

Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

pod redakcją
Walentego Ostasiewicza



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci

Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Zbigniew Palmowski

Redaktor Wydawnictwa

Aleksandra Śliwka

Redakcja techniczna

Barbara Łopusiewicz

Korektor

Barbara Cibis

Łamanie

Beata Mazur

Projekt okładki

Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych The Central European Journal of Social Sciences and Humanities <http://cejsh.icm.edu.pl> oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie wymaga pisemnej zgody Wydawnictwa

© Copyright Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2011

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695-186-7

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp	7
Irmina Czarna, Zbigniew Palmowski , Porównanie prawdopodobieństw paryskiej i klasycznej ruiny dla procesu ryzyka typu Lévy'ego	9
Irmina Czarna, Zbigniew Palmowski , Problem wyboru optymalnej paryskiej dywidendy dla procesu ryzyka typu Lévy'ego – numeryczna analiza	22
Joanna Dębicka , Składki netto dla ubezpieczeń wielostanowych obciążone kosztami zawarcia i prowadzenia umowy	38
Monika Dyduch , Niekonwencjonalna metoda prognozy wartości jednostek funduszy emerytalnych	69
Stanisław Heilpern , Niestandardowe modele ryzyka – badanie wpływu stopnia zależności na prawdopodobieństwo ruiny	79
Aleksandra Iwanicka , Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w dwuwymiarowym modelu ryzyka z lekkoogonowymi rozkładami wypłat	92
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki , Składki zaufania z zastosowaniem niesymetrycznych funkcji strat	101
Kamil Jodź , Składka w modelu ryzyka indywidualnego z zależnymi roszczeniami opisanymi funkcjami łączącymi	118
Marek Kałuszka, Michał Krzeszowiec , Własności składki <i>mean-value</i> przy zniekształconym prawdopodobieństwie	136
Zbigniew Michna , Procesy Lévy'ego w modelach ubezpieczeniowych	149
Agnieszka Mruklik , Ubezpieczenia na życie ze stochastyczną techniczną stopą oprocentowania – zastosowanie modelu Hulla i White'a	157
Agnieszka Pobłocka , Rezerwa IBNR w ubezpieczeniach majątkowych – praktyczne metody jej szacowania	173
Agata de Sas Stupnicka , Równowaga na rynku ubezpieczeń zdrowotnych w zależności od przyjętego sposobu rozliczania świadczeń medycznych	190
Joanna Sawicka , Zagadnienia kalkulacji składki zaufania na podstawie łącznej wartości i liczby szkód	202
Alicja Wolny-Dominiak , Analiza porównawcza modeli mieszanych szacowania stóp taryf w ubezpieczeniach majątkowych z wykorzystaniem krosvalidacji	229
Walenty Ostasiewicz , Polacy nie gęsi, iż swój język mają!	238

Summaries

Irmina Czarna, Zbigniew Palmowski , Comparison of Parisian and classical ruin probabilities for a Lévy risk process	21
Irmina Czarna, Zbigniew Palmowski , Numerical analysis of dividend problem with Parisian delay for a spectrally negative Lévy risk process	37
Joanna Dębicka , Expense-loaded premiums for multistate insurance contracts	68
Monika Dyduch , Alternative method of forecast of pension funds units value	78
Stanisław Heilpern , Nonstandard risk models – study of influence of the degree of dependence on the probability of ruin	91
Aleksandra Iwanicka , The influence of some outside risk factors on a ruin probability in a two-dimensional risk model with light-tailed claim sizes	100
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki , Credibility premiums using asymmetric loss functions	117
Kamil Jodź , Insurance premium in individual risk model with dependent claims described by copulas functions	135
Marek Kaluszka, Michał Krzeszowiec , Properties of mean-value principle under rank-dependent utility model	148
Zbigniew Michna , Lévy processes in insurance models	156
Agnieszka Mruklik , Life insurance with stochastic interest rate – an application of the Hull and White model	172
Agnieszka Pobłocka , IBNR reserve in non-life insurance. Practical methods of its estimation	189
Agata de Sas Stupnicka , Balance on the health insurance market – the impact of payment system	201
Joanna Sawicka , Calculation of credibility premium on the basis of number and total amount of claims	228
Alicja Wolny-Dominiak , Comparative analysis of mixed models for ratemaking in non-life insurance with k-fold cross-validation	237

Agnieszka Pobłocka

Uniwersytet Gdański

REZERWA IBNR W UBEZPIECZENIACH MAJĄTKOWYCH – PRAKTYCZNE METODY JEJ SZACOWANIA*

Streszczenie: Rezerwa IBNR to najważniejsza z rezerw ubezpieczeń majątkowych. W Polsce do tej pory była ona szacowana głównie metodami deterministycznymi, jednakże ze względu na nowelizację europejskich wymogów wypłacalności zakładów ubezpieczeń będzie obowiązkowo, od 1.11.2012 r., estymowana metodami stochastycznymi. W artykule scharakteryzowano rezerwę IBNR oraz przedstawiono wybrane metody jej szacowania ze szczególnym uwzględnieniem modeli stochastycznych. Autorka zastanawia się także, które metody należy wykorzystać w praktyce?

Słowa kluczowe: rezerwa IBNR, trójkąty szkód, deterministyczne i stochastyczne metody szacowania rezerwy IBNR.

1. Wstęp

Zakłady ubezpieczeń prowadzące działalność na terenie naszego kraju zobowiązane¹ są do zawiązywania funduszu rezerwowego, zwanego rezerwami techniczno-ubezpieczeniowymi (TU), który przeznaczony jest na pokrycie bieżących i przyszłych zobowiązań wynikających z zawartych umów ubezpieczenia². Środki te stanowią istotny instrument zarządzania gospodarką finansową towarzystw ubezpieczeniowych (por. [Gąsioriewicz 2009, s. 228-229]). Najważniejszą z rezerw TU w ubezpieczeniach życiowych (długoterminowych) jest rezerwa składki, jej odpowiednikiem w ubezpieczeniach majątkowych (krótkoterminowych) jest rezerwa z tytułu zaistniałych szkód niezgłoszonych do dnia tworzenia rezerw, tzw. rezerwa IBNR (*Incurred But Not Reported*). Wpływa ona istotnie na poziom funduszu ubezpieczeniowego³ – stanowi od

* Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki.

¹ Art. 149 Ustawy z dnia 23 maja 2003 r. o działalności ubezpieczeniowej, DzU 2003 nr 124, poz. 1154.

² Według stanu na dzień 31 grudnia 2009 r., wartość rezerw TU brutto zakładów ubezpieczeń ogółem prowadzących działalność na terenie Polski wynosiła w cenach nominalnych 100 mld zł (Dział I – 71 mld zł, Dział II – 29 mld zł).

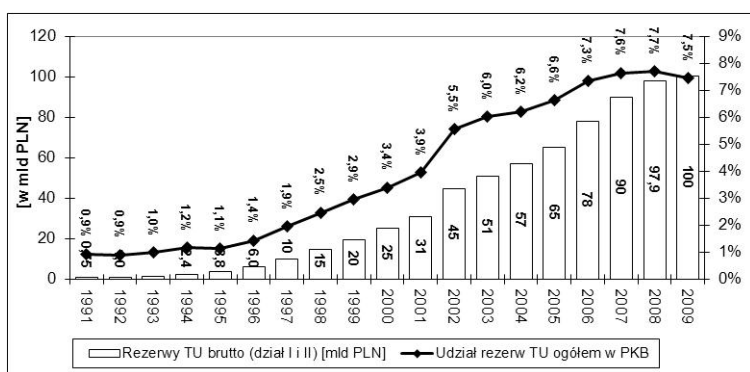
³ Fundusz ubezpieczeniowy to rezerwy TU na udziale własnym nazywane rezerwami TU netto.

1991 r. ok. 17-22% rezerw TU na udziale własnym działu II (por. [Pobłocka 2010, s. 60-63]).

Celem niniejszej pracy jest krótka charakterystyka rezerwy IBNR, zarys historyczny metod jej szacowania oraz prezentacja zastosowania wybranych modeli w ubezpieczeniach majątkowych.

2. Charakterystyka rezerwy IBNR i zarys historyczny metod jej szacowania

Rezerwy *TU* powinny być zawiązywane na poziomie zapewniającym gwarancję ochrony ubezpieczeniowej oraz wypłacalność zakładów ubezpieczeń, przy którym nie ukrywa się rzeczywistych dochodów towarzystw ubezpieczeniowych (por. [Monkiewicz 2003, s. 205; Ronka-Chmielowiec 1997, s. 128-129]). Ich wartość nominalna i ich udział w PKB jest znaczny⁴ (rys. 1 i 2) i dlatego wymagają one odpowiedniej kontroli od strony zarządów zakładów ubezpieczeń oraz od strony państwa.

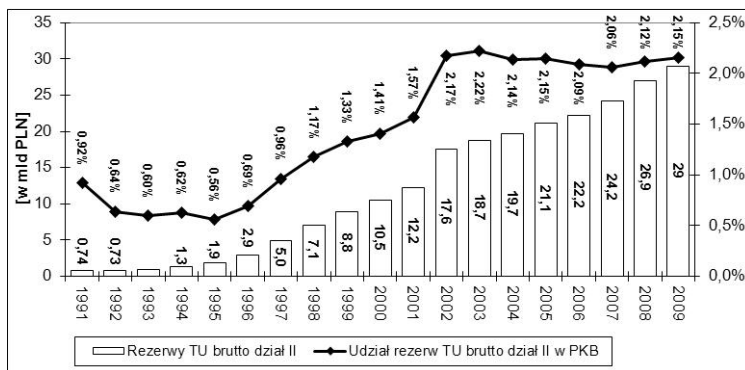


Rys. 1. Rezerwy TU ogółem (dział I i dział II) i ich udział w PKB (w mld zł, %)

Źródło: Biuletyny roczne KNF (Rynek ubezpieczeń – zagregowane raporty finansowe zakładów ubezpieczeń) oraz Raporty GUS.

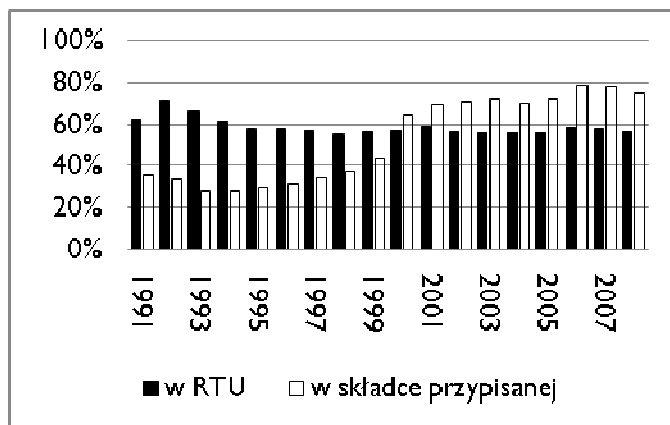
W ubezpieczeniach majątkowych od początku lat 90. XX wieku największy udział w rezerwach TU ma rezerwa z tytułu niewypłaconych odszkodowań i świadczeń, tzw. rezerwa szkód (stanowi ok. 55-72% rezerw *TU*, rys. 3). Obejmuje ona rezerwy z tytułu szkód zarejestrowanych i oszacowanych (RBNS – *Reported But Not Settled*), rezerwy z tytułu zaistniałych szkód niezarejestrowanych (IBNR – *Incu-*

⁴ Udział składki przypisanej brutto w PKB (tzw. wskaźnik penetracji rynku ubezpieczeń) w 2007 roku dla Polski wynosił 3,7%, a dla Państw OECD 9,7%, a dla EU (15 państw) 10% według raportu OECD z 2008 r. (por. [Pobłocka 2009, s. 49-68]).



Rys. 2. Rezerwy TU brutto działu II i ich udział w PKB (w mld zł, %)

Źródło: Biuletyny roczne KNF (Rynek ubezpieczeń – zagregowane raporty finansowe zakładów ubezpieczeń) oraz Raporty GUS.

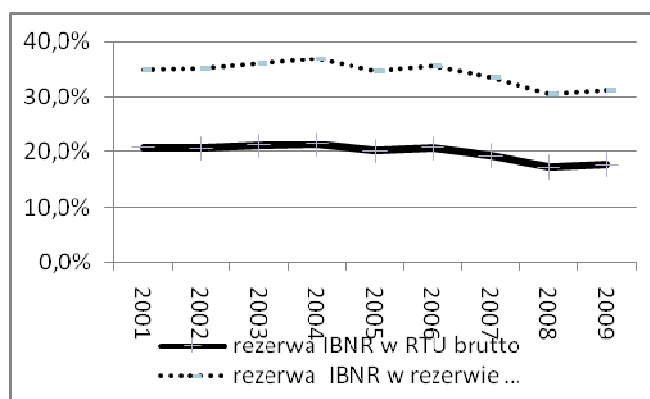


Rys. 3. Udział rezerwy szkód w rezerwach TU brutto i w składce przypisanej brutto (dział II, w %)

Źródło: Biuletyny roczne KNF (Rynek ubezpieczeń – zagregowane raporty finansowe zakładów ubezpieczeń).

red But Not Reported), rezerwy z tytułu zarejestrowanych szkód jeszcze nieoszacowanych (IBNER – *Incured But Not Enough Reported*) oraz rezerwy z tytułu szkód wznowionych⁵. W strukturze rezerwy szkód największy odsetek ma rezerwa RBNS (ok. 35-50%). Drugi z kolei udział ma rezerwa IBNR (ok. 30-37%), która utożsamiana jest ze zmienną losową (o nieznannej wielkości, czasie wystąpienia i rozkładzie prawdopodobieństwa) i dlatego jest identyfikowana z największym ryzykiem ubez-

⁵ Art. 81 ust. 2 pkt 6 lit. A Ustawy o rachunkowości z 1994 r., DzU 1994 nr 121, poz. 591 z późn. zm.



Rys. 4. Udział rezerwy IBNR w rezerwach TU brutto i w rezerwie szkód (dział II, w %)

Źródło: Biuletyny roczne KNF (Rynek ubezpieczeń – zagregowane raporty finansowe zakładów ubezpieczeń).

pieczyteli majątkowych, którego niedoszacowanie może przyczynić się do niewypłacalności. W związku z tym od początku lat 30. XX wieku rozwijają się metody szacowania tej rezerwy. Pierwszą deterministyczną technikę jej kalkulacji przedstawił Tarbell [1934]. Pierwszy klasyczny model stochastyczny dla nieskumulowanych danych szkodowych wprowadził Verbeek (1972), uogólnili go Kremer [1982], Renshaw i Verall [1994], a dla skumulowanych danych szkodowych zaprezentowali Kramreiter oraz Straub [1973], rozwinęli go zaś Zehnwirth [1989] oraz Mack [1994; 1993]. Pierwszy nieklasyczny model stochastyczny oparty na teorii zaufania (*credibility theory*) zaprezentowali De Vylder i Goovaerts [1979]. Hierarchiczny model bayesowski dla nieskumulowanych danych szkodowych wprowadził Verrall [1990], natomiast dla danych skumulowanych Scollnic [2001]. Pierwszy bootstrapowy model symulacyjny wyprowadził Lowe [1994], rozwinęli go England i Verrall [1999, s. 281-293] oraz Taylor [2000].

W polskiej literaturze przedmiotu deterministyczne metody estymacji rezerw szkodowych badali m.in. Pobłocka [2008, s. 368-376; 2009, s. 117-131], Wolny [1999; 2000; 2005], Wieteska [2004]; a modele stochastyczne analizowali m.in. Jasiulewicz [2008], Tomaszewska [2003], Karwański i Szczęśny [2008].

W polskim prawie ubezpieczeniowym wyróżnione zostały trzy metody kalkulacji rezerw TU: indywidualna, ryczałtowa oraz aktuarialna⁶. W literaturze aktuarialnej można znaleźć inne klasyfikacje metod szacowania rezerwy IBNR. Pierwszą z nich jest np. podział metod na uproszczone, ryczałtowe, rytmu płatności szkód

⁶ Rozporządzenie Ministra Finansów z dnia 27 grudnia 1990 r. (oraz z dnia 29 grudnia 1994 r. i z dnia 27 grudnia 2003 r.) w sprawie szczególnych zasad rachunkowości zakładów ubezpieczeń.

oraz aktuarialne (por. [Ronka-Chmielowiec 1997, s. 130]). Drugą klasyfikacją jest podział metod według występowania zmiennych losowych, zmiennych opóźnionych w czasie, struktury modelu, metod szacowania parametrów modeli (por. [Taylor i in. 2003; Taylor 1986]). Inną klasyfikacją jest podział metod statystycznych na statystycznie proste i statystycznie zaawansowane (por. [Wolny 2005]). Jeszcze inną klasyfikacją jest podział metod szacowania rezerw szkodowych na metody *oparte na skumulowanych i nieskumulowanych danych szkodowych*, metody *symulacyjne* (m.in. *bootstrapowe*, MCMC) i *bayesowskie* (por. [Charles, Westphal 2006]). Powyższe klasyfikacje świadczą o istnieniu wielu różnorodnych metod estymacji rezerwy IBNR. W związku z tym można zadać pytanie: którą metodę należy zastosować w praktyce dla danego jednorodnego portfela ubezpieczeń, tzn. według jakich kryteriów wybrać najlepszy model z punktu widzenia obranej przez zarząd danego zakładu ubezpieczeń strategii inwestycyjnej?

W Polsce organ nadzoru nie narzuca metod szacowania rezerw TU, a tylko wymaga, aby wybraną metodę stosować w sposób ciągły i nie zmieniać jej bezpodstawnie. W praktyce dla różnych grup ubezpieczeń do oszacowania rezerwy IBNR stosowane są różne techniki obliczeniowe. Oznacza to, że jeden zakład ubezpieczeń majątkowych może wykorzystywać od kilku do kilkunastu metod jej szacowania. Na przykład: dla grup 3 i 10 (AC i OC posiadaczy pojazdów mechanicznych) oraz z tytułu wielkich szkód komunikacyjnych stosowana może być technika *chain-ladder*; dla grup 6 i 12 (ubezpieczenia morskie) można korzystać z metody średniej ruchomej z ostatnich kilku lat, a dla grupy 15 (ubezpieczenia gwarancji) można zastosować metody oparte na współczynniku szkodowości. Obecnie według Bijaka i in. [2006] najczęściej stosowane w naszym kraju są: technika *chain-ladder* (CL) oraz metoda *Bornhuettera-Ferguson* (BF), a w Europie, oprócz nich, znajdują zastosowanie metody uogólnionego modelu liniowego (por. [Wuthrich 2007]).

Przepisy regulujące wypłacalność zakładów ubezpieczeń działających na polskim rynku dostosowywane są do standardów wypłacalności Unii Europejskiej. W ramach programu „Wypłacalność I” (*Solvency I*) w 2002 r. wprowadzona została nowelizacja wymogów kalkulacji marginesu wypłacalności oraz rozpoczęto pracę nad programem „Wypłacalność II” (*Solvency II*), w którym konstruowany jest system kompleksowej oceny wypłacalności firm ubezpieczeniowych działających na terytorium Unii Europejskiej. Wraz z implementacją projektu *Solvency II* (planowaną na dzień 01.11.2012 r., por. [Bijak 2009]) rezerwy TU będą zawiązywane według najlepszego oszacowania (*best estimate*). Oznacza to, że metody deterministyczne zostaną naturalnie zastąpione metodami stochastycznymi. Zakłady ubezpieczeń będą miały oszacować roczne ryzyko działalności (m.in. roczną zmianę rezerw TU, tj. roczny błąd prognozy – *volatility*), które zostanie uwzględnione przy ocenie kapitałowego wymogu wypłacalności (SCR). Obecnie rezerwy TU szacowane są do końca okresu odpowiedzialności (*ultimate*).

3. Przykład estymacji rezerwy IBNR

Metody szacowania rezerwy IBNR bazują głównie na historycznych danych szkodowych przedstawionych w trójkącie szkód (nieskumulowanym lub skumulowanym, *the run-off triangle*). Jest on „specyficznym szeregiem czasowym”, tzn. trójkątną macierzą $[X_{ij}]_{n \times n}$ lub $[C_{ij} = \sum_{k=0}^j X_{ik}]_{n \times n}$ (dla $i, j = 0, 1, \dots, n-1$) zawierającą informacje o (liczbie lub wielkości) wypłaconych odszkodowań i świadczeń z tytułu szkód zaistniałych lub zgłoszonych w i -tym okresie wypadkowym (dane poziome) oraz wypłaconych z opóźnieniem o j okresów (dane pionowe), czyli do końca $i+j-1$ okresu kalendarzowego (dane na przekątnych, por. [Wolny 2005]). Trójkąt szkód można budować dla różnych okresów, np. rocznych, kwartalnych, miesięcznych. Szacowanie rezerwy IBNR polega na uzupełnieniu brakujących danych w trójkącie szkód.

Rozważmy trzy popularne metody deterministyczne szacowania rezerwy IBNR. **Technika** chain-ladder (CL, por. [Hossak i in. 1992, s. 206-237]) bazuje na trójkącie skumulowanych szkód $[C_{ij}]_{n \times n}$. Z niego wyznaczane są współczynniki przejścia:

$$f_j = f_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}},$$

których częstym oszacowaniem jest

$$f_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}}.$$

Na ich podstawie szacowane są przyszłe szkody: $\hat{C}_{i,j} = C_{i,j-k} \tilde{f}_k$ oraz rezerwa IBNR: $\hat{R}^{CL} = \sum_{i=1}^n (\hat{C}_i - C_{i,n-i})$,

gdzie: $\tilde{f}_k = \prod_{i=1}^k f_i$.

Stąd metoda CL nazywana jest metodą łańcuchową. Metoda ta cieszy się popularnością na całym świecie.

Metoda Bornhuettera-Fregusona (skrót BF, por. [Wieteska 2004, s. 101-103]) bazuje na trójkącie skumulowanych szkód $[C_{ij}]_{n \times n}$, z którego wyznacza się wskaźniki podziału

$$p_i = 1 - \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-i-1} \hat{f}_j}.$$

Na ich podstawie szacuje się przyszłe szkody oraz rezerwę IBNR, odpowiednio:

$$\hat{C}_i^P = \hat{C}_i p_i, \hat{R}^{BF} = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{C}_i^P,$$

gdzie: \hat{C}_i to iloczyn składki zarobionej brutto i wskaźnika szkodowości brutto.

Metoda *grossing up* (skrót GU, por. [Wolny 1999]) bazuje na trójkącie skumulowanych szkód $[C_{ij}]_{n \times n}$, z którego wyznacza się współczynniki całkowitej szkody:

$$f_{0j} = \frac{C_{0j}}{C_0}.$$

Na ich podstawie szacuje się skumulowane przyszłe szkody oraz rezerwę IBNR odpowiednio:

$$\hat{C}_i = \frac{C_{i,n-i-1}}{f_{0,n-i-1}}, \hat{R}^{GU} = \sum_{i=k}^{n-1} (\hat{C}_i - C_{i,n-i-1}),$$

gdzie: $C_{i,n-i-1}$ znajduje się na przekątnej z i -tego okresu, k to liczba okresów „zamkniętych”, w których znana jest całkowita wartość wypłaconych odszkodowań, C_0 to całkowita skumulowana wartość szkód w zamkniętym okresie wypadkowym, $C_{0,j}$ to łączne szkody wypłacone do j -tego okresu, po którym nie wystąpi już w przyszłości żadna wypłata odszkodowania.

Rozważmy rzeczywisty nieskumulowany trójkąt szkód (tab. 1) z tytułu ubezpieczeń komunikacyjnych wyrażonych w dol. zaczerpnięty z pracy [Charles, Westphal

Tabela 1. Trójkąt nieskumulowanych szkód z tytułu ubezpieczeń komunikacyjnych (w dol.)

Okres wypadkowy (i)	Okres opóźnienia w wypłacie odszkodowania (j)										Składka przypisana brutto
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	5 946 975	3 721 237	859 717	207 760	206 704	62 124	65 813	14 850	11 130	15 813	15 537 469
2	6 346 756	3 246 406	723 222	151 797	67 824	36 603	52 725	11 186	11 646		15 156 408
3	6 269 090	2 976 223	847 053	262 768	152 703	65 444	53 545	8 924			14 617 287
4	5 863 015	2 683 224	722 532	190 653	132 976	88 340	43 320				14 155 682
5	5 778 885	2 745 229	653 894	273 395	230 288	105 224					14 726 509
6	6 184 793	2 828 338	572 765	244 899	104 957						15 307 599
7	5 600 184	2 893 207	563 114	225 517							15 218 096
8	5 288 066	2 440 103	528 073								14 835 369
9	5 290 793	2 357 936									14 648 731
10	5 675 568										15 491 250

Źródło: [Charles, Westphal 2006].

2006], na podstawie którego oszacowana została rezerwa IBNR ww. metodami deterministycznymi.

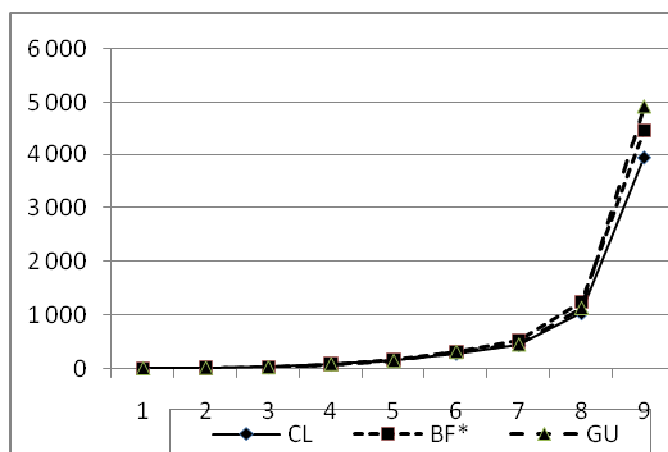
Szacowane rezerwy zaprezentowane w tab. 2 (oraz na rys. 5) różnią się istotnie. Najwyższe wartości uzyskano metodą GU. Były one prawie o 250 tys. dol. wyższe od wartości uzyskanych w metodzie BF, które były o ok. 900 tys. dol. wyższe niż w technice CL. Porównując uzyskane wyniki, trudno wskazać, który z modeli należałoby wybrać w praktyce, gdyż aby zaobserwować jakies prawidłowości w badanych metodach, trzeba by wykonać więcej symulacji.

Tabela 2. Szacowane rezerwy IBNR (w dol.)

Okres wypadkowy	Metoda		
	CL	BF*	GU
2	14 907	4 472 566	15 174
3	25 541	1 259 249	25 851
4	34 074	529 304	36 711
5	84 382	319 024	95 700
6	155 815	172 015	154 116
7	285 091	94 521	325 463
8	448 460	37 856	458 138
9	1 038 823	26 050	1 142 309
10	3 945 689	15 872	4 929 422
Razem IBNR	6 032 783	6 926 459	7 182 883

BF* całkowita szkoda $C_i = \text{składka przypisana brutto} * \text{wskaźnik, szkodowości (72\%)}$.

Źródło: opracowanie własne na podstawie tab. 1.



Rys. 5. Oszacowane rezerwy IBNR (w tys. dol.)

Źródło: opracowanie własne na podstawie tab. 2.

Metody deterministyczne, chociaż są proste do zastosowania (nie wymagają skomplikowanych założeń dotyczących struktury modeli), to jednak nie pozwalają oceniać dokładności oszacowań i wykonywać prognozy⁷. Modele stochastyczne umożliwiają szacowanie rezerw szkodowych oraz wykonywanie ich prognozy wraz z oceną ich zmienności. Dotychczas były one rzadziej stosowane w praktyce, m.in. ze względu na swoje założenia strukturalne (np. sztywne założenie mówiące, że rozkład reszt modelu jest zgodny z rozkładem normalnym). Z wejściem programu Wy-płacalność II metody stochastyczne zastępują metody deterministyczne. Dodatkowo w pracy [Karwański, Szczęśny 2008, s. 125] podkreśla się, że modele stochastyczne bazujące na nieskumulowanych danych szkodowych zdecydowanie lepiej od modeli opierających się na danych skumulowanych szacują wartości rezerw szkodowych, przez co są bardziej odpowiednie do zastosowania.

W modelach stochastycznych rezerw IBNR opartych na nieskumulowanych danych szkodowych przyjmuje się, że każdą szkodę ubezpieczeniową można przedstawić w postaci iloczynu $X_{i,j} \approx \alpha_i \beta_j \gamma_k$, (dla $i, j = 1, \dots, n; i + j \leq n$), gdzie: i to okres wystąpienia (zgłoszenia) szkody, j to okres rozwoju szkody (opóźnienia w rozliczeniu), a $k = i + j - 1$ to aktualny okres kalendarzowy, α_i to efekty i -tego okresu wypadkowego, β_j to efekty j -tego okresu rozwoju szkody, γ_k to efekty k -tej przekątnej (diagonalnej, $k = i + j - 1$). Dla parametrów $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ wprowadzane są pewne ograniczenia w różnych modelach. Można je estymować klasycznymi metodami estymacji, np. metodą najmniejszych kwadratów (MNK), metodą największej wiarygodności (MNW) lub technikami heurystycznymi (np. „metodą mechanicznego wygładzania”). W większości modeli zakłada się, że zmienne losowe opisujące szkody ubezpieczeniowe $X_{i,j}$ są niezależne o rozkładzie należącym do dyspersyjnej rodziny wykładniczej, których wartość oczekiwaną można przedstawić jako $EX_{i,j} = E(\exp(\log \alpha_i + \log \beta_j + \log \gamma_k))$. Stąd przyszłe szkody szacuje się zgodnie ze wzorem $\hat{X}_{i,j} \approx \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j \hat{\gamma}_{i+j-1}$. W trójkątach szkód, w których brak danych γ_k , poza diagonalną dla k -tego okresu kalendarzowego, dla $k > t$ można przyjąć, że płatności w danych okresach kalendarzowych zmieniają się z postępem geometrycznym $\gamma_k \propto \gamma^k$ dla pewnych wartości rzeczywistych γ .

Ocena dokładności rezerwy IBNR w metodach stochastycznych częstokroć jest trudna do kalkulacji i często może być tylko aproksymowana, zakładając, że pierwotny model został dobrze zdefiniowany. Ten mankament metod stochastycznych jest głównym powodem rozszerzającej się od końca XX wieku popularności technik próbkowania danych (*bootstrapping*), zdefiniowanych w pracy [Efron, Tibshirani 1993].

Rozważmy kilka stochastycznych metod szacowania rezerwy IBNR.

Model Macka bazuje na trójkącie skumulowanych szkód $[C_{ij}]_{n \times n}$ (por. [Mack 1993]). W technice CL skumulowane szkody spełniają warunek $C_{i,j} = f_{i,j} C_{i,j-1}$ (dla

⁷ To wynika także z tego, że w zakładach ubezpieczeń majątkowych rezerwy nie muszą być kalkulowane przez aktuariusy, tylko są szacowane metodami aktuarialnymi.

$i = 1, 2, \dots, n; j = 2, 3, \dots, n - i + 1$), gdzie: $f_{i,j}$ to współczynniki przejścia. Mack [1991] uogólnił ww. metodę do modelu stochastycznego, zakładając, że $C_{i,j}$ to są zmienne losowe o skończonej wartości oczekiwanej $E[C_{i,j}] = f_{i,j}E[C_{i,j-1}]$ i skończonej wariancji $Var[C_{i,j}] = \sigma_j^2 C_{i,j-1}$ (dla $1 \leq j \leq n - 1$), gdzie: f_1, \dots, f_{n-1} to nieznane parametry. Wykazał także, że dla $C_{i0} = 0$ model $E[C_{i,j}] = f_{i,j}E[C_{i,j-1}]$ opierający się na skumulowanych danych jest równoważny z modelem stochastycznym opartym na danych nieskumulowanych, w którym $E[X_{i,j}] = \alpha_i \beta_j$ (dla $1 \leq i, j \leq n$), gdzie: α_i ($1 \leq i \leq n$) oraz β_j ($1 \leq j \leq n$) to nieznane parametry oraz zachodzi $\beta_1 + \dots + \beta_n = 1$. Estymator wariancji i standardowy błąd prognozy rezerwy IBNR są równe odpowiednio:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1} \left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} - \hat{f}_j \right)^2, \quad MSE(\hat{R}_i) \approx \hat{C}_{in}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_{k-1}^2}{\hat{f}_{k+1}^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{q=1}^{n-k} C_{q,k}} \right).$$

Model Christofidesa (tzw. regresji logarytmiczno-liniowej, por. [Christofides 1990, s. 5.1- 5.54]) bazuje na trójkącie nieskumulowanych szkód $[X_{i,j}]_{n \times n}$. Został on wprowadzony jako model regresji wielorakiej (*multiple regression model*, por. [Stanisz 2007, s. 59-97]). Model ten zakłada, że zmienne losowe $X_{i,j}$ opisujące indywidualne wartości szkód są niezależne o identycznym rozkładzie i można je przedstawić jako $X_{i,j} = \alpha_i \beta_j \xi_{i,j}$ (dla każdego $i, j = 1, \dots, n; i + j \leq n$). W modelu tym przyjmuje się:

$$Y_{i,j} = \ln X_{i,j} = \ln(\alpha_i \beta_j \xi_{i,j}) = \ln \alpha_i + \ln \beta_j + \ln \xi_{i,j},$$

$$Y_{i,j} = a_i + b_j + e_{i,j}, \quad e_{i,j} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad a_i = b_i = 0.$$

Parametry a_i, b_j można estymować *techniką CL* lub klasycznymi metodami estymacji (np. *MNW*), a nieznana wariancja σ^2 jest zazwyczaj szacowana MNK. Transformacja zmiennych funkcją logarytmiczną wymaga, aby wartości w trójkątach szkód były nieujemne, a zatem nie daje możliwości uwzględniania w analizie regresji, co jest niedogodnością tego modelu. W dodatku powoduje to także obciążenie estymatorów, co podkreślono w [Renshaw 1989; Verall 1991].

Przyszłe szkody $\hat{X}_{i,j}$ i ich wariancja są równe odpowiednio (por. [Christofides 1990, s. 5.11-5.13]):

$$\hat{X}_{i,j} = \exp(\hat{Y}_{i,j} + 0.5Var\hat{Y}_{i,j}), \quad Var[\hat{X}_{i,j}] = \hat{X}_{i,j}^2 \left(\exp(Var\hat{Y}_{i,j}) - 1 \right).$$

Wartości $\hat{Y}_{i,j}$ są równe sumie estymatorów \hat{a}_i, \hat{b}_j , a wariancję $Var\hat{Y}_{i,j}$ wyznacza się z macierzy wariancji-kowariancji $\sigma^2 X_F (X^T X)^{-1} X_F^T$, gdzie: X_F to macierz przyszłych wartości, X^T to macierz transponowana, X^{-1} to macierz odwrotna, σ^2 to wariancja empiryczna.

Model Poissona GLM (tzw. stochastyczny model chain-ladder, por. [Kass i in. 2001, s. 208-211; Renshaw, Verrall 1994, s. 283]) jest szczególnym przypadkiem uogólnionej regresji liniowej (*Generalized Linear Models – GLZ*) wprowadzonej przez Nelder i Wedderburn [1972, s. 370-384] i opisaną przez McCullagh i Nelder [1989]. Zakłada on, że nieskumulowane szkody $X_{i,j}$ (dla każdego $i, j = 1, \dots, n; i + j \leq n$) są niezależne i są zgodne z rozkładem Poissona z parametrem $\lambda_{i,j}$ ($\lambda_{i,j} = \alpha_i \beta_j$), gdzie: α_i to rozmiar całkowitych szkód zgłoszonych w i -tym okresie wypadkowym, β_j to udział szkód w j -tym okresie rozliczenia szkód w całkowitej szkodzie z i -go okresu, $\sum_{j=1}^t \beta_j = 1$, co można zapisać (por. [Tomaszewska 2003, s. 274-275]):

$$\begin{aligned} X_{i,j} &= \alpha_i \beta_j \gamma_{i,j} & \gamma_{i,j} &= 1 \\ Y_{i,j} &= X_{i,j}, & Y_{i,j} &\sim \text{Pois}(\lambda_{i,j}), & EY_{i,j} &= \lambda_{i,j} = \alpha_i \beta_j \\ Y_{i,j} &= m_{i,j} + e_{i,j}, & e_{i,j} &\in \text{over-dispersed Poisson distribution} \\ EY_{i,j} &= m_{i,j}, & \text{Var}Y_{i,j} &= \phi V(m_{i,j}) = m_{i,j}, \phi = 1, & V(m_{i,j}) &= m_{i,j}, \\ \log m_{i,j} &= \eta_{i,j}, & \eta_{i,j} &= \mu + a_i + b_j, \\ a_1 = b_1 &= 0 & \Rightarrow & EY_{1,1} = m_{1,1} = \exp(\mu). \end{aligned}$$

Parametry $\alpha_i, \beta_j, \gamma_{i,j}, \zeta_{i,j}$ definiowane są jak powyżej, $e_{i,j}$ to czynniki losowe, $m_{i,j}$ to składnik deterministyczny, jego logarytm jest równy funkcji wiążącej $\eta_{i,j}$ (*link function*) opisywany przez: μ – ogólna średnia efektów w skali logarytmicznej (*over all mean effect*), a_i – efekty główne okresu wypadkowego (*the residua effect due to accident year*), b_j – efekty główne okresu rozwoju szkody (*the residual effect due to development year*). Przyszłe rezerwy i ich błąd prognozy w okresach wypadkowych są równe:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{i,j} &= m_{i,j} \exp(0.5\hat{\sigma}^2) = \exp(\hat{\eta}_{i,j} + 0.5\hat{\sigma}^2) = \exp(\hat{\mu} + \hat{a}_i + \hat{b}_j + 0.5\hat{\sigma}^2), \\ \text{MSE}[\hat{X}_{i,j}] &= E\left[\left(X_{i,j} - \hat{X}_{i,j}\right)^2\right] \cong \text{Var}[X_{i,j}] + \text{Var}[\hat{X}_{i,j}] = \phi m_{i,j} + m_{i,j}^2 \text{Var}(\hat{\eta}_{i,j}), \\ \text{Var}[X_{i,j}] &= \text{Var}[Y_{i,j}] = \phi m_{i,j}, \quad \text{Var}[\hat{X}_{i,j}] \cong \left|\frac{\partial m_{i,j}}{\partial \eta_{i,j}}\right|^2 \text{Var}(\hat{\eta}_{i,j}) = m_{i,j}^2 \text{Var}(\hat{\eta}_{i,j}), \end{aligned}$$

gdzie: $\hat{X}_{i,j}$ to estymator rezerwy IBNR, $\text{MSE}[\hat{X}_{i,j}]$ to średni kwadratowy błąd prognozy, $\text{Var}(\hat{\eta}_{i,j})$ to wariancja uzyskiwana z macierzy kowariancji estymatorów szkód zaistniałych i prognozowanych, ϕ to parametr skali. Parametry μ, a_i, b_j można oszacować w przypadku kompletnych danych statystycznych standardowymi metodami estymacji, korzystając ze statystycznych pakietów regresji zawierających uogólnione model regresji GLM (zakładając nieistnienie wyrazu wolnego $a_1 = b_1 = 0$), a w przypadku niekompletnych danych statystycznych można skorzystać z algoryt-

mu rekursywnego Kremera (tzw. E-M algorytm, *expectation maximization of the likelihood*, por. [Pinheiro i in. 2000, s. 4-5; Zehnwirth 1989, s. 1.4-1.5]).

Łączna wielkość rezerwy IBNR i jej błąd prognozy są równe odpowiednio (por. [England, Verrall 1999, s. 284]):

$$\hat{R} = \sum_{i,j \in \Delta} \hat{X}_{i,j},$$

$$MSE[\hat{R}] = \sum_{i,j \in \Delta} MSE[\hat{X}_{ij}] + 2 \sum_{\substack{i,j \in \Delta \\ j \neq k}} m_{ij} m_{ik} \cdot \left(\exp(\text{Cov}(\eta_{ij}, \eta_{ik})) - 1 \right),$$

gdzie: $\sum_{i,j \in \Delta}$ oznacza sumowanie po wszystkich prognozowanych elementach trójkąta szkód. Wyniki estymacji rezerwy metodą Poissona GLM są podobne do techniki CL.

Model gamma GLM (tzw. model Macka, Renshawa i Verralla)

Do modelowania wielkości szkód Mack użył rozkładu gamma. Pomysł ten rozwinęli Renshaw i Verrall [1994] na podstawie modelu uogólnionej regresji liniowej. W modelu tym nieskumulowane szkody $X_{i,j}$ (dla każdego $i, j = 1, \dots, n; i + j \leq n$) są niezależne i opisują średnie wartości odszkodowań wypłaconych w okresach i, j oraz są zgodne z rozkładem gamma z parametrami $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j$. Model ten spełnia następujące założenia (por. [England, Verrall 1999, s. 283]):

$$X_{i,j} = \alpha_i \beta_j \gamma_{i,j}, \quad \gamma_{i,j} = 1$$

$$Y_{i,j} = X_{i,j}, \quad Y_{i,j} \sim \text{gamma}(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j), \quad EY_{i,j} = \tilde{\alpha}_i / \tilde{\beta}_j = m_{i,j}$$

$$Y_{i,j} = m_{i,j} + e_{i,j}, \quad \text{Var} Y_{i,j} = \tilde{\alpha}_i / \tilde{\beta}_j^2 = \phi V(m_{i,j}), \quad \phi = 1 / \tilde{\alpha}_i, \quad V(m_{i,j}) = m_{i,j}^2,$$

$$e_{i,j}: E[e_{i,j}] = 0, \quad \text{Var}[e_{i,j}] = \sigma^2,$$

$$\eta_{i,j} = \ln m_{i,j}, \quad \eta_{i,j} = \mu + a_i + b_j,$$

$$a_1 = b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad EY_{1,1} = m_{1,1} = \exp(\mu).$$

Przyszłe rezerwy i ich błąd prognozy wyznacza się następująco:

$$\hat{X}_{i,j} = m_{i,j} \exp(0.5\hat{\sigma}^2) = \exp(\eta_{i,j} + 0.5\hat{\sigma}^2) = \exp(\hat{\mu} + \hat{a}_i + \hat{b}_j + 0.5\hat{\sigma}^2),$$

$$MSE[\hat{X}_{i,j}] = E\left[(X_{i,j} - \hat{X}_{i,j})^2\right] \cong \text{Var}[X_{i,j}] + \text{Var}[\hat{X}_{i,j}] = \phi m_{i,j}^2 + m_{i,j}^2 \text{Var}(\hat{\eta}_{i,j}),$$

$$\text{Var}[X_{i,j}] = \text{Var}[Y_{i,j}] = \phi m_{i,j}^2, \quad \text{Var}[\hat{X}_{i,j}] \cong \left| \frac{\partial m_{i,j}}{\partial \eta_{i,j}} \right|^2 \text{Var}(\hat{\eta}_{i,j}) = m_{i,j}^2 \text{Var}(\hat{\eta}_{i,j}).$$

Parametry ww. modelu są zdefiniowane jak w modelu Poissona GLM. Model gamma GLM uchyla założenie o rozkładzie składników losowych i różni się od modelu Poissona GLM tym, że wariancja jest proporcjonalna nie do średniej, a do jej kwadratu. Łączna wielkość rezerwy IBNR i jej błąd prognozy są rów-

ne odpowiednio (por. [England, Verrall 1999, s. 284]): $\hat{R} = \sum_{i,j \in \Delta} \hat{X}_{i,j}$,
 $MSE[\hat{R}] = \sum_{i,j \in \Delta} MSE[\hat{X}_{i,j}] + 2 \sum_{\substack{i,j \in \Delta \\ j \neq k}} m_{i,j} m_{i,k} \cdot (\exp(\text{Cov}(\eta_{i,j}, \eta_{i,k})) - 1)$,

gdzie: $\sum_{i,j \in \Delta}$ oznacza sumowanie po wszystkich prognozowanych elementach trójkąta szkód. W symulacjach można przyjąć, że parametr dyspersji jest równy jednej setnej $\phi = 0,01$, a szacowany parametr w rozkładzie gamma jest równy 100 ($\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha} = 1/\phi$).

Model bayesowski Verralla został wprowadzony przez Verralla w 1988 r. jako przykład bayesowskiego modelu hierarchicznego, opierającego się na modelu Poissona GLM, w którym rozkłady *a priori* parametrów α_i, β_j zdefiniowane zostały następująco:

$$\begin{aligned} X_{i,j} &= \alpha_i \beta_j \gamma_{i,j}, & \gamma_{i,j} &= 1 \\ Y_{i,j} &= X_{i,j}, & Y_{i,j} &\sim \text{Pois}(\lambda_{i,j}), & EY_{i,j} &= \lambda_{i,j} = \alpha_i \beta_j \\ Y_{i,j} &= m_{i,j} + e_{i,j}, & e_{i,j} &\in \text{over-dispersed Poisson distribution} \end{aligned}$$

Np. $e_{i,j} \sim N(0, 1000000000)$,

$$\alpha_i \sim N(\theta_j, \tau_i) \quad \text{dla } i = 1, \dots, n \text{ oraz } j = 1, \dots, n-1,$$

$$\theta_j \sim N(\mu_0, \tau_0), \quad \mu_0 \sim N(1, 0.001), \quad \tau_0 \sim N(0.001, 0.001),$$

$$\tau_i = \tau \cdot w_i, \quad \tau \sim \Gamma(0.001, 0.001),$$

$$\beta_j \sim \Gamma(1, \tau_j), \quad \tau_j = \tau \cdot w_j, \quad \tau \sim \Gamma(0.001, 0.001).$$

Metoda bootstrapping chain-ladder (por. [Efron, Tibshirani 1993; England, Verrall 1999]) to metoda łącząca model Poissona GLM i technikę symulacyjną próbkowania danych, tzw. *bootstrapping*. W metodzie tej na wstępie do danych szkodowych dopasowuje się model Poissona GLM (lub technikę CL). Następnie wyznacza się nieskalowane reszty Pearsona: $r_{i,j}^{(P)} = \frac{X_{i,j} - m_{i,j}}{\sqrt{\text{Var}(X_{i,j})}} = \frac{X_{i,j} - m_{i,j}}{\sqrt{m_{i,j}}}$ oraz skalowane

reszty Pearsona (uwzględniające liczbę stopni swobody): $r_{i,j}^{(P^*)} = r_{i,j}^{(P)} \sqrt{\frac{n}{n-p}}$. Na

ich podstawie wyznacza się pseudodane: $X_{i,j}^{(*)} = r_{i,j}^{(P^*)} \sqrt{m_{i,j}} + m_{i,j}$, z których szacuje się przyszłe szkody wraz z ich oceną zmienności, np.: *standardowym błędem predykcji szkód* czy *standardowym błędem estymatora średniej rezerwy* równe odpo-

wiednio: $SE(\hat{X}_{i,j}) = \sqrt{\phi R + \frac{n}{n-p} SE(R)}$, $SE(R) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m_i^{(*)} - \hat{m})^2}$, gdzie: \hat{m}

to estymator średniej szkody, $m_i^{(*)}$ to bootstrapowy estymator średniej, $\phi = \frac{\sum r^{(P)2}}{n-p}$ parametr skali, R to łączne szacowane rezerwy.

Tabela 3. Trójkąt nieskumulowanych szkód z tytułu ubezpieczeń komunikacyjnych (w tys. dol.)

Okres (i)	Okres opóźnienia w wypłacie odszkodowania (j)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	357 848	766 940	610 542	482 940	527 326	574 398	146 342	139 950	227 229	67 948
2	352 118	884 021	933 894	1 183 289	445 745	320 996	527 804	266 172	425 046	
3	290 507	1 001 799	926 219	10 116 654	750 816	146 923	495 992	280 405		
4	310 608	1 108 250	776 189	1 562 400	272 482	352 053	206 286			
5	443 160	693 190	991 983	769 488	504 851	470 639				
6	396 132	937 085	847 498	805 037	705 960					
7	440 832	847 631	1 131 398	1 063 269						
8	359 480	1 061 648	1 443 370							
9	376 686	986 608								
10	344 014									

Źródło: [Taylor, Ashe 1983, s. 37-61].

Rozważmy rzeczywisty nieskumulowany trójkąt szkód zaczerpnięty z pracy [Taylor, Ashe 1983] (tab. 3). Na jego podstawie ww. metodami stochastycznymi oszacowane zostały rezerwy IBNR (wraz z błędami prognozy, por. tab. 4).

Tabela 4. Oszacowane rezerwy wraz z błędami ich prognozy [w mln dol., %]

Okres wypadkowy	Metoda						
	chain ladder	Macka	Christofidesa	Poissona GLM	gamma GLM	bayesowska Verrall	bootstrap CL
2	95	93 (80)	111 (54)	95 (116)	93 (48)	96 (49)	117 (117)
3	470	447 (26)	482 (39)	470 (46)	447 (36)	439 (36)	420 (46)
4	710	611 (19)	661 (32)	710 (37)	611 (29)	608 (30)	527 (36)
5	985	992 (27)	1 091 (28)	985 (31)	992 (26)	1 011 (27)	1 042 (31)
6	1 429	1 453 (29)	1 531 (26)	1 429 (26)	1 453 (24)	1 423 (25)	1 537 (26)
7	2 178	2 186 (26)	2 311 (26)	2 178 (23)	2 186 (24)	2 150 (25)	2 236 (23)
8	3 920	3 665 (22)	3 807 (28)	3 920 (20)	3 665 (26)	3 529 (27)	3 928 (20)
9	4 279	4 122 (23)	4 452 (31)	4 279 (24)	4 122 (29)	4 056 (30)	4 770 (24)
10	4 626	4 516 (29)	5 066 (40)	4 626 (43)	4 516 (37)	4 340 (38)	6 068 (43)
Łączne IBNR	18 682	18 085 (13)	19 512 (16)	18 682 (16)	18 085 (15)	17 652 (15)	20 644 (16)

Źródło: [England, Verrall 1999, s. 281-293].

Zauważmy, że klasyczne metody stochastyczne (model Macka, uogólnionej regresji liniowej, gamma GLM i Poissona GLM) dają zbliżone wyniki (tab. 4). Metody nieklasyczne dają skrajne wartości rezerw. Najwyższe uzyskano w modelu bootstrapowym chain ladder, a najniższe w bayesowskim Verralla (co wynika prawdopodobnie z przyjętego rozkładu *a priori*).

4. Podsumowanie i wnioski

Przeprowadzona analiza szkodowości w zakresie szacowania rezerwy IBNR pozwala wnioskować, że poziom rezerwy zależy od przyjętej metody szacowania (różnice pomiędzy uzyskanymi wynikami są istotne). Metody deterministyczne nie pozwalają oszacować błędu prognozowanych rezerw, które „z natury” są wynikiem metod stochastycznych. Dokładności szacowanych łącznych rezerw w metodach stochastycznych zmieniają się od 13 do 16 pkt %, co świadczy o tym, że otrzymano zbliżone wyniki łącznej zmienności. Jednak analizując ocenę zmienności w poszczególnych okresach wypadkowych, przekonujemy się, że występują istotne różnice w dyspersji (od 20 do 117 pkt %). Warto zatem się zastanowić i rozważyć problem decyzyjny, którą z ww. metod powinno się wybrać (dla danego portfela ubezpieczeń i posiadanych danych szkodowych) w praktyce. Rezerwy TU zgodnie z projektem Wypłacalności II należy szacować zgodnie z zasadą najlepszego oszacowania. W projekcie tym preferuje się model Macka (w analizie w modelu tym uzyskano najniższą wartość łącznej rezerwy i najniższy łączny błąd szacunku), chociaż inne modele dają zbliżone wyniki szacowanych rezerw (np. model gamma GLM). Autorka artykułu nie próbuje znaleźć rozwiązania tego problemu, a tylko go sygnalizuje i podkreśla, że najniższa wartość rezerw TU może nie zapewnić realności ochrony ubezpieczeniowej. Wprawdzie zgodnie ze statystyką i ekonometrią należałoby wybrać model najdokładniejszy, tj. minimalizujący (wybrany) błąd oszacowań rezerwy IBNR, jednak w przypadku rezerw ubezpieczeniowych warto byłoby wybrać inne kryterium optymalizacji, np. inną niż kwadratową funkcję celu. Zgodnie ze statystyką matematyczną należy wybierać te metody, w wyniku których uzyskuje się estymatory nieobciążone, o minimalnej wariancji (BLUE). Powinno się to jednak uczynić dla łącznej rezerwy (przyszłych zobowiązań ubezpieczycieli) czy rezerw w poszczególnych okresach wypadkowych? Podsumowując, należy zaznaczyć, że zgodnie z celami zawiązywania rezerw najważniejsze jest to, aby były one związane na bezpiecznym poziomie gwarantującym zapewnienie ochrony ubezpieczeniowej i wypłacalność zakładom ubezpieczeń. A zatem może w projekcie *Solvency II* powinno się uwzględnić inne metody tak, aby zawiązać wyższe rezerwy TU w celu zapewnienia środków na przyszłe zobowiązania.

Literatura

- Bijak W. (2009), *Praktyczne metody badania niewypłacalności zakładów ubezpieczeń*, Oficyna Wyd. SGH w Warszawie, Warszawa.
- Bijak W., Smętek M., Szymański W. (2006), *Analiza rezerw na niewypłacone odszkodowania i świadczenia z tytułu ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w oparciu o trójkąty szkód*, Biuletyn KNUiFE.
- Charles J., Westphal S. (2006), *Stochastic reserving*, CAE Spring 2006 Meeting.

- Christofides S. (1990), *Regression Models Based on Log-Incremental Payments*, [w:] *Claims Reserving Manual*, vol. 2 (09/1997 Section D5), Institute of Actuaries, London.
- De Vylder F., Goovaerts M.J. (1979), *An invariance property of the Swiss premium calculation principles*, „M.V.S.V.” no 79.
- Efron B., Tibshirani R.J. (1993), *An introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall.
- England P., Verrall R. (1999), *Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving*, „Insurance: Mathematics and Economics” no 25.
- Gąsiorkiewicz L. (2009), *Finanse zakładów ubezpieczeń majątkowych. Teoria i praktyka*, C.H. Beck, Warszawa.
- Hossak I.B., Pollard J.H., Zehnwirth B. (1992), *Introductory Statistics with Applications in General Insurance*, Cambridge University.
- Jasiulewicz H. (2008), *Model zaufania Hachemeistra jako model rezerwy typu IBNR*, [w:] *Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka*, red. W. Ostasiewicz, UE, Wrocław.
- Karwański M., Szcześnie W. (2008), *Analiza ryzyka modelu szacowania rezerw IBNR w zakładzie ubezpieczeniowym. Modele stochastyczne dla danych zagregowanych i indywidualnych*, [w:] *Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 7 (1207), UE, Wrocław.
- Kass R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. (2001), *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Kramreiter H., Straub E. (1973), *On the calculation of IBNR reserves II*, „Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker“ Nr. 73.
- Kremer E. (1982), *IBNR claims and two-way model of ANOVA*, „Scandinavian Actuarial Journal” no 1.
- Lowe J. (1994), *A Practical Guide to Measuring Reserve Variability Using Bootstrapping, Operational Time and a Distribution Free Approach*, Proceedings of the 1994 General Insurance Convention, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries.
- Mack T. (1994), *Which stochastic model is underlying the chain ladder model?*, „Insurance: Mathematic and Economics” no 15.
- Mack T. (1993), *Distribution free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates*, „ASTIN Bulletin” no 23 (2).
- Mack T. (1991), *A simple parametric model for rating automobile insurance or estimating IBNR reserves*, „ASTIN Bulletin” no 22 (1).
- McCullagh P., Nelder J.A. (1989), *Generalized Linear Models*, 2nd Edition, Chapman and Hall, New York, USA.
- Monkiewicz J. (red.) (2003), *Podstawy ubezpieczeń. Tom III – przedsiębiorstwo*, Poltext, Warszawa.
- Nedler J.A., Wedderburn R.W.M. (1972), *Generalized linear models*, „Journal of the Royal Statistics Society, Series A”, no 135.
- Pinheiro P.J.R., de Silva M.A., de Lourdes Centeno M. (2000), *Bootstrap Methodology in Claim Reserving*, Centre for Applied Math's to Forecasting & Economic Decision, FCT PRAXIS XXI
- Poblócka A. (2010), *Rozwój polskiego rynku ubezpieczeń w latach 1991-2008*, „Wiadomości Ubezpieczeniowe” nr 1.
- Poblócka A. (2009), *Szacowanie rezerwy szkód IBNR*, [w:] *Studia Ubezpieczeniowe*, Zeszyty Naukowe nr 127, UE, Poznań.
- Poblócka A. (2008), *Wybrane metody kalkulacji rezerwy IBNR*, [w:] *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu* nr 1197, AE, Wrocław.
- Renshaw A.E. (1989), *Chain ladder and interactive modeling (claims reserving and GLIM)*, „Journal of the Institute of Actuaries” no 116 (III).
- Renshaw A.E., Verrall R.J. (1994), *A Stochastic Model Underlying the Chain Ladder Technique*, Proceedings of the XXV ASTIN Colloquium, Cannes.
- Ronka-Chmielowiec W. (1997), *Ryzyko w ubezpieczeniach – metody i oceny*, AE, Wrocław.

- Scollnic D.P.M. (2001), *Actuarial modeling with MCMC and BUGS*, „North American Actuarial Journal” no 5(2).
- Stanisz A. (2007), *Przystępny kurs statystyki z zastosowaniem STATISTICA PL na przykładach z medycyny*, Wyd. StatSoft, Kraków.
- Taylor G. (1986), *Claims Reserving in Non-Life Insurance*, North-Holland, Amsterdam.
- Taylor G. (2000), *Loss Reserving – An Actuarial Perspective*, Kluwer Academic Press.
- Taylor G.C., Ashe F.R. (1983), *Second moments of estimates of outstanding claims*, „Journal of Econometrics” no 23.
- Taylor G., McGuire G., Greenfield A. (2003), *Loss Reserving: Past, Present and Future*, Research Paper Number 109, The University of Melbourne.
- Tarbell T.F. (1934), *Incurred but not reported claims reserves*, „Proceedings of the Causality Actuarial Society” vol. XX.
- Tomaszewska D. (2003), *Rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe jako źródło finansowania oraz elementy struktury kapitałów zakładu ubezpieczeń*, [w:] *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe, a polski rynek*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 991, AE, Wrocław.
- Verrall R.J. (1991), *The chain ladder and maximum likelihood*, „JIA” no 118.
- Verrall R.J. (1990), *Bayesian and empirical Bayes Estimation for Chain Ladder Model*, „ASTIN Bulletin” no 20(2).
- Wieteska S. (2004), *Rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe zakładów ubezpieczeń. Teoria i praktyka*, Branta Oficyna Wydawnicza, Kraków.
- Wolny A. (2000), *Kalkulacja rezerwy szkodowej. Metoda grossing up*, red. W. Szkutnik (zeszyt czwarty), AE, Katowice.
- Wolny A. (2005), *Podejście aktuarialne do kalkulacji rezerwy szkodowej. Statystyczne zaawansowane metody kalkulacji rezerwy szkodowej*, [w:] *Metody kalkulacji ryzyka rezerw szkodowych w ubezpieczeniach majątkowo-osobowych*, Seria: Statystyka Ubezpieczeniowa, red. W. Szkutnik, AE, Katowice.
- Wolny A. (1999), *Ustalenie poziomu rezerwy szkodowej jako problem decyzyjny*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko*, Prace Naukowe, AE, Katowice.
- Wuthrich M. (2007), *Claims Reserving In Non-Life Insurance*, ETH Zürich, CSIRO, Sydney.
- Zehnwirth B. (1989), *The Chain Ladder Technique – a Stochastic Model*, [w:] *Claims Reserving Manual, vol 2. More ADVANCED METHOD (02/89)*, Institute of Actuaries, London.

IBNR RESERVE IN NON-LIFE INSURANCE. PRACTICAL METHODS OF ITS ESTIMATION

Abstract: IBNR reserve is the most important reserve in non-life insurance. So far it has been estimated in Poland using mainly deterministic methods. However, it will change in near future, when Solvency II will become obligatory. This article presents characteristic IBNR reserve and some statistic (deterministic and stochastic) methods for its estimation. The author thinks which methods should be chosen in insurance practice.

Key words: IBN reserve, run-off triangle, methods of estimation of IBNR reserve.