EKONOMETRIA ECONOMETRICS 3(53) • 2016

ISSN 1507-3866
e-ISSN 2449-9994

Dorota Kozioł-Kaczorek, Łukasz Pietrych
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
e-mails: koziol.dorota@gmail.com; lukasz_pietrych@sggw.pl

GRAFY A TEORIA STABILNYCH ALOKACJI

GRAPHS AND THEORY OF STABLE ALLOCATION

DOI: 10.15611/ekt.2016.3.08
JEL Classification: C61

Streszczenie: W pracy omówiono model procesu kojarzenia zaproponowany przez dwóch amerykańskich matematyków: D. Gale'a i L.S. Shapleya. Podstawowym zdefiniowanym przez nich pojęciem był przydział stabilny, który można osiągnąć za pomocą tzw. algorytmu odroczonej akceptacji. W artykule dokonano analizy problematyki poruszanej przez teorię stabilnych alokacji na gruncie teorii grafów. Studia literatury wykazały, że zagadnienia poruszane przez tę teorię można analizować za pomocą grafów dwudzielnych i sieci ważonych. Sformułowano również warunki, jakie należy spełnić, aby problem kojarzenia miał rozwiązanie. Odwołano się do rynku pracy, gdyż poruszane zagadnienie ma zastosowanie w praktyce, szczególnie w projektowaniu systemów rekrutacji pracowników do firm. Celem artykułu było przedstawienie problemu dwustronnych skojarzeń za pomocą języka teorii grafów oraz wskazanie możliwości aplikacyjnych w obszarze poszukiwań i dopasowań osób poszukujących pracy i pracodawców.

Słowa kluczowe: skojarzenia, przydział optymalny, grafy.

Summary: The paper discusses a model of matching process which was proposed by two American mathematicians: David Gale and Lloyd S. Shapley. The basic concept defined by them was the stable allocation, which can be achieved with so-called deferred acceptance algorithm. The article analyzes the problems discussed by the theory of stable allocations on the basis of graph theory. It has been shown that the issues raised by this theory can be analyzed using bipartite graphs and networks weighted. They also formulated conditions which should be met in purpose to solve a problem of matching. References relate to the labor market, as a discussed issue is applicable in practice, especially in the design of systems of recruitment companies. The aim of the article is to present the problem of bilateral associations with the use of the language of graph theory and an indication of possible applications in the area of search and match of job seekers and employers.

Keywords: associations, optimal allocation, graphs.

1. Wstęp

Jedną z podstawowych kwestii zarządzania kapitałem ludzkim jest problem alokacji polegający na przydzieleniu pracownikom zajęć zgodnie z ich kwalifikacjami. Narzędziem umożliwiającym jego rozwiązanie jest tak zwana optymalizacja kombinatoryczna i aplikacja narzędzi teorii grafów.

Teoria grafów w ostatnim czasie nabrała szczególnego znaczenia w zarządzaniu (kapitałem ludzkim), informatyce, chemii, biologii, psychologii, a także w zagadnieniach społecznych i socjologicznych.

Problemem alokacji zajmowali się w swoich pracach L.S. Shapleya i D. Gale'a. Celem ich badań było opracowanie takiego systemu rekrutacji, który dopasowałby kandydatów do uczelni w taki sposób, że oczekiwania zarówno uczelni, jak i kandydatów byłyby uwzględnione w jak największym stopniu. Oznacza to, że kandydat dostanie się do możliwie najbardziej preferowanej uczelni, a uczelnia będzie miała studentów z największą wymaganą liczbą punktów. Ważne było również, aby system ten był prosty i pozbawiony elementu niepewności, która była ściśle związana z poprzednim systemem rekrutacji i towarzyszyła obydwu stronom biorącym udział w procesie. Efektem ich pracy było opublikowanie w 1962 r. artykułu *College admissions and the stability of marriage*. Autorzy przedstawili w nim model procesu rekrutacji i wprowadzili pojęcie optymalnego dopasowania kandydatów do szkół. Dodatkowo dowiedli, że zawsze istnieje dokładnie jeden przydział optymalny [Świtalski 2008, s. 35-36].

Wskazane kwestie dotyczące alokacji są określane mianem dwustronnych skojarzeń i można je zilustrować za pomocą języka teorii grafów. W literaturze matematycznej problem ten jest przedstawiany na przykładzie procesu kojarzenia małżeństw. Celem niniejszej publikacji jest omówienie podstawowych zagadnień poruszanych w ramach teorii stabilnych alokacji za pomocą narzędzi teorii grafów oraz wskazanie możliwości aplikacyjnych w obszarze poszukiwań i dopasowań osób poszukujących pracy i pracodawców. W związku z tym definicję optymalnego przydziału zaadaptowano na potrzeby rynku pracy oraz porównano skojarzenie optymalne z różnego typu skojarzeniami definiowanymi w ramach teorii grafów.

W artykule odwołano się do rynku pracy, ilustrując omawiane pojęcia na przykładzie dopasowywania bezrobotnych do pracodawców, gdyż poruszana problematyka znajduje praktyczne zastosowanie w obszarze projektowania systemów rekrutacji pracowników do firm.

2. Teoria stabilnych alokacji

Przypadek, w którym mamy do czynienia z systemem doboru pracowników do potencjalnych pracodawców, jest bardzo zbliżony do modelu rekrutacji kandydatów do szkół przedstawionego we wspomnianej już pracy z 1962 r.

Przed przystąpieniem do sformułowania modelu należy poczynić kilka założeń. Po pierwsze, przyjmijmy, że dane są dwa zbiory: zbiór bezrobotnych (B) i zbiór pracodawców (P), takie, że $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ oraz $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Bezrobotni (na potrzeby niniejszej pracy nazywani również poszukującymi pracy) mogą uszeregować pracodawców według swoich preferencji od najbardziej preferowanych do najmniej. Analogicznie: każdy z pracodawców może tego dokonać na zbiorze B, czyli względem poszukujących pracy. Tego typu uszeregowanie nazywane jest ostrym liniowym porządkiem. Dodatkowo należy przyjąć założenie, że każdy poszukujący pracy może być przyjęty do co najwyżej jednej firmy oraz każda firma może przyjąć pewien limit kandydatów (q), gdzie najczęściej $q = 1$. Dodatkowo pojęcie skojarzenia będzie używane w stosunku do pojedynczej pary: poszukujący pracy – pracodawca. Z kolei w przypadku wszystkich n par będzie stosowane pojęcie przydziału. Przykładowo $s = \{B_1P_1, B_2P_2, \dots, B_nP_n\}$, s jest wtedy przydziałem składającym się z n-elementowego zbioru pojedynczych skojarzeń.

Przyjmijmy, że rozpatrywane w modelu dwa zbiory, bezrobotnych (B) oraz pracodawców (P), mają taką samą liczebność n. Każdy z bezrobotnych porządkuje pracodawców według swoich preferencji od najbardziej preferowanego do najmniej. Tego samego dokonują pracodawcy na zbiorze osób poszukujących pracy. Pracodawcy najczęściej, tworząc ranking kandydatów, biorą pod uwagę ich doświadczenie oraz wykształcenie, natomiast poszukujący pracy kierują się zazwyczaj przewidywanymi zarobkami, prestiżem czy też zainteresowaniami. Celem procedury jest stworzenie m par (skojarzeń) postaci B_iP_i, gdzie dla danego przydziału s symbolem B_i oznaczono bezrobotnego będącego w parze z pracodawcą z P_i. Należy także przyjąć założenie, że każdy pracodawca będzie dążył do zapełnienia wakatu i każdy poszukujący pracy znajdzie zatrudnienie (w związku z tym nie przewiduje się sytuacji, że w zbiorach pozostaną elementy bez pary).

Definicja 1. Przydział s nazywany jest niestabilnym, jeśli istnieją dwaj bezrobotni B_1 i B_2 będący w parze odpowiednio z pracodawcami P_1 i P_2 , mimo że bezrobotny B_2 woli pracodawcę P_1 od swojego aktualnego pracodawcy i pracodawca P_1woli bezrobotnego B_2 od swojego aktualnego pracownika. Para B_2P_1 nazywana jest w takiej sytuacji blokującą przydział s [Shapley, Gale 1962, s. 10]. Przypadek ten można zapisać następująco:

$$s\colon (B_1P_1), (B_2P_2),$$

ale

$$B_2\colon P_1 >_{(B2)} P_2$$

oraz

$$P_1\colon B_1 <_{(P1)} B_2.$$

Bazując na tej definicji, można wyciągnąć wniosek, że skojarzenia, dla których istnieją skojarzenia blokujące, nie są trwałe i mają tendencję do rozpadu. W związku z tym można sformułować następujące stwierdzenie.

Definicja 2. Dany przydział s jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy s nie jest blokowane przez żadną inną parę [Shapley, Gale 1962, s. 10], czyli inaczej to ujmując – nie istnieje para $B_i P_j$ taka, że:

$$B_i\colon P_j >_{(Bi)} P_i$$

oraz

$$P_j\colon B_i >_{(Pj)} B_j.$$

W dalszej części tekstu rozważono następujący przypadek: niech będzie dany zbiór osób poszukujących pracy (bezrobotnych) $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ oraz zbiór czterech przedsiębiorstw (pracodawców) $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Preferencje poszczególnych elementów zbioru są jak na rys. 1.

$$\begin{array}{l} B_1\colon P_2\ P_3\ P_1\ P_4 \\ B_2\colon P_3\ P_2\ P_4\ P_1 \\ B_3\colon P_3\ P_4\ P_1\ P_2 \\ B_4\colon P_1\ P_2\ P_4\ P_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P_1\colon B_2\ B_4\ B_3\ B_1 \\ P_2\colon B_4\ B_3\ B_1\ B_2 \\ P_3\colon B_2\ B_1\ B_4\ B_3 \\ P_4\colon B_3\ B_1\ B_4\ B_2 \end{array}$$

Rys. 1. Przykład zbioru pracodawców i zbioru bezrobotnych oraz ich preferencje

Źródło: opracowanie własne.

W zapisie tym $B_1\colon P_2\ P_3\ P_1\ P_4$ oznacza liniowy porządek preferencji bezrobotnego B_1, z którego wynika, że najchętniej wybrałby on pracę w przedsiębiorstwie P_2, natomiast najmniej chętnie pracę w przedsiębiorstwie oznaczonym jako P_4. Liczba możliwych skojarzeń to

$$N_s = n!.,$$

gdzie n oznacza liczbę elementów zbioru. W analizowanym przykładzie występują 24 skojarzenia.

Rozpatrzmy teraz dwa przydziały s i p. Niech s będzie takie, że:

$$s = \{B_2P_3, B_4P_1, B_3P_4, B_1P_2\},$$

oraz niech przydział p będzie taki, że

$$p = \{B_2P_3, B_4P_2, B_3P_4, B_1P_1\}.$$

Łatwo zauważyć, że s jest przydziałem stabilnym, w przeciwieństwie do p, w którym dokonano zamiany (bezrobotnych B_4 i B_1 zamieniono pracodawcami). Na tej zamianie skorzystał jedynie pracodawca oznaczony symbolem P_2. Pracodawca P_1 oraz pracownicy B_1 i B_4 stracili z punktu widzenia swoich własnych preferencji.

Często zbiór przydziałów stabilnych zawiera więcej niż tylko jeden element. W związku z tym zasadne jest sformułowanie kolejnej definicji.

Definicja 3. Przydział stabilny s jest optymalny (z punktu widzenia jednej ze stron), jeśli dla bezrobotnego/pracodawcy i dla dowolnego przydziału stabilnego p zachodzi:

$$s(B_i) \geq_{Bi} p(B_i).$$

Inaczej ujmując, oznacza to, że skojarzenie optymalne dla pracownika jest nie gorsze od dowolnego skojarzenia stabilnego.

W literaturze przedmiotu dowiedziono, że skojarzenia optymalne istnieją zawsze (co najwyżej jedno dla każdego zbioru). Przydział ten można otrzymać w wyniku działania algorytmu odroczonej akceptacji opisanego w pracy [Shapley, Gale 1962]. Wspomniany algorytm (w skrócie GS) wyznaczenia skojarzenia optymalnego znajduje również zastosowanie w analizowanym przykładzie. Przyjmijmy, że stroną inicjującą są osoby poszukujące pracy (B). W pierwszym kroku każdy bezrobotny (B_1, B_2, B_3, B_4) wybiera, według listy swoich preferencji, najbardziej pożądane miejsce pracy. W kolejnym kroku pracodawca, który otrzymał więcej niż jedno zgłoszenie, wybiera jedno z nich (najlepsze ze swojego punktu widzenie). Pozostali w zbiorze (B) poszukujący pracy, których zgłoszenia zostały odrzucone przez pracodawców, skreślają ze swojej listy preferencji tych pracodawców, którzy ich nie przyjęli. Procedura ponownie przechodzi do kroku pierwszego i przebiega według tego samego schematu, aż do momentu, w którym zbiór bezrobotnych (B) pozostaje pusty, czyli każdy poszukujący znalazł pracodawcę. Wadą tego algorytmu jest liczba iteracji (wynikająca z liczebności obydwu zbiorów n), która wynosi $n - 1$.

W sytuacji, gdy stroną inicjującą są osoby aplikujące o pracę, otrzymane w ten sposób dopasowanie jest optymalne z punktu widzenia tylko bezrobotnych. Jeśli stroną rozpoczynającą całą procedurę są pracodawcy, to otrzymane rozwiązanie byłoby optymalne dla zbioru pracodawców.

Zaprezentowany algorytm opisano w artykule w *College admissions and the stability of marriage*. Od tego czasu prace nad nim znacznie się posunęły. W literaturze można znaleźć rozważania dotyczące własności oraz różnego rodzaju uogólnień tego algorytmu. Opisana została także struktura zbioru skojarzeń stabilnych oraz liczba możliwych skojarzeń stabilnych. Stwierdzono, że jedną z ważnych własności tego modelu jest tak zwana niemanipulowalność, polegająca na tym, iż wykluczona jest możliwość manipulowania preferencjami przez jedną ze stron. Niektórzy uczestnicy procesu rekrutacji mogliby podawać nieprawdziwe preferencje po to, aby znaleźć się u lepszego pracodawcy od tego, u którego mogliby się znaleźć podając swoje rzeczywiste preferencje [Świtalski 2008, s. 42]. Własność ta jest szczególnie ważna w procesach rekrutacji.

Badania zapoczątkowane przez D. Gale'a i L.S. Shapleya z czasem zostały rozwinięte w teorię stabilnych alokacji, czyli dyscyplinę zajmującą się poszukiwaniem stabilnych związków między jednostkami lub grupami na rynkach, na których proste reguły rynkowe nie mają zastosowania. Wykorzystuje ona narzędzia teorii gier oraz ekonomii eksperymentalnej. Teoria ta ma szerokie praktyczne zastosowania, m.in. w modelowaniu wielu zjawisk ekonomicznych, społecznych, czy też biologicznych. Jednym z takich przykładów są badania A.E. Rotha i M.A. Sotomayor [Roth 1984; 2002; Roth, Sotomayor 1992]. Dokonali oni scalenia teorii zajmującej się problemem stabilnych alokacji rynkowych z praktycznymi aspektami projektowania rynków. Teoria ta weszła przede wszystkim do praktyki rynków pracy, szkolnictwa i systemów medycznych, gdyż to właśnie w nich mają miejsce tzw. dwustronne poszukiwania. Wkład A.E. Rotha do teorii stabilnych alokacji polega przede wszystkim na tym, iż udowodnił on, że na dwustronnym rynku, opierając się na zbiorze preferencji ujawnionych w sposób bezpieczny z punktu widzenia każdego uczestnika rynku, nie można zawsze zapewnić stabilnego skojarzenia. Chodzi tutaj o kwestie dzielenia się prywatną informacją oraz wykorzystanie tych informacji przez pozostałych graczy. Natomiast w przypadku rynków jednostronnych (np. rynek nieruchomości) każdy uczestnik może bez obaw ujawniać swoje preferencje.

Wyzwaniem stała się stabilność alokacji w zmieniających się strukturach rynkowych. Znaczącym praktycznym osiągnięciem A.E. Rotha była reforma amerykańskiego rynku kojarzenia absolwentów medycyny z zatrudnieniem w szpitalach. Zostały wdrożone wówczas programy opierające się na doskonalszych, bardziej zaawansowanych algorytmach. Należy tutaj przede wszystkim wspomnieć o działalności Narodowego Programu Alokacji Personelu (NRMP – *National Resident Matching Program*) – organizacji pozarządowej i *non profit* powołanej do życia w Stanach Zjednoczonych w 1952 r. w celu niesienia pomocy absolwentom szkół medycznych w dostępie do mieszkań oraz staży w szpitalach (uwzględniając również potrzeby ich współmałżonków) [Stankiewicz 2013]. Przełomowym osiągnięciem była próba wdrożenia tzw. przyjaznej wymiany (*exchange „in kind”*). Była to struktura organizacyjna rynku wymiany nerek (działająca na historycznym terytorium Nowej Anglii) łącząca w pary biorców i potencjalnych dawców organów. Opracowany algorytm umożliwił przeprowadzanie przeszczepów między chorymi osobami oraz ich bliskimi. Kolejnym krokiem były tzw. łańcuchy równoczesnych operacji chirurgicznych, polegających na tym np., że jeżeli pierwsza osoba zaproponuje honorowo oddanie organu innej chorej osobie, to bliski tej osoby deklaruje się zrobić to samo − w ten sposób tworzył się łańcuch biorców i dawców.

3. Teoria grafów a algorytm GS

Teoria grafów jest działem matematyki dyskretnej, której początki sięgają połowy osiemnastego wieku. Ogólnie ujmując, należy stwierdzić, że zajmuje się ona badaniem własności relacji i ich obrazowaniem w postaci graficznej, a także formalizowaniem problemów badawczych za pomocą ujednoliconego języka [Ruohonen 2013]. W ostatnim okresie teoria grafów zdobywa coraz większe uznanie w różnych dziedzinach nauki, począwszy od chemii, genetyki, na socjologii i zarządzaniu skończywszy. Jednocześnie, jako dyscyplina matematyczna, sama w sobie nadal wymaga samodzielnych i teoretycznych badań [Wilson 2012].

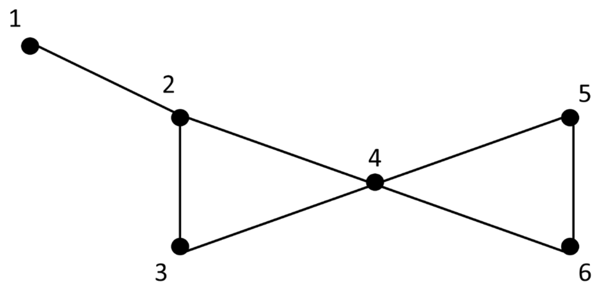
Wychodząc od podstawowych definicji, można stwierdzić, że grafem G nazywamy parę uporządkowaną (V, E) składającą się ze zbioru wierzchołków V i zbioru krawędzi E. Zdefiniowane jest przy tym pewne odwzorowanie (nazywane funkcją incydencji), które każdemu elementowi z E przyporządkowuje dokładnie jedną parę uporządkowaną lub nieuporządkowaną elementów ze zbioru V (przy czym nie muszą być to różne elementy) [Bronsztejn i in. 2013, s. 378]. W teorii grafów rozważa się wiele uogólnień wskazanej definicji. Grafy można dzielić na różne kategorie w zależności od ich cech i własności.

Jednym z zagadnień teorii grafów, które nawiązuje do problematyki stabilnych alokacji, są tzw. skojarzenia. Zbiór M złożony z krawędzi grafu G nazywamy skojarzeniem w G, jeśli M nie zawiera pętli i dowolne dwie różne krawędzie w M nie mają punktów wspólnych. Dodatkowo krawędź łącząca dwa wierzchołki grafu jest do nich incydentna, czyli ma w nich swój początek lub koniec. W literaturze przedmiotu wyróżnia się także trzy najważniejsze typy skojarzeń [Bronsztejn i in. 2013, s. 387-388]:

- Skojarzenie M^* w G określamy jako nasycone, jeśli w G nie istnieje skojarzenie M takie, że M^* zawiera się w M. Na rysunku 2 takim skojarzeniem można nazwać $M_1 = \{\{2,3\}, \{5,6\}\}$. W tym przypadku sformułowanie „nasycone" odnosi się do incydencji.
- Skojarzenie M^{**} w G nazywamy maksymalnym, jeśli w G nie istnieje skojarzenie M takie, że $|M| > |M^{**}|$. Odwołując się do rys. 2, stwierdzić można, że takim skojarzeniem jest $M_2 = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}\}$. Inaczej to ujmując: skojarzenie M w grafie G jest największe, gdy w G nie ma ścieżki, wzdłuż której możliwe byłoby powiększenie M.
- Skojarzenie M w G o tej własności, że każdy wierzchołek tego grafu jest incydenty z pewną krawędzią z M, nazywane jest skojarzeniem doskonałym.

Dodatkowo można stwierdzić, że każde skojarzenie doskonałe jest największe (maksymalne), ale nie każde skojarzenie maksymalne jest doskonałe. Własność tę spełnia również przytoczony wcześniej przykład skojarzenia M_2.

Problematykę związaną z teorią stabilnych alokacji można przedstawić również za pomocą grafów dwudzielnych. Graf dwudzielny (zwyczajny) zapisuje się jako $G = (V_1 \cup V_2, E)$, co oznacza, że zbiór jego wierzchołków można podzielić na dwa niepuste $V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset$ oraz rozłączne podzbiory $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ takie, że każda krawędź $e \in E$ ma jeden wierzchołek w V_1 oraz jeden w V_2 [Wojciechowski, Pieńkosz 2013, s. 28]. Można wyszczególnić tzw. pełne grafy dwudzielne, czyli takie, w których każdy wierzchołek z V_1 połączony jest krawędzią z każdym wierzchołkiem z V_2. W grafach dwudzielnych można także wyodrębnić tzw. skojarzenie całkowite. Skojarzeniem całkowitym ze zbioru V_1 w zbiór V_2 grafu dwudzielnego $G = (V_1 \cup V_2, E)$ nazywa się wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między wierzchołkami zbioru V_1 i wierzchołkami pewnego podzbioru zbioru V_2 taką, że odpowiadające sobie wierzchołki są połączone [Wilson 2012, s. 152]. Inaczej to ujmując, stwierdza się, że w przypadku skojarzenia całkowitego każdy wierzchołek z V_1 musi być skojarzony. Dwie klasy wierzchołków mogą stanowić grupy podlegające skojarzeniom, przykładowo: bezrobotni i pracodawcy.



Rys. 2. Skojarzenia w grafach

Źródło: opracowanie własne.

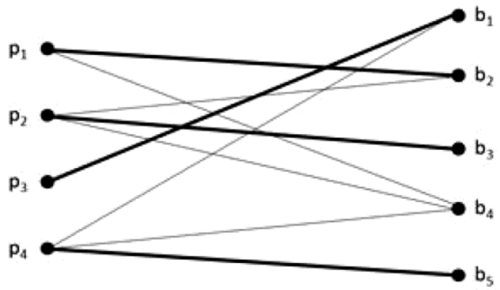
Jednym z podstawowych twierdzeń, które dotyczą omawianego zagadnienia, jest twierdzenia Halla. W swojej pierwotnej wersji podawane jest ono na przykładzie problemu kojarzenia małżeństw. Twierdzenie definiuje warunek konieczny i wystarczający do tego, aby w danym grafie dwudzielnym mogło zaistnieć skojarzenie całkowite. Tym warunkiem jest to, aby dla każdego zbioru k-pracodawców wszyscy oni znali łącznie co najmniej k-bezrobotnych, gdzie $1 \leq k \leq m$, a m jest liczbą wszystkich pracodawców [Halmos, Vaughan 1950, s. 214]. Jest to warunek konieczny, ponieważ gdyby nie był on spełniony dla pewnego zbioru k, to dla elementów z tego zbioru nie byłoby możliwe znalezienie skojarzenia całkowitego, a tym bardziej nie byłoby to możliwe dla całego zbioru m. W literaturze są również podawane liczne dowody na to, że cytowane twierdzenie stanowi również warunek konieczny (szerzej o samym twierdzeniu w [Halmos, Vaughan 1950, s. 214-215; Wilson 2012, s. 152-153]).

Zagadnienie to można zilustrować na przykładzie grafu dwudzielnego G, który tworzą dwa rozłączne zbiory wierzchołków: P i B, oznaczające odpowiednio zbiór pracodawców i zbiór poszukujących pracy. Krawędzie w tym przypadku oznaczają wzajemne znajomości. Wszyscy z pracodawcy znają łącznie pięciu bezrobotnych, w związku z tym istnieje skojarzenie całkowite. Pogrubione linie wyznaczają przykład takiego skojarzenia.

Tabela 1. Graf dwudzielny

P (pracodawcy)	B (bezrobotni)
p_1	b_2, b_4
p_2	b_2, b_3, b_4
p_3	b_1
p_4	b_1, b_4, b_5

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Przykład skojarzenia całkowitego w grafie dwudzielnym

Źródło: opracowanie własne.

Z twierdzenia Halla wywodzi się również teoria transwersal. Jeżeli B jest niepustym zbiorem skończonym (w tym przypadku jest to zbiór bezrobotnych) oraz F jest pewną rodziną niepustych podzbiorów B taką, że $F = (S_1, \dots, S_m)$, to transwersalą rodziny F nazywa się zbiór m różnych elementów zbioru B, wybranych po jednym z każdego S_i [Wilson 2012, s. 155]. Powracając do przykładu poprzedniego (tab. 1), zbiór osób poszukujących pracy można podzielić na cztery podzbiory, w zależności od znajomości z potencjalnymi pracodawcami, tj.:

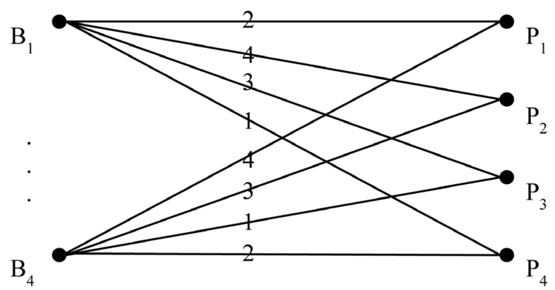
$$S_1 = \{b_2, b_4\} \quad S_2 = \{b_2, b_3, b_4\} \quad S_3 = \{b_1\} \quad S_4 = \{b_1, b_4, b_5\}.$$

Jak widać, zbiór S_i jest zbiorem tych bezrobotnych, których zna bądź preferuje pracodawca p_i. Transwersalą natomiast jest w tym przypadku zbiór m tych bezrobotnych, którzy zostali wybrani przez jednego pracodawcę. Przykładowo transwersalą rodziny F jest $\{b_2, b_3, b_1, b_5\}$. W tym przypadku rodzina F ma również wiele transwersal częściowych.

Problem polega na tym, że nie każdy element należący do zbioru S_i może być w tym samym stopniu preferowany. Wszystkie elementy zbiorów są traktowane jako jednorodne, tej samej wagi, nie uwzględnia się tutaj jakiegokolwiek uporządkowania preferencji. Natomiast należy zauważyć, że w praktyce wcale nie musi tak być. Odwołując się chociażby do omawianego przykładu rynku pracy, trzeba stwierdzić, że pracodawcy w trakcie procesu poszukiwania pracownika dokonują swojego wyboru, kierując się przede wszystkim wyceną wartości produktu, jaki jest w stanie wytworzyć dany kandydat. Zazwyczaj tworzą rankingi na podstawie własnych preferencji. Do tej pory omówione zagadnienia nie pozwalają na uwzględnienie tego problemu, traktując wszystkie elementy zbiorów jako homogeniczne i tej samej wagi. Skojarzenie całkowite w rozumieniu teorii grafów oczywiście nie zawsze będzie skojarzeniem optymalnym/stabilnym, zdefiniowanym w ramach teorii stabilnych alokacji.

W celu uwzględnienia wspomnianych preferencji należy zastosować grafy ważone. W tym miejscu warto wspomnieć o problemie najtańszego skojarzenia. Zakłada się w tym przypadku, że graf jest ważony, tzn. każda krawędź $e \in E$ w grafie $G = (V, E)$ ma określony koszt (wagę). Celem jest znalezienie w tym grafie skojarzenia doskonałego z jak najmniejszą sumą kosztów krawędzi (o ile ono istnieje). Problem najtańszego skojarzenia w grafie dwudzielnym jest nazywany zadaniem przydziału. Wynika to z licznych zastosowań tego modelu związanych z optymalizacją przydziału różnych par obiektów, szczególnie w procesach produkcyjnych (na przykład pracowników do obsługi zleceń itp.). Do rozwiązania zadań najtańszego skojarzenia można zaadaptować koncepcję ścieżek naprzemiennych, przy czym w poszczególnych iteracjach poszukuje się w tym przypadku najtańszych ścieżek naprzemiennych. W przypadku grafów dwudzielnych do rozwiązania zadań najtańszego skojarzenia można zastosować metody programowania liniowego [Wojciechowski, Pieńkosz 2013, s. 332-333].

Przypadek ten można przedstawić na przykładzie z rys. 1. Założono, że są czterej bezrobotni i cztery różne wakaty, które powinny zostać im przydzielone. Każdy z pracodawców określił swoje preferencje względem kandydatów. Preferencje te można zapisać w postaci macierzowej oraz tradycyjnej, czyli grafu dwudzielnego ważonego.



Rys. 4. Skojarzenie całkowite

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Macierz preferencji

	P_1	P_2	P_3	P_4
B_1	2	4	3	1
B_2	1	3	4	2
B_3	2	1	4	3
B_4	4	3	1	2

Źródło: opracowanie własne.

Z punktu widzenia teorii grafów problem można przedstawić jako znalezienie maksymalnego skojarzenia ważonego w grafie $G = (V, E, C)$, gdzie C odpowiada za wektory preferencji. W celu rozwiązania tego problemu można posłużyć się algorytmem węgierskim, składającym się z kilku kroków. W najprostszej formie zakłada się, że n elementów jednego zbioru należy przyporządkować n elementom zbioru przeciwnego. Dokonując takiego przydziału, dąży się do maksymalizacji lub minimalizacji funkcji celu. Otrzymane w ten sposób maksymalne skojarzenie ma postać:

$$s = \{B_2P_3, B_4P_1, B_3P_4, B_1P_2\}.$$

Zbieżność tego wyniku z tym otrzymanym w rozdziale pierwszym wcale nie oznacza, że metoda ta prowadzi do przydziału optymalnego w sensie teorii stabilnych alokacji. Należy pamiętać, że omawiane ujęcie uwzględnia preferencje tylko jednej ze stron (w tym przypadku byli to pracodawcy). W związku z tym jest to alokacja optymalna jedynie z ich punktu widzenia. Zakłada się tutaj, że poszukujący pracy preferują w równym stopniu zaoferowane miejsca pracy. W przeciwnym przypadku, gdyby ich preferencje również były zróżnicowane, zagadnienie stałoby się bardziej złożone. Powstały przydział może być nietrwały i wykazywać tendencję do rozpadu.

M. Baïou i M. Baliński w swojej pracy zwracają uwagę na przypadek, gdy dla każdego elementu (agenta) zostaje przypisana realna wartość (przykładowo liczba godzin pracy jaką mogą zaoferować). Zauważają, że takie uogólnienie zagadnienia dwustronnych skojarzeń implikuje nowe problemy w tym procesie. Głównym zagadnieniem, na jakim się skupiają, jest wybór stabilnego skojarzenia wśród wielu dostępnych w danym przypadku. Autorzy wykazali, że uogólniony algorytm Gale'a-Shapleya rozwiązuje problemy stabilnego przydziału dla grafów dwudzielnych, dodatkowo opracowali własny algorytm indukcyjny, który znajduje skojarzenia stabilne w czasie wielomianowym [Baïou, Balinski 2007, s. 392]. Dodatkowo przypisali mechanizmowi optymalnej alokacji pracowników trzy własności: efektywność, monotoniczność oraz strategiczną odporność. Pierwsza własność mówi o tym, iż dany przydział jest efektywny dla pracowników, jeśli nie ma możliwości osiągnięcia innej alokacji y, stabilnej bądź też nie, ale spełniającej warunek $y >_i x$. Monotoniczność z kolei odnosi się do tzw. ulepszonego problemem alokacji, natomiast strategia odporności dotyczy przypadku, gdy agenci nie stosują strategii polegającej na nieujawnianiu ich prawdziwych preferencji [Baïou 2016, s. 181-182]. P. Biró oraz T. Fleiner uogólnili algorytm indukcyjny, wykazując, że nie jest on wielomianem, jednocześnie przedstawiając technikę skalowania, która umożliwia sprowadzenie go do takiej postaci [Biró, Fleiner 2010, s. 65].

4. Zakończenie

W ramach szeroko rozumianej problematyki skojarzeń można wymienić różne podejścia (praktyczne i teoretyczne). Jednym z ujęć, które łączy badanie własności opracowanych algorytmów z ich implementacją w realnych systemach gospodarczych, jest teoria stabilnych alokacji opracowana na początku lat 60. przez dwóch amerykańskich matematyków: D. Gale'a oraz L.S. Shapleya. Została ona zaczerpnięta z teorii gier, a jej trzon stanowi algorytm dopasowania. Z kolei innym działem matematyki, który także uzupełnia wspomniane zagadnienie, są grafy. Definicje oraz pewne aksjomaty zdefiniowane w ramach tego kierunku, jak twierdzenie Halla, stanowią ważny element kojarzenia. Warto zauważyć, że grafy były już stosowane w odniesieniu do bardziej zaawansowanych analiz. Przykładem może być wcześniej opisana problematyka wymiany organów, którą zajmował się A.E. Roth. Badania w przypadku tego zagadnienia dotyczyły m.in. konieczności uwzględnienia szeregu zmiennych, które powinny być brane pod uwagę podczas kojarzenia dawców i biorców.

Istnieje obszerna literatura dotycząca omawianych zagadnień. Problemowi skojarzenia w grafie poświęcono również całe monografie, przykładem może być praca [Lovász, Plummer 1986]. Opracowano efektywne algorytmy o wysokiej złożoności obliczeniowej dla wyznaczania na przykład maksymalnego skojarzenia w grafie, jednak należy zauważyć, że są zagadnienia, które wymagają dalszych rozważań (np. różnego rodzaju modyfikacje algorytmu GS). Znane są liczne zastosowania matematyki, które sprowadzają się do zagadnień z zakresu teorii grafów. Jak wcześniej stwierdzono, grafy pojawiają się w różnych dziedzinach nauki i praktyki, w tym w ekonomii, przede wszystkim w związku z problemami optymalizacji produkcji i zastosowaniami informatycznymi. Jednym z takich zagadnień, w których teoria grafów może być także z powodzeniem implementowana, są stabilne alokacje. Dokonując studiów nad literaturą, uzupełnionych o własne przykłady i rozważania, osiągnięto cel niniejszej pracy, czyli za pomocą grafów przedstawiono podstawowe zagadnienia teorii stabilnych alokacji.

Artykuł stanowi oczywiście zaczątek do szerszych rozważań teoretycznych na temat problematyki stabilnych alokacji. Teoria ta ma wiele praktycznych zastosowań, dlatego też badania prowadzone na tym gruncie są ważne. Głównym obszarem stosowania tego typu rozwiązań w praktyce gospodarczej są wszelkiego typu systemy rekrutacji na rynku pracy. W dobie niedopasowania strukturalnego popytu i podaży pracy systemy byłyby znacznym ułatwieniem zarówno dla osób poszukujących pracy, jak i pracodawców. Dotychczas opracowane podwaliny teoretyczne i doświadczenia funkcjonujących już systemów (np. NRMP) przyczyniłyby się do stworzenia wdrożenia takiego systemu. Szczególnie szerokie zastosowanie mogą tutaj także znaleźć różnego rodzaju komputerowe systemy kojarzenia, bazujące na komunikacji internetowej.

Literatura

Baïou M., 2016, *A note on many-to-many matchings and stable allocations*, Discrete Applied Mathematics, 222, s. 181-184.

Baïou M., Balinski M., 2007, *Characterizations of the optimal stable allocation mechanism*, Operation Research Letters, 35, s. 392-402.

Biró P., Fleiner T., 2010, *Integral stable allocation problem on graphs*, Discrete Optimization, 7, s. 64-73.

Bronsztejn I.N., Siemiendiajew K.A., Musiol G., Mühlig, 2013, *Nowoczesne kompendium matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Halmos P.R., Vaughan H.E., 1950, *The marriage problem*, American Journal of Mathematics, vol. 72, no. 1, s. 214-215.

Lovász L., Plummer M.D., 1986, *Matching Theory*, North-Holland, Amsterdam.

Roth A.E., 1984, *The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory*, Journal of Political Economy, no. 92, s. 991-1016.

Roth A.E., 2002, *The economist as engineer: Game theory, experimentation, and computation as tools for design economics*, Econometrica, vol. 70, no. 4, s. 1341-1378.
Roth A.E., Sotomayor M.A., 1992 *Two-sided matching. A study in game theoretic modeling and analysis*, http://web.stanford.edu/~alroth/papers/92_HGT_Two-SidedMatching.pdf (10.12.2015).
Ruohonen K., 2013, *Graph theory*, Tampere University of Technology, http://math.tut.fi/~ruohonen/GT_English.pdf (15.01.2016).
Shapley L.S., Gale D., 1962, *College admissions and the stability of marriage*, The American Mathematical Monthly, vol. 69, s. 9-15.
Stankiewicz W., 2013, *Kolejny sukces teorii gier: nobliści z ekonomii 2012*, Ekonomia i Prawo, tom XII, nr 1/2013, s. 33-45.
Świtalski Z., 2008, *O kojarzeniu małżeństw i rekrutacji kandydatów do szkół*, Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II: Wiadomości Matematyczne, XLIV, s. 35-46.
Wilson R.J. 2012, *Wprowadzenie do teorii grafów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
Wojciechowski J., Pieńkosz K., 2013, *Grafy i sieci*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.