B A D A N I A O P E R A C Y J N E I D E C Y Z J E

Nr 3–4 2007

Izabela KUTSCHENREITER-PRASZKIEWICZ*

REDUKCJA ROZMYTYCH GRAFÓW PRZEDSIĘWZIĘĆ

Przedstawiono metodykę wyznaczania ryzyka realizacji przedsięwzięć dla prawdopodobieństwa wyrażonego za pomocą zmiennej lingwistycznej. Wprowadzono zbiory rozmyte typu II w celu uwzględnienia odmiennych ocen ryzyka prowadzonych przez ekspertów planujących przedsięwzięcie. Podjęto próbę opracowania metodyki redukcji grafów rozmytych, która pozwala wyznaczyć ryzyko realizacji przedsięwzięcia dla prawdopodobieństwa określonego w sposób lingwistyczny. Na przykładach przedstawiono zastosowanie zaproponowanej metodyki wyznaczania prawdopodobieństwa.

Słowa kluczowe: *planowanie, ryzyko, grafy rozmyte, zbiory rozmyte typu II, zmienna lingwistyczna*

Wprowadzenie

Planowanie przedsięwzięć wymaga szerokiej wiedzy dotyczącej struktury projektu, możliwych alternatywnych rozwiązań, czasu trwania oraz kosztu poszczególnych czynności, zakłóceń i wad występujących na różnych etapach realizacji projektu.

Wiele danych dotyczących czynności składowych planowania przedsięwzięcia jest niepewnych, czyli nie znamy prawdopodobieństwa ich wystąpienia. Do opisu lingwistycznego takich sytuacji można zastosować teorię liczb rozmytych.

Celem artykułu jest przedstawienie założeń metodologii planowania przedsięwzięć, pozwalającej wyznaczyć ryzyko. Metodologia planowania przedsięwzięć powinna łączyć elementy planowania sieciowego – sieci stochastycznych, digrafów rozmytych oraz zbiorów rozmytych. Dotychczas stosowane metody wymagały znajomości liczbowych charakterystyk planowanych przedsięwzięć. Proponowana metodologia wykorzystuje możliwości, jakie daje zastosowanie liczb rozmytych do opisu procesów zachodzących w przedsiębiorstwie.

* Katedra Inżynierii Produkcji, Akademia Techniczno-Humanistyczna, ul. Willowa 2, 43-300 Bielsko-Biała, e-mail: ipraszkiewicz@ath.bielsko.pl

1. Planowanie przedsięwzięć z wykorzystaniem grafów rozmytych

Spośród wielu metod wykorzystywanych do wspomagania planowania przedsięwzięć na szczególną uwagę zasługuje metoda GERT [2]. [9], [11]. Planowanie przedsięwzięć, których struktura może ulegać zmianie w trakcie realizacji wymaga wykorzystania sieci stochastycznych, które są bardziej złożone niż sposoby bazujące na sieciach o strukturze deterministycznej (np. CPM, PERT). Sieci stochastyczne umożliwiają wielowariantowe ustalanie zależności między zdarzeniami tej samej sieci oraz dają możliwość twórczego dobierania, w toku realizacji przedsięwzięcia, innych niż pierwotnie ustalono dróg postępowania.

Jedną z bardziej znanych metod planowania opartych na sieciach stochastycznych jest metoda GERT (*Grafical Evaluation and Review Technique*), będąca procedurą analizy sieci stochastycznych, opracowaną przez Pritskera, Happa i Whitehousa w 1965 roku. GERT jest to połączenie koncepcji budowy sieci typu PERT, grafów przepływu sygnałów (SFG), algebry grafów opracowanej przez S. Elmaghrabiego oraz stosowania elementów logicznych w sieciach.

Za pomocą procedury GERT można określać prawdopodobieństwo i czas (lub inny atrybut) transmitancji jednego wierzchołka grafu w drugi. W procedurze wyróżniamy następujące kroki:

- Przekształcenie werbalnego opisu obiektu w jego opis za pomocą sieci stochastycznej.
- Zebranie danych dotyczących transmitancji poszczególnych łuków.
- Redukcja sieci stochastycznej – znalezienie sieci lub funkcji zastępczej opisującej jednoznacznie sieć oryginalną.
- Przekształcenie sieci lub funkcji do postaci umożliwiającej określenie prawdopodobieństw lub czasu realizacji.
- Interpretacja wyników – analiza obiektu na podstawie wyników uzyskanych w poprzednim kroku.

Zastosowanie metody planowania przedsięwzięć, opartej na sieciach stochastycznych, wymaga pozyskania takich danych jak np. czas oraz prawdopodobieństwo realizacji wyodrębnionych czynności.

W analizie i planowaniu przedsięwzięć poszczególne czynności projektowe są obrazowane przez krawędzie grafu, natomiast wierzchołki odpowiadają zdarzeniom, które są traktowane jako bezwymiarowe punkty pokazujące moment rozpoczęcia i zakończenia czynności. W trakcie realizacji przedsięwzięcia mogą występować różne alternatywne sposoby realizacji poszczególnych czynności projektowych, co może być interpretowane jako krawędzie grafu o przypisanej rozmytej wadze w postaci prawdopodobieństwa określanego lingwistycznie.

W planowaniu przedsięwzięć szczególnie ważne jest określenie ryzyka, związanego z realizacją wybranego alternatywnego rozwiązania.

Opracowywana metodologia powinna być zatem oparta na następujących założeniach:

- jest możliwe wyodrębnienie czynności, z których dane przedsięwzięcie jest złożone,
- istnieje kilka alternatywnych wariantów realizacji przedsięwzięcia,
- prawdopodobieństwo sukcesu danej alternatywy jest określane w sposób lingwistyczny.

Zastosowanie teorii liczb rozmytych do planowania przedsięwzięć wymaga opracowania metod redukcji grafów rozmytych.

1.1. Prawdopodobieństwo lingwistyczne

Naturalnym sposobem oceny prawdopodobieństwa wystąpienia danego zjawiska jest użycie takich określeń: jak mało prawdopodobne, bardzo prawdopodobne itd. Konieczne staje się wprowadzenie zmiennej lingwistycznej, którą według Zadeha [12], określa się jako piątkę uporządkowaną (H, T(H), U, G, M), gdzie: H – nazwa zmiennej, T – zbiór terminów, U – obszar rozważań, G – reguła syntaktyczna generująca wartości danej zmiennej lingwistycznej, M – reguła semantyczna łącząca z każdą wartością zmiennej lingwistycznej jej znaczenie [3].

Przykład

Niech U = [0, 1] i niech będzie dana zmienna lingwistyczna H o nazwie „prawdopodobieństwo”. Zbiór terminów T może mieć postać:

T („prawdopodobieństwo”) = {mało prawdopodobne, prawdopodobne, bardzo prawdopodobne}.

Znaczenie terminów może być dane jako:

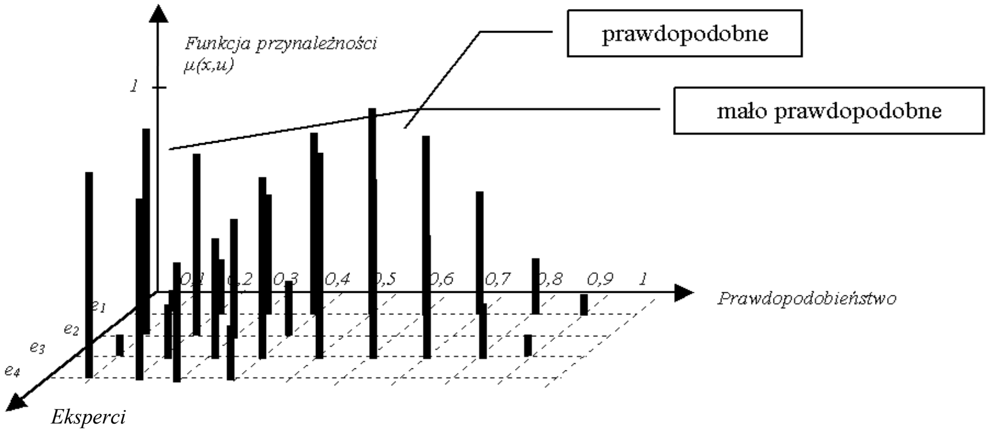
„mało prawdopodobne” = 1/0 + 0,8/0,1 + 0,6/0,2 + 0,4/0,3 + 0,2/0,4 + 0/0,5,

„prawdopodobne” = 0/0+0,2/0,1 +0,4/0,2 +0,6/0,3 +0,8/0,4 +1/0,5+ 0,8/0,6 + 0,6/0,7 + 0,4/0,8 +0,2/0,9+0/1,

„bardzo prawdopodobne” = 0/0,5+ 0,2/0,6 + 0,4/0,7 + 0,6/0,8 +0,8/0,9 + 1/1.

W planowaniu przedsięwzięć uczestniczy zazwyczaj wielu ekspertów, którzy mogą mieć odmienne doświadczenia, a co za tym idzie różne opinie dotyczące ryzyka związanego z realizacją poszczególnych etapów przedsięwzięcia. Stąd konieczność uwzględnienia w metodyce planowania przedsięwzięć odmiennych ocen ryzyka. Najbardziej naturalnym sposobem wyrażania opinii jest opinia słowna, czyli ocena lingwistyczna, przydatna zwłaszcza wtedy, gdy nie dysponuje się danymi empirycznymi.

Uwzględnienie takiego sposobu oceny prawdopodobieństwa wymaga zastosowania zbiorów rozmytych typu II. Są to zbiory, dla których stopień przynależności wyraża się funkcją (rys. 1).



Rys. 1. Przykład funkcji przynależności dla zbioru rozmytego II typu

Jeżeli $X = \{x\}$ – przestrzeń zbioru, to zbiór rozmyty typu II definiujemy [3] jako zbiór par $A_{\mathrm{II}} = \{(\mu_{A\mathrm{II}}(x),x)\}$, $\forall x \in X$, gdzie $\mu_{A\mathrm{II}}(x){:}X \to L(X)$, gdzie $L(X)$ jest rodziną zbiorów rozmytych zdefiniowanych w X o funkcjach przynależności z przedziału [0, 1].

Jeżeli:

$A, B \subseteq X$ są zbiorami rozmytymi

$$A = \sum_i \mu_A(x_i)/x_i\ ,$$

$$B = \sum_j \mu_B(x_j)/x_j$$

oraz dana jest operacja $*{:}X \times X \to X$, to można tę operację rozszerzyć na zbiory rozmyte:

$$A * B = \left(\sum_i \mu_A(x_i)/x_i\right) * \left(\sum_j \mu_B(x_j)/x_j\right) = \sum_{i,j} (\mu_A(x_i) \wedge \mu_B(x_j))/(x_i * x_j)\ .$$

Rozmyte stopnie przynależności poszczególnych x są dane przez funkcje przynależności:

$$\mu_A(x) = f(u_1)/u_1 + f(u_2)/u_2 + ... + f(u_m)/u_m = \sum_i f(u_i)/u_i\ ,$$

$$\mu_B(x) = g(w_1)/w_1 + g(w_2)/w_2 + ... + g(w_p)/w_p = \sum_j g(w_j)/w_j\ ,$$

gdzie:

$u_i \in J$, $w_i \in J$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., p$,

f, g – są funkcjami przynależności zbiorów rozmytych reprezentujących stopnie przynależności.

Podstawowe operacje na zbiorach:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \cup \mu_B(x)$$
$$= \sum_i (f(u_i)/u_i) \cup \sum_j (g(w_j)/w_j) = \sum_{i,j} (f(u_i) \wedge g(w_j))/(u_i \vee w_j).$$

Ponieważ działanie to dotyczy prawdopodobieństwa, musi zostać spełniony warunek:

$$u_i \vee w_j \leq 1,$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cap \mu_B(x)$$
$$= \sum_i (f(u_i)/u_i) \cap \sum_j (g(w_j)/w_j) = \sum_{i,j} (f(u_i) \wedge g(w_j))/(u_i \wedge w_j),$$

$$u_i \wedge w_j \leq 1.$$

1.2. Wyznaczenie transmitancji zastępczej dla grafów rozmytych

Zależności pozwalające wyznaczyć transmitancję zastępczą grafu rozmytego, dla którego prawdopodobieństwo transmitancji określono w sposób lingwistyczny, przedstawiono w tabeli 1. Zależności te opracowano na podstawie algebry grafów Elmaghrabiego [9].

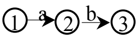
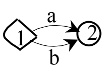
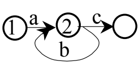
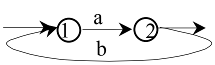
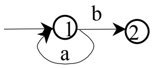
W przypadku stosowania powyższej metodyki prawdopodobieństwo transmitancji zastępczej może nie odpowiadać dokładnie żadnej z ustalonych wartości zmiennych lingwistycznych. Ponieważ w przyjętym podejściu lingwistycznym operuje się na wartościach (terminach) zmiennych lingwistycznych, należy więc otrzymany zbiór rozmyty przybliżyć w pewien najlepszy sposób jedną z wartości odpowiedniej zmiennej lingwistycznej z zadanej listy, czyli należy zastosować aproksymację lingwistyczną [3].

Niech $A \subseteq U$ będzie aproksymowanym zbiorem rozmytym, a $L = \{l\}$ – skończoną listą wartości aproksymującej zmiennej lingwistycznej. Zadanie polega na znalezieniu takiej wartości aproksymującej zmiennej lingwistycznej $l^* \in L$, żeby

$$d(A, M(l^*)) = \underset{l \in L}{\forall} d(A, M(l)),$$

gdzie $d(A, M(l))$ jest odpowiednio określoną odległością między zbiorami rozmytymi $A, M(l) \subseteq U$.

Tabela 1. Elementy algebry grafów rozmytych

	Prawdopodobieństwo transmitancji zastępczej	Prawdopodobieństwo transmitancji zastępczej (prawdopodobieństwo określane w sposób lingwistyczny)
	$p_e = p_a p_b$	$\mu_E = \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cap \mu_B(x)$ $= \sum_i (f(u_i)/u_i) \cap \sum_j (g(w_j)/w_j) = \sum_{i,j} (f(u_i) \wedge g(w_j))/(u_i \wedge w_j)$ oraz $u_i \wedge w_j \le 1$
	$p_e = p_a + p_b$	$\mu_E = \mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \cup \mu_B(x)$ $= \sum_i (f(u_i)/u_i) \cup \sum_j (g(w_j)/w_j) = \sum_{i,j} (f(u_i) \wedge g(w_j))/(u_i \vee w_j)$ oraz $u_i \vee w_j \le 1$
	$p_e = \frac{p_a p_c}{1 - p_b}$	$\mu_E = \mu_{(A\cap C)/(1-B)}(x) = (\mu_A(x) \cap \mu_C(x))/(1 - \mu_B(x))$ $= \sum_{i,j,k} (f(u_i) \wedge g(w_j) \wedge h(x_k))/((u_i \wedge x_k)/(1 - w_j))$ oraz $(u_i \wedge x_k)/(1 - w_j) \le 1$
	$p_e = \frac{p_a}{1 - p_a p_b}$	$\mu_E = \mu_{(A)/(1-A\wedge B)}(x) = \mu_A(x)/(1 - \mu_A(x) \cap \mu_B(x))$ $= \sum_{i,j,k} (f(u_i) \wedge g(w_j))/(u_i/(1 - w_j \wedge u_i))$ oraz $u_i/(1 - w_j \wedge u_i) \le 1$
	$p_e = \frac{p_b}{1 - p_a}$	$\mu_E = \mu_{B/(1-A)}(x) = \mu_B(x)/(1 - \mu_A(x))$ $= \sum_{i,j,k} (f(u_i) \wedge g(w_j))/(w_j/(1 - u_i))$ oraz $w_j/(1 - u_i) \le 1$

Należy wybrać tę wartość zmiennej lingwistycznej, dla której spełniony jest warunek

$$\left| A - M(l^*) \right| \to \min,$$

gdzie:

A – aproksymowany zbiór rozmyty – wyliczona transmitancja zastępcza,

$M(l^*)$ – zbiór odpowiadający zdefiniowanej wielkości lingwistycznej.

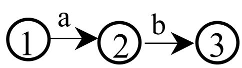
Porównanie kolejnych aproksymowanych wariantów jest związane z zastosowaniem defuzyfikacji metodą środka ciężkości:

$$A - M(l^*) = x^* = \frac{\sum_i x_i\, \mu(x_i)}{\sum_i \mu(x_i)} \to \min.$$

1.3. Przykłady zastosowania

Przykład 1

Dla czynności *a* oraz *b*, które są realizowane w układzie szeregowym (rys. 2), prawdopodobieństwo zaistnienia czynności *a* zostało określone w sposób lingwistyczny jako mało prawdopodobne, natomiast prawdopodobieństwo zaistnienia czynności *b* określono jako bardzo prawdopodobne.



Rys. 2. Przykładowy graf

Prawdopodobieństwo transmitancji zastępczej zostało wyznaczone w następujący sposób:

$$X = \{a, b\},$$

$$\mu_E = \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cap \mu_B(x)$$
$$= \sum_i (f(u_i)/u_i) \cap \sum_j (g(w_j)/w_j) = \sum_{i,j} (f(u_i) \wedge g(w_j))/(u_i \wedge w_j),$$

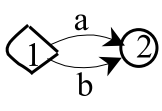
$$u_i \wedge w_j \leq 1,$$

p_a = „mało prawdopodobne” = 1/0 + 0,8/0,1+0,6/0,2+0,4/0,3+0,2/0,4+0/0,5,
p_b = „bardzo prawdopodobne” = 0/0,5+ 0,2/0,6 + 0,4/0,7 + 0,6/0,8+0,8/0,9+1/1,
$p_e = p_a p_b$.

$$p_e = (1/0 + 0,8/0,1 + 0,6/0,2 + 0,4/0,3 + 0,2/0,4 + 0/0,5)$$
$$\wedge\ (0/0,5+ 0,2/0,6 + 0,4/0,7 + 0,6/0,8 + 0,8/0,9 + 1/1)$$
= 1/0+0,8/0,1+0,6/0,2+0,4/0,3+0,2/0,4+0,/0,5 = „mało prawdopodobne”.

Przykład 2

Dla czynności *a* oraz *b*, które są realizowane w układzie równoległym (rys. 3), prawdopodobieństwo zaistnienia czynności *a* zostało określone w sposób lingwistyczny jako mało prawdopodobne, natomiast prawdopodobieństwo zaistnienia czynności *b* określono jako bardzo prawdopodobne.



Rys. 3. Przykładowy graf

Prawdopodobieństwo transmitancji zastępczej zostało wyznaczone w następujący sposób:

$$X = \{a, b\},$$

$$\mu_E = \mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \cup \mu_B(x)$$
$$= \sum_i (f(u_i)/u_i) \cup \sum_j (g(w_j)/w_j) = \sum_{i,j} (f(u_i) \wedge g(w_j))/(u_i \vee w_j),$$

$$u_i \vee w_j \leq 1,$$

p_a = „mało prawdopodobne”= 1/0 + 0,8/0,1+0,6/0,2+0,4/0,3+0,2/0,4+0/0,5,
p_b = „bardzo prawdopodobne” = 0/0,5+ 0,2/0,6 + 0,4/0,7 + 0,6/0,8+0,8/0,9+1/1,
$p_e = p_a + p_b$.

$$p_e = (1/0 + 0,8/0,1 + 0,6/0,2 + 0,4/0,3 + 0,2/0,4 + 0/0,5)$$
$$\vee\ (0/0,5+ 0,2/0,6 + 0,4/0,7 + 0,6/0,8 + 0,8/0,9 + 1/1)$$
= 0/0,5+0,2/0,6+0,4/0,7+0,6/0,8+0,8/0,9+1/1 = „bardzo prawdopodobne”.

Wnioski

Przedstawiona metoda redukcji grafów rozmytych może znaleźć zastosowanie w planowaniu prac badawczo-rozwojowych, które charakteryzują się wariantowością oraz niepewnością realizacji. Zastosowanie danych określanych lingwistycznie jest naturalnym sposobem intuicyjnego określania prawdopodobieństwa zdarzeń, dla których nie dysponujemy wiedzą empiryczną. Algebra grafów umożliwia określenie ryzyka związanego z realizacją złożonego przedsięwzięcia z uwzględnieniem wariantowości oraz sprzężeń zwrotnych. Podane przykłady pokazują zastosowanie metody wyznaczania transmitancji zastępczej dla wybranych węzłów grafów.

Bibliografia

[1] BLUE M., BUSH B., PUCKETT J., *Applications of Fuzzy Logic to Graph Theory*, Los Alamos National Laboratory, 1997.
[2] GAVARESHKI M., *New Fuzzy GERT Method for Research Projects Scheduling*, International Engineering Management Conference 2004.
[3] KACPRZYK J., *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*, PWN, Warszawa 1986.
[4] KUTSCHENREITER-PRASZKIEWICZ I., KONSZTOWICZ K., *The application of artificial intelligence nethod in organization of machining production process*, 7th Int. Multidisciplinary Conference, Baia Mare, Romania, 17–18 May 2007, s. 381–388.

[5] KUTSCHENREITER-PRASZKIEWICZ I., *Chosen problems of modelling engineering design process. Business Processes Optimization*, Applied Computer Science, Vol. 2, No. 2, 2006, Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej. s. 141–148.
[6] KUTSCHENREITER-PRASZKIEWICZ I., *Zastosowanie sieci neuronowych do wyznaczania czasu przygotowawczego-zakończeniowego operacji technologicznych*, Miesięcznik Naukowo-Techniczny Mechanik, Nr 1/2007, s. 48–50, Agenda Wydawnicza SIMP, ISSN 0025-6552.
[7] ŁACHWA A., *Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji*, EXIT, Warszawa 2001.
[8] MENDEL J., JOHN R., *Type-2 fuzzy sets made simple*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 10, No. 2, April 2002.
[9] NASIEROWSKI W., *Metoda GERT*, Przegląd Organizacji, Nr 2/1978.
[10] PRITSKER A., ALAN B., *GERT Graphical Evaluation and Review Technique*, RAND Research The Research Memorandum, NASA 1966.
[11] RADZIKOWSKI W., *Badania operacyjne w zarządzaniu*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1994.
[12] ZADEH L.A., *The concept of linguistic variable and it's application to approximate reasoning*, Part I and II, Inf. Sci., Vol. 8, 1975.

Graph reduction method for fuzzy graph

The methodology of risk calculation for project network techniques is presented. Development and research work is connected with uncertainty and risk. Many models for engineering design process are described in literature but it is necessary to develop a new one which would involve uncertainty. In project management there is much imprecise information based on experts knowledge, such as probability of planning events.

Most real-world probabilities are far from being precisely known or measurable numbers. Transitions from precise probabilities to imprecise probabilities in probability theory are a form of generalization. In particular, a probability distribution may be described in words as likely or unlikely.

Risk was determined by linguistic variable in the proposed methodology. Type II fuzzy set was used to model the effects of uncertainties in risk determination in project scheduling because of a few experts being concerned with the project. A new graph reduction method for fuzzy graph (graph with fuzzy weight) has been elaborated. It is useful for risk calculation defined by linguistic variable in research and development project planning. The new methodology was illustrated by two examples.

Keywords: *planning, risk, fuzzy graph, type II fuzzy set, linguistic variable*