

Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI

pod redakcją
Wandy Ronki-Chmielowiec



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci: Jerzy Handschke, Jan Monkiewicz, Kazimierz Ortyński, Wanda Sułkowska,
Włodzimierz Szkutnik, Tadeusz Szumlicz, Stanisław Wieteska

Redaktor Wydawnictwa: Elżbieta Kożuchowska

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities <http://cejsh.icm.edu.pl>
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon [http://kangur.uek.krakow.pl/
bazy_ae/bazekon/nowy/index.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php)

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2011

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695- 191-1

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp	11
Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik: Formy zabezpieczenia emerytalnego w wybranych krajach europejskich	13
Teresa H. Bednarczyk: Działalność sektora ubezpieczeniowego a wzrost gospodarczy.....	23
Anna Bera, Dariusz Pauch: Programy edukacyjne jako instrument zwiększania świadomości ubezpieczeniowej w zakresie przestępczości ubezpieczeniowej	31
Jacek Białek: Ocena grupowa w analizie Otwartych Funduszy Emerytalnych.....	40
Sylwia Bożek: Czynności monitorujące i kontrolne w procesie zarządzania ryzykiem w przedsiębiorstwie ubezpieczeniowym	51
Anna Celczyńska: Należności od ubezpieczających z umów ubezpieczenia OC posiadaczy pojazdów mechanicznych.....	60
Magdalena Chmielowiec-Lewczuk: Problemy kalkulacji kosztów zakładów ubezpieczeń na tle powiązań w grupach finansowych	68
Dominika Cichońska: Rola ubezpieczeń w zarządzaniu ryzykiem w zakładach opieki zdrowotnej.....	78
Krystyna Ciuman: Zakłady ubezpieczeń a inne instytucje pośrednictwa finansowego w Polsce w latach 2005–2009.....	87
Tadeusz Czernik: O pewnym sformułowaniu zagadnienia ruiny	94
Teresa Czerwińska: Uwarunkowania polityki dywidend spółek ubezpieczeniowych.....	106
Robert Dankiewicz: Determinanty rozwoju rynku ubezpieczeń kredytu kupieckiego w Polsce	116
Beata Dubiel: Ubezpieczeniowe aspekty ryzyka ekologicznego	126
Roman Garbicz: Ryzyko starości jako element konstruowania systemów emerytalnych w Unii Europejskiej	135
Waldemar Glabiszewski: Znaczenie innowacji technologicznych w działalności ubezpieczeniowej	146
Łukasz Gwizdała: Możliwości analizy systemów bonus-malus w świetle procesów Markowa.....	156
Magdalena Homa: Kalkulacja składki w inwestycyjnych ubezpieczeniach na życie typu unit-linked	168
Beata Jackowska: Charakterystyka wybranych metod wyrównywania tablic trwania życia – wnioski dla zastosowań aktuarialnych	179

Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka: Grupowe ubezpieczenia na życie w sektorze MSP	190
Marietta Janowicz-Lomott: Produkty strukturyzowane w formie ubezpieczeń w Polsce.....	201
Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska: Próba zidentyfikowania czynników mających wpływ na wysokość składki przypisanej brutto w ubezpieczeniach komunikacyjnych w Polsce.....	213
Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Pobłocka: Ocena praktycznych metod szacowania rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych	222
Piotr Kania: Specjalistyczne fundusze inwestycyjne otwarte jako forma zewnętrznego zarządzania ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi zakładów ubezpieczeń na życie	232
Robert Kurek: Uprawnienia organów nadzoru w zakresie kontroli wypłacalności – ujęcie w Solvency II.....	241
Jacek Lisowski: Rola biegłego rewidenta w ocenie gospodarki finansowej ubezpieczyciela – unormowania prawne	250
Jerzy Łańcucki: Przesłanki i kierunki zmian w regulacjach dotyczących pośrednictwa ubezpieczeniowego	258
Krzysztof Łyskawa: Zagrożenie równowagi odszkodowania i szkody w obowiązkowych ubezpieczeniach mienia.....	267
Aleksandra Małek: Obowiązki banku jako ubezpieczającego w świetle Rekomendacji Dobrych Praktyk Bancassurance	277
Piotr Manikowski: Rynek ubezpieczeń w Polsce a cykle underwritingowe ..	286
Dorota Maśniak: Ubezpieczyciel jako główne ogniwo transgranicznego systemu ochrony ofiar wypadków drogowych	295
Artur Mikulec: Efektywność systemów emerytalnych krajów UE i EFTA w latach 2005–2008	305
Aniela Mikulska: Małe i średnie przedsiębiorstwa jako odbiorcy usług ubezpieczeniowych	316
Marek Monkiewicz: Jednolity rynek ubezpieczeniowy UE w warunkach globalnego kryzysu finansowego 2007–2009 – pomoc publiczna a wspólnotowe reguły konkurencji	325
Joanna Niżnik: Reforma systemów emerytalnych Ameryki Łacińskiej na przykładzie Chile i Argentyny	335
Magdalena Osak: Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia	344
Dorota Ostrowska: Kapitał międzynarodowy a dostęp do produktów ubezpieczeniowych strategicznych dla rozwoju gospodarki polskiej.....	352
Anna Ostrowska-Dankiewicz: Polisa strukturyzowana jako forma inwestycji alternatywnej na rynku polskim.....	362
Renata Pajewska-Kwaśny: Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. I	373

Monika Papież: Analiza przyczynowości na rynku ubezpieczeń życiowych w latach 2003–2010.....	383
Agnieszka Pawłowska: Ubezpieczenie <i>business interruption</i> w zarządzaniu ryzykiem przerw w działalności gospodarczej.....	394
Krzysztof Piasecki: Rozmyte zbiory probabilistyczne w rachunku aktuarnym.....	402
Piotr Pisarewicz: Rola funduszy inwestycyjnych w rozwoju programów emerytalnych w USA.....	409
Ryszard Pukała: Procesy integracyjne rynków ubezpieczeniowych krajów Europy Środkowej i Wschodniej.....	416
Małgorzata Rutkowska-Podolowska, Nina Szczygiel: Medical savings account as a funding mechanism for health.....	426
Grażyna Sordyl: Rola i działalność holenderskiego funduszu gwarancyjnego (College voor Zorgverzekeringen CVZ) w obszarze prywatnych ubezpieczeń zdrowotnych.....	435
Ewa Spigarska: Sprawozdanie finansowe zakładu ubezpieczeń a Międzynarodowe Standardy Sprawozdawczości Finansowej w świetle wprowadzanych zmian.....	445
Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska: Organizacja audytu wewnętrznego w zakładach ubezpieczeń w świetle <i>Solvency II</i> oraz standardów audytu.....	454
Anna Szkarłat-Koszalka: Instrumenty systemu rachunkowości a kontrola bezpieczeństwa finansowego ubezpieczyciela.....	463
Tomasz Szkutnik: Funkcje łączące w agregacji ryzyka ubezpieczyciela.....	472
Włodzimierz Szkutnik: Ryzyko uruchomienia rezerw katastroficznych.....	483
Anna Szymańska: Czynniki determinujące wybór ubezpieczyciela na rynku ubezpieczeń komunikacyjnych OC.....	494
Ilona Tomaszewska: Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. II.....	507
Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz: Świadomość ubezpieczeniowa oraz skłonność do ryzyka studentów.....	515
Stanisław Wanat: Modelowanie zależności w kontekście agregacji kapitałowych wymogów wypłacalności w <i>Solvency II</i>	525
Stanisław Wieteska: Adaptacja zakładów ubezpieczeń majątkowych do likwidacji skutków efektu cieplarnianego na terenie Polski.....	537
Ewa Wycinka, Mirosław Szreder: Statystyczna ocena wpływu przekraczania prędkości na liczbę wypadków drogowych w Polsce.....	547

Summaries

Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik: Forms of retirement security in selected European countries	22
Teresa H. Bednarczyk: The activity of insurance sector vs. economic growth.....	30
Anna Bera, Dariusz Pauch: Educational programs as an instrument to increase awareness of the crime of insurance cover	39
Jacek Bialek: Group evaluation of open pension funds	50
Sylvia Bożek: Monitoring and control activities in the risk management process of an insurance company.....	59
Anna Celczyńska: Accounts receivable from motor vehicle owners insured under third party insurance agreements	67
Magdalena Chmielowiec-Lewczuk: Problems of cost calculation of insurance companies against the background of connections in financial groups .	77
Dominika Cichońska: The role of insurance in risk management in health care facilities	86
Krystyna Ciuman: Insurance companies versus other financial intermediaries in Poland in the years 2005–2009.....	93
Tadeusz Czernik: An alternative formulation of ruin problem.....	105
Teresa Czerwińska: Determinants of the dividend policy in the insurance companies	115
Robert Dankiewicz: Determinants of development of trade credit insurance market in Poland	125
Beata Dubiel: Insurance aspects of ecological risk	134
Roman Garbiec: The risk of old age as the component of constructing the pension systems in the European Union	145
Waldemar Glabiszewski: The importance of technological innovations in the insurance sector.....	155
Łukasz Gwizdała: The capabilities of analyzing bonus-malus systems in the light of Markov processes	167
Magdalena Homa: Correct calculation of net premium in unit-linked investment insurance	178
Beata Jackowska: Characterization of selected methods of the graduation of life tables in the perspective of their actuarial applications	189
Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka: Group life insurance in the SME sector.....	200
Marietta Janowicz-Lomott: Structured products in the form of insurance in Poland	212
Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska: An attempt to identify the factors having influence on the gross written premium in motor insurance in Poland	221

Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Poblocka: Evaluation of practical methods of estimation of incurred but not reported reserves in non-life insurance..	231
Piotr Kania: Specialized open-end investment funds as an external management form of investment funds of life insurance companies.....	240
Robert Kurek: Powers of supervision authorities regarding solvency control – Solvency II perspective.....	249
Jacek Lisowski: The role of the auditor in assessing the financial management of the insurer – legal norms	257
Jerzy Łańcucki: Regulations on insurance mediation – stressing premises and directions of change	266
Krzysztof Łyskawa: Threat of compensation balance and damages in compulsory property insurance	276
Aleksandra Malek: Duties of a bank acting as an coverage buying entity in the context of Recommendations on the Bankassurance Activity.....	285
Piotr Manikowski: The insurance market in Poland and underwriting cycles	294
Dorota Maśniak: Insurer as a major link in a cross-border system for protection of victims of road accidents – the role of co-operation of private and public entities.....	304
Artur Mikulec: Effectiveness of pension systems in EU and EFTA countries in the years 2005–2008.....	315
Aniela Mikulska: Small and medium-sized companies as recipients of insurance services	324
Marek Monkiewicz: Single insurance market in the EU and global financial crisis 2007–2009 – public intervention and Community competition rules.....	334
Joanna Niżnik: The reform of pension systems in Latin America. The Chilean and Argentinean models.....	343
Magdalena Osak: Medical savings account as a funding mechanism of health care.....	351
Dorota Ostrowska: The access to the insurance products strategic for the development of Polish economy in reference to the international capital..	361
Anna Ostrowska-Dankiewicz: Structured policy as a form of alternative investment on Polish market.....	372
Renata Pajewska-Kwaśny: Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part I.....	382
Monika Papież: Causality analysis on the life insurance market in the period 2003–2010	393
Agnieszka Pawłowska: Business interruption insurance implementation in risk management for interrupted activities	401
Krzysztof Piasecki: Probabilistic fuzzy sets in the actuarial calculation	408
Piotr Pisarewicz: Mutual funds role in retirement programs' development in the USA.....	415

Ryszard Pukała: Integration processes of insurance markets in Middle and Eastern Europe.....	425
Małgorzata Rutkowska-Podolowska, Nina Szczygiel: Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia	434
Grażyna Sordyl: The Role and Activity of the Dutch Guarantee Fund (College voor Zorgverzekeringen CVZ) in the area of private health insurance	444
Ewa Spigarska: Financial statement of insurance company vs. International Standards of Financial Reporting in the light of changes.....	453
Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska: Organization of internal auditing in insurance companies in the light of Solvency II and audit standards	462
Anna Szkarłat-Koszalka: Instruments of accounting system vs. control of financial security of an insurer.....	471
Tomasz Szkutnik: Copula functions in the aggregation of insurer risk	482
Włodzimierz Szkutnik: The risk of using catastrophic reserves	493
Anna Szymańska: Factors determining the choice of the insurer on the CR automobile insurance market.....	506
Iłona Tomaszewska: Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part II	513
Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz: Students' insurance awareness and risk seeking	524
Stanisław Wanat: Modeling of dependencies in the context of the aggregation of solvency capital requirements in Solvency II	536
Stanisław Wieteska: Property insurance companies adaptation process to reduce the impact of greenhouse effect in Poland	546
Ewa Wycinka, Mirosław Szreder: Statistical analysis of speeding as a factor affecting car accidents in Poland	556

Krzysztof Piasecki

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

ROZMYTE ZBIORY PROBABILISTYCZNE W RACHUNKU AKTUARIALNYM

Streszczenie: W klasycznym aktuarialnym podejściu ryzyko obciążające ubezpieczyciela jest identyfikowane całe z ryzykiem szkody. Obiektywne ryzyko wywołania szkody nie jest jedynym ryzykiem ponoszonym przez ubezpieczyciela. Istotnym jego źródłem jest hazard uprawiany przez osoby narażone na szkody wywołane przez ubezpieczane ryzyko. Hazard ten reprezentuje behawioralne przesłanki określające proces ubezpieczenia ryzyka. Jednym z głównych celów zarządzania finansami ubezpieczyciela powinna być marginalizacja ryzyka obciążającego ubezpieczyciela. Celowi temu służy rzetelny opis wszystkich rodzajów ryzyk grożących ubezpieczycielowi. W tej pracy zostaną przedstawione możliwości wykorzystania rozmytych zbiorów probabilistycznych do opisu kombinacji obiektywnego ryzyka wywołania szkody i behawioralnego ryzyka hazardu.

Słowa kluczowe: prawdopodobieństwo ruiny, rozmyty zbiór probabilistyczny, ryzyko obiektywne, ryzyko subiektywne.

1. Wstęp

Określenie właściwych relacji pomiędzy wielkością wypłacanych rekompensat a przychodem uzyskanym ze sprzedaży polis jest przedmiotem rachunku aktuarialnego. Podstawą rachunku aktuarialnego jest przyjęcie założenia, że ryzyko wywołania szkody jest mierzalnym ryzykiem niepewności. W związku z tym ocena ryzyka wywołania szkody jest oceną obiektywną. Głównym narzędziem służącym do tej oceny jest rachunek prawdopodobieństwa. Ocena ryzyka wywołania szkody jest zawsze dokonywana *ex ante*. W swym klasycznym podejściu rachunek aktuarialny identyfikuje całe ryzyko obciążające ubezpieczyciela z ryzykiem wywołania szkody.

Obiektywne ryzyko wywołania szkody nie jest jednak jedynym ryzykiem ponoszonym przez ubezpieczyciela. Istotnym jego źródłem jest wszelkiego rodzaju hazard uprawiany przez osoby narażone na szkody wywołane przez ubezpieczane ryzyko. Finansowe skutki uprawiania takiego hazardu stanowią behawioralne przesłanki określające proces ubezpieczenia wyróżnionego ryzyka.

Działalność finansowa ubezpieczyciela powinna być bezpieczna dla ubezpieczyciela i ubezpieczonego. Stąd jednym z głównych celów zarządzania finansami ubez-

pieczyciela powinna być marginalizacja ogólnego ryzyka obarczającego ubezpieczyciela. Celowi temu na pewno służy rzetelny opis wszystkich rodzajów grożących mu ryzyk. Ograniczanie się do ryzyka wywołania szkody grozi niedoszacowaniem zagrożeń pojawiających się wobec ubezpieczyciela.

W pracy tej zostanie przedstawiony przykład możliwości wykorzystania rozmytych zbiorów probabilistycznych [Hiroto 1981] do opisu kombinacji obiektywnego ryzyka wywołania szkody i behawioralnego ryzyka hazardu.

2. Podstawy teoretyczne

Przyjmowana przez ubezpieczyciela odpowiedzialność jest związana ze zdarzeniami przyszłymi. Nakłada to na ubezpieczyciela obowiązek szczególnej troski o swoją przyszłą wypłacalność. Pełna wypłacalność może być gwarantowana jedynie przez dobrą przyszłą kondycję finansową ubezpieczyciela. Na tę przyszłą kondycję mają wpływ dwa czynniki: wartość wypłacanych w przyszłości odszkodowań oraz wartość zebranych w przyszłości składek ubezpieczeniowych.

Wartość przyszłych odszkodowań jest uwarunkowana następującymi przesłankami:

- obiektywne ryzyko wystąpienia szkody;
- hazard moralny, przez jaki rozumie się zespół warunków podmiotowych danego ubezpieczającego wyrażających się w negatywnych tendencjach charakterologicznych, takich jak nieuczciwość, skłonność do defraudacji i wyłudzeń;
- hazard motywacyjny będący subiektywną reakcją ubezpieczonego, która jest wywołana świadomością istnienia ochrony ubezpieczeniowej, co objawia się mniejszą starannością i dbałością o obiekt ubezpieczony oraz obojętnością wobec zagrożeń [Kowalewski 1994; Kowalczyk, Poprawska, Ronka-Chmielowiec 2006].

Skutki hazardu moralnego ubezpieczyciel neutralizuje na drodze prawnej. Efekty wywołane przez obiektywne ryzyko wystąpienia szkody zdecydowanie dominuje nad efektami wywołanymi przez hazard motywacyjny. Kwerenda empirycznych danych o wydarzeniach ubezpieczeniowych nie rozróżnia tych dwóch źródeł ryzyka. Umożliwia to aktuariuszowi traktowanie splotu tych zagrożeń jako jednego mierzalnego źródła ryzyka. Zgromadzona przez aktuarusza wiedza pozwala przedstawić wartość wszystkich wypłaconych odszkodowań jako zmienną losową o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Przyszłe wartości zebranej składki ubezpieczeniowej można prognozować na podstawie przewidywanych danych makro- i mikroekonomicznych. Wspomniane przesłanki prognostyczne są danymi szacunkowymi i w tej sytuacji przewidywana składka powinna być przedstawiona jako liczba interwałowa. Taka prognoza zebranej składki jest jednak obciążona efektami hazardu popytowego. Hazard ten jest uprawiany przez osoby narażone na ryzyko analizowanej szkody i przejawia się poprzez w dużej mierze subiektywny wybór decyzji ubezpieczać czy też nie ubezpieczać. Jest to

typowy behawioralny czynnik mający wpływ na ostateczną wartość prognozowanej składki. Wpływ tego czynnika można wycenić jedynie w sposób subiektywny. Jego oddziaływanie na prognozę jest jednak ograniczone, gdyż w mniejszym stopniu spodziewamy się tutaj większych odchyżeń od prognozy. Konsekwencją takiego podejścia jest brak precyzji w prognozowaniu zebranej składki ubezpieczeniowej [Barberis, Shleifer, Vishny 1998]. Uwzględnienie tej nieprecyzji prowadzi do przedstawienia przewidywanej zebranej składki ubezpieczeniowej jako rozmytego podzbioru w zbiorze liczb rzeczywistych. Dyskutowane powyżej właściwości tej prognozy pozwalają na uściślenie postaci tej prognozy jako liczby rozmytej.

Na podstawie prognoz wypłaconych odszkodowań i zebranej składki ubezpieczeniowej prognozuje się wartości przyszłych stanów rezerwy finansowej ubezpieczyciela. Formalnym obrazem takich prognoz są rozmyte zbiory probabilistyczne [Hiroto 1981]. Stwierdzenie to jest konsekwencją naszych spostrzeżeń co do różnorodnych postaci formalnych prognozy wypłaconych odszkodowań i prognozy zebranej składki. Poniżej zostanie przedstawiona pewna koncepcja opisu problemu ruiny obciążającej proces rezerw finansowych ubezpieczyciela prognozowanych w powyższy sposób.

3. Klasyczny model ruiny ubezpieczyciela

Rozważmy pewien zbiór momentów przyszłych momentów czasowych $\Theta \subset \mathbb{R}^+$, nazywany dalej zbiorem momentów predykcji. W wyróżnionych momentach predykcji analizujemy przyszłą działalność finansową ubezpieczyciela.

Zakładamy, że wartość bieżących rezerw finansowych zgromadzona przez ubezpieczyciela wynosi $U_0 > 0$.

Niech będzie dany zbiór Ω elementarnych zdarzeń opisujących przyszłe wydarzenia powiązane z ryzykiem opisanym w polisie ubezpieczeniowej. Każdemu momentowi predykcji $t \in \Theta$ i każdemu elementarnemu zdarzeniu $\omega \in \Omega$ przypisujemy wartość $S(t, \omega)$ wszystkich odszkodowań wypłaconych w przedziale czasowym $]0, t]$. W każdym momencie predykcji $t \in \Theta$ funkcja $S(t, \cdot)$ jest zmienną losową o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa. Wiedza aktuarusza o rozkładzie ryzyk jest reprezentowana przez rozkład prawdopodobieństwa $P: \sigma \rightarrow [0, 1]$ określony dla pewnego ciała zdarzeń losowych $\sigma \subset \mathcal{B}(\Omega)$. Wtedy rozkład każdej zmiennej losowej $S(t, \cdot): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ opisujemy za pomocą dystrybuanty $F_t: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ wyznaczonej przez tożsamość

$$F_t(x) = P(\{\omega \in \Omega: S(t, \omega) < x\}). \quad (1)$$

Z drugiej strony każdemu momentowi predykcji $t \in \Theta$ przypisujemy przewidywaną wartość $Z(t)$ całkowitych składek zebranych w przedziale czasowym $]0, t]$. Jako punkt wyjścia do dalszych rozważań rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy wartość $Z(t) \in \mathbb{R}^+$ tych składek została oszacowana precyzyjnie. Wtedy proces rezerw finan-

sowych ubezpieczyciela jest reprezentowany przez proces losowy $U: \Theta \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ określony przez tożsamość

$$U(t, \omega) = U_0 + Z(t) - S(t, \omega). \quad (2)$$

Ruinę ubezpieczyciela identyfikujemy z osiągnięciem przez proces rezerw finansowych wartości ujemnej. Zbiór wszystkich potencjalnych momentów czasowych ruiny jest określony jako zbiór

$$D(\omega) = \{t \in \Theta: U(t, \omega) < 0\}. \quad (3)$$

Ostateczna ruina ubezpieczyciela ma miejsce w czasie Θ wtedy i tylko wtedy, gdy w tym okresie ujawni się takie zdarzenie elementarne zdarzenie $\omega \in \Omega$, dla którego $D(\omega) \neq \emptyset$. Warunek ten jest równoważny dobrze znanemu z literatury przedmiotu [Ronka-Chmielowiec (red.) 2000] warunkowi ruiny

$$\sup\{S(t, \omega) - Z(t); t \in \Theta\} > U_0. \quad (4)$$

Prawdopodobieństwo zajścia ruiny jest identyfikowane z prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia losowego

$$D = \{\omega \in \Omega: D(\omega) \neq \emptyset\}. \quad (5)$$

W tej sytuacji prawdopodobieństwo zajścia takiej ruiny jest określone jako funkcja $Pr: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ przypisująca każdej wartości $U_0 \in \mathbb{R}^+$ bieżących rezerw finansowych prawdopodobieństwo

$$\begin{aligned} Pr(U_0) &= P(\{\omega \in \Omega: \sup\{S(t, \omega) - Z(t); t \in \Theta\} > U_0\}) \\ &= \frac{\int_{\Theta} \int_D dP(\omega) dt}{\int_{\Theta} dt} = \frac{\int_{\Theta} \int_{U_0+Z(t)}^{+\infty} dF_t(s) dt}{\int_{\Theta} dt} = \frac{\int_{\Theta} 1 - F_t(U_0 + Z(t)) dt}{\int_{\Theta} dt}. \end{aligned} \quad (6)$$

4. Rozmyty model ruiny ubezpieczyciela

W kolejnym kroku naszych rozważań uwzględnimy fakt szacunkowego reprezentowania prognozy zebranej składki oraz obciążające tę prognozę efekty hazardu popytowego. W tej sytuacji każdemu momentowi predykcji $t \in \Theta$ przypisujemy nieprecyzyjnie oszacowaną przewidywaną wartość $\tilde{Z}(t) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ całkowitych składek zebranych w przedziale czasowym $]0, t]$. Wartość tych składek jest reprezentowana przez funkcję przynależności $\zeta(\cdot | t): \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ spełniającą warunek

$$\zeta(Z(t) | t) = 1. \quad (7)$$

Powyższy warunek oznacza, że nieprecyzyjnie oszacowana wartość $\tilde{Z}(t)$ składki zebranej jest przybliżeniem precyzyjnie określonej wartości $Z(t)$. Proces rezerw finansowych ubezpieczyciela jest wtedy wyznaczony za pomocą zależności

$$\tilde{U}(t, \omega) = U_0 \oplus \tilde{Z}(t) \ominus S(t, \omega), \quad (8)$$

gdzie symbole \oplus i \ominus oznaczają odpowiednio uogólnienie do przypadku liczb rozmytych działań dodawania i odejmowania określonych na zbiorze liczb rzeczywistych. Uogólnienia te zostały uzyskane zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha [1975]. Wtedy w momencie predykcji $t \in \Theta$ przewidywana wartość rezerwy finansowej $\tilde{U}(t)$ jest zbiorem Hiroto reprezentowanym przez funkcję przynależności $\eta(\cdot | t): \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow [0,1]$ określonym za pomocą tożsamości

$$\eta(x, \omega | t) = \zeta(x + S(t, \omega) - U_0 | t). \quad (9)$$

Zauważmy, że dzięki (7) mamy tutaj między innymi

$$\begin{aligned} \lambda(t, \omega) &= \sup\{\eta(x, \omega | t): x \leq 0\} = \\ &= \begin{cases} 1 & U_0 + Z(t) - S(t, \omega) \leq 0 \\ \zeta(S(t, \omega) - U_0 | t) & U_0 + Z(t) - S(t, \omega) > 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (10)$$

Wynik ten zostanie wykorzystany w dalszych etapach naszych rozważań.

Ruinę ubezpieczyciela identyfikujemy z osiągnięciem przez proces rezerw finansowych wartości ujemnej. Dla ustalonego zdarzenia elementarnego $\omega \in \Omega$ zbiór wszystkich potencjalnych momentów czasowych ruiny określamy jako rozmyty zbiór

$$\tilde{D}(\omega) = \{t \in \Theta: \tilde{U}(t, \omega) < 0\}. \quad (11)$$

Rodzina rozmytych zbiorów

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{D(\omega): \omega \in \Omega\} \quad (12)$$

tworzy rozmyty zbiór probabilistyczny reprezentujący losowe zdarzenie, polegające na wystąpieniu ruiny ubezpieczyciela. Zbiór ten jest reprezentowany przez swą funkcję przynależności $\mu_D: \Theta \times \Omega \rightarrow [0,1]$ określoną za pomocą tożsamości

$$\mu_D(t, \omega) = \min\{\sup\{\eta(x, \omega | t): x \leq 0\}, 1 - \sup\{\eta(x, \omega | t): x \leq 0\}\},$$

co ostatecznie razem z (10) daje

$$\begin{aligned} \mu_D(t, \omega) &= \\ &= \begin{cases} 1 & U_0 + Z(t) - S(t, \omega) < 0 \\ \min\{\zeta(S(t, \omega) - U_0 | t), 1 - \zeta(S(t, \omega) - U_0 | t)\} & U_0 + Z(t) - S(t, \omega) \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Prawdopodobieństwo zajścia ruiny jest równe prawdopodobieństwu zajścia zdarzenia losowego \tilde{D} . W tej sytuacji prawdopodobieństwo zajścia takiej ruiny jest określone jako funkcja $\overline{Pr}: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0,1]$ przypisującą każdej wartości $U_0 \in \mathbb{R}^+$ bieżących rezerw finansowych prawdopodobieństwo

$$\overline{Pr}(U_0) = \frac{\iint_{\Theta \times \Omega} \mu_D(t, \omega) dP(\omega) dt}{\int_{\Theta} dt} = \frac{\int_{\Theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_D(t, x) dF_t(x) dt}{\int_{\Theta} dt}.$$

Dalej, korzystając dodatkowo z (13), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \overline{Pr}(U_0) &= \\ &= \frac{\int_{\Theta} \int_{-\infty}^{U_0+Z(t)} \min\{\zeta(x-U_0|t), 1-\zeta(x-U_0|t)\} dF_t(x) dt + \int_{\Theta} \int_{U_0+Z(t)}^{+\infty} dF_t(x) dt}{\int_{\Theta} dt} \\ &= \frac{\int_{\Theta} \int_{-\infty}^{Z(t)} \min\{\zeta(y|t), 1-\zeta(y|t)\} dF_t(y+U_0) dt + \int_{\Theta} 1-F_t(U_0+Z(t)) dt}{\int_{\Theta} dt} \end{aligned}$$

co po porównaniu z (6) daje

$$\overline{Pr}(U_0) = \frac{\int_{\Theta} \int_{-\infty}^{Z(t)} \min\{\zeta(y|t), 1-\zeta(y|t)\} dF_t(y+U_0) dt}{\int_{\Theta} dt} + Pr(U_0). \quad (14)$$

Oznacza to, że w przypadku nieprecyzyjnego oszacowania zebranej składki prawdopodobieństwo ruiny wzrasta. Dokładna analiza pierwszego składnika sumy (14) wskazuje, że prawdopodobieństwo ruiny rośnie wraz ze wzrostem nieprecyzji dolnego oszacowania wartości zebranej składki $Z(t)$. Porównanie tego składnika z zależnościami określającymi miarę energetyczną [Gottwald, Czogała, Pedrycz 1982] i miarę entropową [Czogała, Gottwald, Pedrycz 1981] wskazuje, że ten przyrost prawdopodobieństwa ruiny zależy jedynie od niewyrazistości wskazanego oszacowania i nie zależy od niejednoznaczności tego oszacowania.

5. Podsumowanie

Powyżej przedyskutowano wpływ nieprecyzyjnego oszacowania zebranej składki na postać procesu rezerwy finansowej ubezpieczyciela. Po krótkiej analizie proces ten przedstawiono jako proces losowy przyporządkowujący poszczególnym momentom predykcji rozmyte zbiory probabilistyczne. Pomimo tej modernizacji w zaproponowanym modelu można wykorzystać bez zmian całą zebraną wiedzę aktuarialną na temat rozkładów wypłacanych odszkodowań. Wobec znacznej zasobności informacyjnej zgromadzonej wiedzy aktuarialnej jest to wysoce korzystna cecha zaproponowanego modelu.

Przy ocenie poszczególnych portfeli ubezpieczeniowych, prawdopodobieństwa ruiny uzyskane za pomocą zaproponowanej metody (14) nie mogą być porównywane z prawdopodobieństwami ruiny uzyskiwanymi za pomocą „klasycznej” metody (6). Ograniczenie to w oczywisty sposób wynika ze zróżnicowania metodologicznych przesłanek leżących u podstaw każdej z tych metod. Prawdopodobieństwo ruiny może być traktowane jako kryterium jakości portfela ubezpieczeniowego. Zaproponowana metoda szacowania prawdopodobieństwa generuje oryginalne kryterium porównania jakości ocenianych portfeli ubezpieczeniowych. Szczególna przydatność

zaproponowanej metody wynika z faktu, że deprecjonuje takie portfele ubezpieczeniowe, w których przesadnie optymistycznie oszacowano zebraną składkę ubezpieczeniową.

Fakty te pozwalają spojrzeć na bogate instrumentarium oferowane przez teorię zbiorów Hiroto jako na obiecujące narzędzie analizy matematyki ubezpieczeniowej.

Literatura

- Barberis N., Shleifer A., Vishny R. [1998], *A model of investor sentiment*, "Journal of Financial Economics", no. 49.
- Czogała E., Gottwald S., Pedrycz W. [1981], *On the concepts of measures of fuzziness and their Applications in decision making*, 8th triennial World Congress IFAC, Kyoto.
- Gottwald S., Czogała E., Pedrycz W. [1982], *Measures of fuzziness and operations with fuzzy sets*, "Stochastica", vol. VI, no. 3.
- Hiroto K. [1981], *Concepts of probabilistic sets*, "Fuzzy Sets and Systems", no. 5.
- Kowalczyk P., Poprawska E., Ronka-Chmielowiec W. [2006], *Metody aktuarialne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Kowalewski E. [1994], *Wprowadzenie do teorii ryzyka ubezpieczeniowego*, [w:] *Ubezpieczenia w gospodarce rynkowej*, red. A. Wąsiewicz, Oficyna Branta, Bydgoszcz.
- Ronka-Chmielowiec W. (red.) [2000], *Zarządzanie ryzykiem w ubezpieczeniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
- Zadeh L. [1975], *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning*, "Information Sciences", no. 8.

PROBABILISTIC FUZZY SETS IN THE ACTUARIAL CALCULATION

Summary: In classical actuarial approach insurer's risk is identified with the injury risk. This risk is not the unique risk incurred by the insurer. An important source of risk is the gambling run by people who are exposed to a damage caused by insured risks. Gambling represents the behavioural premises for defining the insurance process of distinguished risk. The financial activities of the insurer should be secure for him and for the insured. Thus one of the main goals of the insurer's management should be the marginalization of total risk. This goal realization is supported by reliable description of all risks threatening the insurer. In this paper the combination of objective risk to cause damage and the behavioural risks of gambling will be described as probabilistic fuzzy sets.

Keywords: fuzzy probabilistic set, objective risk, ruin probability, subjective risk.