

# **DIDACTICS OF MATHEMATICS**

**8(12)**



The Publishing House  
of Wrocław University of Economics  
Wrocław 2011

Referee  
Henryk Zawadzki  
(University of Economics in Katowice)

Copy-editing  
Dorota Pitulec

Proof-reading  
Barbara Łopusiewicz

Typesetting  
Elżbieta Szlachcic

Cover design  
Robert Mazurczyk

Front cover painting: W. Tank, Sower  
(private collection)

This publication is available at: [www.journal.ue.wroc.pl](http://www.journal.ue.wroc.pl) and [www.ibuk.pl](http://www.ibuk.pl).  
Abstracts of published papers are available in the international database  
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities  
<http://cejsh.icm.edu.pl>

Information on submitting and reviewing paper is available  
on the Publishing House's website [www.wydawnictwo.ue.wroc.pl](http://www.wydawnictwo.ue.wroc.pl)

© Copyright Wrocław University of Economics  
Wrocław 2011

**ISSN 1733-7941**

The original version: printed  
Printing: Printing House TOTEM  
Print run: 200 copies

## TABLE OF CONTENTS

<b>PIOTR DNIESTRZAŃSKI</b> <i>Studia ekonomiczno-matematyczne – analiza wybranych aspektów oferty edukacyjnej</i> [ <i>Economic and mathematical studies – analysis of selected aspects of educational offer</i> ] .....	<b>5</b>
<b>ALBERT GARDOŃ</b> <i>Rozkład statystyki T-Studenta przy danej wariancji z próby o rozkładzie normalnym</i> [The distribution of the T-Student's statistic given the variance from a normal sample] .....	<b>17</b>
<b>ANNA GÓRSKA, DOROTA KOZIOL-KACZOREK</b> <i>Matematyka, matematyka finansowa i inżynieria finansowa realizowane na kierunkach ekonomicznych w świetle obowiązujących standardów nauczania</i> [Mathematics, financial mathematics and financial engineering carried out on the field of economics in light of the existing standards teaching] .....	<b>31</b>
<b>ALEKSANDER JAKIMOWICZ</b> <i>Dynamika nieliniowa w badaniach ekonomicznych</i> [Nonlinear dynamics in economic research] .....	<b>39</b>
<b>TADEUSZ JANASZAK</b> <i>Złota elipsa i złota hiperbola</i> [Golden ellipse and golden hyperbola].....	<b>55</b>
<b>MAREK KOŚNY, PIOTR PETERNEK</b> <i>Wielkość próby a istotność wnioskowania statystycznego</i> [Sample size and significance of statistical inference] .....	<b>71</b>
<b>ARKADIUSZ MACIUK</b> <i>Wpływ standardów kształcenia na poziom nauczania matematyki w wyższych szkołach ekonomicznych</i> [The influence of education standards on the level of mathematics teaching in economic universities] .....	<b>81</b>
<b>ADRIANNA MASTALERZ-KODZIS, EWA POŚPIECH</b> <i>Wybrane zagadnienia w nauczaniu ekonomii matematycznej</i> [Selected problems in teaching of mathematical economics] .....	<b>91</b>
<b>MONIKA MIŚKIEWICZ</b> <i>Wpływ nowego programu nauczania matematyki w szkołach średnich na wyniki nauczania matematyki na uczelniach ekonomicznych</i> [The impact of new mathematics curriculum in secondary schools on learning outcomes of mathematics at the universities of economic] .....	<b>101</b>
<b>MARIA PARLIŃSKA, ROBERT PIETRZYKOWSKI</b> <i>Statystyka i ekonometria realizowane na kierunkach ekonomicznych w świetle obowiązujących standardów nauczania</i> [Statistics and econometrics at the economical studies in the frame of standards of education] .....	<b>113</b>
<b>AGNIESZKA PRZYBYLSKA-MAZUR</b> <i>O formalnym opisie zjawisk ekonomicznych</i> [About formal description of economic phenomena] ..	<b>119</b>
<b>PAWEŁ SIARKA</b> <i>Rozwój metod ilościowych w bankowości</i> [Development of quantitative methods in banking] .	<b>127</b>
<b>KATARZYNA ZEUG-ŻEBRO</b> <i>W jakim stopniu seria podręczników „Elementy matematyki dla studentów ekonomii i zarządzania” wspomaga proces uczenia się matematyki wśród studentów pierwszego roku?</i> [To what extent a series of textbooks “Elements of mathematics for students of economics and management” supports the process of learning mathematics by first-year students?] .....	<b>135</b>

## DYNAMIKA NIELINIOWA W BADANIACH EKONOMICZNYCH

**Aleksander Jakimowicz**

**Abstract.** Nonlinear dynamics is a multidisciplinary branch of science which encompasses two major concepts of modern science: the deterministic chaos theory and the complexity theory. It also feeds on the rich achievements of cybernetics and the catastrophe theory. Over the recent years, nonlinear dynamics has contributed to considerable progress in system theories as a result of introduction of numerical methods on a broader scale. Initially, they were employed in natural sciences, however, as a result of interdisciplinary diffusion they quickly became common in social sciences, mainly in economics. It was possible thanks to isomorphisms that exist in science, which are based on logical homologies. The introduction of new methods into economics is necessary, since economic systems belong to the most complex dynamical systems that we know of. Moreover, we observe a steady increase in the degree of their complexity, which should be attributed to civilization progress. This is how studies on economic complexity become a central issue of contemporary economics. Numerical explorations of archetypal economic systems show that the increase in the degree of complexity beyond a certain upper limit destroys their adaptive capabilities. It serves as a guideline for societies, namely the prime goal of economic policy should be decreasing complexity of markets and economies. However, it turns out that it is not always possible, because a reduction of chaos can increase systems' instability.

**Keywords:** complexity theory, deterministic chaos, interdisciplinary matrix, numerical explorations, Lyapunov exponent, complexity economics, econophysics.

### 1. Wstęp

W obecnych czasach ekonomia znajduje się w poważnym kryzysie, którego źródeł upatruję w stale powiększającej się luce poznawczej, jaka występuje między teoriami głównego nurtu a rzeczywistością. Problem ten był poruszany w trakcie obrad 40. Światowego Forum Ekonomicznego, które odbyło się w styczniu 2010 r. w Davos. W konkluzji stwierdzono, że dotychczasowe modele ekonomiczne są bezużyteczne i że w ich skuteczność nikt już nie wierzy.

---

**Aleksander Jakimowicz**

Department of Quantitative Methods, University of Warmia and Mazury in Olsztyn,  
M. Oczapowskiego Street 4, 10-710 Olsztyn, Poland.

E-mail: [aleksander.jakimowicz@uwm.edu.pl](mailto:aleksander.jakimowicz@uwm.edu.pl)

Istota problemu ma podłoże metodologiczne. Celem modelowania jest upraszczanie rzeczywistości. W ekonomii proces ten poszedł w złym kierunku, gdyż skoncentrowano się na modelach liniowych, a to zaowocowało myśleniem w kategoriach równowagi i racjonalnych oczekiwań podmiotów gospodarczych. Taki obraz funkcjonowania rynków i gospodarek dominował przez kilkadziesiąt ostatnich lat i nadal wyznacza standardy nauczania w tej dziedzinie. Tymczasem najnowsze badania dowodzą, że rynki i gospodarki są systemami nieliniowymi, a ich złożoność jest znacznie większa niż złożoność systemów przyrodniczych. W ten sposób doszło do zerwania związków między teorią a praktyką gospodarowania.

Co w takiej sytuacji powinni zrobić badacze? Odpowiedzi udzielił już dawno temu J.M. Keynes, który w rozmowie z A. Marshalllem określił trwałe standardy badań naukowych w ekonomii (Semkow, 1988, s. 214-215): „Wydaje się, że nauka ekonomii nie wymaga jakichś szczególnych uzdolnień o niezwykle wysokiej randze. Czyż z punktu widzenia intelektualnego nie jest ona w porównaniu z wyższymi gałęziami filozofii czy nauk ścisłych przedmiotem bardzo prostym? Przedmiot prosty, a tak niewielu osiągnęło w nim coś znakomitego. Ów paradoks znajduje może wyjaśnienie w tym, że mistrzowski ekonomista musi posiadać wyjątkową kombinację uzdolnień. Musi on być w pewnym stopniu matematykiem, historykiem, mężem stanu, filozofem. Musi rozumieć znaki i władać słowem. Musi chwycić w ogólnych wyrażeniach to, co szczegółowe, i w swoim myśleniu stale uwzględniać zarówno to, co abstrakcyjne, jak i to, co konkretne. Musi studiować przeszłość w świetle teraźniejszości dla celów przyszłości. Żadna część natury ludzkiej bądź instytucji nie może być przez ekonomistę pomijana. Musi być w każdym swym tchnieniu zorientowany na cel i bezinteresowny; chłodny i nieprzekupny jak artysta, choć niekiedy bliski ziemi jak polityk”. Jest to nic innego, jak wezwanie do badań interdyscyplinarnych. Późniejsze kryzysy gospodarcze potwierdzają tę prawdę. Przywrócenie ekonomii jej statusu naukowego nie wydaje się możliwe bez sięgnięcia do bogatego dorobku metodologicznego całej nauki.

## 2. Podejście systemowe w nauce a ekonomia złożoności

Genezy nauki o złożoności należy upatrywać w ogólnej teorii systemów, której podstawy zostały opracowane w 1937 r. przez austriackiego biologa L. von Bertalanffy'ego. Przedmiotem zainteresowania tej nauki są systemy jako takie, bez względu na ich konkretny charakter. Pominiecie kontekstu lokalnego umożliwia zasada izomorfizmu, u podstaw której leżą

podobieństwa strukturalne między obiektami opisywanymi przez różne nauki. Źródłem izomorfizmu są homologie logiczne, o których mówi się wtedy, gdy czynniki oddziałujące na zjawiska i procesy badane przez odmienne nauki są różne, natomiast prawa formalne są identyczne (Bertalanffy, 1984). Jest wiele praw fizycznych, które posiadają swój odpowiednik w ekonomii.

Nowoczesna ogólna teoria systemów zawiera cztery podstawowe komponenty: cybernetykę, teorię katastrof, teorię chaosu deterministycznego i teorię złożoności. Nieraz ten fundament metodologiczny określa się mianem 4C od pierwszych liter nazw angielskich: *cybernetics*, *catastrophes*, *chaos*, *complexity*. Początkowo nazwa 4C miała na celu ośmieszenie całej koncepcji i podkreślenie, że wymienione teorie były intelektualnymi bańkami, które bardzo szybko pękały (Horgan, 1995). Najpierw cieszyły się one w środowisku naukowym dużym zainteresowaniem, gdyż każda z nich pretendowała do bycia jedynie słusznym wyjaśnieniem rzeczywistości. Tymczasem – jak twierdzili krytycy – dostarczały one tylko wątpliwej jakości metafor i paralel. To zniechęcało do badań. Dzisiaj wiele wskazuje na to, że mogło nastąpić wylanie dziecka z kąpielą (Rosser, 2005). Z perspektywy czasu okazało się, że podstawy do krytyki były kruche. Stopniowo nazwa konceptu nabrała w nauce dużego znaczenia, gdyż oznaczała proces łączenia się dotychczas odrębnych sposobów badania nieliniowych systemów dynamicznych w jedną spójną metodologię (Rosser, 2004). Wprowadzenie 4C do wielu dziedzin nauki skutkuje wzrostem ich prestiżu i znaczenia.

Kierując się standardami badań naukowych w ekonomii wyznaczonymi przez Keynesa, należy zauważyć, że koncepcja 4C, jakkolwiek nowoczesna, jest niepełna. Wymaga ona uzupełnienia jeszcze o co najmniej dwa „twarde” elementy metodologii naukowej: sztuczną inteligencję i geometrię fraktalną. W ten sposób w instrumentarium współczesnego ekonomisty mamy nowoczesne stanowisko metodologiczne przeniesione z przyrodoznawstwa. Jednak do zrozumienia i oceny działalności gospodarczej ludzi jest to za mało. Ekonomia nie jest i zapewne nie będzie jedną z nauk fizycznych, jak sugerują niektórzy (Farmer, Shubik, Smith, 2005). Istnieją zbyt duże różnice między naukami humanistycznymi, a do nich właśnie należy zaliczyć ekonomię, a naukami przyrodniczymi. Ekonomia nie spełniałaby swej funkcji społecznej bez wartości chrześcijańskich, których najpełniejszą wykładnią są Listy św. Pawła.

Zintegrowane stanowisko metodologiczne zawierające siedem wymienionych składników nazwałem **matrycą interdyscyplinarną** (Jakimowicz,

2009). Szukając nazwy dla tego nowego podejścia, wykorzystałem język kuhnowski, w którym występuje pojęcie matrycy dyscyplinarnej (Kuhn, 1985). Obejmuje ona cztery elementy warunkujące istnienie wspólnot naukowych. Są to symboliczne uogólnienia, modele, wartości i okazy. Kuhnowska matryca dyscyplinarna określa platformę porozumienia wewnątrz danej dyscypliny naukowej i jest wspólną własnością wszystkich badaczy uprawiających tę dyscyplinę. W odróżnieniu od tego pojęcia matryca interdyscyplinarna jednoczy przedstawicieli wielu dyscyplin i sprawia, że tradycyjne wspólnoty naukowe, gdzie czynnikiem jednoczącym jest przedmiot badań, tracą swoją spójność.

Relacje między matrycą interdyscyplinarną, współczesną ogólną teorią systemów (4C) i dynamiką nieliniową można przedstawić następująco:

**matryca interdyscyplinarna > ogólna teoria systemów > dynamika nieliniowa.**

Zakresy pojęciowe ogólnej teorii systemów i dynamiki nieliniowej niemal się pokrywają. Jednak ogólna teoria systemów zawiera dodatkowo pewne elementy mniej sformalizowane, które czynią ją bardziej podatną na zastosowania w naukach społecznych. Mam tu na myśli zasadę izomorfizmu i związane z nią homologie logiczne, które należy uznać za najważniejsze łączniki między przyrodoznawstwem a humanistyką. Wyjaśnia to relację „większy” między tymi koncepcjami. Proponowana przeze mnie matryca interdyscyplinarna zawiera więcej elementów, w tym wartości chrześcijańskie, zatem pojęcie to jest szersze niż nowocześnie rozumiana ogólna teoria systemów czy dynamika nieliniowa. Do najważniejszych wartości chrześcijańskich zaliczam: miłość, wolność, radość, szczęście, cierpliwość, dobroć, godność i twórczość. Pojawiają się one coraz częściej w naukach społecznych, czego przykładem może być geografia społeczno-ekonomiczna (Tkocz, 2007). W ten sposób otrzymujemy wyjaśnienie drugiej nierówności.

Matryca interdyscyplinarna jest fundamentem metodologicznym ekonomii złożoności. Ten nowy nurt badań wskazuje na wiele niedoskonałości ekonomii tradycyjnej (Beinhocker, 2006). Największe rozbieżności dotyczą dziewięciu zagadnień: dynamiki, agentów, sieci, emergencji, ewolucji, technologii, preferencji, źródeł i elementów (Arthur, Durlauf, Lane, 1997; Colander, 2000; Wojtyna, 2008). Ekonomia złożoności traktuje rynki i gospodarkę jako otwarte, dynamiczne, nieliniowe, nieustannie rozwijające się systemy, które pod względem funkcjonalnym przypominają mózg, Internet lub ekosystem. Ich cechą charakterystyczną jest to, że najlepiej funkcjonują w stanach dalekich od położenia równowagi. W modelowaniu

podmioty gospodarcze występują jako pojedyncze indywidua, są heterogeniczni, dysponują niekompletną informacją, popełniają błędy, posiadają zdolność do nauki i adaptacji. Kształtowanie się preferencji uznawane jest za zagadnienie centralne, a jednostki niekoniecznie są samolubne. Ważnym problemem badawczym jest sposób tworzenia się złożoności ekonomicznej. Wyjaśnienie proponowane przez ekonomię złożoności kwestionuje preferowany kierunek rozwoju makroekonomii głównego nurtu – poszukiwanie podstaw mikroekonomicznych. Ponieważ obrazy makro są emergentnym rezultatem interakcji i zachowań na poziomie mikro, nie ma sensu wyszczególniania mikroekonomii i makroekonomii jako dwóch odrębnych dziedzin.

Ekonomia złożoności jest jedną z najpoważniejszych propozycji wypełnienia wspomnianej luki poznawczej. Wskazuje się tu na możliwość indukowania złożoności przez stosunkowo prosty model. Takie perspektywy otwierają przed nami modele nieliniowe, które dość często były pomijane przez główny nurt ekonomii. Jedną z przyczyn tego stanu rzeczy były trudności związane z ich rozwiązaniem, rzadko bowiem dostarczały zwyciężonych odpowiedzi analitycznych. Przeszkody te znikły wraz z nastaniem ery cyfrowych komputerów i rozwojem badań numerycznych. Techniki komputerowe stały się też głównym czynnikiem postępu w badaniach empirycznych. Postęp w teorii ekonomii jest możliwy dzięki traktowaniu rynków i gospodarek jako złożonych układów adaptacyjnych, a nadzieję na postęp w praktyce gospodarowania daje nowa nauka empiryczna – ekonofizyka.

Złożone układy adaptacyjne są otwartymi systemami dynamicznymi, które składają się z oddziałujących na siebie agentów. Oddziaływania między składnikami prowadzą do powstania uporządkowanych zjawisk kolektywnych – własności emergentnych. Agentami mogą być ludzie, organizmy, programy komputerowe, molekuly. Cechą wspólną wszystkich złożonych układów adaptacyjnych jest gromadzenie informacji o otoczeniu i swoich z nim związkach, odkrywanie w nich regularności i budowanie na tej podstawie schematów poznawczych wykorzystywanych do działania w świecie rzeczywistym. Skutki tych działań generują zwrotny strumień danych, wywierając nacisk selekcyjny na dostępny zbiór schematów poznawczych.

Złożoność nie jest terminem jednoznacznym. Istnieje co najmniej 45 różnych definicji złożoności (Horgan, 1999). Niemal każda z nich jest subiektywna, ale nie jest to przeszkodą w badaniach naukowych, gdyż większość sformułowań nawiązuje do takich pojęć, jak entropia, przypadkowość czy informacja. Jedną z ciekawszych definicji jest efektywna złożoność systemu rozumiana jako długość zwięzłego schematu wykorzystywanego do opisu jego regularności przez wybrany złożony układ adaptacyjny, który



obserwuje ten system (Gell-Mann, 1996). W ekonomii o złożoności systemów mówi się wtedy, gdy czynniki endogeniczne są przyczyną albo zachowań nieperiodycznych, albo zmian strukturalnych (Day, 1994).

Nauki systemowe przyczyniły się do powstania kilku nowych interdyscyplinarnych, praktycznych dziedzin nauki związanych z ekonomią, spośród których najważniejsze znaczenie ma ekonofizyka. Tym terminem określa się często działalność fizyków, którzy są zainteresowani problematyką ekonomiczną i stosują w badaniach metody sprawdzone uprzednio w różnych gałęziach fizyki (Mantegna, Stanley, 2001). Takie ujęcie przedmiotu ekonofizyki jest zbyt jednostronne, zakłada bowiem aktywność poznawczą tylko po stronie fizyków. Obecnie coraz częściej to ekonomiści stosują do rozwiązywania problemów ekonomicznych metody i techniki pochodzące z fizyki. Zatem ekonofizykiem nie musi być fizyk, może nim być też ekonomista. Jednym z obiecujących nurtów badawczych w tej dziedzinie jest przeniesienie idei mechaniki statystycznej na grunt ekonomii (Rosser, 2008).

### 3. Wykładnik Lapunowa jako miara złożoności i klasyfikacja systemów

Wykładniki Lapunowa należą do najczęściej stosowanych ilościowych miar rozbieżności trajektorii startujących z położonych blisko siebie punktów. Poniżej podaję definicję wykładnika Lapunowa dla jednowymiarowego odwzorowania

$$x_{n+1} = f(x_n), x \in [0, 1].$$

W wyniku pojawienia się chaosu deterministycznego odległość między dwiema orbitami rozpoczynającymi się w nieznacznie różnych punktach początkowych  $x_0$  i  $x_0 + \varepsilon$  powiększy się wykładniczo, osiągając po  $n$  iteracjach wartość:

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| = \varepsilon \exp(n WL).$$

Z zależności tej otrzymujemy:

$$WL = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right|.$$

Wykładnikiem Lapunowa nazywamy granicę powyższego wyrażenia dla  $\varepsilon \rightarrow 0$  i  $n \rightarrow \infty$ , co oznacza pojawienie się pochodnej funkcji  $f^n(x)$  w otoczeniu punktu  $x_0$ :

$$W^L = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{d f^n(x_0)}{d x_0} \right|.$$

Wykorzystując regułę łańcuchową różniczkowania funkcji złożonej, można zapisać:

$$W^L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{d f^n(x_0)}{d x_0} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

Mamy tu do czynienia z pomiarem uśrednionego zachowania się pochodnej odwzorowania wzdłuż orbity. Innymi słowy, wykładnik Lapunowa odwzorowania jednowymiarowego to średnia wykładnicza szybkość rozbieżności trajektorii startujących z nieskończenie blisko położonych warunków początkowych. Jeśli  $W^L > 0$ , to mamy trajektorię chaotyczną,  $W^L = 0$  oznacza punkt bifurkacji, a  $W^L < 0$  sygnalizuje trajektorię zbieżną do stabilnego stanu równowagi lub atraktora periodycznego. Definicję wykładników Lapunowa można także uogólnić na układy wielowymiarowe.

W celu bliższego określenia przedmiotu zainteresowań dynamiki nieliniowej można poklasyfikować systemy dynamiczne w zależności od dwóch parametrów: liczby ich elementów składowych i średniej liczby połączeń między elementami. W zależności od relacji występującej między parametrami wyróżniamy trzy typy systemów. Pierwszy typ to systemy subkrytyczne, w których liczba połączeń jest niewielka w porównaniu z liczbą elementów. Dążą one do stanu równowagi. Największy wykładnik Lapunowa jest ujemny. Drugi typ stanowią systemy krytyczne. Wyróżnia je wzrost liczby połączeń w stosunku do liczby składników. Mają własności emergentne i często znajdują się na krawędzi chaosu. Największy wykładnik Lapunowa kształtuje się w pobliżu zera. Trzeci typ tworzą systemy superkrytyczne. Stosunek liczby połączeń do liczby składników jest tu bliski jedności, niemal każdy element takiego układu związany jest z pozostałymi. Przejawiają one złożone zachowania, a największy wykładnik Lapunowa jest dodatni. Nauka klasyczna zajmuje się systemami typu pierwszego, teoria chaosu odnosi się do systemów typu trzeciego, a teoria złożoności bada systemy typu drugiego.

#### 4. Ekonomiczna katastrofa złożoności

Prosty system składający się z niewielu części i nielicznych współzależności między nimi posiada słabe zdolności adaptacyjne, gdyż liczba osiągniętych przez niego stanów jest znacznie mniejsza niż liczba sytuacji, którym należałoby sprostać. Jednak przestrzeń pozwalająca na ewoluowanie ma nie tylko ograniczenie dolne, lecz także górne. Wzrost złożoności poza określony pułap redukuje nacisk selekcyjny na dostępny zbiór schematów poznawczych, przez co zdolności adaptacyjne takiego układu gwałtownie maleją. W takiej sytuacji pożądane zmiany w jednych częściach systemu wywołują niepożądane skutki gdzie indziej. Zjawisko to nazywa się katastrofą złożoności (Kauffman, 1993).

Ekonomia złożoności jako nauka interdyscyplinarna nie ogranicza się tylko do badania systemów kapitalistycznych. Bardzo ciekawą kwestią poznawczą w ekonomii jest wyjaśnienie faktycznych przyczyn upadku gospodarki socjalistycznej. Mimo podejmowania wielu prób, problem ten nie jest do dzisiaj satysfakcjonująco wyjaśniony. Wydaje się, że ekonomia złożoności może rzucić więcej światła na to zagadnienie. Za upadek gospodarki centralnie planowanej odpowiada ekonomiczna katastrofa złożoności.

Jednym z największych osiągnięć ekonomii politycznej socjalizmu jest model oparty na koncepcji cykli inwestycyjnych (Hommes, Nusse, Simonovits, 1995). Jego cechą charakterystyczną jest występowanie napięć wewnętrznego i zewnętrznego w przebiegu procesów gospodarczych. Są one podstawowymi zmiennymi systemu. Model ma postać dwuwymiarowego, kawałkami liniowego odwzorowania:

$$e_t = f e_{t-1} + \sigma_s s(e_{t-1}, a_{t-1}) - i(e_{t-1}) - \varepsilon_0,$$

$$a_t = \beta_i i(e_{t-1}) - \beta_0,$$

gdzie:

$$s(e_{t-1}, a_{t-1}) = \begin{cases} s^l & \text{dla } SR \leq s^l \\ SR = \sigma - \sigma_e e_{t-1} - \sigma_a a_{t-1} & \text{dla } s^l < SR < s^u, \\ s^u & \text{dla } SR \geq s^u \end{cases}$$

$$i(e_{t-1}) = \begin{cases} i^l & \text{dla } IR \leq i^l \\ IR = \iota + \iota_e e_{t-1} & \text{dla } i^l < IR < i^u \\ i^u & \text{dla } IR \geq i^u \end{cases} .$$

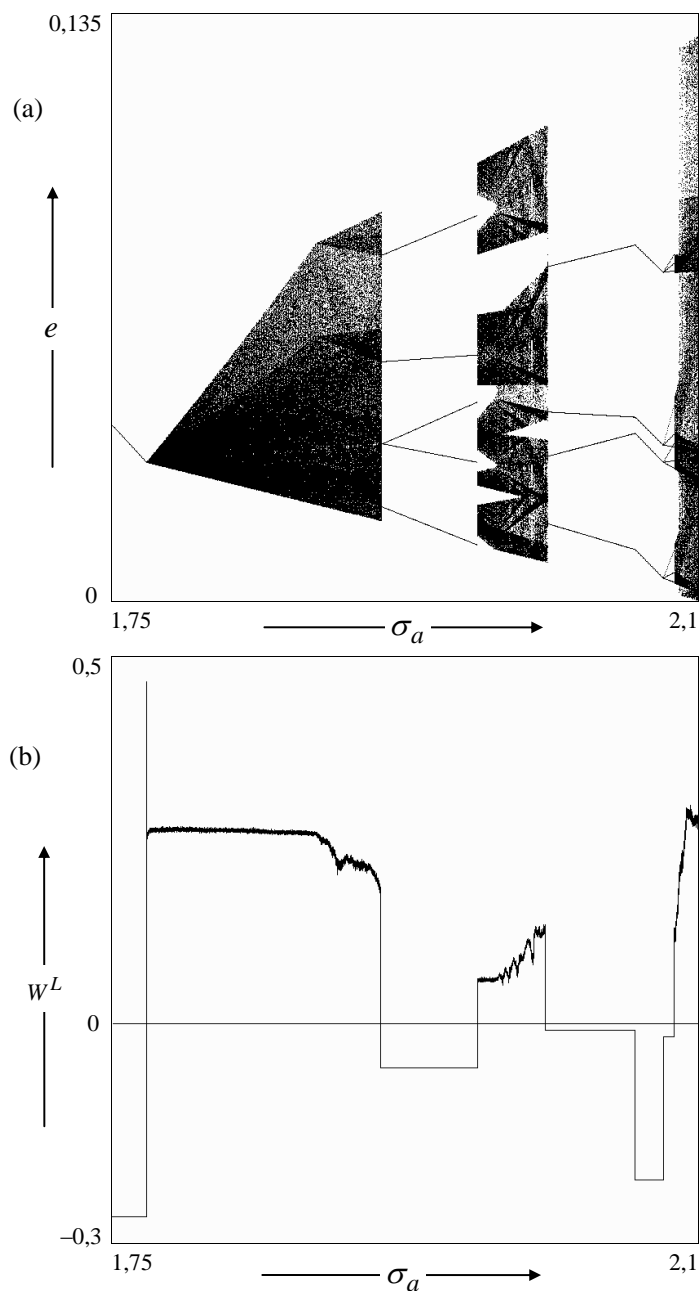
Występują tu dwie zmienne ekonomiczne:  $e$  – napięcie wewnętrzne,  $a$  – napięcie zewnętrzne. Pozostałe symbole oznaczają parametry. Przestrzeń parametrów jest 15-wymiarowa. Centralny planista ma możliwość wpływu na gospodarkę za pośrednictwem parametrów kontrolnych  $\sigma_e, \sigma_a, \iota_e$ .

Wykresy bifurkacyjne przedstawione na rys. 1 ujawniają, że dynamika socjalizmu jest niezwykle złożona. Najczęściej spotykaną bifurkacją jest bifurkacja zderzenia z brzegiem (Nusse, Ott, Yorke, 1994). Polega ona na tym, że niewielka zmiana parametru sterowania może spowodować gwałtowne przejście układu od atraktora periodycznego do atraktora chaotycznego lub odwrotnie. Możliwe są też przeskoki między atraktorami periodycznymi o różnym okresie. Systemy typu trzeciego wykazują oprócz wrażliwości na warunki początkowe także wrażliwość parametryczną. Ta ostatnia uniemożliwia przewidywanie zachowania układu w stopniu znacznie większym niż efekt motyla.

Na rys. 1(a) przedstawiono zależność napięcia wewnętrznego od współczynnika  $\sigma_a$ . Widać tu co najmniej sześć bifurkacji zderzenia z brzegiem dla rosnących wartości parametru:

- 1) przyciągający punkt stały  $\rightarrow$  atraktor chaotyczny;
- 2) atraktor chaotyczny  $\rightarrow$  atraktor periodyczny o okresie 5;
- 3) atraktor periodyczny o okresie 5  $\rightarrow$  atraktor chaotyczny;
- 4) atraktor chaotyczny  $\rightarrow$  atraktor periodyczny o okresie 4;
- 5) atraktor periodyczny o okresie 4  $\rightarrow$  atraktor periodyczny o okresie 12;
- 6) atraktor periodyczny o okresie 12  $\rightarrow$  atraktor chaotyczny.

Na rys. 1(b) przedstawiono wykres bifurkacyjny największego wykładnika Lapunowa systemu, który koresponduje z wykresem bifurkacyjnym napięcia wewnętrznego. Widzimy tu nagle przejścia od wartości ujemnych do wartości dodatnich. Jeśli wykładnik Lapunowa jest ujemny, to w systemie istnieje stabilna orbita o pewnym okresie  $p \geq 1$ , a jeśli wykładnik Lapunowa jest dodatni, to w układzie występuje atraktor chaotyczny. Jak łatwo zauważyć, zmiana atraktora powiązana jest ze zmianą wykładnika Lapunowa. Dowodzi to, że w systemie występują gwałtowne zmiany złożoności gospodarczej.



Rys. 1. Zachowania okresowe i chaotyczne w modelu gospodarki socjalistycznej:  
(a) napięcie wewnętrzne jako funkcja  $\sigma_a$ ; (b) wykres bifurkacyjny wykładnika Lapunowa  
Źródło: obliczenia własne.

Wrażliwość parametryczna powoduje, że zmiany dynamiczne w systemie są dla centralnego planisty zaskoczeniem. Szczególnie ciekawa jest sytuacja opisywana przez pierwszą bifurkację, gdy system przechodzi ze stanu równowagi stabilnej do stanu chaosu. Równocześnie wykładnik Lapunowa przechodzi od wartości ujemnych do dodatnich, osiągając wartość zbliżoną do 0,5. W takim przypadku planista jest całkowicie bezradny i nie jest w stanie znaleźć rozsądnego rozwiązania pozwalającego na powrót do równowagi. Wraz z upływem czasu staje się on coraz bardziej zdezorientowany. Wynika to bezpośrednio z podstawowego prawa cybernetyki – prawa niezbędnej różnorodności, zgodnie z którym złożoność kontrolera musi być co najmniej tak duża, jak złożoność systemu, który ma być kontrolowany (Ashby, 1961). Polityka gospodarcza proponowana przez centrum planistyczne zawsze będzie opóźniona, nieprzystosowana do danej sytuacji, a więc nieskuteczna. Pojawia się typowa katastrofa złożoności – złożoność gospodarki waha się gwałtownie, często przekraczając poziom krytyczny, powyżej którego kończą się regulacyjne możliwości centralnego planowania. W ten sposób powstaje chroniczny niedobór i przekroczona zostaje granica społecznej akceptacji (Kornai, 1985). Reformy stają się nieuniknione, ale – jak wskazuje model – jedyne reformy, jakie przyniosą poprawę sytuacji, polegają na konieczności rozmontowania starego systemu i powrotu do kapitalizmu.

Analiza dynamiczna modelu gospodarki centralnie planowanej prowadzi do wniosków o nieco szerszym znaczeniu. Procesy integracji i globalizacji doprowadziły w początkach XXI wieku do powstania ponadnarodowych struktur gospodarczych, takich jak Unia Europejska. Złożoność tego typu systemów jest już na starcie znacznie większa niż złożoność poszczególnych gospodarek narodowych. Zatem musi ona być na bieżąco monitorowana, aby oddalić niebezpieczeństwo pojawienia się katastrofy złożoności.

### 5. Wymienność między złożonością a niestabilnością

Jednym z nielicznych matematycznych modeli transformacji gospodarczej jest model chaotycznej histerezy (Rosser i in., 2001). Wykorzystano tu i teorię katastrof, i teorię chaosu. Chaotyczna histereza jest wynikiem działania dwufazowego nieliniowego akceleratora, który skonstruowano, wyróżniając inwestycje w sektorze dóbr konsumpcyjnych i inwestycje w sektorze dóbr kapitałowych. Model ma postać dwuwymiarowego odwzorowania:

$$I_t = I_{t-1} + Z_t,$$

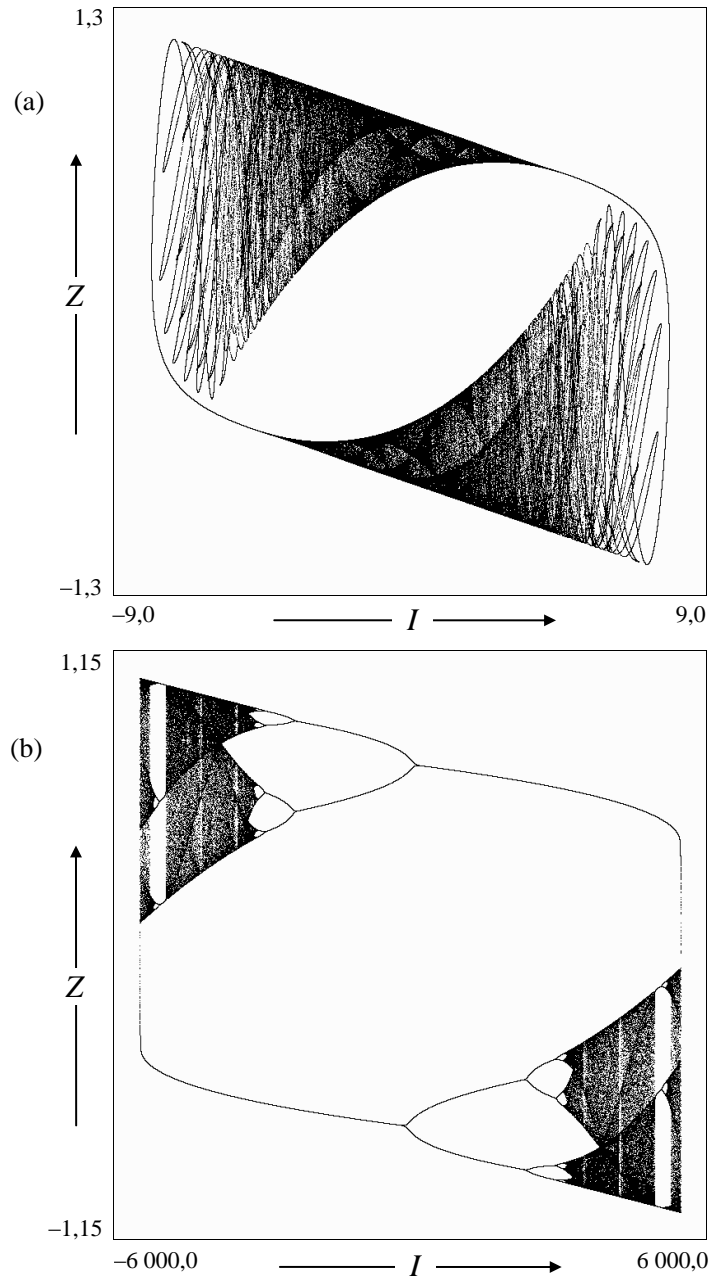
$$Z_t = u \left( Z_{t-1} - Z_{t-1}^3 \right) - v I_{t-1},$$

gdzie:  $I$  – inwestycje całkowite;  $Z$  – przyrost inwestycji;  $v$  – akcelerator sektora dóbr konsumpcyjnych;  $u$  – akcelerator sektora dóbr kapitałowych.

W zależności od wielkości parametrów zachowanie systemu może być zarówno okresowe, jak i złożone. Zjawisko chaotycznej histerezy polega na występowaniu dynamiki chaotycznej wewnątrz cyklu.

Osiągnięcie kornaiowskiej granicy społecznej akceptacji oznacza przekroczenie przez gospodarkę pułapu złożoności wyznaczonego przez katastrofę złożoności. W takim przypadku zdolności adaptacyjne systemu zmniejszają się i zagrożone jest jego dalsze istnienie. Władze w pierwszej kolejności decydują się na poprawę sytuacji w sektorze dóbr konsumpcyjnych, co jest posunięciem słusznym, redukuje bowiem napięcie wewnętrzne.

Niech  $u = 2$ . Zmniejszanie akceleratora działającego w sferze konsumpcji jest początkowym stadium reform. Niskie wartości parametru  $v$  oznaczają położenie nacisku na inwestycje w gałęziach produkujących dobra konsumpcyjne i – jak dalej zobaczymy – przyczyniają się do redukcji chaosu w systemie. W trakcie tego typu polityki gospodarczej w systemie następuje metamorfoza atraktora chaotycznego i ostatecznie przyjmuje on postać chaotycznej histerezy. Na rys. 2(a) przedstawiono wewnętrzny cykl inwestycyjny w formie atraktora chaotycznego dla  $v = 0,05$ . Oprócz złożonych zachowań widzimy załączki cyklu. Zmniejszenie wartości akceleratora działającego w sferze konsumpcji powoduje zmianę kształtu atraktora i powstaje obiekt zwany chaotyczną histerezą. Jest on widoczny na rys. 2(b), gdy  $v = 0,00005$ . Jest to też rodzaj atraktora chaotycznego. Dynamika systemu ma charakter wirowy i po uwzględnieniu osi czasu przypominałaby linię nawijaną na stożek. Kolejne wektory stanu  $(I_n, Z_n)$  pojawiają się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Zachowania stabilne utrzymują się przez pewien czas, a potem zanikają gwałtownie. Po każdej katastrofie pojawia się faza chaosu, która kończy się, gdy trajektoria przechodzi przez fragment atraktora przypominający ciąg bifurkacji przepołowienia okresu. Zmniejszanie wartości  $v$  powoduje silne spłaszczenie i rozciągnięcie stożka wyznaczającego ruch systemu. Właśnie to zjawisko nazwałem wymiennością między złożonością a niestabilnością.



Rys. 2. Proces powstawania chaotycznej histerezy w modelu transformacji ustrojowej:  
(a) atraktor chaotyczny dla  $u = 2$ ,  $v = 0,05$ ; (b) chaotyczna histereza dla  $u = 2$ ,  $v = 0,00005$

Źródło: opracowanie własne.



Tabela 1. Charakterystyka atraktorów chaotycznych istniejących w systemie dwufazowego akceleratora dla wybranych wartości parametrów

Cecha	Atraktory chaotyczne dla $u = 2$	
	$v = 0,05$ rys. 2(a)	$v = 0,00005$ rys. 2(b)
Największy wykładnik Lapunowa	0,166385	0,051869
Drugi wykładnik Lapunowa	-0,370565	-0,693744
Wymiar pojemnościowy	$1,714 \pm 0,130$	$1,537 \pm 0,169$
Wymiar Lapunowa	1,449	1,07477
Wymiar korelacyjny	$1,161 \pm 0,091$	$1,009 \pm 0,017$

Źródło: opracowanie własne.

W tab. 1 przedstawiono charakterystyki dynamiczne obu atraktorów chaotycznych. Obejmują one spektrum wykładników Lapunowa oraz wymiary pojemnościowy, Lapunowa i korelacyjny. Wymiar atraktora zawiera podstawową wiedzę o jego własnościach i złożoności. Z zaprezentowanego zestawienia wynika, że obniżanie akceleratora  $v$  redukuje złożoność, co potwierdzałoby skuteczność tego typu polityki gospodarczej. Maleją zarówno wykładniki Lapunowa, jak i wymiary. Równocześnie wydłuża się jednak okres i zwiększa się amplituda wahań, co wywiera destabilizujący wpływ na system. Chaos zostaje częściowo wyeliminowany, ale pociąga to za sobą koszt w postaci wzrostu niestabilności gospodarki.

Z modelu dwufazowego akceleratora wynika, że w gospodarce centralnie planowanej największym problemem jest chaotyczny cykl inwestycyjny. Jest on zaczątkiem kryzysu systemowego, który może być przezwyciężony tylko w drodze transformacji. Początkowo centralne planowanie zapobiega przenoszeniu wahań z inwestycji na całą gospodarkę, jednak napięcia wewnętrzne narastają. Obniżenie akceleratora  $v$  wymaga decentralizacji, a to zwiększa niestabilność całego systemu. Pojawiają się efekty mnożnikowe, fluktuacje inwestycji zostają przeniesione na produkcję i zatrudnienie, rośnie okres i amplituda oscylacji. Efekt histerezy wskazuje na fakt, że w transformowanej gospodarce mamy resztkową pamięć o socjalizmie, która może utrudniać i opóźniać reformy. Nośnikami tej pamięci są czynniki produkcji, a szczególnie praca wprowadzająca stare przyzwyczajenia i nawyki do nowego systemu.

## 6. Wnioski

Ekonomia złożoności wskazuje na zaskakujące przyczyny upadku systemu socjalistycznego. Nieliniowości tam występujące są tego rodzaju, że generują bifurkacje zderzenia z brzegiem, te zaś są odpowiedzialne za gwałtowne wzrosty złożoności gospodarczej. Po przekroczeniu pułapu złożoności wyznaczonego przez katastrofę złożoności zaczyna działać prawo niezbędnej różnorodności, które pozbawia centralnego planistę możliwości prowadzenia skutecznej polityki gospodarczej.

Wewnętrzny cykl inwestycyjny ma postać atraktora chaotycznego, zatem słuszne wydają się działania mające na celu obniżenie stopnia złożoności gospodarki. Jednak wyeliminowanie chaosu z systemu zwiększa niestabilność gospodarki. Na tym polega paradoks reform.

Zaprezentowane modele nie wyczerpują oczywiście wszystkich scenariuszy funkcjonowania i transformacji gospodarki socjalistycznej, jednak dają wgląd w pewne ogólne prawidłowości. Jedną z nich została przeze mnie nazwana prawem postępującej złożoności: racjonalne zachowania konsumentów, producentów i władz gospodarczych oddalają systemy ekonomiczne od stanu równowagi i prowadzą je w kierunku krawędzi chaosu (Jakimowicz, 2010).

## Literatura

- Arthur W.B., Durlauf S., Lane D. (eds.) (1997). *The Economy as an Evolving Complex System II*. Addison-Wesley. Reading, Mass.
- Ashby W.R. (1961). *Wstęp do cybernetyki*. PWN. Warszawa.
- Beinhocker E.D. (2006). *Origin of Wealth: Evolution, Complexity, and the Radical Remaking of Economics*. Harvard Business School Press. Boston.
- Bertalanffy von. L. (1984). *Ogólna teoria systemów. Podstawy, rozwój, zastosowania*. PWN. Warszawa.
- Colander D.C. (ed.) (2000). *The Complexity Vision and the Teaching of Economics*. Edward Elgar Publishers. Cheltenham.
- Day R.H. (1994). *Complex Economic Dynamics*. Vol. 1: *An Introduction to Dynamical Systems and Market Mechanisms*. The MIT Press. Cambridge.
- Farmer J.D., Shubik M., Smith E. (2005). *Is Economics the Next Physical Science?* "Physics Today". Vol. 58. Issue 9. Str. 37-42.
- Gell-Mann M. (1996). *Kwark i jaguar. Przygody z prostotą i złożonością*. Wydawnictwo CiS. Warszawa.

- Hommes C.H., Nusse H.E., Simonovits A. (1995). *Cycles and chaos in socialist economy*. "Journal of Economic Dynamics and Control". Vol. 19. Issues 1-2. Str. 155-179.
- Horgan J. (1995). *From complexity to perplexity*. "Scientific American". Vol. 272. Issue 6. Str. 104-109.
- Horgan J. (1999). *Koniec nauki czyli o granicach wiedzy u schyłku ery naukowej*. Prószyński i S-ka. Warszawa.
- Jakimowicz A. (2009). *Interdisciplinary matrix in economics: Two applications to the transition from socialism to capitalism*. "Nonlinear Dynamics. Psychology, and Life Sciences". Vol. 13. No. 4. Str. 393-421.
- Jakimowicz A. (2010). *Źródła niestabilności struktur rynkowych*. Seria: Współczesna Ekonomia. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.
- Kauffman S.A. (1993). *The Origins of Order: Self-organization and Selection in Evolution*. Oxford University Press. New York.
- Kornai J. (1985). *Niedobór w gospodarce*. PWE. Warszawa.
- Kuhn T.S. (1985). *Dwa bieguny. Tradycja i nowatorstwo w badaniach naukowych*. PIW. Warszawa.
- Mantegna R.N., Stanley H.E. (2001). *Ekonofizyka. Wprowadzenie*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.
- Nusse H.E., Ott E., Yorke J.A. (1994). *Border-Collision Bifurcations: An Explanation for Observed Bifurcation Phenomena*. "Physical Review E". Vol. 49. Issue 2. Str. 1073-1076.
- Rosser J.B., Jr. (ed.) (2004). *Complexity in Economics*. Vol. 1-3. Edward Elgar Publishing. Cheltenham.
- Rosser J.B., Jr. (2005). *The Rise and Fall of Catastrophe Theory Applications in Economics: Was the Baby Thrown Out with the Bathwater?* Thirteenth Annual Symposium of the Society for Nonlinear Dynamics and Econometrics. City University. London.
- Rosser J.B., Jr. (2008). *Debating the role of econophysics*. "Nonlinear Dynamics. Psychology, and Life Sciences". Vol. 12. No. 3. Str. 311-323.
- Rosser J.B., Jr., Rosser M.V., Guastello S.J., Bond R.W. (2001). *Chaotic hysteresis and systemic economic transformation: Soviet investment patterns*. "Nonlinear Dynamics. Psychology, and Life Sciences". Vol. 5. No. 4. Str. 345-368.
- Semkow J. (1988). *Śladami wielkich ekonomistów*. PWN. Warszawa.
- Tkocz J. (2007). *Podstawy geografii społeczno-ekonomicznej. Wykład teoretyczny*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego. Katowice.
- Wojtyna A. (2008). *Współczesna ekonomia – kontynuacja czy poszukiwanie paradygmatu?* „Ekonomista”. Nr 1. Str. 9-32.