WSPÓŁCZYNNIK NIERÓWNOMIERNOŚCI ZENGI ROZKŁADU DOCHODÓW – WYBRANE ZAGADNIENIA

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 7 (13)
PL ISSN 1644-6739

Karolina Mihilewicz
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

1. Cel i zakres

Celem opracowania jest prezentacja i próba oceny współczynnika Zengi opisującego nierównomierność w rozkładzie cechy. W niniejszym opracowaniu przedstawione zostanie jego zastosowanie w kontekście rozkładu dochodów. Miernik ten został zaproponowany przez Michele Zengę w artykule zatytuowanym *Inequality curve and inequality index based on the ratios between lower and upper arithmetic means* [Zenga 2007, s. 3-27]. Omawiany współczynnik opiera się na dolnej i górnej średniej arytmetycznej. Warto wspomnieć, iż przez pojęcie współczynnika nierównomierności Zengi rozumieć można również sformułowane w latach 1984 oraz 1990 [Dagum, Zenga 1990] dwa inne współczynniki, których znaczenie zostało podkreślone chociażby przez zamieszczenie ich w Encyclopedia of Statistical Sciences. Ilekroć jednak w opracowaniu mowa będzie o współczynniku nierównomierności Zengi, utożsamiać go należy z najnowszą propozycją włoskiego statystyka.

2. Oznaczenia

Wszystkie wykorzystane w opracowaniu oznaczenia zostały zaczerpnięte z pracy [Zenga 2007].

Niech X będzie nieujemną, ciągłą zmienną losową, natomiast $x_j \in R_+$, gdzie $j \in N \setminus \{0\}$, niech będą realizacjami tej zmiennej.

Sposobem prezentacji N realizacji będzie szereg rozdzielczy, który budują pary $\{(x_j, n_j): j = 1, \ldots, s; 0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_s; \sum n_j = N\}$.

Ponadto wprowadzone zostają oznaczenia:

- liczebności skumulowane:

$$N_j = \sum_{i=1}^{j} n_i \quad \text{dla } j = 1, \ldots, s,$$

szczególnie $N_s = N$,

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

Nr 7 (13)

- częstości skumulowane:

$$p_j = \frac{N_j}{N} \text{ dla } j = 1, \dots, s,$$

- sumy realizacji nie większych od x_j:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{j} x_i n_i \text{ dla } j = 1, \dots, s,$$

szczególnie Q_s będzie oznaczane literą T.

Niech $M, M^-_{(p_j)}, M^+_{(p_j)}$ oznaczają odpowiednio: średnią arytmetyczną, dolną średnią oraz górną średnią. Wielkości te wyrażane są zgodnie z poniższymi wzorami:

- dolna średnia

$$M^-_{(p_j)} = \frac{Q_j}{N_j} = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{j} x_j n_j \text{ dla } j = 1, \dots, s,$$

- górna średnia

$$M^+_{(p_j)} = \frac{T - Q_j}{N - N_j} \text{ dla } j = 1, \dots, s-1,$$

$$M^+_{(p_j)} = x^*_{s+1} \text{ dla } j = s, \text{ gdzie } x^*_{s+1} \geq x_s .$$

W praktyce przyjmuje się, że $x^*_{s+1} = x_s$, by niepotrzebnie nie zawyżać górnej średniej. Łatwo zauważyć, że N uporządkowanych rosnąco realizacji zostaje podzielonych na dwie grupy. Miejscem podziału jest realizacja x_j, dla $j = 1, \dots, s$. Dolna średnia jest zatem średnią arytmetyczną realizacji mniejszych od x_j bądź równych x_j, przy $j = 1, \dots, s$, górna średnia zaś jest średnią arytmetyczną realizacji większych od x_j, przy $j = 1, \dots, s-1$ (dla $j = s$ mamy $M^+ = x_s$). Można zatem wyznaczyć s par dolnych i górnych średnich. Na ich gruncie tworzona jest miara nierównomierności rozkładów analizowanych realizacji.

3. Współczynnik nierównomierności Zengi

Nierównomierność pomiędzy „dolną grupą” $\{(x_1, n_1), \dots, (x_j, n_j)\}$ a odpowiadającą jej „górną grupą” $\{(x_{j+1}, n_{j+1}), \dots, (x_s, n_s), (x^*_{s+1}, 0)\}$ określa następująca wartość indeksu:

$$I_{(p_j)} = \frac{M^+_{(p_j)} - M^-_{(p_j)}}{M^+_{(p_j)}} = 1 - \frac{M^-_{(p_j)}}{M^+_{(p_j)}} \text{ dla } j = 1, \dots, s.$$

Wartości $I_{(p_j)}$ mieszczą się w przedziale $[0;1]$.

Miernikiem I nierównomierności rozkładu zaproponowanym przez Michele Zengę jest średnia ważona poszczególnych indeksów $I_{(p_j)}$ branych z wagami $\frac{n_j}{N}$:

$$I = \sum_{j=1}^{s} I_{(p_j)} \cdot \frac{n_j}{N}.$$

Miarę I będziemy nazywać współczynnikiem nierównomierności Zengi.

Twórca miernika opartego na górnej i dolnej średniej dodatkowo proponuje diagram ilustrujący nierównomierność. W prostokątnym układzie współrzędnych tworzy się s prostokątów o bokach równoległych do osi układu współrzędnych zgodnie z następującą procedurą: pierwszy prostokąt zbudowany jest z odciętych na odcinku $[0;\ p_1\ ]$ oraz rzędnych na odcinku $[0; I_{(p_1)}\ ]$. Analogicznie j-ty prostokąt $(j = 2, \dots, s)$ budują odcinki odciętych $[p_{j-1}; p_j\ ]$ oraz rzędnych $[0; I_{(p_j)}\ ]$. Pole powierzchni j-tego prostokąta $(j = 1, \dots, s)$ jest więc równe $I_{(p_j)} \cdot \frac{n_j}{N}$. Suma pól powierzchni wszystkich prostokątów jest wartością zdefiniowanego wcześniej współczynnika nierównomierności Zengi.

Przykład

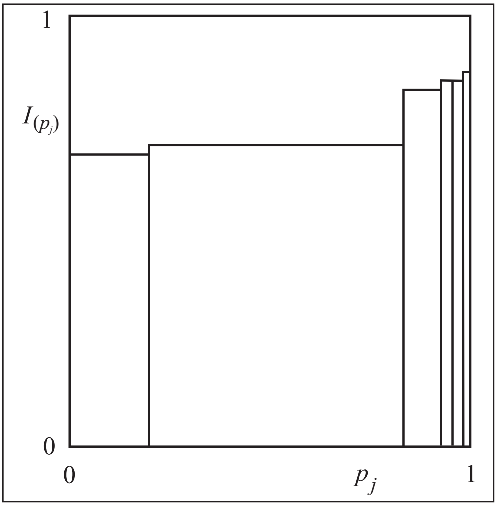
Tabela 1 zawiera wyniki obliczeń dla przykładowego szeregu rozdzielczego zbudowanego z par $\{(1{,}1; 20), (2{,}5; 64), (4{,}5; 11), (10; 2), (15; 2), (20; 1)\}$.

Tabela 1. Wyniki przykładowych obliczeń

j	x_j	n_j	N_j	$N - N_j$	p_j	$\frac{n_j}{N}$	$x_j n_j$	Q_j	$T - Q_j$	$M^-_{(p_j)}$	$M^+_{(p_j)}$	$I_{(p_j)}$
1	1,10	20	20	80	0,20	0,20	22,0	22,0	279,5	1,10	3,49	0,69
2	2,50	64	84	16	0,84	0,64	160,0	182,0	119,5	2,17	7,47	0,71
3	4,50	11	95	5	0,95	0,11	49,5	231,5	70,0	2,44	14,00	0,83
4	10,00	2	97	3	0,97	0,02	20,0	251,5	50,0	2,59	16,67	0,84
5	15,00	2	99	1	0,99	0,02	30,0	281,5	20,0	2,84	20,00	0,86
6	20,00	1	100	0	1,00	0,01	20,0	301,5	0,0	3,02	20,00	0,85

ródło: opracowanie własne.

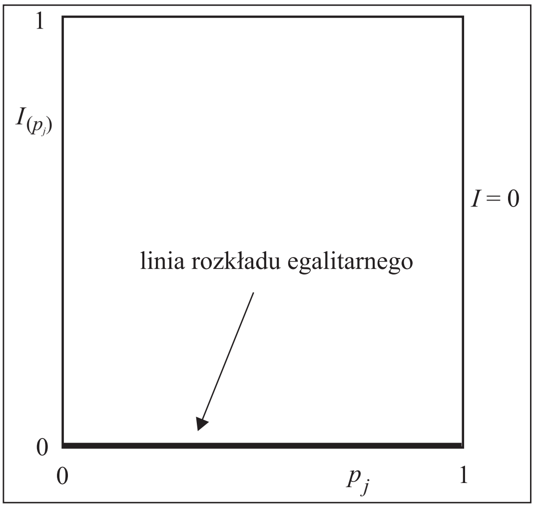
Współczynnik nierównomierności wynosi 0,7248. Rysunek 1 przedstawia diagram odpowiadający powyższemu przykładowi.



Rys. 1. Przykładowy diagram

ródło: opracowanie własne.

4. Współczynnik Zengi jako miara nierównomierności w rozkładzie dochodów



Rys. 2. Diagram ilustrujący brak nierównomierności

ródło: [Zenga 2007].

Podstawową cechą rozkładu dochodów ludności jest jego jednomodalność oraz asymetria prawostronna. Jest to prawidłowość obserwowana niezależnie od kraju czy też czasu. Rozkład dochodów opisywany może być m.in. przez funkcję w przybliżeniu opisującą rozkład, histogram rozkładu empirycznego czy grupy kwantylowe. Poza tym zastosowany może być jeden wskaźnik, który charakteryzuje wybraną cechę rozkładu, przede wszystkim nierównomierność (por. [Szulc]). Wśród znanych współczynników koncentracji wymienia się indeks koncentracji Giniego, współczynnik Schutza oraz Atkinsona.

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

Nr 7 (13)

Współczynnik Zengi jest nową, konkurencyjną miarą nierównomierności w rozkładach dochodów.

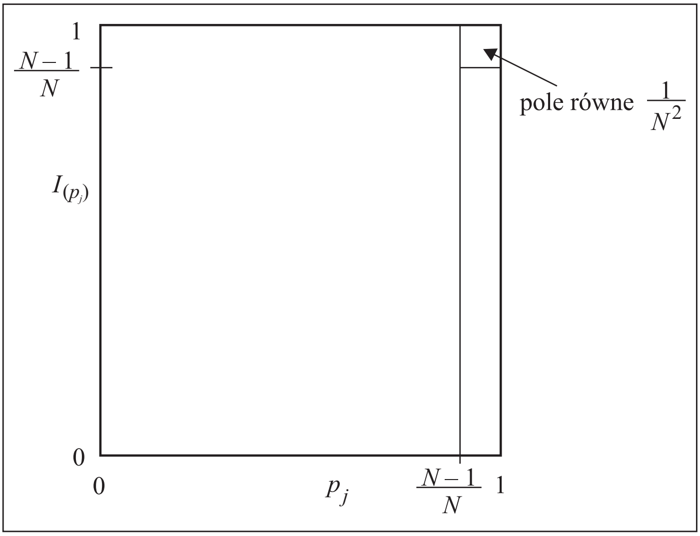
Miara Zengi spełnia wszystkie zasadnicze założenia klasyfikujące ją do miar nierównomierności dochodowych. W kolejnych podpunktach a-e przedstawione będą własności miary I w odniesieniu do rozkładów dochodów (por. [Zenga 2007]).

a. W przypadku braku nierówności zachodzi $I = 0$. Sytuacja ta jest możliwa jedynie dla $s = 1$.

b. Dla maksymalnej nierówności wartość indeksu musi być rosnącą funkcją C_N taką, że $\lim_{N \to \infty} C_N = 1$.

c. Niech Y oraz X będą nieujemnymi zmiennymi. Jeśli zachodzi $Y = \alpha X$, dla $\alpha > 0$, to $I(Y) = I(X)$.

Powyższa własność jest zgodna z jednym z ogólnych aksjomatów miar nierównomierności rozkładu dochodów, który powiada, że miara nie powinna ulegać zmianie, jeśli wszystkie dochody zmieniamy w stałej proporcji. Również popularne miary bazujące na funkcji Lorenza są niezależne od skali pomiaru.



Rys. 3. Intuicyjny przypadek maksymalnej nierównomierności

ródło: [Zenga 2007].

d. Niech Y oraz X będą nieujemnymi zmiennymi. Jeśli $Y = X + h$, dla $h > 0$, to $I(Y) < I(X)$.

Jest to Daltonowska zasada, która głosi, że zwiększenie o taką samą wielkość każdej z analizowanych realizacji powoduje zmniejszenie nierównomierności rozkładu dochodu.

e. Niech w obrębie zmiennej X, opisanej tym razem przez N realizacji spełniających warunek $0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_N$, nastąpi przeniesienie (transfer) z x_{i+1} do x_i wielkości $h > 0$, pod warunkiem że $h < \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)$, dla $i = 1, \ldots, N-1$. Wówczas wartość I zmaleje – zgodnie z zasadą transferów Daltona.

Jeśli ma miejsce transfer dochodu od osoby o dochodzie wyższym do osoby o dochodzie niższym, to nierówności ściśle się zmniejszają. Transfer nie może być jednak dowolnie duży.

5. Próba oceny miernika Zengi

Prześledzenie kilku charakterystycznych przykładów pozwoli podjąć próbę oceny współczynnika Zengi i porównania go z współczynnikiem koncentracji Lorenza.

Kryteriami wyodrębnianych prostych przypadków będą:

- liczebność,
- jednolitość,
- obecność podgrup,
- istnienie obserwacji odstających.

W przypadku jednolitej, nielicznej grupy, jak na przykład dla kolekcji z tab. 2, uzyskujemy $I = 0{,}0543$, co potwierdza intuicyjne podejrzenie o bardzo słabej nierównomierności w rozkładzie.

Tabela 2. Jednolita, nieliczna grupa

j	x_j	n_j
1	1,90	1
2	1,95	1
3	2,00	1
4	2,07	1
5	2,08	1
6	2,09	1
7	2,10	1
8	2,11	1

ródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Jednolita, nieliczna grupa z obserwacją odstającą

j	x_j	n_j
1	1,90	1
2	1,95	1
3	2,00	1
4	2,07	1
5	2,08	1
6	2,09	1
7	2,10	1
8	90,00	1

ródło: opracowanie własne.

Niewielka modyfikacja analizowanej grupy pozwoli przyjrzeć się, jak obserwacja odstająca wpływa na miernik Zengi. Wartości x_j dla $j = 1, \ldots, 7$ pozostają takie same, natomiast wartość maksymalna jest realizacją wyraźnie odbiegającą od pozostałych (tab. 3).

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 7 (13)

Wartość $I = 0{,}9123$ wskazuje bardzo dużą nierównomierność. Stwierdzenie, iż współczynnik jest wrażliwy na realizacje odstające na pewno nie jest przesadne.

Tabela 4 ilustruje przypadek przeciwny; wartości $x_j, j = 1,\ldots,8$, są mocno rozproszone na przedziale $[0{,}85; 800]$. Wartość współczynnika bliska jedności $(I = 0{,}9472)$ potwierdza bardzo dużą nierównomierność.

Tabela 4. Niejednolita, nieliczna grupa

j	x_j	n_j
1	0,85	1
2	2,01	1
3	4,00	1
4	9,00	1
5	40,00	1
6	120,00	1
7	400,00	1
8	800,00	1

ródło: opracowanie własne.

Godny rozpatrzenia jest także przypadek z mocno rysującymi się podgrupami – analizując w kontekście dochodów – „podgrupą bogatszych" oraz „podgrupą biedniejszych".

W grupie A, w której liczniejsza jest podgrupa „biedniejszych" współczynnik przyjął wartość 0,5656, natomiast w grupie z liczniejszą podgrupą „bogatszych" współczynnik przyjął zdecydowanie mniejszą wartość – 0,0430.

Dla tych $j \in \{1,\ldots,s\}$, dla których wagi $\frac{n_j}{N}$ mają największy wpływ na współczynnik $I = \sum_{j=1}^{s} I_{(p_j)} \cdot \frac{n_j}{N}$, wartości $I_{(p_j)}$ są większe w grupie A. Z kolei dla tych $j \in \{1,\ldots,s\}$, dla których wagi $\frac{n_j}{N}$ mają największy wpływ na współczynnik $I = \sum_{j=1}^{s} I_{(p_j)} \cdot \frac{n_j}{N}$, wartości $I_{(p_j)}$ są mniejsze w grupie B.

Wielkości I przy mocno wyróżniających się podgrupach kształtują się więc w bardzo różny sposób, jak pokazuje przykład, mogą być nawet bardzo małe.

Kolejnym, ciekawym zagadnieniem jest zestawienie wartości współczynników Zengi i Giniego – popularnego indeksu koncentracji. Wyniki obliczeń dokonanych dla omawianych przykładów ujęto w tab. 6.

Tabela 5. Mocno zarysowane podgrupy z jedną podgrupą bardziej liczną

j	x_j	n_j	j	x_j	n_j
1	0,46	100	1	0,46	1
2	0,50	100	2	0,50	1
3	0,60	100	3	0,60	1
4	0,70	100	4	0,70	1
5	10,00	1	5	10,00	100
6	10,10	1	6	10,10	100
7	10,20	1	7	10,20	100
8	10,25	1	8	10,25	100
Grupa A			Grupa B		

ródło: opracowanie własne.

Współczynnik Giniego zgodnie z przyjętymi w niniejszym opracowaniu oznaczeniami wyznacza się ze wzoru

$$G = 1 + \frac{1}{N} - \frac{2\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_i} x_i (N - k + 1 - N_{i-1})}{N\sum_{i=1}^{s} Q_i}, \text{przy czym } N_0 = 0.$$

Dla współczynników Zengi I oraz Giniego G wyznaczonych dla tej samej grupy zawsze zachodzi $G \leq I$ (dowód w [Zenga 2007]), jednak współczynniki I wyznaczane dla pewnych grup nie muszą zachowywać tego samego porządku co współczynniki G wyznaczane dla tych samych grup (por. dwa ostatnie wiersze tab. 6).

Tabela 6. Współczynniki Zengi vs Giniego

Charakterystyka grupy	Współczynnik I Zengi	Współczynnik G Giniego
„Mocne” podgrupy, liczna bogata	0,0430	0,0145
Jednolita grupa	0,0543	0,0192
„Mocne” podgrupy, liczna biedna	0,5656	0,2187
Nieliczna grupa z obserwacją odstającą	0,9123	**0,7411**
Niejednolita grupa	0,9472	**0,7235**

ródło: opracowanie własne.

6. Wnioski końcowe

Współczynnik nierównomierności Zengi dla rozkładu może być wykorzystywany m.in. dla zmiennej *quasi*-ciągłej, jaką jest dochód.

Zastosowanie indeksów proponowanych przez Zengę jest najbardziej uzasadnione w przypadku realizacji zebranych w szeregi rozdzielcze punktowe o dużych liczebnościach dla poszczególnych kategorii cechy. Wynika to choćby z odpowiednio dostosowanych oznaczeń i postaci wzorów. Pod tym względem propozycja Zengi jest bardziej użyteczna niż Giniego. Ponadto miernik Zengi jest wrażliwy na istnienie obserwacji odstających (wyraźnie wzrasta wielkość I). Wielkości I przy mocno wyróżniających się podgrupach kształtują się w bardzo różny sposób, mogą być nawet niewielkie.

Zagadnienie wymaga dalszych, bardziej zaawansowanych technik oceny i porównywania współczynnika opartego na dolnej oraz górnej średniej arytmetycznej z innymi, dokładniej już omawianymi w literaturze przedmiotu.

Literatura

Dagum C., Zenga M., *Concentration Curves and Concentration Index Derived from Them*, [w:] *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty*, Springer-Verlag, 1990.

Kot S.M., *Dobrobyt społeczny, nierówności i sprawiedliwość dystrybutywna*, AE, Kraków 2004.

Szulc A., *Tematyka zajęć ze statystyki społecznej*, www.sgh.waw.pl/instytuty/isd/dydakt/jednolite/wyniki/a.doc.

Zenga M., *Inequality curve and inequality index based on the ratios between lower and upper arithmetic means*, „Statistica & Applicazioni” 2007, nr 1, s. 3-27.