ERNESTO PASCAL.

REPERTORYUM MATEMATYKI WYŻSZEJ

PRZEŁOŻYŁ
za upoważnieniem Autora
S. DICKSTEIN.

TOM I.

ANALIZA.

WARSZAWA.
Wydawnictwo Redakcyi „Wiadomości matematyczych".
W drukarni J. Sikorskiego, Warszawa, Warecka 14.

—

1900.

Dar Profesora Ślebodzińskiego

REPERTORYUM MATEMATYKI WYŻSZEJ.

ERNESTO PASCAL.

REPERTORYUM

MATEMATYKI WYŻSZEJ

PRZEŁOŻYŁ

za upoważnieniem Autora

S. DICKSTEIN.

TOM I.

ANALIZA.

WARSZAWA.

Wydawnictwo Redakcyi „Wiadomości matematyczych".

W drukarni J. Sikorskiego, Warszawa, Warecka 14.

1900.

Дозволено Цензурою
Варшава, 9 Февраля 1900 года.

TREŚĆ.

ROZDZIAŁ III.

Teorya wyznaczników.

ROZDZIAŁ IV.

Teorya szeregów, iloczynów nieskończonych i ułamków ciągłych.

ROZDZIAŁ V.

Teorya równań algebraicznych.

ROZDZIAŁ VI.

Rachunek różniczkowy.

ROZDZIAŁ VII.

Rachunek całkowy.

ROZDZIAŁ VIII.

Równania różniczkowe.

ROZDZIAŁ IX.

Teorya grup przekształceń.

ROZDZIAŁ X.

Rachunek różnic skończonych.

ROZDZIAŁ XI.

Rachunek waryacyjny.

ROZDZIAŁ XII.

Teorya niezmienników.

ROZDZIAŁ XIII.

Funkcye zmiennych zespolonych.

ROZDZIAŁ XIV.

Teorya funkcyj w związku z teoryą grup. Peryodyczność. Automorfizm.

ROZDZIAŁ XV.

Fuukcye algebraiczne i całki abelowe.

ROZDZIAŁ XVI

Teorya funkcyj eliptycznych.

ROZDZIAŁ XVII.

Funkcye hypereliptyczee i abelowe.

ROZDZIAŁ XVIII.

Funkcye specyalne.

ROZDZIAŁ XIX.

Przedstawienie analityczne funkcyj.

ROZDZIAŁ XX.

Teorya liczb całkowitych: wymiernych i zespolonych.

ROZDZIAŁ XXI.

Teorya liczb algebraicznych i przestępnych.

ROZDZIAŁ XXII.

Rachunek prawdopodobieństwa.

ROZDZIAŁ XXIII.

Narzędzia i przyrządy analityczne.

DOPEŁNIENIA I SPROSTOWANIA.

OD TŁÓMACZA.

Profesor E. Pascal jest autorem cennych, wydanych nakładem zasłużonej firmy medyolańskiej Ulrico Hoepli podręczników matematyki wyższej, które szybko pozyskały sobie uznanie w literaturze matematycznej. Jego lekcye Rachunków: rózniczkowego, całkowego, waryacyjnego i różnicowego wydane zostaprzed kilkoma laty w przekładzie polskim; „Rachunek waryacyjny“ wydano świeżo w przekładzie niemieckim, a „Repertoryum“ niniejsze, którego tom I oddajemy do użytku czytelników polskich, ma wyjść niezadługo i po niemiecku.

W przedmowie, którą poniżej dajemy, autor wyjaśnia cel i zadanie swej pracy. W uznaniu jej zalet i w przekonaniu, że przynieść ona może pożytek naszej młodzieży, podjęliśmy ten przekład, kierowani nadto przeświadczeniem, że w naszej literaturze, tak niezasobnej dotąd w dzieła, poświęcone wyższym częściom matematyki, książka podobna do niniejszej może być pożądanym nabytkiem.

Stan obecny literatury matematycznej polskiej, zwłaszcza w dziedzinie wykładowej — mimo pewnego ożywienia w ostatniej dobie —, daleki bardzo od stanu tejże literatury w innych krajach, potrzebom naglącym młodzieży naszej bynajmniej nie czyni zadość. W wielu dziedzinach matematyki wyższej nie posiadamy dotąd wcale podręczników, a brak ten odbija się niekorzystnie i na rozwoju języka naukowego polskiego; rozwój ten bowiem —nawet obok żywego słowa wykładowego—trudnym się staje bez utrwalenia myśli naukowej w postaci wykładu książkowego we wszystkich przedmiotach, nad któremi pracuje matematyka nowoczesna. Otóż w książce tej, obejmującej w treściwym zarysie najważniejsze dobytki nauki, czytelnik znajdzie wyrażone w mowie ojczystej niejedno w tych jej działach, o których w książkach matematycznych polskich dotąd wcale nie pisano.

W porozumieniu z autorem uzupełniliśmy przekład licznemi dopełnieniami oraz wskazówkami bibliograficznemi, odnoszącemi się do literatury matematycznej polskiej.

Pragniemy, aby ta książka mogła stać się pożytecznym przewodnikiem dla młodzieży naszej w studyach nad nauką, „z której początkową tylko znajomością, jak słusznie mówi Jan Śniadecki, żaden kraj ani do jej pożytków nie trafi, ani do rzędu narodów gruntownie uczonych nigdy należeć nie będzie.“

S. D.

PRZEDMOWA AUTORA.

Celem tej książki jest podanie na możliwie niewielkiej przestrzeni zarysu prawie wszystkich głównych teoryj matematyki nowoczesnej, a mianowicie z każdej teoryi tyle tylko, aby czytelnik mógł się w niej zoryentować i znaleść zarazem wskazówki, do jakich dzieł ma się zwrócić, jeżeli pragnie szczegółowiej ją poznać.

Dla studenta książka niniejsza ma być rodzajem vademecum, w którem znajdzie on treściwie zestawione wszystkie pojęcia i rezultaty, które w czasie swych studyów przyswoił sobie lub zamierzał przyswoić. W błędzie byłby ten, ktoby mniemał że zadaniem naszem było ułożenie encyklopedyi matematycznej; praca podobna przekraczałaby siły nasze i nie godziłaby się z rozmiarami tej książki. Dajemy w niej tylko skromne repertoryum, które, jak śmiemy mniemać, przynieść może skromny pożytek studyującym matematykę.

Porządek, jakiego trzymaliśmy się w układzie różnych części każdej teoryi jest wszędzie mniej więcej taki: najprzód podajemy definicye i pojęcia zasadnicze; potem przytaczamy (bez dowodów) twierdzenia i wzory oraz związki, zachodzące pomiędzy utworami i wielkościami, wprowadzonemi przez definicye zasadnicze; wreszcie podajemy krótką bibliografię prac, odnoszących się do danej teoryi.

Nie mogąc dać wszystkiego, ograniczamy się wielokrotnie na rzeczach najważniejszych. Trudności wyboru były tu liczne i niemale i nie zawsze udało się nam pokonać je szczęśliwie: dla tego też ośmielamy się prosić o pobłażliwość w sądzeniu szczegółów tej pracy.

Z dziel pokrewnych tego rodzaju istnieją następujące: L á s k a „Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik" (trzy części, Brunświk, 1888, 1889, 1894), H a g e n „Synopsis der höheren Mathematik" (2 części, Berlin 1893, 1894), wreszcie wychodzące obecnie pod redakcyą H. B u r k h a r d t a i W. Fr. M e y e r a dzieło zbiorowe p. t. „Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften" (Lipsk od r. 1898). Lecz pierwsza z tych książek jest właściwie tylko niezbyt obszernym zbiorem wzorów; druga, jakkolwiek obszerna i pełna cennych wiadomości, nie wydaje się nam ułożoną w ten sposób, aby mogła być przydatną dla tych czytelników, jakich mamy na myśli; trzecia wreszcie mająca być rozległą encyklopedyą matematyczną, podającą wyczerpujące wiadomości o wszystkich teoryach specyalnych, będzie cenną bezwątpienia dla badaczy, ale ze względu na rozmiary niedostępną dla początkujących zwłaszcza matematyków.

Ernesto Pascal.

ROZDZIAŁ I.

TEORYE WSTĘPNE.

§ 1.

Liczby niewymierne.

Dajmy, że mamy dwie klasy liczb wymiernych: klasę A i klasę B, takie: 1^0 że każda liczba klasy A jest mniejsza od każdej z liczb klasy B; 2^0 że dawszy sobie liczbę σ dowolnie małą, możemy zawsze znaleść dwie liczby: jednę a w klasie A, drugą b w klasie B, aby ich różnica $b-a$ była mniejsza od σ, ale nierówna zeru.

Takie dwie klasy A i B określają liczbę, która może albo należeć do jednej tylko z tych klas, albo nie należeć do żadnej i być wymierną; jeżeli zaś nie zachodzi żaden z tych dwu przypadków, mówimy, że dwie klasy A i B określają liczbę niewymierną.

Liczba niewymierna przedstawia się tym sposobem jako liczba, oddzielająca klasę A od klasy B, co oznaczać będziemy w ten sposób: $\alpha = (A, B)$.

Liczbą wymierną n nazywamy mniejszą od liczby α, jeżeli w klasie A istnieją liczby większe od n; większą od α, jeżeli w klasie B istnieją liczby mniejsze od n.

Dwie liczby niewymierne α, α' nazywają się **równemi**, jeżeli każda liczba wymierna mniejsza od α jest także mniejsza od α', i każda liczba wymierna większa od α jest także większa od α'.

Aby dwie liczby niewymierne $\alpha = (A, B)$, $\alpha' = (A', B')$, były równemi, jest koniecznem i dostatecznem, by każda liczba klasy A była mniejsza od jakiejkolwiek liczby klasy B' i aby każda liczba klasy A' była mniejsza od jakiejkolwiek liczby klasy B.

Aby liczba α była większa od liczby α', jest koniecznem i dostatecznem, by istniała liczba klasy A, przewyższająca wszystkie liczby klasy A'.

Liczba β nazywa się **sumą** dwu liczb $\alpha=(A, B)$, $\alpha'=(A', B')$, jeżeli jest określoną przez dwie klasy liczb, które otrzymać można, dodając wszelkiemi możliwemi sposobami wszystkie liczby klasy A i wszystkie liczby klasy B, a następnie wszystkie liczby klasy B i wszystkie liczby klasy B'. Piszemy to symbolicznie:

$$\beta = \alpha + \alpha' = (A + A', B + B').$$

Jeżeli liczby α i α' są równe, to i $\alpha + \gamma$, $\alpha' + \gamma$ będą równe; tu γ jest liczbą, określoną przy pomocy klas, $\alpha + \gamma$ i $\alpha' + \gamma$ zaś są określone jak wyżej.

Różnica i **iloczyn** dwu liczb, określonych za pomocą klas, określamy w sposób podobny do powyższego; wykonywając te działania wszełkiemi możliwemi sposobami na liczbach, tworzących klasy. W symbolach będzie:

$$\alpha - \alpha' = (A - A', B - B')$$
$$\alpha\alpha' = (A \,.\, A', B \,.\, B').$$

W **dzieleniu** dwu liczb niewymiernych $\alpha = (A, B)$, $\alpha' = (A', B')$ możemy przyjąć, że obie liczby są dodatnie, bo gdy jedna lub obie są ujemne, to dość zmienić znaki, ilorazowi zaś nadać znak według znanego prawidła dla liczb wymiernych. Możemy tedy przyjąć, że wszystkie liczby klas A, B, A', B' są dodatnie i różne od zera: Dzielenie określamy za pomocą symbolu:

$$\frac{a}{a'} = \left(\frac{A}{B'} \cdot \frac{B}{A'}\right).$$

Podnoszenie do potęgi i wyciąganie pierwiastku można określić sposobem analogicznym, po okazaniu, że nowe okreslenia nie są w niezgodzie z danem już określeniem iloczynu. W symbolach będzie:

$$a^n = (A^n, B^n); \quad \sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{A}, \sqrt[n]{B})$$

Przejdźmy do wykładnika niewymiernego. Niechaj n będzie liczbą jakąkolwiek, a zas liczbą niewymierną: $a = (A, B)$. Liczbę, okresloną za pomocą dwu klas, które tworzymy, podnosząc n do potęg, wskazanych przez wszystkie liczby dwu klas A i B, nazywać będziemy potęgą a— tą liczby n w symbolach będzie:

$$n^a = (n^A, n^B), \text{ jeżeli } n > 1.,$$
$$n^a = (n^B, n^A), \text{ jeżeli } n < 1.$$

Własności zasadnicze liczb wymiernych i działań na nich wykonywanych pozostają, na podstawie nowych określeń, niezmiennemi.

Ogół wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych tworzy obszar liczb rzeczywistych.

Są trzy główne teorye liczb niewymiernych: Dedekinda (Stetigkeit und irrationale Zahlen, Brunświk 1872, 1892), Weïerstrassa (patrz Kossak, Die Elemente der Arithmetik, Berlin 1872, i niżej cytowaną pracę Pincherlego) i G. Cantora (wyłożona np. w dziele Stolza, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik I, § VII).

Rozprawy o teoryi liczb niewymiernych wymieniamy następujące: G. Cantor (Mathem. Annalen, V; Acta mathem. II), Heine (Journ.

Crelle LXXIV), Pincherle (Giornale di matem. XVIII) Dini, Fondamenti par la teorica delle funzioni di variabili reali, Piza, 1878, przekład niemiecki Lurotha i Schepsa (Lipsk 1892): Pasch Differentialrechnung, 1882, Ricci (Istituto Veneto, 1893, Giorn. di mat. 1897); Betazzi (Periodico di matem. 1888, Teoria delle grandezze, Piza 1890); Dubois-Reymond Functionentheorie, Tybinga 1882, przekład francuski Milhauda, Paryż 1887; Tannery, Introduction a la théorie des fonctions, Paryż 1886; Bachmann, Irrationalzahlen, 1892, Biermann, Elemente der höheren Mathematik 1895). Jasny wykład teoryi można też znaleźć w dziele: Capelli-Garbieri, Analysis algebr., Padwa 1886.

Liczby niewymierne dzielą się na dwie kategorye: do pierwszej należą liczby, zwane algebraicznemi, które są pierwiastkami rzeczywistemi równań o spółczynnikach całkowitych; do drugiej liczby niealgebraiczne lub przestępne. Liczbami drugiej kategoryi są np liczba π i liczba e. Istnienie liczb przestępnych wykazał po raz pierwszy Liouville, następnie G Cantor. Patrz niżej rozdział XXI.

---

§ 2.

Liczby zespolone.

Jeżeli wprowadzimy jednostkę urojoną i, określoną za pomocą wzoru $i^2 = -1$, to liczbą zespoloną będzie liczba postaci $a + ib$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistemi; a nazywa się częścią rzeczywistą tej liczby, b—spółczynnikiem części urojonej.

Dla zachowania prawideł zasadniczych rachunku należy przyjąć, że:

Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy oddzielnie są równemi ich części rzeczywiste i części urojone. Liczba zespolona jest zerem wtedy tylko, gdy oddzielnie jest zerem jej część rzeczywista i część urojona.

Liczby zespolone dodajemy i odejmujemy, dodając i odejmując oddzielnie ich części rzeczywiste i urojone.

Liczba $a-ib$ nazywa się sprzężoną względem liczby $a+ib$.

Suma dwu liczb zespolonych sprzężonych jest liczbą rzeczywistą. Iloczyn dwu liczb zespolonych sprzężonych jest liczbą rzeczywistą, którą nazywamy kwadratem modułu lub normą liczby zespolonej.

Liczbę zespoloną można przedstawić w postaci trygometrycznej $\varrho\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, gdzie ϱ jest modułem, który można uważać zawsze za liczbę rzeczywistą dodatnią, α zaś nazywa się argumentem.

Liczby zespolone można przedstawić geometrycznie za pomocą punktów płaszczyzny w ten sposób, że liczbie zespolonej $a+ib$ odpowiada punkt P o odciętej a i rzędnej b w prostokątnym układzie spółrzędnych (Gauss, Werke II, str. 171, III, str. 6). Wtedy moduł ϱ wyraża odległość punktu P od początku O spółrzędnych, argument zaś α jest kątem, który prosta OP tworzy z osią odciętych.

Moduł sumy dwu liczb zespolonych jest mniejszy od sumy a większy od różnicy ich modułów.

Moduł iloczynu lub ilorazu jest równy iloczynowi lub ilorazowi modułów.

Argument iloczynu lub ilorazu równa się sumie lub odpowiednio różnicy argumentów.

Potęgę n-tą (n—liczba całkowita) liczby zespolonej, wyrażonej w postaci trygometrycznej, otrzymujemy, podnosząc do potęgi n-tej moduł i mnożąc argument przez liczbę n (wzór Moivre'a).

Dla liczby n wymiernej ułamkowej, postaci $\frac{p}{q}$, potęga n-ta licbzy zespolonej $\varrho\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ jest równa:

$$\varrho^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p}{q}(\alpha + 2k\pi) + i\sin\frac{p}{q}(\alpha + 2k\pi)\right)$$

gdzie k jest jakąkolwiek liczbą całkowitą dodatnią. Wyrażenie to ma tylko skończoną liczbę różnych wartości, a mianowicie q wartości, które otrzymujemy, kładąc za k liczby $0, 1, 2, \ldots q-1$.

Jeżeli n jest liczbą niewymierną, określoną przez dwie klasy A, B, t. j. gdy $n=(A, B)$, wtedy modułem n-tej potęgi liczby zespolonej będzie $\varrho^n=(A^n. B^n)$ (patrz § 1), jej argumentem zaś będzie liczba określona przez dwie klasy (liczb w ogóle niewymiernych).

$$\left(A\,(\alpha + 2\,k\,\pi),\ B\,(\alpha + 2\,k\,\pi)\right)$$

gdzie jak zwykle k jest liczbą całkowitą dowolną. W tym przypadku rozwiązań jest nieskończenie wiele. Rozwiązanie, odpowiadające takiej wartości liczby k, że $\alpha+2k\pi$ zawiera się pomiędzy $-\pi$ i $+\pi$, nazywa się rozwiązaniem głównem

Co do okreslenia wykładnika i logarytmów zespolonych patrz Rozdział XIII.

Przy pomocy przedstawienia geometrycznego liczb zespolonych można na liczbach tych wykonywać geometrycznie działania zasadnicze. Jeżeli A i A' są punkty płaszczyzny, przedstawiające dwie liczby zespolone, to dla otrzymania ich sumy kreslimy równoległobok o bokach OA i OA' (O jest początkiem spółrzędnych); wierzchołek tego równoległoboku, przeciwległy wierzchołkowi O, przedstawia sumę liczb zespolonych.

Różnicę wykreślamy za pomocą podobnej konstrukcyi, zastosowanej nie do punktów A i A', lecz do punktu A i do punktu symetrycznego względem punktu A' w odniesieniu do punktu O.

Dla utworzenia iloczynu dwu liczb zespolonych przedstawionych przez punkty A i A', bierzemy na osi rzeczywistej, t. j. na osi odciętych, punkt 1 i kreślimy trójkąt $OA1$, potem trójkąt do niego podobny $OA'P$ taki, że gdy obrócimy go około punktu O aż do zlania się boku OA' z bokiem $O1$, to bok PA' stanie się równoległym do boku $A1$. Wtedy punkt P przedstawiać będzie iloczyn liczb zespolonych.

Nakoniec iloraz dwu liczb zespolonych, przedstawionych przez punkty A i A', tworzymy za pomocą następującej konstrukcyi: Kreslimy trójkąt $OA1$ i na OA bierzemy odcinek równy OA': z punktu końcowego K tego odcinka prowadzimy prostą równoległą do $A1$, która spotyka prostą $O1$ w punkcie Q, obracamy trójkąt OKQ około punktu O, póki OK nie zejdzie się z OA'; położenie, które zajmie wtedy punkt Q będzie punktem żądanym, przedstawiającym iloraz liczby A' przez liczbę A.

Z przedstawieniem geometrycznem liczb zespolonych wiąże się rachunek, zwany rachunkiem ekwipolencyj.

Najważniejszemi pracami o tej teoryi (prócz cytowanych już prac Gaussa) są: Wessel C., Essai sur la théorie analytique de la direction (1799, przedruk w 1897). Argand, Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires 1806, (przedruk w Paryżu 1874). Mourey, Vraie thèorie des quantités imaginaires, 1828, przedruk w 1861. Cauchy, Mémoires sur les quantités géométriques, Exercices d'Analyse, IV. Bellavitis, Sul calcolo delle equipollenze 1833—1834 (lista tych prac znajduje się w cytowanej niżej książce Laisanta). Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Lipsk 1867 (porów. Hertz i Dickstein, Teorya liczb ogólnych, w Pamiętniku Towarzystwa Nauk ścisłych w Paryżu, t. VII, 1875). Hoüel, Théorié des quantités complexes, Paryż 1874, Laisant, Théorie et applications des equipollences, Paryż 1887. Tannery, Introduction etc. (patrz § 1). Stolz, Vorl. üb. Arithm. t. II (patrz § 1).

§ 3.

Kwaterniony.

Jedno z uogólnień teoryi liczb zespolonych stanowi rachunek tak zwanych *kwaternionów*, w którym, prócz jednostki zwyczajnej liczb rzeczywistych, wprowadzamy jeszcze trzy jednostki i_1, i_2, i_3 i tworzymy wyrażenie:

$$a_0 + i_1\, a_1 + i_2\, a_2 + i_3\, a_3\,.$$

Pragnąc zachować własność ogólną, że iloczyn dwu kwaternionów jest kwaternionem, musimy przyjąć, że iloczyn dwu jednostek daje się wyrazić liniowo przez same jednostki. Przyjmujemy tedy, że

$$i_1^2 = -1,\ i_2^2 = -1,\ i_3^2 = -1,$$

$$i_1 i_2 = -\, i_2 i_1 = i_3,\ i_2 i_3 = -\, i_3 i_2 = i_1,\ i_3 i_1 = -\, i_1 i_3 = i_2.$$

Stąd widać już, że własność przemienności iloczynu nie utrzymuje się w ogólności dla tych nowych liczb. Gdy $a_1 = a_2 = a_3$, kwaternion nazywa się *skalarem*, gdy $a_0 = 0$ nazywa się *wektorem*. *Modułem* kwaternionu *jest liczba dodatnia* rzeczywista $\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = a_2^3}$. Liczba

$$i_1 \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} + i_2 \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} + i_3 \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

nazywa się *osią* kwaternionu

Każdy kwaternion można przedstawić w postaci $\varrho\,(\cos\alpha + \lambda \sin\alpha)$ *gdzie* ϱ jest *modułem*, α—*argumentem*, λ—*osią*.

Kwaternion $\varrho\,(\cos\alpha - \lambda \sin\alpha)$ nazywa się *sprzężonym* względem kwaternionu $\varrho\,(\cos\alpha + \lambda \sin\alpha)$.

Kwadrat osi równa się jednostce ujemnej.

Iloczyn dwu kwaternionów sprzężonych równa się kwadratowi modułu.

I l o c z y n d w u k w a t e r n i o n ó w, m a j ą c y c h oś w s p ó l n ą, o t r z y m u j e m y, m n o ż ą c m o d u ł y i d o d a j ą c a r g u m e n t y. W t y m p r z y p a d k u i l o c z y n n i e z a l e ż y o d p o r z ą d k u c z y n n i k ó w.

J e ż e l i k w a t e r n i o n y d a n e d o m n o ż e n i a s ą r ó w n e, o t r z y m u j e m y w z ó r p o d o b n y d o w z o r u M o i v r e'a.

K w a t e r n i o n $z = a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3$ c z y n i z a d o ś ć r ó w n a n i u:

$$z^3 - (3a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)\, z + 2a_0\, (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0.$$

Można pomyśleć ogólniej liczby zespolone o n jednostkach, t. j. liczby postaci

$$a = i_1 a_1 + i_2 a_2 + \ldots + i_{n-1} a_{n-1} + i_n a_n,$$

gdzie $i_1, i_2 \ldots i_{n-1}, i_n$ są jednostkami.

Z literatury o liczbach zespolonych ogólniejszych i o kwaternionach wymieniamy dzieła: G r a s s m a n n, Ausdehnungslehre (Szczecin 1862), oraz Gesammelte Werke, Lipsk 1894, 1896; H a m i l t o n, Lectures on quaternions Dublin 1853, Elements of quaternions, Londyn 1866, przekład niemiecki G l a n a, Lipsk 1882; H a n k e l, Theorie der complexen Zahlensysteme, Lipsk 1867. T a i t. Quaternions 1882, wydanie francuskie 1884; W e i e r s t r a s s (Götting. Nachr. 1884), S c h w a r z, D e d e k i n d, H ö l d e r (tamże 1884, 1885, 1886): B e r l o t y, Théorie des quantités complexes à n unités principales, 1886; H o u ë l, Théorie des quatern. 1874; L a i s a n t, Introduction à la méthode des quatern., Paryż 1881; S t o l z, Vorl über Arith. II, Lipsk 1886; H e r t z, Pierwsze zasady kwaternionów Hamiltona, Warszawa 1887; D i c k s t e i n, Pojęcia i metody matematyki, Warszawa 1891, str. 171 i nast

§ 4.

Teorya grup punktowych (agregatów, zbiorów).

Ustaliwszy jednostkę miary i oznaczywszy na prostej (w ogólności w jakiejkolwiek rozmaitości jednowymiarowej) punkt początkowy (zerowy), możemy do każdej rzeczywistej wartości pewnej ilości zmiennej dobrać punkt prostej, i odwrotnie. Nieskończonej lub skończonej liczbie punktów prostej odpowiadać będzie nieskończona lub skończona liczba wartości zmiennej, i odwrotnie. Ogół ten nieskończonej i skończonej liczby punktów tworzy tak nazwaną grupę nieskończoną lub skończoną punktów, jednowymiarową lub liniową. Jeżeli zamiast jednej zmiennej rozważamy dwie zmienne i obrawszy układ spółrzędnych Descartes'a, jak to się czyni w geometryi analitycznej, do każdej pary wartości obu zmiennych dobierzemy odpowiadający jej punkt płaszczyzny, to nieskończonej lub skończonej liczbie par wartosci zmiennych odpowiadać będzie grupa dwuwymiarowa nieskończona lub skończona. W tenże sposób możemy określić grupy o dowolnej liczbie n wymiarów.

Punktem granicznym takiej grupy nazywa się punkt, w którego każdem dowolnie małem otoczeniu istnieją zawsze punkty należące do grupy.

Każda grupa nieskończona punktów ma zawsze przynajmniej jeden punkt graniczny. Grupa skończona nie ma wcale punktów granicznych.

Jeżeli grupa punktów ma więcej niż jeden punkt graniczny, to ogół tych punktów tworzy grupę pochodną. Podobnym sposobem otrzymaćby można z niej i inne grupy pochodne, jeżeli pierwsza grupa pochodna jest nieskończoną.

Przykłady: Grupa $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ ma jako punkt graniczny punkt zero. Grupa, której punkty są typu $\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$

$(n, m = 1, 2, 3 \ldots)$, ma za punkty graniczne punkty typu $\frac{1}{n}$, tworzące znowu grupę nieskończoną.

G r u p a p u n k t ó w w y m i e r n y c h m a z a p i e r w s z ą g r u p ę p o c h o d n ą o g ó ł w s z y s t k i c h p u n k t ó w. K a ż d a g r u p a p o c h o d n a z a w i e r a w s o b i e w s z y s t k i e n a s t ę p n e g r u p y p o c h o d n e.

Jeżeli jedna z grup pochodnych jest skończoną, wtedy przerywa się szereg grup pochodnych i grupa pierwotna nazywa się g r u p ą p i e r w s z e g o g a t u n k u. W przeciwnym razie nazywa się g r u p ą d r u g i e g o g a t u n k u.

Grupa nazywa się z g ę s z c z o n ą lub w s z ę d z i e—g ę s t ą w pewnym przedziale, jeżeli w każdym dowolnie małym przedziale, zawartym w poprzednim, znajduje się nieskończenie wiele jej punktów.

Dwie grupy nazywają się grupami r ó w n e j m o c y, jeżeli pomiędzy ich elementami można ustanowić odpowiedniość wzajemną i zupełną. Jeżeli punkty grupy odpowiadają w sposób jedyny i zupełny punktom grupy, utworzonej z szeregu liczb całkowitych 1, 2, 3 . . . , grupa nazywa się o d l i c z a l n ą.

J e ż e l i p i e r w s z a g r u p a p o c h o d n a g r u p y l i n i o w e j p u n k t ó w j e s t o d l i c z a l n ą, t o w s z y s t k i e p u n k t y g r u p y d a j ą s i e z a w r z e ć w o d c i u k a c h, k t ó r y c h s u m ę m o ż n a u c z y n i ć d o w o l n i e m a ł ą.

Grupa nazywa się d o s k o n a ł ą, jeżeli zlewa się ze swoją pierwszą grupą pochodną, a więc i ze wszystkiemi następnemi grupami pochodnemi

Powyższe pojęcia należą do pierwszych w teoryi grup. Teoryę tę utworzył G. C a n t o r (Math. Ann. V, str. 123, 1872, Crelle, LXXVII, str. 258, LXXXIV, str. 242, Acta math. II, IV, V). W przedmiocie tym ogłoszono liczne prace. jak to można widzieć z artykułów V i v a n t i ' ego: „Notice historique sur la théorie des ensembles" (Biblioth. math. VI, 1892, str. 9) i „Teoria degli agregati" (Rivista di matematica, III, 1893, str. 189). B o r e l. Théorie des fonctions, 1898.

§ 5.

Pojęcie ogólne funkcyi.

Jeżeli pomyślimy zmienną y, związaną z inną zmienną x w ten sposób, iż nadawszy na x pewną wartość, zawartą w ustalonym przedziale lub, ogólniej, zawartą w oznaczonej grupie nieskończenie wielu wartości, otrzymujemy jednę określoną wartość na y, mówimy, że y jest funkcyą zmiennej x w przedziale lub grupie określonej. Zmienna x nazywa się zmienną niezależną. Podobną definicyę utworzyć można dla funkcyi y, zależnej od większej liczby zmiennych x_1, x_2, ...

Funkcya y zmiennej x nadaje się do przedstawienia analitycznego, wtedy, jeżeli można ustanowić układ działań analitycznych, które należy wykonać już to na samej zmiennej x, już to równoczeście na zmiennych x i y, aby wybrawszy pewną wartość na x i wykonawszy wskazane działania, módz dojść do wartości y.

Funkcya y zmiennej x nadaje się do przedstawienia geometrycznego wtedy, gdy po przyjęciu x i y za spółrzędne Descartes'a punktu na płaszczyźnie, miejscem geometrycznem punktu o spółrzędnych x i y będzie krzywa w zwykłem znaczeniu tego wyrazu.

Przedstawienia analityczne mogą być dwojakie: wyraźne i niewyraźne lub uwikłane. Przedstawienie analityczne nazywa się wyraźnem wtedy, gdy, wskazane działania analityczne mają być wykonane wprost na zmiennej x, a wykonawszy je, otrzymujemy odrazu wartość zmiennej y. Jeżeli zaś przyjmiemy, że mamy daną analitycznie funkcyę dwu zmiennych x i y, t. j. pewien układ działań analitycznych, które należy wykonać równocześnie na obu zmiennych x i y, i że szukamy tym sposobem wszystkich par wartości, dla których ta funkcya obu zmiennych jest zerem, wtedy y można będzie uważać w ogóle za funkcyę zmiennej x, lecz daną za pomocą równania, t. j. niewyraźnie.

Jeżeli funkcya nadaje się do przedstawienia analitycznego wyraźnego, a symbole działań analitycznych, do tego przedstawienia wchodzących. należąc tylko do pierwszych czterech działań rachunku, oraz do potęgowania z wykładnikiem całkowitym, są w liczbie *skończonej*, wtedy funkcya nazywa się *wymierną*.

Najogólniejszą postacią funkcyi wymiernej jednej zmiennej jest:

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n}$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots b_0, b_1 \ldots$ *są stałemi*.

Jeżeli w przedstawieniu analitycznem funkcyi znajduje się symbol pierwiastkowania, zastosowany do zmiennej x lub do funkcyi wymiernej tej zmiennej, wtedy funkcya nazywa się *niewymierną*.

Funkcya nazywa się *przestępną*, jeżeli do jej przedstawienia analitycznego wchodzą symbole i innych działań, prócz wyżej wymienionych np. działanie *lagorytmowe*, działanie wskazane przez funkcye zwane trygonometrycznemi i t. d.; te działania wykonywają się albo na samej zmiennej x, albo na jej funkcyi.

Jeżeli y jest funkcyą zmiennej z, ta zaś zmienna z jest znowu funkcyą zmiennej x, wtedy y nazywa się *funkcyą złożoną* zmiennej x za pośrednictwem funkcyi z. Podobną definicyę tworzymy dla przypadku, w którym y jest funkcyą większej liczby zmiennych $z_1, z_2, z_3, \ldots$, każda zaś z nich jest znowu funkcyą innych zmiennych.

Jeżeli y jest funkcyą zmiennej x, to zmienną x można uważać za funkcyę ilości y; funkcya taka nazywa się *odwrotną*.

Funkcya zmiennych $x_1, x_2, \ldots$ nazywa się *jednorodną*, jeżeli po pomnożeniu każdej ze zmiennych przez ilość nieokresloną t, t. j. po podstawieniu $tx_1, tx_2, \ldots$ zamiast $x_1, x_2, \ldots$, wartość funkcyi przy nowych argumentach będzie równa wartości funkcyi przy argumentach pierwotnych, pomnożonej przez pewną potęgę ilości $t \ldots$ Wyraża tę własność wzór:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots) = t^r f(x_1, x_2, \ldots),$$

zachodzący dla jakiegokolwiek t i dla każdego układu wartości $x_1, x_2, \ldots$ Liczba r nazywa się stopniem jednorodnosci.

Wyrazu funkcya używali pierwsi: Leibniz (Acta Eruditorum, 1692). Bernoulli (Mémoires de Paris. 1718), Euler (Introductio in analysin infinitorum, 1748).

Pomysł oddzielenia pojęcia funkcyi od pojęcia jej przedstawienia analitycznego zawdzięczamy Lejeune-Dirichletowi.

---

§ 6.

Funkcye całkowite i wymierne jednej zmiennej.

Niechaj będą dane dwie funkcye całkowite (wielomiany) jednej zmiennej x, mianowicie $F(x)$ i $f(x)$, pierwsza stopnia m, druga stopnia n ($m > n$); można wyznaczyć jednoznacznie dwa inne wielomiany, mianowicie $Q(x)$ stopnia $m—n$ i $R(x)$ stopnia mniejszego niż n, aby było toż tożsamosciowo:

$$F(x) = f(x)\, Q(x) + R(x).$$

$Q(x)$ nazywa się ilorazem, $R(x)$ zaś resztą. Jeżeli $R=0$, mówimy, że funkcya F jest podzielna przez f.

Utworzywszy kolejne równości:

$$f(x) = R(x)\, Q_1(x) + R_1(x)$$
$$R(x) = R_1(x)\, Q_2(x) + R_2(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dojdziemy napewno do takiej równości, w której reszta, dajmy na to, $R_{\iota+1}$, jest równa stałej. Jeżeli ta stała jest zerem, to reszta R_ι jest największym spólnym dzielnikiem funkcyj F i f. Jeżeli R_{i+1} nie równa się zeru, wtedy funkcye F i f są względnie pierwszemi.

Jeżeli wielomiany F_m i f_n są względnie pierwszemi, to można zawsze wyznaczyć jedyne dwie takie funkcye całkowite G_{m-1}, g_{n-1}, aby było:

$$F_m\, g_{n-1} + G_{m-1}\, f_n = 1.$$

Możność wyznaczenia dwu funkcyj całkowitych H_{m-k}, h_{n-k} takich, aby było:

$$F_m\, h_{n-k} + f_n\, H_{m-k} = 0$$

stanowi warunek konieczny i dostateczny na to, by dwie funkcye F, f miały dzielnik wspólny stopnia co najmniej k.

Resztą z podzielenia funkcyi $f(x)$ przez $x-a$ jest $f(a)$. Jeżeli $f(x)$ znika dla $x=a$, to jest przez $x-a$ podzielne.

Jeżeli $(x-a)^\alpha$ jest czynnikiem funkcyi $f(x)$, $(x-a)^{\alpha+1}$ zaś nie, to mówimy, że a jest pierwiastkiem wielokrotnym o wielokrotności α funkcyi $f(x)$ lub równania $f(x)=0$.

Ogólna funkcya wymierna zmiennej x ma postać $\dfrac{F(x)}{f(x)}$, gdzie F i f są symbolami dwu wielomianów ze zmienną x.

Jeżeli a jest pierwiastkiem wielokrotności α równania $f(x)=0$, wtedy funkcya $\dfrac{R}{f}$, gdzie R jest stopnia niższego niż f, można rozłożyć w ten sposób:

$$\frac{R(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{R_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

tu A jest stałą, $R_1(x)$ jest wielomianem całkowitym stopnia o jedność niższego od stopnia wielomianu $R(x)$, $f(x)$ zaś jest ilorazem z podzielenia funkcyi $f(x)$ przez $(x-a)^\alpha$.

Niechaj $x_1, x_2 \ldots, x_r$ będą pierwiastkami równania $f(x)=0$

wielokrotności odpowiednio $i_1, i_2 \ldots i_r$; funkcyę wymierną $\frac{R}{f}$ gdzie R jest stopnia niższego niż f, można rozłożyć w ten sposób:

$$\frac{R(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^{i_1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{i_1-1}} + \ldots + \frac{A_{i_1}}{x-x_1}$$

$$+ \frac{B_1}{(x-x_2)^{i_2}} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{i_2-1}} + \ldots + \frac{B_{i_2}}{x-x_2}$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots$$

gdzie $A, B, \ldots$ są stałemi.

Spółczynniki $A_1, A_2 \ldots$ wyznaczają się zapomocą następujących wzorów zwrotnych (gdzie znaczki przy R i f służą do oznaczenia pochodnych, patrz Rozdział VII):

$$R(x_1) - \frac{A_1}{i_1!} f^{(i_1)}(x_1) = 0,$$

$$R'(x_1) - \frac{A_1}{(i_1+1)!} f^{(i_1+1)}(x_1) - \frac{A_2}{i_1!} f^{(i_1)}(x_1) = 0$$

$$R''(x_1) - \frac{A_1}{(i_1+2)!} f^{(i_1+2)}(x_1) - \frac{A_2}{(i_1+1)!} f^{(i_1+1)}(x_1) - \frac{A_3}{i_1!} f^{(i_1)}(x_1)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Analogicznie napisać można wzory na $B_1, B_2, \ldots\ldots$

Jeżeli $i_1 = i_2 = \ldots\ldots = 1$, będzie wprost:

$$A_1 = \frac{R(x_1)}{f(x_1)}, \quad B_1 = \frac{R(x_2)}{f(x_2)}, \ldots\ldots$$

W przypadku, gdy $f(x)$ ma wszystkie pierwiastki różne, (t. j. gdy żaden z nich nie jest wielokrotny), otrzymujemy następujący wzór godny uwagi:

$$\frac{R(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{R(x_2)}{f'(x_2)} + \ldots + \frac{R(x_n)}{f'(x_n)} = 0.$$

Jeżeli trójmian x^2+px+q jest czynnikiem mianownika $f(x)$, t. j. gdy

$$f(x) = (x^2 + px + q)^r f_1(x),$$

wtedy będzie tożsamościowo:

$$\frac{R(x)}{f(x)} = \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^r} + \frac{R_1(x)}{(x^2 + px + q)^{r-1} f_1(x)},$$

gdzie $R_1(x)$ jest nową funkcyą całkowitą stopnia niższego od stopnia funkcyi R, zaś P_1, Q_1 są ilościami stałemi.

W temże założeniu będzie:

$$\frac{R(x)}{f(x)} = \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+px+q)^r} + \frac{P_2 x + Q_2}{(x^2+px+q)^{r-1}} + \ldots + \frac{P_r x + Q_r}{x^2+px+q} + \frac{R_r(x)}{f_1(x)}$$

gdzie R_r jest stopnia niższego niż f.

Jeżeli równanie $f(x)=0$ ma pierwiastki urojone, to wzór poprzedni służy do przekształcenia funkcyi $\frac{R}{f}$ na sumę ułamków elementarnych rzeczywistych.

Rozkład funkcyi ułamkowej wymiernej na ułamki proste znajdujemy już u Jana Bernoulli'ego (Dzieła t. I); potem przedmiotem tym zajmowali się Euler, Cauchy i inni.

---

§ 7.

Teorya granic.

Mówimy, że funkcya y zmiennej x ma dla x równego a granicę A, jeżeli dawszy sobie σ dowolnie małe, możemy zawsze znaleść otoczenie punktu a takie, że dla każdej wartości x w niem zawartej, wartość bezwzględna funkcyi y różni się od A o ilość mniejszą od σ.

Rozróżniać będziemy granicę z prawej strony i granicę, lewej strony stosownie do tego, czy własność powyższa spełnia się po stronie prawej, czy też po stronie lewej od a; to rozróżnienie jest zbytecznem, jeżeli spełnia się ona po obu stronach.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia granicy jest, by, dawszy sobie σ dowolnie małe, można było znalesć otoczenie punktu a takie, że różnica bezwzględna dwu wartości, które przyjmuje funkcya y w dwu jakichkolwiek punktach tego otoczenia, jest mniejsza od σ.

W przypadkach, gdy A lub a są nieskończonościami, należy dać definicye następujące:

Mówimy, że granica funkcyi y jest $\pm\infty$ dla x dążącego do a, gdy, dawszy sobie ω dowolnie wielkie, można znalesć takie otoczenie punktu a, że dla każdej wartości x w niem zawartej, wartość funkcyi y jest zawsze stałego znaku, a co do swej wartości bezwzględnej większa od ω.

Mówimy, że funkcya y ma granicę A dla x dążącego do $\pm\infty$, gdy, dawszy sobie σ dowolne małe, można znaleść liczbę x' taką, że dla każdej wartosci $x > x'$ (lub mniejszej od x') różnica $A - y$ jest co do wartości bezwzględnej mniejsza od σ.

Mówimy, że funkcya y ma granicę $\pm\infty$ dla x dążącego do $\pm\infty$, gdy, dawszy sobie ω dowolnie wielkie, możemy znaleść takie x', że dla każdej wartości $x > x'$ (lub $< x'$) funkcya y jest znaku stałego i co do wartości bezwzględnej większa od ω.

Jeżeli trzy funkcye y_1, y_2, y_3 zmiennej x są takie, że, dawszy sobie σ dowolnie małe, można znaleść otoczenie punktu a takie, iż dla punktów tego otoczenia wartość funkcyi y_2 jest zawsze zawarta pomiędzy wartościami funkcyj y_1 i y_3 i jeżeli te dwie ostatnie funkcye dążą do jednej i tej samej granicy A dla $x = a$, to i y_2 dążyć będzie do granicy dla $x = a$ i tą granicą będzie A.

Jeżeli funkcya y, gdy x zbliża się do a, rośnie bez przerwy, a przynajmniej nie maleje, pozostając wciąż mniejszą od liczby A, to wtedy funkcya ta ma granicę dla $x=a$ i granicą tą jest albo ilość A, albo liczba mniejsza od A

Granica sumy algebraicznej, iloczynu, ilorazu funkcyj, mających granice dla $x=a$, jest równa sumie, iloczynowi, ilorazowi granic.

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^n}{n!} = 0, \qquad \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1., \qquad \mathrm{iim}_{n=\infty} \; n\,(\sqrt[n]{a} - 1) = \log_e a,$$

$$\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0, \qquad \lim_{m-0} \left(1 + m\right)^{\frac{1}{m}} = e,$$

$$\lim_{x=0} \frac{tgx}{x} = 1., \qquad \lim_{m=0} \frac{\log(1 + m)}{m} = 1.,$$

$$\lim_{x=0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{m=0} \frac{\log(1 + mx)}{m} \qquad x,$$

$$\lim_{y=0} \frac{a^y - 1}{y} = \log a, \qquad \lim_{y=0} y \log y = 0;$$

$$\lim_{y=0} \frac{(1 + y)^\mu - 1}{m} = \mu, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

$$\lim_{n=\infty} \left\{ n\,(a^{\frac{1}{n}} - 1) \right\} = \log a,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = e^{\lim f(x)}\,;\ \lim_{x=\infty} x\left\{\sqrt[x]{f(x)}-1\right\} = \log_e \lim f(x),$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \frac{4}{e},$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{\log(1+nx)}{n} = 0 \quad : \quad \lim n e^{-nx^2} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{1^r+2^r+\ldots+n^r}{n^{r+1}} = \frac{1}{r+1}, \text{ jeżeli } r+1 \text{ jest dodatnie}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \infty, \quad \text{"} \quad \text{"} \text{ nie "} \quad \text{"}$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n} = 0$$

Jeżeli $f(x+1)-f(x)$ dąży do granicy oznaczonej A, gdy x dąży do nieskończoności, i jeżeli funkcya $f(x)$ jest skończoną dla każdej skończonej wartości x, stając się nieskończoną tylko dla $x=\infty$, wtedy:

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{x} = A.$$

Jeżeli mamy funkcyę $f(x)$ różną od zera i od nieskończoności dla każdej skończonej wartości na x, większej od pewnej liczby oznaczonej, i stawającą się zerem lub nieskończonoscią jedynie dla $x=\infty$, i jeżeli nadto:

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)} = A,$$

to będzie także:

$$\lim_{x=\infty}\sqrt[n]{f(x)} = A.$$

Twierdzenie Gaussa, Niechaj będą dwie ilości α i β, $\beta < \alpha$. Utwórzmy wyrażenia kolejne:

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),\ \beta_1 = \sqrt{\alpha\beta}$$
$$\alpha_2 = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1),\ \beta_2 = \sqrt{\alpha_1\beta_1}$$
$$\alpha_3 = \tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_2),\ \beta_3 = \sqrt{\alpha_2\beta_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

to będzie:

$\lim\limits_{n=\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n=\infty} \beta_n$ (średnia arytmetyczno-geometryczna)

---

§ 8.

Granica wyższa i niższa wartości funkcyi.

Jeżeli $f(x)$ jest funkcyą stale skończoną w całym przedziale od a do b, to: albo istnieje jeden lub więcej punktów przedziału, w których funkcya ma wartość największą, albo istnieje wartość A taka, że lubo przy zmienianiu ilości x w przedziale, $f(x)$ nie może ani dojść do tej wartości, ani jej przekroczyć, to jednak dawszy sobie σ dowolnie małe, można zawsze znaleść taką wartość x w przedziale, że różnica pomiędzy A a wartością funkcyi w tym punkcie będzie co do wartości bezwzględnej mniejsza od σ. W tym drugim przypadku mówimy, że A jest granicą wyższą wartości f w punkcie x. Analogiczna definicya określa granicę niższą.

Jeżeli istnieje maximum wartości funkcyi, to funkcya może albo czynić zadość warunkowi cechującemu granicę wyższą, albo też może warunku tego nie spełniać.

W tym ostatnim przypadku nie istnieje granica wyższa w ściłem znaczeniu tego wyrazu; w przypadku pierwszym będziemy mieli granicę wyższą, która jest zarazem maximum funkcyi.

Jeżeli funkcya ma w przedziale granicę wyższą A, to istnieć będzie napewno przynajmniej jeden punkt w przedziale taki, że w dowolnie małym odcinku punkt ten otaczającym granica wyższa wartosci funkcyi jest także A (Twierdzenie Weierstrassa).

Nazywamy oscylacyą (wahaniem się) funkcyi w przedziale różnicę pomiędzy największemi i najmniejszemi wartościami, jakie przyjmuje ta funkcya w przedziale, lub jeżeli te maxima i minima nie istnieją—różnicę pomiędzy granicą wyższą i granicą niższą.

Bolzano pierwszy miał myśl uważania granicy wyższej i niższej (patrz Stolz, Math. Annalen, XVIII), lecz dopiero później Weierstrass rozwinął szeroko te pojęcia analizy.

---

§ 9.

Teorya funkcyj ciągłych i nieciągłych.

Funkcya $f(x_1, x_2, \ldots)$ nazywa się ciągłą w punkcie $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots$, gdy jej granica dla $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots$ równa się wartości $f(a_1, a_2 \ldots)$. Inaczej: jeżeli damy sobie σ dowolnie małe, to można zawsze znaleść układ wartości $h_1, h_2, \ldots$ taki, że dla każdego układu $x_1, x_2 \ldots$, czyniącego zadość warunkom:

$$a_1 - h_1 \leqq x_1 \leqq a_1 + h_1; \quad a_2 - h_2 \leqq x_2 \leqq a_2 + h_2; \ldots\ldots$$

różnica pomiędzy wartoscią, jaką przyjmuje f, a wartoscią $f(a_1, a_2 \ldots . a_n)$ jest bezwzględnie mniejsza od σ.

Funkcya ciągła i skończona jednej zmiennej, czyniąca zadość warunkowi

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

ma postać najogólniejszą:

$$f(x) = a\,x.$$

Funkcya ciągła jednej zmiennej spełniająca związek

$$f(x+y) = f(x)\,f(y)$$

ma postać najogólniejszą:

$$f(x) = A^{ax},$$

gdzie A i a są ilościami stałemi.

Najogólniejszą postacią funkcyi ciągłej jednej zmiennej, gdy ma spełniać związek:

$$f(x\,y) = f(x) + f(y)$$

jest

$$f(x) = A \log_a x.$$

Twierdzenia powyższe podał Cauchy.

Jeżeli szereg nieskończony funkcyj ciągłych jest szeregiem jednostajnie zbieżnym (patrz Rozdział IV), to przedstawia on funkcyę ciągłą tych zmiennych.

Szereg potęgowy wewnątrz obszaru swej zbieżności przedstawia funkcyę ciągłą zmiennej.

Jeżeli szereg potęgowy jest zbieżny i na kresach obszaru zbieżności, to i na tych kresach przedstawia on funkcyę ciągłą (Twierdzenie Abela).

Funkcyę zmiennej ciągłej w całym przedziale nazywamy jednostajnie ciągłą lub równociągłą, jeżeli dawszy sobie σ dowolnie małe, możemy znalesć taką liczbę δ, by dla każdej wartości x w przedziale i dla każdego $\delta_1 < \delta$ było stale:

$$f(x \pm \delta_1) - f(x) < \sigma.$$

Definicya dla funkcyj wielu zmiennych jest analogiczna.

Funkcya wprost ciągła jest zarazem i równociągła (Twierdzenie Cantora).

Jeżeli funkcya jest ciągła w przedziale, to można podzielić ten przedział na skończoną liczbę takich przedziałów cząstkowych, aby w każdym z nich oscylacya funkcyi była mniejsza od jakiejkolwiek ilosci σ, dowolnie danej.

Dla funkcyi ciągłej granica wyższa stanowi jej maximum, granica niższa jej minimum.

Jeżeli funkcya ciągła jest oznaczona w nieskończonej liczbie punktów. to jest też oznaczoną i w ich punktach granicznych.

Jeżeli funkcya ciągła jest oznaczona we wszystkich punktach wymiernych pewnego odcinka, to jest też oznaczona i w jego punktach niewymiernych.

Jeżeli funkcya ciągła w przedziale ma w dwu jego punktach wartosci przeciwnego znaku, to w punkcie pośrednim ma wartość zero.

Jeżeli funkcya ciągła przyjmuje dwie wartości A i B w dwu punktach a i b przedziału, to w punktach posrednich przyjmuje wszelką wartość, zawartą pomiędzy A i B. (Wiadomo że ta własnosć nie charakteryzuje funkcyj ciągłych; patrz Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues, Annales de l'École normale, IV).

Funkcya jest nieciągłą lub przerywaną w punkcie a, jeżeli granice wyrażeń $f(a-\delta)$ i $f(a+\delta)$ dla $\delta=0$ są: 1) albo nieoznaczone, 2) albo nierówne, 3) albo będąc równemi, nie są równe wartosci funkcyi f w punkcie a. W ostatnim przypadku można znieść nieciągłość, zmieniając wartość funkcyi w punkcie a. W pierwszym przypadku nieciągłość nazywa się nieciągłoscią gatunku drugiego, a w pozostałych przypadkach—nieciągłością zwykłą lub gatunku pierwszego.

Jeżeli funkcya f jest nieciągłą w punkcie a, to istnieje zawsze liczba dodatnia σ', różna od zera i taka, że dla każdego $\sigma > \sigma'$ można zawsze znaleść przedział w otoczeniu punktu a, tak, że $f(x) - f(a) < \sigma$, lecz nie może to być dla każdego $\sigma < \sigma'$. Liczba σ' nazywa się skokiem funkcyi. Jeżeli nieciągłość jest gatunku pierwszego, to skok jest różnicą pomiędzy $f(a)$ i lim $f(a + \delta)$.

Jeżeli funkcya ma nieskończenie wiele punktów przerwy to punkty te mogą albo tworzyć grupę taką, że dają się zawrzeć w przedziałach, których sumę można uczynić tak małą, jak się podoba, albo tego uczynić nie można. W pierwszym razie nazywamy funkcyę punktowo nieciągłą (lub punktowo-przerywaną); w drugim zaś liniowo-nieciągłą (lub liniowo-przerywaną). Przykładem drugiego gatunku funkcyi jest funkcya, będąca nieciągłą we wszystkich nieskończenie wielu punktach odcinka skończonego.

Czytelnika, pragnącego bardziej szczegółowo poznać ten przedmiot, odsyłamy do cytowanych w § 1 dzieł Dini'ego i Tannery'ego. Porów. też Pascal „Note critiche et esercizi i t. d." Medyolan 1895, gdzie podano wiele przykładów i odnośne wskazówki bibliograficzne.

---

§ 10.

Teorya kombinacyj. Spółczynniki dwumianowe.

Liczba różnych sposobów, jakiemi można rozmieścić n przedmiotów na n miejscach ustalonych, nazywa się liczbą przemian n przedmiotów. Wyrażamy ją tak:

$$P_n = n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\, (n - 1) \,.\, n.$$

Ustalmy dla n przedmiotów pewną kolej następstwa i uskutecznijmy po tem przemianę; powiemy, że w otrzymanej przemianie dwa przedmioty tworzą odwrócenie (inwersyę), jeżeli następują po sobie w porządku odwrotnym, niż w przemianie pierwotnej. Przemiana nazywa się parzystą lub nieparzystą, stosownie do tego, czy zawiera parzystą lub nieparzystą liczbę odwróceń.

Istnieje $\frac{n!}{2}$ przemian parzystych i tyleż nieparzystych.

Liczba sposobów, jakiemi k przedmiotów, wybranych z pomiędzy n danych ($k \leq n$), można rozmieścić na k miejscach stałych, nazywa się liczbą rozmieszczeń n przedmiotów po k. Liczba ta wyraża się tak:

$$D_{n, k} = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Jeżeli $k = n$, rozmieszczenia stają się przemianami.

Liczba sposobów, jakiemi pomiędzy n przedmiotami danemi można wybrać k przedmiotów, nie uwzględniając porządku, w jakim je wybrano, nazywa się liczbą prostych kombinacyj z n przedmiotów po k. Jest ona:

$$C_{n, k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} = \binom{n}{k}$$

$$= \frac{D_{n, k}}{P_k} = \frac{P_n}{P_k \,.\, P_{n-k}} \,.$$

Odrazu widać własność:

$$C_{n, k} = C_{n, n-k}$$

Jeżeli w rozmieszczeniach element może powtarzać się pewną liczbę razy, mamy wtedy rozmieszczenia z powtórzeniem. Liczba ich wynosi:

$$D'_{n, k} = n^k \,.$$

Jeżeli w kombinacyach każdy element może powtarzać się pewną liczbę razy, mamy **kombinacye z powtórzeniem**. Ich liczba wynosi:

$$C_{n,k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1).n}{1.2.3\dots k}$$

$$= C'_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Liczby $C_{n,k}$ nazywają się także **spółczynnikami dwumianowemi** (lub **binomialnemi**), ponieważ są spółczynnikami różnych wyrazów rozwinięcia potęgi dwumianu.

Pomiędzy niemi istnieje bardzo wiele związków; wymieniamy następujące:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad ; \quad \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k \quad ; \quad \binom{n}{0} = 1,$$

$$\binom{n}{k} = 0, \text{ jeżeli } n < k \quad ; \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,$$

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}\binom{k+1}{k} + \binom{n}{k+2}\binom{k+2}{k} - \dots + (-1)^{n-k}\binom{n}{n}\binom{n}{k} = 0,$$

$$1 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}^2 = (-1)^{\frac{1}{2}n}\binom{n}{\frac{1}{2}n}, \text{ jeżeli } n \text{ parzyste},$$

$$\dots\dots\dots\dots = 0 \qquad , \text{ jeżeli } n \text{ nieparzyste};$$

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

$$1 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2\,n}{n}$$

Spółczynniki dwumianowe liczby $-\frac{1}{2}$ mają ciekawe wyrażenia:

$$\binom{-{}^1/_2}{1} = -\frac{1}{2}, \quad \binom{-{}^1/_2}{2} = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}, \quad \binom{-{}^1/_2}{3} = -\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}$$

$$\binom{-{}^1/_2}{4} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\;6\,.\,8}, \text{ i t. d.}$$

Inne związki bardziej złożone pomiędzy spółczynnikami dwumianowemi wyrażają wyznaczniki Zeipela (Patrz E. Pascal, Determinanti, Medyolan, 1897),

Liczbę całkowitą N można zawsze i jednym tylko sposobem wyrazić jako sumę n spółczynników dwumianowych, w których skaźniki są ustalonemi i są liczbami naturalnemi od 1 do do n, przyczem podstawa mniejsza odpowiada skaźnikowi mniejszemu. (W spółczynniku dwumianowym $\binom{n}{k}$ nazywamy n— podstawą, k— skaźnikiem). Tym sposobem wzór

$$N = \binom{x_1}{1} + \binom{x_2}{2} + \ldots\ldots \binom{x_n}{n}, \quad (x_k < x_{k+1})$$

ma zawsze jedno jedyne rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \ldots . x_n$.

Jeżeli przez $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]$ oznaczymy liczbę $\binom{n+k-1}{k}$, będziemy mieli twierdzenie:

Jeżeli N jest liczbą całkowitą dodatnią, to

$$N = \begin{bmatrix} 2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ x_2 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} n+1 \\ x_n \end{bmatrix}$$

gdzie $x_k < x_{k+1}$, ma zawsze jedno jedyne rozwiązanie w liczbach całkowitych $x_1, x_2, \ldots . x_n$. (Patrz E. Pascal, Giorn. di mat. XXV.)

Spółczynniki dwumianowe można otrzymać za pomocą tak zwanego trójkąta arytmetycznego Pascala

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

w którym liczby każdego wiersza tworzymy, dodając dwie bezpośrędnio nad nią stojące liczby wiersza poprzedzającego. Liczby każdego wiersza poziomego są spółczynnikami dwumianowemi, odpowiadającemi liczbom całkowitym dodatnim, liczby znajdujące się na przekątnych odpowiadają (bez uwzględnienia znaku) liczbom całkowitym ujemnym.

Co do innych wzorów, odnoszących się do spółczynników dwumianowych, patrz Hagen, Synopsis der höheren Mathematik, Berlin t. I, 1891, str. 64 i nast.

Liczby figuryczne. Liczby figuryczne są przypadkiem ogólniejszym spółczynników dwumianowych. Aby je otrzymać, uogólniamy konstrukcyę trójkąta arytmetycznego Pascala w sposób następujący: Tworzymy figurę:

$$\begin{array}{c} \delta, \quad 1 \\ \delta, \quad 1+\delta, \quad 1 \\ \delta, \quad 1+2\delta, \quad 2+\delta, \quad 1 \\ \delta, \quad 1+3\delta, \quad 3+3\delta, \quad 3+\delta, \quad 1 \\ \delta, \quad 1+4\delta, \quad 4+6\delta, \quad 6+4\delta, \quad 4+\delta, \quad 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

w której każdy element danego wiersza jest sumą dwóch bezpośrednio znajdujących się nad nim elementów wiersza poprzedzającego Dla $\delta = 1$ otrzymujemy trójkąt arytmetyczny Pascala

Elementy, znajdujące się na trzeciej przekątnej (pierwszą jest przekątna, złożona z elementów δ) są liczbami wielokątowemi (poligonalnemi) rzędu 1-go, 2-go, 3-go, stosownie do wartosci δ); elementy, położone w czwartej przekątnej, są liczbami wielościanowemi (poliedralnemi) rzędu 1-go, 2-go, 3-go .. dla $\delta = 1, 2, 3$, i t. d. Te wszystkie liczby nazywają się liczbami figurycznemi.

Liczby wielokątowe rzędu 2-go są kwadratami.

Liczby wielokątowe wyraża wzór:

$$\frac{1}{2}(1+n)(2+n\delta)$$

liczby wielościanowe zaś wzór:

$$\frac{1}{6}(1+n)(2+n)(3+n\delta).$$

Suma n pierwszych liczb wielokątowych wynosi:

$$\Sigma = \frac{1}{6} n(n+1)\left[(n-1)\delta+3\right],$$

sama zaś n pierwszych liczb wielościanowych:

$$\Sigma = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)\left[(n+1)\delta+4\right]$$

Każda liczba całkowita dodatnia jest sumą trzech (albo mniej) liczb wielokątowych rzędu 1-go, czterech (albo mniej) liczb wielokątowych rzędu drugiego i t. d., w ogóle jest sumą n (albo mniej) liczb wielokątowych rzędu n—2)-go. (Twierdzenie Fermata).

Rozważania nad liczbami figurycznemi zawdzięczamy przeważnie Eulerowi. Powyższe twierdzenie podał był Fermat bez dowodu; dowód ten dla pierwszych przypadków znajduje się u Eulera (Acta Petrop., II, str. 48, 1777), Lagrange'a (Mem. Berl. 1770), Gaussa (Disqu. arithm. art. 293) i u innych.

ROZDZIAŁ II.

TEORYA GRUP PODSTAWIEŃ.

§ 1.

Wiadomości ogólne.

Mamy danych n elementów i tworzymy dwie ich przemiany; działanie, stanowiące przejście od pierwszej przemiany do drugiej, nazywa się podstawieniem pomiędzy n elementami.

Istnieje $n!$ podstawień pomiędzy n elementami.

Jeżeli do n elementów zastosujemy najprzód jedno podstawienie, następnie drugie i t. d., to ostatecznym wynikiem będzie nowe podstawienie elementów. To ostatnie nazywa się iloczynem podstawień danych. Jeżeli dane podstawienia są wszystkie równe, iloczyn ich nazywamy potęgą podstawienia.

Podstawieniem tożsamościowem (identycznem) nazywamy takie, które pozostawia bez zmiany wszystkie elementy. Podstawienie takie oznaczamy symbolem 1.

Jeżeli iloczyn dwu podstawień jest niezależny od porządku czynników. podstawienia nazywamy wzajemnie przemiennemi.

Jeżeli iloczyn dwu podstawień jest jednością, podstawienia nazywamy wzajemnie odwrotnemi: jeżeli jedno z nich jest s, to drugie oznaczamy przez s^{-1}.

Istnieje zawsze potęga podstawienia równa jedności; wykładnik tej potęgi, gdy wszystkie poprzedzające ją potęgi nie dają wyniku równego jedności. nazywamy rzędem podstawienia.

Podstawieniem kołowem lub cyklem nazywamy podstawienie, którego elementy wszystkie lub niektóre przemieniają się w porządku kołowym.

Każde podstawienie daje się zawsze rozłożyć na iloczyn podstawień kołowych

Podstawienie, które za elementy $a, b, c \ldots$ podstawia elementy $a', b', c' \ldots$ wyraża się symbolem

$$\begin{pmatrix} a, b, c & \ldots\ldots \\ a', b', c' & \ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

Tu $a', b', c' \ldots\ldots$ stanowią przemianę elementów $a, b, c \ldots.$ Jeżeli podstawienie jest kołowem, wtedy za elementy $a, b, c \ldots\ldots$ podstawiają się odpowiednio elementy $b, c, d \ldots\ldots$ takie podstawienie oznacza się wprost za pomocą symbolu

$$(a, b, c, \ldots\ldots m),$$

gdzie w nawiasie stoją jeden za drugim elementy w porządku takim, że za każdy poprzedzający podstawia się następny, za ostatni z elementów—pierwszy.

Rząd podstawienia kołowego równa się liczbie jego elementów.

Podstawienie kołowe rzędu drugiego nazywa się przestawieniem.

Każde podstawienie można wyrazić jako iloczyn samych przestawień.

Podstawienie nazywa się parzystem lub nieparzystem, stosownie do tego, czy liczba przedstawień, na które się rozkłada, jest parzystą lub nieparzystą.

Jeżeli podstawienie s jest rzędu m, to jedna z jego potęg $s^{m'}$ będzie rzędu $\frac{m}{d}$, gdzie d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb m i m'.

Mówimy, że ogół podstawień tworzy grupę, gdy iloczyn dwu jakichkolwiek podstawień tworzy jedno z pomiędzy podstawień danych.

Liczba podstawień grupy stanowi rząd grupy

Rząd grupy jest zawsze dzielnikiem liczby $n!$.

Jeżeli wszystkie podstawienia grupy H zawierają się pomiędzy podstawieniami innej grupy G, wtedy H nazywa się podgrupą grupy G. Rząd podgrupy H jest dzielnikiem rzędu grupy G.

Rząd grupy jest wielokrotnością rzędu każdego z jej podstawień.

Grupa wszystkich $n!$ podstawień nazywa się grupą symetryczną.

Wszystkie podstawienia parzyste tworzą grupę, która nazywa się naprzemienną; jej rzędem jest $\frac{1}{2}\, n!$

Jeżeli $x_1, x_2, \ldots x_n$ są n elementami grupy, to każda grupa, zawierająca $n-1$ przestawień

$$(x_a\, x_1),\ (x_a\, x_2),\ \ldots\ (x_a\, x_{a-1}),\ (x_a\, x_{a+1})\ \ldots\ (x_a\, x_n),$$

jest identyczna z grupą symetryczną.

Te podstawienia jakiejkolwiek grupy, które należą do grupy naprzemiennej, tworzą podgrupę, która albo zlewa się z grupą daną, albo jest rzędu równego połowie rzędu grupy danej.

Jeżeli grupa zawiera $n-2$ podstawień kołowych

$$(x_1\, x_2\, x_3),\ (x_1\, x_2\, x_4),\ \ldots,\ (x_1\, x_2\, x_n),$$

to jest albo naprzemienną albo symetryczną.

Potęgi podstawienia tworzą grupę, której rząd jest równy rzędowi podstawienia.

Podstawienia wspólne dwóm grupom tworzą nową grupę.

Jeżeli p jest liczbą pierwszą, p^k zaś najwyższą potęgą liczby p, zawartą w $n!$, to istnieje grupa rzędu p^k. Jeżeli rząd grupy jest podzielny przez liczbę pierwszą p, to grupa zawiera podstawienia rzędu p. (Cauchy).

Dwa podstawienia nazywają się podobnemi, jeżeli różnią się jedynie nazwą elementów, które zawierają.

Dwie grupy nazywają się podobnemi, jeżeli składają się z jednakowej liczby podstawień podobnych i jeżeli do każdego z podstawień grupy pierwszej można dobrać jednoznacznie podstawienie z drugiej grupy w ten sposób, że zmieniając jednakowo dla wszystkich nazwy elementów, od podstawień jednej grupy dochodzimy do podstawień drugiej.

Jeżeli dwa podstawienia lub dwie grupy są podobne, to istnieje zawsze podstawienie s takie, że iloczyn $s^{-1}.A.s$ (w którym A jest jednem z podstawień danych lub podstawieniem jednej z grup danych) będzie równy drugiemu z danych podstawień lub odpowiedniemu podstawieniu drugiej grupy danej.

Iloczyn $s^{-1}As$ nazywa się podstawieniem przekształconem z podstawienia A (lub przekształceniem podstawienia A) przy pomocy podstawienia s.

Każde podstawienie jest podobne do jednego ze swych przekształceń.

Jeżeli s, s' są dwa podstawienia, to iloczyny ss' i $s's$ są dwoma podstawieniami podobnemi.

J e ż e l i s i s' s ą p o d s t a w i e n i a m i p r z e m i e n n e m i, t o p o d s t a w i e n e m p r z e k s z t a ł c o n e m z s p r z y p o m o c y s' j e s t s a m o p o d s t a w i e n i e s.

P r z e k s z t a ł c e n i e i l o c z y n u j e s t r ó w n e i l o c z y n o w i p r z e k s z t a ł c e ń c z y n n i k ó w.

J e ż e l i d w a p o d s t a w i e n i a s ą p r z e m i e n n e m i, t o i c h p r z e k s z t a ł c e n i a p r z y p o m o c y t e g o s a m e g o p o d s t a w i e n i a b ę d ą t e ż p r z e m i e n n e m i.

W s z y s t k i e p o d s t a w i e n i a, p r z y p o m o c y k t ó r y c h g r u p a d a n a p r z e k s z t a ł c a s i ę n a s i e b i e s a m ą, t w o r z ą g r u p ę.

J e ż e l i p r z e k s z t a ł c a m y g r u p ę p r z y p o m o c y j e d n e g o p o d s t a w i e n i a, t o p o d s t a w i e n i a p r z e k s z t a ł c o n e t w o r z ą g r u p ę p o d o b n ą d o d a n e j.

Jeżeli podstawienie jest takiem, że ogół iloczynów $s\ A$, gdzie A jest jakiemkolwiek podstawieniem grupy G, nie różni się od ogółu iloczynów $B.s$, gdzie B jest także podstawieniem grupy G, wtedy podstawienie s nazywa się p r z e m i e n n e m z g r u p ą G.

Jeżeli wszystkie podstawienia grupy H mają dopiero własność co określoną względem grupy G, wtedy cała grupa H nazywa się p r z e m i e n n ą z g r u p ą G. W tym przypadku, jeżeli H jest podgrupą grupy G, to nosi nazwę g r u p y c h a r a k t e r y s t y c z n e j l u b w y r ó ż n i o n e j.

W s z y s t k i e p o d s t a w i e n i a n e l e m e n t ó w, p r z e m i e n n e z d a n e m p o d s t a w i e n i e m t y c h ż e e l e m e n t ó w l u b z g r u p ą d a n ą, t w o r z ą g r u p ę, d o k t ó r e j g r u p a d a n a n a l e ż y j a k o p o d g r u p a c h a r a k t e r y s t y c z n a.

J e ż e l i l i c z b a e l e m e n t ó w j e s t w i ę k s z a o d 4, t o g r u p a p r z e m i e n n a z j a k i e m k o l w i e k p o d s t a w i e n i e m z a w i e r a w s z y s t k i e p o d s t a w i e n i a p a r z y s t e, a w i ę c j e s t g r u p ą n a p r z e m i e n n ą.

D l a $n=4$ g r u p a c z t e r e c h p o d s t a w i e ń

$$[1,\ (x_1\ x_2)\ (x_3\ x_4),\ (x_1\ x_3)\ (x_2\ x_4),\ (x_1\ x_4)\ (x_2\ x_3)\ ]$$

p o s i a d a t ę ż s a m ą w ł a s n o ś ć.

Grupa G nazywa się złożoną, jeżeli zawiera w sobie podgrupę charakterystyczną H.; ta ostatnia nazywa się największą, jeżeli nie jest zawarta w innych charakterystycznych podgrupach grupy G.

Utwórzmy szereg grup

$$G, G_1, G_2 \;.\;.\;.\;.\;.\; 1.$$

w ten sposób, aby każda z nich była grupą charakterystyczną największą prprzedzającej, to będziemy mieli to, co się nazywa szeregiem składu (kompozycyi) grupy G.

Jeżeli

$$r, r_1 = \frac{r}{e_1}, r_2 = \frac{r_1}{e_2}, \;.\;.\;.\;.$$

są rzędy grup szeregu, to liczby $e_1, e_2 \ldots$ nazywają się czynnikami liczbowemi składu grupy G.

Jeżeli mamy dwa szeregi składu jednej grupy złożonej, wtedy liczba wyrazów obu szeregów musi być jednakowa, a czynniki liczbowe składu, jeżeli nie uwzględniamy porządku, są jedne i te same.

Szereg składu grupy symetrycznej składa się z grupy naprzemiennej i z 1, gdy $n > 4$; czynnikami liczbowemi składu są przeto 2 i $\frac{1}{2} n!$. Grupa naprzemienna więcej niż 4 elementów. nie jest złożoną.

Każda grupa, niezawarta w grupie naprzemiennej, jest złożona; jednym z czynników składu jest 2.

Dla $n = 4$ szereg składu grupy symetrycznej jest następujący: 1) grupa symetryczna; 2) grupa naprzemienna; 3) $G_2 = [1, (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1x_3)(x_2x_4), (x_1x_4)(x_2x_3)]$; 4) $G_3 = [1. (x_1x_2)(x_3x_4)]$, 5) $G_4 = 1$.

§ 2.

Przechodniość.

Jeżeli podstawienia grupy są takie, że za ich pomocą k elementów dowolnie wybranych może przejść na k innych elementów, również dowolnie wybranych, grupa nazywa się k-krotnie przechodnią. Jeżeli $k=1$, grupa nazywa się pojedyńczo-przechodnią. W przeciwnym razie nazywa się nieprzechodnią.

Rząd grupy przechodniej jest wielokrotnością rzędu tej jej podgrupy, której podstawienia nie zmieniają miejsca jednego jakiegokolwiek elementu np. x_1.

Grupy przechodnie, których rząd jest równy ich stopniowi, mają tylko takie podstawienia, które zmieniają miejsca wszystkich elementów.

Każda grupa przechodnia ma przynajmniej $n-1$ takich podstawień, które zmieniają miejsca wszystkich elementów.

Grupa naprzemienna jest $(n-2)$-krotnie przechodnia.

Rząd grupy k-krotnie przechodniej jest równy $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)m$, gdzie m jest rzędem podgrupy, pozostawiającej bez zmiany k elementów.

Podgrupa charakterystyczna grupy przechodniej nie zawiera wszystkich elementów.

Jeżeli grupa dwu lub więcej krotnie przechodnia zawiera podstawienie kołowe 3-go rzędu, to zawiera wszystkie takie podstawienia i zawiera zarazem grupę naprzemienną.

Jeżeli grupa k-krotna przechodnia nie zawiera w sobie grupy naprzemiennej, to każde podstawienie porusza z miejsca więcej niż k elementów i zawiera więcej niż $2k-4$ elementów.

Rząd grupy k-krotnie przechodniej i nie zawierającej w sobie grupy naprzemiennej, jest dzielnikiem liczby $\frac{n!}{m!}$, gdzie m jest większa z dwu liczb k, $2k-4$.

Grupa, nie zawierająca w sobie grupy naprzemiennej, nie może być więcej niż q-krotnie przechodnią, gdzie q jest mniejsza z dwu liczb $\frac{n+4}{3}$, $\frac{n}{2}$.

Grupa przemienna z podstawieniami grupy k-krotnie przechodniej jest co najmniej $(k-1)$-krotnie przechodnią.

---

§ 3.

Niepierwotność.

Niechaj G będzie grupą pojedyńczo - przechodnią o n elementach. Jeżeli elementy te możemy podzielić na n układów po $\frac{n}{m}$ elementów, że gdy podstawienie grupy przekształca element układu A na inny tegoż układu, to przekształca też i wszystkie elementy w A na inne elementy w A, podstawienie zaś przekształcające element w układzie A na element w układzie B, przekształca wszystkie inne elementy w A na wszystkie inne elementy w B, wtedy grupa nazywa się niepierwotną, a powyższe układy nazywają się układami niepierwotności. W przeciwnym razie grupa nazywa się pierwotną,

Jeżeli w grupie podział elementów na układy jest możliwy dwoma różnemi sposobami, to będzie możliwy i trzecim sposobem przez zebranie w jeden układ wszystkich elementów wspólnych układowi z pierwszego i drugiego podziału.

Jeżeli grupa niepierwotna posiada m układów niepierwotności, to rząd jej będzie dzielnikiem liczby $m! \left(\frac{n}{m}!\right)^m$.

§ 4.

Izomorfizm.

Jeżeli podstawienia dwu grup mogą odpowiadać sobie w ten sposób, że iloczynowi dwu podstawień jednej odpowiada iloczyn odpowiednich podstawień drugiej, wtedy obie grupy nazywają się izomorficznemi (równopostaciowemi). Jeżeli jednemu podstawieniu jednej odpowiada tylko jedno podstawienie drugiej, izomorfizm jest jednostopniowy; jeżeli jednemu podstawieniu pierwszej odpowiada więcej podstawień drugiej, izomorfizm jest wielostopniowy. Te izomorfizmy można nazwać jeszcze holoedrycznym i meriedrycznym (Jordan).

Jeżeli grupy G i Γ są izomorficzne w stopniu pierwszym, to ich rzędy są równe.

Jeżeli izomorfizm grupy G i Γ jest wielostopniowy, a podstawieniu 1 grupy G odpowiadają podstawienia $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$ grupy Γ, to tworzą one podgrupę grupy Γ.

W przypadku izomorfizmu wielostopniowego grup G i Γ, każdemu podstawieniu grupy G odpowiada jednakowa liczba m podstawień grupy Γ; rząd grupy Γ jest równy m razy wziętemu rzędowi grupy G; m nazywa się stopniem izomorfizmu.

Jeżeli L jest podgrupą charakterystyczną grupy G, to grupa odpowiednia $\varLambda$ grupy Γ izomorficznej z G będzie także grupą charakterystyczną w Γ. Jeżeli L jest grupą największą, to i $\varLambda$ będzie największą.

---

§ 5.

Funkcye, należące do grup podstawień.

Wyobraźmy sobie funkcyę wymierną φ_1 elementów x_1, x_2, . . . x_n. Jeżeli do tej funkcyi zestosujemy wszystkie możliwe podstawienia pomiędzy elementami, to wartość funkcyi φ_1 może się zmienić lub nie. Ogół wszystkich podstawień, dla których wartość φ_1 pozostaje bez zmiany, stanowi grupę, którą nazywamy grupą funkcyi.

Do każdej funkcyi należy grupa, a do każdej grupy należy nieskończenie wiele funkcyj.

Funkcye, nie zmieniające się przy wszystkich podstawieniach, są funkcyami symetrycznemi.

Każda funkcya, należąca do grupy naprzemiennej, funkcya naprzemienna), ma postać

$$\varphi = S_1 + S_2 \sqrt{\Delta},$$

gdzie Δ jest wyróżnikiem n elementów, t. j.

$$\Delta = \prod_{i,j}^{1,2,\ldots n} (x_i - x_j)^2,$$

S_1 i S_2 zaś są funkcyami symetrycznemi elementów.

Zastosowawszy do funkcyi φ_1 wszystkie możliwe podstawienia, otrzymujemy m różnych jej wartości φ_1, φ_2, . . . φ_m.

Liczba m jest dzielnikiem liczby $n!$; jeżeli r jest rzędem grupy funkcyi φ_1, to iloczyn rm równa się $n!$

Grupy, należące do $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$, są wszystkie do siebie podobne.

Jeżeli $n > 4$, $m > 2$, to grupy te mają jedno tylko podstawienie wspólne, które jest jednością.

Jeżeli $n = 4$, to mogą one mieć cztery podstawienia wspólne

$$[1, (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1x_3)(x_2x_4), (x_1x_4)(x_2x_3)]$$

Wartości funkcyi m-wartościowej są pierwiastkami równania stopnia m-go, którego spółczynniki są funkcyami symetrycznemi elementów $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Wyróżnik m wartości φ ma jako czynnik wyróżnik elementów x, Stąd i wszystkie funkcye, mające więcej niż jedną wartość, przyjmują wartości równe, gdy dwie ilości x stają się równemi.

Przy n elementach niezależnych od siebie funkcye naprzemienne są jedynemi funkcyami, których potęgi mogą być symetrycznemi, jakkolwiek same one symetrycznemi nie są.

Jeżeli $n > 4$, wtedy nie istnieje funkcya o większej liczbie wartości, którejby potęga miała tylko dwie wartości w założeniu, że pomiędzy elementami nie zachodzą związki specyalne.

Jeżeli $n = 4$, to funkcya

$$(x_1x_2 + x_3x_4) + \varepsilon(x_1x_3 + x_2x_4) + \varepsilon^2(x_1x_4 + x_2x_3),$$

gdzie $\varepsilon^3 = 1$, jest funkcyą, której szescian ma dwie wartości.

Jeżeli $n = 3$, to

$$x_1^r + \varepsilon x_2^r + \varepsilon^2 x_3^r$$

jest funkcyą, której sześcian ma dwie wartości.

Dwie funkcye, należące do tej samej grupy, dają się wyrazić wymiernie jedna przez drugą, i odwrotnie. (Twierdzenie Lagrange'a).

Jeżeli jedna funkcya pozostaje niezmienioną przez podstawienie grupy innej funkcyi, a nie zachodzi własność odwrotna, to pierwsza funkcya daje się wyrazić wymiernie przez drugą; druga zaś jest pierwiastkiem równania stopnia m (jeżeli m jest liczbą jej wartości), którego spółczynniki są funkcyami wymiernemi pierwszej. Każdą funkcyę wymierną n ilości $x_1, x_2 \ldots x_n$ można wyrazić wymiernie przez każdą funkcyę n ilości, posiadającą $n!$ wartości; w szczególności zaś za pomocą funkcyj liniowych typu $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$, gdzie $a_1, a_2 \ldots a_n$ są stałemi dowolnemi.

---

§ 6.

Przedstawienie analityczne podstawień.

Podstawienia n elementów można przedstawić jeszcze analitycznie następującym sposobem:

Niechaj będzie podstawienie

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 & . & . & . & . & x_n \\ x_{i_1}, & x_{i_2}, & x_{i_3} & . & . & . & . & x_{i_n} \end{pmatrix}$$

Utwórzmy funkcyę φ zmiennej z taką, że kiedy z staje się kolejno $1, 2 \ldots n$, to $\varphi(z)$ staje się kongruentnem z $i_1, i_2, \ldots i_n$ według modułu n. Wtedy symbol $|z, \varphi(z)|$ może wyobrażać podstawienie dane; rozumiemy przezeń to, że skutkiem danego podstawienia każdy skaźnik z ilości x przechodzi na skaźnik $\varphi(z)$.

Niechaj $n = m^k$, wtedy każdy element może być przedstawiony z k skaźnikami, z których każdy przybiera wszystkie wartości od 1 do n:

$$x_{z_1, z_2, \ldots z_k}$$

Podstawienie pomiędzy temi elementami możemy wyobrazić symbolem:

$$| z_1, z_2 \ldots z_k; \varphi_1 (z_1, z_2 \ldots z_k) | \text{ (mod. } m);$$

rozumiemy przezeń to, że zamiast istotnej wartości funkcyi należy brać wartości kongruentne z niemi według modułu m i mniejsze od m.

W s z y s t k i e p o d s t a w i e n i a p o s t a c i

$$| z_1 \ldots\ldots z_k; z_1 + a_1, \ldots\ldots, z_k + a_k | \text{ (mod. } m)$$

t w o r z ą g r u p ę, k t ó r a n a z y w a s i ę a r y t m e t y c z n ą.

W a r u n k i e m k o n i e c z n y m i d o s t a t e c z n y m, n a t o b y, s y m b o l

$$z_1 \ldots z_k; a_1 z_1 + \ldots + c_1 z_k. a_2 z_1 + \ldots + c_2 z_k, \ldots | \text{ (mod } m)$$

w y o b r a ż a ł g r u p ę, j e ś t t o a b y w y z n a c z n i k

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & \ldots\ldots, & c_1 \\ a_2, & b_2, & \ldots\ldots, & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_k, & b_k, & \ldots\ldots & c_k \end{vmatrix}$$

b y ł w z g l ę d n i e p i e r w s z y z m o d u ł e m m. W t y m p r z y p a d k u p o d s t a w i e n i a p o s t a c i p o p r z e d z a j ą c e j n a z y w a j ą s i ę p o d s t a w i e n i a m i l i n i o w e m i l u b t a k ż e p o d s t a w i e n i a m i g e o m e t r y c z n e m i. T w o r z ą o n e g r u p ę, k t ó r a n a z y w a s i ę g r u p ą l i n i o w ą.

Podstawienia grupy liniowej są przemiennemi z grupą arytmetyczną.

Rząd grupy liniowej o m^k elementach jest:

$$r = [m.k]\, m^{k-1}\, [m, k-1]\, m^{k-2} \ldots .\, [m, 2]\, m\, [m. 1]$$

gdzie symbol $[m, \varrho]$ oznacza wogóle liczbę rozwiązań zagadnienia o wyznaczeniu ϱ liczb mniejszych od m i względnie pierwszych z m.

Jeżeli w szczególności spółczynniki $a, b, \ldots . c$ czynią zadość warunkom:

$$\left.\begin{array}{l} a_i^2 + b_i^2 + \ldots + c_i^2 \equiv 1 \\ a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 \equiv 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2 \equiv 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \pmod{m} \qquad \left.\begin{array}{l} a_1 a_2 + b_1 b_2 + \ldots + c_1 c_2 \equiv 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1 b_1 + a_2 b_1 + \ldots + a_k b_k \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{m},$$

wtedy podstawienia liniowe nazywają się ortogonalnemi (prostokątnemi).

Jeżeli $k = 2h$, skaźniki zaś, których jest $2h$, są rozmieszczone parami

$$z_1\, y_1,\ z_2\, y_2\ \ldots \ldots\ z_h\, y_h,$$

to podstawienia liniowe tych skaźników, mające własność taką, że zastosowane do funkcyi

$$\sum_{\iota = v}^{h} (z_\iota\, \eta_\iota - y_\iota\, \zeta_\iota)$$

(gdzie ζ, η są symbolami skaźników, podległych tym samym warunkom co φ, z) mnożą je tylko przez czynniki stałe, nazywają się podstawieniami abelowemi. Tworzą one grupę, która nazywa się abelową (Hermite).

Teoryę grup podstawień utworzyli Abel (Crelle, VI) i Cauchy (Exercices, 1844). Temu ostatniemu zawdzięczamy większość twierdzeń podstawowych tej teoryi, której późniejsze badania Galois'a

(Journ. de Liouville, XI, 1846) nadały wielką ważność, zwłaszcza w zastosowaniu do równań algebraicznych.

Do nowszych i zupełnych dzieł o tym przedmiocie należą: Jordana, Traité des substitutions etc., Paryż, 1870; Netto, Substitutionentheorie, Lipsk, 1882 (przekład włoski Battaglini'ego, Turyn, 1885); Petersena, Algebraische Gleichungen", Kopenhaga, 1878, (przekład francuski, Paryż, 1897). W „Algébre supérieure" Serreta (przekład niemiecki Wertheima, Lipsk, 1868), teorya ta jest dostatecznie rozwinięta. W rozdziale V-ym przedstawimy teoryę Galois'a, t. j. zastosowanie teoryi podstawień do równań algebraicznych, w rozdziale zaś IX podamy teoryę grup przekształceń, która ma wiele węzłów, wspólnych z teoryą podstawień.

ROZDZIAŁ III.

TEORYA WYZNACZNIKÓW.

---

§ 1.

Wiadomości ogólne.

Niechaj będzie n^2 ilości ułożonych w kwadrat:

$$\begin{array}{llcl} a_{11}, & a_{12}, & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots\ldots & a_{nn}, \end{array}$$

Utwórzmy wszystkie iloczyny typu

$$a_{1r_1}, a_{2r_2} \ldots\ldots a_{nr},$$

gdzie r_1, $r_2 \ldots\ldots r_n$ stanowią jakąkolwiek przemianę liczb 1, 2 .... n; każdemu z iloczynów nadajmy znak $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy przemiana skaźników r jest przemianą parzystą, czy też nieparzystą; weźmy wreszcie sumę algebraiczną $n!$ w ten sposób utworzonych iloczynów. Suma ta nazywa się wyznacznikiem n^2 ilości i przedstawia się za pomocą symbolu:

$$\begin{vmatrix} a_{14}, & a_{12} & \ldots & , a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} & \ldots & , a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2} & \ldots & , a_{nn} \end{vmatrix}$$

Zbiór wszystkich n^2 elementów, ułożonych w kwadrat, stanowi macierz (matrycę) kwadratową; przekątna, złożona z elementów $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ nazywa się przekątną główną, same zaś elementy $a_{11}, a_{22} \ldots a_{nn}$ — elementami głównemi.

Jeżeli w wyznaczniku wszystkie elementy jednego wiersza (lub kolumny) są zerami, wyznacznik jest zerem.

Jeżeli w wyznaczniku przemienimy wiersze na kolumny, wyznacznik nie zmieni się.

Jeżeli w wyznaczniku przestawimy dwa wiersze (lub kolumny) równoległe, otrzymamy nowy wyznacznik równy pierwotnemu ze znakiem przeciwnym.

Jeżeli dwa wiersze (lub dwie kolumny) równoległe w wyznaczniku są jednakowe, wyznacznik jest zerem.

Jeżeli elementy jednego wiersza lub kolumny pomnożymy przez k, to i sam wyznacznik zostanie pomnożony przez k.

Wyznacznik nie zmienia się, jeżeli zmienimy znak wszystkich elementów, stojących na miejscach nieparzystych, rozumiejąc przez miejsca nieparzyste te, dla których suma skaźników jest nieparzysta.

Wyznacznik nie zmienia się, jeżeli każdy element a_{ik} pomnożymy przez p^{i-k}, gdzie p jest liczbą dowolną.

Wyznacznik jest zerem, jeżeli elementy jednego wiersza (lub kolumny) są jednakowemi wielokrotnościami elementów wiersza równoległego (lub kolumny równoległej).

Wyznacznik, w którym elementy jednego wiersza (lub kolumny) są wyrażeniami wielomianowemi, równa się sumie wyznaczników, których elementy są wyrażeniami jednomianowemi.

Wyznacznik nie zmienia się, jeżeli do elementów jednego wiersza (lub kolumny) dodamy elementy wiersza równoległego (lub kolumny), pomnożone przez jakąkolwiek liczbę.

Wyznacznik jest zerem, jeżeli elementy jednego wiersza (lub kolumny) są kombinacyami liniowemi podobnemi elementów wierszy (lub kolumn) równoległych, i odwrotnie.

Z macierzy kwadratowej rzędu n-tego, po usunięciu m wierszy i m kolumn, pozostaje macierz kwadratowa rzędu $n-m$. Wyznacznik, którą taka macierz przedstawia, nazywa się minorem, podwyznacznikiem, wyznacznikiem cząstkowym lub wyznacznikiem pochodnym wyznacznika danego. Jeżeli jego elementy główne są elementami głównemi danego, nazywamy go minorem głównym.

Istnieje $\left[\binom{n}{m}\right]^2$ minorów rzędu m-tego.

Istnieje $\binom{n}{m}$ minorów głównych rzędu m-tego.

Minor jest klasy parzystej lub nieparzystej, tosownie do tego, czy suma liczb porządkowych, odpowiadających wierszom i kolumnom go składającym, jest parzysta lub nieparzysta.

Każdemu minorowi rzędu m odpowiada jeden minor rzędu $n-m$, utworzony przez usunięcie kolumn i wierszy, składających minor dany. Te dwa minory nazywają się wzajemnie dopełniającemi. Dopełnieniem algebraicznem (ilością dołączoną) minoru jest jego minor dopełniający, wzięty ze znakiem $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy jest klasy parzystej czy nieparzystej.

Wyznacznik równa się sumie iloczynów minorów, zawartych w m wierszach lub kolumnach przez odpowiednie dopełnienia algebraiczne.

Wyznacznik równa się summie algebraicznej iloczynów elementów wiersza lub kolumny przez odpowiednie dopełnienia algebraiczne.

Suma iloczynów minorów, zawartych w m wierszach, przez dopełnienia algebraiczne odpowiednich minorów, zawartych w innych m wierszach równoległych, jest zerem. Godnem uwagi jest to twierdzenie w przypadku $m=1$.

Jeżeli wyznacznik jest zerem, dopełnienia algebraiczne elementów jakiegokolwiek wiersza są proporcyonalne do elementów jakiegokolwiek innego wiersza równoległego.

Po wprowadzeniu minorów rzędu 2-go, każdy wyznacznik rzędu n-tego można przedstawić w postaci wyznacznika rzędu $(n-1)$-go.

Jeżeli wszystkie elementy wyznacznika są podzielne przez p, to sam wyznacznik jest podzielny przez p^n.

Jeżeli wszystkie minory rzędu 2-go wyznacznika są podzielne przez p, to sam wyznacznik jest podzielny przez p^{n-1}.

Iloczyn dwu wyznaczników tego samego rzędu o elementach odpowiednio a_{rs}, b_{hk}: otrzymujemy, tworząc wyznacznik o elementach c_{ij}, gdzie c może mieć jedno z czterech wyrażeń:

$$\left.\begin{aligned}
c_{ij} &= a_{i1} b_{ji} + a_{i2} b_{j2} + \ldots + a_{in} b_{jn} \\
c_{ij} &= a_{1i} b_{j1} + a_{2i} b_{j2} + \ldots + a_{ni} b_{jn} \\
c_{ij} &= a_{1i} b_{ij} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} \\
c_{ij} &= a_{1i} b_{ij} + a_{2j} b_{2j} + \ldots + a_{ni} b_{nj}
\end{aligned}\right\} \text{(prawidło Bineta.)}$$

Jeżeli wyznaczniki nie są tego samego rzędu, to wyznacznik rzędu niższego można zamienić na wyznacznik rzędu wyższego, dołączając wiersze lub kolumny, których elementy, znajdujące się na miejscach niegłównych, są zerami, elementy zaś, znajdujące się na przekątnej głównej, są równe jedności.

Nazywamy macierzą prostokątną—tablicę, w której nm elementów układa się w prostokąt. Jeżeli mamy dwie macierze prostokątne o m wierszach i n kolumnach, to utworzywszy sumę iloczynów elementów wierszy macierzy pierwszej przez odpowiednie elementy w wierszach drugiej, otrzymamy m^2 elementów ułożonych w kwadrat i mogących utworzyć wyznacznik rzędu m-tego. Ten wyznacznik nazywa się iloczynem według linij macierzy prostokątnych.

Każdy minor wyznacznika, będącego iloczynem dwu danych wyznaczników, jest iloczynem dwu macierzy prostokątnych.

Iloczyn według linij dwu macierzy prostokątnych o n kolumnach i m wierszach równa się zeru, jeżeli $m > n$; jeżeli $m < n$, równa się sumie iloczynów minorów rzędu m, zawartych w pierwszej macierzy, przez odpowiednie minory zawarte w drugiej.

Wyznacznik R, którego elementy A_{rs} są dopełnieniami elementów a_{rs} wyznacznika D, nazywa się wyznacznikiem układu dołączonego lub wzajemnym względem danego.

Jeżeli wyznacznik jest zerem, to jego wyznacznik wzajemny wraz ze wszystkiemi minorami (aż do minorów rzędu 2-go), jest zerem.

Wyznacznik układu dołączonego ma wartość równą potędze $(n-1)$-ej wyznacznika danego.

Jeżeli nazwiemy homologicznemi dwa minory wyznacznika D i R, zamknięte wierszami i kolumnami tych wyznaczników o odpowiednio równych liczbach porządkowych, to:

Jakikolwiek minor M rzędu m-tego, zawarty w wyznaczniku R, równa się minorowi wyznacznika D, homologicznemu z dopełnieniem algebraicznem minoru M w R, pomnożonemu przez potęgę $(m-1)$-ą wyznacznika danego.

Dopełnienie elementu A_{rs} wyznacznika R równa się elementowi a_{rs}, pomnożonemu przez potęgę $(n-2)$-ą wyznacznika D.

Jeżeli pomnożymy przez siebie dwa wyznaczniki D, D', a następnie w sposób analogiczny pomnożymy ich wyznaczniki wzajemne R i R', to drugi iloczyn będzie wzajemnym względem pierwszego.

§ 2.

Wyznaczniki symetryczne i skośne. Pfafiany.

Jeżeli $a_{rs} = a_{sr}$, wyznacznik nazywa się symetrycznym; jeżeli $a_{rs} = -a_{sr}$, nazywa się skośnym; jeżeli wreszcie $a_{rs} = -a_{sr}$, przyczem $a_{rr} = 0$, nazywa się półsymetrycznym.

Kwadrat wyznacznika jest wyznacznikiem symetrycznym.

W wyznaczniku symetrycznym minory dopełniające dwóch elementów sprzężonych są równe.

Wyznacznik układu dołączonego wyznacznika symetrycznego jest symetryczny.

Wyznacznik półsymetryczny rzędu nieparzystego jest zerem.

Wyznacznik półsymetryczny rzędu parzystego jest kwadratem zupełnym wyrażenia wymiernego całkowitego swych elementów.

Wyrażenie takie nazywa się pfafianem n^2 elementów, lub także półwyznacznikiem (Scheibner).

Pfafian rzędu n (parzystego) elementów $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}$ oznacza się symbolem $(123 \ldots n)$. Symbolem $(12 \ldots n)$ oznacza się właściwie ten z dwu pierwiastków wyznacznika półsymetrycznego, który zawiera ze znakiem $+$ wyraz $a_{12}a_{34} \ldots a_{n-1, n}$.

Liczba wyrazów pfafianu rzędu n-tego jest: $(n-1)(n-3)\ldots 3.1$.

Pfafian zmienia znak skutkiem przestawienia dwu elementów.

Pfafian rzędu n-tego rozwija się według wzoru:

$$\begin{aligned}(12\ldots n) = {} & (12)(34\ldots n-1, n) \\ & + (13)(45\ldots n2) \\ & + \ldots\ldots\ldots \\ & + (1n)(23\ldots n-1).\end{aligned}$$

Każdy minor rzędu $(n-1)$-go wyznacznika rzędu parzystego równa się iloczynowi pfafianu $(12\ldots n)$ przez pfafian rzędu $(n-2)$-go, otrzymany z pierwszego przez zniesienie dwu skaźników.

Równanie

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x_1 & a_{12}\ldots & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}. & a_{22}-x, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0$$

ma same pierwiastki rzeczywiste, jeżeli wyznacznik ilości a jest symetryczny. (Twierdzenie Sylvestera).

Każdy wyznacznik skośny, którego elementy główne są równe 1, jest sumą kwadratów.

§ 3.

Wyznaczniki specyalne.

Wyznacznik Hankela utworzony jest sposobem następującym:

$$P = \begin{vmatrix} a_0, a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} \\ a_1 . a_2 & & \cdot & \cdot & \cdot & , & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}, a_{n1} & & \cdot & \cdot & \cdot & , & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Nazywa on się także wyznacznikiem ortosymetrycznym (Hankel) lub persymetrycznym (Sylvester).
Wyznacznik ten ma tę własność, że może być wyrażony przez różnice kolejne ilosci a. Położywszy:

$$\Delta_1^{(1)} = a_1 - a_0,$$

$$\Delta_2^{(1)} = a_2 - a_1, \; \Delta_2^{(2)} = \Delta_2^{(1)} - \Delta_1^{(1)},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\Delta_k^{(1)} = a_k - a_{k-1}, \; \Delta_k^2 = \Delta_k^{(1)} - \Delta_{k-1}^{(1)}, \; \Delta_k^{(3)} = \Delta_k^{(2)} - \Delta^2{}_{k-1}{}^{(1)} \ldots,$$

znajdujemy:

$$P = \begin{vmatrix} a_0, \Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta_{n-1}^{(n-1)} \\ \Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(2)}, \Delta_3^{(3)} & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta_n^{(n)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & , & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_{n-1}^{(n-1)}, \Delta_n^{(n)}, \Delta_{n-1}^{(n+2)} & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta_{2n-2}^{(2n-2)} \end{vmatrix}$$

Jeżcli w szczególności elementy tworzą postęp arytmetyczny rzędu $(n-1)$-go, będzie:

$$P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[\Delta_{n-1}^{(n-1)} \right]^n;$$

jeżeli ten postęp jest rzędu niższego niż $n-1$, wtedy $P=0$.

Jeżeli elementy tworzą postęp geometryczny, to $P=0$.

Wyznacznik kołujący (cyrkulant) jest postaci:

$$A = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \ldots & \ldots & , a_n, \\ a_2, & a_3, & \ldots & \ldots & , a_1, \\ a_3, & a_n, & \ldots & \ldots & , a_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_1; & \ldots & \ldots & , a_{n-1}, \end{vmatrix}$$

Wyznacznik kołujący rzędu n-tego rozpada się na n czynników wymiernych względem swych elementów według wzoru następującego:

$$P = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \varphi(\alpha_1)\, \varphi(\alpha_2) \; \ldots \; \varphi(\alpha_n),$$

gdzie

$$\varphi(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots + a_n z^{n-1};$$

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ są n pierwiastkami równania $x^n - 1 = 0$.

Wyznacznik kołujący

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & \ldots & \ldots & , n \\ 2, & 3, & \ldots & \ldots & , 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n, & 1, & \ldots & \ldots & , n-1 \end{vmatrix}$$

równa się:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n(n+1}{2} \,.\, n^{n-2}.$$

Wyznacznik Vandermonde'a lub Cauchy'ego jest postaci:

$$D = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \\ a_1^2, & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1}, & a_2^{n-1}, & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

i równa się:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i,j}^{1,n} (a_i - a_j) \qquad (i < j).$$

Kwadrat wyznacznika Cauchy'ego jest wyznacznikiem Hankela.

Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1, \\ \binom{m}{1}, & \binom{m+1}{1}, & \ldots, & \binom{m+n}{1} \\ \binom{m+1}{2}, & \binom{m+2}{2}, & \ldots, & \binom{m+n+1}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots \\ \binom{m+n-1}{n}, & \binom{m+n}{n}, & \ldots, & \binom{m+2n-1}{n} \end{vmatrix}$$

równa się jedności

Wyznacznik Zeipela

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{p}, & \binom{m}{p+1}, & \ldots, & \binom{m}{p+r} \\ \binom{m+1}{p}, & \binom{m+1}{p+1}, & \ldots, & \binom{m+1}{p+r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{m+r}{p}, & \binom{m+r}{p+1}, & \ldots, & \binom{m+r}{p+r} \end{vmatrix}$$

równa się:

$$\frac{\binom{m+r}{r+1}, \binom{m+r-1}{r+1} \cdots \cdots \binom{m+r-p+1}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}\binom{p+r-1}{r+1} \cdots \cdots \binom{r+1}{r+1}}.$$

Wyznacznik Sterna

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & & 1 \\ \binom{x_1}{1}, & \binom{x_2}{1}, & \cdots, & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2}, & \binom{x_2}{2}, & \cdots, & \binom{x_n}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{x_1}{n-1}, & \binom{x_2}{n-1} & \cdots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix}$$

równa się:

$$\frac{D}{2^{n-2} \cdot 3^{n-3} \cdot 4^{n-4} \cdots (n-1)},$$

gdzie D jest wyznacznikiem Cauchy'ego, utworzonym z ilości x.

Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1!}, & 1, & 0 & \cdots & , 0 \\ \frac{1}{2!}, & \frac{1}{1!}, & 1, & \cdots & , 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n!}, & \frac{1}{(n-1)!}, & \frac{1}{(n-2)!}, & \cdots & , \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

równa się $\frac{1}{n!}$.

Wyznacznik Smitha

$$\begin{vmatrix} (1,1), & (1,2) & \ldots\ldots & (1,n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n,1), & (n,2) & \ldots\ldots & (n,n) \end{vmatrix}$$

gdzie (i, j) oznacza największy wspólny dzielnik liczb całkowitych i, j, równa się $\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n)$, gdzie $\varphi(k)$ jest liczbą liczb mniejszych od k i pierwszych względem k.

Kontynuanty

$$C_n = \begin{vmatrix} a_1, & 1, & 0, & \ldots\ldots, & 0 \\ -1, & a_2, & 1, & \ldots\ldots, & 0 \\ 0, & -1, & a_3, & \ldots\ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots, & a_n \end{vmatrix}$$

czynią zadość wzorowi zwrotnemu:

$$C_n = a_n C_{n-1} + C_{n-2}.$$

Kontynuant ma wyrazów

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n-k}{k},$$

gdzie $k = \frac{n}{2}$, gdy n parzyste, $k = \frac{n-1}{2}$, gdy n nieparzyste.

Jeżeli pomiędzy elementami wyznacznika zachodzą związki

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \ldots\ldots + a_{ni}^2 = 1,$$

$$a_{1i}\,a_{1j} + a_{2i}\,a_{2j} + \ldots\ldots + a_{ni}\,a_{nj} = 0.$$

wyznacznik nazywa się ortogonalnym

Kwadrat wyznacznika ortogonalnego jest jednością dodatnią. Dopełnienie algebraiczne elementu w wyznaczniku ortogonalnym równa się samemu elementowi, pomnożonemu przez wyznacznik. Każdy minor wyznacznika ortogonalnego równa się swemu dopełnieniu algebraicznemu, pomnożonemu przez wyznacznik dany.

Iloczyn dwu wyznaczników ortogonalnych jest ortogonalny.

Jeżeli a są elementy wyznacznika ortogonalnego D, to równanie

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x, & a_{12}, & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}+x, & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & , & \dots\dots & , \dots \\ a_{n1}, & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = 0$$

jest równaniem odwrotem takiem, iż dla n nieparzystego ma ono pierwiastek $x = -D$ i nie ma żadnego innego pierwiastka rzeczywistego; dla n parzystego i $D = -1$ ma pierwiastek $x = \pm 1$ i nie ma żadnego innego pierwiastka rzeczywistego. (Twierdzenie Brioschi'ego.)

Jeżeli a_{ij}, b_{ij} są elementy dwu wyznaczników ortogonalnnych o wartości $\varepsilon = +1$ i tego samego rzędu, i jeżeli wyznacznik o wyrazie ogólnym $a_{ij} + b_{ij}$ jest zarazem zerem, to i wszystkie minory rzędu $(n-1)$-go będą zerami. (Twierdzenie Stieltjesa.)

Co do wskazówek bibliograficznych patrz rozmaite rozdziały E. Pascala, Determinanti (Medyolan, 1896.)

§ 4.

Wyznaczniki Wrońskiego.

Wyznaczniki Wrońskiego albo wrońskiany tworzą się w sposób następujący:

W pierwszym wierszu mamy n funkcyj zmiennej x, w wierszach następnych ich pochodne pierwsze, drugie i t. d.

$$W = \begin{vmatrix} u_1(x), & u_2(x) & \ldots, & u_n(x) \\ u'_1(x), & u'_2(x) & \ldots, & u'_n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(n-1)}(x), & u_2^{(n-1)}(x), & \ldots, & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Pochodną wrońskianu tworzymy, zastępując elementy ostatniego wiersza pochodnemi n-temi funkcyj.

Jeżeli funkcye u pomnożymy przez jakąkolwiek ilość $v(x)$, to wyznacznik zostanie pomnożony przez v^n.

Znikanie wrońskianu W jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by pomiędzy n funkcyami $u_1(x)$, $u_2(x) \ldots u_n(x)$ zachodził związek liniowy jednorodny o spółczynnikach stałych.

Wyznacznik

$$W_1 = \begin{vmatrix} u_1(x), & \ldots\ldots, & u_n(x) \\ u_1(x+1), & \ldots\ldots, & u_n(x+1) \\ u_1(x+2), & \ldots\ldots, & u_n(x+2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1(x+n-1) & \ldots, & u_n(x+n-1) \end{vmatrix},$$

równy

$$\begin{vmatrix} u_1(x), & \ldots\ldots, & u_n(x) \\ \Delta u_1(x), & \ldots\ldots, & \Delta u_n(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \Delta^{n-1} u_1(x), & \ldots\ldots, & \Delta^{n-1} u_n(x) \end{vmatrix},$$

gdzie Δ jest symbolem różnicy $u(x+1) - u(x)$, $\Delta^2 u(x) = \Delta u(x+1) - \Delta u(x), \ldots\ldots$, nazywa się wyznacznikiem różnicowym Wrońskiego (wronskianem różnicowym).

Znikanie wyznacznika W_1 jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby pomiędzy n funkcyami u istniał związek liniowy jednorodny o spółczynnikach, które są funkcyami peryodycznemi zmiennej x, t. j. takiemi funkcyami i $F(x)$, dla których $F(x+1) = F(x)$ przy wszelkich wartościach na x. (Twierdzenie Casorati'ego).

Co do literatury o wronskianach patrz: Dickstein, Własności i niektóre zastosowania wrońskianów (Prace matem.-fizyczne t. I. 1888); Peano, (Mathesis, IX, str. 75 i str. 110. 1889); Peano, Sul determinante wronskiano (Acc. Lincei, 1897); Vivanti, Sul determinante wronskiano (Acc. Lincei, 1898).

§ 5.

Jakobiany czyli wyznaczniki funkcyjne.

Niechaj będzie n funkcyj $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$. zależnych od zmiennych $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$.

Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, & \dots\dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, & \dots\dots, & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}, & \dots\dots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

który zwykle wyobrażamy za pomocą symbolu

$$\frac{\partial\,(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial\,(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

nazywa się wyznacznikiem funkcyjnym lub jakobianem funkcyj y.

Jeżeli $y_1, y_2, \dots, y_n$ są funkcyami zmiennych $z_1, z_2, \dots, z_n$, te zaś ostatnie—funkcyami zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, wtedy mamy wzór

$$\frac{\partial\,(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial\,(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\partial\,(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial\,(z_1, z_2, \dots, z_n)} \frac{\partial\,(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial\,(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Jeżeli $y_1, y_2, \dots, y_n$ są funkcyami zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, to odwrotnie te ostatnie są funkcyami pierwszych, i będzie:

$$\frac{\partial\,(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial\,(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial\,(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial\,(y_1, y_2, \dots, y_n)}}$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by pomiędzy n funkcyami n zmiennych zachodził związek, jest, aby jakobian ich był tożsamościowo zerem.

Jeżeli

$$y_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{u_0(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$(i = 1, 2, \dots n)$$

to:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{1}{u_0^{n+1}} \begin{vmatrix} u_0, & \frac{\partial u_0}{\partial x_1} & \dots, & \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \\ u_1, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n, & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Twierdzenia powyższe zawdzięczamy Jacobi'emu.

Nazwawszy K wyznacznik po stronie drugiej poprzedniego wzoru, mamy następujące twierdzenie (Casorati'ego):

Jeżeli K jest tożsamościowo zerem, to związek pomiędzy $n+1$ funkcyami $u_0, u_1, \dots, u_n$ jest związkiem jednorodnym, i odwrotnie.

Jeżeli mamy $n+1$ funkcyj jednorodnych o n zmiennych i kombinując je ze sobą po n, utworzymy $n+1$ jakobianów, z tych znowu utworzymy $n+1$ nowych jakobianów, kombinując je po n; wtedy te ostatnie, poza czynnikiem wpólnym, przedstawiać będą funkcye, z których wyszliśmy. (Twierdzenie Clebscha.)

Niechaj będzie n funkcyj $y_1, y_2, \dots y_n$ o $n+1$ zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. Utwórzmy $n+1$ jakobianów funkcyj, uważanych za funkcye n zmiennych: nazwijmy te jakobiany: $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_{n+1}$. Wtedy zachodzić będzie związek:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1 - \frac{\partial}{\partial x_2}\psi_2 + \quad \dots \quad + (-1)^n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\psi_{n+1} = 0.$$

§ 6.

Hesyany.

Jakobian n pierwszych pochodnych funkcyj n zmiennych nazywa się hesyanem funkcyi danej.

Jeżeli funkcya dana $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest funkcyą jednorodną stopnia m-tego n zmiennych i jeżeli przyjmiemy, że jedna ze zmiennych x_n jest równa jedności, tak że F stanie się $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-})$, wtedy oznaczając przez f_{ij} pochodną drugą funkcyi f względem x_i i x_j, otrzymamy hesyan (bez uwzględnienia czynnika liczbowego) w postaci :

$$H = \begin{vmatrix} f_{11}, & & , f_{1\, n-1}, & f_{n-1} \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ f_{n\, 1}, & \cdot \quad \cdot & f_{n-1,\, n-1} & f_{n-1} \\ f_1, & \cdot & , f_{n-1}, & \frac{m}{m-1} f \end{vmatrix},$$

Jeżeli funkcya jednorodna n zmiennych może za pomocą przekształcenia liniowego zmiennych przejść na inną funkcyę z mniejszą o 1 liczbą zmiennych, wtedy hesyan jest tożsamościowo zerem. (Twierdzenie Hessego.)

Twierdzenie odwrotne jest prawdziwem tylko dla przypadków $n \leqslant 4$ (patrz Gordan-Noether, Math. Ann. X, str. 547, a co do innych szczegółów: Pasca Determinanti, str. 327 i nast.

Zastosowania jakobianów i hesyanów do geometryi krzywych i powierzchni podamy w drugim tomie niniejszego dzieła.

Teorya wyznaczników wypłynęła z zagadnienia o rozwiązywaniu równań liniowych. Za pierwszych jej twórców należy uważać Leibniza, Cramera, Laplace'a, Cauchy'ego, Jacobi'ego, a pierwszy traktat zupełny systematyczny teoryi napisał Brioschi. Szczegóły bibliograficzne u E. Pascala. Determinanti.

Oprócz dwu monografij Cayleya (Trans. Cambridge. VIII) i Spottiswoode'a Crelle, t. LI) do ważniejszych dzieł o teoryi wyznaczników należą: Brioschi (Pawia. 1854. Baltzer (Lipsk. 1857—1882). Trudi (Neapol. 1862), Trzaska (W. Kretkowski. 1870 (w dodatku do „Rachunku różniczkowego" Wł. Folkierskiego): Studnička (Praga. 1871). Hoüel (Paryż, 1871). Hesse (Lipsk. 1872). Dölp (Darmstadt 1874). Mansion (Gandawa, 1876). Günther (Erlangen, 1877). M. A. Baraniecki „Teorya wyznaczników. kurs uniwersytecki" (Paryż, 1879). jedno z najobszerniejszych w tym przedmiocie; Gordan (Lipsk. 1886). Porów. S. Dickstein „Pojęcia i metody matematyki" (Warszawa. 1891. str. 159. 192).

Rozważano także i wyznaczniki rzędu nieskończonego. Co do tych patrz E. Pascal l. c., oraz najświeższą monografie Cazzaniga: „Sui determinanti d'ordine infinito" (Annal. di mat. 1897. [illegible] no ad uno tipo di determ. nulli d'ordine infinit. tamże 1898.)

ROZDZIAŁ IV.

TEORYA SZEREGÓW, ILOCZYNÓW NIESKOŃCZONYCH I UŁAMKÓW CIĄGŁYCH.

§ 1.

Wiadomości ogólne o szeregach.

Niechaj będzie szereg nieskończenie wielu liczb $u_1, u_2, \ldots$ Utwórzmy sumę S_n pierwszych n z tych liczb, t. j.

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Granica ilości S_n dla $n = \infty$ nazywa się sumą szeregu, utworzonego z nieskończonej liczby wyrazów u w porządku oznaczonym. Mówimy, że szereg jest zbieżny, rozbieżny lub nieoznaczony, stosownie do tego, czy ta granica istnieje i jest skończoną, czy istnieje i jest nieskończoną, albo wcale nie istnieje.

Suma ilukolwiek wyrazów, począwszy od n-tego, nazywa się resztą szeregu; jest ona:

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+v}.$$

Można wyobrazić sobie, że ilości u zależą od dwu lub więcej skaźników, zamiast od jednego; wtedy przy pomocy podobnej definicyi otrzymujemy szeregi podwójne, potrójne i t. d., w odróżnieniu od których poprzednie nazywają się pojedyńczemi.

Jeżeli wyrazy szeregu są ilościami zespolonemi, otrzymujemy szereg zespolony; oddzieliwszy w nim część rzeczywistą od czysto-urojonej, powiemy, że szereg zespolony jest zbieżny, jeżeli każdy z tych dwu szeregów jest zbieżny.

Szereg może być zbieżny tylko wtedy, gdy uważamy każdy jego wyraz z jego własnym znakiem, i może przestać być zbieżnym, gdy bierzemy wartości bezwzględne wyrazów. W takim razie szereg nazywa się wprost lub zwyczajnie zbieżnym.

Szereg może pozostać zbieżnym i wtedy, gdy zmieniamy znaki wszystkich jego wyrazów ujemnych; w tym przypadku szereg jest bezwzględnie zbieżnym.

Jeżeli szereg jest bezwzględnie zbieżny, to jest także i zwyczajnie zbieżny.

Szereg o wyrazach zespolonych nazywa się bezwzględnie zbieżnym, jeżeli jest zbieżnym szereg modułów, t. j. bezwzględnych wartości jego wyrazów.

Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu są funkcyami jednej lub więcej zmiennych, otrzymujemy wtedy szereg funkcyj.

Jeżeli dawszy sobie σ dowolnie małe, można znaleść skaźnik n taki, aby, przy każdej wartości (zawartej w pewnym obszarze) ilości zmiennej lub zmiennych, reszta R_m dla każdego $m \geqslant n$ była zawsze co do wartości bezwzględnej mniejsza od σ, wtedy mówimy, że szereg jest jednostajnie zbieżny lub równozbieżny.

Z dwu szeregów jeden nazywa się szybcej zbieżnym niż drugi, jeżeli stosunek ich reszt $\frac{R_n}{R'_n}$ dąży do zera dla n rosnącego nieograniczenie.

Dla zbieżności szeregu jest koniecznem i dostatecznem, by dawszy sobie σ dowolne, można było znaleść taki skaźnik n', aby dla każdego $m \geqslant n$ było $R_m < \sigma$ co do wartości bezwzględnej.

By szereg był zbieżny, jest koniecznem, aby granica wyrazu ogólnego u_n była zerem.

Jeżeli szereg jest bezwzględnie zbieżny, to pozostaje takim, gdy wszystkie wyrazy jego pomnożymy przez ilosci mniejsze od liczby danej.

Szereg jest zbieżny, jeżeli wyrazy jego są co do wartosci bezwzględnej odpowiednio mniejsze od wyrazów szeregu zbieżnego.

Szereg o wyrazach dodatnich jest rozbieżny, jeżeli wyrazy jego są co do wartości bezwzględnej odpowiednio większe od wyrazów szeregu rozbieżnego.

Jeżeli wyrazy szeregu naprzemian dodatnie i ujemne maleją co do wartości bezwzględnej i dążą do zera. szereg jest zbieżny.

Jeżeli szereg

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots$$

jest zbieżny, szereg zaś

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots\dots$$

o wyrazach dodatnich—rozbieżny, to granica iloczynu $a_n u_n$, jeżeli istnieje dla $n = \infty$, musi być zerem.

W szeregu zbieżnym o wyrazach dodatnich iloczyn $n u_n$ jeżeli ma granicę, to dąży do zera dla $n = \infty$. Olivier (Crelle, II) uważał to kryteryum za konieczne i dostateczne, Abel (Crelle, III) wykazał, że jest tylko koniecznem.

W szeregu zbieżnym o wyrazach dodatnich wciąż malejących, iloczyn $n u_n$ dąży do zera. Catalan, Comptes rendus 1886; patrz co do tego Giudice (Riv di mat. IV, str. 165).

Jeżeli dla n rosnącego nieograniczenie wyrażenie

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\ .$$

(gdzie Σu_n jest szeregiem danym o wyrazach dodatnich, $\Sigma \frac{1}{a_n}$ szeregiem rozbieżnym o wyrazach dodatnich) począwszy od pewnej wartości n. pozostaje wciąż większe od pewnej liczby dodatniej, szereg Σu_n jest zbieżny; jeżeli przeciwnie, począwszy od pierwszej wartości, n pozostaje wciąż ujemne, to szereg jest rozbieżny. (Twierdzenie Kummera. Crelle, 1835.)

Szereg jest bezwzględnie zbieżny, jeżeli granica stosunku wyrazu do poprzedzającego (o ile istnieje) jest co do wartości bezwzględnej ilością mniejszą od jedności (Cauchy).

Szereg o wyrazach dodatnich jest rozbieżny, jeżeli granica stosunku wyrazu do poprzedzającego (o ile istnieje) jest ilością większą od jedności (Cauchy).

Szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny lub rozbieżny, stosownie do tego, czy wyrażenie $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$ dla $n=\infty$ dąży do granicy wyższej lub niższej od 1. (Twierdzenie Raabego, Crelle, XI).

Szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny lub zbieżny, stosownie do tego, czy wyrażenie

$$\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\log n$$

dąży do granicy większej lub mniejszej od jedności.

W szeregu zbieżnym o wyrazach dodatnich liczba

$$\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}-1\right)-1\right]n$$

rośnie nieograniczenie wraz z n.

Jeżeli w szeregu o wyrazach dodatnich ilość $\sqrt[n]{u_n}$, począwszy od pewnej wartosci n, pozostaje wciąż mniejsza od liczby danej. mniejszej od 1, szereg jest zbieżny; gdy pozostaje wciąż większa od 1, — jest rozbieżny.

Jeżeli istnieje granica stosunku $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, to istnieje też granica wyrażenia $\sqrt[n]{u_n}$ i równa się poprzedniej.

Szereg o wyrazach dodatnich może być zbieżny, chociaż nie istnieje granica stosunku $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. W tym przypadku stosunek ten waha się pomiędzy granicami, z których jedna jest największa.

Szereg jest zbieżny lub rozbieżny, stosownie do tego, czy granica wyrażenia

$$\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}$$

jest większa lub mniejsza od 1 (kryteryum logarytmowe Cauchy'ego).

Szereg

$$u(1)+u(2)+\ldots+u(n)+\ldots$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, jeżeli

$$\lim_{n=\infty} \int_n^{n+m} u(x)\, dx = 0$$

(kryterium całkowe Cauchy'ego).

Szereg Σu_n jest zbieżny, jeżeli można znaleść liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots\ldots$ takie, że

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \log \frac{1}{a_n u_{n+p}} : \sum_0^{\infty} \frac{1}{a_r} \right\} > 0$$

(kryterium Pringsheima).

Szereg Σu_n jest zbieżny, jeżeli można znaleść liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots$ takie, że

$$\lim_{n=\infty} \left\{ a_{n+1} \log \frac{a_n u_{n+p}}{a_{n+1} u_{n+p+1}} \right\} > 0$$

(kryterium Pringsheima).

Szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny, jeżeli wyrażenie

$$\left(1 - \sqrt[n]{u_n}\right) \frac{n}{\log n},$$

począwszy od dostatecznie wielkiej wartości n, pozostaje wciąż większem od 1; jest rozbieżny, jeżeli począwszy od pewnej wartości n, nie przewyższa jedności (kryterium Jameta, Mathesis, 1892. str. 80). Porów. Cesàro. (Analisi Algebrica. str. 489).

Inne kryterya podali: Gauss (Werke. III. str. 139; kryterium Gaussa wypływa z kryteryum Raabego). De Morgan, (Differ. Calculus, Londyn 1836), Bertrand (Journ. de Liouville. II, str. 37), Bonnet (tamże, VIII. str. 19—99), Pauker (Crelle, XLII, str. 138), Dini (Annal. delle Univ. Toscane, Piza 1867), Du Bois—Reymond (Crelle, LXXVI), Pringsheim (Math. Ann. XXXV), Giudice (Rend, Palermo. 1890) i t. d.

Aby szereg pozostał zbieżnym przy jakiejkolwiek zmianie porządku jego wyrazów, jest koniecznem i dostatecznem, by był bezwzględnie zbieżnym (twierdzenie Dirichleta, Crelle IV); w tym przypadku suma szeregu pozostaje też niezmienioną dla każdego odwrócenia (inwersyi) wyrazów.

Jeżeli szereg o wyrazach dodatnich i ujemnych jest bezwzględnie zbieżny, to będą też oddzielnie bezwzględnie zbieżnemi: szereg utworzony z samych wyrazów ujemnych i utworzony z samych wyrazów dodatnich.

Niechaj będzie szereg, dla którego $\lim u_n = 0$; niechaj

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots \quad (1)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots \quad (2)$$

będą sumy wyrazów dodatnich oraz bezwzględnych wartości wyrazów ujemnych, wziętych w tym porządku, w jakim istotnie zachodzą.

Jeżeli dwa szeregi (1), (2) są zbieżne, to szereg dany będzie bezwzględnie zbieżny; jeżeli oba szeregi są rozbieżne, to, można zawsze tak rozmieścić ich wyrazy, aby szereg całkowity był zbieżny, rozbieżny lub nieoznaczony, i w przypadku gdy jest zbieżny, mógł mieć wartość zupełnie dowolną. (Twierdzenie Riemanna, Werke, str. 221).

Jezeli Σu_n, Σv_n są dwa szeregi dane, to szeregi

$$\Sigma\ (u_n + v_n).$$

$$\Sigma\ (u_n v_1 + u_{n-1} v_2 + u_{n-2} v_3 + \ldots, \ldots + u_1 v_n)$$

nazywamy odpowiednio: sumą albo iloczynem dwu szeregów danych.

Suma i iloczyn dwu lub więcej szeregów bezwzględniezbieżnych jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym (Cauchy).

Aby iloczyn dwu szeregów zbieżnych był zbieżnym, wystarcza, by jeden z nich przynajmniej był bezwzględnie zbieżnym (patrz Mertens, Crelle, LXXIX).

Jeżeli iloczyn dwu szeregów zbieżnych jest zbieżny, to wartością jego jest iloczyn wartości szeregów danych.

---

§ 2.

Szeregi specyalne. Postępy.

$$1 + \frac{1}{2^{3r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \ldots\ldots = \frac{2^{2r-1}}{(2r)!}\,\pi^{2r} B_{2r}\,,$$

$$1 + \frac{1}{3^{3r}} + \frac{1}{5^{2r}} + \ldots\ldots = \frac{2^{2r}-1}{2\,.\,(2r)!}\,\pi^{2r} B_{2r}\,,$$

$$1 - \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} - \ldots\ldots = \frac{2^{2r}-1}{(2r)!}\,\pi^{2r} B_{2r}\,,$$

$$1 - \frac{1}{3^{2r+1}} + \frac{1}{5^{2r-1}} - \ldots\ldots = \frac{\pi^{2r+1}}{(2r)!\,2^{2r+2}}\,E_{2r}\,.$$

gdzie B i E są tak zwanemi liczbami Bernoulli'ego i Eulera (patrz Rozdz. XVIII).

Jeżeli s_p oznacza szereg odwrotności p-tych potęg liczb naturalnych, to:

$$s_2 = \frac{\pi^2}{6}\,,\; s_4 = \frac{\pi^4}{90}\,,\; s_6 = \frac{\pi^6}{945}\,,\; s_8 = \frac{\pi^8}{9450}\,,$$

$$s_3 = \frac{\pi^3}{25{,}7946\ldots} = 1{,}\,202\;056\;903\;159\;594\;285\;40\;\ldots\,.$$

$$s_5 = \frac{\pi^5}{295{,}\,1215\ldots}\,.$$

$$s_7 = \frac{\pi^7}{2295,286\ldots},$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \ldots = \frac{\pi}{4},$$

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots = 0,915965594177219054603 57\ldots,$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \ldots \ldots = \frac{\pi^3}{32},$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \ldots \ldots = \frac{\pi^5}{1536}$$

Co do tych szeregów liczbowych patrz: Stieltjes (Acta math. 1887), Brisse (Compt. rend., LXIV, str. 1339), Novi, Algebra etc. str. 118)

$$1 - \log\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \log\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\ldots = C$$

Jest to t. zw. stała Eulera $= 0,577215664\ldots$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \ldots = \frac{1}{4}\log 2 = 0,17328679.$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \ldots = \log 2 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} - \ldots = \frac{1}{2} - \log 2,$$

$$\frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \ldots = \frac{3}{4} - \log 2,$$

$$\frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \ldots = \frac{\pi - 3}{4},$$

$$1 + \frac{1}{3.2^3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5.2^5} + \frac{3.5}{4.6}\cdot\frac{1}{7.2^7} + \ldots = \frac{\pi}{3}.$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1.1}{2.4}+\frac{1.1.3}{2.4.6}-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}+\ldots=\sqrt{2}.$$

$$1-\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}-\ldots=\frac{1}{2}\sqrt{1-\sqrt{2}},$$

$$1+\frac{1.1}{2.4}-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}+\frac{1.1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12}-\ldots=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},$$

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=e=2,718281828459045\ldots,$$

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots=\frac{1}{e}=0,3678794312\ldots,$$

$$\text{arctg.}\,\frac{1}{2}+\text{arctg}\,\frac{1}{2.2^2}+\text{arctg.}\,\frac{1}{2.3^2}+\ldots=\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{1}{2^2}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}-\frac{4}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}-\log 2=0.129319\ldots$$

Szereg $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots$ jest zwyczajnie zbieżny; ma on sumę zależną od porządku wyrazów. Jeżeli po m wyrazach doodatnich następuje m ujemnych. wtedy suma szeregu wynosi:

$$\log 2\sqrt{\frac{m}{n}}\quad \text{(Dirichlet, Berl. Abh. 1837)},$$

Szereg

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(a+rb)^n}$$

nazywa się harmonicznym (Euler) rzędu m-tego; dla $n=1$ szereg ten jest rozbieżny, dla n dodatniego i większego od 1 jest on w ogóle zbieżnym.

Kolej wyrazów, w której różnica każdych dwu sąsiednich jest stała, nazywa się postępem arytmetycznym; jeżeli r-ta różnica wyrazów jest stała, otrzymujemy postęp arytmetyczny rzędu r.

Suma n pierwszych wyrazów postępu arytmetycznego 1-go rzędu równa się połowie iloczynu liczby wyrazów przez sumę wyrazów pierwszego i ostatniego.

Jeżeli $\Delta_1^{(m)}$ oznacza różnicę m-tą, odnoszącą się do wyrazu pierwszego (patrz rozdz. X), to suma n pierwszych wyrazów postępu arytmetycznego r-tego rzędu wynosi:

$$S_n = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m+1} \Delta_1^{(m)}$$

gdzie $\Delta_1^{(m)}$ jest zerem dla $m > r$.

Suma postępu arytmetycznego

$$p + 2(p+1) + 3(p+2) + 4(p+3) + \ldots$$

wynosi:

$$S_n = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(3p+2n-2)$$

Suma postępu arytmetycznego

$$pq + (p-1\,(q-1) + (p-2)\,(q-2) + \ldots$$

wynosi:

$$S_n = \frac{1}{6}\, n \left[6pq - (n-1)\,(3p+3q-2n+1)\right]$$

Postępem geometrycznym rzędu r-tego nazywamy kolej wyrazów, które są potęgami jednej zmiennej o wykładnikach, stanowiących postęp arytmetyczny rzędu r-tego.

Suma n pierwszych wyrazów postępu geometrycznego 1-go rzędu wynosi:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

O sumach postępów geometrycznych rzędów wyższych patrz: Cauchy, Exercices. 1827, Jacobi, Fundamenta nova, Kummer (Crelle, XVII), Glaisher (Quart. Journ. of Math. 1871. XI) etc.

Szereg

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \ldots\ldots$$

nazywa się szeregiem Lamberta. Suma tego szeregu wynosi:

$$x\,\theta\,(1) + x^2\,\theta\,(2) + x^3\,\theta\,(3) + \ldots\ldots$$

gdzie $\theta\,(p)$ oznacza w ogólności liczbę dzielników liczby p, włączając w nie 1 i samą liczbę p (patrz Scherk, Crelle. IX, X, Curtze, Annal. di Mat. I i t. d.).

Jeżeli stosunek $\frac{\omega}{\omega'}$ nie jest rzeczywisty, to szereg podwójny

$$\sum_{m,\,n} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^{2r}} = S_{2r}$$

gdzie suma rozciąga się na wszystkie wartości całkowite, dodatnie i ujemne liczb m i n (prócz kombinacyi $m = 0$, $n = 0$) jest bezwzględnie zbieżny przy $r > 1$.

Szereg S_{2r} można wyrazić za pomocą funkcyj przestępnych eliptycznych. Jeżeli g_2. g_3

są niezmiennikami funkcyj eliptycznej $\wp$, której półperyodami są ω i ω' (niezmienniki te można wyrazić za pomocą funkcyj ϑ o argumencie zero, patrz Rozdział XVI), otrzymamy wzory:

$$S_4 = \frac{1}{60}\, g_2,$$

$$S_6 = \frac{1}{5\,.\,28}\, g_3,$$

$$S_8 = \frac{g_2^{\,2}}{2^4\,.\,3\,.\,5^2\,.\,7},$$

$$S_{10} = \frac{3\, g_2\, g_3}{2^4\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11},$$

$$S_{12} = \frac{1}{2^4\,.\,11\,.\,13}\left(\frac{g_3^{\,2}}{7} + \frac{g_2^{\,3}}{2\,.\,3\,.\,5^3}\right).$$

. . . .

W następnych paragrafach podamy wiadomości, odnoszące się do szeregów funkcyj, szeregów potęgowych, różniczkowalności i całkowalności szeregów, rozwijalności funkcyj na szeregi, do szeregów funkcyj zmiennej urojonej i t. d.

Podręczniki algebry i rachunku różniczkowego obejmują najczęściej i wykład o szeregach; istnieją nadto traktaty specyalne: Lacroix (Paryż, 1800), Catalan (Paryż, 1860), Lsurent (Paryż, 1862), Novi (Algebra, Florencya 1863). Historyi szeregów nieskończonych poświęcone jest dzieło Reiffa (Geschichte der unendlichen Reihen, Tybinga 1889). Por. też odpowiednie rozdziały w dziele M. Cantora: „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.“

§ 3.

Iloczyny nieskończone.

Niechaj będzie ciąg nieskończony ilości $u_1, u_2 \ldots$; utwórzmy iloczyn Π_n pierwszych n z pomiędzy nich.

Jeżeli dla n rosnącego nieograniczenie Π_n dąży do granicy skończonej, powiadamy, że iloczyn nieskończony ilości danych jest iloczynem nieskończonym zbieżnym.

W iloczynie zbieżnym jest $\lim u_n = 1$, stąd wynika, że począwszy od pewnej wartości n, wszystkie u_n są dodatnie.

Aby iloczyn nieskończony Π_n był zbieżny i nierówny zeru, jest koniecznem i dostatecznem, by szereg $\log u_1 + \log u_2 + \ldots$ był zbieżny.

Jeżeli ten szereg dąży do $-\infty$, iloczyn Π dąży do zera,

Aby iloczyn nieskończony, którego czynniki są wszystkie dodatnie i wszystkie mniejsze lub większe od 1, był zbieżny i nierówny zeru, jest koniecznem i dostatecznem, by szereg

$$(u_1 - 1 + (u_2 - 1) + \ldots$$

był zbieżny.

Iloczyn nieskończony $u_1 \; u_2 \ldots$, którego czynniki są jakiekolwiek, jest zbieżny i nierówny zeru, jeżeli zbieżnemi są dwa szeregi:

$$(u_1 - 1) + (u_2 - 1) + \ldots :$$

$$(u_1 - 1)^2 + (u_2 - 1)^2 + \ldots$$

Gdyby tylko pierwszy szereg był zbieżny, drugi zaś był rozbieżny, szereg byłby zbieżny lecz miałby wartość zero. Gdyby oba szeregi były rozbieżne, nie możnaby nic wogóle powiedzieć o zbieżności iloczynu nieskończonego, o ile ilosci u_1, u_2 . . . nie byłyby wszystkie większe od 1; w tym bowiem przypadku można twierdzić, że szereg jest rozbieżny.

Jeżeli u_1, u_2 . . . są ilościami zespolonemi, iloczyn nieskończony jest zbieżny, jeżeli tylko zbieżnosć szeregu

$$(u_1 = 1) + (u_2 - 1) + \ldots$$

jest zbieżnością bezwzględną (Weierstrass).

Jeżeli iloczyn nieskończony zachowuje tęż samą wartość przy zmianie porządku czynników, nazywamy go iloczynem nieskończonym bezwzględnie zbieżnym.

Iloczyn będzie bezwzględnie zbieżny, jeżeli i szereg $\log u_1 + \log u_2 + \ldots$ jest bezwzględnie zbieżny.

Jeżeli czynniki u_1, u_2 . . . są wszystkie mniejsze od 1, zaś u'_2, u'_2 . . . wszystkie większe od 1 (przyjmujemy wszystkie za dodatnie, co zawsze założyć wolno), to iloczyn będzie bezwzględnie zbieżnym, jeżeli takiemi są oddzielnie iloczyny nieskończone $u_1 . u_2, \ldots\ldots$ $u'_1 . u'_2, \ldots\ldots$

W tym przedmiocie patrz prace: Kummer (Crelle, XIII), Arndt (Archiv Grunerta, XXI), Weierstrass (Crelle, XI, Functionenlehre, str. 206), Dirichlet (Berliner Abhand, 1837), Novi Algebra).

Podajemy niżej najważniejsze wzory teoryi iloczynów nieskończonych.

$$\sin x = x \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{\nu^2 \pi^2}\right]; \quad \sinh x = x \prod_{1}^{\infty} \left[1 + \frac{x^2}{\nu^2 \pi^2}\right];$$

$$\cos x = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{\left(\nu\pi - \frac{1}{2}\pi\right)^2}\right]; \quad \cosh x = \prod_{1}^{\infty} \left[1 + \frac{x^2}{\left(\nu\pi - \frac{1}{2}\pi\right)^2}\right]$$

$$\operatorname{tg}\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}=\frac{m}{n-m}\cdot\frac{2n-m}{n+m}\cdot\frac{2n+m}{3n-m}\cdot\frac{4n-m}{3n+m}\cdot\ldots\ldots$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{n-m}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-m}{n+m}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2n+m}{2n-m}\cdot\ldots\ldots$$

Wzory te podał Euler (Introductio etc.); zachodzące w nich iloczyny nieskończone nie są bezwzględnie zbieżne, wartość ich przeto zmienia się przy zmianie porządku czynników. Dla innego rozmieszczenia czynników wartość iloczynu obliczył Cayley. Tak np. we wzorze na wstawę mamy czynniki

$$\left[1-\frac{x}{r\pi}\right]\left[1+\frac{x}{r\pi}\right],$$

uporządkowane w ten sposób, że sąsiadują ze sobą czynniki odpowiadające tej samej bezwzględnej wartości skaźnika r; jeżeli zaś uporządkujemy je w ten sposób, aby po m czynnikach, odpowiadających wartościom dodatnim r, następowało n czynników, odpowiadających skaźnikom r ujemnym, to wartością iloczynu będzie:

$$\sqrt[\pi]{\left(\frac{m}{n}\right)^x}\cdot\sin x.$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\ldots \quad \text{(wzór Wallisa).}$$

$$e=\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{6\cdot 8}{5\cdot 7}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{10\cdot 12\cdot 14\cdot 16}{9\cdot 11\cdot 13\cdot 15}\right)^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots,\quad \text{(Wzór Ca-}$$

talana, Journ. de Liouv. 1875.)

Oznaczywszy przez C stałą Eulera (patrz wyżej § 2, oraz niżej Rozdział XVIII) mamy:

$$C=\log\prod_1^\infty\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}},$$

$$\prod_1^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{(2n-1)^2-x^2} = 1 + \frac{x^2}{1^2-x^2} + \frac{1^2 \cdot x^2}{(1^2-x^2)(3^2-x^2)}$$

$$+ \frac{3^2 x^2}{(1^2-x^2)(3^2-x^2)(5^2-x^2)} + \dots\dots$$

$$\prod_1^{\infty} (1+x^n z) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)} z^n. \quad \text{(Euler).}$$

$$\prod \frac{1}{(1-x^n z)} = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)} z^n. \quad \text{(Euler).}$$

$$\prod_{r=0}^{\infty} (1-q^{2r+2})(1-2q^{2r+1}\cos 2x + q^{4r+2})$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r q^{r^2} \cos 2rx \; ; \; |q| < 1. \quad \text{(Jacobi).}$$

Wzory na rozwinięcie funkcyj eliptycznych na iloczyny nieskończone podamy w rozdziale XVI.

---

§ 4.

Fakultety analityczne; czynnikowe (faktoryalne).

Nazywamy zwykle fakultetami (różnoczynnikowemi) analitycznemi iloczyny których, czynniki kolejne tworzą się według pewnych praw określonych.

Różnoczynnikowe Heinego (Handbuch der Kugelf., I, str. 109) są iloczynami postaci:

$$(1-q)(1-q^2) \quad . \quad . \quad (1-q^m)$$

Fakultety Krampa (Ann. de Gergonne, III, 1812) są iloczynami typu

$$x(x+d)(x+2d) \quad . \quad . \quad . \quad (x+(m-1)d)$$

W przypadku $d = 1$, lub $d = -1$ otrzymujemy tak zwane czynnikowe (faktoryalne). Jeżeli jeden z czynników skrajnych jest jednością, otrzymujemy czynnikową liczby całkowitej: oznaczamy ją przez $n!$.

Czynnikowa $n!$ zawiera się pomiędzy dwiema granicami:

$$\left(\sqrt{n}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

(Cauchy, Exerc. IV, str. 207).

Uogólnienie czynnikowych dla liczb niecałkowitych prowadzi do funkcyi „gamma“ Eulera; uogólnienie dla liczb zespolonych rozważał Cayley.

Fakultetami analitycznemi Weierstrassa są iloczyny nieskończone typu (Functionenlehre, str. 200):

$$(z, d)^m = d^m \frac{z}{z+md} \prod_{r=1}^{\infty} \left(\frac{r+1}{r}\right)^m \frac{z+rd}{z+(m+r)d}$$

dla jakichkolwiek wartości rzeczywistych lub zespolonych ilości z, d, m.

Dla z, m rzeczywistych i d dodatniego otrzymujemy fakultet Bessela.

Czynnikową Weierstrassa jest (tamże str. 193 i d.).

$$z \prod_{r=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r+1}\right)^z \frac{z+r}{r}.$$

Ta czynnikowa jest funkcyą analityczną ilości z, skończoną i ciągłą.

Fakultetami i czynnikowemi zajmowali się: Wroński (Réfut. de la Théorie des fonct. anal. de Lagrange, Paryż; 1812); Clausen i Crelle (Crelle, VII), Bessel, (Abhand. II); Ohm (Crelle, XXXIX); Oettinger (tamże XXXIII, XXXV, XXXVIII, XLIV); Schaefli (tamże XLIII, LXVII), Weierstrass (tamże LI). Dawniejsze prace są: Vandermonde'a (Mém. de Paris, 1772) i Krampa, już wyżej cytowane. Vandermonde nazywał fakultety ilościami niewymiernemi różnych rzędów. Najnowsze badanie o tym przedmiocie ogłosił Capelli (Giorn. di Baltt. XXXI, XXXIII).

---

§ 5.

Ułamki ciągłe.

Wyrażenie postaci

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots\ldots}}}$$

nazywa się ułamkiem ciągłym zstępującym; wyrażenie zaś

$$\cfrac{a_1 + \cfrac{a_2 + \cfrac{a_3 + \ldots\ldots}{b_3}}{b_2}}{b_1}$$

ułamkiem ciągłym wstępującym.

Poniżej, o ile nie będzie wyraźnego zastrzeżenia, mówić będziemy tylko o pierwszym.

Liczba wyrazów może być skończona lub nieskończona.

Ilości a i b nazywają się licznikami i mianownikami cząstkowemi. Jeżeli zatrzymamy się na wyrazie n-tym, to ułamek cząstkowy, który w ten sposób otrzymujemy, nazywa się n-tym ułamkiem przybliżonym lub n-tem przybliżeniem (reduktem); oznaczamy go przez $\frac{A_n}{B_n}$.

Możemy przyjąć, że wszystkie liczniki są równe 1.

Przybliżenia czynią zadość następującemu związkowi zwrotnemu:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}}{b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}}$$

Licznik A_n i mianownik B_n przybliżenia można wyrazić za pomocą wyznaczników formy specyalnej, t. j. tak zwanych kontynuantów (patrz wyżej str. 58). Jest mianowicie:

$$A_n = \begin{vmatrix} a_1, & 0, & 0, & 0 & \dots & 0, & 0 \\ -1, & b_2, & a_3, & 0 & \dots & 0, & 0 \\ 0, & -1, & b_3, & a_4 & \dots & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0 & \dots & \dots & -1, & b_n \end{vmatrix}; \quad B_n = \begin{vmatrix} b_1, & a_2, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0 \\ -1, & b_2, & a_3, & 0 & \dots & 0, & 0 \\ 0, & -1, & b_3, & a_4 & \dots & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0 & \dots & -1, & b_n \end{vmatrix}.$$

Różnica dwu przybliżeń kolejnych wyraża się wzorem:

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}}.$$

Różnica dwu przybliżeń rzędu m-tego i n-tego $(m > n)$ jest:

$$\frac{A_m}{B_m} - \frac{A_n}{B_n} = (-1)^n \frac{q\, a_1 a_2 \dots a_{n+1}}{B_m B_n},$$

gdzie q jest mianownikiem ułamka

$$\frac{p}{q} = a_{n+1} + \cfrac{a_{n+2}}{b_{n+2} + \cfrac{a_{n+3}}{b_{n+3} + \dots + \cfrac{a_m}{b_m}}}.$$

Przybliżenie można zawsze wyrazić wzorem:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{B_{n-1} B_n}.$$

Jeżeli wszystkie ilości a i b są dodatnie, to różnice pomiędzy kolejnemi przybliżeniami tworzą szereg o wyrazach malejących i są naprzemian dodatnie i ujemne.

Jeżeli ilości a i b są dodatnie, to przybliżenia o skaźnikach parzystych tworzą szereg rosnący, przybliżenia o skaźnikach nieparzystych tworzą szereg malejący.

Jeżeli ilości a i b są dodatnie, to każde przybliżenie zawiera się pomiędzy dwoma następującemi po sobie przybliżeniami o skaźnikach mniejszych.

Przybliżenia ułamków ciągłych, mających wszystkie liczniki cząstkowe równe 1, a za mianowniki cząstkowe liczby całkowite dodatnie, są ułamkami nieprzywiedlnemi.

Przybliżenia ułamka ciągłego

$$\cfrac{a_1}{b_1 - \cfrac{a_2}{b_2 - \cfrac{a_3}{b_3 - \ldots\ldots}}}$$

gdzie ilości a i b są wszystkie dodatnie i czynią zadość związkowi $a_r \geqq b_r + 1$, są wszystkie dodatnie, mniejsze od 1 i rosnące.

Jeżeli $b_r = a_r + 1$, to

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1 + a_1 a_2 + \ldots\ldots + a_1 a_2 \ldots a_n}{1 + a_1 + a_1 a_2 + \ldots\ldots + a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Jakiekolwiek przybliżenie ułamka ciągłego, którego wyrazy są liczbami całkowitemi, zbliża się do wartości ułamka ciągłego więcej niż jakikolwiek inny ułamek o wyrazach prostszych (Euler, Introductio § 382).

Jeżeli dla $n = \infty$ istnieje granica ułamka $\frac{A_n}{B_n}$, to mówimy, że ułamek ciągły jest zbieżny.

Jeżeli liczniki cząstkowe a są wszystkie dodatnie, mianowniki zaś b są jednego znaku, to ułamek ciągły jest zbieżny wtedy, i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z dwu szeregów

$$b_2 \frac{a_1}{a_2} + b_4 \frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} + b_5 \frac{a_1 a_3 a_5}{a_2 a_4 a_6} + \cdots\cdots$$

$$b_3 \frac{a_2}{a_3} + b_5 \frac{a_2 a_4}{a_3 a_5} + b_7 \frac{a_2 a_4 a_6}{a_3 a_5 a_7} + \cdots\cdots$$

jest rozbieżny (kryteryum Seidela, Habilitationschrift, Monachium, 1846 i Sterna, Crelle, XXXVII); tenże ułamek jest nieoznaczony, jeżeli oba te szeregi są zbieżne.

Ułamek ciągły o elementach dodatnich jest zbieżny, jeżeli

$$\lim_{n=\infty} \frac{b_{n+1}\, b_n}{a_{n+1}} > 0,$$

lub — gdy kładąc

$$a_{n+1} = \frac{b_{n+1}\, b_n}{a_{n+1}}$$

— otrzymujemy szereg

$$\frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{1 + a_{n+2}} + \cdots\cdots$$

rozbieżny (Novi, Algebra,).

Ułamek ciągły nieograniczony, którego elementy są liczbami całkowitemi i dodatniemi, czyniącemi zadość warunkowi $b_n \geqslant a_n$, ma wartość niewymierną mniejszą od 1.

Ułamek ciągły

$$\cfrac{a_1}{b_1 - \cfrac{a_2}{b_2 - \ldots\ldots}}$$

gdzie ilości a i b są dodatnie, jest zbieżny, jeżeli $b_i \geqslant a_i + 1$.

Ułamek ciągły

$$\cfrac{1}{h_1 - \cfrac{1}{h_2 - \ldots\ldots}},$$

gdzie ilości h są dodatnie, jest zbieżny, jeżeli, począwszy od pewnej wartości skaźnika n, jest zawsze $h_n \geqslant 2$.

Ułamek ciągły nazywa się **peryodycznym**, jeżeli ułamki cząstkowe powtarzają się w nim w tym samym porządku.

Każdy ułamek ciągły peryodyczny, mający liczniki cząstkowe równe 1, za mianowniki zaś cząstkowe, liczby całkowite, jest pierwiastkiem równania stopnia 2-go, którego drugi pierwiastek jest ułamkiem ciągłym peryodycznym o tym samym peryodzie, napisanym w porządku odwrotnym (Euler, Lagrange).

Dla prostoty oznaczać bedziemy ułamek ciągły, którego ułamkami cząstkowemi są $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, ..., za pomocą symbolu: $\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots\right)$.

Mamy wtedy wzory:

$$\sqrt{a^2+b} = a + \left(\frac{b}{2a}, \frac{b}{2a}, \ldots\ldots\right).$$

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1^2}{1}, \frac{2^2}{1}, \frac{3^3}{1} \ldots\right) = \log 2,$$

$$\left(\frac{1}{1}, -\frac{x}{1}, \frac{x}{2}, -\frac{x}{3}, \frac{x}{2}, -\frac{x}{5}, \frac{x}{2} \ldots\right) = e^x.$$

$$\left(\frac{x}{1}, \frac{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\,x}{1}, \frac{\frac{1.1}{2.3}\,x}{1}, \frac{\frac{2.2}{3.4}\,x}{1}, \frac{\frac{2.2}{4.5}\,x}{1} \ldots\right) = \log(1+x),$$

$$\left(\frac{x}{1}, -\frac{x^2}{3}, -\frac{x^2}{5}, -\frac{x^2}{7}, \ldots\right) = \operatorname{tg} x$$

$$\left(\frac{x}{1}, \frac{x^2}{3}, \frac{x^3}{5}, \frac{x^2}{7} \ldots\right) = \operatorname{tg h} x,$$

$$\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{3}, -\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{5}, -\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{7} \ldots\right) = 1$$

Pierwiastkami równania $x^2 + ax = b$ są:

$$x_1 = \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a} \ldots\ldots\right); \quad x_2 = -a + \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a} \ldots\ldots\right).$$

Za twórcę teoryi ułamków ciągłych można uważać Eulera (Comm. Petrop. IX, XI, Novi Comm. Petr. IX, XI, Introductio etc.). Potem zajmowali się niemi: Lagrange (Mém. de Berl. 1769—1770); Legendre, Théorie des nombres; Moebius (Crelle VI), Gauss (Werke, III); Wroński (Introd. à la phil. des math. 1811), Stern (Crelle X, XI, XXXVII), Heine (Kugelfunctionen). Większe szczegóły i wiadomości historyczne znaleść można u Günthera (Grunert's Archiv. LIV, Math. Ann. VII; Beiträge zur Geschichte der Kettenbrüche, Weissenburg 1872); Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbr., Erlangen 1873). Przedstawienie geometryczne ułamków ciągłych podał Sylvester (p. Novi, Algebra, gdzie teorya ta traktowana jest szczegółowo i jasno). Uogólnienie ułamków ciągłych podali: Jacobi (Crelle LXIX), Fürstenau (Progr. Wiesbaden 1872), Günther (Grunerts Archiv, LVII), Pincherle (Acc. Bolog).

O ułamkach wstępnych patrz pracę Günthera w „Zeitschrift" Schlömilcha, XXI.

ROZDZIAŁ V.

TEORYA RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH.

---

§ 1.

Wiadomości ogólne.

Jeżeli przyrównamy do zera wielomian ze zmienną x, t. j. funkcyę wymierną całkowitą zmiennej x, będziemy mieli równanie algebraiczne $f(x)=0$. Stopień wielomianu nazywa się stopniem równania.

Nazywamy pierwiastkiem równania liczbę, która podstawiona zamiast x, zamienia równanie na tożsamość.

Każde równanie o spółczynnikach rzeczywistych lub zespolonych ma zawsze pierwiastek (twierdzenie d'Alemberta) i ma tyle pierwiastków rzeczywistych lub zespolonych, ile wynosi jego stopień.

Wskazówki historyczne co do tego twierdzenia znaleźć można w studyum G. Loria, Il teorema fundamentale della teoria delle equ. alg. (Rivista di matem. I).

Jeżeli równanie ma spółczynniki rzeczywiste i jeżeli $\alpha+i\beta$ jest jego pierwiastkiem, to będzie nim także $\alpha-i\beta$.

Jeżeli równanie ma r pierwiastków równych sobie i równych a, liczba a nazywa się pierwiastkiem wielokrotnym równania o wielokrotności r. W tym przypadku strona pierwsza równania jest podzielna przez $(x - a)^r$.

Stosunki spółczynników równania do spółczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x, są funkcyami symetrycznemi elementarnemi pierwiastków równania; t. j. jeżeli mamy równanie

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

i jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ są jego pierwiastkami, będzie:

$$-\frac{a_1}{a_0} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

$$+\frac{a_2}{a_0} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n,$$

. . . .

$$(-1)^n \frac{a_n}{a_0} = \alpha_1\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n.$$

Jeżeli przez $s_1, s_2 \ldots\ldots$ oznaczymy sumy pierwszych, drugich i t. d. potęg pierwiastków, to funkcye symetryczne s można wyrazić przez spółczynniki równania (wzory Newtona lub Girarda), a mianowicie:

$$a_0 s_1 + a_1 = 0.$$
$$a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0.$$
$$a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0.$$
. . . .
$$a_0 s_n + a_1 s_{n-1} + \ldots + na_n = 0.$$
$$a_0 s_{n+k} + a_1 s_{n+k-1} + \ldots + a_n s_k = 0; \quad (k = 1, 2 \ldots$$

Funkcye symetryczne zupełne lub funkcye alef Wrońskiego są to funkcye, które otrzymać można, podnosząc do potęgi 1-ej, 2-giej, 3-ej . . . . . i t. d. sumę pierwiastków $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots \alpha_n$ (według wzoru na potęgę wielomianu) i zastępując w rozwinięciu wszystkie spółczynniki jednościami.

Jeżeli funkcye alef. odpowiadające kolejnym wartościom $n=1, n=2$ . . . oznaczymy przez $A_1, A_2, \ldots$, to pomiędzy temi ilościami A a spółczynnikami zachodzić będą związki następujące, analogiczne do wzorów Newtona:

$$a_0 A_i + a_1 A_{i-1} + a_2 A_{i-2} + \ldots \ldots + a_i A_0 = 0.$$
$$(i = 1, 2 \ldots \ldots A_0 = 1)$$

Każda funkcya symetryczna całkowita pierwiastków równania jest funkcyą wymierną całkowitą stosunków pomiędzy spółczynnikami a a spółczynnikiem a_0 pierwszego wyrazu. To twierdzenie odpowiada następującemu:

Każda funkcya symetryczna całkowita n ilości jest funkcyą wymierną całkowitą funkcyj symetrycznych elementarnych tych n ilości.

Co do sposobów przedstawienia funkcyj symetrycznych przez funkcye elementarne, patrz Salmon, Algébre superiéure. wyd. francuskie. str. 50), por. Dickstein, Pojęcia i metody matematyki. str. 210 i dalsze.

Rozwiązawszy powyższe wzory względem ilości a lub względem ilości s otrzymujemy wzór Waringa:

$$s_i = \sum (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} \left(\frac{a_1}{a_i}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{a_2}{a_i}\right)^{\lambda_2}\ldots\left(\frac{a_n}{a_i}\right)^{\lambda_n},$$

gdzie Σ rozciąga się na wszystkie wartości całkowite dodatnie wykładników λ, czyniące zadość warunkowi:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = i.$$

Nadto:

$$\frac{a_i}{a_i} = \sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_i}}{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots i^{\lambda_i}} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_i!} s_1^{\lambda_1} s_2^{\lambda_2}\ldots s_i^{\lambda_i}.$$

gdzie $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + i\lambda_i = i$.

Analogicznie otrzymać można wzór Wrońskiego na wyrażenie funkcyi alef. a mianowicie:

$$A_i = \sum (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} \left(\frac{a_1}{a_i}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{a_2}{a_i}\right)^{\lambda_2}\ldots\left(\frac{a_n}{a_i}\right)^{\lambda_i},$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = i.$$

Jeśli we wzorach Newtona zamiast $a_0, a_1 \ldots a_n$ weźmiemy odpowiednio $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0$, a skaźniki przy ilościach s zamienimy na ujemne, otrzymamy sumy jednakowych potęg odwrotności pierwiastków.

---

§ 2.

Przekształcanie równań.

Położywszy w równaniu $f(x) = 0$, $y + \varepsilon$ zamiast x, otrzymamy równanie $F(y) = 0$, którego pierwiastki są o ε mniejsze od odpowiednich pierwiastków równania $f = 0$.

Spółczynniki funkcyi F są postaci:

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(\varepsilon).$$

Jeżeli położymy $na_0\varepsilon + a_1 = 0$, to ε wyznaczymy w ten sposób, aby równanie ze zmienną y nie miało wyrazu drugiego (t. j. z potęgi y^{n-1}).

Aby otrzymać równanie, którego pierwiastki są odwrotnościami pierwiastków równania danego, trzeba $a_0, a_1 \ldots, a_n$ zastąpić odpowiednio przez $a_n, a_{n-1} \ldots a_0$.

Przekształcenie Tschirnhausena. Niechaj będzie równanie

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0;$$

połóżmy:

$$y = p_0 + p_1 x + \ldots\ldots + p_m x^m \quad (m < n),$$

następnie rozwińmy kolejne potęgi ilości y, a w rozwinięciu ich obniżmy ich stopień względem x poniżej n przy pomocy równania danego. Otrzymamy tym sposobem:

$$y^2 = p'_0 + p'_1 x + \ldots\ldots$$
$$y^3 = p''_0 + p''_1 x + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Mamy w ten sposób n równań liniowych względem $x, x^2, \ldots x^{n-1}$. Rugując te ilości, otrzymamy równanie:

$$y^n + q_1 y^{n-1} + \ldots \ldots + q_n = 0,$$

którego spółczynniki q będą funkcyami wymiernemi ilości p i u. Za pomocą tegoż procesu elimnacyi można wyrazić x wymiernie przy pomocy y, mamy zatem rezultat następujący: Pierwiastki równania ze zmienną x i pierwiastki równania (tego samego stopnia) ze zmienną y, wyrażają się wymiernie pierwsze przez drugie, i odwrotnie. Przekształcenie to nazywa się przekształceniem Tschirnhausena.

Można, korzystając z dowolności spółczynników p, sprawić, by znikały niektóre ze spółczynników q. Gdybyśmy wszakże chcieli, aby równanie ze zmienną y było dwumiennem, to równania, jakie należałoby rozwiązać celem wyznaczenia spółczynników p, nie dałyby się w ogóle rozwiązać algebraicznie. Na tem przekształceniu oparte sę rozważania Jerrarda i Bringa (patrz Klein, Ikosaeder, str. 143).

Równanie, którego pierwiastkami są kwadraty różnic pierwiastków równania danego, t. j. $(a_i - a_j)^2$, nazywa się równaniem kwadratów różnic pierwiastków: jest ono stopnia $\frac{n(n-1)}{2}$. Spółczynniki jego są funkcyami symetrycznemi pierwiastków równania danego, a więc dają się wyrazić wymiernie przez spółczynniki tegoż. Przy pomocy metody Lagrange'a znajdujemy te spółczynniki sposobem następującym: Niechaj s_i oznacza sumę i-tych potęg pierwiastków równania danego, s'_i — sumę takichże potęg pierwiastków równania przekształconego; będzie wtedy:

$$2\, s'_i = \sum_r (-1)^r \binom{2i}{r} s_r\, s_{2i-r}\,.$$
$$(r = 0, 1, 2 \ldots 2i)$$

Znalazłszy s'_i, wyznaczymy przy pomocy wzorów Newtona spółczynniki szukane.

§ 3.

Obniżenie stopnia równania. Równanie odwrotne.

Za pomocą podstawienia, wykonanego na zmiennej x, można rozwiązanie równania danego sprowadzić niekiedy do rozwiązania równania stopnia niższego; nazywa się to obniżeniem stopnia równania.

Równanie nazywa się odwrotnem, jeżeli jego pierwiastki dają się uporządkować w pary typu $a, \frac{1}{a}$.

Spółczynniki równania odwrotnego, równo oddalone od wyrazów skrajnych, są równe (i jednego znaku).

Jeżeli równanie odwrotne jest stopnia nieparzystego, to jednym z jego pierwiastków jest $x = -1$.

Podzieliwszy pierwszą stronę takiego równania przez $x+1$, sprowadzamy je do równania odwrotnego stopnia parzystego

W równaniu odwrotnem stopnia $2n$ dzielimy stronę pierwszą przez x^n, potem kładziemy $x + \frac{1}{x} = y$, i dochodzimy tym sposobem do równania stopnia n-tego ze zmienną y. W tem przekształceniu wyrażamy przez y ilości

$$x^r + \frac{1}{x^r} = X_r,$$

obliczamy je za pomocą wzorów zwrotnych

$$X_{r+1} = y\, X_r - X_{r-1}.$$

Historya teoryi rownań jest w swych początkach historyą samej algebry. Pierwsze próby rozwiązania równań stopnia 3-go znajdujemy u Fibonacci'ego (Leonardo Pisano, Liber Abaci, 1202, 1227); po tem rozwiązanie ich istotne znalazł Scipione del Ferr o w r. 1545 (jak o tem mówi Cardano, De arte magna. 1545. Rozdz. I). Równaniem stopnia 3-go zajmowali się następnie Cardano (l. c.) i Tartaglia (Wenecya 1546). Ludwik Ferrari znalazł rozwiązanie algebraiczne równań stopnia 4-go (wspomina o tem Cardano (l. c. Rozdz. XXXIX).

Listę zupełną wszystkich dzieł dawniejszych i nowszych o teoryi równań znajdujemy na końcu cennej książki Matthiessena (Grundzüge der Algebra der litt. Gleichungen. Lipsk, 1896); tu wymienimy tylko najważniejsze w porządku chronologicznym: Vieta (Lugd. Batav. 1646). Cartesius (Leyden. 1637. Lugd. Bat. z komentarzem Schootena), Delahire (Paryż 1679). Tschirnhausen (Acta Erud. Lipsk II. 1683). Halley (Phil. Trans. 1687). Roberval (Mém. de Paris VI. 1693), Rolle Algebra, Paryż 1690), Mém. de Paris 1708. 1709, 1711. Nicole (tamże. 1738. 1741. 1743), Euler (Comm. Petr 1739. Novi Comm. Petr. IX. XIV, Mém. de Berl. 1764 etc), Bezout (Mém. de Paris 1762, 1764. 1765. 1768. Théorie des équat. Paryż 1779), Waring Miscell. analyt. Meditat. alg.. Cantabrigiae 1762—1770), Lagrange (Traite de la résolut. des équ. Paryż 1798, Mém. de Berlin od 1768 - 1773), Vandermonde (Mém. de Paris. 1773—1774). Ruffini (Teoria generale delle equaz. Bologna 1798, Mem Soc. Ital 1803—1805, Mem.Ist. Nazionale 1806 i t d.). Budan (Paryż 1807), Wroński (1827. 1847). Fourier (Paryż 1831), Gauss, (Auflösung der binom. Gleichung. Gött. Abh. 1849), Abel (Oeuvres. II), Galois (Journ. de Liouville, XI, 1846). Cauchy (Sur la résol des équ. numériques etc., Paryż 1829. Comptes rendus 1836—1840 i t. d.), Sturm Sur la résolution des équ. numer, Paryż 1835). Do tego trzeba dołączyć wszystkie prace z teoryi niezmienników. o której mówimy w rozdziale XII.

Specyalne dzieła. odnoszące się do teoryi równań. są: cytowane wyżej dzieło Matthiesena. dalej: Petersena (Kopenhaga, 1878. przekłady włoski i francuski). Todhundtera; zaliczyć tu należy ogólne dzieła, obejmujące algebrę wyższą, a mianowicie: Serret, Bertrand, Cesàro, Capelli, Weber. Netto, W języku polskim mamy Algebrę wyższą Wł. Zajączkowskiego (Lwów 1884), oraz „Rozwiązywanie równań liczebnych“ J. Sochockiego (Warszawa, 1884).

§ 3.

Wypadkowe lub rugowniki: wyróżniki.

Niechaj będą dwa równania:

$$\varphi = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

$$\psi = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby one miały przynajmniej jeden pierwiastek wspólny, jest znikanie funkcyi wymiernej całkowitej spółczynników, którą nazywamy wypadkową lub rugownikiem dwu równań danych.

Wypadkowa jest stopnia n-tego względem spółczynników funkcyi φ, stopnia zaś m-tego względem spółczynników funkcyi ψ.

Wypadkowej można dać postać wyznacznika rzędu $n+m$:

$$R = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2 & \ldots \\ 0, & a_0, & a_1 & \ldots \\ \ldots & & & \\ b_0, & b_1, & b_2 & \ldots \\ 0, & b_0, & b_1 & \ldots \\ \ldots & & & \end{vmatrix}.$$

Do takiej postaci dochodzimy metodą Eulera lub metodą dialityczną Sylvestera.

Za pomocą metody Bezouta dochodzi się do wypadkowej w postaci wyznacznika rzędu n-tego, gdzie n jest wyższy ze stopni dwu równań danych.

Jeżeli położymy dla krótkości

$$(ij) = a_i b_j - a_j b_i,$$

to w przypadku $m = n$, otrzymujemy:

$$B = \begin{array}{llllr} (10), & (20), & (30), & \ldots\ldots & (n0) \\ (20), & (30)+(21), & (40)+(31), & \ldots\ldots & (n1) \\ (30), & (40+31), & (50)+41)+(32), & \ldots\ldots, & n2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n0), & (n1), & (n2), & \ldots\ldots & (n, n-1) \end{array}$$

Jeżeli $m < n$, to pierwsze m wierszy pozostają bez zmiany, pozostałe zaś $n-m$ tworzymy, przy pomocy spółczynników równania stopnia niższego sposobem następującym:

$$\begin{array}{llll} a_0, & a_1, & a_2 & \ldots\ldots\ldots \\ 0, & a_0, & a_1, & \ldots\ldots\ldots \\ 0, & 0, & a_0 & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Gdy „charakterystyką“ wyznacznika R jest $m + n - k$, t. j. gdy wszystkie minory rzędu wyższego niż $m + n - k$ są zerami, minory zaś rzędu $m + n - k$ nie są wszystkie zerami, wtedy równania mają k pierwiastków wspólnych.

Jeżeli $R = 0$, to dopełnienia algebraiczne elementów któregokolwiek wiersza, o ile nie są zerami, są proporcyonalne do potęg kolejnych tej samej zmiennej.

Warunki konieczne i dostateczne na to, by równania miały p pierwiastków wspólnych wyrażamy w ten sposób: macierz wyznacznika B ma charakterystykę $n - p$. (Twierdzenie Darboux'a).

Nazywamy wyróżnikiem równania danego funkcyę wymierną i całkowitą jego spółczynników, która przyrównana do zera, wyraża warunek konieczny i dostateczny na to, aby równanie miało przynajmniej dwa pierwiastki równe.

Kładąc

$$s_p = a_1^p + a_2^p + \cdots \cdots + a_n^p,$$

gdzie a są pierwiastki równania, otrzymujemy wyraźnik w postaci

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \ldots\ldots, & s_{n-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & \ldots, & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1}, & s_n, & s_{n+1}, & \ldots, & s_{2n-1} \end{vmatrix},$$

gdzie ilości s, jak wiadomo, wyrazić można za pomocą spółczynników równania. W funkcyi pierwiastków wyróżnik przedstawia się tak:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1, & \ldots, & 1 \\ a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \\ a_1^2, & a_2^2, & \ldots, & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1}, & a_2^{n-1} & \ldots\ldots, & a_n^{n-1} \end{vmatrix}^2.$$

Wyróżnik jest funkcyą wymierną całkowitą stopnia $2n-2$ spółczynników równania stopnia n-tego.

W funkcyi spółczynników wyróżnik wyraża się tak:

$$D = \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & \ldots \\ 0, & a_0, & a_1, & \ldots\ldots \\ 0, & 0, & \ldots a_0, & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n, & (n-1)a_0, & (n-2)a_1 & \ldots \\ 0, & na_0, & (n-1)a_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Iloczyn wszystkich sum $a_i + a_j$ zwykle nazywa się geminantem równania. Geminant wyraża się wymiernie przez spółczynniki równania. Przyrównany do zera wyraża on warunek na to, aby równanie miało dwa pierwiastki równe i znaku przeciwnego.

Inne własności wypadkowych lub rugowników i wyróżników podajemy w rozdziale XII-ym o niezmiennikach.

Wypadkową otrzymali po raz pierwszy Euler, Bezout i Lagrange. Jacobi zastosował w tym celu wyznaczniki. Listę prac, odnoszących się do tego przedmiotu, podaje E. Pascal, „Determinanti". Pracą klasyczną o rugownikach jest rozprawa Gordana (Math Ann III).

Rugowniki i wyróżniki po za równaniami, które spełniają na zasadzie własności niezmienniczej, czynią zadość pewnym równaniom różniczkowym. Równania te znalazł Brioschi (Crelle, LIII) Patrz Faà di Bruno, Crelle XIV i Binäre Formen, Lipsk 1881).

§ 4.

Układy równań liniowych.

Niechaj będzie układ m równań pomiędzy n niewiadomemi:

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \;.\;.\;.\; + a_{1n}\,x_n = y_1,$$
$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \;.\;.\;.\; + a_{mn}\,x_n = y_n.$$

Macierz wszystkich spółczynników a nazywa się macierzą układu. Załóżmy, że wszystkie wyznaczniki rzędu $p+1$, zawarte w tej macierzy są zerami (są zerami tedy i wszystkie wyznaczniki rzędu wyższego), nie są zaś zerami wszystkie wyznaczniki rzędu p. Liczba p nazywa się charakterystyką macierzy.

Aby macierz miała charakterystykę p, jest koniecznem i dostatecznem, by miała przynajmniej jeden nierówny zeru wyznacznik A rzędu p-tego i aby były zerami wszystkie wyznaczniki rzędu $p+1$, które tworzą się z A przez dopisanie nowego wiersza i nowej kolumny.

Niechaj charakterystyką macierzy układu danego będzie p, i niechaj nierówny zeru wyznacznik A rzędu p-tego, w niej zawarty, będzie:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots & , a_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p_1}, & \cdots & a_{p_1 p} \end{vmatrix}$$

Aby równania dane nie były ze sobą sprzecznemi, jest koniecznem i dostatecznem, by były zerami wszystkie wyznaczniki Δ_r.

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots & , a_{1,p}, & y_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1}, & \cdots & , a_{pp}, & y_p \\ a_{r1}, & \cdots & , a_{rp}, & y_r \end{vmatrix}.$$

W tym przypadku układ m równań danych sprowadza się do układu p pierwszych z pomiędzy tych równań.

W innej postaci można to twierdzenie wypowiedzieć tak:

Aby równania dane były zgodnemi ze sobą, t. j. aby miały jedno lub więcej rozwiązań wspólnych, jest koniecznem i dostatecznem, by macierz spółczynników i macierz

$$\begin{Vmatrix} a_{\cdot 1}, & \cdots & , a_{1,n}, & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & \cdots & , a_{m,n}, & y_m \end{Vmatrix}$$

miały jednę i tę samą charakterystykę (Capelli).

Dla spółistnienia $n+1$ równań pomiędzy n niewiadomemi potrzeba, by wyznacznik spółczynników i wyrazów znanych był zerem.

Wartości $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, czyniące zadość równaniom danym, wyrażają się za pomocą wzorów (Cramera)

$$x_i = \frac{A_i}{A},$$

gdzie A_i jest wyznacznikiem, który otrzymujemy z wyznacznika A, znosząc jego kolumnę i-tą i pisząc zamiast jej elementów wyrażenia:

$$y'_1 = y_1 - a_{1\,p+1}\, x_{p+1} - \;.\;\;.\;\;.\; - a_{1n}\, x_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y'_p = y_p - a_{p\,p+1}\, x_{p+1} - \;.\;\;.\;\;.\; - a_{pn}\, x_n\,.$$

Jeżeli $p=n$, wtedy ilości y' są samemi ilościami y, a strona druga będzie niezależna od ilości x. W tym przypadku na $x_1, x_2 \ldots . x_n$ otrzymujemy jedyny układ wartości, czyniących zadość równaniom.

Jeżeli $p < n$, wtedy układ równań $p-n$ rozwiązań.

Jeżeli strony drugie równań $y_1, y_2, \ldots y_n$ są wszystkie zerami, otrzymujemy równanie jednorodne.

Aby układ równań jednorodnych miał rozwiązanie różne od rozwiązania oczywistego $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, jest koniecznem, by charakterystyka macierzy spółczynników, t. j. p była mniejsza od n.

Aby układ n równan jednorodnych o n niewiadomych miał rozwiązania wszystkie równe zeru, powinien wyznacznik układu być zerem.

Jeżeli mamy $n-1$ równań liniowych pomiędzy n niewiadomemi o macierzy, której charakterystyką jest $n-1$, to wartości niewiadomych są proporcyonalne do minorów rzędu $n-1$. w tej macierzy zawartych.

Nie może być więcej nad n równań liniowych jednorodnych i niezależnych pomiędzy n niewiadomemi.

§ 6

Rozwiązywanie równań.

Równanie stopnia trzeciego. Równanie

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

po podstawieniu

$$x = y - \frac{1}{3} a_1 .$$

zamienia się na równanie:

$$y^3 + py + q = 0$$

Jeżeli:

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. to dwa pierwiastki będą urojone sprzężone, jeden zaś rzeczywisty:

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$. wszystkie pierwiastki są rzeczywiste;

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$. dwa pierwiastki są równe.

Pierwiastki wyrażają się za pomocą wzoru (który podał Tartaglia):

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,.$$

Należy tu zauważyć, że każdy z pierwiastków sześciennych ma trzy wartości i że należy tak kombinować wartości jednego pierwiastka z wartościami drugiego, aby ich iloczyn był rzeczywisty i równy $-\frac{p}{3}$.

Wzór powyższy jest niedogodny z tego względu, że daje pierwiastki rzeczywiste równania (w przypadku, gdy wszystkie są rzeczywiste) pod postacią urojoną (t. zw. przypadek nieprzywiedlny). Jest on jeszcze niedogodny i dla tego, że daje często pod postacią niewymierną pierwiastki wymierne, które zresztą, jak to zobaczymy niżej, możemy otrzymać i na innej drodze.

Połóżmy:

$$-\frac{q}{2} = \varrho \cos\theta, \qquad \varrho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}\,,$$

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\varrho^2 \sin^2\theta,$$

wtedy pierwiastki równania wyrażą się sposobem następującym:

$$y_1 = 2\,\varrho^{\frac{1}{3}} \cos\frac{\theta}{3}\,,$$

$$y_2 = 2\,\varrho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$y_3 = 2\,\varrho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Inne metody rozwiązania równania stopnia trzeciego podali: Lagrange (Oeuvres, VIII), Eisenstein (Crelle, XXVII), Eisenlohi (tamże XLII). Clausen (Astron. Nachrichten N. 446), Grunert (Archiv, II str. 446), Reidt (Zeitschrift Schlömilcha. XVII), Cayley (patrz prace Gordana i Clebscha o niezmiennikach). Weichold (Americ. Journal, I) i t. d.

Równanie stopnia 4-go. Jeżeli w równaniu

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0.$$

położymy $x = y - \frac{1}{4} a_1$. otrzymamy:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Rozwiążmy za pomocą wzorów poprzedzających równanie stopnia 3-go (rozwiązujące):

$$z^3 + \frac{p}{2} z^2 + \frac{p^3 - 4r}{16} z - \frac{q^2}{64} = 0$$

i niechaj z_1. z_2, z_3 będą trzy pierwiastki tego równania. Rozpatrzmy wartości $\pm \sqrt{z_1}$. $\pm \sqrt{z_2}$, $\pm \sqrt{z_3}$ i nadajmy każdemu z tych pierwiastników znak + lub —, tak, aby iloczyn wszystkich trzech pierwiastników był równy $-\frac{q}{8}$. Można uskutecznić to czterema różnemi sposobami: jeżeli mianowicie Z_1, Z_2, Z_3 są wartościami pierwiastników, to warunkowi

$$Z_1 Z_2 Z_3 = -\frac{q}{8},$$

możemy oczywiście zadosć uczynić, dobierając, prócz powyższej, kombinacye:

$$Z_1, -Z_2, -Z_3; \; -Z_1, Z_2, -Z_3; \; -Z_1, -Z_2, Z_3.$$

Czterema pierwiastkami równania danego będą:

$$\alpha_1 = Z_1 + Z_2 + Z_3; \qquad \alpha_2 = Z_1 - Z_2 - Z_3;$$

$$\alpha_3 = -Z_1 + Z_2 - Z_3; \quad \alpha_4 = -Z_1 - Z_2 + Z_3.$$

Inne metody podali Lagrange (Oeuvres, VIII), Euler (Comm. Petrop. VI), Ampère (Archiv Grunerta. II), Aronhold (Crelle. LII), Eisenstein (tamże XXVII). Hermite (Équations modulaires. Paryż 1859). Matthiessen (Zeitschrift Schlömilcha. VIII). Faàdi Bruno (Amer. Journ. III). Rozwiązanie, oparte na teoryi niezmienników, znaleść można w pracach Clebscha i Gordana o niezmiennikach.

Równania stopnia 5-go i 6-go. Równanie stopnia 5-go (ogólne) nie daje się rozwiązać algebraicznie: rozwiązujemy je przy pomocy funkcyj eliptycznych. Rozwiązanie to po raz pierwszy podał Hermite.

Równaniem stopnia 5-go zajmowali się: Wroński (Canon de logarithmes 1827. Wydanie polskie. Warszawa 1890): Jacobi (Crelle, III, XIII): Cayley (Phil. Trans. CLI), Galois (Journ. de Liouv. XI, str. 412), Betti (Ann. di Tortolini 1853), Hermite (Compt. rend. 1858. t. XLVI). Brioschi (Annali di Tortolini 1858). Kronecker (Compt. rendus 1858, t. XLVI. Berlin. Monatsb. 1861. Crelle LIX), Joubert (Compt. rend. 1859, t. XLVIII), Hermite (tamże. 1866), Roberts (Annali di mat. (2). I), Brioschi (Comp. rend 1866, Ann. di mat. (2), I, 1867, w dodatku do przekładu dzieła Cayleya o funkcyach eliptycznych. Medyolan 1880, Comptes rendus LXIII, LXXIII. LXXX. Acc. Napol. 1866), Klein (Ikosaeder, Lipsk 1884). W ostatniem dziele znajduje się rys historyczny zagadnienia o rozwiązaniu równania stopnia 5-go.

Równanie stopnia 6-go nie daje się rozwiązać i za pomocą funkcyj eliptycznych. Potrzebne są tu funkcye hypereliytyczne.

Do tego przedmiotu odnoszą się prace: Maschke-Brioschi (Acc. Lincei, 1888), Brioschi (Acta math. XII, 1888). Dawniejsze rozwożania są: Brilla (Math. Ann. XX). Cole'go (Amer. Journ. VIII, 1866).

O równaniach stopnia 7-go i 8-go istnieją badania Kleina. Nöthera i Gordana (Math. Ann. XV. XX).

§ 3

Równania dwumienne.

Każde równanie typu

$$x^m - A = 0,$$

t. j. równanie dwumienne można za pomocą łatwego przekształcenia sprowadzić do postaci

$$y^n - 1 = 0.$$

Jeżeli a jest pierwiastkiem równania dwumiennego tego typu, to i a^m (gdzie m jest liczbą całkowitą jakąkolwiek), będzie pierwiastkiem tego równania.

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, a zaś różnym od jedności pierwiastkiem równania $y^n - 1 = 0$, to $a, a^2, a^3 \ldots a^n$ są n pierwiastkami tego równania; jeżeli n nie jest liczbą pierwszą, to pierwiastek a, mający tę własność, nazywa się pierwiastkiem pierwotnym. Istnieje $\varphi(n)$ pierwiastków pierwotnych: $\varphi(n)$ jest liczbą liczb pierwszych mniejszych od n i względem n pierwszych.

Rozwiązanie równania $x^n - 1 = 0$, gdzie n jest iloczynem różnych liczb pierwszych zależy od rozwiązania tejże postaci równań, w których wykładniki ilości x są właśnie temi liczbami pierwszemi.

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to pierwiastki równania dają się przedstawić za pomocą wzoru trygonometrycznego:

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},$$

gdzie k przyjmuje wartości $0, 1, 2 \ldots n-1$.

Pierwiastki równania dwumiennego, przedstawione geometrycznie, odpowiadają punktom podziału podziału okręgu na n części równych i dlatego to równanie dwumienne $x^n - 1 = 0$ nazywamy też **równaniem podziału koła.** Wykreśliwszy geometrycznie pierwiastki, uskuteczniamy podział okręgu koła.

Równanie

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \; . \; . \; . \; + x + 1 = 0,$$

gdzie n jest liczbą pierwszą, jest równaniem nieprzywiedlnem, t. j. nie posiada czynników wymiernych.

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to dla rozwiązania równania $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$ rozkładamy liczbę $n-1$ na czynniki pierwsze $p_1, p_2 \ldots$ i rozwiązujemy równania

$$z^{p_1} - 1 = 0, \quad z^{p_2} - 1 = 0, \; . \; . \; . \; . \; .$$

Równanie dwumienne daje się rozwiązać algebraicznie.

Jeżeli $n-1$ jest potęgą liczby 2, to równanie dwumienne daje się rozwiązać za pomocą samych równań stopnia drugiego. W tym przypadku podział okręgu można uskutecznić za pomocą linijki i cyrkla.

Równanie $x^3 - 1 = 0$ ma pierwiastki:

$$1, \qquad -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Równanie $x^4 - 1 = 0$ ma pierwiastki:

$$1, \; -1, \; i, \; -i.$$

Równanie $x^5 - 1 = 0$ ma pierwiastki:

$$1, \quad \frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$

Wartości pierwiastków w przypadku $n=17$ i $n=19$ podał Gauss (Werke I). Więcej szczegółów o tym przedmiocie znaleść można w dziele Bachmanna „Die Lehre von der Kreistheilung" Lipsk 1872. w tym dziele znajdujemy też konstrukcye geometryczne, Konstrukcye dla $n=17$ podali: v Staudt (Crelle XXIV i Schroter (tamże LXXV). Dla $n=257$ część analityczną rozwinął Richelot (Crelle IX). geometryczną E. Pascal (Acc. Napol. 1887). Inne przypadki patrz: E Pascal (Giorn. di Batt. XXV), Amaldi (tamże XXX).

§ 8.

Pierwiastki wielokrotne równania.

Aby liczba a była pierwiastkiem r —krotnym równania $f(x)=0$, jest koniecznem i dostateczem, by a było pierwiastkiem samego równania oraz $r-1$ pierwszych jego równań pochodnych (patrz Rozdz VI).

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby równanie nie miało pierwiastków wielokrotnych, jest, aby największy wspólny dzielnik funkcyi $f(x)$ i jej pierwszej pochodnej był ilością stałą.

Jeżeli podzielimy funkcyę $f(x)$ przez największy wspólny dzielnik funkcyi danej f i jej pochodnej f', otrzymamy funkcyę, której pierwiastki są równe co do wartości pierwiastkom funkcyi f, lecz są wszystkie pojedyńczemi.

Oznaczmy przez D_1 największy wspólny dzielnik funkcyi f i jej pochodnej f', przez D_2 -- największy wspólny dzielnik funkcyi D_1 i jej pochodnej D'_1 : będzie:

$D_2 =$ stalej jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcya f nie miała pierwiastków trójkrotnych, it. d.

Jeżeli utworzymy ilorazy

$$\frac{f}{D_1} = \varphi_1, \quad \frac{D_1}{D_2} = \varphi_2, \quad \frac{D_2}{D_3} = \varphi_3 \ldots.$$

to równania

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = 0, \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = 0, \ldots..$$

będą miały odpowiednio jako pierwiastki pojedyńcze: wszystkie pierwiastki pojedyńcze danego, wszystkie pierwiastki podwójne, wszystkie pierwiastki potrójne it. d.

§ 9.

Pierwiastki rzeczywiste i zespolone równania.

Pomiędzy kolejnemi pierwiastkami rzeczywistemi równania $f = 0$ zawiera się nieparzysta liczba pierwiastków równania pochodnego $f' = 0$. (Twierdzenie Rollego.)

Pomiędzy dwoma kolejnemi pierwiastkami równania $f'=0$ nie może się zawierać więcej nad jeden pierwiastek równania $f=0$.

Jeżeli wszystkie pierwiastki równania $f=0$ są rzeczywiste, to toż samo zachodzi i dla $f'=0$.

Jeżeli wyrazy równania są uporządkowane według ich stopnia, to mówimy, że dwa wyrazy następujące po sobie dają zmianę lub następstwo znaków, stosownie do tego, czy są znaku tego samego czy przeciwnego.

W każdem równaniu $f(x)=0$ liczba pierwiastków rzeczywistych dodatnich nie przewyższa liczby zmian znaków funkcyi $f(x)$, liczba zaś pierwiastków ujemnych nie przewyższa liczby zmian znaku funkcyi $f(-x)$. (Twierdzenie Descartes'a.)

Nadmiar liczby zmian znaków po nad liczbę pierwiastków dodatnich równania $f(x)=0$ jest zawsze parzysty.

Jeżeli $f(x)$ ma tylko jednę zmianę, to $f(x)=0$ ma tylko jeden pierwiastek dodatni.

Równanie, mające wszystkie pierwiastki rzeczywiste, ma tyle pierwiastków dodatnich, ile ma zmian znaków.

Równanie posiada przynajmniej $2k$ pierwiastków zespolonych, jeżeli brak w nim $2k$ wyrazów kolejnych, lub jeżeli brak ich $2k-1$ pomiędzy wyrazami jednego znaku.

Liczba pierwiastków rzeczywistych równania $f(x)=0$, większych od liczby dodatniej a nie przewyższa liczby zmian, jaki daje dla $x=a$ szeregu wielkości

$$\begin{aligned}
f_1 &= a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}, \\
f_2 &= a_0x^{n-2} + a_1x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_{n-1} &= a_0x + a_1, \\
f_n &= a_0,
\end{aligned}$$

i w każdym przypadku różnica pomiędzy temi dwiema liczbami jest parzysta. (Twierdzenie Laguerre'a.)

Liczba pierwiastków rzeczywistych równania $f(x)=0$ pomiędzy $x=a$ i $x=b$ $(a<b)$ nie przewyższa liczby zmian, straconych w szeregu $f, f', f'', f''', \ldots$ (kolejnych pochodnych) w przejściu od $x=a$ do $x=b$; w każdym przypadku różnica pomiędzy temi dwiema liczbami jest parzysta. (Twierdzenie Budana.)

Jeżeli podzielimy funkcyę f przez jej pierwszą pochodną f' i resztę otrzymaną, po zmienieniu jej znaku, oznaczymy przez f_2; następnie podzielimy f' przez f_2 i resztę, po zmienieniu jej znaku, oznaczymy przez f_3 i t. d.; wtedy szereg

$$f, f', f_2, f_3, \ldots\ldots$$

nazywa się krótko szeregiem Sturma.

Liczba pierwiastków rzeczywistych równania $f(x)=0$ pomiędzy $x=a$ i $x=b$ jest dokładnie równa liczbie zmian znaku, straconych w szeregu Sturma w przejściu od $x=a$ do $x=b$. (Twierdzenie Sturma).

Jeżeli położymy $a=-\infty$, $b=+\infty$, będziemy mieli liczbę wszystkich pierwiastków rzeczywistych.

Jeżeli $s_0, s_1, s_2, \ldots$ oznaczają sumy jednakowych potęg pierwiastków i położymy:

$$\sigma_1 = s_0, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}, \ldots\ldots$$

to będziemy mieli twierdzenie:

Liczba par pierwiastków urojonych równania $f(x)=0$, pozbawionego pierwiastków wielokrotnych, równa się liczbie zmian znaku w szeregu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots\ldots$

Warunki konieczne i dostateczne rzeczywistości wszystkich pierwiastków równania algebraicznego o spółczynnikach rzeczywistych są:

$$\sigma_2 > 0, \quad \sigma_3 > 0 \quad . \quad . \quad . \quad \sigma_n > 0.$$

---

§ 10.

Pierwiastki wymierne równania.

Aby liczba całkowita a mogła być pierwiastkiem równania o spółczynnikach całkowitych, jest koniecznem i dostatecznem, by ta liczba była dzielnikiem ostatniego spółczynnika a_n; dalej aby, jeżeli p_1 jest ilorazem tego dzielenia, liczba a dzieliła spółczynnik a_{n-2} powiększony o p_2, gdzie p_2 jest ilorazem poprzedniego dzielenia i t. p.

Każde równanie, w którem spółczynnik przy najwyższej potędze x nie jest jednością, nie ma pierwiastków ułamkowych wymiernych.

Jeżeli równanie o spółczynnikach wymiernych ma tylko jeden pierwiastek k-krotny, to pierwiastek ten nie może być wymierny.

§ 11.

Przybliżone wyznaczanie pierwiastków rzeczywistych równania.

Granicą wyższą pierwiastków rzeczywistych równania nazywamy liczbę większą od każdego z pierwiastków. Analogicznie określamy *granicę niższą*.

Jeżeli przy $x=a$ wszystkie funkcye $f, f', f''\ldots$ są dodatniemi, to liczba ta jest granicą wyższą pierwiastków równania $f=0$ (Newton).

Celem wyznaczenia granicy wyższej wyznaczamy liczbę całkowitą, bezposrednio wyższą od pierwiastka równania $f^{(n-1)}=0$; tę wartość podstawiamy w funkcyi $f^{(n-2)}$ i, jeżeli rezultat jest ujemny, dodajemy do niego tyle jedności, aby otrzymać liczbę dodatnią. Dalej tak postępując, dochodzimy do liczby całkowitej, przy której wszystkie pochodne są dodatnie.

Inne granice wyższe otrzymujemy za pomocą twierdzeń następujących:

Jeżeli a_t jest wartość bezwzględna spółczynnika ujemnego, mającego największą wartość liczebną, wtedy granica wyższa wyraża się tak:

$$L = 1 - \frac{a_t}{a_0} \qquad \text{(Maclaurin).}$$

Jeżeli a_s jest pierwszy spółczynik ujemny, to granicą wyższą jest:

$$L = 1 + \sqrt{-\frac{a_t}{a_0}} \qquad \text{(Lagrange)}$$

Jeżeli a_r jest największy z pomiędzy spółczynników, poprzedzających pierwszy spółczynnik ujemny, to granica wyższa jest:

$$L = 1 + \sqrt[s-r]{+\frac{a_t}{a_r}} \qquad \text{(Tillot).}$$

Przy pomocy twierdzenia Sturma można rozdzielić pierwiastki, t. j. znaleść przedziały, wewnątrz których zawiera się jeden tylko pierwiastek rzeczywisty równania.

Niechaj a i b będą dwa krańce, pomiędzy któremi zawiera się jeden pierwiastek rzeczywisty równania: niechaj a będzie wartością, przy której $f(a)$ i $f''(a)$ są jednego znaku.

Jeżeli utworzymy kolejno ilości:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)},$$

to liczby a_{n+1} będą szybko dążyły do wartości pierwiastka funkcyi f, zawartego pomiędzy a i b (Twierdzenie Newtona).

Jeżeli utworzymy kolejno ilości

$$b_{n+1} = \frac{b_n\, f(a_n) - a_n\, f(b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}, \quad (a_0 = a, \quad b_0 = b),$$

to liczby b_{n+1} będą również dążyły do wartości pierwiastka, zawartego pomiędzy a i b. Jeżeli się zatrzymamy na danym skaźniku n, to błąd popełniony będzie mniejszy od $a_n - b_n$.

Co do metod przybliżonego obliczania, opartych na rozważaniach geometrycznych, patrz Catalan, Mélanges math. I, str. 79 Metoda Lagrange'a (Mem. Berl. 1769, Oeuvres, II. III) daje rozwinięcie pierwiastka na ułamek ciągły. Istnieją metody Eulera (Calcul. diff. II, 1755. § 234) Wrońskiego 1827, 1847 (patrz S. Dickstein, „O metodzie teleologicznej rozwiązywania równań", Rozprawy Akad. Krak. XVIII, XIX), W. Krauze, (Prace mat.-fiz. III). Cauchy'ego

(Oeuvres, IV, p. 41—99), Jacobi'ego (Crelle VI, str. 257), Heisa (Sammlung v. Beisp. und Aufgaben aus. der allgem. Arithmetik und Algebra Kolonia 1882, § 102).

---

§ 12.

Teorya Galois'a.

Załóżmy, że istnieje związek pomiędzy pierwiastkami równania $x_1, x_2, \ldots x_n$, lub inaczej, że można utworzyć funkcyę wymierną całkowitą pierwiastków, której wartość jest zerem lub ilością znaną. W takim przypadku równanie nazywa się s p e c y a l n e m; grupa zaś, należąca do funkcyi pierwiastków, nazywa się g r u p ą r ó w n a n i a (patrz wyżej Rozdział II).

Grupa równania ogólnego jest grupą s y m e t r y c z n ą.

Równanie nazywa się n i e p r z y w i e d l n e m, jeżeli nie posiada czynników, których spółczynniki wyrażają się wymiernie przez spółczynniki samego równania.

G r u p a r ó w n a n i a n i e p r z y w i e d l n e g o j e s t p r z e c h o d n i ą, i o d w r o t n i e.

R z ą d g r u p y r ó w n a n i a n i e p r z y w i e d l n e g o s t o p n i a n, k t ó r e g o p i e r w i a s t k i s ą f u n k c y a m i w y m i e r n e m i j e d n e g o z n i c h, r ó w n a s i ę n, i o d w r o t n i e.

Utwórzmy funkcyę

$$\zeta = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots + a_n x_n$$

o n spółczynnikach nieoznaczonych $a_1, a_2 \ldots a_n$, w której $x_1, x_2, \ldots x_n$ są pierwiastkami równania. Jeżeli zastosujemy do tej funkcyi wszystkie r podstawień grupy, otrzymamy r wartości

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots\ldots \zeta_r;$$

równanie $F(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)\ (\zeta - \zeta_2)\ \ldots\ (\zeta - \zeta_r) = 0$

nazywa się **równaniem rozwiązującem Galois'a** dla równania danego.

Wszelkie pierwiastki równania $F=0$ są funkcyami wymiernemi jednego z nich; za ich pomocą można wyrazić wszystkie pierwiastki równania danego $f(x)=0$.

W ogólności rozwiązującem nazywamy każde równania. za pomocą pierwiastków którego wyrazić można pierwiastki danego.

Równanie ogólne stopnia n $(n>4)$ można rozwiązać przez rozwiązanie równania rozwiązującego stopnia wyższego niż 2, lecz nie istnieje równanie rozwiązujące stopnia niższego od n i większego od 2. Jeżeli n jest różne od 6. to nie ma równania rozwiązującego stopnia n. różnego od równania danego $f(x)=0$. Jeżeli $n=6$ istnieje równanie rozwiązujące stopnia 6-go. Równanie stopnia 5-go posiada rozwiązujące stopnia 6-go; równania stopnia $n\leqslant 4$ mają rozwiązujące stopni niższych.

Niechaj G będzie grupą równania; utwórzmy szeregi składające G, t. j. zbudujmy szereg podgrup $G, I, I' \ldots$, z których każda następująca jest podgrupą charakterystyczną największą poprzedzającej; jeżeli rzędami tych podgrup są r, $\frac{r}{r_1}$, $\frac{r}{r_1 r_2}$, . . . , to rozwiązanie równania $f=0$ zależeć będzie od równań, których grupy są pojedyńczemi i odpowiednio rzędów $r_1, r_2, \ldots$.

Równanie ogólne stopnia $n>4$ nie daje się rozwiązać algebraicznie. (Twierdzenie Ruffini'ego i Abela).

Historyę tego twierdzenia czytamy w pracy Burkhardta (Zeitsch. f. Math. und Physik XXXVII, 1892 lub Annali di matem. 1894, przekład Pascala).

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby równanie stopnia $n > 4$ dało się rozwiązać za pomocą pierwiastników (algebraicznie) jest, by czynniki składu grupy były wszystkie liczbami pierwszemi.

Równaniami abelowemi nazywamy takie równania nieprzywiedlne, których każdy pierwiastek daje się wyrazić wymiernie za pomocą innego, a symbole tych funkcyj wymiernych są przemiennemi, t. j. jeżeli

$$x_i = R_i(x_1) \quad , \quad x_j = R_j(x_1) \,,$$

to będzie:

$$R_i\left(R_j(x_1)\right) = R_j\left(R_i(x_1)\right).$$

Równania takie dają się rozwiązać algebraicznie.

Równania typu $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, (t. j. równania podziału koła) są równaniami abelowemi

Podstawienia grupy równania abelowego są wzajem przemiennemi.

Rozwiązanie równania abelowego nieprzywiedlnego stopnia $n = p^\alpha q^\beta \ldots$, gdzie p, $q \ldots$ są liczby pierwsze, sprowadza się do rozwiązania równań abelowych stopni $p^\alpha, q^\beta, \ldots\ldots$

Rozwiązanie równania abelowego nieprzywiedlnego stopnia p^α, gdzie p jest liczbą pierwszą, sprowadza się do rozwiązania równań abelowych, których grupy zawierają tylko podstawienia rzędu p (nie licząc podstawienia 1).

Rozwiązanie równania abelowego nieprzywiedlnego stopnia p^α, którego grupa zawiera tylko podstawienia rzędu p, sprowadza się do rozwiązania α równań abelowych nieprzywiedlnych rzędu p.

Większe szczegóły o niniejszej teoryi znaleść można w Rozdziale II i w traktatach Jordana i Netto.

ROZDZIAŁ IV.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY.

§ 1.

Nieskończonostki i nieskończoności.

Zmienna, której granicą jest zero, nazywa się **nieskończonostką** lub **ilością nieskończenie małą**; **zmienna**, której granicą - nieskończoność nazywa się **nieskończonością** lub **ilością nieskończenie wielką**.

Niechaj α i β będą dwiema nieskończonostkami;

jeżeli $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, mówimy, że α jest rzędu wyższego niż β;

jeżeli $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, mówimy, że α jest rzędu niższego niż β;

jeżeli $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A$ (skończone), mówimy, że α i β są tego samego rzędu.

Dla nieskończoności utrzymuje się przypadek trzeci, a dwa pierwsze przypadki zmieniają się jeden na drugi.

Jeżeli α jest rzędu wyższego niż β, zaś $\lim \frac{\alpha}{\beta^n}$ jest ilością skończoną, wtedy mówimy, że α jest rzędu n-tego względem β. n może być liczbą dodatnią jakąkolwiek, całkowitą lub niecałkowitą.

Jeżeli a jest nieskończonostką lub nieskończonością, to pozostanie nią, nie zmieniając swego rzędu, i po pomnożeniu lub podzieleniu przez jakąkolwiek ilość skończoną różną od zera.

Suma algebraiczna skończonej liczby nieskończonostek jest nieskończonostką, której rząd jest równy rzędowi nieskończonostki rzędu najniższego.

Jeżeli nieskończonostka a jest sumą algebraiczną skończonej liczby nieskończononostek, t. j. jeżeli

$$a = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_m,$$

gdzie a_1 niechaj będzie rzędu najniższego, to można zawsze znaleść takie otoczenie wartości granicznych tych zmiennych, od których zależą te nieskończonostki, że dla każdego punktu tego otoczenia znak ilości a będzie taki sam, jak znak ilości a_1.

Granica stosunku dwóch nieskończonostek nie zmienia się, jeżeli dodamy do nich nieskończonostki rzędów odpowiednio wyższych.

Analogiczne twierdzenia istnieją dla nieskończoności, potrzeba tylko wyraz: niższy zastąpić wyrazem wyższy, wyraz najwyższy — wyrazem najniższy.

Jeżeli różnica dwóch nieskończoności dąży do granicy skończonej, to obie są tego samego rzędu i granicą ich stosunku jest jedność.

Mówimy, że szereg nieskończony nieskończonostek

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_m, \ldots$$

dążą jednostajnie do zera, jeżeli dawszy sobie σ dowolnie małe, możemy znaleść takie otoczenie wartości zmiennych, od których te nieskończonostki zależą, że dla wszystkich punktów otoczenia **wszystkie ilości** α są mniejsze od σ.

Jeżeli mamy dwa nieskończone szeregi nieskończonostek:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m, \ldots$$

gdzie każde β_i jest rzędu wyższego niż α_i, mówimy, że ilości β są **jednostajnie rzędu wyższego niż ilości** α, jeżeli stosunki

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \ldots \frac{\beta_m}{\alpha_m} \ldots$$

zdążają jednostajnie do zera.

Jeżeli suma nieskończonostek

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \ldots$$

dąży do granicy skończonej i jeżeli nieskończonostki

$$\beta_1, \beta_2 \ldots \ldots \beta_n$$

są jednostajnie rzędu wyższego niż ilości α, **wtedy suma ilości** β **dąży do zera i będzie:**

$$\lim \sum_1^{\infty} \alpha_i = \lim \sum_1^{\infty} (\alpha_i + \beta_i),$$

t. j. **suma ilości** α **nie zmienia się, jeżeli do każdej nieskończonostki** α_i **dodamy nieskończonostki rzędu wyższego** β_i

§ 2.

Teorya pochodnych funkcyj rzeczywistych jednej lub wielu zmiennych rzeczywistych.

Jeżeli y jest funkcyą zmiennej x i jeżeli tej zmiennej nadamy przyrost dowolny Δx, wtedy y dozna w ogóle przyrostu, który oznaczmy przez Δy. Granica stosunku $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, w założeniu że istnieje, że jest skończona i niezależna od znaku przyrostu Δx, nazywa się pochodną funkcyi w punkcie x. Jeżeli ta granica istnieje tylko dla Δx dodatniego, nie istnieje zaś dla Δx ujemnego lub odwrotnie, albo też istniejąc w obu przypadkach, nie ma w nich tej samej wartości, wtedy mamy odpowiednio pochodną po prawej stronie i pochodną po lewej stronie punktu x.

Warunki konieczne istnienia pochodnej są: 1) funkcya powinna być ciągła w punkcie; 2) funkcya powinna być skończona w otoczeniu punktu i w samym punkcie.

Jeżeli przyrost Δy zmienia nieskończenie wiele razy znak w jakiemkolwiek otoczeniu punktu, wtedy pochodna w tym punkcie albo nie istnieje albo jest zerem.

Przykładem jest funkcya $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$; $f(o) = 0$; funkcya ta w punkcie $x = 0$ nie ma pochodnej; funkcya zaś $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, $f(o) = 0$, w punkcie $x = 0$ ma pochodną równą zeru.

Co do funkcyj o nic mających pochodnej patrz dzieło E. Pascala „Note critiche di calcolo etc.“ Medyolan 1895, od str. 85—128.

Dla funkcyi, nadającej się do przedstawienia geometrycznego, pochodna w punkcie przedstawia styczną trygometryczną kąta, jaki styczna geometryczna do krzywej tworzy z osią x.

Jeżeli dla $x=\infty$ istnieje granica stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ i jest stałą dla wszelkiej wartości Δx, to wtedy równa się ona wartości

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{(Twierdzenie Cauchy'ego).}$$

Co do tego przedmiotu patrz: Dubois-Reymond, Ann. di mat IV, Math. An. XVI; Stolz Math. Ann. XV; Rouquet, Nouv. Ann. XVI, str. 67; E. Pascal, Notr. critiche, etc.

Jeżeli pochodna funkcyi ma granicę dla $x=a$, to funkcya jest ciągła dla $x=a$.

Pochodna ilości stałej jest zerem.

Pochodna sumy algebraicznej funkcyj równa się sumie algebraicznej pochodnych funkcyj.

Pochodna iloczynu pewnej liczby czynników jest równa sumie iloczynów pochodnej każdego czynnika przez wszystkie czynniki pozostałe.

Pochodna ilorazu dwu funkcyj równa się ułamkowi, mającemu za licznik różnicę pomiędzy iloczynem pochodnej licznika przez mianownik a iloczynem pochodnej mianownika przez licznik, a za mianownik kwadrat mianownika danego ułamka.

Jeżeli y jest funkcyą zmiennej z, a z zaś jest funkcyą zmiennej x, to pochodna funkcyi y względem x równa się iloczynowi pochodnej funkcyi y względem z, pomnożonej przez pochodną funkcyi z względem x.

Pochodna funkcyi odwrotnej równa się odwrotnej arytmetycznej pochodnej funkcyi prostej.

Jeżeli szereg pochodnych wyrazów szeregu funkcyi jest szeregiem równozbieżnym, wtedy wartość jego jest pochodną szeregu danego.

Pochodną szeregu potęgowego otrzymujemy tworząc szereg pochodnych wyrazów szeregu danego.

Pochodną funkcyi y względem x oznaczamy symbolem $\frac{dy}{dx}$. Zasadniczemi wzorami różniczkowemi są następujące:

$$y = x^m, \quad \frac{dy}{dx} = m x^{m-1}.$$

$$y = \sqrt{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$y = \sin x, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x; \quad y = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x,$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad y = \sec x, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x.$$

$$y = \operatorname{cotg} x, \quad \frac{dy}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 x}; \quad y = \operatorname{cosec} x, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x,$$

$$y = e^x, \quad \frac{dy}{dx} = e^x,$$

$$y = a^x, \quad \frac{dy}{dx} = a^x \log_e a,$$

$$y = \log_e x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$y = \log_a x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e,$$

$$y = \operatorname{arc} \sin x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \operatorname{arc} \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y zawarte pomiędzy 0 i $\frac{\pi}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \\ y = \operatorname{arc}\operatorname{cotg} x, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} \end{array}\right| \begin{array}{l} y \text{ zawarte pomię-} \\ \text{dzy } 0 \text{ i } \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \operatorname{arc}\sec x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \\ y = \operatorname{arc.}\operatorname{cosec} x, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right| \begin{array}{l} y \text{ zawarte pomię-} \\ \text{dzy } 0 \text{ i } \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

$$y = x^x, \quad \frac{dy}{dx} = x^x (\log x + 1).$$

P o c h o d n a w y z n a c z n i k a, k t ó r e g o e l e m e n t y s ą f u n k c y a m i z m i e n n e j x, r ó w n a s i ę s u m i e w y z n a c z n i k ó w t e g o ż s a m e g o r z ę d u, k t ó r e t w o r z y m y, p o d s t a w i a j ą c, z a m i a s t e l e m e n t ó w d a n e g o s z e r e g u, p o c h o d n e t y c h e l e m e n t ó w.

Niechaj będzie funkcya $f(x_1, x_2 \ldots\ldots)$ pewnej liczby zmiennych; zamiast $x_2, x_3, \ldots$ podstawmy pewien układ wartości $a_2, a_3 \ldots$: pochodna funkcyi f względem x_1 nazywa się p o c h o d n ą c z ą s t k o w ą p i e r w s z e g o r z ę d u lub p o c h o d n ą c z ą s t k o w ą p i e r w s z ą. Analogicznie określamy pochodne cząstkowe względem innych zmiennych. Pochodne cząstkowe oznaczamy za pomocą notacyi (J a c o b i'ego):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \ldots\ldots$$

F u n k c y a n z m i e n n y c h m a n p o c h o d n y c h c z ą s t k o w y c h 1-go r z ę d u.

Powtarzając na pochodnych rzędu 1-go działanie tworzenia pochodnych, otrzymujemy pochodne rzędu 2 go, 3-go i t. d., lub pochodne drugie, trzecie i t. d. Te pochodne wyrażają się symbolami:

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \; \ldots \ldots, \text{ gdy } y \text{ jest funkcyą samego } x,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \, \partial x_2}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x_1^2 \, \partial x_2}, \; \ldots \ldots, \text{ gdy } y \text{ jest funkcyą wielu zmiennych.}$$

Jeżeli dwie pochodne rzędu 1-go $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ funkcyi dwu zmiennych są skończone w całem otoczeniu punktu o spółrzędnych a_1, a_2 i gdy jedna z dwu pochodnych drugich $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1}$ jest ciągłą w tym punkcie i istnieje w całem otoczeniu punktu, wtedy te dwie drugie pochodne są równe; porządek tworzenia pochodnych lub różniczkowania jest, jak się mówi, dowolny. (Twierdzenie o zmianie porządku brania pochodnych.)

Podajemy kilka najważniejszych wzorów, odnoszących się do pochodnych rzędu wyższego.

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = m(m-1) \;\ldots\ldots\; (m-n+1)\, x^{m-n},$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right),$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right),$$

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right\} = (-1)^{n-1} \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, \ldots (2n-1) \frac{\sin(n \arccos x)}{n}.$$

(Jacobi, Crelle, XV, str. 3, Hermite, Math. Ann. X).

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x \sin x) = \frac{e^x}{\sin^n \frac{\pi}{4}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x \cos x) = \frac{e^x}{\sin^n \frac{\pi}{4}} \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

W tym przedmiocie patrz E. Pascal „Note critiche di calcolo“ (str. 118).

Jeżeli y jest funkcyą złożoną. t. j. gdy y jest funkcyą zmiennych $x_1, x_2, \ldots$, które są funkcyami zmiennej x, wtedy pochodna funkcyi y względem a wyraża się wzorem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx} + \ldots\ldots$$

Jeżeli y jest funkcyą uwikłaną zmiennej x, daną przez równanie $f(x, y) = 0$; wtedy pochodna funkcyi y względem x wyraża się wzorem:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Jeżeli y jest funkcyą uwikłaną dwu zmiennych x_1, x_2. daną przez równanie $f(y, x_1, x_2) = 0$, wtedy pochodne cząstkowe funkcyi y wyrażają się wzorami:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial y}}; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Pochodne cząstkowe funkcyi jednorodnej są funkcyami jednorodnemi, których stopień jednorodności jest o 1 zmniejszony.

Suma iloczynów pochodnych cząstkowych funkcyi jednorodnej przez same zmienne równa się funkcyi, pomnożonej przez stopień jednorodności (Twierdzenie Eulera).

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 + \ldots = rf$$

gdzie r jest stopniem jednorodności. Ta własność przedstawia warunek konieczny i dostateczny, aby funkcya była jednorodną

§ 3.

Teorya różniczek funkcyi jednej i wielu zmiennych.

Nazywamy różniczką zmiennej niezależnej x przyrost jakikolwiek nadany tej zmiennej; oznaczamy tę różniczkę przez dx. Nazywamy różniczką funkcyi y zmiennej x iloczyn pochodnej funkcyi y przez różniczkę zmiennej niezależnej. Oznaczamy ją przez dy; jest tedy:

$$dy = f'(x)\, dx\,.$$

Różniczka funkcyi różni się o nieskończonostki rzędu wyższego od przyrostu, jakiego doznaje funkcya, jeżeli zmiennej niezależnej nadajemy przyrost dx.

Jeżeli przyjmiemy, że różniczka pierwsza zmiennej niezależnej jest stała dla każdej wartości x, to różniczka n-ta funkcyi równa się iloczynowi pochodej n-tej przez n-tą potęgę różniczki zmiennej niezależnej.

Nazywamy różniczką zupełną funkcyi wielu zmiennych sumę iloczynów jej pochodnych cząstkowych przez różniczki zmiennych niezależnych:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dx_2 + \; . \; . \; . \; . \; .$$

Jeżeli pochodne cząstkowe rzędu 1-go funkcyi są ciągłe, to różniczka zupełna różni się od przyrostu funkcyi o nieskończonostki rzędów wyższych. (Twierdzenie o różniczce zupełnej).

Można uważać za stałe różniczki zmiennych, od których zależy wprost funkcya f (ma to miejsce, gdy zmienne te są niezależne, lub też gdy są funkcyami liniowemi jednej lub wielu zmiennych niezależnych); wtedy różniczka n-ta funkcyi wyraża się wzorem:

$$d^{\alpha} f = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots \ldots \right) \right)^{(n)},$$

gdzie symbol po stronie drugiej wyobraża potęgę symboliczną, co znaczy, że po rozwinięciu zwykłym sposobem tej potęgi należy wykładniki potęg uważać za skaźniki rzędu pochodnych $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, ...

W innych przypadkach różniczka rzędu wyższego funkcyi f tworzy się według tego samego prawa, według którego tworzymy różniczkę pierwszą, t. j. uważając dx_1, dx_2, ... za funkcye określone wszystkich zmiennych.

§ 4

Teorya funkcyj różniczkowalnych w całym obszarze. Twierdzenia Rollego o wartości średniej i wnioski z niego.

Jeżeli funkcya zmiennej x jest skończoną i różniczkowalną w całkowitym obszarze od a do b i ma tę samą wartość w punktach krańcowych, wtedy w przedziale istnieje przynajmniej jeden punkt, w którym pochodna funkcyi jest zerem (Twierdzenie Rollego).

Jeżeli funkcya f jest stale skończona i różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału od a do b, a na krańcach jego ma wartość zero, to dawszy sobie jakąkolwiek wartość k, znajdziemy zawsze punkt wewnątrz przedziału, w którym

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k. \quad \text{(Twierdzenie Waringa.)}$$

Przy tych samych założeniach o funkcyi $f(x)$ w całym przedziale od x_0 do x_0+h zachodzi wzór:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = hf'(x_0+\theta h)$$
$$0 \leqq \theta \leqq 1. \quad \text{(Twierdz. o wartości średniej).}$$

Jeżeli funkcya w całym przedziale ma wartość zero, to jest ilością stałą.

Jeżeli funkcya w całym przedziale ma pochodną stałą, to jest funkcyą liniową zmiennej x.

Jeżeli funkcye $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ są skończone i mają pochodne w całym przedziale (a, b), wtedy istnieje przynajmniej jeden punkt x' w którym

$$\begin{vmatrix} \varphi'(x'), & \psi'(x') & \chi'(x') \\ \varphi(a), & \psi(a), & \chi(a) \\ \varphi(b), & \psi(b), & \chi(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ jest funkcyą skończoną i mającą pochodną w całym przedziale i jeżeli

$$(a_1, a_2 \;\ldots), \quad (a_1+h_1, a_2+h_2, \;\ldots)$$

są spółrzędnemi dwu punktów, zawartych w obszarze i takich, że prosta jz łącząca znajduje się cała w obszarze (w ogóle i analitycznie), tak, że położywszy

$$x_1 = a_1 + xh_1, \quad x_2 = a_2 + xh_2, \quad x_3 = a_3 + xh_3 \;\ldots$$

otrzymamy punkty, odpowiadające wartościom $0 < x < x$ wszystkie zawarte w obszarze, to będzie:

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots) - f(a_1, a_2, \ldots)$$
$$= \left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots\right)_{\substack{x_1 = a_1 + \theta h_1 \\ x_2 = a_2 + \theta h_2}}$$
$$0 < \theta \leq 1.$$

Jeżeli funkcya $f(x_1, x_2, \ldots)$, czyniąca zadość warunkom twierdzenia poprzedzającego, ma w całym obszarze pochodną równą zeru, to funkcya ta jest w całym obszarze ilością stałą.

---

§ 5.

Teorya wzoru Taylora-Maclaurina. Rozwijalność funkcyj na szeregi.

Jeżeli funkcya $f(x)$ jest skończoną i różniczkowalną wraz ze swemi $n-1$ pierwszemi pochodnemi w przedziale od x_0 do x_0+h, wtedy ma miejsce wzór:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n (1-\theta)^{n-p}}{p\,(n-1)!} f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

gdzie p jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, $0 \leq \theta \leq 1$.

Jeżeli $p=n$ lub $p=1$, to ostatni wyraz przyjmuje postaci specyalne:

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta h), \qquad \text{(Lagrange)},$$

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0+\theta h), \quad \text{(Cauchy)}.$$

Wzór powyższy nazywa się wzorem **Taylora**, a ostatni wyraz jego nazywa się **resztą** lub **wyrazem dopełniającym**. Kładąc $x_0 = 0$, $h = x$, otrzymamy wzór **Maclaurina**.

Jeżeli $f(x)$ i $F(x)$ **są dwie funkcye skończone i różniczkowalne w całym przedziale** $(x_0, x_0 + h)$ **i jeżeli pochodna funkcyi** F **nie staje się nigdy zerem w tym przedziale**, wtedy:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{F'(x_0 + \theta h)}.$$

Jeżeli funkcya $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ **wielu zmiennych jest skończona i różniczkowalna wraz ze wszystkiemi swemi pochodnemi aż do pochodnej rzędu** $n-1$ **włącznie w całym uważanym obszarze, i jeżeli** $(a_1, a_2 \ldots)$, $(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots)$ **są takie dwa punkty obszaru, że punkty pośrednie prostej je łączącej** (t. j. wszystkie punkty o spółrzędnych $a_1 + \theta h_1, a_2 + \theta h_2, \ldots$, gdzie $0 < \theta \leqslant 1$) **należą do obszaru, wtedy ma miejsce wzór:**

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots)) &= f(a_1, a_2, \ldots) \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial a_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} h_2 + \ldots\right), \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} h_2 + \ldots\right)\right)^{(2)} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} h_2 + \ldots\right)\right)^{(n-1)} + R_n, \end{aligned}$$

gdzie symole $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \frac{\partial f}{\partial a_2} \ldots$ oznaczają, że pochodne są obliczone dla punktu $(a_1, a_2, \ldots)$, a nawiasy symboliczne $\left(\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} h_2 + \ldots\right)\right)^{(i)}$ wyrażają, że po rozwinięciu potęgi n-tej wielomianu należy zamiast potęg i-tych lub iloczynów pochodnych $\frac{\partial f}{\partial a_1}$, $\frac{\partial f}{\partial a_2}$ . . . podstawić odpowiednie pochodne rzędu i-tego funkcyi f, gdzie wreszcie R_n ma jednę z dwu następujących postaci:

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + \ldots\right)\right)^{(n)}_{\substack{x_1 = a_1 + \theta h_1 \\ x_2 = a_2 + \theta h_2 \\ \ldots\ldots}} \qquad (0 < \theta < 1),$$

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + \ldots\right)\right)^{(n)}_{\substack{x_1 = a_1 + \theta h_1 \\ x_2 = a_2 + \theta h_2}}$$

Wzór powyższy nazywa się wzorem Taylora dla funkcyi wielu zmiennych.

Jeżeli wskazane wyżej warunki dla wzoru Taylora zachodzą dla każdej wartości n i jeżeli granica reszty R_n jest zerem dla $n = \infty$, wtedy $f(x_0 + h)$ i $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2 \ldots)$ rozwinąć można na szereg według rosnących potęg ilości h w przypadku pierwszym, ilości $h_1, h, \ldots$ w przypadku drugim, i otrzymujemy wtedy tak nazwany szereg Taylora.

Aby funkcya dała się rozwinąć na szereg Taylora, jest koniecznem, by ona sama i jej pochodne jakiegokolwiek rzędu skończonego były zawsze skończone w każdym punkcie przedziału, t. j. we wszystkich punktach $x_0 + \theta h$, lub $(a_1 + \theta h_1,\ a_2 + \theta h_2, \ldots)$, gdzie, jak zwykle, $0 \leq \theta \leq 1$.

Jeżeli $f^{(n)}(x_0 + \theta h)$ lub $f^{(n)}(a_1 + \theta h_1,\ a_2 + \theta h_2, \ldots)$ dla jakiegokolwiek θ, czyniącego zadość warunkowi $0 \leq \theta < 1$ i jakiegokolwiek n, pozostaje co do wartości mniejsze od liczby skończonej, t. j. jeżeli $f^{(n)}$ nie dąży do ∞ wraz z n, wtedy funkcya daje się rozwinąć na szereg Taylora.

W a r u n k i e m k o n i e c z n y m i d o s t a t e c z n y m r o z w i j a l n o ś c i na s z e r e g T a y l o r a f u n k c y i j e d n e j z m i e n n e j j e s t, b y r e s z t a

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \theta h)$$

d ą ż y ł a r ó w n o m i e r n i e d o z e r a, g d y n r o ś n i e d o n i e s k o ń c z o n o ś c i (P r i n g s h e i m).

Patrz co do tego Pringsheim (Math. Ann. XLIV), oraz E Pascal, Note critiche, str. 176—214.

J e ż e l i f u n k c y a j e d n e j z m i e n n e j d a j e s i ę r o z w i n ą ć n a s z e r e g w e d ł u g p o t ę g r o s n ą c y c h c a ł k o w i t y c h z m i e n n e j, t o s z e r e g t e n m o ż e b y ć t y l k o s z e r e g i e m T a y l o r a.

S z e r e g d w u m i a n o w y (b i n o m i a l n y)

$$(1+x)^m = y + (m)_1 x + (m)_2 x_2 + \ldots\ldots$$

ma znaczenie dla m dowolnego i $(x) < 1$,
„ „ „ m dodatniego i $x = -1$,
„ „ „ $m+1$ „ i $x = +1$.

S z e r e g g e o m e t r y c z n y

$$\frac{1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots, \text{ ma znaczenie dla } x < 1.$$

Jest to przypadek szczególny poprzedniego.

S z e r e g i w y k ł a d n i c z e:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1.} + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\log a)^3}{3!} + \ldots\ldots$$

mają znaczenie dla każdego x i każdego a.

Szeregi goniometryczne:

$$\left.\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots\end{aligned}\right\}\ \text{mają znaczenie dla wszystkich wartości } x.$$

Szeregi logarytmowe:

$$\log\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

$$(\text{dla } -1 < x \leqslant +1).$$

$$\text{og}\ x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \ \ldots\ldots,$$

$$(0 < x \leqslant 2).$$

Szereg cyklometryczny:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{5} + \ldots\ldots$$

$$(-1 \leqq x \leqq +1).$$

Inne szeregi Taylora:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{7}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + \ldots$$

$$= \sum^{\infty} \beta_{2m} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

$$(-\pi < x < +\pi),$$

gdzie $\beta_{2m} = \dfrac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m} B_{2m}$; tu liczby B_{2m} są liczbami Bernoulli'ego (patrz Rozdział XVIII),

$$\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \frac{1}{4725}x^7 - \frac{2}{93555}x^9 - \dots$$

$$= -\sum_1 \frac{2^{2m}}{(2m)!} B^{2m} x^{2m-1}$$

$$(-\pi < x < +\pi).$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61x^6}{6!} + \dots + E_{2m}\frac{x^{2m}}{(2m)!} + \dots$$

gdzie E_{2m} są liczbami Eulera (patrz Rozdział XVIII).

$$\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x} = \frac{x}{3!} + \frac{7x^3}{3.5!} + \frac{29x^5}{3.7!} + \dots\dots$$

$$+ \frac{2(2^{2m+1}-1)}{(2m+2)!} B_{2m+2}\, x^{2m+1} + \dots$$

$$(0 < x < \pi).$$

$$\operatorname{arc}\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots\dots$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} \frac{x^{2m+1}}{2m+1},$$

$$(x^2 < 1.)$$

$$\log\sin x = \log x - \sum_1^\infty \frac{2^{2m-1}}{m} \cdot \frac{B_{2m}}{(2m)!} x^{2m}$$

$$(-\pi < x < \pi).$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \frac{3x^6}{6!} + \dots$$

$$\frac{xe^x}{e^x-1} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{B_2 x^2}{2!} - \frac{B_4 x^4}{4!} + \dots\dots$$

(Szereg tworzący liczb Bernoulli'ego B_2, B_4)

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{B_2 x^2}{2!} - \frac{B_4 x^4}{4!} + \ldots \ldots,$$

$$\log \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \ldots \ldots$$

$$(\,|\,x\,| < 1\,).$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^6}{6!} + \ldots \ldots$$

(dla każdego x).

$$\cos (m \arc \sin x) = 1 - \frac{m^2}{2!} x^2 + \frac{m^2 (m^2 - 2^2)}{4!} x^4$$

$$- \frac{m^2 (m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)}{6!} x^6 + \ldots \ldots$$

$$(\,|\,x\,| < 1\,).$$

$$e^{ax} \cos bx = 1 + r \cos \varphi,\ x + \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{2!} x^2 + \ldots \ldots,$$

gdzie $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$.

§ 6.

Teorya wzorów nieoznaczonych.

Jeżeli stosując zwykłe twierdzenia o granicach i szukając granicy funkcyi, znajdziemy, że ona przedstawia się pod postaciami:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0 \cdot \infty,\quad \infty^0,\quad 1^\infty,\quad 0^0,\quad \infty - \infty,$$

wtedy mamy zagadnienie o wzorach nieoznaczonych; rozwiązać to zagadnienie jest to znaleść w jakikolwiek sposób, czy za pomocą odpowiedniego sztucznego środka granicę funkcyi danej (o ile istnieje).

Rozwiązanie wszystkich powyższych nieoznaczoności sprowadza się do wyznaczania pierwszej z nich.

O rozwiązaniu wzoru nieoznaczonego $\frac{0}{0}$ możemy wypowiedzieć twierdzenia następujące:

J e ż e l i f u n k c y e $\varphi(x)$, $\psi(x)$ o k r e ś l o n e w p u n k c i e a i w j e g o o t o c z e n i u, s ą z e r a m i w a i w t y m p u n k c i e m a j ą p o c h o d n e, i j e ż e l i n a d t o p o c h o d n e $\varphi'(a)$ i $\psi'(a)$ n i e s ą o b i e z e r a m i l u b o b i e n i e s k o ń c z o n o ś c i a m i, a gdy $\psi'(a)=0$, s t o s u n e k $\frac{\psi(a+h)}{h}$ n i e z m i e n i a z n a k u w r a z z e z m i a n ą i l o ś c i h, w t e d y:

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \left(\text{przy przyjęciu, ze } \frac{1}{\pm 0} = \pm\infty, \frac{1}{\pm\infty} = 0\right).$$

J e ż e l i g r a n i c e f u n k c y i φ i ψ s ą p r z y $x=a$ z e r a m i, j e ż e l i i s t n i e j e w t y m p u n k c i e g r a n i c a s t o s u n k u i c h p o c h o d n y c h i j e ż e l i w c a ł k o w i t e m o t o c z e n i u p u n k t u a p o c h o d n a f u n k c y i ψ j e s t r ó ż n a o d z e r a, w t e d y i s t n i e j e g r a n i c a s t o s u n k u $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ i r ó w n a s i ę g r a n i c y s t o s u n k u p o c h o d n y c h.

O nieoznaczoności $\frac{\infty}{\infty}$ możemy wypowiedzieć twierdzenie:

J e ż e l i g r a n i c e f u n k c y j φ i ψ d l a $x=a$ s ą r ó w n e ∞, j e ż e l i i s t n i e j e g r a n i c a s t o s u n k u p o c h o d n y c h i j e ż e l i w r e s z c i e $\psi'(x)$ n i e t y l k o n i e j e s t z e r e m, l e c z m a n a d t o z n a k s t a ł y w c a ł k o w i t e m o t o c z e n i u p u n k t u a, w t e d y i s t n i e j e g r a n i c a s t o s u n k u f u n k c y j i r ó w n a s i ę s t o s u n k o w i p o c h o d n y c h.

Oto jest rozwiązanie niektórych nieoznaczoności:

$$\lim_{x=\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x} \quad ; \quad \lim_{x=\infty} x e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x=0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\log(1+x)} = 0 \quad ; \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\operatorname{tg} ax - ax}{\operatorname{tg} bx - bx} = \frac{a^3}{b^3},$$

$$\lim_{x=0} \frac{a^x - b^x}{x} = \log a - \log b$$

$$\lim_{x=0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = 1 \; ; \qquad \lim_{x=0} x^p \log \frac{1}{x} = 0; \; (p > 1)$$

$$\lim_{x=0} x^x = 1 \quad ; \qquad \lim_{x=0} \frac{\log x}{x^m} = 0, \quad (m > 0).$$

Porówn. E. Pascal „Rachunek różniczkowy" przekład polski str. 163 176, Note critiche etc. str. 238. Stolz, Grundzüge etc, I, str. 72—83.

---

§ 7.

Funkcye rosnące i malejące. Maxima i minima funkcyi jednej lub wielu zmiennych

Funkcya $f(x)$ jednej zmiennej nazywa się w punkcie x_0 rosnącą, jeżeli istnieje zawsze wartość k taka, że dla każdej wartości $h < k$ istnieją równocześnie dwie nierówności:

$$f(x_0 - h) - f(x_0) < 0, \quad f(x_0 + h) - f(x_0) > 0.$$

Funkcya nazywa się malejącą, jeżeli zachodzą równocześnie dwie nierówności przeciwne:

$$f(x_0 - h) - f(x_0) > 0, \quad f(x_0 + h) - f(x_0) < 0.$$

Jeżeli w punkcie x_0 pochodne pierwsza, druga, ... , $(n-1)$ — a są zerami, pochodna zaś n-ta zerem nie jest, w takim razie, jeżeli n jest liczbą parzystą, funkcya nie jest ani rosnącą, ani malejącą w tym punkcie; jeżeli zaś n jest liczbą nieparzystą, wtedy funkcya jest rosnącą, gdy pochodna n-ta jest dodatnia w punkcie x_0, malejącą, gdy ta pochodna jest ujemna.

Funkcya jednej zmiennej (lub wielu zmiennych $x_1, x_2 \ldots$) ma **maximum** w punkcie x_0 (lub w punkcie o spółrzędnych $a_1, a_2, \ldots$), jeżeli można znaleść takie k (lub układ wartości $k_1, k_2, \ldots$), że dla każdego $h < k$ (lub dla każdego układu $h_1 < k_1, h_2 < k_2, \ldots$) jest zawsze:

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0) < 0$$

$$(\text{lub } f(a_1 + h_1, a_2 + h_2 \ldots) - f(a_1, a_2, \ldots) < 0)$$

Przeciwnie funkcya ma w tym punkcie **minimum**, jeżeli spełniają się powyższe nierówności ze znakiem $>$ (zamiast $<$)

Aby funkcya miała maximum lub minimum w punkcie, trzeba, aby pochodna rzędu 1-go lub wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 1-go były w tym punkcie równe zeru.

Aby funkcya była maximum lub minimum w punkcie, jest koniecznem, by rząd n pierwszej z pochodnych, której wartość w tym punkcie jest różna od zera (lub rząd pierwszych z pomiędzy pochodnych cząstkowych, które nie znikają wszystkie w tym punkcie), był liczbą parzystą.

W przypadku funkcyi jednej zmiennej, jeżeli n jest rzędem pierwszej z nieznikających w tym punkcie pochodnych, otrzymujemy maximum, gdy $f^{(n)}(x_0)$ jest ujemne, minimum zaś, gdy $f^{(n)}(x)$ jest dodatnie.

W przypadku funkcyi wielu zmiennych, jeżeli liczba (parzysta) n jest rzędem pochodnych cząstkowych, które nie znikają wszystkie w uważanym punkcie, należy rozważać wyrażenie:

$$\left(\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} h_2 + \ldots\ldots\right)\right)^{(n)}. \qquad \text{(patrz § 4)}$$

Rozwinąwszy to wyrażenie, otrzymamy formę stopnia n-tego ilosci $h_1, h_2, \ldots$; jeżeli forma ta jest znaku stałego dla każdego układu wartości $h_1, h_2 \ldots$ i staje się zerem jedynie dla $h_1 = h_2 = . = 0$ (forma określona), wtedy w tym punkcie mamy istotnie maximum, gdy forma ta jest stale ujemną, minimum zaś, gdy jest stale dodatnią.

Jeżeli forma powyższa może się stawać zerem i dla innych wartości prócz $h_1 = h_2 = . = 0$ (forma półokreslona), wtedy potrzebnem jest specyalne badanie w celu rozstrzygnięcia pytania o maximum i minimum. Jeżeli ta forma nie jest stałego znaku (forma nieokreślona), wtedy w tym punkcie nie istnieje ani maximum, ani minimum.

W przypadku specyalnym, w którym $n = 2$ i liczba zmiennych jest także 2, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial a_2^2} h_2^2;$$

aby ta forma była okreśślona, potrzeba, aby wyrażenie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial a_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2}\right)^2$$

było dodatnie i różne od zera: będziemy mieli wtedy maximum lub minimum, stosownie do tego, czy $\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2}$ jest ujemne lub dodatnie.

Teorya maximów i minimów funkcyj wielu zmiennych pobudziła do wielu ważnych badań. Porównaj: Scheeffer, Math. Ann. XXXV; Dantscher, tamże, XLII, LI; Stolz, Wiener Berichte 1868—1890—1891—1893. Wskazówki co do tego w książce Pascala, „Note critiche di calcolo" str. 226.

ROZDZIAŁ VII.

RACHUNEK CAŁKOWY.

---

§ 1.

Całkowalność.

Niechaj $f(x)$ będzie funkcyą skończoną od $x = a$ do $x = b$. Podzielmy przedział (a, b) na n przedziałów $\delta_1 . \delta_2 \ldots\ldots \delta_n$ i niechaj f_r będzie wartością, którą przybiera funkcya f w pewnym punkcie przedziału δ_r lub granicą wyższa albo niższą wartości funkcyi f w tym przedziale. Utwórzmy sumę

$$\sum_{r=1}^{n} f_r \, \delta_r$$

i zmniejszajmy nieograniczenie wielkosć przedziałów cząstkowych, zwiększając nieograniczenie ich liczbę.

Jeżeli dla $n = \infty$ powyższa suma ma granicę i zawsze tę samą, niezależnie od prawa, według którego przedziały dążą do zera, oraz niezależnie od prawa, według którego wybieramy wartość f_r w przedziale δ_r, mówimy wtedy, że funkcya f jest **c a ł k o - w i a l n ą w p r z e d z i a l e** a, b, i że wartością tej granicy jest całka określona funkcyi od a do b. Taką całkę wyrażamy symbolem

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Wartości a i b nazywają się granicami wyższą i niższą całki.

Określenie to wymaga zmiany w dwu przypadkach:

1-o, kiedy funkcya staje się nieskończoną w jednym lub wielu punktach przedziału;

2-o, kiedy jedna z granic całkowania jest nieskończoną.

Jeżeli funkcya $f(x)$ staje się nieskończoną dla $x=c$, $(a<c<b)$; wtedy całką określoną funkcyi $f(x)$ od a do b nazywamy wyrażenie

$$\lim_{\varepsilon'=0}\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon''=0}\int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)\,dx\,,$$

w założeniu oczywiście, że granice tu zachodzące istnieją i są zawsze te same, bez względu na sposób, w jaki ilości ε', ε'' zdążają do zera, niezależnie jedna od drugiej.

Taka całka określona nazywa się niewłaściwą.

Jeżeli zdarzy się, że granica sumy powyższych dwóch całek istnieje tylko wtedy, gdy ilości ε', ε'' są związane pewnem prawem, wtedy otrzymujemy całki niewłaściwe osobliwe (Cauchy).

Jeżeli jedna lub obie granice są nieskończone, wtedy całką określoną niewłaściwą funkcyi $f(x)$ będzie:

$$\lim_{x'=\infty}\int_a^{x'} f(x)\,dx \quad\text{lub}\quad \lim_{\substack{x'=-\infty\\ x''=+\infty}}\left\{\int_{x'}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{x''} f(x)\,dx\right\}$$

w założeniu oczywiście, że te granice istnieją, niezależnie od sposobu, w jaki x', x'' dążą do ∞.

Jeżeli w tym drugim przypadku granica istnieje tylko wtedy, jeżeli x' i x'' są związane pewnym warunkiem, otrzymujemy całkę niewłaściwą, osobliwą.

Całka niewłaściwa nazywa się bezwzględnie zbieżną, gdy granica, o której mowa w określeniu, istnieje i wtedy, jeżeli funkcyę $f(x)$ zastąpimy wszędzie jej wartością bezwzględną; nazywa się zwyczajnie zbieżną, jeżeli ta własność miejsca nie ma.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcya skończona była całkowalna w całym przedziale jest, by granica

$$\lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{n} D_r \delta_r ,$$

gdzie D_r przedstawia oscylacyę funkcyi w przedziale δ_r, była zerem.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcya skończona była całkowalna, jest by $\lim\limits_{n=\infty} \tau = 0$, gdzie τ oznacza sumę przedziałów δ_r, w których oscylacya funkcyi jest większa od jakiejkolwiek liczby ustalonej.

Każda funkcya ciągła jest całkowalna.

Każda funkcya punktowo-nieciągła (patrz wyżej str. 24) jest całkowalna. (Twierdzenie Riemanna).

Wartość całki określonej funkcyi całkowalnej nie zmienia się, jeżeli zmienimy wartość funkcyi w jednym lub więcej punktach a nawet w nieskończenie wielu punktach, byleby one tylko były tak rozmieszczone, że w każdym dowolnie małym przedziale znajduje się zawsze punkt, w którym wartość funkcyi nie uległa zmianie.

Jeżeli funkcya skończona jest stale rosnącą lub stale malejącą w całym przedziale całkowania, wtedy jest funkcyą całkowalną.

Funkcya ciągła innych funkcyj całkowalnych (w szczególności suma i iloczyn) jest

sama funkcyą całkowalną. (Twierdzenie **Du Bois Reymonda**)

Całka określona posiada następujące własności:

$$\int_a^b f(x)\,dz = -\int_b^a f(x)\,dx\,,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n=\infty}\frac{\sum_1^n f_i}{n}\,.$$

Całka określona iloczynu dwu funkcyj daje się przedstawić w postaciach następujących:

1. $$\int_a^b f(x)\,f_1(x)\,dx = f\left(a+\vartheta(b-a)\right)\int_a^b f_1(x)\,dx\,.$$

gdzie ϑ **zawiera się pomiędzy** 0 **a** 1, f i f_0 **są funkcyami ciągłemi,** f_1 **zaś nie zmienia znaku pomiędzy granicami całkowania:**

2. $$\int_a^b f(x)\,f_1(x)\,dx = f(a)\int_a^{a+\vartheta(b-a)} f_1(x)\,dx\,.$$

przy tych samych warunkach;

3. $$\int_a^b f(x)\,f_1(x)\,dx$$

$$= f(x)\int_a^{a+\vartheta(b-a)} f_1(x)\,dx + f(b)\int_{a+\vartheta(b-a)}^b f_1(x)\,dx\,,$$

w założeniu, że funkcye f, f_1 są ciągłemi i że druga nie zmienia znaku w granicach całkowania.

Zauważyć należy, że wartość ϑ jest wogóle odmienna w każdym z trzech powyższych wzorów.

Twierdzenia, odnoszące się do przypadków zbieżności całek niewłaściwych, są następujące:

Niechaj funkcya $f(x)$ staje się nieskończoną w punkcie b i będzie całkowalną w całym przedziale od a do $b-\varepsilon$; jeżeli można znaleść liczbę dodatnią $\nu < 1$, taką, że $(x-b)^\nu f(x)$ dąży do granicy skończonej dla $x = b$ lub waha się pomiędzy granicami skończonemi, to wtedy wnieść można, że całka określona od a do b jest bezwzględnie zbieżna.

Jeżeli funkcya $f(x)$ twierdzenia poprzedzającego jest funkcyą stałego znaku, to warunkiem koniecznym zbieżności całki od a do b jest, by:

$$\lim_{x=b} (x-b)\, f(x)$$

było zerem lub wahało się pomiędzy dwiema granicami, z których jedna jest zerem (granice te, na zasadzie założeń, nie mogą być przeciwnego znaku).

Jeżeli dana funkcya jest całkowalna w pewnym przedziale (aż do ∞), i jeżeli można znaleść takie $\nu > 1$, aby

$$\lim_{x=\infty} x^\nu f(x)$$

było skończone (lub zerem), lub, w razie nieistnienia granicy, by iloczyn ten wahał się pomiędzy granicami skończonemi, wtedy całka funkcyi $f(x)$ od a do ∞ jest bezwzględnie zbieżna.

Przy założeniach poprzednich i przy dołączeniu założenia, że funkcya $f(x)$ nie zmienia znaku od pewnego punktu aż do ∞, warunkiem koniecznym, aby granica całki była skończona, jest, by iloczyn $xf(x)$ dla $x=\infty$ miał granicę skończoną lub wahał się pomiędzy dwiema granicami, z których jedna jest zerem.

O całkach niewłaściwych patrz: Riemann, Werke str 229; Du Bois-Reymond, Crelle LXXVI, Math. Ann. XIII; Pringsheim, Math. Ann. XXXVII i t. d., por. Pascal, Note critiche etc.

Jeżeli w całce określonej granicą wyższą jest x, to całka przedstawia funkcyę zmiennej x, zwaną funkcyą całkową.

Jeżeli do funkcyi całkowej dodamy jakąkolwiek stałą dostaniemy funkcyę, którą możemy też przedstawić przez całkę określoną o granicy wyższej równej x i o granicy niższej, różnej od poprzedniej.

Niechaj $\varphi(x)$ oznacza funkcyę całkową; funkcya nieokreślona, objęta wzorem

$$F(x) = \varphi(x) + c\,,$$

(gdzie c jest stałą nieoznaczoną), nazywa się całką nieokreśloną funkcyi i oznacza się symbolem

$$F(x) = \int f(x)\, dx\,.$$

Jeżeli znamy całkę nieokreśloną, to całkę określoną obliczymy za pomocą wzoru

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Funkcya całkowa jest zawsze funkcyą ciągłą.

Jeżeli funkcya $f(x)$ pod znakiem całkowym jest funkcyą ciągłą, wtedy funkcya całkowa jest funkcyą różniczkowalną a jej pochodna jest równa funkcyi danej $f(x)$.

Jeżeli funkcya $f(x)$ jest ciągłą, to

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b)\,; \qquad \frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -f(a).$$

Przekształcenia całki pojedyńczej. Jeżeli

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

i położymy $x = \psi(y)$, gdzie ψ jest także funkcyą różniczkowalną zmiennej y, i jeżeli w przedziale od a do b można uważać y za funkcyę samej zmiennej x, wtedy

$$I = \int_{a'}^{b'} f(\psi(y))\frac{dx}{dy}\,dy\,,$$

gdzie a' i b' są wartościami zmiennej y, otrzymanemi z równań $a = \psi(y)$, $b = \psi(x)$.

Niechaj będzie

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx\,,$$

gdzie $a(y)$, $b(y)$ oznaczają dane funkcye zmiennej y. Jeżeli założymy, że $f(x, y)$ jest funkcyą ciągłą dwu zmiennych, że $f(x, y)$, $a(y)$, $b(y)$ mają pochodne względem y, i że pochodna f'_y jest ciągła względem obu zmiennych, wtedy:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\,dx - f(a, y)\frac{da(y)}{dy} + f(b, y)\frac{db(y)}{dy}\,,$$

Jeżeli a i b są ilościami stałemi, to znak różniczkowania względem y jest przemienny ze znakiem całkowania, t. j. pochodna całki równa się całce pochodnej. (Twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem.)

Twierdzenie to zachodzi zawsze, gdy

$$F(x, y) = \int f(x, y)\, dx,$$

jest taką funkcyą zmiennych x, y, że dla niej utrzymuje się twierdzenie o przemianie porządku dwu różniczkowań względem x i y.

Jeżeli granice a i b są stałemi, jeżeli stałemi są ilosci c i d, funkcya zaś $f(x, y)$ jest ciągłą, wtedy:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy$$

(Twierdzenie o całkowaniu pod znakiem.)

---

§ 2.

Całki nieokreślone.

Całki nieokreślone podstawowe.

$$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \lesseqgtr -1),$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log x\,; \qquad \int e^x\, dx = e^x,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x\,; \quad \int \cos x\, dx = \sin x\,,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x \; ; \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = - \operatorname{cotg} x \, ,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sin} x = - \operatorname{arc\,cos} x + \text{const} \, ,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} x = - \operatorname{arc\,cotg} x + \text{const} \, ,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x}\, dx = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} \; ; \quad \int \frac{dx}{1-x^2}\, dx = \log \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}$$

$$\int \log x \, dx = x \log x - x ; \quad \int \operatorname{tg} x \, dx = - \log \cos x \, ,$$

$$\int \sec x \, dx = \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \, ,$$

$$\int \operatorname{arc\,sin} x \, dx = x \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log (1+x^2) \, ,$$

$$\int \operatorname{arc\,sec} x \, dx = x \operatorname{arc\,sec} x - \log \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) ,$$

Całki nieokreślone funkcyj wymiernych.

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \sqrt{\frac{1}{a\,b}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{b}}{a}\, x\right) .$$

jeżeli a i b są jednego znaku,

$$\text{lub} = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{1}{-a\,b}} \cdot \log \frac{x\sqrt{-b} + \sqrt{a}}{x\sqrt{-b} - \sqrt{a}} \, ,$$

jeżeli a i b są znaków przeciwnych.

$$\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a} \log \frac{x^2}{a+bx^2},$$

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \log \frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}}, \text{ jeżeli } b^2-4ac>0.$$

$$= \frac{2}{b+2cx}, \text{ jeżeli } b^2-4ac=0,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}, \text{ jeżeli } b^2-4ac<0$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a^6-x^6} = \frac{1}{6a^3} \log \frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}.$$

D l a o b l i c z e n i a c a ł k i f u n k c y i w y m i e r n e j r o z k ł a d a m y t ę f u n k c y ę n a f u n k c y e e l e m e n t a r n e (patrz Rozdział I, § 6), a p o t e m w y k o n y w a m y c a ł k o w a n i e.

Całki funkcyj niewymiernych

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{x}} = \pm \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{bx}{a}}, \text{ jeżeli } a \text{ i } b \text{ są jednego znaku},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-ab}} \log \frac{a-bx+2\sqrt{x}\,.\,\sqrt{-ab}}{a+bx}, \text{ jeżeli } a \text{ i } b \text{ są znaków przeciwnych},$$

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a+bx} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(a+bx)}.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}, \text{ jeżeli } a>0,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}}, \text{ jeżeli } a<0.$$

$$\int dx\sqrt{1-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\text{arc sin}\, x.$$

$$\int dx\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),$$

$$\int\frac{dx}{x}\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} - \log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x},$$

$$\int\frac{dx}{x}\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-1} - \text{arc cos}\,\frac{1}{x}.$$

$$\int\frac{dx}{x}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} + \log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\log\left(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}\right),\ \text{jeżeli } b>0,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-b}}\,\text{arc sin}\left(\sqrt{-\frac{b}{a}}\cdot x\right),\ \text{jeżeli } b<0.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\log\left(a + 2bx + 2\sqrt{b}\sqrt{ax+bx^2}\right),\ \text{jeżeli } b>0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-b}}\,\text{arc sin}\,\frac{a+2bx}{-a},\quad \text{jeżeli } b<0.$$

Całki funkcyj trygonometrycznych

$$\int\frac{dx}{1+\cos x} = \text{tg}\,\frac{x}{2}.$$

$$\int\frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx = x\,\text{tg}\,\frac{x}{2},$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x,$$

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = \frac{1}{b^2 - a^2} \{ b \sin bx \sin ax + a \cos bx \cos ax \}$$

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{a-b} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{a+b}}, \quad \text{jeżeli } a > b$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \qquad \text{„} \quad a = b.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{\sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{b+a}}, \qquad \text{„} \quad a < b.$$

$$\int \frac{dx}{1 - k^2 \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{1-k^2} \operatorname{tg} x \right).$$

Całki funkcyj zawierających logarytmy.

$$\int x^n \log x \, dx = x^{n+1} \left\{ \frac{\log x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\}; \quad n \lesseqgtr 1,$$

$$\int \frac{\log x \, dx}{(a + bx)^m} = - \frac{\log x}{(m-1) b (a+bx)^{m-1}}$$

$$+ \frac{1}{(m-1)ab} \left\{ \frac{1}{(m-2)(a+bx)^{m-2}} + \frac{1}{(m-3) a (a+bx)^{m-3}} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 \cdot a^{m-3} (a+bx)} \right\} + \frac{1}{(m-1) a^{m-1} b} \log \frac{x}{a + bx}.$$

$$\int \sin (\log x) \, dx = \frac{x}{2} \left\{ \sin (\log x) - \cos (\log x) \right\},$$

$$\int \cos(\log x)\, dx = \frac{x}{2}\left\{\sin(\log x) + \cos(\log x)\right\};$$

$$\int \frac{\log(\log x)}{x}\, dx = \log x \log(\log x) - \log x,$$

$$\int \log(a + \cos x)\, dx = \frac{1 + a\cos x}{a + \cos x}.$$

Całki funkcyj, zawierających funkcye wykładnicze.

$$\int x^n a^x dx = \frac{a^x x^n}{\log a} - \frac{n a^x x^{n-1}}{\log^2 a} + \frac{n(n-1)\, a^x x^{n-2}}{\log^3 a} - \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{n(n-1)\ldots 2 \,.\, 1}{\log^{n-1} a}\, a^x.$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \log \frac{e^x}{1+e^x},$$

$$\int \frac{dx}{ae^{mx} + be^{-mx}} = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right),$$

$$\int \frac{dx}{a+be^{mx}} = \frac{1}{am}\left\{mx - \log(a + be^{mx})\right\},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+be^{mx}}} = \frac{1}{m\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a+be^{mx}} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+be^{mx}} + \sqrt{a}},$$

$$\int \frac{xe^x\, dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}.$$

$$\int xe^x\, dx = e^x(x-1):$$

$$\int e^{ax} \sin x\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin x - \cos x)}{1+a^2},$$

$$\int \sqrt{1+e^{ax}} = \frac{2\sqrt{1+e^{ax}}}{a} + \frac{1}{a}\log \frac{\sqrt{1+e^{ax}}+1}{\sqrt{1+e^{ax}}-1}.$$

Całki funkcyj, zawierających funkcye kołowe odwrotne.

$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x\,,$$

$$\int \frac{\arcsin x}{(\sqrt{1-x^2})^3}\, dx = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \log (1-x^2)\,,$$

$$\int \frac{x \arcsin x}{(\sqrt{1-x^2})^3}\, dx = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x}\,,$$

$$\int \frac{x^2 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \log (1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arc\,tg} x)^2,$$

$$\int \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc\,tg} x + \sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$- \arcsin x\,.$$

$$\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(\sqrt{a+bx^2})^3}\, dx = \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{a\sqrt{a+bx^2}} - \frac{1}{a\sqrt{b-a}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a+bx^2}{b-a}}\,, \quad \text{jeżeli } a<b$$

$$= \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{a\sqrt{a+bx^2}} - \frac{1}{a\sqrt{a-b}} \log \frac{\sqrt{a+bx^2} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a-b}}\,, \quad \text{,,} \quad a>b.$$

Całkowanie przez szeregi. Szereg, którego wyrazy są funkcyami zmiennej x, równozbieżny w całym przedziale, przedstawia funkcyę całkowalną zmiennej x; całkę zaś tego szeregu przedstawia szereg całek pojedyńczych jego wyrazów.

W szczególności:

Szereg potęgowy jest całkowalny wyraz po wyrazie w przedziale, zawartym w obszarze całkowania całego szeregu

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx = x - \frac{x^3}{3!\,3} + \frac{x^5}{5!\,5} - \ldots\ldots$$

Funkcya zmiennej x, określona za pomocą poprzedniego szeregu, jest nową funkcyą przestępną, które nazywają „wstawą całkową" (Integralsinus).

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \log x + x + \frac{x^2}{2!\,2} + \frac{x^3}{3!\,3} + \ldots\ldots$$

Ten szereg przedstawia również nową funkcyę przestępną, którą nazywamy „logarytmem całkowym (Integrallogarithmus).

$$\int \log (1-2\varrho \cos x + \varrho^2)\, dx = -2 \sum \frac{\varrho^n}{n^2} \sin (n x), \quad (\varrho < 1)$$

$$\int \frac{\log (a + bx)}{x} dx = \log a \log x + \frac{b}{a} x - \frac{1}{2^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2$$

$$+ \frac{1}{3^2}\left(\frac{b}{a}\right)^3 x^3 - \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2} (\log b\, x)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)\frac{1}{x} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3^2}\left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{1}{x^3} + \ldots$$

$$\int \frac{dx}{\log x} = \log (\log x) + \frac{\log x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{\log^2 x}{2!} + \frac{1}{3}\,\frac{\log^3 x}{3!} + \ldots..$$

I ten ostatni szereg jest, jak łatwo widzieć, logarytmem całkowym o argumencie $\log x$ zamiast x.

---

§ 3.

Całki określone i niewłaściwe.

Całki określone pomiędzy granicami 0 i 1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log(\log x)} = 0\,. \qquad \int_0^1 \sqrt{\log \frac{1}{x}}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\log \frac{1}{x}}} = \sqrt{\pi}\,, \qquad \int_0^1 \frac{e^{-x}\, dx}{\sqrt{x}} = \frac{2+e\sqrt{\pi}}{4e}\,,$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\, dx = -\frac{\pi^2}{12}\,, \qquad \int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx = -\frac{\pi^2}{6}\,,$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\, dx = -\frac{\pi^2}{8}\,,$$

$$\int_0^1 \log(\log x)\, dx = -\mathbf{A}$$ (stała Eulera, patrz Rozdz. XVIII),

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1+x}\right) dx = \mathbf{A}\,,$$

$$\int_0^1 \frac{\text{arc sin}\, x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \log 2\,,$$

$$\int_0^1 \frac{\text{arc tg}\, x}{x}\, dx = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}\,,$$

$$\int_0^1 x^{a-1} (\log x)^n\, dx = (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}\,,$$

Całki określone pomiędzy 0 i $\frac{\pi}{4}$, pomiędzy 0 i $\frac{\pi}{2}$, pomiędzy 0 i π.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}\, x\, dx = \frac{1}{2} \log 2\,,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^m x\, dx = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{m+2n+1}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\sin x \cos \lambda} = (\pi-\lambda) \operatorname{cosec} \lambda.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{p+q\cos x} = \frac{1}{\sqrt{p^2-q^2}} \operatorname{arc\,cos} \frac{q}{p}, \qquad \text{jeżeli } q<p.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q^2-p^2}} \log \frac{q+\sqrt{q^2-p^2}}{q}, \qquad \text{,, } q>p.$$

$$= \frac{1}{p}, \qquad \text{,, } q=p.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{tg} x\, dx = \infty.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tg} x\, dx = 0.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}{n(n-2)\ldots 5.3}, \qquad \text{jeżeli } n \text{ parzyste.}$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3.1}{n(n-2)\ldots 4.2}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad \text{,, } n \text{ nieparzyste.}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6+\ldots\right]$$

$$\int_0^\pi \sin a\,x \sin b\,x\,dx = \int_0^\pi \cos a\,x \cos b\,x\,dx = 0, \qquad (a \gtrless b)$$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\cos x} = 0.$$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{p+q\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{p^2-q^2}}, \quad \text{jeżeli } p^2 > q^2,$$

$$= 0 \quad , \quad \text{,,} \quad p^2 < q^2$$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{-p+q\cos x} = \frac{-\pi}{\sqrt{p^2-q^2}}, \quad \text{jeżeli } p^2 > q^2,$$

$$= 0 \quad , \quad \text{,,} \quad p^2 < q^2.$$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1-2\varrho\cos x+\varrho^2} = \frac{\pi}{1-\varrho^2}, \quad \text{jeżeli } \varrho^2 < 1,$$

$$= \frac{\pi}{\varrho^2-1}, \quad \text{,,} \quad \varrho^2 > 1.$$

$$\int_0^\pi \log(1-2\varrho\cos x+\varrho^2)\,dx = 0, \quad \text{jeżeli } \varrho \leqq 1,$$

$$= 2\pi\log\varrho, \quad \text{,,} \quad \varrho > 1.$$

Całki niewłaściwe o granicach nieskończonych.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}, \qquad (a>0,\ b>0)$$

$$\int_0^\infty e^{-\varrho^2 x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\varrho}.$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos (2\,p\,x)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-p^2}.$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^n\, dx = n! \qquad (n \text{ całkowite}).$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^{n-1}\, dx = \Gamma(n); \qquad \text{funkcya Eulera 2-go gatunku } (n \text{ jakiekolwiek}).$$

$$\int_2^\infty e^{\frac{-1}{x^2}}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\int_2^\infty \sin^{2\varrho} x\, dx = \int_0^\infty \cos^{2\varrho} x\, dx = \infty,$$

$$\int_3^\infty \frac{\sin b\,x}{\sin a\,x}\, dx = 0. \qquad (b < a).$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1}\, dx = \frac{\pi^2}{12}; \qquad \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{2a-1}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}\, dx = \frac{2^{2a} - 1}{4a}\, B_{2a-1}, \quad (B \text{ są liczby Bernoulli'ego}).$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \varrho\, x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{jeżeli } \varrho > 0.$$
$$= 0, \qquad ,, \quad \varrho = 0,$$
$$= -\frac{\pi}{2}, \qquad ,, \quad \varrho < 0.$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \varrho\, x}{x}\, dx = \infty; \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} \varrho\, x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos q x}{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \sin q,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\, \frac{1 - \cos (p x)}{x}\, dx = \frac{1}{2} \log (1 + p^2),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin a x}{1 + 2\varrho \cos a x + \varrho^2}\, \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\, \frac{\pi}{1+\varrho}, \quad \text{jeżeli } \varrho < 1.$$

$$= \frac{1}{2\varrho}\, \frac{\pi}{1+\varrho}, \quad \text{,,} \quad \varrho > 1,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \varrho x}{x \sqrt{x}}\, dx = -\sqrt{2 \varrho \pi}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-x} - 1}{x} + \frac{1}{1 + x}\right) \frac{dx}{x} = A - 1 \\
&\int_0^{\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x^2}\right) \frac{dx}{x} = - A \\
&\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\, dx = A \\
&\int_0^{\infty} e^{-x} \log x\, dx = - A
\end{aligned}\right\} \quad A \text{ jest stałą Eulera.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2 - bx}\, dx = e^{\frac{q^2}{4p}} \sqrt{\frac{\pi}{p}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin (p x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2p}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos (p x^2)\, dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \pi ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin px}{q^2+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin px}{q^2+x^2}\, \frac{dx}{x^a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos px}{q^2+x^2}\, dx = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos px}{q^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{q}\, e^{-pq} .$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin px}{q^2+x^2}\, dx = \pi\, e^{-pq} .$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg} px}{x}\, dx = \pi ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x}\, x e^x\, dx = -A \text{ (stała Eulera).}$$

Najbogatszy zbiór całek określonych znajduje się w dziele Bierens de Haana „Tables d'intégrales définies" Leiden 1867.

---

§ 4.

Całki eliptyczne. [1])

Niechaj będzie związek algebraiczny $f(x, y) = 0$ pomiędzy dwiema zmiennemi i niechaj krzywa, którą to równanie wyobraża, będzie rodzaju $p = 1$. Całka

---

[1]) Dla lepszego zrozumienia tego paragrafu oraz znaczenia użytych tu symbolów, patrz rozdział XVI.

$$\int F(x, y)\, dx,$$

w której F jest symbolem jakiejkolwiek funkcyi wymiernej zmiennych x, y, związanych powyższem równaniem, jest całką eliptyczną ogólną.

Jeżeli funkcya f ma postać specyalną $y^2 = X$, gdzie X jest wielomianem ogólnym stopnia 1-go względem x, wtedy całkę eliptyczną można przedstawić w postaci

$$\int \frac{R\, dx}{\sqrt{X}},$$

gdzie R jest jakąkolwiek funkcyą wymierną zmiennej x.

Całka ta, jeżeli założymy, że funkcya R nie ma pierwiastków wielokrotnych, daje się zawsze przedstawić jako kombinacya liniowa całek trzech typów różnych, mających odpowiednie charakterystyczne własności. Te trzy typy można przedstawić w postaci, nadanej im Legendre'a, lub przez Weierstrassa.

Forma Legendre'a trzech typów jest następująca:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, całka 1-go gatunku.

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, „ 2-go „

3. $\displaystyle\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, „ 3-go „

Możemy przyjąć, że we wzorach tych k jest liczbą, której wartość bezwzględna jest mniejsza od 1.

Kładąc $x = \sin\varphi$, otrzymujemy powyższe całki w postaci następującej:

1. $$\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k, \varphi).$$

2. $$\int\limits_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi = E(k, \varphi),$$

3. $$\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \Pi(n, k, \varphi).$$

Liczby k i φ nazywają się odpowiednio: modułem i amplitudą.

W formie Weierstrassa typy poprzednie przedstawiają się tak:

1. $$\int\limits_\infty^p \frac{dp}{\sqrt{4p^3-g_2p-g_3}}.$$

2. $$\int\limits_\infty^p p\,\frac{dp}{\sqrt{4p^3-g_2p-g_3}},$$

3. $$\frac{1}{2}\int\limits_\infty^p \frac{\sqrt{4p^3-g_2p-g_3}+\sqrt{4q^3-g_2q-g_3}}{p-q}\,\frac{dp}{\sqrt{4p^3-g_2p-g_3}}.$$

W trzeciej całce q jest stałą dowolną. Zamiast tej całki rozważać można tak zwaną całkę normalną 3-go gatunku (całkę Kleina):

$$Q = \frac{1}{2}\int\limits_\infty^p \left[\frac{\sqrt{4p^3-g_2p-g_3}-\sqrt{4q^3-g_2q-g_3}}{p-q}\right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{4p^3-g_2p-g_3}-\sqrt{4q_1^3-g_2q_1-g_3}}{p-q_1}\right]\frac{dp}{\sqrt{4p^3-g_2p-g_3}},$$

Można tę całkę przedstawić pod postacią całki podwójnej:

$$Q = \int_{u_1'}^{u'} du' \int_0^{u} du \; p(u' - u),$$

gdzie $q = p(u')$, $q_1 = p(u_1')$.

Przekształcenie Landena służyć może (patrz Rozdział XVI) do przybliżonego obliczania całek eliptycznych 1-go gatunku.. Mamy:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{1+k'} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2 \sin^2\varphi}},$$

gdzie

$$\sin\varphi_1 = \frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad \varphi_1 > \varphi.$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{1-(1+k')\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Jeżeli $k < 1$, to moduł całki drugiej, t. j. $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$ jest mniejszy od k, a kolejne stosowanie tego wzoru doprowadza do całki o bardzo małym module i o bardzo wielkiej amplitudzie. Stosując wzór odwrotny, doszlibyśmy do całki eliptycznej o module tak blizkim 1, jak chcemy, i o bardzo małej amplitudzie.

Jeżeli $k_1, k_2, k_3, \ldots$ są kolejne moduły, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ — kolejne amplitudy, K zaś jest całką zupełną Legendre'a, t. j. wartością całki przy $\varphi = \frac{\pi}{2}$ i przy prostoliniowej drodze całkowania, będzie:

$$K = \frac{\pi}{2}(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\ldots\ldots$$

$$F(\varphi, k) = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{\varphi_r}{2^r},$$

Jest to wzór przybliżony dla wartości r, dostatecznie wielkich.

Do obliczania ilości φ_r służyć mogą wzory zwrotne:

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \cos\vartheta \operatorname{tg}\varphi; \quad \sin\vartheta = k,$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi) = \cos\vartheta_1 \operatorname{tg}\varphi_1; \quad \sin\vartheta_1 = k_1,$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \cos\vartheta_2 \operatorname{tg}\varphi_2; \quad \sin\vartheta_2 = k_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Stosując odwrotne przekształcenie Landena, dochodzimy do wzoru:

$$F(\varphi_1, k) = \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r}{k}} \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi_r}{2}\right),$$

gdzie

$$\lambda_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{1+\lambda_1}, \quad \lambda_3 = \frac{2\sqrt{\lambda_2}}{1+\lambda_2}, \ldots\ldots$$

$$\sin(2\psi_1 - \varphi) = k\sin\varphi, \quad \sin(2\psi_2 - \psi_1) = \lambda_1 \sin\psi_1,$$

$$\sin(2\psi_3 - \psi_2) = \lambda_2 \sin\psi_2 \ldots\ldots$$

Stosowanie przekształcenia Gaussa do obliczania całek eliptycznych 1-go gatunku prowadzi do następującego wzoru Jacobi'ego. Nadawszy całce eliptycznej postać

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\cos^2\varphi}} = \Phi.$$

i kładąc:

$$m' = \frac{m+n}{2}, \quad n' = \sqrt{mn},$$

$$m'' = \frac{m'+n'}{2}, \quad n'' = \sqrt{m'n'},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,\cdots$$

$$\Delta = \sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi},$$

$$\Delta' = \sqrt{m n' \frac{n+\Delta}{m+\Delta}},$$

$$\Delta'' = \sqrt{m' m'' \frac{n'+\Delta'}{m'+\Delta'}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \mu \Phi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{\Delta' \Delta'' \Delta''' \dots}{m m' m'' \dots},$$

gdzie μ jest granicą wspólną, do której dążą ilości $m^{(r)}$ i $n^{(s)}$ (t. zw. śrdpnia arytmetyczno - geometryczna Gaussa, patrz rozdz. I, § 7).

Przy pomocy przekształcenia Gaussa rachunek cały prowadzi wprost do całki

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \cos^2 \varphi}} = \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\mu^2 \cos^2 \varphi + \mu^2 \sin \varphi}} = \frac{\varphi'}{\mu},$$

gdzie μ jest średnią arytmetryczno-geometryczną, φ' zaś jest granicą ilości φ, φ_1, φ_2, ..., określonych za pomocą wzorów

$$\sin \varphi = \frac{m \sin \varphi_1}{m' \cos^2 \varphi_1 + m^2 \sin^2 \varphi_1},$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{m \sin \varphi_2}{m'' \cos^2 \varphi_2 + m' \sin^2 \varphi_2}, \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Co do tego obliczenia patrz artykuł J. Kowalczyka w „Wiadomościach matematycznych“ II, 1898, str. 21—31.

Liczne są dzieła o całkach eliptycznych; dzieło „Elliptische Functionen“ Ennepera, zawierawiele szczegółów oraz wskazówek historycznych i bibliograficznych.

§ 5

Całki wielokrotne.

Niechaj funkcya z dwu zmiennych x i y będzie określona w pewnem całkowitem polu płaskiem. Podzielmy to pole na pola cząstkowe, dowolnie obrane: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$, w każdem z nich obierzmy punkt dowolny i obliczmy w nim wartość f_r funkcyi z: następnie utwórzmy sumę $\Sigma f_r \sigma_r$ i weźmy granicę tej sumy, zmniejszając nieograniczenie wszystkie pola cząstkowe $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$. Jeżeli ta granica istnieje i posiada wartość, niezależną od wyboru wartości f_r od wyboru pól σ oraz od sposobu, w jaki one zdążają do zera, to nazywamy ją o k r e ś l o n ą c a ł k ą p o d w ó j n ą d l a p o l a d a n e g o i oznaczamy symbolem

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Podobnież określamy całki p o t r ó j n e, p o c z w ó r n e i t. p.

C a ł k ę p o d w ó j n ą m o ż n a z a w s z e p r z e d s t a w i ć z a p o m o c ą d w u k o l e j n y c h c a ł e k p o j e d y ń c z y c h: j e d n e j, o d n i e s i o n e j d o j e d n e j z m i e n n e j i w z i ę t e j w g r a n i c a c h, k t ó r e s ą f u n k c y a m i d r u g i e j z m i e n n e j, o r a z d r u g i e j c a ł k i, o d n i e s i o n e j d o d r u g i e j z m i e n n e j i w z i ę t e j p o m i ę d z y g r a n i c a m i s t a ł e m i.

J e ż e l i c a ł k ę w i e l o k r o t n ą

$$\int \ldots\ldots \int f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\, dx_1 \,.\, dx_2 \ldots\ldots dx_n,$$

g d z i e i l o ś c i x u w a ż a m y z a f u n k c y e n z m i e n n y c h $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$, c h c e m y p r z e k s z t a ł c i ć n a i n n ą c a ł k ę, z a w i e r a j ą c ą z m i e n n e y, t o p r z e k s z t a ł c a m y n a j p r z ó d f u n k c y ę f p o d z n a k i e m c a ł k o w y m w t e n s p o s ó b, a b y z a w i e r a ł a t e n o w e z m i e n n e, p o t e m m n o ż y m y j ą p r z e z w y z n a c z n i k f u nkcyjny danych zmiennych y. (Twierdzenie o przekształcaniu całek wielokrotnych).

Można zawsze znaleść funkcyę F zmiennych x i y taką, aby wartość całki podwójnej określonej

$$\int f(x, y)\, dx\, dy,$$

w polu danem zależała tylko od wartości, jakie funkcya F przybiera na obwodzie pola, nie zaś od wartości funkcyi w punktach wewnętrznych.

§ 6.

Całkowanie różniczek zupełnych.

Niechaj będzie wyrażenie różniczkowe typu:

$$X_1\, dx_1 + X_1\, dx_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + X_n\, dx_n,$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots X_n$ są funkcyami zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$; warunki konieczne i dostateczne na to, aby to wyrażenie było różniczką zupełną dokładną pewnej funkcyi φ zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$, składają się z $\frac{n(n-1)}{2}$ związków:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s}{\partial x_r}.$$

W przypadku, gdy te warunki spełniają się, powyższe wyrażenie nazywamy różniczką zupełną dokładną lub całkowalną.

Aby zcałkować to wyrażenie, t. j. aby znaleść funkcyę φ, której ono jest różniczką zupełną, postępujemy w ten sposób. Obliczamy najprzód całkę

$$\int X_1 \, dx_1 ,$$

w której uważamy tylko x_1 za zmienną, pozostałe zaś zmienne $x_2, x_3, \ldots x_n$ za ilości stałe. Znalazłszy po zcałkowaniu funkcyę $L_1 (x_1, x_2, \ldots x_n)$, tworzymy różniczkę zupełną i odejmujemy ją od różniczki danej; otrzymamy w ten sposób nowe wyrażenie różniczkowe, mające o jeden mniej wyrazów i o jednę mniej zmienną, t. j. zawierające tylko zmienne $x_2, x_3, \ldots x_n$. Z tem nowem wyrażeniem postępujemy tak samo, jak poprzednio, i dochodzimy do funkcyi $L_2 (x_2, x_3, \ldots x_n)$. Tak postępując, otrzymujemy n funkcyj $L_1, L_2, \ldots L_n$, z których pierwsza zawiera wszystkie zmienne $x_1, x_2, \ldots x_n$, druga zmienne $x_2, x_3, \ldots x_n$, trzecia zmienne $x_3, x_4, \ldots x_n$ i t. d. Suma

$$L_1 + L_2 + L_3 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + L_n + \text{const}$$

jest całką szukaną.

Wyrażenie o dwu zmiennych $X_1 dx_1 + X_2 dx_2$, po pomnożeniu przez odpowiedni czynnik μ, zależny od dwu zmiennych (czynnik całkujący), daje się zawsze zamienić na różniczkę zupełną.

Wyrażenie o trzech zmiennych

$$X_1 \, dx_1 + X_2 \, dx_2 + X_3 \, dx_3$$

po pomnożeniu przez pewien czynnik, daje się zamienić na różniczkę dokładną, jeżeli staje się zadość warunkowi:

$$X_1 \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \right) + X_2 \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \right) + X_3 \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right) = 0$$

Dla $n > 3$ czynnik całkujący istnieje przy spełnieniu się $\frac{n(n-1)}{2}$ warunków, podobnych do poprzedniego, a dających się łatwo z niego otrzymać przez ustalenie jednego skaźnika i przemienianie dwu pozostałych wszelkiemi możliwemi sposobami.

§ 7

Warunki całkowalności wyrażeń, zawierających pochodne jednej lub wielu funkcyj jednej zmiennej.

Niechaj będzie funkcya

$$F(x, y, y', y'' \ldots\ldots y^{(r)}),$$

w której zakładamy, że y jest funkcyą zmiennej x; chcemy zbadać, kiedy, bez uprzedniej znajomości tej funkcyi, można wyrażenie F zcałkować, t. j. kiedy F jest pochodną dokładną pewnej funkcyi zmiennych $x, y, y' \ldots y^{(r-1)}$.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to jest:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} - \ldots\ldots + (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial x^r}\frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} = 0.$$

Jeżeli funkcya F zawiera jeszcze inną funkcyę z i jej pochodne, to do tego warunku przybywa warunek analogiczny, w którym zamiast y piszemy z i t. d.

Zagadnienie to ma związek z rachunkiem waryacyjnym. Twierdzenie samo wypowiedział Euler (1764), lecz pierwszy jego dowód podał Condorcet (Acad. de Paris, 1765).

Co do szczegółów patrz E. Pascal, „Rachunek waryacyjny" przekład polski, Warszawa, 1897, str. 150—156.

ROZDZIAŁ VIII.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE.

§ 1.

Wiadomości ogólne.

Związek pomiędzy funkcyą niewiadomą y, jej pochodnemi aż do pochodnej rzędu n-tego względem zmiennej niezależnej x, oraz samą zmienną stanowi to, co nazywamy równaniem różniczkowem zwyczajnem rzędu n-tego

Jeżeli zakładamy m związków pomiędzy x, m funkcyami $y_1, y_2, \ldots y_m$ zmiennej x i ich pochodnemi, to mamy układ m równań różniczkowych zwyczajnych.

Zcałkować lub rozwiązać równanie czy też układ równań jest to znaleść tę funkcyę y albo funkcye $y_1, y_2, \ldots y_m$.

Jeżeli funkcya niewiadoma lub funkcye niewiadome zależą od wielu zmiennych i jeżeli istnieje jeden lub więcej związków pomiędzy niewiadomą lub niewiadomemi, zmiennemi oraz pochodnemi cząstkowemi funkcyi, wtedy mamy układ równań o pochodnych cząstkowych.

Każde równanie lub układ równań ma zawsze całkę, jeżeli założymy ciągłość funkcyj, stanowiących pierwsze strony tych równań.

Dowody tego twierdzenia podali: Cauchy (patrz Moigno, Calcul diff. 1844, II; Briot et Bouquet, Journ. de l'École. polyt. cah. XXXVI); Lipschitz (Ann. di Mat. II, Bulletin Darboux X); Volterra (Giorn. di Matem. XIX); Peano (Acc. Torino, 1886, Math. Ann. XXXVII), Arzelà (Acc. Bologna 1896) i t. d.

Całka y równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n-tego nazywa się **ogólną**, jeżeli zawiera n stałych $c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$, tak że jakobian funkcyj $y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}$ względem ilości $c_1, c_2, \ldots c_n$ jest różny od zera.

Całką **szczególną** nazywa się całka, którą otrzymujemy z całki ogólnej, nadając stałym wartości szczególne lub zakładając pomiędzy niemi pewne związki.

Całką **osobliwą** nazywa się całka, której nie można otrzymać z całki ogólnej przy pomocy postępowania, wskazanego w poprzedzającem określeniu; można ją wszakże otrzymać zawsze z całki ogólnej, nadając ilościom stałym wartości, które są funkcyami zmiennej x.

Jeżeli, mając równanie różniczkowe rzędu n-tego, znajdziemy związek pomiędzy stałą dowolną, zmienną x, funkcyą y i pochodnemi tej funkcyi aż do pochodnej rzędu $(n-1)$-go włącznie, to związek taki nazywa się **całką pierwszą** równania danego.

Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n tego ma n różnych całek pierwszych; jeżeli jedną z nich rozwiążemy względem stałej, a następnie weźmiemy pochodną, znajdziemy dane równanie różniczkowe; jeżeli zaś pomiędzy temi całkami wyrugujemy $y', y'' \ldots y^{(n-1)}$, znajdziemy całkę ogólną.

Obreślenia analogiczne, odnoszące się do równań różniczkowych cząstkowych podajemy w § 7 niniejszego rozdziału.

§ 2.

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu 1-go. Czynnik całkujący. Rozwiązania osobliwe.

Niechaj będzie równanie rzędu 1-go, sprowadzone do postaci

$$M\,dx + N\,dy = 0.$$

Niechaj μ będzie wyrażeniem takiem, że

$$\mu\,M\,dx + \mu\,N\,dy$$

jest różniczką dokładną; wtedy μ nazywa się czynnikiem całkującym (Euler, patrz wyżej § 6 rozdziału poprzedniego). Rozwiązanie danego równania można uczynić zależnem od znajomości czynnika μ.

Istnieje nieskończeniei wiele czynników całkujących.

Jeżeli znamy jeden z nich μ, to inne możemy wyrazić przez $\mu\,f(\varphi)$, gdzie

$$d\varphi = \mu\,M\,dx + \mu\,N\,dy.$$

Jeżeli znamy dwa czynniki całkujące różne μ, μ', to stosunek ich, przyrównany do stałej, daje całkę równania.

Czynnik całkujący μ czyni zadość równaniu:

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} - \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = 0,$$

Jeżeli

$$-\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

jest funkcyą samej zmiennej x, np. równa się $\psi(x)$, wtedy istnieje czynnik całkujący, będący funkcyą samej zmiennej x, a mianowicie:

$$\mu = e^{\int \psi(x)\, dx},$$

Jeżeli wyrażenie

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

jest funkcyą samej zmiennej y, np. równa się $\psi(y)$, wtedy istnieje czynnik całkujący. będący funkcyą samej zmiennej y, a mianowicie:

$$\mu = e^{\int \psi(y)\, dy}.$$

Jeżeli wyrażenie

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

można przedstawić w postaci

$$N\,\varphi(x) - M\,\psi(y),$$

wtedy istnieje czynnik całkujący, będący iloczynem funkcyi samej zmiennej x przez funkcyę samej zmiennej y.

Jeżeli funkcye M, N są postaci

$$M = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y), \quad N = \psi_1(x)\,\psi_2(y),$$

wtedy czynnikiem całkującym jest $\dfrac{1}{\varphi_2(y)\,\psi_1(x)}$, a równanie należy do typu tych, w których zmienne mogą być oddzielone.

Jeżeli M i N są funkcyami jednorodnemi tego samego stopnia, wtedy

$$\frac{1}{Mx + Ny}$$

jest czynnikiem całkującym.

W przypadku tym kładąc $\frac{y}{x} = z$, możemy równanie dane przekształcić na formę bezpośrednio całkowalną:

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, z)}{M(1, z) + z N(1, z)} dz = 0.$$

Równania liniowe postaci

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

gdzie P i Q są funkcyami samej zmiennej x, całkujemy przy pomocy wzoru

$$y = e^{-\int Pdx}\left[\int Q e^{\int Pdx} dx + \text{const}\right].$$

Równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right).$$

gdzie $ab' - a'b \lesseqgtr 0$, sprowadza się do typu równań jednorodnych, jeżeli położymy:

$$ax + by + c = x', \quad a'x + b'y + c' = y'.$$

Jeżeli zaś $ab' - a'b = 0$, wtedy

$$a'x + b'y + c' = m\,(ax + by + c) + n,$$

a wprowadziwszy zmienną x' zamiast x, dochodzimy do typu równań, w których zmienne są oddzielone.

Równanie Bernoulli'ego

$$\frac{dy}{dx} = Py + Qy^m,$$

gdzie P i Q są funkcyami samej zmiennej x, zamienia się na równanie liniowe, jeżeli położymy $y^{1-m}=z$.

Równanie

$$\frac{dy}{dx} = P + Qy + Ry^2$$

daje się sprowadzić do typu równania Bernoulli'ego, jeżeli znamy jednę jego całkę szczególną u i położymy następnie $y=u+v$.

Równanie

$$Xdx + Ydy + Z\,(xdy - ydx) = 0,$$

gdzie X, Y, Z są funkcyami jednorodnemi, przytem dwie pierwsze jednego stopnia, przez podstawienie $y=zx$ przekształca się na równanie Bernoulli'ego.

Równanie Riccati'ego jest postaci:

$$\frac{dy}{dx} + by^2 = cx^{m-2},$$

gdzie b, c są stałemi. Połóżmy najprzód $y = \frac{z}{x}$, a następnie:

$$z = \frac{1}{b} + \frac{x^m}{z_1}, \quad z_1 = \frac{m+1}{c} + \frac{x^m}{z_2}, \quad z_2 = \frac{2m+1}{b} + \frac{x^m}{z_3}, \ldots .$$

Jeżeli $\frac{m-2}{m}$ jest liczbą całkowitą równą k, to po k takich podstawieniach dojdziemy do równania, w którem po jednem jeszcze podstawieniu

$$z_k = x^{km-1}v$$

zmienne zostaną oddzielone.

Jeżeli zaś uskutecznimy podstawienia

$$z = \frac{x^m}{z_1}, \quad z_1 = \frac{m-1}{c} + \frac{x^m}{z_2}, \quad z_2 = \frac{2m-1}{b} + \frac{x^m}{z_3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

to, gdy $\frac{m+2}{m}$ jest liczbą całkowitą równą k, po k podstawieniach i po podstawieniu

$$z_k = x^{km-1}v,$$

dojdziemy do równania, którego zmienne są oddzielone.

Przypadki

$$\frac{m-2}{2m} = \text{całkowitej}, \qquad \frac{m+2}{2m} = \text{całkowitej}.$$

są dwoma przypadkami, w których równanie Riccati'ego daje się całkować w postaci skończonej. O całkowaniu go przez szeregi patrz niżej.

Poisson dał rozwiązanie równania Riccati'ego przy pomocy całki określonej (Journ. de l'École polyt. Cah. XVI). O równaniu Riccati'ego pisali Cayley (Phil. Magaz. XIXVI, 1868), Schläfli (Annali di mat. I), Catalan (Bull. de Belg. 1871, XXXI), Glaisher (Quart. J. XI—XII), Bach (Ann. de l'École norm., (2) i III).

Literaturę tego przedmiotu znaleść można w pracy M. Feldbluma „Teorya równania Riccati'ego" i t. d. (po rosyjsku), Warszawa 1898. (patrz „Wiadomości matematyczne", II, 1898).

Równanie Jacobi'ego

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)\,dy$$
$$+ (C + C'x + C''y)\,dx = 0,$$

za pomocą podstawień

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta,$$

gdzie α i β określają się ze związków

$$A + A'\alpha + A''\beta = \frac{C + C'\alpha + C''\beta}{\beta} = \frac{B + B'\alpha + B''\beta}{\alpha} = k.$$

k zas jest pierwiastkiem równania

$$\begin{vmatrix} A - k, & A', & A'' \\ B, & B' - k, & B'' \\ C, & C', & C'' - k \end{vmatrix} = 0.$$

sprowadza się do równania, w którem spółczynniki różniczek są funkcyami jednorodnemi. (Patrz Winkler. Wien. Ber., LXIV.)

Podobnego typu równanie, w którem spółczynniki różniczek są w ogóle funkcyami wymiernemi zmiennych x i y, nazywa się równaniem Darboux'a (patrz Darboux, Bull. des sciences math. (2), II).

Równanie Eulera

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = 0,$$

gdzie $f(x) = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$ ma całkę

$$y\sqrt{f(x)} - x\sqrt{f(y)} = C(1 - k^2x^2y^2).$$

Równania, nie zawierające ani x ani y a zawierające tylko y', całkują się, jeżeli w nich zamiast y położymy $y = \frac{c}{x}$, gdzie c jest stała.

Równanie typu

$$x = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) = \varphi'(p)$$

całkuje się przez wyrugowanie ilości p pomiędzy niem a równaniem

$$y = \int p\varphi'(y)dp + \text{const.}$$

Równanie typu

$$y = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) = \varphi(p)$$

całkuje się przez wyrugowanie ilości p pomiędzy niem a równaniem

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + \text{const.}$$

Równanie typu (równ. Monge'a)

$$y = x f\left(\frac{dy}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$
$$= x f(p) + \varphi(p),$$

całkuje się, jeżeli wyrugujemy p pomiędzy równaniem danem a następującem:

$$x = e^{\int \frac{f'(p)\,dp}{f(p)-p}} \left\{ -\int \frac{\varphi'(p)}{f(p)-p}\, e^{\int \frac{f'(p)\,dp}{f(p)-p}}\,dp + \text{const} \right\}$$

Równanie Clairauta

$$y = xp + \varphi(p). \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

całkuje się, jeżeli położymy w równaniu danem zamiast p stałą dowolną.

Całkę osobliwą równania Clairauta otrzymujemy, rugując p pomiędzy równaniem danem a związkiem $x + \varphi'(p) = 0$.

- - - - -

W ogólności, aby otrzymać całkę osobliwą równania różniczkowego zwyczajnego rzędu 1-go, trzeba wziąć pochodną względem stałej dowolnej strony pierwszej związku, przedstawiającego całkę ogólną, przyrównać tę pochodną do zera, a następnie wyrugować stałą pomiędzy tak otrzymanem równaniem a całką ogólną.

Otrzymane w ten sposób rozwiązanie osobliwe przedstawia geometrycznie obwiednią krzywych, które przedstawia całka ogólna.

Równanie różniczkowe rzędu 1-go i stopnia 1-go względem y' nie ma rozwiązania osobliwego.

Jeżeli strona pierwsza równania różniczkowego jest algebraicznie wymierną i całkowitą względem x, y, y' i jeżeli Δ jest wyróżnikiem tego równania względem zmiennej y', wtedy rozwiązanie osobliwe spełniać musi warunek $\Delta = 0$.

Rozwiązania osobliwe były przedmiotem licznych badań. Przytaczamy tu prace: Darboux'a (Comptes rendus LXX, 1870), Cayley'a (Messenger 1882), Casorati'ego (Ist. Lomb. 1874 - 1875), Lincei, 1876—1879 (Ann. di mat. XIX). Listę prac o tym przedmiocie i najważniejsze rezultaty dotąd otrzymane pomieścił Lia Predolla w rozprawie, ogłoszonej w Giornale di Matem. XXXIII, 1895). Porów. Zajączkowski „Teorya ogólna rozwiązań osobliwych różniczkowych zwyczajnych“ (Pam. Akad. Um. w Krak. III, 1877), oraz „Wykład nauki o równaniach różniczkowych“, Paryż 1877, str. 171—206.

§ 3.

Równania ròżniczkowe liniowe.

Równanie typu

$$X_0 y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \quad . \quad . \quad . \quad + X_n y = X_{n+1},$$

gdzie ilości X są funkcyami tylko zmiennej x, nazywa się równaniem różniczkowem liniowem; jeżeli $X_{n+1} = 0$, nazywa się jednorodnem, jeżeli $X_{n+1} \neq 0$ — zupełnem.

Równanie liniowe jednorodne za pomocą podstawienia

$$y = e^{\int z dx}$$

przekształcić można na inne równanie rzędu $(n-1)$-go, które już nie jest liniowem.

Jeżeli $y_1, y_2, \ldots y_n$ są n rozwiązaniami szczególnemi równania liniowego jednorodnego, takiemi, że ich wrońskian jest różny od zera, wtedy rozwiązanie ogólne przedstawia wzór:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \quad . \quad . \quad . + c_n y_n.$$

Rozwiązaniu ogólnemu zawsze tę postać nadać można.

Jeżeli znamy jedno rozwiązanie szczególne $y = y_1$ równania liniowego jednorodnego rzędu n-tego, wtedy za pomocą podstawienia $y = y_1$ całkowanie równania zupełnego sprowadzić można do całkowania innego równania tegoż typu i rzędu $n-1$.

Dla rozwiązania równania jednorodnego o spółczynnikach stałych $a_0, a_1, \ldots, a_n$ należy rozwiązać równanie algebraiczne, zwane charakterystycznem:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \quad . \quad . \quad . \quad + a_n = 0.$$

Jeżeli α jest pierwiastkiem pojedyńczym rzeczywistym tego równania, to $y = e^{\alpha x}$ będzie całką szczególną równania różniczkowego danego.

Jeżeli α jest pierwiastkiem rzeczywistym r-krotnym równania charakterystycznego, to

$$y = e^{\alpha x}, \quad y = x e^{\alpha x}, \quad \ldots \quad y = x^{r-1} e^{\alpha x}$$

są całkami szczególnemi danego równania różniczkowego. Wreszcie każdej parze pierwiastków zespolonych sprzężonych $\alpha = m + ni$ odpowiadają dwie całki szczególne

$$y = \cos(nx)\, e^{mx}, \quad y = \sin(nx)\, e^{mx}.$$

W ten sposób, rozwiązawszy równanie charakterystyczne, możemy znaleść n całek szczególnych niezależnych; z nich zaś tworzymy całkę ogólną.

Dla zcałkowania równania liniowego zupełnego, całkujemy odpowiadające mu równanie jednorodne, t. j. równanie, otrzymane przez zastąpienie funkcyi X_{n+1} zerem. Jeżeli całką ogólną tego równania jest

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

to rozwiązujemy według ilości $\frac{dc_1}{dx}, \ldots, \frac{dc_n}{dx}$ równania:

$$\frac{dc_1}{dx} y_1 + \frac{dc_2}{dx} y_2 + \ldots + \frac{dc_n}{dx} y_n = 0,$$

$$\frac{dc_1}{dx} y'_1 + \frac{dc_2}{dx} y'_2 + \ldots + \frac{dc_n}{dx} y'_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dc_1}{dx} y_1^{(n-2)} + \frac{dc_2}{dx} y_2^{(n-1)} + \ldots + \frac{dc_n}{dx} y_n^{(n-2)} = 0,$$

$$\frac{dc_1}{dx} y_1^{(n-1)} + \frac{dc_2}{dx} y_2^{(n-1)} + \ldots + \frac{dc_n}{dx} y_n^{(n-1)} = \frac{X_{n+1}}{X_0}$$

Całkując otrzymane związki

$$\frac{dc_1}{dx} = q_1(x), \quad \frac{dc_2}{dx} = q_2(x), \; \ldots\ldots \; \frac{dc_n}{dx} = q_n(x),$$

znajdziemy n funkcyj $c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$ zmiennej x, które podstawiwszy w wyrażeniu na y, otrzymamy całkę ogólną.

Jeżeli znamy całkę szczególną równania zupełnego i całkę ogólną odpowiedniego równania jednorodnego, to biorąc ich sumę, znajdujemy całkę ogólną danego równania zupełnego.

Jeżeli równanie różniczkowe zupełne ma spółczynniki stałe, a jego strona druga jest postaci $Pe^{\lambda x}$, gdzie P jest wielomianem ze zmienną x, wtedy całką szczególną równania zupełnego jest

$$Q\, x^{\mu}\, e^{\lambda x},$$

gdzie μ jest liczbą pierwiastków równania danego, równych λ (lub zeru, jeżeli λ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego). Q zaś jest wielomianem tego samego stopnia co P, o spółczynnikach, które otrzymujemy, podstawiając za y to wyrażenie i wyznaczając warunki, przy których równanie sprawdza się tożsamościowo (Patrz Jordan, Cours d'analyse, III str. 158).

Jeżeli znamy całkę szczególną równania zupełnego, wtedy całkowanie sprowadzić można do całkowania równania liniowego tego samego rzędu, lecz jednorodnego.

Jeżeli znamy całkę szczególną równania jednorodnego, wtedy całkowanie równania zupełnego sprowadzić można do całkowania równania zupełnego rzędu niższego.

Jeżeli $y_1, y_2, \ldots y_n$ są całkami szczególnemi liniowo-niezależnemi równania jednorodnego, wtedy ich wrońskian wyraża się następującym wzorem Liouville'a:

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x_1} P dx}.$$

Jeżeli mamy równanie zupełne rzędu 2-go:

$$y'' + Py' + Qy = X,$$

i jeżeli y_1 jest całką szczególną równania

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

wtedy kładąc

$$y_1 y' - y y_1' = z,$$

znajdziemy:

$$z = e^{-\int P dx}\left[\int X y_1 e^{\int P dx} + C_1\right]$$

a całką ogólną równania danego będzie:

$$y = y_1 \int \frac{z}{y_1^2} dx + C_2 y_1.$$

Jeżeli y_1, y_2 są dwie całki szczególne liniowo-niezależne równania liniowego rzędu 2-go, to punkty zerowe funkcyi y_1 są przedzielone punktami funkcyi y_2: mianowicie pomiędzy dwoma punktami zerowemi funkcyi y_1 znajduje się zawsze punkt zerowy funkcyi y_2, pomiędzy zaś dwoma punktami zerowemi funkcyi y_2 znajduje się zawsze jeden punkt zerowy funkcyi y_1 (Twierdzenie Sturma).

Równania liniowe postaci

$$a_0 (ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

sprowadzają się do typu równań o spółczynnikach stałych za pomocą podstawienia $ax+b=e^t$.

Równania Laplace'a są postaci

$$(a+bx)\,y^{(n)}+(a_1+b_1x)\,y^{(n-1)}+\ldots\ldots+(a_n+b_nx)\,y=0.$$

Położywszy

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n=\psi(z);\ bz^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n=\varphi(z).$$

oraz $T=\dfrac{C}{\varphi(x)}\,e^{\int\frac{\psi_1(t)}{\varphi(t)}dt}$, gdzie C jest stałą, otrzymujemy całkę ogólną w postaci:

$$\left\{\,C_1\int_{\beta_0}^{\beta_1}+C_2\int_{\beta}^{\beta_2}+\ldots\ldots-C_{n-1}\int_{\beta_0}^{\beta_{n+1}}\right\}e^{xt}\,Tdt.$$

gdzie ilości C_1, C_2, ... są związane jednym warunkiem, ilości zaś β mają dające się wyznaczyć wartości. (Patrz Jordan, l. c. t. III, str. 253; d'Arcais, Calcolo infinit. t. II, str. 565).

Równania

$$k(1-k^2)\frac{d^2(ky)}{dk^2}-(1+k^2)\frac{d(ky)}{dk}+y=0,$$

czynią zadość peryody tak zwanej całki eliptycznej Legendre'a

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

uważane za funkcye ilości k. (Patrz rozdział XVI)

Równanie

$$(x^3-1)\,y'''-3ax^2y''+3a(a+1)\,xy'-a(a+1)(a+2)\,y=0$$

ma całkę ogólną

$$y=C_1\,(x-1)^{a+2}+C_2\,(x-\varepsilon)^{a+2}+C_3\,(x-\varepsilon^2)^{a+2},$$

gdzie ε jest pierwiastkiem sześciennym z jedności.

Równanie $y'' = x^2 y$ ma całkę ogólną

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-\frac{\lambda}{2} x^2}\, d\lambda}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{4}}} + C_2 x \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2} x^2}\, d\lambda}{(1-\lambda^2)^{\frac{1}{4}}},$$

(patrz Spitzer, Archiv Grunerta LII).

Równanie

$$y^{(n)} = A x^2 y'' + B x y' + C y$$

badał Spitzer (Math. Ann. III, Archiv Grunerta LIII) i wyraził rozwiązanie jego za pomocą całki określonej.

Równanie

$$y'' + P y' + Q y = 0,$$

w którem P, Q są funkcyami wymiernemi zmiennej x, badał Euler; całka tego równania wyraża się za pomocą całki określonej. Przypadek, w którym te funkcye są liniowe, badał Winkler (Wiener Berichte, LXVII).

§ 4.

Równania rzędu wyższego nad pierwszy.

Równanie typu

$$f\,(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad \text{lub} \quad y^{(n)} = \varphi\,(y^{(n-1)})$$

jeżeli w niem położymy $y^{(n-1)} = p$, daje

$$x = \int \frac{dp}{\varphi(p)} + \text{const}.$$

Rugując p z tego i poprzedzającego równania, otrzymujemy wyrażenie funkcyi $y^{(n-1)}$ przez x, a za pomocą kolejnych kwadratów możemy znaleść y.

Równanie typu

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}),$$

jeżeli położymy:

$$y^{(n-2)} = p, \quad y^{(n-1)} = q,$$

daje:

$$\tfrac{1}{2} q^2 = \int f(p)\, dp + \text{const},$$

$$x = \int \frac{dp}{q} + \text{const}.$$

Otrzymujemy tu p w funkcyi zmiennej x, stąd zaś znajdziemy $y^{(n-1)}$ w funkcyi tejże zmiennej, a przez kolejne kwadratury dojdziemy do funkcyi y.

Jeżeli będziemy uważali x i y za funkcye liniowe zmiennej t, $\frac{dy}{dx}$ za funkcyą stopnia zero, $\frac{d^2y}{dx^2}$ za funkcyę stopnia — 1 i t. d., to wszystkie wyrazy równania będą tego samego stopnia, a rząd równania obniży się, jeżeli położymy

$$x = e^{\Theta}, \quad y = z e^{\Theta}.$$

Rząd równania jednorodnego względem ilości y i jej pochodnych obniża się, jeżeli położymy:

$$y = e^{z}, \quad \frac{dz}{dx} = u, \quad \text{lub } y' = uy.$$

Rząd równania, nie zawierającego wyraźnie zmiennej x, można obniżyć, kładąc $y' = \frac{dy}{dx} = p$ i uważając y za nową zmienną.

Jeżeli nadamy ilości x wymiar 1, ilości y wymiar n, pochodnej y' wymiar $n—1$ i t. d., wtedy $y^{(n)}$ będzie wymiaru zero; równanie będzie jednorodnem stopnia r, a kładąc $x = e^t$, $y = e^{rt}. z$, obniżymy rząd o jedność.

Rząd równania

$$y'' + Py' + Qy'^2 = 0,$$

w którem P i Q zawierają tylko y i x, można obniżyć o jedność w następujących przypadkach:

1) jeżeli P i Q są funkcyami tylko zmiennej x; kładąc $\frac{dy}{dx} = p$, otrzymujemy równanie Bernoulli'ego;

2) jeżeli P i Q są funkcyami tylko zmiennej y; kładąc $y' = \frac{1}{x'}$, $y'' = -\frac{x''}{x'^3}$, przychodzimy do przypadku poprzedzającego.

3) jeżeli P jest funkcyą tylko zmiennej x, Q zaś funkcyą tylko zmiennej y. Całką pierwszą jest wtedy:

$$\log\left(\frac{dy}{dx}\right) + \int Pdx + \int Qdy = \text{const},$$

a całką ogólną:

$$\int dy\, e^{\int Qdy} = c_1 \int e^{-\int Pdx} dx + c_2.$$

Jest to przypadek równania, zwanego równaniem Liouville'a.

§ 5.

Całkowanie równań różniczkowych przez szeregi.

Najzwyklejszą metodą całkowania różniczkowego zwyczajnego rzędu n-tego przez szeregi jest następująca: Rozwiązujemy równanie względem $y^{(n)}$; biorąc pochodne otrzymanego wyrażenia, otrzymujemy kolejno $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$ . . . wyrażone przez x, y, y' . . . $y^{(n-1)}$; nadajemy wartości dowolne ilościom y, y' . . $y^{(n-1)}$ dla $x = x_0$ i tworzymy szereg

$$y = y_0 + (x - x_0)\, y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\, y_0'' + \ldots .$$

Jeżeli ten szereg jest zbieżny w pewnym obszarze naokoło punktu x_0, wtedy przedstawia on całkę równania danego

Jeżeli nadawszy wartości zupełnie dowolne na y, y'_0 . . $y_0^{(n-1)}$, nie otrzymamy niezgodności pomiędzy wartościami pochodnych $y_0^{(n)}$, $y_0^{(n+1)}$. . . . . szereg zas jest zawsze zbieżny, wtedy wyobraża on całkę ogólną: jeżeli zaś nie można nadać ilościom y_0, y'_0 . . . $y_0^{(n-1)}$ wartości zupełnie dowolnych, lecz tylko pewne wartosci, wtedy szereg (o ile jest zbieżny) przedstawia całkę szczególną.

Równanie Riccati'ego w przypadkach, w których nie daje się całkować w postaci skończonej, może być całkowane przy pomocy szeregów.

Niechaj będzie równanie Riccati'ego

$$y' + y^2 = cx^{m-2}.$$

Połóżmy $y = \dfrac{z'}{z}$: będzie :

$$z'' - cx^{m-2}\, z = 0.$$

Jeżeli z_1, z_2 są dwiema całkami szczególnemi tego równania, to całką ogólną równania danego będzie:

$$y - \frac{z_1' + Cz_2'}{z_1 + Cz_2}.$$

Połóżmy :

$$z = e^{\int c^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} dx};$$

będzie

$$u'' + 2c^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} u' + \left(\frac{m}{2} - 1\right) c^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m}{2}-2}\, u = 0.$$

Dwiema całkami szczególnemi tego równania, uporządkowanemi według potęg rosnących zmiennej x (przy założeniu $\frac{m}{2} - 1 = n$) są:

$$u_1 = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r c^{\frac{r}{2}} \frac{n(3n+2)(5n+4)\ldots[(2r-1)n+2(r-1)]}{r!(n+1)^r . n(2n+1).(2n+2).\ \ldots(rn+r-1)} x^{r(n+1)},$$

$$u_2 = x\left\{1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r c^{\frac{r}{2}} \frac{(n+2)(3n+4)\ldots[(2r-1)n+2r]}{r!(n+1)^r . (n+2)(2n+3)\ldots.(rn+r+1)} x^{r(n+1)}\right\}.$$

Te szeregi są zbieżnemi dla wszystkich wartości x.

Całką szczególną równania

$$y'' + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)} y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} y = 0$$

zwanego równaniem Gaussa, jest tak nazwany szereg hypergeometryczny

$$y_1 = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots\ldots$$

zbieżny dla wartości x, dla których $|x| < 1$. (Patrz Rozdz. XVIII)

Równanie Legendre'a

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n+1) y = 0.$$

ma całki szczególne:

$$y_1 = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} \ldots\ldots$$

$$y_2 = x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-(n+3)} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+2)}{2.4.(2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + .$$

zbieżne dla $|x| < 1$. Jeżeli $2n$ jest liczbą nieparzystą dodatnią lub ujemną, to te dwie całki nie są niezależnemi.

Równanie

$$xy'' + y' + y = 0.$$

ma całkę szczególną (przy każdej wartości x):

$$y_1 = 1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{1^2 . 2^2} - \frac{x^3}{1^2 . 2^2 . 3^2} + \ldots\ldots$$

Równanie Bessela

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

ma całkę szczególną

$$x^n \left\{1 - \frac{x^2}{2^2 (n+1)} + \frac{x^4}{2!2^4 (n+1)(n+2)} - \ldots\ldots\right\};$$

drugą całkę szczególną otrzymujemy, zmieniając n na $-n$. Jeżeli n jest liczbą całkowitą, to otrzymujemy w ten sposób jednę tylko całkę szczególną

Jeżeli w równaniu Bessela napiszemy:

$$y = t^\alpha z, \quad x = \gamma t^\beta,$$

to równanie przekształci się na następujące:

$$t^2 z'' + (2\alpha + 1) t z' + (\alpha^2 - \beta^2 n^2 + \beta^2 \gamma^2 t^{2\beta}) z = 0.$$

Do tej postaci można sprowadzić, przy odpowiednim doborze ilości α, β, γ, każde równanie typu

$$t^2 z'' + m t z' + (b + c t^\lambda) z = 0.$$

Tak np. jeżeli

$$\alpha = \frac{m-1}{2}, \quad \beta = \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{2}, \quad \beta^2 \gamma^2 = q,$$

otrzymamy równanie:

$$t^2 z'' + m t z' + q t^2 z = 0,$$

którego całką szczególną jest:

$$y = 1 - \frac{1 \, . \, q}{2!(m+1)} x^2 + \frac{1 \, . \, 3 \, . \, q^2}{4!(m+1)(m+3)} x^4 + \ldots\ldots$$

W przypadku szczególnym, gdy

$$2\beta + 1 = 0, \quad a^2 - \beta^2 n^2 = 0,$$

otrzymujemy równanie Riccati'ego przekształcone.

§ 6.

Układy rownań różniczkowych jednoczesnych.

Układ m równań różniczkowych, zawierających zmienną x, m funkcyj i ich pochodne aż do pewnego rzędu względem x, nazywa się układem równań różniczkowych jednoczesnych. Jeżeli w układzie tym zachodzą pochodne rzędu wyższego nad pierwszy, to kładąc:

$$\frac{dy_1}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{d^2 y_1}{dx^2} = u, \ldots\ldots$$

i przyłączając te nowe równania do danych, sprowadzamy układ dany do układu n równań pomiędzy n funkcyami $y_1, y_2 \ldots y_n$, zawierającego pochodne stopnia nie wyższego nad pierwszy.

Taki układ daje się zawsze całkować za pomocą n związków skończonych pomiędzy $y_1, y_2, .., . y_n$ z n stałemi dowolnemi.

Jeżeli z układu tego wyrugujemy $n - 1$ funkcyj niewiadomych wraz z ich pochodnemi, dojdziemy do równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n-tego, którego całka zawiera n stałych dowolnych. Aby to uskutecznić, stosujemy metodę następującą:

Rozwiązujemy równania względem pochodnych

$$y' = f_1(x, y_1, y_2 \ldots \ldots y_n),$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$y_n' = f_n(x, y_1, y_2 \ldots \ldots y_n);$$

bierzemy pochodną pierwszego z nich względem x: podstawiamy po stronie drugiej, zamiast pochodnych funkcyj y, ich wartości, wzięte z powyższych równań; bierzemy w taki sposób pochodną $n-1$ razy i otrzymujemy $y_1', y_1'' \ldots y_1^{(n)}$: wyrażone przez $x, y_1, y_2, \ldots y_n$. Rugując $y_2, y_3 \ldots y_n$, znajdziemy równanie różniczkowe z funkcyą y_1. Znając n pierwszych całek tego równania różniczkowego, t. j.

$$w_1(x, y_1, y_1' \ldots, y_1^{(n-1)}) = c_1; \ldots\ldots; w_n(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(n-1)}) = c_n$$

i podstawiając w nich wartości poprzednie, otrzymane na $y_1, y_1'' \ldots y_1^{(n-1)}$, znajdziemy n związków pomiędzy ilościami $x, y_1, y_2, \ldots y_n, c_1, c_2, \ldots c_n$.

Jeżeli równań danych nie możemy rozwiązać względem pochodnych pierwszych, to każde z nich różniczkujemy $n-1$ razy, i otrzymujemy n^2 równań pomiędzy x a ilościami

$$y_1, y_1', \ldots y_1^{(n)}: y_2, y_2', \ldots y_2^{(n)}; \ldots\ldots; y_n, y_n', \ldots y_n^{(n)}.$$

Rugując pomiędzy temi równaniami $n(n-1)$ ilości $y_2, y_2', \ldots y_2^{(n)}, \ldots\ldots y_n, y_n' \ldots y_n^{(n)}$, otrzymamy równanie różniczkowe rzędu n-tego względem y_1. Rugując pomiędzy całkami pierwszemi tego równania i n^2 równaniami poprzedzającemi ilości $y_1' \ldots y_1^{(n)}$: $y_2' \ldots y_2^{(n)}; \ldots y_n, \ldots, y_n^{(n)}$, znajdziemy związek pomiędzy $x_1, y_1, y_2 \ldots y_n$ a stałą.

Układ równań

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma; \quad \frac{dy_2}{dx} = \alpha' y_1 + \beta' y_2 + \gamma'.$$

gdzie α, β, γ, β', β', γ' są stałe, ma całki następujące:

$$y_1 + \lambda_1 y_2 + \mu_1 = C_1 e^{(\alpha + \alpha'\lambda_1)x}$$

$$y_1 + \lambda_2 y_2 + \mu_2 = C_2 e^{(\alpha + \alpha'\lambda_2)x}$$

gdzie λ_1, λ_2 są pierwiastkami (różnemi) równaniami stopnia drugiego $\beta + \beta'\lambda = \lambda(\alpha + \alpha'\lambda)$, zaś μ_1 i μ_2 są odpowiedniemi wartościemi ułamka $\mu = \dfrac{\alpha + \alpha'\lambda}{\gamma + \gamma'\lambda}$. Jeżeli $\lambda_1 = \lambda_2$, a stąd $\mu_1 = \mu_2$, wtedy jedna z całek jest postaci poprzedzającej, drugą zaś jest:

$$y_2 + \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{(\alpha + \alpha'\lambda_1)^2} = e^{(\alpha + \alpha'\lambda_1)x}(C_2 + C_1 \alpha' x).$$

W przypadku, gdy po stronie drugiej równań danych występuje jeszcze wyraz, będący funkcyą samej zmiennej x, wtedy rozwiązujemy zadanie, zakładając, że w poprzedniem rozwiązaniu C_1 i C_2 są funkcyami tej zmiennej, i oznaczamy warunki, przy których czynią zadość danemu równaniu (metoda waryacyi stałych).

Niechaj będzie układ równań jednoczesnych

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots\ldots,$$

gdzie

$$X = ax + by_1 + cy_2 + \ldots\ldots + e,$$

$$Y_1 = a'x + b'y_1 + c'y_2 + \ldots\ldots + e',$$

$$Y_2 = b''x + b''y + c''y_2 + \ldots\ldots + e'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Niechaj każdy z powyższych stosunków równa się dt; otrzymujemy przez to $n-1$ wyrażeń typu

$$t = C_i (\lambda_i x + \mu_i y_1 + \nu_i y_i + \ldots\ldots h_i)^{\frac{1}{k_i}},$$

gdzie k_i są $n+1$ pierwiastkami równania

$$\begin{vmatrix} a-k, & a', & a'', & \ldots\ldots \\ b, & b,-k, & b'', & \ldots\ldots \\ c, & c', & c''-k, & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} = 0,$$

ilości zaś $\lambda, \mu, \nu, \ldots h$ są dane przez równania

$$\begin{aligned} \lambda_i a + \mu_i a' + \nu_i a'' + \ldots\ldots &= \lambda_i k_i, \\ \lambda_i + \mu_i b' + \nu_i b'' + \ldots\ldots &= \mu_i k_i, \\ \lambda_2 c + \mu_i c' + \nu_i c'' + \ldots\ldots &= \nu_i k_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_i e + \mu_i e' + \nu_i e'' + \ldots\ldots &= h_i k_i, \end{aligned}$$

Rugując t pomiędzy $n+1$ w ten sposób otrzymanemi wyrażeniami, znajdziemy n całek niejednorodnych z n stałemi ($n+1$ całek jednorodnych).

---

§ 7.

Równania o pochodnych cząstkowych.

Jeżeli dany jest związek pomiędzy funkcyą y, zmiennemi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i pochodnemi cząstkowemi pierwszego rzędu $p_1, p_2, \ldots p_n$ funkcyi y względem tych zmiennych, to związek $F=0$ pomiędzy $y, x_1, x_2, \ldots x_n$ i n stałemi dowolnemi, taki, że obliczając z niego n pochodnych funkcyi y i rugując stałe, dochodzimy do równania różniczkowego danego, nazywa się całką zupełną.

Jeżeli F jest całką zupełną ze stałemi $c_1, c_2, \ldots c_n$, to kładąc:

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c_2} = 0, \ldots\ldots, \frac{\partial F}{\partial c_n} = 0,$$

rugując z tych równań i z równania $F=0$ wszystkie stałe dowolne, otrzymujemy całkę osobliwą.

Jeżeli zaś jednę ze stałych np. a uczynimy równą funkcyi dowolnej wszystkich pozostałych i wyrugujemy stałe pomiędzy całką zupełną $F=0$, funkcyą Φ i $n-1$ związkami

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, \ldots\ldots \frac{\partial F}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial \Phi}{\partial a_{n-1}} = 0,$$

otrzymamy rozwiązanie, w które wchodzi funkcya dowolna. Rozwiązanie to nazywa się rozwiązaniem ogólnem lub całką ogólną.

Znając całkę zupełną, możemy znać wszystkie inne całki.

Każde rozwiązanie jest zawsze zawarte w jednej z powyższych trzech kategoryj.

Równanie o pochodnych cząstkowych 1-go rzędu, liniowe względem pochodnych, jest postaci

$$P_1 p_1 + \ldots\ldots + P_n p_n = P,$$

gdzie $P_1, \ldots P_n$, P są funkcyami zależnemi od y i od zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$; $p_1, p_2, \ldots p$ zaś są pochodnemi cząstkowemi funkcyi y odpowiednio względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Utwórzmy układ równań różniczkowych liniowych zwyczajnych

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dy}{P}.$$

Całkując ten układ, otrzymamy n całek $u_1 = \text{const}$, $u_2 = \text{const}, \ldots \ldots u_n = \text{const.}$, gdzie $u_1, u_2, \ldots u_n$ są funkcyami ilości $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Funkcya dowolna wszystkich ilości u, przyrównana do zera, stanowi całkę ogólną równania danego (Rozwiązanie Lagrange'a).

W przypadku, gdy równanie nie jest liniowem względem $p_1, p_2, \ldots . p_n$, całkowanie sprowadzić można do całkowania równań liniowych. Metody, do tego celu służące, znane są pod nazwą metod Pfaffa i Jacobi'ego.

Niechaj będzie równanie

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0;$$

postarajmy się znaleść $n-1$ związków podobnych z $n-1$ stałemi:

$$F_1(x_1, x_2, \ldots . x_n, y, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_1,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$F_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_{n-1},$$

takich, aby $p_1, p_2, \ldots . p_n$, otrzymane z powyższych n równań, zamieniały drugą stronę równania

$$dy = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n$$

na różniczkę zupełną. Zcałkowawszy to ostatnie równanie, znajdziemy funkcyę y, wyrażoną przez ilości x i nową stałą.

Znalezienie funkcyj $F_1 \ldots F_{n-1}$ zależy od całkowania równania różniczkowego liniowego o pochodnych cząstkowych. Jeżeli położymy

$$\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m}{\partial z} p_i, \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

to F_1 zależeć będzie od równania o pochodnych cząstkowych

$$0 = [FF_1] = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right), & \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right) \\ \frac{\partial F}{\partial p_i}, & \frac{\partial F_1}{\partial p_i} \end{vmatrix},$$

F_2 od dwu równań analogicznych

$$[FF_2] = 0, \quad [F_1 F_2] = 0,$$

F_3 od trzech równań:

$$[FF_3] = 0, \quad [F_1 F_3] = 0, \quad [F_2 F_3] = 0,$$

i t. d.

Nie potrzeba wyznaczać całek ogólnych tych równań, wystarczy wyznaczenie ich całek szczególnych. Szczegóły musimy tu pominąć.

Metoda Pfaffa sprowadza rozwiązanie danego równania do zagadnienia następującego: „Zcałkować przy pomocy m całek wyrażenie postaci

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots\ldots + X_{2m}\,dx_{2m} = 0,$$

gdzie ilości X są funkcyami zmiennych x. Jacobi pierwszy zajął się metodą Pfaffa (Crelle, II), zmodyfikował ją i wydoskonalił, wreszcie stworzył metodę nową (patrz niżej wskazówki bibliograficzne).

W rozwiązaniu przy pomocy metody Pfaffa napotykamy wyrażenia zwane pfaffianami, które są pierwiastkami kwadratowemi wyznaczników półsymetrycznych rzędu parzystego (patrz wyżej, Rozdział III. § 2).

Równanie Eulera

$$a\,\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + 2b\,\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\,\partial x_2} + c\,\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 0$$

ma całkę ogólną

$$y = f(x_1 + \lambda_1 x_2) + \varphi\,(x_1 + \lambda_2 x_2),$$

gdzie f i φ są symbolami funkcyj dowolnych, λ i λ_2 zaś są pierwiastkami równania

$$a + 2b\lambda + c\lambda^2 + 0.$$

Jeżeli $\lambda = \lambda_2$, całka ogólna ma postać:

$$f(x_1 + \lambda x_2) + \varphi(x_1 + \lambda x_2)(\gamma x_1 + \delta x_2),$$

gdzie γ i δ są stałe dowolne.

Jeżeli $b = 0$, otrzymujemy tak zwane równanie strun dźwięczących (równanie Bernoulli'ego, w którem y jest wysunięciem miejsca punktu o odciętej x_1; x_2 oznacza czas)

Równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + M\frac{\partial y}{\partial x_1} + N\frac{\partial y}{\partial x_2} + Py + Q = 0,$$

w którem M, N, P, Q są funkcyami samej zmiennej x, całkuje się w ten sposób:

Jeżeli $P - \dfrac{dM}{dx_1} - MN - A = 0$, wtedy całkowanie sprowadzić można do całkowania równania

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + Nu + Q = 0;$$

które, nie zawierając pochodnej względem x_2, całkuje się jak równanie różniczkowe zwyczajne, pod warunkiem, że stałą dowolną uczynimy równą funkcyi dowolnej zmiennej x_2. Znalazłszy tym sposobem u, podstawiamy tę wartość w równaniu

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} + My = u,$$

całkujemy je podobnie jak poprzednio, i znajdujemy y z dwiema funkcyami dowolnemi, z których jedna zależy tylko od x_1, druga tylko od x_2.

Jeżeli A nie jest zerem, wtedy przy pomocy podstawienia

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} + My = u$$

otrzymujemy równanie ze zmienną u tegoż typu, co dane. Do tego nowego równania stosujemy tożsamo postępowanie, t. j. badamy, czy nowa ilość A nie jest zerem i t. d.

Do równania typu powyższego daje się sprowadzić i takie równanie, w którem zachodzą liniowo i pozostałe pochodne drugie funkcyi y.

Patrz Lacroix (Calcul intégral), Imszenieckij (Archiv Grunerta LIV), oraz notę Boussinesqa (Comptes Rendus LXXIV), który sądził, że pierwszy uskutecznił powyższą redukcyę (porów. Serret. Comptes Rendus LXXIV)

Równanie Liouville'a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = e^{2\lambda y}$$

ma całkę ogólną:

$$y = \frac{1}{2\lambda} \log \frac{f'(x_2)\,\varphi'(x_1)}{[\lambda f(x_2) + \varphi(x_1)]^2},$$

gdzie f, φ są dwiema funkcyami dowolnemi; pierwsza zmiennej x_2, druga zmiennej x_1.

Darboux (Comptes rendus 1882) rozważał równanie następujące:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{m(1-m)}{(x_1 - x_2)^2}\, y.$$

Jest to przypadek szczególny równania

$$(x_1 - x_2)\frac{\partial_2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - \beta' \frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,$$

gdyż, kładąc w pierwszem $y = (x_1 - x_2)^m u$, otrzymujemy przypadek szczególny drugiego (w którym $\beta = \beta' m$).

Całką równania ogólniejszego jest:

$$u = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(a)(x_2 - a)^{-\beta'}(a - x_1)^{-\beta}\, da$$

$$+ (x_1 - x_2)^{1-\beta-\beta'} \int_{x_1}^{x_2} \psi(a)(x_2 - a)^{\beta-1}(a - x_2)^{\beta'-1}\, dx,$$

gdzie φ i ψ są funkcyami dowolnemi.

Rezultat ten zawdzięczamy Appelowi (Bull. Darboux 1882, str. 314). Równaniem tem zajmowali się już Euler (Calculus integr. III) i Poisson (Journ. de l'Ecol. polyt. XII). Inne wskazówki znaleść można u Darboux'a (Théorie des surfaces, II str. 54) i Jameta (Bull. Darboux, 1895, str. 208).

Równanie jeszcze ogólniejsze

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{n}{x_1 - x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{m}{(x_1 - x_2)} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{p}{(x_1 - x_2)^2} u = 0$$

badał już Laplace (Acad. des sciences 1773); sprowadzić je można do poprzedzającego.

Sposób całkowania równania

$$\frac{\partial^n y}{\partial x_1^{\,n}} = x_1^{\,m} \frac{\partial^{m+n} y}{\partial x_2^{\,m+n}} + F_1(y) + x F_2(y) + \ldots\ldots + x^{m-1} F_m(y)$$

znaleść można u Spitzera (Archiv Grunerta LI, 1870).

Całkowaniem równania

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^{\,2}}$$

zajmowali się Schläfli (Crelle LXXII) i Le Roux (Bull. Darboux, 1895).

Literatura o równaniach różniczkowych jest bardzo rozległa.

Rys historyczny tej teoryi znaleść można w dziele Schlesingera: „Theorie der linearen Differentialgleichungen“ (Lipsk 1895—97), gdzie znajduje się także dość zupełna bibliografia.

Pierwszy Euler (1769) zajmował się wyczerpująco równaniami różniczkowemi; po nim D'Alembert, Legendre, Cauchy i inni. W ostatnich czasach zajmowano się szczegółowo równaniami różniczkowemi liniowemi, badając ich związek z teoryą funkcyj oraz teoryą grup przekształceń (patrz Rozdział IX). W tym nowym kierunku badań należy wymienić przedewszystkiem prace Fuchsa (Crelle, LXVI, LXVIII, Berl. Akad. 1884 i t. d.). Inne cytaty podajemy w rozdziale następnym. Celem prac doby najświeższej jest nietyle znajdowanie całek, ile badanie zachowania się tychże w sąsiedztwie danego punktu.

Z książek, traktujących o równaniach różniczkowych, wymieniamy dzieła: Boole'a (Londyn 1865—1872) Wł. Zajączkowskiego (Wykład nauki o równaniach różniczkowych, Paryż 1877). Forsytha (Londyn 1885, Cambridge 1890, przekład niemiecki Masera, 1889). Schlesingera wyżej cytowane, Craiga (New-York, 1889) i t. d,

Równaniami o pochodnych cząstkowych zajmowali się: d'Alembert, Euler, Lagrange („Théorie des fonctions analytiques i „Calcul des fonctions“): Cauchy (Comptes rendus XIV, XV, XVI) i inni.

Pierwsze prace o równaniach liniowych 1-go rzędu zawdzięczamy Lagrange'owi, Cauchy'emu, Jacobi'emu (Crelle II, XXIII. Werke IV); o równaniach nieliniowych—Lagrange'owi, Charpitowi (w pracy przedstawionej Akad. paryskiej w 1784. lecz nieogłoszonej; metodę jej wyłożył Lacroix w swoim „Rachunku“ t. II, str. 548). Następują potem metody Pfaffa (Berl. Abh 1814—1815), metoda charakterystyk Cauchy'ego (Exerciees II, 1841). Jacobi'ego (Crelle XVII, Liouville III), nowa metoda tegoż (Crelle LX), prace Mayera (Math. Ann. III, V, VI, VIII) i Liego (tamże V, IX, XI). O rozwiązaniach osobliwych pisał Darboux (w Mém. des Sav. étrang. XXVII, 1883). Inne ważne prace są Ampère'a (Journ. de l'École. pol. cah. XVII—XVIII). Clebscha (Crelle LXV), Kowalewskiej (tamże LXXX).

Zbiór metod całkowania równań o pochodnych cząstkowych podają: Imschenetzky (Sur l'intégration des équ. du 1 ordre, prze kład Hoüela. Paryż 1869; tegoż Sur l'intégr. des'equ. du 2 ordre, Greifswald 1872 i Archiv Grunerta 1869, 1872), Graindorge (Mém. de la Soc. scient. de Liège (2), V, 1872), Goursat (Paryż, 1891—1896), Mansion (po po francuku i w przekładzie niemieckim, Berlin 1892, gdzie przedrukowano rozprawy Kowalewskiej, Imszenieckiego i Darboux'a).

Badania, dotyczące istnienia całek równań o pochodnych cząstkowych, ogłosili: Riquier (Ann. de l'École Norm. (3), X, 1893), Königsberger (Math. Ann. XLII), Bendixon (Bull. de la Société math. de France, 1896) i inni.

ROZDZIAŁ IX

TEORYA GRUP PRZEKSZTAŁCEŃ.

§ 1.

Grupy przekształceń punktowych

Niechaj będzie n zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n$; przekształćmy je na zmienne $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ za pomocą wzorów:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_r), \tag{1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

gdzie f_i są funkcyami analitycznemi w pewnym obszarze.

Każdemu układowi wartości $a_1, a_2, \ldots, a_r$ odpowiada przekształcenie. Przekształcenie $x'_i = x_i$ nazywa się zwykle przekształceniem tożsamościowem.

Przyjmijmy: 1) że te funkcye są odwracalne, t. j. że z wzorów powyższych możemy wyrazić ilości x_i jako funkcye ilości x'_i. 2) że ilości a jest istotnie r, t. j. że zmieniając je wszystkiemi możliwemi sposobami, otrzymujemy ∞^r przekształceń; 3) że przekształcając za pomocą jednego z powyższych wzorów ilości x na x', a następnie za pomocą innego lub tegoż wzoru ilości x' na x'', otrzymujemy zawsze przekształcenie, zawarte we wzorze (1). Mówimy wtedy, że przekształcenie powyższe (1) w liczbie ∞^r tworzą *grupę ciągłą przekształceń*. Grupa ta nazywa się *ciągłą* dla tego, że zmieniając sposobem ciągłym parametry a, możemy przejść od jednego przekształcenia grupy do każdego innego. Przeciwnie, grupy podstawień pomiędzy n elementami można w tem znaczeniu uważać za *nieciągłe*.

Jeżeli r jest liczbą skończoną, grupa nazywa się *skończoną klasy r-tej* lub *r-parametrową* (r-gliederig).

Jeżeli w szczególności funkcye f są funkcyami wymiernemi ilości x i a, są, a są także wymiernemi ich odwrócenia, mamy wtedy przekształcenia, zwane *przekształceniami Cremony*. Tworzą one oczywiście grupę, zwaną *grupą Cremony*, do której stosuje się następujące twierdzenie:

Grupa Cremony zawiera przekształcenie tożsamościowe 1, a przekształcenia jej można uporządkować parami w ten sposób, że każdemu przekształceniu odpowiada drugie takie, którego iloczyn przez pierwsze daje 1, (to drugie nazywa się przekształceniem odwrotnem względem pierwszego).

Nie wszystkie grupy posiadają własność pierwszą i drugą.

Jeżeli wszystkie przekształcenia f tworzą grupę, to ich odwrócenia tworzą też grupę.

Dwie grupy nazywają się *podobnemi*, jeżeli od wzorów jednej można przejść do wzorów drugiej, zakładając, że parametry dawne są funkcyami nowych, oraz że dawne zmienne są funkcyami nowych zmiennych.

Jeżeli przekształcenia f tworzą grupę, wtedy ilości x', uważane za funkcye parametrów a, czynią zadość pewnym równaniom różniczkowym.

Jeżeli grupa jednoparametrowa zawiera przekształcenie tożsamościowe, to jej przekształcenia są przemienne (t. j. iloczyn ich jest niezależny od porządku czynników) i dają się podzielić na pary przekształceń wza-

jemnie odwrotnych; nadto każda taka grupa jest podobna do grupy przesunięć

$$y_2' = y_1, \ldots \ldots y'_{n-1} = y_{n-1}, \; y'_n = y_n + t.$$

Przekształcenia takiej grupy można wyrazić tak:

$$x'_i = x_i + \frac{t}{1}\xi_i(x_1 \ldots, x_n) + \frac{t^2}{2!} X(\xi_i) + \frac{t^3}{3!} X(X(\xi_i)) + \ldots$$

gdzie symbol X oznacza $\sum\limits_1^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Jeżeli uczynimy t nieskończenie małem, będziemy mieli przekształcenie zwane nieskończonostkowem. Jest ono:

$$x'_i = x_i + \frac{\delta t}{1}\xi_i + \frac{\delta t^2}{2!} X(\xi_i) + \frac{\delta t^3}{3!} X(X(\xi_i)) + \ldots .$$

Przekształcenie nieskończonostkowe jest określone przez funkcye ξ, a więc i przez symbol X.

Możemy powiedzieć:

Każda grupa jednoparametrowa, zawierająca przekształcenie tożsamościowe, określa przekształcenie nieskończonostkowe i sama jest przez takież przekształcenie określona.

Przekształcenia nieskończonostkowe, wyrażone symbolami

$$X_1, X_2, \ldots \ldots, X_r$$

nazywają się niezależnemi od siebie, jeżeli związek

$$e_1 X_1(f) + e_2 X_2(f) + \ldots \ldots, + e_r X_r(f) = 0.$$

w którym ilości e nie zależą od zmiennych x, może zachodzi tylko wtedy, gdy wszystkie te ilości e są zerami.

Każdej grupie r-parametrowej odpowiada r niezależnych przekształceń nieskończonostkowych $X_1, X_2 \ldots \ldots X_r$; jeżeli posiada ona nadto przekształcenie tożsamościowe, to można przekształcenia jej wyrazić za pomocą wzoru

$$x'_i = x_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki} + \sum_{kj}^{1..r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{2!} X_k(\xi_{ji}) + \ldots\ldots$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$ są r parametrami dowolnemi.

Grupa r-parametrowa z podstawieniem tożsamościowem zawiera r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych, i nie więcej niż n.

Ważną grupą przekształceń punktowych jest t. z. grupa przekształceń rzutowych (czyli grupa rzutowa); przekształca ona zawsze prostą na prostą, jeżeli ilości x uważamy za spółrzędne punktu w przestrzeni n—wymiarowej. Jej wyrażenie jest następujące:

$$x'_i = \frac{a_{1i} x_1 + \ldots\ldots + a_{ni} x_n + a_{n+1,i}}{a_{1,n+1} x_1 + \ldots\ldots + a_{n,n+1} x_n + a_{n+1,n+1}}.$$

Jej podgrupa, dla której

$$a_{1,n+1} = \ldots\ldots = a_{n,n+1} = 0.$$

nazywa się grupą liniową.

§ 2.

Niezmienniki skończone i różniczkowe grupy jednoparametrowej.

Nazywamy niezmiennikiem skończonym wzgl. różniczkowym grupy funkcyę samych zmiennych, albo też i ich pochodnych, która nie zmienia się przez przekształcenia grupy.

Aby funkcya $\Omega(x_1, x_2)$ nie zmieniała się przy wszystkich podstawieniach grupy jednoparametrowej, jest koniecznem i dostatecznem, by było $X(\Omega)=0$, gdzie X jest symbolem przekształcenia nieskończonostkowego grupy. Niezmiennik Ω jest przeto rozwiązaniem równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych

$$\xi_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 0.$$

Aby ogół wszystkich ∞^1 krzywych, które przedstawia równanie $\omega(x_1, x_2)=\text{const.}$, pozostał niezmienny przy wszystkich podstawieniach grupy jednoparametrowej, jest koniecznem i dostatecznem, by $X(\omega)$ było funkcyą samego ω. Jeżeli w szczególności $X(\omega)=0$, to i każda pojedyńcza krzywa pozostaje niezmieniona.

Równanie różniczkowe rzędu 1-go

$$M_1\, dx_1 - M_2\, dx_2 = 0$$

pozostaje niezmiennem co do postaci (prócz ewentualnego czynnika) dla wszystkich przekształceń grupy wtedy i tylko wtedy, jeżeli kładąc symbolicznie

$$Y = M_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + M_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

mamy tożsamościowo:

$$X(Y) - Y(X) = \lambda . Y.$$

gdzie λ jest funkcyą tylko ilości x_1 i x_2.

Równanie różniczkowe $M_1\, dx_1 - M_2\, dx_2 = 0$ należy do grupy jednoparametrowej, i jeżeli znamy niezmiennik grupy $\Omega(x_1, x_2)$, to całkowanie równania różniczkowego sprowadza się do kwadratury.

Równanie różniczkowe 1-go rzędu

$$F\left(x_1, x_2, \frac{dx_2}{dx_1}\right) = 0$$

należy do grupy jednoparametrowej, której przekształceniem nieskończonostkowem jest

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie

$$\xi_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

$$+\left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)\frac{dx_2}{dx_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2\right]\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}$$

jest zerem przy $F=0$, w założeniu, że równanie dane jest takiem, iż trzy pochodne funkcyi F względem x_1, x_2, $\frac{dx_2}{dx_1}$ nie znikają wszystkie wskutek równania $F=0$.

Jeżeli znamy niezmiennik skończony $\Omega(x_1\, x_2)$ grupy jednoparametrowej pomiędzy dwiema zmiennemi, to za pomocą kwadratur otrzymać można wszystkie możliwe niezmienniki różniczkowe rzędu 1-go (zawierające tylko pochodną pierwszą ilości x_2 względem x_1); a przyrównawszy do zera te niezmienniki różniczkowe, otrzymamy wszystkie możliwe równania różniczkowe rzędu 1-go, należące do tej grupy.

§ 3.

Przekształcenia stycznościowe.

Przekształcenia, o których mowa w dwu poprzednich paragrafach, nazywają się przekształceniami punktowemi; różnią się one od tak zw. przekształceń s t y c z n o ś c i o w y c h, które są w pewnej mierze przekształceniami ogólniejszemi. Dla prostoty przyjmijmy, że mamy dwie tylko zmienne; przekształcenie punktowe okresla się za pomocą wzorów

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2), \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2).$$

Na podstawie tych wzorów pochodną zmiennej x'_2 względem x'_1 można wyrazić przez pochodną zmiennej x_2 względem x_1, a mianowicie:

$$\frac{dx'_2}{dx'_1} = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}} = \varphi\left(x_1, x_2, \frac{dx_2}{dx_1}\right),$$

Skutkiem tego forma

$$dx_2 - \frac{dx_2}{dx_1}\, dx_1 = 0$$

zamienia się (przy pominięciu czynnika) na

$$dx'_2 - \frac{dx'_2}{dx'_1}\, dx'_1 = 0.$$

Połóżmy $\frac{dx_2}{dx_1} = p$; wyobraźmy sobie poprzednie przekształcenie jako przypadek szczególny przekształcenia ogólniejszego pomiędzy trzema zmiennemi, mającego postać

$$x'_1 = \varphi_1(x_1, x_2, p) \quad x'_2 = \varphi_2(x_1, x_2, p), \quad p' = \varphi_3(x_1, x_2, p)$$

i załóżmy, że te trzy związki pozostawiają bez zmiany formę różniczkową

$$dx_2 - p\,dx_1 = 0,$$

t. j. przekształcają ją (przy pominięciu czynnika) na

$$dx'_2 - p'.dx'_1 = 0.$$

Mówimy wtedy, że uskutecznione przekształcenie jest s t y c z n o ś c i o w e m.

J e ż e l i p o m i ę d z y t r z e m a p o w y ż s z e m i z w i ą z k a m i m o ż n a w y r u g o w a ć p t a k, a b y o t r z y m a ć x'_1, x'_2, w y r a ż o n e j e d y n i e p r z e z x_1, x_2, w t e d y p r z e k s z t a ł c e n i e s t y c z n o ś c i o w e s t a j e s i ę p u n k t o w e m.

W y k o n y w a j ą c k o l e j n o d w a p r z e k s z t a ł c e n i a s t y c z n o ś c i o w e, o t r z y m u j e m y z n o w u p r z e k s z t a ł c e n i e s t y c z n o ś c i o w e.

O d w r o t n o ś ć p r z e k s z t a ł c e n i a s t y c z n o ś c i o w e g o j e s t p r z e k s z t a ł c e n i e m s t y c z n o ś c i o w e m.

F u n k c y e φ_1, φ_2, o k r e ś l a j ą c e p r z e k s z t a ł c e n i e s t y c z n o ś c i o w e, c z y n i ą z a d o ś ć z w i ą z k o w i:

$$[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + p\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial p}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + p\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right) = 0.$$

I o d w r o t n i e, j e ż e l i d w i e f u n k c y e φ_1, φ_2 s p r a w d z a j ą z w i ą z e k $[\varphi_1, \varphi_2] = 0$, t o z a p o m o c ą n i c h m o ż n a z a w s z e, i t o s p o s o b e m j e d y n y m, o k r e ś l i ć p r z e k s z t a ł c e n i e s t y c z n o ś c i o w e.

§ 4.

Niezmienniki i parametry różniczkowe.

Niechaj będzie $n+m$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$; $z_1, z_2 \ldots z_m$, z których zmienne z są funkcyami zmiennych x: niechaj będzie nadto grupa przekształceń wszystkich zmiennych. Funkcya wszystkich zmiennych i pochodnych ilości z względem x, pozostającą bez zmiany, gdy wykonywamy wszystkie przekształcenia grupy, jest niezmiennikiem różniczkowym grupy. Jeżeli grupa jest grupą całkowitą, mamy niezmiennik różniczkowy bezwzględny. Jeżeli funkcya ta obejmuje nadto funkcye dowolne i ich pochodne, mamy to, co nazywamy zwykle parametrem różniczkowym; jest to wyrażenie, przejęte z teoryi powierzchni.

Niezmiennikiem różniczkowym grupy rzutowej jest niezmiennik Schwarza

$$\frac{z''' z' - \frac{3}{2} z''^2}{z'^2}.$$

Ponieważ niezmiennik ten ma własność, polegającą na tem, że pozostaje on niezmienionym (prócz czynnika), gdy przemieniamy z i x, Sylwester nazwał go recyprokantem (wzajemnikiem) i rozciągnął później tę nazwę na wszystkie niezmienniki różniczkowe rzutowe.

Można pomyśleć niezmiennik różniczkowy w innem znaczeniu, odnosząc go mianowicie do formy różniczkowej zasadniczej: mamy wtedy pojęcie niezmiennika różniczkowego, które zbliża się bardzo do pojęcia niezmiennika w teoryi form algebraicznych. Niechaj będzie dana forma różniczkowa

$$\sum_{ij} Z_{ij} \ldots dx_i dx_j \ldots \ldots,$$

t. j. funkcya jednorodna całkowita określonego stopnia względem dx_1, $dx_2 \ldots dx_n$ ze spółczynnikami, które są funkcyami wszystkich zmiennych.

Dla wszystkich przekształceń grupy, forma ta różniczkowa przekształca się na inną tego samego stopnia: spółczynniki Z przechodzą na inne, lecz w ten sposób, że w ogólności każdy nowy spółczynnik $Z_{r,s}$ jest w ogóle nie wprost przekształceniem spółczynników dawnych, lecz pewną kombinacyą przekształceń wszystkich dawnych Z. Funkcya zmiennych x, ilości Z i funkcyj dowolnych, która przy wszystkich podstawieniach grupy zachowuje tę samą postać co do ilości x i Z nowych, nazywa się wogóle p a r a m e t r e m r ó ż n i c z k o w y m, n a l e ż ą c y m d o g r u p y.

Przypadek ten można uważać za za szczególny względem poprzedzającego, jeżeli przyjmiemy, że przekształcenia, którym poddajemy ilości z (będące funkcyami zmiennych x) są właśnie takiemi, jakie wynikają z przedstawienia nowych spółczynników Z formy różniczkowej przez spółczynniki dawne i przez zmienne.

Pod tą ostatnią postacią szczególną zadanie o wyznaczeniu parametrów lub niezmienników różniczkowych wiąże się z badaniami, rozpoczętemi przez G a u s s a, L a m é g o, J a c o b i'ego i rozwiniętemi w najnowszych czasach przez B e l t r a m i'ego i innych, którzy za punkt wyjścia wzięli teoryę powierzchni. Badania te należy uważać za przypadek szczególny zagadnienia wyżej wysłowionego i dla tego jeszcze, że w niem nie rozpatrujemy grupy specyalnej przekształceń, lecz grupę całkowitą wszystkich przekształceń. Nazwa „p a r a m e t r r ó ż n i c z k o w y" pochodzi od L a m é g o.

Według wyłożonych tu pojęć, niezmiennikiem różniczkowym jest tak zw. k r z y w i z n a G a u s s a powierzchni (patrz „Geometrya różniczkowa").

Jeżeli mamy formę różniczkową kwadratową

$$\sum_{r,s}^{1,n} a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,.$$

i przez a oznaczymy wyznacznik ilości a_{rs}, przez A—wyznacznik układu dołączonego, przez A_{rs} — jego elementy, wtedy wyrażenie

$$\Delta_1 U = \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s}\,,$$

(gdzie U jest funkcyą dowolną zmiennych) jest parametrem różniczkowym rzędu 1-go.

Wyrażenie

$$\Delta_1 UV = \sum_{rs} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

jest parametrem różniczkowym rzędu 1-go, zawierającym dwie funkcye dowolne.

Wyrażenie

$$\Delta_2 U = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_r \frac{\partial\left(\sqrt{a}\,\frac{\partial U}{\partial x_r}\right)}{\partial x_r}$$

jest parametrem różniczkowym rzędu 2-go.

Głównem dziełem o grupach przekształceń i ich zastosowaniach do równań różniczkowych jest dzieło Liego: „Theorie der Transformationsgruppen“ i t. d., 3 tomy. Lipsk 1891 — 93; dalej tegoż: „Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen“ Lipsk 1893, herausg. von G. Scheffers; „Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, herausgegeben“ von G. Scheffers. Lipsk 1891 (streszczone przez J. Paczowskiego w „Pracach matematyczno-fizycznych“, t. VII. Warszawa 1896); Geometrie der Berührungstransformationen“. Lipsk 1896 (streszczone przez E. Wierzbickiego w „Pracach matematyczno-fizycznych“ t IX, Warszawa 1898). Nie cytujemy tu licznych rozpraw Liego w różnych tomach Rozpraw Akademii w Chrystianii i w dzienniku „Mathematische Annalen“. Z polskich autorów w przedmiocie tym ogłosił rozprawy K. Żorawski, („Acta mathematica“ t. 17, 1891 i w „Rozprawach Akademii krakowskiej“ t. XXIII i następne).

O bibliografii tego przedmiotu, zwłaszcza będącej w związku z teoryą równań różniczkowych, można znaleść dane w nowem dziele

Schlesingera „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen„. Lipsk 1895—97).

W pracach o niezmiennikach i parametrach różniczkowych winniśmy odróżnić dwie kategorye: jedne z nich mają swój punkt wyjścia bezpośrednio w teoryi grup, inne zaś wychodzą z badania form różniczkowych, specyalnie kwadratowych.

Do kategoryi pierwszej należą rozważania Schwarza nad niezmiennikiem różniczkowym grupy rzutowej (Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Berl. Abh. 1871). Brioschi'ego (Annali di mat. XIII, Acta math. XIV i t. e.), Sylvestera (Am. Journ. VIII, X). Halphena nad niezmiennikami różniczkowemi rzutowemi (Journ. de de l'École polyt. 1880. Comptes rendus LXXXVI. Journ. de Liouv. 1876, 1880. 1883. Acta math. III). Forsytha (Phil. Transact. 1888). ogólne badania Liego (Math. Ann. XXIV. (w związku z niemi cytowana wyżej rozprawa Żorawskiego o przekształceniu powierzchni. Acta math. XVII. 1891. Rozprawy Akad. krak. 1893).

Do kategoryi drugiej badań należą rozważania Gaussa nad krzywizną powierzchni. następnie badania Lamégo (Leçons sur les coordonnées curvilignes). Jacobi'ego (Werke II). Casorati'ego (Annali di mat. (1). III, IV; (2). XII) i Beltrami'ego (Acc. Bologna (2), VIII. 1896). który rozciągnął na przypadek n zmiennych badania poprzednie. W dziele Brioschi'ego o wyznacznikach (1854) rozpatruje się już przypadek niezmiennika różniczkowego rzędu 2-go dla n zmiennych. lecz dla specyalnego przypadku do formy kwadratowej zasadniczej. Wreszcie należy tu wspomnieć o nowszych badaniach: Ricci'ego (Annali di mat. XII, XIV. Lincei. 1888. 1889, Ist. Veneto 1893), Padova'y (Lincei 1887). Frobeniusa (Crelle CX). Knoblaucha (tamże CXI) i innych.

ROZDZIAŁ X.

RACHUNEK RÓŻNIC SKOŃCZONYCH.

§ 1.

Wiadomości ogólne.

Wyobraźmy sobie kolej wartości x_0, x_1, x_2, ... zmiennej x i niechaj $f(x)$ będzie funkcyą tej zmiennej; różnice $f(x_1)-f(x_0)$, $f(x_2)-f(x_1)$, ... nazywają się *różnicami pierwszemi* funkcyi f i oznaczają się za pomocą symbolów $\Delta f(x_0)$, $\Delta f(x_1)$, ...

Wykonywając podobne działania na różnicach pierwszych, otrzymujemy *różnice drugie*: $\Delta^2 f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_1)$ .... i t. d.

Różnicę n tą funkcyi $f(x)$ przedstawia wzór:

$$\Delta^n f(x_0) = f(x_n) - (n)_1 f(x_{n-1}) + (n)_2 f(x_{n-2}) + \ldots\ldots + (-1)^n f(x_0).$$

Wartość funkcyi w punkcie x_n przedstawia wzór:

$$f(x_n) = f(x_0) + (n)_1 \Delta f(x_0) + (n)_2 \Delta^2 f(x_0) + \ldots\ldots + \Delta^n f(x_0).$$

Mamy nadto następujące wzory (Studnička):

$$\Delta^m f(x_{h+n}) = \sum_{i=0}^{n} (n)_i \, \Delta^{m+i} f(x_h).$$

$$\Delta^{m+n} f(x_h) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (n)_i \, \Delta^m f(x_{h+n-i}).$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta^m f(x_{h+i}) = \sum_{i=0}^{n-1} (n)_{i+1} \, \Delta^{m+i} f(x_h),$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (n)_{i+1} \, \Delta^i f(x_0).$$

Przyjmijmy, że

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \quad . \quad . \quad . \quad = h,$$

wtedy różnice m-te wielomianu stopnia m-tego są stałe, t. j. niezależne od x i równe (nie uwzględniamy wyrazu $h^m a_0$, gdzie a_0 jest spółczynnikiem pierwszego wyrazu wielomianu) czynnikowej liczby m:

$$\Delta^n e^x = e^x (e^h - 1)^n.$$

$$\Delta^n \frac{1}{x} = (-1)^n \, n! \, \frac{h^n}{x(x+h)(x+2h) \ldots (x+nh)}.$$

$$\Delta^n \sin(ax+b) = \left(2 \sin \frac{ah}{2}\right)^n \sin\left(ax+b+\frac{n(ah+\pi)}{2}\right).$$

$$\Delta^n \cos(ax+b) = \left(2 \sin \frac{ah}{2}\right)^n \cos\left(ax+b+\frac{n(ah+\pi)}{2}\right),$$

Rozważając potęgi n-te liczb naturalnych i ich różnice kolejne odnośnie do pierwszego elementu 0^n, otrzymujemy różnice wyrazu 0^n. Mamy tu wzory:

$$\Delta^m 0^{n+1} = m\,(\Delta 0^n + \Delta^{m+1} 0^n),$$

$$\Delta^m 0^m = m! = m^m - (m)_1 (m-1)^m + (m)_2 (m-2)^m - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{m-1} (m)_{m-1},$$

$$\Delta^m (0h)^n = h^n \Delta^m 0^n,$$

$$\Delta^m f(x_0) = h^m \frac{\Delta^m 0^m}{m!} f^m(x_0) + \ldots\ldots + h^n \frac{\Delta^n 0^n}{n!} f^n(x_0)$$
$$+ h^{n+1} \frac{\Delta^m 0^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\eta),$$

gdzie η jest punktem i zawartym pomiędzy x_0 i $x_0 = nh$.

$$\frac{\Delta^m 0^n}{n!} = \sum \frac{1}{r_1!\, r_2! \ldots r_m!},$$

gdzie $r_1, r_2 \ldots r_m$ są liczby całkowite dodatnie, których suma równa się m, i gdzie suma rozciąga się na wszystkie możliwe kombinacye tych liczb.

Jeżeli B_m oznacza liczbę Bernoulli'ego (patrz Rozdział XVIII), to

$$B_m = (-1)^{\frac{m}{2}-1} \frac{1}{m!} \left[0^m - \frac{1}{2} \Delta 0^m + \frac{1}{3} \Delta^2 0^m - \ldots + (-1)^m \frac{1}{m+1} \Delta^m 0^m \right],$$

Oto tablica różnic wyrazu 0^m aż do $\Delta^{10} 0^{10}$:

	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	Δ^8	Δ^9	Δ^{10}
0^1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0^2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
0^3	1	6	6	0	0	0	0	0	0	0
0^4	1	14	36	24	0	0	0	0	0	0
0^5	1	30	150	240	120	0	0	0	0	0
0^6	1	62	540	1560	1800	720	0	0	0	0
0^7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	0	0	0
0^8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320	0	0
0^9	1	510	18150	186480	834120	1905120	2328480	1451520	362880	0
0^{10}	1	1022	55980	818520	5103000	16435440	29635200	30240000	16329600	3628800

§ 2.

Interpolacya. Funkcye interpolacyjne.

Wyrażenia

$$f_1(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$f_2(x_0, x_1, x_2) = \frac{f_1(x_0, x_2) - f_1(x_0, x_1)}{x_2 - x_1},$$

. . . .

są funkcyami interpolacyjnemi 1-go, 2-go i t. d. rzędu. Zajmował się niemi pierwszy Ampère (Gergonne, XVI), później Cauchy, Bellavitis, Genocchi i t. d. Wskazówki bibliograficzne co do tego znaleść można w tomie III „Rachunku nieskończonościowego" Pascala, przekład polski, Warszawa 1897, str. 186).

Funkcye interpolacyjne są symetrycznemi względem wszystkich zmiennych, które zawierają. (Twierdzenie Ampére'a.)

Każdą funkcyę interpolacyjną można przedstawić w ten sposób:

$$f_n(x_0; x_1 \ldots, x_n) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)},$$

$$+ \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})},$$

Pomiędzy trzema funkcyami interpolacyjnemi tego samego rzędu zachodzi związek:

$$f_n(x_1, x_2, x_3, \dots)(x_1 - x_2) + f_n(x_2, x_0, x_3, \dots)(x_2 - x_0)$$
$$+ f_n(x_0, x_1, x_3, \dots)(x_0 - x_1) = 0.$$

Funkcyę interpolacyjną dla elementów równoodległych można wyrazić za pomocą wzoru

$$f_n(x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + nh) = \frac{\Delta_n f(x_0)}{h^n n!}$$

lub też za pomocą wzoru

$$f_n(x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + nh) = \frac{f_n(\xi)}{n!}$$

gdzie

$$x_0 < \xi \leqslant x_0 + nh.$$

Jeżeli elementy $x_0, x_1, \dots x_n$ zlewają się, wtedy funkcya interpolacyjna rzędu n-tego staje się — jeżeli pominiemy czynnik liczbowy — pochodną n-tą funkcyi.

Funkcya interpolacyjna o jakichkolwiek elementach wyraża się za pomocą wzoru Genocchi'ego:

$$f_n(x_0, x_1, \dots x_n) = \int_0^1 \cdot \int_0^1 \dots \int_0^1 t_1^{n-1} t_2^{n-2} \dots t_{n-1}$$
$$\times f^{(n)}(x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + (x_2 - x_1)t_1 t_2 + \dots$$
$$+ (x_n - x_{n-1}) t_1 . t_2 \dots t_n)\, dt_1 . dt_2 \dots dt_n .$$

Wartość funkcyi f w jakimkolwiek punkcie x daje się wyrazić za pomocą wzoru, w którym spółczynniki rozmaitych wyrazów są funkcyami interpolacyjnemi, mianowicie:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x_0, x_1)$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) f_2(x_0, x_1, x_2)$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi),$$

gdzie ξ jest zawarte pomiędzy najmniejszą a największą z wartości $x_0, x_1, \ldots x_n, x$. Wzór ten można nazwać uogólnionym wzorem Newtona lub Gaussa.

Jeżeli przedziały pomiędzy kolejnemi punktami x są wszystkie równe h, wtedy otrzymujemy wzór:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \Delta f(x_0) + \ldots$$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_0 - (n-1)h)}{n!\, h^n} \Delta^n f(x_0)$$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_0 - nh)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi).$$

gdzie ξ jest zawarte pomiędzy najmniejszą największą z trzech wartości $x_0, x_0 + nh, x$.

Jeżeli wszystkie punkty $x_0, x_1 \ldots x_n$ schodzą się w punkcie x_0, otrzymujemy wzór Taylora.

Poprzedniemu wzorowi ogólnemu można nadać postać:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)} + R,$$

gdzie R oznacza resztę, t. j. wyraz ostatni.

Wzór ten nazywa się wzorem interpolacyjnym Lagrange'a i daje się napisać w ten sposób:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} \frac{\varphi(x)}{x - x_i} + R,$$

gdzie

$$\varphi(x) = (x - x_0) \; . \; . \; . \; . \; . \; (x - x_n).$$

Zagadnienie interpolacyjne polega na tem: dajmy, że są dane wartości funkcyi w nieokreślonej liczbie punktów; jak wyrazić wartość funkcyi w jakimkolwiek punkcie przy pomocy powyższych wartości?

Poprzednie dwa wzory mogą oczywiście służyć do rozwiązania zagadnienia, jeżeli reszta R dla $n = \infty$ dąży do zera.

Jeżeli zamiast wartości funkcyi w nieskończenie wielu punktach mamy dane wartości nieskończenie wielu pochodnych w jednym punkcie (który to przypadek może być pod pewnym względem uważany za przypadek szczególny poprzedzającego, przy przyjęciu, że punkty w których mamy dane wartości funkcyi, są nieskończenie blizkie), wtedy zagadnienie interpolacyjne staje się zagadnieniem, odnoszącem się do wzoru Taylora. Większe szczegóły i wskazówki bibliograficzne znajdują się we wspomnianym już traktacie „Rachunku różnic“ (§ 17).

§ 3.

Wzory na kwadratury przybliżone.

Wzór Simpsona jest następujący:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{6n} \left\{ f(a) + 4f\left(a + \frac{b-a}{2n}\right) + 2f\left(a + 2\frac{b-a}{2n}\right) \right.$$

$$+ 4f\left(a + 3\frac{b-a}{2n}\right) + 2f\left(a + 4\frac{b-a}{2n}\right)$$

$$+ 4f\left(a + 5\frac{b-a}{2n}\right) + 2f\left(a + 6\frac{b-a}{2n}\right)$$

$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$\left. + f(b) \right\} + R',$$

gdzie reszta R' (gdy $f^{(IV)}$ jest skończone i ciągłe) jest:

$$R' = -\frac{1}{15.8.4!}\,\frac{(b-a)^5}{n^4}\,f^{(IV)}(\eta); \quad (a \leqq \eta \leqq b).$$

Dla wartości n dostatecznie wielkich R' będzie dostatecznie małe i część pierwsza poprzedniego wzoru (bez reszty) daje wartość dostatecznie przybliżoną całki.

Wzór Cotesa jest:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} h_n^{(i)} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right) + R',$$

gdzie $h_n^{(i)}$ są spółczynniki liczbowe, niezależne od a i b, a mianowicie:

$$h_n^{(i)} = (-1)^{n-i}\,\frac{1}{n\,.\,i!\,(n-i)!}\int_0^n T\,dt,$$

$$T = t(t-1)\,.\,.\,.\,(t-i+1)\,(t-i-1)\,.\,.\,.\,(t-n)$$

Liczby h czynią zadość związkowi

$$h_n^{(i)} = h_n^{(n-i)}.$$

Tablica wartości h jest następująca:

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i-3$	$i=4$	$i=5$
$n=1$	$\frac{1}{2}$					
$n=2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$				
$n=3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$				
$n=4$	$\frac{7}{80}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$			
$n=5$	$\frac{19}{288}$	$\frac{95}{96}$	$\frac{25}{144}$			
$n=6$	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$		
$n=7$	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2089}{17280}$		
$n=8$	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2944}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{454}{2835}$	
$n=9$	$\frac{2857}{89600}$	$\frac{15741}{89600}$	$\frac{27}{2240}$	$\frac{1209}{5600}$	$\frac{2889}{44800}$	
$n-10$	$\frac{16067}{598752}$	$\frac{26575}{149688}$	$-\frac{16175}{199584}$	$\frac{5675}{12474}$	$-\frac{4825}{11088}$	$\frac{17807}{24948}$

Wzór Gaussa na kwadraturę jest:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_i}\,dx,$$

gdzie $\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$; $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są pierwiastkami funkcyi kulistej Legendre'a:

$$\psi(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}\right]$$

Wzór ten jest w ogóle wzorem przybliżonym; wszakże jeżeli f jest funkcyą całkowitą stopnia nawet wyższego od n, lecz niższego od $2n+1$, wtedy wzór jest dokładny, t. j. reszta jego jest w tym przypadku zerem.

Aby módz zastosować wzór Gaussa, trzeba znać pierwiastki funkcyi kulistej $\varphi(x)$. Dla większej dogodności rachunku połóżmy $x = a + (b - a)t$, tak aby całkowanie rozciągało się od $t = 0$ do $t = 1$. Funkcya $f(x)$ staje się $F(x)$, a całka przybiera postać:

$$(b-a)\int_0^1 F(t)\,dt = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \frac{F(t_i)}{\psi'(t_i)} \int_0^1 \frac{\psi(t)}{t - t_i}\,dt,$$

gdzie ilości t_i są pierwiastkami funkcyi

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[t^{n+1}(t-1)^{n+1}\right].$$

Pierwiastki te Gauss obliczył (Werke III, str. 193) z 16-ma znakami dziesiętnemi; podajemy je w poniższych tablicach (z 10-ma cyframi dziesiętnemi):

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
t_0	0,5	0,2113248654	0,1127016653	0,0694318442
t_1		0,7886751345	0,5	0,3300094782
t_2			0,8872983346	0,6699905217
t_3				0,9305681557

	$n=4$	$n=5$	$n=6$
t_0	0,0469100770	0,0337652428	0,0254460438
t_1	0,2307553449	0,1693953067	0,1292344072
t_2	0,5	0,3806904069	0,2970774243
t_3	0.7692346550	0,6193095930	0.5
t_4	0,9530899229	0.8306046932	0,7029225756
t_5		0,9662347571	0,8707655927
t_6			0,9745539561

§ 4.

Rachunek odwrotny różnic.

Funkcya $F(x)$, której różnica (gdy kolejne wartości zmiennej mają różnicę stałą 1), jest funkcyą daną $f(x)$, nazywa się całką różnicową nieokreśloną funkcyi danej. Czyni ona zadość związkowi:

$$F(x+1) - F(x) = f(x)$$

dla każdej wartości x i oznacza się symbolem $\Sigma f(x)$.

Różnica $F(a+n) - F(a)$ równa się $f(a) + f(a+1) + \ldots\ldots + f(a+n-1)$, oznacza się symbolem $\sum\limits_{a}^{a+n-1} f(x)$ i nazywa się całką różnicową określoną.

Podajemy wzory następujące:

$$\sum x^m = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{2} x^m + \frac{1}{12} m x^{m-1} - \ldots\ldots$$

$$\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3!},$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

Kładąc $s = \sum\limits_1^n x$, mamy (Seitz und Gander. The Analyst, VI. 1879)

$$\sum^n x^9 = \frac{1}{5}(6s^5 - 20s^4 + 12s^3 - 3s^2).$$

Suma sześcianów pierwszych n liczb naturalnych równa się kwadratowi sumy tych liczb.

Całkę różnicową określoną można wyrazić za pomocą całki różniczkowej określonej tejże funkcyi: wzór na to nazywa się wzorem Eulera i ma postać następującą:

$$h \sum_a f(x) - \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} h\,[f(x)]_a^b + \frac{B_2}{2!} h^2\,[f'(x)]_a^b \ldots\ldots$$

$$-\frac{B_4}{4!} h^4 [f'''(x)]_a^b + \frac{B_6}{6!} h^6 [f^V(x)]_a^b \ldots\ldots$$

gdzie B_2, B_4, B_6 ..... są liczbami Bernoulli'ego, symbole $[f(x)]_a^b$, $[f'(x)]_a^b$, ... oznaczają różnice $f(b) - f(a)$, $f'(b) - f'(a)$ .....

Co do innych rozważań, odnoszących się do rachunku odwrotnych różnic, odsyłamy czytelnika do cytowanego już „Rachunku różnic" Pascala (Warszawa, 1897).

Najważniejszemi traktatami rachunku różnic są następujące: Lacroix, Traité des différences, Paryż 1800; Herschell, Collection of Examples etc., 1820; Schlömilih, Differenzen und Summen, 1848; Boole, Finite diff., 1860, i najnowsze dzieło: Markoff, Differenzenrechnung, Lipsk 1896.

ROZDZIAŁ XI.

RACHUNEK WARYACYJNY.

---

§ 1.

Wiadomości ogólne. Waryacya pierwsza całki.

Niechaj będą dwie krzywe, których równaniami są: $y=f(x)$, $y_1=f_1(x_1)$. Jeżeli pomiędzy punktami (x, y) pierwszej i punktami (x_1, y_1) drugiej można ustanowić odpowiedniość dowolną, lecz taką, że odległość pomiędzy odpowiadającemi sobie punktami będzie nieskończonostkową, t. j. dążącą do zera, mówimy wtedy, że przy przejściu od pierwszej krzywej do drugiej, spółrzędne x, y doznają waryacyi. Różnicę pomiędzy odciętemi odpowiednich punktów, t. j. x_1-x, oznaczamy za pomocą symbolu Lagrange'a δx i nazywamy waryacyą zmiennej niezależnej x. Różnica pomiędzy rzędnemi odpowiadających sobie punktów będzie w ogóle sumą nieskończonostek różnego rzędu; część rzędu najniższego nazywamy waryacyą ilosci y i oznaczamy przez δy.

Jeżeli F jest funkcyą ilości $x, y, y', y'', \ldots$, to w przejściu od pierwszej krzywej do drugiej, funkcya F doznaje w ogóle przyrostu nieskończonostkowego, którego część rzędu najniższego nazywa się waryacyą funkcyi F i oznacza się przez δF.

Waryacya funkcyi F równa się waryacyi, wziętej w przypadku, gdy x pozostaje bez zmiany (t. j. gdy odpowiadające sobie punkty mają tę samą odciętą) i powiększonej o wyraz, będący iloczynem całkowitej pochodnej funkcyi F względem x przez δx.

Waryacya funkcyi F w przypadku, gdy x pozostaje bez zmiany, jest:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''}\,\delta y'' + \ldots\ldots$$

gdzie $\delta y, \delta y', \delta y'' \ldots$ są wyryacyami ilości $y, y', y'' \ldots$ w przypadku niezmieniającego się x. Gdyby funkcya F zawierała inne jeszcze funkcye $z, u \ldots$ zmiennej x, wtedy należałoby dodać i odnoszące się do tych funkcyj wyrazy, podobnie do powyższych utworzone.

Waryacyę całki określonej

$$I = \int_{x''}^{x'} F(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)})\,dx$$

przedstawia wzór

$$\delta I = \int_{x''}^{x'} \delta F dx + \left[F \delta x\right]_{x''}^{x'}.$$

gdzie przez δF należy rozumieć waryacyę, obliczoną dla przypadku, w którym x pozostaje bez zmiany.

Jeżeli funkcya F zawiera nadto granice x', x'', wtedy do strony drugiej należy dodać jeszcze:

$$\delta x' \int_{x''}^{x'} \frac{\partial F}{\partial x'}\,dx + \delta x'' \int_{x''}^{x'} \frac{\partial F}{\partial x''}\,dx.$$

Waryacya całki określonej poprzedniego typu, w założeniu ogólniejszem, iż F zawiera nadto funkcye z, u ... i ich pochodne, a mianowicie pochodne funkcyi y aż do rzędu r włącznie, pochodne funkcyi z aż do rzędu r włącznie i t. d., wyraża się w ten sposób:

$$
\begin{aligned}
\delta I = \Big[F\delta x &+ K_1\delta y + K_1'\delta y' + \ldots + K_1^{(r-1)}\delta y^{(r-1)} \\
&+ K_2\delta z + K_2'\delta z' + \ldots + K_2^{(s-1)}\delta z^{(s-1)} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \Big]_{x'}^{x''} \\
&+ \int_{x'}^{x''} (H_1\delta y + H_2\delta z + \ldots)\, dx,
\end{aligned}
$$

gdzie:

$$H_1 = M - \frac{dM'}{dx} + \frac{d^2M''}{dx^2} - \ldots;\quad H_2 = N - \frac{dN'}{dx} + \frac{dN''}{dx^2} - \ldots,$$

$$K_1 = M' - \frac{dM''}{dx} + \frac{d^2M'''}{dx^2} - \ldots;\quad K_2 = N' - \frac{dN''}{dx} + \frac{d^2N'''}{dx^2} - \ldots,$$

$$K_1' = M'' - \frac{dM'''}{dx} + \frac{d^2M^{IV}}{dx^2} - \ldots;\quad K_2' = N'' - \frac{dN'''}{dx} + \frac{dN^{IV}}{dx^2} - \ldots,$$

. . . .

$$M = \frac{\partial F}{\partial y},\quad M' = \frac{\partial F}{\partial y'},\quad M'' = \frac{\partial F}{\partial y''} \ldots\ldots$$

$$N = \frac{\partial F}{\partial z},\quad N' = \frac{\partial F}{\partial z'},\quad N'' = \frac{\partial F}{\partial z''},\ldots\ldots$$

. . . .

Jeżeli całka

$$\int_{x'}^{x''} (H_1\delta y + H_2\delta z + \ldots\ldots)\, dx$$

jest tożsamościowo zerem, bez względu na wartości, nadane funkcyom dowolnym δy, δz, ..., **wtedy każda z ilości** H_1, H_2, ..., **musi być osobno zerem.** (Twierdzenie pomocnicze główne.)

Jeżeli chcemy wyznaczyć funkcye $y, z \ldots$ zmiennej x, oraz granice x', x'' tak, aby całka I miała wartość maximum lub minimum, należy położyć $\delta I = 0$, co stanie się, gdy

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0 \ldots\ldots$$

oraz

$$\begin{aligned} \Gamma = \Big[F\delta x &+ K_1 \delta y + K_1' \delta y' + \ldots + K_1^{(r-1)} \delta y^{(r-1)} \\ &+ K_2 \delta z + K_2' \delta z' + \ldots + K_2^{(s-1)} \delta z^{(s-1)} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big]_{x'}^{x''} = 0. \end{aligned}$$

Równanie $\Gamma = 0$ nazywa się równaniem, odnoszącem się do granic.

Równania $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, ..., są równaniami różniczkowemi, które po zcałkowaniu dają nam funkcye y, $z \ldots$ z pewną liczbą stałych dowolnych; stałe te wyznaczamy przy pomocy równania, odnoszącego się do granic.

Jeżeli dane są wartości funkcyi y i jej pierwszych $r-1$ pochodnych dla granic x', x'', wartości funkcyi z i $s-1$ jej pierwszych pochodnych i t. d., jeżeli nadto same granice są z góry dane, wtedy $\delta x' = \delta x'' = 0$, $\delta y = \delta y' = \ldots\ldots = 0$, $\delta z = \delta z' = \ldots\ldots = 0 \ldots\ldots$, równanie zaś, odnoszące się do granic, sprawdza się samo przez się tożsamościowo.

Jeżeli powyższe wartości nie są z góry oznaczone, wtedy równanie $\Gamma = 0$ rozpada się na równanie następujące:

$$F_{x'} = 0, \quad F_{x''} = 0,$$

$$K_{1,x'} = 0, \quad K'_{1,x'} = 0, \ \ldots \ K_{1,x''} = 0, \quad K'_{1,x''} = 0, \ \ldots$$

$$K_{2,x'} = 0, \quad K_{2,x'} = 0, \ \ldots \ K_{2,x''} = 0, \quad K'_{2,x''} = 0, \ \ldots$$

Zagadnienie ogólne rachunku waryacyjnego. gdy wartości granic, funkcyj i ich pochodnych na granicach nie są z góry oznaczone, można rozłożyć na dwa zagadnienia: jedno, należące właściwie do rachunku waryacyjnego i podobne do zagadnienia danego, lecz w założeniu, że granice, wartości funkcyach i ich pochodnych są na granicach oznaczonemi; drugie zaś należące do rachunku różniczkowego, jest zwykłem zagadnieniem na maximum i minimum funkcyj wielu zmiennych.

Jeżeli między funkcyami niewiadomemi $y, z \dots$ zachodzą związki różniczkowe:

$$\varphi_1 = 0, \; \varphi_2 = 0, \; \dots\dots \; \varphi_m = 0, \; (m < n).$$

wtedy zagadnienie na maximum i minimum całki określonej nazywa się **zagadnieniem na maximum i minimum względne**; w przypadkach pozostałych mamy **zagadnienie na maximum i minimum bezwzględne.**

Zagadnienie najogólniejsze rachunku waryacyjnego można **zawsze** sprowadzić do następującej postaci kanonicznej.

Sprawić, by całka

$$\int_{x'}^{x''} F dx,$$

gdzie F **zawiera zmienną** x, **funkcye** $y_1, y_2, \dots, y_n$ **tej zmiennej i ich pierwsze pochodne, związane równaniami różniczkowemi rzędu 1-go** $\varphi_1 = 0, \; \varphi_2 = 0, \dots \varphi_m = 0$, **było maximum lub minimum**

Zagadnienie to rozwiązujemy za pomocą wyżej wskazanej metody, szukając maximum lub minimum bezwzględnego całki

$$\int_{x'}^{x''} \Omega \, dx,$$

gdzie

$$\Omega = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi:$$

ilości λ **są nowemi funkcyami niewiadomemi zmiennej** x (Metoda mnożników **Lagrange'a**).

Zadanie izoperymetryczne, (**które można uważać za przypadek szczególny poprzedzającego**), **jest następujące:**

Sprawić, by całka

$$I = \int_{x'}^{x''} F\,dx$$

była maximum lub minimum i aby jednocześnie całki:

$$I_1 = \int_{x'}^{x'} F_1\,dx, \quad I_2 = \int_{x'}^{x'} F_2\,dx, \; \ldots \; I_m = \int_{x'}^{x''} F_m\,dx$$

przybrały wartości z góry oznaczone $l_1, l_2, \ldots l_m$.

Zagadnienie to rozwiązujemy, szukając maximum lub minimum bezwzględnego całki:

$$J = \int_{x'}^{x''} \left(F + \sum_{t-1}^{n} \lambda_t F_t \right) dx = \int_{x'}^{x''} \Phi\,dx,$$

gdzie ilości λ można uważać za stałe. (Metoda Eulera).

Jeżeli idzie o maximum i minimum bezwzględne, funkcya zaś podcałkowa F zawiera najwyżej pochodne pierwsze funkcyj niewiadomych, to aby zagadnienie było w ogóle rozwiązalnem, jest koniecznem, by hesyan funkcyi F, uważanej za funkcyę pochodnych pierwszych, był różny od zera.

W szczególnosci, gdy mamy jednę funkcyę niewiadomą, jest koniecznem, by pochodna funkcyi F względem y' była różna od zera.

W warunkach twierdzenia poprzedzającego, jeżeli założymy, że funkcya F zawiera pochodne funkcyj niewiadomych aż do rzędu r-tego, dla rozwiązalności zagadnienia jest koniecznem, by hesyan funkcyi F, uważanej za funkcyę pochodnych r-tych, był różny od zera.

W szczególności gdy $n=1$, jest koniecznem by pochodna druga funkcyi F względem $y^{(r)}$ była różna od zera.

W zagadnieniu ogólnem na maximum i minimum względne, sprowadzonem do postaci kanonicznej, t. j. gdy w danych zagadnienia występują najwyżej pochodne rzędu pierwszego funkcyj niewiadomych, dla rozwiązalności zagadnienia jest koniecznem, by wyznacznik:

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y'^2_1}, & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y'_1 \partial y'_n}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'_1}, & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y'_1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y'_n \partial y'_1}, & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y'^2_n}, & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y'_n}, & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y'_n} \\
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y'_1}, & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y'_n}, & 0, & \ldots\ldots, & 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y'_1}, & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y'_n}, & 0, & \ldots\ldots, & 0
\end{vmatrix}
$$

był różny od zera (Ω ma tu znaczenie wyżej wskazane).

Wreszcie w zagadnieniu izoperymetrycznem (gdy funkcye $F, F_1, \ldots, F_n$ zawierają pochodne najwyżej rzędu pierwszego funkcyi niewiadomych), warunkiem koniecznym rozwiązalności jest, by hesyan funkcyi Φ (patrz wyżej), uważany za funkcyę pochodnych pierwszych, był różny od zera.

§ 2.

Waryacya druga.

Warunki, poprzednio podane, są konieczne; celem znalezienia warunków dostatecznych istnienia maximum lub minimum należy zwrócić się do rozważania t. z. waryacyi drugiej.

Waryacya druga całki określonej jest wyrażeniem typu

$$\int_{x'}^{x''} Q\,(\delta y_1, \delta y_2, \ldots \delta y_n, \delta_1', \delta y'_2 \ldots \delta y'_n, \delta y''_1 \ldots)\,dx,$$

gdzie Q jest formą kwadratową ilości $\delta y_1, \ldots \ldots \delta y_n$, $\delta y'_1, \ldots \ldots$

W przypadku jednej tylko funkcyi niewiadomej y, waryacya druga daje się sprowadzić do postaci (Twierdzenie Jacobi'ego. Crelle XVII):

$$\int_{x'}^{x''} \Big\{ A_0\,\delta y - \frac{d(A_1\,\delta y')}{dx} + \frac{d^2(A_2\delta y'')}{dx^2} + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^r \frac{d^r(A_r\,\delta y^{(r)})}{dx^r} \Big\}\, \delta y\, dx,$$

gdzie ilosci A są funkcyami zmiennej x.

Jeżeli położywszy:

$$\delta y = t_1 z_1$$

$$t_1 = C''_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + \ldots\ldots + C''_{2r} \frac{\partial y}{\partial c_{2r}},$$

—gdzie ilości C są nowemi stałemi dowolnemi, ilości zaś c stałemi, otrzymanemi z całkowania równania różniczkowego, wynikającego ze znikania waryacyi pierwszej—załóżymy, że funkcya t_1 nie może znikać wraz ze swemi pierwszemi $r-1$ pochodnemi w dwu jakichkolwiek punktach drogi całkowania (w szczególności na obu granicach) wtedy waryacya druga przybiera postać:

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} z'_1 \Big\{ b_1 z'_1 - \frac{d(b_2 z''_1)}{dx} + \ldots\ldots + (-1)^r \frac{d^{r-1}(b^r z_1^{(r)})}{dx^{r-1}} \Big\}\, dx.$$

Przekształcenie to nazywa się przekształceniem Jacobi'ego.

Stosując kolejno to przekształcenie, dojdziemy wreszcie do postaci

$$\delta^2 I = (-1)^{r-1} \int_{x'}^{x''} z'_r{}^2 B_r \, dx,$$

$$B_r = \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(r)2}} t_1^2 \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{t_2}{t_1} \right) \right]^2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

gdzie funkcya t_2 jest utworzona podobnie jak t_1, lecz z innemi stałemi C. Jeżeli możemy wyznaczyć ilości C w ten sposób, aby ilość pod znakiem całkowym nie stawała się nieskończoną dla wartości x, znajdujących się na drodze całkowania; jeżeli nie ma takich wartości C, dla których t_1 lub t_2 i wszystkie ich pierwsze pochodne aż do pochodnych rzędu $r-1$, znikają w dwu punktach drogi całkowania; jeżeli pochodna $\frac{\partial F}{\partial y^{(r)2}}$ jest zawsze jednego znaku i nie staje się nieskończoną dla wartości x na tej drodze, wtedy znalezione rozwiązanie dawać będzie z pewnością maximum lub minimum, stosownie do tego, czy

$$(-1)^{r-1} \frac{\partial F}{\partial y^{(r)2}}$$

jest stale ujemnem lub stale dodatniem.

W przypadku $r=1$ waryacya druga sprowadza się do postaci:

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \left| \delta y' - \frac{t'}{t} \delta y \right|^2 dx,$$

a kryteryum na maximum i minimum wyprowadza się z łatwością z twierdzenia poprzedzającego.

Dane historyczne i bibliograficzne o różnych twierdzeniach, podanych w tych dwu paragrafach, znaleść można w tomie III „Rachunku nieskończonościowego“ Pascala (przekład polski, Warszawa 1897). Najnowszą pracę o wyprowadzeniu dostatecznych warunków maximum i minimum całek pojedyńczych ogłosił A. Kneser (Math. Ann. LI., str. 321—345, 1898).

§ 3.

Różne zagadnienia rachunku waryacyjnego.

Zagadnienie Newtona. Znaleść krzywą płaską o stycznej ciągłej, przechodzącą przez dwa punkty dane i obrotem swym około osi danej wytwarzającą bryłę, która zanurzona w cieczy w kierunku swej osi, napotyka opór najmniejszy. (Ciało okrągłe o najmniejszym oporze.)

Wprowadza się hypotezę, że opór, jaki napotyka ciało przy zanurzeniu, jest proporcyonalny do kwadratu rzutu prędkości na normalną do powierzchni i ma kierunek tej normalnej. Znajdujemy krzywą, której spółrzędne x, y, wyrażają się w funkcyi ilości y' sposobem następującym (x jest osią obrotu):

$$x=a\left(\frac{3}{4y'^4}+\frac{1}{y'^2}+\log y\right)+b;\; y=\frac{a\,(1+y'^2)^2}{y'^3}.$$

Krzywa ta posiada ostrze w punkcie, dla którego $y'=\sqrt{3}$.

Zagadnieniem tem zajmował się Legendre (Mém. de Paris, 1786), patrz August, (Crelle CII, 1888) i § 30 „Rachunku waryacyjnego" E. Pascala, Warszawa. 1897).

Zagadnienie o brachystochronie. Jaką drogę powinno opisywać ciało, ożywione prędkością początkową v_0 i poddane jedynie sile ciężkości, aby w czasie możliwie najkrótszym przeniosło się z punktu o spółrzędnych x_0, y_0, z_0 do punktu o spółrzędnych x_1, y_1, z_1, w założeniu, że ośrodek, w którym się porusza, jest albo próżnią, albo stawia opór, który jest funkcyą prędkości ciała?

Krzywa jest cyklojdą o podstawie poziomej.

Jeżeli punkt końcowej krzywej ma się znajdować na krzywej z góry danej, wtedy trajektorya przecina ortogonalnie tę ostatnią.

Zagadnieniem tem zajmował się Lagrange (Misc. Taur. II, 1760—61). Co do szczegółów patrz § 31 „Rachunku waryacyjnego“ Pascala.

Wyznaczyć krzywą długości danej, przechodzącą przez dwa punkty dane, i taką, że gdy nakreslimy między temiż punktami drugą krzywą, której rzędne są potęgą lub pierwiastkiem odpowiednich rzędnych krzywej pierwszej lub odpowiednich łuków tejże, to pole drugiej będzie maximum. W przypadku szczególnym tego zagadnienia t. j. gdy rzędna drugiej krzywej ma być równa łukowi odpowiedniemu danej, otrzymujemy linię łańcuchową.

Zagadnieniem tem zajmował się Jakób Bernoulli w jednej z pierwszych prac swoich nad rachunkiem waryacyjnym (Acta Eruditorum, 1697).

Pomiędzy wszystkiemi wielokątami zamkniętemi, mającemi za boki odcinki dane, znaleść wielokąt o polu największem. Dowodzi się, że wielokątem tym jest wielokąt wpisany w koło.

Zagadnienie to przy pomocy rachunku waryacyjnego traktował Lagrange w drugim dodatku do swej rozprawy: „Nouvelle méthode etc.“ (Misc. Taur., t. II); drogą syntetyczną badał je już Cramer (Akad. Berl. 1752). Analogiczne zagadnienie dla wielościanów o danej powierzchni i największej objętości badał Lindelöf (Math. Ann. II, str. 150).

Jeżeli zamiast wieloboku mamy krzywą o danym obwodzie, wtedy otrzymujemy koło.

Twierdzenie to udowodnił już Zenodor, a przekazał nam Pappus (patrz Cantor, Geschichte der Mathematik, I. str. 208). Legendre w § VIII swej rozprawy (Acad. de Paris, 1786) bada to zagadnienie szczegółowo przy pomocy rachunku waryacyjnego. Znajduje się ono także u Eulera „Methodus inveniendi etc.“ Rozdz. V, § 41.

O zagadnieniach tego rodzaju na płaszczyźnie, na kuli, i w przestrzeni, lecz z punktu widzenia czysto geometrycznego, istnieje obszerna rozprawa Steinera (Crelle, XXIV, str. 93 i 189; Liouville, VI).

Pomiędzy dwoma punktami danemi lub dwiema krzywemi poprowadzić taką krzywą, aby ciało po niej spadające osiągało w końcu swego spadku prędkość największą.

Zagadnienie to rozwiązuje Lagrange w ostatniej lekcyi swego „Calcul des fonctions“ (Oeuvres, X, str. 448).

Jeżeli punkty skrajne mają się znajdować na dwu krzywych danych, wtedy znajdujemy, iż styczne do tych krzywych w punktach skrajnych powinny być równoległe. Jest to rezultat analogiczny do tego, jaki znajdujemy dla brachystrochrony.

Pomiędzy krzywemi o jednakowym obwodzie, mającemi te same dwa punkty skrajne, znaleść krzywą, dla której środek ciężkości linii jest najbardziej odległy od podstawy.

Zagadnienie to błędnie rozwiązał Galileusz (1638), który mniemał, że krzywą szukaną jest parabola; później zajmowali się tem zagadnieniem bracia Bernoulli'owie Jan i Jakób, Huygens i Leibniz (Acta Eruditorum, 1690—1692).

Znajdujemy, że krzywą szukaną jest łańcuchowa, t. j. krzywa, której promień krzywizny równa się długości linii normalnej, pomiędzy krzywą a osią odciętych lecz jest położony po stronie przeciwległej tej normalnej. Jeżeli a jest stałą nieoznaczoną, to należy sprawić, by całka

$$\int (y + a)\, ds$$

była maximum, gdyż $\frac{1}{s}\int y\, ds$, jak wiadomo z mechaniki, równa się rzędnej środka ciężkości linii.

Zagadnieniem tem zajmował się także Legendre (§ 7 rozprawy z r. 1786, Acad. de Paris). Patrz Mayer, Math. Ann. XIII, str. 65.

Wiele z następujących zagadnień podał i rozwiązał Euler w sławnej rozprawie „Methodus inveniendi etc.“ 1744.

Przez dwa punkty przeprowadzić krzywą taką, aby pole, zawarte pomiędzy tą krzywą, jej rozwiniętą i normalnemi w punktach skrajnych, było możliwie najmniejszem.

Znajdujemy, że krzywa jest gałęzią cykloidy (Euler l. c. Rozdz. II, § 51).

Co do tego zagadnienia patrz Jellet „Variationsrechnung", (przekład niemiecki, Brunświk 1860, str. 191 i 422) i Todhundter „Researches i t. d.", Londyn 1871, str. 250.

Pomiędzy wszystkiemi krzywemi, łączącemi dwa punkty i wytwarzającemi przez obrót około osi powierzchnię o polu jednakowem, znaleść krzywą, dla której ta powierzchnia zamyka objętość największą (Euler, Rozdz. V § 44).

Zagadnienie to dało powód do wielu kontrowersyj. Patrz Lindelöf, Calcul des variations, str. 218 i Greve „Ein Problem aus der Variationsrechnung", Getynga, 1875.

Pomiędzy wszystkiemi krzywemi, przechodzącemi przez dwa punkty i zamykającemi pole jednakowe, znaleść krzywe, które obrotem swym około osi wytwarzają powierzchnię o polu najmniejszem (Euler, Rozdz. V. § 45).

Otrzymujemy krzywą rzędu trzeciego z punktem podwójnym, podaną pod numerem 68 w klasyfikacyi krzywych rzędu 3-go, utworzonej przez Newtona.

Pomiędzy krzywemi o jednakowym obwodzie i przechodzącemi przez dwa punkty, znaleść krzywe, które obrotem swym około osi wytwarzają ciało o największej objętości (Euler, Rozdz. V, § 46).

Otrzymujemy tak nazwaną krzywą sprężystą, mającą tę własność, że jej promień krzywizny jest odwrotnie proporcyonalny do odciętej.

Pomiędzy krzywemi o jednakowym obrocie znaleść krzywą, która obrotem swym około osi wytwarza powierzchnię o polu największem lub najmniejszem (Euler, l. c. Rozdz. V, § 47).

Znajdujemy linię łańcuchową. Powierzchnia wytworzona jest powierzchnią łańcuchową lub katenoidą (Plateau).

Patrz Goldschmidt (Determinatio superf. min. etc., Getynga, 1831; Lindelöf („Sur les limites entre lesquelles la caténoide est une surface minima", Math. Ann. Vol. II, st, 60; 1870).

Pomiędzy krzywemi o jednakowym obwodzie i zamykającemi tożsamo pole, znaleść krzywą, która obrotem swym około osi wytwarza powierzchnię, zamykającą objętość najmniejszą (Euler, Rozdział VII, § 22).

Znajdujemy krzywą sprężystą.

Pomiędzy krzywemi o tych samych odciętych, zamykającemi pole jednakowe i wytwarzającemi obrotem około osi powierzchnie zamykające jednakową objętość, znaleść krzywą, której środek ciężkości znajduje się najniżej lub najwyżej (Euler, l. c. IV, § 23).

Znajdujemy linię prostą.

Dane są dwie płaszczyzny równoległe i punkt na jednej z nich; poprowadzić z tego punktu do drugiej płaszczyzny linię długości danej taką, aby pole powierzchni walcowej, którą otrzymujemy, prowadząc z rozmaitych punktów linie prostopadłe do dwu płaszczyzn i pomiędzy temiż płaszczyznami zawarte, było największe.

Znajdujemy helisę.

Prtrz Moigno: „Calcul des variations", (Paryż, 1861, str. 299).

Ustaliwszy dwie rzędne, poprowadzić z punktu jednej do punktu drugiej krzywą tak ą, aby figura, określona przez oś, przez dwie rzędne i przez krzywą, miała obwód z góry dany i zarazem pole największe.

Patrz Challis: On the solution of three problems etc. (Phil. Mag. 1872.

Znaleść powierzchnię o polu danem, zamykającą objętość największą.

Patrz: Sarrus (Mém. des Sav. étrang., t X, 1846), Sabinin (Zbiornik mat., Moskwa, XIV, str. 451, 1890).

Znaleść krzywą, mającą krzywiznę pierwszą stałą i punkty skrajne na dwóch danych krzywych lub powierzchniach, a której długość jest największa lub najmniejsza.

Zagadnieniem tem zajmowali się; Dalaunay, Jellet, Todhunter. Nową pracę o tym przedmiocie ogłosił Venske, Getynga, 1891.

Wyznaczyć krzywą, mającą moment bezwładności względem punktu danego, największy lub najmniejszy.

Euler rozwiązał zagadnienie to błędnie. Rozwiązanie dokładne podał Ossian Bonnet (Liouville. IX, str. 97, 1844). Analogiczne zagadnienie w pracy: „Sur le minimum du potentiel de l'arc", rozwiązał De la Goupillière (Assoc. Franc. Besançon, t. XXII, str. 164, 1893).

ROZDZIAŁ XII.

TEORYA NIEZMIENNIKÓW.

---

§ 1.

Formy dwójkowe. Przedstawienie symboliczne.

Funkcya wymierna całkowita jednorodna stopnia n-tego o zmiennych x_1, x_2 nazywa się formą dwójkową stopnia n-tego. Przedstawić ją możemy w ten sposób:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_r x_1^{n-r} x_2^r,$$

gdzie dla dogodności rachunku nadajemy spółczynnikom postać $\binom{n}{r} a_r$, uwidoczniając przez to spółczynniki dwumianowe.

Symbolicznie piszemy tę formę tak:

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = a_x^n,$$

przyjmując, że

$$a_1^n = a_0, \quad a_1^{n-1} = a_1, \quad \ldots\ldots, a_2^n = a_n,$$

i rozumiejąc, że strony pierwsze tych równości są tylko symbolami do oznaczenia stron drugich; ilości x_1, x_2 są więc także symbolami, którym można nadawać znaczenie tylko wtedy, gdy są skombinowane ze stopniem n.

Ilości a są spółczynnikami istotnemi formy f, ilości α — spółczynnikami symbolicznemi.

Każda funkcya ilości a daje się wyrazić jako funkcya ilości α, lecz nie odwrotnie. Jeżeli wprowadzimy symbole równoważne symbolom α, t. j. napiszemy:

$$f = \alpha_x^n = \beta_x^n = \gamma_x^n = \ldots\ldots,$$

wtedy funkcya ilości α, β, γ ..., której każdy wyraz zawiera ilości α aż do stopnia n, ilości β aż go tegoż stopnia i t. d. może być odrazu sprowadzona do funkcyi spółczynników istotnych a. Stopień jej co do spółczynników istotnych równa się liczbie symbolów α, β, γ ..., występujących w danem wyrażeniu.

Przez

$$(\alpha\beta) + -(\beta\alpha)$$

oznaczamy wyznacznik symboliczny

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, \\ \beta_1, & \beta_2, \end{vmatrix}$$

Pomiędzy czynnikami liniowemi symbolicznemi a wyznacznikami symbolicznemi zachodzą następujące tożsamości zasadnicze:

$$(\alpha\beta)\gamma_x + (\beta\gamma)\alpha_x + (\gamma\alpha)\beta_x = 0,$$

$$\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x = (\alpha\beta)(xy),$$

$$(\alpha\beta)(\gamma\delta) + (\beta\gamma)(\alpha\delta) + (\gamma\alpha)(\beta\delta) = 0.$$

Jeżeli położymy

$$x_1 = A_{11}x'_1 + A_{12}x'_2; \quad x_2 = A_{21}x'_1 + A_{22}x'_2,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ A_{21}, & A_{22} \end{vmatrix} \text{ (moduł)},$$

to forma

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots\ldots = a_x^n$$

przejdzie na następującą:

$$f' = a'_0 x'^m_1 + \binom{n}{1} a'_1 x'^{n-1}_1 x'_1 + \ldots\ldots = a'^n_x.$$

Spółczynniki a' wyrażają się liniowo przez spółczynniki a. Jeżeli wyrazimy spółczynniki a' symbolicznie przez ilości a', to związki, zachodzące pomiędzy spółczynnikami a' i a można, wyrazić w ten sposób:

$$a'_1 = A_{11} a_1 + A_{21} a_2; \quad a'_2 = A_{12} a_1 + A_{22} a_2,$$

skąd:

$$\Delta a_2 = - A_{22} a'_1 + A_{21} a'_2; \quad \Delta a_1 = A_{12} a'_1 - A_{11} a'_2.$$

---

§ 2.

Niezmienniki i spółzmienniki.

Niechaj będzie układ form stopni $n, n', \ldots$. Wyobraźmy sobie funkcyę wymierną spółczynników form danych oraz zmiennych x i uskutecznijmy wskazane przekształcenie liniowe, t. j. podstawmy zamiast zmiennych x ich wartości, wyrażone w zmiennych x', lub zamiast dawnych spółczynników ich wartości, wyrażone w nowych.

Jeżeli funkcya przekształcona daje się wyrazić jako iloczyn potęgi r-tej modułu przez wyrażenie, utworzone ze spółczynników przekształconych i ze zmiennych, przekształconych w ten sam sposób, w jaki funkcya dana utworzona została ze spólczynników dawnych i zmiennych dawnych, wtedy mówimy, że funkcya ta ma własność niezmienniczą. Jeżeli zawiera zmienne, to jest spółzmiennikiem; w przeciwnym razie niezmiennikiem. Jej stopień co do zmiennych nazywa się rzędem; liczba r-skaźnikiem. Ogół form danych nazywa się układem zasadniczym.

Można rozszerzyć pojęcie spółzmiennika, pomyśliwszy taką funkcyę niezmienniczą, która, prócz zmiennych x_1, x_2, zawiera jeszcze inne szeregi zmiennych $y_1, y_2, z_1, z_2, \ldots$; przytem wszystkie mają podlegać tym samym podstawieniom (o tych samych spółczynnikach), którym podlegają zmienne x. Mamy wtedy spółzmiennik o wielu szeregach ilości zmiennych.

Jeżeli skaźnik r jest parzysty, forma niezmiennicza nazywa się formą o charakterze parzystym; w przeciwnym razie nazywa się formą o charakterze nieparzystym.

Jeżeli $n, n' \ldots$ są rzędami form zasadniczych, $k, k' \ldots$ stopniami formy niezmienniczej co do spółczynników różnych form, m zaś rzędem tej formy, t. j. stopniem jej co do zmiennych, wtedy zachodzi związek:

$$2r + m = nk + n'k' + \ldots\ldots$$

Jeżeli wszystkie formy dane są rzędu parzystego, to ich niezmiennik nie może być rzędu nieparzystego.

Każda forma dwójkowa rzędu nieparzystego $n > 3$ posiada co najmniej dwa niezmienniki liniowe. których wypadkowa jest różna od zera (Clebsch).

Każda forma dwójkowa rzędu parzystego $n > 4$ posiada co najmniej dwa spółzmienniki stopnia 2-go, których wypadkowa jest różna od zera (Clebsch).

W każdym wyrazie formy niezmienniczej, wyrażonym przez spółczynniki istotne formy lub form zasadniczych, t. j. przez $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$, utwórzmy sumę iloczynów skaźnika każdego ze spółczynników $a, b \ldots$ przez odpowiedni wykładnik. Ta suma nazywa się wagą wyrazu.

Własność zasadniczą form niezmienniczych wyrażają twierdzenia:

W każdej formie niezmienniczej waga każdego wyrazu jest stała, co wyrażamy mówiąc, że formy niezmiennicze są funkcyami izobarycznemi spółczynników form zasadniczych. Waga niezmiennika lub spółzmiennika zlewa się z wyżej określonym skaźnikiem r.

Każda forma niezmiennicza J czyni zadość następującym równaniom różniczkowym:

$$\sum_n \sum_r (n-r) a_r \frac{\partial J}{\partial a_r} - \sum_x x_1 \frac{\partial J}{\partial x_1} = rJ,$$

$$\sum_a \sum_r r a_r \frac{\partial J}{\partial a_r} - \sum_r x_2 \frac{\partial J}{\partial x_2} = rJ.$$

$$\sum_a \sum_r (n-r) a_{r+1} \frac{\partial J}{\partial a_r} - \sum_x x_1 \frac{\partial J}{\partial x_2} = 0,$$

$$\sum \sum r a_{r-1} \frac{\partial J}{\partial a_r} - \sum x_2 \frac{\partial J}{\partial x_1} = 0,$$

gdzie: sumowanie względem r rozciąga się na wszystkie spółczynniki formy; wyrazy względem a zmieniają się od jednej formy zasadniczej do drugiej; sumowanie względem x oznacza, że, gdy idzie o spółzmiennik o kilku szeregach zmiennych x, y . . . , to należy utworzyć tyleż wyrazów podobnych, jeden względem x, drugi względem y i t. d.

Jeżeli w szczególności idzie o niezmiennik, to odpowiednie równania różniczkowe otrzymujemy z poprzednich, znosząc sumowanie względem x.

Powyższe równania różniczkowe znalazł Cayley (1854), potem badali je Sylvester, Aronhold i inni.

Niezmienniki, uważane jako funkcye pierwiastków zasadniczej formy dwójkowej, czynią zadość pewnym równaniom różniczkowym, które znalazł Brioschi (Ann di mat. V).

Najważniejszą własność form niezmienniczych streszcza następujące twierdzenie Clebscha.

Forma niezmiennicza, wyrażona za pomocą społczynników symbolicznych, przedstawia się zawsze jako suma wyrazów, z których każdy jest iloczynem symbolicznym wyznaczników typu $(\alpha\beta), (\alpha\alpha_1)$, .. i czynników symbolicznych typu $\alpha_x\, \alpha_y\, \beta_x$ ..., α_1, ..., gdzie: α, β ... są symbolami równoważnemi pierwszej formy zasadniczej; α_1, β_1 ..., takiemiż symbolami drugiej i t. d. i gdzie naturalnie stopień względem każdego ze symbolów α, β ... jest n, względem każdego ze symbolów α_1, β_1 .. jest n' i t. d.; n, n' ... są stopniami form danych.

Liczba czynników liniowych symbolicznych przedstawia rząd formy niezmienniczej; liczba wyznaczników symbolicznych jest równa skaźnikowi lub wadze r.

Działania nie zmieniające własności niezmienniczej. Niechaj, jak zwykle, a_0, a_1, a_2 ... będą spółczynniki jednej, b_0, b_1, b_2 ... spółczynniki drugiej formy tego samego rzędu.

Jeżeli J jest niezmiennikiem lub spółzmiennikiem układu, do którego należy pierwsza forma, to wyrażenie

$$\Sigma_i\, b_i \frac{\partial J}{\partial a_i}$$

będzie miało również wartość niezmienniczą i będzie niezmiennikiem lub spółzmiennikiem układu pierwotnego, rozszerzonego przez dołączenie formy drugiej.

Działanie $\Sigma\, b_i \dfrac{\partial}{\partial a_i}$ nazywa się działaniem lub procesem Aronholda.

Jeżeli J jest spółzmiennikiem rzędu m-tego, to wyrażenie

$$\frac{1}{m}\left(y_1 \frac{\partial J}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial J}{\partial x_2}\right)$$

jest również spółzmiennikiem.

Działanie

$$\frac{1}{m} \sum y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

nazywa się działaniem biegunowem o biegunie y; nie zmienia ono, jak to wynika z poprzedzającego twierdzenia, własności niezmienniczej.

Przez symbol $\Delta_y{}^k$ rozumiemy działanie biegunowe o biegunie y, powtórzone k razy

Jeżeli oznaczymy symbolicznie przez $p_x{}^m$ spółzmiennik rzędu m-tego, to będzie:

$$\Delta_y{}^k \, p_x{}^m = p_x{}^{m-k} \, p_y{}^k,$$

Jeżeli J jest spółzmiennikiem o dwu szeregach ilości zmiennych x, y, stopnia m-tego względem pierwszych zmiennych stopnia m'-tego względem drugich, to działanie

$$\frac{1}{m\,m'}\left(\frac{\partial^2 J}{\partial x_1\, \partial y_2} - \frac{\partial^2 J}{\partial x_2\, \partial y_1}\right) = \Omega$$

nie zmienia własności niezmienniczej. Działanie $\frac{1}{mm'}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\, dy_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2\, \partial y_1}\right)$ nazywamy działaniem lub procesem Ω.

Jeżeli funkcyę dwu zmiennych przedstawimy symbolicznie w postaci $f(x, y) = a_x{}^n \, b_y{}^m$, to będzie:

$$\Omega^k \; (a_x{}^n \, b_y{}^m) = (a\,b)^k \; a_x{}^{n-k} \, b_y{}^{m-k}.$$

Istnieją jeszcze dwa działania niezmiennicze symboliczne; jedno z nich zwane fałdowaniem (Faltung, piega), wprowadził Gordan: polega ona na tem, że w iloczynie symbolicznym, złożonym z wyznaczników symbolicznych i czynników liniowych symbolicznych, zastępujemy dwa czynniki liniowe a_x, b_x, wyznacznikiem (ab).

Drugie działanie t. zw. nasunięcie (Ueberschiebung, spinta) wprowadził Clebsch, polega ono na twierdzeniu z dwu form danych a_x^n, b_x^m wyrażenia

$$(ab)\, a_x^{n-1}\, b_x^{m-1}.$$

Działanie Clebscha daje się w ten sposób wyrazić przy pomocy działania Ω:

$$(ab)\, a_x^{n-1}\, b_x^{m-1} = \left[\Omega\left(a_x^n\, b_y^m\right)\right]_{y=x}.$$

Działanie to powtórzone k razy na formach f, φ, wyraża się symbolem $(f, \varphi)_k$.

Tożsamości, odnoszące się do działania Clebscha. Pomiędzy trzema formami f, φ, ψ zachodzi tożsamość:

$$\begin{vmatrix} (f, f)^2, & (f, \varphi)^2, & (f, \psi)^2, & f \\ (\varphi, f)^2, & (\varphi, \varphi)^2, & (\varphi, \psi)^2, & \varphi \\ (\psi, f)^2, & (\psi, \varphi)^2, & (\psi, \psi)^2, & \psi \\ f, & \varphi, & \psi, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pomiędzy czterema formami f, φ, ψ, χ zachodzi związek:

$$\begin{vmatrix} (f, f)^2, & (f, \varphi)^2, & (f, \psi)^2, & (f, \chi)^2 \\ (\varphi, f)^2, & (\varphi, \varphi)^2, & (\varphi, \psi)^2, & (\varphi, \chi)^2 \\ (\psi, f)^2, & (\psi, \varphi)^2, & (\psi, \psi)^2, & (\psi, \chi)^2 \\ (\chi, f)^2, & (\chi, \varphi)^2, & (\chi, \psi)^2, & (\chi, \chi)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 3.

Wzór Clebscha-Gordana.

Jednym z najważniejszych wzorów do symbolicznych przekształceń form niezmienniczych jest wzór Clebscha-Gordana, dający rozwinięcie funkcyi o dwu szeregach ilości zmiennych x, y przez biegunowe wyrażenie o jednym tylko szeregu, pomnożone przez potęgi całkowite dodatnie wyznacznika (xy). Niechaj $f(x, y)$ będzie funkcyą o dwu szeregach ilości zmiennych stopnia m względem jednych, stopnia n względem drugich. Jeżeli przez Δ oznaczymy działanie biegunowe o biegunie y i zmiennej x, przez D—działanie biegunowe o biegunie x i o zmiennej y, będzie:

$$f = \Delta^k D^n f + a_1^{(k)} (xy)\, \Delta^{k-1} D^{k-1} \Omega f$$
$$+ a_2^{(k)} (xy)^2\, \Delta^{n-2} D^{k-2} \Omega^2 f + \ldots\ldots + a_k^{(k)} \Omega^k f.$$

Spółczynniki a są liczbami, czyniącemi zadość wzorom zwrotnym:

$$a_p^{(n+1)} = a_p^{(k)} + \frac{(m-p+1)^2}{(m+k-2p+2)\,(m+k-2p+3)}\, a_{p-1}^{(k)}.$$

Dla $k = n$ będzie:

$$a_p^n = \frac{\binom{n}{p} \binom{m}{p}}{\binom{m+n-p+1}{p}}$$

Dla symetryi co do skaźników m, n można wyrażenie to oznaczać też przez $a_p^{m.n}$.

W przypadku $k = n$ wyrażenia $D^k f$, $D^{k-1} \Omega f, \ldots$ nie zawierają zmiennej y i wtedy otrzymujemy wyrażenie funkcyi f za pomocą samych biegunowych Δ funkcyj zmiennej x.

Oto tablica wartości liczb $a_p^{m,\,n}$ dla różnych wartości skaźników m, n:

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
$m=1,\ n=1$	$\frac{1}{2}$			
$m=2,\ n=1$	$\frac{2}{3}$			
$m=3,\ n=1$	$\frac{3}{4}$			
$m=4,\ n=1$	$\frac{4}{5}$			
$m=5,\ n=1$	$\frac{5}{6}$			
$m=6,\ n=1$	$\frac{6}{7}$			
$m=2,\ n=2$	1	$\frac{1}{3}$		
$m=3,\ n=2$	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{2}$		
$m=4,\ n=2$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$		
$m=5,\ n=2$	$\frac{10}{7}$	$\frac{2}{3}$		
$m=6,\ n=2$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{7}$		
$m=3,\ n=3$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{4}$	
$m=4,\ n=3$	$\frac{12}{7}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	
$m=5,\ n=3$	$\frac{15}{8}$	$\frac{10}{[illegible]}$	$\frac{1}{2}$	
$m=6,\ n=3$	2	$\frac{45}{28}$	$\frac{4}{7}$	
$m=4,\ n=4$	2	$\frac{12}{7}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
$m=5,\ n=4$	$\frac{20}{9}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{3}$
$m=6,\ n=4$	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{7}$

Każda forma $(f, x. y.)$ tylko jednym sposobem daje się rozwinąć na szereg uporządkowany według potęg rosnących wyznacznika (xy); spółczynniki tego szeregu są biegunowemi. Jeżeli forma f jest symetryczna względem x i y, to spółczynniki potęg parzystych wyznacznika (xy) są zerami.

---

§ 4.

Zestawienie nazw, używanych w teoryi form.

Do teoryi form różni autorowie, zwłaszcza angielscy, wprowadzili wielką liczbę nazw, których znaczenie dobrze jest rozumieć.

Quantics (quantica) — tak anglicy zwykle nazywają formę.

2. Konkomitanty. Jest to nazwa, nadana przez Sylvestera utworowi niezmierniczemu ogólnemu.

3 Niezmiennik widoczny. Jest to ilość stała.

4. Niezmiennik bezwzględny. Jest to niezmiennik wymierny ułamkowy o skaźniku zero.

5. Przeciwzmiennik (kontrawaryant) jest to utwór, mający własność niezmienniczą, wtedy gdy ilości x w nim zawarte poddajemy przekształceniu liniowemu nie prostemu, lecz odwrotnemu; jest to zatem utwór, który odtwarza się, pomnożony przez potęgę modułu, jeżeli zamiast spółczynników dawnych, podstawimy ich wyrażenia w spółczynnikach przekształconych, zamiast zaś ilości x_1, x_2 wyrażenia:

$$\Delta x_1 = + A_{22}x'_1 - A_{12}x'_2; \quad \Delta x_2 = - A_{21}x'_1 + A_{11}x'_1 .$$

6. Konkomitanty mieszane. Nazwę tą nadaje Sylvester utworowi o dwu szeregach ilości zmiennych, mającemu własność niezmienniczą wtedy, gdy jedne zmienne podda-

jemy przekształceniu prostemu, drugie zaś odwrotnemu. Utwory te nazywamy także

7. Formami pośredniemi (Zwischenformen, Aronhold) patrz § 6.

8. Diwarianty (Salmon) patrz § 6.

9. Nadwyznaczniki (Hyperdeterminants). Tak Cayley nazywał pierwotnie niezmienniki.

10. Spółpodstawieniowemi (cogredienti) nazywają się dwa szeregi zmiennych, które poddajemy tym samym podstawieniom.

11. Przeciwpodstawieniowemi (contragredienti) nazywają się dwa szeregi zmiennych, z których pierwsze poddajemy podstawieniom liniowym prostym, drugie—odwrotnym.

12. Emananty. Stosując k razy działanie Aronholda do niezmiennika formy f, dochodzimy do niezmiennika formy f i formy, której spółczynniki wprowadzają się przy powyższem działaniu. Utwór ten nazywa się emanantem form f i q (Cayley).

13. Kombinanty. Są to niezmienniki lub spółzmienniki jednoczesne układu form jednego stopnia, do których stosując działanie Aronholda, odniesione do obu form układu, otrzymujemy na rezultat zero (patrz Gordan, Invariantentheorie, II str. 60).

Kombinant zmienia się o czynnik liczbowy, jeżeli zamiast układu form danych weźmiemy układ, którego formy są kombinacyami liniowemi form przewrotnych.

14. Ewektanty. Jeżeli w procesie Aronholda, zamiast mnożyć każdą pochodną przez spółczynnik b, o tym samym skaźniku, jaki ma spółczynnik, względem którego wzięto pochodną, mnożymy pochodną przez $(-1)^r x_2^{n-r} x_1^r$, t. j. jeżeli tworzymy

$$\Sigma (-1)^r x_2^{n-r} x_1^r \frac{\partial J}{\partial a_r},$$

gdzie a_r są spółczynnikami istotnemi danej formy rzędu n-tego, której J jest niezmiennikiem, otrzymujemy t. z. ewektant (Cayley).

15. Katalektykanty. Forma rzędu nieparzystego $2m-1$ daje się zawsze wyrazić jako suma m potęgą form liniowych

$$a_x^{2m-1} = b_1 (x_1 - a_1 x_2)^{2m-1} + \ldots\ldots + b_m (x_1 - a_m x_2)^{2m-1}.$$

Równanie, od którego zależy wyznaczenie spółczynników $a_1, \ldots, a_m$ jest postaci

$$\begin{vmatrix} a_0, & \ldots\ldots & , a_{m-1}, & 1 \\ a_1, & \ldots\ldots & , a_m, & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m-1}, & \ldots\ldots & , a_{2m}, & a^m \end{vmatrix} = 0$$

i nazywa się katalektykantem (Sylvester).

Też same rozważania stosować można i do form rzędu parzystego (patrz Cayley, Crelle LIV).

16. Syzygie. Tak nazywają się związki, zachodzące pomiędzy formami niezmienniczemi układu zupełnego.

17. Formy skośne (schiefe Formen, formes gauches, forme gobbe, skwew); są to formy niezmiennicze o charakterze nieparzystym (patrz wyżej § 2).

18. Półzmienniki (Seminvarianten, peninvarianti), są to utwory, mające własność niezmienniczą nie dla wszystkich możliwych podstawień liniowych, lecz tylko dla podgrupy grupy całkowitej.

---

§ 5.

Układy zupełne form niezmienniczych.

Każdy niezmiennik lub spółzmiennik spółzmiennika jest niezmiennikiem lub spółzmiennikiem układu zasadniczego.

Każda forma niezmiennicza układu form daje się zawsze złożyć przy pomocy kolejnego

stosowania procesu fałdowania (Twierdzenie Gordana.)

Dla danej formy lub danego układu form zasadniczych istnieje zawsze liczba skończona niezmienników i spółzmienników, których każdy inny niezmiennik układu jest funkcyą całkowitą (Twierdzenie Gordana).

Ogół tych niezmienników i spółzmienników tworzy to, co nazywamy **układem zupełnym**.

Liczba form układu zupełnego nie jest znana a priori. Granicę jej wyższą wskazał Gordan (Jour. de Liouville, 1879).

Liczba spółzmienników J stopnia m i rzędu p formy rzędu n równa się liczbie spółzmienników stopnia n i rzędu p formy rzędu m (Twierdzenie o wzajemności Hermite'a).

Inne ważne twierdzenie (Brioschi'ego, Tow. naukowe w Erlangen, 1895) jest następujące:

Jeżeli dwie formy dwójkowe mają wspólny czynnik liniowy, to ich spółzmiennik jednoczesny stopni p, q i rzędu m wyraża się przez niezmienniki i spółzmienniki form, które otrzymujemy z form danych, opuszczając ich czynnik wspólny (Zastosowanie tego twierdzenia podał Brioschi Acc. Torino 1896).

Układ zupełny układu form liniowych. Każdy spółczynnik lub niezmiennik układu form liniowych a_x, b_x, . . . tworzy się z agregatów czynników trzech następujących typów:

1) niezmienniki typu (ab), . . .
2) spółzmienniki typu a_x, b_x, a_y, b_y.
3) spółzmienniki typu (xy), . . .

Układ zupełny jednej lub dwu form kwadratowych. Układ zupełny formy kwadratowej $a_x{}^2$ tworzy się ze spółzmiennika $a_x{}^2$ oraz z niezmiennika (wyróżnika) $(aa')^2$. Niezmiennik $(aa')^2$ wyraża się przez spółczynniki w ten sposób: $2(a_0a_2 - a_1{}^2)$.

Układ zupełny dwu form kwadratowych $f = a_x^2$, $\varphi = b_x^2$ tworzy się:

1) z dwu form danych;

2) z wyróżników

$$A_{ff} = (aa')^2, \quad A_{\varphi\varphi} = (bb')^2;$$

3) z niezmiennika

$$A_{f\varphi} = (ab)^2 = a_0 b_2 + a_2 b_0 - 2a_1 b_1;$$

4) z jakobianu form danych:

$$\vartheta = (ab)\, a_x b_x = (a_0 b_1 - a_1 b_0)\, x_1^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0)\, x_1 x_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x_2^2.$$

Pomiędzy temi formami zachodzi związek:

$$\vartheta^2 = -\tfrac{1}{2}\,(A_{ff}\,\varphi^2 - 2A_{f\varphi}\, f\varphi + A_{\varphi\varphi} f^2).$$

Jeżeli ϑ jest tożsamościowo zerem, wtedy funkcye f i φ są proporcyonalne.

Jeżeli $A_{ff}\, A_{\varphi\varphi} - A^2_{f\varphi}$ jest tożsamościowo zerem, wtedy obie formy mają czynnik wspólny.

Układ zupełny trzech lub więcej form kwadratowych $f = b_x^2$, $\varphi = b_x^2$, $\psi = c_x^2, \ldots$ tworzy się:

1) z n form danych;

2) z $\frac{n(n+1)}{2}$ form A_{ff}, $A_{\varphi\varphi}$, $A_{\psi\psi}, \ldots, A_{f\varphi} \ldots$

3) z $\frac{n(n-1)}{2}$ spółzmienników kwadratowych

$$(f, \varphi) = \vartheta_{f\varphi}, \quad (f, \psi) = \vartheta_{f\psi}, \ldots\ldots;$$

4) z $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ niezmienników typu

$$R_{f\varphi\psi} = ((f, \varphi), \psi)_x = (ab)(ac)(bc) = \begin{vmatrix} a_0, & b_0, & c_0 \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix}.$$

Razem $\frac{n(n^2+3n+8)}{6}$ form niezmienniczych, wliczając w to formy dane.

Pomiędzy temi formami, prócz związków powyższych, odnoszących się do spółzmienników pomiędzy każdemi dwiema formami, istnieją związki następujące:

$$2R^2_{f\varphi\psi} = \begin{vmatrix} A_{ff}, & A_{f\varphi}, & A_{f\psi} \\ A_{\varphi f}, & A_{\varphi\varphi}, & A_{\varphi\psi} \\ A_{\psi f}, & A_{\psi\varphi}, & A_{\psi\psi} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{ff}, & A_{f\varphi}, & A_{f\psi}, & f \\ A_{\varphi f}, & A_{\varphi\varphi}, & A_{\varphi\psi}, & \varphi \\ A_{\psi f}, & A_{\psi\varphi}, & A_{\psi\psi}, & \psi \\ f, & \varphi, & \psi, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$f\vartheta_{\varphi\psi} + \varphi\vartheta_{\psi f} + \psi\vartheta_{f\varphi} = 0,$$

$$R_{f\varphi\psi} f + A_{ff}\,\vartheta_{\varphi\psi} + A_{f\varphi}\,\vartheta_{\psi f} + A_{f\psi}\vartheta_{\psi\varphi}\,.$$

Pomiędzy niezmiennikami 4 lub 5 form istnieją nadto związki:

$$\begin{vmatrix} A_{ff}, & A_{f\varphi}, & A_{f\psi}, & A_{f\chi} \\ A_{\varphi f}, & A_{\varphi\varphi}, & A_{\varphi\psi}, & A_{\varphi\chi} \\ A_{\psi f}, & A_{\psi\varphi}, & A_{\psi\psi}, & A_{\psi\chi} \\ A_{\varrho f}, & A_{\varrho\varphi}, & A_{\varrho\psi}, & A_{\varrho\chi} \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie ϱ może być w szczególności samą forma χ; nadto mamy związek

$$A_{f\varphi} R_{\psi\chi\varrho} - A_{f\psi} R_{\chi\varrho\varphi} + A_{f\chi} R_{\varrho\varphi\psi} - A_{f\varrho} R_{\varphi\psi\chi} = 0,$$

i inne podobne

Pomiędzy niezmiennikami sześciu form zachodzą (prócz poprzedzających) następujące związki:

$$R_{f\varphi\psi}R_{\chi\varrho\sigma} - R_{f\varphi\chi}R_{\varrho\sigma\psi} + R_{f\varphi\varrho}R_{\sigma\psi\chi} - R_{\psi\chi\sigma}R_{\psi\chi\varrho} = 0;$$

$$2R_{f\varphi\psi}R_{\chi\varrho\sigma} = \begin{vmatrix} A_{f\chi}, & A_{f\varrho}, & A_{f\sigma} \\ A_{\varphi\chi}, & A_{\varphi\varrho}, & A_{\varphi\sigma} \\ A_{\psi\chi}, & A_{\psi\varrho}, & A_{\psi\sigma} \end{vmatrix}.$$

Oto niektóre związki pomiędzy niezmiennikami 4 lub więcej form:

$$2\,\vartheta_{f\varphi}\vartheta_{\psi\chi} = \begin{vmatrix} A_{f\psi}, & A_{f\chi}, & f \\ A_{\varphi\psi}, & A_{\varphi\chi}, & \psi \\ \psi, & \chi, & 0 \end{vmatrix},$$

$$2\,\vartheta_{f\varphi}R_{\varphi\chi\varrho} = \begin{vmatrix} A_{f\psi}, & A_{f\chi}, & A_{f\varrho} \\ A_{\varphi\psi}, & A_{\varphi\chi}, & A_{\varphi\varrho} \\ \psi, & \chi, & \varrho \end{vmatrix},$$

$$fR_{\varphi\psi\chi} - \varphi R_{\psi\chi f} + \psi R_{\chi f\varphi} - \chi R_{f\varphi\psi} = 0,$$

$$fR_{\varphi\psi\chi} = A_{f\varphi}\vartheta_{\psi\chi} + A_{\chi\psi}\vartheta_{\chi\varphi} + A_{f\chi}\vartheta_{\varphi\psi}.$$

Znikanie niezmiennika R, należącego do trzech form kwadratowych f, φ, ψ ma znaczenie następujące:

Jeżeli $R_{f\varphi\psi}$ jest tożsamościowo zerem, to trzy pary punktów, przedstawiających pierwiastki trzech form kwadratowych, przyrównanych do zera, należą do tej samej inwolucyi, i odwrotnie.

Układ zupełny formy rzędu 3-go. Układ zupełny formy $f = a_x{}^3 = a_x'{}^3 \ldots$ tworzy się z form następujących:

1. f;

$$2.\quad \Delta = (aa')^2 a_x a'_x = 2\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & x_2{}^2 \\ a_1, & a_2, & -x_1x_2 \\ a_2, & a_3, & x_1{}^2 \end{vmatrix},$$

3. $R = (\Delta\Delta')^2 = (aa')^2 (a''a''')^2 (aa''')(a'a'')$
$= 2\,|4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (a_0a_3 - a_1a_2)^2|$;

4. $Q = (a\Delta)\,a_x^2\,\Delta_x = (aa')^2 (a'a'')\,a_x a''^2_x$
$= (a_0^2 a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)\,x_1^3$
$+ 3(a_0a_1a_3 - 2a_0a_2^2 + a_1^2a_2)\,x_1^2 x_2$
$- 3(a_0a_2a_3 - 2a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2)\,x_1 x_2^2$
$- (a_0a_3^2 - 3a_1a_2a_3 + 2a_2^3)\,x_2^3$.

Ilości Δ, R, Q są odpowiednio: hesyanem, wyróżnikiem i jakobianem; pomiędzy niemi zachodzie związek

$$2\,Q^2 + \Delta^3 + Rf^2 = 0.$$

Wyróżnik formy f jeżeli pominiemy czynnik stały, równa się wyróżnikowi formy Δ, t. j. R.

Jeżeli $R = 0$, wtedy f i Δ mają podwójny czynnik liniowy, wspólny obu tym formom; Q zaś jest zupełnym sześcianem tego czynnika liniowego.

Jeżeli Δ jest tożsamościowo zerem, wtedy Q jest sześcianem zupełnym formy liniowej.

Punkty, przedstawiające pierwiastki $f = 0$ i $Q = 0$, są trzema parami punktów w inwolucyi, której punktami podwójnemi są pierwiastki równania $\Delta = 0$.

Uklad zupełny formy kwadratowej i sześciennej. Układ zupełny form $f = a_x^2 = a'^2_x = \ldots\ldots$; $\varphi = b_x^3 = b'^3_x = \ldots$ tworzy się:

1. z pięciu niezmienników:

$$A_{ff} = (aa')^2,\quad A_{\Delta\Delta} = (\Delta\Delta')^2,\quad A_{f\Delta} = (a\Delta)^2,$$
$$F = (ap)^2,\quad M = -(\theta p)^2;$$

2. z czterech spółzmienników liniowych:

$p = (ab)^2 b_x$; $q = (ap)\,a_x$; $r = (p\Delta)\,\Delta_x$; $s = (\theta p)\,\theta_x$;

3. z trzech spółzmienników kwadratowych:

$$f;\quad \Delta = (bb')^2 b_x b'_x;\quad \theta = (a\Delta)\,a_x\,\Delta_x;$$

4. z trzech spółzmienników sześciennych:

$$\varphi;\quad Q = (b\Delta)\,b_x^2\,\Delta_x;\quad \vartheta = (ab)\,a_x\,b_x^2.$$

Wszystkich form jest 15. Znakowanie powyższe pochodzi od Gordana; znakowanie Clebscha jest nieco odmienne.

Pomiędzy pięcioma niezmiennikami zachodzi związek:

$$-2M^2 = A_{ff} L^2 - 2A_{f\Delta} F . L + A_{\Delta\Delta} F^2 ,$$

gdzie

$$L = \tfrac{1}{2} (A_{ff} A_{\Delta\Delta} - A^2_{f\Delta}) .$$

Niezmiennik L jest wyróżnikiem formy θ. Inne związki są:

$$q^2 = fF - \tfrac{1}{2} p^2 A_{ff} ; \quad r^2 = \Delta L - \tfrac{1}{2} p^2 A_{\Delta\Delta} ; \quad -s^2 = \theta M + \tfrac{1}{2} p^2 L.$$

Formę θ można, zamiast przez nasunięcie (f, Δ), wyrazić przez nasunięcie (φ, p) tak, że:

$$\theta = (f, \Delta) = (\varphi, p) .$$

Wypadkowa form f i φ, wyrażona przez niezmienniki zasadnicze, równa się $F - 2 A_{f\Delta} A_{ff}$.

Układ zupełny dwu form sześciennych.

Układ zupełny dla form $f = a_x{}^3 = a'_x{}^3 = \ldots ; \varphi = b_x{}^3 = b'_x{}^3 = \ldots$ składa się z następujących 26 form:

1) siedmiu niezmienników:

$$A_{\Delta\Delta} , \quad A_{\nabla\nabla} , \quad A_{\Delta\nabla} , \quad A_{\Delta\Theta} , \quad A_{\nabla\Theta} ,$$
$$J = (f, \varphi)^3 , \quad \Omega = (\Delta \nabla) (\nabla \theta) (\Delta \theta).$$

2) sześciu spółzmienników liniowych:

$$\pi = (f, \nabla)^2 , \quad p = (\varphi, \Delta)^2 ,$$
$$(\Delta, p), \quad (\Delta, \pi), \quad (\nabla, p), \quad (\nabla, \pi) ;$$

3) sześciu spółzmienników kwadratowych:

$$\Delta = (f, f)^2 , \quad \nabla = (\varphi, \varphi)^2 , \quad \theta = (f, \varphi)^2 ,$$
$$(\Delta \nabla) , \quad (Q, \varphi)^2 , \quad (K, f) ;$$

4) szesciu spółzmienników sześciennych:

$$f, \quad \varphi, \quad Q = (f, \Delta), \quad K = (\varphi, \nabla), \quad (f, \nabla), \quad (\varphi, \Delta);$$

5) spółzmiennika stopnia czwartego:

$$\vartheta = (f, \varphi).$$

Zachodzi tu związek zasadniczy bardzo prosty

$$(f, \pi) + (\varphi, p) = 0.$$

Wyróżnikiem formy θ jest:

$$A_{\Theta\Theta} = A_{\Delta\nabla} - \frac{J^2}{2};$$

nadto jest:

$$(f, \pi) = \nabla, \Delta); \quad 2\,\Omega = (p, \pi).$$

Pomiędzy 7 niezmiennikami zachodzą dwa związki:

$$2\,\Omega^2 = \begin{vmatrix} A_{\Delta\Delta}, & A_{\Theta\Theta}, & A_{\nabla\Delta} \\ A_{\Delta\Theta}, & A_{\Theta\Theta}, & A_{\nabla\Theta} \\ A_{\Delta\nabla}, & A_{\Theta\nabla}, & A_{\nabla\nabla} \end{vmatrix}$$

$$2\,J\Omega = (A_{\Delta\Delta}A_{\nabla\nabla} - A_{\nabla\Delta}A_{\Delta\nabla}) - 4\,(A_{\Delta\Theta}A_{\Theta\nabla} \quad A_{\Theta\Theta}A_{\Delta\nabla}).$$

Wypadkowa form f, φ równa się $2J\Omega - 2J^2$.

Dawniej mniemano, że układ zupełny dwu form sześciennych składa się z 28 form (patrz np. Clebsch: „Binäre Formen“), potem odkryto, że dwa spółzmienniki liniowe były zbyteczne, bo można je wyrazić wymiernie przez inne (patrz Sylvester C. R. 1877, D'Ovidio i Gerbaldi, Acc. Torino, 1880).

Można tworzyć i inne spółzmienniki liniowe; wyrażenia ich za pomocą niezmienników układu zupełnego są:

$$(Q, \nabla)^2 = (\pi, \Delta); \qquad (K, \Delta)^2 = (p, \nabla);$$

$$(\varphi, \Delta^2)^3 = (p\ \Delta); \qquad (f, \nabla^2)^3 = (\pi, \nabla);$$

$$-(f, \pi p)^2 = (\varphi, p^2)^2 = A_{\Theta\Delta}\,\pi + (A_{\Theta\Theta} + \tfrac{1}{2}J^2)\,p + J\,(\Delta, \pi);$$

$$-(\varphi, \pi p)^2 = (f, \pi^2)^2 = A_{\Theta\Delta}\,p + (A_{\Theta\Theta} + \tfrac{1}{2}J^2)\,\pi - J\,(\nabla, p);$$

$$(f, p^2)^2 = A_{\Delta\Delta}\pi + A_{\Theta\Delta}\,p + J\,(\Delta, p);$$

$$(\varphi, \pi^2)^2 = A_{\nabla\nabla}p + A_{\Theta\nabla}\,\pi + J\,(\nabla, \pi).$$

Jeżeli $\Omega = 0$, a nie są zerami minory wyznacznika 2-go rzędu, przez który wyraża się Ω^2 (patrz wyżej), wtedy istnieje kombinacya liniowa $f + \lambda\varphi$ form f i φ, będąca sześcianem zupełnym spółzmiennika liniowego p lub π; te dwie formy w tym przypadku (po za czynnikiem) zlewają się. Zachodzi również twierdzenie odwrotne.

Jeżeli są zerami wszystkie minory 2-go rzędu wyznacznika, za pomocą którego wyraża się Ω^2 (a więc jest zerem i Ω), wtedy φ jest typu $f + \lambda Q$, (jest spółzmiennikiem formy f) lub f i φ są sześcianami zupełnemi. W obu przypadkach p i π są tożsamościowo zerami.

Układem trzech form sześciennych zajmował się v. Gall (Math. Ann. XLV, 1894).

Układ zupełny formy dwójkowej dwukwadratowej. Układ ten dla formy $f = a_x{}^4 = b'_{x_4}$ tworzy się z utworów następujących:

1) Dwa niezmienniki:

$$i = (a a')^4 = 2\,(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2{}^2);$$

$$j = (f, H)^4 = (a a')^2 (a a'')^2 (a' a'')^2;$$

$$= 6 \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ a_2, & a_3, & a_4 \end{vmatrix}.$$

2) Dwa spółzmienniki dwukwadratowe f,

$$H = (a a')^2 a_x{}^2 a'_x{}^2 = 2\,[\,(a_0 a_2 - a_1{}^2)\,x_1{}^4 + 2\,(a_0 a_3 - a_1 a_2)\,x_1{}^3 x_2$$
$$+ (a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2{}^2)\,x_1{}^2 x_2{}^2 + 2\,(a_1 a_4 - a_2 a_3)\,x_1 x_2{}^3$$
$$+ (a_2 a_4 - a_3{}^2)\,x_2{}^4\,].$$

3) Spółzmiennik rzędu 6-go:

$$T = (f_1 H) = (a a')^2 (a'' a') a_x^2 a'_x a'_x{}^3$$

$$= (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x_1^6$$

$$+ (a_0^2 a_4 + 2a_0 a_1 a_3 - 9a_0 a_2^2 + 6a_1^2 a_2) x_1^5 x_2$$

$$+ 5 (a_0 a_1 a_4 - 3a_0 a_2 a_3 + 2a_1^2 a_3) x_1^4 x_2^2$$

$$+ 10 (a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2) x_1^3 x_2^3$$

$$+ 5 (- a_0 a_3 a_4 + 3a_1 a_2 a_4 - 2a_1 a_3^2) x_1^2 x_2^4$$

$$+ (9a_4 a_2^2 - a_2^4 a_0 - 2a_1 a_3 a_4 - 6a_3^2 a_2) x_1 x_2^5$$

$$+ (3a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2 - 2a_3^3) x_2^6.$$

Formy H i T Gordan oznacza przez Δ i t. Pomiędzy wypisanemi formami zachodzi związek:

$$T^2 = -\frac{1}{2}\left[H^3 - \frac{i}{2} H f^2 + \frac{j}{3} f^3\right].$$

Jeżeli przez m, m', m'' oznaczymy trzy pierwiastki równania szesciennego

$$\Omega = z^3 - \frac{1}{2} z - \frac{j}{3} = 0, \qquad \text{(równanie rozwiązujące)}$$

i położymy:

$$H + mf = -2\varphi^2; \quad H + m'f = -2\psi^2; \quad H + m''f = -2\chi^2,$$

będzie:

$$T = 2\varphi\psi\chi.$$

Trzy formy kwadratowe φ, ψ, χ mają ciekawą własność, mianowicie, że każda z nich jest jakobianem dwóch pozostałych

$$(\psi . \chi) - \frac{m' - m''}{2} \varphi; \quad (\chi . \varphi) - \frac{m'' - m}{2} \psi; \quad (\varphi, \psi) - \frac{m - m'}{2} \chi;$$

Wyróżnikiem formy f jest:

$$R_f = \frac{1}{27}(i^3 - 6j^2).$$

Rugownik form f i H, pomijając czynnik liczbowy, równa się kwadratowi wyróżnika formy f.

Jeżeli wyróżnik formy f jest zerem, to f ma czynnik podwójny, i ten sam czynnik jest zarazem czynnikiem dwukrotnym dla H, pięciokrotnym dla T.

Jeżeli f i H różnią się czynnikiem stałym, wtedy i tylko wtedy f jest kwadratem zupełnym formy rzędu 2-go.

Jeżeli H jest dokładną czwartą potęgą, nie znikającą tożsamościowo, wtedy $i = 0$, $j = 0$, f zaś ma czynnik potrójny. Odwrotnie, jeżeli f ma czynnik potrójny, H będzie czwartą potęgą dokładną, i i j zaś będą zerami. W tym przypadku T będzie potęgą szóstą dokładną tego samego czynnika, który w f występuje trzykrotnie.

Jeżeli H jest tożsamościowo zerem, to f jest dokładnie potęgą czwartą wyrażenia liniowego i odwrotnie; w tym przypadku T, i, j są oczywiście zerami.

Układ zupełny formy kwadratowej i dwukwadratowej. Niechaj będzie

$$f = a_x^2 = a'^2_x = \ldots; \quad \varphi = b_x^4 = b'^4_x = \ldots;$$

układ zupełny składa się z 18 form następujących:

1) Sześciu niezmienników:

$$i, j \quad \text{(jak wyżej)},$$

$$D = (a a')^2, \qquad A = (ab)^2 (a'b)^2 = (\psi a)^2,$$

$$B = (aH)^2 (a'H)^2 = (\chi a)^2, \quad C = (\psi\chi)\psi_a)(\chi a) = (\tau a)^2.$$

2) Sześciu spółzmienników kwadratowych:

$$f, \quad \psi = (ab)^2 b_x^2, \quad \chi = (aH)^2 H_x^2,$$

$$\tau = (\psi\chi)\psi_x\chi_x, \quad \Psi = (\psi a)\psi_x a_x, \quad X = (\chi a)\chi_x a_x.$$

3) Pięciu spółzmienników dwukwadratowych:

$$\varphi, \qquad H = (b\,b')^2 b_x^2 b'^2_x,$$

$$L = (b\,a) b_x^3 a_x, \qquad M = (H\,a) H_x^3 a_x, \qquad K = (\varphi H) \varphi_x H_x^3.$$

4) Spółzmiennika stopnia 6-go:

$$T = (\varphi, H).$$

Wszystkich form jest 18.

Pomiędzy temi formami zachodzi związek:

$$C^2 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} D, & A, & B, \\ A, & B + \frac{i\,D}{3}, & \frac{i\,A}{6} + \frac{j\,D}{3} \\ B, & \frac{i\,A}{6} + \frac{j\,D}{3}, & \frac{j\,A}{3} - \frac{i\,B}{6} + \frac{i\,D}{18} \end{vmatrix}$$

Rugownik form f i φ ma postać

$$A^2 - 4\,D\,B + \tfrac{2}{3}\, i\, D^2.$$

Jeżeli C jest zerem, wtedy i tylko wtedy istnieje forma kwadratowa g taka, że φ można wyrazić jako funkcyę kwadratową form f i g. Tym układem zupełnym zajmował się Harbordt (Math. Ann. I, 1869).

Inne układy zupełne

Układ dla formy sześciennnej i dwukwadratowej obliczał Gundelfinger (Tybinga 1885); potem Sylvester C. R 1878 sprowadził układ do trzech formacyj. Układ ten składa się z 61 form, mianowicie: 20 niezmienników, 15 spółzmienników liniowych, 10 niezmienników kwadratowych, 8 niezmienników sześciennych, 5 niezmienników dwukwadratowych, 2 niezmienników rzędu 5-go, jednego niezmiennika rzędu 6-go.

Wypadkową dla formy sześciennej i kwadratowej obliczył Brioschi (Collect. math. in memoriam Chelini, Medyolan 1881).

Dwie formy dwukwadratowe. Układ, obliczony przez Gordana (Math. Ann. II, patrz przekład niemiecki dzieła Faà di Bruno), składa się z 28 form, a mianowicie: ośmiu niezmienników, osmiu spółzmienników kwadratowych, siedmiu spółzmienników rzędu 4-go, pięciu spółzmienników rzędu 6-go.

Gordan początkowo wprowadził dwa utwory zbyteczne, jak to później zauważył Sylvester (C, R. 1887). Pomiędzy ośmiu niezmiennikami zachodzi związek, którego obliczenie rozpoczął Bertini (Math Ann. XI, 1877) a ukończył d'Ovidio (Acc. Torino XV, 1880). I inni autorowie zajmowali się tem pytaniem (patrz wiadomości, zawarte w nocie d'Ovidio „Sopra alcune classi di sizigie binarie", Acc. Torino 1893) i notę Brioschi'ego (Acc. Torino, 1896). Wypadkową dwu form kwadratowych obliczył d'Ovidio (Acc. Torino, 1880).

Forma rzędu piątego posiada najwyżej 23 formy niezmiennicze, a mianowicie:

4	niezmienniki			stopni	4, 8, 12, 18
4	spółzmienniki	1-go	rzędu	„	5, 7, 11, 13
3	„	2	„	„	2, 6, 8
3	„	3	„	„	3, 5, 9
2	„	4	„	„	4, 6
3	„	5	„	„	1, 3, 7
2	„	6	„	„	2, 4
1	spółzmiennik	7	„	stopnia	5
1	„	9	„	„	3.

Niezmienniki są tedy stopni 4, 8, 12, 18 co do spółczynników formy rzędu 5-go; przez dwie pierwsze z pomiędzy nich wyraża się wyróżnik, obliczony przez Salmona (Camb. math Journ. V, 1850).

Układ zupełny dla formy rzędu 5-go znajduje się u Clebscha Patrz: Gordan „Invariantentheorie"; Faà di Bruno (przeklad) „Binäre Formen" str. 328—355; Cayley; d'Ovidio (Acc. Torino, 1880). Co do wypadkowej formy 5-go rzędu i kwadratowej patrz d'Ovidio (Mem. Soc. ital. delle scienze, t. IV, 1881), a co do wypadkowej formy 5-go rzędu i dwukwadratowej lub dwu form 5-go rzędu d'Ovidio (Mem. Lincei IV, 1888).

Układy zupełne dla form rzędu 5-go i wraz z inną formą nie są jeszcze zupełnie znane, jeżeli wyłączymy tylko pracę Wintera (Progr. Darmstadt, 1880), gdzie badany jest przypadek formy kwadratowej i formy rzędu 5-go.

Układ zupełny formy dwójkowej szóstego rzędu składa się:

z 5	niezmienników			stopni	2, 4, 6, 10, 15
„ 6	spółzmienników	2-go	rzędu	„	3, 5, 7, 8, 10, 12
„ 5	„	4	„	„	2, 4, 5, 7, 9
„ 5	„	6	„	„	1, 3, 4, 6
„ 3	„	8	„	„	2, 3, 5
„ 1	„	10	„	„	4
„ 1	„	12	„	„	3

Ten układ zupełny znajduje się u Clebscha (Binäre Formen), u Gordana (l. c.) i innych. Wyróżnik tej formy obliczył pierwszy Brioschi (Crelle LIII, Ann. di Math. I). Związki pomiędzy formami układu zupełnego znaleźli: Clebsch, Gordan, Stephanos (Comptes rendus XCVI). Maisano (Lincei XIX, Math. Ann. XXXI), d'Ovidio (Acc. Torino 1889, 1892, 1863). Wypadkową formy 6-go rzędu i formy sześciennej obliczył d'Ovidio (Acc. Torino 1892); układem formy 6-go i 4-go rzędu zajmował się v. Gall (Progr. Lemgo, 1873).

Układ zupełny formy dwójkowej rzędu 7-go składa się z utworów, przedstawionych w poniższej tablicy, gdzie widać odrazu numer kolejny, rząd i stopień każdego z nich.

Rząd w zmiennych.

Stopień w spółczynnikach.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1								1								
2			1				1				1					
3				1		1		1		1		1				1
4	1				2		1		2		1				1	
5		1		2		2		2		2				1		
6			3		2		2		2				1			
7		3		2		4		2				1				
8	3		3		3		3				1					
9		3		5		2				1						
10			4		4				1							
11		5		3				1								
12	6		6				1									
13		7		1		1										
14	4				2											
15		3		1												
16	2		3													
17		2														
18	9		1													
19		2														
20	2															
22	3															
23		1														
25		1														
26	2															
30	1															

Układ zupełny dla formy 7-go rzędu badali: Krey (Diss. Getynga, 1874), Gordan (Ueber das Formensystem binärer Formen, Lipsk. 1875); Sylvester (Am. Journ. of. Math., II, 1879) podał tablicę form układu zupełnego, lecz wymagała ona poprawek; v. Gall (Math. Ann. XXXI, str. 318) traktował zagadnienie ogólniej i podał tablicę, wyżej umieszczoną.

Układ zupełny dla formy rzędu 8-go jest następujący:

Rząd w zmiennych.

Stopień względem spółczynników.	0	2	4	6	8	10	12	14	18
1					1				
2	1		1		1		1		
3	1		1	1	1	1	1	1	1
4	1		2	1	1	2	1	1	1
5	1	1	2	2	1	3		1	
6	1	1	2	3	1	1			
7	1	2	2	3					
8	1	2	2	2					
9	1	3	1						
10	1	2							
11		2							
12		1							

Razem form 69.

Układ ten znalazł Sylvester (Am. Journ. II); później badał go v. Gall (Math. Ann. XVII, str. 31, 149, 456), który początkowo mniemał, iż znalazł trzy utwory zbyteczne w tablicy Sylvestera oraz brak jednego utworu ($C_{10}{}^4$, t. j. spółzmiennika 4-go rzędu i 10 stopnia); potem na str. 456 t. XVII poprawił się co do utworów zbytecznych;

wreszcie co do C_{10}^4, to Sylvester (C. R. 1881) uznał jej zbyteczność.

Co do innych układów zupełnych patrz pracę Sylvestera (Am. Journ. II), które dla 9-go rzędu znalazł utworów 415, dla rzędu 10-go zaś 475.

Wyróżnik formy rzędu 7-go badał Gordan (Math. Ann. XXXI). Co do związków pomiędzy dziewięcioma niezmiennikami formy rzędu 8-go patrz Alagna, Rend. Palermo VI.

Ważną pracą o utworzeniu układów zupełnych jest praca Gordana: „Ueber des Formensystem etc.“, Lipsk, 1875.

---

§ 6.

Przedstawienia typowe form dwójkowych. Formy stowarzyszone.

Przedstawieniem typowem jednej lub wielu form nazywamy takie przedstawienie, którego zmienne są spółzmiennikami wymiernemi, spółczynniki zaś niezmiennikami wymiernemi form danych.

Dla formy a_x^n rzędu nieparzystego dochodzimy do przedstawienia typowego w sposób następujący:

Wiemy, że dla takiej formy, gdy $n > 3$, istnieją zawsze dwa spółzmienniki liniowe, których wyznacznik jest różny od zera; niechaj temi formami będą α_x. β_x. Podnosząc do potęgi n-tej obie strony tożsamości symbolicznej

$$a_x\,(\alpha\beta) = \alpha_x\,(a\beta) - \beta_x\,(a\alpha).$$

otrzymamy po stronie pierwszej $f.(\alpha\beta)^n$, po drugiej zaś formę rzędu n-tego ze spółzmiennikami α_x i β_x, której spółczynniki są niezmiennikami. Pozostaje tedy tylko wyrazić te spółczynniki przez niezmienniki zasadnicze.

Toż samo można uczynić dla układu form zasadniczych, ile razy istnieją dwa spółzmienniki liniowe.

Do przedstawienia typowego formy a_x^n rzędu parzystego dochodzimy sposobem następującym:

Wiemy, że dla n parzystego i >4 istnieją zawsze dwa spółzmienniki kwadratowe, których wypadkowa jest różna od zera. Za ich pomocą można zawsze utworzyć trzeci, liniowo od pierwszych niezależny, t. j. ich jakobian.

W każdym przypadku możemy tedy pomyśleć trzy spółzmienniki: α^2_x, β^2_x, γ^2_x. Za ich pomocą można otrzymać przedstawienie typowe, podnosząc do potęgi $\frac{n}{2}$ obie strony związku tożsamościowygo

$$a_x^2\, R_{\alpha\beta\gamma} = \alpha\,(a, A)^2 + \beta\,(a, B)^2 + \gamma\,(a, C)^2,$$

gdzie A, B, C są odpowiednio jakobianami dla β, γ; γ, α; α, β. Jeżeli w szczególności $\gamma = C$ wtedy:

$$R_{\alpha\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}\left\{(\alpha, \alpha)^2\,(\beta, \beta)^2 - \left[(\alpha, \beta)^2\right]^2\right\},$$

a podnosząc do potęgi $\frac{n}{2}$, otrzymujemy:

$$f\cdot\left[R_{\alpha\beta\gamma}\right]^{\frac{n}{2}} = \left[\alpha\,(a, A)^2 + \beta\,(a, B)^2 + \gamma\,(a, C)^2\right]^{\frac{n}{2}}.$$

Rozwijając, otrzymamy przedstawienie funkcyi f za pomocą zmiennych α, β, γ ze spółczynnikami, które są niezmiennikami.

Formy (niezmienniki, spółzmienniki), za pomocą których otrzymujemy przedstawienie typowe, nazywają się *formami stowarzyszonemi* (Schwesterformen).

Liczbą form stowarzyszonych jest $k+3$, jeżeli k liczba spółczynników form danych i jeżeli za nowe zmienne wybieramy spółzmienniki liniowe; jeżeli zaś wybieramy spółzmienniki kwadratowe, to liczba form stowarzyszonych wynosi $k+10$.

Każdy niezmiennik lub spółzmiennik układu danego może być wyrażony wymiernie (lecz nie w funkcyach całkowitych) za pomocą form stowarzyszonych przedstawienia typowego.

§ 7.

Przedstawienie kanoniczne form.

P r z e d s t a w i e n i e m k a n o n i c z n e m form nazywa się takie przedstawienie, w którem liczba spółczynników jest możliwie najmniejsza; daje się to uskutecznić za pomocą odpowiedniego podstawienia liniowego (liczba spółczynników podstawienia liniowego jest 4, a więc liczba, do którego zredukować można liczbę spółczynników, wynosi n a j w y ż e j 4).

Jeżeli w szczególności nowe wprowadzone zmienne i nowe spółczynniki są spółzmiennikami i niezmiennikami formy, mamy wtedy p r z e d s t a w i e n i e k a n o n i c z n e t y p o w e.

1. Forma sześcienna.

K a ż d ą f o r m ę s z e ś c i e n n ą m o ż n a p r z e k s z t a ł c i ć w t e n s p o s ó b:

$$f = \frac{1}{\sqrt{-\frac{R}{2}}} (\xi_1{}^3 - \xi_2{}^3);$$

tu ξ_1, ξ_2, wyrażone przez x_1, x_0, są dwoma czynnikami liniowemi spółzmiennika kwadratowego Δ: $\Delta = -2\xi_1\xi_2$.

2 Forma dwukwadratowa

K a ż d a f o r m a d w u k w a d r a t o w a d a j e s i ę s p r o w a d z i ć d o p o s t a c i

$$f = \xi_1{}^4 + 6m\xi_1{}^2\xi_2{}^2 + \xi_2{}^4,$$

gdzie m jest pierwiastkiem równania

$$\frac{i^3}{j^2} = \frac{2}{9} \frac{(1+3m^2)^3}{m^2(1-m^2)^2}$$

stopnia 3-go względem m^2; ξ_1, ξ_2 są czynnikami liniowemi jednej z trzech form kwadratowych φ, ψ, χ, na które rozkłada się niezmiennik rzędu 6-go (patrz wyżej str 268).

Moduł (rs) podstawienia

$$\xi_1 = r_1 x_1 + r_2 x_2; \qquad \xi_2 = s_1 x_1 + s_2 x_2,$$

oblicza się z wzoru

$$(rs)^2 = \frac{1+3m^2}{3m(1-m^2)} \frac{j}{i},$$

gdzie j, i należy obliczyć dla formy kwadratowej ogólnej (niezredukowanej do postaci kanonicznej).

Aby forma dwukwadratowa dała się przekształcić na formę $\xi_1^4+\xi_2^4$, jest koniecznem, by $j=0$.

3. Forma rzędu 5-go.

Każda forma rzędu 5-go daje się przedstawić w postaci:

$$k_1(\xi_1 - m_1\xi_1)^5 + k_2(\xi_1 - m_2\xi_2)^5 + k_3(\xi_1 - m_3\xi_2)^5:$$

t. j. jako suma trzech potęg piątych (Sylvester).

Ilości ξ_1, ξ_2 są dwoma spółzmiennikami liniowemi formy rzędu 5-go, a mianowicie spółzmiennikami, które oznaczamy przez α, δ;

$\alpha = \xi_1$ jest spółzmiennikiem liniowym stopnia 5-go

$\delta = \xi_2$ „ „ „ „ 13 „ :

m_1, m_2, m_3 są pierwiastkami spółzmiennika sześciennego stopnia 3-go (który oznaczamy zwykle przez j), ilości k są określone za pomocą trzech związków:

$$(k_1 + k_2 + k_3) R^5 = I_{26} = (f, \xi_1{}^5)^5$$

$$5(k_1 m_1 + k_2 m_2 + k_3 m_3) R^5 = I_{34} = (f, \xi_1{}^4 \xi_2{}^5)$$

$$10(k_1 m_1^2 + k_2 m_2^2 + k_3 m_3^2) R^5 = I_{12} = (f, \xi_1{}^3 \xi_2)^5;$$

strony drugie są tu wyrażone jako nasunięcia formy f na kombinacye liniowe $\xi_1 \xi_2$, zaś R jest niezmiennikiem, który otrzymujemy, tworząc nasunięcie drugie spółzmiennika kwadratowego stopnia 8-go ϑ na formę ξ_1:

$$R = (\vartheta, \xi_1)^2 - (\xi, j, \xi_1)^2.$$

Szczegóły znaleść można u Gordana (Invariantheorie).

Jeżeli j ma jeden pierwiastek podwójny, ktory będzie wówczas pierwiastkiem równania $\delta = 0$, wtedy poprzedzająca forma kanoniczna nie jest możliwa. Będzie wtedy $R^2 j = \delta^2 \varrho$. a kładąc dla symetryi $\delta = \eta_1$, $\varrho = \eta_2$ otrzymamy formę kanoniczną (Bringa 1786):

$$6\,R^4 f = B\eta_1^5 + 5\,B\eta_1^4\eta_2 - 4\,A_2\,\eta_2^5,$$

gdzie A, B są niezmiennikami formy rzędu 5-go stopni 4. 8. Podstawiając tu

$$5\,B = -4\,A^2 I, \qquad \eta_2 = \eta_1\,X\sqrt[4]{I},$$

otrzymujemy formę Hermite'a

$$X^5 - X - \frac{1}{5}\,I^{-\frac{1}{4}}.$$

4. Forma rzędu 6 go.

Forma ta może być sprowadzona do postaci kanonicznej

$$u^6 + v^6 + w^6 + \lambda\,u\,v\,w\,(u - v)\,(v - w)\,(w - u),$$

gdzie u, v, w są trzema formami liniowemi, λ zas pierwiastkiem równania

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3 - \lambda \\ a_1, & a_2, & a_3 + \frac{1}{3}\lambda, & a_4 \\ a_2, & a_3 - \frac{1}{3}\lambda, & a_4, & a_5 \\ a_3 + \lambda, & a_4, & a_5, & a_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli niezmiennik stopnia 4-go

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \\ . & . & . & . \\ a_3, & a_4, & a_5, & a_6 \end{vmatrix}$$

jest zerem, wtedy forma rzędu 6-go sprowadza się do postaci

$$u^6 + v^6 + w^6$$

O redukcyi formy 6-go rzędu do sumy czterech potęg szóstych patrz Salmon, Lessons, art. 246).

Inne formy kanoniczne w przypadku ogólnym podali: Brill (Math. Ann. XX, str. 330), Brioschi i Maschke (Math. Ann. XXX, str. 496, Acc. Lincei 1888, Acta math. XII). Forma ostatniego jest postaci

$$x^6 + \alpha x^5 + \beta x_3 + \frac{\alpha^2}{4} x^2 + \gamma x + \delta,$$

gdzie α, β, γ, δ są czterema niezmiennikami formy; to przedstawienie jest typowem i kanonicznem.

Inne jeszcze przedstawienie kanoniczne podał Brioschi (Ann. di mat. XI, 1883).

Co się tyczy historyi teoryi niezmienników, powiemy, że jeżeli pominiemy pewne rozwiązania Gaussa i Lagrange'a) -wzięła ona początek swego rozwoju od Aronholda, Cayley'a i Sylvestera. Potem Clebsch i Goordan wprowadzili rachunek tak zwany symboliczny i doprowadzili go do możliwego rozwinięcia; jakkolwiek pierwszy pomysł rachunku symbolicznego, pod inną— co prawda— formą, pochodzi od matematyków angielskich.

Szczegółowa historya teoryi niezmienników mieści się w pracy Fr. Meyera („Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie", Jahresbericht der Deut. Mathem.-Vereinig. II. 1892), przekład S. Dicksteina w „Pracach matematyczno-fizycznych" t. VII, VII, IX i X).

Najważniejszemi dziełami, traktującemi o teoryi niezmienników są: Salmon „Lessons to the modern higher Algebre", Dublin 1859—1885 (przekład niemiecki Fiedlera, Lipsk 1863—1877, polski Sągajły, w t. II Algebry, Paryż, 1875): Brioschi, Annali di Tortolini, I, 1861: Fiedler, Lipsk 1862; Clebsch, Binäre Formen, Lipsk 1872; Faà di Bruno, Formes binaires, Turyn 1876, przekład niemiecki Waltera i Noethera, Lipsk 1881; Gordan, „Invariantentheorie", Lipsk 1887; Ellis, „Algebra of Quantics, Oxford 1895.

ROZDZIAŁ XIII.

FUNKCYE ZMIENNYCH ZESPOLONYCH.

---

§ 1.

Wiadomości ogólne.

Do prostoty i dogodności przyjmiemy, że zmienną zespoloną $x+y$ przedstawia według znanego sposobu punkt na płaszczyźnie.

Zmienna zespolona $X+iY$ nazywa się funkcyą monogeniczną (lub wprost funkcyą) zmiennej zespolonej $x+iy$, jeżeli X i Y są (w pewnej części płaszczyzny, której punkty mają za spółrzędne x i y) funkcyami rzeczywistemi ciągłemi dwu zmiennych rzeczywistych x i y, czyniącemi zadość dwóm związkom:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x} \qquad \text{(określenie Cauchy'ego)};$$

albo inaczej: jeżeli $w = X + iY$ zależy w pewnej części płaszczyzny od $z = x + iy$ w ten sposób, iż stosunek odpowiednich przyrostów, t. j. $\frac{\Delta w}{\Delta z}$, ma granicę określoną i jedyną, bez względu na sposób, w jaki Δz dąży do zera, t. j. bez względu na to, w jaki sposób punkt, przedstawiony przez zmienną zespoloną $(x+\Delta x)+i(y+\Delta y)$, zbliża się do punktu, przedstawionego przez $x+iy$ (okreslenie Riemanna).

W § 3 podamy definicyę funkcyj analitycznych według Weierstrassa.

Jeżeli X, Y są funkcyami rzeczywistemi jednowartościowemi zmiennych x, y, wtedy funkcya nazywa się jednowartościową, jednoznaczną, lub jednopostaciową (monodromiczną lub monotropową); jeżeli zaś są to funkcye, mające więcej wartości, to funkcya w nazywa się wieloznaczną, wielowartościową, lub wielopodstaciową, (polidromiczną lub politropową).

W przypadku pierwszym, jeżeli dla wszystkich wartości lub wszystkich punktów wewnątrz uważanej części płaszczyzny funkcya w jest skończoną, mamy funkcyę holomorficzną, albo inaczej funkcyą o charakterze funkcyi całkowitej, albo wreszcie regularną (Weierstrass).

Jeżeli funkcya w staje się nieskończoną w jakimś punkcie $z=P$, lecz w ten sposób, że istnieje zawsze otoczenie tego punktu, wewnątrz którego funkcya $\frac{1}{w}$ jest holomorficzną, wtedy funkcya w nazywa się meromorficzną, a punkty, w których staje się nieskończoną, nazywają się biegunami.

Przypadkiem szczególnym funkcyi holomorficznej jest funkcya wymierna, całkowita; przypadkiem szczególnym funkcyi meromorficznej jest funkcya wymierna; przypadkiem szczegól ym funkcyi monogenicznej jest funkcya algebraiczna, którą można określić ogólniej w sposób następujący. Załóżmy, że pomiędzy ilościami w i z zachodzi związek całkowity wymierny $\varphi(w, z)=0$; wtedy w będzie w ogóle funkcyą wieloznaczną zmiennej z; funkcya wymierna $F(w, z)$ dwu zmiennych w i z nazywa się funkcyą algebraiczną ogólną zmiennej z. Funkcyom algebraicznym poświęcamy rozdział XV.

Funkcya monogeniczna niealgebraiczna jest funkcyą przestępną.

Powiadamy, że $z = a$ jest pierwiastkiem lub zerem rzędu k funkcyi jednoznacznej $f(z)$, gdy $f(a)=0$, oraz gdy $\frac{f(z)}{(z-a)^k}$ nie staje się ani zerem ani nieskończonością dla $z = a$.

Powiadamy, że $z = \infty$ jest pierwiastkiem lub zerem rzędu k funkcyi jednoznacznej $f(z)$, gdy $f(\infty) = 0$ nadto $z^k f(z)$ nie staje się ani zerem, ani nieskończonością dla $z = \infty$.

Nazwiemy punkt $z=a$ biegunem rzędu k funkcyi $f(z)$ gdy funkcya $\frac{1}{f(z)}$ ma w punkcie $z = a$ punkt zerowy rzędu k-tego. Jeżeli w jest funkcyą jednoznaczną zmiennej z, wtedy tak część jej rzeczywista X jak i spółczynnik części urojonej, t. j. Y, czynią zadość równaniu różniczkowemu (Laplace'a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Każda funkcya dwu zmiennych rzeczywistych x, y, czyniąca zadość równaniu Laplacea, nazywa się funkcyą potencyalną lub funkcyą harmoniczną.

Odwrotnie: jeżeli X, Y są funkcyami ciągłemi ilości x, y i czynią zadość powyższemu równaniu różniczkowemu, to mogą one stanowić część rzeczywistą i spółczynnik części urojonej funkcyi jednoznacznej.

Jeżeli część rzeczywista zmiennej w jest dana, to można wyznaczyć część czysto urojoną (z dołączeniem stałej dowolnej).

Jeżeli znanym sposobem przedstawimy za pomocą punktów na płaszczyźnie (w) wartości zmiennej zespolonej w, to ustanowimy odpowiedniość pomiędzy punktami płaszczyzny w a punktami płaszczyzny z. Mówimy wtedy, że płaszczyzna z jest odwzorowana na płaszczyźnie w.

Rozpatrzmy część płaszczyzny z, na której funkcya w jest funkcyą jednoznaczną: punktowi z odpowiada punkt w; linii ciągłej w obszarze zmiennej z odpowie linia ciągła w obszarze zmiennej w. Odwzorowanie posiada wtedy następującą ważną własność.

Kąt między dwiema liniami, spotykającemi się na płaszczyźnie z, równa się kątowi pomiędzy odpowiedniemi liniami na płaszczyźnie w.

Takie odwzorowanie nazywa się podobnem (conforme, patrz „Geometrya różniczkowa") i odpowiada przekształceniu, zwanemu ortomorficznem (Cayley).

Trójkąt nieskończenie mały na płaszczyźnie z jest (pomijając nieskończenie małe rzędów wyższych) podobny do odpowiedniego trójkątu nieskończonostkowego na płaszczyźnie w.

W punktach, w których jest $\frac{dw}{dz} = 0$, odwzorowanie podobne ustaje.

Linie płaszczyzny z, dla których X=stałej, nazywają się liniami poziomemi, te dla których Y=stałej liniami prądu (przepływu), obie - liniami równego potencyału (ekwipotencyalnemi).

Linie poziome są prostopadłe do linij przepływu.

Zamiast na płaszczyźnie, można zmienną zespoloną przedstawić na kuli, rzucając stereograficznie punkty płaszczyzny na kulę. Otrzymujemy wtedy tę dogodność, że punkt w nieskończoności staje się jedynym punktem na kuli.

§ 2.

Szeregi potęgowe zmiennych zespolonych.

O działaniach na zmiennych zespolonych, mianowicie o dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu, dzieleniu, podnoszeniu do potęgi rzeczywistej mówiliśmy już w rozdziale I-ym; funkcye algebraiczne tej zmiennej określiliśmy w § 1 rozdziału niniejszego. Pozostaje jeszcze rozpatrzenie podnoszenia do potęgi zespolonej, logarytmu, funkcyj trygonometrycznych zmiennych zespolonych i t. p., co pozwoli nam na wprowadzenie funkcyj przestępnych tych zmiennych. W tym celu zajmiemy się najprzód szeregami, a mianowicie szeregami potęgowemi.

Określenie szeregów o wyrazach zespolonych podaliśmy wyżej w rozdziale IV ym.

Określenia i twierdzenia zasadnicze o szeregach funkcyj zmiennych zespolonych są analogiczne do określeń i twierdzeń o szeregach funkcyj zmiennych rzeczywistych. W tenże sam sposób określamy zbieżność i zbieżność bezwzględną; należy tylko wszędzie w określeniach dawniejszych przez w a r t o ś ć b e z w z g l ę d n ą rozumieć to, co nazywa się m o d u ł e m lub wartością bezwzględną liczby urojonej (patrz Rozdz. 1, § 2).

Obszarem zbieżności takiego szeregu jest nie już odcinek prostej, lecz p o l e p ł a s k i e.

R ó w n o z b i e ż n o ś ć danego szeregu funkcyj zmiennej zespolonej określamy w ten sposób: zachodzi ona wtedy, gdy dawszy sobie $\sigma > 0$, można znaleść takie n, że dla każdego $m \geqq n$, reszta $R_n(z)$ szeregu ma moduł mniejszy od σ, dla wszelkiej wartości z w obszarze zbieżności:

Rozpatrzmy szereg potęg całkowitych dodatnich zmiennej zespolonej z, t. j.

$$a_0 + a_1 z + a_1 z^2 + \ldots\ldots$$

Jeżeli dla $z=z_0$ moduły różnych wyrazów szeregu potęgowego pozostają mniejsze od liczby A, wtedy dla każdej wartości z, której moduł jest mniejszy od z_0, szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie, a więc niezależnie od porządku wyrazów.

Jeżeli dla $z=z_0$ szereg jest zbieżny nie bezwzględnie, wtedy dla każdej wartości z o module mniejszym niż moduł z_0, szereg będzie zbieżny bezwzględnie, a dla każdej wartości z o module większym od modułu z_0 będzie rozbieżny.

Obszar zbieżności szeregu potęgowego tworzy koło, którego środek znajduje się w początku spółrzędnych. Na punktach okręgu tego koła szereg może być zbieżnym bezwzględnie, zwyczajnie, albo też być rozbieżnym. Mogą być szeregi zbieżne jedynie zwyczajnie dla wszystkich punktów okręgu (Pringsheim, Math. Ann. XXV).

Jeżeli spółczynniki $a_0, a_1, a_2, \ldots$ szeregu potęgowego są takie, że począwszy od pewnego wskaźnika n, stosunek $\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}$ daje się rozwinąć na szeregi typu:

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{\mu_1 + \nu_1 i}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots,$$

to koło zbieżności szeregu potęgowego ma promień równy 1. W punktach okręgu szereg jest rozbieżny, jeżeli $\mu_1 > 0$; jest zwyczajnie zbieżny (wyjąwszy dla $z=1$), jeżeli $0 \geq \mu_1 > -1$ jest bezwzględnie zbieżny, jeżeli $\mu_1 < -1$; (Twierdzenie Weierstrassa, Crelle, LI).

Suma szeregu potęgowego jest funkcyą ciągłą zmiennej z dla każdego punktu wewnątrz koła zbieżności.

Granica dla $x=0$ sumy wyrazów, począwszy od wyrazu n-tego ($n>1$) szeregu potęgowego zbieżnego, jest zerem.

W kole, znajdującem się całkowicie wewnątrz koła zbieżności, szereg potęgowy jest równozbieżny.

Jeżeli dwa szeregi potęgowe mają tożsamo koło zbieżności i jeżeli dla każdej liczby dodatniej σ znaleść można taką wartość z o module mniejszym od σ, że wartości obu szeregów będą równe dla tej wartości z, to wtedy spółczynniki odpowiednie obu szeregów są równe. Twierdzenie to utrzymuje się i wtedy, kiedy oba szeregi mają skończoną liczbę wyrazów z potęgami ujemnemi całkowitemi

Pochodna szeregu potęgowego jest sumą pochodnych jego wyrazów i ma to samo koło zbieżności co i szereg dany.

Szereg potęg ujemnych, jeżeli jest zbieżny dla wartości z_0 zmiennej z, to jest bezwarunkowo zbieżny dla każdej wartości z, której moduł jest większy od mod z_0. Obszar zbieżności takiego szeregu przedstawia cała płaszczyzna, po wyłączeniu z niej pola koła, którego środek znajduje się w początku spółrzędnych.

Jeżeli szereg potęg dodatnich i ujemnych t. j. $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ jest zbieżny dla $z=z_0$, to z dwu szeregów $\sum_0^\infty a_n z^n$, $\sum_1^\infty a_{-n} z^{-n}$, pierwszy będzie zbieżny bezwzględnie dla każdej wartości z, której moduł jest większy od mod z_0. Obszar zbieżności uważanego szeregu stanowi wogóle pierścień kołowy, zawarty pomiędzy dwoma kołami, mającemi środek w początku spółrzędnych. W szczególności obszarem tym być może cała płaszczyzna lub tylko punkty okręgu.

Jeżeli dwa szeregi potęgowe (o potęgach dodatnich i ujemnych) mają ten sam obszar zbieżności, w którym istnieje przynajmniej jeden punkt taki, że gdy opiszemy około tego punktu, jako środka, koło o dowolnie małym promieniu, będziemy mieli zawsze wewnątrz tego koła taki punkt z', że wartości obu szeregów dla $z=z'$ będą równe, wtedy spółczynniki odpowiednie obu szeregów muszą być równe.

Jeżeli mamy nieskończoną liczbę szeregów potęgowych bezwzględnie zbieżnych w obszarze, zawartym pomiędzy dwoma okręgami; mianowicie:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{m,n} z^n,$$

i szereg

$$\sum_{3}^{m} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \ldots\ldots$$

jest równozbieżny w tymże obszarze, wtedy szeregi nieskończone

$$a_{0n} + a_{1n} + a_{2n} + \ldots\ldots$$

są zbieżne dla każdej wartości n, a oznaczywszy ich wartości przez a_n, będziemy mieli:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z_n = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z),$$

(Twierdzenie Weierstrassa, Berl. Akad. 1880; Stolz, Math. Ann. XXIV).

Jeżeli szereg potęg całkowitych dodatnich $\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny dla wszystkich punktów z' koła ze środkiem w początku spółrzędnych, to sumę tego szeregu można wyrazić za pomocą szeregu potęg, odniesionego do punktu z' t. j.

$$f(z) = f(z') + \sum_{1}^{\infty} \frac{f^n(z')}{n!} (z - z')^n,$$

a obszarem zbieżności tego szeregu będzie koło, opisane około punktu z'.

Jeżeli z' jest punktem okręgu pierwszego koła o promieniu R i jeżeli on porusza się na tym okręgu, to promień zbieżności R' drugiego koła będzie się zmieniał i będzie miał swoją granicę wyższą.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby R było prawdziwym promieniem zbieżności szeregu pierwszego, jest, by ten szereg nie był już zbieżnym dla punktu zewnątrz koła o promieniu R i aby granica niższa dla R' była zerem.

Jeżeli granicą niższą dla R' jest r, wtedy prawdziwym promieniem zbieżności pierwszego szeregu jest $R+r$.

Jeżeli weźmiemy z' na obwodzie pierwszego koła lub blizko obwodu, to drugi okrąg będzie mógł obejmować punkty, nie zawarte w pierwszym.

---

§ 3.

Jeszcze o definicyi funkcyj zmiennych zespolonych. Funkcye analityczne Weierstrassa.

Funkcye zmiennych zespolonych określiliśmy wyżej sposobem szczególnym i otrzymalismy t.z. funkcye monogeniczne Własność zasadnicza tych funkcyj polega na tem, że w każdym punkcie mają one pochodną jedyną, t. j że granica stosunku przyrostów nie zależy od sposobu, w jaki przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera.

Lecz możnaby oczywiście rozważać funkcyę zmiennej zespolonej z punktu widzenia ogólniejszego: można mianowicie powiedzieć, że zmienna rzeczywista lub zespolona jest funkcyą zmiennej $z = x + iy$, gdy dla każdej wartości z (w pewnym obszarze) ma wartość oznaczoną. Wtedy wszelka funkcya rzeczywista lub zespolona dwu zmiennych x, y może być uważana za funkcyę zmiennej zespolonej; gdyż dawszy sobie z, mamy jednoznacznie wartość x oraz wartość y, a stąd i wartość funkcyi zmiennych x i y. Pozostaje jeszcze zbadać warunki, przy których tak określona funkcya jest ciągłą i ma pochodną. W ten to sposób ogólny można wprowadzić do analizy funkcye zmiennych zespolonych (patrz np. Stolz, „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" II, oraz „Grundzüge der Diff. und Integralrechnung" II, Lipsk, 1893). Wprowadzając następnie różniczkowalność, przychodzimy do funkcyj monogenicznych; dla pozyskania tedy funkcyj monogenicznych wprowadzamy pojęcie różniczkowalności, lecz nie wprowadzamy przedstawienia analitycznego, od którego to pojęcia funkcya monogeniczna jest jeszcze niezależna.

Lecz wtedy powstaje myśl postępowania odmiennego, t. j. uprzedniego wprowadzenia drugiego pojęcia, aby dopiero z niego wypływało pojęcie pierwsze. Dochodzimy tym sposobem do funkcyj monogenicznych analitycznych Weierstrassa.

Niechaj będzie szereg potęg całkowitych dodatnich ilości $z - z_0$; jego prawdziwe koło zbieżności około punktu z_0 niechaj ma promień R. Weźmy na okręgu punkt z_1 i przekształćmy szereg na inny, odniesiony do punktu z_1 (patrz § 2). Niechaj promień nowego koła zbieżności będzie R_1 (załóżmy, że jest on różny od zera); tym sposobem rozszerzamy funkcyę pierwotną na obszar, którego szereg pierwotny nie obejmował. Dla tych punktów szereg nowy jest dalszym ciągiem analitycznym lub przeprowadzeniem analitycznem pierwszego. Tak postępując, możemy przeprowadzić funkcyę w obszar rozleglejszy. Ogół tych wszystkich funkcyj, które przedstawiają te różne szeregi stanowi funkcyę jedyną, którą, według Weierstrassa, nazywamy funkcyą monogeniczną-analityczną; różniczkowalność jej jest zapewniona skutkiem różniczkowalności szeregu potęgowego, Jest jasnem, że wybierając odpowiednio różne środki różnych kół zbieżności, po sobie następujących, można wyobrazić sobie różne drogi, prowadzące do tego samego punktu. Jeżeli na każdej z tych dróg dochodzimy zawsze do tej samej wartości funkcyi, ta funkcya będzie jednowartosciowa; w przeciwnym razie będzie ona wielowartościowa.

Szereg pierwotny, dający początek wszystkim innym szeregom, rozszerzającym kolejno obszar pierwotny, nazywa się elementem początkowym lub pierwotnym funkcyi analitycznej. Jeżeli tu i owdzie na pewnej linii przeprowadzenie nie jest możliwe, wtedy mamy funkcyę o obszarze osobliwym.

Funkcya analityczna w pojmowaniu powyższem jest oczywiście zarazem funkcyą monogeniczną w tem znaczeniu, o jakiem mowa w § 1. Naodwrót, funkcya monogeniczna w tem ostatniem znaczeniu niezawsze jest funkcyą analityczną; może ona (jak to zobaczymy) dać się rozwinąć na szereg potęgowy w otoczeniu pewnych punktów i wtedy obszar jej zbieżności przypada w obszarze zbieżności funkcyi analitycznej. Lecz może się zdarzyć: albo że ta funkcya analityczna nie daje się przeprowadzić po za ten lub ów obszar, chociaż funkcya po za tym obszarem istnieje; albo też, mimo że daje się przeprowadzić, nie daje wszakże wartości równych wartościom funkcyi zewnątrz obszaru.

O funkcyach analitycznych Weierstrassa cytujemy prace następujące: Weierstrass (Functionenlehre, Berlin, 1886), Pincherle (Giorn. di Batt., XVIII), Biermann (Analytische Functionen, Lipsk, 1887), Puzyna (Teorya funkcyj analitycznych, t. I, Lwów, 1898).

Przykłady, odnoszące sią do uwag w ustępie poprzedzającym, znajdują się u Tannery'ego (Berl. Akad. 1882), Schrödera (Schlöm. Zeitsch. 1876), Pringsheima (Math. Ann. XXII, 1883) i innych.

Funkcyami o obszarach osobliwych zajmują się głównie: Poincaré (Acta Soc. Fennicae, 1881), Appel (Acta math. I, 1882), Goursat (Comptes rendus XCIV, 1881, Bulletin des sciences math. XI, 1887), Lerch (Rozprawy Czesko - Król. Tow. nauk w Pradze,

dze, 1887, Dziennik Teixeiry 1892), Stieltjes (Bull. des sciences math., XI, 1887) Krygowski (Bull. de la Société math. de France, 1897, Prace mat.-fiz. IX, 1898).

§ 4.

Najprostsze funkcye przestępne.

Funkcya e^z, gdy z jest liczbą zespoloną, określa się przez szereg

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots\ldots$$

zbieżny dla każdej wartości z.

Własność główna tej funkcyi $e^{z} \cdot e^{z_1} = e^{z+z_1}$ utrzymuje się tu bez zmiany, jak również własność $\frac{d}{dz} e^z = e^z$.

Funkcye $\sin z$, $\cos z$, gdy z jest liczbą zespoloną, określają się przez wzory:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\ldots$$

Twierdzenie o dodawaniu funkcyi „wstawa“ i „dostawa“ i twierdzenia z niem związane, pozostają bez zmiany i dla argumentów zespolonych.

Wzorem zasadniczym jest wzór:

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Funkcya e^z jest peryodyczna, t. j. nie zmienia swej wartości, jeżeli z powiększamy o $2k\pi i$ (k jest liczbą całkowitą jakąkolwiek).

Każdy pierwiastek równania $e^z = A + iB$ nazywa się logarytmem neperowym liczby zespolonej $A + iB$. Równanie to ma nieskończenie wiele pierwiastków, które są w ogóle wszystkie zespolone; jeden z nich otrzymujemy z drugiego, dodając liczbę postaci $2k\pi i$ (k całkowite), Możemy nazwać wartością główną logarytmu neperowego wartość, w której spółczynnik przy i jest zawarty między $-\pi$ a $+\pi$ (włączając: $+\pi$); oznaczamy ją przez $\log_e (A + i B)$.

Funkcyę a^z określamy za pomocą wzoru

$$a^z = e^{z(\log_e a + 2k\pi i)}.$$

W ten sposób a^z może mieć w ogóle nieskończenie wiele wartości; uważać będziemy tylko wartość, odpowiadającą wartości $k = 0$ i nazywać ją będziemy wartością główną potęgi a^z.

Jeżeli położymy $z = x + iy$, $a = \varrho (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, będzie

$$a^z = \varrho \left[\cos x (\alpha + 2k\pi) + i \sin x (\alpha + 2k\pi) \right]$$
$$\times\ e^{-y(\alpha + 2k\pi)} \left[\cos (y \log_e \varrho + i \sin (y \log_e \varrho) \right].$$

Jeżeli przez a^z rozumiemy jedynie wartość główną, wtedy a^z nie czyni już zadość wszystkim głównym własnościom potęg, t. j. związkom:

$$a^z . a^{z_1} = a^{z+z_1}, \quad (a^z)^{z_1} = a^{zz_1}, \quad \log a^z = z \log a,$$

gdyż wartość główna np. wyrażenia $(a^z)^{z_1}$ jest jedną z wartości wyrażenia a^{zz_1}, lecz nie jest jego wartością główną.

Co do różnych określeń funkcyj wykładniczych i logarytmowych patrz: Durège, Theorie der Functionen, Lipsk, 1864, rozd. V; Briot et Bouquet, Fonctions elliptiques II; Stolz, Arithmetik II, i t. d.

§ 5.

Granica, ciągłość, różniczkowanie i całkowanie w obszarze zespolonym.

Określenie i twierdzenia zasadnicze, odnoszące się do granic i ciągłości, pozostają bez zmiany dla funkcyj zmiennych zespolonych.

Pochodna, jak powiedzieliśmy, określa się, jak zwykle, jako granica stosunku przyrostów i można dowieść, że twierdzenia, odnoszące się do sumy, iloczynu i ilorazu, funkcyi złożonej, funkcyi odwrotnej i t. d., pozostają bez zmiany, jak również prawidła, odnoszące się do różniczkowania funkcyj elementowych

Godnem jest uwagi twierdzenie: Istnienie pierwszej pochodnej funkcyi zmiennej zespolonej pociąga za sobą istnienie pochodnych wszelkiego rzędu.

Jeżeli funkcya jednowartościowa jest zerem rzędu k w punkcie (nie znajdującym się w nieskończoności), to jej pochodna jest zerem rzędu $k-1$; jeżeli punktem tym jest nieskończoność, wtedy pochodna dla $z=\infty$ będzie zerem rzędu $k+1$.

Jeżeli funkcya jednowartościowa ma biegun rzędu k w punkcie, znajdującym się w odległości skończonej, to pochodna jej ma w tym punkcie biegun rzędu $k+1$; jeżeli tym punktem jest nieskończoność, to pochodna ma w nim biegun rzędu $k-1$.

Podamy kilka spostrzeżeń, odnoszących się do całkowania.

W przypadku zmiennych rzeczywistych droga całkowania jest z góry ustalona przez to, że zmienna przebiega zawsze po osi odciętych. Weźmy teraz dwa punkty na płaszczyźnie zespolonej i połączmy je linią. Podzielmy tę linię na n części i niechaj δ_1, δ_2, . . . oznaczają różnice pomiędzy wartościami zmiennej zespolonej, odpowiadającemi kolejnym punktom podziału. Niechaj $f_1, f_2, \ldots$ oznaczają wartości funkcyi f w punktach, znajdujących się pomiędzy temi punktami podziału. Granica sumy $\Sigma f_r \delta_r$, w założeniu, że $\delta_1, \delta_2, \ldots$ dążą do zera, gdy n rośnie do nieskończoności, jest **całką określoną funkcyi**. Jeżeli zmieniamy granicę górną całki, mamy **funkcyę całkową**. Otóż tu ujawnia się fakt nowy, jakiego niema w przypadku zmiennych rzeczywistych, t. j. że do każdego punktu dojść można w nieskończenie wielu kierunkach, gdy tymczasem w przypadku zmiennych rzeczywistych dochodzi się do pewnego punktu, wychodząc z innego, tylko w jednym kierunku (jeżeli wyłączymy przejście przez nieskończoność.

Całka funkcyi monogenicznej jest również funkcyą monogeniczną. Będzie ona jedno- lub wielowartościowa, stosownie do natury funkcyi danej.

Jeżeli funkcya dana jest monogeniczna, jednowartościowa i holomorficzna w obszarze jednoobwodowym, to całka jej ma zawsze w danym punkcie jednę wartość, niezależnie od drogi, którą do tego punktu dochodzimy. Twierdzenie to zawdzięczamy Cauchy'emu; powrócimy do niego w paragrafie następnym, w którym podamy różne twierdzenia, odnoszące się do funkcyj monogenicznych.

---

§ 6.

Różne twierdzenia o funkcyach monogenicznych, holomorficznych i meromorficznych.

Funkcya holomorficzna w danym obszarze nie może mieć wszystkich pochodnych równych zeru w pewnym punkcie, nie będąc w całym tym obszarze ilością stałą.

Funkcya holomorficzna w danym obszarze i stała dla wszystkich punktów linii choćby najmniejszej, jest stałą w całym obszarze.

Funkcya holomorficzna w danym obszarze ma wszystkie pochodne również holomorficzne.

Funkcya holomorficzna w obszarze skończonym ma skończoną liczbę zer stopnia skończonego i całkowitego.

Jeżeli funkcya jest meromorficzną w pewnym obszarze, to ani ona sama, ani jej pochodne nie mogą znikać w punkcie.

Funkcya meromorficzna w obszarze skończonym ma pierwiastków i biegunów liczbę skończoną i wszystkie one są stopnia skończonego i całkowitego.

Funkcya meromorficzna w danym obszarze równa się funkcyi wymiernej, powiększonej o funkcyę holomorficzną w tymże obszarze. Jeżeli $a_1, a_2, \ldots$ są biegunami funkcyi danej, to rozłożywszy funkcyę wymierną na ułamki proste (patrz Rozdział I), wyrazimy ją w ten sposób:

$$\frac{A_{c_1}}{(x-a_1)^{c_1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{B_{c_2}}{(x-a_2)^{c_2}} + \ldots + \frac{B_1}{x-a_2} + \ldots.$$

gdzie stałe $A_1, B_1, \ldots$, będące licznikami ułamków, których mianowniki są pierwszemi potęgami dwumianów $x-a_1, x-a_2, \ldots$, nazywają się *pozostałościami* (*residua*) funkcyi (*Cauchy*).

Funkcya holomorficzna na całej płaszczyźnie, której moduł jest wszędzie mniejszy od liczby danej, jest ilością stałą.

Funkcya holomorficzna na całej płaszczyźnie, mająca jako jedyny biegun $z = \infty$, jest funkcyą wymierną całkowitą.

Funkcya meromorficzna na całej płaszczyźnie (i dla $z = \infty$) jest funkcyą wymierną, może więc mieć tylko skończoną liczbę pierwiastków i biegunów stopnia skończonego.

Jeżeli funkcya $f(z)$ jest holomorficzną w obszarze jednoobwodowym, to całka $\int f(z)\,dz$, wzięta po krzywej zamkniętej wewnątrz tego obszaru, jest zerem. (Twierdzenie Cauchy'ego).

Przy założeniach twierdzenia poprzedzającego, całka $\int f(z)\,dz$ ma wartość zależną jedynie od granic a niezależną od drogi całkowania.

Jeżeli funkcya $f(z)$ jest holomorficzną w obszarze o obwodzie zespolonym, to całka $\int f(z)\,dz$, rozciągnięta od jednego punktu do drugiego, a także od punktu do tegoż samego punktu po linii zamkniętej, zachowuje wartość stałą przy zmianie drogi całkowania wtedy, gdy nowa droga daje się sposobem ciągłym otrzymać z dawnej i gdy na wszystkich stadyach odkształcenia pozostaje wewnątrz obszaru, nie spotykając nigdzie obwodu.

Mówimy, że zmienna przebiega obwód w kierunku dodatnim, jeżeli podczas przebiegu pozostawia obszar zawsze po stronie lewej.

Jeżeli funkcya jest holomorficzną w obszarze, mającym postać pierścienia, t. j. w obszarze o dwóch obwodach, z których jeden znajduje się wewnątrz drugiego, wtedy całka jej, rozciągnięta w kierunku dodatnim po obwodzie zewnętrznym, równa się całce, rozciągniętej w kierunku ujemnym po obwodzie wewnętrznym.

Jeżeli funkcya jest holomorficzną w pewnej części płaszczyzny o obwodzie pojedyńczym, to jej wartość w pewnym punkcie a daje się wyrazić w ten sposób:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

gdzie całka jest rozciągnięta w kierunku dodatnim po obwodzie pola.

Jeżeli funkcya $f(z)$ jest meromorficzna w obszarze o obwodzie pojedyńczym, to całka

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz,$$

wzięta po obwodzie w kierunku dodatnim, równa się sumie pozostałości funkcyj względem biegunów, znajdujących się w obszarze.

Jeżeli funkcya $f(z)$ jest meromorficzna w obszarze i jeżeli m_0, m'_0 ... są rzędami jej zer, m_∞, m'_∞, rzędami jej nieskończoności, wtedy

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \Sigma m_0 - \Sigma m_\infty,$$

gdzie całka rozciąga się po obwodzie obszaru w kierunku dodatnim. Toż samo twierdzenie można wypowiedzieć w ten sposób:

Jeżeli funkcya $f(z)$ jest meromorficzna w obszarze o pojedyńczym obwodzie i jeżeli wychodząc z pewnego punktu obwodu, przebiegamy go w kierunku dodatnim i obliczamy zmianę, jakiej w sposób ciągły doznaje argument, gdy powracamy do punktu wyjścia; wtedy różnica pomiędzy temi dwoma argumentami jest wielokrotnością liczby 2π, a mianowicie równa się $2k\pi$, gdzie $k = \Sigma m_0 - \Sigma m_\infty$ (Casorati, Teorica etc., str. 430).

W funkcyi meromorficznej na całej płaszczyźnie liczba zer równa się liczbie nieskończoności, jeżeli zero lub nieskończoność rzędu i uważamy za zjednoczenie i zer lub nieskończoności. Stąd otrzymuje się łatwo twierdzenie zasadnicze algebry, że wielomian wymierny ma tyle pierwiastków, ile wynosi jego stopień.

Funkcya holomorficzna w kole, którego środek jest w punkcie z_0, daje się rozwinąć na szereg według potęg całkowitych dodatnich dwumianu $z - z_0$, zbieżny w tem kole. Szereg ten można napisać w postaci, nadanej mu przez Cauchy'ego (Acc. Tor., 1831-2, Comptes rendus 1846).

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} + (z - z_0)\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^2}$$
$$+ (z - z_0)^2 \int \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^3} + \ldots .$$

gdzie całki rozciągają się w kierunku dodatnim po obwodzie koła lub po jakimkolwiek obwodzie spółśrodkowym, zawartym w obszarze. Można ten szereg przedstawić też w postaci wzoru Taylora-Maclaurina:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,\frac{f'(z_0)}{1} + (z - z_0)^2\,\frac{f''(z_0)}{1\,.\,2} + \ldots .$$

Jeżeli funkcya jest holomorficzna w obszarze pierścieniowym, zawartym pomiędzy dwoma kołami spółśrodkowemi o środku z_0, to daje się rozwinąć na szereg, postępujący według potęg dodatnich i ujemnych dwumianu $z - z_0$, zbieżny w tem polu. Otrzymujemy wtedy szereg Laurenta (Comptes rendus 1843, t. XVII, str. 939)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{+\infty} (z - z_0)^n \int \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^n},$$

gdzie całka rozciąga się wzdłuż jednego z obwodów w kierunku dodatnim lub wzdłuż okręgu spółśrodkowego i zawartego w pierścieniu, ograniczonym dwoma okręgami.

---

§ 8.

Punkty osobliwe istotne.

Niechaj będzie funkcya dana na całej płaszczyźnie; jeżeli funkcya ta, nawet w nieskończoności, nie posiada innych punktów osobliwych prócz biegunów (t. j. punktów, w których odwrotność jej pozostaje jednowartościową i jest zerem), t. j. jeżeli jest funkcyą meromorficzną na całej płaszczyźnie (porów. § 1), wtedy, jak wiemy, jest funkcyą wymierną.

Jeżeli mamy funkcyę przestępną, określoną dla całej płaszczyzny, to muszą istnieć takie punkty, w których ani ta funkcya, ani jej odwrotność, nie pozostają jednopostaciowemi; takie punkty nazywają się istotnie osobliwemi. Że mogą istnieć punkty, mające taką własność, okazuje odrazu rozważanie jednej z najprostszych funkcyj przestępnych, mianowicie funkcyi wykładniczej.

Jeżeli pewien punkt jest punktem osobliwym istotnym funkcyi, to punkt ten jest zarazem punktem istotnie osobliwym jej odwrotności.

Granica funkcyi, jeżeli zmienna jej zbliża się jakimkolwiek sposobem do punktu istotnie osobliwego, jest nieoznaczona.

Przy zbliżaniu zmiennej do punktu istotnie osobliwego można sprawić, by moduł różnicy pomiędzy wartością funkcyi i jakąkolwiek daną wartością A był mniejszy od wszelkiej ilosci danej dowolnie

Jeżeli damy A, to możemy w ogóle znaleść w otoczeniu punktu istotnie osobliwego nieskończenie wiele punktów, w których wartość funkcyi równa się A; mogą wszakże istnieć dwie i nie więcej niż dwie wartości wyjątkowe na A, dla których niema w otoczeniu punktu a żadnego takiego punktu, w którym by wartosć funkcyi była A. (Twierdzenie Picarda, Comptes rendus LXXXVIII, LXXXIX; Ann. de l'École Normale 1880; Traité d'Analyse, t. II, str. 122).

Według tego ostatniego twierdzenia punkty istotnie osobliwe dzielą się na trzy kategorye:

1) punkty, dla których wartości wyjątkowe A, o których mowa wyżej, nie istnieją;

2) punkty, dla których istnieje jedna taka wartość wyjątkowa. Takim naprzykład jest punkt $z=0$ dla funkcyi

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}},$$

a wartością wyjątkową A w tym przypadku jest $A=0$;

3) punkty, dla których istnieją dwie wartości wyjątkowe A. Takim jest punkt $z=0$ dla funkcyi $e^{\frac{1}{z}}$, a wartościami wyjątkowemi są $A=0$, $A=\infty$.

Funkcya jednopostaciowa, mająca nieskończenie wiele biegunów, ma, jako punkt istotnie osobliwy, punkt graniczny biegunów

Funkcya, nie mająca bieguna w odległości skończonej na płaszczyźnie, jest funkcyą całkowitą lub holomorficzną na całej płaszczyźnie, oprócz w punkcie nieskończonym Jeżeli w nieskończoności nie ma bieguna, to nie może być wielomianem całkowitym: jest funkcyą przestępną całkowitą i ma w nieskończoności punkt istotnie osobliwy. Funkcya taka daje się rozwinąć na szereg potęg całkowitych dodatnich, zbieżny dla każdego punktu płaszczyzny.

Funkcya taka może mieć nieskończoną liczbę zer w odległości skończonej.

Jakie jest wyrażenie ogólne takiej funkcyi, mającej zera z góry dane? Na pytanie to odpowiada sławne twierdzenie Weierstrassa (Berl. Akad. 1876), będące rozszerzeniem twierdzenia, podanego przez Cauchy'ego. Twierdzenie Cauchy'ego brzmi.

Jeżeli $a_1, a_2, \ldots$ są punktami zerowemi funkcyi, jeżeli $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$ i szereg $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|$ jest zbieżny, to funkcya, majaca za zera tylko punkty powyżej dane, nie mająca żadnego bieguna a jako jedyny punkt osobliwy punkt w nieskończoności, ma postać

$$f(z) = ce^{G(z)} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

gdzie $G(z)$ jest funkcyą holomorficzną na całej płaszczyźnie.

Twierdzenie Weierstrassa jest następujące:

Jeżeli szereg $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|$ nie jest zbieżny, to można dobrać zawsze liczbę całkowitą dodatnią ω, stalą lub zmieniającą się wraz z n, w ten sposób, aby szereg

$$\sum_n \frac{z^\omega}{a_n^\omega (z-a_n)}$$

był równozbieżny na całej płaszczyźnie, i wtedy będzie:

$$f(z) = ce^{G(z)} \prod_1^\infty \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P_\omega\left(\frac{z}{a_n}\right)}\right],$$

gdzie

$$P_\omega\left(\frac{z}{a_n}\right) = \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^\omega}{\omega a_n^\omega}.$$

W każdym przypadku $\omega = n-1$ czyni zadość powyższemu warunkowi.

Czynnik $\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P_\omega\left(\frac{z}{a_n}\right)}$ nazywa się czynnikiem pierwszym lub pierwotnym. W twierdzeniach poprzedzających zakładamy, że punkt —zero nie zawiera się pomiędzy punktami a_n. Jeżeli jest tam k-razy, to do iloczynu przybywa czynnik z^k.

Jeżeli ω jest stałe, to otrzymujemy funkcye holomorficzne, mające rodzaj; liczba ω nazywa się rodzajem, gdy nie zmienia się wraz z n i jest najmniejszą pomiędzy wszystkiemi liczbami, czyniącemi zadość powyższemu warunkowi (Laguerre, Comptes rendus, XCIV, XCV, XCVIII; Cesàro, Comptes rendus, XCVIII i t. d.).

Funkcya jednowartościowa na całej płaszczyźnie, mająca w odległości skończonej tylko biegun, jest zawsze ilorazem dwu funkcyj całkowitych; można przeto, przy pomocy powyższego otrzymać wyrażenie takiej funkcyi.

Jeżeli chcemy w podobny sposób przedstawić funkcyę jednowartościową na całej płaszczyźnie (nawet w nieskończoności) i mającą jedyny punkt istotnie osobliwy $z=a$ w odległości skończonej, to można zastosować wzór podobny do poprzedniego, kładąc tylko zamiast $\frac{z}{a_n}$ wyrażenie $\frac{a_n - a}{z - a}$.

Z poprzedniego twierdzenia wypływają wnioski następujące:

Funkcya jednowartościowa, która nie ma ani zer ani biegunów w odległości skończonej, a jako punkt istotnie osobliwy ma punkt w nieskończoności jest postaci $e^{G(z)}$, gdzie $G(z)$ jest funkcyą całkowitą.

Funkcya jednowartościowa, która ma skończoną liczbę zer w nieskończoności, nie ma biegunów, a w nieskończonosci ma jedyny punkt istotnie osobliwy, jest postaci

$$P(z)\, e^{G(z)},$$

gdzie $P(z)$ jest wielomianem

Funkcya jednowartościowa, mająca skończoną liczbę zer i skończoną liczbę biegunów, w nieskończoności zaś jedyny punkt istotnie osobliwy, jest postaci

$$\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{G(z)},$$

gdzie P, Q są dwoma wielomianami.

Postępowanie, za pomocą którego dowodzi się wzoru Weierstrassa, może służyć do wyrażenia funkcyi, mającej na płaszczyźnie nieskończenie wiele biegunów, których punktem granicznym jest punkt w nieskończoności, za pomocą sumy funkcyi holomorficznej i szeregu zbieżnego na całej płaszczyźnie, którego każdy wyraz jest funkcyą wymierną zmiennej z, mającą jeden tylko biegun w jednym z biegunów funkcyi danej. Tym sposobem otrzymujemy przedstawienie funkcyi o nieskończenie wielu biegunach, różne od przedstawienia pod postacią ilorazu iloczynów.

Rozszerzenie tego wzoru na przypadek, w którym istnieje nieskończenie wiele punktów istotnie osobliwych (zamiast biegunów), stanowi twierdzenie Mittag-Lefflera.

Twierdzenie Weierstrassa daje wyrażenie funkcyi jednopostaciowej, mającej jeden punkt istotnie osobliwy; nasuwa się tu przeto odrazu zagadnienie o przedstawieniu funkcyi ze skończoną lub nieskończoną liczbą osobliwosci istotnych.

Można otrzymać zawsza wyrażenie takie, jako sumę pewnej liczby funkcyj, z których każda ma tylko jednę osobliwość istotną.

Tym sposobem rozszerzamy twierdzenie o rozkładzie funkcyi wymiernej na ułamki prostsze.

Każda funkcya jednowartościowa holomorficzna w całej płaszczyźnie, prócz w punktach $a_1, a_2, \ldots a_n$, w których posiada bieguny lub osobliwości istotne, daje się zawsze przedstawić jako suma n funkcyj, mających po jednym tylko biegunie lub punkcie osobliwym istotnym w jednym z punktów danych. Jeżeli jeden z punktów danych a jest w nieskończonosci, wtedy odpowiednia funkcya jest holomorficzną na całej płaszczyźnie z punktem istotnie osobliwym w nieskończoności.

Jeżeli mamy nieskończenie wiele punktów $a_1, a_2, \ldots$, mających punkt graniczny w nieskończonosci, to funkcya, mająca tylko w tych punktach punkty istotnie osobliwe lub bieguny, wyraża się za pomocą szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - F_n(z) \right] + G(z),$$

gdzie G_n są funkcyami, mającemi jedyny punkt istotnie osobliwy w a_n; F_n są wielomianami, których stopnie zawsze oznaczyć można; wreszcie G jest funkcyą holomorficzną na całej płaszczyznie, mającą jedyny punkt osobliwy punkt w nieskończoności.

Wielomiany F i G nie w jedyny tylko sposób wyznaczyć się dają. Jeżeli punkty a są wszystkie biegunami, to jest rzeczą naturalną, że wyrazy szeregu stają się wszystkie funkcyami wymiernemi.

Co do tych twierdzeń cytujemy prace Mittag-Lefflera (Comptes rendus 1882, Acta mathem. IV); Weierstrassa (Functionenlehre, str. 23, 67, 102); Hermite'a (Crelle XCI); Casorati'ego (Annali di mat X), traktat Forsytha (Theory of functions 1893), gdzie zagadnienie to traktowane jest obszernie i w wielu przypadkach szczególnych; dalej lekcye analizy Hermite'a i Picarda. Co do przypadku. w którym zamiast punktów osobliwych są linie osobliwe, patrz Picard (Compt. rendus 1881), a co do rozszerzenia twierdzenia Weierstrassa na funkcye wielowartościowe (funkcye jednowartościowe na powierzchni Riemanna) patrz Appel (Acta math. I).

Teoryę funkcyi zmiennej urojonej ugruntował, rzec można, głównie Cauchy w sławnej rozprawie: Sur les intégrales définies, prises entre les limites imaginaires 1825, Comptes rendus 1846. Drugi krok ważny uczynił Riemann (1851) genialnym pomysłem swym, za pomocą którego z największą prostotą i elegancyą badać można funkcye wielowartościowe, czego nie można było czynić dość prostym sposobem za pomocą metod Cauchy'ego, jakkolwiek nie jednemu z piszących dawniej o tej teoryi zdawało się z początku inaczej (patrz np. przedmowę do drugiego wydania wyżej cytowanego dzieła Briota i Bouqueta). Z innego stanowiska i prawie równocześnie z Riemannem Weierstrass utworzył teoryę funkcyj.

Różnica obu poglądów, zarówno głębokich, polega głównie na tem, że Riemann bierze za punkt wyjścia przedstawienie geometryczne funkcyi i uważa utwór, który ją przedstawia, jakby coś wcześniejszego niż sama funkcya, Weierstrass wychodzi znów z analitycznego przedstawienia funkcyi i rozważa tylko takie funkcye, które dają się przedstawić analitycznie sposobem danym. Zresztą głębokie badania nad osobliwościami istotnemi funkcyj analitycznych zawdzięczamy tylko Weierstrassowi i jego uczniom.

Sławnym traktatem o teoryi funkcyj, napisanym prawie wyłącznie pod wpływem pomysłów Cauchy'ego, jest cytowane już dzieło Briota i Bouqueta, „Théorie des functions elliptiques“ (2 ed., Paryż, 1875; pod wpływem pomysłów Cauchy'ego i Riemanna powstały dzieła: Durège „Elemente der Theorie der Functionen“ Lipsk 1864, Neumann, „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale“, Lipsk 1867, w którem wprowadzono przedstawienie funkcyj na kuli; Casorati „Teorica delle functioni di variabili complesse“, Pawia, 1868; Holzmüller „Theorie der isogonalen Verwandschaften und conf-Abbildungen“, Lipsk 1882. Pomysły Weierstrassa, rozwinięte na jego lekcyach i w „Functionenlehre“ (Berlin 1886) przedstawia, lubo niezupełnie poprawnie w wielu punktach Biermann „Theorie der analytischen Functionen", Lipsk 1887. Najnowsze dzieła starają się godzić idee Riemanna i Weierstrassa; do nich należy przedewszystkiem obszerne wyżej cytowane dzieło Forsytha, dzieło Picarda (Paryż 1893), dzieło Burkhardia „Einführung in die Theorie der analytischen Functionen", (Lipsk 1897), dalej Petersena „Functionstheorie" Kopenhaga 1898 i cytowane wyżej dzieło Puzyny „Teorya funkcyj analitycznych". Lwów 1898.

ROZDZIAŁ XIV.

TEORYA FUNKCYJ W ZWIĄZKU Z TEORYĄ GRUP: PERYODYCZNOŚĆ; AUTOMORFIZM.

---

§ 1.

Podstawienia liniowe.

P o d s t a w i e n i e l i n i o w e ogólne, uskuteczniono na zmiennej z, jest postaci

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad (ad - bc = 1),$$

co wyrażamy symbolem:

$$\left(z, \frac{az + b}{cz + d}\right), \qquad \text{lub też} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Jeżeli z jest zmienną zespoloną, przedstawianą sposobem zwykłym na płaszczyźnie, to podstawienie liniowe każdemu punktowi przyporządkowuje punkt tejże płaszczyzny, i ta odpowiedniość jest d w u j e d n o z n a c z n ą. (Przekształcenie homograficzne).

Dla tego podstawienia istnieją dwa punkty z, których każdy odpowiada sobie samemu; są niemi punkty:

$$z_1, z_2 = \frac{a - d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Podstawienie, w którem te dwa punkty podwójne (Fixpunkte, według Kleina) zlewają się, nazywa się parabolicznem.

Jeżeli dla danego podstawienia dwa punkty podwójne są różnemi, to podstawienie daje się sprowadzić do postaci

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = k\,\frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

gdzie

$$k = \frac{[a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\,]^2}{4\,(ad - bc)}.$$

Jeżeli k jest liczbą rzeczywistą dodatnią, podstawienie nazywa się hyperbolicznem; jeżeli jest liczbą zespoloną o module 1, nazywa się eliptycznem; wreszcie jeżeli k jest liczbą zespoloną o module różnym od 1 i o argumencie różnym od zera, podstawienie nazywa się loksodromicznem.

Każde podstawienie loksodromiczne można złożyć z podstawienia hyperbolicznego w połączeniu z eliptycznem.

Nazwy te napotykamy poraz pierwszy w pracach Kleina (Math. Ann. XIV, str. 142, XXI, § 3).

Aby lepiej zrozumieć różnicę pomiędzy temi trzema podstawieniami, rozpatrzmy ich postacie prostsze:

$z' = kz$; k rzeczywiste dodatnie,

$z' = e^{\alpha i} z$; α jakiekolwiek,

$z' = \varrho e^{\alpha i} z$; $\varrho \neq 1$, $\alpha \neq 0$.

Jeżeli w pierwszem z nich zmieniamy k sposobem ciągłym, to punkt z' poruszać się będzie po prostej, wychodzącej z początku spółrzędnych. Jeżeli w drugiem podstawieniu zmieniamy a, to punkt z' poruszać się będzie po okręgu, mającym środek swój w początku spółrzędnych. W loksodromicznem podstawieniu wreszcie punkt doznaje przemieszczenia, które jest kombinacyą przemieszczeń poprzednich: mamy tu przedłużenie promienia wodzącego w połączeniu ze zmianą kierunku.

Podstawienie eliptyczne posiada tę własność, że jest albo peryodycznem, albo nieskończonostkowem, t. j. wychodząc z punktu danego, albo powracamy do tego samego punktu po całkowitej liczbie kolejnych podstawień, albo też, kolejno stosując to podstawienie, można zbliżyć się do punktu wyjścia tak blizko, jak chcemy (patrz Forsyth, Theory of functions, str. 521).

Przekształcenie za pomocą promieni odwrotnych lub odwrócenie (inwersya), jest to działaniem, w którem, mając koło na płaszczyźnie, danemu punktowi przyporządkowujemy inny, leżący na prostej, łączącej punkt dany za środkiem koła i po tejże jego stronie tak, aby iloczyn dwu promieni wodzących równał się kwadratowi promienia koła.

Przeksztcenie przez odbicie jest to przekształcenie, przy pomocy którego, mając prostą daną, każdemu jej punktem przyporządkowujemy punkt symetryczny z nim odnośnie do prostej.

Każde podstawienie liniowe można zawsze złożyć z odwrócenia w połączeniu z odbiciem.

Iloczyn dwóch odwróceń daje podstawienie liniowe, które jest hyperbolicznem, parabolicznem lub eliptycznem, stosownie do tego, czy dwa koła, stanowiące podstawę odwrócenia, nie mają wcale punktu wspólnego, lub mają 1, 2 punkty wspólne.

Każde podstawienie liniowe przekształca koła na koła.

Każde podstawienie liniowe daje się przedstawić nieskończenie wielu sposobami, jako wypadkowa parzystej liczby odwróceń.

Można wraz z Poincarém wprowadzić pewne pojęcie użyteczne do określania własności, charakteryzujących rozmaite gatunki podstawień liniowych. Rozłóżmy podstawienie liniowe na parzystą liczbę $2m$ odwróceń względem $2m$ kół płaszczyzny (co można uskutecznić nieskończenie wielu sposobami). Każde koło zastąpmy kulą o tym samym środku i promieniu i, dawszy sobie punkt w przestrzeni, utwórzmy w tym samym porządku odwrócenie względem wszystkich kul. Można dowieść, że bez względu na sposób, w jaki uskuteczniono pierwszy rozkład podstawienia na odwrócenia, otrzymamy zawsze ten sam punkt, jako odpowiadający punktowi danemu. (Poincaré, Acta math. III, str. 53). Mamy tedy środek interpretacyi podstawienia liniowego jako przekształcenia punktów w przestrzeni. Otrzymujemy stąd następujące wyniki:

Jeżeli dane podstawienie jest eliptyczne to przekształca same na siebie punkty koła, które przechodzi przez dwa punkty podwójne podstawienia, ma za średnicę prostą te punkty łączącą i znajduje się na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny danej (koło podwójne); dalej przekształca na siebie same wszystkie koła takie, że kule, przez nie przechodzące, przecinają ortogonalnie koło podwójne.

Jeżeli podstawienie jest hyperboliczne, to istnieją tylko dwa punkty przestrzeni, pozostające stałemi; są to punkty podwójne, a podstawienie przekształca same na siebie wszystkie okręgi i kule, przechodzące przez te punkty.

Jeżeli podstawienie jest paraboliczne, to jeden tylko punkt pozostaje stały; jest to jedyny punkt podwójny; podstawienie przekształca same na siebie wszystkie okręgi i kule, przez punkt ten przechodzące i styczne w nim do pewnej prostej na danej płaszczyźnie.

Jeżeli podstawienie jest loksodromiczne, to ono przekształca na siebie samo każde koło, mające za srednicę prostą, łączącą punkty podwójne i położone w płaszczyźnie prostopadłej do danej, lecz zmienia punkty tego koła jedne na drugie, prócz oczywiscie punktów podwójnych.

Każde podstawienie, nie zmieniające punktu, położonego zewnątrz płaszczyzny, jest koniecznie podstawieniem eliptycznem.

Niechaj kula o promieniu 1 będzie styczną w początku spółrzędnych 0 do płaszczyzny zmiennej zespolonej z; niechaj każdemu punktowi płaszczyzny odpowiada punkt na kuli, otrzymany za pomocą rzutu punktów płaszczyzny z górnego bieguna kuli, t. j. z punktu kuli wprost przeciwległego punktowi styczności O. Obracajmy kulę około jednej z jej średnic, wtedy zmienna z doznaje przekształcenia liniowego. Wzór odnosny znalazł Cayley (Math. Ann. XV, 1879), jest on:

$$z' = \frac{(\delta + i\gamma)\, z - (\beta - i\alpha)}{(\beta + i\alpha)\, z + (\delta - i\gamma)},$$

gdzie α β, γ, δ są liczby rzeczywiste dowolne, czyniące tylko zadość związkowi $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$, wyrażającemu, że wyznacznik podstawienia jest jednością dodatnią.

§ 2.

Grupy podstawień liniowych.

Grupy podstawień liniowych można tworzyć ze skończoną lub z nieskończoną liczbą podstawień. Grupy z nieskończoną liczbą podstawień mogą być ciągłe lub nieciągłe: grupy są ciągłe wtedy, gdy w nich znajduje się podstawienie nieskończonostkowe; rozumiemy przed to takie podstawienie, w którem moduły ilości $a-1$, b, c, $d-1$ są nieskończenie małe.

W stosowaniu do teoryi funkcyj niema potrzeby rozważania grup ciągłych, gdyż funkcya analityczna, która należałaby do takich grup, musiałaby przyjmować tęż samą wartość w punktach nieskończenie blizkich, a więc mogłaby być tylko ilością stałą. Należy rozważać przeto jedynie grupy nieciągłe; lecz i pomiędzy temi trzeba uczynić nowe wyróżnienie. Istotnie można wyobrazić sobie grupy ciągłe dla punktu ogólnego płaszczyzny, które w specyalnych punktach zezwalają na przekształcenie nieskończonostkowe, t. j. można wyobrazić sobie, że istnieją punkty płaszczyzny takie, iż punkty, odpowiadające im skutkiem pewnych podstawień grupy, stają się tak do nich blizkiemi, jak chcemy. W tym przypadku grupa nazywa się niewłaściwie nieciągłą; w przypadku przeciwnym mamy grupy właściwie nieciągłe (Klein, Math. Ann. XXI, str. 176; Poincaré, Acta math. III, str. 57).

Naprzykład, grupa utworzona z podstawień, których spółczynniki są liczbami całkowitemi dodatniemi, jest niewłaściwie nieciągłą dla punktów z rzeczywistych, a właściwie nieciągłą dla punktów z zespolonych. Każda grupa, utworzona z podstawień o spółczynnikach rzeczywistych, jest zawsze właściwie nieciągłą dla każdej wartości z zespolonej i może *być niewłaściwie nieciągłą tylko dla wartości z rzeczywistej.* (Poincaré, Acta math. III, str. 58).

Rozważmy grupy, których wszystkie podstawienia można utworzyć przy pomocy *podstawień zasadniczych* w liczbie skończonej.

Jeżeli mamy grupę nieciągłą, to może zdarzyć się, że płaszczyzna z dzieli się na pewną liczbę pól skończonych lub nieskończonych, które *przekształcają się wzajemnie* za pomocą podstawień grupy. Jedna z takich części może się dzielić na nieskończoną liczbę obszarów w ten sposób, że kiedy punkt z przebiega ten obszar, to punkt, przekształcony przy pomocy podstawienia grupy, przebiega inny obszar, który możemy nazwać *kongruentnym* z pierwszym. Każdemu obszarowi odpowiada tedy podstawienie grupy; linia, oddzielająca dwa stykające się obszary, nazywa się *bokiem*. Te boki są po dwa za sobą *sprzężone*, t. j. podstawienie przekształca punkty jednego na punkty drugiego; punkt przecięcia dwóch boków kolejnych nazywa się *wierzchołkiem* obszaru.

Można zawsze sprawić, że obszar będzie wielokątem, ograniczonym okręgami lub łukami okręgów kół; przytem wielokąt taki może nie być pojedyńczo-spójny.

Na *spójności* tego wielokąta polega pojęcie *rodzaju* grupy.

Badanie grup i ich istnienia sprowadza się do badania podziału płaszczyzny na obszary kongruentne: jeżeli znamy jeden taki obszar (*wielokąt* początkowy lub *tworzący*), oraz rozkład jego boków na pary boków sprzężonych, to grupa jest określoną.

Podstawienia zasadnicze są te, które odpowiadają wszystkim obszarom sąsiednim wielokąta tworzącego.

Pomiędzy grupami o skończonej liczbie podstawień mieszczą się grupy *wielościanowe* (dwuścianowe, czworościanowe, ośmiościanowe, dwudziestościanowe, patrz § 3).

Pomiędzy grupami o nieskończonej liczbie podstawień najprostszą jest grupa *peryodyczna*, do której należą *funkcye peryodyczne* (patrz § 4).

Następnie idzie grupa, utworzona z podstawień, która nazywa się *grupą modułową*; do niej należą funkcye *modułowe*. Potem idzie grupa, której podstawienia mają spółczynniki rzeczywiste (jest to *grupa Fuchsa*, a odpowiadające jej funkcye nazywają się *funkcyami Fuchsa* Wreszcie idzie grupa, złożona z podstawień o spółczynnikach zespolonych; jest to *grupa Kleina* (jak ją nazywa *Poincaré*), a odpowiadające jej funkcye nazywają się wogóle funkcyami *automorficznemi* (*Klein*).

Należy zauważyć, że *Poincaré* zachował nazwę *grup Fuchsa*, dla pewnych przypadków specyalnych grup o spółczynnikach zespolonych. Jeżeli przyjmiemy, że

$$s_\iota = \left(z, \frac{\alpha_\iota z + \beta_\iota}{\gamma_\iota z + \delta_\iota}\right)$$

są podstawieniami grupy o spółczynnikach rzeczywistych, to podstawienia, wyrażone symbolem

$$t_\iota = \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \frac{\alpha \left[\frac{a_\iota z + b_\iota}{c_\iota z + d_\iota}\right] + \beta}{\gamma \left[\frac{a_\iota z + b_\iota}{c_\iota z + d_\iota}\right] + \delta}\right),$$

gdzie α, β, γ, δ są liczbami jakiemikolwiek, spełniającemi warunek $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$, tworzą również grupę o spółczynnikach zespolonych. Tę grupę nazywa *Poincaré grupą Fuchsa*.

Grupa podstawień o spółczynnikach rzeczywistych pozostawia bez zmiany oś rzeczywistą płaszczyzny z *i przekształca na same siebie dwie półpłaszczyzny. Ta grupa Fuchsa w znaczeniu szerszem przekształca na siebie samo koło* (koło zasadnicze), *którego równaniem jest*

$$\text{Część rzeczyw. wyraż. } \frac{\delta z - \gamma}{\beta z - \alpha} = 0.$$

W przypadku grupy Fuchsa w znaczeniu ściślejszem suma pól wszystkich obszarów jest nieskończona: w przypadku grupy Fuchsa, w znaczeniu obszerniejszem, suma ta jest skończona, gdyż obszary rozciągają się tylko wewnątrz koła zasadniczego i mogą pokrywać całe koło lub tylko część jego.

W przypadku najogólniejszym grupy Kleina suma pól obszarów jest w ogólności skończona.

Co się tyczy historyi i bibliografii teoryi funkcyj automorficznych zauważymy, że—pomijając funkcye peryodyczne—pierwsze przykłady funkcyj, należących do grup o nieskończonej liczbie podstawień znalazł Schwarz w r. 1872 (Crelle LXXV), badając funkcye, które powstają z szeregu hypergeometrycznego Gaussa. Potem Klein i inni badali funkcye modułowe. Poincaré i Klein z dwóch różnych punktów widzenia utworzyli teoryę funkcyj, należących do grup liniowych. Z pomiędzy prac Poincarego w tym przedmiocie wymieniamy najważniejsze i najobszerniejsae, ogłoszone w Acta math I, III, IV, V, oraz w Math. Ann. XIX, prócz ogłoszonych w Comptes rendus w r. 1881 i później. Z prac Kleina wymieniamy ogłoszone w Math. Ann. XIV, XVII, XIX, XX, XXI i t. d. Do tegoż przedmiotu odnoszą się też prace Dycka (Math. Ann. XX, XXII), Bolza'y (Am. Journ. XIII), najnowsze Rittera (Math. Ann. XLV). Funkcyom automorficznym poświęcone jest osobne dzieło: R. Fricke und F. Klein „Vorlesungen über der Theorie der automorphen Functionen", którego t. I p. t. „Die gruppentheoretischen Grundlagen" ukazał się w r. 1897 (Lipsk, Teubner).

§ 3.

Grupa anharmoniczna. Grupy i funkcye wielościanowe.

Pierwszą grupą, złożoną ze skończonej liczby podstawień, jest grupa, wynikająca z podstawień:

$$z' = z, \quad z' = \frac{1}{z}, \quad z' = 1 - z, \quad z' = \frac{1}{1-z},$$

$$z' = \frac{z-1}{z}, \quad z' = \frac{z}{z-1},$$

których strony drugie odpowiadają sześciu wartościom, jakie przyjmować może stosunek anharmoniczny czterech ilości. Funkcyą, nie zmieniającą się przy podstawieniach tej grupy, jest

$$f(z) = \frac{(z^2 - z + 1)^3}{(z^2 - z)^2},$$

Do grup skończonych należą t. zw. grupy wielościanowe (polyedralne).

Wyobraźmy sobie wielościan foremny, wpisany w kulę o promieniu 1; istnieją pewne obroty wielościanu takie, że po ich uskutecznieniu wierzchołki wracają w swe położenia pierwotne. Jeżeli rzucimy tedy kulę stereograficznie na płaszczyznę styczną, na której rozmieścimy zmienną z, to każdy taki obrót kuli odpowiada specyalnemu przekształceniu liniowemu zmiennej z (patrz § 1). Funkcya, której pierwiastkami są wartości z, odpowiadające wierzchołkom wielościanu, pozostanie oczywiście niezmienioną dla wszystkich obrotów, utworzymy tym sposobem grupę wielościanową i odpowiadającą jej funkcyę.

1. **Grupa cykliczna**, jest to grupa, utworzona z n podstawień

$$z' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} . z; \quad (k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Najprostsza funkcya, do tej grupy należąca, jest

$$az^n + b.$$

gdzie a i b są stałe jakiekolwiek.

2. **Grupa dwuścianowa** (diedralna) tworzy się z $2n$ podstawień

$$z' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} . z; \quad z' = \frac{e^{-\frac{2ki\pi}{n}}}{z}; \quad (k=0,1,\ldots, n-1)$$

Funkcya, należąca do tej grupy, jest:

$$\frac{(z^n - 1)^2}{z^n}.$$

3. **Grupa czworościanowa** (tetraedalna). Stosownie do położenia czworościanu wpisanego w kulę, są dwie różne grupy, których podstawienia przemieniają pomiędzy sobą wierzchołki czworościanu. Grupy te zawierają 12 podstawień i są holoedrycznie izomorficzne z grupą naprzemienną o 4 elementach. Pierwsza z tych grup tworzy się z 12 podstawień:

$$z' = \pm z \qquad z' = \pm \frac{1}{z},$$

$$z' = \pm i \frac{z+1}{z-1}, \quad z' = \pm i \frac{z-1}{z+1},$$

$$z' = \pm \frac{z+i}{z-i}, \quad z' = \pm \frac{z-i}{z+i}.$$

druga zaś z 12 podstawień:

$$z' = \pm z, \qquad z' = \pm \frac{i}{z},$$

$$z' = \pm \frac{(1+i)z + \sqrt{2}}{\sqrt{2}z - (1-i)}, \quad z' = \pm \frac{\sqrt{2}.z - (1-i)}{(1+i)z + \sqrt{2}},$$

$$z' = \pm \frac{(1-i)z + \sqrt{2}}{\sqrt{2}.z - (1+i)}, \quad z' = \pm \frac{\sqrt{2}.z - (1+i)}{(1-i)z + \sqrt{2}}.$$

Dla pierwszej grupy pozostają bez zmiany (przy pominięciu czynnika) dwie funkcye:

$$z^4 \pm 2\sqrt{-3}.z^2 + 1;$$

przy drugiej zaś grupie dwie funkcye:

$$z^4 \pm 2\sqrt{3}.z^2 - 1.$$

Te wielomiany, przyrównane do zera, dają równania, których pierwiastki odpowiadają wierzchołkom czworościanu, wpisanego w kulę i znajdującego się w czterech różnych położeniach. Dla tego to każde z tych równań nazywa się *równaniem czworościanu.*

4. **Grupa ośmiościanowa** (oktoedralna). I tych grup jest dwie. *Składają się one z 24 podstawień i są holoedrycznie izomorficzne z grupą symetryczną 4 elementów.* Pierwszą z grup ośmiościanowych jest

$$z' = i^k z\,, \qquad z' = \frac{i^k}{z}\,.$$

$$z' = i^k\,\frac{z+1}{z-1}\,, \quad z' = i^k\,\frac{z-1}{z+1}\,, \qquad (k \quad 0, 1, 2, 3)$$

$$z' = i^k\,\frac{z+i}{z-i}\,, \quad z' = i^k\,\frac{z-i}{z+i}\,.$$

Równanie, którego pierwiastki pozostają bez zmiany przy podstawieniach grupy, jest

$$z\,(z^4 - 1) = 0. \qquad \text{(równanie ośmiościanu.)}$$

Drugą grupą ośmiościanową jest:

$$z' = i^k z\,, \qquad z' = \frac{i^k}{z}\,.$$

$$z' = i^k\,\frac{(1+i)z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}.z-(1-i)}\,, \quad z' = i^k\,\frac{\sqrt{2}.z-(1-i)}{(1+i)z+\sqrt{2}}\,; \; (k=0, 1, 2, 3)$$

$$z' = i^k\,\frac{(1+i)z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}.z-(1+i)}\,, \quad o' = i^k\,\frac{\sqrt{2}.z-(1+i)}{(1-i)z+\sqrt{2}}\,.$$

Odpowiedniem równaniem jest:

$$z\,(z^4+1) = 0, \qquad \text{(równanie ośmiościanu).}$$

5, **Grupa dwudziestościanowa** (ikozaedralna) *zawiera 60 podstawień i jest izomorficzna z grupą symetryczną 5 elementów.* Podstawienia te są:

$$z' = \varepsilon^k z, \qquad z' = \frac{-\varepsilon^{4k}}{z},$$

$$z' = \varepsilon^{k_1} \frac{-(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^k . z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^k . z + (\varepsilon - \varepsilon^4)},$$

$$z' = -\varepsilon^{4k_1} \frac{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^k . z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{-(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^k . z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)},$$

gdzie $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$; k i k' przybierają wszystkie wartości 0, 1, 2, 3, 4.
Równaniem dwudziestościanu jest:

$$z(z^{10} + 1) 1 (z^5 - 1) = 0.$$

Teorya grup skończonych, a w szczególności grup wielościanowych, jest rozwinięta w dziele Kleina „Vorlesungen über das Ikosaeder", Lipsk, 1894, gdzie znaleść też można odnośne wskazówki historyczne i bibliograficzne. Wymieniamy nadto prace Kleina „Binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst", Math. Ann. XX, dalej prace: Gordana (Math. Ann. XII), Brioschi'ego (Lincei 1889), Ann. di mat. VIII, Comptes rendus XCVI i t. d.; Cayley'a (Quart. Journ. of math. XVI, 1879) i t, d.

---

§ 4.

Funkcye peryodyczne.

Grupy, utworzone z jednej lub z dwu podstawień typu (parabolicznego)

$$z' = z + 2\omega, \qquad z' = z + 2\omega'$$

można nazwać grupami peryodycznemi, a funkcye im odpowiadające, funkcyami pojedyńczo lub podwójnie peryodycznemi. Ilości 2ω, $2\omega'$ nazywają się peryodami

Grupę, utworzoną z powyzszych dwu podstawień, można utworzyć przy pomocy jednego podstawienia tejże postaci, jeżeli stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ jest rzeczywisty, wymierny; jest to grupa ciągła, jeżeli $\frac{\omega'}{\omega}$ jest liczbą zespoloną.

Grupa, utworzona z trzech lub więcej podstawień typu poprzedzającego, albo daje się zbudować za pomocą dwu podstawień tegoż, albo jest grupą ciągłą. Inaczej mówiąc, można zawsze znaleść liczby całkowite m, m', m'' takie, że $m\omega + m'\omega' + m''\omega''$ albo będzie zerem, albo część rzeczywista i urojona tego wyrażenia będą mniejsze od jakiejkolwiek ilości danej, t. j. będą nieskończenie małe.

Te twierdzenia ogólne w formie nieco odmiennej można znalesć u Clebscha-Gordana (Abel'sche Functionen, § 38).

Nie istnieją funkcye jednowartościowe jednego argumentu więcej niż dwuperyodyczne. (Twierdzenie Jacobi'ego, Werke II, str. 202).

Kazda funkcya jednowartościowa $2p$— peryodyczna musi być funkcyą przynajmniej p argumentów (Jacobi).

Stosunek peryodów funkcyi podwójnie peryodycznej nie może być liczbą rzeczywistą (Jacobi, Werke II, str. 5).

Wielokąt tworzący dla grupy podwójnie peryodycznej można sprowadzić do równoległoboku, którego jednym z wierzchołków jest początek na płaszczyźnie z, a jeden z boków przypada na osi rzeczywistej. Równoległobok ten nazywa się równoległobokiem zasadniczym. Cała płaszczyzna pokrywa się siecią równoległoboków, przystających do równoległoboku tworzącego.

Funkcya podwójnie peryodyczna nie może być holomorficzna.

Summa pozostałości (rezyduów) w każdym równoległoboku funkcyi meromorficznej podwójnie peryodycznej jest zerem.

Każda taka funkcya posiada przynajmniej dwa bieguny w każdym równoległoboku.

Dla każdej takiej funkcyi suma punktów zerowych w każdym równoległoboku elementarnym równa się sumie rzędów jej nieskończoności w tymże równoległoboku.

Dwie funkcye meromorficzne podwójnie peryodyczne, mające te same peryody, te same zera i te same nieskończoności, różnią się tylko czynnikiem stałym.

Suma punktów zerowych, zmniejszona o sumę punktów nieskończoności funkcyi podwójnie peryodycznej w równoległoboku elementarnym, równa się wielokrotności peryodów. (Twierdzenie Liouville'a).

Mając dane peryody, n punktów zerowych i tyleż punktów nieskończoności, możemy zawsze znaleść odpowiadającą im funkcyę podwójnie peryodyczną.

Suma punktów, w których funkcya podwójnie peryodyczna posiada tęż samą wartość w równoległoboku elementarnym, jest stałą (jeżeli pominiemy wielokrotności peryodów).

Funkcya podwójnie peryodyczna nazywa się **funkcyą rzędu n-tego**, jeżeli w równoległoboku zasadniczym ma n nieskończoności.

Funkcya podwójnie peryodyczna rzędu 2-go czyni zadosć związkowi $f(\alpha+\beta-z) = f(z)$, gdzie α i β są punktami jej nieskończoności.

Pochodna funkcyi podwójnie peryodycznej rzędu 2-go znika w czterech punktach (ω i ω' są półperyodami):

$$\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \frac{\alpha+\beta}{2}+\omega, \quad \frac{\alpha+\beta}{2}+\omega', \quad \frac{\alpha+\beta}{2}+\omega+\omega'.$$

Funkcya $F(z)$, mająca te same nieskończoności i peryody co funkcya $f(z)$ w twierdzeniu poprzedzającem i czyniąca zadość równaniu $F(\alpha+\beta-z) = F(z)$, wyraża się wymiernie przez funkcyę $f(z)$.

Każda funkcya podwójnie peryodyczna rzędu n wyraża się wymiernie przez funkcyę rzędu 2-go, mającą te same przyrody, i przez jej pochodną. (Twierdzenie Liouville'a.)

Dwie funkcye podwójnie peryodyczne, dla których sieci równoległe boków mają wspólną jednę sieć wierzchołków, są związane równaniem algebraicznem.

Funkcya podwójnie peryodyczna i jej pochodna są związane równaniem algebraicznem.

Powiadamy, że funkcya analityczna posiada twierdzenie o dodawaniu algebraicznem, jeżeli pomiędzy wartościami $f(z)$, $f(z')$, $f(z+z')$, gdzie z i z' są jakiekolwiek punkty na płaszczyźnie, istnieje związek algebraiczny.

Jeżeli funkcya, posiadająca twierdzenie o dodawaniu, jest jednowartościową, wtedy $f(z+z')$ wyraża się wymiernie przez $f(z)$, $f(z')$, $f'(z)$, $f'(z')$.

Każda funkcya podwójnie peryodyczna meromorficzna jednowartościowa posiada twierdzenie o dodawaniu algebraicznem. Odwrotnie: każda funkcya meromorficzna na całej płaszczyźnie (z wyłączeniem punktu ∞), dla której istnieje twierdzenie o dodawaniu algebraicznem (ponieważ nie ma innych punktów istotnie osobliwych prócz ∞), jest funkcyą wogóle podwójnie peryodyczną.

Funkcya meromorficzna na całej płaszczyźnie (prócz ∞) i podwójnie peryodyczna, a więc mająca twierdzenie o dodawaniu algebraicznem, nazywa się w ogóle funkcyą eliptyczną jednowartościową.

Funkcya $\wp(u)$ może być nazwana funkcyą eliptyczną elementarną. Jest ona rzędu 2-go, za pomocą niej i jej pochodnej można wyrazić każdą inną funkcyę eliptyczną (na podstawie powyższego twierdzenia).

Widzimy tedy, że teorya funkcyj podwójnie peryodycznych sprowadza się do teoryi funkcyj eliptycznych; do tej więc odsyłamy czytelnika po szczegóły (patrz Rozdział XVI).

Dodajemy, że teoryę funkcyj eliptycznych, opartą głównie na pojęciu podwójnej peryodyczności, wyłożył Liouville w r. 1847 i ogłosił w Comptes rendus w r. 1851 (patrz też Crelle, LXXXVIII); potem tąż drogą poszli Briot i Bouquet (Journ. de l'Ecol. Polyt. 1856), oraz Méray. Wykład jasny twierdzeń o funkcyach podwójnie peryodycznych znajdujemy w dziele: Briot et Bouquet „Théorie des fonctions elliptiques" (Paryż, 1872).

Funkcye, nie pozostające bez zmiany przy powiększaniu argumentu peryodu, lecz pozyskujące wtedy czynnik stały lub wykładniczy stopnia 1, nazywamy zwykle funkcyami podwójnie peryodycznemi 2 go i 3-go gatunku, stosownie do tego, czy czynnik ten jest stałym, czy też wykładniczym stopnia 1-go co do zmiennej.

O związku tych funkcyj z funkcyami peryodycznemi zwyczajnemi znaleść można wiadomości w pracach Hermite'a (Comptes rendus 1861—62, 85), Mittag-Lefflera (tamże 1880), Brioschi'ego (tamże 1881), Frobeniusa (Crelle XCIII) i t. d. Porówn. też dzieło Forsytha „Theory of functions etc., Cambridge, 1893, Cap. XII, str. 273 i nast.

§ 5.

Funkcye modułowe.

Funkcya jednopostaciowa nazywa się modułową, jeżeli nie ulega zmianie przy wszystkich podstawieniach grupy lub podgrupy modułowej

$$\left(z, \quad \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right), \qquad (a_i d_i - b_i c_i = 1)$$

gdzie a, b, c, d są liczby rzeczywiste dodatnie. Nazwa „modułowa“ pochodzi stąd, że moduł k^2 funkcyj eliptycznych, uważany za funkcyę stosunku peryodów przestępnych $z = \frac{\omega'}{\omega}$, jest właśnie funkcyą tego gatunku.

Grupa modułowa jest niewłaściwie nieciągłą dla wartości z rzeczywistych (patrz § 2).

Jeżeli $F(z)$, $f(z)$ są funkcye modułowe, należące do grup G, G', gdzie G' jest podgrupą grupy G, to funkcya F wyraża się wymiernie przez funkcyę f.

Dwie funkcye modułowe, należące do tej samej grupy, wyrażają się wymiernie jedna przez drugą.

Niezmiennik bezwzględny funkcyj eliptycznych (patrz Rozdział XVI)

$$J = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4 (1 - k^2)^2}$$

jest funkcyą modułową, należącą do grupy całkowitej.

Podstawieniami tworzącemi grupy całkowitej są podstawienia

$$(z, \quad z + 1), \qquad \left(z, \quad -\frac{1}{z}\right),$$

z których pierwsze jest parabolicznem, drugie zaś eliptycznem peryodycznem.

Wielobok początkowy lub tworzący dla funkcyi k^2 jest czworobokiem krzywokreślnym nieskończonym na półpłaszczyznie dodatniej; dwa jego boki są równoległe do osi rzędnych i mają odcięte $+1$, -1, dwa drugie są półkołami na płaszczyźnie dodatniej o promieniu $\frac{1}{2}$, mającemi środki w punktach $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$.

W tym wieloboku funkcya k^2 przyjmuje raz jeden wszystkie swoje wartosci; t. j. wartosci, jakie przyjmuje w innych częściach płaszczyzny, są równe tym, jakie ma wewnątrz wieloboku.

Grupa funkcyi modułowej $k^2 k'^2$ tworzy się z dwu podstawień $\left(z,\ z+2\right)$, $\left(z,\ -\frac{1}{z}\right)$.

Dwie fukcye $\varphi = \sqrt[4]{k}$, $\psi = \sqrt[4]{k'}$ są funkcyami modułowemi, należącemi odpowiednio do grup następujących. Funkcya φ należy do podgrupy grupy funkcyi k^2, tworzącej się z trzech podstawien

$$A = (z,\ z+2),\quad B = \left(z,\ \frac{z}{-2z+1}\right),\quad C = \left(z,\ \frac{z}{2z+1}\right).$$

lecz w ten sposób, że w każdym iloczynie liczba czynników A jest kongruentną z zerem według mod. 8. Funkcya ψ należy do podgrupy grupy funkcyi k^2, tworzącej się z tychże trzech podstawień, lecz w ten sposób, że w każdym iloczynie liczba czynników B, zmniejszona o liczbę czynników C, jest $\equiv 0$ (mod. 8).

Wielobok tworzący dla niezmiennika bezwzględnego

$$J(z) = \frac{4}{27}\,\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2}$$

ma trzy boki; jednym jest łuk koła o promieniu 1 ze środkiem w początku, rozciągającego się od punktu z odciętą $-\frac{1}{2}$ do punktu z odciętą $+\frac{1}{2}$; pozostałe boki są prostemi, wychodzącemi z końca tego boku i rozciągającemi się do $+\infty$ równolegle do osi rzędnych. Funkcya $J(z)$ w punktach $z = i$,

$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ i ∞, t. j. w wierzchołkach półtrójkąta tworzącego, przyjmuje odpowiednio wartości 1, 0, ∞.

Grupa funkcyi modułowej k^2 (moduł Legendre'a) jest utworzona z podstawień:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2};$$

jej podstawieniami tworzącemi są

$$\left(z, \frac{1}{2z+1}\right), \qquad (z, \quad z+2).$$

Teorya funkcyj modułowych jest najściślej związana z teoryą przekształceń funkcyj eliptycznych (patrz Rozdz. XVI).

Nazwa: „funkcye modułowe eliptyczne" pochodzi od Dedekinda (Crelle LXXXIII. 1877) Badaniem w niej zasadniczem jest to, które odnosi się do podgrup grupy zasadniczej i do funkcyj do nich należących. Klein zbadał rozległą klasę tych podgrup.

Głównemi pracami o tej teoryi są prace: Kleina (Math. Ann. XVI, XVII), Hurwitza (tamże XVIII), Dycka, Gierstera (tamże XVII, XX), Frickego (tamże XXI, XXYIII, XXIX), Kieperta (Crelle LXXXVII).

Punktem wyjścia prac Kleina były jego własne badania nad grupami skończonemi, a potem studyum rozprawy Schwarza (Crelle LXXV) o szeregu hypergeometrycznym. Niedawno wyszło obszerne dwutomowe dzieło o funkcyach modułowych, opracowane przez Frichego, według wykładów Kleina („Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen", Lipsk, 1890—92)

§ 6.

Funkcye Fuchsa i Kleina (automorficzne).

Teoryę funkcyj podwójnie peryodycznych rozpoczynamy od zbudowania funkcyi Θ, których stosunki właśnie funkcye te wyrażają. Poincaré usiłował pójść tą samą drogą dla funkcyj ogólniejszych, które nas w tej chwili zajmują.

Zauważywszy, że szereg

$$\Sigma_i \left|\frac{1}{(c_i z + d_i)^{2m}}\right| \qquad (m \text{ całkowite} > 1)$$

jest zbieżny, zbudował on szereg zbieżny

$$\Theta(z) = \Sigma_i H\left(\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right) \frac{1}{(c_i z + d_i)^{2m}},$$

(gdzie H jest symbolem jakiejkolwiek funkcyi wymiernej), przedstawiający funkcyę jednopostaciową, którą nazwał teta-fuchsową lub teta-kleinową stosownie do tego, czy grupa zasadnicza jest grupą Fuchsa czy Kleina. Można tę funkcyę nazwać także pseudo-automorficzną.

Liczba punktów zerowych i nieskończonościowych tej funkcyi wewnątrz wieloboku początkowego lub tworzącego R_0 jest zawsze skończona.

Funkcya Θ sprawdza związek:

$$\Theta\left(\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right) = \Theta(z)\,(c_i z + d_i)^{2m}.$$

Każda taka funkcya analityczna istnieje tylko w tej części płaszczyzny, do której należy wielobok początkowy oraz wszystkie wieloboki w liczbie nieskończonej, które otrzymują się z niego przez po lstawienia grupy. Tak np. w przypadku grup fuchsowych w znaczeniu obszerniejszem funkcya istnieje tylko w kole zasadniczem lub w części tego koła, którego okrąg jest linią osobliwą dla tej funkcyi. Mamy tu funkcye o obszarach osobliwych. (Patrz Rozdział XIII).

Iloraz dwu takich funkcyj, odpowiadających tej samej liczbie m, jest funkcyą automorficzną, mającą nieskończoną liczbę zer i nieskończoności wewnątrz R_0. Odwrotnie, funkcyę automorficzną można zawsze wyrazić za pomocą funkcyj Θ.

Pomiędzy dwiema funkcyami automorficznemi. odpowiadającemi tej samej grupie, zachodzi zawsze związek algebraiczny, i każda inna funkcya tej grupy wyraża się wymiernie przez dwie takie funkcye

Spółrzędne punktów krzywej algebraicznej jakiejkolwiek dają się zawsze wyrazić jako funkcye fuchsowe jednego i tego samego parametru.

Każde równanie różniczkowe liniowe o spółczynnikach algebraicznych daje się zawsze całkować przez funkcye fuchsowe i tetafuchsowe.

Co do innych szczegółów patrz prace, cytowane w § 2.

ROZDZIAŁ XV.

FUNKCYE ALGEBRAICZNE I CAŁKI ABELOWE.

---

§ 1.

Ogólne wiadomości o funkcyach algebraicznych. Rozgałęzienie.

Wyobraźmy sobie związek $f(w, z) = 0$, gdzie f jest funkcyą wymierną całkowitą pomiędzy dwiema zmiennemi zespolonemi w i z. Ilość w. określona jako funkcya ilości z, będzie wogóle wielowartościową, a mianowicie będzie miała n wartości, jeżeli n jest stopniem równania względem w. Funkcya taka nazywa się funkcyą algebraiczną zmienej z. Ogólniej: Każda funkcya wymierna ilości w i z, pomiędzy któremi zachodzi związek powyższy, nazywa się funkcyą algebraiczną zmiennej z.

Zresztą od drugiego określenia można powrócić do pierwszego, gdyż, jeżeli położymy $w_1 = R(w, z)$ i wyrugujemy w pomiędzy tem równaniem i danem $f(w, z) = 0$, otrzymamy równanie wymierne $F(w_1, z) = 0$.

Jeżeli zmiennej z nadamy wartość $z = z_0$, wtedy równanie stopnia n-tego względem w, $f(w, z) = 0$, da nam n pierwiastków w, które mogą być wszystkie różne, lub też niektóre pomiędzy niemi mogą być i równe. Jeżeli przyjmiemy, że jest w ogole m pierwiastków równych, będziemy mieli twierdzenie Cauchy'ego (Exercices, 1841).

Jeżeli dla $z=z_0$ równanie ma m pierwiastków w równych w_0, wtedy dla wartosci z blizkiej z_0 m pierwiastków równania posiadać będzie wartosci nieskończenie mało różniące się od w_0.

Gdy dla $z=z_0$ pierwiastek $w=w_0$ nie jest wielokrotny, wtedy: jeżeli w płaszczyźnie z zmienna z opisze koło dostatecznie małe około punktu z_0, to zmienna w w płaszczyźnie w opisze koło dostatecznie małe około punktu w_0; jednemu obrotowi w płaszczyźnie z odpowiada jeden obrót lub całkowita liczba obrotów w płaszczyźnie w. W otoczeniu punktu z_0 funkcya $w=w_0$ daje się rozwinąć na szereg, uporządkowany według potęg całkowitych rosnących różnicy $z-z_0$, poczynając od potęgi pierwszej, lub od potęgi wyższej, niż pierwsza.

Gdy dla $z=z_0$ funkcya f ma m pierwiastków równych w_0, wtedy: jeżeli zmienna z opisuje w swej płaszczyźnie około punktu z_0 koło dostatecznie małe, wartość w okrąży punkt w_0, lecz w ten sposób, że gdy z czyni jeden obrót w swej płaszczyźnie, w przechodzić będzie od jednego z pierwiastków nieskończenie blizkich w_0 (zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego) do innego. Jeżeli po uskutecznieniu pewnej liczby m_1 obrotów w płaszczyźnie z, powrócimy w płaszczyźnie w do pierwiastka, z którego wyszliśmy, przeszedłszy przez m_1 z pomiędzy m pierwiastków, mówimy wtedy, że m_1 pierwiastków tworzy cykl. Z pozostałych pierwiastków znowu m_2 tworzy nowy cykl i t. d.; suma $m_1+m_2+\dots$ równa się oczywiście liczbie m.

Pierwiastki w liczbie m_1, tworzące cykl, dają się w otoczeniu punktu z_0 rozwinąć na szeregi, których pierwszym wyrazem jest z_0, a pozostałe wyrazy postępują według potęg całkowitych dodatnich czynnika $(z-z_0)^{\frac{1}{m_1}}$; podobnie się rzecz ma dla m_2 pierwiastków, tworzących cykl drugi i t. d. Wartość tedy funkcyi w w punkcie najbliższym punktu z_0 wyobraża tyle szeregów, ile jest cyklów, na które rozpadają się pierwiastki uważanego równania.

Jeżeli wszystkie liczby $m_1, m_2, \ldots$ są równe jedności, wtedy w otoczeniu punktu z_0 otrzymujemy m rozwinięć szeregowych. odpowiadających m różnym wartościom funkcyi w tym punkcie. Jeżeli przedstawimy zwiazek $f(w, z)=0$ za pomocą krzywej na płaszczyźnie, to przypadek ten odpowie rozważaniu punktu m-krotnego krzywej o stycznych różnych.

Jeżeli nie wszystkie liczby m są równe jedności, punkt z_0 nazywa się punktem rozgałęzienia rzędu m_1-1 dla m_1 wartości funkcyi w, stanowiących cykl pierwszy, rzędu m_2-1 dla m_2 wartości, stanowiących cykl drugi i t. d. W przedstawieniu geometrycznem punkt rozgałęzienia odpowiada punktowi takiemu krzywej, że przechodząca przezeń rzędna przecina w dwu przynajmniej punktach nieskończenie blizkich tęż samą gałęź krzywej; w szczególności zaś punktowi, w którym styczna do gałęzi linii krzywej jest prostopadła do osi odciętych.

Jeżeli w szczególności rozwinięcie funkcyi w na szereg według potęg ilości $(z-z_0)^{\frac{1}{m}}$ rozpoczyna się od wyrazu z czynnikiem $(z-z_0)^{\frac{m_1}{m_1}}=z-z_0$, t. j. jeżeli są zerami pierwsze m_1-1 spółczynników rozwinięcia, to i wtedy z_0 będzie punktem rozgałęzienia, lecz natury bardziej złożonej. W przedstawieniu geometrycznem krzywej ten przypadek zachodzi dla ostrza, lub ogólniej dla punktu wielokrotnego o zlewających się stycznych. Takie rozgałęzienie nazywać będziemy rozgałęzieniem ostrzowem.

Jeżeli z_0 nie jest punktem rozgałęzienia lub jeżeli jest punktem rozgałęzienia ostrzowego, wtedy otoczenie tego punktu i otoczenie punktu w, odpowiadają sobie wzajemnie w odtworzeniu podobnem; jeżeli zaś z_0 jest punktem rozgałęzienia zwykłego rzędu m_1-1, odtworzenie nie jest podobnem.

Punkt rozgałęzienia zwykłego rzędu m_1-1 można uważać jako zjednoczenie m_1-1 nieskończenie blizkich punktów rozgałęzienia rzędu 1-go.

Dzieje się to (jeżeli wyłączymy rozważanie rozgałęzienia ostrzowego) na podstawie następującego twierdzenia Noethera (Math. Ann. IX; por. także rozprawę Halphena: Sur les points singuliers des courbes algébriques", gdzie można znaleść też wskazówki bibliograficzne):

Można zawsze, za pomocą przekształceń Cremony przekształcić krzywą algebraiczną płaską $f(w,z)=0$ na inną, mającą tylko punkty wielokrotne o stycznych różnych.

Liczba punktów rozgałęzienia pojedyńczych, zwyczajnych i ostrzowych, odpowiadających równaniu $f(w,z)=0$, wynosi $n(n-1)-2d-2r$, gdzie n jest rząd krzywej, którą przedstawia to równanie, d jest liczba punktów podwójnych krzywej, r liczba ostrzy. Jeżeli krzywa ma punkty wielokrotne, to każdy z nich powinien być liczony w tym wzorze za pomocą swego równoważnika w punktach podwójnych i ostrzach, jak tego uczy teorya krzywych algebraicznych.

Dla każdego punktu rozgałęzienia być musi:

$$\frac{\partial f}{\partial w}=0, \quad \text{lub} \quad \frac{\partial w}{\partial z}=\infty.$$

Nie jest to wszakże warunek dostateczny rozgałęzienia, gdyż jeżeli np.

$$\frac{\partial f}{\partial w}=0, \text{ i oprócz tego } \frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

wtedy rozgałęzienia niema.

Jeżeli równanie zasadnicze jest postaci

$$z-(a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_n) = 0.$$

wtedy punktami rozgałęzienia jest punkt $z=\infty$, który jest punktem rozgałęzienia rzędu $(n-1)$ go, oraz punkty z, którym odpowiadają wartosci w, będące pierwiastkami równania

$$na_0 w^{n-1} + (n-1)\, a_1 w^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-2} = 0,$$

którego strona pierwsza jest pochodną strony pierwszej równania $f=0$.

Jeżeli równanie zasadnicze $f=0$ jest postaci

$$w^2 - (a_0 z + a_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + a_n) = 0,$$

to punktów rozgałęzienia jest n i są niemi pierwiastki równania:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0.$$

Większą część twierdzeń w tym paragrafie podaje klasyczna rozprawa Puiseux'go (Journ. de Liouville, XV, 1850).

---

§ 2.

Konstrukcya powierzchni Riemanna.

Do badania funkcyj algebraicznych nadają się dość dobrze tak nazwane powierzchnie Riemanna, wprowadzone po raz pierwszy przez tego uczonego. Powierzchniom tym poświęcamy specyalny rozdział w tomie 2-gim tej książki, gdzie mówić będziemy o nich ze stanowiska geometrycznego („Teorya spójności powierzchni"); tu damy pojęcie o nich o tyle tylko, o ile to jest potrzebne do przedstawienia funkcyj algebraicznych.

Dajmy, że funkcya algebraiczna ma n wartości. Zamiast jednej płaszczyzny z, wyobraźmy sobie n płaszczyzn z, położonych jedna na drugiej w ten sposób, aby punkty, dla których z ma tę samą wartość, znajdowały się na sobie. Na każdej z płaszczyzn połóżmy jedną z n wartości, jakie przyjmuje w dla tej samej wartości z: następnie spójmy płaszczyzny w ten sposób, aby wyszedłszy z pewnego punktu i obiegłszy płaszczyzny po pewnej drodze, można było powrócić do punktu wyjścia z tą samą wartoscią na w.

Płaszczyzny, leżące na sobie i tworzące powierzchnię **Riemanna**, nazywają się jej liśćmi.

Dla ustalenia myśli, przyjmijmy, że mamy tylko dwie płaszczyzny ($n=2$); oznaczmy na nich punkty rozgałęzienia, których liczba powinna być w tym przypadku parzysta, i połączmy je po dwa (t. j. 1-y z 2-gim, potem 3-i z 4-ym i t. d.) za pomocą jakichkolwiek linij (które mogą być i prostemi), nie przecinających się ze sobą (linie spójności). Przetnijmy płaszczyzny wzdłuż tych linij, a następnie złączmy brzeg prawy płaszczyzny górnej z brzegiem lewej płaszczyzny dolnej, oraz brzeg lewy płaszczyzny górnej z brzegiem prawym płaszczyzny dolnej. Skutkiem takiego spojenia płaszczyzn można przejść od jednej z nich do drugiej, lecz nie można okrążyć punktu rozgałęzienia w jednej i tej samej płaszczyźnie; przebiegając tedy po okręgu około punktu rozgałęzienia, przechodzimy od płaszczyzny górnej do dolnej, aby po tem po obrocie wrócić do płaszczyzny górnej.

Niechaj w ogólności będzie n płaszczyzn z, położonych na sobie i niechaj $z=z_0$ będzie punktem rozgałęzienia, w którym m_1 z pomiędzy n wartości w przemienia się wzajemnie kołowo, inne m_2 tworzą cykl drugi i t. d. (patrz § 1), wtedy poczynając z punktu z_0, robimy tyleż cięć w rozmaitych płaszczyznach i spajamy je ze sobą w ten sposób, aby m_1 z pomiędzy nich stanowiło cykl pierwszy (1-y z 2-gim, 2-gi z 3-im.... m_1-ty z 1-ym), m_2—cykl drugi i t. d

Jeżeli krzywa, przedstawiona przez równanie $f(w,z)=0$, jest nierozkładalną, t. j. nie może rozpadać się na krzywe niższe, wtedy układ tak spojonych n płaszczyzn stanowi powierzchnię jedyną, która może się przekształcać sposobem ciągłym w ten sposób, że powstaje stąd powierzchnia zwykłego wyglądu różnie spleciona i na której z jednego punktu można, sposobem ciągłym, przejść do każdego innego.

Jeżeli funkcya f jest rozkładalna, wtedy mamy nie jednę lecz tyle powierzchni, na ile czynników rozkłada się f; na każdej z nich można przejść z jednego punktu do innego sposobem ciągłym.

Jeżeli krzywa nierozkładalna, przedstawiona przez równanie $f(w, z)=0$, jest rodzaju p (patrz „Teorya krzywych"), wtedy odpowiadająca jej powierzchnia Riemanna jest także rodzaju p. Ta liczba całkowita dodatnia przedstawia największą liczbę cięć zamkniętych, które można uskutecznić na powierzchni, nie doprowadzając jej do rozpadnięcia (patrz „Teorya spójności").

Powierzchnia Riemanna rzędu p może być sposobem ciągłym przekształcona na kulę p— powłokową, t. j. na kulę, w której uczyniono $2p$ otworów i połączono je dwa po dwa powierzchniami postaci rur zwiniętych.

Powierzchnia nazywa się pojedyńczo-spójną lub jedno-spójną, jeżeli rozpada się skutkiem jakiegokolwiek uskutecznionego na niej cięcia zamkniętego, albo skutkiem cięcia, łączącego punkt brzegu z innym punktem tegoż brzegu, gdy powierzchnia posiada brzegi. Tak np. jednospójną jest kula (powierzchnia bez brzegów lub część płaszczyzny ograniczona kołem).

Każdą powierzchnię Riemanna rodzaju p można uczynić jednospójną za pomocą p cięć zamkniętych (cięcia A), p cięć otwartych (cięcia B), łączących dwa punkty całkowitego brzegu, które powstały na powierzchni skutkiem pierwszych cięć, wreszcie za pomocą innych p—1 cięć otwartych (cięcia C).

Ogół tych wszystkich cięć przedstawia brzeg jedyny, który można przebiedz całkowicie, wychodząc z pewnego punktu; jest to brzeg powierzchni, która stała się jednospójną.

Jeżeli powierzchnia Riemanna rodzaju p daje się zamienić na inną, mającą tylko dwa liście, to nazywa się hypereliptyczną.

Typem kanonicznym powierzchni hypereliptycznej Riemanna rodzaju p jest powierzchnia, złożona z dwu liści i mająca $2p+2$ punktów rozgałęzienia.

Dla $p=1$ każda powierzchnia Riemanna jest hypereliptyczną; właściwie mamy wtedy tak zwaną powierzchnię eliptyczną Riemanna.

Dla powierzchni hypereliptycznej o dwu liściach, układ cięć A, B, C, zamieniających ją na jednospójną, tworzy się sposobem następującym. Niechaj punkty $a_1, a_2, \ldots, a_{2p+1}$ będą punktami rozgałęzienia a proste $(a_1\, a_2)$, $(a_3\, a_4) \ldots (a_{2p+1} a_{2p+2})$ liniami spójności. Wykreslmy na jednej z płaszczyzn krzywe zamknięte, zawierające w swem wnętrzu pierwsze p z pomiędzy linij spójności, otrzymamy tym sposobem linię $A_1\, A_2 \ldots A_p$. Następnie tworzymy B_1, kreśląc krzywę zamkniętą, która wychodząc z jednej z płaszczyzn z punktu linii $a_1\, a_2$, dochodzi do punktu linii $a_{2p+1}\, a_{2p+2}$ i, przeszedłszy następnie do drugiej płaszczyzny, wraca do tegoż samego punktu linii $(a_1\, a_2)$. Podobnież tworzymy $B_2, \ldots B_p$ i kreślimy te linie tak, aby się nie przecinały. Wreszcie tworzymy linie $C_1, \ldots\ldots, C_{p-1}$, łącząc punkt linii A_2 z punktem linii B_1. punkt linii A_3 z punktem linii B_2 i t. d

§ 3.

Funkcye na powierzchni Riemanowskiej.

Dla każdego punktu powierzchni Riemanna mamy jednę wartość z i jednę wartość w; ta ostatnia pozostaje bez zmiany bez względu na drogę, jaką na powierzchni dochodzimy do punktu.

Niechaj będzie funkcya monogeniczna zmiennych z i w taka, że dla każdej pary wartości z, w, czyniących zadość związkowi $f(w, z) = 0$, t. j. dla każdego punktu powierzchni Riemanna ma ona jednę wartość. Taka funkcya nazywa się funkcyą jednopostaciową na powierzchni Riemanna.

Każda funkcya jednopostaciowa na powierzchni Riemanna, nie mająca innych osobliwości prócz biegunów (t. j. punktów, w których staje się nieskończoną tak, że jej odwrotność jest w tych punktach zerem i funkcyą ciągłą) jest funkcyą wymierną ilości w i z (funkcyą algebraiczną ilości z).

Każda funkcya jednopostaciowa na powierzchni Riemanna musi koniecznie posiadać bieguny, t. j. nie może być skończoną na całej powierzchni, chyba że jest stałą.

Każda funkcya algebraiczna (funkcya jednopostaciowa na powierzchni Riemanna) przyjmuje każdą wartość k razy; w szczególności zaś ma tyle zer, ile ma biegunów. Liczba k nazywa się stopniem funkcyi.

Grupa k punktów, z w których funkcya algebraiczna przybiera tę samą wartość, nazywa się równoresztną (korresydualną), z grupą innych k punktów, w których taż sama funkcya przybiera inną wartość.

Nie istnieje funkcya algebraiczna, mająca mniej niż $p+1$ biegunów dowolnie danych, gdzie p jest rodzajem zasadniczej powierzchni Riemanna.

Funkcya algebraiczna ogólna, mająca $p+1$ biegunów dowolnie danych, zawiera liniowo dwie stałe jednorodne, t. j. jest postaci $c_1 F + c_2$, gdzie F jest funkcyą określoną tejże natury.

Funkcya algebraiczna ogólna, mająca k biegunów dowolnie wybranych, zawiera liniowo $k-p+1$ stałych dowolnych, t. j. istnieje $k-p$ prawdziwych funkcyj (wyłączamy ilość stałą) liniowo niezależnych, mających bieguny swoje wszystkie lub niektóre w tych k punktach. (Twierdzenie Riemanna, Crelle LIV, Abel'sche Functionen n. 5.)

Uogólnienie tego twierdzenia odnosi się do przypadku, w którym punkty dane mają położenie specyalne.

Jeżeli równanie $f(w, z) = 0$ rozważamy jako równanie krzywej płaskiej rzędu n-tego, to krzywą dołączoną rzędu $(n-3)$-go nazywamy taką krzywą tego rzędu, która przechodzi $(r-1)$-krotnie przez punkty r-krotne krzywej zasadniczej.

Krzywa dołączona rzędu $(n-3)$-go ma $2p-2$ zmiennych punktów przecięcia (prócz punktów wielokrotnych) z krzywą zasadniczą i istnieje p krzywych dołączonych rzędu $(n-3)$-go, liniowo od siebie niezależnych.

Jeżeli k punktów należy do przecięć (zmiennych) krzywej dołączonej rzędu $(n-3)$-go z krzywą f, mówimy wtedy, że te k punktów tworzy grupę specyalną.

Jeżeli przez k punktów danych przechodzi τ krzywych rzędu $(n-3)$-go liniowo niezależnych, to funkcya algebraiczna, mająca bieguny swe wszystkie lub niektóre w tych k punktach, zawierać będzie liniowo $k-p+\tau+1$ stałych dowolnych jednorodnych. (Twierdzenie Riemanna-Rocha, Crelle LXIV.)

Jeżeli $\tau=0$, mamy wyżej przytoczone twierdzenie Riemanna.

Funkcya algebraiczna, której bieguny tworzą grupę specyalną, nazywa się funkcyą specyalną.

L i c z b a b i e g u n ó w f u n k c y i s p e c y a l n e j j e s t c o n a j w y ż e j r ó w n a $2p-2$ i m o ż e d o s i ę g n ą ć t e j g r a n i c y.

K a ż d ą f u n k c y ę s p e c y a l n ą m o ż n a p r z e d s t a w i ć w p o s t a c i $\frac{\Phi}{\Psi}$, g d z i e Φ i Ψ s ą p i e r w s z e m i s t r o n a m i r ó w n a ń d w u k r z y w y c h d o ł ą c z o n y c h r z ę d u $n-3$.

Teorya funkcyj algebraicznych jest ściśle związana z teoryą grup punktów na krzywej. O tej teoryi istnieje pierwsza praca klasyczna Brilla-Noethera (Math. Ann. VII); po szczegóły odsyłamy czytelnika do drugiego tomu tej książki.

O twierdzeniu Riemanna-Rocha, oprócz prac wskazanych, patrz jeszcze Lindemann: „Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz“ (Lipsk 1879). Noether (Spraw. Erlangen 1879).

Przed zakończeniem tego paragrafu winniśmy jeszcze dodać, że można utworzyć teoryę funkcyj monogenicznych na powierzchni, uogólniając pojęcie funkcyi zmiennej urojonej na płaszczyźnie.

Na powierzchni danej rozważajmy układ spółrzędnych krzywokreślnych p, q i niechaj E, F, G będą spółczynniki formy różniczkowej, wyrażającej kwadraty elementu liniowego powierzchni (patrz tom II rozdział o „Geometryi różniczkowej“).

Jeżeli p', q' są funkcyami rzeczywistemi ilości p i q, czyniącemi zadość dwom związkom:

$$\frac{\partial q'}{\partial p} = - \frac{E\frac{\partial p'}{\partial q} - F\frac{\partial p'}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\frac{\partial q'}{\partial q} = + \frac{G\frac{\partial p'}{\partial p} - F\frac{\partial p'}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

wtedy zmienna zespolona $p'+iq'$ będzie funkcyą punktu powierzchni o spółrzędnych p i q, taką, że jej wartość jest niezależna od kierunku, w jakim porusza się na powierzchni punkt p, q: nie będzie zas funkcyą zmiennej zespolonej $p + iq$, chyba że p, q stanowią układ spółrzędnych izometrycznych. W ogóle wszakże będzie funkcyą innej kombinacyi zespolonej zmiennych p i q; kombinacya ta jest mianowicie całką różniczki dokładnej, którą otrzymujemy, mnożąc

$$\sqrt{E}\,dp + (F + i\sqrt{EG + F^2})\frac{\partial q}{\sqrt{E}}$$

przez czynnik całkujący postaci ogólnej zespolonej $\mu + i\nu$.

Powyższe związki są związkami koniecznemi i dostatecznemi na to, aby zmienna zespolona była funkcyą innej; z nich otrzymujemy dwa związki następujące:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{G\frac{\partial q'}{\partial p} - F\frac{\partial q'}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{E\frac{\partial q'}{\partial q} - F\frac{\partial q'}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{G\frac{\partial p'}{\partial p} - E\frac{\partial p'}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{E\frac{\partial p'}{\partial q} - F\frac{\partial p'}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) = 0,$$

zastępujące związki $\Delta^2 = 0$ teoryi zwykłej (patrz Rozdz XIII).

Jeżeli przedstawimy $p' + iq'$ przez punkty płaszczyzny, to zmienna ta będzie funkcyą punktu powierzchni (w znaczeniu wyżej wskazanem), jeżeli powierzchnia i część płaszczyzny odpowiadają sobie w o d t w o r z e n i u p o d o b n e m. Ogólniej, jeżeli p', q' są spółrzędnemi krzywokreslnemi punktu innej powierzchni, wtedy zagadnienie: „uczynić punkt jednej powierzchni funkcyą monogeniczną punktu drugiej“, odpowiada: „odtworzeniu podobnemu“ jednej powierzchni na drugą (patrz rozdział odpowiedni w tomie 2-gim).

Poprzednie rezultaty znajujemy po raz pierwszy w klasycznej rozprawie B e l t r a m i'ego (Annali di mat. I, str. 329); inne wskazówki i szczegoły u N e u m a n n a (Abel'sche Integrale, Lipsk, 1865, 1884) i K l e i n a (Algebraische Functionen, Lipsk 1892).

§ 4.

Całki abelowe.

Niechaj $R(w, z)$ będzie funkcyą algebraiczną zmiennej z, która ze zmienną w połączona jest związkiem wymiernym $f(w, z) = 0$; całka

$$\int R\,(w, z)\,dz$$

nazywa się całką abelową.

Funkcya z, którą ta całka przedstawia, jest w ogóle funkcyą o nieskończenie wielu wartościach: to znaczy, że, idąc na powierzchni Riemanna po różnych drogach całkowania, można dojść do tego samego punktu z różnemi wartościami całki.

Jeżeli za pomocą cięć A, B, C uczynimy powierzchnię jednospójną (patrz § 2), to różnica wartości całki w dwu odpowiednich punktach brzegów, utworzonych za pomocą cięcia, A jest ilością stałą, która nazywa się modułem peryodyczności pierwszego gatunku; dla cięć B mamy moduły peryodyczności drugiego gatunku, dla cięć C ta różnica jest zerem.

Całka abelowa ma najmniej $2p$ modułów peryodyczności; różnica dwu wartości, jakie ona może mieć w punkcie, jest sumą wielokrotności jej modułów peryodyczności.

Całki abelowe rozróżniają się według natury funkcyi $R\,(w, z)$, lub lepiej według natury biegunów tej funkcyi.

Jeżeli funkcya R nie ma innych biegunów, prócz punktów rozgałęzienia, wtedy całka może być stale skończoną, i mamy całkę gatunku pierwszego. Jeżeli funkcya R ma biegun rzędu wyższego nad 1 w punkcie (w_0, z_0), wtedy całka staje się w tym punkcie nieskończoną, podobnie jak funkcya algebraiczna (punkt nieskończoności algebraicznej) i otrzymujemy całkę gatunku 2-go. Jeżeli wreszcie R ma biegun rzędu 1-go w punkcie (w_0, z_0), wtedy całka staje się w tym punkcie nieskończoną, jak logarytm funkcyi algebraicznej (punkt nieskończoności logarytmowej) i będziemy mieli całkę gatunku 3-go,

Całki dwu pierwszych gatunków mają jako moduły peryodyczności tylko wyżej rzeczone moduły w liczbie $2p$; całki gatunku 3-go mają, prócz tych, jeszcze inne moduły, zależne od nieskończonosci logarytmowych. Jeżeli okrążamy takie nieskończoności, to wartość całki powiększa się o iloczyn liczby $2\pi i$ przez wielokrotność pozostałości, która tej nieskończoności odpowiada (patrz Rodział XIII, § 6).

Suma pozostałości całek 3-go gatunku jest zawsze zerem.

Każda całka abelowa daje się zawsze przedstawić za pomocą kombinacyi liniowej całek 1-go, 2-go i 3-go gatunku.

Jeżeli zmienna całki abelowej przebiega sposobem ciągłym ogół trzech układów cięć A, B, C, t. j. kontur całej powierzchni Riemanowskiej jednospójnej, otrzymujemy na rezultat tożsamościowo zero.

W przypadku rodzaju $p=0$, t. j. w przypadku zwyczajnej płaszczyzny zespolonej niema całek 1-go gatunku; oznacza to, że całki funkcyj wymiernych zmiennej są zawsze całkami gatunku 2-go lub 3-go; a więc dla $p=0$ nie ma funkcyj, które pozostają skończonemi dla całej płaszczyzny zespolonej (nawet dla $z=\infty$).

Jeżeli powierzchnia zasadnicza Riemannowska jest hypereliptyczną lub w szczególnosci eliptyczną, wtedy odpowiednie całki abelowe nazywają się hypereliptycznemi lub eliptycznemi.

§ 5.

Całki abelowe gatunku 1-go.

Istnieje p całek abelowych 1-go gatunku liniowo-niezależnych, jeżeli powierzchnia zasadnicza Riemanna jest nierozkładalna i rodzaju p.

Jeżeli $f(w, z) = 0$ rozkłada się na k czynników, wtedy istnieje $p - k + 1$ całek abelowych 1-go gatunku liniowo-niezależnych (Christoffel, Ann. di mat. X).

Każda całka abelowa 1-go gatunku odpowiada jednej z p krzywych dołączonych rzędu $(n-3)$-go.

Oznaczmy przez $w_1, w_2, \ldots, w_p$ całki 1-go gatunku i niechaj $\omega_{il} \cdot \omega_{i, p+l}$ będą ich moduły peryodyczności. Niechaj mianowicie ω_{il} będzie wartością całki ω_i, gdy zmienna całkowania przebiega w kierunku dodatnim (t. j. w kierunku przeciwnym ruchowi skazówek zegarowych) linię B_l; i podobnie $\omega_{i, p+l}$ niechaj będzie wartością tejże całki, gdy zmienna przebiega linię A_l. Ilości ω_{ik} można też określić jako różnice dwu wartości całek na dwu brzegach linii A_k; i podobnie określić można $\omega_{i,p+k}$.

Pomiędzy modułami peryodyczności istnieją związki dwuliniowe, znalezione przez Riemanna (Werke, str. 124). Są one następujące:

$$\sum_{k=h}^{p} (\omega_{ik}\, \omega_{j, p+k} - \omega_{i, p+k}\, \omega_{jk}) = 0,$$

a jest ich $\frac{p(p-1)}{2}$.

Jeżeli razem z temi związkami będziemy rozważali związki analogiczne pomiędzy modułami peryodyczności całek 2-go gatunku (patrz niżej), to przy pomocy pewnego rozwiązania można mieć związki, w których drugie skaźniki ilości ω są stałe, pierwsze zaś zmienne w sumowaniu, gdy tymczasem poniżej jest przeciwnie. Związki te otrzymał Weierstrass (Progr. Gymn. Braunsberg. 1849, patrz § 6).

Jeżeli położymy

$$\omega_{ik} = \alpha_{ik} + i\beta_{ik},$$

to suma

$$\sum_{k=1}^{p} (\alpha_{ik}\beta_{i,k+p} - \alpha_{i,k+p}\beta_{ik})$$

będzie z pewnością różna od zera i dodatnia; przedstawia ona pole całego odtworzenia podobnego powierzchni Riemanna na płaszczyznie całki w_i. Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \omega_{11}, & \omega_{12}, & \cdots & , \omega_{1p} \\ \omega_{21}, & \omega_{22}, & \cdots & , \omega_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \omega_{p,1}, & \omega_{p,2}, & \cdots & , \omega_{p,p} \end{vmatrix}$$

musi być różny od zera.

Moduły 1-go gatunku nie mogą być wszystkie rzeczywistemi, jak również nie mogą być wszystkie czysto-urojonemi.

Nie istnieje całka 1-go gatunku, dla której są zerami wszystkie moduły peryodyczności względem cięć A, ani wszystkie moduły peryodyczności względem cięć *B*.

Można uważać p całek v pierwszego gatunku kombinacye liniowe poprzednich całek i takie, że tablica modułów peryodyczności odnośnie do cięć *A* jest następująca:

	A_1,	A_2,	. . . . . . ,	A_p
v_1,	1,	0,	. . . . . . ,	0
v_2,	0,	1,	. . . . . . ,	0
. .	. .	. .	. . . .	. .
. .	. .	. .	. . . .	. .
. .	. .	. .	. . . .	. .
v_p,	0,	0,	. . . .	1

Te całki nazywają się normalnemi. Riemann zamiast tych całek normalnych rozważał inne, dla których tablica poprzednia ma za elementy przekątnej głównej liczby $i\pi$ zamiast 1. Clebsch i Gordan (Abel'sche Functionen str. 408) uważali za całki normalne takie, w których te elementy są $2i\pi$.

Jeżeli przez τ_{ij} oznaczymy moduły peryodyczności całek normalnych względem cięć B, będziemy mieli związki $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, nadto części urojone modułów τ_{ii} powinny być wszystkie ze znakiem dodatnim.

Jeżeli położymy $\tau_{ij} = \gamma_{ij} + i\delta_{ij}$, to forma kwadratowa $\delta_{ij}\, n_i\, n_j$, gdzie liczby n są jakiekolwiek liczby rzeczywiste, powinna być zawsze różna od zera (forma kwadratowa określona).

---

§ 6.

Całki abelowe 2-go gatunku.

Istnieje p całek gatunku 2-go, liniowo od siebie niezależnych i stających się nieskończonościami 1-go rzędu w tym samym punkcie oznaczonym $z = \zeta$.

Różniczkując jednę z takich całek $r-1$ razy względem t, otrzymujemy całkę gatunku 2-go, która staje się ∞^r w punkcie t.

Całka gatunku 2-go, stająca się ∞^1 w dwu punktach, daje się wyrazić jako suma dwu całek, z których każda staje się ∞^1 w jednym tylko punkcie.

Możemy wyznaczyć całki 2-go gatunku $Y^{(t)}$ takie, że moduły ich peryodyczności względem cięć A są wszystkie zerami; wtedy moduły peryodyczności względem cięć B będą funkcyami algebraicznemi ilości t, równemi mianowicie $-2i\pi\psi_i(t)$, gdzie $\psi_i(z)$ jest pierwszą stroną równania krzywej dołączonej rzędu $n-3$, odpowiadającej całce normalnej 1-go gatunku v_i.

Jeżeli p punktów $t', t'', \ldots, t^{(p)}$ nie leży na krzywej dołączonej rzędu $n-3$ względem krzywej zasadniczej $f(w,z)=0$, wtedy każda całka $Y^{(t)}$ gatunku 2-go z nieskończonością jakąkolwiek w t rzędu pierwszego i mająca moduły równe zeru na cięciach A, daje się wyrazić za pomocą całek analogicznych, mających nieskończoności w punktach $t', t'', \ldots\ldots$

Wzór odnośny otrzymujemy, rozwijając wyznacznik

$$\begin{vmatrix} Y^{(t)}, & Y^{(t')}, & \ldots, & Y^{(t^{(p)})} \\ \psi_1(t), & \psi_1(t'), & \ldots, & \psi_1(t^{(p)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_p(t), & \psi_p(t'), & \ldots, & \psi_p(t^{(p)}) \end{vmatrix} = \text{Funkc. alg. ilości } t,$$

gdzie ilości ψ mają znaczenie wyżej określone.

Jeżeli $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ oznaczają minory, zawarte w macierzy ostatnich p kolumn poprzedzającego wyznacznika, podzielone przez wyznacznik

$$C = -\begin{vmatrix} \psi_1(t'), & \ldots\ldots, & \psi_1(t^{(p)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_p(t'), & \ldots\ldots & \psi_p(t^{(p)}) \end{vmatrix}$$

wtedy zachodzi związek

$$Y^{(t)} = \Sigma\, \psi_i(t)\, Y_i + \text{funkcya algebr. ilości } t.$$

Całki $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ można nazwać normalnemi; zachowują się one w sposób specyalny odnośnie do peryodyczności.

Ich moduły na cięciach A są wszystkie zerami; moduły na cięciach B są zerami, prócz jednego równego $2i\pi$: dla Y_i jest moduł względem cięć B_i równy $2i\pi$: moduły tych całek są niezależne od punktów nieskończoności.

Jeżeli zmienimy punkty nieskończoności, to nowe całki różnić się będą od dawnych o funkcye algebraiczne.

Różniczkując wzór poprzedni $r-1$ razy, otrzymujemy całkę drugiego gatunku, stawającą się ∞^r w punkcie t, wyrażoną liniowo przez p całek normalnych.

Jeżeli $Z^{(t)}$ jest jakąkolwiek całką 2-go gatunku z punktem nieskończonościowym w t rzędu 1-go, to utworzywszy $Z^{(t')}, \ldots, Z^{(t^p)}$, podobnie jak w twierdzeniach poprzedzających, dojdziemy do takichże rezultatów, pamiętając tylko o tem, że należy ilości Y zastąpić ilościami Z, ilości zaś ψ ilościami φ. Przez φ rozumiemy tu strony pierwsze równań krzywych dołączonych rzędu $(n-3)$-go, odpowiadających całkom 1-go gatunku w, nie zaś całkom normalnym v (patrz § poprzedzający).

Całki $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$, w ten sposób utworzone, nazywają się też całkami normalnemi; mają one moduły, niezależne od punktów nieskończoności.

Jeżeli przez $-\eta_{il}$, $-\eta_{i,l+p}$ oznaczymy moduły peryodyczności całek Z_i na cięciach A_l, B_l, będziemy mieli związki dwuliniowe:

$$\sum_{l=1}^{p} (\omega_{il}\,\eta_{j,l+p} - \omega_{i,l+p}\,\eta_{jl}) = 0, \quad \text{dla } i \neq j.$$
$$= 2i\pi \quad ,, \quad i = j,$$

gdzie ilości ω są modułami całek gatunku 1-go.

Nadto pomiędzy modułami całek gatunku 2-go zachodzą związki:

$$\sum_{l=1}^{p} (\eta_{il}\,\omega_{j,l+p} - \eta_{i,l+p}\,\eta_{jl}) = 0.$$

których jest $\frac{p\,(p-1)}{2}$.

Jeżeli napiszemy $\omega_{p+i,l}$ zamiast $\eta_{i,l}$, to wszystkie związki poprzednie wraz ze związkami § poprzedzającego zawrzeć będzie można w związku jedynym:

$$\sum_{l=1}^{p} (\omega_{il}\,\omega_{j,l+p} - \omega_{j,l}\,\omega_{i,l+p}) = 0, \quad j \neq i+p$$
$$= 2i\pi; \quad j = i+p$$

gdzie i, j przyjmują wszelkie wartości $1, 2, \ldots, 2p$. (Związki Riemanna).

Odwracając te związki, otrzymamy związki Weierstrassa:

$$\sum_{k=1}^{p} (\omega_{l,i}\,\omega_{k+l,j} - \omega_{l,j}\,\omega_{k+p,i}) = 0. \quad j \neq i+p$$
$$= 2i\pi \quad j = i+p;$$

związków tych jest $\frac{2p\,(2p-1)}{2}$.

Wyznacznik rzędu $2p$, utworzony ze wszystkich ilości ω, odnoszących się do całek 1-go i 2-go gatunku:

$$\begin{vmatrix} \omega_{1,1}, & \ldots\ldots & , \omega_{1,2p} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \omega_{2p,1}, & \ldots\ldots & , \omega_{2p,2p} \end{vmatrix}$$

jest różny od zera.

Funkcya algebraiczna ogólna, stająca się nieskończoną w r punktach $t', t'', \ldots, t^{(r)}$, może być wyrażona zawsze za pomocą wzoru

$$F = c' Z^{(t')} + \ldots\ldots + c^{(r)} Z^{(t^{(r)})} + C;$$

gdzie liczba stałych dowolnych określa się na podstawie twierdzenia Riemanna-Rocha.

---

§ 7.

Całki abelowe gatunku 3-go.

Z twierdzenia, podanego w § 4, według którego w całce 3-go gatunku suma pozostałości logarytmowych jest zerem, wynika, że całka taka ma co najmniej dwie nieskończoności logarytmowe.

Granicą całki trzeciego gatunku o dwu nieskończonościach, gdy te zbliżają się do siebie nieograniczenie, jest całka gatunku 2-go, mająca w tym punkcie nieskończonosć algebraiczną.

Całkę gatunku 3-go o r nieskończonościach algebraicznych można wyrazić liniowo przez r całek gatunku 3-go, z których każda ma tylko dwie nieskończoności.

Aby całkę gatunku 3-go o dwu nieskończonościach uczynić jednowartościową na powierzchni Riemanna, zamienionej na jednospójną, dość połączyć obie nieskończoności cięciem; na powierzchni tak przeciętej całka jest jednowartościową.

Pochodna całki gatunku 3-go względem jednego z punktów nieskończoności logarytmowej jest całką gatunku 2-go, mającą tylko jeden punkt nieskończoności algebraicznej rzędu pierwszego.

Jeżeli przez $P^{(tt_1)}$ oznaczymy całkę gatunku 3-go z dwoma punktami nieskończoności logarytmowych t, t_1, przez $Z^{(t)}$ całkę gatunku 2-go z nieskończonoscią algebraiczną t, będziemy mieli wzór

$$P^{tt_1} = \int_t^{t_1} Z^{(t)}\, dt.$$

Wyrażenie $Z^{(t)}$ jest znów całką pomiędzy dwoma punktami z, z_1 powierzchni Riemanna, które oznaczamy przez skaźniki dolne, będzie wtedy:

$$P^{tt_1}_{zz_1} = \int_t^{t_1} Z^{(t)}_{zz_1}\, dt.$$

Wprowadziwszy całki normalne gatunku 2-go, będziemy mieli

$$P^{tt_1}_{zz_1} = w_1^{tt_1} Z_1^{zz_1} + \; . \; . \; . \; . \; . + w_p^{tt_1} Z_p^{zz_1} + \int_t^{t_1} F\, dt,$$

gdzie F jest funkcyą algebraiczną ilości z, z_1, t i wszystkich punktów $t, t', \ldots, t^{(p)}$, zapomocą których tworzymy całki normalne $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$; ostatni wyraz jest funkcyą algebraiczną jednowartościową względem z, gdyż całkowanie odbywa się tylko względem zmiennej t.

Moduły peryodyczności całki $P^{tt_1}_{zz_1}$ są:

$$-\sum_{\iota=1}^{p} w_\iota^{tt_1} \eta_{\iota\lambda}, \quad \text{dla cięcia } A_l,$$

$$-\sum_{\iota=1}^{p} w_\iota^{tt_1} \eta_{\iota, l+p}, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad B_l.$$

Jeżeli wyjdziemy z całek Y_ι zamiast z całek Z_ι, otrzymamy całkę trzeciego gatunku, którą, według Clebscha i Gordana, oznaczamy przez Π.

Moduły peryodyczności całek $\Pi_{zz_1}^{tt_1}$ mają wartość zero na cięciach A_ι i równają się $2i\pi v_\iota^{tt_1}$ na cięciach B_ι.

Całka Π czyni zadość równości:

$$\Pi_{zz_1}^{tt_1} = \Pi_{tt_1}^{zz_1};$$

nazywa się to przemiennością parametrów t t_1, z argumentami z, z_1.

Mamy także wzór:

$$\Pi_{zz_1}^{tt_1} + \Pi_{zz_1}^{t_1t} + \Pi_{zz_1}^{t_2t} = 0,$$

jeżeli droga całkowania od z do z_1 nie przecina drogi $t\,t_1\,t_2\,t$.

Dla każdej całki trzeciego gatnnku $P_{zz_1}^{tt_1}$ suma

$$P_{zz_1}^{tt_1} + P_{zz_1}^{t_1t_2} + P_{zz_1}^{t_2t}$$

jest całką gatunku pierwszego

Całki gatunków 2-go i 3-go, rozważane w poprzednim i niniejszym paragrafie, zamieniliśmy na normalne, by uczynić możliwie najprostszemi ich moduły peryodyczności Nowsze badania Kleina i jego uczniów mają cel odmienny; idzie w nich o zbudowanie całek 2-go i 3-go gatunku w ten sposób, aby ilości podcałkowe były wyrażeniami niezmienniczemi względem formy podstawowej $f(w, z) = 0$, przedstawiającej powierzchnię Riemanna.

Należy wtedy zamiast w, z wprowadzić trzy zmienne jednorodne, utworzyć całkę trzeciego gatunku Q, która również jak i całka Π Clebscha-Gordana posiada własność niezmienności przy przemianie parametrów i argumentów.

Nie możemy tu wchodzić w szczegóły i dlatego ograniczamy się na podaniu wskazówek bibliograficznych, odnoszących się do całek abelowych.

Abel pierwszy znalazł sławne i ważne twierdzenie, o ktorem mówimy w paragrafie następnym. Teorya całek abelowych jest pokrewna z teoryą funkcyj abelowych, o których mówimy w rozdziale XVII, tak że bibliografie obu tych działów wiążą się ze sobą. Dziełami podstawowemi są tu: rozprawa Riemanna (Crelle, LXIV), lekcye Weierstrassa o funkcyach abelowych, dzieło Neumanna (Lipsk 1865, 1884), oraz dzieło Clebscha-Gordana (Lipsk 1866), które szczęśliwie zapoczątkowało związek pomiędzy pojęciami geometrycznemi i analitycznemi w tej dziedzinie. Najnowsze prace Kleina mieszczą się w Math. Ann. XXVII, XXXII, XXXVI.

---

§ 8.

Twierdzenie Abela.

Niechaj będzie funkcya algebraiczna t na powierzchni Riemanna i niechaj $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$ będą odpowiednio jej punkty zerowe i punkty nieskończonościowe (dwie grupy punktów spółresztowych); jeżeli I jest jakąkolwiek całką abelową, to suma

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{y_i}^{x_i} dI$$

jest funkcyą algebraiczno-logarytmową ilości t z dodaniem wielokrotności modułów peryodyczności całki I (Twierdzenie Abela).

Jeżeli I jest całką 1-go gatunku, to powyższa suma jest zerem (nie licząc wielokrotności modułów peryodyczności).

Jeżeli I jest całką gatunku 3-go, mającą dwa punkty ξ, η nieskończoności logarytmowej, to suma powyższa ma wartość, niezależną od specyalnego wyboru całki; wartość ta równa się $\log \frac{t(\xi)}{t(\eta)}$ (pomijając wielokrotności modułów peryodyczności).

Jeżeli I jest całką gatunku 2-go z punktem nieskończoności algebraicznej ξ, to wartość sumy (jeżeli pominiemy wielokrotności modułów) jest $\frac{t'(\xi)}{t(\xi)}$.

Jeżeli napiszemy t w postaci

$$t = \frac{\varphi(w, z)}{\psi(w, z)},$$

i jeżeli istnieje taka wartość λ, dla której krzywa $\varphi(w, z) - \lambda\psi(w, z) = 0$ przechodzi przez oba punkty ξ, η, wtedy strona druga wzoru w twierdzeniu Abela dla całek gatunku 3-go jest zerem (jeżeli pominiemy wielokrotności peryodów).

Za pomocą twierdzenia Abela suma k całek

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{y_i}^{x_i} dI,$$

gdzie $k > p+1$, x zaś i y są jakiemikolwiek wartościami, daje się zawsze wyrazić jako suma analogicznych p całek (p jest „rodzajem“ powierzchni

Riemanna), pomijając (jeżeli idzie o całki 2-go i 3-go gatunku) pewną funkcyę algebraiczno-logarytmową.

W przypadku eliptycznym $p=1$ mamy: suma dwu lub więcej całek eliptycznych daje się zawsze wyrazić za pomocą jednej całki, przyczem jedna z granic może być wybrana dowolnie. (Twierdzenie o dodawaniu Eulera.)

Twierdzenie Abela dla całek pierwszego gatunku wyraża warunek konieczny i dostateczny na to, aby dwie grupy punktów były spółresztowe. (Riemann, Weierstrass).

Jeżeli we wzorze, wyrażającym twierdzenie Abela, zmienimy odpowiedniość pomiędzy granicami wyższemi i niższemi, to cała suma powiększy się albo zmniejszy o wielokrotności całkowite modułów peryodyczności.

Za pomocą twierdzenia Abela można udowodnić twierdzenie Riemanna-Rocha i inne twierdzenia zasadnicze teoryi funkcyj algebraicznych, np. tak nazwane „twierdzenie o reszcie" którego twierdzenie Abela jest tylko formą przestępną. „Twierdzenie o reszcie" brzmi jak następuje:

Jeżeli $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$ są dwie grupy punktów spółresztowych, to gdy przez punkty x przechodzi jakakolwiek krzywa, przecinająca krzywą zasadniczą w innych k punktach $z_1, z_2, \ldots, z_k$, wtedy punkty z i y stanowić będą przecięcie zupełne innej krzywej z krzywą zasadniczą.

Jeżeli powierzchnia Riemanna ma r liści, to suma wartości, które przyjmuje ta sama całka abelowa 1-go i 2-go gatunku przy opisaniu dróg zamkniętych, sprzężonych we wszystkich r liściach, jest zerem.

Twierdzenie Abela jest najbardziej zasadniczem w całej teoryi funkcyj algebraicznych i ich całek.

Odkrył je Abel najprzód dla przypadku hypereliptycznego (Crelle III), a następnie (1826) dla przypadku ogólnego (Mémoire sur une propiété générale d'une classe très-etendue de fonctions transcend.; Mémoires des Sav. étrang. t. VII, 1841).

Dowód tego twierdzenia znaleść można w dziele Clebscha-Gordana oraz w innych dziełach, cytowanych w § poprzedzającym.

ROZDZIAŁ XVI

TEORYA FUNKCYJ ELIPTYCZNYCH

§ 1.

Funkcye ϑ Jacobiego.

Funkcye ϑ Jacobi'ego są następujące:

$$\vartheta(x) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu} q^{\nu^2} \cos 2\nu x$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu} q^{\nu^2} e^{2\nu x i}\,.$$

$$\vartheta_1(x) = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} \sin(2\nu-1)x$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu}\, i\, q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)xi},$$

$$\vartheta_2(x) = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} \cos(2\nu-1)x$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)xi}\,,$$

$$\vartheta_3(x) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu^2} \cos 2\nu x$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu i x} .$$

Te szeregi są zbieżne dla każdej wartości jeżeli mod $q < 1$.

Funkcya ϑ_1 jest nieparzysta, wszystkie pozostałe są parzystemi:

$$\vartheta(x \pm \tfrac{1}{2}\pi) = \vartheta_3(x); \quad \vartheta_1(x \pm \tfrac{1}{2}\pi) = \pm\, \vartheta_2(x),$$

$$\vartheta_2(x \pm \tfrac{1}{2}\pi) = \mp\, \vartheta_1(x). \quad \vartheta_3(x \pm \tfrac{1}{2}\pi) = \vartheta(x)$$

$$\vartheta(x \pm \tfrac{1}{2} i \log q) = \mp\, i\, q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_1(x),$$

$$\vartheta_1(x \pm \tfrac{1}{2} i \log q) = \mp\, i\, q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta(x),$$

$$\vartheta_2(x \pm \tfrac{1}{2} i \log q) = +\, q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_3(x).$$

$$\vartheta_3(x \pm \tfrac{1}{2} i \log q) = +\, q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_2(x),$$

$$\vartheta(x + \tfrac{1}{2}\pi \pm \tfrac{1}{2} i \log q) = q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_2(x).$$

$$\vartheta_1(x + \tfrac{1}{2}\pi \pm \tfrac{1}{2} i \log q) = q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_3(x).$$

$$\vartheta_2(x + \tfrac{1}{2}\pi \pm \tfrac{1}{2} i \log q) = \pm\, i q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta(x).$$

$$\vartheta_3(x + \tfrac{1}{2}\pi \pm \tfrac{1}{2} i \log q) = \mp\, q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_1(x).$$

$$\vartheta(x \pm \pi) = \vartheta(x). \quad \vartheta_1(x \pm \pi) = -\, \vartheta_1(x).$$

$$\vartheta_2(x \pm \pi) = -\, \vartheta_2(x); \quad \vartheta_3(x \pm \pi) = \vartheta_3(x).$$

$$\vartheta(x \pm i \log q) = -\, q^{-1} e^{\pm 2xi} \vartheta(x),$$

$$\vartheta_1(x \pm i \log q) = -\, q^{-1} e^{\pm 2xi} \vartheta_1(x).$$

$$\vartheta_2(x \pm i \log q) = + q^{-1} e^{\mp 2xi} \vartheta_2(x),$$

$$\vartheta_3(x \pm i \log q) = + q^{-1} e^{\pm 2xi} \vartheta_3(x).$$

Wszystkie funkcye ϑ i ich pochodne czynią zadość równaniu różniczkowemu:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial \vartheta}{\partial (\log q)} = 0.$$

Jeżeli ilości x' są połączone z ilościami x związkami:

$$x'_1 = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \quad x'_2 = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4),$$

$$x'_3 = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \quad x'_4 = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4).$$

to wtedy mamy następujące trzy wzory Jacobi'ego:

$$\prod_{k=1}^{4} \vartheta_2(x_k) + \prod_{k=1}^{4} \vartheta_3(x_k) = \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x'_k) + \prod_{k=1}^{4} \vartheta_3(x'_k),$$

$$\prod_{k=1}^{4} \vartheta(x_k) - \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k) = \prod_{k=1}^{4} \vartheta(x'_k) - \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x'_k).$$

$$\prod_{k=1}^{4} \vartheta_3(x_k) - \prod_{k=1}^{4} \vartheta_2(x_k) = \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x'_k) + \prod_{k=1}^{4} \vartheta(x'_k).$$

Jeżeli przez $(ijhk)$ oznaczymy iloczyn $\vartheta_i(x_1)\, \vartheta_j(x_2)\, \vartheta_h(x_3)\, \vartheta_k(x_4)$, a przez $(ijhk)'$ takiż iloczyn dla argumentów x', to zachodzić będą związki następujące:

$$(0033) + (1122) = (0033)' + (1122)',$$

$$(0033) - (1122) = (2211)' + (3300)',$$

$$(0022) + (1133) = (0022)' + (1133)',$$

$$(0022) - (1133) = (2200)' + (3311)',$$

$$(3322) + (0011) = (3322)' + (0011)',$$

$$(3322) - (0011) = (2233)' + (1100)',$$

$$(3021) - (2130) = (3021)' - (2130)',$$
$$(2031) - (3120) = (2031)' - (3120)',$$
$$(1320) + (2013) = (1320)' + (2013)'.$$

$$\vartheta_2(0)\,\vartheta(x_1+x_2)\,\vartheta(x_1-x_2) = \vartheta^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2) - \vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2)$$
$$= \vartheta_3^2(x_1)\,\vartheta_3^2(x_2) - \vartheta_2^2(x_1)\,\vartheta_2^2(x_2),$$
$$\vartheta^2(0)\,\vartheta_1(x_1+x_2)\,\vartheta_1(x_1-x_2) = \vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2) - \vartheta^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2),$$
$$\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1(x_1+x_2)\,\vartheta_1(x_1-x_2) = \vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta_2^2(x_2) - \vartheta_2^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2),$$
$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1(x_1+x_2)\,\vartheta_1(x_1-x_2) = \vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta_2^2(x_2) - \vartheta_3^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2),$$
$$\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_2(x_1+x_2)\,\vartheta_2(x_1-x_2) = \vartheta_3^2(x_1)\,\vartheta_3^2(x_2) - \vartheta^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2),$$
$$= \vartheta_2^2(x_1)\,\vartheta_2^2(x_2) - \vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2)$$
$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_3(x_1+x_2)\,\vartheta_3(x_1-x_2) = \vartheta^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2) + \vartheta_2^2(x_1)\,\vartheta_2^2(x_2),$$
$$= \vartheta_3^3(x_1)\,\vartheta_3^2(x_2) + \vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2),$$

$$\vartheta^3(0)\,\vartheta(2x) = \vartheta^4(x) - \vartheta_1^4(x) = \vartheta_3^4(x) - \vartheta_2^4(x),$$
$$\vartheta_2^3(0)\,\vartheta_2(2x) = \vartheta_3^4(x) - \vartheta^4(x) = \vartheta_2^4(x) - \vartheta_1^4(x),$$
$$\vartheta_3^3(0)\,\vartheta_3(2x) = \vartheta^4(x) + \vartheta_2^4(x) = \vartheta_3^4(x) + \vartheta_1^4(x),$$
$$\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_1(2x) = 2\vartheta(x)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x).$$

Pomiędzy funkcyami ϑ jednego argumentu istnieją dwa niezależne od siebie związki algebraiczne. Można je przedstawić przez dwa z pomiędzy czterech związków następujących:

$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta^2(x) = \vartheta^2(0)\,\vartheta_3^2(x) + \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1^2(x),$$
$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1^2(x) = \vartheta_2^2(0)\,\vartheta^2(x) - \vartheta^2(0)\,\vartheta_2^2(x),$$
$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_2^2(x) = \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_3^2(x) - \vartheta^2(0)\,\vartheta_1^2(x),$$
$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_3^2(x) = \vartheta^2(0)\,\vartheta^2(x) + \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_2^2(x).$$

Pomiędzy funkcyami ϑ parzystemi i pochodną funkcyi ϑ_1 dla argumentu zero istnieją dwa następujące związki algebraiczne:

$$\vartheta_1{}^4(0) = \vartheta^4(0) + \vartheta_2{}^4(0); \quad \vartheta'_1(0) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0).$$

Zachodzą jeszcze następujące związki pomiędzy pochodnemi funkcyj ϑ dla argumentu zero:

$$\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = \vartheta^4; \quad \frac{\vartheta^{IV}}{\vartheta} - 3\frac{\vartheta''^2}{\vartheta^2} = -2\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4;$$

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \vartheta_2{}^4; \quad \frac{\vartheta_2{}^{IV}}{\vartheta_2} - 3\frac{\vartheta_2''^2}{\vartheta_2{}^2} = -2\vartheta_3{}^4\vartheta^4;$$

$$\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta''}{\vartheta} = -\vartheta_3{}^4; \quad \frac{\vartheta_3{}^{IV}}{\vartheta_3} - 3\frac{\vartheta_3''^2}{\vartheta_3{}^2} = +2\vartheta^4\vartheta_2{}^4;$$

$$-3\frac{\vartheta_1{}^V}{\vartheta'_1} + 5\frac{\vartheta_1'''^2}{\vartheta_1'^3} = \vartheta^8 + \vartheta_2{}^8 + \vartheta_3{}^8.$$

Funkcya ϑ_1 czyni zadość następującemu związkowi, który nazywa się równaniem trójwyrazowem:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_1(x_1 + x_2)\,\vartheta_1(x_1 - x_2)\,\vartheta_1(x_3 + x_4)\,\vartheta_1(x_3 - x_4)\\
&+ \vartheta_1(x_1 + x_3)\,\vartheta_1(x_1 - x_3)\,\vartheta_1(x_4 + x_2)\,\vartheta_1(x_4 - x_2)\\
&+ \vartheta_1(x_1 + x_4)\,\vartheta_1(x_1 - x_4)\,\vartheta_1(x_2 + x_3)\,\vartheta_1(x_2 - x_3) = 0.
\end{aligned}$$

Pochodne stosunków funkcyj ϑ wyrażają się przez stosunki samych funkcyj ϑ za pomocą wzorów następujących:

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \vartheta^2(0)\,\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\,\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)},$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = -\vartheta_3{}^2(0)\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\,\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)},$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = -\,\vartheta_2^{\,2}(0)\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\,\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\,,$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_2(x)} = \vartheta_2^{\,2}(0)\,\frac{\vartheta(x)}{\vartheta_2(x)}\,\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_2(x)}\,,$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_3(x)} = \vartheta_3^{\,2}(0)\,\frac{\vartheta(x)}{\vartheta_3(x)}\,\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_3(x)}\,,$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_3(x)} = -\,\vartheta^2(0)\,\frac{\vartheta(x)}{\vartheta_3(x)}\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_3(x)}\,.$$

Pochodne logarytmowe rzędów drugiego i wyższych funkcyj ϑ wyrażają się przez same funkcye ϑ za pomocą wzorów:

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta(x) = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_1'^{\,2}(0)}{\vartheta^2(0)}\cdot\frac{\vartheta_1^{\,2}(x)}{\vartheta^2(x)}\,,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta_1(x) = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_1'^{\,2}(0)}{\vartheta^2(0)}\cdot\frac{\vartheta^2(x)}{\vartheta_1^{\,2}(x)}\,,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta_2(x) = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_1'^{\,2}(0)}{\vartheta^2(0)}\cdot\frac{\vartheta_3^{\,2}(x)}{\vartheta_2^{\,2}(x)}\,,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta_3(x) = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_1'^{\,2}(0)}{\vartheta^2(0)}\cdot\frac{\vartheta_2^{\,2}(x)}{\vartheta_3^{\,2}(x)}\,.$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\log\vartheta(x) = -\,2\vartheta_1'^{\,2}(0)\,\frac{\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x)}{\vartheta^3(x)}\,,$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\log\vartheta_1(x) = +\,2\vartheta_1'^{\,2}(0)\,\frac{\vartheta(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x)}{\vartheta_1^{\,3}(x)}\,;$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\log\vartheta_2(x) = -\,2\vartheta_1'^{\,2}(0)\,\frac{\vartheta_1(x)\,\vartheta(x)\,\vartheta_3(x)}{\vartheta_2^{\,3}(x)}\,,$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\log\vartheta_3(x) = +\,2\vartheta_1'^{\,2}(0)\,\frac{\vartheta(x)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)}{\vartheta_3^{\,3}(x)}\,,$$

Funkcye ϑ są funkcyami całkowitemi, które nie stają się nieskończonemi dla żadnej skończonej wartości x; ich **punktami zerowemi**, t. j. punktami płaszczyzny, w których funkcye ϑ znikają, są następujące:

dla funkcyi $\vartheta_1(x)$ punkty $x = m\pi - ni\log q$

„ „ $\vartheta(x)$ „ $x = \frac{1}{2}i\log q + m\pi - ni\log q$,

„ „ $\vartheta_2(x)$ „ $x = -\frac{1}{2}\pi + m\pi - ni\log q$,

„ „ $\vartheta_3(x)$ „ $x = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}i\log q + m\pi - ni\log q$,

gdzie m i n mogą przyjmować wszystkie wartości **całkowite** dodatnie i ujemne.

Rozwinięcia funkcyj ϑ na iloczyny nieskończone mają postać:

$$\vartheta(x) = \vartheta(0) \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{m\pi - (n+\frac{1}{2})i\log q}\right),$$

$$\vartheta_1(x) = \vartheta_1'(0)\, x \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{m\pi - ni\log q}\right).$$

$$\vartheta_2(x) = \vartheta_2(0) \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{(m+\frac{1}{2})\pi - ni\log q}\right),$$

$$\vartheta_3(x) = \vartheta_3(0) \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{(m+\frac{1}{2})\pi - (n+\frac{1}{2})i\log q}\right).$$

gdzie iloczyny Π rozciągają się na wszystkie wartości m, n całkowite, dodatnie i ujemne, nie wyłączając zera; tylko dla iloczynu nieskończonego, przedstawiającego funkcyę ϑ_1, należy wyłączyć kombinacyę $m = 0$, $n = 0$.

§ 2.

Funkcye eliptyczne Jacobi'ego.

Połóżmy:

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}, \qquad k^2 + k'^2 = 1,$$

$$\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k} \,.\, \sin\varphi, \qquad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}} \,.\, \cos\varphi.$$

$$\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \Delta\varphi,$$

$$v = \vartheta_3^2(0) \,.\, x.$$

Wzory te określają ilość φ jako pewną funkcyę zmiennej v, nazwaną funkcyą-amplitudą i oznaczaną symbolem am, tak że

$$\varphi = \text{am}\, v.$$

Funkcye $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$ oznaczają się odpowiednio przez

$$\text{sn}\, v, \quad \text{cn}\, v, \quad \text{dn}\, v.$$

i nazywają się wstawą—amplitudą, dostawą—amplitudą, delta—amplitudą. Są to trzy funkcye eliptyczne Jacobi'ego; pomiędzy niemi zachodzą związki algebraiczne:

$$\text{sn}^2 v + \text{cn}^2 v = 1; \qquad \text{dn}^2 v + k^2 \text{sn}^2 v = 1.$$

Funkcya odwrotna względem funkcyi—amplitudy wyraża się przez całkę określoną:

$$v = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

i nazywa się całką eliptyczną gatunku 1-go.

Funkcye te posiadają twierdzenie o dodawaniu algebraicznem, t. j. wartość funkcyi dla argumentu $v_1 + v_2$ wyraża się algebraicznie przez jej wartości dla argumentów pojedynczych v_1, v_2. Wzory odnośne są:

$$\operatorname{sn}(v_1 \pm v_2) = \frac{\operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn} v_2 \operatorname{dn} v_2 \pm \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{dn} v_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}.$$

$$\operatorname{cn}(v \pm v_2) = \frac{\operatorname{cn} v_1 \operatorname{cn} v_2 \mp \operatorname{sn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{dn} v_1 \operatorname{dn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2},$$

$$\operatorname{dn}(v_1 \pm v_2) = \frac{\operatorname{dn} v_1 \operatorname{dn} v_2 \mp k^2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{cn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}.$$

Inną własność tych funkcyj eliptycznych stanowi to, że pochodne ich wyrażają się algebraicznie przez same funkcye:

$$\frac{d}{dv} \operatorname{sn} v = \operatorname{cn} v \,.\, \operatorname{dn} v,$$

$$\frac{d}{dv} \operatorname{cn} v = - \operatorname{sn} v \,.\, \operatorname{dn} v,$$

$$\frac{d}{dv} \operatorname{dn} v = - k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v.$$

Wprowadźmy ilości:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi}},$$

(t. t. całki zupełne Legendre'a, gdzie znak $\int$ ma oznaczać, iż całkowanie odbywa się na drodze prostoliniowej pomiędzy wskazanemi granicami. Mamy wtedy wzory:

$$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\,; \quad \vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}\,,$$

$$\vartheta(0) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}\,; \quad x = \frac{\pi v}{2K}\,; \quad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}.$$

Ponieważ q ma mieć moduł mniejszy od 1, przeto część rzeczywista stosunku $\frac{K'}{K}$ powinna być dodatnia i różna od zera.

Trzy funkcye eliptyczne $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ są funkcyami podwojnie peryodycznemi; wartości ich nie zmieniają się, jeżeli argument v powiększymy o wielokrotności całkowite następujących ilości:

dla $\operatorname{sn} v$ o $4K$, $2iK'$,
„ $\operatorname{cn} v$ „ $4K$, $4iK'$,
„ $\operatorname{dn} v$ „ $2K$, $4iK'$.

Przy powiększeniu argumentu o pół lub o ćwierci peryodów otrzymujemy:

$$\operatorname{sn}(v+2K) = -\operatorname{sn} v; \ \operatorname{cn}(v+2K) = -\operatorname{cn} v; \ \operatorname{dn}(v+2K) = \operatorname{dn} v,$$

$$\operatorname{sn}(v+2iK') = \operatorname{sn} v; \ \operatorname{cn}(v+2iK') = -\operatorname{cn} v; \ \operatorname{dn}(v+2iK') = -\operatorname{dn} v.$$

$$\operatorname{sn}(v+K) = \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}; \ \operatorname{cn}(v+K) = -k'\frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v}; \ \operatorname{dn}(v+K') = \frac{k'}{\operatorname{dn} v},$$

$$\operatorname{sn}(v+iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} v}; \ \operatorname{cn}(v+iK') = \frac{\operatorname{dn} v}{ik \operatorname{sn} v}; \ \operatorname{dn}(v+iK') = \frac{\operatorname{cn} v}{i \operatorname{sn} v}.$$

Wszystkie trzy funkcye stają się nieskończonemi w tych samych punktach

$$v = 2mK + (2n+1)\, i K'$$

i stają się zerami:

funkcya $\operatorname{sn} v$ w punktach $v = 2mK + 2niK'$,
„ $\operatorname{cn} v$ „ „ $v = (2m+1)K + 2niK'$,
„ $\operatorname{dn} v$ „ „ $v = (2m+1)K + (2n+1)iK'$

W punktach, w których argument ma wartość połowy lub ćwierci pervodu, funkcye mają wartości następujące:

v	$\operatorname{sn} v$	$\operatorname{cn} v$	$\operatorname{dn} v$
$\frac{1}{2}K$	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$	$\sqrt{k'}$
$\frac{3}{2}K$	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	$-\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$	$\sqrt{k'}$
$\frac{1}{2}K+iK'$	$\frac{1}{\sqrt{1-k'}}$	$-\frac{i\sqrt{k'}}{\sqrt{1-k'}}$	$-i\sqrt{k'}$
$\frac{3}{2}K+iK'$	$\frac{1}{\sqrt{1-k'}}$	$-\frac{i\sqrt{k'}}{\sqrt{1-k'}}$	$i\sqrt{k'}$
$\frac{1}{2}iK'$	$\frac{i}{\sqrt{k}}$	$\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{1+k}$
$K+\frac{1}{2}iK'$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$-\frac{i\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{1-k}$
$\frac{3}{2}iK'$	$-\frac{i}{\sqrt{k}}$	$-\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$	$-\sqrt{1+k}$
$K+\frac{3}{2}iK'$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$-\frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}}$	$-\sqrt{1-k}$
$\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}iK'$	$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}}\{\sqrt{1+k}+i\sqrt{1-k}\}$	$-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}}\{\sqrt{1-k'}-i\sqrt{1-k'}\}$
$\frac{3}{2}K+\frac{1}{2}iK'$	$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}}\{\sqrt{1+k}-i\sqrt{1-k}\}$	$-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}}\{\sqrt{1+k'}+i\sqrt{1-k'}\}$
$\frac{1}{2}K+\frac{3}{2}iK'$	$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}}\{\sqrt{1+k}-i\sqrt{1-k}\}$	$-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$	$-\frac{k'}{\sqrt{2}}\{\sqrt{1+k'}+i\sqrt{1-k'}\}$
$\frac{3}{2}K+\frac{3}{2}iK'$	$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}}\{\sqrt{1+k}+i\sqrt{1-k}\}$	$\frac{1-i}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$	$-\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}}\{\sqrt{1+k'}-i\sqrt{1-k'}\}$

Przypadki zniekształcenia. Dla $k=0$ mamy:

$$\varphi = \operatorname{am} v = v, \quad K = \frac{\pi}{2}; \quad K' = \infty, \quad q = 0, \quad k' = 1,$$

$$\operatorname{sn} v = \sin v, \quad \operatorname{cn} v = \cos v, \quad \operatorname{dn} v = 1,$$

$$\vartheta(x) = 1, \quad \vartheta_1(x) = 0, \quad \vartheta_2(x) = 0, \quad \vartheta_3(x) = 1.$$

Dla $k' = 0$ mamy:

$$v = \log \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{e^v - 1}{e^v + 1},$$

$$K = \infty, \quad K' = \frac{\pi}{2}, \quad q = 1, \quad k = 1,$$

$$\operatorname{sn} v = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}, \quad \operatorname{cn} v = \frac{2}{e^v + e^{-v}}, \quad \operatorname{dn} v = \frac{2}{e^v + e^{-v}}$$

szeregi zaś ϑ stają się rozbieżnemi.

§ 3.

Cztery funkcye σ Weierstrassa.

Kładąc

$$x = \frac{\pi u}{2w}, \quad \eta = -\frac{1}{12} \frac{\pi^2}{\omega} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)},$$

mamy:

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2} \frac{\eta}{\omega} u^2} \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_1'(0)},$$

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_2(0)},$$

$$\sigma_2(u) = e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_3(0)},$$

$$\sigma_3(u) = e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(0)},$$

Te cztery funkcye $\sigma(u)$ są funkcyami całkowitemi zmiennej u, dającemi się rozwinąć na szeregi według potęg całkowitych rosnących tej zmiennej; pierwsza z nich jest funkcyą nieparzystą, trzy ostatnie — parzystemi. Wyraz przy potędze pierwszej u w rozwinięciu $\sigma(u)$ ma spółczynnik 1. a wyrazu drugiego (zawierającego u^3) nie ma Wyraz pierwszy rozwinięcia pozostałych funkcyi σ jest jednością, a w rozwinięciu iloczynu $\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)$ brak wyrazu, zawierającego u^2.

Wzory peryodyczności. Połóżmy:

$$\log q = i\pi\tau = i\pi\,\frac{\omega'}{\omega}, \quad \omega'' = \omega + \omega'.$$

Stąd i na zasadzie znanych własności wynika, że spółczynnik części urojonej stosunku $\frac{\omega'}{\omega}$ musi być dodatni i różny od zera. Połóżmy nadto:

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{i\pi}{2}, \quad \eta'' = \eta + \eta'.$$

Ilości ω, ω' nazywają się modułami gatunku pierwszego, η, η' modułami gatunku drugiego. Mamy wtedy wzory:

$$\sigma(u + 2\omega) = -\sigma(u)\,e^{2\eta(u+\omega)},$$

$$\sigma(u + 2\omega') = -\sigma(u)\,e^{2\eta'(u+\omega')},$$

$$\sigma(u + 2\omega'') = -\sigma(u)\,e^{2\eta''(u+\omega'')},$$

$$\sigma_1(u+2\omega) = -\sigma_1(u)\,e^{2\eta(u+\omega)},$$

$$\sigma_1(u+2\omega') = +\sigma_1(u)\,e^{2\eta'(u+\omega')}.$$

$$\sigma_2(u+2\omega) = +\sigma_2(u)\,e^{2\eta(u+\omega)};$$

$$\sigma_2(u+2\omega') = +\sigma_2(u)\,e^{2\eta'(u+\omega)},$$

$$\sigma_3(u+2\omega) = +\sigma_3(u)\,e^{2\eta(u+\omega)}.$$

$$\sigma_3(u+2\omega') = -\sigma_3(u)\,e^{2\eta'(u+\omega')},$$

$$\eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}, \qquad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}, \qquad \eta'' = \frac{\sigma'(\omega'')}{\sigma(\omega'')},$$

$$\sigma(u+\omega) = \sigma(\omega)\,e^{\eta u}\sigma_1(u),$$

$$\sigma(u+\omega') = \sigma(\omega')\,e^{\eta' u}\sigma_3(u).$$

$$\sigma(u+\omega'') = \sigma(\omega'')\,e^{\eta'' u}\sigma_2(u).$$

Funkcya σ czyni zadość następującym związkom:

$$\begin{aligned}&\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)\,\sigma_3(u_3+u_4)\,\sigma(u_3-u_4)\\ &+\sigma(u_1+u_3)\,\sigma(u_1-u_3)\,\sigma(u_4+u_2)\,\sigma(u_4-u_2)\\ &+\sigma(u_1+u_4)\,\sigma(u_1-u_4)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)=0.\end{aligned}$$

Jest to t. zw. r ó w n a n i e t r ó j w y r a z o w e.

Wzór:

$$\frac{\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)}{\sigma^2(u_1)\,\sigma^2(u_2)} = \frac{d^2}{du_1^2}\log\sigma(u_1) - \frac{d^2}{du_2^2}\log\sigma(u_2).$$

nazywa się w z o r e m n a d o d a w a n i e.

Dalej jest:

$$\frac{\sigma_i(u_1+u_2)}{\sigma(u_1+u_2)} = \frac{\sigma_i(u_1)\sigma(u_1)\sigma_j(u_2)\sigma_k(u_2) - \sigma_i(u_2)\sigma(u_2)\sigma_j(u_1)\sigma_k(u_1)}{\sigma^2(u_1)\sigma_i^2(u_2) - \sigma^2(u_2)\sigma_i^2(u_1)},$$

gdzie i, j, k przedstawiają jakąkolwiek przemianę skaźników 1, 2, 3.

Wprowadźmy oznaczenia następujące:

$$e_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 (\vartheta^4 + \vartheta_3{}^4); \quad e_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 (\vartheta_2{}^4 - \vartheta^4); \quad e_3 = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 (\vartheta_3{}^4 + \vartheta_2{}^4);$$

będzie:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}.$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

$$v = \sqrt{e_1 - e_3}\,.\,u; \quad K = \sqrt{e_1 - e_3}\,.\,\omega; \quad iK' = \sqrt{e_1 - e_3}\,.\,\omega'.$$

Połóżmy jeszcze:

$$\Delta = 16\,(e_1 - e_2)^2\,(e_2 - e_3)^2\,(e_1 - e_3)^2, \qquad \text{(wyróżnik)}$$

$$\left.\begin{aligned} g_2 &= -4\,(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1) \\ g_3 &= 4\,e_1\,e_2\,e_3; \end{aligned}\right\}, \quad \text{(niezmienniki)}$$

otrzymamy stąd:

$$\Delta = g_2{}^3 - 27 g_3{}^2 = \sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)}\,\vartheta'_1\,(0).$$

$$g_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4 (\vartheta_3{}^8 - \vartheta^4\,\vartheta_2{}^4) = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4 (\vartheta^8 + \vartheta_2{}^8 + \vartheta_3{}^8),$$

$$g_3 = -\frac{4}{27}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^6 (3\vartheta^4\vartheta_2{}^8 - 3\vartheta^8\vartheta_2{}^4 + 2\vartheta_2{}^{12} - 2\,\vartheta^{12}).$$

Wyrażenie $\frac{g_2{}^3}{\Delta}$ nazywa się niezmiennikiem bezwzględnym; w funkcyi modułu Legendre'a wyraża się ono tak:

$$J = \frac{g_2{}^3}{\Delta} = \frac{4}{27}\,\frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4(1 - k^2)^2}.$$

Pomiędzy czterema funkcyami σ istnieją dwa związki algebraiczne; mamy mianowicie cztery wzory następujące, z których dwa są następstwem dwóch pozostałych:

$$\sigma_1^2(u) - \sigma_3^2(u) + (e_1 - e_3)\,\sigma^2(u) = 0.$$

$$\sigma_2^2(u) - \sigma_1^2(u) + (e_2 - e_1)\,\sigma^2(u) = 0,$$

$$\sigma_3^2(u) - \sigma_2^2(u) + (e_3 - e_2)\,\sigma^2(u) = 0,$$

$$(e_3 - e_2)\sigma_1^2(u) + (e_1 - e_3)\sigma_2^2(u) + (e_2 - e_1)\sigma_3^2(u) = 0.$$

Pomiędzy funkcyami sn, cn. dn i funkcyami σ zachodzą związki:

$$\operatorname{sn} v = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}, \qquad \frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} v},$$

$$\operatorname{cn} v = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}, \qquad \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v},$$

$$\operatorname{dn} v = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}, \qquad \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{1}{\operatorname{sn} v}.$$

P u n k t a m i z e r o w e m i funkcyj σ są:

dla funkcyi σ punkty $2m\omega + 2n\omega' = w$,

" " σ_1 " $(2m+1)\omega + 2n\omega' = w_1$,

" " σ_2 " $(2m+1)\omega + (2n+1)\omega' = w_2$.

" " σ_3 " $2m\omega + (2n+1)\omega' = w_3$;

tu m i n są dwie jakiekolwiek liczby całkowite dodatnie lub ujemne.

Rozwinięcia na iloczyny nieskończone są:

$$\sigma(u) = u\prod_{m,n}\left(1 - \frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w} - \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},$$

$$\sigma_\lambda(u) = e^{-\frac{1}{2}e_\lambda u^2}\prod_{m,n}\left(1 - \frac{u}{w_\lambda}\right)e^{\frac{u}{w_\lambda} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w_\lambda^2}}.$$

Kładąc:

$$D = -2\eta\,\frac{\partial}{\partial\omega} - 2\eta'\,\frac{\partial}{\partial\omega'} = 12\,g_3\,\frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3}\,g_2^2\,\frac{\partial}{\partial g_3},$$

otrzymujemy:

$$De_\iota = 4e_\iota^2 - \frac{2}{3} g_2; \quad D\Delta = 0;$$

$$D\eta = \frac{1}{6} g_2\omega, \quad D\eta' = \frac{1}{6} g_2\omega', \quad D\eta'' = \frac{1}{6} g_2\omega'',$$

$$D\omega = -2\eta, \; D\omega' = -2\eta', \quad D\omega'' = -2\eta'',$$

oraz równania różniczkowe dla funkcyi σ:

$$\sigma''(u) - D\sigma(u) + \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma(u) = 0,$$

$$\sigma_\iota''(u) - D\sigma_\iota(u) + \left(e_\iota + \frac{1}{12} g_2 u^2\right) \sigma_\iota(u) = 0.$$

Pochodne modułów jednych względem drugich:

$$\frac{\partial\omega}{\partial g_2} = \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{1}{4} g_2^2\omega + \frac{9}{2} g_3\eta\right); \quad \frac{\partial\omega}{\partial g_3} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{9}{2} g_3\omega - 3 g_2\eta\right)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial g_2} = \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{3}{8} g_2 g_3 \omega + \frac{1}{4} g_2^2\eta\right); \quad \frac{\partial\eta}{\partial g_3} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{4} g_2^2\omega - \frac{9}{2} g_3\eta\right);$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\omega} = \frac{2i}{\pi}\left(\frac{1}{12} g_2\omega\omega' - \eta\eta'\right); \quad \frac{\partial\eta}{\partial\omega'} = -\frac{2i}{\pi}\left(\frac{1}{12} g_2 \omega^2 - \eta^2\right);$$

$$\eta = \frac{i\pi}{24} \frac{\partial \log\Delta}{\partial\omega'}, \quad \eta' = -\frac{i\pi}{24} \frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega}.$$

Rozwinięcia funkcyj σ na szeregi.

Kładąc:

$$\sigma(u) = \sum b_{2n+1} \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sigma_\iota(u) = \sum c_{2n}^{(\iota)} \frac{u^{2n}}{(2n)!},$$

otrzymujemy następujące wzory zwrotne:

$$b_{2n+1} = Db_{2n-1} - \frac{(2n-1)(n-1)}{6} g_2 b_{2n-3},$$

$$c_{2n}^{(\iota)} = Dc_{2n-2}^{(\iota)} - e_\iota c_{2n-2}^{(\iota)} - \frac{(n-1)(2n-3)}{6} g_2 c_{2n-4}^{(\iota)}.$$

Stąd wynikają następujące rozwinięcia:

$$\sigma(u) = u - \frac{1}{2} g_2 \frac{u^5}{5!} - 6 g_3 \frac{u^7}{7!} - \frac{9}{4} g_2^2 \frac{u^9}{9!} - 18 g_2 g_3 \frac{u^{11}}{11!}$$

$$+ \left(\frac{3 \,.\, 23}{8} g_2^3 - 3^3 \,.\, 2^3 g_3^2 \right) \frac{u^{13}}{13!} + \ldots\ldots$$

$$\sigma_\lambda(u) = 1 - e_\lambda \frac{u^2}{2!} + \left(\frac{1}{2} g_2 - 3 e_\lambda^2 \right) \frac{u^4}{4!} + \left(\frac{3}{4} g_3 - \frac{3}{4} g_2 e_\lambda \right) \frac{u^6}{6!}$$

$$+ \left(\frac{21}{4} g_2 e_\lambda^2 - \frac{39}{4} g_3 e_\lambda - \frac{1}{4} g_2^2 \right) \frac{u^8}{8!}$$

$$+ \left(\frac{135}{4} g_3 e_\lambda^2 - \frac{9}{16} g_2^2 e_2 + \frac{99}{16} g_2 g_3 \right) \frac{u^{10}}{18!} + \ldots\ldots$$

Następne wyrazy znaleźć można w tablicy, znajdującej się na str. 7 dzieła: „Formeln und Lehrsätze etc.“ Schwarza, Getynga 1885.

Przypadki zniekształcenia. Jeżeli wyróżnik Δ staje się zerem, a zatem dwie ilości e równemi sobie, np. $e_2 = e_3 = 0$, wtedy będzie:

$$e_1 = -2a, \quad \omega = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{-3a}}, \quad \eta\omega = \frac{\pi^2}{12}, \quad \frac{\eta}{\omega} = -a,$$

a funkcye σ przybierają postać:

$$\sigma(u) = \frac{1}{\sqrt{-3a}} e^{-\frac{1}{2} au^2} \sin (u\sqrt{-3a})$$

$$\sigma_1(u) = e^{-\frac{1}{2} au} \cos (u\sqrt{-3a}); \quad \sigma_2(u) = e^{-\frac{1}{2} au}; \quad \sigma_3(u) = e^{-\frac{1}{2} au^2}.$$

§ 4.

Funkcya p Weierstrassa.

Funkcya $p(u)$ określa się za pomocą jednego z następujących wzorów:

$$p(u) = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u),$$

$$p(u) = -\frac{\eta}{\omega} - \frac{\pi^2}{4\omega^2}\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta_1(x),$$

$$p(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_2}{\mathrm{sn}^2(\sqrt{e_1-e_2}\,.\,u)}.$$

Nadto można $p(u)$ określić jako całkę równania różniczkowego

$$s'^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

z warunkiem $p(0)=\infty$. Definicya ta jest równoważna z następującą: funkcya p jest funkcyą odwrotną całki

$$\int_\infty^{p(u)} \frac{ds}{2\sqrt{(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}} = u.$$

Funkcya p jest podwójnie peryodyczną o peryodach 2ω i $2\omega'$.

Mamy wzory:

$$p(\omega) = e_1, \quad p(\omega') = e_2, \quad p(\omega'') = e_3,$$

$$p(u) - p(\omega) = \left[\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}\right]^2; \quad p(u) - p(\omega') = \left[\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}\right]^2$$

$$p(u) - p(\omega'') = \left[\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}\right]^2;$$

$$\operatorname{sn} v = \sqrt{\frac{e_1-e_3}{p(u)-e_3}}\qquad \operatorname{cn} v = \sqrt{\frac{p(u)-e_1}{p(u)-e_3}},\qquad \operatorname{dn} v = \sqrt{\frac{p(u)-e_2}{p(u)-e_3}}$$

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3.$$

$$p''(u) = 6p^2(u) - \tfrac{1}{2}g_2.\quad p'''(u) = 12p(u)p'(u);$$

$$p^{\mathrm{IV}}(u) = 120p^3(u)\,p'(u) - 18g_2p(u) - 12g_3,$$

$$p^{\mathrm{V}}(u) = 360p^2(u) - 18g_2p'(u),$$

$$p^{\mathrm{VI}}(u) = 36\left[140p^4(u) - 28g_2p^2(u) - 20g_3p(u) + \frac{1}{4}g_2^2\right]$$

Różne postaci twierdzenia o dodawaniu dla funkcyi $p(u)$.

$$p(u_1+u_2) + p(u_1) + p(u_2) = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{p'(u_2)-p'(u_1)}{p(u_2)-p(u_1)}\right]^2,$$

$$p(u_1+u_2) - p(u_1) = -\frac{1}{2}\frac{d}{du_1}\frac{p'(u_1)-p'(u_2)}{p(u_1)-p(u_2)}.$$

Jeżeli $u_1+u_2+u_3=0$, będzie.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1, & 1 \\ p(u_1), & p(u_2), & p(u_3) \\ p'(u_1), & p'(u_2) & p'(u_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli $u_1+u_2+\dots+u_n=0$ będzie:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots & 1 \\ p(u_1), & p(u_2), & \dots & , p(u_n) \\ p'(u_1) & p'(u_2), & \dots & , p'(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{(n-2)}(u_1), & p^{(n-2)}(u_2) & \dots & p^{(n-2)}(u_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Dodając do argumentu półperyody ω, ω' znajdziemy wzory:

$$p(u+\omega)=e_1+\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p(u)-e_1};\quad p(u+\omega')=e_3+\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{p(u)-e_3};$$

$$p(u+\omega'')=e_2+\frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{p(u)-e_2}.$$

Punkty postaci $2m\omega+2n\omega'$, gdzie m i n są liczby całkowite, są wszystkie punktami nieskończoności funkcyj p. Są to punkty nieskończoności rzędu 2-go: poza temi, innych nieskończoności funkcya niema.

Wartości funkcyj p i p' dla wartości argumentów równych ćwiartkom peryodów są:

$$p\left(\frac{\omega}{2}\right)=e_1+\sqrt{e_1-e_2}\,\sqrt{e_1-e_3};\quad p\left(\frac{\omega}{2}+\omega'\right)=e_1+\sqrt{e_1-e_2}\,.\sqrt{e_1-e_3};$$

$$p\left(\frac{\omega'}{2}\right)=e_3-\sqrt{e_2-e_3}\,.\sqrt{e_1-e_3};\quad p\left(\frac{\omega'}{2}+\omega\right)=e_3+\sqrt{e_2-e_3}\,.\sqrt{e_1-e_3}\,.$$

$$p\left(\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{2}\right)=e_2\mp i\sqrt{e_2-e_3}\,\sqrt{e_1-e_2}\,,$$

$$p'\left(\frac{\omega}{2}\right)=-2(e_1-e_3)\sqrt{e_1-e_2}-2(e_1-e_2)\sqrt{e_1-e_3}\,,$$

$$p'\left(\frac{\omega}{2}+\omega'\right)=2i(e_1-e_3)\sqrt{e_1-e_2}-2(e_1-e_2)\sqrt{e_1-e_3}\,,$$

$$p'\left(\frac{\omega'}{2}\right)=-2i(e_1-e_3)\sqrt{e_2-e_3}-2i(e_2-e_3)\sqrt{e_1-e_3}\,,$$

$$p'\left(\frac{\omega'}{2}+\omega\right)=2i(e_1-e_3)\sqrt{e_2-e_3}-2i(e_2-e_3)\sqrt{e_1-e_3}\,,$$

$$p'\left(\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{2}\right)=2(e_1-e_2)\sqrt{e_2-e_3}\pm 2i(e_2-e_3)\sqrt{e_1-e_2}$$

W otoczeniu punktu $u=0$ funkcya p rozwija się na szereg

$$p(u)=\frac{1}{u^2}+a_2u^2+a_4u^4+\ldots\ldots$$

którego spółczynniki są funkcyami wymiernemi ilosci g_2, g_3, a mianowicie:

$$a_2=\frac{1}{20}g_2,\quad a_4=\frac{1}{28}g_3,\quad a_6=\frac{g_2^2}{2^4.3.5},\quad a_8=\frac{3g_2g_3}{2^4.5.7.11},$$

$$a_{10}=\frac{1}{2^4.13}\left(\frac{g_3^2}{7}+\frac{g_2^3}{2.3.5^3}\right),\quad a_{12}=\frac{g_2^2g_3}{2^5.3.5^2.7.11},$$

$$a_{14}=\frac{1}{17}\left(\frac{3g_2g_3^2}{2^4.7^2.11.13}+\frac{g_2^4}{2^5.3.5^3.13}\right),\quad a_{16}=\frac{1}{19}\left(\frac{29g_2^3g_3}{2^8.5^3.7.11.13}+\frac{g_3^3}{2^6.7^3.13}\right).$$

. . . .

Można nadto funkcyę p rozwinąć na szereg podwójny za pomocą wzoru:

$$p(u)=\frac{1}{u^2}+3u^2\sum\frac{1}{w^4}+5u^4\sum\frac{1}{w^6}+\ .\ .\ .\ .\ .$$

gdzie $w=2m\omega+2n\omega'$, sumowanie zaś rozciąga się na wszystkie kombinacye wartości całkowitych, dodatnich i ujemnych liczb m i n, wyjąwszy kombinacyę 0, 0.

Przypadki szczególne; zniekształcenie funkcyi p. Jeżeli $g_3=0$, mamy przypadek zwany harmonicznym: całka eliptyczna daje się przekształcić na

$$u=-\frac{1}{\sqrt{e_1}}\int_0^q\frac{dq}{\sqrt{1-q^4}},$$

i będzie $p=e_1q^{-2}$.

W tym przypadku p ma własność, którą przedstawia wzór:

$$p(iu)=-p(u).$$

Jeżeli 2ω jest peryodem, to i $2i\omega$ będzie peryodem.

Jeżeli $g_2=0$, mamy przypadek zwany równoanharmonicznym Funkcya p ma w tym przypadku własność, wyrażoną wzorem:

$$p(au)=ap(u).$$

gdzie α jest pierwiastkiem sześciennym z jedności. Jeżeli 2ω jest peryodem, to i $2\alpha\omega$ będzie peryodem.

Jeżeli wyróżnik Δ staje się zerem, wtedy funkcya p zniekształca się i staje się funkcyą pojedyńczo-peryodyczną, a mianowicie: albo funkcyą trygonometryczną, albo funkcyą złożoną z wykładniczych.

Jeżeli $e_2 = e_3 = a$, wtedy:

$$p(u) = a - \frac{3a}{\sin^2 (u\sqrt{-3a})}\,; \quad \omega = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{-3a}}\,; \quad \omega' = \infty.$$

a jeżeli $a = 0$, będzie wprost $p(u) = \dfrac{1}{u^2}$.

Jeżeli $e_1 = e_2 = a$, wtedy:

$$p(u) = e_3 + 3a \left(\frac{e^{u\sqrt{3a}} + e^{-u\sqrt{3a}}}{e^{u\sqrt{3a}} - e^{-u\sqrt{3a}}} \right)^2 : \quad \omega = \infty; \quad \omega' = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3a}}.$$

§ 5.

Funkcye wymierne ilości p i p'.

Każda funkcya wymierna ilości p i p' daje się wyrazić jako kombinacya liniowa typu:

$$c + \sum_{\nu} c_\nu \zeta(u - u_\nu) + \sum_{\mu} c'_\mu p(u - u'_\mu) + \sum_{\varrho} c''_\varrho p'(u - u''_\varrho) + \ldots .$$

t. j. liniowa względem $\zeta(u) = \dfrac{d}{du} \log \sigma(u)$, względem $p(u)$ oraz względem pochodnych kolejnych funkcyi p, Nadto suma wszystkich spółczynników c_ν, t. j. $\Sigma c_\nu = 0$.

Punkty u_ν są punktami nieskończoności rzędu pierwszego funkcyi danej; punkty u'_μ punktami nieskończoności rzędu drugiego; punkty u''_ϱ — rzędu trzeciego i t. d

Każda funkcya wymierna ilości p i p' daje się przedstawić zawsze w postaci:

$$A\,\frac{\sigma(u-u'_1)\,\sigma(u-u'_2)\,.\,.\,.\,.\,.\,\sigma(u-u'_\nu)}{\sigma(u-u''_1)\,\sigma(u-u''_2)\,.\,.\,.\,.\,.\,\sigma(u-u''_\nu)},$$

gdzie A jest stała, u'—punkty zerowe funkcyi, u''—punkty nieskończoności i gdzie suma wszystkich wartości u' równa się sumie wszystkich wartości u''.

Te dwa przedstawienia funkcyj wymiernych ilości p i p' odpowiadają dwom przedstawieniom funkcyj wymiernych jednej zmiennej: jednemu za pomocą ułamków elementarnych, drugiemu za pomocą rozkładu licznika i mianownika na czynniki.

§ 6.

Teorya przekształcenia funkcyj eliptycznych.

Niechaj będą dwie funkcye eliptyczne:

$$p_1 = p\,(au + b, \omega_1, \omega'_1), \quad p = p\,(u, \omega, \omega')\,.$$

Warunek konieczny i dostateczny na to aby pierwsza z nich dała wyrazić się wymiernie przez drugą, stanowi to, by pomiędzy modułami ω_1, ω_1', ω, ω' i liczbami a, b zachodziły związki:

$$a\omega = \alpha\omega_1 + \beta\omega'_1\,; \qquad a\omega' = \gamma\omega_1 + \delta\omega'_1\,;$$

$$b = (m - \alpha - \gamma)\,\omega_1 + (n - \beta - \delta)\,\omega'_1\,,$$

gdzie $a, b, \gamma, \delta, m, n$ są jakiekolwiek liczby całkowite. Szukanie takiego wyrażenia wymiernego funkcyi p_1 przez funkcyę p stanowi zagadnienie o przekształceniu wymiernem funkcyi p. Liczba a nazywa się mnożnikiem; lecz łatwo okazać, że w przekształceniu wymiernem funkcyi p można mnożnik a przyjąć zawsze równym 1, liczbę zaś b równą zeru, gdyż wzory, odpowiadające różnym od jedności wartościom a i różnym od zera wartościom b, otrzymują się łatwo z wzorów, odnoszących się do przypadku $a=1$, $b=0$.

Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = 0$$

jest zawsze liczbą całkowitą dodatnią i nazywa się rzędem przekształcenia. Własność zasadnicza liczby n jest następująca. Dajmy, że p_1 wyraża się wymiernie przez p za pomocą wzoru $p_1 = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, gdzie φ i ψ są dwa wielomiany bez czynnika wspólnego; wtedy liczba n jest równa stopniowi równania

$$\varphi(p) - p_1\psi(p) = 0$$

względem p, t. j. jest większemu ze stopni wielomianów φ i ψ; innemi słowy: liczba ta wskazuje, ile wartości funkcyi p odpowiada jednej i tej samej wartości funkcyi p_1.

Jeżeli za punkt wyjścia obrać nie funkcyę eliptyczną p, lecz funkcyę sn, to zagadnienie o przekształceniu wymiernem dla funkcyi sn można wypowiedzieć w sposób podobny do powyższego; zwracamy przytem uwagę na to, że jedno zagadnienie odpowiada drugiemu tylko w pewnych przypadkach.

Warunek konieczny i dostateczny na to, aby funkcya

$$\mathrm{sn}_1 = \mathrm{sn}\,(a'v + b',\ K_1,\ K'_1)$$

wyrażała się wymiernie przez funkcyę

$$\mathrm{sn} = \mathrm{sn}\,(v, K, K'),$$

stanowią związki:

$$a' \,.\, 2K = \alpha' 2K_1 + \beta' i K'_1 \,; \quad a' \,.\, iK' = \gamma' 2K_1 + \delta' i K'_1 \,;$$

$$b = (2m' + 1 - \alpha')\, K_1 + \tfrac{1}{2}\,(2n' - \beta')\, i K'_1,$$

gdzie α', β', γ' δ' są liczbami całkowitemi.

W tym przypadku nie można już, jak poprzednio, przyjąć, że mnożnik równa się 1, albowiem mnożnik a' ma wartość zależną od samego przekształcenia; i liczba b' nie może być zerem w każdym przypadku.

Zagadnienie o przekształceniu można przedstawić jeszcze w następującej postaci:

Danem jest równanie różniczkowe:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)\,(1 - l^2 y^2)}} = a' \,.\, \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)\,(1 - k^2 x^2)}}\,;$$

znaleść związki, jakie powinny zachodzić pomiędzy stałemi l, a', k, aby całką tego równania było $y = \varphi(x)$, gdzie φ jest symbolem funkcyi wymiernej stopnia określonego względem x.

Albo też tak:

Mając daną całkę eliptyczną

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)\,(1 - k^2 x^2)}}$$

przekształcić ją na inną całkę tejże postaci, t. j. na całkę

$$\frac{1}{a'} \; \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)\,(1 - l^2 y^2)}}\,,$$

za pomocą przekształcenia $y = \varphi(x)$ danego stopnia i znaleść związki pomiędzy ilościami l, a', k.

Widzimy stąd, że w tej postaci zagadnienie o przekształceniu funkcyj eliptycznych schodzi się z zagadnieniem o przekształceniu całki eliptycznej na inną, które to przekształcenie, odpowiednio zastosowane, służy do obliczania przybliżonej wartosci samych całek.

Przekształcenie jest określone przez liczby całkowite α, β, γ, δ i dlatego oznacza się za pomocą symbolu

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix},$$

który jest zwykłym symbolem podstawienia liniowego dwóch zmiennych jednorodnych (w naszym przypadku ω i ω'). Dowodzi się, że składanie dwu przekształceń uskutecznia się za pomocą zwykłego prawidła o iloczynie dwóch podstawień liniowych.

Każde podstawienie

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix},$$

rzędu $n = \alpha\delta - \beta\gamma$ można za pomocą mnożenia przez odpowiednie podstawienie rzędu 1-go sprowadzić do podstawienia typu

$$\begin{pmatrix} d, & 0 \\ \nu, & \dfrac{n}{d} \end{pmatrix},$$

gdzie d jest dzielnikiem liczby n, ν zaś przedstawia liczbę całkowitą dodatnią, mniejszą od $\frac{n}{d}$. Podstawienie takie nazywa się elementarnem; liczba takich podstawień wynosi $\sum \frac{n}{d}$, gdzie suma rozciąga się na wszystkie dzielniki d liczby n. Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to podstawień elementarnych jest $n+1$.

Iloczvn dwu podstawień elementarnych jest także podstawieniem elementarnem

Każde podstawienie rzędu niepierwszego można złożyć—pomijając podstawienia rzędu 1—z innych podstawień rzędów, będących liczbami pierwszemi.

Wszystkie podstawienia rzędu 1-go można złożyć z dwu tylko podstawień, tworzących

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Przekształcenie liniowe, wykonane na półperyodach ω i ω', daje wyniki następujące: 1) Funkcya p pozostaje bez zmiany, t. j. wzór na przekształcenie jest wprost $p_1 = p$. 2) Niezmienniki g_2, g_3 pozostają bez zmiany. 3) Funkcya σ nieparzysta pozostaje niezmienną. 4) Funkcye σ parzyste oraz niezmienniki niewymierne e przemieniają się według wzorów:

$$\sigma'_1 = \sigma_1, \quad \sigma'_2 = \sigma_3, \quad \sigma'_3 = \sigma_2;$$

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = e_3, \quad e'_3 = e_2,$$

odnoszących się do podstawienia tworzącego A, oraz według wzorów:

$$\sigma'_1 = \sigma_3, \quad \sigma'_2 = \sigma_2, \quad \sigma'_3 = \sigma_1,$$

$$e'_1 = e_3, \quad e'_2 = e_3, \quad e'_3 = e_1,$$

odnoszących się do podstawienia tworzącego B. 5) Półmoduły przestępne drugiego gatunku η, η' przekształcają się dla podstawienia liniowego przy pomocy tych samych wzorów które służą dla ω, ω'. 6) Dla podstawienia A, wykonanego na peryodach ilości x i $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ stają się odpowiednio $x_1 = x$, $\tau_1 = \tau + 1$, a funkcye ϑ przekształcają się za pomocą wzorów:

$$\vartheta(x, \tau+1) = e^{\frac{i\pi}{4}} \vartheta_2(x, \tau); \quad \vartheta_1(x, \tau+1) = e^{\frac{i\pi}{4}} \vartheta_1(x, \tau);$$

$$\vartheta_2(x, \tau+1) = \vartheta_3(x, \tau); \quad \vartheta_3(x, \tau+1) = \vartheta(x, \tau).$$

7) Dla podstawienia B, wykonanego na peryodach ω, ilości x i τ stają się odpowiednio $x_1 = \frac{x}{\tau}$, $\tau_1 = -\frac{1}{\tau}$, a funkcye ϑ przekształcają się za pomocą wzorów:

$$\vartheta\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = i\sqrt{i\tau}\, e^{\frac{x^2}{\pi\tau}} \vartheta_2(x, \tau); \quad \vartheta_1\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{i\tau}\, e^{\frac{x^2}{\pi\tau}} \vartheta_1(x, \tau);$$

$$\vartheta_2\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = i\sqrt{i\tau}\, e^{\frac{x^2}{\pi\tau}} \vartheta(x, \tau); \quad \vartheta_3\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = i\sqrt{i\tau}\, e^{\frac{x^2}{\pi\tau}} \vartheta_3(x, \tau).$$

8) Funkcya p, jak wiadomo, nie zmienia się przy podstawieniu liniowem, funkcya sn nie zachowuje się tak prosto. Podstawienia liniowe $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ odnoszą się w tym przypadku nie do ω, ω', lecz do $2K$, iK'. Wszystkie rozwiązania związku

$$\mathrm{sn}\,(av + b, l^2) = \frac{A + B\, \mathrm{sn}\,(v, k^2)}{A' + B'\, \mathrm{sn}\,(v, k^2)}\ .$$

zawierają się w następujących 24 wzorach:

$$\mathrm{sn}\,(\pm v, k^2) = \pm\, \mathrm{sn}\,(v, k^2); \quad \mathrm{sn}\,(\pm v + iK_1', K^2) = \pm \frac{1}{k\, \mathrm{sn}\,(v, k^2)}$$

$$\mathrm{sn}\left(\pm kv, \frac{1}{k^2}\right) = \pm\, k\, \mathrm{sn}\,(v, k^2); \quad \mathrm{sn}\left(\pm kv + iK_1', \frac{1}{k^2}\right) = \pm \frac{1}{\mathrm{sn}\,(v, k^2)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2i} v + i\frac{K_1'}{2} + K_1\right\}, \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^4\right) = \pm \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \cdot \frac{1-\sqrt{k}\, \mathrm{sn}\,(v, k^2)}{1+\sqrt{k}\, \mathrm{sn}\,(v, k^2)} \\ \mathrm{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1-\sqrt{k})^2}{2i} v - i\frac{K_1'}{2} - K_1\right\}, \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^4\right) = \mp \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\ \frac{1-\sqrt{k}\, \mathrm{sn}\,(v, k^2)}{1+\sqrt{k}\, \mathrm{sn}\,(v, k^2)}\ . \end{array}\right.$$

$$\operatorname{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1-\sqrt{k})^2}{2i}v+i\frac{K_1'}{2}+K_1\right\},\ \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^4\right)=\pm\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\cdot\frac{1+\sqrt{k}\,\operatorname{sn}(v,k^2)}{1-\sqrt{k}\,\operatorname{sn}(v,k^2)},$$

$$\operatorname{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1-\sqrt{k})^2}{2i}v-i\frac{K_1'}{2}-K_1\right\},\ \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^4\right)=\mp\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\cdot\frac{1+\sqrt{k}\,.\operatorname{sn}(v,k^2)}{1-\sqrt{k}\,\operatorname{sn}(v,k^2)},$$

$$\operatorname{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1-i\sqrt{k})^2}{2i}v+i\frac{K_1'}{2}+K_1\right\}.\ \left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^4\right)=\pm\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\cdot\frac{1-i\sqrt{k}\,\operatorname{sn}(v,k^2)}{1+i\sqrt{k}\,\operatorname{sn}(v,k^2)}.$$

$$\operatorname{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1+i\sqrt{k})^2}{2i}v-i\frac{K_1'}{2}-K_1\right\},\ \left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^4\right)=\mp\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\cdot\frac{1-i\sqrt{k}\,\operatorname{sn}(v,k^2)}{1+i\sqrt{k}\,\operatorname{sn}(v,k^2)},$$

$$\operatorname{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1-i\sqrt{k})^2}{2i}v+i\frac{K_1'}{2}+K_1\right\},\ \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^4\right)=\pm\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\cdot\frac{1+i\sqrt{k}\,\operatorname{sn}(v,k^2)}{1-i\sqrt{k}\,\operatorname{sn}(v,k^2)},$$

$$\operatorname{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1-i\sqrt{k})^2}{2i}v-i\frac{K_1'}{2}-K_1\right\},\ \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^4\right)=\mp\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\cdot\frac{1+i\sqrt{k}\,.\operatorname{sn}(v,k^2)}{1-i\sqrt{k}\,\operatorname{sn}(v,k^2)}.$$

Wzory pary pierwszej, drugiej oraz każde dwa połączone klamrą odpowiadają tej samej wartości modułu przekształconego l^2, który może mieć tylko sześć wartości różnych. Ilości $2K_1$, i K_1' są półperyodami funkcyi sn przekształconej.

Przekształcenie rzędu 2-go. Trzy przekształcenia elementarne rzędu 2-go, zastosowane do ω, ω', są:

$$(a)=\begin{pmatrix}2, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix},\quad \text{t. j.}\quad \omega=2\omega_1,\ \omega'=\omega'_1,$$

$$(b)=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 2\end{pmatrix},\quad \text{t. j.}\quad \omega=\omega_1,\quad \omega'=2\omega'_1,$$

$$(c)=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 1, & 2\end{pmatrix},\quad \text{t. j.}\quad \omega=\omega_1,\quad \omega'=\omega_1+2\omega'_1.$$

1. Dla tych podstawień odpowiednie przekształcenia funkcyi p (p po drugiej stronie rozumie się przy wartościach półmodułowych ω, ω') są następujące:

a) $$p\left(u;\ \frac{\omega}{2},\ \omega'\right) = \frac{p^2(u) - e_1 p(u) + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p(u) - e_1},$$

b) $$p\left(u;\ \omega,\ \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{p^2(u) - e_3 p(u) + (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{p(u) - e_3},$$

c) $$p\left(u;\ \omega,\ \frac{\omega' - \omega}{2}\right) = \frac{p^2(u) - e_2 p(u) + (e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}{p(u) - e_2},$$

2. Przekształcenia funkcyi σ parzystej są:

a) $$\sigma\left(u;\ \frac{\omega}{2},\ \omega'\right) = e^{\frac{1}{2} e_1 u^2} \sigma(u)\, \sigma_1(u),$$

b) $$\sigma\left(u,\ \omega,\ \frac{\omega'}{2}\right) = e^{\frac{1}{2} e_3 u^2} \sigma(u)\, \sigma_3(u),$$

c) $$\sigma\left(u,\ \omega,\ \frac{\omega' - \omega}{2}\right) = e^{\frac{1}{2} e_2 u^2} \sigma(u)\, \sigma_2(u),$$

3. Odpowiednie przekształcenia modułów przestępnych 2-go gatunku η, η' są:

a) $\eta_1 = \frac{1}{2} e_1 \omega + \eta$; $\quad \eta_1' = e_1 \omega' + 2\eta'$,

b) $\eta_1 = e_2 \omega + 2\eta$; $\quad \eta_1' = \frac{1}{2} e_3 \omega' + \eta'$,

c) $\eta_1 = e_2 \omega + 2\eta$; $\quad \eta_1' = \frac{1}{2} e_2 (\omega' - \omega) + (\eta' - \eta)$.

4. Odpowiednie przekształcenia funkcyj σ parzystych są:

a) $$\sigma_1\left(u;\ \frac{\omega}{2},\ \omega\right) = \sigma_2(u) \left[p(u) - p\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] e^{\frac{1}{2} e_1 u^2},$$

$$\sigma_2\left(u;\ \frac{\omega}{2},\ \omega'\right) = \sigma_3^{2}(u) \left[\frac{p\left(\frac{\omega}{2}\right) - p(\omega + \omega')}{p\left(\frac{\omega}{2}\right) - p(\omega')}\right] e^{\frac{1}{2} e_1 u^2}$$

$$\sigma_3\left(u;\ \frac{\omega}{2},\ \omega'\right) = \sigma_3(u) \cdot \sigma_2(u)\, e^{\frac{1}{2} e_1 u^2}.$$

b) $$\sigma_1\left(u,\ \omega,\ \frac{\omega'}{2}\right) = \sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,e^{\frac{1}{2}e_3u^2}.$$

$$\sigma_2\left(u;\ \omega,\ \frac{\omega'}{2}\right) = \sigma_1^2(u)\,.\,\frac{p(u+\omega)-p\left(\frac{\omega'}{2}\right)}{p(\omega)-p\left(\frac{\omega'}{2}\right)}\,e^{\frac{1}{2}e_3u^2},$$

$$\sigma_3\left(u;\ \omega,\ \frac{\omega'}{2}\right)=\sigma_1^2(u)\,.\left[p(u)-p\left(\frac{\omega'}{2}\right)\right]e^{\frac{1}{2}e_3u^2}.$$

c) $$\sigma_1\left(u;\ \omega;\ \frac{\omega'-\omega}{2}\right) = \sigma_1(u)\,\sigma_3(u)\,e^{\frac{1}{2}e_2u^2}.$$

$$\sigma_2\left(u,\ \omega,\ \frac{\omega'-\omega}{2}\right) = \sigma(u)\left[p(u)-p\left(\frac{\omega''}{2}\right)\right]e^{\frac{1}{2}e_2u^2},$$

$$\sigma_3\left(u,\ \omega,\ \frac{\omega'-\omega}{2}\right) = \sigma_1^2(u)\,.\,\frac{p\left(\frac{\omega''}{2}\right)-p(u+\omega)}{p\left(\frac{\omega''}{2}\right)-p(\omega)}\,e^{\frac{1}{2}e_2u^2}.$$

5. Niezmienniki niewymierne e_1, e_2, e_3 przekształcają się za pomocą wzorów:

a) $$e'_1 = e_1 + 2\sqrt{e_1-e_2}\,\sqrt{e_1-e_3}\,;\quad e'_2 = e_1 - 2\sqrt{e_1-e_2}\,.\sqrt{e_1-e_3}\,;$$
$$e_3' = -\,2e_1\,,$$

b) $$e'_1 = -\,2e_3\,;\quad e'_2 = e_3 + 2\sqrt{e_1-e_3}\,.\sqrt{e_2-e_3}\,;$$
$$e'_3 = e_3 - 2\sqrt{e_1-e_3}\,.\sqrt{e_2-e_3}\,,$$

c) $$e'_1 = -\,2e_2\,;\quad e'_2 = e_2 - 2i\sqrt{e_2-e_3}\,.\sqrt{e_1-e_2}\,,$$
$$e'_3 = e_2 + 2i\sqrt{e_2-e_3}\,.\sqrt{e_1-e_2}\,.$$

6. Znalazłszy wartości ilości e' można znaleść wartość modułu przekształconego l^2 w każdym z trzech przypadków. Mamy:

$$\text{a)}\ l^2=\frac{(1-k')^2}{(1+k')^2},\quad \text{b)}\ l^2=\frac{4k}{(1+k)^2},\quad \text{c)}\ l^2=-\frac{4ikk'}{(k'-ik)^2}.$$

7. Funkcye ϑ przekształcają się za pomocą wzorów:

a) $q_1 = q^2, \quad x_1 = 2x,$

$$\vartheta\,(2x, q^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2K\sqrt{k'}}}\;\vartheta\,(x, q)\;\vartheta_3\,(x, q),$$

$$\vartheta_1(2x, q^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2K\sqrt{k'}}}\;\vartheta_1\,(x, q)\;\vartheta_2\,(x, q),$$

$$\vartheta_2(2x, q^2) = \frac{1}{2k'}\sqrt{\frac{\pi}{K}}\left\{\sqrt{1-k'}\;\vartheta^2\,(x, q) - \sqrt{1+k'}\;\vartheta_1^{\,2}\,(x, q)\right\},$$

$$\vartheta_3(2x, q^2) = \frac{1}{2k'}\sqrt{\frac{\pi}{K}}\left\{\sqrt{1+k'}\;\vartheta^2(x, q) - \sqrt{1-k'}\;\vartheta_1^{\,2}\,(x, q)\right\},$$

b) $q_1 = q^{\frac{1}{2}}, \quad x_1 = x,$

$$\vartheta\,(x, \sqrt{q}) = \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{\pi(1-k)}{2K}}\left\{\vartheta^2\,(x, q) + \vartheta_1^{\,2}\,(x, q)\right\}.$$

$$\vartheta_1\,(x, \sqrt{q}) = \sqrt{\frac{\pi}{K\sqrt{k}}}\;\vartheta\,(x, q)\;\vartheta_1(x, q),$$

$$\vartheta_2\,(x, \sqrt{q}) = \sqrt{\frac{\pi}{K\sqrt{k}}}\;\vartheta_3\,(x, q)\;\vartheta_2\,(x, q),$$

$$\vartheta_3\,(x, \sqrt{q}) = \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{\pi\,(1+k)}{2\,K}}\left\{\vartheta^2\,(x, q) - \vartheta_1^{\,2}\,(x, q)\right\}.$$

c) $q_1 = e^{-\frac{i\pi}{2}}\,q^{\frac{1}{2}}, \quad x_1 = x.$

$$\vartheta_1\,(x, e^{-\frac{i\pi}{2}}\,q^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{\frac{\pi i\sqrt{i}}{K\sqrt{kk'}}}\;\vartheta_3\,(x, q)\;\vartheta_1\,(x, q),$$

$$\vartheta_2\,(x, e^{-\frac{i\pi}{2}}\,q^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{\frac{\pi i\sqrt{i}}{K\sqrt{kk'}}}\;\vartheta\,(x, q)\;\vartheta_2\,(x, q).$$

$$\vartheta_3\left(x, e^{-\frac{i\pi}{2}} q^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2K(k'+ik)}} \left\{ \vartheta_3{}^2(x, q) + i\vartheta_1{}^2(x, b) \right\}.$$

$$\vartheta.\left(x, e^{-\frac{i\pi}{2}} q^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2K(k'-ik)}} \left\{ \vartheta_3{}^2(x, q) - i\vartheta_1{}^2(x, q) \right\},$$

8. Podamy jeszcze wzory na przekształcenie funkcyi sn. Gdy ω i ω' są poddane wszystkim trzem wskazanym wyżej podstawieniom, funkcya p przekształca się wymiernie, lecz funkcya sn przekształca się wymiernie tylko przy dwóch pierwszych z pomiędzy tych podstawień, przy trzeciem przekształca się niewymiernie. Przekształcenia funkcyi sn, odpowiadające wszystkim trzem przekształceniom wymiernym funkcyi p, są następujące:

a) $$\operatorname{sn}\left((1+k')v + K_1), \left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2\right) = \frac{1-(1+k')\operatorname{sn}^2(v, k)}{1-(1-k')\operatorname{sn}^2(v, k)},$$

(Przekształcenie Landena);

b) $$\operatorname{sn}\left((1+k)v, \frac{4k}{(1+k)^2}\right) = \frac{(1+k)\operatorname{sn}(v, k)}{1+k\operatorname{sn}^2(v, k)},$$

(Przekształcenie Gaussa);

c) $$\operatorname{sn}\left((k'-ik)v, -\frac{4ikk'}{(k'-ik)^2}\right) = \frac{(k'-ik)\operatorname{sn}(v, k)\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2(v, k)}}{1-k(k+ik')\operatorname{sn}^2(v, k)}.$$

(Przekształcenie niewymierne).

§ 7.

O mnożeniu argumentu w funkcyach eliptycznych. Mnożenie zespolone.

Zagadnienie o mnożeniu argumentu w funkcyach eliptycznych jest następujące:

Znaleść wzór, przy pomocy którego funkcya eliptyczna (n. p. sn lub p) o argumencie, pomnożonym przez n (gdzie n jest liczbą całkowitą), wyraża się za pomocą tejże funkcyi eliptycznej o argumencie pojedyńczym.

Zagadnienie o mnożeniu przez n jest specyalnem zagadnieniem o przekształceniu rzędu n^2; w takiem przekształceniu moduł pozostaje niezmienionym.

Rozpatrzmy mnożenie argumentu dla funkcyi sn. Jeżeli n jest nieparzyste, to funkcya $\operatorname{sn}(nv)$ wyraża się zawsze wymiernie przez $\operatorname{sn} v$; jeżeli zaś n jest parzyste, to $\operatorname{sn}(nv+K)$ (gdzie $2K$ jest pierwszym półperyodem funkcyi sn) wyraża się wymiernie przez $\operatorname{sn} v$, funkcya zaś $\operatorname{sn}(nv)$ daje się wyrazić przez funkcyę wymierną ilości $\operatorname{sn} v$, pomnożoną przez $\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 v} \,.\, \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 v}$.

Co się tyczy funkcyi $p(u)$, to dla niej $p(nu)$ zawsze daje się wyrazić wymiernie przez $p(u)$.

Rozłożywszy liczbę n na czynniki pierwsze, możemy zawsze mnożenie przez n sprowadzić do kolejnych mnożeń przez 2 i przez czynniki pierwsze nieparzyste.

Wzory na mnożenie przez 2, 3 dla funkcyi sn są:

$$\operatorname{sn} 2v = \frac{2 \operatorname{sn} v \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 v} \,.\, \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 v} \,.$$

$$\operatorname{sn} 3v = \frac{\operatorname{sn} v \left\{ 3-4\,(1+k^2 \operatorname{sn}^2 v) + 6k^2 \operatorname{sn}^4 v - k^4 \operatorname{sn}^8 v \right\}}{1-6k^2 \operatorname{sn}^4 v + 4k^2\,(1+k^2) \operatorname{sn}^6 v - 3k^4 \operatorname{sn}^8 v} \,.$$

Wzory na mnożenie przez 4, 5 są bardziej skomplikowane. Można je znaleść w dziele Cayley'a o „funkcyach eliptycznych“ (tłom. włoskie Brioschi'ego, Medyolan, 1880, Cap. IV, str. 73 i nast.)

Godnym uwagi jest następujący wzór ogólny (patrz Enneper Ellipt. Funct. Halle 1890, str. 374), w którym wszakże spółczynniki nie są przedstawione wyraźnie jako funkcye ilości k; liczba n jest w nim n i e p a r z y s t ą:

$$\operatorname{sn}(nv) = n \operatorname{sn} v \prod_{m\,m'} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn}^2 \dfrac{2mK+2m'iK'}{n}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \dfrac{2mK+2m'iK'}{n} \operatorname{sn}^2 v} \cdot$$

gdzie iloczyn rozciąga się na wszystkie kombinacye

$$m = 1, 2 \ldots, \frac{n-1}{2}\,; \quad m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \frac{n-1}{2}\,.$$

oraz na kombinacye :

$$m = 0, \quad m' = +1, +2, +3, \ldots\ldots + \frac{n-1}{2}\,.$$

Wzór na mnożenie dla funkcyi p jest:

$$p\,(nu) = p\,(u) - \frac{\psi_{n+1}\ \psi_{n-1}}{\psi^2_n}\,,$$

g dzie

$$\psi_1 = 1: \qquad \psi_2 = -\,p'(u)\,;$$

$$\psi_3 = 3p^4(u) - \frac{3}{2}\,g_2 p^2(u) - 3g_3 p(u) - \frac{1}{16}\,g_2^{\,2}.$$

$$\psi_4 = p'(u)\left(-2p^6 + \frac{5}{2}\,g_2 p^4 + 10 g_3 p^3 + \frac{5}{8}\,g_2 p^2 + \tfrac{1}{2} g_2 g_3 p + g_3^{\,2} + \frac{1}{32}\,g_2^{\,2}\right).$$

. . . .

Wzór zwrotny dla funkcyi ψ jest w ogólności:

$$\psi_{2n+1} = \psi_{2n+2}\ \psi_n^{\,3} - \psi_{n-1}\ \psi^3_{n+1}\,,$$

$$\psi_{2n} = -\,\frac{\psi_n}{p'}\left(\psi_{n+2}\ \psi^2_{n-1} - \psi_{n-2}\ \psi^2_{n+1}\right).$$

Patrz H a l p h e n. Fonctions elliptiques I. str. 102.

Zagadnienie o mnożeniu zespolonem argumentu funkcyj eliptycznych można przedstawić pod następującemi postaciami:

Dany jest wielomian $f(x)$ stopnia 4-go lub 3-go; jakim warunkom winny zadość czynić te wielomiany oraz liczba zespolona m, aby równanie różniczkowe

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{m}\,\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

miało całkę wymierną postaci $y=R(x)$?

W przypadku, gdy m jest liczbą rzeczywistą całkowitą, równanie to ma zawsze całkę tej postaci i wtedy mamy zagadnienie o mnożeniu zwykłem. Jeżeli wielomian $f(x)$ weźmiemy w postaci specyalnej Jacobi'go albo Weierstrassa, to zagadnienie będzie można wysłowić w ten sposób: Jakim warunkom powinny czynić zadość moduły funkcyi eliptycznej Jacobi'ego albo funkcyi Weierstrassa i jakim warunkom liczba zespolona m, aby $\mathrm{sn}(mv)$ dało się wyrazić wymiernie przez $\mathrm{sn}\,v$, albo $\wp(mu)$ wymiernie przez $\wp(u)$.

Moduły, które w ten sposób znajdziemy, nazywają się modułami osobliwemi. Liczba m powinna być postaci $a+i\sqrt{b}$, gdzie a i b są dwie liczby wymierne. Stosunek $i=\frac{\omega'}{\omega}$ modułów funkcyj eliptycznych powinien być pierwiastkiem równania stopnia 2-go o spółczynnikach całkowitych.

Pierwsze własności funkcyj eliptycznych, obdarzonych mnożeniem zespolonem, w części intuicyjnie, przeczuł Abel. Najważniejsze prace o tym przedmiocie zawdzięczamy Kroneckerowi (Ber. Monatsber. 1857—1862—1863—1870—1875—1877—1880—1882) i Hermite'owi (Comptes rendus 1859). Potem zajmowali się tą rzeczą Greenhill (Proc. of Camb etc., 1884), Weber (Acta math.

VI), Pick (Math. Ann. XXV. XXVI). Sylow (Liouville. III. 1887), Kiepert (Math. Ann. XXXIX) i t. d.

O zastosowaniach tej teoryi do podziału łuku lemniskaty pisali: Abel (Dzieła), Hoffmann (Crelle XLVIII), Kiepert (tamże LXXV), Schwering (tamże CVII).

Teorya funkcyj eliptycznych powstała wraz z zagadnieniem o wyprostowaniu elipsy, hyperboli, lemniskaty i t. d. Zajmowali się nią pierwsi: Fagnano, Landen, d'Alembert, Maclaurin. Euler (Novi Comm. Petrop. X, 1764) zebrał rozproszone rezultaty i ustanowił zasady ogólne teoryi. Po Eulerze przedmiotem tym zajmował się Legendre w licznych rozprawach (Acad. de Paris. 1786, 1793 i t. d.), poczem w r. 1825 ogłosił sławne dzieło p. t. „Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes" (Paryż 1825 — 1828, 2 tomy z trzema suplementami).

Okres 1815 do 1829 nazwać można najważniejszym dla teoryi funkcyj eliptycznych, albowiem w nim, prócz klasycznego dzieła Legendre'a, ogłoszone były w krótkich odstępach czasu jedna po drugiej genialne prace Abela i Jacobi'ego. Dzieło Jacobi'ego p. t. „Fundamenta nova Theoriae functionum ellipticarum" wydane zostało właśnie w r. 1829. W klasycznej tej pracy rozpoczął Jacobi badanie funkcyj ϑ, których teoryę rozwinął następnie w późniejszych rozprawach. O historyi rozwoju teoryi funkcyj eliptycznych w latach 1826—1829 można czytać z korzyścią dziełko Königsbergera (Zur Geschichte der ellipt. Funct. Lipsk 1879). Wskazówki historyczne zawiera też dzieło Casorati'ego „Teorica delle funz. etc." Po Jacobim najważniejszy krok w teoryi funkcyj eliptycznych uczynił Weierstrass przez wprowadzenie funkcyi σ.

Teoryą funkcyj eliptycznych zajmowali się prawie wszyscy analiści tego wieku, jedni mniej, drudzy więcej: Cayley, Hermite, Weierstrass, Brioschi. Klein i wielu innych.

Wskazówki historyczne szczegółowe, odnoszące się do tej teoryi, zawiera cenne dzieło Ennepera (Elliptische Funct. Halle, 1890). Najważniejszemi traktatami, prócz Ennepera, są: Briota i Bouqueta (Paryż 1875). Cayley'a przekład Brioschi'ego. Medyolan 1880), Königsbergera (Lipsk 1874), Greenhilla (Londyn 1892, przekład fr. 1897). Halphena (Paryż 1886). Ostatni autor stara się w dziele swem wprowadzić funkcye eliptyczne metodą elementarną, podobną do tej, jaką wprowadzają się funkcye trygonometryczne. Nie sądzę wszakże, aby metoda ta była najodpowiedniejszą do wytworzenia ogólnego i rozległego poglądu, i mniemam, że autor nie ma słuszności, gdy mówi w pewnem miejscu swej książki, że odtąd pewne inne metody i pewne inne rozważania należą już do historyi.

Zbiór wzorów, odnoszących się do teoryi Weierstrassa, zawiera dzieło wydane przez Schwarza: „Formeln und Lehrsätze etc.“ (Getynga 1889). Najnowszemi traktatami są dzieła: Tannery'ego i Molka (Paryż 1893), Appela-Lacoura (Paryż 1877), Krausego („Theorie der doppellperiodischen Funct.“, Lipsk 1890), Pascala (Medyolan 1896). Burkhardta „Elliptische Functionen, Lipsk 1899. Riemanna Elliptische Functionen wyd. H. Stahl. Lipsk 1899.

Teoryę funkcyj eliptycznych przedstawić można za pomocą różnych metod: albo wychodzi się z odwrócenia całek eliptycznych, albo z teoryi ogólnej funkcyj, która stosuje się do funkcyj podwójnie peryodycznych, albo wreszcie bierze się za punkt wyjścia funkcye ϑ Jacobi'ego i liczne pomiędzy niemi zachodzące związki. W dziele, przezemnie ogłoszonem, obrałem właśnie ten ostatni kierunek, wychodząc z rozprawy Jacobi'ego, w którym on założył sobie ten sam cel, o ile to było możliwem w jego czasach. Nie ulega wszakże wątpliwości, że i przy pomocy innych metod można w sposób zupełny i ogólny wyłożyć podstawy zasadnicze teoryi funkcyj eliptycznych, która jest jedną z najważniejszych w matematyce.

Teoryą funkcyj podwójnie peryodycznych, które są ogólnemi funkcyami eliptycznemi, zajmuje się rozdział XIV.

ROZDZIAŁ XVII.

FUNKCYE HYPERELIPTYCZNE I ABELOWE.

§ 1.

Twierdzenie J a c o b i e'go o odwróceniu.

Rozpatrzmy całkę abelową rodzaju p (patrz Rozdz. XV).

$$v = \int_a^{(w, z)} F(w, z)\, dz,$$

Ma ona $2p$ modułów peryodyczności (jeżeli jest 1-go lub 2-go gatunku); stąd punkt (w, z), uważany jako funkcya ilości v, jest funkcyą $2p$-krotnie peryodyczną. Na mocy sławnego twierdzenia J a c o b i'ego (patrz Rozdział XIV) wiemy, że taka funkcya nie może być jednowartościową dla $p > 1$: stąd z, jako funkcya ilości v, b ę d z i e w ł a ś c i w i e f u n k c y ą n i e o j e d n e j w a r t o ś c i, l e c z o n i e s k o ń c z o n e j l i c z b i e w a r t o ś c i. Odwrócenie całki abelowej nie daje się tym sposobem uskutecznić, gdyż nie doszlibyśmy na tej drodze do funkcyj jednowartościowych. J a c o b i pokonał tę trudność sposobem następującym (Crelle, IX).

Połóżmy:

$$u_1 = \left\{ \int_{a_1}^{z_1} + \int_{a_2}^{z_2} + \dots + \int_{a_p}^{z_p} \right\} du_1,$$

$$u_2 = \left\{ \int_{a_1}^{z_1} + \int_{a_2}^{z_2} + \dots + \int_{a_p}^{z_p} \right\} du_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_p = \left\{ \int_{a_1}^{z_1} + \int_{a_2}^{z_2} + \dots + \int_{a_p}^{z_p} \right\} du_p,$$

gdzie dla prostoty oznaczamy przez z_i punkt powierzchni Riemanna, zależny od dwu ilości w i z, a nietylko od samych wartości z; gdzie $du_1, du_2, \dots, du_p$ są różniczkami p całek 1-go gatunku liniowo-niezależnych; gdzie wreszcie $a_1, a_2, \dots a_p$ są punktami z góry oznaczonemi. Całki $u_1, \dots u_p$, jako sumy p całek podobnych, mają te same moduły peryodyczności co i te całki. Jeżeli te ostatnie stają się normalnemi (patrz Rozd. XV) o modułach τ na cięciach B, wtedy i pierwsze strony mają też same moduły; nazwijmy wtedy strony pierwsze $v_1, v_2, \dots v_p$.

Ustaliwszy granice górne $z_1, z_2, \dots, z_p$, należy wyznaczyć wartości ilości u (pomijając moduły peryodyczności). Rozłóżmy każde u na część rzeczywistą i urojoną i rozpatrzmy przestrzeń o $2p$ wymiarach, w której spółrzędnemi punktu niechaj będą $2p$ wartości części rzeczywistych i urojonych ilości $u_1, u_2, \dots, u_p$.

Oznaczmy ogólnie przez ω_{ij} ($i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, 2p$) moduły peryodyczności ilości u_i i położywszy

$$\omega_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \cdot \sqrt{-1},$$

rozpatrzmy w powyżej określonej przestrzeni wszystkie punkty $(u) = (\omega_j)$, które wraz z punktem $(u) = (0)$ tworzą wierzchołki równoległościanu w tej przestrzeni. Za pomocą takich równoległościanów podzielimy całą przestrzeń $2p$—wymiarową w ten sposób; że każdemu punktowi przestrzeni odpowiadać będzie punkt równoległościanu początkowego o spółrzędnych, różniących się o całkowite wielokrotności modułów peryodyczności od spółrzędnych punktu rozważanego.

Każdemu układowi punktów $z_1, z_2, \ldots, z_p$ odpowiada punkt równoległościanu początkowego przestrzeni ilości u. Układ p punktów nie może w ogóle zmieniać się, pozostając równoresztowym z samym sobą, o ile jest układem ogólnym, nie specyalnym (patrz twierdzenie Riemanna-Rocha. Jeżeli zaś rozważamy układ specyalny p punktów, wtedy wszystkim innym punktom równoresztowym z uważanym odpowiada ten sam punkt przestrzeni (u).

Każdy punkt równoległościanu początkowego w przestrzeni (u) (pomijając pewne miejsce punktów osobliwych) odpowiada jednemu i tylko jednemu z układów p punktów i każdy układ p punktów odpowiada jednemu i tylko jednemu punktowi równoległościanu początkowego. Punkty u, odpowiadające wszystkim możliwym układom p punktów, wypełniają cały równoległościan początkowy.

Można tedy układ p punktów uważać w ogóle za funkcyę p argumentów u; mianowicie funkcya **wymierna symetryczna** p punktów, jakkolwiek na powierzchni Riemanna wybranych, może być uważana za funkcyę jednowartościową ilości u. Funkcya taka nazywa się **abelową** i jest funkcyą $2p$-krotnie peryodyczną p argumentów. Na tem właśnie polega Jacobi'ego twierdzenie o odwróceniu, udowodnione przez niego najprzód dla przypadku hypereliptycznego, a następnie przez Weierstrassa dla przypadku abelowego (Crelle, LII).

Można jeszcze określić funkcyę abelową w ten sposób. Wyobraźmy sobie funkcyę wymierną $\frac{\varphi}{\psi}$ ilości w i z i rozpatrzmy p wartości tej funkcyi w p jakichkolwiek punktach.

Wartości te będą pierwiastkami równania, którego spółczynniki są funkcyami jednowartościowemi argumentów u i funkcyami wymiernemi symetrycznemi spółrzędnych p punktów. Funkcya symetryczna p pierwiastków takiego równania będzie funkcyą abelową (Clebsch-Gordan. Abel'sche Functionen, str. 138—139).

Funkcya abelowa. według powyższego, będzie określona jako jednowartościowa dla wszystkich punktów przestrzeni $2p$—wymiarowej ilości u, prócz pewnego miejsca $(p-2)$ wymiarowego punktów osobliwych, w których może mieć nieskończenie wiele wartości. Dla $p=2$ miejsce to sprowadza się do punktu równoległościanu początkowego (np. do punktu (0) i wszystkich mu odpowiadających). Dla $p=3$ miejsce to tworzy w równoległościanie początkowym rozmaitość jednowymiarową. W miejscach tych funkcya abelowa przyjmuje postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$. (Patrz Clebsch-Gordan l. c. str. 184—187)

Szukanie wyrażeń funkcyj abelowych przez całki u stanowi takzwane zagadnienie o odwróceniu. Rozwiązujemy to zagadnienie przy pomocy funkcyi ϑ, podobnie jak w przypadku eliptycznym

Jeżeli zasadnicza powierzchnia Riemanna jest hypereliptyczną, wtedy odpowiadające jej funkcye nazywają się hypereliptycznemi lub ultraeliptycznemi (Prym).

W rozprawach Weierstrassa funkcye abelowe oznaczone są symbolami Al $(u_3, u_2, \ldots. u_p)$.

---

§ 2.

Własności zasadnicze funkcyj abelowych.

Pochodna funkcyi abelowej jest funkcyą abelową.

Pomiędzy $p+1$ funkcyami abelowemi, a w szczególności pomiędzy funkcyą abelową i jej p pochodnemi rzędu 1-go, zachodzi związek algebraiczny.

Każdą funkcyę abelową można wyrazić wymiernie przez $p+1$ danych funkcyj abelowych, w szczególności zaś przez daną funkcyę abelową i jej p pochodnych pierwszego rzędu.

Każda funkcya abelowa posiada **twierdzenie o dodawaniu algebraicznem**, t. j. wartość jej dla argumentów $u_i + U_i$ wyraża się wymiernie przez wartości $p+1$ funkcyj abelowych dla argumentów u_i i U_i.

Istnieje, jak widzimy, analogia tych twierdzeń z twierdzeniami, odnoszącemi się do funkcyj podwójnie peryodycznych.

Co do innych szczegółów patrz np. Stahl. Abel'sche Functionen, Lipsk 1896, str. 305 i następ.

---

§ 3.

Szeregi ϑ i ich własności.

Uogólnijmy szeregi ϑ, znane z teoryi funkcyj eliptycznych. Napiszmy:

$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\Omega},$$

gdzie

$$\Omega = (\tau_{11} n_1^2 + 2\tau_{12} n_1 n_2 + \ldots + \tau_{pp} n_p^2) + 2(n_1 v_1 + n_2 v_2 + \ldots + n_p v_p),$$

suma zas Σ rozciąga się na wszystkie możliwe kombinacyę wartości całkowitych, dodatnich i ujemnych liczb $n_1, n_2, \ldots, n_p$.

Ilości $v_1, v_2, \ldots, v_p$ nazywamy argumentami funkcyi ϑ, ilości $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{pp}$ — modułami. Moduły czynią zadość związkom $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Aby szereg powyższy był zbieżny, jest koniecznem i dostatecznem, by wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \tau'_{11}, & \ldots\ldots, & \tau'_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau'_{p1}, & \ldots\ldots, & \tau'_{pp} \end{vmatrix},$$

gdzie τ' oznacza część rzeczywistą modułu τ, był różny od zera i by forma kwadratowa $\sum\limits_{i,k}^{1..p} \tau'_{ik}\, n_i\, n_k$ była **określoną** i ujemnego znaku.

Gdy te warunki spełniają się, wtedy ϑ przedstawia funkcyę zawsze skończoną i ciągłą dla wszystkich skończonych wartosci argumentów: nadto czyni zadość następującym związkom zasadniczym. 1. Jeżeli v_k powiększymy o πi, funkcya nie ulegnie zmianie. 2. Jeżeli argumenty $v_1, v_2, \ldots, v_p$ powiększymy odpowiednio o $\tau_{k1}, \tau_{k2}, \ldots, \tau_{kp}$, nowa wartość funkcyi będzie równa pierwotnej, pomnożonej przez $e^{-(2v_k + \tau_{kk})}$. Kombinując te dwie własnosci, otrzymujemy następującą ogólniejszą. 3. Jeżeli $g_1, g_2, \ldots, g_p$; $h_1, h_2, \ldots, h_p$ są liczby całkowite, a G_k i G oznaczają odpowiednio wyrażenia

$$h_k \pi i + \Sigma_j g_j \tau_{kj}\,; \quad 2\Sigma_j g_j v_j + \Sigma_{jk} \tau_{jk}\, g_j\, g_k + 2i\pi\, \Sigma_k g_k h_k\,,$$

będzie:

$$\vartheta\,(v_1 + G_1, \;\ldots\ldots, \; v_p + G_p) = \vartheta\,(v_1, \;\ldots\ldots, \; v_p)\; e^{G}.$$

4. Funkcya ϑ jest funkcyą parzystą. 5. Funkcya ϑ i wszystkie jej pochodne czynią zadość równaniom różniczkowym:

$$4 \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{,,}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_{,}^2}, \quad 2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{,,}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_{,} \partial v_{,}}.$$

Powyższe własności są charakterystycznemi dla funkcyi ϑ; funkcya, która je posiada, może różnić się od funkcyi ϑ tylko czynnikiem.

Oznaczmy teraz przez $g_1, g_2, \ldots, g_p$; $h_1, h_2, \ldots h_p$ szereg liczb niecałkowitych, mianowicie ułamków o mianowniku 2: wystarczy rozważyć dwa przypadki, w którym licznik jest zerem lub jednością.

Utwórzmy przy pomocy liczb g i h wskazane wyżej wyrażenia $G_1, \ldots, G_p$ i rozpatrzmy funkcyę $\vartheta\,(v_1 + G_1, \ldots, v_p + G_p)$, którą oznaczać będziemy

$$\text{przez } \vartheta \begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_p \\ h_1, \ldots, h_p \end{pmatrix} (v_1, \ldots, v_p) \quad \text{lub przez } \vartheta \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} (v).$$

Nowa ta funkcya różni się od poprzedniej funkcyi ϑ, którą obejmuje i tenże symbol ogólny, mianowicie gdy wszystkie liczby g i h są zerami. Symbol

$$\begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_p \\ h_1, \ldots, h_p \end{pmatrix} \text{ lub } \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

nazywa się **charakterystyką** funkcyi ϑ. Każdej charakterystyce odpowiada pewna funkcya ϑ; dwie zaś charakterystyki, których odpowiednie liczby różnią się od siebie o liczby całkowite, dają tę samą funkcyę ϑ (pomijając czynnik). Stąd wynika, że będzie można mieć tyle funkcyj ϑ, ile można utworzyć charakterystyk w ten sposób, aby liczby odpowiednie w dwóch takich charakterystykach różniły się zawsze o liczby całkowite. Dość będzie, jak już powiedziano, ograniczyć się do takich charakterystyk, w których liczniki ułamków g, h mają wartości 0, 1. Istnieje 2^{2p} charakterystyk, które można uważać za różne, a więc i tyleż funkcyj ϑ. Funkcya ϑ początkowa ma charakterystykę $\begin{pmatrix} 0, \ldots, 0 \\ 0, \ldots, 0 \end{pmatrix}$.

Te funkcye ϑ są parzyste lub nieparzyste stosownie do tego, czy suma $4(g_1h_1+g_2h_2+\ldots+g_ph_p)$ jest parzysta lub nieparzysta (g i h są ułamkami o mianowniku 2).

Jeżeli przez $g_1, \ldots g_p$, $h_1, \ldots, h_p$ rozumiemy nie same ułamki o mianowniku 2, lecz liczniki tych ułamków, wtedy liczby, składające charakterystykę, nie są już ułamkowemi, lecz są całkowitemi i otrzymujemy tym sposobem symbole uproszczone.

Liczba funkcyj ϑ parzystych jest $2^{p-1}(2^p+1)$, nieparzystych jest $2^{p-1}(2^p-1)$. Dla $p=2$ mamy 10 parzystych, 6 nieparzystych; dla $p=3$ mamy 36 parzystych, 28 nieparzystych.

Tak utworzone funkcye ϑ czynią zadość wyżej napisanym równaniom różniczkowym. Nadto czynią zadość związkom:

$$\vartheta\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}(v_1, \ldots, v_l+\pi i, \ldots, v_p) = (-1)^{g_l}\,\vartheta\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}(v_1, \ldots, v_p),$$

$$\vartheta\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}(v_1+\tau_{l1}, \ldots, v_p+\tau_{lp}) = (-1)^{h_l}\,e^{(-2v_l-\tau_{ll})}\,\vartheta\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}(v_1, \ldots, v_p);$$

związki te można uważać za uogólnienie związków, którym czyni zadość funkcya ϑ zasadnicza.

Jeżeli do składu charakterystyki, zamiast liczb o mianowniku 2, bierzemy liczby o mianownikach 3, 4 ..., otrzymujemy funkcye, bardziej złożone od poprzednich.

Funkcye ϑ dla jakiejkolwiek wartości liczby p badał pierwszy Riemann w sławnej rozprawie o funkcyach abelowych oraz w innych rozprawach (Crelle, LXV). Rozliczne związki w przypadku $p=2$ badali: Göpel (Crelle XXXV). Rosenhain (Mém. des Sav. étrang., XI, 1851) i Hermite (Comptes rendus XL, 1855). Ważne prace o teoryi funkcyj ϑ, o ich związkach i o teoryi charakterystyk ogłosili: Prym (Riemann's Charakteristikentheorie etc, Lipsk, 1822), Krazer (Theorie der zweifachen unendlichen Thetareihen, Lipsk 1882), We-h e r (Math. Ann. XIV, Crelle LXXXIV). P r y m i K r a z e r (Acta math. III). S t a h l (Crelle LXXXVIII). F r o b e n i u s (Crelle LXXXIX), K a u s e (Hyperell. Functionen. Lipsk 1886), S c h o t t k y (Abel'sche Functionen. Lipsk 1880) i inni.

O charakterystykach wyższych, t. j. gdy mianownik jest większy od 2, pisali: K r a z e r (Math. Ann. XXII), von B r a u n m ü h l (Math. Ann. XXXII). Co do rodzaju $p=1$ patrz: T h o m a e (Math. Ann. VI), K l e i n (tamże XVII, str. 132, 565), B i a n c h i tamże, XVII, str. 234). Badania t. z. konfiguracyi charakterystyk dla $p=3$ i $p=4$ oraz różnych zastosowań tej teoryi prowadził E. P a s c a l (Ann. di mat. XX, XXI i rozmaite noty w Rend. Lincei 1892—93).

---

§ 4.

Funkcye ϑ, mające za argumenty całki abelowe gatunku 1-go.

M o ż n a p r z y j ą ć, ż e m o d u ł y τ f u n k c y j ϑ s ą m o d u ł a m i p e r y o d y c z n o ś c i u k ł a d u c a ł e k **n o r m a l n y c h** g a t u n k u 1-go, gdyż warunki, jakim te ostatnie czynią zadość, są takie same jak warunki, które muszą spełniać ilości τ, aby odpowiedni szereg, wyrażający funkcyę ϑ, był zbieżny

Weźmy następnie zamiast argumentów układ p całek normalnych 1-go gatunku o większej liczbie wyrazów niż w § 1, w t e d y f u n k c y e ϑ s t a n ą s i ę f u n k c y a m i p u n k t ó w p o w i e r z c h n i R i e m a n n a.

Weźmy argumenty pod postacią $v_i - e_i$, gdzie e_i są ilości stałe, v_i zaś są równe $\int_a^z dv_i$. T a k u t w o r z o n a f u n k c y a ϑ j e s t z a w s z e s k o ń c z o n a i c i ą g ł a d l a k a ż d e g o p u n k t u p o w i e r z c h n i R i e m a n n a; z a c h o w u j e o n a t ę ż s a m ą w a r t o ś ć p r z y p r z e j s c i u p r z e z c i ę c i a A i p r z y p r z e j ś c i u p r z e z c i ę c i a C, a p o z y s k u j e c z y n n i k $e^{-\pi i(v_i - e_i) - \tau_{ii}}$, g d y p r z e k r a c z a m y c i ę c i a B_i n a powierzchni Riemanna. Funkcya ta posiada p punktów zerowych, czyniących zadość związkom:

$$\int_a^{z_1} + \ldots + \int_a^{z_p} \equiv k_i - e_i \ (\text{mod } \tau \text{ i } \pi i),$$

t. j. sumy, jakie przedstawiają strony pierwsze, są równe $k_i - e_i$ (k są stałe, niezależne od punktów z i od stałych e, a zależne od cięć na powierzchni Riemanna), jeżeli pominiemy kombinacyę liniową o spółczynnikach całkowitych modułów τ i πi (które są modułami peryodyczności całek gatunku 1-go). (Twierdzenie Riemanna.)

Jeżeli ϑ jest tożsamościowo zerem, to punkty $z_1, z_2, \ldots, z_p$ są punktami zerowemi krzywej dołączonej rzędu $n-3$; jeżeli zaś punkty z nie są takiemi punktami, to ϑ nie może być tożsamościowo zerem.

Można wyznaczyć punkty $a_1, a_2, \ldots, a_p$ w ten sposób, aby funkcya:

$$\vartheta\left(\int_a^z dv - \sum_1^p \int_{a_i}^{z_i} dv\right)$$

znikała w p punktach $z = z_i$: punkty a_i są określone algebraicznie jako punkty styczności krzywej oznaczonej. stycznej do krzywej zasadniczej $f(w, z) = 0$, oraz określone przestępnie jako punkty zerowe (w liczbie) p funkcyi $\vartheta\left(\int_a^z dv\right)$. Takież twierdzenie stosuje się do funkcyi ϑ z charakterystyką jakąkolwiek; zmienia się tylko krzywa styczności.

Biorąc pod uwagę funkcye ϑ z charakterystyką jakąkolwiek $\left(\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right)$, możemy powiedzieć ogólnie:

Punktami zerowemi funkcyi $\vartheta\left(\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right)\left(\int_a^z dv\right)$ są punkty styczności krzywej dołączonej rzędu $n-2$, gdy charakterystyka funkcyi ϑ jest parzysta; punkt a i zbiór $p-1$ punktów styczności krzywej dołączonej rzędu $n-3$, gdy charakterystyka funkcyi ϑ jest nieparzysta. Każdej charakterystyce odpowiada specyalny układ krzywych styczności.

Logarytm ilorazu dwu funkcyj ϑ, których argumenty są całkami gatunku 1-go, wyraża się za pomocą całki gatunku 3-go.

Pierwsze pochodne logarytmowe funkcyi ϑ wyrażają się za pomocą całek gatunku 2-go oraz funkcyj algebraicznych..

Drugie pochodne logarytmowe funkcyi ϑ wyrażają się za pomocą funkcyj algebraicznych; pochodne te są właściwie funkcyami abelowemi w tem znaczeniu, w jakiem je określono w § 1.

Ilorazy funkcyj ϑ są funkcyami abelowemi.

Na podstawie tych i innych twierdzeń podobnych funkcye ϑ służą do rozwiązania zagadnienia o odwróceniu.

Więcej szczegółów znajdzie czytelnik w cytowanych już dziełach Clebscha-Gordana, Neumanna, Stahla; w pracach: Pryma (Akad. wied, 1864, Schweiz. Gesell. 1868), Webera (Berlin 1876), Thomae'go (Halla, 1877—1879).

Ze stanowiska teoretycznego uczyniono w ostatnich czasach znaczny postęp, wprowadzając zamiast funkcyj ϑ funkcye σ, podobnie jak to uczynił Weierstrass dla przypadku eliptycznego. Funkcye σ, wprowadzone przez Kleina różnią się od funkcyj ϑ czynnikiem, a przedstawiają tę dogodność że wzajemnie przemieniają się wprost przy przekształceniu liniowem peryodów, gdy tymczasem funkcye ϑ przy przemianie tej pozyskują jeszcze czynnik wykładniczy.

Odsyłając czytelnika do dzieł Kleina i innych, poniżej cytowanych, ograniczamy się tu jedynie na podaniu głównych wzorów nowej teoryi i to tylko dla przypadku hypereliptycznego.

---

§ 5.

Funkcye σ Kleina w przypadku hypereliptycznym.

Po wprowadzeniu spółrzędnych jednorodnych, t. j. przy założeniu $z = \frac{z_1}{z_2}$, forma zasadnicza hypereliptyczna rodzaju p niechaj będzie typu:

$$w^2 z_2^{2p} = f_{2p+2}(z_1, z_2) = a_z^{2p+2} = b_z^{2p+2} = \ldots\ldots,$$

gdzie strona druga jest formą dwójkową stopnia $2p+2$ w postaci symbolicznej (patrz Rozdział XII).

Niechaj całkami normalnemi gatunku 1-go będą:

$$w_1 = \int_y^x \frac{z_1^{p-1}(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)}{\sqrt{f(z_1, z_2)}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w_p = \int_y^x \frac{z_2^{p-1}(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)}{\sqrt{f(z_1, z_2)}},$$

Całką zasadniczą gatunku 1-go z punktem pojedyńczo-nieskończonym niechaj będzie:

$$Z^{(t)} = \int_y^x \frac{(z dz)}{\sqrt{f(z)}} \; \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(t)} + a_z^{p+1} a_t^{p+1}}{2(zt)^2}$$

Różniczkując to wyrażenie $p-1$ razy względem t_1 i t_2 dzieląc przez $(n-1)!$, otrzymujemy p całek normalnych $Z_1, Z_2, \ldots Z_p$. Całka normalna gatunku 3-go niechaj będzie całką, którą Klein oznacza literą Q; ma ona własność, że jej funkcya podcałkowa jest spółzmiennikiem formy dwójkowej zasadniczej: jest tedy:

$$Q_{xy}^{x',y'} = Q_{x'y'}^{xy} = \int_y^x \frac{(zdz)}{\sqrt{f(z)}} \int_{y'}^{x'} \frac{z'dz'}{\sqrt{f(z)}} \frac{\sqrt{f(z)} \cdot \sqrt{f(z')} + a_z^{p-1} \cdot a_{z'}^{p+1}}{2(zz')^2}.$$

Punktami nieskończoności logarytmowej tej całki trzeciego gatunku są punkty: x', y'.

Przy pomocy całki Q utwórzmy wyrażenie:

$$\Omega(x, y) = \frac{(xy)}{\sqrt[4]{f(x) f(y)}} e^{\frac{1}{2} Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}},$$

gdzie przez $Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}$ rozumiemy wartość Q wtedy, gdy punkty nieskończoności x', y' stają się punktami odpowiednio sprzężonemi na powierzchni hypereliptycznej dwupowłokowej (punktami sprzężonemi na powierzchni dwupowłokowej nazywamy dwa punkty, z których jeden leży na jednej, drugi na drugiej połowie). Wyrażenie to ma ważne znaczenie w rozważaniach Kleina; nazywa się ono formą pierwotną lub główną (Primform) i ma tę własność, że nie posiada wcale rozgałęzienia na powierzchni Riemanna; że ma jeden tylko punkt zerowy $x-y$ i nie staje się wcale nieskończonem

Funkcyę σ argumentów

$$u_\iota = \left\{ \int_{y'}^{x'} + \int_{y''}^{x''} + \ldots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} \right\} dw_\iota, \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, p)$$

można określić niezależnie od funkcyj ϑ. Utwórzmy wyrażenie

$$M = \frac{\Pi_{\iota,k} \Omega(x^{(\iota)} y^{(k)})}{\Pi_{\iota,k} (x^{(\iota)} y^{(k)}) \Pi_{\iota,k} \Omega(x^{(\iota)} x^{(k)}) \Pi'_{\iota,k} \Omega(y^{(\iota)} y^{(k)})},$$

w którem symbol $\Pi_{i,k}$ oznacza iloczyn, rozciągnięty na wszystkie kombinacye $i, k = 1, 2, \ldots, \nu$, symbol zaś $\Pi'_{i,k}$ takiż iloczyn z wyłączeniem kombinacyi $i = k$. Wszystkie fukcye σ posiadać będą czynnik M: drugi czynnik zmieniać się będzie wraz z σ; budowa jego zależy od rozkładu formy dwójkowej f na dwa czynniki takie, że różnica ich stopni jest wielokrotnością liczby 4. Połóżmy tedy:

$$f_{2p+2} = \varphi_{p-1-2\mu}\,\psi_{p+1+2\mu}\,; \quad \left(\mu = 0, 1, \ldots, \frac{p+1}{2}\right)$$

i napiszmy wyznacznik $D_{\varphi\psi}$ rzędu 2ν, którego wiersze tworzą się przez podstawienie zamiast z odpowiednio

$$x', x'', \ldots, x^{(\nu)}, y', y'', \ldots, y^{(\nu)}$$

w elementach :

$$z_1^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi(z)}, \quad z_2^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi(z)}, \ldots, z_1^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi(z)}, \ldots\ldots$$

Wtedy każda funkcya σ będzie miała wyrażenie takie:

$$\sigma_{\varphi\psi} = M D_{\varphi\psi}\,.$$

Ponieważ można uskutecznić 2^{2p} rozkładów formy f na iloczyn $\varphi\,\psi$, istnieje przeto 2^{2p} zasadniczych funkcyj σ, z których każda jednemu z tych rozkładów odpowiada.

Funkcye σ dają się wyrazić jako iloczyny funkcyj ϑ przez czynnik wykładniczy stopnia 2-go względem argumentów u oraz przez czynnik, zależny tylko od modułów i spółczynników.

Gdy pomnożymy funkcye σ przez $s = \sqrt[8]{\Delta_\varphi \Delta_\psi}$, gdzie Δ_φ, Δ_ψ są wyróżnikami form φ i ψ (jeżeli stopień jednej z funkcyj φ, ψ staje się 0 lub 1, zamiast odpowiedniego wyróżnika należy podstawić 1), otrzymamy funkcyę, którą niektórzy autorowie oznaczają symbolem Th (np. Wiltheiss. Math. Ann. XXXIII).

Tak utworzone funkcye σ nie stają się nigdzie nieskończonemi na powierzchni Riemanna. Stosownie do tego, czy liczba μ jest parzystą lub nieparzystą i funkcya σ jest parzystą lub nieparzystą. Funkcya σ, odpowiadająca specyalnej wartości μ, staje się 0^{μ} w punkcie $u_1 = u_2 = \ldots u_p = 0$.

Dla $p=2$ istnieje 10 funkcyj σ parzystych i 10 nieparzystych. Dla $p=3$ mamy: 28 funkcyj σ nieparzystych, odpowiadających rozkładom formy rzędu 8go na formę kwadratową i formę rzędu 6-go; 35 funkcyj σ parzystych nieznikających dla argumentu zero i odpowiadających rozkładom formy f na dwie formy rzędu 4-go: ostatnia funkcya parzysta, która znika dla argumentu zero, odpowiada rozkładowi formy danej na funkcyę rzędu 8-go oraz formę rzędu zerowego.

Funkcye σ czynią zadość pewnym równaniom różniczkowym cząstkowym rzędu drugiego, dającym się przy pomocy pewnych modyfikacyj wyprowadzić z równań prostszych, którym czynią zadość funkcye ϑ.

Dla funkcyj Th równanie takie otrzymał Wiltheiss.

Funkcye σ dają się rozwinąć na szeregi, których wyrazy postępują według potęg argumentów, są funkcyami wymiernemi całkowitemi spółczynników form φ i ψ i posiadają własność niezmienniczą. Jeżeli położymy:

$$f(z) = u_1 z_2^{p-1} - (p-1) u_2 z_2^{p-2} z_1 \ldots\ldots$$

to każdy wyraz będzie niezmiennikiem jednoczesnym trzech form dwójkowych χ, φ, ψ: każdy z nich mianowicie jest typu:

$$\begin{pmatrix} \mu+2\varrho, & \mu+\varrho, & \varrho \\ \chi & \varphi & \psi \end{pmatrix}.$$

gdzie skaźniki, postawione nad literami χ, φ, ψ, oznaczają stopnie wyrazu względem spółczynników tych trzech form dwójkowych.

Klein rozciągnął konstrukcyę funkcyj a i na przypadek funkcyj abelowych dla p jakiegokolwiek. Przypadek $p=3$ zbadał on potem szczegółowiej; lecz nie możemy wchodzić w szczegóły tego badania.

Głównemi pracami, traktującemi o funkcyach σ hypereliptycznych, o ich rozwinięciu na szeregi, o równaniach różniczkowych, którym zadość czynią, są prace: Kleina (Math. Ann. XXVII, XXXII), Burkhardta (Math. Ann. XXXII, XXXV), Brioschi'ego (Acc. dei Lincei 1888), Wiltheissa (Crelle IC, Math. Ann. XXIX, XXXI, XXXIII), E. Pascala (Ann. di mat. XVII, XVIII, XIX). Z prac, odnoszących się do wspomnianej wyżej konstrukcyi ogólniejszych funkcyj σ, wymienimy badania: Kleina (Math. Ann. XXXVI), Wiltheissa (Götting. Nachr. 1889), E. Pascala (tamże 1889. Annali di Mat. XVII, XVIII), Wirtingera (Math. Ann. XL, Monatshefte, II). Wykłady Kleina, które dały początek tym badaniom nad funkcyami σ hypereliptycznemi i abelowemi, miały miejsce w Getyndze w latach 1887—1889.

ROZDZIAŁ XVIII.

FUNKCYE SPECYALNE.

§ 1.

Funkcya wykładnicza i funkcya logarytmowa. Liczba e.

F u n k c y ę w y k ł a d n i c z ą przedstawia szereg

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots\ldots,$$

zbieżny dla wszelkiej wartości zespolonej zmiennej z: oznaczamy tę funkcyę symbolem e^z. Wartość tej funkcyi dla $z=1$, t. j e nazywa się p o d s t a w ą l o g a r y t m ó w n a t u r a l n y c h; wartość funkcyi wykładniczej dla jakiejkolwiek wartości z jest potęgą z-tą liczby e.

L i c z b a e j e s t n i e t y l k o l i c z b ą n i e w y m i e r- n ą, a l e j e s t n a d t o l i c z b ą p r z e s t ę p n ą (patrz Rozdz. XXI). Wartość liczby e wynosi:

$$e = 2,\ 71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71353\ \ldots\ldots$$

$$\text{log vulg. } e = 0,\ 434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 919\ \ldots\ldots$$

$$\sqrt[e]{e} = 1,444667\ \ldots\ldots$$

Funkcya wykładnicza posiada własność zasadniczą, wyrażającą się związkiem:

$$f(z) \, . \, f(z') = f(z+z'),$$

t. j. tak zw. twierdzeniem o dodawaniu.

Funkcya e^z jest peryodyczna; peryodem jej jest $2\pi i$. Równanie $e^z=0$ nie ma żadnego pierwiastku skończonego.

Każdy pierwiastek równania $e^z=w$ nazywa się logarytmem naturalnym liczby w. Logarytmów liczby w jest nieskończenie wiele; każde dwa różnią się o wielokrotność liczby $2\pi i$. Ilość z, uważana jako funkcya ilości w, jest funkcyą wielowartościową o nieskończenie wielu wartościach: pomiędzy temi wartościami obieramy jednę, w której spółczynnik części urojonej zawiera się pomiędzy $-\pi$ a $+\pi$, (włączając $\pm\pi$). Tym sposobem określamy funkcyę jednowartościową ilości w, która nazywa się funkcyą logarytmową naturalną i oznacza się przez $\log_e w$.

Dla każdej wartości w, której moduł jest ≤ 1 (z wyłączenia wartości $w=-1$) szereg

$$w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \ldots\ldots$$

jest zbieżny, a wartością jego jest logarytm (w znaczeniu ściślejszem, o którem dopiero co była mowa) ilości $1+w$ t. j $\log_e(1+w)$; częsć urojona tej funkcyi zawiera się pomiędzy $-\frac{\pi i}{2}$ a $+\frac{\pi i}{2}$.

Można, według **Riemanna**, określić funkcyę logarytmową ogólną jako funkcyę, czyniącą zadość związkowi funkcyjnemu:

$$f(w \, . \, w_1) = f(w) + f(w_1);$$

wtedy funkcya jest oznaczoną, gdy się pominie stałą mnożącą. Z tego związku mamy $f(1)=0$, $f(0)=\infty$. Różniczkując względem w_1 i kładąc następnie $w_1=1$, otrzymujemy

$wf'(w) = f'(1)$, a stąd, gdy oznaczymy $f'(1)$ przez M (moduł), będzie:

$$f(u) = M\int_1^u \frac{dw}{w},$$

Funkcya tak określona jest funkcyą odwrotną względem funkcyi typu $u = A^v$; liczba A nazywa się p o d s t a w ą.

Jeżeli moduł $M = 1$, wtedy funkcya logarytmowa staje się n a t u r a l n ą; jej podstawą jest liczba e.

F u n k c y a l o g a r y t m o w a n i e n a t u r a l n a r ó w n a s i ę f u n k c y i n a t u r a l n e j, p o m n o ż o n e j p r z e z s t a ł ą (moduł)

Gdy zmienna w okrąży punkt zero i powróci do punktu wyjścia, znajdziemy wtedy na funkcyę logarytmową wartość różną od pierwotnej, a więc będziemy mieli nieskończenie wiele wartości. U c z y n i m y j e d n o w a r t o ś c i o w ą t ę f u n k c y ę, j e ż e l i n a p ł a s z c z y ź n i e w p r z e p r o w a d z i m y c i ę c i e o d p u n k t u z e r o d o n i e s k o ń c z o n o ś c i (patrz Rozdz. XIII, § 4).

Dla argumentu rzeczywistego otrzymujemy zawsze wartość rzeczywistą funkcyi logarytmowej naturalnej. Taką wartość będzie można wtedy wprost określić jako liczbę r z e c z y w i s t ą z, czyniącą zadość równaniu $e^z = w$ dla danej jakiejkolwiek wartości rzeczywistej na w. Tę liczbę nazywamy zwykle l o g a r y t m e m n a t u r a l n y m lub h y p e r b o l i c z n y m (ponieważ może służyć do kwadratury hyperboli równobocznej). Dzieląc liczbę z przez

$$\log e = 2,3025851 \; . \; . \; . \; . \; .$$

lub mnożąc przez

$$M = \frac{1}{\log_e 10} = 0,43429 \; . \; . \; . \; .,$$

otrzymujemy l o g a r y t m z w y c z a j n y lub d z i e s i ę t n y B r i g g s a, (od nazwiska autora, który pierwszy sporządził ich tablice w r. 1617). Liczba M nazywa się zwykle m o d u ł e m układu logarytmów Briggsa. Adams obliczył tę liczbę (Proceed. of the Royal Society 1878, str 73) z 282 cyframi dziesiętnemi. Logarytmy zwyczajne określa się zwykle jako rozwiązania rzeczywiste równania wykładniczego $10^x = w$ dla wszystkich wartości w. Dla logarytmów naturalnych podstawą jest e, a modułem 1; dla logarytmów zwyczajnych podstawą jest 10, modułem $\frac{1}{\log_e 10} = 0,43429 \ldots\ldots$

Logarytmy, utworzone pierwotnie przez Nepera 1614), nie były właściwie logarytmami naturalnemi. Te ostatnie zbudowano po raz pierwszy w r. 1619 (New logarithmes, London, 1619). Logarytmy Nepera, znajdujące się w dziełach „Canonis descriptio" (Edynburg 1614) i „Canonis constructio" (tamże 1619) mają podstawę zmienną. Jeżeli przez La oznaczymy logarytmy Nepera, przez $\log_e a$ logarytmy naturalne będzie:

$$\frac{La}{10^7} + \log_e \frac{a}{10^7} = 0,$$

a więc podstawa logarytmów Nepera zmienia się wraz z a. I dla tego to pierwotne logarytmy Nepera zarzucono i zastąpiono je logarytmami naturalnemi (które nazywano też neperowemi).

Należy się tu wzmianka logarytmom dodawania i odejmowania, zbudowanym po raz pierwszy przez Leonelli'ego, a następnie przez Gaussa (Werke II, III) przy pomocy których, mając logarytmy dwu liczb a, b, można znaleść logarytm ich sumy i różnicy. Tablice te składają się z trzech kolumn: w pierwszej umieszczono $\log m$, w drugiej $\log\left(1+\frac{1}{m}\right)$, w trzeciej $\log(1+m)$. W kolumnie pierwszej szukamy:

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b} \quad (\text{w założeniu } \log a > \log b)$$

w drugiej:

$$\log\left(1+\frac{b}{a}\right)=\log\frac{a+b}{a}=\log(a+b)-\log a.$$

i stąd już znajdujemy $\log(a+b)$. Podobnie możnaby posługiwać się kolumną trzecią Tablice takie znajdują się w wielu podręcznikach logarytmowych, np. w podręczniku K ö h l e r a

—

§ 2.

Funkcye kołowe i hyperboliczne.

Funkcye kołowe „wstawa" i „dostawa" określają się analitycznie dla jakiegokolwiek argumentu rzeczywistego lub zespolonego przez wzory:

$$\sin z=\frac{z}{1}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\ldots,$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\ldots:$$

szeregi po stronach drugich są zbieżne dla wszelkich wartości z. Przy pomocy tych funkcyj określamy następujące:

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{cotg} z=\frac{\cos z}{\sin z},\ \operatorname{ses} z=\frac{1}{\cos z},\ \operatorname{cosec} z=\frac{1}{\sin z}.$$

D l a d w ó c h f u n k c y j $\sin z$, $\cos z$ m a m i e j s c e z w i ą z e k z a s a d n i c z y $\sin^2 z+\cos^2 z=1$. D l a a r g u m e n t u r z e c z y w i s t e g o f u n k c y e k o ł o w e s ą r z e c z y w i s t e m i.

Nie będziemy się tu zatrzymywali nad dobrze znanem przedstawieniem geometrycznem tych funkcyj w przypadku, gdy z jest rzeczywiste.

F u n k c y e k o ł o w e s ą p e r y o d y c z n e; m o d u ł e m i c h p e r y o d y c z n o ś c i j e s t 2π.

Wzorami głównemi są następujące:

$$\sin(z \pm z_1) = \sin z \cos z_1 \pm \cos z \sin z_1,$$

$$\cos(z \pm z_1) = \cos z \cos z_1 \mp \sin z \sin z_1,$$

$$\sin(z + z_1 + z_2) = \sin z \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \cos z_1 \cos z_2$$

$$+ \sin z_2 \cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z + z_1 + z_2) = \cos z \cos z_1 \cos z_2 - \cos z \sin z_1 \sin z_2$$

$$- \cos z_1 \sin z \sin z_2 - \cos z_2 \sin z \sin z_1,$$

$$\operatorname{tg}(z \pm z_1) = \frac{\operatorname{tg} z \pm \operatorname{tg} z_1}{1 \mp \operatorname{tg} z \operatorname{tg} z_1}, \quad \operatorname{tg}(z + z_1 + z_2 + \ldots) = \frac{S_1 - S_2 + S_3 - \ldots}{1 - S_2 + S_4 - \ldots}$$

gdzie przez S_1 rozumiemy sumę stycznych argumentów pojedyńczych, przez S_2 sumę iloczynów stycznych argumentów, branych po dwa, przez S_3 sumę iloczynów argumentów, branych po trzy i t.d.;

$$\sin z \pm \sin z_1 = 2 \sin \tfrac{1}{2}(z \pm z_1) \cos \tfrac{1}{2}(z \mp z_1),$$

$$\cos z \pm \cos z_1 = 2^{\cos}_{\sin} \tfrac{1}{2}(z + z_1)^{\cos}_{\sin} \tfrac{1}{2}(z - z_1),$$

$$\cos z \pm \sin z_1 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z \mp z_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z \pm z_1}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg} z \pm \operatorname{tg} z_1 = \frac{\sin(z \pm z_1)}{\cos z \cos z_1},$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z, \quad \operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z},$$

$$\sin 3z = 3 \sin z - 4 \sin^3 z; \quad \cos 3z = 4 \cos^3 z - 3 \cos z,$$

$$\operatorname{tg} nz = \frac{n \operatorname{tg} z - (n)_3 \operatorname{tg}^3 z + \ldots\ldots}{1 - (n)_2 \operatorname{tg}^2 z + (n)_4 \operatorname{tg}^4 z + \ldots\ldots}.$$

$$\sin \tfrac{1}{2} z = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos z}{2}}, \quad \cos \tfrac{1}{2} z = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos z}{2}}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}}.$$

Funkcye kołowe są związane z funkcyami wykładniczemi za pomocą godnych uwagi związków Eulera:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Funkcya „wstawa" dla argumentu czysto urojonego iz, gdzie z jest rzeczywiste, jest ilością urojoną czystą, stąd funkcya $\frac{\sin(iz)}{i}$ (z rzeczywiste) jest funkcyą rzeczywistą. Dla tegoż argumentu czysto urojonego funkcya „dostawa" jest funkcyą rzeczywistą, funkcya zas „styczna" jest funkcyą rzeczywistą po podzieleniu przez i. Te funkcye rzeczywiste

$$\frac{\sin(iz)}{i}, \quad \cos iz, \quad \frac{\operatorname{tg}(iz)}{i}$$

nazywają się funkcyami hyperbolicznemi i oznaczają się odpowiednio za pomocą symboli:

$$\sinh z, \qquad \cosh z, \qquad \operatorname{tgh} z.$$

Z tych określeń widać odrazu, że funkcye hyperboliczne posiadają własności, podobne do własności funkcyj kołowych; wzory dla pierwszych wyprowadzają się z wzorów dla drugich przez podstawienie $i\sinh$ zamiast sin, cosh zamiast cos, $i\operatorname{tgh}$ zamiast tg. Wzorami wykładniczemi dla funkcyj hyperbolicznych są:

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

Związek zasadniczy pomiędzy wstawą i dostawą zamienia się na następujący:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

Funkcye hyperboliczne otrzymały swoją nazwę z powodu własności następującej:

Jeżeli nakreślimy hyperbolę równoboczną, której równaniem (w odniesieniu do osi hyperboli) jest $x^2 - y^2 = 1$ i jeżeli przez z oznaczymy pole podwójne wycinka hyperbolicznego, ograniczonego osią x, promieniem wodzącym OA (idącym ze środka O hyperboli do punktu A na niej) oraz gałęzią samej krzywej, wtedy spółrzędne x, y punktu A będą równe odpowiednio dostawie i wstawie hyperbolicznej ilości z.

Jeżeli poprowadzimy styczną w wierzchołku M hyperboli aż do przecięcia się w punkcie T z promieniem wodzącym OA i przez punkt T poprowadzimy równoległą do osi x aż do punktu przecięcia się L z okręgiem, opisanym z punktu O promieniem $OM=1$, wtedy kąt $\tau = LOM$ nazywa się kątem przestępnym Lamberta; funkcye hyperboliczne wyrażają się przez funkcye kołowe kąta Lamberta w ten sposób:

$$\sinh z = \operatorname{tg} \tau, \qquad \cosh z = \frac{1}{\cos \tau}.$$

Funkcye hyperboliczne badali w wieku zeszłym Riccati i Lambert; znakowania pierwszego z nich zostały powszechnie przyjęte. Następnie zajmowali się niemi: Gudermann, który zbudował obszerne tablice (Crelle VI, VII, VIII) i Mossotti. Z nowszych autorów pisali o nich: Hoüel, Laisant (Mém. de Bordeaux), Günther (Die Lehre von den Hyperbelfunctionen, Halla, 1881), Forti, który ogłosił nowe tablice tych funkcyj. (Rzym, 1892). Szczegóły bibliograficzne i dokładną historyę tego przedmiotu znajdzie czytelnik w dziełach ostatnich dwu autorów.

§ 3.

Funkcya Bernoulli'ego. Liczby Bernoulli'ego i Eulera.

Funkcyą lub wielomianem Bernoulli'ego nazywamy wyrażenie:

$$\varphi_m(x) = x^m - \frac{m}{2} x^{m-1} + (m)_2 B_2 x^{m-2} - (m)_4 B_4 x^{m-4} + \ldots ,$$

w którem B_1, B_2, ... są t. z. liczbami Bernoulli'ego (Raabe, Crelle XLII).

Istnieje wzór:

$$\varphi_{m+1}(x+1) - \varphi_{m+1}(x) = (m+1)\, x^m ;$$

Dla $x=n$ całkowitego dodatniego jest:

$$\varphi_m(n) = m \,|\, 1^{m-1} + 2^{m-1} + \ldots \ldots + (n-1)^{m-1} \,| .$$

Wielomiany Bernoulli'ego dla x całkowitego dają tedy wyrażenie sumy jednakowych potęg pierwszych $x-1$ liczb całkowitych (przy pominięciu czynnika liczbowego).

Liczby Bernoulli'ego są spółczynnikami rozwinięcia na szereg funkcyi $\frac{x\,e^x}{e^x-1}$; jeżeli mianowicie rozwinięcie napiszemy w postaci:

$$1 + \tfrac{1}{2} x + \frac{B_2 x^2}{2!} - \frac{B_4 x^4}{4!} + \ldots \ldots$$

to liczby B będą liczbami Bernoulli'ego. Liczby te mają związek ze spółczynnikami rozwinięcia stycznej. Jeżeli napiszemy:

$$\operatorname{tg} x = \sum_1^{\infty} \beta_{2m} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} ,$$

będzie:

$$\beta_{2m} = \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m} B_{2m} .$$

Liczby Bernoulli'ego wyrażają się przy pomocy różnic wyrażenia 0^m (patrz Rozdz. X) w ten sposób:

$$B_{2m} = (-1)^{m-1}\left[0^{2m} - \frac{1}{2}\Delta 0^{2m} + \frac{1}{3}\Delta^2 0^{2m} - \ldots + \frac{1}{2m+1}\Delta^{m} 0^{2m}\right].$$

Przez wyznaczniki liczby Bernoulli'ego wyrażają się tak:

$$B_{2m} = \frac{2m}{2^{2m}(2^{2m}-1)}\begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots & \ldots, & 0, & 1 \\ (3)_1, & 1, & \ldots & \ldots, & 0, & 1 \\ (5)_1, & (5)_2, & \ldots & \ldots, & 0, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (2m-3)_1, & (2m-3)_2, & \ldots & \ldots, & 1, & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(Haussner)},$$

$$B_{2m} = (2m)!\begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & 1, & 0, & \ldots & \ldots, & 0 \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{2!}, & 1, & \ldots & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(2m+1)!}, & \frac{1}{(2m)!}, & \frac{1}{(2m-1)!}, & \ldots & \ldots, & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \quad \text{(Glaisher)},$$

Godnym uwagi jest wzór:

$$\lim_{m=\infty} B_{2m}\left(\frac{\pi e}{m}\right)^{2m+\frac{1}{2}} = 4\pi\sqrt{e}\,.$$

Istnieje bardzo wiele wzorów zwrotnych dla liczb Bernoulli'ego. Najdawniejszym jest wzór Moivre'a (Miscell anal. Londyn 1730):

$$(2m+1)_1 B_{2m} - (2m+1)_3 B_{2m-2} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m+1)_{2m-1} B_2 + (-1)^m\left(m - \tfrac{1}{2}\right) = 0.$$

Następnie idzie wzór Jacobi'ego (Crelle XII, str. 263):

$$(2m+2)_3 B_{2m}-(2m+2)_4 B_{2m-2}+\ldots+(-1)^{m-1}(2m+2)_{2m} B_2+(-1)^m m=0.$$

Wzór Sterna (Crelle, LXXXIV):

$$(2m+1)_2 B_{2m}-(2m+1)_4 B_{2m-2}+\ldots+(-1)^{m-1}(2m+1)_{2m} B+(-1)^m \tfrac{1}{2}=0.$$

Inne wzory zwrotne znaleźć można w cytowanej poniżej książce Saalschütza.

Do liczb Bernoulli'ego stosuje się następujące ważne twierdzenie v. Staudta i Clausena (Crelle XXI, Astr. Nachr. XVII, 1840):

Jeżeli $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ są liczby pierwsze nieparzyste, które, zmniejszone o jedność, dają dzielniki liczby $2m$, to wtedy:

$$B_{2m} = \text{liczbie całk.} + (-1)^m \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \ldots \right\}.$$

Można otrzymać wzory zwrotne tylko pomiędzy częściami całkowitemi liczb Bernoulli'ego; wzory takie podali po raz pierwszy Hermite (Crelle, LXXXI) i Stern (Crelle, LXXXVI), a następnie ogólnie Lipschitz (Crelle, XCVI).

Spółczynniki β rozwinięcia stycznej (patrz wyżej) są liczbami całkowitemi, które kończą się naprzemian na cyfry 2 i 6, poczynając od $\beta_4 = 2$.

Liczby Bernoulli'ego otrzymały swą nazwę od Jakóba Bernoulli'ego, który wprowadził je po raz pierwszy do analizy („Ars conjectandi", Bazylea, 1713); tę nazwę nadali im Moivre i Euler. Bernoulli obliczył 5 pierwszych z tych liczb, Euler obliczył ich 15, Ohm 31 (Crelle XX), Adams 62 (Crelle, LXXXV). Bliższe szczegóły o liczbach Bernoulli'ego znaleść można w dziele Saalschütza „Vorlesungen über die Bernoulli'schen Zahlen" (Berlin 1893).

Prace dalsze o tym przedmiocie ogłosili: Glaisher (Mess. of. Math. 1876), Seidel (Münch. Akad. 1877), Radicke (Die Recursionsformeln für die Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen, Halla 1880), Haussner (Göttinger Nachr. 1892, Zeitschrift für Math. 1894) i t. d

Oto tablica pierwszych 18 liczb Bernoulli'ego.

$$B_2 = \frac{1}{6}\,;\; B_4 = \frac{1}{30},\; B_6 = \frac{1}{42},\; B_8 = \frac{1}{30},\; B_{10} = \frac{5}{66}.$$

$$B_{12} = \frac{691}{2730},\; B_{14} = \frac{7}{6},\; B_{16} = \frac{3617}{510},\; B_{18} = \frac{43867}{798}.$$

$$B_{20} = \frac{174611}{330},\; B_{22} = \frac{854513}{138},\; B_{24} = \frac{236364091}{2730}.$$

$$B_{26} = \frac{8553103}{6},\; B_{28} = \frac{23749461029}{870}.$$

$$B_{30} = \frac{8615841276005}{14322},\; B_{32} = \frac{7709321041217}{510}.$$

$$B_{34} = \frac{2577687858367}{6},\; B_{36} = \frac{26315271553053477373}{1919190},$$

Pokrewnemi z liczbami Bernoulli'ego są liczby Eulera, odpowiadające spółczynnikom rozwinięcia siecznej Jeżeli położymy:

$$\sec x = \sum_0^{\infty} E_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

to liczby E_{2m} będą liczbami Eulera. Wyrażają się one przy pomocy wyznaczników w ten sposób:

$$E_{2m} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & \dots & 0 \\ 1, & (4)_2, & 1, & \dots & 0 \\ 1 & (6)_2, & (6)_4, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & (2m-2)_2, & (2m-2)_4, & \dots & 1 \\ 1, & (2m)_2, & (2m)_4, & \dots & (2m)_{2m-2} \end{vmatrix} \quad \text{(Haussner)}$$

$$E_{2m} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2!}, & 1, & 0 \ldots\ldots, & 0 \\ \frac{1}{4!}, & \frac{1}{2!}, & 1, \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(2m)!}, & \frac{1}{(2m-2)!}, & \frac{1}{(2m-4)!}, \ldots, & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \quad \text{(Glaisher)}$$

Liczby Eulera dają się wyrazić przez liczby Bernoulli'ego przy pomocy wzoru:

$$\begin{aligned} (2m+1)\, E_{2m} &= 2^{2m+1}\,(2^{2m+1}-1)\,(2m+1)_1\, B_{2m} \\ &- 2^{2m-1}\,(2^{2m-3}-1)\,(2m+1)_3\, B_{2m-2} \\ &+ \ldots\ldots \\ &+ (-1)^{m-1}\, 2^3\,(2-1)\,(2m+1)_{2m-1}\, B_2 + (-1)^m. \end{aligned}$$

Jeżeli wprowadzimy współczynniki β rozwinięcia stycznej, otrzymamy wzór Sterna:

$$E_{2m} = \beta_{2m} + (2m-1)_2\, E_2\, \beta_{2m-2} + \ldots + (2m-1)_{2m-2}\, E_{2m-2}\beta_2\,.$$

Wzór zwrotny dla liczb Eulera jest nastjpuiący:

$$\begin{aligned} E_{2m} - (2m)_2\, E_{2m-2} + (2m)_4\, E_{2m-4} - \ldots\ldots \\ + (-1)^{m-1}\,(2m)_{2m-2}\, E_2 + (-1)^m = 0. \end{aligned}$$

Podajemy jeszcze dwa wzory:

$$E_{2m} > \frac{2m}{2}\,\beta_{2m}\,, \quad E_{2m} > \frac{2m\,(2m-1)}{4}\, E_{2m-1}.$$

Liczby Eulera są wszystkie liczbami całkowitemi, dodatniemi, nieparzystemi. Suma dwu liczb kolejnych jest podzielna przez 3. Liczba $E_{2m}+1$ dla m parzystego, liczba zaś $E_{2m}-1$

dla m nieparzystego jest podzielna przez 3. Liczby E_{2m} dla m parzystego kończą się na cyfrę 1, dla m nieparzystego na cyfrę 5.

Pierwsze dziewięć liczb obliczył sam Euler (dziewiątą błędnie). Liczby te badał (i nadał im nazwę) Scherk (Math. Abh., Berlin 1825); później zajmowało sie niemi wielu autorów, zwłaszcza ci, którzy badali liczby Bernoulli'ego. Stern (Crelle, LXXIX) znalazł wiele ich własności.

Podajemy tu tablice pierwszych czternastu liczb Eulera E_2, E_4, E_6, . . . , E_{28} według Scherka:

1, 5, 61, 1385, 50521, 2702765, 199360981, 19391512145, 2404879675441, 370371188237525, 69348874393137901, 155145344163557086905, 4087072509293123892361, 1252259641403629865468285.

---

§ 4.

Stała Eulera. Stała harmoniczna.

Znany jest wzór Eulera, służący do wyrażenia całki różnicowej określonej (sumy) przez całkę zwykłą tej samej funkcyi (patrz Rozdz X). Wzór ten jest:

$$\sum_a^b f(x) = \int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\,[f(x)]_a^b + \frac{B_2}{2!}\,[f(x)]_a^b - \frac{B_4}{4!}\,[f'''(x)]_a^b + \dots\dots;$$

tu B_2, B_4, . . . są liczbami Bernoulli'ego.

Połóżmy $a=0$, $b=x$, wtedy wzór przybiera postać:

$$\sum_0^x f(x) = \int f(x)\,dx - \frac{1}{2}\,f(x) + \frac{B_2}{2!}\,f(x) - \frac{B_4}{4!}\,f'''(x) + \dots \text{ stała}$$

gdzie wyraz ostatni (stała) nie zależy oczywiście od x, a przez symbol $\int f(x)\,dx$ rozumiemy całkę nieokreśloną funkcyi $f(x)$. Połóżmy:

$$f(x) = \frac{1}{a+bx}, \quad \int f(x)\,dx = \frac{1}{b}\log\frac{a+bx}{b};$$

stała w tym przypadku nazywa się stałą harmoniczną, ponieważ suma po stronie pierwszej jest wtedy sumą pierwszych wyrazów szeregu harmonicznego pierwszego rzędu (rozbieżnego). Stała harmoniczna zależeć będzie od wartości a i b; oznaczamy ją przez $A(a, b)$. Dla $a=0$, $b=1$ będzie ona stałą Eulera, którą oznaczamy przez A.

Stałe $A(a, b)$ i A określają się tedy za pomocą wzorów:

$$A(a, b) = -\frac{1}{b}\log\frac{a}{b} + \frac{1}{2a} + \frac{B_2 b}{2a^2} - \frac{B_2 b^3}{4a^4} + \ldots\ldots$$

$$A = \lim_{a=0}\left\{-\log a + \frac{1}{2a} + \frac{B_2}{2a^2} - \frac{B_4}{4a^4} + \ldots\ldots\right\}.$$

Mamy związki:

$$A(a, b) - A(b-a, b) = \frac{\pi}{b}\operatorname{cotg}\frac{a\pi}{b}.$$

$$A(a, b) = \frac{1}{b}A\left(\frac{a}{b}, 1\right).$$

Wartość stałej A z 26 cyframi dziesiętnemi jest:

$$A = 0{,}57721\ 56649\ 01532\ 86106\ 06512\ 4\ldots.$$

Przez całki określone stała A wyraża się w ten sposób:

$$\int_0^1 \log\log x\,dx = -A, \qquad \text{(Mascheroni)}$$

$$\int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x} = -A; \quad \int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x} = -A.$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{x}\right)e^{-x}\,dx = A; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x}\, x\, e^x\, dx = -A.$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1-x}\right)dx = A; \quad \text{(Legendre)}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\log x\, dx = -A.$$

Przez szereg oraz przez iloczyn nieskończony stała Eulera wyraża się w ten sposób:

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = A. \quad \log \prod_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = A.$$

Stałą A napotykamy w teoryi funkcyj Eulerowych.

Euler obliczył tę stałą najprzód z 6, potem z 16 cyframi dziesiętnemi („De numero memorabili etc". Acta Petrop. V, 1781) i oznaczał ją literą γ. Następnie zajmowali się tym przedmiotem: Mascheroni (Adnotationes ad Euleri Calc. etc), który obliczył stałą do 20-ej cyfry, Legendre do 19-ej, Soldner do 25-ej, Lindemann (Grunert, Archiv XXIX) do 35-ej, Oettinger (Crelle LX) do 40-ej, Nicolai do tyluż (patrz Gauss. Werke III, str. 154), Shanks (Proc. Roy. Soc. 1866—1867) do 59 cyfry (50-ta cyfra jest błędna); Glaisher (tamże, 1871) do 100 i wreszcie Adams (tamże 1878 oraz „Papers" I, str. 459) do 263 cyfr dziesiętnych. O stałej Eulera ogłosił pracę Knar (Grunert's Archiv XLI. XLIII). Funkcyę $A(a.1)$ badał Gauss w rozprawie o szeregu hypergeometrycznym (Werke III). Tablicę wartości tych funkcyj podał Nicolai: znajduje się ona na końcu wspomnianej rozprawy Gaussa.

§ 5

Funkcye Eulera.

Legendre (Fonctions elliptiques, vol. II. str 365, Paryż 1826) nazwał po raz pierwszy funkcyami Eulera gatunku pierwszego i drugiego funkcye, badane przez Eulera (Calc. integr.), a o których obecnie mówić będziemy.

Całką Eulera gatunku 1-go, jak była pierwotnie określona przez Legendre'a, jest:

$$B(p, q; n) = \int_0^1 x^{p-1} (1 - x^n)^{\frac{q}{n} - 1} dx \; ;$$

tu n jest liczbą stałą: p, q liczbami zmiennemi, tak że B jest funkcyą ilości p, q. Legendre, idąc za Eulerem, oznaczał tę funkcyę symbolem $\left(\frac{p}{q}\right)$. Następnie Binet (Journ del École polytech. zesz. XXVII) zaczął oznaczać tę funkcyę literą grecką B i dla tego nazywają ją funkcyą beta. Przypadek $n=1$ rozważany bywa w podręcznikach: symbol uproszczony $B(p, q)$ pisze się zamiast $B(p, q, 1)$.

Funkcya beta dla $n=1$ jest symetryczna względem p, q, t. j.

$$B(p, q) = B(q, p) .$$

Wartości funkcyi $B(p, q; n)$, gdy p, q są większe od n, wyrażają się przez te funkcye dla wartości p, q, zawarte pomiędzy 1 i n (Legendre). Mamy:

$$B(p, n; n) = \frac{1}{p} \; ; \quad B(p, n-p; n) = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$B(p, q-1; 1) = \frac{q}{p} B(p+1, q; 1).$$

$$B(p, q-1; 1) = B(p, q; 1) - B(p-1, q; 1).$$

Funkcya B czyni zadość związkowi (Eulera):

$$B(p, q; n) B(p-q, r; n) = B(p, r; n) B(p-r, q; n)$$

W przypadku $n=3, 4, 6, 8, 12$ funkcya B daje się wyrazić za pomocą całek eliptycznych (patrz Legendre, l. c. Rozdz. III). Logarytm funkcyi B daje się wyrazić za pomocą całki określonej. Zakładając $n=1$, mamy:

$$\log B(p, q) = \int_0^\infty \left[e^{-qx} \frac{1-e^{-px}}{1-e^{-x}} - \frac{1-e^{-px}}{1-e^{-x}} + 1 + e^{-x}\right] \frac{dx}{x}.$$

Nazywamy całką Eulera gatunku 2-go i oznaczamy literą Γ funkcyę:

$$\Gamma_m(z) = \int_0^1 x^{m-1} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{z-1} dx.$$

Bez zmniejszenia ogólności rachunku, możemy przyjąć $m=1$, i kładąc $x^m=t$, napisać:

$$\Gamma_m(z) = \frac{1}{m^z} \Gamma_1(z).$$

Pisze się wprost (Legendre).

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{z-1} dx.$$

Euler i Gauss używają symbolu $\Pi(z-1)$

Jeżeli z jest liczbą całkowitą, mamy:

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

Funkcya Γ jest skończona dla każdej wartosci rzeczywistej z, większej od 0.

Inne wyrażenia funkcyi Γ są:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} \, dx.$$

$$\Gamma(z) = \lim_{\mu=\infty} \mu^z \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots 1}{z(z+1)\ldots(z+\mu-1)} \quad \text{(Euler, Gauss)},$$

$$\Gamma(z) = \prod_{\mu=\infty}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{z-1}}{1+\frac{z-1}{\mu}}. \quad \text{(Euler, 1729)}.$$

Funkcya Γ ma własności, wyrażające się za pomocą związków następujących:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); \quad \Gamma(z+k) = (z+k-1)(z+k-2)\ldots z\Gamma(z),$$

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \Gamma(z) \log z; \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}.$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}-z)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+z) = \frac{\pi}{\cos z\pi}; \quad \lim_{z=0} \frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{n},$$

$$\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = \frac{1.3\ldots(2z-1)}{2^z}.\sqrt{\pi}, \quad (z \text{ całkowite})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \ldots\ldots$$

$$\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)}, \quad (\text{dla } z \text{ jakiegokolwiek})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} \quad (m \text{ całkowite, Euler})$$

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right)$$

$$=\Gamma(mz)\,(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,m^{\frac{1}{2}-zm},$$ (m całkowite, z jakiekolwiek, Gauss, Werke III str. 150),

$$\log\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\left[(z-1)\,e^{-x}-\frac{e^{-x}-e^{-zx}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}.$$

$$\log\Gamma(z)=\sum_{r=1}^{\infty}\left[z\log\left(1+\frac{1}{r}\right)-\log\left(1+\frac{z}{r}\right)\right],$$ (Gauss)

$$\frac{d\log\Gamma}{dz}=Z(z)=\lim_{\mu=\infty}\left\{\log\mu-\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\ldots-\frac{1}{z+\mu}\right\}$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}}\right)dx,$$

$Z(1)=A$ jest stałą Eulera.

$$\int_z^{z+1}\log\Gamma(x)\,dx=z\log z-z+\frac{1}{2}\log 2\pi.$$ (Raabe).

Wartość funkcyj $\Gamma(z)$, gdy z przyjmuje wartości od 0 do $\frac{1}{2}$, zmienia się od ∞ do $\sqrt{\pi}=1{,}77245$, a dla wartości z, od $\frac{1}{2}$ do 1 zmienia się od $\sqrt{\pi}$ do 1. Funkcya $\Gamma(z)$ ma wartość najmniejszą dla $z=1{,}46163\,21451\,105\ldots$, a wartość $\log\Gamma(z)$ w tym punkcie wynosi $9{,}94723\,91743\,9340$, co odpowiada przybliżenie wartości $\Gamma(z)=0{,}885\ldots$.

Droga od $z=0$ do $z=1$ zwykle nazywa się peryodem pierwszym funkcyi Γ, droga od $z=1$ do $z=2$ peryodem drugim i t. d. Z równań poprzedzających widać, że znając funkcyę Γ dla peryodu pierwszego, możemy wyznaczyć ją łatwo dla każdej innej wartości zmiennej.

Można udowodnić ogólnie, że znając funkcyę $\Gamma(z)$ dla dowolnie małej części peryodu pierwszego, możemy wyznaczyć ją dla każdej wartości argumentu, t. j. możemy za pomocą środków elementarnych wyznaczyć jej wartość dla każdej wartości z (Legendre, l. c. str. 446, Rozdz. XI).

Funkcye Γ są ważniejsze od funkcyj B; rachunek tych ostatnich sprowadza się do rachunku funkcyj Γ przy pomocy wzoru zasadniczego

$$B(p, q; n) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n\,\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}.$$

Dla $n=1$ mamy:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Tym sposobem rachunek funkcyi B o dwu argumentach sprowadza się do rachunku funkcyi Γ o jednym tylko argumencie. Do rachunku liczbowego funkcyi $\log \Gamma(z)$ Legendre stosował szeregi rozbieżne, które wszakże obliczone w pewien sposób prowadziły do dostatecznie wielkiego przybliżenia. Wzór, stosowany przez Legendre'a, mało różni się od następującego:

$$\log \Gamma(z) = (z - \tfrac{1}{2}) \log z - z + \tfrac{1}{2} \log 2\pi + J(z),$$

gdzie

$$J(z) = \frac{B_2}{2z} - \frac{B_4}{3.4z^3} + \frac{B_6}{5.6.z^5} + \ldots .$$
$$\ldots\ldots + (-1)^r \frac{\theta B_{2r+2}}{(2r+1)(2r+2)z^{2r+1}},$$

gdzie B są liczby Bernoulli'ego, θ liczba zawarta pomiędzy 0 a 1. Jeżeli przedłużymy szereg po stronie drugiej poprzedniego wzoru, otrzymamy szereg rozbieżny.

Wyrazy tego szeregu najprzód zmniejszają się, a następnie rosną bez granic; można przeto znaleść taką wartość r, aby reszta była możliwie najmniejszą, a obliczywszy następnie wyrazy aż do tej wartości r, otrzymujemy przybliżenie, wystarczające w praktyce. Nadto wzór staje się bardziej przybliżonym, gdy z jest większe, gdyż można wykazać, iż wyraz najmniejszy maleje bystro wraz z wzrostem ilości z. Na tej podstawie Legendre zbudował tablicę wartości $\log \Gamma(z)$ z 12 cyframi dziesiętnemi dla wszystkich wartości z, stanowiących postęp arytmetyczny od 1 do 2 z różnicą równą jednej tysiącznej. Wyznaczenie skaźnika r wyrazu o wartości najmniejszej było przedmiotem badań Genocchi'ego (Mem. Soc. It. VI) i Limbourga (Acad. de Belg XXX). Patrz także „Cours d'analyse“ Hermite'a. Dla funkcyi Γ istnieją też tablice Gaussa z 20 cyframi dziesiętnemi.

Rozciągnięcie funkcyi $\Gamma(z)$ (określonej dla wartości rzeczywistych dodatnich argumentu) na wartości rzeczywiste ujemne zmiennej z uskutecznił już Legendre przy pomocy wzoru $\Gamma(1+z) = z\,\Gamma(z)$, w założeniu, że w tym wzorze wartość z ujemne zawiera się pomiędzy -1 a 0. Ten wzór określa wtedy funkcyę Γ dla wszystkich wartości ujemnych pomiędzy -1 a 0 (pierwszy peryod ujemny, według Legendre'a); w tenże sposób idąc dalej, można określić funkcyę Γ dla wszystkich wartości ujemnych zmiennej z. Znajdujemy wtedy, że dla $z = -1, -2, -3, \ldots$ funkcya Γ jest nieskończoną, oraz że pomiędzy 0 a -1 jest ujemną, pomiędzy -1 a -2 dodatnią i t. d.

Rozciągnięcie funkcyi Γ na całe pole zespolone zapoczątkował Weierstrass (Crelle, LI), rozważając zbieżność iloczynu badanego już dawniej przez Eulera i Gaussa, Werke III, str. 145):

$$\frac{(\mu-1)!\,\mu^z}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+z-1)},$$

gdzie z jest liczbą zespoloną. Otrzymujemy tym sposobem funkcyę $\Gamma(z)$ ogólną, mającą dwie własności charakterystyczne:

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{\Gamma(z+\mu)}{(\mu-1)!\,z^z} = 1; \quad \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$

Funkcya $\Gamma(z)$ dla wartości z zespolonych jest funkcyą jednopostaciową w całej płaszczyźnie, mającą nieskończoności rzędu pierwszego w punktach $z=0, -1, -2, \ldots$ i osobliwość istotną w punkcie nieskończoności na płaszczyźnie; **odwrotność tej funkcyi jest funkcyą holomorficzną w całej płaszczyźnie i wyraża się ważnym wzorem Weierstrassa**:

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{Cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}} \right].$$

Funkcya $\Gamma(z)$ daje się rozłożyć na sumę dwu funkcyj: $\Gamma(z) = Q(z) + P(z)$, obu jednowartościowych; pierwsza z nich jest holomorficzną, druga meromorficzną w całej płaszczyźnie. Pierwsza wyraża się w ten sposób:

$$Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots\ldots$$

gdzie

$$c_r = \frac{1}{r!} \int_1^{\infty} e^{-x} \log^r x \, \frac{dx}{x};$$

druga zas

$$P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1!(z+1)} + \frac{1}{2!(z+2)} - \ldots .$$

uwidocznia nieskończonosci rzędu pierwszego funkcyi $\Gamma(z)$. (Twierdzenie **Pryma**, Crelle LXXXII). Dowód tego twierdzenia znajdujemy w cyt. pracy **Pryma** oraz u **Pincherlego** (Rend. Palermo 1880) i w „Cours d'analyse“ **Hermite**'a.

Funkcya $\Gamma(z)$ nie może być całką równania różniczkowego algebraicznego (**Hölder**, Math. Ann. XXVIII, 1886).

Podajemy tu szereg wzorów, odnoszących się do funkcyi Γ oraz jej pochodnej logarytmowej Z:

$$\int_0^1 (1-x^b)^p\, x^{q-1}\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma(p+1)}{q\,\Gamma\left(\frac{b}{q}+p+1\right)}, \quad \text{(Plana, Crelle, XVII).}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \tfrac{1}{2} Z\left(\frac{p+1}{2}\right) - \tfrac{1}{2} Z\left(\frac{p}{2}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x}\, x^{q-1}\, dx = Z(p+q) - Z(q)$$

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{4} Z\left(\frac{p+3}{4}\right) - \frac{1}{4} Z\left(\frac{p+1}{4}\right) \quad \text{(Legendre)}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\, dx = \frac{1}{2b} Z\left(\frac{a+b}{2b}\right) - \frac{1}{2b} Z\left(\frac{a}{2b}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^q - x^p}{1-x}\, \frac{dx}{x} = Z(p) - Z(q)$$

$$\int_0^\infty x^{p-1} \sin q x\, dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p} \sin \frac{p\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty x^{p-1} \cos q x\, dx = \frac{\Gamma(q)}{q^p} \cos \frac{p\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty x^{p-1} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (q^r x)\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{r}\right)}{r\sqrt{q^p}} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \frac{p\pi}{2r} \quad \text{(Raabe).}$$

Pierwszy ważny, cytowany już wyżej, traktat o funkcyach Γ ogłosił Legendre. Gauss położył podwaliny teoryi tej funkcyi przy pomocy wzoru podanego na str. 430. Poisson (Ec. Pol. Cahl. XIX). Jacobi

(Crelle XI), Dirichlet (Crelle XV, Werke I str. 271) prowadzili dalsze badania w tym kierunku. Inne prace, procz cytowanych już Pryma, Weierstrassa i innych są: Cauchy (Exerc.), Crelle (Crelle, VII), Plana (Crelle XVII). Piola (Opusc. mat. e fis, Medyolan 1832). Schlömilch (Analyt. Studien VI), Brunel (Monographie. Bordeaux 1885 oraz Encykl. der Math. Wiss. II. 1, Lipsk 1899). W nowszej pracy bada Blaserna (Acc. Lin. 1895) funkcyę $\frac{d[zZ(z+1)]}{dz}$ i podaję tablice jej wartości, którą obliczył A Sella. Patrz art. Lercha (Prace mat. fiz., X, 1899—1900).

§ 6.

Funkcya hypergeometryczna.

Nazywamy funkcyą hypergeometryczną funkcyę, którą przedstawia szereg

$$F(a, b, c, z) = 1 + \frac{a.b}{1!\,c} z + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{2!\,c(c+1)} z^2 + \ldots\ldots$$

gdzie a, b, c, z są liczby zespolone jakiekolwiek. Jeżeli jedna z dwu liczb a, b jest liczbą całkowitą ujemną $-n$, szereg urywa się i staje się wielomianem całkowitym stopnia n tego; jedynie tylko w tym przypadku mamy wielomian

Jest widocznem, że funkcya F jest symetryczna względem a i b.

Prostemi przypadkami szczególnemi szeregu hypergeometrycznego są:

szereg dwumianowy $F(-m, b, b, z) = (1+z)^m$,

szereg logarytmowy $F(1\ 1, 2, -z) = z \log(1+z)$;

oraz

$$F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right) = \frac{1}{2z} \log \frac{1+z}{1-z};$$

$$\lim_{b=\infty} F\left(1, b, 1, \frac{z}{b}\right) = e^z;$$

$$\lim_{b=\infty} F\left(b, b, c\, \frac{z}{b^2}\right) = 1 + \frac{z}{1!\, c} + \frac{z^2}{2!\, c\,(c+1)} + \ldots\ldots$$

$$\lim_{b=\infty} F\left(b,\, b,\, \frac{1}{2},\, \frac{z}{b^2}\right) = \cos\,(2i\sqrt{z}\,),$$

$$\lim_{b=\infty} F\left(b,\, b,\, \frac{3}{2},\, \frac{z}{b^2}\right) = \frac{\sin 2i\sqrt{z}}{2i\sqrt{z}},$$

$$F\,(a,\, b,\, c,\, 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \qquad (\text{Gauss}).$$

Szereg hypergeometryczny jest zbieżny dla $|z|<1$, rozbieżny dla $|z|>1$: jego kołem zbieżności jest tedy koło o promieniu 1 ze środkiem w początku spółrzędnych (Gauss, Werke III)

Jeżeli przez $R\,(a+b-c)$ oznaczymy część rzeczywistą wyrażenia $a+b-c$, będziemy mieli następujące twierdzenie (Weierstrass, Crelle: LI):

Jeżeli $|z| = 1$, wtedy

gdy $R\,(a+b-c) > 1$, granica wyrazu ogólnego jest ∞:

„ $R\,(a+b-c) = 1$, „ „ „ „ skończona

„ $0 < R\,(a+b-c) < 1$, „ „ „ „ zerem i szereg jest zbieżny dla wszystkich punktów okręgu $|z|=1$, prócz punktu $z=1$:

„ $R\,(a+b-c) < 0$, szereg jest zbieżny dla wszystkich punktów okręgu $|z|=1$.

Jeżeli uważać będziemy szereg typu hypergeometrycznego, jako element funkcyi analitycznej w pojmowaniu teoryi funkcyj analitycznych Weierstrassa, wtedy mamy funkcyę holomorficzną w całej płaszczyźnie z wyłączeniem punktów $r=\infty$ i $z=1$.

Funkcya hypergeometryczna jest całką szczególną równania różniczkowego liniowego rzędu drugiego (Euler):

$$z\,(1-z)\,\frac{d^2F}{dz^2} + [c-(a+b-1)\,z\,]\,\frac{dF}{dz} - ab\,F = 0.$$

Jeżeli położymy ogólniej

$$y = C x^{\alpha} (1-x)^{\gamma} F(a, b, c, z),$$

to y będzie całką szczególną równania:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{z} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-1}\right]\frac{dy}{dx} + \left[\frac{-\alpha\alpha'}{z} + \frac{\gamma\gamma'}{z-1} + \beta\beta'\right]\frac{y}{z(z-1)} = 0.$$

gdzie dla symetryi przyjęto:

$$\alpha' = 1-c-\alpha, \quad \beta' = b-\alpha-\gamma, \quad \gamma' = c-a-b+\gamma, \quad \beta = a-\alpha-\gamma;$$

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

Jeżeli położymy:

$$z = \frac{x-a}{x-b} \cdot \frac{c-b}{c-a},$$

to powyższe równanie różniczkowe przyjmie postać symetryczną:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{x-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c}\right\}\frac{dy}{dx}$$

$$+ \left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{\beta\beta'(b-a)(b-c)}{x-b}\right.$$

$$\left. + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{x-c}\right\} \frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 0,$$

(Papperitz, Math. Ann. XXV).

Funkcyę hypergeometryczną można uważać za całkę określoną. Mamy (według Eulera):

$$F(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-zu)^{-a}\,du.$$

Uważana za funkcyę ilości a lub b funkcya hypergeometryczna jest funkcyą holomorficzną w całej płaszczyźnie (prócz w punkcie ∞): uważana za funkcyę ilości c. jest funkcyą meromorficzną w całej płaszczyźnie i staje się nieskończoną rzędu pierwszego w punktach $c = 0, -1, -2, \ldots$. W obu przypadkach mamy punkt istotnie osobliwy w nieskończoności.

Jeżeli uważamy funkcyę hypergeometryczną jako funkcyę argumentu a i oznaczymy przez ΔF, $\Delta^2 F$, . . . jej kolejne różnice dla wartości a, $a+1$, $a+2$, . . . tegoż argumentu, wtedy **funkcya hypergeometryczna czynić będzie zadość równaniu różnicowemu rzędu 2-go:**

$$(a+1)(z-1)\Delta^2 F + [(a+b+1)(z-c)]\Delta F + bzF = 0.$$

Dwie funkcye F, których parametry a, b, c różnią się o ilości stałe nazywają się **sąsiedniemi** (contiguae, **Gauss**).

Pomiędzy trzema funkcyami sąsiedniemi zachodzi zawsze związek liniowy jednorodny o spółczynnikach, które są funkcyami wymiernemi zmiennej z. Równanie różniczkowe liniowe jest przypadkiem szczególnym takich związków pomiędzy funkcyami sąsiedniemi. Pochodne funkcyi F względem z są też funkcyami hypergeometrycznemi sąsiedniemi z F. Pochodną pierwszą jest

$$F' = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1, z).$$

Iloraz dwu funkcyi sąsiednich daje się rozwinąć na ułamek ciągły.

Funkcyę hypergeometryczną badano z trzech odmiennych punktów widzenia, jako całkę określoną, jako szereg, wreszcie jako całkę szczególną równania różniczkowego liniowego rzędu 2-go.

Pierwszy badał funkcyę tę **Euler** (Nova Acta Petrop. 1778, Calc. integ. 1769), następnie zajmowali się nią **Pfaff**, nauczyciel

Gaussa (Disquisitiones anal. I). Gauss Werke III) w sławnej rozprawie, oraz Kummer (Crelle XV) wzięli za punkt wyjścia równanie różniczkowe. Praca Riemanna z r. 1857 stanowi wielce ważny krok w tej teoryi; można powiedzieć, że od niej to datuje nowoczesna teorya równań różniczkowych liniowych, ugruntowana przez Fuchsa.

Badanie ilorazu dwu rozwiązań szczególnych równania różniczkowego rzędu 2-go zapoczątkował, rzec można, Riemann w dwóch rozprawach o powierzchniach najmniejszych (Werke, Nr. 17 i 26); następnie badanie to dla przypadku hypergeometrycznego rozwinął Schwarz w doniosłej rozprawie (Crelle, LXXV, 1872), która stała się punktem wyjścia ważnych poszukiwań, między innemi nad niezmiennikami różniczkowemi rzutowemi.

Niedawno Klein (Math. Ann. XXXVII) znalazł nowe ważne rezultaty o punktach zerowych funkcyi hypergeometrycznej (por. też Math. Ann. XL i pracę Schillinga (Math. Ann. XLIV)

Uogólnienia funkcyj hypergeometrycznych są różnego rodzaju. Pomiędzy innemi zasługują na uwagę uogólnienie Heinego (Crelle, XXXII, XXXIV) i Thomaego (Math Ann. II), którzy uogólnili szereg Gaussa, wprowadzając większą liczbę parametrów. Inne uogólnienie podał Heun (Math. Ann. XXXIII) wziąwszy za punkt wyjścia równania różniczkowe. Wreszcie Pochhammer (Crelle LXXI, 1870). Appel (Comptes rendus 1880 i Journal de Liouv. VIII), Picard (Ann de l'Ecol Norm. XII, 1881). Goursat (tamże 1883) i Horn (Acta math XV) rozpatrywali funkcye hypergeometryczne nie jednej, lecz dwu i więcej zmiennych: pierwszy z tych autorów postawił to zagadnienie mniej wyraźnie od pozostałych. Co do innych szczegółów tej teoryi patrz kurs litografowany Kleina z r. 1894 „Ueber die hypergeometrischen Functionen“ oraz wyciąg z kursu lekcyj Pincherlego (Giorn. di Batt. XXXII).

§ 7.

Funkcye kuliste (Legendre'a) jednej zmiennej.

Rozwinmy wyrażenie

$$T = (1 - 2az + a^2)^{-\frac{1}{2}},$$

gdzie a i z są liczby rzeczywiste mniejsze od 1 na szereg według potęg dodatnich rosnących ilości a: spółczynnikami rozwinięcia będą ilości:

$$P^{(n)}(z) = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{n!}\Big\{z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} z^{n-4} \ldots\ldots\Big\}.$$

Wielomian $P^{(n)}$ dla z rzeczywistego lub zespolonego nazywa się funkcyą kulistą pierwszego gatunku Legendre'a; oznaczamy ją zwykle przez $X^{(n)}$ lub X_n. Nazwę „funkcya kulista" (sferyczna) wprowadził Gauss.

Funkcye te są przypadkiem szczególnym funkcyi hypergeometrycznej: dla n całkowitego dodatniego przedstawiają one mianowicie szeregi hypergeometryczne skończone:

$$P^{(n)}(z) = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!} \cdot z^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2} - n, \frac{1}{z^2}\right).$$

$$P^{(2n)}(z) = (-1)^n \cdot \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} F\left(-n, n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right),$$

$$P^{(2n+1)}(z) = (-1)^n \frac{3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots 2n} \cdot z F\left(-n, n + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right).$$

gdzie F jest symbolem funkcyi hypergeometrycznej Gaussa.

Zasadniczemi wzorami dla funkcyj $P^{(n)}$ są następujące:

$$P^{(0)} = 1, \quad P^{(1)}(z), \quad P^{(2)} = \frac{3}{2}\left(z^2 - \frac{1}{3}\right), \quad P^{2n}(-z) = P^{2n}(z),$$

$$P^{(2n+1)}(-z) = -P^{(2n+1)}(z), \quad P^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}.$$

$$\lim_{z=0} \frac{P^{(2n+1)}(z)}{z} = (-1)^n . \frac{3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}.$$

Kładąc $y = \cos\theta$, otrzymujemy:

$$\frac{2.4\ldots.2n}{1.3\ldots(2n-1)} P^{(n)}(\cos\theta) = \cos n\theta + \frac{1}{1}\frac{1.n}{(2n-1)} \cos(n-2)\theta$$

$$+ \frac{1.3}{1.2} \frac{n.(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \ldots\ldots$$

Jeżeli θ jest rzeczywiste to największa wartość $P^{(n)}(\cos\theta)$ przypada na $\theta=0$; wartość ta równa się jedności.

Funkcyę kulistę można wyrazić też za pomocą wzoru:

$$P^{(n)}(z) = \frac{1}{2^n . n!} \frac{d^n (z^2-1)^n}{dz^n}.$$

Wzór ten nazywa się wzorem Ivory'ego i Jacobi'ego, lecz należy przypisać go Rodrigues'owi (patrz Heine „Kugelfunctionen“, wyd. 2-gie, str. 20); można go uważać za ciekawy wzór rachunku różniczkowego, wyrażający pochodnę rzędu n-tego funkcyi $(z^2-1)^n$ (Jacobi, Crelle, XV).

Wszystkie pierwiastki równania $P^{(n)}(z)=0$ są rzeczywiste, mniejsze od 1 i różne od siebie; nadto jeżeli β jest pierwiastkiem, to i $-\beta$ jest nim także. Wartości liczbowe tych pierwiastków dla wartości n od 1 do 7 obliczył Gauss, który używał ich do swego wzoru na kwadraturę. Podaliśmy część tablicy Gaussa w Rodziale X, str 229. Co do pierwiastków funkcyj kulistych patrz także ważną rozprawę Markowa (Math. Ann. XXVII).

Funkcyę kulistą wyrazić można za pomocą ważnego wzoru Laplace'a (Méc. celeste, t. V, Paryż 1825, księga XI, rozdz. II):

$$\pi P^{(n)}(z) = \int_0^\pi (z + \cos\varphi \sqrt{z^2 - 1})^n \, d\varphi.$$

Na podstawie tego wzoru można uogólnić funkcye P^n dla przypadku, gdy n jest dodatnie lecz niecałkowite.

Jeżeli weźmiemy argument w postaci dostawy i przyjmiemy, że θ jest rzeczywiste i $0 < \theta < \pi$, będziemy mieli dwa wzory Dirichleta:

$$\frac{\pi}{2} P^{(n)}(\cos\theta) = \int_0^\theta \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi \cos n\varphi \, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} + \int_\theta^\pi \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi \cos n\varphi \, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\varphi)}},$$

$$\frac{\pi}{2} P^{(n)}(\cos\theta) = - \int_0^\theta \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi \sin n\varphi \, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} + \int_\theta^\pi \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi \sin n\varphi \, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\varphi)}},$$

Te wzory nie stosują się do przypadku $n = 0$.

Funkcya kulista $P^{(n)}$ czyni zadość równaniu różniczkowemu:

$$(1 - z^2)\frac{d^2 P^{(n)}(z)}{dz^2} - 2z \frac{d P^{(n)}(z)}{dz} + n(n+1) P^{(n)}(z) = 0.$$

Funkcye kuliste gatunku drugiego określa wzór:

$$Q^{(n)}(z) = \frac{n!}{3.5.7\ldots(2n+1)} \left\{ y^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} y^{-n-3} \right.$$

$$\left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)} y^{-n-5} + \ldots \right\}.$$

Funkcye te analogiczne do funkcyj kulistych gatunku 1-go badał Heine (Crelle XVII, Kugelfunctionen, etc.).

Pomiędzy funkcyami P i Q istnieje związek prosty:

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P^{(n)}(x)\, Q^{(n)}(y) \quad \text{(Heine l. c.)}$$

dla każdej pary wartosci x, y, dla których:

$$|x - \sqrt{x^2-1}| > |y - \sqrt{y^2-1}|.$$

Co do tego twierdzenia patrz C. Neumann (Ueber die Entwickel. e. Function nach den Kugelfunctionen, Halle 1862; Theorie der Bessel'schen Functionen, Lipsk 1867), Thomae (Crelle, LXVI).

Funkcye Q^n wyrażają się przez szereg hypergeometryczny za pomocą wzoru:

$$Q^n(z) = \frac{n!}{3.5\ldots(2n-1)} z^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{3}{2}+n, \frac{1}{z^2}\right).$$

Dla $z=1$ funkcya $Q^{(n)}$ jest nieskończona, przyczem:

$$\lim_{z=1} (1-z)\, Q^{(n)}(z) = 1.$$

Dla każdej wartości z, której moduł jest mniejszy od 1, funkcya Q jest skończona. Funkcyę $Q^{(n)}$ można wyrazić za pomocą całki wielokrotnej:

$$Q^{(n)}(z) = 2^n n! \int_z^{\infty} \ldots\ldots \int_z^{\infty} \frac{dz^{n+1}}{(z^2-1)^{n+1}},$$

gdzie po stronie drugiej całkowanie wykonywa się $n+1$ razy.

Funkcya $Q^{(n)}$ jest inną całką szczególną tego samego równania różniczkowego, któremu czyni zadość funkcya $P^{(n)}$.

Funkcyę $Q^{(n)}$ można też określić za pomocą wzoru:

$$Q^{(n)}(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P^{(n)}(y) \frac{dx}{z-y} \quad \text{(Neumann, Crelle XXXVII).}$$

Nadto funkcyę $Q^{(n)}$, podobnie jak i $P^{(n)}$, można wyrazić jako pochodną n-tą, t. j.

$$Q^{(n)} = \frac{(-2)^n\, n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n \int_z^{\infty} \frac{dz}{(z^2-1)^{n+1}}\right].$$

Funkcye kuliste gatunku 1-go i 2-go czynią zadość związkom:

$$\int P^{(m)}(z)\, P^{(n)}(z)\, dz = 0; \quad \int Q^{(m)}(z)\, Q^{(n)}(z)\, dz = 0,$$

$$\int P^{(m)}(z)\, Q^{(n)}(z)\, dz = \begin{cases} \dfrac{2\pi i}{2n+1}, & \text{gdy } m = n; \\ 0, & \text{gdy } m \lesseqgtr n, \end{cases}$$

w których całkowania uskuteczniają się w zwrocie dodatnim po elipsie, mającej ogniska w punktach $+1$, -1, lub po innej krzywej zamkniętej, dającej się przez przekształcenie ciągłe i bez przekroczenia drogi $(-1, +1)$ zamienić na rzeczoną elipsę.

Z pierwszym z powyższych wzorów pokrewny jest wzór Legendre'a dla przypadku zmiennej z rzeczywistej:

$$\int_{-1}^{+1} z^m P^{(n)}(z) = 0; \qquad m < n.$$

Funkcye kuliste czynią zadość następującym wzorom zwrotnym:

$$(n+1)\, P^{(n-1)} - (2n+1)\, z P^{(n)} + n P^{(n+1)} = 0; \quad P^{(1)} - z P^{(0)} = 0.$$

(Gauss; patrz Heine, Kugelf. I str. 91—92)

$$\frac{dP^{(n+1)}}{dz} - \frac{dP^{(n-1)}}{dz} = (2n+1)\, P^{(n)},$$

$$(n+1)\, Q^{(n-1)} - (2n+1)\, z Q^{(n)} + n Q^{(n-1)} = 0; \quad Q^{(1)} + z Q^{(0)} + 1 = 0.$$

$$\frac{dQ^{(n+1)}}{dz} - \frac{dQ^{(n-1)}}{dz} = (2n+1)\, Q^{(n)}.$$

Funkcya $Q^{(n)}$ czyni jeszcze zadość następującemu ważnemu związkowi (Gauss, Nova integr. val. per approxim. inv.):

$$Q^{(n)}(z) = \tfrac{1}{2} P^{(n)}(z) \log \frac{z+1}{z-1} - Z^{(n)}.$$

gdzie $Z^{(n)}$ jest funkcyą całkowitą stopnia $(n-1)$-go względem z. Wielomian $Z^{(n)}$ można wyrazić w ten sposób:

$$Z^{(n)} = \frac{2n-1}{1\,.\,n} P^{(n)}(z) + \frac{2n-5}{3(n-1)} P^{(n-3)}(z) + \frac{2n-9}{5(n-2)} P^{(n-5)}(z) + \ldots;$$

wyraz ostatni zawiera $P^{(0)}$ lub $P^{(1)}$, stosownie do tego, czy n jest nieparzyste lub parzyste.

Wskazówki historyczne i bibliograficzne o funkcyach kulistych w ogólności podajemy w paragrafie następnym.

---

§ 8

Funkcye kuliste dwu zmiennych (Lagrange'a).

W funkcyi kulistej gatunku pierwszego $P^{(n)}(z)$ zamiast z połóżmy $\cos\gamma$, gdzie

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Temu kątowi γ można dać interpretacyę geometryczną, uważając go za kąt pomiędzy dwoma promieniami wodzącemi, wychodzącemi z początku spółrzędnych i idącemi do dwu punktów danych. W rzeczy samej, jeżeli $(\varrho, \theta, \varphi)$, $(\varrho', \theta', \varphi')$ są spółrzędne biegunowe dwu punktów danych, to kąt pomiędzy dwoma promieniami wodzącemi jest właśnie γ, a odległość punktów wynosi $r = (\rho^2 - 2\rho\rho'\cos\gamma + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}$. Jeżeli przez x, y, y; x', y', z oznaczymy spółrzędne kartezyańskie obu punktów, będzie:

$$x = \rho\cos\theta, \qquad x' = \rho'\cos\theta',$$

$$y = \rho\sin\theta\cos\varphi, \qquad y' = \rho'\sin\theta'\cos\varphi',$$

$$y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \qquad z' = \rho'\sin\theta'\sin\varphi',$$

$$\cos\gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{\rho\rho'}, \qquad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Funkcya $P^{(n)}$ staje się wtedy funkcyą zmiennych θ, θ', φ, φ', a po wprowadzeniu tych zmiennych przyjmuje postać:

$$P^{(n)}(\cos\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[\cos\theta' + i\sin\theta'\cos(\varphi'-\omega)]^n}{[\cos\theta + i\sin\theta\cos(\varphi-\omega)]^{n+1}}\, d\omega.$$

Przyjmijmy drugi z dwu uważanych punktów za stały, pierwszy za zmienny, wtedy $P^{(n)}$ staje się funkcyą dwu zmiennych θ, φ lub też trzech zmiennych $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{\rho}$, $\frac{z}{\rho}$, związanych równaniem

$$\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 - \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{z}{\rho}\right)^2 = 1.$$

Najważniejszą własnością funkcyj $P^{(n)}$, uważanych za funkcye zmiennych x, y, z, jest następująca: funkcye te, pomnożone przez pewien czynnik, czynią zadość równaniu różniczkowemu o pochodnych cząstkowych rzędu 2-go:

$$\Delta^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Mamy mianowicie:

$$\Delta^2(\rho^n P^{(n)}) = 0, \quad \Delta^2\left(\frac{P^{(n)}}{\rho^{n+1}}\right) = 0.$$

Jeżeli przekształcimy wyrażenie $\Delta^2 U$ przez wprowadzenie zmiennych θ, φ, funkcya $P^{(n)}$ czynić będzie zadość równaniu o pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial^2 P^{(n)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P^{(n)}}{\partial \varphi^2} + \operatorname{cotg}\theta \frac{\partial P^{(n)}}{\partial \theta} + n(n+1)P^{(n)} = 0.$$

Funkcya $P^{(n)}$ jest więc funkcyą wymierną całkowitą ilości $\cos\theta$ $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, czyniącą zadość powyższemu równaniu.

Przechodząc do definicyi funkcyi kulistej dwu zmiennych, powiemy:

Najogólniejsza funkcya wymierna całkowita stopnia n-tego tych trzech ilości (a więc funkcya **dwu** zmiennych niezależnych), czyniąca zadość poprzedniemu równaniu różniczkowemu, nazywa się funkcyą kulistą Laplace'a i oznacza się przez $Y^{(n)}$; przypadkiem szczególnym funkcyi $Y^{(n)}$ jest $P^{(n)}$, t. j. funkcya kulista Legendre'a, gdy w niej za argument przyjmiemy $\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\sin(\varphi-\varphi')$.

Funkcya Laplace'a wyraża się przez funkcyę Legendre'a za pomocą wzoru:

$$Y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \left[h_i\cos(i\varphi) + k_i\sin(i\varphi)\right]\sin^i\theta \frac{d^i P^{(n)}(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^i},$$

gdzie h_i i k_i są stałemi dowolnemi.

Innem wyrażeniem funkcyi Laplace'a przez funkcye Legendre'a jest:

$$Y^{(n)} = \sum_{k=1}^{2n+1} m_k P^{(n)}(\cos\gamma_k)$$

gdzie $m_1, m_2, \ldots, m_{2n+1}$ są stałe dowolne w liczbie $2n+1$, zaś

$$\cos\gamma_k = \cos\theta\cos\theta_k + \sin\theta\sin\theta_k\cos(\varphi-\varphi_k);$$

θ_k, φ_k są spółrzędne $2n+1$ punktów, znajdujących się na kuli o promieniu 1

Każda funkcya wymierna jednorodna całkowita stopnia n-tego $U(x,y,z)$, czyniąca zadość równaniu $\Delta^2 U = 0$, podzielona przez ϱ^n, jest funkcyą Laplace'a. Funkcya najogólniejsza Laplace'a zawiera $2n+1$ stałych dowolnych.

Funkcya kulista $Y^{(n)}$, uważana za funkcyę spółrzędnych x, y, z punktów na kuli o promieniu 1 ma własność:

$$\iint Y^{(n)} Y^{(m)} d\sigma = 0, \qquad m \lesseqgtr n,$$

gdzie całkowanie rozciąga się na całą powierzchnię kuli. Mamy także:

$$\iint Y^{(n)} P^{(n)} d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} Y^{(n)}_{\substack{\theta = \theta' \\ \varphi = \varphi'}},$$

gdzie $Y^{(n)}_{\substack{\theta = \theta' \\ \varphi = \varphi'}}$ oznacza wartość funkcyi $Y^{(n)}$ dla $\theta = \theta'$, $\varphi = \varphi'$.
Wzory te można tak napisać:

$$\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} Y^{(n)}(\theta, \varphi) \,.\, Y^{(m)}(\theta, \varphi)\, d\varphi = 0, \qquad m \lesseqgtr n.$$

$$\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} Y^{(n)}(\theta, \varphi)\, P^{(n)}(\cos\gamma)\, d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y^{(n)}_{\substack{\theta = \theta' \\ \varphi = \varphi'}}$$

gdzie $\cos\gamma$ wyraża się wiadomym sposobem przez θ, θ', φ, φ'.

Funkcye kuliste badali równocześnie Legendre (Sur l'attraction des sphéroides, Mém. de Paris 1785, 1787, Exerc. Fonct. ellipt.) i Laplace (Mém. de Paris 1785, Mécan. céleste). Później zajmowali się niemi głównie: Gauss (Werke V), Dirichlet (Crelle XVII), Jacobi (Crelle, XV); w nowszych czasach: Dini (Annali di mat. VI), F. Neumann (Lipsk 1878), a zwłaszcza Heine, którego praca dwutomowa „Theorie der Kugelfunctionen" (2 tomy, wydanie 2-gie, Lipsk 1878) zawiera najwięcej szczegółów i wskazówek o tym przedmiocie. Badano także funkcye stożkowe, mające wiele związku z funkcyami kulistemi i walcowemi. Patrz Mehler (Crelle LXVIII) „Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function" i t. d. (Progr. Elbląg 1870), a także cytowany traktat Heinego. (t. I str. 300, II str. 218). Najważniejszy rezultat dla funkcyj stożkowych jest ten: są to funkcye kuliste w przypadku, gdy skaźnik n jest zespolony.

Zarys teoryi funkcyj kulistych zawiera się w najnowszej książce Frischaufa (Lipsk 1897).

---

§ 9.

Funkcye walcowe Bessela.

Funkcyą walcową (cylindryczną) lub funkcyą Bessela gatunku pierwszego nazywamy funkcyę, określoną za pomocą wzoru:

$$J^{(n)}(z) = \frac{z^n}{2^n \, . \, n!}\left(1 - \frac{z^2}{2\,(2n+2)} + \frac{z^4}{2\,.\,4\,.\,(2n+2)\,(2n+4)} - \dots\right)$$

$$= \frac{1}{0!\,n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{1!\,(n+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{2!\,(n+2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+4} - \dots$$

Szereg ten jest zbieżny dla każdej wartości z.

Bessel dał (Akad. Berl. 1824) definicyę następującą:

$$J^{(n)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\,(z \sin\omega - n\,\omega)\, d\omega.$$

Jest nadto:

$$J^{(n)}(z) = \frac{z^n}{1\,.\,3\,.\,5 \dots (2n-1)}\;\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\,(z \cos\omega) \sin^{2n}\omega \; d\,\omega\,,$$

$$J^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^{\pi} e^{i\,z \cos\omega} \cos n\,\omega \; d\,\omega\,.$$

Funkcya $J^{(n)}(z)$ jest całką szczególną równania różniczkowego:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) F = 0.$$

Dla $n = 0$ funkcya $J^{(n)}(z)$ staje się:

$$J^{(0)}(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 . 4^2} - \ldots\ldots$$

i jest granicą funkcyi kulistej $P^{(n)}\left(\cos\frac{z}{n}\right)$ dla $n = \infty$.

Wraz z funkcyą J Neumann rozważał inną funkcyę, która oznacza przez $O^{(n)}$ i nazywa funkcyą Bessela gatunku 2-go. Określa się ta funkcya przy pomocy wzoru:

$$\varepsilon_n O^{(n)}(z) = \frac{2^n n!}{z^{n+1}}\left(1 + \frac{z^2}{2(2n-2)} + \frac{z^4}{2.4.(2n-2)(2n-4)} + \ldots\right),$$

gdzie $\varepsilon_n = 1$ dla $n = 0$, $\varepsilon_n = 2$ dla $n > 0$ i gdzie liczba wyrazów w nawiasie jest skończona; ostatnim wyrazem jest:

$$\frac{z^n}{2.4\ldots n.(2n-2)(2n-4)\ldots n}, \quad \text{gdy } n \text{ parzyste},$$

$$\frac{z^{n-1}}{2.4\ldots(n-1)(2n-2)(2n-4)\ldots(n+1)}, \quad \text{gdy } n \text{ nieparzyste}.$$

Poprzednie wyrażenie można i tak napisać:

$$\varepsilon_n O^{(n)}(z) = \frac{n}{z}\left(\frac{(n-1)!}{0!}\left(\frac{2}{z}\right)^n + \frac{(n-2)!}{1!}\left(\frac{2}{z}\right)^{n-2} + \frac{(n-3)!}{2!}\left(\frac{2}{z}\right)^{n-4} + \ldots\right);$$

ostatnim wyrazem jest:

$$\frac{\frac{(n-2)!}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\left(\frac{2}{z}\right)^0, \text{ gdy } n \text{ parzyste, albo } \left(\frac{2}{z}\right)^1, \text{ gdy } n \text{ nieparzyste.}$$

Funkcyę $O^n(z)$ można wyrazić za pomocą całki określonej

$$O^{(n)}(z) = \int\limits_0^{\infty} \frac{(\omega + \sqrt{\omega^2 + z^2})^n + (\omega - \sqrt{\omega^2 + z^2})^n}{2z^{n+1}} e^{-\omega}\, d\omega .$$

Funkcya $O^n(z)$ jest funkcyą wymierną całkowitą ilości $\frac{1}{z}$ stopnia $(n+1)$-go, znikającą dla $z = \infty$; czyni ona zadość równaniu różniczkowemu:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{3}{z} \frac{\partial F}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2 - 1}{z^2}\right) F = g_n ,$$

gdzie $g_n = \frac{1}{z}$ dla n parzystego, $\frac{n}{z^2}$ dla n nieparzystego.

Przez wprowadzenie funkcyi $O^{(n)}$ gatunku 2-go Neumann pokazał, że można utworzyć teoryę funkcyj walcowych analogiczną do teoryi funkcyj kulistych; wiele własności pozostaje bez zmiany, różnicę jedyną stanowi to, że funkcye kuliste gatunku 1-go i 2-go są rozwiązaniami szczególnemi jednego i tego samego równania różniczkowego, gdy funkcye walcowe $J^{(n)}$, $O^{(n)}$ są rozwiązaniami dwu różnych równań różniczkowych.

Funkcya $J^{(n)}(z)$ znika dla nieskończenie wielu wartości rzeczywistych i tylko rzeczywistych zmiennej z (twierdzenie Fouriera).

Funkcye $J^{(n)}$ i $O^{(n)}$ mają trzy własności analogiczne do własności funkcyj kulistych, mianowicie:

$$\int J^{(m)}(z) J^{(n)}(z) dz = 0; \int O^{(m)}(z) O^{(n)}(z) dz = 0; \int J^{(m)}(z) O^{(n)}(z) dz = k,$$

gdzie całkowanie odbywa się w zwrocie dodatnim wzdłuż krzywej zamkniętej. Gdy krzywa ta nie zawiera w swem wnętrzu punktu zerowego, jest zawsze $k=0$; gdy go zawiera, wtedy $k=0$, jeżeli $m \lesseqgtr n$; $k = \frac{2\pi i}{\varepsilon_n}$ jeżeli $m=n$. Gdy krzywa przechodzi przez punkt zero, wtedy wzory, w których zachodzi $O^{(n)}$ nie mają miejsca.

D l a k a ż d e j w a r t o ś c i n (w y j ą w s z y $n=0$) z a c h o d z ą z w i ą z k i z w r o t n e:

$$2\frac{dJ^{(n)}(z)}{dz}=J^{(n-1)}(z)-J^{(n+1)}(z);\quad 2\frac{dO^{(n)}(z)}{dz}=O^{(n-1)}(z)-O^{(n+1)}(z).$$

Dla $n=0$ mamy:

$$\frac{dJ^{(0)}(z)}{dz}=-J^{(1)}(z);\qquad \frac{dO^{(0)}(z)}{dz}=-O^{(1)}(z).$$

F u n k c y a $J^{(n)}(z)$ c z y n i z a d o ś ć z w i ą z k o w i z w r o t n e m u (B e s s e l a) d l a $n>0$:

$$\frac{2n}{z}J^{(n)}(z)=J^{(n-1)}(z)-J^{(n+1)}(z).$$

N a d t o j e s t:

$$J^{(n)}(z)=\frac{n}{z}J^{(n)}(z)-\frac{dJ^{(n)}(z)}{dz}.$$

W z ó r:

$$\frac{1}{y-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n J^{(n)}(x)\,O^{(n)}(y)$$

m a m i e j s c e d l a w s z e l k i c h p a r w a r t o ś c i x, y, c z y n i ą c y c h z a d o ś ć w a r u n k o w i $\operatorname{mod} x<\operatorname{mod} y$.

Ciekawą, zwłaszcza ze względu na zastosowania, własnością funkcyj B e s s e l a jest następująca:

Niechaj n będzie odległością dwu punktów o spółrzędnych x, y; x_1, y_1: funkcya $J^{(0)}(r)$ czyni zadość równaniu o pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+U=0.$$

i tęż własność posiada inna funkcya $Y^{(0)}(r)$, która wraz z funkcyą $J^{0}(r)$ jest inną całką szczególną równania różniczkowego liniowego rzędu 2-go, któremu czyni zadość funkcya $I^{0}(r$.

O rozwinięciu na szeregi według funkcyj Bessela patrz Rozdział XIX.

Najważniejsze prace o funkcyach Bessela ogłosili: Bessel (Abh. der Berl. Akad. 1824), Jacobi (Crelle XV), Schlömilch (Zeit. f. Math. u. Phys. 1857), Lipschitz (Crelle LVI), C. Neumann (Besselsche Functionen, Lipsk 1867), Heine (Kugelfunctionen) etc

---

§ 10.

Funkcye Lamégo.

Wprowadzimy funkcye Lamégo pod postacią najogólniejszą, nadaną im przez Heinego. Niechaj $\psi(z)$ będzie wielomianem stopnia $(p+1)$ względem z; połóżmy $du = \frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}$ i niechaj będzie równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2 V}{du^2} + \varphi(z) V = 0,$$

w którem $\varphi(z)$ jest znowu wielomianem tak wybranym, aby to równanie miało rozwiązanie V, równe funkcyi całkowitej stopnia n-tego względem z. W takim razie funkcyę V nazywamy funkcyą Lamégo rzędu p-tego i stopnia n-tego.

Funkcyę Lamégo można także określić jako funkcyę całkowitą stopnia n-tego, czyniącą zadość równaniu:

$$4\psi(z)\frac{d^2 V}{dz^2} + 2\psi'(z)\frac{dV}{dz} + \varphi(z) V = 0,$$

gdzie ψ jest wielomianem danym stopnia $p+1$, φ wielomianem tak dobrać się mającym, aby to równanie różniczkowe miało właśnie takie rozwiązanie, o jakiem mowa.

Istnieje $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+2)}{(p-1)!}(2n+p-1)$ funkcyj φ, dających początek tyluż funkcyom Lamégo, pomiędzy którem nie zachodzi żaden związek liniowy jednorodny o spółczynnikach stałych. Wielomian φ jest stopnia $p-1$. Funkcye, wprowadzone przez Lamégo, są właśnie przypadkiem szczególnym tu uważanych: są one rozwiązaniami równania

$$(z^2-b^2)(z^2-c^2)\frac{d^2E}{dz^2}-z(2z^2-b^2-c^2)\frac{dE}{dz}$$
$$+[(b^2+c^2)m-n(n+1)z^2]E=0.$$

Jeżeli wprowadzimy całkę eliptyczną u, określoną za pomocą związku

$$du=-c\frac{dz}{\sqrt{(z^2-b^2)(c^2-z^2)}},$$

wtedy powyższemu równaniu nadać można postać typu:

$$\frac{d^2E(z)}{du^2}=[n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2u+h]E(z).$$

Funkcye tu uważane badali: Lamé (Leçons sur les fonctions inverses. etc.. Paryż 1857; „Chaleur“, tamże 1861; Joun Liouville'a IV, V, VIII; w przypadku ogólnym Heine (Crelle, LX. LXI, LXII, Berl, Monatsb. 1864, patrz także „Kugelfunctionen“, I str. 445).

ROZDZIAŁ XIX.

PRZEDSTAWIENIE ANALITYCZNE FUNKCYJ.

§ 1.

Rozważania ogólne, szereg Wrońskiego. Szereg Lagrange'a.

Zagadnienie zasadnicze o przedstawieniu analitycznem funkcyj jest bardzo dawne. Rozważania, odnoszące się do tego przedmiotu, podzielić można na dwie kategorye: albo idzie o wyrażenie funkcyi przez inne funkcye, z góry dane; albo, też o wyrażenie funkcyi danej przez wartości, jakie ona i jej pochodne posiadają w pewnych punktach i t. p.

Każde wyrażenie analityczne o skończonej lub nieskończonej liczbie działań można rozważać z dwojakiego punktu widzenia, stosownie do tego, czy dajemy z góry ilości stałe, jakie mają zachodzić w rozwinięciu, czy też dajemy formę ilości zmiennych.

Najprostszem rozwinięciem, należącem do tego porządku rzeczy, jest sławne rozwinięcie, znane pod nazwą wzoru Taylora-Maclaurina. Można je uważać za wzór pierwszej kategoryi, jeżeli żądamy rozwinięcia, którego wyrazy postępują według potęg całkowitych dodatnich różnicy $z-z_0$; za wzór zaś kategoryi drugiej, jeżeli widzimy w nim rozwinięcie, za pomocą którego można obliczać wartości funkcyi przy pomocy danych wartości funkcyi i jej kolejnych pochodnych w punkcie x_0.

Do tego samego rzędu rozważań należą wzory Cauchy'ego i Laurenta (patrz Rozdz. XIII), różne wzory interpolacyjne (patrz Rozdz. X), wzory Weierstrassa i Mittag-Lefflera (patrz Rozdz. XIII). Wreszcie innemi wzorami, należącemi do pierwszej kategoryi. są wzory Wrońskiego i Lagrange'a.

Pierwszy z tych autorów stawia sobie zadanie, dotyczące wyrażenia funkcyi za pomocą szeregów, których wyrazy zależą od innych funkcyj, dowolnie danych. Wzór, który otrzymuje, nazywa prawem najwyższem. Jest to wzór bardzo ogólny, lecz daleki od tego, aby można było uważać go za ścisły z punktu widzenia analizy dzisiejszej; Du Bois-Reymond nadaje mu znaczenie jedynie formalne. Praca Wrońskiego, dotycząca tego przedmiotu, była przedstawiona Instytutowi francuskiemu w r. 1810, lecz pomysły jego pozostały nieznanemi prawie przez lat 60, póki nie ukazała się praca Cayley'a (Quart. Journ. 1873). po której nastąpiły dopiero prace Transona (Nouv. Ann. de Math. 1875, Ch. Lagrange'a (Comptes Rendus 1884. Acad. de Belgique 1884) i innych.

Większe szczegóły o szeregach Wrońskiego znaleść można w pracach Dicksteina (Prace matemat.-fiz., Warszawa t. II 1890 i t. V, 1893; Bibliotheca mathematica. Stockholm 1894; „Życie i dzieła Wrońskiego". Kraków 1896). Porówn. Laurent, Cours d'analyse, t. III.

Jest rzeczą naturalną, że z szeregu Wrońskiego wynikają jako przypadki szczególne—wzór Taylora, wzory Bürmanna (rozwinięcie funkcyi według potęg innych funkcyj), oraz tak zwany szereg Lagrange'a. Ten ostatni ma postać następującą:

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{z-a}{\varphi(z)}\right]^{n+1} \left\{ \frac{d^n f'(z)\,\varphi(z)^{n+1}}{dz^n} \right\}_{z=a},$$

gdzie $\varphi(z)$ jest funkcyą dowolną z tem zastrzeżeniem. aby była holomorficzną w części płaszczyzny otaczającej punkt a. Dla $\varphi(z)=1$ otrzymujemy rozwinięcie Taylora.

Szereg ten stosujemy przy szukaniu pierwiastków równania postaci $(z-a)-a\varphi(z)=0$, którego rozwiązanie dla przypadku szczególnego $\varphi(z)=\sin z$ stanowi ważne zagadnienie mechaniki niebieskiej.

Wymieniamy następujące prace o szeregu Lagrange'a: Chio (Savants étrang. XII, Acc. di Torino 1872), Genocchi (Comptes rend. 1873), Rouché (Ecole polytech. cah. XXXIX), Żorawski (Prace mat.-fiz. V, 1894; Rozpr. Akad. krak. XXXVII, 1899).

Należy zwrócić uwagę na to, że do wzorów drugiej kategoryi należą wzory, których wyrazami są funkcye kołowe (szeregi Fouriera), kuliste, funkcye Bessela i t. p. O tych rozwinięciach jest mowa w paragrafach następnych.

---

§ 2.

Rozwinięcie na szeregi Fouriera.

Szereg typu

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k \sin(kz) + b_k \cos(kz)\right]$$

nazywa się szeregiem trygonometrycznym. Jeżeli w szczególności spółczynniki tego szeregu wyznaczają się za pomocą wzorów:

$$b_0=\frac{1}{a}\int_{-\pi}^{+\pi} f(a)\,da;\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(a)\cos(ka)\,da;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(a)\sin(ka)\,d\alpha.$$

gdzie $f(z)$ jest funkcyą, którą szereg przedstawia, mamy wtedy szereg Fouriera. Sądzono dawniej, że wszystkie szeregi trygonometryczne są szeregami Fouriera; później pokazało się, że tak nie jest (Heine, Crelle LXXI).

Mówi się, że funkcya czyni zadość warunkowi Dirichleta, jeżeli w pewnym przedziale jest zawsze skończona, nie ma nieskończenie wielu nieciągłości zwykłych i nie ma nieskończenie wielu maximów i minimów; wtedy zachodzi twierdzenie (Dirichleta):

Funkcya $f(z)$, czyniąca zadość wszystkim warunkom Dirichleta, daje się rozwinąć na szereg Fouriera, którego wartość w każdym punkcie zwyczajnym jest wartością funkcyi; w każdym zaś punkcie przerwy zwykłej jest średnią dwu granic prawej i lewej, do których dąży funkcya, zbliżając się do punktu przerwy. Rozwinięcie takie jest możliwe tylko jednym sposobem (Heine, Crelle LXXI).

Jeżeli funkcya staje się nieskończoną w punkcie c, wtedy warunkiem dostatecznym na to, aby szereg w dalszym ciągu przedstawiał funkcyę, jest, by całka

$$\int_{c-\omega}^{c+\omega} f(\alpha)\, d\alpha$$

była zbieżną (Dirichlet, Du Bois Reymond, Crelle LXXXIX).

Jeżeli funkcya posiada skończoną liczbę punktów osobliwych, w których otoczeniu istnieje nieskończenie wiele punktów przerwy zwyczajnej, wtedy twierdzenie powyższe utrzymuje się, lecz szereg nie daje wartości funkcyi w punkcie osobliwym (Dirichlet, Lipschitz, Crelle LXIII).

Jeżeli funkcya ma nieskończenie wiele

maximów i minimów i jeżeli dla każdego takiego punktu β czyni zadość warunkowi:

$$\lim_{\delta=0} |f(\beta+\delta)-f(\beta)| \log\delta = 0,$$

to i wtedy daje się rozwinąć na szereg Fouriera Jest to twierdzenie Lipschitza, a warunek poprzedzający, który jest warunkiem bardziej ścieśniającym niż warunek ciągłości funkcyi, nazywa się warunkiem Lipschitza.

Istnieją napewno funkcye, nie czyniące zadość warunkowi Lipschitza, dla których szereg Fouriera jest rozbieżny (Du Bois Reymond, Abh. der Bayr. Akad. XII, 1876).

Zbieżność szeregu Fouriera w punkcie określonym zależy jedynie od sposobu, w jaki zachowuje się funkcya w sąsiedztwie tego punktu (Riemann).

Istnieją funkcye całkowalne z nieskończenie wielu maximami i minimami, nie dające się przedstawić za pomocą szeregu Fouriera (Riemann).

Są funkcye niecałkowalne ze skończoną liczbą maximów i minimów, nie dające się przedstawić za pomocą szeregu Fouriera (Riemann).

Szereg Fouriera jest jednostajnie zbieżny, gdy przedstawia funkcyę ciągłą albo też nieciągłą tylko w skończonej liczbie punktów, i nie mającą nieskończenie wielu maximów i minimów (Heine, Crelle LXXI).

Funkcya skończona, posiadająca nieskończenie wiele osobliwości takich, że jedna z grup pochodnych tej grupy nieskończenie wielu punktów jest skończona, jeżeli daje się rozwinąć na szereg Fouriera, to jednym tylko sposobem (twierdzenie Cantora, Math. Ann. V).

Bez względu na sposób, w jaki funkcya daje się rozwinąć na szereg trygonometryczny, którego spółczynniki a_k, b_k stają się nieskończenie małemi gdy rośnie liczba k, spółczynniki te mają zawsze postać wyżej wskazaną przez szereg Fouriera, o ile tylko całki zachodzące w ich wyrażeniu nie są pozbawione znaczenia (Twierdzenie Du Bois-Reymonda Abh. der Bayr. Akad. 1875).

Badaniu przedstawienia funkcyj za pomocą szeregów trygonometrycznych dało początek całkowanie równania t. zw. struny drgającej, t. j. równania o pochodnych cząstkowych $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, któremu czyni zadość szereg trygonometryczny. Euler postawił zagadnienie, czy każda funkcya daje się zawsze przedstawić za pomocą szeregu trygonometrycznego; Fourier zaś (Acad. de Paris 1807) mniemał, że można na nie odpowiedzieć twierdząco. Rozważania Fouriera były bardzo dalekiemi od ścisłości; po nich nastąpiły prace Poissona i Cauchy'ego; lecz pierwszą pracą istotnie ważną o tym przedmiocie była praca Dirichleta (Crelle, IV. 1829). Z późniejszych ważną jest rozprawa Riemanna (Diss. inaug. 1854), który rozważa ten przedmiot z nowych punktów widzenia, a w pierwszej części rozprawy daje wyborny rys historyczny i krytyczny wszystkich poprzednich badań, odnoszących się do szeregów trygonometrycznych. Z prac nowszych wymieniamy prace już cytowane: Heinego, Du Bois Reymonda, Lipschitza,. dalej Dini'ego (Ann. di mat. VI), Ascoli'ego (Lincei 1878), książkę Dini'ego: „Sulla serie di Fourier" (Piza 1880), studyum krytyczne i historyczne Sachsego (Inaug. Diss.. Getynga 1879), podane w przekładzie w Bull. Darboux z r. 1880. Dirichlet i Riemann mniemali, że każda funkcya ciągła może być w każdym punkcie bez wyjątku przedstawiona przez szereg Fouriera; Du Bois Reymond dowiódł pierwszy, iż to mniemanie jest błędne. Schwarz podał na to przykład dostatecznie prosty.

Badano też szeregi trygonometryczne o dwu zmiennych i przedstawialność funkcyj przez takie szeregi; patrz co do tego pracę Ascoli'ego (Lincei 1879—1880).

---

§ 3.

Rozwinięcie na szereg według funkcyj kulistych Legendre'a.

Każda funkcya jednowartościowa $f(z)$, która jest skończona i ciągła wewnątrz elipsy z ogniskami w punktach $+1$, -1, daje się rozwinąć na szereg typu:

$$f(z) = a^0 P^{(0)}(v) + a_1 P^{(1)}(z) + \ldots\ldots,$$

gdzie spółczynniki a określają się za pomocą wzoru:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)\, P^{(n)}(x)\, dx.$$

Rozwinięcie takie jest możliwe tylko jednym sposobem.

Każda funkcya jednowartościowa $f(z)$, skończona i ciągła wewnątrz pierścienia eliptycznego, ograniczonego dwiema elipsami spółogniskowemi o ogniskach w punktach $+1$, -1, daje się rozwinąć na szereg typu:

$$\begin{aligned} f(z) = {} & a_0 P^{(0)}(z) + a_1 P^{(1)}(z) + \ldots\ldots \\ & + \beta_0 Q^{(0)}(z) + \beta_1 Q^{(1)}(z) + \ldots\ldots, \end{aligned}$$

który zachowuje swe znaczenie dla wszystkich punktów pierścienia. Spółczynniki α. β. określają się za pomocą wzorów:

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)\, Q^{(n)}(x)\, dx,$$

$$\beta_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)\, P^{(n)}(x)\, dx.$$

Potęgą z^n w rozwinięciu według funkcyj kulistych przedstawia się tak:

$$z^n = \frac{n!}{3.5.(2n+1)} \Big\{ (2n+1)\, P^{(n)}(z) + (2n+3) \frac{2n+1}{2} P^{(n-2)}(z)$$

$$+ (2n+7) \frac{(2n+1)(2n-1)}{2.4} P^{(n-4)}(z) + \ldots \Big\} \text{(Legendre 1784)}$$

Wzór analogiczny stanowi:

$$\frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1.3.5.(2n-1)}{n!} \Big\{ (2n+1)\, Q^{(n)}(z) - (2n+5) \frac{2n+1}{2} Q^{(n+2)}(z)$$

$$- (2n+9) \frac{(2n+1)(2n+3)}{2.4} Q^{(n+4)}(z) + \ldots \Big\}.$$

Godnemi uwagi są rozwinięcia następujące (Bauer, Crelle LVI):

$$\frac{2}{\pi \sqrt{1-z^2}} = P^{(0)} + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 P^{(2)} + 9 \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 P^{(4)} + \ldots\ldots,$$

$$\frac{8}{\pi} \arcsin z = 3\, P^{(1)} + 7 \left(\frac{1}{4}\right)^2 P^{(3)} + 11 \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 P^{(5)} + \ldots\ldots,$$

$$\frac{2}{\pi} \sqrt{1-z^2} = \frac{1}{2} P^{(0)} - 5 . \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right) P^{(2)} - 9 . \frac{3}{6} \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 P^{(4)}$$

$$- 13 . \frac{5}{8} \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 P^{(6)} - \ldots\ldots$$

Rozwinięcia funkcyj $\sin n\theta$ i $\cos n\theta$ według funkcyj kulistych (Heine, Kugelf. I, str. 86 i dalsze; Most, Crelle LXX) są:

$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3\ldots(2n-3)}\sin n\theta = (2n-1)\,P^{(n-1)}(\cos\theta)$$

$$+\,(2n+3)\,\frac{(n-1)^2-n^2}{(n+2)^2-n^2}\,P^{(n+1)}(\cos\theta)$$

$$+\,(2n+7)\,\frac{[(n-1)^2-n^2]\,[(n+1)^2-n^2]}{[(n+2)^2-n^2]\,[(n+4)^2-n^2]}\,P^{(n+3)}(\cos\theta)+\ldots\ldots$$

$$2\,\frac{3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots2n}\cos n\theta = (2n+1)\,P^{(n)}(\cos\theta)$$

$$+\,(2n-3)\,\frac{n^2-(n+1)^2}{n^2-(n-2)^2}\,P^{(n-2)}(\cos\theta)$$

$$+\,(2n-7)\,\frac{[n^2-(n+1)^2]\,[n^2-(n-1)^2]}{[n^2-(n-2)^2]\,[n^2-(n-4)^2]}\,P^{(n-4)}(\cos\theta)+\ldots\ldots$$

---

§ 5

Rozwinięcie funkcyi punktów na kuli na szereg według funkcyj kulistych Laplace'a.

Niechaj będzie kula o promieniu 1 i punkt na niej, określony zez dwie spółrzędne biegunowe: jednę θ (zmieniającą się 0 do π) i drugą φ (zmieniająca się od 0 do 2π). Funkcya iennych θ, φ nazywa się zwykle **funkcyą punktów** ıli lub także **funkcyą dwóch kątów**.

Funkcya $f(\theta,\varphi)$, **skończona i ciągła** dla **wszystkich punktów kuli, mająca przerwy w skończo-**

nej liczbie punktów lub linij, daje się rozwinąć na szereg funkcyj kulistych Laplace'a w postaci:

$$f(\theta, \varphi) = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \ldots\ldots,$$

gdzie

$$Y^{(n)} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} d\theta_1 \sin\theta_1 \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \varphi_1) P^{(n)}(\cos\gamma)\, d\varphi_1.$$

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Rozwinięcie to ma miejsce dla każdego punktu kuli, o ile w punkcie średnicowo-przeciwległym funkcya jest także ciągłą, a na kołach wielkich, przez punkt dany przechodzących, ma skończoną liczbę maximów i minimów. Rozwinięcie to daje się też rozciągnąć na przypadek, w którym ta liczba maximów i minimów nie jest skończona; lecz wtedy zachodzą warunki, w których szczegóły wchodzić nie będziemy.

Rozważania nad przedmiotem, o którym mowa, rozpoczął Poisson (École polyt. cah. XIX, „Chaleur" str. 212); później zajmowali się nim: Dirichlet (Crelle XVII), który sprostował błąd w dowodzeniu Poissona; Bonnet (Liouville, 1852); Kronecker (patrz Heine, Kugelf. I str. 434) i Dini (Annali di mat VI, 1874) stwierdzili, że dowodzenia Dirichleta wymagają jeszcze pewnych uzupełnień.

---

§ 5.

Rozwinięcie funkcyi na szereg funkcyj Bessela.

Każda funkcya $f(z)$, jednowartościowa, skończona i ciągła wewnątrz koła o promieniu 1, daje się rozwinąć na szereg:

$$f(z) = a_0 . J^{(0)}(z) + a_1 . J^{(1)}(z) + a_2 . J^{(2)}(z) + \ldots\ldots$$

stosuje się do wszystkich punktów tego koła. Spółczynniki wyrażają się w ten sposób:

$$a_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int f(z)\, O^{(n)}(z)\, dz,$$

gdzie całkowanie uskutecznia się w zwrocie dodatnim wzdłuż okręgu; wzór powyższy na rozwinięcie daje się obustronnie różniczkować.

Każda funkcya, jednowartościowa skończona i ciągła w pierscieniu pomiędzy dwoma kołami spółśrodkowemi, których środki są w punkcie zero, daje się rozwinąć na szereg postaci:

$$f(z) = a_0 J^{(0)}(z) + a_1 J^{(1)}(z) + \ldots\ldots$$
$$+ \beta_0 O^{(0)}(z) + \beta_1 O^{(1)}(z) + \ldots\ldots,$$

który stosuje się do wszystkich punktów pierścienia; spółczynniki mają wartości:

$$\alpha_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int f(z)\, O^{(n)}(z)\, dz, \quad \beta_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int f(z)\, J^{(n)}(z)\, dz,$$

gdzie oba całkowania wykonywają się w zwrocie dodatnim wzdłuż krzywej zamkniętej, zawartej w pierścieniu i otaczającej punkt zero.

Przypadkami szczególnemi tych rozwinięć są następujące:

$$\cos z = J^{(0)}(z) - 2J^{(2)}(z) + 2J^{(4)}(z) - \ldots\ldots$$

$$\sin z = 2J^{(1)}(z) - 2J^{(3)}(z) + 2J^{(5)}(z) - \ldots\ldots$$

$$1 = J^{(0)}(z) + 2J^{(2)}(z) + 2J^{(4)}(z) + \ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{2} z = J^{(1)}(z) + 3J^{(3)}(z) + 5J^{(5)}(z) + \ldots\ldots$$

$$J^{(0)}(c+z) = J^{(0)}(c)\, J^{(0)}(z) - 2J^{(1)}(c)\, J^{(1)}(z) + 2J^{(2)}(c)\, J^{(2)}(z) - \ldots$$

Jeżeli rozwiniemy na szeregi Fouriera funkcye $\cos(z\sin\omega)$, $\sin(z\sin\omega)$, to spółczynniki wstaw i dostaw będą funkcyami Bessela.

Jeżeli funkcya $f(z)$ jest skończona i ciągła dla wartości rzeczywistych z. zawartych między 0 i π i ma pochodną zawsze skończoną, wtedy można ją rozwinąć według wzoru:

$$f(z) = f(0) + \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 J^{(0)}(z) + A_2 J^{(0)}(2z) + A_3 J^{(0)}(3z) + \ldots,$$

gdzie

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mu\cos(n\mu)\,d\mu \int_0^1 \frac{f'(\mu t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Do prac, odnoszących się do tego przedmiotu, prócz wymienionych już poprzednio, należy dodać prace C. Neumanna „Ueber die nach Kreis-Kugel- und Cylinderfunctionen fortschr. Entwick.“ Lipsk 1881

ROZDZIAŁ XX.

TEORYA LICZB CAŁKOWITYCH: WYMIERNYCH I ZESPOLONYCH.

---

§ 1.

Podzielność liczb wymiernych całkowitych. Liczby pierwsze.

Liczba całkowita jest p o d z i e l n a przez drugą, jeżeli reszta po podzieleniu pierwszej przez drugą jest zerem.

L i c z b a c a ł k o w i t a p i e r w s z a jest liczbą podzielną tylko przez siebie samą i przez jedność.

K a ż d a l i c z b a c a ł k o w i t a r o z k ł a d a s i ę j e d n y m t y l k o s p o s o b e m n a i l o c z y n s k o ń c z o n e j l i c z b y c z y n n i k ó w p i e r w s z y c h.

Jeżeli liczba N, rozłożona na czynniki pierwsze, jest $\alpha^m \beta^n \ldots\ldots$, to s u m a j e j w s z y s t k i c h d z i e l n i k ó w p i e r w s z y c h i n i e p i e r w s z y c h w y n o s i:

$$\frac{\alpha^{m+1}-1}{\alpha-1} \cdot \frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1} \ldots\ldots$$

a l i c z b a t y c h d z i e l n i k ó w:

$$(m+1)(n+1) \ldots\ldots$$

Liczba N daje się: $\frac{1}{2}(m+1)(n+1)$... albo $\frac{1}{2}(m+1)(n+1)\ldots+\frac{1}{2}$ różnemi sposobami rozłożyć na dwa czynniki, stosownie do tego, czy przynajmniej jeden z wykładników $m, n\ldots$ jest nieparzysty lub żaden.

Dwie liczby nazywają się względnie pierwszemi, jeżeli nie mają innego wspólnego dzielnika prócz jedności.

Oznaczamy symbolem $\varphi(N)$ liczbę liczb pierwszych względem liczby N i mniejszych od niej.

Istnieje związek (Eulera):

$$\varphi(N) = N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\ldots\ldots$$

gdzie $\alpha, \beta\ldots$ są czynniki pierwsze różne liczby N.

Jeżeli N, N' są liczby względnie pierwsze, to:

$$\varphi(NN') = \varphi(N)\varphi(N').$$

Jeżeli z przyjmuje kolejno wszystkie wartości dzielników liczby N, to:

$$\Sigma\,\varphi(z) = N.$$

Jeżeli $N=N_1+N_2+\ldots$, gdzie $N, N_1, N_2\ldots$ są liczby całkowite, to wyrażenie

$$\frac{N!}{N_1!\,N_2!\ldots}$$

jest liczbą całkowitą.

Jeżeli p jest liczbą pierwszą, to najwyższa jej potęga, zawarta w $N!$ jest $N'+N''+N'''+\ldots$, gdzie N' jest częścią całkowitą ułamka $\frac{N}{p}$, N'' częścią całkowitą ułamka $\frac{N'}{p}$ i t. d.

Dirichlet dowiódł następującego twierdzenia (Akad. Berl. 1837).

Każdy nieograniczony postęp arytmetyczny, którego wyraz pierwszy i różnica są liczbami względnie pierwszemi, zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Wymieniamy jeszcze następujące twierdzenia o liczbach pierwszych i złożonych.

Aby 2^m+1 było liczbą pierwszą, jest konieczne, by m było potęgą liczby 2.

Nie można wszakże twierdzić, by wszystkie liczby postaci $2^{2^n}+1$ (jak mniemał był Fermat) były liczbami pierwszemi; istotnie dla $n=0,1,2,3,4$ otrzymujemy liczby pierwsze 3, 5, 17, 257, 65537, lecz już dla $n=4$ liczba

$$2^{2^n}+1=4294967297$$

jest podzielna przez 641.

Aby liczba $2^{2^n}+1$ była pierwszą, jest koniecznem i dostatecznem, by dzieliła liczbę $3^{2^{2^n}}+1$ (Lucas).

Aby 2^p-1 było liczbą pierwszą, koniecznem jest, by p było liczbą pierwszą. Warunek ten nie jest wszakże dostateczny, gdyż np. $2^{11}-1=23.89$.

Dzielniki nieparzyste liczby $2^{2^n}+1$ mają postać $2^{n+1}q+1$. Dzielniki pierwsze nieparzyste liczby postaci $a^{2n+1}-1$ lub $a^{2n+1}+1$, gdzie $2n+1$ jest liczbą pierwszą, albo mają postać $2(2n+1)q+1$, albo są odpowiednio dzielnikami liczb $a-1$, $a+1$.

Jeżeli p jest dzielnikiem nieparzystym liczby a^m+1, to można p przedstawić w postaci $2\omega q+1$, gdzie ω jest jednym z dzielników liczby m (włączając liczbę 1). Nadto liczba $\frac{m}{\omega}$ będzie nieparzysta i pierwsza względem q, p zaś będzie dzielnikiem liczby $a^\omega+1$.

Dowody niektórych tych twierdzeń oparte są na teoryi kongruencyi, którą niżej podajemy.

Aby liczba nieparzysta była liczbą pierwszą, jest koniecznem i dostatecznem, by jednym tylko sposobem była równa różnicy kwadratów dwu liczb całkowitych.

Żadna liczba postaci a^4+4 z wyjątkiem 5, nie jest liczba pierwszą (Zofia Germain).

J e ż e l i $2a>7$, t o i s t n i e j e p r z y n a j m n i e j j e d n a l i c z b a p i e r w s z a, z a w a r t a p o m i ę d z y a i $2a-2$ (Twierdzenie C z e b y s z e w a, Journ. de Louville, XVII. Akad. Petersb. 1850).

Iloczyn n pierwszych liczb całkowitych nie może być potęgą liczby całkowitej ani iloczynem potęg liczb całkowitych, (Liouville, (2), II).

Liczba nazywa się d o s k o n a ł ą wtedy, gdy równa się sumie wszystkich swoich dzielników.

Liczby doskonałe,dotąd znane,otrzymują się za pomocą wzoru (odpowiadającego metodzie, znalezionej już przez E u k l i d e s a) $E_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ w przypadku, gdy czynnik drugi jest liczbą pierwszą.

N i e m a i n n y c h l i c z b d o s k o n a ł y c h p a r z y s t y c h, p r ó c z t y c h, k t ó r e s ą z a w a r t e w e w z o r z e E u k l i d e s a.

Nie znamy dotąd liczb doskonałych nieparzystych.

Dotychczas znane liczby doskonałe odpowiadają następującym wartościom liczby p: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61; oto ośm z nich :

6: 28; 496: 8128: 33550336: 8589869056: 137438691328·

2305843008139952128.

L u c a s zapewnia, iż dowiódł, że dla $p=67$ i $p=89$ nie otrzymujemy liczb doskonałych (Théorie des nombres, I, str. 376).

Zagadnienie o znalezieniu liczby liczb pierwszych, mniejszych od liczby danej lub zawartych pomiędzy danemi granicami, dało pobudkę do licznych badań.

E u l e r (Pam. Akad berlińskiej 1772, str. 36) znalazł wzór x^2+x+41, z którego kładąc, $x=0, 1, 2\ldots$, otrzymał. 40 liczb pierwszych; analogicznemi wzorami są x^2+x+17, dający dla ($x=0, 1, 2\ldots$) 17 oraz wzór $2x^2+29$, dający 29 liczb pierwszych.

L e g e n d r e (Théorie des nombres) znalazł w z ó r p r z y b l i ż o n y, wyrażający liczbę liczb pierwszych, mniejszych od liczby danej x. Jeżeli tę liczbę oznaczymy przez $\varphi(x)$, będzie z dostatecznem przybliżeniem dla x bardzo wielkiego:

$$\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1{,}08366}$$

Riemann (Werke, str. 136) zajmuje się w pracy specyalnej zagadnieniem o znalezieniu dokładnej wartości funkcyi $\varphi(x)$; lecz wzór jego jest bardzo skomplikowany.

Temże zagadnieniem zajmowali się: Gauss (Werke II, str. 435—447), Dirichlet (Berl. Akad. 1838), Czebyszew (Liouville XVII, a także w „Teoryi kongruencyi" Dodatek III). Inne prace o tym przedmiocie są: Curtzego (Annali di mat. I), Meissela (Math. Ann. II, III, XXI, XXIII, XXV), który obliczył liczbę liczb pierwszych dla pierwszego miliarda liczb naturalnych, Mertensa (Crelle, LXXVIII), de Jonquières'a (C. R. XCV), Lipschitza (tamże XCV, XCVI), Piltza (Jena 1884) Poincaré go (C. R. CXIII), v. Mangoldta (Akad Berl. 1897, Ann de l'Ecole Polyt. 1896), Cahena (C R. 1893, Annales de l'Ecole Normale 1894), Levi-Civita (Lincei, 1895). Wykład tego przedmiotu znajduje się w rozdziale 12-ym dzieła Bachmanna „Zahlentheorie" t II. 1894.

Niektóre prostsze twierdzenia, odnoszące się do tego przedmiotu, są następujące:

Granica wyrażenia $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$ dla $x = \infty$ jest -1 (Czebyszew).

Wartość całki

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x}$$

wyraża wartosć funkcyi $\varphi(x)$ z przybliżeniem tem większem, im większe jest x. Ten wzór na wartość funkcyi $\varphi(x)$ jest daleko bardziej przybliżony, niż powyżej podany wzór Legendre'a; znajdujemy go u Gausa (l. c. str. 444).

Następująca tablica daje liczbę liczb pierwszych, zawartych w granicach między 1 a 100, między 101 a 300 i t. d.:

Pomiędzy	1	a	100	zawiera się	25	liczb pierwszych
„	101	„	200	„ „	21	„ „
„	201	„	300	„ „	16	„ „
„	301	„	400	„ „	16	„ „
„	401	„	500	„ „	17	„ „
„	501	„	600	„ „	14	„ „
„	601	„	700	„ „	16	„ „
„	701	„	800	„ „	14	„ „
„	801	„	900	„ „	15	„ „
„	901	„	1000	„ „	14	„ „
„	1	„	1000	„ „	168	„ „
„	1001	„	2000	„ „	135	„ „
„	2001	„	3000	„ „	127	„ „
„	3001	„	4000	„ „	120	„ „
„	4001	„	5000	„ „	119	„ „
„	5001	„	6000	„ „	114	„ „
„	6001	„	7000	„ „	117	„ „
„	7001	„	8000	„ „	107	„ „
„	8001	„	9000	„ „	110	„ „
„	9001	„	10000	„ „	112	„ „
„	1	„	1000000	„ „	78498	„ „
„	1	„	100000000	„ „	5761455	„ „

Podobna tablica częstości liczb pierwszych, dość daleko posunięta, znajduje się w tomie II „Dzieł" Gaussa; w niej pomieszczono liczby liczb pierwszych w różnych chiliadach aż do chiliady 1000-ej, t. j. do 1000000. Tablicę tę należy w kilku miejscach sprostować według wskazówek Meissela w Math. Ann. II.

Tablice dzielników liczb pierwszych dla 1-go i 2-go miliona wraz z liczbami pierwszemi w nich zawartemi ułożyli: pierwszą Chernac (1811), drugą Burkhardt (Paryż 1814); patrz Gauss, (Werke II, str. 181—183). W tablicach Burkhardta należy uskutecznić poprawki (patrz np. Meissel l. c.). Wspomnimy wreszcie o tablicach Vegi (Sammlung math. Tafeln, r. 1796, wydanie, opracowane przez Hülssego. Lipsk, 1840).

Pytanie, pokrewne z zagadnieniem poprzedzającem odnosi, się do funkcyi μ Mertensa (Crelle, LXXVII). Rozumiemy przez $\mu(n)$ jednosć dodatnią lub ujemną, stosownie do tego. czy n jest iloczynem parzystej lub nieparzystej liczby czynników pierwszych różnych, przytem $\mu(1)=+1$, $\mu(n)=0$ jeżeli n

ma czynniki kwadratowe (wyjąwszy jedność). Pierwszem prostem twierdzeniem o funkcyi μ jest następujące:

S u m a $\Sigma\mu(d)$, r o z c i ą g n i ę t a n a w s z y s t k i e d z i e l n i k i l i c z b y j a k i e j k o l w i e k N (w ł ą c z a j ą c w n i e s a m ą l i c z b ę N i j e d n o ś ć) j e s t z e r e m.

O tej funkcyi patrz notę L i p s c h i t z a (C. R. 1879) i wykład u B a c h m a n n a, l. c.

---

§ 2.

O funkcyi liczbowej $E(x)$.

Za pomocą symbolu $E(x)$ (L e g e n d r e) oznaczamy największą liczbę całkowitą wymierną, zawartą w liczbie dodatniej rzeczywistej x

Za pomocą symbolu $E_q(x)$ (H e r m i t e) oznaczamy wyrażenie

$$E_q(x) = \frac{E(x)\,E(x+1)\ldots E(x+q-1)}{q!}$$

Funkcya E jest oczywiście funkcyą nieciągłą. Godnem jest uwagi, że funkcya

$$\varphi(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

jest funkcyą ciągłą zmiennej x dla rzeczywistych dodatnich wartości x. Funkcyę tę zastosował S c h w a r z do zbadania funkcyi, nie mającej pochodnej w nieskończenie wielu punktach.

Dla funkcyi E mamy wzory następujące:

$$\sum_{r=1}^{m-1} E\left(x + \frac{r}{m}\right) = E(mx) - E(x), \qquad \text{(Hermite)}$$

$$\sum_{r=1}^{m-1} (m-r)\left\{E_2\left(x + \frac{r}{m}\right) + E_2\left(x - \frac{r}{m}\right)\right\}$$

$$= E_2(mx) - mE_2(x). \qquad \text{(Hermite)}$$

$$\sum_{r=1}^{m-1} E\left(nx - \frac{rn}{m}\right) - \sum_{s=1}^{n-1} E\left(mx - \frac{sm}{n}\right) = m - n. \quad \text{(Stern)}$$

$$\sum_{r=1}^{m-1} \left\{ E_2\left(x + \frac{r}{m}\right) - E_2\left(x - \frac{r}{m}\right) \right\} = \sum_{r=1}^{m-1} E\left(x + \frac{r}{m}\right) \quad \text{(Stern)}$$

O funkcyi $E(x)$ ogłosili prace: Hermite (Acta math. V, str. 315, VIII, Correction), Stern (Acta math. VIII. X, Crelle CII), Pringsheim (Math. Ann. XXVI), który szukał rozwinięcia na szereg trygonometryczny funkcyi $E(x)$, wreszcie Bertolani (Giorn. di Matem. XXXIV. 1895).

§ 3.

Wiadomości ogólne o kongruencyach.

Dwie liczby α, β nazywają się kongruentnemi lub przystającemi według modułu n, jeżeli ich różnica jest podzielna przez n. Oznaczamy to za pomocą symbolu

$$\alpha \equiv \beta \pmod{n}$$

i nazywamy kongruencyą.

Wszystkie liczby, w odniesieniu do modułu n, dzielą się na n klas (Gauss); w każdej klasie znajdują się liczby, przystające według tego modułu. Liczby $0, 1, 2 \ldots n-1$ można uważać za przedstawicielki tych n klas.

Liczba danej klasy jest niekongruentna (nieprzystająca) do liczby innej klasy.

Układ n liczb, wybranych dowolnie po jednej z każdej klasy np układ $0, 1, 2 \ldots n-1$, tworzy układ zupełny liczb nieprzystających lub układ zupełny reszt względem modułu n.

Dwie liczby. przystające do trzeciej według tego samego modułu, są przystającemi do siebie według tego modułu

Dwie lub więcej kongruencyj o tym samym module można dodawać, odejmować, mnożyć stronami; wyrazy kongruencyi można wszystkie mnożyć przez jednę i tę samą liczbę.

Wyrazy kongruencyi można dzielić przez ich czynnik wspólny k, jeżeli czynnik ten jest względnie pierwszy do modułu n; jeżeli zaś ten przypadek nie zachodzi. to można dzielić moduł przez największy wspólny dzielnik pomiędzy nim a liczbą k.

Jeżeli a jest liczbą pierwszą względem n, $\varphi(n)$ zaś oznacza liczbę liczb pierwszych mniejszych od n i względnie pierwszych z tą liczbą, to:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}. \qquad \text{(Euler.)}$$

Dla $n=p^k$, gdzie p jest liczbą pierwszą, zachodzi twierdzenie:

Jeżeli a jest niepodzielne przez liczbę pierwszą p, to:

$$a^{(p-1)p^{k-1}} \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\ p^k)$$

Dla $k=1$ otrzymujemy twierdzenie Fermata:

Jeżeli a nie jest podzielne przez liczbę pierwszą p, to:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Jeżeli p jest liczbą pierwszą. to:

$$(p-1)!+1 \equiv 0 \pmod{p}. \qquad \text{(Twierdz. Wilsona.)}$$

Niechaj f będzie symbolem funkcyi wymiernej całkowitej; jeżeli $\alpha \equiv \beta \pmod{n}$, to będzie także $f(\alpha) \equiv f(\beta) \pmod{n}$.

Niechaj $f(x)$. $F(x)$ będą wielomiany. Dawszy sobie moduł n, możemy postawić następujące zagadnienie:

Jakie są wartości wymierne całkowite liczby x, które, podstawione zamiast x, czynią zadość kongruencyi:

$$f(x) \equiv F(x) \pmod{n}?$$

Przeniósłszy na stronę pierwszą wszystkie wyrazy ze strony drugiej i wyrażając tymże znakiem f nową funkcyę, jaką otrzymamy na stronie pierwszej, możemy poprzednią kongruencyę napisać w postaci:

$$f(x) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Powstaje wtedy pytanie o rozwiązaniu kongruencyi, analogiczne do pytania o rozwiązywaniu równań. Stosownie do stopnia funkcyi f, mamy kongruencye stopnia 1-go, 2-go i t. d.

Jeżeli $x = a$ czyni zadość kongruencyi $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$, to każda liczba, przystająca do liczby a według mod n, również czyni zadość kongruencyi.

Z tego twierdzenia wynika, że kongruencya, jeżeli ma jedno rozwiązanie, to ma ich nieskończenie wiele; wszakże rozwiązań przystających do siebie nie będziemy uważali za różne i dla tego możemy powiedzieć, że kongruencya może mieć najwyżej tyle różnych rozwiązań, ile jest klas liczb według n.

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to liczbę rozwiązań różnych kongruencyi $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$ określa stopień wielomianu $f(x)$, jeżeli jest niższy od n.

Jeżeli moduł n jest liczbą pierwszą p, to rozwiązanie kongruencyi $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ można sprowadzić do rozwiązania kongruencyi $R(x) \equiv 0 \pmod{p}$, gdzie $R(x)$ jest wielomianem stopnia $p-1$, a mianowicie resztą z podzielenia funkcyi $f(x)$ przez $x^p - x$.

---

§ 4.

Kongruencye stopnia 1-go.

K o n g r u e n c y a $ax-b\equiv 0 \pmod{n}$ ma z a w s z e r o z w i ą z a n i e, j e ż e l i a i n s ą l i c z b y w z g l ę d n i e p i e r w s z e.

Jeżeli n jest liczbą pierwszą p, to rozwiązaniem kongruencyi $ax-b\equiv 0 \pmod{p}$ jest $x\equiv ba^{p-2} \pmod{p}$.

Jeżeli n jest liczbą złożoną, to rozwiązaniem kongruencyi $ax-b\equiv 0 \pmod{n}$ jest $x\equiv ba^{\varphi(n)-1} \pmod{n}$, gdzie $\varphi(n)$ ma znaczenie wyżej podane (str. 469).

K o n g r u e n c y a $ax-b\equiv 0 \pmod{n}$ n i e m a r o z w i ą z a n i a, j e ż e l i k t ó r y k o l w i e k c z y n n i k w s p ó l n y l i c z b a i n n i e j e s t d z i e l n i k i e m l i c z b y b. J e ż e l i n a j w i ę k s z y m w s p ó l n y m d z i e l n i k i e m l i c z b a i n j e s t d, i l i c z b a d j e s t z a r a z e m d z i e l n i k i e m l i c z b y b, t o k o n g r u e n c y a b ę d z i e m i a ł a d r o z w i ą z a ń:

$$x\equiv d,\quad x\equiv \alpha+\frac{n}{d},\quad x\equiv\alpha+\frac{2n}{d},\quad \ldots x\equiv\alpha+\frac{(d-1)n}{d} \pmod{n},$$

g d z i e α j e s t p i e r w i a s t k i e m k o n g r u e n c y i

$$\frac{a}{d}x-\frac{b}{d}\equiv 0\left(\operatorname{mod}\frac{n}{d}\right).$$

§ 5.

Kongruencye stopnia 2-go. Reszty kwadratowe.

Jeżeli w kongruencyi stopnia 2-go:

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{n},$$

a jest podzielne przez n, to kongruencya sprowadza się do kongruencyi stopnia 1-go, którą otrzymujemy, odejmując od strony pierwszej wyraz ax^2.

W przypadku $n=2$, kongruencya daje się również sprowadzić do kongruencyi stopnia 1-go, której strona pierwsza jest resztą z podzielenia $ax^2 + bx + c$ przez $x^2 - x$ (patrz § 3).

Rozwiązanie kongruencyi:

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p},$$

gdzie p jest liczbą pierwszą, nie dzielącą liczby a i różną od 2, sprowadza się do rozwiązania kongruencyi

$$z^2 \equiv (b^2 - 4ac) \pmod{p}.$$

gdzie pomiędzy z i x zachodzi związek $2ax + b = z$. Kładąc $b^2 - 4ac = q$, mamy:

Jeżeli $q \equiv 0 \pmod{p}$, to powyższa kongruencya ma jedyne rozwiązanie $z \equiv 0 \pmod{p}$: jeżeli $q \not\equiv 0 \pmod{p}$ (znak $\not\equiv$ oznacza: „jest nieprzystające“), to kongruencya $z^2 \equiv q \pmod{p}$, albo wcale nie ma nierozwiązania, albo ma ich dwa, stosownie do tego, czy $q^{\frac{p-1}{2}}$ przystaje do -1 lub do $+1$, według modułu p. W przypadku, gdy $z^2 \equiv q \pmod{p}$, kongruencya ma dwa rozwiązania, t. j. gdy $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \pmod{p}$, liczba q nazywa się **resztą kwadratową liczby p**.

Jeżeli p jest liczbą pierwszą nieparzystą, to liczba reszt oraz liczba niereszt wynosi $\frac{1}{2}(p-1)$.

Iloczyn dwu reszt jest resztą, iloczyn reszty przez resztę jest niereszta; dwu niereszt jest resztą.

Liczba 1 jest zawsze resztą liczby p, liczba zaś -1 jest resztą lub nieresztą, stosownie do tego, czy liczba $\frac{p-1}{2}$ jest parzysta lub nieparzysta.

Liczba 2 jest resztą kwadratową wszystkich liczb pierwszych postaci $8n+1$, $8n+7$; jest nieresztą wszystkich liczb pierwszych postaci $8n+3$, $8n+5$ (Lagrange).

Dwie liczby, przystające do siebie według modułu p, są równocześnie obie resztami lub obie nieresztami.

Wszystkie twierdzenia o resztach względem modułu pierwszego można wyrazić sposobem łatwym za pomocą tak zwanego symbolu Legendre'a.

Niechaj $\left(\frac{q}{p}\right)$ oznacza $+1$ lub -1, stosownie do tego, czy q jest lub nie jest resztą kwadratową liczby p. Poprzednie twierdzenia dają się wtedy wyrazić sposobem następującym:

Jeżeli:

$$Q = q_1 q_2 \ldots\ldots, \text{ to: } \left(\frac{Q}{p}\right) = \left(\frac{q_1}{p}\right)\left(\frac{q_2}{p}\right) \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{1}{p}\right) = +1; \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}; \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Jeżeli (jak w § 1) E oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x, to:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{E\left(\frac{2q}{p}\right) + E\left(\frac{4q}{p}\right) + \ldots\ldots + E\left(\frac{(p-1)q}{p}\right)}$$

Jeżeli q jest nieparzyste i mniejsze od p, to:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2} - E\left(\frac{p}{q}\right) - L\left(\frac{2p}{q}\right) - \cdots - L\left(\frac{\frac{1}{2}(a-p1)p}{q}\right)}.$$

Najważniejsze twierdzenie z teoryi reszt kwadratowych znane jest pod nazwą prawa wzajemności dwu liczb pierwszych.

Jeżeli p i q są dwie liczby pierwsze, to:

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Twierdzenie to znał już Euler (Opuscula anat I, 1772, patrz Kummer, Berl. Akad. 1859, Kronecker, (Berl. Monatsber. 1875); dowiódł go po raz pierwszy Legendre (Acad. des sciences 1785); potem Gauss (Disquis. arithm) dał wiele dowodów, z których niektóre opierają się na równaniu podziału koła. Inne dowodzenia podali: Eisenstein (Crelle, XXVII), Lebesgue (Liouville XII), Kummer (Abh. der Berl Ak 1861). Zeller (Berl. Monatsber. 1872) i t. d.

W poprzednich twierdzeniach była mowa o resztach kwadratowych względem modułu pierwszego nieparzystego. Dla modułu niepierwszego określenie reszty kwadratowej pozostaje bez zmiany. Nadto:

Liczba q jest resztą lub nieresztą kwadratową potęgi p^ω liczby pierwszej nieparzystej p, stosownie do tego, czy jest resztą lub nieresztą tej ostatniej.

Liczba q jest resztą kwadratową potęgi 2^ω, gdy $\omega=1$, albo gdy $\omega=2$, $q=1 \pmod 4$, albo wreszcie gdy $\omega \geqslant 3$, $q \equiv 1 \pmod 8$. Aby liczba q była resztą kwadratową liczby złożonej $P = p_1 p_2 \ldots$, gdzie $p_1, p_2, \ldots$ są liczbami pierwszemi, jest koniecznem i dostatecznem, aby była resztą względem każdego z czynników pierwszych $p_1, p_2, \ldots$

Twierdzenia te można też wypowiedzieć w ten sposób:

Kongruencya $x^2 \equiv q \pmod{p^\omega}$ ma rozwiązanie wtedy, jeżeli ma je kongruencya $x^2 \equiv q \pmod{p}$ i w takim razie ma dwa rozwiązania.

Kongruencya $x^2 \equiv q \pmod{2^\omega}$ jest zawsze możliwa, gdy $\omega = 1$ i wtedy ma jeden pierwiastek; gdy $\omega = 2$, jest tylko możliwa, jeżeli $q \equiv 1 \pmod{4}$ i wtedy ma dwa pierwiastki; gdy wreszcie $\omega \geqslant 3$, jest tylko możliwa, jeżeli $q \equiv 1 \pmod{8}$ i wtedy ma cztery pierwiastki.

Kongruencya $x^2 \equiv q \pmod{p_1 p_2 \ldots}$ jest możliwa wtedy tylko, gdy są możliwemi kongruencye $x^2 \equiv q \pmod{p_1}$, $x^2 \equiv q \pmod{p_2}$.. Jeżeli liczby $p_1, p_2, \ldots$ są wszystkie nieparzyste lub jedna tylko równa 2, a liczba wszystkich wynosi μ, to kongruencya ma 2^μ rozwiązań. Jeżeli dwa z pomiędzy czynników $p_1 . p_2, \ldots$ są równe 2, wtedy być powinno $q \equiv 1 \pmod{4}$ i w tym przypadku mamy $2^{\mu+1}$ rozwiązań. Wreszcie, jeżeli trzy lub więcej z pomiędzy czynników $p_1 . p_2, \ldots$ równają się 2, wtedy być musi $q \equiv 1 \pmod{8}$ i rozwiązań będzie $2^{\mu+2}$.

Symbol Legendre'a rozciągnął Jacobi na przypadek modułu złożonego. Kładziemy jako określenie:

$$\left(\frac{q}{P}\right) = \left(\frac{q}{p_1}\right)\left(\frac{q}{p_2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot ,$$

wtedy $\left(\frac{q}{P}\right)$ ma wartość $+1$ lub -1. Lecz nie można już mówić, że $\left(\frac{q}{P}\right) = +1$ jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by q było resztą kwadratową liczby P, albowiem według wyżej wskazanego twierdzenia trzeba, aby każdy z symbolów $\left(\frac{q}{p_1}\right)$, $\left(\frac{q}{p_2}\right)$, ... był $+1$, a nie wystarcza, aby iloczyn ich był $+1$.

Symbol J a c o b i e'g o $\left(\frac{q}{P}\right)$ ma wszystkie własności symbolu L e g e n d r e'a w przypadku modułu pierwszego nieparzystego. Posługując się wzorem wzajemności, któremu ten symbol także czyni zadość, możemy upraszczać rachunek z symbolem L e g e n d r e'a w przypadku modułu pierwszego.

Dla znalezienia pierwiastków kongruencyi kwadratowej $x^2 \equiv q \pmod p$ trzeba uciec się do teoryi skaźników, którą wyłożymy w § 7.

W jednym tylko przypadku łatwo znaleść rozwiązanie kongruencyi, mianowicie, kiedy p jest liczbą pierwszą postaci $4r+3$. W tym przypadku (jeżeli kongruencya jest rozwiązalna) jedno jej rozwiązanie jest resztą a z podzielenia q^{r+1} przez p, drugiem rozwiązaniem jest $p-a$

---

§ 6

Kongruencye dwumienne. Reszty sześcienne i rzędów wyższych.

K o n g r u e n c y a p o s t a c i:

$$x^m \equiv A \pmod p),$$

w k t ó r e j p j e s t l i c z b ą p i e r w s z ą n i e p a r z y s t ą, j e s t m o ż l i w a t y l k o w t e d y, g d y:

$$A^{\frac{p-1}{\omega}} \equiv 1 \pmod p,$$

g d z i e ω j e s t n a j w i ę k s z y m w s p ó l n y m d z i e l n i k i e m l i c z b m i $p-1$.

W tym przypadku kongruencya ma ω rozwiązań, które są zarazem rozwiązaniami kongruencyi

$$x^\omega \equiv A^\nu \pmod p.$$

gdzie s jest liczbą, czyniącą zadość warunkowi:

$$\frac{m}{\omega} s \equiv 1 \left(\text{mod}\, \frac{p-1}{\omega}\right).$$

Liczba A w tym przypadku nazywa się r e s z t ą r z ę d u m-tego liczby p.

Liczba $+1$ jest zawsze resztą rzędu m każdej liczby p. Liczba -1 jest resztą, gdy dzieląc $p-1$ przez ω (największy wspólny dzielnik liczb m i $p-1$), otrzymujemy liczbę parzystą.

Co do rozwiązania kongruencyj dwumiennych patrz § 7.

Analogicznie do symbolu L e g e n d r e'a $\left(\frac{q}{p}\right)$ dla reszt kwadratowych, wprowadza się symbol $\left[\frac{q}{p}\right]$ dla reszt sześciennych oraz symbol $\left(\left(\frac{q}{p}\right)\right)$ dla reszt dwukwadratowych.

Dla utworzenia teoryi zupełnej tych reszt i ustanowienia twierdzenia analogicznego z twierdzeniem o wzajemności, należy rozszerzyć dziedzinę liczb wymiernych i objąć w niej liczby postaci $a+b\sqrt{-1}$, gdzie a, b są liczbami całkowitemi, oraz liczby $a+b\varepsilon$, gdzie ε jest pierwiastkiem sześciennym z jedności. Patrz niżej §§ 9 i 10.

§ 6.

Kongruencye wykładnicze. Pierwiastki pierwotne i skaźniki.

J e ż e l i k o n g r u e n c y i

$$A^x \equiv q \ (\text{mod}\, p),$$

g d z i e p j e s t l i c z b ą p i e r w s z ą, n i e d z i e l ą c ą a n i A a n i q, c z y n i z a d o ś ć $x=\alpha$, t o c z y n i ć b ę d z i e j e j zadość i każda liczba, przystająca do a według modułu $p-1$.

Liczba rozwiązań (nieprzystających według modułu $p-1$) kongruencyi $A^x \equiv q \pmod{p}$ jest ta sama, jak kongruencyi $A^x \equiv 1 \pmod{p}$.

Najmniejsza a z liczb (prócz zera), czyniących zadość kongruencyi $A^x \equiv 1$ mod. p (która ma zawsze puzynajmniej jedno rozwiązanie), jest dzielnikiem liczby $p-1$ (włączając i $p-1$); inne rozwiązania są wielokrotnościami liczby a.

Na podstawie twierdzenia Fermata wiadomo, że $p-1$ czyni zawsze zadość kongruencyi $A^x \equiv 1 \pmod{p}$: otóż, jeżeli $p-1$ jest najmniejszą z pomiędzy liczb, czyniących zadość tej kongruencyi, A nazywa się wtedy pierwiastkiem pierwotnym liczby p.

Istnieje $\varphi(p-1)$ pierwiastków pierwotnych liczby p, zawartych pomiędzy 0 i $p-1$.

Jeżeli A jest pierwiastkiem pierwotnym liczby p, kongruencya $A^x \equiv q \pmod{p}$ ma jedno rozwiązanie. To rozwiązanie jedyne, zawarte pomiędzy 0 i $p-1$, nazywa się skaźnikiem (indeksem) liczby q i oznacza się w ten sposób: $x = \operatorname{ind} q$.

Teorya skaźników ma analogię z teoryą logarytmów: liczba A nazywa się podstawą układu skaźników; twierdzenia o skaźnikach są podobne do twierdzeń o logarytmach.

Dwie liczby przystające mają skaźniki równe.

Skaźnikiem jedności jest zero.

Skaźnik iloczynu przystaje (mod. $p-1$) do sumy skaźników.

Skaźnik potęgi przystaje (mod. $p-1$) do iloczynu wykładnika przez skaźnik podstawy potęgi.

Za pomocą tych twierdzeń można rozwiązywać kongruensye dwumienne (patrz § 4 i 5):

$$x^m \equiv q \pmod{p},$$

albowiem z kongruencyi takiej wypływa następująca:

$$m \,.\, \mathrm{ind}.\, x \equiv \mathrm{ind}\,.\, q \pmod{p-1}.$$

W tablicach skaźników szukamy ind. q, a dla możliwości tej kongruencyi potrzeba, by największy wspólny dzielnik ω liczb m i $p-1$ był dzielnikiem skaźnika liczby q. W tym przypadku kongruencya ma ω rozwiązań, które znajdujemy przy pomocy metody, podanej w § 3.

Twierdzenia, odnoszące się do pierwiastków pierwotnych, są następujące:

Pierwiastkiem pierwotnym liczby pierwszej postaci $2^{2n}+1$ jest 3.

Jeżeli $4n+1$ jest liczbą pierwszą, to 2 jest pierwiastkiem pierwotnym liczby $2(4n+1)+1$, gdy ta jest pierwszą, a jeżeli $4n+3$ jest liczbą pierwszą, to $2(4n+3)-1$ jest pierwiastkiem pierwotnym liczby $2(4n+3)+1$.

Liczba pierwsza postaci $4n+1$ ma pierwiastek pierwotny 2, jeżeli n jest liczbą pierwszą >2.

Liczba pierwsza postaci $4.2^m.n+1$ ma za pierwiastek pierwotny liczbę 3, jeżeli n jest liczbą pierwszą większą od $\frac{9^{2m}}{4.2^m}$ i gdy $m>0$.

Pierwiastki pierwotne i skaźniki obliczył Jacobi w pracy „Canon arithmeticus“ (Berlin 1839), której nie włączono do wydania dzieł zupełnych. Tablice tych pierwiastków obliczyli również: Crelle (Crelle IX), Kulik (Crelle XLV), a tablice obszerne aż do modułu 353 znajdują się we włoskim przekładzie „Teoryi liczb“. Czebyszewa Houel obliczył tablice (aż do mod 199) według wskazówek Lebesgue'a (Tables arithmétiques, Paryż 1866; patrz także Journ. de Liouv. XIX, 1854). W tablicach tych za podstawę bierze się najmniejszy co do wartości bezwzględnej z pierwiastków pierwotnych względem danego modułu.

§ 8

Formy kwadratowe. Przedstawialność liczb przez formy.

Formą kwadratową liczbową nazywa się wyrażenie typu

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

gdzie a, b, c są liczbami danemi wymiernemi całkowitemi: x, y liczbami całkowitemi nieoznaczonemi lub niewiadomemi. Formę taką oznaczamy za pomocą symbolu (a, b, c). Wyłączamy przypadek, w którym wyróżnik lub wyznacznik formy, t. j. $D = b^2 - ac$, jest kwadratem zupełnym, albowiem wtedy forma rozpada się na dwa czynniki liniowe o spółczynnikach wymiernych.

Jeżeli położymy:

$$x = \alpha x' + \beta y'; \qquad y = \gamma x' + \delta y',$$

to forma dana przekształci się na inną, której spółczynnikami będą:

$$a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2,$$

$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta,$$

$$c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2.$$

Podstawienie powyższe oznaczamy, jak zwykle, symbolem $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$. Jeżeli D' jest wyznacznikiem formy przekształconej, będzie:

$$D' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D.$$

Stosownie do tego, czy wyznacznik $\alpha\delta - \beta\gamma$ (wyznacznik podstawienia liniowego) jest dodatni lub ujemny, podstawienie nazywa się właściwem lub niewłaściwem. Dwa podstawienia są *podobne*, *gdy* oba są albo właściwe, albo oba niewłaściwe

Mówimy, że forma (a', b', c') jest *zawarta* w formie (a, b, c), gdyż każda liczba przedstawialna przez drugą formę może być przedstawiona i przez pierwszą.

Mówimy. że forma (a', b', c') jest zawarta w formie (a, b, c) *właściwie* lub *niewłaściwie*, stosownie do tego, czy podstawienie $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ jest właściwe lub niewłaściwe.

Dwie formy, zawarte wzajemnie jedna w drugiej, nazywają się *równoważnemi*.

Dwie formy są równoważnemi, jeżeli mają wyznaczniki równe i gdy jedna z nich jest zawarta w drugiej.

Dwie formy nazywają się *równoważnemi właściwie* lub *niewłaściwie*, stosownie do tego, czy wyznacznik przekształcenia, przy pomocy którego przechodzimy od jednej do drugiej, jest $+1$ lub -1. Dwie formy mogą być równoważnemi jednocześnie jednym i drugim sposobem.

W zagadnieniu o przedstawianiu liczby m za pomocą formy kwadratowej (a, b, c) możemy ograniczyć się na przedstawieniach tak zwanych właściwych, t. j. takich, w których x i y są liczbami względnie pierwszemi, albowiem z tych przedstawień właściwych łatwo otrzymać można niewłaściwe.

Aby liczba m dała się przedstawić właściwie przez formę (a, b, c) jest koniecznem, by $D = b^2 - ac$ było resztą kwadratową liczby m.

Teorya przedstawialności liczb za pomocą form kwadratowych (odpowiadająca znowu teoryi równań nieoznaczonych stopnia 2-go o dwu niewiadomych) daje się sprowadzić do teoryi równoważności samych form (Porówn. *Dirichlet* — *Dedekind* § 60).

Dwa zagadnienia zasadnicze teoryi równoważności są następujące :

I. *Znaleść kryteryum, przy pomocy którego można rozstrzygnąć, czy dane dwie formy są równoważne lub nie.*

II. Znaleść wszystkie podstawienia, za pomocą których dana forma przekształca się na inną jej równoważną.

To drugie zagadnienie, gdy znanem już jest jedno z tych podstawień, sprowadza się do następującego:

II bis. Znaleść wszystkie podstawienia, za pomocą których dana forma przekształca się na samą siebie.

To znów zagadnienie przekształca się na inne (patrz niżej II-ter), za pomocą twierdzeń następujących:

Jeżeli $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ jest podstawieniem, za pomocą którego forma (a, b, c) o wyznaczniku D, w której niechaj σ będzie największym wspólnym dzielnikiem spółczynników a, $2b$, c, przekształca się na siebie samą, to będzie zawsze:

$$\alpha = \frac{t-bu}{\sigma}, \quad \beta = -\frac{cu}{\sigma},$$

$$\gamma = \frac{au}{\sigma}, \quad \delta = \frac{t+bu}{\sigma};$$

t, u są liczby całkowite, czyniące zadość równaniu nieoznaczonemu, zwanemu równaniem Pella:

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2,$$

gdzie

$$D \equiv 0 \pmod{\sigma^2} \quad \text{lub} \quad 4D \equiv \sigma^2 \pmod{4\sigma^2}.$$

Odwrotnie, jeżeli t, u są dwie liczby całkowite, sprawdzające poprzednie równanie, to liczby α, β, γ, δ, wyrażone podanemi wyżej wzorami, są spółczynnikami podstawienia, które przekształca formę (a, b, c) na siebie samą.

Stąd wypływa zagadnienie:

II-ter. Znaleść wszystkie rozwiązania całkowite równania nieoznaczonego:

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2,$$

gdzie

$$D \equiv 0 \pmod{\sigma^2} \quad \text{lub} \quad 4D \equiv \sigma^2 \pmod{4\sigma^2}.$$

Dla rozwiązania zagadnienia I wprowadzamy pojęcie formy zredukowanej. Określenie tej formy jest inne w przypadku D ujemnego, niż w przypadku D dodatniego.

Jeżeli D jest ujemne, to formą zredukowaną nazywamy formę o spółczynnikach skrajnych a, c dodatnich i sprawdzających nierówności:

$$c > a > 2\,|b|.$$

gdzie $|b|$ oznacza wartość bezwzględną ilości b. Mamy wtedy: Każda forma o wyznaczniku ujemnym jest równoważna formie zredukowanej.

Jedynemi typami dwu form zredukowanych równoważnych o wyznaczniku ujemnym i nietożsamościowych są:

$$(a, \tfrac{1}{2}a, c) \quad \text{i} \quad (a, -\tfrac{1}{2}a, c).$$

$$(a, b, a) \quad \text{i} \quad (a, -b, a).$$

Podstawienia, za pomocą których przechodzimy od jednej do drugiej, są odpowiednio:

$$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Dane formy o wyznacznikach ujemnych przekształcają się najprzód na odpowiednie formy zredukowane (patrz co do tego w § 64 dzieła Dirichleta-Dedekinda), a następnie bada się, czy formy zredukowane podchodzą pod jeden z tych przypadków.

Jeżeli D jest dodatnie, to formę nazywamy zredukowaną, jeżeli pierwiastki jej są znaku przeciwnego i takie, że co do wartości bezwzględnej jest:

$$\left|\frac{-b-\sqrt{D}}{c}\right| > 1; \qquad \left|\frac{-b+\sqrt{D}}{c}\right| < 1.$$

gdzie przez $\sqrt{D}$ rozumie się zawsze wartość dodatnią pierwiastnika. Mamy wtedy:

Dla każdego wyznacznika dodatniego istnieje zawsze skończona liczba form zredukowanych.

Każda forma o wyznaczniku dodatnim jest zawsze równoważna formie zredukowanej.

Forma (a, b, c) nazywa się sąsiednią po stronie prawej względem formy (a', b', c'), jeżeli obie formy mają ten sam wyznacznik, jeżeli nadto $c'=a$, suma zaś $b+b'$ jest przez a podzielna. Forma druga nazywa się wtedy sąsiednią po lewej względem formy pierwszej.

Każda forma zredukowana o wyznaczniku dodatnim ma jednę tylko sąsiednią po prawej, która jest zredukowana, i podobnie jednę tylko sąsiednią zredukowaną po lewej.

Mając formę zredukowaną o danym wyznaczniku budujemy jej zredukowane sąsiednie po prawej i po lewej; następnie z każdą z form zredukowanych postępujemy tak samo. Otrzymujemy tym sposobem szereg nieograniczony form zredukowanych; ponieważ wszakże liczba ich jest skończona, więc po pewnej liczbie działań musimy powrócić do zredukowanej pierwotnej.

Ogół wszystkich form zredukowanych w ten sposób otrzymanych tworzy to, co Gauss nazywa peryodem.

Jeżeli istnieją inne formy zredukowane o tym samym wyznaczniku i nie zawarte w tym peryodzie, to można wyjść jednej z nich i utworzyć peryod drugi i tak dalej.

Po takiem ustaleniu pojęć, można dowieść następującego twierdzenia zasadniczego Gaussa.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby dwie formy zredukowane o tym samym wyznaczniku dodatnim były równoważne, jest, by należały do jednego i tego samego peryodu.

Twierdzenie to daje rozwiązanie zagadnienia I dla wyznacznika dodatniego.

Ważnem jest następujące rozważanie związku pomiędzy peryodami form zredukowanych a ułamkami ciągłemi.

Jeżeli daną jest forma zredukowana o wyznaczniku dodatnim D, której pierwszy spółczynnik jest dodatni, to jej **pierwszy pierwiastek** (t. j. pierwiastek, w którym pierwiastnikowi $\sqrt{D}$ dajemy znak ujemny) będzie dodatni. Jeżeli więc rozwiniemy na ułamek ciągły pierwszy pierwiastek ω, otrzymamy ułamek ciągły peryodyczny, którego peryod ma tyle wyrazów, ile ma wyrazów szereg form zredukowanych sąsiednich.

Za pomocą wyrazów tego ułamka ciągłego możemy utworzyć cztery liczby α, β, γ, δ podstawienia, które formę o wyznaczniku dodatnim D przekształca na samą siebie. Odbywa się to w sposób następujący: Niechaj będzie

$$\omega = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ldots\ldots}},$$

co napiszemy w skróceniu tak:

$$\omega = (k_0 . k_1, k_2, \ldots, .).$$

Ilorazy niezupełne k powtarzają się w peryodzie, złożonym z parzystej liczby $2i$ elementów, tak że:

$$k_r = k_s, \text{ jeżeli } r \equiv s \pmod{2i}.$$

Wprowadźmy parametr $h = 1, 2, \ldots$, i połóżmy:

$$\frac{\gamma}{\alpha} = [k_0, k_1, \ldots, k_{2hi-2}], \quad \frac{\delta}{\beta} = [k_0 . k_1 . \ldots, k_{2hi-2}, k_{2hi-1}].$$

a następnie weźmy za α, β, γ. δ odpowiednio liczniki i mianowniki tych ułamków ciągłych skończonych.

Liczby α. β, γ, δ, w ten sposób obliczone, są wszystkie dodatnie i stanowią spółczynniki podstawienia, które przekształca formę o pierwiastku ω na samą siebie. Wszystkie takie podstawienia otrzymujemy, kładąc za h kolejno 1, 2, 3 . . . .

Mając cztery spółczynniki α, β, γ, δ, znajdujemy przy pomocy wzorów:

$$\alpha = \frac{t-bu}{\sigma}, \quad \beta = -\frac{cu}{\sigma}, \quad \gamma = \frac{au}{\sigma}, \quad \delta = \frac{t+bu}{\sigma}$$

wartości dodatnie ilości t, u, czyniących zadość równaniu Pella. Nieskończenie wiele rozwiązań tego równania (gdy $D > 1$) otrzymujemy, nadając liczbie h wszystkie możliwe wartości całkowite dodatnie. Nadawszy liczbie h wartość 1, otrzymujemy rozwiązanie **najmniejsze**, t. j. to, dla którego t i u mają wartości najmniejsze.

Oto, w jaki sposób należy postępować celem znalezienia rozwiązań równania Pella

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2, \quad \text{gdy} \quad D > 0.$$

Wyznaczamy formę zredukowaną o wyznaczniku D i o dzielniku σ, której pierwszy spółczynnik jest dodatni. rozwijamy pierwiastek dodatni tego równania na ułamek ciągły, znajdujemy ilorazy niezupełne $k_0, k_1, \ldots$, następnie stosujemy wzory powyższe.

Zwracamy uwagę na to, że w powyższych rozwiązaniach zakładamy, iż D nie jest kwadratem zupełnym.

Za pomocą metody powyższej można znaleść wszystkie rozwiązania równania Pella; lecz istnieją też wzory, za pomocą których można rozwiązania te wyrazić przez rozwiązanie najmniejsze. Wzory te są:

$$t_n = \frac{1}{\sigma^n} \left\{ T^{(n)} + (n)_2\, T^{n-2}\, U^2 D + (n)_4\, T^{n-4}\, U^4 D^2 + \ldots\ldots \right\},$$

$$u_n = \frac{1}{\sigma^n} \left\{ (n)_1\, T^{n-1}\, U + (n)_3\, T^{n-3}\, U^3 D + \ldots\ldots \right\},$$

gdzie T, U należą do rozwiązania najmniejszego, zaś n przyjmuje wartości 1, 2, 3, . . .

Dla uzupełnienia teoryi równania Pella rozpatrzmy jeszcze przypadek, w którym D jest ujemne.

W tym przypadku równanie Pella ma skończoną liczbę rozwiązań.

Jeżeli $D \equiv 0 \pmod{\sigma^2}$, mamy dwa rozwiązania, gdy wartość bezwzględna wyznacznika D jest większa od σ^2; cztery rozwiązania, gdy $-D=\sigma^2$; są niemi:

$$t = \pm\sigma, \qquad u = 0$$

i odpowiednio:

$$t = \pm\sigma, \quad u = 0; \qquad t = 0, \quad u = \pm 1.$$

Jeżeli $4D \equiv \sigma^2 \pmod{4\sigma^2}$, mamy dwa rozwiązania:

$$t = \pm\sigma, \quad u = 0, \quad \text{gdy} \quad -4D > 3\sigma^2;$$

sześć rozwiązań:

$$t = \pm\sigma, \quad u = 0; \qquad t = \pm\tfrac{1}{2}\sigma, \quad u = \pm 1; \qquad t = \pm\tfrac{1}{2}\sigma, \quad u = \mp 1,$$
$$\text{gdy} \quad -4D = 3\sigma^2.$$

Równanie, zwane równaniem Pella, było zaproponowane przez Fermata i rozwiązane przez Pella. Potem zajmowali się niem: Euler, Lagrange (Oeuvres I, II) i Dirichlet (Berl. Monatsber. 1841, 42, 46; Comp. Rend 1840).

Powyższy zarys teoryi form kwadratowych ułożony został według dzieła Dirichleta-Dedekinda, w którem przedstawiono teoryę, po raz pierwszy podaną przez Gaussa w „Disquis. arithm.“

Dodamy jeszcze niektóre twierdzenia, odnoszące się do teoryi form kwadratowych.

Każda liczba pierwsza dodatnia postaci $4n+1$ może być zawsze i jednym tylko sposobem rozłożona na sumę kwadratów (Twierdzenie

Fermata, dowiedzione po raz pierwszy przez Eulera. Novi Comm. Petrop. V, patrz też Smith, Crelle L). Wyznaczenie podstaw tych kwadratów zawdzięczamy Gaussowi (Theoria resid. biquadr. Werke II). Jeżeli wyznaczymy liczby a i b najmniejsze pod względem wartości liczebnej i czyniące zadość kongruencyom:

$$a \equiv (-1)^{\frac{p+3}{4}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}{\left(\frac{p-1}{4}\right)!^{2}} \pmod{p},$$

$$\pm 2b\left[\left(\frac{p-1}{4}\right)!\right]^{2} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}.$$

to będzie: $p = a^2 + b^2$.

Każda liczba pierwsza p postaci $3n+1$ może być zawsze i to jednym tylko sposobem rozłożona na kwadrat i kwadrat potrójny.

Każda liczba pierwsza jednej z dwu postaci $20n+1$, $20n+9$ daje się zawsze i to jednym tylko sposobem rozłożyć na sumę kwadratu i pięciokrotnego kwadratu: każda zaś liczba pierwsza jednej z dwu postaci $20n+3$, $20n+7$ daje się zawsze czterema sposobami przedstawić jako forma (2.1.3).

Każda liczba pierwsza postaci $6n+1$ daje się zawsze przedstawić jako forma $x^2 - xy + y^2$.

Poczwórność liczby pierwszej postaci $6n+1$ daje się przedstawić w postaci sumy kwadratu i potrójnego kwadratu typu t. j. $4p = A^2 + 3B^2$, liczba A jest resztą sześcienną liczby p Liczby A i B określają jako najmniejsze co do wartości bezwzględnej z pomiędzy czyniących zadość kongruencyom:

$$A\left[\left(\frac{p-1}{3}\right)!\right]^{3} \equiv 1; \quad A + B\left(g^{\frac{p-1}{3}} - g^{2\frac{p-1}{3}}\right) \equiv 0 \pmod{p}.$$

gdzie g jest pierwiastkiem pierwotnym liczby p.

Twierdzenie to znajdujemy najprzód u Jacobi'ego (Crelle II, De residuis cubicis etc), następnie u Cauchy'ego (Mém. sur la théorie des nombres), Lebesgue'a (Liouville II), Sterna (Crelle VII, IX), Clausena (tamże VIII).

Każda liczba pierwsza jednej z dwu postaci $8n+1$, $8n+3$ daje się zawsze i to jednym tylko sposobem rozłożyć na kwadrat i podwójny kwadrat (Jacobi, Crelle XXX; Stern, tamże XXXII).

---

§ 9.

Liczby zespolone całkowite Gaussa. Reszty dwukwadratowe.

Liczba postaci $\alpha = a+bi$, gdzie $i=\sqrt{-1}$, a, b zaś są liczbami wymiernemi całkowitemi nazywa się liczbą całkowitą zespoloną Gaussa (porówn. Rozdział I, § 2), liczba zaś $+\sqrt{a^2+b^2}$ — jej modułem lub normą.

Jeżeli liczby a i b są obie parzyste, liczba zespolona nazywa się zespoloną parzystą; jeżeli jedna z nich jest parzystą, mamy liczbę zespoloną nieparzystą; jeżeli obie nieparzyste—liczbą zespoloną półparzystą.

Mówimy, że liczba całkowita α jest podzielna przez liczbę całkowitą β, jeżeli $\alpha=\beta.\gamma$, gdzie γ jest liczbą zespoloną całkowitą.

Jednością nazywa się każda liczba zespolona, której moduł jest jednością. Mamy cztery jedności: $+1$, -1, $+i$, $-i$. Cztery liczby, które otrzymujemy, mnożąc jakąkolwiek liczbę zespoloną przez każdą z tych jedności. nazywają się stowarzyszonemi.

Liczba $a+bi$ nazywa się pierwotną, jeżeli $a-1$ i b, podzielone przez 4, dają równocześnie resztę 0 lub resztę 2.

W każdej grupie czterech liczb stowarzyszonych istnieje zawsze liczba pierwotna.

Liczba $a+bi$ nazywa się pierwszą, jeżeli nie można jej rozłożyć na iloczyn dwu liczb zespolonych całkowitych, obu różnych od jedności.

Prawa zasadnicze (tak zwane euklidesowe) podzielności liczb całkowitych wymiernych utrzymują się bez zmiany i dla liczb zespolonych, pod warunkiem, że liczb stowarzyszonych nie będziemy uważali za zasadniczo różne.

Każda liczba zespolona całkowita daje się zawsze—i to jednym tylko sposobem—wyrazić jako iloczyn skończonej liczby liczb pierwszych.

Jeżeli liczba α jest podzielna przez liczbę β, to norma liczby α jest podzielna przez normę liczby β.

Norma liczby jest podzielna przez samą liczbę.

Najmniejsza ze wszystkich liczb wymiernych, podzielnych przez liczbę pierwszą zespoloną, jest liczbą wymierną pierwszą; każda liczba pierwsza zespolona jest przeto dzielnikiem liczby pierwszej wymiernej i to jednej tylko.

Norma liczby pierwszej zespolonej jest równa albo liczbie pierwszej albo kwadratowi liczby pierwszej. W pierwszym przypadku mamy liczbę zespoloną pierwszą stopnia 1-go, w drugim takąż liczbę stopnia 2-go. W obu przypadkach norma jest zawsze postaci $4n+1$.

Liczba 2 jest stowarzyszona z kwadratem liczby pierwszej stopnia 1-go $1-i$.

Każda liczba pierwsza wymierna postaci $4n+3$ jest liczbą pierwszą zespoloną stopnia 2-go.

Każda liczba pierwsza dodatnia wymierna postaci $4n+1$ jest iloczynem dwu liczb pierwszych zespolonych stopnia 1-go, niestowarzyszonych.

Powiadamy, że dwie liczby całkowite zespolone α, β są przystającemi według pewnego modułu zespolonego ω, jeżeli $\alpha-\beta$ jest podzielne przez ω.

Łatwo rozciągnąć na liczby tu badane wszystkie twierdzenia (V, § 3 i 4) o kongruencyach z liczbami wymiernemi. Tak np. kongruencya:

$$x^m + a_1 x^{n+1} + \ldots\ldots + a_n = 0 \pmod{m},$$

której spółczynniki są liczbami zespolonemi całkowitemi, m—również liczbą zespoloną całkowitą, nie może mieć więcej niż n pierwiastków nieprzystających.

Każda liczba $a+bi$ jest przystająca według mod m do jednej tylko liczby $x+yi$, gdzie x, y wybrano z dwóch szeregów:

$$0, 1, 2 \ldots \left(\frac{|m|}{d} - 1\right);\quad 0, 1, 2, \ldots (d-1);$$

tu $|m|$ oznacza normę liczby m, d zaś największy wspólny dzielnik dwu spółrzędnych liczby m

Kombinując wszystkie wartości x z wartościami y, otrzymamy razem $|m|$ liczb zespolonych, z których każde dwie są nieprzystającemi; tworzą one układ zupełny reszt według modułu m.

Jeżeli m jest liczbą zespoloną pierwszą nieparzystą, μ—jej normą, n—liczbą przez nią niepodzielną, to

$$n^{\mu-1} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Jest to uogólnione twierdzenie Fermata.

Jest też $n^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv i^\varrho$ mod m), gdzie $\varrho = 0, 1, 2, 3$.

Reszty dwukwadratowe. Liczba n nazywa się resztą dwukwadratową liczby zespolonej m, jeżeli jest możliwa kongruencya:

$$x^4 \equiv n \pmod{m}.$$

Liczba zespolona n jest resztą dwukwadratową liczby m (pierwszej zespolonej nieparzystej), jeżeli:

$$n^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1 \pmod{m},$$

gdzie μ jest normą liczby m.

Dla przedstawienia charakteru dwukwadratowego liczby n względem liczby m stosujemy symbol Jacobiego $\left(\left(\frac{n}{m}\right)\right)$, który oznacza liczbę i^{ϱ}; jeżeli to wyrażenie jest równe $+1$, n jest resztą kwadratową liczby m.

Dwie liczby, przystające według mod. m, mają ten sam charakter dwukwadratowy.

Charakter dwukwadratowy iloczynu dwóch liczb równa się iloczynowi charakterów dwukwadratowych ich czynników.

Jest:
$$\left(\left(\frac{i}{m}\right)\right) = i^{\frac{\mu-1}{4}}.$$

Jeżeli $m = a + bi$ jest liczbą zespoloną pierwotną i pierwszą, to:

$$\left(\left(\frac{1+i}{m}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-b-b^2-1)}.$$

Jeżeli m, n są dwie liczby zespolone pierwsze (bez dzielników wspólnych prócz jedności), m zaś nieparzyste, to jest zawsze $\left(\left(\frac{n}{m}\right)\right) = +1$.

Twierdzenie o wzajemności dla reszt dwukwadratowych jest następujące.

Charaktery dwukwadratowe dwu liczb zespolonych pierwotnych i pierwszych są równe, jeżeli przynajmniej jedna z liczb $\equiv 1 (\text{mod.} 4)$; są równe i znaku przeciwnego, jeżeli obie liczby są $\equiv 3+2i (\text{mod.} 4)$.

Teoryę reszt dwukwadratowych utworzył Gauss (Werke II. Theoria residuorum biquadraticorum); potem zajmowali się nią: Eisenstein (Crelle XXVIII), Lebesgue (Liouville IV) i t. d. Wykład jej prosty znajduje się w dziele Bachmanna („Kreistheilungslehre").

---

§ 6.

Liczby zespolone sześcienne całkowite. Reszty sześcienne.

Nazywamy zespoloną sześcienną liczbę postaci $a+b\varepsilon$, gdzie ε jest pierwiastkiem sześciennym z jedności, t. j. $\varepsilon = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, a i b są liczbami całkowitemi wymiernemi. Liczba $a+b\varepsilon^2$ nazywa się liczbą sprzężoną z poprzednią, a iloczyn obu jest normą.

Nie powtarzamy tu określeń podstawowych, które są podobne do określeń w paragrafach poprzedzających.

Liczba, której norma jest $+1$, jest jednoscią zespoloną. Jest tu sześć jedności zespolonych:

$$+1,\ -1,\ +\varepsilon,\ -\varepsilon,\ 1+\varepsilon=-\varepsilon^2,\ -1-\varepsilon=+\varepsilon^2.$$

Liczba 3 w tej teoryi nie jest liczbą pierwszą lecz iloczynem liczby $1-\varepsilon$ przez $1-\varepsilon^2$.

Stosownie do tego, czy $a+b\varepsilon$ jest lub nie jest podzielne przez 3, liczba $a+b\varepsilon$ ma czynnik $1-\varepsilon$ lub go niema.

Mnożąc liczbę daną przez sześć jedności, otrzymujemy liczby stowarzyszone.

Liczba nazywa się pierwotną, jeżeli spółczynnik przy ε jest $\equiv 0$ (mod. 3), a część pozostała jest $\equiv -1$ (mod 3).

W każdej grupie sześciu liczb stowarzyszonych istnieje zawsze liczba pierwotna.

W obszarze liczb całkowitych sześciennych istnieją trzy gatunki liczb pierwszych:

1. liczba $1-\varepsilon$, która jest dzielnikiem liczby 3.

2. liczby rzeczywiste pierwsze postaci $6n+5$; te liczby są też pierwotnemi.

3. liczby zespolone pierwsze, których norma jest postaci $6n+1$.

Jeżeli m jest liczbą zespoloną pierwszą (różną od $1-\varepsilon$) i nie podzielną przez m, wtedy otrzymujemy uogólnione twierdzenie Fermata:

$$n^{\mu-1} \equiv 1 \pmod{m},$$

gdzie μ jest normą liczby n, lub

$$n^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv \varepsilon^{\varrho} \pmod{m}.$$

gdzie $\varrho = 0, 1, 2$.

Reszty sześcienne. Jeżeli $n^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv 1 \pmod{m}$, to n jest resztą sześcienną liczby m (jeżeli n nie jest podzielne przez m). Charakter sześcienny liczby n względem m wyrażamy symbolem Eisensteina $\left[\frac{n}{m}\right]$.

Charakter sześcienny liczby $1-\varepsilon$ określa wzór:

$$\left[\frac{1-\varepsilon}{a+b\varepsilon}\right] = \varepsilon^{\frac{2}{3}(a+1)}$$

Twierdzenie o wzajemności dla reszt sześciennych jest następujące:

Jeżeli n, m są dwie liczby sześcienne pierwsze pierwotne, to charakter sześcienny liczby n względem m równa się charakterowi liczby m względem n.

Resztami sześciennemi zajmowali się: Jacobi (Crelle, II), Eisenstein (tamże XXVII, XXVIII,), Lebesgue (Liouville, IV) i t. d. Porów. lekcye 14 i 15 w cytowanem dziele Bachmanna.

F e r m a t o w i zawdzięczamy zwrócenie uwagi analistów na ten gatunek problematów liczbowych, które, złączone później w jedno ciało doktryny, utworzyły to, co dziś nazywamy t e o r y ą l i c z b lub a r y t m e t y k ą w y ż s z ą. Pierwsze wielce ważne odkrycia w tej teoryi zawdzięczamy E u l e r o w i, który utworzył też pierwszy teoryę tak zwanych skaźników (Comm. Petr. 1773) i reszt kwadratowych. Po E u l e r z e, L a g r a n g e zajmował się wiele teoryą liczb i pierwszy położył podstawy teoryi ogólnej form kwadratowych. Później ukazały się dwa wielce ważne dzieła: „Théorie des nombres“ L e g e n d r e'a (kol. VI), które doczekało się za życia autora trzech wydań, ostatnie było w r. 1830—tu znajdujemy pierwszy dowód twierdzenia o wzajemności reszt kwadratowych—oraz „Disquisitiones arithmeticae“ G a u s s a (Lipsk 1801), któremu zawdzięczamy, między innemi, teoryę zupełną form kwadratowych, jak ją wyżej podaliśmy.

Dzieło L e g e n d r e'a, jest rzec można, repertoryum wszystkich badań, znanych wówczas o tym przedmiocie. G a u s s o w i zawdzięczamy pierwsze studyum systematyczne o liczbach zespolonych i myśl pięknego wyzyskania jej celem uogólnienia, uzupełnienia i udowodnienia różnych twierdzeń z teoryi liczb wymiernych.

Pomijając dla krótkości tytuły prac innych autorów: C a u c h y'e-go, D i r i c h l e t a, K u m m e r a, J a c o b i'ego, E i s e n s t e i n a, K r o n e c k e r a, L i o u v i l l e'a i t. d., którzy zajmowali się teoryą liczb, powiemy tylko, że do najważniejszych traktatów nowoczesnych należą: „Vorlesungen über Zahlentheorie von Lejeune-Dirichlet“, wydane przez D e d e k i n d a (wydanie czwarte, Brunświk 1894), gdzie zebrano i specyalne badania innych autorów; traktat C z e b y s z e w a (przekład niemiecki S c h a p i r y, Lipsk 1889, włoski M a s s e r i n i e'go, Rzym 1895); Theorie des nombres, L u c a s a (Paryż 1891); wyborne dzieło „Zahlentheorie“ B a c h m a n n a (Lipsk 1894). Kurs litografowany K l e i n a: „Ausgewählte Kapitel aus der Zahlentheorie“ 1896) ma głównie na celu badanie teoryi form kwadratowych ze stanowiska geometrycznego.

Historyę teoryi liczb zawiera znana praca S m i t h a: „Report on the theory of numbers“ (Dzieła, Oxford, 1894).

ROZDZIAŁ XXI.

TEORYA LICZB ALGEBRAICZNYCH I LICZB PRZESTĘPNYCH

---

§ 1.

Wiadomości ogólne

Każdy pierwiastek równania algebraicznego o spółczynnikach wymiernych, nazywa się liczbą algebraiczną: liozba ta może być rzeczywistą lub zespoloną.

Jeżeli pierwszy spółczynnik równania jest jednością, a pozostałe liczbami całkowitemi, mamy liczbę algebraiczną całkowitą; w innych przypadkach mamy liczbę algebraiczną niecałkowitą lub ułamkową.

Liczba zespolona $\alpha + \beta i$, gdzie α i β są liczby wymierne, jest przypadkiem szczególnym liczby algebraicznej, obejmującym znów w sobie, jako przypadek szczególny, liczby wymierne.

Mówimy, że ogół liczb tworzy ciało, jeżeli odtwarza się przez cztery działania zasadnicze, które możemy nazwać działaniami wymiernemi.

Ogół wszystkich liczb wymiernych stanowi ciało liczbowe.

Ogół wszystkich liczb algebraicznych stanowi ciało.

Liczby wymierne całkowite odtwarzają się już przy pomocy trzech pierwszych działań wymiernych. Każdy pierwiastek równania, mającego pierwszy spółczynnik równy jedności i za inne spółczynniki liczby całkowite algebraiczne, jest też liczbą całkowitą algebraiczną.

Pomiędzy nieskończenie wielu równaniami o spółczynnikach wymiernych. których pierwiastkiem może być liczba algebraiczna, równanie stopnia najniższego jest nieprzywiedlnem, t. j. pierwsza strona jego nie ma dzielników o spółczynnikach wymiernych.

Niechaj liczba algebraiczna θ będzie pierwiastkiem równania nieprzywiedlnego rzędu n-tego; utwórzmy ogół liczb typu

$$\varphi(\theta) = x_0 + x_1\theta + x_2\theta^2 + \ldots\ldots + x_{n-1}\theta^{n-1},$$

gdzie $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ są jakiemikolwiek liczbami wymiernemi. Liczby tak utworzone stanowią ciało Ω, które nie daje się wytworzyć w ten sam sposób z innego pierwiastka θ' innego równania nieprzywiedlnego stopnia różnego od n.

Takie ciało liczb nazywa się ciałem skończonem stopnia n-tego.

Można wybrać n liczb ciała Ω w ten sposób, by każda inna liczba tegoż ciała dała się przez nie wyrazić liniowo przy pomocy spółczynników wymiernych. Mówimy, że te n liczb tworzy podstawę ciała Ω.

Ciała $\Omega, \Omega', \Omega'', \ldots$, utworzone ze wszystkich pierwiastków $\theta, \theta', \theta'', \ldots$, równania nieprzywiedlnego stopnia n-tego, nazywają się ciałami sprzężonemi.

Jeżeli $\omega = \varphi(\theta)$ jest liczbą ciała Ω, to $\omega' = \varphi(\theta')$ należeć będzie do ciała Ω', i liczby ω i ω' będą sprzężonemi. Jeżeli wszystkie ciała sprzężone z ciałem Ω są identyczne z tem ciałem (jak to np. ma miejsce, gdy θ jest pierwiastkiem równania dwumiennego), wtedy Ω nazywa się ciałem normalnem lub ciałem

Galois'a. Nazwa ta, wprowadzona przez Dedekinda, przypomina teoryę Galois'a rozwiązalności równań algebraicznych przez pierwiastniki (t.j. za pomocą równań dwumiennych).

Jeżeli $\omega = \varphi(\theta)$ jest liczbą ciała Ω, to iloczyn:

$$\omega\omega' \ldots \omega^{(n-1)} = \varphi(\theta)\varphi(\theta') \ldots \varphi(\theta^{(n-1)})$$

gdzie $\theta, \theta', \ldots, \theta^{(n-1)}$ są wszystkiemi pierwiastkami danego równania nieprzywiedlnego, nazywa się **normą** liczby ω i oznacza się przez $N(\omega)$.

Norma liczby ω jest zawsze liczbą wymierną.

Jeżeli ω jest liczbą wymierną ciała Ω. to i jej sprzężone są równe ω i będzie $N(\omega) = \omega^n$.

Jeżeli ω_1, ω_2 są dwie liczby ciała Ω, to

$$N(\omega_1\omega_2) = N(\omega_1)\,N(\omega_2).$$

Wyróżnikiem n liczb ciała Ω nazywa się wyznacznik, utworzony z tych liczb i ze wszystkich jej sprzężonych w każdem z ciał $\Omega', \Omega'', \ldots, \Omega^{(n-1)}$.

Wyróżnik jest liczbą wymierną. Jeżeli mamy n liczb ciała Ω, to one tworzą podstawę tego ciała lub jej nie tworzą, stosownie do tego, czy ich wyróżnik nie jest lub jest zerem.

Każda liczba algebraiczna za pomocą mnożenia przez liczbę wymierną całkowitą, różną od zera, może być zamieniona na liczbę całkowitą algebraiczną.

Można znaleść nieskończenie wielu sposobami **podstawę** ciała Ω, złożoną z samych liczb całkowitych i można jeszcze wybrać rzeczoną podstawę tak, aby wyróżnik liczb w niej zawarty był **minimum**. Taki wyróżnik minimum nazywa się **liczbą zasadniczą** ciała Ω lub wprost **wyróżnikiem ciała Ω**.

Jeżeli $n=2$, t. j. gdy równanie zasadnicze jest stopnia 2-go, mamy **ciało kwadratowe**. Liczby zespolone $a+bi$, gdzie

$i=\sqrt{-1}$, a i b są liczbami wymiernemi, stanowią przypadek szczególny tego ciała. Norma liczby $a+bi$ odpowiada iloczynowi $(a+bi)(a-bi)$, t. j. zwykłej normie lub modułowi liczby zespolonej.

Liczbą zasadniczą ciała kwadratowego, utworzonego z liczb zespolonych wymiernych, jest — 4.

---

§ 2.

Podzielność liczb całkowitych algebraicznych. Liczby idealne Kummera.

Liczba całkowita α nazywa się podzielną przez liczbę całkowitą β, gdy $\alpha=\beta\gamma$, gdzie γ jest liczbą całkowitą.

Jeżeli α, β są liczby całkowite algebraiczne podzielne przez μ, to $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ będą również podzielne przez μ.

Jeżeli α jest podzielne przez λ, λ podzielne przez μ, to α będzie także podzielne przez μ. Jednością nazywa się każda liczba całkowita algebraiczna, będąca dzielnikiem liczby 1, a więc każdej liczby całkowitej algebraicznej. Każdy pierwiastek równania algebraicznego, którego spółczynniki skrajne są równe 1, a pozostałe spółczynniki są liczbami całkowitemi, jest jednością. Jedności jest nieskończenie wiele.

Jedności odtwarzają się za pomocą mnożenia, dzielenia i pierwiastkowania.

Jeżeli dwie liczby są podzielne wzajemnie jedna przez drugą, ich ilorazy są jednościami; dwie liczby nazywają się wtedy stowarzyszonemi.

Dwie liczby, stowarzyszone z trzecią, są stowarzyszonemi względem siebie.

Jeżeli α jest podzielne przez β, każda stowarzyszona z liczbą α jest podzielna przez każdą stowarzyszoną z liczbą β.

Dwie liczby całkowite algebraiczne α, β nazywają się względnie pierwszemi, jeżeli istnieją dwie inne liczby całkowite algebraiczne ξ, η, takie, że:

$$\alpha\xi + \beta\eta = 1.$$

Jeżeli α jest pierwsze względem β, β pierwsze względem γ, to β jest pierwsze względem $\beta\gamma$.

Jeżeli każda z liczb $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ jest pierwsza względem każdej z liczb $\beta_1, \beta_2, \ldots$, to dwa iloczyny $\alpha_1\alpha_2 \ldots$, $\beta_1\beta_2 \ldots$ są względnie pierwsze.

Każdy wspólny dzielnik dwóch liczb względnie pierwszych jest jednością.

Dwie liczby całkowite α, β mają zawsze wspólny dzielnik, który daje się przedstawić w postaci:

$$\delta = \alpha\xi + \beta\eta,$$

gdzie ξ, η są dwie liczby całkowite: nadto δ jest podzielne przez każdy wspólny dzielnik liczb α i β.

Jeżeli dwie liczby nie mają żadnego wspólnego dzielnika, prócz jedności, to będą względnie pierwszemi w znaczeniu powyżej wskazanem.

Norma liczby α, należącej do ciała Ω (patrz § poprzedzający), jest podzielna przez α, a iloraz jest liczbą całkowitą, należącą do ciała Ω.

Jeżeli α i β należą do ciała Ω, zaś α jest podzielne przez β, to $N(\alpha)$ jest podzielne przez $N(\beta)$.

Dwie liczby α, β nazywają się przystającemi (kongruentnemi) według modułu m, jeżeli ich różnica jest podzielna przez μ; są nieprzystającemi (niekongruentnemi) w przypadku przeciwnym.

Liczba liczb ciała Ω, nieprzystających do siebie (po dwie biorąc) według modułu μ, równa się wartości bezwzględnej modułu μ, t. j. $N(\mu)$. Jeżeli μ jest jednością, wtedy wszystkie liczby ciała Ω przystają do zera według mod μ i jest $N(\mu)=\pm 1$.

Liczba algebraiczna μ nazywa się rozkładalną, jeżeli ma dzielniki różne od jedności i od liczb z sobą stowarzyszonych; w przeciwnym razie nazywa się nierozkładalną. Tych dwu definicyj nie należy mieszać z następującemi:

Liczba całkowita μ, różna od zera, nazywa się pierwszą, jeżeli dwie jakiekolwiek liczby ciała Ω niepodzielne przez μ, dają iloczyn również przez μ niepodzielny; gdy ten przypadek nie zachodzi, liczba μ nazywa się złożoną.

Tylko dla specyalnych ciał Ω obie definicye są równoważne, t. j. że każda liczba pierwsza jest także nierozkładalną i odwrotnie. Tak np. ma to miejsce dla ciała liczb wymiernych i dla ciała kwadratowego liczb zespolonych wymiernych.

W ogólności każda liczba rozkładalna jest złożona, lecz nie każda liczba złożona jest koniecznie rozkładalna.

Jeżeli dla ciała Ω oba pojęcia powyższe zlewają się, wtedy każda liczba rozkładalna może być przedstawiona i to jednym tylko sposobem jako iloczyn skończonej liczby czynników nierozkładalnych (w założeniu, że dwie liczby stowarzyszone nie są uważane za różne); w innych przypadkach rozkład liczby rozkładalnej na czynniki można uskutecznić wielu sposobami.

Dla usunięcia tej osobliwości, skutkiem której prawa euklidesowe podzielności mogłyby stracić wszelkie znaczenie dla liczb ciała Ω, Kummer wprowadził pojęcie liczb idealnych, dzięki którym dawne prawa podzielności zostają przywrócone. Wyjaśnimy to nowe pojęcie na przykładzie szczególnym.

Niechaj będzie ciało kwadratowe Ω, któremu daje początek pierwiastek równania $\theta^2+5=0$ (Dedekind w dziele cytowanem). Cztery liczby całkowite

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad \mu = 1 - \theta, \quad \nu = 1 + \theta$$

są nierozkładalne, lecz zachodzi pomiędzy niemi związek $\alpha\beta = \mu\nu$: stąd wynika, że α nie jest liczbą pierwszą, ponieważ iloczyn dwu liczb μ, ν jest podzielny przez α.

Gdyby α, β, μ, ν były wszystkie liczbami wymiernemi, wtedy z poprzedzającego związku wynikałoby:

$$\alpha = \alpha_1\alpha_2, \quad \beta = \beta_1\beta_2, \quad \mu = \alpha_1\beta_2, \quad \nu = \alpha_2\beta_1,$$

gdzie α_1, β_1 są względnie pierwsze, α_2 i β_2 również względnie pierwsze: każda zaś liczba ω podzielna przez α, czyniłaby zadość kongruencyi:

$$\alpha\omega \equiv 0 \pmod{\mu}; \quad \nu\omega \equiv 0 \pmod{\alpha}.$$

W przypadku, gdy powyższego rozkładu nie można istotnie wykonać, przypuśćmy, że został on wykonany idealnie i wprowadźmy liczby idealne α_1, α_2, β_1, β_2, określone w ten sposób, że każda liczba, podzielna przez α_1, czyni zadość jednej z dwu poprzedzających kongruencyj. W naszym przypadku liczby idealne α_1, α_2, β_1, β_2, których nie można faktycznie utworzyć, będą określone w powyższem znaczeniu przez kongruencye:

$$(1 + \theta)\,\omega \equiv 0 \pmod{2}, \quad \dots \quad (\alpha_1),$$

$$(1 - \theta)\,\omega \equiv 0 \pmod{3}, \quad \dots \quad (\alpha_2),$$

$$(1 - \theta)\,\omega \equiv 0 \pmod{2}, \quad \dots \quad (\beta_1),$$

$$(1 - \theta)\,\omega \equiv 0 \pmod{3}, \quad \dots \quad (\beta_2),$$

Wprowadziwszy liczby podobne, znajdziemy, że liczby poprzedzające α, β, μ, ν, występujące jako nierozkładalne, rozkładają się obecnie w ten sposób:

$$\alpha = 2 = \alpha_1^2; \qquad \beta = 3 = \beta_1\beta_2,$$

$$\mu = 1 - \theta = \alpha_1\beta_2; \quad \nu = 1 + \theta = \alpha_1\beta_1,$$

można następnie okazać, że liczby α_1, β_1, β_3 nie są idealnemi pierwszemi.

Wprowadzenie liczb idealnych przywraca zupełnie, jak powiedziano, ciału Ω wszystkie zwykłe prawa podzielności; wprowadzenie to jest przeto dogodnem do utworzenia teoryi podzielności, służącej we wszystkich przypadkach.

Powiemy jeszcze, w jaki sposób rozumiał Kummer wprowadzenie tych nowych liczb.

Niechaj będą dwa przecinające się koła na płaszczyźnie; prosta, przechodząca przez ich punkty wspólne, nazywa się osią pierwiastną; jest ona miejscem punktów takich, że styczne do dwóch kół przez taki punkt przechodzące (aż do punktów styczności) są równe. Jeżeli koła nie przecinają się, wtedy nie stosuje się pierwsze określenie osi pierwiastnej, lecz można tę oś określić jako miejsce geometryczne punktów, dla których zachodzi własność druga.

Podobnie rzecz się ma z pojęciem liczb idealnych; wychodzimy z przypadku, w którym liczby α_1, β_1. α_2, β_2 istnieją, znajdujemy własność tych liczb, wyrażoną za pomocą wyżej podanych kongruencyj i rozciągamy tę własność i na ten przypadek, w którym liczby nie istnieją. W ten sposób indywidualizujemy utwory, które można uważać za uogólnienie liczb, istniejących faktycznie w przypadku pierwszym.

Pojęcie liczb idealnych zostało wprowadzone przez Kummera w przypadku specyalnym równania podziału koła (Crelle XXXV, XL, LIII, Akad. Berl. 1856).

Liczbami algebraicznemi i ideałami zajmowali się: Dirichlet (Akad Berlin. 1840, 1841. 1846), Dedekind (Ueber die Anzahl der Ideal-Classen", Brunświk 1877, „Ueber der Zusammenhang der Theorie der Ideale" etc. Rozprawy getyngskie, XXIII, „Sur la théorie des nombres algébriques", Bull. Darboux (I),XI,(2) I, 1877; Fuchs (Crelle LXV), Selling (Zeitschr. für Math. 1865); Zołotarew (Liouville, 1880); Sochocki (Prace mat fiz. V, Warszawa, 1895). Wykład zupełny całej teoryi w cytowanem dziele Dirichleta-Dedekinda i w rozdz. XVII dzieła „Kreistheilung" Bachmanna. Ważny referat o teoryi liczb algebraicznych, zawierający nadto wskazówki historyczne i bibliograficzne ogłosił Hilbert w tomie V Rocznika stowarzyszenia niemieckiego matematyków. Wykład teoryi liczb algebraicznych, funkcyonałów i ideałów znajdujemy w Algebrze H. Webera t. II, Brunświk 1899.

---

§ 3.

Liczby przestępne

Jeżeli pomiędzy liczbami algebraicznemi rozważamy tylko rzeczywiste, to można zapytać, czy każda liczba rzeczywista, w ogóle niewymierna, jest liczbą algebraiczną, t. j. czy może być pierwiastkiem równania algebraicznego o spółczynnikach wymiernych. Odpowiedź na to pytanie jest przecząca: istnieją liczby niealgebraiczne czyli przestępne. Pierwszy Liouville dowiódł istnienia liczb takich (Comptes Rendus 1844, Journ. de Liouville XVI, 1851); potem pytaniem tem zajmował się ponownie G. Cantor (Crelle LXXVII, 1873). Wykład dowodzenia Cantora znaleść można w świeżem dziełku Kleina „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie", Lipsk. 1895.

W związku z teoryą liczb przestępnych jest pytanie, czy liczba π (stosunek okręgu koła do średnicy) i liczba e (podstawa logarytmów naturalnych) dają się wykreślić za pomocą konstrukcyi geometrycznej elementarnej, t. j. za pomocą linijki i cyrkla. Z pierwszem z tych pytań wiąże się sławne zagadnienie o kwadraturze koła

Dowiedziono, że liczby π i e są nietylko niewymiernemi, lecz są i przestępnemi, t. j. nie mogą być pierwiastkami równań algebraicznych o spółczynnikach wymiernych, stąd już wypływa niemożliwość powyższej konstrukcyi geometrycznej.

Niewymierność liczby π udowodnił Lambert (Vorläufige Kenntnisse für die so die Quadratur des Cirkels suchen, 1770). Legendre wykazał, że liczba π^2 jest niewymierna. Hermite w sławnej rozprawie „Sur la fonction exponentielle" (Comptes rendus 1873) dowiódł, że liczba e jest przestępną. Pod wpływem rozważań Hermite'a Lindemann w 1882 (Math. Ann. XX) udowodnił, że liczba π jest przestępna. Uproszczenie dowodów tych autorów zawdzięczamy Weierstrassowi (Berl. Berichte 1881), Bachmannowi (Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen, Lipsk 1892), Hilbertowi, Hurwitzowi i Gordanowi (Gött. Nachr. 1893, Comptes rendus 1893, Math. Ann XLIII, Prace mat.-fiz V), Mertensowi (Prace mat.-fiz IX).

---

§ 4.

Liczba π.

Liczba ta jest, jak wiemy, jest nietylko niewymierna, lecz i przestępna. Nazywamy ją niekiedy ludolfiną (liczbą Ludolpha) od imienia matematyka (XVII wieku), który ją obliczył z 35 cyframi dziesiętnemi. Euler podał 100 cyfr (Introductio etc. 1748). De Lagny — 112, Richter — 330, Shanks kolejno: 440, 530, 707 (Proceed. Royal Society, XXI). Wartość liczby π z 40 cyframi dziesiętnemi jest:

$$\pi = 3{,}14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288\,41971\ldots$$

W papyrusie Rhinda (2000 lat przed Chr.) wartość π dana jest przez $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16\ldots$ Wartościami przybliżonemi liczby π są ułamki:

$$\frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215},\ \frac{208341}{66317},\ \frac{312689}{99532}.$$

Najważniejszemi wzorami do obliczania wartości liczby π są następujące:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad \text{(Wzór Wallisa)},$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots \qquad \text{(Wzór Leibniza)}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \, \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \, \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \ldots\ldots$$

$$\frac{5\pi}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \ldots\ldots$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \ldots\ldots$$

Co do innych szeregów, utworzonych z kwadratów, sześcianów lub potęg wyższych odwrotności liczb naturalnych, a które wyrażają się przy pomocy liczby π, patrz Rozdz. IV, § 2.

O liczbie e, o liczbie Eulera, i t. d. patrz Rozdz. XVIII.

ROZDZIAŁ XXII.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

---

§ 1.

Wiadomości ogólne. Prawdopodobieństwo skutków i prawdopodobieństwo przyczyn.

Jeżeli nie są dane wszystkie przyczyny zachodzenia zjawiska, lecz niektóre z tych przyczyn są nieznane lub niemożliwe do wykrycia, wtedy oczekiwać można zajścia zjawiska raczej jednym niż innym sposobem. Każdy ze sposobów, w jaki zjawisko zachodzić może, nazywa się jednym z przypadków możliwych, a liczba wszystkich tych przypadków może być skończona i mała, skończona i bardzo wielka, wreszcie nieskończona.

Wszystkie te przypadki możliwe można łączyć w grupy, zbierając w każdej grupie wszystkie te, które dla pewnego powodu chcemy lub możemy uważać za równoważne. Ogół wszystkich przypadków, objętych w grupie, uważamy za jedno zjawisko. A więc każda grupa charakteryzuje zjawisko. Jeżeli np. z urny, zawierającej gałki białe i gałki czarne, wyciągamy jednę gałkę, to jest rzeczą naturalną uważać za równoważne dwa zdarzenia wyciągnięcia po gałce białej, chociażby za każdym razem innej. Mówimy wtedy, że w obu przypadkach zachodzi to samo zjawisko.

Liczba wszystkich przypadków, zawartych w grupie, stanowi liczbę przypadków sprzyjających zdarzeniu zjawiska, scharakteryzowanego przez tę grupę. Jeżeli w urnie poprzedzającej są 4 gałki białe i jest 10 czarnych, to liczba przypadków sprzyjających wyciągnięciu gałki białej jest 4.

Nazywamy prawdopodobieństwem matematycznem zdarzenia zjawiska stosunek liczby przypadków sprzyjających do liczby wszystkich przypadków możliwych, w założeniu, że wszystkie przypadki możliwe uważamy za równomożliwe.

Przez to ostatnie zastrzeżenie rozumiemy, że w zdarzeniu zjawiska nie uczestniczą przyczyny zakłócające, albo—inaczej mówiąc—że przyczyny działające są takie, iż nie możemy znaleść żadnego powodu, dla którego zjawisko miałoby zachodzić raczej według jednego przypadku możliwego niż według drugiego. Tak np jeżeli w poprzedzającym przykładzie jedna z gałek ma rozmiary inne niż pozostałe, to rzecz jasna, iż stanowi to nie małą przyczynę zakłócającą, z powodu której nie możemy już stosować wzorów prawdopodobieństwa matematycznego.

Z powyższego określenia wynika, że prawdopodobieństwo przedstawia się zawsze jako ułamek, zawarty między 0 a 1 (włączając granice). Jeżeli prawdopodobieństwo jest zerem, mamy wtedy **niemożliwość** zjawiska; jeżeli jest równem 1, mamy **pewność** zachodzenia zjawiska,

Jeżeli podzielimy grupę wszystkich przypadków sprzyjających na pewną liczbę podgrup A, B, . . . , to jest oczywistem, że toż zjawisko zdarzy się bez względu na to, czy zachodzi który z przypadków sprzyjających grupy A, czy który z przypadków grupy B i t. d. Prawdopodobieństwa zachodzenia zjawisk w podgrupie A lub B i t. p., nazywają się prawdopodobieństwami cząstkowemi, a prawdopodobieństwo samego zjawiska nazywa się wtedy prawdopodobieństwem całkowitem.

Prawdopodobieństwo całkowite jest sumą prawdopodobieństw cząstkowych.

Niechaj będzie dwa lub więcej zjawisk (niezależnych) zachodzących równocześnie. Np. niechaj będą dwie urny: jedna z gałkami białemi i czarnemi, druga z gałkami czerwonemi i zielonemi; mamy wyciągnąć jednę gałkę z urny pierwszej i jednę z urny drugiej. Zjawisko, wynikające z kombinacyi pierwszego i drugiego zjawiska, nazywa się *zjawiskiem złożonem*. *Prawdopodobieństwo złożone równa się iloczynowi prawdopodobieństw pojedyńczych zjawisk składowych.*

Zagadnienia o prawdopodobieństwach dzielą się na dwie kategorye: zagadnienia o *prawdopodobieństwie skutków* i zagadnienia o *prawdopodobieństwie przyczyn*: albo inaczej, zagadnienia o *prawdopodobieństwie a posteriori* i zagadnienia o *prawdopodobieństwie a priori*. W zagadnieniach pierwszej kategoryi rozważamy tylko prawdopodobieństwa tego, czy zachodzą lub nie skutki przyczyn ustalonych. W zagadnieniach drugiej kategoryi wiemy, że zaszło w pewien sposób jedno zjawisko lub więcej zjawisk, które można uważać jako zależne od tej samej przyczyny, i pytamy, w jaki sposób wyznacza się prawdopodobieństwo, że przyczyna tego zjawiska jest raczej ta niż inna pomiędzy przyczynami, określonemi jako możliwie, oraz jaka pomiędzy temi przyczynami jest najprawdopodobniejsza.

Najprostszy tego przykład jest następujący: Niechaj będzie n urn, zawierających gałki białe i gałki czarne; pierwsza niechaj zawiera a_1 gałek białych i b_1 czarnych, druga a_2 białych i b_2 czarnych i t. d. Wyciągnięto gałkę białą i niewiadomo z jakiej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięto ją z urny pierwszej; jakie, że wyciągnięto ją z drugiej?

Do zagadnień o prawdopodobieństwie przyczyn należy tak nazwana *teorya błędów*. Pewną wielkość wymierzono pewną liczbę razy i otrzymano tyleż różnych rezultatów: jaka jest *najprawdopodobniejsza*, t. j. mająca największe prawdopodobieństwo miara tej wielkości?

Objaśnimy jeszcze pojęcie *nadziei matematycznej* i *wartości prawdopodobnej*.

Jeżeli gracz wygrywając, może pozyskać sumę A i jeżeli prawdopodobieństwo jego wygranej wynosi p, wtedy mówimy, że iloczyn pA jest jego nadzieją matematyczną. Jeżeli może wygrać sumę A' i jeżeli prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest p', sumę A'' z prawdopodobieństwem wygranej p'' i t. d., wtedy jego nadzieją matematyczną będzie $p'A+p''A''+\ldots$ Aby gra była sprawiedliwą, jest koniecznem, by nadzieje matematyczne wszystkich graczy były równe. Nadzieja matematyczna gracza równa się jego stawce, t. j. sumie, którą on do gry wkłada.

Wartością prawdopodobną wielkości A jest nadzieja matematyczną gracza, który mając prawdopodobieństwo p wygranej, ma pozyskać sumę równą A; jeżeli wielkość A może przyjmować wartości A', A'', ... wtedy wartością prawdopodobną ilości A jest $p'A'+p''A''+\ldots..$

W przedmiocie nadziei matematycznej sławnem jest zagadnienie, zwane paradoksem petersburskim, podane przez Daniela Bernoulli'ego. Dwaj gracze A i B grają na następujących warunkach: A wyrzuca w powietrze monetę: jeśli ta padnie na ziemię stroną z góry umówioną, to B płaci mu sumę 1 fr. i gra jest skończona; jeżeli przeciwnie moneta padnie stroną przeciwległą, wtedy gra trwa dalej. Jeżeli po powtórnem rzuceniu moneta padnie na ziemię stroną umówioną, B płaci 2 fr. a jeżeli padnie stroną przeciwległą, gra trwa dalej. Za trzecim razem osoba B zapłaci 4 fr. jeżeli moneta padnie na ziemię stroną umówiona i t. d. W dalszym przebiegu gry pod temi warunkami B płacić będzie odpowiednio 8, 16, . . . fr. Zachodzi pytanie, jaką stawkę powinna osoba A postawić, aby gra była sprawiedliwą, albo inaczej, jaka jest nadzieja matematyczna gracza A. Rachunek, według powyższej zasady wykonany, prowadzi do wyniku, że nadzieja matematyczna osoby A jest nieskończona.

§ 2.

Prawdopodobieństwo skutków. Twierdzenie Jakóba Bernoulli'ego. Prawo wielkich liczb.

Jeżeli prawdopodobieństwem pewnego zdarzenia jest p, a prawdopodobieństwem zdarzenia przeciwnego jest q i jeżeli robimy μ prób w tych samych warunkach, to prawdopodobieństwo, aby zdarzenie pierwsze powtórzyło się n razy (niezależnie od porządku) wynosi:

$$\frac{\mu!}{n!(\mu-n)!}\,p^n q^{\mu-n},$$

Jeżeli wyznaczymy n tak, aby to prawdopodobieństwo było maximum, znajdziemy:

Wartością najprawdopodobniejszą liczby n jest liczba całkowita, zawarta pomiędzy $\mu p-q$ i $\mu p+p$; wartością najprawdopodobniejszą liczby $\mu-n$ liczbą całkowitą, zawartą pomiędzy $\mu q-q$ i $\mu q+q$. To prowadzi do wniosku: Kombinacyą, mającą największe prawdopodobieństwo, jest ta, w której zdarzenia ukazują się w liczbie proporcyonalnej do ich prawdopodobieństw.

Otóż twierdzenie Bernoulli'ego orzeka, że powiększając liczbę prób, dojdziemy do tego, iż zachodząca kombinacya zbliża się do tej właśnie, która ma największe prawdopodobieństwo. Jeżeli zastosujemy wzór Stirlinga:

$$\lim_{r=\infty} \frac{r!}{e^{-r} r^r \sqrt{2\pi r}} = 1,$$

znajdziemy, że prawdopodobieństwo, aby zdarzenie o prawdopodobieństwie p powtórzyło się μp razy w μ próbach (prawdopodobieństwo maximum) wynosi:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

To prawdopodobieństwo maximum dąży zatem do zera, gdy liczba μ prób rośnie nieograniczenie. Tem bardziej zatem dążyć będzie do zera dla rosnącego μ prawdopodobieństwa, aby liczba n (t. j. liczba razy powtórzenia się zdarzenia) była pewną liczbą oznaczoną, różną od μp.

Nazywamy odchyleniem bezwzględnem różnicę pomiędzy wartością liczby n a wartością najprawdopodobniejszą tej liczby, t. j. μp, i kładziemy $h=\mu p-n$; odchyleniem względnem nazywamy stosunek $\frac{h}{\mu}$.

Prawdopodobieństwo, aby zdarzenie sprzyjające zachodziło n razy, t.j., aby odchylenie równało się h, wynosi przybliżenie:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\, e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}},$$

jeżeli założymy, że $\frac{h}{\mu}$, $\frac{h}{\sqrt{\mu}}$ są jest dostatecznie małe. Liczba h z natury swej jest liczbą całkowitą, dodatnią lub ujemną; w rachunkach wszakże bywa dogodnem zastępować ją przez zmienną ciągłą, mogącą przyjmować wszelkie wartości możliwe. Mamy wtedy: prawdopodobieństwo odchylenia, zawartego pomiędzy $-a$ i $+a$ daje wzór:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\int_{-a}^{+a} e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}\, dh,$$

które—mu kładąc $\frac{h}{\sqrt{2\mu pq}} = t$ — można nadać postać:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{a}{\sqrt{2\mu p q}}} e^{-t^2} dt.$$

Jeżeli powiększamy liczbę μ prób i pozostawiamy stałą liczbę a (granicę wyższą odchylenia), wtedy prawdopodobieństwo, aby odchylenie było mniejsze od a, dąży do zera; jest to więc dążenie do pewności, że odchylenie powinno przewyższać jakąkolwiek liczbę a; innemi słowy, przy powiększaniu liczby μ zwiększa się bez granic odchylenie bezwzględne. Powiększając się, powiększa się wszakże tak, że jego stosunek do μ, t. j. $\frac{h}{\mu}$, czyli odchylenie względne dąży do zera. Twierdzenie to w poniższej łatwiejszej postaci nazywa się **twierdzeniem Bernoulli'ego**.

Gdy μ rośnie nieograniczenie, t. j. gdy powiększamy nieograniczenie liczbę prób, stosunek $\frac{n}{\mu}$, gdzie n jest liczbą przypadków, w których zachodzi zdarzenie o prawdopodobieństwie p, dąży do zlania się z samem prawdopodobieństwem p, t.j. $\lim\frac{n}{\mu}=p$.

Tak np. gdy wyciągamy gałkę z urny, zawierającej gałkę czarną i dwie białe, kładziemy do urny gałkę wyciągniętą i znowu powtarzamy toż samo wielką liczbę razy, to liczba razy, w których wyciągnięto gałkę białą, jest **przybliżenie** równa podwójnej liczbie razy, w których wyciągnięto gałkę białą.

Twierdzeniem, które można uważać za ogólniejsze od twierdzenia **Bernoulli'ego** i z którego to ostatnie wypływa jako wniosek, jest t. zw. twierdzenie o **średniej arytmetycznej**. Niechaj pewna wielkość może mieć wartości $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ i niechaj prawdopodobieństwami tych wartości możliwych będą $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Według definicyi (§ 1), wartością prawdopodobną tej wielkości jest $p_1\lambda_1+p_2\lambda_2+\ldots+p_r\lambda_r=V$. Czynimy μ prób i otrzymujemy raz wartość z_1 (która jest jedną z wartości λ) potem wartość z_2 (która jest znowu jedną z wartości λ) i t. d. Średnia arytmetyczna tych wartości, t. j.:

$$\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_\mu}{\mu} = M,$$

gdy μ rośnie, dąży do wartości prawdopodobnej V, t. j. $\lim\limits_{\mu-\infty} (M-V)^2 = 0$.

Załóżmy w szczególności, że $r = 2$; dla ustalenia myśli przyjmijmy nadto, że stajemy w warunkach twierdzenia Bernoulli'ego, t. j. wyobrażamy sobie zdarzenie o prawdopodobieństwie p i zdarzenie przeciwne o prawdopodobieństwie q, tak że $p+q=1$ (biorąc przykład zwykły, wyobrażamy sobie, że w urnie jest a kul białych i b kul czarnych, tak że $a:b=p:q$). Tu wartości możliwych jest dwie: zdarzenie zachodzi lub niezachodzi, t. j. zachodzi zdarzenie przeciwne. Aby wyrazić zadanie w liczbach, musimy mieć wartości na λ_1 i λ_2, t. j. ustalić, która liczba odnosi się do zdarzenia o prawdopodobieństwie p, która do zdarzenia przeciwnego. Gdyby szło np. o gracza, to liczba λ_1 odpowiadałaby stawce gracza, który wygrywa, gdy zachodzi zjawisko o prawdopodobieństwie q, i odwrotnie. Wartością tedy prawdopodobną jest $p\lambda_1 + q\lambda_2$ Dla prostoty przyjmijmy ją za zero, t. j. weźmy $\lambda_1 = q$, $\lambda_2 = -p$. Wtedy wzór twierdzenia poprzedzającego staje się wprost: $\lim\limits_{\mu=\infty} M^2 = 0$ i należy tylko wyznaczyć M. Niechaj w μ próbach powtarza się n razy zdarzenie o prawdopodobieństwie p, a więc $\mu-n$ razy zdarzenie przeciwne. Ponieważ nadajemy wartość liczebną q każdemu zdarzeniu pierwszej kategoryi, wartość liczebną $-p$ każdemu zdarzeniu drugiej, to średnia arytmetyczna otrzymanych wartości będzie:

$$M = \frac{nq - (\mu - n)p}{\mu} = \frac{n - \mu p}{\mu} = \frac{h}{\mu};$$

a więc średnia staje się tem, co nazywamy **odchyleniem względnem** i na tem właśnie polega twierdzenie Bernoulli'ego

To rozważanie ustanawia związek pomiędzy teoryą twierdzenia Bernoulli'ego a teoryą błędów, którą podajemy w paragrafie następnym.

Nazywamy wartością prawdopodobną odchylenia lub kwadratu odchylenia sumę iloczynów wartości bezwzględnej każdego odchylenia lub jego kwadratu przez prawdopodobieństwo samego odchylenia. Te wartości prawdopodobne przedstawiają od powiednie całki:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\int_0^\infty h e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}\,dh; \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\int_{-\infty}^{+\infty} h^2 e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}\,dh.$$

Wartość prowdopodobna kwadratu odchyienia po μ próbach wynosi μpq; wartość prawdopodobna samego odchylenia wynosi:

$$\frac{\sqrt{2\mu pq}}{\sqrt{\pi}} = 0,79789\sqrt{\mu pq},$$

wielkość tę nazywamy odchyleniem średniem, Wynika stąd :

Stosunek wartości prawdopodobnej kwadratu zboczenia do kwadratu wartosci prawdopodobnej samego zboczenia bezwzględnego równa się $\pi:2$

Jeżeli wartość powyższej całki uczynimy równą $\frac{1}{2}$, znajdziemy wartość odchylenia $0,4769363\sqrt{2\mu pq}$, o prawdopodobieństwie $\frac{1}{2}$; nazywamy je odchyleniem prawdopodobnem. Stosunek odchylenia prawdopodobnego do średniego jest stały i równy 0,8453. Odchylenia tak prawdopodobne jak i średnie, są proporcyonalne do pierwiastku kwadratowego z liczby prób. Prawdopodobieństwo, aby w μ próbach odchylenie było mniejsze od α, wyraża się całką okresloną, której granicą uiższą jest zero, wyższa zaś zależy od $\frac{\alpha}{\sqrt{\mu}}$; jeżeli granicę wyższą oznaczymy przez t, otrzymamy całkę, którą Gauss oznacza symbolem $\theta(t)$. Jest przeto niezbędnem utworzenie tablicy wartości tej całki określonej, tak, aby można było dla danych wartości α i μ obliczać prawdopodobieństwo. Dajemy tę tablicę na końcu rozdziału. Jeżeli powiększamy $\frac{a}{\sqrt{\mu}}$, to wartość całki szybko dąży do jedności.

Prawo wielkich liczb Poissona (Comptes rendus 1835) jest próbą uogólnienia prawa Bernoulli'ego w przypadku, gdy prawdopodobieństwo p w ciągu prób jest zmiennem.

---

§ 3.

Prawdopodobieństwo przyczyn. Teorya błędów.

Najważniejszem zagadnieniem w teoryi prawdopodobieństwa jest zagadnienie teoryi błędów lub metody najmniejszych kwadratów, utworzone przez Gaussa (Theoria motus 1809), jakkolwiek ślady tegoż znajdujemy już u Legendre'a (Nouv. méth. pour la déterm. des orbites des comètes Paryż 1806).

Jeżeli uskuteczniamy pomiary jednej i tej samej wielkości w tych samych warunkach, to można przyjąć zasadę, że najodpowiedniejszą wartością jest wartość t. z. średnia, która jest funkcyą symetryczną wartości i ma tę własność, iż staje się równą k, gdy wszystkie wartości uczynimy równemi k. Średnich jest nieskończenie wiele; najprostszą z nich jest średnia arytmetyczna, t. j. stosunek sumy wielkości do ich liczby. Gauss przyjął postulat następujący:

Jeżeli uskuteczniamy pomiary jednej i tej samej wielkości w tych samych warunkach, to wartością naprawdopodobniejszą mierzonej wielkości jest średnia arytmetyczna wartości, otrzymanych z pomiarów.

Niektórzy matematycy starali się udowodnić postulat Gaussa, przyjmując inne postulaty bardziej bezpośrednie, lecz nie zdaje się, by te różne dowody (Encke, Schiaparelli it.d.) były wolne od zarzutów; zresztą nie twierdzimy bynajmniej, że postulat powyższy należy przyjąć za matematycznie pewny. Patrz np. dyskusye o tym przedmiocie w najnowszych traktatach Bertranda i Poincarégo oraz uwagi, zawarte w cytowanych niżej rozprawach Wł. Gosiewskiego i w pracy Czubera. Niektórzy (jak Bessel i inni) usiłowali uzasadnić doświadczalnie zasadę Gaussa.

Godnem jest uwagi, że jeżeli założymy, iż błędy obserwacyi są dostatecznie małe, to wszelka średnia da zawsze wartość, zawartą pomiędzy granicami obserwacyi, a wartości wszystkich średnich nie wiele wzajemnie się różnią.

Średnia arytmetyczna ma własność osobliwą: Jeżeli $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ są wartości, otrzymane z μ pomiarów i jeżeli $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\mu$ oznaczają błędy, t. j. różnice pomiędzy temi wartościami a średnią $x = \frac{1}{\mu}(x_1 + x_2 + \ldots x_\mu)$, to suma kwadratów błędów jest minimum. Jeżeli zamiast x weźmiemy inną jakąkolwiek liczbę, to suma będzie miała zawsze wartość większą. Ta własność charakteryzuje średnią arytmetyczną.

Jeżeli przyjmiemy zasadę średniej arytmetycznej, t. j. że ona przedstawia wartość najprawdopodobniejszą wartości prawdziwej wielkości mierzonej, to znajdziemy, iż prawdopodobieństwo, aby różnica pomiędzy tą wartością a wartością prawdziwą wielkości zawierała się pomiędzy h_0 i h_1, wyraża się przez całkę:

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{h_0}^{h_1} e^{-k^2h^2} dh,$$

gdzie k jest pewną stałą. Podobnież wartość całki

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a} e^{-k^2h^2} dh = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ka} e^{-t^2} dt = \theta(k, a)$$

wyraża prawdopodobieństwo, że ta sama różnica (t. j. błąd, który popełniamy, przyjmując wartość średnią arytmetyczną), jest co do wartości bezwzględnej mniejsza od a.

Prawo, przedstawione przez ten wzór, nazywa się **prawem błędów**. Gdybyśmy za wartość najprawdopodobniejszą przyjęli wartość różną od średniej arytmetycznej, mielibyśmy inne prawo błędów.

W teoryi błędów znajduje tedy, jak widzimy, zastosowanie funkcya θ, o której była mowa w § poprzedzającym.

Błędem prawdopodobnym jest ten, którego prawdopodobieństwo jest $\frac{1}{2}$.

Stała k jest odwrotnie proporcyonalna do błędu prawdopodobnego λ, jest mianowicie $k\lambda = 0,476936\ldots$ Stała k nazywa się zwykłe **miarą dokładności obserwacyi**. Dokładność jest wprost proporcyonalna do pierwiastku kwadratowego z liczby obserwacyj.

Po ustanowieniu prawa błędów, określamy, podobnie jak w §§ 1 i 2. **wartość prawdopodobną błędu** jako sumę iloczynu wszystkich możliwych wartości błędów przez odpowiednie prawdopodobieństwo; **wartość tę prawdopodobną błędu** (której nie należy mieszać z błędem prawdopodobnym λ) **przedstawia całka**:

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty he^{-k^2h^2}\,dh = \frac{1}{k\sqrt{\pi}},$$

a **wartości prawdopodobne kwadratu, sześcianu it.p. błędu przedstawiają odpowiednio całki**:

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty h^2e^{-k^2h^2}\,dh = \frac{1}{2k^2}, \qquad \frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty h^3e^{-k^2h^2}\,dh = \frac{1}{k^3\sqrt{\pi}};$$

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty h^4e^{-k^2h^2}\,dh = \frac{3}{4k^4}, \quad \ldots\ldots$$

Wzory te są bardzo ważne, albowiem przy ich pomocy oraz przy pomocy twierdzenia o średniej, podanego w § poprzedzającym, możemy obliczać wartość k i równocześnie sprawdzać dokładność obserwacyj. W samej rzeczy, jeżeli przypomnimy sobie, że przy wielkiej liczbie μ prób średnia otrzymanych wartości dąży do wartości prawdopodobnej i jeżeli przez s_1, s_2, s_3, s_4 oznaczymy odpowiednio sumę wartości bezwzględnych błędów $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mu$, ich kwadratów, sześcianów i potęg czwartych, otrzymamy wzory przybliżone:

$$\frac{s_1}{\mu} = \frac{1}{k\sqrt{\pi}}, \quad \frac{s_2}{\mu} = \frac{1}{2k^2}, \quad \frac{s_3}{\mu} = \frac{1}{k^3\sqrt{\pi}}, \quad \frac{s_4}{\mu} = \frac{3}{4k^4},$$

które mogą służyć do wyznaczenia liczby k i do wzajemnej kontroli. Z wzorów tych otrzymują się następujące:

$$\frac{\frac{s_2}{n}}{\left(\frac{s_1}{n}\right)^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\frac{s_3}{n}}{\left(\frac{s_1}{n}\right)^3} = \pi, \quad \frac{\frac{s_4}{n}}{\left(\frac{s_1}{n}\right)^4} = \frac{3\pi^2}{4},$$

które doświadczalnie winny sprawdzać się dokładnie. Jeżeli tedy przy danych obserwacyach nie spełniają się, to pozostawiają słuszną wątpliwość co do czynionych obserwacyj i ich wyników. Pierwszy z tych wzorów wyraża twierdzenie następujące: Stosunek sredniej kwadratów błędów do kwadratu ich średniej dąży przy wzrastaniu liczby obserwacyi do połowy liczby π.

Osobliwym jest fakt, że podobne prawo zdaje się rządzić zachodzeniem zdarzeń, których nie można uważać za przypadkowe. Tak np. pomiędzy 10000 logarytmami tablic o 10 cyfrach dziesiętnych, znaleziono, że siódma cyfra dziesiętna jest zerem 990 razy, jednostka 997 razy, dwójka 993, czwórka 1012 i t. p. Jeżeli do tych liczb zastosujemy w pewien sposób pierwszy z powyższych wzorów znajdziemy $1,561\ldots$, t. j. liczbę bardzo bliską liczby $\frac{\pi}{2} = 1,570\ldots$. Przykład ten podaje Bertrand (Probab. Paryż 189).

Podamy jeszcze jedno ważne twierdzenie:

Uskuteczniamy pewien pomiar, dzielimy go na r części i zmierzmy każdą z nich, uwzględniając odpowiednie poprawki, następnie dodajemy do siebie wyniki. Jest oczywistem, że im większe będzie r, tem mniejsza będzie dokładność miary całkowitej; zachodzi tu twierdzenie, przewidziane przez F o u r i e r a.

D o k ł a d n o ś ć p o m i a r u c a ł k o w i t e g o, z ł o ż o n e g o z r p o m i a r ó w c z ą s t k o w y c h, j e s t o d w r o t n i e p r o p o r c y o n a l n a d o p i e r w i a s t k a k w a d r a t o w e g o l i c z b y r.

Tablica wartości całki $\theta(t)$ Gaussa.

t	$\theta(t)$	t	$\theta(t)$
0, 0	0, 0000000	2, 0	0, 9953223
0, 1	0, 1124630	2, 1	0, 9970205
0, 2	0, 2227025	2, 2	0, 9981372
0, 3	0, 3286267	2, 3	0, 9988568
0, 4	0, 4283922	2, 4	0, 9993115
0, 5	0, 5204999	2, 1	0, 9995930
0, 6	0, 6038561	2, 6	0, 9997640
0, 7	0, 6778010	2, 7	0, 9999657
0, 8	0, 7421010	2, 8	0, 9999250
0, 9	0, 7969082	2, 9	0, 9999589
1, 1	0, 8427008	3, 0	0, 9999779
1, 1	6, 8802050	3, 1	0, 9999884
1, 2	0, 9103140	3, 2	0, 9999940
1, 3	0, 9340080	3. 3	0. 9999969
1, 4	0, 9522851	3, 4	0, 9999985
1, 5	2, 9661052	3, 5	0. 99999925691
1, 6	0, 9763484	3, 6	0, 99999964414
1, 7	0, 9837904	3, 7	0, 99999983285
1, 8	9, 9890905	3, 8	0, 99999992200
1, 9	0, 9927904	3, 9	0, 99999996522
		4, 0	0, 99999998459

K ä m p f e (Phil Stud. IX, 1893) ułożył tablicę czterocyfrową, postępującą od tysiącznej do tysiącznej części ilości t w przedziale od 0.000 do 1.509.

Zagadnieniami, należącemi do rachunku prawdopodobieństwa, zajmowali się pierwsi: B. P a s c a l. F e r m a t. H u y g e n s. M o i v r e, D a n i e l. J a n, M i k o ł a j i J a k ó b B e r n o u l l i'owie, E u l e r, L a g r a n g e. Najważniejszym traktatem systematycznym o teoryi analitycznej prawdopodobieństwa jest dzieło L a p l a c e'a: Traité analytique du calcul des probabilités (Paryż 1812, 1814, 1820, 1847); w nim zebrał autor wszystkie badania dawniejsze własne i innych matematyków. Prawie równocześnie rachunek prawdopodobieństwa uczynił postęp w innym kierunku, dzięki G a u s s o w i (Theoria motus 1809, Theoria combinationis observationum i t. d., Tow. Getyngskie 1821—1826 i t. d.), który utworzył t e o r y ę n a j m n i e j s z y c h k w a d r a t ó w: teorya ta szybko przeniosła się na pole praktyczne i uczyniła tam znaczne postępy. Istnieje bardzo wiele rozpraw L a p l a c e'a, C a u c h y'ego, F o u r i e r a, E n c k e g o, B e s s e l a, B i e n a y m e'go, P o i s s o n a, P u i s s a n t a, C z e b y s z e w a i innych z teoryi prawdopodobieństwa i najmniejszych kwadratów. Po wskazówki o tych pracach odsyłamy czytelnika do książki T o d h u n t e r a „A history of the mathematical theory of the probability“ (London 1865), albo do listy, załączonej na końcu traktatu L a u r e n t a, Paryż 1873, wreszcie do najnowszej pracy E. C z u b e r a: „Die Entwickelung der Wahrscheinliehkeitstheorie und ihrer Anwendungen“, ogłoszonej w VII tomie Sprawozdań niemieckiego Stowarzyszenia matematyków (Berlin 1899). Z traktatów systematycznych o rachunku prawdopodobieństwa i najmniejszych kwadratów, prócz klasycznego traktatu L a p l a c e'a, wymienić należy dzieła L a c r o i x'a (1806), P o i s s o n a (1837), G a l l o w a y a (Edynburg 1832), J a h n a (Lipsk 1839), Q u e t e l e t a (Bruksela 1845, 1853), L a u r e n t a (Paryż 1873), F e r r e r o (O najmniejszych kwadratach, Florencya 1876), B e r t r a n d a (Paryż 1889), P o i n c a r é g o (Paryż 1896). Z rozpraw o teoryi błędów i metodzie najmniejszych kwadratów wymieniamy nadto artykuły oryginalne Wł G o s i e w s k i e g o w tomach II, III, V, IX „Prac matem.-fizycz.“ O metodzie najnowszych kwadratów patrz pracę Br. G u s t a w i c z a „Rachunek wyrównania błędów etc.“ (Kraków 1896).

ROZDZIAŁ XXIII.

NARZĘDZIA I PRZYRZĄDY ANALITYCZNE.

W rozdziale tym pragniemy podać niektóre wiadomości o różnych narzędziach, wymyślonych do wykonywania działań analitycznych sposobem mechanicznym. Nie możemy opisywać ich tu szczegółowo i dla tego ograniczamy się na krótkim opisie niektórych tylko; o integrafie powiemy nieco szczegółowiej.

Podzielimy ten rozdział na trzy części: w pierwszej podajemy zarys wiadomości o narzędziach, służących do rachunków elementarnych, i dla tego nazwanych narzędziami arytmetycznemi: w drugiej mówimy o narzędziach, służących do rachunków, które nazwać możemy przeważnie algebraicznemi, np. szukanie pierwiastków rzeczywistych równania i układu równań; wreszcie w części trzeciej pomówimy o narzędziach rachunku całkowego, t. j. o narzędziach, służących do obliczania całek określonych lub do kreślenia krzywej całkowej (całki nieokreślonej).

§ 1.

Narzędzia arytmetyczne. Działania elementarne. Abaki

Dwie są kategorye narzędzi arytmetycznych. Do jednej zaliczamy narzędzia, dające rezultaty ścisłe działań arytmetycznych zasadniczych: do drugiej narzędzia—zwane narzędziami o skali logarytmowej — dające rezultaty z przybliżeniem w praktyce wystarczającem.

Narzędzia kategoryi pierwszej bywają dwóch rodzajów. W jednych otrzymujemy wyniki, kombinując ze sobą rozmaitemi sposobami opatrzone podziałami liniały, których ruchy są wzajem niezależne. W innych narzędziach części składowe są tak ze sobą połączone, iż tworzą machinę we właściwem znaczeniu tego wyrazu, tak że ruch jednych części określa już w sposób jedyny ruch pozostałych.

Neper w r. 1617 zbudował po raz pierwszy przybór pierwszego rodzaju i opisał go w swoim dziele: „Rhabdologia sive numerationis per virgulas libri duo“. Jest to w zasadzie tablica pytagorasowa, na dziesięć podzielona kolumn, złożona mianowicie z dziesięciu ruchomych liniałów (listewek), z wypisanemi na nich liczbami tablicy pytagorasowej i przysuwanych do siebie po odpowiedniem przestawieniu. Forma narzędzia usprawiedliwia nazwę laseczek Nepera. Zadanie ich polega na otrzymywaniu iloczynów i ilorazów liczb wielocyfrowych przy pomocy samych dodawań i odejmowań.

Pierwszą modyfikacyę tego narzędzia wykonał Gaspar Schott, umieściwszy listewki z liczbami na walcach ruchomych około ich osi. Inne zmiany i ulepszenia zawdzięczamy: Petitowi (1678), Poetiusowi (1728), Méanowi (1731), Roussainowi (1738, Hist. de l'Acad.), Prahlowi (1789) i Rothowi (1841). Najnowszego i najważniejszego udoskonalenia w najnowszych czasach dokonali Genaille i Lucas (1885).

Pierwsze narzędzie, należące do kategoryi arytmetycznych właściwych, w których za pomocą ruchów mechanicznych odpowiednio skombinowanych wykonywać można cztery działania arytmetyczne, zbudował po wielu żmudnych usiłowaniach Błażej Pascal w r. 1642; następnie Leibniz w r. 1673 przedstawił inne podobne narzędzie Towarzystwu królewskiemu w Londynie i wkrótce potem Akademii paryskiej. Wspominamy dalej o machinie Rotha i o arytmometrze Thomasa (1820), praktycznym i doskonałym. Pomiędzy narzędziami rachunkowemi bardziej złożonemi i pomysłowemi wymienić należy narzędzie Scheutza, urzeczywistniające pomysł Babbage'a; było ono wystawione w Paryżu w r. 1855. Czebyszew zbudował inną machinę taką o ruchu ciągłym.

Opis szczegółowy wszystkich tych narzędzi znaleść można w dziele d'Ocagne'a: „Le calcul simplifié etc." (Paryż 1894). Opis innych narzędzi rachunkowych, przedstawionych na zjeździe Stowarzyszenia niemieckiego matematyków w r. 1893 w Monachium, znaleść można w dziele W. Dycka „Katalog mathematischer Modelle, Apparate und Instrumente" (Monachium 1892, 1893). Porówn. art. Mehmkego: „Przyczynek do historyi machin rachunkowych" (Prace mat.-fiz. t. VI, 1895).

Przechodząc do narzędzi kategoryi drugiej powiemy przedewszystkiem, że typem ich jest t. zw. linijka rachunkowa o podziałce logarytmowej, pomyślana po raz pierwszy przez Edmunda Günthera w r 1624, wkrótce po wynalezieniu logarytmów. Narzędzie to ulegało kolejno znacznym modyfikacyom: przez umieszczenie skali, która w narzędziu pierwotnem była prosto-liniową, na kole (Boucher, Wroński), na elipsie (Fuller) i t. d., lub przez zagięcie samej skali i zmniejszenie tym sposobem rozmiarów narzędzia (Mannheim). Stopień dokładności rachunków przy pomocy tych linijek zależy głównie od dokładności ich konstrukcyi, gdyż zasadą w nich jest, że linijka ruchoma przesuwa się po linijce stałej, na której wypisane są tak zwane skale logarytmowe, t. j. podziały odpowiadające logarytmom liczb. Wprowadzenie logarytmów na linijce daje te same uproszczenia, co w rachunku zwykłym; mamy tu więc niejako narzędzie, które należy postawić obok poprzednio wspomnianego narzędzia Nepera, tylko że zamiast liczb mamy tu ich logarytmy. Prócz rachunków zwykłych możemy za pomocą linijki rozwiązywać też równania stopnia 2-go i 3-go.

Opis szczegółowy linijki rachunkowej znajdzie czytelnik w dziełach: Lalanne'a (Paryż 1851), Benoita (Paryż 1851) Elliota

(A treatise on the slide rule. London), Guy'a (Paryż 1855), Voglera (Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln etc.. Berlin 1877), Selli (Regola calcolatore, 1886. przekład francuski Montefiorego-Leviego). Historyę i klasyfikacyę różnych rodzajów linijek o podziałce logarytmowej podał A. Favaro (Ist. Veneto (5) V, 1879).

Abakiem lub tablicą graficzną nazywamy w ogóle narzędzie. służące już to do wykonywania rozmaitych rachunków elementarnych. już to do rozwiązywania równań, do rachunków trygonometrycznych i t. p. Abak jest w istocie rzeczy tablicą, na której oznaczone są punkty proste i krzywe, z odpowiedniemi liczbami; jeżeli mamy dane wielkości pewnych zmiennych i połączymy na tablicy prostemi punkty, tym wartościom odpowiadające lub punkty spotkania prostych z nakreślonemi krzywemi, otrzymamy wartość szukanej niewiadomej. Już zwyczajna tablica mnożenia jest jednym z najprostszych abaków. Teorya konstrukcyi takich abaków stanowi naukę, zwaną nomografią.

Pierwsze prace, odnoszące się do tego przedmiotu, zawdzięczamy Lalanne'owi (1843), Massau'owi (1881), Lallemandowi (1886), a rozwinięcie i udoskonalenie d'Ocagne'owi. którego najnowszy traktat o tym przedmiocie wyszedł świeżo p. t.: „Traité de nomographie (Paryż 1899). Tamże podana jest dawniejsza i najnowsza literatura tego przedmiotu.

Za pomocą metody nomograficznej rozwiązywać można równania stopnia 3-go i 4-go, zagadnienia trygonometryczne i t. p., nie mówiąc już o ważnych zastosowaniach tej metody do zagadnień technicznych.

§ 2.

Przyrządy algebraiczne. Rozwiązywanie równań.

Do rozwiązywania równań, oprócz wspomnianych już abaków, istnieje bardzo wiele przyrządów d'Ocagne'a, Mehmkego i innych, których opis znajduje się we wspomnianym wyżej „Katalogu“ Dycka. Możemy też rozwiązywać równanie stopnia 2-go i 3-go, a nawet równania trójmienne stopnia 5-go za pomocą linijki rachunkowej. I integraf, o którym mówimy w § następnym, daje metodę graficznego rozwiązywania równań przy pomocy całek.

Prócz tego zbudowano narzędzia mechaniczne do rozwiązywania układu równań liniowych. Opis jednego z nich, pomyślonego przez Veltmanna, znajduje się w „Katalogu“ Dycka; inne zbudował W. Thomson (lord Kelvin: por. Proc. of Roy. Soc. XXVIII, 1878; Natural Philosophy, 1886, I, str. 482). Narzędzie Veltmanna zbudowane jest na zasadach hydrostatyki, a mianowicie na zasadzie naczyń połączonych: składa się z drążków, stykających się z naczyniami napełnionemi cieczą; wszystko zaś mieści się w naczyniu napełnionem wodą. Każdy drążek odpowiada równaniu liniowemu, a walec na każdym drążku odpowiada jednej niewiadomej. Z wartości słupów cieczy otrzymujemy wartości przybliżone niewiadomych, a powtarzając działania, możemy także obliczać poprawki. Przyrząd Thomsona nie zawiera cieczy i składa się z drążków kółek i nici nawiniętych na kółka.

---

§ 3.

Narzędzia całkowe. Integrafy. Analizatory.

Do narzędzi całkowych należą następujące:

1 Narzędzia do mierzenia pól krzywych płaskich, a więc dające wartość określonej całki funkcyi, graficznie wykreślonej

Narzędzia takie nazywają się w ogóle planimetrami Jest ich wiele rodzajów; najlepiej znanym jest planimetr Amslera (pierwsza konstrukcya w 1854).

2. Narzędzia, służące do kreślenia krzywej całkowej, a które dają to, co daje rachunek całki nieokreślonej funkcyi, graficznie nakreślonej. Są to integrafy lub integratory; mogą one służyć do tego samego celu co i planimetry, i do wielu innych celów.

3. Narzędzia, służące do całkowania pewnych typów równań różniczkowych.

4. Narzędzia, służące do wyznaczenia długości łuku linii krzywej (krzywomierze). Takie narzędzia buduje Coradi w Zurychu.

5. Analizatory harmoniczne, które są w istocie rzeczy integratorami do obliczania całek określonych, występujących jako spółczynniki szeregu Fouriera, a mianowicie całek:

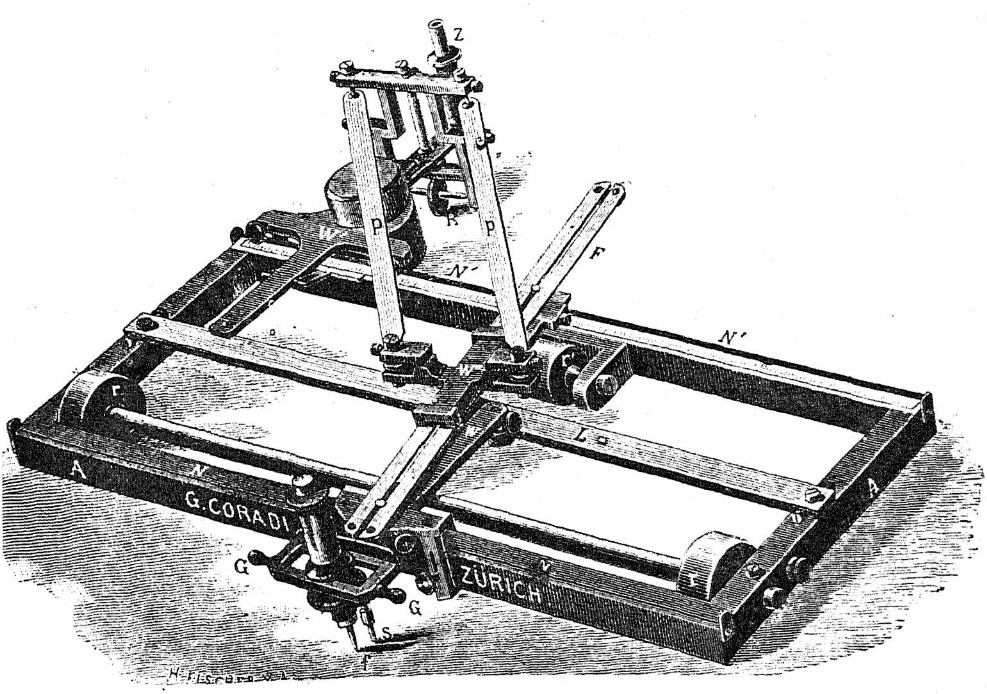
$$\int_0^{2\pi} \cos n t f(t)\, dt, \qquad \int_0^{2\pi} \sin n t . f(t)\, dt.$$

Do narzędzi tego rodzaju należą narzędzia Thomsona, Henrici'ego, Sharpa; wiadomość o nich podaje artykuł Henriciego w cytowanej książce Dycka.

Zajmiemy się tu tylko opisem integrafów. Pierwsze narzędzia tego rodzaju zawdzięczamy Żmurce (1861), Thomsonowi (1876), Cayley'owi (1877); najbardziej wszakże godnym uwagi jest integraf Abdanka-Abakanowicza (1882, pierwszy model wykonano w 1878; patrz Sprawozdania Akademii krakowskiej, marzec 1880, Comptes rend. 21 lutego i 7 marca 1881), którego wykonanie do znacznej doskonałości podniósł G. Coradi w Zurychu. O wynalazku swoim napisał Abakanowicz dzieło p. t. „Les intégraphes et la courbe intégrale". Paryż 1886 (przekład niemiecki Bitterli'ego, Lipsk 1889).

Zasada, na której opiera się to narzędzie, jest najprostsza. Wyobraźmy sobie nakreśloną krzywą, której równaniem jest

$x=f(x)$ i weźmy punkt P tej krzywej o spółrzędnych prostokątnych x_1, y_1. Na osi odciętych odetnijmy długość 1, począwszy od spodka rzędnej y_1 i rozważajmy trójkąt prostokątny, którego wierzchołkami są: punkt P, spodek rzędnej tego punktu i koniec odcinka o długości 1. Przeciwprostokątna tego trójkąta jest stale równoległa do stycznej lini krzywej, której równaniem jest $y=\int f(x)dx$.



Coradi zbudował dwa modele integrafów, opartych na tej zasadzie: model mniejszy i model większy. Opiszemy tylko mniejszy.

Ramę prostokątną metalową rozmiarów 30 cm. na 14 cm. podtrzymują trzy kółka r i r', służące do nadawania jej ruchu prostoliniowego na arkuszu rysunkowym. Na nim kreślą się dwie osie, wzajemnie prostopadłe, z których jedna (y) jest równoległa do boku NN, druga przechodzi przez punkt, w którym znajduje się ostrze F wtedy, gdy wózek ruchomy GG znajduje się w swem położeniu początkowem (położenie to otrzymujemy łatwo, przez przytwierdzenie śrubki w otworze oznaczonym na boku A). Wózek GG może przesuwać się wzdłuż boku NN, a ruch ten, skombinowany z ruchem całego narzędzia w kierunku prostopadłym, sprawia, że ostrze f może opisywać ślad krzywej dowolnej (różniczkowej); stąd nazwa ostrza i wózka różniczkowego. Przy pomocy pewnego systemu połączeń stawowych sprawiamy, że sztabka F jest w każdem położeniu równoległa do płaszczyzny krążka R i z drugiej strony równoległa do przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, o którym wyżej była mowa. Stąd wynika, że w każdem położeniu płaszczyzna pionowa krążka R jest zawsze równoległa do tej przeciwprostokątnej; z drugiej strony krążek R ściśle przywiera do papieru rysunkowego pod naciskiem ciężaru wózka VV (wózka całkowego). Ten krążek tedy poruszać się będzie we własnej płaszczyźnie i przenosić będzie wraz z sobą wzdłuż boku NN' wózek całkowy, a z nim ołówek Z i nie będzie zmieniał kierunku swego ruchu, o ile nie zmienia go sztabka F; ta zaś nie może go zmieniać, jeżeli wózek różniczkowy nie schodzi z boku NN. Z wózkiem całkowym połączony jest noniusz, przesuwający się po skali $N'N'$, podzielonej na centymetry i milimetry, tak że w położeniu początkowem zero noniusza schodzi się z zerem podziałki, a po przebieżeniu łuku krzywej przez ostrze F, możemy odczytać liczbę, wyrażającą wielkość pola pomiędzy tym łukiem osią x i dwiema skrajnemi rzędnemi. W ten sposób ołówek Z opisuje krzywą całkową krzywej danej. Tu własność pozwala nam na wielokrotne zastosowania narzędzia.

Ze sztabą L jest złączony czop stały, około którego obraca się sztabka ruchoma F, odległość pomiędzy tym czopem a środkiem boku A przedstawia jednostkę miary narzędzia, a prosta, łącząca dwa takie punkty stałe, jest w każdem położeniu podstawą trójkąta prostokątnego, o którym mówiliśmy. Narzędzie jest zbudowane w ten sposób, że ten czop stały można umieszczać w różnych miejscach, jeżeli chcemy zmieniać jednostkę miary narzędzia od minimum 7 cm. do maximum $12\frac{1}{2}$ cm.

Liczby, ktore otrzymujemy na skali N', należy mnożyć przez jednostkę miary narzędzia. Na skali mamy centymetry, milimetry i dziesiąte część milimetra; jeżeli więc miara narzędzia jest 10 cm., to otrzymamy wyniki w centymetrach kwadratowych i milimetrach kwadratowych Jeżeli na skali N' czytamy np. 7,26 cm., to mnożąc przez 10, mamy 72,6 i otrzymujemy 72 cm. kw. i 60 mm. kw.

Różnica modelu większego od mniejszego jest między innemi ta, że ostrze rózniczkowe i ostrze całkowe znajdują się na jednym boku, a nie na bokach przeciwległych.

Związki wzajemne osobliwości krzywej całkowej i krzywej różniczkowej są następujące: jeżeli krzywa rożniczkowa ma m a x i m u m lub m i n i m u m, to krzywa całkowa ma punkt p r z e g i ę c i a; jeżeli krzywa różniczkowa s p o t y k a o ś x, to krzywa całkowa ma m a x i m u m l u b m i n i m u m: jeżeli krzywa różniczkowa zmienia nagle kierunek, to krzywa całkowa ma o s t r z e. Aby otrzymać styczną do krzywej całkowej w punkcie danym, dosć nadać ostrzu różniczkowemu ruch po prostej równoległej do osi x, t. j. puscić ręką wózek i pozwolić narzędziu przesuwać się na jego kółkach Jeżeli wózek różuiczkowy przebiega prostą prostopadłą do osi x, t. j. przesuwa się po narzędziu, które samo pozostaje nieruchomem, wtedy ostrze całkowe pozostaje stałe.

Pożytki narzędzia tego są następujące: 1° Służy ono do m i e r z e n i a p ó l, t. j. spełnia usługi planimetru; slad krzywej należy wtedy opisywać w zwrocie ruchu skazówek zegara . 2° Może służyć d o o p i s y w a n i a r u c h e m c i ą g ł y m p a r a b o l i; dość bowiem, by ostrze różniczkowe przebiegało jakąkolwiek prostą. Stosownie do nachylenia prostej, otrzymujemy parabole o różnych parametrach. 3° M o ż n a d z i e l i ć d a n e p o l e z a m k n i ę t e n a c z ę ś c i p r o p o r c y o n a l n e d o w i e l k o ś c i d a n y c h p r z y p o m o c y p r o s t e j d a n e g o k i e r u n k u; dość w tym celu obrać ten kierunek za oś y, zbudować krzywą całkową, odpowiadającą całkowitemu obwodowi krzywej, podzielić na części proporcyocyonalne odległość pomiędzy punktem początkowym i punktem końcowym krzywej (te punkty będą na jednej i tej samej rzędnej) i powtórzyć działanie tak, aby punkt początkowy krzywej całkowej był jednym z punktów podziału. Nowa krzywa całkowa przetnie poprzednią w punkcie, którego odcięta będzie odciętą prostej równoległej do osi x i przecinającej pole w sposób żądany. 4⁰ Można obliczać momenty statyczne pola względem prostej danej. Dosc w tym celu wybrać oś y równolegle do tej prostej, jednemu z punktów przecięcia prostej i obwodu krzywej pozwolić opisać krzywą całą i wrócić do tego punktu; otrzymamy krzywą całkową, poczem ostrzem różniczkowem opisać tę ostatnią krzywą i otrzymać nową krzywą całkową. Odległość pomiędzy punktem początkowym i punktem końcowym tej ostatniej, dająca się odczytać na skali, stanowi moment szukany. Liczbę milimetrów i dziesiętnych części milimetra, odczytywanych na skali, należy oczywiście pomnożyć przez jednostkę miary narzędzia. Gdyby prosta nie przecinała pola, to dość byłoby połączyć jakąkolwiek linią jeden z jej punktów z punktem obwodu krzywej, przesunąć ostrze różniczkowe najprzód wzdłuż tej linii, następnie wzdłuż obwodu pola (w zwrocie ruchu skazówek zegara) i wreszcie znów po linii w zwrocie przeciwnym. 5⁰ Powtarzając wskazane działania na ostatniej krzywej, otrzymujemy wartość momentu drugiego rzędu pola względem prostej: w tenże sposób możemy otrzymywać momenty różnych rzędów. 6⁰ Przyjmijmy, że krzywa całkowa obwodu pola danego została opisana przez punkt, położony najbardziej na lewo na obwodzie, i że punkt początkowy krzywej całkowej leży na osi x: całkujemy tę krzywą całkową w przypuszczeniu, że punkt początkowy nowej krzywej jest na osi x. Skończywszy to całkowanie, puśćmy ręką wózek różniczkowy i pozwólmy narzędziu przesuwać się na kółkach; wtedy krzywa całkowa opisze styczną do krzywej w punkcie końcowym. Styczna ta przetnie oś x w punkcie, którego odcięta równa się odciętej prostej równoległej osi y i przechodzi przez środek ciężkości pola danego; mamy tym sposobem, powtarzając działania przy innym kierunku osi, sposób znajdowania środka ciężkości pola. 7° Możemy wykreślać graficznie pierwiastki równania algebraicznego $f(x)=0$. Połóżmy w tym celu $y=f(x)$ i utwórzmy pochodne kolejne $y'=f'(x)$, $y''=f''(x)$ ...., póki nie dojdziemy do ilości stałej. Nakreślmy następnie prostą równoległą do osi i mającą rzędną równą tej stałej i całkujmy; otrzymamy prostą, która, przy odpowiednim doborze osi, może przedstawiać przedostatnią pochodną. Całkujmy powtórnie, znajdziemy pochodną poprzedzającą i tak dalej postępując, wykreślimy graficznie krzywą $y=f(x)$. Pierwiastki równania $f(x)=0$ odpowiadać będą punktom spotkania tej krzywej z osią x; będą niemi mianowicie odległości tych punktów od początku, podzielone przez jednostkę miary narzędzia. Jednostki, które obrać należy do kreślenia prostej równoległej do osi x i inne kolejne stałe całkowania są niezależne od jednostki miary narzędzia i mogą być obrane dowolnie. Uwaga ta jest ważna, gdyż mogłoby się zdarzyć, że chcąc utrzymać jednę i tęż samę jednostkę miary, moglibyśmy nie znaleść miejsca w obszarze działań narzędzia. 8° Możemy rozwiązać graficznie sławne zagadnienia o kwadraturze koła i o podwojeniu sześcianu. Dla rozwiązania pierwszego zadania dość wykreślić graficznie długość π, t. j. krzywą całkową koła o promieniu 1 (jedność miary narzędzia); otrzymamy wtedy krzywą zygzatowatą, a odległość pomiędzy dwoma kolejnemi ostrzami krzywej daje nam π. Dla rozwiązania drugiego zadania dość zcałkować dwa razy równanie $y=6x$; otrzymamy w ten sposób krzywą $y=x^3$: odcięta tej krzywej, odpowiadająca rzędnej równej 2 (t. j. dwom jednostkom miary niezależnej od jednostki miary narzędzia), przedstawia $\sqrt[3]{2}$ (w jednostkach miary narzędzia). Można też rozwiązać graficznie zagadnienie o podziale kąta na trzy równe części; szczegóły pomijamy. 9° Prócz tego integraf znajduje liczne zastosowania w mechanice, w teoryi krzywej sprężystej, w nauce o elektryczności i t. d. Szczegóły znaleść można w cytowanem dziele Abakanowicza.

DOPEŁNIENIA I SPROSTOWANIA.

ROZDZIAŁ I.

§ 1, str. 1. w wierszu 15-ym od dołu powinno być z a w s z e, zam. z a w s z z e.

§ 2, str. 7. Tytuł dzieła W e s s e l a jest: „Essai sur la représentation analytique de la direction".

§ 3. str. 9. Do literatury w tym paragrafie podanej dołączyć należy: S t u d y (Leipz. Ber. 1881); S c h e f f e r s. M o l l i e n (Math. Ann. 1891, 1893); Encyclopädie der math. Wissensch. 1899, artykul Study'ego: „Theorie der gemeinen und höheren complexen Zahlen".

§ 5. str. 13, wiersz 18 od dołu, powinno być l o g a r y t m o w e, zam. l a g o r y t m o w e.

ROZDZIAŁ II.

§ 1. str. 34. Twierdzenie tu podane udowodnił H o l d e r (Math. Ann. XXXIV. 1889).

§ 6. Do literatury tego przedmiotu należy dołączyć: „Algebrę" W e b e r a (wyd. 2-gie 1898, 1899), w której tomie 2-gim wyłożona jest ogólna teorya grup; nowsze prace H o y e r a (Math.

Ann. 50: 51, 52): dzieło o teoryi grup Burnside'a (Londyn 1897) oraz prace amerykańskich matematyków Colego i Millera: (Quarterly Journ., Bull. of Am. Soc. i t. d.), wreszcie najnowsze prace Frobeniusa w Sprawozdaniach Akademii berlińskiej.

ROZDZIAŁ III.

§ 2. str. 53. Co do literatury ostatniego równania na tej stronie patrz Clebsch-Lindemann „Vorlesungen über Geometrie" II. s. 168.

§ 3. str. 59. Do literatury dołączamy: Frobenius (Crelle LXXXIV). Voss (Bayr. Akad. 1890). Stieltjes (Acta mat. VI).

§ 5. str. 63. Do literatury jakobianów: Jacobi (Crelle XXVII). Neumann (Math. Ann. I).

§ 6. Wyznacznikami rzędu nieskończonego zajmowali się: Hill. Poincaré i Helge v. Koch: prace tego ostatniego ogłoszone w Acta mat. XV. XVI.

ROZDZIAŁ IV

§ 5. Do literatury o ułamkach ciągłych należy dołączyć najnowsze prace Pade'go (Journ. de math. (4). X. 1894. Comptes rendus 1899); porów. artykuł Pringsheima w Encyklopädie der math. Wissenschaften I, 2 (1899).

ROZDZIAŁ V.

§ 3, str. 96. Twierdzenia, w tym paragrafie podane. brzmić powinny tak:

Spółczynniki równania odwrotnego stopnia parzystego, równooddalone od wyrazów skrajnych, są równe (i jednego znaku).

Jeżeli równanie odwrotne jest stopnia nieparzystego, wtedy spółczynniki równoodddalone od wyrazów skrajnych są albo równe i tego samego znaku, albo równe i znaku przeciwnego: wtedy równanie ma pierwiastek $x=-1$ w przypadku pierwszym, $x=+1$ w drugim. Podzieliwszy pierwszą stronę tego równania przez $x+1$ lub odp. przez $x-1$, sprowadzamy je do równania odwrotnego stopnia parzystego.

§ 3. str. 97. Do literatury tego przedmiotu należy dodać: podręczniki algebry: Webera, Netto (Lipsk 1898, 1899) oraz prace Kroneckera (Akad. Berl. 1853, 1856, 1879, Crelle, XCII).

§ 6. str. 107. O równaniach stopnia 3-go i 4-go patrz najnowszą pracę J. Sochockiego (Prace mat.-fiz. X. 1899—1900. oraz „Wiadomości matematyczne“ III, 1899).

§ 9. str. 113. Twierdzenie Budana przypisują także Jourienowi (Analyse des équat. déterm., Paryż 1831), który stosował je w swoich wykładach przed Budanem.

§ 12. str. 119. O teoryi Galois'a patrz także „Algebrę“ Webera.

ROZDZIAŁ VI.

§ 2, str. 127. Co do twierdzenia o zmianie porządku brania pochodnych patrz prace Blancheta (Liouville VI. 1841), Lindelofa (Acta Soc. Fen. VIII), Genocchi'ego (Akad. Turyńska IV, 1869), Schwarza (Abhandlungen t. II. s. 275), Peano (Math. Ann. 1890), Stolza (Grundzüge der Diff. und Int. Rechnung, Lipsk 1899), E. Pascala (Note critiche).

§ 7, str. 142. Do literatury o maximum i minimum funkcyi należy dołączyć Genocchi-Peano (Differential und Integralrechn. Lipsk 1899, s. 177—189).

ROZDZIAŁ VII.

§ 4, str. 163. Tablice Bierens de Haana (zawierające 8339 wzorów) były drukowane poprzednio w r. 1858 w tomie IV

Pamiętników Akademii nauk w Amsterdamie. W r. 1862 tenże autor wydał dzieło: „Exposé de la théorie des transformations et des méthodes d'évaluation des intégrales définies. Do literatury dołączamy nadto: Meyer, Vorlesungen über die Theorie bestiminiter Integrale (Lipsk 1871), Kronecker, Vorlesungen I, Brunel, art. w „Encyclopädie der math. Wissenschaften" (Lipsk 1899).

§ 4, str. 166. Redukcyą całki eliptycznej do kombinacyi trzech całek zasadniczych zajmowali się: Legendre (Fonct. ellip. I, rozd. 4 i 5) Richelot (Crelle XXXIV), Plana (tamże XXXIV).

§ 4, str. 166. Funkcye p (wiersz 3) są funkcyami Weierstrassa.

Całki eliptyczne są szczególnym przypadkiem całek abelowych (p. Rozdz. XV). Charakterystyczne ich własności są następujące: Jeżeli zmienną niezależną przyjmiemy jako zespoloną, to całka gatunku 1-go nigdzie nie staje się nieskończoną; całka gatunku 2-go staje się nieskończoną algebraicznie: to jest granica stosunku jej do pewnej funkcyi algebraicznej nieskończonej w punkcie jest skończona: całka gatunku 3-go ma nieskończoność logarytmową, t. j. granica stosunku jej do logarytmu funkcyi algebraicznej nieskończonej w punkcie jest skończona.

Ważną własność całek eliptycznych wyraża twierdzenie o dodawaniu, stanowiące przypadek szczególny takiegoż twierdzenia dla całek abelowych.

Twierdzenie o dodawaniu dla całek gatunku 1-go brzmi:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

gdy pomiędzy x, y, t zachodzi związek algebraiczny:

$$t = \frac{x\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} + z\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2z^2}.$$

Twierdzenie o dodawaniu dla całek eliptycznych gatunku 2-go ustanowił Legendre (Fonct. ellipt. I): ma ono postać:

$$E(k, \varphi) + E(k, \psi) - E(k, \chi) = k^2 \sin\varphi \sin^2\psi \sin\chi,$$

gdzie pomiędzy φ, ψ, χ zachodzi związek, który otrzymujemy z wyżej podanego, kładąc $x = \sin\varphi$, $z = \sin\psi$, $t = \sin\chi$.

I dla całek gatunku 3-go Legendre podał twierdzenie następujące:

$$\Pi(n, k, \varphi) + \Pi(n, k, \psi) - \Pi(n, k, \chi)$$

$$= \sqrt{\frac{n}{(1+n)(k^2+n)}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\varphi \sin\psi \sin\chi \sqrt{n(1+n)(k^2+n)}}{1 - n\sin^2\chi - n\sin\varphi\sin\psi\cos\chi\,\Delta\chi}\right),$$

gdzie $\Delta\chi = \sqrt{1-k^2\sin^2\chi}$. Jeżeli pozostajemy w dziedzinie zmiennej rzeczywistej, to wzór ten musi być zmieniony, gdy n jest ujemne i mniejsze od jedności. Można wtedy otrzymać wzór, w którym po stronie prawej występuje wprost logarytm. Jeżeli zaś wprowadzamy liczby urojone, to wyrażamy arctg przez logarytm za pomocą wzoru

$$\omega = \frac{1}{2i} \log \frac{i - \omega}{i + \omega}.$$

Twierdzenie to jest właściwie tylko inną postacią twierdzenia o dodawaniu funkcyj eliptycznych $\sin am$, $\cos am$, Δam (patrz Rozdz. XVI) oraz twierdzenia o całkowaniu równania Eulerowego (patrz Rozdz. VIII, § 2).

Dla całek gatunku 1-go w postaci Weierstrassowej twierdzenie o dodawaniu ma postać:

$$\int_{\infty}^{p} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}} + \int_{\infty}^{q} \frac{dq}{\sqrt{4q^3 - g_2 q - g^3}} = \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{\sqrt{4r^3 - g_2 r - g_3}},$$

gdy pomiędzy p, q, r zachodzi związek:

$$\begin{vmatrix} p, & q, & r \\ 1, & 1, & 1 \\ \sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}, & \sqrt{4q^3 - g_2 q - g_3}, & \sqrt{4r^3 - g_2 r - q_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Pierwsze badania nad tym przedmiotem zawdzięczamy Eulerowi (Novi. Comm. Petr. 1761, VI, VII); później ukazała się praca Lagrange'a (Misc. Taur. IV, 1766, 1769) i druga Eulera (Acad. Imp. 1778). Wymieniamy nadto: Richelot (Crelle XXIII, XLIV), Liouville (Comptes rend. 1856), gdzie podana jest wytworna metoda całkowania równania różniczkowego eliptycznego; Schellbach (Crelle, LIV). Wiadomości historyczne podaje Genocchi (Bull. Boncompagni, III, 1870).

Wyrażenia $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$, gdzie $k' = \sqrt{1-k^2}$, gdy droga całkowania jest prostoliniowa, nazywają się całkami zupełnemi: Legendre oznaczał całki zupełne gatunku 1-go przez K, K'. Podobnież $E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, $E\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$ nazywają się całkami zupełnemi gatunku 2-go i oznaczają się przez E i E'. Jest:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi = \int_0^K \log \sin am\,.\, v\, dv = \frac{1}{2} K \log \frac{1}{k} - \frac{\pi}{4} K',$$

$$\int_0^K \log \cos am\, v\, dv = K \log \sqrt{\frac{k'}{k}} - \frac{1}{4} \pi K',$$

$$\int_0^K \log \Delta am\, v\, dv = \frac{1}{2} K \log k'.$$

Przedmiotem tym zajmowali się: Roberts (Liouville (1), XIX, 1854, Schlöm. Ztschrif. II, 1857), Genocchi i Sylvester (Phil. Mag. 1860), Brioschi (Annali di mat. (1), III, 1860), Wangerin (Schlom. Ztschrif. XXXIV).

Na rozwinięcie K i E podajemy wzory:

$$K = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 k^6 + \ldots, \ldots \right\},$$

$$E = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots \right\},$$

Inne rozwinięcia, gdy K bliskie jedności, znajdujemy u Legendre'a (Mém. de Paris 1780, Fonct. ellipt. I) i Schlömilcha (Zeitschrif. f. Math. und Phys. II, s. 49).

Pomiędzy K, K', E, E' zachodzą związki:

$$\frac{\partial K}{\partial k} = -\frac{K}{k} + \frac{E}{kk'^2}, \qquad \frac{\partial K'}{\partial k} = \frac{kK'}{k'^2} - \frac{E'}{kk'^2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial k} = -\frac{K}{k} + \frac{E}{k'}, \qquad \frac{\partial E'}{\partial k} = \frac{kK'^2}{k'^2} - \frac{kE'}{k'^2}.$$

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2} \quad \text{(związek Legendre'a)}.$$

Teoryę zupełną ilości K, K', E, E' znajdujemy u Glaishera (Quarterly Journ. 1885); porówn. Rozdz. XVI.

Całki gatunku 2-go i 3-go dają się wyrazić przez funkcye ϑ lub σ, jeżeli całkę gatunku 1-go przyjmiemy za argument. Jeżeli położymy:

$$u = \int_{\infty}^{p} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}},$$

będzie (patrz Rozdz. XVII, § 5)

$$Z = -\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}, \quad \Pi_u = \log\frac{\sigma(u)}{\sigma(u-u_2)} - \frac{\sigma'(u_1)}{\sigma(u_1)}\,u,$$

$$Q = \log\frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u-u_2)}, \text{ gdzie } q = p(u_1),\ q_1 = p(u_2).$$

§ 4, str. 168. O przekształceniu Gaussa pisał Borchardt (Crelle LVIII, Berliner Ber. 1876).

§ 5, str. 179. O całkach wielokrotnych patrz pracę Jacobi'ego (De determ. funct., Crelle XII, Werke 3). Przypadek $n=2$ rozważał Euler, $n=3$ Lagrange. Porówn. Kronecker (Crelle LXXII, „Vorlesungen etc.“, Lipsk 1894, s. 225).

Twierdzenie Stokesa o przekształceniu całki potrójnej rozciągniętej na objętość na całkę podwójną, rozciągniętą na powierzchnię. ogłoszone zostało w Cambr. Univ. Cal. 1854 r. O całkach podwójnych patrz najnowsze dzieło Stolza: „Vorlesungen über Doppelintegrale“, (Lipsk 1899).

§ 6. str. 172. Całkowaniem różniczek zupełnych zajmował się pierwszy Euler: po nim: Morgan (Quest. J. 1858), Natani (Crelle LXIII), Du Bois-Reymond (Crelle LXX, Math. Ann. XII), Collet (Annales de l'École norm. (1), VII, 1875), Bertrand (Comptes rend. LXXXIII, 1876). Porówn. Forsyth Theorie on diff. equ. (Przekład niemiecki, Lipsk 1893).

ROZDZIAŁ VIII.

§ 6, str. 195. Jeżeli równaniu różniczkowemu nadamy postać $dy_i - f_i dx = 0$ ($i = 1, 2 \ldots, n$), to będziemy mieli układ równań zupełnych lub Pfaffa, całkowalny nieograniczenie, t. j. za pomocą n równań, co znaczy, że daje się wyznaczyć n układów mnożników $\mu_{i1}, \ldots \mu_{in}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), przy pomocy którego dochodzimy do n różniczek zupełnych. Mnożnik μ czyni zadość równania:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\right) = 0.$$

§ 7, str. 201, wiersz 8 od góry, powinno być drgających zamiast dźwięczących.

§ 7, str. 202, wiersz 12 od góry, do literatury dodać. Serret. Compt. rend. LXXIV.

§ 7, ćtr. 204. Do literatury nauki o równaniach różniczkowych dodajemy: L. Heffter „Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen" Lipsk 1894, L. Koenigsbeeger „Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen" Lipsk 1889, C. Jordan Cours d'analyse, t. III: Picard Traité d'analyse: Helge v. Koch w nowej pracy (Akad. Sztokholmska 1899) rozważa układy nieskończenie wielkiego rzędu równań różniczkowych zwyczajnych.

Do literatury teoryi równań różniczkowych zupełnych i równania Pfaffa dodajemy; 1) Dla równań całkowalnych nieograniczenie: Deahna (Crelle XX), Natani (Crelle LXIII, s. 314), Meyer (Math. Ann. V), Frobenius (Crelle LXXXII): 2) Dla układów niecałkowalnych nieograniczenie: Pfaff (Berl. Ak. 1814, 1715), Gauss (1815), Jacobi (Crelle II.

XVII), N a t a n i (Crelle LVIII), C l e b s c h (Crelle LX, LXI), G r a s s m a n n (Ausdehnungslehre 1862), L i e (Archiv für Math. II, 1887), F r o b e n i u s (Crelle LXXXII), D a r b o u x (Bull. Darboux (2), VI), F o r s y t h (Theoris on diff. equ.), V i v a n t i (Rend. Palermo XII), E n g e l (Leipz. Berichte), R u s j a n (Prace mat.-fiz. VIII, IX) i t. d. G u l d b e r g (Akad. w Chrystianii 1898, 1899. Comptes rendus 1899).

ROZDZIAŁ IX.

§ 1, str. 209. Można wykazać, że istnieją grupy, nie zawierające przekształcenia tożsamościowego; przykład podał E n g e l w r. 1894 (patrz str. 163 i 165 t I dzieła L i e g o - E n g e l a, Theorie der Transformationsgruppen).

§ 3, str. 213. Pojęcie p r z e k s z t a ł c e n i a s t y c z n o ś c i o w e g o daje się rozciągnąć na przypadek wielu zmiennych.

§ 4. str. 217 N i e z m i e n n i k i e m c a ł k o w y m nazywamy wyrażenie postaci:

$$I = \int\int \ldots \int \Phi \, dx_1 \, dx_2 \, \ldots \, dx_n ,$$

gdzie Φ jest taką funkcyą zmiennych $x_1, x_2, .., x_n, z_1, z_2, .., z_m$ i pochodnych ilości z względem ilości x, że wartość całki nie ulega zmianie przy przekształceniach grupy. Niezmiennikami całkowemi zajmowali się: L i e (Leipz. Ber. 1886), P o i n c a r é (Acta mat. XII, str. 52, 1890, Ż o r a w s k i (Rozp. Ak. krakowskiej 1895), K o e n i g s (Compt. rend 1895), C a r t a n (Bull. Soc. Math. 1896), H u r w i t z (Gött. Nachr. 1897), L i e (Leipz. Ber. 1897).

ROZDZIAŁ X.

§ 4, str. 231. Do literatury teoryi interpolacyi dodajemy jeszcze: G a u s s (Werke III), L a g r a n g e (Oeuvres VII), C z e b y s z e w (Akad. Peters. 1859), H e r m i t e (Crelle LXXXIV).

Frobenius (tamże LXXIII), Méray (Ann. de l'Ec. norm. 1884), Teixeira (Crelle CX). Bendixson (tamże CI. Acta IX), Pincherle (Akad. bolońska 1893), Netto (Math. Ann. XLII).

Z literatury o kwadraturach przytaczamy: Jacobi (Crelle I). Christoffel (tamże LV), Czebyszew (Liouville (2) XIX), Markoff (Math. Ann. XXI). Stieltjes (Éc. norm (3) I, Compt. rend. XCIX).

Do literatury rachunku odwrotnego różnic: Thomae Zeitschr. f. M. XVI). Le Paige (Nouv. Corr. II, III). Sylvester (Phil. Mag. 1879, Am. J. IV, Messenger (2) XVIII), Cesàro (Nouv. Ann. (3) V), Pincherle (Ist Lomb. 1886, 1894, Acc. Bol. 1895, 1896).

ROZDZIAŁ XII.

§ 1. str. 249. Ostatnie dwa wzory w tym paragrafie brzmieć powinny

$$\Delta a_2 = A_{22} a'_1 - A_{21} a'_2 ; \quad \Delta a_1 = - A_{12} a'_1 + A_{11} a'_2 .$$

§ 4, str. 257. Po wzorach na końcu Nr. 5 należy dodać: spółczynniki tego przekształcenia otrzymujemy, podstawiając, zamiast spółczynników podstawienia danego, ich dopełnienia algebraiczne w wyznaczniku Δ.

§ 4, str. 259, wiersz 1 u góry: zamiast katalektykanty, powinno być kanonizanty. Dla form rzędu parzystego $2m$ istnieje związek pomiędzy spółczynnikami postaci:

$$\begin{vmatrix} a_0, & \dots\dots\dots & a_m \\ a_1, & \dots\dots\dots & a_{m+2} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_m, & \dots\dots\dots & a_{2m} \end{vmatrix} = 0,$$

który nazywa się katalektykantem wyznacznika.

§ 4, str. 259, wiersz 13 od góry, zamiast półzmiennik powinno być półniezmiennik.

§ 4, str. 259, w wierszu ostatnim, zamiast a_{m-2} napisać a_m. zamiast a_{2m} napisać a_{2m-1}: wyrazy w wierszu tuż pod wyznacznikiem należy przekreślić.

ROZDZIAŁ XIV.

§ 4, str. 321, wiersz 4 od góry: zamiast wymierny powinno być niewymierny.

SKOROWIDZ ALFABETYCZNY

rzeczy.

---

*) Liczby oznaczają stronice.