

Sabina Denkowska

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
e-mail: sabina.denkowska@uek.krakow.pl

ZASTOSOWANIE ANALIZY WRAŻLIWOŚCI DO SKORYGOWANIA OBCIĄŻENIA EFEKTÓW ODDZIAŁYWAŃ OSZACOWANYCH ZA POMOCĄ *PROPENSITY SCORE MATCHING*¹

THE APPLICATION OF SENSITIVITY ANALYSIS TO ADJUST BIAS OF TREATMENT EFFECTS ESTIMATED BY PROPENSITY SCORE MATCHING

DOI: 10.15611/pn.2017.469.04

JEL Classification: C14, E24

Streszczenie: W badaniach obserwacyjnych nie możemy mieć pewności, że uwzględniliśmy wszystkie zmienne wpływające na proces selekcji do grupy poddanej oddziaływaniu oraz na zmienną wynikową, a taka nieuwzględniona w badaniu zmienna może powodować obciążenie szacowanego efektu oddziaływania. Rosenbaum [2005] zaleca, by standardowo badania oparte na dopasowywaniu jednostek, w tym również *Propensity Score Matching*, uzupełniać analizą wrażliwości na występowanie takiej nieobserwowanej zmiennej. W artykule zaproponowano zastosowanie ciekawej alternatywy dla metody analizy wrażliwości Rosenbauma [2002], metody analizy wrażliwości VanderWeele’a i Araha [2011], która pozwala na oszacowanie obciążenia spowodowanego przez taką nieuwzględnioną zmienną oraz na skorygowanie oszacowanego efektu oddziaływania. W artykule metoda VanderWeele i Araha została zastosowana do rezultatów badań nad efektem netto staży (oszacowanego za pomocą PSM), przeprowadzonych przez PUP w Tarnowie [Denkowska 2015].

Słowa kluczowe: analiza wrażliwości, *Propensity Score Matching*, metoda VanderWeele’a i Araha, polityka rynku pracy.

Summary: In observational studies we cannot be sure that we have taken into account all variables influencing the selection process to the treatment group and the outcome variable. Such an unmeasured confounder may result in the bias of estimated treatment effect. Rosenbaum [2005] recommends to routinely complement studies based on matching, including Propensity Score Matching, with sensitivity analysis for such an unobserved potential confounder. The author of the paper proposes the application of the sensitivity analysis method developed by

¹ Publikacja została sfinansowana ze środków przyznanych Wydziałowi Zarządzania Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie w ramach dotacji na utrzymanie potencjału badawczego.

VanderWeele and Arah [2011], which is an interesting alternative to Rosenbaum's sensitivity analysis [2002], since it can be used to estimate the bias caused by an unobserved confounder and to adjust estimated treatment effect. The paper presents the application of VanderWeele and Arah's method to the results of the study of the net effect of internships (estimated with PSM) organised by District Employment Office in Tarnów [Denkowska 2015].

Keywords: sensitivity analysis, Propensity Score Matching, VanderWeele and Arah's method, labour market policy.

1. Wstęp

Metoda *Propensity Score Matching* (PSM) jest „najbardziej rozwijaną i najpopularniejszą strategią w analizie przyczynowości w badaniach obserwacyjnych” [Pearl 2010]. Metoda ta umożliwia redukcję obciążenia selekcyjnego przy szacowaniu przeciętnego efektu oddziaływania na jednostki poddane oddziaływaniu ATT (*Average Treatment Effect on Treated*). Polega ona na dopasowaniu do grupy poddanej oddziaływaniu takiej grupy kontrolnej wyselekcjonowanej z puli kontrolnej jednostek niepoddanych oddziaływaniu, że rozkłady zmiennych obserwowanych X w obu grupach będą zbalansowane². Rosenbaum i Rubin [1983] zaproponowali, by do dopasowania jednostek wykorzystywać funkcję balansującą *propensity score* p (patrz np. [Caliendo, Kopeinig 2008; Denkowska 2015, 2016]).

Metoda PSM nie balansuje zmiennych nieobserwowanych, a zatem oszacowany efekt może być obciążony z powodu braku zbalansowania nieuwzględnionej w badaniu zmiennej U wpływającej zarówno na selekcję do grupy poddanej oddziaływaniu, jak i na wynik zmiennej wyjściowej. Dlatego Rosenbaum [2005] zaleca, by badania oparte na łączeniu jednostek (w tym PSM) uzupełniać analizą wrażliwości na występowanie takiej potencjalnej nieobserwowanej zmiennej. Metoda analizy wrażliwości zaproponowana przez Rosenbauma [2002] umożliwia odpowiedź na pytanie, jak silny musiałby być wpływ potencjalnej, nieobserwowanej zmiennej na proces selekcji oraz na zmienną wynikową, by wnioski z badań przestały być istotne statystycznie. W wyniku zastosowania metody Rosenbauma nie otrzymujemy efektu oddziaływania skorygowanego ze względu na występowanie takiej nieobserwowanej zmiennej. W artykule zaproponowano, by do badania odporności oszacowanych efektów oddziaływań stosować metodę analizy wrażliwości VanderWeele'a i Araha [2011], która pozwala oszacować wielkość obciążenia spowodowanego przez nieuwzględnioną w badaniu zmienną, a tym samym umożliwić skorygowanie oszacowanego efektu oddziaływania przy uwzględnieniu występowania takiej potencjalnej zmiennej. Metoda ta stanowi ciekawą alternatywę dla metody analizy wrażliwości zaproponowanej przez Rosenbauma [2002].

² Zbalansowanie zmiennych oznacza podobieństwo rozkładów rozumiane jako brak różnic systematycznych w rozkładach zmiennych.

2. Analiza wrażliwości na występowanie nieobserwowanej zmiennej efektów oddziaływań oszacowanych za pomocą PSM

Kluczowym założeniem metody PSM jest założenie CIA (*Conditional Independence Assumption*) dotyczące statystycznej niezależności mechanizmu doboru od potencjalnych wyników zmiennej wyjściowej Y pod warunkiem wektora charakterystyk X [Rosenbaum, Rubin 1983]. Z założenia tego wynika, że cały proces selekcji musi być oparty jedynie na obserwowanych charakterystykach wektora X oraz wszystkie zmienne wpływające na selekcję oraz na wynik zmiennej wyjściowej Y są obserwowane przez badacza [Caliendo, Kopeinig 2008]. Rosenbaum, Rubin [1983] wykazali, że jeżeli założenie CIA jest spełnione pod warunkiem X to jest również spełnione pod warunkiem *propensity score* $p(X)$. Niestety, założenie o warunkowej niezależności CIA jest nieweryfikowalne i badacz nie może mieć pewności, że w badaniu uwzględnił wszystkie zmienne wpływające zarówno na selekcję, jak i na zmienną wynikową. Założenie CIA jest łatwe do podważenia, a zatem badania oparte na łączeniu jednostek powinno się uzupełniać analizą wrażliwości oszacowanego efektu oddziaływania na występowanie takiej potencjalnej nieuwzględnionej zmiennej.

2.1. Metoda granic Rosenbauma

Metoda zaproponowana przez Rosenbauma [2002] dedykowana jest metodom opartym na łączeniu³ jednostek, w tym również metodzie *Propensity Score Matching*.

W metodzie analizy wrażliwości Rosenbauma oddziaływanie jest zmienną binarną, nieobserwowana zmienna U może przyjmować wartości z przedziału $\langle 0; 1 \rangle$, zaś zmienna wynikowa Y może być dowolnego typu [Liu i in. 2013].

Metoda granic Rosenbauma występuje w trzech wersjach: podstawowej, dualnej oraz jednoczesnej [Gastwirth i in. 1998]. W wersji podstawowej metody Rosenbauma występuje parametr Γ łączący nieobserwowaną zmienną U z oddziaływaniem D . Wersja podstawowa⁴ pozwala ustalić, jaki co najwyżej może być iloraz szans Γ poddania oddziaływaniu D dla dwóch jednostek (dopasowanych na podstawie *propensity scores* oszacowanych w oparciu o zmienne obserwowane X) z powodu różnych wartości U , by wnioski z badań nie przestały być istotne statystycznie [Keele 2010; Denkowska 2016]. W wersji dualnej metody Rosenbauma występuje parametr Δ , który łączy nieobserwowaną zmienną U ze zmienną wyjściową Y . Wersja dualna⁵ pozwala ustalić, jaki co najwyżej może być iloraz szans Δ dostania wyższej wartości zmiennej wynikowej Y dla dwóch jednostek (dopasowanych na podstawie *propensity scores* oszacowanych w oparciu o zmienne obserwowane X) z powodu różnych

³ Podejście Rosenbauma może być stosowane w przypadku łączenia bez zwracania.

⁴ W wersji tej przyjmuje się, że zmienna nieobserwowana U ma nieskończenie silny wpływ na zmienną wynikową Y .

⁵ W wersji dualnej przyjmuje się, że zmienna nieobserwowana U ma nieskończenie silny wpływ na dostanie się do grupy poddawanej oddziaływaniu.

wartości U , by wnioski z badań nie przestały być istotne statystycznie. Wersja jedno-czesna metody Rosenbauma oparta jest na obu parametrach Γ oraz Δ .

Metoda Rosenbauma umożliwia zatem odpowiedź na pytanie, jak silny musiałby być wpływ potencjalnej, nieobserwowanej zmiennej na proces selekcji oraz na zmienną wynikową, by wnioski z badań przestały być istotne statystycznie. W wyniku zastosowania metody Rosenbauma nie dostajemy jednak skorygowanego (ze względu na występowanie nieobserwowanej zmiennej) efektu oddziaływania. Metoda Rosenbauma jest prosta obliczeniowo⁶, ale do jej zastosowania konieczny jest wgląd w szczegółowe wyniki łączenia, a konkretnie niezbędna jest znajomość liczby par niezgodnych typu $(+, -)$ oraz $(-, +)$. $U \in \langle 0, 1 \rangle$. Co więcej, podejście Rosenbauma wskazuje na „podwyższoną wrażliwość” (patrz: [Liu i in. 2013]), gdy jest mała liczebność par typu $(+,-)$ oraz $(-,+)$, co występuje, gdy np. binarna zmienna wyjściowa jest rzadka.

3. Metoda analizy wrażliwości VanderWeele’a i Araha

VanderWeele i Arah [2011] zaproponowali metodę wrażliwości, która umożliwia oszacowanie wielkości obciążenia spowodowanego przez potencjalną nieobserwowaną zmienną, a tym samym skorygowanie oszacowanego efektu oddziaływania ze względu na tę nieuwzględnioną w badaniu zmienną.

Niech X oznacza wektor obserwowanych charakterystyk, D zaś – oddziaływanie ($D \in \{0, 1\}$), przy czym $D = 1$ oznacza, że jednostka została poddana oddziaływaniu, a $D = 0$ oznacza, że nie została poddana oddziaływaniu. Dla każdej i -tej jednostki możliwy jest tylko jeden z dwóch wyników zmiennej wyjściowej Y :

$$Y_i = \begin{cases} Y_i^0, & \text{gdy } D = 0 \\ Y_i^1, & \text{gdy } D = 1 \end{cases}. \quad (1)$$

Idea metody VanderWeele’a i Araha jest następująca. W oparciu o zmienne obserwowane X możemy oszacować jedynie nieskorygowany⁷ przeciętny efekt oddziaływania na jednostki poddane oddziaływaniu ATT:

$$\sum_{\mathbf{x} \in X} (E(Y|D=1; X=\mathbf{x}) - E(Y|D=0; X=\mathbf{x})) \cdot P(X=\mathbf{x}|D=1). \quad (2)$$

Rzeczywisty (prawdziwy) efekt oddziaływania ATT, uwzględniający zarówno obserwowane zmienne X , jak i X nieobserwowaną zmienną U , przy założeniu warunkowej niezależności CIA pod warunkiem X, U , można zapisać następująco⁸:

⁶ Wersja podstawowa jest zaimplementowana w pakiecie *rbound* w R [Keele 2010].

⁷ Ze względu na nieobserwowaną zmienną U .

⁸ W przypadku zmiennych X, U typu ciągłego we wzorach (4) – (7), (10) sumy zastępujemy przez odpowiednie całki.

$$\begin{aligned} \tau_{ATT} &= E[(Y^1 - Y^0) | D=1] = \\ &= \sum_{x \in X} \sum_{u \in U} (E(Y | D=1; X=x; U=u) - E(Y | D=0; X=x; U=u)) \cdot \\ &P(U=u | X=x; D=1) \cdot P(X=\mathbf{x} | D=1). \end{aligned} \quad (3)$$

A zatem obciążenie spowodowane przez nieuwzględnioną w badaniu zmienną U jest różnicą pomiędzy efektem oszacowanym bez uwzględnienia zmiennej nieobserwowanej U (2) a rzeczywistym efektem oddziaływania (3):

$$\begin{aligned} d_{ATT} &= \sum_{x \in X} (E(Y | D=1; X=x) - E(Y | D=0; X=x)) \cdot \\ &P(X=\mathbf{x} | D=1) - \tau_{ATT} \end{aligned} \quad (4)$$

VanderWeele i Arah [2011] wykazali, że jeżeli spełnione jest założenie CIA pod warunkiem X , U oraz u' jest wartością referencyjną zmiennej U , wówczas obciążenie przy szacowaniu efektu **ATT** można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} d_{ATT} &= \sum_{x \in X} \sum_{u \in U} (E(Y | D=0; X=\mathbf{x}; U=u) - E(Y | D=0; X=\mathbf{x}; U=u')) \cdot \\ &\cdot (P(U=u | D=1; X=\mathbf{x}) - P(U=u | D=0; X=\mathbf{x})) \cdot P(X=\mathbf{x} | D=1). \end{aligned} \quad (5)$$

Zauważmy, że jeśli rozważając zmienną nieobserwowaną U typu binarnego pozycynimy dwa następujące założenia, czyli założymy:

- stały efekt wpływu zmiennej nieobserwowanej U na zmienną wynikową Y poprzez różne wartości zmiennych obserwowanych X przy braku oddziaływania ($D=0$):

$$\gamma = E(Y | D=0; X=\mathbf{x}; U=1) - E(Y | D=0; X=\mathbf{x}; U=0), \quad (6)$$

- stałą różnicę w „rozprzestrzenieniu” zmiennej nieobserwowanej U przy oddziaływaniu ($D=1$) oraz jego braku ($D=0$) poprzez różne wartości zmiennych obserwowanych X :

$$\delta = P(U=1 | D=1; X=\mathbf{x}) - P(U=1 | D=0; X=\mathbf{x}), \quad (7)$$

to wówczas obciążenie d_{ATT} pomiędzy oszacowanym na podstawie zmiennych obserwowanych X efektem oddziaływania a prawdziwym efektem oddziaływania (skorygowanym ze względu na XU) jest dane wzorem: $\gamma \cdot \delta$.

Zatem przeciętny efekt oddziaływania na jednostki poddane oddziaływaniu ATT, skorygowany ze względu na zmienną binarną U , jest równy różnicy:

$$\tau_{ATT} = \sum_{x \in X} (E(Y | D=1; X=\mathbf{x}) - E(Y | D=0; X=\mathbf{x})) \cdot P(X=\mathbf{x} | D=1) - \gamma \cdot \delta. \quad (8)$$

Jeżeli powyższe założenia analizy wrażliwości, dotyczące zależności pomiędzy zmienną binarną U a zmienną wyjściową Y oraz pomiędzy zmienną U i oddziaływaniem D są spełnione, wówczas błąd standardowy dla skorygowanego (nieobciążonego) estymatora efektu oddziaływania pozostaje bez zmian [VanderWeele, Arah 2011; Lin i in. 1998]. Metoda wrażliwości zaproponowana przez VanderWeele'a i Araha umożliwia również skorygowanie przeciętnego efektu oddziaływania ATE (*Average Treatment Effect*) ze względu na nieuwzględnioną w badaniu zmienną (patrz: [VanderWeele, Arah 2011]). W ogólnym podejściu zmienna wyjściowa, oddziaływanie oraz obserwowane i nieobserwowane zmienne mogą być jakościowe lub ilościowe. Ważną zaletą tej metody jest to, że można ją stosować do skorygowania efektów oddziaływań oszacowanych nie tylko za pomocą metod opartych na łączeniu jednostek [VanderWeele, Arah 2011]. A do jej zastosowania nie jest konieczny wgląd w dane (w przeciwieństwie do metod Rosenbauma), wystarczy znajomość otrzymanych rezultatów.

4. Zastosowanie metody analizy wrażliwości VanderWeele'a i Araha do rezultatów badań nad efektem netto staży

Analiza wrażliwości VanderWeele'a i Araha została zastosowana do zbadania odporności oszacowanego (za pomocą metody PSM) efektu netto staży [Denkowska 2015] na występowanie potencjalnej, nieuwzględnionej w badaniu, zmiennej wpływającej na selekcję do grupy stażystów oraz na zatrudnienie.

Autorka [Denkowska 2015] za pomocą metody PSM badała wpływ staży prowadzonych przez jeden z największych małopolskich PUP w Tarnowie na zatrudnienie bezrobotnych. Dane dotyczące bezrobotnych pochodziły z systemu Syriusz ewidencji bezrobotnych. Autorka podjęła liczne próby w celu otrzymania jak najlepszego zbalansowania zmiennych, które polegały na modyfikacjach modelu regresji logistycznej (wykorzystywanego do oszacowania *propensity scores*) przez wprowadzanie interakcji, zmiennych podniesionych do kwadratu oraz sprawdzaniu różnych metod łączenia grupy kontrolnej. Za każdym razem po łączeniu analizowano jakość dopasowania poprzez sprawdzenie wspólnego obszaru określoności oraz zbalansowanie zmiennych, interakcji oraz zmiennych w wyższych potęgach przed dopasowaniem i po dopasowaniu. Dopiero gdy wszystkie uwzględnione w modelu regresji logistycznej zmienne, interakcje oraz zmienną *wiek*² uznano za zbalansowane, przystąpiono do oszacowania efektu netto staży (patrz: [Denkowska 2015]). Oszacowany efekt netto wyniósł 0,07895 z błędem standardowym (patrz: [Abadie, Imbens 2006]) równym 0,0148 ($p = 9,1492e-08$). Realizacją 95% przedziału ufności jest następujący przedział liczbowy: (0,049942; 0,107958).

Zauważmy, że oszacowanego efektu nie można byłoby uznać za istotny statystycznie na poziomie istotności 0,05, gdyby obciążenie spowodowane przez nieuwzględnioną w badaniu zmienną U wynosiło więcej niż 0,049942.

Rozważmy hipotetycznie wpływ nieuwzględnionej w badaniu zmiennej binarnej U oznaczającej na przykład predyspozycje typu przedsiębiorczość. Załóżmy przykładowo, że jeżeli przedsiębiorczość byłaby o 0,1 (δ) bardziej rozpowszechniona w grupie stażystów niż w grupie kontrolnej⁹, to dopiero różnica w zatrudnieniu z powodu nieobserwowanej zmiennej U (przedsiębiorczość) w grupie niebiorących udziału w stażach bezrobotnych, wynosząca:

$$\gamma = \frac{0,049942}{0,1} = 0,49942 \cong 0,5,$$

spowodowałyby, że oszacowany i skorygowany efekt netto staży wynosiłby 0,029008 ($= 0,07895 - 0,1 \cdot 0,49942$) i na poziomie istotności 0,05 nie można by go uznać za istotny statystycznie.

Nasuwa się zatem pytanie, czy tak duża różnica w zatrudnieniu w grupie kontrolnej z powodu występowania zmiennej U jest realna (prawdopodobna). Jeżeli nie, to oszacowany efekt wydaje się odporny na występowanie takiej nieobserwowanej zmiennej U .

Z drugiej strony, jeśli zatrudnienie z powodu nieobserwowanej zmiennej U w grupie niebiorących udziału w stażach bezrobotnych byłoby przykładowo o 20 punktów procentowych wyższe ($\gamma = 0,2$), to dopiero rozpowszechnienie przedsiębiorczości (zmiennej U) w grupie stażystów w porównaniu z grupą kontrolną większe o:

$$\delta = \frac{0,049942}{0,2} = 0,24971 \cong 0,25$$

dałoby skorygowany efekt netto staży na poziomie 0,029008 i na poziomie 0,05 nie można by go uznać za istotny statystycznie.

W tabeli 1 podano przykładowe wartości parametru δ (lub parametru γ) wraz z odpowiadającymi im minimalnymi wartościami parametru γ (lub odpowiednio δ), przy których oszacowanego efektu netto staży, po uwzględnieniu obciążenia spowodowanego przez nieuwzględnioną zmienną U , nie można by uznać za istotny statystycznie na poziomie istotności 0,05.

W sytuacji, gdy badacz ma rozeznanie i wie, że nieuwzględniona w badaniu zmienna U byłaby o 0,2 bardziej rozpowszechniona w grupie stażystów niż w grupie kontrolnej, a zatrudnienie (w grupie niepoddanej oddziaływaniu) z powodu występowania tej zmiennej U byłoby większe o 0,1, to wówczas skorygowany efekt netto staży wynosiłby 0,05895, a realizacją 95% przedziału ufności byłyby przedział liczbowy: (0,029942; 0,087958).

⁹ Dobranej na podstawie *propensity scores*, oszacowanych w oparciu o zmienne obserwowane X .

Tabela 1. Przykładowe wartości parametru δ (lub parametru γ) wraz z odpowiadającymi im minimalnymi wartościami parametru γ (lub odpowiednio δ), przy których skorygowanego efektu netto staży nie można uznać za istotny statystycznie na poziomie istotności 0,05

Delta	Gamma
0,1	0,499
0,2	0,250
0,3	0,166
0,4	0,125
0,5	0,100
0,6	0,083
0,7	0,071
0,8	0,062
0,9	0,055
1,0	0,050

* Wyniki dla parametru gamma zaokrąglone zostały do 3 miejsc po przecinku.

Źródło: obliczenia własne.

5. Podsumowanie

W badaniach obserwacyjnych nie możemy mieć pewności, że uwzględniliśmy wszystkie zmienne wpływające na wynik końcowy oraz na proces selekcji, i dlatego Rosenbaum [2005] zaleca, by badania oparte na łączeniu jednostek uzupełniać analizą wrażliwości na występowanie takiej potencjalnej zmiennej. Ocena wrażliwości daje bowiem pełniejszą wiedzę na temat otrzymanych wyników i pozwala określić, jak dużą wagę należy przykładać do oszacowanych efektów oddziaływań.

W artykule przedstawiono ciekawą alternatywę dla metody analizy wrażliwości zaproponowanej przez Rosenbauma [2002], metodę VanderWeele'a i Araha [2011]. Metodę tę można stosować do badania odporności na występowanie takiej nieobserwowanej zmiennej efektów oszacowanych nie tylko za pomocą metod opartych na łączeniu jednostek. Pozwala ona ocenić wielkość obciążenia spowodowanego przez nieuwzględnioną w badaniu zmienną, a tym samym umożliwia skorygowanie oszacowanego efektu oddziaływania przy uwzględnieniu występowania takiej potencjalnej zmiennej. W wersji ogólnej zmienna wyjściowa, oddziaływanie oraz obserwowane i nieobserwowane zmienne mogą być jakościowe lub ilościowe. Co więcej, do jej zastosowania wystarczy znajomość otrzymanych rezultatów i nie jest konieczny wgląd w dane.

Literatura

- Abadie A., Imbens G.W., 2006, *Large sample properties of matching estimators for average treatment effects*, *Econometrica*, vol. 74(1), s. 235-267.
- Caliendo M., Kopeinig S., 2008, *Some practical guidance for the implementation of propensity score matching*, *Journal of Economic Surveys*, vol. 22(1), s. 31-72.
- Denkowska S., 2015, *Wybrane metody oceny jakości dopasowania w Propensity Score Matching*, *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, nr 384, *Taksonomia* 24, s. 60-74.
- Denkowska S., 2016, *Zastosowanie analizy wrażliwości do oceny wpływu nieobserwowanej zmiennej w Propensity Score Matching*, *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, nr 427, *Taksonomia* 27, s. 66-75.
- Gastwirth J., Krieger A., Rosenbaum P., 1998, *Dual and simultaneous sensitivity analysis for matched pairs*, *Biometrika*, vol. 85, s. 907-920.
- Keele L., 2010, *An overview of rbound: An R Package for Rosenbaum bounds sensitivity analysis with matched data*, www.personal.psu.edu/ljk20/rbounds%20vignette.pdf (2.02.2016).
- Lin D.Y., Psaty B.M., Kronmal R.A., 1998, *Assessing the sensitivity of regression results to unmeasured confounders in observational studies*, *Biometrics*, 54, s. 948-963.
- Liu W., Kuramoto S.K., Stuart E.A., 2013, *An introduction to sensitivity analysis for unobserved confounding in non-experimental prevention research*, *Prevention Science*, vol. 14(6), s. 570-580.
- Pearl J., 2010, *The foundations of causal inference*, *Sociological Methodology*, vol. 40, s. 75-149.
- Rosenbaum P.R., 2002, *Observational Studies*, Springer, New York.
- Rosenbaum P.R., 2005, *Observational Study*, [w:] Everitt B.S., Howell D.C. (ed.), *Encyclopedia of Statistics in Behavioral Science*, vol. 3, John Wiley and Sons.
- Rosenbaum P.R., Rubin D.B., 1983, *The central role of propensity score in observational studies for casual effects*, *Biometrika*, vol. 70(1), s. 41-55.
- VanderWeele T.J., Arah O.A., 2011, *Bias formulas for sensitivity analysis of unmeasured confounding for general outcomes, treatments, and confounders*, *Epidemiology*, vol. 22(1), s. 42-52.