PRACE NAUKOWE
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
RESEARCH PAPERS
of Wrocław University of Economics

Nr 446

Metody i zastosowania badań operacyjnych

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2016

Redakcja wydawnicza: Joanna Świrska-Korłub

Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz

Korekta: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Myszkowska

Projekt okładki: Beata Dębska

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania
znajdują się na stronach internetowych
www.pracenaukowe.ue.wroc.pl
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Publikacja udostępniona na licencji Creative Commons
Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 3.0 Polska
(CC BY-NC-ND 3.0 PL)

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2016

ISSN 1899-3192
e-ISSN 2392-0041

ISBN 978-83-7695-610-7

Wersja pierwotna: publikacja drukowana
Zamówienia na opublikowane prace należy składać na adres:
Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
ul. Komandorska 118/120, 53-345 Wrocław
tel./fax 71 36 80 602; e-mail:econbook@ue.wroc.pl
www.ksiegarnia.ue.wroc.pl

Druk i oprawa: TOTEM

Wstęp

Wstęp 7

Krzysztof Echaust: Modelowanie wartości ekstremalnych stóp zwrotu na podstawie danych śróddziennych / Modeling of extreme returns on the basis of intraday data 9
Helena Gaspars-Wieloch, Ewa Michalska: On two applications of the Omega ratio: maxΩmin and Omega(H+B) / O dwóch zastosowaniach wskaźnika Omega: maxΩmin i Omega(H+B) 21
Agata Gluzicka: Zastosowanie modelu MAD z dodatkowymi warunkami ograniczającymi / Application of the MAD model with additional constraints..... 37
Dorota Górecka, Małgorzata Szałucka: Foreign market entry mode decision – approach based on stochastic dominance rules versus multi-actor multi-criteria analysis / Wybór sposobu wejścia na rynek zagraniczny − podejście oparte na dominacjach stochastycznych a wieloaktorska analiza wielokryterialna 47
Paweł Hanczar, Dagmara Pisiewicz: Logistyka odzysku − optymalizacja przepływów w systemie gospodarki komunalnej / Reverse logistics – optimization of flows in the system of waste management 70
Michał Jakubiak, Paweł Hanczar: Optymalizacja tras zbiórki odpadów komunalnych na przykładzie MPO Kraków / Optimization of municipal solid waste collection and transportation routes on the example of MPO Cracow 83
Michał Kameduła: Zastosowanie koewolucyjnego algorytmu genetycznego w rozwiązaniu zadania trójkryterialnego / Application of co-evolutionary genetic algorithm for a three-criterion problem.. 93
Donata Kopańska-Bródka, Renata Dudzińska-Baryła, Ewa Michalska: Zastosowanie funkcji omega w ocenie efektywności portfeli dwuskładnikowych / Two-asset portfolio performance based on the omega function . 106
Marek Kośny, Piotr Peternek: Zagadnienie sposobu definiowania preferencji na przykładzie przydziału uczniów do oddziałów klasowych / Definition of preferences in the context of pupils' allocation to classes 115
Wojciech Młynarski, Artur Prędki: Ocena efektywności technicznej i finansowej wybranych nadleśnictw Lasów Państwowych za pomocą metody DEA / Technical and financial efficiency evaluation for selected forestry managements of the State Forests National Forest Holding – the DEA approach... 126

Piotr Namieciński: Alternatywna metoda określania preferencji decydenta w zagadnieniach wielokryterialnych / Alternative methods of decision-maker preferences identification in multicriteria issues 144
Marek Nowiński: Testowanie nieliniowych algorytmów optymalizacyjnych – zestaw funkcji typu *benchmark* / Testing nonlinear optimization algorithms – set of benchmark type functions 159
Agnieszka Przybylska-Mazur: Wybrana metoda analizy długoterminowej stabilności finansów publicznych / The selected method of analysis of the long-term sustainability of public finance 173
Ewa Roszkowska, Tomasz Wachowicz, Robert Jankowski: Analiza porozumienia końcowego w negocjacjach elektronicznych w kontekście zgodności systemu oceny ofert negocjatora z informacją preferencyjną/ Analyzing the negotiation agreements in a context of concordance of negotiation offer scoring systems with negotiators' preferential information 187
Aleksandra Sabo-Zielonka, Grzegorz Tarczyński: Adaptacja heurystyki *s-shape* na potrzeby wyznaczenia trasy przejścia w niestandardowym układzie strefy kompletacji zamówień / Adaptation of the s-shape heuristic for the custom layout of the order-picking zone 207
Jakub Staniak: Inicjalizacja ukrytych modeli Markowa z wykorzystaniem analizy skupień / Initialization of hidden Markov models by means of clustering analysis... 224
Paulina Szterlik: Lokalizacja magazynu centralnego z zastosowaniem metod wielokryterialnych / Location of central warehouse using quantitative research 237
Grzegorz Tarczyński: Porównanie efektywności kompletacji łączonych zleceń z kompletacją niezależną / An attempt of comparison of order batching with independent order-picking 250

Wstęp

Kolejna, XXXIV Ogólnopolska Konferencja Naukowa im. Profesora Władysława Bukietyńskiego, organizowana corocznie przez najważniejsze ośrodki naukowe zajmujące się dziedziną badań operacyjnych, w roku 2015 odbyła się w pięknym, zabytkowym i świeżo odremontowanym zespole pałacowo-parkowym w Łagowie koło Zgorzelca. Konferencję zrealizowaną pod nazwą *Metody i Zastosowania Badań Operacyjnych* przygotowała Katedra Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu pod kierownictwem dr. hab. Marka Nowińskiego, prof. UE.

Konferencje te mają już długoletnią tradycję – są to coroczne spotkania pracowników nauki specjalizujących się w badaniach operacyjnych. Głównym celem konferencji było, podobnie jak w latach ubiegłych, stworzenie (przede wszystkim dla młodych teoretyków, a także praktyków dyscypliny) forum wymiany myśli na temat najnowszych osiągnięć dotyczących metod ilościowych wykorzystywanych do wspomagania procesów podejmowania decyzji, a także prezentacja nowoczesnych zastosowań badań operacyjnych w różnych dziedzinach gospodarki. Ten cenny dorobek naukowy nie może być zapomniany i jest publikowany po konferencji w postaci przygotowywanego przez organizatorów zeszytu naukowego zawierającego najlepsze referaty na niej zaprezentowane.

W pracach Komitetu Naukowego Konferencji uczestniczyli czołowi przedstawiciele środowisk naukowych z dziedziny badań operacyjnych w Polsce; byli to: prof. Jan B. Gajda (Uniwersytet Łódzki), prof. Stefan Grzesiak (Uniwersytet Szczeciński), prof. Bogumił Kamiński (SGH w Warszawie), prof. Ewa Konarzewska-Gubała (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), prof. Donata Kopańska-Bródka, prof. Maciej Nowak i prof. Tadeusz Trzaskalik (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), prof. Dorota Kuchta (Politechnika Wrocławska), prof. Krzysztof Piasecki (Uniwersytet w Poznaniu) i prof. Józef Stawicki (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu).

Zakres tematyczny konferencji obejmował teoretyczne i praktyczne zagadnienia dotyczące przede wszystkim:

- modelowania i optymalizacji procesów gospodarczych,
- metod wspomagających proces negocjacji,
- metod oceny efektywności i ryzyka na rynku kapitałowym i ubezpieczeniowym,
- metod ilościowych w transporcie i zarządzaniu zapasami,
- metod wielokryterialnych,
- optymalizacji w zarządzaniu projektami oraz analizy ryzyka decyzyjnego.

W konferencji wzięło udział 43 przedstawicieli różnych środowisk naukowych, licznie reprezentujących krajowe ośrodki akademickie. W trakcie sześciu sesji plenarnych, w tym dwóch sesji równoległych, przedstawiono 27 referatów, których poziom naukowy w przeważającej części był bardzo wysoki. Zaprezentowane referaty, po pozytywnych recenzjach, zostają dziś opublikowane w Pracach Naukowych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu w postaci artykułów naukowych w specjalnie wydanym zeszycie konferencyjnym.

Przypominając przebieg konferencji, nie można nie wspomnieć o konkursie zorganizowanym dla autorów referatów niebędących samodzielnymi pracownikami nauki. Dotyczył on prezentacji najciekawszego zastosowania badań operacyjnych w praktyce gospodarczej. Komitet Organizacyjny Konferencji powołał kapitułę konkursu, w której skład weszli: prof. Ewa Konarzewska-Gubała – przewodnicząca, prof. Jan Gajda, prof. Stefan Grzesiak i prof. Donata Kopańska-Bródka. Członkowie Komisji Konkursowej oceniali referaty ze względu na:

- innowacyjność, oryginalność metody będącej przedmiotem zastosowania,
- znaczenie zastosowania dla proponowanego obszaru,
- stopień zaawansowania implementacji metody w praktyce.

Spośród 15 referatów zgłoszonych wyróżniono: 1. miejsce: dr Michał Jakubiak i dr hab. Paweł Hanczar (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Optymalizacja tras zbiórki odpadów komunalnych na przykładzie MPO Kraków*; 2. miejsce: mgr Dagmara Piesiewicz i dr hab. Paweł Hanczar (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Logistyka odzysku – optymalizacja przepływów w systemie gospodarki komunalnej*; 3. miejsce: dr Dorota Górecka i dr Małgorzata Szałucka (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu), *Wybór sposobu wejścia na rynek zagraniczny – wieloaktorska analiza wielokryterialna a podejście oparte na dominacjach stochastycznych*.

Przy okazji prezentowania opracowania poświęconego XXXIV Konferencji *Metody i Zastosowania Badań Operacyjnych* i jej bardzo wartościowego dorobku nie możemy nie podziękować członkom Komitetu Organizacyjnego Konferencji, w którego skład wchodzili młodzi, acz doświadczeni pracownicy Katedry Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu: dr Piotr Peternek (sekretarz), dr hab. Marek Kośny, dr Grzegorz Tarczyński oraz mgr Monika Stańczyk (biuro konferencji). Zapewnili oni w sposób profesjonalny sprawne przygotowanie i przeprowadzenie całego przedsięwzięcia oraz zadbali o sprawy administracyjne związane z realizacją konferencji, a także byli odpowiedzialni za dopilnowanie procesu gromadzenia i redakcji naukowych materiałów pokonferencyjnych, które mamy okazję Państwu dziś udostępnić.

Już dzisiaj cieszymy się na nasze kolejne spotkanie w ramach jubileuszowej XXXV Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej im. Profesora Władysława Bukietyńskiego, która tym razem będzie organizowana przez naszych przyjaciół z Katedry Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu pod kierownictwem prof. dr. hab. Krzysztofa Piaseckiego.

Marek Nowiński

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS nr 446 • 2016

Metody i zastosowania badań operacyjnych ISSN 1899-3192
e-ISSN 2392-0041

Donata Kopańska-Bródka, Renata Dudzińska-Baryła
Ewa Michalska
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
e-mails: broda@ue.katowice.pl; renata.dudzinska@ue.katowice.pl;
ewa.michalska@ue.katowice.pl

ZASTOSOWANIE FUNKCJI OMEGA W OCENIE EFEKTYWNOŚCI PORTFELI DWUSKŁADNIKOWYCH

TWO-ASSET PORTFOLIO PERFORMANCE BASED ON THE OMEGA FUNCTION

DOI: 10.15611/pn.2016.446.08
JEL Classification: C02, G11

Streszczenie: Zaproponowana w 2002 roku przez Keatinga i Shadwicka funkcja omega jest wykorzystywana w ocenie efektywności inwestycji (np. funduszy inwestycyjnych, akcji). Funkcja ta uwzględnia wszystkie informacje dotyczące rozkładu losowych stóp zwrotu inwestycji, uwzględnia także preferencje inwestora, wyrażane wartością progową, względem której wyniki inwestycji ocenia się jako zyski lub straty. Kluczowe znaczenie dla praktycznego wykorzystania funkcji omega w ocenie inwestycji ma znajomość jej analitycznej postaci. Celem pracy jest przedstawienie podstawowych własności funkcji omega oraz wyprowadzenie analitycznej postaci tej funkcji dla portfeli dwuskładnikowych przy założeniu wybranych ciągłych rozkładów losowych stóp zwrotu. Rozpatrywane będą portfele dwuskładnikowe złożone z aktywów ryzykownych i wolnych od ryzyka, jak również portfele zawierające wyłącznie aktywa ryzykowne.

Słowa kluczowe: funkcja omega, wskaźnik efektywności, rozkład ciągły, portfel dwuskładnikowy.

Summary: The omega function, proposed by Keating and Shadwick in 2002, is used in a valuation of the performance of investments (eg. stock or mutual funds). This function takes into account all the information concerning the distribution of random rates of return of investment as well as the investor's preferences expressed by the threshold, in respect of which investment outcome is understood as a relative gain or relative loss. Knowing its analytical form is crucial for the practical use of the omega function in a valuation of investment. The aim of this paper is to present the main properties of the omega functions and to derive the analytical form of this function for the two-asset portfolios assuming selected continuous distributions of returns. Portfolios composed of risky and risk-free assets and portfolios containing only riksy assets will be considered.

Keywords: omega function, performance measure, continuous distribution, two-asset portfolio.

1. Wstęp

Jednym z głównych obszarów zastosowań funkcji omega jest ocena efektywności inwestycji, w tym efektywności portfela inwestycyjnego [Mausser i in. 2006; Kapsos i in. 2014; Michalska, Kopańska-Bródka 2015]. W ostatnich latach powstają także publikacje, w których prezentowane są nowe obszary zastosowań funkcji omega [Cascon i in. 2002; Nguyen 2009; Michalska 2015], jak również jej modyfikacje i związki z innymi miarami [Farinelli, Tibiletti 2002; Kaplan, Knowles 2004; Kazemi i in. 2004; Kaplan 2005; Michalska, Dudzińska-Baryła 2015]. Kluczowe znaczenie dla praktycznego wykorzystania funkcji omega w ocenie efektywności inwestycji ma znajomość jej analitycznej postaci. Funkcja omega, stosowana do oceny efektywności portfela wieloskładnikowego, zależy od struktury portfela i funkcji omega jego poszczególnych składników. Trudność w wyznaczeniu jej postaci w formie zależności matematycznej polega na tym, iż jest to funkcja zależna od rozkładów prawdopodobieństwa składowych portfela. W dalszej części artykułu pokazano, że dla portfeli dwuskładnikowych funkcję omega można w sposób dokładny wyznaczyć, jeśli tylko stopy zwrotu mają rozkład jednostajny.

W praktyce inwestycyjnej portfele dwuskładnikowe mają fundamentalne znaczenie. Portfele takie stosowane są do wyznaczania optymalnej alokacji kapitału w instrumenty ryzykowne i instrumenty wolne od ryzyka oraz do wspomagania decyzji dotyczących określenia wielkości udziału inwestycji na rynku wewnętrznym i międzynarodowym. Ponadto subfundusze w ramach otwartych funduszy inwestycyjnych (OFI) są najczęściej portfelami dwuskładnikowymi, w których odpowiedni procent funduszy inwestowany jest na rynku akcji, a pozostała część aktywów to instrumenty dłużne, np. obligacje Skarbu Państwa, bony skarbowe itp. Rodzaje subfunduszy w ramach otwartych funduszy inwestycyjnych zależą od struktury takiego portfela dwuskładnikowego. Fundusze akcji to portfele agresywne, w których udział funduszu inwestowanego na rynku akcji jest wysoki, natomiast subfundusze zrównoważone i stabilnego wzrostu to portfele z większym udziałem instrumentów wolnych od ryzyka. Zatem dla osoby decydującej się na inwestycje w jednostki OFI istotny jest tylko łączny udział instrumentów ryzykownych i wolnych od ryzyka, czyli portfel dwuskładnikowy.

Celem pracy jest przedstawienie podstawowych własności funkcji omega oraz wyprowadzenie analitycznej postaci tej funkcji dla portfeli dwuskładnikowych przy założeniu wybranych ciągłych rozkładów losowych stóp zwrotu.

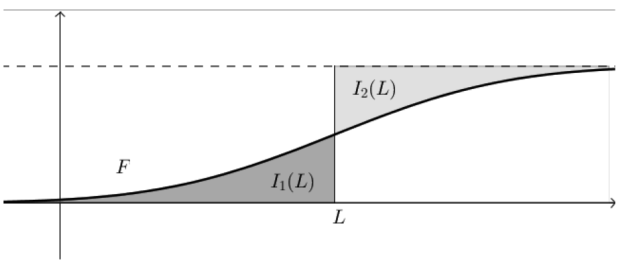
2. Definicja funkcji omega i jej własności

Poszukiwania miary efektywności uwzględniającej wszystkie informacje o rozkładzie zmiennej losowej doprowadziły do zaproponowania przez Keatinga i Shadwicka w 2002 roku funkcji omega [Keating, Shadwick 2002]. Funkcja ta jest definiowana jako następujący iloraz:

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b (1 - F(t))\,dt}{\int_a^L F(t)\,dt}, \tag{1}$$

gdzie F oznacza dystrybuantę zmiennej losowej X, symbolem $L \in (a;\, b)$ oznaczono wartość progową (punkt referencyjny), względem której realizacje zmiennej losowej X są dzielone na wartości pożądane przez decydenta (wartości większe od L) oraz wartości niepożądane (wartości mniejsze od L). Zmienna losowa X może oznaczać np. losową stopę zwrotu inwestycji, a wartość progowa L − określony przez decydenta poziom stopy zwrotu, wtedy wartość funkcji omega jest ilorazem wartości oczekiwanej zysków i wartości oczekiwanej strat (zysków i strat względem wartości progowej L).

Funkcja omega jest funkcją ciągłą i malejącą na $(a;\, b)$, a jej wartości należą do przedziału $(0;\, +\infty)$. Jeśli wartość progowa L jest równa wartości oczekiwanej zmiennej losowej X ($L = \mathrm{E}(X)$), to funkcja omega przyjmuje wartość 1. Dla funkcji dystrybuanty F zmiennej losowej X (rys. 1), funkcję omega przedstawia się graficznie jako stosunek pól obszarów $I_2(L)$ oraz $I_1(L)$.



Rys. 1. Geometryczna interpretacja funkcji omega

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Keating, Shadwick 2002].

Wartość funkcji omega dla ustalonej wartości progowej $L = L_0$ jest nazywana wskaźnikiem omega i wyraża oczekiwany względny zysk przypadający na jednostkę oczekiwanych względnych strat. Porównując dwa warianty decyzyjne na podstawie wyznaczonych wartości wskaźnika omega, preferowany będzie ten wariant, dla którego wartość wskaźnika omega jest większa.

3. Funkcja omega dla portfeli dwuskładnikowych

W punkcie tym przedstawimy postać funkcji omega dla portfeli dwuskładnikowych zawierających aktywa ryzykowne i wolne od ryzyka oraz portfeli dwuskładnikowych zawierających wyłącznie aktywa ryzykowne.

Rozważmy zmienną losową X o rozkładzie jednostajnym U (a; b) i dystrybuancie

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & dla \;\; x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & dla \;\; a \le x < b \\ 1 & dla \;\; x \ge b \end{cases}. \tag{2}$$

Funkcja omega zmiennej losowej X ma następującą postać analityczną [Michalska, Dudzińska-Baryła 2015]

$$\Omega_X(L) = \left(\frac{L-b}{a-L}\right)^2 \quad dla \;\; L \in (a,b). \tag{3}$$

Dla zmiennej losowej $Y = \alpha_1 X + \alpha_2$ będącej transformacją liniową zmiennej losowej X o rozkładzie jednostajnym U(a; b), funkcja omega ma postać [Michalska, Kopańska 2015]

$$\Omega_Y(L) = \Omega_X(L) \cdot \left(\frac{\alpha_1 + \dfrac{\alpha_2 - L(1-\alpha_1)}{b-L}}{\alpha_1 + \dfrac{L(1-\alpha_1) - \alpha_2}{L-a}} \right)^2 \quad dla \;\; L \in (\alpha_1 a + \alpha_2, \alpha_1 b + \alpha_2). \tag{4}$$

Funkcja omega zmiennej losowej Y jest więc iloczynem funkcji omega zmiennej losowej X oraz czynnika zależnego od parametrów a, b, α_1, α_2 .

Inwestor, tworząc portfel inwestycyjny, często rozważa inwestycję kapitału w dwa rodzaje aktywów: aktywa ryzykowne (np. akcje) oraz wolne od ryzyka (np. bony skarbowe). Oznaczając udział akcji w portfelu symbolem (w), a udział aktywów wolnych od ryzyka jako (1 – w), przy czym $w \ge 0$ (brak krótkiej sprzedaży), stopę zwrotu portfela R_P wyrażamy zależnością

$$R_P = wR + (1-w)R_f , \tag{5}$$

gdzie: R – stopa zwrotu akcji, R_f – stopa zwrotu aktywów wolnych od ryzyka.

Stopa zwrotu portfela R_P jest więc transformacją liniową zmiennej losowej R. Jeśli założy się, że stopa zwrotu akcji R jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym U(a; b), funkcja omega zmiennej losowej R_P przyjmuje (na podstawie zależności (4)) postać (6) dla $L \in (wa + (1-w)R_f , \;\; wb + (1-w)R_f)$

$$\Omega_{R_P}(L) = \Omega_R(L) \cdot \left(\frac{w + \dfrac{(R_f - L)(1-w)}{b-L}}{w + \dfrac{(L-R_f)(1-w)}{L-a}} \right)^2 . \tag{6}$$

Funkcja omega dla portfela dwuskładnikowego zawierającego aktywa wolne od ryzyka R_f i aktywa ryzykowne R jest zależna od funkcji omega zmiennej losowej R oraz czynnika zależnego od parametrów a, b, stopy zwrotu wolnej od ryzyka R_f i udziałów aktywów w portfelu [Michalska, Kopańska-Bródka 2015]. Przyjęcie rozkładu jednostajnego losowej stopy zwrotu akcji jest uzasadnione, gdy analizowane realizacje zmiennej losowej dotyczą krótkiego okresu.

Inny wariant portfela dwuskładnikowego to portfel zawierający wyłącznie aktywa ryzykowne R_1 i R_2, przy czym zakładamy, że zmienne losowe R_1 i R_2 są niezależne oraz zmienna losowa R_1 ma rozkład jednostajny U (a; b), a zmienna R_2 ma rozkład jednostajny U (c; d). Wyprowadzona przez nas postać analityczna funkcji omega takiego portfela jest zależna od wartości udziałów, a także od wartości parametrów *a, b, c, d.*

(1) Dla $w \le \dfrac{d-c}{b-a+d-c}$

$$\Omega_{R_P}^{(1)}(L) = \begin{cases} \Omega_1^{(1)}(L) & dla \quad aw + (1-w)c \le L \le bw + (1-w)c \\ \Omega_2^{(1)}(L) & dla \quad bw + (1-w)c \le L \le aw + (1-w)d \\ \Omega_3^{(1)}(L) & dla \quad aw + (1-w)d \le L \le bw + (1-w)d \end{cases}, \tag{7}$$

gdzie:

$$\Omega_1^{(1)}(L) = \frac{wa + (1-w)d - L - \dfrac{(b-a)^3 w^3 - (L + c(w-1) - aw)^3}{6(b-a)(d-c)(w-1)w} + \dfrac{d(1-w) + c(w-1) + (a-b)w}{2} - \dfrac{(a-b)^2 w^2}{6(c-d)(w-1)}}{\dfrac{(-L + c(1-w) + aw)^3}{6(b-a)(d-c)(w-1)w}},$$

$$\Omega_2^{(1)}(L) = \frac{wa + (1-w)d - L - \dfrac{3(L + d(w-1) - aw)((d-2c)(1-w) + L - bw) + (a-b)^2 w^2}{6(d-c)(w-1)}}{\dfrac{(a-b)^2 w^2 + 3(L - aw + c(w-1))(L - bw + c(w-1))}{6(c-d)(w-1)}},$$

$$\Omega_3^{(1)}(L) = \frac{\dfrac{(L - d(w-1) - bw)^3}{6(b-a)(d-c)(w-1)w}}{\dfrac{(a-b)^2 w^2}{6(c-d)(w-1)} + \dfrac{(d-c)((1-w) + (a-b)w}{2} - \dfrac{(b-a)^3 w^3 + (L + d(w-1) - bw)^3}{6(b-a)(d-c)(w-1)w} + L - wa + (w-1)d}.$$

(2) Dla $w \ge \dfrac{d-c}{b-a+d-c}$

$$\Omega_{R_P}^{(2)}(L) = \begin{cases} \Omega_1^{(2)}(L) & dla \quad aw + (1-w)c \le L \le aw + (1-w)d \\ \Omega_2^{(2)}(L) & dla \quad aw + (1-w)d \le L \le bw + (1-w)c, \\ \Omega_3^{(2)}(L) & dla \quad bw + (1-w)c \le L \le bw + (1-w)d \end{cases} \tag{8}$$

gdzie:

$$\Omega_1^{(2)}(L)=\frac{wb+(1-w)c-L+\dfrac{(c-d)^3(w-1)^3-(L+c(w-1)-aw)^3}{6(b-a)(d-c)(w-1)w}+\dfrac{(d-c)(w-1)+(b-a)w}{2}-\dfrac{(c-d)^2(w-1)^2}{6(b-a)(w-1)}}{\dfrac{(-L+c(1-w)+aw)^3}{6(b-a)(d-c)(w-1)w}},$$

$$\Omega_2^{(2)}(L)=\frac{wb+(1-w)c-L+\dfrac{3((L+c(w-1)-bw)(L+(b-2a)w+d(w-1))+(a-b)^2w^2)-(c-d)^2(w-1)^2}{6(b-a)w}}{\dfrac{(c-d)^2(w-1)^2+3(L-aw+d(w-1))(L-aw+c(w-1))}{6(b-a)w}},$$

$$\Omega_3^{(1)}(L)=\frac{\dfrac{(L+d(w-1)-bw)^3}{6(b-a)(d-c)(w-1)w}}{\dfrac{(c-d)^2(w-1)^2}{6(b-a)w}+\dfrac{(d-c)(w-1)+(b-a)w}{2}+\dfrac{(c-d)^3(w-1)^3+(L+d(w-1)-bw)^3}{6(b-a)(d-c)(w-1)w}+L-wb-(w-1)c}.$$

Przedstawione w pracy analityczne postaci funkcji omega dla portfeli dwuskładnikowych zawierających aktywa ryzykowne i wolne od ryzyka oraz portfeli dwuskładnikowych zawierających wyłącznie aktywa ryzykowne mogą być stosowane przy założeniu rozkładu jednostajnego losowych stóp zwrotu. Ponadto zmienne losowe wchodzące w skład portfela ryzykownego muszą być niezależne.

4. Ocena efektywności portfeli dwuskładnikowych

Przykład zamieszczony w dalszej części ilustruje zastosowanie proponowanych funkcji omega w ocenie efektywności portfeli dwuskładnikowych. W przykładzie porównano dwa portfele dwuskładnikowe. W skład pierwszego portfela (portfel $P1$) wchodzi indeks WIG20 oraz aktywa wolne od ryzyka o stopie zwrotu R_f. Natomiast drugi portfel (portfel $P2$) składa się z dwóch składników obarczonych ryzykiem, tj. z indeksu WIG20 i indeksu DJIA. W obliczeniach wykorzystano stopy zwrotu z okresu 22.01.2015-4.03.2015, czyli 30 obserwacji. Taka długość szeregu z jednej strony pozwala na wysunięcie (statystycznie istotnych) wniosków, a z drugiej strony, w przypadku tak krótkiego szeregu, uzasadnione jest założenie dotyczące jednostajnego rozkładu stóp zwrotu.

Celem tego przykładu jest ocena i porównanie efektywności portfela zawierającego aktywa ryzykowne i wolne od ryzyka ($P1$) oraz międzynarodowego portfela ryzykownego ($P2$) w oparciu o wskaźnik efektywności inwestycji – wskaźnik omega. Stopy zwrotu portfeli odpowiednio $P1$ i $P2$ wyrażają następujące zależności:

$$R_{P1}=wR_{\mathrm{WIG20}}+(1-w)R_f \tag{9}$$

oraz

$$R_{P2}=wR_{\mathrm{WIG20}}+(1-w)R_{\mathrm{DJIA}}, \tag{10}$$

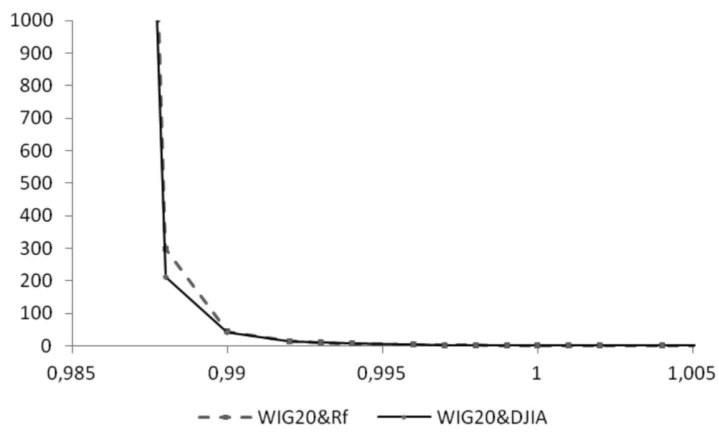
gdzie: R_{P1} – stopa zwrotu portfela $P1$, R_{P2} – stopa zwrotu portfela $P2$, R_{WIG20} – stopa zwrotu indeksu WIG20, R_f – stopa zwrotu aktywów wolnych od ryzyka, R_{DJIA} – stopa zwrotu indeksu DJIA, w – udział indeksu WIG20 w portfelach $P1$ i $P2$.

W przykładzie przyjęto, że stopy zwrotu indeksów WIG20 i DJIA mają rozkład jednostajny na przedziale między najmniejszą i największą wartością zaobserwowaną w badanym okresie, przy czym stopa zwrotu jest liczona jako iloraz kursu w danym dniu w stosunku do kursu z dnia poprzedniego. Otrzymano zatem dla $R_{\mathrm{WIG20}} \sim \mathrm{U}(0{,}985091;\ 1{,}013808)$, z kolei dla $R_{\mathrm{DJIA}} \sim \mathrm{U}(0{,}983512;\ 1{,}017589)$. Natomiast dzienną stopę zwrotu aktywów wolnych od ryzyka przyjęto na poziomie 5% w skali roku, co daje $R_f = 1{,}000139$. Wyniki testu Kołmogorowa-Smirnowa dla obu indeksów pozwoliły na przyjęcie hipotezy o rozkładzie jednostajnym w podanych przedziałach (tab. 1). Stwierdzono także niezależność (nieskorelowanie) obu zmiennych losowych.

Tabela 1. Wyniki testu Kołmogorowa-Smirnowa

Podsumowanie testu hipotezy				
	Hipoteza zerowa	Test	Istotność	Decyzja
1	Rozkład zmiennej R_WIG20 jest jednostajny z minimum 0,985091 i maksimum 1,013808	Test Kołmogorowa-Smirnowa dla jednej próby	0,066	Przyjmij hipotezę zerową
2	Rozkład zmiennej R_DJIA jest jednostajny z minimum 0,983512 i maksimum 1,017589	Test Kołmogorowa-Smirnowa dla jednej próby	0,292	Przyjmij hipotezę zerową
Przedstawiono asymptotyczne istotności. Poziom istotności wynosi 0,05.				

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem programu SPSS.



Rys. 2. Wartości funkcji omega portfeli dwuskładnikowych $P1$ i $P2$ dla w = 0,9

Źródło: opracowanie własne.

Następnie za pomocą wskaźnika omega (dla $L \in \langle 0,985; 1,0138 \rangle$) oceniono portfele o zadanym udziale indeksu WIG20 (dla $w \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$). Rysunek 2 przedstawia wartości funkcji omega dla obu portfeli dwuskładnikowych i wybranej wartości $w = 0,9$.

Analiza efektywności portfeli dla zadanych udziałów pokazała, że dla każdej pary portfeli dwuskładnikowych istnieje takie L_0, że dla $L \leq L_0$ portfel zawierający aktywa wolne od ryzyka jest bardziej efektywny niż portfel zawierający wyłącznie aktywa ryzykowne (indeksy WIG20 i DJIA). Dla $L \geq L_0$ sytuacja jest odwrotna. W przypadku portfeli, dla których $w = 0,9$ wspomniana wartość $L_0 \in \langle 0,993; 0,994 \rangle$. W tabeli 2 zestawiono wartości L_0 wyznaczone dla rozważanych portfeli z dokładnością do 0,001.

Tabela 2. Wartość L_0, dla której następuje zmiana preferowanego portfela

Udział WIG20	L_0 (z dokł. do 0,001)
$w = 0,1$	$\langle 1,000; 1,001 \rangle$
$w = 0,2$	$\langle 0,999; 1,000 \rangle$
$w = 0,3$	$\langle 0,999; 1,000 \rangle$
$w = 0,4$	$\langle 0,999; 1,000 \rangle$
$w = 0,5$	$\langle 0,999; 1,000 \rangle$
$w = 0,6$	$\langle 0,998; 0,999 \rangle$
$w = 0,7$	$\langle 0,998; 0,999 \rangle$
$w = 0,8$	$\langle 0,996; 0,997 \rangle$
$w = 0,9$	$\langle 0,993; 0,994 \rangle$

Źródło: obliczenia własne.

W analizowanych portfelach wraz ze wzrostem udziału indeksu WIG20 maleje wartość progowa, powyżej której preferowany jest portfel zawierający wyłącznie aktywa ryzykowne.

5. Zakończenie

Wyprowadzenie postaci analitycznej funkcji omega dla portfeli dwuskładnikowych (przy założeniu rozkładu jednostajnego i niezależności losowych składników portfela) umożliwia ocenę efektywności tych portfeli. Co więcej, dla każdej pary portfeli dwuskładnikowych można określić zakres wartości progowej, dla którego jeden z analizowanych portfeli jest preferowany nad drugim. W analizowanym przykładzie dla niższych wartości progowych preferowany był portfel zawierający aktywa wolne od ryzyka, natomiast dla wyższych wartości progowych preferowany był portfel zawierający wyłącznie aktywa ryzykowne. Wyniki badań nad wpływem wartości progowej na efektywność portfela prezentuje także Vilkancas w pracy [Vilkancas 2014]. Uzyskane przez niego wyniki świadczą o tym, że portfele o maksymalnej wartości funkcji omega, wyznaczone dla wyższych wartości progowych, charakteryzowały się wyższymi stopami zysku, jednakże odbywało się to kosztem równoczesnego wzrostu ich ryzyka. Obserwacja ta jest zgodna z naszymi wynikami stanowiącymi, że dla wyższych wartości progowych preferowany jest portfel zawierający wyłącznie aktywa ryzykowne.

Literatura

Cascon A., Keating C., Shadwick W., 2002, *The Mathematics of the Omega Function*, The Finance Development Centre, London.

Farinelli S., Tibiletti L., 2002, *Sharpe Thinking with Asymmetrical Preferences*, Social Science Research, http://www.edge-fund.com/FaTi02.pdf.

Kaplan P., 2005, *A Unified Approach to Risk-Adjusted Performance*, http://corporate.morningstar.com.

Kaplan P., Knowles J., 2004, *Kappa: A generalized downside risk-adjusted performance measure*, Journal of Performance Measurement, vol. 8, s. 42-54.

Kapsos M., Christofides N., Rustem B., 2014, *Worst-case robust omega ratio*, European Journal of Operational Research, vol. 234, no. 2, s. 499-507.

Kazemi H., Schneeweis T., Gupta R., 2004, *Omega as a performance measure*, Journal of Performance Measurement, vol. 8, s. 16-25.

Keating C., Shadwick W., 2002, *A universal performance measure*, Journal of Performance Measurement, vol. 6, s. 59-84.

Mausser H., Saunders D., Seco L., 2006, *Optimizing Omega*, [w:] *Risk, Incisive Media Limited*, tom 19, wyd. 11, s. 88-92.

Michalska E., 2015, *Zastosowanie wskaźnika omega w podejmowaniu decyzji przy niepełnej informacji liniowej*, [w:] *Badania operacyjne. Przykłady zastosowań*, Gajda J.B., Jadczak R. (red.), Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, s. 153-165.

Michalska E., Dudzińska-Baryła R., 2015, *Związek funkcji omega z dominacją stochastyczną*, Studia Ekonomiczne, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, nr 237, s. 70-78.

Michalska E., Dudzińska-Baryła R., 2015, *Wskaźnik omega w ocenie wariantów decyzyjnych o rozkładach ciągłych*, Studia Ekonomiczne, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, nr 241, s. 112-124.

Michalska E., Kopańska-Bródka D., 2015, *The Omega Function for Continuous Distribution*, [w:] C*onference Proceedings, 33rd International Conference Mathematical Methods in Economics*, red. Martinčik D., Ircingowá J., Janeček P., University of West Bohemia, Plzeň, s. 543-548.

Nguyen V.N., 2009, *Omega Function: A Theoretical Introduction*, http://scholarspace.manoa.hawaii.edu/handle/10125/25918.

Vilkancas R., 2014, *Characteristics of omega-optimized portfolios at different levels of threshold returns*, Business, Management and Education, vol. 12, no. 2, s. 245-265.