Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

pod redakcją
Walentego Ostasiewicza

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Zbigniew Palmowski

Redaktor Wydawnictwa
Aleksandra Śliwka

Redakcja techniczna
Barbara Łopusiewicz

Korektor
Barbara Cibis

Łamanie
Beata Mazur

Projekt okładki
Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities http://cejsh.icm.edu.pl
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-186-7

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 207
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS
Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka ISSN 1899-3192

Joanna Dębicka
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

SKŁADKI NETTO DLA UBEZPIECZEŃ WIELOSTANOWYCH OBCIĄŻONE KOSZTAMI ZAWARCIA I PROWADZENIA UMOWY[1]

Streszczenie: Składki netto uwzględniają jedynie wypłaty świadczeń z tytułu zawartego ubezpieczenia, a nie uwzględniają kosztów zawarcia ubezpieczenia i prowadzenia ubezpieczenia. Celem artykułu jest uwzględnienie wymienionych kosztów, co pozwoli na określenie składki brutto dla ubezpieczeń wielostanowych. W literaturze dominują dwie klasyfikacje podziału kosztów. W przypadku ubezpieczeń życiowych szczególnie popularne jest podejście oparte na klasyfikacji, której istotnym ograniczeniem jest założenie, że koszty akwizycji są realizowane tylko w momencie zawarcia ubezpieczenia. W artykule do ogólnych ubezpieczeń wielostanowych została zaadaptowana klasyfikacja kosztów, która m.in. pozwala na uwzględnienie możliwości rozłożenia kosztów akwizycji w całym okresie ubezpieczenia.

Słowa kluczowe: ubezpieczenie wielostanowe, model wielostanowy, koszty ubezpieczyciela, składka netto, składka brutto.

1. Wstęp

Składki netto (*net premium*) uwzględniają jedynie (wyliczone teoretycznie) przeciętne wypłaty świadczeń z tytułu zawartego ubezpieczenia. Nie biorą one pod uwagę kosztów zawarcia ubezpieczenia (czyli kosztów bezpośrednich związanych z pozyskaniem i zawarciem ubezpieczenia oraz inkasem składki, tj. prowizji ajencyjnych i brokerskich, kosztów: badań lekarskich, ekspertyz i atestów przy ocenie ryzyka, wystawienia polis) i prowadzenia ubezpieczenia (kosztów utrzymania polisy i jej obsługi; w tym kosztów zarządzania portfelem oraz kosztów wypłaty świadczeń). Ponadto, oprócz kosztów, składkę netto można powiększyć o tzw. narzuty pozakosztowe związane z potrzebą reasekuracji, ochroną przed inflacją czy ryzykiem niekorzystnej zmienności ubezpieczonego ryzyka. W literaturze anglojęzycznej składka netto obciążona kosztami zawarcia i prowadzenia ubezpieczenia nazywana jest składką uwzględniającą koszty (*expense-loaded premium*), a jeżeli zawiera dodatkowo narzuty pozakosztowe, to nazywana jest składką brutto (*gross premium*). W pol-

[1] Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2009-2011 jako projekt badawczy nr 2293/B/H03/2009/36.

skiej literaturze aktuarialno-prawnej określenie brutto nie jest jednoznaczne. Może oznaczać składki netto obciążone zarówno tylko kosztami, jak i kosztami oraz narzutami pozakosztowymi. Dodatkowo związane jest z reasekuracją, gdzie np. definiuje się składki brutto jako odpowiednie wielkości obliczone przed uwzględnieniem udziału reasekuratora. W tym kontekście składka brutto ma więc zupełnie inne znaczenie. Dlatego w niniejszej pracy składkę netto uwzględniającą koszty zawarcia i prowadzenia ubezpieczenia nazywać będziemy składką brutto (por. [Błaszczyszyn, Rolski 2004; Stroiński 1996]).

Celem artykułu jest uwzględnienie kosztów zawarcia i prowadzenia ubezpieczenia, co pozwoli na określenie składki brutto dla ubezpieczeń wielostanowych. W literaturze dominują dwie klasyfikacje podziału kosztów (por. [Bowers i in. 1986; Gerber 1990]). W przypadku ubezpieczeń życiowych szczególnie popularne jest podejście oparte na klasyfikacji przedstawionej w pracy [Gerber 1990] (np. [Błaszczyszyn, Rolski 2004; Skałba 2003]). Istotnym ograniczeniem tego podejścia jest założenie, że koszty akwizycji są realizowane tylko w momencie zawarcia ubezpieczenia. W artykule klasyfikacja kosztów przedstawionych w [Bowers i in. 1986] została zaadaptowana do ogólnych ubezpieczeń wielostanowych, co pozwoliło m.in. na uwzględnienie możliwości rozłożenia kosztów akwizycji w całym okresie ubezpieczenia. Rozłożenie kosztów akwizycji jest szczególnie istotne, gdyż w przypadku ubezpieczeń życiowych (a więc i wielostanowych) koszty pozyskania ubezpieczenia niejednokrotnie przewyższają pierwszą okresową składkę brutto.

Ubezpieczeniem wielostanowym nazywa się umowę ubezpieczenia obejmującą różne przypadki życiowe. Ubezpieczenia tego typu składają się z podstawowej umowy ubezpieczenia (jest to zazwyczaj umowa ubezpieczenia na życie) oraz ubezpieczeń dodatkowych, czyli tzw. opcji (np. umowa ubezpieczenia od trwałego inwalidztwa, niezdolności do pracy). Dlatego te ubezpieczenia nazwane są również ubezpieczeniami wieloopcyjnymi. Podstawą aktuarialno-finansowej analizy ubezpieczenia jest skonstruowanie jego matematycznego modelu. Pierwszym krokiem jest opis możliwych zdarzeń losowych (przypadków życiowych), które obejmuje umowa ubezpieczenia podstawowego wraz z umowami ubezpieczeń dodatkowych, a następnie określenie wszystkich możliwych przebiegów ubezpieczenia. W tym celu definiuje się tzw. model wielostanowy (*multistate model*), a następnie określa na nim strukturę probabilistyczną (pkt 2.1) oraz przepływy pieniężne wynikające z zawarcia umowy ubezpieczenia (pkt 2.2). Następnym krokiem jest wyznaczenie wartości aktualnej i aktuarialnej przepływów pieniężnych, co jest przedmiotem rozważań w pkt 3. Sposób wyznaczania składki netto zgodnie z zasadą równoważności opisany został w pkt 4. Zasady wyznaczania składki brutto (pkt 6.1) poprzedzone zostały określeniem rodzajów kosztów ponoszonych przez ubezpieczyciela w trakcie trwania umowy ubezpieczenia (pkt 5). Zastosowanie wyprowadzonych wzorów do wyznaczania składek brutto zostało zilustrowane na przykładach ubezpieczeń zdrowotnych (pkt 6.2).

2. Ubezpieczenia wielostanowe

2.1. Model wielostanowy i jego probabilistyczna struktura

Każdemu przypadkowi życiowemu, którego dotyczy opcja lub umowa ubezpieczenia podstawowego, odpowiada stan (lub status jak w [Błaszczyszyn, Rolski 2004]), w jakim znalazł się ubezpieczony. Przyjmijmy, że N ($N < \infty$) oznacza liczbę wszystkich możliwych stanów oraz $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ oznacza skończoną *przestrzeń stanów*.

Ponadto niech para (i, j), gdzie $i \neq j$ oraz $i, j \in S$, oznacza bezpośrednie przejście ze stanu i do stanu j. Zauważmy, że w zależności od analizowanej umowy ubezpieczenia możliwe jest, że niektóre przejścia między stanami nie są dopuszczalne. Może tak się zdarzyć ze względu na nieodwracalny charakter niektórych przypadków życiowych, takich jak trwałe inwalidztwo czy śmierć. Wygodnie jest zatem wprowadzić *zbiór T* wszystkich możliwych bezpośrednich przejść między stanami.

Para (S, T) opisująca wszystkie możliwe zdarzenia zachodzące w życiu ubezpieczonego w okresie objętym umową ubezpieczenia nazywana jest modelem wielostanowym (por. [Haberman, Pitacco 1999]).

Badanie i analiza zmian stanów (ewolucji statusu ubezpieczonej osoby) od momentu zawarcia umowy ubezpieczenia jest jednym z podstawowych elementów wpływających na wycenę umowy ubezpieczenia.

Niech x oznacza wiek ubezpieczonego w chwili podpisywania umowy ubezpieczenia, x jest nazywany także wiekiem wstępu (*age at entry*).

Dla danej umowy ubezpieczenia, reprezentowanej przez model wielostanowy (S, T), funkcja $X(x,t) \in S$, gdzie

$$X(x,t) = i, \quad \text{dla} \quad i \in S, \quad t \in \mathrm{T} \subseteq \{0,1,2,\ldots\},$$

oznacza, że w chwili t (oznaczającej czas, jaki upłynął od rozpoczęcia umowy ubezpieczenia) ubezpieczonego dotyczy przypadek życiowy, któremu został przypisany stan i. Ponieważ analiza dotyczy pojedynczej polisy, to dla uproszczenia zapisu pomijany będzie wiek wstępu ubezpieczonego, tzn. $X(x,t) = X(t)$.

Ponieważ przypadki życiowe, które obejmuje umowa ubezpieczenia, mają naturę losową, to przyjmuje się, że $\{X(t); t \in \mathrm{T}\}$ jest rodziną zmiennych losowych, czyli procesem stochastycznym przyjmującym wartości ze skończonej przestrzeni stanów S.

Analiza dotyczy ubezpieczeń, w których okres ubezpieczenia został podzielony na rozłączne odcinki czasu, np. dni, miesiące lub lata, co odzwierciedla założenie, że $\mathrm{T} = \{0,1,2,\ldots\}$. W szczególności oznacza to, że jednorazowe świadczenia i raty renty płatnej z dołu realizowane są na koniec okresu (rok, kwartał, miesiąc itp.) oraz składki i raty renty płatnej z góry realizowane są na początku okresu (por. pkt 2.2). Jeżeli okres ubezpieczenia został podzielony na lata, to dla t-tego roku trwania okresu ubezpieczenia świadczenia płatne z dołu realizowane są w momencie t trwania okresu ubezpieczenia (na końcu roku t). Natomiast świadczenia płatne z góry (np. renta płatna z góry) oraz składki za ten rok realizowane są w momencie $t-1$ trwania okresu ubezpieczenia (na początku roku t).

Zakłada się, że w jednej jednostce czasu proces $\{X(t)\}$ może zmienić stan tylko jeden raz (może zajść tylko jedno zdarzenie losowe). Ponadto przyjmuje się, że umowa ubezpieczenia została zawarta w momencie 0 na n jednostek czasu, gdzie n jest okresem ubezpieczenia (*insurance period*). W tej sytuacji rozważany jest proces $\{X(t); t \in \mathrm{T}\}$ dla $\mathrm{T} = \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Podstawowymi wielkościami opisującymi ewolucję procesu $\{X(t)\}$ są rozkłady skończenie wymiarowe. W praktyce aktuarialnej znalezienie rozkładów wielowymiarowych oraz prawdopodobieństw warunkowych jest często trudne ze względu na ograniczoną liczbę dostępnych danych. Dlatego w celu ich określenia przyjmowane są pewne założenia. Często do opisu struktury probabilistycznej modelu wielostanowego wykorzystywane są procesy Markowa. W szczególności, zakładać będziemy, że $\{X(t)\}$ jest niejednorodnym w czasie łańcuchem Markowa. Wtedy do określenia jedno- i dwuwymiarowych rozkładów wystarczy znajomość wektora rozkładu początkowego $\mathrm{P}(0) = (1, 0, 0, \ldots,))^T \in R^N$ oraz ciągu macierzy prawdopodobieństw przejść $\mathbf{Q}(0)$, $\mathbf{Q}(1)$,..., $\mathbf{Q}(t)$,..., gdzie $\mathbf{Q}(t) = (q_{ij}(t))_{i,j=1}^N \in R^{N \times N}$, natomiast $q_{ij}(t) = \mathrm{P}(X(t+1) = j \mid X(t) = i)$.

2.2. Przepływy pieniężne

W wyniku zawarcia umowy ubezpieczenia powstają dwa strumienie przepływów pieniężnych, których wysokość i moment wypłaty określają warunki umowy ubezpieczenia:

– strumień składek (skierowany od ubezpieczonego do ubezpieczyciela),
– strumień świadczeń ubezpieczeniowych, np. sumy ubezpieczenia wypłacane w wyniku śmierci lub dożycia oraz różnego typu renty (skierowany od ubezpieczyciela do ubezpieczonego).

W wyniku realizacji umowy ubezpieczenia wielostanowego mogą być realizowane następujące typy przepływów pieniężnych (por. [Haberman, Pitacco 1999; Ostasiewicz 2004a]):

$p_j(t)$ – składka płacona w momencie t, gdy $X(t) = j$,

$\pi_j(t)$ – jednorazowa składka płacona w ustalonym momencie t, jeżeli $X(t) = j$,

$\ddot{b}_j(t)$ – renta płacona z góry w momencie t, gdy $X(t) = j$,

$b_j(t)$ – renta płacona z dołu w momencie t, gdy $X(t) = j$,

$d_j(t)$ – jednorazowe świadczenie płacone w ustalonym momencie t, jeżeli $X(t) = j$,

$c_{ij}(t)$ – jednorazowe świadczenie płacone w momencie t, gdy $X(t) = j$, a $X(t-1) = i$.

Zauważmy, że strumień składek tworzą przepływy pieniężne typu $p_j(t)$ oraz $\pi_j(t)$. W skrócie będą one oznaczane przez $\{p, \pi\}$. Natomiast strumień świadczeń tworzą przepływy pieniężne typu $\ddot{b}_j(t)$, $b_j(t)$, $d_j(t)$ oraz $c_{ij}(t)$, które w skrócie oznaczane będą przez $\{\ddot{b}, b, d, c_1, c_2, ..., c_N\}$. Zauważmy, że c_i oznacza jednorazowe świadczenie związane z przejściem procesu ze stanu *i*, a ponieważ wysokość świadczenia płaconego w stanie *j* może zależeć od tego, w jakim stanie był proces $\{X(t)\}$ w momencie poprzedzającym przejście, to w symbolicznym oznaczeniu strumienia świadczeń wyróżnione zostały wszystkie możliwe wielkości.

Niech więc $\wp$ oznacza jeden z typów przepływów pieniężnych, tzn.

$$\wp \in \{p, \pi, \ddot{b}, b, d, c_1, ..., c_N\}.$$

Wtedy $\wp_j(t)$ jest przepływem pieniężnym typu $\wp$ realizowanym w momencie *t*, gdy $X(t) = j$.

Kryterium podziału przepływów pieniężnych, istotnym z finansowego punktu widzenia, jest podział na przepływy pieniężne płatne z góry ($\wp \in \{p, \pi, \ddot{b},\}$) oraz przepływy pieniężne płatne z dołu (($\wp \in \{b, d, c1, ..., c_N\}$). Okazuje się, że wyszczególnienie dwóch typów rent (płatnej z góry i płatnej z dołu) jest szczególnie istotne w przypadku $\mathrm{T} \subseteq \{0,1,2,\ldots\}$, tzn. analizowany jest dysktetny model ubezpieczenia. Umożliwia to bowiem właściwe określenie wielkości aktuarialnych związanych z tymi typami przepływów pieniężnych.

3. Wartość aktualna i aktuarialna

Znajomość wartości aktuarialnej składek i świadczeń jest niezbędna w analizie ubezpieczeń m.in. do liczenia składek netto (jednorazowych i okresowych) oraz składek brutto.

W kalkulacji składek pierwszym krokiem jest obliczenie aktualnej wartości kwoty, która będzie płacona w przyszłości, tzn. aktualnego ekwiwalentu przyszłych świadczeń i składek. Aktualna wartość może być obliczana przy założeniu stałej lub losowej stopy procentowej. W przypadku gdy rozpatrywana jest stochastyczna stopa procentowa, funkcja dyskontująca dla odcinka czasu $[t, k]$ dana jest wzorem $\upsilon(t,k) = e^{-(Y(k)-Y(t))}$, gdzie $Y(t)$ oznacza stopę procentową w okresie $[0, t]$. Natomiast gdy rozpatrywana jest stała stopa procentowa, to funkcja dyskontująca dla odcinka czasu $[t, k]$ dana jest wzorem $\upsilon(t,k) = (1+u)^{-(k-t)} = \upsilon^{k-t}$, gdzie *u* oznacza stopę procentową w jednostce czasu, na jaki został podzielony okres ubezpieczenia.

Przez $\mathbf{1}_{\{X(k)=j\}}$ oznaczany jest indykator zdarzenia, że proces $\{X(t)\}$ jest w stanie *j* w chwili *k* ($t \geq 0$).

Niech $\Upsilon_t^{\wp,j}(k)$ będzie aktualną w momencie *t* wartością przepływu pieniężnego typu $\wp$ płaconego w chwili *k* $(0 \leq t \leq k)$, gdy proces $\{X(t)\}$ jest w momencie *k* w stanie *j*. Wtedy jeżeli

– $\wp \in \{p, \pi, \ddot{b}, b, d\}$, to

$$\Upsilon_t^{\wp,j}(k) = \upsilon(t,k)\mathbf{1}_{\{X(k)=j\}}\wp_j(k), \tag{1}$$

– $\wp \in \{c_1,...,c_N\}$, to

$$\Upsilon_t^{c_i,j}(k)=\begin{cases}\upsilon(t,k)\mathbf{1}_{\{X(k-1)=i\wedge X(k)=j\}}c_{ij}(k) & \text{dla} \quad i\neq j\\ 0 & \text{dla} \quad i=j\end{cases}.$$

Zauważmy, że $\Upsilon_t^{\wp,j}(k)$ jest zmienną losową i jej wielkość nie jest znana w momencie t, dlatego też w praktyce wykorzystuje się jej wartość oczekiwaną (aktuarialną).

W celu wyznaczenia wartości aktuarialnej niezbędne jest przyjęcie pewnych założeń. W przypadku gdy rozważana jest stochastyczna stopa procentowa, należy przyjąć następujące założenia (por. [Parker 1994; Frees 1990]):

Z1 Zmienne losowe $X(t)$ oraz $Y(t)$ są niezależne.
Z2 Wszystkie momenty losowej funkcji dyskontującej $e^{-Y(k)}$ są skończone.

Dla stałej stopy procentowej wystarczy założyć, że funkcja dyskontująca $\upsilon(t)=\upsilon^t$ jest ustalona.

Niech $\mathrm{E}(\Upsilon_t^{\wp,j}(k)\,|\,X(t)=i)$ będzie aktuarialna w momencie t wartością przepływu pieniężnego typu $\wp$ płaconego w chwili k $(0\leq t\leq k)$, gdy proces $\{X(t)\}$ jest w momencie k w stanie j, a w chwili t jest w stanie i. Wtedy jeżeli

– $\wp\in\{p,\pi,\ddot{b},b,d\}$, to

$$\mathrm{E}(\Upsilon_t^{\wp,j}(k)\,|\,X(t)=i)=\begin{cases}\mathrm{E}(\upsilon(t,k))q_{ij}(t,k)\wp_j(k) & \text{dla} \quad 0\leq t<k\\ \wp_j(k) & \text{dla} \quad 0\leq t=k \quad \text{i} \quad i=j,\\ 0 & \text{dla} \quad 0\leq t=k \quad \text{i} \quad i\neq j\end{cases} \tag{2}$$

– $\wp \in \{c_1,...,c_N\}$, to

$$\mathrm{E}(\Upsilon_t^{c_h,j}(k)\,|\,X(t)=i)=$$

$$=\begin{cases}\mathrm{E}(\upsilon(t,k))q_{ih}(t,k-1)q_{hj}(k-1,k)c_{hj}(k) & \text{dla} \quad h\in S\setminus\{j\} \quad \text{i} \quad 0\leq t<k\\ q_{hi}(t-1,t)c_{hi}(t) & \text{dla} \quad h\in S\setminus\{j\} \quad \text{i} \quad 0\leq t=k \quad \text{i} \quad i=j,\\ 0 \quad \text{poza} \quad \text{tym}\end{cases}$$

gdzie $q_{ij}(t,k)=\mathrm{P}(X(k)=j\,|\,X(t)=i)$. Zauważmy, że dla stałej stopy procentowej $\mathrm{E}(\upsilon(t,k))=\upsilon(t,k)\cdot$

Przydatne jest określenie wartości aktuarialnej przepływów pieniężnych realizowanych na odcinku czasu.

Niech $\mathrm{E}(\Upsilon_t^{\wp,j}(t_1,t_2)\,|\,X(t)=i)$ będzie aktarialną w momencie t wartością sumy przepływów pieniężnych typu $\wp$ płaconych w przedziale czasu $[t_1,t_2)$, gdy proces $\{X(t)\}$ jest w tym przedziale czasu w stanie j, a w momencie t jest w stanie i. Wtedy jeżeli $0\leq t\leq t_1<t_2$ oraz $\wp$ należy do strumienia:

– składek (płatnych z góry), tzn. $\wp\in\{p,\pi\}$, lub świadczeń płatnych z góry $\wp=\ddot{b}$, to

$$\mathrm{E}(\Upsilon_t^{\wp,j}(t_1,t_2)\,|\,X(t)=i)=\sum_{k=t_1}^{t_2-1}\mathrm{E}(\upsilon(t,k))q_{ij}(t,k)\wp_j(k), \tag{3}$$

– świadczeń płatnych z dołu typu $\wp\in\{b,d\}$, to

$$\mathrm{E}(\Upsilon_t^{\wp,j}(t_1,t_2)\,|\,X(t)=i)=\sum_{k=t_1+1}^{t_2}\mathrm{E}(\upsilon(t,k))q_{ij}(t,k)\wp_j(k), \tag{4}$$

– świadczeń płatnych z dołu typu $\wp\in\{c_1,...,c_N\}$, to

$$\mathrm{E}(\Upsilon_t^{c_h,j}(t_1,t_2)\,|\,X(t)=i)= \tag{5}$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=t_1+1}^{t_2}\mathrm{E}(\upsilon(t,k))q_{ih}(t,k-1)q_{hj}(k-1,k)c_{hj}(k) & \text{dla} \quad h\in S\setminus\{j\},\\ 0 & \text{dla} \quad h=j.\end{cases}$$

Zauważmy, że granice sumowania we wzorach na $\mathrm{E}(\Upsilon_t^{\wp,j}(t_1,t_2)\,|\,X(t)=i)$ zależą od tego, czy przepływy pieniężne danego typu są płacone z góry czy z dołu.

Szczególnie przydatna w kalkulowaniu składek ubezpieczeniowych jest znajomość wartości aktuarialnych w momencie rozpoczęcia ubezpieczenia (dla $t=0$) sumy wszystkich płatności danego typu realizowanych w danym stanie przez cały okres ubezpieczenia

$$\mathrm{E}(\Upsilon_0^{\wp,j}(0,n)\,|\,X(0)=1)=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{E}(\upsilon(0,k))q_{1j}(0,k)\wp_j(k) & \text{dla} \quad \wp\in\{p,\pi,\ddot{b}\},\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(\upsilon(0,k))q_{1j}(0,k)\wp_j(k) & \text{dla} \quad \wp\in\{b,d\},\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(\upsilon(0,k))q_{1h}(0,k-1)q_{hj}(k-1,k)c_{hj}(k) & \text{dla} \quad \wp\in\{c_1,...,c_N\}\setminus\{c_j\},\\ 0 & \text{dla} \quad \wp\in\{c_j\}.\end{cases}$$

Oznaczmy przez $a_{ij}(t_1,t_2)$ wartość aktuarialną w momencie rozpoczęcia ubezpieczenia (dla $t=0$) sumy wszystkich jednostkowych płatności typu rentowego (tzn. $\wp\in\{p,\ddot{b},b\}$) związanych z trwaniem procesu $\{X(t)\}$ w stanie j w okresie między momentem t_1 a momentem t_2, przy założeniu, że $X(t_1)=i$. Ponieważ sumowanie we wzorach (3) i (4) zależy od tego, czy płatności są realizowane z góry czy z dołu, to w literaturze aktuarialnej przyjmuje się, że

– dla płatności z góry ($\wp=p,\ddot{b}$)

$$\ddot{a}_{ij}(t_1,t_2)=\mathrm{E}(\Upsilon_0^{\wp,j}(t_1,t_2)\,|\,X(0)=1\wedge X(t_1)=i)=\sum_{k=t_1}^{t_2-1}\mathrm{E}(\upsilon(0,k))q_{ij}(t_1,k), \tag{6}$$

– dla płatności z dołu ($\wp = b$)

$$a_{ij}(t_1,t_2) = \mathrm{E}(\Upsilon_0^{\wp,j}(t_1,t_2) \mid X(0)=1 \wedge X(t_1)=i) = \sum_{k=t_1+1}^{t_2} \mathrm{E}(\upsilon(0,k)) q_{ij}(t_1,k). \quad (7)$$

Ponadto dla świadczenia jednostkowego związanego ze zmianą stanu (tzn. $\wp \in \{c_1,...,c_N\}$) są stosowane następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} A_{ihj}(t_1,t_2) &= \mathrm{E}(\Upsilon_t^{c_h,j}(t_1,t_2) \mid X(0)=1 \wedge X(t_1)=i) \\ &= \sum_{k=t_1+1}^{t_2} \mathrm{E}(\upsilon(0,k)) q_{ih}(t_1,k-1) q_{hj}(k-1,k), \end{aligned} \quad (8)$$

gdy $c_{hj}(k)=1$ dla $k \in [t_1,t_2)$. Ponadto

$$A_{i\bullet j}(t_1,t_2) = \sum_{k=t_1+1}^{t_2} \mathrm{E}(\upsilon(0,k)) \sum_{h \in S \setminus \{j\}} q_{ih}(t_1,k-1) q_{hj}(k-1,k)$$

oraz

$$A_{ih\bullet}(t_1,t_2) = \sum_{k=t_1+1}^{t_2} \mathrm{E}(\upsilon(0,k)) \sum_{j \in S \setminus \{h\}} q_{ih}(t_1,k-1) q_{hj}(k-1,k).$$

Wprowadzone powyżej oznaczenia $\ddot{a}_{ij}(t_1,t_2)$, $a_{ij}(t_1,t_2)$ oraz $A_{ihj}(t_1,t_2)$ upraszczają zapis m.in. przy wyznaczaniu składek netto oraz składek brutto.

4. Składki netto

Zgodnie z zasadami matematyki aktuarialnej (por. [Gerber 1990; Bowers i in. 1986; Ostasiewicz 2004a]) najprostszym sposobem wyznaczania składki ubezpieczeniowej (jednorazowej lub okresowej) jest zasada, zgodnie z którą składkę netto musi spełniać równanie wartości składki netto oznaczające, że wartość aktuarialna sumy składek musi być równa wartości aktuarialnej sumy świadczeń.

Niech L oznacza całkowitą stratę ubezpieczyciela (*total loss*) definiowaną jako różnicę między aktualną wartością wszystkich wypłat poniesionych przez ubezpieczyciela z tytułu zawarcia umowy (tzn. świadczeń) oraz aktualną wartością wpływów ze składek płaconych przez ubezpieczonego podczas trwania umowy ubezpieczenia

$$\mathsf{L} = \sum_{\wp \in \{\ddot{b},b,d,c_1,...,c_N\}} \sum_{j \in S} \sum_{t=0}^{n} \Upsilon_0^{\wp,j}(t) - \sum_{\wp \in \{p,\pi\}} \sum_{j \in S} \sum_{t=0}^{n-1} \Upsilon_0^{\wp,j}(t). \quad (9)$$

Aktualne wartości składek i świadczeń są liczone w momencie rozpoczęcia umowy ubezpieczenia (czyli dla $X(0)=1$). Zauważmy, że sumowanie przepływów pieniężnych, które są świadczeniami, zaczyna się od $t=0$ ze względu na to, że kontrakt ubezpieczeniowy może przewidywać wypłatę renty płatnej z góry. Natomiast sumowanie przepływów pieniężnych, które są składkami, kończy się w momencie $t = n - 1$, gdyż przepływy te są zawsze płatne z góry. Jeżeli umowa ubezpieczenia nie przewiduje świadczeń typu rentowego płatnych z góry, to wówczas wzór (9) jest postaci

$$\mathsf{L} = \sum_{\wp \in \{b,d,c_1,\ldots,c_N\}} \sum_{j \in S} \sum_{t=1}^{n} \Upsilon_0^{\wp,j}(t) - \sum_{\wp \in \{p,\pi\}} \sum_{j \in S} \sum_{t=0}^{n-1} \Upsilon_0^{\wp,j}(t). \tag{10}$$

Całkowita strata ubezpieczyciela L jest zmienną losową, która zależy od rozkładu procesu $\{X(t)\}$ oraz stochastycznej stopy procentowej $Y(t)$.

Fundusz L wykorzystywany jest do określania wysokości składek w ubezpieczeniach. Składkę nazywamy składką netto, jeśli średnia wartość całkowitej straty ubezpieczyciela jest równa zeru, tj.

$$\mathrm{E}(\mathsf{L}) = 0. \tag{11}$$

Równość (11) nazywana jest zasadą równoważności i jest równoważna równaniu wartości składki netto.

Dla ubezpieczenia wielostanowego z okresem ubezpieczenia n równanie wartości składki netto ma następującą postać

$$\sum_{\wp \in \{p,\pi\}} \sum_{j \in S} \sum_{t=0}^{n-1} \mathrm{E}(\Upsilon_0^{\wp,j}(t)) = \sum_{\wp \in \{\ddot{b},b,d,c_1,\ldots,c_N\}} \sum_{j \in S} \sum_{t=0}^{n} \mathrm{E}(\Upsilon_0^{\wp,j}(t)). \tag{12}$$

Korzystając ze wzorów (3)-(5), wzór (12) można zapisać w następującej postaci

$$\sum_{\wp \in \{p,\pi\}} \sum_{j \in S} \mathrm{E}(\Upsilon_0^{\wp,j}(0,n)) = \sum_{\wp \in \{\ddot{b},b,d,c_1,\ldots,c_N\}} \sum_{j \in S} \mathrm{E}(\Upsilon_0^{\wp,j}(0,n)). \tag{13}$$

Na podstawie równości (13) można wyznaczyć składki jednorazową i okresowe. Niech π oznacza jednorazową składkę netto płatną z góry. Ponieważ przyjmuje się, że proces $\{X(t)\}$, rozpoczynając ubezpieczenie, jest w stanie 1 (tzn. $\mathrm{P}(X(0) = 1) = 1$), to $\pi = \pi_1(0)$ jest jedyną wartością po lewej stronie równania (13), wobec tego jednorazową składkę netto (*net single premium*) dla ubezpieczenia wielostanowego oblicza się według następującego wzoru

$$\pi = \sum_{\wp \in \{\ddot{b},b,d,c_1,\ldots,c_N\}} \sum_{j \in S} \mathrm{E}(\Upsilon_0^{\wp,j}(0,n)). \tag{14}$$

Rozważmy teraz okresową składkę netto (*net period premium*) o stałej wysokości p płatną przez pierwszych m ($m \le n$) okresów trwania umowy ubezpieczenia, jeżeli proces $\{X(t)\}$ jest w stanie 1. Wtedy lewą stronę równości (13) można zapisać w następujący sposób

$$\mathrm{E}(\Upsilon_0^{p,1}(0,m)) = \sum_{t=0}^{m-1} \mathrm{E}(\upsilon(0,t)) q_{11}(0,t)\, p = p\ddot{a}_{11}(0,m). \tag{15}$$

Wobec tego składka okresowa o stałej wysokości p płatna przez pierwszych m okresów trwania umowy ubezpieczenia wyznaczana jest według następującego wzoru

$$p = \frac{\sum\limits_{\wp \in \{\ddot{b}, b, d, c_1, \ldots, c_N\}} \sum\limits_{j \in S} \mathrm{E}(\Upsilon_0^{\wp, j}(0, n))}{\ddot{a}_{11}(0, m)} = \frac{\pi}{\ddot{a}_{11}(0, m)}. \tag{16}$$

Zauważmy, że składka netto pokrywa jedynie przeciętną wypłatę świadczeń z tytułu zawartego ubezpieczenia, ale nie uwzględnia żadnych kosztów.

5. Koszty ubezpieczyciela

5.1. Charakterystyka i klasyfikacja kosztów

Składkę ubezpieczeniową, w której uwzględniono koszty zawarcia i prowadzenia ubezpieczenia, nazywać będziemy składką brutto.

Wyróżnia się dwa podstawowe rodzaje kosztów:

1. Koszty inwestycyjne (*investment expenses*), które związane są z dokonywaniem analiz finansowych oraz kosztami zakupu i sprzedaży instrumentów finansowych w ramach prowadzenia działalności przez ubezpieczyciela.

2. Koszty ubezpieczenia (*insurance expenses*), związane z zawarciem i prowadzeniem ubezpieczenia przez ubezpieczyciela. Ze względu na swoja specyfikę dzieli się je na:

– koszty administracyjno-akwizycyjne,
– koszty realizacji świadczeń w czasie trwania umowy ubezpieczenia.

Przy określaniu składki brutto najwięcej uwagi poświęca się kosztom ubezpieczenia (poszczególne ich rodzaje opisane zostały w pkt 5.2 i 5.3). Natomiast koszty inwestycyjne są zazwyczaj zawarte w stopie procentowej uwzględnianej przy określaniu składki, dlatego w dalszych rozważaniach zostały pominięte.

Koszty ubezpieczenia mogą być określane w rozmaity sposób, mianowicie ich wysokość może być stała albo zależeć od wysokości przepływów pieniężnych tworzących strumień składek brutto lub strumień świadczeń. Jeżeli $\xi_j(k)$ jest kosztem w momencie k, gdy proces $\{X(t)\}$ jest w momencie k w stanie j, to można go przedstawić ogólnie w następującej postaci

$$\xi_j(k) = \xi_j^{'}(k) + \xi_j^{''}(k) \cdot \text{składka brutto} + \xi_j^{'''}(k) \cdot \text{świadczenie}, \tag{17}$$

gdzie $\xi^{'}$ jest kwotą ryczałtową przypadajacą na każdą polisę (*expenses per policy*), $\xi^{''}$ jest procentem składki brutto płaconej w momencie k, gdy proces $\{X(t)\}$ jest w stanie j (*percent premium*), a $\xi^{'''}$ jest procentem świadczenia (w zależności od rodzaju kosztów: realizowanego w momencie k lub świadczenia, które mogłoby być wypłacone w jednostce czasu $k+1$) (*percent benefits* lub *per 1000 insurance*)[2].

Z punktu widzenia matematyki finansowej koszt $\xi_j(k)$ (podobnie jak składka czy świadczenie) jest przepływem pieniężnym realizowanym w momencie k, gdy $X(k)=j$, a jego aktualna w momencie t ($0 \le t \le k$) wartość jest następująca (por. (1))

$$\Upsilon_t^{\xi,j}(k)=\begin{cases} \upsilon(t,k)\mathbf{1}_{\{X(k)=j\}}\xi_j(k) & \text{dla} \quad 0 \le t < k, \\ \mathbf{1}_{\{X(k)=j\}}\xi_j(k) & \text{dla} \quad 0 \le t = k, \end{cases} \tag{18}$$

zaś jego wartość aktuarialna jest postaci (por. (2))

$$\mathrm{E}(\Upsilon_t^{\xi,j}(k) \mid X(t)=i)=\begin{cases} \mathrm{E}(\upsilon(t,k))q_{ij}(t,k)\xi_j(k) & \text{dla} \quad 0 \le t < k \\ \xi_j(k) & \text{dla} \quad 0 \le t = k \quad \text{i} \quad i=j. \\ 0 & \text{dla} \quad 0 \le t = k \quad \text{i} \quad i \ne j \end{cases} \tag{19}$$

Ponieważ $\xi_j(k)$ jest przepływem pieniężnym płatnym z góry, to dla $0 \le t \le t_1 < t_2$ mamy, że (por. (3))

$$\mathrm{E}(\Upsilon_t^{\xi,j}(t_1,t_2) \mid X(t)=i)=\sum_{k=t_1}^{t_2-1}\mathrm{E}(\upsilon(t,k))q_{ij}(t,k)\xi_j(k).$$

Określając składkę brutto, należy uwzględnić także czas, w jakim są ponoszone poszczególne rodzaje kosztów. Ze względu na częstotliwość ich realizacji można podzielić je na takie, które płacone są:

- jednorazowo (np. koszty wystawienia polisy, akwizycji na początku umowy ubezpieczenia lub koszty wypłaty jednorazowego świadczenia, np. z tytułu śmierci),
- wielokrotnie w trakcie trwania umowy ubezpieczenia, np.:

– dopóki polisa nie wygaśnie,
– przez okres opłaty składek,
– przez okres opłaty renty.

Szczegółowa charakterystyka poszczególnych rodzajów kosztów przedstawiona została w następnych punktach. Klasyfikacja kosztów została przeprowadzona według [Bowers i in. 1986]. Oczywiście jest możliwe dokonanie innego podziału kosztów, jak w np. [Gerber 1990] (por. także [Błaszczyszyn, Rolski 2004; Skałba 2003]), jest on jednak mniej szczegółowy w stosunku do podziału przedstawionego w [Bowers i in. 1986].

[2] Niekiedy w literaturze aktuarialnej koszty liczone są także względem rezerwy prospektywnej i wtedy do równania (17) dodaje się dodatkowo składnik $\xi_j^{''''}(k)\cdot V_j(k)$, gdzie $\xi_j^{''''}(k)$ jest procentem rezerwy prospektywnej płatnej w momencie k, gdy proces $\{X(t)\}$ jest w stanie j.

5.2. Koszty administracyjne i akwizycyjne

Koszty administracyjne ponoszone są przez ubezpieczyciela przez cały czas trwania umowy ubezpieczenia (do końca okresu ubezpieczenia lub do momentu wygaśnięcia polisy). Natomiast koszty akwizycji największe są na początku umowy ubezpieczenia, a później stopniowo maleją (aż do zera w momencie wypłacenia agentowi ostatniej prowizji). W niektórych analizach kosztów ubezpieczeniowych (np. [Błaszczyszyn, Rolski 2004]) zakłada się, że koszty akwizycji ponoszone są przez ubezpieczyciela w całości przy zawieraniu ubezpieczenia.

Niech α oznacza koszty administracyjno-akwizycyjne, w skrócie będziemy mówić, że koszty administracyjno-akwizycyjne są kosztami typu α. Ogólna postać tego typu kosztów jest następująca (por. (17))

$$\alpha_j(t) = \alpha'_j(t) + \alpha''_j(t) \sum_{\wp \in \{p,\pi\}} \wp^b_j(t) + \alpha'''_j(t) f_j(t), \tag{20}$$

gdzie

$$f_j(t) = \max_{\{i:(j,i)\in \mathrm{T}\}} (\ddot{b}_i(t) + b_j(t+1) + d_i(t+1) + c_{ji}(t+1)) \tag{21}$$

jest maksymalną wysokością świadczenia, jakie mógłby zapłacić ubezpieczyciel, gdyby zdarzenie ubezpieczeniowe zaszło w t + 1-szej jednostce czasu, tj. w okresie $[t, t+1)$. Natomiast $p^b_j(t)$ oraz $\pi^b_j(t)$ są składkami brutto. Ponieważ w chwili t nie wiadomo, w którym stanie będzie proces $\{X(t)\}$ w momencie t + 1, to zaproponowano, aby przyjąć największe z możliwych świadczeń, jakie mógłby wypłacić ubezpieczyciel. Sposób określenia wielkości $f_j(t)$, od której naliczane są koszty, zależy od ubezpieczyciela, który np. może przyjąć, że $f_j(t)$ jest równe średniej (względem rozkładu procesu $\{X(t)\}$) ze wszystkich możliwych świadczeń, które mógłby wypłacić w okresie $[t, t+1)$. W ubezpieczeniach życiowych zazwyczaj $f_j(t)$ jest równoważne sumie ubezpieczenia płatnej z tytułu śmierci.

Wyróżnia się trzy rodzaje kosztów typu α (por. [Bowers i in. 1986]):

α1 koszty akwizycji (*acquisition expenses*):
(a) prowizja agentów i brokerów, materiały reklamowe,
(b) klasyfikacja ryzyka, w tym ekspertyzy i badania lekarskie,
(c) wystawienie polisy i obsługa jej recordu w bazie danych;

α2 koszty obsługi ubezpieczenia (*maintenance expenses*):
(a) inkasa składki,
(b) zmiany w polisie, np. dotyczące uposażonego,
(c) korespondencja z ubezpieczonym;

α3 koszty ogólne (*general expenses*):
(a) działalność naukowa,
(b) obsługa aktuarialna i prawna,
(c) analiza kosztów,
(d) podatki, koszty licencji i inne opłaty.

Koszty akwizycji są postaci

$$\alpha 1_j(t) = \alpha 1'_j(t) + \alpha 1''_j(t) \sum_{\wp \in \{p,\pi\}} \wp_j^b(t) + \alpha 1'''_j(t) f_j(t), \tag{22}$$

gdyż koszty (c) zazwyczaj są stałe, koszty (a) zależą od wysokości składki, a koszty (b) zależą od wysokości świadczenia.

Natomiast koszty obsługi ubezpieczenia mają postać

$$\alpha 2_j(t) = \alpha 2'_j(t) + \alpha 2''_j(t) \sum_{\wp \in \{p,\pi\}} \wp_j^b(t) + \alpha 2'''_j(t) f_j(t) \tag{23}$$

i zależą od $\alpha 2'$ i $\alpha 2'''$ ze względu na koszty opisane w (b) i (c), podczas gdy koszty (a) zależą od wysokości składki brutto.

Podobnie koszty ogólne

$$\alpha 3_j(t) = \alpha 3'_j(t) + \alpha 3''_j(t) \sum_{\wp \in \{p,\pi\}} \wp_j^b(t) + \alpha 3'''_j(t) f_j(t) \tag{24}$$

zależą od $\alpha 2'$ i $\alpha 2'''$ ze względu na koszty opisane w (b) i (c), a koszty (a) zależą od wysokości składki brutto.

Ponieważ w momencie *t* mogą być realizowane wszystkie koszty akwizycyjno-administracyjne, niech $\alpha_j(t)$ będzie łącznym kosztem typu *α* (por. (20))

$$\alpha_j(t) = \alpha 1_j(t) + \alpha 2_j(t) + \alpha 3_j(t) = \alpha'_j(t) + \alpha''_j(t) \sum_{\wp \in \{p,\pi\}} \wp_j^b(t) + \alpha'''_j(t) f_j(t), \tag{25}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha'_j(t) &= \alpha 1'_j(t) + \alpha 2'_j(t) + \alpha 3'_j(t), \\ \alpha''_j(t) &= \alpha 1''_j(t) + \alpha 2''_j(t) + \alpha 3''_j(t), \\ \alpha'''_j(t) &= \alpha 1'''_j(t) + \alpha 2'''_j(t) + \alpha 3'''_j(t). \end{aligned}$$

Zauważmy, że część kosztów $\alpha''_j(t) \sum_{\wp \in \{p,\pi\}} \wp_j^b(t) \neq 0$ ponosi ubezpieczyciel tylko wtedy, gdy ubezpieczony w chwili *t* jest zobligowany do zapłacenia składki. Poza tym pozostałe składowe kosztów typu *α* są realizowane przez cały czas, gdy czynna jest umowa ubezpieczenia, tzn. w chwilach $t = 0, 1, 2, ..., n-1$ lub zanim proces $\{X(t)\}$ nie przejdzie do stanu pochłaniającego (równoznacznego z zakończeniem umowy ubezpieczenia). W momencie *n* nie ma już żadnych kosztów administracyjnych, bo ubezpieczenie wygasa, jedynie mogą być wypłacone świadczenia, których koszty omówione zostaną w pkt 5.3. Zatem postać kosztów $\alpha_j(t)$ zależy nie tylko od momentu *t*, ale także od stanu *j*. Przyjmijmy, że ubezpieczony płaci składki (gdzie *m* jest liczbą składek) tylko wtedy, gdy proces $\{X(t)\}$ jest w stanie 1. Wtedy mamy, że koszty typu *α* dla:

– stanu początkowego $j = 1$ są postaci

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} \alpha_1^{'}(0) + \alpha_1^{''}(0)\pi_1^b(0) + \alpha_1^{'''}(0) f_1(0) & \text{dla} \quad t = 0 \wedge m = 1, \\ \alpha_1^{'}(t) + \alpha_1^{''}(t) p_1^b(t) + \alpha_1^{'''}(t) f_1(t) & \text{dla} \quad t = 0,1,...,m-1 \wedge m > 1, \\ \alpha_1^{'}(t) + \alpha_1^{'''}(t) f_1(t) & \text{dla} \quad t = m+1,...,n, \end{cases}$$

– stanu przejściowego $j \neq 1$ ($\exists_{i \in S}(j,i) \in T$) są postaci

$$\alpha_j(t) = \alpha_j^{'}(t) + \alpha_j^{'''}(t) f_j(t) \quad \text{dla} \quad k = 1,...,n,$$

– stanu pochłaniającego $j \neq 1$ ($\forall_{i \in S}(j,i) \notin T$) są równe zeru

$$\alpha_j(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t = 0, 1, ..., n.$$

Każdy z kosztów typu $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$ można rozpisać tak samo jak koszt typu α w zależności od tego, dla jakiego typu stanu jest określany.

5.3. Koszty realizacji świadczeń

Do kosztów realizacji świadczeń zaliczane są koszty dochodzenia i prawnego aspektu określenia, czy ubezpieczony (lub uposażony) ma prawo do otrzymania świadczenia, oraz koszty finansowe związane z samym faktem wypłacania świadczenia. Niech β oznacza koszty realizacji świadczeń, w skrócie będziemy mówić, że koszty realizacji świadczeń są kosztami typu β. Wysokość kosztów typu β może być określona w sposób ryczałtowy lub zależeć od wysokości świadczenia, jednak są one realizowane tylko wtedy, gdy warunki ubezpieczenia umożliwiają wypłatę świadczenia, dlatego też ogólna postać kosztów typu β różni się od ogólnej postaci kosztów typu α i jest następująca (dla $t = 0, 1, 2, ..., n$):

$$\begin{aligned} \beta_j(t) &= \left(\beta_j^{'}(t) + \beta_j^{'''}(t) \cdot \acute{s}wiadczenie\right) \cdot \mathbf{1}_{\{\acute{s}wiadczenie \neq 0\}} \\ &= \beta_j^{'}(t) \cdot \mathbf{1}_{\{\acute{s}wiadczenie \neq 0\}} + \beta_j^{'''}(t) \cdot \acute{s}wiadczenie \end{aligned}$$

Konieczne jest pomnożenie ryczałtowych kosztów $\beta_j^{'}(t)$ przez indykator $\mathbf{1}_{\{\acute{s}wiadczenie \neq 0\}}$, bo w przeciwnym razie, gdyby proces $\{X(t)\}$ był w stanie j, to zawsze koszty ryczałtowe $\beta_j^{'}(t)$ byłyby dodawane niezależnie od tego, czy w warunkach ubezpieczenia przewidziana jest wypłata świadczenia związana z pobytem procesu $\{X(t)\}$ w stanie j, czy taka wypłata nie jest przewidziana.

Zauważmy, że koszty typu β związane są z faktem realizacji świadczenia i ponoszone są przez ubezpieczyciela jednorazowo (np. w przypadku świadczeń typu d lub c) lub wielokrotnie (w przypadku świadczeń rentowych typu $\ddot{b}$ lub b). Dodatkowo świadczenia typu d i c różnią się od siebie, bo pierwsze z nich zależy od pobytu procesu $\{X(t)\}$ w danym stanie, a drugie z nich związane jest ze zmianą stanów przez proces $\{X(t)\}$. Poza tym świadczenia typu rentowego mogą być płacone z góry lub z dołu. Dlatego też zaproponowane zostało wyróżnienie czterech rodzajów kosztów typu β, mianowicie:

$\beta 1$ koszty realizacji przepływu pieniężnego typu $\ddot{b}$ są kosztami ponoszonym przez ubezpieczyciela, dopóki warunki ubezpieczenia umożliwiają wypłatę renty płatnej z góry, a mianowicie

$$\beta 1_j(t) = (\beta 1'_j(t) + \beta 1'''_j(t)\ddot{b}_j(t)) \cdot_{\{\ddot{b}_j(t)\neq 0\}} . \tag{26}$$

Wartość aktualna kosztów typu $\beta 1$ liczona w momencie rozpoczęcia umowy ubezpieczenia jest równa

$$\Upsilon_0^{\beta 1,j}(t) = \upsilon(0,t)(\beta 1'_j(t)_{\{\ddot{b}_j(t)\neq 0\}} + \beta 1'''_j(t)(\ddot{b}_j(t)))_{\{X(t)=j\}}, \tag{27}$$

a wartość aktuarialna

$$\mathrm{E}(\Upsilon_0^{\beta 1,j}(t)) = \mathrm{I} \quad E(\upsilon(0,t))(\beta 1'_j(t)_{\{\ddot{b}_j(t)\neq 0\}} + \beta 1'''_j(t)(\ddot{b}_j(t)))q_{1j}(0,t). \tag{28}$$

$\beta 2$ koszty realizacji przepływu pieniężnego typu b są kosztami ponoszonymi przez ubezpieczyciela, dopóki warunki ubezpieczenia umożliwiają wypłatę renty płatnej z dołu, a mianowicie

$$\beta 2_j(t) = (\beta 2'_j(t) + \beta 2'''_j(t)b_j(t)) \cdot_{\{b_j(t)\neq 0\}} . \tag{29}$$

Wartość aktualna i aktuarialna kosztów typu $\beta 2$ liczona w momencie rozpoczęcia umowy ubezpieczenia jest wyznaczana analogicznie jak kosztów $\beta 1$.

$\beta 3$ koszty realizacji przepływu pieniężnego typu d są kosztami jednorazowymi, które ponoszone są przez ubezpieczyciela w momencie wypłaty świadczenia $d_j(t)$, mianowicie

$$\beta 3_j(t) = (\beta 3'_j(t) + \beta 3'''_j(t)d_j(t)) \cdot_{\{d_j(t)\neq 0\}} . \tag{30}$$

Wartość aktualna i aktuarialna kosztów typu $\beta 3$ liczona w momencie rozpoczęcia umowy ubezpieczenia jest wyznaczana analogicznie jak kosztów $\beta 1$ i $\beta 2$.

$\beta 4$ koszty realizacji przepływu pieniężnego typu c są kosztami jednorazowymi, które ponoszone są przez ubezpieczyciela w momencie wypłaty świadczenia $c_{ij}(t)$. Ponieważ w jednostce czasu może zajść tylko jedna zmiana stanów, a wysokości świadczeń związanych z każdą możliwą zmianą stanów mogą się różnić od siebie, to

$$\beta 4_j(t) = \sum_{i\in \mathsf{S}\setminus\{j\}} (\beta 4^i_j(t)_{\{X(t-1)=i\}}) \cdot_{\{c_{ij}(t)\neq 0\}}, \tag{31}$$

gdzie $\beta 4^i_j(t) = \beta 4'_j(t) + \beta 4'''_j(t)c_{ij}(t)$ jest kosztem wypłaty świadczenia $c_{ij}(t)$. Wartość aktualna kosztów typu $\beta 4$ liczona w momencie rozpoczęcia umowy ubezpieczenia jest równa

$$\Upsilon_0^{\beta 4,j}(t) = \sum_{i\in \mathsf{S}\setminus\{j\}} \upsilon(0,t)\beta 4^i_j(t)_{\{X(t-1)=i\}} \cdot_{\{X(t)=j\}},$$

a wartość aktuarialna

$$\mathrm{E}(\Upsilon_0^{\beta 4,j}(t)) = \sum_{i \in \mathsf{S} \setminus \{j\}} \mathrm{I} \quad E(\upsilon(0,t))\beta 4_j^i(t) q_{1i}(0,t-1) q_{ij}(t-1). \tag{32}$$

Teoretycznie w momencie k mogą być realizowane wszystkie typy kosztów związanych z realizacją świadczeń, niech $\beta_j(t)$ będzie łącznym kosztem typu β, wtedy

$$\beta_j(t) = \beta 1_j(t) + \beta 2_j(t) + \beta 3_j(t) + \beta 4_j(t), \tag{33}$$

lecz ze względu na specyfikę przepływów pieniężnych typu c nie można przedstawić kosztów $\beta_j(t)$ w postaci analogicznej do kosztów $\alpha_j(t)$ danej wzorem (25).

6. Składki brutto

6.1. Równanie wartości składki brutto

Składkę brutto wyznacza się w podobny sposób jak składkę netto (na podstawie równania wartości składki netto), uwzględniając dodatkowo wymienione w pkt 5.2 i 5.3 koszty zawarcia i prowadzenia ubezpieczenia.

Składkę brutto (jednorazową lub okresową) wyznacza się w taki sposób, aby spełnione było równanie wartości składki brutto. Zgodnie z tym równaniem wartości aktuarialne wydatków ubezpieczyciela (wypłacone świadczenia plus poniesione koszty) muszą być równoważone przez wartość aktuarialną przychodów ubezpieczyciela (zapłacone przez ubezpieczonego składki). Oznacza to, że wartość aktuarialna sumy składek brutto jest sumą wartości aktuarialnej sumy składek netto i wartości aktuarialnej sumy kosztów.

Ponieważ koszty typu α i β mogą być płacone jedynie wtedy, gdy opłacana jest składka ubezpieczeniowa, to w przypadku ubezpieczenia ze składką jednorazową muszą one być zapłacone w momencie zawarcia umowy ubezpieczenia. Wówczas jeżeli π^{net} jest jednorazową składką netto liczoną na podstawie zasady równoważności, a π^b jest jednorazową składką brutto, to zgodnie z równaniem wartości składki brutto mamy, że

$$\pi^b = \pi^{net} + \pi^\alpha + \pi^\beta \tag{34}$$

gdzie

$$\pi^\alpha = \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{j \in \mathsf{S}} \mathrm{I} \quad E(\Upsilon_0^{\alpha,j}(t)), \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \pi^\beta = \sum_{t=0}^{n} \sum_{j \in \mathsf{S}} \Big(&\mathrm{I} \quad E(\Upsilon_0^{\beta 1,j}(t)) + \mathrm{I} \quad E(\Upsilon_0^{\beta 2,j}(t)) \\ &+ \mathrm{I} \quad E(\Upsilon_0^{\beta 3,j}(t)) + \mathrm{I} \quad E(\Upsilon_0^{\beta 4,j}(t)) \Big) \end{aligned} \tag{36}$$

są jednorazowymi składkami przeznaczonymi na koszty administracyjno-akwizycyjne (π^{α}) i koszty wypłaty świadczeń (π^{β}). Zauważmy, że w przypadku składki jednorazowej, pomimo że koszty są ponoszone przez ubezpieczyciela przez cały czas trwania ubezpieczenia, ich wartość aktuarialna musi być zapłacona w całości przez ubezpieczonego przy zawieraniu ubezpieczenia. We wzorze (36) sumujemy do chwili n, gdyż formalnie na końcu okresu ubezpieczenia mogą pojawić się koszty wypłaty świadczenia, np. z tytułu dożycia lub śmierci w ostatnim roku trwania ubezpieczenia. Natomiast sumowanie do chwili $n-1$ we wzorze (35) oznacza, że koszty typu α są realizowane tylko podczas trwania umowy ubezpieczenia, tzn. dopóki proces $\{X(t)\}$ nie osiągnie stanu pochłaniającego, oznaczającego koniec umowy ubezpieczenia lub umowa ubezpieczenia nie zakończy się.

Równanie wartości składki brutto nie wyznacza w sposób jednoznaczny okresowej składki brutto w kolejnych latach trwania ubezpieczenia. Przyjmuje się, że przy ustalaniu strumienia składki brutto można oddzielnie obliczyć jego składniki odpowiadające za wypłatę świadczeń i za poszczególne typy kosztów.

Przyjmijmy, że składki okresowe płacone są przez pierwszych m jednostek czasu, na jaki został podzielony okres ubezpieczenia (tj. dla $k = 0, 1, 2, ..., m-1$ i $m \le n$), jeżeli proces $\{X(t)\}$ jest w stanie 1. W takim przypadku zazwyczaj nie ma możliwości zapłacenia kosztów typu α w ramach pierwszej składki, gdyż (ze względu na koszty akwizycji) przeważnie przekraczają one wysokość samej składki. Dlatego też rozbijane są one na cały okres płacenia składek i w momencie t są równe $p^{\alpha}(t)$ (są składką na koszty typu α). Składki $p^{\alpha}(t)$ muszą być wyznaczone w taki sposób, aby spełnione było równanie wartości kosztów typu α postaci

$$\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{j\in \mathsf{S}} \mathrm{E}(\Upsilon_0^{\alpha,j}(t)) = \sum_{t=0}^{m-1} \mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{11}(0,t)p^{\alpha}(t). \tag{37}$$

Ponieważ koszt $\alpha_j(t)$ jest sumą trzech rodzajów kosztów typu α, to każdy z nich musi być wyznaczony zgodnie z zasadą równoważności. Tak więc składka $p^{\alpha 1}(t)$ przeznaczona na opłacenie kosztów akwizycji powinna być ustalona tak, aby spełnione było równanie wartości kosztów typu $\alpha 1$ postaci

$$\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{j\in S} \mathrm{E}(\Upsilon_0^{\alpha 1,j}(t)) = \sum_{t=0}^{m-1} \mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{11}(0,t)p^{\alpha 1}(t). \tag{38}$$

Z kolei składka $p^{\alpha 2}(t)$ przeznaczona na opłatę kosztów obsługi ubezpieczenia powinna być ustalona tak, aby spełniała równanie wartości kosztów typu $\alpha 2$

$$\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{j\in S} \mathrm{E}(\Upsilon_0^{\alpha 2,j}(t)) = \sum_{t=0}^{m-1} \mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{11}(0,t)p^{\alpha 2}(t). \tag{39}$$

W przypadku pozostałych kosztów składka $p^{\alpha 3}(t)$ przeznaczona na opłatę na kosztów typu $\alpha 3$ powinna być ustalona tak, aby spełniała równanie wartości kosztów typu $\alpha 3$

$$\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{j\in S}\mathrm{E}(\Upsilon_0^{\alpha 3,j}(t))=\sum_{t=0}^{m-1}\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{11}(0,t)p^{\alpha 3}(t). \tag{40}$$

Okresową składkę na koszty typu α można więc przedstawić jak sumę frakcji (części) składki finansujących poszczególne rodzaje kosztów typu α, co zostało pokazane w twierdzeniu 1.

Twierdzenie 1. *Niech $p^{\alpha}(t)$ oznacza okresową składkę na koszty typu α płaconą w chwili t, a $p^{\alpha 1}(t)$, $p^{\alpha 2}(t)$ i $p^{\alpha 3}(t)$ dla $t=0,1,2,...,m-1$ spełniają odpowiednio równania wartości (38) , (39) i (40) . Wtedy ciąg $p^{\alpha}(t)$ ($t=0,1,2,...,m-1$), gdzie*

$$p^{\alpha}(t)=p^{\alpha 1}(t)+p^{\alpha 2}(t)+p^{\alpha 3}(t), \tag{41}$$

spełnia równanie wartości kosztów typu α postaci (37).

Dowód.

Mamy, że

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\sum_{t=0}^{m-1}\upsilon(0,t)\mathbf{1}_{\{X(t)=1\}}\,p^{\alpha}(t)\right)&=\mathrm{E}\left(\sum_{t=0}^{m-1}\upsilon(0,t)\mathbf{1}_{\{X(t)=1\}}(p^{\alpha 1}(t)+p^{\alpha 2}(t)+p^{\alpha 3}(t))\right)\\&=\mathrm{E}\left(\sum_{t=0}^{m-1}\upsilon(0,t)\mathbf{1}_{\{X(t)=1\}}\,p^{\alpha 1}(t)\right)+\mathrm{E}\left(\sum_{t=0}^{m-1}\upsilon(0,t)\mathbf{1}_{\{X(t)=1\}}\,p^{\alpha 2}(t)\right)\\&\quad+\mathrm{E}\left(\sum_{t=0}^{m-1}\upsilon(0,t)\mathbf{1}_{\{X(t)=1\}}\,p^{\alpha 3}(t)\right),\end{aligned} \tag{42}$$

co oznacza, że spełnione jest równanie (41), gdyż pierwszy składnik sumy (42) zgodnie z (38) jest równy aktuarialnej wartości kosztów typu $\alpha 1$, drugi składnik sumy (42) zgodnie z (39) jest równy aktuarialnej wartości kosztów typu $\alpha 2$, podobnie jest z trzecim składnikiem sumy (42), który zgodnie z (40) jest równy aktuarialnej wartości kosztów typu $\alpha 3$ ponoszonych przez ubezpieczyciela w trakcie trwania umowy ubezpieczenia.

■

Przy założeniu, że koszty typu α są stałe przez cały okres ubezpieczenia, a okresowa składka na koszty typu α jest rozłożona równomiernie przez cały czas jej płacenia, wysokość p^{α} podana została w twierdzeniu 2.

Twierdzenie 2. *Niech $p^{\alpha}(t)=p^{\alpha}$ (dla $t=0,1,...,m-1$) oznacza stałą okresową składkę na koszty typu α. Ponadto niech $p^{\alpha 1}(t)$, $p^{\alpha 2}(t)$ i $p^{\alpha 3}(t)$ dla $t=0,1,2,...,m-1$ spełniają odpowiednio równania wartości (38) , (39) i (40) . Przy założeniu, że koszty są stałe przez cały czas trwania ubezpieczenia, tzn. dla stanów j, które są przejściowe*

$$\begin{aligned}\alpha 1_j(t) &= \alpha 1' + \alpha 1'' p_j^b(t) + \alpha 1''' f_j(t)\\ \alpha 2_j(t) &= \alpha 2' + \alpha 2'' p_j^b(t) + \alpha 2''' f_j(t)\\ \alpha 3_j(t) &= \alpha 3' + \alpha 3'' p_j^b(t) + \alpha 3''' f_j(t),\end{aligned}$$

oraz składka brutto $p^b(t)$ *jest płacona wtedy, kiedy proces* $\{X(t)\}$ *jest w stanie* 1 *przez pierwszych m jednostek czasu trwania okresu ubezpieczenia, mamy, że*

$$p^{\alpha} = \left[\ddot{a}_{11}(0,m)\right]^{-1}\left(\alpha''\sum_{t=0}^{m-1} p^b(t)\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{11}(0,t) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j:\exists_{i\in S}(j,i)\in T}\left(\alpha'\ddot{a}_{1j}(0,n) + \alpha'''\sum_{t=0}^{n-1} f_j(t)\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{1j}(0,t)\right)\right) \tag{43}$$

spełnia równanie wartości kosztów typu α postaci (37) .

Dowód.

Przy założeniu, że koszty typu α są stałe przez cały czas trwania ubezpieczenia oraz na podstawie (25) (dla stanów j, które są przejściowe) mamy, że

$$\alpha_j(t) = \alpha' + \alpha'' p_j^b(t) + \alpha''' f_j(t), \tag{44}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha 1' + \alpha 2' + \alpha 3',\\ \alpha'' &= \alpha 1'' + \alpha 2'' + \alpha 3'',\\ \alpha''' &= \alpha 1''' + \alpha 2''' + \alpha 3'''.\end{aligned}$$

Przyjmując, że $p_1^b(t) = p^b(t)$ oraz $p_j^b(t) = 0,$ dla $j \neq 1$ mamy, że lewa strona równości (37) jest postaci

$$\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{j\in S}\mathrm{E}(\Upsilon_0^{\alpha,j}(t)) = \alpha''\sum_{t=0}^{m-1} p^b(t)\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{11}(0,t) +$$
$$+ \sum_{j:\exists_{i\in S}(j,i)\in T}\left(\alpha'\ddot{a}_{1j}(0,n) + \alpha'''\sum_{t=0}^{n-1} f_j(t)\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{1j}(0,t)\right).$$

Przy założeniu, że $p^{\alpha}(t) = p^{\alpha}$, prawa strona równości (37) jest postaci $p^{\alpha}\ddot{a}_{11}(0,m)$. Porównując obie strony otrzymujemy (43).

■

Wniosek 1. *Jeżeli* p^{α} *spełnia założenia i tezę twierdzenia 2 oraz*

$$p_j^b(t) = \begin{cases} p^b & \text{dla} \quad j = 1 \wedge t = 0,1,\ldots,m-1 \\ 0 & \text{poza tym,}\end{cases}$$

to mamy, że

$$p^{\alpha} = \alpha'' p^{b} + \left[\ddot{a}_{11}(0,m)\right]^{-1} \sum_{j:\exists_{Si\in S}(j,i)\in T} \left(\alpha' \ddot{a}_{1j}(0,n) + \alpha''' \sum_{t=0}^{n-1} f_j(t)\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{1j}(0,t) \right). \tag{45}$$

Dowód.

Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 2.

■

Wniosek 2. *Jeżeli* p^{α} *spełnia założenia i tezę z twierdzenia 2 oraz*

$$p_j^b(t) = \begin{cases} p^b & \text{dla} \quad j=1 \wedge t = 0,1,\dots,m-1 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

$$f_j(t) = \begin{cases} f_j & \text{dla} \quad t = 0,1,\dots,n-1 \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases}$$

to mamy, że

$$p^{\alpha} = \alpha'' p^{b} + \left[\ddot{a}_{11}(0,m)\right]^{-1} \sum_{j:\exists_{i\in S}(j,i)\in T} (\alpha' + \alpha''' f_j)\ddot{a}_{1j}(0,n). \tag{46}$$

Dowód.

Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 2.

■

W przypadku składki okresowej, podobnie jak koszty typu α, poszczególne rodzaje kosztów typu β także powinny spełniać zasadę równoważności. Tak więc składka $p^{\beta 1}(t)$ przeznaczona na opłacenie kosztów wypłaty świadczenia typu $\ddot{b}$ powinna być ustalona tak, aby spełnione było równanie wartości kosztów typu $\beta 1$ postaci

$$\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{j\in S}\mathrm{E}(\Upsilon_0^{\beta 1,j}(t)) = \sum_{t=0}^{m-1}\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{11}(0,t)p^{\beta 1}(t). \tag{47}$$

Natomiast składka $p^{\beta 2}(t)$ przeznaczona na opłacenie kosztów wypłaty świadczenia typu b powinna być ustalona tak, aby spełnione było równanie wartości kosztów typu $\beta 2$ postaci

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j\in S}\mathrm{E}(\Upsilon_0^{\beta 2,j}(t)) = \sum_{t=0}^{m-1}\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{11}(0,t)p^{\beta 2}(t). \tag{48}$$

Z kolei składka $p^{\beta 3}(t)$ przeznaczona na opłatę kosztów wypłaty świadczenia typu d powinna być ustalona tak, aby spełniała następujące równanie wartości kosztów typu $\beta 3$

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j\in S}\mathrm{E}(\Upsilon_0^{\beta 3,j}(t)) = \sum_{t=0}^{m-1}\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{11}(0,t)p^{\beta 3}(t). \tag{49}$$

W przypadku pozostałych kosztów składka $p^{\beta 4}(t)$ przeznaczona na opłatę na kosztów typu $\beta 4$ powinna być ustalona tak, aby spełniała równanie wartości kosztów typu $\beta 4$

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j\in S}\mathrm{E}(\Upsilon_0^{\beta 4,j}(t)) = \sum_{t=0}^{m-1}\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{11}(0,t)p^{\beta 4}(t). \tag{50}$$

Okresową składkę na koszty typu β można więc przedstawić jak sumę frakcji (części) składki finansujących poszczególne rodzaje kosztów typu β, co zostało pokazane w twierdzeniu 3.

Twierdzenie 3. *Niech $p^{\beta}(t)$ oznacza okresową składkę na koszty typu β płaconą w chwili k, a $p^{\beta 1}(t)$, $p^{\beta 2}(t)$ i $p^{\beta 3}(t)$ i $p^{\beta 4}(t)$ dla $t = 0,1,2,...,m-1$ spełniają odpowiednio równania wartości (47) , (48) i (49) . Wtedy ciąg $p^{\beta}(t)$ ($t = 0,1,2,...,m-1$), gdzie*

$$p^{\beta}(t) = p^{\beta 1}(t) + p^{\beta 2}(t) + p^{\beta 3}(t) + p^{\beta 4}(t)\,, \tag{51}$$

spełnia równanie wartości kosztów typu β postaci

$$\sum_{t=0}^{n}\sum_{j\in S}\mathrm{E}(\Upsilon_0^{\beta,j}(t)) = \sum_{t=0}^{m-1}\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{11}(0,t)p^{\beta}(t). \tag{52}$$

Dowód.

Dowód twierdzenia 3 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 1.

■

Przy założeniu, że poszczególne koszty typu β są stałe przez cały okres ubezpieczenia, a okresowe składki na koszty typu $\beta 1$, $\beta 2$, $\beta 3$ i $\beta 4$ są rozłożone równomiernie przez cały czas ich płacenia, wysokość p^{β} podana została w twierdzeniu 4.

Twierdzenie 4. *Niech $p^{\beta}(t) = p^{\beta}$ (dla $t = 0,1,...,m-1$) oznacza stałą okresową składkę na koszty typu β. Ponadto niech $p^{\beta 1}(t) = p^{\beta 1}$, $p^{\beta 2}(t) = p^{\beta 2,}$ $p^{\beta 3}(t) = p^{\beta 3}$ i $p^{\beta 4}(t) = p^{\beta 4}$ dla $t = 0,1,2,...,m-1$ spełniają odpowiednio równania wartości (47)-(50) . Przy założeniu, że wysokości kosztów typu β są stałe (nie zależą od momentu t ani stanu j) przez cały czas trwania ubezpieczenia, mamy, że*

$$\beta 1_j(t) = (\beta 1' + \beta 1''' \ddot{b}_j(t))\mathbf{1}_{\{\ddot{b}_j(t)\neq 0\}}, \tag{53}$$

$$\beta 2_j(t) = (\beta 2' + \beta 2''' b_j(t))\mathbf{1}_{\{b_j(t)\neq 0\}}, \tag{54}$$

$$\beta 3_j(t) = (\beta 3' + \beta 3''' d_j(t))\mathbf{1}_{\{d_j(t)\neq 0\}}, \tag{55}$$

$$\beta 4^i_j(t) = (\beta 4' + \beta 4''' c_{ij}(t)). \tag{56}$$

Wtedy

$$p^{\beta} = p^{\beta 1} + p^{\beta 2} + p^{\beta 3} + p^{\beta 4}$$

dla

$$p^{\beta 1} = \left(\ddot{a}_{11}(0,m)\right)^{-1} \sum_{j\in S}\sum_{t=0}^{n-1}\left(\beta 1' + \beta 1''' \ddot{b}_j(t)\right)\mathbf{1}_{\{\ddot{b}_j(t)\neq 0\}} \mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{1j}(0,t), \tag{57}$$

$$p^{\beta 2} = \left(\ddot{a}_{11}(0,m)\right)^{-1} \sum_{j\in S}\sum_{t=1}^{n}\left(\beta 2' + \beta 2''' b_j(t)\right)\mathbf{1}_{\{b_j(t)\neq 0\}} \mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{1j}(0,t), \tag{58}$$

$$p^{\beta 3} = \left(\ddot{a}_{11}(0,m)\right)^{-1} \sum_{j\in S}\sum_{t=1}^{n}\left(\beta 3' + \beta 3''' d_j(t)\right)\mathbf{1}_{\{d_j(t)\neq 0\}} \mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{1j}(0,t), \tag{59}$$

$$p^{\beta 4} = \left(\ddot{a}_{11}(0,m)\right)^{-1} \sum_{(i,j)\in T}\sum_{t=1}^{n}\left((\beta 4' + \beta 4''' c_{ij}(t))\mathbf{1}_{\{c_{ij}(t)\neq 0\}} \mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{1i}(0,t-1)q_{ij}(t-1)\right), \tag{60}$$

spełnia równanie wartości kosztów typu β postaci (52) .

Dowód.

Jeżeli $p^{\beta 1}$, $p^{\beta 2}$, $p^{\beta 3}$ i $p^{\beta 4}$ (dla $t = 0, 1, 2, ..., m-1$) spełniają odpowiednio równania wartości kosztów (47)-(50), to z twierdzenia 3 mamy, że $p^{\beta} = p^{\beta 1} + p^{\beta 2} + p^{\beta 3} + p^{\beta 4}$ spełnia równanie wartości kosztów typu β postaci (50). Pozostaje pokazać, że spełnione są równości (57)-(60) .

Mamy, że $p^{\beta 1}(t) = p^{\beta 1}$ dla $t = 0, 1, 2, ..., m-1$ spełniają równania wartości kosztów (47). Przy założeniu (53) lewa strona równości (47) jest postaci

$$\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{j\in S}\mathrm{E}(\Upsilon_0^{\beta 1,j}(t)) = \sum_{t=0}^{n-1}\sum_{j\in S}\left(\beta 1' + \beta 1''' \ddot{b}_j(t)\right)\mathbf{1}_{\{\ddot{b}_j(t)\neq 0\}} \mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{1j}(0,t).$$

Natomiast prawa strona równości (45) jest postaci $p^{\beta 1}\ddot{a}_{11}(0,m)$. Porównując obie strony, otrzymujemy (58).

Mamy, że $p^{\beta 2}(t) = p^{\beta 2}$ dla $t = 0, 1, 2, ..., m-1$ spełniają równania wartości kosztów (48) . Przy założeniu (54) lewa strona równości (48) jest postaci

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j\in S}E(\Upsilon_0^{\beta 2,j}(t)) = \sum_{t=1}^{n}\sum_{j\in S}\left(\beta 2' + \beta 2''' b_j(t)\right)\mathbf{1}_{\{b_j(t)\neq 0\}} \mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{1j}(0,t).$$

Natomiast prawa strona równości (48) jest postaci $p^{\beta 2}\ddot{a}_{11}(0,m)$. Porównując obie strony, otrzymujemy (58) .

Mamy, że $p^{\beta 3}(t) = p^{\beta 3}$ dla $t = 0, 1, 2, ..., m-1$ spełniają równania wartości kosztów (49). Przy założeniu (55) lewa strona równości (49) jest postaci

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j\in S}\mathrm{E}(\Upsilon_0^{\beta 3,j}(t)) = \sum_{t=1}^{n}\sum_{j\in \mathrm{S}}\left(\beta 1' + \beta 1''' d_j(t)\right)\mathbf{1}_{\{d_j(t)\neq 0\}} \mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{1j}(0,t).$$

Z kolei prawa strona równości (49) przybiera postać $p^{\alpha 3}\ddot{a}_{11}(0,m)$. Porównując obie strony, otrzymujemy (59) .

Przy założeniu (56) mamy, że

$$\beta 4_j(t)=\sum_{i\neq j}\beta 4^i_j(t)=\sum_{i\neq j}(\beta 4^{'}+\beta 4^{'''}c_{ij}(t))\mathbf{1}_{\{X(t-1)=i\}}\cdot\mathbf{1}_{\{c_{ij}(t)\neq 0\}}. \tag{61}$$

Podstawiając $p^{\beta 4}(t)=p^{\beta 4}$ dla $t=0,1,2,...,m-1$ oraz (61) do równania wartości kosztów (50), otrzymujemy (60), mianowicie

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j\in S}\sum_{i\neq j}\Big((\beta 4^{'}+\beta 4^{'''}c_{ij}(t))\mathbf{1}_{\{c_{ij}(t)\neq 0\}}\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{1i}(0,t-1)q_{ij}(t-1)\Big)=p^{\beta 4}\ddot{a}_{11}(0,m).$$

■

Przy dodatkowym założeniu, że wysokości poszczególnych rodzajów świadczeń są stałe przez cały okres ubezpieczenia (dotyczy to rent i jednorazowych świadczeń związanych ze zmianą stanów) oraz jednorazowe świadczenia typu *d* są płacone jedynie z tytułu dożycia przez ubezpieczonego do końca okresu ubezpieczenia, p^{β} w twierdzeniu 4 można zapisać w bardziej zwięzły sposób, co zostało pokazane we wniosku 3.

Wniosek 3 *Niech* $p^{\beta 1}(t)$, $p^{\beta 2}(t)$, $p^{\beta 3}(t)$ *i* $p^{\beta 4}(t)$ *spełniają założenia i tezy wniosku 4. Dodatkowo przyjmując, że*

$$\ddot{b}_j(t)=\begin{cases}\ddot{b}_j & \text{dla} \quad t=0,1,...,n-1\\ 0 & \text{dla} \quad t=n,\end{cases} \tag{62}$$

$$b_j(t)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad t=0\\ b_j & \text{dla} \quad t=1,2,...,n,\end{cases} \tag{63}$$

$$d_j(t)=\begin{cases}d_j(n) & \text{dla} \quad t=n\wedge j:\exists_{i\in S}(j,i)\in T\\ 0 & \text{poza} \quad \text{tym}\end{cases} \tag{64}$$

$$c_{ij}(t)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad t=0\\ c_{ij} & \text{dla} \quad t=1,2,...,n,\end{cases} \tag{65}$$

stała okresowa składka na koszty typu β jest postaci

$$p^{\beta}=p^{\beta 1}+p^{\beta 2}+p^{\beta 3}+p^{\beta 4},$$

gdzie

$$p^{\beta 1}=\left(\ddot{a}_{11}(0,m)\right)^{-1}\sum_{j\in S}\left(\beta 1^{'}+\beta 1^{'''}\ddot{b}_j\right)\mathbf{1}_{\{\ddot{b}_j\neq 0\}}\ddot{a}_{1j}(0,n), \tag{66}$$

$$p^{\beta 2}=\left(\ddot{a}_{11}(0,m)\right)^{-1}\sum_{j\in S}\left(\beta 2^{'}+\beta 2^{'''}b_j\right)\mathbf{1}_{\{b_j\neq 0\}}a_{1j}(0,n), \tag{67}$$

$$p^{\beta 3} = \left(\ddot{a}_{11}(0,m)\right)^{-1} \sum_{j:\exists_{i\in S}(j,i)\in T} \left((\beta 3' + \beta 3''' d_j(n)) \mathbf{1}_{\{d_j(n)\neq 0\}} \mathrm{E}(\upsilon(0,n)) q_{1j}(0,n) \right), \quad (68)$$

$$p^{\beta 4} = \left(\ddot{a}_{11}(0,m)\right)^{-1} \sum_{(i,j)\in T} \left(\beta 4' + \beta 4''' c_{ij} \right) \mathbf{1}_{\{c_{ij}\neq 0\}} A_{1ij}(0,n). \quad (69)$$

Dowód.

Dowód wynika bezpośrednio z podstawienia (62)-(65) do odpowiednio równości (57)-(60) w twierdzeniu 4 oraz zredukowania wzorów przy wykorzystaniu wielkości $a_{ij}(t_1,t_2)$, $\ddot{a}_{ij}(t_1,t_2)$ oraz $A_{ihj}(t_1,t_2)$ zamieszczonych na końcu pkt 3.

■

Okresową składkę brutto można więc przedstawić jako sumę składki netto i frakcji (części) składki brutto, finansujących odpowiednie typy kosztów, co zostało pokazane w twierdzeniu 5.

Twierdzenie 5. *Niech* $p^{net}(k)$ *oznacza okresową składkę netto płaconą w chwili k, a* $p^{\alpha}(t)$ *i* $p^{\beta}(t)$ *spełniają odpowiednio równania wartości (41) i (51) (dla* $t = 0, 1, 2, ..., m-1$*). Wtedy ciąg* $p^b(t)$ ($t = 0, 1, 2, ..., m-1$)*, gdzie*

$$p^b(t) = p^{net}(t) + p^{\alpha}(t) + p^{\beta}(t), \quad (70)$$

spełnia globalne równanie wartości składki brutto.

Dowód.

Mamy, że

$$\mathrm{E}\left(\sum_{t=0}^{m-1} \upsilon(0,t)\mathbf{1}_{\{X(t)=1\}} p^b(t)\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{t=0}^{m-1} \upsilon(0,t)\mathbf{1}_{\{X(t)=1\}} p^{net}(t)\right)$$
$$+\mathrm{E}\left(\sum_{t=0}^{m-1} \upsilon(0,t)\mathbf{1}_{\{X(t)=1\}} p^{\alpha}(t)\right) + \mathrm{E}\left(\sum_{t=0}^{m-1} \upsilon(0,t)\mathbf{1}_{\{X(t)=1\}} p^{\beta}(t)\right), \quad (71)$$

co oznacza, że spełnione jest równanie wartości składki brutto, gdyż pierwszy składnik sumy (71) (z zasady równoważności składki netto) jest równy aktuarialnej wartości sumy świadczeń, a pozostałe składniki są równe aktuarialnej wartości wszystkich kosztów (odpowiednio typu α i β) ponoszonych przez ubezpieczyciela w trakcie trwania umowy ubezpieczenia.

■

Postać stałej okresowej składki brutto, przy założeniu, że poszczególne frakcje składki brutto za koszty typu α i β zostały rozłożone równomiernie przez cały okres trwania ubezpieczenia oraz poszczególne koszty nie ulegają zmianie w ciągu trwania umowy ubezpieczenia, przedstawiona została w postaci wniosku 4.

Wniosek 4. *Niech* $p^b(t) = p^b$ *będzie stałą okresową składką brutto płaconą w chwili k przez pierwszych m jednostek czasu okresu ubezpieczenia, wtedy*

$$p^b = p^{net} + p^{\alpha} + p^{\beta}, \tag{72}$$

gdzie p^{net} *stała okresowa składka netto liczona jest na podstawie zasady równoważności,* p^{α} *stała okresowa składka na koszty typu* α *liczona jest na podstawie twierdzenia 2, a* p^{β} *stała okresowa składka na koszty typu* β *liczona jest na podstawie twierdzenia 4.*

Dowód.
Dowód wynika bezpośrednio z twierdzeń 5, 2 i 4.
■

Niekiedy w praktyce aktuarialnej stosuje się inną stopę procentową przy wyznaczaniu składki netto (we wzorze (12)), a inną w przypadku kosztów (tzn. we wzorach (41) i (51)).

W następnym punkcie wnioski 4 oraz 1-3 zostały zastosowane do wyznaczenia składek brutto dla ubezpieczeń zdrowotnych.

6.2. Przykłady ubezpieczeń zdrowotnych

Przedstawione zostaną wzory na stałe składki okresowe brutto płacone przez pierwsze *m* jednostek czasu okresu ubezpieczenia dla ubezpieczeń zdrowotnych. Składki brutto zostały wyznaczone przy założeniu, ze koszty typu α i typu β są stałe przez cały okres trwania ubezpieczenia. Przyjęte założenie, bez straty ogólności, spowoduje uproszczenie rachunków i wzorów na składki brutto. W praktyce koszty akwizycji są największe na początku ubezpieczenia, a potem maleją. Prawidłowość tę łatwo uwzględnić, osobno wyszczególniając we wzorach koszty dla pierwszego okresu ubezpieczenia.

Ubezpieczenia zdrowotne dzieli się na dwie grupy: ubezpieczenia od ryzyka trwałego uszczerbku zdrowia, np. trwałego inwalidztwa w wyniku nieszczęśliwego wypadku, choroby uniemożliwiającej powrót do zdrowia (w skrócie TI), oraz ubezpieczenia od ryzyka ciężkiej choroby, w których istnieje możliwość powrotu do zdrowia (w skrócie CCh). W tym punkcie omówione zostały obie klasy ubezpieczeń zdrowotnych. Więcej informacji o klasyfikacji i charakterystyce ubezpieczeń zdrowotnych znajduje się w [Ostasiewicz 2004b].

W ubezpieczeniach zdrowotnych zazwyczaj zakłada się, że jednostką czasu, na jakie został podzielony okres ubezpieczenia, jest miesiąc. Wtedy *n* oznacza liczbę miesięcy, na jaką została zawarta umowa ubezpieczenia.

Przykład 1 – Ubezpieczenie na życie + opcja TI

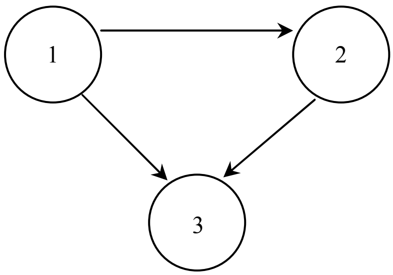
Rozważmy *n*-miesięczne ubezpieczenie na życie połączone z opcją TI. Umowa ubezpieczenia podstawowego gwarantuje wypłatę jednorazowego świadczenia w razie śmierci ubezpieczonego. Oznacza to, że jeżeli ubezpieczony zmarł w okresie $[t-1,t)$, to w momencie t osoba uposażona otrzymuje świadczenie w wysokości $c(t)$. Natomiast umowa ubezpieczenia dodatkowego gwarantuje ubezpieczonemu jednorazową zapomogę w razie trwałego uszczerbku na zdrowiu (np. na rehabilitację, zakup sprzętu czy wózka inwalidzkiego) w wysokości $\overline{c}(t)$ płatną w momencie t, pod warunkiem że ubezpieczony stał się inwalidą w okresie $[t-1,t)$ przed końcem okresu ubezpieczenia. Dodatkowo w razie zostania przez ubezpieczonego inwalidą ubezpieczyciel wypłaca rentę inwalidzką do końca trwania okresu ubezpieczenia lub momentu śmierci ubezpieczonego, jeśli nastąpiła ona przed końcem okresu ubezpieczenia. Niech $b(t)$ oznacza świadczenie płatne za okres $[t,t+1)$ ($t=0,1,2,...,n-1$), jeżeli ubezpieczony w momencie $t+1$ jest inwalidą. Takiej umowie ubezpieczenia odpowiada polisa ubezpieczeniowa z trzema możliwymi stanami:

1 – ubezpieczony znajduje się w dobrym zdrowiu,

2 – ubezpieczony jest inwalidą,

3 – ubezpieczony nie żyje.

Ilustracją graficzną przestrzeni stanów i możliwych przejść między nimi jest rys. 1.



Rys. 1. Schemat modelu wielostanowego $(S,T)=(\{1,2,3\},\{(1,2),(1,3),(2,3)\})$

Źródło: opracowanie własne.

Natomiast strumień świadczeń określony jest przez następujące przepływy pieniężne:

$$\ddot{b}_j(t)=0 \quad \text{dla} \quad j\in\{1,2\} \quad \text{oraz} \quad t=0,1,2,...,n,$$

$$b_j(t)==\begin{cases} b(t-1) & \text{dla} \quad j=2 \quad \text{oraz} \quad t=1,2,...,n \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases}$$

$$d_j(t)=0 \quad \text{dla} \quad j\in\{1,2,3\} \quad \text{oraz} \quad t=0,1,2,...,n,$$

$$c_{ij}(t)=\begin{cases} c(t) & \text{dla} \quad (i,j)\in\{(1,3);(2,3)\} \quad \text{oraz} \quad t=1,2,...,n \\ \overline{c}(t) & \text{dla} \quad (i,j)=(1,2) \quad \text{oraz} \quad t=1,2,...,n. \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Jednorazowa składka netto wyznaczona zgodnie z zasadą równoważności jest postaci

$$\pi^{net} = \sum_{t=1}^{n} \mathrm{E}(\upsilon(0,t)) q_{12}(0,t) b(t-1) + \sum_{t=1}^{n} \mathrm{E}(\upsilon(0,t)) q_{11}(0,t-1) q_{12}(t-1) \overline{c}(t)$$

$$+ \sum_{t=1}^{n} \mathrm{E}(\upsilon(0,t))(q_{11}(0,t-1)(q_{13}(t-1) + q_{12}(0,t-1) q_{23}(t-1)) c(t).$$

Natomiast stała okresowa składka netto płatna przez pierwszych m miesięcy, na jakie został podzielony okres ubezpieczenia, jest następująca

$$p^{net} = \left(\ddot{a}_{11}(0,m)\right)^{-1} \pi^{net}.$$

Zgodnie z wnioskiem 4 mamy, że

$$p^{b} = p^{net} + p^{\alpha} + p^{\beta 1} + p^{\beta 2} + p^{\beta 3} + p^{\beta 4}, \tag{73}$$

gdzie składki na poszczególne koszty określić można na postawie twierdzeń 2 i 4. Przy założeniu, że $c(t+1) > \overline{c}(t+1) > b(t)$, mamy, że (dla $t = 0,1,...,n-1$)

$$f_1(t) = f_2(t) = c(t+1)$$

oraz

$$p^{\alpha} = \alpha'' p^{b} + \left[\ddot{a}_{11}(0,m)\right]^{-1} \Big(\alpha' (\ddot{a}_{11}(0,n) + \ddot{a}_{12}(0,n))$$

$$+ \alpha''' \sum_{t=0}^{n-1} c(t+1) \mathrm{E}(\upsilon(0,t))(q_{11}(0,t) + q_{12}(0,t)) \Big),$$

$$p^{\beta 1} = 0,$$

$$p^{\beta 2} = \left(\ddot{a}_{11}(0,m)\right)^{-1} \left(\beta 2' a_{12}(0,n) + \beta 2''' \sum_{t=1}^{n} b(t) \mathrm{E}(\upsilon(0,t)) q_{12}(0,t) \right),$$

$$p^{\beta 3} = 0,$$

$$p^{\beta 4} = \left(\ddot{a}_{11}(0,m)\right)^{-1} \Big(\beta 4' (A_{112}(0,n) + A_{113}(0,n) + A_{123}(0,n))$$

$$+ \beta 4''' \sum_{t=1}^{n} \big(\overline{c}(t) q_{11}(0,t-1) q_{12}(t-1)$$

$$+ c(t)(q_{11}(0,t-1) q_{13}(t-1) + q_{12}(0,t-1) q_{23}(t-1)) \big) \mathrm{E}\big(\upsilon(0,t)\big) \Big).$$

Zauważmy, że p^{α} zależy od p^{b}, a stąd mamy, że

$$p^{b} = (1-\alpha^{''})^{-1}\Big(p^{net} + p^{\beta 2} + p^{\beta 4} + \left[\ddot{a}_{11}(0,m)\right]^{-1}\Big(\alpha^{'}(\ddot{a}_{11}(0,n) + \ddot{a}_{12}(0,n))$$

$$+\alpha^{'''}\sum_{t=0}^{n-1} c(t+1)\mathrm{E}(\upsilon(0,t))(q_{11}(0,t) + q_{12}(0,t))\Big)\Big)$$

jest stałą składką brutto płatną przez pierwszych m miesięcy trwania okresu ubezpieczenia.

Przykład 2 – Ubezpieczenie na życie + opcja TI + CCh

Rozważmy n-miesieczne ubezpieczenie na życie połączone z pełną opcją trwałego inwalidztwa oraz ubezpieczeniem od ryzyka ciężkiej choroby. Przedmiotem ubezpieczenia podstawowego jest śmierć ubezpieczonego, a ubezpieczeń dodatkowych ciężka choroba oraz całkowite inwalidztwo. Takiej umowie ubezpieczenia odpowiada polisa ubezpieczeniowa z czterema możliwymi stanami:

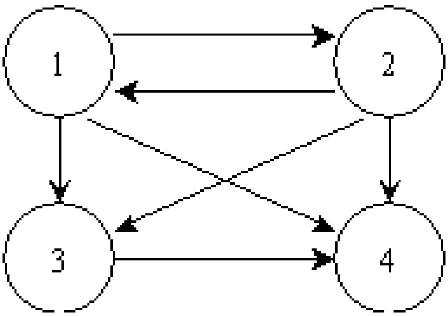
1 – ubezpieczony znajduje się w dobrym zdrowiu,

2 – ubezpieczony jest ciężko chory,

3 – ubezpieczony jest inwalidą,

4 – ubezpieczony nie żyje.

Ilustracją graficzną przestrzeni stanów i możliwych przejść między nimi jest rys. 2.



Rys. 2. Schemat modelu wielostanowego

$(S,T) = (\{1,2,3,4\},\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1)(2,3),(2,4),(3,4)\})$

Źródło: opracowanie własne.

Umowa ubezpieczenia gwarantuje wypłatę jednorazową w wysokości $\overline{c}$, jeżeli ubezpieczony zachoruje na wskazaną w polisie chorobę lub stanie się inwalidą. Przy czym, jeżeli chory zostanie inwalidą, to świadczenie $\overline{c}$ nie jest już wypłacane, gdyż zostało ono wypłacone w momencie zachorowania. Dodatkowo jeżeli ubezpieczony stanie się inwalidą, firma ubezpieczeniowa płaci mu rentę w wysokości b do końca trwania umowy ubezpieczenia. W przypadku śmierci ubezpieczonego uposażona osoba otrzymuje świadczenie w wysokości c, gdy ubezpieczony był chory lub był inwalidą. Natomiast gdy ubezpieczony przed śmiercią był zdrowy, ubezpieczyciel wypłaca świadczenie w wysokości $2c$. Dla takich warunków ubezpieczenia przepływy pieniężne wynikające z realizacji umowy określone są następująco:

$$\ddot{b}_j(t)=0 \quad \text{dla} \quad j\in\{1,2\} \quad \text{oraz} \quad t=0,1,2,...,n,$$

$$b_j(t)=\begin{cases} b & \text{dla} \quad j=3 \quad \text{oraz} \quad t=1,2,...,n \\ 0 & \text{poza} \quad \text{tym,} \end{cases}$$

$$d_j(t)=0 \quad \text{dla} \quad j\in\{1,2,3\} \quad \text{oraz} \quad t=0,1,2,...,n,$$

$$c_{ij}(t)=\begin{cases} \overline{c} & \text{dla} \quad (i,j)\in\{(1,2);(1,3) \quad \text{oraz} \quad t=1,2,...,n \\ 2c & \text{dla} \quad (i,j)=(1,4) \quad \text{oraz} \quad t=1,2,...,n \\ c & \text{dla} \quad (i,j)\in\{(2,4);(3,4)\} \quad \text{oraz} \quad t=2,...,n \\ 0 & \text{poza} \quad \text{tym.} \end{cases}$$

Jednorazowa składka netto wyznaczona zgodnie z zasadą równoważności jest postaci

$$\pi=\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{13}(0,t)b$$
$$+\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(\upsilon(0,t))(q_{11}(0,t-1)q_{12}(t-1)+q_{11}(0,t-1)q_{13}(t-1))\overline{c}$$
$$+\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(\upsilon(0,t))q_{11}(0,t-1)q_{14}(t-1)2c$$
$$+\sum_{t=2}^{n}\mathrm{E}(\upsilon(0,t))(q_{12}(0,t-1)q_{24}(t-1)+q_{13}(0,t-1)q_{34}(t-1))c$$
$$=ba_{13}(0,n)+\overline{c}(A_{112}(0,n)+A_{113}(0,n))+2cA_{114}(0,n)+c(A_{124}(1,n)+A_{134}(1,n)).$$

Zauważmy, że koszty typu α istnieją wtedy, gdy ubezpieczenie jest czynne, a więc proces $\{X(t)\}$ przebywa w stanie 1,2 lub 3. Zatem przy założeniu, że $2c>c>\overline{c}>b$, mamy, że dla $t=0,1,...,n-1$

$$f_j(t)=\begin{cases} 2c & \text{dla} \quad j=1 \\ c & \text{dla} \quad j=2,3. \end{cases}$$

Wtedy zgodnie z twierdzeniami 2 i 4 mamy, że

$$p^{\alpha}=\alpha^{''}p^{b}+\left[\ddot{a}_{11}(0,m)\right]^{-1}\Big(\alpha^{'}(\ddot{a}_{11}(0,n)+\ddot{a}_{12}(0,n)+\ddot{a}_{13}(0,n))$$
$$+\alpha^{'''}(2c\ddot{a}_{11}(0,n)+c(\ddot{a}_{12}(0,n)+\ddot{a}_{13}(0,n)))\Big),$$

$$p^{\beta 1} = 0,$$

$$p^{\beta 2} = \left(\ddot{a}_{11}(0,m)\right)^{-1}\left(\beta 2' + \beta 2''' b\right)a_{13}(0,n),$$

$$p^{\beta 3} = 0,$$

$$p^{\beta 4} = \left(\ddot{a}_{11}(0,m)\right)^{-1}\Big((\beta 4' + \beta 4''' \overline{c})(A_{112}(0,n) + A_{113}(0,n)) + (\beta 4' + \beta 4''' 2c)A_{114}(0,n)$$
$$+(\beta 4' + \beta 4''' c)(A_{124}(1,n) + A_{134}(1,n))\Big).$$

Podobnie jak w przykładzie 1 składka p^{α} zależy od p^{b}, a stąd mamy, że

$$p^{b} = \left[(1-\alpha'')\ddot{a}_{11}(0,m)\right]^{-1}\Big(\alpha'(\ddot{a}_{11}(0,n) + \ddot{a}_{12}(0,n) + \ddot{a}_{13}(0,n))$$
$$+\alpha'''(2c\ddot{a}_{11}(0,n) + c(\ddot{a}_{12}(0,n) + \ddot{a}_{13}(0,n))) + (\beta 2' + (\beta 2''' + 1)b)a_{13}(0,n)$$
$$+(\beta 4' + (\beta 4''' + 1)\overline{c})(A_{112}(0,n) + A_{113}(0,n)) + (\beta 4' + (\beta 4''' + 1)2c)A_{114}(0,n)$$
$$+(\beta 4' + (\beta 4''' + 1)c)(A_{124}(1,n) + A_{134}(1,n))\Big)$$

jest stałą składką brutto płatną przez pierwszych m miesięcy trwania okresu ubezpieczenia.

7. Narzuty pozakosztowe

W praktyce ubezpieczeniowej składka brutto oprócz kosztów może jeszcze zawierać inne narzuty, w tym związane z:
- koniecznością reasekuracji portfela,
- potrzebą uwzględnienia inflacji,
- ryzykiem niewypłacalności portfela.

Pierwsze dwa narzuty to tzw. składniki pozakosztowe składki brutto. Reasekuracja jest sposobem na zmniejszenie ryzyka niewypłacalności portfela i polega na tym, że ubezpieczyciel ubezpiecza swój portfel polis u innego ubezpieczyciela. W wyniku takiego reubezpieczenia część odpowiedzialności ubezpieczeniowej wraz z odpowiednią częścią składek zostaje przeniesiona z ubezpieczyciela (który staje się cedentem) i przekazana do innego ubezpieczyciela, który staje się reasekurantem. Natomiast uwzględnienie inflacji sprowadza się do wprowadzenia, obok technicznej stopy procentowej, nowej stopy procentowej nazywanej stopą inflacji. Ostatni z wymienionych narzutów wymaga powiększenia składki o dodatek na ryzyko (*safety loading)* zmniejszający ryzyko niewypłacalności portfela. Istnieje wiele zasad określania dodatku na ryzyko. W większości nie są one bezpośrednio związane z ubezpieczeniami na życie (oraz wielostanowymi), gdyż w tego typu ubezpieczeniach ocena ryzyka oparta jest na tablicach trwania życia (tablicach wielostanowych) i z punktu widzenia całej populacji dane zawarte w tablicach wiernie odzwierciedlają zakres ryzyka. Jedynym niebezpieczeństwem zwiększającym ryzyko niewypłacalności ubezpieczyciela może być przyjęcie do ubezpieczenia niewystarczająco dużej liczby osób, co może skutkować tym, że wyniki osiągnięte przez firmę ubezpieczeniową będą dość znacznie się różnić od tych planowanych na podstawie danych zawartych w tablicach obliczonych dla dużych populacji.

Ogólny schemat indeksacji, reasekuracji i określania dodatku na ryzyko można znaleźć m.in. w [Błaszczyszyn, Rolski 2004; Stroiński 1996].

Zauważmy, że składka brutto opisana w pkt 6 nie zawiera narzutów pozakosztowych oraz spełnia równanie wartości składki brutto (podobnie jak składka netto wyznaczona zgodnie z równaniem składki netto). W tym sensie opisana w pkt 6.1 składka brutto jest rozumiana jako składka netto obciążona kosztami zawarcia i prowadzenia ubezpieczenia.

Literatura

Błaszczyszyn B., Rolski T. (2004), *Wykłady z matematyki ubezpieczeń na życie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Bowers N.L., Gerber H.U., Hichmann J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. (1986), *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Illinois.

Frees E.W. (1990), *Stochastic life contingencies with solvency considerations*, „Transactions of the Society of Actuaries”, vol. XLII.

Gerber H.U. (1990), *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, Zürich.

Haberman S., Pitacco E. (1999), *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman & Hall/CRC.

Ostasiewicz W. (red.) (2004a), *Składki i ryzyko ubezpieczeniowe. Modelowanie stochastyczne*, AE, Wrocław.

Ostasiewicz W. (red.) (2004b), *Składka i ryzyko*, AE, Wrocław.

Parker G. (1994), *Moment of present value of portfolio of policies*, „Scandinavian Actuarial Journal” no 77 (1).

Skałba M. (2003), *Ubezpieczenia na życie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Stroiński E. (1996), *Ubezpieczenie na życie*, Wyższa Szkoła Ubezpieczeń i Bankowości, Warszawa.

EXPENSE-LOADED PREMIUMS FOR MULTISTATE INSURANCE CONTRACTS

Summary: The aim of this paper is to complement the calculation of the net premium of multistate insurance contract by taking into account insurance expenses of concluding and running the insurance contract. This allows us to derive the expense-loaded premium for multistate insurance contracts. Our approach goes beyond the classical, used, e.g., for life insurances, where it is assumed that the acquisition expenses are realized only at the beginning of the insurance period. The proposed approach relaxes this assumption, by allowing the possibility of spreading acquisition expenses to the whole insurance period.

Key words: multistate insurance contract, multistate model, insurer expenses, net premium, expense-loaded premium.