wyróżnić liczne prace *Gosowskiego* [75–77, 82–85, 87]. Autor rozważa w nich m.in. wyboczenie



Rys. 2.12. Schemat ogólny

giętno-skrętne elementów o przekrojach monosymetrycznych, składającego się dwóch pryzmatycznych odcinków, zanurzonego w ciągłym ośrodku liniowo-obrotowo sprężystym typu *Winklera* lub stężonych dyskretnie. Przy czym więzi te ograniczają przemieszczenia z płaszczyzny symetrii oraz deplanację przekrojów pośrednich. Część wyprowadzonych rozwiązań została również zweryfikowana doświadczalnie. Pokazano to na rysunku 2.13a, który przedstawia widok stanowiska oraz stan pokrytyczny badanego, stężonego poprzecznie słupa.



Rys. 2.13. Widok wyobczonego, stężonego poprzecznie słupa badanego przez *Gosowskiego* [75, 82] (a) oraz schemat stanowiska badań prowadzonych przez *Gelderbloma i in.* [63] (b)

Obszerne badania doświadczalne stężonych poprzecznie pryzmatycznych elementów konstrukcji metalowych zostały także przeprowadzone przez *Gelderbloma i in.* [63]. Przeprowadzili oni serię doświadczeń na słupach z kształtowników IPE AA 100 oraz IPE AA 180 o zróżnicowanej długości w zakresie ich smukłości od 75 do 300 (od 0,908 m do 6,09 m). Ponadto analizowano wpływ liczby pośrednich stężeń poprzecznych (od 0 do 5) oraz ich charakterystykę stężając jedną lub dwie półki dwuteowego przekroju poprzecznego. Ideowy schemat stanowiska badawczego pokazano na rysunku 2.13b.

Analizy w zakresie zarówno stateczności przestrzennej jak i drgań własnych pręta o zmiennym przekroju poprzecznym, którego przemieszczenia krępują dodatkowe więzi, prowadzili *Dube i Dumir* [44, 45]. Rozwiązania wyprowadzili dla przekroju poprzecznego, którego zmienność można opisać funkcją wielomianową. Zastosowali do tego metodę energetyczną, a następnie metodę elementów skończonych wykorzystując sześciennie funkcje kształtu. Efektem ich pracy jest analiza porównawcza wartości obciążeń krytycznych wyoboczenia przestrzennego prętów znajdujących się o ośrodku typu *Winklera* oraz *Pasternaka*.

Wpływem ciągłych sprężystych więzi poprzecznych zajmowali się również *Bradford i Ronagh* [24, 25]. Wykorzystują do tego metodę energetyczną oraz MES. Ich analizy dotyczą stężonych zdwojonych elementów dwuteowych, których praktyczne zastosowanie znaleźć można np. w przypadku blachownicowych mostów połączonych na wysokości pasa dolnego pomostem. Także belkami, lecz wykorzystywanymi w mostowym budownictwie drogowym, zajmował się *Park* [178, 179, 182]. Analizował je co prawda pod kątem zwichrzenia, ale były to elementy o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym. Są one wykorzystywane w ciągłych (wieloprzęsłowych) mostach drogowych, w których przekroje znajdujące się w miejscu podpór pośrednich mają grubsze lub szersze pasy. Utratę stateczności elementu belkowego jakim jest stężony płatwiami dźwigar pełnościenny będący częścią układu ramowego numerycznie badali *Cristutiu i in.* [38]. Dla dwóch typów ram wyznaczyli wartości obciążeń krytycznych w zależności od czterech sposobów poprzecz-

nego ograniczenia przemieszczeń lub obrotów w wybranych przekrojach. *Chu i in.* [35] badali wpływ poszycia, które potraktowali jako ciągła sprężysta więź przyłożona do pasa górnego, na moment krytyczny zetowej płatwi. *Larue i in.* w [127] zaproponowali ciekawe podejście do problemu zwichrzenia bisymetrycznej belki stężonej poprzecznie. Zamiast wyznaczenia momentu krytycznego zwichrzenia belki zaproponowali przyjęcie elementu o zastępczym monosymetrycznym przekroju, który jest poddany ścisłaniu i traci stateczność przestrzennie wzdłuż ustalonej osi obrotu. Także ci sami autorzy w pracy [113, 126] zajmowali się wyznaczaniem sprężystego momentu krytycznego dwuteowego elementu, którego przemieszczenia i kąty skręcenia przekroju poprzecznego krępowały ciągłe sprężyste więzy. Swoje uzyskane na drodze numerycznej rozwiązania porównali z rozwiązaniami uzyskanymi darmowym programem LTBeam. Podobne analizy dla belek o zróżnicowanych schematach statycznych, warunkach podparcia i rodzajach więzi przeprowadzili *Gosowski i Reddecki* [91].

Zachowanie pryzmatycznych dwuteowych belek, które stężono poprzecznie w sposób dyskretny, przebadali *Taras i Greiner* [218]. Uwzględnili oni wpływ naprężeń własnych oraz materiałowe i geometryczne nieliniowości, natomiast wyniki w postaci ścieżek równowagi statycznej uzyskali stosując analizę GMNIA. Bazując na tej metodzie, opracowali również odpowiednie krzywe wyboczeniowe, które mogą być wykorzystane podczas wymiarowania tego typu elementów. Dyskretne więzi, jednakże krępujące sprężyste kąt obrotu belki, były przedmiotem rozważań, którymi w pracach [128, 162, 163] zajmowali się *Nguyen i in.*

Wśród polskich uczonych szczególną uwagę należy zwrócić na prace *Iwickiego*. W swojej obszernej monografii [106] porusza problemy analizy stateczności wybranych konstrukcji stalowych. Jego rozważania są oparte na klasycznych założeniach teorii prętów cienkościennych o nieodkształcalnym przekroju poprzecznym. Autor w licznych przykładach słupów o przekroju dwuteowym wyznaczył funkcje opisujące wpływ wariacji wymiarów przekroju poprzecznego, naprężeń pospawalniczych lub powalcowniczych, wpływ wariacji temperatury przekroju poprzecznego lub lokalizacji różnego typu stężeń [104] na siłę krytyczną wyboczenia skrętnego lub giętnego. Pryzmatyczne pręty oraz ramy stężone poprzecznie punktowymi więzami krępującymi translacje oraz rotacje, a także stężone podłużnie przeponami lub przewiązkami analizowali *Szymczak i in.* [214], a także w mniejszym zakresie — skupiając się głównie na problemach teorii, modelowania i metodami obliczeń ram z elementów cienkościennych — *Mikulski* [148].

W inżynierskiej praktyce projektowej modelem pręta stężonego poprzecznie oraz przeciwskrętnie może być również pas górny dźwigara kratowego. Jeżeli zastosowana zostanie blacha poszycia o odpowiedniej sztywności, to można ją uznać jako ciągłe stężenie poprzeczne. Ponadto dopuszczalne jest uwzględnienie przeciwskrętnej sztywności blachy poszycia. Warunek wymaganej sztywności poprzecznej oraz przybliżone wyrażenia na wartości sztywności skrętnej podają odpowiednio normy [257, 258]. Wpływem blachy fałdowej w ocenie utraty stateczności z płaszczyzny ustroju zarówno pasów górnych jak i dolnych zajmował się i opisał w swoich pracach [19, 21] *Biegus*. Z kolei *Iwicki* również badał niestateczność przestrzenną dźwigarów kratowych współpracujących z poszyciem, lecz w swoim modelu zastosował sprężyste więzi dyskretnie. W pracach [105–108] dokonał obszernych analiz parametrycznych danego dźwigara, gdzie uwzględniał m.in. wpływ sztywności zadanych więzi, ich liczbę oraz lokalizację.

Wśród prac o charakterze monograficznym wpływem dodatkowych ciągłych lub dyskretnych więzi na stateczność przestrzenną prętów cienkościennych na uwagę zasługują m.in. [26, 82, 106, 147, 190, 214, 225, 235].

## 2.4. Podsumowanie rozpoznania literatury

Problemy stateczności przestrzennej elementów cienkościennych w ujęciu teorii *Własowa* są tematem jak najbardziej aktualnym i stale analizowanym zarówno przez uczonych na arenie międzynarodowej, jak i krajowej. Z uwagi na podjętą w rozprawie tematykę związaną z nośnością graniczną stężonych, pełnościennych słupów stalowych ze skokową niesymetryczną zmianą przekroju poprzecznego oraz na podstawie przeprowadzonej analizy literatury przedmiotu wynika, że najlepiej i najobszerniej rozpoznaniem zagadnieniem jest sprężyste wyboczenie giętne elementów schodkowych. To stwierdzenie można także rozszerzyć o niektóre pręty niepryzmatyczne, chociaż zależy to od funkcji sztywności danego elementu.

Dużo bardziej wymagająca jest analiza przestrzennej utraty stateczności. Mamy z nią do czynienia w przypadku zginanych bądź mimośrodowo ściskanych elementów konstrukcyjnych oraz takich, których przestrzenne formy wymuszone są dodatkowymi więzami. W takiej sytuacji problem mocno się komplikuje, ponieważ w celu opisanego zjawiska mamy do czynienia nie z jednym równaniem różniczkowym stateczności (2.4a) lub (2.8a), a z całym układem (2.4) lub (2.8). Oczywiście im bardziej rozbudowany i złożony model obliczeniowy, tym literatura przedmiotu jest mniej obszerna. Próżno zatem szukać w literaturze rozwiązania postawionego w niniejszej pracy problemu. Należy również zwrócić uwagę na fakt, że tylko nieliczne prace prezentują wyniki badań doświadczalnych. Literatura opisująca badania eksperymentalne wyboczenia giętno-skrętnego pryzmatycznych, stężonych elementów konstrukcyjnych potwierdza stosowność przyjętych modeli teoretycznych. Próżno natomiast szukać informacji związanych z doświadczalną przestrzenną utratą stateczności elementów schodkowych.

## 2.5. Założenia

Założenia jakie przyjęto na etapie formułowania i rozwiązywania problemów stateczności przestrzennej omawianych elementów, można ująć w dwóch grupach. Pierwszą z nich stanowią założenia ogólne, jakie są zazwyczaj przyjmowane w zagadnieniach stateczności prętów cienkościennych o przekrojach otwartych. Drugą grupę tworzą założenia szczegółowe, których podstawę stanowią warunki pracy lub aktualne normy projektowania konstrukcji.

Założenia o charakterze ogólnym:

- 1) Nośność krytyczna wyznaczana jest przy założeniu, że materiał jest nieskończenie sprężysty, dla którego obowiązuje prawo Hooke'a.
- 2) W przypadku badania nośności granicznej przyjęto, że stal jest sprężysto-plastyczna ze wzmocnieniem — właściwości stali przyjęto jako średnią ŚRS z próby rozciągania próbek pobranych z badanych modeli.
- 3) Przemieszczenia są małe w porównaniu z wymiarami poprzecznymi elementów, a ich odkształcenia jednostkowe są małe w porównaniu z jedyneką.
- 4) Przekroje poprzeczne elementów są nieodkształcalne w swoich płaszczyznach.

5) Pomija się odkształcenia postaciowe powierzchni środkowej elementów.

Założenia szczegółowe:

- 6) System konstrukcyjny hali przemysłowej z suwnicami jest rozwiązany poprawnie, zapewniając niepodatne zarówno punktowe stężenia pasów zewnętrznych słupów w płaszczyźnie obudowy ściennej, jak i odpowiednią sztywność głowicy w płaszczyźnie układu poprzecznego.
- 7) Obciążenie elementów jest zachowawcze, ma charakter statyczny i jest przyłożone osiowo w głowicy oraz mimośrodowo w miejscu zmiany sztywności (na wsporniku).
- 8) Połączenia słupa z innymi elementami szkieletu mają charakter liniowo-sprężysty.

## 2.6. Tezy rozprawy

Na podstawie rozpoznania tematu, studiów nad literaturą przedmiotu oraz dotychczas przeprowadzonych analiz, w pracy sformułowano następujące tezy:

**Teza 1:** Wyczerpanie nośności badanych dwuteowych słupów stalowych ze skokową, niesymetryczną zmianą przekroju, stosowanych jako słupy skrajne układów poprzecznych hal przemysłowych z suwnicami, następuje w postaci wyboczenia przestrzennego. Postaci tej odpowiada w przypadku omawianych słupów, najmniejsza wartość nośności zarówno krytycznej, jak i granicznej.

**Teza 2:** Wyboczenie wyżej wymienionych słupów z określoną, lecz niedużą liczbą rygli ściennych rozmieszczonych możliwie równomiernie na długości słupów, następuje praktycznie w postaci skrętnej z ustaloną wzdłuż tej prostej osią obrotu. Wartość siły krytycznej takich słupów można więc szacować na podstawie siły krytycznej wyboczenia skrętnego z ustaloną osią obrotu.

**Teza 3:** Wpływ na nośność krytyczną badanych słupów obciążenia poprzecznego w płaszczyźnie ich większej sztywności (w postaci oddziaływań bocznych od suwnic pomocowych) jest nieduży. Wpływ ten jest zdecydowanie większy w przypadku słupów ze wspornikiem stężonym na skręcenie.

## Rozdział 3

---

# Badania modeli fizycznych

---

Badania doświadczalne nośności stężonych, pełnościennych słupów stalowych ze skokową niesymetryczną zmianą przekroju są próbą uzupełnienia luki w literaturze związanej z poruszaną tematyką. Przeprowadzone zostały w latach 2014–2015 w Laboratorium Konstrukcji Budowlanych przy Wydziale Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej (dawniej Laboratorium Badawcze Instytutu Budownictwa). Modele słupów do badań zostały sfinansowane ze środków na badania własne Instytutu Budownictwa, zestaw złożony z siłownika i pompy z puli przeznaczonej na działalność statutową Katedry Konstrukcji Metalowych, natomiast budowa stanowiska oraz niezbędna aparatura ze środków przyznanych na finansowanie działalności polegającej na prowadzeniu badań naukowych lub prac rozwojowych oraz zadań z nimi związanych, służących rozwojowi młodych naukowców oraz uczestników studiów doktoranckich na Wydziale Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej, z funduszy przyznanych w roku 2014.

### 3.1. Program badań

Program badań obejmował przeprowadzenie testów nośności na sześciu modelach stalowych słupów o nieosiowej, skokowej zmianie przekroju poprzecznego. Pierwotnie badania podzielono na dwie serie, które różniły się sposobem obciążania. W pierwszej serii obciążenie przykładano do głowicy słupa, natomiast w drugiej do krótkiego wspornika na poziomie zmiany sztywności. Przyjęto przy tym następujące oznaczenie modeli, w których wielka litera „S” oznacza model słupa, a towarzyszące jej małe litery „g” lub „d” obciążenie przyłożone odpowiednio na poziomie głowicy (tzn. górą) lub na poziomie wspornika (tzn. dołem). Oznaczeniom literowym towarzyszyła ponadto liczba, która oznaczała kolejną próbkę, czyli  $Sg_i$  lub  $Sd_i$ , gdzie w związku z przyjętym podziałem,  $i$  przyjmuje wartości z zakresu od 1 do 3.

W trakcie badań zmodyfikowano realizowany program, ponieważ po przeprowadzeniu zaplanowanych testów na modelach z serii  $Sg$  oraz  $Sd$  stwierdzono, że mimo pewnych deformacji modele z pierwszej serii mogą być ponownie obciążone siłą na poziome wsporniki. Wynikającą z tego dodatkową trzecią serię badań oznaczono jako  $Sgdi$ . W związku z tym ostateczna liczba przeprowadzonych testów na wszystkich modelach słupów wzrosła do dziewięciu.

W czasie trwania testów każdej serii, za pomocą czujników indukcyjnych rejestrowano przemieszczenia zarówno w płaszczyźnie, jak i z płaszczyzny większej sztywności wybranych przekrojów poprzecznych. Ponadto w przypadku badań modeli  $Sg3$  oraz  $Sd3$  dokonywano pomiarów odkształceń, wykorzystując do tego tensometry elektroporowe.

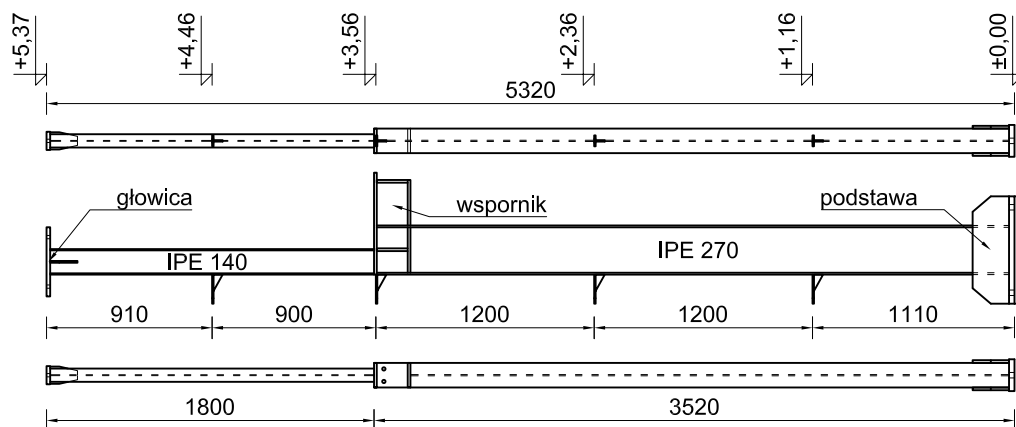
Po zrealizowaniu właściwej części badań doświadczalnych, z przebadanych modeli pobrano próbki do badań wytrzymałościowych oraz w celu określenia składu chemicznego. Wycięto je zarówno z górnej, jak i z dolnej części słupa.

Zrealizowanie badań wiązało się z budową złożonego stanowiska badawczego, które szczegółowo zostało omówione w punkcie 3.1.2. W związku z tym, każda seria badań wiązała się z przeprowadzeniem następujących czynności:

- montaż stanowiska do badań z wstawieniem wewnątrz niego słupa,
- montaż i podłączenie siłownika oraz przyrządów pomiarowych,
- wstępne obciążenie modelu do niewielkiej wartości, a następnie odciążenie,
- stopniowe obciążanie słupa do zniszczenia,
- demontaż przyrządów pomiarowych,
- wyjęcie słupa ze stanowiska badawczego.

### 3.1.1. Badane modele

Badania doświadczalne przeprowadzono na sześciu modelach dwuteowych słupów stalowych ze skokową niesymetryczną zmianą przekroju poprzecznego. W ich konstrukcji można zatem wydzielić dwie części: pod- i nadsuwnicową, które są ze sobą połączone w charakterystycznym dla tego typu elementów węźle z krótkim wspornikiem. W rzeczywistych obiektach wspornik ten służy do przekazywania obciążeń z belek podsuwnicowych. Podsuwnicowa część słupa została wykonana z kształtownika gorącowalcowanego IPE 270, a jej wysokość wynosi 3,52 m. Część nadsuwnicową wykonano natomiast z dwuteownika IPE 140 o długości 1,8 m. Łączna, całkowita długość badanych słupów wynosi zatem 5,32 m. Porównując wymiary badanych modeli do gabarytów obecnie wznoszonych hall przemysłowych można stwierdzić, że wykonano je w skali 1:2. Oba kształtowniki połączone są ze sobą w taki sposób, że płaszczyzny ich zewnętrznych pólk licują ze sobą. Ponadto do pólk zewnętrznych przyspawano wsporniki z blach, dzięki którym możliwe jest ich przegubowe połączenie z wyidealizowanymi ryglami ściennymi. Wsporniki te znajdują się kolejno w rozstawach od blachy podstawy 1,11 m,  $2 \times 1,2$  m i 0,9 m. Schemat badanego słupa wraz z podstawowymi wymiarami oraz rzędnymi w stanowisku badawczym, pokazano na rysunku 3.1, zaś jego fotografię na 3.2.



Rys. 3.1. Schemat badanego dwuteowego słupa stalowego ze skokową, niesymetryczną zmianą przekroju poprzecznego



Rys. 3.2. Badany dwuteowy słup stalowy

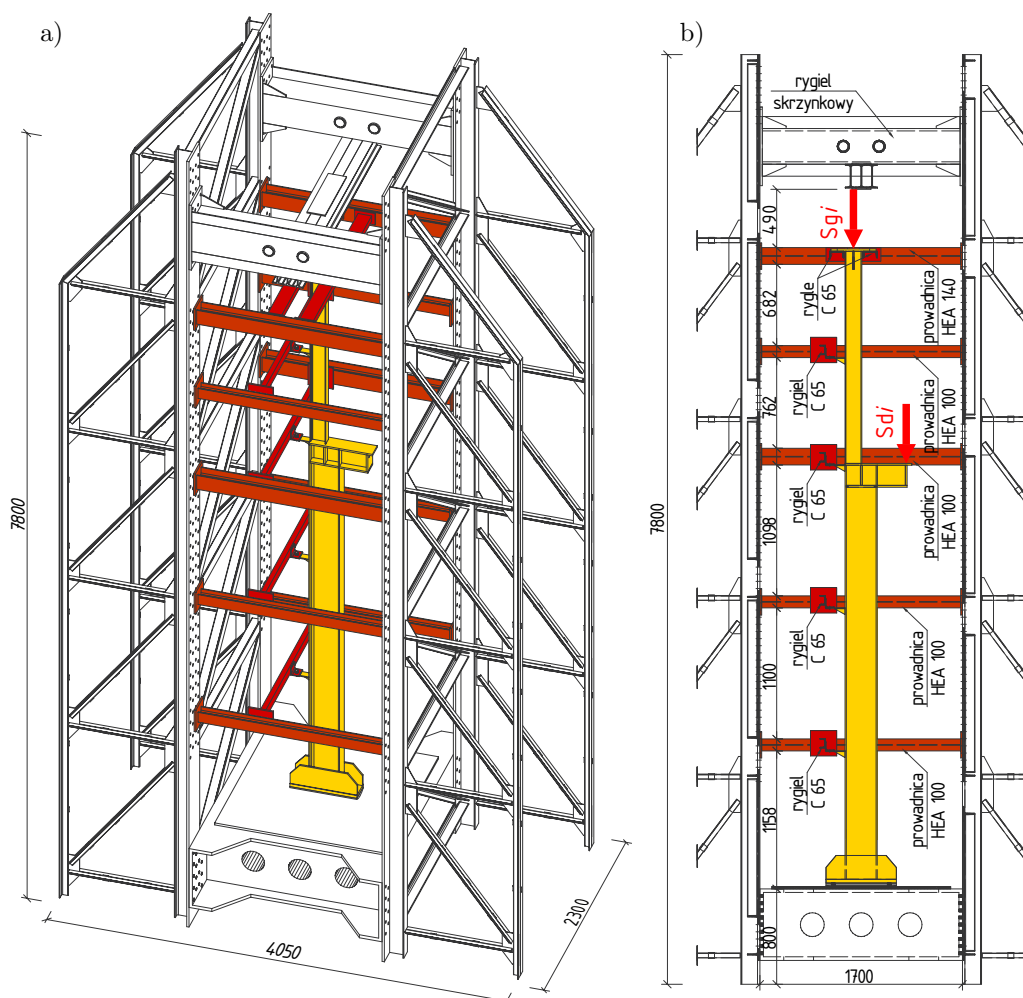
Omawiane modele słupów zostały zaprojektowane na potrzeby badań doświadczalnych w ramach pracy doktorskiej mgr inż. P. Niźniowskiego. Modele nie były badane, gdyż mgr inż. P. Niźniowski zrezygnował z realizacji pracy doktorskiej i jego przewód został zamknięty przez Radę Instytutu Budownictwa PWr w 2011 roku. Wiadomo jedynie, że modele zostały wyprodukowane oraz dostarczone przez wrocławskie przedsiębiorstwo PREBEX Sp. z o.o. w 2003 roku. Nieznane były również parametry wytrzymałościowe stali, z której wyprodukowano poszczególne elementy słupów. Dlatego najpierw oszacowano jej granicę plastyczności  $R_e$  oraz wytrzymałość na rozciąganie  $R_m$ . Dokonano tego poprzez badanie twardości Brinella stali. Wykonano 30 pomiarów w losowo wybranych miejscach. Podczas badań stosowano przenośny twardościomierz Brinella PZ-3 firmy Zwick z kulką z węglików spiekanych o średnicy 5 mm. Badanie prowadzono przy obciążeniu siłą 7355 N, której czas trwania wynosił 10–15 s. Odczytów średnic dokonywano za pomocą cyfrowego mikroskopu DP-M17 firmy Conrad podłączonego do prywatnego laptopa. Po statystycznej obróbce otrzymanych wyników oszacowano, że średnia granica plastyczności oraz wytrzymałość na rozciąganie wynoszą odpowiednio  $R_e = 293$  MPa i  $R_m = 408$  MPa. Uzyskane wartości zweryfikowano po badaniach nośności, przeprowadzając statyczną próbę rozciągania stali, której przebieg opisano w rozdziale 3.5.1. Więcej informacji na temat wyznaczania w sposób pośredni charakterystyk wytrzymałościowych stali konstrukcyjnych na podstawie badań twardości metodą Brinella, można znaleźć w pracach [88, 90].

### 3.1.2. Stanowisko badawcze

Do przeprowadzenia badań doświadczalnych wykorzystano znajdujące się na wyposażeniu Laboratorium Konstrukcji Budowlanych stanowisko do badania słupów. Jest to przestrzenna wieża kratowa, wewnątrz której umieszcza się badany element. Pod względem konstrukcyjnym jest to para dwóch płaskich kratownic połączonych jednym z pasów wykratowaniem. Przestrzenną współpracę obu części zapewniają sztywne przepony u podstawy stanowiska, a w górnej części — dwa rygle o przekroju skrzynkowym. Ponadto na wysokości małych wsporniczków w badanym słupie cały układ spinają rygle z kształtowników szerokostopowych HEA 140 i HEA 100 stanowiących prowadnice rygli stężających słup. Ogólny widok stanowiska badawczego pokazano na rysunku 3.3a. Na rysunku 3.3b przedstawiono natomiast przekrój z widocznym słupem do badań oraz pokazano miejsce przyłożenia obciążeń w poszczególnych seriach. Na rysunku 3.4 zaprezentowano ogólny widok zrealizowanego stanowiska badawczego.

Podstawa badanych słupów, oparta na przeponie (por. rys. 3.3), została w niej sztywno zamocowana w płaszczyźnie większej oraz podparta przegubowo w płaszczyźnie mniejszej



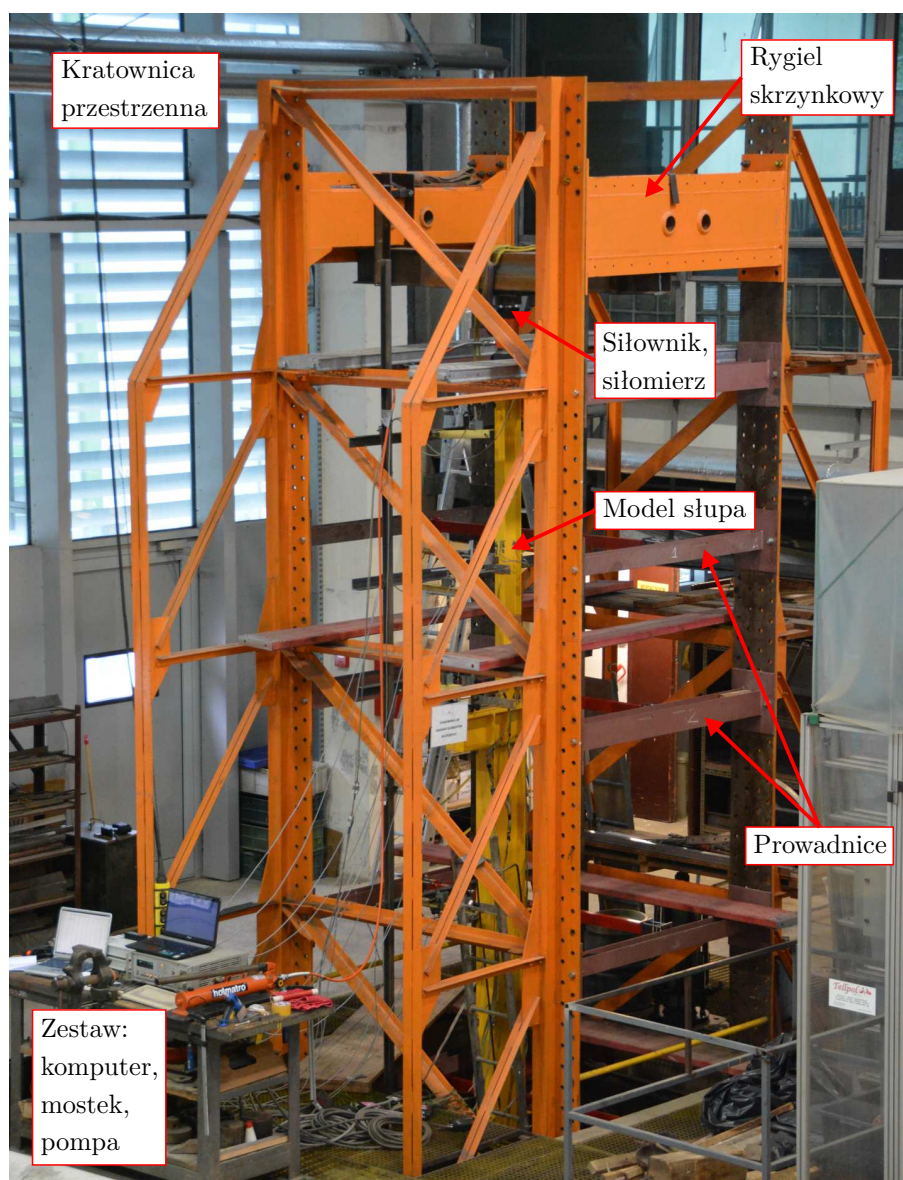


Rys. 3.3. Ogólny widok zrealizowanego stanowiska badawczego (a) i jego przekrój (b)

sztynności słupa. Zrealizowano to za pomocą dwóch śrub M24 oraz łożyska kołyskowo-stycznego, co pokazano na rysunku 3.5a.

Bardzo ważne było zapewnienie w głowicy słupa warunków przegubowego podparcia w przestrzeni. Zarówno w płaszczyźnie większej, jak i mniejszej sztywności słupa zapewniona powinna być przy tym swoboda przemieszczeń na kierunku pionowym, uniemożliwione przemieszczenia poziome i skręcenie przy jednoczesnym zachowaniu swobody kątów obrotu i deplanacji. Wykorzystano w tym celu parę ceowników C 65 przykręconych do poziomej blachy głowicy głupa (por. rys. 3.5b). Podobnie jak rygle pośrednie, elementy te zwieńczone były pierścieniem kulowego łożyska wzdłużnego (por. rys. 3.6). Zastosowanie łożysk umożliwiało swobodę przemieszczeń w płaszczyźnie kontaktu z elementem oporowym przestrzennej kratownicy (prowadnicami). Ponadto poziome przemieszczenia głowicy w płaszczyźnie większej sztywności słupa ograniczono zastrzałem z rury kwadratowej, który zapierał się o wykratowanie stanowiska. Szczegółowe rozwiązanie warunków podparcia głowicy w przypadku słupa serii Sg, pokazano na rysunku 3.5b.

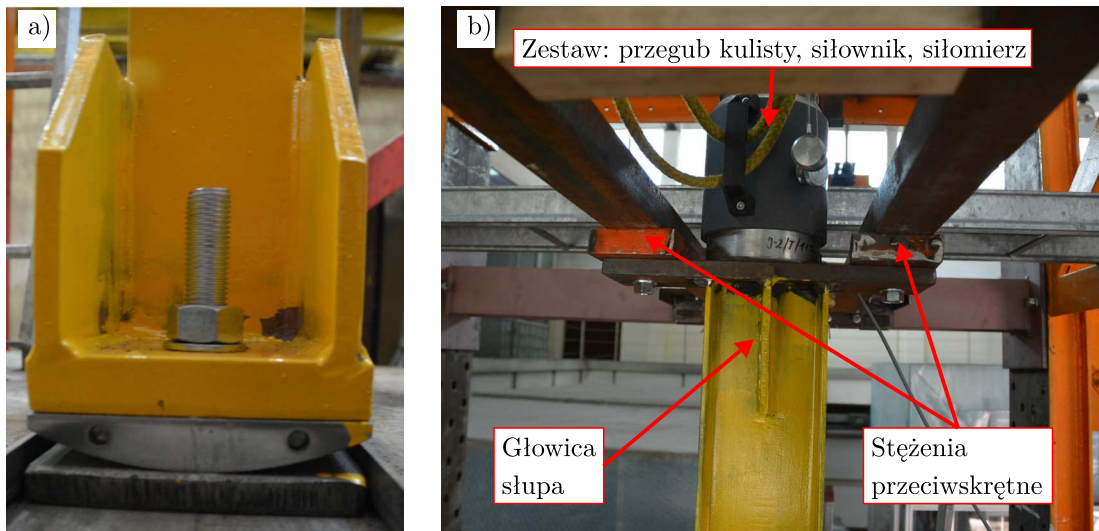
Na przestrzenną postać utraty stateczności słupów wpływ miały nieosiowe stężenia pośrednie, a mianowicie rygle ścienne (por. rys. 3.3). Były to, tak jak w przypadku stężenia głowicy, ceowniki C 65 połączone ze słupem śrubą M12 poprzez małe wsporniki z blach. Ideą w przypadku połączenia rygla ze słupem było przeniesienie jedynie obciążeń poziomych w płaszczyźnie mniejszej sztywności słupa z jednoczesnym zapewnieniem swobody



Rys. 3.4. Ogólny widok zrealizowanego stanowiska badawczego

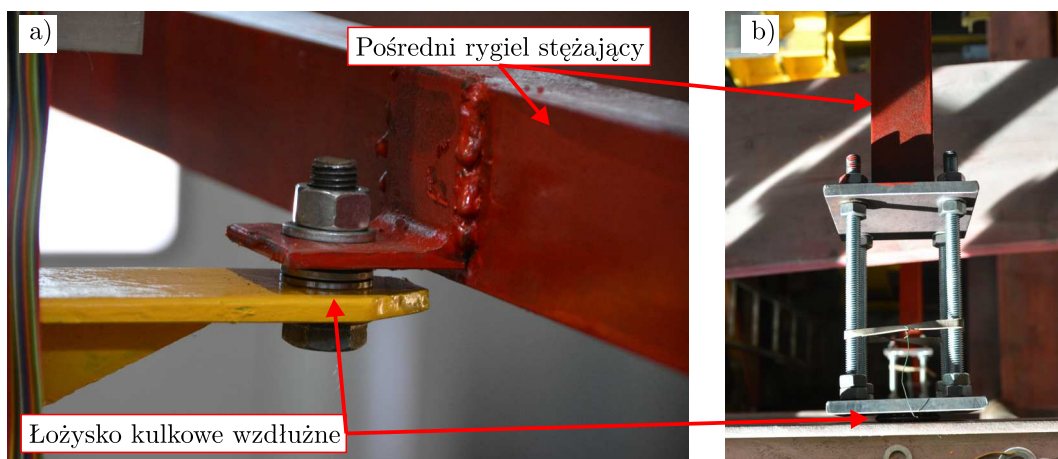
kąta skręcenia oraz przemieszczeń w kierunku pionowym. Tarcie pomiędzy rygłem a słupem wyeliminowano stosując komplet kulkowych łożysk wzdłużnych. Szczegółowy widok zrealizowanego połączenia, przedstawia rysunek 3.6a. Swobodę przemieszczeń pionowych zrealizowano dzięki tym samym łożyskom, gdyż rygłe poprzeczne zwieńczono doczołową blachą z samą koronką łożyska. Zastosowanie samej koronki umożliwia przemieszczenia w płaszczyźnie kontaktu z prowadnicą, będących efektem skracania się słupa i jego przemieszczeń poziomych wskutek zginania w płaszczyźnie większej sztywności słupa. Dzięki temu rygiel „ślizgał” się po prowadnicach z dwuteowników szerokostopowych. Widoczna na rysunku 3.6b blacha ma możliwość regulacji, co pozwala zniwelować powstałe w trakcie badań kolejnych serii odchyłki montażowe.

Dwie zasadnicze serie badań doświadczalnych różniły się sposobem wymuszania obciążenia, w związku z czym należało zrealizować dwa sposoby obciążania modeli. W obu przypadkach wykorzystano siłownik hydrauliczny HGC 50 S10, którego maksymalny udźwig wynosi 500 kN, a maksymalny skok tłoka 50 mm. Urządzenie połączone było węzłem hy-

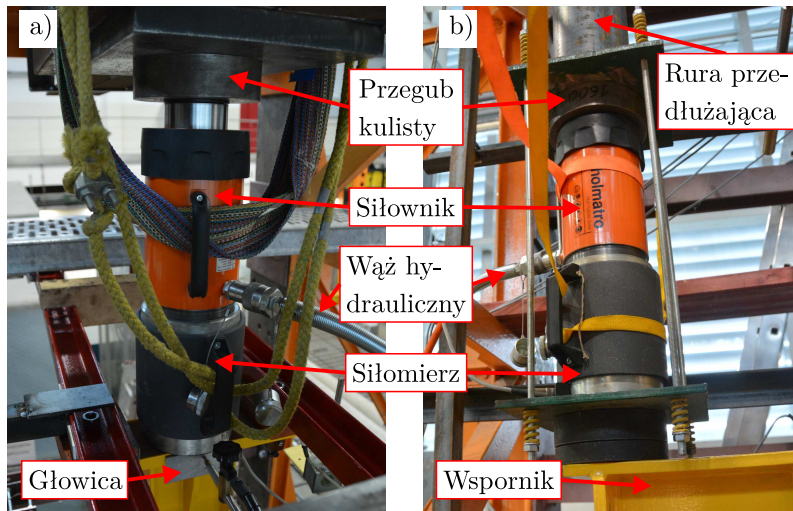


Rys. 3.5. Szczegóły konstrukcyjne w zrealizowanym stanowisku badawczym: a) podstawa słupa, b) głowica słupa

draulicznym H 5 SOU długości 5 m z pompą ręczną HTW 2200 A. Tak skonstruowany zestaw został zakupiony w firmie Holmatro. W pierwszej serii Sg badań doświadczalnych obciążenie przekazywano bezpośrednio zestawem złożonym z siłownika, siłomierza i przegubu kulistego na głowicę słupa (por. rys. 3.7a), zapierając go o belkę trawersową  $2 \times I 200$  wzmocnioną ceownikami C 200, kotwioną pośrednio do kratownicy. W drugiej serii Sd obciążenie wymuszane było na poziomie wspornika, dlatego do zestawu dołączono rurę przedłużającą zwieńczoną przegubami kulistymi (por. rys. 3.7b). Wartości obciążeń rejestrowano siłomierzem podłączonym z zestawem wzmacniaczy pomiarowych Spider 8 firmy Hottinger Baldwin Messtechnik. W celu pomiaru przemieszczeń całość sprzężono z szesnastoma czujnikami indukcyjnymi W50TS o zakresie pomiarowym 100 mm oraz dwoma WI o zakresie 2 mm. Pozwalało to na rejestrowanie odczytów z częstotliwością 5 Hz. Nad całością czuwał komputer klasy PC z oprogramowaniem testXpert II firmy Siemens. Program pozwalał na kontrolowanie przebiegu badania oraz eksport wyników w postaci pliku tekstowego, co jest niezbędne w dalszej ich analizie. W przypadku natomiast badań modeli Sg3 i Sd3, czyli modeli z naklejonymi tensometrami elektrooporowymi, ze względu

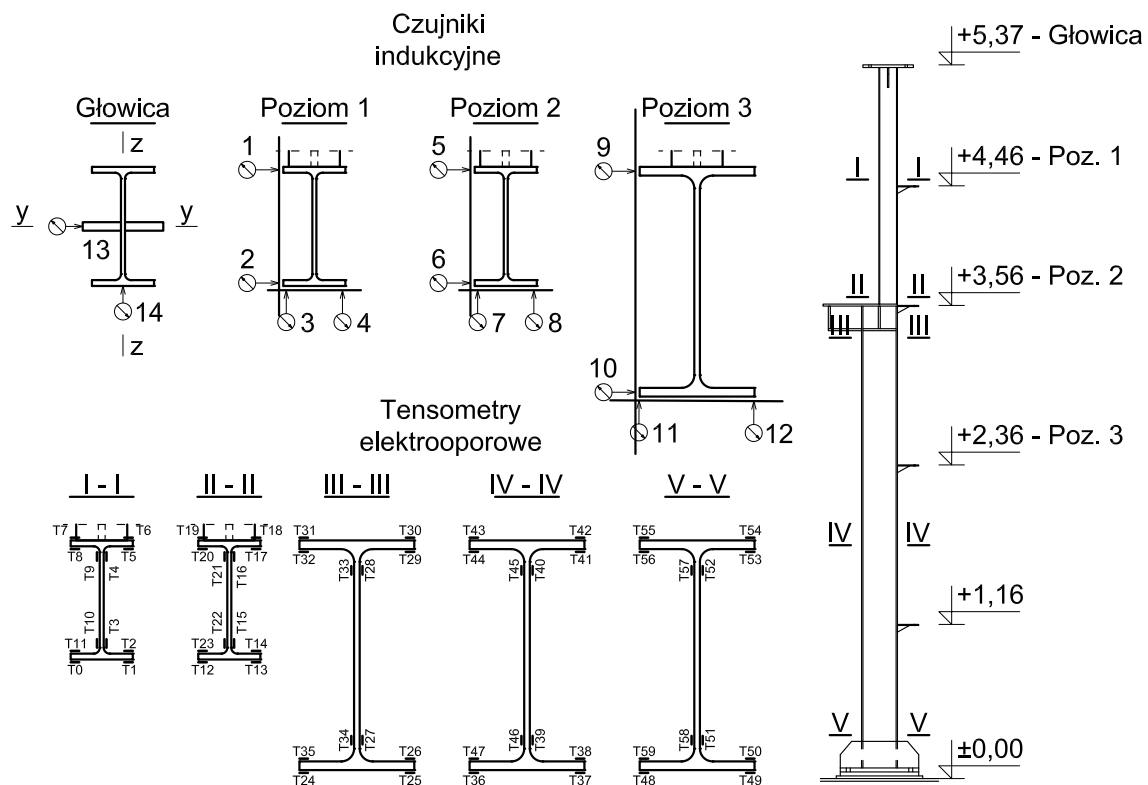


Rys. 3.6. Szczegóły konstrukcyjne w zrealizowanym stanowisku badawczym: a) połączenie rygla ze słupem, b) zakończenie rygla



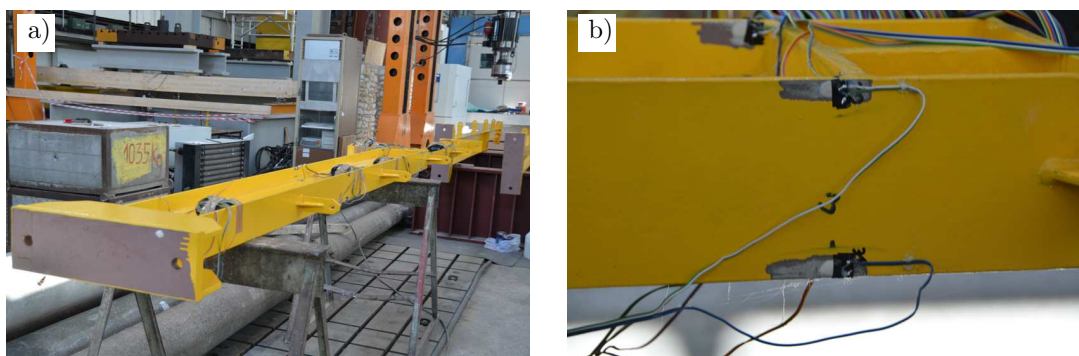
Rys. 3.7. Sposób wymuszania obciążeń w przypadku obciążenia: a) głowicy w serii Sg, b) wspornika w serii Sd

na liczbę podpiętych urządzeń pomiarowych (18 czujników indukcyjnych, 60 tensometrów elektrooporowych) wykorzystano nieco starszy i wolniejszy wzmacniacz pomiarowy UPM 100 również firmy Hottinger Baldwin Messtechnik. Pozwalał on na pracę jedynie z częstotliwością 1 Hz.



Rys. 3.8. Numeracja i rozmieszczenie czujników indukcyjnych oraz tensometrów elektrooporowych

Na skomplikowaną budowę stanowiska badawczego wpływał również sposób dokonywania pomiarów. Dla każdego z czterech poziomów pomiarów przemieszczeń należało wykonać konstrukcję wsporczą pod czujniki indukcyjne. W poziomach od 1 do 3 pomiarów przemieszczeń dokonywano przy tym w czterech punktach, a mianowicie po dwa punk-



Rys. 3.9. Ogólny widok (a) oraz zbliżenie na tensometry T30 i T31 w przekroju III (b) słupa Sg3

ty w skrajnych narożach przekroju poprzecznego zarówno w płaszczyźnie większej, jak i mniejszej sztywności. Przestrzenną postać utraty stateczności badanego słupa opisują dwie funkcje przemieszczeń liniowych tzn.  $v$  i  $w$  wzdłuż osi  $y$  i  $z$  oraz kąty skręcenia  $\varphi$  przekroju poprzecznego, stąd po parze czujników w każdej płaszczyźnie. Średnia z każdej z par tych czujników jest przemieszczeniem osi elementu na danym poziomie, natomiast ze znanych zależności trygonometrycznych można wyznaczyć kąty skręcenia. W poziomie głowicy słupa, ze względu na potencjalną podatność podpór w tym przekroju, kontrolowano tylko przemieszczenia  $v$  i  $w$  w osiach  $y$  i  $z$ . Jak już wspomniano, w przypadku dwóch badań Sg3 i Sd3, rejestrowano również odkształcenia za pomocą tensometrów elektrooporowych. Stosowano tensometry 1-osiove firmy HBM i otrzymano (po przejściu z odkształceń na naprężenia) jedynie wartości naprężeń normalnych wynikających z mimośrodowego ściskania słupa. Pomiarów tych dokonywano w pięciu przekrojach poprzecznych oznaczonych od I do V. W każdym przekroju naklejono 12 tensometrów, co w sumie złożyło się na 60 punktów pomiarowych. Dokładną lokalizację zarówno czujników indukcyjnych, jak i tensometrów elektrooporowych pokazano na rysunku 3.8. Z kolei rysunek 3.9a przedstawia ogólny widok oklejonego tensometrami słupa, natomiast rysunek 3.9b zbliżenie na tensometry nr 30 i 31 w przekroju III.

### 3.1.3. Opracowanie wyników

Bezpośrednimi rezultatami prowadzonych badań są sporządzone na ich podstawie ścieżki równowagi statycznej (ŚRS). Wykonano je dla trzech poziomów, na których umieszczono zestawy czujników indukcyjnych. Kontrolnie mierzono również przemieszczenia liniowe w poziomie głowicy słupa. Przedstawione w niniejszym rozdziale ścieżki wykonane zostały dla kątów skręcenia  $\varphi$  oraz średnich przemieszczeń liniowych osi elementu. W pracy doktorskiej zamieszczono jedynie wybrane ŚRS oraz komplet wyników dla jednego reprezentacyjnego modelu.

Bazując na sporządzonych ŚRS otrzymano obciążenia graniczne  $N_{gr}$  dla każdego słupa. Doświadczalne obciążenia krytyczne sprężystej stateczności przestrzennej  $N_{cr}$  wyznacza się zwykle na podstawie wyników badań modelowych metodą Southwella [88, 195, 209], która polega na pomiarze strzałki wygięcia ( $v$ ) i kąta skręcenia pręta ( $\varphi$ ), a następnie wykreśleniu zależności w postaci funkcji liniowych  $v = f_v(v/N)$  i  $\varphi = f_\varphi(\varphi/N)$ . Niestety zależności te nie zawsze układają się liniowo. Podczas badań doświadczalnych trudno jest uniknąć różnego rodzaju imperfekcji (deformacje wstępne modeli, losowe mimośrodowe obciążenia itp.), co zazwyczaj utrudnia, a niekiedy wręcz uniemożliwia przeprowadzenie właściwej interpretacji wyników. Z tego powodu w literaturze proponowane są różnego ro-

dzaju modyfikacje metody Southwella. Nie zawsze jednak spełniają one pokładane w nich nadzieje na otrzymanie ogólnego, obiektywnego sposobu wyznaczania obciążenia krytycznego stateczności przestrzennej elementów cienkościennych z imperfekcjami. Ze względu na skomplikowany charakter wyboczenia giętno-skrętnego, zakres wyników branych pod uwagę przy wyznaczaniu zależności Southwella był każdorazowo dopasowywany. Kierowano się przy tym kryterium maksymalnej wartości współczynnika determinacji  $R^2$ .

Z powyższych względów w przypadku badanych słupów zastosowano również nowy sposób do wyznaczenia nośności krytycznej z badań doświadczalnych [80, 89], polegający na nieliniowej aproksymacji ŚRS specjalnymi krzywymi, które lepiej niż stosowana wcześniej hiperbola [88], odzwierciedlają zachowanie się badanych słupów, w szczególności wówczas, gdy imperfekcje utrudniają wyznaczenie obciążenia krytycznego metodą Southwella w wydaniu klasycznym lub zmodyfikowanym [89].

Możliwa jest przy tym nieliniowa aproksymacja wyników badań doświadczalnych za pomocą krzywych (3.1) o stałych  $a, b$ . Postać tych stałych jest zbliżona do ścieżek równowagi statycznej (ŚRS) otrzymany z badań.

$$N_1(f) = \frac{bf}{a+f} \quad \text{przy } f = \varphi, v. \quad (3.1)$$

Krzywe (3.1) w odróżnieniu od hiperboli [88], mają tylko jedną asymptotę (poziomą) i można je stosunkowo łatwo dostosować do ścieżek dla modeli z imperfekcjami przez wprowadzenie jeszcze jednej stałej  $c$  (3.2).

$$N_2(f) = \frac{b(c+f)}{a+c+f} \quad \text{przy } f = \varphi, v. \quad (3.2)$$

Stałe  $a, b, c$  wyznacza się na podstawie nieliniowej aproksymacji wyników badań. Wykorzystuje się do tego program *Mathematica* [93, 238], w którym odbywa się to metodą najmniejszych kwadratów. Obiektywną miarą dopasowania krzywych do ścieżek równowagi statycznej jest wyznacznik z macierzy współczynników korelacji  $\mathbf{R}$ . W przypadku idealnej zgodności krzywej aproksymującej z wynikami badań wyznacznik ten ( $\det \mathbf{R}$ ) przyjmuje wartość zero.

Poszukiwane obciążenie krytyczne odpowiada asymptocie krzywych aproksymujących, którą w obu przypadkach wyznaczają stałe  $b$ . W związku z tym warto również zwrócić uwagę w macierzach współczynników korelacji, na odpowiednie współczynniki  $r_\varphi$  i  $r_v$  związane z tymi stałymi. One z kolei, w przypadku idealnej zgodności z uzyskanymi wynikami badań doświadczalnych, dążą do jedności. Dlatego należy je traktować jako miara dopasowania otrzymanej krzywej do ścieżek równowagi statycznej.

## 3.2. Modele serii Sg

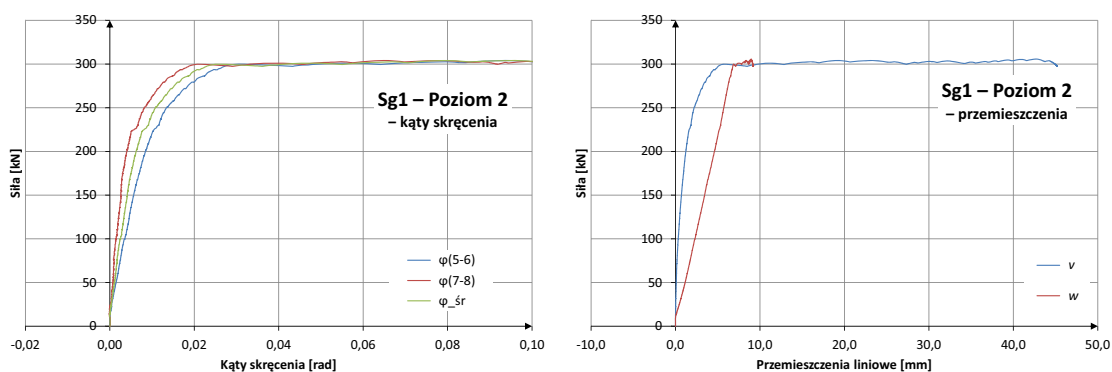
Seria badań modelowych obejmowała swym zakresem trzy modele od Sg1 do Sg3.

### 3.2.1. Przebieg badań

Przebieg badań doświadczalnych po ustawieniu słupa w stanowisku i podłączeniu wszystkich urządzeń pomiarowych obejmował:

1. Obciążenie wstępne słupa do niedużej wartości (ok. 50 kN) w celu „ułożenia” konstrukcji oraz wyeliminowania ewentualnych luzów w połączeniach, a następnie odciążenie (do ok. 1 kN).
2. Obciążenie zasadnicze badanego słupa aż do wyczerpania nośności (zniszczenia).

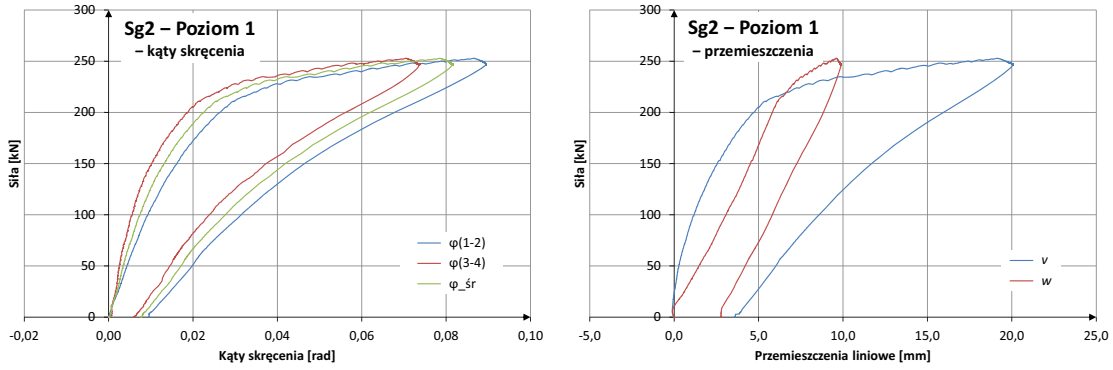
Zachowanie słupa Sg1 w trakcie badań doświadczalnych było zgodne z przewidywaniami. Wraz ze wzrostem obciążenia, w następstwie mimośrodowego przekazywania obciążenia pojawiło się zginanie słupa w płaszczyźnie większej sztywności. Ponadto, w związku z niedoskonałościami geometrycznymi i montażowymi słupa, obserwowano postępujące wygięcie z płaszczyzny zginania i skręcenie jego przekroju poprzecznego. W przedziale do ok. 270 kN słup pracował w zakresie liniowo-sprężystym (obowiązywało prawo Hooke’a). Powyżej tej wartości do ok. 300 kN słup wszedł w fazę narastania trwałych odkształceń plastycznych, co charakteryzuje się krzywoliniową zależnością na wykresach ścieżek równowagi statycznej. Po osiągnięciu obciążenia 300 kN nastąpiła gwałtowna utrata stateczności przestrzennej w zakresie plastycznym. Oś pręta zdeformowała się przechodząc z krzywej prawie płaskiej (niewielkie deformacje wynikające z imperfekcji) w krzywą przestrzenną. Zanotowane przez system pomiarowy maksymalne obciążenie wynosiło  $N_{gr,Sg1} = 305,6$  kN i wiązało się ze zniszczeniem części nadsuwnicowej badanego modelu. Wybrane rezultaty z badań doświadczalnych modelu Sg1, przedstawiające ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych, pokazano na rysunku 3.10.



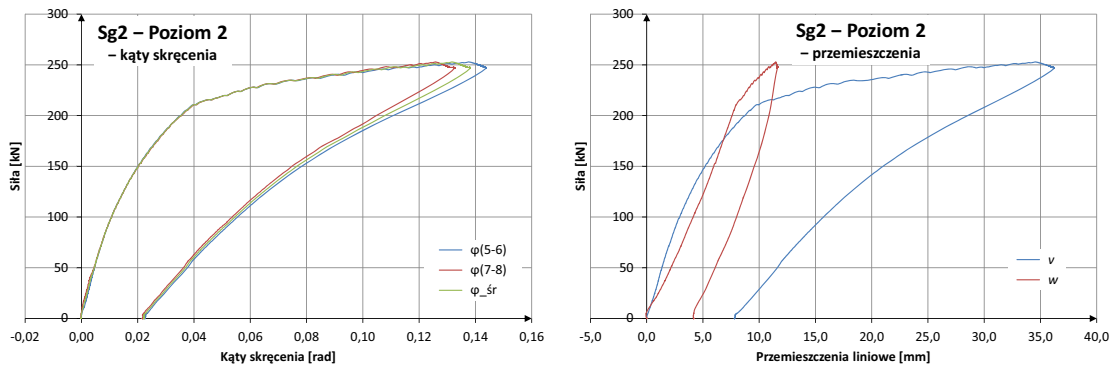
Rys. 3.10. ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sg1 w poziomie 2

Zachowanie modelu Sg2 oraz jego odpowiedź na zadane obciążenie były analogiczne do badania przeprowadzonego wcześniej. Zasadnicze różnice widać dopiero w ścieżkach równowagi statycznej. W początkowym stadium badania wykreślone krzywe rzeczywiście mają charakter prostoliniowy, jednak bardzo łagodnie przechodzą w postać krzywoliniową. Tak jest do poziomu obciążeń rzędu ok. 208 kN, przy którym wystąpiło wyraźne załamanie krzywych oraz szybszy wzrost przemieszczeń. Obciążenie ulegało zwiększeniu aż do uzyskania wartości granicznej  $N_{gr,Sg2} = 252,9$  kN. Komplet uzyskanych wyników z badań modelu Sg2, pokazano na rysunkach 3.11–3.14.

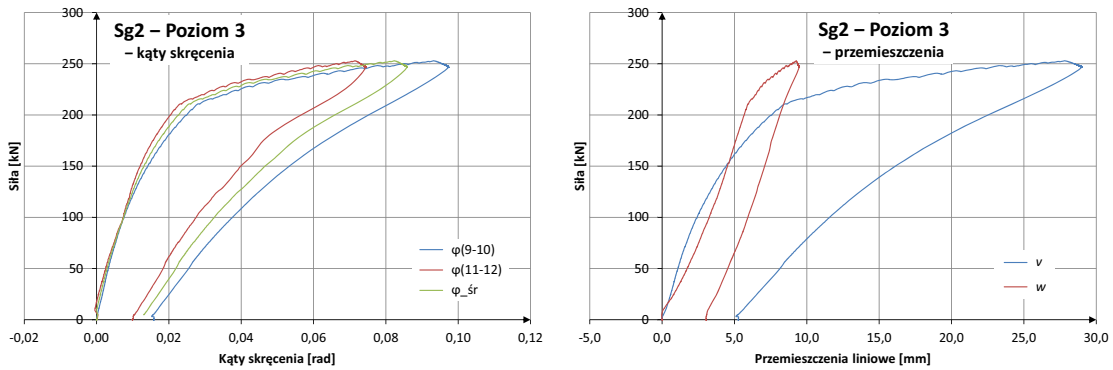
Ostatnim, trzecim modelem przewidzianym do badań w tej serii był słup Sg3. Ścieżki równowagi statycznej kształtem przypominały te uzyskane z badań modelu Sg2. Różniły się natomiast co do wartości, zarówno obciążeń, jak i przemieszczeń. Niewątpliwie jednak w przypadku tego badania odcinek obowiązywania prawa Hooke’a obejmuje swym zakresem obciążenia do poziomu ok. 189 kN. Natomiast największe zarejestrowane podczas doświadczenia obciążenie graniczne wyniosło  $N_{gr,Sg3} = 246,6$  kN. Porównując wartości



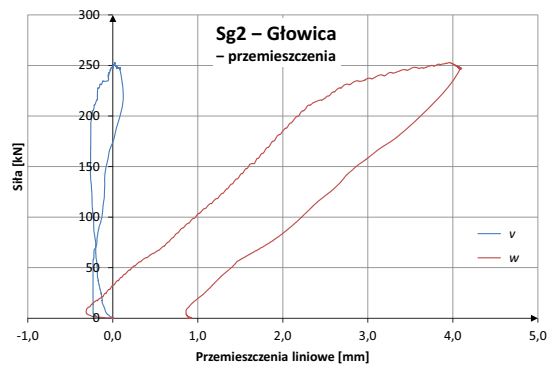
Rys. 3.11. ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sg2 w poziomie 1



Rys. 3.12. ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sg2 w poziomie 2



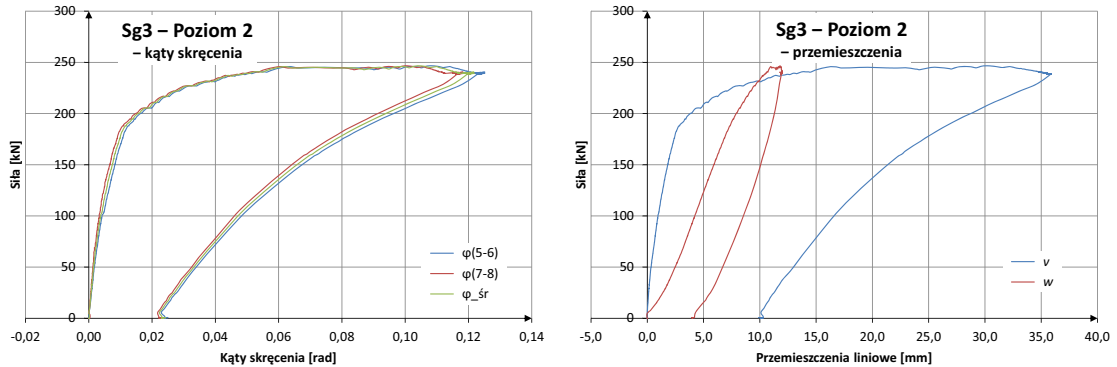
Rys. 3.13. ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sg2 w poziomie 3



Rys. 3.14. ŚRS przemieszczeń liniowych modelu Sg2 w poziomie głowicy

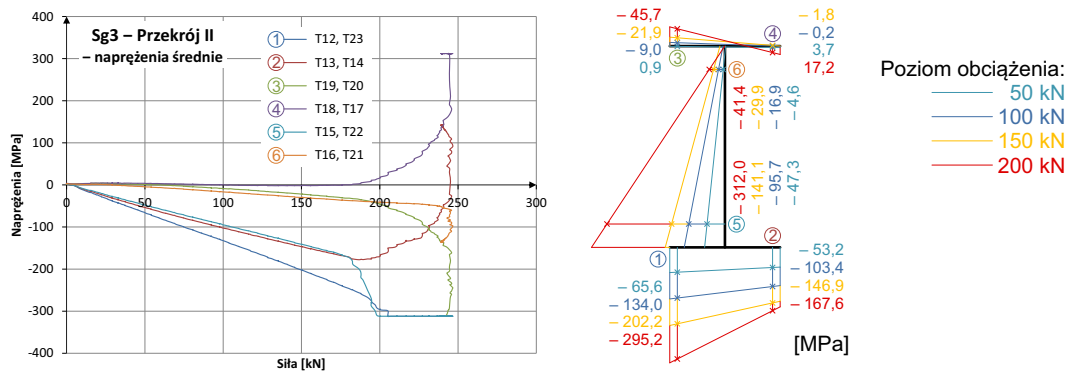


przemieszczeń na tych samych poziomach można zauważyć, że o ile porównuje się wartości przemieszczeń liniowych z płaszczyzny słupa są one na poszczególnych poziomach do siebie zbliżone, o tyle wartości przemieszczeń kątowych wykazują znaczne różnice. W przypadku modelu Sg3 kąt skręcenia, przy którym osiągnięto granicę plastyczności był około dwukrotnie mniejszy, aniżeli wartość uzyskana w modelu Sg2 i wynosił ok. 0,018 rad. Ścieżki równowagi statycznej przemieszczeń kątowych oraz liniowych modelu Sg3 w poziomie 2, przedstawiono na rysunku 3.15.



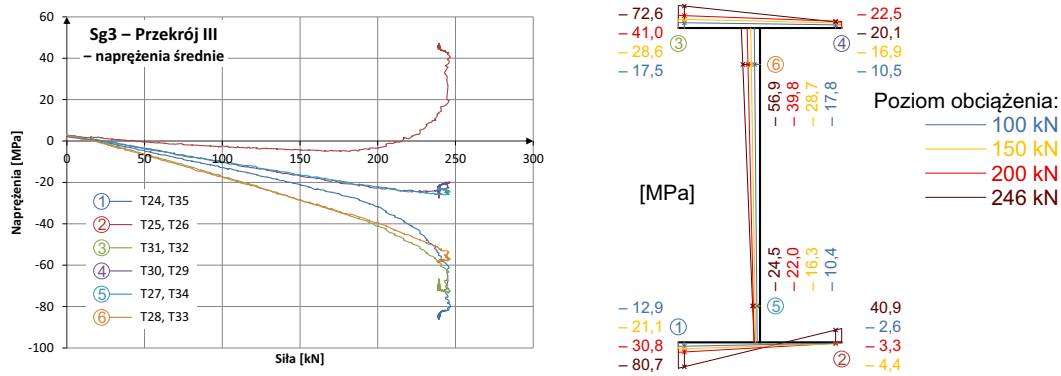
Rys. 3.15. ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sg3 w poziomie 2

W badaniach modelu Sg3 analizowano ponadto stan odkształceń, żeby po odpowiednich przekształceniach uzyskać wartości naprężeń. Więcej na temat miejsc, w których dokonywano pomiarów oraz sposobu pozyskiwania wyników napisano w punkcie 3.1.2. Ze względu na bardzo obszerny zestaw wyników poniżej zamieszczono jedynie wybrane i odpowiednio przekształcone rezultaty z tych badań.



Rys. 3.16. Wartości naprężeń normalnych  $\sigma_x$  [MPa] w zależności od zadanego obciążenia  $N$  [kN] w przekroju II

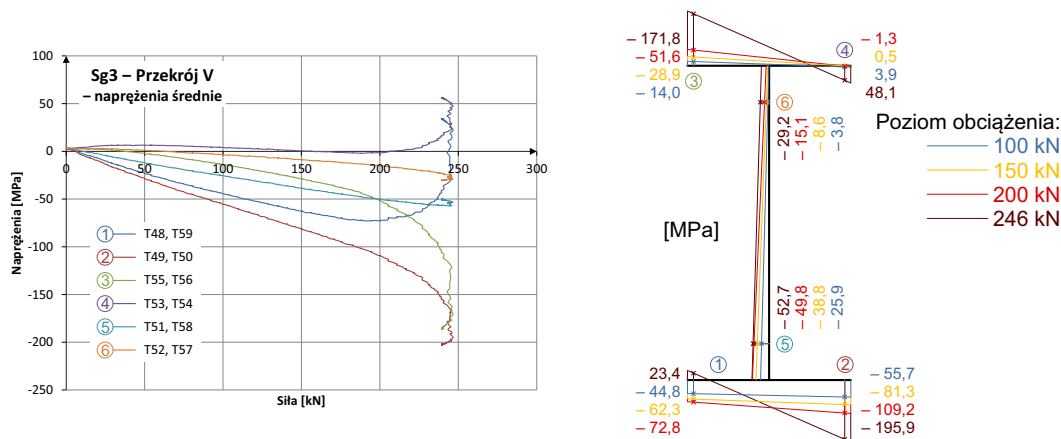
Na rysunku 3.16 przedstawiono obliczone na podstawie pomierzonych odkształceń naprężenia normalne  $\sigma_x$ . Są to średnie wartości otrzymane z każdej z przeciwległych par tensometrów elektrooporowych (por. rys. 3.8). Wyniki przedstawiono w dwojaki sposób — wykres po lewej stronie obrazuje zmienność naprężeń poszczególnych par tensometrów, natomiast wykres po prawej odzwierciedla bryłę naprężeń naniesioną na linię środkową przekroju II dla czterech wybranych wartości obciążenia (odpowiednio 50, 100, 150 i 200 kN). Należy zauważyć, że przy tym ostatnim poziomie obciążenia dochodzi do uplastycznienia punktu numer 1, ponieważ jak pokazano w punkcie 3.5.1, średnia wartość granicy plastyczności przekroju górnego kształtowała się na poziomie  $R_{e,PG} = 312$  MPa.



Rys. 3.17. Wartości naprężeń normalnych  $\sigma_x$  [MPa] w zależności od zadanego obciążenia  $N$  [kN] w przekroju III

Warto zwrócić uwagę na kształt i przebieg zmienności naprężeń w miarę narastania obciążenia. Charakterystyczny jest zwłaszcza krzywoliniowy przebieg po osiągnięciu granicy plastyczności oraz zachowanie przekroju po jej przekroczeniu. Analiza wykresów pozwala również zwrócić uwagę na fakt, że w chwili zniszczenia rozkład naprężeń przypominał rozkład jak dla dwuteowego elementu ściskanego i zginanego względem obu osi przekroju poprzecznego. Uwidacznia się przy tym efekt skręcania względem narzuconej osi obrotu słupa.

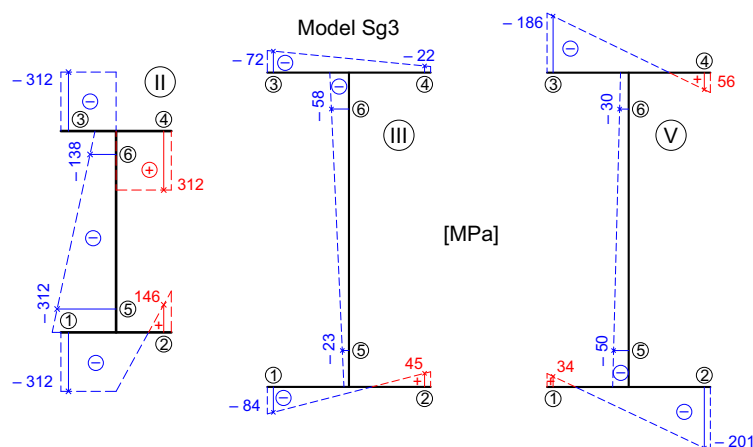
W dalszej części pokazano również charakterystykę zmienności naprężeń w przekroju III, czyli dolnej części słupa poniżej wspornika, wykonanej z kształtownika IPE 270. Przedstawiono to na rysunku 3.17 w podobnej konwencji jak na rysunku 3.16. Przekrój III, ze względu na znacznie większe charakterystyki geometryczne pracuje jedynie w zakresie sprężystym, dlatego dodane zostały naprężenia wyznaczone pod obciążeniem bliskim wyczerpaniu nośności (246 kN). Chcąc zachować przejrzystość wykresu nie pokazano powrotnych ścieżek naprężeń, które po zdjęciu obciążenia wróciły do początkowego położenia. Na podstawie tych wykresów widać, że tej części słupa było daleko do momentu uplastycznienia, który dla dolnej części wynosił  $R_{e,PD} = 326,8$  MPa. Charakterystyczny natomiast jest przebieg zmienności naprężeń, widoczny zwłaszcza w punkcie 2, ponieważ w czasie przyrostu obciążenia wartości te zmieniają znak przechodząc ze ściskania w rozciąganie. Tu efekt skręcania względem narzuconej osi obrotu słupa jest zdecydowanie mniej widoczny.



Rys. 3.18. Wartości naprężeń normalnych  $\sigma_x$  [MPa] w zależności od zadanego obciążenia  $N$  [kN] w przekroju V

Dużo ciekawiej wydaje się kształtować rozkład naprężeń w przekroju V, który na wysokości słupa zlokalizowany jest powyżej blach trapezowych jego podstawy. W początkowej fazie doświadczenia naprężenia wzrastały w miarę równomiernie ściskając przekrój mimośrodowo w płaszczyźnie większej sztywności. Na chwilę przed wyczerpaniem nośności doszło do redystrybucji naprężeń, dzięki czemu przy obciążeniu 246 kN uwidocznił się efekt skręcania elementu względem ustalonej osi obrotu. Nie bez znaczenia były także warunki podparcia, ponieważ w płaszczyźnie większej sztywności słup był utwierdzony, a z płaszczyzny podparty przegubowo. Przy tym obciążeniu maksymalne naprężenia zarejestrowano w punkcie 2 (195,5 MPa), natomiast w punkcie 1 zmieniły znak przechodząc ze ściskania w rozciąganie. Wartości tych naprężeń w zależności od przyłożonego obciążenia pokazano na rysunku 3.18.

Kształty krzywych zmienności naprężeń otrzymanych w pozostałych przekrojach nie były już tak interesujące jak te uzyskane w przekrojach II, III i V. Analiza przekroju I pokazała, że rozkład naprężeń był typowym rozkładem jak dla mimośrodowego ściskania. Maksymalna ich wartość przy ściskaniu nie przekroczyła 190 MPa. W przekroju IV ujemne naprężenia były co do wartości bezwzględnej znacznie mniejsze, niż w przekroju III. Ich rozkład również był klasycznym przykładem mimośrodowego ściskania, natomiast ich wartość nie przekroczyła 60 MPa. Zatem oba pozostałe przekroje (I, IV) pracowały w zakresie sprężystym.

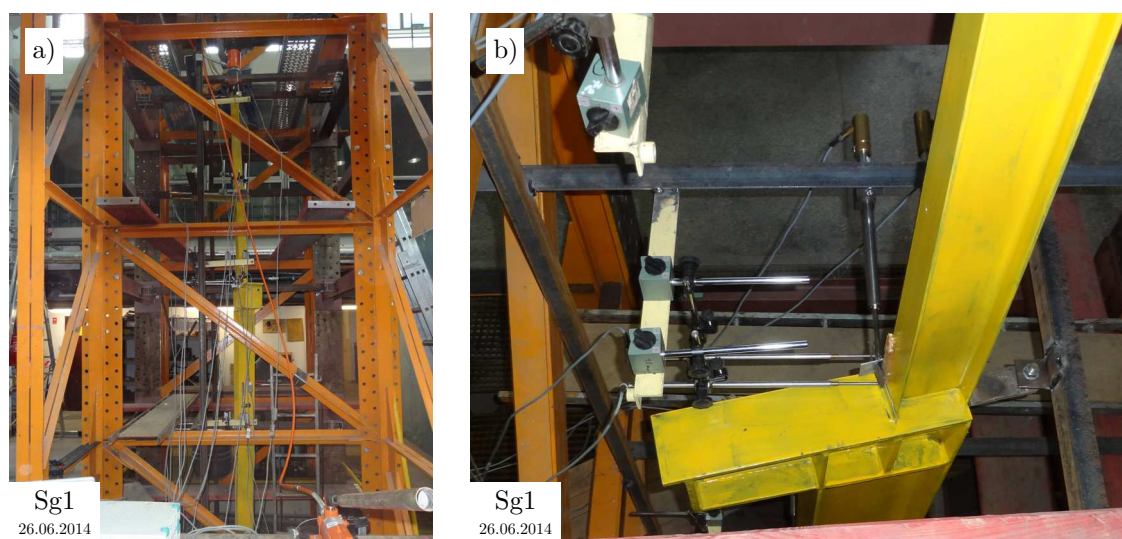


Rys. 3.19. Wartości naprężeń normalnych  $\sigma_x$  [MPa] w słupie Sg3 przy obciążeniu granicznym

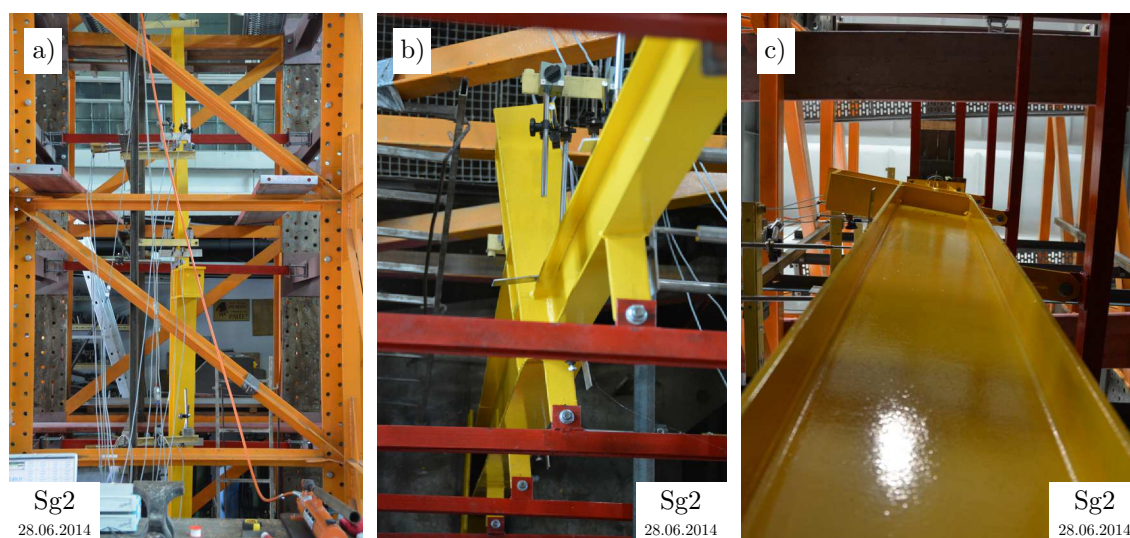
Naprężenia uzyskane w wyniku pomiarów odkształceń z wykorzystaniem tensometrów elektrooporowych są słuszne jedynie dla materiałów pracujących w zakresie sprężystym. Dlatego powyższe wykresy zmienności naprężeń normalnych  $\sigma_x$  w poszczególnych przekrojach sporządzono zanim w miejscach ich przyklejenia doszło do uplastycznienia. Na rysunku 3.19 pokazano natomiast prawdopodobny rozkład naprężeń po wyczerpaniu nośności w trzech omówionych już przekrojach: II, III i V. Odkształcenia rejestrowano w określonych punktach. Nie do końca wiadomo, która część przekroju się uplastyczniła, dlatego wykresy sporządzono linią przerywaną. Z analizy przekroju II wynika, że znaczna jego część uległa uplastycznieniu. Jedynie punkty numer 2 i 6 pracowały w zakresie sprężystym. Jeszcze bardziej widoczny jest efekt skręcania słupa względem narzuconej osi obrotu, o czym świadczył skok naprężeń w punktach numer 4 i 2 (por. rys. 3.16). W pierwszym z nich nastąpił gwałtowny przyrost rozciągania, natomiast w drugim naprężenia zmieniły znak. Przekrój III nie wyczerpał swojej nośności w tym samym momencie co przekrój II i daleko mu było do uplastycznienia. Dlatego rozkład naprężeń był zbliżony do tego, co

pokazano na rysunku 3.17. Podobnie było w przypadku przekroju V, w którym naprężenia zwiększyły swe wartości (por. rys. 3.18).

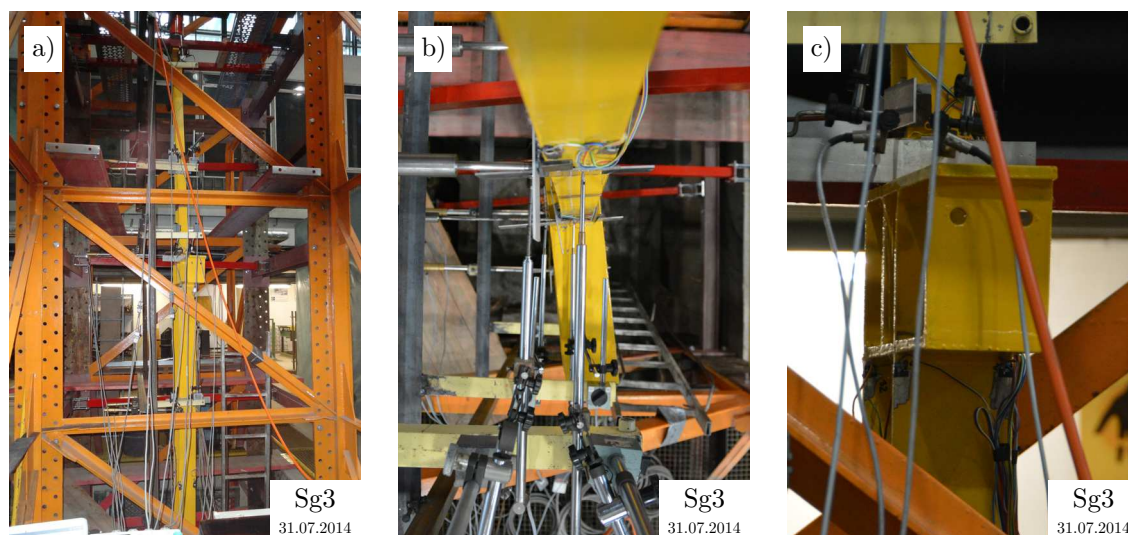
Podsumowując badania doświadczalne modeli serii Sg należy zwrócić uwagę na zachowanie głowic słupów w trakcie eksperymentów. Mimo zastosowanych rozwiązań konstrukcyjnych polegających na przytrzymaniu głowicy dwoma ceownikami i zastrzałem z rury kwadratowej (por. rys. 3.5b i 3.7a), całkowite wyeliminowanie przemieszczeń  $w$  wzdłuż osi  $z$  nie było możliwe. Zostało to pokazane na ścieżkach równowagi statycznej modelu Sg2 na rysunku 3.14. Maksymalne przemieszczenia  $w$  w zależności od badanego słupa wynosiły od 2 do ok. 4 mm. Mniejszą z tych wartości zarejestrowano podczas badań modelu Sg1, natomiast większa dotyczyła pozostałych dwóch modeli. Przy czym minimalnie większe przemieszczenia dotyczyły głowica słupa Sg2. Natomiast przesunięcie  $v$  w płaszczyźnie mniejszej sztywności wzdłuż osi  $y$  oscylowały w okolicach zera i nie przekraczały wartości  $\pm 0,5$  mm.



Rys. 3.20. Widok ogólny (a) oraz zbliżenie wspornika (b) słupa Sg1 po przestrzennej utracie stateczności



Rys. 3.21. Widok ogólny (a), ujęcia z poziomów głowicy (b) oraz podstawy (c) słupa Sg2 po przestrzennej utracie stateczności



Rys. 3.22. Widok ogólny (a), ujęcie z poziomu głowicy (b) oraz zbliżenie wspornika (c) słupa Sg3 po przestrzennej utracie stateczności

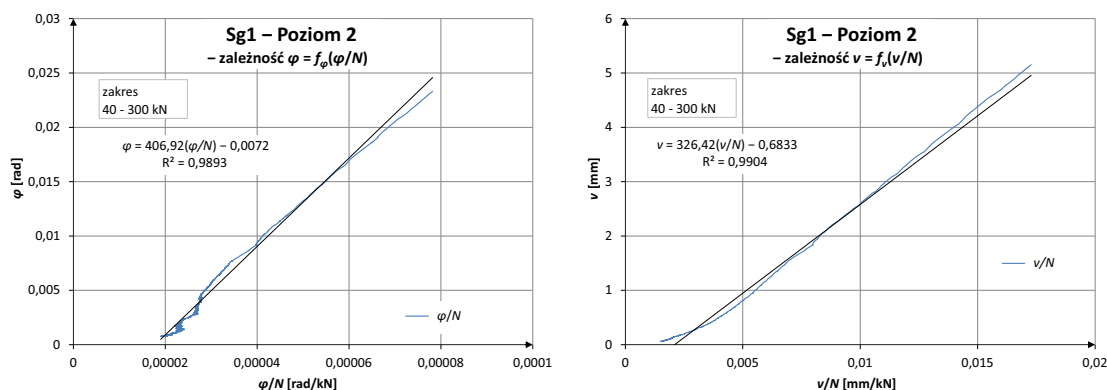
Wszystkie trzy modele słupów serii Sg wyczerpały swą nośność z warunku utraty stateczności przestrzennej w zakresie pozasprężystym. Krytycznym okazał się przekrój w miejscu skokowej zmiany sztywności, ponieważ to właśnie on uplastycznił się jako pierwszy. Na rysunkach od 3.20 do 3.22 przedstawiono fotografie zdeformowanych słupów wykonane w ostatniej fazie każdego badania.

Ujęcia na rysunkach 3.20a, 3.21a i 3.22a pokazują ogólny, frontowy widok wyboczonych modeli Sg1-3 umieszczonych w stanowisku badawczym. Wszystkie trzy słupy wygięły się i skrzyły w tym samym kierunku, co oczywiście jest zjawiskiem przypadkowym i zależy od losowych parametrów takich jak: niedoskonałości wykonania modelu lub jego podparcia oraz nieosiowo przyłożonego obciążenia. Pozostałe rysunki bardziej szczegółowo pokazują jak wyglądał zniszczony słup. Skupiono się w nich na wsporniku. Był on niewątpliwie miejscem, ponieważ to właśnie w przekroju powyżej zainicjowany został mechanizm zniszczenia elementu. Na rysunku 3.20b ujęto jedynie wspornik słupa Sg1 widziany z boku z perspektywy poziomu 1. W trakcie badania tego modelu zanotowano największe plastyczne przemieszczenia liniowe  $v$  i kąty skręcenia  $\varphi$  osiągające wartości odpowiednio 45 mm i 0,14 rad. Jest to widoczne, jeżeli jako punkt odniesienia przyjmie się położenie czujników indukcyjnych. Pierwszy z nich zsunął się z naklejonej blaszki, a drugi znalazł się na krawędzi półki. Rysunki 3.21b i 3.22b przedstawiają widoki wsporników modeli Sg2 i Sg3 widziane z perspektywy głowicy, przy czym pierwsza z fotografii została wykonana od strony rygli ściennych, natomiast druga nad wspornikiem. Tak samo jak w serii Sg1, tak w Sg3 (por. rys. 3.22b) skręcenie jest widoczne zwłaszcza w stosunku do położenia czujników indukcyjnych. Na rysunku 3.21b w sposób nie budzący wątpliwości przedstawiono wyboczenie względem ustalonej osi obrotu, która przebiegała wzdłuż słupa w miejscach połączeń z ryglami ściennymi. Fotografia z rysunku 3.21c ukazuje wspornik z punktu widzenia podstawy. Zbliżenie zdeformowanego wspornika widziane od frontu, wraz z całym oprzyrządowaniem w postaci czujników indukcyjnych i tensometrów elektrooporowych przedstawiono na rysunku 3.22c.

### 3.2.2. Analiza wyników

Wyniki badań doświadczalnych zostały opracowane zgodnie z informacjami zawartymi w punkcie 3.1.3. Na podstawie ŚRS kątów skręcenia  $\varphi$  oraz przemieszczeń liniowych  $v$  wyznaczono zależności Southwella oraz zmodyfikowane krzywe (3.1) i (3.2). W tabeli 3.1 zestawiono uzyskane wartości obciążeń krytycznych wyboczenia giętno-skrętnego  $N_{cr}$ . Wartości tych obciążeń podano dla każdego poziomu, na którym dokonywano pomiarów przemieszczeń czujnikami indukcyjnymi (por. rys. 3.8) oraz z podziałem na kąty skręcenia i przemieszczenia liniowe. Ponadto na każdym poziomie zamieszczono obciążenia krytyczne w zależności od stosowanej metody. W przypadku każdego obciążenia wyznaczono również, w zależności od zastosowanej metody, współczynnik determinacji  $R^2$  — w metodzie Southwella, a także współczynniki korelacji  $r_\varphi$  i  $r_v$  oraz wyznacznik z macierzy współczynników korelacji  $\det \mathbf{R}$  — w przypadku aproksymacji krzywymi (3.1) i (3.2). Dla porównania podano także wartości obciążeń granicznych  $N_{gr}$  uzyskanych bezpośrednio podczas badań doświadczalnych.

W tabeli 3.1 uwagę zwraca różnica w uzyskanym obciążeniu granicznym  $N_{gr}$  modelu Sg1, a dwoma pozostałymi. Dziwi to tym bardziej, że pozostałe dwie wartości różnią się między sobą tylko o 2%. Jest to przypuszczalnie efekt zbyt mocnego dokręcenia śrub w miejscach połączeń model Sg1, który był badany jako pierwszy. Miało to wpływ na warunki stężenia słupa, zamiast umożliwiać swobodę przemieszczeń liniowych oraz kątowych, sprężyste je krępowały. Skorygowano to w kolejnych modelach, co miało wpływ na ok. 15% spadek wartości obciążeń granicznych i krytycznych w kolejnych modelach.



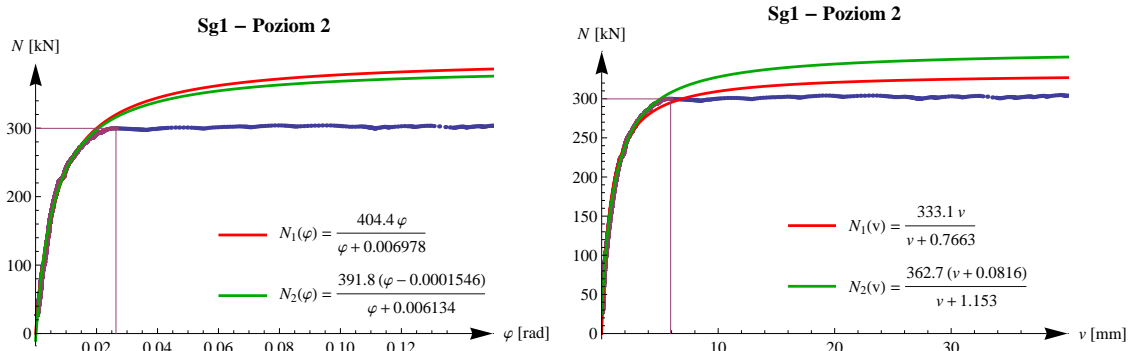
Rys. 3.23. Wykresy zależności Southwella z badań modelu Sg1 w poziomie 2

Na rysunku 3.23 przedstawiono wykresy zależności Southwella sporządzone na podstawie wyników badań modelu Sg1 uzyskanych w poziomie 2 (por. rys. 3.10). Zostały one opracowane na podstawie relacji zarówno kątów skręcenia, jak i przemieszczeń liniowych, które leżą na prostoliniowym odcinku znajdującym się w zakresie sprężystej pracy elementu. Zależność Southwella nie zawsze układa się liniowo, dlatego w celu uzyskania wiarygodnych wyników ograniczano bądź rozszerzano zakres analizowanych punktów. Pewne zaburzenia można zauważyć w dolnej części wykresu sporządzonego na podstawie kątów skręcenia. Należało wówczas go redukować od góry i/lub od dołu. Dolna granica modelu Sg1 znajdowała się na poziomie 40–50 kN, natomiast górna w okolicach 300 kN. Z metody Southwella otrzymano także zróżnicowane wyniki na podstawie ŚRS ze względu na kąty skręcenia i przemieszczenia liniowe. W przypadku słupa Sg1 wyznaczone nośności krytyczne różnią się od siebie o 5% do 20%.

Tabela 3.1. Nośności graniczne i krytyczne słupów serii Sg otrzymane z badań doświadczalnych

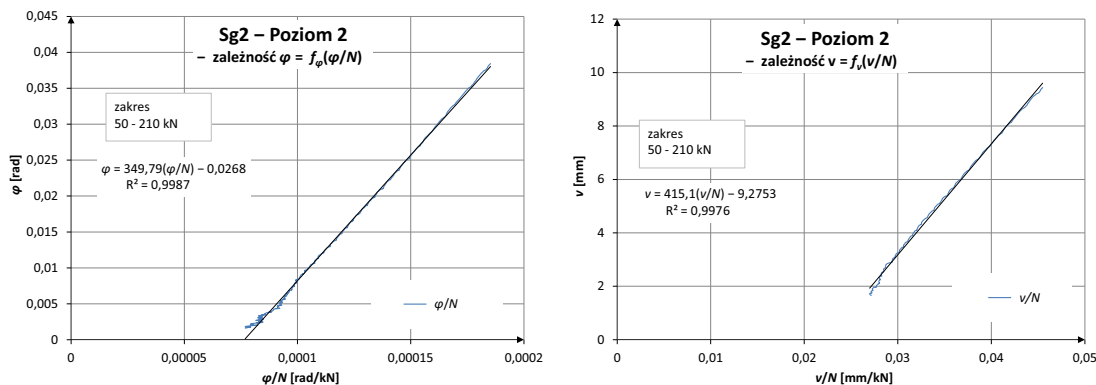
Seria	$N_{gr}$ [kN]	Poziom	Według	kąty skręcenia $\varphi$			przemieszczenia $v$		
				$N_{cr,\varphi}$ [kN]	$R^2$ lub $r_\varphi$ [-]	$\det \mathbf{R}$ [-]	$N_{cr,v}$ [kN]	$R^2$ lub $r_v$ [-]	$\det \mathbf{R}$ [-]
Sg1	306	1	South	400	0,9841		311	0,9704	
			(3.1)	418	0,9566	0,0850	334	0,9107	0,1706
			(3.2)	439	0,9674	0,0190	384	0,9524	0,0277
		2	South	407	0,9893		326	0,9904	
			(3.1)	404	0,9443	0,1083	333	0,8994	0,1912
			(3.2)	392	0,9475	0,0342	363	0,9384	0,0373
		3	South	405	0,9951		384	0,9878	
			(3.1)	500	0,9681	0,0627	420	0,9535	0,0909
			(3.2)	363	0,9350	0,0386	403	0,9578	0,0251
Sg2	253	1	South	394	0,9917		271	0,9788	
			(3.1)	397	0,9881	0,0237	286	0,9655	0,0677
			(3.2)	356	0,9906	0,0009	371	0,9920	0,0007
		2	South	350	0,9987		415	0,9976	
			(3.1)	355	0,9832	0,0333	409	0,9894	0,0211
			(3.2)	362	0,9913	0,0008	380	0,9924	0,0006
		3	South	376	0,9967		385	0,9986	
			(3.1)	385	0,9871	0,0257	379	0,9866	0,0267
			(3.2)	376	0,9916	0,0008	374	0,9921	0,0007
Sg3	247	1	South	346	0,9569		209	0,9590	
			(3.1)	373	0,9831	0,0336	385	0,9796	0,0404
			(3.2)	317	0,9766	0,0135	302	0,9793	0,0101
		2	South	318	0,9944		323	0,9914	
			(3.1)	324	0,9772	0,0450	312	0,9775	0,0446
			(3.2)	321	0,9813	0,0097	359	0,9866	0,0064
		3	South	365	0,9239		376	0,9498	
			(3.1)	527	0,9937	0,0125	490	0,9935	0,0130
			(3.2)	376	0,9867	0,0066	447	0,9923	0,0032

Alternatywą w szacowaniu nośności krytycznych jest omówiona w punkcie 3.1.3 aproksymacja ścieżek równowagi statycznej zmodyfikowanymi krzywymi (3.1) i (3.2). W przypadku wspomnianych już ścieżek (por. rys. 3.10) odpowiadające im krzywe pokazano na rysunku 3.24. Zamieszczono na nim również wartości poszczególnych funkcji. Krzywą (3.1) opisano funkcją  $N_1(f)$  i oznaczono kolorem czerwonym, natomiast krzywą (3.2) opisano funkcją  $N_2(f)$  i oznaczono kolorem zielonym. Podobnie jak w przypadku metody Southwella, również pokazano zależności uzyskane ze ścieżek kątów skręcenia ( $\varphi$ ) oraz przemieszczeń liniowych ( $v$ ). Na rysunku zaznaczono także zakres danych objętych aproksymacją. Jest to o tyle istotne, ponieważ tak jak w metodzie Southwella, poszukiwane jest obciążenie krytyczne stateczności sprężystej. Nie powinno się brać pod uwagę tych wyników, które obejmują sprężysto-plastyczny zakres pracy modeli. Należy zauważyć, że w tym przypadku obie krzywe dają podobną aproksymację, zarówno w odniesieniu do



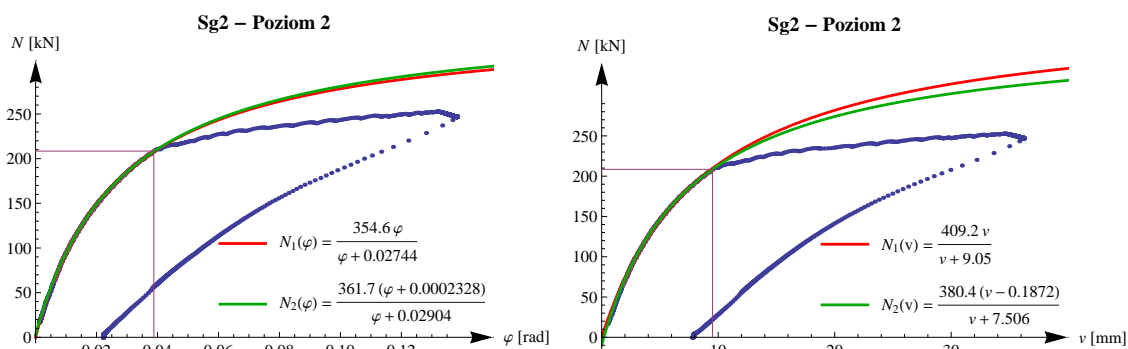
Rys. 3.24. Aproxymacja ŚRS modelu Sg1 w poziomie 2 krzywymi (3.1) i (3.2)

kątów skręcenia, jak i przemieszczeń liniowych. Nieznacznie lepiej wypada druga krzywa, co jest uzasadnione mniejszym wyznacznikiem z macierzy współczynników korelacji.



Rys. 3.25. Wykresy zależności Southwella z badań modelu Sg2 w poziomie 2

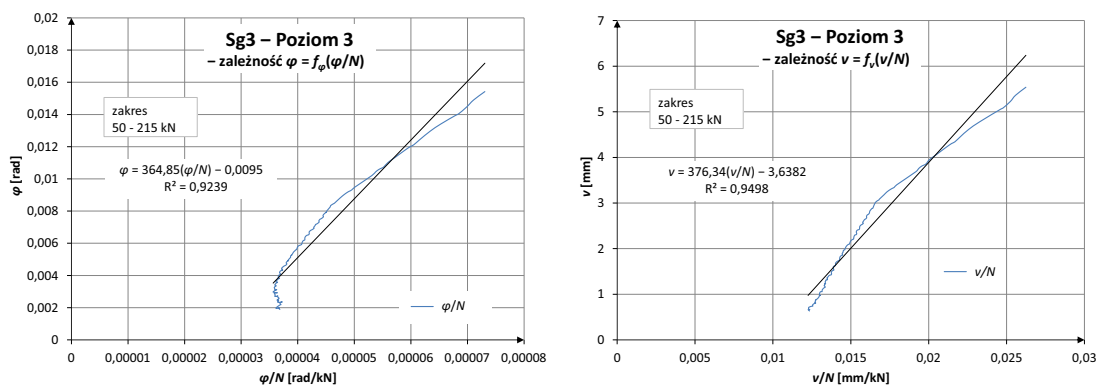
Przykładowe wykresy zależności Southwella uzyskane z badań doświadczalnych przeprowadzonych na modelu Sg2 przedstawia rysunek 3.25. Zostały one sporządzone na podstawie ścieżek równowagi statycznej z poziomu 2 (por. rys. 3.12). Badany element wyczerpał swoją nośność po osiągnięciu, w porównaniu z pierwszym modelem, niższego poziomu obciążenia, dlatego zakres wyników wziętych pod uwagę przy wyznaczaniu zależności Southwella również był niższy i wynosił 50–210 kN. Analiza wykresów pozwala na wyciągnięcie podobnych wniosków. Również zaobserwowano rozbieżności pomiędzy zależnościami uzyskanymi na podstawie kątów skręcenia i przemieszczeń liniowych.



Rys. 3.26. Aproxymacja ŚRS modelu Sg2 w poziomie 2 krzywymi (3.1) i (3.2)

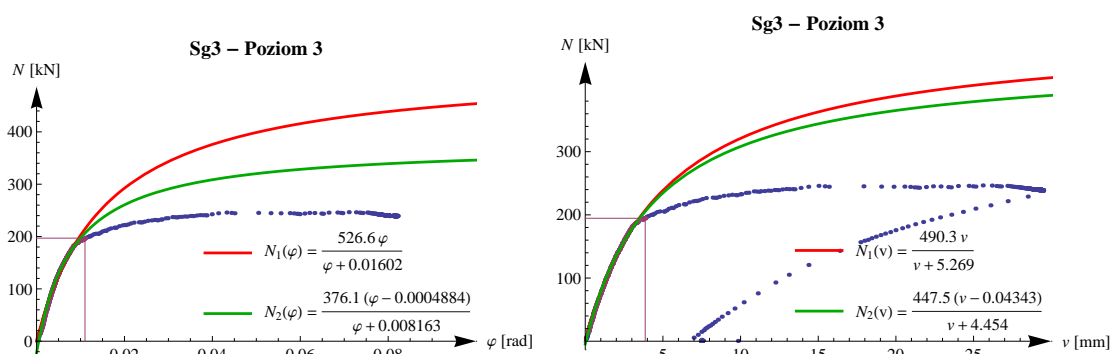


Na rysunku 3.26 pokazano aproksymacje ścieżek odpowiednimi krzywymi, które zostały wykonane w podobnej konwencji. Również w tym wypadku obie krzywe w zadowalający sposób wpisały się w liniowo-sprężysty odcinek ścieżek. Zakres ten przyjęto tak samo jak w metodzie Southwella. Także uzyskane wartości obciążeń krytycznych, wyznaczone na podstawie odpowiednich przemieszczeń, w zależności od zastosowanej metody różnią się o około 7%. Największa różnica w wynikach występuje w poziomie 1 pomiędzy obciążeniami wyznaczonymi na podstawie przemieszczeń liniowych metodą Southwella a aproksymacją krzywą (3.2).



Rys. 3.27. Wykresy zależności Southwella z badań modelu Sg3 w poziomie 3

Przykładowe opracowanie wyników pochodzących z badania modelu Sg3 pokazano na rysunku 3.27. Tym razem przedstawia on zależności Southwella wyznaczone na podstawie ŚRS z poziomu 3. Model Sg3 jako jedyny z tej całej serii był oklejony tensometrami, dlatego zakres punktów pomiarowych, które były wykorzystane do aproksymacji został również zweryfikowany na podstawie rzeczywistych naprężeń normalnych występujących w przekroju poprzecznym. Jak podano na wykresach, w modelu tym ograniczono się do obciążeń z zakresu 50–215 kN. W tym przypadku zależności te wyraźnie odbiegają od linii prostej, ponadto w przypadku kątów skręcenia zauważyć można lekkie zaburzenia na początku. Znajduje to potwierdzenie we współczynnikach determinacji  $R^2$ , które dla tego konkretnego przykładu są najniższe jeżeli chodzi o całą serię badań modeli Sg (por. tab. 3.1). Niemniej jednak w obu przypadkach współczynniki kierunkowe aproksymowanej prostej przyjmują wartości zbliżone.



Rys. 3.28. Aproksymacja ŚRS modelu Sg3 w poziomie 3 krzywymi (3.1) i (3.2)

W celu zweryfikowania wyniku otrzymanego metodą Southwella, na rysunku 3.28 pokazano taką samą sytuację jak na rysunku 3.27, lecz dla uzyskania wartości obciążeń krytycznych, wykorzystano aproksymację krzywymi (3.1) i (3.2). W tym konkretnym

przypadku widać znaczną rozbieżność między wynikami uzyskanymi metodą Southwella i krzywą (3.2), a krzywą (3.1). Dopiero bardziej wnikliwa analiza parametrów zamieszczonych w tabel 3.1 pozwala stwierdzić, że za właściwy należałoby uznać wynik otrzymany drugą krzywą. Mimo, że pierwsza krzywa cechuje się nieznacznie wyższym współczynnikiem korelacji  $r_\varphi$ , to w przypadku drugiej krzywej, wyznacznik macierzy ze wszystkich współczynników korelacji  $\det \mathbf{R}$  jest prawie dwa razy mniejszy od wyznacznika pierwszej.

Tabela 3.2. Nośności krytyczne otrzymane z badań modeli serii Sg

Model	Poziom	Obciążenia krytyczne [kN] w zależności od zastosowanej metody								
		Southwell			krzywa (3.1)			krzywa (3.2)		
		$N_{cr,\varphi}$	$N_{cr,v}$	$N_{cr,\acute{s}r}$	$N_{cr,\varphi}$	$N_{cr,v}$	$N_{cr,\acute{s}r}$	$N_{cr,\varphi}$	$N_{cr,v}$	$N_{cr,\acute{s}r}$
Sg1	1	400	311	356	418	334	376	439	384	412
	2	407	326	367	404	333	369	392	363	377
	3	405	384	395	500	420	460	363	403	383
	średnia	404	341	<b>372</b>	441	363	<b>402</b>	398	383	<b>391</b>
Sg2	1	394	271	333	397	286	341	356	371	364
	2	350	415	382	355	409	382	362	380	371
	3	376	374	375	385	379	382	376	374	375
	średnia	373	354	<b>363</b>	379	358	<b>368</b>	365	375	<b>370</b>
Sg3	1	346	209	278	373	385	379	317	302	310
	2	318	323	320	324	312	318	321	359	340
	3	365	376	371	527	490	508	376	447	412
	średnia	343	303	<b>323</b>	408	396	<b>402</b>	338	369	<b>354</b>

Otrzymane wyniki badań doświadczalnych modeli serii Sg są bardzo obszerne. Wobec powyższego w tabeli 3.2 zestawiono wyznaczone wartości obciążeń krytycznych jakie otrzymano dla trzech modeli, na poszczególnych poziomach i w zależności od zastosowanej metody. Odpowiednie ukształtowanie tabeli pozwala na odczytanie średnich wartości tych obciążeń w różnych konfiguracjach. W układzie poziomym, w kolumnach  $N_{cr,\acute{s}r}$  zestawiono średnie wartości obciążeń krytycznych otrzymanych na podstawie krzywych pochodzących z aproksymacji kątów skręcenia  $N_{cr,\varphi}$  i przemieszczeń liniowych  $N_{cr,v}$ . Natomiast w układzie pionowym, w wierszach „średnia” podano wartości obciążeń krytycznych ze wszystkich poziomów czujników indukcyjnych wyznaczonych osobno dla kątów skręcenia i przemieszczeń liniowych. Dodatkowo, na skrzyżowaniu kolumn  $N_{cr,\acute{s}r}$  i wierszy „średnia”, podano pismem pogrubionym średnie wartości pochodzące ze zbiorów wszystkich przemieszczeń (liniowych oraz kątowych) na wszystkich poziomach danego modelu w zależności od zastosowanej metody.

Zbiornicze statystyczne zestawienie wyników badań doświadczalnych zamieszczono również w tabeli 3.3. Zamieszczono w niej średnie wartości obciążeń krytycznych w zależności od zastosowanej metody w odniesieniu do poszczególnych modeli. Są to pogrubione wielkości z tabeli 3.2. Dodatkowo, zawarto w niej także odchylenia standardowe  $s$  oraz współczynniki zmienności  $V$ , które również zostały wyznaczone w zależności od zastosowanej metody otrzymania wyników.

Z analizy rezultatów zamieszczonych w tabeli 3.3 wynika, że dla takiego zbioru wyników najkorzystniejszą i najbardziej wiarygodną metodą uzyskania obciążenia krytycznego

Tabela 3.3. Statystyczne opracowanie wyników całego zbioru obciążeń krytycznych serii Sg

Model	Southwell			krzywa (3.1)			krzywa (3.2)		
	$N_{cr,śr}$ [kN]	$s_{South}$ [kN]	$V_{South}$ [%]	$N_{cr,śr}$ [kN]	$s_1$ [kN]	$V_1$ [%]	$N_{cr,śr}$ [kN]	$s_2$ [kN]	$V_2$ [%]
Sg1	372	38,8	10,4	402	57,0	14,2	391	26,2	7,0
Sg2	363	45,7	12,6	368	40,4	11,0	370	8,4	2,3
Sg3	323	54,9	17,0	402	80,2	20,0	354	49,1	13,9
Wszystkie	353	51,68	14,6	391	63,4	16,2	<b>371</b>	35,8	9,6

jest krzywa (3.2). Obrazuje to miara zróżnicowania badanych jednostek jaką jest odchylenie standardowe uzyskane dla całego zbioru obciążeń krytycznych uzyskanych wg odmiennych metod. Wynosi ono 35,8 kN. W odróżnieniu od odchylenia standardowego, które określa bezwzględne zróżnicowanie cechy, współczynnik zmienności jest miarą względną, zależną od średniej arytmetycznej obciążeń krytycznych  $N_{cr,śr}$ . Wynosi jedynie 9,6%. Pozostałe metody wypadają bardziej niekorzystnie, ponieważ współczynnik zmienności wyników badań modelowych serii Sg wynosi w przypadku metody Southwella 14,6% oraz 16,2% — w przypadku krzywej (3.1). Należy zatem stwierdzić, że doświadczalne obciążenie krytyczne sprężystego wyboczenia giętno-skrętnego wynosi 371 kN.

### 3.3. Modele serii Sd

Seria badań modelowych obejmowała swym zakresem trzy modele od Sd1 do Sd3.

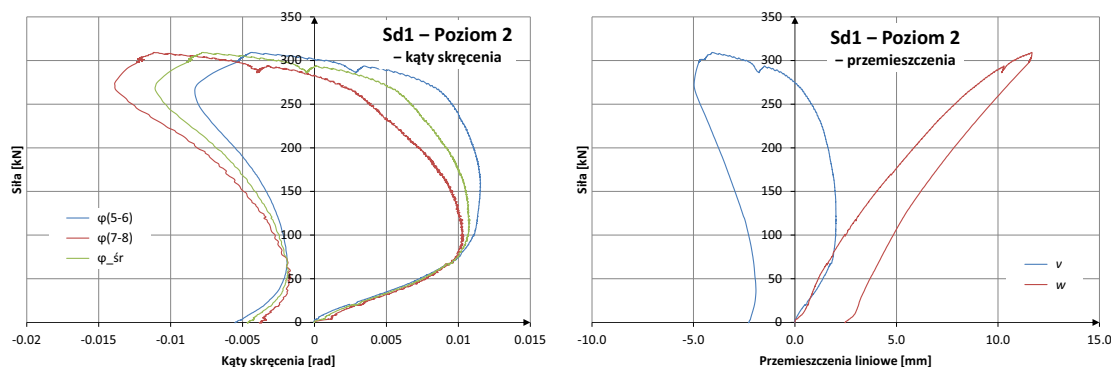
#### 3.3.1. Przebieg badań

Przebieg badań doświadczalnych trzech modeli serii Sd był taki jak w przypadku serii Sg i obejmował:

1. Obciążenie wstępne słupa do niedużej wartości (ok. 50 kN) w celu „ułożenia” konstrukcji oraz wyeliminowania ewentualnych luzów w połączeniach, a następnie odciążenie (do ok. 1 kN).
2. Obciążenie zasadnicze badanego słupa aż do wyczerpania nośności (zniszczenia).

Zachowanie słupa Sd1 podczas badań było dużo bardziej niespodziewane, aniżeli słupów serii Sg. Obciążenie przykładane na wysokości wspornika generowało poza ściskającą siłą osiową, także znaczny moment zginający. Przemieszczenia  $w$  w płaszczyźnie większej sztywności słupa były zatem dużo większe, niż w przypadku badań przeprowadzonych wcześniej. Od samego początku badania, zaobserwowano także wygięcie słupa z płaszczyzny większej sztywności. W początkowej fazie eksperymentu narastało ono w dodatnim kierunku przyjętego układu współrzędnych. Jednak po osiągnięciu obciążenia rzędu 80 kN przemieszczenia liniowe  $v$ , jak i kąty skręcenia  $\varphi$  przestały narastać aż do osiągnięcia wartości 150 kN. Zostało to odwzorowane na ŚRS odcinkiem niemalże pionowym. Po przekroczeniu tego obciążenia wartości przemieszczeń liniowych i kątów skręcenia zaczęły się łagodnie zmniejszać. Po zarejestrowaniu siły ok. 270 kN krzywa obu przemieszczeń na ŚRS stawała się coraz bardziej płaska, aż w pewnym momencie przekroczyła swoje początkowe

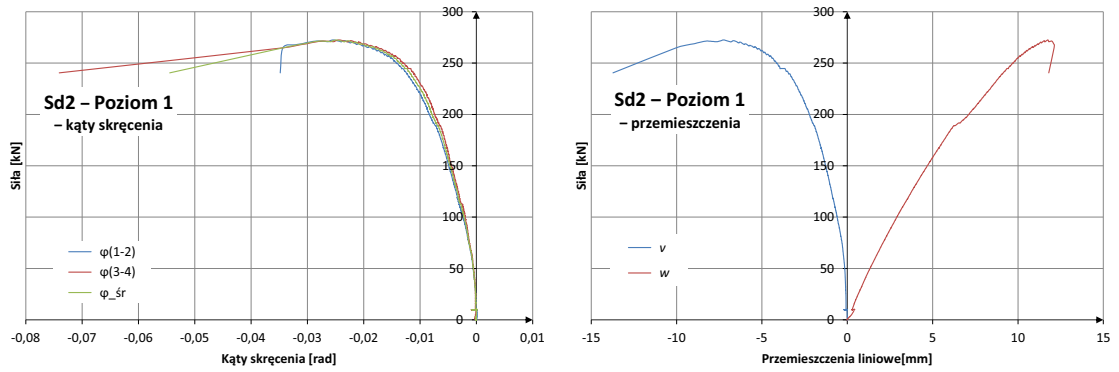
położenie i przeszła na ujemną stronę przyjętego układu współrzędnych. W trakcie badania, gdy osiągnięto obciążenie ok. 280 kN, można również zaobserwować drobne zaburzenie w postaci „ząbka”. Ten nieznaczny spadek obciążenia wynika z początku uplastycznienia wspornika. Nie wyczerpało to jednak nośności całego elementu. Badanie kontynuowano, aż ostatecznie zarejestrowano maksymalne obciążenia  $N_{gr,Sd1} = 309,2$  kN. Zwolniono następnie zawór utrzymujący ciśnienie w pompie pozwalając na odciążenie słupa. Analizując powrotną ścieżkę modelu Sd1 należy zauważyć, że przypominała ona swym kształtem ścieżkę podczas obciążania. Zaobserwowano również trwałe deformacje plastyczne, ponieważ czujniki nie wróciły do stanu pierwotnego. Ze względu na zmianę znaku wartości kątów skręcenia  $\varphi$  i przemieszczeń liniowych  $v$ , ich analiza jest kłopotliwa. Jedynie wygięcia  $w$  w płaszczyźnie większej sztywności nie zaskakują osiągając maksymalną wartość ok. 12 mm w poziomie 2. Wybrane rezultaty z badań doświadczalnych w poziomie 2 modelu Sd1, przedstawiające ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych, pokazano na rysunku 3.29.



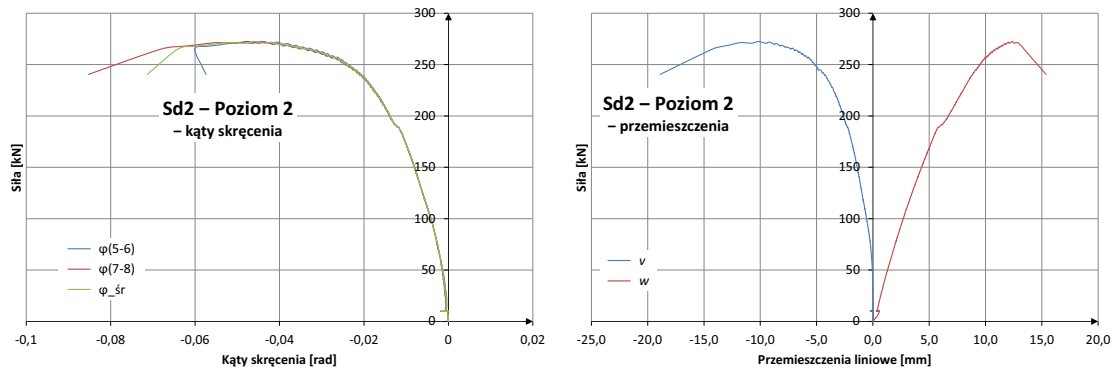
Rys. 3.29. ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sd1 w poziomie 2

Aby wyeliminować zaobserwowany podczas badań słupa Sd1 mechanizm niszczenia (uplastycznienia) samego wspornika, wzmocniono zarówno jego środkik, jak i pas górny. W przypadku środkika dokonano tego przez przyspawanie po obu jego stronach ukośnych żeber z rury kwadratowej. Do pasa górnego natomiast przyspawano dodatkową nakładkę z płaskownika. Wykonane wzmocnienie jest widoczne na rysunku 3.40b.

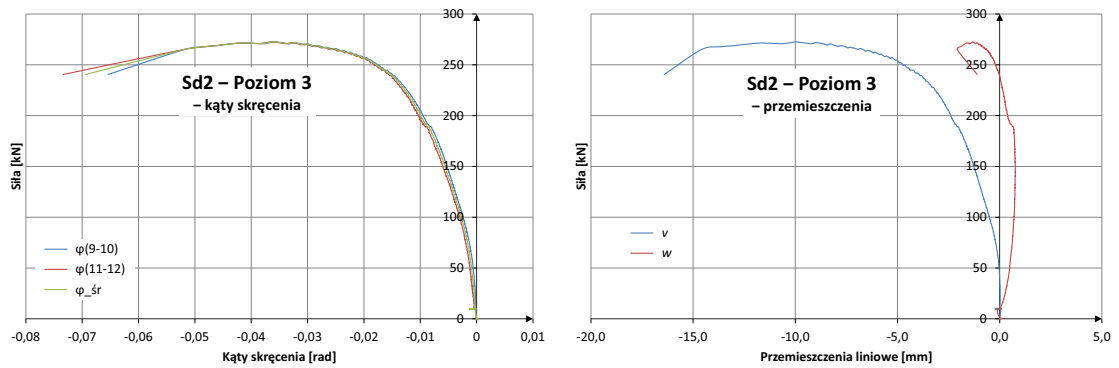
Zachowanie modelu Sd2 oraz jego odpowiedź na zadane obciążenie nie było już tak niespodziewane, natomiast miało gwałtowny przebieg. W początkowym etapie prowadzonego badania zależność siła–przemieszczenie układała się niemalże prostoliniowo, aż do osiągnięcia 180 kN. W tym miejscu zaobserwowano nieznaczne, lecz nagłe zaburzenie na ŚRS, które mogło być spowodowane „ułożeniem” się konstrukcji na połączeniu lub opóźnieniem na mostku i nie miało wpływu na dalszą analizę wyników. Warto zauważyć, że w odróżnieniu od badań serii Sg i początkowej fazy badania słupa Sd1, przemieszczenia modelu Sd2 narastały w przeciwną stronę. Stąd ujemne wartości kątów skręcenia  $\varphi$  i przemieszczeń liniowych  $v$  w płaszczyźnie mniejszej sztywności. Po przekroczeniu ok. 200 kN wykres łagodnie przeszedł w postać krzywoliniową, a powyżej 250 kN nachylenie stycznej stało się niemalże płaskie. Największe obciążenie, które zostało zarejestrowane przez siłomierz i jest równoznaczne z obciążeniem granicznym wyniosło  $N_{gr,Sd2} = 272,5$  kN. W odróżnieniu od dotychczas przeprowadzonych doświadczeń, zniszczenie słupa, tzn. utrata stateczności przestrzennej względem ustalonej osi obrotu nastąpiła bardzo szybko (raptownie). Mimo, iż urządzenia pomiarowe rejestrowały odczyty z czujników co 0,2 s, nie



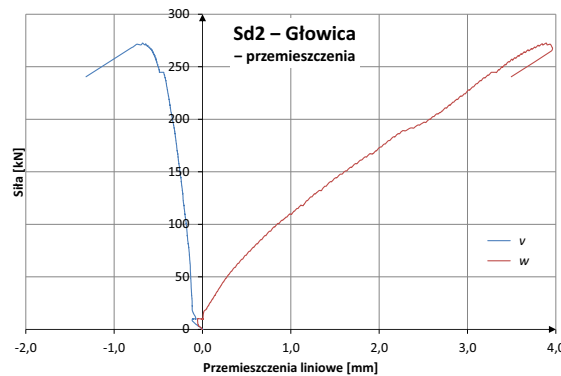
Rys. 3.30. ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sd2 w poziomie 1



Rys. 3.31. ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sd2 w poziomie 2



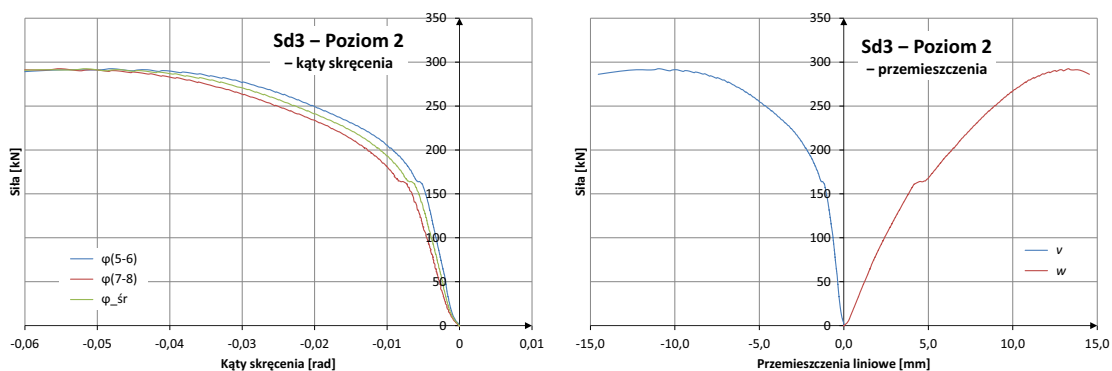
Rys. 3.32. ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sd2 w poziomie 3



Rys. 3.33. ŚRS przemieszczeń liniowych modelu Sd2 w poziomie głowicy

odnotowano pośrednich wartości przemieszczeń, po tym jak doszło do spadku obciążenia. Zjawisko utraty stateczności było na tyle raptowne, że spowodowało straty i uszkodziło rdzenie dwóch czujników indukcyjnych. Maksymalne wygięcie  $w$  w płaszczyźnie większej sztywności słupa było zbliżone do wygięcia wcześniejszego modelu i wynosiło 13 mm. Natomiast największe przemieszczenie liniowe  $v$  w płaszczyźnie mniejszej sztywności zarejestrowano w poziomie 2 i w momencie utraty stateczności wynosiło 10 mm. Z kolei największy kąt skręcenia przekroju poprzecznego wyniósł  $-0,06$  rad. Komplet otrzymanych wyników badań doświadczalnych modelu Sd2 na wszystkich poziomach, pokazano na rysunkach 3.30–3.33.

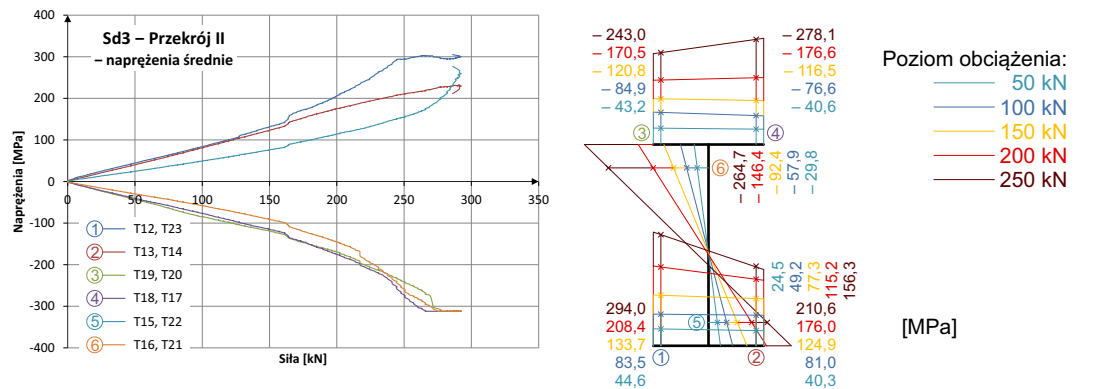
Ostatni, trzeci w serii model słupa przewidziany do badań oznaczono jako Sd3. Uzyskane ścieżki równowagi statycznej swym kształtem oraz wartościami przemieszczeń bardzo przypominały te otrzymane podczas wcześniejszego badania. Granica zasięgu obowiązywania prawa Hooke'a obejmowała obciążenia do poziomu ok. 230 kN. Nieco wcześniej, przy sile rzędu 160 kN, zaobserwowano podobne zaburzenie jak w przypadku słupa Sd2. Ponowne wystąpienie tego efektu sugeruje, że jego bardziej prawdopodobną przyczyną może być wspomniane „ułożenie” konstrukcji lub zlikwidowanie luzu, na którymś z połączeń. Zaobserwowany nagły przeskok również był na tyle mały, że praktycznie nie miał wpływu na otrzymane wartości obciążeń krytycznych. Powyżej siły nacisku rzędu 230 kN nachylenie krzywej stało się łagodniejsze. Największe zarejestrowane obciążenie utożsamiane z granicznym wyniosło  $N_{gr,Sd3} = 292,5$  kN. Wyjątkową zgodność w stosunku do wcześniejszego badania uzyskano także w przypadku przemieszczeń. Największe wygięcie  $w$  odnotowano w poziomie 2 i wynosiło ok. 13 mm. Pozostałe wartości przemieszczeń były niemalże takie same jak w przypadku słupa Sd2 i wyniosły maksymalnie  $-12$  mm w przypadku przemieszczeń liniowych z płaszczyzny większej sztywności oraz  $-0,06$  rad w przypadku kątów skręcenia. Sam moment utraty stateczności był równie raptowny jak we wcześniej badanym modelu. Także straty były podobne, ponieważ uszkodzony został tym razem jeden rdzeń czujnika indukcyjnego. Kształt zdeformowanego modelu oraz raptowne wyczerpanie nośności wskazuje, że mechanizmem zniszczenia słupa stężonego poprzecznie była bardzo prawdopodobnie sprężysta utrata stateczności przestrzennej wzdłuż ustalonej osi obrotu. Ścieżki równowagi statycznej przemieszczeń kątowych oraz liniowych modelu Sd3 w poziomie 2, przedstawiono na rysunku 3.34.



Rys. 3.34. ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sd3 w poziomie 2

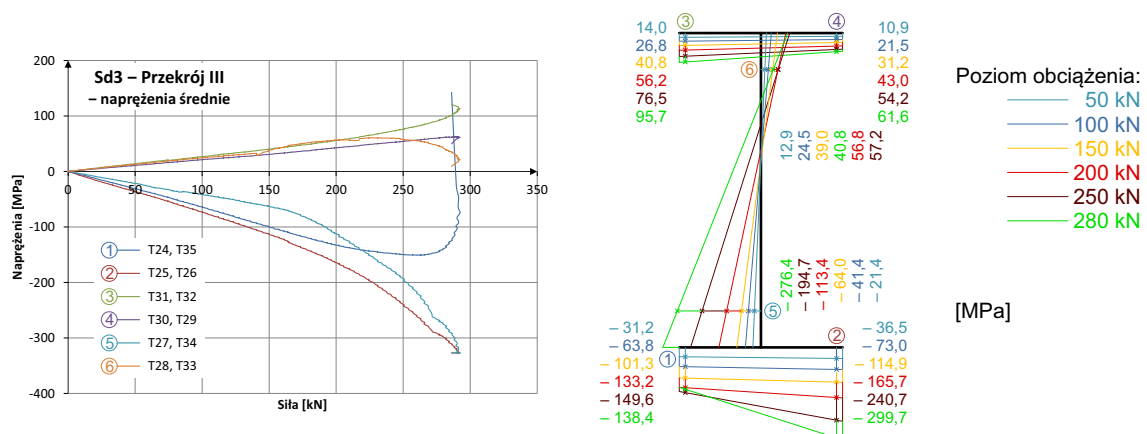
W badaniach modelu Sd3, podobnie jak w Sg3, analizowano stan odkształceń oraz po odpowiednich przekształceniach — stan naprężeń normalnych. Miejsca pomiarów, a także sposób uzyskania wyników omówiono w punkcie 3.1.2. Wyniki związane z analizą na-

prężen są równie obszerne, dlatego w tym przypadku również ograniczono ich graficzną interpretację do trzech najciekawszych przekrojów: II — powyżej wspornika, III — poniżej wspornika i V — powyżej podstawy słupa.



Rys. 3.35. Wartości naprężeń normalnych  $\sigma_x$  [MPa] w zależności od zadanego obciążenia  $N$  [kN] w przekroju II słupa Sd3

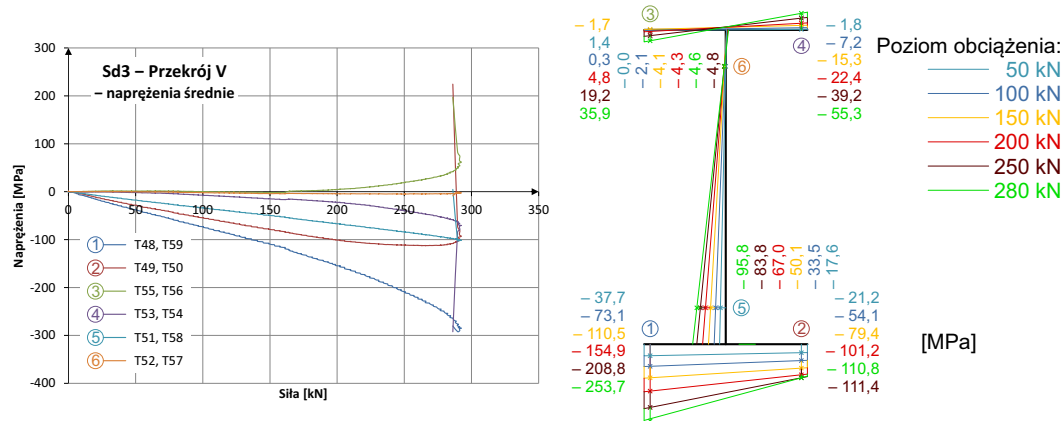
Na rysunku 3.35 przedstawiono naprężenia normalne  $\sigma_x$ , które zostały obliczone na podstawie pomierzonych odkształceń. Został on sporządzony w takiej samej konwencji jak w przypadku słupa Sg3 (por. rys. 3.16–3.18 oraz zamieszczone pod nimi opisy w tekście na stronach 43–44, a także rys. 3.8). Jeżeli chodzi o rozkład naprężeń normalnych w przekroju II, to był on zgoła odmienny od wyników poprzedniej serii badań. Niemalże od samego początku trwania eksperymentu można było zaobserwować, że na ich ukształtowanie miał wpływ moment zginający, który wynikał jedynie ze zginania górnej części słupa. W tym przekroju prawdopodobnie doszło do uplastycznienia w punkcie numer 1. Różnica polegała na tym, że tym razem było to efektem naprężeń rozciągających. Granicę plastyczności dolnej części słupa określono w punkcie 3.5.1 i kształtowała się na poziomie  $R_{e,PG} = 312$  MPa. Punkty 1, 2 i 5 były poddane rozciąganiu, natomiast 3, 4 i 6 — ścisnaniu. Same wartości przyrastały proporcjonalnie i dopiero po osiągnięciu obciążenia rzędu 250 kN można zauważyć, że przekrój niewątpliwie zaczął być skręcany.



Rys. 3.36. Wartości naprężeń normalnych  $\sigma_x$  [MPa] w zależności od zadanego obciążenia  $N$  [kN] w przekroju III

Na rysunku 3.36 zilustrowano zmienność naprężeń w przekroju III. Jest ona równie interesująca, a zarazem odmienna, ponieważ przekrój ten znajdował się poniżej wspornika, do którego przyłożono obciążenie. Mimo większych charakterystyk przekrojowych, ale

także w związku ze ściskaniem tej części słupa, doszło w nim właśnie z tego powodu do częściowego uplastycznienia. W tym przypadku najbardziej wyężony był punkt numer 2, a średnia wartość granicy plastyczności dolnej części słupa wynosiła  $R_{e,PD} = 326,8$  MPa. Przyrost naprężeń aż do uzyskania obciążenia rzędu 200 kN był proporcjonalny i dopiero powyżej 250 kN nastąpiło gwałtowne zróżnicowanie naprężeń w poszczególnych punktach. Efekt skręcenia przekroju poprzecznego względem ustalonej osi obrotu słupa, w sposób oczywisty widoczny jest na poziomie 280 kN.



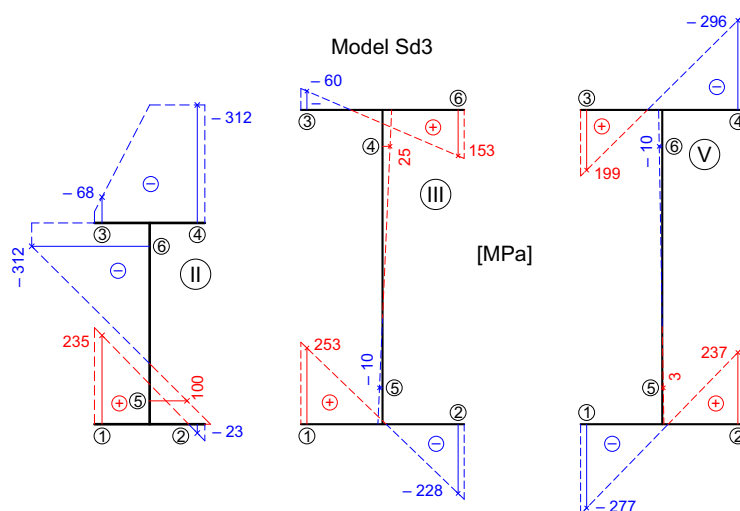
Rys. 3.37. Wartości naprężeń normalnych  $\sigma_x$  [MPa] w zależności od zadanej wartości obciążenia  $N$  [kN] w przekroju V słupa Sd3

Rozkład naprężeń bardziej interesująco przedstawiał się w przekroju podporowym numer V. Sposób zamocowania podstawy miał wpływ na redystrybucję naprężeń. Rozciąganie w pasie górnym było zdecydowanie mniejsze, ponieważ naprężenia w punktach numer 3, 4 oscylowały w przedziale od  $-55$  do  $36$  MPa. Wynika z tego także to, że reakcja pionowa przenoszona była wyłącznie przez nierównomierny docisk blachy podstawy do fundamentu, który w badaniu był sztywną przeponą. Pas dolny przekroju był ściskany, natomiast w chwili utraty stateczności naprężenia zarejestrowane w punkcie numer 1 wynosiły ok.  $-254$  MPa. W punkcie numer 2 osiągnęły wielkość rzędu ok.  $-110$  MPa. Wykresy zmienności naprężeń normalnych przekroju V w zależności od wzrastającej siły nacisku, zostały pokazane na rysunku 3.37.

Stan naprężeń w pozostałych przekrojach słupa Sd3 był odpowiednio mniejszy, aniżeli przedstawiono to na rysunkach 3.35–3.37. Rozkład naprężeń w przekroju I swym kształtem przypominał typowy rozkład jak dla elementu zginanego, przy czym maksymalna wartość naprężeń ściskających kształtowała się na poziomie  $-150$  MPa, a rozciągających  $170$  MPa. Naprężenia w przekroju IV były również proporcjonalnie mniejsze, niż w przekroju III i dochodziły maksymalnie do  $-220$  MPa w przypadku ściskania i  $75$  MPa w przypadku rozciągania.

Wyczerpanie nośności wszystkich modeli Sd przebiegło bardzo gwałtownie. Można wyciągnąć stąd wniosek, że mimo częściowego uplastycznienia niektórych przekrojów słupów, doszło w zasadzie do ich sprężystego wybożenia wzdłuż ustalonej osi obrotu. Wobec powyższego, analogicznie do badania Sg3 (por. rys. 3.19), również sporządzono wykresy prawdopodobnych naprężeń normalnych  $\sigma_x$  tuż po wyczerpaniu nośności, kiedy to na ŚRS doszło do nagłego spadku wartości obciążenia. Zostały one pokazane na rysunku 3.38 i przedstawiają już wcześniej analizowane przekroje: II, III i V. Porównując ukształtowanie naprężeń przekroju II w stanie przed i po utracie stateczności widać jak następowała ich redystrybucja. Była ona z pewnością efektem gwałtownego odciążenia słupa oraz jego





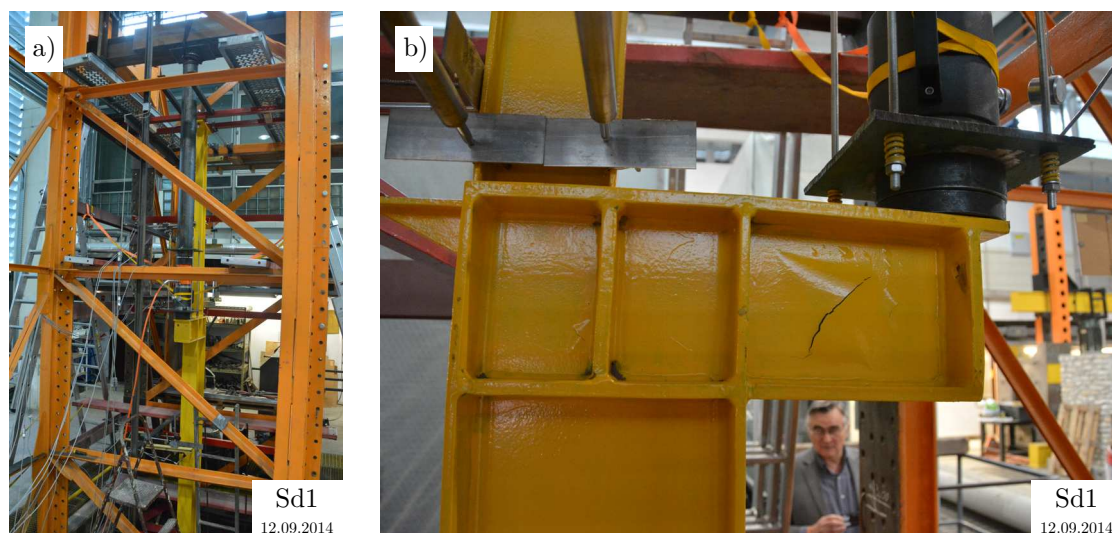
Rys. 3.38. Wartości naprężeń normalnych  $\sigma_x$  [MPa] w wybranych przekrojach słupa Sd3 po utracie stateczności

wygięcia i deformacji skrętnych. Półka górna i znajdujące się na niej punkty 3 i 4 wciąż były poddane naprężeniom ściskającym, przy czym w pierwszym z nich ich wartość bezwzględna spadła, w drugim zaś doszło do uplastycznienia. Podobnie zachowała się półka dolna. Wartości naprężeń rozciągających w punkcie 1 zmalały, natomiast w punkcie 2 zmieniły znak. Charakterystyczny rozkład naprężeń w przekroju III ewidentnie świadczy o wyboczeniu skrętnym z ustaloną osią obrotu, bowiem w punktach numer 1 i 3 naprężenia te zmieniły znak. W pierwszym z nich pojawiło się rozciąganie, a w drugim — ściskanie. Sytuacja w podporowym przekroju V była niemalże lustrzanym odbiciem warunków z przekroju III. Tendencja takiego stanu rzeczy pojawiła się już przy obciążeniu 280 kN (por. rys. 3.37). W półce górnej wartości naprężeń po utracie stateczności znacznie wzrosły, natomiast w półce dolnej w punkcie 2 zmieniły znak przechodząc w rozciąganie.

Podobnie jak w trakcie badań modeli serii Sg i tym razem niezwykle ważne było zapewnienie odpowiednich warunków podparcia głowicy. Jej zachowanie na przykładzie słupa Sd2 pokazano na rysunku 3.33. Analizując przemieszczenia  $w$  w płaszczyźnie większej sztywności zaobserwowano, że maksymalne przemieszczenie nie przekroczyło wartości 4 mm. W dwóch pozostałych modelach wartość ta była jeszcze mniejsza i wyniosła 2,8 mm w Sd1 oraz 3,3 mm w Sd3. Widać zatem, że mimo większych niż w poprzedniej serii reakcjach poziomych, wartości te były podobne. Przemieszczenie z płaszczyzny większej sztywności  $v$  było zdecydowanie mniejsze i osiągnęło maksymalną wartość 0,5 mm.

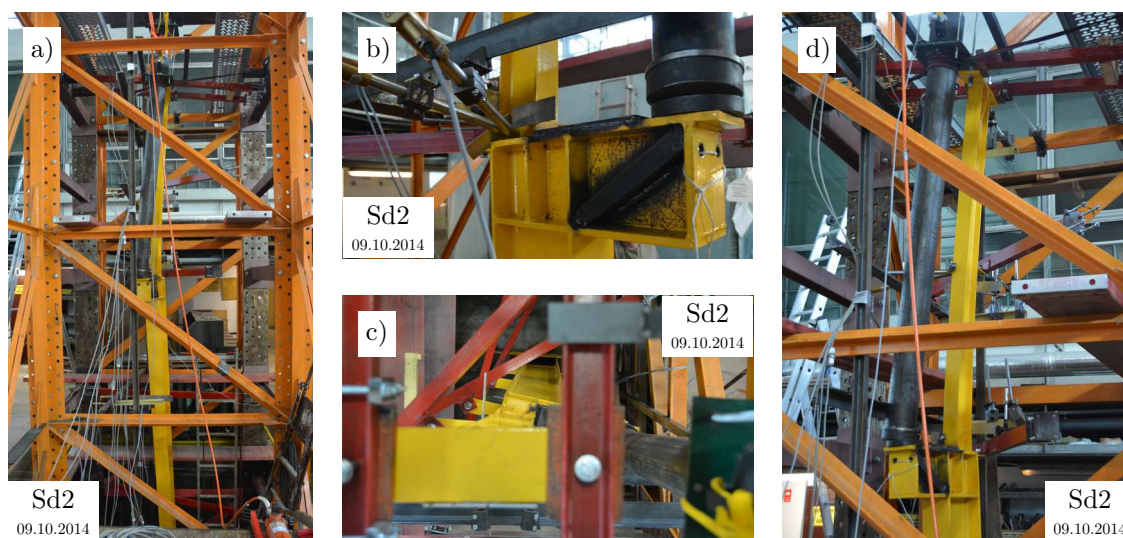
Wszystkie trzy modele słupów serii Sd wyczerpały swą nośność z warunku utraty stateczności przestrzennej względem ustalonej osi obrotu. Mimo częściowego uplastycznienia niektórych włókien w przekrojach powyżej i poniżej wspornika, to gwałtowny przebieg badania wskazuje, że mamy do czynienia w zasadzie z wyboczeniem sprężystym. Widoki zdeformowanych modeli przedstawiają rysunki 3.39–3.41.

Przebieg eksperymentu przeprowadzonego na słupie Sd1 różnił się od dwóch pozostałych przeprowadzonych w tej serii. Wyczerpanie nośności słupa nie nastąpiło nagle, ponieważ wcześniej zaobserwowano mechanizm niszczenia związany z nadmiernym ugięciem wspornika. Badanie było jeszcze przez pewien okres kontynuowane, lecz skutek nieproporcjonalnego ugięcia wspornika podjęto decyzję o zdjęciu obciążenia. Ogólny widok badanego w tej serii modelu Sd1 pokazano na rysunku 3.39a. Sposób zniszczenia wspornika zamieszczono na rysunku 3.39b. Odspojona warstwa farby oraz sposób jej pęknięcia



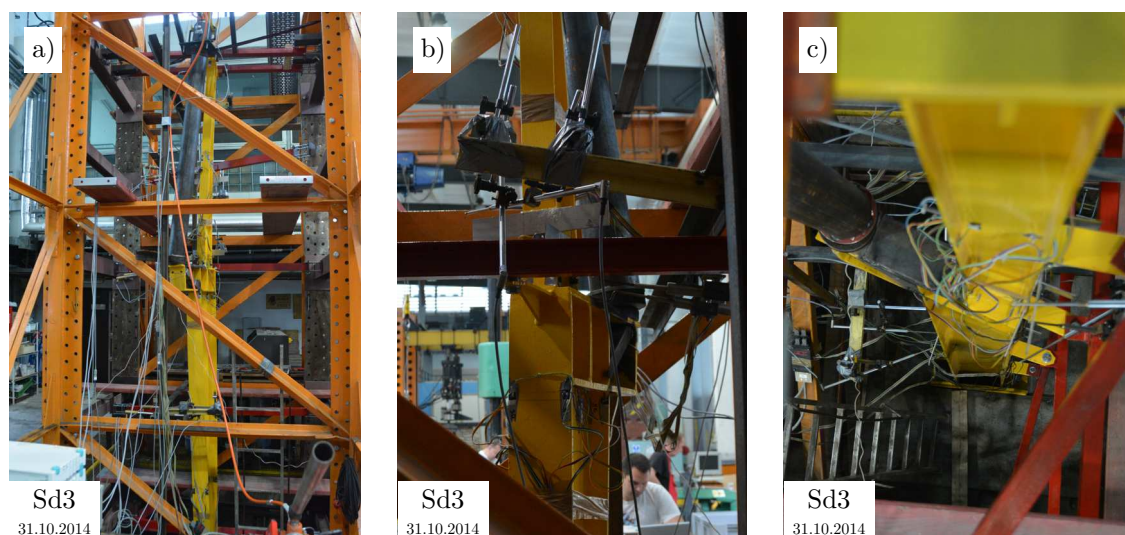
Rys. 3.39. Widoki: ogólny (a) oraz zbliżenie wspornika (b) słupa Sd1 w trakcie badań

wskazują kierunek trajektorii naprężeń i sugerują, że do uplastycznienia doszło wskutek przekroczenia odkształceń postaciowych. Nie uniemożliwiło to jednak całkowitej interpretacji wyników, ale w związku z tym podjęto decyzję o wzmocnieniu środkownika oraz pasa górnego wspornika w słupach Sd2 i Sd3.



Rys. 3.40. Widoki: ogólny (a), zbliżenie wspornika (b), z perspektywy głowicy (c) oraz górnej części (d) słupa Sd2 po utracie stateczności przestrzennej

Zachowanie oraz schemat zniszczenia kolejnych dwóch, wzmocnionych już modeli, były bardzo zbliżone. Przemieszczenia liniowe  $v$  i  $w$ , a także kąty skręcenia  $\varphi$  narastały proporcjonalnie i przeszły w krzywą o bardziej łagodnym nachyleniu. Przemieszczenia te narastały aż doszło do nagłego i bardzo gwałtownego ich wzrostu. Pojawiła się wówczas siła pozioma będąca efektem skręcenia wspornika, która ten efekt jeszcze bardziej spotęgowała. Ogólne, frontowe widoki wybouczonych słupów Sd2 i Sd3 widoczne są na rysunkach 3.40a i 3.41a. Zbliżenie samego wspornika widzianego z boku pokazano na rysunku 3.40b. Zauważyć można dospawane elementy wzmocnienia, a także dwa uszkodzone czujniki indukcyjne. W momencie utraty stateczności ich rdzenie zsunęły się z blaszek i uderzone zostały przez słup tak mocno, że ich deformacje uniemożliwiły dalszą pracę.



Rys. 3.41. Widok ogólny (a), zbliżenie wspornika od strony rygli ściennych (b) oraz z perspektywy głowicy (c) słupa Sd3 po przestrzennej utracie stateczności

O dużych deformacjach badanych modeli świadczy również położenie okrągłej rury, która przekazywała obciążenie z siłownika na wspornik. Jest to widoczne zwłaszcza na rysunkach 3.40b i 3.41b. Ten drugi rysunek przedstawia zbliżenie wspornika widziane od strony rygli ściennych. Zauważyć można, że rura, która początkowo była ustawiono pionowo, nachyliła się. Warto również zwrócić uwagę na sposób przekazywania obciążenia. Wykorzystano w tym celu widoczny przegub kulisty. Zastosowanie takiego samego elementu na zwieńczeniu zestawu rura-siłomierz-siłownik pozwoliło na wyeliminowanie dodatkowych obciążeń. Postać wyboconych słupów Sd2 i Sd3 widziana z perspektywy głowicy widoczna jest na rysunkach 3.40c i 3.41c. O tym jak gwałtownie przebiegało to zjawisko świadczą również niektóre rygle ścienne, które wyskoczyły z prowadnic. Wyraźnie widoczna jest również linia ustalonego obrotu, która przebiega w osiach łączników pomiędzy słupem i ryglami. Na rysunku 3.40d przedstawiono deformację górnej części słupa Sd2, na którym widoczne jest jego znaczne wygięcie z płaszczyzny większej sztywności.

### 3.3.2. Analiza wyników

Sposoby opracowania wyników badań doświadczalnych zostały omówione w punkcie 3.1.3. Konwencja ich prezentacji jest zgodna z tym, co zostało podane w punkcie 3.2.2. W tabeli 3.4 zestawiono wartości obciążeń krytycznych wybożenia giętno-skretnego  $N_{cr}$ , które wyznaczone zostały różnymi metodami. Podano w niej również, w zależności od zastosowanej metody, współczynnik determinacji  $R^2$  — w metodzie Southwella, a także współczynniki korelacji  $r_\varphi$  i  $r_v$  wraz z wyznacznikiem ich macierzy  $\det \mathbf{R}$  — w przypadku aproksymacji krzywymi (3.1) i (3.2). Zamieszczono w niej także wartości obciążeń granicznych  $N_{gr}$  uzyskanych bezpośrednio podczas badań doświadczalnych.

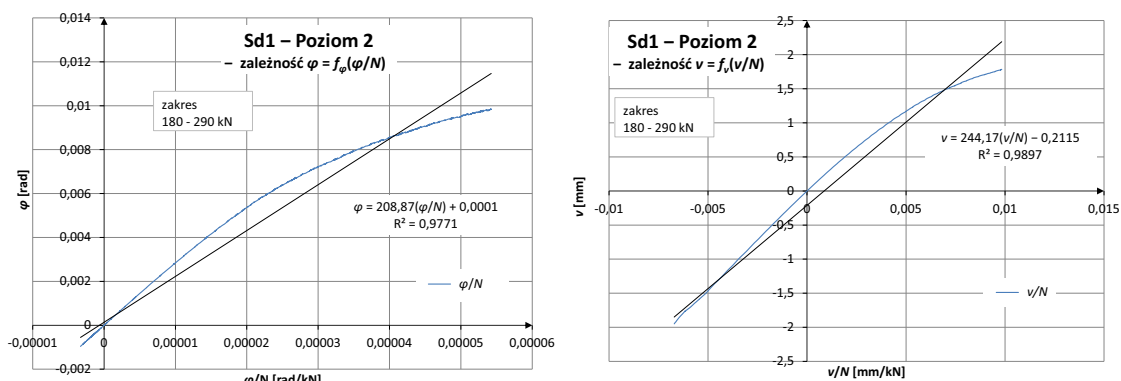
W zrealizowanych badaniach serii Sd wartości obciążeń granicznych nie wykazują już tak dobrej zbieżności jak w przypadku serii Sg. W przypadku tak złożonego stanowiska i wielu czynników mających wpływ na rezultat można stwierdzić, że jest ona zupełnie dobra, ponieważ różnica pomiędzy skrajnymi wynikami nie przekracza 13%.

Rysunek 3.42 przedstawia dwa wykresy zależności Southwella opracowane w oparciu o wyniki badań modelu Sd1 z poziomu 2 (por. rys. 3.29). Standardowo powinny być

Tabela 3.4. Nośności graniczne i krytyczne słupów serii Sd otrzymane z badań doświadczalnych

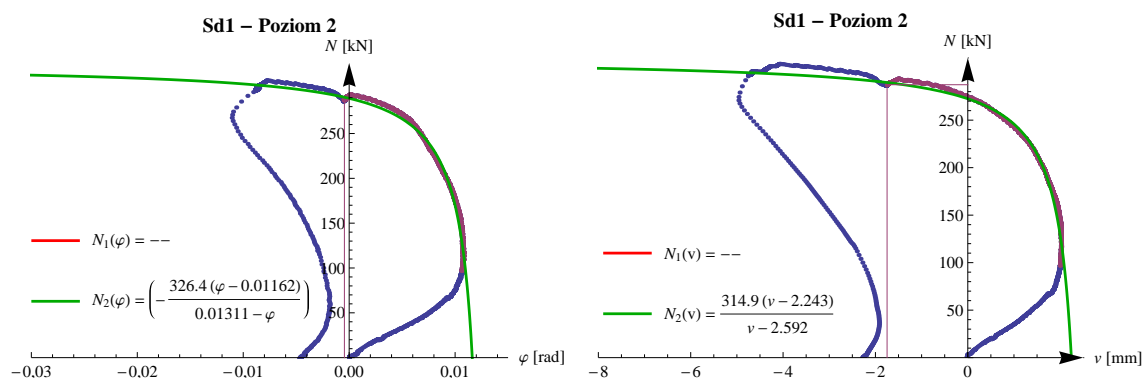
Seria	$N_{gr}$ [kN]	Poziom	Według	kąty skręcenia $\varphi$			przemieszczenia $v$			
				$N_{cr,\varphi}$ [kN]	$R^2$ lub $r_\varphi$ [–]	$\det \mathbf{R}$ [–]	$N_{cr,v}$ [kN]	$R^2$ lub $r_v$ [–]	$\det \mathbf{R}$ [–]	
Sd1	312	1	South	218	0,9817		259	0,9933		
			(3.1)	–	–	–	–	–	–	
			(3.2)		319	0,8230	0,0044	328	0,9179	0,0186
				South	209	0,9771		244	0,9897	
		2	(3.1)	–	–	–	–	–	–	
			(3.2)	326	0,8463	0,0039	315	0,8780	0,0285	
3		South	206	0,9740		204	0,9701			
		(3.1)	–	–	–	–	–	–		
	(3.2)		318	0,8331	0,0013	333	0,9414	0,0030		
		South	310	0,9612		303	0,9731			
Sd2	272	1	(3.1)	283	0,9725	0,0543	277	0,9674	0,0641	
			(3.2)	372	0,9886	0,0047	324	0,9669	0,0054	
		2	South	334	0,9820		287	0,9768		
			(3.1)	336	0,9821	0,0355	233	0,9462	0,1047	
			(3.2)		372	0,9876	0,0054	305	0,9806	0,0087
				South	318	0,9867		299	0,9845	
3	(3.1)	303	0,9738	0,0516	241	0,9507	0,0962			
	(3.2)	322	0,9818	0,0089	308	0,9617	0,0060			
Sd3	292	1	South	335	0,9937		354	0,9903		
			(3.1)	363	0,9489	0,0996	406	0,9654	0,0680	
			(3.2)		299	0,9130	0,0899	336	0,8978	0,0466
				South	345	0,9958		334	0,9967	
		2	(3.1)	412	0,9668	0,0654	354	0,9478	0,1017	
			(3.2)	342	0,9426	0,0599	322	0,8873	0,0513	
3		South	330	0,9986		325	0,9990			
		(3.1)	352	0,9463	0,1044	309	0,9288	0,1372		
	(3.2)	319	0,8855	0,0512	315	0,8988	0,0433			

one sporządzone o relację, która została opracowana w oparciu o liniowo-sprężysty odcinek przemieszczeń na ścieżkach równowagi statycznej. Niestety w przypadku tego modelu krzywe ułożyły się niestandardowo, ponieważ najpierw przemieszczenia wzrastały w jednym kierunku, a następnie zaczęły się zmniejszać. Przeszły przez początkowy punkt swojego położenia i ostatecznie narastały w kierunku przeciwnym do pierwotnego. Wykres Southwella dla takiej nietypowej ścieżki nie układał się liniowo, dlatego zakres punktów wziętych do analizy został mocno ograniczony. Ucięto początkowy odcinek relacji siła-przemieszczenie i sporządzono zależność Southwella dla obciążeń z zakresu 180–290 kN. Tak otrzymane wartości obciążeń krytycznych wyniosły  $N_{cr,\varphi,South} = 209$  kN — w przypadku kątów skręcenia oraz  $N_{cr,v,South} = 244$  kN — w przypadku wygięcia z płaszczyzny większej sztywności. Podobnego rzędu wartość otrzymano także na pozostałych poziomach (por. tab. 3.4), gdyż przyjmowały je z przedziału 204–259 kN. Niestety otrzymanych w ten sposób wielkości nie można uznać za prawidłowe, ponieważ są mniejsze niż obciążenie



Rys. 3.42. Wykresy zależności Southwella z badań modelu Sd1 w poziomie 2

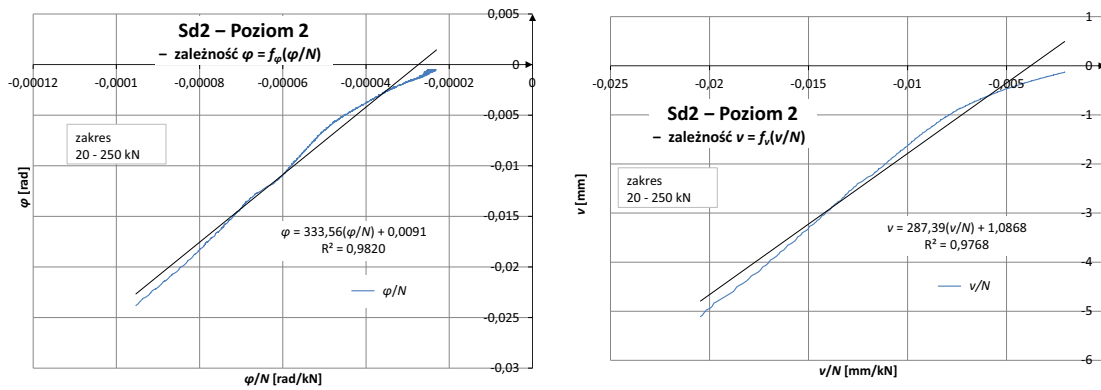
graniczne. Dowodzi to tego, że często stosowana metoda Southwella nie zawsze może być zastosowana, mimo zupełnie dobrych wartości współczynników determinacji. W przypadku przemieszczeń liniowych na poziomie 1 wyniósł on nawet  $R^2 = 0,9933$ . Dobitym tego przykładem jest właśnie słup Sd1.



Rys. 3.43. Aproksymacja ŚRS modelu Sd1 w poziomie 2 krzywymi (3.1) i (3.2)

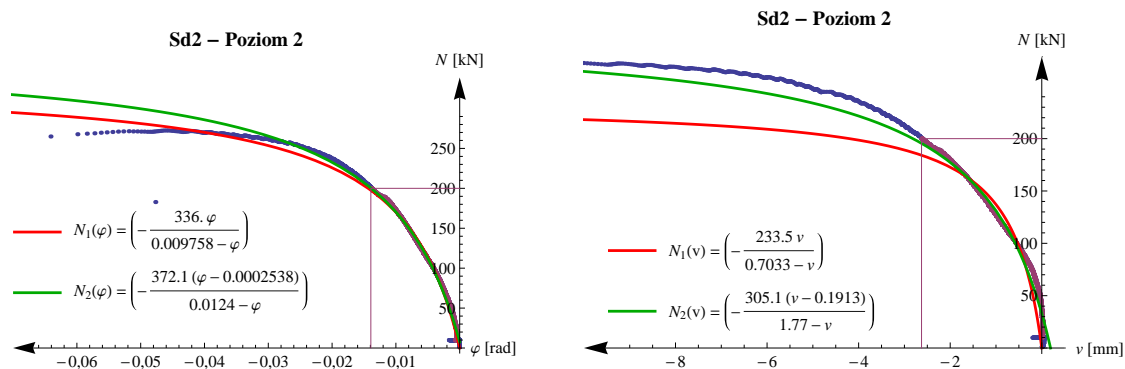
W przypadku tak „niezdecydowanego” słupa, lepiej wypadła druga metoda polegająca na aproksymacji ŚRS zmodyfikowanymi krzywymi. Jednak mimo wielu prób dopasowania funkcji do wykresu, udało się to jedynie z krzywą (3.2). Jest ona to tego znacznie lepiej dostosowana dzięki dodatkowemu parametrowi  $c$ , który jest miejscem zerowym funkcji  $N_2(f)$ . Aproksymacja tej krzywej wiązała się jednak z zawężeniem przedziału punktów pomiarowych. Odrzucono dolne odcinki ŚRS, których wartości zwiększały się wraz ze wzrostem obciążenia i ograniczono się do przedziału od ok. 100 do ok. 290 kN. Otrzymane w ten sposób wartości obciążeń krytycznych pochodzących z kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych są do siebie zbliżone. Otrzymano przy tym jednak dość małe współczynniki korelacji, gdyż w poziomie 1 dla kątów skręcenia wyniósł on nawet  $r_\varphi = 0,823$ . Jak już wspomniano wcześniej nieliniowa aproksymacja krzywą (3.1) w ogóle nie była możliwa, dlatego zarówno w tabelicy 3.4, jak i na rysunku 3.43 wartości te nie zostały podane.

Wybrane, przykładowe wykresy zależności Southwella będące wynikiem badań doświadczalnych modelu Sd2 zostały pokazane na rysunku 3.44. Sporządzono je na podstawie ścieżek równowagi statycznej poziomu 2 (por. rys. 3.31). Zachowanie słupa Sd2 w trakcie eksperymentu nie było już tak nietypowe. W tym przypadku nie napotkano trudności przy opracowywaniu wyników badań z wykorzystaniem metody Southwella, dlatego też zakres analizowanych punktów pomiarowych był znacznie szerszy i obejmował przedział



Rys. 3.44. Wykresy zależności Southwella z badań modelu Sd2 w poziomie 2

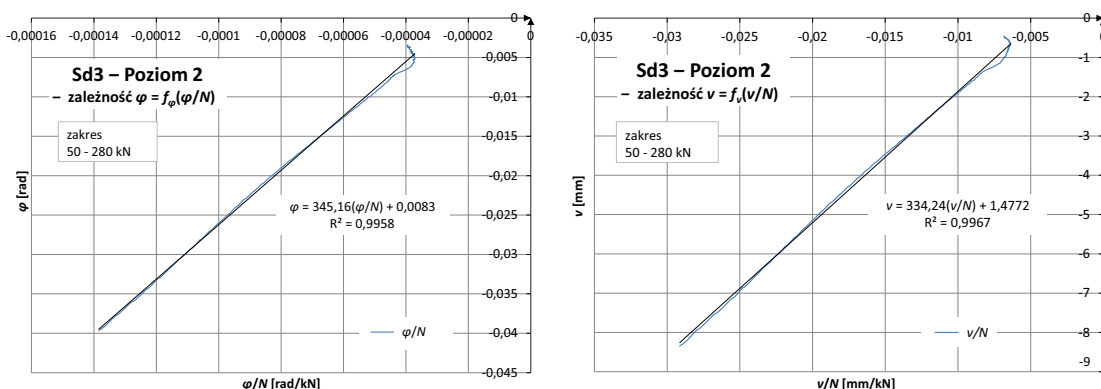
50–250 kN. Niestety zależności sporządzone dla kątów skręcenia i przemieszczeń liniowych nie wykazały idealnej zgodności, ponieważ różnica między nimi sięgała 14%.



Rys. 3.45. Aproksymacja ŚRS modelu Sd2 w poziomie 2 krzywymi (3.1) i (3.2)

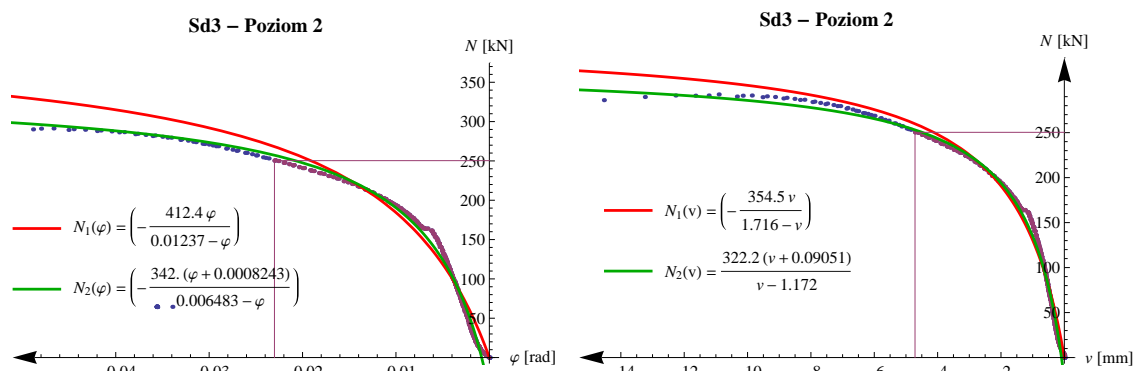
Odpowiednie krzywe, którymi aproksymowano ścieżki równowagi statycznej tego samego słupa w celu wyznaczenia wartości obciążeń krytycznych stateczności sprężystej pokazano na rysunku 3.45. Zarówno krzywa (3.1), jak i krzywa (3.2), w przypadku danego przemieszczenia, dały bardzo rozbieżne wyniki, których względne różnice dochodziły do 23%. Jeszcze większa niezgodność wystąpiła, jeżeli porówna się obciążenia krytyczne uzyskane z kątów skręcenia i przemieszczeń liniowych, ponieważ w przypadku krzywej (3.1) sięgnęła ona 30%. Wszystkie aproksymacje, co zaznaczono na wykresach pionowymi i poziomymi liniami, sporządzone były w oparciu o liniowo-sprężysty zakres pracy statycznej modelu. W modelu Sd2 obejmował on zakres obciążeń 20–200 kN. Porównując wartości sił krytycznych opracowanych na pozostałych poziomach pomiarowych należy zauważyć, że te wyznaczone wg (3.1) są niższe od tych sporządzonych wg (3.2). Niektóre z nich są nawet mniejsze, aniżeli obciążenie graniczne, co jest dla krzywej (3.1) dyskwalifikujące.

Teoretycznie najbardziej reprezentacyjne wyniki powinny pochodzić z analizy odczytów wykonanych na poziomie 2, dlatego graficzną interpretację zależności Southwella modelu Sd3 również ograniczono do tego jednego poziomu. Pokazano ją na rysunku 3.46. Przygotowana została w oparciu o ŚRS z rysunku 3.31. Można zauważyć, że zależność ta charakteryzuje się najlepszą miarą dopasowania, ponieważ zarówno dla kątów skręcenia, jak i przemieszczeń liniowych współczynnik determinacji  $R^2$  wynosi ponad 0,996. Lekkie zawirowania i wychylenia widoczne są jedynie w górnej części wykresu, lecz nie wpływały zbyt mocno na ostateczny rezultat. Przedział obciążeń punktów pomiarowych, z którego



Rys. 3.46. Wykresy zależności Southwella z badań modelu Sd3 w poziomie 2

zależność ta została wykreślona mieścił się granicach 50–280 kN. Uzyskano również bardzo zbliżone wartości obciążeń krytycznych z kątów skręcenia i przemieszczeń liniowych, ponieważ różnica między nimi wynosiła nieco ponad 3%.



Rys. 3.47. Aproksymacja ŚRS modelu Sd3 w poziomie 2 krzywymi (3.1) i (3.2)

Krzywe (3.1) i (3.2), które są wynikiem nieliniowej aproksymacji ŚRS słupa Sd3 z poziomu 2, pokazane zostały na rysunku 3.47. Widać, że uzyskane tą metodą wartości obciążeń krytycznych sprężystego wyboczenia giętno-skrętnego są w większości zgodne z obciążeniami otrzymanymi metodą Southwella. Rozbieżności pomiędzy obiema metodami, a także pomiędzy wartościami otrzymanymi z kątów skręcenia i przemieszczeń liniowych sięgają 9%. Na tym tle odstaje wynik oparty na aproksymacji kątów skręcenia krzywą (3.1), ponieważ różnica pomiędzy tym wynikiem, a pozostałymi wynosi 17%. Należy zatem stwierdzić, że w tym konkretnym przypadku zarówno metoda Southwella, jak i aproksymacja krzywą (3.2) dają zadowalające i zbieżne rezultaty.

Statystyczne opracowanie poszczególnych wyników zostało zestawione w tabeli 3.5. Zawiera ona średnie arytmetyczne wartości obciążeń krytycznych sprężystej stateczności przestrzennej wyznaczone dla trzech modeli serii Sd, na poszczególnych poziomach i w zależności od zastosowanej metody. Tabela przygotowana została dokładnie w takiej samej konwencji jak tabela 3.2, zatem jej koncepcja została szczegółowo opisana na stronie 52. Wypada nadmienić jednak, że średnie wyrażenia arytmetyczne w układzie poziomym odnoszą się do przemieszczeń na poszczególnych poziomach, z kolei średnie w układzie pionowym do poszczególnych poziomów w zależności od kątów skręcenia lub przemieszczeń liniowych. Pogrubione zaś wyrażenia są średnią arytmetyczną całego zbioru obciążeń krytycznych  $N_{cr,\varphi}$  oraz  $N_{cr,v}$  na wszystkich trzech poziomach pomiarowych.

Tabela 3.5. Nośności krytyczne otrzymane z badań modeli serii Sd

Model	Poziom	Obciążenia krytyczne [kN] w zależności od zastosowanej metody								
		Southwell			krzywa (3.1)			krzywa (3.2)		
		$N_{cr,\varphi}$	$N_{cr,v}$	$N_{cr,\acute{s}r}$	$N_{cr,\varphi}$	$N_{cr,v}$	$N_{cr,\acute{s}r}$	$N_{cr,\varphi}$	$N_{cr,v}$	$N_{cr,\acute{s}r}$
Sd1	1	218	259	239	–	–	–	319	328	324
	2	209	244	227	–	–	–	326	315	321
	3	206	204	205	–	–	–	318	333	326
	średnia	211	236	<b>223</b>	–	–	–	321	325	<b>323</b>
Sd2	1	310	303	307	283	277	280	372	324	348
	2	334	287	311	336	233	285	372	305	339
	3	318	299	309	303	241	272	322	308	315
	średnia	321	296	<b>309</b>	307	250	<b>279</b>	355	312	<b>334</b>
Sd3	1	335	354	345	363	406	385	299	336	318
	2	345	334	340	412	354	383	342	322	332
	3	330	325	328	352	309	331	319	315	317
	średnia	337	338	<b>337</b>	376	356	<b>366</b>	320	324	<b>322</b>

Tabela 3.6. Statystyczne opracowanie wyników całego zbioru obciążeń krytycznych serii Sd

Model	Southwell			krzywa (3.1)			krzywa (3.2)		
	$N_{cr,\acute{s}r}$ [kN]	$s_{South}$ [kN]	$V_{South}$ [%]	$N_{cr,\acute{s}r}$ [kN]	$s_1$ [kN]	$V_1$ [%]	$N_{cr,\acute{s}r}$ [kN]	$s_2$ [kN]	$V_2$ [%]
Sd1	223	20,87	9,36	–	–	–	323	6,31	1,95
Sd2	309	14,86	4,81	279	35,13	12,59	334	27,84	8,34
Sd3	337	9,65	2,86	366	34,91	9,54	322	14,04	4,36
Wszystkie	290	50,80	17,52	323	55,91	17,31	<b>326</b>	55,62	5,86

Tabela 3.6 zawiera statystyczne opracowanie całego zbioru obciążeń krytycznych serii Sd z podziałem na poszczególne poziomy. Znajdują się w niej (por. tab. 3.3) pogrubione wartości wyznaczone w tablicy 3.5 oraz ich miary dyspersji takie jak odchylenie standardowe  $s$  i współczynnik zmienności  $V$ . W przypadku ich indywidualnej analizy otrzymano wartości odchyleń standardowych z przedziału 6,31–35,13 kN oraz współczynników zmienności rzędu 1,95–12,59%. Syntetyczne spojrzenie na wszystkie badania serii Sd nasuwa bardziej ogólne wnioski. Otóż o ile odchylenia standardowe są, niezależnie od stosowanej metody, wielkością podobnego rzędu i kształtującą się na poziomie 50–55 kN, o tyle porównanie wartości współczynników zmienności jednoznacznie wskazuje na najbardziej uniwersalną metodę. Względna miara zróżnicowania przy zastosowaniu krzywej (3.2) wynosi jedynie 5,86%. Znacznie mniej aniżeli w badaniach serii Sg. Prowadzi to do wniosku, że obciążenie krytyczne sprężystego wyboczenia giętno-skrętnego modelu Sd jest równa 326 kN.

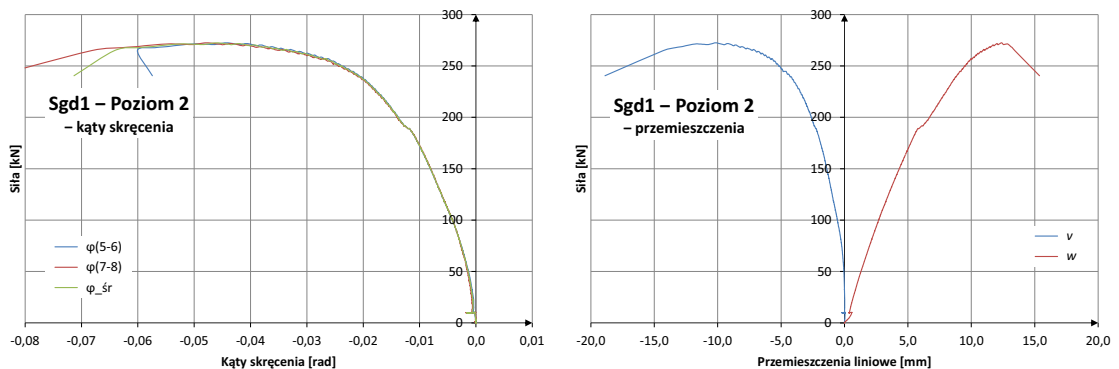


### 3.4. Modele serii Sgd

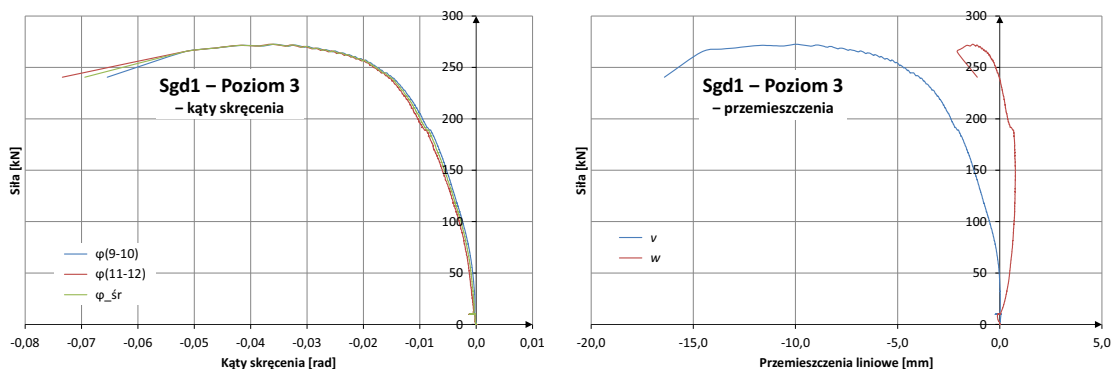
Seria badań modelowych Sgd obejmowała swym zakresem trzy modele od Sgd1 do Sgd3. Jak już wspomniano wcześniej (por. pkt. 3.1), nie były to modele nowe, lecz te, które pozostały po badaniach serii Sg. Należy przy tym wyjaśnić, że numeracja słupów Sgd nie pokrywała się z numeracją stosowaną przy Sg. Oznaczono je następująco: Sg3  $\rightarrow$  Sgd1, Sg1  $\rightarrow$  Sgd2, Sg2  $\rightarrow$  Sgd3. W związku z tym, że ta dodatkowa seria badań nie była początkowo planowana, zredukowano nieco jej zakres. O ile w trakcie pierwszego badania słupa Sgd1 rejestrowano przemieszczenia na wszystkich poziomach, to podczas badań dwóch kolejnych słupów zakres pomiarów obejmował jedynie poziom 2 i głowicy. Było to związane ograniczonym dostępem zarówno do laboratorium, jak i samych laborantów.

#### 3.4.1. Przebieg badań

Przebieg badań doświadczalnych dodatkowych trzech modeli serii Sgd był podobny jak przy serii Sg i Sd (por. pkt 3.2.1, 3.3.1). Zanim przystąpiono do samego badania, w tym przypadku podobnie jak w słupach Sd wzmocniono wsporniki przez dospawanie do środka ukośnych żeber z rur kwadratowych oraz płaskowników do pasa górnego.



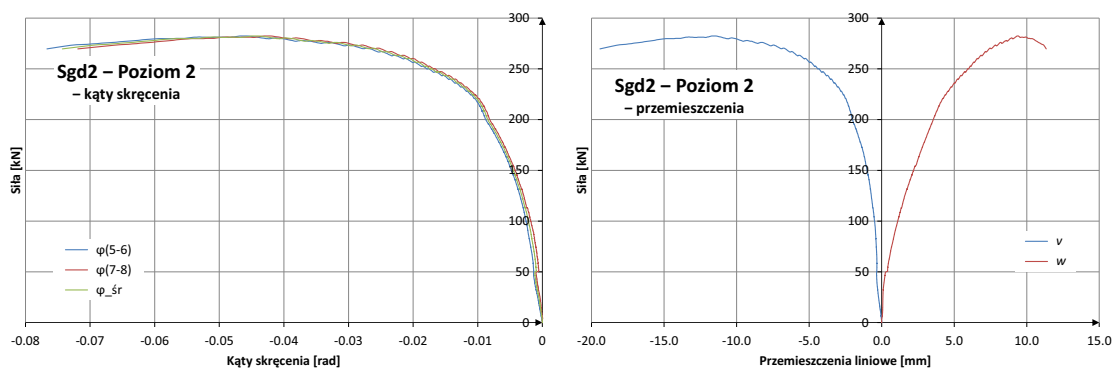
Rys. 3.48. ŚRS kątów skreńczenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sgd1 w poziomie 2



Rys. 3.49. ŚRS kątów skreńczenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sgd1 w poziomie 3

Odpowiedź słupa Sgd1 na przyłożone obciążenia była zbliżona do zachowania modeli Sd2 i Sd3. Wraz ze wzrostem siły pojawiło się wygięcie  $w$  słupa w płaszczyźnie większej sztywności. Największa zanotowana przez urządzenia pomiarowe wartość wyniosła 13 mm, co odpowiada wynikom zarówno wcześniejszym, jak i teoretycznym. Analizując ścieżki równowagi statycznej można zauważyć, że w początkowej fazie eksperymentu w zakresie

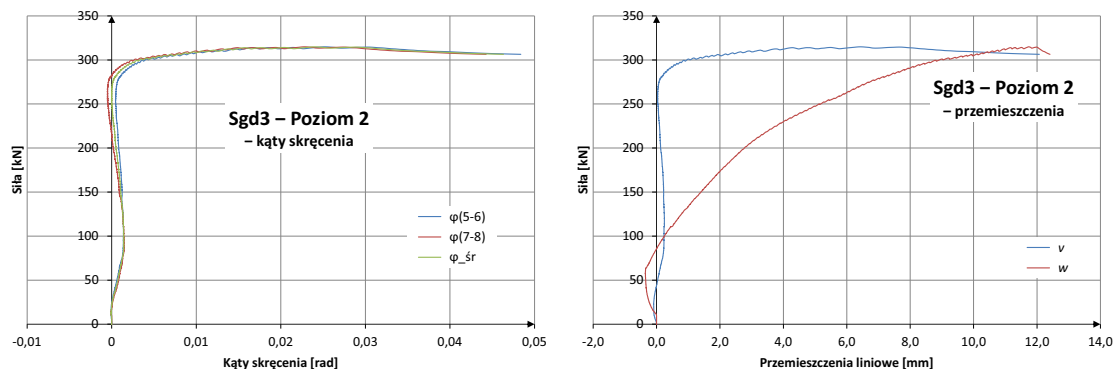
do 50 kN prawie nie odnotowano wzrostu przemieszczeń liniowych  $v$ . Inaczej było z kątami skręcenia  $\varphi$ , które przyrastały od samego początku. Zaś powyżej tej wartości, oba przemieszczenia przyrastały proporcjonalnie do siły nacisku aż do momentu, gdy siła ta przekroczyła 240 kN. W porównaniu z wcześniejszymi dwoma modelami wykazały one wyjątkową zgodność. Wtedy to nachylenia ścieżek stało się bardziej łagodne i przemieszczenia zaczęły wzrastać niewspółmiernie do obciążenia. Warto nadmienić, że zarejestrowane w trakcie badania przemieszczenia liniowe  $v$  i kąty skręcenia  $\varphi$  przyrastały w kierunku ujemnych wartości przyjętego układu współrzędnych, tzn. odwrotnie, aniżeli w badaniu Sg3. Widać zatem, że powstałe wówczas trwałe deformacje, nie miały istotnego znaczenia na zachowanie się słupa. Wraz z osiągnięciem obciążenia granicznego  $N_{gr,Sgd1} = 272,5$  kN doszło do wyczerpania nośności słupa wskutek sprężystej utraty stateczności przestrzennej. Wybrane ścieżki równowagi statycznej modelu Sgd1 przedstawiają rysunki 3.48 — w poziomie 2 i 3.49 — w poziomie 3.



Rys. 3.50. ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sgd2 w poziomie 2

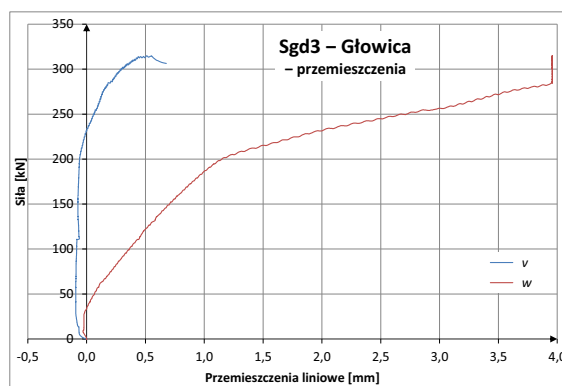
Zachowanie kolejnego, drugiego model w serii Sgd wykazało wyjątkową zgodność z trzema poprzednimi słupami. Oszacowano, że w tym przypadku początkowy liniowo-sprężysty odcinek stosowalności prawa Hooke'a obowiązywał do 240 kN. Powyżej tej wartości, przemieszczenia  $\varphi$  i  $v$  wzrastały nieproporcjonalnie w stosunku do wymuszanego obciążenia. Sam moment utraty stateczności był również gwałtowny i niespodziewany, niemniej jednak w tym, jak i w poprzednim przypadku nie doszło do strat związanych ze zniszczeniem aparatury. Nieco mniejsze były natomiast przemieszczenia liniowe  $w$  w płaszczyźnie większej sztywności, gdyż w kulminacyjnym momencie nie przekroczyły 10 mm. Nieznacznie większe zanotowano zaś obciążenie graniczne —  $N_{gr,Sgd2} = 282,4$  kN. ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych słupa Sgd2 w poziomie 2 pokazano na rysunku 3.50.

Niespodziewana okazała się za to odpowiedź ostatniego modelu Sgd3. Wykreślone na podstawie odczytów z czujników indukcyjnych ścieżki równowagi statycznej z poziomu 2 pokazano na rysunku 3.51. Zaskakujące jest zwłaszcza wygięcie  $w$  w płaszczyźnie większej sztywności. Widać, że na samym początku badania w przedziale do 10 kN zanotowano przyrost obciążenia bez wyraźnego wzrostu przemieszczeń. Dopiero powyżej tej wartości przemieszczenia lekko wzrastały, ale w przeciwnym kierunku aniżeli należałoby się tego spodziewać. Maksymalna ujemna wartość  $w$  wyniosła jedynie  $-0,35$  mm, a po przekroczeniu obciążenia 60 kN nastąpiła zmiana trendu w kierunku dodatnim. Po osiągnięciu 86 kN wygięcia  $w$  słupa na poziomie 2 znalazły się w punkcie początkowym i sukcesywnie wzrastały dochodząc w chwili zniszczenia do 12 mm. Jeszcze bardziej zaskakujące są wykresy pozostałych przemieszczeń, zwłaszcza tych liniowych  $v$  z płaszczyzny większej sztywności.



Rys. 3.51. ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych modelu Sgd3 w poziomie 2

Wskazują one na wyraźne niezdecydowanie słupa podczas badań. Z chwilą rozpoczęcia badań zaczęły przyjmować wartości ujemne dochodzące na poziomie 25 kN do 0,03 mm, następnie zmieniły zwrot, aby przy 50 kN ponownie przyjąć pierwotne położenie. Podobna sytuacja wystąpiła jeszcze dwukrotnie. Najpierw przy 110 kN i 0,25 mm, a następnie na poziomie obciążenia 250 kN i przy przemieszczeniu liniowym  $v$  rzędu 0,03 mm. Powyżej tych wartości przemieszczenia zaczęły przyrastać, początkowo prawie niezauważalnie, a następnie mniej więcej na poziomie 280 kN już bardzo gwałtownie. Osiągnięte wówczas maksymalne obciążenie graniczne wyniosło  $N_{gr,Sgd3} = 314,8$  kN. Podobny kształt przybrały również kąty skręcenia. Jest to oczywiście kwestią losową, ale warto zauważyć, że słup Sgd3 wygiął się w przeciwną stronę, aniżeli wcześniejsze modele serii Sd i Sgd.

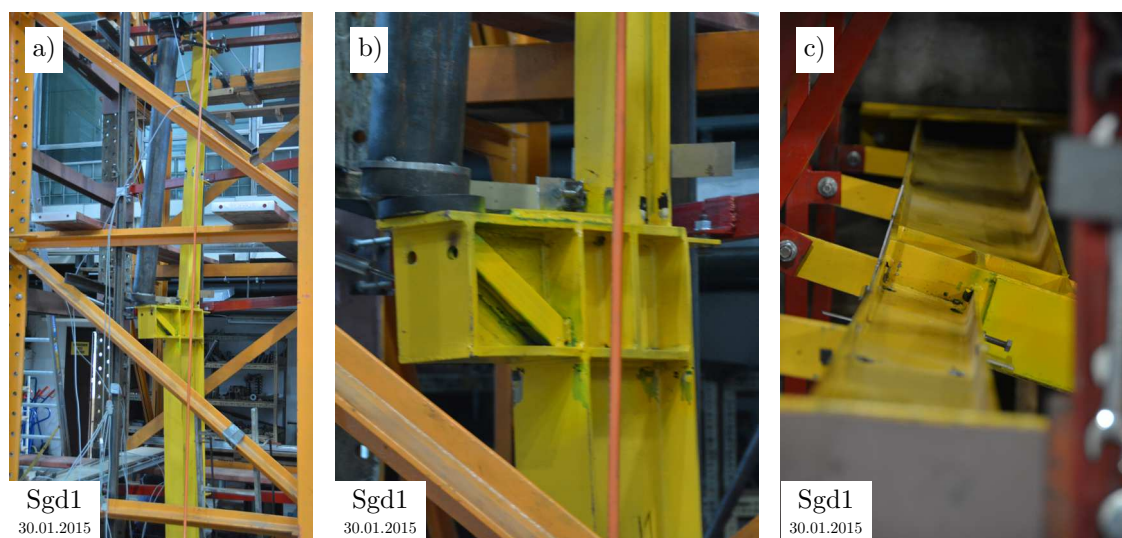


Rys. 3.52. ŚRS przemieszczeń liniowych modelu Sgd3 w poziomie głowicy

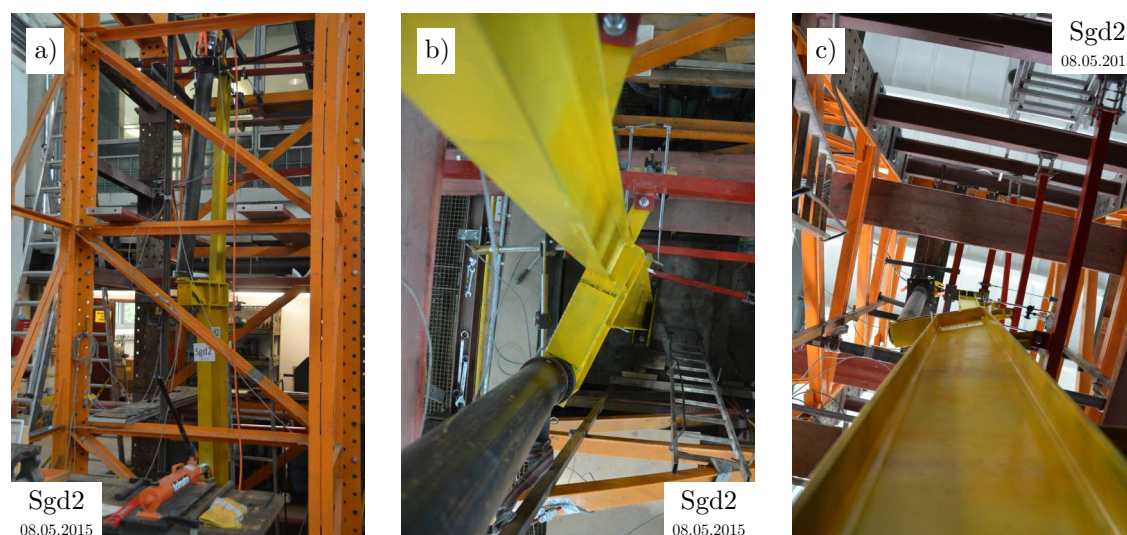
Warto razem zwrócić uwagę na warunki podparcia głowicy słupa. I tym razem uzyskano pełną zgodność z wcześniej otrzymanymi wynikami, gdyż maksymalne przemieszczenia głowicy  $w$ , w płaszczyźnie większej sztywności słupów, w momencie wyczerpania nośności nie przekroczyły 4 mm. Także kształty powstałych krzywych wskazywały na to, że charakter podparcia jest niemalże liniowo-sprężysty. Delikatnie odbiega od tego ŚRS słupa Sgd3, co pokazano na rysunku 3.52. Widać, że ma ona charakter podwójnie liniowo-sprężysty, ponieważ na poziomie 200 kN zauważyć można zmianę jej nachylenia. Podobnie jak we wcześniej badanych modelach i tym razem udało się zapewnić odpowiednie warunki podparcia z płaszczyzny większej sztywności, ponieważ przemieszczenia liniowe  $v$  ograniczone zostały do 0,5 mm. O ile w przypadku modeli Sgd1 i Sgd2 ścieżki równowagi statycznej przyrastały przyjmując wartości ujemne, o tyle w ostatnim modelu przemieszczenia gło-

wicy zmieniły znak. Przy obciążeniu 230 kN przeszły przez zero, a następnie przyrastały już w kierunku dodatnim.

Zarówno postać utraty stateczności modeli serii Sgd, jak i przebieg samych badań, jakościowo były bardzo zbliżone do tego co uzyskano w serii Sd. Wszystkie trzy modele wyczerpały swą nośność z warunku utraty stateczności przestrzennej w zakresie sprężysto-plastycznym, co miało swoje odzwierciedlenie w nagłym i gwałtownym wyboczeniu słupów. Na rysunkach od 3.53 do 3.55 zamieszczono fotografie zdeformowanych słupów wykonane w ostatniej fazie każdego badania.

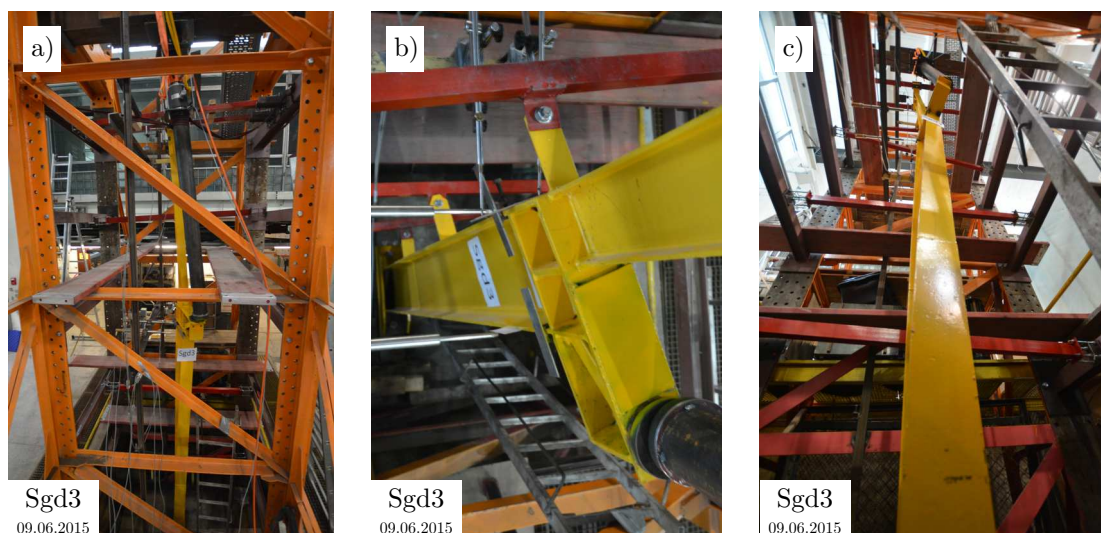


Rys. 3.53. Widoki: ogólny (a), zbliżenie wspornika (b) oraz z perspektywy głowicy słupa Sgd1 po wyczerpaniu nośności



Rys. 3.54. Widoki: ogólny (a), zbliżenie wspornika (b) oraz z perspektywy podstawy słupa Sgd2 po wyczerpaniu nośności

Widoki ogólne zamieszczone na rysunkach 3.53a, 3.54a i 3.55a przedstawiają widziane od frontu, wyboczone słupy Sgd1-3 znajdujące się w stanowisku badawczym. Należy zauważyć, że w przypadku dwóch pierwszych modeli przemieszczenia, w stosunku do przyjętego układu współrzędnych, przyjmowały wartości ujemne. Chociaż ze względu na deformacje wstępne, które były efektem badań serii Sg, spodziewano się innego zachowania.



Rys. 3.55. Widoki: ogólny (a), z perspektywy poziomu 1 (b) oraz z perspektywy podstawy słupa Sgd3 po wyczerpaniu nośności

Tylko w ostatnim słupie, w momencie utraty stateczności, przemieszczenia przyrastały w kierunku dodatnim. Fotografia na rysunku 3.53b przedstawia w zbliżeniu wspornik zniszczonego słupa Sgd1. Widoczne w tym poziomie jest jego znaczne wygięcie, zwłaszcza jeżeli za punkt odniesienia przyjmie się wychylenie pionowej rury przekazującej obciążenie z siłownika względem jego kulistego łożyska. Kolejne ujęcie widoczne na rysunku 3.53c przedstawia również słup Sgd1, lecz widoczny z poziomu głowicy pomiędzy jej przeciwskrętnymi stężeniami. Gwałtowny przebieg utraty stateczności doprowadził do wyskoczenia rygla ściennego z poziomu 2 pomiędzy prowadnic, ale w odniesieniu do pozostałych rygli skrócenie przekroju względem ustalonej osi obrotu jest doskonale widoczne. Daje się zauważyć również, że oś ta przebiega wzdłuż osi śrub łączących rygle ze słupem. Fotografie słupów, Sgd2 i Sgd3 wykonane z perspektywy poziomu 1, są przedstawione na rysunkach 3.54b i 3.55b. Warto zwrócić uwagę na znajdujące się na nich czujniki indukcyjne rejestrujące przemieszczenia liniowe  $v$  z płaszczyzny większej sztywności. Na rysunku 3.54b widać, że impet wspornika obrócił czujnik nr 6 o 90 stopni, natomiast na 3.55b można zauważyć ten sam czujnik w nieco innej sytuacji. Model Sgd3 ostatecznie zdeformował się w przeciwnym kierunku, dlatego tym razem pomiary były rejestrowane jedynie do maksymalnego wysunięcia się czujnika nr 6. Fotografie widoczne na rysunkach 3.54c i 3.55c przedstawiają modele Sgd2 oraz Sgd3 z innej perspektywy, ponieważ zostały wykonane od strony podstawy stanowiska badawczego. Słup Sgd2 został pokazany z boku, natomiast Sgd3 — od frontu. Fotografie te są kolejnym dowodem na to, że do wyczerpania nośności doszło w wyniku wyboczenia giętno-skrętnego względem ustalonej osi obrotu. Stanowiły ją punktowe stężenia poprzeczne, których idea działania jest na obu rysunkach doskonale widoczna. Dostrzec można ponadto omówione wcześniej stężenia przeciwskrętne głowicy, a także znaczne wychylenie rury zwieńczonej siłownikiem.

### 3.4.2. Analiza wyników

Wyniki badań doświadczalnych zostały opracowane przy zastosowaniu metody Southwella oraz aproksymacji ścieżek równowagi statycznej krzywymi (3.1) i (3.2). Więcej informacji związanych z zastosowaniem tych metod zamieszczono w punkcie 3.1.3. Sposób ich

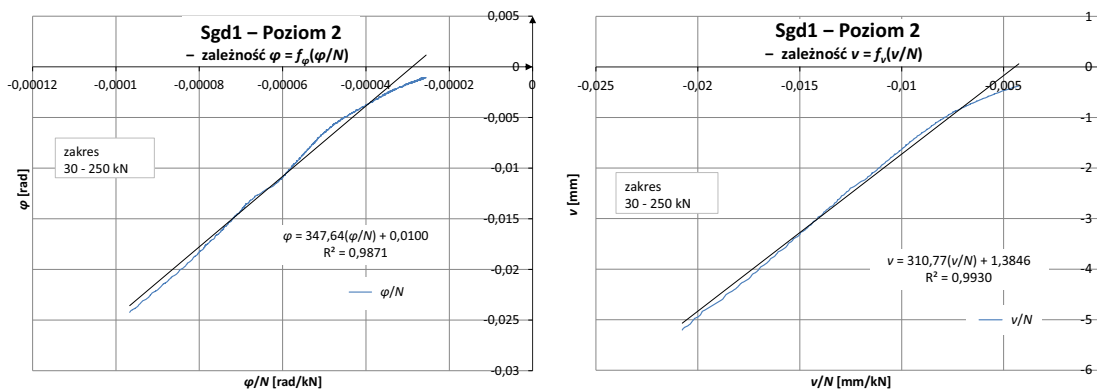
Tabela 3.7. Nośności graniczne i krytyczne słupów serii Sgd otrzymane z badań doświadczalnych

Seria	$N_{gr}$ [kN]	Poziom	Według	kąty skręcenia $\varphi$			przemieszczenia $v$		
				$N_{cr,\varphi}$ [kN]	$R^2$ lub $r_\varphi$ [—]	$\det \mathbf{R}$ [—]	$N_{cr,v}$ [kN]	$R^2$ lub $r_v$ [—]	$\det \mathbf{R}$ [—]
Sgd1	272	1	South	326	0,9718		314	0,9790	
			(3.1)	288	0,9722	0,0548	280	0,9668	0,0653
			(3.2)	386	0,9891	0,0040	337	0,9682	0,0045
			South	348	0,9871		311	0,9930	
			(3.1)	336	0,9811	0,0375	278	0,9580	0,0822
			(3.2)	382	0,9878	0,0049	272	0,9470	0,0295
Sgd2	282	2	South	321	0,9977		316	0,9984	
			(3.1)	334	0,9533	0,0913	356	0,9556	0,0868
			(3.2)	326	0,9576	0,0344	319	0,9036	0,0361
			South	313	0,9984		314	0,9989	
			(3.1)	321	0,5831	0,6599	277	0,7339	0,4613
			(3.2)	—	—	—	343	0,9107	0,0000
Sgd3	315	2	South	313	0,9984		314	0,9989	
			(3.1)	321	0,5831	0,6599	277	0,7339	0,4613
			(3.2)	—	—	—	343	0,9107	0,0000

prezentacji jest analogiczny do sposobu, w jakim wyniki te zostały już przedstawione w punktach 3.2.2 i 3.3.2.

Tabela 3.7 zawiera zestawienie wartości obciążeń krytycznych wybożenia giętno-skrętnego  $N_{cr}$ . Zostały one wyznaczone zarówno metodą Southwella, jak i poprzez aproksymację ścieżek krzywą (3.1) lub (3.2). Podobnie jak w tabelach 3.1 i 3.4, zamieszczono w niej, w zależności od zastosowanej metody, współczynniki determinacji  $R^2$  — w metodzie Southwella oraz współczynniki korelacji  $r_\varphi$ ,  $r_v$  wraz z wyznacznikiem ich macierzy  $\det \mathbf{R}$  — w aproksymacji krzywymi (3.1) i (3.2). W tabeli 3.7 podano ponadto wartości obciążeń granicznych  $N_{gr}$  otrzymanych bezpośrednio podczas badań doświadczalnych.

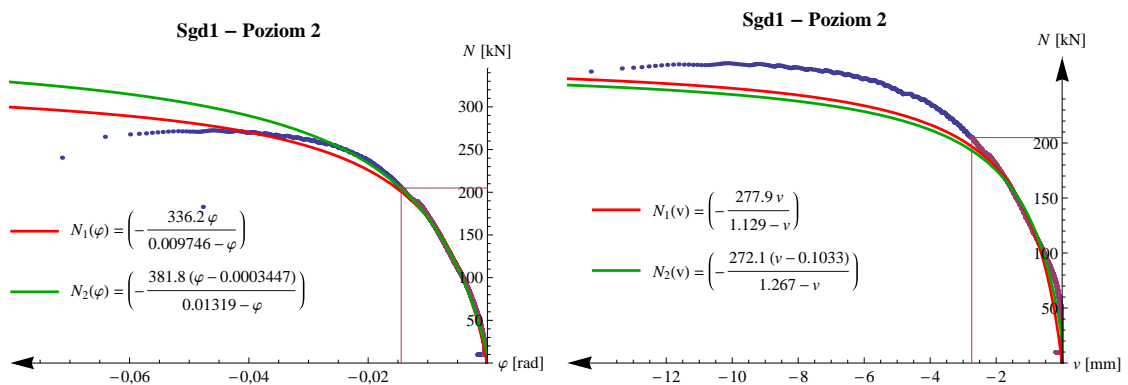
Wartości obciążeń granicznych  $N_{gr}$  otrzymane bezpośrednio z badań doświadczalnych modeli Sgd okazały się być bardzo zbliżone do wartości uzyskanych z serii Sd, mimo, że słupy Sgd były wstępnie odkształcone. Różnica pomiędzy średnimi wartościami obcią-



Rys. 3.56. Wykresy zależności Southwella z badań modelu Sgd1 w poziomie 2

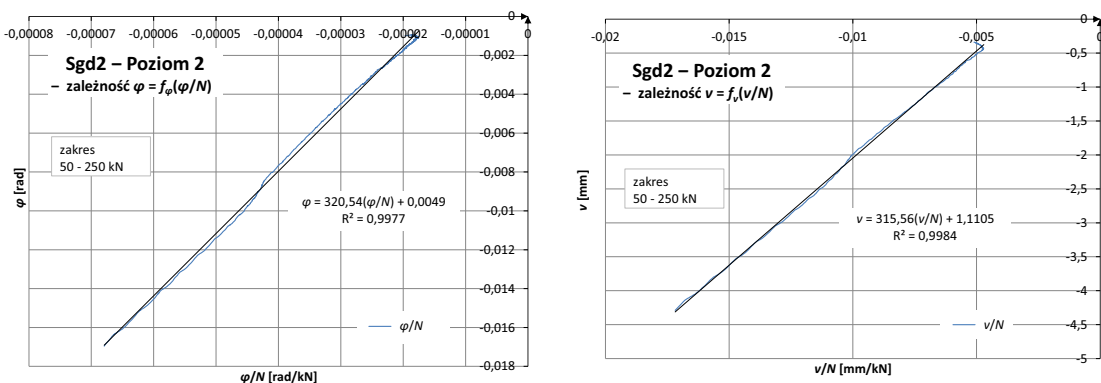
zeń granicznych  $N_{gr}$  wynosi około 5%, natomiast różnica pomiędzy skrajnymi sięga 14%. Podobnie jak to miało miejsce w serii Sd.

Wykresy zależności Southwella sporządzone w oparciu o wyniki badań doświadczalnych z poziomu 2 modelu Sgd1 (por. rys. 3.48) zamieszczono na rysunku 3.56. Zostały one opracowane na podstawie średnich kątów skręcenia  $\varphi$  i przemieszczeniach liniowych  $v$  tworzących prostoliniowy odcinek na ścieżkach równowagi statycznej. W tym przypadku, przy wyznaczaniu obciążeń krytycznych wybożenia giętno-skrętnego, ograniczono się do sił z zakresu 30–250 kN. Zauważyć można, że dyskretna zależność Southwella nie układa się idealnie liniowo, niemniej jednak wychylenia względem aproksymowanej prostej są niewielkie. Świadczą o tym wartości współczynników determinacji, które dla obu przemieszczeń wynoszą ok.  $R^2 = 0,99$ .



Rys. 3.57. Aproksymacja ŚRS modelu Sgd1 w poziomie 2 krzywymi (3.1) i (3.2)

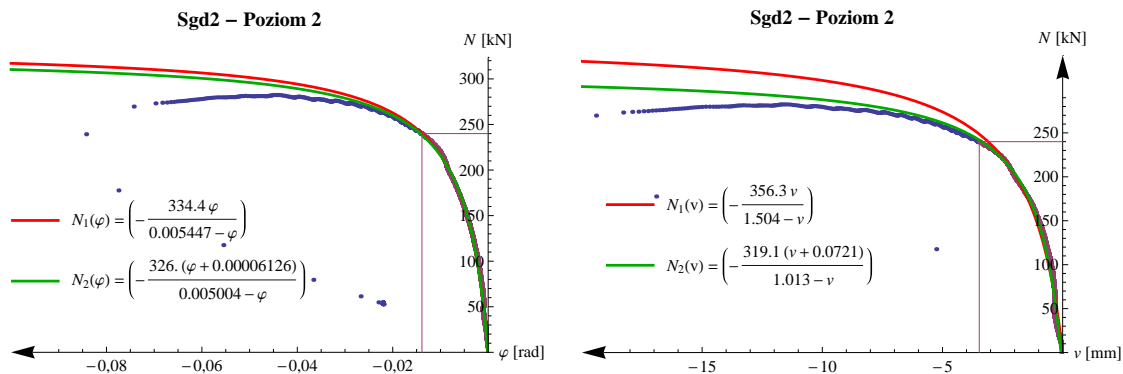
Graficzną interpretację kolejnej, stosowanej w pracy metody, przedstawiono na rysunku 3.57. Widoczna jest na nim aproksymacja ŚRS przemieszczeń słupa Sgd1 na poziomie 2 ( $\varphi$  i  $v$ ) krzywymi (3.1) i (3.2). Zakres poszczególnych punktów pomiarowych był w tym przypadku nieco mniejszy, ponieważ ograniczono go do ok. 220 kN. Podobnie jak we wszystkich wcześniejszych tego typu wykresach, zakres ten zobrazowano pionowymi i poziomymi liniami łączącymi konkretny punkt na ŚRS z osiami układu.



Rys. 3.58. Wykresy zależności Southwella z badań modelu Sgd2 w poziomie 2

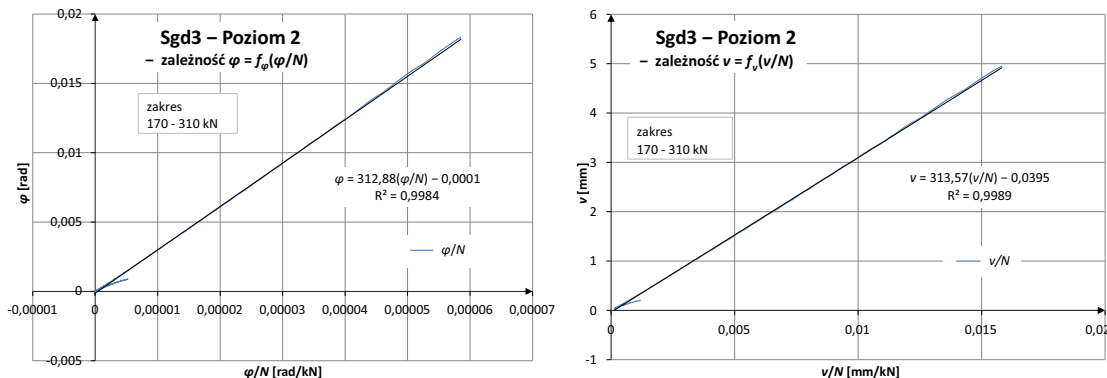
Dwa następne słupy bieżącej serii, czyli Sgd2 i Sgd3, nie były już tak obszernie analizowane. Żeby zmniejszyć pracochłonność prowadzonych badań, ograniczono rejestrację przemieszczeń jedynie do poziomu 2. Zależności Southwella słupa Sgd2 pokazano na rysunku 3.58. Zostały one opracowane w oparciu o ścieżki równowagi przemieszczeń pokazane na rysunku 3.50. Należy zauważyć, że już dyskretna zależności przyjmują cha-

rakterystykę prostoliniową, czego dowodem jest bliski jedności współczynnik determinacji. Wartości obciążeń krytycznych zostały wyznaczone bazując na zakresie punktów pomiarowych mieszczących w granicach 50–250 kN. Otrzymano ponadto bardzo dobrą zbieżność wyników opracowanych na podstawie kątów skręcenia i przemieszczeń liniowych, ponieważ odchylenie standardowe  $s_{South}$  tych wartości wyniosło 2,5 kN, a współczynnik zmienności  $V_{South}$  niespełna 0,8%. Należy jednak pamiętać, że w tym przypadku liczba wyników jest ograniczona do dwóch



Rys. 3.59. Aproxymacja ŚRS modelu Sgd2 w poziomie 2 krzywymi (3.1) i (3.2)

Na rysunku 3.59 pokazano aproksymacje ŚRS przemieszczeń ( $\varphi$  i  $v$ ) w poziomie 2 słupa Sgd2 zmodyfikowanymi na bazie hiperboli krzywymi (3.1) i (3.2). W ich opracowaniu ograniczono się do wykorzystania wartości punktów pomiarowych z zakresu obciążeń do 240 kN. W tym konkretnym przypadku otrzymane wartości obciążeń krytycznych w zależności od rodzaju przemieszczenia ( $\varphi$  lub  $v$ ) czy od rodzaju krzywej, różnią się między sobą nie więcej jak 10%, co wydaje się być dobrym wynikiem.

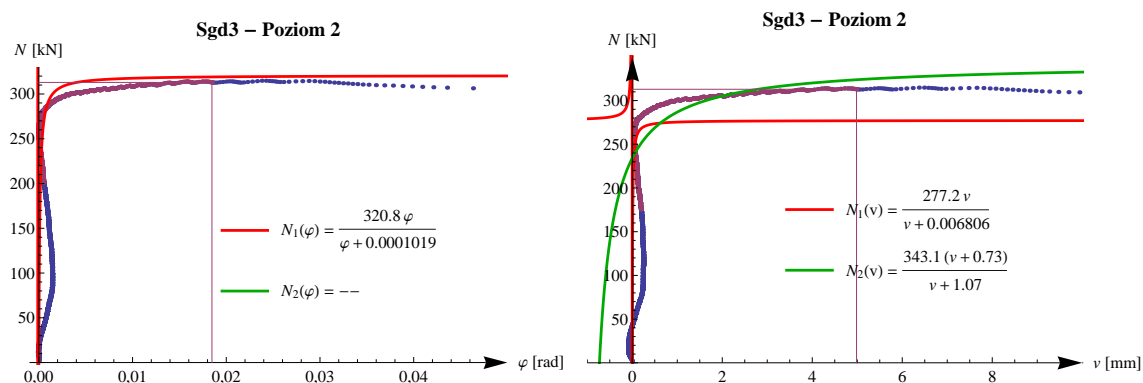


Rys. 3.60. Wykresy zależności Southwella z badań modelu Sgd3 w poziomie 2

Zastosowanie metody Southwella w przypadku badań modelu Sgd3 było znacznie trudniejsze, niż we wcześniej przebadanych modelach tej serii. Wynikało to z „niezdecydowanego” zachowania słupa, co zostało już pokazane na rysunku 3.51. Wykreślenie zależności Southwella w postaci dyskretnej punktów pomiarowych w zakresie obciążeń do ok. 300 kN spowodowało, że jednemu argumentowi można było przypisać dwie wartości. Dlatego zakres ten należało ograniczyć do przedziału, w którym zależność ta będzie charakteryzować się monotonicznością. W przypadku słupa Sgd3, dla którego ŚRS sporządzono w poziomie 2, zakres obciążeń wynosił 170–310 kN. Otrzymano wówczas wartości obciążeń krytycznych, które na podstawie kątów skręcenia  $\varphi$  i przemieszczeń liniowych  $v$  kształtowały



się na poziomie 313 kN i były nieco niższe niż wartość zarejestrowanego obciążenia granicznego  $N_{gr,Sgd3} = 315$  kN. Graficzną interpretację metody Southwella w odniesieniu do słupa Sgd3 pokazano na rysunku 3.60.



Rys. 3.61. Aproksymacja ŚRS modelu Sgd3 w poziomie 2 krzywymi (3.1) i (3.2)

Metodę Southwella w zastosowaniu do przemieszczeń zarejestrowanych w poziomie 2 słupa Sgd3 zweryfikowano metodą polegającą na aproksymacji ŚRS krzywymi (3.1) i (3.2). Jej efekty przedstawiono na rysunku 3.61. Należy zauważyć, że w tym przypadku nie spełniła pokładanych w niej oczekiwań. Żeby wartości uzyskanych w ten sposób sprężystych obciążeń krytycznych była reprezentatywna, powinna obejmować zakresem aproksymacji odcinki na ŚRS, na których obowiązuje prawo Hooke'a. Niestety żadna z dostępnych w wykorzystywanej aplikacji [238] metod nieliniowej aproksymacji nie dała zadowalającego rezultatu. Dopiero znaczne zawężenie zakresu wartości punktów pomiarowych do przedziału mniej więcej 180–310 kN umożliwiło jakąkolwiek aproksymację. Niestety na podstawie kątów skręcenia  $\varphi$  nadal niemożliwe okazało się zastosowanie krzywej (3.2). Wiarygodny wynik otrzymano natomiast w oparciu o krzywą (3.1), mimo najgorszych spośród wszystkich serii wartości współczynnika determinacji  $r_\varphi$  i wyznacznika z ich macierzy  $\det \mathbf{R}$ , które wynoszą odpowiednio 0,58 i 0,66. Dlatego należałoby zachować wobec niego pewną rezerwę. W stosunku do przemieszczeń liniowych  $v$ , tym razem aproksymacja było możliwa w przypadku obu krzywych, jednak tym razem większe zaufanie budzi wynik uzyskany w oparciu o krzywą (3.2). Czego dowodem są współczynnik korelacji  $r_v$  na poziomie 0,91 oraz bliska zera wartość wyznacznika z ich macierzy  $\det \mathbf{R}$ . Zaś krzywa (3.1), w tym przypadku, charakteryzuje się nie tylko dużo gorszymi parametrami, ale także wartością obciążenia krytycznego poniżej wartości obciążenia granicznego.

Średnie wartości sprężystych obciążeń krytycznych przestrzennej utraty stateczności w zależności od rodzaju przemieszczeń lub analizowanego poziomu zamieszczono w tabeli 3.8. Mimo pewnych ograniczeń, została ona sporządzona w takiej samej konwencji jak tabele 3.2 i 3.5. Ograniczenia wynikają z tego, że w przypadku słupów Sgd2 i Sgd3 pomiary przemieszczeń wykonywane były jedynie w poziomie 2. Z tego powodu w tabeli 3.8, przy tych dwóch modelach, nie ma podsumowania ze wszystkich poziomów.

Statystyczne opracowanie całego zbioru wyników obciążeń krytycznych sprężystego wyboczenia giętno-skrętnego wzdłuż ustalonej osi obrotu zamieszczono w tabeli 3.9. Jej koncepcja jest oparta na takich samych założeniach jak to było w przypadku tabel 3.6 i 3.3. Niestety w związku z ograniczeniem przekrojów, w których dokonywano pomiarów przemieszczeń jedynie do poziomu 2, należy poprawnie interpretować wartości w niej zamieszczone. Jedynie dane dotyczących słupa Sgd1 mogą być porównywane z wartościami

Tabela 3.8. Nośności krytyczne otrzymane z badań modeli serii Sgd

Model	Poziom	Obciążenia krytyczne [kN] w zależności od zastosowanej metody								
		Southwell			krzywa (3.1)			krzywa (3.2)		
		$N_{cr,\varphi}$	$N_{cr,v}$	$N_{cr,\acute{s}r}$	$N_{cr,\varphi}$	$N_{cr,v}$	$N_{cr,\acute{s}r}$	$N_{cr,\varphi}$	$N_{cr,v}$	$N_{cr,\acute{s}r}$
Sgd1	1	326	314	320	288	280	284	386	337	362
	2	348	311	329	336	278	307	382	272	327
	3	325	310	317	334	319	327	322	299	310
	średnia	333	311	<b>322</b>	320	292	<b>306</b>	363	303	<b>333</b>
Sgd2	2	321	316	<b>318</b>	334	356	<b>345</b>	326	319	<b>323</b>
Sgd3	2	313	314	<b>313</b>	321	277	<b>299</b>	–	343	–

Tabela 3.9. Statystyczne opracowanie wyników całego zbioru obciążeń krytycznych serii Sgd

Model	Southwell			krzywa (3.1)			krzywa (3.2)		
	$N_{cr,\acute{s}r}$ [kN]	$s_{South}$ [kN]	$V_{South}$ [%]	$N_{cr,\acute{s}r}$ [kN]	$s_1$ [kN]	$V_1$ [%]	$N_{cr,\acute{s}r}$ [kN]	$s_2$ [kN]	$V_2$ [%]
Sgd1	322	13,1	4,1	301	23,8	7,9	312	19,3	6,2
Sgd2 <sup>a</sup>	318	2,5	0,8	345	10,9	3,2	323	3,5	1,1
Sgd3 <sup>a</sup>	313	0,3	0,1	299	21,8	7,3	343 <sup>b</sup>	0,0 <sup>b</sup>	0,0 <sup>b</sup>
Wszystkie	<b>318</b>	10,8	3,4	317	27,6	8,7	333	34,3	10,3

<sup>a</sup> Wartości opracowano tylko dla wyników z poziomu 2.

<sup>b</sup> Wartości opracowano tylko dla przemieszczeń liniowych  $v$ .

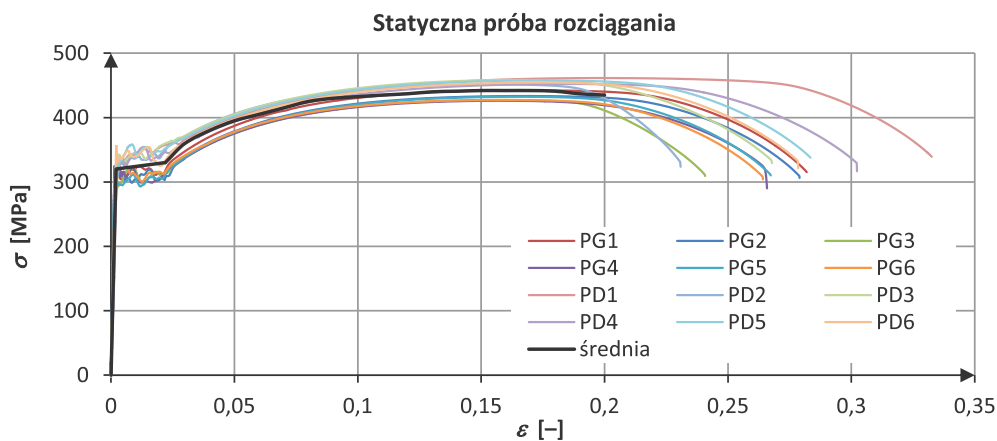
otrzymanymi dla wcześniej przebadanych modeli, ponieważ zostały wyznaczone zarówno w oparciu o komplet wyników na wszystkich trzech poziomach, jak i o kąty skręcenia  $\varphi$ , a także przemieszczenia liniowe  $v$ . Pozostałe natomiast, dotyczące modeli Sgd2 i Sgd3 już nie, ponieważ wyznaczone zostały na zbyt małym — dwuelementowym zbiorze. Wyjaśnić należy także zerowe wartości odchylenia standardowego  $s_2$  i współczynnika zmienności  $V_2$  w przypadku wyników otrzymanych krzywą (3.2), co wynika z faktu, że tym przypadku otrzymano tylko jedną wartość obciążenia krytycznego opartą na przemieszczeniach liniowych  $v$ . Sporządzone zatem podsumowanie tej serii badań doświadczalnych, jest w związku z powyższym nieco na wyrost. Niemniej jednak wynika z niego, że obciążenie krytyczne sprężystego wybożenia giętno-skrętnego serii Sgd wynosi 318 kN i tym razem jest wynikiem metody Southwella. Taki wniosek można wyciągnąć po analizie współczynników zmienności  $V$ . Właśnie przy metodzie Southwella współczynnik zmienności jest najniższy i wynosi 3,4%.

### 3.5. Badania materiałowe

Po zakończeniu badań modelowych przeprowadzono badania materiałowe, obejmujące badania wytrzymałościowe stali oraz badania jej składu chemicznego. Ich celem była kompleksowa ocena charakterystyk materiałowych stali, z której wykonano badane elementy oraz próba przyporządkowania ich do konkretnego gatunku stali konstrukcyjnej.

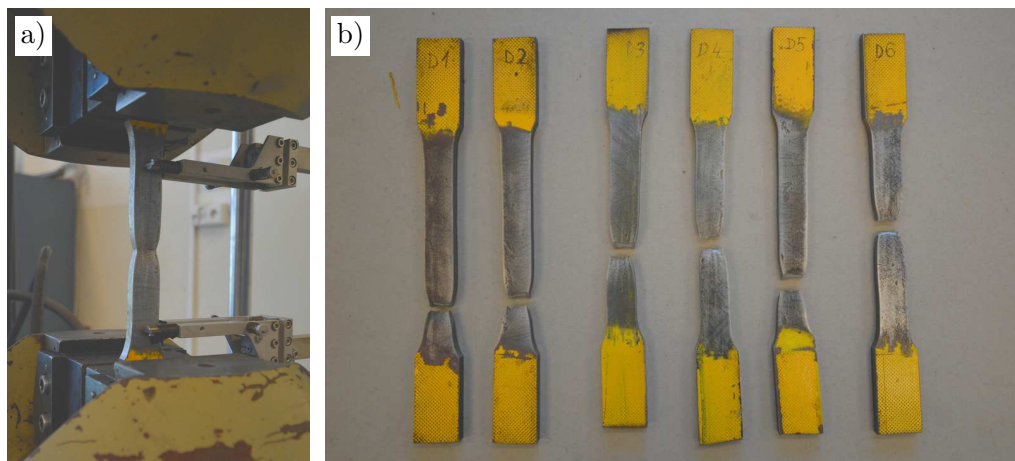
### 3.5.1. Statyczna próba rozciągania

Statyczną próbę rozciągania przeprowadzono w Laboratorium Konstrukcji Budowlanych (dawniej Laboratorium Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej) na zmodernizowanej przez firmę Zwick maszynie wytrzymałościowej UTF400. Przygotowano w tym celu dwanaście próbek wyciętych zgodnie z wytycznymi podanymi w [260]. Próbki pobrano z pasów w sposób losowy z miejsc, w których element podczas eksperymentu pracował w zakresie sprężystym. Przyjęta nomenklatura oznacza, że próbki znakowane jako PD zostały pobrane z części dolnej, natomiast próbki PG z części górnej wybranych słupów. Samo badanie oraz obróbkę otrzymanych rezultatów wykonano na podstawie zaleceń normy [261]. Uzyskane wyniki statycznej próby rozciągania stali przedstawiono na rysunku 3.62.



Rys. 3.62. Wyniki badań wytrzymałościowych stali

Wszystkie badane próbki uległy zniszczeniu na długości bazy pomiarowej. Na rysunku 3.63a jest przykładowy widok próbki serii PD w szczękach maszyny wytrzymałościowej w czasie statycznej próby rozciągania, natomiast na rysunku 3.63b pokazano wszystkie zbadane próbki serii PD po zniszczeniu.



Rys. 3.63. Próbki do badań materiałowych części dolnej (PD): a) w trakcie próby rozciągania, b) widok ogólny po zniszczeniu

Na podstawie wyników badań wytrzymałościowych wyznaczono średnie wartości oraz odchylenia standardowe charakterystycznych dla stali parametrów takich jak moduł sprę-

żystości podłużnej  $E$ , granicę plastyczności  $R_e$ , wytrzymałość na rozciąganie  $R_m$  oraz wydłużalność przy zniszczeniu próbki pięciokrotnej  $A_{5,65}$ . Odpowiednie wartości zestawiono w tabeli 3.10 osobno dla liczących po sześć próbek zbiorów PG i PD oraz dla wszystkich próbek łącznie.

Tabela 3.10. Wartości średnie i odpowiednie odchylenia standardowe wielkości uzyskanych z badań materiałowych

	$E$ [GPa]	$s_E$ [GPa]	$R_e$ [MPa]	$s_{R_e}$ [MPa]	$R_m$ [MPa]	$s_{R_m}$ [MPa]	$A_{5,65}$ [%]	$s_{A_{5,65}}$ [%]
PG	205,49	12,38	311,99	5,07	431,54	5,57	26,61	1,34
PD	182,67	13,73	326,83	3,24	455,83	3,39	25,22	1,54
Wszystkie	194,08	17,35	319,41	8,55	443,69	12,99	25,92	1,60

W oparciu o wartości cech mechanicznych podanych w tablicy 3.10 sporządzono średnią ścieżkę równowagi statycznej, którą dla porównania naniesiono na rysunek 3.62. Otrzymane wartości w większości spełniają wymagania stawiane stalom konstrukcyjnym stosowanym w budownictwie. Wyjątkiem jest moduł sprężystości podłużnej, którego średnia wartość wynosi  $E = 194$  GPa i jest poniżej zalecanym przez normy [252, 257] wartościom. Zauważono również sporą rozbieżność w poszczególnych próbach, czego efektem jest stosunkowo duże odchylenie standardowe. Analizując nachylenie części sprężystej krzywej  $\sigma - \varepsilon$  widać sporą różnicę pomiędzy badaniami próbek pobranych z części górnej, a badaniami próbek pobranych z części dolnej. Średnie wartości modułu Younga dla tych dwóch serii wynoszą odpowiednio:  $E_{PG} = 205$  GPa i  $E_{PD} = 183$  GPa.

### 3.5.2. Badania składu chemicznego

Celem jednoznacznego określenia parametrów badanych elementów zlecono również badanie ich składu chemicznego. Przygotowano do tego dwie kwadratowe próbki, które zostały pobrane z losowo wybranych części górnej (SG) i dolnej (SD) badanych słupów. Badanie przeprowadzono w przedsiębiorstwie Alucast Wrocław Sp. z o.o. metodą spektrometrii emisyjnej na spektrometrze BAIRD-DV4. Wyniki badań składu chemicznego oraz maksymalne dopuszczalne przez normy PN-EN 10025-2 [255] i PN-H-84020:1988 [262] procentowe zawartości poszczególnych pierwiastków przedstawiono w tabeli 3.11.

Tabela 3.11. Procentowa zawartość poszczególnych pierwiastków w badanej stali

	C	Mn	Si	P	S	Cr	Ni	Mo	V	Cu	Ti	Al
Wyniki analiz												
SG	0,133	0,572	0,181	0,024	0,008	<0,000	0,016	0,004	0,001	0,026	0,003	<0,001
SD	0,164	0,563	0,164	0,013	0,013	<0,000	0,018	0,003	0,001	0,037	0,003	<0,001
Wymagania												
S235JR <sup>a</sup>	0,17	1,4	–	0,035	0,035	–	0,012	–	–	0,55	–	–
St3S <sup>b</sup>	0,22	1,1	0,35	0,050	0,050	0,3	0,300	–	–	0,30	–	–

<sup>a</sup> według PN-EN 10025-2 [255],

<sup>b</sup> według PN-H-84020:1988 [262].

Porównując skład chemiczny przebadanych próbek z wartościami maksymalnymi dopuszczonymi przez normy PN-EN 10025-2 [255] i PN-H-84020:1988 [262] można zauważyć, że większość pierwiastków spełnia wymagania obu norm. Jedynie procentowa zawar-

tość niklu nieznacznie przekracza dopuszczoną przez normę PN-EN 10025-2 [255]. Zatem w oparciu o normę hutniczą [262] i po przeanalizowaniu procentowej zawartości poszczególnych pierwiastków w składzie chemicznym stali, badane próbki zakwalifikowano jako stal konstrukcyjną gatunku St3S (S235JR).

### 3.6. Podsumowanie badań doświadczalnych

Jako podsumowanie rozdziału, w tabeli 3.12 zamieszczono zbiorcze zestawienie obciążeń granicznych i krytycznych zbadanych modeli słupów. Zamieszczono w niej obciążenia wyznaczone dla poszczególnych modeli, jak i średnie obciążenia krytyczne dla danej serii.

Tabela 3.12. Zestawienie obciążeń granicznych i krytycznych zbadanych modeli słupów

Model słupa	Obciążenie graniczne [kN]	Obciążenie krytyczne [kN]	Średnie obc. krytyczne [kN]
Sg1	306	391	
Sg2	253	370	371
Sg3	247	354	
Sd1	312	323	
Sd2	272	334	326
Sd3	292	322	
Sgd1	272	322	
Sgd2	282	318	318
Sgd3	315	313	

Przeprowadzone w ramach pracy doktorskiej badania doświadczalne stężonych, pełnościennych słupów stalowych ze skokową, niesymetryczną zmianą przekroju poprzecznego wykazały, że tego rodzaju słupy tracą swą nośność wskutek sprężystego, sprężystoplastycznego lub plastycznego wyboczenia skrętnego względem ustalonej wzdłuż linii stężeń osi obrotu. Badania te podzielono na dwie podstawowe serie, które różniły się sposobem przyłożenia obciążenia. Słupy Sg były obciążane na poziomie głowicy, natomiast słupy Sd (Sgd) na poziomie wspornika. Jedyną różnicą polegała na sposobie obciążenia, natomiast warunki podparcia były jednakowe.

Cechą wspólną obu przebadanych serii, niezależnie od sposobu przyłożenia obciążenia, była przestrzenna postać utraty stateczności względem narzuconej osi obrotu, która przebiegała wzdłuż połączeń słupa z ryglami ściennymi. Stanowi to potwierdzenie, że w przypadku stalowych słupów prawidłowo stężonych hal przemysłowych, w których rygle ścienne usytuowane są poza osią przekroju poprzecznego słupa, a w szczególności jednego z pasów, mechanizm potencjalnego zniszczenia będzie podobny. Powinno to być uwzględniane podczas projektowania tego typu konstrukcji. Wylimitowanie takiej postaci zniszczenia wymaga wykonania dodatkowych stężeń poziomych słupów.

W niniejszej pracy doświadczalne obciążenie krytyczne sprężystej stateczności przestrzennej wyznaczono trzema sposobami: metodą Southwella [88, 195, 209] oraz zmodyfikowanymi na bazie hiperboli dwiema krzywymi (3.1) i (3.2) [80, 89]. Celem tak obszernej analizy było wybranie metody, która miałaby najbardziej praktyczne zastosowanie dla modeli obciążonych imperfekcjami. Z tego powodu po każdej serii zamieszczono obszerne

opracowanie wyników badań pozwalające ma ujęcie statystyczne. Każda z zastosowanych metod ma niewątpliwie swoje wady i zalety, jednak opierając się na wynikach zamieszczonych w tabelach 3.3, 3.6 i 3.9 za najkorzystniejszą należałoby uznać metodę aproksymacji ścieżek równowagi statycznej w oparciu o krzywą (3.2). Świadczą o tym wartości współczynników zmienności wyznaczonych na podstawie wyników serii Sg, Sd i słupa Sgd1, które nie przekroczyły 10%. Pominięto przy tym modele Sgd2 i Sgd3, ze względu na ograniczenie pomiarów jedynie do poziomu 2. Oznacza to, że zróżnicowanie obciążeń krytycznych sprężystej stateczności przestrzennej w wymienionych siedmiu modelach i na poszczególnych poziomach było najmniejsze. Ponadto niewątpliwą zaletą tej metody jest to, że krzywą (3.2) udało się aproksymować niemalże wszystkie ŚRS i to zarówno kątów skręcenia  $\varphi$ , jak i przemieszczeń liniowych  $v$ . Wyjątkiem był słup Sgd3, dla którego aproksymacja ŚRS kątów skręcenia  $\varphi$  nie powiodła się. W tym przypadku (por. rys. 3.51), zdaniem autora, za obciążenie równoważne obciążeniu krytycznemu należałoby uznać obciążenie graniczne  $N_{cr,Sgd3} = N_{gr,Sgd3} = 315$  kN, ponieważ w zasadzie osiągnięty został punkt bifurkacji. Nieznacznie gorszą względną miarą rozproszenia wyników charakteryzowała się metoda Southwella, jednak jej praktyczne stosowanie było bardziej uciążliwe. Trudności wynikały z określenia zakresu, do jakiego należało ograniczyć przekształcone punkty pomiarowe, żeby je następnie aproksymować prostą, ponieważ nieduże zmiany tego zakresu powodowały znaczne różnice w obciążeniach krytycznych. Zaletę krzywej (3.2) zauważyć można również w badaniu Sd1, gdyż jako jedyna dała poprawne rozwiązanie. Krzywej (3.1) w ogóle nie udało się aproksymować, natomiast wyniki z metody Southwella były niższe niż zarejestrowane obciążenie graniczne.

## Rozdział 4

---

# Wstępne analizy numeryczne

---

Przedstawione w niniejszym rozdziale analizy numeryczne stężonych, pełnościennych słupów stalowych ze skokową, niesymetryczną zmianą przekroju poprzecznego są próbą odwzorowania rzeczywistego zachowania się modeli omówionych w rozdziale 3. Wykorzystano do tego zróżnicowane modele numeryczne bazujące na metodzie elementów skończonych (MES). Rozważano prosty model stworzony z jednowymiarowych belkowych elementów skończonych, a także bardziej złożone — z elementów trójwymiarowych. Posłużono się przy tym zarówno ogólnodostępnym i darmowym dla użytkowników oprogramowaniem służącym do wyznaczania obciążeń krytycznych (LTBeamN [141]), jak i dającymi dużo większe możliwości komercyjnymi pakietami wspomagającymi prace: inżynierską (SOFiSTiK [207]) oraz naukową (Abaqus FEA [1]).

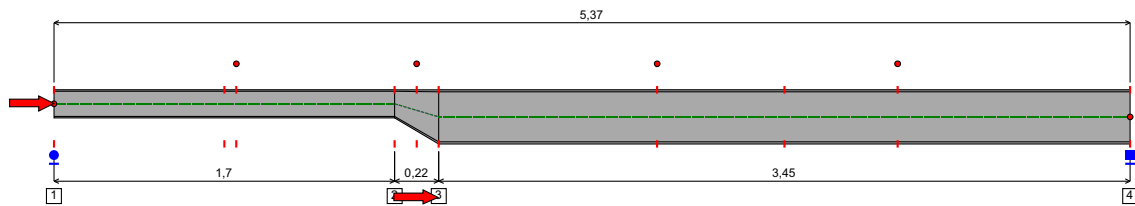
Oceniono przydatność i porównano wartości obciążeń krytycznych wyznaczonych w wyżej wymienionych programach. Dokonano tego na przykładzie słupa o stałym i skokowo zmiennym (osiowo i nieosiowo) przekroju, stężonego w płaszczyźnie mniejszej sztywności giętej jednym ( $m = 1$ ) lub dwoma ( $m = 2$ ) ryglami poprzecznymi, których położenie różnicowano na jego wysokości ( $z_c$ ). Kolejny rodzaj analizy polegał na dobraniu optymalnego rodzaju elementu skończonego spośród dostępnych w programie Abaqus elementów dwuwymiarowych i trójwymiarowych, ustaleniu ich konkretnego typu (np. S4, S8, C3D4, itp.) w zależności od zbieżności wyników oraz czasu trwania obliczeń. Bazując na tak dobranych elementach skończonych, przeprowadzono analizy na modelach numerycznych, które były odpowiednikami modeli fizycznych. Wyznaczono przy tym wartości własne (obciążenia krytyczne) układu o idealnej geometrii. Porównano także wyniki otrzymane z analiz modeli o wyidealizowanym oraz dokładnym (rzeczywistym) sposobie podparcia z wynikami uzyskanymi z badań doświadczalnych.

### 4.1. Zastosowane oprogramowanie

#### 4.1.1. LTBeamN

Program ten powstał we francuskim *Centre Technique Industriel de la Construction Métallique* (CTICM — [www.cticm.com](http://www.cticm.com)) i został częściowo sfinansowany ze środków w ramach europejskiego grantu badawczego przyznanego przez Europejską Wspólnotę Węgla i Stali. Jest prosty w obsłudze i stanowi wbrew pozorom bardzo wydajne oraz rozbudowane narzędzie. Umożliwia wyznaczenie obciążeń krytycznych elementów belkowych o monosymetrycznym przekroju poprzecznym przy zróżnicowanych: warunkach podparcia, punktowych i liniowych stężeniach poprzecznych oraz punktowych stężeniach podłużnych, a także

złożonych obciążeniach poprzecznych i osiowych. Ponadto jego wielką zaletą jest możliwość analizy elementów o odcinkowo, liniowo zbieżnym przekroju poprzecznym. Z programu można korzystać w dwojaki sposób, poprzez graficzny interfejs użytkownika lub poprzez zdefiniowanie pliku wsadowego, który jest następnie przetwarzany przez źródło programu z poziomu wiersza poleceń. Pierwsza metoda jest bardzo przyjazna dla użytkownika, ponieważ przechodząc kolejno przez wszystkie zakładki można zdefiniować nawet bardzo złożony model. Druga wymaga wygenerowania odpowiedniego pliku tekstowego. Przewagą tego drugiego rozwiązania jest to, że w krótszym czasie można przeanalizować znacznie więcej przypadków. Dzięki temu można przeprowadzić szerokie analizy porównawcze.

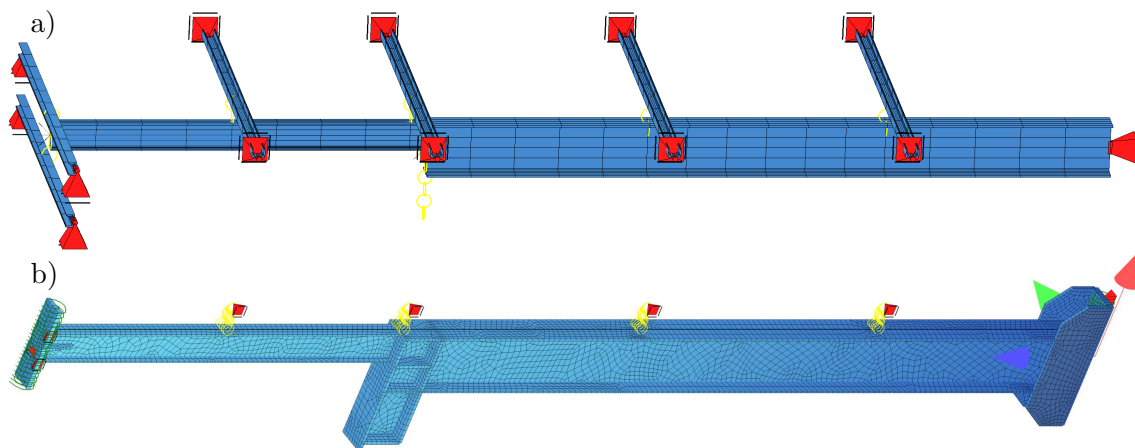


Rys. 4.1. Słup ze skokową, nieosiową zmianą przekroju w programie LTBeamN

Program nie ma możliwości bezpośredniego modelowania elementów o skokowej nie-symetrycznej zmianie przekroju poprzecznego, dlatego skokową zmianę aproksymowano możliwie najkrótszym odcinkiem o zbieżnym przekroju. Widok słupa wygenerowanego przez graficzny interfejs programu LTBeamN pokazany jest na rysunku 4.1.

#### 4.1.2. SOFiSTiK

Pierwsza wersja tego komercyjnego pakietu obliczeniowego pod nazwą SOFiSTiK została wydana w 1987 roku, chociaż poszczególne jego moduły powstały w pierwszej połowie lat osiemdziesiątych XX wieku. Jest to oprogramowanie niemieckie, stąd rozwinięcie jego nazwy brzmi *Software für Statik und Konstruktion*. Jest szeroko stosowany w budownictwie lądowym do modelowania, analizy i projektowania obiektów inżynierskich. Uważany jest za jeden z najbardziej kompletnych pakietów do MES, ponieważ obejmuje prawie wszystkie dyscypliny inżynierii takie jak budynki, mosty, fundamenty, obiekty tunelowe, konstrukcje ciągnowe, membranowe itd.



Rys. 4.2. Prętowy (a) i powłokowy (b) model słupa ze skokową, nieosiową zmianą przekroju w programie SOFiSTiK

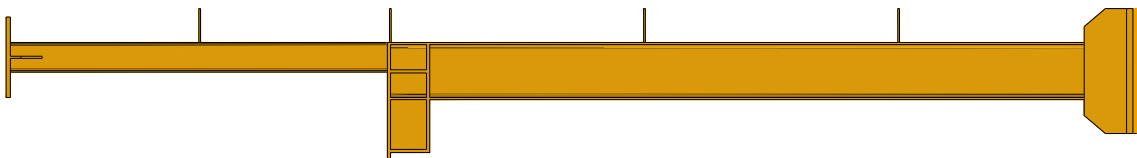


W niniejszej pracy ograniczono się jedynie do wykorzystania wąskiego zakresu możliwości tego oprogramowania i zweryfikowano jego możliwości w zakresie wyznaczania obciążeń krytycznych stateczności sprężystej w odniesieniu do modeli słupa zbudowanych z przestrzennych elementów belkowych oraz elementów powłokowych. Zaletą tych pierwszych elementów jest możliwość aktywacji siódmego stopnia swobody w węźle, którym poza trzema translacjami i rotacjami jest deplanacja przekroju. Dzięki temu można analizować elementy cienkościennie w ujęciu teorii Własowa [232]. Modele numeryczne zbudowane w omawianym programie pokazano na rysunku 4.2. Obliczenia zostały wykonane na prywatnym komputerze w ramach dostarczonej przez SOFiSTiK AG licencji edukacyjnej.

### 4.1.3. Abaqus FEA

Abaqus FEA (Finite Element Analysis) jest pakietem programów służących do rozwiązywania skomplikowanych problemów naukowych i inżynierskich. Pierwsza wersja tego oprogramowania została wypuszczona w 1978 roku przez firmę *Hibbitt, Karlsson & Sorensen*. Obecnie należy do marki SIMULA, która funkcjonuje pod szyldem francuskiego przedsiębiorstwa *Dassault Systèmes*. Na produkt, jakim jest zestaw Abaqus FEA składają się następujące podstawowe moduły:

1. CAE — Complete Abaqus Environment, czyli tzw. kompletny interfejs graficzny użytkownika. Dostarcza prosty i spójny interfejs do tworzenia, zlecenia, monitorowania i przetwarzania wyników otrzymanych z symulacji modułów Standard i Explicit. Służy do tworzenia pliku wejściowego dla modułu obliczeniowego Standard lub Explicit (pre-processing). Moduł obliczeniowy (solver) czyta plik wejściowy, dokonuje obliczeń, podczas których wysyła informacje do CAE pozwalające śledzić postępy, na końcu umieszcza rezultaty w bazie wyników. Wyniki zapisane w bazie można wczytać do CAE i dalej przetwarzać (post-processing).
2. Standard — moduł ogólnego przeznaczenia, który zawiera wszystkie procedury analizy oprócz całkowania nieliniowych równań ruchu metodą jawną.
3. Explicit — moduł specjalnego przeznaczenia, głównie do rozwiązywania zagadnień dynamicznych, wykorzystujący przy tym metody jawne całkowania równań ruchu. Stosowany jest do analiz przy ekstremalnych obciążeniach mechanicznych, siłowych lub termicznych.
4. CFD — Computational Fluid Dynamics, czyli moduł umożliwiający obliczenia w zakresie dynamiki płynów. W połączeniu z modułami Standard i Explicit umożliwia symulowanie interakcji pomiędzy płynem a konstrukcją.



Rys. 4.3. Słup ze skokową, nieosiową zmianą przekroju zamodelowany w programie Abaqus FEA

W niniejszych rozważaniach wykorzystano jedynie możliwości modułów CAE oraz Standard. Pierwszy z nich posłużył do zdefiniowania geometrii badanego słupa, właściwości materiałowych, odpowiednich warunków brzegowych takich jak podparcie i obciążenie.

Drugi jedynie do przeprowadzenia obliczeń, ponieważ ich wizualizacja ponownie odbywała się za pośrednictwem modułu CAE. Numeryczny model słupa zbudowanego w programie Abaqus FEA pokazano na rysunku 4.3. Dostęp do oprogramowania był możliwy dzięki zakupionej przez Wrocławskie Centrum Sieciowo-Superkomputerowe licencji przeznaczonej do badań. Obliczenia wykonano na komputerach WCSS (<http://www.wcss.pl>) w ramach przyznanego grantu obliczeniowego nr 228.

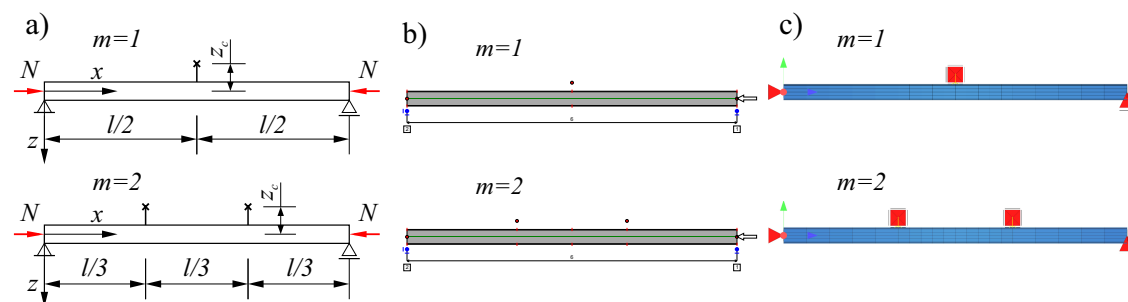
## 4.2. Porównanie modeli numerycznych

Głównym celem przeprowadzonych w tym rozdziale analiz jest dobór odpowiednich modeli numerycznych. Należy przez to rozumieć dobranie rodzaju elementu skończonego, jego typu, a także warunków brzegowych w taki sposób, aby jak najdokładniej odwzorować rzeczywiste zachowanie modelu, jakie miało miejsce podczas badań doświadczalnych.

### 4.2.1. Modele z elementów belkowych i powłokowych

Przestrzenne jednowymiarowe elementy skończone (prętowe, cięgnowe, belkowe) znalazły bardzo szerokie zastosowanie w praktycznym modelowaniu prętowych konstrukcji inżynierskich, ponieważ pozwalają na otrzymanie wyników obliczeń z zadowalającą dla projektanta dokładnością i zwykle w niedługim czasie, zależnym od skomplikowania modelu obliczeniowego. Jednakże w większości dostępnych i popularnych na rynku programów wspomagających projektowanie zaimplementowano jedynie najprostsze belkowe elementy skończone o sześciu stopniach swobody w węzle. Ponadto moduły odpowiedzialne za analizę stateczności są w stanie wyznaczyć obciążenia krytyczne związane jedynie z wyboczeniem giętnym.

Powierzchniowe elementy skończone (powłokowe, tarczowe) służą głównie do modelowania konstrukcji, których dwa wymiary dominują nad trzecim. W praktyce inżynierskiej są wykorzystywane do wyznaczania naprężeń, sił przekrojowych i przemieszczeń żelbetonowych stropów lub ścian. W konstrukcjach stalowych modeluje się nimi takie obiekty jak zbiorniki, silosy czy blachownice.



Rys. 4.4. Schematy ogólne (a) oraz z programów: LTBeamN (b) i SOFiSTiK (c) stężonych słupów o stałym przekroju poprzecznym

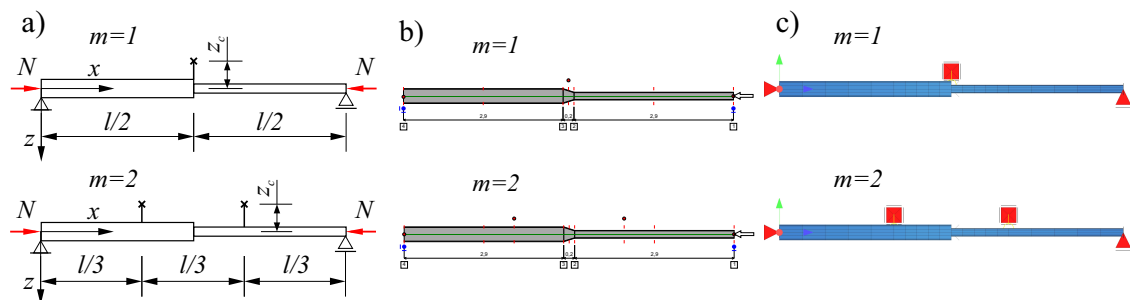
Celem niniejszych analiz była ocena praktycznego, inżynierskiego zastosowania prostych, jednowymiarowych przestrzennych elementów skończonych poprzez porównanie wartości obciążeń krytycznych w zależności od zastosowanego wyidealizowanego modelu numerycznego. Podobne analizy stateczności przestrzennej przeprowadzono w pracach [7, 79]. Rozważania przeprowadzono na trzech typach słupów (pryzmatycznym, dwustronnie i jednostronnie schodkowym) stężonych poprzecznie jednym ( $m = 1$ ) lub dwoma ( $m = 2$ )

punktowymi stężeniami. Całkowita wysokość rozważanych słupów wynosi  $l = 6$  m. Przyjęto też, że ich przekrój poprzeczny jest wykonany z kształtowników IPE 270 i IPE 140, czyli takich samych z jakich były wykonane słupy przeznaczone do badań doświadczalnych. W modelach belkowych wartości obciążeń krytycznych zależą od przyjętych charakterystyk przekrojowych, dlatego w tabelicy 4.1 zestawiono je w zależności od zastosowanego oprogramowania i porównano z wartościami tablicowymi [249]. Widać, że wartości te są do siebie zbliżone. W odniesieniu do modeli rozważanych w niniejszym punkcie przyjęto moduł sprężystości podłużnej  $E = 210$  GPa. Belkowe modele zbudowane w programie SOFiSTiK podzielono na elementy, których długość nie przekraczała 15 mm. W modelach powłokowych rozmiar pojedynczego elementu wynosił ok. 25 mm. W darmowym oprogramowaniu jakim jest LTBeamN nie ma możliwości definiowanie określonego rozmiaru elementu. Można jedynie podać ich liczbę z zakresu 100–250, a program dokona podziału poszczególnych segmentów słupa na podstawie własnego algorytmu. Niniejsze modele podzielono na 200 elementów.

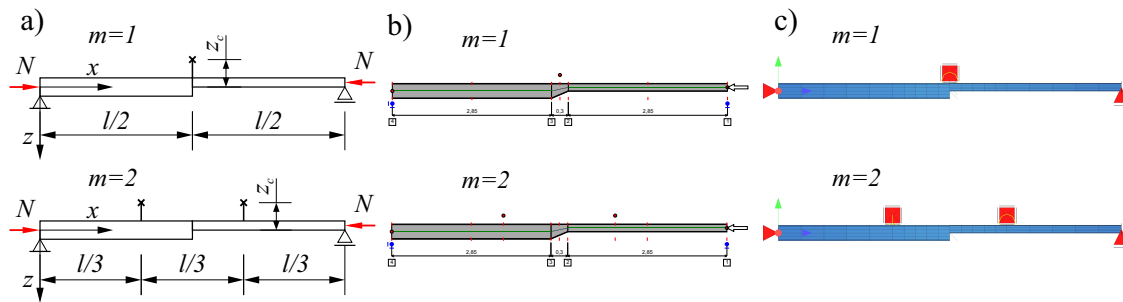
Tabela 4.1. Domyślne charakterystyki przekrojowe w zależności od stosowanego oprogramowania

Przekrój	Program	$A$ [cm <sup>2</sup> ]	$I_y$ [cm <sup>4</sup> ]	$I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	$I_T$ [cm <sup>4</sup> ]	$I_\omega$ [cm <sup>6</sup> ]	$i_0$ [cm]
IPE 140	[249]	16,40	541	44,90	2,45	1980,0	5,98
	LTBeamN	16,43	541	44,92	2,44	1989,4	5,98
	SOFiSTiK	16,43	541	44,92	2,40	1981,0	5,98
IPE 270	[249]	45,90	5790	420,0	16,40	70580	11,63
	LTBeamN	45,95	5790	419,9	15,73	70849	11,63
	SOFiSTiK	45,95	5789	419,9	15,70	70580	11,63

Zasadniczo obliczenia wykonano za pomocą programów SOFiSTiK i LTBeamN, jednakże w przypadku słupa o skokowo nieosiowo zmiennym przekroju poprzecznym, wyniki zweryfikowano wykorzystując bryłowe modele w programie Abaqus. Chodziło o sprawdzenie możliwości programu LTBeamN, który jest narzędziem darmowym i ogólnodostępnym. W związku z brakiem możliwości wprowadzenia słupów schodkowych, porównano wyniki jakie otrzymano dla słupów o odcinkowo zbieżnych przekrojach. W przypadku modeli o zmiennym przekroju poprzecznym (por. rys. 4.5b i 4.6b) przeanalizowano także, w jaki sposób definiowanie modelu obliczeniowego wpływa na otrzymane rezultaty. Pierwszy model z programu LTBeamN został wprowadzony w interfejsie graficznym programu. Ma on pewne ograniczenia, ponieważ stosunek wysokości pomiędzy poszczególnymi elementami



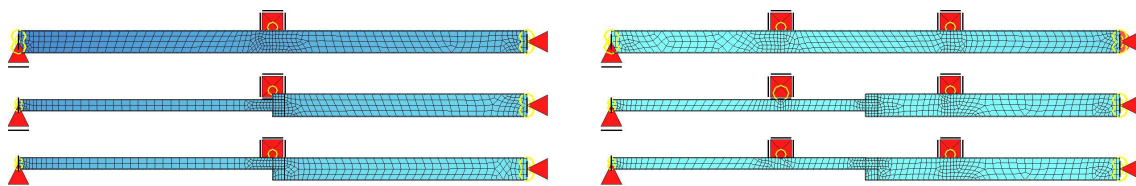
Rys. 4.5. Schematy ogólne (a) oraz z programów: LTBeamN (b) i SOFiSTiK (c) stężonych słupów o osiowo, skokowo zmiennym przekroju poprzecznym



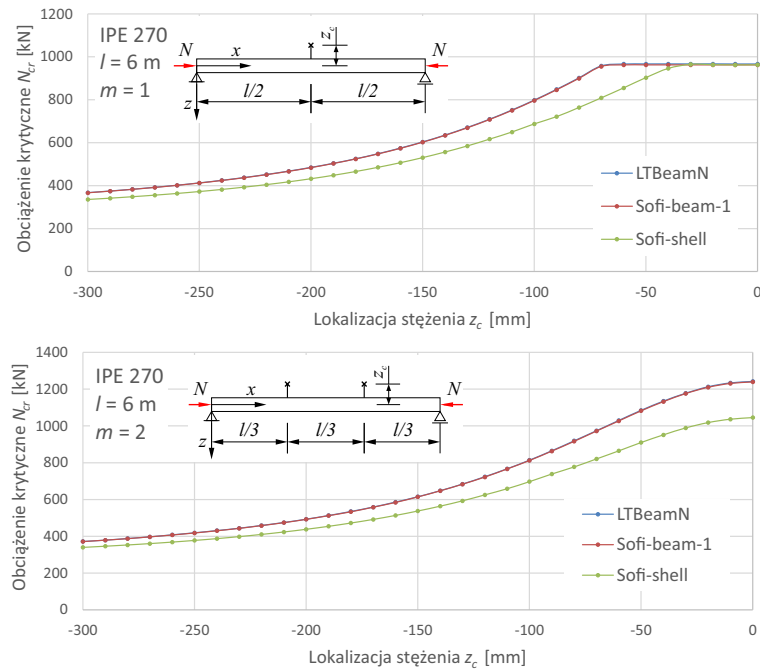
Rys. 4.6. Schematy ogólne (a) oraz z programów: LTBeamN (b) i SOFiSTiK (c) stężonych słupów o nieosiowo, skokowo zmiennym przekroju poprzecznym

skończonymi nie może przekraczać pewnej granicznej wartości, o czym informuje użytkownika stosownym komunikatem. Wyniki otrzymane w ten sposób opisano na rysunkach 4.8, 4.9, i 4.12 jako LTBeamN. Drugi model powstał poprzez zmodyfikowanie pliku wejściowego. „Ręcznie” zmieniono charakterystyki przekrojowe na odcinku o liniowej zbieżności przekroju poprzecznego, tak aby był on jak najkrótszy. W praktyce sprowadziło się to gwałtownej zmiany charakterystyk w dwóch sąsiadujących ze sobą elementach skończonych. Dodatkowo w modelu o skokowo nieosiowo zmiennym przekroju poprzecznym, na tym samym odcinku należało również skorygować wartości momentów zginających, ponieważ w miejscu zmiany sztywności występuje także skok ich wartości. Taki zmodyfikowany model opisano na rysunkach 4.9 i 4.12 jako LTBeamN-inp (od *input file*).

Rezultaty otrzymane z obliczeń przeprowadzonych w programie LTBeamN zostały porównane z wynikami z programu SOFiSTiK. Widok poprzecznie stężonych modeli o stałym przekroju poprzecznym pokazano na rysunku 4.4c, natomiast rysunki 4.5c i 4.6c przedstawiają numeryczne belkowe modele o skokowo zmiennym przekroju, w których zmiana ta następuje odpowiednio osiowo i nieosiowo. W przypadku słupów schodkowych istotna jest konstrukcja węzła, w którym ta zmiana zachodzi. Należy zwrócić uwagę na zapewnienie bądź nie ciągłości odpowiednich przemieszczeń (deplanacji) części górnej i dolnej. Takie analizy, w których proponowano nowe superelementy węzłowe bądź kombinację elementów jedno i trójwymiarowych (1D/3D), w odniesieniu do naroży ram były przedmiotem prac [36, 148, 174, 184, 214]. Ponieważ i w tej kwestii pojawiły się wątpliwości, zwłaszcza w przypadku nieosiowej zmiany sztywności, porównano dwa modele. Słup pokazany na rysunku 4.6c jest zbudowany z dwóch niezależnych elementów prętowych połączonych poleceniem *kinematic constraint*, które zapewnia ciągłość sześciu przemieszczeń (trzech translacyjnych i trzech rotacyjnych), ale już nie deplanacji. Dlatego w przypadku słupów schodkowych rozważano dwa rodzaje modeli belkowych: Sofi-beam-1 i Sofi-beam-2. W pierwszym z nich, w miejscu połączenia prętów pozostawiono domyślne zwolnienie deplanacji, natomiast w drugim wprowadzono dodatkową więź, która ją krępowała. Prócz tego, analizie poddano także wyniki otrzymane z modeli powłokowych. Ich schematy z pro-



Rys. 4.7. Widoki analizowanych powłokowych modeli punktowo stężonych słupów z programu SOFiSTiK

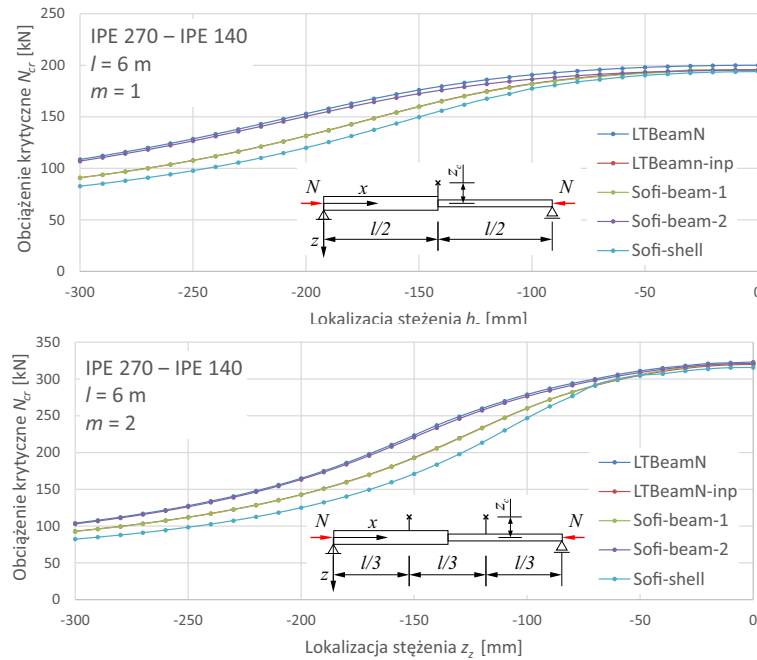


Rys. 4.8. Porównanie obciążeń krytycznych, stężonych poprzecznie słupów z IPE 270, wyznaczonych w programach LTBeamN i SOFiSTiK

gramu SOFiSTiK pokazano na rysunku 4.7. W tych konkretnych przypadkach kwestię związaną z ciągłością przemieszczeń rozwiązano w sposób stosowany w praktyce, czyli przedłużono pasy mniejszego przekroju i zamknięto je żebrami, co można dostrzec na rysunku 4.7.

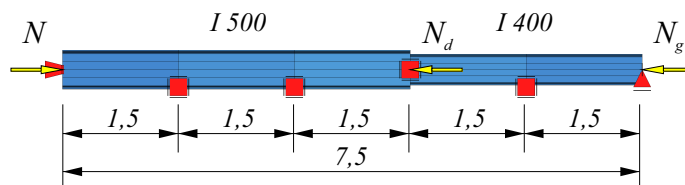
Wyniki analiz przedstawiono w postaci wykresów, ponieważ poza wyżej wymienionymi czynnikami zbadano także wpływ lokalizacji poprzecznych stężeń punktowych na wartości obciążeń krytycznych. Na rysunku 4.8 zamieszczono rezultaty uzyskane dla słupa o stałym przekroju poprzecznym wykonanym z kształtownika IPE 270 stężonego poprzecznie jednym ( $m = 1$ ) i dwoma ( $m = 2$ ) stężeniami (por. rys. 4.4a). Potraktowano je jako punkty odniesienia pokazujące na ile zgodne są ze sobą poszczególne wyniki w przypadku prostych warunków podparcia. Należy zauważyć pełną zgodność pomiędzy wynikami otrzymanymi dla prętowych modeli z programów LTBeamN i SOFiSTiK. Na tym tle wyraźnie odbiegają wyniki modeli powłokowych, ponieważ różnice te sięgają nawet 20%. Podobnego rzędu różnice otrzymali *Gosowski i Niżniowski* [79]. W tym wypadku są one również efektem zbyt dużej podatności powłokowych elementów skończonych, które nie spełniają warunku (hipotezy) sztywnego konturu. Efektem tego są zaniżone wartości charakterystyk takiego przekroju poprzecznego, zwłaszcza w odniesieniu do momentu bezwładności czystego skręcania. Krótkim lecz bardzo praktycznym wnioskiem płynącym z powyższych rozważań jest to, że program LTBeamN może być stosowany do wyznaczania obciążeń krytycznych stateczności przestrzennej poprzecznie punktowo stężonych pryzmatycznych elementów konstrukcji metalowych.

Rysunek 4.9 również przedstawia porównanie wartości obciążeń krytycznych otrzymanych dla różnych modeli numerycznych w zależności od lokalizacji stężenia poprzecznego, jednak dotyczy słupa o skokowo osiowo zmiennym przekroju poprzecznym (por. rys. 4.5a). Część o większej sztywności jest z kształtownika IPE 270, natomiast o mniejszej — z IPE 140. Tym razem zauważono pewne rozbieżności pomiędzy poszczególnymi modelami. Najniższe wartości otrzymane dla modelu powłokowego potwierdzają hipotezę o jego



Rys. 4.9. Porównanie obciążeń krytycznych lokalnie stężonych poprzecznie, dwuteowych słupów schodkowych z osiową zmianą przekroju, wyznaczonych w programach LTBeamN i SOFiSTiK

zbyt małej sztywności czystego skręcania. Natomiast wyniki uzyskane dla par LTBeamN–Sofi-beam-2 i LTBeamN-inp–Sofi-beam-1 pokrywają się niemalże idealnie. Oznacza to, że słup wprowadzony do graficznego interfejsu programu LTBeamN z odcinkowo zbieżnym przekrojem odpowiadał belkowemu modelowi z programu SOFiSTiK z dodatkowo skrępowaną deplanacją przekroju w środkowym węźle, natomiast model otrzymany z modyfikacji pliku wsadowego programu LTBeamN zachowywał się tak, jak podstawowy model belkowy z SOFiSTiKa. Świadczy to o tym, że w praktycznym zastosowaniu należałoby się sugerować wynikami otrzymanymi ze zmodyfikowanego modelu opisanego jako LTBeamN-inp.



Rys. 4.10. Widok belkowego modelu numerycznego słupa o osiowej, skokowej zmianie przekroju poprzecznego, analizowanego w [83, 84, 87]

Przedmiotem rozważań nad statecznością stężonych poprzecznie słupów o skokowej osiowej zmianie przekroju poprzecznego były m.in. prace *Gosowskiego* [83, 84, 87]. Podano w nich ściśle rozwiązania zagadnień wybożenia giętno-skrętnego takich elementów. Na rysunku 4.10 pokazano numeryczny model z programu SOFiSTiK, który został wybrany z wyżej wymienionych prac w celu porównania wyników. Podstawa tego słupa jest utwierdzona w płaszczyźnie większej sztywności oraz podparta przegubowo w płaszczyźnie mniejszej. Głowica natomiast jest podparta przegubowo w obu kierunkach. Słup ma cztery punktowe stężenia poprzeczne, przy czym trzy z nich znajdują się w przęśle części górnej lub dolnej i są oddalone od osi o  $z_c = 225$  mm, natomiast jedno z nich, będące na styku obu części, znajduje się w osi. Przyjęto również, że przekroje podporowe oraz w miejsce zmiany sztywności zostały zabezpieczone przeciwskrętnie. Przeanalizowano trzy

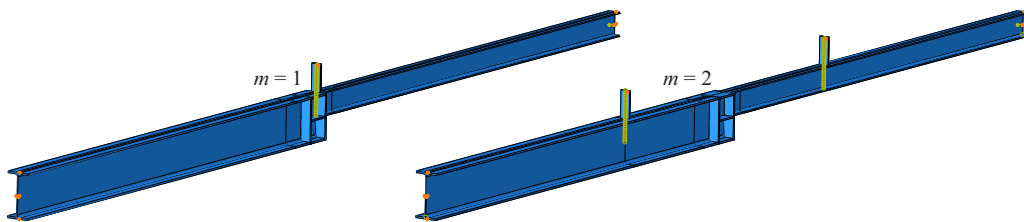
Tabela 4.2. Porównanie wartości obciążeń krytycznych wyznaczonych w pracach [83, 84, 87] oraz programami SOFiSTiK i LTBeamN

$\alpha$ [—]	[83, 84, 87]		SOFiSTiK				LTBeamN	
	$N_{cr,y}$ [MN]	$N_{cr,TF}$ [MN]	$N_{cr,y}$ [MN]	$N_{cr,TF}$ [MN]	$\delta_y$ [%]	$\delta_\varphi$ [%]	$N_{cr,TF}$ [MN]	$\delta_\varphi$ [%]
0,0	88,87	10,59	82,84	10,64	6,79	0,51	8,85	16,43
0,5	46,12	9,23	43,53	9,29	5,62	0,67	8,37	9,27
1,0	30,52	6,25	28,82	6,33	5,56	1,27	5,99	4,24

przypadki obciążenia i przyjęto, że szukane obciążenie krytyczne ( $N_{cr}$ ) jest reakcją, która zależy także od parametru  $\alpha$  wyrażonego w następujący sposób:

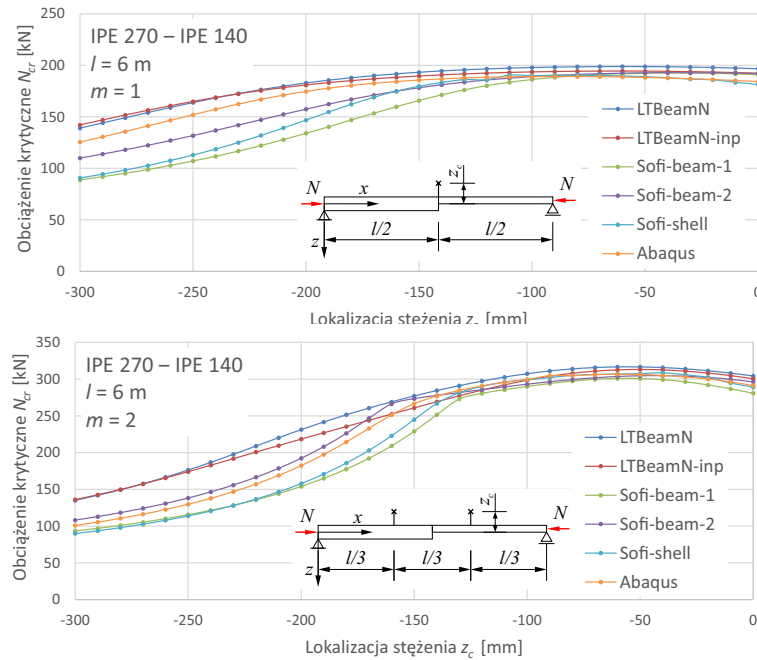
$$\alpha = \frac{N_g}{N_g + N_d} = \frac{N_g}{R}. \quad (4.1)$$

Tabela 4.2 zawiera porównanie wartości obciążeń krytycznych stężonego poprzecznie słupa schodkowego o osiowej zmianie przekroju poprzecznego (por. rys. 4.10), wyznaczonych analitycznie oraz z wykorzystaniem metody elementów skończonych w programach SOFiSTiK i LTBeamN. Zamieszczono w niej obciążenia krytyczne wyboczenia giętnego  $N_{cr,y}$  oraz giętno-skrętnego  $N_{cr,TF}$ . Przy czym znaczenie praktyczne ma zawsze wartość najniższa obciążenia krytycznego. Model słupa pochodzący z programu LTBeamN zdefiniowano jako tekstowy plik wsadowy, ponieważ baza programu nie zawiera charakterystyk przekrojowych dwuteowników zwykłych. Wadą tego podejścia jest również to, że otrzymano w ten sposób jedynie pierwszą, najniższą wartość obciążenia krytycznego, stąd tylko jedna kolumna z wynikami wyboczenia giętno-skrętnego. Należy zauważyć, że względna różnica pomiędzy wynikami otrzymanymi przez Gosowskiego, a SOFiSTiKiem, w przypadku pierwszych wartości własnych, nie przekracza 1,3%. Gorzej wygląda to porównanie w wypadku wyboczenia giętnego, ponieważ różnice wynoszą nawet 7%. Najgorzej natomiast wypadają wyniki otrzymane z programu LTBeamN, gdyż dla  $\alpha = 0$  różnica z porównania z rozwiązaniem analitycznym wynosi ponad 16%. Niemniej jednak, otrzymane w programie LTBeamN rezultaty są niższe niż rozwiązania teoretyczne, można więc je uznać za oszacowania bezpieczne.



Rys. 4.11. Widok analizowanych modeli słupów stężonych punktowo, zbudowanych w programie Abaqus z elementów bryłowych

Wykresy przedstawione na rysunku 4.12 są efektem analiz numerycznych przeprowadzonych na modelach słupów ze skokowo, niesiowo zmienionym przekrojem i punktowym stężeniem poprzecznym (por. rys. 4.6a). Podobnie jak we wcześniejszych przykładach, charakterystyki dolnej części słupa przyjęto jak dla kształtownika IPE 270, górnej zaś jak dla IPE 140. Rezultaty uzyskano wykorzystując takie same sposoby definiowania modeli numerycznych jak w dwóch wcześniejszych przykładach. Dodatkowo jednak, przeanalizowano



Rys. 4.12. Porównanie obciążeń krytycznych lokalnie stężonych poprzecznie dwuteowych słupów schodkowych z nieosiową zmianą przekroju, wyznaczonych w programach LTBeamN, SOFiSTiK i Abaqus

zowano wpływ lokalizacji stężenia na wartość obciążeń krytycznych modeli słupa utworzonych ze skończonych elementów bryłowych w programie Abaqus FEM. Widoki tych modeli przedstawia rysunek 4.11. Należy zwrócić uwagę na fakt, że ich geometria jest taka sama jak w przypadku modeli powłokowych (por. rys. 4.7). Chodzi głównie o konstrukcję węzła, w którym słup zmienia skokowo swój przekrój poprzeczny. Także w tym wypadku rozważano dwa typy słupów: z jednym ( $m = 1$ ) i dwoma ( $m = 2$ ) stężeniami poprzecznymi. Analizując zamieszczone na rysunku 4.12 wykresy zauważono, że jeżeli stężenie jest zlokalizowane w odległości mniejszej niż ok. 130 mm od osi części dolnej, to wszystkie wyniki są do siebie zbliżone i nie zależą ani od sposobu definiowania modelu, ani od zastosowanego oprogramowania. Dopiero powyżej tej wartości można zauważyć wyraźne zróżnicowanie obciążenia krytycznego. Warto również nadmienić, że w tych dwóch konkretnych przypadkach sposób wprowadzenia danych do programu LTBeamN nie miał dużego znaczenia, ponieważ zarówno w przypadku słupa z jednym ( $m = 1$ ), jak i z dwoma ( $m = 2$ ) stężeniami obie krzywe są do siebie bardzo zbliżone. Programem LTBeamN otrzymano wyniki, których wartości były największe spośród wszystkich innych. Na drugim biegunie, z najniższymi wartościami uzyskanych obciążeń krytycznych znalazły się belkowy model (Sofi-beam-1), któremu nie ograniczono deplanacji przekroju w miejscu zmiany sztywności oraz model z elementów powłokowych (Sofi-shell). Na podstawie własnych doświadczeń oraz przeanalizowanej dotychczas literatury, największym zaufaniem należałoby obdarzyć wyniki z programu Abaqus. Na tym tle wyjątkowo dobrze, zwłaszcza w przypadku dwóch stężeń poprzecznych ( $m = 2$ ), prezentują się wyniki z belkowego modelu z programu SOFiSTiK, w którym dodatkowo skrupowano deplanację w miejscu zmiany sztywności (Sofi-beam-2).

Powyższe analizy wykazały, że stężone poprzecznie słupy schodkowe konstrukcji metalowych, jeżeli stężenia nie przechodzą w ich osi, tracą stateczność w postaci giętno-skrętnej. Takie obciążenie krytyczne powinno być uwzględniane przy ich wymiarowaniu.



Wyznaczenie obciążeń krytycznych takich słupów w sposób analityczny jest skomplikowane, dlatego z pomocą przychodzą projektantom producenci oprogramowania. Na uwagę zasługują szczególnie takie produkty, które oferują dużo możliwości, są przy tym darmowe i ogólnodostępne, jak wspomniany program LTBeamN. Z przeprowadzonych analiz niestateczności przestrzennej z wykorzystaniem różnego oprogramowania można wyciągnąć następujące wnioski praktyczne:

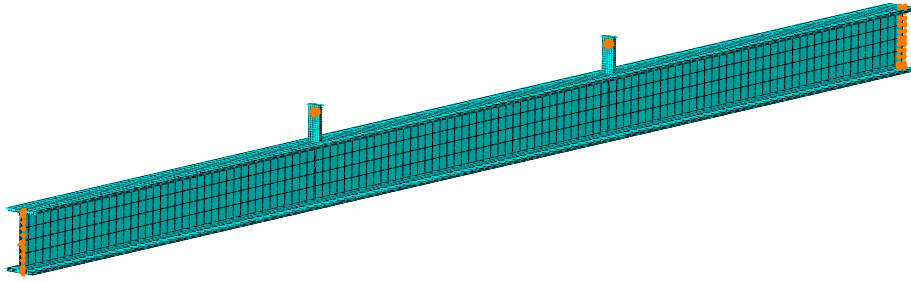
- w przypadku prętów pryzmatycznych zgodność wyników uzyskanych oprogramowaniem komercyjnym jest bardzo dobra,
- w przypadku elementów schodkowych o osiowej zmianie sztywności, otrzymano bardzo dobrą zgodność w przypadku korekty modelu i przeprowadzeniu obliczeń w trybie pliku wsadowego, natomiast wyniki będące efektem zdefiniowania modelu w graficznym interfejsie programu wydają się być zawyżone,
- w przypadku elementów o skokowej, nieosiowej zmianie przekroju poprzecznego, zbieżne wyniki otrzymano, gdy stężenie poprzeczne znajduje się w obrębie analizowanego przekroju, w przeciwnym razie wartość obciążenia krytycznego może znacznie odbiegać od rozwiązań ścisłych.

Mając na uwadze powyższe, program LTBeamN może być stosowany do wyznaczania obciążeń krytycznych sprężystej stateczności przestrzennej, jedynie w ograniczonym zakresie stężonych poprzecznie słupów schodkowych. Należałoby go zawęzić do lokalizacji stężeń poprzecznych, które nie powinny znajdować się poza przekrojem analizowanego słupa.

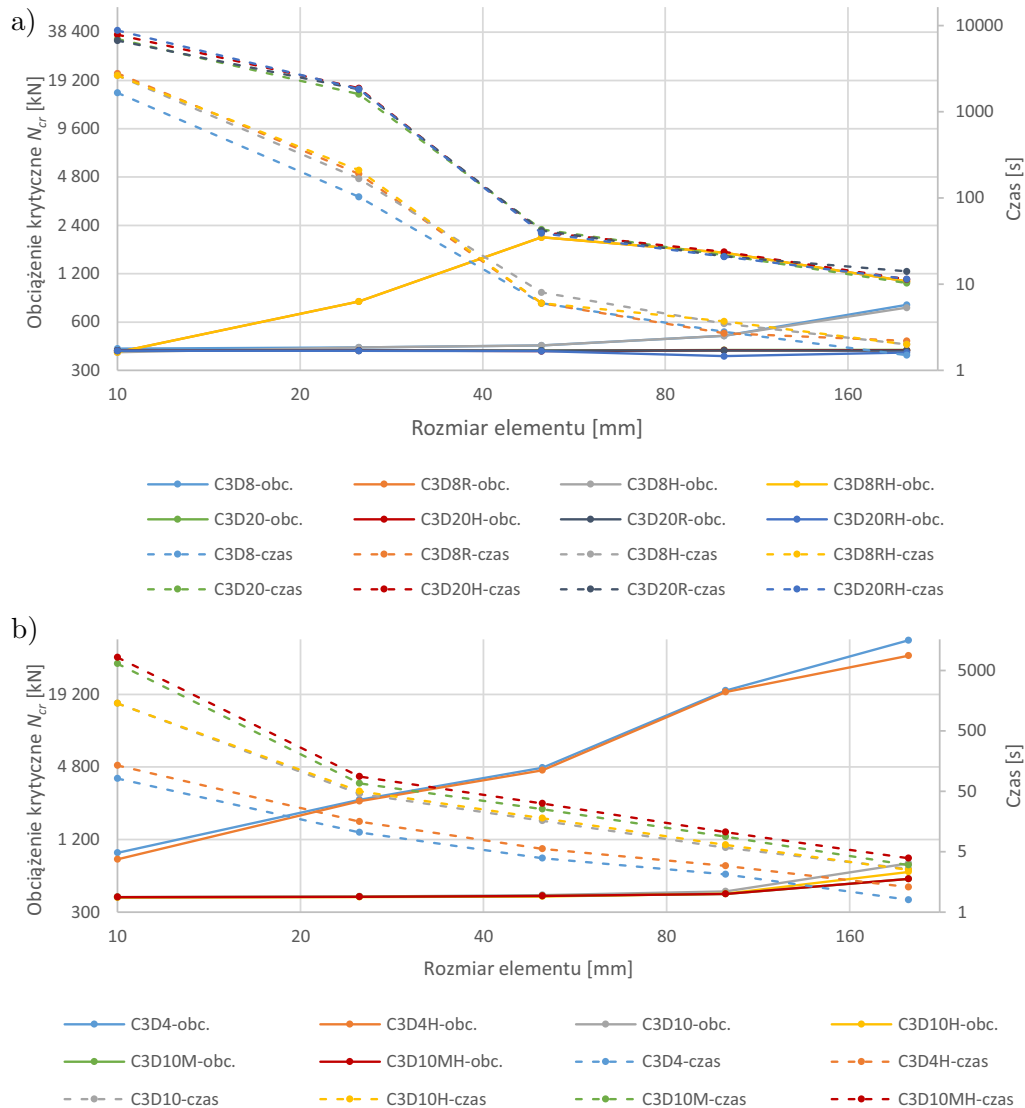
#### 4.2.2. Modele z elementów bryłowych

Analizy numeryczne, które na potrzeby rozprawy przeprowadzono z wykorzystaniem modeli z bryłowych elementów skończonych, zostały zrealizowane za pomocą programu Abaqus FEM [1]. Rozważania te, podzielone zostały na dwa etapy, które różniły się zastosowanymi modelami. Pierwszy etap, opisany w punkcie 5.1, obejmuje obliczenia numeryczne modeli w zakresie sprężystej utraty stateczności. Jego rezultatami są wartości obciążeń krytycznych oraz odpowiadające im kształty postaci wyboczenia. W ramach etapu drugiego przeprowadzono natomiast obliczenia numeryczne z uwzględnieniem nieliniowości, zarówno geometrycznych, jak i materiałowych. Rozważania te są przedstawione w podrozdziale 5.3.

Wcześniej, biorąc pod uwagę doświadczenia *Gosowskiego i Niżniowskiego* [79] oraz własne analizy, wybrano rodzaj, a także rozmiary wykorzystanych elementów skończonych. Dobór konkretnego typu elementu skończonego oraz jego wielkości polegał na przeanalizowaniu modelu numerycznego z dwoma stężeniami poprzecznymi  $m = 2$ , którego schemat przedstawiono na rysunku 4.4. Obliczenia przeprowadzono na modelu z kształtownika IPE 270, którego oś stężeń znajduje się w odległości  $z_c = 263$  mm od osi słupa. Wartość obciążenia krytycznego wyznaczona w sposób analityczny [82] wynosi  $N_{cr,TF} = 404$  kN. Geometria przestrzennego modelu numerycznego została podzielona na następujące typy bryłowych elementów skończonych: 4-węzłowy element czworościenny C3D4, 10-węzłowy element czworościenny C3D10, 8-węzłowy element sześcienny i 20-węzłowy element sześcienny. Dodatkowe litera przy typie elementu oznacza ponadto: H – hybrydowy element skończony, M – zmodyfikowany element skończony, R – zredukowany element skończony.



Rys. 4.13. Przykładowy widok modelu obliczeniowego wykorzystanego w doborze optymalnych elementów skończonych



Rys. 4.14. Wartości obciążeń krytycznych i czas obliczeń w przypadku zastosowania bryłowych elementów sześciennych (a) i czworościennych (b)

Poza konkretnymi typami elementów skończonych, zbadano także wpływ ich wielkości na zbieżność wyników oraz czas trwania obliczeń. Większość obliczeń numerycznych dotyczy zagadnień stateczności sprężystej, dlatego też w celu doboru rozmiaru przeprowadzono liniowo-sprężystą analizę bifurkacyjną (linear elastic bifurcation analysis — LBA) dla następujących średnich wielkości (długości i szerokości) elementów: 10, 25, 50, 100, 200 mm.

Ich grubość jest natomiast dużo mniejsza, ponieważ zawsze przyjmowano co najmniej po dwa elementy na grubości zarówno pasów, środnika i poszczególnych blach. Przykładowy widok modelu numerycznego zdefiniowanego w programie Abaqus, który został podzielony na elementy skończone o wielkości rzędu 50 mm, przedstawia rysunek 4.13.

Wyniki tych analiz zaprezentowano na rysunku 4.14. W związku ze znacznymi różnicami pomiędzy poszczególnymi modelami, dla zachowania czytelności wyniki podane zostały w skali logarytmicznej. Na osi poziomej opisano rozmiar elementów skończonych, na lewej osi pionowej otrzymane obciążenie krytyczne, na prawej zaś, czas trwania obliczeń. W celu prawidłowej interpretacji zamieszczonych danych, liniami ciągłą oznaczono obciążenie i należy je przyporządkować do lewej osi, natomiast liniami przerywanymi — czas obliczeń, którego wartości podano na osi prawej. Na rysunku 4.14a zamieszczono wyniki analiz sześciennych elementów bryłowych (*hexahedra*), natomiast rysunek 4.14b przedstawia rezultaty czworościennych elementów bryłowych (*tetraheda*). Jak widać, zarówno wartości obciążeń krytycznych, jak i czas trwania obliczeń w zależności od rozmiaru elementu skończonego nie są od siebie zależne w sposób liniowy.

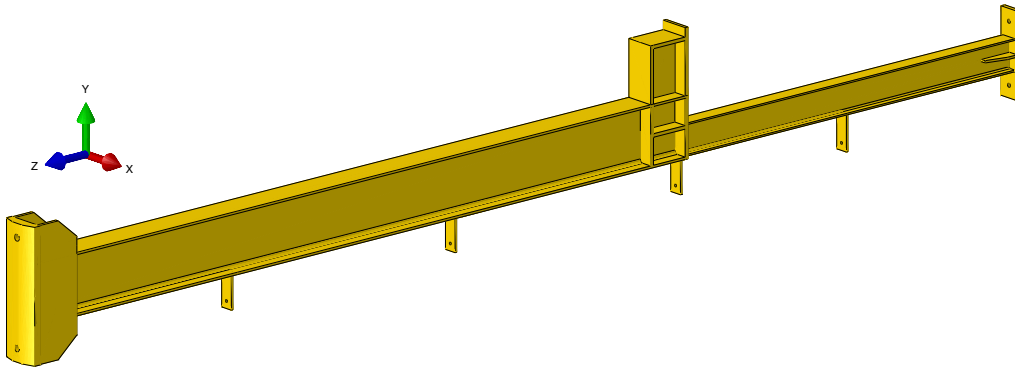
Analizując poszczególne rodzaje elementów należy stwierdzić, że w przypadku czworościennych elementów 4-węzłowych (C3D4) w ogóle nie otrzymano prawidłowych rezultatów. Czworosienne elementy wyższego rzędu (C3D10) poradziły sobie znacznie lepiej, zwłaszcza, że już przy średnim rozmiarze rzędu 50 mm otrzymano rezultaty, które różniły się od rozwiązania ścisłego o ok. 2%. Z kolei zmniejszenie rozmiaru elementu skończonego z 50 do 10 mm skutkowało od ok. 90 do 270-krotnym wzrostem czasu obliczeń (por. rys. 4.14b). Niemniej jednak, elementy czworosienne nie są zalecane z uwagi na ich zbyt dużą sztywność, natomiast ich największą zaletą jest to, że można nimi modelować nawet bardzo skomplikowaną geometrię.

Sześcienne elementy bryłowe wykazują dużo lepszą zbieżność wyników. Przy większości z nich już przy 50 mm otrzymano rezultaty zbliżone do obciążenia otrzymanego w sposób analityczny. Jedynie dwa typy elementów — C3D8R i C3D8RH — znacząco, bo ponad sześciokrotnie zawyżały wartość oczekiwanego obciążenia krytycznego. W przypadku elementów drugiego rzędu, nawet przy największych, bo nawet 200 mm elementach, różnice te nie przekraczały 1%.

### 4.3. Budowa modelu numerycznego z elementów bryłowych

Ostatecznie cały model słupa podzielono na sześciennie 20-węzłowe elementy skończone drugiego rzędu ze zredukowanym całkowaniem — C3D20R. Mimo braku wyraźnych różnic w otrzymanych pomiędzy poszczególnymi rodzajami elementów wynikach, zwłaszcza przy ich niewielkim rozmiarze, zdecydowano się na ten typ elementów, ponieważ — jak podano w dokumentacji programu [1] — znacznie skracają czas obliczeń zwłaszcza w przypadku zagadnień nieliniowych. Powyższe rozważania prowadzone były w zakresie liniowo-sprężystej analizy bifurkacyjnej. Przyjęta średnia wielkość tego elementu wynosiła ok. 20 mm oraz ok. 10 mm w charakterystycznych obszarach takich jak głowica, wspornik, podstawa i miejsca z więzami podporowymi. Przy nakładaniu siatki przyjęto również minimalną liczbę dwóch lub trzech elementów skończonych na grubości danego obiektu w zależności od jego średniej wielkości. Takie siatkowanie modelu obliczeniowego pozwoliło na zachowanie prawidłowych proporcji pomiędzy wymiarami poszczególnych ścianek elementu skończonego.

We wszystkich modelach numerycznych zbudowanych z bryłowych elementów skończonych, charakterystyki materiałowe przyjęto w oparciu o badania materiałowe opisane w 3.5.1. Pomimo różnych wartości otrzymanych dla części dolnej i górnej, przyjęto jednokowe, średnie wartości modułu Younga  $E = 195$  GPa, granicy plastyczności  $R_e = 320$  MPa i wytrzymałości na rozciąganie  $R_m = 444$  MPa. Współczynnik Poissona przyjęto  $\nu = 0,3$ . W przypadku analiz w zakresie pozasprężystym zachowanie stali zdefiniowano bazując na średniej ścieżce równowagi statycznej, będącej wynikiem badań materiałowych stali (por. rys. 3.62).

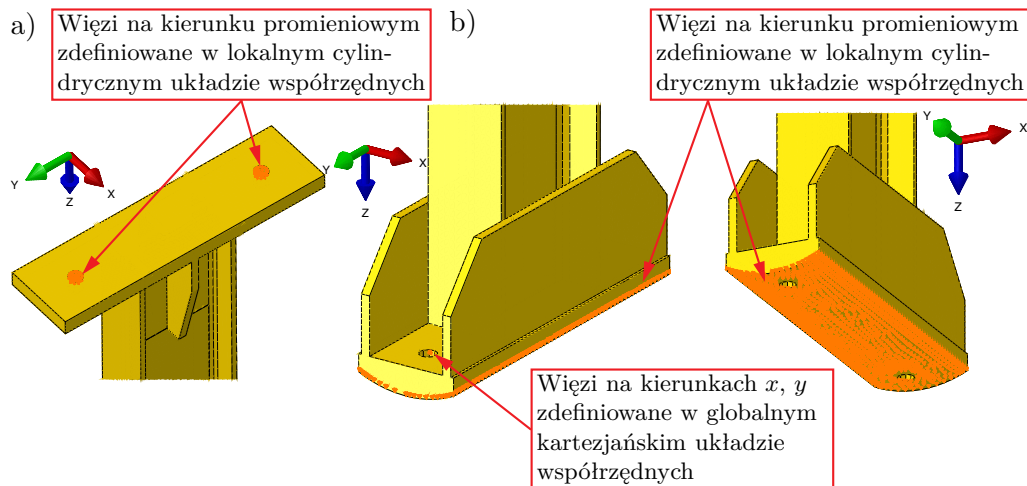


Rys. 4.15. Ogólny widok modelu numerycznego utworzonego w programie Abaqus

Modele numeryczne z bryłowych 20-węzłowych elementów skończonych utworzono w celu jak najwierniejszego odwzorowania badań doświadczalnych. Ogólny widok całego modelu zamieszczono na rysunku 4.15. Pokazano na nim także widok układu współrzędnych w jakim modelowano słup, ponieważ jest on inaczej zorientowany niż ogólnie przyjęty w pracy. Niezmiernie ważne było takie zdefiniowanie warunków podparcia modeli numerycznych, aby odpowiadały rzeczywistości. Obliczenia w zakresie sprężystej utraty stateczności przeprowadzono na dwóch modelach zbudowanych z elementów bryłowych. Różnią się one sposobem podparcia w głowicy oraz podstawie. W pierwszym modelu zrealizowano wyidealizowany sposób podparcia definiując w głowicy i podstawie punkt referencyjny, który następnie nawiązano z odpowiednimi poziomymi blachami poleceniem *coupling*. Zdefiniowanie w takim węzle przegubowego, podatnego lub sztywnego podparcia sprowadza się do zdefiniowania w punkcie referencyjnym idealnych warunków podparcia.

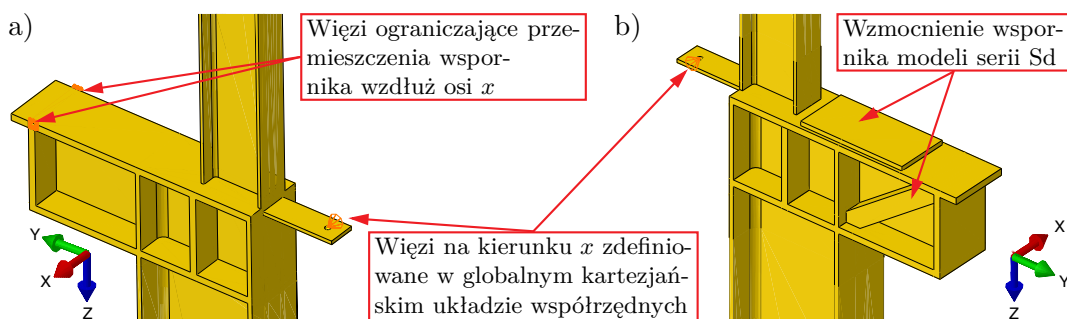
W drugim modelu bardzo dokładnie zrealizowano warunki podparcia. W przypadku głowicy, w osiach otworów utworzono lokalny układ współrzędnych walcowych i ograniczono możliwość przemieszczeń na kierunku promieniowym, czyli prostopadłym do powierzchni. Szczegół podparcia głowicy pokazano na rysunku 4.16a. Takie rozwiązanie uniemożliwia skrócenie przekroju poprzecznego w podobny sposób, jak to miało miejsce w przypadku modeli fizycznych (por. rys. 3.6b).

Podparcie modelu numerycznego również zrealizowano w taki sposób, aby jak najwierniej oddawało podparcie zastosowane w modelu fizycznym (por. rys. 3.6a). W związku z tym, w blasze podstawy wprowadzono wyokrąglenie, którego promień odpowiadał promieniowi łożyska wykorzystanego w badaniach doświadczalnych. Więzi podporowe zostały zdefiniowane w lokalnym, walcowym układzie współrzędnych, którego oś  $z$  pokrywała się z osią łożyska. W osiach otworów podstawy zdefiniowano punktowe więzi, które ograniczały przemieszczenia na kierunkach  $x$  i  $y$ , a następnie poleceniem *coupling* sprzęgnięto je z krawędzią otworu (por. rys. 4.16b).



Rys. 4.16. Sposób podparcia modelu numerycznego w poziomie głowicy (a) i podstawy (b)

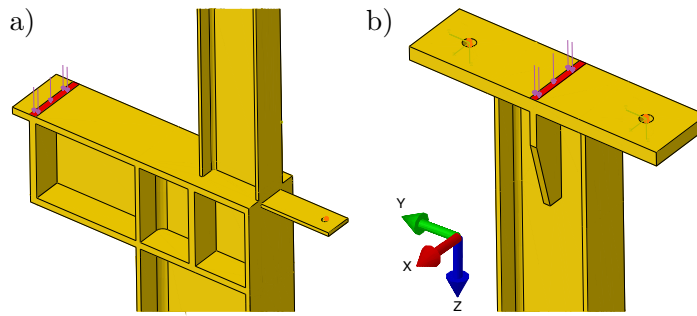
Przestrzenna postać utraty stateczności analizowanego słupa o skokowej, nieosiowej zmianie przekroju poprzecznego jest wymuszona poprzez zastosowanie punktowych stężeń poprzecznych. Zostały one zrealizowane poprzez zdefiniowanie w punktach referencyjnych więzi kępujących przemieszczenia wzdłuż osi  $x$  globalnego układu współrzędnych. Znajdują się one na poziomach rygli ściennych i zostały zlokalizowane w osi otworów. Punkty referencyjne nawiązano, podobnie jak w przypadku otworów w podstawie, zdefiniowanym w lokalnym cylindrycznym układzie współrzędnych poleceniem *coupling* do bocznej powierzchni otworu. Detal sposobu podparcia, na przykładzie rygla znajdującego się na wysokości wspornika, zamieszczono na rysunku 4.17.



Rys. 4.17. Sposoby podparcia wspornika (a) oraz jego wzmocnienie (b)

W ramach pierwszego etapu obliczeń numerycznych przeprowadzonych w programie Abaqus FEM, polegających na analizie liniowo-sprężystej utraty stateczności dwuteowych słupów o skokowej, nieosiowej zmianie przekroju poprzecznego, rozważano także elementy, które dodatkowo stężono przeciwskrętnie na wysokości wspornika (por. rys. 4.17a). Przebieg analiz numerycznych etapu pierwszego został szczegółowo opisany w punkcie 5.1. Stężenia przeciwskrętnie zdefiniowano przez zablokowanie przemieszczeń wzdłuż osi  $x$  kartezjańskiego, globalnego układu współrzędnych, na niewielkiej powierzchni, która została wydzielona w miejscu krzyżowania się blach wspornika: poziomej górnej i pionowej. Stężenia te znajdują się po obu stronach modelu numerycznego. Na rysunku 4.17a przedstawiono widok takiego przeciwskrętnie zabezpieczonego wspornika.

Sposób obciążenia modeli numerycznych etapu pierwszego był zbliżony, ponieważ we wszystkich przypadkach (górą, dołem oraz obciążenie jednoczesne) zdefiniowano je jako ci-

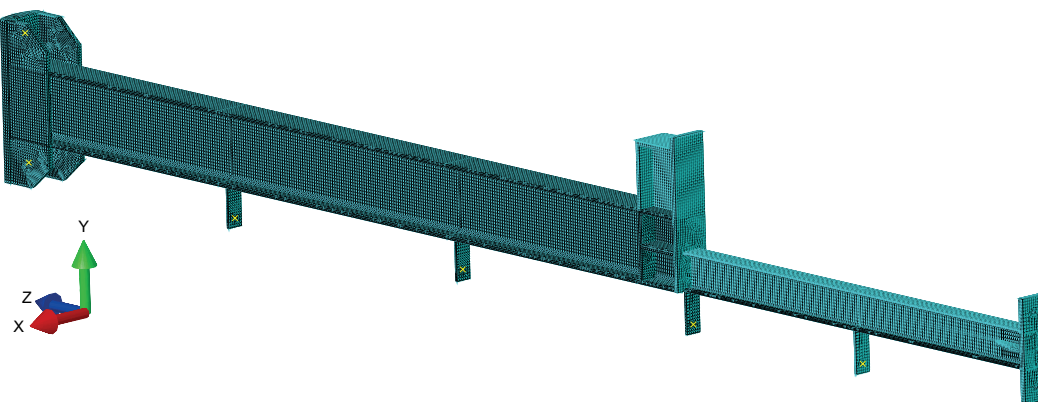


Rys. 4.18. Sposoby obciążenia wspornika (a) oraz głowicy (b)

śnienie. W przypadku obciążenia dołem przyjęto prostokątne pole na powierzchni górnej poziomej blachy wspornika o wymiarach  $15 \times 135$  mm, czyli odpowiadającym grubości blachy pionowej oraz szerokości blachy poziomej. Widok wspornika wraz ze sposobem przyłożenia obciążenia na odpowiedniej powierzchni pokazano na rysunku 4.18a. Obciążenie głowicy również zostało zdefiniowane jako ciśnienie, które przyłożono do pola o szerokości 10 mm i długości 100 mm, co odpowiada grubości blachy pionowego żebra oraz szerokości poziomej blachy głowicy. Szczegół przyłożenia obciążenia do głowicy przedstawiono na rysunku 4.18b.

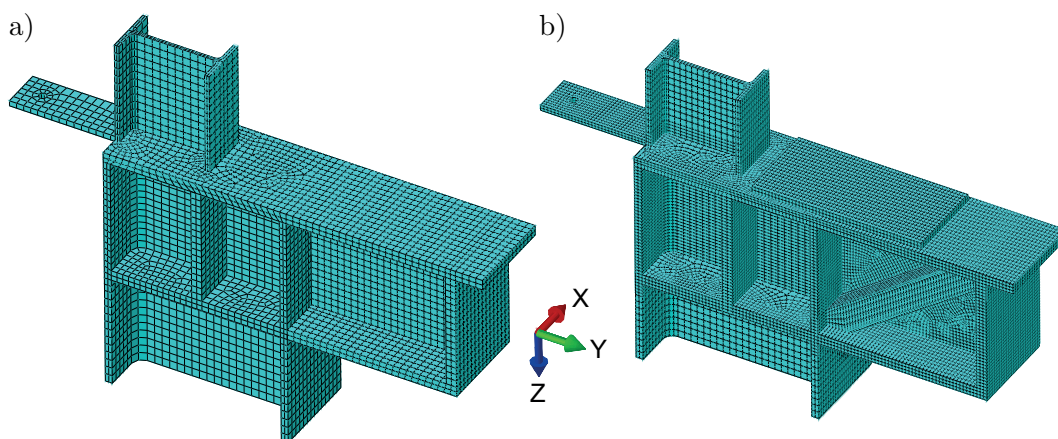
Obliczenia numeryczne etapu drugiego polegają na uwzględnieniu nieliniowości, zarówno geometrycznych, jak i materiałowych, podczas wyznaczania obciążeń granicznych. Modele numeryczne serii Sg etapu drugiego pod względem budowy nie różniły się więc niczym od odpowiadających im modelom etapu pierwszego. Inaczej było w przypadku słupów, w których obciążenie przykładano dołem. Tak jak modele fizyczne wymagały one wzmocnienia środka wspornika. Na rysunku 4.17b pokazano widok takiego wzmocnienia. Zdefiniowano je poprzez zmodyfikowanie geometrii wspornika. Na powierzchni, do której dospawano dodatkowy płaskownik, zwiększono grubość górnej blachy poziomej, a z obu stron środka zdefiniowano dodatkowe rury kwadratowe (por. rys. 3.40b, 3.53b).

Numeryczne modele serii Sd drugiego etapu różniły się także sposobem wymuszania obciążenia, ponieważ nie definiowano ciśnienia, a przemieszczenie. Było to spowodowane brakiem zbieżności i przerwaniem obliczeń po osiągnięciu pewnych wartości obciążeń. Sterowanie przemieszczeniem, zamiast obciążeniem, pozwoliło na wyeliminowanie tego problemu.



Rys. 4.19. Widok całego modelu numerycznego z podziałem na elementy skończone

Rozmiar zadania, czyli liczba węzłów i elementów skończonych różnił się w zależności od parametrów związanych z geometrią modeli, czyli od odległości punktowych stężeń



Rys. 4.20. Schemat siatkowania podstawowej wersji wspornika (a) oraz w przypadku jego wzmocnienia (b)

poprzecznych oraz ich liczby. Mimo tych drobnych różnic, we wszystkich modelach etapu pierwszego był on zbliżony. Liczba elementów skończonych jednego modelu wynosiła ok. 52 tys., a liczba węzłów ok. 124 tys. Na rysunku 4.19 pokazano — wraz z podziałem na elementy skończone — widok modelu numerycznego stężonego poprzecznie słupa o skokowo, nieosiowo zmiennym przekroju poprzecznym, który był rozważany w etapie pierwszym. Rysunek 4.20a przedstawia ponadto sposób siatkowania samego wspornika, czyli miejsca, w którym następuje nagła zmiana sztywności modelu.

W drugim etapie, w którym badano zachowanie modeli numerycznych z uwzględnieniem nieliniowości materiałowych i geometrycznych, ograniczono się jedynie do dwóch schematów obciążenia. Były one odpowiednikami modeli doświadczalnych, czyli takich, w których obciążenie przyłożono na poziomie głowicy oraz na poziomie wspornika. Opis badań z wykorzystaniem nieliniowych analiz numerycznych zamieszczono w punkcie 5.3. Rozmiar zadania wynikający z budowy pierwszego modelu był taki sam jak modeli z pierwszego etapu, natomiast drugiego był bardziej skomplikowany ze względu na dodatkowe wzmocnienie wspornika. W celu dopasowania rozmiarów poszczególnych elementów skończonych, zagęszczono siatkowanie wzmocnionego wspornika, przez co słup ten składał się z ok. 110 tys. elementów oraz ponad 606 tys. węzłów. Zasadniczo, podział na poszczególne elementy skończone wzmocnionego modelu numerycznego był zbliżony do modeli niewzmocnionych (por. rys. 4.19). Tak znacząca różnica w liczbie elementów skończonych wynika jedynie ze znacznie bardziej złożonej geometrii wzmocnionego wspornika. Lokalnie bowiem zagęszczono siatkowanie elementów do 5 mm. Wpłynęło to również na nieco gęstszy podział na elementy skończone pozostałej części słupa. Na rysunku 4.20b pokazano szczegół wzmocnionego wspornika z podziałem na elementy skończone.

#### 4.4. Wybór modelu numerycznego najlepiej odwzorowującego modele fizyczne

W niniejszym podrozdziale przedstawiono i porównano sprężyste obciążenia krytyczne wyznaczone numerycznie. Głównym celem analiz jest próba opisu rzeczywistego zjawiska, a także weryfikacja otrzymanych wyników z wynikami badań doświadczalnych. Wykorzystano do tego omówione w punkcie 4.1 programy komputerowe, w których zdefiniowano

szereg mniej lub bardziej złożonych modeli słupów o skokowo, nieosiowo zmiennym przekroju poprzecznym.

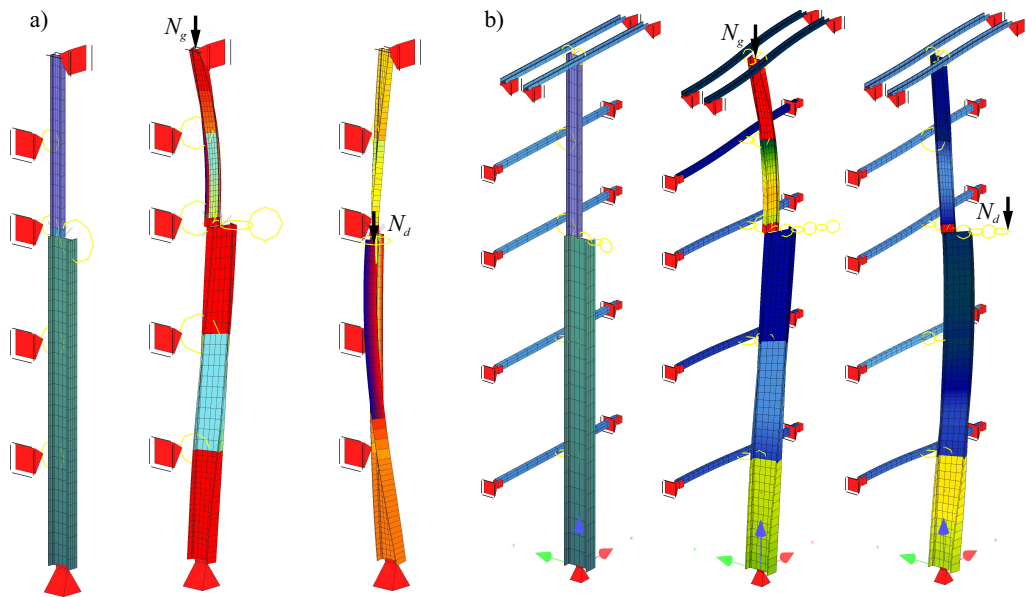
Analizy stateczności sprężystej stężonych poprzecznie słupów schodkowych o nieosiowo zmiennym przekroju poprzecznym, zostały przeprowadzone żeby skonfrontować z wynikami badań doświadczalnymi najprostsze, stosowane w praktyce inżynierskiej, modele z belkowych, a także bardziej złożone — z powłokowych i bryłowych elementów skończonych. Rzeczywiste podparcie modeli fizycznych odbiega od wyidealizowanych warunków brzegowych, stąd próba oceny na ile takie modele odpowiadają słupom zbadanym doświadczalnie. Porównano wyniki obciążeń krytycznych otrzymanych na podstawie analiz sześciu modeli, które poza stosowanym oprogramowaniem różniły rodzaje elementów skończonych oraz sposób podparcia. Zostały one następnie zestawione z wartościami uzyskanymi na podstawie badań doświadczalnych.

Każdy model teoretyczny opisujący rzeczywistość, w tym przypadku element konstrukcyjny, jest jej uproszczeniem. Nie inaczej jest z przyjętymi w programie SOFiSTiK modelami belkowymi. Żeby ocenić ich przydatność, przyjęto ich dwa zasadnicze rodzaje. Pierwszy z nich jest najprostszym modelem, w którym podparcie i stężenia poprzeczne zdefiniowano ograniczając przemieszczenia więzami podporowymi. Jego widok zamieszczono na rysunku 4.21a. Drugi model zdefiniowano w podobny sposób, jedyna różnica polega na dodatkowym zdefiniowaniu pośrednich rygli stężających oraz podparciu głowicy. Wykorzystano do tego dodatkowe elementy, ponieważ ich sztywność ma wpływ na wyniki obliczeń. Widok tego modelu przedstawia rysunek 4.21b.

Początkowo warunki podparcia obu modeli zostały określone w taki sposób, że w obu modelach w podstawie ograniczono wszystkie trzy przemieszczenia translacyjne, deplanację przekroju, możliwość kątów skręcenia przekroju oraz kąta obrotu w płaszczyźnie większej sztywności. Dopuszczono jedynie obrót w płaszczyźnie mniejszej sztywności. Prosty prętowy model słupa w głowicy ma skrepowaną możliwość przemieszczeń liniowych  $y$ ,  $z$ , skręcenia przekroju i uniemożliwioną deplanację. Umożliwiono natomiast jej przemieszczenia w osi pionowej. Stężenia poprzeczne prostego modelu zostały zdefiniowane jako punktowe więzi odsunięte od osi dolnej części o 263 mm, którym ograniczono jedynie przemieszczenia z płaszczyzny słupa. Więzy te dowiązano do modelu poleceniem *kinematic constraint* (por. rys. 4.21a). Zrealizowany model fizyczny, w przypadku głowicy cechował się podatnymi warunkami podparcia, które wynikały ze sztywności dwóch ceowników, które miały ograniczyć przemieszczenia w płaszczyźnie słupa w trakcie badań doświadczalnych. Okazały się one niedostatecznie sztywne, stąd próba oceny takiego rozwiązania na wartości obciążeń krytycznych (por. rys. 4.21b). Podobnie jak w przypadku wstępnych analiz numerycznych omówionych w punkcie 4.2.1, modele jednowymiarowe zbudowano z przestrzennych elementów belkowych o siedmiu stopniach swobody w węźle, których rozmiar nie przekraczał 150 mm.

Analiza stateczności została także przeprowadzona z wykorzystaniem programu LTBeamN. Widok modelu obliczeniowego przedstawiono na rysunku 4.1. Geometrię słupa zdefiniowano w oparciu o rzeczywiste modele fizyczne (por. rys. 3.1). Program ten operuje na elementach skończonych o czterech stopniach swobody w węźle (przemieszczenie i kąt obrotu z płaszczyzny większej sztywności elementu, kąt skręcenia oraz deplanacja przekroju). Zamiast definiowania rozmiaru pojedynczego elementu, w tym programie dowolnej długości belkę można podzielić na maksymalnie 250 elementów skończonych. W tym przypadku dobrano ich 200, co oznacza, że długość jednego elementu nie przekracza 300 mm. W związku z mniejszą liczbą stopni swobody, program umożliwia wyznaczenie postaci i wartości



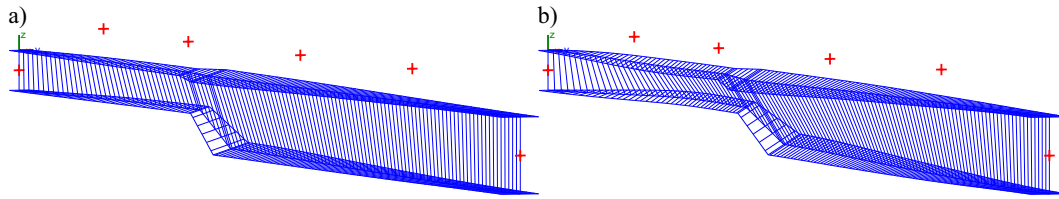


Rys. 4.21. Schemat i postacie niestateczności prostego (a) i złożonego (b) modelu belkowego w programie SOFiSTiK

własnych jedynie z płaszczyzny większej sztywności. Definiowanie podparcia w płaszczyźnie słupa, służy jedynie do prawidłowego wyznaczenia sił przekrojowych. W bazowym modelu wprowadzono widelkowe podparcie na obu końcach, tj. ograniczono przemieszczenia z jego płaszczyzny oraz skręcenie przekroju, a także skrupowano deplanację w podstawie. Pośrednie warunki podparcia, czyli stężenia punktowe, to więzy zlokalizowane w odległości 128 mm od zewnętrznych pól, którymi ograniczono przemieszczenia z płaszczyzny słupa.

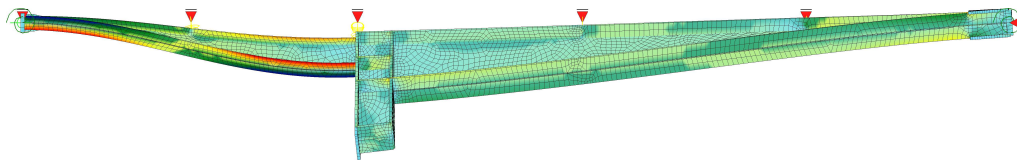
Kolejnym typem rozważanym w niniejszym rozdziale jest model słupa, który także został zdefiniowany w programie SOFiSTiK, lecz tym razem z wykorzystaniem elementów powłokowych. Dyskretyzacji modelu dokonano dzieląc go na elementy o wielkości 25 mm. Jego widok pokazano na rysunku 4.2b. Utwierdzenie w płaszczyźnie słupa, możliwość kąta obrotu z jego płaszczyzny oraz uniemożliwienie skręcenia przekroju w podstawie zrealizowano poprzez liniowe, wzdłuż osi środka, zdefiniowanie więzi krępujących wszystkie trzy przemieszczenia translacyjne. Głowicę podparto poprzez punktowe — w miejscach styku trzech płaszczyzn: środka, dwóch pól i poziomej blachy — zablokowanie przemieszczeń z płaszczyzny słupa. Uniemożliwiono w ten sposób jej skręcenie przy pełnej swobodzie kątów obrotu. Przegubowe podparcie w płaszczyźnie większej sztywności zapewniono dzięki zablokowaniu przemieszczeń w węzle na osi górnej części słupa. Pośrednim więzom punktowym (rygłom), zdefiniowanych w odległości 128 mm od zewnętrznych pasów, odebrano możliwość przemieszczeń w płaszczyźnie mniejszej sztywności. W płaszczyźnie liczących ze sobą pól, w na wysokościach rygłi poprzecznych wprowadzono poziomą linię strukturalną, której szerokość odpowiadała szerokości przyspawanej w tym miejscu blachy. Następnie te wyizolowane punkty połączono ze zdefiniowanymi w zewnętrznej półce liniami strukturalnymi dostępnym w programie wiązaniem kinematycznym (*kinematic constraint*).

Wyniki, które otrzymano bazując na omówionych wyżej modelach numerycznych, okazały się być bardzo zróżnicowane. O ile kształt poszczególnych postaci utraty stateczności wydawał się być zbliżony, o tyle wartości już nie do końca. Względna różnica pomiędzy



Rys. 4.22. Postacie utraty stateczności analizowanego słupa obciążonego w głowicy (a) oraz na wsporniku (b) w programie LTBeamN

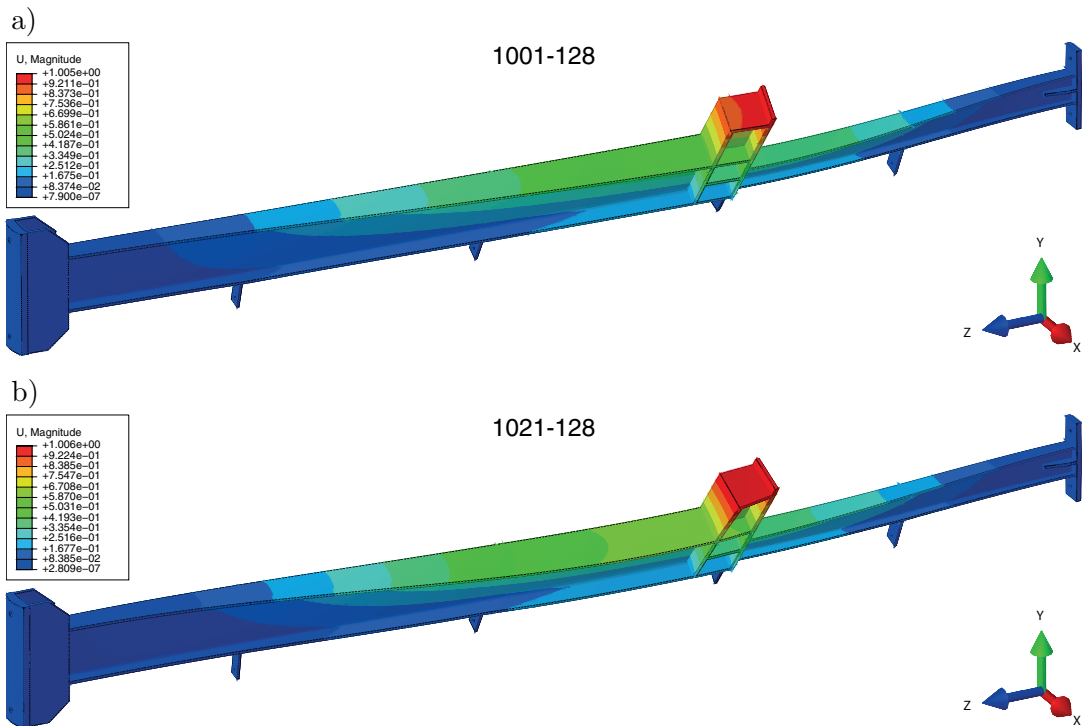
nimi wynosi w przypadku obciążenia przyłożonego do głowicy, prawie 40% oraz 60%, gdy obciążenie przyłożono do wspornika. Podobne analizy z wykorzystaniem tego samego oprogramowania, lecz w odniesieniu do statycznej pracy przęsła mostowego przeprowadzili autorzy pracy [165]. W większości przeanalizowanych modeli otrzymali różnice nie większe niż 20%, jednak w kilku przypadkach dotyczących reakcji podporowych otrzymali rozbieżności sięgające nawet 117%. Na rysunku 4.21 pokazano modele belkowe zbudowane w programie SOFiSTiK, a także ich postacie utraty stateczności w zależności od sposobu przyłożenia obciążenia. Rysunek 4.22 przedstawia formy niestateczności stężonego poprzecznie słupa o zmiennym przekroju poprzecznym (por. rys. 4.1) otrzymane w programie LTBeamN, natomiast na rysunku 4.23 pokazano przykładową postać z analizy modelu numerycznego z elementów powłokowych.



Rys. 4.23. Postać utraty stateczności powłokowego modelu w programie SOFiSTiK obciążonego w głowicy

Dotychczas omówione modele mogą nie odwzorowywać realnego zachowania modeli fizycznych z uwagi na wspomniane wyidealizowane warunki podparcia, zbyt dużą odkształcalność (lub jej całkowity brak) przekroju poprzecznego, a także niedoskonałości wynikające ze sposobu obciążenia lub nieosiowości samego słupa. Kolejne liniowo-sprężyste analizy bifurkacyjne przeprowadzono na słupach zbudowanych w programie Abaqus FEM ze skończonych elementów bryłowych. Przyjęto dwa, różniące się sposobem podparcia typy słupów: idealny oraz dokładny. W pierwszym z nich przyjęto wyidealizowany sposób podparcia w podstawie i głowicy. Podparcie drugiego zamodelowano w taki sposób, aby jak najwierniej odwzorować rzeczywiste warunki panujące podczas badań doświadczalnych. W podrozdziale 4.3 szczegółowo omówiono ich konstrukcję oraz sposób, w jaki zdefiniowano i przyłożono obciążenie. Zasadniczo kształty postaci utraty stateczności obu typów są do siebie zbliżone, jednak jeżeli chodzi o wartości, to wyniki otrzymane z analizy modelu dokładnego są dużo bliższe wynikom badań doświadczalnych. Na rysunku 4.24a pokazano widok pierwszej postaci własnej słupa obciążonego w głowicy, z kolei na rysunku 4.24b słupa obciążonego na poziomie wspornika. Można zauważyć, tak jak w przypadku wcześniej rozważanych modeli, że różnice w kształtach przestrzennej utraty stateczności w zależności od sposobu obciążenia są nieduże.

Mając na uwadze doświadczenia, które opisano w punkcie 4.2.1 oraz porównując uzyskane wartości obciążeń krytycznych z dotychczas zdefiniowanych modeli, wysnuto wniosek, że część przeanalizowanych modeli nie opisuje w dostateczny sposób tych badań do-



Rys. 4.24. Postacie utraty stateczności słupa z elementów bryłowych w programie Abaqus obciążonego w głowicy (a) oraz na wsporniku (b)

świadczalnych. Dotyczy to słupów z belkowych i powłokowych elementów skończonych, a także bryłowych z wyidealizowanymi sposobami podparcia. Zwłaszcza w odniesieniu do podparcia z płaszczyzny większej sztywności słupa.

W związku z tymi rozbieżnościami, wprowadzono w przeanalizowanych słupach modyfikacje dotyczące warunków podparcia podstawy i głowicy w płaszczyźnie mniejszej sztywności słupa. Zamiast przegubów wprowadzono w tych miejscach sztywne lub podatne więzi podporowe podparcia. Powstało w związku z tym kilka dodatkowych kombinacji. Zestawienie obok siebie dwóch skrajnych schematów (przegubowego i sztywnego podparcia) pozwala na ocenę wpływu sposobu podparcia z płaszczyzny słupa na wartości obciążeń krytycznych. Porównanie tychże obciążeń pozwoliło zauważyć, że właściwe, czyli odpowiadające badaniom doświadczalnym obciążenia krytyczne są zazwyczaj wartościami znajdującymi pomiędzy tymi skrajnymi. Wynika stąd, że rzeczywiste podparcie cechuje się pewną podatnością podpór. Wartość tej podatności starano się dobrać iteracyjnie, aby była jedną, niezależną od rodzaju modelu wielkością. W modelach z jednowymiarowych elementów belkowych oraz idealnych modelach z elementów bryłowych przyjęto, że sztywność rotacyjna podstawy wynosi 5000 kNm/rad i 200 kNm/rad w odniesieniu do głowicy. Natomiast w modelach powłokowych liniowa sztywność rotacyjna podstawy to 300 kN/(rad · m), a dla głowicy 100 kN/(rad · m).

Rezultaty omówionych w tym podrozdziale analiz zamieszczono w tabelicy 4.3. Można zauważyć duży rozrzut pomiędzy wartościami poszczególnymi obciążeń krytycznych. Porównywanie bezpośrednich wyników jest kłopotliwe, dlatego w kolejnej tabelicy 4.4 znajdują się względne różnice  $\delta_{cr}$  pomiędzy wartościami uzyskanymi na drodze analiz numerycznych  $N_{cr}$  a wynikami badań doświadczalnych  $N_{cr,TF}$  (por. tab. 3.12). Procentowy błąd

Tabela 4.3. Wartości obciążeń krytycznych w zależności od rodzaju modelu numerycznego i wyidealizowanego sposobu podparcia

Podstawa <sup>a</sup>	Głowica <sup>a</sup>	SOFiSTiK prętowy		LTBeamN	SOFiSTiK powłokowy	Abaqus bryłowy		badania modelowe
		prosty	złożony			idealny	dokładny	
Obciążenie górną $N_{cr,Sg}$ [kN]								
przegub	przegub	265,5	–	356,8	225,2	258,7		
	podatna	323,8	366,8	–	313,0	338,3		
	sztynna	362,1	–	–	344,7	387,3		
							<b>332,3</b>	
podatna	przegub	314,1	–	–	236,7	304,6		
	podatna	381,7	371,5	–	328,4	398,0		371
	sztynna	422,9	–	–	361,0	452,6		
sztynna	przegub	322,1	–	400,4	293,0	312,8		
	podatna	391,3	406,2	–	404,7	408,6	433,4	
	sztynna	433,0	–	–	441,9	464,1		
Obciążenie dołem $N_{cr,Sd}$ [kN]								
przegub	przegub	198,3	–	496,4	264,3	208,2		
	podatna	212,4	382,7	–	369,3	220,5		
	sztynna	222,9	–	–	434,9	232,1		
							<b>287,4</b>	
podatna	przegub	339,0	–	–	271,1	259,4		
	podatna	351,1	394,7	–	373,2	271,8		326 <sup>c</sup>
	sztynna	361,0	–	–	436,6	284,0		318 <sup>d</sup>
sztynna	przegub	357,0	–	532,3	297,1	271,3		
	podatna	369,2	509,1	–	385,6	283,8	287,6	
	sztynna	379,1	–	–	441,2	296,2		

<sup>a</sup> sposób podparcia w płaszczyźnie mniejszej sztywności słupa,

<sup>b</sup> model ze wzmocnionym wspornikiem,

<sup>c</sup> wartość średnia z serii Sd,

<sup>d</sup> wartość średnia z serii Sgd.

względny wyznaczono na podstawie zależności (4.2)

$$\delta_{cr} = \frac{\Delta_{cr}}{N_{cr,TF}} \cdot 100\% = \frac{N_{cr} - N_{cr,TF}}{N_{cr,TF}} \cdot 100\%. \quad (4.2)$$

Tablicę 4.4 zamieszczono, aby ocenić, który z analizowanych modeli numerycznych najtrafniej odwzorowuje zachowanie badanych dwuteowych słupów o skokowej, nieosiowej zmianie przekroju poprzecznego. Za kryterium doboru najlepiej dopasowanego modelu przyjęto najmniejszą co do wartości bezwzględnej, lecz ujemną wartość procentowego błędu względnego  $\delta_{cr}$  wyznaczonego z zależności (4.2). Przyjęcie ujemnej wartości wynika z faktu, że obliczeniowe obciążenie krytyczne nie powinno być większe jak to wyznaczone na podstawie badań doświadczalnych. Założono również, że szukany model powinien być jak najbardziej uniwersalny, dlatego ten sam model powinien spełniać te kryteria zarówno przy obciążeniu górną, jak i dołem.

Z ogólnej oceny tablic 4.3 i 4.4 wynika, że większość modeli obciążonych w głowicy wykazuje lepsze dopasowanie niż modele obciążone na wsporniku. W przypadku obciążenia

Tabela 4.4. Względna różnica  $\delta_{cr}$  pomiędzy wartościami uzyskanymi z analiz numerycznych a wynikami badań doświadczalnych

Podstawa <sup>a</sup>	Głowica <sup>a</sup>	SOFiSTiK prętowy		LTBeamN	SOFiSTiK powłokowy	Abaqus bryłowy		
		prosty	złożony			idealny	dokładny	
$\delta_{cr}$ przy obciążeniu górą $N_{cr,Sg}$ [%]								
przegub	przegub	-28,4	-	-3,8	-39,3	-30,3		
	podatna	-12,7	-1,1	-	-15,6	-8,8		
	sztywna	-2,4	-	-	-7,1	4,4		
								<b>-10,4</b>
podatna	przegub	-15,3	-	-	-36,2	-17,9		
	podatna	2,9	0,1	-	-11,5	7,3		
	sztywna	14,0	-	-	-2,7	22,0		
sztywna	przegub	-13,2	-	7,9	-21,0	-15,7		
	podatna	5,5	9,5	-	9,1	10,1		16,8
	sztywna	16,7	-	-	19,1	25,1		
$\delta_{cr}$ przy obciążeniu dołem $N_{cr,Sd}$ [%]								
przegub	przegub	-38,4	-	54,2	-17,9	-35,3		
	podatna	-34,0	18,9	-	14,7	-31,5		
	sztywna	-30,8	-	-	35,1	-27,9		
								<b>-10,7</b>
podatna	przegub	5,3	-	-	-15,8	-19,4		
	podatna	9,0	22,6	-	15,9	-15,6		
	sztywna	12,1	-	-	35,6	-11,8		
								<b>-2,4<sup>b</sup></b>
sztywna	przegub	10,9	-	65,3	-7,7	-15,7		
	podatna	14,7	58,1	-	19,8	-11,9		-10,7
	sztywna	17,7	-	-	37,0	-8,0		

<sup>a</sup> sposób podparcia w płaszczyźnie mniejszej sztywności słupa,<sup>b</sup> model ze wzmocnionym wspornikiem.

dołem jest to nieco ponad 40% tych wyników oraz więcej jak ich połowa przy obciążeniu górą. Także rozrzut wyników jest zdecydowanie mniejszy przy pierwszej sytuacji, ponieważ największa bezwzględna wartość błędu wynosi 39,3% i dotyczy powłokowego modelu z programu SOFiSTiK oraz 65,3% przy drugiej dla prętowego modelu z programu LTBeamN. Niestety drugi z programów spełnił pokładane w nim oczekiwanie tylko w połowie, ponieważ różnica numerycznie uzyskanej wartości obciążenia krytycznego względem wartości średniej z badań doświadczalnych wynosi -3,8% dla obciążenia w głowicy i 54,2% dla obciążenia na wsporniku, i to przy założeniu przegubowo-przegubowego podparcia z płaszczyzny większej sztywności słupa. Niestety ten drugi rezultat dyskwalifikuje program LTBeamN w kolejnych analizach, ponieważ zwiększanie sztywności podstawy lub głowicy powoduje jedynie wzrost tej różnicy. Najmniejszym co do wartości bezwzględnej błędem względnym  $\delta_{cr}$  cechuje się złożony, prętowy model z programu SOFiSTiK, ponieważ przy obciążeniu górą wynosi jedynie 0,1%. Niestety w drugim przypadku obliczeniowym wzrósł do 22,6%, co również stanowi o jego wykluczeniu.

Przyjęte kryterium doboru nakazuje odrzucenie także dwóch pozostałych modeli. Mianowicie prostego, prętowego modelu z programu SOFiSTiK oraz o wyidealizowanym spo-

sobie podparcia z programu Abaqus. Nie należy ich do końca dyskredytować, zwłaszcza w odniesieniu do tego pierwszego, ponieważ może być wykorzystany w praktycznym, inżynierskim zastosowaniu. Odnosi się to zwłaszcza do modelu z podatnym podparciem zarówno w podstawie, jak i w głowicy. Względna różnica  $\delta_{cr}$  jest co prawda dodatnia, ale przyjmuje nieduże z praktycznego punktu widzenia wartości. Są to odpowiednio 2,9% i 9,0%. Zmniejszenie sztywności podparcia podstawy i/lub głowicy z płaszczyzny większej sztywności spowoduje również zmniejszenie wartości obciążeń krytycznych. Przedstawiony w niniejszym rozdziale sposób definiowania w programie SOFiSTiK z prętowych elementów skończonych dwuteowych słupów o skokowo, nieosiowo zmiennym przekroju poprzecznym może mieć praktyczne zastosowanie.

Analizując wartości obciążeń krytycznych  $N_{cr}$  oraz względnych różnic  $\delta_{cr}$  zamieszczonych odpowiednio w tabelach 4.3 i 4.4 należy zauważyć, że jedynym spełniającym postawione kryteria jest dokładny, bryłowy model zdefiniowany w programie Abaqus FEA. Względne różnice  $\delta_{cr}$  pomiędzy wartościami uzyskanymi z analiz numerycznych a wynikami badań doświadczalnych wynoszą  $-10,4\%$  w przypadku obciążenia głowicy,  $-10,7\%$  w przypadku obciążenia na poziomie wspornika lub nawet  $-2,4\%$ , gdy rozważa się słup ze wzmocnionym wspornikiem. Zatem w dalszych rozważaniach wykorzystano modele numeryczne z elementów bryłowych zbudowane w programie Abaqus FEA, przy czym w analizach parametrycznych wykorzystano model z niewzmocnionym wspornikiem. Do obliczeń numerycznych z uwzględnieniem nieliniowości wykorzystano oba modele. Przy obciążeniu górą zastosowano model z niewzmocnionym, a przy obciążeniu dołem — ze wzmocnionym wspornikiem. Zarówno liniowo-sprężyste, jak i nieliniowe analizy numeryczne omówiono w rozdziale 5.

Porównanie wyników zamieszczonych w tabelach 4.3 i 4.4 pozwala zauważyć, że podparcie modeli doświadczalnych nie jest idealne. Zwłaszcza jeżeli chodzi o sposób podparcia podstawy i głowicy z płaszczyzny większej sztywności. Aby opisać rzeczywiste zachowanie słupów o skokowo, nieosiowo zmiennym przekroju poprzecznym należałoby dokładnie określić podatność węzłów podporowych. Natomiast w przypadku stosowania modeli o wyidealizowanym sposobie podparcia z płaszczyzny słupa należy mieć świadomość, że wyznaczone w ten sposób obciążenia krytyczne mogą być zaniżone nawet o ok. 40%.

## Rozdział 5

---

# Badania na modelach numerycznych

---

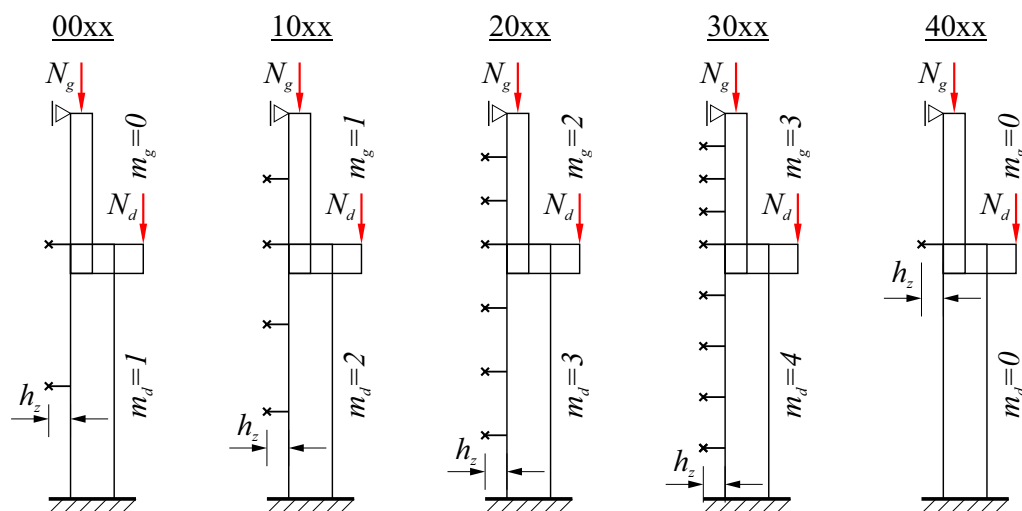
W niniejszym rozdziale przeprowadzono analizy parametryczne w zakresie stateczności sprężystej, których celem było porównanie wpływu poszczególnych czynników na wartość obciążenia krytycznego. W dalszej kolejności przeprowadzono w sposób iteracyjny symulacje numeryczne przy założeniu rzeczywistej, sprężysto-plastycznej charakterystyki stali, z której wykonano modele. Wykorzystano do tego przedstawiony w punkcie 4.1.3 program Abaqus FEA [1].

### 5.1. Analizy parametryczne w zakresie nośności krytycznej

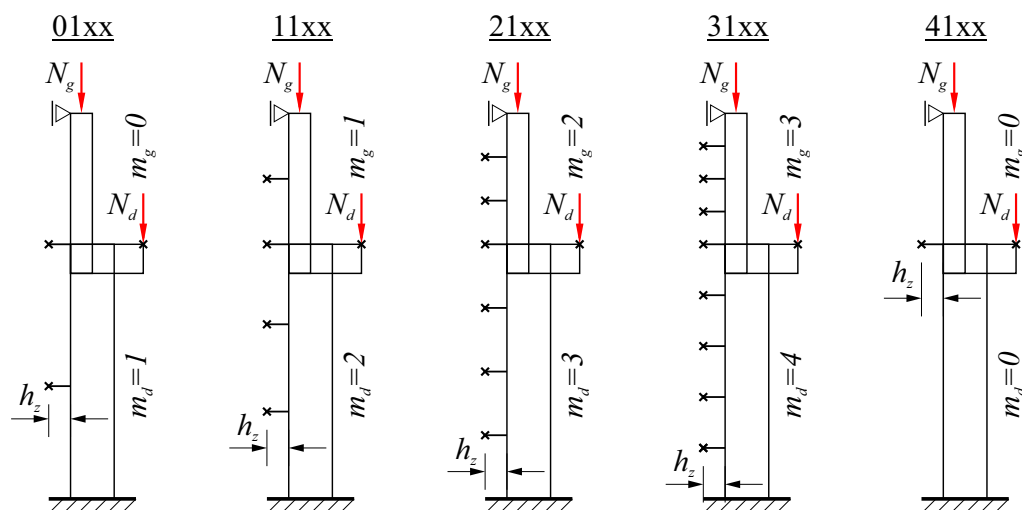
Wyniki otrzymane z analiz modeli belkowych i powłokowych okazały się niejednoznaczne, trudne w interpretacji i nie do końca trafnie opisujące rzeczywistość, dlatego też przeprowadzono kolejne — na modelach bryłowych, które są w stanie dużo lepiej opisać zachowanie i sposób podparcia badanych słupów. Obliczenia wstępne wypadły obiecująco, dlatego postanowiono rozszerzyć zakres rozważań numerycznych. Polegały one na przeprowadzeniu obszernych analiz parametrycznych stężonych słupów dwuteowych ze skokową, nieosiową zmianą przekroju poprzecznego w zakresie wyznaczania obciążeń krytycznych stateczności sprężystej. Jako obciążenie krytyczne przyjęto wartość pionowej reakcji w podstawie słupa ( $R = N_g + N_d$ ). Przebadano wpływ takich parametrów jak stosunek obciążenia przyłożonego w głowicy do obciążenia na wsporniku, liczbę stężeń i ich odległość od zewnętrznej półki trzonu słupa oraz rodzaj podstawy. W tabeli 5.1 zestawiono wszystkie rozważane serie oraz objaśniono sposób ich oznaczenia. Opisu poszczególnych modeli numerycznych zależy od rodzaju analizowanego parametru i jest ogólnie opisany czterema cyframi (xxxx). Pierwszej cyfrze przypisano odpowiednią liczbę stężeń poprzecznych, drugiej — rodzaj podstawy i ewentualne dodatkowe stężenie wspornika (por. tab. 5.1). Początkowo, pierw-

Tabela 5.1. Konwencja znakowania modeli obliczeniowych w analizach parametrycznych

Rodzaj podstawy	Stężenie wspornika	Liczba stężeń części górnej $m_g$ i dolnej $m_d$				
		$m_g = 0$ $m_d = 1$	$m_g = 1$ $m_d = 2$	$m_g = 2$ $m_d = 3$	$m_g = 3$ $m_d = 4$	$m_g = 0$ $m_d = 0$
kołyska	nie	00xx	10xx	20xx	30xx	40xx
	tak	01xx	11xx	21xx	31xx	41xx
płaska	nie	02xx	12xx	22xx	32xx	42xx
	tak	03xx	13xx	23xx	33xx	43xx



Rys. 5.1. Schematy modeli obliczeniowych serii x0xx



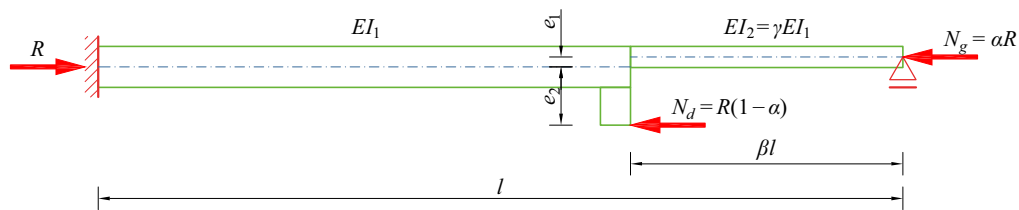
Rys. 5.2. Schematy modeli obliczeniowych serii x1xx

sza cyfra odnosiła się do liczby stężeń  $m_g$  części nadsuwnicowej, w związku z tym liczba stężeń części podsuwnicowej wynosiła  $m_d = m_g + 1$ , jednakże wprowadzenie serii 4xxx i 5xxx zaburzyło ten podział. Dodatkowe serie charakteryzują się brakiem stężeń części górnej i dolnej, przy czym modele serii 4xxx zostały stężone jedynie w poziomie wspornika, natomiast modele serii 5xxx nie są w ogóle stężone poprzecznie. Nie mają zatem parametru związanego z lokalizacją stężenia względem półki ( $h_z$ ). Druga cyfra charakteryzuje warunki podparcia modelu numerycznego. Oceniono w ten sposób jakie są różnice w wartościach obciążeń krytycznych stateczności sprężystej w przypadku oparcia słupa poprzez łożysko kołyskowo-styczne, czyli tak, jak w badaniach doświadczalnych, a jakie w przypadku płaskiej podstawy stosowanej w praktyce. Modele, które w podstawie miały kołyskę oznaczone zostały jako x0xx i x1xx, natomiast modele z płaską blachą — jako x2xx i x3xx. Sposób podparcia dotyczy również przeciwskrętnego zabezpieczenia wspornika. Realizacja tej dodatkowej więzi została pokazana na rysunku 4.17a. Zatem serie, w których tego stężenia nie zastosowano to x0xx i x2xx (por. rys. 5.1), natomiast x1xx i x3xx mają już te stężenia (por. rys. 5.2). Dwie ostatnie cyfry składają się na porządkową liczbę modeli, w których parametrem jest obciążenie potraktowane jako jednoparametrowe. Przykładano je do części górnej i/lub dolnej, przy czym ujęto je parametrem  $\alpha$  (4.1).

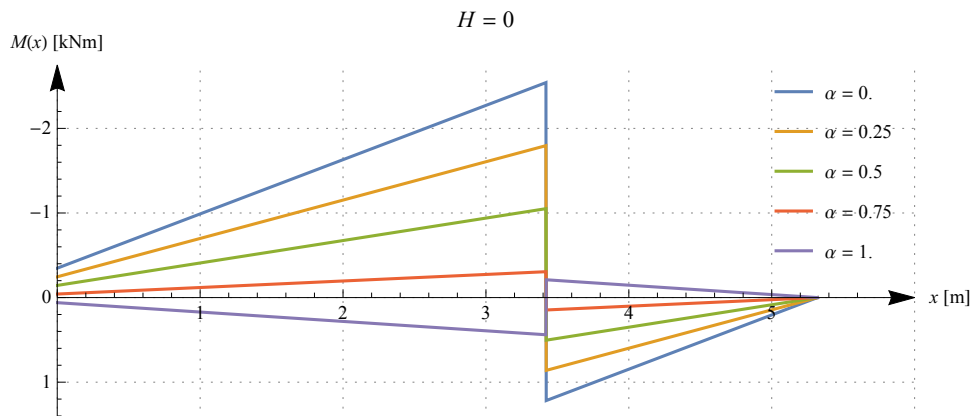


W każdej serii przeanalizowano 21 modeli, przyjmując zmianę parametru  $\alpha$  co 0,05. Oznacza to, że w przypadku serii xx01 parametr ten wynosi  $\alpha = 1,00$ , xx02 —  $\alpha = 0,95$ , xx03 —  $\alpha = 0,90$ , itd., aż do xx21, w której  $\alpha = 0,00$ . Różnicowano także odległość stężenia od zewnętrznej półki słupa ( $h_z$ ). Dokonano przy tym porównania wartości obciążeń krytycznych w przypadku stężeń zlokalizowanych w odległościach: 8, 32, 56, 80, 104 i 128 mm.

Graficzną interpretacją dwóch pierwszych wierszy tabeli 5.1 są także rysunki 5.1 i 5.2. Oba dotyczą co prawda modeli, które w podstawie mają łożysko, jednakże schematy i oznaczenia modeli z płaską podstawą są analogiczne. Na rysunku 5.1 zamieszczono schematy, wraz z odpowiednimi oznaczeniami, modeli obliczeniowych serii x0xx (analogicznie x2xx), zaś na rysunku 5.2 — schematy modeli serii x1xx (analogicznie x3xx).



Rys. 5.3. Schemat statyczny modelu słupa



Rys. 5.4. Wykresy momentów zginających w zależności od wybranego parametru  $\alpha$

Przedstawione w niniejszym rozdziale obciążenia krytyczne  $N_{cr}$  wyznaczone są w oparciu o obliczony w programie Abaqus mnożnik  $\alpha_{cr}$ . Wiąże on obciążenie krytyczne z pionową reakcją w podstawie słupa  $R$  poprzez następującą relację

$$N_{cr} = \alpha_{cr} \cdot R. \quad (5.1)$$

Moduł do wyznaczania wartości własnych nie pozwala na zdefiniowanie niezależnych obciążeń na poszczególnych poziomach, dlatego zastosowano wspomniany już współczynnik  $\alpha$  (4.1). Wiąże on ze sobą obciążenie głowicy  $N_g$  z obciążeniem na wsporniku  $N_d$ , przez co mamy do czynienia z obciążeniem jednoparametrowym. Nieosiowa zmiana sztywności pomiędzy poszczególnymi segmentami ( $e_1$ ) oraz mimośrodowe obciążenie wspornika ( $e_2$ ) siłą  $N_g$  powoduje, że w słupie pojawia się wyężenie wynikające nie tylko z obciążenia osiowego, ale także pochodzące od zmiennego momentu zginającego  $M_y(x)$ :

$$M_y(x) = \begin{cases} \frac{R[\alpha e_1 + (\alpha - 1)e_2] \{ l[2\beta^3(\gamma - 1) - 3\beta^2\gamma + \gamma] + 3(\beta^2 - 1)\gamma x \}}{2l[\beta^3(\gamma - 1) - \gamma]} & \text{gdzie } 0 \leq x < l(1 - \beta), \\ -\frac{3\gamma R(\beta^2 - 1)[\alpha e_1 + (\alpha - 1)e_2](l - x)}{2l[\beta^3(\gamma - 1) - \gamma]} & \text{gdzie } l(1 - \beta) < x \leq l. \end{cases} \quad (5.2)$$

Ogólne wyrażenie na moment zginający w słupie  $M_y(x)$  wyznaczono w zgodzie z założeniami teorii I rzędu. Wykorzystano do tego metodę sił i opisano równaniem (5.2). Funkcja ta jest liniowa, zależy jednak od parametrów, które w analizowanym przypadku przyjęto jako wartości stałe związane z geometrią ( $\beta$ ), mimośrodami przyłożonych obciążeń ( $e_1, e_2$ ) i stosunkiem sztywności ( $\gamma$ ) poszczególnych segmentów. Schemat statyczny słupa wraz z zastosowanymi oznaczeniami przedstawiono na rysunku 5.3. Wynoszą one odpowiednio (por. rys. 3.1):  $l = 5,32$  m,  $\beta = 1,8/5,32 = 0,3383$ ,  $e_1 = 0,065$  m,  $e_2 = 0,376$  m,  $\gamma = EI_2/EI_1 = 0,0934$ . Nie bez znaczenia jest również wartość pionowej reakcji podporowej, ponieważ to od niej zależy krytyczny mnożnik obciążenia  $\alpha_{cr}$  wyznaczany w programie Abaqus. W modelu numerycznym wartość tej reakcji przy zróżnicowanym parametrze  $\alpha$  była stała i wynosiła  $R = 10$  kN.

Na rysunku 5.4 pokazano wybrane rozkłady momentów zginających w rozważanym słupie w zależności od współczynnika  $\alpha$  oraz przy założeniu, że  $R = 10$  kN. Przy  $\alpha = 0$  największe wyteżenie wynikające ze zginania występuje w dolnej części słupa, natomiast wraz z wzrostem współczynnika  $\alpha$  wyteżenie zmniejsza się, by następnie przy jego pewnym stosunku zmienić znak. Oznacza to, że przy pewnej konfiguracji obciążeń zewnętrznych, zarówno w części dolnej, jak i górnej pojawia się jedynie wyteżenie wynikające z siły osiowej. Zależy to od proporcji pomiędzy mimośrodami opisanej równaniem (5.3), która w przypadku analizowanego słupa wynosi

$$M_y(x) = 0, \quad \text{jeżeli } \alpha = \frac{e_2}{e_1 + e_2} = \frac{0,376}{0,065 + 0,376} = 0,8526. \quad (5.3)$$

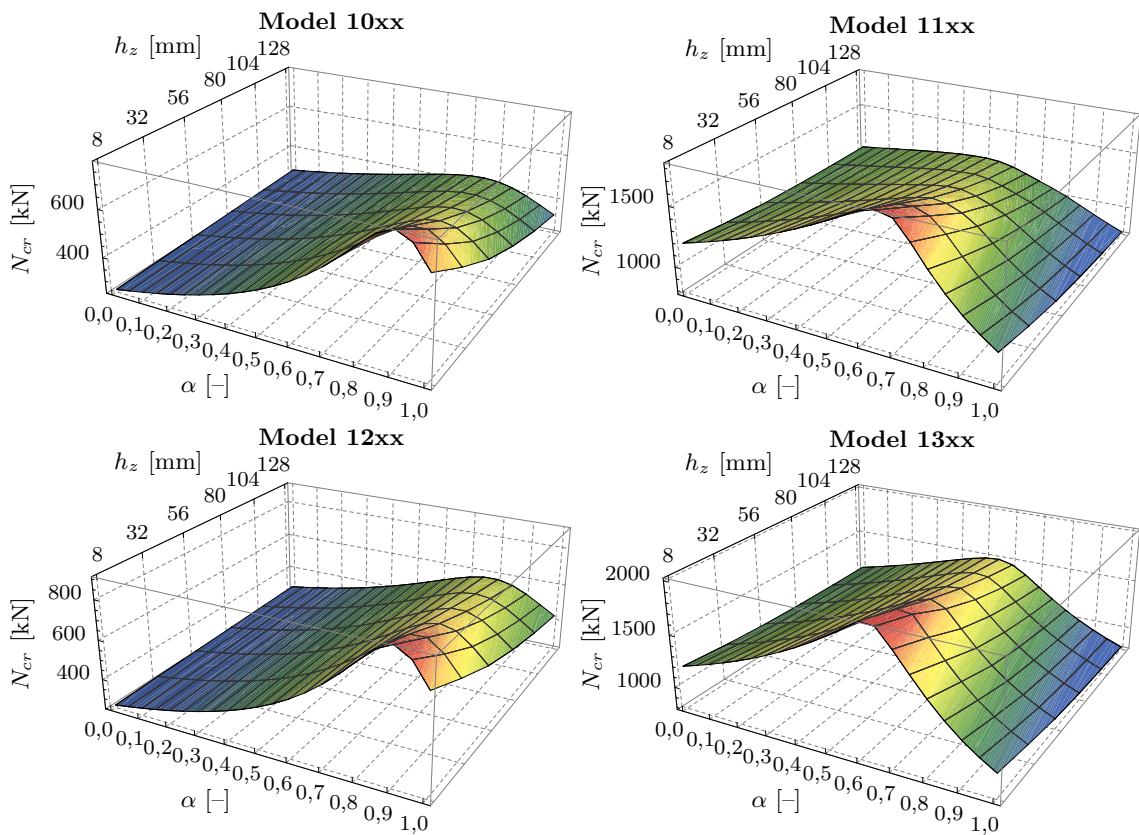
Podsumowując zakres analiz parametrycznych należy zauważyć, że w ramach jednej serii mieściło się 21 modeli numerycznych. Sumaryczna liczba takich serii jest iloczynem liczby typów podparcia — 4, liczby typów stężeń poprzecznych — 5 oraz liczby modeli ze zróżnicowaną odległością stężenia od półki — 6. Do tego należy dołożyć 4 serie modeli bez stężeń (5xxx). Łącznie zatem przeanalizowano  $21 \times 4 \times 5 \times 6 + 4 \times 21 = 2604$  modele numeryczne.

Punktem wyjścia rozważań parametrycznych były oczywiście modele numeryczne, które odpowiadały modelom fizycznym. Zatem model numeryczny opisany jako 1001-128 jest odpowiednikiem słupa Sg z badań doświadczalnych. Podobnie jest w przypadku słupa Sd, bowiem jego numerycznym odpowiednikiem jest model 1021-128. Człon wstawiony po

Tabela 5.2. Wartości obciążeń krytycznych  $N_{cr}$  [kN] modeli serii 10xx

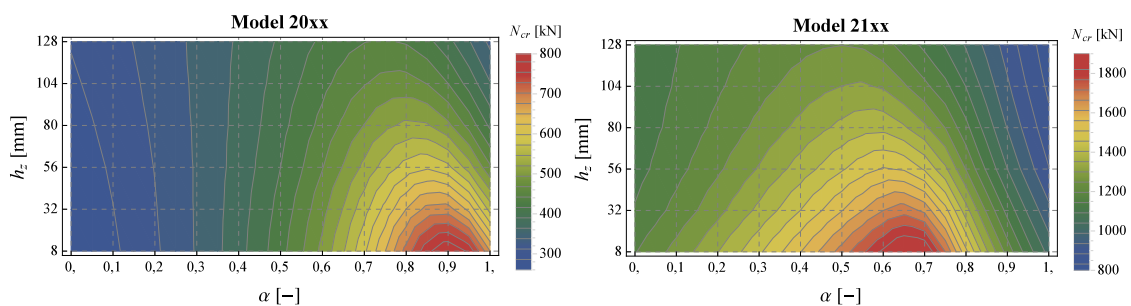
$\alpha$	Lokalizacja stężenia $h_z$ względem półki [mm]					
	128	104	80	56	32	8
1,0	332,3	365,1	410,8	471,6	558,6	659,2
0,9	394,9	436,0	492,8	567,7	670,6	780,6
0,8	434,0	470,4	516,9	572,0	638,0	695,7
0,7	436,8	460,5	488,9	520,3	555,8	583,0
0,6	417,9	431,0	446,5	463,2	482,0	494,5
0,5	392,2	398,4	405,9	413,9	423,3	428,1
0,4	366,5	368,2	370,7	373,4	377,2	377,4
0,3	342,9	341,6	340,9	340,2	340,4	337,8
0,2	321,9	318,7	315,7	312,7	310,5	306,2
0,1	303,5	298,9	294,4	289,8	285,9	280,3
0,0	287,4	281,7	276,1	270,4	265,3	258,9

łączeniку oznacza odległość osi stężenia od zewnętrznej płaszczyzny półki dwuteownika. W tym wypadku wynosi on  $h_z = 128$  mm.



Rys. 5.5. Powierzchnie obciążeń krytycznych modeli serii 1xxx

Wybrane wartości obciążeń krytycznych, które otrzymano z analiz parametrycznych zamieszczono w tabelicy 5.2. Zaprezentowanie wszystkich dwóch tysięcy wyników numerycznych w postaci tabelarycznej byłoby kłopotliwe, dlatego tabelicę 5.2 ograniczono jedynie do wartości obciążeń krytycznych z modeli serii 10xx. Najkorzystniejszym sposobem ich prezentacji jest forma graficzna. W związku z tym, powyższą tabelicę, jak i pozostałe opisano w kartezjańskim układzie współrzędnych przyjmując, że oś rzędnych jest współczynnikiem  $\alpha$ , oś odciętych — lokalizacją stężenia od pasa  $h_z$ , a koda — wartością obciążenia krytycznego  $N_{cr}$ . Powstała w ten sposób powierzchnia obciążeń krytycznych, na podstawie której można łatwo ocenić wpływ poszczególnych parametrów. Na rysunku 5.5 pokazano komplet czterech powierzchni, które są efektem analiz parametrycznych modeli serii 1xxx. Dotyczą one słupów z łącznie czterema stężeniami poprzecznymi (por. rys. 5.1

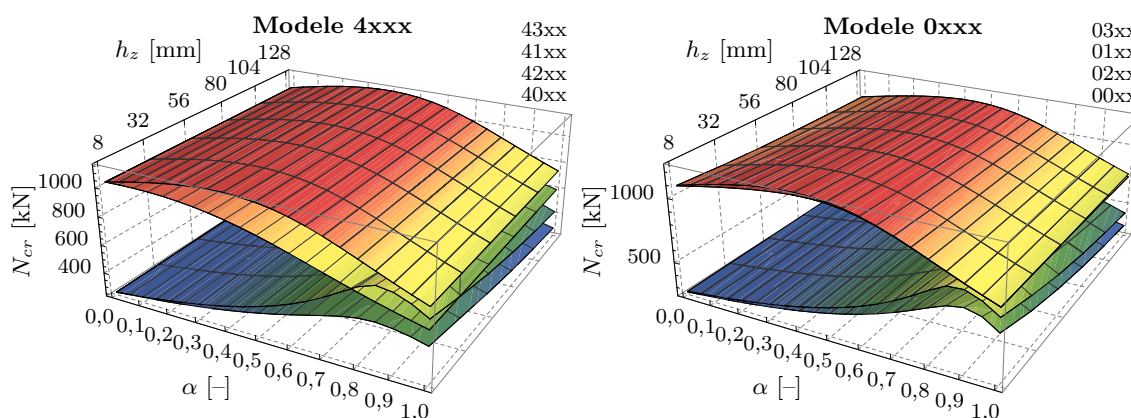


Rys. 5.6. Mapy izolinii obciążeń krytycznych modeli serii 20xx i 21xx

i 5.2), tzn. jednym stężeniem części górnej ( $m_g = 1$ ), dwoma stężeniami części dolnej ( $m_d = 2$ ) i jednym stężeniem w poziomie wspornika (krępującym przemieszczenia i/lub kąty skręcenia). Taki sposób przedstawienia wyników pozwala na szybką ocenę wpływu poszczególnych parametrów na wartości sprężystych obciążeń krytycznych. Krzywa, która powstaje w wyniku przecięcia tejże powierzchni z pionową płaszczyzną, która jest prostopadła do jednej z osi, pozwala na ocenę wpływu jednego z parametrów ( $\alpha$  lub  $h_z$ ), przy założeniu niezmienności tego drugiego. Pojedyncze wykresy przestrzennej powierzchni można także zaprezentować w postaci płaskich map izolinii (wykresów konturowych). Rysunek 5.6 przedstawia takie przykładowe mapy, które zostały opracowane na podstawie wyników otrzymanych z analizy modeli 20xx i 21xx.

### 5.1.1. Wpływ sposobu podparcia

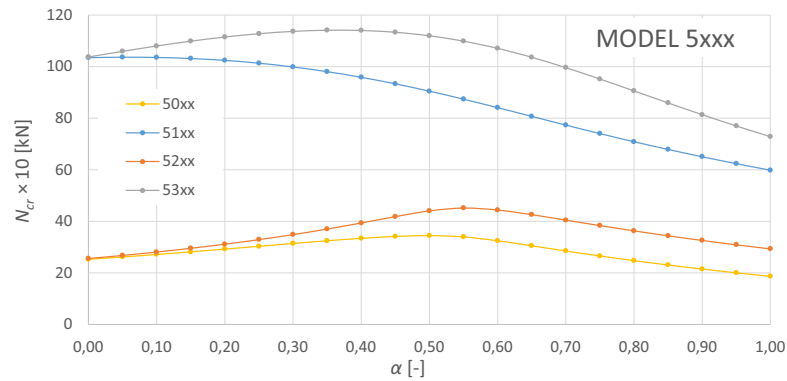
Zrealizowane w podrozdziale 4.4 obliczenia numeryczne, które zostały przeprowadzone na nieskomplikowanych modelach z belkowych i powłokowych elementów skończonych, pokazały, że niektóre z otrzymanych wyników znacząco odbiegały od wartości wyznaczonych w sposób doświadczalny. Wy tłumaczyć to należy niedostosowaniem tych modeli numerycznych do badanego w rozdziale 3 słupa. Dotyczy to zwłaszcza sposobu podparcia i jego podatności z płaszczyzny większej sztywności. Postanowiono porównać jak zmienia się obciążenie krytyczne, jeżeli zamiast przyjętej w badaniach kołyski zastosowane zostanie rozwiązanie znane z praktyki, czyli oparcie słupa na płaskiej blasze podstawy. W tym celu zestawiono ze sobą wszystkie powierzchnie otrzymane dla danego typu modeli, tj. 0xxx, 1xxx, 2xxx, 3xxx, 4xxx i 5xxx. Takie przykładowe zestawienia kilku powierzchni serii 4xxx i 0xxx przedstawiono na rysunku 5.7. Legenda zamieszczona po prawej stronie i powyżej każdego z wykresów wyjaśnia, w jakiej znajdują się kolejności. Przy czym odniesieniem jest prosta powstała w wyniku przecięcia dwóch prostopadłych do siebie pionowych płaszczyzn, przechodzących odpowiednio przez  $h_z = 128$  mm i  $\alpha = 0$ .



Rys. 5.7. Widoki powierzchni stateczności modeli serii 4xxx i 0xxx

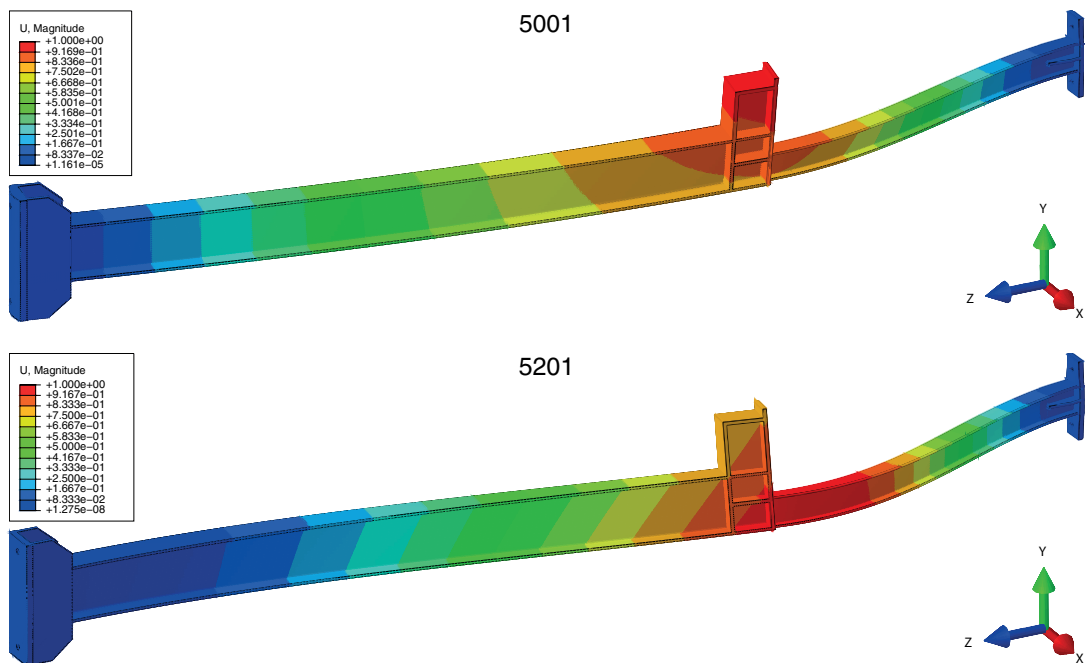
Powierzchnie, które zaprezentowano na rysunku 5.7 pozwalają na ogólne scharakteryzowanie zależności pomiędzy poszczególnymi wynikami. Wpływ sposobu podparcia można ocenić porównując ze sobą pary modeli z niestężonym (x0xx-x2xx) i stężonym (x1xx-x3xx) wspornikiem. Bardziej szczegółowe wyniki wybranych modeli przedstawiono na rysunkach 5.8, 5.10, 5.11 i 5.12.

Rysunek 5.8 przedstawia wartości obciążeń krytycznych modeli serii 5xxx, czyli słupa bez stężeń poprzecznych zewnętrznych pól dwuteownika. Dlatego za nieco abstrakcyjne



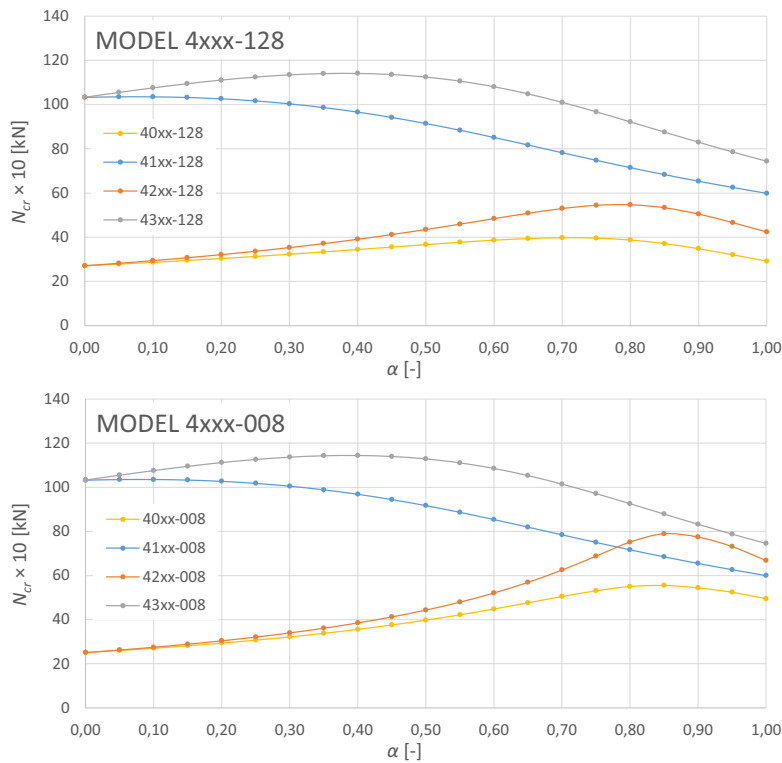
Rys. 5.8. Porównanie obciążeń krytycznych modeli 5xxx

można by uznać modele 51xx oraz 53xx, ponieważ charakteryzują się jedynie stężeniem końca wspornika (por. rys. 4.17a). Widać, że największe bezwzględne różnice wynikające ze sposobu podparcia obserwuje się, gdy parametr  $\alpha$  wynosi ok. 0,5. Wówczas względne różnice sięgają 20% w przypadku stężenia wspornika oraz 27% — w przypadku jego braku. Wraz ze wzrostem parametru  $\alpha$  bezwzględne różnice pomiędzy wynikami maleją, natomiast ze względu na mniejsze wartości obciążeń krytycznych, ich różnice względem siebie są zróżnicowane i sięgają odpowiednio 18% i 36%. Warto również zauważyć, że wartości obciążeń krytycznych modeli obciążonych jedynie w poziomie wspornika ( $\alpha = 0$ ) praktycznie nie różnią się względem siebie.

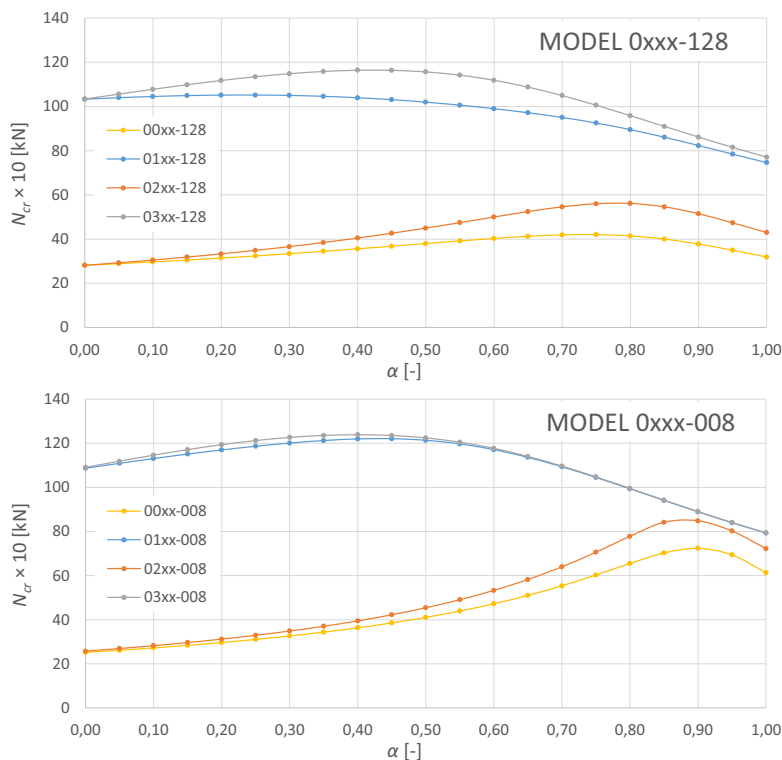


Rys. 5.9. Postacie utraty stateczności modeli 5001 i 5201

Na rysunku 5.9 zestawiono obok siebie dwie postacie utraty stateczności niestężonych dwuteowych słupów o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym obciążonych jedynie w głowicy. Różnią się sposobem podparcia, ponieważ w modelu 5001 zastosowano łożysko kołkowo-styczne, a w modelu 5201 płaską poziomą blachę podstawy. Różnice w wartościach obciążeń krytycznych przekładają się na formy niestateczności jakie prezentują modele 5001 i 5201. Widać, że w obu przypadkach dochodzi do złożonej utraty stateczno-

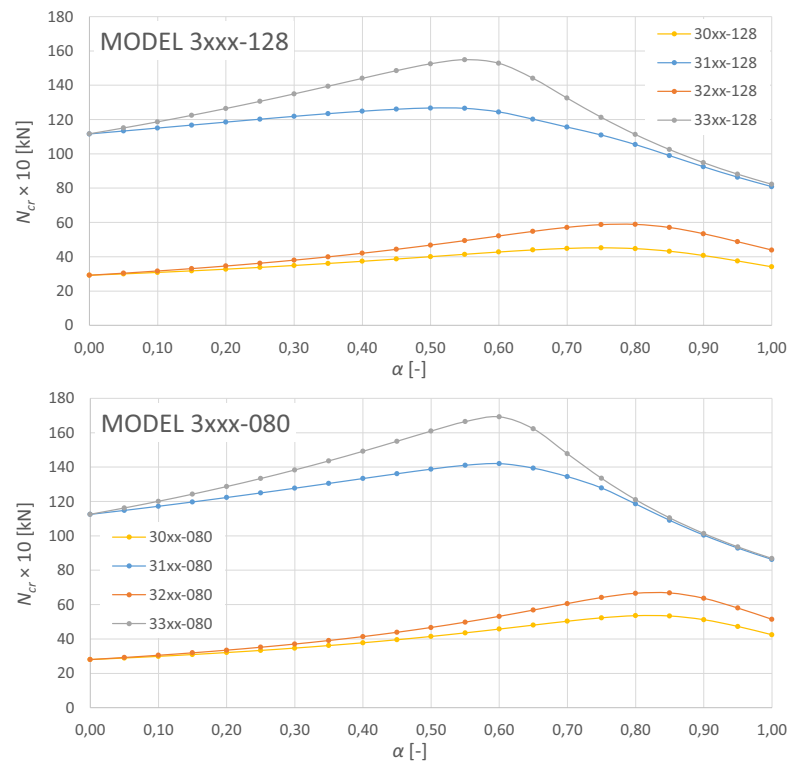


Rys. 5.10. Porównanie obciążeń krytycznych modeli serii 4xxx-128 i 4xxx-008



Rys. 5.11. Porównanie obciążeń krytycznych modeli serii 0xxx-128 i 0xxx-008

ści, dla której to jednak dominującą formą jest wygięcie, niż skrzywienie przekroju. Świadczą o tym mapy przemieszczeń (por. rys. 5.9), ponieważ na części słupów izolynie układają się prostopadle do ich osi, a na części ukośnie. W tym przypadku przestrzenna forma utraty



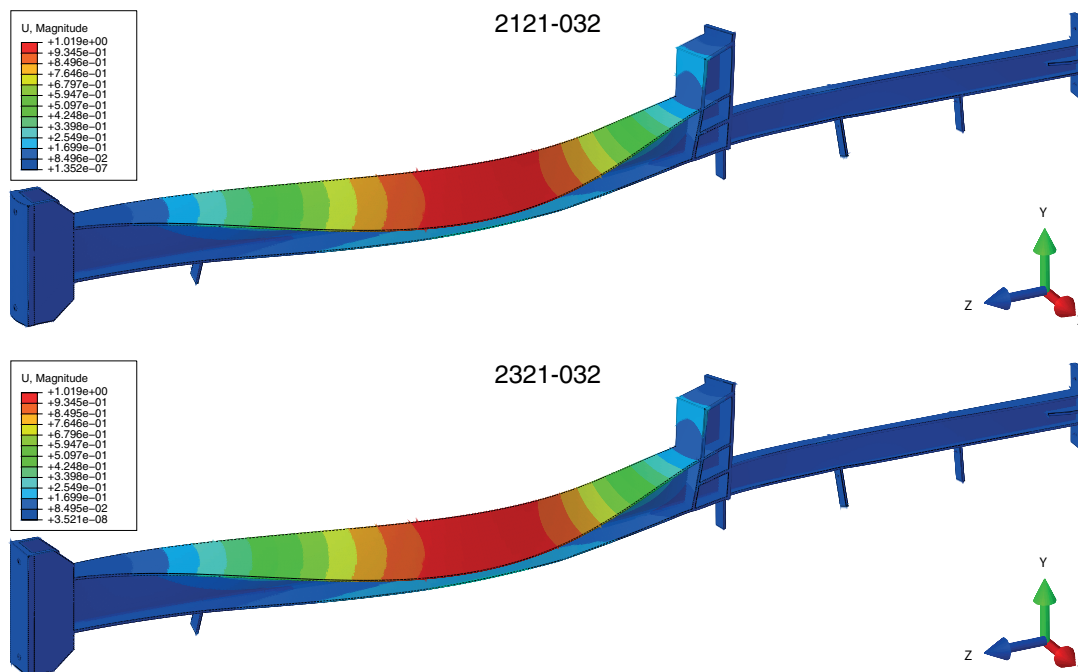
Rys. 5.12. Porównanie obciążeń krytycznych modeli serii 3xxx-128 i 3xxx-080

stateczności jest efektem wyęźnienia wynikającego z momentów zginających pochodzących od mimośrodowego ściskania słupa (por. rys. 5.4).

O ile w słupach, których zewnętrzne pólki nie są stężone poprzecznie (51xx i 53xx) lub występuje tylko jedno stężenie w poziomie zmiany sztywności (41xx i 43xx), różnice w obciążeniach krytycznych są znaczne, o tyle wprowadzenie dodatkowego stężenia części dolnej (01xx i 03xx,  $m_d = 1$ ) bardzo te różnice zniwelowało. Jest to widoczne na rysunkach 5.10 i 5.11. Różnica jest tym mniejsza, im bliżej oś stężeń ( $h_z$ ) jest zlokalizowana względem pólki zewnętrznych. Na rysunku 5.11 wyraźnie widać, że w przypadku modeli ze stężonym wspornikiem, gdy  $h_z = 8$  mm, stosowanie wykorzystanej w badaniach doświadczalnych kołyski nie ma żadnego znaczenia.

Wprowadzenie kolejnego stężenia poprzecznego (1xxx,  $m = 4$ ) nieco zmienia charakterystykę otrzymanych krzywych. Zauważono jednak, że kolejne zwiększanie liczby stężeń (2xxx,  $m = 6$ ; 3xxx,  $m = 8$ ) nie wpływa na stosunek zależności obciążeń krytycznych do sposobu podparcia. Dlatego na rysunku 5.12 pokazano te relacje na przykładzie modeli serii 3xxx-128 i 3xxx-008.

Ogólnie, we wszystkich modelach, w których wprowadzono co najmniej jedno stężenie zewnętrznej pólki zauważono, że dla skrajnych wartości parametru  $\alpha$ , wpływ sposobu podparcia praktycznie nie miał znaczenia. Wzrost obciążeń krytycznych zaobserwowano jedynie, gdy parametr  $\alpha$  przyjmuje wartości z zakresu  $\alpha = 0,2-0,8$ . Charakterystyczne jest także to, że zastosowanie kołyski jest praktycznie nieistotne w przypadku słupów z dominującym obciążeniem części dolnej. Pokazano to na rysunku 5.13, na przykładzie dwóch słupów stężonych sześcioma stężeniami poprzecznymi zlokalizowanymi w odległości  $h_z = 32$  mm od zewnętrznych pasów obciążonych jedynie na wsporniku ( $\alpha = 0$ ) oraz ze stężonym wspornikiem. Są to modele 2121-032 oraz 2321-032.



Rys. 5.13. Postacie utraty stateczności modeli 2121-032 i 2321-032

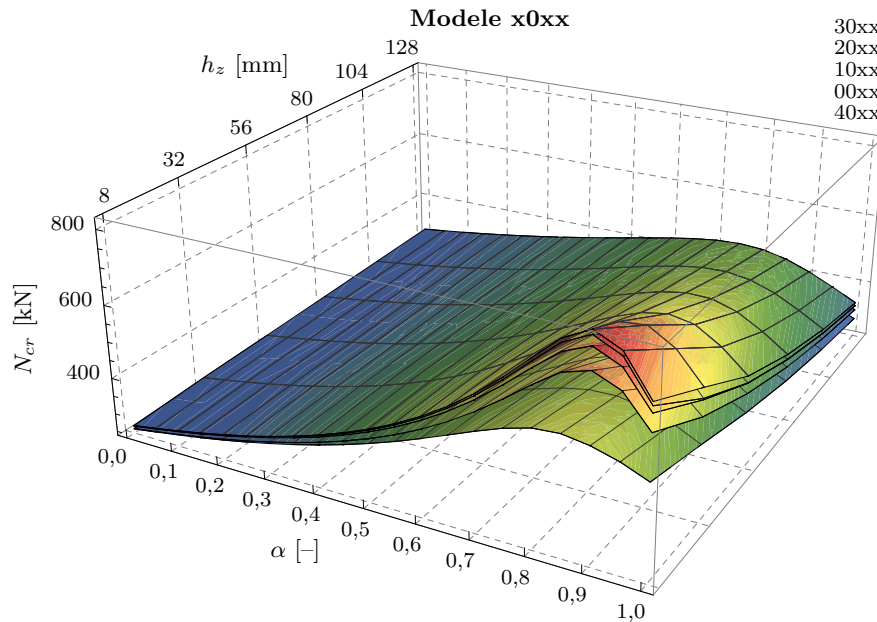
Analiza wpływu zrealizowanej w badaniach doświadczalnych w podstawie słupa kołyski pokazała, że w odniesieniu do elementów, w których obciążenie przykładano jedynie w poziomie głowicy lub w poziomie wspornika, nie udało się wymusić idealnie przegubowego podparcia w płaszczyźnie jego mniejszej sztywności. Można zatem stwierdzić, że zastosowanej w modelach fizycznych podstawie bliżej jest do sztywnego podparcia aniżeli do przegubu.

### 5.1.2. Wpływ liczby stężeń

Liczba stężeń poprzecznych jest parametrem, który wpływa na wartości obciążeń krytycznych oraz na kształt postaci utraty stateczności słupów schodkowych. Jest on także zależny od pozostałych dwóch parametrów, czyli lokalizacji stężenia od zewnętrznych półek słupa  $h_z$  i współczynnika  $\alpha$  definiującego stosunek pomiędzy obciążeniem przyłożonego do głowicy i do wspornika. Na rysunku 5.14 zestawiono ze sobą pięć różnych powierzchni stateczności otrzymanych w zależności od liczby stężeń poprzecznych słupów. Zostały one opracowane dla słupów serii x0xx, które charakteryzują się kołyską w podstawie oraz niestężonym przeciwskrętnie wspornikiem. Największe wartości otrzymano dla najbardziej stężonego modelu serii 30xx (o łącznej liczbie stężeń poprzecznych  $m = 8$ ), a nieco mniejsze dla 20xx ( $m = 6$ ) i 10xx ( $m = 4$ ). Przy czym różnice pomiędzy trzema pierwszymi seriami słupów są z praktycznego punktu widzenia mało znaczące. Oznacza to, że kolejne zwiększanie liczby poprzecznych tężników niewiele już by zmieniło.

Różnice pomiędzy wartościami obciążeń krytycznych stężonego poprzecznie słupa o skokowo, niosiowo zmiennym przekroju poprzecznym pokazano szczegółowo na rysunkach 5.15 i 5.16. Wykresy te powstały w wyniku przecięcia powierzchni stateczności pionowymi płaszczyznami przechodzącymi przez oś odciętych o współrzędnych  $h_z = 56$  mm i  $h_z = 8$  mm. Zależności na rysunku 5.15 charakteryzują słupy z niestężonym (x0xx — por. rys. 5.1), natomiast na rysunku 5.16 ze stężonym przeciwskrętnie wspornikiem (x1xx — por. rys. 5.2). Oba przypadki dotyczą słupów, w których podstawie zastosowano łożysko

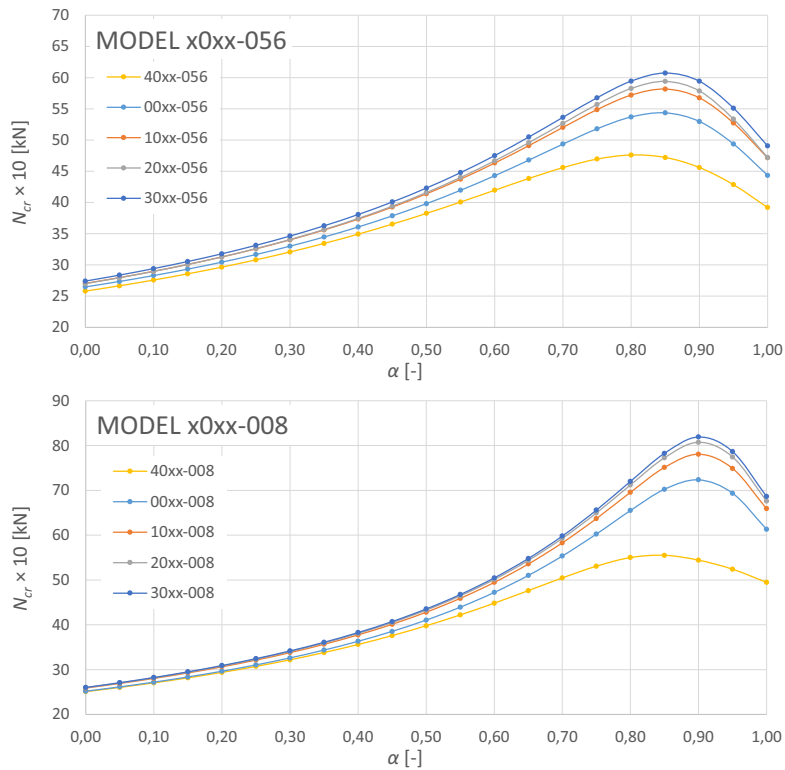




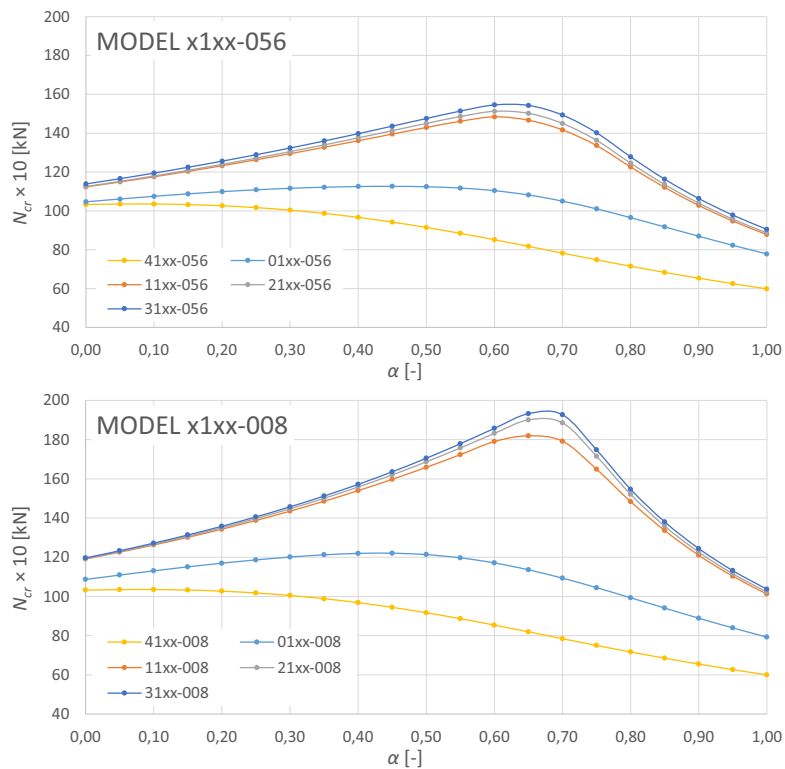
Rys. 5.14. Powierzchnie stateczności modeli serii x0xx

kołyskowo-styczne. Jak już wcześniej zauważono (por. rys. 5.14) wartości obciążeń krytycznych trzech pierwszych krzywych (płaszczyzn) stężonych odpowiednio ośmioma, sześcioma i czterema tężnikami są do siebie bardzo zbliżone. Jest tak zarówno w przypadku modeli ze swobodnym, jak i stężonym wspornikiem.

Należy zauważyć, że najniższe wartości obciążeń krytycznych otrzymano w przypadku modeli z jednym stężeniem poprzecznym, na wysokości zmiany przekroju poprzecznego, przy jednoczesnym braku stężenia przeciwskrętnego (40xx). Dodanie kolejnego stężenia w dolnej części słupa (00xx) spowodowało zwiększenie obciążenia krytycznego o ok. 24%. Odnosi się to jedynie do słupów, w których parametr  $\alpha$  przyjmuje wartości z zakresu 0,7–1,0 oraz tych, w których odległość stężenia od zewnętrznego pasa jest nieduża ( $h_z = 8$  mm). Odsunięcie stężenia na odległość  $h_z = 56$  mm powoduje wzrost obciążenia krytycznego o ok. 14%, a zyski wynikające z największego analizowanego odsunięcia — wynoszącego 128 mm — sięgają jedynie kilku procent. Kolejne zwiększanie liczby stężeń poprzecznych już nie jest tak efektywne i kolejne ich zwiększanie wiąże się tylko z kilkuprocentowymi wzrostami. Z praktycznego punktu widzenia różnice pomiędzy modelami z największą liczbą stężeń są już nieistotne. Te niewielkie różnice wynikają z faktu, że wprowadzenie choćby jednego stężenia poprzecznego powoduje, że słup traci stateczność w sposób giętno-skrętny względem ustalonej osi obrotu. Dowodem tego jest rysunek 5.17, na którym porównano trzy wybrane formy utraty stateczności modeli 4001-008, 0001-008 i 3001-008, czyli odpowiednio z jednym, dwoma i ośmioma stężeniami, które zlokalizowano w odległości  $h_z = 8$  mm. Analizując przedstawione formy utraty stateczności trudno nie zauważyć, że kształty modeli 3001-008 i 0001-008 są niemalże identyczne. Różnie je jedynie wartość obciążenia krytycznego. Jest to potwierdzeniem charakterystyk krzywych przedstawionych na rysunku 5.15, bowiem ich kształty, tak jak i formy niestateczności, są do siebie bardzo podobne. Jedynie w przypadku modelu 4001-008, który charakteryzuje się stężeniem poprzecznym tylko na wysokości wspornika, można dostrzec lekko odmienny kształt utraty stateczności. Giętno-skrętna forma jest nadal dominująca, lecz można zauważyć, że dolna część słupa, zwłaszcza zewnętrzna półka, również się przemieszcza.

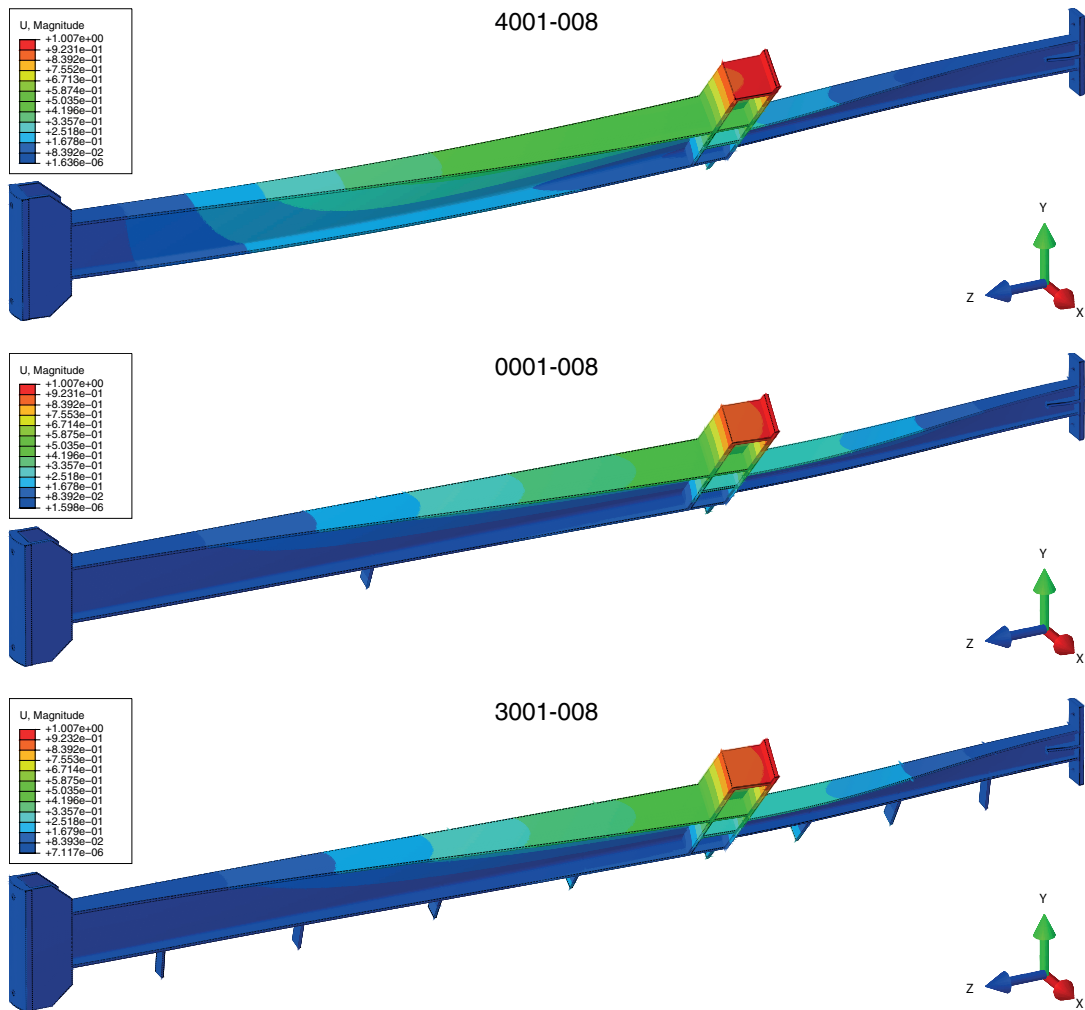


Rys. 5.15. Porównanie obciążeń krytycznych modeli serii x0xx-056 i x0xx-008



Rys. 5.16. Porównanie obciążeń krytycznych modeli serii x1xx-056 i x1xx-008

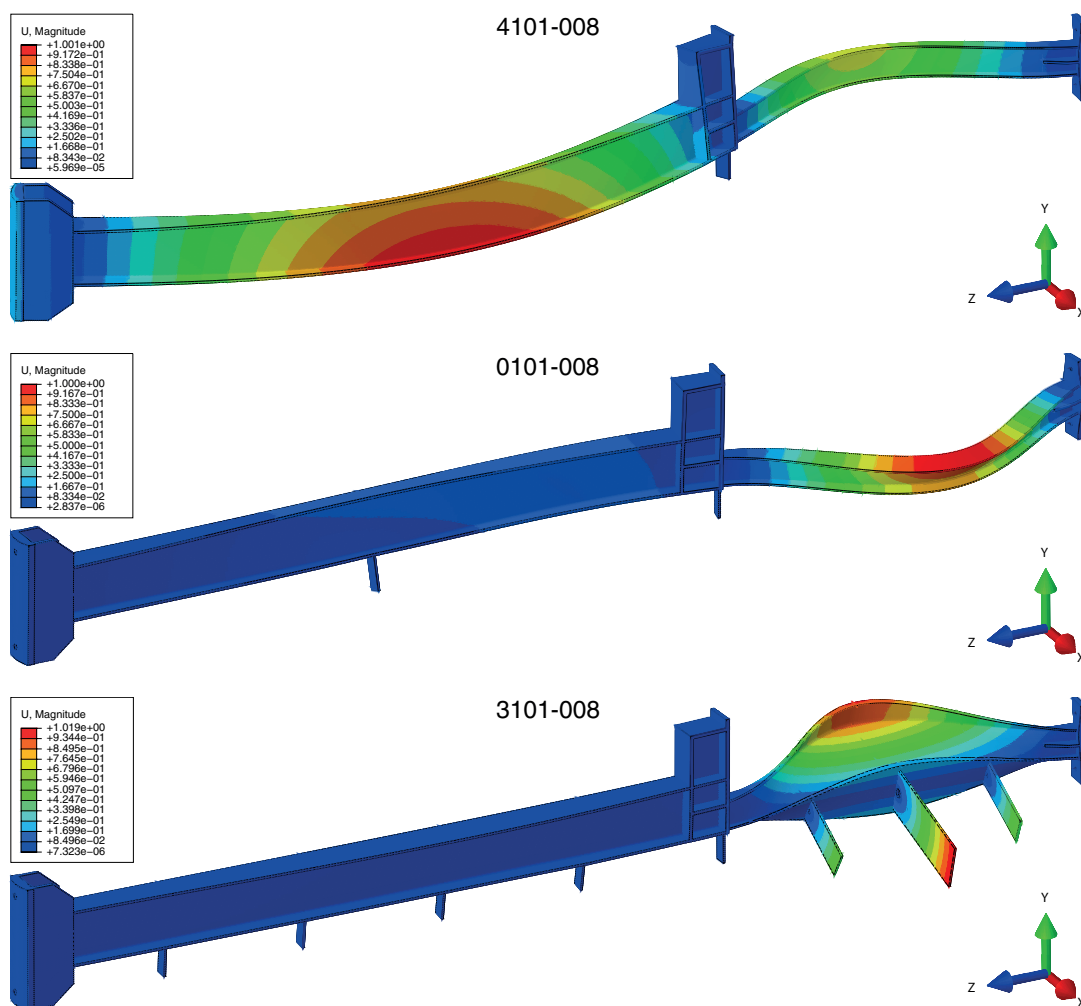
W przypadku serii słupów ze stężonym przeciwskretnie wspornikiem (41xx) i z dodatkowym stężeniem poprzecznym części podsuwnicowej (01xx), wprowadzenie kolejnych stężeń dużo bardziej wpływa na wzrost wartości obciążeń krytycznych, aniżeli w mode-



Rys. 5.17. Formy utraty stateczności modeli 4001-008, 0001-008 i 3001-008

lach serii x0xx. Różnica ta jest również zależna od współczynnika  $\alpha$ , przy czym w dwóch pierwszych najsłabiej stężonych modelach 41xx i 01xx jego wpływ jest najmniej istotny. Przyjmując za punkt wyjścia wartości obciążeń krytycznych modeli 41xx-008, dodanie tylko jednego stężenia w połowie wysokości części dolnej (01xx-008), w najkorzystniejszej sytuacji — gdy współczynnik  $\alpha$  przyjmuje wartości z zakresu 0,6–0,8, a stężenie jest blisko słupa  $h_z = 8$  mm — spowoduje wzrost obciążenia o ok. 30%. Efektem dalszego zwiększenia liczby stężeń poprzecznych do czterech (11xx-008,  $m = 4$ ) jest kolejny wzrost części obciążeń krytycznych o prawie 40% w stosunku do serii z dwoma stężeniami (01xx-008).

Jak pokazano na rysunku 5.16, zastosowanie większej liczby stężeń jest już mało efektywne. Charakterystyki trzech ostatnich serii 11xx, 21xx oraz 31xx są do siebie bardzo zbliżone, a maksymalna różnica w otrzymanych dla nich wartościach obciążeń krytycznych nie przekracza 6%. Te charakterystyki przekładają się na ich formy niestateczności. Zostało to zobrazowane na rysunku 5.18. Pokazano na nim trzy wybrane postacie utraty stateczności modeli serii 4101-008, 0101-008 i 3101-008. Również w tym przypadku każdy z modeli traci stateczność w postaci giętno-skrętnej, jednakże w dwóch pierwszych przypadkach wygięcie z płaszczyzny słupa wyraźnie dominuje nad skręceniem przekroju poprzecznego. W modelu 4101-008 zaobserwować można dwie półfale, które pokrywają się z dwoma segmentami słupa. Wprowadzenie stężenia części dolnej (01xx-008) w miejscu, w którym ta półfala osiąga ekstremum, wymusza nową postać utraty stateczności —



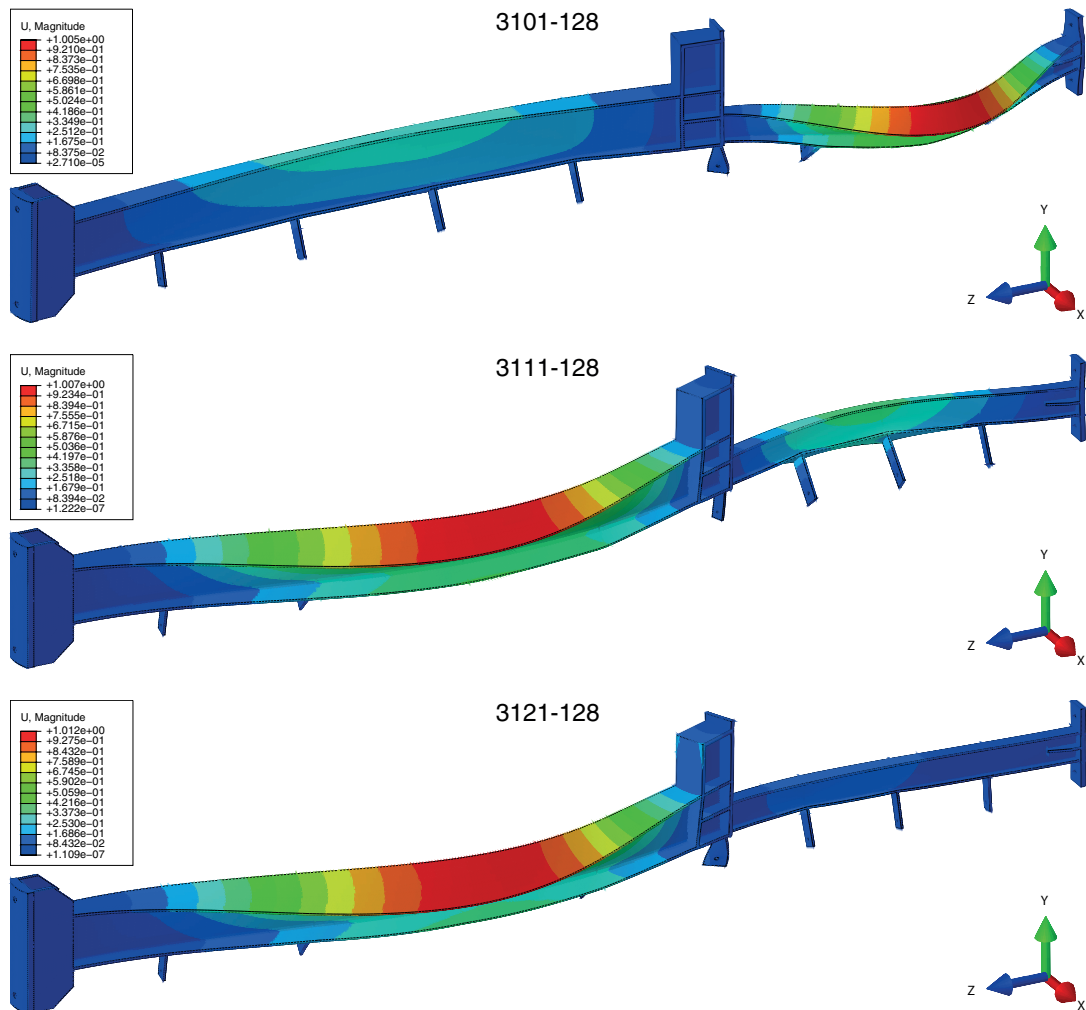
Rys. 5.18. Formy utraty stateczności modeli 4101-008, 0101-008, 3101-008

prawie idealnego wybożenia giętnego części górnej i co za tym idzie zredukowania liczby półfal do jednej. Już jedno stężenie części nadsuwnicowej (11xx-008) wymusza giętno-skrotną postać utraty stateczności. Dlatego dalsze zwiększanie liczby stężeń jest tak mało efektywne — wprowadzanie kolejnych nie zmienia postaci wybożenia, jedynie wymusi oś obrotu.

Ogólnie należy stwierdzić, że wpływ liczby stężeń poprzecznych ma znaczenie, ale tylko do pewnego momentu. Istnieje bowiem taka minimalna ich liczba, przy której dalsze ich zwiększanie staje się nieefektywne. Bardziej istotna niż liczba stężeń jest ich odpowiednie rozmieszczenie. Zostało to pokazane na rysunku 5.18, na przykładzie kolejnych modeli 4101-008, 0101-008 i 1101-008 oraz jest to bardzo dobrze widoczne w przypadku słupów obciążonych na wsporniku. Powoduje ono zginanie części podsuwnicowej w taki sposób, że naprężenia ściskające występują w wewnętrznej części słupa. Stężenie zewnętrznych pasów nie wymusza ani powstania nowej postaci utraty stateczności, ani pojawienia się kolejnej półfali.

### 5.1.3. Wpływ sposobu obciążenia

Sposób przyłożenia obciążenia do słupa jest związany z parametrem  $\alpha$ , który zdefiniowano wyrażeniem (4.1). Parametr ten nie jest niezależny, ponieważ jest sprzężony z po-



Rys. 5.19. Formy utraty stateczności modeli 3101-128, 3111-128, 3121-128

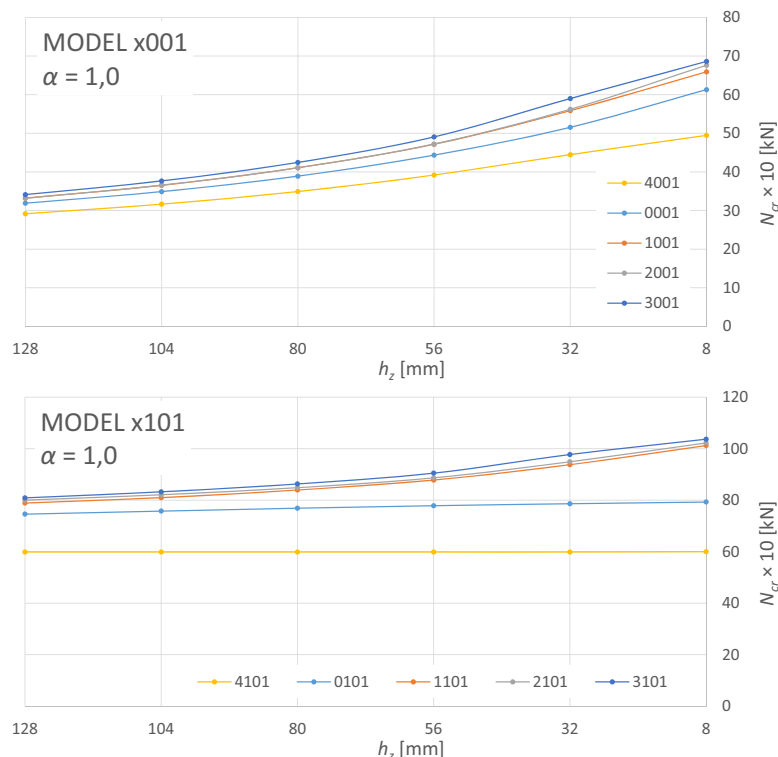
zostałymi czynnikami. Dwa najbardziej istotne, które najwyraźniej kształtują charakterystykę zależności współczynnika  $\alpha$  to prawidłowe stężenie słupa oraz odległość tego stężenia od zewnętrznych pól przekroju dwuteowego. Zależy to ściśle od kształtu postaci utraty stateczności. Jeśli są zbliżone (por. rys. 5.17), to poszczególne krzywe (por. rys. 5.15) lub powierzchnie (por. rys. 5.14) opisujące zależność, również przyjmują podobny kształt. W przypadku, gdy stężenia poprzeczne wymuszają różne formy niestateczności (por. rys. 5.18), odpowiadające im zależności również są zróżnicowane (por. rys. 5.16). Dotyczy to zwłaszcza modeli słupów, w których zastosowano stężenia przeciwskrętne na wysokości wspornika (x1xx).

Ogólnie zaobserwowano, że w przypadku analizowanych dwuteowych słupów o skokowo nieosiowo zmiennym przekroju poprzecznym wraz ze wzrostem parametru  $\alpha$ , wzrasta także wartość obciążenia krytycznego. Charakterystyka ta jest jednak rosnąca tylko do pewnej wartości. Dla słupów z niestężonym przeciwskrętne wspornikiem (x0xx) zależność osiąga ekstremum, gdy  $\alpha$  znajduje się w przedziale ok. 0,8–0,9, natomiast w przypadku słupów stężonych przeciwskrętne w poziomie wspornika — w zakresie 0,6–0,7. W tym pierwszym przypadku można przyjąć, że  $\alpha = 0,8526$ . Jest to bowiem sytuacja, w której obie części słupa wyteżone są jedynie naprężeniami wynikającymi z osiowego ściskania. W miejscu, w którym funkcja opisująca obciążenie krytyczne zmienia swoją monotoniczność dochodzi właśnie do zmiany dominującej postaci utraty stateczności. Na rysunku 5.19 porównano

ze sobą trzy formy utraty stateczności stężonego przeciwskrętnie modelu serii 31xx-128. Pierwsza przedstawia słup obciążony jedynie w głowicy ( $\alpha = 1$ ), druga — słup, w którym stosunek obciążenia głowicy do sumy reakcji pionowych w podstawie wynosi  $\alpha = 0,5$ , trzecia — słup obciążony jedynie na wsporniku ( $\alpha = 0$ ). Utrata stateczności tego ostatniego, w związku z mimośrodowo przyłożonym obciążeniem na wsporniku, polega na giętno-skrętnym wyboczeniu jedynie części podsuwnicowej. Wraz ze wzrostem parametru  $\alpha$ , postać niestateczności staje się bardziej skomplikowana, ponieważ w części nadsuwnicowej tworzy się druga półfala. Obie półfale przemieszczeń w ekstremalnym punkcie osiągają zbliżone do siebie amplitudy. Dalsze zwiększanie obciążenia głowicy powoduje zanikanie półfali części dolnej i giętno-skrętną utratę stateczności części górnej.

#### 5.1.4. Wpływ lokalizacji stężenia

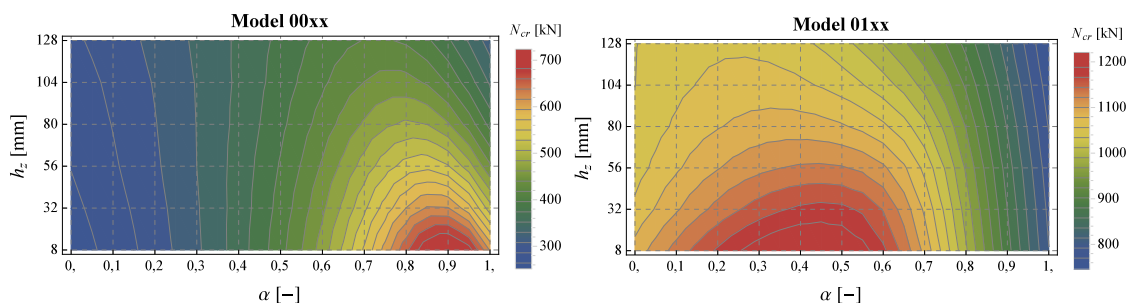
Lokalizacja stężeń poprzecznych znajdujących się w odległości  $h_z$  od zlicowanych ze sobą pasów przekroju, dwuteowego istotnie wpływa na wartości obciążeń krytycznych tylko w określonych sytuacjach. Dodatkowymi parametrami mającymi kluczowe znaczenie są: współczynnik  $\alpha$  oraz sposób stężenia słupa. Jeżeli chodzi o obciążenia słupa, które w prowadzonych analizach parametrycznych zdefiniowano współczynnikiem  $\alpha$ , to parametr ten ma istotne znaczenie, gdy jest większy niż ok. 0,5. W przeciwnym razie mamy do czynienia z mimośrodowo obciążoną częścią dolną słupa, w której ściskana jest jego niestężona półka. W takiej sytuacji stosowanie stężeń poprzecznych w rozciąganej zewnętrznej półce staje się mało efektywne. Można to było zauważyć na przykładowych wykresach powierzchni stateczności słabo stężonych modeli 4xxx i 0xxx przedstawionych na rysunku 5.7.



Rys. 5.20. Wpływ lokalizacji stężenia poprzecznego  $h_z$  na wartości obciążeń krytycznych modeli serii x001 i x101 ( $\alpha = 1$ )

Wpływ lokalizacji stężenia poprzecznego  $h_z$  można ocenić analizując jego charakterystykę przy założeniu niezmienności pozostałych parametrów. Dokonano tego na rysun-

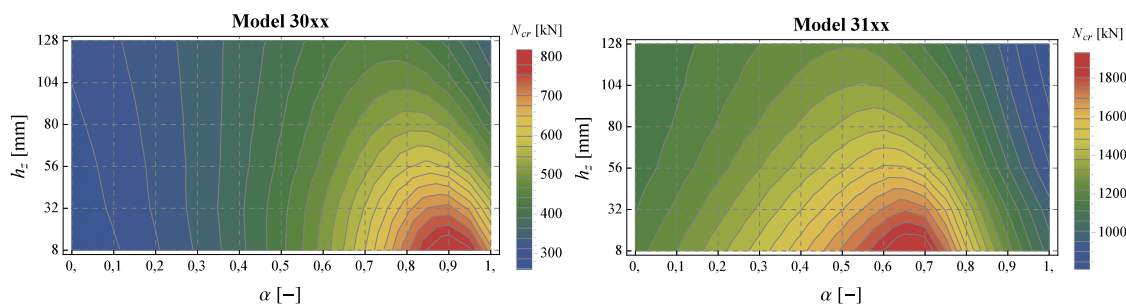
ku 5.20. Wykresy tam zamieszczone powstały poprzez odwzorowanie przecięcia płaszczyzn stateczności modeli serii x0xx (por. rys. 5.14) i x1xx pionową płaszczyzną prostopadłą do osi  $\alpha$  i przecinającą ją w punkcie 1,0. Na przykładzie niestężonych przeciwnie modeli x001 można zauważyć, że im stężenie jest bardziej oddalone od słupa, tym wartość obciążenia krytycznego jest mniejsza. Wraz ze wzrostem odległości stężenia dążącym do nieskończoności, wartość obciążenia dąży asymptotycznie do wartości jaką otrzymano by w przypadku słupa niestężonego (por. model 5001 na rys. 5.9). Z kolei lokalizowanie stężenia w coraz to bliższej odległości słupa wiąże się ze wzrostem obciążenia krytycznego. W analizowanych modelach za początek układu przyjęto zewnętrzną płaszczyznę półki, a za najbliższą lokalizację stężenia przyjęto ze względów konstrukcyjnych 8 mm. Wynika to z możliwości wykonania otworu i zachowania minimalnej odległości od krawędzi półki. Dalsze zmniejszanie odległości  $h_z$ , a nawet przyjęcie wartości ujemnych mocno komplikuje postać utraty stateczności. Mimośród pomiędzy osiami części górnej i dolnej słupa powoduje powstanie interakcyjnej formy niestateczności wiążącej postać giętą i giętno-skrętną. Różnice w obciążeniach krytycznych pomiędzy słupem z najbardziej oddalonymi i najbliższymi zlokalizowanymi stężeniami wynoszą w przypadku modeli x001 50%. Mniejsze różnice można zaobserwować analizując modele x101 z przeciwnie stężonym wspornikiem, ponieważ nie przekraczają one ok. 20%. Charakterystycznym dla tego typu słupów okazało się to, że słupy z najmniejszą liczbą tężników, czyli 4101 i 0101, okazały się niewrażliwe na zmianę parametru  $h_z$ . Oba słupy tracą co prawda stateczność w postaci giętno-skrętnej, ale z dominującym wpływem wyboczenia giętnego (por. rys. 5.18). W pierwszym z tych modeli powstaje półfala zarówno na części górnej i dolnej, natomiast w drugim — jedna w części górnej. W związku z tym jakakolwiek modyfikacja lokalizacji stężenia  $h_z$  ma bardzo niewielki, bo zaledwie 3% wpływ na model 0101 lub nie ma żadnego w przypadku modelu 4101.



Rys. 5.21. Mapy izolinii obciążeń krytycznych modeli serii 00xx i 01xx

Dużo szersze spojrzenie na zmienność wartości obciążeń krytycznych poszczególnych modeli jest możliwe dzięki przedstawieniu ich w postaci trójwymiarowej płaszczyzny (por. rys. 5.5, 5.7, 5.14) lub za pomocą ich map warstwicznych (por. rys. 5.6). Na rysunku 5.21 przedstawiono mapy izolinii obciążeń krytycznych modeli serii 00xx i 01xx, czyli stężonych dwoma tężnikami ( $m = 2$ ) słupów z niezabezpieczonym (por. rys. 5.1) i z zabezpieczonym przeciwnie (por. rys. 5.2) wspornikiem. W przypadku tego pierwszego można zauważyć, że największe zróżnicowanie obciążeń krytycznych ze względu na lokalizację stężenia  $h_z$  występuje, gdy parametr  $\alpha$  przyjmuje wartości z przedziału 0,7–1,0. Natomiast, gdy stosunek obciążeń  $\alpha$  jest mniejszy niż 0,5, izolinie układają się niemalże równolegle do osi rzędnych  $h_z$ . Oznacza to, że tej sytuacji odległość stężenia nie ma wpływu na wartości obciążeń krytycznych. Jest to związane z już omówioną sytuacją kiedy to w dolnej części słupa dominuje ścisnienie niestężonej, wewnętrznej półki dwuteownika. Trochę inaczej

wygląda to w przypadku drugiego modelu 01xx, ponieważ największe zróżnicowanie obciążeń krytycznych można zaobserwować, gdy  $\alpha = 0,25-0,55$ . W tym zakresie najbardziej deformuje się dolna część słupa, zaś wraz ze wzrostem parametru  $\alpha$  coraz większe znaczenie zaczyna odgrywać wyboczenie części górnej. Wówczas lokalizacja stężenia  $h_z$  jest praktycznie nieistotna, ponieważ dominującą formą utraty stateczności jest jej wyboczenie giętne (por. model 0101-008 na rys. 5.18).



Rys. 5.22. Mapy izolinii obciążeń krytycznych modeli serii 30xx i 31xx

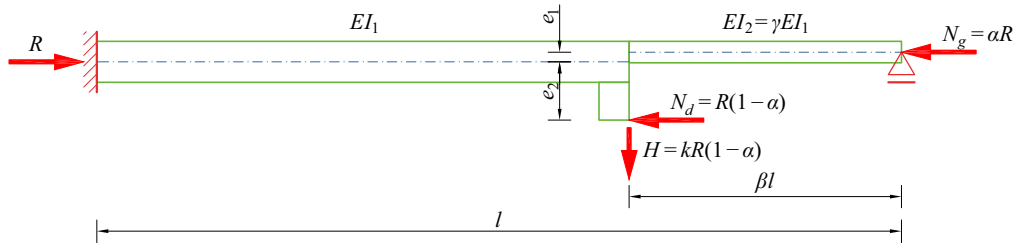
Charakterystyki te zmieniają się, jeżeli przeanalizuje się słupy z większą liczbą stężeń. Na rysunku 5.22 zamieszczono mapy izolinii obciążeń krytycznych modeli serii 30xx i 31xx. Istotne różnice widać zwłaszcza w przypadku modeli ze stężonym przeciwskrętnie wspornikiem 31xx. Największe wynikające z lokalizacji stężenia  $h_z$  różnice pomiędzy poszczególnymi modelami można zaobserwować, gdy parametr  $\alpha = 0,55-0,7$ . Różnica pomiędzy skrajnymi odległościami tężników (8 i 128 mm) sięga wówczas 30%. Taki stosunek obciążenia górnego do reakcji w podstawie przy maksymalnie zbliżonym do zewnętrznej półki stężeniu jest najbardziej efektywny. Poniżej tego przedziału mamy do czynienia z omówioną już sytuacją mimośrodowego ściskania części podsuwnicowej, natomiast powyżej tego przedziału następuje zmiana kształtu postaci utraty stateczności. Z dwóch półfal niestateczności części dolnej i górnej, wraz ze wzrostem parametru  $\alpha$  półfała części dolnej zanika (por. model 3101-008 na rys. 5.18). W przypadku modeli z niestężonym przeciwskrętnie wspornikiem serii 30xx w porównaniu do serii 00xx (por. rys. 5.21) zmienia się bardzo niewiele. Wzrastają jedynie wartości obciążeń, natomiast postaci utraty stateczności w obu (a także w pozostałych pośrednich) przypadkach pozostają zbliżone. Oznacza to, że już niewielka liczba stężeń poprzecznych, bowiem w modelu 00xx wystarczyły dwa (por. rys. 5.1), wymusza przestrzenną utratę stateczności względem ustalonej osi obrotu.

## 5.2. Analizy parametryczne modeli obciążonych siłą poziomą

Niniejsze analizy parametryczne są rozwinięciem analiz przedstawionych w podrozdziale 5.1. Rozszerzenie tych analiz polega na uwzględnieniu dodatkowego, przyłożonego na wsporniku poziomego obciążenia  $H$ . Rozważane słupy są stosowane w praktyce jako skrajne słupy hal przemysłowych z suwnicami, dlatego obciążenie to można interpretować jako poprzeczną siłę spowodowaną przyspieszeniem lub opóźnieniem ruchu wózka wzdłuż mostu suwnicy i/lub jako siłę poziomą spowodowaną zukosowaniem suwnicy w stosunku do jej ruchu wzdłuż belek toru jezdnego (tzw. wężykowanie suwnicy). Aktualnie obowiązująca norma poświęcona oddziaływaniom wywołanym dźwignicami [256], uzależnia poprzeczne obciążenie poziome nie tylko od obciążenia pionowego, lecz również od siły napędu podanej przez dostawcę suwnicy, co znacznie komplikuje jej oszacowanie. Posłużono się więc za-



lenciami wycofanej już normy do wyznaczania obciążeń suwnicami pomostowymi [250], która jako charakterystyczną wartość poziomej siły prostopadłej do toru definiuje jako iloczyn największej wartości nacisku koła suwnicy ( $N_d$ ) i współczynnika  $k$ . Ten ostatni, w zależności od rozpiętości i rozstawu kół suwnicy przyjmuje wartości w zakresie 0,1–0,3. Na potrzeby numerycznych analiz parametrycznych przyjęto  $k = 0,2$ . Otrzymano wówczas obciążenia krytyczne  $N_{cr}$ , które zależą od jednego parametru  $\alpha$ , ponieważ obciążenie poziome  $H$  jest proporcjonalne do obciążenia wspornika  $N_d$ .

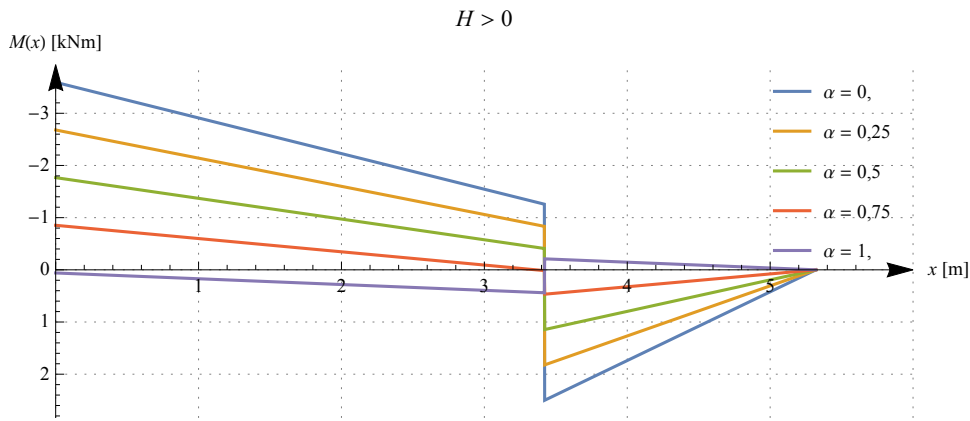


Rys. 5.23. Schemat statyczny modelu słupa z dodatkowym obciążeniem poziomym

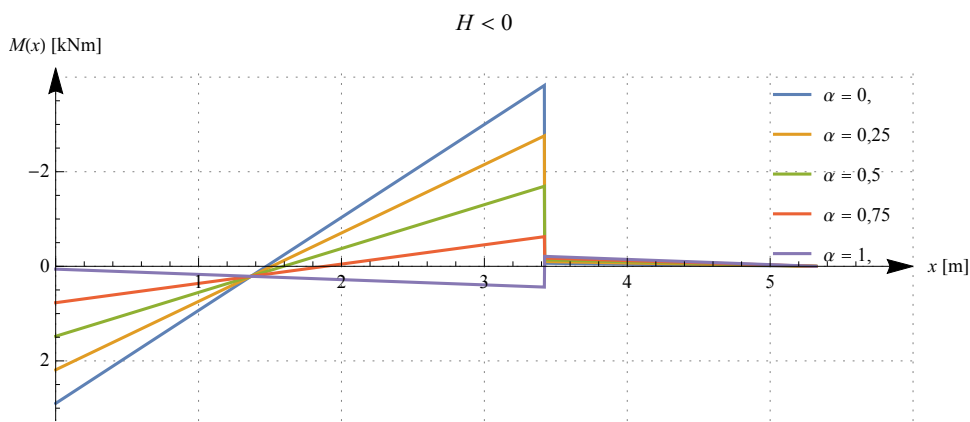
Analizy parametryczne w zakresie nośności krytycznej słupów o skokowej, nieosiowej zmianie sztywności przekroju poprzecznego, obciążonych na wsporniku siłą poziomą  $H$  zrealizowano na ograniczonej liczbie modeli, ponieważ rozważano jedynie modele mające w podstawie łożysko kołyskowo-styczne (por. tab. 5.1). Symulacjom zatem poddane zostały modele serii x0xx (z niestężonym przeciwskrętnie wspornikiem, por. rys. 5.1) oraz serii x1xx (ze stężonym przeciwskrętnie wspornikiem, por. rys. 5.2). Konwencja znakowania modeli obciążonych siłą poziomą jest podobna do znakowania już przebadanych słupów. Każdy z modeli oznaczono ciągiem znaków postaci xxxx-yyy- $H+/-$ , gdzie znaczenie symboli „x” i „y” wyjaśniono w podrozdziale 5.1,  $H+$  oznacza model obciążony dodatnią, a  $H-$  — ujemną siłą poziomą. Zamieszczony na rysunku 5.23 schemat przedstawia ogólny widok słupa schodkowego, który posłużył do wyznaczenia sił przekrojowych. Zamieszczone na nim obciążenia odpowiadają wektorom o dodatnich zwrotach obciążeń. Zakładając, że jest to skrajny słup w hali z suwnicami, można również przyjąć, że poziome obciążenie jest dodatnie, jeżeli jego zwrot jest skierowany do wnętrza hali. Jest to istotne, ponieważ oba przypadki różnią się rozkładem momentów zginających. Moment zginający wewnątrz słupa otrzymany przy założeniu teorii I rzędu, z zastosowaniem metody sił, uwzględniający uzależnione dowolnym współczynnikiem  $k$  poziome oddziaływanie  $H$  opisuje wyrażenie (5.4):

$$M_y(x) = \begin{cases} R \left[ \alpha e_1 + (\alpha - 1)e_2 - kl(\alpha - 1)(\beta - 1) + \right. \\ \left. + \frac{\gamma(\beta - 1) \left( (\alpha - 1) \left( (\beta^2 + \beta - 2)kl - 3e_2(\beta + 1) \right) - 3\alpha e_1(\beta + 1) \right)}{2\beta^3(\gamma - 1) - 2\gamma} + \right. \\ \left. + \frac{x \left( 3(\beta^2 - 1)\gamma(\alpha e_1 + (\alpha - 1)e_2) + kl(\alpha - 1)(\beta^3(2 - 3\gamma) + 3\beta\gamma) \right)}{2\gamma l(\beta^3 - 1) - 2\beta^3 l} \right], & 0 \leq x < l(1 - \beta), \\ \frac{\gamma R(\beta - 1)(l - x) \left( (\alpha - 1) \left( (\beta^2 + \beta - 2)kl - 3e_2(\beta + 1) \right) - 3\alpha e_1(\beta + 1) \right)}{2l(\beta^3(\gamma - 1) - \gamma)}, & l(1 - \beta) < x \leq l. \end{cases} \quad (5.4)$$

Jest to rozwiązanie ogólniejsze, ponieważ przyjęcie współczynnika  $k = 0$  sprowadzi wyrażenie (5.4) do równania (5.2). Na rysunkach 5.24 i 5.25 przedstawiono wykresy sił przekrojowych słupa schodkowego obciążonego dodatkową siłą poziomą  $H$  odpowiednio



Rys. 5.24. Wykresy momentów zginających w zależności od wybranego parametru  $\alpha$  przy dodatnim obciążeniu poziomym  $H+$



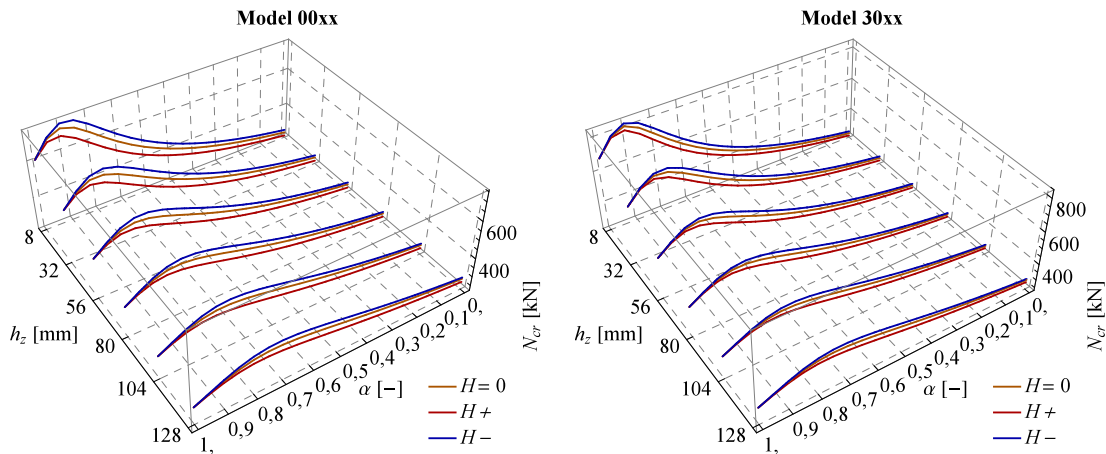
Rys. 5.25. Wykresy momentów zginających w zależności od wybranego parametru  $\alpha$  przy ujemnym obciążeniu poziomym  $H-$

dodatnią i ujemną, które zostały wyznaczone z równania (5.4). Wykresy te sporządzono przy założeniu geometrii, sztywności i wartości reakcji podporowej  $R$  jak w modelu bez dodatkowego obciążenia (por. podrozdz. 5.1) oraz dodatkowo przy współczynniku  $k = 0,2$ . Widać, że oba rozkłady sił wewnętrznych są zróżnicowane. Dodatkowo obciążenie poziome  $H+$  generuje moment zginający (por. rys. 5.24), który największą wartość przyjmuje w podstawie i powoduje ściskanie niestężonej, wewnętrznej półki dolnej części słupa. W górnej części natomiast ściskana jest półka zewnętrzna. Obciążenie poziome o wartości ujemnej  $H-$  wywołuje moment zginający, który na długości dolnej części słupa zmienia swoją wartość z dodatniej na ujemną, natomiast w górnej części jego wartość jest mniejsza o rząd wielkości.

Dodatkowe analizy parametryczne w zakresie stateczności sprężystej uwzględniające obciążenie poziome są równie obszerne. Pojedyncza seria obejmuje 21 modeli numerycznych, które zostały podzielone na 10 typów stężeń poprzecznych (z niestężonym i stężonym wspornikiem) oddalonych od zewnętrznej półki od 8 do 128 mm. Łącznie przeanalizowanych zostało  $2 \times 21 \times 10 \times 6 = 2520$  modeli numerycznych z dodatkowym obciążeniem poziomym  $H$ . Oznacza to, że tyle też otrzymano poszczególnych wartości obciążeń krytycznych  $N_{cr}$  stateczności sprężystej.

Otrzymane wyniki, podobnie jak w podrozdziale 5.1, również tworzą powierzchnię niestateczności. Ich porównanie polega na nałożeniu na siebie trzech takich powierzchni

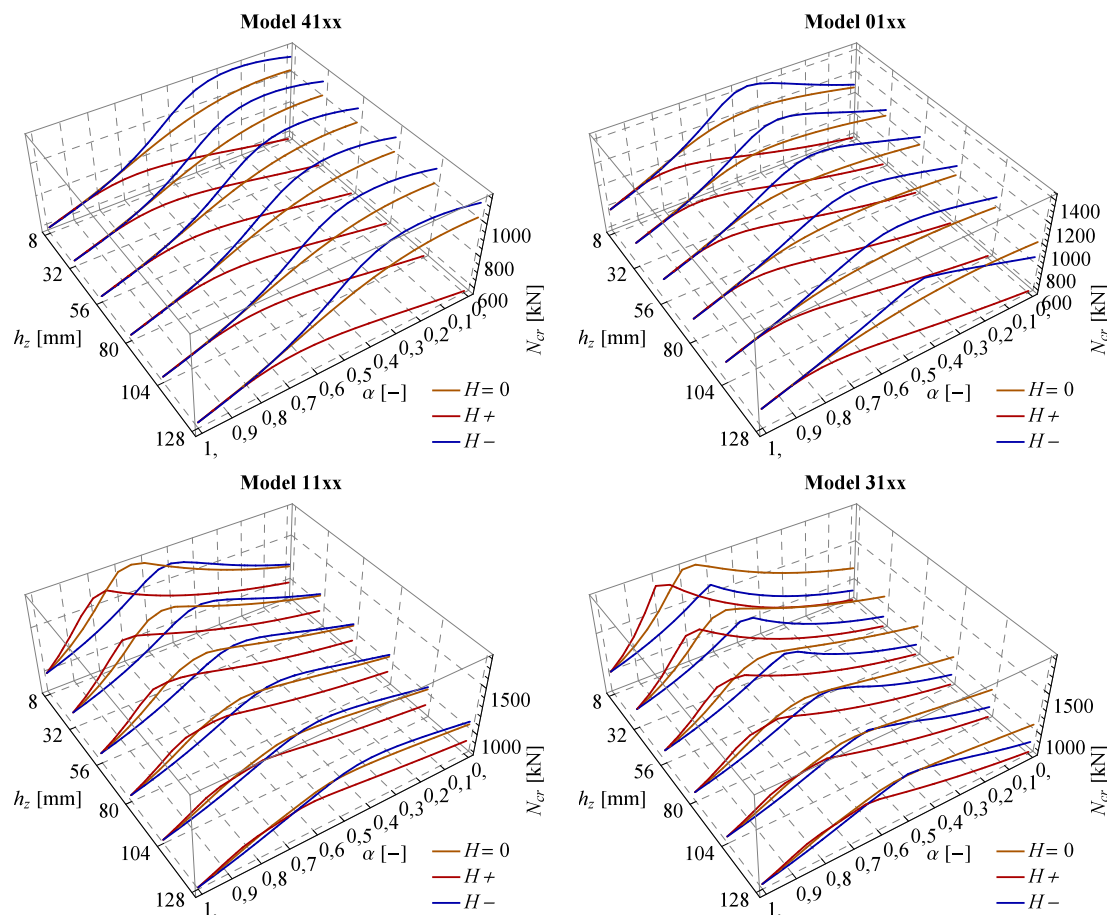
( $H = 0$ ,  $H+$ ,  $H-$ ), co skutkuje zmniejszeniem ich czytelności, dlatego zamiast tego pokazano ich przekroje przez oś  $h_z$ . Kolorem pomarańczowym opisano modele nieobciążone siłami poziomymi, kolorem czerwonym — z dodatnim obciążeniem poziomym, a kolorem niebieskim — ujemnym. Ponieważ mamy do czynienia z obciążeniem jednoparametrowym, więc obciążenie  $H$  ściśle jest związane z współczynnikiem  $\alpha$ . Przy czym im ten parametr jest mniejszy, tym większy jest wpływ obciążenia poziomego. Oznacza to, że gdy  $\alpha = 1$  — siła  $H = 0$ , co skutkuje tym, że wszystkie trzy powierzchnie mają wówczas wspólną krawędź.



Rys. 5.26. Przekroje powierzchni krytycznych modeli serii 00xx i 30xx

Przykładowe przekroje powierzchni stateczności zamieszczono na rysunku 5.26. Przedstawia on wartości obciążeń krytycznych  $N_{cr}$  stateczności sprężystej modeli serii 00xx i 30xx, czyli stężonych poprzecznie odpowiednio dwoma i ośmioma punktowymi więzami (por. rys. 5.1). Podczas ich analizy za odniesienie przyjęto wartości obciążeń krytycznych modeli nieobciążonych poprzecznie ( $H = 0$ ). Widać więc, że skutkiem dodatniej, poziomej siły  $H+$  są mniejsze wartości obciążeń krytycznych, z kolei wprowadzenie ujemnej siły  $H-$  obciążenia te zwiększa. Należy ponadto zauważyć, że różnice te nie są duże, a charakterystyki przebiegu powierzchni wyznaczonych przy udziale obciążeń poziomych dodatnich i ujemnych są bardzo podobne do tych wyznaczonych jedynie przy udziale obciążeń pionowych. Największe różnica względem modelu wyjściowego zanotowano w wyniku 4009-008- $H+$ , czyli w słupie stężonym jednym tężnikiem poprzecznym zlokalizowanym na wysokości wspornika, oddalonym o  $h_z = 8$  mm, obciążonym poziomą siłą  $H+$  i siłami pionowymi sprzężonymi parametrem  $\alpha = 0,65$ . Różnica ta nie przekroczyła 12%. Niewiele mniejszą różnicę uzyskano przy ujemnej sile  $H-$ . W pozostałych przypadkach, także w rezultatach z modeli zamieszczonych na rysunku 5.26, różnice te sięgały maksymalnie kilku procent. Zauważono przy tym, że większe co do wartości bezwzględnej różnice występują przy obciążeniu dodatnim  $H+$ , co skutkuje nieznacznie mniejszymi wartościami obciążeń krytycznych  $N_{cr}$ .

Wprowadzenie dodatkowego stężenia przeciwskrętnego na wysokości wspornika (por. rys. 5.2) bardzo mocno różnicuje otrzymane zależności. Zaprezentowano to na rysunku 5.27. Przedstawia on przekroje przez powierzchnie stateczności w zależności od obciążenia zewnętrznego: wyjściowej nieobciążonej siłą poziomą oraz obciążonych dodatnią  $H+$  i ujemną siłą poziomą  $H-$  serii 41xx, 01xx, 11xx, 31xx. Przytoczono tu więcej przykładów, aby pokazać jak zmienia się charakter tych powierzchni w zależności od liczby stężeń. Nie mamy w tym wypadku do czynienia z powtarzalnością wyników. Z pewnością



Rys. 5.27. Przekroje powierzchni krytycznych modeli serii 41xx, 01xx, 11x i 31xx

jednak wpływ obciążenia poziomego na wartości obciążeń krytycznych jest w przypadku słupów ze stężonym przeciwskrętnie wspornikiem dużo większy. W przypadku dodatniego poziomego obciążenia  $H+$  największą różnicą względem modelu bazowego sięgającą 45% zanotowano w serii 41xx. Zwiększenie liczby punktowych stężeń poprzecznych nieco tę różnicę redukuje, gdyż w przypadku serii 31xx dochodzi ona do 36%. Niemniej jednak, oznacza to, że dodatnia siła pozioma  $H+$  bardzo mocno wpływa na zmniejszenie wartości sił krytycznych  $N_{cr}$ . O ile w modelach z niestężonym wspornikiem można było stwierdzić, że pozioma siła ujemna  $H-$  powoduje zwiększenie obciążeń krytycznych, o tyle w modelach ze stężonym przeciwskrętnie wspornikiem takiego uogólnienia już nie można poczynić. Znamienne w tym przypadku jest to, że w danym przekroju każda z trzech krzywych osiąga maksimum przy innym współczynniku  $\alpha$ . Można również zauważyć, że modele stężone niewielką liczbą punktowych stężeń poprzecznych (41xx, 01xx) charakteryzują się tym, że wprowadzenie ujemnie skierowanej siły poziomej  $H-$  powoduje zwiększenie wartości obciążeń krytycznych. Nie można tego stwierdzić w modelach z większą liczbą stężeń (11xx, 21xx, 31xx), ponieważ przy niedużych wartościach obciążeń poziomych, tj. dla współczynnika  $\alpha$  z zakresu 0,7–1,0 obciążenia krytyczne przyjmują wartości najmniejsze. Poza tym przedziałem wartości obciążeń modeli serii 11xx i 21xx były większe niż modeli bazowych, a w przypadku serii 31xx niższe.

Podsumowując analizy parametryczne uwzględniające wpływ poziomego obciążenia na wartości krytyczne stateczności sprężystej, należy zauważyć znaczną ich różnorodność jeżeli chodzi o modele z niestężonym (x0xx) i stężonym przeciwskrętnie (x1xx) wsporni-

kiem. W przypadku tych pierwszych ten wpływ jest nieduży, ponieważ skrajna różnica wynosi niecałe 11%, a w zdecydowanej większości przypadków zaledwie kilka procent. Należy również stwierdzić, że poziome obciążenie skierowane do wnętrza hali ( $H+$ ) powoduje zmniejszenie, a obciążenie skierowane na zewnątrz ( $H-$ ) — zwiększenie wartości obciążeń krytycznych. W przypadku tych drugich, stężonych przeciwnie na wysokości wspornika słupów, można jedynie powiedzieć, że wpływ oddziaływań poziomych na wartości obciążeń krytycznych jest zdecydowanie większy. Nie można go jednak scharakteryzować prostymi zależnościami, ponieważ liczba punktowych stężeń poprzecznych radykalnie zmienia charakterystykę otrzymanych powierzchni stateczności.

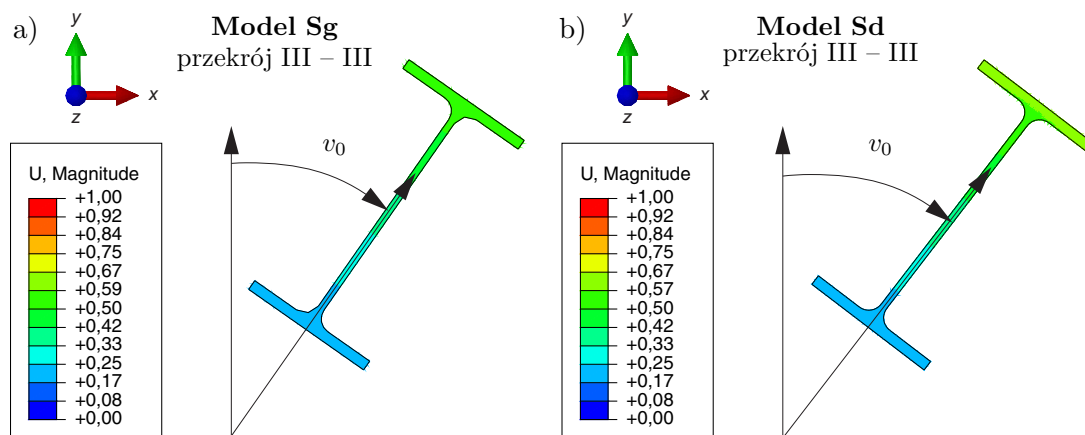
### 5.3. Nieliniowe analizy w celu wyznaczenia nośności granicznej

Przedstawione w niniejszym podrozdziale symulacje numeryczne mają na celu opracowanie ścieżek równowagi statycznej oraz określenie nośności granicznej dwuteowych słupów o skokowej, nieosiowej zmianie przekroju poprzecznego z uwzględnieniem geometrycznych i materiałowych nieliniowości. Dodatkowym, lecz równie istotnym celem jest utworzenie modelu, który wiernie opisałby i odwzorował zachowanie przebadanych doświadczalnie słupów.

Szczegółowa budowa modelu numerycznego oraz zdefiniowane charakterystyki materiałowe zostały omówione i wyjaśnione w podrozdziale 4.3. Same analizy numeryczne przebiegają w dwóch etapach. Pierwszy polega na liniowo-sprężystej analizie bifurkacyjnej (LBA). Jej efektem jest postać utraty stateczności, którą po stosownym przeskalowaniu wykorzystuje się jako imperfekcja wstępna w kolejnym etapie. Drugi etap symulacji numerycznych polega na geometrycznie i fizycznie nieliniowej analizie z uwzględnieniem wcześniej zdefiniowanych imperfekcji. W ramach drugiego etapu przeprowadzono szereg obliczeń dla zróżnicowanych wartości imperfekcji wstępnych. Analizy nieliniowe przeprowadzono z wykorzystaniem przedstawionego punkcie 4.1.3 oprogramowania Abaqus FEA [1]. Zastosowano dostępny w programie moduł umożliwiający przyrostowe przykładanie obciążenia, wykorzystujący popularną metodę długości łuku (*arc-length method*), której prekursorem był *Riks* i w taki też sposób jest ona opisana w programie. Aktywowana w module programu nieliniowość geometryczna uwzględnia tzw. efekty drugiego rzędu, a także nieproporcjonalny wzrost deformacji spowodowany przyrostem obciążenia. Oznacza to, że sztywność danego elementu zmienia się pod wpływem stanu naprężenia, co wiąże się aktualizacją macierzy sztywności po każdym kroku. Nieliniowość materiałowa wynika z zachowania się stali po przekroczeniu granicy proporcjonalności (por. pkt. 3.5.1).

Liniowo-sprężysta analiza wyboczeniowa (LBA) została szeroko omówiona i przedstawiona w podrozdziale 5.1. Istotne z punktu widzenia obliczeń nieliniowych postaci utraty stateczności modelu Sg zamieszczono na rysunku 4.24a, zaś niewzmocnionego modelu Sd na rysunku 4.24b. Wzmocnienie wspornika nie wpłynęło znacznie na kształt utraty stateczności. Większy wpływ miało na otrzymane w analizie LBA wartości obciążeń krytycznych, ponieważ wzrosło ono z 287,4 kN do 314,4 kN. Kształty te wykorzystano jako imperfekcje wstępne w analizie GMNIA. Deformacje słupów widocznych na rysunku 4.24 są opisane względem punktu, który w całej konstrukcji przemieści się najbardziej. Wówczas jego przemieszczenie wynosi 1,0. W obu przypadkach punkt ten znajduje się na krawędzi wspornika. Zdefiniowanie wielkości imperfekcji wstępnej oznacza przeskalowanie przemieszczeń wszystkich węzłów konstrukcji względem tego właśnie punktu. W celu bardziej przejrzystego opisu tej wielkości, sprowadzono ją do przemieszczenia osi dolnej części

słupa w przekroju III – III tuż pod wspornikiem (por. rys. 3.8). Na rysunku 5.28 pokazano te przekroje, na których oznaczono wielkość imperfekcji wstępnej jako  $v_0$ . Względne przemieszczenie tego punktu w modelu Sg wynosi 0,385 oraz 0,392 w modelu Sd.



Rys. 5.28. Sposób określenia wartości imperfekcji wstępnej modeli Sg (a) i Sd (b)

W tabeli 5.3 zestawiono przeanalizowane wielkości imperfekcji wstępnych w przekroju III – III oraz odpowiadające im mnożniki. Przyjęcie mnożnika lub imperfekcji na poziomie zera oznacza, że przeprowadzona została analiza geometrycznie i fizycznie nieliniowa (GMNA). Przyjęcie konkretnej wartości  $v_0$  oznacza analizę geometrycznie i fizycznie nieliniową z imperfekcjami (GMNIA). Symulacje numeryczne modelu Sg przeprowadzono na sześciu (łącznie z zerem) wybranych wartościach, zaś modelu Sd — na pięciu. Przyjęcie  $v_0 = 0,385$  mm w słupie Sg i  $v_0 = 0,392$  mm w słupie Sd oznacza, że przemieszczenia węzłów w obliczeniach numerycznych zostaną przeskalowane przez jeden. Największa, rozważana w przekroju III – III wartość imperfekcji wstępnej oznacza przyjęcie normowego, łukowego wygięcia o wielkości  $v_0 = l/350 = 5400/350 = 15,43$  mm. W pracy nie przedstawiono rezultatów uzyskanych dla imperfekcji większych niż te zamieszczone w tabelicy 5.3, ponieważ otrzymane ŚRS znacznie odbiegają od ścieżek z badań doświadczalnych.

Tabela 5.3. Zestawienie wielkości imperfekcji wstępnych i odpowiadających im mnożników

Model Sg	$v_0$ [mm]	0,0	0,385	1,0	5,0	10,0	15,43
	mnożnik	0,0	1,0	2,6	12,99	25,97	40,07
Model Sd	$v_0$ [mm]	0,0	0,392	1,0	5,0	10,0	
	mnożnik	0,0	1,0	2,55	12,77	25,54	

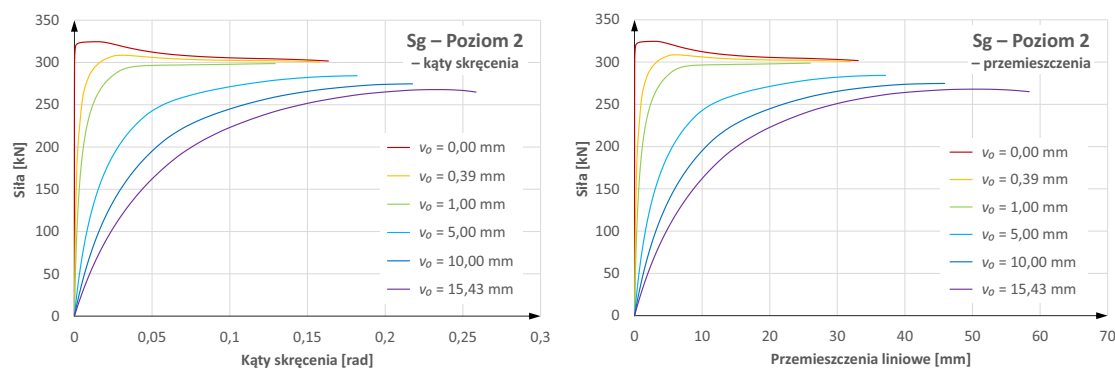
Obliczenia przeprowadzono z wykorzystaniem modułu Standard programu Abaqus FEA na komputerach znajdujących się w zasobach WCSS. Zrealizowane dwie serie analiz numerycznych Sg i Sd, które różnią się nieco sposobem wymuszania obciążenia. W pierwszej serii sterowano zdefiniowanym w głowicy obciążeniem. Za jego wstępną wartość przyjęto 10 kN. Jako parametry metody długości łuku (przy wykorzystaniu algorytmu *Riksa*) przyjęto: maksymalną liczbę przyrostów — 600, początkową wartość przyrostu — 0,2, średnią wielkość kolejnego przyrostu — 1,0, minimalną wielkość kolejnego przyrostu — 0,0001 oraz maksymalną dozwoloną wielkość kolejnego przyrostu — 1,0. Poza określeniem maksymalnej liczby przyrostów zdefiniowano także kolejne kryterium przerywania obliczeń. Obliczenia zostawały przerywane, gdy oś górnej części słupa w przekroju 2 przemieści się

o więcej niż 50 mm z płaszczyzny jego większej sztywności. Jednakże w większości przypadków na bieżąco analizowano zachowanie modelu i po osiągnięciu obciążenia granicznego obliczenia przerywano ręcznie. Druga seria okazała się bardziej złożona, ponieważ obliczenia, w których sterowano obciążeniem wspornika kończyły się w pewnym momencie brakiem zbieżności i ostatecznie niepowodzeniem. Rozwiązaniem tego problemu jest sterowanie przemieszczeniem. Zamiast początkowej wartości obciążenia na wsporniku zdefiniowano przemieszczenie wielkości 1 mm. W porównaniu do serii pierwszej, parametry zaimplementowanej w programie Abaqus metody *Riksa* różniły się jedynie maksymalną liczbą przyrostów, ponieważ ustalono ją na poziomie 400 oraz maksymalną wielkością kolejnego przyrostu — 2.

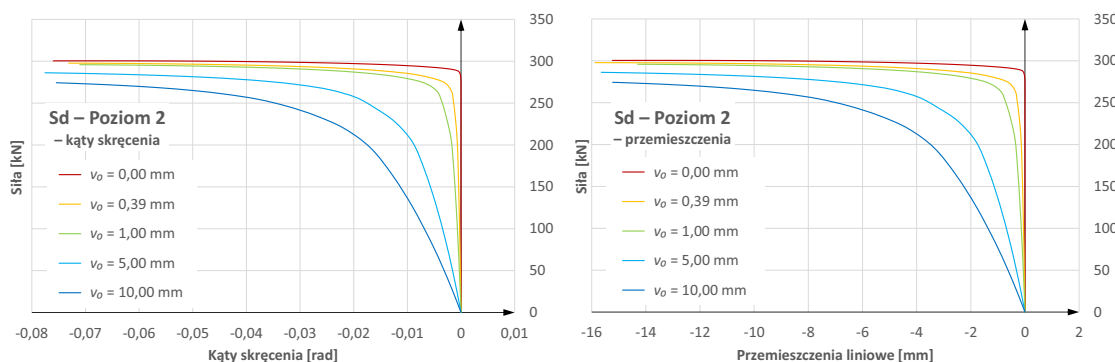
Tabela 5.4. Porównanie rozwiązań numerycznych i doświadczalnych [kN]

$v_0$ [mm]	0,00	0,39	1,00	5,00	10,00	15,43
Seria Sg [kN]						
LBA	332,3					
GMNA	324,5	–	–	–	–	–
GMNIA	–	308,5	298,7	284,3	274,7	268,0
Sg1			305,6			
Sg2			252,9			
Sg3			246,6			
Seria Sd [kN]						
LBA	314,4					
GMNA	300,6	–	–	–	–	–
GMNIA	–	297,9	296,3	287,8	279,1	
Sd1			311,5			
Sd2			272,5			
Sd3			292,5			
Sgd1			272,5			
Sgd2			282,4			
Sgd3			314,8			

Jedynym z rezultatów geometrycznie i materiałowo nieliniowych analiz numerycznych są wartości obciążeń granicznych. Przyjęto, że jest to maksymalne obciążenie, które zarejestrowano na ścieżkach równowagi statycznej. W tabeli 5.4 znajduje się porównanie wartości obciążeń granicznych wyznaczonych z symulacji numerycznych z wartościami otrzymanymi w badaniach na modelach fizycznych. Analiza rezultatów serii Sg pozwala zauważyć, że poszczególne wyniki są do siebie zbliżone. Największa różnica jest pomiędzy modelem z imperfekcją wstępną  $v_0 = 15,43$  mm a modelem Sg3 i wynosi 8,6%. Zaś najmniejsza, pomiędzy modelem z imperfekcją  $v_0 = 0,39$  mm i modelem Sg1. Różnica względna wynosi wówczas mniej niż 1%. Podobnie jest w przypadku serii Sd. Porównanie wartości obciążeń granicznych, gdy obciążenie jest przyłożone do wspornika wypada równie korzystnie. Największa różnica jest pomiędzy modelem bez imperfekcji a słupem Sgd3 i wynosi 4,5%. Najmniejsza zaś, pomiędzy numerycznym modelem, w którym przyjęto  $v_0 = 1,0$  mm, a słupem Sd3, ponieważ wynosi jedynie 1,3%. Nie zamieszczano wyników symulacji uzyskanych przy większych imperfekcjach, ponieważ kierowano się również kształtem ścieżek równowagi statycznej.



Rys. 5.29. Wpływ imperfekcji wstępnej na ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych w poziomie 2 modeli numerycznych Sg

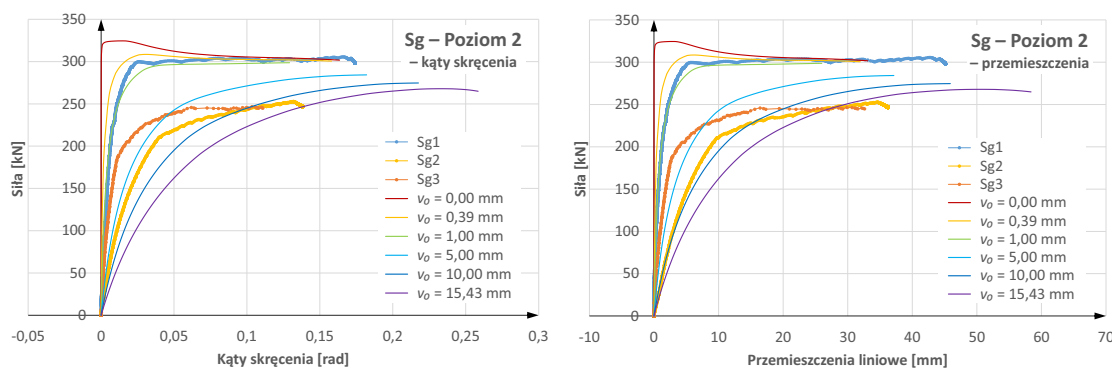


Rys. 5.30. Wpływ imperfekcji wstępnej na ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych w poziomie 2 modeli numerycznych Sd

W badaniach doświadczalnych najbardziej reprezentacyjny, jeżeli chodzi o pomiar przemieszczeń, jest poziom 2, który jest tożsamy z przekrojem II – II (por. rys. 3.8). W związku z tym, na podstawie przemieszczeń wybranych w tym poziomie węzłów, zdefiniowano odpowiednie ścieżki równowagi statycznej odpowiednich przemieszczeń. Są to odpowiednio kąty skręcenia, jak i przemieszczenia liniowe. Na rysunkach 5.29 i 5.30 zestawiono ŚRS analizowanych modeli numerycznych obciążonych odpowiednio w głowicy i na poziomie wspornika. Wartości obciążeń granicznych odpowiednich ścieżek zamieszczono w tabeli 5.4. Różnice pomiędzy ich skrajnymi wartościami sięgają 17% przy obciążeniu górą oraz 7% przy obciążeniu dołem. Świadczy to o tym, że ten pierwszy schemat obciążenia jest bardziej wrażliwy na wszelkiego rodzaju niedoskonałości. Zakres przemieszczeń ŚRS pokazanych na rysunkach 5.29 i 5.30 ograniczono w takim samym zakresie w jakim przedstawiono wyniki badań doświadczalnych.

Porównanie wykreślonych na podstawie symulacji numerycznych ŚRS modeli serii Sg ze ścieżkami tożsamymi modelami wyznaczonymi z badań doświadczalnych przedstawiono na rysunku 5.31. Wykresy te opisują zarówno kąty skręcenia ( $\varphi$ ), jak i przemieszczenia liniowe ( $v$ ). Analizując rysunek 5.31 można zauważyć, że najlepszym numerycznym odwzorowaniem cechuje się model Sg1. Ścieżki równowagi statycznej wyznaczone w trakcie analiz GMNIA dla modeli z imperfekcjami wstępnymi wielkości  $v_0 = 0,39$  mm i  $v_0 = 1,0$  mm są niemalże obwiednią doświadczalnie opracowanej ścieżki Sg1 w poziomie 2. Dotyczy to zarówno kątów skręcenia, jak i przemieszczeń liniowych. Można zatem wnioskować, że pośrednia wartość pomiędzy tymi dwiema wielkościami jeszcze dokładniej opisze zachowanie badanego modelu. Krzywe wykreślone na podstawie badań doświadczalnych pozostałych

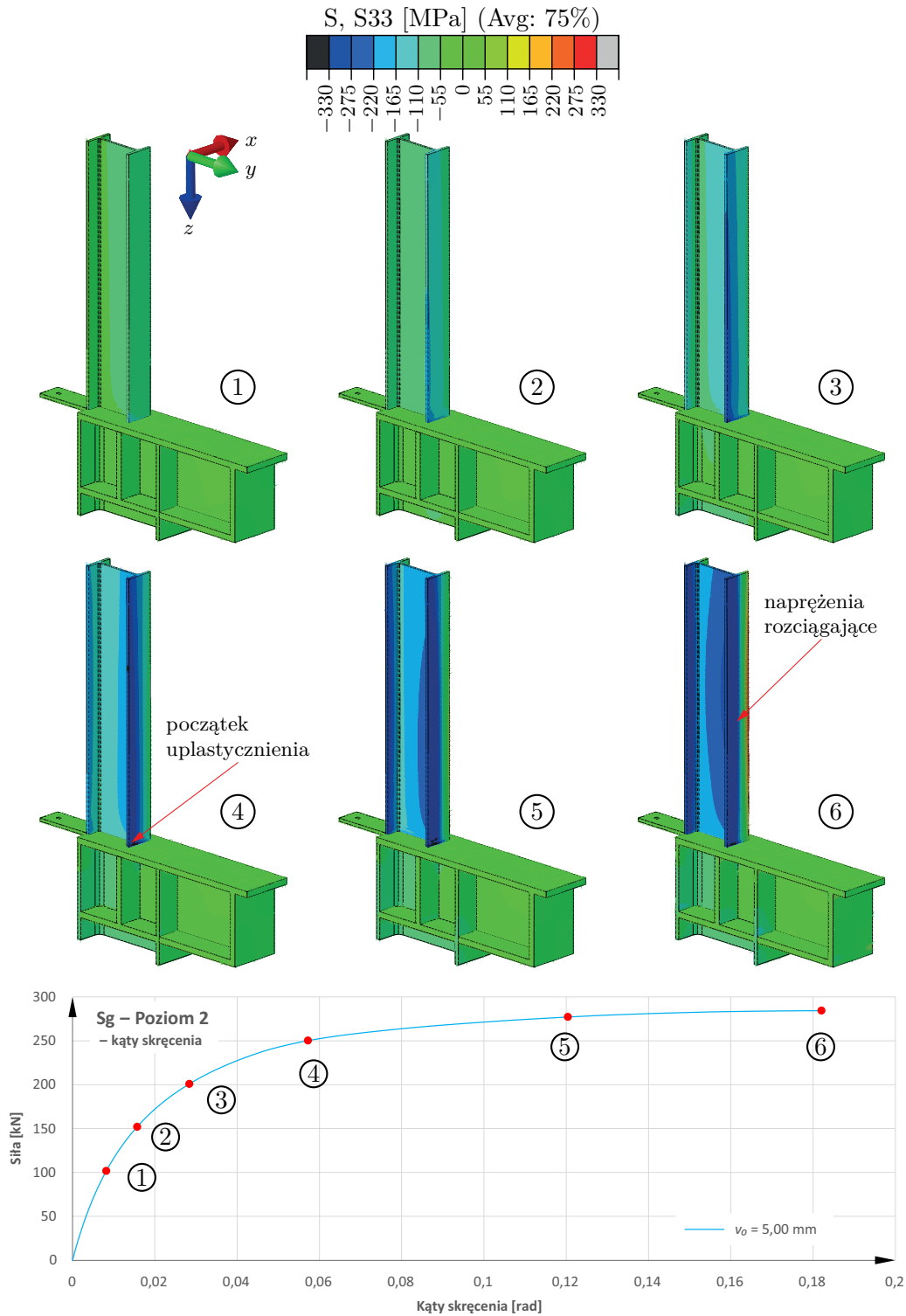




Rys. 5.31. Porównanie doświadczalnych i numerycznych ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych w poziomie 2 modeli Sg

dwóch słupów Sg2 i Sg3, w porównaniu z krzywymi wykreślonymi na podstawie symulacji numerycznych wypadają nieco gorzej. Oznacza to, że w pozostałych przypadkach nie określono właściwego kształtu lub odpowiedniej wartości imperfekcji wstępnej. Jej rzeczywista wartość jest prawdopodobnie wielkością znajdującą się pomiędzy wielkościami zaprezentowanymi na rysunku 5.31. W modelu Sg2 będzie to wartość z przedziału  $v_0 = 5\text{--}10$  mm, zaś w modelu Sg3 nieco mniej, gdyż należałoby przyjąć przedział  $v_0$  pomiędzy 1–5 mm. Pozostaje jednak jeszcze kwestia odpowiednich wartości obciążeń granicznych. ŚRS słupów Sg2 i Sg3 mają charakterystyczny przebieg, ponieważ w okolicach obciążenia rzędu mniej więcej 200 kN pojawia się na nich pewne załamanie, które sprawia, że jej nachylenie staje się mniejsze. Świadczy to o pojawieniu się dodatkowego czynnika, który w symulacji numerycznych nie został uwzględniony. Takich czynników może być wiele, a dodatkową trudność sprawia to, że są trudne, a czasem wręcz niemożliwe do określenia. Najczęściej jednak jest to kształt imperfekcji wstępnej, który nie odpowiada postaci wyboczenia. Oprócz łukowego kształtu może to być również wpływ imperfekcji przechyłowej. W badanych modelach, z uwagi na brak odpowiedniego sprzętu, nie dokonywano ich dokładnych pomiarów. Ponadto znaczenie mogły mieć również niedoskonałości wynikające ze sposobu przyłożenia obciążenia.

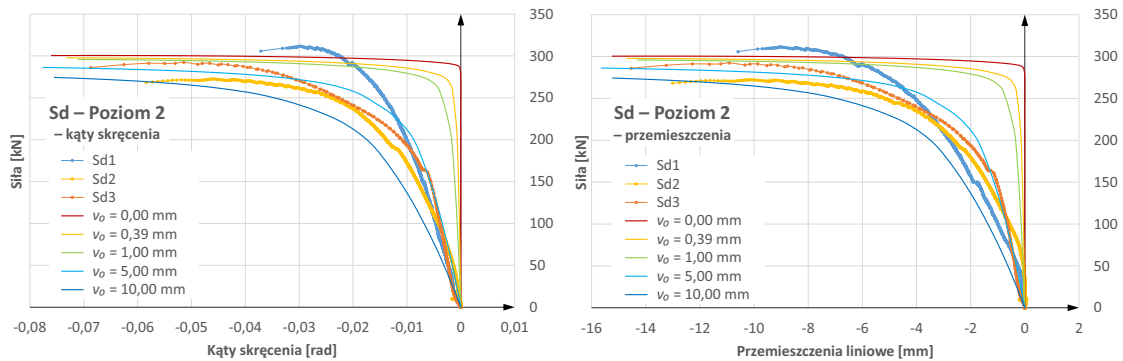
Porównanie doświadczalnych i numerycznych ścieżek równowagi statycznej modeli serii Sg potwierdza, że przyjęty model dobrze opisuje zjawisko wyczerpania nośności stalowych, dwuteowych słupów o odcinkowo skokowej, nieosiowej zmianie sztywności. Przeanalizowano to na przykładzie numerycznego modelu z imperfekcją wstępną  $v_0 = 5$  mm. Wybrano go, ponieważ najbliższy mu do zachowania modelu Sg3, w którym analizowano również stan naprężeń w wybranych przekrojach. Przeprowadzone symulacje są dopełnieniem rezultatów otrzymanych z pomiarów tensometrycznych. Na rysunku 5.32 zaprezentowano mapy naprężeń normalnych w zależności od przyjętego na ŚRS poziomu obciążenia. Pokazano to na przykładzie naprężeń normalnych, ponieważ to głównie one decydują o wyteżeniu elementu, a ponadto do pomiarów odkształceń w badaniach doświadczalnych nie wykorzystywano rozet, tylko pojedyncze tensometry naklejone wzdłuż słupa. Dla zachowania czytelności zamieszczono jedynie wybrany z całości elementu odcinek obejmujący wspornik i część górnego dwuteownika. Ponumerowane rozkłady naprężeń odpowiadają punktom zamieszczonym na poniższej ścieżce równowagi statycznej. Oznaczenia poziomów oraz poszczególnych przekrojów przyjęto tak jak to pokazano na rysunku 3.8. Analiza rozkładu naprężeń na poziomach 1 i 2 pokazuje, że jest on typowy dla jak dla elementu mimośrodowo ściskanego. Dotyczy to zwłaszcza przekroju II – II. Rozkład ten jest trapezowy



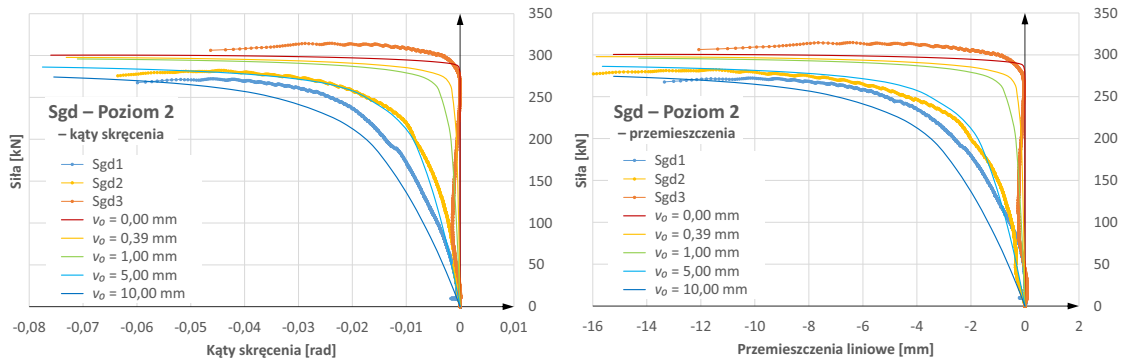
Rys. 5.32. Rozkład naprężeń normalnych na wybranych poziomach obciążeń modelu Sg z imperfekcją wstępną  $v_0 = 5 \text{ mm}$

z dominującym ściskaniem wewnętrznej półki. Co prawda nieznacznie, ale już w punkcie 2 można zaobserwować to, co w punkcie 3 jest już wyraźnie widoczne. Chodzi mianowicie o redystrybucję naprężeń normalnych, która jest efektem skręcenia przekroju względem ustalonej osi obrotu. Widoczna na pierwszym planie połowa wewnętrznej części półki jest dużo bardziej wyteżona niż pozostałe części przekroju. Spoglądając na znajdującą się na rysunku 5.32 ŚRS można stwierdzić, że pierwsze dwa punkty leżą jeszcze w ich linio-

-sprężystym zakresie, natomiast punkt 3, odpowiadający obciążeniu ok. 200 kN, jest na granicy. W punkcie 4, po osiągnięciu ok. 250 kN, widoczne są już pierwsze strefy uplastycznienia. W analizowanym modelu pojawiła się ona w ściskanej, wewnętrznej półce górnej części słupa w miejscu połączenia z poziomą blachą wspornika. Przy tym poziomie obciążenia zauważyć można również wzrost naprężeń ściskających w przeciwległej, zewnętrznej półce. Ciągły przyrost deformacji powoduje dalszą redystrybucję naprężeń normalnych. Nieznaczny wzrost obciążenia spowodował znaczne przemieszczenia wspornika, przez co dochodzi do jeszcze większego ściskania zewnętrznej części półki. Odpowiada to sytuacji w jakiej punkt 5 znajduje się na ŚRS. Przez to naprężenia w przekroju II – II przypominają zginany względem swojej słabszej osi pręt dwuteowy. Podobne zachowanie zaobserwowano także analizując przyrost naprężeń wyznaczony w sposób doświadczalny, co zostało pokazane na rysunku 3.16. Zachowanie słupa odpowiadające obciążeniu zarejestrowanemu w punkcie 6 wiąże się z jego zniszczeniem. Strefa uplastycznienia pojawiła się także na zewnętrznej części półki, a poza naprężeniami ściskającymi zaobserwować można również rozciąganie. Jest to sytuacja, którą również zarejestrowano podczas badań doświadczalnych, a którą przedstawiono na rysunku 3.19.



Rys. 5.33. Porównanie doświadczalnych i numerycznych ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych w poziomie 2 modelu Sd



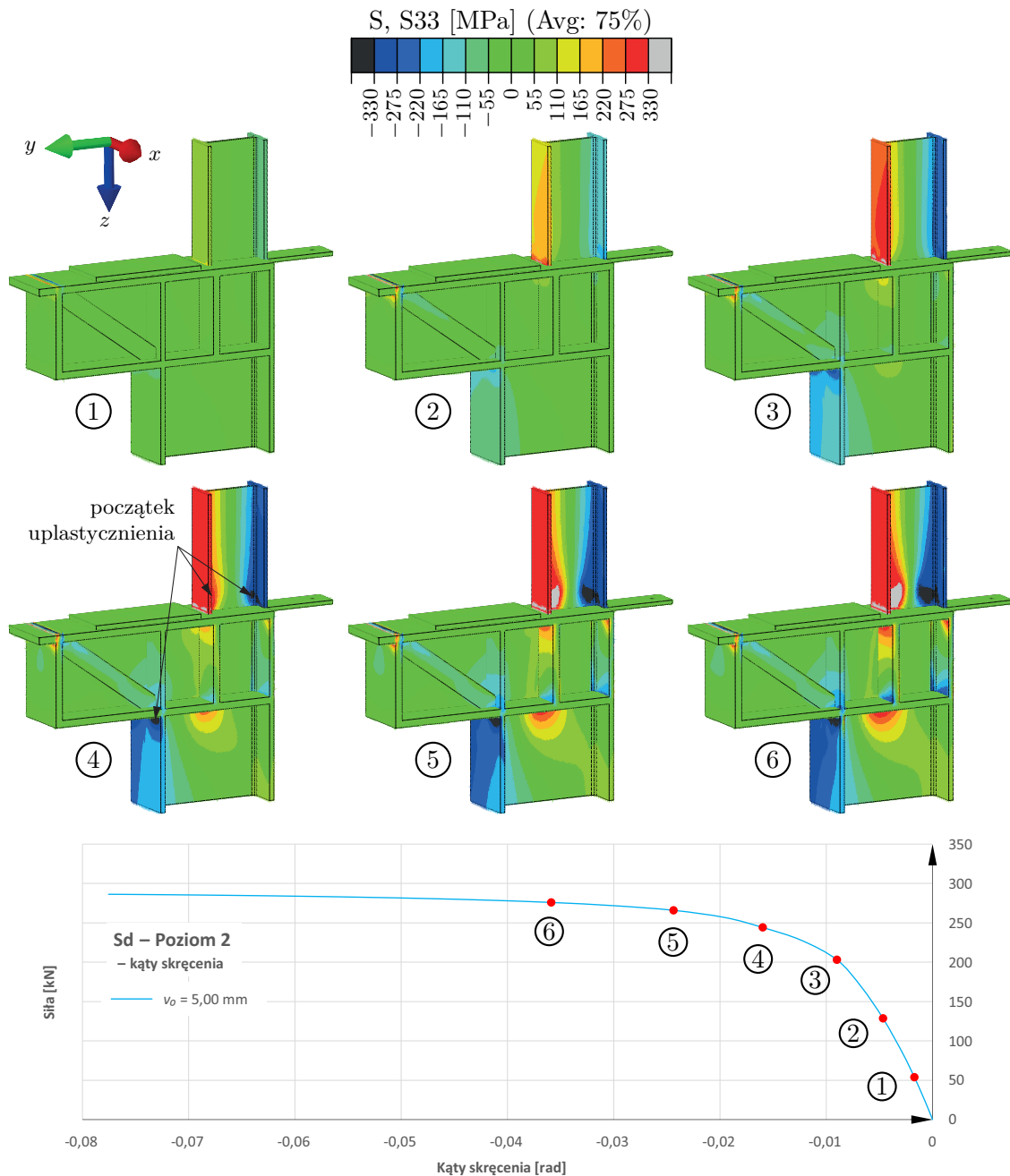
Rys. 5.34. Porównanie doświadczalnych i numerycznych ŚRS kątów skręcenia oraz przemieszczeń liniowych w poziomie 2 modelu Sgd

Porównanie wyznaczonych na drodze analiz numerycznych ŚRS modeli Sd z wynikami badań doświadczalnych podzielono na dwie grupy, które dla zachowania czytelności wykresów zamieszczono osobno. Na rysunku 5.33 znajduje się porównanie ze słupami serii Sd, natomiast na rysunku 5.34 — ze słupami serii Sgd. Z pierwszego rysunku wynika, że najlepszą zgodnością charakteryzują się ŚRS otrzymane w wyniku analiz słupów Sd2 i Sd3 ze ścieżkami modelu o imperfekcji wstępnej  $v_0 = 5$  mm. Na tym tle wyróżnia się zachowa-

nie modelu Sd1. Jemu również należałoby przyporządkować imperfekcję wstępną rzędu 5 mm, lecz tylko na pewnym odcinku, ponieważ po przekroczeniu ok. 250 kN w modelu fizycznym następuje dalszy przyrost obciążenia, aż do osiągnięcia 311,5 kN. Zachowanie modeli numerycznych jest nieco odmienne, ponieważ nie otrzymano aż takiego poziomu obciążenia, nawet w przypadku modelu o idealnej geometrii.

W nieliniowych analizach numerycznych bardzo dobrze udało się odwzorować doświadczalne ścieżki równowagi statycznej słupów serii Sgd. Na rysunku 5.34 zostały one również naniesione na ścieżki modeli serii Sd otrzymanych z analiz GMNA i GMNIA. Najlepiej wypada tutaj słup Sgd2. Zarówno kąty skrzywienia, jak i przemieszczenia liniowe z numerycznego modelu ze zdefiniowaną imperfekcją  $v_0 = 5$  mm idealnie się ze sobą pokrywają. Bardzo dobrą zgodność przemieszczeń wykazał również słup Sgd1, bowiem doświadczalne ŚRS znajdują się poniżej ścieżek modelu z pięciomilimetrową imperfekcją. Oznacza to, że przyjęcie wartości imperfekcji z przedziału 5–10 mm pozwoliłoby zapewne na równie idealną, jak w przypadku słupa Sgd2, zgodność przemieszczeń. Nietypowe ŚRS powstałe w rezultacie badań doświadczalnych słupa Sgd3 również znalazły swoje odwzorowanie w symulacjach numerycznych. Charakterystycznemu zachowaniu tego słupa najbliższe jest do zachowania modelu o idealnej geometrii. W obu przypadkach, aż do osiągnięcia ok. 290 kN, następuje przyrost obciążenia bez wyraźnego wzrostu przemieszczeń. Dopiero powyżej tej wartości w obu modelach, zarówno fizycznym, jak i numerycznym występuje skrzywienie przekroju i przemieszczenie liniowe z płaszczyzny większej sztywności. Można zatem stwierdzić, że zbudowany z bryłowych elementów skończonych w programie Abaqus FEA model słupa dwuteowego o skokowo, nieosiowo zmiennym przekroju poprzecznym bardzo dobrze opisuje zjawisko wyczerpania jego nośności.

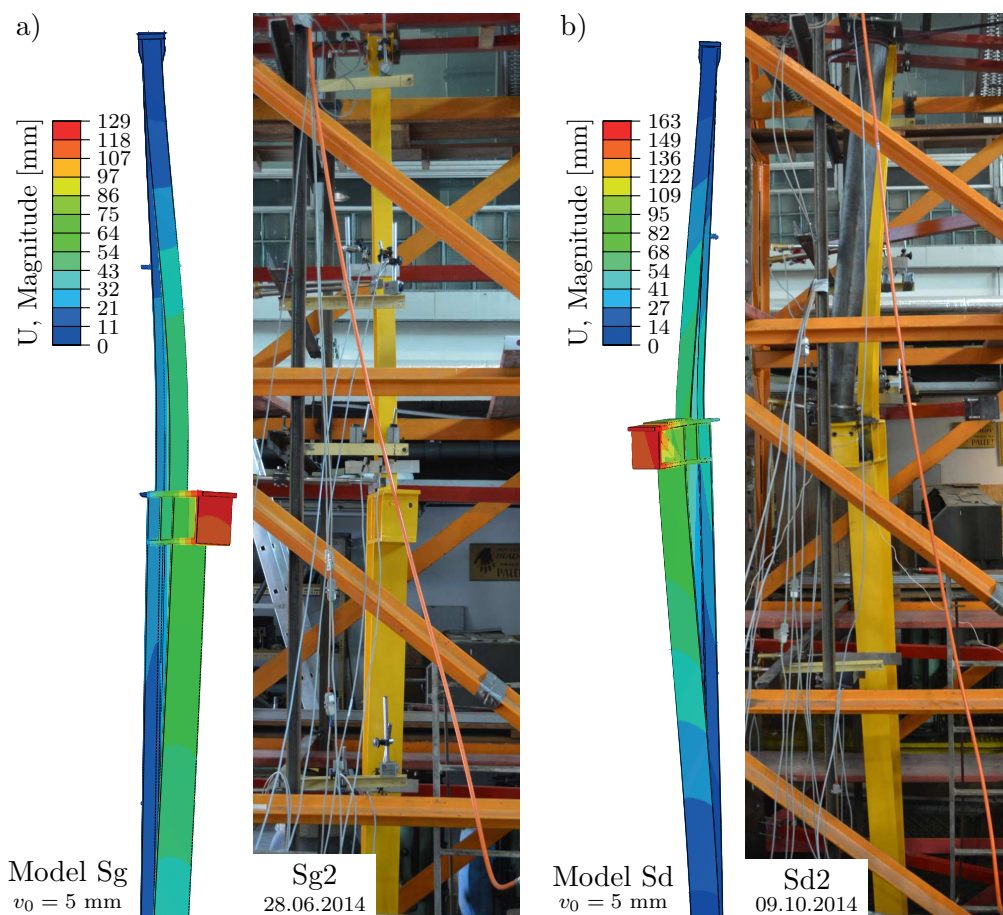
Bazując na porównaniu doświadczalnych i numerycznych ŚRS ustalono, że najlepiej dopasowanym modelem jest ten, w którym zdefiniowano imperfekcję wstępną  $v_0 = 5$  mm. Pozwala to na dokładniejsze przeanalizowanie schematu wyczerpania nośności stalowych, dwuteowych słupów ze skokową, nieosiową zmianą sztywności. Na rysunku 5.35 zamieszczono rozkład naprężeń normalnych w słupie w zależności od przyjętego poziomu obciążenia. Wyczerpanie nośności słupa jest zainicjowane przez uplastycznienie przekrojów w okolicach zmiany sztywności, dlatego w celu zapewnienia większej czytelności zamieszczone jedynie ten jego fragment. Pokazano rezultaty dla sześciu takich poziomów, które odpowiadają wybranym na ŚRS punktom. Rozkład naprężeń normalnych w punktach 1 i 2 w przekroju II – II (por. rys. 3.8) — odpowiada charakterystycznemu rozkładowi pręta zginanego, natomiast w przekroju III – III — rozkładowi pręta mimośrodowo zginanego. Dopiero po przekroczeniu poziomu 200 kN, co odpowiada punktowi nr 3, w przekrojach nad wspornikiem można zauważyć redystrybucję naprężeń normalnych, która jest efektem narastającego skrzywienia przekroju. Widoczna jest również nieduża strefa uplastycznienia, jednak ma ona charakter lokalny i znajduje się w połączeniu górnej części słupa z poziomą blachą wspornika. Dopiero w punkcie 4, czyli przy obciążeniu w okolicach 250 kN pojawiają się strefy płynięcia stali. Są to wspomniane już przekroje II – II i III – III. Naprężenia odpowiadające punktom 5 i 6 są już praktycznie tożsame ze zniszczeniem słupa. Zauważyć można narastające strefy uplastycznienia. Dotyczy to zarówno ściskanej, jak i rozciąganej części przekroju II – II i tylko ściskanej części przekroju III – III. To właśnie przekrój II – II jest przekrojem krytycznym decydującym o wyczerpaniu nośności słupa. Interesujący jest w nim zwłaszcza rozkład stref uplastycznienia, ponieważ rozwijają się one nie w najbardziej oddalonych włóknach przekroju, a w środku. Porównanie otrzymanych w niniejszym podrozdziale rozkładów naprężeń z wartościami otrzymanymi doświadczal-



Rys. 5.35. Rozkład naprężeń normalnych na wybranych poziomach obciążeń modelu Sd z imperfekcją wstępną  $v_0 = 5$  mm

nie również świadczy o poprawności przyjętego modelu. Zamieszczone na rysunku 5.35 naprężenia są numerycznym odwzorowaniem wielkości pokazanych na rysunkach 3.35 i 3.36, w odniesieniu do przekrojów odpowiednio II – II i III – III. Zarówno wartości, jak i rozkłady doświadczalnych i numerycznych naprężeń normalnych są do siebie zbliżone, ale należy mieć na uwadze, że w badaniach modeli fizycznych pomiaru odkształceń dokonywano tylko na jednym modelu Sd3, dla którego numeryczny model Sd z założoną imperfekcją wstępną  $v_0 = 5$  mm nie jest idealnym odwzorowaniem.

Przedstawione w niniejszym podrozdziale ścieżki równowagi statycznej pokazały, że zaproponowane modele numeryczne modeli serii Sg dość dobrze opisują zjawisko wyczerpania ich nośności (por. rys. 5.31), natomiast numeryczne modele serii Sd, w odniesieniu



Rys. 5.36. Porównanie deformacji numerycznych i fizycznych modeli słupów obciążonych górną i dolną (b)

do niektórych fizycznych modeli słupów serii Sd i Sgd, wręcz idealnie (por. rys. 5.33 i 5.34). O prawidłowym odwzorowaniu mechanizmu zniszczenia świadczą również deformacje uzyskane w wyniku symulacji. Na rysunku 5.36 znajdują się frontowe widoki modeli numerycznych i fizycznych po wyczerpaniu nośności. Widoki słupów obciążonych w poziomie głowicy zamieszczono na 5.36a. Widoczne na nim przemieszczenia modelu numerycznego dotyczą słupa z imperfekcją wstępną  $v_0 = 5$  mm, natomiast znajdujący się na fotografii fizyczny model to słup Sg2. Rysunek 5.36b przedstawia porównanie widoków wypadkowych przemieszczeń, które są wynikiem symulacji modelu Sd z tą samą wielkością imperfekcji wstępnej oraz przemieszczeń rzeczywistego modelu Sd2. Znajdujące się na rysunku 5.36 porównania, podobnie jak widoczne na rysunkach 5.31, 5.33, 5.34 ŚRS, dowodzą o poprawności zaproponowanego modelu.

## 5.4. Podsumowanie badań numerycznych

Opisane w niniejszym rozdziale badania modeli numerycznych zostały podzielone na dwa etapy. Zarówno budowę modeli z wykorzystaniem elementów bryłowych, jak i symulacje zrealizowano w środowisku Abaqus FEA. W pierwszym etapie badań przeprowadzono liniowo-sprężystą parametryczną analizę stateczności (LBA) niestężonych lub stężonych poprzecznie dwuteowych słupów stalowych ze skokową, niesymetryczną zmianą przekroju poprzecznego. Określono wpływ, jaki mają takie parametry jak: sposób podparcia, liczba

stężeń poprzecznych, stosunek przyłożonych obciążeń, lokalizacja stężenia względem zewnętrznej półki, na wartości obciążeń krytycznych. Rezultaty tych badań przedstawiono w formie graficznej jako powierzchnie stateczności lub mapy warstwowe zależne od omówionych parametrów. Następnie rozszerzono je o uwzględnienie wpływu, przy zachowaniu podobnych parametrów jak we wcześniejszych analizach, dodatkowego dodatnio i ujemnie skierowanego obciążenia poziomego  $H$ . W sumie złożyło się to na 5124 pojedyncze przypadki. Drugi etap dotyczy symulacji numerycznych, których celem była identyfikacja mechanizmu niszczenia oraz określenie nośności granicznej przedmiotowych słupów. Rozważanym bazowym modelom Sg oraz Sd nadano rzeczywiste charakterystyki określone na podstawie badań materiałowych, a następnie przeprowadzono analizy z uwzględnieniem geometrycznych i fizycznych nieliniowości (GMNA). Ponownie przeprowadzono analizę LBA, a otrzymane w jej wyniku formy niestateczności wykorzystano jako imperfekcje wstępne w analizie GMNIA.

Porównując należy stwierdzić, że zaproponowane modele numeryczne przedmiotowych słupów, zbudowane z elementów bryłowych, bardzo dobrze opisują zjawisko utraty ich nośności zarówno w zakresie sprężystym, jak i sprężysto-plastycznym. Kłopotliwe jest jednak, jak w większości tego typu przypadków, określenie charakteru rzeczywistych niedoskonałości słupów. W analizowanych przykładach przyjmowano, że kształt imperfekcji wstępnej odpowiada pierwszej postaci wybożenia z analizy LBA, co nie zawsze jest prawdą. Należy dodać, że zidentyfikowana wielkość imperfekcji na poziomie  $v_0 = 5$  mm jest dużo mniejsza, niż zalecana normowa [257], która w tym przypadku (krzywa b) wynosi  $l/250 = 5400/250 = 21,6$  mm.

## Rozdział 6

---

# Rozwiązanie analityczne

---

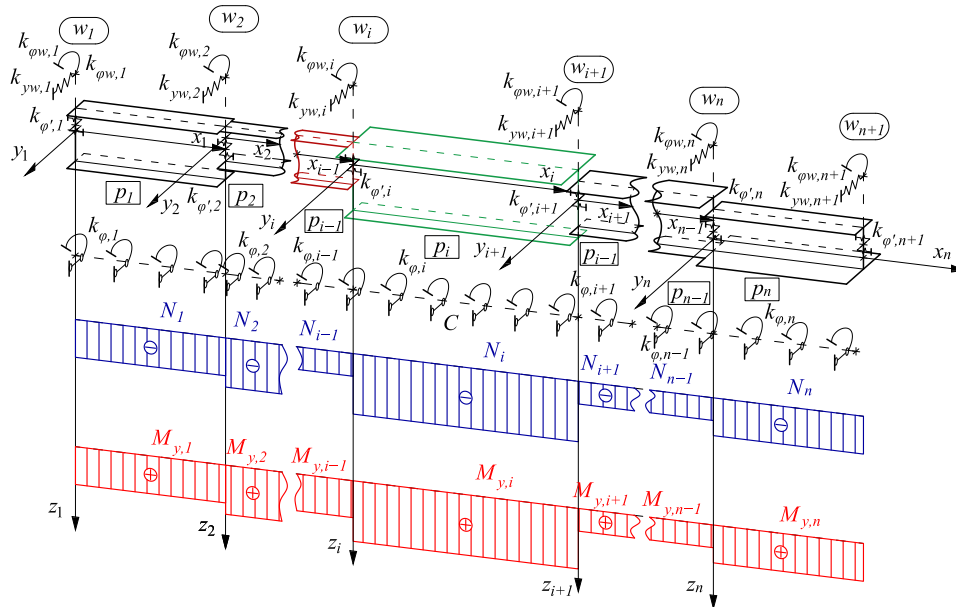
W niniejszym rozdziale przedstawiono analityczne rozwiązanie problemu stateczności przestrzennej słupów o odcinkowo-pryzmatycznej zmianie sztywności, obciążeń zewnętrznych oraz ustaloną osią obrotu. Zdefiniowano równanie różniczkowe problemu wybożenia skrętnego tego słupa, które rozwiązano w postaci ogólnej korzystając z pakietu Mathematica [238], a następnie opracowano algorytm budujący wyznacznik macierzy współczynników stojących przy stałych całkowania, na podstawie liniowego układu równań tworzących z warunków brzegowych. Za kryterium stateczności przyjęto warunek zerowania się tego wyznacznika. Poprawność zaproponowanego algorytmu przeanalizowano porównując otrzymane rozwiązania ze znanymi dostępnymi w literaturze oraz z rozwiązaniami numerycznymi wyznaczonymi z pomocą programów LTBeamN (LTBeam) [141] i SOFiSTiK [207]. Oceniono również działanie algorytmu przy wyznaczaniu obciążeń krytycznych słupów wyłożonych zmiennymi momentami i siłami osiowymi. Niewątpliwą zaletą algorytmu jest możliwość wyznaczania obciążenia krytycznego, w przypadku dwuparametrowego obciążenia słupa.

### 6.1. Sformułowanie i opis rozwiązania problemu

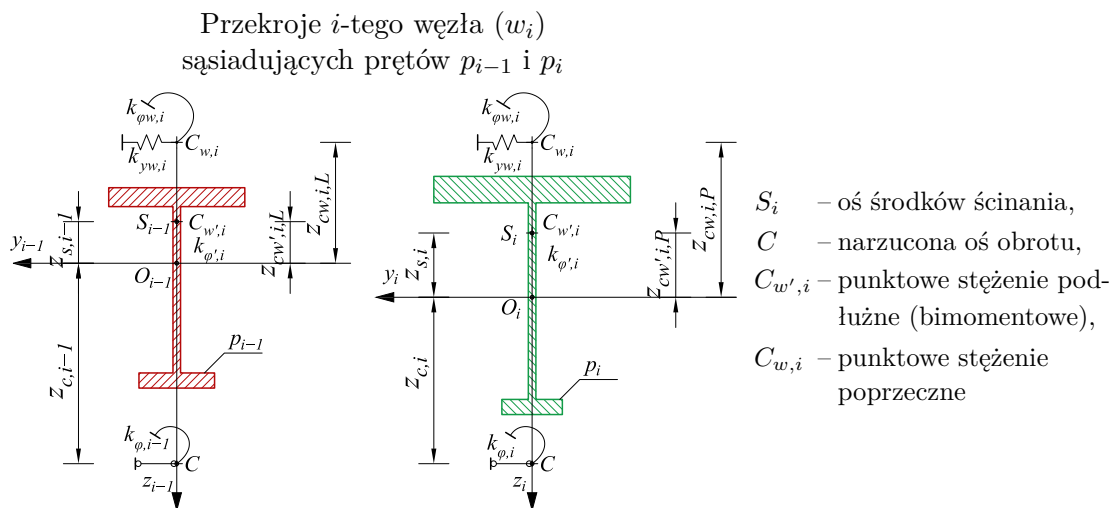
Rozpatrzono wielosegmentowy pręt składający się z  $n$  pryzmatycznych sekcji  $p_i$  o długości  $l_i$  oraz monosymetrycznym cienkościennym przekroju otwartym, granice których wyznaczają węzły  $w_i$ , w których następuje zmiana sztywności ( $EI_{z,i}$ ,  $EI_{\omega,i}$ ,  $GI_{T,i}$ ), stałej siły osiowej  $N_i$ , stałego momentu zginającego  $M_{y,i}$ . Każda z sekcji  $p_i$  może być zlokalizowana w dowolnej odległości względem narzuconej osi obrotu  $C$ , wzdłuż której oddziałuje ośrodek obrotowo sprężysty ( $k_{\varphi,i}$ ). Na końcach każdej z sekcji element charakteryzuje się dowolnym, położonym w płaszczyźnie symetrii sprężystym sposobem podparcia ze względu na przemieszczenia liniowe wzdłuż osi  $y$  ( $k_{yw,i}$ ) oraz ze względu na skrócenie ( $k_{\varphi w,i}$ ), zlokalizowanym w odległości  $z_{cw,i}$  oraz jest usztywniony sprężystymi więzami bimomentowymi, zlokalizowanymi w odległości  $z_{cw',i}$ . Każdy z segmentów jest także niepodatnie podparty na długości ze względu na przemieszczenia liniowe z płaszczyzny symetrii przekroju poprzecznego, wzdłuż prostej  $C$  równoległej do osi słupa, położonej w płaszczyźnie symetrii, w odległości  $z_{c,i}$ . Obciążenie każdej z sekcji stanowi stała osiowa siła  $N_i$  i stały moment zginający  $M_{y,i}$  działający w płaszczyźnie symetrii przekroju poprzecznego. Schemat rozważanego modelu analitycznego pokazano na rysunku 6.1, a jego przekrój poprzeczny na rysunku 6.2. Przyjęty model, ze względu na swoją specyfikę wynikającą z ciągłych liniowych stężeń: poprzecznego o nieskończonej sztywności i kątownego (skrętnego) o dowolnej sztywności wymaga osobnego rozpatrzenia. Jest to bowiem, w odróżnieniu od ogólnego



wyrażenia wybożenia przestrzennego opisanego układem równań 2.7, wybożenie giętko-skrętne analizowanego słupa z płaszczyzny symetrii jego przekroju poprzecznego (por. rys. 6.1 i 6.2), które w literaturze nazywane jest również wybożeniem skrętnym z ustaloną osią obrotu.



Rys. 6.1. Analytyczny model pręta z ustaloną osią obrotu o odcinkowo zmiennej sztywności i siłach przekrojowych



Rys. 6.2. Przekroje poprzeczne analizowanego pręta

Równanie różniczkowe problemu stateczności dla pojedynczej  $i$ -tej sekcji rozpatrywanego pręta  $p_i$  można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
 & \left[ EI_{\omega,i} + (z_{s,i} - z_{c,i})^2 EI_{z,i} \right] \varphi^{(4)} + \\
 & + \left[ N_i (i_{0,i}^2 + z_{c,i}^2) - GI_{T,i} - (\beta_{y,i} - 2z_{c,i}) M_{y,i} \right] \varphi^{(2)} + \\
 & + k_{\varphi,i} \varphi = 0.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Równanie różniczkowe (6.1) po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\begin{aligned}
 EI_{\bar{\omega},i} &= EI_{\omega,i} + (z_{s,i} - z_{c,i})^2 EI_{z,i}, \\
 GI_{\bar{T},i} &= N_i \left( i_{0,i}^2 + z_{c,i}^2 \right) - GI_{T,i} - (\beta_{y,i} - 2z_{c,i}) M_{y,i}, \\
 2k_{t,i}^2 &= \frac{GI_{\bar{T},i}}{EI_{\bar{\omega},i}}, \\
 k_{c,i}^4 &= \frac{k_{\varphi,i}}{EI_{\bar{\omega},i}}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

można przedstawić w prostszej postaci

$$\varphi^{(4)} + 2k_{t,i}^2 \varphi^{(2)} + k_{c,i}^4 \varphi = 0. \tag{6.3}$$

Rozwiązaniem równania (6.3) jest znana z literatury funkcja ogólna, którą można otrzymać m.in. za pomocą przekształcenia Laplace'a [81, 84, 86, 92]. Przedmiotem niniejszego rozdziału nie jest omówienie powszechnie dostępnego rozwiązania równania (6.3), lecz opracowanie z pomocą pakietu *Mathematica* algorytmu rozwiązującego w sposób ścisły problem stateczności słupa z ustaloną osią obrotu o odcinkowo-pryzmatycznym przekroju poprzecznym.

W oparciu o ogólnie znane zależności można zdefiniować reakcje  $i$ -tego węzła: rotacyjną więzi sprężystej  $M_{\bar{T},i}$ , więzi bimomentowej  $B_{\bar{T},i}$  oraz siły przekrojowej  $i$ -tego pręta: bimoment  $B_{\bar{x},i}$  i moment skręcający  $M_{\bar{x},i}$  jako:

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{T},i} &= -k_{\bar{\varphi}w,i} \varphi_i, & B_{\bar{T},i} &= -k_{\bar{\varphi}' ,i} \varphi_i^{(1)} \\
 B_{\bar{x},i} &= -EI_{\bar{\omega},i} \varphi_i^{(2)}, & M_{\bar{x},i} &= GI_{\bar{T},i} \varphi_i^{(1)} - EI_{\bar{\omega},i} \varphi_i^{(3)}.
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Zastosowanie we wzorach (6.4) oznaczenia sztywności podpór sprężystych i reakcji z kreską nad indeksem, oznaczają zdefiniowanie tych wielkości względem ustalonej osi obrotu. Sztywność  $i$ -tych punktowych podpór sprężystych (por. rys. 6.1) względem narzuconych punktów  $C_{w,i}$  i  $C_{w',i}$  wyznaczyć można według zależności:

$$\begin{aligned}
 k_{\bar{\varphi}w,i} &= (z_{\bar{s},i} + z_{\bar{c}w,i} - z_{\bar{c},i})^2 k_{yw,i} + k_{\varphi w,i}, \\
 k_{\bar{\varphi}' w,i} &= \left( z_{\bar{s},i} + z_{\bar{c}w',i} - z_{\bar{c},i} \right)^2 k_{yw',i} + k_{\varphi' w,i},
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

gdzie za  $z_{\bar{s},i}$  i  $z_{\bar{c},i}$ , przyjęto odpowiednio średnie arytmetyczne współrzędnych środków ścinania i narzuconych osi obrotu, a za  $z_{\bar{c}w,i}$  i  $z_{\bar{c}w',i}$  średnie arytmetyczne lokalizacji punktowego podparcia w  $i$ -tym węźle względem sąsiadujących ze sobą sekcji  $p_{i-1}$  i  $p_i$ .

Wykorzystując zależności (6.4) i (6.5) można zdefiniować następujące statyczne warunki brzegowe, których liczba wynosi  $4n$ :

$$\begin{aligned} 1. \quad & k_{\overline{\varphi w},1} \cdot \varphi_1(0) - \left( GI_{\overline{T},1} \cdot \varphi_1^{(1)}(0) - EI_{\overline{w},1} \cdot \varphi_1^{(3)}(0) \right) = 0, \\ 2. \quad & k_{\overline{\varphi' w},1} \cdot \varphi_1^{(1)}(0) - EI_{\overline{w},1} \cdot \varphi_1^{(2)}(0) = 0, \end{aligned} \tag{6.6a}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \vdots \\ 4i - 5. \quad & \varphi_{i-1}(l_{i-1}) - \varphi_i(0) = 0, \\ 4i - 4. \quad & \varphi_{i-1}^{(1)}(l_{i-1}) - \varphi_i^{(1)}(0) = 0, \\ 4i - 3. \quad & EI_{\overline{w},i-1} \cdot \varphi_{i-1}^{(3)}(l_{i-1}) + \left( GI_{\overline{T},i-1} - GI_{\overline{T},i} \right) \varphi_{i-1}^{(1)}(l_{i-1}) + \\ & - k_{\overline{\varphi w},i} \cdot \varphi_{i-1}(l_{i-1}) - EI_{\overline{w},i} \cdot \varphi_i^{(3)}(0) = 0, \end{aligned} \tag{6.6b}$$

$$\begin{aligned} 4i - 2. \quad & EI_{\overline{w},i-1} \cdot \varphi_{i-1}^{(2)}(l_{i-1}) + k_{\overline{\varphi' w},i} \cdot \varphi_{i-1}^{(1)}(l_{i-1}) - EI_{\overline{w},i} \cdot \varphi_i^{(2)}(l_n) = 0, \\ & \vdots \\ & \vdots \\ 4n - 1. \quad & - k_{\overline{\varphi w},n+1} \cdot \varphi_1(l_n) - \left( GI_{\overline{T},n} \cdot \varphi_n^{(1)}(l_n) - EI_{\overline{w},n} \cdot \varphi_n^{(3)}(l_n) \right) = 0, \\ 4n. \quad & - k_{\overline{\varphi' w},n+1} \cdot \varphi_1^{(1)}(l_n) - EI_{\overline{w},n} \cdot \varphi_n^{(2)}(l_n) = 0. \end{aligned} \tag{6.6c}$$

Zależności (6.6a) i (6.6b) są warunkami brzegowymi opisującymi równowagę odpowiednio lewego ( $w_1$ ) i prawego ( $w_{n+1}$ ) końca pręta. Równania (6.6b) są warunkami ciągłości pręta w miejscu styku  $i-1$ -szej i  $i$ -tej sekcji pręta. Pierwsze dwa dotyczą ciągłości przemieszczeń, kątów skręcenia  $\varphi$  i deplanacji  $\varphi^{(1)}$ , a dwa kolejne równowagi sił przekrojowych i reakcji, momentów skręcających  $M_x$  i bimomentów  $B_x$ .

Korzystając z odpowiedniej liczby relacji (6.6), która wynika z liczby segmentów  $n$ , otrzymuje się jednorodny, liniowy układ równań algebraicznych z uwagi na stałe całkowania  $c_i$ . Warunek nietrywialnego rozwiązania tego układu równań w postaci zerowania się wyznacznika macierzy  $\mathbf{B}$  jego współczynników umożliwia wyznaczenie poszczególnych poziomów obciążeń krytycznych, co można przedstawić w postaci wyrażenia (6.7)

$$\det \mathbf{B} = 0. \tag{6.7}$$

Praktyczne zastosowanie tego warunku sprowadza się do dyskretnej analizy wyznacznika macierzy współczynników w badanym obszarze obciążeń ( $N$ ,  $M_y$ ) lub innych parametrów. Mogą nimi być sztywności ośrodka obrotowo-sprężystego lub dyskretnej więzi na końcach sekcji. Konstruując zerową warstwicę powierzchni zmienności wyznacznika wyznaczone zostają krzywe, których miejsca zerowe — w rozumieniu statycznego kryterium stateczności — wyznaczają obciążenia krytyczne. Należy podkreślić, że procedura przy konstruowaniu wyznacznika korzysta ze ścisłych rozwiązań dla poszczególnych segmentów  $p_i$ , zatem otrzymane wyniki w miarę przyjętej precyzji obliczeń również można uznać za ścisłe. Niemniej jednak należy doprecyzować, że pierwiastki funkcji wyznacznika w sposób ścisły można otrzymać tylko w wyjątkowych przypadkach, dlatego do określenia wartości obciążeń krytycznych zastosowano iteracyjną metodę *Newtona-Raphsona* (metodę stycznych).

W pakiecie do przeprowadzania obliczeń symboliczno-numerycznych *Mathematica* zdefiniowano procedurę `wyznacznikB[wezly_,l_,sztywnosci_,zc_,kfi_,n_,m_]`. Jej poszczególnymi argumentami są listy z danymi. Pierwszym parametrem są listy danych dla węzłów pręta uporządkowane według kolejności:  $\{k_{\varphi w,i}, k_{\varphi' i}, k_{y w,i}, k_{y w',i}, z_{c w,i}, z_{c w',i}\}$ . Drugim są listy z długościami poszczególnych sekcji  $\{l_i\}$ . Następnie listy opisują sztywności  $i$ -tej sekcji:  $\{EI_{\omega,i}, EI_{y,i}, EI_{z,i}, GI_{T,i}, i_{0,i}, z_{s,i}, \beta_y\}$ , współrzędne narzuconej osi obrotu

$\{z_{c,i}\}$ , sztywność liniowo-sprężystego ośrodka obrotowego  $\{k_{\varphi,i}\}$ . Dwie ostatnie dotyczą sił przekrojowych: sił osiowych  $\{N_i\}$  i momentów zginających  $\{M_{y,i}\}$ .

Niżej przedstawiono listing komórki wejściowej sesji notatnika pakietu *Mathematica* wraz z wprowadzonymi symbolicznie danymi procedury `wyznacznikB[...]`.

```
In[1]:= wyznacznikB[
  (* wezly1,... *)
  {{kφw1,kφPrim1,kyw1,kywPrim1,zcw1,zcwPrim1},
  {...},
  {kφwi,kφPrimi,kywi,kywPrimi,zcwi,zcwPrimi},
  {...},
  {kφwn,kφPrimn,kywn,kywPrimn,zcwn,zcwPrimn}},
  (* dlug1,dlug2,... *)
  {l1,...,li,...,ln},
  (* sztywnosci1,sztywnosci2... *)
  {{eiw1,eiy1,eiz1,git1,i01,zs1,βy1},
  {...},
  {eiwi,eiyi,eizi,git1,i0i,zsi,βyi},
  {...},
  {eiwn,eiyw,eizw,gitn,i0n,zsn,βyn}},
  (* zc1,zc2,... *)
  {zc1,...,zci,...,zcn},
  (* osrodek1,osrodek2,... *)
  {kφ1,...,kφi,...,kφn},
  (* silaN1,silaN2,... *)
  {nn1,...,nni,...,nnn},
  (* momentM1,momentM2,... *)
  {mm1,...,mmi,...,mmn}];
```

Efektom tak zdefiniowanej procedury będzie wieloparametrowa funkcja opisująca wyznacznik. W praktycznym zastosowaniu otrzymanie poszczególnych rozwiązań wybożenia giętno-skętnego polega na wprowadzeniu do procedury `wyznacznikB[...]` odpowiednich danych. Jeżeli szukanym rozwiązaniem jest wartość obciążenia  $N_{cr}$  lub momentu  $M_{cr}$  krytycznego, to rozwiązanie problemu stateczności sprowadza się do znalezienia pierwiastków funkcji wyznacznika. Służy do tego wbudowane polecenie `FindRoot[...]`, które m.in. wykorzystując metodę *Newtona-Raphsona*, wyszukuje rozwiązanie zaczynając od zadanego punktu startowego.

## 6.2. Weryfikacja procedury

### 6.2.1. Stałe siły przekrojowe

W celu zweryfikowania poprawności procedury `wyznacznikB[...]` porównano wyznaczone na jej podstawie wartości obciążeń krytycznych z rozwiązaniami podanymi w literaturze i wyznaczonymi numerycznie. Rozwiązania numeryczne otrzymano z pomocą omówionego już podrozdziale 4.1.1 programu *LTBeamN*. Nie można w nim zdefiniować prętów o skokowo zmiennych sztywnościach, ale w przypadku elementów pryzmatycznych zbieżność otrzymanych wyników z rozwiązaniami teoretycznymi jest bardzo dobra.

Tabela 6.1. Porównanie sił krytycznych wyboczenia przestrzennego bisymetrycznych słupów stężonych w sposób ciągły w odległości  $z_c = 0,2$  m

Przekrój	Podparcie	$N_{cr,T}$ [MN] dla słupa przy $M_y$ [MNm]								
		-0,20			0,00			0,20		
		[82]	LTB	Math	[82]	LTB	Math	[82]	LTB	Math
I 400	PP	4,1955	4,1125	4,1780	2,9786	2,9778	2,9610	1,7616	1,7524	1,7440
	PS	4,9814	4,9745	4,9670	3,7644	3,7831	3,7510	2,5475	2,5292	2,5340
	SS	6,4500	6,3444	6,4430	5,2331	5,2618	5,2260	4,0161	4,0221	4,0090
IPE 400	PP	2,5986	2,5979	2,5970	1,4381	1,4137	1,4360	0,2776	0,2672	0,2758
	PS	3,4665	3,4737	3,4690	2,3060	2,2810	2,3080	1,1455	1,1213	1,1480
	SS	5,0885	5,0206	5,0990	3,9280	3,8683	3,9380	2,7675	2,7555	2,7780

PP – przegubowo-przegubowe,

PS – przegubowo-sztywne,

SS – sztywno-sztywne.

W tabelicy 6.1 zamieszczono porównanie sił krytycznych wyboczenia skrętnego z ustaloną osią obrotu  $N_{cr,T}$  dla ściskanych i zginanych słupów o długości  $l = 6$  m, stężonych w płaszczyźnie mniejszej sztywności giętej na całej długości. Przedstawione siły dotyczą słupów o zróżnicowanych warunkach podparcia na końcach, wykonanych z dwuteowników I 400 i IPE 400. Podobne porównania znajdują się w tabelicy 6.2 dla słupów z IPE 400 o długości  $l = 4$  m, widelkowo podpartych na końcach, obciążonych mimośrodowo.

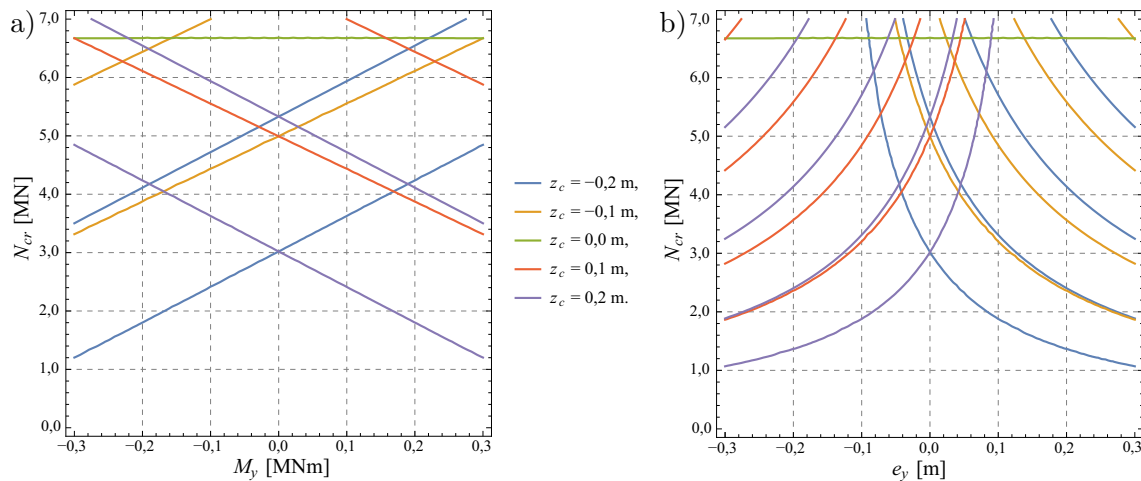
Tabela 6.2. Porównanie sił krytycznych wyboczenia przestrzennego bisymetrycznych słupów IPE 400 stężonych w sposób ciągły w odległości  $z_c$ 

Obciążenie	$z_c$ [m]	$N_{cr,T}$ [MN] dla słupa przy $M_y$ [MNm] lub $e_z$ [m]								
		0,00			0,15			0,30		
		[82]	LTB	Math	[82]	LTB	Math	[82]	LTB	Math
Ściskanie i zginanie	0,2	2,4755	2,4554	2,4788	1,6051	1,5788	1,6084	0,7348	0,7159	0,7380
	-0,2	2,4755	2,4554	2,4788	3,3459	3,3356	3,3492	4,2163	4,1975	4,2196
Ściskanie mimośr. od.	0,2	2,4755	2,4554	2,4788	19,0991	19,0520	19,1245	-3,3418	- <sup>a</sup>	-3,3418
	-0,2	2,4755	2,4554	2,4788	1,3253	1,3129	1,3253	0,9032	0,8960	0,9044

<sup>a</sup> program informuje, że słupek nie straci stateczności.

Zarówno w tabelicy 6.1, jak i 6.2, przytoczono wybrane rozwiązania podane przez *Gosowskiego* w pracy [82]. Zestawiono je z wynikami otrzymanymi z obliczeń przeprowadzonych w pakiecie *Mathematica* (Math) oraz z wynikami obliczeń numerycznych programu LTBeamN (LTB). Przykłady te zostały opracowane przy założeniu, że moduł Younga wynosi  $E \approx 206$  GPa i taką też wartość przyjęto przy wyznaczaniu pozostałych wielkości. Należy zauważyć bardzo dobrą zbieżność poszczególnych wyników. Dotyczy to zwłaszcza wyników otrzymanych za pomocą opracowanego algorytmu. Największa różnica w odniesieniu do [82] nie przekracza 1%, natomiast w przypadku wyników uzyskanych numerycznie jest nie większa niż 5%.

Możliwości utworzonej procedury są duże szersze niż wyznaczanie pojedynczych wartości obciążeń krytycznych. Przedstawiono to na rysunku 6.3, który ilustruje wpływ zginania ( $M_y$ ,  $e_z$ ) na nośność krytyczną wyboczenia skrętnego bisymetrycznych słupów z osią obrotu ustaloną w odległości  $z_c$  od osi słupa. Rozwiązania dotyczą słupów o przekroju z kształtownika IPE 400 i długości  $l = 6$  m, które podparto na końcach w sposób wi-



Rys. 6.3. Weryfikacja zależności sił krytycznych w oparciu o rozwiązania podane w [82], w przypadku: a) ściskania i zginania, b) mimośrodowego ściskania

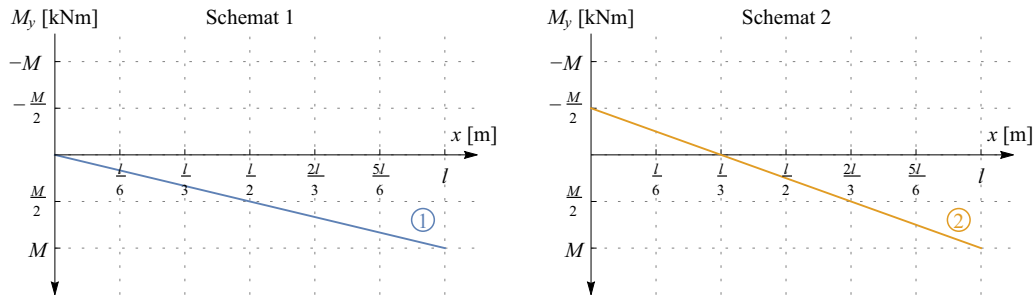
delkowy oraz są bez więzów pośrednich. Wzorowano się na rozwiązaniach zamieszczonych w [82] i jak można zauważyć otrzymano pełną zgodność wyników. Rysunek 6.3 zawiera nawet nieco więcej informacji, ponieważ zaznaczono na nim również warstwy powierzchni zerowania się wyznacznika, które są kolejnymi wartościami własnymi.

### 6.2.2. Zmienne siły przekrojowe

Otrzymane ściśle rozwiązania równań różniczkowych (6.1) i (6.3) wiąże się z przyjęciem ich stałych współczynników. W praktyce oznacza to założenie zarówno stałych charakterystyk przekrojowych, jak i stałego wyteżenia siłami przekrojowymi. W sytuacji, gdy mamy do czynienia ze słupami o skokowo, nieosiowo zmiennym przekrojem poprzecznym, moment zginający (por. rys. 5.4, 5.24, 5.25) zmienia się liniowo. Ideą, która przyświecała zszywaniu poszczególnych segmentów pręta (por. rys. 6.1) była nie tylko skokowa zmiana sztywności, lecz również uwzględnienie zmienności momentów zginających. W tym celu napisano pomocniczą procedurę `schodek[funkcja_, n_, p_, k_]`, której zadaniem jest aproksymacja dowolnej funkcji  $f(x)$ , odcinkowo zmienną funkcją schodkową. Pierwszym argumentem algorytmu jest funkcja  $f(x)$ , która może opisywać wyteżenie słupa siłami przekrojowymi, kolejnymi są liczba odcinków  $n$  na jakie należy funkcję podzielić, punkty początkowy  $p$  oraz  $k$ , od których zaczyna się i kończy aproksymacja funkcji  $f(x)$ .

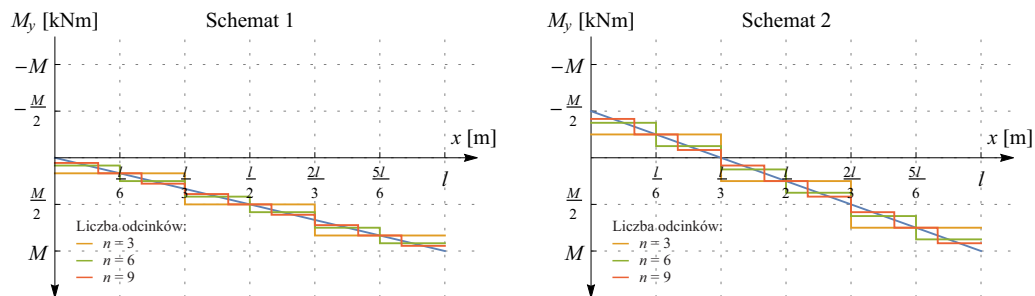
Mimo, że procedura `wyznacznikB[...]` ma wiele zalet, to należy mieć również świadomość jej ograniczeń, które w głównej mierze wynikają z ograniczeń sprzętowych. Wraz ze wzrostem liczby segmentów  $p_n$ , rośnie także zapotrzebowanie na zasoby pamięci operacyjnej. Skutkiem tego jest wykładniczy wzrost czasu obliczeń, dlatego część obliczeń wykonano z użyciem zasobów udostępnionych przez WCSS w ramach grantu obliczeniowego nr 228. W celu dobrania optymalnej liczby segmentów  $p_n$ , przeanalizowano jaka jest zbieżność wyników w zależności od ich liczby. Rozwiązania te porównano także z wartościami otrzymanymi z programu LTBeamN, LTBeam oraz SOFiSTiK. Analizie poddano kilka schematów. Przyjęto widełkowe podparcie na obu końcach słupa, jego długość  $l = 6$  m oraz charakterystyki przekrojowe jak dla kształtownika IPE 300. Założono także, że lokalizacja ustalonej osi obrotu  $C$  wynosi  $z_c = 0,15$  m.

Analizowane schematy słupów różnią się jedynie rozkładem momentów zginających, co pokazano na rysunku 6.5. Przyjęto, że momenty zmieniają się liniowo, co jest odzwier-



Rys. 6.4. Wykresy momentów zginających schematów 1 i 2

ciędnieniem obciążenia skupionymi momentami na końcach lub mimośrodowym ściskaniem słupa.

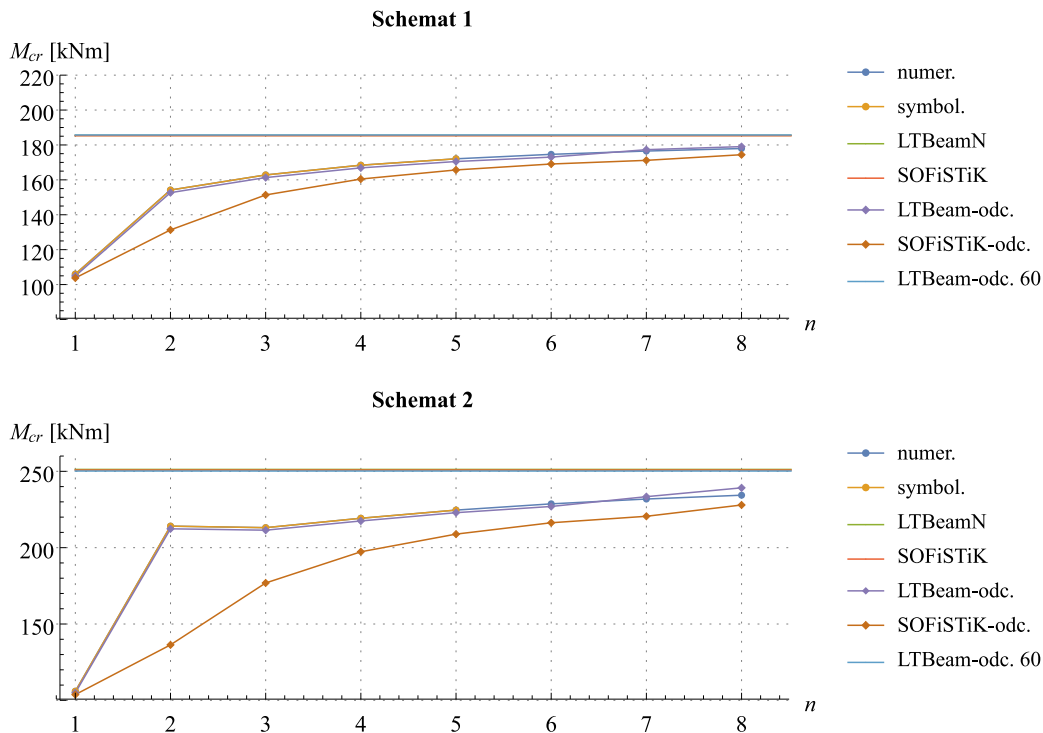


Rys. 6.5. Aproksymacja wytyczenia momentami zginającymi funkcjami schodkowymi schematów 1 i 2

Na rysunku 6.5, na przykładzie schematów 1 i 2 pokazano jak wyglądają funkcje aproksymacyjne w zależności od liczby odcinków  $n$ . Dla zachowania przejrzystości pokazano jedynie jak wygląda rozkład momentów zginających przy podziale na 3, 6 i 9 segmentów.

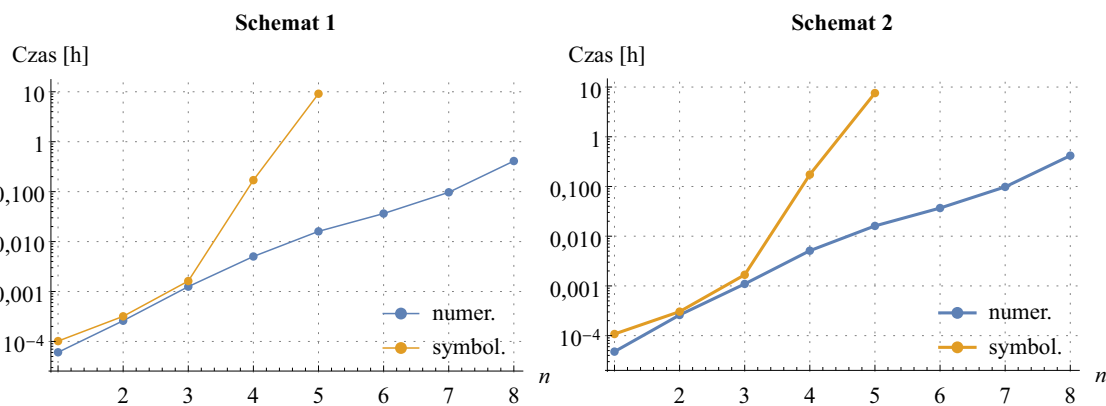
Przeprowadzone analizy pozwoliły na wyciągnięcie istotnych wniosków odnośnie praktycznego stosowania algorytmu. Pakiet *Mathematica*, ze względu na spore możliwości w zakresie prowadzenia obliczeń symbolicznych, umożliwia otrzymanie wyniku z dowolną dokładnością. Oznacza to, że otrzymany rezultat będzie zależał od dokładności wprowadzonych danych. Na potrzeby niniejszych analiz przyjęto, że dane są wprowadzane na dwa sposoby. Pierwszy polega na tym, że wartości liczbowe są przyjmowane z maksymalną dokładnością. Odnosi się to do takich stałych matematycznych jak liczba  $\pi$  lub podstawa logarytmu naturalnego  $e$ , a także do pozostałych wyrażeń niewymiernych jak np.  $\sqrt{2}$ . Otrzymuje się wówczas ściśle wyrażenie na funkcję wyznacznika. Wadą tego podejścia jest bardzo długi czas obliczeń. Jednym ze sposobów jego przyspieszenia jest wprowadzenie danych wejściowych w postaci numerycznej. Wówczas, w zależności od założonej dokładności, wynik obliczeń otrzymuje się w znacznie krótszym czasie. Należy jednak dodać, że domyślna dokładność (`$MachinePrecision`) do 16 miejsc znaczących, jest w tym przypadku niewystarczająca, dlatego należy ją zwiększyć co najmniej do 30 cyfr znaczących.

Na rysunku 6.6 zamieszczono wyniki analiz, które przeprowadzono na schematach 1 i 2. Należy zauważyć, że sposób wprowadzania danych wejściowych nie miał wpływu na otrzymane wartości obciążeń krytycznych. Miał natomiast istotne znaczenie na czas prowadzonych obliczeń. Oczywistym jest, że wraz ze wzrostem liczby segmentów, rośnie także zapotrzebowanie na zasoby sprzętowe wykorzystywane przez pakiet *Mathematica*. Zależność ta, nie jest niestety liniowa, lecz rośnie wykładniczo, dlatego w przypadku symbolicznego wprowadzania danych, przeanalizowano podział elementów na zaledwie pięć



Rys. 6.6. Zbieżność momentu krytycznego  $M_{cr}$  [kNm] w zależności od liczby odcinków  $n$  schematów 1 i 2

odcinków. Na rysunku 6.7 zamieszczono zależność czasu obliczeń od liczby segmentów  $n$  w skali logarytmicznej. Widać, że na obliczenie funkcji wyznacznika pięciosegmentowego elementu, w przypadku symbolicznie wprowadzonych danych oprogramowanie potrzebowało prawie 10 godzin, natomiast gdy dane wprowadzono numerycznie, wystarczyło zaledwie kilka minut. Podjęto próby wyznaczenia obciążeń krytycznych przy większej liczbie segmentów, które niestety nie zakończyły się powodzeniem. Część operacji wykonywano na klastrze Bem WCSS-u, na którym przed uruchomieniem obliczeń należy podać limit czasu, tzw. walltime. Jego przekroczenie wiąże się z zatrzymaniem takiego procesu przez system kolejkowania (PBSPro). W przypadku obliczeń z danymi wprowadzanymi symbolicznie, jako limit czasu podano 200 godzin, czyli nieco ponad tydzień. Niestety okres ten okazał się niewystarczający, w związku z czym zaniechano dalszych próby zwiększania liczby odcinków.



Rys. 6.7. Porównanie czasu obliczeń schematów 1 i 2 w zależności od sposobu wprowadzenia danych



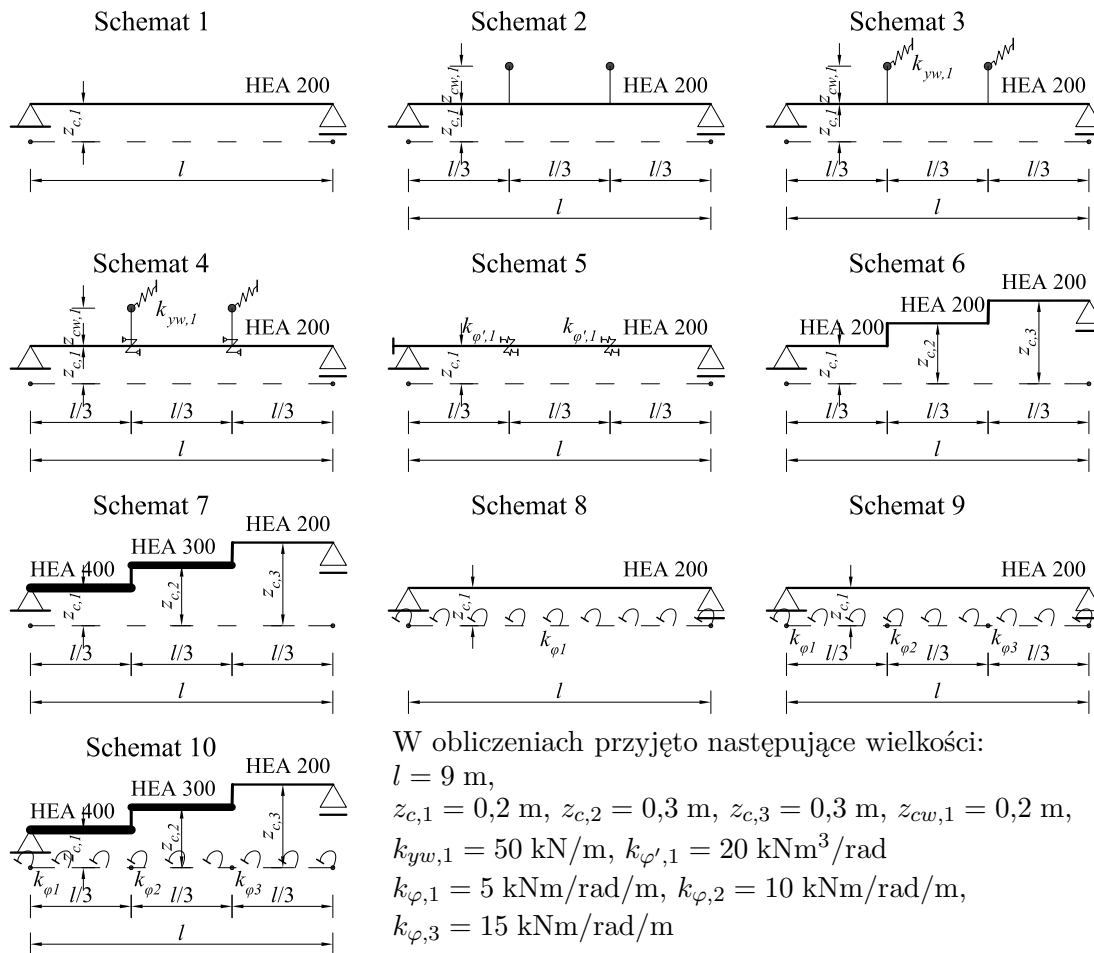
Oprócz wyników otrzymanych w sposób analityczny, na rysunku 6.6 znajdują się także wartości obciążeń krytycznych z obliczeń numerycznych z wykorzystaniem oprogramowania LTBeamN, LTBeam i SOFiSTiK. W odniesieniu do programów LTBeamN i SOFiSTiK, liniami bez znaczników podano rozwiązania rzeczywistych schematów obciążenia (por. rys. 6.4). W przypadku znaczników kwadratowych podano wyniki, które otrzymano numerycznie w programach LTBeam i SOFiSTiK, lecz wyteżenie elementu odpowiadało wyteżeniu momentami zginającymi funkcjami schodkowymi przy odpowiedniej liczbie odcinków (por. rys. 6.5). Dodatkowo, podano także wartość momentu krytycznego otrzymanego z programu LTBeam elementu, którego wykres sił przekrojowych aproksymowano funkcją schodkową o 60 odcinkach. Widać, że w obu przypadkach rozwiązania numeryczne rzeczywistych schematów obciążeń i rozwiązanie numeryczne z podziałem na 60 odcinków niemalże się pokrywają. Można je uznać za dokładne, i wynoszą one dla obu schematów odpowiednio 185 i 250 kNm. Względna różnica pomiędzy tymi wynikami, a rozwiązaniami z wykorzystaniem zaproponowanego algorytmu przy podziale na 8 odcinków wynoszą ok. 7%. Należy także podkreślić pełną zgodność wyników otrzymanych na podstawie algorytmu z wynikami odcinkowo obciążonego modelu z programu LTBeam. Na tym tle nieco gorzej wypada analogicznie wyteżony model z programu SOFiSTiK.

Podsumowując możliwości zbudowanego algorytmu w zakresie uwzględniania zmiennych na długości pręta obciążeń zmiennych należy stwierdzić, że ma on zastosowanie w odniesieniu do elementów ściskanych lub mimośrodowo ściskanych. Istotną kwestią jest także liczba odcinków na jaki należy podzielić element, aby otrzymać wyniki z zadowalającą dokładnością. Na podstawie przeprowadzonych analiz ustalono, że optymalne rozwiązanie wymaga podziału na co najmniej sześć sekcji. Powyższe rozważania przeprowadzono dla widełkowo podpartych modeli o stałym przekroju poprzecznym, wyteżonych jedynie momentem zginającym po to, aby przeanalizować wpływ tylko jednego parametru.

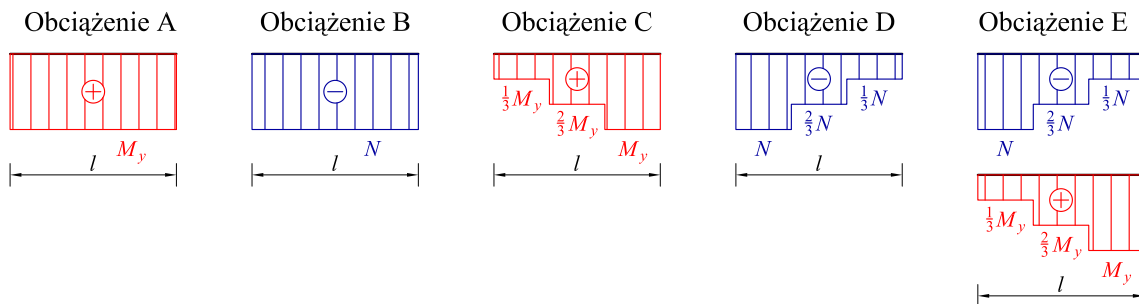
### 6.2.3. Porównanie z rozwiązaniami numerycznymi

Otrzymane w sposób analityczny obciążenia krytyczne zweryfikowano, porównując je z obciążeniami otrzymanymi z obliczeń numerycznych. Wykorzystano w tym celu aplikacje LTBeamN oraz SOFiSTiK. Możliwości sporządzonego algorytmu przeanalizowano w zależności od rodzaju wyteżenia i schematu statycznego. Rozważono dziesięć schematów statycznych, w których różnicowano warunki podparcia, punktowe stężenia poprzeczne oraz ich sztywność, punktowe stężenia podłużne oraz ich sztywność, odległości poszczególnych odcinków od ustalonej osi obrotu, zmianę sztywności poszczególnych odcinków, a także sztywność ośrodka obrotowo-sprężystego zlokalizowanego wzdłuż ustalonej osi obrotu. Poszczególne schematy zaprezentowano na rysunku 6.8. Każdy z tych dziesięciu schematów wyteżono pięcioma rodzajami sił przekrojowych. Są to stały moment zginający, stała siła ściskająca, odcinkowo zmienny moment zginający, odcinkowo zmienna ściskająca siła osiowa i kompilacja dwóch ostatnich. Schematy wyteżenia modeli siłami przekrojowymi pokazano na rysunku 6.9.

Wyniki obliczeń mających na celu weryfikację poszczególnych parametrów procedury zamieszczono w tabeli 6.3. Rezultatami są wartości mnożników krytycznych  $\alpha_{cr}$ . Łącznie przeanalizowano 50 schematów, a otrzymane wyniki porównano z obciążeniami uzyskanymi z analiz numerycznych przeprowadzonych w programach LTBeamN oraz SOFiSTiK. Tabela 6.3, poza samymi wielkościami mnożników krytycznych, zawiera także względne, procentowe porównanie wyników poszczególnych schematów. Dużo większe zaufanie bu-



Rys. 6.8. Schematy statyczne modeli wykorzystanych przy weryfikacji

Rys. 6.9. Schematy wyężeń siłami przekrojowymi ( $N$ ,  $M_y$ ) modeli wykorzystanych przy weryfikacji

dzą obciążenia krytyczne z programu LTBeamN, niestety nie wszystkie schematy są w nim możliwe do zweryfikowania, stąd także wyniki z SOFiSTiKa. Widać, że różnice między rozwiązaniami uzyskanymi z algorytmu a rozwiązaniami z programu LTBeamN są zaledwie kilkuprocentowe. Wynikają głównie ze sposobu wprowadzania danych. W większości przypadków korzystano z jego graficznego interfejsu, przez co program sam definiował geometrię i obciążenia poszczególnych elementów skończonych. Prowadzi to do drobnych niedokładności, których skutkiem jest właśnie kilkuprocentowa różnica. W przypadku sześciu modeli 1A, 1C, 2A, 2C, 3A i 3C dane w programie wprowadzono poprzez zdefiniowanie odpowiednich wielkości w każdym węźle oraz elemencie skończonym. Skutkiem tego, jak widać w tabeli 6.3, jest uzyskanie pełnej zgodności wyników.

Tabela 6.3. Porównanie wartości mnożników krytycznych  $\alpha_{cr}$  otrzymanych analitycznie oraz numerycznie

Schemat	Obc.	Math [-]	LTBeamN [-]	Sofi [-]	$\delta_{LTBN}$ [%]	$\delta_{Sofi}$ [%]
1	A	83,80	83,80	81,60	0,00	-2,63
	B	679,26	666,03	661,50	-1,95	-2,61
	C	119,90	119,89	113,10	0,00	-5,67
	D	971,81	952,39	946,60	-2,00	-2,59
	E	108,61	106,39	103,10	-2,04	-5,07
2	A	413,37	413,36	412,80	0,00	-0,14
	B	3350,00	3303,00	3350,40	-1,40	0,01
	C	513,93	513,92	516,80	0,00	0,56
	D	4165,00	4138,10	4068,60	-0,65	-2,31
	E	483,43	480,58	486,50	-0,59	0,64
3	A	138,34	138,34	136,70	0,00	-1,19
	B	1121,36	1107,00	1107,90	-1,28	-1,20
	C	188,11	188,10	186,80	0,00	-0,70
	D	1524,70	1506,80	1506,60	-1,17	-1,19
	E	173,07	170,96	173,00	-1,22	-0,04
4	A	183,49	178,70	177,00	-2,61	-3,54
	B	1487,31	1459,40	1435,20	-1,88	-3,50
	C	251,73	243,09	234,40	-3,43	-6,88
	D	2040,41	1970,50	1944,90	-3,43	-4,68
	E	231,04	223,65	216,70	-3,20	-6,21
5	A	126,57	129,88	128,40	2,62	1,45
	B	1025,87	1052,90	1040,90	2,64	1,47
	C	157,38	160,40	149,80	1,92	-4,82
	D	1776,94	1830,50	1796,00	3,01	1,07
	E	145,98	148,97	139,80	2,05	-4,23
6	A	81,78	-	83,10	-	1,61
	B	462,92	-	481,30	-	3,97
	C	109,67	-	120,30	-	9,69
	D	865,00	-	856,30	-	-1,01
	E	98,07	-	106,90	-	9,00
7	A	254,41	-	248,00	-	-2,52
	B	1232,45	-	1214,20	-	-1,48
	C	283,96	-	259,50	-	-8,61
	D	2821,75	-	2702,20	-	-4,24
	E	258,73	-	237,90	-	-8,05
8	A	186,39	184,65	181,50	-0,93	-2,62
	B	1510,78	1497,20	1470,00	-0,90	-2,70
	C	238,18	236,00	224,60	-0,92	-5,70
	D	1930,56	1913,20	1845,70	-0,90	-4,40

Tabela 6.3. Porównanie wartości mnożników krytycznych  $\alpha_{cr}$  otrzymanych... (cd.)

Schemat	Obc.	Math [-]	LTBeamN [-]	Sofi [-]	$\delta_{LTBN}$ [%]	$\delta_{Sofi}$ [%]
	E	221,96	219,31	210,60	-1,19	-5,12
9	A	241,26	239,25	230,90	-0,83	-4,29
	B	1955,51	1939,80	1871,30	-0,80	-4,31
	C	344,98	342,68	315,10	-0,67	-8,66
	D	2261,52	2244,30	2161,20	-0,76	-4,44
	E	322,92	320,71	297,60	-0,69	-7,84
10	A	363,14	-	351,50	-	-3,21
	B	1755,98	-	1719,50	-	-2,08
	C	399,30	-	358,20	-	-10,29
	D	4116,91	-	3914,00	-	-4,93
	E	365,16	-	330,00	-	-9,63

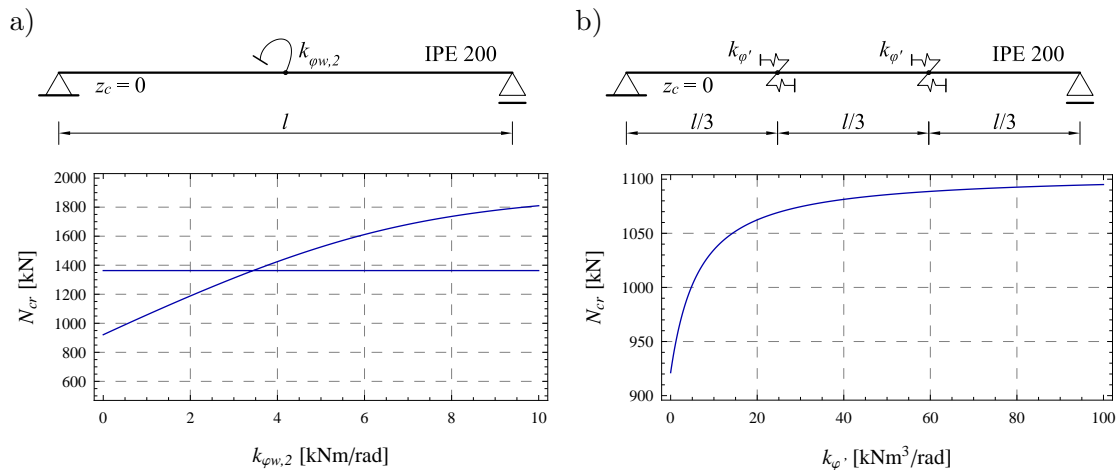
Nieco większe różnice w wartościach mnożników obciążeń krytycznych  $\alpha_{cr}$  zaobserwować można w przypadku modeli z programu SOFiSTiK. Dotyczy to zwłaszcza modeli, w których osie poszczególnych segmentów są względem siebie odsunięte. Prętowy model numeryczny pozwala jedynie na zapewnienie ciągłości sześciu przemieszczeń (trzech translacji i trzech rotacji). Nie ma on możliwości zapewnienia ciągłości deplanacji, w odróżnieniu od modeli analitycznych.

Podsumowując, należy stwierdzić, że zaproponowany model analityczny daje szerokie możliwości analizy obciążeń krytycznych sprężystej stateczności wybożenia skrętnego z ustaloną osią obrotu. W niektórych przypadkach możliwości te przewyższają nawet to co mają do zaoferowania programy inżynierskie umożliwiające wyznaczanie obciążeń krytycznych, takie jak LTBeamN czy SOFiSTiK.

### 6.3. Przykłady zastosowania

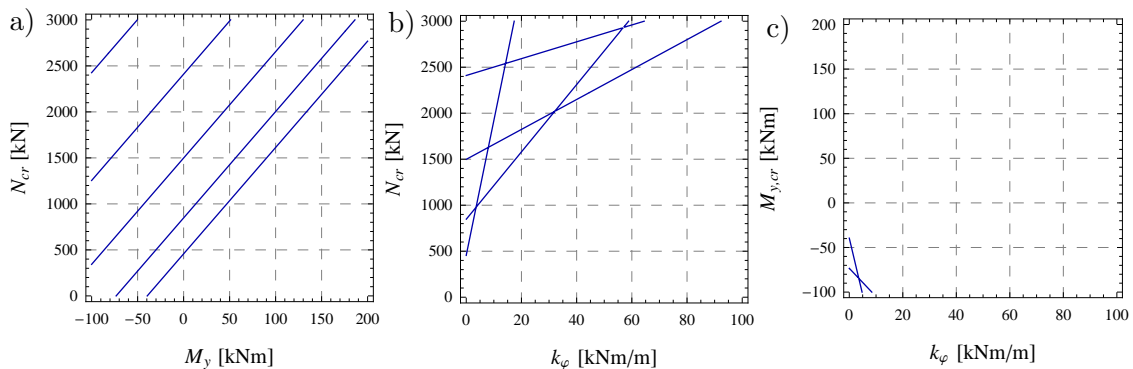
Zaproponowany algorytm w połączeniu z pakietem *Mathematica* daje bardzo szerokie możliwości analizy zagadnień wybożenia słupów względem narzuconej osi obrotu. Najprostszym z nich jest znalezienie pierwiastków funkcji zmienności wyznacznika zakładając, że jest to funkcja jednej zmiennej (np.  $N$  lub  $M_y$ ). Pozostałe parametry związane z geometrią i przekrojem słupa są wówczas znane. Efektem jest obciążenie krytyczne rozumiane jako siła osiowa  $N_{cr}$  bądź moment zginający  $M_{cr}$ . Ten sposób wykorzystano przy wyznaczaniu wartości obciążeń krytycznych w tabelach 6.1 i 6.2. Pakiet *Mathematica* jest również wykorzystywany do obliczeń symbolicznych, dlatego wyznacznik może być przedstawiony jako funkcja dwóch zmiennych. Na rysunku 6.3 pokazano miejsca zerowe trójwymiarowej funkcji (powierzchni) zmienności wyznacznika w zależności od siły osiowej  $N$  i momentu zginającego  $M_y$ .

Zmienność wyznacznika można również przedstawić w funkcji sztywności skrętnej  $k_{\varphi w, i}$  lub bimomentowej  $k_{\varphi', i}$  jednej lub kilku podpór. Rysunek 6.10 przedstawia właśnie takie zależności. Zostały one sporządzona dla słupa z kształtownika IPE 200 o długości  $l = 5$  m, podpartego widełkowo na obu końcach, wyłożonego jedynie stałą siłą osiową  $N$ . Przyjęto



Rys. 6.10. Zależność sił krytycznych wybočenja skrętnego  $N_{cr}$  od sztywności skrętnej  $k_{\phi w,2}$  środkowego podparcia (a) oraz sztywności bimomentowej  $k_{\phi'}$  stężeń podłużnych (b)

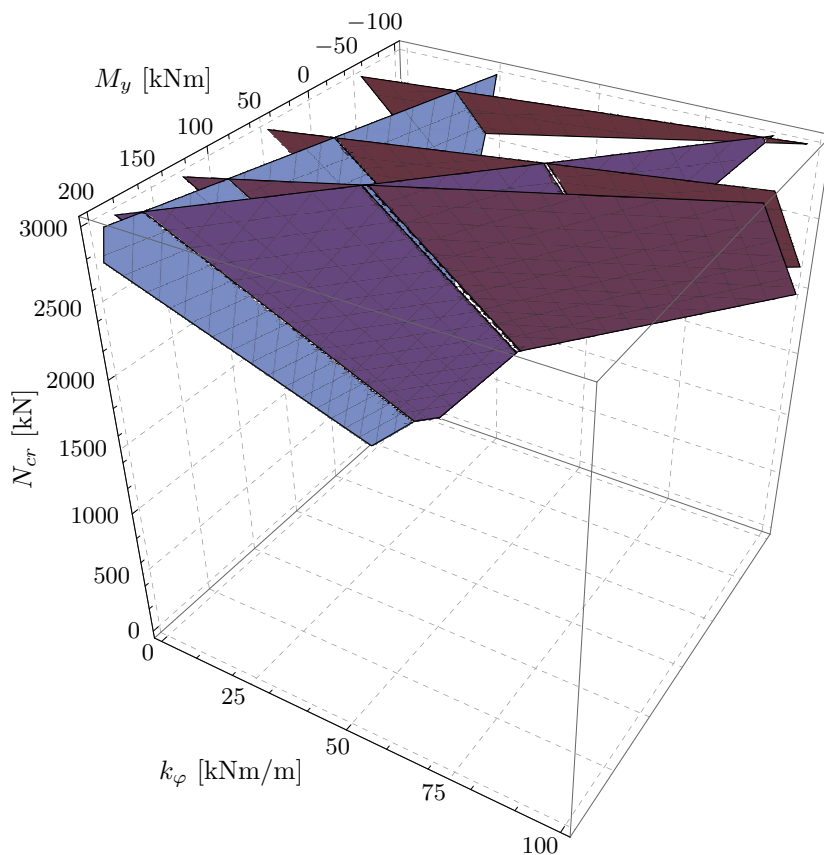
również, że narzucona oś obrotu  $C$  znajduje się w osi słupa ( $z_c = 0$  m), dlatego w tym przypadku równania (6.1) i (6.3) sprowadzają się do zagadnienia wybočenja skrętnego. W przypadku modelu przedstawionego na rysunku 6.10a, w środku jego rozpiętości znajduje się podpora, której sztywność skrętna wynosi  $k_{\phi w,2}$ . Na podstawie zamieszczonego wykresu można zaobserwować, że gdy sztywność ta przyjmuje wartości z zakresu od 0 do ok. 3,5 kNm/rad, wartości obciążeń krytycznych wzrastają nieliniowo. Dalsze zwiększanie sztywności podparcie jest już niecelowe, ponieważ obciążenie krytyczne jest wówczas stałe. W modelu na rysunku 6.10b przyjęto dwa bimomentowe stężenia podłużne o takiej samej sztywności  $k_{\phi'}$ , rozmieszczone w odległościach  $l/3$  od podpór. Można zauważyć nieliniowy wpływ tych stężeń na wartości obciążeń krytycznych  $N_{cr}$ , choć w porównaniu do słupa stężonego przeciwskrętnie w połowie rozpiętości (por. rys. 6.10a), jest on zdecydowanie mniejszy.



Rys. 6.11. Miejsca zerowe wyznacznika w funkcjach: a) momentu  $M_y$  i siły osiowej  $N$ , b) podatności ośrodka  $k_{\phi}$  i siły osiowej  $N$ , c) podatności ośrodka  $k_{\phi}$  i momentu  $M_y$

W podobnej konwencji sporządzono zależności zamieszczone na rysunku 6.11. Wyznaczono je na przykładzie widelkowo podpartego na końcach dwuteowego pręta IPE 200 o długości  $l = 5$  m, stężonego poprzecznie na wysokości jednej z półek w odległości  $z_c = -0,1$  m. Założono również, że jest on wyteżony stałymi na długości siłami przekrojowymi ( $N$ ,  $M_y$ ). Można go potraktować jako element konstrukcyjny, słup lub płatek, w którym jeden z pasów jest sztywno stężony ze względu na przemieszczenia liniowe, np. dostatecznie sztywną blachą trapezową. Oprócz wpływu jej sztywności postaciowej, w analizie sta-

teczności słupa można uwzględnić również sztywność obrotową  $k_\varphi$ , związaną z poszyciem i połączeniami. Efektem procedury `wyznacznikB[...]` dla tak zdefiniowanego modelu jest wyznacznik będący funkcją trzech zmiennych: siły osiowej  $N$ , momentu zginającego  $M$ , sprężystości skrętnej ośrodka  $k_\varphi$ . Na rysunku 6.11 pokazano miejsca zerowe funkcji wyznacznika przy założeniu, że trzeci, nieopisany parametr wynosi zero. Zakres wartości poszczególnych argumentów został dobrany tak, aby pokazać charakter zmienności obciążeń krytycznych. Zauważyć można, że zależność siły krytycznej  $N_{cr}$  w stosunku do momentu zginającego  $M_y$  jest liniowo (por. rys. 6.11a). Podobnie jest w przypadku zależności  $N_{cr}$  do sztywności skrętnej ośrodka  $k_\varphi$ , z tą różnicą, że zmiana ta jest odcinkowo liniowa. Wraz ze wzrostem  $k_\varphi$ , maleje współczynnik kierunkowy funkcji obciążenia krytycznego. Zostało to pokazane na rysunku 6.11b. Stosunek obciążenia krytycznego jako funkcji momentu  $M_{cr}$  od sztywności  $k_\varphi$  obrazuje rysunek 6.11c. Widać, że w przypadku braku obciążenia spowodowanego siłą osiową, wprowadzenie jakiegokolwiek dodatniego momentu zginającego nie spowoduje utraty stateczności. Jest to zrozumiałe, ponieważ przemieszczenia ściskanego pasa są ograniczone sztywnym poszyciem. Dopiero pojawienie się ujemnego momentu zginającego może doprowadzić do zwichrzenia. Podobnie jak w przypadku siły osiowej, zależność ta również zmienia się liniowo na poszczególnych odcinkach.



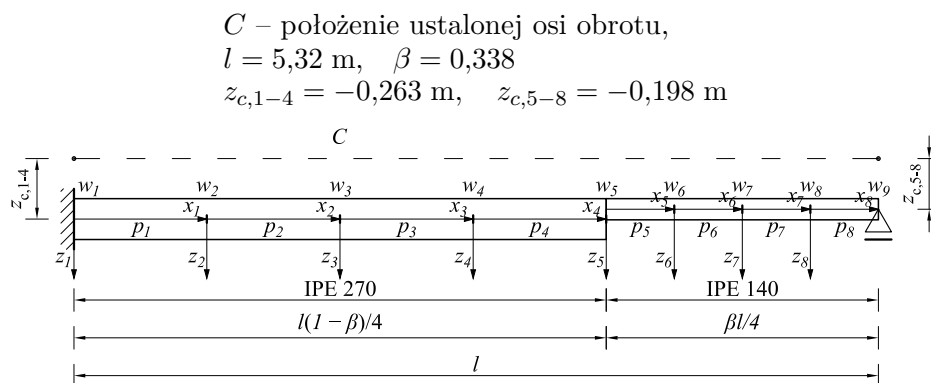
Rys. 6.12. Miejsca (płaszczyzny) zerowania się funkcji zmienności wyznacznika w przypadku trzech zmiennych  $N$ ,  $M_y$ ,  $k_\varphi$

Ogólniejsze spojrzenie na problem stateczności elementów z ustaloną osią obrotu pozwala na sporządzenie wyznacznika, który może być funkcją wielu zmiennych. Jeżeli argumentów funkcji jest więcej jak cztery, jest to trudne do przedstawienia w formie graficznej, dlatego w poniższym przykładzie ograniczono się do trzech zmiennych. Są nimi siła osiowa  $N$ , moment zginający  $M_y$  i sztywność skrętna ośrodka  $k_\varphi$ . Dzięki wbudowanej

w pakiet *Mathematica* instrukcji `ContourPlot3D[...]` możliwe jest tworzenie wykresów warstwicznych funkcji trzech zmiennych. Wykreślenie takiej „zerowej” warstwy utworzy powierzchnie interakcji w zależności od zadanych parametrów. Wykres zamieszczony na rysunku 6.12 przedstawia właśnie taką zależność na przykładzie ściskanego i zginanego elementu z dwuteownika IPE 200 z narzuconą osią obrotu zlokalizowaną w odległości  $z_c = -0,1$  m. Jest to uogólnienie krzywych interakcji przedstawionych na rysunku 6.11, ponieważ są one odwzorowaniem „ścian” kostki ograniczającej warstwiczny wykres funkcji wyznacznika (por. rys. 6.12), tzn. gdy poszczególne parametry przyjmują odpowiednio  $k_\varphi = 0$  kNm/(m·rad),  $M_y = 0$  kNm i  $N = 0$  kN. Na podstawie powstałej powierzchni można oszacować przy jakich wartościach tych trzech parametrów nastąpi utrata stateczności analizowanego pręta. Wykres na rysunku 6.12 można również interpretować w inny sposób. Jeżeli zorientowany w przestrzeni, opisany trzema zmiennymi punkt znajduje się wewnątrz bryły, którą ograniczają pokazane płaszczyzny, to przy zadanych parametrach analizowany pręt nie straci stateczności.

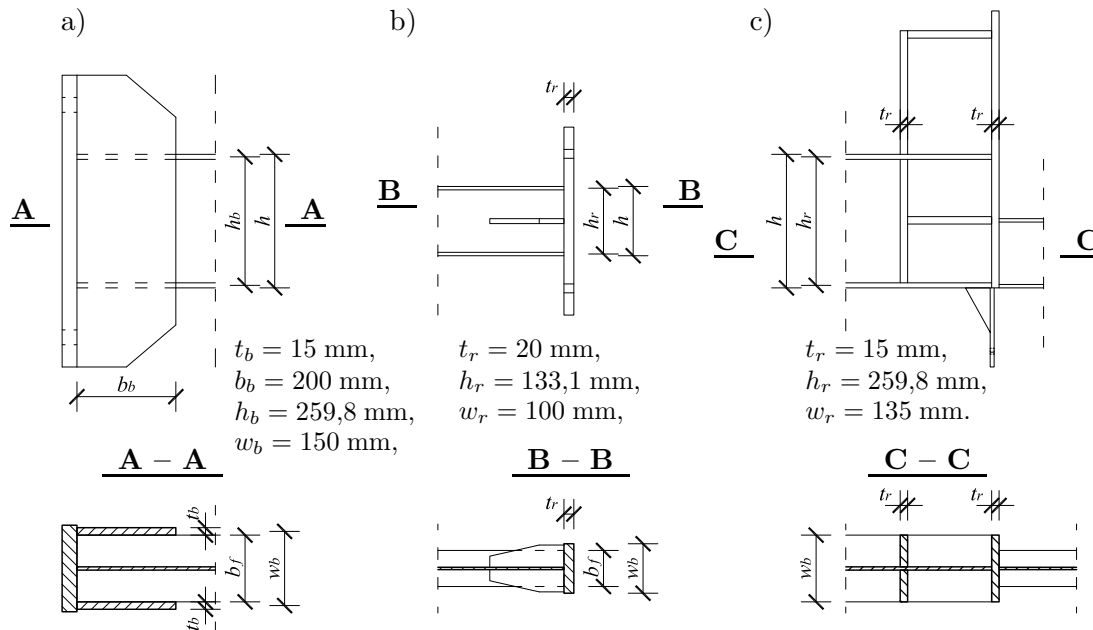
## 6.4. Rozwiązania modeli z badań doświadczalnych

Algorytm `wyznacznikB[...]` wykorzystano przede wszystkim do wyznaczenia obciążeń krytycznych dwuteowych słupów stalowych, które były przedmiotem badań doświadczalnych omówionych w rozdziale 3. Z powodu nieosiowej zmiany sztywności, a także w wyniku obciążenia wspornika, słupy te są wyteżone nie tylko obciążeniem osiowym, ale także liniowo zmiennym momentem zginającym. W związku z tym, podjęto próbę aproksymacji liniowo zmiennego momentu funkcją odcinkowo stałą. Porównano otrzymane w ten sposób wartości obciążeń krytycznych w zależności od liczby segmentów i warunków podparcia. Na rysunku 6.13 pokazano przykładową geometrię modelu analitycznego słupów, które były przedmiotem badań doświadczalnych. Przedstawia on ideę definiowania poszczególnych wielkości na przykładzie słupa podzielonego na osiem sekcji, po cztery na części dolnej i górnej.



Rys. 6.13. Analityczny schemat słupa z badań doświadczalnych podzielony na osiem segmentów

Duży wpływ na wartości obciążeń krytycznych analizowanych słupów mają warunki podparcia. W przypadku kątów skręcenia można przyjąć, że w podstawie i głowicy są one w pełni skrepowane, natomiast w odniesieniu do spaczenia, nie jest to już takie oczywiste. Przeanalizowano również wpływ sztywności bimomentowych stężeń podłużnych, nie tylko we wspomnianych dwóch przekrojach, lecz także w miejscu styku części dolnej i górnej.



Rys. 6.14. Stężenia podłużna badanego słupa dwuteowego: a) w podstawie (przewiązki), b) głowicy (żebra), c) miejscu styku (podwójne żebra)

Ocena wpływu podłużnych usztywnień bimomentowych została przeprowadzona w oparciu o oszacowane ich sztywności. Ogólnie może ona być wyrażona wzorem [26, 82]

$$k_{\varphi',i} = GI_{su,i}h_{u,i}, \quad (6.8)$$

w którym  $GI_{su}$  jest sztywnością żebier lub zastępczą sztywnością przewiązek na skręcania, a  $h_{su}$  odpowiednią wysokością usztywnień.

W szczególnych przypadkach, w zależności od rodzaju usztywnienia, otrzymuje się następujące zależności na współczynnik sztywności [82, 86]:

- dla przewiązek w dwuteownikach z pominięciem ścinania (por. rys. 6.14a)

$$k_{\varphi',i} = \frac{Eb_b^3t_bw_b^2}{2h_b}, \quad (6.9)$$

- dla żebier o przekroju otwartym (por. rys. 6.14b,c)

$$k_{\varphi',i} = \frac{Et_r^3h_rw_r}{6(1+\nu)}. \quad (6.10)$$

Tabela 6.4. Wartości sztywności bimomentowych  $k_{\varphi',i}$  [kNm<sup>3</sup>] poszczególnych węzłów

	Podstawa	Głowica	Styk	
			suma sztywności	suma grubości
$k_{\varphi',i}$ [kNm <sup>3</sup> ]	1091,22	2,87	6,37	25,50

W tabeli 6.4 podano oszacowanie sztywności stężeń podłużnych podstawy, głowicy oraz miejsca styku. Wartości te wykorzystano przy wyznaczaniu obciążeń krytycznych modeli z badań doświadczalnych. Widać, że sztywność podstawy wyznaczona zależnością (6.9)



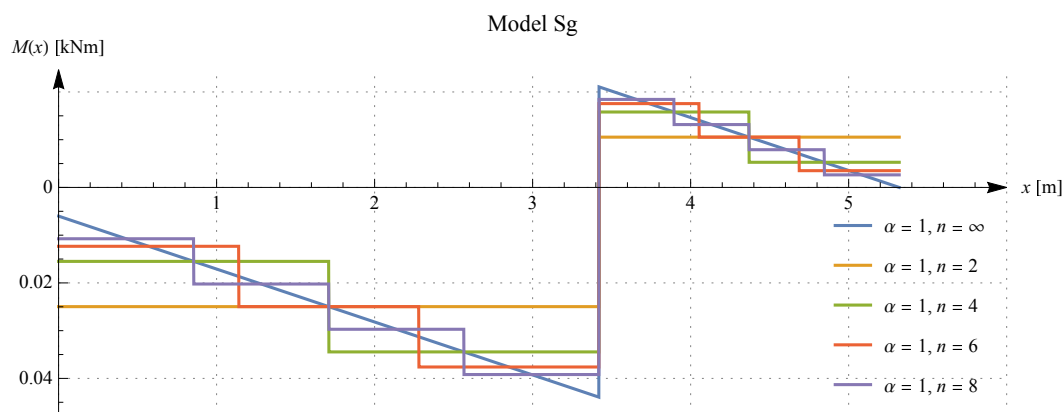
jest zdecydowanie większa od pozostałych wielkości, co prawdopodobnie pozwala na założenie całkowitego zablokowania deplanacji w tym miejscu. Podana w tabeli 6.4 wielkość nie uwzględnia ponadto blachy podstawy oraz znajdującego się tam łożyska kołyskowo-stycznego. W przypadku głowicy, z uwagi na sporą podatność żeber na skręcanie, wartość sztywności wyznaczonej zależnością (6.10) nie jest duża. Można ją prawdopodobnie pominać, zwłaszcza w modelu Sd, w którym jedynym ograniczeniem deplanacji była blacha. Trochę inaczej jest w przypadku modelu Sg, ponieważ na poziomej blasze głowicy znajdują się kolejno siłomierz, siłownik, łożysko czaszowe. Dlatego w tym przypadku założenie o pewnej, nawet niedużej sztywności głowicy wydaje się być zasadne. Najwięcej wątpliwości budzi ocena sztywności styku, w którym dochodzi do zmiany przekroju poprzecznego. Konstrukcja węzła znacząco wpływa na przeniesienie efektów spaczenia między elementami połączonymi w węzle. Jakikolwiek stężenia oraz ich konstrukcja mogą zasadniczo zmienić warunki przekazywania sił wewnętrznych. Stosowna byłaby zatem ocena wrażliwości tego typu węzłów i ustalenie jaka jest udział tych usztywnień w przekazywaniu bimomentów. Tego typu analizy dotyczące usztywnionych naroży ram oraz innego rodzaju stężeń podłużnych można znaleźć m.in. w pracach [148, 214]. Dokonano jednak pewnego oszacowania i w tabeli 6.4, w oparciu o zależność (6.10), podano dwie potencjalne wartości sztywności. Pierwsza, opisana jako suma sztywności została wyznaczona przy założeniu, że oba żebra pracują niezależnie, a całkowita sztywność jest sumą sztywności obu żeber. Druga, oznaczona jako suma grubości została wyznaczona przy mniej prawdopodobnym założeniu, że oba żebra współpracują ze sobą, a całkowita sztywność jest wyznaczona w oparciu o zsumowane grubości żeber. Przy podanej na rysunku 6.14c geometrii przekłada się na czterokrotnie większą sztywność niż w przypadku pierwszym.

Doboru najwłaściwszego modelu analitycznego opisującego zjawisko przestrzennej utraty stateczności słupów z badań doświadczalnych dokonano nie tylko na podstawie sztywności węzłów, lecz również w oparciu o liczbę segmentów. W związku ze zróżnicowanymi nie tylko charakterystykami przekrojowymi, lecz także właściwościami materiałowymi, przyjęto, zgodnie z rezultatami statycznej próby rozciągania (por. podrozdz. 3.5), zróżnicowane wartości modułów Younga części górnej  $E_{PG} = 205$  GPa i dolnej  $E_{PD} = 183$  GPa. Przyjęto podział obu części na taką samą liczbę segmentów, co łącznie przełożyło się na analizy słupów z dwóch, czterech, sześciu i ośmiu segmentów.

### 6.4.1. Model Sg

Obciążenie przedmiotowego słupa w poziomie głowicy skutkuje wyężeniem stałą na całej długości siłą osiową  $N_{Ed}$ . Z kolei w wyniku mimośrodu związanego z nieosiową zmianą sztywności pojawia się również zmienne wyężenie momentem zginającym. Został on uwzględniony poprzez aproksymację funkcjami schodkowymi, co w zależności od liczby segmentów pokazano na rysunku 6.15. Na osi pionowej tego wykresu podano moment zginający, który może być interpretowany jako efekt mimośrodu (wartość na osi [m]  $\times$  jednostkowe obciążenie [kN]). Widać zatem, że wpływ ten jest raczej nieduży, o czym świadczy także szybka zbieżność wyników, gdyż w tabeli 6.5 zamieszczono wartości obciążeń krytycznych wyboczenia giętno-skrętnego z ustaloną osią obrotu, w zależności od liczby segmentów i sztywności bimomentowych podstawy, głowicy i styku.

Porównując otrzymane wielkości, można ocenić ich wpływ na obciążenie krytyczne. Oszacowana w oparciu o wyrażenie (6.9) bimomentowa sztywność podstawy wyznaczona jak dla przewiązki jest znaczna, w związku z czym w dalszych obliczeniach przyjęto jej



Rys. 6.15. Aprosymacja momentów zginających słup Sg funkcjami schodkowymi

Tabela 6.5. Sztywności więzi bimomentowych  $k_{\varphi',i}$  [kNm<sup>3</sup>] poszczególnych modeli Sg i odpowiadające im obciążenia krytyczne  $N_{cr}$  [kN]

Model	Sztywności $k_{\varphi',i}$ [kNm <sup>3</sup> ]			$N_{cr}$ [kN] przy $n$			
	Podstawa	Styk	Głowica	2	4	6	8
1	$\infty$	0,00	0,00	895,66	251,20	252,73	253,25
2	1091,22	0,00	0,00	881,59	247,43	248,91	249,44
3	$\infty$	0,00	2,87	927,19	302,74	304,01	304,44
4	$\infty$	6,37	0,00	895,67	264,93	266,53	267,07
5	$\infty$	6,37	2,87	927,19	317,75	319,04	319,49
6	$\infty$	25,50	0,00	895,69	282,58	299,38	299,99
7	$\infty$	25,50	2,87	927,19	333,82	355,11	355,11

nieskończoną sztywność. Ma to nieduże znaczenie przy wyznaczaniu obciążeń krytycznych, a ponadto skraca czas obliczeń. Znacznie większy wpływ ma sztywność pozostałych dwóch węzłów (głowicy i styku).

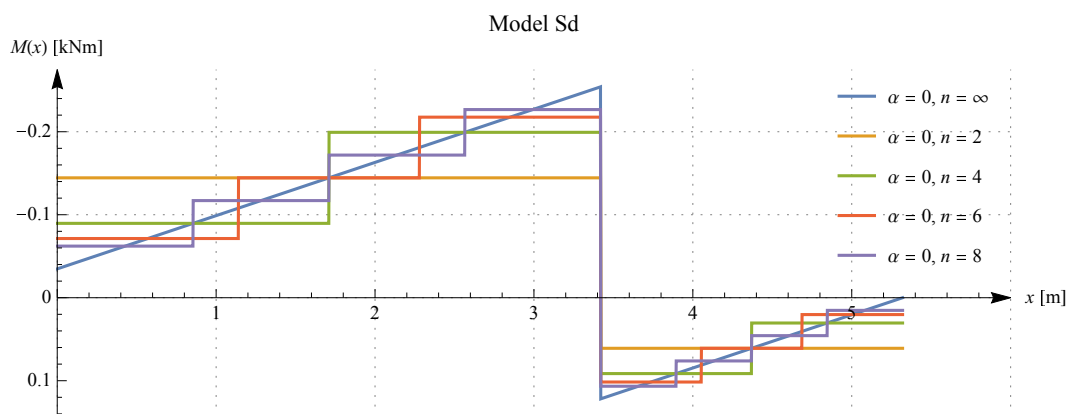
Przyjęcie zamieszczonej w tabeli 6.4 określonej wartości sztywności bimomentowej głowicy skutkuje 15% wzrostem obciążenia krytycznego, ponadto umieszczony na blasze przegub czasowy może wpływać na jej zwiększenie. Jest to trudne do oszacowania, dlatego przyjęcie tej wartości wydaje się być uzasadnione.

Jak już wspomniano, sztywność podłużna węzła, w którym dochodzi do zmiany sztywności wymaga oddzielnej analizy wrażliwości, która pozwoli ocenić w jakim stopniu zachowana jest ciągłość deplanacji. Prawdopodobnie jest to wartość znajdująca się pomiędzy dwiema wielkościami (modele 5 i 7 — por. tab. 6.5), co oznacza, że teoretyczne obciążenie krytyczne  $N_{cr}$  mieści się w przedziale 319,5–355,1 kN.

W podsumowaniu rozwiązań słupa Sg otrzymanych w sposób analityczny, należy zwrócić uwagę na istotny wpływ jego stężeń podłużnych przy wyznaczaniu obciążeń krytycznych. W rozważanym przykładzie sięga kilkunastu procent. Przyjęto więc, że model 5 jest tym, który spośród przeanalizowanych najwierniej oddaje rzeczywiste zachowanie słupa zarejestrowane podczas badań doświadczalnych.

#### 6.4.2. Model Sd

Przyłożenie obciążenia na wsporniku powoduje zmianę sposobu wyteżenia elementu. Oprócz stałej, w dolnej części słupa siły osiowej  $N$ , pojawia się również zmienne liniowo wyteżenie



Rys. 6.16. Aproksymacja momentów zginających słup Sd funkcjami schodkowymi

Tabela 6.6. Sztywności więzi bimomentowych  $k_{\varphi',i}$  [kNm<sup>3</sup>] poszczególnych modeli Sd i odpowiadające im obciążenia krytyczne  $N_{cr}$  [kN]

Model	Sztywności $k_{\varphi',i}$ [kNm <sup>3</sup> ]			$N_{cr}$ [kN] przy $n$			
	Podstawa	Styk	Głowica	2	4	6	8
1	$\infty$	0,00	0,00	849,57	298,31	288,07	284,80
2	1091,22	0,00	0,00	828,82	297,28	287,05	283,77
3	$\infty$	0,00	2,87	856,63	334,56	325,38	322,61
4	$\infty$	6,37	0,00	860,04	318,55	308,23	304,91
5	$\infty$	6,37	2,87	867,73	354,71	345,68	342,91
6	$\infty$	25,50	0,00	887,08	365,01	354,96	351,73
7	$\infty$	25,50	2,87	896,66	400,79	392,58	389,99

momentem zginającym  $M_y$ . Na potrzeby niniejszych rozważań, został on aproksymowany funkcjami schodkowymi. Zostało to, w zależności od liczby rozważanych segmentów, przedstawione na rysunku 6.16. Można go interpretować tak jak to zostało opisane w punkcie 6.4.1. Z kolei w tabelicy 6.6 zestawiono wartości obciążeń krytycznych analitycznych modeli słupa Sg, które wyznaczono w zależności od liczby segmentów i sztywności węzłów.

Na podstawie zamieszczonych w tabeli 6.6 wyników można zauważyć, że w porównaniu z modelami serii Sg, nie są aż tak szybko zbieżne. Jest to niewątpliwie wynikiem znacznie większego, bo ponad pięciokrotnie większego wpływu momentu zginającego. Niemniej jednak już przy sześciu odcinkach różnica względem wyniku otrzymanego przy mniejszej liczbie segmentów wynosi ok. 3,5%, a przy ośmiu jest to już ok. 1,4%. Biorąc zatem pod uwagę stosunek zbieżności do czasu obliczeń, najbardziej optymalny wydaje się być model podzielony na sześć sekcji.

Analiza wpływu sztywności stężeń podłużnych poszczególnych węzłów pozwala na wyciągnięcie podobnych, jak w przypadku modeli Sg, wniosków. Dotyczy to zwłaszcza podstawy, dla której przyjęcie niepodatnej z uwagi na deplanację przekroju podpory jest uzasadnione. Nieco więcej obiektywności budzić może ocena sztywności głowicy oraz węzła w miejscu zmiany sztywności. W tym przypadku rzeczywista bimomentowa sztywność głowicy może być nieco niższa niż wielkość podana w tabelicy 6.4. Jednak bez szczegółowej analizy wrażliwości zastosowanych rozwiązań węzłów, dokładne określenie tych sztywności nie jest możliwe. Dotyczy to również miejsca styku części dolnej i górnej, w którym następuje skokowa zmiana sztywności.

Na podstawie oszacowania tych wielkości, opartych o wyrażenie (6.10), a następnie wyznaczenia i porównania poszczególnych obciążeń krytycznych przyjęto, że modelem, który najtrafniej opisuje zachowanie badanego słupa, jest model nr 4. Różnica względna pomiędzy rozwiązaniem doświadczalnym, a analitycznym nie przekracza 5%.

## 6.5. Rozwiązanie w przypadku obciążeń dwuparametrowych

Zdefiniowany algorytm umożliwia wyznaczenie obciążeń krytycznych w przypadku obciążeń traktowanych jako dwuparametrowe. W niniejszym podrozdziale jest to przedstawione na przykładzie słupów Sg i Sd, które dodatkowo obciążono poziomymi, lecz niezależnymi od pionowych, siłami  $H_z$ . Niemniej jednak należy mieć świadomość wynikającą z jego ograniczeń, bowiem równanie (6.1) zdefiniowano w celu wyznaczania obciążeń krytycznych  $N_{cr}$  uwzględnia jedynie efekty wynikające z czystego zginania. Należałoby je zatem rozbudować o elementy uwzględniające efekty związane z miejscem przyłożenia obciążenia poprzecznego [82, 195]. Zamieszczone rozwiązania należy więc traktować jako pewnego rodzaju oszacowanie, które przedstawia możliwości sporządzonego algorytmu.

Rozważania podzielono na dwie serie różniące się obciążeniem poziomym. Pierwsza polega na przyłożeniu do wspornika jednej skupionej siły  $H_z$ , druga zaś charakteryzuje się tym, że skupione obciążenia  $H_z$  oddziałują w miejscach połączeń z ryglami.

Siły przekrojowe oraz przemieszczenia takich słupów wyznaczono inaczej, niż to przedstawiono w podrozdziałach 5.1 i 5.2. Wykorzystano w tym celu równanie różniczkowe  $i$ -tego elementu zginanego, który obciążono w dowolny sposób skupionymi  $m$  siłami poprzecznymi  $H_{z,i,j}$ ,  $o$  skupionymi momentami zginającymi  $M_{y,i,k}$  i stałą na długości siłą osiową  $N_i$ . Obciążenie to zdefiniowano w postaci dystrybucyjnej, wykorzystując do opisu obciążeń poprzecznych dystrybucję Diraca, a do skupionych momentów — jej pierwszą pochodną. Więcej na temat zastosowania dystrybucji w zagadnieniach zginania i skręcania elementów konstrukcji metalowych znaleźć można w pracach [81, 86]. Równanie różniczkowe problemu zginania pojedynczej  $i$ -tej sekcji pręta  $p_i$  można zapisać w postaci

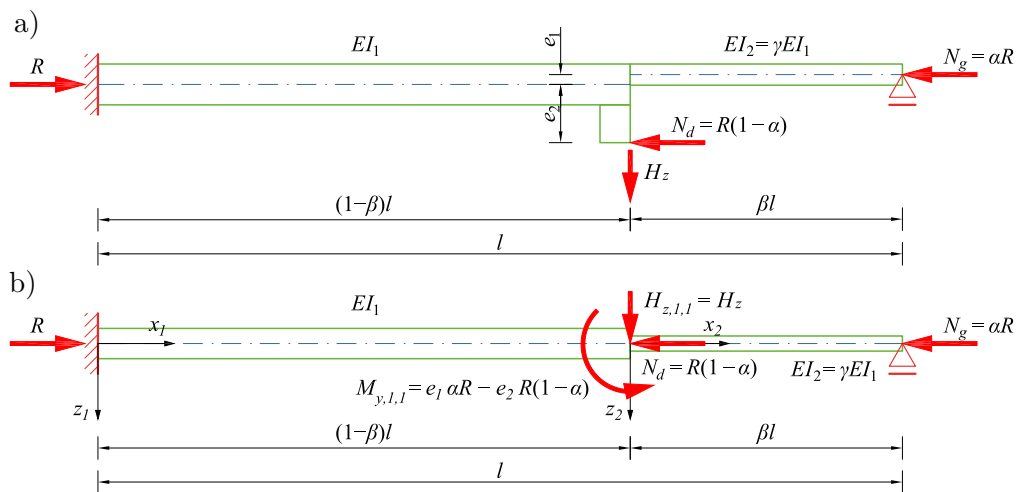
$$EI_{y,i}w^{(4)} + N_iw^{(2)} = \sum_{j=1}^m H_{z,i,j}\delta(x_i - x_{H,i,j}) + \sum_{k=1}^o M_{y,i,k}\delta^{(1)}(x_i - x_{M,i,k}). \quad (6.11)$$

W celu rozwiązania równania (6.11) również wykorzystano pakiet *Mathematica* i sporządzono algorytm `ugiecie[...]`, który wyznacza funkcję ugięcia  $w$  elementu złożonego z  $n$  segmentów. Wyznacza on rozwiązanie ogólne, a następnie w oparciu o zdefiniowanie warunki podparcia oraz ciągłości, także rozwiązania przypadków szczególnych. Ostatecznie, na podstawie znanych zależności różniczkowych i po sklejeniu ze sobą w odpowiednich przedziałach poszczególnych rozwiązań, otrzymuje się również funkcje sił przekrojowych. Należy dodać, że wyprowadzone w ten sposób rozwiązanie, ze względu na sformułowanie w oparciu o teorię II rzędu, uwzględnia wpływ przemieszczeń w płaszczyźnie obciążenia. Otrzymane funkcje są niestety bardzo skomplikowane, co znacznie wydłuża czas obliczeń. Dlatego na potrzeby niniejszych rozważań, przy wyznaczaniu obciążeń krytycznych, ograniczono się do podziału słupa na cztery segmenty. Jest to uzasadnione, ponieważ względne różnice pomiędzy dokładniejszymi rozwiązaniami w modelu Sg nie przekraczają 1%, natomiast w modelu Sd — 5%. Niestety nawet taki zabieg nie pozwolił na zmniejszenie tego czasu na tyle, aby uwzględnienie efektów II-go rzędu mogło być stosowane powszechnie. Udało się tego dokonać jedynie w przypadku modeli serii Sg, co i tak trwało 24 godziny. Obliczenia pozostałych serii przerywano po 4 dniach, wychodząc z założenia, że dłuższe

obliczenia nie mają sensu z praktycznego punktu widzenia. Dlatego zamieszczone w niniejszym podrozdziale wykresy sił przekrojowych wyznaczono w oparciu o teorię II rzędu, natomiast krzywe interakcji, o ile nie podano inaczej — o teorię I rzędu.

### 6.5.1. Poziome obciążenie wspornika

W niniejszym punkcie przedstawiono możliwości algorytmu **wyznacznikB**[...] w zakresie wyznaczania nośności krytycznej w przypadku obciążeń dwuparametrowych. Pokazano to na przykładzie słupów będących przedmiotem badań doświadczalnych, które dodatkowo obciążono w poziomie wspornika niezależną, skupioną siłą poziomą  $H_z$ . Ogólny widok obciążonego w ten sposób słupa pokazano na rysunku 6.17a. Z kolei na rysunku 6.17b zamieszczono schemat modelu analitycznego, który przyjęto przy wyznaczaniu sił przekrojowych. Wszystkie niezbędne dane związane z geometrią słupa przyjęto jak na rysunku 6.13.



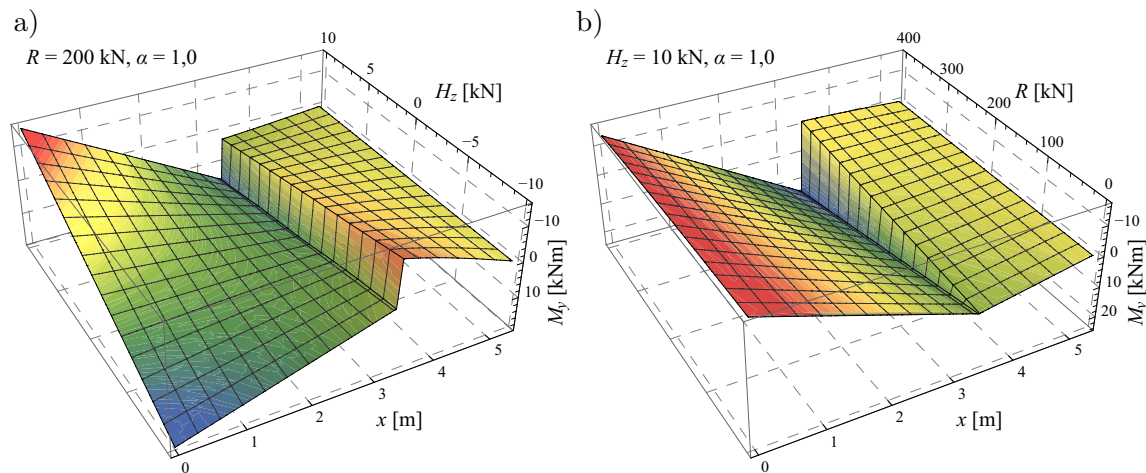
Rys. 6.17. Schemat statyczny słupa: a) badanego doświadczalnie z dodatkowym obciążeniem  $H_z$ , b) analizowanego teoretycznie

Uwzględnienie obciążenia jako dwuparametrowe skutkuje zróżnicowanym wyęzieniem słupa. Dotyczy to zwłaszcza momentów zginających, bowiem otrzymuje się funkcję, która przyjmuje określone wartości w zależności od czterech zmiennych: współrzędnej  $x$ , siły osiowej, którą dla znormalizowania zdefiniowano poprzez wartość reakcji podporowej  $R$ , opisanego równaniem (4.1) parametru  $\alpha$  i poziomej siły skupionej  $H_z$ . Graficzna interpretacja takiej funkcji wielu zmiennych nie jest możliwa do zaprezentowania, dlatego część wielkości przyjęto jako stałe. Dotyczy to parametru  $\alpha$ , gdyż przyjęto, że wynosi on 1,0 lub 0,0, co odpowiada modelom Sg i Sd.

#### Model Sg

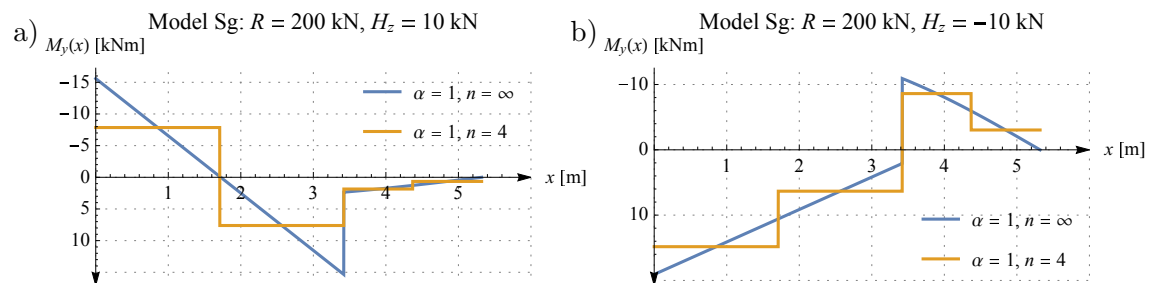
Na rysunku 6.18 przedstawiono powierzchnie opisujące funkcje momentów zginających przy założeniu, że jedna ze zmiennych związanych z obciążeniem jest wartością stałą ( $R$  lub  $H_z$ ). Rysunek 6.18a ilustruje zatem moment zginający  $M_y$  słupa wyęzionego stałą na całej długości siłą osiową  $N = 200$  kN w zależności od poziomej siły  $H_y$ , która przyjmuje wartości z zakresu od  $-10$  kN do  $10$  kN. Rysunek 6.18b także przedstawia momenty zginające  $M_y$  zależne od zmiennej reakcji podporowej  $R$ , lecz przy założeniu stałej siły poziomej  $H_z$ . Na tej podstawie można ocenić wpływ tych obciążeń na momenty zginające.

Zasadnicze spostrzeżenie jest takie, że przy stałej sile osiowej, siła  $H_z$  powoduje zmianę znaków w obu częściach słupa. Z kolei wzrost siły osiowej modelu Sg wiąże się z wielkością skoku momentów w miejscu zmiany sztywności.



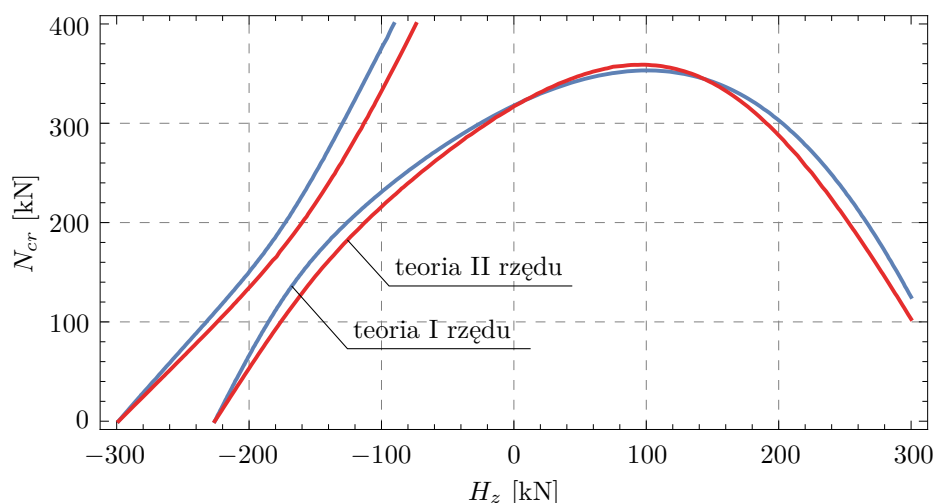
Rys. 6.18. Momenty zginające w słupie Sg w przypadku stałej: a) reakcji podporowej  $R$ , b) siły poziomej na wsporniku  $H_z$

W celu zastosowania sporządzonego w pracy algorytmu, funkcje momentów zginających należy aproksymować funkcjami schodkowymi. Wobec tego, na rysunku 6.19 pokazano dwie przykładowe funkcje aproksymacyjne, będące przekrojami przez powierzchnię z rysunku 6.18a, które zostały wykreślone dla słupa Sg wyłożonego reakcją podporową  $R = 200$  kN oraz siłami  $H_z = 10$  kN (por. rys. 6.19a) i  $H_z = -10$  kN (por. rys. 6.19b).



Rys. 6.19. Aproksymacja momentów zginających funkcjami schodkowymi słupa Sg wyłożonego reakcją  $R = 200$  kN oraz siłą poziomą na wsporniku: a)  $H_z = 10$  kN, b)  $H_z = -10$  kN

Zasadniczym rozwiązaniem problemu wybożenia skrętnego z ustaloną osią obrotu przedmiotowych słupów, przy potraktowaniu jego obciążenia jako dwuparametrowe, jest graficznie przedstawiona zależności tych dwóch wielkości. Przedstawiono ją na rysunku 6.20 jako obciążenie krytycznego  $N_{cr}$  słupa Sg z ustaloną osią obrotu od poziomej siły  $H_z$  (por. rys. 6.13 i 6.17). W tym przypadku krzywe zostały sporządzone przy założeniu, że siły przekrojowe wyznaczono na podstawie teorii I i II rzędu. Widać, że są one silnie nieliniowe i w całym analizowanym przedziale są funkcjami wklęsłymi, a wpływ poziomej siły  $H_z$  jest znaczący. Oczywiście w przypadku jej braku ( $H_z = 0$  kN) otrzymuje się wielkość, którą odnaleźć można w tabelicy 6.5 przy piątym modelu ( $N_{cr} = 318$  kN). W przypadku ujemnie skierowanego obciążenia, siła krytyczna wybożenia skrętnego z ustaloną osią obrotu maleje i przecina poziomą oś przy sile  $H_z$  wynoszącej ok.  $-225$  kN. Ciekawiej to wygląda, gdy obciążenie  $H_z$  działa w przeciwnym, dodatnim kierunku. Wówczas, obciążenie krytyczne  $N_{cr}$  wzrasta osiągając ekstremum przy  $H_z = 100$  kN. Dalszy wzrost



Rys. 6.20. Zależność sił krytycznych  $N_{cr}$  [kN] słupa Sg od poziomej siły na wsporniku  $H_z$  [kN]

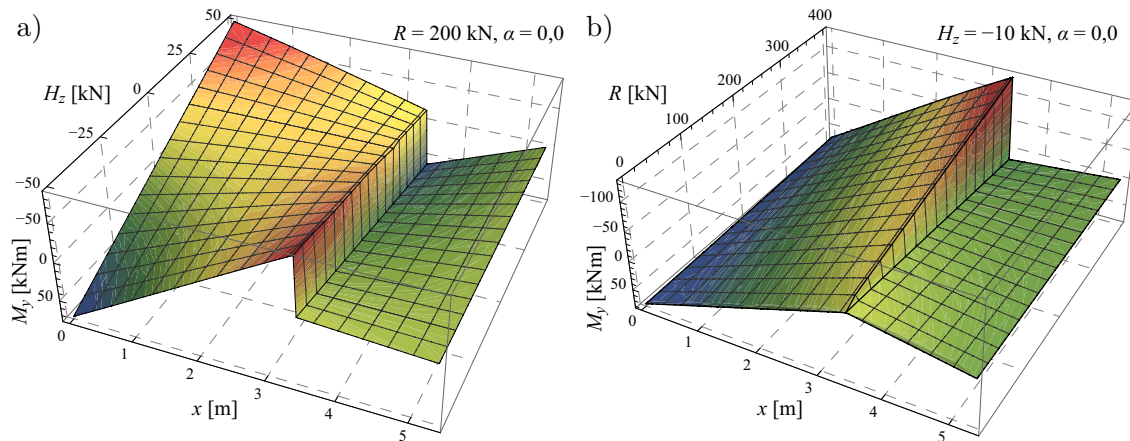
tak skierowanej, poziomej siły  $H_z$  powoduje spadek wartości obciążeń krytycznych i przy  $H_z = 300$  kN siła  $N_{cr}$  wynosi już ok. 100 kN. Na wykresie można zauważyć także fragment kolejnej, wypukłej krzywej. Jest to zależność, która opisuje kolejne wartości własne. W konstrukcjach inżynierskich nie mają one znaczenia praktycznego, dlatego wartości na osi pionowej ograniczono do zakresu od 0 kN do 400 kN.

Należy ponadto zauważyć, że wpływ przemieszczeń na w płaszczyźnie ich oddziaływania jest nieduży. Dlatego wyznaczanie wartości sił przekrojowych w oparciu o teorię I rzędu jest jak najbardziej uzasadnione. Wówczas czas obliczeń jest znacznie krótszy.

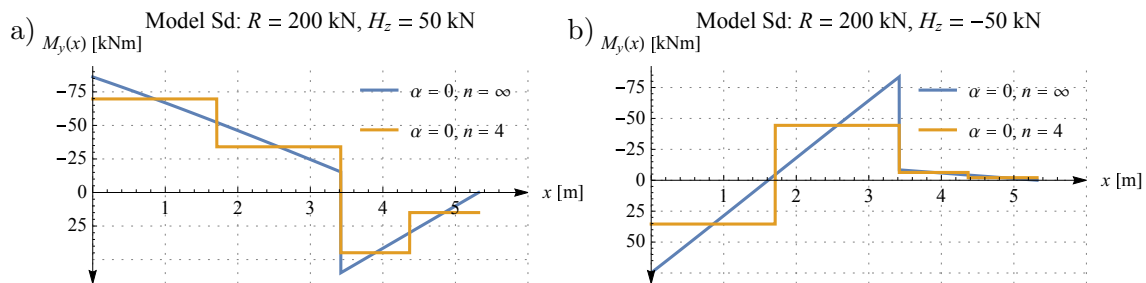
### Model Sd

Powierzchnie, które przedstawiono na rysunku 6.21a, sporządzono w podobnej konwencji, jak w przypadku modeli Sg. Na rysunku pokazano jak zmieniają się siły przekrojowe, gdy parametr  $\alpha = 0,0$  i pionowa reakcja  $R = 200$  kN. Widać jak zmiana zwrotu siły  $H_y$  wpływa na redystrybucję momentów zginających  $M_y$ . Wiąże się to z tym, że w przypadku dodatnio skierowanego obciążenia  $H_z$ , w części podsuwnicowej włókna ściskane znajdują na niestężonej wskutek ustalonej osi obrotu części przekroju poprzecznego. Natomiast w przypadku części górnej mamy sytuację odwrotną. Przekrój przez powierzchnię przy obciążeniu siłą poprzeczną  $H_z = 50$  kN wraz z jego aproksymacją funkcją schodkową zamieszczono na rysunku 6.22a. To jaki wpływ na wartości sił przekrojowych ma pionowe obciążenie zewnętrzne  $N_d$ , pokazano na rysunku 6.21b. Widać także, że dla przyjętego zakresu obciążeń  $R = 0-400$  kN wykresy te w poszczególnych przekrojach przez  $R$  mają raczej charakter prostoliniowy. Dopiero przyjęcie obciążenia  $R$ , przy takim samym obciążeniu poziomym, rzędu 1000 kN, powoduje, że wpływ przemieszczeń na siły przekrojowe staje się zauważalny. Są to jednak obciążenia znacznie przekraczające nośność krytyczną przedmiotowych słupów, stąd wyznaczenie momentów zginających w ujęciu teorii I rzędu jest uzasadnione.

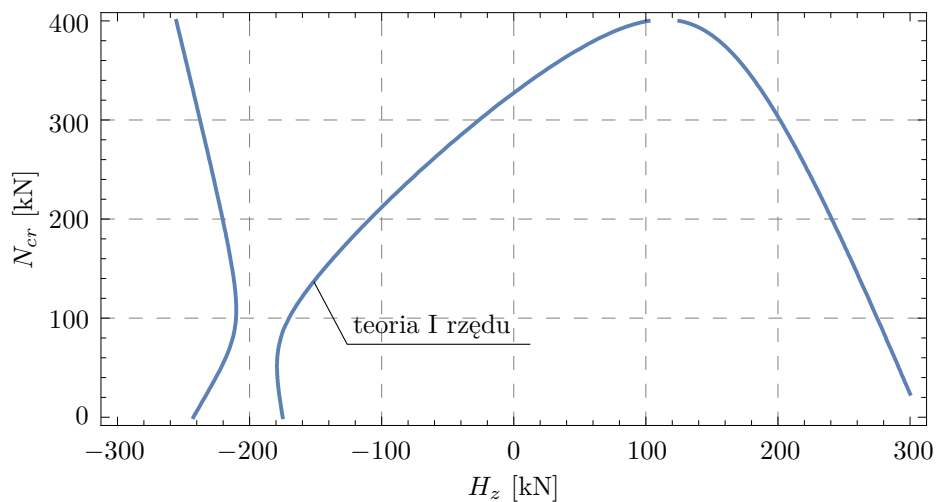
Skierowanie obciążenia na zewnątrz hali ( $H_z < 0$ ) skutkuje tym, że w części dolnej, po stronie stężeń poprzecznych funkcja momentów zginających  $M_y$  zmienia znak. Zginanie części górnej, przy rozciąganiu włókien po stronie stężeń poprzecznych ma znaczenie marginalne. Pokazano to szczegółowo na rysunku 6.22b, na którym zamieszczono również aproksymację wyteżenia momentami za pomocą funkcji schodkowych.



Rys. 6.21. Momenty zginające w słupie Sd: a) w przypadku stałej reakcji podporowej  $R$ , b) stałej siły poziomej na wsporniku  $H_z$



Rys. 6.22. Aproksymacja momentów zginających funkcjami schodkowymi słupa Sd wyważonego reakcją  $R = 200$  kN oraz siłą poziomą na wsporniku: a)  $H_z = 50$  kN, b)  $H_z = -50$  kN



Rys. 6.23. Zależność sił krytycznych  $N_{cr}$  [kN] słupa Sd od poziomej siły na wsporniku  $H_z$  [kN]

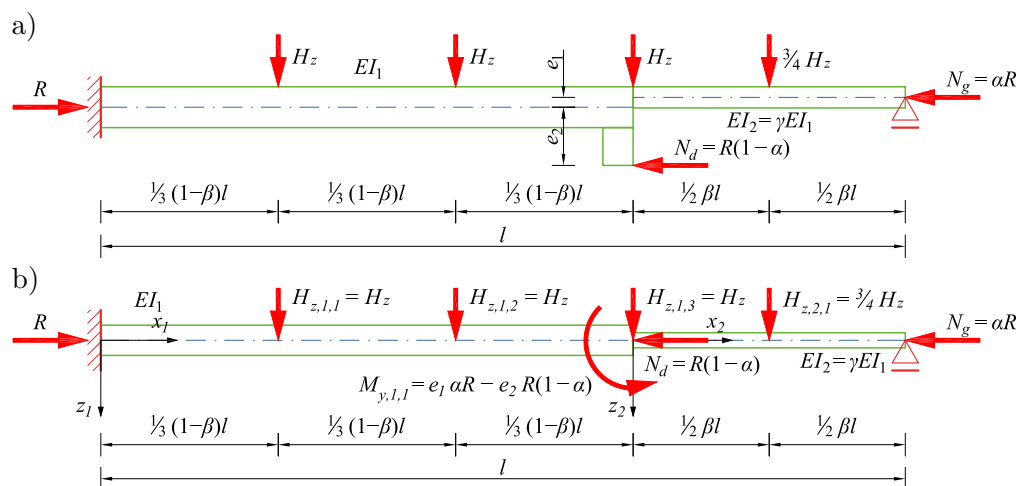
Podsumowaniem rozważań na temat stateczności słupów o odcinkowo nieosiowo zmiennym przekroju poprzecznym, obciążonych na wsporniku siłami: pionową  $N_d$  i poziomą  $H_z$  jest krzywa interakcji, którą pokazano na rysunku 6.23. Na jej podstawie można wyznaczyć wartość obciążenia krytycznego wyoboczenia skrętnego słupa z ustaloną osią obrotu  $N_{cr}$ , na który oddziałuje pozioma, niezależna od obciążeń pionowych siła  $H_z$  przyłożona na wysokości wspornika.



Krzywa interakcji z rysunku 6.23 ma niezwykle ciekawy przebieg. Jeżeli bowiem zaczniemy oddziaływać na słup siłą  $H_z$ , która jest skierowana do wewnątrz hali, mamy do czynienia z łagodnym wzrostem obciążeń krytycznych  $N_{cr}$ . Gdy obciążenie poziome  $H_z$  przekracza 100 kN, krzywa interakcji osiąga ekstremum, które można utożsamiać z nośnością krytyczną przyjętego modelu i wynosi ona nieco ponad 400 kN. Przekroczenie wartości  $H_z = 120$  kN skutkuje zmianą kierunku nachylenia stycznej do wykresu i szybszym spadkiem wartości obciążeń krytycznych  $N_{cr}$ . Skierowanie obciążenia na zewnątrz hali wiąże ze spadkiem nośności krytycznej. Spadek ten przebiega łagodnie aż do momentu, gdy  $H_z = -180$  kN. Wówczas obciążenie krytyczne wynosi ok.  $N_{cr} = 60$  kN, a krzywa interakcji zmienia charakter wypukłości.

### 6.5.2. Poziome obciążenie z rygli ściennych

Rozważania na temat stateczności słupów o odcinkowo zmiennym przekroju poprzecznym, w przypadku ich obciążeń traktowanych jako dwuparametrowe, rozszerzono o modele, w których poprzeczne obciążenie w postaci sił skupionych przyłożono na poziomie rygli ściennych. Przyjęto bardziej rozbudowany, z uwagi na obciążenie poprzeczne, schemat słupa. Ideowy schemat takiego słupa zamieszczono na rysunku 6.24a. Zakłada on obciążenie siłami podłużnymi przyłożonymi w głowicy  $N_g$  i na wsporniku  $N_d$  oraz poziomymi siłami  $H_z$ . Obciążenia pionowe skorelowano współczynnikiem  $\alpha$ , który na potrzeby niniejszych rozważań przyjął wartości 1,0 (obciążenie górą) lub 0,0 (obciążenie dołem), natomiast skupione siły  $H_z$  mogą oddziaływać niezależnie. Dla ułatwienia, przyjęto, że obciążenie te są rozmieszczone równomiernie na długości poszczególnych sekcji.

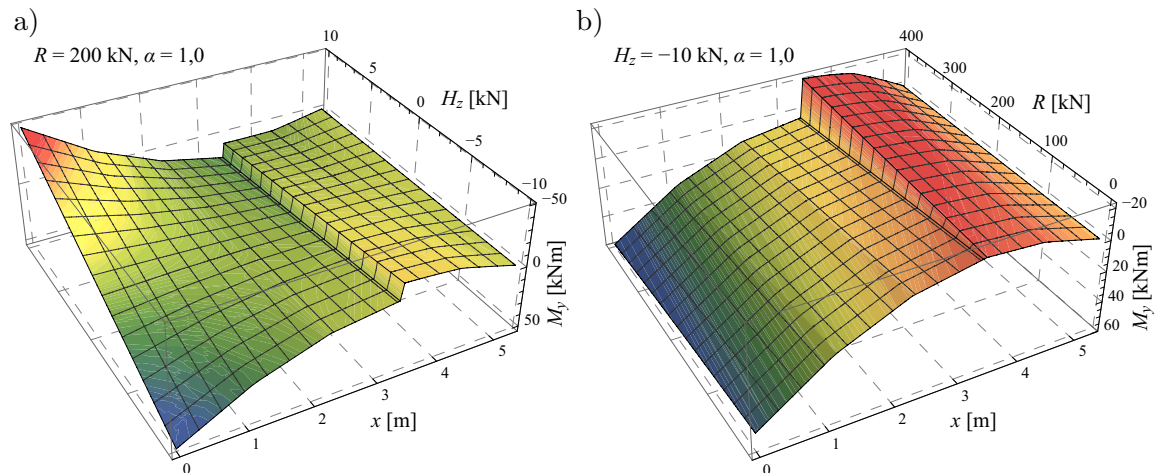


Rys. 6.24. Schemat statyczny słupa: a) badanego doświadczalnie z dodatkowym obciążeniem  $H_z$ , b) analizowanego teoretycznie

Schemat ideowy sprowadzono do ciągłego modelu analitycznego o odcinkowo pryzmatycznym przekroju poprzecznym. Jest on przedstawiony na rysunku 6.24b. Przyjęto, że poziome obciążenia przyłożone do części podsuwnicowej oddziałują z intensywnością  $H_z$ , zaś obciążenie części nadsuwnicowej — w środku jej rozpiętości z intensywnością  $\frac{3}{4}H_z$ . W przybliżeniu oddaje to sposób przekazywania obciążenia wiatrem oddziałującego równomiernie na obudowy hal. Podobnie jak w przypadku obciążenia jedną siłą  $H_z$ , rozważono zarówno model Sg, jak i Sd.

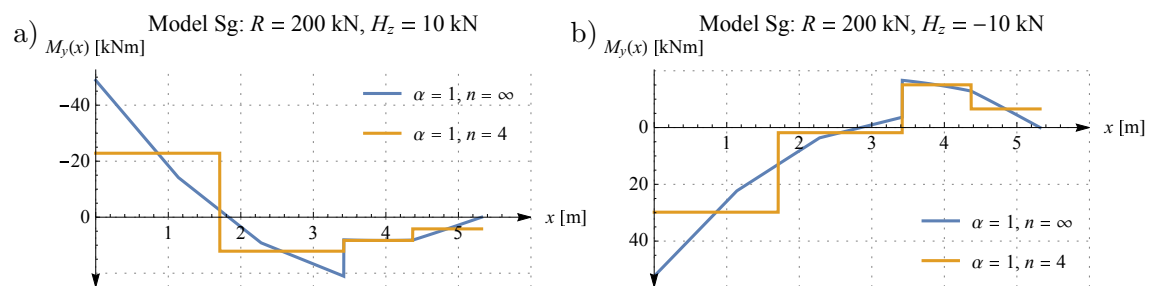
### Model Sg

W przypadku pionowego obciążenia  $N_g$  przyłożonego do głowicy słupa ( $\alpha = 1,0$ ), a także czterech poprzecznych sił  $H_z$ , wytyczenie momentami zginającymi  $M_y$  jest bardziej złożone niż to miało miejsce we wcześniejszych przykładach. Na rysunku 6.25a pokazano jak wygląda zmienność momentów zginających  $M_y$ , w przypadku słupa, którego schemat zamieszczono na rysunku 6.24. Wykres ten, w postaci powierzchni wykreślono przy założeniu, że oddziałuje na niego stała ściskająca siła  $R = 200$  kN, a obciążenie poprzeczne  $H_z$  mieści się w zakresie od  $-10$  kN do  $10$  kN.



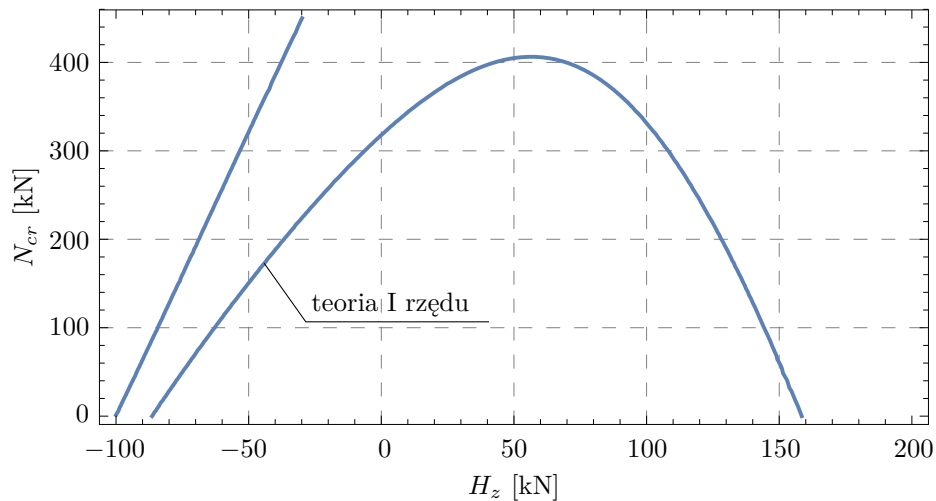
Rys. 6.25. Momenty zginające w obciążonym poziomymi siłami słupie Sg, w przypadku: a) stałej reakcji podporowej  $R$ , b) jednakowych czterech sił poziomych w ryglach  $H_z$

Rysunek 6.25b także przedstawia wytyczenie słupa momentami zginającymi  $M_y$ , lecz przy założeniu, że obciążenie poprzeczne jest stałe i wynosi  $H_z = -10$  kN. Na jego podstawie można zobaczyć, w jaki sposób wzrost siły podłużnej  $N_g$  wpływa na rozkład sił przekrojowych. W tym przypadku, wraz z jej zwiększeniem, wzrasta skoku momentów zginających wynikający ze skokowej, nieosiowej zmiany przekroju poprzecznego.



Rys. 6.26. Aproksymacja momentów zginających funkcjami schodkowymi słupa Sg wytyczonego reakcją  $R = 200$  kN oraz siłami poziomymi w ryglach: a)  $H_z = 10$  kN, b)  $H_z = -10$  kN

Podobnie jak we wcześniejszych przykładach, tak i tym razem wytyczenie momentami zginającymi należało aproksymować stosownymi funkcjami schodkowymi. Takie przykładowe dwa wykresy zamieszczono na rysunku 6.26. Są one przekrojami przez powierzchnię znajdującą się na rysunku 6.25a, które zostały sporządzone przy założeniu, że wartość reakcji  $R$  jest stała i wynosi  $200$  kN, a poziome siły  $H_z$  wynoszą  $10$  kN (por. rys. 6.26a) oraz  $-10$  kN (por. rys. 6.26b).

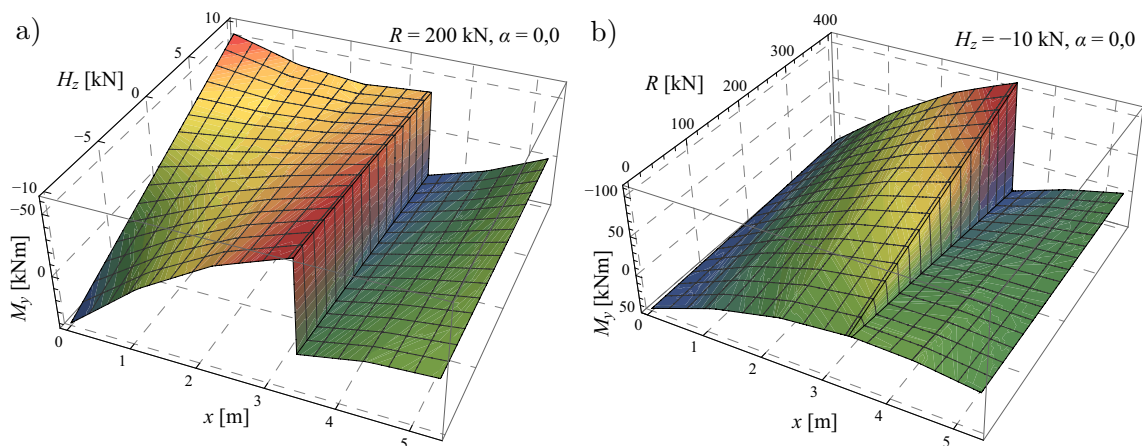


Rys. 6.27. Zależność sił krytycznych  $N_{cr}$  [kN] słupa Sg od poziomych sił w ryglach  $H_z$  [kN]

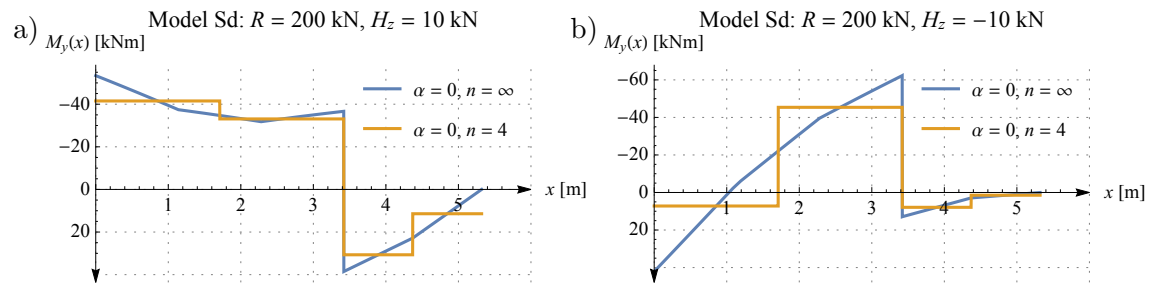
Podsumowaniem zagadnienia stateczności w przypadku potraktowania obciążenia jako dwuparametrowe jest krzywa interakcji zamieszczona na rysunku 6.27. Zależność ta swoje maksimum osiąga, gdy obciążenie siłami poziomymi wynosi  $H_z = 60$  kN. Wówczas obciążenie krytyczne  $N_{cr}$  wynosi nieco ponad 400 kN. Dalej, wraz ze wzrostem sił  $H_z$  następuje spadek nośności krytycznej analizowanego słupa. Zmniejszanie wartości obciążeń poprzecznych  $H_z$ , zaczynając od 50 kN, przechodząc przez zero i dalej kolejne jego zwiększanie, lecz już w przeciwnym kierunku, wiąże się z łagodnym spadkiem nośności krytycznej przedmiotowego słupa. Również w tym przypadku, podobnie jak we wcześniejszych modelach, momenty zginające, które wykorzystano w procedurze `wyznacznikB[...]`, opisano funkcjami wyznaczonymi zgodnie z teorią I rzędu.

### Model Sd

Ostatnim przykładem, który przeanalizowano w ramach rozważań nad statecznością elementów wyłożonych obciążeniem dwuparametrowym jest model słupa obciążonego w ryglach poziomymi siłami skupionymi  $H_z$  oraz pionową siłą  $N_d$  przyłożoną do wspornika (por. rys. 6.24). Powierzchnia, która obrazuje jak zmieniają się momenty zginające  $M_y$



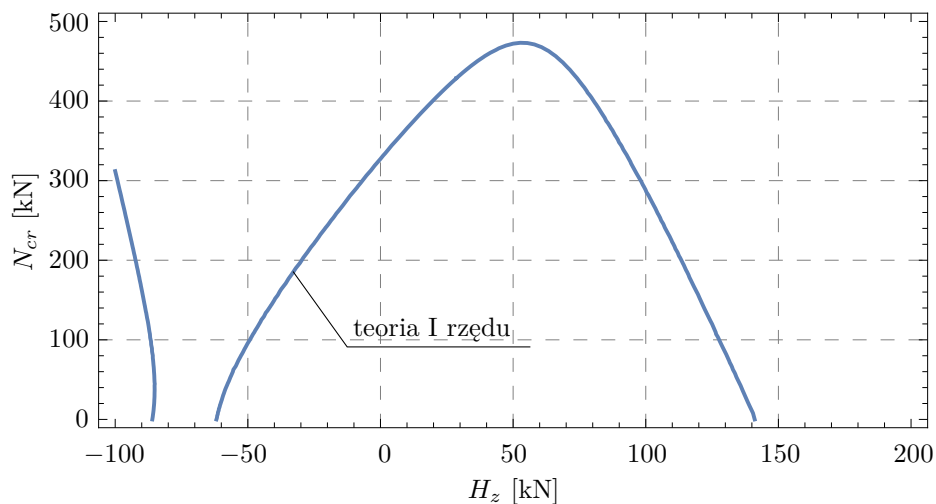
Rys. 6.28. Momenty zginające w słupie Sd, w przypadku: a) stałej reakcji podporowej  $R$ , b) jednokowych czterech sił poziomych z rygli  $H_z$



Rys. 6.29. Aproxymacja momentów zginających funkcjami schodkowymi słupa Sd wyteżonego reakcją  $R = 200$  kN oraz siłami poziomymi w ryglach: a)  $H_z = 10$  kN, b)  $H_z = -10$  kN

w słupie przy założeniu, że jest on obciążony reakcją  $R = 200$  kN, a obciążenie poprzecznie  $H_z$  przyjmuje wartości z przedziału od  $-10$  kN do  $10$  kN. Bardzo interesująco wygląda to zwłaszcza w dolnej części słupa, bowiem w przypadku poziomego obciążenia skierowanego do wnętrza hali, ściskana jest wewnętrzna część słupa, zaś część górna od wewnętrznej strony hali jest rozciągana. Jest to doskonale widoczne na przekroju przez tę płaszczyznę (por. rys. 6.28a), który jest pokazany na rysunku 6.29a. Obciążenie słupa siłami, które przyjmują wartości ujemne, tzn. są skierowane na zewnątrz obiektu, powoduje, że część słupa znajdująca się na tej samej stronie co rygle ściennne jest ściskana jedynie na krótkim odcinku. Dalszy odcinek w części podsuwnicowej jest rozciągany, a części nadsuwnicowej — ściskany. Przedstawia to zamieszczony na rysunku 6.29b wykres momentów zginających.

Wpływ przyrostu podporowej reakcji  $R$ , przy założeniu, że współczynnik  $\alpha = 0,0$ , a wartość obciążeń poziomych wynoszą  $H_z = -10$  kN, pokazano na rysunku 6.28b. Widać, że podobnie jak we wcześniej przedstawionych przykładach, skutkuje on coraz większym skokiem w wykresach momentów zginających w miejscu zmiany sztywności.



Rys. 6.30. Zależność sił krytycznych  $N_{cr}$  [kN] słupa Sd od poziomych sił z rygli  $H_z$  [kN]

Podsumowaniem rozważań nad statecznością słupów o odcinkowo i nieosiowo zmiennym przekroju poprzecznym, które są obciążone pionową siłą  $N_d$  na poziomie wspornika oraz niezależnymi, poziomymi siłami  $H_z$ , które przyłożono w miejscach rygli ściennych, jest wyznaczenie krzywej interakcji. Pokazano ją na rysunku 6.30. W porównaniu do wcześniejszych krzywych, charakteryzuje się ona tym, że na odcinkach, gdy jest ona rosnąca lub malejąca współczynnik kierunkowy stycznej przyjmuje większe wartości. Interesujące

jest to, że gdy poziome obciążenie  $H_z$  wynosi ok. 50 kN, to wówczas zależność ta osiąga ekstremum wynoszące ok. 470 kN. Dalszy przyrost obciążeń  $H_z$  skutkuje spadkiem nośności krytycznej. Przyjęcie obciążeń  $H_z$ , których wartości maleją zaczynając od 50 kN również wiąże się ze zmniejszeniem obciążenia krytycznego. Tendencja ta jest zachowana nawet, gdy obciążenia  $H_z$  przechodzą przez zero i zmieniają znak.

## 6.6. Podsumowanie rozważań analitycznych

W niniejszym rozdziale podjęto próbę analitycznego opisu zjawiska przestrzennej utraty stateczności. Wykorzystano do tego model słupa z ustaloną osią obrotu. Dla każdego segmentu zdefiniowano równanie różniczkowe problemu, a zmiany wyężenia zginaniem słupów aproksymowano stosownymi funkcjami schodkowymi. Wszystkie niezbędne obliczenia przeprowadzono wykorzystując możliwości pakietu *Mathematica*. Poprawność sporządzonego algorytmu zweryfikowano na podstawie szeregu rozwiązań szczególnych znanych z literatury, a także porównując rozwiązania z odpowiednimi modelami numerycznymi zbudowanymi w programach LTBeamN i SOFiSTiK.

Zaproponowany model analityczny umożliwił efektywne rozwiązanie problemów stateczności przestrzennej omówionych w rozdziale 3 słupów, które były przedmiotem badań doświadczalnych. Porównanie wyników tych obliczeń w szerszym kontekście przedstawiono w rozdziale 7 (por. tab. 7.1).

Model analityczny umożliwił ponadto uzupełnienie rozwiązań w przypadku dwuparametrowego obciążenia słupa siłą  $N$  i niezależną siłą  $H_z$ . Odpowiednie wyniki przedstawiono w postaci graficznej, jako zależność obciążenia krytycznego  $N_{cr}$  od dodatkowego, niezależnego obciążenia poziomego  $H_z$ . Pozwoliło to na dwuparametrową analizę zjawiska wyboczenia skrętnego z ustaloną osią obrotu. W jednym przypadku uwzględniono wpływ przemieszczeń na przestrzenną utratę stateczności, bowiem siły przekrojowe wyznaczono wg teorii II rzędu, wychodząc z równania różniczkowego pręta ściskanego stałą siłą osiową i zginanego dowolnym obciążeniem zewnętrznym zapisanym w postaci dystrybucyjnej.

## Rozdział 7

---

# Podsumowanie i wnioski

---

### 7.1. Podsumowanie

W pracy doktorskiej p.t. „Nośność stężonych poprzecznie, dwuteowych słupów stalowych ze skokową niesymetryczną zmianą przekroju” zrealizowano szeroki program badań doświadczalnych, numerycznych i analitycznych. W praktyce słupy takie stosowane są jako słupy skrajne układów poprzecznych stalowych hal przemysłowych z suwnicami. Słupy te stężone są zazwyczaj na długości ryglami ściennymi, które w prawidłowo rozwiązany systemie konstrukcyjnym hali mają istotny wpływ na ich nośność, ustalając ich oś obrotu.

W rozprawie przeprowadzono obszerne badania doświadczalne na sześciu modelach stalowych, dwuteowych słupów schodkowych wykonanych w skali półtechnicznej. Program badań przewidywał podział badań na dwie serie. W pierwszej obciążenie przykładano w głowicy, w drugiej — na wsporniku. Dodatkowo, słupy z pierwszej serii wykorzystano ponownie obciążając je w poziomie wspornika, co przyczyniło się do powstania kolejnej, trzeciej serii. Sprężystą nośność krytyczną stateczności przestrzennej badanych słupów wyznaczono zarówno metodą Southwella, jak i na podstawie oryginalnej, nieliniowej aproksymacji ścieżek równowagi statycznej. Pozwoliło to na wyznaczenie nośności krytycznej badanych słupów w sposób bardziej obiektywny, szczególnie w przypadku modeli obarczonych znacznymi imperfekcjami. Dla dwóch słupów przeprowadzono ponadto w trakcie badania nośności, szczegółową analizę ich wyteżenia z wykorzystaniem pomiarów tensometrycznych.

W ramach badań numerycznych dla poszczególnych modeli fizycznych opracowano stosowne modele numeryczne (MES) w programach przeznaczonych do prac inżynierskich (m.in. LTBeamN, SOFiSTiK), a także do badań naukowych (Abaqus FEA). Największe możliwości dawały modele opracowane w programie Abaqus, w którym można było uzyskać rozwiązania w zakresie zarówno sprężystym, jak i sprężysto-plastycznym. Wykorzystano przy tym bryłowe elementy skończone. Warto podkreślić, że uzyskano bardzo dobrą zgodność wyników badań doświadczalnych i numerycznych zarówno przy ocenie nośności krytycznej, jak i granicznej. Modele numeryczne opracowane w programie Abaqus FEA, umożliwiły przeprowadzenie w pracy doktorskiej obszernych badań parametrycznych, których celem było ustalenie m.in. wpływu na nośność badanych słupów takich czynników jak: rozkład obciążenia podłużnego na część nad- i podsuwnicową słupa, liczba stężeń poprzecznych i ich odległość do zewnętrznego pasa słupa oraz moment zginający od dodatkowego obciążenia poprzecznego.

Podjęto ponadto udaną próbę analitycznego rozwiązania problemu sprężystej stateczności przestrzennej przedmiotowych słupów, z wykorzystaniem pakietu *Mathematica*, wy-

Tabela 7.1. Zestawienie doświadczalnych, numerycznych i analitycznych obciążeń granicznych  $N_{gr}$ , krytycznych  $N_{cr}$  [kN] oraz ich różnic  $\delta$  [%] względem rezultatów z badań doświadczalnych

Model słupa	Obciążenia graniczne			Obciążenia krytyczne				
	Dośw.	Numeryczne		Dośw.	Numeryczne		Analityczne	
	$N_{gr}$ [kN]	$N_{gr}$ [kN]	$\delta$ [%]	$N_{cr}$ [kN]	$N_{cr}$ [kN]	$\delta$ [%]	$N_{cr}$ [kN]	$\delta$ [%]
Sg1	306	308	0,7	391		-15,1		-18,4
Sg2	253	268	5,9	370	332	-10,3	319	-13,8
Sg3	247	268	8,5	354		-6,2		-9,9
Śr.	268	281	4,7	371	332	-10,7	319	-14,2
Sd1	312	301	-3,5	323		-11,1		-5,6
Sd2	272	279	2,6	334	287	-14,1	305	-8,7
Sd3	292	288	-1,4	322		-10,9		-5,3
Śr.	292	289	-0,9	326	287	-12,1	305	-6,5
Sgd1	272	279	2,6	322		-10,9		-5,3
Sgd2	282	279	-1,1	318	287	-9,7	305	-4,1
Sgd3	315	301	-4,4	313		-8,3		-2,6
Śr.	290	286	-1,2	318	287	-9,7	305	-4,0

chodząc ze sformułowania problemu w postaci równań różniczkowych wybożenia skrętnego z ustaloną osią obrotu elementów ściskanych i zginanych. W oparciu o dostępne w literaturze rozwiązania, a także o rozwiązania numeryczne, zweryfikowano poprawność napisanego algorytmu. Wyznaczono także obciążenia krytyczne modeli z badań doświadczalnych. Ponadto, obciążenie siłami pionowymi oraz poziomymi potraktowano jako dwuparametrowe, obrazując to stosownymi krzywymi interakcji.

Ogólnym podsumowaniem podjętych w pracy rozważań są porównania dokonane w tabeli 7.1. Zestawiono w niej, wyznaczone w oparciu o badania doświadczalne, symulacje numeryczne, a także rozwiązania analityczne, obciążenia graniczne  $N_{gr}$ , krytyczne  $N_{cr}$  oraz ich różnice  $\delta$  względem badań. W przypadku obciążeń granicznych zestawiono ze sobą największe zarejestrowane podczas badań doświadczalnych obciążenia (por. tab. 3.12) oraz odpowiadające im obciążenia, które są wynikiem nieliniowych analiz numerycznych (por. tab. 5.4). Różnice pomiędzy poszczególnymi wynikami są zaledwie kilkuprocentowe, co niewątpliwie jest wynikiem bardzo dobrym. Porównując obciążenia krytyczne, różnice te są nieco większe i w większości przypadków są o ok. 10% mniejsze od wartości wyznaczonych na podstawie badań doświadczalnych.

## 7.2. Wnioski ogólne

Badania i przeprowadzone analizy potwierdzają przyjęte w pracy tezy, a mianowicie:

- Badania doświadczalne wykazały, że przedmiotowe słupy tracą nośność zarówno krytyczną, jak i graniczną w postaci przestrzennej (giętno-skrętnej z narzuconą wzdłuż rygli ściennych osią obrotu)  $\Rightarrow$  Teza 1.

- Obszerne analizy parametryczne potwierdziły m.in., że już w przypadku jednego stężenia w części górnej i dwóch — w części dolnej, a więc łącznie trzech stężeń (rygły rozmieszczonych możliwie równomiernie), wyczerpanie nośności następuje w postaci skrętnej z ustaloną osią obrotu  $\Rightarrow$  Teza 2.
- Analizy parametryczne wykazały ponadto, że dodatkowe obciążenie poprzecznie działające w płaszczyźnie ich większej sztywności (w postaci oddziaływań bocznych od suwnic pomostowych), powoduje w niedużym stopniu zmianę obciążenia krytycznego utraty stateczności przestrzennej. W przypadku natomiast słupów ze stężonym przeciwskrętnie wspornikiem, obserwuje się znaczny wpływ ww. obciążenia poprzecznego na nośność krytyczną słupów  $\Rightarrow$  Teza 3.

### 7.3. Wnioski szczegółowe

Przeprowadzone badania pozwalają ponadto na sformułowanie następujących wniosków o charakterze szczegółowym:

- Wykorzystana przy ocenie nośności badanych doświadczalnie słupów metoda nieliniowej aproksymacji ŚRS daje dużo większe możliwości interpretacji wyników niż powszechnie stosowana metoda Southwella. Dotyczy to zwłaszcza modeli obarczonych imperfekcjami.
- Modelem numerycznym najwierniej opisującym rzeczywiste zachowanie słupa jest model zbudowany w programie Abaqus z elementów bryłowych.
- Opracowany w ramach pracy doktorskiej algorytm analitycznego rozwiązania, z wykorzystaniem pakietu *Mathematica*, problemów nośności krytycznej przedstawionych słupów stanowi efektywne narzędzie do teoretycznego wyznaczania obciążenia krytycznego.
- Konstrukcja połączenia w miejscu zmiany sztywności (m.in. jego sztywność bimomentowa), ma istotny wpływ na nośność analizowanych słupów. Szczególnej uwagi, ze względu na zapewnienie ciągłości na zginanie oraz deplanację, wymaga konstrukcja połączenia.
- Początek wyczerpania nośności badanych słupów następuje poprzez uplastycznienie w miejscu połączenia części górnej i dolnej.
- Zwiększanie liczby stężeń na długości słupa ma większe znaczenie w modelach ze stężonym przeciwskrętnie wspornikiem.
- Numeryczne analizy parametryczne wykazały, że zastosowanie w podstawie słupa kołyski w płaszczyźnie mniejszej sztywności nie było niezbędne. Różnice w obciążeniach krytycznych w przypadku zastosowania płaskiej blachy nie przekraczają kilku procent.
- Nośność graniczna, która została wyznaczona na drodze symulacji numerycznych, wymagała uwzględnienia nieliniowości materiałowych i geometrycznych, a w tym drugim przypadku także wprowadzenia imperfekcji  $v_0 \approx 5$  mm. Wartość tej imperfekcji jest dużo mniejsza niż zalecana dla tego typu słupów wartość normowa.



Przedstawione w niniejszej pracy rozważania nie wyczerpują oczywiście tematu związanego z nośnością graniczną stężonych poprzecznie, dwuteowych słupów stalowych ze skokową niesymetryczną zmianą przekroju. Dotyczyły one w zasadzie konkretnego typu słupów, które były przedmiotem badań doświadczalnych. Opracowany w programie Abaqus FEA numeryczny model słupa, zweryfikowany doświadczalnie, umożliwia rozwiązywanie problemów nośności krytycznej przedmiotowych słupów w znacznie większym zakresie, co wykazały przeprowadzone w pracy analizy parametryczne.

---

## Bibliografia

---

- [1] Abaqus FEA 6.14, *Abaqus FEA Documentation*, Providence, RI, USA: Dassault Systèmes 2014.
- [2] Abell M. L., Braselton J. P., *Differential Equations With Mathematica*, Academic Press Inc., Massachusetts 1993.
- [3] AISC, *Guide for the Design and Construction of Mill Buildings*, Pittsburg, PA: Association of Iron and Steel Engineers, 2003.
- [4] Akbulut H., Gundogdu O., Şengül M., *Buckling behaviors of laminated composite stepped flat columns*, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 46, Nr 12, 2010, s. 1061–1067.
- [5] Alwis W., Wang C., *Should load remain constant when a thin-walled open-profile column buckles?*, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, Nr 21, 1994, s. 2945–2950.
- [6] Alwis W., Wang C., *Wagner term in flexural-torsional buckling of thin-walled open-profile columns*, *Engineering Structures*, Vol. 18, Nr 2, 1996, s. 125–132.
- [7] Andrade A., Camotim D., Dinis P. B., *Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA*, *Computers & Structures*, Vol. 85, Nr 17–18, 2007, s. 1343–1359.
- [8] Arbabi F., Li F., *Buckling of variable cross-section columns — integral-equation form*, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 117, Nr 8, 1991, s. 2426–2441.
- [9] Aristizabal-Ochoa D., *Minimum bracing stiffness for multi-column systems: Theory*, *Dyna-Columbia*, Vol. 78, Nr 168, 2011, s. 7–18.
- [10] Aristizabal-Ochoa D., *Stability and minimum lateral bracing for stepped columns with semi-rigid connections including shear effects: I) Theory*, *Dyna-Columbia*, Vol. 79, Nr 174, 2012, s. 96–106.
- [11] Aristizabal-Ochoa D., *Stability and minimum lateral bracing for stepped columns with semi-rigid connections including shear effects: II) Verification and examples*, *Dyna-Columbia*, Vol. 79, Nr 176, 2012, s. 20–26.
- [12] Aristizabal-Ochoa J. D., *Stability and minimum bracing for stepped columns with semirigid connections: Classical elastic approach*, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 5, Nr 4, 1997, s. 415–431.
- [13] Attard M. M., *Flexural-torsional buckling of monosymmetric columns*, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 23, Nr 1–3, 1992, s. 117–126.

- [14] Au F., Zheng D., Cheung Y., *Vibration and stability of non-uniform beams with abrupt changes of cross-section by using C1 modified beam vibration functions*, Applied Mathematical Modelling, Vol. 23, Nr 1, 1999, s. 19–34.
- [15] Babcock C., Wass A., *Effects of stress concentrations in composite structures*, National Aeronautics and Space Administration, 1985.
- [16] Balasubramanian T., Subramanian G., *On the performance of a four-degree-of-freedom per node element for stepped beam analysis and higher frequency estimation*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 99, Nr 4, 1985, s. 563–567.
- [17] Bazeos N., Karabalis D. L., *Efficient computation of buckling loads for plane steel frames with tapered members*, Engineering Structures, Vol. 28, Nr 5, 2006, s. 771–775.
- [18] Bert C. W., *Improved technique for estimating buckling loads*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 110, Nr 12, 1984, s. 1655–1665.
- [19] Biegus A., *Blacha fałdowa jako usztywnienie pasów kratownic płaskich przy wyboczeniu z ich płaszczyzny*, Budownictwo i Architektura, Vol. 13, Nr 3, 2014, s. 209–217.
- [20] Biegus A., *Stalowe budynki halowe*, Arkady, Warszawa 2003.
- [21] Biegus A., *Trapezoidal sheet as a bracing preventing flat trusses from out-of-plane buckling*, Archives of Civil and Mechanical Engineering, Vol. 15, Nr 3, 2015, s. 735–741.
- [22] Boissonnade N., Villette M., Muzeau J.-P., “About amplification factors for lateral-torsional buckling and torsional buckling”, w: *Festschrift Richard Greiner*, TU Graz 2001.
- [23] Bradford M., Yazdi N. A., *A Newmark-based method for the stability of columns*, Computers & Structures, Vol. 71, Nr 6, 1999, s. 689–700.
- [24] Bradford M. A., Ronagh H. R., *Generalized elastic buckling of restrained I-beams by FEM*, Journal of Structural Engineering, Vol. 123, 12, 1997, s. 1631–1637.
- [25] Bradford M. A., *Lateral-distortional buckling of continuously restrained columns*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 42, Nr 2, 1997, s. 121–139.
- [26] Březina V., *Stateczność prętów konstrukcji metalowych*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1966.
- [27] Bródka J., Łubiński M., *Lekkie konstrukcje stalowe*, Arkady, Warszawa 1978.
- [28] Brzoska Z., *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1965.
- [29] Castiglioni C. A., *Stepped columns: A simplified design method*, Engineering Journal, Vol. 23, Nr 1, 1986, s. 1–8.
- [30] Challamel N., Andrade A., Camotim D., Milisavljević B. M., *Flexural-torsional buckling of cantilever strip beam-columns with linearly varying depth*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 136, Nr 6, 2010, s. 787–800.
- [31] Chen R., *Evaluation of natural vibration frequency of a compression bar with varying cross-section by using the shooting method*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 201, Nr 4, 1997, s. 520–527.

- [32] Chen W.-F., Atsuta T., *Theory of Beam Columns, Volume 2 – Space Behavior and Design*, J. Ross Publishing, Inc., New York 2008.
- [33] Chen Y., Cheung Y., Xie J., *Buckling loads of columns with varying cross-sections*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, Nr 3, 1989, s. 662–667.
- [34] Chróścielewski J., Lubowiecka I., Szymczak C., Witkowski W., *On some aspects of torsional buckling of thin-walled I-beam columns*, Computers & Structures, Vol. 84, Nr 29–30, 2006, s. 1946–1957.
- [35] Chu X.-t., Rickard J., Li L.-y., *Influence of lateral restraint on lateral-torsional buckling of cold-formed steel purlins*, Thin-Walled Structures, Vol. 43, Nr 5, 2005, s. 800–810.
- [36] Cichoń C., Koczubiej S., *Konsystentny model MES dla ram przestrzennych o prętach cienkościennych*, Czasopismo Techniczne. Budownictwo, Vol. 21, Nr 1-B, 2008, s. 3–20.
- [37] Coşkun S. B., Atay M. T., *Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using variational iteration method*, Computers & Mathematics with Applications, Vol. 58, Nr 11–12, 2009, s. 2260–2266.
- [38] Cristutiu I. M., Nunes D. L., Dogariu A. I., “Buckling of laterally restrained steel structural elements with variable cross section considering initial imperfections”, w: *Eurosteel 2011 6th European Conference on Steel and Composite Structures*, Volume C, Budapest, Hungary, 2011, s. 1815–1820.
- [39] Cywiński Z., *Zur Entwicklung der Steifigkeitsmatrizen für dünnwandige Stäbe*, Stahlbau, Vol. 78, Nr 2, 2009, s. 103–107.
- [40] Darbandi S. M., Firouz-Abadi R. D., Haddadpour H., *Buckling of variable section columns under axial loading*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 136, Nr 4, 2010, s. 472–476.
- [41] Di Egidio A., Vestroni F., *Static behavior and bifurcation of a monosymmetric open cross-section thin-walled beam: Numerical and experimental analysis*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 48, Nr 13, 2011, s. 1894–1905.
- [42] Du L., Lan P., Lu N. L., *Precise stability analysis of stepped telescopic booms and practical algorithm*, Applied Mechanics and Materials, Vol. 395–396, 2013, s. 871–876.
- [43] Dube G., Agarwal R., Dumir P., *Natural frequencies and buckling loads of beam-columns stiffened by rings*, Applied Mathematical Modelling, Vol. 20, Nr 9, 1996, s. 646–653.
- [44] Dube G., Dumir P., *Tapered thin open section beams on elastic foundation-I. Buckling analysis*, Computers & Structures, Vol. 61, Nr 5, 1996, s. 845–857.
- [45] Dube G., Dumir P., *Tapered thin open section beams on elastic foundation-II. Vibration analysis*, Computers & Structures, Vol. 61, Nr 5, 1996, s. 859–869.
- [46] Eisenberger M., *Buckling loads for variable cross-section members with variable axial forces*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 27, Nr 2, 1991, s. 135–143.

- [47] Eisenberger M., Reich Y., *Static, vibration and stability analysis of non-uniform beams*, Computers & Structures, Vol. 31, Nr 4, 1989, s. 567–573.
- [48] Eisenberger M., Cohen R., *Flexural-torsional buckling of variable and open cross-section members*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 121, Nr 2, 1995, s. 244–254.
- [49] Elishakoff I., *Euler's problem revisited: 222 years later*, Meccanica, Vol. 36, Nr 3, 2001, s. 265–272.
- [50] Elishakoff I., Rollot O., *New closed-form solutions for buckling of a variable stiffness column by Mathematica*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 224, Nr 1, 1999, s. 172–182.
- [51] Elishakoff I., *Inverse buckling problem for inhomogeneous columns*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, Nr 3, 2001, s. 457–464.
- [52] Erkmén R., Mohareb M., *Buckling analysis of thin-walled open members – A finite element formulation*, Thin-Walled Structures, Vol. 46, Nr 6, 2008, s. 618–636.
- [53] Failla G., *Closed-form solutions for Euler-Bernoulli arbitrary discontinuous beams*, Archive of Applied Mechanics, Vol. 81, Nr 5, 2011, s. 605–628.
- [54] Failla G., Impollonia N., *General finite element description for non-uniform and discontinuous beam elements*, Archive of Applied Mechanics, 2011, s. 1–25.
- [55] Farghaly S., *Vibration and stability analysis of Timoshenko beams with discontinuities in cross-section*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 174, Nr 5, 1994, s. 591–605.
- [56] Fisher J. M., *Industrial Buildings. Roofs to Column Anchorage*, Steel Design Guide Series No. 7, American Institute of Steel Construction, Milwaukee, WI 2003.
- [57] Gadalla M., Abdalla J., *Modeling and prediction of buckling behavior of compression members with variability in material and/or section properties*, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 22, Nr 5, 2006, s. 631–645.
- [58] Galambos T. V., *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, 4th Edition, John Wiley & Sons, New York 1988.
- [59] Gambhir M., *Stability Analysis and Design of Structures*, Springer, 2004.
- [60] Gao S. H., Meng G., *Research of the spindle overhang and bearing span on the system milling stability*, Archive of Applied Mechanics, Vol. 81, Nr 10, 2011, s. 1473–1486.
- [61] Gardner L., Nethercot D. A., *Designers' Guide to Eurocode 3 – Design of Steel Buildings EN 1993-1-1, -1-3 and -1-8 (2nd Edition)*, ICE Publishing, 2011.
- [62] Gatewood B. E., *Buckling loads for columns of variable cross section*, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 21, Nr 4, 1954, s. 287–288.
- [63] Gelderblom J. H., Rensburg B. W. J. van, Dekker N. W., *The behaviour of eccentrically restrained I-sections subjected to axial loads*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 34, Nr 2–3, 1995, s. 145–160.
- [64] Gelera K., Park J., *Elastic lateral torsional buckling strength of monosymmetric stepped I-beams*, KSCE Journal of Civil Engineering, Vol. 16, Nr 5, 2012, s. 785–793.

- [65] Girão Coelho A. M., Simão P. D., Bijlaard F. S. K., “Practical design of stepped columns”, w: *Nordic Steel 2012 Construction Conference*, Oslo (Norway) 5-7 Sept. 2012: Norwegian Steel Association 2012.
- [66] Girão Coelho A. M., Simão P. D., Bijlaard F. S. K., *Stability design criteria for steel column splices*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 66, Nr 10, 2010, s. 1261–1277.
- [67] Girgin Z. C., Girgin K., *A numerical method for static and free-vibration analysis of non-uniform Timoshenko beam-columns*, Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 33, Nr 3, 2006, s. 278–293.
- [68] Giżejowski M., *Nośność sprężysto-plastycznych belek ciągłych o przekrojach otwartych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa–Łódź 1986.
- [69] Giżejowski M., Foster J. D. G., Uziak J., Barszcz A., Kanyeto J. O., “Experimentally verified model for postyielding and postbuckling behaviour of steel angle members”, w: *Australian Structural Engineering Conference*, red.: Stewart M. G., Dockrill B., Sydney: N.S.W.: Engineers Australia 2005, s. 1175–1184.
- [70] Giżejowski M., Ziółko J., red., *Budownictwo ogólne. Tom 5. Stalowe konstrukcje budynków. Projektowanie według eurokodów z przykładami obliczeń*, Arkady, Warszawa 2010.
- [71] Glabisz W., Jarczewska K., Zielichowski-Haber W., *Variational iterative method in stability analysis of beams under nonconservative forces*, Archives of Civil and Mechanical Engineering, Vol. 13, Nr 1, 2013, s. 82–87.
- [72] Glabisz W., *Mathematica w zagadnieniach mechaniki konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003.
- [73] Goczek J., *Belki z kształtowników giętych stężone poszyciem z blach fałdowych*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2013.
- [74] Goczek J., Supel Ł., *Platwie z kształtowników profilowanych na zimno*, Politechnika Łódzka, 2014.
- [75] Gosowski B., *Spatial buckling of thin-walled steel-construction beam-columns with discrete bracings*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 52, Nr 3, 1999, s. 293–317.
- [76] Gosowski B., *Spatial stability of braced thin-walled members of steel structures*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 59, Nr 7, 2003, s. 839–865.
- [77] Gosowski B., *Stateczność przestrzenna ściskanych i zginanych monosymetrycznych prętów cienkościennych z punktowymi więzami sprężystymi*, Archiwum Inżynierii Lądowej, Vol. XXXV, Nr 2, 1989, s. 165–181.
- [78] Gosowski B., *Wymiarowanie stalowych słupów pełnościennych a problem stateczności przestrzennej*, Inżynieria i Budownictwo, Nr 10, 1998, s. 558–561.
- [79] Gosowski B., Niźniowski P., *Verification of FEM program solutions of stability and torsion problems for I shape steel members*, Archives of Civil Engineering, Vol. LIV, Nr 1, 2008, s. 129–145.
- [80] Gosowski B., Lorkowski P., Redecki M., *Doświadczalna nośność krytyczna wyboczenia giętno-skrętnego dwugąteźniowych słupów bramek trakcyjnych*, Materiały Budowlane, Nr 5, 2016, s. 54–55.

- [81] Gosowski B., *Skrećanie i zginanie otwartych, stężonych elementów konstrukcji metalowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004.
- [82] Gosowski B., *Stateczność przestrzenna stężonych podłużnie i poprzecznie pełnościennych elementów konstrukcji metalowych*, Prace Naukowe Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej nr 66, Monografie nr 29, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1992.
- [83] Gosowski B., *Wyboczenie osiowo obciążonych prętów cienkościennych z punktowymi więzami sprężystymi*, Archiwum Inżynierii Lądowej, Vol. XXVII, Nr 4, 1981, s. 635–652.
- [84] Gosowski B., “Wyboczenie pełnościennych słupów metalowych w warunkach istnienia dodatkowych więzów ograniczających przemieszczenia”, Praca doktorska, Instytut Budownictwa PWr. Komunikat Nr I-2/K-59/76, Wrocław 1976.
- [85] Gosowski B., *Wyboczenie prętów cienkościennych w ośrodku sprężystym*, Inżynieria i Budownictwo, Nr 1, 1981, s. 36–40.
- [86] Gosowski B., *Zginanie i skrećanie cienkościennych elementów konstrukcji metalowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2015.
- [87] Gosowski B., *Zur Stabilitätsanalyse der axial belasteten Stahlbaustützen mit I-Querschnitt*, Bauingenieur, Vol. 63, Nr 5, 1988, s. 229–237.
- [88] Gosowski B., Kubica E., *Badania laboratoryjne konstrukcji metalowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2012.
- [89] Gosowski B., Nizniowski P., “Wyznaczanie sprężystej nośności krytycznej elementów cienkościennych na podstawie badań doświadczalnych”, w: *Badania materiałów budowlanych i konstrukcji Inżynierskich*, red.: Kamiński M., al. et, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne 2004, s. 125–130.
- [90] Gosowski B., Organek P., Redeckie M., *Bezpośrednie i pośrednie wyznaczanie wytrzymałości obliczeniowej stali w konstrukcjach budowlanych*, Materiały Budowlane, Nr 3, 2014, s. 56–59.
- [91] Gosowski B., Redeckie M., *Momenty krytyczne zwichrzenia belek dwuteowych z lokalnymi stężeniami poprzecznymi na długości*, Inżynieria i Budownictwo, Nr 3, 2012, s. 140–144.
- [92] Gosowski B., Redeckie M., *Rozwiązanie problemów skrećania ciągłych prętów dwuteowych pakietem Mathematica*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej. Budownictwo i Inżynieria Środowiska, Vol. 59, Nr 3/II, 2012, s. 357–364.
- [93] Grzymkowski R., Kapusta A., Kuboszek T., Słota D., *Mathematica 6*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2008.
- [94] Gu J.-X., Chan S.-L., *A refined finite element formulation for flexural and torsional buckling of beam-columns with finite rotations*, Engineering Structures, Vol. 27, Nr 5, 2005, s. 749–759.
- [95] Guo Y., Han Y., Hao W., Liu T., “Elastic torsional-flexural buckling of tapered I beam-columns”, w: *Advances in Steel Structures (ICASS '02)*, red.: Chan S., Teng J., Chung K., Oxford: Elsevier 2002, s. 155–162.
- [96] Gupta P., Wang S., Blandford G., *Lateral-torsional buckling of nonprismatic I-beams*, Journal of Structural Engineering, Vol. 122, Nr 7, 1996, s. 748–755.

- [97] Hamdouni A., Katili I., Maknun I., Millet O., *Analytical and experimental analysis of an asymptotic thin-walled beam model*, European Journal of Environmental and Civil Engineering, Vol. 17, Nr 1, 2013, s. 1–18.
- [98] Hamdouni A., Millet O., *An asymptotic linear thin-walled rod model coupling twist and bending*, International Applied Mechanics, Vol. 46, Nr 9, 2011, s. 1072–1092.
- [99] Hamdouni A., Millet O., *An asymptotic non-linear model for thin-walled rods with strongly curved open cross-section*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Nr 41, 2006, s. 396–416.
- [100] Hoblit F. M., *Buckling load of a stepped column*, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 18, Nr 2, 1951, s. 124–126.
- [101] Hołubowski R., Glabisz W., *Analiza stateczności drewnianych niepryzmatycznych słupów o przekroju kołowym*, Inżynieria i Budownictwo, Nr 10, 2012, s. 549–551.
- [102] Hołubowski R., Merena A., *Metoda wielostrzałowa w analizie stateczności niepryzmatycznych słupów wielosegmentowych*, Budownictwo i Architektura, Vol. 12(4), 2013, s. 225–232.
- [103] Iremonger M., *Finite difference buckling analysis of non-uniform columns*, Computers & Structures, Vol. 12, Nr 5, 1980, s. 741–748.
- [104] Iwicki P., *Sensitivity analysis of buckling loads of bisymmetric I-section columns with bracing elements*, Archives of Civil Engineering, Vol. LVI, Nr 1, 2010, s. 69–88.
- [105] Iwicki P., *Niestateczność przestrzenna ściskanych pasów kratownic ze sprężystymi podporami bocznymi*, Inżynieria i Budownictwo, Nr 11, 2007, s. 597–600.
- [106] Iwicki P., *Selected Problems of Stability of Steel Structures*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2010.
- [107] Iwicki P., *Sensitivity analysis of critical forces of trusses with side bracing*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 66, Nr 7, 2010, s. 923–930.
- [108] Iwicki P., *Stability of trusses with linear elastic side-supports*, Thin-Walled Structures, Vol. 45, Nr 10–11, 2007, s. 849–854.
- [109] Jang S., Bert C., *Free vibration of stepped beams: exact and numerical solutions*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 130, Nr 2, 1989, s. 342–346.
- [110] Jang S., Bert C., *Free vibration of stepped beams: Higher mode frequencies and effects of steps on frequency*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 132, Nr 1, 1989, s. 164–168.
- [111] Joshi A., Suryanarayan S., *A unified solution for various boundary conditions for the coupled flexural-torsional instability of closed thin-walled beam-columns*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 20, Nr 2, 1984, s. 167–178.
- [112] Kang Y., Lee S., Yoo C., *On the dispute concerning the validity of the Wagner hypothesis*, Computers & Structures, Vol. 43, Nr 5, 1992, s. 853–861.
- [113] Khelil A., Larue B., *Simple solutions for the flexural-torsional buckling of laterally restrained I-beams*, Engineering Structures, Vol. 30, Nr 10, 2008, s. 2923–2934.
- [114] Kim N.-I., Shin D. K., Kim M.-Y., *Flexural-torsional buckling loads for spatially coupled stability analysis of thin-walled composite columns*, Advances in Engineering Software, Vol. 39, Nr 12, 2008, s. 949–961.



- [115] Kindmann R., *Stahlbau. Teil 2: Stabilität und Theorie II. Ordnung*, Ernst & Sohn, Berlin 2008.
- [116] Kindmann R., Ebel R., “Lateral torsional buckling according to Eurocode 3: Accuracy and recommendation”, w: *Eurosteel 2011 6th European Conference on Steel and Composite Structures*, Volume C, Budapest, Hungary, 2011, s. 1809–1814.
- [117] Kindmann R., Käismaier M., “Design aids for lateral torsional buckling of beams”, w: *Eurosteel 2011 6th European Conference on Steel and Composite Structures*, Volume C, Budapest, Hungary, 2011, s. 1803–1808.
- [118] Kollár L. P., *Flexural-torsional buckling of open section composite columns with shear deformation*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, Nr 42–43, 2001, s. 7525–7541.
- [119] Kollár L. P., *Flexural-torsional vibration of open section composite beams with shear deformation*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, Nr 42–43, 2001, s. 7543–7558.
- [120] Konstantakopoulos T. G., Raftoyiannis I. G., Michaltsos G. T., *Stability of Steel Columns with Non-Uniform Cross-Sections*, The Open Construction and Building Technology Journal, Vol. 6, 2012, s. 1–7.
- [121] Krzyśpiak T., *Konstrukcje stalowe hal*, Arkady, Warszawa 1976.
- [122] Kucharczuk W., Labocha S., *Hale o konstrukcji stalowej. Poradnik projektanta*, Polskie Wydawnictwo Techniczne, Rzeszów 2012.
- [123] Kukla S., *Free vibrations and stability of stepped columns with cracks*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 319, Nr 3–5, 2009, s. 1301–1311.
- [124] Kurrer K.-E., *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2009.
- [125] Kurzawa Z., *Stalowe konstrukcje prętowe cz. 1. Hale przemysłowe oraz obiekty użyteczności publicznej*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2012.
- [126] Larue B., Khelil A., Gueury M., *Elastic flexural-torsional buckling of steel beams with rigid and continuous lateral restraints*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 63, Nr 5, 2007, s. 692–708.
- [127] Larue B., Khelil A., Gueury M., *Evaluation of the lateral-torsional buckling of an I beam section continuously restrained along a flange by studying the buckling of an isolated equivalent profile*, Thin-Walled Structures, Vol. 45, Nr 1, 2007, s. 77–95.
- [128] Lee H., Nguyen C., Moon J., Joo H., *Lateral-torsional buckling of discretely-braced I-girder*, Procedia Engineering, Vol. 14, 2011, s. 264–271.
- [129] Lee H., Ng T., *Vibration and buckling of a stepped beam*, Applied Acoustics, Vol. 42, Nr 3, 1994, s. 257–266.
- [130] Lellep J., Sakkov E., *Buckling of stepped composite columns*, Mechanics of Composite Materials, Vol. 42, Nr 1, 2006, s. 63–72.
- [131] Lellep J., Kraav T., “Optimization of stepped columns under compression”, w: *20th International Conference/Euro Mini Conference on Continuous Optimization and Knowledge-Based Technologies (EuroOPT 2008)*, (20–23 maj. 2008), red.: Sakalauskas L., Weber G., Zavadskas E., Institute of Mathematics & Informatics and Vilnius Gediminas Technical University, Neringa, Lithuania, 2008, s. 273–278.

- [132] Li Q., *Analytical solutions for buckling of multi-step non-uniform columns with arbitrary distribution of flexural stiffness or axial distributed loading*, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 43, Nr 2, 2001, s. 349–366.
- [133] Li Q., *Buckling of an elastically restrained multi-step non-uniform beam with multiple cracks*, Archive of Applied Mechanics, Vol. 72, Nr 6–7, 2002, s. 522–535.
- [134] Li Q., *Buckling of elastically restrained non-uniform columns*, Engineering Structures, Vol. 22, Nr 10, 2000, s. 1231–1243.
- [135] Li Q., *Buckling of multi-step non-uniform beams with elastically restrained boundary conditions*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 57, Nr 7, 2001, s. 753–777.
- [136] Li Q., *Classes of exact solutions for buckling of multi-step non-uniform columns with an arbitrary number of cracks subjected to concentrated and distributed axial loads*, International Journal of Engineering Science, Vol. 41, Nr 6, 2003, s. 569–586.
- [137] Li Q., *Effect of shear deformation on the critical buckling of multi-step bars*, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 15, Nr 1, 2003, s. 71–81.
- [138] Li Q., *Non-conservative stability of multi-step non-uniform columns*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, Nr 9, 2002, s. 2387–2399.
- [139] Li Q., *Stability of non-uniform columns under the combined action of concentrated follower forces and variably distributed loads*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 64, Nr 3, 2008, s. 367–376.
- [140] Lorkowski P., “Nośność krytyczna stalowych elementów dwugązgowych z pojedynczą płaszczyzną skratowań”, Praca doktorska, Raport Instytutu Budownictwa PWr, Seria PRE nr 5/2014.
- [141] LTBeamN 1.0.3, *LTBeamN Manual*, Saint-Aubin: Centre Technique Industriel de la Construction Métallique 2013.
- [142] Lui E., Sun M., *Effective lengths of uniform and stepped crane column*, Engineering Journal, Vol. 32, Nr 3, 1995, s. 98–106.
- [143] Madhusudan B., Rajeev V., Rao B., *Post-buckling of cantilever columns having variable cross-section under a combined load*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 38, Nr 10, 2003, s. 1513–1522.
- [144] Marcinowski J., “Wyboczenie słupów o skokowo zmiennej sztywności giętnej”, w: *Konferencja naukowo-techniczna Konstrukcje Metalowe/Metal Structures – ZK 2014*. Kielce-Suchedniów, 2014, s. 93–96.
- [145] Marques L., Taras A., Silva L. S. da, Greiner R., Rebelo C., “Stability verification of non-uniform columns: Development of a consistent procedure”, w: *Eurosteel 2011 6th European Conference on Steel and Composite Structures*, Volume C, Budapest, Hungary, 2011, s. 1737–1742.
- [146] McMahon D., Topa D. M., *A Beginner’s Guide To Mathematica*, 1st, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton 2006.
- [147] Meister J., *Nachweispraxis Biegeknicken und Biegedrillknicken*, Ernst & Sohn, 2011.
- [148] Mikulski T., *Ramy cienkościenne. Modelowanie i analiza wrażliwości*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2010.

- [149] Miller H., "Flexural-torsional buckling of mill building stepped columns", w: *Iron and Steel Exposition and AISE Annual Convention*, Cleveland, OH; USA, 2001.
- [150] Mohri F., Azrar L., Potier-Ferry M., *Flexural-torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections*, Thin-Walled Structures, Vol. 39, Nr 11, 2001, s. 907–938.
- [151] Mohri F., Brouki A., Roth J., *Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained, mono-symmetric thin-walled beams*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 59, Nr 1, 2003, s. 63–90.
- [152] Mohri F., Damil N., Potier-Ferry M., *Buckling and lateral buckling interaction in thin-walled beam-column elements with mono-symmetric cross sections*, Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, Nr 5, 2013, s. 3526–3540.
- [153] Mohri F., Bouzerira C., Potier-Ferry M., *Lateral buckling of thin-walled beam-column elements under combined axial and bending loads*, Thin-Walled Structures, Vol. 46, Nr 3, 2008, s. 290–302.
- [154] Mohri F., Damil N., Potier-Ferry M., *Linear and non-linear stability analyses of thin-walled beams with monosymmetric I sections*, Thin-Walled Structures, Vol. 48, Nr 4–5, 2010, s. 299–315.
- [155] Mohri F., Damil N., Potier-Ferry M., *Review and comparison of finite element flexural-torsional models for non-linear behaviour of thin-walled beams*, Advances in Engineering Software, Vol. 80, 2015, s. 174–187.
- [156] Naguleswaran S., *Transverse vibration and stability of an Euler-Bernoulli beam with step change in cross-section and in axial force*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 270, Nr 4–5, 2004, s. 1045–1055.
- [157] Naguleswaran S., *Vibration and stability of an Euler-Bernoulli beam with up to three-step changes in cross-section and in axial force*, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 45, Nr 9, 2003, s. 1563–579.
- [158] Naleszkiewicz J., *Zagadnienia stateczności sprężystej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1958.
- [159] Naumes J. C., "Biegeknicke und Biegedrillknicken von Stäben und Stabsystemen auf einheitlicher Grundlage", Praca doktorska, Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 2009.
- [160] Naumes J., Strohmam I., Ungermann D., Sedlacek G., *Die neuen Stabilitätsnachweise im Stahlbau nach Eurocode 3*, Stahlbau, Vol. 77, Nr 10, 2008, s. 748–761.
- [161] Newmark N. M., *Numerical procedure for computing deflections, moments, and buckling loads*, Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 108, 1943, s. 1161–1234.
- [162] Nguyen C. T., Joo H.-S., Moon J., Lee H.-E., *Flexural-torsional buckling strength of I-girders with discrete torsional braces under various loading conditions*, Engineering Structures, Vol. 36, 2012, s. 337–350.
- [163] Nguyen C. T., Moon J., Le V. N., Lee H.-E., *Lateral-torsional buckling of I-girders with discrete torsional bracings*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 66, Nr 2, 2010, s. 170–177.

- [164] Nowak E., Nowak K., Obara P., “Wpływ sprężystości podparcia na wartości własne w słupach o skokowo zmiennej sztywności”, w: *Konferencja naukowo-techniczna Konstrukcje Metalowe/Metal Structures – ZK 2014*, Kielce-Suchedniów, 2014, s. 97–100.
- [165] Oleszek R., Radomski W., *Wpływ dyskretyzacji na obliczenia skośnego wiaduktu o przekroju pół-płytowym*, Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej / Politechnika Poznańska, Vol. 18, 2014, s. 107–120.
- [166] Orloske K., Leamy M. J., Parker R. G., *Flexural-torsional buckling of misaligned axially moving beams. I. Three-dimensional modeling, equilibria, and bifurcations*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 43, Nr 14–15, 2006, s. 4297–4322.
- [167] O’Rourke M., Zebrowski T., *Buckling load for nonuniform columns*, Computers & Structures, Vol. 7, Nr 6, 1977, s. 717–720.
- [168] Palkowski S., *Konstrukcje stalowe. Wybrane zagadnienia obliczania i projektowania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013.
- [169] Paolone A., Vasta M., Luongo A., *Flexural-torsional bifurcations of a cantilever beam under potential and circulatory forces I: Non-linear model and stability analysis*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 41, Nr 4, 2006, s. 586–594.
- [170] Paolone A., Vasta M., Luongo A., *Flexural-torsional bifurcations of a cantilever beam under potential and circulatory forces II. Post-critical analysis*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 41, Nr 4, 2006, s. 595–604.
- [171] Papangelis J., Hancock G., Trahair N., *Computer design of cold-formed C- and Z-section purlins*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 46, Nr 1–3, 1998, s. 169–171.
- [172] Papangelis J., Trahair N., Hancock G., *Elastic flexural-torsional buckling of structures by computer*, Computers & Structures, Vol. 68, Nr 1–3, 1998, s. 125–137.
- [173] Papp F., *Buckling assessment of steel members through overall imperfection method*, Engineering Structures, Vol. 106, 2016, s. 124–136.
- [174] Papp F., Szalai J., *Nowe trendy w normach Eurokod 3 – efektywne globalne projektowanie konstrukcyjne. Analiza oparta na modelu 3D przy użyciu ogólnej metody elementów skończonych belkowo-słupowych*, Inżynier budownictwa, Vol. 84, Nr 11, 2011, s. 35–42.
- [175] Parent S., Pote J. J., Neale K. W., *Design of cold-formed compression web members with periodically varying section properties*, Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 34, Nr 2, 2007, s. 253–265.
- [176] Park J. S., Stallings J. M., *Lateral-torsional buckling of stepped beams*, Journal of Structural Engineering, Vol. 129, Nr 11, 2003, s. 1457–1465.
- [177] Park J., *Lateral buckling formula of stepped beams with length-to-height ratio factor*, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 18, Nr 6, 2004, s. 745–758.
- [178] Park J. S., Stallings J. M., *Lateral-torsional buckling of stepped beams with continuous bracing*, Journal of Bridge Engineering, Vol. 10, Nr 1, 2005, s. 87–95.

- [179] Park J. S., “Lateral torsional buckling of beams with continuous bracing”, Praca doktorska, Auburn University, 2002.
- [180] Park J. S., Kang Y.-J., *Flexural-torsional buckling of stepped beams subjected to pure bending*, Journal of Civil Engineering, Vol. 8, Nr 1, 2004, s. 75–82.
- [181] Park J. S., Kang Y.-J., *Lateral buckling of stepped beams under linear moment gradient*, Steel Structures, Vol. 4, 2004, s. 71–81.
- [182] Park J. S., Stallings J. M., Kang Y. J., *Lateral-torsional buckling of prismatic beams with continuous top-flange bracing*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 60, 2004, s. 147–160.
- [183] Park Y. S., Park J. S., *An Experimental Study on Inelastic Lateral-Torsional Buckling Strength of Monosymmetric Stepped I-Beam Subjected to a Concentrated Load*, International Journal of Advancements in Computing Technology, Vol. 5, Nr 11, 2013, s. 211–216.
- [184] Perelmuter A., Yourchenko V., “On the issue of structural analysis of spatial systems from thin-walled bars with open profiles”, w: *Proceedings of the METNET Seminar 2015 in Budapest*, Hämeenlinna: Häme University of Applied Sciences (HAMK) 2015.
- [185] Petersen C., *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen: Elasto- und plasto-statische Berechnungsverfahren druckbeanspruchter Tragwerke: Nachweisformen gegen Knicken, Kippen, Beulen*, Vieweg Verlagsgesellschaft, Berlin 1982.
- [186] Pflüger A., *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Dritte Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1975.
- [187] Pinarbasi S., Okay F., Akpınar E., Erdogan H., *Stability Analysis of Two-Segment Stepped Columns with Different End Conditions and Internal Axial Loads*, Mathematical Problems in Engineering, 2013.
- [188] Raftoyiannis I. G., Ermopoulos J. C., *Stability of tapered and stepped steel columns with initial imperfections*, Engineering Structures, Vol. 27, Nr 8, 2005, s. 1248–1257.
- [189] Rahai A., Kazemi S., *Buckling analysis of non-prismatic columns based on modified vibration modes*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 13, Nr 8, 2008, s. 1721–1735.
- [190] Roik K., Carl J., Lindner J., *Biegetorsionsprobleme gerader, dünnwandiger Stäbe*, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1972.
- [191] Ronagh H., Bradford M., Attard M., *Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part I: Theory*, Computers & Structures, Vol. 77, Nr 3, 2000, s. 285–299.
- [192] Ronagh H., Bradford M., Attard M., *Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part II: Application*, Computers & Structures, Vol. 77, Nr 3, 2000, s. 301–313.
- [193] Ruta G., Varano V., Pignataro M., Rizzi N., *A beam model for the flexural-torsional buckling of thin-walled members with some applications*, Thin-Walled Structures, Vol. 46, Nr 7–9, 2008, s. 816–822.
- [194] Rutecki J., *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1957.

- [195] Rykaluk K., *Zagadnienia stateczności konstrukcji metalowych*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, 2012.
- [196] Saadé K., Espion B., Warzée G., *Non-uniform torsional behavior and stability of thin-walled elastic beams with arbitrary cross sections*, Thin-Walled Structures, Vol. 42, Nr 6, 2004, s. 857–881.
- [197] Sahraei A., Wu L., Mohareb M., *Finite element formulation for lateral torsional buckling analysis of shear deformable mono-symmetric thin-walled members*, Thin-Walled Structures, Vol. 89, 2015, s. 212–226.
- [198] Sapountzakis E., Dikaros I., *Non-linear flexural-torsional dynamic analysis of beams of arbitrary cross section by BEM*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 46, Nr 5, 2011, s. 782–794.
- [199] Sapountzakis E., Tsiatas G., *Elastic flexural buckling analysis of composite beams of variable cross-section by BEM*, Engineering Structures, Vol. 29, Nr 5, 2007, s. 675–681.
- [200] Sapountzakis E., Tsipiras V., *Nonlinear nonuniform torsional vibrations of bars by the boundary element method*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 329, Nr 10, 2010, s. 1853–1874.
- [201] Saucha J., Rados J., *A critical review of Vlasov's general theory of stability of in-plane bending of thin-walled elastic beams*, Meccanica, Vol. 36, Nr 2, 2001, s. 177–190.
- [202] Serna M. A., Ibáñez J. R., López A., *Elastic flexural buckling of non-uniform members: Closed-form expression and equivalent load approach*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 67, Nr 7, 2011, s. 1078–1085.
- [203] Simão P. D., Girão Coelho A. M., Bijlaard F. S. K., “Buckling of spliced columns in steel frames”, w: *Eurosteel 2011 6th European Conference on Steel and Composite Structures*, Volume C, Budapest, Hungary, 2011, s. 1713–1718.
- [204] Simão P. D., Girão Coelho A. M., Bijlaard F. S., *Stability design of crane columns in mill buildings*, Engineering Structures, Vol. 42, 2012, s. 51–82.
- [205] Simitses G., Hodges D., *Fundamentals of Structural Stability*, 1st, Butterworth-Heinemann, 2006.
- [206] Snijder H., Hoenderkamp J., *Influence of end plate splices on the load carrying capacity of columns*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 64, Nr 7–8, 2008, s. 845–853.
- [207] SOFiSTiK 2014, *SOFiSTiK Manuals v. 2014*, Oberschleissheim: SOFiSTiK AG 2014.
- [208] Soltani M., Asgarian B., Mohri F., *Finite element method for stability and free vibration analyses of non-prismatic thin-walled beams*, Thin-Walled Structures, Vol. 82, 2014, s. 245–261.
- [209] Southwell R. V., *On the analysis of experimental observations in problems of elastic stability*, Proc. Roy. Soc. London, Vol. A, Nr 135, 1932, s. 601–616.
- [210] Subramanian G., Balasubramanian T., *Beneficial effects of steps on the free vibration characteristics of beams*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 118, Nr 3, 1987, s. 555–560.

- [211] Szalai J., Papp F., *On the theoretical background of the generalization of Ayrton-Perry type resistance formulas*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 66, Nr 5, 2010, s. 670–679.
- [212] Szymczak C., Chróścielewski J., Lubowiecka I., *On the paradox of torsional buckling of thin-walled I columns*, Archives of Civil Engineering, Vol. XLIX, Nr 1, 2003, s. 3–13.
- [213] Szymczak C., *On torsional buckling of thin walled I-columns with variable cross-section*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 19, Nr 6, 1983, s. 509–518.
- [214] Szymczak C. K., Kreja I., Mikulski T., Kujawa M., *Sensitivity Analysis of Beams and Frames Made of Thin-Walled Members*, Gdansk University of Technology, 2003.
- [215] Szymczak C., *Wyboczenie skrętne prętów cienko ściennych o bisymetrycznym przekroju otwartym*, Rozprawy Inżynierskie, Nr 26, 1978, s. 323–330.
- [216] Świtoński E., *Stateczność prętów cienkościennych o profilu otwartym i stałym przekroju*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Mechanika, Nr 40, 1970.
- [217] Świtoński E., *Zastosowanie metody macierzy przeniesienia do analizy dynamicznej prętów cienkościennych*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Vol. 12, Nr 4, 1974.
- [218] Taras A., Greiner R., *Torsional and flexural torsional buckling — A study on laterally restrained I-sections*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 64, Nr 7–8, 2008, s. 725–731.
- [219] Taras A., Greiner R., Puig M. G., “Design of mon-osymmetric beam-columns. Torsional-flexural and lateral-torsional buckling behaviour”, w: *Eurosteel 2011 6th European Conference on Steel and Composite Structures*, Volume C, Budapest, Hungary, 2011, s. 1779–1784.
- [220] Teh L. H., *Beam element verification for 3D elastic steel frame analysis*, Computers & Structures, Vol. 82, Nr 15–16, 2004, s. 1167–1179.
- [221] Timoshenko S. P., *Historia wytrzymałości materiałów*, Wydawnictwo Arkady, 1966.
- [222] Timoshenko S. P., Gere J. M., *Teoria stateczności sprężystej*, wyd. II, Arkady, Warszawa 1963.
- [223] Tong G., Ji Y., *Buckling of frames braced by flexural bracing*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 63, Nr 2, 2007, s. 229–236.
- [224] Torkamani M. A., Roberts E. R., *Energy equations for elastic flexural-torsional buckling analysis of plane structures*, Thin-Walled Structures, Vol. 47, Nr 4, 2009, s. 463–473.
- [225] Trahair N., *Flexural-Torsional Buckling of Structures*, Spon Press, London 1998.
- [226] Trahair N., Bradford M., Nethercot D. A., Gardner L., *The Behaviour and Design of Steel Structures to EC3, Fourth Edition*, CRC Press, 2007.
- [227] Trahair N. S., Kitipornchai S., *Elastic lateral buckling of stepped I-beams*, Journal of the Structural Division, Vol. 10, Nr 10, 1972, s. 2535–2548.
- [228] Trahair N., *Lateral buckling strengths of unsheeted cold-formed beams*, Engineering Structures, Vol. 16, Nr 5, 1994, s. 324–331.

- [229] Trahair N., Pi Y.-L., *Torsion, bending and buckling of steel beams*, Engineering Structures, Vol. 19, Nr 5, 1997, s. 372–377.
- [230] Vasquez J., Riddell R., *A simple stepped-column buckling model and computer algorithm*, Engineering Journal-American Institute of Steel Construction, Vol. 48, Nr 1, 2011, s. 19–30.
- [231] Vinnakota S., *Inelastic stability of laterally unsupported I-beams*, Computers & Structures, Vol. 7, Nr 3, 1977, s. 377–389.
- [232] Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни, Государственное Издательство Физико-Математической Литературы, Москва 1959.
- [233] Vrabie M., Ibănescu M., Jerca Ș. H., *Buckling analysis for members with variable rigidity by using the finite element method*, The Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy. Section. Construction. Architecture, Vol. LV (LIX), Nr 2, 2010, s. 37–50.
- [234] Wei D., Yan S., Zhang Z., Li X.-F., *Critical load for buckling of non-prismatic columns under self-weight and tip force*, Mechanics Research Communications, Vol. 37, Nr 6, 2010, s. 554–558.
- [235] Weiss S., Giżejowski M., *Stateczność konstrukcji metalowych. Układy prętowe*, Arkady, Warszawa 1991.
- [236] Williams F., *Buckling of columns with internal slide release: a recent erroneous conclusion and lessons from it*, International Journal of Structural Stability & Dynamics, Vol. 3, Nr 4, 2003, s. 585–592.
- [237] Winter G., *Strengt of Thin Steel Compression Flanges*, Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1946.
- [238] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 8.0, Champaign, Illinois, 2010.
- [239] Xie Y., Ning Q., Chen M., *The approximate analytical solution for the buckling loads of a thin-walled box column with variable cross-section*, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 19, Nr 5, 1998, s. 445–456.
- [240] Yang B., Park D.-H., *Exact buckling analysis of constrained stepped columns*. International Journal of Structural Stability & Dynamics, Vol. 3, Nr 2, 2003, s. 143–167.
- [241] Yang B., “4 – Buckling Analysis of Columns”, w: *Stress, Strain, and Structural Dynamics*, Burlington: Academic Press 2005, s. 85–133.
- [242] Yavari A., Sarkani S., *On applications of generalized functions to the analysis of Euler-Bernoulli beam-columns with jump discontinuities*, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 43, Nr 6, 2001, s. 1543–1562.
- [243] Yoo C. H., Lee S., *Stability of Structures. Principles and Applications*, Butterworth-Heinemann, 2011.
- [244] Yoshiaki G., Chen W., *On the validity of Wagner hypothesis*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 25, Nr 6, 1989, s. 621–634.
- [245] Zhang L., Tong G. S., *Elastic flexural-torsional buckling of thin-walled cantilevers*, Thin-Walled Structures, Vol. 46, Nr 1, 2008, s. 27–37.
- [246] Zhang L., Tong G. S., *Lateral buckling of web-tapered I-beams: A new theory*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 64, Nr 12, 2008, s. 1379–1393.



- [247] Żmuda J., *Konstrukcje wspanoczone dźwignic*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013.
- [248] Żmuda J., *Problemy niestateczności w projektowaniu dźwigarów stalowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole 2004.
- [249] Żybertowicz M., Bogucki W., *Tablice do projektowania konstrukcji metalowych*, Arkady, Warszawa 2008.

## Normy

- [250] PN-B-02005:1986, *Obciążenia budowli – Obciążenia suwnicami pomostowymi, wciągarkami, i wciągnikami.*
- [251] PN-B-03200:1951, *Konstrukcje stalowe – Obliczenia statyczne i projektowanie.*
- [252] PN-B-03200:1990, *Konstrukcje stalowe – Obliczenia statyczne i projektowanie.*
- [253] PN-B-03207:2002, *Konstrukcje stalowe – Konstrukcje z kształtowników i blach profilowanych na zimno – Projektowanie i wykonanie.*
- [254] PN-B-190:1946, *Konstrukcje stalowe – Obliczenia statyczne i projektowanie.*
- [255] PN-EN 10025-2:2007, *Wyroby walcowane na gorąco ze stali konstrukcyjnych – Część 2: Warunki techniczne dostawy stali konstrukcyjnych niestopowych.*
- [256] PN-EN 1991-3:2009, *Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 3: Oddziaływania wywołane dźwignicami i maszynami.*
- [257] PN-EN 1993-1-1:2006, *Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.*
- [258] PN-EN 1993-1-3:2008, *Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-3: Reguły ogólne. Reguły uzupełniające dla konstrukcji z kształtowników i blach profilowanych na zimno.*
- [259] PN-EN 1993-1-5:2006, *Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-5: Blachownice.*
- [260] PN-EN ISO 377:2000, *Stal i wyroby stalowe – Pobieranie i przygotowanie odcinków próbnych i próbek do badań własności mechanicznych.*
- [261] PN-EN ISO 6892-1:2010, *Metale – Próba rozciągania – Część 1: Metoda badania w temperaturze pokojowej.*
- [262] PN-H-84020:1988, *Stal niestopowa konstrukcyjna ogólnego przeznaczenia – Gatunki.*

---

## Streszczenie/Summary

---

**Tytuł:**

**Nośność stężonych poprzecznie, dwuteowych słupów stalowych ze skokową niesymetryczną zmianą przekroju**

### Streszczenie

Po przedstawieniu przedmiotu, celu i zakresu pracy doktorskiej, dokonano w niej szerokiego przeglądu literatury obejmującej przede wszystkim problemy stateczności słupów konstrukcji metalowych o monosymetrycznym cienkościennym przekroju otwartym, z dodatkowymi więzami ograniczającymi przemieszczenia na długości z płaszczyzny ich większej sztywności. W związku z tym, że w przypadku słupów o zmiennym przekroju poprzecznym, w tym także słupów schodkowych, badania prezentowane w dostępnej literaturze ograniczały się w zasadzie do problemów wyboczenia giętnego, sformułowano trzy oryginalne tezy odnośnie do wyboczenia przestrzennego stężonych poprzecznie słupów ze skokową niesymetryczną zmianą przekroju, będących przedmiotem pracy doktorskiej. W praktyce słupy takie stosowane są jako słupy skrajne układów poprzecznych stalowych hal przemysłowych z suwnicami. Słupy te stężone są zazwyczaj na długości ryglami ściennymi, które w prawidłowo rozwiązanym systemie konstrukcyjnym hali mają istotny wpływ na ich nośność, ustalając ich oś obrotu.

W rozprawie przeprowadzono obszerne badania doświadczalne na sześciu modelach stalowych, dwuteowych słupów schodkowych wykonanych w skali półtechnicznej. Sprężystą nośność krytyczną stateczności przestrzennej badanych słupów wyznaczono zarówno metodą Southwella, jak i na podstawie oryginalnej, nieliniowej aproksymacji ścieżek równowagi statycznej. Pozwoliło to na wyznaczenie nośności krytycznej badanych słupów w sposób bardziej obiektywny, szczególnie w przypadku modeli obarczonych znacznymi imperfekcjami. Dla dwóch słupów przeprowadzono ponadto w trakcie badania nośności, szczegółową analizę ich wyężenia z wykorzystaniem pomiarów tensometrycznych. Badania doświadczalne obejmowały także stosowne badania materiałowe, mające na celu określenie parametrów wytrzymałościowych i chemicznych stali, z której były wykonane modele słupów.

W ramach badań numerycznych opracowano w rozprawie dla poszczególnych modeli fizycznych stosowne modele numeryczne MES, w programach przeznaczonych do prac inżynierskich (m.in. LTBeamN, SOFiSTiK), a także do badań naukowych (Abaqus FEA). Największe możliwości dawały modele opracowane w programie Abaqus, w którym można było uzyskać rozwiązania w zakresie zarówno sprężystym, jak i sprężysto-plastycznym. Wykorzystano przy tym bryłowe elementy skończone. Na podkreślenie zasługuje fakt, że

uzyskano bardzo dobrą zgodność wyników badań doświadczalnych i numerycznych zarówno przy ocenie nośności krytycznej, jak i granicznej.

Modele numeryczne opracowane w programie Abaqus, umożliwiły przeprowadzenie w pracy doktorskiej obszernych badań parametrycznych, których celem było ustalenie m.in. wpływu na nośność badanych słupów takich czynników jak: rozkład obciążenia podłużnego na część nad- i podsuwnicową słupa, liczba stężeń poprzecznych i ich odległość do zewnętrznego pasa słupa, moment zginający od dodatkowego obciążenia poprzecznego. Opracowany model numeryczny, który został pozytywnie zweryfikowany w badaniach modeli fizycznych w skali póltechnicznej, daje możliwość praktycznego wykorzystania w obliczeniach słupów stosowanych w praktyce projektowej.

W pracy doktorskiej przedstawiono ponadto oryginalne analityczne rozwiązanie problemu sprężystej stateczności przestrzennej m.in. przedmiotowych słupów, z wykorzystaniem pakietu *Mathematica*, wychodząc ze sformułowania problemu w postaci dystrybucyjnych równań różniczkowych wybożenia skrętnego z ustaloną osią obrotu dla elementów ściskanych i zginanych, przy potraktowaniu obciążenia elementów jako zarówno jedno-, jak i dwuparametrowego. Rozwiązanie problemu stateczności rozważanych słupów dla przypadku obciążenia dwuparametrowego, jest bliższe rzeczywistym warunkom pracy realnych konstrukcji.

Pracę zakończono wnioskami, potwierdzającymi przyjęte w pracy doktorskiej tezy.

#### **Title:**

### **Load bearing capacity of laterally restrained steel I-columns with single stepped asymmetric change of cross-section**

#### **Summary**

After presenting the subject, aim and scope of the dissertation, the author carried out a broad review of the literature covering primarily the problems of column stability in metal structures with a monosymmetric thin-walled open section, with additional bracings constraining its out of plane displacements. Due to the fact that in case of columns with variable cross-sections, including stepped columns, the studies presented in the available literature were basically limited to the problems of in plane buckling, three original theses concerning spatial buckling of laterally braced columns with single stepped asymmetric change of cross-section were formulated. The dissertation focuses on these three theses. In practice, such columns are used as outermost columns in transverse steel industrial halls with cranes. The columns are usually braced along their length with wall girts, which in a properly structured hall system, have a significant effect on columns' load bearing capacity, determining their axis of rotation.

The paper covers extensive experimental study on six steel models, stepped I-columns made on a semi-industrial scale. Critical load bearing capacity of the spatial stability of the examined columns was determined by both the Southwell method as well as an original, nonlinear approximation of the static equilibrium paths. This allowed the author to determine the critical load bearing capacity of the investigated columns in a more objective manner, especially for models with significant imperfections. During the load bearing capacity test, a detailed analysis of stress was performed with the use of strain gauge measurement for two of the columns. Experimental studies additionally included

relevant material studies to determine the strength and chemical parameters of the steel from which the columns were made.

In numerical studies, the author developed appropriate FEA numerical models for each physical model using software designed for engineering works (e.g. LTbeamN, SOFiSTiK) as well as for scientific research (Abaqus FEA). The biggest possibilities were provided by the models developed in Abaqus software, which offers both elastic and elastic-plastic solutions. Finite solid elements were used in the process. It is worth emphasizing that a very good compliance of experimental and numerical results was obtained both in the assessment of the critical as well as limit load bearing capacity.

The numerical models developed in Abaqus software allowed for a thorough parametric study in the doctoral dissertation. Its aim was to determine, among others, what is the impact of specific factors on load bearing capacity of examined columns. The factors included: longitudinal load distribution on upper and lower segment of the column, number of lateral bracings and their distance to column external flange, bending moment caused by additional transverse load. The developed numerical model, which has been positively verified in the study of physical models on a semi-industrial scale, enables its practical use in the calculation of columns used in design practice.

In addition, the dissertation includes an original analytical solution to the problem of elastic spatial stability of the investigated columns using the *Mathematica* package. The problem was formulated as a distribution differential equation of torsional buckling with the prescribed rotation axis for the compressed and bent elements. Member load was treated as a single and two-parameter. Solving the stability problem of the investigated columns for a two-parameter load is closer to the actual working conditions of real structures.

The paper ends with conclusions confirming the assumptions adopted in the thesis.