B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 2 2006

Grażyna TRZPIOT*

POMIAR RYZYKA FINANSOWEGO W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

Zarządzanie losowymi przyszłymi stopami zwrotu jest podstawowym zadaniem finansów w otoczeniu, które ma charakter stochastyczny. Ważne są zadania bazujące na optymalizacji *VaR*, które są podejściem probabilistycznym do zagadnienia. Rozwój aksjomatycznej teorii związanej z *koherentnymi miarami ryzyka* wskazał na odporny odpowiednik *VaR*, nazywany *CVaR*. W pracy omawiamy związek tej miary z dominacjami stochastycznymi.

Słowa kluczowe: *programowanie stochastyczne, koherentne miary ryzyka, value-at-risk, conditional value-at-risk, dominacje stochastyczne*

Wprowadzenie

Zmaganie się z niepewnymi wartościami przyszłych obserwacji jest fundamentalnym problemem optymalizacyjnym w stochastycznym otoczeniu. Problem ten dotyczy zarówno funkcji celu, jak i ograniczeń rozpatrywanego zadania.

W polu zastosowań programowania stochastycznego, które wyrosło z tradycji programowania liniowego i kwadratowego, ograniczenia dotyczące przyszłych wartości są zazwyczaj zastępowane funkcją kary. Probabilistyczne ograniczenia wymagają, aby założenia były spełnione z pewnym prawdopodobieństwem. Wymagania te są na ogół spełniane, ale przyjęte wcześniej założenia o wypukłości, czasem o ciągłości na etapie formułowania problemu, często pomija się, z wyjątkiem specjalnych przypadków. Funkcja celu ma zazwyczaj postać maksimum oczekiwanej użyteczności lub minimalizacji oczekiwanych koszów, które mogą być częściowo uwzględnione w funkcji kary.

* Katedra Statystyki, Akademia Ekonomiczna im. K. Adamieckiego w Katowicach, ul. Bogucicka 14, 40-226 Katowice, e-mail: trzpiot@ae.katowice.pl

W zadaniach optymalizacyjnych w finansach, gdzie niepewność jest nie do uniknięcia, podejście wynikające z programowania stochastycznego zdaje się być odpowiednim. Tradycyjne zadanie z teorii portfela to minimalizacja wariancji stopy zwrotu aktywów przy ograniczeniach dotyczących poziomu oczekiwanej stopy zwrotu. Inne warianty tego zadania znamy z zastosowań i literatury. Ważnym przypadkiem jest zadanie, w którym ograniczenia i funkcja celu odnoszą się do *value-at-risk*, które z definicji ma probabilistyczne ograniczenia, ale niestety nie ma dobrych matematycznych własności. Nie ma też dobrych finansowych własności, ponieważ nie jest miarą koherentną. Omówimy dodatkowo alternatywę, odporną na wartości ekstremalne, czyli *conditional value-at-risk*.

1. Problem decyzyjny w warunkach niepewności

Podstawowym czynnikiem mającym wpływ na opis problemu jest ***przyszłość***. Podejmujemy ryzyko dzisiaj, podejmując określone decyzje, ale nie znając konsekwencji naszych decyzji, zatem:

a) czas koryguje te decyzje,

b) podejmujemy ryzyko.

Problem decyzyjny w warunkach niepewności, ujęty w tytule, rozumiemy jako niepewność (*uncertainty*) co do wartości przyszłych stanów.

Problem decyzyjny może być sformułowany następująco:

> Wybieramy element $x \in S$ (S jest zbiorem dopuszczalnych alternatyw decyzyjnych), podejmujemy decyzję $f(x, \omega)$, przy czym ω jest obserwowane później ($\omega \in \Omega$). Determinujemy funkcję, która zależy od czynnika losowego, zatem zmienną losową. Podejmujemy decyzję, determinując zmienne losowe.

Określając szczegółowo powyższy problem decyzyjny, możemy zapisać następujące zadania decyzyjne, przy ustalonej funkcji celu $f_0(x, \omega)$ oraz przeliczalnym zbiorze ograniczeń $f_i(x, \omega)$, gdzie $i = 1, ..., n$ (n jest liczbą składników portfela):

1) szacujemy nieznane parametry rozkładu, czyli estymacja wartości ω

$$\min f_0(x, \omega)$$

$$f_i(x, \omega) \le 0$$

2) obserwujemy wartości oczekiwane determinowanych zmiennych losowych

$$\min E(f_0(x, \omega))$$

$$E(f_i(x, \omega)) \le 0$$

3) budujemy funkcję straty, czyli rozważamy najgorszy przypadek

$$\min \sup_{\omega \in \Omega} f_0(x, \omega)$$

$$f_i(x, \omega) \leq 0$$

4) dopuszczamy straty z przyjętym z góry prawdopodobieństwem, czyli rozważamy probabilistyczne ograniczenia:

znaleźć najmniejsze $\alpha \in (0, 1)$ takie, że

$$\text{prob}\{ f_0(x, \omega) \leq \alpha\} \geq \alpha_0$$

$$\text{prob}\{ f_i(x, \omega) \leq \alpha\} \geq \alpha_i$$

2. Pomiar ryzyka w warunkach niepewności

Przejdziemy do opisu pomiaru możliwych konsekwencji podejmowanych decyzji w warunkach niepewności. Zdefiniujemy koherentną miarę ryzyka. Miara ryzyka wyznacza wszystkie możliwe straty (odniesieniem jest pewien *benchmark* o zerowych stratach). Przestrzeń probabilistyczną zapiszemy jako (Ω, A, P), zmienna losowa jest elementem z $L^2 = L^2(\Omega, A, P)$.

Definicja 1

Koherentna miara ryzyka to funkcjonał R: $L^2 \to (-\infty,\infty)$ o następujących własnościach:

a) dla $c \in R$ zachodzi $R(X + c \cdot r) = R(X) - c$,

b) $R(X + Y) \leq R(X) + R(Y)$, dla dowolnych $X, Y \in L^2$,

c) $X, Y \in L^2$, jeżeli $X \leq Y$, to $R(Y) \leq R(X)$,

d) $X \in L^2$ i $\lambda \geq 0$, $R(\lambda X) = \lambda R(X)$.

Problem, który należy podjąć to ograniczenie ryzyka, czyli wyznaczenie rozwiązania następującego zadania (dla ustalonej miary ryzyka R_0 oraz ustalonego $f_0(x, \omega)$):

$$\min R_0(f_0(x, \omega)).$$

Jeżeli minimalizujemy ryzyko, dla każdej zmiennej losowej kreowanej w przyszłości poprzez podejmowane decyzje, otrzymujemy ciąg zadań: $R_1, R_2, \ldots, R_m$.

Określone wcześniej problemy decyzyjne możemy zapisać w odniesieniu do koherentnej miary ryzyka następująco ($\omega \in \Omega$):

1) szacujemy nieznane parametry, czyli estymacja

$$R: X \to X(\omega)$$

2) obserwujemy wartości oczekiwane zmiennych losowych

$$R: X \to E(X)$$

3) funkcja straty, rozważamy najgorszy przypadek

$$R: X \to \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

4) rozważamy probabilistyczne ograniczenia (dla $\alpha \in (0, 1)$)

$$R: X \to VaR_\alpha X$$

$$R_i(x) = VaR\alpha_i\,(x).$$

Wszystkie zapisane powyżej zadania mają implementację w pewnej klasie zadań, odnoszących się do ustalonej miary ryzyka.

3. Dominacje stochastyczne a pomiar ryzyka

Relacja dominacji stochastycznych wyznacza częściowy porządek w zbiorze zmiennych losowych, będących przyszłymi stopami zwrotu rozważanych inwestycji. Jeżeli funkcja użyteczności inwestora jest rosnąca i wklęsła, to dominacja stochastyczna drugiego rodzaju jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla maksymalizacji oczekiwanego zwrotu z inwestycji [11]. Szczegółowo tematyka ta została przedstawiona w pracy [8]. W tym rozdziale omówimy zależność między dominacjami stochastycznymi a koherentnymi miarami ryzyka.

Definicja 2

Niech F i G będą dystrybuantami rozkładów stopy zwrotu dwóch porównywanych inwestycji X i Y określonych na przedziale $[a, b]$. Mówimy, że X dominuje Y i jest to dominacja odpowiednio pierwszego oraz drugiego rodzaju (FSD, SSD) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$H_1(x) = F(x) - G(x) \le 0 \ \text{dla} \ x \in [a,b] \ (X\,FSD\,Y),$$

$$H_2(x) = \int_a^x H_1(y)dy \le 0 \ \text{dla} \ x \in [a,b] \ (X\,SSD\,Y).$$

Definicja 3

Niech F będzie dystrybuantą rozkładu stopy zwrotu inwestycji X; wówczas dla $\alpha \in (0, 1)$ *value-at-risk* definiujemy następująco:

$$VaR_{\alpha}(X) = -\inf\{x \mid F(x) > \alpha\}.$$

Definicja 3

Niech F będzie dystrybuantą rozkładu stopy zwrotu inwestycji X; wówczas dla $\alpha \in (0, 1)$ *conditional value-at-risk* definiujemy następująco:

$$CVaR_{\alpha}(X) = -E(X \mid X \leq VaR_{\alpha}(X)).$$

Pflug, korzystając z powyższych definicji oraz własności monotoniczności wartości oczekiwanej, udowodnił następujące twierdzenie [3]. W dowodzie zapisano nową wersję twierdzenia o dominacjach stochastycznych, podaną w pracy Levy'ego [2].

Twierdzenie 1

Dla dwóch zmiennych losowych X i Y zachodzą następujące związki:

a) $X\ FSD\ Y \Leftrightarrow VaR_{\alpha}(X) \leq VaR_{\alpha}(Y)$,

b) $X\ SSD\ Y \Leftrightarrow C\ VaR_{\alpha}(X) \leq C\ VaR_{\alpha}(Y)$.

Można zapisać tezy powyższego twierdzenia, odwołując się do definicji koherentnej miary ryzyka w formie poniższego wniosku.

Wniosek

Dla dwóch zmiennych losowych X i Y zachodzi $R(X) \leq R(Y)$ w szczególności, jeżeli $X\ SSD\ Y$, ale nie odwrotnie.

Komentując przedstawione wyniki, można ująć to następująco: ryzyko można odnieść tylko do $CVaR$.

4. Uogólniona miara odchylenia

Miara odchylenia ma wyznaczać poziom zmienności wartości zmiennej losowej. Zapiszemy twierdzenie opisujące zależność pomiędzy miarą odchylenia a miarą ryzyka.

Definicja 4

Uogólniona miara odchylenia to funkcjonał D: $L^2 \to [0, \infty)$ o następujących własnościach:

a) $D(X + C) = D(X)$,

b) $D(0) = 0$ i $\lambda > 0$, $D(\lambda X) = \lambda D(X)$,

c) $D(X + Y) \leq D(X) + D(Y)$,

d) $D(X) \geq 0$.

Uogólniona miara odchylenia jest *koherentna*, jeżeli spełnia dodatkowo warunek

e) $D(X) \leq EX - \inf X$, dla dowolnej zmiennej losowej X.Powyższe własności odpowiadają własnościom odchylenia standardowego, z wyjątkiem własności symetrii $D(-X) \neq D(-X)$. Najważniejszym powodem odejścia od standardowego odchylenia jest inne podejście do opisu wartości mniejszych i większych od wartości oczekiwanej. Z powyższych własności wynika, że uogólniona miara odchylenia jest funkcjonałem wypukłym. Przykładami znanych miar spełniających powyższe własności są: symetryczne miary, takie jak $\sigma(X)$[1] oraz $\lambda\sigma(X)$ (dla dowolnego λ), niesymetryczne miary $\sigma_-(X)$ oraz $\sigma_+(X)$ (nadwyżki rynkowe są ujemne lub dodatnie).

Twierdzenie 2

Uogólniona miara odchylenia odpowiada koherentnej mierze ryzyka zgodnie z następującymi relacjami: [5]

a) $D(X) = R(X - EX)$,

b) $R(X) = E(-X) + D(X)$.

W powyższej zależności $D(X)$ jest koherentne wtedy i tylko wtedy, gdy $R(X)$ jest koherentna.

Komentując wynik powyższego twierdzenia, można zapisać przykład odnoszący się do wszystkich wcześniejszych pojęć, również do dominacji stochastycznych.

Przykład 1

Dla dowolnego $\alpha \in (0, 1)$ funkcjonał

$$D(X) = CVaR_\alpha(X - EX)$$

jest ciągły i wyznacza koherentną miarę ryzyka

$$R(X) = CVaR_\alpha(X).$$

Powyższy przykład można uogólnić, wprowadzając kombinację liniową $CVaR_\alpha$ (*mixed CvaR – deviation*) lub rozpatrując najgorszy przypadek (*worst-case mixed CVaR – deviation*).

Przykład 2

Dla dowolnego zbioru $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in (0, 1)$ oraz zbioru wag $w_1, w_2, ..., w_m$ ($w_1 + w_2 + ... + w_m = 1$) funkcjonał

$$D(X) = w_1 CvaR\alpha_1(X - EX) + w_2 CVaR\alpha_2(X - EX) + \ldots + w_m CVaR\alpha_m(X - EX)$$

jest ograniczony, koherentny i wyznacza koherentną miarę ryzyka

$$R(X) = w_1 CVaR\alpha_1(X) + w_2 CVaR\alpha_2(X) + \ldots + w_m CVaR\alpha_m(X).$$

Przykład 3

Dla dowolnego zbioru $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in (0, 1)$ funkcjonał opisujący najgorszy przypadek

[1] $\sigma_-(X) = \|X - EX\|_2$, $\sigma_-(X) = \|[X - EX]_-\|_2$, $\sigma_-(X) = \|[X - EX]_+\|_2$

$$D(X) = \max\{\mathrm{CVaR}\alpha_1(X - EX), CVaR\alpha_2(X - EX), \ldots, CVaR\alpha_m(X - EX)\}$$

jest ograniczony z dołu i wyznacza koherentną miarę ryzyka

$$R(X) = \max\{CVaR\alpha_1(X), CVaR\alpha_2(X), \ldots, CVaR\alpha_m(X)\}.$$

Podsumowanie

Przedstawione rozważania są próbą uporządkowania zależności między koherentnymi miarami ryzyka a dominacjami stochastycznymi. Aby teoria była użyteczna, powinna być wolna od zaprzeczeń oraz powinna odzwierciedlać podstawowe myślenie o podejmowaniu ryzyka. Uważnie zapisujemy zatem definicję *miary ryzyka*. Uogólniona miara odchylenia pokazuje możliwość opisu poziomu zmienności niepewnych przyszłych wartości badanych zmiennych.

Value-at-risk, nawet definiowana jako kwantyl, ma kilka wad. Wykorzystując tę miarę, akceptujemy pozycje, które z wysokim prawdopodobieństwem są korzystne oraz takie, które z bardzo małym prawdopodobieństwem prowadzą do bankructwa. Pomiar ryzyka można prowadzić wykorzystując conditional value-at-risk, korzystając z wniosków z przedstawionych twierdzeń. Aplikacje przedstawionego podejścia w analizie portfelowej wraz z możliwymi modyfikacjami zdań klasycznych zostały podjęte w kolejnych pracach [9, 10].

Miary ryzyka są zdefiniowane na zbiorze zmiennych losowych tak, że możemy wykorzystać modele korelacji, kiedy mamy różne pozycje w portfelu inwestycji. To odzwierciedla fakt, że akceptacja nowej pozycji, powiedzmy nowej umowy ubezpieczeniowej albo nowego rodzaju opcji, jest zależna od innych elementów w portfelu.

Bibliografia

[1] ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J.-M., HEATH D., *Coherent Measure of Risk*, Mathematical Finance, 1999, 9, 203–228.

[2] LEVY H., *Stochastic dominance and expected utility: survey and analysis*, Management Science, 1992, 38, 555–593.

[3] PFLUG G.Ch., *Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk*, [in:] *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[4] ROCKAFELLAR R.T., URYASEV S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, Journal of Risk, 2000, 2, 21–41.

[5] ROCKAFELLAR R.T., URYASEV S., *Generalized Deviations in Risk Analysis*, Finance and Stochastic, 2005, 9.

[6] TASCHE D., *Risk contribution and performance measurement*, Working paper, TU, Munich 2000.
[7] TRZPIOT G., *O wybranych własnościach miar ryzyka*, Badania operacyjne i decyzje, 2004**, 3–4,** 91–98
[8] TRZPIOT G., *Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka na rynku finansowym*, AE, Katowice 2006.
[9] TRZPIOT G., *O zastosowaniu shortfall-beta w analizie portfelowej*, Prace Naukowe AE, Katowice (w druku), 2006.
[10] TRZPIOT G., *Uogólniona miara odchylenia a optymalizacja decyzji inwestycyjnych*, Prace Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego (w druku), 2006.
[11] YITZHAKI S., *Stochastic Dominance, Mean Variance and Gini's Mean Difference*, American Economic Review, 1982, 72, 178–185.

Measuring financial risks under uncertainty

Coping with the uncertainties of future outcomes is a fundamental theme in finance in a stochastic environment. In the field of stochastic programming, which grown from the traditions of linear and quadratic programming, constrains on future outcomes have commonly been relaxed to the penalty expressions. Probabilistic constrains, requiring that a condition only to be satisfied up to a given probability. Objectives have usually taken the form of maximizing of expected utility or minimizing an expected cost. In financial optimization where uncertainties are likewise unavoidable, approaches of stochastic programming have prevailed. An important example is constrains and objective based on the notion value-at-risk, which related closely to probabilistic one unfortunately it suffer from similar mathematical shortcomings. Value-at-risk suffers from financial inconsistencies, which have led to axiomatic development of *coherent risk measures*, so we add also the robust alternative called conditional value-at-risk. We cope also with some connection between *CVaR* and stochastic dominance.

Keywords: *stochastic programming, coherent risk measures, value-at-risk, conditional value-at-risk, stochastic dominance*