PRACE NAUKOWE
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
RESEARCH PAPERS
of Wrocław University of Economics

228

Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI

pod redakcją
Wandy Ronki-Chmielowiec

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci: Jerzy Handschke, Jan Monkiewicz, Kazimierz Ortyński, Wanda Sułkowska,
Włodzimierz Szkutnik, Tadeusz Szumlicz, Stanisław Wieteska

Redaktor Wydawnictwa: Elżbieta Kożuchowska

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities http://cejsh.icm.edu.pl
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon http://kangur.uek.krakow.pl/
bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiejkolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2011

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695- 191-1

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp 11

Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik: Formy zabezpieczenia emerytalnego w wybranych krajach europejskich 13
Teresa H. Bednarczyk: Działalność sektora ubezpieczeniowego a wzrost gospodarczy 23
Anna Bera, Dariusz Pauch: Programy edukacyjne jako instrument zwiększania świadomości ubezpieczeniowej w zakresie przestępczości ubezpieczeniowej 31
Jacek Białek: Ocena grupowa w analizie Otwartych Funduszy Emerytalnych 40
Sylwia Bożek: Czynności monitorujące i kontrolne w procesie zarządzania ryzykiem w przedsiębiorstwie ubezpieczeniowym 51
Anna Celczyńska: Należności od ubezpieczających z umów ubezpieczenia OC posiadaczy pojazdów mechanicznych 60
Magdalena Chmielowiec-Lewczuk: Problemy kalkulacji kosztów zakładów ubezpieczeń na tle powiązań w grupach finansowych 68
Dominika Cichońska: Rola ubezpieczeń w zarządzaniu ryzykiem w zakładach opieki zdrowotnej 78
Krystyna Ciuman: Zakłady ubezpieczeń a inne instytucje pośrednictwa finansowego w Polsce w latach 2005–2009 87
Tadeusz Czernik: O pewnym sformułowaniu zagadnienia ruiny 94
Teresa Czerwińska: Uwarunkowania polityki dywidend spółek ubezpieczeniowych 106
Robert Dankiewicz: Determinanty rozwoju rynku ubezpieczeń kredytu kupieckiego w Polsce 116
Beata Dubiel: Ubezpieczeniowe aspekty ryzyka ekologicznego 126
Roman Garbiec: Ryzyko starości jako element konstruowania systemów emerytalnych w Unii Europejskiej 135
Waldemar Glabiszewski: Znaczenie innowacji technologicznych w działalności ubezpieczeniowej 146
Łukasz Gwizdała: Możliwości analizy systemów bonus-malus w świetle procesów Markowa 156
Magdalena Homa: Kalkulacja składki w inwestycyjnych ubezpieczeniach na życie typu unit-linked 168
Beata Jackowska: Charakterystyka wybranych metod wyrównywania tablic trwania życia – wnioski dla zastosowań aktuarialnych 179

Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka: Grupowe ubezpieczenia na życie w sektorze MSP ... 190
Marietta Janowicz-Lomott: Produkty strukturyzowane w formie ubezpieczeń w Polsce ... 201
Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska: Próba zidentyfikowania czynników mających wpływ na wysokość składki przypisanej brutto w ubezpieczeniach komunikacyjnych w Polsce ... 213
Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Pobłocka: Ocena praktycznych metod szacowania rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych ... 222
Piotr Kania: Specjalistyczne fundusze inwestycyjne otwarte jako forma zewnętrznego zarządzania ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi zakładów ubezpieczeń na życie ... 232
Robert Kurek: Uprawnienia organów nadzoru w zakresie kontroli wypłacalności – ujęcie w Solvency II ... 241
Jacek Lisowski: Rola biegłego rewidenta w ocenie gospodarki finansowej ubezpieczyciela – unormowania prawne ... 250
Jerzy Łańcucki: Przesłanki i kierunki zmian w regulacjach dotyczących pośrednictwa ubezpieczeniowego ... 258
Krzysztof Łyskawa: Zagrożenie równowagi odszkodowania i szkody w obowiązkowych ubezpieczeniach mienia ... 267
Aleksandra Małek: Obowiązki banku jako ubezpieczającego w świetle Rekomendacji Dobrych Praktyk Bancassurance ... 277
Piotr Manikowski: Rynek ubezpieczeń w Polsce a cykle underwritingowe ... 286
Dorota Maśniak: Ubezpieczyciel jako główne ogniwo transgranicznego systemu ochrony ofiar wypadków drogowych ... 295
Artur Mikulec: Efektywność systemów emerytalnych krajów UE i EFTA w latach 2005–2008 ... 305
Aniela Mikulska: Małe i średnie przedsiębiorstwa jako odbiorcy usług ubezpieczeniowych ... 316
Marek Monkiewicz: Jednolity rynek ubezpieczeniowy UE w warunkach globalnego kryzysu finansowego 2007–2009 – pomoc publiczna a wspólnotowe reguły konkurencji ... 325
Joanna Niżnik: Reforma systemów emerytalnych Ameryki Łacińskiej na przykładzie Chile i Argentyny ... 335
Magdalena Osak: Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia ... 344
Dorota Ostrowska: Kapitał międzynarodowy a dostęp do produktów ubezpieczeniowych strategicznych dla rozwoju gospodarki polskiej ... 352
Anna Ostrowska-Dankiewicz: Polisa strukturyzowana jako forma inwestycji alternatywnej na rynku polskim ... 362
Renata Pajewska-Kwaśny: Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. I ... 373

Monika Papież: Analiza przyczynowości na rynku ubezpieczeń życiowych w latach 2003–2010 ... 383
Agnieszka Pawłowska: Ubezpieczenie *business interruption* w zarządzaniu ryzykiem przerw w działalności gospodarczej ... 394
Krzysztof Piasecki: Rozmyte zbiory probabilistyczne w rachunku aktuarialnym ... 402
Piotr Pisarewicz: Rola funduszy inwestycyjnych w rozwoju programów emerytalnych w USA ... 409
Ryszard Pukała: Procesy integracyjne rynków ubezpieczeniowych krajów Europy Środkowej i Wschodniej ... 416
Małgorzata Rutkowska-Podołowska, Nina Szczygieł: Medical savings account as a funding mechanism for health ... 426
Grażyna Sordyl: Rola i działalność holenderskiego funduszu gwarancyjnego (College voor Zorgverzekeringen CVZ) w obszarze prywatnych ubezpieczeń zdrowotnych ... 435
Ewa Spigarska: Sprawozdanie finansowe zakładu ubezpieczeń a Międzynarodowe Standardy Sprawozdawczości Finansowej w świetle wprowadzanych zmian ... 445
Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska: Organizacja audytu wewnętrznego w zakładach ubezpieczeń w świetle *Solvency II* oraz standardów audytu ... 454
Anna Szkarłat-Koszałka: Instrumenty systemu rachunkowości a kontrola bezpieczeństwa finansowego ubezpieczyciela ... 463
Tomasz Szkutnik: Funkcje łączące w agregacji ryzyka ubezpieczyciela ... 472
Włodzimierz Szkutnik: Ryzyko uruchomienia rezerw katastroficznych ... 483
Anna Szymańska: Czynniki determinujące wybór ubezpieczyciela na rynku ubezpieczeń komunikacyjnych OC ... 494
Ilona Tomaszewska: Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. II ... 507
Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz: Świadomość ubezpieczeniowa oraz skłonność do ryzyka studentów ... 515
Stanisław Wanat: Modelowanie zależności w kontekście agregacji kapitałowych wymogów wypłacalności w *Solvency II* ... 525
Stanisław Wieteska: Adaptacja zakładów ubezpieczeń majątkowych do likwidacji skutków efektu cieplarnianego na terenie Polski ... 537
Ewa Wycinka, Mirosław Szreder: Statystyczna ocena wpływu przekraczania prędkości na liczbę wypadków drogowych w Polsce ... 547

Summaries

Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik: Forms of retirement security in selected European countries 22
Teresa H. Bednarczyk: The activity of insurance sector vs. economic growth 30
Anna Bera, Dariusz Pauch: Educational programs as an instrument to increase awareness of the crime of insurance cover 39
Jacek Białek: Group evaluation of open pension funds 50
Sylwia Bożek: Monitoring and control activities in the risk management process of an insurance company 59
Anna Celczyńska: Accounts receivable from motor vehicle owners insured under third party insurance agreements 67
Magdalena Chmielowiec-Lewczuk: Problems of cost calculation of insurance companies against the background of connections in financial groups . 77
Dominika Cichońska: The role of insurance in risk management in health care facilities 86
Krystyna Ciuman: Insurance companies versus other financial intermediaries in Poland in the years 2005–2009 93
Tadeusz Czernik: An alternative formulation of ruin problem 105
Teresa Czerwińska: Determinants of the dividend policy in the insurance companies 115
Robert Dankiewicz: Determinants of development of trade credit insurance market in Poland 125
Beata Dubiel: Insurance aspects of ecological risk 134
Roman Garbiec: The risk of old age as the component of constructing the pension systems in the European Union 145
Waldemar Glabiszewski: The importance of technological innovations in the insurance sector 155
Łukasz Gwizdała: The capabilities of analyzing bonus-malus systems in the light of Markov processes 167
Magdalena Homa: Correct calculation of net premium in unit-linked investment insurance 178
Beata Jackowska: Characterization of selected methods of the graduation of life tables in the perspective of their actuarial applications 189
Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka: Group life insurance in the SME sector 200
Marietta Janowicz-Lomott: Structured products in the form of insurance in Poland 212
Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska: An attempt to identify the factors having influence on the gross written premium in motor insurance in Poland 221

Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Pobłocka: Evaluation of practical methods of estimation of incurred but not reported reserves in non-life insurance .. 231
Piotr Kania: Specialized open-end investment funds as an external management form of investment funds of life insurance companies 240
Robert Kurek: Powers of supervision authorities regarding solvency control – Solvency II perspective 249
Jacek Lisowski: The role of the auditor in assessing the financial management of the insurer – legal norms 257
Jerzy Łańcucki: Regulations on insurance mediation – stressing premises and directions of change 266
Krzysztof Łyskawa: Threat of compensation balance and damages in compulsory property insurance 276
Aleksandra Małek: Duties of a bank acting as an coverage buying entity in the context of Recommendations on the Bankassurance Activity 285
Piotr Manikowski: The insurance market in Poland and underwriting cycles 294
Dorota Maśniak: Insurer as a major link in a cross-border system for protection of victims of road accidents – the role of co-operation of private and public entities 304
Artur Mikulec: Effectiveness of pension systems in EU and EFTA countries in the years 2005−2008 315
Aniela Mikulska: Small and medium-sized companies as recipients of insurance services 324
Marek Monkiewicz: Single insurance market in the EU and global financial crisis 2007−2009 – public intervention and Community competition rules 334
Joanna Niżnik: The reform of pension systems in Latin America. The Chilean and Argentinean models 343
Magdalena Osak: Medical savings account as a funding mechanism of health care 351
Dorota Ostrowska: The access to the insurance products strategic for the development of Polish economy in reference to the international capital .. 361
Anna Ostrowska-Dankiewicz: Structured policy as a form of alternative investment on Polish market 372
Renata Pajewska-Kwaśny: Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part I 382
Monika Papież: Causality analysis on the life insurance market in the period 2003–2010 393
Agnieszka Pawłowska: Business interruption insurance implementation in risk management for interrupted activities 401
Krzysztof Piasecki: Probabilistic fuzzy sets in the actuarial calculation 408
Piotr Pisarewicz: Mutual funds role in retirement programs' development in the USA 415

Ryszard Pukała: Integration processes of insurance markets in Middle and Eastern Europe 425
Małgorzata Rutkowska-Podołowska, Nina Szczygieł: Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia 434
Grażyna Sordyl: The Role and Activity of the Dutch Guarantee Fund (College voor Zorgverzekeringen CVZ) in the area of private health insurance 444
Ewa Spigarska: Financial statement of insurance company vs. International Standards of Financial Reporting in the light of changes 453
Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska: Organization of internal auditing in insurance companies in the light of Solvency II and audit standards 462
Anna Szkarłat-Koszałka: Instruments of accounting system vs. control of financial security of an insurer 471
Tomasz Szkutnik: Copula functions in the aggregation of insurer risk 482
Włodzimierz Szkutnik: The risk of using catastrophic reserves 493
Anna Szymańska: Factors determining the choice of the insurer on the CR automobile insurance market 506
Ilona Tomaszewska: Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part II 513
Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz: Students' insurance awareness and risk seeking 524
Stanisław Wanat: Modeling of dependencies in the context of the aggregation of solvency capital requirements in Solvency II 536
Stanisław Wieteska: Property insurance companies adaptation process to reduce the impact of greenhouse effect in Poland 546
Ewa Wycinka, Mirosław Szreder: Statistical analysis of speeding as a factor affecting car accidents in Poland 556

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 228
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS

Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI wieku ISSN 1899-3192

Magdalena Homa
Uniwersytet Wrocławski

KALKULACJA SKŁADKI W INWESTYCYJNYCH UBEZPIECZENIACH NA ŻYCIE TYPU UNIT-LINKED

Streszczenie: Wraz z rozwojem rynku ubezpieczeń w Polsce klasyczne ubezpieczenia na życie, w których głównym założeniem jest zapewnienie ochrony, zaczęły tracić na popularności. Natomiast coraz większym zainteresowaniem cieszą się ubezpieczenia gwarantujące ochronę życia w połączeniu z inwestowaniem części składki, tzw. ubezpieczenia inwestycyjne, do których zaliczyć można ubezpieczenia typu unit-linked, ubezpieczenia partycypacyjne czy equity-linked. W produktach tego rodzaju pierwsza funkcja pomaga spełnić wymogi formalne przynoszące korzyści beneficjentom, najbardziej istotna zaś jest funkcja inwestycyjna, której podstawowym założeniem jest długoterminowa inwestycja przynosząca realne zyski. W przeciwieństwie do klasycznych ubezpieczeń (tradycyjnych) na życie w ubezpieczeniach inwestycyjnych losowy jest nie tylko moment wypłaty, ale także wielkość świadczenia. Stąd ubezpieczyciel, dokonując kalkulacji składki, powinien uwzględnić oba ryzyka: ryzyko zdarzenia objętego umową i ryzyko inwestycji. Firmy ubezpieczeniowe, oferując ubezpieczenia inwestycyjne, proponują szczególną ich formę, w której ryzyko ponosi ubezpieczający się. To stanowiło przesłankę do przedstawienia sposobu wyceny tego typu ubezpieczeń i kalkulacji składki netto.

Słowa kluczowe: ubezpieczenie unit-linked, opcja europejska, składka netto, metoda Monte Carlo.

1. Koncepcja ubezpieczenia typu unit-linked

Polisa unit-linked to produkt czysto inwestycyjny umożliwiający ubezpieczającemu się gromadzenie oszczędności w indywidualnie utworzonym przez niego portfelu, składającym się z różnych funduszy inwestycyjnych, prowadzonych przez niezależne od ubezpieczyciela zewnętrzne towarzystwa funduszy inwestycyjnych. Wartością dodatkową polis unit-linked jest nie tylko możliwość wyboru różnych funduszy z szerokiej oferty, ale także fakt, że zarządzają nimi różne firmy. Z punktu widzenia dywersyfikacji ryzyka inwestycyjnego ma to ogromne znaczenie. Szczególnie istotne jest to, że towarzystwo ubezpieczeniowe oferujące polisy unit-linked dokonuje selekcji funduszy dostępnych w ramach programu. Taka weryfikacja oferty funduszy odbywa się cyklicznie (np. raz na rok) i polega na wykluczaniu z oferty funduszy osiągających słabe wyniki, a dodaniu do programu funduszy dobrych. Ponieważ polisy unit-linked

mają otwartą strukturę i są transparentne, daje to możliwość dostosowywania na bieżąco składu portfela w zależności od zmieniającej się sytuacji rynkowej.

Zatem ubezpieczenie na życie typu unit-linked to umowa między ubezpieczającym się a ubezpieczycielem, w której ubezpieczony zobowiązuje się do opłacania składki (jednorazowej lub okresowej) w zamian za świadczenie, jakie wypłaca ubezpieczyciel w momencie zajścia zdarzenia objętego umową. W przeciwieństwie do tradycyjnych ubezpieczeń na życie w ubezpieczeniach typu unit-linked losowy jest nie tylko moment wypłaty, ale także wielkość wypłacanego świadczenia. Do wyceny ubezpieczenia unit-linked przyjęto w pracy następujące oznaczenia:

$\prod$ – wysokość składki,
π – część składki inwestowana w zalecany portfel,
t_i – moment płacenia składki,
$X(t)$ – wartość portfela ubezpieczeniowego (referencyjnego) w chwili t,
$S(t)$ – cena w chwili t jednostki aktywów,
$g(t)$ – suma gwarantowana w chwili t,
$b(t)$ – świadczenie wypłacone przez ubezpieczyciela w chwili t.

Ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu w momencie zajścia zdarzenia objętego umową większą z wartości: minimalnej gwarantowanej sumy ubezpieczenia oraz wartości rynkowej referencyjnego portfela ubezpieczeniowego. Stąd wypłata (przyszłe świadczenia) z tytułu ubezpieczenia unit-linked z gwarantowaną sumą ubezpieczenia jest równa:

$$\begin{aligned} b(t) &= \max\{X(t), g(t)\} = \\ &= g(t) + \max\{0, X(t) - g(t)\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Wartość portfela ubezpieczeniowego związanego z ubezpieczeniem unit-linked $X(t)$ jest losowa i zależy od ceny jednostki funduszu w chwili t, ceny jednostek w przeszłości (zakupionych ze składek), sumy gwarantowanej oraz wielkości inwestycji. Wartość tę otrzymujemy poprzez zainwestowanie części składki ubezpieczeniowej płaconej w momentach t_i, $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ w wybrane aktywa z ceną określoną jako proces $S(t)$. Zatem w portfelu w chwili t znajduje się $\pi \sum_{i=0}^{\tilde{n}(t)-1} \frac{1}{S(t_i)}$ jednostek wybranych aktywów zakupionych za zainwestowaną część składki, z których każda ma wartość $S(t)$. W związku z tym wartość portfela referencyjnego w chwili t określa wzór:

$$X(t) = \pi \sum_{i=0}^{\tilde{n}(t)-1} \frac{1}{S(t_i)} \cdot S(t), \tag{2}$$

gdzie: $\tilde{n}(t) = \min\{i \mid t_i > t\}$.

W związku z tym wypłatę w momencie wygaśnięcia ubezpieczenia lub zajścia zdarzenia objętego umową można określić następująco:

$$b(T) = g(\Pi) + \max\left\{0, \pi\sum_{i=0}^{n-1}\frac{S(T)}{S(t_i)} - g(\Pi)\right\} = \\ = g(\Pi) + \left(\pi\sum_{i=0}^{n-1}\frac{S(T)}{S(t_i)} - g(\Pi)\right)^{+}. \tag{3}$$

Uwzględniając zmianę wartości pieniądza w czasie, wartość rynkowa w chwili t_0 wypłaconego świadczenia jest równa:

$$V_0(b(T)) = \frac{\upsilon(T)}{\upsilon(t_0)}g(\Pi) + V(t_0, T), \tag{4}$$

gdzie

$$V(t_0, T) = \frac{\upsilon(T)}{\upsilon(t_0)}\max\left\{0, \pi\sum_{i=0}^{n-1}\frac{S(T)}{S(t_i)} - g(\Pi)\right\} = \\ = \frac{\upsilon(T)}{\upsilon(t_0)}\left(\pi\sum_{i=0}^{n-1}\frac{S(T)}{S(t_i)} - g(\Pi)\right)^{+}.$$

Jest to funkcja wypłaty europejskiej opcji kupna o terminie wygaśnięcia *T* oraz cenie wykonania równej sumie gwarantowanej. Zatem wypłata z tytułu ubezpieczenia unit-linked jest sumą dwóch składników: zaktualizowanej sumy gwarantowanej oraz opcji kupna z ceną wykonania $g(\Pi)$.

2. Kalkulacja składki ubezpieczeniowej

Świadczenie wynikające z ubezpieczenia typu unit-linked powiązane jest ze sposobem inwestowania opłaconej składki. Składka, jaką płaci ubezpieczony w momentach t_i w wysokości Π, rozkłada się na dwie części: inwestycyjną i ochronną, przy czym część składki inwestowana w wybrane aktywa to: $\pi = k \cdot \Pi$, gdzie $0 \le k \le 1$. Przy kalkulacji składki losowa jest nie tylko wielkość świadczenia, ale także moment jego wypłaty. Zatem składka Π powinna uwzględniać tę specyfikę. W pracy wykorzystano ciągłe prawdopodobieństwo zdarzenia (śmierci) oznaczone jako ${}_tp_x$. W dalszej części pracy analizowane jest ubezpieczenie mieszane unit-linked, w którym ubezpieczyciel wypłaca świadczenie z tytułu dożycia do końca okresu ubezpieczenia, jak również w momencie zajścia zdarzenia objętego umową.

Składka netto, jaką powinien zapłacić ubezpieczony zgodnie z zasadą równoważności, powinna wynikać z równości wartości oczekiwanej zaktualizowanych

wpływów z tytułu składek a zaktualizowanych przepływów związanych z wypłacanymi świadczeniami wynikającymi z zawartego ubezpieczenia:

$$E_P\left[V_0(\Pi(T)\right] = E_P\left[V_0(b(T))\right].$$

Wartość oczekiwana zaktualizowanych na moment t_0 wypłat związanych z ubezpieczeniem mieszanym unit-linked ma postać:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T} \frac{\upsilon(t)}{\upsilon(t_0)} \cdot E^t\left[g(\Pi) + \max\left\{0, \pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S(t)}{S(t_i)} - g(\Pi)\right\}\right] \cdot {}_t p_x \cdot \mu(t) dt + \\ + \frac{\upsilon(T)}{\upsilon(t_0)} \cdot E^T\left[g(\Pi) + \max\left\{0, \pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S(T)}{S(t_i)} - g(\Pi)\right\}\right] \cdot {}_T p_x.\end{aligned} \tag{5}$$

Z definicji sprawiedliwej składki wynika, że oczekiwane zaktualizowane świadczenia powinny być zrównoważone przez wartość aktuarialną składek, która jest równa:

$$\Pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\upsilon(t_i)}{\upsilon(t_0)} \cdot {}_{t_i} p_x. \tag{6}$$

Stąd zgodnie z zasadą równoważności zachodzi równość:

$$\Pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\upsilon(t_i)}{\upsilon(t_0)} \cdot {}_{t_i} p_x = V\left(t_0\right) + \frac{g(\Pi)}{\upsilon(t_0)} \left[\int_{t_0}^{T} {}_t p_x \cdot \mu(t) \cdot \upsilon(t) dt + {}_T p_x \cdot \upsilon(T) \right],$$

gdzie

$$V\left(t_0\right) = \int_{t_0}^{T} {}_t p_x \cdot \mu(t) \cdot E\left[V(t_0, t)\right] dt + {}_T p_x \cdot E\left[V(t_0, T)\right].$$

Stąd sprawiedliwa składka na ubezpieczenie unit-linked na życie i dożycie ma postać:

$$\Pi = \frac{V\left(t_0\right) + \dfrac{g(\Pi)}{\upsilon(t_0)} \left[\displaystyle\int_{t_0}^{T} {}_t p_x \cdot \mu(t) \cdot \upsilon(t) dt + {}_T p_x \cdot \upsilon(T) \right]}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\upsilon(t_i)}{\upsilon(t_0)} \cdot {}_{t_i} p_x}. \tag{7}$$

Zgodnie z powyższym wzorem składka netto w ubezpieczeniu unit-linked oparta jest na wartości europejskiej opcji kupna i metody jej wyceniania należy wykorzystać do wyznaczania ceny za ubezpieczenie tego typu.

3. Składka netto – przykłady

W przykładach przyjęto: dyskretyzację $\Theta = \{0 = \tau_0 < ... < \tau_N = T\}$, składki płacone są w każdym momencie $t_i \in \tilde{T}$, gdzie $\tilde{T} = \{0 = t_0 < ... < t_n = T\}$. Wówczas jeśli ubezpieczony umrze w chwili $\tau_i \in \Theta / \{\tau_0\}$, ubezpieczyciel wypłaci gwarantowaną sumę ubezpieczenia plus nadwyżkę w chwili τ_{i+1} wynikającą z zaktualizowanej wartości wypłaty danej wzorem:

$$\frac{\upsilon(\tau_{i+1})}{\upsilon(t_0)} g(\Pi) + \frac{\upsilon(\tau_{i+1})}{\upsilon(t_0)} \max\left\{0, k\Pi \sum_{j=0} \frac{S(\tau_{i+1})}{S(t_j)} - g(\Pi)\right\}. \tag{8}$$

Sprawiedliwą składkę za ubezpieczenie inwestycyjne typu unit-linked wyznaczono na podstawie przedstawionego wzoru, uwzględniając, że tylko część składki buduje wartość portfela inwestycyjnego. Składkę oszacowano, wykorzystując symulacje metodą Monte Carlo dla ubezpieczenia inwestycyjnego typu unit-linked zawartego na okres równy odpowiednio: 10 i 15 lat. Ponadto rozważono trzy scenariusze dotyczące zmiany wartości pieniądza w czasie w zależności od przyjętego sposobu kapitalizacji:

Scenariusz I: $\dfrac{\upsilon(t)}{\upsilon(t_0)} = D(t_0, t) = (1{,}06)^{-t}$.

Scenariusz II: $\dfrac{\upsilon(t)}{\upsilon(t_0)} = D(t_0, t) = (0{,}06 + (1{,}02)^{\frac{t}{15}})^{-t}$.

Scenariusz III: $\dfrac{\upsilon(t)}{\upsilon(t_0)} = D(t_0, t) = (2{,}06 - (1{,}02)^{\frac{t}{15}})^{-t}$.

Natomiast do wyznaczenia prawdopodobieństwa śmierci wykorzystano tablice umieralności oparte na prawie Makehama, zgodnie z którym:

$$l_x = b \cdot s^x \cdot g^{c^2},$$

gdzie

$$s = 0{,}99949255; \quad g = 0{,}99959845; \quad c = 1{,}10291509; \quad b = 1000401{,}71.$$

Wyniki przeprowadzonych symulacji dla ubezpieczonego w wieku 30 lat z gwarantowaną sumą ubezpieczenia 1000 j.p. przedstawiono w tabelach 1–3.

Tabela 1. Składka w ubezpieczeniu unit-linked wg scenariusza I

A	składka	
	$T = 10$	$T = 15$
0,40	70,68	41,55
0,45	72,32	43,44
0,50	74,32	45,64
0,55	76,74	48,22
0,60	79,69	51,29
0,65	83,34	55,01

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Składka w ubezpieczeniu unit-linked wg scenariusza II

A	składka	
	$T = 10$	$T = 15$
0,40	77,72	53,37
0,45	79,53	56,30
0,50	81,75	59,80
0,55	84,43	64,03
0,60	87,73	69,32
0,65	91,81	76,15

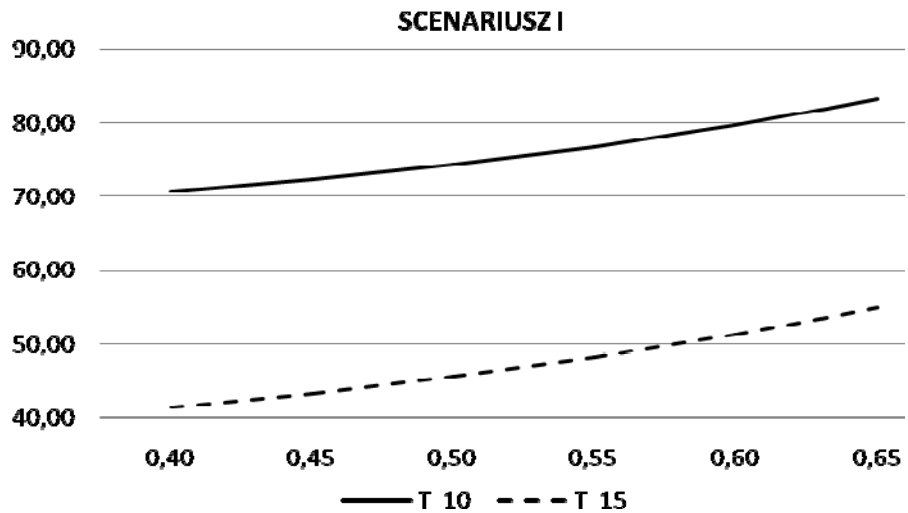
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Składka w ubezpieczeniu unit-linked wg scenariusza III

A	składka	
	T = 10	T = 15
0,40	84,86	63,13
0,45	86,75	66,04
0,50	89,05	69,45
0,55	91,83	73,50
0,60	95,25	78,39
0,65	99,45	84,43

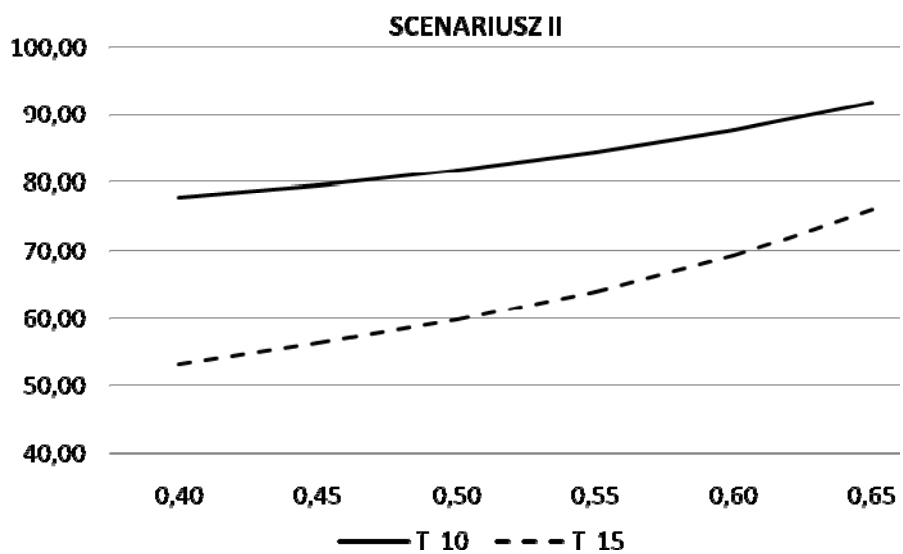
Źródło: opracowanie własne.

Jak można było oczekiwać, składka netto w ubezpieczeniu inwestycyjnym typu unit-linked jest rosnącą wypukłą funkcją udziału inwestycyjnej części składki (rys. 1–3).



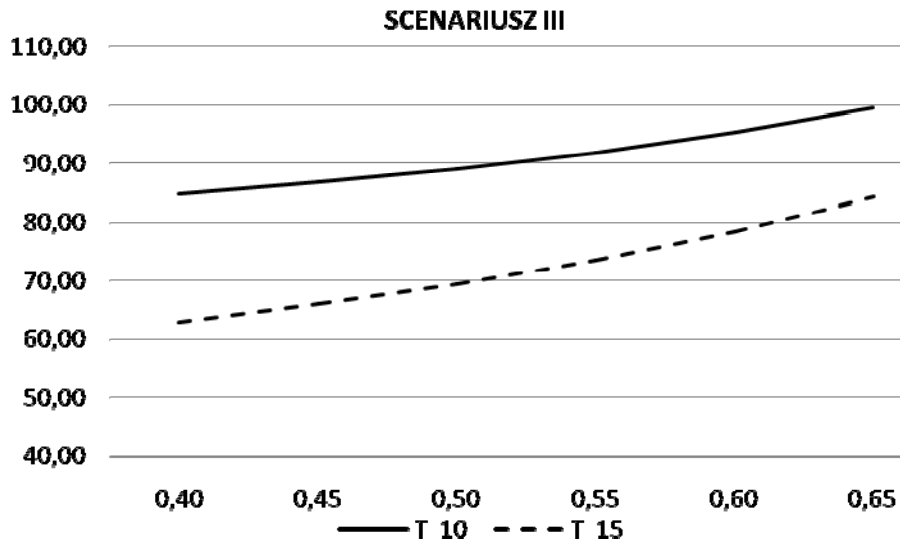
Rys. 1. Składka w ubezpieczeniu unit-linked z kapitalizacją wg scenariusza I

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z tabel 1–3.



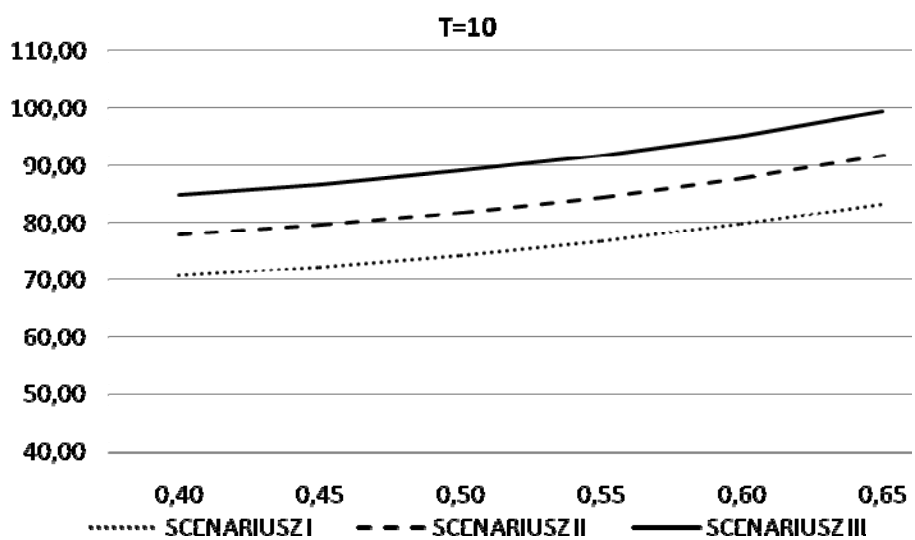
Rys. 2. Składka w ubezpieczeniu unit-linked z kapitalizacją wg scenariusza II

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z tabel 1–3.



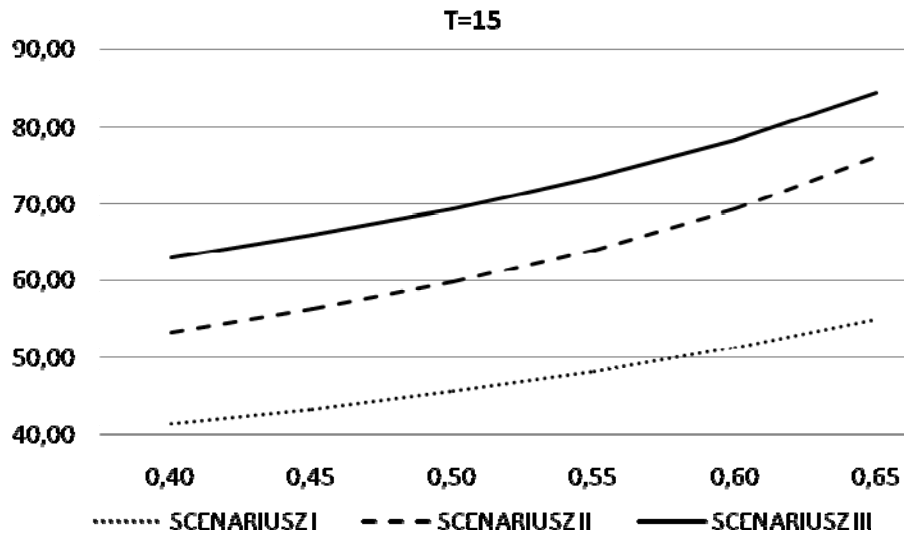
Rys. 3. Składka w ubezpieczeniu unit-linked z kapitalizacją wg scenariusza III

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z tabel 1–3.



Rys. 4. Składka w 10-letnim ubezpieczeniu unit-linked w zależności od sposobu kapitalizacji

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z tabel 1–3.



Rys. 5. Składka w 10-letnim ubezpieczeniu unit-linked w zależności od sposobu kapitalizacji

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z tabel 1–3.

Wpływ przyjętego sposobu kapitalizacji na wysokość składki netto w ubezpieczeniu inwestycyjnym typu unit-linked przedstawiono na rys. 4–5.

Na podstawie powyższych wykresów można sądzić, że wyższy procent inwestowanej części składki zwiększa ryzyko ubezpieczonego, który oprócz ryzyka wystąpienia zdarzenia objętego umową narażony jest również na ryzyko finansowe. W związku z tym wysokość składki netto jest wyższa. Firmy ubezpieczeniowe oferujące ubezpieczenia typu unit-linked, w których minimalizują funkcję ochronną, cedują tym samym ryzyko finansowe na ubezpieczającego się. Dlatego też ubezpieczony powinien kontrolować to dodatkowe ryzyko wynikające z części składki, która buduje wartość portfela inwestycyjnego. Wysoki jej poziom prowadzi do zwiększenia wartości portfela inwestycyjnego, a ubezpieczony otrzymuje rekompensatę wynikającą z nadwyżki wynikającej z wartości portfela inwestycyjnego. Oczekiwaną nadwyżkę wyznaczono ze wzoru:

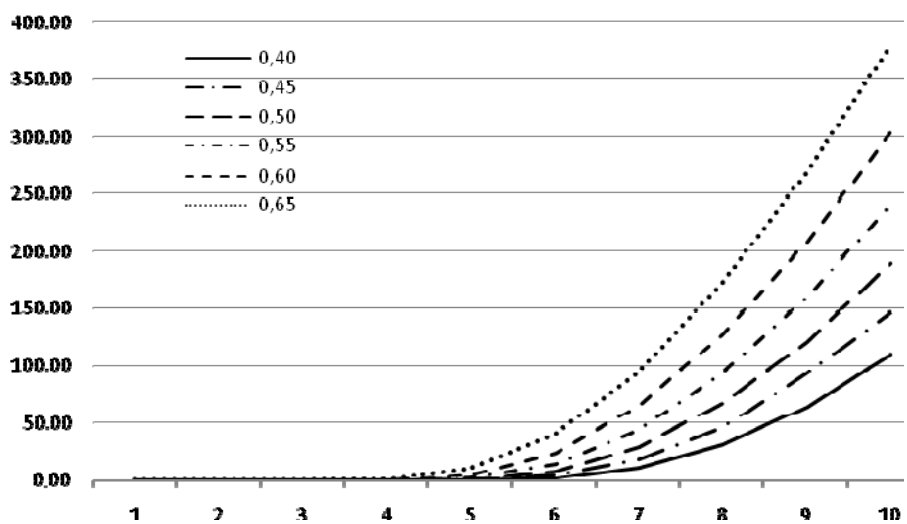
$$E^{\tau_{i+1}}\left[\max\left\{0, k\Pi\sum_{j=0}\frac{S(\tau_{i+1})}{S(t_j)} - g(\Pi)\right\}\right].$$

Korzystając z powyższego wzoru, wyznaczono nadwyżkę wynikającą z wartości portfela inwestycyjnego w kolejnych latach trwania ubezpieczenia. Wyniki symulacji metodą Monte Carlo dla 10-letniego kontraktu typu unit-linked z kapitalizacją zgodną ze scenariuszem II przedstawiono w tab. 4.

Tabela 4. Nadwyżka w ubezpieczeniu unit-linked wg scenariusza II

NADWYŻKA						
A	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
Składka	70,68	72,32	74,32	76,74	79,69	83,34
$t = 1$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$t = 2$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$t = 3$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
$t = 4$	0,00	0,01	0,05	0,14	0,41	1,09
$t = 5$	0,21	0,54	1,26	2,70	5,45	10,50
$t = 6$	2,46	4,78	8,69	14,95	24,74	39,79
$t = 7$	11,28	18,67	29,33	44,36	65,28	94,27
$t = 8$	31,29	46,65	66,93	93,33	127,60	171,71
$t = 9$	64,37	93,35	121,11	160,08	208,43	268,90
$t = 10$	109,81	145,91	189,15	240,98	303,39	379,41

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. Nadwyżka ubezpieczonego w ubezpieczeniu unit-linked w okresie trwania ubezpieczenia

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z tabel 1–3.

Na podstawie powyższych wyników można stwierdzić, że niezależnie od przyjętego sposobu kapitalizacji ubezpieczony może kontrolować nadwyżkę, a tym samym wysokość wypłaty z tytułu ubezpieczenia unit-linked, dobierając odpowiednią strate-

gię awersji do ryzyka, ustalając części składki budującej wartość portfela inwestycyjnego w zależności od swoich oczekiwań. Niezależnie od przyjętej strategii nadwyżka nad sumą gwarantowaną pojawia się w połowie okresu ubezpieczenia, a procent inwestowanej części składki wpływa na jej dynamikę.

Literatura

Aase K., Persson S. [1995], *Equity-linked life insurance*, "Insurance Mathematics & Economics", no. 16.

Ballotta L., Habermann S. [2006], *The fair valuation problem of guaranteed annuity options: the stochastic mortality environment case*, "Insurance Mathematics & Economics", no. 38.

Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C. [1997], *Actuarial mathematics*, The Society of Actuaries, Schaumburg.

Hardy M. [2003], *Investment Guarantees. Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance*, John Wiley & Sons Inc.

Moller T. [2003], *Indifference pricing of insurance contracts in a products pace model: applications*, "Insurance Mathematics & Economics", no. 32.

Moller T., Steffensen M. [2007], *Market valuation methods in life and pension insurance*, Cambridge University Press, Cambridge.

CORRECT CALCULATION OF NET PREMIUM IN UNIT-LINKED INVESTMENT INSURANCE

Summary: Together with the development of insurance market in Poland classic life insurance, which main objective is to ensure protection, began to lose popularity. In contrast, insurance guaranteeing protection of life with the investment part of premium, so-called investment insurance, becomes more and more popular. It includes unit-linked insurance, empowerment insurance and equity-linked insurance. In these kinds of products the first feature helps satisfy formal requirements benefiting the beneficiaries, and the most important feature is the basic assumption that investment is long-term bringing in real profits. In contrast to the classical (traditional) life insurance, in investment insurance not only the moment of payment is random but also the amount of the benefit. Hence, the insurer making the calculation should take into account both risks:

– the risk of events covered by the contract,
– the risk of investment.

Insurance companies offering investment insurance quote special form in which the policyholder bears the risk. It was essential to make way for the valuation of this type of insurance and the calculation of net premium.

Keywords: unit-linked insurance, European option, net premium, Monte-Carlo.