DIDACTICS
OF
MATHEMATICS

5-6(9-10)

The Publishing House
of the Wroclaw University of Economics
Wroclaw 2009

Editors
Janusz Łyko
Antoni Smoluk

Referee
Włodzimierz Odyniec
(The Hercen University, St Petersburg)

Proof reading
Joanna Szynal

Setting
Elżbieta Szlachcic

Cover design
Robert Mazurczyk

Front cover painting: W. Tank, *Sower*
(private collection)

© Copyright by the Wrocław University of Economics
Wrocław 2009

PL ISSN 1733-7941

TABLE OF CONTENTS

D I D A C T I C S   O F   M A T H E M A T I C S

No. 5-6 (9-10) 2009

Piotr Dniestrzański, Andrzej Wilkowski
(Wrocław)

O PARADOKSIE HALLA I RZUCANIU MONETĄ

Abstract. In this paper we analyses what the causes of intuition"s failure are when it comes to probability. We try to indicate the points, in which appear the *disorders of intuition*, on the example of Monty Hall paradox, Penney`s game (based on flipping the coin) and also regular exercise of theory of probability.

Key words: Hall`s paradox, Penney`s game.

1. Wstęp

W artykule analizujemy przyczyny zawodności intuicji w zagadnieniach probabilistycznych. Na przykładzie paradoksu Monty Halla, standardowego zadania rachunku prawdopodobieństwa oraz gry Penneya, bazującej na rzucaniu monetą, próbujemy zlokalizować punkty, w których następuje *zaburzenie intuicji*.

2. Paradoks Monty Halla i kule w urnie

Jednym z najbardziej znanych przykładów braku intuicji w rachunku prawdopodobieństwa jest paradoks Monty Halla. Był on (i ciągle jest) doświadczany w praktyce – biernie, a czasami czynnie – przez znaczny odsetek populacji. Źródłem tego paradoksu był znany w dużej części świata popularny teleturniej, w Polsce realizowany pod nazwą *Idź na całość*. Chociaż był on już wielokrotnie analizowany na różnych poziomach ogólności, warto go w tym miejscu przypomnieć. Uczestnik gry ma do wyboru jedną z trzech bramek, z których dwie są puste, a jedna zawiera nagrodę. Po wyborze bramki (w której gracz ma nadzieję znaleźć nagrodę) prowadzący teleturniej odsłania jedną z dwóch pozostałych. Okazuje się, że jest ona pusta. Gracz wie teraz, że nagroda jest w jednej z dwóch bramek: w tej, którą wybrał, lub w nie odkrytej (i nie wybranej). Zgodnie z regułami teleturnieju gracz dostaje propozycję zamiany bramki. Czy powinien skorzystać z tej możliwości, czy raczej zostać przy swoim wyborze? Zakładamy oczywiście, że uczestnik teleturnieju kieruje się obiektywnie racjonalnymi kryteriami i postępuje tak, aby maksymalnie zwiększyć szansę wygranej. W pierwszej (intuicyjnej) ocenie jego decyzja nie powinna mieć znaczenia. Przecież od momentu odsłonięcia jednej z bramek prawdopodobieństwo, że nagroda jest w jego bramce jest takie samo (i wynosi ½) jak prawdopodobieństwo, że znajduje się ona w drugiej. Nie widać powodu, dla którego miałoby być inaczej. Z drugiej strony dlaczego odsłonięcie jednej z bramek miałoby zmieniać prawdopodobieństwo jego wygranej, które na początku wynosiło 1/3. Paradoks Monty Halla jest wdzięcznym obiektem do wskazania palcem powodu niektórych sytuacji, w których zawodzi intuicja. Wczujmy się na chwilę w rolę gracza, który ma właśnie podjąć decyzję o zmianie (lub nie) swojego wyboru. Nawet jeśli dysponujemy odpowiednimi narzędziami matematycznymi, konstrukcja modelu, z którego jasno będzie wynikał potrzebny nam rozkład prawdopodobieństwa, wymaga pewnej wprawy. My nawet nie spróbujemy tego robić, chociaż nie jest to dla przeciętnego probabilisty zadanie zbyt skomplikowane. Wykonamy za to manewr, który często (nie tylko w rozważaniach matematycznych) daje lepszy ogląd sytuacji. Krok do tyłu. Pomyślmy, jak widzielibyśmy problem, gdybyśmy zrobili analizę konsekwencji naszych decyzji jeszcze przed wejściem do studia nagraniowego. A najlepiej jeszcze wcześniej. Przy stoliku z ołówkiem w ręku. Mamy do wyboru tylko dwie strategie. *Iść w zaparte*, czyli nie zmieniać podjętej decyzji, lub przeciwnie, na pewno z niej skorzystać – nazwijmy ją *strategią giętką*. Rozważmy zatem, co się stanie, jeżeli decydujemy się na tę drugą. Nie zmieniając ogólności, możemy założyć, że pierwszy nasz wybór pada na bramkę numer 1. Na rysunku 1 przedstawiono wszystkie możliwe kombinacje w grze. Zauważmy, że tylko pierwszy układ jest dla nas przegrywający – niezależnie od tego, która bramka zostanie odsłonięta strategia giętka prowadzi do porażki. W dwóch następnych układach zmiana decyzji daje wygraną.

1 NAGRODA	2 PUSTA	3 PUSTA
1 PUSTA	2 NAGRODA	3 PUSTA
1 PUSTA	2 PUSTA	3 NAGRODA

Rys. 1. Możliwe rozkłady bramek w paradoksie Monty Halla

Strategia giętka prowadzi więc w dwóch na trzy przypadki do wygranej. Zatem stosowanie tej strategii dwukrotnie zwiększa prawdo-podobieństwo wygranej. Oczywiście natychmiastowym wnioskiem stąd jest, że strategia *iść w zaparte* daje prawdopodobieństwo wygranej równe 1/3. Zatem odsłonięcie jednej z bramek nie zmienia jej, chociaż widzimy dwie bramki, z których jedna zawiera nagrodę.

Nie ulega wątpliwości, że paradoks Monty Halla to przykład na tezę, że powodem zagubienia i problemów z wyciąganiem racjonalnych wniosków bywa zbyt mały dystans do wydarzeń. W opisanej grze oszacowanie szans na wygraną już po odkryciu jednej z bramek jest trudne tylko z powodu bliskości problemu. Wycofanie się na pozycje dające pełny ogląd sytuacji daje większą jasność i (w tym przypadku) trywializuje zagadnienie.

Rozważmy teraz przykład typowego zadania elementarnego rachunku prawdopodobieństwa poddanego nieco wymyślnej modyfikacji. Z będącej na półce urny, zawierającej b kul białych i c kul czarnych, wysypały się kule. Spadając, dwie z nich zatrzymały się na niższej półce, a następnie jedna spadła na ziemię. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na ziemi leży kula biała? Modyfikacja standardowego zadania, w stosunku do typowej wersji podręcznikowej, polega na zamianie urny początkowo pustej niższą półką, a wyciąganie wysypaniem się. Najpewniej wprawiony w rozwiązywaniu tego typu zadań uczeń (student) i tak postąpiłby według znanego sobie schematu i wykorzystał wzór na prawdopodobieństwo całkowite lub szybko naszkicował drzewko. Jak jednak oszacowalibyśmy prawdopodobieństwo zdarzenia, że na ziemi leży kula biała, gdybyśmy obserwowali zdarzenie opisane w treści zadania z oddali i nie zauważyli momentu w którym dwie kule przez chwilę toczyły się po niższej półce (lub – idąc po wersji podręcznikowej – przeoczyli czas, w którym dwie kule były w innej urnie). Dalibyśmy natychmiastową odpowiedź – szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{b}{b+c}.$$

Czyli dokładnie taką, jaką otrzymamy, analizując gałęzie drzewka. Można podejrzewać, że w obydwu przedstawionych przykładach intuicja zawodzi z powodu *zbyt drobiazgowej obserwacji zdarzeń*.

Warto zauważyć również, że paradoks Monty Halla jest równoważny paradoksowi więźnia, znanemu też jako problem Serbelloni. Interesujące podejście do problemu Serbelloni przedstawił A. Smoluk (1997). Przykłady wielu podobnych niestandardowych rozwiązań zadań z rachunku prawdopodobieństwa podali P. Dniestrzański i J. Sacała (2006).

3. Rzucanie monetą i gra Penneya

Podamy teraz przykład szwankowania intuicji w grze opartej na rzucaniu symetryczną monetą. Opis gry (trochę bardziej subtelnej od opisanej wyżej) wymaga krótkiego wprowadzenia.

Niech X będzie zmienną losową przyjmującą wartości całkowite nieujemne:

$$X\colon \Omega \to \{0, 1, \ldots\}.$$

Zakładamy ponadto, że X ma skończony drugi moment:

$$E(X^2) < \infty.$$

Do badania rozkładów tego typu zmiennych losowych wygodnie jest korzystać z **funkcji tworzącej prawdopodobieństwa** zmiennej X, zdefiniowanej jako formalny szereg potęgowy:

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P\big(\omega : X(\omega) = k\big) z^k = E\big(z^X\big). \tag{1}$$

Powyższy szereg zmiennej z zawiera całą informację o zmiennej losowej X. Widać, że

$$G_X(1) = 1.$$

Odwrotnie, każdy szereg potęgowy $G(z)$ o nieujemnych współczynnikach, spełniający równanie $G(1) = 1$ jest funkcją tworzącą prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej. Ważną cechą takiej funkcji jest to, że upraszcza ona obliczanie wartości średniej i wariancji zmiennej losowej X. W tym celu wystarczy wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną szeregu (1), dla $z = 1$, oraz wziąć ich kombinację. Otrzymujemy:

$$E(X) = G'_X(1), \tag{2}$$

$$Var(X) = E\big(X^2\big) - \big(E(X)\big)^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - \big(G'_X(1)\big)^2. \tag{3}$$

Przykład 1. Wzory (2) i (3) wykorzystamy w przypadku procesu, który ma tylko dwa wyniki. Gdy rzucamy monetą, wówczas prawdopodobieństwo, że wypadnie orzeł – O, wynosi p, a prawdopodobieństwo reszki – R, jest równe q, gdzie

$$p + q = 1, \quad p \text{ oraz } q > 0.$$

Dla monety wyważonej $p = q = ½$. Nie zawsze jednak tak jest. Jak podano w książce (R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik (1998)) w przypadku nowo wybitej amerykańskiej jednocentówki mamy $p \approx 0{,}1$ (rozkład masy powoduje, że Lincoln częściej wypada na dół). Niech teraz X_A będzie zmienną losową opisującą ilość niezależnych rzutów monetą, dopóki nie wypadnie po raz pierwszy wzorzec $A = ROOOO$. Należy wyznaczyć średnią i wariancję tej zmiennej. Posłużymy się metodą podaną w podręczniku (R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik (1998)). Niech S oznacza sumę układów zawierających wzorzec A:

$$S = ROOOO + OROOOO + RROOOO + \ldots$$

Przez N oznaczamy sumę układów, w których wzorzec A nie pojawia się:

$$N = 1 + O + R + OO + OR + RO + RR + \ldots$$

W związku z powyższym prawdziwe są zależności między S a N:

$$1 + N(O + R) = N + S$$

$$NROOOO = S.$$

Gdy O zastąpimy przez pz i R przez qz, a następnie z danych wyżej związków wyznaczymy S, otrzymamy funkcję tworzącą $G_A(z)$, zmiennej losowej X_A:

$$G_A(z) = \frac{p^4qz^5}{p^4qz^5 - pz - qz + 1}.$$

Wobec tego, na podstawie wzorów (2), (3), mamy:

$$E(X_A) = p^{-4}q^{-1},$$

$$Var(X_A) = p^{-8}q^{-2} - 9p^{-4}q^{-1}.$$

Gdy

$$p = q = ½,$$

dostajemy:

$$E(X_A) = 32,$$

$$Var(X_A) = 736.$$

Rozumowanie przedstawione w tym przykładzie można uogólnić. Prawdziwy jest poniższy fakt.

Twierdzenie 1 (R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik (1998)). *Niech X_A będzie zmienną losową opisującą ilość niezależnych rzutów monetą, do pierwszego pojawienia się wzorca A (orłów − O, reszek − R) długości m = 1, 2, … Załóżmy, że prawdopodobieństwo wypadnięcia orła − O wynosi p, prawdopodobieństwo reszki − R, będzie równe q, gdzie $p + q = 1$, $p > 0$, $q > 0$.*

Wówczas

$$E(X_A) = \sum_{k=1}^{m} \overline{A_k}\left[A^k = A_k\right],$$

$$Var(X_A) = \left(E(X_A)\right)^2 - \sum_{k=1}^{m}(2k-1)\,\overline{A_k}\left[A^k = A_k\right],$$

gdzie A^k i A_k oznaczają odpowiednio k ostatnich i k pierwszych elementów ze wzorca A, $\overline{A}$ będzie wynikiem podstawienia p^{-1} za O i q^{-1} za R we wzorcu A, nawias zaś kwadratowy [...] przyjmuje wartość 1, gdy wyrażenie wewnątrz jest prawdziwe lub 0 w przeciwnym razie.

W dalszym ciągu zakładamy, że moneta jest wyważona, czyli

$$p = q = ½.$$

Dla danego wzorca A o l orłach i reszkach oraz wzorca B złożonego z m orłów i reszek niech

$$A : A = \sum_{k=1}^{l} 2^{k-1}\left[A^k = A_k\right], \tag{4}$$

$$A : B = \sum_{k=1}^{\min(l,m)} 2^{k-1}\left[A^k = B_k\right]. \tag{5}$$

Zauważmy, że na ogół

$$A\!: B \neq B\!: A.$$

Przy powyższych oznaczeniach, na podstawie twierdzenia 1, mamy

$$E(X_A) = 2(A\!: A). \tag{6}$$

Wzór (6) został, po raz pierwszy, pokazany w pracy (A. Sołowiew (1966)). Wynik ten wydaje się na pierwszy rzut oka paradoksalny: wzorce, które nie nakładają się na siebie, występują częściej niż wzorce nakładające się!

Przykład 2. Niech $A = ROOOO$, $B = OOOOO$ będą dwoma wzorcami orłów i reszek przy niezależnych rzutach wyważoną monetą. Wtedy

$$E(X_A) = 32,$$

$$E(X_B) = 62.$$

Oczekiwanie na wyrzucenie wzorca B zajmuje prawie dwa razy więcej czasu niż oczekiwanie na pojawienie się wzorca A.

Interesującą grę związaną z rzucaniem monetą zaproponował w roku 1969 Walter Penney (W. Penney (1974)). W **grze Penneya** uczestniczą dwaj gracze. Pierwszy wybiera wzorzec $A = OOR$, drugi – wzorzec $B = ORR$. Wygrywa ten z graczy, którego wzorzec pojawi się jako pierwszy, przy niezależnych rzutach wyważoną monetą (wiadomo, że kiedyś to na pewno nastąpi i nigdy nie będzie remisu, ponieważ żaden z tych wzorców nie występuje wewnątrz drugiego). Ta gra wydaje się być *fair*, ponieważ traktowane oddzielnie wzorce A oraz B wyglądają bardzo podobnie, a funkcje tworzące prawdopodobieństwa zmiennych losowych X_A i X_B są równe:

$$G_A(z) = G_B(z)\frac{z^3}{z^3 - 8(z-1)}.$$

Okazuje się jednak, że gdy te dwa wzorce analizujemy równocześnie, jeden z nich ma przewagę: prawdopodobieństwo zdarzenia, że wzorzec A wygra z B, jest różne niż prawdopodobieństwo zdarzenia, że B wygra ze wzorcem A (R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik (1998)). Mamy: $P(A$ wygra z $B) = 2/3$, $P(B$ wygra z $A) = 1/3$. Ogólny wzór dotyczący tego typu zagadnień został odkryty przez Johna Hortona Conwaya (M. Gardner (1974)).

Twierdzenie 2. *Niech A i B będą dowolnymi wzorcami, niekoniecznie równej długości, orłów i reszek, przy niezależnych rzutach wyważoną monetą w grze Penneya. Załóżmy, że wzorzec A nie zawiera się w B ani B nie zawiera się we wzorcu A.*

Wówczas

$$\frac{P(A \text{ wygra z } B)}{P(B \text{ wygra z } A)} = \frac{B:B - B:A}{A:A - A:B}, \tag{7}$$

gdzie symbole prawej strony równania są określone wzorami (4) i (5).

Wniosek 1. Dla dowolnych wzorców

$$A = a_1a_2 \ldots a_m \quad \text{oraz} \quad B = (-a_2)a_1a_2 \ldots a_{m-1}$$

mamy:

$$P(A \text{ wygra z } B) < P(B \text{ wygra z } A),$$

gdzie $m > 2$ oraz $(-a_2)$ jest orłowo-reszkową odwrotnością a_2.

Wniosek 2. Dla danego wzorca $a_1a_2 \ldots a_m$ największe szanse wygranej daje wybranie jednego z dwóch wzorców:

$$Oa_1a_2 \ldots a_{m-1}$$

lub

$$Ra_1a_2 \ldots a_{m-1},$$

$m > 2$ (L. Guibas, A. Odlyzko (1981)).

Przykład 3. W grze Penneya niech dane będą wzorce (R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik (1998)):

$$A = OORO,$$

$$B = OROO,$$

$$C = ROOO.$$

Na podstawie wzoru (7) mamy:

$$\frac{P(A \text{ wygra z } B)}{P(B \text{ wygra z } A)} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{P(B \text{ wygra z } C)}{P(C \text{ wygra z } B)} = \frac{7}{5},$$

$$\frac{P(A \text{ wygra z } C)}{P(C \text{ wygra z } A)} = \frac{5}{7}.$$

Widać z tego, że relacja lepszości wzorców w grze Penneya nie jest przechodnia. Gdy rozpatrujemy jednak jednocześnie trzy wzorce, największe szanse na zwycięstwo ma wzorzec C. Odpowiednie prawdopodobieństwa wynoszą:

$$P(A \text{ wygra z } B \text{ i } C) = \frac{16}{52},$$

$$P(B \text{ wygra z } A \text{ i } C) = \frac{17}{52},$$

$$P(C \text{ wygra z } A \text{ i } B) = \frac{19}{52}.$$

Przykład 4. Dane są wzorce: $A = RROO$, $B = RRR$. Ze wzoru (7) wynika, że:

$$\frac{P(A \text{ wygra z } B)}{P(B \text{ wygra z } A)} = \frac{5}{7}.$$

W grze Penneya zdarza się, że wzorzec dłuższy wygrywa ze wzorcem krótszym.

Opisana gra jest kolejnym przykładem zawodności intuicji w zagadnieniach probabilistycznych. Można mówić tutaj nawet o zawodności na dwóch poziomach. Podejrzewamy, że gdyby spytać osoby nie zajmującej się zawodowo matematyką o to, który z wzorców $A = ROOOO$, $B = OOOOO$ (przykład 2) ma większą szansę wygranej, zdecydowana większość wskazałaby na A – wzorzec B mógłby wydawać się mało realny, rzadki. Czyli odpowiedź byłaby prawidłowa. Najprawdopodobniej jednak *zawodowcy* daliby obu wzorcom równe szanse. Ich intuicja (w tym miejscu zawodna) bazowałaby na wiedzy, że w czterokrotnym rzucie monetą prawdopodobieństwa obydwu ciągów wyników są jednakowe. Nie mających z kolei tej wiedzy laików matematycznych intuicja zawodziłaby już na etapie czterokrotnego rzutu monetą. Podobnie jak w przypadku gry Penneya często dawaliby większą szansę ciągowi A niż B.

Na podstawie rozważań artykułu, można zauważyć, że nawet klasyczne i proste zagadnienia probabilistyki dyskretnej, jakimi są: losowanie kul z urny, szukanie nagrody w kilku bramkach czy niezależne rzuty monetą, mogą prowadzić do sytuacji nie całkiem zgodnych z intuicją.

Literatura

P. Dniestrzański, J. Sacała (2006). *Kilka przykładów niestandardowych rozwiązań zadań z rachunku prawdopodobieństwa.* PN AE nr 1117. Wrocław. Str. 17-25.

M. Gardner (1974). *On the paradoxical situations the arise from nontransitive relations.* Scientific American 231, 4. Str. 23-28.

R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik (1998). *Matematyka konkretna.* Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.

L. Guibas, A. Odlyzko (1981). *String overlaps*, *pattern matching*, *and nontransitive games.* Journal of Combinatorial Theory. Seria A, 30. Str. 183-208.

W. Penney (1974). *Problem 95: Penney-Ante.* Journal of Recreational Mathematics 7. Str. 321.

A. Smoluk (1997). *Prognozy intuicyjne*. Ekonomia Matematyczna 1. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu. Str. 71-82.

A. Smoluk (2002). *Co jest przedmiotem rachunku prawdopodobieństwa?* Ekonomia Matematyczna 6. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu. Str. 27-48.

A. Sołowiew (1966). *A combinatorial identity and its application to the problem concerning the first occurrence of a rare event.* Theory of Probability and its Applications 11 [tłumaczenie z rosyjskiego]. Str. 53-61.