

PRACE NAUKOWE

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

Nr 371

**Inwestycje finansowe i ubezpieczenia –
tendencje światowe a rynek polski**

Redaktorzy naukowci

Krzysztof Jajuga

Wanda Ronka-Chmielowiec



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2014

Redakcja wydawnicza: Jadwiga Marcinek
Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz
Korekta: Barbara Cibis
Łamanie: Małgorzata Czupryńska
Projekt okładki: Beata Dębska

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania
znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa
www.pracnaukowe.ue.wroc.pl
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Publikacja udostępniona na licencji Creative Commons
Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 3.0 Polska
(CC BY-NC-ND 3.0 PL)



© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2014

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-411-0

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Zamówienia na opublikowane prace należy składać na adres:
Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
tel./fax 71 36 80 602; e-mail: econbook@ue.wroc.pl
www.ksiegarnia.ue.wroc.pl

Druk i oprawa: TOTEM

Spis treści

Wstęp	9
Waldemar Aspadarec: Wyniki inwestycyjne funduszy hedge po doświadczeniach kryzysu finansowego	11
Aleksandra Baszczyńska: Metoda jądrowa w analizie finansowych szeregów czasowych.....	23
Katarzyna Byrka-Kita, Mateusz Czerwiński, Agnieszka Perepeczo: Reakcja akcjonariuszy na sprzedaż znaczących pakietów akcji.....	32
Katarzyna Byrka-Kita, Dominik Rozkrut: Ryzyko jako determinanta premii z tytułu kontroli – empiryczna weryfikacja.....	43
Iwona Chomiak-Orsa, Piotr Staszkiwicz: Reduced form of the standard approach for operational risk for economic capital assessment	54
Tadeusz Czernik: Efekt histerezy – wycena opcji i implikowana zmienność	65
Tadeusz Czernik, Daniel Iskra: Modyfikacja geometrycznego ruchu Browna oparta na czasie przebywania. Wycena instrumentów pochodnych, implikowana zmienność – badania symulacyjne.....	75
Magdalena Frasyniuk-Pietrzyk, Radosław Pietrzyk: Efektywność inwestycji funduszy emerytalnych w Polsce – wybrane problemy.....	88
Monika Hadaś-Dyduch: Produkty strukturyzowane – ujęcie algorytmiczne zysku z uwzględnieniem oddziaływania wskaźników rynku finansowego	101
Magdalena Homa: Wpływ strategii inwestycyjnej ubezpieczonego na rozkład wartości portfela ubezpieczeniowego w UFK.....	112
Marietta Janowicz-Lomott, Krzysztof Łyskawa: Kształtowanie indeksowych ubezpieczeń upraw oparte na indywidualizmie w postrzeganiu ryzyka przez gospodarstwa rolne w Polsce	123
Łukasz Jasiński: Innowacje produktowe w ubezpieczeniach zdrowotnych w Polsce.....	137
Lidia Karbownik: Determinanty zagrożenia finansowego przedsiębiorstw sektora TSL w Polsce.....	149
Tomasz Karczyński, Edward Radośniński: Ocena relacji pomiędzy trendami giełd światowych a trendami giełd Europy Środkowowschodniej na przykładzie warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych	165
Krzysztof Kowalke: Efektywność informacyjna Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie	177
Mieczysław Kowerski: Uwagi dotyczące sposobu liczenia stopy wypłaty dywidendy.....	188

Robert Kurek: Systemy informacyjne nadzoru ubezpieczeniowego.....	203
Agnieszka Majewska: Porównanie strategii zabezpieczających portfel akcji z wykorzystaniem kontraktów <i>futures</i> na WIG20 w okresach spadków i wzrostów cen	213
Tomasz Miziołek: Ocena efektywności zarządzania funduszami ETF posiadającymi ekspozycję na polski rynek akcji	224
Joanna Olbryś: Efekt przedziałowy parametru ryzyka systematycznego na GPW w Warszawie SA	236
Andrzej Paliński: Wykorzystanie wartości likwidacyjnej aktywów kredytobiorcy i metody Monte Carlo do wyznaczenia oprocentowania kredytu bankowego.....	245
Jarosław Pawłowski: Zarządzanie ryzykiem pogodowym – przykład wykorzystania pogodowego instrumentu pochodnego przez producenta piwa w Polsce.....	255
Dorota Pekasiewicz: Wybrane testy zgodności dotyczące rozkładów statystyk ekstremalnych i ich zastosowanie w analizach finansowych.....	268
Marcin Salamaga: Efektywność krótkoterminowych inwestycji w złoto	278
Anna Sroczyńska-Baron: Analiza wysokości progu oferty obowiązkowej przy przejściach spółek w oparciu o teorię gier kooperacyjnych	289
Waldemar Tarczyński: Ocena różnych wariantów fundamentalnego portfela papierów wartościowych	298
Magdalena Ulrichs: Zmiany strukturalne na polskim rynku finansowym a sfera realna gospodarki – analiza empiryczna	310
Stanisław Wanat: Efekt dywersyfikacji ryzyka w Solvency II w świetle wyników ilościowego badania wpływu QIS5	320
Ryszard Węgrzyn: Ocena trafności prognoz zmienności indeksu WIG20 konstruowanych na podstawie wybranych modeli klasy GARCH oraz rynkowej zmienności implikowanej.....	331
Stanisław Wieteska: Wybuch jako element ryzyka w ubezpieczeniach od ognia i innych zdarzeń losowych.....	344
Marcelina Więckowska: Obligacje w zarządzaniu ryzykiem katastroficznym	359
Piotr Wybieralski: Zastosowanie wybranych instrumentów pochodnych w warunkach ograniczonej dostępności limitów skarbowych na walutowym rynku pozagieldowym	371
Dariusz Zarzecki: Koszt kapitału, płynność i ryzyko – analiza sektorowa na rynku amerykańskim	383

Summaries

Waldemar Aspadarec: Investment performance of hedge funds after the financial crisis	22
Aleksandra Baszczyńska: Kernel method in the analysis of financial time series	31
Katarzyna Byrka-Kita, Mateusz Czerwiński, Agnieszka Perepeczo: Market reactions to transfer of control within block trades in public companies – empirical evidence	42
Katarzyna Byrka-Kita, Dominik Rozkrut: Risk as a determinant of control premium – empirical evidence.....	53
Iwona Chomiak-Orsa, Piotr Staszkiwicz: Zredukowana forma metody standardowej do oceny kapitału ekonomicznego	64
Tadeusz Czernik: Hysteretic-like effect – derivative pricing and implied volatility	74
Tadeusz Czernik, Daniel Iskra: Modified geometric Brownian motion – occupation time approach. Derivative pricing, implied volatility – simulations.....	87
Magdalena Frasyniuk-Pietrzyk, Radosław Pietrzyk: Pension funds performance in Poland – selected problems	100
Monika Hadaś-Dyduch: Valuation of structured product according to algorithmic interaction with regard to the financial market	110
Magdalena Homa: Effect of investment strategy for the distribution of the portfolio value in unit-linked insurance.....	121
Marietta Janowicz-Lomott, Krzysztof Łyskawa: Individualism in risk perception by farms in Poland and in the development of insurance products	136
Łukasz Jasiński: Product innovations in health insurances in Poland.....	148
Lidia Karbownik: Determinants of financial threat of the enterprises from transport, forwarding and logistic sector in Poland	164
Tomasz Karczyński, Edward Radosiński: Assessment of relation between global and Central Europe stock market trends on the example of the Warsaw Stock Exchange	176
Krzysztof Kowalke: Effectiveness of information on the Warsaw Stock Exchange	187
Mieczysław Kowerski: Some remarks on the calculation of the dividend payout ratio	202
Robert Kurek: Information systems of insurance supervision	212
Agnieszka Majewska: Comparison of hedging using futures on WIG20 in periods of price increases and decreases	223
Tomasz Miziolek: Evaluation of the effectiveness of management exchange-traded funds having exposure on the Polish equity market	235

Joanna Olbryś: Intervalling effect bias in beta: empirical results in the Warsaw Stock Exchange	244
Andrzej Paliński: Bank loan pricing with use the of the Monte Carlo method and the liquidation value of borrower's assets.....	254
Jarosław Pawłowski: Weather risk management – example of using weather derivative by a producer of beer in Poland	267
Dorota Pekasiewicz: Selected tests of goodness of extreme distributions and their application in financial analyses.....	277
Marcin Salamaga: The effectiveness of short-term investment in gold	288
Anna Sroczyńska-Baron: The analysis of the limit of obligatory offer based on the theory of cooperative games	297
Waldemar Tarczyński: Assessment of different variants of fundamental portfolio of securities	309
Magdalena Ulrichs: Structural changes on the Polish financial market and the real economy – an empirical analysis	319
Stanisław Wanat: The diversification effect in Solvency II in the light of the fifth quantitative impact study	330
Ryszard Węgrzyn: Assessment of the forecasts accuracy of the WIG20 index volatility constructed on the basis of selected models of the GARCH class and market implied volatility.....	343
Stanisław Wieteska: Explosion as an element of risk in insurance from fire and other random events.....	358
Marcelina Więckowska: Bonds for catastrophe risk management.....	370
Piotr Wybieralski: The application of selected currency derivatives in terms of constrained amounts of treasury limits in the OTC market.....	382
Dariusz Zarzecki: Cost of capital, liquidity and risk – sectoral analysis on the American capital market.....	411

Dorota Pekasiewicz

Uniwersytet Łódzki

e-mail: pekasiewicz@uni.lodz.pl

WYBRANE TESTY ZGODNOŚCI DOTYCZĄCE ROZKŁADÓW STATYSTYK EKSTREMALNYCH I ICH ZASTOSOWANIE W ANALIZACH FINANSOWYCH¹

Streszczenie: Statystyki ekstremalne, minimum i maksimum, wykorzystywane są w analizach finansowych, ubezpieczeniowych, w meteorologii i kontroli jakości. Pojawienie się nietypowych, rzadko występujących zjawisk powoduje zwykle duże straty finansowe, których wielkość, przy ustalonym prawdopodobieństwie, pozwala określić graniczny rozkład statystyk ekstremalnych. Jest on rozkładem Fréchet’a, Weibulla lub Gumbela. W celu weryfikacji hipotezy dotyczącej przynależności dystrybuanty rozkładu statystyki ekstremalnej do klasy rozkładów Gumbela stosowane są testy zgodności. Wśród testów wyróżnia się dwie grupy. Jedne z testów wymagają istnienia próby losowej złożonej z wartości statystyk ekstremalnych, inne oparte są na statystykach pozycyjnych przekraczających pewien ustalony poziom, zwany progiem. W pracy przedstawione zostały wyniki analiz własności testów wykorzystujących wartości ponadprogowe wraz z przykładem ich zastosowania do weryfikacji hipotez statystycznych o postaci rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu wybranych indeksów giełdowych.

Słowa kluczowe: statystyka maksimum, test zgodności, rozkład Gumbela, rozkład Fréchet’a, rozkład Weibulla.

DOI: 10.15611/pn.2014.371.23

1. Wstęp

Analiza granicznych rozkładów statystyk maksimum i minimum wykorzystywanych w badaniach finansowych związana jest z koniecznością weryfikacji hipotez dotyczących klasy rozkładu analizowanej statystyki ekstremalnej. W pracy zaprezentowane zostały wybrane testy statystyczne służące do badania zgodności rozkładu statystyki ekstremalnej z rozkładem typu Gumbela, Fréchet’a lub Weibulla oraz wyniki przeprowadzonych analiz ich własności, które mogą być pomocne przy wyborze testu stosowanego w badaniach empirycznych.

¹ Artykuł powstał na podstawie badań realizowanych w ramach projektu DEC-2011/01/B/HS4/02746, finansowanych przez NCN.

W pracy rozważane są tylko statystyki maksimum ze względu na następujący związek statystyk minimum i maksimum:

$$X_{(1)}^{(n)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} = -\max\{-X_1, -X_2, \dots, -X_n\} = -(-X)_{(n)}^{(n)}, \quad (1.1)$$

gdzie $X_{(1)}^{(n)}$, $X_{(n)}^{(n)}$ są, odpowiednio, statystyką minimum i maksimum z próby losowej X_1, X_2, \dots, X_n .

Uogólniony rozkład statystyki maksimum $X_{(n)}^{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ określony jest za pomocą dystrybuanty [Embrechts et al. 1997]:

$$F_{\mu, \sigma, \xi}^M(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\xi}}\right) & \text{dla } \xi \neq 0, \quad 1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} > 0, \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right) & \text{dla } \xi = 0, \quad x \in R, \end{cases} \quad (1.2)$$

gdzie μ jest parametrem położenia; σ – skali, a $\frac{1}{\xi}$ – parametrem kształtu.

Szczególnymi przypadkami uogólnionego rozkładu maksimum są rozkłady Gumbela ($\xi = 0$), Fréchet’a ($\xi > 0$) i Weibulla ($\xi < 0$), które charakteryzują graniczne rozkłady maksimum zmiennych losowych, odpowiednio, o „cienkich”, „grubych” i „krótkich” ogonach.

Dystrybuanta graniczna $F_{\mu, \delta, \xi}^m(x)$ statystyki minimum $X_{(1)}^{(n)}$ wyznaczana jest z zależności $F_{\mu, \delta, \xi}^m(x) = 1 - F_{\mu, \sigma, \xi}^M(-x)$, gdzie $F_{\mu, \sigma, \xi}^M(x)$ jest dystrybuantą graniczną $X_{(n)}^{(n)}$.

Postać rozkładu statystyki maksimum zmiennej losowej X ściśle związana jest z rozkładem ogona tej zmiennej, czyli rozkładem zmiennej $Y = X|X > u$, gdzie u jest ustaloną wartością, zwaną progiem. Granicznym rozkładem zmiennej Y jest uogólniony rozkład Pareto o dystrybuancie określonej wzorem:

$$F_{\beta, \xi}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{\frac{-1}{\xi}} & \text{dla } \xi \neq 0, \quad \xi y > -\beta \wedge y > 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) & \text{dla } \xi = 0, \quad y \geq 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

gdzie $\xi \in R$ jest parametrem kształtu, a $\beta > 0$ parametrem skali.

Istotnym, wspólnym dla obydwu rozkładów parametrem jest ξ , zwany indeksem ekstremalnym. Jego znak określa klasę uogólnionych rozkładów statystyk ekstremalnych oraz postać uogólnionego rozkładu Pareto.

2. Testy zgodności weryfikujące hipotezy o rozkładzie maksimum z próby

Weryfikację hipotez dotyczących postaci uogólnionego rozkładu statystyk ekstremalnych (Gumbela, Fréchéta czy Weibulla) można przeprowadzać testami zgodności opartymi na próbach losowych będących ciągami wartości statystyk ekstremalnych lub wartości ponadprogowych.

Niech $Z = X_{(n)}^{(n)}$ będzie zmienną losową określającą maksimum z n -elementowej próby wylosowanej z populacji utożsamianej ze zmienną losową X . Na podstawie m -elementowej próby prostej $Z_1 = X_{(n)1}^{(n)}, \dots, Z_m = X_{(n)m}^{(n)}$ weryfikujemy hipotezę zerową mówiącą, że maksimum ma rozkład Gumbela, czyli hipotezę:

$$H_0 : F(z) \in \Omega_{F_G} \quad (2.1)$$

wobec hipotezy:

$$H_1 : F(z) \notin \Omega_{F_G}, \quad (2.2)$$

gdzie $F(z)$ jest dystrybuantą zmiennej Z , natomiast Ω_{F_G} jest klasą rozkładów Gumbela.

Powyższe hipotezy można zweryfikować, na podstawie m -elementowej próby, stosując jeden z testów: Cramera von Misesa, Andersona–Darlinga lub Kołmogorowa–Smirnowa bądź inny znany test zgodności.

Statystyka testu Cramera von Misesa wyrażana jest wzorem:

$$W_{CM} = \frac{1}{12m} + \sum_{i=1}^m \left(F(Z_i) - \frac{2i-1}{2m} \right)^2. \quad (2.3)$$

Statystyka testu Andersona–Darlinga ma postać :

$$W_{AD} = -m - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (2i-1) (\ln F(Z_i) + \ln(1 - F(Z_{m-i+1}))). \quad (2.4)$$

W przypadku weryfikacji hipotez o rozkładach statystyk ekstremalnych testy Cramera von Misesa i Andersona–Darlinga charakteryzują się lepszymi własnościami niż np. test zgodności chi-kwadrat i Kołmogorowa–Smirnowa. Rozważania dotyczące tych testów oraz wartości krytyczne dla wybranych rozkładów teoretycznych

zawarte są w pracach M.A. Stephens [1974; 1977; 1979; 1991], P. Puig, M.A. Stephens [2000].

Gdy nie posiadamy próby złożonej z m maksimumów, stosujemy tzw. podejście blokowe, polegające na podziale n -elementowej próby X_1, X_2, \dots, X_n na m grup (bloków) i wyznaczeniu w każdej z grup wartości maksymalnej. Zastosowanie tej procedury sprawia, że wartości maksymalne w poszczególnych blokach niekoniecznie są wartościami m największych statystyk pozycyjnych określonych na podstawie tej próby losowej.

Fakt, że rozkład maksimum jest ściśle związany z rozkładem ogona („grube”, „cienkie”, „krótkie” ogony), możemy wykorzystać i stosować metody oparte na wartościach ponadprogowych.

Niech $X_{(1)}^{(n)}, \dots, X_{(n)}^{(n)}$ będzie ciągiem statystyk pozycyjnych otrzymanym z n -elementowej próby prostej X_1, X_2, \dots, X_n . Dla ustalonego progu u wyznaczamy statystyki pozycyjne o wartościach większych niż u i oznaczamy je przez $X_{(n-k)}^{(n)}, \dots, X_{(n)}^{(n)}$.

Hipotezę (2.1) wobec (2.2) możemy zweryfikować, przy przyjętym poziomie istotności α , stosując poniżej przedstawione trzy testy zgodności [Neves et al. 2006; Neves, Fraga Alves 2008].

Sprawdzianem pierwszego z analizowanych testów, zwanego testem ilorazowym, jest statystyka wyrażona wzorem:

$$R_n(k) = \frac{X_{(n)}^{(n)} - X_{(n-k)}^{(n)}}{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (X_{(n-i+1)}^{(n)} - X_{(n-k)}^{(n)})} - \ln k. \quad (2.5)$$

Statystyka ta, przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, ma standaryzowany rozkład Gumbela o dystrybuancie $F_G(x) = \exp(-\exp(-x))$.

Obszar krytyczny wyznaczony jest przez kwantyle $v_{\frac{\alpha}{2}}$, $v_{1-\frac{\alpha}{2}}$, odpowiednio, rzędu $\frac{\alpha}{2}$ i $1 - \frac{\alpha}{2}$ standaryzowanego rozkładu Gumbela. Hipotezę zerową odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej, gdy $R_n(k) < v_{\frac{\alpha}{2}}$ lub $R_n(k) > v_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Sprawdzianem drugiego z testów jest statystyka postaci:

$$G_n(k) = \sqrt{k/4} (G_n^*(k) - 2), \quad (2.6)$$

gdzie

$$G_n^*(k) = \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (X_{(n-i+1)}^{(n)} - X_{(n-k)}^{(n)})^2}{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_{(n-i+1)}^{(n)} - X_{(n-k)}^{(n)} \right)^2}. \quad (2.7)$$

Statystyka $G_n(k)$ ma rozkład asymptotycznie normalny $N(0,1)$.

Hipotezę zerową odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej, gdy $G_n(k) < u_{\frac{\alpha}{2}}$ lub $G_n(k) > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, gdzie $\Phi\left(u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$ oraz $\Phi\left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ i α jest przyjętym poziomem istotności.

Kolejny test zgodności weryfikujący hipotezy o rozkładzie statystyki maksimum charakteryzuje sprawdzian określony wzorem:

$$W_n(k) = \sqrt{k/4} \left(\frac{1}{G_n^*(k) - 1} - 1 \right), \quad (2.8)$$

która ma również rozkład asymptotycznie normalny $N(0,1)$.

Obszar odrzucenia dla tego testu jest identyczny jak dla testu ze statystyką $G_n(k)$.

Hipotezę alternatywną można dokładniej sprecyzować:

$$H_1': F(z) \in \Omega_{F_F} \quad (2.9)$$

lub

$$H_1'': F(z) \in \Omega_{F_W}, \quad (2.10)$$

gdzie Ω_{F_F} oraz Ω_{F_W} są, odpowiednio, klasą rozkładów Fréchet'a i Weibulla.

Gdy hipoteza alternatywna jest postaci H_1' , to odrzucamy hipotezę H_0 na korzyść H_1' , jeśli: $R_n(k) > v_{1-\alpha}$, $G_n(k) > u_{1-\alpha}$ lub $W_n(k) < u_\alpha$, odpowiednio, w przypadku stosowania testu ilorazowego, testu ze sprawdzianem $G_n(k)$ lub testu ze sprawdzianem $W_n(k)$.

Hipotezę H_0 odrzucamy na korzyść hipotezy H_1'' , gdy $R_n(k) < v_\alpha$, $G_n(k) < u_\alpha$ lub $W_n(k) > u_{1-\alpha}$.

3. Analiza własności wybranych testów zgodności

Analiza własności testów: ilorazowego (test I), testu ze statystyką $G_n(k)$ (test II) i testu ze statystyką $W_n(k)$ dla wybranych rozkładów zmiennej losowej X przeprowadzona została metodami symulacyjnymi. Z twierdzeń dotyczących przynależności dystrybuanty maksimum do obszarów przyciągania rozkładów Gumbela, Fréchéta i Weibulla [Castillo et al. 2004] wiadomo, że dla zmiennych o rozkładzie normalnym ($N(\mu, \sigma)$), gamma ($Gamma(a, b)$), w szczególności wykładniczym ($Exp(\lambda)$), statystyka maksimum posiada graniczny rozkład Gumbela, natomiast dla zmiennych o rozkładzie Cauchy'ego ($Ca(m, \lambda)$) i Pareto ($Pa(\theta, \alpha)$) rozkład Fréchéta. Rozważając wymienione klasy rozkładów, badano liczbę odrzuceń hipotezy zerowej mówiącej, że rozkład statystyki maksimum jest Gumbela w przypadku 1000-elementowych prób i powtarzaniu procedury weryfikacji hipotez 10 000 razy. Wartości progów ustalane były na poziomie kwantyla Q rzędu 0,9 i kwantyli wyższych rzędów. W tabelach 1 i 2 przedstawiono wyniki analiz dla wybranych rozkładów i progów będącego kwantylem rzędu 0,95 oraz 0,9. Wartości dla rozkładów normalnego, gamma i wykładniczego stanowią oszacowania rozmiaru testów (tab. 1). Okazało się, że dla rozważanych rozkładów najgorsze własności, spośród analizowanych testów, posiada test III. Odsetek błędnych decyzji znacznie przekracza ustalony poziom istotności 0,05. Lepsze rezultaty uzyskano, ustalając próg na poziomie kwantyla rzędu 0,95. W tabeli 2. zawarte są odsetki poprawnie podjętych decyzji związanych z odrzuceniem fałszywej hipotezy zerowej. Okazało się, że w tym przypadku wykorzystanie elementów próby losowej większych niż kwantyl 0,9 daje lepsze wyniki. Oczywiście więcej jest błędnych decyzji, jeśli indeks ekstremalny jest bliższy 0. W przypadku rozkładów z „grubymi” ogonami różnice między wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu tych testów są mniejsze.

Tabela 1. Odsetek odrzuceń prawdziwej hipotezy zerowej dla rozkładów o „cienkich” ogonach

Rozkład zmiennej losowej X	Test I		Test II		Test III	
	$Q_{0,95}$	$Q_{0,9}$	$Q_{0,95}$	$Q_{0,9}$	$Q_{0,95}$	$Q_{0,9}$
$N(3, 1/2)$	0,0109	0,0782	0,0052	0,1173	0,1820	0,4463
$N(3, 2)$	0,0121	0,0850	0,0080	0,1106	0,1802	0,4336
$Exp(3)$	0,0196	0,0272	0,0378	0,0037	0,0511	0,0546
$Exp(6)$	0,0234	0,0262	0,0538	0,0336	0,0596	0,0584
$Gamma(3,2)$	0,0128	0,0234	0,0191	0,0226	0,0752	0,1189
$Gamma(3,1/2)$	0,0123	0,0219	0,0209	0,0241	0,0731	0,1174

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Odsetek odrzuceń fałszywej hipotezy zerowej dla rozkładów o „grubych” ogonach

Rozkład zmiennej X	Indeks ekstremalny	Test I		Test II		Test III	
		$Q_{0,95}$	$Q_{0,9}$	$Q_{0,95}$	$Q_{0,9}$	$Q_{0,95}$	$Q_{0,9}$
$Ca(3, 1)$	1	0,9128	0,9892	0,9887	0,9999	0,9360	0,9994
$Ca(3, 2)$	1	0,9087	0,9898	0,9887	0,9999	0,9349	0,9994
$Pa(3, 1)$	1	0,9153	0,9903	0,9895	1,0000	0,9410	0,9993
$Pa(3, 2)$	1/2	0,5908	0,7883	0,8167	0,9643	0,5476	0,9039
$Pa(3, 1/2)$	2	0,9974	1,000	1,0000	1,0000	0,9996	1,0000

Źródło: opracowanie własne.

Uzyskane wyniki pozwalają stwierdzić, że dla rozpatrywanych klas rozkładów spośród rozważanych testów najlepsze rezultaty otrzymano przy zastosowaniu testu II, ze statystyką $G_n(k)$.

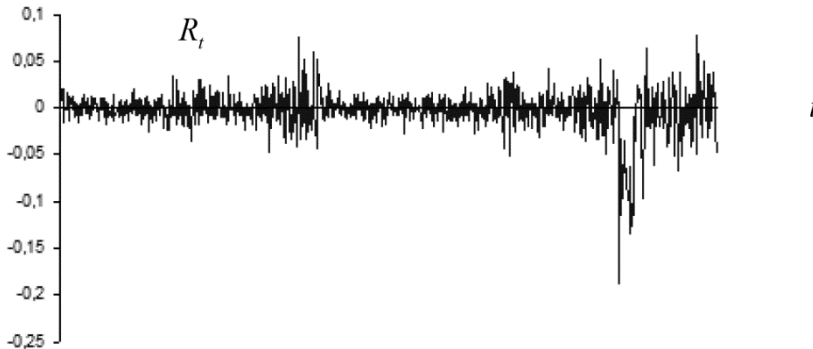
4. Zastosowanie testów zgodności do badania rozkładu statystyki minimum logarytmicznych stóp zwrotu indeksów giełdowych

Zaprezentowane testy zgodności wykorzystane zostały do analizy rozkładu statystyk ekstremalnych dwóch indeksów: polskiego indeksu WIG 20 i amerykańskiego DJIA. Rozważano logarytmiczne dzienne stopy zwrotu wymienionych indeksów. Aby stosować przedstawione metody, zakładamy, że ciąg logarytmicznych dziennych stóp jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach. Wartości dziennych logarytmicznych stóp zwrotu indeksu WIG 20 i DJIA dla kolejnych 1000 dni przedstawiają rysunki 1 i 2.

Zastosowanie testów: ilorazowego, ze statystyką $G_n(k)$ oraz ze statystyką $W_n(k)$ wymaga rozważania zmiennych losowych $-R_1, -R_2, \dots$, gdzie R_i oznaczają logarytmiczne dzienne stopy zwrotu, odpowiednio dla indeksu WIG 20 oraz DJIA. Wtedy weryfikujemy hipotezy o przynależności dystrybuanty rozkładu statystyki maksymalnej zmiennych $-R_1, -R_2, \dots$ do obszaru przyciągania dystrybuanty rozkładu Gumbela, czyli hipotezy $H_0 : F(z) \in \Omega_{FG}$ wobec hipotezy alternatywnej mówiącej, że dystrybuanta ta należy do obszaru przyciągania dystrybuanty rozkładu Fréchéta $H_1' : F(z) \in \Omega_{F_r}$.

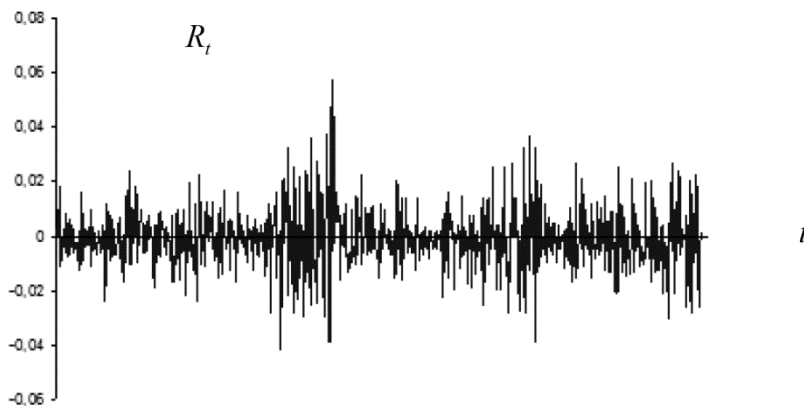
Wyznaczone wartości statystyk testów wynosiły dla WIG 20: $R_{1000}(50) = 0,095$, $G_{1000}(50) = -0,301$, $W_{1000}(50) = 0,329$, zatem zastosowanie tych testów pozwoliło podjąć decyzję o braku podstaw do odrzucenia hipotezy zero-

wej. Dla indeksu DJIA otrzymano: $R_{1000}(50) = -0,275$, $G_{1000}(50) = -0,178$, $W_{1000}(50) = 0,188$ i podobnie jak w poprzednim przypadku uzyskane wyniki sprawiają, że brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.



Rys. 1. Dzielne logarytmiczne stopy zwrotu indeksu WIG 20 w okresie 25.08.2009–19.09.2013

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Dzielne logarytmiczne stopy zwrotu indeksu DJIA w okresie 29.08.2009–19.09.2013

Źródło: opracowanie własne.

5. Podsumowanie

Rozważane testy statystyczne mają zastosowanie w analizach finansowych, gdy szacowaniu podlegają miary wartości narażonej na ryzyko. Jedno z podejść określających wartość zagrożoną *VaR* oparte jest na teorii zdarzeń ekstremalnych, inne wykorzystuje metodę wartości ponadprogowych służącą do modelowania ogonów rozkładu.

dów rozważanych zmiennych. Pierwsza z metod wymaga znajomości uogólnionego rozkładu statystyki ekstremalnej zmiennej losowej określającej wielkość strat lub wielkość logarytmicznych stóp zwrotu, druga zaś uogólnionego rozkładu Pareto stanowiącego oszacowanie rozkładu wartości przekraczających pewien ustalony próg. W obydwu przypadkach istotne jest rozstrzygnięcie, do jakiej klasy rozkładów należy statystyka maksimum. Podjęcie decyzji o postaci granicznego rozkładu statystyki maksimum na podstawie zaprezentowanych w pracy testów zgodności, a następnie oszacowanie parametrów uogólnionego rozkładu statystyki ekstremalnej lub uogólnionego rozkładu Pareto pozwoli określić wielkości kwantyli, które wykorzystywane są do wyznaczania wielkości narażonej na ryzyko.

Literatura

- Castillo E., Hadi A.S., Balakrishnan N., Sarabia J.M., 2004, *Extreme value and related models with application in engineering and science*, Wiley Interscience, A. John Wiley & Sons Inc., New Jersey.
- Davis R.A., Resnick S.T., 1984, *Tail estimates motivated by extreme value theory*, The Annals of Statistics, no. 17, p. 1467-1487.
- Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T., 1997, *Modelling extremal events for insurance and finance*, Springer Verlag, Berlin.
- Neves C., Fraga Alves M.I., 2008, *Testing extreme value conditions – an overview and recent approaches*, REVSTAT – Statistical Journal, no. 6, p. 83-100.
- Neves C., Picek J., Fraga Alves M.I., 2006, *The contribution of the maximum to the sum of excesses for testing max-domains of attraction*, Journal Statistical. Planning and Inference, no. 136, p. 1281-1301.
- Puig P., Stephens M.A., 2000, *Tests of fit for the Laplace distribution with applications*, Technometrics, no. 42, p. 417-424.
- Stephens M.A., 1974, *EDF Statistics for goodness of fit and some comparisons*, Journal of the American Statistical Association, no. 69, p. 730-737.
- Stephens M.A., 1977, *Goodness of fit for the extreme value distribution*, Biometrika, no. 64, p. 583-588.
- Stephens M.A., 1991, *Tests of fit for the Cauchy distribution based on the empirical distribution function*, Technical Report, www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a243201.pdf (28.08.2013).
- Stephens M.A., 1979, *Tests of fit for the Logistic distribution based on the empirical distribution function*, Biometrika, no. 66, p. 591-595.

SELECTED TESTS OF GOODNESS OF EXTREME DISTRIBUTIONS AND THEIR APPLICATION IN FINANCIAL ANALYSES

Summary: Minimum and maximum statistics are used in the financial analyses, insurance, meteorology and quality control. The appearance of untypical events causes large financial losses. The sizes of these losses determine the limiting distribution of extreme statistics, which may be the Fréchet, Weibull or Gumbel distribution. The verification of the hypothesis that the distribution function belongs to the Gumbel distribution is based on the goodness-of-fit tests. There are two groups among the tests. Some of the tests require a random sample consisting of the minimum or maximum values, other are based on order statistics, which exceed a prespecified level, called a threshold. This paper presents the results of analyzes of the selected tests and the example of their application to the verification of the statistical hypotheses about the form of the distribution of logarithmic returns of the selected indexes.

Keywords: maximum statistic, goodness-of-fit tests, Gumbel distribution, Fréchet distribution, Weibull distribution.