

**GENERATORY SYNTETYCZNYCH  
SZEREGÓW OPADOWYCH  
DO MODELOWANIA SIECI  
KANALIZACJI DESZCZOWYCH  
I OGÓLNOSPŁAWNYCH**



**PAWEŁ LICZNAR**

**GENERATORY SYNTETYCZNYCH  
SZEREGÓW OPADOWYCH  
DO MODELOWANIA SIECI  
KANALIZACJI DESZCZOWYCH  
I OGÓLNOSPŁAWNYCH**

*Autor*  
dr inż. Paweł Licznar

*Opiniodawcy:*  
dr hab. inż. Andrzej Kotowski, prof. PWR  
prof. dr hab. inż. Szymon Malinowski

*Redaktor merytoryczny*  
dr hab. inż. Krzysztof Pulikowski, prof. nadzw.

*Opracowanie redakcyjne*  
mgr Elżbieta Winiarska-Grabosz

*Korekta*  
dr Ewa Jaworska  
Janina Szydłowska

*Łamanie*  
Halina Sebzda

Projekt okładki  
mgr inż. Stanisław Rogowski

Zdjęcia na okładce dzięki uprzejmości Moniki Trypuz,  
fot. 6 autorstwa Ben Kaye-Skinnera

Monografie LXXVII

© Copyright by Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu, Wrocław 2009

ISSN 1898–1151  
ISBN 978–83–60574–72–0

**WYDAWNICTWO UNIwersytetu PRZYRODniczego WE WROcławIU**  
**Redaktor Naczelny – prof. dr hab. Andrzej Kotecki**  
**ul. Sopocka 23, 50–344 Wrocław, tel. 71 328–12–77**  
**e-mail: [wyd@up.wroc.pl](mailto:wyd@up.wroc.pl)**

---

Nakład 100 + 16 egz. Ark. wyd. 13. Ark. druk. 11,25  
Druk i oprawa: EXPOL, P. Rybiński, J. Dąbek, Spółka Jawna  
ul. Brzeska 4, 87–800 Włocławek

## Spis treści

Wykaz ważniejszych oznaczeń .....	7
1. WSTĘP .....	13
2. CEL I ZAKRES PRACY .....	18
3. MATERIAŁ BADAWCZY .....	21
3.1. Zapisy pluwiograficzne .....	21
3.2. Wstępne opracowanie danych pluwiograficznych.....	23
4. FRAKTALE I MULTIFRAKTALE .....	25
4.1. Definicja fraktala .....	25
4.2. Wymiar i kowymiar fraktalny .....	26
4.3. Multifraktale i procesy multifraktalne .....	28
4.4. Podstawowe cechy multifraktali .....	30
4.5. Kaskadowe procesy multifraktalne.....	34
4.6. Klasyfikacja multifraktali .....	38
4.7. Opis procesów multifraktalnych.....	42
4.7.1. Ograniczenia statystycznego opisu procesów multifraktalnych .....	46
4.7.2. Właściwości funkcji wykładnika skalowania .....	48
4.8. Multifraktalne transformacje fazowe.....	52
4.8.1. Multifraktalne transformacje drugiego rzędu.....	52
4.8.2. Multifraktalne transformacje pierwszego rzędu.....	53
4.9. Uniwersalne multifraktale .....	57
5. BADANIA FRAKTALNE I MULTIFRAKTALNE .....	61
5.1. Analiza widmowa szeregów czasowych natężeń deszczów .....	64
5.2. Metoda funkcyjnego zliczania pudełek .....	69
5.3. Metoda rozkładu prawdopodobieństwa/wielokrotnego skalowania .....	75
5.4. Metoda momentu śladu .....	79
5.5. Metoda podwójnego momentu śladu .....	85
5.6. Ocena wzajemnego dopasowania teoretycznych i empirycznych funkcji skalowania .....	92
5.7. Podsumowanie fraktalnych i multifraktalnych badań szeregów rejestracji pluwiograficznych .....	95
6. MULTIPLIKATYWNE MODELE KASKAD LOSOWYCH .....	97
6.1. Rys historyczny .....	97
6.2. Losowe kaskady kanoniczne .....	100
6.2.1. Kaskada kanoniczna o stałych parametrach.....	107
6.2.1.1. Estymacja stałych parametrów kaskady kanonicznej .....	108
6.2.1.2. Generowanie syntetycznych szeregów deszczów z użyciem kaskady kanonicznej o stałych parametrach .....	110
6.2.1.3. Ocena jakości syntetycznych szeregów deszczów z kaskady kanonicznej o stałych parametrach.....	112
6.2.2. Kaskada kanoniczna z wymuszeniem wielkoskalowym.....	117

6.2.2.1. Estymacja parametrów kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym .....	118
6.2.2.2. Generowanie syntetycznych szeregów deszczów z użyciem kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym .....	120
6.2.2.3. Ocena jakości syntetycznych szeregów deszczów z kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym.....	121
6.3. Losowe kaskady mikrokanoniczne .....	126
6.3.1. Kaskada mikrokanoniczna z generatorem beta.....	126
6.3.1.1. Estymacja parametrów kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta .....	129
6.3.1.2. Generowanie syntetycznych szeregów deszczów z użyciem kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta .....	131
6.3.1.3. Ocena jakości syntetycznych szeregów deszczów z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta.....	132
6.3.2. Kaskada mikrokanoniczna z generatorem beta-normalnym .....	137
6.3.2.1. Estymacja parametrów kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym .....	141
6.3.2.2. Generowanie syntetycznych szeregów deszczów z użyciem kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym.....	144
6.3.2.3. Ocena jakości syntetycznych szeregów deszczów z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym .....	147
7. PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE .....	157
8. PIŚMIENNICTWO.....	171

## Wykaz ważniejszych oznaczeń

Wszystkie oznaczenia używane w pracy zostały zdefiniowane w tekście pracy, przy ich wprowadzaniu. Najważniejsze oznaczenia zostały zestawione poniżej. Zmienne powiązane z tymi oznaczeniami są w większości bezwymiarowymi wielkościami, co wynika ze specyfiki używanego w pracy warsztatu geometrii fraktalnej i multifraktalnej. W przypadku wielkości wymiarowych ich wymiar jest podawany dodatkowo w nawiasach kwadratowych.

- $a^*$  – parametr rozkładu symetrycznego beta
- $a_0^*$  – parametr dopasowania (mnożnik) w formule skalowej  $a^*(\lambda)$
- $A$  – zbiór fraktalny o wymiarze  $D$
- $A_\lambda$  – podzbiór zbioru  $A$ , w rozdzielczości  $\lambda$
- $b$  – liczba rozdziału multiplikatywnej kaskady losowej
- $B$  – niezależny generator kaskady kanonicznej
- $B^*(a^*)$  – funkcja beta rozkładu symetrycznego beta
- $c$  – kowymiar fraktalny zbioru  $A$
- $c(\gamma)$  – funkcja kowymiaru, charakteryzująca dystrybucję osobliwości  $\gamma$  intensywności procesu
- $c(\gamma, \eta)$  – funkcja kowymiaru  $\eta$ -wykładniczo renormalizowanego procesu
- $c_b(\gamma)$  – funkcja kowymiaru, charakteryzująca odsłonięty proces
- $C(q)$  – funkcja kowymiaru dla momentów  $q$ , dualna względem funkcji  $c(\gamma)$
- $C_1$  – kowymiar osobliwości średniej (uniwersalny parametr multifraktalny)
- $d$  – wymiar euklidesowy ( $d = 1, 2, 3$ ) obiektu geometrycznego, zawierającego (przez zanurzenie) zbiór fraktalny  $A$ , także indeks dolny oznaczający wielkości ubrane
- $D$  – wymiar przestrzeni, zawierającej (jako zanurzenie) zbiór  $A$ , także fraktalny wymiar przestrzeni, która zawiera lub „podtrzymuje” proces (wymiar geometryczny „podstawy” procesu) (porównaj zależności 4.5 i 4.28)
- $D(q)$  – funkcja wymiaru zdefiniowana dla momentów  $q$  natężenia procesu
- $D(\gamma)$  – funkcja wymiaru fraktalnego zdefiniowanego dla osobliwości  $\gamma$  natężenia (gęstości) procesu

$D_A$	– wymiar fraktalny zbioru $A$
$D_s$	– wymiar próbkowania
$E[W]$	– wartość oczekiwana $W$
$E(\omega)$	– energia (moc) widma
$E(p_0)$	– prawdopodobieństwo wystąpienia okresów bezdeszczowych (o zerowej wysokości warstwy opadów) w analizowanych szeregach czasowych (obserwowanych i syntetycznych) o różnej rozdzielczości czasowej
$E(H_T)$	– średnie roczne maksima wysokości opadu w analizowanych szeregach dla różnych czasów trwania $T$ [ $L$ ]
$E_\Gamma(\omega)$	– energia (moc) widma multifraktalnego generatora $\Gamma$
$f$	– częstotliwość [ $T^{-1}$ ]
$f^*$	– transformacja Legendre'a funkcji $f$
$f(\gamma)$	– współczynnik proporcjonalności, będący funkcją rzędu osobliwości $\gamma$
$f_c$	– częstotliwość krytyczna Nyquista: $f_c = 1/2\Delta$ [ $T^{-1}$ ]
$F$	– czynnik mieszczący w sobie stałe proporcjonalności słabo zależne od $\gamma$ i wolno zmieniające się wraz z $\lambda$
$G$	– wykładnik Lipschitz-Höldera
$h(q)$	– funkcja generująca kumulanty
$H$	– odchylenie od zachowawczości (uniwersalny parametr multifraktalny)
$H^*$	– parametr dopasowania (wykładnik) w formule skalowej $a^*(\lambda)$
$Hd$	– całkowita wysokość opadu nawalnego [ $L$ ]
$H_T$	– roczne maksima wysokości opadu dla różnych czasów trwania $T$ [ $L$ ]
$i$	– jednostka urojona: $i^2 = -1$
$Id$	– średnie natężenie deszczu nawalnego [ $L \cdot T^{-1}$ ]
$K(q)$	– funkcja wykładnika skalowania momentów
$K(q, \eta)$	– podwójna funkcja wykładnika skalowania momentów, charakteryzująca $\eta$ -wykładniczo renormalizowany proces ( $\eta \neq 1$ )
$K_b(q)$	– empiryczna funkcja wykładnika skalowania momentów charakteryzująca proces odsłonięty
$K_\lambda(q)$	– druga charakterystyczna funkcja generatora $\Gamma_\lambda$
$L$	– wymiar obiektu geometrycznego zdefiniowanego w 1-wymiarowej przestrzeni, jego jednostki zależą od natury przestrzeni, np. [ $L$ ], [ $T$ ]
$L_0$	– długość boku hipersześcianu $J = [0, L_0]^d$ początkowego (na zerowym poziomie) multiplikatywnej kaskady losowej lub długość początkowa (maksymalna) dyskretnego modelu kaskadowego. W przypadku modeli kaskad dla szeregów czasowych (dla $d = 1$ ) wymiarem jest [ $T$ ]
$L_n$	– długość boku pod-hipersześcianu powstałego z początkowego hipersześcianu $J = [0, L_0]^d$ na poziomie $n$ multiplikatywnej kaskady losowej; wymiar jak dla $L_0$
$M_n(q)$	– moment marginalny rzędu $q$ zbioru wartości na $n$ -tym poziomie kaskady



- $N_s$  – skończona liczba (niezależnych) próbek
- $N_\lambda$  – liczba nie nachodzących na siebie hipersześcianów o długości boku  $\lambda^{-1}$  koniecznych dla pokrycia ograniczonej części  $D$ -wymiarowej przestrzeni zawierającej zbiór  $A$
- $N_{\lambda,A}$  – liczba nie nachodzących na siebie hipersześcianów o długości boku  $\lambda^{-1}$  koniecznych dla pokrycia zbioru fraktalnego  $A$ , zawartego (przez zanurzenie) w  $D$ -wymiarowej przestrzeni
- $p$  – wartość prawdopodobieństwa funkcji losowej ( $p \leq 1$ )
- $p^*$  – argument funkcji  $f^*(p^*)$  powstałej w wyniku transformacji Legendre'a funkcji  $f(x)$
- $p_L(w)$  – funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu łączonego – dwóch klasycznych rozkładów: beta i normalnego
- $p_\beta(w)$  – funkcja gęstości prawdopodobieństwa symetrycznego rozkładu beta
- $p_\gamma(w)$  – funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu gamma
- $p_{05}$  – procentowy udział współczynników rozpadu równych dokładnie 0,5
- $p_{BN}$  – parametr charakteryzujący procent udziału rozkładu beta w rozkładzie łączonym ( $p_{BN} \in <0,1>$ )
- $p_{0,w}$  – wartość prawdopodobieństwa wystąpienia nieciągłości (układu wag rozdziału 0/1 lub 1/0 w kaskadzie)
- $P(f)$  – periodogram, estymator widma mocy
- $Pr$  – prawdopodobieństwo określonego zdarzenia
- $q$  – rząd momentu statystycznego
- $q_D$  – rząd krytyczny dla dywergencji momentów statystycznych
- $q_s$  – rząd krytyczny momentów statystycznych z uwagi na ograniczenia liczebności próby
- $q_\gamma$  – rząd momentu statystycznego powiązany z rzędem osobliwości  $\gamma$  zależnością:  $K'(q_\gamma) = \gamma$
- $q_{\max}$  – rząd krytyczny zdefiniowany jako:  $q_{\max} = \min(q_s, q_D)$
- $r$  – graniczne wysokości warstw deszczu w przedziałach 5-minutowych, używane do sporządzania dystrybuanty  $[L]$
- $r_0$  – suma opadu dla okresów 1280 minut (w przybliżeniu opad dobowy)  $[L]$
- $r_{\max}$  – parametr dopasowania w formułach wpływu wymuszenia wielkoskalowego na wartości:  $\beta_k$  i  $\sigma_k^2$   $[L]$
- $R$  – wysokości warstw deszczu w szeregach czasowych (obserwowanych i syntetycznych) o rozdzielczości 5 minut  $[L]$
- $\mathfrak{R}$  – zbiór liczb rzeczywistych
- $R_c$  – promień krzywizny funkcji
- $R_\lambda$  – natężenia opadu deszczu w rozdzielczości  $\lambda$   $[L \cdot T^{-1}]$
- $R_t(t_2)$  – wysokość warstwy deszczu zakumulowana dla przedziału czasu  $\tau$ , wycentrowanego w czasie  $t_2$   $[L]$

- $R_{\tau}(t_1)$  – wysokość warstwy deszczu zakumulowana dla przedziału czasu  $\tau$ , wycentrowanego w czasie  $t_1$  [L]
- $R_0L_0^d$  – nielosowa początkowa masa przyjmowana na zerowym (początkowym) poziomie kaskady losowej; w przypadku modelu kaskady szeregu czasowego opadów deszczu ( $d = 1$ ), wymiarem  $R_0$  jest  $[L \cdot T^{-1}]$ , a iloczynu  $R_0L_0$  [L]
- $s$  – zadowalająco wysoki poziom graniczny natężenia procesu ( $s \gg 1$ ), także indeks dolny odnoszący się do wielkości wyznaczonych dla zbiorów pomiarowych o ograniczonej wielkości (liczebności próby)
- $s^*$  – bezwymiarowy parametr dopasowania w formułach wpływu wymuszenia wielkoskalowego na wartości:  $\beta_k$  i  $\sigma_k^2$
- $s(H_T)$  – odchylenia standardowe wartości rocznych maksimów wysokości warstw deszczu w analizowanych szeregach dla różnych czasów trwania  $T$  [L]
- $T$  – czas [T], także czasy trwania deszczów, rozpatrywane przy analizie rocznych maksimów wysokości opadu [T]
- $Td$  – czas trwania deszczu nawalnego [T]
- $T_1$  – najdłuższy spośród analizowanych okresów czasu [T]
- $T_{hr}$  – poziom graniczny natężenia procesu
- $Tr_{\lambda}[\epsilon_{\lambda}^q]$  – moment śladu rzędu  $q$  natężenia procesu  $\epsilon$  w rozdzielczości  $\lambda$
- $u(\tau, t)$  – współczynnik rozpadu BDC,  $u(\tau, t) = R_{\tau}(t_1) / R_{\tau}(t_2)$  dla  $\tau < t$
- $Var[W]$  – wariancja  $W$
- $W_n^i$  – wartości wag kaskady na  $n$ -tym poziomie kaskady dla  $i = 1, 2, \dots, b^n$ , nieujemne i w pełni niezależne zmienne losowe o identycznym rozkładzie prawdopodobieństwa
- $X$  – zmienna losowa
- $X_n$  – zmienna losowa o rozkładzie normalnym  $N(0, 1)$
- $Y$  – niezależny generator kaskady kanonicznej
- $Y(q)$  – zmienna losowa dla każdego  $q$
- $Z_{\infty}$  – zmienna losowa, wysokoczęstotliwościowy (małoskalowy) komponent masy kaskady  $\mu_n$
- $\alpha$  – stopień multifraktalności (uniwersalny parametr multifraktalny), indeks Lévy'ego
- $\alpha'$  – parametr powiązany z indeksem Lévy'ego zależnością:  $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$
- $\beta$  – wykładnik spektralny
- $\beta_k$  – nieujemny parametr determinujący generator w modelu kaskady kanonicznej
- $\beta_{con}$  – wykładnik spektralny procesu zachowawczego
- $\chi_b(q)$  – funkcja Mandelbrot-Kahane-Peyriere (funkcja MKP)
- $\delta$  – skala homogeniczności
- $\delta_n^*$  – charakterystyczna długość podstruktury stopnia  $n$  kaskady dyskretnej, równa  $\delta_n^* = L_0/\lambda_0^n$ , wymiar jak  $L_0$
- $\Delta_n^i$  – pod-hipersześcian na  $n$ -tym stopniu kaskady ( $i = 1, 2, \dots, b^n$ ) powstały z podziału początkowego hipersześcianu  $J = [0, L_0]^d$

- $\varepsilon$  – (bezwymiarowe) natężenie (gęstość) procesu
- $\varepsilon^*$  – natężenie (gęstość) procesu, np. natężenie opadu, wówczas wymiarem jest  $[L \cdot T^{-1}]$
- $\varepsilon_d$  – (bezwymiarowe) natężenie (gęstość) ubranego procesu
- $\varepsilon_h$  – (bezwymiarowe) ukryte (małoskalowe) natężenie (gęstość) procesu, wpływające na wielkość natężenia ubranego  $\varepsilon_d = \varepsilon \varepsilon_h$ , gdzie  $\varepsilon$  jest natężeniem procesu odsłoniętego
- $\varepsilon_{n,i}$  – gęstość strumienia energii podstruktur stopnia  $n$  kaskady dyskretnej dla  $i = 1, \dots, \lambda^D$
- $\varepsilon_\lambda$  – (bezwymiarowe) natężenie (lub gęstość) procesu w skali rozdzielczości  $\lambda$
- $\varepsilon_{\lambda,i}$  – wszystkie (bezwymiarowe) natężenia procesu obserwowane w  $D$ -wymiarowej przestrzeni przy poziomie rozdzielczości  $\lambda$  z  $i = 1, \dots, \lambda^D$
- $\varepsilon_{\lambda,i}^*$  – wszystkie natężenia procesu obserwowane w  $D$ -wymiarowej przestrzeni przy poziomie rozdzielczości  $\lambda$  z  $i = 1, \dots, \lambda^D$ , wymiar jak dla  $\varepsilon^*$
- $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$  –  $\eta$ -renormalizowane natężenie (gęstość) procesu w najdrobniejszej (znanej) skali rozdzielczości  $\lambda'$
- $\gamma^+$  – parametr prowadzący do wzmocnienia w modelu  $\alpha$  ( $\gamma^+ > 0$ )
- $\gamma^-$  – parametr prowadzący do wytłumienia w modelu  $\alpha$  ( $\gamma^- < 0$ )
- $\gamma_k$  – wolny parametr w modelu log-normalnym generatora  $Y$  kaskady kanonicznej
- $\gamma_s$  – maksymalny rząd osobliwości natężenia procesu, możliwy do obserwacji w skończonym zbiorze  $N_s$  próbek
- $\gamma_q$  – rząd osobliwości powiązany z rzędem momentu  $q$  zależnością:  $c'(\gamma_q) = q$
- $\gamma_{\max}$  – odgórne ograniczenie dla rzędów osobliwości  $\gamma$
- $\Gamma^*$  – funkcja gamma
- $\Gamma_\lambda$  – multifraktalny generator gęstości  $\varepsilon_\lambda$  procesu  $\Gamma_\lambda = \ln(\varepsilon_\lambda)$
- $\eta$  – moment używany dla renormalizacji procesu
- $\lambda$  – współczynnik skali, definiowany jako iloraz największej skali analizy do skali rozpatrywanej (np. skali homogeniczności)
- $\lambda'$  – współczynnik skali odpowiadający najlepszej dostępnej rozdzielczości procesu (najdrobniejszych szczegółów)
- $\lambda^*$  – całkowity stosunek skal kaskady dyskretnej, równy  $\lambda^* = L_0/\delta_n^*$
- $\lambda_0$  – elementarny współczynnik skali dyskretnego modelu kaskadowego
- $\lambda_k$  – skala czasowa w obrębie kaskady,  $\lambda_k = 2^{8-n}$ , gdzie  $n$  poziom kaskady od 1280 do 5 min, przy  $b = 2$
- $\Lambda_n$  – bezwymiarowy parametr skali przestrzennej kaskady losowej  $\Lambda_n = L_n/L_0$
- $\mu$  – średnia, parametr rozkładu normalnego
- $\mu\varepsilon$  – zmienna losowa, której wartości są (multiplikatywnymi) mnożnikami natężenia procesu na poszczególnych poziomach kaskady dyskretnej
- $\mu_n(\Delta_n^i)$  – masa związana z podziałem  $\Delta_n^i$  na  $n$ -tym stopniu kaskady, wymiar zgodny z  $R_0 L_0^d$  przyjętym na początku kaskady
- $\mu_\infty(\Delta_n^i)$  – graniczna wartość  $\mu_n(\Delta_n^i)$  przy  $n \rightarrow \infty$

- $\Pi_\lambda(A)$  – całkowity strumień przez zbiór  $A$  o wymiarze  $D$ , w skali homogeniczności procesu  $\lambda^{-1}$
- $\Pi_\infty(A)$  – regularna granica dla całkowitego strumienia  $\Pi_\lambda(A)$ , gdy  $\lambda \rightarrow \infty$
- $\prod_{i=1}^d b_i$  – iloczyn  $b_1 b_2 \dots b_d$
- $\Pi_{\lambda'}(A_{\lambda,i})$  – strumień gęstości przez zbiór  $A_\lambda$  (podzbiór zbioru  $A$  o wymiarze  $D$ , w rozdzielczości  $\lambda$ ), gdzie  $\lambda'$  odpowiada najlepszej dostępnej rozdzielczości,  $\lambda' > \lambda$
- $\Pi_{\lambda'}^{(n)}(A_{\lambda,i})$  – renormalizowany  $\eta$ -strumień gęstości przez zbiór  $A_\lambda$  (podzbiór zbioru  $A$  o wymiarze  $D$ , w rozdzielczości  $\lambda$ ), gdzie  $\lambda'$  odpowiada najlepszej dostępnej rozdzielczości,  $\lambda' > \lambda$
- $\theta(x,y,z)$  – funkcja samopowinowactwa
- $\sigma$  – odchylenie standardowe, parametr rozkładu normalnego
- $\sigma_k$  – parametr modelu log-normalnego generatora  $Y$  kaskady kanonicznej (wartość  $\sigma_k^2$  definiuje wariancję  $Y$ )
- $\sum_{i=1}^d b_i$  – suma  $b_1 + b_2 + \dots + b_d$
- $\tau(q)$  – empiryczna funkcja skalowania przestrzennie uśrednionych momentów
- $\mathfrak{m}(A)$  – miara zbioru  $A$
- $\omega$  – liczba falowa, dla procesów czasowych  $\omega = 1/\tau [T^{-1}]$
- $\in$  – przynależność do zbioru
- $\cup$  – suma zbiorów
- $\langle \dots \rangle$  – średnia zbioru
- $\approx$  – znak oznaczający w przybliżeniu równy, który zawiera w sobie stałe proporcjonalności
- $\int_A d^D x$  –  $D$ -wymiarowa miara Hausdorffa zbioru  $A$  w przestrzeni  $X$

# 1. WSTĘP

Warsztat stosowany w projektowaniu bądź modelowaniu sieci kanalizacji deszczowych i ogólnospławnych jest nieodłącznie związany z wiedzą o opadach atmosferycznych oraz metodami ich prognozowania. Kiedy w połowie XIX w. szybki rozwój miast w Europie i USA wymusił potrzebę wyposażenia ich w kompleksowe systemy kanalizacji, ówczesny prosty warsztat inżynierski w zasadzie marginalizował dane o zmienności stochastycznej opadów deszczu. Stosowano wtedy na przykład tabele służące do odczytu przekroju kanału o zadanym spadku, niezbędnego do przejścia spływu powierzchniowego ze znanej powierzchni zlewni, które opracował Roe na podstawie obserwacji kanałów londyńskich [Metcalf i Eddy 1928]. Efektem tego były często pojawiające się błędy projektowe wynikające z odmienności warunków lokalnych. Empiryczne metody opracowane w Europie zawodziły, zwłaszcza gdy stosowano je do projektowania systemów kanalizacyjnych na obszarze USA, gdzie panują odmienne warunki opadowe w porównaniu do warunków europejskich. Szybko zauważono konieczność badania lokalnych warunków opadowych jako podstawy właściwego wymiarowania kanałów. Dowody takiego podejścia odnajdujemy w historii budowy największych krajowych systemów kanalizacji ogólnospławnej. We Wrocławiu, na potrzeby projektowanego i budowanego kompleksowego systemu kanalizacyjnego miasta, od końca XIX w. założono specjalną miejską sieć pomiarową, składającą się z 5 deszczomierzy. Funkcjonowała ona od 1898 do 1945 r., a pochodzące z niej dane były regularnie analizowane i udostępniane projektantom i eksploatacjom miejskiego systemu kanalizacji [Licznar i in. 2005]. Lindley [1911], gdy przystępował do projektu odwodnienia Łodzi, swoje prace zaczął od zgromadzenia danych o opadach nawalnych z pobliskich stacji meteorologicznych zaboru rosyjskiego i pruskiego. Pomianowski w roku 1926, do projektu kanalizacji Wielkiej Warszawy, przeanalizował lokalne deszcze burzowe z wielolecia 1829–1926 [Rybczyński i in. 1933, Błaszczyk i in. 1974].

Rezultatem upowszechniania pomiarów deszczów na potrzeby projektowania było stworzenie warsztatu przetwarzania danych opadowych. Przyjmuje się, że prekursorem był tutaj Talbot, który w 1899 r. na podstawie analizy natężeń (intensywności)<sup>1</sup> desz-

---

<sup>1</sup> W pracy stosuje się termin natężenie deszczu, definiowany jako wysokość (warstwy) opadu przypadająca na jednostkę czasu. Podstawowymi jednostkami natężenia opadu są  $\text{mm}\cdot\text{min}^{-1}$  i jednostki pochodne, jak również często używane przy obliczaniu przepływów w sieci kanalizacyjnej  $\text{dm}^3\cdot(\text{s}\cdot\text{ha})^{-1}$  [patrz np. Błaszczyk i in. 1974, PN-EN 12056-3, 2002]. W literaturze

czów wyznaczył charakterystyczne krzywe opadowe. Krzywe te ewoluowały z czasem do używanych powszechnie po dzień dzisiejszy modeli natężeń deszczów miarodajnych typu IDF (ang. Intensity-Duration-Frequency) bądź DDF (ang. Depth-Duration-Frequency). Powiązanie wartości natężenia deszczu z czasem jego trwania oraz częstością występowania było rozwiązaniem nowoczesnym, gdyż do projektowania sieci kanalizacji deszczowych i ogólnospławnych zastosowano metody probabilistyczne z wykorzystaniem syntetycznego modelu deszczu. Deszcz miarodajny jest prostym modelem blokowym opadu o stałej wartości natężenia. Deszcz nawalny tego typu, o idealnie stałym natężeniu w czasie, np. 30 minut, nie występuje w naturze, jest więc tworem syntetycznym. Wyznaczenie wartości natężenia tego deszczu z krzywej IDF wymaga od inżyniera określenia uprzednio poziomu prawdopodobieństwa wystąpienia deszczu. Zakładany przy tym poziom częstości występowania deszczu miarodajnego jest powiązany z projektowanym poziomem częstości zalewania terenu [patrz np. tab. 1, PN EN 752-4, 2001]. Powiązanie dwóch ostatnich wielkości jest dalekie od jasnego sformalizowania, pozwala jednak na przybliżone szacowanie poziomu niezawodności projektowanych odcinków sieci kanalizacji deszczowej lub ogólnospławnej.

Wraz z rozbudową systemów odwodnienia oraz ich ciągłym dociążaniem przez nowe strumienie spływu powierzchniowego z przyrastającego arealu powierzchni uszczelnianych wzrastała potrzeba uzupełnienia istniejącego warsztatu inżynierskiego o element modelowania sieci kanalizacyjnych. Zręby używanych w tym celu modeli matematycznych powstały w zasadzie na początku XIX w. i były rezultatem prac takich badaczy jak Navier, Cauchy, St. Venant i Stokes. Dzięki nim opracowane zostały ogólne równania przepływu płynów Naviera-Stoksa oraz ich jednowymiarowa wersja w postaci równań St. Venant'a. Dopiero jednak wprowadzenie metod numerycznych i upowszechnienie komputerów pozwoliło na szerokie wdrożenie modelowania hydrodynamicznego w praktyce. W efekcie tego, po pierwsze, możliwym stało się rozszerzenie aspektu probabilistycznego w podejściu zarówno do projektowania, jak i eksploatacji sieci kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej, a po drugie powstała potrzeba całkiem nowego typu danych opadowych prezentowanych na wejściach do modeli.

Zgodnie z normami [PN EN 752-2 2000, PN EN 752-4 2001, DIN EN 752, 2008] oraz innymi wytycznymi technicznymi [Schmitt 2000] podstawą filozofii projektowania nowych sieci i eksploatacji już istniejących jest zapewnienie ochrony osiedli przed zbyt często zdarzającymi się wylaniami z kanalizacji. Ograniczenia możliwości odwzorowywania zjawiska wylania wymusza w praktyce weryfikację częstości nadpiętrzenia sieci. Weryfikacja ta odbywa się na drodze modelowania hydrodynamicznego sieci przy różnych scenariuszach jej obciążenia opadami atmosferycznymi [Licznar 2008a, Licznar i in. 2008]. Scenariuszami tymi są zmierzone rzeczywiste serie opadów lokalnych bądź opady modelowe, czy też ich grupy, a więc syntetyczne scenariusze hietogramów. Odpowiedzią końcową, jaką powinien uzyskać inżynier na podstawie modelowania systemu kanalizacji, jest określenie prawdopodobieństwa mogących się pojawiać nadpiętrzeń ścieków w różnych punktach sieci, a tym samym ustalenie potencjału zakłócenia komfortu kanalizacyjnego, rozumianego jako stany, przy których utrudnione jest

---

fachowej z zakresu inżynierii środowiska spotyka się często równoważny termin – intensywność opadu deszczu, wyrażaną zwykle w  $\text{dm}^3 \cdot (\text{s} \cdot \text{ha})^{-1}$  [patrz np. PN-EN 752-4, 2001].

odprowadzanie ścieków deszczowych lub sytuacji powodujących straty materialne na obszarze skanalizowanym. Weryfikacja taka może dotyczyć sieci nie tylko istniejących, lecz także dopiero zaprojektowanych z użyciem klasycznego warsztatu opartego na natężeniach deszczów miarodajnych [Licznar i in. 2008].

Bardzo silnie podejście probabilistyczne uwidacznia się w najnowszych zaleceniach Deutsche Vereinigung für Wasserwirtschaft, Abwasser und Abfall (DWA) w zakresie wymiarowania zbiorników retencyjnych wód deszczowych. W wytycznych tych mówi się o uproszczonym wymiarowaniu (niem. die Bemessung) i sprawdzaniu (niem. der Nachweis) pojemności zbiorników. Uproszczone wymiarowanie dopuszcza się jedynie dla małych zlewni o powierzchni do 200 ha lub też o czasie przepływu wód opadowych do 15 minut [Arbeitsblatt DWA-A 117 2006]. Wymiarowanie to opiera się na podanym w wytycznych nomogramie, a aspekt probabilistyczny w tej uproszczonej metodzie jest zawarty jedynie w doborze natężenia deszczu miarodajnego w obliczeniach spływu powierzchniowego na właściwym poziomie częstości występowania. W przypadku dużych zlewni ustalanie objętości retencyjnej zbiornika odbywa się na podstawie szeregu symulacji hydrodynamicznego funkcjonowania układu, wykonanych dla serii zarejestrowanych rzeczywistych hietogramów opadów nawalnych z wielolecia liczącego zwykle ponad 30 lat. Tworzony na podstawie tych symulacji szereg rozdzielczy wymaganych objętości retencyjnych zbiorników wód deszczowych jest podstawą do oszacowania przez inżyniera nie tylko objętości zbiornika, ale – co jest równie istotne – prawdopodobieństwa jej przewyższenia.

Powszechne wdrożenie nowocześniejszego warsztatu modelowania hydrodynamicznego sieci kanalizacyjnych w krajowej praktyce projektowania i modelowania sieci kanalizacji deszczowej bądź ogólnospławnej jest aktualnie istotnym zadaniem stojącym przed polską inżynierią środowiska. Pomimo szerokiego już na polskim rynku dostępu do wyspecjalizowanego oprogramowania wspomagającego projektowanie, w tym do aplikacji służących modelowaniu hydrodynamicznemu [Licznar 2007a, Licznar 2008b], zadanie to napotyka na liczne bariery. W Polsce podstawową przyczyną tego stanu jest brak powszechnego dostępu przez projektantów do odpowiednich danych opadowych [Kotowski 2006, Licznar 2008a]. Należy przypuszczać, że bez działań o charakterze metodycznym, proponowanych w niniejszej pracy, sytuacja ta nie ulegnie znaczącej poprawie w krótkim czasie, gdyż jest wynikiem splotu wielu czynników, a jej przezwyciężenie wymagałoby znacznych nakładów finansowych i skoordynowanych działań wielu podmiotów. Danymi, niezbędnymi obecnie najczęściej na wejściu do modeli hydrodynamicznych, są cyfrowe hietogramy, a więc zapisy zmian natężenia opadu dla rozdzielczości czasowej co najmniej 5 minut, w postaci gotowej do wczytania przez oprogramowanie. Przygotowanie lokalnej, wiarygodnej statystycznie 30-letniej serii opadów wymaga olbrzymiego nakładu pracy, gdyż jeszcze do niedawna standardem rejestracji opadów w kraju były pomiary pluwiograficzne, których rezultatem były zapisy na paskach papieru [Licznar i in. 2005]. Nawet znacznie prostsza analiza pasków pluwiograficznych pod kątem jedynie odczytu maksymalnych natężeń deszczów miarodajnych dla wybranych czasów ich trwania jest uciążliwa i pracochłonna [Bogdanowicz i Stachý 1998]. Dostęp do surowych danych w tym zakresie z małymi wyjątkami jest zarezerwowany jedynie dla Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej (IMGW), który jako krajowa służba meteorologiczna prowadził pomiary opadów na terenie całej

Polski. Zwykle też dane źródłowe (surowe) nie są udostępniane przez IMGW projektantom, a jedynie istnieje możliwość zamówienia ich odpłatnej analizy statystycznej pod kątem opracowania lokalnych zależności typu IDF. Jednocześnie dostępność do lokalnych zapisów pluwiograficznych nawet dla samego IMGW jest mocno ograniczona z uwagi na brak sieci stacji meteorologicznych o charakterze miejskim, rozlokowanych na obszarze modelowanych zlewni kanalizacyjnych. W Niemczech problem ten został częściowo rozwiązany przez opracowanie przez Deutscher Wetterdienst (DWD) atlasu opadowego KOSTRA przygotowanego z myślą o inżynierach środowiska [Bartels i in. 1997]. Inżynierowie niemieccy korzystający z KOSTRA nie mogą z atlasu pozyskać szeregów rzeczywistych zapisów deszczów, niemniej na podstawie zawartych w nim wartości natężeń deszczów miarodajnych mogą konstruować lokalne, syntetyczne hietogramy deszczów nawalnych.

W Polsce problem braku danych do modelowania sieci kanalizacji deszczowej czy ogólnospławnej jest zauważany zarówno przez środowiska naukowe, jak i eksploatorów. Rezultatem tego jest powrót do dedykowanych hydrologii miejskiej pomiarów opadów na terenach zlewni kanalizacyjnych. Najlepszymi przykładami są miasta: Warszawa, Łódź, Gdańsk, Wrocław. Szczególnym przykładem działań zmierzających ku opomiarowaniu zlewni miejskich jest Warszawa, gdzie w roku 2008 została uruchomiona sieć 25 elektronicznych deszczomierzy wagowych. Jest to pierwsza w kraju tak duża lokalna sieć pomiarowa opadów atmosferycznych o scentralizowanym systemie akwizycji danych, dedykowana gromadzeniu danych wejściowych do modelowania hydrodynamicznego sieci i powiązana z rozbudowanym systemem opomiarowania napełnień i przepływów w kanałach [Licznar 2008d]. Budowie tej klasy rozwiązań sprzyja upowszechnienie nowych standardów w zakresie cyfrowej rejestracji natężeń deszczów na terenach zurbanizowanych, jakimi są wspomniane już elektroniczne deszczomierze wagowe [Licznar i in. 2005a, 2005b] czy też disdrometry laserowe [Licznar 2007b, Licznar i in. 2007, Licznar 2008c].

Miejskie sieci deszczomierzy dają nadzieję na szerszy dostęp do wiarygodnych danych opadowych o wysokiej rozdzielczości czasowej, niezbędnych do modelowania hydrodynamicznego w przyszłości. Niemniej dane opadowe do modelowania sieci kanalizacyjnych i wymiarowania obiektów kubaturowych, w tym systemów rozsączania wód opadowych, są potrzebne już dzisiaj. Dane opadowe o wysokiej rozdzielczości czasowej są również niezbędne przy modelowaniu jakości wód powierzchniowych. Wody te często są zanieczyszczone wskutek erozji wodnej gleb oraz spłukiwania zanieczyszczeń nagromadzonych na powierzchniach utwardzonych. Proces erozji wodnej gleb modeluje się z wykorzystaniem modeli: empirycznych (np. równania USLE i RUSLE (ang. Universal Soil Loss Equation, Revised Universal Soil Loss Equation)), fizykalnych (np. WEPP (ang. Water Erosion Prediction Project)); czy też tzw. czarnej skrzynki (np. z wykorzystaniem sztucznych sieci neuronowych – Licznar (2003), Licznar i Nearing (2003)). Implementacja tych modeli wymaga szczegółowej wiedzy o opadach. Czynnikiem decydującym o odspojeniu cząstek gleby jest energia kinetyczna uderzających kropeł deszczu. Energię tę rzadko jeszcze rejestrujemy bezpośrednio z użyciem disdrometrów optycznych [Licznar 2007b] lub też impaktometrów [Licznar i Łomotowski 2007, Licznar i in. 2008b], częściej szacujemy jej wartość w oparciu o chwilowe natężenia deszczów [Licznar 2008e].



Uzupełniając luki w dostępie do danych opadowych do modelowania w Polsce, warto zadać pytanie, które pojawia się często na światowych konferencjach naukowych dotyczących hydrologii miejskiej. Jeśli nawet będziemy dysponować pomiarami z 30 lat i będziemy mogli na ich podstawie wyodrębnić hietogram projektowy (ang. design storm) lub też cały zestaw takich hietogramów, to czy stosując takie dane będziemy mogli probabilistycznie oceniać działanie systemów tranzytowych, kubaturowych lub służących do rozsączania wód opadowych w gruncie? Odpowiedź na to pytanie jest znana i brzmi nie. Wynika to z faktu, że każdy spośród zarejestrowanych deszczów projektowych to jedynie pojedyncza realizacja spośród wielu możliwych (zasadniczo nieskończonej liczby) opadów o tym samym okresie powtarzalności i natężeniu [Molnar i in. 2006]. Dysponując zestawem deszczów nawalnych zaistniałych w okresie 30 lat, posiadamy rozpoznanie jedynie niewielkiej liczby prawdopodobnych scenariuszy stochastycznych opadu. Tym samym prognozowanie funkcjonowania sieci kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej na podstawie założenia, że nastąpi identyczne powtórzenie zarejestrowanego wieloletniego scenariusza opadowego w przyszłości, jest błędne metodycznie.

Podejmując działania zmierzające ku poprawie dostępności danych opadowych na potrzeby modelowania, nie powinniśmy zapominać ani na chwilę o paradygmacie coraz większego znaczenia aspektu probabilistycznego w tym zakresie. Dlatego chociaż bardzo istotnym jest prowadzenie monitoringu opadów na terenie kraju, to jeszcze ważniejsze staje się wypracowanie narzędzi, które pozwolą na analizę danych pomiarowych zmierzającą w pierwszym rzędzie ku poprawie naszej wiedzy o zjawiskach procesów opadowych, związanych z lokalnymi warunkami – i na tej podstawie modelowania samych szeregów opadowych. Wypracowane modele (generatory syntetycznych szeregów opadowych) powinny być źródłem dowolnej liczby prawdopodobnych scenariuszy opadowych, używanych następnie na wejściu modeli hydrodynamicznych sieci kanalizacyjnych. Innymi słowy, nie powinniśmy dzisiaj koncentrować się jedynie na pokonaniu luki w zakresie poziomu dostępności do danych opadowych niezbędnych w gospodarowaniu wodami opadowymi, która to dzieli nasz kraj od przodujących w tym zakresie państw europejskich. Należy równolegle dążyć do stworzenia własnej, krajowej metodyki opisu procesów opadowych, tak aby generowane z użyciem jej narzędzi syntetyczne realizacje procesów opadowych dawały podstawę do w pełni probabilistycznego projektowania i modelowania systemów odprowadzania i zagospodarowywania wód opadowych na terenach zurbanizowanych. Takie podejście jest zgodne z coraz szerzej wdrażaną w technice metodyką probabilistycznej oceny ryzyka PRA (ang. Probabilistic Risk Assessment). PRA to kompleksowa, usystematyzowana i logiczna metodyka analizy, mająca na celu identyfikację i ocenę ryzyka w skomplikowanych systemach technologicznych dla poprawy ich bezpieczeństwa i wydajności przy zachowaniu wymogów oszczędności nakładów finansowych [Stamatelatos i in. 2002]. Ocena ta odbywa się na drodze analizy różnych scenariuszy, których tworzenie wymaga przyjmowania odpowiednich modeli i parametrów tychże modeli, bazujących na naszej aktualnej wiedzy o fizyce związanych procesów i zachowaniu systemów w zadanych warunkach. Systemy kanalizacji deszczowej czy ogólnospławnej dużych miast Polski mogą być postrzegane jako skomplikowane systemy technologiczne, a generowane prawdopodobne scenariusze opadowe mogą być w przyszłości scenariuszami do ich kompleksowej, usystematyzowanej i logicznej analizy za pomocą modeli hydrodynamicznych.

## 2. CEL I ZAKRES PRACY

Podstawowym celem pracy było opracowanie generatora syntetycznych danych opadowych i ocena potencjalnej przydatności generowanych z jego użyciem szeregów opadowych do probabilistycznego modelowania systemów służących odprowadzaniu, retencjonowaniu i zagospodarowywaniu wód opadowych. Generator syntetycznych danych opadowych jest traktowany przy tym jako narzędzie do sporządzania długoterminowych, nawet wieloletnich szeregów zapisów natężeń deszczów, lub też danych krótkoterminowych obejmujących tylko pojedyncze zdarzenia opadowe. Dane długoterminowe obejmują zarówno okresy bez opadu, jak i z opadem, a ich podstawowym polem wykorzystania jest długoterminowa symulacja działania kanalizacji deszczowych lub ogólnospławnych wraz z uwzględnieniem czasowej sekwencji napełniania i opróżniania elementów retencyjnych albo też zagadnienie symulacji funkcjonowania systemów rozsączania wód deszczowych do gruntu, gdzie istotnym jest oprócz znajomości dynamiki samych opadów także rozpoznanie częstości występowania i długości trwania okresów bezdeszczowych. Dane krótkoterminowe to w istocie hietogramy poszczególnych zdarzeń opadowych, które mogą być stosowane np. w miejsce opadów modelowych w zadaniach takich jak weryfikacja częstości nadpiętrzania, obliczenia sprawdzające istniejących systemów itp. Punktem wyjścia do generowania długoterminowych danych jest znajomość szeregów czasowych dobowych sum opadów zarejestrowanych dla danej lokalizacji. Dobowe sumy opadów są zwykle znacznie łatwiej dostępne, gdyż ich pomiar jest prowadzony nie tylko w sieci stacji meteorologicznych, ale także w znacznie gęstszej sieci posterunków meteorologicznych, z wykorzystaniem prostych deszczomierzy Hellmana. Do początku lat 80. zeszłego stulecia dane dobowe wszystkich stacji i posterunków meteorologicznych były ponadto publikowane przez IMGW w serii Roczników opadowych. Aktualniejsze dane mogą być zakupione od IMGW, który nie ogranicza dostępu do nich jak w przypadku np. zapisów pluwiograficznych, traktowanych jako zbiór danych pierwotnych. Opracowywany generator ma zatem służyć z punktu widzenia danych długoterminowych przeprowadzeniu klasycznego skalowania w dół (ang. downscaling), a więc rozdzielenia (ang. disaggregation) wysokości warstwy opadu ze skali dobowej do skali sięgającej 5 minut. W przypadku danych krótkoterminowych punktem wyjścia do generowania syntetycznych hietogramów jest znajomość całkowitej wysokości warstwy opadu i jego czasu trwania. Przyjęcie czasu trwania deszczu i częstości jego występowania pozwala na obliczenie jego całkowitej wysokości warstwy na podstawie stosowanych od lat formuł IDF i DDF dla obszaru Polski.

Realizacja podstawowego celu pracy jest poprzedzona próbą pogłębienia wiedzy o fizyce lokalnych procesów opadowych. Wiedza ta jest niezbędna jako punkt wyjścia do budowy generatora, który mógłby generować syntetyczne szeregi opadowe naśladujące opady naturalne. Tak generowane syntetyczne szeregi opadowe byłyby niezależnymi realizacjami lokalnego procesu opadowego, a więc wiarygodną podstawą do probabilistycznej oceny funkcjonowania systemów odprowadzania i zagospodarowywania wód deszczowych.

Na wstępie pracy stawiana jest teza, że struktura czasowa lokalnych szeregów opadowych z Wrocławia w obrębie skal czasowych od 5 minut do co najmniej 1 doby może być efektywnie opisywana przy wykorzystaniu narzędzi geometrii fraktalnej i multifraktalnej. Wykazanie cech fraktalnych i multifraktalnych szeregów czasowych lokalnych opadów w warunkach Polski, na przykładzie stacji Wrocław, jest zatem pierwszoplanowym celem pracy. Osiągnięcie tego celu i udowodnienie postawionej tezy otwiera dopiero drogę do: prób budowy modeli generatorów opartych na kaskadach różnego typu, estymacji ich parametrów i oceny jakości syntetycznie generowanych danych opadowych, a więc rozpoznania ich potencjalnej przydatności w praktyce modelowania hydrodynamicznego sieci kanalizacji deszczowych i ogólnospławnych.

Zakres pracy obejmował:

- Wstępne przygotowanie danych opadowych, w tym konwersję zapisów na paskach pluwiograficznych do formatu cyfrowego i opracowanie szeregów 5-minutowych depozycji opadów.
- Weryfikację niezmienności skalowej (ang. scale-invariance) i multifraktalnego charakteru opadów deszczu na bazie uprzednio opracowanych szeregów czasowych. Weryfikację przeprowadzono przy wykorzystaniu całego wachlarzu technik, takich jak: zliczanie pudełek (ang. box-counting), funkcyjne zliczanie pudełek (ang. functional box-counting), analizy spektralne (ang. spectral analysis), metody dystrybucji prawdopodobieństwa/wielokrotnego skalowania (ang. probability distribution/multiple scaling method), metody momentu śladu (ang. trace moment method), metody podwójnego momentu śladu (ang. double trace moment method).
- Opracowanie modelu kanonicznego (ang. canonical model) do rozdzielenia opadów, ze skali 1280 minut (a więc *quasi* opadu dobowego) do skali sięgającej 5 minut. W tym estymacja parametrów kaskady z wykorzystaniem funkcji MKP (ang. Mandelbrot-Kahane-Peyiere) i z uwzględnieniem efektu wymuszania wielkoskalowego (ang. Large Scale Forcing).
- Opracowanie modelu mikrokanonicznego (ang. microcanonical model) do rozdzielenia opadów, ze skali 1280 minut (a więc *quasi* opadu dobowego) do skali sięgającej 5 minut. W tym estymacja parametrów kaskady z uwzględnieniem ich skalowania oraz studia nad ewolucją rozkładów prawdopodobieństwa tych parametrów w różnych skalach czasowych.
- Generowanie próbek syntetycznych szeregów opadowych z obydwu typów modeli kaskadowych do ich uprzednio wyestymowanych parametrów i ocenę ich jakości na drodze porównania charakterystyk statystycznych szeregów syntetycznych z odpowiadającymi im charakterystykami wyznaczonymi dla obserwowanych szeregów opadowych.

Do realizacji całego zakresu pracy opracowane zostało 5 odrębnych bibliotek oprogramowania specjalistycznego, składających się z programów napisanych w języku programowania Pascal. Poszczególne biblioteki służyły odpowiednio: przygotowaniu danych opadowych do dalszych prac analitycznych, weryfikacji niezmienności skalowej i multifraktalnego charakteru opadów, estymacji parametrów modeli (kanonicznego i mikrokanonicznego), implementacji modeli oraz ocenie jakości generowanych syntetycznych szeregów opadowych.

## 3. MATERIAŁ BADAWCZY

### 3.1. Zapisy pluwiograficzne

Materiałem badawczym użytym w pracy były zapisy pluwiograficzne pochodzące z Obserwatorium Agro- i Hydrometeorologii Akademii Rolniczej we Wrocławiu (obecnie Uniwersytetu Przyrodniczego we Wrocławiu). Stacja meteorologiczna Wrocław-Swojec jest zlokalizowana na północno-wschodnim skraju miasta Wrocławia, przy ul. Bartniczej, na wysokości 122,88 m n.p.m. Jej współrzędne geograficzne to długość geograficzna 17°07' E, szerokość geograficzna 51°07' N. Istotnym parametrem charakterystyki stacji jest niezmiennosc jej bezpośredniego otoczenia. Pomimo poszerzania się granic administracyjnych miasta Wrocławia i rozbudowy przedmieścia miasta otoczenie stacji praktycznie od momentu jej utworzenia pozostaje niezmiennie. Są to pola uprawne i niska zabudowa należąca do pobliskiego zakładu doświadczalnego Uniwersytetu Przyrodniczego. Pozwala to traktować pomiary prowadzone na stacji za materiał jednorodny i niezakłócony przez czynniki zewnętrzne.

Zapisy pluwiograficzne użyte w pracy pochodziły z ciągłych pomiarów ombrometrycznych, prowadzonych przy wykorzystaniu klasycznego pluwiografu pływakowego [Licznar i in. 2005a, 2005b]. Pomiary te były generalnie prowadzone dla okresów o dodatniej temperaturze powietrza, czyli od miesięcy wiosennych (kwiecień lub maj) do miesięcy jesiennych (październik lub listopad). Rejestrowane były zatem jedynie opady deszczów, rejestracja opadów śniegu nie była możliwa z uwagi na wrażliwość pluwiografu na niskie temperatury (problemy z zamrażaniem wody w wewnętrznym zbiorniku i syfonie przelewowym). W trakcie pomiarów poprawność funkcjonowania pluwiografu była okresowo weryfikowana przez porównanie zapisów z niego pochodzących z sumami dobowymi, rejestrowanymi niezależnie z użyciem klasycznego deszczomierza Hellmana.

W pracy wykorzystano cały dostępny materiał z wielolecia 1962–2004, którego ogólna charakterystyka jest zawarta w tabeli 3.1. Niestety, nie dysponowano zapisami z lat: 1976, 1983, 1985, 1988, 1993. Najprawdopodobniej dane te uległy zagubieniu przy ich wypożyczeniu innym użytkownikom zasobu obserwacyjnego. Pomimo olbrzymiego wysiłku związanego z corocznym prowadzeniem pomiarów pluwiograficznych przez cały zespół obserwatorów, w tym ponad 40-letnim okresie i związanych z tym kosztów, część zasobu została bezpowrotnie utracona, gdyż paski nie były powielane, choćby z uwagi na brak możliwości technicznych w tym zakresie. Były one wypo-

życzone w oryginale innym pracownikom naukowym, co doprowadziło do rozproszenia całego zasobu i utraty jego części. Ostatecznie w pracy przeanalizowano zapisy pluwiograficzne z 38 lat, w obrębie których okres rejestracji wahał się od zaledwie 81 dni w roku 1972 do 216 dni w roku 2002. W przypadku wspomnianego 1972 r. doszło zapewne do zaginięcia pasków z rejestracjami z okresu po 20 lipca. W ostatniej kolumnie tabeli 3.1 podane są całkowite wysokości opadów zarejestrowanych w poszczególnych latach na analizowanych paskach pluwiograficznych.

Tabela 3.1

Table 3.1

Ogólna charakterystyka analizowanych zapisów pluwiograficznych  
General characteristic of analyzed pluviograph records

Lp.	Rok Year	Początek rejestracji Record start	Koniec rejestracji Record end	Długość rejestracji (dni) Record length (days)	Zarejestrowana wysokość opadu (mm) Recorded rainfall depth (mm)
1	2004	26-04-04	15-11-04	203	245
2	2003	18-04-03	23-10-03	188	263
3	2002	01-04-02	03-11-02	216	344
4	2001	24-04-01	11-11-01	201	433
5	2000	06-04-00	01-11-00	209	290
6	1999	04-05-99	19-10-99	168	315
7	1998	06-04-98	31-10-98	208	386
8	1997	09-05-97	21-10-97	165	407
9	1996	02-05-96	22-11-96	204	354
10	1995	19-04-95	23-10-95	187	372
11	1994	09-04-94	08-10-94	182	292
12	1992	06-04-92	11-10-92	188	161
13	1991	03-04-91	23-10-91	203	275
14	1990	06-05-90	23-10-90	170	240
15	1989	24-04-89	10-11-89	200	262
16	1987	10-04-87	29-10-87	202	325
17	1986	04-04-86	31-10-86	210	493
18	1984	26-05-84	22-10-84	149	298
19	1982	10-05-82	14-10-82	157	201
20	1981	07-05-81	04-11-81	181	401
21	1980	04-04-80	20-10-80	199	375
22	1979	01-04-79	24-10-79	206	249
23	1978	01-04-78	27-10-78	209	422
24	1977	09-04-77	17-10-77	191	431
25	1975	20-04-75	31-10-75	194	393
26	1974	01-06-74	05-11-74	157	254
27	1973	05-05-73	08-10-73	156	216
28	1972	30-04-72	20-07-72	81	132
29	1971	04-04-71	05-10-71	184	298
30	1970	01-05-70	10-10-70	153	246
31	1969	03-05-69	31-10-69	181	194
32	1968	02-05-68	26-10-68	177	229
33	1967	10-05-67	03-11-67	177	200
34	1966	06-07-66	01-11-66	118	162
35	1965	06-04-65	21-10-65	198	325
36	1964	13-04-64	08-11-64	209	310
37	1963	29-04-63	15-11-63	200	365
38	1962	11-07-62	30-10-62	111	178

## 3.2. Wstępne opracowanie danych pluwiograficznych

Wspomniane już problemy z przypadkami zaginięcia pasków pluwiograficznych, wynikające z braku kopii oryginalnych zapisów, brak możliwości dostępu do danych przez wielu użytkowników jednocześnie, jak również widoczny proces ich starzenia się i oczywiste problemy ze zmuszonym odczytywaniem interesujących charakterystyk zarejestrowanych deszczów skłoniły autora do poszukiwania metod konwersji zapisów do formatu cyfrowego. Pierwsze próby wypracowania takiej metodyki były podjęte przez autora jeszcze w roku 2001 [Licznar 2001]. Jej pierwotnym polem użycia było obliczanie indeksów erozyjności dla wybranych opadów, tzw. deszczów erozyjnych, czyli opadów charakteryzujących się znaczną wysokością przekraczającą 12,7 mm lub przynajmniej wysokim natężeniem przekraczającym 6,35 mm na 15 minut. Zastosowanie metodyki konwersji danych pluwiograficznych do formatu cyfrowego pozwoliło ostatecznie na znaczne uproszczenie i skrócenie procesu wyznaczania wskaźnika erozyjności deszczów dla stacji Wrocław-Swojec [Licznar 2003]. W latach późniejszych zaproponowana metodyka była doskonalona i dostosowywana do wymagań przetwarzania danych pluwiograficznych na potrzeby projektowania i eksploatacji miejskich systemów odwodnienia [Licznar 2005]. Efektem jej zastosowania do konwersji wszystkich deszczów z wielolecia 1975–2002 była najbardziej aktualna analiza natężeń deszczów miarodajnych dla miasta Wrocławia [Licznar i Łomotowski 2005a, 2005b]. W ramach przygotowania materiału badawczego do niniejszej pracy proces konwersji został przeprowadzony także dla pozostałych lat z wielolecia 1962–2004.

Potrzeba konwersji papierowych pluwiogramów do formatu cyfrowego jest dostrzegana w wielu państwach świata. Przykładowo Eicher i Krejci [1996] postulowali potrzebę konwersji zapisów z ogólnokrajowej sieci obserwacyjnej w Szwajcarii (łącznie ze 164 stacjami) dla okresu 30 lat w celu budowy modelowego systemu danych niezbędnych hydrologii miejskiej. Zwykle konwersja ta jest wykonywana przy wykorzystaniu specjalnych digitizerów. W jej trakcie operator dokonuje wskazania punktów leżących na śladzie piórka rejestrującego, przy czym może on wskazywać punkty: co pewien określony interwał czasu (ang. fixed time-resolution) lub też stosować technikę określaną mianem punktów załomu (ang. break-point), wskazując jedynie widoczne załamania na wykresie pluwiogramu, oddzielające nieregularnej długości okresy deszczu o stałym natężeniu, a więc o stałym nachyleniu krzywej rejestracji. Stosowanie digitizerów, jak się szacuje, zapewnia osiągnięcie precyzji do 1 minuty pod względem odczytu czasu i do 0,1 mm pod względem odczytu wysokości deszczu. Uważa się, że technika punktów załomu jest adekwatniejsza i elastyczniejsza do opisu procesu opadu w stosunku do techniki określonych, stałych interwałów czasu. Jednak jak słusznie zauważył Barring [1992], technika punktów załomów doskonale sprawdza się w przypadku rejestracji opadów o nagle, skokowo zmieniających się natężeniach chwilowych, np. opadów monsunowych. Autor ten wskazywał jednocześnie na problemy związane z digitalizacją rejestracji, w których krzywa zapisu zmienia swój przebieg w sposób wygładzony. W takim przypadku zalecał on stosowanie techniki digitalizacji łączącej cechy obydwu technik, którą nazwał metodą wydłużonej reprezentacji (ang. extended representation). W metodzie tej operator digitizera zaznacza nie tylko punkty załamania na wykresie, ale

wstawia też dodatkowe punkty na odcinkach gładkich zmian kierunku krzywej zapisu, w celu lepszego opisu jej przebiegu.

W metodyce konwersji zapisów pluwiograficznych opracowanej przez autora, której dokładny opis można znaleźć w pracach: Licznar [2005], Licznar in. [2005], najbardziej istotnym elementem jest proces automatycznego rozpoznawania przebiegu krzywej rejestracji na obrazie rastrowym w środowisku graficznym MicroStation Descartes. Automatyczna realizacja tego procesu przebiega w istocie zgodnie z techniką wydłużonej reprezentacji zalecaną przez Barringa [1992], niemniej, co należy podkreślić, nie jest w jakikolwiek sposób obciążona przez subiektywną ocenę zmian kierunku przebiegu krzywej rejestracji przez operatora digitizera. Ponadto użycie samego digitizera nie jest potrzebne, a osiągnięta precyzja odczytów zarówno czasu, jak i wysokości warstwy deszczu jest lepsza.

Po przeprowadzeniu procesu konwersji danych pluwiograficznych przystąpiono do przygotowania na ich podstawie bazowych szeregów czasowych zarejestrowanych wysokości warstw deszczów. Na wstępie tego procesu przyjęto, że rozdzielczość czasowa tych szeregów będzie wynosić 5 minut. Zastosowana metodyka konwersji zapisów pluwiograficznych z uwagi na swoją precyzję odczytu czasu (mniejszą od 1 minuty) dawała teoretycznie podstawę do wygenerowania szeregów o znacznie większej rozdzielczości, np. 1 minuty. Niemniej, mając na uwadze ograniczenia w funkcjonowaniu samego pluwiografu, wynikające choćby z bezwładności pływaka zatopionego w zbiorniku, do którego spada woda spływająca z otworu wlotowego, czy też przerw w rejestracji z uwagi na działanie syfonu opróżniającego zbiornik, szeregi o rozdzielczości poniżej 5 minut uznano za mało wiarygodne. Przy tym, interwał 5 minut odpowiada połowie podstawowej działki taśmy pluwiogramu i jak dotąd w krajowych analizach deszczów miarodajnych był najkrótszym analizowanym czasem trwania deszczów [patrz np. Błaszczyk i in. 1974, Bogdanowicz i Stachý 1998]. Także z punktu widzenia użyteczności danych opadowych do modelowania hydrodynamicznego interwał 5 minut odpowiada wymogom aktualnie dostępnemu dla inżyniera oprogramowania specjalistycznego.

Bazowe szeregi czasowe zarejestrowanych wysokości opadów dla czasu 5 minut były podstawą do generowania szeregów o dłuższych interwałach, np. 10, 20, 40 minut itp., na drodze agregacji następujących po sobie przedziałów bazowych. Na koniec warto podkreślić unikalny charakter opracowanej w ten sposób bazy danych. W Polsce standardowe opracowywanie pluwiogramów ograniczało się zwykle do wyznaczania sum opadów i łącznego czasu trwania opadów w sztywno założonych przedziałach godzinowych. W ten sposób powstała na przykład unikatowo długa baza (z okresu 1886–2002) godzinowych sum opadów z Obserwatorium Astronomicznego w Krakowie, uporządkowana i wykorzystywana przez Twardosza [2005]. Niemniej, zgodnie z wiedzą autora, na terenie kraju brak jest podobnych baz danych opadowych dla krótszych czasów trwania opadu, dostosowanych do różnorodnych potrzeb hydrologii miejskiej. Jedynym wyjątkiem znanym autorowi jest ostatnio opracowana baza danych dla Katowic z wielolecia 1962–2006. Baza ta sięga swoją rozdzielczością także do 5 minut, które to przez jej autorów jest uznawane za techniczną granicę odczytów paska pluwiograficznego [Hołda i Wojtylak 2008]. Celem powstania tej bazy była przeprowadzona przez IMGW bezpośrednia ocena natężeń deszczów miarodajnych na terenie miasta na zlecenie Urzędu Miejskiego w Katowicach, a więc analiza analogiczna do przeprowadzonej poprzednio przez Licznara i Łomotowskiego [2005a i 2005b] dla warunków wrocławskich.



## 4. FRAKTALE I MULTIFRAKTALE

### 4.1. Definicja fraktala

Termin fraktal pochodzi od łacińskiego słowa *fractus*, które oznacza złamany, cząstkowy czy też nieregularny. Termin ten został wprowadzony do matematyki i upowszechniony przez francuskiego matematyka i informatyka polskiego pochodzenia Benoit Mandelbrota, jeszcze w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku. Wprowadzenie fraktali, a w zasadzie budowa nowego działu geometrii fraktalnej w matematyce, było koniecznym rozszerzeniem klasycznej geometrii w celu opisu, klasyfikacji i analizy podzbiorów przestrzeni metrycznej, które są geometrycznie „skomplikowane”. Podzbiórami takimi mogą być np. zbiory punktów, które w przestrzeni mają formę inną od struktur takich jak gładkie linie czy też płaszczyzny. Rezultatem „skomplikowanej” struktury i organizacji fraktala jest to, że nie można bezpośrednio określić, gdzie leży każdy jego punkt. Jednakże, co jest bardzo istotne, zbiór ten może być zdefiniowany przez pewną rekursywną „zależność” pomiędzy „strukturami” obserwowanymi w zbiorze na różnych poziomach rozdzielczości. Wynika stąd potoczna definicja fraktala, zgodnie z którą jest on obiektem samo-podobnym, tzn. takim obiektem, którego części składowe są podobne do całości, albo „nieskończenie subtelnym”, to znaczy ukazującym subtelne detale nawet przy wielokrotnym powiększeniu.

Chociaż prace Mandelbrota [1975, 1977, 1982] zaliczane są do ścisłego kanonu geometrii fraktalnej, to nie był on jedynym jej twórcą, ani odkryty przez niego zbiór Mandelbrota nie był pierwszym przykładem fraktala. Zbiór Julii, ściśle związany ze zbiorem Mandelbrota, był badany jeszcze w latach 20. zeszłego stulecia. Pionierskie badania nad fraktalami były powiązane z rozwojem geometrycznej teorii miary, mającej swoje początki w pracach Constantina Caratheodory'ego i Felixa Hausdorffa. Istotny wkład w rozwój geometrycznej teorii miary wniósł także Abram Samoilovitch Besicovitch, który jednocześnie skonstruował wiele konkretnych fraktali o paradoksalnych własnościach. Innymi ważnymi badaczami, którzy zajmowali się fraktalami o szczególnych własnościach, byli: Georg Cantor, Giuseppe Peano, Wacław Sierpiński, Paul Lévy, czy też Donald Knuth.

Sformułowany przez twórców geometrycznej teorii miary – wymiar Hausdorffa-Besicovitcha stał się podstawą pierwotnej definicji fraktala przez Mandelbrota: „Fraktal z definicji jest zbiorem, dla którego wymiar Hausdorffa-Besicovitcha ściśle przekracza

wymiar topologiczny.” Kilka lat później na przełomie lat 1986/1987 Mandelbrot zaproponował zastąpienie powyższego stwierdzenia nową, zdecydowanie prostszą w swoim wyrazie definicją: „Fraktal jest kształtem zbudowanym z części podobnych do całości w pewien sposób.” Olbrzymi potencjał tkwiący w tej własności został wykorzystany praktycznie po raz pierwszy przez Mandelbrota w grafice komputerowej, gdzie techniki fraktalne od tego czasu należą do kanonu generacji i analizy obrazów.

Co ciekawe, pomimo powszechnego i różnorodnego użycia fraktali i grafiki fraktalnej w grafice komputerowej i w różnych dziedzinach nauki brak jest po dzień dzisiejszy ścisłej definicji pojęcia fraktala. Być może najbardziej ścisłą jest podawana przez Falconera [1990], według którego zbiór można nazwać fraktalem, jeśli ma poniższe właściwości:

- 1) drobną strukturę; szczególnie, który pozostaje obecny w dowolnie małych skalach;
- 2) jest zbyt nieregularny, aby być opisywanym zarówno lokalnie, jak i globalnie w zakresie tradycyjnej geometrii;
- 3) ma pewną formę samo-podobieństwa (jest zbudowany z części, które przypominają całość w pewien sposób);
- 4) wymiar fraktalny zbioru jest większy niż wymiar topologiczny (wymiar topologiczny zbioru jest zawsze liczbą całkowitą, wyjaśnienie różnic pomiędzy obydwoimi wymiarami można znaleźć w następnym podrozdziale);
- 5) jest zdefiniowany w bardzo prosty sposób (np. rekursywnie).

## 4.2. Wymiar i kowymiar fraktalny

Pojęcie wymiaru fraktalnego, zawarte w przytoczonej powyżej definicji fraktala, zostało wprowadzone w celu „ilościowej” charakterystyki obiektów i zbiorów fraktalnych, które wymykały się standardowym narzędziom matematycznego warsztatu opisowego, opartego na różniczkowości i ciągłości funkcji analitycznych. Właściwie pojęcie wymiaru fraktalnego pojawia się na granicy skal, co za tym idzie, punktem wyjścia do jego zdefiniowania jest pomiar prowadzony w skali  $\delta$ . W każdej ze skal  $\delta$  zakładamy, że pomiar czy też charakteryzacja zbioru  $A$  jest prowadzona w sposób taki, iż ignorujemy nieregularności zauważalne w mniejszych skalach (skalach o rozmiarze mniejszym od  $\delta$ ). Zgadząmy się przy tym z faktem, że dochodząc do najmniejszych skal, do najdrobniejszych rozdzielczości dostępnych dla nas z uwagi na ograniczenia techniczne pomiaru, proces nie musi być w rzeczywistości homogeniczny.

To z pozoru skomplikowane postępowanie staje się łatwo zrozumiałe na bazie przykładu podanego przez Federa [1988], dotyczącego pomiaru długości linii brzegowej Norwegii na mapie z użyciem cyrkla. Okazuje się, że długość wybrzeża jest uzależniona od skali pomiaru, czyli długości rozchylenia ramion cyrkla używanego w tym celu. Z uwagi na skomplikowany i nieregularny charakter fiordowego wybrzeża, które jest fraktalem, wraz z minimalizacją rozchylenia ramion cyrkla całkowita długość linii brzegowej z pozoru paradoksalnie się wydłuża. Co istotne, pojawia się przy tym zjawisko skalowania, uwidaczniające się jako wyraźna zależność pomiędzy otrzymaną z pomiaru długością  $L_w(\delta_w)$  a zmniejszającą się i dążącą do 0 skalą pomiaru  $\delta_w$ :

$$L_w(\delta_w) = a_w \cdot \delta_w^{1-D_w}, \quad (4.1)$$

gdzie  $a_w$  – stała, służąca jedynie dopasowaniu formuły do wyników pomiarów,  $D_w$  – wymiar fraktalny wybrzeża.

W przypadku nieskomplikowanej krzywej opisującej przebieg wybrzeża, przynajmniej dla odpowiednio małych wartości  $\delta_w$ , wykładnik  $D_w$  powinien wynosić 1 i wówczas pomiar długości byłby niezależny od rozdzielczości i równy  $a_w$ , gdzie  $a_w$  oznaczałoby dobrze zdefiniowaną długość wybrzeża Norwegii. Jak jednak podaje Feder [1988], dla wybrzeża Norwegii  $D_w \approx 1,52$ , a więc nie jest to nawet liczba całkowita (porównaj punkt 4 definicji fraktala).

Proste rozważania przeprowadzone na przykładzie pomiaru długości wybrzeża Norwegii można uogólnić dla dowolnego zbioru punktów  $A$ , rozpatrywanego w przestrzeni  $D$ -wymiarowej. Niech  $N_\lambda$  będzie liczbą nie nachodzących na siebie hipersześcianów o długości boku  $\lambda^{-1}$  koniecznych dla pokrycia ograniczonej części  $D$ -wymiarowej przestrzeni zawierającej interesujący nas zbiór  $A$  (wymienione tutaj hipersześciany są sześcianami, kwadratami lub odcinkami, jeśli prowadzimy rozważania odpowiednio w przestrzeniach 3-, 2- lub 1-wymiarowej). Wówczas liczba  $N_\lambda$  spełnia zależność wykładniczą:

$$N_\lambda \approx \lambda^D, \quad (4.2)$$

oznaczającą, że  $N_\lambda$  jest proporcjonalne do  $\lambda^D$  w granicy  $\lambda \rightarrow \infty$ . We wzorze (4.2)  $\lambda$  jest współczynnikiem skali, definiowanym jako iloraz największej skali  $L$  analizy do skali homogeniczności  $\delta$ :

$$\lambda = \frac{L}{\delta}. \quad (4.3)$$

W przypadku gdy zbiór  $A$  jest fraktalem, zależność 4.2 nie zmienia swojej formy:

$$N_{\lambda,A} \approx \lambda^{D_A}, \quad (4.4)$$

gdzie nadal  $N_{\lambda,A}$  oznacza liczbę nie nachodzących na siebie hipersześcianów o długości boku  $\lambda^{-1}$ , koniecznych dla pokrycia zbioru  $A$ , ale, co jest bardzo istotne,  $D_A$  jest liczbą niecałkowitą i jest wymiarem fraktalnym.

Wymiar fraktalny nie daje pełnej informacji o „strukturze” zbioru, nie może on być na przykład podstawą do odtworzenia zbioru. Jest to jedynie specyficzna forma charakteryzująca zbiór. Ogólnie wymiar fraktalny zbioru mówi o tym, z jaką gęstością zbiór zajmuje metryczną przestrzeń, w której się znajduje, czyli inaczej mówiąc, na ile zbiór „zapełnia” przestrzeń.

Wymiar fraktalny  $D_A$  jest także podstawą definicji kowymiaru fraktalnego  $c$ :

$$c = D - D_A, \quad (4.5)$$

gdzie  $D$  jest wymiarem przestrzeni zawierającej (jako zanurzenie) zbiór  $A$ , który odpowiada najmniejszemu możliwemu euklidesowemu wymiarowi ( $d = 1,2,3$ ) pola geometrycznego, w które wbudowany jest zbiór  $A$ .

Kowymiar jest natomiast wykorzystywany w „probabilistycznej” definicji fraktalnego obiektu. W definicji tej określa się prawdopodobieństwo tego, że hipersześcian o długości boku  $\lambda^{-1}$  przetnie się ze zbiorem  $A$ :

$$Pr = \frac{N_{\lambda,A}}{N_\lambda}, \quad (4.6)$$

Po uwzględnieniu zależności (4.2) i (4.4) można, po przekształceniu prawej strony równania (4.6), wykazać, że prawdopodobieństwo to skaluje się zgodnie z indeksem kowymiaru:

$$\frac{N_{\lambda,A}}{N_\lambda} \approx \frac{\lambda^{D_A}}{\lambda^D} = \lambda^{D_A-D} = \lambda^{-c}, \quad (4.7)$$

Formuła (4.7) może zatem być wykorzystywana do powiązania kowymiaru z częścią przestrzeni obserwacji, zajętej przez zbiór fraktalny o wymiarze  $D_A$ .

### 4.3. Multifraktale i procesy multifraktalne

Wprowadzenie geometrii fraktalnej, jako alternatywy wobec warsztatu klasycznej geometrii, okazało się jedynie częściowo zaspokajając potrzeby przedstawicieli pewnych dziedzin nauki. W pierwszym rzędzie zaliczali się do nich fizycy atmosfery, którzy szybko podchwycili ideę szerokiego stosowania fraktali, choćby do opisu chmur, czy też pól opadowych. Hentschel i Procaccia [1984] oszacowali wymiar fraktalny kształtu (obwodu) chmur jako zawierający się w zakresie:  $1,37 < D_A < 1,41$ . Wyniki te okazały się całkowicie zgodne z wynikami niezależnych badań prowadzonych przez Lovejoya [1982] nad turbulentnym polem atmosferycznym, zmierzającymi do ustalenia zależności pomiędzy powierzchnią a obwodem chmur i pól opadowych. Wyznaczona przez Lovejoya [1982] wartość kowymiaru dla chmur oraz pól opadowych wynosiła  $0,65 \pm 0,05$ , co po przekształceniu zależności (4.5) i przyjęciu  $D = 2$ , jak dla rozważań zbioru zawartego na płaszczyźnie, daje  $D_A = 1,35 \pm 0,05$ . Później, na podstawie tych doświadczeń Lovejoy i Mandelbrot [1985] zaproponowali samo-podobny model fraktalny pól deszczowych. Podstawą tego modelu jest przyjęcie, że pole deszczowe jest superpozycją „impulsów”. Każdy z „impulsów” zajmuje obszar  $A_s$  i charakteryzowany jest przyrostem natężenia opadu  $\Delta R_s = \pm A_s^{H_s}$ . Natężenie deszczu jest dla „impulsów” dobierane losowo, tak aby losowo podnosić lub obniżać całkowite natężenie opadu na całym polu. Natomiast obszary impulsów przyjmuje się, że mogą być charakteryzowane hiperbolicznym rozkładem prawdopodobieństwa:  $Pr(A_s > a_s) \approx a_s^{-1}$ . Model ten został udoskonolony przez Lovejoya i Schertzera [1985] przez wprowadzenie poprawki, że „impulsy” nie mają jednorodnego, wyrównanego położenia, lecz są rozmieszczone na fraktalnym zbiorze punktów w przestrzeni. Cytowani powyżej autorzy, uwzględniając warstwowość atmosfery oraz rotacje wynikające z siły Coriolisa, stwierdzili, że chmury nie powinny być traktowane jako samopodobne (ang. self-similar), lecz jedynie samoafiniczne (samopowinowate) (ang. self-affine). Tym samym dla pełnej charakteryzacji

chmur potrzebne jest całe spektrum wymiarów fraktalnych, a więc chmury są multifraktalami [Lovejoy i Schertzer 1985].

Pierwotne koncepcje multifraktali pojawiały się już w pracach Mandelbrota [1972, 1974] i wynikały z rozważań dotyczących turbulencji. Były one następnie rozszerzone w cytowanej już książce „The fractal geometry of nature” [Mandelbrot 1982]. Od tego czasu idea stosowania miary multifraktalnej otworzyła całkiem nową dziedzinę aplikacji geometrii fraktalnej dla systemów naturalnych [Feder 1988]. Multifraktale pozwoliły między innymi, w zakresie charakterystyki systemów naturalnych, na opis wspomnianego powyżej samo-powinowactwa w miejsce znacznie prostszego samo-podobieństwa. Według Mandelbrota [1986] funkcja samo-powinowactwa  $\theta(x,y,z)$  dokonuje transformacji w sposób samo-podobny w kierunkach poziomych  $x$  i  $y$ , wtedy gdy  $(x,y) \rightarrow (rx,ry)$  (jest to w zasadzie proste przeskalowanie) i w odmienny sposób dokonuje transformacji w kierunkach  $z$  i  $\theta$ , używając odpowiednio  $r^G$  i  $r^{GH}$ . Przy czym  $G$  jest dodatkovym wykładnikiem Lipschitz-Höldera. Taka definicja samo-powinowactwa, jak i cały warsztat miary fraktalnej doskonale wpasowywały się w potrzeby fizyki atmosfery, meteorologii i modelowania pól opadowych. Dlatego pierwszym zestawem danych obserwacyjnych, dla którego oszacowano kiedykolwiek wymiary multifraktalne, było pole odbiciowości radarowej deszczu [Lovejoy i Schertzer 1985].

Jak już wspomniano, pierwotnie teoria procesów multifraktalnych została rozwinięta w odpowiedzi na potrzeby badań nad turbulencją. W ramach tych badań zauważono, że multifraktalny obraz turbulencji może być modelowany w efektywny sposób z użyciem fenomenologicznych modeli kaskadowych. Do wniosków takich skłaniały rozważania nad turbulencją hydrodynamiczną, opisywaną przez nieliniowe dynamiczne równania Naviera-Stokesa, jak też zestawem nieliniowych cząstkowych równań różniczkowych, modelujących procesy fizyczne zachodzące w atmosferze. W obydwu przypadkach zidentyfikowano pewne charakterystyczne mechanizmy, prowadzące do występowania fenomenologii kaskadowej, takie jak: symetria skalowania, występowanie przepływów strumieni energii z dużej do małej skali oraz lokalność w przestrzeni Fouriera (oznaczająca, że dynamiczności są najbardziej efektywne w obrębie sąsiadujących ze sobą skal, a co za tym idzie, bezpośredni przepływ energii z wielko- do małoskalowych struktur jest nieefektywny) [Tessier i in. 1993].

W wyniku tego zarówno w obrębie turbulencji hydrodynamicznej, jak i badań nad atmosferą, w tym szczególnie nad opadami, istotne znaczenie zyskały modele kaskadowe, które szczegółowiej są dyskutowane w dalszej części pracy. Powiązanie rozwoju teorii multifraktali z badaniami nad turbulencją zaowocowało również powstaniem turbulentnego formalizmu multifraktali (ang. turbulence formalism). Formalizm ten został przyjęty jako podstawowy w niniejszej pracy, chociaż należy pamiętać, iż równolegle rozwijany był formalizm obcego atraktora (ang. strange attractor formalism), przez autorów takich jak wspomniani już Hentschel i Procaccia [1983] czy też Grassberger [1983], Halsey i in. [1986]. Celem rozwoju tego alternatywnego formalizmu była potrzeba wprowadzenia multifraktalnych miar prawdopodobieństwa w małowymiarowych przestrzeniach fazowych (ang. probability measures in low-dimensional phase-spaces).

## 4.4. Podstawowe cechy multifraktali

Do podstawowych cech multifraktali należy w pierwszym rzędzie zaliczyć wieloskalowość (ang. multiscaling). Wyjaśnienie tej cechy jest łatwe na przykładzie wielu procesów geofizycznych, które cechuje wysoka nieciągłość (ang. intermittency). Nieciągłość oznacza bowiem, że proces nie „wypełnia” całkowicie objętości dostępnej przestrzeni. Zwykle też wraz z intensyfikacją procesu jego dystrybucja rozkłada się na coraz rzadszych zbiorach fraktalnych. Każdy z tych zbiorów jest charakteryzowany przez inny wymiar fraktalny i w zasadzie cały proces nie może być opisywany statystycznie przez pojedynczy wykładnik skalowy, jak w przypadku prostego skalowania i zbiorów monofraktalnych (ang. monofractal sets), lecz przez, w zasadzie nieskończoną, hierarchię wykładników skalowych. Ta hierarchia może być opisywana przez funkcję wykładnika skalowania (ang. scaling exponent function). W części badawczej pracy prezentowane są badania intensywności procesu opadowego z Wrocławia, ukierunkowane na wykrycie występowania wspomnianej hierarchii wykładników skalowania, weryfikujące tezę o multifraktalnym podłożu procesu i charakteryzujące go z punktu widzenia statystycznego.

W przypadku multifraktali wieloskalowość jest połączona z niezmienniczością skalową (ang. scale-invariance). Badanie niezmienniczości skalowej jest przeprowadzane z wykorzystaniem metod spektralnych (widmowych), nazywanych też często metodami transformaty Fouriera. Każdy proces fizyczny może być opisywany w domenie czasowej, co wydaje się być najbardziej naturalnym w przypadku analizy szeregów czasowych oraz w domenie częstotliwości, gdzie proces jest charakteryzowany przez określenie jego amplitudy jako funkcji częstotliwości. Obydwie reprezentacje są połączone ze sobą równaniami transformaty Fouriera. Transformata pozwala na przeanalizowanie widma mocy (ang. power spectrum), czyli dystrybucji wariancji w obrębie zakresu zmienności częstotliwości czy też długości fali. Pozwala to na wykrywanie, często pierwotnie trudno zauważalnych, w domenie czasowej cech szeregów czasowych, takich jak długa pamięć, cykliczność czy też obecność zmienności dla wysokiej częstotliwości. Występowanie członów periodycznych, odnajduje swoje odbicie w wysokich i ostrych pikach w widmie dla częstotliwości im odpowiadających. W przeciwieństwie do tego gładki przebieg widma, zgodny z zależnością potęgową, jest uznawany za rezultat skalowania [Gao i in. 2007, Lovejoy i Schertzer 1995, Schertzer i Lovejoy 1985, 1987]:

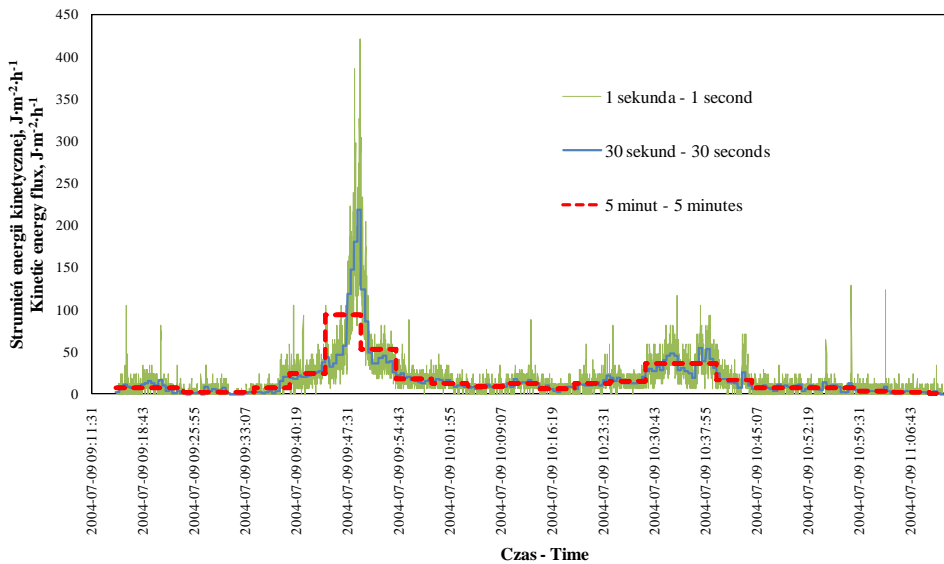
$$E(\omega) = \omega^{-\beta}, \quad (4.8)$$

gdzie:  $E(\omega)$  jest energią,  $\omega$  – liczbą falową, a  $\beta$  – wykładnikiem spektralnym.

W przypadku silnie nieciągłych procesów w celu poprawnej analizy widma ich energii koniecznym jest dysponowanie odpowiednio licznymi próbkami danych. Skalowanie widma energii według zależności (4.8) jest prawie całkowicie wystarczającym dla scharakteryzowania własności skalowych monofraktali, niemniej nie jest wystarczającym w przypadku multifraktali.

Trzecią istotną cechą procesów multifraktalnych jest ich zmienność (ang. variability). W badaniach wielu procesów geofizycznych wyraźnie przejawia się ich nieliniowa

zmienność, która to ma miejsce w bardzo szerokim zakresie skal. W przypadku dotarcia w badaniach do bardzo małych skal mówi się o tzw. wewnętrznych skalach (ang. inner scales) procesów. W skalach tych procesy są już homogeniczne i ich zmienność nie ma miejsca, przebiegają one ze stałą intensywnością. W praktyce pomiarowej dotarcie do tak małych skal jest zwykle niemożliwe z uwagi na ograniczenia używanej aparatury. Możliwe do przeprowadzenia przez nas obserwacje są w zasadzie średnimi gęstości procesów względem rozdzielczości przyrządów pomiarowych. Dobrą ilustracją tego jest rysunek 4.1, na którym widać wyraźnie, że zakres wartości obserwowanego strumienia energii kinetycznego deszczu jest uzależniony od poziomu rozdzielczości czasowej rejestracji ciągłego procesu i drastycznie spada wraz z wydłużeniem okresu rejestracji.



Rys. 4.1. Zależność pomiędzy zakresem obserwowanych wartości strumienia energii kinetycznej kropli deszczu a poziomem czasowej rozdzielczości pomiaru. Na podstawie pomiarów własnych opadu deszczu z dnia 9 lipca 2004, przy wykorzystaniu prototypowego impaktometru piezoelektronicznego [Licznar i Łomotowski 2007, Licznar i in. 2008b]

Fig. 4.1. Relation between a range of observed kinetic energy of raindrops flux values and a level of temporal sampling resolution. Based on own rainfall measurements on the 9<sup>th</sup> July 2004, made with the use of a prototypical piezoelectronic impactometer [Licznar and Łomotowski 2007, Licznar et al. 2008b]

Głębsza analiza rysunku 4.1 skłania do dwóch dodatkowych wniosków. Po pierwsze, przy obserwacjach wielu procesów, np. deszczów, zwykle tracimy całkowicie skalę najmniejszego detalu. Według Schertzera i Lovejoya [1989, 1991] jest to istotna strata, gdyż detale występujące w tych niewielkich skalach mogą być bardzo istotne dla staty-

stycznych osobliwości (ang. singular statistics) w mało-skalowej granicy realizacji procesów. Drugi wniosek jest powiązany z utartą praktyką opisywania procesów geofizycznych za pomocą funkcji o charakterze ciągłym. Niemym przyjęciem tego warsztatu badawczego jest twierdzenie, że oszacowane ciągłe funkcyjne reprezentacje procesów są zarazem granicznymi reprezentacjami dyskretnych obserwacji procesów, gdy skala ich prowadzenia czy też rozdzielczość zmierza ku zero. Założenie to otwiera drogę do uproszczonego opisu procesu, według narzuconej odgórnie i w całkowicie nieuzasadniony sposób, matematycznej regularności i gładkości, pozostającej w całkowitej sprzeczności z silną zmiennością procesu występującą w skalach mniejszych od skali obserwacji. Jak słusznie zauważyli Lovejoy i Schertzer [1991] oraz Schertzer i Lovejoy [1989], badania nad procesami wykazującymi silnie nieliniową zmienność powinny być prowadzone przy użyciu warsztatu opartego na miarach matematycznych, a nie na analizie funkcyjnej, gdyż używanie funkcji w miejsce miar jest całkowicie sztuczną idealizacją matematyczną.

Dla zbiorów fraktalnych czy też multifraktalnych nie jest możliwym wykorzystanie regularnych miar Lebesgue'a, dostosowanych do opisu konwencjonalnych elementów graficznych, takich jak linia, powierzchnia, objętość. Ich całkowity wymiar  $d$  musi być zastąpiony przez  $D$ -wymiarową miarę Hausdorffa [Schertzer i Lovejoy 1987, 1989].  $D$ -wymiarowa miara Hausdorffa zbioru  $A$  w przestrzeni  $X$  jest zapisywana jako:  $\int d^D x$ . Natomiast wymiar Hausdorffa  $D_A$  zbioru  $A$  jest zdefiniowany na zasadzie reguły rozbieżności (ang. divergance rule) zapisanej zależnościami:

$$\int_A d^D x = \infty \quad \text{dla} \quad D < D_A, \quad (4.9)$$

$$\int_A d^D x = 0 \quad \text{dla} \quad D > D_A. \quad (4.10)$$

Wymiar Hausdorffa zbioru jest zatem definiowany przez przejście od nieskończoności do zera przy  $D = D_A$ . Istotną cechą miar Hausdorffa, wykorzystywaną w warsztacie opisu multifraktalnego, jest prosta zależność skalująca zachodząca przy dowolnym rozszerzeniu skali  $A$  do skali  $\lambda A$ :

$$\int_{\lambda A} d^D x = \lambda^D \int_A d^D x. \quad (4.11)$$

Wspomniane już wcześniej osobliwości towarzyszące mało-skalowej granicy opisu zachowania nieliniowo zmiennych procesów geofizycznych stały się główną osią rozwoju formalizmu multifraktalnego, których początek rodzi się z poniższych rozważań.

Niech proces multifraktalny w otaczającej przestrzeni  $X$  o wymiarze  $D$  będzie obserwowany przez pojedynczą zmienną jego natężenia czy też gęstości  $\varepsilon^*$ . W rzeczywistości proces ten jest mierzony na skończonym poziomie rozdzielczości  $\lambda$  i co za tym idzie, jest stały dla hipersześciaków o boku długości  $\lambda^{-1}$ , umiejscowionych centrycznie w pewnych lokalizacjach  $x$  przestrzeni  $X$ . Jeśli przestrzeń ma wymiar  $D$ , to możliwym jest zdefiniowanie  $\lambda^D$  takich nieprzecinających się hipersześciaków. Z tej racji przy poziomie rozdzielczości  $\lambda$  występują natężenia  $\varepsilon_{\lambda,i}^*(x_i)$  dla  $i = 1, \dots, \lambda^D$ . Odpowiadające im



bezwymiarowe natężenia  $\varepsilon_{\lambda,i}$  mogą być uzyskane przez podzielenie  $\varepsilon_{\lambda,i}^*$  przez średnie natężenie zbioru procesu  $\langle \varepsilon_{\lambda} \rangle$ :

$$\varepsilon_{\lambda,i} = \frac{\varepsilon_{\lambda,i}^*}{\langle \varepsilon_{\lambda} \rangle}, \quad \text{dla } i = 1, \dots, \lambda^D \quad (4.12)$$

gdzie średnie natężenie zbioru to:

$$\langle \varepsilon_{\lambda} \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{\lambda^D} (\varepsilon_{\lambda,i}^*)}{\lambda^D}. \quad (4.13)$$

We wzorach powyższych dla uproszczenia zapisu pomija się parametr rozmieszczenia centrycznego poszczególnych hipersześcianów  $x_i$ . Analizując zależności 4.12 i 4.13, łatwo zauważyć, że wartość średnia bezwymiarowych natężeń będzie wynosić 1 niezależnie od skali:

$$\langle \varepsilon_{\lambda} \rangle = 1 \quad (4.14)$$

We wzorze 4.14, także dla uproszczenia dalszych rozważań, pomijany jest indeks  $i$ .

Istotą opisu multifraktalnego procesu jest przyjęcie założenia, że natężenie procesu  $\varepsilon_{\lambda}$  przejawia w przybliżeniu proporcjonalność zapisywaną zależnością [Frisch i Parisi 1985, Halsey i in. 1986, Schertzer i Lovejoy 1987]:

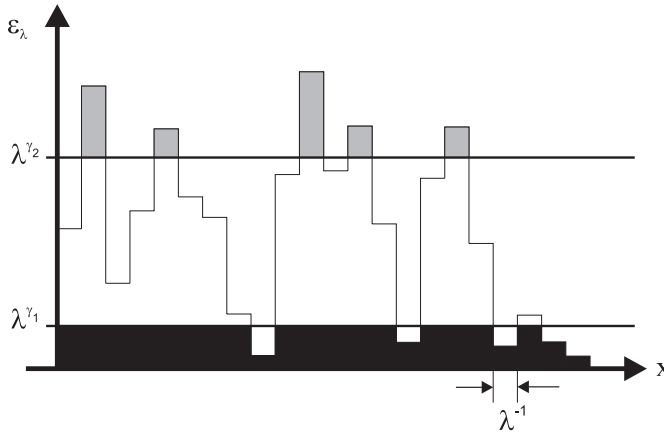
$$\varepsilon_{\lambda} \approx \lambda^{\gamma}, \quad (4.15)$$

gdzie:  $\lambda$  – współczynnik skali (iloraz największej analizowanej skali i skali homogeniczności),  $\gamma$  – parametr charakteryzujący natężenie  $\varepsilon_{\lambda}$ , który to jest niezależny od poziomu rozdzielczości  $\lambda$ . Parametr  $\gamma$  charakteryzuje natężenie procesu  $\varepsilon_{\lambda}$  jedynie w sposób jakościowy, a nie ilościowy, gdyż w formule 4.15 znak  $\approx$  zawiera w sobie człony wolno zmieniające się z  $\lambda$  oraz stałe normalizacyjne. Wykładnik  $\gamma$  jest zwykle określany mianem osobliwości (ang. singularity) czy też rzędem osobliwości (ang. order of singularity) w odniesieniu do całego zakresu wartości  $\gamma$ . Osobliwości te odpowiadają całemu zakresowi poziomów natężenia procesu od bardzo niskich do bardzo wysokich (patrz rys. 4.2). Parametr  $\gamma$  może być zatem traktowany jako miara „siły” natężenia  $\varepsilon_{\lambda}$  obserwowanego w skali rozdzielczości  $\lambda$ , a jego niezależny od rozdzielczości charakter skłania do jego stosowania w badaniach procesów przebiegających na granicy całego szeregu skal. Źródłem terminu osobliwość w odniesieniu do wykładnika  $\gamma$  jest osobliwe zachowanie multifraktala w małoskalowej granicy przy  $\lambda \rightarrow \infty$ , wówczas dla wszystkich osobliwości  $\gamma > 0$ ,  $\varepsilon_{\lambda} \rightarrow \infty$ , gdy  $\lambda \rightarrow \infty$  [Schertzer i Lovejoy 1987, 1989]. W rezultacie osobliwego zachowania, gdy  $\lambda \rightarrow \infty$ , nie jest możliwym rozważanie granicy w sensie fizycznym, gdyż osobliwości zapobiegają zbieżności w jej zwykłym rozumieniu. Granica gęstości  $\varepsilon$  jest zatem definiowana jedynie w sposób niejawni, z użyciem regularniejszej granicy strumieni poprzez różne zbiory, gdy  $\lambda \rightarrow \infty$ . Strumienie są przy tym rozumiane jako całki po gęstości  $\varepsilon$ . Strumień  $\Pi_{\lambda}(A)$  przez zbiór  $A$  o wymiarze  $D$ , zdefiniowany w przestrzeni  $X$  na poziomie rozdzielczości  $\lambda$  jest całką jak poniżej:

$$\Pi(A) = \int_A \varepsilon_\lambda d^D x. \quad (4.16)$$

Zdefiniowane strumienie okazały się być bardzo przydatnymi w badaniach nad turbulencją, choćby w sygnalizowanej już fenomenologii kaskadowej turbulencji hydrodynamicznej. Interpretację graficzną strumienia energii gęstości dla uproszczonego przypadku jednowymiarowego ( $D = 1$ ) można odnaleźć na rysunku 4.2. Strumienie zdefiniowane zależnością 4.16 mają regularną granicę:

$$\Pi(A) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Pi(A) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_A \varepsilon_\lambda d^D x. \quad (4.17)$$



Rys. 4.2. Schematyczny diagram obrazujący multifrakalny strumień energii gęstości  $\varepsilon_\lambda$  dla najmniejszej rozdzielczości  $\lambda^{-1}$  i przedstawiający zbiory wartości przekraczających poziomy natężenia, odpowiadające dwóm różnym rzędom osobliwości  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  [wykres modyfikowany za Tessierem i in. 1993]

Fig. 4.2. Schematic diagram presenting multifractal flux of energy density  $\varepsilon_\lambda$  for smallest resolution  $\lambda^{-1}$  and showing sets of values exceeding intensity limits defined by two different orders of singularity  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  [diagram modified from Tessier et al. 1993].

## 4.5. Kaskadowe procesy multifrakalne

Zachowanie wielu procesów multifrakalnych jest analogiczne do kaskadowego zachowania typowego dla turbulencji. Kaskady w odniesieniu do turbulencji znajdują zastosowanie w modelowaniu jej nieciągłości i niezmienniczości skalowej. Fenomenologia modeli kaskadowych bazuje na obserwacji tendencji do coraz większej koncentracji „aktywności” turbulencji wraz ze zmniejszaniem się skali, czego wynikiem jest jej coraz bardziej niejednorodny obraz. W przypadku dynamicznych modeli kaskadowych ich „struktury” w sąsiednich skalach modułują się nawzajem w sposób multiplikatywny, stymulując rozbijanie „wirów” (ang. "eddies") z uwagi na nieliniowe oddziaływania

i wewnętrzną niestabilność [Lovejoy i Schertzer 1990a, Schertzer i Lovejoy 1987]. Charakterystyczny dla turbulencji termin „wiru” posiada szersze znaczenie w fenomenologii kaskad skalarnych. W tych modelach multiplikatywnych frakcja strumienia energii transferowana ze struktur wyższych do niższych, pochodnych struktur jest determinowana w sposób niezmienniczy skalowo, a kolejne stopnie kaskady definiują w sposób niezależny dystrybucję frakcji strumienia energii w mniejszych skalach, czyli na niższych stopniach kaskady [Over i Gupta 1994, 1996, Schertzer i Lovejoy 1987].

W praktyce stosowane są najczęściej dyskretne modele kaskadowe, a więc modele o dyskretnych skalach. W modelach takich wykorzystuje się stałe elementarne współczynniki skal  $\lambda_0$ , większe od 1 (najczęściej dla uproszczenia rozważań przyjmuje się  $\lambda_0 = 2$ ). W największej ze skal kaskady ( $\lambda = 1$ , dla największej długości  $L_0$ ) początkowa bezwymiarowa energia jest rozłożona równomiernie, a więc gęstość jej strumienia  $\varepsilon_1 = 1$ . W procesie rozwoju kaskady, a więc przy przechodzeniu do jej niższych poziomów początkowa duża „struktura” ulega rozpadowi na coraz mniejsze podstruktury o charakterystycznej długości  $\delta^*$ . W procesie tym procent energii przekazywanej ze struktury wyższej (rodzica) do struktury niższej (potomka) jest determinowany losowo. Po  $n$ -krotnym powtórzeniu tego mechanizmu, czyli po  $n$  stopniach kaskady ( $n$  iteracjach procesu multiplikatywnego) w przestrzeni  $D$ -wymiarowej pojawia się  $\lambda^D$  „podstruktur” o charakterystycznej długości  $\delta_n^* = L_0/\lambda_0^n$  i całkowitym stosunku skal  $\lambda^* = L_0/\delta_n^*$ . Każdej z „podstruktur” przyporządkowana jest odpowiadająca jej gęstość strumienia energii  $\varepsilon_{n,i}$  dla  $i = 1, \dots, \lambda^D$  (oznaczana zwykle w celu uproszczenia z pominięciem indeksu  $i$  jako  $\varepsilon_n$ ). Te wartości gęstości energii czy też ogólnie określone wartości pola dla sąsiednich stopni w kaskadzie ( $\varepsilon_n$  oraz  $\varepsilon_{n-1}$ ) spełniają następującą zależność:

$$\varepsilon_n = \mu\varepsilon \cdot \varepsilon_{n-1}, \quad (4.18)$$

gdzie:  $\mu\varepsilon$  – zmienna losowa.

W toku badań nad turbulencją opracowano całą serię jej modeli kaskadowych: model „pulsu w pulsie” (ang. "pulse in pulse model") [Novikov i Stewart 1964], model lognormalny (ang. lognormal model) [Kołmogorow 1962, Obukhov 1962, Yaglom 1966], model ważonej koagulacji (ang. weighted-curling model) [Mandelbrot 1974], model  $\beta$  (ang.  $\beta$  model) [Frisch i in. 1978], model  $\alpha$  (ang.  $\alpha$  model) [Schertzer i Lovejoy 1983], losowy model  $\beta$  (ang. random  $\beta$  model) [Benzi i in. 1984], model  $p$  (ang.  $p$  model) [Meneveau i Sreenivasan 1987], modele ciągłych i uniwersalnych kaskad (ang. continuous and universal cascade models) [Schertzer i Lovejoy 1987]. Charakterystyka wszystkich wymienionych modeli wykracza poza ramy niniejszej pracy. Poniżej przedstawiono pokrótce jedynie dwa spośród nich: model  $\beta$  i model  $\alpha$ , gdyż ich sformułowanie było istotnym elementem rozwoju całokształtu teorii multifraktali. Natomiast w końcowej części niniejszego rozdziału dyskutowane są modele ciągłych i uniwersalnych kaskad, które mogą być uznawane za modele najbardziej zaawansowane i najlepiej odpowiadające rzeczywistym procesom fizycznym.

Model  $\beta$  jest najprostszym modelem kaskadowym, nazywanym także często mianem modelu monofraktalnego (ang. monofractal model). Model ten pozwala na uwzględnienie jedynie nieciągłości turbulencji na drodze przyjęcia alternatywy, że „wiry” są aktywne (żywe) bądź też nieaktywne (martwe) [Novikov i Stewart 1964,

Mandelbrot 1974, Frisch i in. 1978]. Wybór pomiędzy jedynie dwoma stanami: aktywnym i nieaktywnym powoduje że w modelu  $\beta$  przy przejściu z poziomu wyższego do niższego zmienna losowa z równania 4.10 w danej rozdzielczości  $\lambda$  może przybrać jedynie dwie wartości:  $\lambda^c$  lub 0, z prawdopodobieństwami (dopełniczymi) wynoszącymi odpowiednio:

$$Pr(\mu\varepsilon = \lambda^c) = \lambda^{-c}, \quad (\text{aktywny}) \quad (4.19)$$

$$Pr(\mu\varepsilon = 0) = 1 - \lambda^{-c}. \quad (\text{nieaktywny}) \quad (4.20)$$

We wzorach 4.19 i 4.20 parametr  $c$  jest kowymiarem aktywnych, żywych „wirów”, a więc podstawy procesu (ang. support of the process). Po uwzględnieniu wymiaru  $D$  otaczającej przestrzeni daje on podstawę wyznaczenia wymiaru fraktalnego według zależności 4.5. Zmienna losowa w równaniu 4.19  $\mu\varepsilon = \lambda^c$ , w przypadku wartości większej od 1, odpowiadająca wzmocnieniu (ang. boost), winna spełniać warunek zachowania średniej zbioru, tak więc na wszystkich poziomach kaskady powinien być spełniony warunek:  $\langle \mu\varepsilon \rangle = 1$ .

W modelu  $\beta$  wraz ze zstępowaniem ku niższym stopniom kaskady udział aktywnych „wirów” spada zgodnie z wartością współczynnika  $\lambda_0^{-c}$ , a co za tym idzie, do zapewnienia zachowania średniej gęstość strumienia energii tych aktywnych „wirów” musi wzrastać o  $\lambda_0^c$  razy. Jeśli rozpatrzy się w ten sposób  $n$  stopni kaskady to zauważalna tutaj dychotomia będzie wzmocniona przez całkowity współczynnik skalowy  $\lambda_0^n$ . Prowadzi to w efekcie do dywergencji (rozbieżności) gęstości (ze stopniem osobliwości  $c$ ) lub też jej „wyciszenia” do zera.

Model  $\alpha$  powstał jako odpowiedź na niedoskonałości modelu  $\beta$ , wynikające z przyjętej mało realistycznej dychotomii żywych i martwych „wirów” [Schertzer i Lovejoy 1983]. Model  $\alpha$  nazywanym jest też często mianem jawnego modelu multifraktalnego (ang. explicit multifractal model). Także ten model kaskady jest budowany na podstawie losowego wprowadzenia dwu-stanowych mnożników. Niemniej, w swojej filozofii zastępuje on podział „wirów” aktywnych i nieaktywnych na podział pomiędzy wiry bardziej i mniej aktywne. „Wiry” aktywniejsze są rozumiane jako te, które owocują silniejszymi „pod-wirami”, a mniej aktywne odpowiednio słabszymi „pod-wirami”. W modelu zakłada się ponadto, że podziału „wirów” można dokonać zgodnie z procesem Bernoulliego o rozkładzie dwumianowym:

$$Pr(\mu\varepsilon = \lambda^{\gamma^+}) = \lambda^{-c}, \quad (\text{bardziej aktywny}) \quad (4.21)$$

$$Pr(\mu\varepsilon = \lambda^{\gamma^-}) = 1 - \lambda^{-c}. \quad (\text{mniej nieaktywny}) \quad (4.22)$$

W równaniach powyższych parametr  $c$  jest kowymiarem podstawy procesu. Jest on powiązany z wykładnikami  $\gamma^+$  i  $\gamma^-$  tak, aby zachowana była średnia zbioru, a więc  $\langle \mu\varepsilon \rangle = 1$ . Co za tym idzie, spełniona musi być równość jak poniżej:

$$\lambda^{\gamma^+} \lambda^{-c} + \lambda^{\gamma^-} (1 - \lambda^{-c}) = 1. \quad (4.23)$$

Z równania 4.23 wynika, że  $\lambda^{\gamma^+} > 1$  (co za tym idzie,  $\gamma^+ > 0$ ) odpowiada wzmocnieniu (ang. boost), a  $\lambda^{\gamma^-} < 1$  ( $\gamma^- < 0$ ) odpowiada wytłumieniu (ang. decrease). Graficzne porównanie funkcjonowania kaskad modeli  $\beta$  i  $\alpha$  dla pojedynczego stopnia i dla wybranej struktury można odnaleźć na rysunku 4.3. Warto przy tym zauważyć, że model  $\beta$  może być traktowany jako szczególny przypadek ogólniejszego modelu  $\alpha$ , dla  $\gamma^- = -\infty$  i  $\gamma^+ = c$ .

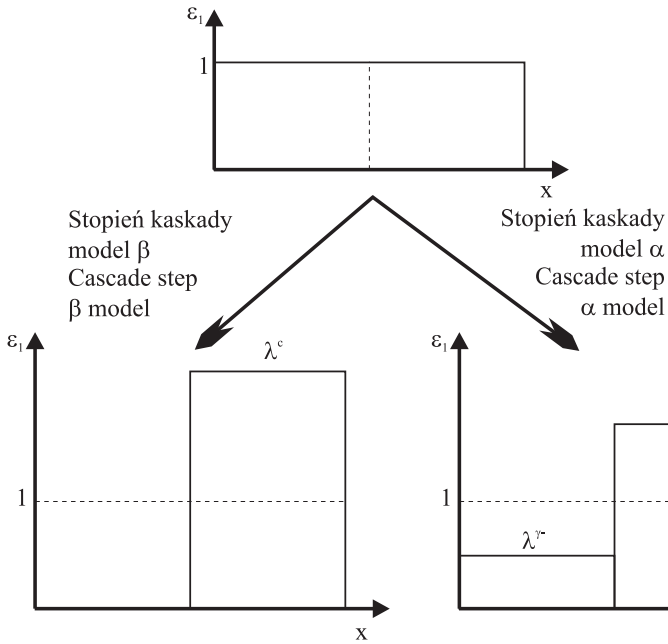
W modelu kaskadowym  $\beta$  wartości parametru  $\gamma$  są ograniczone, niemniej efektem końcowym sukcesji parametrów  $\gamma^+$  i  $\gamma^-$  w modelu jest cała hierarchia poziomów natężenia, a co za tym idzie, hierarchia wymiarów charakteryzujących powstałe zbiory na różnych poziomach natężenia. Po  $n$  stopniach kaskady prawdopodobieństwo przewyższenia czy też osiągnięcia gęstości wynikowego procesu lub pola na poziomie gęstości  $\varepsilon_n \geq (\lambda_0^n)^\gamma$  można oszacować jako [Lovejoy i Schertzer 1990b, Schertzer i Lovejoy 1987]:

$$Pr\left(\varepsilon_n \geq (\lambda_0^n)^\gamma\right) \approx f(\gamma) (\lambda_0^n)^{-c_n(\gamma)}, \quad (4.24)$$

gdzie:  $f(\gamma)$  – współczynnik mnożnikowy, zależny od liczby zdarzeń (ang. occurrences) zawierających osobliwość  $\gamma$ . W zależności 4.24 z każdym rzędem osobliwości powiązany jest konkretny kowymiar. Ponadto występujący w zależności znak „ $\approx$ ” zawiera w sobie czynniki wolno zmieniające się z  $\lambda$ . Jeśli całkowity współczynnik skali (od największej zewnętrznej skali do najmniejszej skali)  $\lambda_0^n$ , zostanie zastąpiony przez  $\lambda$ , wówczas to dla  $\lambda \rightarrow \infty$  (dla  $n \gg 1$ ) można przyjąć, że kowymiar jest funkcją niezależną od  $n$ , czyli  $c_n(\gamma) \approx c(\gamma)$ . Uwzględniając to w formule 4.24, uzyskuje się fundamentalną zależność multifraktalną dla kaskad [Schertzer i Lovejoy 1987]:

$$Pr\left(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma\right) \approx f(\gamma) \lambda^{-c(\gamma)}, \quad \frac{dc}{d\gamma} > 0, \quad (4.25)$$

gdzie:  $\varepsilon_\lambda$  – natężenie (gęstość) będące rezultatem rozwoju kaskady w dół do rozdzielczości  $\lambda$ , a  $c(\gamma)$  – funkcja charakteryzująca dystrybucję osobliwości  $\gamma$  intensywności procesu (funkcja kowymiaru).



Rys. 4.3. Ilustracja graficzna przykładowego podziału wyrównanego (jednostkowego) strumienia gęstości dla wybranej struktury i dla pojedynczego stopnia kaskady w przypadku modeli  $\beta$  i  $\alpha$  (rozpad na aktywny i nieaktywny wir w przypadku modelu  $\beta$  oraz rozpad na bardziej aktywny i mniej aktywny wir w przypadku modelu  $\alpha$ )

Fig. 4.3. Graphical illustration of uniform (unit) flux density division examples for selected structure and for single cascade step in case of  $\beta$  and  $\alpha$  models (disintegration into alive and dead sub-eddies in case of  $\beta$  model and disintegration into a strong sub-eddy and a weak sub-eddy in case of  $\alpha$  model)

## 4.6. Klasyfikacja multifraktali

Powszechne stosowanie różnego typu kaskad celem generacji multifraktali doprowadziło do wprowadzenia klasyfikacji samych multifraktali. Jedną z najważniejszych klasyfikacji multifraktałnych, kaskadowych procesów, związanych z ich naturą, jest podział na procesy odsłonięte (ang. bare) i ubrane (ang. dressed) [Lovejoy i Schertzer 1990b, Schertzer i Lovejoy 1987, 1989, 1992]. O odsłoniętych wielkościach i właściwościach kaskad mówimy, jeśli są one wielkościami czy też właściwościami teoretycznymi, powstałymi po określonej liczbie stopni kaskady. Tak jak to przedstawia rysunek 4.4 (lewa strona) odsłonięte wielkości i właściwości powstają w obrębie kaskad w procesie zstępowania od skal większych ku mniejszym, są one więc efektem procesu drobnoziarnistego (ang. fine-grained process). Przeciwnieństwem tego procesu jest proces gruboziarnisty (ang. coarse-grained process), patrz rysunek 4.4 (prawa strona). Jego efektem są ubrane wielkości i właściwości, które to nie są już wielkościami czy też

właściwościami teoretycznymi, lecz otrzymanymi eksperymentalnie na drodze uśredniania czasowego bądź też przestrzennego w określanych skalach rozdzielczości. Rozdzielczości te z uwagi na podnoszone już ograniczenia pomiarowe są zwykle większe od skali wewnętrznej (ang. inner scale), poniżej której proces jest rzeczywiście homogeniczny. Integracja małoskalowej zmienności procesu na kolejnych, wstępujących stopniach kaskady prowadzi do nieuniknionego „wygładzania” małoskalowych osobliwości procesu. Niemniej, wszystkie drobne detale procesu są zawarte w ocenie ubranych wielkości. Z tej racji bierze się nazwa procesów ubranych, których rejestracje są „ubrane” małoskalowymi aktywnościami. W przeciwieństwie do tego teoretyczne procesy są odsłonięte, gdyż są „ogółocone” z małoskalowej aktywności.

Analizując rysunek 4.4, łatwo zauważyć, że procesy ubrane są bardziej „żywiółowe.” Jest to efektem znacznego wpływu ukrytej małoskalowej zmienności procesu (a więc zmienności ukrytej pomiędzy skalą obserwacji a najbardziej wewnętrzną skalą procesu, poniżej której jest on już homogenicznym) na zmienność ubranego procesu. Przyjmuje się zatem, że dla danej skali ubrane natężenie procesu  $\varepsilon_d$  jest multiplikatywnym efektem wpływów wielko-skalowych, czyli odsłoniętego natężenia  $\varepsilon$  oraz małoskalowych, czyli ukrytego natężenia  $\varepsilon_h$ :

$$\varepsilon_d = \varepsilon \cdot \varepsilon_h. \quad (4.26)$$

W formule 4.26 udział ukrytego, mało-skalowego komponentu może być bardzo wysoki, zwłaszcza gdy  $D$ -wymiarowa integracja procesu nie wygładza wystarczająco rzadkich osobliwości wysokiego rzędu, związanych z jego wewnętrzną skalą. Dochodzi wówczas do dominacji wielkiej skali obserwacji przez małą skalę homogeniczności, a o ubranym procesie mówi się, że cechuje go bardziej „gwałtowana” (ang. violent) zmienność. Występująca wówczas duża zmienność ubranego procesu może prowadzić do dywergencji statystyk powyżej określonego krytycznego rzędu.

Dywergencja momentów oznacza, że  $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \rightarrow \infty$  dla wszystkich  $q > q_D$ , gdzie  $\varepsilon_\lambda$  jest zwykłym natężeniem procesu w skali rozdzielczości  $\lambda$ ,  $q$  – rzędem momentu statystycznego, a  $q_D$  – jest krytycznym rzędem dla dywergencji momentów statystycznych. Zachowanie to jest bezpośrednim następstwem opisywanej już wcześniej osobliwej granicy mało-skalowej kaskady. Ciekawym jest wytłumaczenie zjawiska dywergencji momentów dla wartości empirycznych. W przypadku momentów tych wartości, które są średnimi z wartości empirycznych, a więc zawsze wartościami skończonymi, ich dywergencja oznacza, że wartości empirycznych momentów wzrastają bez granicy wraz ze zwiększaniem liczebności zbioru obserwacji. Tak więc suma niezależnych kontrybucji jest determinowana przez największe kontrybucje, a rzadkie, największe co do wartości zdarzenia mają determinujący w tym udział. Implikuje to występowanie odstających obserwacji nawet w przypadku bardzo dużych zbiorów wyników pomiarów. Dywergencja momentów może być też kojarzona z ogólnie znanym zjawiskiem hiperbolicznego spadku dystrybucji prawdopodobieństwa dla ekstremalnych zdarzeń [Lovejoy i Schertzer 1985, Schertzer i Lovejoy 1985]. Bardzo istotny w wielu przypadkach „ogon” wykresu prawdopodobieństwa określa względną częstość ekstremalnego zachowania procesu [Mandelbrot 1982]:

$$Pr(\varepsilon_\lambda > s) = s^{-q_D}, \quad (4.27)$$

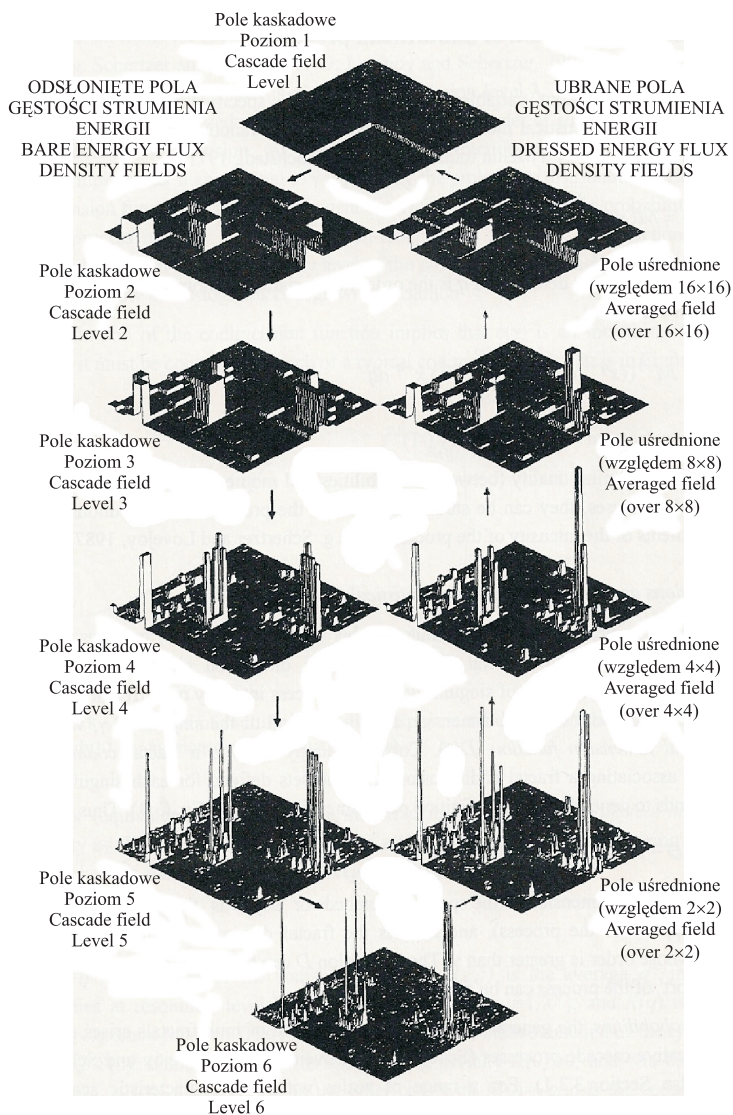
gdzie:  $s$  to zadowalająco wysoki poziom graniczny natężenia ( $s \gg 1$ ), a  $q_D$  jest krytycznym rzędem dywergencji momentów statystycznych [Tessier i in. 1996, Pandey i in. 1998].

Wracając do rozważań dotyczących odsłoniętych i ubranych procesów multifrakalnych, można stwierdzić, że o ile wszystkie odsłonięte momenty są wartościami skończonymi, to dla momentów ubranych odpowiednio wysokiego rzędu obserwowana jest ich dywergencja. Wówczas na dywergencję ma wpływ wymiar  $D$  przestrzeni, względem której proces jest integrowany, gdyż zjawisko to ma miejsce w przypadku natężeń o rzędzie osobliwości  $\gamma > D$  [Mandelbrot 1974, Schertzer i Lovejoy 1987].

Dywergencja momentów jest kluczowa dla podziału multifraktali na twarde (ang. hard) i miękkie (ang. soft). W przypadku twardych multifraktali ich wysokiego rzędu momenty statystyczne ulegają dywergencji, co może być wynikiem występowania rzadkich i gwałtownych osobliwości. Generalnie zatem ubrane wielkości wykazują bardzo silnie twarde zachowanie (analizując rys. 4.4, widać bardzo ostre i wyraźne piki na wykresach po prawej stronie). W przeciwieństwie do tego, dla miękkich multifraktali dywergencja wysokiego rzędu momentów statystycznych nie jest obserwowana.

Dyskutując klasyfikację procesów kaskadowych, należy pamiętać o zasadniczym podziale na kaskady mikrokanoniczne (ang. microcanonical) i kanoniczne (canonical). W przypadku kaskad mikrokanonicznych zapewnione jest dokładne zachowanie strumienia (energii czy też masy) dla każdej realizacji, podczas gdy dla kaskad kanonicznych zapewnione jest zachowanie tych wielkości w rozumieniu jedynie ich średnich wartości (zachowanie zbioru, ang. ensemble conservation). Różnice między powyższymi typami kaskad są szczegółowo omawiane w rozdziale 6 niniejszej pracy, gdzie testowana jest przydatność tych conceptualnie różniących się typów kaskad dla rozdzielania sum opadów dobowych na sumy dla krótszych przedziałów czasu, dochodzących włącznie do 5 minut. Procesy multifrakalne mogą być modelowane z użyciem obydwu typu kaskad, niemniej zwykle w wyniku wyzwalania kaskad mikrokanonicznych generowane są miękkie multifraktale, a w przypadku kaskad kanonicznych otrzymywane są twarde multifraktale [Schertzer i Lovejoy 1993]. Osobliwości spełniające wymogi mikrokanonicznej zasady zachowania ( $\gamma < D$ ) są określane mianem spokojnych (ang. calm). Osobliwości dzikie (ang. wild) ( $\gamma > D$ ) łamią te zasady zachowania, a ich występowanie w przypadku kaskad kanonicznych jest odpowiedzialne za dywergencję momentów statystycznych, a więc wspomniane powstawanie twardych multifraktali.





Rys. 4.4. Po lewej stronie ilustracja konstrukcji odsłoniętego multifraktalnego procesu kaskadowego (kaskadowy model  $\alpha$ ), poczynając od wyrównanej jednostkowej gęstości, po prawej stronie ilustracja ubranego multifraktalnego procesu kaskadowego, uzyskiwanego na drodze uśredniania w coraz większych skalach (rysunek modyfikowany za Lovejoyem i Schertzerem (1990b))

Fig. 4.4. On the left side illustration of bare multifractal cascade process (cascade  $\alpha$  model) starting from uniform (unit) flux density, on the right side illustration of dressed multifractal cascade process, obtained on the way of averaging on the raising scales (figure modified from Lovejoy and Schertzer (1990b))

## 4.7. Opis procesów multifrakalnych

Właściwymi narzędziami opisu zmiennych losowych są narzędzia statystyczne. Co za tym idzie, również w przypadku opisu losowych kaskad multifrakalnych sięga się po narzędzia statystyczne. Możliwym przy tym jest korzystanie zarówno z rozkładów prawdopodobieństwa, jak i z momentów statystycznych natężenia procesów. Prowadzi to do dualizmu w opisie już samych charakterystyk funkcji wykładnika skalowania i wprowadzenia pojęć: funkcji kowymiaru (ang. codimension function)  $c(\gamma)$  oraz funkcji wykładnika skalowania momentów (ang. moments scaling exponent function)  $K(q)$ .

Charakterystyka procesu wykazującego nieskończoną liczbę poziomów intensywności nie jest możliwa za pomocą pojedynczego wymiaru fraktalnego, lecz całej, nieskończonej hierarchii wymiarów fraktalnych. Każdy z tych wymiarów charakteryzuje zbiór z określonym rzędem osobliwości natężenia procesu, w różnych skalach. Wymusza to konieczność wprowadzenia pojęcia funkcji wymiaru fraktalnego (ang. fractal dimension function)  $D(\gamma)$ , a więc funkcyjnego powiązania wymiaru fraktalnego z osobliwością  $\gamma$ . Naturalnym następstwem tego jest potrzeba redefinicji zależności (4.5) kowymiaru fraktalnego:

$$c(\gamma) = D - D(\gamma) , \quad (4.28)$$

gdzie:  $c(\gamma)$  – funkcja kowymiaru,  $D(\gamma)$  – fraktalny wymiar „podstawy” osobliwości, których rząd jest większy od  $\gamma$ ,  $D$  – fraktalny wymiar przestrzeni, która zawiera lub „podtrzymuje” proces (wymiar geometryczny „podstawy” procesu). Co istotne, „podstawą” procesu może być fraktal i wówczas wymiar  $D$  ma wartość niecałkowitą.

Funkcja kowymiaru  $c(\gamma)$  jest podstawą charakterystyki multifraktali z punktu widzenia rozkładów prawdopodobieństwa. Charakterystyka ta bierze swój początek z opisywanych powyżej multiplikatywnych procesów kaskadowych. W procesach tych przyjmuje się, że w całym zakresie skal, bez charakterystycznej skali, zachowana jest, uproszczona względem wzoru 4.25 zależność [Lovejoy i Schertzer 1991, Schertzer i Lovejoy 1989]:

$$Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} , \quad (4.29)$$

gdzie:  $\varepsilon_\lambda$  – bezwymiarowe natężenie, które jest obserwowane na poziomie skali  $\lambda$  (a więc w zasadzie każde  $\varepsilon_{\lambda,i}$  dla  $i = 1, \dots, \lambda^D$ , obserwowane na hipersześcianach o długości boku  $\lambda^{-1}$ ), a  $\gamma$  – rząd osobliwości  $\varepsilon_\lambda$ . Użycie znaku  $\approx$  w zależności 4.29 mówi w istocie o proporcjonalności prawej i lewej strony wzoru, z dokładnością do stałych zmieniających się bardzo wolno (nieznacznie) z  $\lambda$  i nieznacznie zależnych od  $\gamma$ . W formule tej funkcja kowymiaru stanowi o statystycznym wykładniku dla każdego poziomu natężenia procesu, a więc dla każdego rzędu osobliwości  $\gamma$ , co wskazuje na zmiany w histogramach wartości natężeń opisywanego procesu, następujące wraz ze zmianami rozdzielczości tego procesu.

Drugim, alternatywnym sposobem opisu multifraktali jest stosowanie momentów statystycznych natężenia  $\varepsilon_\lambda$ . Tak jak w przypadku formuły 4.29, w całym zakresie skal,

bez charakterystycznej skali, zachowana jest zależność [Lovejoy i Schertzer 1990a, Schertzer i Lovejoy 1987]:

$$\langle \varepsilon_{\lambda}^q \rangle \approx \lambda^{K(q)}, \quad (4.30)$$

gdzie:  $\langle \varepsilon_{\lambda}^q \rangle$  – uśredniony moment rzędu  $q$  natężeń na poziomie rozdzielczości  $\lambda$  (tj. wszystkich  $\varepsilon_{\lambda,i}$  dla  $i = 1, \dots, \lambda^D$ ), a  $K(q)$  – funkcja wykładnika skalowania momentów. Funkcja ta może przybierać dwukrotnie wartość 0. Po raz pierwszy dla  $q = 0$ , jeśli multifraktal wypełnia przestrzeń w sposób prosty, jeśli natomiast  $K(q = 0) = -c$ , to wówczas  $c$  jest kowymiarem „podstawy” procesu (związanym z „zerami” procesu). Po raz drugi funkcja przyjmuje wartość zera dla  $q = 1$ , co wynika z zachowania stałości średniej natężenia procesu  $\langle \varepsilon_{\lambda} \rangle = 1$  i w świetle zależności 4.30 prowadzi do  $K(q = 1) = 0$ .

Zależności 4.29 i 4.30 są ze sobą wzajemnie powiązane. Ich lewe strony, a więc prawdopodobieństwo statystyczne  $Pr(\varepsilon_{\lambda} \geq \lambda)$  oraz moment statystyczny  $\langle \varepsilon_{\lambda}^q \rangle$  są powiązane ze sobą transformacją Mellina [Schertzer i Lovejoy 1992], podczas gdy prawe strony, a konkretnie ich wykładniki potęgowe:  $c(\gamma)$  i  $K(q)$  – transformacją Legendre’a [Frisch i Parisi 1985]:

$$K(q) = \max_{\gamma} (q\gamma - c(\gamma)). \quad (4.31)$$

Jednocześnie, zgodnie z transformacją Legendre’a zachodzi druga równość:

$$c(\gamma) = \max_q (\gamma q - K(q)). \quad (4.32)$$

Ogólnie transformacja Legendre’a  $f^*$  funkcji  $f$  jest zdefiniowana jako:

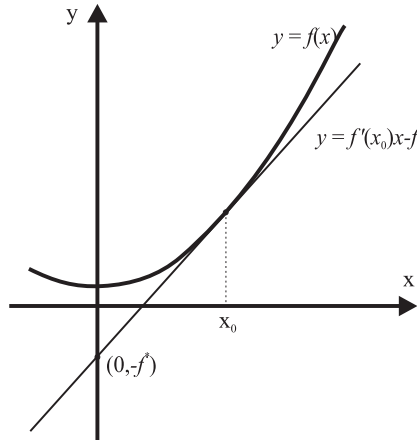
$$f^* = \max_x (p^* x - f(x)), \quad (4.33)$$

gdzie:  $p^*$  – argument nowej funkcji  $f^*(p^*)$ , równy:

$$p^* = \frac{df}{dx}. \quad (4.34)$$

Interpretacja graficzna transformacji Legendre’a jest przedstawiona na rysunku 4.5. Analizując ten rysunek, łatwo zauważyć, że transformacja jest dobrze zachowana, jeśli funkcja  $f$  jest funkcją wypukłą.

Funkcje  $c(\gamma)$  i  $K(q)$  poddawane transformacji według zależności 4.31 i 4.32 są z definicji funkcjami wypukłymi, a transformacja Legendre’a zachodzi, gdyż w granicy  $\lambda \rightarrow \infty$ , dla każdego momentu rzędu  $q$ , występuje odpowiadająca mu osobliwość  $\gamma_q$ , która to dominuje średnią. Osobliwość ta jest zarazem osobliwością, która maksymalizuje wartość wyrażenia:  $(q\gamma - c(\gamma))$  i jest dana przez rozwiązanie zależności:  $c'(\gamma_q) = q$ . Graficznie jest to przedstawione na rysunku 4.6, gdzie transformacja Legendre’a jest zaznaczona jako maksymalna odległość między prostą  $q\gamma$  a krzywą  $c(\gamma)$ . Analogicznie, rzędem momentu maksymalizującym wartość wyrażenia  $(\gamma q - K(q))$  jest  $q_{\gamma}$ , które może być wyznaczone z zależności  $K'(q_{\gamma}) = \gamma$ . Graficzna interpretacja tego jest przedstawiona na rysunku 4.7, gdzie odwrotna transformacja Legendre’a jest zaznaczona, jako odległość między prostą  $\gamma q$  a krzywą  $K(q)$ .



Rys. 4.5. Ilustracja graficzna transformacji Legendre'a funkcji  $f(x)$  [warto zauważyć, że dla dowolnego punktu na krzywej  $f(x)$  linia narysowana z nachyleniem  $f'(x_0)$ , równym nachyleniu stycznej w punkcie  $x_0$ , będzie miała przecięcie z osią  $y$  powyżej punktu  $(0, -f^*)$ , co za tym idzie,  $f^*$  spełnia wymogi maksimum względem wszystkich  $x$  według równania (4.33)]

Fig. 4.5. Graphical illustration of Legendre transformation of function  $f(x)$  [it is worth to notice that for every point of curve  $f(x)$ , line drawn with the slope of  $f'(x_0)$ , equal to slope steepness of tangent at the point  $x_0$ , would have intersection with  $y$  axis above point  $(0, -f^*)$ , and as a result of it  $f^*$  satisfies conditions of maximum for all  $x$  given by equation (4.33)]

Można zatem powiedzieć, że transformacja Legendre'a wiąże ze sobą punkty funkcji  $c(\gamma)$  z tangensami funkcji  $K(q)$  i na odwrót, a więc:

$$q = c'(\gamma), \quad (4.35)$$

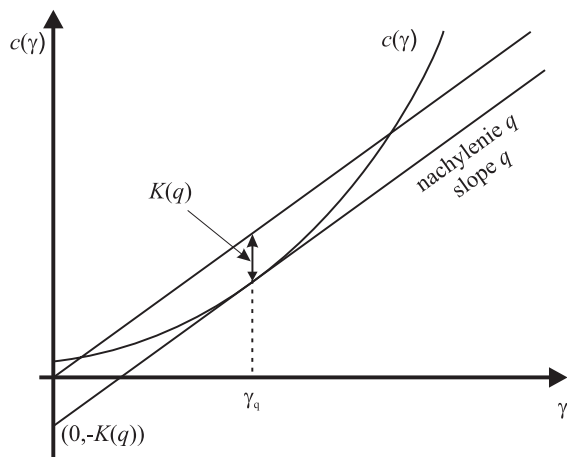
$$\gamma = K'(q). \quad (4.36)$$

W przypadku kaskad mikrokanonicznych  $\gamma < \gamma_{\max}$ , gdzie  $\gamma_{\max}$  jest ogólnym ograniczeniem wprowadzonym przez wymuszenie mikrokanoniczne. Osobliwości mogą być także ograniczone przez wartość  $\gamma_{\max}$  z uwagi na ograniczenia liczebności zbioru pomiarowego (co będzie wkrótce dyskutowane). W takich przypadkach transformacja Legendre'a funkcji  $c(\gamma)$  jest realizowana tylko dla ograniczonego zakresu  $\gamma$ . Efektem tego jest liniowy charakter funkcji skalowania momentów  $K(q)$  dla momentów o rzędzie  $q > q_{\max}$  (gdzie  $q_{\max} = c'(\gamma_{\max})$ , opisany zależnością:

$$K(q) = q\gamma_{\max} - c(\gamma_{\max}). \quad (4.37)$$

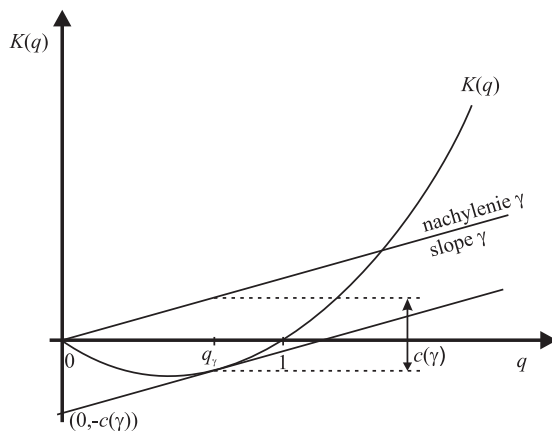
Graficzna ilustracja zachowania transformacji Legendre'a funkcji  $c(\gamma)$  opisanej równaniem 4.37 jest przedstawiona na rysunku 4.8. Występowanie liniowej asymptoty na wykresie  $K(q)$ , a więc nieciągłości nachylenia wykresu, nosi miano „multifraktalnego

przejścia fazowego” (ang. "multifractal phase transition"). Zagadnienie to będzie dyskutowane szczegółowo w dalszej części pracy.



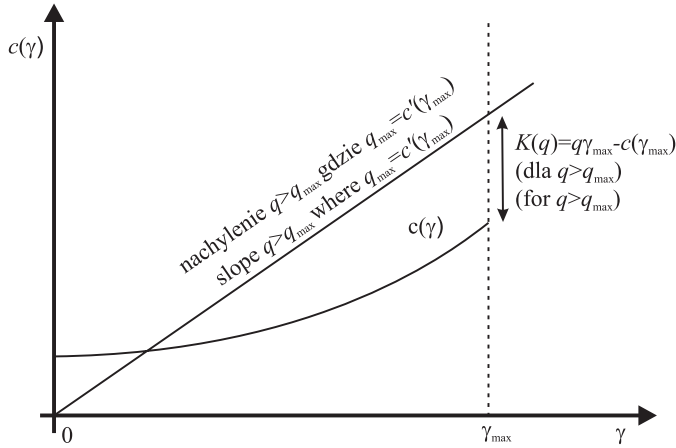
Rys. 4.6. Ilustracja graficzna transformacji Legendre'a funkcji  $c(\gamma)$  w celu otrzymania funkcji  $K(q)$  (porównaj rys. 4.5)

Fig. 4.6. Graphical illustration of Legendre transformation of function  $c(\gamma)$  for obtaining function  $K(q)$  (compare fig. 4.5)



Rys. 4.7. Ilustracja graficzna transformacji Legendre'a funkcji  $K(q)$  w celu otrzymania funkcji  $c(\gamma)$  (porównaj rysunek 4.5)

Fig. 4.7. Graphical illustration of Legendre transformation of function  $K(q)$  for obtaining function  $c(\gamma)$  (compare figure 4.5)



Rys. 4.8. Ilustracja graficzna transformacji Legendre'a ograniczonej odgórnie funkcji  $c(\gamma)$  w celu otrzymania funkcji  $K(q)$ , dla  $q > q_{\max}$  (rysunek modyfikowany za Schertzerem i Lovejoyem (1990b))

Fig. 4.8. Graphical illustration of Legendre transformation of bounded above function  $c(\gamma)$  for obtaining function  $K(q)$ , for  $q > q_{\max}$  (figure modified from Schertzer and Lovejoy (1990b))

#### 4.7.1. Ograniczenia statystycznego opisu procesów multifrakalnych

Charakterystyka statystyczna różnego typu procesów wymaga dysponowania odpowiednio liczebnymi zbiorami obserwacyjnymi. W przypadku procesów multifrakalnych zasada ta sprawdza się także w oczywisty sposób. W ich przypadku liczebność zbiorów obserwacyjnych może być powiązana z krytycznymi wartościami empirycznych funkcji skalowania  $c(\gamma_s)$  i  $K(q_s)$ , gdzie indeks dolny  $s$  oznacza, że wielkości te podlegają ograniczeniom wielkości zbioru pomiarowego (liczebności próby). Powyżej krytycznych wartości  $c(\gamma_s)$  i  $K(q_s)$  estymaty wartości statystycznych nie mogą być już uznawane za wiarygodne.

Funkcja kowymiaru  $c(\gamma)$  jest miarą części przestrzeni prawdopodobieństwa zajętej przez osobliwości rzędu równego lub większego od  $\gamma$ . Osobliwości najwyższego rzędu, najbardziej ekstremalne są najrzadszymi i występują generalnie jedynie w niektórych (bardzo licznych) zbiorach obserwacyjnych. Z tej racji funkcja kowymiaru, wyznaczana empirycznie, jest ograniczona odgórnie przez skończoną (ograniczoną) liczebność zbioru pomiarowego wykorzystywanego w analizie. Zwiększanie zbioru pomiarowego poszerza przestrzeń prawdopodobieństwa, co podwyższa prawdopodobieństwo napotkania na rzadko występujące zdarzenia, a więc duże osobliwości. Prawdopodobieństwo zaobserwowania, choć raz, gęstości procesu odpowiadającego osobliwości rzędu  $\lambda_s$  w przypadku dysponowania łączną liczbą  $N_s$  niezależnych  $D$ -wymiarowych prób o objętości  $\lambda^D$  (każda z prób licząca  $\lambda^D$  „pudełek”) wynosi:

$$Pr(\varepsilon_\lambda = \lambda^{\gamma_s}) = \frac{1}{N_s \lambda^D}. \quad (4.38)$$

Porównanie powyższego równania ze wzorem 4.29 pozwala uzyskać zależność:

$$\frac{1}{N_s \lambda^D} \approx \lambda^{-c(\gamma_s)} \rightarrow N_s \lambda^D \lambda^{-c(\gamma_s)} \approx 1. \quad (4.39)$$

Lavallée i in. [1991] wprowadzili definicję wymiaru próbkowania (ang. sampling dimension)  $D_s$  dla określenia zakresu, do jakiego zbadana jest przestrzeń prawdopodobieństwa w przypadku posiadania  $N_s$  prób:

$$\lambda^{D_s} = N_s \rightarrow D_s = \frac{\log(N_s)}{\log(\lambda)}, \quad (4.40)$$

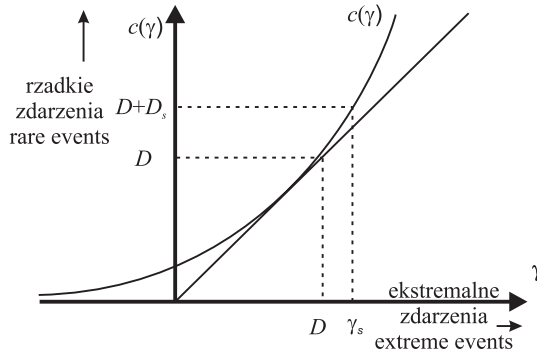
gdzie:  $\lambda$  – stosunek najmniejszej i największej spośród użytych skal.

Wymiar próbkowania może być następnie użyty dla określania najwyższego rzędu osobliwości  $\gamma_s$ , który może być obserwowany pośród  $N_s$  niezależnych prób. Po podstawieniu zależności 4.40 do 4.39 otrzymuje się maksymalne wiarygodne oszacowanie kowymiaru dla najrzadszej osobliwości, obserwowanej co najmniej raz wśród  $N_s$  niezależnych prób:

$$c(\gamma_s) \approx D + D_s, \quad (4.41)$$

Na podstawie znajomości wartości prawej strony zależności 4.41 możliwym jest wyznaczenie wartości  $\gamma_s$  jako argumentu funkcji kowymiaru, tak jak jest to przedstawione na rysunku 4.9. Wspomniana prawa strona zależności 4.41, a więc  $D+D_s$  odpowiada całkowitemu (pełnemu) efektywnemu wymiarowi (ang. effective dimension). Po uwzględnieniu efektywnego wymiaru w równaniu 4.28, funkcja wymiaru przybiera następującą postać [Tessier i in. 1994]:

$$D(\gamma) = D + D_s - c(\gamma). \quad (4.42)$$



Rys. 4.9. Określenie najwyższego rzędu osobliwości  $\gamma_s$  oraz maksymalnego wiarygodnego oszacowania kowymiaru  $c(\gamma_s)$  na podstawie efektywnego wymiaru  $D+D_s$  (rysunek adaptowany za Tessierem i in. (1993))

Fig. 4.9. The highest singularity order  $\gamma_s$  identification and maximum credible codimension  $c(\gamma_s)$  estimation based on effective dimension  $D+D_s$  (figure adapted from Tessier et al. (1993))

Dyskutowane w niniejszym podrozdziale ograniczenia opisu statystycznego procesu multifraktalnego z uwagi na ograniczoną liczebność prób empirycznych w oczywisty sposób dotyczą także szacowania samych momentów statystycznych. Na podstawie równania 4.35 można powiązać ze sobą najwyższy rząd momentu  $q_s$ , który może być wiarygodnie oszacowany z ograniczonej próby pomiarowej, ze wspomnianym już najwyższym rzędem osobliwości:

$$q_s = c'(\gamma_s). \quad (4.43)$$

Podsumowując niniejsze rozważania, oczywistą staje się potrzeba posiadania bogatych zbiorów obserwacyjnych dla obliczania empirycznych momentów statystycznych, a więc dla pełnego opisu interesującego nas procesu. Jak ilustruje to przejrzyste rysunek 4.9, do rozpoznania zwykle najciekawszych z punktu widzenia inżynierskiego, ekstremalnych przypadków procesu, konieczne jest posiadanie bogatej bazy obserwacyjnej zawierającej w sobie te niezwykle rzadkie przypadki.

### 4.7.2. Właściwości funkcji wykładnika skalowania

Na podstawie równań 4.30 i 4.31 i po podstawieniu za  $q = 1$ , można otrzymać następujący związek:

$$\langle \varepsilon_\lambda \rangle \approx \lambda^{\gamma_1 - c(\gamma_1)}, \quad (4.44)$$

gdzie:  $\gamma_1$  – osobliwość odpowiadająca średniej procesowi.

W przypadku procesu, dla którego zachowana jest stałość średniej ( $\langle \varepsilon_\lambda \rangle = 1$ ), na podstawie zależności 4.44 można stwierdzić, że:

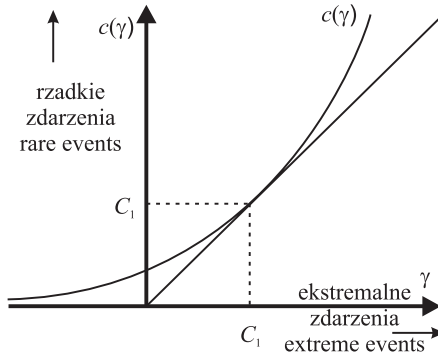
$$\gamma_1 = c(\gamma_1). \quad (4.45)$$

Oznacza to, że dla procesu z zachowaniem stałej średniej (proces zachowawczy – ang. conserved process) osobliwość  $\gamma_1$  odpowiada kowymiarowi przypisanemu tej wartości osobliwości. To charakterystyczne zachowanie jest przedstawione na rysunku 4.10. Na rysunku tym charakterystyczna osobliwość  $\gamma_1$  jest oznaczana zgodnie z ogólnie przyjętą notacją opisu multifraktali jako  $C_1$ . Funkcja kowymiaru procesu zachowawczego widoczna na rysunku 4.10 jest zatem funkcją nie tylko wypukłą, ale spełniającą dwa dodatkowe warunki: warunek przyjęcia wartości  $C_1$  dla argumentu  $C_1$  ( $c(C_1) = C_1$ ) oraz warunek styczności do prostej o równaniu  $\gamma = c(\gamma)$  ( $c'(C_1) = 1$ ). Charakterystyczna wartość  $C_1$  jest kowymiarem średniej procesowi. Jeśli obserwowany proces jest wbudowany w przestrzeń  $D$ -wymiarową, to przy braku spełnienia warunku:  $D \geq C_1$ , średnia procesowi jest zbyt rozproszona, aby być obserwowaną [Lovejoy i Schertzer 1995].

W przeciwieństwie do procesów zachowawczych, w procesach nie-zachowawczych (ang. non-conserved processes) ich gęstości są uzyskiwane z gęstości zachowawczych  $\varepsilon_\lambda$ , przez ich pomnożenie przez  $\lambda^{-H}$ . Występujący w wykładniku parametr  $H$  jest miarą stopnia nie-zachowawczości, a więc miarą tego, na ile dalekie jest pole nie-zachowawcze od pola zachowawczego. Dla  $H = 0$  pole nie-zachowawcze upraszcza się

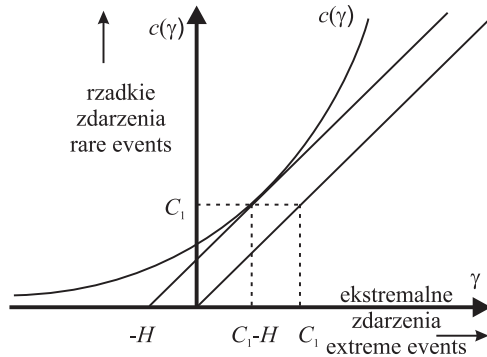


do pola zachowawczego. Idea wprowadzenia wspomnianego multiplikatywnego modelu pola nie-zachowawczego powstała przy badaniach np. pól opadowych, gdzie *a priori* nie było możliwe założenie, że natężenie opadu jest zachowawcze [Tessier i in. 1993]. Przy przejściu z procesu zachowawczego do nie-zachowawczego zależność skalowa gęstości:  $\varepsilon_\lambda = \lambda^\gamma$  powinna być uzupełniona przez translację osobliwości o  $-H$ , do postaci:  $\varepsilon_\lambda = \lambda^{\gamma-H}$ . Efektem tego jest analogiczne przesunięcie wykresu kowymiaru dla nie-zachowawczego procesu o  $H$ , jak na rysunku 4.11.



Rys. 4.10. Wykres kowymiaru  $c(\gamma)$ , który to jest styczny do prostej o równaniu  $\gamma = c(\gamma)$  w charakterystycznym punkcie  $C_1 = c(C_1)$ , osobliwości odpowiadającej średniej procesu (rysunek adaptowany za Tessierem i in. (1993))

Fig. 4.10. Codimension function  $c(\gamma)$  plot tangent to the line of equation  $\gamma = c(\gamma)$  at the characteristic point  $C_1 = c(C_1)$ , the singularity of the mean of a process (figure adapted from Tessier et al. (1993))



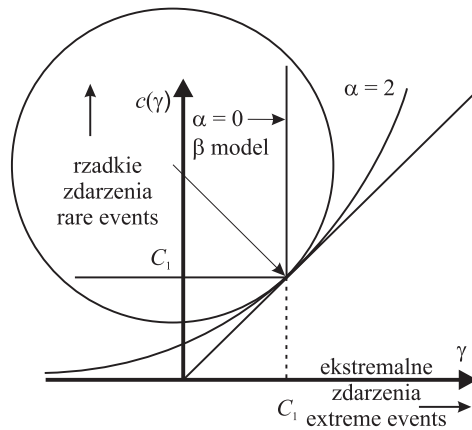
Rys. 4.11. Ilustracja graficzna efektu przesunięcia wykresu kowymiaru  $c(\gamma)$  dla przypadku procesów nie-zachowawczych o wartość  $-H$  (rysunek adaptowany za Tessierem i in. (1993))

Fig. 4.11. Graphical illustration of codimension  $c(\gamma)$  plot translation by value  $-H$  effect for case of non-conserved processes (figure adapted from Tessier et al. (1993))

Mając na uwadze wypukły charakter funkcji kowymiaru i jej przechodzenie przez charakterystyczny punkt  $C_1$  o współrzędnych  $(C_1, C_1)$ , zauważono możliwość zdefiniowania parametru  $\alpha$ , czyli stopnia multifraktalności procesu (ang. degree of multifractality), przez (lokalny) stosunek zmiany nachylenia w punkcie  $C_1$ , dany przez promień krzywizny  $R_c$ , funkcji  $c(\gamma)$  dla  $\gamma = C_1$ , który, jak podają Tessier i in. [1993], jest równy:

$$R_c(C_1) = \left[ \frac{(1 + c'(\gamma)^2)^{3/2}}{c''(\gamma)} \right]_{\gamma=C_1} = 2^{2/3} C_1 \alpha. \quad (4.46)$$

Parametr  $\alpha$  jest miarą odchylenia procesu od procesu monofraktalnego i jest parametrem fundamentalnym dla klasyfikacji procesów multifraktalnych. Dyskusja nad nim będzie jeszcze prowadzona w dalszej części pracy przy omawianiu tzw. uniwersalnego (ang. universal) modelu multifraktalnego. Wartości tego parametru mogą zmieniać się w zakresie od 0 do 2. Wartość parametru  $\alpha = 0$  odpowiada przypadkowi monofraktali, czyli wcześniej opisanemu modelowi kaskadowemu  $\beta$ . Natomiast wartość parametru  $\alpha = 2$  odpowiada maksymalnemu stopniowi multifraktalności, dla którego wykres funkcji kowymiaru przybiera postać paraboli (rys. 4.12).



Rys. 4.12. Graficzna interpretacja  $\alpha$  – stopnia multifraktalności procesu, określanego przez lokalną zmianę krzywizny funkcji  $c(\gamma)$  w charakterystycznym punkcie o współrzędnych  $(C_1, C_1)$  (rysunek adaptowany za Tessierem i in. (1993))

Fig. 4.12. Graphical interpretation of the degree of multifractality  $\alpha$ , defined by local change of function  $c(\gamma)$  curvature at the point of coordinates  $(C_1, C_1)$  (figure adapted from Tessier et al. (1993))

Podsumowując, można stwierdzić, że lokalny opis zachowania multifraktali w pobliżu średniej wymaga znajomości trzech parametrów:  $H$ ,  $C_1$  i  $\alpha$ , które to określają odpowiednio odchylenie obserwowanego pola od pola zachowawczego, jego rozproszenie oraz stopień multifraktalności. W końcowej części rozdziału dowiedzione zostanie,

że te same trzy parametry mogą być używane w przypadku uniwersalnych multifraktali do kompleksowej charakteryzacji funkcji skalowania rozkładów prawdopodobieństwa  $c(\gamma)$  oraz funkcji wykładnika skalowania momentów  $K(q)$ .

W trakcie rozwoju teorii opisu multifraktali została zaproponowana także alternatywna względem  $c(\gamma)$  funkcja kowymiaru  $C(q)$ , zdefiniowana jako [Hentschel i Procaccia 1983]:

$$C(q) = \frac{K(q)}{q-1}, \quad (4.47)$$

gdzie:  $K(q)$  – funkcja wykładnika skalowania momentów,  $q$  – rząd statystycznych momentów.

Funkcja zdefiniowana wzorem 4.47 jest z punktu widzenia jej interpretacji graficznej spadkiem cięciwy rozpiętej na łuku funkcji  $K(q)$  pomiędzy punktami o współrzędnych  $(1,0)$  oraz  $(q, K(q))$ , co widać na rysunku 4.13. Funkcja  $C(q)$  jest funkcją rosnącą, co wynika z wypukłości funkcji  $K(q)$ . Ciekawą własnością alternatywnej funkcji kowymiaru jest jej zachowanie dla  $q = 1$ . Zgodnie z regułą de l'Hospitala można zapisać, że:

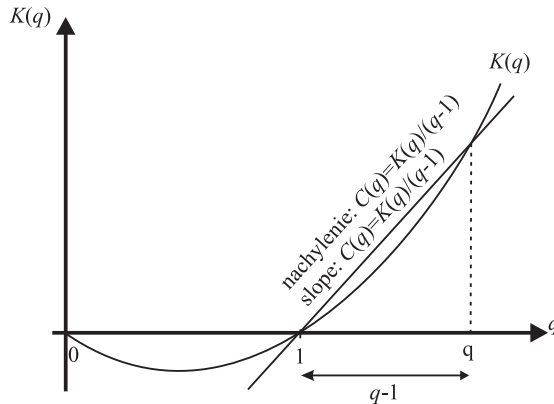
$$\lim_{q \rightarrow 1} C(q) = \lim_{q \rightarrow 1} K'(q), \quad (4.48)$$

co po uwzględnieniu równania 4.36 prowadzi do równości  $C(q = 1) = \gamma_1 = C_1$ .

Na podstawie funkcji kowymiaru  $C(q)$  możliwym jest zdefiniowanie funkcji wymiaru  $D(q)$  [Schertzer i Lovejoy 1993]:

$$D(q) = D - C(q). \quad (4.49)$$

Funkcja  $D(q)$  jest funkcją ściśle malejącą z uwagi na rosnący charakter funkcji kowymiaru.



Rys. 4.13. Interpretacja graficzna relacji pomiędzy funkcjami  $C(q)$  i  $K(q)$  (rysunek adaptowany za Schertzerem i Lovejoyem (1993))

Fig. 4.13. Graphical interpretation of the relation between  $C(q)$  and  $K(q)$  functions (figure adapted from Schertzer and Lovejoy (1993))

## 4.8. Multifraktalne transformacje fazowe

Zaczątkiem opisu multifraktalnych transformacji fazowych było odkrycie analogii pomiędzy zmiennymi termodynamicznymi systemów zrównoważonych a multifraktalnymi wykładnikami rozpraszających się nie-zrównoważonych systemów. Celem opisu opartego na analogii względem termodynamicznych transformacji fazowych jest jakościowe wydzielenie różnego typu reżimów w multifraktalach oraz ich przejść (transformacji) z jednego reżimu do drugiego, co jest istotne w całokształcie studiów nad multifraktalami [Schertzer i Lovejoy 1989, 1991, 1993, Schertzer i in. 1993].

Szczególnym elementem analogii pomiędzy multifraktalną dynamiką strumieni i termodynamiką jest zauważenie w obydwu przypadkach występowania par wielkości powiązanych ze sobą transformacją Legendre'a. W przypadku multifraktali, co było już pokazane, powiązane ze sobą są funkcje  $K(q)$  i  $c(\gamma)$ , a w przypadku termodynamiki analogiczne powiązanie istnieje pomiędzy wolną energią i odpowiadającą jej entropią. Z tego wynika analogia pomiędzy rzędem osobliwości  $\gamma$  i energią oraz pomiędzy funkcją kowymiaru  $c(\gamma)$  i entropią. Poza tym można powiązać rząd momentu  $q$  z odwrotnością temperatury, jak również funkcję  $K(q)$  z potencjałem Massieu. Biorąc to pod uwagę można sformułować dwie podstawowe formalne analogie pomiędzy dwoma rodzajami opisów (multifraktalnym i termodynamicznym):

- 1) opis prawdopodobieństwa  $\langle \gamma, c(\gamma) \rangle$  jest multifraktalnym analogiem termodynamicznego opisu (energia, entropia);
- 2) opis momentów  $\langle q, K(q) \rangle$  jest multifraktalnym analogiem termodynamicznego opisu (odwrotność temperatury, potencjał Massieu).

Transformacje fazowe w termodynamice odnoszą się do nieciągłości wolnej energii i potencjału termodynamicznego. Nieciągłości zauważane są także w przypadku przebiegu funkcji  $K(q)$ . Po uwzględnieniu wcześniej wymienionych analogii procesów termodynamicznych i multifraktalnych przyjmuje się, że nieciągłości w pochodnych funkcji  $K(q)$  odpowiadają nieciągłościom w pochodnych potencjałów termodynamicznych. W przypadku nieciągłości w pierwszej pochodnej funkcji wykładnika skalowania momentów mówi się o multifraktalnych transformacjach pierwszego rzędu (ang. first-order multifractal phase transition), odpowiednio w przypadku nieciągłości w drugiej pochodnej funkcji  $K(q)$  mówi się o multifraktalnych transformacjach drugiego rzędu (ang. second-order multifractal phase transition). Powstawanie transformacji multifraktalnych pierwszego i drugiego rzędu jest efektem dwóch różnych mechanizmów statystycznych. Transformacje pierwszego rzędu wiążą się z dywergencją momentów, a transformacje drugiego rzędu są rezultatem ograniczenia liczebności zbiorów pomiarowych.

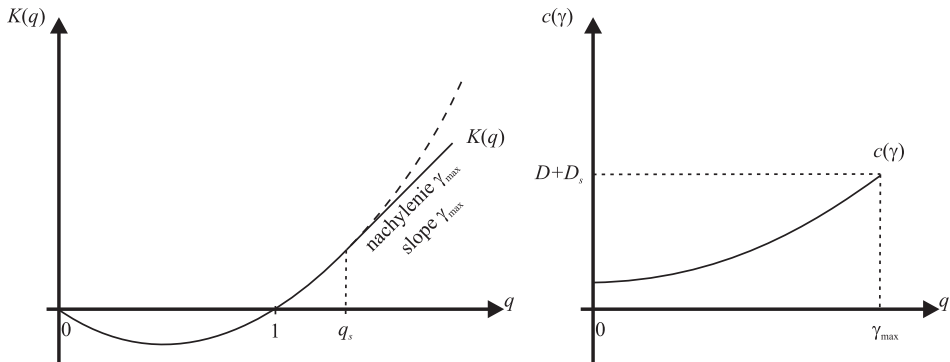
### 4.8.1. Multifraktalne transformacje drugiego rzędu

Szczupłość zbiorów wyników pomiarowych zawęża naszą obserwację całej przestrzeni prawdopodobieństwa, wykluczając możliwość zawarcia w nich ekstremalnych i rzadkich zdarzeń. Ograniczenia w wielkości obserwowanych rzędów osobliwości natężenia procesu, które nie przekraczają wartości  $\gamma_s$ , przekładają się na odgórne ogra-

niczenie funkcji kowymiaru. Co istotne, te same ograniczenia nie dotyczą funkcji wykładnika skalowania momentów, charakteryzującej w sposób alternatywny ten sam proces. Jak pamiętamy, obydwie funkcje wykładnika skalowania są powiązane ze sobą transformacją Legendre'a. W wyniku transformacji Legendre'a ograniczonej odgórnie funkcji  $c(\gamma)$  (dla argumentów  $\gamma \leq \gamma_s$ ) uzyskiwany jest liniowy charakter wykresu funkcji  $K(q)$  dla  $q > q_s$  (gdzie  $q_s = c'(\gamma_s)$ ). Obrazuje to na rysunku 4.14 liniowy charakter funkcji  $K(q)$  dla  $q > q_s$ , który wyraźnie odbiega od przerywanej krzywej odpowiadającej teoretycznej, nieliniowej charakterystyce procesu odsłoniętego. W rezultacie tego funkcja wykładnika skalowania momentów procesu ubranego obserwowanego na podstawie ograniczonego zbioru pomiarowego może być opisana jako:

$$K(q) = \begin{cases} K_b(q), & q \leq q_s \\ \gamma_s(q - q_s) + K_b(q_s), & q > q_s. \end{cases} \quad (4.50)$$

W formule powyższej indeksy  $b$  oznaczają zmienne odpowiadające procesowi odsłoniętemu, a  $\gamma_s = \gamma_{\max}$  oznacza maksymalną możliwą do wiarygodnej obserwacji osobliwość w posiadanej próbie. Zależność 4.50 obowiązuje jedynie dla prób, dla których maksymalna osobliwość  $\gamma_{\max}$  jest mniejsza od krytycznej osobliwości  $\gamma_D$  związanej z dywergencją momentów i multifraktalną transformacją fazową pierwszego rzędu.



Rys. 4.14. Przebieg empirycznych funkcji wykładnika skalowania  $K(q)$  i  $c(\gamma)$  w przypadku multifraktalnych transformacji drugiego rzędu

Fig. 4.14. Shape of empirical scaling exponent functions  $K(q)$  and  $c(\gamma)$  in case of multifractal second-order phase transitions

## 4.8.2. Multifraktalne transformacje pierwszego rzędu

Multifraktalne transformacje pierwszego rzędu mają zwykle miejsce w przypadku procesów ubranych, obserwowanych w skalach większych od „wewnętrznej” skali procesu. Jak już wspomniano, procesy ubrane zwykle wykazują zdecydowanie mocniejszą zmienność w porównaniu do procesów odsłoniętych. Koniecznym do tego jest

oczywiście „ubieranie” procesu w mało-skalową aktywność procesu na kilku poziomach kaskady. W końcowym rezultacie większe natężenia procesu ubranego przynoszą dywergencję ich statystycznych momentów powyżej pewnego krytycznego rzędu  $q_D$ . Co za tym idzie, przebieg funkcji wykładnika skalowania momentów  $K(q)$  dla ubranych multifraktali może być zdefiniowany jak poniżej:

$$K(q) = \begin{cases} K_b(q), & q \leq q_D \\ \infty, & q > q_D \end{cases} \quad (4.51)$$

W zależności powyższej indeks  $b$  oznacza proces odsłonięty, tak więc dla rzędów  $q$  nie przekraczających krytycznego rzędu  $q_D$  przebieg krzywej procesu ubranego nie odbiega od procesu odsłoniętego.

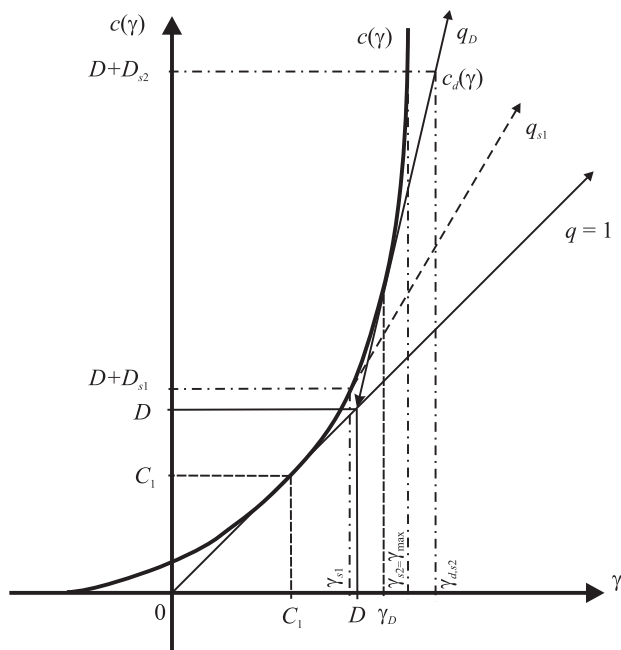
Obraz dywergencji momentów ubranych procesów multifraktalnych jest dodatkowo komplikowany przez nakładający się na niego efekt wynikający z obserwacji procesu na bazie ograniczonej liczby próbek  $N_s$ . Wpływ liczebności próbek na przebieg funkcji wykładnika skalowania jest przedstawiony graficznie na rysunku 4.15 dla funkcji kowariancji i na rysunku 4.16 dla funkcji skalowania momentów. Zgodnie z rysunkiem 4.15 istnieje pewna charakterystyczna maksymalna obserwowalna osobliwość  $\gamma_{\max}$ , która to może być oszacowana zgodnie z relacją 4.41:

$$c(\gamma_{\max}) \approx D + D_s \quad (4.52)$$

Z uwagi na powyższe ograniczenie co do rzędu obserwowalnej osobliwości, w wyniku transformacji Legendre’a funkcji  $c(\gamma)$  w funkcję  $K(q)$ , ta ostatnia będzie wykazywać liniowy charakter dla momentów większych niż wartość krytyczna. Przy czym możliwe jest wydzielenie dwóch przypadków: pierwszego, gdy  $\gamma_{\max} \leq \gamma_D$  oraz drugiego, gdy  $\gamma_{\max} > \gamma_D$ , gdzie  $\gamma_D$  jest osobliwością odpowiadającą krytycznemu rzędowi momentu dla dywergencji momentów  $q_D$  (patrz rys. 4.16). Pierwszy z przypadków prowadzi do multifraktalnych transformacji rzędu drugiego, co było już dyskutowane w poprzednim podrozdziale. W drugim z przypadków przebieg funkcji wykładnika skalowania momentów  $K(q)$  ma postać:

$$K(q) = \begin{cases} K_b(q), & q \leq q_D \\ \gamma_{\max}(q - q_D) + K_b(q_D), & q > q_D \end{cases} \quad (4.53)$$

Zgodnie z formułą 4.53 – dla rzędów momentu  $q > q_D$  wykres funkcji  $K(q)$  ma charakter liniowy (patrz rys. 4.17, odstępstwo od przerywanej krzywej teoretycznej, jak dla odsłoniętego procesu). W liniowym równaniu tego segmentu wykresu  $K(q)$  wartość jego nachylenia równa się  $\gamma_{\max}$ , a wyrazu wolnego, po przekształceniu z uwzględnieniem równania 4.37, wynosi  $-c(\gamma_{\max})$ .



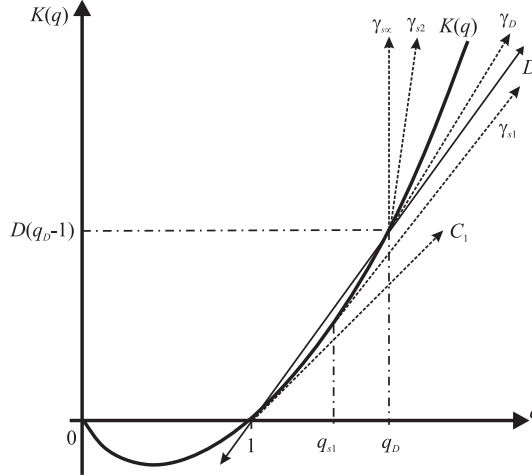
Rys. 4.15. Schematyczny przebieg funkcji  $c(\gamma)$  dla dwóch różnych wielkości wymiarów próbkowania  $D_{s1}$  i  $D_{s2}$  wraz z odpowiadającymi im osobliwościami  $\gamma_{s1} < \gamma_D < \gamma_{s2} < \gamma_{d,s2}$ . Indeks  $d$  na rysunku oznacza wielkości jak dla procesu ubranego. Na wykresie oznaczona jest także prosta styczna do  $c(\gamma)$  o krytycznym nachyleniu  $q_D$ , która to zawiera punkt  $(D, D)$ , będący jej przecięciem z prostą o równaniu  $q = 1$  [rysunek adaptowany za Schertzer i in. 1993]

Fig. 4.15. Schematic diagram of  $c(\gamma)$  function for two different values of sample dimensions  $D_{s1}$  and  $D_{s2}$  with respective singularities  $\gamma_{s1} < \gamma_D < \gamma_{s2} < \gamma_{d,s2}$ . Subscript  $d$  on figure stands for dressed quantities. In figure line tangent to  $c(\gamma)$  of critical slope  $q_D$ , which contains point  $(D, D)$ , being its intersection with line of equation  $q = 1$ , is marked [figure adapted from Schertzer et al. 1993]

W przypadku multifraktałnych transformacji pierwszego rzędu nieciągłości zaznaczają się także na wykresie funkcji kowymiary. Wykres funkcji kowymiary  $c(\gamma)$  ubranego procesu multifraktałnego pokrywa się z wykresem  $c_b(\gamma)$  procesu odsłoniętego jedynie dla  $\gamma \leq \gamma_D$ . Dla  $\gamma > \gamma_D$  wykres kowymiary ma już charakter liniowy. Zapewnia to minimalizację wartości kowymiary, a co za tym idzie, pozwala na maksymalizację prawdopodobieństwa. Nachylenie liniowej części wykresu kowymiary, dla  $\gamma > \gamma_D$  równa się  $q_D$ , gdzie  $q_D = c'(\gamma_D)$ . Ostatecznie przebieg funkcji kowymiary może być zapisany, jako:

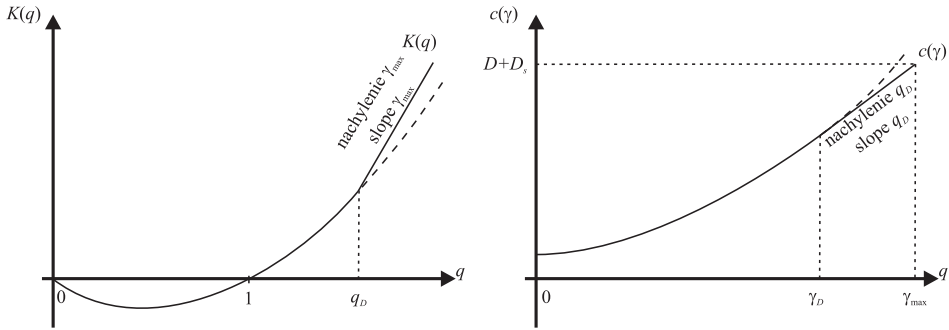
$$c(\gamma) = \begin{cases} c_b(\gamma), & \gamma \leq \gamma_D \\ q_D(\gamma - \gamma_D) + c_b(\gamma_D), & \gamma > \gamma_D \end{cases} \quad (4.54)$$

Także w przypadku analizy przebiegu funkcji kowymiaru istotnym aspektem jest liczebność posiadanej próby pomiarowej. Liniowy charakter funkcji kowymiaru z uwagi na dywergencję momentów rzędu  $q_D$  może być obserwowany jedynie dla odpowiednio bogatych zbiorów pomiarowych, wówczas gdy wymiar efektywny  $D+D_S \geq c(\gamma_D)$ , czy też ekwiwalentnie, gdy osobliwość  $\gamma_{\max} > \gamma_D$  (patrz rys. 4.15 i 4.17).



Rys. 4.16. Schematyczny przebieg funkcji  $K(q)$  wraz z liniami o nachyleniach  $\gamma_{s1} < \gamma_D < \gamma_{s2} < \gamma_{d,sec}$  obrazującymi jej zachowanie dla wzrastającego do nieskończoności zbioru próbek  $N_s$ . Na wykresie zaznaczona jest także linia o nachyleniu  $D$ , definiująca krytyczną wartość momentu  $q_D$  [rys. adaptowany za Schertzer i in. 1993]

Fig. 4.16. Schematic diagram of  $K(q)$  function with lines of slopes  $\gamma_{s1} < \gamma_D < \gamma_{s2} < \gamma_{d,sec}$  indicating its behavior for increasing up to infinity sample size  $N_s$ . The line of slope  $D$  defining critical moment value  $q_D$  is also marked on plot [fig. adapted from Schertzer et al. 1993]



Rys. 4.17. Przebieg empirycznych funkcji wykładnika skalowania  $K(q)$  i  $c(\gamma)$  w przypadku transformacji pierwszego rzędu

Fig. 4.17. Shape of empirical scaling exponent functions  $K(q)$  and  $c(\gamma)$  in case of multifractal first-order phase transitions



## 4.9. Uniwersalne multifraktale

Jako podsumowanie wszystkich dotychczasowych rozważań dotyczących multifraktali można stwierdzić, że ich statystyczna charakteryzacja jest możliwa za pomocą funkcji  $c(\gamma)$  oraz  $K(q)$ . Jednak opis funkcji skalowania wykładnika wymaga teoretycznie użycia nieskończonej liczby parametrów, gdyż o funkcjach tych możemy *a priori* powiedzieć jedynie to, że winny być wypukłe. Rozwiązania tego problemu poszukiwano w koncepcji „uniwersalności” (ang. universality). Ta często stosowana w fizyce koncepcja zakłada obecność w różnych procesach tego samego strukturalnego zachowania dynamicznego, które może być opisane za pomocą jedynie kilku istotnych parametrów, po uprzednim odrzuceniu nieistotnych detali jego dynamik. Koncepcja uniwersalności znalazła swoje odbicie w wielu studiach dotyczących multiplikatywnych procesów losowych [Gupta i Waymire 1993, 1997, Mandelbrot 1974, Lovejoy i Schertzer 1990a, Schertzer i Lovejoy 1991, 1993]. Całkowicie nowatorskie w tym zakresie podejście zostało jednakże zaprezentowane przez Schertzera i Lovejoya [1987]. Autorzy ci w przypadku ciągłych kaskad postulowali istnienie pewnych (stałych, atraktorowych) generatorów, prowadzących do różnych klas multifraktali wykazujących dobrze rozpoznawalne charakterystyczne zachowania.

Ciągłe kaskady, na których skupili swoją uwagę Schertzer i Lovejoy [1987], w przypadku wielu procesów fizycznych, mogą być postrzegane jako bardziej realistyczna alternatywa wobec dyskutowanych, jak dotąd dyskretnych (multiplikatywnych) kaskad. Te ostatnie są konstruowane z użyciem arbitralnych i ustalonych, zwykle całkowitych współczynników skal dla każdego stopnia procesu. Kaskady ciągłe mają natomiast nieskończoną liczbę stopni kaskady obejmującą szeroki zakres skal. Kaskady ciągłe mogą być otrzymywane z kaskad dyskretnych na drodze ich „zagęszczania” (ang. „densification”) przez wprowadzanie coraz większej liczby stopni pośrednich, dochodząc aż do nieskończonej liczby nieskończenie małych stopni w kaskadzie. Jak wskazywali na to Schertzer i Lovejoy [1987, 1989] oraz Lovejoy i Schertzer [1990a], w przypadku kaskad multiplikatywnych efektem tego są stabilne i atraktorowe procesy wykazujące zachowanie „uniwersalne”.

Powracając do zagadnienia wspomnianych już generatorów multifraktali, Schertzer i Lovejoy [1987, 1989] twierdzili, że proces multifraktalny może być otrzymany w taki sposób, że jego gęstość  $\varepsilon_\lambda$  w skali rozdzielczości  $\lambda$ , będzie wynosić:

$$\varepsilon_\lambda \approx e^{\Gamma_\lambda}, \quad (4.55)$$

gdzie:  $\Gamma_\lambda$  – generator procesu.

Modelowanie multiplikatywnego charakteru multifraktalnych procesów kaskadowych prowadzi do mnożenia gęstości z gęstościami. Uwzględniając zależność 4.55, można stwierdzić, że operacja ta sprowadza się w prosty sposób do sumowania generatorów do generatorów typu  $\Gamma_\lambda \approx \ln(\varepsilon_\lambda)$  [Schertzer i Lovejoy 1993], a studia nad tymi generatorami mogą być prowadzone pod kątem rozpatrywania procesów addytywnych.

Podstawowa relacja dotycząca skalowania momentów statystycznych wyrażona wzorem 4.30, po uwzględnieniu wzoru 4.55, daje możliwość zapisania zależności:

$$\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \langle e^{q\Gamma_\lambda} \rangle \approx \lambda^{K(q)} \approx e^{K(q)\ln(\lambda)} \approx e^{K_\lambda(q)}. \quad (4.56)$$

Analizując powyższą zależność, warto przyrównać ją do struktury funkcji generującej kumulanty. Funkcja generująca kumulanty może być definiowana jako logarytm naturalny z funkcji charakterystycznej (funkcja charakterystyczna jest transformacją Fouriera rozkładu prawdopodobieństwa). Funkcja generująca kumulanty  $h(q)$  jest często nazywana drugą charakterystyczną funkcją [Lukacs 1970]:

$$h(q) = \ln \left( E \left( e^{iqX} \right) \right), \quad (4.57)$$

gdzie:  $i$  – jednostka urojona,  $q$  – liczba rzeczywista,  $X$  – zmienna losowa, a  $E$  oznacza wartość oczekiwaną.

Na mocy definicji 4.57 i na podstawie zależności 4.56 można powiedzieć, że funkcja  $K_\lambda(q) \approx K(q)\ln(\lambda)$  jest drugą charakterystyczną funkcją generatora  $\Gamma_\lambda$ , a więc logarytmem naturalnym pierwszej charakterystycznej funkcji, czyli  $\lambda^{K(q)}$ .

Generator (odsłonięty)  $\Gamma_\lambda$  skalowo-nieziemniczego multiplikatywnego procesu kaskadowego winien spełniać następujące podstawowe wymogi [Schertzer i Lovejoy 1987, 1989]:

- 1) generator (drobnej rozdzielczości) jest procesem losowym szumu ograniczonym do zakresu  $[1, \lambda]$ , co zapewnia, że procesy będą gładkie w skalach mniejszych niż  $\lambda^{-1}$ ;
- 2)  $K_\lambda(q)$  (a więc druga charakterystyczna funkcja generatora  $\Gamma_\lambda$ ) ma zachowanie logarytmiczne wraz ze skalą ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) w celu zapewnienia wielokrotnego skalowania;
- 3) rozkład prawdopodobieństwa dodatnich fluktuacji generatora  $\Gamma_\lambda$  musi opadać szybciej niż wykładniczo, w celu posiadania pewnych skończonych momentów  $q \geq 0$ ;
- 4) generator musi być znormalizowany tak, aby  $K_\lambda(1) = 0$ , co oznacza że  $\langle \varepsilon_\lambda \rangle = 1$ , w celu zagwarantowania (kanonicznego) zachowania strumienia.

Z uwagi na dwa pierwsze wymogi widmo energii generatora  $E_\Gamma$  jest proporcjonalne do odwrotności liczby falowej  $\omega$  ( $E_\Gamma(\omega) \approx \omega^{-1}$ ). Szumy takie są określane mianem szumów różowych (ang. pink noises) lub też szumów 1/f (ang. one over f noises), gdyż ich widmowa gęstość mocy jest proporcjonalna do odwrotności częstotliwości.

Według Schertzera i Lovejoya [1987, 1989] generatorem, który spełnia wszystkie powyższe cztery wymogi i ponadto jest stabilny i atraktorowy przy addycji, jest (stabilny) ekstremalny (z maksymalną asymetrią) szum Lévy'ego. Szum Lévy'ego jest również przykładem wspomnianego powyżej różowego szumu.

Lévy dokonał generalizacji zmiennej losowej Gaussa na drodze rezygnacji z hipotezy o skończonej wartości wariancji zmiennych losowych. W przypadku zmiennych losowych Gaussa ograniczenie co do skończonej wartości ich wariancji implikowało jednocześnie skończoność w granicy wszystkich ich momentów statystycznych. Po porzuceniu powyższej hipotezy Lévy obserwował dywergencję momentów i wprowadził indeks  $\alpha$ , odpowiadający rzędowi dywergencji tych momentów:

$$\langle |X|^q \rangle < \infty, \quad \text{dla } q < \alpha \quad (4.58)$$

$$\langle |X|^q \rangle = \infty \quad \text{dla } q \geq \alpha \quad (\text{to jest } Pr(|X_i| \geq s) \approx s^{-\alpha}, \quad s \gg 1). \quad (4.59)$$

Rząd dywergencji momentów  $\alpha$  jest nazywany indeksem Lévy'ego ( $0 < \alpha < 2$ ). Jak łatwo zauważyć na podstawie zależności 4.58, dla  $\alpha = 2$ , następuje powrót do przypadku zmiennych losowych Gaussa, o skończonej wartości wariancji. Na podstawie zależności 4.59 uzasadnionym jest nazywanie zmiennych  $X_i$  zmiennymi hiperbolicznymi, z uwagi na algebraiczne opadanie ogonów rozkładów prawdopodobieństwa. Z tej racji zmienne Lévy'ego są stabilnymi i ustalonymi punktami (renormalizowanych) sum niezależnych i identycznie dystrybuowanych zmiennych hiperbolicznych.

W przypadku szumu Lévy'ego indeks  $\alpha$  równa się rzędowi dywergencji statystycznych momentów generatora:

$$Pr(\Gamma \geq s) \approx s^{-\alpha}, \text{ dla } s \gg 1 \Rightarrow \langle (-\Gamma)^q \rangle \geq \infty, \text{ dla } q > \alpha, \quad (4.60)$$

gdzie:  $s$  – poziom graniczny natężenia.

Rezultatem generatorów spełniających zależność 4.60 są „uniwersalne” formuły multifraktalnych funkcji wykładnika opisujących skalowanie rozkładów prawdopodobieństwa  $c(\gamma)$  oraz momentów statystycznych  $K(q)$ . Formuły te są wyprowadzane przez zastosowanie centralnego twierdzenia granicznego dla addycji zmiennych losowych do generatora kaskady. Przy czym „uniwersalna” formuła dla funkcji skalowania momentów  $K(q)$  jest otrzymana z uwzględnieniem zachowania momentu rzędu 1, to jest dla warunku:  $K(1) = 0$ . Formuła dla funkcji skalowania rozkładów prawdopodobieństwa  $c(\gamma)$  jest ustalona z wykorzystaniem transformacji Legendre'a. „Uniwersalne” formuły, sprawdzające się dla odsloniętych kaskad i wielkości w granicy  $\lambda \rightarrow \infty$ , mają następującą postać [Schertzer i Lovejoy 1987, 1989, Lovejoy i Schertzer 2006]:

$$c(\gamma - H) = \begin{cases} C_1 \left( \frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha'} & \text{dla } \alpha \neq 1 \\ C_1 \exp\left( \frac{\gamma}{C_1} - 1 \right) & \text{dla } \alpha = 1, \end{cases} \quad (4.61)$$

$$K(q) - qH = \begin{cases} \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) & \text{dla } \alpha \neq 1 \\ C_1 q \ln(q) & \text{dla } \alpha = 1, \end{cases} \quad (4.62)$$

gdzie: we wzorze 4.62  $q = \frac{dc}{d\gamma} \geq 0$ ,  $\alpha$  przyjmuje wartości z zakresu  $[0, 2]$ , a parametr  $\alpha'$  jest powiązany z indeksem Lévy'ego poniższą zależnością:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1 \quad \text{dla } \alpha \neq 1. \quad (4.63)$$

Z przeglądu formuł 4.61–4.63 wynika jasno, że są potrzebne tylko trzy fundamentalne parametry dla charakteryzacji obydwu multifraktalnych funkcji wykładnika. Parametrami tymi są wspomniane już wcześniej:  $H$  – odchylenie od zachowawczości (ang. deviation from conservation),  $C_1$  – kowymiar osobliwości średniej (ang. codimension of

the singularity of the mean),  $\alpha$  – stopień multifraktalności (ang. degree of multifractality). Wszystkie trzy powyższe parametry są nazywane uniwersalnymi parametrami multifraktalnymi (ang. universal multifractal parameters).

Dwa spośród uniwersalnych parametrów multifraktalnych:  $C_1$  i  $\alpha$  mogą być użyte w celu oszacowania krytycznych momentów związanych z multifraktalnymi transformacjami fazowymi, to znaczy:  $q_s$  do transformacji drugiego rzędu oraz  $q_D$  do transformacji pierwszego rzędu. Formuła do szacowania krytycznego momentu  $q_s$  może być uzyskana na mocy równania 4.35 i po dodatkowym uwzględnieniu zależności 4.41 oraz 4.61:

$$q_s = \left[ \frac{dc(\gamma)}{d\gamma} \right]_{\gamma=\gamma_s} = \left( \frac{D + D_s}{C_1} \right)^{1/\alpha}. \quad (4.64)$$

Równanie powyższe jest prawdziwe tylko dla momentów  $q_s < q_D$  [Tessier i in. 1993]. Zależność, z której możliwym jest wyznaczenie krytycznego momentu  $q_D$ , ma następującą postać [Tessier i in. 1993]:

$$\frac{C_1}{\alpha - 1} \frac{q_D^\alpha - q_D}{q_D - 1} = D. \quad (4.65)$$

Wielkość parametru  $\alpha$  została uznana za wyróżnik klas uniwersalności (ang. universality classes). Przyjęto podział całego zakresu zmienności parametru  $\alpha$  na pięć jakościowo różniących się przypadków [Tessier i in. 1993]:  $\alpha = 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $1 < \alpha < 2$  i  $\alpha = 2$ . Dolna granica tego podziału ( $\alpha = 0$ ) odpowiada przypadkowi monofraktalnemu opisywanego wcześniej modelu  $\beta$ . Przedział  $0 < \alpha < 1$  odpowiada procesom (logarytmicznym) Lévy'ego z ograniczonymi osobliwościami. Całkowanie takich multifraktali po zbiorze obserwacyjnym o zadowalająco dużym wymiarze  $D$  może prowadzić do miękkiego (ang. soft) zachowania. W klasyfikacji multifraktale te są określane mianem warunkowo twardych (ang. conditionally hard). Trzy ostatnie przypadki obejmujące przedział  $\alpha \in [1, 2]$  są klasyfikowane jako bezwarunkowo twarde multifraktale (ang. unconditionally hard). Całkowanie tych multifraktali po zbiorze obserwacyjnym o wymiarze  $D$  prowadzi zawsze do dywergencji momentów dla wystarczająco dużego, ale skończonego ich rzędu  $q_D$ , niezależnie od wartości  $D$ . Przypadek  $\alpha = 1$ , odpowiada multifraktalom logarytmicznym Cauchy'ego (ang. log-Cauchy multifractals). Przedział  $1 < \alpha < 2$ , odpowiada procesom (logarytmicznym) Lévy'ego z nieograniczonymi osobliwościami. Na koniec granica górna dla  $\alpha = 2$  odpowiada logarytmiczno-normalnemu przypadkowi Gaussa.

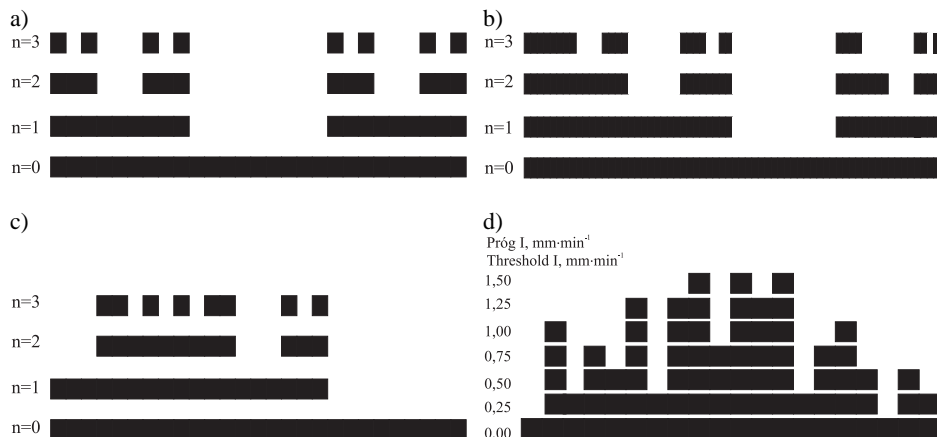
## 5. BADANIA FRAKTALNE I MULTIFRAKTALNE

Jak wynika z przeprowadzonego przeglądu literatury w poprzednim rozdziale, stosowanie różnego typu modeli kaskadowych potwierdziło tezę, że niezmiennicze skalowo multiplikatywne procesy prowadzą generalnie do powstania multifraktali. Na tej podstawie u progu części badawczej pracy przyjmuje się, że jeśli uda się wykazać multifrakalny charakter posiadanych lokalnych szeregów opadowych z Wrocławia w zakresie skal czasowych od 24 godzin do 5 minut, to uzasadnionym będzie użycie mechanizmów kaskadowych do efektywnego generowania syntetycznych szeregów opadowych (na drodze skalowania np. sum dobowych opadów ku mniejszym skalom, ang. downscaling), które będą zachowywać lokalne charakterystyki statystyczne swoiste naturze rzeczywistych lokalnych opadów.

Punktem wyjścia opisywanych w rozdziale badań jest hipoteza, że właściwym narzędziem modelowania szeregów opadowych deszczów w wysokiej rozdzielczości czasu (wynoszącej 5 minut), które to z pozoru przedstawiają całkowicie chaotyczny obraz zarejestrowanych chwilowych natężeń deszczu, jest warsztat analizy geometrii procesów multifrakalnych. Za stawianiem takiej hipotezy badawczej może przemawiać analiza rysunku 5.1, na którym ujawniają się pewne analogie co do geometrii klasycznych zbiorów fraktalnych Cantora oraz zbiorów powiązanych z hierarchią progowych wartości natężeń, powstałych na bazie analizy przykładowego hietogramu rzeczywistego deszczu (podobnie jak na rys. 4.2).

Stwierdzenie, że dany zbiór wykazuje cechy fraktalne bądź też multifrakalne wymaga przeprowadzenia odpowiednich studiów. Studia te są możliwe przy zastosowaniu stosunkowo prostych technik w przypadku zbiorów fraktalnych, czy też liniowych procesów stochastycznych, które mogą być charakteryzowane za pomocą pojedynczego wykładnika skalowania. Do grona tych technik należą przede wszystkim metody: zliczania pudełek (ang. box-counting method), wymiarów korelacji (ang. correlation dimensions), zależności pole powierzchni-obwód (ang. area-perimeter relations), wykładników rozkładu powierzchni (ang. area-distribution exponents), funkcji struktury (ang. structure functions), widma mocy (ang. power spectrum) i in. Przegląd powyższych metod można znaleźć w książce Federa [1988], gdzie są one stosowane dla całego spektrum procesów fizycznych wykazujących cechy fraktalne. W pracy niniejszej dyskusja nad tymi metodami nie jest prowadzona. Jak dowiedziono w dalszej części badawczej pracy, szeregi czasowe opadów z Wrocławia okazały się nie być prostymi, liniowymi procesami stochastycznymi, możliwymi do scharakteryzowania za pomocą

pojedynczego wykładnika skalowania. W przeciwieństwie do tego wykazywały one cechy multifraktalne i studia nad nimi wymagały użycia bardziej skomplikowanych metod analiz multifraktalnych. Metody analiz multifraktalnych służą badaniu procesów na różnych poziomach rozdzielczości. Pozwalają one na bezpośrednie określenie funkcji wykładnika skalowania rozkładów prawdopodobieństwa i momentów statystycznych, które charakteryzują procesy multifraktalne.



Rys. 5.1. Przykłady konstrukcji zbiorów fraktalnych. Klasyczne zbiory fraktalne Cantora: a) środkowy-trzeci zbiór Cantora, jednoskalowy, deterministyczny fraktal, b) dwuskalowy zbiór Cantora, ze współczynnikami redukcyjnymi 0,25 i 0,50 odpowiednio dla prawej i lewej strony, wieloskalowy deterministyczny fraktal, c) losowy zbiór Cantora powstały przez każdorazową eliminację losowo wybranych przedziałów spośród trzech równych sobie przedziałów, fraktal losowy. Zbiory powiązane z hierarchią progowych wartości natężeń I (d), powstałe w wyniku analizy przykładowego hietogramu rzeczywistego opadu z Wrocławia

Fig. 5.1. Examples of the construction of fractal sets. Classical Cantor fractal sets: a) the middle-third Cantor set, one-scale, deterministic fractal, b) a two-scale Cantor set with reducing factors 0,25 and 0,50 for right and left sides respectively, multi-scale deterministic fractal, c) a random Cantor set where each interval is divided into three equal parts from which some are selected at random to be withdrawn, random fractal. Sets connected with the hierarchy of threshold intensity values I (d), resulting from the analysis of the real rainfall hietograph example from Wrocław

Zastosowanie większości spośród metod analiz multifraktalnych do posiadanych szeregów czasowych rejestracji opadów z Wrocławia wymagało przekształcenia ich zmiennych do postaci zmiennych bezwymiarowych. Zmiennymi tymi przy analizie czasowej zmienności struktury opadów lokalnych były: czas i natężenie opadu.

W celu przekształcenia zmiennej czasu do postaci bezwymiarowej przyjmuje się najdłuższy spośród analizowanych okresów (o czasie trwania  $T_i$ ) za równy 1. Następnie dla dowolnego innego przedziału czasu dokonuje się podzielenia jego wielkości  $t$  przez

wartość  $T_1$ . Każdorazowo iloraz ten jest odwrotnie proporcjonalny do współczynnika skali  $\lambda$ , charakteryzującego skalę czasową odpowiadającą czasowi  $t$ :

$$\frac{t}{T_1} = \frac{1}{\lambda}. \quad (5.1)$$

W ramach badań własnych przyjęto że analizowane będą następujące okresy czasów: 5, 10, 15, 30, 60, 120, 180, 360, 720, 1440, 2880, 5760 i 11520 minut. W tych uwarunkowaniach współczynnik skali  $\lambda$  zmieniał się w zakresie od 2304 do 1. Najdłuższy z okresów  $T_1 = 11520$  minut odpowiadał 8 dniom. Uznano wstępnie, że analiza dłuższych okresów nie jest możliwa z uwagi na ograniczenia posiadanego materiału, który składał się z serii pomiarowych z kolejnych lat, nie przekraczających jednorazowo 218 dni (tab. 3.1). Z serii takich nie było możliwe wyodrębnienie dostatecznie dużej ilości dłuższych okresów, niezbędnych dla ich dalszej, wiarygodnej analizy statystycznej, np. w celu obliczeń ich momentów statystycznych. Jednocześnie, przeprowadzona analiza widmowa posiadanych szeregów wykazała, że przejawiają one swój skalowy charakter w obrębie analizowanych okresów czasu.

W celu przekształcenia zmiennej natężenia deszczu w skali rozdzielczości  $\lambda$  do postaci bezwymiarowej, wartości natężenia dzieli się przez średnie natężenie procesu dla całego zbioru. Średnie natężenie niezależne od skali  $\langle R_\lambda \rangle$  dla szeregu wartości natężeń  $R_{\lambda,i}$  dla przedziałów czasu  $i$ , gdzie  $i = 1, \dots, \lambda$  wynosi:

$$\langle R_\lambda \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{\lambda} R_{\lambda,i}}{\lambda}. \quad (5.2)$$

Tak więc bezwymiarowe wartości natężeń  $\varepsilon_{\lambda,i}$  dla przedziałów  $i$  to odpowiednio:

$$\varepsilon_{\lambda,i} = \frac{R_{\lambda,i}}{\langle R_\lambda \rangle}. \quad (5.3)$$

Na mocy równań 5.2 i 5.3 można wykazać, że dla każdego poziomu rozdzielczości  $\lambda$  średnia dla całego zbioru bezwymiarowych wartości natężeń jest równa 1:  $\langle \varepsilon_\lambda \rangle = 1$  (we wzorze indeks  $i$  jest pominięty).

Badania multifraktalne szeregów opadowych z Wrocławia były prowadzone jako osobne analizy kolejnych rocznych zbiorów danych z 38 lat (patrz tab. 3.1). Wyniki otrzymywane w ich trakcie dla poszczególnych lat były zgodne pod względem jakościowym, a precyzyjne ilościowe parametry ich opisu nie były w zasadzie istotnymi dla późniejszego konstruowania generatorów kaskadowych. W następnych podrozdziałach prezentowane są szczegółowo, zasadniczo, tylko wyniki analiz uzyskane dla przykładowego szeregu opadowego z 1997 r. Szereg ten został wytypowany z uwagi na intensywne deszcze, jakie miały miejsce zwłaszcza w lipcu [ich sekwencja była charakteryzowana szczegółowo przez Licznar i in. 2005]. Szczególnie intensywne opady w 1997 r. nie tylko we Wrocławiu, ale na terenie całego Dolnego Śląska spowodowały katastrofalną powódź na rzece Odrze i jej dopływach oraz liczne lokalne podtopienia.

## 5.1. Analiza widmowa szeregów czasowych natężeń deszczów

Analiza widmowa szeregów czasowych jest podejmowana standardowo na wstępie badań multifraktalnych [patrz np. Gao i in. 2007, de Lima 1998, Lovejoy i Schertzer 1995, 2006, Menabde i in. 1997, Olsson 1998, Pandey i in. 1998, Pathirana i in. 2003, Tessier i in. 1993]. Jej celem jest znalezienie odpowiedzi na tak podstawowe pytania jak: czy badany proces wykazuje cechy skalowania, w jakim zakresie mają one miejsce, czy występują punkty złamania skalowania? We wszystkich cytowanych powyżej pracach mówi się o zastosowaniu transformaty Fouriera dla przejścia z opisu procesu w domenie czasowej do domeny częstotliwości, w której to dopiero poszukuje się występowania zależności potęgowej pomiędzy energią a liczbą falową (patrz równanie 4.8). Pod tak ogólnie zapisaną metodyką może mieścić się co najmniej kilka definicji rozumienia pojęcia widma energii. Zapewne najczęściej jest ono rozumiane jako gęstość widmowa mocy (ang. power spectral density) PSD, nazywana także często widmem mocy (ang. power spectrum). W literaturze można także odnaleźć różne metodyki estymacji widma mocy [pełną dyskusję różnego typu normalizacji widma mocy można odnaleźć w książce Pressa i in. 1989].

W ramach badań własnych postanowiono skorzystać z popularnej wersji estymatora widma mocy, nazywanego historycznie periodogramem (ang. periodogram). Pierwszym etapem analizy jest przeprowadzenie szybkiej transformacji Fouriera (ang. Fast Fourier Transform – FFT). Pozwala ona na proste obliczenie dyskretnej transformacji Fouriera, a więc przekształcenie skończonego ciągu  $N$  próbek sygnału ( $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{N-1}$ ) (próbek funkcji  $c(t)$  dla stałych interwałów  $t$ , równych  $\Delta$ ) w ciąg harmoniczny ( $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N-1}$ ) według wzoru [Press i in. 1989]:

$$C_k = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i j k / N} \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (5.4)$$

gdzie:  $i$  – jednostka urojona,  $k$  – numer harmoniczej,  $j$  – numer próbki sygnału,  $c_j$  – wartość próbki sygnału,  $N$  – liczba próbek.

Na podstawie znajomości transformat opisanych wzorem 5.4, możliwym jest obliczenie widma mocy dla  $N/2+1$  częstotliwości [Press i in. 1989]:

$$\begin{cases} P(0) = P(f_0) = \frac{1}{N^2} |C_0|^2 \\ P(f_k) = \frac{1}{N^2} [ |C_k|^2 + |C_{N-k}|^2 ] \quad , \quad k = 1, 2, \dots, \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \\ P(f_c) = P(f_{N/2}) = \frac{1}{N^2} |C_{N/2}|^2 \end{cases} \quad (5.5)$$

gdzie częstotliwości  $f_k$  są zdefiniowane tylko dla nieujemnych wartości:

$$f_k = \frac{k}{N\Delta} = 2f_c \frac{k}{N} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}. \quad (5.6)$$



We wzorach powyższych  $f_c$  jest specjalną częstotliwością, nazywaną częstotliwością krytyczną Nyquista (ang. Nyquist critical frequency):

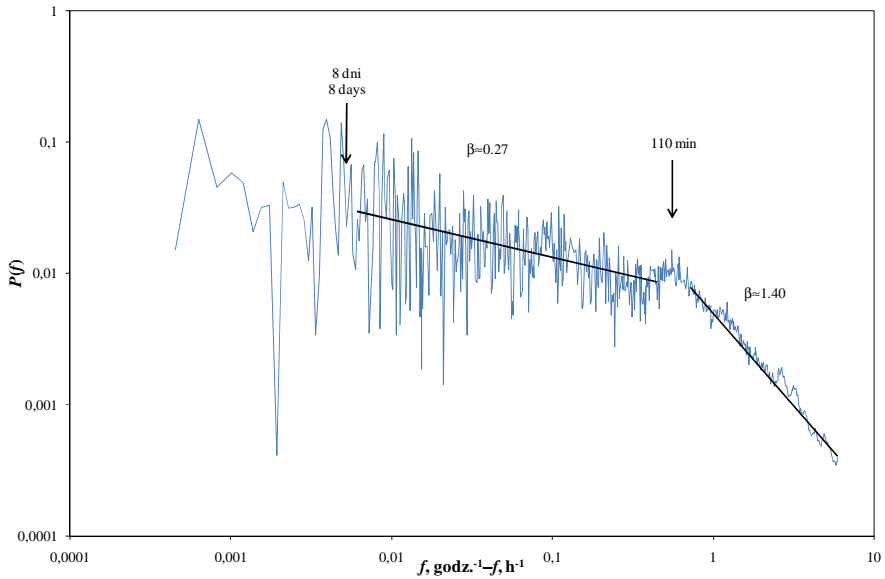
$$f_c = \frac{1}{2\Delta} . \quad (5.7)$$

W celu przeprowadzenia obliczeń PSD analizowanych szeregów opadowych opracowano specjalny program obliczeniowy SPECTRUM, w którym wykorzystano procedury obliczeniowe FOUR1 i REALFT, służące przeprowadzeniu szybkiej transformacji Fouriera, podawane przez Pressa i in. [1989]. W programie tym zaimplementowano dodatkowo procedurę wygładzania widma dla jego wysokich częstotliwości, co jest operacją stosowaną także przez innych badaczy [patrz. np. de Lima 1998].

Przykłady otrzymanych wyników są prezentowane na rysunkach 5.2 i 5.3 dla szeregów czasowych rejestracji natężeń deszczów z dwóch wybranych lat. Oprócz roku 1997, który jak już wspomiano był interesującym materiałem badawczym z uwagi na intensywne opady deszczów, wytypowano także losowo szereg z roku 1964, który z zarejestrowaną całkowitą wysokością 310 mm opadu w ciągu 209 dni był w przybliżeniu przeciętnym szeregiem opadowym (średnia zarejestrowana całkowita wysokość opadów w obrębie szeregów charakteryzowanych w tabeli 3.1 wynosiła 298 mm, a przeciętny czas ich trwania 181 dni). Na rysunkach 5.2 i 5.3, podobnie jak i w przypadku pozostałych szeregów czasowych, dla innych lat, obserwowany był w przybliżeniu gładki przebieg widma dla wysokich częstotliwości. Przebieg ten był zgodny z zależnością potęgową, analogiczną względem równania 4.1:

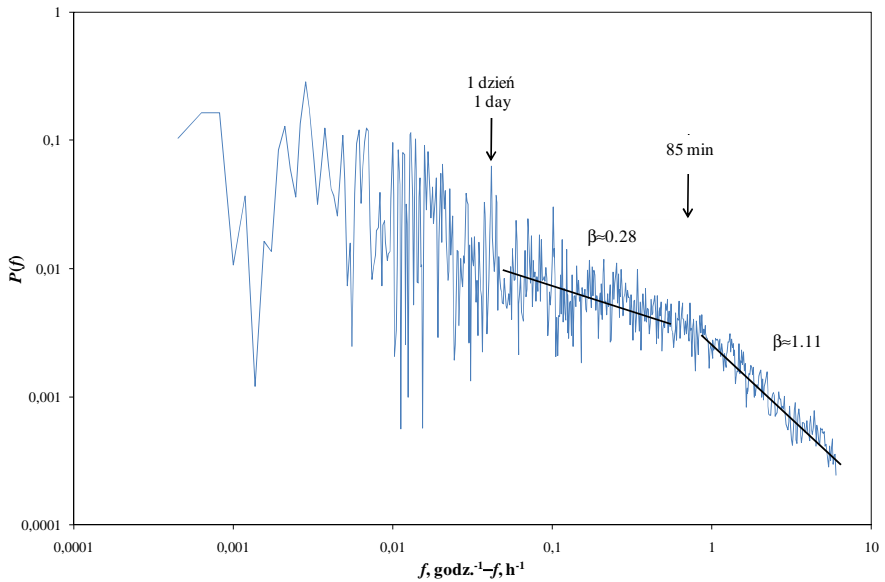
$$P(f) = f^{-\beta} . \quad (5.8)$$

Nachylenie widma w zakresie wysokich częstotliwości było większe od 1 ( $\beta > 1$ ). Niemniej, przy spadku częstotliwości do około 0,70–0,55 godz.<sup>-1</sup>, odpowiadających czasom w zakresie około 85–110 minut, obserwowane było „przerwanie” widma (ang. spectral "break"). Przerwanie to oznacza, że w obrębie częstotliwości bliskich wspomnianym 0,70–0,55 godz.<sup>-1</sup> obserwowany był obszar przejściowy pomiędzy skalowym, zgodnym ze wzorem 5.8 charakterem widma dla częstotliwości wyższych i niższych. Po przekroczeniu obszaru przerwania, w przybliżeniu skalowy przebieg widma mocy był obserwowany co najmniej do częstotliwości wynoszących około 0,04 godz.<sup>-1</sup> (około 1 dzień), a w przypadku niektórych szeregów rocznych nawet do jeszcze niższych częstotliwości równych około 0,005 (około 8 dni). Jak łatwo zauważyć, w omawianym zakresie niskich częstotliwości wartości widma podlegały zdecydowanie większym wahaniom, a generalnie nachylenie tego segmentu widma było znacznie mniejsze ( $\beta \approx 0,3$ ).



Rys. 5.2. Widmo mocy 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji deszczów z Wrocławia w roku 1964

Fig. 5.2. Energy spectrum for the 5-minute rainfall time-series from Wrocław in the year 1964

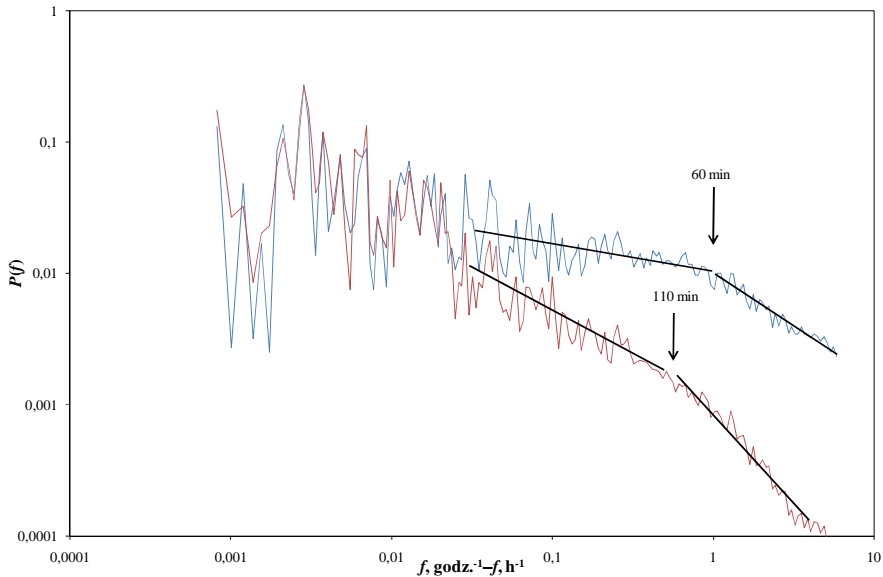


Rys. 5.3. Widmo mocy 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji deszczów z Wrocławia w roku 1997

Fig. 5.3. Energy spectrum for the 5-minute rainfall time-series from Wrocław in the year 1997

Otrzymane wyniki pozostawały w dużej zgodności z wynikami innych autorów. Na przykład de Lima [1998] obserwowała podobne widma energii dla szeregów czasowych natężeń deszczów 2-minutowych i 15-minutowych (zdigitalizowanych z pasków pluwiograficznych) z Vale Formoso w Portugalii oraz dla 1-minutowego (pseudo) szeregu czasowego natężeń deszczów („zrekonstruowanego” na podstawie pomiarów wykonanych deszczomierzem korytkowym, ang. "tipping-bucket gauge") z Nancy we Francji. Uzyskane wykładniki potęgowe skalowania widm wynosiły odpowiednio dla obydwu lokalizacji  $\beta = 0,73$  i  $\beta = 0,96$  w zakresie wysokich częstotliwości oraz  $\beta = 0,15$  i  $\beta = 0,21$  w zakresie niskich częstotliwości. Pomiedzy obydwoma reżimami skalowego charakteru widm występował obszar przejściowy przerwania, który dla Vale Formoso znajdował się w pobliżu  $f = 0,6 \text{ godz.}^{-1}$  (100 minut), a dla Nancy był przedziałem częstotliwości odpowiadających czasom w zakresie od 17 do 80 minut. Gładki przebieg widma, zgodny z zależnością potęgową, uznawany za rezultat skalowania był obserwowany w przypadku obydwu lokalizacji dla częstotliwości odpowiadających czasowi nawet do 3 tygodni. Autorka, dzięki dostępowi do kilkuletnich ciągłych szeregów czasowych, obejmujących także okresy zimowe, mogła zidentyfikować na podstawie analizy widm wyraźne występowanie rocznej cykliczności opadów. Ponadto, na podstawie pogłębionej analizy widm szeregów, opartej na wyznaczeniu widm dla  $\eta$ -wykładniczo renormalizowanych danych (metodyka renormalizacji  $\eta$ -wykładniczej jest przedstawiona szczegółowiej przy dyskusji nad metodą podwójnego momentu śladu), wykazała, że przerwanie nie ma charakteru fundamentalnego. W widmach renormalizowanych obserwowała bowiem przesunięcie przerwania ku niższym bądź wyższym częstotliwościom, a więc było ono zależne od natężenia procesu. Obserwacje te skłaniały w połączeniu z innymi technikami eksploracji jakości posiadanych danych do przyjęcia hipotezy, że dyskutowane przerwanie miało charakter sztuczny i wynikało ze skalowo zależnych problemów z pomiarem opadów i digitalizacją pasków pluwiograficznych.

Przykładowe widma dla renormalizowanego szeregu rejestracji deszczów z Wrocławia z roku 1997 dla dwóch wartości wykładnika  $\eta = 0,7$  i  $\eta = 1,4$  są przedstawione na rysunku 5.4. W trakcie obliczeń dokonano ich silnego wygładzenia, co pozwala łatwiej zauważyć, że renormalizacja szeregu doprowadziła do przesunięcia pierwotnego przerwania skalowania z 85 minut (patrz rys. 5.3) do odpowiednio około 110 i 60 minut. Analogicznie zatem, jak w przypadku wyników de Limy [1998], operacja renormalizacji dla wartości  $\eta$  mniejszych od 1 bądź większych od 1, prowadząca odpowiednio do osłabienia bądź wzmocnienia natężenia procesu, owocowała odpowiednio przesunięciem przerwania ku wyższym lub niższym częstotliwościom. Od początku badań szeregów rejestracji deszczów z Wrocławia nasuwa to przypuszczenie o istotnych ograniczeniach co do maksymalnego poziomu szczegółowości informacji o procesie opadowym, jaki może być dostępny dzięki zdigitalizowanym zapisom pluwiograficznym. To bardzo istotne zagadnienie z punktu widzenia praktycznego pozyskiwania danych do modelowania hydrodynamicznego systemów kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej w kraju, nie jest w tym miejscu dalej rozwijane, stanowi jednak przedmiot pogłębionej dyskusji w dalszej części pracy.



Rys. 5.4. Widmo mocy 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji deszczów z Wrocławia w roku 1997 po jego renormalizacji dla  $\eta = 1,4$  (wykres górny koloru niebieskiego) i dla  $\eta = 0,7$  (wykres dolny koloru czerwonego)

Fig. 5.4. Energy spectrum for the 5-minute rainfall time-series from Wrocław in the year 1997, after its renormalization for  $\eta = 1,4$  (top blue colour plot) and for  $\eta = 0,7$  (bottom red colour plot)

W przybliżeniu gładki przebieg widma gęstości mocy według zależności potęgowej był także obserwowany przez Pathirana i in. [2003] dla 18 stacji meteorologicznych w Japonii. Niemniej, autorzy ci operowali jedynie godzinowymi sumami opadów, co zapewne tłumaczy brak dyskusowanego powyżej przerwania w zakresie częstotliwości odpowiadających około 1 godzinie. Wskazywali oni, że skalowy charakter widma utrzymuje się do częstotliwości odpowiadających 1 dobie lub też nawet 2 lub 3 dniami i może być opisywany wykładnikiem  $\beta \approx 1,0$ . Wyników tych nie można jednakże porównywać w sposób ilościowy z wynikami przedstawionymi na rysunkach 5.2 i 5.3, z uwagi na odmienne przyjęcie metodyki estymacji widma mocy przez Pathirana i in. [2003] (o możliwości stosowania wielu alternatywnych technik obliczania gęstości widmowej mocy PSD wspomniano już na wstępie niniejszego podrozdziału). Analogiczne wyniki wskazujące na skalowy charakter widma mocy w zakresie częstotliwości odpowiadających czasom od 2 godzin do około 3 dni były także prezentowane przez Olssona [1998] dla szeregu opadowego z Lund w Szwecji. Skalowy charakter widma energii był również obserwowany przez Menabde i in. [1997] dla 15 sekundowych szeregów czasowych rejestracji deszczów z Norfolk Island i Matawai w Nowej Zelandii, pochodzących ze specjalnie opracowanych precyzyjnych deszczomierzy. Przebieg widma, zgodny z zależnością potęgową i charakteryzowany pojedynczym wykładnikiem  $\beta = 1,52$  (Norfolk Island) i  $\beta = 1,37$  (Matawai), był stwierdzony w całym prze-

dziale częstotliwości, odpowiadającym czasom od 4 minut do 17 godzin. Można przypuszczać, że brak przerwania widma i jego stałe nachylenie na wykresie logarytmicznym mogło wynikać ze znacznie lepszej jakości danych pomiarowych. Pomimo dysponowania szeregami czasowymi rejestracji deszczów, o niespotykanym nadal w powszechnej praktyce służb meteorologicznych poziomie rozdzielczości czasowej, Menabde i in. [1997] w sposób świadomy nie rozszerzali zakresu badanych częstotliwości (nie rozpatrywali czasów krótszych od 4 min) w celu uniknięcia możliwych efektów ubocznych, wynikających z kwantyzacji pomiarów.

Podsumowując przeprowadzoną analizę widmową szeregów opadowych z Wrocławia, można stwierdzić, że otrzymane wyniki wskazują na skalowy charakter lokalnego procesu opadowego. Charakter ten nie może jednak być opisany przez pojedynczy wykładnik skalowania, jak dla prostego procesu monofraktalnego, co jednocześnie ujawnia wielkoskalowy charakter procesu, typowy dla multifraktali. Uzasadnia to potrzebę zastosowania narzędzi warsztatu multifraktalnego dla opisu i modelowania badanych procesów opadowych. Co jest istotne, skalowy charakter widma mocy był obserwowany w zakresie częstotliwości odpowiadających czasom od 5 minut do co najmniej 24 godzin. Rodzi to uzasadnioną nadzieję na praktyczną możliwość przeprowadzania operacji skalowania ku dołowi (ang. downscaling), czyli dekompozycji dobowych sum opadów nawet na składowe sumy 5-minutowe i tworzenie syntetycznych szeregów, w sposób możliwie wiarygodny naśladujących skomplikowany proces opadowy.

## 5.2. Metoda funkcyjnego zliczania pudełek

Metoda funkcyjnego zliczania pudełek (ang. functional box-counting method) jest prostą metodą estymacji wielu wymiarów fraktalnych opisujących pojedynczy proces multifraktalny. Jest to w zasadzie rozszerzenie klasycznej metody zliczania pudełek, która była stosowana w tak fundamentalnych badaniach nad zbiorami fraktalnymi, jak choćby wspomniana na wstępie rozdziału 4 analiza długości fiordowego wybrzeża Norwegii [Feder 1988]. W klasycznej metodzie zliczania pudełek oszacowanie wymiaru fraktalnego odbywa się na podstawie zależności 4.4. Zwykle przy tym nie mówi się o hipersześcianach o boku  $\lambda^{-1}$ , lecz po prostu o pudełkach (ang. boxes), skąd nazwa metody. Uwieńczeniem metody zliczania pudełek jest wykonanie wykresu logarytmów wartości liczby nie-pustych pudełek  $N_{\lambda,A}$  jako funkcji logarytmu wartości  $\lambda$ . Na tym podwójnie logarytmicznym wykresie skalowanie opisane potęgową zależnością 4.4 manifestuje się liniową zależnością obydwu wielkości, a wymiar fraktalny zbioru  $A$  może być wyznaczony jako nachylenie prostej najlepszego dopasowania tejże zależności.

Metoda funkcyjnego zliczania pudełek została zaproponowana przez Lovejoya i in. [1987], a jej *novum* w odniesieniu do klasycznego zliczania pudełek jest rozpoczęcie analizy od zdefiniowania właściwych zbiorów topologicznych, o skończonych rozdzielczościach, powiązanych z określonymi poziomami natężenia procesu. Dla każdego z tych zbiorów dokonuje się osobnego oszacowania jego wykładnika skalowania, a więc wymiaru fraktalnego, stosując klasyczną metodę zliczania pudełek. W tym celu każdy ze zbiorów jest kilkakrotnie pokrywany w całości nie-zachodzącymi na siebie

pudełkami o stałym i wzrastającym za każdym razem wymiarze. Każdorazowo, dla kolejnych wymiarów pudełek (całej sekwencji rozdzielczości badania) zliczana jest liczba pudełek wypełnionych przez co najmniej jeden element zbioru. Na podstawie takich systematycznych studiów i po opracowaniu funkcjonalnych zależności ich wyników względem skali wymiarów pudełek i poziomów granicznych natężenia procesu  $T_{hr}$  możliwe jest określenie funkcji wymiaru fraktalnego  $D(T_{hr})$ . Z funkcji tej natomiast można jest otrzymać funkcję kowymiaru  $c(\gamma)$ , po uprzednim powiązaniu granicznych natężeń procesu z rzędami osobliwości, przy wykorzystaniu przybliżenia o postaci [Gabriel i in. 1988]:

$$T_{hr} \approx \lambda^\gamma, \quad (5.9)$$

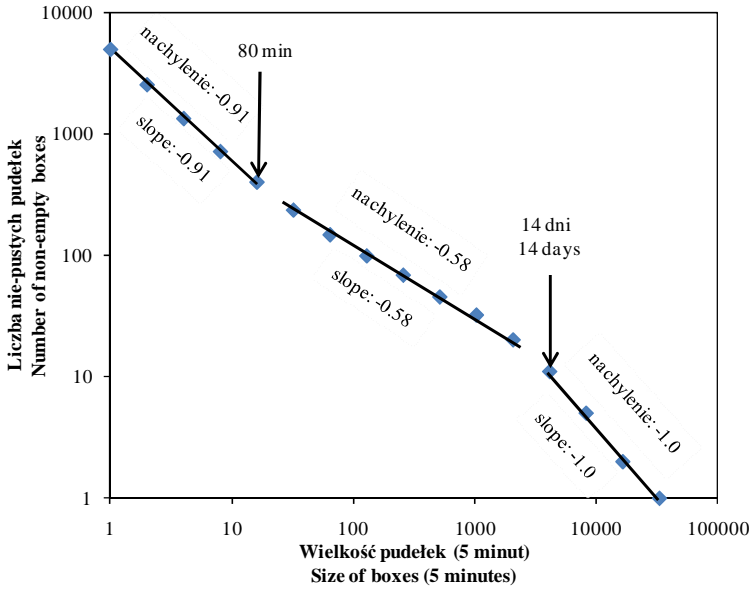
gdzie:  $\lambda$  – współczynnik skali rozdzielczości.

Metoda funkcyjnego zliczania pudełek jest bardzo prostą obliczeniowo, gdyż unika się w niej konieczności obliczania momentów statystycznych. Jednak prostota ta jest nieodłącznie stowarzyszona z oczywistymi ograniczeniami metodyki. Przed wszystkim metoda ta jest ogólnikowym estymatorem multifraktalnego charakteru zbioru, gdyż podstawowym pytaniem, jakie w niej stawiamy, jest to: czy w pudełku zawarty jest jakikolwiek element zbioru, a nie, ile jest zawartych elementów zbioru? Tym samym jest to estymator typu wszystko albo nic, co czyni tę procedurę znacznie mniej atrakcyjną w porównaniu z możliwościami bezpośredniego badania samej gęstości procesu, przy użyciu innych metod warsztatu multifraktalnego. Dodatkowo sytuację komplikują trudności z powiązaniem granicznych natężeń procesu z rzędami osobliwości i tendencją do „wysycania” (ang. saturation) w pewnych określonych sytuacjach. Wówczas to wszystkie pudełka powyżej pewnej wielkości są zapełnione, co może prowadzić w efekcie do fałszywych założeń w skalowaniu.

W celu funkcyjnego zliczenia pudełek szeregów opadowych z Wrocławia przygotowano program obliczeniowy BOX w języku Pascal. W programie tym przyjęto trzy poziomy graniczne intensywności procesu wynoszące odpowiednio: 0, 1 i 5 mm·godz.<sup>-1</sup>. Wyniki funkcjonowania programu na przykładzie szeregu czasowego rejestracji deszczów z roku 1997 są przedstawione na rysunkach 5.5 i 5.6. Wykresy na tych rysunkach obejmują skale czasowe od 5 minut do około 114 dni.

Na rysunku 5.5 został przedstawiony jedynie wykres uzyskany przy założeniu poziomu granicznego natężenia deszczu równego 0 mm·godz.<sup>-1</sup>. Na wykresie tym wyraźnie zaznaczają się trzy odmienne regiony skalowej (liniowej w układzie logarytmicznych osi) zależności pomiędzy liczbą nie-pustych pudełek a ich wielkością, a więc skalą czasu. Dwa zewnętrzne regiony, jeden dla bardzo dużych skal czasu i drugi dla bardzo małych skal czasu, mają zbliżone wartości nachylenia zależności skalowych, wynoszące odpowiednio: -0,91 i -1,00. Środkowy region zawarty pomiędzy skalami czasowymi od około 80 minut do około 2 tygodni charakteryzuje się znacząco różniącym się nachyleniem, równym -0,58. Nachylenie to zgodnie z ideą metody zliczania pudełek jest oszacowaniem wymiaru fraktalnego geometrycznej „podstawy” wystąpień deszczów  $D \approx 0,58$ , który to jest zdefiniowany w jednowymiarowej przestrzeni czasu. Wartość ta jest zbliżona do wymiaru  $D \approx 0,50$ , wyznaczonego przy użyciu tej samej metodyki przez de Limę [1998] dla 2-minutowych szeregów czasowych rejestracji deszczów z Vale For-

moso (Portugalia). Ponadto autorka ta obserwowała podobny zakres środkowego regionu, zależności skalowej od około 2 godzin do około 3 tygodni.

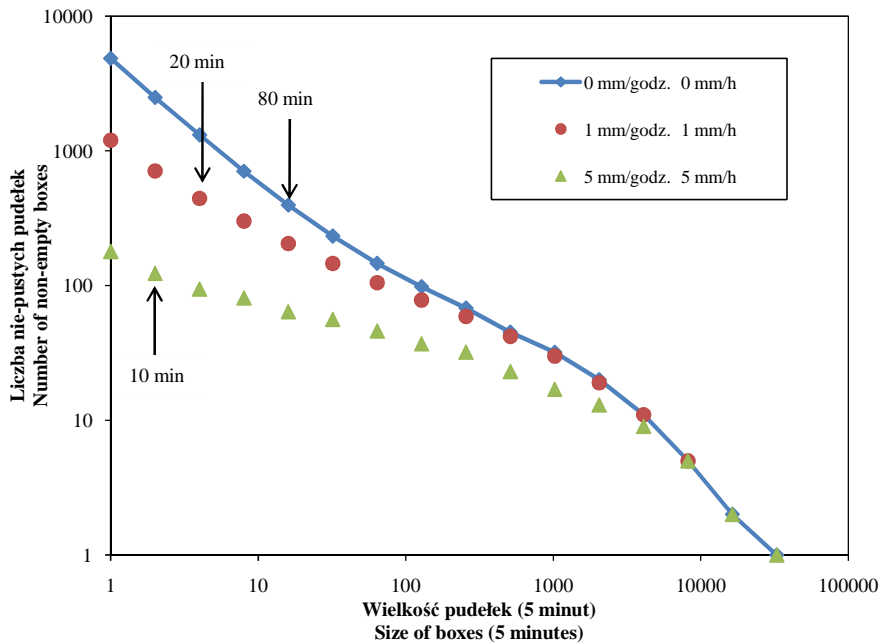


Rys. 5.5. Wyniki funkcyjnego zliczania pudełek dla 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji natężeń opadów z Wrocławia w 1997 r. (wyniki jedynie dla poziomu granicznego natężenia równego 0 mm·godz.<sup>-1</sup>)

Fig. 5.5. Results of box-counting for the 5-minute rainfall intensity time-series from Wrocław in the year 1997 (results for only one intensity threshold equals 0 mm·h<sup>-1</sup>)

W przypadku dwóch zewnętrznych regionów na rysunku 5.5 uwidacznia się wspomniany już problem „wysycenia”. Jest on oczywisty w przypadku skrajnego prawego regionu, gdzie dla wzrastających od skali około 2 tygodni wymiarów pudełek wszystkie z nich są już wypełnione. W następstwie tego liczba nie-pustych pudełek jest zawsze równa łącznej liczbie pudełek, a spadek ich liczby dla zwiększających się wymiarów jest prostym następstwem zmniejszenia się ich globalnej liczby. Wysycenie w obrębie skrajnego lewego regionu wykresu ma całkowicie odmienną genezę. Dla bardzo małych skal czasu poniżej około 80 minut zbiór okresów z opadem deszczu, opisywany przez posiadany szereg czasowy, prawie całkowicie wypełnia obserwowaną przestrzeń czasu, przez co nie zdarzają się prawie okresy bezdeszczowe. Tym samym konsekwentny wzrost liczby nie-pustych pudełek wraz ze zmniejszaniem się ich wymiaru jest zasadniczo rezultatem tylko wzrostu globalnej ilości pudełek. Mechanizm wypełnienia obserwowanej przestrzeni czasu przez zbiór okresów z opadem dla małych skal czasu może wydawać się trudnym do zrozumienia. W jego rozumieniu może istotnie pomóc analiza rysunku 4.1. Rysunek ten dowodzi, że zmiana poziomu rozdzielczości czasowej pomiaru z np. 1 sekundy do 30 sekund nie tylko zawęży odgórnie zakres

obserwowanych wartości, ale także oddolnie zmniejsza liczbę okresów bez deszczu, a nawet wyklucza ich pojawianie się. Jest to jeszcze wyraźniej widoczne po przejściu do rozdzielczości 5 minut, gdzie na całym wykresie nie ma już wartości zerowych strumienia energii kinetycznej deszczu. Tak więc, wysycenie dla niskich skal jest rezultatem niedoskonałości aparatury pomiarowej w zakresie rejestracji nieciągłości i zmienności procesu opadowego w małych skalach.



Rys. 5.6. Wyniki funkcyjnego zliczania pudełek dla 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji natężeń opadów z Wrocławia w 1997 r. (porównanie wyników dla trzech różnych poziomów granicznych natężeń: 0, 1 i 5 mm·godz.<sup>-1</sup>)

Fig. 5.6. Results of box-counting for the 5-minute rainfall intensity time-series from Wrocław in the year 1997 (results comparison for three different intensity thresholds equal: 0, 1 and 5 mm·h<sup>-1</sup>)

O słuszności implikowanej powyżej genezy wysycenia dla niskich skal przekonuje też porównanie granicznego czasu jego ujawnienia się, czyli 80 minut z częstotliwością sztucznego przerwania w skalowaniu widma mocy (rys. 5.3). Okazuje się że częstotliwość 0,7 godz.<sup>-1</sup> praktycznie odpowiada wspomnianemu czasowi 80 minut. Analogiczne wyniki w zakresie funkcyjnego zliczania pudełek i ich zgodności, co do granicznego czasu wysycenia dla małych skal z czasami przerwania skalowania widma mocy, były obserwowane także dla szeregów czasowych z Wrocławia dla innych lat. Potwierdza to jeszcze mocniej hipotezę o istotnych ograniczeniach co do maksymalnego poziomu szczegółowości informacji o procesie opadowym, jaki może być dostępny dzięki zdigi-



talizowanym pluwiogramom. Było to motywacją dla głębszej eksploracji zdigitalizowanych szeregów czasowych. Przykładowe rezultaty takiej analizy dla przekonwertowanych do formatu cyfrowego zapisów pluwiograficznych z roku 1997 są zestawione w tabeli 5.1.

Tabela 5.1

Table 5.1

Statystyki digitalizacji zapisów pluwiograficznych ze stacji Wrocław-Swojec w roku 1997

Digitization statistics of pluviograph records from Wrocław-Swojec in the year 1997

Czas trwania okresu digitalizacji, $\Delta t$ , min Duration of the digitizing-interval, $\Delta t$ , min.	Udział procentowy w całości zdigitalizowanych okresów z deszczem, % Contribution to total digitized rainy-periods, %	Średni czas trwania okresu digitalizacji / jego odchylenie standardowe, min Average duration of the digitizing-interval / its standard deviation, min.	Średnie natężenie deszczu w okresie digitalizacji / jego odchylenie standardowe, $\text{mm}\cdot\text{h}^{-1}$ Average rainfall intensity at the digitizing-interval / its standard deviation, $\text{mm}\cdot\text{h}^{-1}$
$0 < \Delta t \leq 15$	29,6	6,08 / 3,77	5,597 / 15,852
$15 < \Delta t \leq 30$	24,4	20,42 / 4,12	0,852 / 0,778
$30 < \Delta t \leq 60$	16,0	43,15 / 9,62	0,178 / 0,303
$60 < \Delta t \leq 120$	15,0	83,01 / 16,77	0,026 / 0,020
$120 < \Delta t \leq 180$	4,5	156,60 / 4,33	0,005 / 0,002
$180 < \Delta t \leq 360$	10,5	220,89 / 29,30	0,013 / 0,006

Analiza informacji zawartych w tabeli 5.1 wskazuje przede wszystkim na istnienie zależności pomiędzy czasem trwania okresów digitalizacji (czasem pomiędzy kolejnymi odczytami z pluwiogramów, w trakcie ich konwersji do formatu cyfrowego) a natężeniem deszczu. Wysokie natężenia deszczów rzędu kilku milimetrów na minutę były powiązane z częstszym odczytem pluwiogramów, wynoszącym średnio raz na około 6 minut i zwykle nieprzekraczającym granicy 10 minut. Natomiast dla natężeń nieco poniżej  $1 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$  gęstość próbkowania pluwiogramów wyraźnie się zmniejszała. Czas pomiędzy kolejnymi odczytami pluwiogramów wydłużał się znacząco do około 21 minut. Czas ten ulegał dalszemu, każdorazowo około dwukrotnemu, wydłużeniu w przypadku spadku wartości natężenia o około jeden rząd wielkości, do odpowiednio około  $0,2 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$  i  $0,03 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$ . Jak łatwo też zauważyć, jedynie niespełna 30% całości trwania okresów deszczowych w roku 1997 została zdigitalizowana ze średnim krokiem czasowym zbliżonym do 5 minut. Tak dobrej rozdzielczości digitalizacja dotyczyła jedynie deszczów o najwyższych natężeniach rzędu około  $5,6 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$ . Dla porównania, również 30% okresów deszczowych w roku 1997 zostało zdigitalizowanych ze średnim krokiem czasowym większym bądź równym około 83 minutom. Ta niskiej rozdzielczości digitalizacja miała miejsce dla opadów o bardzo niskich natężeniach, mniejszych od średnio około  $0,03 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$ . Dla wszystkich okresów o niskiej rozdzielczości digitalizacji ich późniejszy podział na bazowe okresy 5-minutowe przy tworzeniu szeregu czasowego był zabiegiem wykluczającym *a priori* zmienność procesu w tym czasie, a więc w sposób sztuczny redukującym dynamikę procesu opadowego obserwowanego w tej skali czasu.

Wspomniany powyżej czas około 83 minut, jako graniczny w zakresie digitalizacji danych pluwiograficznych, pozostaje w pełnej zgodności z diskutowanym już w tym rozdziale „przerwaniem” widma dla czasu 85 minut (rys. 5.3) i czasem 80 minut jako granicą wysycenia przy zliczaniu liczby nie-pustych pudełek (rys. 5.5). Analogiczne zjawiska były obserwowane przez de Limę [1998] dla zdigitalizowanych pluwiogramów z Vale Formoso. Na podstawie ich analizy autorka wnioskuje o wprowadzaniu charakterystycznych, zależnych od natężeń opadów, skal w zbior danych przez sam proces digitalizacji pluwiogramów. Twierdziła ona, że mało-skalowa zmienność opadu jest tracona zarówno w procesie pomiaru opadu z uwagi na ograniczenia, co do dokładności zapisów przez same pluwiografy, jak i w późniejszym procesie digitalizacji pluwiogramów, z uwagi na ograniczenia dokładności pracy operatorów digitizerów. W ramach badań własnych starano się już na wstępie zminimalizować wpływ tego drugiego źródła błędów, przez implementację komputerowo wspomaganego rozpoznawania przebiegu krzywych zapisów pluwiograficznych. Pomimo usunięcia elementu subiektywnego wyszukiwania zmian w przebiegu krzywych zapisów przez człowieka nie udało się uniknąć zamazania mało-skalowej dynamiki procesu opadowego. Być może jedynym rezultatem tego zabiegu były zdecydowanie większe wartości standardowych odchyłeń średnich czasów trwania okresu digitalizacji i natężeń deszczów w okresie digitalizacji (tab. 5.1) w stosunku do danych podawanych przez de Limę [1998]. Wskazuje to jednocześnie na istotne niedoskonałości używanego standardowo do niedawna jeszcze w kraju instrumentarium pomiarowego natężeń deszczów, opartego o pluwiografy.

Powracając do analizy wyników funkcyjnego zliczania pudełek, warto zauważyć zmiany zachodzące w przebiegu otrzymywanych zależności dla różnych wartości natężeń granicznych deszczów (rys. 5.6). Jednocześnie ze wzrostem natężenia granicznego zakres lewostronnego regionu na wykresie ulegał coraz większemu zawężeniu, kończąc się na około 20 lub 10 minutach odpowiednio dla natężeń równych 1 i 5 mm-h<sup>-1</sup>. Prawdopodobnie ta, podobnie jak w przypadku opisywanego powyżej czasu 80 minut i natężenia granicznego równego 0 mm-h<sup>-1</sup>, znajduje swoje pełne odbicie w danych zawartych w tabeli 5.1. Zgodnie z danymi tabeli średnie czasy trwania okresu digitalizacji wynoszące około 20 i 6 minut są powiązane ze średnimi wartościami natężeń deszczów w okresie digitalizacji równymi odpowiednio około 0,8 i 5,6 mm-h<sup>-1</sup>. W lewostronnym regionie na rysunku 5.6, dla większych od zera wartości natężeń granicznych, były także obserwowane znacznie mniejsze wartości bezwzględne nachylenia zależności skalowych wynoszące odpowiednio: 0,72 i 0,54. Wytlumaczeniem tego jest fakt, że ze wzrostem natężenia granicznego spada liczba elementów zbioru realizacji procesu opadowego, spełniających kryterium przewyższenia tego natężenia granicznego.

Charakterystyczny był także spadek wartości bezwzględnego nachylenia zależności skalowych w środkowym regionie wykresu na rysunku 5.6. Tak więc, oszacowanie za jego pomocą wymiaru fraktalnego dla wzrastających wartości granicznych natężenia, równych 1 i 5 mm-h<sup>-1</sup>, malało i wynosiło odpowiednio:  $D \approx 0,48$  i  $D \approx 0,31$ . Prowadzi to do konkluzji, że proces opadowy nie może być charakteryzowany przez pojedynczy wymiar fraktalny, lecz przez całą hierarchię wymiarów fraktalnych odpowiadających różnym poziomom granicznym natężenia opadu. Na tej podstawie można wnioskować o multi-fraktalnym charakterze badanych szeregów czasowych rejestracji deszczów z Wrocławia.

### 5.3. Metoda rozkładu prawdopodobieństwa/ wielokrotnego skalowania

Metoda rozkładu prawdopodobieństwa/wielokrotnego skalowania (ang. probability distribution/multiple scaling), nazywana w skrócie metodą PDMS, jest techniką badań multifraktalnych ukierunkowaną na oszacowanie funkcji kowymiaru  $c(\gamma)$ , skalowania rozkładów prawdopodobieństwa studiowanego procesu [Lovejoy i Schertzer 1990a, Schertzer i Lovejoy 1989]. Metoda ta opiera się na poniższej zależności:

$$Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) = F\lambda^{-c(\gamma)}, \quad (5.10)$$

gdzie:  $F$  – czynnik mieszczący w sobie stałe proporcjonalności słabo zależne od  $\gamma$  i wolno zmieniające się wraz z  $\lambda$ , a  $Pr()$  oznacza rozkład prawdopodobieństwa.

W celu obliczenia rozkładów prawdopodobieństwa, podobnie jak w metodzie zliczania pudełek, odpowiedni region  $D$ -wymiarowej przestrzeni jest pokrywany przez  $N_\lambda = \lambda^D$  nie-nakrywających się pudełek o objętości  $\lambda^D$ . Następnie zlicza się liczbę pudełek  $N_\lambda(\gamma)$  z natężeniem  $\varepsilon_\lambda$  spełniającym warunek:

$$\frac{\log(\varepsilon_\lambda)}{\log(\lambda)} \geq \gamma. \quad (5.11)$$

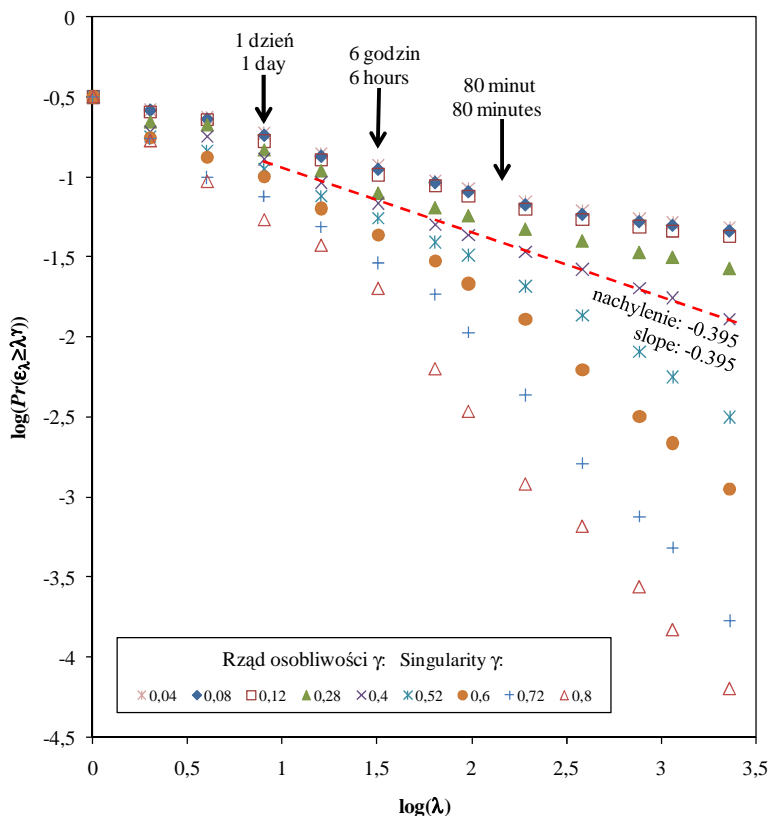
Na podstawie znajomości liczby tych pudełek możliwe jest oszacowanie wartości prawej strony równania 5.10:

$$Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \frac{N_\lambda(\gamma)}{N_\lambda}. \quad (5.12)$$

Operacja taka jest powtarzana dla różnych wartości osobliwości  $\gamma$  i dla zmniejszających się wartości współczynnika skali  $\lambda$ . Na tej podstawie otrzymywane są kolejne wartości funkcji kowymiaru dla różnych wartości  $\gamma$ , po określeniu bezwzględnych wartości nachylenia wykresów zależności logarytmu  $N_\lambda(\gamma)/N_\lambda$  względem logarytmu  $\lambda$ .

Pomimo pozornego, dużego podobieństwa metod funkcyjnego zliczania pudełek i PDMS, różnią się one bardzo istotnie. W metodzie PDMS bada się poziomy natężenia zależne bezpośrednio od rzędu osobliwości  $\gamma$  w skali charakteryzowanej przez  $\lambda$  ( $\varepsilon_\lambda \approx \lambda^\gamma$ ), podczas gdy w metodzie funkcyjnego zliczania pudełek korzysta się z ustalonych granicznych natężeń. Tak więc w metodzie funkcyjnego zliczania pudełek studiuje się topologiczne zbiory determinowane granicznymi wartościami natężenia, a w metodzie PDMS dane o natężeniu procesu są poddawane agregacji w różnych badanych skalach.

Aby przestudiować posiadane szeregi czasowe z użyciem metody rozkładu prawdopodobieństwa/wielokrotnego skalowania, przygotowany został specjalny program obliczeniowy PDMS. Rezultaty jego działania na przykładzie szeregu czasowego pomiarów opadów z Wrocławia dla roku 1997 są zobrazowane na rysunku 5.7.



Rys. 5.7. Wykres w skali podwójnie logarytmicznej zależności prawdopodobieństwa przewyższenia poziomów natężenia deszczu dla różnych wartości osobliwości  $\gamma$  względem współczynnika skali  $\lambda$ , otrzymany dla 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji natężeń opadów z Wrocławia w 1997 r., dla skal czasowych od  $\lambda = 2304$  (5 min) do  $\lambda = 1$  (8 dni)

Fig. 5.7. Log-log plot of the probability of exceeding rainfall-intensity levels for different values of singularity  $\gamma$  relation with scale parameter  $\lambda$ , obtained for the 5-minute rainfall intensity time-series from Wrocław in the year 1997, for time scales from  $\lambda = 2304$  (5 min.) up to  $\lambda = 1$  (8 days)

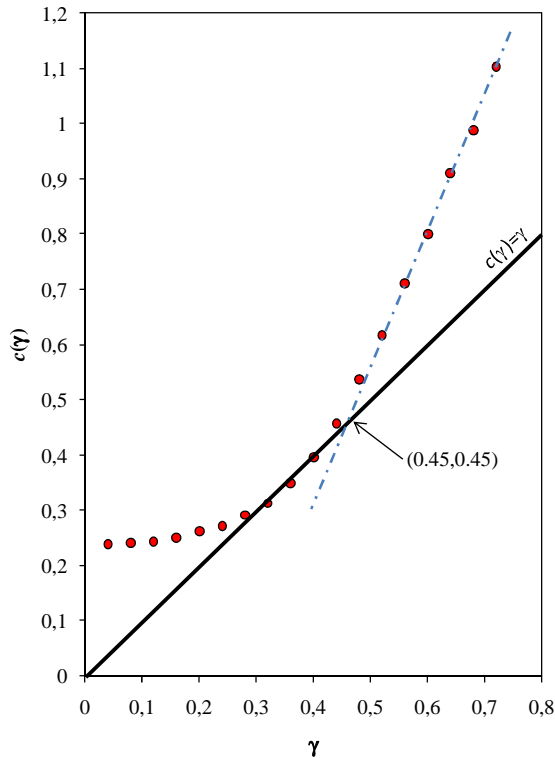
Aby podnieść czytelność rysunku 5.7 na obszarze wykresu, zaznaczono zależności prawdopodobieństwa przewyższenia poziomów natężenia deszczu względem współczynnika skali  $\lambda$ , jedynie dla wybranych wartości osobliwości  $\gamma$ , aczkolwiek obliczenia w programie PDMS zostały przeprowadzone z większą liczbą wartości  $\gamma$ . Na wykresie widoczne jest występowanie generalnej zależności skalowej prawdopodobieństwa ( $Pr(\epsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma)$ ), zwłaszcza dla rzędów osobliwości  $\gamma$  bliskich wartości około 0,4. Dla przypadku  $\gamma = 0,4$  na wykresie został zaznaczony przebieg liniowej zależności dopasowania

$\log(\text{Pr}(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma))$  względem  $\log(\lambda)$ , z podaniem jego nachylenia równego  $-0,395$ . Ten idealnie liniowy przebieg zależności skalowej ulegał zaburzeniu zarówno dla niskich natężeń, jak również dla wysokich natężeń. Zależności skalowe dla niskich natężeń, a więc skojarzone z małymi wartościami  $\gamma$  (równymi na wykresie np.  $0,04$ ,  $0,08$  i  $0,12$ ), śledzone od lewej strony, ulegały widocznemu ugięciu ku górze, po przekroczeniu wartości  $\log(\lambda) \approx 2,15$ , co odpowiada w przybliżeniu czasowi 80 minut. W przeciwieństwie do tego zależności skalowe dla wysokich natężeń, determinowanych wysokimi wartościami  $\gamma$  (równymi na wykresie np.  $0,60$ ,  $0,72$  i  $0,80$ ), ulegały wyraźnemu ugięciu ku dołowi, w przedziale wartości od  $\log(\lambda) \approx 0,9$  do  $\log(\lambda) \approx 1,5$ , co odpowiada w przybliżeniu czasom od 24 do 6 godzin. Istnienie takich charakterystycznych ugięć w wykresach zależności  $\log(\text{Pr}(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma))$  względem  $\log(\lambda)$  było także odnotowane w badaniach szeregów opadowych z Vale Formoso (Portugalia) i Nancy (Francja) przez de Limę [1998]. Autorka na tej podstawie wywnioskowała, że niskie natężenia deszczów w posiadanych szeregach czasowych są zawyżone, a wysokie natężenia zaniżone. Refleksja ta wydaje się być także prawdziwą dla analizowanych szeregów czasowych z Wrocławia, zwłaszcza dla niskich natężeń deszczów. Trudno bowiem nie kojarzyć załamania zależności dla czasu równego 80 minut z dyskutowanymi już charakterystycznymi punktami załamania wykresów analizy widmowej (rys. 5.3) oraz funkcyjnego zliczania pudełek (rys. 5.5).

Zaczynając analizę wykresu na rysunku 5.8, należy stwierdzić, że generalnie ma on charakter nieliniowy zgodny z teoretycznym przebiegiem funkcji kowymiaru dyskutowanym w rozdziale 4. Niemniej wyraźnie nieliniowy charakter wykresu utrzymuje się jedynie dla środkowego zakresu rzędów osobliwości od około  $0,3$  do około  $0,50$ . Dla wartości osobliwości większych od  $0,50$  obserwowany jest już liniowy charakter wykresu, zgodny z kierunkiem zaznaczonym na wykresie linią przerywaną. Pozwala to przypuszczać, że widoczna nieciągłość wykresu funkcji kowymiaru jest empirycznym dowodem istnienia multifraktalnego przejścia fazowego, a wymieniona charakterystyczna wartość osobliwości równa  $0,50$  jest osobliwością krytyczną, która winna być oznaczana jako  $\gamma_D$ . Jak będzie to omawiane w następnym podrozdziale, krytyczna osobliwość jest powiązana z krytycznym rzędem momentu  $q_D$ , zależnością:  $\gamma_D = K'(q_D)$  (co wynika ze wzoru 4.36).

W celu diagnozy typu multifraktalnego przejścia fazowego dokonano oszacowania wartości maksymalnej obserwowalnej osobliwości  $\gamma_{\max}$ . Skorzystano przy tym z wygodnej zależności podawanej przez Schertzer'a i in. [1993], która łączy ze sobą trzy wielkości: całkowitą liczbę struktur w posiadanej próbie  $N \cdot N_s$ , stosunek badanych skal  $\lambda$  oraz całkowity wymiar efektywny  $D+D_s$ :

$$N \cdot N_s = \lambda^{D+D_s} . \quad (5.13)$$



Rys. 5.8. Przebieg empirycznej funkcji kowymiaru uzyskany dla 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji natężeń opadów z Wrocławia w 1997 r., dla skal czasowych od  $\lambda = 2304$  (5 min) do  $\lambda = 8$  (24 godz.)

Fig. 5.8. Empirical codimension function plot obtained for the 5-minute rainfall intensity time-series from Wrocław in the year 1997, for time scales from  $\lambda = 2304$  (5 min) up to  $\lambda = 8$  (24 h)

W naszym przypadku iloraz  $N \cdot N_s$ , czyli całkowita liczba struktur w posiadanej próbie to liczba 24-godzinnych okresów w badanym szeregu czasowym z 1997 r., a więc zgodnie z danymi tabeli 3.1:  $N \cdot N_s = 165$ . Natomiast stosunek użytych skal  $\lambda$  dla badanego zakresu od 5 min do 24 godz. równał się ilorazowi:  $\lambda = 2304/8 = 288$ . Ostatecznie, obliczony według zależności 5.11 całkowity wymiar efektywny  $D+D_s$  równał się 0,90. Co za tym idzie, odczytana na tej podstawie z wykresu na rysunku 5.8 przybliżona wartość  $\gamma_{\max}$  wynosiła około 0,63. Jak łatwo zauważyć,  $\gamma_{\max} = 0,63$  było większe od  $\gamma_D = 0,58$ . Pozwala to na traktowanie uzyskanego przebiegu empirycznej funkcji kowymiaru jako rezultatu multifraktalnej transformacji pierwszego rzędu i dla opisu funkcji  $c(\gamma)$  wykorzystywać układ równań 4.54.

Cechą charakterystyczną multifraktalnej transformacji pierwszego rzędu jest liniowy charakter wykresu  $c(\gamma)$ , dla  $\gamma > \gamma_D$ . Obliczenie równania prostej dla tego liniowego odcinka pozwala na oszacowanie wartości  $q_D$  (nachylenie prostej) oraz  $K(q_D)$  (ujemna

wartość wyrazu wolnego), co wynika ze wzajemnego powiązania funkcji  $c(\gamma)$  i  $K(q)$  transformacją Legendre'a (patrz rys. 4.6). Obliczone nachylenie spadku prostej regresji wynosiło 2,42, a wyraz wolny równał się: -0,64, co za tym idzie:  $q_D \approx 2,42$ , a  $K(q_D) \approx 0,64$ . Zgodność tych charakterystyk z rzeczywistym przebiegiem funkcji wykładnika skalowania  $K(q)$  będzie przedmiotem dyskusji w następnym podrozdziale.

Na rysunku 5.8 zaznaczono ponadto punkt charakterystyczny o współrzędnych (0,45,0,45). Punkt ten powstał w wyniku przecięcia linii będącej przedłużeniem dysktowanego powyżej liniowego segmentu empirycznego wykresu kowymiaru z prostą o równaniu  $c(\gamma) = \gamma$ . Zgodnie z rysunkiem 4.15 punkt ten może być traktowany jako oszacowanie wymiaru fraktalnego geometrycznej „podstawy” wystąpień deszczów  $D \approx 0,45$ . Wartość ta jest nieco mniejsza od oszacowania  $D \approx 0,58$  według metody funkcyjnego zliczania pudełek (patrz poprzedni podrozdział). Komentując tę rozbieżność, można, po pierwsze, zwrócić uwagę na fakt, że podobnej skali rozbieżności były w przypadku obydwu metod obserwowane także na przykład przez wspomnianą już de Lime [1989] dla zbioru z Vale Formoso. Po drugie, warto pamiętać, że jak już to było wyjaśniane, metoda funkcyjnego zliczania pudełek pozwala na jedynie ogólne oszacowanie wartości całej hierarchii wymiarów fraktalnych procesu na różnych poziomach jego intensywności, w tym także przy intensywności zerowej skojarzonej z „podstawą” wystąpienia deszczów.

Ostatnim elementem, na który warto zwrócić uwagę przy analizie rysunku 5.8, jest przebieg prostej o równaniu  $c(\gamma) = \gamma$  względem empirycznych wartości funkcji kowymiaru. Prosta ta, jak widać, jest prawie styczną do wykresu empirycznej funkcji kowymiaru, co świadczy o w przybliżeniu zachowawczym charakterze studiowanego procesu (miara stopnia niezachowawczości  $H \approx 0$ , patrz rys. 4.11). Dla uzyskania dokładnej styczności prosta powinna być przesunięta nieznacznie w prawą stronę, co sugeruje niewielką ujemną wartość parametru  $H$  (szersze omówienie wartości parametru  $H$  będzie prowadzona w podrozdziale 5.5).

## 5.4. Metoda momentu śladu

Metoda momentu śladu (ang. trace moment method – TM method) służy do studiowania procesów multifraktalnych pod kątem określenia funkcji skalowania momentów  $K(q)$  oraz alternatywnej funkcji kowymiaru  $C(q)$  (patrz zależność 4.47) [Schertzer i Lovejoy 1987].

Bezpośrednie badanie skalowania klasycznych momentów statystycznych rzędu  $q$  gęstości  $\varepsilon_\lambda$ , w różnych skalach o rozdzielczości  $\lambda$  napotyka na spore ograniczenia. Jak już to było opisywane w rozdziale 4, w mało-skalowej granicy przy  $\lambda \rightarrow \infty$  obserwowane jest osobliwe zachowanie multifraktalne prowadzące do  $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle = \lambda^{K(q)} \rightarrow \infty$  dla wszystkich momentów  $q > 1$ , ponieważ  $K(q) > 0$  dla  $q > 1$ . Dlatego też skalowanie momentów jest badane z użyciem strumieni (całek) gęstości zamiast samych gęstości. Definicja samego strumienia była już także podana w rozdziale 4 (patrz formuła 4.16). Na jej podstawie średnia momentu  $q$  strumienia dla całego zbioru  $A$  może być zapisana, jako:

$$\left\langle \left( \prod_{\lambda} (A) \right)^q \right\rangle = \left\langle \left( \int_A \varepsilon_{\lambda} d^D x \right)^q \right\rangle. \quad (5.14)$$

Niestety, także stosowanie powyższej formuły do bezpośredniego badania procesów multifraktałnych, w tym dla poszukiwania funkcji skalowania momentów  $K(q)$  napotyka na oczywiste ograniczenie wynikające z faktu, że we wzorze 5.14 mogą być stosowane jedynie całkowite wartości wykładnika  $q$  (momenty ułamkowe, niecałkowite nie są bowiem zdefiniowane). Warto jednak zauważyć, że moment  $q$  strumienia  $\prod_{\lambda}(A)$  może zostać zapisany jako:

$$\left( \int_A \varepsilon_{\lambda} d^D x \right)^q = \int_A \int_A \dots \int_A \varepsilon_{\lambda}(x_1) \varepsilon_{\lambda}(x_2) \dots \varepsilon_{\lambda}(x_q) d^D x_1 d^D x_2 \dots d^D x_q. \quad (5.15)$$

Jeśli dokona się zawężenia całkowania w powyższym wzorze do całki kierunkowej w  $qD$  wymiarowej przestrzeni, z kierunkiem pokrywającym się z przekątną (ślądem) (ang. trace) struktury geometrycznej  $A^q$ , to wówczas  $x_1 = x_2 = \dots = x_q$ . Daje to możliwość znacznego uproszczenia prawej strony zależności 5.15 i wprowadzenia wielkości zwanej momentem śladu (ang. trace moment), która jest uśrednieniem dla zbioru  $A$ , tego uproszczonego wyrażenia:

$$Tr_{\lambda}[\varepsilon_{\lambda}^q] = \left\langle \int_A (\varepsilon_{\lambda})^q d^{qD} x \right\rangle, \quad (5.16)$$

gdzie:  $Tr_{\lambda}[\varepsilon_{\lambda}^q]$  – moment śladu rzędu  $q$  w rozdzielczości  $\lambda$ .

Zastąpienie zwykłych momentów przez momenty śladu przynosi oczywistą korzyść. Są one w przeciwieństwie do klasycznych momentów zdefiniowane także dla niecałkowitych wartości  $q$ . Problemem pozostaje tylko estymacja momentów śladu. Mogą one być szacowane przy wykorzystaniu momentów statystycznych gęstości  $\varepsilon$ , całkowanych względem pudełek (ang. boxes) o objętości  $\lambda^{-D}$ . W tym celu zbiór  $A$ , o wymiarze  $D$  na poziomie rozdzielczości  $\lambda$  jest dzielony na  $\lambda^D$  podzbiorów (podstruktur)  $A_{\lambda}$  (co w pełnym zapisie oznacza  $A_{\lambda,i}$ , gdzie  $i = 1, \dots, \lambda^D$ ), przez pokrycie zbioru  $A$  nienachodzącymi na siebie pudełkami o bokach  $\lambda^{-1}$ . Wówczas to strumień przez obserwowany zbiór  $A_{\lambda,i}$  równa się:

$$\prod_{\lambda'}(A_{\lambda,i}) = \int_{A_{\lambda,i}} \varepsilon_{\lambda'} d^D x, \quad (5.17)$$

gdzie:  $\lambda < \lambda'$ , a współczynnik skali  $\lambda'$  jest zdefiniowany jak stosunek zewnętrznej (największej) skali zainteresowania do najmniejszej, znanej skali homogeniczności procesu. Natomiast  $\varepsilon_{\lambda'}$  oznacza natężenia w skali rozdzielczości  $\lambda'$ , które mają „udział” w natężeniach  $\varepsilon_{\lambda,i}$  powiązanych ze zbiorami  $A_{\lambda,i}$ .

Na tej podstawie moment śladu rzędu  $q$  dla rozdzielczości  $\lambda$  jest obliczany przez: po pierwsze, zsumowanie  $\lambda^D$  strumieni cząstkowych podniesionych do potęgi  $q$ , wyznaczonych dla podzbiorów  $A_{\lambda,i}$ , potrzebnych do pokrycia zbioru  $A$ , czyli wyznaczenie  $[\prod_{\lambda'}(A_{\lambda,i})]^q$ , a po drugie, obliczenie średniej dla wszystkich realizacji procesu. Co za tym



idzie, ślad (ang. trace) rzędu  $q$  może być w przybliżeniu obliczany jako suma dla wszystkich pudełek o bokach  $\lambda^{-1}$ :

$$\int_A (\varepsilon_\lambda)^q d^{qD} x \approx \sum_{i=1}^D (\varepsilon_{\lambda,i})^q \lambda^{-qD}. \quad (5.18)$$

Zależność powyższa jest podstawą numerycznego obliczania momentów śladu. Po jej uwzględnieniu w definicji (5.16) momentu śladu i po wykorzystaniu zależności 4.30 i 4.47 można dowieść, że moment śladu rzędu  $q$  zależy nie tylko od skali ( $\lambda$ ), lecz także od wymiaru ( $D$ ) podstawy uśredniania procesu:

$$Tr_\lambda [\varepsilon_\lambda^q] \approx \left\langle \sum_{i=1}^D (\varepsilon_{\lambda,i})^q \lambda^{-qD} \right\rangle = \sum_{i=1}^D \left\langle (\varepsilon_{\lambda,i})^q \right\rangle \lambda^{-qD} = \lambda^D \lambda^{K(q)} \lambda^{-qD} = \lambda^{K(q)-(q-1)D} = \lambda^{(q-1)(C(q)-D)}. \quad (5.19)$$

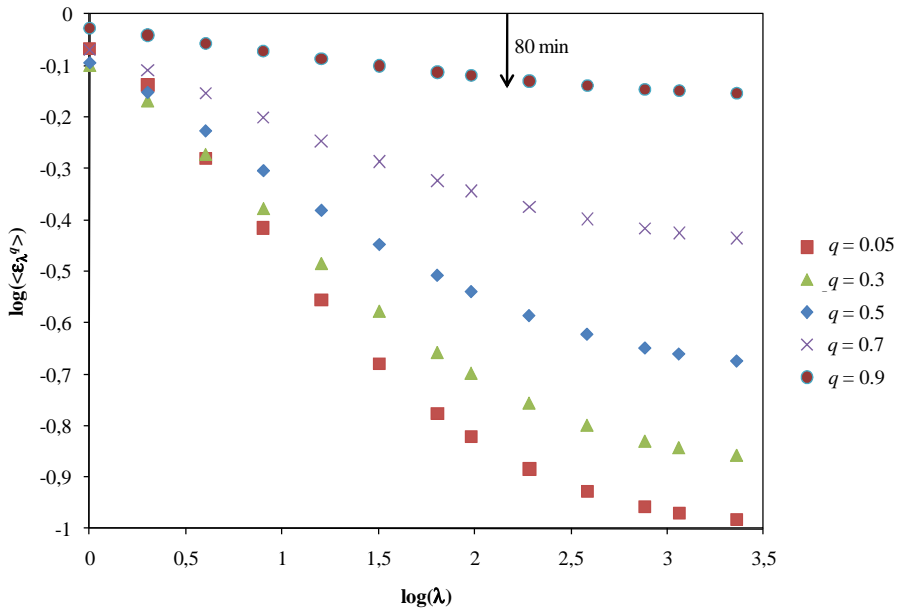
W praktyce obliczeniowej metody TM natężenia  $\varepsilon_{\lambda,i}$  dla zbioru  $A$  o wymiarze  $D$  są uzyskiwane przez uśrednianie do większych skal odpowiadających im natężeń „składowych”  $\varepsilon_{\lambda'(i,j)}$ , gdzie  $j = 1, \dots, (\lambda'/\lambda)^D$ . Następnie wartości tak uśrednionego natężenia  $\varepsilon_\lambda$  w skali  $\lambda$  są podnoszone do potęgi  $q$ . Oszacowanie momentów śladu odbywa się zgodnie ze wzorem 5.19 na podstawie obliczenia średniej z tych spotęgowanych wartości pochodzących z liczby  $\lambda^D$  podzbiorów  $A_\lambda$  zbioru  $A$ . Na koniec, wartości funkcji  $K(q)$  dla konkretnych rzędów momentów są wyznaczane jako wartości nachylenia zależności liniowych  $\log(Tr_\lambda[\varepsilon_\lambda^q])$  względem  $\log(\lambda)$  (co znajduje uzasadnienie po obustronnym zlogarytmowaniu zależności 5.19).

W celu przebadania posiadanych szeregów opadowych z Wrocławia z użyciem metody TM przygotowano program obliczeniowy TRACE. Program umożliwiał analizę identycznych skal czasowych odpowiadających czasom od 5 minut do 8 dni, jak w programie PDMS, a rząd obliczanych momentów śladu zawierał się w przedziale od 0 do 7. Rezultaty działania programu są konsekwentnie zobrazowane na przykładzie szeregu czasowego pomiarów opadów z Wrocławia dla roku 1997 na rysunkach 5.9 i 5.10.

Wykresy na rysunkach 5.9 i 5.10 ulegają charakterystycznemu wygięciu ku dołowi i górze w stosunku do idealnie prostoliniowego przebiegu dla zależności potęgowej w układzie skal logarytmicznych. Analogiczne zjawisko było obserwowane także przez de Limę [1998] dla szeregów opadowych o podobnej rozdzielczości czasowej z Vale Formoso (Portugalia) i Nancy (Francja). Autorka łączyła to zjawisko z nieciągłościami wcześniej stwierdzonymi w wykresach widma mocy szeregów, wykresach funkcyjnego zliczania pudełek czy też na wykresach prawdopodobieństwa przewyższenia poziomów natężenia deszczu dla różnych wartości osobliwości. Na tej podstawie wywnioskowała, że w posiadanych zbiorach danych wysokie natężenia deszczu były zanizowane, a niskie natężenia były zawyżone. Z poglądami takimi trudno nie zgodzić się także w przypadku wyników z Wrocławia. Na wykresie na rysunku 5.9, sporządzonym dla wartości momentów mniejszych od 1, widać wyraźnie załamania przebiegów dla skali odpowiadającej czasowi około 80 minut. Jest więc to po raz kolejny ten sam charakterystyczny czas graniczny dla digitalizacji niskich natężeń deszczów. O fakcie, że załamanie na wykresie na rysunku 5.9 jest powiązane z ograniczeniami w zakresie reprezentacji niskich natężeń w badanym szeregu, przekonuje także jego pogłębiający się charakter dla spadających wartości  $q$ . Załamanie to jest coraz wyraźniejsze wraz ze spadkiem  $q$ , gdyż

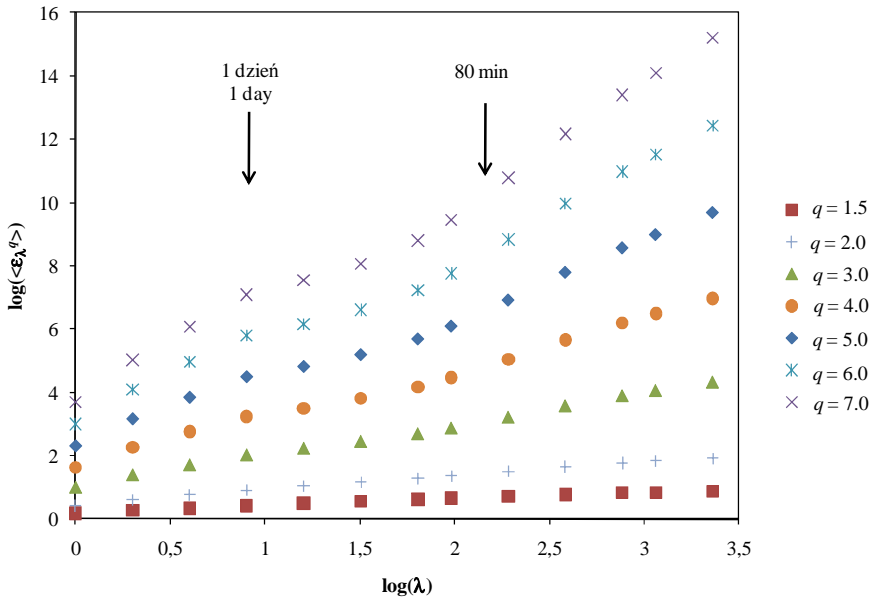
momenty niskiego rzędu uwypuklają słabe, małe osobliwości procesu, a więc małe natężenia deszczu.

W przeciwieństwie do tego momentu większego rzędu prowadzą do podkreślenia silnych osobliwości procesu, a więc wysokich natężeń deszczu. Zapewne, dlatego na wykresie na rysunku 5.10 oprócz załamania dla skali czasu odpowiadającej 80 minutom pojawiło się drugie załamanie dla skali powiązanej z czasem około 24 godzin. Oczywistym wydaje się analogia stwierdzonego na rysunkach 5.9 i 5.10 załamania przebiegu wykresu dla czasu około 80 minut względem załamania zauważonego poprzednio na wykresie prawdopodobieństwa przewyższenia poziomów natężenia deszczu dla różnych wartości osobliwości  $\gamma$  (rys. 5.7). W kontekście drugiego załamania dla czasu około 24 godzin warto zwrócić uwagę na jego zbieżność z ogólnym ograniczeniem skalowego charakteru widma mocy na rysunku 5.3. Załamaniem to dla czasu około 24 godzin należy zapewne łączyć z zanizaniem wysokich wartości natężeń deszczów w zdigitalizowanych zapisach pluwiograficznych, na co wskazuje jego pogłębiająca się wyrazistość, wraz ze wzrostem wartości rzędu momentu, prowadzącym do wyeksponowania dużych osobliwości procesu.



Rys. 5.9. Wykres w skali podwójnie logarytmicznej zależności średniej wartości momentów rzędu  $q$  natężenia deszczu  $\epsilon_\lambda$  względem wartości współczynnika skali  $\lambda$ , otrzymany dla 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji natężeń opadów z Wrocławia w 1997 r., dla skal czasowych od  $\lambda = 2304$  (5 min) do  $\lambda = 1$  (8 dni) i rzędów momentów  $q$  mniejszych od 1

Fig. 5.9. Log-log plot of the average  $q^{\text{th}}$  order moments of the rainfall intensity  $\epsilon_\lambda$  relation with scale parameter  $\lambda$ , obtained for the 5-minute rainfall intensity time-series from Wrocław in the year 1997, for time scales from  $\lambda = 2304$  (5 min) up to  $\lambda = 1$  (8 days) and moments orders  $q$  smaller than 1



Rys. 5.10. Wykres w skali podwójnie logarytmicznej zależności średniej wartości momentów rzędu  $q$  natężenia deszczu  $\varepsilon_\lambda$  względem wartości współczynnika skali  $\lambda$ , otrzymany dla 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji natężeń opadów z Wrocławia w 1997 r., dla skal czasowych od  $\lambda = 2304$  (5 min) do  $\lambda = 1$  (8 dni) i rzędów momentów  $q$  większych od 1

Fig. 5.10. Log-log plot of the average  $q^{\text{th}}$  order moments of the rainfall intensity  $\varepsilon_\lambda$  relation with scale parameter  $\lambda$ , obtained for the 5-minute rainfall intensity time-series from Wrocław in the year 1997, for time scales from  $\lambda = 2304$  (5 min) up to  $\lambda = 1$  (8 days) and moments orders  $q$  larger than 1

Mając na uwadze powyższą obserwację, systematyczne studia zmierzające do ustalenia wartości nachyleń dla w przybliżeniu liniowych zależności  $\log(\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle)$  względem  $\log(\lambda)$  dla całego szeregu wartości rzędów momentów  $q$ , podobnie jak w metodzie PDMS, przeprowadzono także dla zawężonego zakresu skal czasowych od  $\lambda = 2304$  (5 min) do  $\lambda = 8$  (24 godz.). Studia te pozwoliły na sporządzenie empirycznych wykresów przebiegu funkcji skalowania momentów  $K(q)$  dla badanych szeregów czasowych. Wykres empirycznej funkcji  $K(q)$  dla przykładowego szeregu opadowego z 1997 r. z Wrocławia jest przedstawiony na rysunku 5.11.

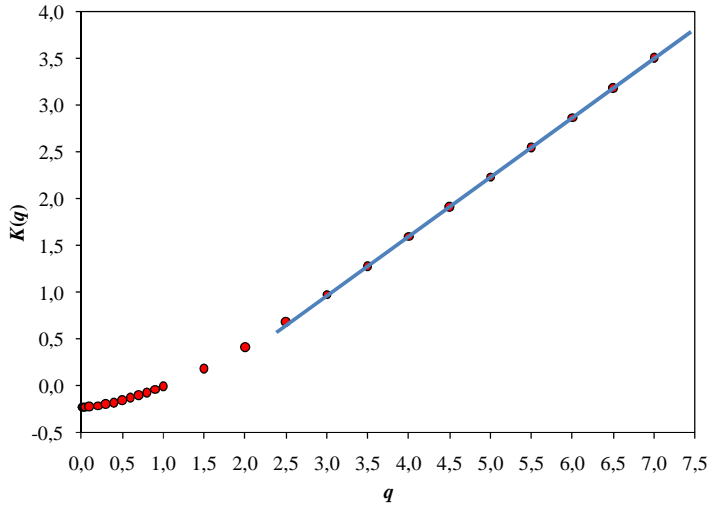
Podobnie jak dla analizowanej w poprzednim podrozdziale funkcji kowymiaru (rys. 5.8) na wykresie na rysunku 5.11 widoczne są regiony o charakterze nieliniowym i liniowym. Region pierwszy dla rzędów momentów mniejszych od około 2,4 winien być utożsamiany z nieliniowym charakterem funkcji. Ten nieliniowy charakter wykresu  $K(q)$  ulega degeneracji do charakteru liniowego począwszy od punktu o współrzędnych równych w przybliżeniu  $(2,4; 0,64)$ . Widać zatem wyraźnie, że współrzędne te pokrywają się dokładnie z wcześniejszymi estymacjami  $q_D \approx 2,42$  i  $K(q_D) \approx 0,64$ , na podsta-

wie analizy przebiegu funkcji kowymiaru. Kolejnych dowodów potwierdzenia dualności empirycznie otrzymanych funkcji  $K(q)$  i  $c(\gamma)$  (ich wzajemnego powiązania transformacją Legendre'a) dostarcza analiza parametrów równania liniowego segmentu funkcji  $K(q)$ . Na podstawie wyznaczonych wartości nachylenia i wyrazu wolnego można stwierdzić, że  $\gamma_{\max} \approx 0,63$  i  $c(\gamma_{\max}) \approx 0,91$ . Obydwie wartości zgodnie z oczekiwaniami pokrywają się prawie idealnie z wartościami: maksymalnej obserwowalnej osobliwości  $\gamma_{\max} = 0,63$  i całkowitego wymiaru efektywnego  $D+D_s \approx 0,90$ .

Wspomniana powyżej charakterystyczna wartość  $K(q_D = 2,42) = 0,64$  zgodnie z rysunkiem 4.16 winna być równa  $D \cdot (q_D - 1)$ . Daje to jeszcze jedną możliwość ponownego oszacowania wymiaru  $D$ . Wymiar ten, identycznie jak w poprzedniej metodzie PDMS, równa się 0,45, co podnosi wiarygodność poprzedniego oszacowania. Prowadząc dyskusję wartości krytycznego rzędu momentu  $q_D$ , warto także oszacować wartość pochodnej funkcji skalowania momentów dla tej wartości. Oszacowana graficznie na rysunku 5.11 wartość  $K'(q_D)$  wynosiła 0,498, a więc była w zaokrągleniu równa wartości  $\gamma_D = 0,50$  z poprzedniego podrozdziału.

Wszystkie powyższe obserwacje tworzą harmoniczny obraz dualnego charakteru obydwu empirycznie wyznaczonych funkcji  $K(q)$  i  $c(\gamma)$ . Jest to obiektywnym potwierdzeniem poprawności przeprowadzonych obliczeń. Jednocześnie zauważalny jest wyraźnie multifrakalny charakter otrzymanych funkcji  $c(\gamma)$  i  $K(q)$ . Generalny przebieg funkcji  $K(q)$ , podobnie jak funkcji  $c(\gamma)$ , świadczy o statystycznym zachowaniu zbioru danych, określanym mianem multifrakalnej transformacji pierwszego rzędu. Proces ten jest typowym dla multifrakalnych procesów obserwowanych w skalach większych od wewnętrznej skali (homogeniczności) procesu. Obserwacja ta jest potwierdzeniem skądinąd znanych i oczywistych ograniczeń pomiarów natężeń deszczów z użyciem pluwiografów. Jednocześnie sam przebieg funkcji  $K(q)$  odpowiada jedynie częściowo przebiegowi funkcji  $K_b(q)$  dla procesu multifrakalnego odsłoniętego i winien być zatem opisywany zależnością o postaci 4.53.

Przy analizie wyników metody TM trzeba zwrócić uwagę na jeszcze jeden istotny fakt. Przebieg funkcji  $K(q)$  na rysunku 5.11 odbiega od teoretycznego przebiegu funkcji wykładnika skalowania momentów dla multifrakalnego procesu odsłoniętego, także w zakresie bardzo niskich wartości rzędów momentów  $q$ . Funkcja  $K(q)$  teoretycznie powinna dążyć, w przypadku  $q$  malejącego do 0, do wartości  $-c$  (gdzie  $c$  oznacza kowymiar „podstawy” procesu). Biorąc pod uwagę wcześniej przyjęte oszacowanie wymiaru fraktalnego ( $D = 0,45$ ), kowymiar  $c$  równa się  $(1-0,45) = 0,55$ . Funkcja  $K(q)$  powinna zatem dążyć do  $-0,55$  przy  $q$  dążącym do 0. Wykres  $K(q)$  wyraźnie nie spełnia tego wymogu. Deformacje wykresu  $K(q)$  dla niskich wartości  $q$  są zapewne następstwem deformacji zależności na rysunku 5.9, wywołanych pierwotnie przez problemy z rejestracją niskich natężeń deszczów. Podobne uchybienia w przebiegu wykresów  $K(q)$  były zauważane przez de Limę [1998] dla analizowanych danych opadowych. Jak wynioskowała de Lima [1998], przyczyną wszystkich deformacji wykresu  $K(q)$  dla małych wartości  $q$  było mylne włączanie okresów o bardzo niskim natężeniu opadu do okresów bezdeszczowych, powodowane ograniczeniami instrumentarium pomiarowego deszczów.



Rys. 5.11. Przebieg empirycznej funkcji skalowania momentów dla 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji natężeń opadów z Wrocławia w 1997 r., dla skal czasowych od  $\lambda = 2304$  (5 min) do  $\lambda = 8$  (24 godz.)

Fig. 5.11. Empirical moments scaling function plot obtained for the 5-minute rainfall intensity time-series from Wrocław in the year 1997, for time scales from  $\lambda = 2304$  (5 min) up to  $\lambda = 8$  (24 hours)

## 5.5. Metoda podwójnego momentu śladu

Metoda podwójnego momentu śladu (ang. double trace moment method – DTM method) została opracowana specjalnie z myślą o bezpośredniej estymacji „uniwersalnych” parametrów multifrakcyjnych  $H$ ,  $C_1$  i  $\alpha$  [Schertzer i Lovejoy 1987]. Potrzeba jej opracowania wzięła się z trudności z opisem pewnych zbiorów danych geofizycznych oraz z obrębu badań nad turbulencją. W ich przypadku inne metody estymacji parametrów multifrakcyjnych okazały się być zawodnymi, gdyż były dostosowane jedynie dla miękkich multifrakcyjnych, a nie do twardych multifrakcyjnych o rzadkich i gwałtownych osłabieniach [Tessier i in. 1993].

Z punktu widzenia poprzednio stosowanej metody momentu śladu metoda podwójnego momentu śladu może być traktowana jako generalizacja tej metody. Generalizację tę uzyskuje się przez wprowadzenie drugiego (podwójnego) momentu do analizy danych. W tym celu natężenia procesu  $\varepsilon_{\lambda'}$  powiązane z najdrobniejszą rozdzielczością  $\lambda'$  procesu są podnoszone do potęgi  $\eta$ , a następnie przeprowadza się ich normalizację przez podzielenie ich wartości przez średnią dla całego zbioru  $\langle \varepsilon_{\lambda'}^{\eta} \rangle$ , co można zapisać następująco:

$$\varepsilon_{\lambda'}^{(\eta)} = \frac{\varepsilon_{\lambda'}^{\eta}}{\langle \varepsilon_{\lambda'}^{\eta} \rangle}. \quad (5.20)$$

Celem powyższego zabiegu jest zwiększenie dynamicznego zakresu procesu, który może być analizowany. Następnie na podstawie zależności 5.20 dokonuje się transformacji strumienia  $\Pi$  według wzoru 5.17 do „ $\eta$ -strumienia”  $\Pi^{(\eta)}$ :

$$\Pi_{\lambda'}^{(\eta)}(A_{\lambda,i}) = \int_{A_{\lambda,i}} \varepsilon_{\lambda'}^{(\eta)} d^D x, \quad (5.21)$$

gdzie:  $\lambda < \lambda'$ , a współczynnik skali  $\lambda'$  jest zdefiniowany jak stosunek zewnętrznej (największej) badanej skali do najmniejszej, znanej skali homogeniczności procesu. Natomiast  $\varepsilon_{\lambda'}^{(\eta)}$  oznacza  $\eta$ -znormalizowane natężenia  $\varepsilon_{\lambda'}$  w skali rozdzielczości  $\lambda'$ , które mają udział w natężeniu  $\varepsilon_{\lambda,i}$  powiązany ze zbiorami  $A_{\lambda,i}$ .

W analogiczny sposób w nawiązaniu do metody TM (patrz równanie 5.19) definiuje się w rozdzielczości  $\lambda$  podwójny moment śladu:

$$Tr_{\lambda} \left[ \varepsilon_{\lambda}^{(\eta)q} \right] \approx \lambda^{K(q,\eta)-(q-1)D}, \quad (5.22)$$

gdzie:  $K(q,\eta)$  jest (podwójną) funkcją wykładnika skalowania momentów. Jak łatwo zauważyć dla  $\eta = 1$ , funkcja ta redukuje się do klasycznej funkcji  $K(q)$ , a z generalnej metody DTM przechodzimy do jej szczególnego przypadku – metody TM.

Przy praktycznym stosowaniu metody DTM uzyskuje się funkcję  $K(q,\eta)$  przez określenie wartości nachylenia zależności liniowych  $\log(Tr_{\lambda}[\varepsilon_{\lambda}^{(\eta)q}])$  względem  $\log(\lambda)$  (co wynika z obustronnego zlogarytmowania zależności 5.22). Obliczenia te tym razem należy jednak przeprowadzać nie tylko dla różnych wartości momentów  $q$  (jak w metodzie TM), lecz także każdorazowo dla różnych wartości momentów  $\eta$ .

Renormalizacja procesów multifrakalnych według zależności 5.20 może być ponadto wstępem do metody rozkładu prawdopodobieństwa/wielokrotnego skalowania [Schertzer i Lovejoy 1993]. Wówczas możliwe jest obliczanie funkcji kowymiaru dla  $\eta$ -znormalizowanego procesu –  $c(\gamma,\eta)$ , która jest funkcją dualną względem funkcji  $K(q,\eta)$ .

Przejście z metody TM do DTM wiąże się z następującymi transformacjami zmiennych opisujących procesy multifrakalne (w poniższych wzorach wyróżnik \* oznacza zmienne metody DTM) [Tessier i in. 1993]:

$$\gamma \rightarrow \gamma^* = n\gamma - K(\eta), \quad (5.23)$$

$$c(\gamma) \rightarrow c^*(\gamma^*) = c(\gamma,\eta) = c(\gamma), \quad (5.24)$$

$$q \rightarrow q^* = q/\eta, \quad (5.25)$$

$$K(q) \rightarrow K^*(q^*) = K(q,\eta) = K(\eta q^*) - q^* K(\eta). \quad (5.26)$$

Funkcja  $K(q,1)$ , otrzymana z użyciem metody DTM dla  $\eta = 1$ , jest tożsama z funkcją  $K(q)$  otrzymaną z użyciem metody TM:  $K(q,1) \equiv K(q)$ . Wykorzystując tę własność, równanie 5.26, można przekształcić do postaci [Tessier i in. 1996]:

$$K(q, \eta) = K(q\eta, 1) - qK(\eta, 1). \quad (5.27)$$

Zapis formuły 5.27 można następnie uprościć jak poniżej:

$$K(q, \eta) = K(q\eta) - qK(\eta). \quad (5.28)$$

Wzór powyższy nabiera szczególnej użyteczności w praktyce dopiero po uwzględnieniu uniwersalnej formuły skalowania momentów danej wzorem 4.62. Specyficzna struktura wzoru 4.62 dla procesu zachowawczego ( $H = 0$ ) pozwala wykazać, po jego podstawieniu do równania 5.28, istnienie bardzo prostej zależności [Pandey i in. 1998, Tessier i in. 1993]:

$$K(q, \eta) = \eta^\alpha K(q). \quad (5.29)$$

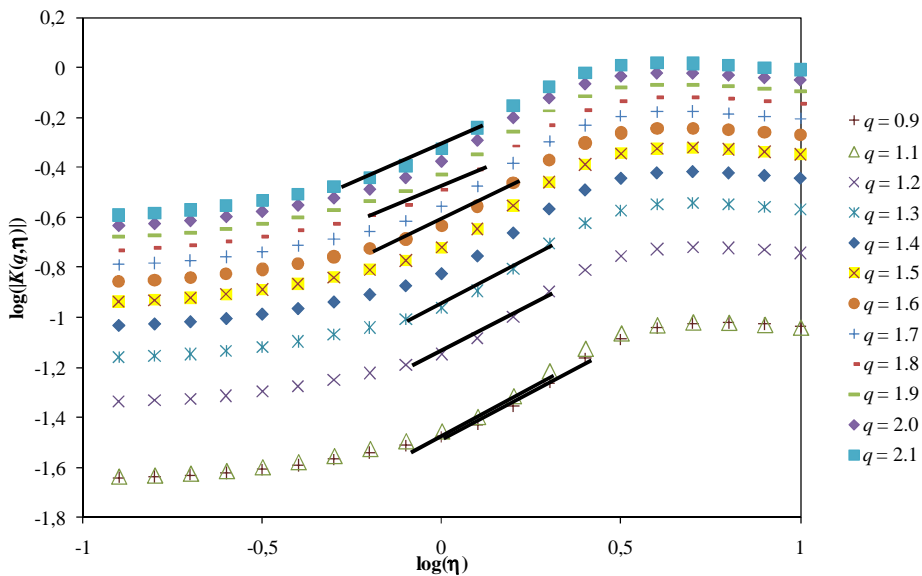
Równanie powyższe jest główną osią funkcjonowania metody DTM dla szacowania uniwersalnych parametrów multifrakalnych. Pozwala ono na estymację parametru  $\alpha$  jako nachylenia wykresów zależności  $\log(|K(q, \eta)|)$  względem  $\log(\eta)$  dla ustalonych wartości  $q$ . Ponadto zależność 5.29 daje podstawę do zapisania uniwersalnej formy funkcji  $K(q, \eta)$  (dla przypadku  $H = 0$ ):

$$K(q, \eta) = \begin{cases} \frac{C_1}{\alpha - 1} \eta^\alpha (q^\alpha - q) & \text{dla } \alpha \neq 1 \\ C_1 \eta q \ln(q) & \text{dla } \alpha = 1, \end{cases} \quad (5.30)$$

gdzie:  $\alpha$  przyjmuje wartości z zakresu  $[0, 2]$ , a  $q > 0$  dla  $\alpha \neq 2$ .

Podczas stosowania metody DTM należy pamiętać, że równanie 5.29 jest spełnione jedynie wówczas, gdy obserwuje się zbieżność momentów, a próbka jest odpowiednio duża dla dokładnej estymacji wykładników skalowania. Zjawiska te były szczegółowo omawiane w rozdziale 4.8 – jako przyczyny pojawiania się multifrakalnych transformacji fazowych, a granicznymi, krytycznymi rzędami momentów, od których są one obserwowane, były odpowiednio  $q_D$  i  $q_s$ . Dlatego też kiedykolwiek spełniony jest warunek, że:  $\max(q\eta, q) > \min(q_D, q_s)$ , to funkcja  $K(q, \eta)$  staje się niezależną od  $\eta$ . W praktyce przypadek taki jest obserwowany na wykresach zależności  $\log(|K(q, \eta)|)$  względem  $\log(\eta)$  w postaci załamania ich liniowego przebiegu i pojawienia się charakterystycznych S-kształtnych przebiegów. Niestety, załamania w liniowości powyższych zależności są obserwowane nie tylko dla wystarczająco dużych  $\eta$ -momentów, lecz także dla wystarczająco małych  $\eta$ -momentów (a więc wówczas, gdy  $\min(q, q\eta) < q_{\min}$ ). Załamanie dla niskich wartości  $\eta$ -momentów, a więc wówczas, gdy analizowane są bardzo niskie wartości natężenia procesu, wynika z opanowania sygnału pomiarowego natężenia przez szumy pomiarowe. Szumy takie mogą zapełniać przestrzeń pomiarową. Wiąże się z nimi charakterystyczna wartość kowymiaru i odpowiadające mu krytyczne rzędy osobliwości  $\gamma_{\min}$  oraz momentu  $q_{\min}$ . Schertzer i Lovejoy [1993] traktowali tę zmianę jakościową zachowania statystycznego badanych zbiorów jako kolejny przykład multifrakalnych transformacji fazowych.

W celu podjęcia multifrakcyjnych studiów szeregów opadowych z Wrocławia z użyciem metody podwójnego momentu śladu przygotowano kolejny autorski program obliczeniowy DTM. Program DTM, na bazie wcześniejszych doświadczeń zdobytych przy wykorzystywaniu metodyk PDMS i TM, został napisany z myślą prowadzenia analizy skal czasowych odpowiadających czasom od 5 minut do 24 godzin. Program DTM stanowił rozszerzenie wcześniej przygotowanego programu TRACE, gdyż obliczał on także wartości  $q$ -momentów, lecz dla  $\eta$ -normalizowanych natężeń. Na wstępie badań zdiagnozowano optymalne zakresy przedziałów wartości  $q$  i  $\eta$ , z uwagi na planowaną późniejszą identyfikację uniwersalnych parametrów multifrakcyjnych. Przyjęto następujące przedziały wartości:  $q \in [0,90; 2,10]$  i  $\eta \in [0,1; 10]$ . Rezultaty działania programu DTM są przedstawione na przykładzie szeregu czasowego pomiarów opadów z Wrocławia dla roku 1997 na rysunku 5.12.



Rys. 5.12. Wykres zależności  $\log(|K(q,\eta)|)$  względem  $\log(\eta)$  dla wybranych rzędów momentów  $q$ , otrzymany w metodzie DTM dla 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji natężeń opadów z Wrocławia w 1997 r., dla skal czasowych od  $\lambda = 2304$  (5 min) do  $\lambda = 8$  (24 godz.). Punkty należące do wykresów dla  $q = 0,9$  i  $q = 1,1$  prawie całkowicie się pokrywają. Na wykresie zaznaczono schematycznie odcinki o w przybliżeniu liniowym charakterze

Fig. 5.12. Plot of  $\log(|K(q,\eta)|)$  relation with  $\log(\eta)$  for selected moments orders  $q$ , obtained at the DTM method for the 5-minute rainfall intensity time-series from Wrocław in the year 1997, for time scales from  $\lambda = 2304$  (5 min) up to  $\lambda = 8$  (24 h). Points belonging to the plots for  $q = 0,9$  and  $q = 1,1$  almost completely cover themselves. Intervals of close to the linear character were marked schematically on plot



Zgodnie z oczekiwaniami na wykresie zależności empirycznych wartości  $\log(|K(q,\eta)|)$  względem  $\log(\eta)$  na rysunku 5.12 uwidaczniają się charakterystyczne równoległe względem siebie przebiegi S-kształtne. Na ich podstawie oszacowano graniczne wartości  $q_{\min}$  i  $q_{\max}$  momentów krytycznych, ograniczających zakres wykresu, przydatny dla estymacji uniwersalnego parametru multifrakalnego  $\alpha$ , zgodnie z formułą 5.29. Oszacowania wartości  $q_{\min}$  oraz  $q_{\max}$  wykonane na podstawie rysunku 5.12, dla szeregu wykresów o różnych wartościach  $q$  są zestawione w tabeli 5.2. Warto zauważyć, że końcowe wartości krytycznych momentów  $q_{\min}$  i  $q_{\max}$  w obydwu tabelach są wynikiem ilorazów odpowiednich wartości  $q$  i  $\eta$ , co wynika z zależności 5.25.

Tabela 5.2

Table 5.2

Wartości krytycznych momentów  $q_{\min}$  i  $q_{\max}$ , oszacowane dla załamania wykresu na rysunku 5.12 dla wybranych krzywych dla  $q \in [0,90; 2,10]$

Critical moments  $q_{\min}$  and  $q_{\max}$  values estimated for plot breaks in figure 5.12 for selected curves for  $q \in [0,90; 2,10]$

Krzywa dla $q$ Curie for $q$	Minimalny moment krytyczny $q_{\min}$ Minimal critical moment $q_{\min}$			Maksymalny moment krytyczny $q_{\max}$ Maximal critical moment $q_{\max}$		
	$\log(\eta)$	$\eta$	$q_{\min} = q\eta$	$\log(\eta)$	$\eta$	$q_{\max} = q\eta$
0,9	0	1,00	0,90	0,4	2,51	2,26
1,1	-0,1	0,79	0,87	0,3	2,00	2,19
1,2	-0,1	0,79	0,95	0,3	2,00	2,39
1,3	-0,1	0,79	1,03	0,3	2,00	2,59
1,6	-0,2	0,63	1,01	0,2	1,58	2,54
1,8	-0,2	0,63	1,14	0,1	1,26	2,27
2,1	-0,3	0,50	1,05	0,1	1,26	2,64
Średnia: Average:			0,99	Średnia: Average:		2,41

Komentując wyniki zawarte w tabeli 5.2 i na rysunku 5.12, należy pamiętać, że poszczególne szacunki  $q_{\min}$  oraz  $q_{\max}$  dla różnych krzywych (o różnych wartościach  $q$ ) są dosyć mocno obciążone przez subiektywne i mało precyzyjne oszacowania granicznych wartości  $\log(\eta)$ . Pomimo tego otrzymana średnia wartość  $q_{\max} = 2,41$  w istocie pokrywa się z oszacowaniem wartości krytycznego rzędu momentu  $q_D = 2,42$  (patrz podrozdziały 5.4 i 5.3). Kierując się wynikami z tabeli 5.2, w celu szacowania parametrów  $\alpha$  i  $C_1$  oparto się na krzywych w zakresie od  $q = 1,1$  do  $q = 2,0$ . Przeprowadzone obliczenia tych parametrów zestawiono w tabeli 5.3. Parametr  $\alpha$  dla krzywych dla różnych wartości  $q$  oszacowano jako nachylenie ich liniowych sekcji. Podstawą do tego była relacja 5.29. Przy obliczaniu parametru  $C_1$  skorzystano także ze struktury równania 5.29. Po obustronnym zlogarytmowaniu tego równania można zauważyć, że wyrazy wolne równań liniowych segmentów krzywych z rysunku 5.12 odpowiadają logarytmom z wartości  $K(q)$ . Znajomość wartości  $K(q)$  oraz wcześniej wyznaczonych wartości indeksu Lévy'ego  $\alpha$  pozwala natomiast na wyliczenie wartości parametru  $C_1$ , z nieco przekształconej formuły 5.30:

$$K(q) \equiv K(q,1) = \frac{C_1}{\alpha-1} (q^\alpha - q). \quad (5.31)$$

Zgodnie z tabelą 5.3 wartość indeksu  $\alpha = 0,69$ . Powracając do podanego na zakończenie rozdziału 4.9 podziału na klasy uniwersalności, należy zwrócić uwagę, że  $\alpha \in (0,1)$ , a co za tym idzie, mamy tutaj przykład procesu logarytmicznego Lévy'ego z ograniczonymi osobliwościami. W klasyfikacji multifraktale te są określane mianem warunkowo twardych (ang. conditionally hard). Co warto podkreślić już teraz, całkowanie takich multifraktali po zbiorze obserwacyjnym o zadowalająco dużym wymiarze  $D$  może prowadzić do miękkiego (ang. soft) zachowania. Świadomość tego faktu, na tym etapie badań, ma jedynie aspekt poznawczy, jednak będzie miała istotne znaczenie w wyjaśnieniu jakości syntetycznych szeregów opadowych generowanych z użyciem dwóch odmiennych konceptualnie typów modeli opartych o kaskadę mikrokanoniczną i kanoniczną. Przypomnijmy, że zwykle w wyniku wyzwalania kaskad mikrokanonicznych generowane są miękkie multifraktale, natomiast w przypadku kaskad kanonicznych otrzymywane są twarde multifraktale. Zdecydowanie mniejsza od jedności wartość obliczonego stopnia multifraktalności  $\alpha = 0,69$ , wskazująca na „miętkość” procesu, implikuje już teraz znacznie większy potencjał wykorzystania generatorów opartych o kaskady mikrokanoniczne dla generowania syntetycznych danych opadowych, wiarygodnie naśladowujących statystyki badanych szeregów czasowych natężeń deszczów.

Tabela 5.3

Table 5.3

Zestawienie obliczeń wartości indeksu Lévy'ego  $\alpha$  i kowymiaru średniej procesu  $C_1$  dla szeregu opadowego z Wrocławia w 1997 r.

List of Lévy index  $\alpha$  and the mean of process codimension  $C_1$  calculations for rainfall time-series from Wrocław in the year 1997

$Q$	$\alpha$	$K(q,1)$	$C_1$
1,10	0,702	0,035	0,338
1,20	0,733	0,071	0,334
1,30	0,759	0,109	0,331
1,40	0,779	0,149	0,328
1,50	0,793	0,190	0,326
1,60	0,661	0,233	0,335
1,70	0,680	0,278	0,335
1,80	0,613	0,324	0,342
1,90	0,633	0,372	0,342
2,00	0,651	0,421	0,342
2,10	0,587	0,472	0,352
Średnia: Average:	0,69	Średnia: Average:	0,34
Odchylenie standardowe: Standard deviation:	0,07	Odchylenie standardowe: Standard deviation:	0,007

Na podstawie znajomości wartości parametrów  $\alpha = 0,69$  i  $C_1 = 0,34$  możliwym jest wyznaczenie wartości krytycznego momentu  $q_D$  związanego z multifraktalną transformacją pierwszego rzędu według formuły 4.65. Po przyjęciu do obliczeń wymiaru fraktalnego  $D$  równego 0,45 uzyskano  $q_D = 2,46$ . Wynik ten jest zgodny z wcześniejszymi szacunkami wartości momentu krytycznego na podstawie analizy geometrii empirycznych funkcji kowymiaru i skalowania momentów. Potwierdza on jednocześnie prawi-

dłowość przeprowadzonej analizy i wiarygodność oszacowania stopnia multifraktalności oraz kowymiaru osłobliwości średniej.

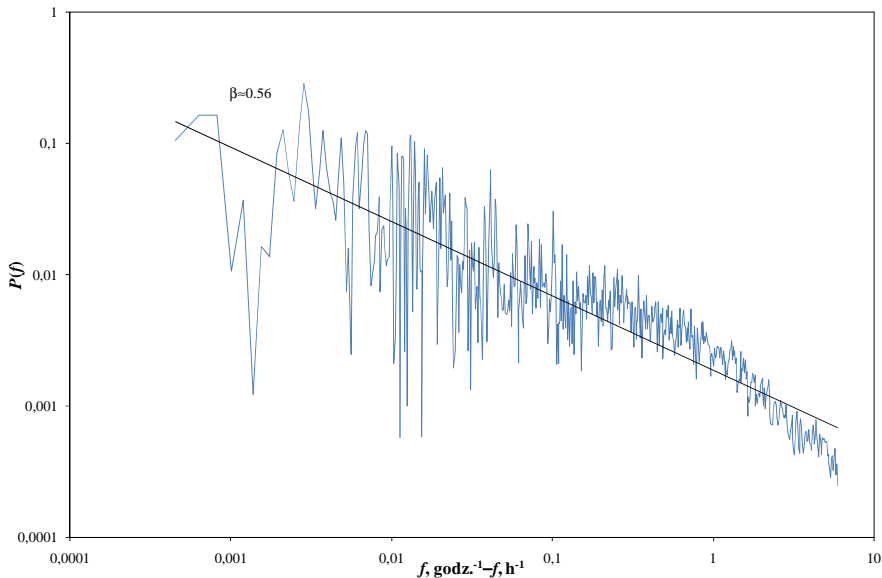
Ostatnim elementem uniwersalnego opisu multifraktalnego jest parametr  $H$ . Oszacowania miary stopnia nie-zachowawczości procesu  $H$  dokonuje się na podstawie przyrównania wykładnika widma  $\beta$  analizowanego procesu (patrz wzór 5.8) z wartością wykładnika dla procesu zachowawczego  $\beta_{con} = 1 - K(2)$ , według poniższej zależności [Tessier i in. 1996]:

$$H = \frac{\beta - \beta_{con}}{2} = \frac{\beta - 1 + K(2)}{2} \quad (5.32)$$

Parametr  $H$  może zatem być w praktyce obliczony na podstawie wzoru 5.32, po przyjęciu empirycznej wartości  $K(2)$  lub też jego teoretycznej wartości wyliczonej po uprzednim oszacowaniu wartości  $\alpha$  i  $C_1$  i przy jednoczesnym uwzględnieniu zależności 4.62:

$$H = \frac{\beta - 1 + K(2)}{2} = \frac{\beta - 1}{2} + \frac{C_1 (2^\alpha - 2)}{2(\alpha - 1)} \quad (5.33)$$

Dla implementacji wzoru 5.33 oszacowano wartość parametru  $\beta = 0,56$ , dla globalnej zależności skalowej dla widma mocy szeregu czasowego rejestracji deszczów z Wrocławia z 1997 r. (patrz rysunek 5.13). Wartości teoretyczne i empiryczne  $K(2)$  były sobie równe i wynosiły  $K(2) = 0,42$ . Obliczona ostatecznie na tej bazie wartość  $H$  wynosiła  $-0,01$ . Ta bliska 0 wartość  $H$  była całkowicie zgodna z otrzymanym wcześniej obrazem empirycznym przebiegu funkcji kowymiaru w metodzie PDMS (patrz rys. 5.8).



Rys. 5.13. Widmo mocy uzyskane dla 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji deszczów z Wrocławia w 1997 r. z zaznaczonym przebiegiem globalnej zależności skalowej

Fig. 5.13. Energy spectrum obtained for the 5-minute rainfall time-series from Wrocław in the year 1997 with marked course of the global scaling relation

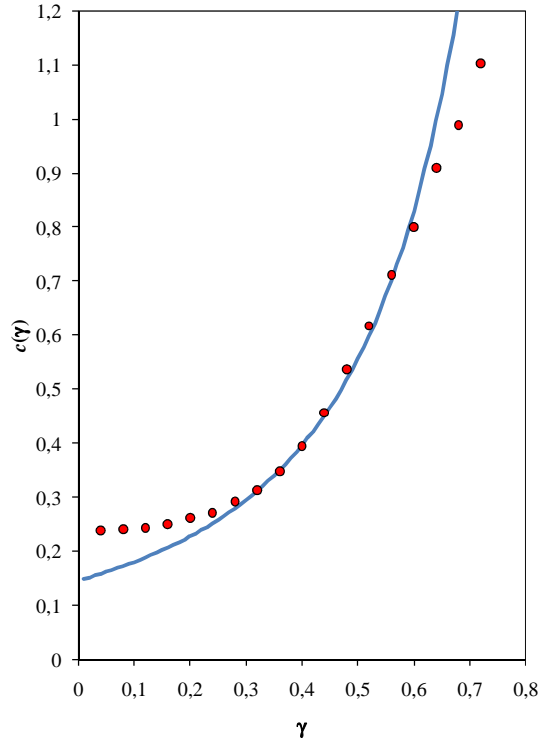
Na koniec warto porównać otrzymane oszacowania uniwersalnych parametrów multifrakalnych przy wykorzystaniu metody DTM z wynikami otrzymanymi przez innych autorów. De Lima [1998] dla rejestracji z Vale Formoso (szereg czasowy 15-minutowy) uzyskała:  $\alpha = 0,49$ ,  $C_1 = 0,51$  i  $H = -0,13$ . Wartości te różnią się, co zapewne znajduje wytłumaczenie w różnicach warunków klimatycznych występujących w Vale Formoso i we Wrocławiu. Duże rozbieżności w wartości parametru  $H$  wynikają też z nieuzasadnionego w opinii autora stosowania przez de Limę [1998] we wzorach 5.32 i 5.33 wartości  $\beta$  wyznaczonej jedynie dla wycinkowego zakresu wysokich częstotliwości, ograniczonego przez załamanie widma. W przypadku szeregu opadowego z Wrocławia z 1997 r. rezultatem tego byłoby zawyżenie wartości wykładnika  $\beta$  z 0,56 do 1,11 (porównaj rys. 5.3 i 5.11). Uzyskane uniwersalne parametry dla szeregu opadowego z Wrocławia były bardzo zbliżone do parametrów określonych przez Tessiera i in. [1996] dla 30 szeregów czasowych wartości sum dobowych opadów pochodzących z różnych lokalizacji na terenie Francji, które wynosiły:  $\alpha = 0,7 \pm 0,2$ ,  $C_1 = 0,4 \pm 0,1$  i  $H = -0,1 \pm 0,1$ .

## 5.6. Ocena wzajemnego dopasowania teoretycznych i empirycznych funkcji skalowania

Wykresy teoretycznych funkcji skalowania otrzymane dla uniwersalnych parametrów multifrakalnych  $\alpha = 0,69$ ,  $C_1 = 0,34$  i  $H = -0,01$  są przedstawione na tle empirycznych wartości funkcji skalowania otrzymanych dla 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji natężeń opadów z Wrocławia w 1997 r., dla skal czasowych od 5 minut do 8 dni – na rysunkach 5.14 i 5.15. Na obydwu rysunkach widać wyraźnie, że zgodność przebiegu teoretycznych wykresów funkcji skalowania, definiowanych przez uprzednio oszacowane uniwersalne parametry multifrakalne względem położenia punktów empirycznych, ma miejsce jedynie w określonym zakresie argumentów funkcji. Na wykresie funkcji skalowania momentów (rys. 5.15) można zaobserwować, że dla wartości rzędów momentów  $q$  większych od około 2,4 wykresy teoretyczny i empiryczny przestają być spójne, a ze wzrostem  $q$  różnice pomiędzy ich wartościami się pogłębiają. Obserwacja ta jest w pełni spójna z omawianym zjawiskiem multifraktalnej transformacji pierwszego rzędu. Jednocześnie wartość  $q \approx 2,4$  jest zgodna z wartością krytycznego rzędu momentu  $q_D = 2,42$  i  $q_{\max}$  oszacowanym w tabeli 5.2. Natomiast oszacowanie  $q_{\min} = 0,99$  także z tabeli 5.2 wydaje się być równie trafnym oddolnym ograniczeniem zakresu zgodności funkcji teoretycznej i empirycznej skalowania momentów. Różnice pomiędzy obydwo ma wykresami pogłębiają się wraz ze spadkiem wartości rzędu momentu  $q$  poniżej wartości  $q_{\min} = 0,99$ .

Wymienione powyżej ogórne i oddolne ograniczania zakresu zgodności funkcji teoretycznej i empirycznej kowymiaru znajdują swoje odbicie także w przypadku funkcji kowymiaru na rysunku 5.14. Dla osobliwości większych od około  $\gamma = 0,60$  wykresy teoretyczny i empiryczny kowymiaru tracą wspólny przebieg. Ta graniczna wartość  $\gamma = 0,60$  jest zbliżona do osobliwości krytycznej  $\gamma_D = 0,50$ . Rysunek 5.14 uwidacznia, że dla osobliwości większych od około 0,60 empiryczne wartości kowymiaru są już zdecydowanie mniejsze od ich szacunków teoretycznych. Co za tym idzie, ich prawdo-

podobieństwo pojawienia się jest większe, niż wynikałoby to z modelu teoretycznego odsloniętego multiplikatywnego procesu kaskadowego. Te różnice mogą znaleźć wyjaśnienie w różnych sposobach konstrukcji procesu teoretycznego, który jest procesem odsloniętym (a więc drobnoziarnistym) w przeciwieństwie do procesu empirycznego, który jest procesem ubranym (a więc gruboziarnistym) (patrz rys. 4.4). Gruboziarnistość w rozumieniu teorii multifraktali wynika w tym konkretnym przypadku z ograniczonej rozdzielczości przyrządu pomiarowego (pluviografu), jak również jest konsekwencją uśredniania rzeczywistego, całkowicie rozwiniętego procesu do skali obserwacji.

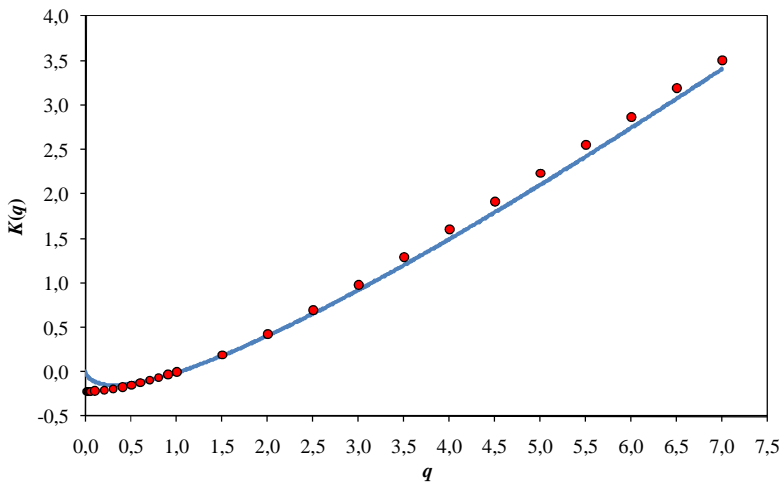


Rys. 5.14. Uniwersalna funkcja kowymiaru dla  $\alpha = 0,69$ ,  $C_1 = 0,34$  i  $H = -0,01$  (oznaczona ciągłą linią) na tle empirycznej funkcji kowymiaru (reprezentowanej przez punkty), uzyskanej dla 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji natężeń opadów z Wrocławia w 1997 r., dla skal czasowych od  $\lambda = 2304$  (5 min) do  $\lambda = 8$  (24 godz.)

Fig. 5.14. Universal codimension function for  $\alpha = 0,69$ ,  $C_1 = 0,34$  and  $H = -0,01$  (showed as continuous line) on the background of empirical codimension function (represented by points) obtained for the 5-minute rainfall intensity time-series from Wrocław in the year 1997, for time scales from  $\lambda = 2304$  (5 min) up to  $\lambda = 8$  (24 h)

Zjawisko rozbieżności wykresów teoretycznych i empirycznych kowymiaru jest także widoczne dla wartości osobliwości mniejszych od około 0,33. Wartość osobliwości  $\gamma = 0,33$  odpowiada w przybliżeniu, zgodnie z transformacją Legendre'a, rzędowi momentu minimalnego  $q_{\min} = 0,99$ , stanowiącego oddolne ograniczenie zgodności teo-

retycznej i empirycznej funkcji skalowania momentów. Wraz ze spadkiem wartości osobliwości, poczynając od  $\gamma = 0,33$ , wartości empiryczne kowymiaru są coraz większe w stosunku do ich szacunków teoretycznych. Co się z tym wiąże, małe osobliwości są obserwowane w zbiorze danych rzadziej, niż jest to opisywane przez multiplikatywny odsłonięty proces kaskadowy. Jest to ponownie rezultatem uśredniania procesu w określonych skalach oraz niewłaściwego zaliczania niskich natężeń deszczu do zbioru wartości zerowych. De Lima 1998 w celu zdigitalizowanych pomiarów pluwiograficznych z Vale Formoso obserwowała dla  $\gamma \leq 0,3$  już całkowicie stałe wartości kowymiaru. Przez to różnice pomiędzy wartościami teoretycznymi i empirycznymi funkcji  $c(\gamma)$  zaznaczały się znacznie wyraźniej wraz ze spadkiem  $\gamma$  niż na rysunku 5.14, gdzie empiryczna funkcja kowymiaru także dla małych osobliwości wykazywała charakter krzywoliniowy i malejący wraz ze spadkiem  $q$ . Można przypuszczać, że jest to dowodem wyższości zaproponowanej przez autora i zastosowanej dla danych z Wrocławia metodyki komputerowo wspomaganiej konwersji zapisów pluwiograficznych do formatu cyfrowego [Licznar 2005] w stosunku do zastosowanej dla pluwiogramów z Portugalii digitalizacji ręcznej. Przypuszczalnie eliminacja elementu subiektywnego wyboru przebiegu krzywej przez operatora na rzecz automatycznego i obiektywnego rozpoznawania kierunku krzywej zapisu przez komputer umożliwiła precyzyjniejsze odwzorowanie zarejestrowanych natężeń deszczów, w tym także lepsze odróżnienie okresów rzeczywiście bezdeszczowych od okresów deszczowych, lecz o niskim natężeniu procesu.



Rys. 5.15. Uniwersalna funkcja skalowania momentów dla  $\alpha = 0,69$ ,  $C_1 = 0,34$  i  $H = -0,01$  (oznaczona ciągłą linią) na tle empirycznej funkcji skalowania momentów (reprezentowanej przez punkty), uzyskanej dla 5-minutowego szeregu czasowego rejestracji natężeń opadów z Wrocławia w 1997 r., dla skal czasowych od  $\lambda = 2304$  (5 min) do  $\lambda = 8$  (24 godz.)

Fig. 5.15. Universal moments scaling function for  $\alpha = 0,69$ ,  $C_1 = 0,34$  and  $H = -0,01$  (showed as continuous line) on the background of empirical moments scaling function (represented by points) obtained for the 5-minute rainfall intensity time-series from Wrocław in the year 1997, for time scales from  $\lambda = 2304$  (5 minutes) up to  $\lambda = 8$  (24 h)

## 5.7. Podsumowanie fraktalnych i multifraktalnych badań szeregów rejestracji pluwiograficznych

Przeprowadzone kompleksowe badania multifraktalne posiadanych szeregów rejestracji pluwiograficznych z Wrocławia z użyciem różnorodnego warsztatu analitycznego wykazały, że czasowa struktura analizowanych szeregów deszczów ma niezmienniczy skalowo i multifraktalny charakter w szerokim zakresie skal. Zakres niezmienniczości skalowej w badanych szeregach rejestracji natężeń deszczów sięgał od częstotliwości odpowiadającej czasowi 5 minut do co najmniej częstotliwości odpowiadającej czasowi 24 godzin. Obserwacja ta potwierdza tezę o potencjalnej możliwości generowania syntetycznych szeregów opadowych o rozdzielczości nawet 5 minut w oparciu o znajomość jedynie dobowych sum opadów. Jednocześnie stwierdzone występowanie załamania w widmie mocy badanych szeregów dla częstotliwości odpowiadających czasom w zakresie około 80–110 minut wskazuje, że generowanie syntetycznych szeregów opadowych nie może być oparte na prostym mechanizmie skalowania ku dołowi (ang. downscaling). Z drugiej strony, przeprowadzone badania przekonują do tezy, że stwierdzone dla badanych szeregów załamanie w skalowym charakterze widma mocy nie jest fundamentalnym co do swojej natury i nie znajduje wytłumaczenia na przykład w istotnej zmianie mechanizmu generującego proces opadowy na granicy czasu równego około 80–110 minut. Jest znacznie bardziej prawdopodobnym, że załamanie to jest powodowane przez ograniczenia przyrządu pomiarowego (pluviografu) i technik przetwarzania analogowych zapisów pluwiograficznych do postaci cyfrowej. Zaobserwowana przy tym zależna od natężenia deszczu czasowa gęstość digitalizacji zapisów pluwiograficznych nieodzownie prowadzi do sztucznej eliminacji zmienności procesu opadowego w pewnych skalach czasowych i redukcji dynamiki obserwowanego procesu opadowego względem rzeczywistego procesu.

Właściwości statystyczne badanych szeregów czasowych natężeń deszczu z Wrocławia mogą być opisywane za pomocą multifraktalnych funkcji wykładnika. Wyznaczone empirycznie funkcje kowymiaru i skalowania momentów okazały się być funkcjami silnie powiązаныmi ze sobą wzajemnie transformacją Legendre'a. Pozwoliło to na weryfikację otrzymanych wyników z wykorzystaniem całkiem odmiennych narzędzi warsztatu multifraktalnego: metody rozkładu prawdopodobieństwa/wielokrotnego skalowania oraz metody momentu śladu. Ten sposób pośredniej weryfikacji był bardzo ważny, ponieważ dotychczas nie są znane testy statystyczne pozwalające na ocenę poprawności multifraktalnych analiz statystycznych danych pomiarowych. Wykresy empirycznych funkcji skalowania miały wyraźnie nieliniowy charakter jedynie dla ograniczonego zakresu rzędów osobliwości i momentów. Po przekroczeniu granicznych wartości rzędów osobliwości i momentów empiryczne wykresy funkcji skalowania miały już charakter liniowy, co wynikało ze statystycznego zachowania zbioru danych, określanego mianem multifraktalnej transformacji pierwszego rzędu. Transformacja ta jest charakterystyczną dla multifraktalnych procesów obserwowanych w skalach większych od wewnętrznej skali homogeniczności procesu.

Oszacowany z wykorzystaniem metody funkcyjnego zliczania pudełek wymiar geometrycznej „podstawy” wystąpień deszczów w badanych szeregach, zdefiniowany

w jednowymiarowej przestrzeni czasu, okazał się być liczbą niecałkowitą, mniejszą od jedności. Na przykład dla szeregu rejestracji deszczów z roku 1997  $D \approx 0,58$ . Wartość wymiaru fraktalnego wynikająca z analizy geometrii empirycznych funkcji kowymiaru i skalowania momentów była mniejsza i równała się 0,45. Wymienione tu wielkości wymiaru fraktalnego  $D$  dowodzą fraktalnego charakteru geometrycznej „podstawy” wystąpień deszczów w jednowymiarowej przestrzeni czasu, a zarazem są miernikiem „zapełnienia” przez deszcze jednowymiarowej przestrzeni czasu.

Wyniki uzyskane z wykorzystaniem metody podwójnego momentu śladu dowodzą, że uniwersalny model multifraktalny (model multiplikatywnej kaskady), bazujący na zmiennych stochastycznych Lévy’ego, zapewnia zadowalający opis statystyk opadowych w obrębie określonego zakresu osobliwości bądź też rzędów momentów. Ogólne ograniczenie adekwatności stosowności modelu uniwersalnego jest wynikiem wspomianej już transformacji pierwszego rzędu. Natomiast oddolne ograniczenie jest wynikiem błędnego zaliczania okresów o bardzo niskim natężeniu deszczu do okresów rzeczywiście bezdeszczowych. Innymi przejawami tego zjawiska były deformacje wykresów teoretycznych funkcji skalowania względem ich teoretycznych wzorców dla niskich rzędów osobliwości i momentów. Wszystko to jest jeszcze jednym potwierdzeniem istotnych i niemożliwych do eliminacji ograniczeń co do jakości danych pomiarowych pochodzących z pluwiografów, na których w dzisiejszych realiach opiera się krajowa wiedza o opadach. Wykazana na przykładzie szeregów pomiarowych z Wrocławia możliwość stosowania uniwersalnego modelu multifraktalnego, opartego na zestawie jedynie trzech parametrów:  $H$  – odchylenia od zachowawczości,  $C_1$  – kowymiaru osobliwości średniej i  $\alpha$  – stopnia multifraktalności, jest ciekawą propozycją dla prostego, ale zarazem maksymalnie pełnego i wiarygodnego opisu lokalnych procesów opadowych.

Przeprowadzone studia multifraktalne posiadanych szeregów czasowych rejestracji deszczów z Wrocławia potwierdzają także generalną tezę podnoszoną przez innych badaczy procesów multifraktalnych, mówiącą, że studia multifraktalne mogą być wiarygodnym testem przydatności posiadanych zbiorów danych opadowych dla określonych typów analiz. Jest to szczególnie ważne dla analiz obejmujących procesy wyzwalane przez opad, takie jak spływ powierzchniowy, erozja wodna, odpływ wód deszczowych systemem kanałów czy też infiltracja wód deszczowych do gruntu. Z perspektywy samego modelowania hydrodynamicznego przepływów w sieciach kanalizacji deszczowej zastosowany warsztat multifraktalny pozwala na wiarygodną ocenę jakości wykorzystywanych szeregów pomiarowych natężenia deszczów. W przyszłości ten sam warsztat może stanowić dużą pomoc w szeroko rozumianej ocenie nowych technik pomiaru opadów deszczów i metod przetwarzania ich wyników.

Konkludując przeprowadzone studia fraktalne i multifraktalne szeregów czasowych natężeń deszczów z Wrocławia, należy stwierdzić, że ich geometryczna „podstawa” wystąpienia ma charakter fraktalny, a wartości zarejestrowanych, zmiennych w czasie natężeń deszczów świadczą o multifraktalnym, kaskadowym charakterze procesu opadowego w jednowymiarowej skali czasu.



## 6. MULTIPLIKATYWNE MODELE KASKAD LOSOWYCH

### 6.1. Rys historyczny

Lata 60. i 70. ubiegłego stulecia przyniosły intensywny rozwój teorii turbulencji [Kolmogorov 1962, Mandelbrot 1972, 1974, Novikov i Stewart 1964, Obukhov 1962, Yaglom 1966]. Jednym z istotnych przejawów tego rozwoju było sformułowanie multiplikatywnych modeli kaskad losowych jako narzędzi modelowania turbulencji [Gao i in. 2007]. Modele te szybko znalazły zastosowanie przy przetwarzaniu danych opadowych [Gupta i Waymire 1993, Lovejoy i Schertzer 1995, Over i Gupta 1994, 1996, Schertzer i Lovejoy 1987]. Deszcz jest znacznikiem turbulencji w małych skalach, a większe wiry mogą mieć swój udział w mechanizmie generującym deszcz [Menabde i in. 1997]. Nie bez znaczenia dla upowszechnienia stosowania modeli kaskadowych do opisu pól opadowych była także rosnąca dostępność do baz danych z empirycznymi wynikami obserwacji pól opadowych w różnych skalach czasowych i przestrzennych, wynikająca z doskonalenia nowych technik obserwacji satelitarnych i radarowych. Dobrymi przykładami tego mogą być: Tropical Rainfall Measuring Mission (TRMM), czyli satelitarny program pomiaru deszczów na obszarze tropików i subtropików, czy też bogata baza danych, wykorzystywana przez wielu badaczy, pochodzących z tzw. fazy I i II programu GARP (Global Atmospheric Research Program) – radarowych obserwacji pól opadowych na tropikalnym obszarze wschodniego Atlantyku z lata 1974 r. – określana skrótem GATE (GARP Atlantic Tropical Experiment). Kampanie pomiarowe takie jak TRMM i GATE przyniosły bogate wyniki i pozwoliły na zgromadzenie informacji o opadach nad obszarami dotąd praktycznie nie monitorowanymi (z uwagi na brak sieci deszczomierzowych). Z tej perspektywy multiplikatywne modele kaskad losowych wyszły bezpośrednio naprzeciw potrzebom poszukiwania nowych technik przetwarzania wyników pomiarowych z nowych źródeł pomiarowych. Powstało przy tym sprzężenie zwrotne, gdyż wzrost dostępności nowych baz opadowych pozwolił badaczom turbulencji na praktyczną weryfikację, często dotąd jedynie teoretycznych modeli, a także stymulował dalsze doskonalenie warsztatu.

Bezpośrednie powiązanie turbulencji w małych skalach ze zjawiskiem generowania opadów nie jest możliwe. Do dziś pełny opis mechanizmów generujących opady pozostaje w znacznej mierze otwartym pytaniem. Najlepszym przykładem tego są nadal

nierozwiązane w pełni problemy powstawania ciepłego deszczu (ang. warm rain formation). W świetle najnowszych badań w tym zakresie [Malinowski 2007], zderzenia kropelek (ang. droplets) w mało-skalowej turbulencji mogą być identyfikowane jako mechanizm prowadzący do formowania cząstek opadów. Przez mało-skalową turbulencję rozumie się turbulencję w zakresie od około 10 cm do 1 mm, a poznanie procesów formowania opadów może być, z uwagi na ograniczenia posiadanego instrumentarium, prowadzone jedynie na drodze eksperymentów laboratoryjnych i symulacji numerycznych [Malinowski 2007, Malinowski i in. 2008]. W interpretacji wyników laboratoryjnych oraz pomiarów *in-situ* procesów zachodzących w chmurach w większych skalach, z uwagi na ograniczenia technik pomiarowych, stosowane są wywodzące się z badań nad turbulencją narzędzia warsztatu fraktalnego i multifraktalnego [patrz np. Malinowski i Leclerc 1994, Malinowski i Zawadzki 1993, Malinowski i in. 1994]. Badania nad turbulencją, procesami zachodzącymi w chmurach i na ich granicy oraz formowaniem opadów zazębiają się nawzajem. Implikuje to występowanie związków pomiędzy turbulencją i deszczami, które choć nie są możliwe do prostego sformalizowania, to jednak uzasadniają próby stosowania multiplikatywnych modeli kaskad losowych w modelowaniu pól opadowych.

Brak sformalizowanej zależności pomiędzy turbulencją a deszczem, jak i nadal otwarte kwestie dotyczące powiązania równań Navier-Stockesa i kaskad, determinują od samego początku czysto fenomenologiczny charakter modeli kaskadowych. Za stosowaniem multiplikatywnych modeli kaskad losowych do analizy wzorców opadowych przemawia wyróżniająca je zdolność do odwzorowywania obserwowanej struktury wzorców opadowych i ich właściwości statystycznych. Potwierdziły to badania Gupty i Waymire'a [1993], Güntnera i in. [2001], Jothityangkoona i in. [2000], Menabde'go i Sivapalana [2000], Menabde'go i in. [1997], Molnara i Burlando [2005], Olssona [1996, 1998], Olssona i Berndtssona [1998], Overa [1995], Overa i Gupty [1994, 1996], Pathirana i Heratha [2002], Pathirana i in. [2003]. Większość tych prac dotyczyła dwuwymiarowych pól opadowych, a nie uproszczonego przypadku jednowymiarowego szeregu czasowego rejestracji deszczów. Zapewne, po części wynikało to z większego zainteresowania polami opadowymi jako ciekawszym poligonem badawczym łączącym zarówno aspekt zmienności czasowej, jak i przestrzennej deszczów. Niemniej, drugą istotną przyczyną tego jest dostępność do materiału badawczego. Zwykle dane pochodzące z radarów meteorologicznych są łatwiej dostępne dla badaczy od danych z działających od dziesiątków lat sieci deszczomierzy. Sieci deszczomierzy są własnością krajowych służb meteorologicznych, które zajmując się ich obsługą, korzystają ze standardowych procedur i zwykle nie są nastawione na współpracę ze światem nauki. Wymogi stawiane przez osłonę meteorologiczną kraju, zapobieganie dużym powodziom itp. nie obejmują zwykle szczegółowej analizy zapisów pluwiograficznych czy też ich konwersji do cyfrowego formatu. Często poprzestaje się na godzinnych odczytach zapisów z pluwiografów lub jedynie rejestracji dobowych sum opadów jako minimum zaspokajającym wymogi komercyjnych odbiorców pomiarów. Z tej racji analizy multifraktalne wieloletnich szeregów czasowych deszczów, o rozdzielczościach dochodzących do około 5, 10 czy też 15 minut, takie jak zawarte w niniejszej pracy oraz w publikacjach de Limy [1998], de Limy i Grasmanna [1999], Menabde'go i Sivapalana [2000], Molnara i Burlando [2005], nadal należą do rzadkości. Ponadto wielu badaczy z kręgu klasycz-

nej hydrologii nie stara się przy stosowaniu kaskad podejmować prób ich użycia w skalach czasu poniżej 1 godziny, traktując to za zbędne w aspekcie przyszłego zastosowania syntetycznych danych opadowych do modelowania hydrologicznego, np. zjawisk powodziowych na dużych rzekach.

Wspominana powyżej skala czasu 1 godziny jako docelowego poziomu rozdziału sum dobowych opadów w oczywisty sposób nie przystaje do potrzeb hydrologii miejskiej. Nie należy się jednak dziwić, że jeszcze do niedawna nie podejmowano prób stosowania multiplikatywnych modeli kaskad losowych w obrębie hydrologii miejskiej. Nie było to potrzebne z uwagi na brak narzędzi symulacyjnych, na wejściu których syntetyczne dane opadowe można byłoby spożytkować w wymierny sposób. Chociaż w roku 1976 powstał pierwszy dynamiczny model komputerowy hydrauliki kanalizacji – US EPA Storm Water Management Model (SWMM) [Heaney i in. 1976], to musiały minąć jeszcze lata, a nawet dziesięciolecia, zanim w biurach projektowych i konsultingowych upowszechniły się odpowiednio wydajne obliczeniowo komputery, zaopatrzone w pakiety wyspecjalizowanego oprogramowania inżynierskiego dla budowy modeli hydrodynamicznych sieci kanalizacji deszczowych lub ogólnospławnych. Jeszcze do niedawna programy tej klasy cechowały się sztywnymi ograniczeniami co do ilości rozpatrywanych węzłów i odcinków sieci, a czas trwania pojedynczej nawet symulacji przepływów w kanałach średniej wielkości sieci, po pojedynczym deszczu, był liczony w godzinach. W efekcie tego inżynier w swojej pracy musiał stosować wiele uproszczeń, zaczynając od samych podstaw, a więc opisu danych opadowych. Z tej racji w praktyce modelowania utrwaliło się stosowanie, jako podstawy modelowania, tzw. deszczu projektowego (ang. design storm), a więc pewnego wybranego całkowicie subiektywnie opadu rzeczywistego lub syntetycznego opadu, uzyskanego na drodze próby odwzorowania zmienności zarejestrowanych opadów. Odbicie tej filozofii znajdujemy nadal nawet w aktualnych wytycznych ATV [Schmitt 2000]. Jednocześnie przejawem postępu w warsztacie inżynierskiego modelowania systemów odwadniających, który rysuje się w tych samych wytycznych, jest traktowanie serii rzeczywistych opadów nawalnych jako zalecanej podstawy prowadzenia obliczeń sprawdzających istniejących systemów czy też weryfikacji częstości nadpiętrzenia sieci [Licznar 2008a, Licznar i in. 2008b]. Nadal jednak przy sporządzaniu serii opadów nawalnych postuluje się stosowanie metod doboru istotnych opadów, które redukują liczebność wejściowych zbiorów danych z hietogramami zarejestrowanych deszczów. Przy dzisiejszym poziomie wydajności obliczeniowej komputerów zabiegi te tracą swoje praktyczne uzasadnienie. Ilustracją postępu, jaki dokonał się w zakresie komputeryzacji i który może być wykorzystany w hydrologii miejskiej, jest sama dostępność do zasobów pamięci. Generowane przez autora w dalszej części pliki tekstowe zawierające syntetyczne szeregi czasowe o kroku czasowym: 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320 i 640 minut dla 38-letniego okresu obserwacji według tabeli 3.1, przy ich 100-krotnym powtórzeniu zajmowały około 9,25 GB pamięci na dysku. Jeszcze kilka lat temu dysków o tego rzędu pojemności nie instalowano na komputerach klasy PC.

Idąc tym tropem rozumowania i nawiązując do uwag zawartych we wstępie niniejszej pracy, uzasadnionym jest aktualnie poszukiwanie generatorów deszczów syntetycznych na potrzeby udoskonalenia krajowego warsztatu hydrologii miejskiej i dla probalistycznego modelowania systemów odprowadzania i zagospodarowania wód

deszczowych. Jednocześnie, na podstawie wyników badań z rozdziału 5, dowodzących o multifrakcyjnym charakterze deszczów z Wrocławia, postanowiono generatory oprzeć o technikę multiplikatywnych modeli kaskad losowych. Z pozoru logiczną kontynuacją badań z rozdziału 5 byłoby bezpośrednie wykorzystanie oszacowanych uniwersalnych parametrów multifrakcyjnych dla opracowania modelu kaskadowego z log-Lévy procesem, podobnie jak w badaniach Pathirana i in. [2003]. Powracając jednak do fenomenologicznego charakteru modeli kaskadowych, rozwiązanie to nie okazuje się być optymalnym. O przydatności modeli fenomenologicznych decyduje jakość uzyskiwanych wyników. Jakość wyników uzyskiwanych z wspomnianego modelu kaskadowego wykorzystującego zmienną losową Lévy'ego pozostawia wiele do życzenia. Model ten nie jest w stanie odwzorowywać okresów bez deszczu, wszystkim okresom przypisując niezerowe natężenia opadu. Tak otrzymywane szeregi czasowe nie mogą być bezpośrednio wykorzystywane np. na potrzeby hydrologii miejskiej. Można jedynie podejmować próby ich adaptacji do tego celu przez wprowadzanie arbitralnych granicznych wartości natężeń dla odcięcia okresów deszczowych od bezdeszczowych. Molnar i Burlando [2005] zaproponowali w to miejsce i przetestowali pod kątem hydrologii miejskiej dwa odmienne modele kaskad losowych (kanoniczny i mikrokanoniczny), służące rozdziałowi dobowych sum opadów na 10-minutowe szeregi czasowe. Modele te w opinii autorów zapewniały zadowalające rezultaty, a ich struktura pozwalała na bezpośrednie odwzorowywanie zarówno nieciągłości (ang. intermittency) szeregu natężeń deszczów, jak i zmienności (ang. variability) natężeń w obrębie samych zdarzeń opadowych. Postanowiono zatem podjąć próbę wykorzystania tego samego typu modeli kaskadowych dla generowania syntetycznych szeregów opadowych we Wrocławiu.

## 6.2. Losowe kaskady kanoniczne

Konstrukcja losowej kaskady opiera się na sukcesywnych podziałach  $d$ -wymiarowego hipersześcianu  $J = [0, L_0]^d$  na  $b$  pod-hipersześcianów, co jest graficznie przedstawione na rysunku 6.1. Liczba rozdziału (ang. branching number), przy spełnionym warunku, że  $d > 1$ , może być zapisana jako:

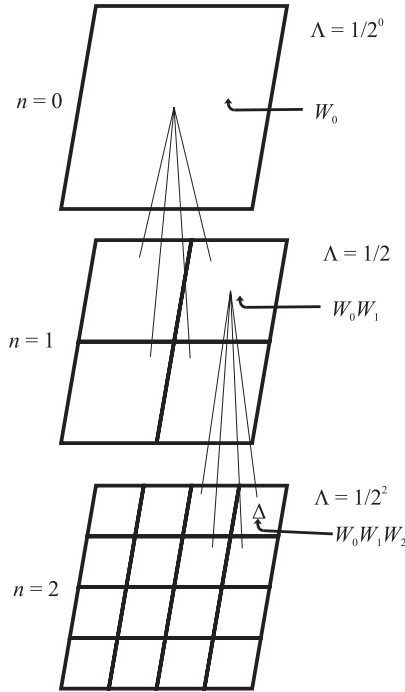
$$b = \prod_{i=1}^d b_i, \quad (6.1)$$

gdzie:  $b_i$  – jest liczbą podpodziałów w każdym kroku w  $i$ -tym wymiarze. Ta dosyć skomplikowana ogólna definicja ulega uproszczeniu po praktycznym przyjęciu równości podpodziałów w różnych wymiarach, co oznacza:

$$b_i = b^{1/d}, \quad i = 1, 2, \dots, d. \quad (6.2)$$

Powstałe w wyniku podziału pod-hipersześciany na poziomie  $n$  są oznaczane jako  $\Delta_n^i$ . Długość boku takiego pod-hipersześcianu  $L_n$  jest wyznacznikiem skali przestrzennej. Na tej podstawie definiowany jest bezwymiarowy parametr skali przestrzennej (ang. dimensionless spatial-scale parameter)  $\Lambda_n$ :

$$\Lambda_n = \frac{L_n}{L_0} = b^{-n/d}. \quad (6.3)$$



Rys. 6.1. Schemat konstrukcji losowej kaskady dla  $d = 2$  (w dwóch wymiarach) i liczby rozdziału  $b = 4$  (rysunek adaptowany za Gupta i Waymire'em (1993)). Na rysunku  $\Lambda$  oznacza skalę przestrzenną, a  $n$  – liczbę kolejnej generacji ( $n = -2\log\Lambda$ )

Fig. 6.1. Schematic construction of random cascade for  $d = 2$  (in two dimensions) and branching number  $b = 4$  (figure adapted from Gupta and Waymire (1993)). On figure  $\Lambda$  stands for the space scale, and  $n$  for following generation number ( $n = -2\log\Lambda$ )

Tak powstała kaskada jest używana do rozdziału tzw. „masy”. Mówi się o rozdziale „masy”, gdyż teoria kaskad losowych jest nierozzerwalnie połączona z matematyczną teorią miary. Miara jest funkcją, która przypisuje podzbiory pewnej przestrzeni do nieujemnych rzeczywistych liczb tak, że wartości miary dla danego podzbioru wskazują na ilość „materii” lub „masy” związanej z podzbiorem. Dla podzbioru  $A$  i dla miary  $\mathfrak{M}$ , ilość „masy” jest oznaczana przez  $\mathfrak{M}(A)$ . Z powyższej definicji wynika bezpośrednio, że miara nie może przyjmować ujemnych wartości i musi być addytywna. Addytywność oznacza, że dla (możliwie nieskończonej) sekwencji rozłącznych podzbiorów  $A_1, A_2, \dots$ , i dla miary  $\mathfrak{M}$  zachodzi zależność [Billingsley 1986]:

$$\mathfrak{M}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathfrak{M}(A_i). \quad (6.4)$$

Należy zauważyć, że równanie 6.4 zmusza do porzucenia w dalszych rozważaniach natężenia deszczu jako wielkości modelowanej. Natężenie deszczu nie może być bowiem kojarzone z „masą” lub „materią”, gdyż nie spełnia ono kryterium addytywności określonego zależnością 6.4. Niemniej, natężenie deszczu jest bezpośrednio związane z ilością deszczu spadającego w pewnym czasie na określony obszar, a więc w tym przypadku z wysokością opadu. Z tej racji modele kaskadowe będą realizowały rozdział wysokości warstwy deszczu, a dopiero uzyskiwane na ich wyjściu wysokości deszczu mogą być zamieniane na równoważne im natężenia deszczu, po podzieleniu przez odpowiednie okresy czasowe. Z punktu widzenia teorii miary – miarą, którą będziemy się zajmować, jest funkcja przypisująca podzbiory (Borela) czasu do nie-ujemnych liczb rzeczywistych, które określają ilość (wysokość) deszczu, deponowanego na przestrzeni ich trwania. To, co nazywamy natężeniem deszczu, jest tą miarą podzieloną przez długość czasu (miarę Lebesgue’a) odpowiadających im podzbiorów.

Podział masy na przednio wygenerowanych pod-hipersześciach kaskady rozpoczyna się od nielosowej początkowej masy  $R_0L_0^d$ . Po pierwszym podziale, powstałym w jej wyniku, pod-hipersześciom  $\Delta_i^1$  przypisywane są masy:  $R_0L_0^dW_1^i/b$ ,  $i = 1, 2, \dots, b$ . Przy czym przyjmuje się, że wartości wag kaskady  $W_n^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, b^n$  są nieujemnymi i w pełni niezależnymi zmiennymi losowymi. Ich wspólny rozkład prawdopodobieństwa jest taki sam jak rozkład  $W$ , który to jest nazywany generatorem kaskady (ang. cascade generator). Z uwagi na fakt, że zmienne losowe generatora  $W_n^i$  są niezależne i mają identyczne rozkłady prawdopodobieństwa, kaskady, które generują, mogą być także nazywane kaskadami losowymi o niezależnych i identycznych rozkładach (ang. independent and identically distributed random cascades). Mechanizm podziału początkowej masy na pod-hipersześciach opisany dla pierwszego stopnia kaskady jest powielany następnie dla następnych, zstępnych stopni kaskady. W wyniku tego masa związana z podziałem  $\Delta_n^i$  na  $n$ -tym stopniu kaskady, oznaczana jako  $\mu_n(\Delta_n^i)$ , jest produktem początkowej masy podzielonej przez liczbę pod-hipersześciów w tej skali oraz wszystkich wpływających wartości  $W_n^i$ , na zstępną drodze prowadzącej od początku kaskady do pod-hipersześciu  $\Delta_n^i$  [Over i Gupta 1994]:

$$\mu_n(\Delta_n^i) = R_0L_0^d b^{-n} \prod_{j=1}^n W_j^i . \quad (6.5)$$

Rozkład masy  $\mu_n$  dany równaniem 6.5 dąży do granicy  $\mu_\infty$ , przy rozbudowie kaskady dążącej do nieskończoności, to znaczy przy  $n \rightarrow \infty$ . Granica ta może bądź też nie być zdegenerowana, to znaczy prawie na pewno równa zero w obrębie całego analizowanego, ograniczonego regionu  $J$  (hipersześciu  $[0, L_0]^d$ ). Niezdegenerowana struktura  $\mu_\infty$  jest wynikiem wielkich odstępstw od średniej (rozbieżności względem średniej), gdyż z prawdopodobieństwem równym 1, multiplikatywny produkt  $W_0W_1W_2 \dots W_n \rightarrow 0$ , przy  $n \rightarrow \infty$ , wzdłuż każdej indywidualnej ścieżki drzewa kaskady. Prowadzi to do osobliwego zachowania granicznego rozkładu kaskady. Ciekawe zachowanie struktury  $\mu_\infty$  skłoniło wielu badaczy do jej studiów z punktu widzenia niedegeneracyjności, rozbieżności momentów statystycznych i wielkości (wymiaru) jej podstawy [Mandelbrot 1974, Kahane i Peyriere 1976].

Rozważając wielostopniowe kaskady dążące do nieskończoności, warto zauważyć ich silny charakter rekursywny. Otóż, jeśli oberzemy pod-hipersześciem na poziomie  $n$

z masą  $\mu_n(\Delta_n^i)$ , to kaskada poniżej tego pod-hipersześcianu jest niezależną kaskadą z tym samym generatorem i początkową masą  $\mu_n(\Delta_n^i)$ . Idąc tym tropem, Gupta i Waymire [1993] postulowali, że  $\mu_\infty$  spełnia podstawowe równanie rekursyjne:

$$\mu_\infty(\Delta_n^i) = \mu_n(\Delta_n^i) Z_\infty(i), \quad i = 1, 2, \dots, b^n, \quad (6.6)$$

gdzie:

$$\mu_n(\Delta_n^i) = W_0 \cdot W_1 \cdot \dots \cdot W_n b^{-n}, \quad (6.7)$$

a wartości  $Z_\infty(i)$  są statystycznie niezależne od  $\mu_n(\Delta_n^i)$ . Zmienne  $Z_\infty(i)$  są niezależne i o identycznym rozkładzie dla wszystkich  $i$ :

$$Z_\infty(i) = \frac{\mu_\infty([0, L_0]^d)}{\mu_0(\Delta_0)} = \frac{\mu_\infty([0, L_0]^d)}{\mu_0([0, L_0]^d)} = \frac{\mu_\infty([0, L_0]^d)}{R_0 L_0^d}. \quad (6.8)$$

W dalszej części  $Z_\infty$  będzie używane jako oznaczenie każdej zmiennej losowej z powyższym rozkładem. W myśl równania 6.6 masa kaskady  $\mu_\infty$  w dowolnej skali  $\lambda_n$  składa się z niskoczęstotliwościowego, wielkoskalowego komponentu  $\mu_n$  oraz wysokoczęstotliwościowego, małoskalowego komponentu  $Z_\infty$ . Przy spełnieniu pewnych matematycznych warunków można wykazać, że  $Z_\infty$  istnieje i nie jest zdegenerowane. Najważniejszym spośród tych warunków jest to, że matematyczna wartość oczekiwana czy też średnia zbioru jest równa 1, a więc  $E[W] = 1$  [Over i Gupta 1994]. Fizyczną interpretacją tego warunku jest to, że przy kaskadowym rozpadzie masy jest ona zachowana jedynie jako średnia wartość. Niemniej, warunek ten nie gwarantuje zachowania masy dla każdej realizacji kaskady. Kaskady charakteryzujące się zachowaniem masy dla średniej są nazywane kaskadami kanonicznymi. Kaskady spełniające zachowanie masy dla każdej realizacji kaskady są natomiast nazywane kaskadami mikrokanonicznymi i będą one omawiane szerzej w dalszej części pracy. Założenie  $E[W] = 1$ , w powiązaniu z równaniami 6.5 i 6.6, implikuje ponadto, że  $E[Z_\infty] = 1$ . Powracając raz jeszcze do równania 6.6, warto przeanalizować jego szczególny przypadek. Zsumowanie obydwu stron równania dla wszystkich wartości  $i$ , po dodatkowym przyjęciu  $n = 1$ , prowadzi do:

$$\sum_{i=1}^b \mu_\infty(\Delta_1^i) = \sum_{i=1}^b \mu_1(\Delta_1^i) Z_\infty(i). \quad (6.9)$$

Lewa strona równania 6.9 jest po prostu całkowitą graniczną masą  $Z_\infty$ , a występujące w obrębie jego prawej strony składowe mas mogą być zapisane jako:  $\mu_1(\Delta_1^i) = W_i/b$ . Na mocy tych obserwacji zależność 6.9 ulega przekształceniu do:

$$Z_\infty = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b W_i Z_\infty(i). \quad (6.10)$$

Zgodnie z równaniem 6.10 struktura losowych kaskad jest określana przez parametr  $b$  nazywany liczbą rozdziału oraz rozkład prawdopodobieństwa  $W$  generatora kaskady. Ten ostatni pojawia się w wielu matematycznych wyrażeniach w postaci jego zmodyfikowanej, skumulowanej funkcji generującej  $\chi_b(q)$  [Gupta i Waymire 1993].

Funkcja ta jest nazywana funkcją Mandelbrot-Kahane-Peyriere (w skrócie funkcja MKP) na cześć badaczy, którzy jako pierwsi wykazali jej teoretyczną ważność w kontekście kaskad losowych [Mandelbrot 1974, Kahane i Peyriere 1976]. Funkcja MKP jest zdefiniowana jako:

$$\chi_b(q) = \log_b E[W^q] - (q-1). \quad (6.11)$$

Istotne znaczenie funkcji MKP ujawnia się również przy praktycznych próbach stosowania modeli kaskadowych. Okazuje się bowiem, że z użyciem funkcji MKP estymacja parametrów generatorów kaskad może być oparta o analizę skalowania momentów marginalnych zbiorów. Skalowanie momentów zbioru jest zdefiniowane zależnością [Over 1995]:

$$\lim_{\Lambda_n \rightarrow 0} \frac{\log E M_n(q)}{-\log \Lambda_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b E[M_n(q)]}{n/d}, \quad (6.12)$$

gdzie:

$$M_n(q) = \sum_{i=1}^{b^n} \mu_\infty^q(\Delta_n^i). \quad (6.13)$$

W wzorach powyższych  $-\infty < q < \infty$ , a w przypadku  $q \leq 0$  sumowanie dotyczy jedynie niezerowych wartości  $\mu_\infty(\Delta_n^i)$ . Ponadto  $d$  jest wymiarem rozpatrywanego regionu przestrzennego. Wymiar ten w przypadku analizowanych w pracy szeregów czasowych deszczów z Wrocławia wynosi  $d = 1$ .

Na podstawie równości 6.6 można otrzymać zależność postaci [Over 1995]:

$$E[M_n(q)] = b^n E[\mu_\infty^q(\Delta_n^i)] = \mu_0^q(J) b^n b^{-nq} (E[W^q])^n E[Z_\infty^q], \quad (6.14)$$

która, po podstawieniu do równania 6.12 prowadzi do:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b E[M_n(q)]}{n/d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b \left\{ (b^{1-q} E[W^q])^n E[Z_\infty^q] \mu_0^q(J) \right\}}{n/d} = \quad (6.15)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \{ (1-q) + \log_b E[W^q] \} + \log_b (E[Z_\infty^q]) + q \log_b \mu_0(J)}{n/d} = \quad (6.16)$$

$$= d (1 - q + \log_b E[W^q]) = d \chi_b(q). \quad (6.17)$$

Przekształcenie to jest istotne, gdyż daje nam metodę estymacji generatora  $W$  w sytuacji, gdy dysponujemy dużą liczbą niezależnych i charakteryzowanych tym samym rozkładem (ang. iid – independent and identically distributed) realizacji procesu. W takim przypadku należy obliczyć średnie wartości momentów dla zbiorów, a następnie przeanalizować ich skalowanie, co zapewni oszacowanie funkcji MKP i co za tym idzie – generatora  $W$ .



W praktyce zwykle jednak nie dysponujemy wieloma realizacjami procesu, a jeśli nawet, to trudno jest *a priori* założyć, że są one niezależne i o tym samym rozkładzie. Wynika stąd potrzeba wypracowania odmiennej teorii bazującej na skalowaniu tzw. przestrzennie uśrednionych momentów [Over i Gupta 1994, Over 1995]:

$$\tau(q) = \lim_{\Lambda_n \rightarrow 0} \frac{\log_b M_n(q)}{-\log \Lambda_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b M_n(q)}{n/d}. \quad (6.18)$$

W zależności 6.18  $\tau(q)$  jest funkcją charakteryzującą skalowanie momentów z pojedynczej realizacji procesu. Momenty te były nazywane przez Overa [1995] przestrzennymi (w odróżnieniu od wcześniejszych momentów zbiorów) dla podkreślenia, że były one obliczane na podstawie znajomości pojedynczego pola opadowego (np. pojedynczego skanu radarowego pola opadu), a nie całego zbioru rejestracji takich pól.

Warunki, dla których granica w zależności 6.18 istnieje i równa się skalowaniu uśrednionych momentów zbioru były analizowane przez Holleya i Wymire'a. Autorzy ci sformułowali następujące twierdzenie [cytat za Overem 1995]:

*Rozpatrzmy dyskretną niezależną i o tym samym rozkładzie losową kaskadę o generatorze  $W$  i liczbie rozdziatu  $b$ . Dla momentów  $q$ , takich że:*

$$\frac{E[W^{2q}]}{(E[W^q])^2} < b, \quad (6.19)$$

*i*

$$E[Z_\infty^{2q}] < \infty, \quad (6.20)$$

*wówczas:*

$$\tau(q) = d\chi_b(q), \quad (6.21)$$

*ponadto:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n(q)}{E[M_n(q)]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n(q)}{(R_0 L_0^d)^q b^{n\chi_b(q)} E[Z_\infty^q]} = Y(q), \quad (6.22)$$

*gdzie:  $Y(q)$  jest zmienną losową dla każdego  $q$ .*

Istnienie zmiennej losowej  $Y(q)$  we wzorze 6.18 świadczy, że momenty  $M_n(q)$  nie są zbieżne do ich wartości oczekiwanej w granicy wysokiej rozdzielczości. Dowodzi to nieergodyczności miar generowanych przez kaskady. Ergodyczność procesu oznacza, że charakterystyki wyznaczone z realizacji w danym czasie są w pełni równoważne charakterystykom wyznaczonym z realizacji w danych miejscach po zbiorze realizacji. Jedynie procesy stacjonarne mogą wykazywać cechę ergodyczności. Pomimo tego równanie 6.21 udowadnia, że funkcja  $\tau(q)$  obliczona z pojedynczego zapisu w wysokiej rozdzielczości realizacji procesu może być użyta do wnioskowania o rozkładzie prawdopodobieństwa  $W$ .

Bardzo istotną cechą modeli kaskadowych, która skłania do ich stosowania w modelowaniu turbulencji oraz procesów opadowych, jest ich zdolność do odwzorowywa-

nia okresów i regionów z zerowym natężeniem procesu. W przypadku kaskad kanonicznych efekt ten osiąga się przez przyzwolecie na posiadanie przez generator  $W$  atomu w zerze z prawdopodobieństwem  $p$  [Over i Gupta 1994]:

$$W = \begin{cases} 0 & \text{z prawdopodob. } p \\ W^+ & \text{z prawdopodob. } 1-p \end{cases}, \quad (6.23)$$

gdzie  $W^+$  to nieujemna część  $W$ . Po podstawieniu  $q = 0$  do wzoru 6.11 i przy jednoczesnym użyciu zależności 6.21, wyznaczona wartość prawdopodobieństwa  $p$  wynosi:

$$p = 1 - b^{1-\tau(0)/d}. \quad (6.24)$$

Mając na uwadze strukturę wzoru 6.24, istnienie atomu w zerze można zapisywać w sposób ogólny jako [Over 1995]:

$$Pr(W = 0) = 1 - b^{-\beta_k} \quad \text{ i } \quad Pr(W = W^+) = b^{-\beta_k}, \quad (6.25)$$

gdzie  $\beta_k$  jest nieujemnym parametrem.

Naturalnym następstwem wprowadzenia atomu w zerze dla  $W$  jest traktowanie generatora  $W$  jako iloczynu o postaci:

$$W = BY, \quad (6.26)$$

gdzie:

$B$  i  $Y$  są niezależnymi generatorami kaskady,

$B$  ma rozkład  $Pr(B = 0) = 1 - b^{-\beta_k}$  i  $Pr(B = b^{\beta_k}) = b^{-\beta_k}$ ,

$Y = b^{-\beta_k} W^+$ , a w szczególności  $Pr(Y > 0) = 1$ .

Analizując strukturę generatora  $B$ , warto podkreślić, że jest on całkowicie parametryzowany przez  $\beta_k$ , przez co jest określany mianem modelu  $\beta_k$  (model ten był już omawiany w rozdziale 4, porównaj równania 4.19 i 4.20). Deterministyczna kaskada z tym generatorem została pierwotnie zaproponowana przez Novikova i Stewarta [1964] jako model przestrzennej struktury dyssypacji energii w turbulencji płynów.

Drugi z generatorów  $Y$  musi także posiadać pewną charakterystyczną strukturę. Jak wskazywał Gupta [1995] i co potwierdziły badania Molnara i Burlando [2005] może to być model o postaci:

$$Y = b^{\gamma_k + \sigma_k X_n}, \quad (6.27)$$

gdzie  $\gamma_k$  jest wolnym parametrem,  $X_n$  zmienną losową o rozkładzie normalnym  $\mathcal{N}(0,1)$ , a  $\sigma_k^2$  parametrem definiującym wariancję  $Y$ . Z uwagi na swoją strukturę model ten jest nazywany modelem log-normalnym (ang. log-normal model). Model ten jest zgodny z log-normalną hipotezą turbulentnej dyssypacji energii według Kolmogorova [1962] i Obhokova [1962]. Niemniej, dopiero Mandelbrot [1972] użył log-normalnego losowego generatora kaskadowego jako modelu turbulencji. Model ten mieści się także w klasie diskutowanych już uniwersalnych generatorów kaskad, zaproponowanych przez Schertzera i Lovejoya [1987].

Na podstawie analizy funkcji MKP generatora  $Y$ , Over [1995] dowiódł, że wolny parametr  $\gamma_k$  winien być równy:

$$\gamma_k = -\sigma_k^2 \ln b / 2. \quad (6.28)$$

Po uwzględnieniu 6.28 otrzymuje się następujący rozkład generatora  $W$ :

$$Pr(W = 0) = 1 - b^{-\beta_k} \text{ i } Pr(W = b^{\beta_k} Y = b^{\beta_k - \sigma_k^2 \ln b / 2 + \sigma_k X_n}) = b^{-\beta_k}, \quad (6.29)$$

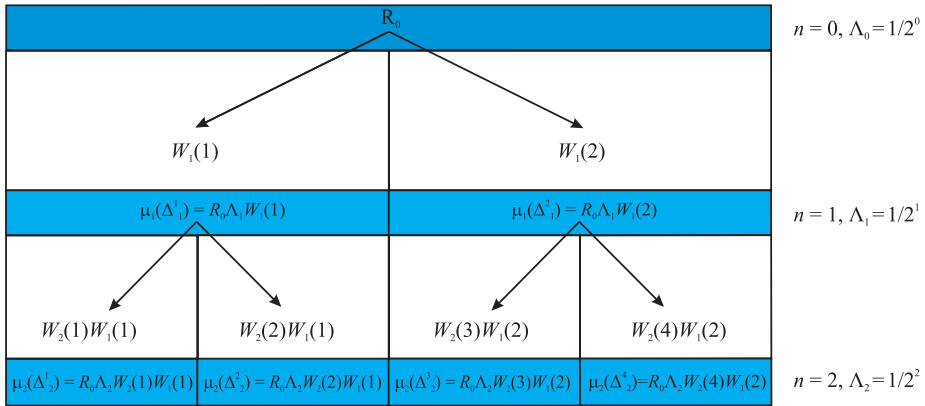
a funkcja MKP przyjmuje postać:

$$\chi_b(q) = (\beta_k - 1)(q - 1) + \frac{\sigma_k^2 \ln b}{2}(q^2 - q). \quad (6.30)$$

### 6.2.1. Kaskada kanoniczna o stałych parametrach

Jako pierwszy model do generowania syntetycznych szeregów opadowych w niniejszej pracy zastosowano, opisywany w poprzednim podrozdziale, nieciągły log-normalny  $\beta_k$  model kaskady kanonicznej o stałych parametrach  $\beta_k$  i  $\sigma_k^2$ . Model ten zastosowano do rozdziału sumy dobowej opadu na krótsze przedziały czasu, dochodzące do rozdzielczości czasowej równej 5 minut. Funkcjonowanie kaskady nie dotyczyło zatem przypadku pola opadowego (pole dwuwymiarowe  $d = 2$ ), tak jak to jest schematycznie przedstawione na rysunku 6.1, lecz znacznie prostszego przypadku jednowymiarowego ( $d = 1$ ) szeregu opadowego, co ilustruje rysunek 6.2. Zgodnie z konwencją rysunku 6.2 w modelu kaskadowym, na każdym z jego poziomów przyjęto stałą wartość liczby rozdziału  $b = 2$ . Przyjęcie to, przydatne z punktu widzenia prostoty modelu, implikuje pewne pozorne wątpliwości co do jego praktycznej przydatności. Przyjęcie  $b = 2$ , narzuca bowiem następującą sekwencję rozdzielczości czasowych kaskady: 1280 min  $\rightarrow$  640 min  $\rightarrow$  320 min  $\rightarrow$  160 min  $\rightarrow$  80 min  $\rightarrow$  40 min  $\rightarrow$  20 min  $\rightarrow$  10 min  $\rightarrow$  5 min. Sekwencja ta wynika z praktycznej potrzeby otrzymywania na wyjściu z kaskady 5-minutowych szeregów wysokości warstw deszczów, które odpowiadają wymogom używanych obecnie w praktyce modeli hydrodynamicznych. Co za tym idzie, na samym szczycie kaskady u jej początku jest suma wysokości opadu dla czasu 1280 min, a nie 1440 min (24 h). Jednak jak słusznie zauważyli Molnar i Burlando [2005], prawdopodobieństwo wystąpienia w ciągu doby opadu lub też kilku opadów, których łączny czas przekraczały 1280 min, jest bardzo niskie. Prawdziwość tej tezy została potwierdzona empirycznie na bazie analizy całego zbioru danych z Wrocławia, złożonego z 38 lat zapisów pluwiograficznych. Na łączną liczbę 6892 dni tworzących niniejszy zbiór stwierdzono jedynie 24 dni, dla których opady deszczu przekraczały okres 1280 min (co daje niespełna 0,35% prawdopodobieństwa wystąpienia takiego zdarzenia). Ponadto w przypadku 7 spośród tych 24 dni łączna suma dobowa opadu wynosiła poniżej 10 mm (łączna suma 10 mm deszczu jest przyjmowana jako graniczna wartość dla selekcji deszczów istotnych do modelowania kanalizacji w Komentarzu do ATV-A 118, Schmitt [2000]). W tym nielicznym zbiorze, tylko w przypadku 8 dni, stwierdzono sumy dobowe opadów w przedziale od 20 mm do 30 mm i jeden dzień z opadem w zakresie od 30 mm do 40 mm. Wyniki te pozostają w zgodzie z ogólną charakterystyką opadów w Polsce

przeprowadzoną przez Lorenc [cyt. za Bogdanowicz i Stachý 1998], mówiącą, że w warunkach klimatycznych Polski opady trwają średnio 10% czasu, a opady o natężeniach większych od  $0,2 \text{ mm}\cdot\text{min}^{-1}$  od około 3,5 do 16 godzin na rok.



Rys. 6.2. Schemat konstrukcji losowej kaskady dla  $d = 1$  i liczby rozdziału  $b = 2$ . Na rysunku  $\Lambda$  oznacza skalę czasową dla kolejnych generacji kaskady  $n = 0, 1$  i  $2$  ( $n = -2\log\Lambda$ )

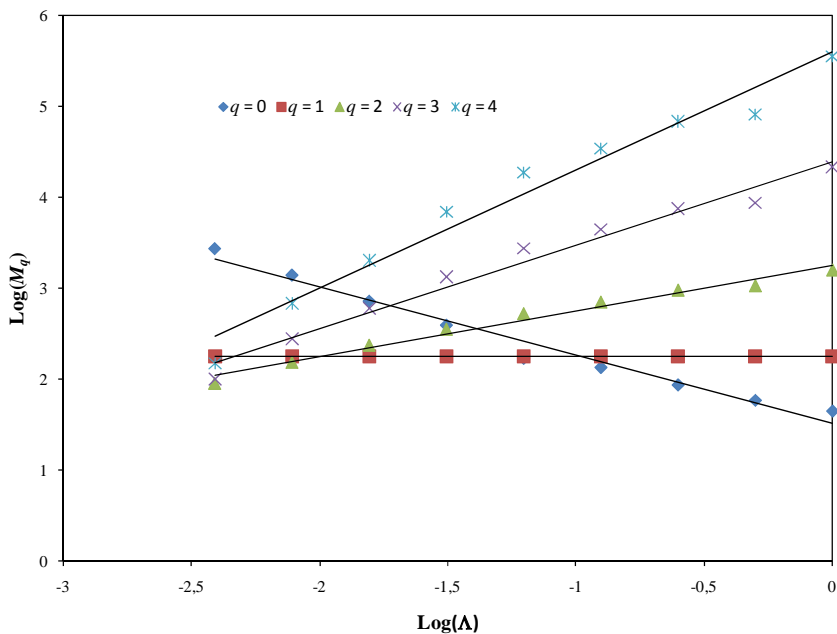
Fig. 6.2. Schematic construction of random cascade for  $d = 1$  and branching number  $b = 2$ . In figure  $\Lambda$  stands for time scale of following cascade generations  $n = 0, 1$  i  $2$  ( $n = -2\log\Lambda$ )

### 6.2.1.1. Estymacja stałych parametrów kaskady kanonicznej

Pierwszym etapem estymacji stałych parametrów kaskady kanonicznej było przeanalizowanie skalowania momentów według zależności 6.18. W tym celu opracowano program komputerowy MOMENTY, który pozwalał na obliczenie momentów rzędów w zakresie od  $q = 0$  do  $q = 4,0$ ; dla całego zbioru wysokości opadów dla różnych skal czasu. Graficznie wyniki działania programu MOMENTY są przedstawione na rysunku 6.3 dla wybranych, całkowitych wartości  $q$ . Na wykresie zgodnie z oczekiwaniami pomiędzy zlogarytmowanymi wartościami momentów i skal czasowych rysują się typowe zależności liniowe. Jest to potwierdzeniem zjawiska skalowania (tym razem dla szeregu wysokości opadów w miejsce szeregów czasowych natężeń deszczów), które dokładniej analizowano w rozdziale 5.

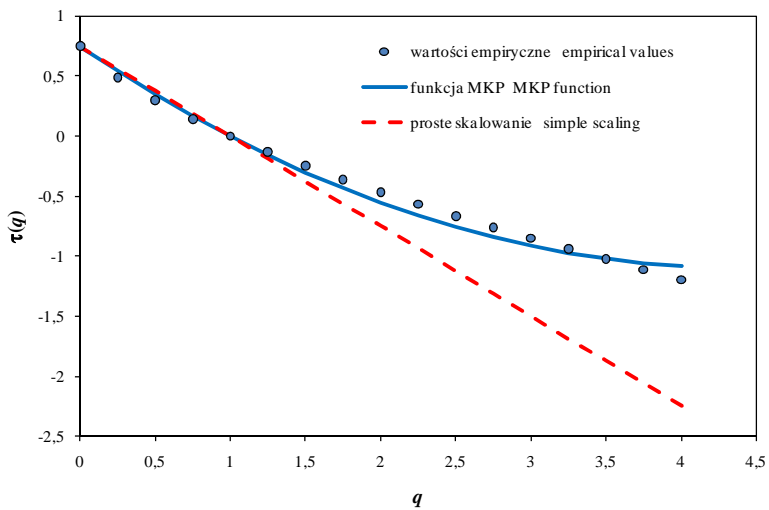
Empiryczne wartości funkcji skalowania  $\tau(q)$  wyznaczone na podstawie skalowania momentów według zależności 6.18 zostały przedstawione na rysunku 6.4. Widać, że ich układ wyraźnie odbiega od linii charakterystycznej dla prostego skalowania dla dużych wartości  $q$  (linia przerywana dana jest równaniem  $\tau(q) = (\beta_k - 1)(q - 1)$ ). Potwierdza to ponownie multifraktalny charakter zapisów opadów z Wrocławia, odbiegających od prostego układu monofraktalnego. Na mocy zależności 6.21 i 6.30 oraz po uwzględnieniu wymiaru rozpatrywanego regionu przestrzennego  $d = 1$ , do empirycznych wartości funkcji  $\tau(q)$  dokonano dopasowania teoretycznego modelu funkcji MKP według równania:

$$\chi_b(q) = ((q) = (\beta_k - 1)(q - 1) + \frac{\sigma_k^2 \ln b}{2}(q^2 - q). \quad (6.31)$$



Rys. 6.3. Wykres zależności logarytmu wartości momentów rzędu  $q$  względem logarytmu wartości parametru skali  $\Lambda$ , dla skal czasowych od 5 min ( $\Lambda = 1/2^8$ ) do 1280 min ( $\Lambda = 1$ )

Fig. 6.3. Moments of order  $q$  logarithmic values relation with logarithmic values of scale parameter  $\Lambda$ , for different timescales from 5 minute ( $\Lambda = 1/2^8$ ) up to 1280 minutes ( $\Lambda = 1$ )



Rys. 6.4. Empiryczna funkcja  $\tau(q)$  dla danych obserwacyjnych z Wrocławia i dopasowanie do niej modelu teoretycznej funkcji MKP

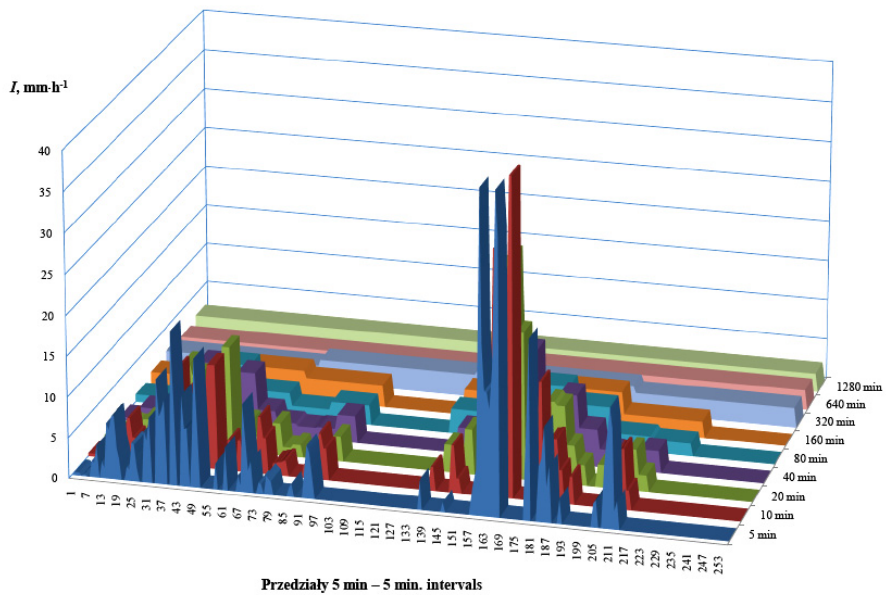
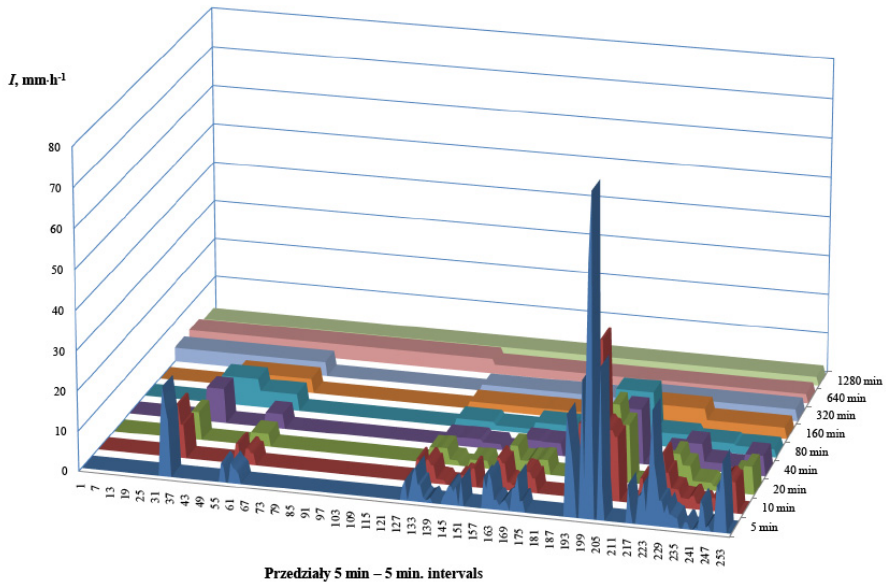
Fig. 6.4. The empirical function  $\tau(q)$  for the observed data from Wrocław and the theoretical MKP function fit to it

Oszacowano przy tym wartości  $\beta_k = 0,251$  i  $\sigma_k^2 = 0,251$ . Wartości te są stałe i uniwersalne, to znaczy determinujące działanie kaskady dla każdego opadu, stąd też kaskada kanoniczna zbudowana na ich bazie jest nazywana kaskadą kanoniczną o stałych parametrach. Obrazy zarówno otrzymanej empirycznej funkcji skalowania  $\tau(q)$ , jak i dopasowanego modelu funkcji MKP były analogiczne do uzyskanych przez Molnara i Burlando [2005] dla danych z Zurychu w Szwajcarii. Niemniej, oszacowane przez tych autorów wartości parametrów  $\beta_k$  i  $\sigma_k^2$  były wyższe i wynosiły  $\beta_k = 0,372$  i  $\sigma_k^2 = 0,372$ . Zgodność co do wartości parametrów  $\beta_k$  i  $\sigma_k^2$  zarówno dla zbioru z Wrocławia, jak i z Zurychu miała charakter jedynie przypadkowy i nie należy z tego wyciągać dalszych wniosków [prywatna dyskusja autora z dr. Molnarem].

### **6.2.1.2. Generowanie syntetycznych szeregów deszczów z użyciem kaskady kanonicznej o stałych parametrach**

Do generowania syntetycznych szeregów wartości wysokości deszczów z użyciem kaskady kanonicznej o stałych parametrach opracowano specjalny program komputerowy CANONICAL. Program ten pozwalał na rozdział całkowitych wysokości warstw deszczu zarejestrowanych dla 1280 minut na krótsze okresy czasowe, poczynając od 640 min ( $\lambda_k = 128$ ), a sukcesywnie docierając do 5 min ( $\lambda_k = 1$ ). W programie CANONICAL zaimplementowano generator rozkładu normalnego według metody biegunowej (ang. polar method) Boxa-Mullera [Devroye 1986]. Na wejściu generatora prezentowane były wartości wysokości warstw deszczu dla 1280 minut według danych obserwacyjnych z Wrocławia. Program CANONICAL był uruchamiany 100 razy dla całego szeregu 1280-minutowych sum opadów z całego okresu 38 lat. W rezultacie otrzymano szereg syntetycznych danych opadowych dla różnych rozdzielczości czasowych od 640 do 5 minut dla łącznego okresu hipotetycznych 3800 lat.

Przykładowe wyniki działania kaskady kanonicznej są prezentowane graficznie na rysunku 6.5, na którym zestawiono dwa wybrane, alternatywne scenariusze rozdziału tej samej sumy dobowej opadu, wynoszącej 49,5 mm. Na wykresach wysokości deszczu zostały przeliczone na odpowiadające im natężenia. Jak widać, w rezultacie działania kaskady niewielkie i wyrównane natężenie, równe  $2,3 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$ , ulega coraz większemu zróżnicowaniu na niższych poziomach kaskady. W końcowym efekcie natężenia deszczu w rozdzielczości 5-minutowej są już bardzo silnie zróżnicowane, widoczne są liczne okresy bez deszczu, pojedyncze okresy z natężeniem dochodzącym do  $40 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$  (dolny wykres) czy nawet z dwa razy większym natężeniem  $80 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$  (wykres górny). Uzyskane na końcu kaskady szeregi czasowe syntetycznych opadów o rozdzielczości 5 minut wizualnie odpowiadały rzeczywistym rejestracjom deszczów. W ich przebiegu widać charakterystyczne silnie zmienne w czasie impulsy czy też grupy (ang. clusters) opadowe, rozdzielane przez okresy bezdeszczowe (odwzorowanie nieciągłości i zmienności natężeń opadu). Nie obserwowano np. występowania niespodziewanych pojedynczych 5-minutowych okresów z deszczem w obrębie długich okresów bezdeszczowych. Jednocześnie zgodnie z założeniami kaskady kanonicznej wysokość deszczu ulegała fluktuacjom na poszczególnych poziomach kaskady. Na przykład, w przypadku pierwszego ze scenariuszy wahała się ona od 42,5 mm (rozdzielczość 160 min) do 64,5 mm (rozdzielczość 640 min). Jednak, obliczona średnia wysokość opadu na wszystkich poziomach kaskady, wynosząca 51,8 mm, była zbliżona do początkowej wysokości 49,5 mm. Tak więc w przybliżeniu spełniony był warunek  $E[W] = 1$  [Over i Gupta 1994].



Rys. 6.5. Przykładowe wyniki działania kaskady kanonicznej o stałych parametrach (dwa alternatywne scenariusze rozdziału sumy dobowej opadu równej 49,5 mm)

Fig. 6.5. Examples of the canonical cascade of constant parameters functioning (two alternative scenarios of the 49,5 mm daily precipitation depth disaggregation)

### 6.2.1.3. Ocena jakości syntetycznych szeregów deszczów z kaskady kanonicznej o stałych parametrach

Generując syntetyczne szeregi opadów z użyciem modelu fenomenologicznego, staramy się uzyskiwać prawdopodobne przebiegi zjawisk opadowych. Te syntetyczne przebiegi winny być prawdopodobnymi realizacjami lokalnych procesów opadowych, a więc mieć statystyki zbliżone do zarejestrowanych archiwalnych szeregów pluwiograficznych.

Ocenę statystyczną syntetycznych szeregów uzyskanych z kaskady kanonicznej o stałych parametrach rozpoczęto od analizy nieciągłości opadów. W tym celu przygotowano program EP0, który pozwalał na obliczenie prawdopodobieństw wystąpienia okresów bezdeszczowych  $E(p_0)$  (o zerowej wysokości opadów) w syntetycznych szeregach o różnej rozdzielczości od 640 minut ( $\lambda_k = 128$ ) do 5 minut ( $\lambda_k = 1$ ). Wyniki obliczeń programem EP0 obrazuje rysunek 6.6. Na wykresie dla szeregów syntetycznych przedstawiono jedynie pojedynczy układ punktów, uzyskany jako średni dla 100 niezależnych generacji, gdyż wahania wartości w obrębie kolejnych generacji były nieznaczne i całkowicie pomijalne, czego w pełni dowodzą dane zamieszczone w tabeli 6.1. Dla wszystkich skal czasowych wartości odchylenia standardowego wartości  $E(p_0)$  były pomijalnie małe w odniesieniu do wartości średnich  $E(p_0)$ . Wykres na rysunku 6.6 ujawnia występowanie znacznych rozbieżności pomiędzy prawdopodobieństwem wystąpienia okresów bez deszczu w szeregach obserwowanych i syntetycznych. W odniesieniu do wszystkich skal czasowych wartości prawdopodobieństwa wyznaczone dla szeregów obserwowanych przewyższały odpowiadające im wartości prawdopodobieństwa dla szeregów syntetycznych.

Tabela 6.1

Table 6.1

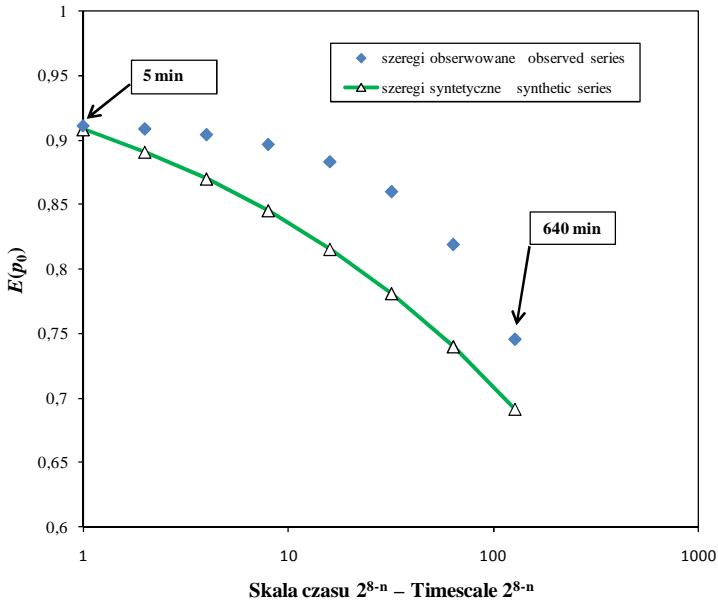
Średnie i odchylenia standardowe wyznaczonych wartości  $E(p_0)$  dla 100 szeregów wygenerowanych z kaskady kanonicznej o stałych parametrach, dla poszczególnych skal czasowych  $\lambda_k = 2^{8-n}$   
 Averages and standard deviations of the calculated  $E(p_0)$  values, for 100 generated time-series from canonical cascade of constant parameters, for different time scales  $\lambda_k = 2^{8-n}$

Rozdzielczość czasowa, min Time resolution, min	640	320	160	80	40	20	10	5
Skala czasowa $\lambda_k = 2^{8-n}$ Time scale $\lambda_k = 2^{8-n}$	128	64	32	16	8	4	2	1
Średnia $E(p_0)$ Average $E(p_0)$	0,690	0,739	0,781	0,816	0,845	0,870	0,891	0,908
Odchylenie standardowe $E(p_0)$ Standard deviation $E(p_0)$	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001

Szczególnie duże odstępstwa były obserwowane dla skal odpowiadających czasom 80, 160 i 320 minut. Rozbieżności te jednak ulegały prawie całkowitemu zanikowi dla skali odpowiadającej czasowi 5 minut. Obserwację tę należy uznać za potencjalnie interesującą z punktu widzenia użycia syntetycznych danych, właśnie w tej najmniejszej ze skal czasu na potrzeby inżynierii środowiska, a więc np. do hydrodynamicznego modelowania systemów kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej czy też modelowania procesu rozszczynania wód opadowych. Rozbieżności pomiędzy wartościami prawdopodobieństwa  $E(p_0)$  dla szeregów obserwowanych z Zurychu i syntetycznych z modelu



kanonicznego były obserwowane także przez Molnara i Burlando [2005], chociaż ich wielkość była zdecydowanie mniejsza. W dodatkowo rozbieżności te zanikały szybko wraz ze spadkiem skali czasu.



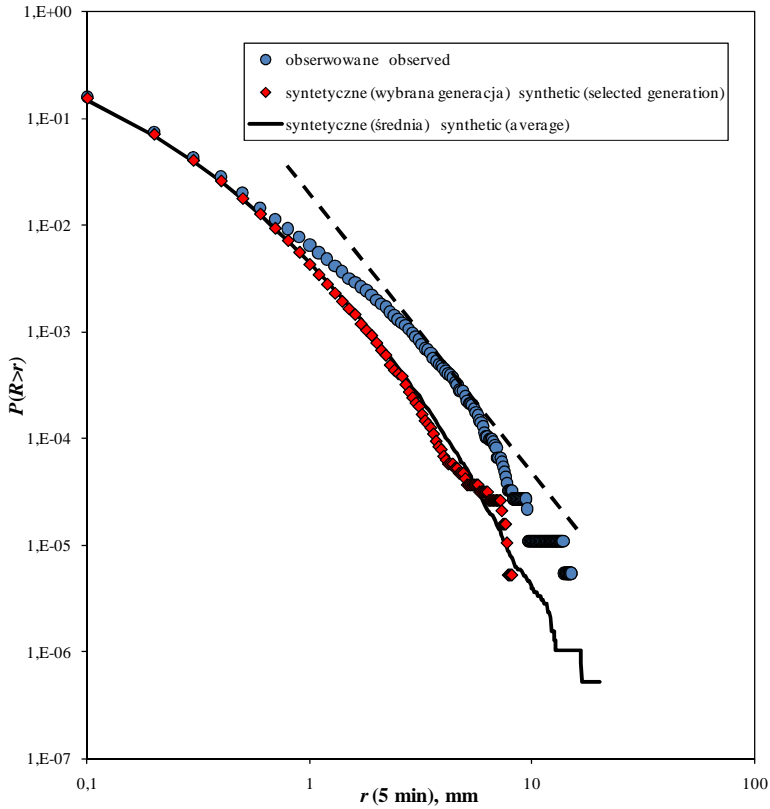
Rys. 6.6. Porównanie nieciągłości opadów w szeregach obserwacyjnych z Wrocławia oraz w szeregach syntetycznych wygenerowanych z kaskady kanonicznej o stałych parametrach (linią ciągłą połączono punkty uzyskane dla szeregów syntetycznych, wyznaczone jako średnie ze 100 niezależnych generacji)

Fig. 6.6. Comparison of the rainfall intermittency at the observed rainfall time-series from Wrocław and at the synthetic time-series generated by the canonical cascade of constant parameters (points obtained for synthetic time-series estimated as averages over 100 independent generations were joined by the continuous line)

Analizując rysunek 6.6, można zauważyć zarówno dla szeregów obserwacyjnych, jak i syntetycznych naturalny przyrost prawdopodobieństwa wystąpienia okresów bezdeszczowych wraz z obniżeniem skali czasu. Jest to w pełnej zgodzie z obserwacjami (patrz rozdział 5.2) uzyskanymi przy stosowaniu metody funkcyjnego zliczania pudełek. Poprawa rozdzielczości czasowej obserwacji opadów deszczu pozwala na dokładniejsze rozpoznawanie okresów rzeczywiście bezdeszczowych. Na rysunku 6.6 od skali czasu odpowiadającej około 80 minutom ku niższym skalom przyrost wartości prawdopodobieństwa  $E(p_0)$  jest już niewielki i w przybliżeniu liniowy. Raz jeszcze zapewne daje w tym miejscu o sobie znać istnienie charakterystycznej skali czasowej odpowiadającej czasowi około 80 minut, na której obserwowano „załamanie i zaburzenie” charakterystyk skalowych w analizie multifraktalnej szeregów opadowych z Wrocławia (rozdział 5). Pośrednim potwierdzeniem poprawności uzyskanego wykresu prawdopodobieństwa wystąpienia okresu bez deszczu jest jego odczyt dla czasu 10 minut (równego podstawowej działce czasowej pasków pluwiograficznych). Odczytana wartość  $E(p_0) \approx 0,89$ , sugeruje,

że we Wrocławiu opady trwają około 11% czasu. Procent ten pokrywa się z cytowanymi już wcześniej wynikami Lorenc [cyt. za Bogdanowicz i Stachý 1998], mówiącymi, że w warunkach klimatycznych Polski opady trwają średnio 10% czasu.

Drugim elementem oceny statystycznej jakości wygenerowanych z kaskady kanonicznej syntetycznych szeregów opadowych była analiza rozkładu prawdopodobieństwa niezerowych wysokości deszczu. Skoncentrowano się przy tym na analizie rozkładów prawdopodobieństwa dla szeregów syntetycznych o rozdzielczości czasowej 5 minut, mając na uwadze ich zasadnicze znaczenie jako bazy do modelowania np. systemów kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej. W tym celu opracowano program komputerowy CDF, który pozwalał na wyznaczenie dystrybuanty dla szeregów obserwowanych i syntetycznych. Wyniki jego działania są przedstawione na rysunku 6.7.



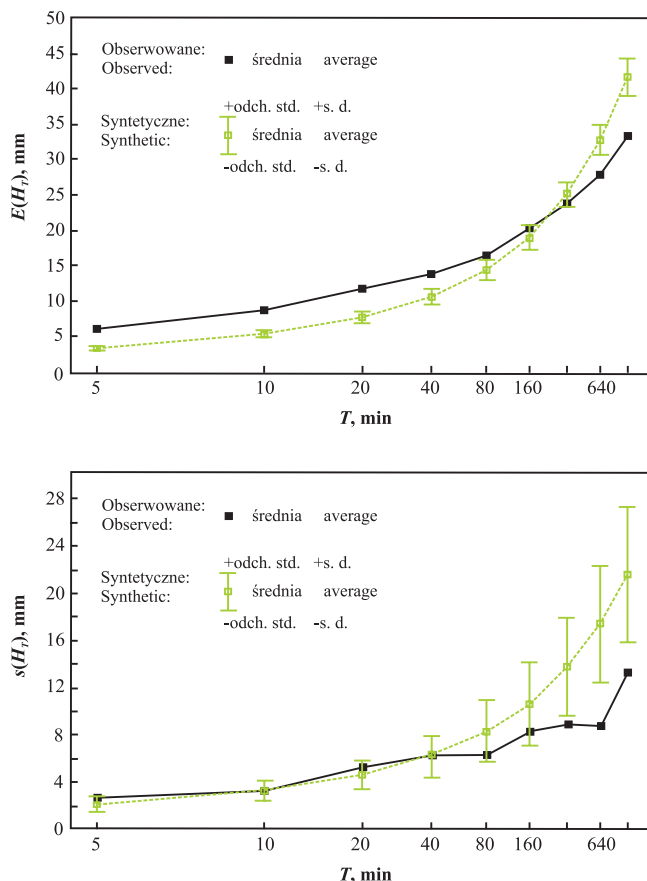
Rys. 6.7. Dystrybuanty wysokości opadu, stwierdzone dla szeregów obserwacyjnych z Wrocławia oraz dla szeregów syntetycznych wygenerowanych z kaskady kanonicznej o stałych parametrach (linią ciągłą oznaczono dystrybuantę dla szeregów syntetycznych, wyznaczoną jako średnia ze 100 niezależnych generacji)

Fig. 6.7. The cumulative distribution functions calculated for the observed time-series from Wrocław and for the synthetic time-series generated by the canonical cascade of constant parameters (cumulative distribution function calculated as the average over 100 independent generations was marked by the continuous line)

Dystrybuanty uzyskane dla poszczególnych generacji z kaskady kanonicznej były do siebie bardzo zbliżone, co obrazuje na rysunku 6.7 – zbliżony do przebiegu dystrybuanty uśrednionej przebieg dystrybuanty dla losowo wybranego szeregu syntetycznego z pojedynczej generacji. Te zgodne wzajemnie przebiegi dystrybuant dla szeregów syntetycznych nie pokrywały się jednak z przebiegiem dystrybuanty dla szeregów obserwacyjnych. Różnice rysowały się szczególnie wyraźnie dla 5-minutowych wysokości warstw deszczu większych od 0,7 mm. Prawdopodobieństwo wystąpienia w szeregach syntetycznych wysokich warstw deszczu było niższe niż w szeregach obserwowanych. Wydaje się, że przy ich stosowaniu do modelowania sieci kanalizacyjnych mogłoby to prowadzić do niebezpiecznego niedociążania kanałów spływem wód opadowych. Konfrontując te obserwacje z wynikami Molnara i Burlando [2005], należy stwierdzić, że także dla danych z Zurychu nie udało się uzyskać w pełni zadowalającej zgodności rozkładów prawdopodobieństwa dla szeregów obserwowanych i syntetycznych.

Prowadząc pełną analizę rysunku 6.7, a w szczególności wykresu dystrybuanty dla szeregów obserwowanych, warto zauważyć charakterystyczny hiperboliczny spadek dystrybucji prawdopodobieństwa ekstremalnych zdarzeń, będący jeszcze jednym potwierdzeniem zjawiska dywergencji momentów. W celu opisu tego zjawiska można użyć formuły 4.27. Zgodnie z nią wartość bezwzględna nachylenia „ogonu” wykresu prawdopodobieństwa może być utożsamiana z krytycznym rzędem dywergencji momentów statystycznych  $q_D$ . Na rysunku 6.7 linią przerywaną zaznaczono prostą o nachyleniu równym  $-2,46$  (wynikającym z wartości  $q_D$  obliczonej w rozdziale 5 na bazie uprzednio oszacowanych uniwersalnych parametrów multifrakalnych dla rejestracji z 1997 r.). Widać, że prosta o tym nachyleniu, oszacowana jedynie na podstawie analizy szeregu rejestracji deszczów z pojedynczego roku, w przybliżeniu pokrywa się z przebiegiem „ogonu” wykresu prawdopodobieństwa dla całości posiadanego zbioru zapisów pluwiograficznych z Wrocławia.

Trzecim elementem oceny statystycznej syntetycznych szeregów 5-minutowych była analiza wartości maksymalnych wysokości warstw deszczu występujących w nich dla różnych skal czasu. Zadanie to wykonano z wykorzystaniem programu obliczeniowego *EHT*. Program umożliwił wyznaczenie rocznych maksymalnych wysokości warstwy deszczu  $H_T$  dla różnych czasów trwania  $T$ , na podstawie bazowych szeregów o rozdzielczości 5 minut. Do analizy przyjęto czasy trwania odpowiadające poszczególnym poziomom kaskady: 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 i 1280 minut. Roczne maksima wysokości warstwy deszczu zostały określone dla wszystkich 38 rocznych szeregów obserwacyjnych i 3800 szeregów syntetycznych (38 lat razy 100 niezależnych generacji). W wyniku tego możliwe było przeanalizowanie średnich rocznych wartości maksimów wysokości warstwy deszczu oraz ich odchyłeń standardowych w obrębie szeregów obserwowanych i syntetycznych (rys. 6.8).



Rys. 6.8. Średnie roczne maksima wysokości opadu  $E(H_T)$  oraz ich odchylenia standardowe  $s(H_T)$  dla szeregów syntetycznych z kaskady kanonicznej o stałych parametrach i szeregów obserwowanych (liniami połączono punkty odpowiadające wartościom  $E(H_T)$  i  $s(H_T)$  dla różnych czasów trwania  $T$ , zaznaczono także zakresy odpowiadające  $\pm$  odchyleniu tych wartości w obrębie 100 niezależnych generacji dla szeregów syntetycznych)

Fig. 6.8. The mean annual rainfall maximum  $E(H_T)$  and its standard deviation  $s(H_T)$  values for the synthetic time-series generated by the canonical cascade of constant parameters and the observed time-series (points of  $E(H_T)$  and  $s(H_T)$  values for different time scales  $T$  were joined by lines, moreover bars of  $\pm 1$  S.D. ranges of these values over 100 independent generations were marked for synthetic time-series)

Pierwszy z wykresów na rysunku 6.8 wskazuje wyraźnie na tendencję zaniżania średnich rocznych wartości maksimów wysokości warstwy deszczu w szeregach syntetycznych dla czasów trwania krótszych od 160 minut. Dla czasu trwania 5 minut  $E(H_T)$  stwierdzone dla szeregu rzeczywistych pomiarów wynosiło 6,0 mm i było niemalże dwa razy większe od  $E(H_T)$  dla szeregów syntetycznych (3,4 mm). Obserwacja ta pokrywa się z wnioskami wyciągniętymi poprzednio z analizy wykresów dystrybuant na

rysunku 6.7. Drugi z wykresów na rysunku 6.8 sugeruje bardzo dobrą zgodność zmienności wartości rocznych maksimów wysokości warstwy deszczu dla okresów mniejszych lub równych 40 minutom. Dla okresów czasu dłuższych od 40 minut wartości odchylenia standardowego  $s(H_T)$  dla szeregów syntetycznych wzrastają jednak zdecydowanie szybciej od ich odpowiedników dla szeregów obserwacyjnych, przyjmując znaczne wartości. W przeciwieństwie do tego wartości  $s(H_T)$  dla szeregów syntetycznych dla krótkich okresów  $T$  od 5 do 20 minut są bardzo niskie i nawet ich dodanie do odpowiadających im wartości  $E(H_T)$  nie gwarantowałyby osiągnięcia zaobserwowanych w naturze poziomów średnich rocznych wartości maksimów wysokości warstwy deszczu. Wskazuje to na ograniczony potencjał wykorzystywania syntetycznych szeregów opadowych z modelu kanonicznego o stałych parametrach do zadań takich jak modelowanie sieci kanalizacji deszczowych i ogólnospławnych czy też innych elementów zagospodarowania wód opadowych, takich jak systemy infiltracyjne.

### 6.2.2. Kaskada kanoniczna z wymuszeniem wielkoskalowym

Omawiana we wcześniejszym podrozdziale kaskada kanoniczna była definiowana jedynie przez dwa stałe parametry  $\beta_k$  i  $\sigma_k^2$ . Tak prosta definicja pociągała za sobą założenie, że wszystkie typy opadów mogą być modelowane za pomocą tego samego generatora. Wydaje się to być mało realne, gdyż ten sam generator opisuje wówczas zarówno opady frontalne, długotrwałe i o stosunkowo wyrównanym przebiegu, jak również opady konwekcyjne, zwykle krótkotrwałe i o silnej dynamice zmian natężeń chwilowych. Obserwacja powyższa z pozoru prosta i oczywista jest trudna w implementacji w praktycznym przetwarzaniu danych opadowych, choćby z uwagi na fakt, że dysponując jedynie zapisem opadu, np. w postaci pluwiogramu, trudno jest w sposób wiarygodny sklasyfikować go jako opad frontalny czy też konwekcyjny. Zagadnienia te, wykraczające poza ramy niniejszej pracy, w warunkach krajowych, były szczegółowo analizowane przez Twardosza [2005] na podstawie danych z Krakowa.

Sygnalizowane powyżej problemy zostały dostrzeżone już dużo wcześniej przez Overa i Gupte [1994] oraz Overa [1995] przy stosowaniu kaskad kanonicznych do modelowania radarowych pól opadowych. Autorzy ci postulowali uwzględnianie wpływu na parametry kaskady tzw. wymuszenia wielkoskalowego (ang. large scale forcing). Wymuszenie to rozumieli jako wymuszenie z uwagi na wielkoskalowe warunki meteorologiczne, w swoich obliczeniach w celu uproszczenia utożsamiali je z wielkoskalowym średnim natężeniem deszczu, a więc jego średnim natężeniem dla całych, kolejno analizowanych obrazów radarowych.

Molnar i Burlando [2005], podejmując próbę zastosowania kaskad kanonicznych do modelowania szeregów opadowych w miejsce pól opadowych, wzbogacili ją także o aspekt analizy wpływu wymuszenia wielkoskalowego. Jako parametr charakteryzujący wymuszenie wielkoskalowe zaproponowali w miejsce średniego natężenia deszczu do kolejnych zdjęć radarowych sumę dobową (a dokładniej sumę dla czasu 1280 minut) opadów  $r_0$ , przyjmowaną na początku kaskady dla jej rozbitcia na mniejsze okresy. Molnar i Burlando [2005] stwierdzili na podstawie analizy szeregów z Zurychu możliwość wyrażenia wpływu wymuszenia wielkoskalowego za pomocą następujących zależności funkcyjnych obydwu parametrów kaskady:

$$\beta_k = \log \left[ (r_0 / r_{\max})^{s^*} \right], \quad (6.32)$$

$$\sigma_k^2 = \log \left[ (r_0 / r_{\max})^{s^*} \right], \quad (6.33)$$

gdzie:  $r_{\max}$  i  $s^*$  to indywidualnie dobierane parametry dopasowania funkcji  $\beta_k$  i  $\sigma_k^2$ .

### 6.2.2.1. Estymacja parametrów kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym

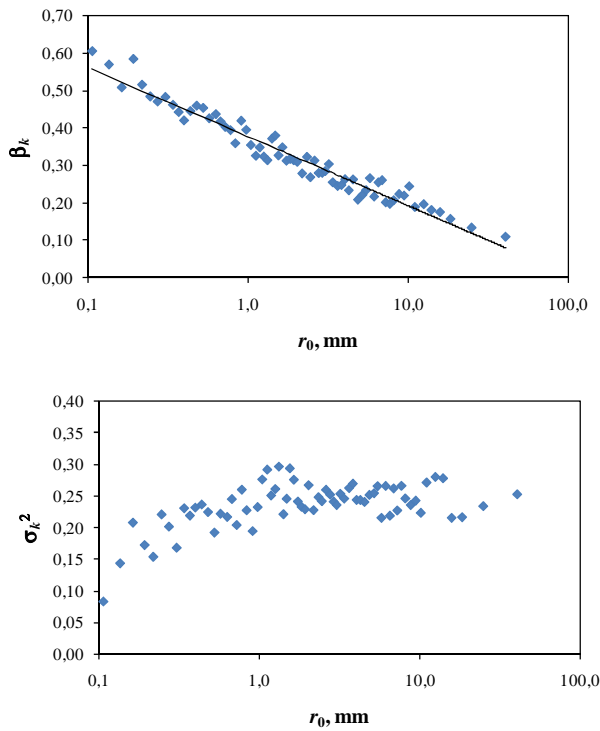
W pracy niniejszej postanowiono także zweryfikować hipotezę istnienia wymuszenia wielkoskalowego w warunkach Wrocławia. W tym celu opracowano kolejny program komputerowy LSF. Program ten obliczał wartości parametrów  $\beta_k$  i  $\sigma_k^2$  według metodyki stosowanej w podrozdziale 6.2, niemniej z istotną modyfikacją, polegającą na estymacji obydwu parametrów kaskady osobno dla każdego dnia o sumie opadów większej od zera ( $r_0 > 0$ ). Wyniki przeprowadzonych obliczeń (patrz rys. 6.9) wskazują na występowanie w zbiorze danych z Wrocławia wymuszenia wielkoskalowego jedynie w przypadku parametru  $\beta_k$ . Wymuszenie to może być opisane następującą zależnością funkcyjną o postaci zgodnej z relacją 6.32:

$$\beta_k = \log \left[ (r_0 / 110)^{-0.08} \right], \quad \text{przy } r^2 = 0,95. \quad (6.34)$$

Wartość parametru  $r_{\max} = 110,0$  mm w formule 6.34 w żadnym razie nie powinna być rozumiana jako maksymalna dobowo suma opadów we Wrocławiu, a jedynie parametr służący dopasowaniu zależności funkcyjnej, tak jak to było postulowane przez Overa [1995]. Zarówno wspomniany parametr  $r_{\max}$ , jak i  $s^* = -0,08$  różniły się w sposób oczywisty od wartości stwierdzonych przez Molnara i Burlando [2005] dla Zurychu ( $r_{\max} = 66,6$  mm i  $s^* = -0,341$ ), co zapewne jest kolejnym przejawem odmienności lokalnych warunków opadowych. Analizując drugi z wykresów na rysunku 6.9, można zauważyć, że wartości parametru  $\sigma_k^2$  układają się wokół wcześniej już oszacowanej wartości 0,251 dla wartości  $r_0$  wyższych od około 0,4 mm. Spadek wartości parametru  $\sigma_k^2$  dla  $r_0 < 0,4$  mm nie ma przy tym większego znaczenia, gdyż wartości te trudno uznać za wiarygodne. Naturalne opady o tak małych wysokościach zdarzają się rzadko, a ich rejestracja z użyciem pluwiografów jest mało wiarygodna. Jest znacznie bardziej prawdopodobne, że tak małe sumy dobowe opadów były wynikiem odcięcia początków lub też końcówek większych opadów, przy generowaniu 1280 minutowych sum opadów w szeregach obserwacyjnych.

Obserwacja wpływu wielkoskalowego wymuszenia na wartości parametru parametrów  $\beta_k$  i zarazem jego brak w stosunku do parametru  $\sigma_k^2$  pozostaje w pełnej zgodzie z obserwacjami Overa [1995], potwierdzonymi przez niezależne badania Pathirana i Heratha [2002]. Over utożsamiał parametr  $\beta_k$  z parametrem definiującym w sposób ogólny nachylenie krzywej  $\tau(q)$ , natomiast parametr  $\sigma_k^2$  z parametrem determinującym krzywiznę funkcji  $\tau(q)$  (wynika to bezpośrednio ze struktury funkcji MKP opisanej wzorem 6.31). Na podstawie analizy zapisów radarowych pól opadowych dowiódł on, że wymuszenie wielkoskalowe nie ma wpływu na krzywiznę funkcji  $\tau(q)$ , a jedynie na jej nachylenie. Obserwacja ta wydaje się mieć logiczne uzasadnienie, jeśli uwzględni się, że parametr  $\sigma_k^2$  determinujący krzywiznę funkcji  $\tau(q)$  jest zarazem pewną miarą

multifraktalności procesu, rozumianą jako odstępstwo od idealnie liniowego skalowania zarezerwowanego dla procesu monofraktalnego (rys. 6.4). Gdyby traktować za wiarygodne wyniki prezentowane przez Molnara i Burlando [2005] w zakresie wymuszenia wielkoskalowego parametru  $\sigma_k^2$ , to ich konsekwencją musiałoby być stwierdzenie, że wynikiem wymuszenia wielkoskalowego byłyby każdorazowo zmiana lokalnych parametrów multifraktalnych procesów opadowych. W konsekwencji lokalny proces opadowy nie mógłby być opisywany przez uniwersalny model multifraktalny, jak zostało to uczynione w rozdziale 5, ale przez całą hierarchię procesów multifraktalnych o zmieniających się i zależnych od wymuszenia wielkoskalowego parametrach. Wątpliwości dotyczące prawidłowości zależności funkcyjnej wymuszenia wielkoskalowego parametru  $\sigma_k^2$ , prezentowanej przez Molnara i Burlando [2005], biorą się także z widocznego (pomimo tuszowania nieuzasadnionym doborem skali wykresu) dużego rozrzutu empirycznych wartości  $\sigma_k^2$ .

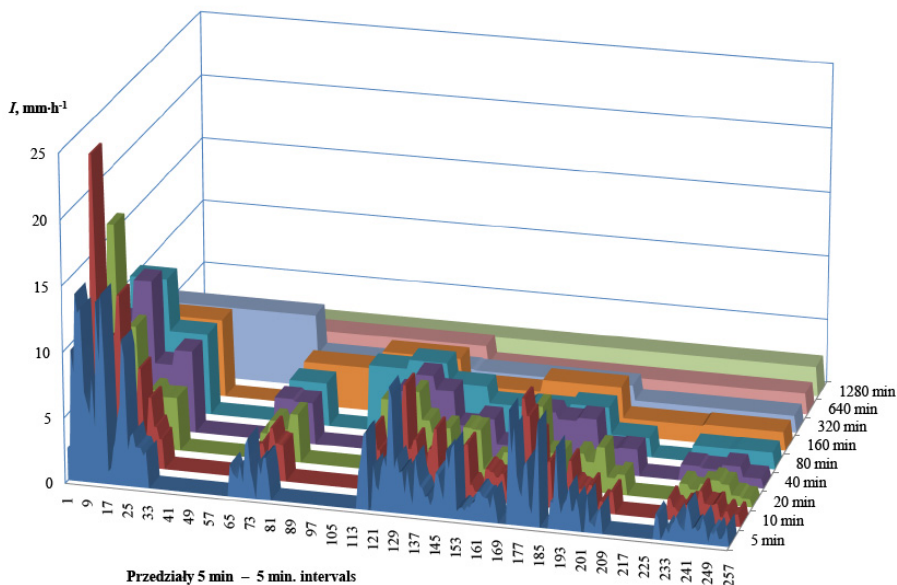


Rys. 6.9. Wpływ wymuszenia wielkoskalowego na wartości parametrów  $\beta_k$  i  $\sigma_k^2$  generatora kanonicznego (na wykresach z uwagi na dużą liczbę punktów obliczeniowych zaznaczono jedynie uśrednione w kolejnych przedziałach ich wartości)

Fig. 6.9. Large scale forcing influence on  $\beta_k$  and  $\sigma_k^2$  parameters values (having in mind a large number of calculated points only their averaged values for the sequence of bins were marked on plots)

### 6.2.2.2. Generowanie syntetycznych szeregów deszczów z użyciem kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym

Stwierdzenie występowania wielkoskalowego wymuszenia w przypadku parametru  $\beta_k$  dla zbioru w Wrocławiu dało impuls do opracowania nowego generatora kanonicznego uwzględniającego ten mechanizm. W tym celu zmodyfikowano pierwotny program CANONICAL przez dodanie procedury modyfikującej wartość parametru  $\beta_k$  według zależności 6.34. Powstały w ten sposób program CANLSF został użyty dla ponownego wygenerowania szeregów syntetycznych o rozdzielczościach czasowych od 640 do 5 minut na bazie 1280-minutowych wysokości warstw deszczu z 38 lat. Program CANLSF, podobnie jak program CANONICAL, był uruchamiany 100 razy dla całego szeregu 1280-minutowych sum opadów z całego okresu 38 lat. W rezultacie otrzymano szeregi syntetycznych danych opadowych, dla różnych rozdzielczości czasowych od 640 do 5 minut dla łącznego hipotetycznego okresu 3800 lat. Przykładowy scenariusz rozdziału sumy dobowej deszczu równej 49,5 mm na krótsze odcinki czasowe z wykorzystaniem modelu kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym jest prezentowany na rysunku 6.10.



Rys. 6.10. Przykładowy wynik działania kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym (scenariusz rozdziału sumy dobowej opadu równej 49,5 mm)

Fig. 6.10. Example of the canonical cascade with large scale forcing functioning (scenario of the 49,5 mm daily precipitation depth disaggregation)

Analiza rysunku 6.10 potwierdza przede wszystkim wnioski wypływające uprzednio z analizy wykresów na rysunku 6.5. W wynikowych szeregach wartości natężeń deszczów dla wysokich rozdzielczości czasowych (rzędu 5, 10 czy też 20 min) przebieg



opadów ma charakter silnie nieciągły. Są to praktycznie 4 odrębne impulsy lub grupy (ang. clusters) opadowe, rozdzielane przez okresy bezdeszczowe. Wygenerowany syntetyczny 5-minutowy szereg natężeń deszczów z użyciem kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym widoczny na rysunku 6.10, tak jak syntetyczne szeregi z rysunku 6.5, jest podobny do rzeczywistych rejestracji opadów naturalnych.

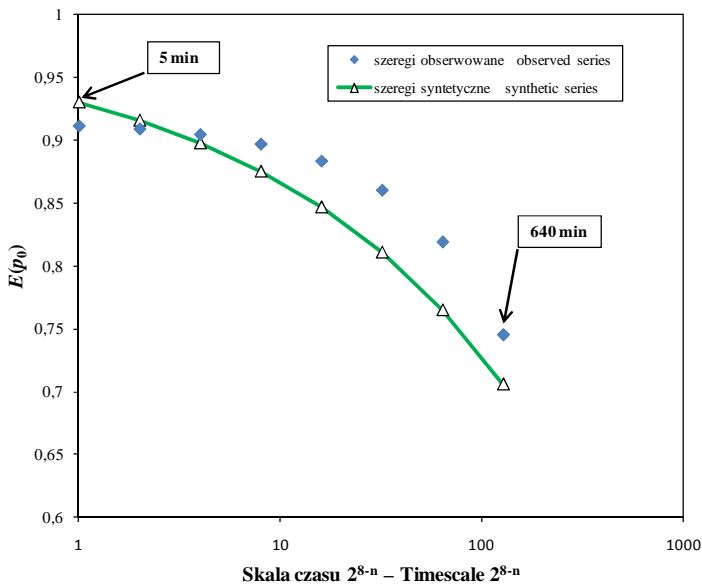
Zgodnie z podstawowym założeniem kaskady kanonicznej  $E[W] = 1$  [Over i Gupta 1994] sumaryczne wysokości warstwy deszczu, w scenariuszu rozdziału sumy dobowej 49,5 mm prezentowanym na rysunku 6.10, ulegały wahaniom na poszczególnych poziomach kaskady. Wartość wysokości warstwy deszczu wahała się od 42,9 mm (rozdzielczość 5 minut) do 64,8 mm (rozdzielczość 80 minut). Ogólna średnia wysokość deszczu na wszystkich poziomach kaskady wynosiła 53,9 mm i była zbliżona do początkowej wysokości 49,5 mm prezentowanej na wejściu modelu. W kontekście dyskusowanych, właściwych kaskadom kanonicznym, fluktuacji sumarycznych wysokości warstw deszczu warto precyzyjniej przeanalizować początek wykresu na rysunku 6.10. W pierwszym z impulsów opadowych, trwającym przez pierwsze 155 minut, maksymalne natężenie chwilowe dla rozdzielczości 5 minut było niskie i wynosiło  $14,4 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$ , podczas gdy dla rozdzielczości 10 i 20 minut było wyższe i wynosiło odpowiednio  $23,6$  i  $17,0 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$ . Jest to z pozoru paradoksalna obserwacja, przecząca doświadczeniom z pomiarów opadów naturalnych, gdzie – jak to było dyskutowane w rozdziale 5 – wydłużenie przedziału pomiarowego powoduje większe uśrednienie obserwowanego procesu, a co zatem idzie, zatracenie maksymalnych osobliwości zachowania tego procesu. Obserwacja ta jest jednak całkowicie naturalna, jeśli chodzi o mechanizm funkcjonowania kaskady kanonicznej, która – jak pamiętamy – nie była ograniczona wymogiem zachowaniem rozdzielanej wysokości warstwy opadu na zstępujących poziomach kaskady. W analizowanym przypadku znaczna wysokość opadu dla 10-minutowego przedziału została rozdzielona na dwa odcinki 5-minutowe z utratą znacznej części sumarycznej wysokości warstwy deszczu.

### **6.2.2.3. Ocena jakości syntetycznych szeregów deszczów z kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym**

Wygenerowane przez model oparte o kaskadę kanoniczną z wymuszeniem wielkoskalowym syntetyczne szeregi opadowe zostały przeanalizowane z użyciem programu EPO, co umożliwiło obliczenie prawdopodobieństw wystąpienia w nich okresów bezdeszczowych  $E(p_0)$  (o zerowej wysokości opadów). Wyniki tych obliczeń są zamieszczone na rysunku 6.11. Podobnie jak w przypadku syntetycznych szeregów opadowych wygenerowanych z kaskady kanonicznej, wahania wartości  $E(p_0)$  w obrębie kolejnych generacji były nieznaczne i pomijalne, przez co na wykresie przedstawiono jedynie pojedynczy układ punktów, uzyskany jako średni dla 100 niezależnych generacji. Porównując rysunek 6.11 z rysunkiem 6.6, widoczny jest wzrost wartości  $E(p_0)$  dla szeregów syntetycznych we wszystkich skalach czasowych. W jego wyniku udało się uzyskać dosyć dobrą zgodność wartości prawdopodobieństw wystąpienia okresów bezdeszczowych w szeregach syntetycznych i obserwowanych dla skal odpowiadających czasom 10 i 20 minut. Dla skali odpowiadającej czasowi 5 minut w przypadku szeregów syntetycznych doszło nawet do niewielkiego przekroczenia wartości  $E(p_0)$  wyznaczonej dla szeregów obserwowanych. Nadal niestety w większych skalach, odpowiada-

jących czasom dłuższym od 20 minut, wartości prawdopodobieństw wystąpienia okresów bezdeszczowych w szeregach syntetycznych były mniejsze od stwierdzonych w szeregach obserwacyjnych.

Dyskutowana powyżej poprawa w zakresie odwzorowania nieciągłości opadów w syntetycznych szeregach generowanych z modelu kanonicznego z wymuszeniem wielkoskalowym znajduje swoje wytłumaczenie w implementacji w programie CANLSF zależności 6.34. W zbiorze prezentowanych na wejściu kaskady niezerowych wysokości warstw deszczu dla 1280 minut zdecydowanie przeważały wartości poniżej 3 mm, dla których obliczany ze wzoru 6.34 parametr  $\beta_k$  przyjmowała wartości wyższe od 0,251. Był on zatem w większości przypadków większy od wartości używanej w kaskadzie kanonicznej o stałych parametrach. W efekcie tego wyższe wartości parametru  $\beta_k$  zgodnie z zależnością 6.25 podnosiły prawdopodobieństwo przyjęcia przez generator kaskady wartości  $W = 0$  i powstania przedziału szeregu opadowego bez opadu.

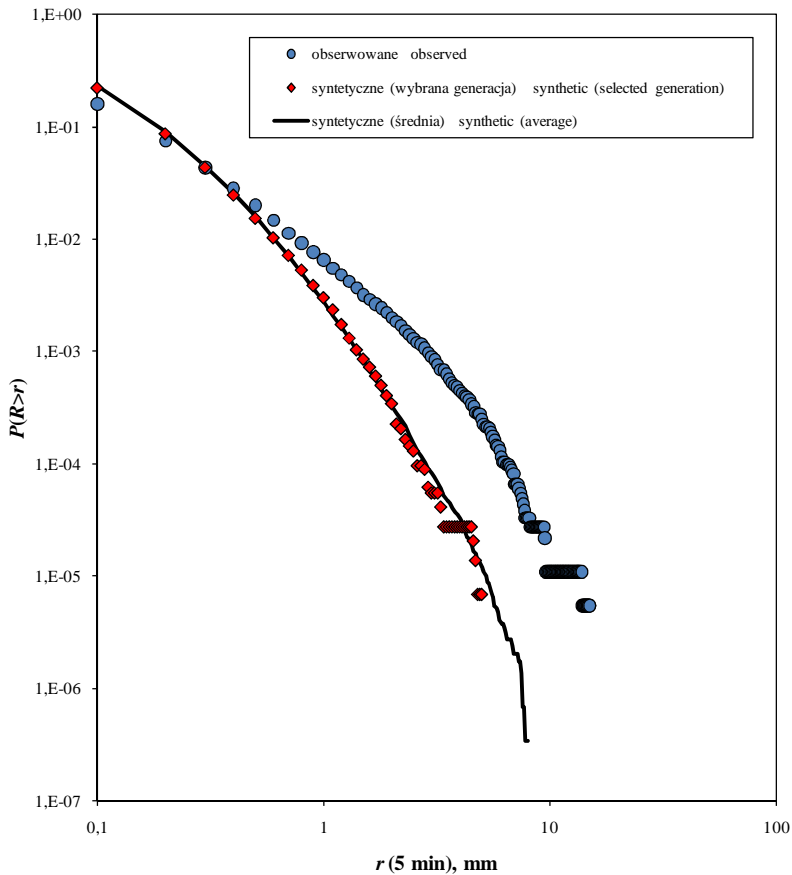


Rys. 6.11. Porównanie nieciągłości opadów w szeregach obserwacyjnych z Wrocławia oraz w szeregach syntetycznych wygenerowanych z kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym (linią ciągłą połączono punkty uzyskane dla szeregów syntetycznych, wyznaczone jako średnie ze 100 niezależnych generacji)

Fig. 6.11. Comparison of the rainfall intermittency at the observed rainfall time-series from Wrocław and at the synthetic time-series generated by the canonical cascade with large scale forcing (points obtained for synthetic time-series estimated as average over 100 independent generations were joined by the continuous line)

Analiza syntetycznych szeregów opadowych z wykorzystaniem programu CDF pozwoliła przestudiować rozkład prawdopodobieństwa przewyższenia poszczególnych wysokości warstw deszczu. Rozkład ten jest graficznie przedstawiony w postaci dystry-

buanty na rysunku 6.12 zarówno dla wybranej losowo generacji, jak i w postaci średniej ze wszystkich 100 generacji. Na wykresie, jako tło, jest przedstawiona dodatkowo dystrybuanta dla zbioru rzeczywistych obserwacji deszczów z Wrocławia. Jak widać dystrybuanty dla szeregów obserwowanych i syntetycznych nie pokrywają się, z wyjątkiem jedynie bardzo małych wysokości warstw deszczu (do około 0,3 mm). Rozbieżności są duże, a ich skala jest większa niż notowana uprzednio w przypadku szeregów syntetycznych z kaskady kanonicznej o stałych parametrach. Porównanie „ogonów” wykresów na rysunkach 6.12 i 6.7 obnaża jeszcze większy mankament syntetycznych szeregów opadów uzyskanych z kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym.



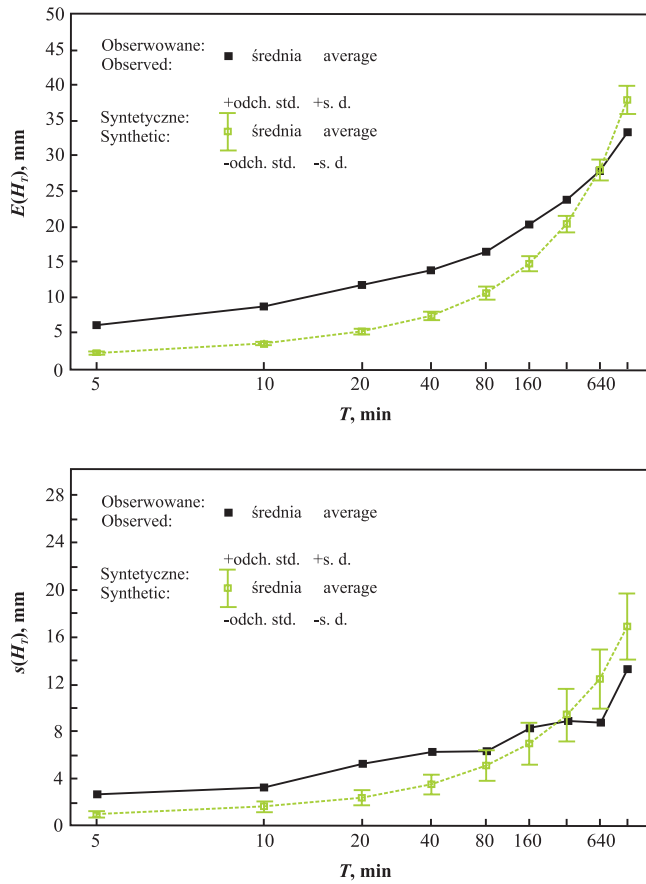
Rys. 6.12. Dystrybuanty wysokości opadu, stwierdzone dla szeregów obserwacyjnych z Wrocławia oraz dla szeregów syntetycznych wygenerowanych z kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym (linią ciągłą oznaczono dystrybuantę dla szeregów syntetycznych, wyznaczoną jako średnia ze 100 niezależnych generacji)

Fig. 6.12. The cumulative distribution functions calculated for the observed time-series from Wrocław and for the synthetic time-series generated by the canonical cascade with large scale forcing (cumulative distribution function calculated as the average over 100 independent generations was marked by the continuous line)

Dystrybuanta na rysunku 6.7 sugerowała, że prawdopodobieństwo wystąpienia przedziałów 5-minutowych ze znaczną wysokością opadu w szeregach syntetycznych jest mniejsze niż w szeregach obserwowanych. Z drugiej strony, w 100 generacjach syntetycznych szeregów opadowych pojawiały się okresy o 5-minutowych wysokościach opadów większych od maksymalnie zaobserwowanych w ciągu 38 lat. To drugie zjawisko jest zrozumiałe, gdyż w jakimś sensie odwzorowuje omawiany już w rozdziale poprzednim mechanizm, zgodnie z którym wydłużenie szeregu obserwacyjnego pozwala na wychwycenie osobliwości wyższego rzędu. Ten sam mechanizm nie ma już miejsca w przypadku dystrybuanty szeregów syntetycznych z kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym. Dystrybuanta szeregów syntetycznych na rysunku 6.12 nie wykrocza poza wartość 8 mm na 5 minut, podczas gdy dystrybuanta dla szeregów obserwacyjnych kończy się na wartości 15 mm na 5 minut. Podobnego typu problemy z wzajemnym dopasowaniem dystrybuant dla szeregów syntetycznych z kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym i obserwowanych można dostrzec także w wynikach Molnara i Burlando [2005].

Obserwacje powyższe pokrywają się z wynikami analizy wartości maksymalnych występujących w szeregach syntetycznych. Podstawowe statystyki rocznych maksymalnych wartości wysokości deszczu  $H_T$ , wyznaczonych dla 5-minutowych szeregów syntetycznych z użyciem programu *EHT*, dla różnych czasów trwania  $T$ : 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 i 1280 minut są przedstawione na rysunku 6.13. Na obydwu wykresach na rysunku 6.13 widać wyraźną tendencję do silnego zaniżania zarówno średniej rocznej wartości maksimum wysokości deszczu  $E(H_T)$ , jak i ich odchyłeń standardowych  $s(H_T)$  szeregów syntetycznych wygenerowanych z kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym w stosunku do odpowiadających im wartości dla szeregów obserwacyjnych, dla czasów trwania krótszych niż około 320 minut. W tym kontekście nie dziwi fakt, że co prawda generacje szeregów 5-minutowych natężeń deszczów przedstawione na rysunkach 6.5 i 6.10 zostały wybrane losowo, to natężenia maksymalne 5-minutowe dla szeregu syntetycznego z kaskady kanonicznej ze stałymi parametrami były nawet kilkakrotnie wyższe od natężeń maksymalnych dla szeregu wygenerowanego przez kaskadę kanoniczną z wymuszeniem wielkoskalowym.

Wnioski płynące z analizy rysunków 6.12 i 6.13 jednoznacznie dyskwalifikują syntetyczne szeregi opadowe o rozdzielczości czasowej 5 minut z ich stosowania do modelowania systemów kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej. Zaniżanie maksymalnej wartości opadów oraz zaniżanie prawdopodobieństwa wystąpienia deszczów o wysokim natężeniu musi bowiem prowadzić do niedoszacowania przepływów w kanałach i towarzyszących im napełnień czy też do niedoszacowania objętości strumienia odprowadzanych wód opadowych. Próbuując zdiagnozować źródło tych niekorzystnych zmian zwłaszcza w zakresie redukcji maksymalnych natężeń deszczów obserwowanych w szeregach generowanych z kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym w porównaniu z szeregami z kaskady kanonicznej o stałych parametrach, należy raz jeszcze powrócić do formuły 6.34. Trzeba przy tym pamiętać, że znaczne natężenia deszczów są w warunkach Wrocławia notowane dla opadów o charakterze burzowym. Opadom takim towarzyszą zwykle znaczne sumy dobowe opadów, rzędu co najmniej 10 mm. W dalszych rozważaniach przyjmiemy właśnie tę wartość 10 mm, która jest,



Rys. 6.13. Średnie roczne maksima wysokości opadu  $E(H_T)$  oraz ich odchylenia standardowe  $s(H_T)$  dla szeregów syntetycznych z kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym i szeregów obserwowanych (liniami połączono punkty odpowiadające wartościom  $E(H_T)$  i  $s(H_T)$  dla różnych czasów trwania  $T$ , zaznaczono także zakresy odpowiadające  $\pm$  odchyleniu tych wartości w obrębie 100 niezależnych generacji dla szeregów syntetycznych)

Fig. 6.13. The mean annual rainfall maximum  $E(H_T)$  and its standard deviation  $s(H_T)$  values for the synthetic time-series generated by the canonical cascade with large scale forcing and the observed time-series (points of  $E(H_T)$  and  $s(H_T)$  values for different time scales  $T$  were joined by lines, moreover bars of  $\pm 1$  S.D. ranges of these values over 100 independent generations were marked for synthetic time-series)

jak pamiętamy, charakterystyczną dolną granicą przy wyszukiwaniu deszczów istotnych z punktu widzenia modelowania kanalizacji deszczowych i ogólnospławnych [Schmitt 2000]. Dla wspomnianej wartości w wyniku zastosowania wymuszenia wielkoskalowego zgodnie z formułą 6.34 otrzymujemy wartość parametru  $\beta_k = 0,192$ , co w konse-

kwencji prowadzi do wartości generatora  $B$  równej 1,14. Dla porównania, wartość tego samego generatora  $B$  wyznaczona na bazie stałej wartości parametru  $\beta_k = 0,251$  (dla kaskady o stałych parametrach) równa się 1,19. Pozornie zatem różnica pomiędzy wartościami generatora  $B$  w obydwu kaskadach kanonicznych jest niewielka i równa 4%. Jest to jednak różnica tylko z pozoru mała, bo dotycząca jedynie pierwszego poziomu kaskady, a kaskada ma strukturę multiplikatywną, co za tym idzie, już na 3 poziomie kaskady różnica ta zwiększa się do 12%, a na ostatnim 8 poziomie urasta do 28%. Opisany powyżej mechanizm w przypadku sumy dobowej jedynie 10 mm będzie miał oczywiście jeszcze dynamiczniejszy przebieg dla wyższych sum dobowych opadów. Tłumaczy to dyskutowane już problemy z właściwym odwzorowaniem znacznych wysokości opadów w 5-minutowych syntetycznych szeregach opadowych z kaskady kanonicznej. Wydaje się, że z tych samych powodów Molnar i Burlando [2005] obserwowali analogiczną redukcję co do maksymalnych wysokości warstw deszczu notowanych w końcowych 10-minutowych szeregach czasowych, generowanych z kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym w stosunku do kaskady kanonicznej o stałych parametrach. Notowana przez tych autorów skala redukcji wartości średnich rocznych maksimumów wysokości deszczu  $E(H_T)$  była w końcowych szeregach (10-minutowych) niższa, ale należy pamiętać, że ich kaskady liczyły o jeden poziom mniej, a ponadto zakładali oni jednoczesną modyfikację obydwu parametrów kaskady w ramach wymuszenia wielkoskalowego.

### 6.3. Losowe kaskady mikrokanoniczne

Jak już to było wspomniane na początku niniejszego rozdziału, alternatywą wobec kaskad kanonicznych są kaskady mikrokanoniczne. W kaskadach tych zakłada się dokładne zachowanie masy (w naszym przypadku wysokości opadu) pomiędzy kolejnymi poziomami kaskady. Warunek ten dla kaskady o  $n$  poziomach i o liczbie rozdziału  $b$  można ogólnie zapisać jako:

$$\sum_{k=1}^b W_n (b(i-1) + k) = 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, b^{n-1}. \quad (6.35)$$

Prosty i naturalny w odniesieniu do modelowania szeregów czasowych opadów warunek 6.35 komplikuje konstrukcję kaskady. W przypadku poprzednio analizowanych kaskad kanonicznych nie występowały żadne ograniczenia co do typu używanego generatora losowego, poza jego prostą normalizacją do jedności. W modelach mikrokanonicznych pojawia się problem znalezienia generatora spełniającego warunek 6.35, a jednocześnie mającego prostą analityczną formę zapisu jego rozkładu prawdopodobieństwa.

#### 6.3.1. Kaskada mikrokanoniczna z generatorem beta

Menabde i Sivapalan [2000], którzy jako pierwsi podjęli próbę zastosowania kaskady mikrokanonicznej do modelowania szeregów opadowych, a konkretnie do modelowania zmienności natężeń chwilowych deszczu w czasie trwania samych opadów,

zaproponowali, aby przyjmować rozkład generatora kaskady jako zgodny z symetrycznym rozkładem beta:

$$p_{\beta}(w) = \frac{1}{B^*(a^*)} w^{a^*-1} (1-w)^{a^*-1}, \quad (6.36)$$

gdzie:  $B^*(a^*)$  oznacza funkcję beta, definiowaną zależnością:

$$B^*(a^*) = \int_0^1 x^{a^*-1} (1-x)^{a^*-1} dx. \quad (6.37)$$

Symetryczny rozkład beta jest parametryzowany jedynie przez pojedynczy parametr  $a^*$ . Dla wartości  $a^* = 1$  rozkład beta staje się rozkładem jednostajnym, dla  $a^* > 1$  rozkład przyjmuje kształt dzwonu, a dla  $a^* < 1$  U-kształtny. Rozkład jest ciągłym i, co potwierdza zależność 6.37 zdefiniowanym na ograniczonym przedziale  $(0,1)$ , z którego to właśnie winien przybierać swoje wartości generator spełniający warunek 6.35.

Menabde i Sivapalan [2000] zwrócili uwagę, że pomiędzy rozkładami beta i gamma zachodzi przydatny w praktyce związek. Związek ten wynika z następującej własności funkcji beta:

$$B^*(a^*) = \frac{\Gamma^*(x)\Gamma^*(y)}{\Gamma^*(x+y)}, \quad (6.38)$$

gdzie:  $\Gamma^*$  oznacza funkcję gamma.

Na podstawie wzoru 6.38 można wykazać, że jeśli  $X_1$  i  $X_2$  są niezależnymi zmiennymi losowymi należącymi do jednego rozkładu prawdopodobieństwa gamma opisanego funkcją gęstości prawdopodobieństwa:

$$p_{\gamma}(w) = \frac{1}{\Gamma^*(a^*)} w^{a^*-1} e^{-w}, \quad (6.39)$$

to:  $Y_1 = X_1/(X_1+X_2)$  i  $Y_2 = X_2/(X_1+X_2)$  są zmiennymi losowymi o rozkładzie beta według wzoru 6.36. Co istotne, zmienne  $Y_1$  i  $Y_2$  automatycznie spełniają warunek 6.35. W oparciu o ten mechanizm Menabde i Sivapalan [2000] zaproponowali, aby w konstrukcji kaskady mikrokanonicznej o liczbie rozdziału  $b = 2$  kolejne pary wag rozdziału wysokości opadów na poszczególnych  $n$  poziomach kaskady:  $w_n(j,0)$  i  $w_n(j,1)$ , były uzyskiwane poprzez wygenerowanie dwóch liczb  $x_1$  i  $x_2$  z rozkładu gamma według wzoru 6.39, a wówczas  $w_n(j,0) = x_1/(x_1 + x_2)$  i  $w_n(j,1) = x_2/(x_1 + x_2)$ .

Pojedynczy parametr  $a^*$ , definiujący symetryczny rozkład beta, może być oszacowany w prosty sposób z użyciem metody momentów. Pierwszy moment statystyczny symetrycznego rozkładu beta wynosi  $E[W] = 0,5$ , co odpowiada równemu i symetrycznemu rozdziałowi wysokości opadu w kaskadzie na dwie równe części. Moment centralny drugiego rzędu zmiennej beta o rozkładzie symetrycznym (wariancja  $Var[W]$ ) jest powiązany z parametrem  $a^*$  zależnością:

$$a^* = \frac{1}{8Var[W]} - 0,5. \quad (6.40)$$

Prostota szacowania parametrów rozkładów generatorów mikrokanonicznych wynika także z faktu, że mogą one być określane na podstawie rozkładów prawdopodo-

bieństwa tzw. współczynników rozpadu BDC (ang. breakdown coefficients), oszacowanych dla danych empirycznych. Technika współczynników rozpadu została opracowana pierwotnie przez Novikova do stosowania w teorii turbulencji, po czym była adaptowana do modelowania deszczów przez Menabde'go [cyt. za Menabdem i Sivapalanem 2000]. Współczynnik rozpadu BDC, adaptowany na potrzeby modelowania deszczów, jest definiowany jako [Menabde i Sivapalan 2000]:

$$u(\tau, t) = \frac{R_\tau(t_1)}{R_t(t_2)}, \quad \text{dla } \tau < t, \quad (6.41)$$

gdzie:  $R_\tau(t_1)$  i  $R_t(t_2)$  są wysokościami opadu zakumulowanymi dla przedziałów czasu  $\tau$  i  $t$ , wycentrowanych w czasach  $t_1$  i  $t_2$  tak, że przedział czasu  $\tau$  mieści się całkowicie w przedziale  $t$ . Zgodnie ze swoją definicją współczynnik rozpadu przyjmuje wartości w zakresie od 0 do 1.

Menabde i Sivapalan (2000) obliczyli współczynniki rozpadu dla szeregów opadowych z Melbourne w Australii o rozdzielczości  $t_0 = 6$  minut. Obliczenia te zostały przeprowadzone dla kolejnych skal czasowych:  $t_n = 2^n t_0$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots, 6$ , przy założeniu  $\tau_n = t_n/2$  co odpowiadało przyjętemu współczynnikowi rozdziału  $b = 2$ . Co za tym idzie, obliczone współczynniki rozpadu odpowiadały zasadniczo wagom rozdziału stosowanym w kaskadzie mikrokanonicznej każdorazowo do rozdziału niezerowej wysokości opadu dla przedziału czasu  $t_n$  na dwa pochodne przedziały czasu  $\tau_n$ . Na podstawie znajomości współczynników rozpadu dla kolejnych skal czasowych Menabde i Sivapalan [2000] wyznaczyli wartości parametru  $a^*$  rozkładu beta dla każdej z nich. Wykazali oni przy tym istnienie zależności skalowej pomiędzy parametrem  $a^*$  rozkładu beta a skalą czasu  $\lambda_k$  o postaci:

$$a^*(\lambda_k) = a_0^* \lambda_k^{-H^*}, \quad (6.42)$$

gdzie:  $a_0^*$  i  $H^*$  – parametry dopasowania zależności.

Istota występowania zależności skalowej pomiędzy parametrem  $a^*$  rozkładu beta a skalą czasową  $t$  była przedmiotem pogłębionej dyskusji Menabde'go i in. [1997] oraz Menabde'go i Sivapalana [2000]. Autorzy ci zwrócili uwagę na praktyczną potrzebę stosowania w modelowaniu deszczów tzw. kaskad ograniczonych (ang. bounded cascades). Kaskady te zostały pierwotnie wprowadzone przez Cahalana i in. [cyt. za Menabdem i in. 1997] do badań nad strukturą chmur, jako alternatywa wobec tzw. kaskad nieograniczonych (ang. unbounded cascades), a następnie zaimplementowane do modelowania szeregów opadowych przez Menabde'go i in. [1997]. Do grupy kaskad nieograniczonych zaliczają się standardowe modele dyskretne, które były już dyskutowane w tej pracy, a więc  $\alpha$  model [Schertzer i Lovejoy 1987] czy też kaskady Gupty i Waymire'a [1993]. W przypadku kaskad nieograniczonych obserwuje się, że widmo mocy pól przez nie generowanych skaluje się zgodnie ze wzorem 5.8, z wykładnikiem spektralnym  $\beta < 1$ . Niemniej, w rzeczywistości stwierdza się istnienie zbiorów danych opadowych, które charakteryzują się widmami o wykładniku  $\beta > 1$ . Przykładowo, cytowani Menabde i Sivapalan [2000] dla szeregów opadowych z Melbourne wyliczyli  $\beta > 1,69$  i na tej podstawie wnioskowali, że szeregi te należą raczej do klasy pól stochastycznie samo-powinowatych (ang. self-affine), aniżeli pól samo-podobnych (ang. self-similar). Tego typu pola mogą być



w wygodny sposób modelowane z użyciem kaskad ograniczonych, w których to multiplikatywne wagi zależą w sposób jawny od poziomu kaskady i są zbieżne do jedności wraz z postępem kaskady [Menabde i Sivapalan 2000].

Przedstawiony powyżej kaskadowy ograniczony model mikrokanoniczny wymaga jednakże dodatkowego uzupełnienia w celu jego stosowania do symulacji szeregów czasowych deszczów. Jego brakującym elementem jest możliwość generowania okresów bezdeszczowych w szeregu opadowym. Menabde i Sivapalan (2000) proponowali, aby generowanie syntetycznych szeregów rozpoczynało się przyjęciem pewnych generalnych parametrów impulsów opadowych, takich jak: czas trwania deszczu, jego natężenie średnie oraz czas rozpoczęcia z odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa. Propozycja ta nie przystaje do zadania stawianego przed kaskadowym ograniczonym modelem mikrokanonicznym w niniejszej pracy, gdzie podstawą generowania szeregów opadowych jest znajomość szeregów sum dobowych opadów. Rozwiązanie w tym zakresie zaproponowali Molnar i Burlando [2005], postulując, aby nieciągłość deszczów była modelowana w obrębie samej kaskady. Ich zmodyfikowany model dokonywał rozdziału każdej niezerowej wysokości opadu w przedziale i w skali  $n-1$  na  $b = 2$  przedziały ( $j$  i  $j+1$ ) w skali  $n$ . Dalej mogły mieć miejsce dwa scenariusze. Pierwszy z nich to wystąpienie nieciągłości (ang. intermittency), polegające na wystąpieniu dla jednego z przedziałów zstępnych wagi rozdziału równej 1, a więc przekazanie do niego całej wysokości warstwy deszczu z przedziału i z jednoczesnym uczynieniem drugiego przedziału zstępnego pustym, zgodnie z wymogiem warunku mikrokanonicznego:

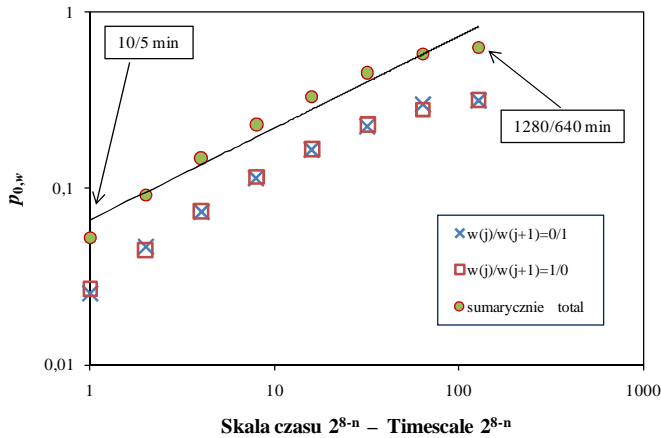
$$Pr(W_n(j) = 0 \text{ lub } W_n(j+1) = 0) = p_{0,w}, \quad (6.43)$$

gdzie:  $p_{0,w}$  oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia nieciągłości (układu wag rozdziału 0/1 lub 1/0). Prawdopodobieństwo to Molnar i Burlando [2005] szacowali na podstawie danych empirycznych dla każdego poziomu kaskady z osobna, wykazując przy tym jego skalowy charakter analogiczny jak w przypadku zależności 6.42. Drugi scenariusz jest wdrażany w kaskadzie dopiero po niezastąpieniu pierwszego i obejmuje odтворzenie zmienności wewnątrz opadu, kiedy to dla obydwu przedziałów  $j$  i  $j+1$  wagi rozdziału mieszczą się w zakresie  $0 < W < 1$ . Realizacja drugiego ze scenariuszy według Molnara i Burlando [2005] winna odbywać się na bazie opisywanego generatora o rozkładzie beta. Ten zmodyfikowany dualny model ograniczonej kaskady mikrokanonicznej z generatorem o rozkładzie beta został wstępnie użyty dla generowania syntetycznych szeregów opadowych w warunkach Wrocławia jako alternatywa wobec wcześniej studiowanych modeli kanonicznych.

### 6.3.1.1. Estymacja parametrów kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta

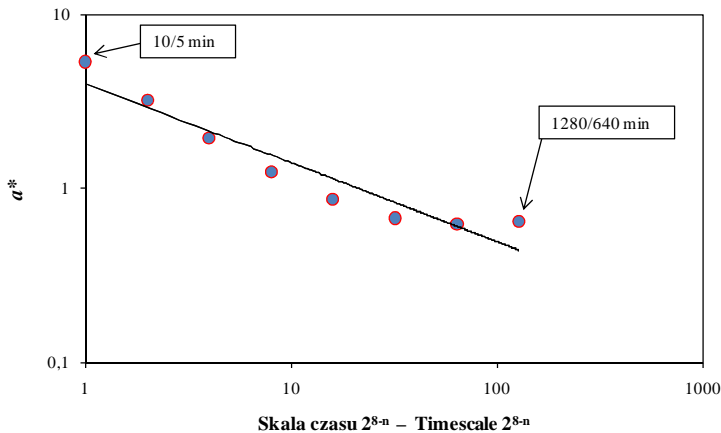
Estymacja parametrów kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta została przeprowadzona w oparciu o posiadane szeregi obserwacyjne deszczów z Wrocławia z 38 lat z wykorzystaniem programu BDC. Opracowany uprzednio program BDC podobnie jak w przypadku obliczeń Menabde'go i Sivapalana [2000] oraz Molnara i Burlando [2005] wyznaczał współczynniki rozpadu według wzoru 6.41 na podstawie bazowych szeregów obserwacyjnych o rozdzielczości  $t_0 = 5$  minut, dla kolejnych okresów czasu:  $t_n = 2^{8-n}(t_0)$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots, 8$ , przy założeniu  $\tau_n = t_n/2$ , co odpowiadało przyjętemu

współczynniki rozdziału  $b = 2$ . Na podstawie znajomości współczynników rozpadu program BDC wyliczał następnie wartości prawdopodobieństwa wystąpienia nieciągłości  $p_{0,w}$  oraz parametru  $a^*$  rozkładu beta według wzoru 6.40, dla poszczególnych skal czasowych. Wyniki stosowania programu BDC są przedstawione na rysunkach 6.14 i 6.15.



Rys. 6.14. Skalowanie prawdopodobieństwa  $p_{0,w}$  dla współczynników rozpadu obliczonych dla kolejnych skal czasowych  $\lambda_k = 2^{8-n}$

Fig. 6.14. Scaling of the  $p_{0,w}$  probability of the breakdown coefficients estimated at timescales  $\lambda_k = 2^{8-n}$



Rys. 6.15. Skalowanie parametru  $a^*$  rozkładu beta dla współczynników rozpadu obliczonych dla kolejnych skal czasowych  $\lambda_k = 2^{8-n}$

Fig. 6.15. Scaling of the beta distribution parameter  $a^*$  of the breakdown coefficients estimated at timescales  $\lambda_k = 2^{8-n}$

Na rysunkach 6.14 i 6.15 można obserwować systematyczne zmiany wartości parametrów  $p_{0,w}$  i  $a^*$  na poszczególnych poziomach kaskady. Na rysunku 6.14 widać wyraźny spadek wartości prawdopodobieństwa  $p_{0,w}$  wraz ze spadkiem skali czasowej.

Co warto podkreślić, prawdopodobieństwa wystąpienia układu wag  $W_n(j) = 0$  i  $W_n(j+1) = 1$  na wszystkich poziomach kaskady są równe prawdopodobieństwu sytuacji odwrotnej, układu wag  $W_n(j) = 1$  i  $W_n(j+1) = 0$ . Wskazuje to na rzeczywiście losowy charakter wystąpienia przerwy w opadzie w zbiorze analizowanych współczynników rozdziału. Na rysunku 6.15 widać natomiast systematyczny wzrost wartości parametru  $a^*$  wraz z obniżaniem wartości skali czasowej. Na wykresach wyznaczono zależności obliczonych parametrów w funkcji skali czasu  $\lambda_k = 2^{8-n}$ , o postaci jak w równaniu 6.42:

$$p_{0,w}(\lambda_k) = 0,0663 \cdot \lambda_k^{0,521}, \quad \text{przy } r^2 = 0,96, \quad (6.44)$$

$$a^*(\lambda_k) = 4 \cdot \lambda_k^{-0,454}, \quad \text{przy } r^2 = 0,91. \quad (6.45)$$

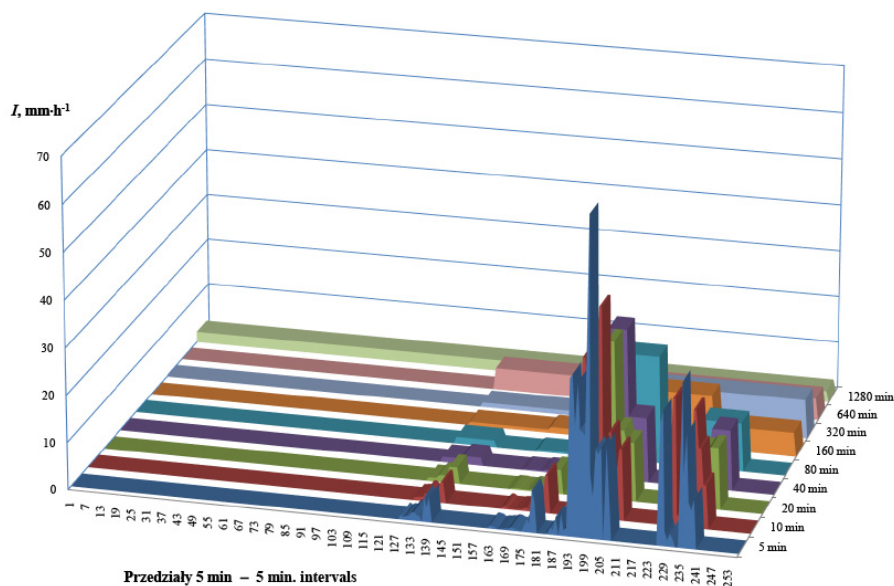
Molnar i Burlando (2005) obserwowali także spadek wartości prawdopodobieństwa  $p_{0,w}$  wraz z obniżaniem się wartości skali czasowej, jednak tendencja ta nie miała tak wyraźnego charakteru jak na rysunku 6.14. Co za tym idzie, oszacowana przez tych autorów zależność funkcyjna prawdopodobieństwa  $p_{0,w}$  miała zasadniczo różniące się wartości parametrów dopasowania niż występujące we wzorze 6.44. W przeciwieństwie do tego obraz zmian parametru  $a^*$  rozkładu beta był bardzo zbliżony i funkcja 6.45 był bardzo zbliżony do wyznaczonych przez Molnara i Burlando (2005) dla szeregów opadowych z Zurychu.

### 6.3.1.2. Generowanie syntetycznych szeregów deszczów z użyciem kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta

Generowania syntetycznych szeregów wysokości warstwy deszczu z użyciem kaskady mikrokanonicznej z generatorem o rozkładzie beta dokonano z wykorzystaniem wcześniej przygotowanego programu komputerowego MIKROCAN\_BETA. Program ten podobnie jak programy CANONICAL i CANLSF pozwala na rozdział całkowitych, wysokości warstw deszczu zarejestrowanych w ciągu 1280 minut na krótsze okresy czasowe począwszy od 640 minut, a kończąc na 5 minutach. Rozdział odbywał się według wartości wag rozdziałów przyjmowanych losowo, niemniej z uwzględnieniem reguł opisanych zależnościami 6.44 i 6.45 na poszczególnych poziomach kaskady. Zasadnicze znaczenie przy tym miał generator wag rozdziału zgodny z symetrycznym rozkładem beta. W tym celu w programie MIKROCAN\_BETA zaimplementowano generator rozkładu symetrycznego beta według metody biegunowej (ang. polar method) Urlicha [Devroye 1986]. Danymi wejściowymi do programu MIKROCAN\_BETA były wysokości warstw deszczu dla 1280 minut według danych obserwacyjnych z Wrocławia. Program był uruchamiany 100 razy dla całego szeregu 1280-minutowych wysokości opadów z 38 lat, a uzyskanym w rezultacie tego wynikiem, były syntetyczne szeregi opadowe dla kolejnych kroków czasowych od 640 do 5 minut dla łącznego hipotetycznego okresu 3800 lat.

Jako przykład działania kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta, na rysunku 6.16 przedstawiony jest 1 spośród uzyskanych 100 scenariuszy rozdziału dobowej sumy opadu równej 49,5 mm. Na rysunku widać wyraźnie typowy mechanizm funkcjonowania kaskady mikrokanonicznej, którego podstawowym założeniem jest zachowanie wspomnianej łącznej wysokości 49,5 mm opadu na wszystkich poziomach kaskady. Rezultatem tego jest zwiększanie się wartości natężeń opadu wraz ze skracaniem się

łącznego czasu trwania opadu przy zstępowaniu w dół kaskady. Przyrost wartości maksymalnych natężeń deszczu na poszczególnych poziomach kaskady ma charakter systematyczny i jest zgodny z logiką, podpowiadającą, że maksymalne natężenia chwilowe deszczu dla dłuższych czasów trwania powinny być niższymi ewentualnie w rzadkich przypadkach równymi natężeniom dla krótszych czasów trwania. Nie dochodzi zatem do sytuacji, opisywanych dla kaskady kanonicznej na przykładzie rysunku 6.10, kiedy to natężenia maksymalne chwilowe w przedziałach 10-minutowych przewyższały natężenia maksymalne w przedziałach 5-minutowych. Zastrzeżeń nie może budzić też struktura wygenerowanego finalnie w rozdzielczości 5 minut szeregu opadowego. Na jego obrazie widać mogącą wystąpić potencjalnie, charakterystyczną strukturę kolejno następujących po sobie impulsów opadowych.



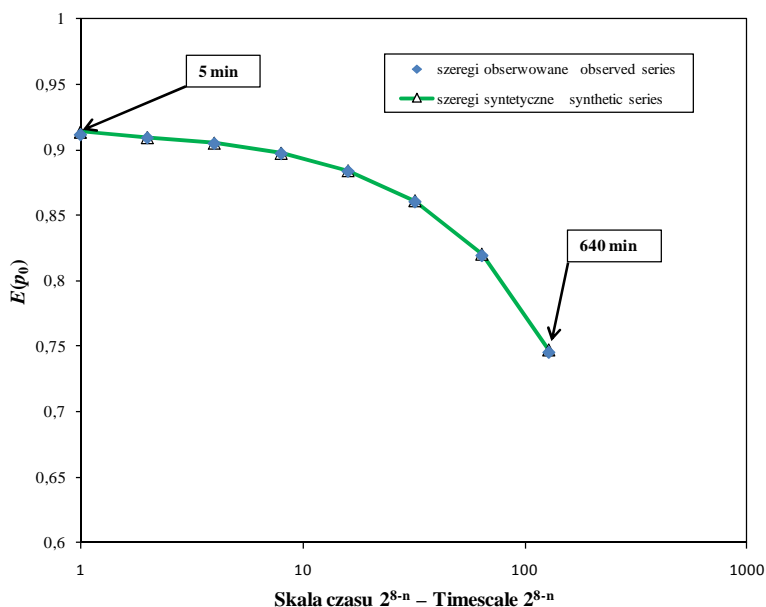
Rys. 6.16. Przykładowy wynik działania kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta (scenariusz rozdziału sumy dobowej opadu równej 49,5 mm)

Fig. 6.16. Example of the microcanonical cascade with beta generator functioning (scenario of the 49,5 mm daily precipitation depth disaggregation)

### 6.3.1.3. Ocena jakości syntetycznych szeregów deszczów z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta

Ocenę jakości syntetycznych szeregów deszczów rozpoczęto, podobnie jak w przypadku wcześniej testowanych kaskad kanonicznych, od obliczenia prawdopodobieństwa wystąpienia w nich okresów bezdeszczowych  $E(p_0)$  (o zerowej wysokości opadów). W tym celu syntetyczne szeregi opadowe zostały przeanalizowane z użyciem programu EP0. Wyniki tych analiz są przedstawione na rysunku 6.17 na tle odpowiadających im wyników analiz rzeczywistych szeregów obserwacyjnych deszczów z Wrocławia. Na wykresie przedstawiono tylko pojedynczy układ punktów, uzyskany jako

średni dla 100 niezależnych generacji, gdyż różnice pomiędzy kolejnymi generacjami były nieznaczne. Układy punktów wyznaczonych dla szeregów syntetycznych i obserwowanych pokrywają się wzajemnie prawie idealnie. Świadczy to o bardzo dobrym, a wręcz idealnym, w odniesieniu do szeregów rzeczywistych deszczów, odwzorowaniu prawdopodobieństwa wystąpienia okresów bezdeszczowych w szeregach syntetycznych generowanych z kaskady mikrokanonicznej. Można zatem wnioskować, że mechanizm generowania okresów bezdeszczowych oparty o zmieniające się na poszczególnych poziomach kaskady wartości prawdopodobieństwa  $p_{0,w}$ , zaproponowany przez Molnara i Burlando [2005] sprawdził się praktycznie bardzo dobrze w warunkach Wrocławia. Poprawność takiego podejścia do generowania okresów bezdeszczowych w szeregach syntetycznych potwierdziły także badania w warunkach Zurychu, przeprowadzone przez wspomnianych badaczy.

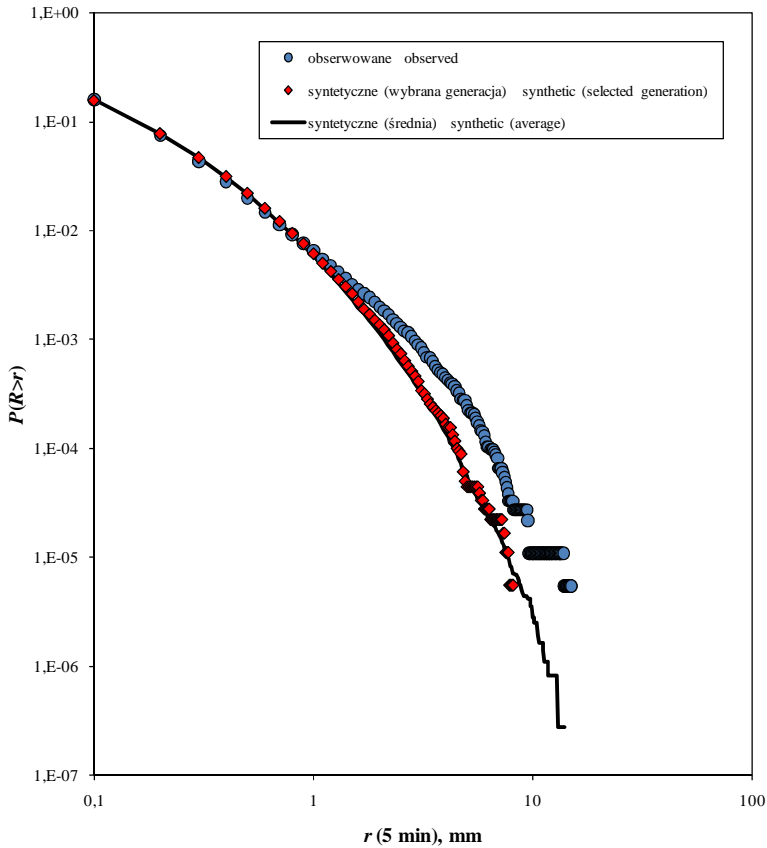


Rys. 6.17. Porównanie nieciągłości opadów w szeregach obserwacyjnych z Wrocławia oraz w szeregach syntetycznych wygenerowanych z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta (linią ciągłą połączono punkty uzyskane dla szeregów syntetycznych, wyznaczone jako średnie ze 100 niezależnych generacji)

Fig. 6.17. Comparison of the rainfall intermittency at the observed rainfall time-series from Wrocław and at the synthetic time-series generated by the microcanonical cascade with beta generator (points obtained for synthetic time-series estimated as average over 100 independent generations were joined by the continuous line)

Wyniki obliczeń programem EPO prezentowane na rysunku 6.17 są zdecydowanie lepsze od wcześniejszych wyników prezentowanych na rysunkach: 6.6 i 6.11. Jednocześnie otwierają one drogę do praktycznego stosowania syntetycznych szeregów opadowych w zakresie inżynierii środowiska do modelowania procesów, w których przebiegu

istotne znaczenie ma wzajemne następstwo okresów deszczowych i bezdeszczowych, tak jak ma to choćby miejsce w przypadku systemów rozszczynania wód opadowych.



Rys. 6.18. Dystrybuanty wysokości opadu, stwierdzone dla szeregów obserwacyjnych z Wrocławia oraz dla szeregów syntetycznych wygenerowanych z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta (linią ciągłą oznaczono dystrybuantę dla szeregów syntetycznych, wyznaczoną jako średnia ze 100 niezależnych generacji)

Fig. 6.18. The cumulative distribution functions calculated for the observed time-series from Wrocław and for the synthetic time-series generated by the microcanonical cascade with beta generator (cumulative distribution function calculated as the average over 100 independent generations was marked by the continuous line)

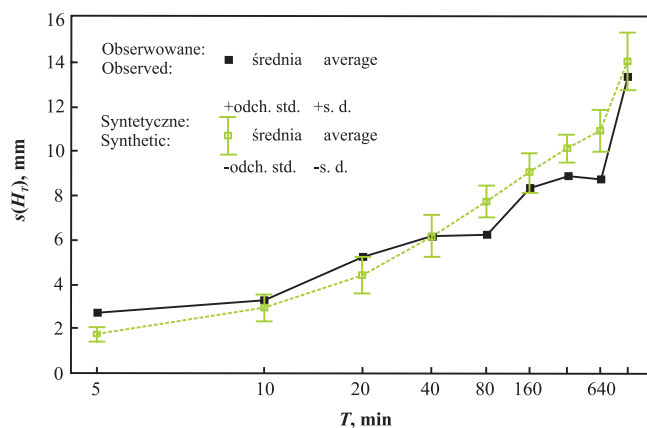
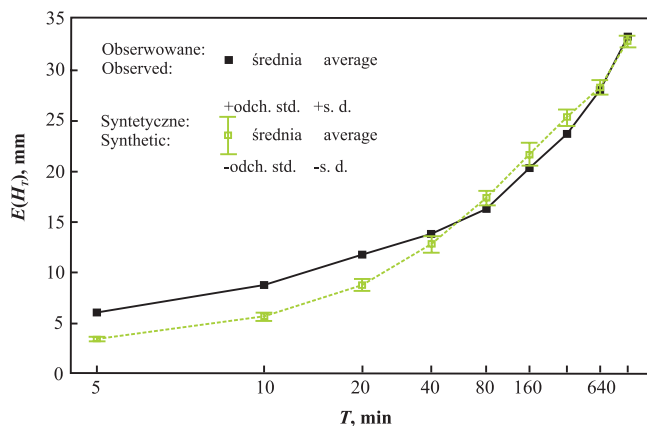
Ocenę jakości wygenerowanych syntetycznych szeregów opadowych w zakresie zmienności występujących w nich wysokości warstw deszczu rozpoczęto od analizy tych szeregów z użyciem programu CDF. Obliczone w wyniku tego dystrybuanty poszczególnych generacji z kaskady mikrokanonicznej z rozkładem beta były do siebie bardzo zbliżone. Z tej racji na rysunku 6.18 zamieszczono tylko wykres uśrednionego

przebiegu dystrybuanty dla wszystkich 100 generacji oraz wykres dystrybuanty pojedynczej, losowo wybranej generacji. Wykresy te bliskie sobie wzajemnie są zarazem zbliżone do wykresu dystrybuanty uzyskanej dla szeregów obserwacyjnych. Oczywiście zbliżenie to jest dalekie od ideału, niemniej znacząca poprawa w zakresie odwzorowania częstości przewyższania kolejnych progów wysokości warstwy deszczu w szeregach syntetycznych z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta jest wyraźnie dostrzegalna, jeśli przyrówna się wyniki z rysunku 6.18 z wynikami uzyskiwanymi dla kaskad kanonicznych (patrz rys. 6.7 i 6.12).

Rozbieżności pomiędzy wykresami dystrybuant dla szeregów syntetycznych i obserwowanych rysują się dopiero po przekroczeniu wysokości opadu około 2 mm, podczas gdy dla szeregów z kaskad kanonicznych różnice te rozpoczynają się od progu rzędu około 0,7 mm. Rozbieżności te są dodatkowo o mniejszej skali niż wcześniej notowane na rysunkach 6.7 i 6.12. Ich wielkość jest porównywalna do analogicznych rozbieżności notowanych przez Molnara i Burlando [2005]. Niemniej, w przeciwieństwie do wyników cytowanych autorów, dystrybuanta dla szeregów syntetycznych na rysunku 6.18 przebiega w wysokich progach wysokości warstw deszczu poniżej dystrybuanty szeregów obserwowanych. Wskazuje to na nieco niższą częstość przekraczania tych znacznych wysokości warstw deszczu w szeregach syntetycznych względem szeregów obserwacyjnych.

Dostrzeżone powyżej mankamenty syntetycznych szeregów opadowych zostały potwierdzone przez przeprowadzoną, z użyciem programu EHT, analizę wartości maksymalnych wysokości warstw deszczu występujących w nich dla różnych skal czasu. Wyniki tej analizy dla czasów trwania deszczów równych: 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 i 1280 minut są przedstawione na wykresach na rysunku 6.19, w postaci średnich rocznych wartości maksimów wysokości warstw deszczu  $E(H_T)$  oraz ich odchyłeń standardowych  $s(H_T)$ . Podobnie jak w przypadku kaskad kanonicznych roczne maksima wartości warstw deszczu zostały określone dla wszystkich 100 niezależnych generacji 38-letnich szeregów opadowych.

Wykresy na rysunku 6.19 świadczą o słuszności wniosków sformułowanych wcześniej na podstawie analizy dystrybuanty szeregów syntetycznych. Ich porównanie z rysunkami 6.8 i 6.13 dowodzi, że w stosunku do wcześniej omawianych kaskad kanonicznych model mikrokanoniczny zapewnia uzyskiwanie syntetycznych danych opadowych zdecydowanie lepiej naśladujących rzeczywiste opady we Wrocławiu. Zgodnie z danymi na rysunku 6.19 średnie roczne wartości maksimów wysokości warstw deszczu  $E(H_T)$  w szeregach syntetycznych odpowiadają ich wartościom wyznaczonym w szeregach obserwacyjnych dla czasów trwania dłuższych bądź równych 40 minutom. Ponadto zmienność wartości rocznych maksimów wysokości warstw deszczu w zbiorze danych syntetycznych dla wszystkich czasów trwania jest zbliżona jak w zbiorze obserwacyjnym, o czym przekonuje wykres wartości  $s(H_T)$ . Ten idealny obraz jest zakłócany przez widoczne zaniżenie wartości  $E(H_T)$  dla szeregów syntetycznych względem odpowiadających im wartości dla szeregów obserwacyjnych dla krótkich czasów trwania deszczów, takich jak 5, 10 czy też 20 minut. Przykładowo, dla czasu trwania 5 minut wartość  $E(H_T)$  stwierdzona dla szeregów syntetycznych równała się 3,4 mm,



Rys. 6.19. Średnie roczne maksima wysokości opadu  $E(H_T)$  oraz ich odchylenia standardowe  $s(H_T)$  dla szeregów syntetycznych z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta i szeregów obserwowanych (liniami połączono punkty odpowiadające wartościom  $E(H_T)$  i  $s(H_T)$  dla różnych czasów trwania  $T$ , zaznaczono także zakresy odpowiadające  $\pm$  odchyleniu tych wartości w obrębie 100 niezależnych generacji dla szeregów syntetycznych)

Fig. 6.19. The mean annual rainfall maximum  $E(H_T)$  and its standard deviation  $s(H_T)$  values for the synthetic time-series generated by the microcanonical cascade with beta generator and the observed time-series (points of  $E(H_T)$  and  $s(H_T)$  values for different time scales  $T$  were joined by lines, moreover bars of  $\pm 1$  S.D. ranges of these values over 100 independent generations were marked for synthetic time-series)

podczas gdy dla szeregów obserwacyjnych wynosiła 6,0 mm. Obserwacja ta podobnie jak w przypadku szeregów syntetycznych z kaskady kanonicznej o stałych parametrach każe sądzić, że także wykorzystywanie syntetycznych szeregów opadowych z modelu mikrokanonicznego z generatorem beta do zadań takich jak modelowanie sieci kanali-



zacji deszczowych i ogólnospławnych, czy też innych elementów zagospodarowania wód deszczowych może nieść ze sobą ryzyko ich niedociążenia prawdopodobnym strumieniem wód opadowych. Chociaż ryzyko to wydaje się być mniejszym niż w przypadku modeli kanonicznych, to jednak istnieje i co za tym idzie, pojawił się impuls do dalszego doskonalenia modelu mikrokanonicznego do generowania jeszcze bardziej wiarygodnych syntetycznych danych opadowych.

### 6.3.2. Kaskada mikrokanoniczna z generatorem beta-normalnym

Doświadczenia zgromadzone na podstawie testów kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta pozwoliły na stwierdzenie, że o ile pierwszy z modułów składowych kaskady odpowiedzialny za generowanie nieciągłości w szeregach syntetycznych funkcjonuje właściwie, o tyle drugi z modułów odpowiedzialny za odwzorowanie zmienności natężeń deszczów w obrębie samych opadów wymaga poprawy. Moduł ten, jak pamiętamy, idąc za wskazaniem Molnara i Burlando [2005] czy też Menabde'go i Sivapalana [2000], został *a priori* przyjęty jako bazujący na rozkładzie beta. Studia literaturowe dotyczące kaskad losowych służących rozdziałowi opadów z większych skal czasowych ku niższym skalom zwróciły uwagę na potrzebę dokładniejszego przeanalizowania wartości współczynników rozpadu. Menabde i Sivapalan [2000] zamieścili histogramy wartości współczynników rozpadu dla kolejnych poziomów kaskady i na podstawie ich kształtu wnosili o możliwości stosowania rozkładu beta. W przeciwieństwie do nich Molnar i Burlando [2005] bądź to całkowicie pominęli ten etap badań, bądź tylko nie odnieśli się do jego rezultatów w treści pracy. O tym, na ile analizy takie mogą być istotne przy modelowaniu z użyciem kaskad losowych, wskazują wyraźnie prace publikowane przez Olssona [1998], Olssona i Berndtssona [1998] oraz Güntnera i in. [2001]. Cytowani autorzy stosowali w zasadzie podobne modele kaskad o charakterze mikrokanonicznym dla rozdziału sum dobowych opadów lub nawet tygodniowych na czasy krótsze. Za oddolną granicę właściwego funkcjonowania modeli przyjmowali rozdzielczość czasową rzędu około 1 h. Granica ta wynikała właśnie z obserwacji zmieniających się rozkładów współczynników rozpadu. Dla czasów dochodzących do około 1 godziny obserwowano rozkłady, które można było w opinii autorów uznać za w przybliżeniu zgodne z rozkładem równomiernym. Dla czasów krótszych rozkłady te znacząco się zmieniały.

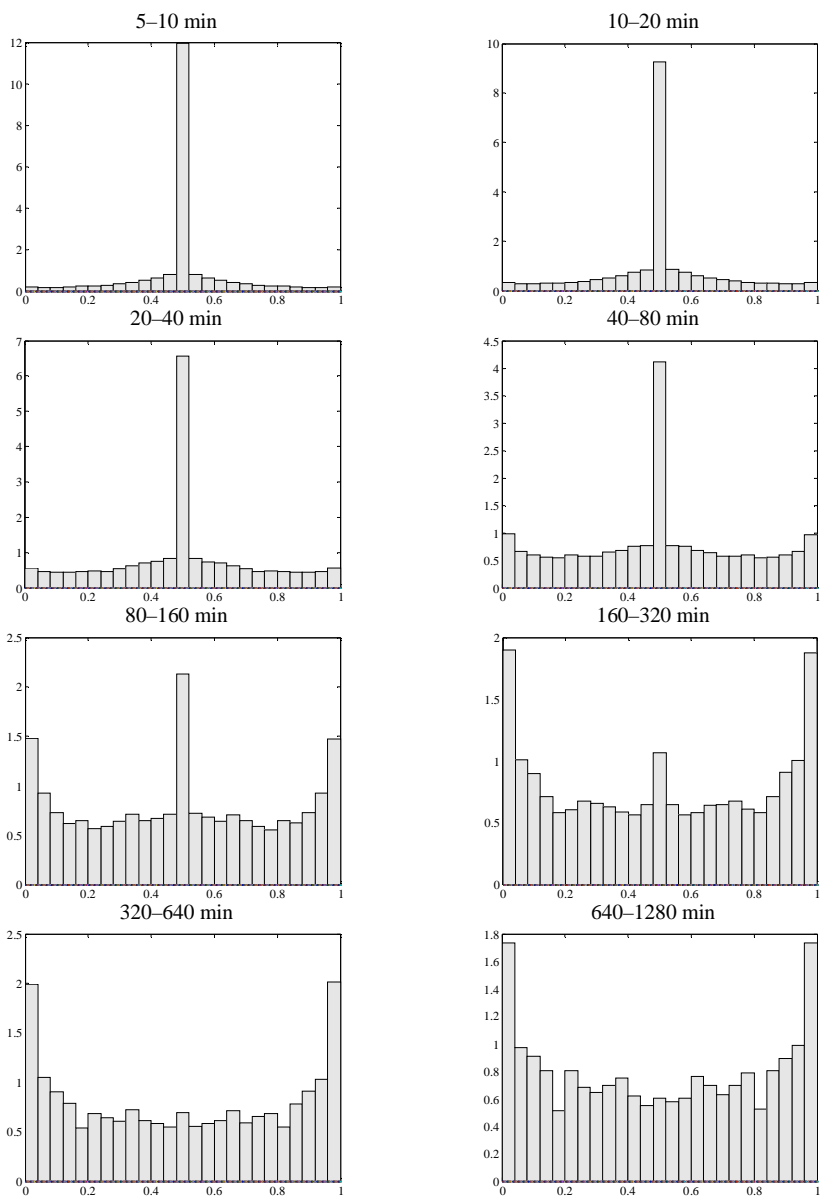
Mając na uwadze powyższe spostrzeżenia, dokładnie przeanalizowano wartości współczynników rozpadu wyznaczone z użyciem programu BDC dla szeregów obserwacyjnych z Wrocławia. W tym celu sporządzono histogramy ich wartości w poszczególnych skalach czasowych rozdziałów, dokonywanych przez kaskadę. Histogramy te, przedstawione na rysunku 6.20, pozwalają wnioskować, że zakładanie *a priori* rozkładu beta dla wszystkich spośród skal czasowych było nieuzasadnione. Jedynie histogramy dla 2–3 pierwszych poziomów kaskady (skale czasu od 1280 do 320 lub 160 minut) są w przybliżeniu zgodne z rozkładem symetrycznym beta o parametrze  $\alpha^* < 1$ . We wszystkich pozostałych histogramach dochodziło do zakłócenia ich przebiegu zgodnego z rozkładem beta przez szybko wzrastającą liczbę przypadków wartości współczynnika rozpadu równego około 0,5. Przeglądnięcie zbiorów wartości współczynników rozpadu ujawniło ciekawy mechanizm. W zbiorach tych wraz ze spadkiem rozpatrywanych skal

czasowych notowano coraz większy odsetek wartości współczynników rozpadu równych dokładnie 0,500. W efekcie tego histogramy dla najniższych skal rozdziału w zakresie od 5 do 20 minut są w zasadzie zdominowane przez środkowy przedział zawierający wartość 0,5. Sytuacja ta teoretycznie nie powinna mieć miejsca z uwagi na dynamikę czasową przebiegu zjawisk opadowych. Wystarczy w tym miejscu pamiętać choćby o tym, że deszczomierz rejestruje opady, które są generowane przez przesuwa-  
jące się nad nim chmury, które mają niejednorodną budowę o charakterze fraktalnym bądź nawet multifraktalnym [patrz np. Lovejoy 1982, Lovejoy i Mandelbrot 1985, Lovejoy i Schertzer 1995, Malinowski i Zawadzki 1993], a opadające hydrometeory tworzą w przestrzeni układy o charakterze multifraktalnym [Desaulniers-Soucy i in. 2001]. Trudno zatem spodziewać się, że w dwóch następujących po sobie 5-minutowych okre-  
sach w deszczomierzu zdeponują się dwie identyczne wysokości opadu. Sytuacja ta znajduje jednak wytłumaczenie w ograniczeniach pluwiografów stosowanych przez lata do ciągłych rejestracji deszczów. Raz jeszcze należy wrócić do wniosków płynących z rysunku 4.1 oraz danych zawartych w tabeli 5.1. Zgodnie z tabelą 5.1 jedynie niespeł-  
na 30% łącznego czasu zdigitalizowanych deszczów w roku 1997 charakteryzowało się średnim krokiem czasowym digitalizacji wynoszącym około 6 minut. Dla zdecydowa-  
nej większości czasu trwania deszczów ich odczyty były prowadzone zatem z krokiem czasowym średnio 20 minut lub też nawet znacznie dłuższym. Rezultatem tego, zwró-  
tając się w przypadku deszczów o niższych natężeniach, jest występowanie w wynikowym 5-minutowym szeregu licznych sekwencji okresów o identycznych wysokościach zde-  
ponowanych opadów. Współczynniki rozpadu równe dokładnie 0,500 mają zatem cha-  
rakter sztuczny i są wynikiem ograniczeń samego przyrządu pomiarowego.

Po eliminacji nienaturalnych wartości współczynników rozpadu wynoszących 0,500, wykreślono ponownie histogramy pozostałych współczynników  $W_n(j)$  (rysunek 6.21). Na podstawie analizy kształtu histogramów zwłaszcza dla mniejszych skal cza-  
sowych zaproponowano, aby ich rozkład był opisywany przy użyciu rozkładu łączonego  $p_L(w)$  dwóch klasycznych rozkładów: beta i normalnego, o postaci:

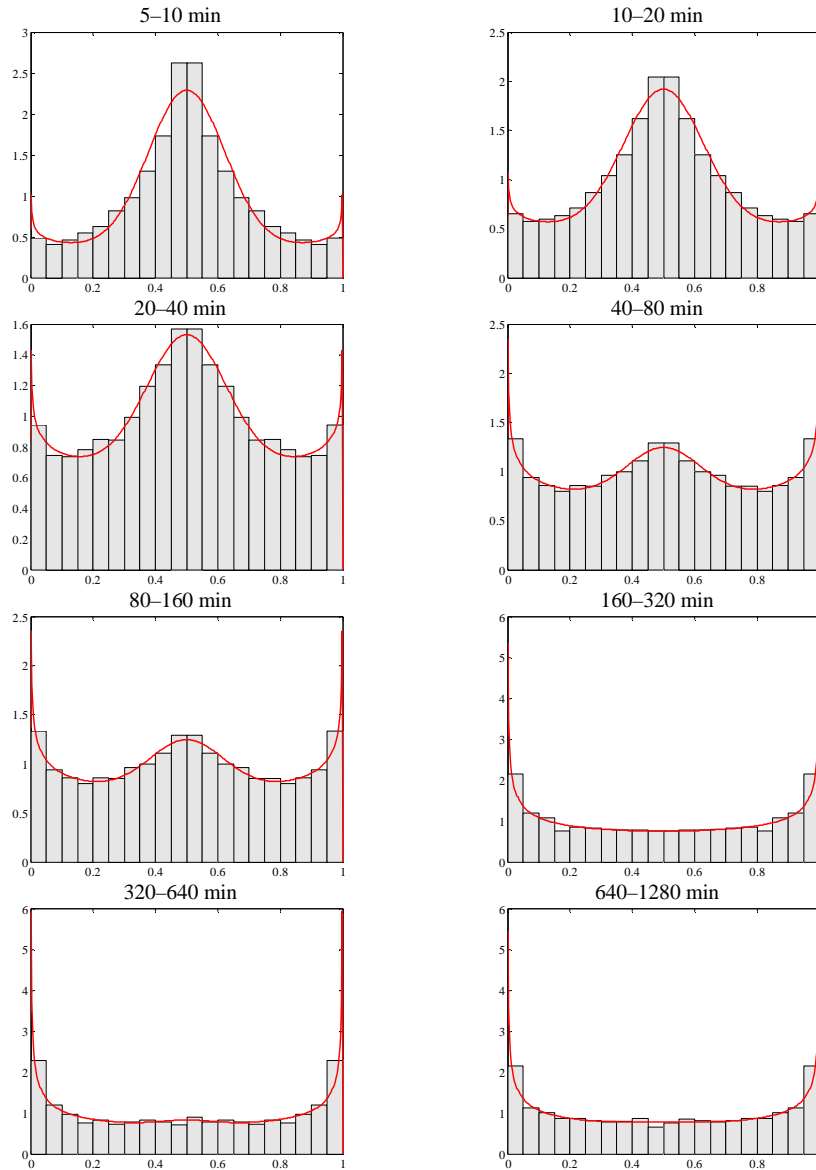
$$p_L(w) = p_{BN} \left\{ \frac{1}{B(a^*)} w^{a^*-1} (1-w)^{a^*-1} \right\} + (1-p_{BN}) \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right\}, \quad (6.46)$$

gdzie:  $w \in (0,1)$ ,  $p_{BN}$  – parametr charakteryzujący procent udział rozkładu beta w rozkła-  
dzie łączonym ( $p_{BN} \in [0,1]$ ),  $a^*$  – parametr dopasowania rozkładu beta;  $\mu$ ,  $\sigma$  – parametry  
dopasowania rozkładu normalnego.



Rys. 6.20. Histogramy empirycznych wartości współczynników rozpadu obliczone dla szeregów obserwacyjnych z Wrocławia dla poszczególnych skal czasowych. Na wszystkich wykresach na osi odciętych zaznaczono zakresy wartości współczynników rozpadu  $W_n(j)$ , a na osi rzędnych odpowiadające im gęstości prawdopodobieństwa

Fig. 6.20. The empirical breakdown coefficients histograms calculated for the observed time-series from Wrocław for different time scales. Horizontal axes show breakdown coefficients  $W_n(j)$  ranges and vertical axes their respective probability density values on all plots



Rys. 6.21. Histogramy wartości współczynników rozpadu obliczone dla szeregów obserwacyjnych z Wrocławia z pominięciem wartości  $W_n(j) = 0,500$  i z dopasowanym do nich łączonym rozkładem prawdopodobieństwa beta-normalnym. Na wszystkich wykresach na osi odciętych zaznaczono zakresy wartości współczynników rozpadu  $W_n(j)$ , a na osi rzędnych odpowiadające im gęstości prawdopodobieństwa

Fig. 6.21. The empirical breakdown coefficients histograms calculated for the observed time-series from Wrocław without  $W_n(j) = 0,500$  values and with fitted to them joined beta-normal probability distribution. Horizontal axes show breakdown coefficients  $W_n(j)$  ranges and vertical axes their respective probability density values on all plots

### 6.3.2.1. Estymacja parametrów kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym

Procentowy udział współczynników równych dokładnie 0,5 ( $p_{0,5}$ ) w całości zbioru współczynników rozpadu został wyznaczony dla poszczególnych skal czasowych i zestawiony w tabeli 6.2. W tabeli 6.2 zamieszczono także parametry dopasowania rozkładu o gęstości prawdopodobieństwa  $p_L(w)$  do histogramów z rysunku 6.21. Wyestymowane dla różnych skalach czasu rozkłady łączone  $p_L(w)$ , które w dalszej części pracy będą nazywane, z uwagi na swoje komponenty składowe, rozkładami beta-normalnymi, są także przedstawione na rysunku 6.21. Jak łatwo zauważyć, ich przebieg bardzo dobrze naśladuje stwierdzone rozkłady empirycznych wartości współczynników rozpadu. Rysunek 6.21 ilustruje ponadto doskonale występującą w hierarchii kaskady ewolucję rozkładu beta-normalnego, poczynając od czystego rozkładu beta widocznego w skalach do 160 minut w stronę coraz większej przewagi rozkładu normalnego. Obserwacje te znajdują pełne potwierdzenie w danych zawartych w tabeli 6.2. Co ciekawe, o ile wartość parametru  $a^*$  rozkładu beta przybiera różne wartości, o tyle parametry rozkładu normalnego są zasadniczo niezmiennie. Wartość parametru  $\mu = 0,5$  jest oczywistą z uwagi na symetrię histogramów, a  $\sigma$  waha się w niewielkim zakresie wokół wartości 0,123. Wartość ta ma istotne znaczenie dla generatora kaskady, gdyż chociaż rozkład normalny nie jest rozkładem ograniczonym (tak jak np. rozkład beta), to przy wspomnianej wartości  $\sigma$  i przy  $\mu = 0,5$ , wartości współczynników rozpadu opisywane takim rozkładem normalnym nie wykraczają w praktyce poza zakres od 0 do 1.

Otrzymanych na tym etapie wyników badań nie można odnieść do rezultatów prac innych badaczy. Przede wszystkim z uwagi na fakt, że jak dotąd, zgodnie z najlepszą wiedzą autora, nikt nie zaproponował użycia rozkładu beta-normalnego do opisu rozkładów współczynników rozpadu. Chociaż analizując histogramy zamieszczone przez Menabde'go i Sivapalana [2000], Olssona [1998] czy też Güntnera i in. [2001], wydaje się, że także w ich przypadku zastosowanie rozkładu beta-normalnego mogłoby być właściwym posunięciem. Trudno jednak o tym przesądzać w sposób ostateczny, choćby z powodu niskiej rozdzielczości podziału na kategorie w histogramach Olssona [1998], czy też Güntnera i in. [2001], które skłaniały autorów tych prac do wnioskowania, że histogramy te dla czasów dłuższych od około 1 godziny można opisywać rozkładem jednostajnym. Jednocześnie Güntner i in. [2001] wskazywali w histogramach dla krótszych czasów od 1 godziny na znaczny udział wartości równych lub bliskich 0,5, przez co kształt histogramów opisywali jako zbliżony do trójkąta. Wysoki udział wartości współczynników rozpadu wynoszących 0,5 był szczególnie zauważalny w histogramach Menabde'go i Sivapalana [2000]. Udział ten narastał w sposób widoczny wraz ze spadkiem skali czasu od około 96 minut do 6 minut, analogicznie jak na rysunku 6.20. Prawdą jest, że zjawisko to dla zbioru danych z Melbourne nie przybierało tak wysokiego natężenia jak dla zbioru z Wrocławia, niemniej zapewne było to rezultatem dwóch czynników: odmienności monsunowych opadów z Australi oraz użycia całkiem innego typu deszczomierza z rejestratorem elektronicznym. Drugi z czynników miał zapewne także istotny wpływ na histogramy wyznaczone przez Olssona [1998], w których bardzo słabo i to jedynie w najmniejszej ze skal czasowych (8/16 minut) ujawnia się swoiste piętno zwiększonej liczebności współczynników rozpadu o wartości 0,5. Olsson pracował bowiem na nietypowym, eksperymentalnym zbiorze danych utworzo-

nym z myślą o hydrologii miejskiej. Ten dwuletni szereg czasowy natężeń o rozdzielczości czasowej 8 minut powstał przez agregację pierwotnych wyników precyzyjnych pomiarów natężenia opadu prowadzonych z rozdzielczością czasową 1 minuty.

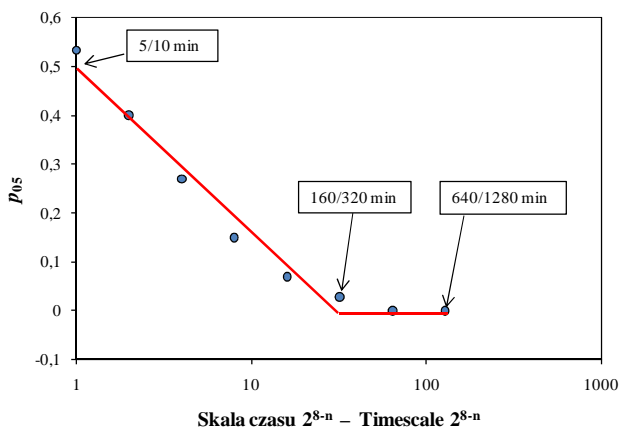
Tabela 6.2  
Table 6.2

Udział współczynników rozpadu równych 0,500 ( $p_{05}$ ) oraz parametry dopasowania rozkładu beta-normalnego ( $p_{BN}$ ,  $a^*$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ) dla różnych skal czasowych

Participation of breakdown coefficients equal 0,500 ( $p_{05}$ ) and fitted parameters of the joined beta-normal probability distributions ( $p_{BN}$ ,  $a^*$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ) for different timescales

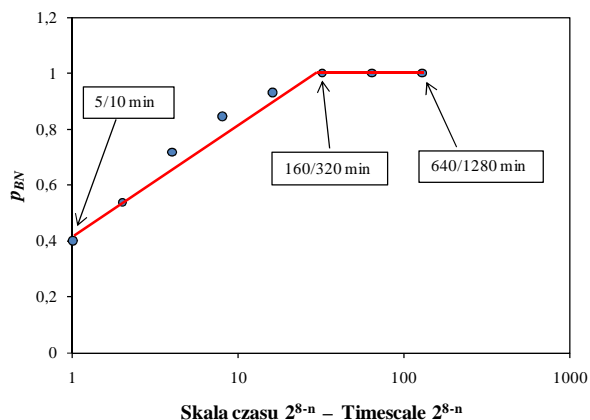
Czasy rozpadu Breakdown time	5/10 min	10/20 min	20/40 min	40/80 min	80/160 min	160/320 min	320/640 min	640/1280 min
Skala czasu $\lambda_k = 2^{8-n}$ Timescale $\lambda_k = 2^{8-n}$	1	2	4	8	16	32	64	128
$p_{05}$	0,533	0,399	0,270	0,150	0,070	0,028	0,000	0,000
$p_{BN}$	0,400	0,537	0,717	0,844	0,931	1,000	1,000	1,000
$a^*$	0,808	0,858	0,858	0,788	0,708	0,646	0,630	0,646
$\mu$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	–	–	–
$\sigma$	0,123	0,129	0,128	0,120	0,116	–	–	–

Obserwowane zmiany wartości zawartych w tabeli 6.2 skłoniły do ich głębszej analizy w celu opracowania zależności funkcyjnych wiążących ich wartości ze skalami czasu, tak jak jest to czynione w przypadku klasycznych kaskad ograniczonych. Opracowano w tym celu wykresy zależności wartości  $p_{05}$ ,  $p_{BN}$  oraz  $a^*$  w funkcji skali czasu, na których to następnie wyodrębniono trzy charakterystyczne obszary tych zależności (rys. 6.22, 6.23 i 6.24).



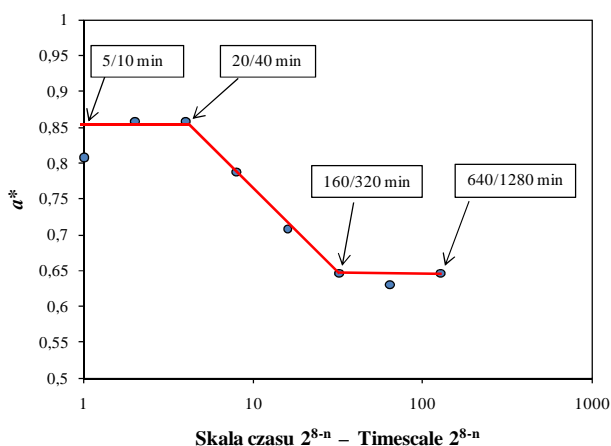
Rys. 6.22. Zależność udziału współczynników rozpadu równych 0,500 ( $p_{05}$ ) w łącznym zbiorze współczynników rozpadu od skali czasu

Fig. 6.22. Relation of the breakdown coefficients equal 0,500 participation ( $p_{05}$ ) at the total breakdown coefficients set with timescale



Rys. 6.23. Zależność parametru charakteryzującego udział rozkładu beta w łączonym rozkładzie beta-normalnym ( $p_{BN}$ ) od skali czasu

Fig. 6.23. Parameter ( $p_{BN}$ ) characterizing participation of the beta distribution at the joined beta-normal distribution relation with timescale



Rys. 6.24. Zależność parametru  $a^*$  rozkładu beta w łączonym rozkładzie beta-normalnym od skali czasu

Fig. 6.24. The beta distribution parameter  $a^*$  at the joined beta-normal distribution relation with timescale

Wykres na rysunku 6.22 potwierdza wywnioskowany już na podstawie analizy histogramów bardzo szybki wzrost udziału współczynników rozpadu  $p_{05} = 0,500$  wraz ze spadkiem skali czasu. Dla skal czasów większych od 32, te sztuczne wartości współczynników rozpadu już nie pojawiają się w zbiorach danych. Można to ogólnie opisać zależnością o postaci:

$$p_{05}(\lambda_k) = \begin{cases} -0,144 \cdot \ln(\lambda_k) + 0,5 & \text{dla } \lambda_k = 2^{8-n} < 32 \\ 0 & \text{dla } \lambda_k = 2^{8-n} \geq 32 \end{cases}, \quad (6.47)$$

Wykres zależności parametru charakteryzującego udział rozkładu beta w łączonym rozkładzie beta-normalnym od skali czasu (na rys. 6.23) jest w zasadzie odwrotnością wykresu na rysunku 6.22. Przyrostom wartości parametru  $p_{05}$  wraz ze spadkiem skali czasu odpowiadają spadki wartości parametru  $p_{BN}$ . Dla skal czasowych większych od 32, obydwa parametry mają stałe, ale diametralnie różniące się wartości. Zmiany wartości parametru  $p_{BN}$  można w przybliżeniu charakteryzować następującymi wzorami:

$$p_{BN}(\lambda_k) = \begin{cases} 0,173 \times \ln(\lambda_k) + 0,4 & \text{dla } \lambda_k = 2^{8-n} < 32 \\ 1 & \text{dla } \lambda_k = 2^{8-n} \geq 32 \end{cases}, \quad (6.48)$$

Zestawiając ze sobą rysunki 6.22 i 6.23, jak również sumując ze sobą wiersze z wartościami  $p_{05}$  i  $p_{BN}$  dla kolejnych skal czasowych w tabeli 6.2, można zauważyć, że wartości te dopełniają się, a sumy są każdorazowo w przybliżeniu równe 1. Nie znaleziono jednak głębszego wytłumaczenia i interpretacji tej ciekawej obserwacji.

Analizując trzeci z serii wykres zmienności parametrów rozkładu beta-normalnego (rys. 6.24), dotyczący zmian wartości parametru  $a^*$  samego rozkładu beta, uznano, że można wydzielić w nim trzy obszary. Pierwszy i trzeci to obszary o stałej wartości parametru  $a^*$ , podczas gdy w środkowym obszarze w zakresie skal czasu od 4 do 32 obserwuje się systematyczny spadek wartości parametru  $a^*$  od poziomu 0,858 do 0,646, co można zapisać jako:

$$a^*(\lambda_k) = \begin{cases} 0,858 & \text{dla } \lambda_k = 2^{8-n} < 4 \\ -0,102 \cdot \ln(\lambda_k) + 0,999 & \text{dla } \lambda_k = 2^{8-n} \in [4, 32], \\ 0,646 & \text{dla } \lambda_k = 2^{8-n} \geq 32 \end{cases}, \quad (6.49)$$

Porównując rysunek 6.24 z rysunkiem 6.15, należy stwierdzić, że na obydwu wykresach pokrywają się jedynie trzy ostatnie wartości parametru  $a^*$ , z trzeciego obszaru zależności 6.49, kiedy to  $p_{BN}$  według wzoru 6.48 równa się 1.

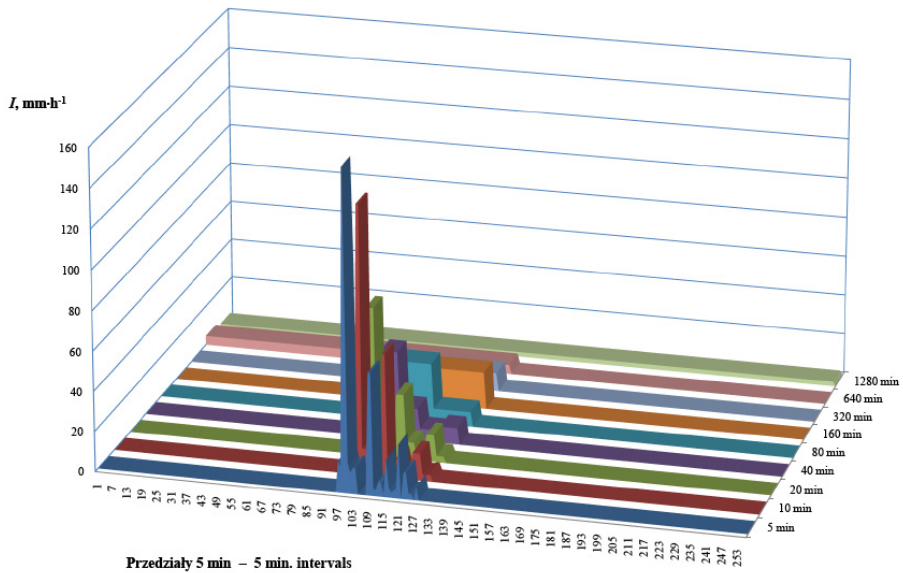
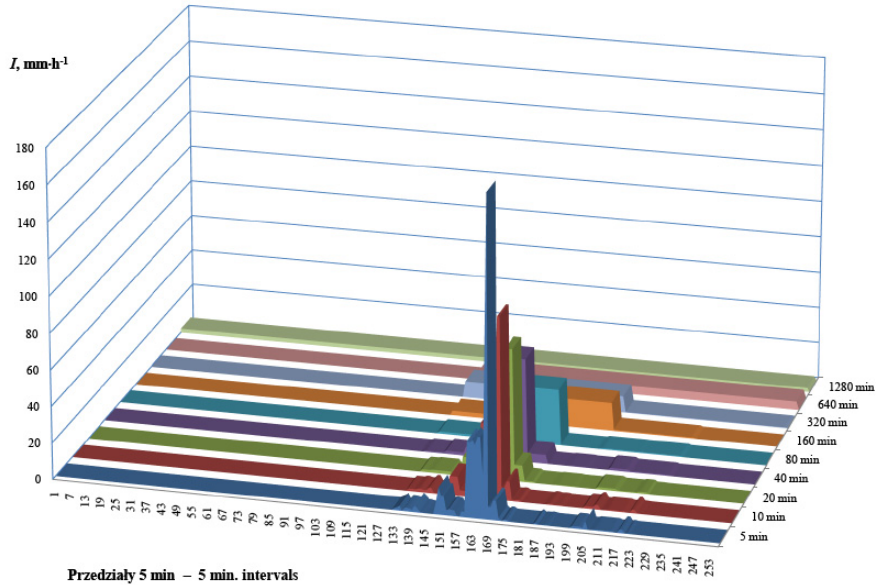
### 6.3.2.2. Generowanie syntetycznych szeregów deszczów z użyciem kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym

Identyfikacja występowania rozkładu beta-normalnego w miejsce klasycznego rozkładu beta wymusiła gruntowną zmianę oryginalnego kodu programu komputerowego MIKROCAN\_BETA. Powstały w wyniku tego program MIKROCAN\_BETA\_NORM miał pozostawiony bez zmian jedynie moduł odpowiedzialny za generowanie nieciągłości opadu, bazujący na zależności 6.44. Całkiem zmieniony moduł generowania zmienności w obrębie opadu został oparty na nowym rozkładzie beta-normalnym z uprzednim uwzględnieniem występowania z prawdopodobieństwem  $p_{05}$  wag rozdziałów równych dokładnie 0,5. W module tym na poszczególnych poziomach kaskady wartości parametrów rozkładu beta-normalnego oraz  $p_{05}$  były przyjmowane według zależności 6.47, 6.48 i 6.49. Do generowania liczb losowych o rozkładach zgodnych z symetrycznym rozkładem beta i rozkładem normalnym zastosowano odpowiednio metody biegunowe (ang. polar methods) Urlicha i Box-Mullera [Devroye 1986].



Opracowany i wstępnie przetestowany program MIKROCAN\_BETA\_NORM został praktycznie wykorzystany do rozdziału całkowitych wysokości deszczu zarejestrowanych dla 1280 minut na krótsze okresy czasowe, według sekwencji zdeterminowanej według liczby rozdziału  $b = 2$ , poczynając od 640 minut, a skończywszy na 5 minutach. Na wejściu programu MIKROCAN\_BETA\_NORM prezentowane były wartości wysokości deszczu dla 1280 minut z Wrocławia z całego 38-letniego zbioru danych obserwacyjnych. Program był uruchamiany 100-krotnie, w wyniku czego wygenerowano syntetyczne szeregi opadowe dla łącznego hipotetycznego okresu 3800 lat.

Na rysunku 6.25 przedstawione są dwa alternatywne scenariusze redystrybucji dobowej wysokości 49,5 mm opadu na okresy 5-minutowe uzyskane za pomocą kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym. Na obydwu wykresach zgodnie z oczekiwaniami widać zasadniczo różniące się realizacje rozdziału początkowej wysokości deszczu, niemniej jednakowo konsekwentne co do zachowania stałej wysokości opadu w kolejnych skalach czasowych. Struktura obydwu scenariuszy nie budzi zarzutów, jest ona zbliżona do opadów naturalnych. W pierwszym przypadku prawie cała wysokość opadu uległa skupieniu w obrębie pojedynczego zdarzenia, w którego końcowej części natężenie deszczu sięga nawet  $175 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$ . W drugim scenariuszu efektem końcowym działania kaskady są dwa impulsy opadowe oddzielone krótką zaledwie 20-minutową przerwą. Pierwszy z tych impulsów jest wyraźnie silniejszym, z natężeniem dochodzącym do  $160 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$ , podczas gdy w obrębie drugiego natężenie maksymalne nie wykracza ponad  $61 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$ . Powracając do rysunków 6.5, 6.10 i 6.16, trzeba stwierdzić, że wymienione natężenia:  $160 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$  ( $2,66 \text{ mm}\cdot\text{min}^{-1}$ ) czy też  $175 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$  ( $2,92 \text{ mm}\cdot\text{min}^{-1}$ ) są zdecydowanie wyższe od natężeń notowanych w przypadku przykładowych realizacji redystrybucji tej samej wysokości 49,5 mm opadu, za pomocą wszystkich poprzednich kaskad. Nie są to jednak wartości nieprawdopodobnie duże. Wręcz przeciwnie, może cieszyć ich zbliżona wartość w stosunku do wartości maksymalnych natężeń chwilowych deszczów podawanych przez innych badaczy. Wołoszyn [1964], na podstawie analizy pomiarów opadów z Wrocławia z wielolecia 1898–1960, stwierdził wartość  $3,62 \text{ mm}\cdot\text{min}^{-1}$  jako najwyższe natężenie dla deszczu o czasie trwania w przedziale od 0 do 5 minut. Licznar i in. [2005a], na podstawie analizy zapisów pluwiograficznych także z Wrocławia, z lat późniejszych objętych analizą również w tym opracowaniu, podawali wartość  $3,0 \text{ mm}\cdot\text{min}^{-1}$  jako maksimum dla opadów o czasie trwania 5 minut. Zestawienie deszczów o najwyższych natężeniach z Warszawy, jakie można odnaleźć w książce Błaszczyka i in. [1974], otwiera deszcz o czasie trwania 9 minut i natężeniu  $2,63 \text{ mm}\cdot\text{min}^{-1}$ . W podsumowaniu analizy wykresów na rysunku 6.25 można zatem śmiało stwierdzić, że widoczne na nich szeregi opadowe w rozdzielczości 5 minut nie budzą zastrzeżeń zarówno co do swojej struktury, jak i wartości uzyskanych natężeń deszczu.



Rys. 6.25. Przykładowe wyniki działania kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym (dwa alternatywne scenariusze rozdziału sumy dobowej opadu równej 49,5 mm)

Fig. 6.25. Examples of the microcanonical cascade with beta-normal generator (two alternative scenarios of the 49,5 mm daily precipitation depth disaggregation)

### 6.3.2.3. Ocena jakości syntetycznych szeregów deszczów z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym

Klasycznie ocenę jakości syntetycznych szeregów deszczów rozpoczęto od obliczenia prawdopodobieństw wystąpienia w nich okresów bezdeszczowych  $E(p_0)$ . Syntetyczne szeregi opadowe pochodzące z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym zostały przeanalizowane z użyciem programu EP0. Wyniki tych analiz nie są prezentowane, gdyż zgodnie z przewidywaniami pokrywały się z wynikami przedstawionymi na rysunku 6.17. Jest to naturalnym rezultatem pozostawienia bez zmian w programie MIKROCAN\_BETA\_NORM modułu generującego nieciągłość opadów, który uprzednio sprawdził się bardzo dobrze w programie MIKROCAN\_BETA. Tak więc szeregi syntetyczne uzyskane z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym charakteryzowały się bardzo dobrym, a wręcz nawet idealnym w odniesieniu do szeregów rzeczywistych deszczów odwzorowaniem prawdopodobieństwa wystąpienia okresów bezdeszczowych.

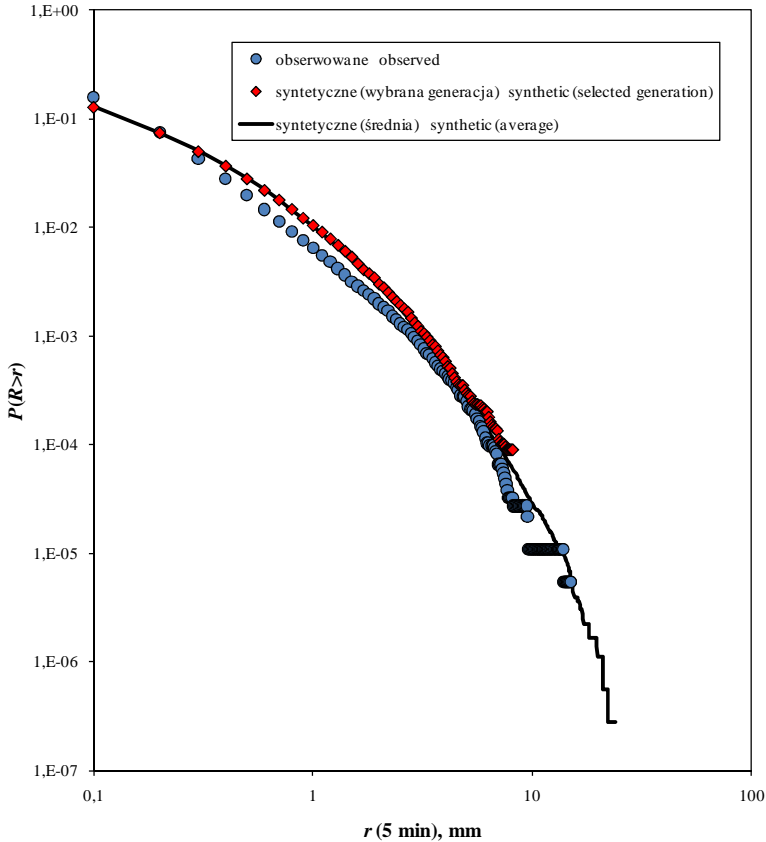
W następnej kolejności syntetyczne szeregi o rozdzielczości czasowej 5 minut, najciekawszej w punktu widzenia ich potencjalnego stosowania w hydrologii miejskiej, zostały przeanalizowane z użyciem programu CDF, w celu dokonania oceny poprawności zawartych w nich rozkładów niezerowych wartości wysokości deszczu. Wyniki tych analiz są przedstawione na rysunku 6.26. Są one zdecydowanie lepsze od wyników uzyskanych w przypadku wszystkich poprzednich kaskad (porównaj rys. 6.7, 6.12 i 6.18). Widać wyraźnie, że przebieg uśrednionej dystrybuanty wszystkich 100 generacji doskonale naśladuje wykres dystrybuanty zbioru rzeczywistych obserwacji. Nie wielkie rozbieżności pojawiają się jedynie w zakresie wartości progowych wysokości warstw deszczu od około 0,5 do 2 mm. W przedziale tym dystrybuanta syntetyczna zdaje się wygładzać nieco wklęsły przebieg dystrybuanty obserwacyjnej. Z praktycznego punktu widzenia stosowania syntetycznych szeregów z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym do modelowania sieci kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej należy zwrócić uwagę na dwa bardzo istotne pozytywne zawarte w uzyskanym obrazie dystrybuanty syntetycznej. Po pierwsze jej przebieg na całej długości układu się nieco ponad dystrybuantą obserwacyjną. To oznacza, że częstości przewyższania kolejnych progów wysokości warstwy deszczu w szeregach syntetycznych z kaskady mikrokanonicznej z rozkładem beta-normalnym są nieco wyższe niż w szeregach obserwacyjnych. Zatem, inżynier sięgający po takie syntetyczne dane zbliża się do parametrów występujących w naturze, pozostaje jednak po bezpiecznej stronie, gdyż w jego syntetycznym zbiorze prawdopodobieństwo przewyższenia poszczególnych progów wysokości warstw deszczu jest nieco wyższe od obserwowanego w naturze. Jedyne odstępstwo od tego pojawia się na poziomie najniższego progu wartości 0,1 mm, kiedy to dystrybuanta syntetyczna przybiera wartość nieco niższą od obserwowanej. Mankament ten nie jest istotny w modelowaniu kanalizacji, gdzie zasadnicze znaczenie odgrywiają interwały opadowe o wysokich i bardzo wysokich natężeniach opadu. Drugą istotną zaletą dystrybuanty syntetycznej jest jej „ogon”. Wygląda on bardzo nieregularny przebieg dystrybuanty obserwacyjnej i co jest szczególnie istotne, jest wobec niej wydłużony. Świadczy to o tym, że w szeregach syntetycznych o rozdzielczości 5 minut pojawiają się wartości wysokości deszczu, które są wyższe od wartości zanotowanych w szeregach obserwacyjnych. Jest to bardzo pozytywnym przejawem zaprogramowanego dzia-

łania modelu kaskadowego, który miał symulować proces multifraktałny. Długi szereg syntetyczny z takiego modelu powinien symulować szereg naturalny o podłożu multifraktałnym, którego cechą jest potrzeba jego wydłużania w celu odślaniania osobliwości coraz wyższego rzędu. Jest więc naturalnym, że w szeregu z hipotetycznego okresu 3800 lat mogą pojawiać się wyższe wartości maksymalne opadów niż w przypadku szeregu jedynie z okresu 38 lat. Potwierdzenie obserwacji tej odnajdujemy także w obrębie samych szeregów syntetycznych. Na rysunku 6.26 dystrybuanta losowo wybranej, pojedynczej generacji, chociaż jest zgodna z przebiegiem dystrybuanty uśrednionej spośród 100 generacji, to jednak kończy się znacznie wcześniej. Nie osiąga ona wysokich progów wysokości warstw deszczu, które to w przypadku szeregu syntetycznego z hipotetycznego okresu 3800 lat są osiąganiane, choć oczywiście częstość ich przewyższenia jest znikoma. Generalnie, podsumowując ocenę poprawności odwzorowania rozkładów niezerowych wartości wysokości opadów w syntetycznych szeregach z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym względem rozkładu w naturze, należy stwierdzić, że osiągnięte wyniki są bardzo dobre (i przewyższają swoją jakością wyniki uzyskane przez Molnara i Burlando (2005)).

Kolejnym etapem oceny jakości syntetycznych szeregów opadowych pozyskanych z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym była analiza maksymalnych rocznych wysokości warstw deszczu. Wartości te w przypadku czasów trwania równych: 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 i 1280 minut zostały wyznaczone z użyciem programu EHT dla szeregów syntetycznych z wszystkich 3800 lat. Pierwszym z elementów oceny tak powstałych zbiorów wartości maksymalnych było obliczenie ich średnich  $E(H_T)$  oraz odchyłeń standardowych  $s(H_T)$  dla kolejnych 100 generacji. Wyniki tej operacji są przedstawione na rysunku 6.27, gdzie są jak zwykle skonfrontowane z odpowiadającymi im parametrami dla szeregów obserwowanych.

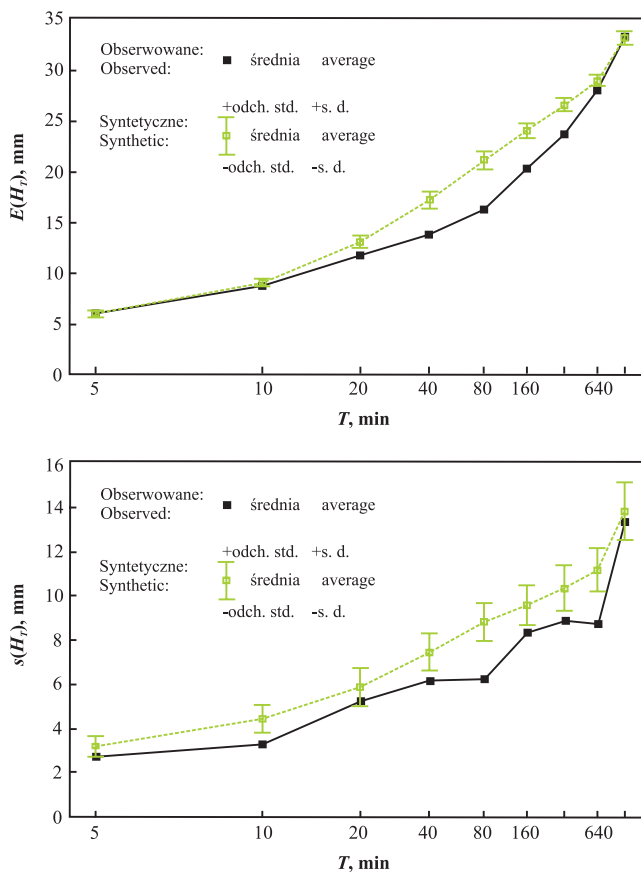
Wykresy na rysunku 6.27, zwłaszcza jeśli odniesie się je do analogicznych wykresów na rysunkach 6.8, 6.13 i 6.19, sugerują znaczną poprawę w zakresie odwzorowywania maksymalnych rocznych wysokości warstw deszczu w szeregach syntetycznych z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym w stosunku do trzech wcześniejszych kaskad losowych. Istotną jakościowo zmianą, jaką widzimy na pierwszym z wykresów na rysunku 6.27, jest bardzo dobre, wręcz idealne dopasowanie wartości  $E(H_T)$  dla szeregów syntetycznych do wartości  $E(H_T)$  stwierdzonych w szeregach obserwacyjnych w przypadku długich czasów trwania 640 i 1280 minut oraz bardzo krótkich czasów trwania 5 i 10 minut. W przypadku pozostałych czasów trwania obserwowane były rozbieżności pomiędzy wartościami  $E(H_T)$  dla szeregów syntetycznych i obserwacyjnych. Należy zauważyć jednak, że jeśli spojrzeć na sąsiedni wykres, to każdorazowo rozbieżności te mieściły się w zakresie wartości pojedynczego odchylenia standardowego  $s(H_T)$  dla tych czasów trwania. Co więcej, wartości  $E(H_T)$  w szeregach syntetycznych w skalach czasowych od 20 do 320 minut każdorazowo przewyższały swoje odpowiedniki w szeregach obserwacyjnych. Sugeruje to, że omawiane rozbieżności nie powinny prowadzić do niebezpiecznego niedoszacowania strumienia wód opadowych przy stosowaniu syntetycznych szeregów opadów z kaskady mikrokanonicznej do modelowania sieci kanalizacyjnych, a wręcz przeciwnie, powinny dawać pewien margines bezpieczeństwa. Potwierdzenie tego poglądu wymaga jednak dokładniejszego przeanalizowania zmienności wartości  $H_T$  dla poszczególnych czasów trwania deszczów.

W tym celu wyznaczono wartości dodatkowych parametrów statystycznych dla zbiorów wartości  $H_T$  dla szeregów syntetycznych i obserwacyjnych, takich jak: mediana, percentyle 25 i 75% oraz wartości minimalne i maksymalne. Wartości te są przedstawione graficznie na rysunku 6.28.



Rys. 6.26. Dystrybuanty wysokości opadu stwierdzone dla szeregów obserwacyjnych z Wrocławia oraz dla szeregów syntetycznych wygenerowanych z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym (linią ciągłą oznaczono dystrybuantę dla szeregów syntetycznych, wyznaczoną jako średnia ze 100 niezależnych generacji)

Fig. 6.26. The cumulative distribution functions calculated for the observed time-series from Wrocław and for the synthetic time-series generated by the microcanonical cascade over 100 independent generations (cumulative distribution function calculated as the average over 100 independent generations was marked by the continuous line)

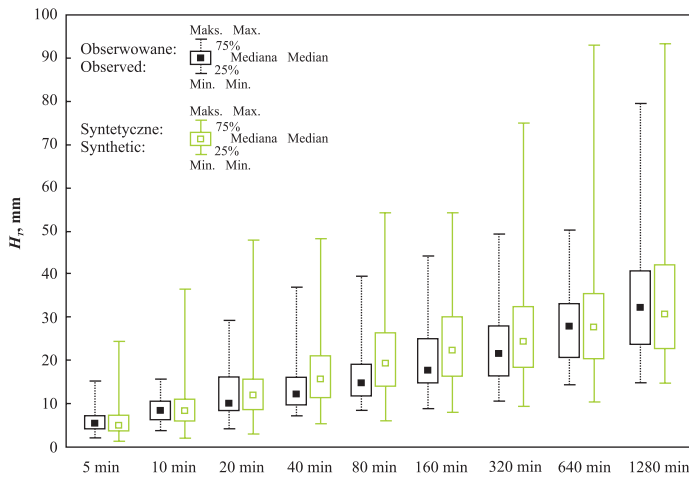


Rys. 6.27. Średnie roczne maksima wysokości opadu  $E(H_T)$  oraz ich odchylenia standardowe  $s(H_T)$  dla szeregów syntetycznych z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym i szeregów obserwowanych (liniami połączono punkty odpowiadające wartościom  $E(H_T)$  i  $s(H_T)$  dla różnych czasów trwania  $T$ , zaznaczono także zakresy odpowiadające  $\pm$  odchyleniu tych wartości w obrębie 100 niezależnych generacji dla szeregów syntetycznych)

Fig. 6.27. The mean annual rainfall maximum  $E(H_T)$  and its standard deviation  $s(H_T)$  values for the synthetic time-series generated by the microcanonical cascade with beta-normal generator and the observed time-series (points of  $E(H_T)$  and  $s(H_T)$  values for different time scales  $T$  were joined by lines, moreover bars of  $\pm 1$  S.D. ranges of these values over 100 independent generations were marked for synthetic time-series)

Rysunek 6.28 świadczy, w pierwszym, rzędzie o podobieństwie rozkładów statystycznych maksymalnych rocznych wysokości opadów dla różnych czasów trwania. Oczywisty jest szerszy zakres przedziałów wyznaczonych wartości  $H_T$  (przedziały maks.-min.) oraz odpowiadających im wartości procentyli (przedziały 75–25%) w sze-

regach syntetycznych względem szeregów obserwowanych. Te pierwsze obejmowały bowiem hipotetycznie czas 100 razy dłuższy od czasu rzeczywistych pomiarów. Obserwacja ta jest naturalną kontynuacją wniosków płynących z analizy „ogonów” dystrybuant na rysunku 6.26. Przykładowo, maksymalna wysokość warstwy 5-minutowej deszczu stwierdzona w ciągu 38 lat obserwacji z Wrocławia wynosiła 15,0 mm, podczas gdy model sugeruje możliwość pojawienia się wartości nawet 24,4 mm, chociaż prawdopodobieństwo jej przewyższenia zgodnie z wykresem na rysunku 6.26 jest skrajnie niskie ( $P(R>r)\approx 3\cdot 10^{-7}$ ). Jest to także praktyczna realizacja podstawowej prawidłowości zachodzącej w obrębie zbiorów multifraktałnych, którą zawarto w rozdziale 4. Zgodnie z tą prawidłowością osobliwości najwyższego rzędu, a więc najbardziej ekstremalne są najrzadszymi, co za tym idzie, występują one generalnie jedynie w niektórych (bardzo licznych) zbiorach obserwacyjnych. Przez co zwiększanie zbioru pomiarowego poszerza przestrzeń prawdopodobieństwa, a co za tym idzie, podwyższa prawdopodobieństwo napotkania na rzadko występujące zdarzenia, a więc na duże osobliwości.



Rys. 6.28. Statystyki rocznych maksimum wysokości opadów  $H_T$ : mediana, percentyle 25 i 75% oraz ich wartości minimalne i maksymalne dla obserwowanych szeregów opadów z Wrocławia oraz szeregów syntetycznych z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym

Fig. 6.28. Statistics of annual rainfall maximum depths  $H_T$ : median, 25 and 75% percentiles and their minimal and maximal values for the observed time-series from Wrocław and for the synthetic time-series generated by the microcanonical cascade with beta-normal generator

Wydłużenie szeregu wartości  $H_T$  z 38 lat do hipotetycznych 3800 lat w sposób naturalny implikuje także możliwość zaobserwowania obniżonej wartości minimalnej. W szeregu obserwacyjnym najniższą stwierdzoną wartością  $H_T$  dla 5 minut było 2,28 mm, podczas gdy w 100 razy liczniejszym szeregu syntetycznym jej odpowiednikiem było 1,36 mm. Generalnie, na podstawie rysunku 6.28 można wnosić, że wyższe wartości  $s(H_T)$  dla szeregów syntetycznych względem obserwowanych na rysunku 6.27 są

rezultatem poszerzenia przedziałów notowanych wartości  $H_T$  ku wyższym wartościom, a nie wynikiem odwrotnej tendencji do zaniżania tychże wartości  $H_T$ . Konkluzja ta dowodzi prawdziwości tezy o występowaniu pewnego, korzystnego z punktu widzenia praktyki inżynierskiej, marginesu bezpieczeństwa w szeregach syntetycznych w stosunku do szeregów obserwowanych, pod względem zawartych w nich wartości maksymalnych wysokości deszczu.

Podobnie jak w przypadku wartości średnich, tak też w przypadku wartości median  $H_T$  dla szeregów syntetycznych na rysunku 6.28 dostrzegalna jest ich zgodność z odpowiadającymi im medianami dla szeregów obserwacyjnych dla czasów trwania 1280 i 640 minut oraz 10 i 5 minut. Dla czasów od 20 dla 320 minut mediany dla szeregów syntetycznych są nieco większe względem swoich odpowiedników w szeregach obserwowanych. Obserwowane jest też podobne przesunięcie ku wyższym wartościom przedziałów oznaczających zakresy wartości od 25 do 75% percentyla w zbiorach syntetycznych względem zbiorów obserwowanych. Pomimo tego przesunięcia, przedziały te nasuwają się na siebie wzajemnie na większości swojej długości dla wszystkich czasów trwania deszczów. W większości zatem wartości maksymalne wysokości deszczu  $H_T$ , w uzyskanych z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym szeregach opadowych, są bliskimi odpowiednikami wartości spotykanych w naturze.

Jak dotąd przeprowadzone trzy niezależne testy jakości syntetycznych szeregów opadowych wygenerowanych z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym potwierdziły ich potencjalną przydatność do rozwiązywania zagadnień takich jak hydrodynamiczne modelowanie sieci kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej, dobór objętości zbiorników retencyjnych wód opadowych czy też projektowanie i symulacja systemów do rozsączania wód opadowych. W wygenerowanych szeregach syntetycznych badane były zatem kolejne takie ich charakterystyki jak: odwzorowanie nieciągłości deszczów, symulacja naturalnej zmienności chwilowych natężeń deszczów dla okresów 5-minutowych oraz występowanie maksymalnych wysokości warstw deszczu dla różnych czasów ich trwania. W wymienionych powyżej zadaniach z zakresu inżynierii środowiska odpowiedź modelowanych systemów jest wynikiem wzajemnej superpozycji tych charakterystyk. Mając to na uwadze, postanowiono przeprowadzić jeszcze jeden dodatkowy test syntetycznych szeregów opadowych z kaskady mikrokanonicznej z rozkładem beta-normalnym, polegający na sprawdzeniu struktury tych szeregów z punktu widzenia występujących w nich deszczów nawalnych, istotnych w modelowaniu kanalizacji.

W tym celu opracowano program komputerowy EPIZODY, który pozwalał na identyfikację w obrębie zarówno posiadanych szeregów obserwacyjnych, jak ich syntetycznych odpowiedników, wszystkich deszczów nawalnych, które winno się uwzględniać w procesie modelowania sieci kanalizacji deszczowych i ogólnospławnych, a w szczególności w obliczeniach częstości nadpiętrzenia tych sieci. Kryteria identyfikacji takich deszczów zostały zaczerpnięte z Komentarza do ATV – A118 [Schmitt 2000]. Jako graniczną minimalną wartość sumarycznej wysokości takich opadów przyjęto 10 mm, a minimalny odstęp czasu między pojedynczymi opadami za równy przynajmniej 4 godziny. Przy rozgraniczaniu opadów w stosunku do okresów bezdeszczowych przyjęto ponadto minimalną wartość wysokości warstwy opadu równą 0,1 mm w ciągu 5 minut jako graniczną, aby przedział ten uchodził, ze względu na czas trwania i wyso-



kość opadu, za część zdarzenia. Analogiczne kryteria były stosowane już w praktyce przez Licznara [2008a] i Licznara i in. [2008a] w celu identyfikacji deszczów nawalnych do obliczeń kontrolnych częstości nadpiętrzenia wybranej sieci kanalizacji deszczowej we Wrocławiu. Należy jednak pamiętać, że kryteria te nie mają charakteru uniwersalnego i nie są dopasowane do modelowania każdej sieci kanalizacyjnej. Choćby minimalny odstęp czasowy między pojedynczymi zdarzeniami powinien wynikać z czasu opróżniania się systemu kanalizacyjnego i w bardzo dużych sieciach może przekraczać 4 godziny.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń w szeregach obserwowanych wydzielono łącznie 250 deszczów nawalnych, a w szeregach syntetycznych 25295 deszczów. W praktyce zatem częstości wystąpienia deszczów nawalnych w szeregach obserwowanych i syntetycznych były prawie identyczne i wynosiły odpowiednio średnio 6,6 i 6,7 deszczów na rok. Dla wszystkich wydzielanych deszczów nawalnych program EPIZODY obliczał dodatkowo ich ogólne charakterystyki takie, jak: całkowita wysokość warstwy  $Hd$ , czas trwania  $Td$  i średnie natężenie  $Id$ . Podstawowe statystyki zbiorów tych obliczonych wartości dla szeregów obserwowanych i syntetycznych są zawarte w tabeli 6.3, a histogramy ich wartości – przedstawione na rysunku 6.29.

Tabela 6.3

Tabela 6.3

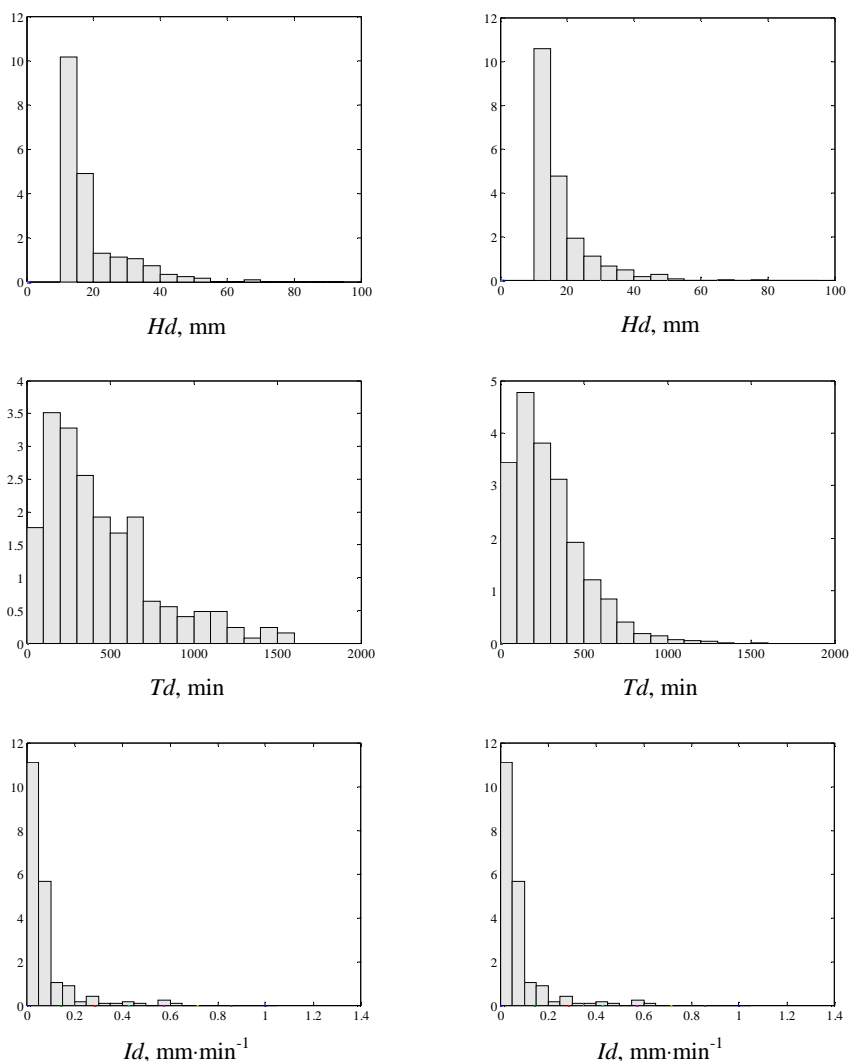
Parametry statystyczne wartości: całkowitych wysokości opadu  $Hd$ , czasów trwania  $Td$  i średnich natężeń  $Id$  dla zbiorów deszczów nawalnych wydzielonych w szeregach obserwowanych i syntetycznych

Statistical parameters of: total rainfall depths  $Hd$ , duration times  $Td$  and average intensity  $Id$  values for design storms sets identified at observed and synthetic series

Parametry Parameters	Szeregi obserwowane Observed series			Szeregi syntetyczne Synthetic series		
	$Hd$ , mm	$Td$ , min,	$Id$ , mm·min, <sup>-1</sup>	$Hd$ , mm	$Td$ , min,	$Id$ , mm·min, <sup>-1</sup>
Średnia Average	18,2	439	0,077	17,3	288	0,102
Mediana Median	14,8	343	0,045	14,6	245	0,067
Odchylenie standardowe Standard deviation	9,6	341	0,096	8,0	204	0,107
Minimum Minimum	10,0	25	0,013	10,0	10	0,010
Maksimum Maximum	69,3	1970	0,636	92,4	1560	1,188
Percentyl 25% 25% percentile	12,0	185	0,030	12,0	135	0,040
Percentyl 75% 75% percentile	19,9	615	0,080	19,5	395	0,123

Szeregi obserwowane – Observed series

Szeregi syntetyczne – Synthetic series



Rys. 6.29. Histogramy wartości całkowitej wysokości opadu  $Hd$ , czasów trwania  $Td$  i średnich natężeń  $Id$  dla zbiorów deszczów nawalnych wydzielonych w szeregach obserwowanych i syntetycznych. Na osiach rzędnych wszystkich histogramów zaznaczono wartości gęstości prawdopodobieństwa

Fig. 6.29. Histograms of: total rainfall depth  $Hd$ , duration times  $Td$  and average intensity  $Id$  values for design storms sets identified at observed and synthetic series. Vertical axes of all histograms show probability density values

Rozkłady wartości całkowitych wysokości warstw deszczów nawalnych wydzielonych z szeregów obserwowanych i syntetycznych opadów mają bardzo zbliżone rozkłady, co potwierdzają zgodnie ich statystyki zawarte w tabeli 6.3 i histogramy na rysunku 6.29. Wśród statystyk  $H_d$  w tabeli 6.3 widoczna rozbieżność pojawia się jedynie w przypadku obserwowanych wartości maksymalnych. Wśród deszczów nawalnych wydzielonych z szeregów obserwowanych, maksymalna całkowita wysokość opadu wynosiła 69,3 mm, podczas gdy wśród nawalnych deszczów syntetycznych stwierdzono nawet deszcz o całkowitej wysokości 92,4 mm. Można to tłumaczyć znacznie dłuższym czasem zawartym w szeregach syntetycznych (w hipotetycznym ciągu 3800 lat może więc wystąpić deszcz nawalny o wyższej sumie całkowitej niż w ciągu jedynie 38 lat).

Porównanie statystyk czasów trwania deszczów nawalnych (tab. 6.3) wskazuje na ogólną tendencję krótszego czasu ich trwania w przypadku szeregów syntetycznych. Świadczą o tym niższe o około 30–35% wartości średniej i mediany  $T_d$  dla szeregów syntetycznych. Obserwacje te uwidacznia zwłaszcza maksymalny czas trwania deszczu dla szeregów obserwowanych równy aż 1970 minut. Czas ten stwierdzono dla wyjątkowo ekstremalnego deszczu o wymienionej już wysokości 69,3 mm, który miał miejsce w 1997 r. Warto przypomnieć, że po przejściu tak ekstremalnych opadów nad obszarem południowej Polski doszło do katastrofalnej powodzi na Odrze i zalania znacznej części Wrocławia. Poza tym szczególnym deszczem następny opad pod względem długości czasu trwania w obrębie szeregów obserwowanych miał już znacznie krótszy czas trwania równy 1535 minut, a więc mniejszy od maksimum stwierdzonego dla szeregów syntetycznych. Analizując czasy trwania deszczów nawalnych, warto także zauważyć, że pomimo wymienionych różnic histogramy ich wartości na rysunku 6.29 wykazują w zasadzie duże podobieństwo co do swojego kształtu. Widać wyraźnie, że wśród deszczów nawalnych naturalnych, jak i syntetycznych dominują opady o czasach trwania od 100 do 300 minut.

Pełne wyjaśnienie zwykle dłuższego czasu trwania obserwowanych deszczów nawalnych względem syntetycznych deszczów nawalnych jest trudne. Analizując przebiegi tych pierwszych, można zauważyć częstą tendencję do ich wydłużania przez długie okresy w zasadzie bezdeszczowe, po których występują nieliczne interwały czasowe z wysokościami deszczu nieznacznie przekraczającymi graniczną wysokość warstwy 0,1 mm. Zjawisko to może być częściowo wyjaśnione przez nieco wyższe wartości prawdopodobieństwa przewyższenia pierwszego proggu 0,1 mm dla szeregów obserwowanych względem syntetycznych, na co wskazują dystrybuanty na rysunku 6.26. Jednocześnie z punktu widzenia modelowania sieci kanalizacji deszczowych i ogólnospławnych wspomniane okresy o niskich, bliskich zeru przyrostach wysokości opadu nie mają zwykle istotnego znaczenia w przebiegu symulacji hydrodynamicznych.

Bezpośrednim skutkiem zwykle krótszego czasu trwania syntetycznych deszczów nawalnych względem obserwowanych deszczów nawalnych są większe wartości średnich natężeń tych pierwszych. Wskazują na to, tym razem wyższe o około 30–35% wartości średniej i mediany  $I_d$  dla szeregów syntetycznych, jak i podobnie wyższe wartości ich percentyli. Te zwykle wyższe wartości średnich natężeń deszczów mogą mieć korzystny wpływ na bezpieczeństwo prowadzonych analiz sieci kanalizacyjnych z wykorzystaniem danych syntetycznych. Jednocześnie porównując histogramy wartości  $I_d$  dla deszczów nawalnych obserwowanych i syntetycznych, można zauważyć ogólne

podobieństwo ich kształtów. Warto też zauważyć w danych w tabeli 6.3 naturalnie szerszy zakres spotykanych natężeń  $I_d$  w znacznie liczniejszej grupie nawalnych deszczów syntetycznych (od 0,010 do 1,188 mm·min<sup>-1</sup>) w stosunku do zakresu natężeń  $I_d$  wśród zaledwie 250 deszczów obserwowanych (od 0,013 do 0,636 mm·min<sup>-1</sup>).

Podsumowując przeprowadzoną analizę struktury syntetycznych szeregów opadowych z punktu widzenia występujących w nich deszczów nawalnych, należy stwierdzić jej ogólnie pozytywny wynik. Można powiedzieć, że w syntetycznych szeregach opadowych wygenerowanych z kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym częstość występowania deszczów nawalnych odpowiada szeregom obserwacyjnym, a ogólne charakterystyki tych istotnych z punktu widzenia modelowania sieci kanalizacyjnych deszczów są zbliżone do ich odpowiedników dla deszczów naturalnych. Kwin-tesencją tych ostatnich obserwacji może być też w jakiejś mierze ogólne spojrzenie na kształt histogramów na rysunku 6.29. Histogramy w prawej kolumnie, opracowane dla szeregów syntetycznych, wyglądają jakby stanowiły wygładzoną i wyidealizowaną wersję rozkładów dla szeregów obserwacyjnych. Histogramy wartości  $H_d$  i  $I_d$  mają kształt zbliżony do rozkładu wykładniczego, a histogram dla wartości  $T_d$  – do rozkładu log-normalnego.

## 7. PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE

Przeprowadzone w pracy analizy cech multifrakalnych pluwiograficznych szeregów czasowych z Obserwatorium Agro- i Hydrometeorologii Uniwersytetu Przyrodniczego Wrocław-Swojec pozwoliły na opracowanie oryginalnego warsztatu przetwarzania i opracowania danych opadowych na potrzeby inżynierskie. Opracowane narzędzia numeryczne tworzą 5 bibliotek programów komputerowych, w skład których wchodzi 18 aplikacji (tab. 7.1) pozwalających na: wstępne przygotowanie danych pomiarowych, badanie cech fraktalnych i multifrakalnych w obrębie szeregów opadowych, estymację parametrów multiplikatywnych kaskad losowych, generowanie z wykorzystaniem kaskad syntetycznych szeregów opadowych oraz na koniec ocenę jakości tychże syntetycznych szeregów w odniesieniu do szeregów obserwowanych.

Wykazanie multifraktalnego charakteru szeregów czasowych natężeń deszczów z użyciem kilku niezależnych metod analitycznych umożliwiło opracowanie modeli kaskadowych do opisu stochastycznego procesu opadowego. W Polsce dotąd nie podejmowano prób zastosowania analizy fraktalnej i multifraktalnej do analizy szeregów opadowych, a zwłaszcza w skalach czasowych odpowiadającym potrzebom współczesnej inżynierii środowiska. Uzyskane wyniki mają wartość poznawczą i aplikacyjną. Przeprowadzone studia literaturowe wykazały, że badania nad multifraktalnym charakterem szeregów opadowych o wysokiej rozdzielczości czasowej są przedmiotem nielicznych doniesień naukowych. Barię przy prowadzeniu badań w tym zakresie jest brak dostępu do wieloletnich szeregów opadowych z co najmniej 5-minutowym krokiem czasowym próbkowania. Badania przeprowadzono na unikalnym zbiorze danych z 38-letnich obserwacji pluwiograficznych. Konwersji zapisów pluwiograficznych do formatu cyfrowego dokonano z wykorzystaniem własnej metodyki pozwalającej wyeliminować subiektywne odczyty przez operatora digitizera. Pomimo zautomatyzowania konwersji danych pluwiograficznych przenoszenie 38-letnich zapisów pluwiograficznych z formy papierowej do formy cyfrowej z odczytem 5-minutowych natężeń opadów deszczu zajęło aż 5 lat prac kameralnych. Dzięki temu nakładowi pracy powstał unikalny nie tylko w skali kraju zbiór danych opadowych.

Tabela 7.1

Biblioteki oprogramowania i wchodzące w ich skład autorskie programy komputerowe do kompleksowego przetwarzania i modelowania danych opadowych na potrzeby inżynierskie

Lp.	Biblioteka	Nazwa programu	Cel i zakres stosowania programu
1	Wstępnego opracowania danych	OPAD	Konwersja zapisów pluwiograficznych do formatu cyfrowego, przeskalowanie odczytów ze środowiska graficznego MicroStation
2		5_MINUT	Utworzenie regularnych 5-minutowych szeregów wysokości warstw i natężeń deszczów z przekonwertowanych do formatu cyfrowego pluwiogramów
3	Badań fraktalnych i multifraktalnych	SPECTRUM	Analiza widmowa szeregów czasowych natężeń deszczów (szczegóły patrz rozdział 5.1)
4		BOX	Implementacja metody funkcyjnego zliczania pudełek (szczegóły patrz rozdział 5.2)
5		PDMS	Implementacja metody rozkładu prawdopodobieństwa/wielokrotnego skalowania (szczegóły patrz rozdział 5.3)
6		TRACE	Implementacja metody momentu śladu (szczegóły patrz rozdział 5.4)
7		DTM	Implementacja metody podwójnego momentu śladu, estymacja uniwersalnych parametrów multifraktalnych (szczegóły patrz rozdział 5.5)
8	Estymacji parametrów kaskad	MOMENTY	Estymacja parametrów modelu kanonicznego (szczegóły patrz rozdział 6.2.1.1)
9		LSF	Estymacja parametrów modelu kanonicznego z wymuszeniem wielkoskalowym (szczegóły patrz rozdział 6.2.2.1)
10		BDC	Wyznaczanie współczynników rozpadu (szczegóły patrz rozdział 6.3.1.1)
11	Generowania syntetycznych szeregów opadowych	CANNONICAL	Generowanie syntetycznych szeregów opadowych z modelu kaskady kanonicznej (szczegóły patrz rozdział 6.2.1.2)
12		CANLSF	Generowanie syntetycznych szeregów opadowych z modelu kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym (szczegóły patrz rozdział 6.2.2.2)
13		MIKROCAN_BETA	Generowanie syntetycznych szeregów opadowych z modelu mikrokanonicznego z generatorem beta (szczegóły patrz rozdział 6.3.1.2)
14		MIKROCAN_BETA_NORM	Generowanie syntetycznych szeregów opadowych z modelu mikrokanonicznego z generatorem beta-normalnym (szczegóły patrz rozdział 6.3.2.2)
15	Oceny jakości syntetycznych szeregów opadowych	EP0	Obliczanie prawdopodobieństwa wystąpienia przedziału czasu bez opadu w szeregach opadowych obserwowanych i syntetycznych (szczegóły patrz rozdział 6.2.1.3)
16		CDF	Obliczanie dystrybuant 5-minutowych wysokości warstw opadów dla szeregów opadowych obserwowanych i syntetycznych (szczegóły patrz rozdział 6.2.1.3)
17		EHT	Wyznaczanie rocznych maksymalnych wysokości warstw deszczu $H_T$ dla różnych czasów trwania $T$ w szeregach opadowych obserwowanych i syntetycznych (szczegóły patrz rozdział 6.2.1.3)
18		EPIZODY	Identyfikacja w szeregach obserwacyjnych i syntetycznych deszczów nawalnych, które winno się uwzględnić w procesie modelowania sieci kanalizacji deszczowych i ogólnospławnych (szczegóły patrz rozdział 6.3.2.3)

Table 7.1

Software libraries and contained by them author's computer programs for complex processing and modelling of the precipitation data for engineering needs

No.	Library	Program name	Aim and the use area
1	Preliminary data processing	OPAD	Pluviograph records conversion into the digital format, rescaling of readings from MicroStation graphical environment
2		5_MINUT	Regular 5-minute time-series of rainfall depths and intensities creation from pluviograph records converted into the digital format
3	Fractal and multifractal studies	SPECTRUM	Spectral analysis of rainfall intensity time-series (for details see chapter 5.1)
4		BOX	Functional box-counting method implementation (for details see chapter 5.2)
5		PDMS	Probability distribution/multiple scaling method implementation (for details see chapter 5.3)
6		TRACE	Trace moment method implementation (for details see chapter 5.4)
7		DTM	Double trace moment method implementation, universal multifractal parameters estimation (for details see chapter 5.5)
8	Cascades parameters estimation	MOMENTY	Canonical model parameters estimation (for details see chapter 6.2.1.1)
9		LSF	Canonical model with large scale forcing parameters estimation (for details see chapter 6.2.2.1)
10		BDC	Breakdown coefficients calculation (for details see chapter 6.3.1.1)
11	Synthetic rainfall time-series generation	CANNONICAL	Synthetic rainfall time-series generation from canonical cascade model (for details see chapter 6.2.1.2)
12		CANLSF	Synthetic rainfall time-series generation from canonical cascade model with large scale forcing (for details see chapter 6.2.2.2)
13		MIKRO-CAN_BETA	Synthetic rainfall time-series generation from microcanonical cascade model with beta generator (for details see chapter 6.3.1.2)
14		MIKRO-CAN_BETA_NORM	Synthetic rainfall time-series generation from microcanonical cascade model with beta-normal generator (for details see chapter 6.3.2.2)
15	Synthetic rainfall time-series quality assessment	EPO	Probability of zero rainfall time intervals occurrence at observed and synthetic time-series calculation (for details see chapter 6.2.1.3)
16		CDF	Calculation of a 5-minute rainfall depths distributions for observed and synthetic time-series (for details see chapter 6.2.1.3)
17		EHT	Annual maximal rainfall depths $H_T$ estimation for different time durations $T$ at observed and synthetic time-series (for details see chapter 6.2.1.3)
18		EPIZODY	Design storms, that should be considered by the process of stormwater and combined sewage systems modelling, identification at observed and synthetic time-series (for details see chapter 6.3.2.3)

Przeprowadzone badania pozwoliły nie tylko na identyfikację fraktalnego charakteru sekwencji występowania kolejnych deszczów w czasie oraz multifraktalnego charakteru zmienności ich natężeń chwilowych, lecz także na określenie zakresu występującego w nich skalowania i ocenę jakości danych opadowych. Zaobserwowano istotne ograniczenia pluwiografów w zakresie rejestracji opadów o bardzo niskich i bardzo wysokich natężeniach oraz niekorzystny mechanizm wprowadzania charakterystycznych, zależnych od natężenia opadów, sztucznych skal do zbioru danych, w procesie odczytu pluwiogramów.

W pracy przedstawiono podstawy teorii fraktali i multifraktali oraz modeli kaskadowych, jak również metody analityczne stosowane w badaniach fraktalnych i multifraktalnych: analizę widmową, metodę funkcyjnego zliczania pudełek, metodę rozkładu prawdopodobieństwa/wielokrotnego skalowania, metodę momentu śladu oraz metodę podwójnego momentu śladu. Podano podstawy teoretyczne tych metod, zakres i cel ich stosowania, a także praktyczne przykłady ich użycia z wykorzystaniem własnych numerycznych danych opadowych. Celem tej części pracy była chęć popularyzacji w kraju fraktali i multifraktali, nie tylko jako narzędzi abstrakcyjnych analiz geometrycznych, ale jako współczesnych narzędzi analizy szeregów czasowych. Publikacja stanowi początek kształtowania się polskiego nazewnictwa w wielu zakresach tej młodej gałęzi wiedzy.

Opracowany warsztat przetwarzania danych opadowych z wykorzystaniem fraktali i multifraktali do analizy szeregów opadowych pozwolił na wykazanie, czy możliwym jest zastosowanie losowych kaskad multiplikatywnych do modelowania szeregów opadowych, w tym do generowania syntetycznych szeregów opadowych o wysokiej rozdzielczości czasowej, w zadowalający sposób odwzorowujących opady naturalne. Przetestowano możliwości stosowania do rozdziału dobowych sum opadów na szeregi o krótszym kroku czasowym, dochodzącym do przedziału 5-minutowego, różnego typu modeli multiplikatywnych kaskad losowych. Przeprowadzono badania nad modelem kanonicznym z estymacją parametrów kaskady z wykorzystaniem funkcji MKP, modelem kaskady kanonicznej z wymuszeniem wielkoskalowym, modelem kaskady mikrokanonicznej z klasycznym generatorem beta i z nowatorskim rozkładem beta-normalnym. W piśmiennictwie można znaleźć nieliczne publikacje dotyczące użycia modeli kaskadowych do modelowania szeregów opadowych, a doniesienia naukowe o analizach ze skalami czasowymi minutowego rzędu należą do rzadkości.

Zainteresowanie zastosowaniem modeli kaskad losowych, jako narzędzia dla generowania syntetycznych danych opadowych na potrzeby hydrologii miejskiej jest obserwowane w ostatnim dziesięcioleciu. Kompleksowe badania porównawcze różnych modeli przeprowadzone na zbiorze danych z Wrocławia są wyrazem dostosowania poziomu krajowego warsztatu modelowania i symulacji deszczów do najnowocześniejszych aktualnie trendów europejskich i światowych.

W ramach badań, opisywanych w rozdziale 6, przeprowadzono wielokrotne eksperymenty numeryczne, polegające każdorazowo na 100-krotnym generowaniu syntetycznych szeregów opadowych w sekwencji kroków czasowych: 640, 320, 160, 80, 40, 20, 10 i 5 minut dla 38-letniego okresu obserwacji z użyciem czterech różnych modeli kaskad losowych. Na podstawie kompleksowej oceny statystycznej tak otrzymanych bogatych zbiorów syntetycznych (przykładowo otrzymane każdorazowo szeregi



o najwyższej rozdzielczości czasowej 5 minut składały się każdorazowo z 176435200 wartości) i przyrównaniu ich wyników do analogicznych statystyk dla obserwowanych szeregów w naturze wykazano wyższość modeli typu mikrokanonicznego względem modeli kanonicznych.

Wskazanie kaskad mikrokanonicznych jako modeli zdecydowanie lepiej sprawdzających się w zakresie generowania syntetycznych szeregów czasowych deszczów względem modeli typu kanonicznego znajduje logiczne uzasadnienie. W kaskadach mikrokanonicznych zakłada się zachowanie całkowitej dobowej sumy opadu w trakcie jej rozdziału na poszczególnych poziomach kaskad. W rezultacie, w kolejno uzyskiwanych szeregach czasowych, o coraz mniejszym kroku czasowym, sumaryczna wysokość opadu się nie zmienia. Jest to całkowicie naturalnym zjawiskiem, spójnym z rzeczywistymi obserwacjami deszczów, w czasie których prowadzenia, standardowo, przez dziesięciolecia, zapisy pluwiografów w cyklu dobowym były kontrolowane przez porównanie z sumami opadów z pobliskich deszczomierzy Hellmana. W przeciwieństwie do tego kaskady kanoniczne ze swoim znacznie łagodniejszym warunkiem  $E[W] = 1$ , zakładają możliwość występowania fluktuacji pierwotnej „masy opadu” w trakcie jej rozdziału na kolejnych poziomach kaskad. Godzenie się na występowanie tego typu fluktuacji, jak zostało dowiedzione przez Gupta i Waymire'a [1993] oraz Over'a [1995], jest uzasadnionym w przypadku modelowania w czasie i przestrzeni wyników pomiarów radarowych pól opadowych, gdzie nie dysponuje się bezpośrednimi pomiarami natężenia bądź wysokości opadów, lecz jedynie ich estymacjami na podstawie pierwotnie pomierzonej odbiciowości radarowej ( $Z$ ). Kaskady kanoniczne są zdolne, dzięki wspomnianym dozwolonym fluktuacjom do generowania syntetycznych pól o charakterze twardych multifraktali, to znaczy pól, w obrębie których spotykane są dzikie osobliwości. Wykazano, że deszcze obserwowane we Wrocławiu są miękkimi multifraktalami, co uzasadnia wyższość modeli mikrokanonicznych względem modeli kanonicznych.

Przeprowadzone badania nad implementacją różnego typu kaskad losowych dla generowania syntetycznych szeregów opadowych w warunkach Wrocławia nie miały tylko odtwórczego charakteru. Pogłębiona analiza współczynników rozpadu dla całego szeregu skal czasowych pozwoliła na zaproponowanie całkowicie nowatorskiej struktury generatora, służącego odwzorowaniu zmienności natężenia deszczów w obrębie zdarzeń opadowych. W pierwszej kolejności wykazano potrzebę generowania dla skal czasu mniejszych bądź równych 32 (czasy rozpadu: 320/160 minut) pewnego procentu wag rozdziałów równych dokładnie 0,5. Procent ten opisywany parametrem  $p_{05}$  wykazuje silną tendencję wzrostu wartości wraz ze spadkiem skali czasu. Potrzeba wprowadzenia mechanizmu generowania wag rozdziałów równych dokładnie 0,5 w kaskadzie, jak dotąd, umykała całkowicie uwadze badaczy, chociaż znajduje ona wytłumaczenie w jakości danych pluwiograficznych, a konkretnie we wspomnianych istotnych ograniczeniach co do precyzji rejestracji szybkozmiennych natężeń chwilowych deszczów za pomocą pluwiografów. Odstania to, po raz kolejny, zdiagnozowane na etapie badań multifraktalnych niedoskonałości przyrządu, który przez lata był standardowo wykorzystywany w celu rejestracji natężeń opadów.

Chcąc modelować sieci kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej, jesteśmy nadal skazani bazować na wieloletnich szeregach rejestracji pluwiograficznych. Trzeba mieć

przy tym świadomość, że przy wykorzystywaniu takich szeregów o rozdzielczości czasowej równej 5 minut znaczący procent występujących w nich wysokości warstw deszczów jest zniekształcony w wyniku wyraźnego scałkowania w czasie silnie zmiennego multifraktalnego procesu opadowego przez pluwiograf. W przyszłości, gdy dostępne będą dłuższe szeregi opadowe z doskonalszych przyrządów pomiarowych, bliższe odwzorowaniu rzeczywistej zmienności opadów naturalnych, struktura kaskady w tym zakresie będzie zapewne wymagała dalszego udoskonalenia. Być może na podstawie lepszych baz danych opadowych, dostosowanych na potrzeby hydrologii miejskiej, uda się w przyszłości wyeliminować całkowicie w generatorze kaskady mikrokanonicznej konieczność występowania „sztucznego” modułu wag rozdziałów równych dokładnie 0,5. Niestety, na podstawie posiadanych aktualnie ułomnych szeregów opadowych, z klasycznych deszczomierzy trudno jest przeprowadzić takie korekty, a tym bardziej zweryfikować ich trafność.

Zastosowanie w kaskadzie mikrokanonicznej łącznego rozkładu beta-normalnego jest oryginalnym osiągnięciem autora pracy. W dotychczasowych generatorach niezerowe wagi rozdziałów w kaskadach mikrokanonicznych przyjmowano zgodnie z jednostajnym rozkładem dla całego zakresu skal czasu [Olsson 1998] bądź zakładano, że rozkłady te zmieniają się wraz ze zmianą skal czasowych kaskady, niemniej do ich opisu konsekwentnie używano tylko jednego typu teoretycznego rozkładu prawdopodobieństwa (zwykle rozkładu beta), zmieniając tylko jego parametry na poszczególnych poziomach kaskady [Menabde i Sivapalan, 2000; Molnar i Bulando, 2005]. W pracy wykazano występowanie wyraźnej ewolucji rozkładów wag rozdziałów od rozkładów typu beta dla dużych skal czasowych (większych od 32), poprzez rozkłady łączone o zbliżonej proporcji pomiędzy rozkładami: beta i normalnym, dla średniej wielkości skal czasowych (w zakresie od 2 do 4), a skończywszy na rozkładzie łączonym o zdecydowanej już przewadze rozkładu normalnego w najmniejszej skali czasowej. Znajduje to uzasadnienie, jeśli dokładnie przeanalizuje się strukturę posiadanych szeregów opadowych. Deszcze łącznie w analizowanych szeregach opadowych trwają jedynie niespełna 10% czasu w ciągu roku, ale jak wykazano na etapie analiz wstępnych, podstawa ich wystąpienia ma charakter fraktalny. Co za tym idzie, deszcze te wypełniają przestrzeń szeregu, chociaż w sposób daleki od jakiegokolwiek regularności w rozumieniu klasycznej geometrii. Poruszając się po takim szeregu i obliczając wagi rozdziałów dla dużych skal czasowych, odpowiadającym czasom dłuższym od czasu trwania pojedynczego deszczu, nagminną sytuacją musi być uzyskiwanie par wag rozdziału  $w(j)/w(j+1)$ , spośród których jedna jest równa bądź też bliska 1, a druga zgodnie z zasadą kaskady mikrokanonicznej równa bądź też bliska 0. Rozkłady wartości wag rozdziału w dużych skalach czasowych muszą zatem przybierać charakterystyczny kształt litery  $U$ , jak na 3 ostatnich histogramach przedstawionych na rysunku 6.21, o przebiegu zbliżonym do teoretycznego rozkładu beta o parametrze  $a^* < 1$ . Mechanizm ten ulega znacznym zmianom wraz ze spadkiem skali czasu i wejściem w strefę czasów mniejszych bądź równych czasowi trwania pojedynczych deszczów. Wówczas częstą relacją pomiędzy obliczanymi parami wag rozdziału  $w(j)/w(j+1)$  powinna być ich przybliżona równość:  $w(j) \approx w(j+1) \approx 0,5$ . Tendencja ta jest wyraźnie widoczna w wynikach, nawet po odrzuceniu wszystkich, dyskutowanych już przypadków, kiedy to  $w(j) = w(j+1) = 0,500$ , jako wynurzający się rozkład normalny z pierwotnego kształtu litery  $U$ . Można z dużą

dożą prawdopodobieństwa przypuszczać, że gdyby dysponować szeregami o lepszej rozdzielczości i na ich bazie móc przeanalizować rozkłady wag rozdziałów dla jeszcze mniejszych skal czasu, bliskich już skali homogeniczności, to rozkład łączny zakończyłby swoją ewolucję, redukując się do „czystego” rozkładu normalnego. Byłoby to spójne z generalną koncepcją kaskad mikrokanonicznych ograniczonych, sformułowaną przez Menabde’go i Sivapalana [2000], która zakłada, że multiplikatywne wagi zależą w sposób jawny od poziomu kaskady i dążą do jedności (rozumianej jako  $w(j) = w(j+1) = 0,500$ ) wraz z postępem kaskady. Analizując histogramy na rysunku 6.21, zauważono, że wyraźna ewolucja rozkładu łącznego z „czystego” rozkładu beta do rozkładu normalnego rozpoczyna się od czasu około 80 minut. Czas ten jest zgodny z charakterystycznym czasem granicznym, obserwowanym we wszystkich analizach multifrakalnych przeprowadzonych w rozdziale 5. Wskazuje to na potrzebę prowadzenia w przyszłości podobnych badań, z użyciem wypracowanego w niniejszej pracy warsztatu analitycznego, dla szeregów opadowych pochodzących z innych krajowych stacji meteorologicznych, w celu potwierdzenia występowania odkrytej zależności oraz lepszego zrozumienia jej natury. Niestety, autor nie posiada aktualnie dostępu do wieloletnich szeregów opadowych z innych stacji krajowych, co uniemożliwia przeprowadzenie wspomnianych badań weryfikacyjnych.

Zaproponowana po raz pierwszy w niniejszej pracy kaskada mikrokanoniczna z generatorem beta-normalnym winna być klasyfikowana jako kaskada ograniczona. Przemawia za tym silne uzależnienie większości parametrów jej generatorów (nieciągłości i zmienności opadów) od wartości skal czasowych (rys. 6.14, 6.22, 6.23 i 6.24), a także jawna zależność multiplikatywnych wag kaskady od poziomu kaskady. Również ten aspekt znajduje logiczne wytłumaczenie w rezultatach wstępnych badań multifrakalnych. Kaskady ograniczone zostały opracowane z myślą o modelowaniu pól geofizycznych, dla których widmo energii skaluje się według zależności 4.8 z wykładnikiem spektralnym  $\beta > 1$ . Jeśli powróci się do rysunków 5.2 i 5.3, przedstawiających przykładowe wykresy widm mocy dla 5-minutowych szeregów rejestracji deszczów z 1964 r. i 1997 r., to można w ich przebiegu wyraźnie wydzielić początkowe obszary o wykładniku spektralnym  $\beta > 1$ , zakończone wystąpieniem charakterystycznych przerw widma dla wartości częstotliwości odpowiadających czasom około 85–110 minut, po których to dopiero wartość  $\beta$  spada poniżej 1. Warto zauważyć, że w zakresie niskich skal czasowych kaskady, odpowiadającym czasom poniżej wspomnianych 85–110 minut, parametry generatora kaskady ulegają szczególnie widocznym zmianom. Właśnie dla skal czasowych mniejszych od 16 (80/160 min) bardzo szybko przyrasta udział współczynników rozpadu równych dokładnie 0,5 ( $p_{05}$ ), a udział rozkładu normalnego staje się coraz bardziej widoczny w rozkładzie łącznym beta-normalnym (szybki spadek parametru  $p_{BN}$ ). Tłumaczy to i uzasadnia potrzebę użycia kaskady typu ograniczonego do modelowania szeregów opadowych z Wrocławia.

W całokształcie interpretacji wyników stosowania modeli kaskad losowych przydatnymi okazały się wyniki kompleksowych badań multifrakalnych szeregów obserwacyjnych. Można na tej podstawie wnosić, że wstępne badania multifrakalne powinny być nierozdzielalnym elementem konstruowania generatorów syntetycznych szeregów opadowych. Rezultaty badań multifrakalnych mogą nie tylko służyć odpowiedzi na pytanie, czy lokalne szeregi opadowe mają charakter multifrakalny, a więc czy istnieje

możliwość wykorzystania kaskad losowych w ich modelowaniu, czy też ocenie jakości samych zbiorów danych obserwacyjnych, lecz także stanowić wskazówkę na drodze wyboru właściwego typu modelu kaskady i służyć lepszemu zrozumieniu struktury stosowanego w niej generatora wag rozdziałów.

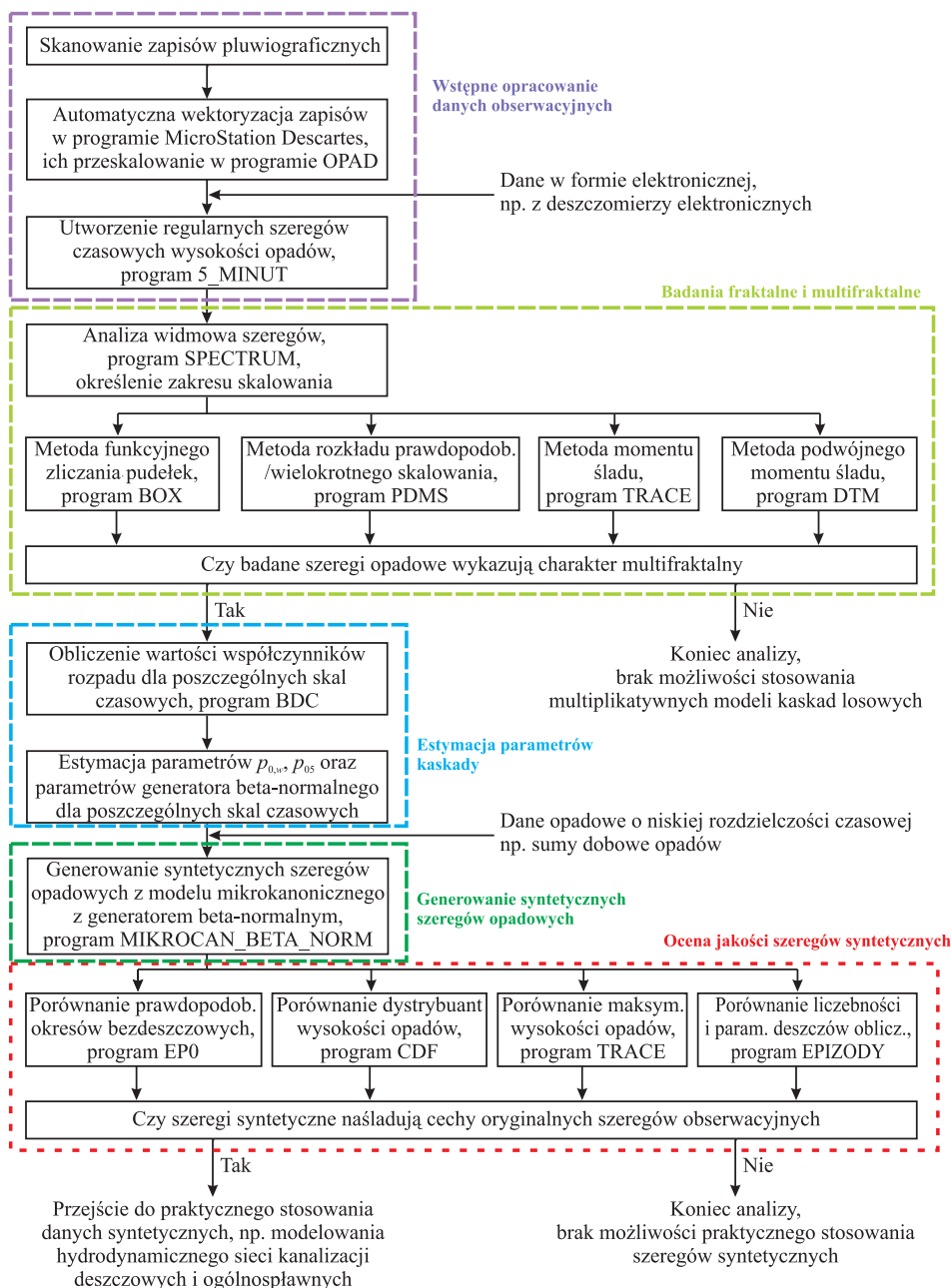
Wykazano, że zaproponowana nowatorska kaskada mikrokanoniczna z generatorem beta-normalnym zapewnia otrzymywanie syntetycznych szeregów opadowych najlepiej naśladujących szeregi obserwowane. W tym celu przeprowadzono, stosowane standardowo również przez innych badaczy w odniesieniu do modeli fenomenologicznych, porównawcze analizy statystyczne szeregów syntetycznych i obserwowanych. W ich ramach rozpatrywano: prawdopodobieństwo wystąpienia okresów bezdeszczowych, rozkład prawdopodobieństwa nierozrywanych warstw deszczu i kształtowanie się wartości maksymalnych dla różnych skal czasowych. W pracy zaproponowano dodatkowe rozszerzenie metodyki testowania jakości syntetycznych szeregów opadowych o element weryfikacji ich struktury, z punktu widzenia występowania w nich deszczów nawalnych, istotnych dla modelowania sieci kanalizacyjnych. Ten dodatkowy element warsztatu testowego zastosowany w odniesieniu do szeregów syntetycznych z kaskady mikrokanonicznej z rozkładem beta-normalnym potwierdził wysoki potencjał zastosowania ich w modelowaniu hydrodynamicznym działania sieci kanalizacyjnych, a w szczególności w zagadnieniach takich jak obliczenia częstości napiętrzania w kanałach czy też wymiarowanie kanalizacyjnych zbiorników retencyjnych. Do takich wniosków skłania zgodność częstości występowania deszczów nawalnych w szeregach syntetycznych i obserwacyjnych oraz zbliżone rozkłady wartości ich ogólnych charakterystyk (czasów trwania i całkowitych wysokości).

Mając na uwadze metodyczny charakter niniejszej pracy, jako podsumowanie całej sekwencji wyników z kolejnych etapów badań, zaproponowano sformułowanie kompleksowej metodyki generowania syntetycznych szeregów opadowych na potrzeby modelowania sieci kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej. Metodyka ta jest przedstawiona schematycznie na diagramie na rysunku 7.1. Z oczywistych względów opiera się ona na zastosowaniu kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym. Jej stosowanie wymaga na wstępie dostępu do zasobu danych opadowych o wysokiej rozdzielczości w postaci zapisów pluwiograficznych bądź wyników pomiarów z deszczomierzy elektronicznych. Dane te są konieczne do weryfikacji multifraktalnego charakteru lokalnych szeregów opadowych, określenia zakresu skalowania (weryfikacja występowania skalowania, co najmniej w zakresie skal odpowiadającym czasom od 24 godz. do 5 min) oraz do obliczenia współczynników rozpadu i związanego z tym oszacowania wszystkich niezbędnych parametrów generatorów kaskady. W celu wdrożenia metodyki zbiór wejściowych danych opadowych o wysokiej rozdzielczości nie musi być ciągłym wieloletnim szeregiem obserwacyjnym. Może to być jedynie kilkuletni szereg obserwacyjny, co więcej, występowanie w nim luk rejestracyjnych nie przekreśla możliwości jego użycia dla estymacji parametrów kaskady mikrokanonicznej. W praktyce dane takie mogą zostać nawet zgromadzone w ramach krótkoterminowej kampanii pomiarowej zrealizowanej specjalnie na obszarze zlewni kanalizacyjnej przewidywanej do modelowania (zwykle kampania taka jest i tak niezbędną w celach kalibracji modelu) bądź też pozyskane z pobliskiej stacji meteorologicznej. Potrzeba ich posiadania może zostać całkowicie wyeliminowana przez przyjęcie *a priori* gotowego zestawu wartości para-

metrów kaskady, np. wyznaczonych uprzednio dla pobliskiej stacji meteorologicznej. Drugim niezbędnym na wejściu opracowanej metodyki źródłem danych opadowych są dane opadowe o niskiej rozdzielczości czasowej, takie jak sumy dobowe opadów. Dane te mogą być pozyskiwane z gęstej sieci posterunków opadowych bezpłatnie (np. odczytane z archiwalnych roczników opadowych IMGW) lub też zakupione za niewielką opłatą. Zbiór tych danych powinien obejmować znacznie dłuższy czas, dostosowany do późniejszego wykorzystania pochodnych syntetycznych szeregów opadowych do modelowania hydrodynamicznego. W pewnych specyficznych przypadkach na wejściu modelu kaskadowego w miejsce dobowych sum opadów mogą być prezentowane zastępczo wysokości warstw deszczu o zadanym czasie trwania i odpowiadającym poziomowi kaskady (np. 1280, 640, 320, 160 min itd.) i określonym prawdopodobieństwie przewyższenia, uprzednio wyznaczone np. z adekwatnych dla badanej lokalizacji zależności typu DDF lub IDF. Wówczas rezultatem generowania nie są ciągłe szeregi opadowe, ale jedynie syntetyczne hietogramy opadów o zadanym czasie trwania i prawdopodobnej wydajności. Końcowym etapem opracowanej metodyki generowania syntetycznych szeregów opadowych jest ocena ich jakości. Po pozytywnym jej przejściu dane mogą być używane do modelowania sieci kanalizacji deszczowych oraz ogólnospławnych lub w innych zagadnieniach z zakresu hydrologii.

Przedstawiona na rysunku 7.1 kompleksowa metodyka generowania syntetycznych szeregów opadowych może w przyszłości być dołączona jako dodatkowy moduł do współczesnych komputerowych modeli hydrodynamicznych. Już dzisiaj w niektórych pakietach komputerowych do modelowania hydrodynamicznego sieci kanalizacyjnych dostępne są proste aplikacje służące do wstępnego przygotowania opadowych danych obserwacyjnych, w tym wydzielenia z ciągłego szeregu opadowego sekwencji deszczów nawalnych. Wzbogacenie tych aplikacji o metodę generowania syntetycznych szeregów opadowych według opracowanego algorytmu postępowania (rys. 7.1) ułatwiłoby pracę inżynierom oraz otworzyłyby nowe możliwości probabilistycznego podejścia do modelowania sieci kanalizacji deszczowych i ogólnospławnych. Pozwoliłoby to zwłaszcza na wyeliminowanie ograniczenia wynikającego z opierania się tylko na zarejestrowanych w naturze wieloletnich szeregach opadowych, które są jedynie jednostkowymi scenariuszami możliwych realizacji lokalnego procesu opadowego. Analizę przyszłego funkcjonowania modelowanej sieci można by opierać na syntetycznym szeregu opadowym o dowolnej długości, opisującym alternatywne scenariusze szeregów stochastycznych opadów deszczu. Opracowana metodyka daje możliwości wygenerowania takich scenariuszy.

Oprócz bezpośredniego wykorzystania opracowanego modelu kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym do tworzenia syntetycznych szeregów opadowych (przydatnych w modelowaniu kanalizacji deszczowych/ogólnospławnych) model ten może znaleźć zastosowanie do uzupełniania brakujących danych w szeregach obserwacyjnych. Potencjalnym obszarem stosowania modelu kaskady mikrokanonicznej jest możliwość generowania szeregów opadowych uwzględniających hipotetyczne zmiany klimatyczne, wynikające z globalnego ocieplenia, które pozwoliłyby na ocenę funkcjonowania systemów odwodnienia w nowych warunkach. Można to osiągnąć przez modyfikację parametrów kaskady i przez zmianę wejściowych wartości sum dobowych opadów, zgodnie ze scenariuszem zmian klimatycznych, który zakłada na przykład zmniejszenie wysokości opadów przy jednoczesnym wzroście ich natężeń.



Rys. 7.1. Schemat metodyki generowania syntetycznych szeregów opadowych na potrzeby modelowania sieci kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej

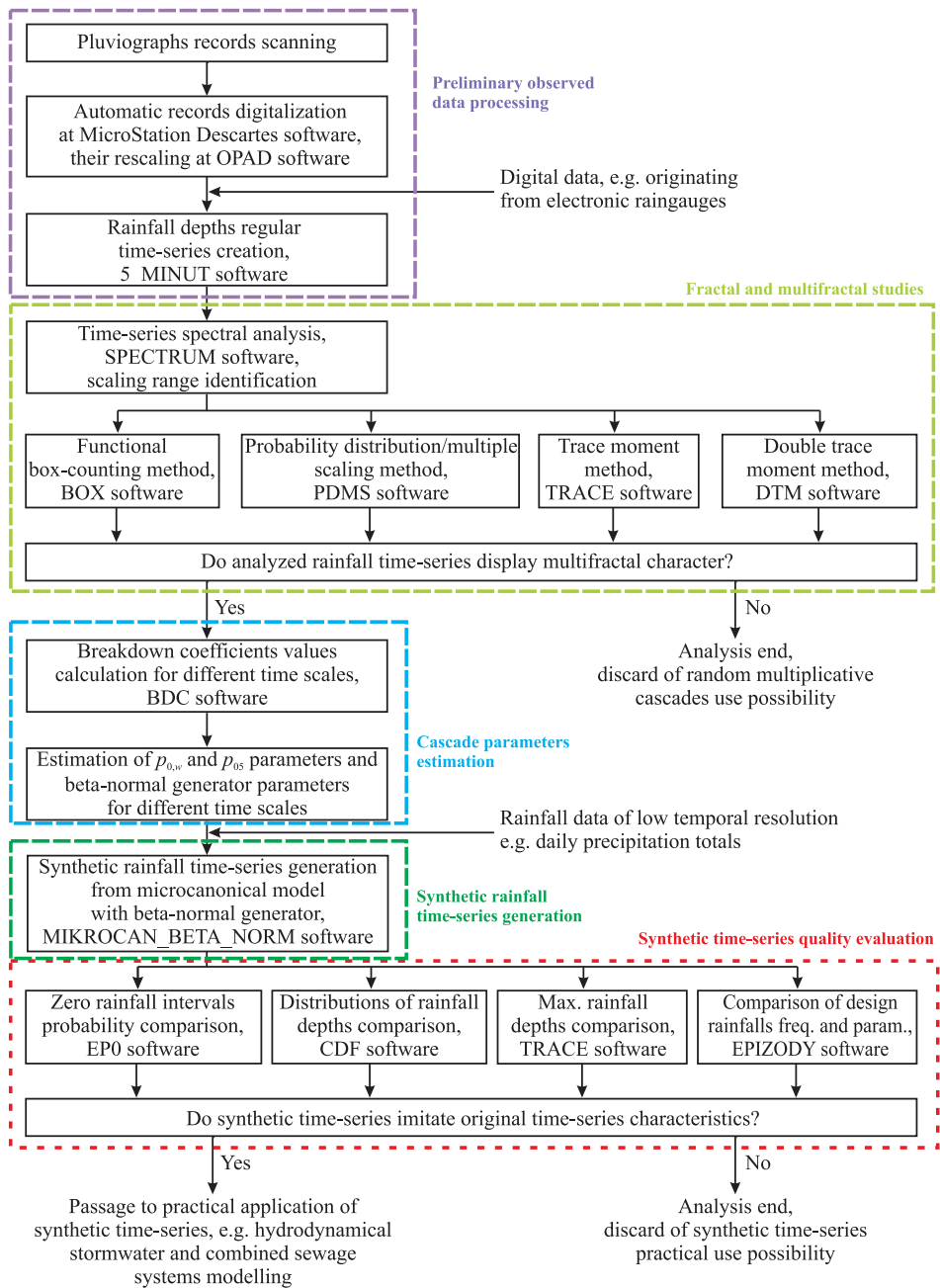


Fig. 7.1. Schematic diagram of synthetic rainfall time-series generation methodology for needs of stormwater and combined sewage systems modelling

Z uwagi na pionierski charakter pracy nie ma odpowiedzi na wszystkie pytania dotyczące praktycznego wykorzystania modeli kaskad losowych do generowania syntetycznych szeregów opadowych na potrzeby modelowania sieci kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej. Wręcz przeciwnie, praca rodzi całą gamę pytań, które dzisiaj muszą pozostawać z różnych powodów bez odpowiedzi. Wymagają bowiem dalszych analiz z wykorzystaniem danych opadowych pochodzących z innych stacji, nie tylko na terenie Polski. Dane takie, niestety, nie były dostępne autorowi na dotychczasowym etapie badań. Do najważniejszych kierunków przyszłych prac należy zaliczyć potrzebę weryfikacji multifraktalnego charakteru szeregów opadowych w innych regionach Polski, strefach klimatycznych w Europie bądź nawet na innych kontynentach. Naturalnym rozszerzeniem tych badań winna być próba regionalizacji estymowanych parametrów kaskad, co mogłoby zaowocować powstaniem nie tylko ogólnokrajowych wytycznych w zakresie przyjmowania obciążenia deszczem na potrzeby projektowania i modelowania systemów kanalizacji deszczowych lub ogólnospławnych. Osobnym obszarem przyszłych badań pozostaje doskonalenie modelu kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym. W obrębie tych badań kluczowym jest weryfikacja dwóch tez, pierwszej – dotyczącej eliminacji potrzeby stosowania generatora wag rozdziału równych dokładnie 0,5 w przypadku lepszej jakości danych obserwacyjnych oraz drugiej – zakładającej zakończenie ewolucji rozkładu łącznego beta-normalnego na samym rozkładzie normalnym, w przypadku danych obserwacyjnych o lepszej rozdzielczości czasowej, zbliżonej do skali homogeniczności procesu. Niestety, z uwagi na brak wiarygodnych, wieloletnich baz danych opadowych pochodzących z nowej generacji przyrządów pomiarowych na terenie kraju wkroczenie na ten ciekawy obszar badań będzie możliwe dopiero za kilka lub nawet kilkanaście lat. Z tej racji konieczne jest tworzenie i systematyczne wzbogacanie krajowych baz danych opadowych na potrzeby hydrologii miejskiej, które powinny być zasilane strumieniem danych z nowej generacji przyrządów pomiarowych. Naturalnym rozszerzeniem multifraktalnego modelowania szeregów opadowych powinno być podjęcie próby zastosowania modeli multifraktalnych w celu opisu pól opadowych w warunkach krajowych. Pozwoliłoby to w przyszłości na uwzględnienie wpływu przestrzennego rozkładu opadu nad zlewniami kanalizacyjnymi przy ich modelowaniu. Realizacja tak ambitnego zadania wymaga znacznie bogatszych zbiorów danych z zadowalająco gęstych sieci deszczomierzy.

Przeprowadzone badania i studia literaturowe pozwalają na sformułowanie następujących wniosków końcowych:

1. Analizowane szeregi opadowe z Obserwatorium Agro- i Hydrometeorologii Uniwersytetu Przyrodniczego Wrocław-Swojec są multifraktalem w jednowymiarowej skali czasu. Analiza fraktalna jest niezbędnym warsztatem do opracowania modeli opadowych szeregów czasowych.
2. Czasowa struktura analizowanych szeregów pluwiograficznych ma niezmienniczy skalowo charakter w szerokim zakresie skal czasowych, odpowiadających co najmniej czasom od 5 minut do 24 godzin. Pozwala to na generowanie syntetycznych szeregów opadowych o rozdzielczości 5 minut, dostosowanych do wymogów modelowania hydrodynamicznego sieci kanalizacyjnych, w oparciu o znajomość jedynie dobowych sum opadowych. Z uwagi na stwierdzone występowanie załamania w widmie mocy badanych szeregów opadowych dla częstotliwości odpowia-



- jących czasom w zakresie około 80–110 minut praktyczna realizacja rozdziału dobowej sumy opadu na 5-minutowe przedziały czasu nie może być oparta na prostym mechanizmie skalowania ku dołowi.
3. W analizowanym zbiorze danych pluwiograficznych obserwowane było statystyczne zachowanie, określane mianem multifraktalnej transformacji pierwszego rzędu. Transformacja ta jest charakterystyczna dla multifraktalnych procesów obserwowanych w skalach większych od wewnętrznej skali homogeniczności procesu. Dowodzi to istotnych ograniczeń jakości danych opadowych, rejestrowanych z użyciem pluwiografów. Jak wykazały również inne analizy multifraktalne, pluwiografy stosowane standardowo przez dziesięciolecia na stacjach meteorologicznych, nie pozwalają na właściwą rejestrację bardzo wysokich i bardzo niskich wartości natężeń deszczów, a ponadto wykazują silną tendencję do uśredniania i wygładzania szybkozmiennych wartości natężeń chwilowych deszczów. Rozdzielczość czasowa zapisów pluwiograficznych nie odpowiada zatem aktualnym potrzebom modelowania hydrodynamicznego, gdzie właściwe jest operowanie szeregami o rozdzielczości czasowej rzędu od 1 do 5 minut. Konieczne jest więc prowadzenie pomiarów opadów na terenie kraju na sieci stacji wyposażonych w przyrządy nowej generacji, dostosowane na potrzeby nie tylko meteorologii, lecz także inżynierii środowiska.
  4. Istnieje możliwość stosowania uniwersalnego modelu multifraktalnego, opartego na trzech parametrach:  $H$ ,  $C_1$  i  $\alpha$  [Schertzer i Lovejoy 1987, 1989] do prostego, ale zarazem maksymalnie pełnego i wiarygodnego opisu lokalnych statystyk szeregów opadowych z Wrocławia. Określona wartość stopnia multifraktalności  $\alpha$  dla szeregów opadowych z Wrocławia mniejsza od 1 wskazuje, że są one multifraktalami warunkowo twardymi, podczas gdy bliska 0 wartość parametru  $H$  dowodzi zachowawczego charakteru szeregu obserwowanych natężeń deszczów.
  5. Opracowana losowa kaskada mikrokanoniczna z generatorem beta-normalnym umożliwia modelowanie czasowej zmienności i nieciągłości deszczów dla skal czasowych od 24 godzin do 5 minut. Generowane, z wykorzystaniem tego modelu kaskady w oparciu jedynie o znajomość dobowych sum opadów, syntetyczne szeregi opadowe cechują się parametrami statystycznymi blisko naśladującymi parametry statystyczne ustalone dla rzeczywistych szeregów obserwacyjnych.
  6. Histogramy wartości współczynników rozpadu dla szeregów opadowych z Wrocławia dla skal czasowych mniejszych bądź równych 32 (czasy rozpadu mniejsze bądź równe 320/160 minut) są silnie zakłócone przez występowanie współczynników rozpadu równych dokładnie 0,5. Poziom tego zakłócenia narasta wyraźnie wraz ze spadkiem skali czasowej i jest rezultatem silnych ograniczeń rozdzielczości pomiarów prowadzonych z wykorzystaniem pluwiografu. Chcąc w sposób wierny naśladować szeregi obserwacyjne pochodzące z pluwiografów, konieczne jest w generatorze zmienności kaskady wprowadzenie dodatkowego modułu odpowiedzialnego za generowanie współczynników rozpadu równych dokładnie 0,5.
  7. Histogramy wartości współczynników rozpadu dla szeregów opadowych z Wrocławia, po odfiltrowaniu z nich współczynników rozpadu równych dokładnie 0,5, nie mogą być w sposób zadowalający opisywane przez pojedynczy teoretyczny rozkład prawdopodobieństwa dla wszystkich skal czasowych. Histogramy winny

być charakteryzowane łączonym rozkładem beta-normalnym. Przy przechodzeniu od wysokich do niskich skal czasu obserwowana jest systematyczna ewolucja rozkładów od rozkładów beta (symetrycznych o parametrze  $a^* < 1$ ) ku rozkładom łączonym beta-normalnym z coraz większym udziałem rozkładu normalnego.

8. Zastosowanie kompleksowej metodyki generowania syntetycznych szeregów opadowych w modelowaniu systemów kanalizacji deszczowej czy ogólnospławnej eliminuje powszechny obecnie na terenie kraju problem braku dostępu do wieloletnich rejestracji deszczów w wysokiej rozdzielczości czasowej. Jednocześnie, korzystanie z syntetycznych szeregów opadowych otwiera drogę do probabilistycznego podejścia w realizacji tak istotnych zadań w inżynierii środowiska jak: ocena częstości nadpiętrzenia w kanałach, wymiarowanie kanalizacyjnych zbiorników retencyjnych czy wymiarowanie systemów rozsączania wód opadowych, itd. Korzystając z danych syntetycznych, można analizować odpowiedzi modelowanego systemu na dowolną liczbę potencjalnych scenariuszy przebiegu lokalnego procesu opadowego, które mogą wystąpić w naturze. W przyszłości podejście takie powinno zastąpić obecną praktykę modelowania systemów kanalizacyjnych, w ramach której analizuje się tylko odpowiedź systemu na zarejestrowaną, archiwalną serię opadową, a więc pojedynczą realizację procesu opadowego.
9. Konieczne są dalsze badania, które winny skupić się na rozpoznaniu multifraktalnego charakteru szeregów opadowych oraz na weryfikacji stosowalności zaproponowanej metodyki generowania syntetycznych szeregów opadowych w przypadku innych krajowych stacji meteorologicznych. Uzupełnieniem tych badań powinny być prace ukierunkowane na doskonalenie zaproponowanej struktury kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym, w tym przede wszystkim nad możliwością eliminacji potrzeby generowania współczynników rozpadu równych dokładnie 0,5 oraz weryfikujące tezę o docelowym zakończeniu ewolucji rozkładu beta-normalnego na rozkładzie normalnym. Do realizacji tych badań konieczny jest dostęp do nowych zbiorów danych, pochodzących z lepszej klasy przyrządów pomiarowych pozwalających na ciągły pomiar opadów z krokiem próbkowania mniejszym niż 5 minut.

## 8. PIŚMIENNICTWO

- Arbeitsblatt DWA-A 117, 2006: Bemessung von Regenrückhalteräumen. Deutsche Vereinigung für Wasserwirtschaft, Abwasser und Abfall e. V., Hennef.
- Bartels H., Malitz G., Asmus S., Albrecht F. M., Dietzer B., Günther T., Ertel H., 1997: Starkniederschlagshöhen in Deutschland. KOSTRA. Selbstverlag des Deutschen Wetterdienstes, Offenbach am Main.
- Bärring L., 1992: Comments on "Breakpoint representation of rainfall." *J. Appl. Meteor.* 31, 1520–1524.
- Benzi R., Paladin G., Parisi G., Vulpiani A., 1984: On the multifractal nature of fully developed turbulence. *J. Phys. A*, 17, 3521–3531.
- Billingsley P., 1986: Probability and measure, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York.
- Błaszczyk W., Roman M., Stamatello H., 1974: Kanalizacja. Arkady, Warszawa.
- Bogdanowicz E., Stachý J., 1998: Maksymalne opady deszczu w Polsce. Charakterystyki projektowe. *Mat. Bad. Seria: Hydrol. i Oceanol. IMGW*, Warszawa.
- de Lima M.I.P., 1998: Multifractals and the temporal structure of rainfall. Doctoral dissertation, Wageningen Agricultural University, Wageningen.
- de Lima M.I.P. Grasman J., 1999: Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal. *J. Hydrol.*, 220, 1–11.
- Desaulniers-Soucy N., Lovejoy S., Schertzer D., 2001: The HYDROP experiment: an empirical method for the determination of the continuum limit in rain. *Atmospheric Res.*, 59-60, 163–197.
- Devroye L., 1986: Non-uniform random variate generation. Springer-Verlag, New York.
- DIN EN 752, 2008: Entwässerungssysteme außerhalb von Gebäuden; Deutsche Fassung EN 752:2008.
- Eicher C., Krejci V., 1996: A new rainfall data system for urban hydrology in Switzerland. *Atmospheric Res.*, 42(1–4), 177–198.
- Falconer K.J., 1990: Fractal geometry: mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, Chichester, England.
- Feder J., 1988: Fractals. Plenum Press, New York.
- Frisch U., Parisi G., 1985: Fully developed turbulence and intermittency, [in:] Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics (Eds. Ghil M., Benzi R., G. Parisi), 84–88.

- Frisch U., Sulem P.L., Nelkin M., 1978: A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *J. Fluid Mech.*, 87, 719–736.
- Gao J., Cao Y., Tung W., Hu J., 2007: Multiscale analysis of complex time series: Integration of chaos and random fractal theory, and beyond. John Wiley & Sons, New Jersey.
- Gabriel P., Lovejoy S., Schertzer D., Austin G. L., 1988: Multifractal analysis of resolution dependence in satellite imagery. *Geophys. Res. Lett.* 15(12), 1373–1376.
- Grassberger, P., 1983: Generalized dimensions of strange attractors, *Phys. Lett. A*, 97(6), 227–230.
- Gupta V.K., Waymire E.C., 1993: A statistical analysis of mesoscale rainfall as a random cascade, *J. Appl. Meteorol.*, 32(2), 251–267.
- Güntner A., Olsson J., Calver A., Gannon B., 2001: Cascade-based disaggregation of continuous rainfall time series: the influence of climate. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 5(2), 145–164.
- Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L. P., Procaccia I., Shraiman B.I., 1986: Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets. *Phys. Rev. A* 33, 1141–1151.
- Heaney J.P., Huber W.C., Nix S.J., 1976: Stormwater management model. Level I, Preliminary Screening Procedures. EPA 600/2-76-275. Cincinnati, OH: US EPA.
- Hentschel H. G. E., Procaccia I., 1983: The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica. D*, 8(3), 435–444.
- Hentschel H.G.E., Procaccia I., 1984: Relative diffusion in turbulent media: The fractal dimension of clouds. *Phys. Rev. A*, 29, 1461–1470.
- Hołda I., Wojtylak M., 2008: Ocena wybranych charakterystyk opadów atmosferycznych na potrzeby projektowania kanalizacji deszczowych. *Mat. Symp. Hydroprezentacje XI'2008*, 161–171.
- Jothityangkoon C., Sivapalan M., Viney N.R., 2000: Tests of a space-time model of rainfall in southwestern Australia based on nonhomogeneous random cascades. *Wat. Resour. Res.*, 36, 267–284.
- Kahane J.P., Peyriere J., 1976: Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot. *Adv. Math.*, 22, 131–145.
- Kolmogorov A.N., 1962: A refinement of previous hypothesis concerning the local structure of turbulence in viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13, 82–85.
- Kotowski A., 2006: O potrzebie dostosowania zasad wymiarowania kanalizacji w Polsce do wymagań normy PN-EN 752 i zaleceń Europejskiego Komitetu Normalizacji. *GWITS*, 6, 20–26.
- Lavallée D., 1991: Multifractal techniques: Analysis and simulations of turbulent fields, Ph.D. Thesis, University McGill, Montreal, Canada.
- Lavallée D., Lovejoy S., Schertzer D., Ladoy P., 1993: Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. In: *Fractals in geography* (Eds. L. De Cola, N. Lam), Prentice Hall, 158–192.
- Lavallée D., Schertzer D., Lovejoy S., 1991: On the determination of the co-dimension function, [in:] *Non-linear variability in geophysics: scaling and fractals* (Eds. D. Schertzer, S. Lovejoy), Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 99–110.

- Licznar P., 2001: Automatyzacja przetwarzania danych pluwiograficznych w procesie wyznaczania wskaźnika erozyjności deszczy. *Folia Univ. Agric. Stetin.* 217 *Agricultura* (87), 125–128.
- Licznar P., 2003: Modelowanie erozji wodnej gleb. *Zesz. Nauk. AR we Wrocławiu, Monografie XXXII*, nr 456.
- Licznar P., 2005: Propozycja metody przetwarzania danych pluwiograficznych na potrzeby projektowania i eksploatacji miejskich systemów odwodnienia. *Woda Środ. Obsz. Wiej.*, 5, z. specj. (14), 197–207.
- Licznar P., 2007a: Aktualne kierunki rozwoju oprogramowania dla wspomagania projektowania systemów odwodnienia. *Monografia Komitetu Inżynierii Środowiska PAN*, 46, 85–95.
- Licznar P., 2007b: Disdrometr laserowy – nowe narzędzie pomiarowe opadów atmosferycznych dla potrzeb inżynierii środowiska. *GWITS*, 4, 10–12.
- Licznar P., 2008a: Obliczenia częstotliwości nadpiętrzania sieci kanalizacji deszczowej. *GWITS*, 7-8, 16–21.
- Licznar P., 2008b: Praktyczna realizacja modelu hydrodynamicznego sieci kanalizacyjnej w pakiecie SewerPac. *GWITS*, 3, 11–19.
- Licznar P., 2008c: Współczesne techniki gromadzenia danych opadowych dla modeli hydrodynamicznych sieci kanalizacyjnych. *Instal, Wydanie Specjalne* (279), 64–68.
- Licznar P., 2008d: Sprawdzenie poprawności pracy posterunków meteorologicznych dla zadania 04B. *Pomoc techniczna Fazy III: Przygotowanie rozbudowy i modernizacji OŚ Czajka wraz z kolektorami. Usługi konsultingowe w zakresie modernizacji sieci ogólnospławnej kanalizacji warszawskiej, realizowanego w ramach projektu „Zaopatrzenie w wodę i oczyszczanie ścieków w Warszawie – Faza I i II”*. Maszynopis, Warszawa, wrzesień 2008 r.
- Licznar P., 2008e: Nowa formuła związku pomiędzy warstwą opadu a jego energią kinetyczną. *Zesz. Probl. Post. Nauk Rol.*, 526, 99–104.
- Licznar P., Alberski Z., Bodziony P., 2008a: O konieczności przeprowadzania obliczeń kontrolnych częstotliwości nadpiętrzania sieci kanalizacji deszczowej. *Mat. I Ogólnopol. Konf. Nauk.-Techn. INFRAEKO 2008, Rzeszów-Paczółtowiec*, 26–27 czerwca 2008, 113–120.
- Licznar P., Łomotowski J., 2005a: Analiza średnich natężeń deszczów miarodajnych we Wrocławiu. *Ochrona Środowiska*, 1, 29–34.
- Licznar P., Łomotowski J., 2005b: Analiza chwilowych natężeń deszczów miarodajnych we Wrocławiu. *Ochrona Środowiska*, 2, 25–28.
- Licznar P., Łomotowski J., 2007: Rainfall kinetic energy measurements with impactometer implementation. *WORKS & STUDIES – PRACE I STUDIA of the Institute of Environmental Engineering of the Polish Academy of Science*, 2007.
- Licznar P., Łomotowski J., Błofski S., Ciach G., 2008b: Microprocessor field impactometer calibration: Do we measure drops' momentum or their kinetic energy? *J. Atm. Ocean. Tech.*, 25(5), 742–753.
- Licznar P., Łomotowski J., Burszta-Adamiak E., Kuczewski K., 2007: Pierwszy krok w budowie bazy danych o opadach dla inżynierów sanitarnych. *Forum Eksploatatora*, 3/4, 38–40.

- Licznar P., Łomotowski J., Rojek M., 2005a: Pomiary i przetwarzanie danych opadowych dla potrzeb projektowania i eksploatacji systemów odwodnieniowych. *Futura PZLiTS Poznań*.
- Licznar P., Łomotowski J., Rojek M., 2005b: Sposoby pomiaru natężenia deszczu na potrzeby projektowania i eksploatacji systemów odwodnienia terenów zurbanizowanych. *Woda Środ. Obsz. Wiej.*, 5, z. specj. (14), 209–219.
- Licznar P., Nearing M. A., 2003: Artificial neural networks of soil erosion and runoff prediction at the plot scale. *Catena*, 51, 89–114.
- Lindley W. H., 1911: Entwässerung der Stadt Lodz. Erläuterungsbericht zum Projekt von W. H. Lindley. Druckerei August Osterrieth, Frankfurt am Main.
- Lovejoy S., 1982: The area-perimeter relations for rain and cloud areas. *Science*, 216, 185–187.
- Lovejoy S., Mandelbrot B., 1985: Fractal properties of rain and a fractal model. *Tellus*, 37A, 209–232.
- Lovejoy S., Schertzer D., 1985: Generalised scale invariance and fractal models of rain. *Wat. Resour. Res.*, 21, 1233–1250.
- Lovejoy, S., Schertzer D., 1990a: Multifractals, universality classes and satellite and radar measurements of clouds and rain. *J. Geophys. Res.*, 95, 2021–2034.
- Lovejoy S., Schertzer D., 1990b: Our multifractal atmosphere: a unique laboratory for nonlinear dynamics. *Physics in Canada*, 46 (4), 62–71.
- Lovejoy S., Schertzer D., 1991: Multifractal analysis techniques and rain and cloud fields from  $10^{-3}$  to  $10^6$ m, [in:] *Non-linear variability in geophysics: scaling and fractals* (Eds. D. Schertzer, S. Lovejoy), Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 111–144.
- Lovejoy S., Schertzer D., 1995: Multifractals and rain, [in:] *New uncertainty concepts in hydrology and hydrological modelling* (Ed. A. W. Kundzewicz), Cambridge press, 62–103.
- Lovejoy S., Schertzer D., 2006: Multifractals, cloud radiances and rain, *J. Hydrol.*, 322, 59–88.
- Lovejoy S., Schertzer D., Tsonis A.A., 1987: Functional box-counting and multiple elliptical dimensions in rain. *Science*, 235, 1036–1038.
- Lukacs E. 1970: *Characteristic Functions*. (2nd Edition), Griffin, London.
- Łomotowski J., Licznar P., Paluch M., 2008: Wybrane zagadnienia z zastosowania systemów eksperckich na oczyszczalniach ścieków. *Instal*, Wydanie Specjalne (279), 60–63.
- Malinowski S.P., 2007: Turbulent mixing of a cloud with the environment: two-phase evaporating flow. Numerical simulations, laboratory experiments and field measurements. *J. Theor. and Appl. Mech.*, 45, 587–601.
- Malinowski S.P., Leclerc M.Y., 1994: Fractal properties of temperature fluctuations in the convective surface layer. *Bound-Lay. Meteorol.*, 71, 169–187.
- Malinowski S.P., Zawadzki I., 1993: On the surface of clouds. *J. Atmos. Sci.*, 50, 5–13.
- Malinowski S.P., Andrejczuk M., Grabowski W., Korczyk P., Kowalewski T. A., Smolarkiewicz P. K., 2008: Laboratory and modeling studies of cloud-clear air interfacial mixing: anisotropy of small-scale turbulence due to evaporative cooling, *New J. Phys.*, 10, 1–15.

- Malinowski S.P., Leclerc M. Y., Baumgardner D. G., 1994: Fractal analysis of the high resolution FSSP data. *J. Atmos. Sci.*, 51, 397–413.
- Mandelbrot B., 1972: Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence, [in:] *Statistical Models and Turbulence*, M. Rosenblatt and C. Van Atta, eds., *Lecture Notes in Physics* 12, Springer-Verlag, New York, 333–351.
- Mandelbrot B., 1974: Intermittent turbulence in self-similar cascades: Divergence of high moments and dimension of the carrier, *J. Fluid Mech.* 62, 331–358.
- Mandelbrot B., 1975: *Les objets fractals: forme, hazard et dimension*. Flammarion, Paris.
- Mandelbrot B., 1977: *Fractals: form, chance and dimension*. Freeman, San Francisco.
- Mandelbrot B., 1982: *The fractal geometry of nature*. Freeman, San Francisco.
- Mandelbrot B., 1986: Self-affine fractal sets. *Fractals in Physics* (Eds. Luciano Pietronero and Erio Tosatti). North Holland Publishing, Amsterdam, 3–28.
- Menabde M., Sivapalan M., 2000: Modeling of rainfall time series and extremes using bounded random cascades and Levy-stable distributions. *Wat. Resour. Res.* 36(11), 3293–3300.
- Menabde M., Harris D., Seed A., Austin G., and Stow D., 1997: Multiscaling properties of rainfall and bounded random cascades. *Wat. Resour. Res.*, 33(12), 2823–2830.
- Meneveau C., Sreenivasan K.R., 1987: Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 59 (13), 1424–1427.
- Metcalf L., Eddy H.P., 1928: *Design of sewers*. Vol. 1 of *American sewerage practice*. McGraw-Hill, New York.
- Molnar P., Burlando P., 2005: Preservation of rainfall properties in stochastic disaggregation by a simple random cascade model. *Atmospheric Res.*, 77, 137–151.
- Molnar P., Lüscher R., Hausherr R., 2006: Impact of storm rainfall variability on urban drainage system performance. *Proc. 7th International Workshop on Precipitation in Urban Areas: Extreme Precipitation, Multisource Data Measurement and Uncertainty*, 7-10 Dec. 2006, St. Moritz, Switzerland.
- Novikov E.A., Stewart R., 1964: Intermittency of turbulence and spectrum of fluctuations in energy-dissipation. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geofiz.*, 3, 408–412.
- Obukhov A., 1962: Some specific features of atmospheric turbulence. *J. Geophys. Res.*, 67, 3011–3014.
- Olsson J., 1996: Validity and applicability of a scale-independent, multifractal relationship for rainfall. *Atmospheric Res.*, 42, 53–65.
- Olsson J., 1998: Evaluation of a scaling cascade model for temporal rainfall disaggregation. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 2(1), 19–30.
- Olsson J., Berndtsson R., 1998: Temporal rainfall disaggregation based on scaling properties. *Wat. Sci. Tech.*, 37(11), 73–79.
- Over T.M., 1995: *Modeling space-time rainfall at the mesoscale using random cascades*. PhD thesis, University of Colorado.
- Over T. M., Gupta V. K., 1994: Statistical analysis of mesoscale rainfall: Dependence of a random cascade generator on large-scale forcing. *J. Appl. Meteor.*, 33, 1526–1542.

- Over T.M., Gupta V.K., 1996: A space-time theory of mesoscale rainfall using random cascades, *J. Geophys. Res.*, 101(D21), 26319–26331.
- Pandey G., Lovejoy S., Schertzer D., 1998: Multifractal analysis of daily river flow series including extremes for basis five to two million square kilometres, one day to 75 years, *J. Hydrol.*, 208, 62–81.
- Pathirana A., Herath S., 2002: Multifractal modelling and simulation of rain fields exhibiting spatial heterogeneity. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 6(4), 695–708.
- Pathirana A., Herath S., Yamada T., 2003: Estimating rainfall distributions at high resolutions using a multifractal model. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 7(5), 668–679.
- PN-EN 12056-3, 2002: Systemy kanalizacji grawitacyjnej wewnątrz budynków. Część 3: Przewody deszczowe. Projektowanie układu i obliczenia.
- PN-EN 752-2, 2000: Zewnętrzne systemy kanalizacyjne. Wymagania.
- PN-EN 752-4, 2001: Zewnętrzne systemy kanalizacyjne. Obliczanie hydrauliczne i oddziaływanie na środowisko.
- Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., 1989: Numerical recipes in Pascal. The art of scientific computing. Cambridge University Press, 1989.
- Rybczyński M., Pomianowski K., Wóycicki, 1933: Hydrologja. Cześć I Opad-odpływ. Komisja Wydawnicza Tow. Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
- Schertzer D., Lovejoy S., 1983: Elliptical turbulence in the atmosphere, [in:] Proc. of the Fourth Symposium on "Turbulent shear flows", Karlsruhe, West Germany.
- Schertzer D., Lovejoy S., 1985: The dimension and intermittency of atmospheric dynamics, [in:] Turbulent shear flow 4 (Ed. B. Launder), Springer, 7–33.
- Schertzer D., Lovejoy S., 1987: Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *J. Geophys. Res.*, 92, 9692–9714.
- Schertzer D., Lovejoy S., 1989: Nonlinear variability in geophysics: multifractal analysis and simulations, [in:] Fractals' physical origin and properties (Ed. L. Pietronero), Plenum Press, New York, 49–79.
- Schertzer D., Lovejoy S., 1991: Nonlinear geodynamical variability: Multiple singularities, universality and observables, [in:] Non-linear variability in geophysics: scaling and fractals (Eds. D. Schertzer, S. Lovejoy), Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 41–82.
- Schertzer D., Lovejoy S., 1992: Hard and soft multifractal processes: *Physica A*, 185, 187–194.
- Schertzer D., Lovejoy S., 1993: Nonlinear variability in geophysics 3; Scaling and multifractal processes. Lecture Notes from AGU Chapman/EGS Richardson Memorial Conf., September 10–17, Cargèse, France.
- Schertzer D., Lovejoy S., Lavallée D., 1993: Generic multifractal phase transitions and self-organized criticality, [in:] Cellular Automata: Prospects in astrophysical applications (Eds. J.M. Perchang, A. Lejeune), World Scientific, 216–227.
- Schmitt T.G., 2000: Komentarz do ATV-A 118, Hydrauliczne wymiarowanie systemów odwadniających. Wydawnictwo Seidel-Przywecki sp. z o.o., Warszawa.
- Stamatelatos M., Apostolakis G., Dezfuli H., Everline Ch., Guarro S., Moieni P., Mosleh A., Paulos T., Youngblood R., 2002: Probabilistic risk assessment.



- Procedure guide for NASA managers and practitioners. Office of Safety and Mission Assurance NASA Headquarters Washington, DC.
- Tessier Y., Lovejoy S., Hubert P., Schertzer D., Pecknold S., 1996: Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, casual transfer functions. *J. Geophys. Res.*, 101(D21), 26427–26440.
- Tessier Y., Lovejoy S., Schertzer D., 1994: Multifractal analysis and simulation of the global meteorological network. *J. Appl. Meteor.*, 33, 1572–1586.
- Tessier Y., Lovejoy S., Schertzer D., 1993: Universal multifractals in rain and clouds: theory and observations. *J. Appl. Meteor.*, 32, 223–250.
- Twardosz R., 2005: Dobowy przebieg opadów atmosferycznych w ujęciu synoptycznym i probabilistycznym na przykładzie Krakowa (1886–2002). *Inst. Geogr. i Gosp. Przestrz. UJ, Kraków*.
- Wołoszyn J., 1964: Probabilistyczna metoda obliczania natężenia deszczów na przykładzie Wrocławia. *Wiad. Służby Hydrol. i Meteorol.*, 58 (3), 3–29.
- Yaglom A. M., 1966: The influence on the fluctuation in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval. *Sov. Phys. Dokl.*, 2, 26–30.

# SYNTHETIC RAINFALL TIME-SERIES GENERATORS FOR NEEDS OF STORMWATER AND COMBINED SEWAGE SYSTEMS MODELLING

## S u m m a r y

The main obstacle of current stormwater and combined sewage hydrodynamical simulation is the lack of credible rainfall data of sufficient time resolution. This book presents the practical attempt of multifractals and random cascades theories implementation as tools for local rainfall time-series analysis and synthetic rainfall scenarios generation suitable for hydrodynamical modeling of stormwater and combined sewage systems and for modelling of stormwater reservoirs and infiltration systems.

The first part of the book contains the theoretical basics of multifractal description of highly non-linear processes that exhibit wide variability as, well as intermittency over a broad range of time and space scales. This theory is practically implemented for Wrocław local 5-minute rainfall time-series (digitized pluviograph paper strips) analysis. The presence of scale invariant and multifractal properties in the rainfall process was investigated with spectral analysis, functional box counting method and by studying the multiple scaling of probability distributions and statistical moments of the rainfalls intensities. The empirical multifractal scaling exponent functions that describe the statistics of the rainfall process were derived. Theoretical universal multifractal model based on Lévy stochastic variables was applied for their description. Observation that the temporal structure of Wrocław rainfalls exhibited scale-invariant and multifractal properties across a wide range of scales (at least from a 24 hour scale up to 5 minute scale) was the key result of the first part of the research. This finding allowed for random cascades models application for rainfall modelling and disaggregation.

The second part of the book contains the basics of canonical and microcanonical random cascades models theory. Both types of cascade models were applied in practice to the stochastic fine graining of rainfall observations into high resolution data. Their performance at disaggregation of 1280-min (quasi daily precipitation totals) into 5-min rainfall data was studied for a 38-year record period from Wrocław. Differences between the models and parameter estimation techniques were explored on a base of simulated data with a special focus on three important properties of observed rainfalls: intermittency and their depths distribution and extremes. Weak capabilities of canonical cascades with constant parameters and large scale forcing at the imitation of intermittency and variability of the natural rainfalls were found. Better performance especially in case of intermittency preservation was observed for microcanonical cascade model with beta generator. Detail breakdown coefficients (BDC) studies were made for the purpose of microcanonical cascade model correction. BDC histograms were characterized by visible domination of plots by BDC values equal exactly 0,5 for short time durations. After elimination of BDC values equal exactly 0,5 a clear evolution of BDC histograms from purely beta distributions (for long times) to joined beta-normal distributions (for short times) was observed. Incorporation of these findings into new microcanonical random cascade model with beta-normal generator allowed for generating

synthetic rainfall time-series capturing very well both the variability and intermittency of natural precipitations. The developed rainfall time-series modelling workshop can be used in practice for generating precipitation data for multiple needs of urban hydrology.

**Key words:** stormwater and combined sewage systems, hydrodynamical modeling, rainfall intensities, multifractals, random cascade models

## **GENERATORY SYNTETYCZNYCH SZEREGÓW OPADOWYCH NA POTRZEBY MODELOWANIA SIECI KANALIZACJI DESZCZOWYCH I OGÓLNOSPŁAWNYCH**

### **Streszczenie**

Główną przeszkodą współczesnego hydrodynamicznego symulowania systemów kanalizacji deszczowych i ogólnospławnych jest brak wiarygodnych danych opadowych o zadowalającej rozdzielczości czasowej. Praca prezentuje praktyczną próbę zastosowania multifraktali i kaskad losowych jako narzędzi analizy lokalnych szeregów czasowych deszczów i generowania syntetycznych scenariuszy deszczów przydatnych do hydrodynamicznego modelowania systemów kanalizacji deszczowych i ogólnospławnych oraz do modelowania zbiorników retencyjnych i systemów rozsączania wód opadowych

Pierwsza część pracy zawiera teoretyczne podstawy multifraktalnego opisu wysoce nieliniowych procesów, które wykazują dużą zmienność i nieciągłość na przestrzeni szerokiego zakresu skal czasowych i przestrzennych. Teoria ta jest praktycznie stosowana do analizy lokalnych 5-minutowych szeregów czasowych deszczów z Wrocławia (zdigitalizowanych papierowych pluwiogramów). Występowanie skalowo niezmienniczych i multifraktalnych właściwości w procesie deszczowym było badane z użyciem analizy spektralnej, metody funkcyjnego zliczania pudełek i przez studiowanie wielokrotnego skalowania rozkładów prawdopodobieństw oraz momentów statystycznych natężeń deszczów. Wyprowadzono empiryczne multifraktalne funkcje wykładnika skalowania opisujące statystyki procesu opadowego. Do ich opisu zastosowano teoretyczny uniwersalny model multifraktalny bazujący na stochastycznych zmiennych Lévy'ego. Podstawowym wynikiem pierwszej części badań była obserwacja, że czasowa struktura deszczów z Wrocławia przejawia skalowo niezmiennicze i multifraktalne właściwości poprzez szeroki zakres skal (przynajmniej od skali 24 godz. aż do skali 5 min). Odkrycie to umożliwiło zastosowanie modeli kaskad losowych do modelowania i rozdzielania (ang. disaggregation) deszczów.

Druga część pracy zawiera podstawy teorii kanonicznych i mikrokanonicznych modeli kaskad losowych. Obydwa typy kaskad stosowano w praktyce do stochastycznego rozdzielania zarejestrowanych sum opadowych na szeregi czasowe o wysokiej rozdzielczości. Analizowano ich funkcjonowanie w zakresie rozdzielania 1280-minutowych sum opadów (w przybliżeniu dobowych sum opadów) na 5-minutowe szeregi dla 38-letniego okresu rejestracji deszczów z Wrocławia. Różnice pomiędzy

modelami i technikami estymacji ich parametrów przebadano na podstawie symulowanych szeregów, ze szczególnym uwzględnieniem trzech istotnych właściwości obserwowanych deszczów: nieciągłości oraz rozkładów i ekstremów ich wysokości. Stwierdzono słabe możliwości kaskad kanonicznych o stałych parametrach i z wymuszeniem wielkoskalowym w naśladowaniu nieciągłości i zmienności naturalnych deszczów. Lepsze funkcjonowanie zwłaszcza w zakresie zachowania nieciągłości obserwowano dla kaskad mikrokanonicznych z generatorem beta. Przeprowadzono szczegółowe studia współczynników rozpadu (BDC) w celu korekty modelu kaskady mikrokanonicznej. Histogramy BDC dla krótkich czasów trwania charakteryzowały się widoczną dominacją wykresów przez wartości BDC równe dokładnie 0,5. Po eliminacji wartości BDC równych dokładnie 0,5 obserwowano wyraźną ewolucję histogramów BDC z rozkładów czysto beta (dla długich czasów) do łączonych beta-normalnych rozkładów (dla krótkich czasów). Wprowadzenie tych obserwacji do modelu losowej kaskady mikrokanonicznej z generatorem beta-normalnym pozwoliło na generowanie syntetycznych szeregów czasowych deszczów bardzo dobrze odwzorowujących zarówno zmienność jak i nieciągłość naturalnych opadów. Opracowany warsztat modelowania szeregów czasowych deszczów może być używany w praktyce dla generowania danych opadowych na wiele potrzeb hydrologii miejskiej.

**Słowa kluczowe:** systemy kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej, modelowanie hydrodynamiczne, natężenia deszczów, multifraktale, modele kaskad losowych