

# PRACE NAUKOWE

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

# RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

Nr 371

**Inwestycje finansowe i ubezpieczenia –  
tendencje światowe a rynek polski**

Redaktorzy naukowci

Krzysztof Jajuga

Wanda Ronka-Chmielowiec



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
Wrocław 2014

Redakcja wydawnicza: Jadwiga Marcinek  
Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz  
Korekta: Barbara Cibis  
Łamanie: Małgorzata Czupryńska  
Projekt okładki: Beata Dębska

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania  
znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa  
[www.pracnaukowe.ue.wroc.pl](http://www.pracnaukowe.ue.wroc.pl)  
[www.wydawnictwo.ue.wroc.pl](http://www.wydawnictwo.ue.wroc.pl)

Publikacja udostępniona na licencji Creative Commons  
Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 3.0 Polska  
(CC BY-NC-ND 3.0 PL)



© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
Wrocław 2014

**ISSN 1899-3192**  
**ISBN 978-83-7695-411-0**

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Zamówienia na opublikowane prace należy składać na adres:  
Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
tel./fax 71 36 80 602; e-mail: [econbook@ue.wroc.pl](mailto:econbook@ue.wroc.pl)  
[www.ksiegarnia.ue.wroc.pl](http://www.ksiegarnia.ue.wroc.pl)

Druk i oprawa: TOTEM

## Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	9
<b>Waldemar Aspadarec:</b> Wyniki inwestycyjne funduszy hedge po doświadczeniach kryzysu finansowego .....	11
<b>Aleksandra Baszczyńska:</b> Metoda jądrowa w analizie finansowych szeregów czasowych.....	23
<b>Katarzyna Byrka-Kita, Mateusz Czerwiński, Agnieszka Perepeczo:</b> Reakcja akcjonariuszy na sprzedaż znaczących pakietów akcji.....	32
<b>Katarzyna Byrka-Kita, Dominik Rozkrut:</b> Ryzyko jako determinanta premii z tytułu kontroli – empiryczna weryfikacja.....	43
<b>Iwona Chomiak-Orsa, Piotr Staszkiwicz:</b> Reduced form of the standard approach for operational risk for economic capital assessment .....	54
<b>Tadeusz Czernik:</b> Efekt histerezy – wycena opcji i implikowana zmienność .....	65
<b>Tadeusz Czernik, Daniel Iskra:</b> Modyfikacja geometrycznego ruchu Browna oparta na czasie przebywania. Wycena instrumentów pochodnych, implikowana zmienność – badania symulacyjne.....	75
<b>Magdalena Frasyniuk-Pietrzyk, Radosław Pietrzyk:</b> Efektywność inwestycji funduszy emerytalnych w Polsce – wybrane problemy.....	88
<b>Monika Hadaś-Dyduch:</b> Produkty strukturyzowane – ujęcie algorytmiczne zysku z uwzględnieniem oddziaływania wskaźników rynku finansowego .....	101
<b>Magdalena Homa:</b> Wpływ strategii inwestycyjnej ubezpieczonego na rozkład wartości portfela ubezpieczeniowego w UFK.....	112
<b>Marietta Janowicz-Lomott, Krzysztof Łyskawa:</b> Kształtowanie indeksowych ubezpieczeń upraw oparte na indywidualizmie w postrzeganiu ryzyka przez gospodarstwa rolne w Polsce .....	123
<b>Łukasz Jasiński:</b> Innowacje produktowe w ubezpieczeniach zdrowotnych w Polsce.....	137
<b>Lidia Karbownik:</b> Determinanty zagrożenia finansowego przedsiębiorstw sektora TSL w Polsce.....	149
<b>Tomasz Karczyński, Edward Radośniński:</b> Ocena relacji pomiędzy trendami giełd światowych a trendami giełd Europy Środkowowschodniej na przykładzie warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych .....	165
<b>Krzysztof Kowalke:</b> Efektywność informacyjna Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie .....	177
<b>Mieczysław Kowerski:</b> Uwagi dotyczące sposobu liczenia stopy wypłaty dywidendy.....	188

<b>Robert Kurek:</b> Systemy informacyjne nadzoru ubezpieczeniowego.....	203
<b>Agnieszka Majewska:</b> Porównanie strategii zabezpieczających portfel akcji z wykorzystaniem kontraktów <i>futures</i> na WIG20 w okresach spadków i wzrostów cen .....	213
<b>Tomasz Miziołek:</b> Ocena efektywności zarządzania funduszami ETF posiadającymi ekspozycję na polski rynek akcji .....	224
<b>Joanna Olbryś:</b> Efekt przedziałowy parametru ryzyka systematycznego na GPW w Warszawie SA .....	236
<b>Andrzej Paliński:</b> Wykorzystanie wartości likwidacyjnej aktywów kredytobiorcy i metody Monte Carlo do wyznaczenia oprocentowania kredytu bankowego.....	245
<b>Jarosław Pawłowski:</b> Zarządzanie ryzykiem pogodowym – przykład wykorzystania pogodowego instrumentu pochodnego przez producenta piwa w Polsce.....	255
<b>Dorota Pekasiewicz:</b> Wybrane testy zgodności dotyczące rozkładów statystyk ekstremalnych i ich zastosowanie w analizach finansowych.....	268
<b>Marcin Salamaga:</b> Efektywność krótkoterminowych inwestycji w złoto .....	278
<b>Anna Sroczyńska-Baron:</b> Analiza wysokości progu oferty obowiązkowej przy przejściach spółek w oparciu o teorię gier kooperacyjnych .....	289
<b>Waldemar Tarczyński:</b> Ocena różnych wariantów fundamentalnego portfela papierów wartościowych .....	298
<b>Magdalena Ulrichs:</b> Zmiany strukturalne na polskim rynku finansowym a sfera realna gospodarki – analiza empiryczna .....	310
<b>Stanisław Wanat:</b> Efekt dywersyfikacji ryzyka w Solvency II w świetle wyników ilościowego badania wpływu QIS5 .....	320
<b>Ryszard Węgrzyn:</b> Ocena trafności prognoz zmienności indeksu WIG20 konstruowanych na podstawie wybranych modeli klasy GARCH oraz rynkowej zmienności implikowanej.....	331
<b>Stanisław Wieteska:</b> Wybuch jako element ryzyka w ubezpieczeniach od ognia i innych zdarzeń losowych.....	344
<b>Marcelina Więckowska:</b> Obligacje w zarządzaniu ryzykiem katastroficznym .....	359
<b>Piotr Wybieralski:</b> Zastosowanie wybranych instrumentów pochodnych w warunkach ograniczonej dostępności limitów skarbowych na walutowym rynku pozagieldowym .....	371
<b>Dariusz Zarzecki:</b> Koszt kapitału, płynność i ryzyko – analiza sektorowa na rynku amerykańskim .....	383

## Summaries

<b>Waldemar Aspadarec:</b> Investment performance of hedge funds after the financial crisis .....	22
<b>Aleksandra Baszczyńska:</b> Kernel method in the analysis of financial time series .....	31
<b>Katarzyna Byrka-Kita, Mateusz Czerwiński, Agnieszka Perepeczo:</b> Market reactions to transfer of control within block trades in public companies – empirical evidence .....	42
<b>Katarzyna Byrka-Kita, Dominik Rozkrut:</b> Risk as a determinant of control premium – empirical evidence.....	53
<b>Iwona Chomiak-Orsa, Piotr Staszkiwicz:</b> Zredukowana forma metody standardowej do oceny kapitału ekonomicznego .....	64
<b>Tadeusz Czernik:</b> Hysteretic-like effect – derivative pricing and implied volatility .....	74
<b>Tadeusz Czernik, Daniel Iskra:</b> Modified geometric Brownian motion – occupation time approach. Derivative pricing, implied volatility – simulations.....	87
<b>Magdalena Frasyniuk-Pietrzyk, Radosław Pietrzyk:</b> Pension funds performance in Poland – selected problems .....	100
<b>Monika Hadaś-Dyduch:</b> Valuation of structured product according to algorithmic interaction with regard to the financial market .....	110
<b>Magdalena Homa:</b> Effect of investment strategy for the distribution of the portfolio value in unit-linked insurance.....	121
<b>Marietta Janowicz-Lomott, Krzysztof Łyskawa:</b> Individualism in risk perception by farms in Poland and in the development of insurance products .....	136
<b>Łukasz Jasiński:</b> Product innovations in health insurances in Poland.....	148
<b>Lidia Karbownik:</b> Determinants of financial threat of the enterprises from transport, forwarding and logistic sector in Poland .....	164
<b>Tomasz Karczyński, Edward Radosiński:</b> Assessment of relation between global and Central Europe stock market trends on the example of the Warsaw Stock Exchange .....	176
<b>Krzysztof Kowalke:</b> Effectiveness of information on the Warsaw Stock Exchange .....	187
<b>Mieczysław Kowerski:</b> Some remarks on the calculation of the dividend payout ratio .....	202
<b>Robert Kurek:</b> Information systems of insurance supervision .....	212
<b>Agnieszka Majewska:</b> Comparison of hedging using futures on WIG20 in periods of price increases and decreases .....	223
<b>Tomasz Miziolek:</b> Evaluation of the effectiveness of management exchange-traded funds having exposure on the Polish equity market .....	235

---

<b>Joanna Olbryś:</b> Intervalling effect bias in beta: empirical results in the Warsaw Stock Exchange .....	244
<b>Andrzej Paliński:</b> Bank loan pricing with use the of the Monte Carlo method and the liquidation value of borrower's assets.....	254
<b>Jarosław Pawłowski:</b> Weather risk management – example of using weather derivative by a producer of beer in Poland .....	267
<b>Dorota Pekasiewicz:</b> Selected tests of goodness of extreme distributions and their application in financial analyses.....	277
<b>Marcin Salamaga:</b> The effectiveness of short-term investment in gold .....	288
<b>Anna Sroczyńska-Baron:</b> The analysis of the limit of obligatory offer based on the theory of cooperative games .....	297
<b>Waldemar Tarczyński:</b> Assessment of different variants of fundamental portfolio of securities.....	309
<b>Magdalena Ulrichs:</b> Structural changes on the Polish financial market and the real economy – an empirical analysis .....	319
<b>Stanisław Wanat:</b> The diversification effect in Solvency II in the light of the fifth quantitative impact study .....	330
<b>Ryszard Węgrzyn:</b> Assessment of the forecasts accuracy of the WIG20 index volatility constructed on the basis of selected models of the GARCH class and market implied volatility.....	343
<b>Stanisław Wieteska:</b> Explosion as an element of risk in insurance from fire and other random events.....	358
<b>Marcelina Więckowska:</b> Bonds for catastrophe risk management.....	370
<b>Piotr Wybieralski:</b> The application of selected currency derivatives in terms of constrained amounts of treasury limits in the OTC market.....	382
<b>Dariusz Zarzecki:</b> Cost of capital, liquidity and risk – sectoral analysis on the American capital market.....	411

**Andrzej Paliński**

AGH w Krakowie

e-mail: palinski@zarz.agh.edu.pl

---

## **WYKORZYSTANIE WARTOŚCI LIKWIDACYJNEJ AKTYWÓW KREDYTOBIORCY I METODY MONTE CARLO DO WYZNACZENIA OPROCENTOWANIA KREDYTU BANKOWEGO**

---

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono model symulacyjny pozwalający na wyznaczenie oprocentowania kredytu bankowego na etapie zawierania umowy kredytowej. Punktem wyjścia do obliczeń jest model teoretyczny wykorzystujący teorię gier, z którego wynika, że kredytobiorca, mając możliwość renegotjacji zadłużenia bankowego, dąży do spłaty kwoty kredytu nie wyższej niż wartość likwidacyjna swoich aktywów z punktu widzenia banku. W związku z tym oprocentowanie kredytu powinno uwzględniać nie tylko premię na ryzyko niepowodzenia działalności gospodarczej dłużnika, ale także premię na ewentualny spadek wartości likwidacyjne aktywów kredytobiorcy. Zawarty w pracy przykładowy model symulacyjny bierze pod uwagę wiele zmiennych losowych, w tym: przepływy pieniężne kredytobiorcy w kolejnych latach działalności, wartości aktywów posiadanych przez kredytobiorcę przed zawarciem umowy kredytowej, stopy odzysku poszczególnych kategorii aktywów i inne, a także ich wzajemne współczynniki korelacji. Wyniki symulacji pokazują, że przy jednakowej rentowności i ryzyku przedsięwzięcia gospodarczego dłużnika rentowność kredytu dla banku zależy w dużym stopniu od wartości aktywów posiadanych przez kredytobiorcę przed rozpoczęciem przedsięwzięcia.

**Słowa kluczowe:** kredyt, bank, oprocentowanie, wartość likwidacyjna, symulacja.

DOI: 10.15611/pn.2014.371.21

### **1. Wstęp**

Dwa kluczowe elementy wyróżniają umowę kredytową na tle innych umów finansowych: zabezpieczenie spłaty i możliwość renegotjacji. Groźba utraty zabezpieczenia stanowi bodziec do spłaty kredytu po zawarciu umowy. Z drugiej strony, możliwość renegotjacji skłania kredytobiorcę do przerzucania części ryzyka na kredytodawcę. Istotny wpływ na zachowanie kredytobiorcy w trakcie umowy kredytowej odgrywa wartość likwidacyjna jego majątku stanowiącego zabezpieczenie spłaty [Aghion, Bolton 1992; Hart, Moore 1994; 1998; Bolton, Scharfstein 1996]. Gdy

wartość likwidacyjna jest niska, rośnie siła przetargowa kredytobiorcy i obniżają się kwoty spłacanego zadłużenia.

Badania empiryczne potwierdzają wpływ wartości likwidacyjnej aktywów kredytobiorców na oprocentowanie, a także kwoty i terminy zapadalności umów kredytowych oraz wyniki renegotjacji spłaty zadłużenia kredytowego (zob. m.in.: [John et al. 2003; Franks, Sussman 2005; Benmelech, Bergman 2008; 2009; Paliński 2013c]).

Niniejsza praca nawiązuje do zagadnienia ryzyka kredytowego i wyznaczania premii na to ryzyko w stopie oprocentowania kredytu. Klasyczny już w tym zakresie model Mertona [1974], traktujący kredyt jako opcję sprzedaży na aktywa kredytobiorcy, odnosi się w głównej mierze do długu zaciąganego w wyniku emisji papierów wartościowych i w zasadzie nie uwzględnia możliwości renegotjacji typowej dla kredytów bankowych. Ponadto spojrzenie na spłatę zadłużenia kredytowego jako zachowanie strategiczne kredytobiorcy wymaga wzięcia pod uwagę wspomnianego już wpływu wartości likwidacyjnej aktywów kredytobiorcy na jego postępowanie w trakcie spłaty kredytu. W celu równoczesnego uwzględnienia możliwości renegotjacji oraz wartości likwidacyjnej zbudowany został teoretyczny formalny model dedukcyjny wykorzystujący teorię gier do określenia zachowania kredytobiorcy w trakcie spłaty kredytu, uzależniający wysokość spłaty od wartości likwidacyjnej majątku kredytobiorcy. Model teoretyczny posłużył w niniejszym artykule do zbudowania modelu symulacyjnego.

Celem artykułu jest wykorzystanie autorskiego modelu teoretycznego do wyznaczenia stopy procentowej bankowego kredytu gospodarczego z użyciem symulacji Monte Carlo oraz wykazanie, że model symulacyjny uwzględniający wartość likwidacyjną może być wykorzystany do wyznaczania stopy procentowej. Praca zorganizowana jest następująco: w części 2. przedstawiono założenia modelu symulacyjnego, część 3. zawiera wyniki analizy symulacji. Artykuł zakończony jest krótkim podsumowaniem.

## 2. Model wyceny kredytu z użyciem metody Monte Carlo

Przedstawiona w niniejszej pracy symulacyjna metoda wyznaczania stopy procentowej dla kredytu gospodarczego nawiązuje do modelu teoretycznego wykorzystującego teorię gier [Paliński 2013a; 2013b]. Przedsiębiorca zawiera z bankiem umowę kredytową  $(I, R_1, C)$ , która przy danej wielkości kredytu  $I$  określa kwotę spłaty kredytu  $R_1$ , będącą wartością bieżącą sumy rat kapitałowych i odsetkowych, oraz zabezpieczenie spłaty o wartości  $C$ . Wynik przedsięwzięcia jest zmienną losową  $Y$  o realizacjach  $y \in [0, \bar{y}] \subset \mathbb{R}_+$ , o ciągłej i różniczkowalnej dystrybucji  $F(y)$ .

W sytuacji niewypłacalności kredytobiorca może się zwrócić do banku z wnioskiem o umorzenie części zadłużenia. Bank może dokonać restrukturyzacji długu albo przejąć zabezpieczenie spłaty wraz z przedsięwzięciem. Wartość zabezpieczenia spłaty jest dla banku niższa niż dla kredytobiorcy ze względu na koszty jego przejęcia i wynosi  $bC$ , gdzie  $0 \leq b < 1$ . Analogicznie, wartość przedsięwzięcia dla banku



wynosi  $aY$ , gdzie  $0 \leq a < 1$ . Wprowadza się pojęcie wartości likwidacyjnej kredytu  $L(y) = ay + bC + \bar{u}$ , gdzie  $\bar{u}$  oznacza poziom rezerwacji banku. Poziom rezerwacji może być dodatni wtedy, gdy bank woli szybko odzyskać zaangażowane środki i nie chce się wdawać w długotrwały proces restrukturyzacji, nie widząc korzyści z dalszej współpracy z kredytobiorcą. Jednakże wtedy, gdy kredytobiorca jest w stanie poprawić przyszłe wyniki finansowe i bank może liczyć na dochody związane z dalszą współpracą z kredytobiorcą, poziom rezerwacji stanie się wartością ujemną.

Kredytobiorca, który po zaciągnięciu kredytu osiągnął niezbyt dobre wyniki działalności gospodarczej, może próbować poprawić swoją sytuację kosztem banku. Falszując sprawozdania finansowe i ukrywając część dochodów, może próbować renegocjować zadłużenie, starając się uzyskać umorzenie wyższe, niż byłoby to niezbędne dla utrzymania płynności. Tracąc przy tym reputację i narażając się na wzrost oprocentowania następnych kredytów, kredytobiorca może zatrzymać dla siebie wystarczająco dużą kwotę przepływów pieniężnych, aby zrównoważyć podwyżkę kosztu kolejnych kredytów.

W takiej sytuacji bank nie jest w stanie w pełni poznać rzeczywistych wyników gospodarczych dłużnika. Na podstawie formalnej analizy modelu<sup>1</sup> okazało się jednak, że kredytobiorcy starają się spłacać kwoty równoważące wartość likwidacyjną swoich aktywów, nie dążąc do głębszego umorzenia, gdyż prowadziłoby to do egzekucji kredytu i utraty składników majątku. Dzieje się tak dlatego, że gdyby nawet niewielka grupa kredytobiorców próbowała spłacać kwoty niższe niż ich wartość likwidacyjna, bank preferowałby wypowiedzenie umowy kredytowej i egzekucję zadłużenia, ponieważ taka strategia zapewniałaby wyższą wartość oczekiwaną przy braku znajomości rzeczywistych wyników kredytobiorcy. Stąd w równowadze kredytobiorca proponuje umorzenie kredytu zapewniające bankowi wartość likwidacyjną, a bank akceptuje taką propozycję.

Kredytobiorca spłaca mniejszą z dwóch wartości: kwotę równą wartości likwidacyjnej lub kwotę spłaty określoną w umowie kredytowej, zatem dochód banku z tytułu zawartej umowy kredytowej będzie stanowił zawsze mniejszą z dwóch wartości:

$$\pi_B = \min\{L(y), R_1\},$$

gdzie:  $\pi_B$  – dochód banku z umowy kredytowej;  $L(y)$  – wartość likwidacyjna kredytu;  $R_1$  – kwota spłaty określona w umowie kredytowej (zdyskontowana wartość rat kapitałowych i odsetkowych).

Podejście teoriogrowe do spłaty kredytu może zostać wykorzystane praktycznie do określenia oprocentowania kredytu. Zgodnie z modelem teoretycznym, przy niskim zwrocie z przedsięwzięcia, przy którym wartość likwidacyjna kredytu nie przewyższa kwoty spłaty określonej w umowie, kredytobiorca spłaca wartość likwidacyjną. Powyżej takiego zwrotu kredytobiorca spłaca kwotę  $R_1$  określoną w umowie kredytowej. Stąd wartość oczekiwana dochodu banku obejmuje sumę wartości

<sup>1</sup> Twierdzenia wraz z dowodami znajdują się w: [Paliński 2013b].

oczekiwanej likwidacji kredytu w przypadku braku spłaty i wartości oczekiwanej spłaty w wyniku restrukturyzacji kredytu, które są równe oczekiwanej wartości likwidacyjnej, oraz wartość oczekiwaną spłaty  $R_1$  zgodnej z umową kredytową. Wyznaczenie stopy procentowej dla kredytu w modelu możliwe jest zatem na podstawie poniższego wzoru:

$$\int_0^{\frac{1}{a}(R_1 - bC - \bar{u})} (ay + bC + \bar{u})f(y)dy + R_1 \int_{\frac{1}{a}(R_1 - bC - \bar{u})}^{\bar{y}} f(y)dy - I(1 + r_B) = 0, \quad (1)$$

gdzie pierwsza całka wyznacza wartość oczekiwaną spłaty równej wartości likwidacyjnej, a druga – wartość oczekiwaną spłaty kredytu zgodnej z umową kredytową.

Model w szczególności nadaje się do wyceny dużych kredytów inwestycyjnych, w przypadku których kredytobiorca wraz z wnioskiem o kredyt powinien dostarczyć analizę ryzyka przedsięwzięcia zawierającą rozkłady prawdopodobieństwa czynników ryzyka projektu. W przypadku mniejszych przedsięwzięć inwestycyjnych bank może wykorzystywać rozkłady empiryczny wynikające z danych historycznych.

Rozważany model stanowi, jak większość modeli teoretycznych, uproszczenie rzeczywistości, gdyż w przeciwnym wypadku nie dałoby się go rozwiązać analitycznie. Zwiększenie realistyczności modelu jest możliwe dzięki podejściu numerycznemu i technikom symulacji Monte Carlo. Podejście numeryczne pozwala np. na uwzględnienie w modelu zmienności wartości aktywów kredytobiorcy oraz korelacji ich wartości ze zwrotem z przedsięwzięcia inwestycyjnego i cyklem koniunkturalnym (por. [Niinimäki 2011]). Słabszy zwrot z przedsięwzięcia wiąże się zwykle z gorszą koniunkturą gospodarczą w branży i czyni aktywa dłużnika mniej atrakcyjnymi dla innych przedsiębiorców. Możliwe jest także uzależnienie wartości współczynników  $a$  i  $b$  we wzorze (1) od kondycji finansowej kredytobiorcy. Gorsze wyniki gospodarcze przedsiębiorcy rodzą pokusę nadużycia i ukrywania składników majątku oraz sprzyjają przejmowaniu aktywów przez innych wierzycieli.

Idea metody Monte Carlo polega na wygenerowaniu ciągu  $i = 1, 2, \dots, n$  niezależnych  $k$ -wymiarowych zmiennych losowych  $Z_i$  o jednakowej dystrybuancie  $F(z)$  reprezentującej  $k$  stochastycznych czynników w modelu i wykonaniu z jego użyciem  $n$ -krotnych deterministycznych obliczeń modelu. W wyniku tej procedury otrzymywany jest rozkład szukanej zmiennej losowej (np. zysk, stopa zwrotu, cena instrumentu finansowego). Zmienna losowa  $Z_i$  uzyskiwana jest za pomocą generatora liczb pseudolosowych (ewentualnie *quasi*-losowych) o rozkładzie jednostajnym na  $[0, 1]^k$  i metody „odwracania dystrybuanty”, tzn.  $Z = F^{-1}(U)$ , gdzie  $U$  jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym  $U \sim \text{Unif}[0, 1]^k$ . Błąd estymatora Monte Carlo jest proporcjonalny do  $n^{-1/2}$ . W przypadku wielowymiarowego rozkładu normalnego  $Z \sim N(\mu, \Sigma)$  o macierzy wariancji-kowariancji  $\Sigma$  w celu uzyskania zależności między zmiennymi losowymi można wykorzystać dekompozycje: Choleskiego, wartości własnych lub wartości osobliwych; szerzej zob. [Glasserman 2004; Jackel 2002].

Oprocentowanie kredytu  $r$  w modelu symulacyjnym (wzór (3)) wyznaczane jest tak, aby wartość bieżąca (NPV) ciągu przepływów pieniężnych banku w trakcie umowy kredytowej dyskontowanych stopą  $r_B = r_d + r_m$  będącą sumą kosztu pozyskania kapitałów  $r_d$  oraz marży na pokrycie kosztów działalności operacyjnej  $r_m$  wynosiła zero. Przedstawia to poniższy wzór:

$$NPV = \sum_{t=0}^T \frac{-I_t + p_t + i_t + L_t}{(1 + r_B)^t} = 0 \quad (2)$$

oraz

$$i_t = D_t(1 + r), \quad (3)$$

gdzie:  $I_t$  – transze kredytu;  $p_t$  – spłata rat kapitałowych;  $i_t$  – płatności odsetkowe i prowizje;  $L_t$  – wartość likwidacyjna przejętych aktywów;  $r_B$  – stopa dyskontowa;  $D_t$  – zadłużenie kredytowe w okresie  $t$ ;  $T$  – liczba okresów do wygaśnięcia płatności z tytułu umowy kredytowej;  $r$  – szukana stopa oprocentowania kredytu.

Częstotliwość okresów powinna odpowiadać płatnościom rat (miesiąc, kwartał, rok), a stopy procentowa i dyskontowa mogą zostać sprowadzone do efektywnych stóp rocznych uwzględniających procent składany. Zmiennymi losowymi w modelu mogą być: koszt pozyskania środków finansowych (depozyty, kapitały własne, rynek międzybankowy), marża na pokrycie kosztów operacyjnych banku, przepływy pieniężne wygenerowane przez przedsięwzięcie inwestycyjne kredytobiorcy w kolejnych okresach, wartość dotychczasowych aktywów kredytobiorcy posiadanych przed zaciągnięciem kredytu stanowiących zabezpieczenie spłaty  $C$ , stopa odzysku dla dotychczas posiadanych aktywów  $b$ , stopa odzysku dla aktywów wytworzonych w wyniku realizacji przedsięwzięcia  $a$ , poziom rezerwacji  $\bar{u}$ . Co więcej, zmienne losowe  $a$  oraz  $b$  mogą być wielowymiarowymi zmiennymi losowymi  $a = (a_1, a_2, \dots, a_q)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ , w których wymiar zmiennej losowej  $q$  oraz  $p$  reprezentuje liczbę różnych grup aktywów wchodzących w skład majątku dłużnika.

W uproszczonym modelu przedstawionym w dalszej części przyjęto następujące założenia. Przedsięwzięcie trwa trzy lata. W pierwszym roku odbywa się realizacja inwestycji. Przedsięwzięcie inwestycyjne generuje przepływy pieniężne dopiero w drugim i trzecim roku  $CF_i$ , gdzie  $i = 2, 3$ . Kredyt inwestycyjny w kwocie  $I = 1000$  wypłacany jest w jednej transzy w ostatnim dniu roku 0. Karencja spłaty kapitału wynosi jeden rok. Spłata kapitału przewidziana jest w równych rocznych ratach w ostatnim dniu lat 2 i 3. Przy braku pełnej spłaty w drugim roku niespłacona rata kapitałowa i odsetkowa powiększa zadłużenie na początek roku 3. W ogólniejszym modelu należałoby przyjąć, że takie rozwiązanie bank akceptuje tylko wtedy, gdy wartość oczekiwana przyszłych spłat przewyższa wartość likwidacyjną. Przy braku pełnej spłaty zadłużenia bank przejmuje aktywa kredytobiorcy według ich wartości likwidacyjnej. Zmienne losowe w modelu:

- przepływy pieniężne z przedsięwzięcia w drugim roku  $CF_2 \sim N(800, 400)$  – przeważnie przedsięwzięcie inwestycyjne nie osiąga pełnej zdolności produkcyjnej w początkowym okresie po uruchomieniu;
- przepływy pieniężne z przedsięwzięcia w trzecim roku  $CF_3 \sim N(1200, 600)$ , o współczynniku korelacji z  $CF_2$  wynoszącym  $\rho_{CF_2,CF_3} = 0,7$  – początkowy sukces lub niepowodzenie projektu w znacznym stopniu wpływają na jego dalsze wyniki finansowe;
- $a \sim N(0,4, 0,1)$ , o współczynniku korelacji z  $CF_3$   $\rho_{a,CF_3} = 0,7$  – mimo że nie wprowadzono do modelu jawnej zmiennej reprezentującej cykl koniunkturalny, zakłada się, że wartość likwidacyjna jest zależna od wyników przedsiębiorcy, czyniąc aktywa bardziej wartościowymi w korzystnych warunkach gospodarczych; z kolei przy niskim zwrocie z przedsięwzięcia zła kondycja finansowa dłużnika zwiększa groźbę przejścia aktywów przez innych wierzycieli;
- $b \sim N(0,4, 0,1)$ , o współczynniku korelacji z  $CF_3$   $\rho_{b,CF_3} = 0,5$  – analogiczna zależność jak dla współczynnika  $a$ , ale o mniejszej sile korelacji z wynikami przedsięwzięcia, ponieważ dotyczy aktywów już wcześniej posiadanych przez przedsiębiorcę;
- $\bar{u} \sim N(0, 100)$ , o współczynniku korelacji z  $CF_2$   $\rho_{u,CF_2} = -0,8$ , o współczynniku korelacji z  $CF_3$   $\rho_{u,CF_3} = -0,9$  – silna ujemna korelacja oznacza, że przy wysokim dochodzie generowanym przez przedsięwzięcie bank poniósłby koszt utraczonych korzyści związanych z dalszą współpracą z przedsiębiorcą w sytuacji przejścia aktywów i doprowadzenia go do upadłości;
- koszt pozyskania kapitałów  $r_d \sim N(4,0\%, 1,0\%)$  jednakowy w całym okresie kredytowania.

Marżę na pokrycie kosztów operacyjnych ustalono jako wartość zdeterminowaną wynoszącą  $r_m = 2\%$ . Wartość aktywów kredytobiorcy posiadanych przed rozpoczęciem realizacji projektu przyjęto także jako wartość zdeterminowaną. Amortyzowano ją 10-procentową roczną stopą amortyzacji i zmieniano w analizie decyzyjnej w zakresie od 1000 do 4000 ze skokiem 500.

Zamiast wielu zmiennych losowych reprezentujących przepływy pieniężne, a także wartość aktywów kredytobiorcy czy koszt pozyskania funduszy w kolejnych okresach, przy dużej liczbie okresów (np. miesięcznych) możliwe jest wprowadzenie zmiennej losowej opisującej proces przejścia pomiędzy kolejnymi okresami. Proces ten ponadto może być modelowany jako losowa stopa wzrostu albo proces błędzenia losowego (zob. [Siarka 2012]).

### 3. Wyniki symulacji

Główne założenia modelu obliczeniowego przedstawiono w tabeli 1. Symulację Monte Carlo wykonano z użyciem programu Oracle® Crystal Ball dla 50 000 przebiegów symulacyjnych. Wyniki symulacji zawarte są w tabeli 2. Stopa procentowa-

nia kredytu  $r$  uzyskiwana jest w wyniku podejścia iteracyjnego poprzez wielokrotne przybliżanie aż do spełnienia równania (1).

**Tabela 1.** Założenia modelu obliczeniowego

Parametr	Lata			
	0	1	2	3
<b>Stopa procentowa</b>	<b>7,26%</b>			
Stopa amortyzacji aktywów przedsiębiorcy	10,00%			
Koszt pozyskania funduszy	4,00%			
Wymagana stopa zwrotu	6,00%			
Transza kredytu	-1000,0			
Zadłużenie		1000,0	1000,0	500,0
Rata kapitałowa			500,0	500,0
Rata odsetkowa		72,6	72,6	36,3
Wartość aktywów przedsiębiorcy	2000,0	1727,4	1554,7	1399,2
Przepływy finansowe z projektu			800,0	1200,0
Przepływy skumulowane zatrzymane			227,4	1427,4
Poziom rezerwacji $\bar{u}$				0,0
Parametr odzysku $a$			0,5	0,5
Parametr odzysku $b$			0,4	0,4
Wartość likwidacyjna			735,6	1273,4
<b>Przepływy pieniężne banku</b>	<b>-1000,0</b>	<b>72,6</b>	<b>572,6</b>	<b>536,3</b>
<b>Zdykontowany dochód banku NPV</b>	<b>~ 0</b>			

– Zacieniowane komórki tabeli oznaczają zmienne losowe.

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki symulacji dowodzą, że przy jednakowej rentowności i ryzyku przedsięwzięcia gospodarczego rentowność kredytu zależy w dużym stopniu od wartości zabezpieczeń (aktywów posiadanych przez kredytobiorcę) przed rozpoczęciem przedsięwzięcia. Zależność ta jest szczególnie silna przy pominięciu poziomu rezerwacji banku  $\bar{u}$ . Skorelowanie poziomu rezerwacji z wynikami przedsięwzięcia powoduje, że przy dobrych wynikach finansowych kredytobiorcy bank uzyskuje dodatkową wartość korzyści z dalszej współpracy z nim. Z kolei przy złych wynikach finansowych kredytobiorca, obawiając się skłonności banku do przejęcia zabezpieczeń, wykorzystuje większą część przepływów pieniężnych do spłaty zadłużenia. Oczekiwana stopa zwrotu z kredytu wymagana przez bank przyjęta została jako 600 p.b., podczas gdy oprocentowanie kredytu, jakim bank musi obciążyć kredytobiorcę dla zapewnienia wymaganej oczekiwanej stopy zwrotu, waha się pomiędzy 615 p.b. a 982 p.b.

**Tabela 2.** Wyniki symulacji stopy oprocentowania kredytu w zależności od początkowej wartości aktywów kredytobiorcy

Wartość początkowa aktywów kredytobiorcy	Stopa procentowa	
	Bez poziomu rezerwacji banku (p.b.)	Z poziomem rezerwacji banku (p.b.)
1000	982	865
1500	878	780
2000	794	726
2500	735	689
3000	707	630
3500	681	623
4000	664	615

– Punkt bazowy to jedna setna punktu procentowego.

Źródło: opracowanie własne.

#### 4. Podsumowanie

Zawarty w pracy model symulacyjny obrazuje sposób, w jaki teoretyczny model teoriogrowy może zostać wykorzystany do wyceny kredytu przy zastosowaniu metody Monte Carlo. Przykład liczbowy wyraźnie potwierdza zależność rentowności kredytu od wartości likwidacyjnej aktywów kredytobiorcy, co jest zgodne z modelem teoretycznym. Przy niskiej wartości aktywów, które posiada przedsiębiorca przed podpisaniem umowy kredytowej, stopa procentowa musi być podwyższona o ponad 3 p.p. ponad wymaganą przez bank stopę zwrotu z kredytu ustaloną na 6%.

Model symulacyjny pozwala na skorelowanie z sobą zmiennych losowych, w szczególności wyników działalności gospodarczej kredytobiorcy ze współczynnikami odzysku z jego aktywów. Możliwe jest także skorelowanie wartości aktywów z cyklem koniunkturalnym (por. [Niinimäki 2011]). Przedstawiony model symulacyjny jest jedynie przykładem i stanowi uproszczenie wymagające dalszych badań wdrożeniowych z wykorzystaniem licznych danych empirycznych posiadanych przez banki. W modelu, który miałby stać się narzędziem stosowanym w praktyce bankowej, znaczną trudność będzie stanowiło uzyskanie rozkładów prawdopodobieństwa wartości aktywów kredytobiorcy i stóp odzysku dla różnych rodzajów kredytów i branż. Jego zaletą może być możliwość powiązania wyników gospodarczych kredytobiorcy i wartości jego aktywów z prognozą cyklu koniunkturalnego, co stanowi obecnie przedmiot wielu dyskusji i opracowań, a także element wytycznych dla banków przyjętych w regulacjach Bazylea III.

Zaproponowany w pracy model jest w pewnym stopniu zbliżony do strukturalnego modelu zarządzania ryzykiem kredytowym Moody's-KMV, a ogólniej – modelu Mertona [1974], w którym kredyt traktowany jest jako opcja sprzedaży na aktywa

przedsiębiorstwa. Różnica polega na tym, że w zaproponowanym w niniejszej pracy modelu wykorzystującym teorię gier stosuje się pojęcie wartości likwidacyjnej, które uwzględnia koszty przejścia aktywów kredytobiorcy przez bank. Ponadto, ze względu na możliwość renegotjacji zadłużenia kredytowego, dochody banku ulegają obniżeniu w stosunku do kwoty spłaty wymaganej w pierwotnej umowie kredytowej.

Przedstawiony w niniejszej pracy model szczególnie dobrze nadaje się do wyceny kredytów bankowych dla podmiotów nienotowanych na giełdzie papierów wartościowych, zwłaszcza że metodyka zaproponowana przez Moody's-KMV dla tego typu podmiotów wydaje się nazbyt arbitralna [Crouhy et al. 2000] i nieprzekonująca [Noetzel 2011]. Problemem pozostaje jednak zgromadzenie odpowiednio dużego zbioru danych do „wykalibrowania modelu”, biorąc pod uwagę fakt, że opracowanie modelu Moody's-KMV trwało kilka lat przy wykorzystaniu olbrzymiej bazy danych Moody's.

## Literatura

- Aghion P., Bolton P., 1992, *An Incomplete Contracts Approach to Financial Contracting*, Review of Economic Studies, no. 3.
- Benmelech E., Bergman N., 2008, *Liquidation values and the credibility of financial contract renegotiation: evidence from U.S. airlines*, Quarterly Journal of Economics, no. 4.
- Benmelech E., Bergman N., 2009, *Collateral pricing*, Journal of Financial Economics, no. 91.
- Bolton P., Scharfstein D., 1996, *Optimal Debt Structure and the Number of Creditors*, The Journal of Political Economy, no. 1.
- Crouhy M., Galai D., Mark R., 2000, *A comparative analysis of current credit risk models*, Journal of Banking & Finance, no. 1-2.
- Franks J.R., Sussman O., 2005, *Financial Distress and Bank Restructuring of Small to Medium Size UK Companies*, The Review of Finance, no. 1.
- Glasserman P., 2004, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer Verlag, New York–Berlin–Heidelberg.
- Hart O., Moore J., 1994, *A Theory of Debt Based on the Inalienability of Human Capital*, The Quarterly Journal of Economics, no. 4.
- Hart O., Moore J., 1998, *Default and renegotiation: a dynamic model of debt*, The Quarterly Journal of Economics, no. 1.
- Jackel P., 2002, *Monte Carlo Methods in Finance*, John Wiley & Sons, Chichester.
- John K., Lynch A., Puri M., 2003, *Credit ratings, collateral, and loan characteristics: implications for yield*, Journal of Business, t. 76.
- Merton R., 1974, *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*, The Journal of Finance, t. 29.
- Niinimäki J., 2011, *Nominal and true cost of loan collateral*, Journal of Banking and Finance, t. 35.
- Noetzel P., 2011, *Strukturalne i zredukowane modele pomiaru ryzyka kredytowego wykorzystywane w praktyce bankowej*, Ekonomia i Zarządzanie, nr 1.
- Paliński A., 2013a, *Analiza ekonomicznych warunków umowy kredytowej w ujęciu teorii gier*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Paliński A., 2013b, *Loan payment and renegotiation: The role of the liquidation value*, SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=2325424> (13.06.2015).
- Paliński A., 2013c, *Wpływ wartości likwidacyjnej aktywów firmy na oprocentowanie kredytu – badania polskich spółek giełdowych*, Bank i Kredyt, nr 2.

Siarka P., 2012, *Symulacyjna analiza rentowności kredytów detalicznych. Testowanie warunków skrajnych*, Bank i Kredyt, nr 2.

## **BANK LOAN PRICING WITH USE THE OF THE MONTE CARLO METHOD AND THE LIQUIDATION VALUE OF BORROWER'S ASSETS**

**Summary:** This paper presents a simulation model which allows to determine bank loan interest rate at the stage of writing a loan agreement. The starting point of the calculation is a theoretical model that uses the game theory, which states that the borrower, with the possibility of bank debt renegotiation, aims to repay the loan amount no greater than the liquidation value of its assets from the point of view of the bank. Therefore, the loan interest rate should take into account not only the premium for the risk of failure of debtor's business, but also a premium for a possible decline in the value of the borrower's assets. An example of a simulation model presented in the article takes into account a number of random variables including: the borrower's cash flow in subsequent years, the value of assets owned by the borrower prior to the credit agreement, the recovery rate of each asset category and the other, and their mutual correlations. The simulation results show that, having equal profitability and risk of the debtor's project, the profitability of the bank loan depends largely on the value of assets owned by the borrower before the start of the project.

**Keywords:** loan, bank, interest rate, liquidation value, simulation.