DIDACTICS
OF
MATHEMATICS

5-6(9-10)

The Publishing House
of the Wroclaw University of Economics
Wroclaw 2009

Editors
Janusz Łyko
Antoni Smoluk

Referee
Włodzimierz Odyniec
(The Hercen University, St Petersburg)

Proof reading
Joanna Szynal

Setting
Elżbieta Szlachcic

Cover design
Robert Mazurczyk

Front cover painting: W. Tank, *Sower*
(private collection)

PL ISSN 1733-7941

TABLE OF CONTENTS

D I D A C T I C S O F M A T H E M A T I C S

No. 5-6 (9-10) 2009

Tadeusz Janaszak
(Wrocław)

O KONIECZNOŚCI NAUCZANIA LICZB RZECZYWISTYCH I TRYGONOMETRII HIPERBOLICZNEJ W KONTEKŚCIE UŻYCIA PROGRAMU MATLAB

Abstract. The text is an appeal to return the teaching of complex numbers and trigonometry to the economic schools; without these branches it is impossible to working with the program Matlab**.**

Key words: hyperbolic trigonometry, complex number, program Matlab.

1. Wstęp

W roku akademickim 2008/2009 Katedra Matematyki i Cybernetyki rozpoczęła prowadzenie ćwiczeń laboratoryjnych z użyciem programu Matlab. Semestralny kurs zmusza do poczynienia kilku uwag na temat programów nauczania matematyki, w dotychczasowych bowiem kursach pomijane są treści, których znajomość jest konieczna do zrozumienia wyników operacji przeprowadzanych na komputerze w programie Matlab.

2. Liczby zespolone

W dyskusjach programowych prowadzonych w środowisku uczelni ekonomicznych pada pytanie: **Po co ekonomiście znajomość liczb zespolonych?** Neguje się tę potrzebę i tym samym wyrzuca nauczanie ważnego działu matematyki z programów wszystkich kierunków, wyjąwszy wydział inżynieryjny, gdyż w naukach technicznych liczby zespolone są narzędziem koniecznym do opisu zjawisk fizykalnych o charakterze fazowym. Na nic zdają się argumenty, że znajomość liczb zespolonych należy do podstawowych elementów kultury, której matematyka jest częścią, że brak elementarnej wiedzy z dziedziny liczb zespolonych kompromituje człowieka z wyższym wykształceniem, który w programie nauczania miał elementy matematyki wyższej. Wreszcie u ubiegłym roku Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu zmieniła nazwę na Uniwersytet Ekonomiczny. Termin uniwersytet pochodzi od łacińskich słów: *universitas*, *atis – całość*, *ogół*, *universum*, *i – całość*, *wszechświat*, *universus*, *a*, *um – cały*, *wzięty jako całość*, *wszystek*, *ogólny*, *powszechny* (J. Pieńkos (1993), str. 388), a zatem nadanie uczelni zaszczytnego tytułu obliguje ją do tego, aby w jej pracy naukowej i dydaktycznej nauki ekonomiczne zostały osadzone w szerokim kontekście nauki traktowanej jako całość oraz kultury (por. T. Janaszak (2009), str. 7-20). Zawężanie tematyki zajęć do treści utylitarnych, które **mają być przydatne ekonomiście**, powoduje, że Uniwersytet Ekonomiczny dryfuje w kierunku wyższej zawodowej szkoły ekonomicznej[1], a nie uniwersytetu. W roku akademickim 2008/2009 w zajęciach z algebry liniowej trzeba było przerwać prowadzenie tematu liczb zespolonych na podstawie argumentu: **po co ekonomiście znajomość liczb zespolonych**[2].

Padały argumenty typu: w dobie elektronicznej techniki obliczeniowej szkoda czasu na nauczanie liczb zespolonych, lepiej w to miejsce ćwiczyć posługiwanie się programem Matlab. I właśnie doświadczenia nabyte podczas ćwiczeń laboratoryjnych z Matlabem wykazały, że rację mają nie ci, którzy chcą redukować zakres matematyki teoretycznej, lecz ci, którzy uważają, że nie ma nic bardziej ważnego dla wykształcenia ekonomisty, jak właśnie duża ilość matematyki teoretycznej[3]. Bez znajomości teorii liczb zespolonych nie można korzystać z najprostszych operacji w Matlabie.

Program Matlab jest tak skonstruowany, że po podaniu współczynników dowolnego wielomianu stopnia n program oddaje, po podaniu odpowiedniej komendy, n pierwiastków tego wielomianu. Jeśli dany pierwiastek jest wielokrotny, zostaje pokazany tyle razy, jaka jest jego krotność.

[1] W sformułowaniu tym nie należy dopatrywać się pejoratywnej oceny Wyższej Szkoły Ekonomicznej, która była poprzedniczką Akademii Ekonomicznej i w której zarówno liczba godzin matematyki, jak i zakres wykładanego na wysokim poziomie materiału był godny miana uniwersytetu. W chwili obecnej nazwa poszła w górę, a treści w dół, przy czym wypowiedź autora dotyczy li tylko matematyki, a nie innych przedmiotów wykładanych na Uniwersytecie Ekonomicznym.

[2] Autor dokończył na ćwiczeniach temat liczb zespolonych, przy czym znajomość tego zagadnienia nie była obowiązkowa, lecz nagradzana bonusami.

[3] Wypowiedzi na ten temat można znaleźć w licznych pracach wieloletniego kierownika Katedry Matematyki prof. A. Smoluka (np. A. Smoluk (1997)).

Pierwiastki są wyświetlane jako liczby zespolone, przy czym część rzeczywista i część zespolona liczby jest podana w przybliżeniu dziesiętnym z dokładnością, jakiej sobie życzy użytkownik. Może być ona bardzo duża, obejmująca wiele miejsc po przecinku. O ile przybliżenia dziesiętne nie sprawiają studentowi kłopotu, bo jest z nimi oswajany od szkoły podstawowej, o tyle pojawienie się jednostki urojonej i wprawia go w zakłopotanie i w zasadzie pozbawia możliwości korzystania z opcji rozwiązywania równań, a w końcu zniechęca do Matlaba. W tym miejscu prowadzący musi przerwać zajęcia z Matlaba i zrobić dłuższy wykład na temat liczb zespolonych oraz zacytować zasadnicze twierdzenie algebry o tym, że wielomian

$$w(x) = a_0 + a_1 \cdot x + ... + a_n \cdot x^n, \tag{1}$$

gdzie współczynniki a_i dla i = 0, 1, …, n są liczbami zespolonymi, przy czym $a_n \neq 0$, rozkłada się na iloczyn czynników liniowych

$$w(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n), \tag{2}$$

gdzie liczby x_i dla i = 1, …, n są zespolone i niekoniecznie różne. Jeśli dana liczba wystąpi w rozkładzie (2) k razy, to liczbę k nazywamy krotnością pierwiastka. Dla wielomianów o współczynnikach rzeczywistych pierwiastki mogą być rzeczywiste, a jeśli wystąpią zespolone, to będzie ich parzysta ilość i parami będą sprzężone. Takie minimum wiadomości o wielomianach powinien posiadać student korzystający z Matlaba.

W Matlabie istnieje odwrotna możliwość. Zadaje się n liczb rzeczywistych lub zespolonych i po podaniu odpowiedniej komendy uzyskuje się wielomian, którego podane liczby są pierwiastkami. Są to elementarne operacje, które student uczący się Matlaba powinien wykonać. Jak jednak ma odczytać wyniki, jeśli nie ma żadnych wiadomości o liczbach zespolonych? Przecież przytłaczająca większość szkół średnich nie wspomina nic o liczbach zespolonych. Szkoda, w latach czterdziestych bowiem, w wyniszczonej wojną Polsce, liczb zespolonych uczono w drugiej klasie liceum o profilu matematyczno-fizycznym (zob. S. Kulczycki, S. Straszewicz (1947), str. 3-20). Powiedzenie, że dawniejsze liceum było na poziomie dzisiejszej szkoły wyższej, można zaostrzyć: było na poziomie wyższym, przynajmniej jeśli chodzi o liczby zespolone.

Obecna sytuacja nie jest jeszcze zła, ponieważ Matlaba uczą zawodowi matematycy, którzy w skrótowej formie potrafią w czasie zajęć laboratoryjnych podać podstawowe pojęcia dotyczące liczb zespolonych. Gorzej będzie, gdy takie zajęcia poprowadzą absolwenci uczelni ekonomicznych, którzy na mocy argumentu: **po co ekonomiście znajomość liczb zespolonych**, będą mieli o ciele liczb zespolonych pojęcie mgliste lub żadne. Tendencja do zastępowania matematyków przez ekonomistów w wykładaniu przedmiotów ilościowych jest stała, co z pewnością przyczyni się do dalszego dryfu Uniwersytetu Ekonomicznego w kierunku szkoły zawodowej.

3. Trygonometria hiperboliczna

Autor od lat postuluje, aby w kursie matematyki uczyć trygonometrii hiperbolicznej, gdyż użycie jej ułatwia obliczanie całek. Rozważmy przykład:

Przykład 1. Obliczyć całkę

$$\int \sqrt{a \cdot x^2 + b \cdot x + c} \cdot dx, \tag{3}$$

gdzie współczynniki trójmianu kwadratowego są rzeczywiste oraz $a \neq 0$. Trójmian kwadratowy sprowadzamy do postaci kanonicznej.

Jeśli wyróżnik trójmianu jest równy zero, wówczas wyrażenie podcałkowe ma postać

$$\int \sqrt{a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} \cdot dx. \tag{4}$$

Dziedzina funkcji podcałkowej jest zbiorem jednopunktowym, gdy a jest liczbą ujemną. W przypadku, gdy a jest liczbą dodatnią, całkę (4) zapisujemy

$$\sqrt{a} \cdot \int |t| \cdot dt, \tag{5}$$

gdzie

$$t = \left(x + \frac{b}{2a}\right).$$

Całka (5) równa się

$$\sqrt{a} \cdot \operatorname{sgn} t \cdot \frac{t^2}{2}$$

i w ślad za tym całka (4) wynosi

$$\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot \operatorname{sgn}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2. \tag{6}$$

Ciekawszy jest przypadek, kiedy wyróżnik trójmianu jest różny od zera. W sytuacji, gdy zarówno wyróżnik, jak i współczynnik a są ujemne, funkcja podcałkowa ma pustą dziedzinę. Pozostają zatem trzy przypadki, które rozważymy po kolei.

Przypadek 1.1. Zachodzą nierówności:

$$a<0 \quad \text{oraz} \quad \Delta>0.$$

Dziedziną funkcji podcałkowej jest przedział domknięty zawarty między pierwiastkami trójmianu kwadratowego. Korzystając z postaci kanonicznej, przekształcamy całkę (3):

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{-a}}\cdot\int\sqrt{-\frac{4\cdot a^2}{\Delta}\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+1}\cdot dx. \tag{7}$$

Po podstawieniu

$$\frac{2\cdot a}{\sqrt{\Delta}}\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)=t \tag{8}$$

otrzymujemy:

$$\frac{\Delta}{4\cdot a\cdot\sqrt{-a}}\cdot\int\sqrt{1-t^2}\cdot dt. \tag{9}$$

Całkę

$$\int\sqrt{1-t^2}\cdot dt$$

obliczamy metodą podstawienia trygonometrii kołowej

$$t=\cos\alpha. \tag{10}$$

Jedynka trygonometrii kołowej

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

pozwala pozbyć się pierwiastka:

$$\int\sqrt{1-t^2}\cdot dt=-\int\sin^2\alpha\cdot d\alpha. \tag{11}$$

Wykorzystując jedynkę i elementarne wzory trygonometrii kołowej:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

oraz

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha ,$$

dostajemy równość

$$\int \sqrt{1-t^2} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot \alpha , \tag{12}$$

skąd po powrocie do zmiennej t mamy

$$\int \sqrt{1-t^2} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2} \cdot \arccos t . \tag{13}$$

Powracając do zmiennej x dostajemy całkę (3) w przypadku pierwszym.

Przypadek 1.2. Zachodzą nierówności

$$a > 0 \quad \text{oraz} \quad \Delta > 0 .$$

Dziedziną w tym wypadku jest suma dwu półprostych domkniętych wyznaczonych przez pierwiastki trójmianu. Postępujemy niemal identycznie, jak w przypadku pierwszym. Całkę (3) dzięki postaci kanonicznej możemy przedstawić w postaci podobnej do wzoru (7):

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}} \cdot \int \sqrt{\frac{4 \cdot a^2}{\Delta} \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - 1} \cdot dx . \tag{14}$$

Wykonując podstawienie (8), dostajemy wzór oddający całkę (3) w sposób podobny do wzoru (9):

$$\frac{\Delta}{4 \cdot a \cdot \sqrt{a}} \cdot \int \sqrt{t^2 - 1} \cdot dt . \tag{15}$$

Dalej postępujemy analogicznie do przypadku pierwszego. Do obliczenia całki

$$\int \sqrt{t^2 - 1} \cdot dt$$

stosujemy podstawienie trygonometrii hiperbolicznej

$$t = ch\alpha . \tag{16}$$

Jedynka trygonometrii hiperbolicznej

$$ch^2\alpha - sh^2\alpha = 1$$

pozwala pozbyć się pierwiastka, podobnie jak w przypadku pierwszym jedynka trygonometrii kołowej. Postępując analogicznie, jak poprzednio dostajemy równość:

$$\int \sqrt{t^2 - 1} \cdot dt = \int sh^2\alpha \cdot d\alpha . \tag{17}$$

W tym miejscu korzystamy z jedynki i wzorów na funkcje kąta podwojonego w trygonometrii hiperbolicznej:

$$ch2\alpha = ch^2\alpha + sh^2\alpha$$

oraz

$$sh2\alpha = 2 \cdot ch\alpha \cdot sh\alpha .$$

Po krótkich obliczeniach dostajemy wzór analogiczny do wzoru (12):

$$\int \sqrt{t^2 - 1} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot ch\alpha \cdot sh\alpha - \frac{1}{2} \cdot \alpha . \tag{18}$$

Wracając do zmiennej *t*, dostajemy wzór analogiczny do wyniku (13)

$$\int \sqrt{t^2 - 1} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sqrt{t^2 - 1} - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arch}(t). \tag{19}$$

Za pomocą podstawienia (8) powracamy do zmiennej *x*. Występująca w wzorze (19) funkcja *area cosinus hiperboliczny:* archt jest funkcją odwrotną do funkcji *cosinus hiperboliczny*, podobnie, jak funkcja *arcus cosinus:* $\arccos t$ jest funkcją odwrotną do funkcji *cosinus* w trygonometrii kołowej. Za pomocą logarytmów funkcja ta przedstawia się następująco:

$$\operatorname{arch}(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right), \tag{20}$$

dziedziną jej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich. Całkę (3) w przypadku drugim rozwiązuje się zwykle za pomocą podstawień Eulera, które nie pozwalają na dostrzeżenie podobieństwa do przypadku pierwszego. Rozwiązanie za pomocą trygonometrii hiperbolicznej pozwala zauważyć analogię między przypadkiem pierwszym i drugim, a dostrzeganie analogii jest istotą matematyki. Wiadomo, że w dziedzinie zespolonej funkcje trygonometrii kołowej i hiperbolicznej wyrażają się jedne przez drugie, a mianowicie:

$$\sin t = -i \cdot sh(i \cdot t) \tag{21}$$

oraz

$$\cos t = ch(i \cdot t). \tag{22}$$

Nie ma zatem różnych metod rozwiązywania całki (3), gdy wyróżnik jest różny od zera, tylko jest jedna metoda: poprzez użycie trygonometrii. Rozważmy przypadek trzeci.

Przypadek 1.3. Zachodzą nierówności

$$a > 0 \quad \text{oraz} \quad \Delta < 0 .$$

Dziedziną funkcji podcałkowej jest cała prosta rzeczywista. Całkę (3) przedstawiamy analogicznie do wzoru (7) i (14):

$$\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\sqrt{a}} \cdot \int \sqrt{\frac{4 \cdot a^2}{-\Delta} \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + 1} \cdot dx . \tag{23}$$

Wykonujemy podstawienie analogiczne do wzoru (8):

$$\frac{2 \cdot a}{\sqrt{-\Delta}} \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right) = t , \tag{24}$$

po czym dostajemy wzór analogiczny do wyrażenia (9) i (15):

$$\frac{-\Delta}{4 \cdot a \cdot \sqrt{a}} \cdot \int \sqrt{t^2 + 1} \cdot dt . \tag{25}$$

Do obliczenia pozostała całka

$$\int \sqrt{t^2 + 1} \cdot dx .$$

Aby to zrobić, stosujemy metodę analogiczną do przypadku pierwszego i drugiego, a mianowicie podstawiamy

$$t = sh\alpha , \tag{26}$$

po czym otrzymujemy wzór analogiczny do wzorów (11) i (17):

$$\int \sqrt{t^2 + 1} \cdot dt = \int ch^2\alpha \cdot d\alpha . \tag{27}$$

Po zastosowaniu tych samych wzorów, co w przypadku drugim, a analogicznych do przypadku pierwszego, dostajemy wynik

$$\int \sqrt{t^2+1} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot ch\alpha \cdot sh\alpha + \frac{1}{2} \cdot \alpha . \tag{28}$$

Powracając do zmiennej t, otrzymujemy wynik analogiczny do wzorów (13) i (19):

$$\int \sqrt{t^2+1} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arsh}(t). \tag{29}$$

Całkę (3) dostajemy po powrocie do zmiennej x przez podstawienie (24). Funkcję *area sinus hiperboliczny* występująca we wzorze (29) można wyrazić przez logarytmy w sposób następujący:

$$\operatorname{arsh}(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right). \tag{30}$$

Jest to funkcja odwrotna do funkcji *sinus hiperboliczny*. Dziedziną jej jest cała prosta rzeczywista. Ze studentami na zajęciach dobrze jest rozwiązać kilka przykładów liczbowych. Zauważmy jeszcze, że podstawienia (8) i (24) nie są dwoma różnymi wzorami, tylko różnymi postaciami jednego wzoru

$$\frac{2 \cdot a}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right) = t .$$

Rozważmy następny przykład:

Przykład 2. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}, \tag{31}$$

przy założeniu, że wyróżnik trójmianu kwadratowego jest różny od zera. Zadanie to zwykle rozwiązuje się przez sprowadzenie do funkcji *arcus tangens*, gdy wyróżnik jest ujemny, i do *logarytmu naturalnego*, gdy wyróżnik jest dodatni. W związku z tym powstają jak gdyby dwa różne zadania, a można to zrobić jednolicie, sprowadzając wynik do funkcji *area tangens hiperboliczny* w przypadku dodatniego wyróżnika. Przy takim podejściu widać, że nie mamy do czynienia z dwiema metodami, lecz z jedną. Rozwiążemy w skrócie oba przypadki. W obu korzystając z postaci kanonicznej, całkę (31) przedstawiamy w formie

$$\frac{1}{a}\cdot\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}}. \tag{32}$$

Przypadek 2.1. Wyróżnik trójmianu jest ujemny.

Przed całkę wyciągamy liczbę

$$\frac{4a^2}{-\Delta}$$

i dostajemy wzór wyrażający całkę (31) w formie

$$\frac{4a}{-\Delta}\cdot\int\frac{dt}{t^2+1}, \tag{33}$$

gdzie zmienne x oraz t są związane podstawieniem (24). Ostatecznie rozwiązanie całki (31) dostaniemy, używając wzoru

$$\int\frac{dt}{t^2+1}=\mathrm{arctg}(t), \tag{34}$$

przy czym nietrudno zastosować wzór (33) oraz powrócić do wyjściowej zmiennej x za pomocą podstawienia (24).

Przypadek 2.2. Wyróżnik trójmianu jest dodatni.

W wzorze (32) przed całkę wyciągamy czynnik

$$\frac{4a^2}{\Delta}.$$

Całka (31) przedstawia się wówczas w formie

$$\frac{4a}{\Delta}\cdot\int\frac{dt}{t^2-1}, \tag{35}$$

gdzie zmienne x oraz t są związane podstawieniem (8). W tym wypadku do uzyskania rozwiązania całki (31) wystarczy wzór

$$\int\frac{dt}{t^2-1}=\mathrm{arth}(t), \tag{36}$$

gdzie funkcja *area tangens hiperboliczny* jest funkcją odwrotną do *tangensa hiperbolicznego*.

Zwykle całka

$$\int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

sprowadzana jest za pomocą rozkładu na ułamki proste do logarytmu naturalnego. Zachodzi wzór

$$\operatorname{arth}(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+t}{1-t}. \tag{37}$$

W większości podręczników do analizy matematycznej przykłady całek rozpatrywane w artykule sprowadza się do logarytmów (np. W. Krysicki, L. Włodarski (2003)). W skrypcie Politechniki Wrocławskiej autorzy wspominają o funkcjach trygonometrii hiperbolicznej i funkcjach odwrotnych do nich oraz zalecają podstawienia takie, jak w przykładzie pierwszym. Podstawienia trygonometrii hiperbolicznej omawiane są w radzieckim poradniku encyklopedycznym I.N. Bronsztejna i K.A. Siemiendiajewa (1990). W środowisku uczelni ekonomicznych metody te są raczej unikane, aby nie rozszerzać wykładu analizy matematycznej o funkcje trygonometrii hiperbolicznej. Każda bowiem próba rozszerzania wykładanych treści kończy się atakiem: **po co ekonomistom tyle matematyki**. Nie przekonują argumenty, że obie trygonometrie: kołowa i hiperboliczna stanowią pełny zasób środków do obliczania całek wymiernych i wyrażeń wymiernych zawierających pierwiastki trójmianu kwadratowego, że obie trygonometrie wykładane łącznie dają coś, co matematycy nazywają elegancją. Autor od dawna przekonuje, że właśnie tak powinien być prowadzony wykład, lecz przekonuje bezskutecznie. Z pomocą autorowi przychodzi program Matlab. Przy obliczaniu bowiem całek w programie symbolicznym odpowiedzi Matlaba są formułowane z użyciem funkcji trygonometrii hiperbolicznej i funkcji odwrotnych do nich. Chcąc w sposób sensowny uczyć posługiwania się programem Matlab, należy w kursie analizy matematycznej wprowadzić trygonometrię hiperboliczną. Rozwiązane w artykule przykłady w zamiarze autora mają zachęcić prowadzących przedmioty ilościowe do zainteresowania się tematem trygonometrii hiperbolicznej, by można było w sposób sensowny korzystać z programu Matlab.

Literatura

I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendiajew (1990). *Matematyka poradnik encyklopedyczny.* PWN. Warszawa.

M. Gewert, Z. Skoczylas (2004). *Analiza matematyczna I. Przykłady i zadania.* GiS. Wrocław.

M. Gewert, Z. Skoczylas (2004). *Analiza matematyczna I. Definicje*, *twierdzenia*, *wzory.* GiS. Wrocław.

T. Janaszak (2009). *Konstrukcje równoległe rachunku różniczkowego w ekonomii.* UE Wrocław. Praca złożona do druku.

W. Krysicki, L. Włodarski (2003). *Analiza matematyczna w zadaniach.* PWN. Warszawa.

S. Kulczycki, S. Straszewicz (1947). *Algebra – dla II klasy liceum ogólnokształcącego wydział matematyczno-fizyczny, wydanie czwarte.* Książnica Atlas Wrocław – Warszawa.

J. Pieńkos (1993). *Słownik łacińsko-polski.* Wydawnictwo Prawnicze. Warszawa.

A. Smoluk (1997). *Czy ekonomia jest nauką o podzielności?* Ekonomia Matematyczna 1. AE Wrocław. Str. 11-16.