

Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI

pod redakcją
Wandy Ronki-Chmielowiec



Recenzenci: Jerzy Handschke, Jan Monkiewicz, Kazimierz Ortyński, Wanda Sułkowska,
Włodzimierz Szkutnik, Tadeusz Szumlicz, Stanisław Wieteska

Redaktor Wydawnictwa: Elżbieta Kożuchowska

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities <http://cejsh.icm.edu.pl>
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.cceol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon [http://kangur.uek.krakow.pl/
bazy_ae/bazekon/nowy/index.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php)

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2011

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695- 191-1

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp	11
Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik: Formy zabezpieczenia emerytalnego w wybranych krajach europejskich	13
Teresa H. Bednarczyk: Działalność sektora ubezpieczeniowego a wzrost gospodarczy.....	23
Anna Bera, Dariusz Pauch: Programy edukacyjne jako instrument zwiększania świadomości ubezpieczeniowej w zakresie przestępczości ubezpieczeniowej	31
Jacek Białek: Ocena grupowa w analizie Otwartych Funduszy Emerytalnych.....	40
Sylwia Bożek: Czynności monitorujące i kontrolne w procesie zarządzania ryzykiem w przedsiębiorstwie ubezpieczeniowym	51
Anna Celczyńska: Należności od ubezpieczających z umów ubezpieczenia OC posiadaczy pojazdów mechanicznych.....	60
Magdalena Chmielowiec-Lewczuk: Problemy kalkulacji kosztów zakładów ubezpieczeń na tle powiązań w grupach finansowych	68
Dominika Cichońska: Rola ubezpieczeń w zarządzaniu ryzykiem w zakładach opieki zdrowotnej.....	78
Krystyna Ciuman: Zakłady ubezpieczeń a inne instytucje pośrednictwa finansowego w Polsce w latach 2005–2009.....	87
Tadeusz Czernik: O pewnym sformułowaniu zagadnienia ruiny	94
Teresa Czerwińska: Uwarunkowania polityki dywidend spółek ubezpieczeniowych.....	106
Robert Dankiewicz: Determinanty rozwoju rynku ubezpieczeń kredytu kupieckiego w Polsce	116
Beata Dubiel: Ubezpieczeniowe aspekty ryzyka ekologicznego	126
Roman Garbicz: Ryzyko starości jako element konstruowania systemów emerytalnych w Unii Europejskiej	135
Waldemar Glabiszewski: Znaczenie innowacji technologicznych w działalności ubezpieczeniowej	146
Łukasz Gwizdała: Możliwości analizy systemów bonus-malus w świetle procesów Markowa.....	156
Magdalena Homa: Kalkulacja składki w inwestycyjnych ubezpieczeniach na życie typu unit-linked	168
Beata Jackowska: Charakterystyka wybranych metod wyrównywania tablic trwania życia – wnioski dla zastosowań aktuarialnych	179

Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka: Grupowe ubezpieczenia na życie w sektorze MSP	190
Marietta Janowicz-Lomott: Produkty strukturyzowane w formie ubezpieczeń w Polsce.....	201
Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska: Próba zidentyfikowania czynników mających wpływ na wysokość składki przypisanej brutto w ubezpieczeniach komunikacyjnych w Polsce.....	213
Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Pobłocka: Ocena praktycznych metod szacowania rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych	222
Piotr Kania: Specjalistyczne fundusze inwestycyjne otwarte jako forma zewnętrznego zarządzania ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi zakładów ubezpieczeń na życie	232
Robert Kurek: Uprawnienia organów nadzoru w zakresie kontroli wypłacalności – ujęcie w Solvency II.....	241
Jacek Lisowski: Rola biegłego rewidenta w ocenie gospodarki finansowej ubezpieczyciela – unormowania prawne	250
Jerzy Łańcucki: Przesłanki i kierunki zmian w regulacjach dotyczących pośrednictwa ubezpieczeniowego	258
Krzysztof Łyskawa: Zagrożenie równowagi odszkodowania i szkody w obowiązkowych ubezpieczeniach mienia.....	267
Aleksandra Małek: Obowiązki banku jako ubezpieczającego w świetle Rekomendacji Dobrych Praktyk Bancassurance	277
Piotr Manikowski: Rynek ubezpieczeń w Polsce a cykle underwritingowe ..	286
Dorota Maśniak: Ubezpieczyciel jako główne ogniwo transgranicznego systemu ochrony ofiar wypadków drogowych	295
Artur Mikulec: Efektywność systemów emerytalnych krajów UE i EFTA w latach 2005–2008	305
Aniela Mikulska: Małe i średnie przedsiębiorstwa jako odbiorcy usług ubezpieczeniowych	316
Marek Monkiewicz: Jednolity rynek ubezpieczeniowy UE w warunkach globalnego kryzysu finansowego 2007–2009 – pomoc publiczna a wspólnotowe reguły konkurencji	325
Joanna Niżnik: Reforma systemów emerytalnych Ameryki Łacińskiej na przykładzie Chile i Argentyny	335
Magdalena Osak: Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia	344
Dorota Ostrowska: Kapitał międzynarodowy a dostęp do produktów ubezpieczeniowych strategicznych dla rozwoju gospodarki polskiej.....	352
Anna Ostrowska-Dankiewicz: Polisa strukturyzowana jako forma inwestycji alternatywnej na rynku polskim.....	362
Renata Pajewska-Kwaśny: Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. I	373

Monika Papież: Analiza przyczynowości na rynku ubezpieczeń życiowych w latach 2003–2010	383
Agnieszka Pawłowska: Ubezpieczenie <i>business interruption</i> w zarządzaniu ryzykiem przerw w działalności gospodarczej	394
Krzysztof Piasecki: Rozmyte zbiory probabilistyczne w rachunku aktuarnym	402
Piotr Pisarewicz: Rola funduszy inwestycyjnych w rozwoju programów emerytalnych w USA	409
Ryszard Pukała: Procesy integracyjne rynków ubezpieczeniowych krajów Europy Środkowej i Wschodniej	416
Małgorzata Rutkowska-Podolowska, Nina Szczygiel: Medical savings account as a funding mechanism for health	426
Grażyna Sordyl: Rola i działalność holenderskiego funduszu gwarancyjnego (College voor Zorgverzekeringen CVZ) w obszarze prywatnych ubezpieczeń zdrowotnych	435
Ewa Spigarska: Sprawozdanie finansowe zakładu ubezpieczeń a Międzynarodowe Standardy Sprawozdawczości Finansowej w świetle wprowadzanych zmian	445
Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska: Organizacja audytu wewnętrznego w zakładach ubezpieczeń w świetle <i>Solvency II</i> oraz standardów audytu	454
Anna Szkarłat-Koszalka: Instrumenty systemu rachunkowości a kontrola bezpieczeństwa finansowego ubezpieczyciela	463
Tomasz Szkutnik: Funkcje łączące w agregacji ryzyka ubezpieczyciela	472
Włodzimierz Szkutnik: Ryzyko uruchomienia rezerw katastroficznych	483
Anna Szymańska: Czynniki determinujące wybór ubezpieczyciela na rynku ubezpieczeń komunikacyjnych OC	494
Ilona Tomaszewska: Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. II	507
Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz: Świadomość ubezpieczeniowa oraz skłonność do ryzyka studentów	515
Stanisław Wanat: Modelowanie zależności w kontekście agregacji kapitałowych wymogów wypłacalności w <i>Solvency II</i>	525
Stanisław Wieteska: Adaptacja zakładów ubezpieczeń majątkowych do likwidacji skutków efektu cieplarnianego na terenie Polski	537
Ewa Wycinka, Mirosław Szreder: Statystyczna ocena wpływu przekraczania prędkości na liczbę wypadków drogowych w Polsce	547

Summaries

Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik: Forms of retirement security in selected European countries	22
Teresa H. Bednarczyk: The activity of insurance sector vs. economic growth.....	30
Anna Bera, Dariusz Pauch: Educational programs as an instrument to increase awareness of the crime of insurance cover	39
Jacek Bialek: Group evaluation of open pension funds	50
Sylvia Bożek: Monitoring and control activities in the risk management process of an insurance company.....	59
Anna Celczyńska: Accounts receivable from motor vehicle owners insured under third party insurance agreements	67
Magdalena Chmielowiec-Lewczuk: Problems of cost calculation of insurance companies against the background of connections in financial groups .	77
Dominika Cichońska: The role of insurance in risk management in health care facilities	86
Krystyna Ciuman: Insurance companies versus other financial intermediaries in Poland in the years 2005–2009.....	93
Tadeusz Czernik: An alternative formulation of ruin problem.....	105
Teresa Czerwińska: Determinants of the dividend policy in the insurance companies	115
Robert Dankiewicz: Determinants of development of trade credit insurance market in Poland	125
Beata Dubiel: Insurance aspects of ecological risk	134
Roman Garbiec: The risk of old age as the component of constructing the pension systems in the European Union	145
Waldemar Glabiszewski: The importance of technological innovations in the insurance sector.....	155
Łukasz Gwizdała: The capabilities of analyzing bonus-malus systems in the light of Markov processes	167
Magdalena Homa: Correct calculation of net premium in unit-linked investment insurance	178
Beata Jackowska: Characterization of selected methods of the graduation of life tables in the perspective of their actuarial applications	189
Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka: Group life insurance in the SME sector.....	200
Marietta Janowicz-Lomott: Structured products in the form of insurance in Poland	212
Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska: An attempt to identify the factors having influence on the gross written premium in motor insurance in Poland	221

Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Poblocka: Evaluation of practical methods of estimation of incurred but not reported reserves in non-life insurance..	231
Piotr Kania: Specialized open-end investment funds as an external management form of investment funds of life insurance companies.....	240
Robert Kurek: Powers of supervision authorities regarding solvency control – Solvency II perspective.....	249
Jacek Lisowski: The role of the auditor in assessing the financial management of the insurer – legal norms	257
Jerzy Łańcucki: Regulations on insurance mediation – stressing premises and directions of change	266
Krzysztof Łyskawa: Threat of compensation balance and damages in compulsory property insurance	276
Aleksandra Malek: Duties of a bank acting as an coverage buying entity in the context of Recommendations on the Bankassurance Activity.....	285
Piotr Manikowski: The insurance market in Poland and underwriting cycles	294
Dorota Maśniak: Insurer as a major link in a cross-border system for protection of victims of road accidents – the role of co-operation of private and public entities.....	304
Artur Mikulec: Effectiveness of pension systems in EU and EFTA countries in the years 2005–2008.....	315
Aniela Mikulska: Small and medium-sized companies as recipients of insurance services	324
Marek Monkiewicz: Single insurance market in the EU and global financial crisis 2007–2009 – public intervention and Community competition rules.....	334
Joanna Niżnik: The reform of pension systems in Latin America. The Chilean and Argentinean models.....	343
Magdalena Osak: Medical savings account as a funding mechanism of health care.....	351
Dorota Ostrowska: The access to the insurance products strategic for the development of Polish economy in reference to the international capital..	361
Anna Ostrowska-Dankiewicz: Structured policy as a form of alternative investment on Polish market.....	372
Renata Pajewska-Kwaśny: Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part I.....	382
Monika Papież: Causality analysis on the life insurance market in the period 2003–2010	393
Agnieszka Pawłowska: Business interruption insurance implementation in risk management for interrupted activities	401
Krzysztof Piasecki: Probabilistic fuzzy sets in the actuarial calculation	408
Piotr Pisarewicz: Mutual funds role in retirement programs' development in the USA.....	415

Ryszard Pukała: Integration processes of insurance markets in Middle and Eastern Europe.....	425
Małgorzata Rutkowska-Podolowska, Nina Szczygiel: Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia	434
Grażyna Sordyl: The Role and Activity of the Dutch Guarantee Fund (College voor Zorgverzekeringen CVZ) in the area of private health insurance	444
Ewa Spigarska: Financial statement of insurance company vs. International Standards of Financial Reporting in the light of changes.....	453
Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska: Organization of internal auditing in insurance companies in the light of Solvency II and audit standards	462
Anna Szkarłat-Koszalka: Instruments of accounting system vs. control of financial security of an insurer.....	471
Tomasz Szkutnik: Copula functions in the aggregation of insurer risk	482
Włodzimierz Szkutnik: The risk of using catastrophic reserves	493
Anna Szymańska: Factors determining the choice of the insurer on the CR automobile insurance market.....	506
Iłona Tomaszewska: Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part II	513
Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz: Students' insurance awareness and risk seeking	524
Stanisław Wanat: Modeling of dependencies in the context of the aggregation of solvency capital requirements in Solvency II	536
Stanisław Wieteska: Property insurance companies adaptation process to reduce the impact of greenhouse effect in Poland	546
Ewa Wycinka, Mirosław Szreder: Statistical analysis of speeding as a factor affecting car accidents in Poland	556

Stanisław Wanat

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

MODELOWANIE ZALEŻNOŚCI W KONTEKŚCIE AGREGACJI KAPITAŁOWYCH WYMOGÓW WYPŁACALNOŚCI W *SOLVENCY II*

Streszczenie: W pracy rozważana jest problematyka właściwego rozpoznania struktury zależności w wyznaczaniu kapitałowych wymogów wypłacalności w kontekście systemu *Solvency II*. Przedstawiono w nim ogólnie ideę modelu wypłacalności zawartego w systemie *Solvency II*. Należy on do klasy modeli kapitału obciążonego ryzykiem (modeli RBC – *Risk Based Capital*), w których podstawową rolę odgrywa agregacja ryzyka. Następnie, wykorzystując metodę symulacji, przeanalizowano wpływ wybranych struktur zależności na rozkład agregowanych rodzajów ryzyka, kapitałowe wymogi wypłacalności i efekt dywersyfikacji w przypadku ryzyka ubezpieczeniowego dwóch wybranych grup ubezpieczonych innych niż na życie. Uzyskane wyniki porównano z rozwiązaniami systemu *Solvency II*.

Słowa kluczowe: zależność, kapitałowe wymogi wypłacalności, agregacja, symulacja *Solvency II*.

1. Wstęp

W rozwiązaniach systemu *Solvency II* dotyczących modelowania ryzyka ubezpieczyciela proponuje się, aby wymogi kapitałowe związane z całkowitym ryzykiem ubezpieczyciela wyznaczać przez agregację wymogów kapitałowych z tytułu rozpoznanych czynników ryzyka, na które jest on narażony. W procesie agregacji podstawowym problemem do rozwiązania jest ustalenie, czy agregacji podlegają wymogi kapitałowe z tytułu ryzyk zależnych, czy też niezależnych. A jeżeli ryzyka są zależne, to jak we właściwy sposób modelować zależność między nimi?

Przedmiotem niniejszej pracy jest problematyka właściwego rozpoznania struktury zależności w wyznaczaniu kapitałowych wymogów wypłacalności w kontekście systemu *Solvency II*. Jej celem jest prezentacja przyjętych w tym systemie rozwiązań dotyczących sposobu uwzględniania zależności podczas wyznaczania wymogów kapitałowych i wskazanie, że wykorzystanie w standardowych formułach współczynnika korelacji liniowej może prowadzić do błędnych oszacowań. W pracy przedstawiono standardową formułę na kapitałowe wymogi wypłacalności w systemie *Solvency II* wraz z uzasadnieniem. Szczegółowo omówiono sposób szacowania

wymogów kapitałowych dla ryzyka składki i rezerw w przypadku ubezpieczeń innych niż na życie. Następnie, wykorzystując metodę symulacji, przeanalizowano wpływ wybranych struktur zależności na kapitałowe wymogi wypłacalności dwóch wybranych grup ubezpieczeń innych niż na życie.

2. Standardowa formuła na kapitałowe wymogi wypłacalności w *Solvency II*

W projekcie *Solvency II* podstawowy kapitałowy wymóg wypłacalności, określony w art. 104 ust. 1, wyznacza się na podstawie formuły:

$$SCR_{Basic} = \sqrt{SCR \times CORR \times SCR^T}, \text{ gdzie } SCR = [SCR_{nl}, SCR_{life}, SCR_{health}, SCR_{mkt},$$

$SCR_{def}]$, oznacza wektor przedstawiający wymogi kapitałowe odpowiednio z tytułu modułu ryzyka: ubezpieczeniowego w ubezpieczeniach innych niż na życie, ubezpieczeniowego w ubezpieczeniach na życie, ubezpieczeniowego w ubezpieczeniach zdrowotnych, rynkowego, niewykonania zobowiązania przez kontrahenta, natomiast **CORR** jest macierzą współczynników korelacji liniowej między modułami (por. tab. 1).

Tabela 1. Macierz korelacji między modułami ryzyka wykorzystywana w wyznaczaniu *BSCR*

	Ryzyko ubezpieczeniowe ubezpieczeń innych niż na życie	Ryzyko ubezpieczeniowe ubezpieczeń na życie	Ryzyko ubezpieczeniowe ubezpieczeń zdrowotnych	Ryzyko rynkowe	Ryzyko niewywiązania się kontrahenta
Ryzyko ubezpieczeniowe ubezpieczeń innych niż na życie	1	0	0	0,25	0,5
Ryzyko ubezpieczeniowe ubezpieczeń na życie	0	1	0,25	0,25	0,25
Ryzyko ubezpieczeniowe ubezpieczeń zdrowotnych	0	0,25	1	0,25	0,25
Ryzyko rynkowe	0,25	0,25	0,25	1	0,25
Ryzyko niewywiązania się kontrahenta	0,5	0,25	0,25	0,25	1

Źródło: opracowanie własne na podstawie załącznika IV Dyrektywy Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej.

Składowe wektora **SCR** wyznacza się w taki sam sposób, czyli agregując wymogi kapitałowe z tytułu odpowiednich podmodułów ryzyka. W pracy uwagę skoncentrowano na szacowaniu wymogów kapitałowych z tytułu ryzyka ubezpieczeniowego w ubezpieczeniach innych niż na życie SCR_{nl} . W standardowych rozwiązaniach wyznacza się je przez agregację wymogów dla ryzyka katastroficznego NL_{cat} oraz ryzyka składki i rezerw NL_{pr} :

$$SCR_{nl} = \sqrt{NL_{pr}^2 + NL_{cat}^2}. \quad (1)$$

Wartość NL_{cat} szacuje się na podstawie modeli wykorzystujących scenariusze. Natomiast wymogi kapitałowe na ryzyko składki i rezerw zgodnie z formułą (por. [QIS4 Technical... 2008, TS.XIII.B.18]):

$$NL_{pr} = V_{\bullet} \cdot g_{\alpha}(\sigma), \quad (2)$$

gdzie:

$$g_{\alpha}(\sigma) = \frac{\exp\left(\Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sqrt{\ln(1 + \sigma^2)}\right)}{\sqrt{1 + \sigma^2}} - 1, \quad (3)$$

V_{\bullet} – wielkość portfela ubezpieczyciela (miara działalności),

σ – miara ryzyka składki i rezerw dla ubezpieczyciela,

Φ – dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego,

α – poziom bezpieczeństwa.

Miara ryzyka składki i rezerw σ wyznaczana jest przez agregację miar σ_i tego ryzyka dla poszczególnych linii biznesu (klas ubezpieczeń) z ewentualnym uwzględnieniem dywersyfikacji geograficznej, z kolei σ_i otrzymuje się, agregując w obrębie poszczególnych klas ryzyko składki $\sigma_{p,i}$ (ryzyko roku bieżącego) i ryzyko rezerwy $\sigma_{r,i}$ (ryzyko poprzedniego roku). Podczas agregacji (na każdym poziomie) zależność między ryzykami uwzględniana jest za pomocą współczynników korelacji liniowej.

3. Uzasadnienie standardowej formuły na kapitałowe wymogi wypłacalności dla ryzyka składki i rezerw (wzoru 2)

Niech P i S oznacza odpowiednio składki i szkody dla pewnego portfela ubezpieczeń w jednym roku. Podstawą ustalania kapitałowych wymogów wypłacalności z tytułu ryzyka składki i rezerw dla tego portfela jest szacowana na początek roku strata:

$$L = S - P. \quad (4)$$

Wielkość rocznych składek P na początku roku jest znana, natomiast wysokość rocznych szkód jest losowa, zatem strata L jest zmienną losową. Ze względu na zasadę równoważności wartość oczekiwana $E(L) = 0$. Zgodnie ze specyfikacją QIS4 (por. [QIS4 Technical... 2008, TS.XIII.B.18]) kapitałowe wymogi wypłacalności NL_{pr} ustala się w wysokości równej wartości zagrożonej zmiennej L na poziomie ufności $\alpha = 0,995$, czyli

$$NL_{pr} = VaR_{\alpha}(L). \quad (5)$$

Wysokość rocznych szkód S można przedstawić w następujący sposób:

$$S = Y + R_1 - R_0, \quad (6)$$

gdzie Y oznacza szkody poniesione w rozważanym roku, natomiast R_0 i R_1 są to rezerwy na niewypłacone odszkodowania i świadczenia odpowiednio na początku i końcu roku (R_0 jest znane, Y oraz R_1 są wielkościami losowymi). Wielkość portfela $V_{\bullet} = P + R_0$ jest znana na początku roku. W związku z tym wskaźnik L/V_{\bullet} reprezentuje losową stratę przypadającą na jednostkę portfela. Biorąc pod uwagę zależności (4) i (6), można go przedstawić w postaci [Hürlimann 2008]:

$$\frac{L}{V_{\bullet}} = \frac{S - P}{P + R_0} = \frac{Y + R_1 - (P + R_0)}{P + R_0} = Z - 1, \quad (7)$$

gdzie

$$Z = \frac{Y + R_1}{P + R_0}. \quad (8)$$

jest zmienną losową o wartości oczekiwanej $E(Z) = 1$ (ponieważ $E(L) = 0$). W specyfikacji QIS4 (por. [QIS4 Technical... 2008, TS.XIII.B.19]) zakłada się, że Z ma rozkład logarytmiczno-normalny, którego parametry będą dalej oznaczane przez μ_Z i σ_Z . Z (7) wynika, że wariancja wskaźnika L/V_{\bullet} jest równa wariancji Z :

$$\sigma^2 =: Var\left(\frac{L}{V_{\bullet}}\right) = Var(Z), \quad (9)$$

zatem

$$E(Z) = e^{\mu_Z + \frac{1}{2}\sigma_Z^2} = 1 \quad \text{oraz} \quad \sigma^2 = Var(Z) = e^{\sigma_Z^2} - 1, \quad (10)$$

skąd

$$\mu_Z = -\frac{1}{2}\sigma_Z^2 \text{ oraz } \sigma_Z^2 = \ln(1 + \sigma^2). \quad (11)$$

Z powyższych zależności wynika formuła (2), mianowicie:

$$\begin{aligned} NL_{pr} &= VaR_\alpha(L) = V_\bullet \cdot VaR_\alpha\left(\frac{L}{V_\bullet}\right) = V_\bullet \cdot (VaR_\alpha(Z) - 1) = \\ &= V_\bullet \cdot \left(\exp\left(\sigma_Z \Phi^{-1}(\alpha) - \frac{1}{2}\sigma_Z^2\right) - 1 \right) = V_\bullet \cdot \rho_\alpha(\sigma). \end{aligned} \quad (12)$$

4. Szacowanie ryzyka składki i rezerw (odchylenia standardowego σ)

Ryzyko składki i rezerw ubezpieczyciela posiadającego l linii biznesu modelowane jest za pomocą zmiennej losowej:

$$Z_\bullet = \sum_{i=1}^l \frac{V_i}{V_\bullet} Z_i, \quad V_\bullet = \sum_{i=1}^l V_i, \quad (13)$$

gdzie Z_i oznacza zmienną postaci (8) opisującą ryzyko składki i rezerw dla i -tej linii biznesu, natomiast V_i – wielkość portfela i -tej linii biznesu. W związku z tym miara ryzyka składki i rezerw dla ubezpieczyciela wynosi:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i,j=1}^l \frac{V_i V_j}{V_\bullet^2} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}. \quad (14)$$

We wzorze tym ρ_{ij} oznacza współczynnik korelacji między zmiennymi Z_i i Z_j opisujący zależność ryzyka składki i rezerw między i -tą a j -tą linią biznesu (wartości tych współczynników proponowane w badaniu QIS4 podano w tab. 2), natomiast σ_i – odchylenie standardowe zmiennej Z_i , czyli miarę ryzyka składki i rezerw dla i -tej linii biznesu. Poniżej opisano metodę szacowania σ_i wynikającą z [QIS4 Technical... 2008].

Tabela 2. Współczynniki korelacji dla ryzyka składki i ryzyka rezerw między poszczególnymi liniami biznesu

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
Komunikacyjne, odpowiedzialność	(1)	1											
Komunikacyjne pozostałe	(2)	0,5	1										
Morskie, lotnicze i transportowe	(3)	0,5	0,25	1									
Od ognia i innych szkód rzeczowych	(4)	0,25	0,25	0,25	1								
Odpowiedzialność cywilna	(5)	0,5	0,25	0,25	0,25	1							
Kredyty i gwarancje	(6)	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1						
Ochrona prawna	(7)	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	1					
Świadczenie pomocy	(8)	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1				
Pozostałe nie na życie	(9)	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1			
Nieproporcjonalna reasekuracja-majątkowe	(10)	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	1		
Nieproporcjonalna reasekuracja-wypadkowe	(11)	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1	
Nieproporcjonalna reasekuracja-MLT	(12)	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	1

Źródło: opracowanie własne na podstawie [QIS4 Technical... 2008].

Zmienną Z_i modelującą ryzyko składki i rezerw i -tej linii biznesu można przedstawić w następującej postaci:

$$Z_i = \frac{Y_i + R_{1,i}}{P_i + R_{0,i}} = \frac{P_i}{P_i + R_{0,i}} \cdot \frac{Y_i}{P_i} + \frac{R_{0,i}}{P_i + R_{0,i}} \cdot \frac{R_{1,i}}{R_{0,i}} = \frac{P_i}{V_i} \cdot X_{i,p} + \frac{R_{0,i}}{V_i} \cdot X_{i,r}, \quad (15)$$

gdzie $X_{i,p}$ oznacza zmienną losową modelującą ryzyko składki dla i -tej linii (wskaźnik przedstawiający szkody poniesione w danym roku do składki), natomiast $X_{i,r}$ – zmienną modelującą ryzyko rezerw dla tej linii (wskaźnik przedstawiający rezerwy na koniec roku do rezerw na początku roku). Stąd odchylenie standardowe σ_i zmiennej Z_i jest równe:

$$\sigma_i = \frac{1}{V_i} \sqrt{\left(P_i \sigma_{i,p}\right)^2 + 2\rho_{pr} \sigma_{i,p} \sigma_{i,r} P_i R_{i,0} + \left(R_{i,0} \sigma_{i,r}\right)^2}, \quad (16)$$

gdzie: $\sigma_{i,r}$ – odchylenie standardowe zmiennej $X_{i,r}$ (miara ryzyka rezerw i -tej linii biznesu),

- $\sigma_{i,p}$ – odchylenie standardowe zmiennej $X_{i,p}$ (miara ryzyka składki i -tej linii biznesu),
 ρ_{pr} – współczynnik korelacji między ryzykiem składki i ryzykiem rezerw (w badaniu QIS4 proponuje się $\rho_{pr} = 0,5$ niezależnie od linii biznesu).

Wartości $\sigma_{i,r}$ dla poszczególnych linii biznesu zostały zaproponowane w badaniu QIS4 (por. tab. 3). Natomiast $\sigma_{i,p}$ wyznacza się za pomocą formuły:

$$\sigma_{i,p} = \sqrt{w\sigma_{i,p,Ind}^2 + (1-w)\sigma_{i,p,M}^2}, \quad (17)$$

- gdzie: $\sigma_{i,p,M}$ – ryzyko składki dla rynku (wartości tego parametru dla poszczególnych linii biznesu zaproponowane w QIS4 przedstawiono w tab. 4),
 $\sigma_{i,p,Ind}$ – indywidualne ryzyko składki dla danego zakładu szacowane na podstawie historycznych wartości wskaźnika $X_{i,p}$,
 w – współczynnik wiarygodności, który waży oszacowanie rynkowe i indywidualne (danego zakładu) ryzyka składki (wartości tego współczynnika przedstawiono w [QIS4 Technical... 2008, TS.XIII. B.28]).

Tabela 3. Odchylenie standardowe ryzyka rezerw dla poszczególnych linii biznesu

Linia biznesu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sigma_{i,r}$	0,12	0,07	0,10	0,10	0,15	0,15	0,10	0,10	0,10	0,15	0,15	0,15

Źródło: opracowanie własne na podstawie [QIS4 Technical... 2008, TS.XIII.B.25].

Tabela 4. Rynkowe oszacowania odchylenia standardowego ryzyka składki dla poszczególnych linii biznesu

Linia biznesu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sigma_{p,M}$	0,09	0,09	0,125	0,10	0,125	0,15	0,05	0,075	0,11	0,15	0,15	0,15

Źródło: opracowanie własne na podstawie [QIS4 Technical... 2008, TS.XIII.B.27].

5. Wpływ struktur zależności na kapitałowe wymogi wypłacalności dla ryzyka składki i rezerw – przykład

Wykorzystanie do szacowania kapitałowych wymogów wypłacalności tylko współczynników korelacji liniowej może prowadzić do błędnych wyników, gdyż opisują one w sposób jednoznaczny zależności o charakterze liniowym. W ogólnym przypadku takie same ich wartości mogą charakteryzować różne struktury zależności, co

proceedzi do różnych oszacowań wymaganych kapitałów. Fakt ten ilustruje poniższy przykład, w którym dla dwóch linii biznesu: ubezpieczenia komunikacyjne – odpowiedzialność cywilna (linia 1), komunikacyjne pozostałe (linia 2) pokazano, że łączne (dla tych dwóch linii) kapitałowe wymogi wypłacalności dla ryzyka składki i rezerw mogą być różne, gdy podczas ich szacowania do modelowania zależności między zmiennymi Z_1 i Z_2 opisującymi ryzyko składki i rezerw (odpowiednio pierwszej i drugiej linii biznesu) będzie wykorzystywany tylko współczynnik korelacji liniowej. W szczególności wymogi te mogą się różnić od uzyskanych za pomocą standardowej procedury.

W przykładzie dla rozważanych linii biznesu założono takie same wielkości portfeli oraz proponowaną w QIS4: wartość parametru ryzyka składki¹ i ryzyka rezerw (tab. 3); wartość współczynnika korelacji między ryzykiem składki i ryzykiem rezerw; wartość współczynnika korelacji ryzyka składki i rezerw między tymi liniami biznesu. Założenia zestawiono w tab. 5.

Tabela 5. Założenia dotyczące rozważanych w przykładzie linii biznesu

Ubezpieczenia komunikacyjne – odpowiedzialność cywilna (linia 1)	Komunikacyjne pozostałe (linia 2)
$P_1 = 1,0$; $\sigma_{1,p} = 0,09$	$P_2 = 1,0$; $\sigma_{2,p} = 0,09$
$R_{0,1} = 1,2$; $\sigma_{1,r} = 0,12$	$R_{0,2} = 1,2$; $\sigma_{2,r} = 0,07$
$\rho_{pr} = 0,5$	
$\rho_{12} = 0,5$	

Źródło: opracowanie własne.

Przy powyższych założeniach miary ryzyka składki i rezerw dla poszczególnych linii biznesu są równe odpowiednio $\sigma_1 = 0,09229$ i $\sigma_2 = 0,06851$, a stąd na podstawie (11) zmienne Z_1 i Z_2 mają rozkłady logarytmiczno-normalne o parametrach odpowiednio $\mu_{Z_1} = -0,004299$, $\sigma_{Z_1} = 0,092728$, $\mu_{Z_2} = -0,002341$, $\sigma_{Z_2} = 0,068428$ ($Z_1 \sim LN(-0,004299; 0,092728)$, $Z_2 \sim LN(-0,002341; 0,068428)$). Obliczone zgodnie z propozycjami *Solvency II* kapitałowe wymogi wypłacalności dla obydwu linii biznesu odnoszące się do ryzyka składki i rezerw wynoszą $NL_{pr} = 0,85759$. Wielkość tę otrzymuje się w wyniku zastosowania standardowej formuły (2), w której zakłada się, że zmienna (13) (w analizowanym przypadku $Z_{\bullet} = 0,5Z_1 + 0,5Z_2$) ma rozkład logarytmiczno-normalny o wartości oczekiwanej $E(Z_{\bullet}) = 1$ i odchyleniu standardowym (mierzącym ryzyko składki i rezerw obydwu linii biznesu) $D(Z_{\bullet}) = \sigma = 0,070170$.

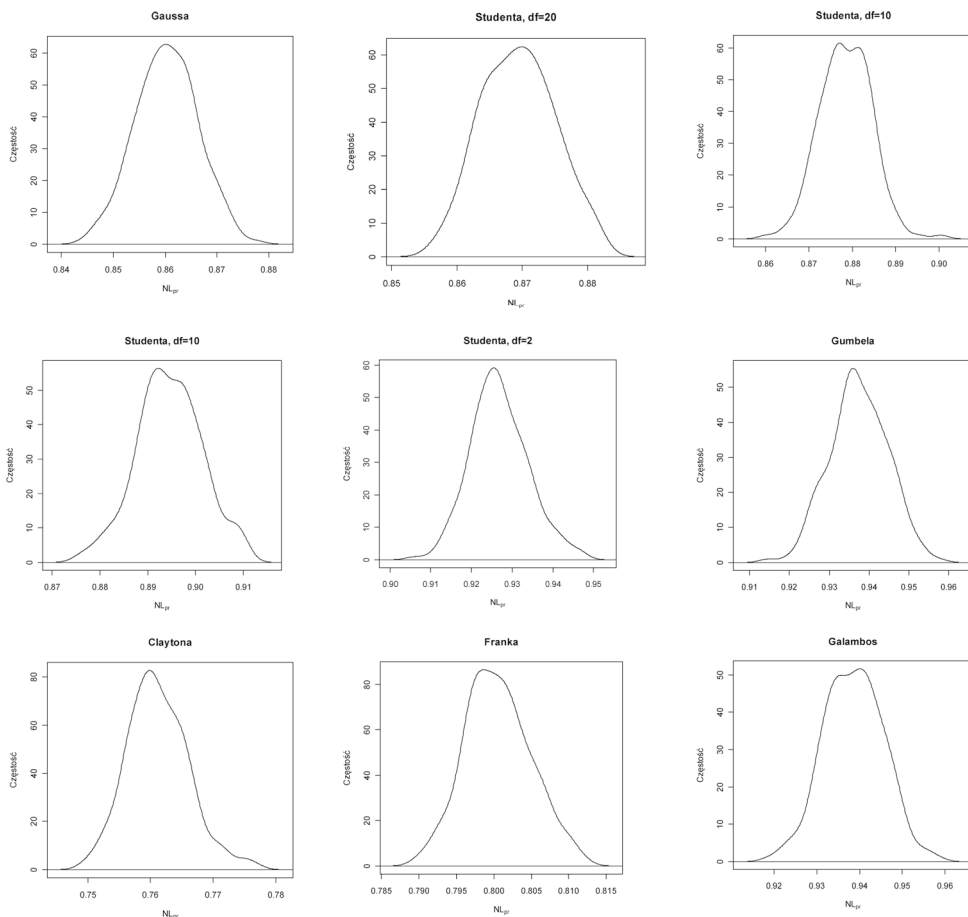
¹ Przyjęto oszacowania rynkowe tego parametru (por. tab. 4).

W metodzie tej struktura zależności między zmiennymi Z_1 i Z_2 opisywana jest za pomocą współczynnika korelacji liniowej $\rho_{12} = 0,5$. Nasuwa się pytanie, czy jest to wystarczająca metoda? Wyniki badań symulacyjnych zaprezentowanych w tab. 6 sugerują negatywną odpowiedź na to pytanie. Analizowano w nich wysokość łącznych wymogów kapitałowych z tytułu ryzyka składki i rezerw NL_{pr} rozważanych linii biznesu przy założeniu różnych dwuwymiarowych rozkładów wektora (Z_1, Z_2) , ale charakteryzujących się odpowiednio takimi samymi rozkładami brzegowymi (tzn. dla każdego rozkładu dwuwymiarowego $Z_1 \sim LN(-0,004299; 0,092728)$ oraz $Z_2 \sim LN(-0,002341; 0,068428)$) i taką samą zalecaną wartością współczynnika korelacji liniowej równą 0,5. Rozkłady te otrzymano, wykorzystując funkcje połączenia (metoda otrzymywania rozkładów dwuwymiarowych o zadanych rozkładach brzegowych jest szczegółowo opisana m.in. w pracach: [Nelsen 1999; Wanat 2008, 2010, 2011]).

Tabela 6. Uwzględnione w badaniu symulacyjnym struktury zależności i odpowiadające im kapitałowe wymogi wypłacalności dla ryzyka składki i rezerw

Struktura zależności (1)	Funkcja połączenia (2)	Kapitałowe wymogi wypłacalności dla ryzyka składki i rezerw (NL_{pr}) (3)
Str. 1	Gausa: $\rho = 0,5015$, $\lambda_L = \lambda_U = 0$	0,8600431 (0,005661968)
Str. 2	Studenta: $df=20$, $\rho = 0,5010$ $\lambda_L = \lambda_U = 0,01523582$	0,8694237 (0,005587073)
Str. 3	Studenta: $df=10$, $\rho = 0,5020$ $\lambda_L = \lambda_U = 0,08257593$	0,8785113 (0,005947684)
Str. 4	Studenta: $df=5$, $\rho = 0,5060$ $\lambda_L = \lambda_U = 0,2102176$	0,8945495 (0,006863904)
Str. 5	Studenta: $df=2$, $\rho = 0,5250$ $\lambda_L = \lambda_U = 0,4050204$	0,926831 (0,007068196)
Str. 6	Gumbela: $\theta = 1,475$ $\lambda_L = 0$; $\lambda_U = 0,4001173$	0,9374306 (0,007242955)
Str. 7	Claytona: $\theta = 1,104$ $\lambda_L = 0,5337377$; $\lambda_U = 0$	0,7613763 (0,004617917)
Str. 8	Franka: $\theta = 3,710$ $\lambda_L = \lambda_U = 0$	0,8005702 (0,004368359)
Str. 9	Galambos: $\theta = 0,741$ $\lambda_L = 0$; $\lambda_U = 0,3924205$	0,9385862 (0,006902452)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 1. Rozkłady uzyskanych podczas symulacji wartości NL_{pr} dla rozważanych struktur zależności

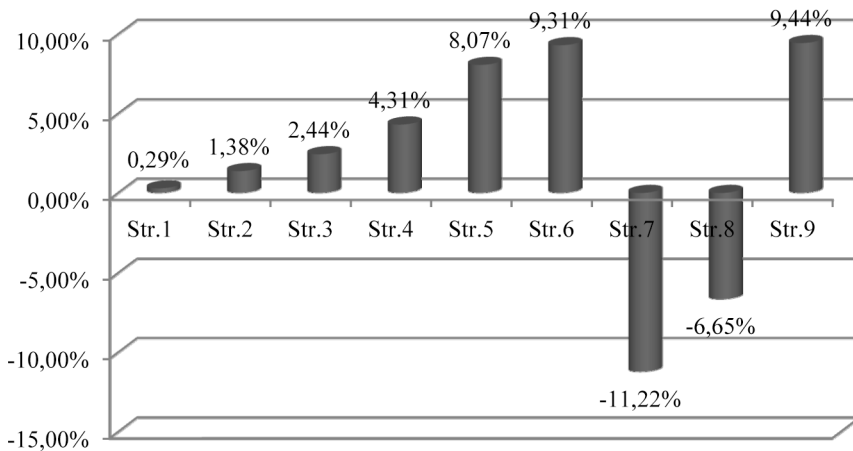
Źródło: opracowanie własne.

Ponieważ współczynnik korelacji liniowej zależy nie tylko od postaci funkcji połączenia, ale także od rozkładów brzegowych, parametry wykorzystanych w badaniu funkcji połączeń (por. tab. 6, kol. 2) wyznaczono metodą symulacji (odpowiednie procedury zaimplementowano w środowisku R).

Kapitałowe wymogi wypłacalności dla ryzyka składki i rezerw otrzymano na podstawie formuły $NL_{pr} = V_{\bullet} \cdot (VaR_{0,995}(L_{\bullet}) - 1)$. Niezbędny w tym celu rozkład zmiennej $Z_{\bullet} = 0,5Z_1 + 0,5Z_2$ wyznaczono metodą symulacji² przy założeniu dzie-

² Na podstawie 100 000 realizacji wektora (Z_1, Z_2) . Odpowiednie procedury zaimplementowano w środowisku R.

więciu struktur zależności wektora (Z_1, Z_2) modelowanych za pomocą odpowiednich funkcji połączeń. Ich parametry oraz współczynnik zależności dolnego i górnego ogona podano w tab. 6, kol. 2. Na rysunku 1 przedstawiono rozkłady uzyskanych podczas symulacji wartości kapitałowych wymogów wypłacalności dla rozważanych struktur zależności. Ich średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe podano w tab. 6, kol. 3, natomiast różnice (w %) w stosunku do wymogów otrzymanych według procedury standardowej ($NL_{pr} = 0,85759$) przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Porównanie wartości kapitałowych wymogów wypłacalności dla ryzyka składki i rezerw uzyskanych dla rozważanych struktur zależności z wartością otrzymaną za pomocą formuły standardowej

Źródło: opracowanie własne.

6. Podsumowanie

Biorąc pod uwagę wyniki przeprowadzonych badań symulacyjnych, można stwierdzić, że proponowana w *Solvency II* standardowa formuła na kapitałowe wymogi wypłacalności NL_{pr} może prowadzić do błędnych oszacowań, gdy struktura zależności ryzyka składki i rezerw między liniami biznesu będzie „znacznie odbiegać” od struktury gausowskiej. Z rysunku 2 widać, że w rozważanym przypadku wymogi kapitałowe mogą być niedoszacowane nawet w około 9%, w przypadku występowania zależności w górnym ogonie (struktura 5, 6 i 9), i przeszacowane w ok. 11% w przypadku występowania zależności w dolnym ogonie (struktura 7). Uzyskane wyniki sugerują więc, że struktury zależności między agregowanymi rodzajami ryzyka mogą być na tyle złożone, że nie wystarczy do ich opisu kilka liczb ujętych w macierzy korelacji (mogą nie być liniowe). W procesie agregacji ryzyka należy zatem zadbać o jak najdokładniejsze ich rozpoznanie, a uzyskane informacje uwzględnić w odpowiednim modelu. Należy

zatem do modelowania zależności wykorzystać narzędzia „bardziej precyzyjne” od współczynnika korelacji. Mogą nimi być np. stosowane w niniejszej pracy funkcje połączenia.

Literatura

- Hürlimann W. [2008], *On the Non-Life Solvency II model*, 38th International ASTIN Colloquium, Manchester, 13–16 July, (<http://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Manchester/Presentations>, pobrano 17.06.2010).
- Nelsen R.B. [1999], *An Introduction to Copulas*, Springer-Verlag, New York.
- QIS4 Technical Specifications*, MARKT/2505/08, European Commission, Brussels 2008 (<http://www.ceiops.eu/content/view/118/124/>, pobrano 31.03.2008).
- Wanat S. [2008], *Wpływ wybranych struktur zależności na rozkład zagregowanych szkód*, [w:] *Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI wieku*, red. W. Ronka-Chmielowiec, Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 1197, Wyd. Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław, s. 450–457.
- Wanat S. [2010], *Wpływ wyboru funkcji połączenia na kapitał ekonomiczny – analiza symulacyjna*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie nr 813, Kraków, s. 99–118.
- Wanat S. [2011], *Modelowanie struktur zależności za pomocą funkcji połączeń w analizie ryzyka ubezpieczyciela*, [w:] *Zastosowanie metod ilościowych do oceny ryzyka i efektywności systemu ubezpieczeń społecznych*, red. C. Domański, A. Majdzińska, Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomica, nr 254, Łódź, s. 89–107.

MODELING OF DEPENDENCIES IN THE CONTEXT OF THE AGGREGATION OF SOLVENCY CAPITAL REQUIREMENTS IN SOLVENCY II

Summary: In this paper we present the problem of modeling of dependence structures in determining the solvency capital requirements in the Solvency II. We present a general concept of the solvency capital model in the Solvency II. This model belongs to the class of RBC models in which the aggregation of risk plays a fundamental role. We consider the insurance risk of the two classes of non-life insurance. In conclusion, we compare the results with the ones based on the Solvency II.

Keywords: dependence, solvency capital requirements, aggregation, simulation, Solvency II.