B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 1 2008

Bogusław GUZIK*

USTALANIE EFEKTYWNOŚCI NA PODSTAWIE IZOKWANT W PRZESTRZENI WYDAJNOŚCI. PRZYPADEK WIELU NAKŁADÓW

W artykule opisano metodę ustalania efektywności obiektów gospodarczych, gdy jeden rezultat (np. produkcja, zysk, dochód) uzyskiwany jest za pomocą wielu nakładów. Metoda jest uogólnieniem procedury, zaproponowanej przez autora artykułu [4]. Sprowadza się ona do wykorzystania tzw. izokwant efektywności cząstkowej w przestrzeni wydajności nakładów, przedstawionych w pracy [5]. Postępowanie polega na określeniu wierzchołków zbioru technologii wyznaczanych przez izokwanty jednostkowe, ustaleniu granicy efektywności i promienia technologicznego oraz porównaniu odległości punktów przecięcia promienia technologicznego z izokwantami oraz granicą efektywności. Zadanie ustalania efektywności oznacza rozwiązywanie zwykłych wielowymiarowych zadań programowania liniowego.

Słowa kluczowe: *izokwanta, przestrzeń wydajności, efektywność, promień technologiczny, dea*

1. Wstęp

Artykuł nawiązuje do wcześniejszej pracy autora [4], w której opisano ideę wykorzystania wprowadzonych w pracy [5] tzw. izokwant efektywności cząstkowej w przestrzeni wydajności do ustalania efektywności gospodarczej obiektów oraz podano odpowiednie pojęcia i definicje.

W zacytowanym artykule rozpatrywano bardzo prosty przypadek, gdy rezultat zależy tylko od dwóch czynników [4]. Na tle tego szczególnego przypadku łatwo było ilustrować poszczególne pojęcia: izokwantę wydajności, granicę efektywności, promień technologiczny, miejsca przecięcia promienia technologicznego z granicą efek-

* Katedra Ekonometrii, Akademia Ekonomiczna, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, e-mail: b.guzik@ae.poznan.pl

tywności oraz izokwantami, gdyż można to było zobaczyć na rysunku płaskim[1]. Gdy nakładów jest więcej, można jedynie zastosować procedury algebraiczne[2], co jest tematem obecnego artykułu.

Opisana w poprzednim artykule procedura ustalania efektywności polega ogólnie na następujących czynnościach:

1. Na podstawie informacji o wielkościach rezultatów i nakładów określa się dotyczące poszczególnych obiektów izokwanty efektywności cząstkowej w przestrzeni wydajności.
2. Wykorzystując izokwanty ustala się granicę efektywności w przestrzeni wydajności.
3. Przyjmuje się pewien promień technologiczny i ustala punkty przecięcia promienia technologicznego z granicą efektywności oraz z izokwantami.
4. Na postawie tych punktów przecięcia oblicza się efektywność poszczególnych obiektów jako ilorazy odległości odpowiednich punktów przecięcia od początku układu współrzędnych[3].

2. Izokwanta efektu cząstkowego w przestrzeni wydajności

Izokwanta efektywności cząstkowej

Oznaczmy przez Y rezultat (wynik) działalności, a przez X_n – nakład numer n (n = 1, ..., N). Badane obiekty numerujemy przez j = 1, ..., J. Wielkości poszczególnych nakładów są znane. Oznaczamy je przez $x_1, ..., x_N$ (są to liczby).

Jednostkowa izokwanta rezultatu Y względem **wydajności nakładów** ma postać:

$$x_1 W_1 + x_2 W_2 + ... + x_N W_{N.} = 1. \tag{1}$$

Argumentami izokwanty są wydajności W_n poszczególnych nakładów, zaś parametrami są zaobserwowane nakłady x_n (n = 1, ..., N). Wymiar W_n to [*jednostka pomiaru efektu*] / [*jednostkę pomiaru czynnika n-tego*].

---

[1] Dodajmy zresztą, że przypadek dwóch nakładów i jednego rezultatu nadmiernym uproszczeniem nie jest, gdyż w ekonomii bardzo często bada się dwuczynnikowe funkcje produkcji. Uogólnienie na przypadek wielowymiarowy jest ważne, ale nie zasadnicze.

[2] Chyba, że jest to przestrzeń trójwymiarowa, ale sporządzanie rysunków jest wówczas kłopotliwe.

[3] Podany w rozdziale 5 sposób obliczania efektywności jest znany w literaturze, np. powszechnie stosowany jest w DEA.

W_n jest *cząstkową wydajnością* n-tego nakładu. Jest to ta część jednostkowego przyrostu Y, która wynika ze wzrostu nakładu n-tego o jednostkę, *ceteris paribus*:

$$W_n = \frac{\partial Y}{\partial X_n}. \tag{2}$$

Izokwanta (1) określa, jakie *wydajności* poszczególnych nakładów (np. czynników produkcji) są niezbędne, by uzyskać rezultat jednostkowy przy danych nakładach[4]. Dlatego nazywamy ją *izokwantą efektu cząstkowego w przestrzeni wydajności* i oznaczamy przez ICE_W. Dla uproszczenia notacji często będziemy ją oznaczać przez I.

Ustalanie izokwant w przypadku dwóch nakładów

Problem 1

W tabeli 1 przytoczono rozpatrywane w [2] dane dotyczące nakładów i rezultatów w sześciu obiektach.

Tabela 1. Nakłady i rezultaty. $N = 2$

Obiekty		O1	O2	O3	O4	O5	O6
Rezultat	Y	3	2	6	4	1	3
Nakłady	X_1	4	3	9	4	2	5
	X_2	2	1	12	8	6	2

Ź r ó d ł o: Dane umowne.

Izokwanty efektywności cząstkowej w przestrzeni wydajności nakładów mają postać[5]:

I_1: $1{,}333\ W_1 + 0{,}667\ W_2 = 1$, I_2: $1{,}5\ W_1 + 0{,}5\ W_2 = 1$,

I_3: $1{,}5\ W_1 + 2{,}0\ W_2 = 1$, I_4: $1{,}0\ W_1 + 2{,}0\ W_2 = 1$,

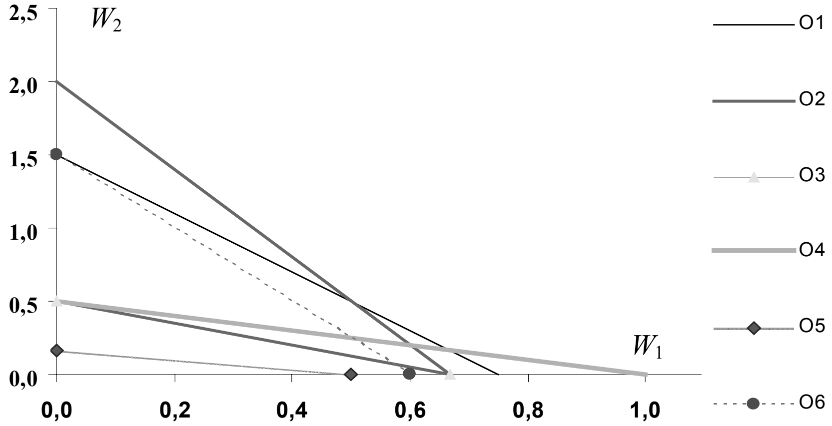
I_5: $2{,}0\ W_1 + 6{,}0\ W_2 = 1$, I_6: $1{,}667\ W_1 + 0{,}667\ W_2 = 1$.

Przebieg izokwant jednostkowych przedstawiono na rysunku 1. Linia O_n oznacza izokwantę jednostkową dla obiektu O_n.

---

[4] Jest to w pewnym sensie pojęcie „odwrotne" od tradycyjnej izokwanty, która określa wielkości *nakładów* niezbędne dla uzyskania rezultatu przy *danych wydajnościach* czynników.

[5] Ich współczynniki uzyskuje się po podzieleniu nakładu X przez rezultat Y.



Rys. 1. Izokwanty jednostkowe
Ź r ó d ł o: Opracowanie własne na podstawie tabeli 1.

Izokwanty w przestrzeni wielowymiarowej

Gdy nakładów jest więcej, izokwanty są hiperpłaszczyznami stopnia N. Do tego przypadku nawiązuje problem 2.

Problem 2

Rozpatrywana jest zależność rezultatu Y od czterech nakładów: X_1, X_2, X_3, X_4. Wielkości nakładów i uzyskanego efektu w sześciu obiektach podano w tabeli 2.

Tabela 2. Nakłady i rezultaty. $N = 4$

Obiekty		O1	O2	O3	O4	O5	O6
Rezultat	Y	3	2	6	4	1	3
Nakłady	X_1	4	3	9	4	2	5
	X_1	2	1	12	8	6	2
	X_3	2	4	3	1	3	1
	X_4	3	1	2	3	3	2

Ź r ó d ł o: Dane umowne.

Izokwanty jednostkowe są teraz określone jako:

I_1: $1{,}333\ W_1 + 0{,}667\ W_2 + 0{,}667\ W_3 + 1{,}000\ W_4 = 1,$

I_2: $1{,}500\ W_1 + 0{,}500\ W_2 + 2{,}000\ W_3 + 0{,}500\ W_4 = 1,$

I_3: $1{,}500\ W_1 + 2{,}000\ W_2 + 0{,}500\ W_3 + 0{,}333\ W_4 = 1,$

I_4: $1{,}000\ W_1 + 2{,}000\ W_2 + 0{,}250\ W_3 + 0{,}750\ W_4 = 1,$

I_5: $2{,}000\ W_1 + 6{,}000\ W_2 + 3{,}000\ W_3 + 3{,}000\ W_4 = 1,$

I_6: $1{,}667\ W_1 + 0{,}667\ W_2 + 0{,}333\ W_3 + 0{,}667\ W_4 = 1.$

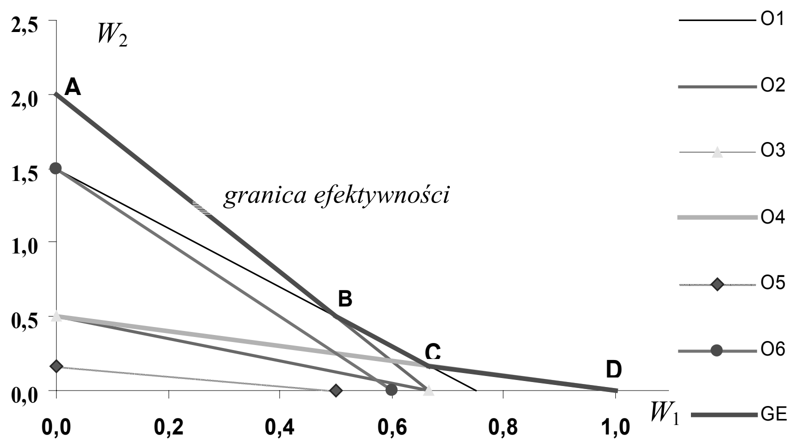
3. Granica efektywności w przestrzeni wydajności czynników

Granicą efektywności (GE_W) w przestrzeni wydajności jest *łamana* taka, że dominuje ona nad izokwantami typu ICE_W dla wszystkich badanych obiektów $j = 1, ..., J$. (3)

Ustalanie granicy efektywności w przypadku $N = 2$

W ujęciu geometrycznym ustalanie granicy efektywności GE_W dla izokwant ICE_W oznacza znajdowanie takiej najbliżej położonej początku układu współrzędnych łamanej GE_W, że leży ona ponad wszystkimi izokwantami ICE_W (a ogólnie nie niżej).

Dla problemu 1 zilustrowano to na rysunku 2.



Rys. 2. Izokwanty jednostkowe i granica efektywności dla problemu 1 ($N = 2$)
Źródło: Opracowanie własne.

Granicą efektywności jest czerwona łamana *ABCD*, a ogólniej łamana $P_2(ABCD)P_1$, gdzie P_2 – część osi W_2 powyżej punktu *A*, natomiast P_1 – fragment osi W_1 na prawo od punktu *D*.

Własności granicy efektywności

Podstawową własnością granicy efektywności GE_W jest to, że punkty leżące poniżej granicy charakteryzują się wydajnością mniejszą niż punkty leżące na granicy, a zatem charakteryzują się większymi nakładami na jednostkę rezultatu.

Oznacza to, że punkty leżące poniżej granicy GE_W mają efektywność mniejszą od punktów leżących na granicy efektywności.

Granica efektywności reprezentuje największą technologicznie możliwą w badanym zbiorze obiektów wydajność (oraz technologicznie najmniejsze nakłady)[6].

Inne ważne własności granicy efektywności są następujące:

1. Granica efektywności GE_W składa się z odcinków, którymi są segmenty niektórych izokwant jednostkowych ICE_W.

Łamana *ABCD* utworzona jest z odcinka *AB* będącego segmentem izokwanty drugiej oraz odcinka *BC* będącego segmentem izokwanty pierwszej i odcinka *CD*, będącego segmentem izokwanty czwartej.

2. Wartość granicy efektywności wynosi 1, gdyż jest ona złożona z segmentów odpowiednich izokwant jednostkowych, a te mają wartość równą 1.

3. Dla każdego punktu $\boldsymbol{x}$, wziętego z granicy efektywności GE_W, wartość lewej strony każdej izokwanty ICE_W jest nie mniejsza od 1[7]. Wynika stąd następujący ważny wniosek:

W ujęciu algebraicznym dominacja granicy efektywności GE_W nad izokwantą ICE_W oznacza, że dla wszystkich wektorów $\boldsymbol{x}$, leżących na granicy efektywności, wartości lewej strony izokwanty jednostkowej typu ICE_W są nie mniejsze od 1. (4)

4. Wierzchołki granicy efektywności są rozwiązaniami odpowiednich układów równań liniowych, generowanych przez izokwanty jednostkowe.

W podanym przykładzie punkt *A* jest rozwiązaniem układu równań złożonego z izokwanty I_2 oraz osi W_2, czyli prostej $W_1 = 0$. Punkt *B* jest rozwiązaniem układu równań złożonego z I_2 oraz I_1; punkt *C* jest rozwiązaniem układu utworzonego z izokwant I_2 oraz I_4; natomiast punkt *D* jest rozwiązaniem układu równań złożonego z I_4 oraz osi W_1 (czyli równania $W_2 = 0$).

5. W wierzchołku granicy efektywności GE_W lewa strona pewnej izokwanty jednostkowej (lub kilku izokwant) ma wartość 1, a lewe strony pozostałych izokwant mają wartości większe od 1. To wynika z własności (3).

Wyznaczanie granicy efektywności GE_W graficznie odpowiada znajdowaniu brzegu zbioru rozwiązań dopuszczalnych zadania minimalizacji, w którym warunki ograniczające mają postać nierówności liniowych skierowanych ku górze, a równania odpowiadające tym nierównościom to izokwanty jednostkowe ICE_W. (5)

---

[6] Punkty leżące powyżej GE_W nie należą do zbioru technologii dopuszczalnych (gdyż żadnego z nich nie obserwowano w badanym zbiorze obiektów).

[7] Jeśli weźmiemy punkt powyżej izokwanty, czyli jeśli izokwantę przesuniemy równolegle do „wyższego" punktu, to jej wartość będzie większa od 1, gdyż wzięto lepszą (wydajniejszą) kombinację czynników.

Wyznaczanie granicy efektywności w przypadku ogólnym

Przedstawione spostrzeżenia sugerują następującą przedstawioną procedurę znajdowania wierzchołków granicy efektywności oraz ustalania, które izokwanty uczestniczą w tworzeniu granicy efektywności.

I. Znajdowanie wierzchołków wielowymiarowej granicy efektywności

Wierzchołki granicy efektywności znajdujemy jako rozwiązania zadań programowania linowego dla poszczególnych obiektów, przy czym w zadaniu dotyczącym obiektu o-tego:

(a) warunki ograniczające postulują, żeby wartości lewych stron wszystkich izokwant jednostkowych I_j ($j = 1, ..., J$) były nie mniejsze od 1;
(b) funkcja celu orzeka minimalizację wartości lewej strony izokwanty I_o ($1 \leq o \leq J$). (6)

Dla danego obiektu rozwiązywane jest więc zadanie decyzyjne:
I. Dane:

Wielkości x_{nj} jednostkowych nakładów w poszczególnych obiektach ($n = 1, ..., N; j = 1, ..., J$). (7)

II. Zmienne decyzyjne:

$$W_1, W_2, ..., W_N \text{ – cząstkowe wydajności nakładów} \tag{8}$$

III. Funkcja celu:

$$x_{1o}W_1 + x_{2o}W_2 + ... + x_{No} W_N \rightarrow \min \tag{9}$$

IV. Warunki ograniczające:

$$x_{1j} W_1 + x_{2j} W_2 + ... + x_{Nj} W_N \geq 1 \quad (j = 1, ..., J); \tag{10}$$

$$W_n \geq 0 \quad (n = 1, ..., N). \tag{11}$$

Zadanie to można rozwiązać simpleksem, na przykład za pomocą *Solvera Excela*.

Komentarze dotyczące zadania

1. Wszystkie izokwanty w zbiorze punktów znajdujących się „pod" granicą efektywności mają wartość nie mniejszą od 1, stąd argumenty funkcji (10) muszą być tak wyznaczone, aby wartość lewej strony była nie mniejsza od 1.

2. Tylko dla izokwant, których odpowiednie segmenty tworzą granicę efektywności wartość dla punktów **x** należących do *GE* jest równa 1. Dlatego też funkcja celu jest minimalizowana.

3. Warunki znakowe $W_r \geq 0$ wprowadzono jako jawne warunki ograniczające, gdyż niektóre algorytmy (np. realizowane przez *Solver Excela*) „nie reagują" na domyślne warunki nieujemności[8] i nie podają rozwiązań znajdujących się na osiach.

---

[8] Deklarowane np. w *Opcjach* Solvera.

4. Z uwagi na tę okoliczność rozwiązanie samych zadań „dla obiektów” ($o = 1, ..., J$) nie wystarczy. Trzeba jeszcze rozwiązać zadania dla „osi” W_n ($n = 1, ..., N$). Warunki ograniczające tych zadań są takie jak w przypadku zadań „dla obiektów”, a funkcja celu ma postać:

Funkcja celu zadania dla osi W_n:

$$W_n \to \min \quad (1 \le n \le N). \tag{12}$$

5. Rozwiązania wszystkich zadań dla „obiektów” i dla „osi” pozwalają ustalić:
   a) wierzchołki granicy efektywności,
   b) które z warunków ograniczających są wiążące, a więc które izokwanty tworzą granicę efektywności.

Zadania dla poszczególnych obiektów oraz poszczególnych osi są od siebie niezależne, wobec czego można je wszystkie połączyć w jedno „duże” zadanie, w którym minimalizowana jest suma wszystkich funkcji celu (9) i (12).

Przykład

W przypadku problemu drugiego ($N = 4$) mamy zadanie decyzyjne, na przykład dla $o = 3$:

$$1{,}5w_1 + 2{,}0w_2 + 0{,}5w_3 + 0{,}333w_4 \to \min$$

$$\begin{array}{llllll}
(O1) & 1{,}333w_1 & +\,0{,}667w_2 & +\,0{,}667w_3 & +\,1{,}0w_4 & \ge 1 \\
(O2) & 1{,}5w_1 & +\,0{,}5w_2 & +\,2{,}0w_3 & +\,0{,}5\,w_4 & \ge 1 \\
(O3) & 1{,}5w_1 & +\,2{,}0w_2 & +\,0{,}5w_3 & +\,0{,}333w_4 & \ge 1 \\
(O4) & 1{,}0w_1 & +\,2{,}0w_2 & +\,0{,}25w_3 & +\,0{,}75w_4 & \ge 1 \\
(O5) & 2{,}0w_1 & +\,6{,}333w_2 & +\,3{,}0w_3 & +\,3{,}0w_4 & \ge 1 \\
(O6) & 1{,}667w_1 & +\,0{,}667w_2 & +\,0{,}333w_3 & +\,0{,}667w_4 & \ge 1 \\
 & & & & & \\
(W1) & w_1 & & & & \ge 0 \\
(W2) & & w_2 & & & \ge 0 \\
(W3) & & & w_3 & & \ge 0 \\
(W4) & & & & w_4 & \ge 0
\end{array}$$

Natomiast zadanie, na przykład „dla osi W_2”, będzie miało analogiczną postać, z tą tylko różnicą, że funkcja celu orzeka:

$$w_2 \to \min.$$

W tabeli 3 podano rozwiązania optymalne wszystkich zadań (7)–(12). Wiersz tabeli dotyczy zadania (7)–(11) dla danego obiektu numer o, lub zadania (7), (8), (10)–(12) dla „danej osi”. Kolumna natomiast dotyczy danej zmiennej decyzyjnej W_n. W tabeli 3 zasygnalizowano także, które warunki są wiążące w zadaniu dla obiektu o-tego lub dla „osi n-tej”.

Tabela 3. Wierzchołki granicy efektywności (rozwiązania optymalne zadań)

Nr	Funkcja celu	*GE*	Rozwiązanie optymalne				Warunki wiążące przy funkcji celu obiektu podanej w wierszu									
			*W*1	*W*2	*W*3	*W*4	O1	O2	O3	O4	O5	O6	*W*1	*W*2	*W*3	*W*4
1	*O1*	*T*	0,389	0,181	0,087	0,302	*w*	*w*		*w*		*w*				
2	*O2*	*T*	0,338	0,146	0,095	0,462		*w*	*w*	*w*		*w*				
3	*O3*	*T*	0,338	0,146	0,095	0,462		*w*	*w*	*w*		*w*				
4	*O4*	*T*	0,338	0,146	0,095	0,462		*w*	*w*	*w*		*w*				
5	*O5*		1,000	0,000	0,000	0,000				*w*				*w*	*w*	*w*
6	*O6*	*T*	0,338	0,146	0,095	0,462		*w*	*w*	*w*		*w*				
7	*W1*	*T*	0,000	0,271	0,143	1,157		*w*	*w*			*w*	*w*			
8	*W2*	*T*	0,526	0,000	0,000	0,632			*w*	*w*				*w*	*w*	
9	*W3*	*T*	0,462	0,062	0,000	0,554		*w*	*w*	*w*					*w*	
10	*W4*	*T*	0,667	0,167	0,000	0,000	*w*			*w*					*w*	*w*

T – odcinek izokwanty stanowiący segment granicy efektywności,
w – warunek wiążący dla danej funkcji celu.
Ź r ó d ł o: Obliczenia własne.

Dla przykładu, rozwiązanie optymalne zadania dla obiektu o = 3 ma postać: w_1 = 0,338, w_2 = 0,146, w_3 = 0,095, w_4 = 0, 462 (i jest to również rozwiązanie optymalne zadań dla obiektów O2, O4). Ten wierzchołek zbioru rozwiązań dopuszczalnych leży na przecięciu izokwant jednostkowych O2, O3, O4, O6 i można stwierdzić, że „na pewno" segmenty wymienionych izokwant będą tworzyły granicę efektywności (ale w którym „miejscu", jeszcze nie wiadomo).

Niektóre wierzchołki są zdegenerowane, a więc takie, iż leżą one na osi układu współrzędnych (jednej bądź więcej)[9].

II. Ustalanie, które izokwanty uczestniczą w generowaniu granicy efektywności GE_W

Przedstawimy dwa sposoby ustalenia, czy odpowiednia izokwanta tworzy część granicy efektywności.

Sposób 1

Sprawdzamy, czy funkcja celu zadania dla obiektu o-tego ma w rozwiązaniu optymalnym wartość 1[10]. Jeśli tak, izokwanta jednostkowa I_o tworzy część granicy efektywności (ale którą, kryterium to nie rozstrzyga).

[9] Na przykład rozwiązanie optymalne zadania numer 5 ma trzy stopnie degeneracji – punkt optymalny leży w punkcie początkowym aż trzech osi (W_2, W_3, W_4).

[10] Z uwagi na możliwe błędy zaokrągleń sprawdzamy, czy wartość funkcji celu różni się od 1 nieistotnie, np. o nie więcej jak 0,0000001.

Sposób 2

Sprawdzamy, czy w rozwiązaniu optymalnym, chociaż dla jednego zadania, warunek dla obiektu j-tego jest wiążący. Jeśli tak, odcinek izokwanty I_j stanowi segment granicy efektywności.

W naszym przykładzie (zob. kolumny trzeciej części tab. 3) wszystkie osie oraz wszystkie izokwanty z wyjątkiem izokwanty dla O5 stanowią warunki wiążące przynajmniej w jednym zadaniu decyzyjnym. Dlatego też tylko izokwanta dla O5 w żadnym swoim fragmencie nie jest segmentem granicy efektywności.

Które fragmenty izokwant jednostkowych i na jakich wycinkach przestrzeni (W_1, W_2, W_3, W_4) są określone, trudno powiedzieć. Na szczęście jawne określenie granicy efektywności nie jest potrzebne dla zbadania efektywności obiektów. Wystarczy znajomość wierzchołków, a te są znane po rozwiązaniu wszystkich zadań (7)–(12).

4. Promień technologiczny

Dla obliczenia efektywności obiektu konieczne jest ustalenie tzw. promienia technologicznego i punktów jego przecięcia z izokwantą obiektu oraz granicą efektywności.

> *Promieniem technologicznym* w przestrzeni wydajności jest – wychodząca z początku układu współrzędnych – półpłaszczyzna odpowiadająca założonej proporcji między wydajnościami nakładów.
> Promień technologiczny w przestrzeni wydajności wynika z promienia technologicznego w przestrzeni nakładów, który określa założoną proporcję między nakładami. (13)

Przypadek dwóch nakładów

Jeśli nakłady czynnika pierwszego do nakładów czynnika drugiego mają się tak, jak p_1 do p_2, to promień technologiczny w przestrzeni nakładów jest określony jako proporcja

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

czyli jako równanie

$$p_2 X_1 - p_1 X_2 = 0.$$

Z uwagi na równość $X_n = Y/ W_n$ odpowiada temu następująca proporcja między *wydajnościami* czynników:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{q_2}{q_1}, \tag{14}$$

gdzie: $q_2 = p_1$, $q_1 = p_2$.

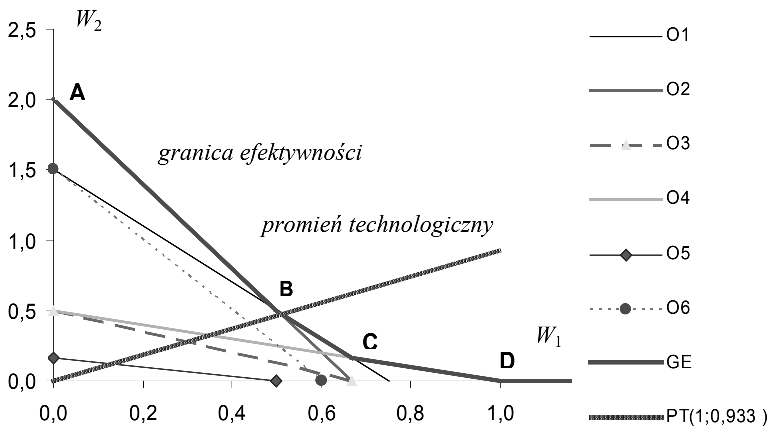
Promieniem technologicznym w *przestrzeni wydajności* jest równanie

$$q_2 W_1 - q_1 W_2 = 0. \quad (15)$$

Liczby q_1, q_2 są dane i odpowiadają założonej proporcji (14).

Przykład

Na rysunku 3 dotyczącym izokwant efektu cząstkowego z problemu 1 (zob. rys. 2), wykreślono promień technologiczny $PT(1;\ 0{,}933) = 0{,}933W_1 - 1{,}0W_2$ ($q_1 = 1,\ 0$; $q_2 = 0{,}933$)[11].



Rys. 3. Izokwanty cząstkowe, granica efektywności oraz promień technologiczny
Ź r ó d ł o: Opracowanie własne.

Konstrukcja promienia technologicznego w przypadku ogólnym

W przypadku wielowymiarowym należy określić relacje dla wszystkich par nakładów (lub wydajności). W jawnej postaci nie jest to jednak potrzebne, gdyż co najwyżej N z nich (N – liczba nakładów) jest liniowo niezależnych.

Wystarczy więc podać relacje wydajności (N–1) czynników do wydajności wybranego czynnika. Reszta relacji będzie wynikała z poprzednich. Ustalmy, że będziemy podawać relacje wydajności W_2, W_3, ..., W_N do wydajności W_1[12]. W konsekwencji promień technologiczny będzie kodowany jako $PT(1;\ q_2;\ ...;\ q_N)$, gdzie:

$$\begin{aligned} 1/q_n &= \text{postulowany iloraz } W_1/W_n \\ &= \text{postulowany iloraz } X_n/X_1 \ (n = 2, ..., N). \end{aligned} \quad (16)$$

[11] Promień ten odpowiada relacji nakładów X_1 do X_2 jak 1:0,933, co średnio ma miejsce w całym badanym układzie sześciu obiektów.

[12] Pozostałe relacje W_n/W_k będą określone jako (W_n/W_1): (W_k/W_1).

Promień technologiczny w przestrzeni wydajności jest określony przez układ $N-1$ równań liniowych:

$$q_n W_1 - W_n = 0 \quad (n = 2, ..., N). \tag{17}$$

5. Punkt przecięcia izokwanty z promieniem technologicznym

Przypadek $N = 2$

Jeśli problem dotyczy dwóch nakładów, sprawa jest prosta: należy rozwiązać układ dwóch równań liniowych, z których pierwsze to równanie izokwanty jednostkowej, a drugie – równanie promienia technologicznego.

Przypadek ogólny

Podobnie postępujemy w przypadku $N > 2$, z tym jednak, że promień technologiczny jest określony przez N–1 równań liniowych (17). Dlatego trzeba rozwiązać kwadratowy układ N równań liniowych, złożony z izokwanty dotyczącej obiektu o-tego oraz promienia (17):

$$x_{1o} W_1 + x_{2o} W_2 + \ldots + x_{No} W_N = 1 \quad (1 \le o \le J) \tag{18}$$

$$q_2 W_1 - W_2 = 0 \,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$q_N W_1 - W_N = 0,$$

względem (W_1, W_2, ..., W_N). Rozwiązanie tego układu, czyli punkt przecięcia izokwanty I_o z promieniem technologicznym, oznaczymy przez $\boldsymbol{i}_o = (i_1, i_2, ..., i_N)$.

Mierzoną po promieniu technologicznym odległością izokwanty jednostkowej dla obiektu o-tego od początku układu współrzędnych jest

$$d_o = \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + ... + i_N^2} \quad (1 \le o \le J). \tag{19}$$

6. Punkt przecięcia promienia technologicznego z granicą efektywności

Przypadek $N = 2$

W przypadku dwuwymiarowym można wzrokowo stwierdzić, w którym miejscu promień technologiczny przecina granicę efektywności (por. np. rys. 3) i w ślad za tym można stwierdzić, odcinek której izokwanty generuje odpowiedni segment granicy efektywności.

Na przykład na rysunku 3 widać, że promień technologiczny $PT(1;\ 0{,}933)$ przecina odcinek BC, który – jak można stwierdzić wzrokowo – jest segmentem izokwanty dla obiektu pierwszego. Współrzędne punktu przecięcia promienia technologicznego $PT(1;0{,}933)$ z granicą efektywności ustalimy więc, rozwiązując układ równań:

$0{,}933\ W_1 - 1{,}000\ W_2 = 0$ – promień technologiczny,

$1{,}333\ W_1 + 0{,}667\ W_2 = 1$ – izokwanta obiektu O1.

Przypadek ogólny

W przypadku wielowymiarowym „nie widzimy” izokwant, granic efektywności i promienia technologicznego (który jest pękiem prostych w przestrzeni N-wymiarowej). Należy więc „niegeometrycznie” ustalić, na odcinku której izokwanty tworzącym segment granicy efektywności leży ów punkt przecięcia. Najprostszy sposób polega na zbadaniu wszystkich możliwych przypadków.

W tym celu, dla zadanego promienia technologicznego i wszystkich izokwant uczestniczących w tworzeniu granicy efektywności, liczymy punkty przecięcia promienia z tymi izokwantami. Dla danej izokwanty I_j $(1 \le j \le J)$ trzeba wtedy:

a) rozwiązać układ równań (18),

b) obliczyć odległość rozwiązania tego układu równań od początku układu współrzędnych.

Punktem przecięcia, powiedzmy $\boldsymbol{g}$, granicy efektywności z promieniem technologicznym jest wtedy to rozwiązanie układu (18), które – w sensie odległości liczonej po promieniu technologicznym – leży *najdalej* od początku układu współrzędnych:

$$\boldsymbol{g} = \{\boldsymbol{i}_* : d_* = \max_{j=1,..,J} d_j\}. \tag{20}$$

Mierzona po promieniu technologicznym odległość granicy efektywności od początku układu współrzędnych wynosi

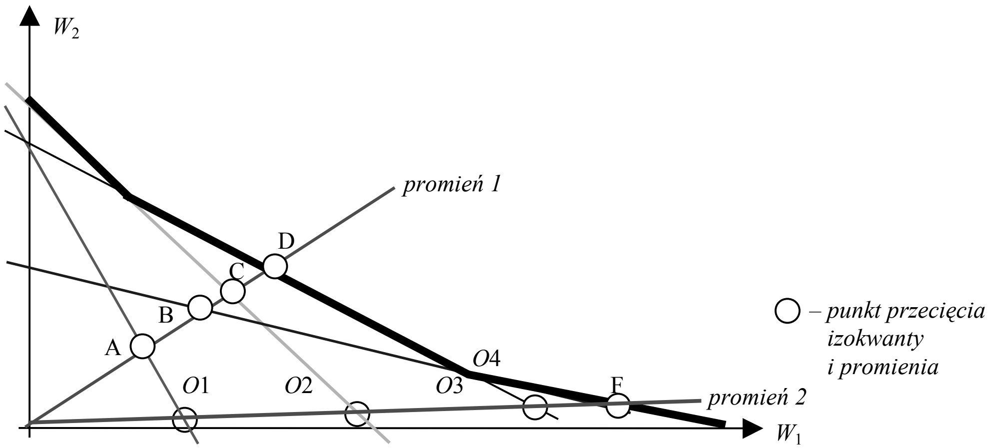
$$d_{PT} = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + ... + g_N^2}\ , \tag{21}$$

gdzie g_n – współrzędne punktu $\boldsymbol{g}$ $(n = 1, ..., N)$.

Zaproponowaną procedurę ustalania punktu przecięcia promienia technologicznego z granicą efektywności uzasadnia to, że segment granicy efektywności to po prostu odcinek tej izokwanty, która – przy danym promieniu – leży najdalej od początku układu współrzędnych.

Zilustrowano to na rysunku 4 dla przykładu czterech izokwant oraz dwóch promieni. Izokwantę dla obiektu numer j oznaczono, jak wcześniej, przez O_j.

Na przykład w relacji do promienia 1, najdalej od początku układu współrzędnych położonym punktem granicy efektywności jest punkt D, który jest punktem przecięcia



Rys. 4. Punkty przecięcia izokwant z promieniami technologicznymi
Ź r ó d ł o: Opracowanie własne.

izokwanty I_4 z tym właśnie promieniem. Najdalej – wzdłuż promienia – przesuniętą izokwantą jest więc I_4 i to ona – w odpowiednim fragmencie – stanowi granicę efektywności, a punktem przecięcia promienia technologicznego z granicą efektywności jest punkt *D*. Z kolei w wypadku promienia 2 najdalej od początku układu współrzędnych położonym punktem przecięcia izokwanty z promieniem jest punkt *F*, który dotyczy izokwanty I_3. Punkt *F* jest miejscem przecięcia granicy efektywności z promieniem 2.

7. Wskaźnik efektywności obiektu

Efektywność obiektu *j*-tego mierzona jest po promieniu technologicznym i wynosi

$$E_j = \frac{d_j}{d_{PT}} \qquad (j = 1, ..., J). \tag{22}$$

Uwagi

1. W proponowanej procedurze, dla ustalenia punktu przecięcia promienia technologicznego z granicą efektywności, czyli z jedną z izokwant jednostkowych, proponuje się rozwiązywać układy równań (18) dla wszystkich izokwant uczestniczących w tworzeniu granicy efektywności[13]. Wydaje się, że jest to praca niepotrzebna, ale jest

[13] Które to są izokwanty, można określić na podstawie rozwiązania zadań programowania liniowego, opisanych w rozdziale 3.

to pozorne wrażenie. W procedurze i tak musimy bowiem wyznaczyć punkty przecięcia wszystkich izokwant jednostkowych z promieniem technologicznym, aby obliczyć odległości (19) dla wszystkich obiektów.

2. Wobec tej okoliczności wskazywanie izokwant, które uczestniczą w tworzeniu granicy efektywności – o ile tylko rzecz dotyczy ustalania efektywności obiektów – *nie jest* konieczne. Granica efektywności nie jest w tym przypadku potrzebna w sposób jawny.

3. Układ równań (18) potrzebny dla wyznaczania punktu przecięcia promienia technologicznego z daną izokwantą jednostkową ma bardzo prostą strukturę, a jego rozwiązywanie nawet w przypadku większej liczby nakładów[14] może być zrealizowane za pomocą bardzo prostych środków obliczeniowych. Jeśli promień technologiczny ma postać (17), to pierwsza współrzędna punktu przecięcia izokwanty I_o z promieniem technologicznym wynosi

$$i_1 = \frac{1}{S} \qquad (i_n \text{ jest wartością zmiennej } W_n,\ n = 1, ..., N), \tag{23}$$

gdzie:

$$S = \sum_{n=1}^{N} q_n x_{no} \qquad (\text{przy tym } q_1 = 1); \tag{24}$$

x_{no} – przypomnijmy – to n-ty współczynnik izokwanty jednostkowej dla obiektu o-tego[15].

Następne współrzędne:

$$i_n = q_n\, i_1 \qquad (n = 2, ..., N). \tag{25}$$

8. Przykłady promieni technologicznych

I. Średni promień technologiczny

Średni promień technologiczny jest wyznaczany przez średnią proporcję poszczególnych nakładów w całym badanym zbiorze obiektów. (26)

Przykład

Dla danych z tabeli 2 sumy nakładów w całym układzie sześciu obiektów są następujące:

---

[14] Realnie tych czynników jest niewiele – 2–4. Na pewno nie dziesiątki.

[15] Wzór (23) uzyskuje się, mnożąc kolejne warunki (18), począwszy od drugiego, przez x_{no} i dodając je do warunku pierwszego.

Nakład	Suma
X_1	27
X_2	31
X_3	14
X_4	14

Stąd średnie proporcje nakładów wynoszą:

$$X_1/X_2 = 27/31 = 0{,}87; \quad X_1/X_3 = 27/14 = 1{,}93; \quad X_1/X_4 = 27/14 = 1{,}93.$$

Proporcje wydajności W_1/W_n są odwrotnościami tych liczb, czyli:

$$W_1/W_2 = 1/0{,}87; \quad W_1/W_3 = 1/1{,}93; \quad W_1/W_4 = 1/1{,}93.$$

Równania promienia technologicznego $PT(1;\, 0{,}87;\, 1{,}93;\, 1{,}93)$ mają formę:

$$0{,}87W_1 - W_2 = 0,$$

$$1{,}93W_1 - W_3 = 0,$$

$$1{,}93W_1 - W_4 = 0.$$

Współrzędne (i_1, i_2, i_3, i_4) punktów przecięcia izokwant jednostkowych z promieniem technologicznym podano w tabeli 4. Wyszczególniono też odległości d_j oraz wskaźniki efektywności obiektów.

Tabela 4. Punkty przecięcia izokwant jednostkowych z promieniem technologicznym $PT(1;0{,}87;1{,}93;1{,}93)$

	O1	O2	O3	O4	O5	O6
i_1	0,195	0,148	0,206	0,214	0,053	0,239
i_2	0,170	0,129	0,179	0,186	0,046	0,208
i_3	0,376	0,286	0,398	0,413	0,103	0,462
i_4	0,376	0,286	0,398	0,413	0,103	0,462
Odległość d_j	**0,350**	**0,201**	**0,392**	**0,422**	**0,026**	**0,528**
Odległość d_{PT}						**0,528**
Efektywność E_j	**0,663**	**0,382**	**0,742**	**0,800**	**0,049**	**1,000**

Ź r ó d ł o : Obliczenia własne.

Przyjmując, że efektywność jest oceniana według średniej w badanym zbiorze obiektów struktury wydajności (i nakładów jednostkowych), otrzymaliśmy, że najbardziej efektywny jest obiekt O6. Wyraźnie ustępują mu dwa kolejne obiekty: O4 oraz O3. Marginalną efektywnością odznacza się obiekt O5.

II. Własne promienie technologiczne

Własnym, dla *o*-tego obiektu, promieniem technologicznym jest ten, który realizuje proporcje nakładów (a w ślad za tym – proporcje wydajności) mające miejsce w obiekcie *o*-tym. (27)

Przykład

Na podstawie tabeli 2 ustalamy, że w obiekcie – na przykład – O1 miały miejsce następujące proporcje nakładów czynników[16]:

$$X_1/X_2 = 4/2 = 2; \quad X_1/X_3 = 4/2 = 2; \quad X_1/X_4 = 4/3 = 1,333.$$

stąd proporcje wydajności W_1/W_2:

$$W_1/W_2 = 1/2; \quad W_1/W_3 = 1/2; \quad W_1/W_4 = 1/1,333.$$

Równania własnego promienia technologicznego, $PT(1;\ 2;\ 2;\ 1,333)$, dla obiektu O1 mają formę:

$$2,0\ W_1 - W_2 = 0,$$

$$2,0W_1 - W_3 = 0,$$

$$1,33W_1 - W_4 = 0.$$

Ocenimy efektywność obiektów w sensie ich własnych promieni technologicznych. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 5.

Tabela 5. Punkty przecięcia izokwant z własnymi promieniami technologicznymi obiektów

Promień dla:	Kod promienia	O1	O2	O3	O4	O5	O6
Średnia	**PT(1;0,87;1,93;1,93)**	0,66	0,38	0,74	0,80	0,05	1,00
O1	PT(1;2;2;1,33)	**0,73**	0,40	0,43	0,49	0,04	1,00
O2	PT(1;3;0,75;3)	0,75	**0,97**	0,44	0,39	0,04	1,00
O3	PT(1;0,75;3;4,5)	0,52	0,35	**1,00**	0,82	0,04	0,95
O4	PT(1;0,5;4;1,33)	0,50	0,15	0,65	**1,00**	0,04	0,90
O5	PT(1;0,33;0,67;0,67)	0,76	0,49	0,73	1,00	**0,08**	0,83
O6	PT(1;2,5;5;2,5)	0,57	0,23	0,46	0,53	0,03	**1,00**

Ź r ó d ł o: Obliczenia własne.

Jeśli efektywność obiektu oceniamy w sensie jego własnego promienia technologicznego, to efektywne są obiekty O3, O4 oraz O6. Pozostałe są w mniejszym lub większym stopniu nieefektywne.

Najbardziej nieefektywny jest obiekt piąty – zaledwie 8%, a „prawie" efektywny jest obiekt O2.

---

[16] Tę proporcję można też ustalić na podstawie współczynników izokwanty jednostkowej.

Podsumowanie

1. Z czysto obliczeniowego punktu widzenia proponowana metoda badania efektywności może przebiegać następująco:

a) Na podstawie danych o nakładach i rezultatach określa się izokwanty jednostkowe.

b) Ustalamy promień technologiczny, odpowiadający założonej proporcji nakładów (lub założonej proporcji wydajności), por. początkowy fragment rozdziału 4.

c) Określamy punkty przecięcia promienia technologicznego z poszczególnymi izokwantami jednostkowymi, rozwiązując dla danej izokwanty układ równań (18). Układ ten, jak wyżej stwierdzono, jest bardzo prosty.

d) Na podstawie tego rozwiązania określamy mierzoną wzdłuż promienia technologicznego odległość izokwanty od początku układu współrzędnych.

e) Wskaźnik efektywności obiektu j-tego ze względu na promień technologiczny określony jest wzorem (22).

2. W przedstawionej wersji metody nie jest potrzebne rozwiązywanie zadań programowania w celu wyznaczenia wierzchołków granicy efektywności, co jest bardzo dużym uproszczeniem. Obliczeniowo metoda jest o wiele prostsza od np. standardowych metod DEA (jednak, dla wyjaśnienia idei procedury, świadomość rozwiązywania takich zadań programowania jest konieczna).

3. Proponowana metoda, choć wywodząca się z podobnej idei co DEA, jest nie tylko prostsza obliczeniowo, ale jest inna. Przede wszystkim inny jest punkt wyjścia: są to mianowicie izokwanty efektywności cząstkowej w przestrzeni wydajności, podczas gdy w DEA rozpatruje się (i to w „tle”) tradycyjne izokwanty wyniku. O różnicy metod świadczy też i to, że w przykładach liczbowych wyniki są na ogół inne.

Na przykład standardowa dla DEA metoda CCR[17] wskazuje, że dla danych z tabeli 2 aż pięć obiektów jest w pełni efektywnych: O1, O2, O3, O4, O6, a nieefektywny jest obiekt piąty (i to tylko w 50%). Proponowana procedura w wariancie z własnymi promieniami technologicznymi wskazała, że w pełni efektywne są trzy obiekty: O3, O4, O6, a nieefektywność obiektu O5 wynosiła aż 92%. Jak pokazują jeszcze inne przykłady liczbowe, wyniki obecnej procedury są zdecydowanie bardziej „wyostrzone” niż wyniki standardowych metod DEA.

[17] Charnes, Cooper, Rhodes [2]. Ważne modyfikacje metody CCR to tzw. nadefektywność zaproponowana przez Andersena, Petersena [1] czy efektywność nieradialna zaproponowana w Thanassoulis i Dysona [9] oraz Zhu [10].

Bogaty przegląd różnorodnych metod z zakresu DEA zawiera książka Zhu [11]. W literaturze polskiej metodę CCR i niektóre jej początkowe mutacje można znaleźć np. w pracach: Rogowski [8], Gospodarowicz [3], Kopczewski, Pawłowska [6], Prędki [7].

Bibliografia

[1] ANDERSEN P., PETERSEN N.C., *A procedure for ranking efficient units in Data Envelopment Analysis*, Management Science, 1993, 39(10).
[2] CHARNES A., COOPER W.W., RHODES E., *Measuring the efficiency of decision making units*, European Journal of Operational Research, 1978, 2.
[3] GOSPODAROWICZ M., *Procedury analizy i oceny banków*, Materiały i Studia, zeszyt 103, NBP, Warszawa 2000.
[4] GUZIK B., *Ustalanie efektywności obiektów gospodarczych na podstawie izokwant efektywności cząstkowej,* Badania Operacyjne i Decyzje, 2007, 2.
[5] GUZIK B., *Izokwanty efektywności cząstkowej ze zmienną wydajnością i zmienną nakładochłonnością*, Badania Operacyjne i Decyzje, 2007, 3–4.
[6] KOPCZEWSKI T., PAWŁOWSKA M., *Efektywność technologiczna i kosztowa banków komercyjnych w Polsce w latach 1997–2000*, cz. II, Materiały i Studia, z. 135, NBP, Warszawa 2001.
[7] PRĘDKI A., *Analiza efektywności za pomocą metody DEA. Podstawy formalne i ilustracja ekonomiczna*, Przegląd Statystyczny, 2003, 1, Warszawa 2003.
[8] ROGOWSKI G., *Metody analizy i oceny działalności banku na potrzeby zarządzania strategicznego*, Wydawnictwo WSB w Poznaniu, Poznań 1999.
[9] THANASSOULIS E., DYSON R.G., *Estimating preferred target input-output levels using Data Envelopment Analysis*, European Journal of Operational Research, 1992, 56.
[10] ZHU J., *Data Envelopment Analysis with preference structure*, The Journal of Operation Research Society, 1996, 47, 1.
[11] ZHU J., *Quantitative models for performance evaluation and benchmarking*, Springer, New York 2003.

Measuring efficiency using isoquants in input-productivity space. Multiple-input case

The article presents a method of establishing efficiency of business units when a result (e.g. production, profit, income) is obtained with more than one input. This approach is a generalization of a method presented in [4]. It is based on partial efficiency isoquants in the input-productivity space that were discussed in [5].

According to this approach the author suggests the following steps for measuring efficiency:

a) establishing unit isoquants on the basis of inputs and outputs data;

b) establishing technological radius corresponding with assumed proportion of inputs (or assumed proportion of productivities);

c) finding intersections of technological radius and each unit isoquant;

d) establishing the distance of the isoquant from the origin, measured along the assumed technological radius.

Suggested approach does not require solving the programming task in order to establish the apexes of efficiency frontier – which is an important simplification compared to e.g. standard DEA methods.

Keywords: *isoquant in productivity space, efficiency, DEA*