STATYSTYCZNA ANALIZA RYZYKOWNYCH SYTUACJI DECYZYJNYCH

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 13(19)

Stanisława Ostasiewicz

Wyższa Oficerska Szkoła Wojsk Lądowych we Wrocławiu

ISSN 1644-6739
e-ISSN 2449-9765

DOI: 10.15611/sps.2015.13.08

Streszczenie: W prezentowanym artykule zaproponowano nową klasyfikację sytuacji ryzykownych, umożliwiającą jednolite ujęcie problemów związanych z niepewnością i ryzykiem. Z podanej klasyfikacji jasno wynika, że nie ma sensu, bo to niemożliwe, formułowanie ogólnych teorii ryzyka. W większości przypadków postępowanie w warunkach niepewności i ryzyka polega na stosowaniu ogólnego rozsądku opartego na doświadczeniu. Co nie oznacza, że postępowanie takie nie jest wspierane wiedzą naukową. Istnieją jednak sytuacje ryzykowne, które od blisko stu lat stanowią przedmiot intensywnych badań naukowych. W większości przypadków są to sytuacje decyzyjne badane za pomocą metod statystycznych. Tym badaniom poświęcono główną część niniejszej pracy. Jednym z ważniejszych celów było wyjaśnienie różnicy i znaczenia dwóch głównych pojęć stosowanych w statystycznych modelach decyzyjnych. Jednym z nich jest pojęcie użyteczności, drugim zaś subiektywna oczekiwana użyteczność. Użyteczność w sensie Bernoullego, mimo użycia takiego samego słowa, jest istotnie różna od użyteczności w sensie von Neumanna i Morgensterna. Tak samo „subiektywna wartość oczekiwana" w teorii Savage'a, poza samym podłożem psychologicznym, nie ma nic wspólnego z subiektywną wartością oczekiwaną w teorii niepewnych perspektyw (nie prospektów!) Kahnemana i Twersky'ego.

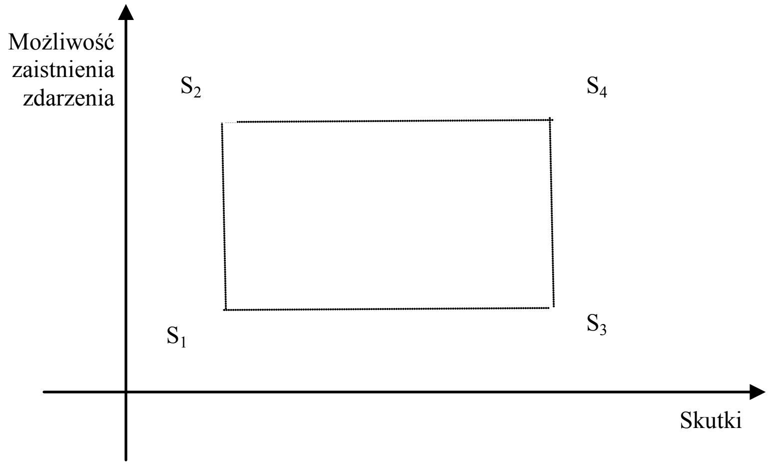
Słowa kluczowe: klasyfikacja sytuacji ryzykownych, maksymalizacja użyteczności, teorie ryzyka, teorie subiektywnej użyteczności.

1. Wstęp

Sytuacja ryzykowna jest w niniejszej pracy rozumiana jako każda sytuacja, w której jednostka narażona jest na niekorzystne dla niej skutki, jakie mogą być spowodowane w wyniku zajścia określonego zdarzenia losowego. Jednostką może być osoba fizyczna, osoba prawna lub dowolna jednostka instytucjonalna, taka jak rodzina, małżeństwo, korporacja itp. Możliwość zajścia zdarzenia losowego powodującego niekorzystne (niepożądane) skutki nazywa się ryzykiem. Same skutki nazywane są stratą lub szkodą.

Sytuację ryzykowną charakteryzują więc dwie podstawowe cechy: stopień niepewności zajścia zdarzenia losowego oraz wielkość (stopień) powodowanych szkód. W prezentowanej pracy rozpatrzone są sytuacje ryzykowne, dla których stopień niepewności określany (mierzony) jest za pomocą prawdopodobieństwa, zaś szkody określone są za pomocą jednostek pieniężnych.

Jeżeli przyjmiemy, że prawdopodobieństwo oznaczone symbolem p jest liczbą z odcinka jednostkowego, zaś wielkość szkody, oznaczona symbolem w, jest dowolną liczbą rzeczywistą nieujemną, to geometryczną interpretację sytuacji ryzykownych stanowią punkty zbioru $[0,1]x[0,\infty]$. Realne szkody, wyrażone monetarnie, zawsze stanowią jakąś liczbę skończoną. Typowe sytuacje ryzykowne można przedstawić tak jak na rys. 1. Każdy punkt prostokąta S_1, S_2, S_3, S_4 reprezentuje jakąś sytuację ryzykowną.



Rys. 1. Graficzna prezentacja sytuacji ryzykownych

Źródło: opracowanie własne.

Wyodrębniane są cztery „graniczne" przypadki:

$S_1 =$ (Szanse małe, skutki minimalne)

$S_2 =$ (Szanse duże, skutki minimalne)

$S_3 =$ (Szanse małe, skutki maksymalne)

$S_4 =$ (Szanse duże, skutki maksymalne)

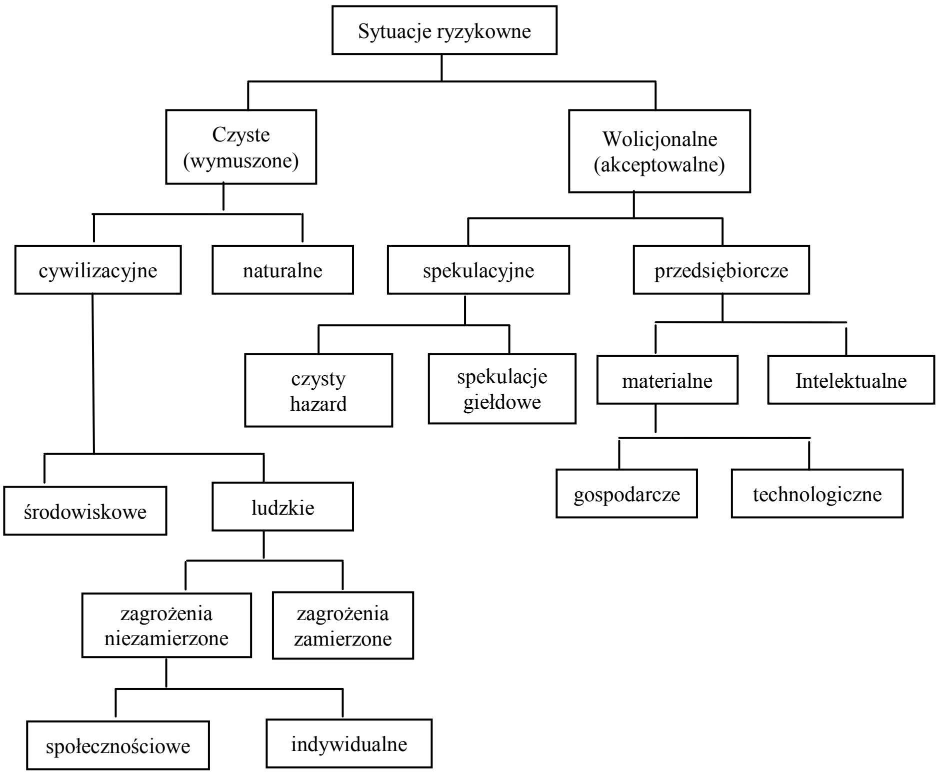
Sytuacje typu S_1 są praktycznie niezauważalne i nie podlegają analizie, sytuacje typu S_2 i S_3 są akceptowalne, zaś sytuacje typu S_4 są katastrofalne (tragiczne) i nieakceptowalne.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 13(19)

2. Klasyfikacja sytuacji ryzykownych

Różne sytuacje ryzykowne omawiane są zwykle w oderwaniu od siebie. Brak jest pełnej klasyfikacji wszystkich możliwych sytuacji ryzykownych. Klasyfikację sytuacji ryzykownych zaproponowanych w tym artykule przedstawiono na rys. 2. Przede wszystkim jest to klasyfikacja hierarchiczna obejmująca praktycznie wszystkie sytuacje ryzykowne. Ważną jej cechą jest także możliwość przypisania do różnych klas ryzyka odpowiedniej metody postępowania, czyli sposobu radzenia sobie z taką sytuacją. Zamiast takiego wyrażenia , w literaturze często używane jest określenie „zarządzanie ryzykiem".

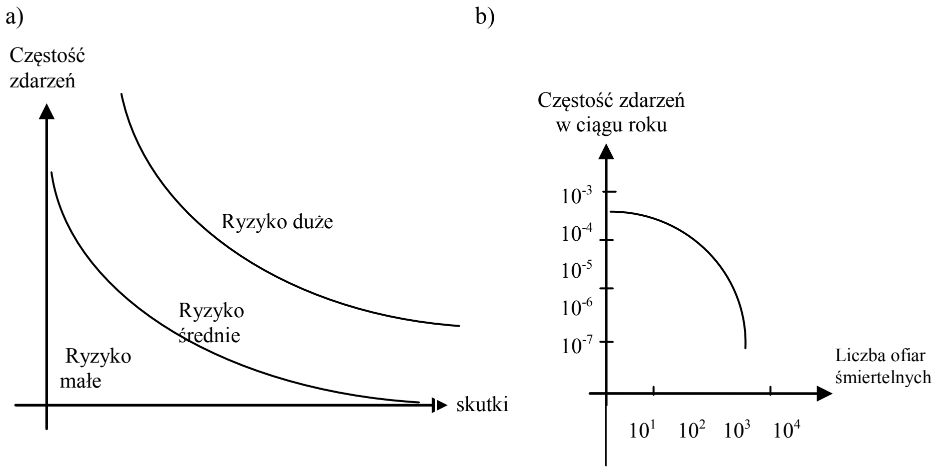


Rys. 2. Klasyfikacja sytuacji ryzykownych

Źródło: opracowanie własne.

W celu większej jasności przedstawionego schematu, niżej wymieniono typowe przykłady wyodrębnionych klas sytuacji ryzykownych.

1. Ryzyko cywilizacyjne dotyczące środowiska (zatrucie wód, zanieczyszczenie powietrza).
2. Niezamierzone zagrożenia społecznościowe (promieniowanie, społeczeństwo ryzyka).
3. Niezamierzone zagrożenia indywidualne (wypadki drogowe, wypadki przy pracy).
4. Zamierzone zagrożenia (kradzieże, rozbój, wandalizm).
5. Ryzyko sił natury (huragany, powodzie).
6. Czysty hazard (gra w kasynie, akrobatyka, wspinaczka wysokogórska).
7. Spekulacje giełdowe.
8. Ryzyko prowadzenia działalności gospodarczej (bankructwo, ruina).
9. Ryzyko technologiczne (awarie w fabrykach, wybuch gazu, awarie budowlane).
10. Ryzyko przedsiębiorczości intelektualnej (niepowodzenie reklamy, nieudany film).



Rys. 3. Klasy sytuacji ryzykownych

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Lind 1982].

Przyjmijmy, zgodnie z powszechnie stosowaną praktyką, że w niektórych przypadkach dopuszczalna jest „substytucja" szans na zajście zdarzenia i wielkości szkód powodowanych tym zdarzeniem. Przy takim założeniu możemy wyznaczyć izokwanty jednakowego ryzyka, tak jak to pokazano na rys. 3a. Zauważmy jednak wyraźnie, że

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 13(19)

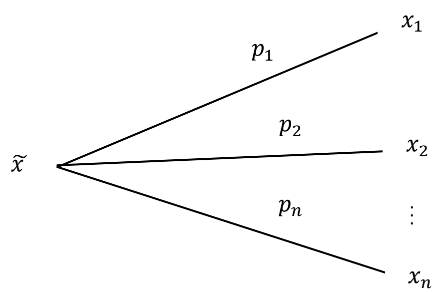
zasada substytucji stosowana jest głównie w zarządzaniu, przy podejmowaniu czy planowaniu decyzji gospodarczych. Natomiast w przypadku ryzyka cywilizacyjnego czy technologicznego nie można mówić o stosowaniu żadnej zasady, bo to ryzyko „jest jakie jest", ono nie podlega ani sterowaniu, ani zarządzaniu. Aby jednak jakoś sobie radzić w warunkach takiego ryzyka, możemy co najwyżej obserwować jak ono się „zachowuje", i odpowiednio do tego dostosowywać swoje zachowanie i swoje decyzje. Jako przykład takiej obserwacji posłużyć może oszacowanie izokwanty jednakowego ryzyka awarii elektrowni (por. rys. 3b). Izokwantę taką wyznaczono na podstawie obserwacji awarii 100 elektrowni. Inne konkretne przykłady tego typu omówione są w pracy [Lind 1982].

3. Analiza formalna sytuacji ryzykownych

Istnieje wiele sytuacji, które nie wymagają analizy całej przestrzeni ryzykownej (takiej jak na rys. 2). Szczególnym przypadkiem są sytuacje, oznaczmy je symbolem $\tilde{x}$, gdy skutki zdarzenia losowego można określić za pomocą jednej wielkości w. Sytuacje tego typu przedstawimy w postaci modelu Bernoullego:

$\tilde{x} = (p, w)$, gdzie p jest to prawdopodobieństwo zajścia niekorzystnego zdarzenia.

Jeśli zaś skutki można wyrazić w postaci ciągu liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ i odpowiadających im prawdopodobieństw $p_1, p_2, \dots, p_n$, to mamy do czynienia z tzw. prostą sytuacją ryzykowną $\tilde{x} = (p, x) = (p_1, p_2, \dots, p_n; x_1, x_2, \dots, x_n)$. Graficznie przedstawia się ją tak, jak pokazano na rys. 4.



Rys. 4. Prosta sytuacja ryzykowna

Źródło: opracowanie własne.

Wielkości $p_1, p_2, \dots, p_n$ interpretuje się zwykle jako prawdopodobieństwa stanów natury.

Jeżeli skutki zdarzeń losowych mogą być dowolną liczbą rzeczywistą (z pewnego przedziału), to całą sytuację ryzykowną $\tilde{x}$ charakteryzuje się za pomocą dystrybuanty $F_{\tilde{x}}$. Poza prostymi sytuacjami, którym odpowiadają proste rozkłady prawdopodobieństwa, istnieją sytuacje bardziej skomplikowane. Niżej podane są dwa typy takich sytuacji.

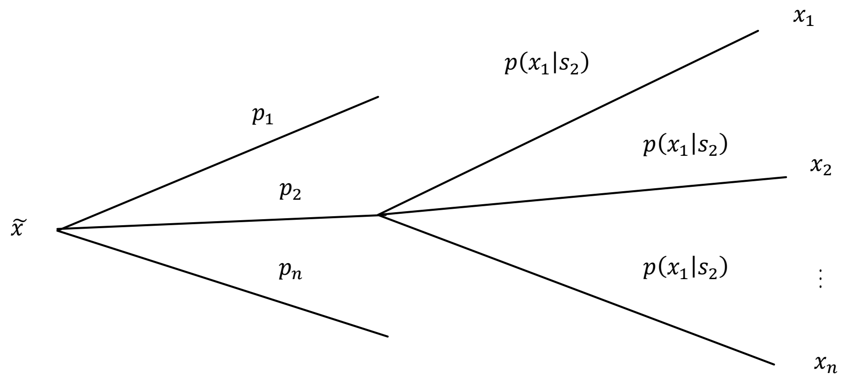
W pierwszym przypadku są to sytuacje, gdy niekorzystne skutki zdarzenia losowego określa się za pomocą wielkości losowych $\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}, \dots, \widetilde{x_n}$, to sytuację taką zapisujemy w postaci:

$$\tilde{X} = (p_1, p_2, \dots, p_n; \widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}, \dots, \widetilde{x_n}).$$

Zapis ten oznacza, że sytuację ryzykowną utożsamiamy z loterią $\tilde{X}$. Przy czym jest to taka loteria, że „wygrywa” się na niej także loterie. Zauważmy, że loterię $\widetilde{x_i}$ „wygrywa” się z prawdopodobieństwem p_i , zaś loteria $\widetilde{x_i}$ jest postaci:

$$\widetilde{x_i} = ((p_1|s_i), (p_2|s_i), \dots, (p_n|s_i); x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Sytuacje takie graficznie reprezentowane są w postaci tzw. loterii złożonych, tak jak na rys. 5.



Rys. 5. Loteria złożona

Źródło: opracowanie własne.

Gdy skutki niekorzystnych zdarzeń losowych są zbiorami losowymi, to sytuację ryzykowną stanowi następujący układ:

$$\tilde{X} = \left(p_1, p_2, \dots, p_n; \widetilde{A_1}, \widetilde{A_2}, \dots, \widetilde{A_n}\right). \quad (1)$$

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 13(19)

Skutki zajścia niekorzystnego zdarzenia reprezentowane są wówczas nie w postaci liczb, lecz w postaci podzbiorów pewnego zbioru.

Naiwne sposoby pomiaru ryzykowności.

Sytuację ryzykowną, gdy wielkości skutków jakiegoś zdarzenia losowego można wyrazić w postaci jednej liczby *w*, przedstawiamy w postaci pary $\widetilde{x} = (p, w)$, zwanej modelem Bernoullego.

Miara ryzykowności, która zależy w tym przypadku od dwóch wielkości p oraz *w*, definiowana jest jako

$$R = p \cdot w. \tag{2}$$

Czyli jest to wartość oczekiwana zmiennej losowej $\widetilde{x}$:

$$R = E(\tilde{x}) = \mu_{\tilde{x}} . \tag{3}$$

Jeżeli w wyniku zajścia zdarzenia niekorzystnego możliwe skutki można przedstawić w postaci ciągu $x_1, x_2, \dots, x_n$, zaś odpowiadające im prawdopodobieństwa jako $p_1, p_2, \dots, p_n$, to mamy do czynienia z prostą sytuacją ryzykowną przedstawioną na rys. 3.

Wartość oczekiwana jest niewystarczającą miarą ryzykowności takiej sytuacji. Ryzykowność definiuje się wówczas za pomocą dwóch wielkości $\mu_{\tilde{x}}$ oraz $\sigma_{\tilde{x}}$. Wykorzystując te dwie wielkości, relację ryzykowności definiuje się następująco:

Sytuacja $\widetilde{x_1}$ *jest bardziej ryzykowna niż* sytuacja $\widetilde{x_2}$

tylko wówczas gdy $\mu_{\widetilde{x_1}} \geq \mu_{\widetilde{x_1}}$ oraz $\sigma_{\widetilde{x_1}} \geq \sigma_{\widetilde{x_2}}$.

Ponieważ nie jest to relacja porządku liniowego, to w praktyce często zachodzi potrzeba określenia ryzykowności za pomocą jednej liczby, zwanej miarą ryzyka. Najprostszym przykładem takiej miary jest wielkość określona wzorem:

$$R = \mu_{\tilde{x}} + \lambda\sigma_{\tilde{x}}. \tag{4}$$

Istnieje bogata literatura na temat wskaźników tego typu (por. [Mayerson 1979]). Większość z nich można przedstawić w postaci jednego wzoru [Ostasiewicz 2004]:

$$R = \int_d^g \varphi(t - x) dF_{\tilde{x}}(x). \tag{5}$$

Na przykład przyjmując $d = -\infty$, $g = \infty$, $t = 0$, $\varphi(z) = z$ uzyskujemy $R = E(\widetilde{x})$.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 13(19)

4. Podejmowanie decyzji w warunkach niepewności i ryzyka

Sytuacja ryzykowna jest to sytuacja w której zwykle nie chcemy uczestniczyć. Najlepszym, czyli bezpiecznym sposobem postępowania jest więc unikanie takich sytuacji. Często jednak ryzyka uniknąć nie można, czasem celowo stwarzamy takie sytuacje z nadzieją osiągnięcia jakichś korzyści.

Niżej rozpatrywane są raczej sytuacje niechciane. Powstaje wówczas pytanie jak postępować? Co należy czynić, aby najmniej tracić w sytuacji, gdy zajdzie zdarzenie powodujące niekorzystne skutki?

Poniżej rozpatrywane są sytuacje ryzykowne pojawiające się w wyniku gospodarczej działalności człowieka. Naukowe teorie poświęcone postępowaniu w takich sytuacjach określane są mianem podejmowania decyzji w warunkach niepewności i ryzyka. W każdej teorii tego typu zawarte są dwa podstawowe elementy: charakterystyka sytuacji ryzykownej i charakterystyka samego decydenta. Z praktyki wiadomo, że niektórzy ludzie są bojaźliwi, a inni lubią ryzykować, jedni są pesymistami, inni optymistami. Cechy takie mają oczywisty wpływ na zachowanie, czyli podejmowanie decyzji w warunkach ryzyka.

Wszystkie naukowe teorie podejmowania decyzji zakładają, że decydent postępuje racjonalnie, czyli wie czego chce, wie co jest lepsze, a co jest gorsze i dąży do maksymalizacji tego co dobre. W najprostszym, z matematycznego punktu widzenia, przypadku sytuację decyzyjną przedstawia się w postaci tablicy decyzyjnej:

Tabela 1. Tablica decyzyjna

Decyzje \ Stany natury	s_1	s_2	...	s_n
d_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
d_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
d_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}

Źródło: opracowanie własne.

Tablicę taką nazywa się macierzą wypłat, ponieważ wielkość x_{ij} jest to „wypłata” jaką uzyska decydent, gdy podejmie decyzję d_i, podczas gdy zaistnieje sytuacja (stan natury) s_j.

Zauważmy, że decyzję d_i możemy traktować jako funkcję określoną na stanach natury:

$$d_i(s_1) = x_{i1}, d_i(s_2) = x_{i2}, \dots, d_i(s_n) = x_{in}. \quad (6)$$

W przypadku gdy nie są znane prawdopodobieństwa, z jakimi mogą się pojawiać stany natury, mamy do czynienia z sytuacją niepewności. Do podejmowania optymalnych decyzji wypracowano cztery różne reguły. Przyjmijmy w tym celu, tak jak w French [1993], że symbol $\vee$ oznacza operację min, zaś symbol $\wedge$ oznacza operację max, niech ponadto decyzja optymalna będzie oznaczona jako d_k . Reguły te są następujące (por. [French 1993]):

1. Reguła Walda. Polega ona na podjęciu decyzji d_k, takiej że

$$d_k = \bigvee_{j=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n} x_{ij}.$$

2. Reguła Hurwicza

decyzji d_k jest optymalna, jeśli

$$d_k = \bigvee_{i=1}^{m} (\bigvee_{j=1}^{n} x_{ij}).$$

3. Reguła Savage'a

decyzji d_k jest optymalna, jeśli

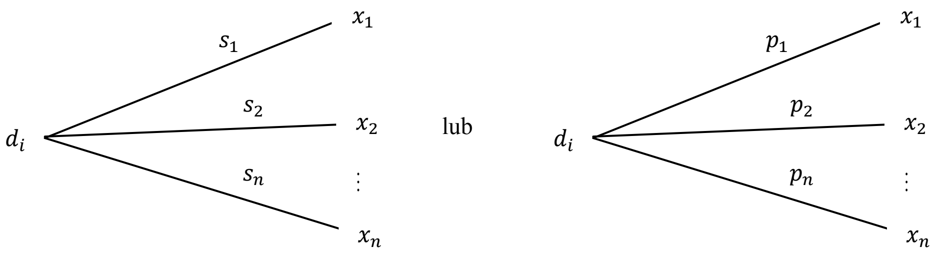
$$d_k = \bigwedge_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} r_{ij}, \text{ gdzie } r_{ij} = (\bigvee_{j=1}^{m} x_{ij}) - x_{ij}.$$

4. Reguła Laplace'a

$$d_k = \bigvee_{i=1}^{n} (\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}).$$

W przypadku sytuacji ryzykownych, uwzględniających prawdopodobieństwa stanów natury, potraktujmy każdy wiersz d_i takiej tablicy jako loterię, którą można przedstawić tak jak na rys. 6. Ze względu na prostsze zapisy, zamiast d_i stosowany będzie zamiennie symbol zmiennej losowej $\tilde{x}$, lub rozkładu prawdopodobieństwa p, charakteryzującego tę zmienną losową.

Podjęcie najlepszej decyzji oznacza wybór najlepszej loterii, na której musimy zagrać, bo musimy przecież podjąć jakąś decyzję. To z kolei oznacza, że trzeba uporządkować wszystkie możliwe loterie od najgorszej do najlepszej i wybrać tą najlepszą (ostatnią w uporządkowaniu). Przyjmijmy teraz, że sytuacje ryzykowne utożsamiane będą z rozkładami prawdopodobieństw, które oznaczone są symbolami p, q, r. Przy czym zapis $p(x_j)$ oznacza prawdopodobieństwo wypłaty x_j, gdy zajdzie sytuacja s_j. Jeżeli loteria p jest lepsza od loterii q, to oznacza się to jako $p \succ q$. W przypadku gdy są one jednakowo dobre, oznacza się jako $p \approx q$. Najłatwiejszym sposobem porządkowania loterii jest przypisanie im liczb charakteryzujących ich „dobroć" lub „wartość". Wartość (ang. *value*) loterii oznaczymy symbolem $V(p)$.



Rys. 6. Loteria odpowiadająca jednej decyzji

Źródło: opracowanie własne.

Sposób podjęcia najlepszej decyzji oznacza więc obliczenie wielkości V dla każdej loterii, czyli dla każdej decyzji, i wybranie tej dla której ta wartość jest największa. Idea prawie wszystkich matematycznych teorii podejmowania optymalnych decyzji w warunkach niepewności i ryzyka polega na określeniu warunków, jakie musi spełniać relacja porządkująca loterie, aby ten porządek można było reprezentować za pomocą wskaźnika liczbowego V.

5. Teorie oczekiwanej użyteczności

Niemal dogmatem racjonalności w podejmowaniu decyzji jest stosowanie zasady maksymalizacji oczekiwanej użyteczności. Zasadę tę po raz pierwszy sformułował D. Bernoulli w 1738 r., jako sposób na uniknięcie tzw. paradoksu petersburskiego. Paradoks ten powstał w wyniku rozwiązywania gry, jaką zaproponował N. Bernoulli w 1713 r. Jak wiadomo D. Bernoulli (a 10 lat wcześniej G. Cramer) zaproponował wprowadzenie „cenności" uzyskiwanej wygranej na loterii. Pojęcie cenności, czy korzyści, obecnie nazywane bywa użytecznością, w oryginalnej pracy Bernoulli użył słowa *emolumentum*.

Zauważmy przy okazji, że tytuł oryginalnej pracy jest następujący: *Specimen theoria novae de mensura sortis,* czyli „Wyłożenie nowej teorii o pomiarze ryzyka". Dopiero w 1954 r. została ona przetłumaczona na język angielski.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 13(19)

Zasada D. Bernoullego ma zastosowanie w sytuacji spełniającej następujące warunki:

a) dany jest zbiór możliwych skutków zajścia niekorzystnego zdarzenia,

b) na zbiorze tym zadana jest subiektywna funkcja użyteczności v,

c) dana jest także funkcja rozkładu prawdopodobieństwa p.

Decyzje należy podejmować, korzystając z zasady maksymalizacji oczekiwanej użyteczności. Oznacza to, że należy wybrać taką sytuację $\tilde{x} = (p, x) = (p_1, p_2, \dots, p_n; x_1, x_2, \dots, x_n)$, gdy oczekiwana użyteczność określona w postaci wzoru:

$$V(x, p) = \sum v(x)p(x) \tag{7}$$

przyjmuje wartość największą.

Propozycję Bernoullego formułuje się w postaci twierdzenia podanego niżej.

Załóżmy, że $p(x)$ i $q(x)$ są to proste rozkłady prawdopodobieństw charakteryzujące sytuacje ryzykowne, których skutki stanowią pewien podzbiór S zbioru liczb rzeczywistych. Funkcję $v : W \to R$ określoną na zbiorze skutków zajścia niepewnego zdarzenia losowego nazywa się użytecznością w sensie Bernoullego, jeśli następująca równoważność

$$\sum v(x)p(x) > \sum v(x)\, q(x) \Leftrightarrow \sum v^*(x)p(x) > \sum v^*(x)q(x) \tag{8}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb a i b takich, że a > 0 prawdziwa jest równość:

$$v^*(x) = a \cdot v(x) + b, \text{ dla dowolnych } x \in S.$$

Funkcja $v(x)$ nazywana jest użytecznością skutku (wyniku) x.

Pojęcie użyteczności oraz oczekiwanej użyteczności, które jest powszechnie stosowane w literaturze ekonomicznej, pochodzi od J. von Neumanna i O. Morgensterna. Pojęcie „użyteczność" w ich teorii różni się w sposób zasadniczy od użyteczności w sensie Bernoullego. Powoduje to niemałe zamieszanie w literaturze. Teorię von Neumana i Morgensterna można przedstawić dość prosto.

Załóżmy, że na zbiorze możliwych skutków (szkód) określone są rozkłady prawdopodobieństwa $p(x)$. Załóżmy, że decydent ocenia sytuacje ryzykowne według tych prawdopodobieństw, poprzez ich porównywanie. Przyjmując, że relacja porównywania spełnia trzy warunki:

A1. Relacja $\succ$ jest relacją słabego porządku

A2. $p \succ q \Rightarrow \lambda p + (1 - \lambda)r > \lambda q + (1 - \lambda)r$ oraz to, że

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 13(19)

A3. $p \succ q$ oraz $q \succ r$ implikują $\alpha p + (1-\alpha)r \succ q$ oraz to, że $q \succ \beta p + (1-\beta)r$, dla pewnych wielkości $\alpha, \beta \in (0,1)$.

Istotę teorii von Neumana i Morgensterna stanowi następujące stwierdzenie: warunki A1, A2, A3 są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja u określona na zbiorze wszystkich możliwych loterii, czyli prostych rozkładów prawdopodobieństwa (zwana funkcją użyteczności loterii), taka że

$$p \succ q \Leftrightarrow u(p) > u(q).$$

Funkcja ta stanowi tzw. reprezentację numeryczną relacji porządku na zbiorze prostych rozkładów prawdopodobieństwa, czyli relacji porównywania rozkładów prawdopodobieństwa, stosowanej przez decydenta.

Jeżeli rozkłady osobliwe na zbiorze W utożsamimy z elementami tego zbioru, to z powyższego twierdzenia uzyskamy wniosek:
na zbiorze skutków W istnieje funkcja użyteczności

$$u\colon W \mapsto R,$$

określona następująco:

$$u(x) = u(p), jeśli\ p(x) = 1. \tag{9}$$

Oczekiwaną użyteczność loterii $\tilde{x} = (p, x) = (p_1, p_2, \ldots, p_n; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ określa się wówczas następująco:

$$u(\tilde{x}) = \sum u(x)p(x). \tag{10}$$

Jak z tego widać, matematyczna postać oczekiwanej użyteczności w sensie Bernoullego oraz w sensie von Neumana i Morgensterna jest identyczna. Sens jest jednak zupełnie inny. Istotną cechą teorii von Neumana i Morgensterna jest to, iż przyjmuje się, że prawdopodobieństwa zdarzeń są dane, a ponadto rozumiane są one w sensie klasycznym.

L. Savage zaproponował taką teorię, która nie zakłada istnienia ani prawdopodobieństw, ani funkcji użyteczności. Zarówno jedno, jak i drugie wyprowadzane są jako konsekwencje racjonalnych preferencji decydenta. Racjonalność decydenta definiowana jest aksjomatycznie. Teoria Savage'a jest dość skomplikowana. Przedstawmy ją zatem w dużym uproszczeniu, podkreślając głównie jej odmienność od podejścia von Neumanna i Morgensterna.

Załóżmy, że $p\colon \longrightarrow [0,1]$ oznacza tzw. prosty rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze stanów natury S, zaś f jest funkcją decyzyjną,

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 13(19)

która każdej sytuacji s ∈ S przypisuje skutek tej decyzji (jeśli zrealizuje się stan s). Pojęcie funkcji decyzyjnej, zwanej też działaniem (ang. *act*), odgrywa kluczową rolę w teorii Savage'a.
Na przykład dwa działania:

$$f(s_1) = x_1, f(s_2) = x_2, \dots, f(s_n) = x_n \tag{11}$$

$$g(s_1) = y_1, g(s_2) = y_2, \dots, g(s_n) = y_n \tag{12}$$

oznaczają to, że w przypadku zaistnienia stanu s_j w wyniku działania f uzyskamy wynik x_j, zaś w wyniku działania g uzyskujemy „wypłatę" y_j. W przypadku skończonej i zadanej liczby działań oraz skończonej liczby możliwych wypłat, funkcje decyzyjne mają taką postać, jak w zapisie (6).

Pierwotnym pojęciem w teorii Savage'a jest *relacja preferencji* określona na zbiorze wszystkich możliwych *działań*. Jeśli działanie f jest preferowane nad działaniem g, to zapisuje się to w postaci $f \succ g$. Preferencje racjonalnego decydenta, czyli relacja $\succ$, ma spełniać określone warunki, nazywane aksjomatami racjonalności. Warunki te są zbyt skomplikowane, aby je przytaczać w całości (bez konicznych wyjaśnień) w artykule o limitowanej objętości, dlatego zostały one tutaj pominięte. Istota twierdzenia polega na tym, że jeżeli warunki racjonalności preferencji są spełnione, to za pomocą relacji $\succ$ definiowana jest inna relacja, $\supset$, określona na podzbiorach zbioru stanów natury. Relację $\supset$ interpretuje się jako „bardziej prawdopodobne". Czyli zapis $\{s_1, s_3\} \supset \{s_2, s_4\}$ oznacza, że możliwość zaistnienia stanu s_1 lub stanu s_3 jest *bardziej prawdopodobne* niż zaistnienie stanów s_2 lub s_4. W teorii Savage'a dowodzi się, że relacja $\supset$ określa tzw. *prawdopodobieństwo jakościowe*, czyli *subiektywne*. Prawdopodobieństwo takie definiowane jest pośrednio, za pomocą aksjomatów. Aksjomaty takiego prawdopodobieństwa są następujące:

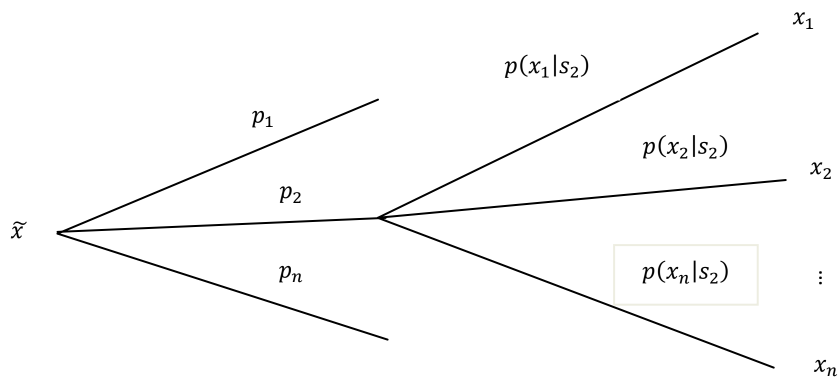
1. Relacja $\supset$ jest relacją asymetryczną i negacyjnie przechodnią.
2. $A \supset \emptyset$ dla dowolnego s ∈ A.
3. S$\supset$ $\emptyset$.
4. Jeśli $A \cap C = B \cap C, to\ A \supset C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cup C \supset B \cup C$.

Savage udowodnił, że relacja „bardziej prawdopodobne" spełnia takie warunki. Ponadto udowodnił, że istnieje też miara na podzbiorach zbioru S spełniająca aksjomaty miary probabilistycznej, czyli „zwykłego prawdopodobieństwa". Przy czym miara taka określona jest jednoznacznie, oznaczymy ją symbolem p. Za pomocą relacji preferencji określonej na zbiorze działań definiowana jest relacja

$\succ_s$ preferencji na zbiorze skutków działań. Okazuje się, że taka relacja spełnia warunki konieczne i wystarczające do tego, aby istniała funkcja użyteczności u na zbiorze wszystkich możliwych wypłat. Za pomocą tej funkcji, i funkcji rozkładu prawdopodobieństw, określa się dobroć, czyli wartość, działania *f* za pomocą wskaźnika nazywanego oczekiwaną subiektywną użytecznością wyniku podjętego działania:

$$v(f) = \sum p(s)u(f(s)). \qquad (13)$$

Obie funkcje, tzn. funkcja użyteczności i funkcja rozkładu prawdopodobieństwa określane są zupełnie inaczej, i bardziej intuicyjnie, w teorii Myersona. Przyjmijmy, że W oznacza zbiór „wypłat" uzyskiwanych w wyniku realizacji decyzji. Ponieważ wypłata $x \in W$ zależy od stanu natury $s \in S$, to jest ona zdarzeniem losowym. Przyjmijmy, że prawdopodobieństwo uzyskania wypłaty *x* pod warunkiem, że zajdzie stan *s*, oznaczone będzie symbolem $p(x|s)$. Przyjmijmy, że $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$ oraz $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$, czyli przyjmujemy więc, że $\sum_x p(x|s) = 1$, dla każdego stanu $s \in S$. Proste rozkłady prawdopodobieństwa $p(x|s)$, $s \in S$ interpretujemy jako loterie w loterii złożonej, takiej jak na rys. 7.



Rys. 7. Loteria na której wygrywa się loterie

Źródło: opracowanie własne.

Przyjmując, że analityk decyzji potrafi uporządkować loterie $p(x|s)$, tak aby relacja porządkująca spełniała trzy warunki:

1) dla dowolnych dwóch loterii $p(x|s)$i $q(x|s)$ zawsze $p \succcurlyeq q$ lub $q \succcurlyeq p$;

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 13(19)

2) dla dowolnych trzech loterii p, q, p', q' oraz dowolnej liczby $\alpha \in (0,1)$ zachodzi implikacja

$$p \succ q \; i \; p' \succcurlyeq q' \quad \Rightarrow \alpha p + (1-\alpha)p' \succ \alpha q + (1-\alpha)q';$$

3) jeśli $p \succ q$ to istnieje $\varepsilon > 0$ $takie, że \; dla \; x \in W$ i $s \in S$ implikacja

$$|p'(x|s) - p(x|s)| \leq \varepsilon \Rightarrow p' \succcurlyeq q.$$

Jeżeli powyższe trzy warunki są spełnione, to istnieje funkcja oceniająca $w(x,s)$, i „użyteczność" loterii p określa się wówczas za pomocą wielkości

$$v(p) = \sum_s \sum_x p(x|s) w(x,s). \tag{14}$$

W celu odróżnienia tak wyprowadzonej użyteczności od użyteczności w teorii von Neumana i Morgensterna, zastosowano tu oznaczenie $v(p)$, w którym litera v pochodzi od słowa *value* (wartość). Niezależnie od tego stosowane jest wyrażenie użyteczność loterii, a nie „wartość loterii".

6. Alternatywne teorie do teorii użyteczności oczekiwanej

Z punktu widzenia matematycznego teoria von Neumana i Morgensterna jest niewątpliwym osiągnięciem w zakresie racjonalizacji podejmowania decyzji. Samo pojęcie racjonalności zdefiniowane jest w sposób formalny. Wielu badaczy czy nawet zwykłych ludzi intrygowało pytanie, czy to co matematycy i wtórujący im ekonomiści uważają za racjonalne, czyli rozsądne, jest rzeczywiście rozsądne? Francuski ekonomista M. Allais postanowił zmierzyć się z tym problemem. Opracował różne ankiety zawierające proste sytuacje decyzyjne i prosił respondentów o wybór najlepszego wariantu. Okazało się, że większość postępuje nierozsądnie (w sensie teorii von Neumana i Morgensterna). M. Allais zamiast uznać postępowanie ludzi za nierozsądne, uznał, że teoria jest niedobra, nie odpowiada rzeczywistości. Przy podejmowanie trudnych decyzji w warunkach niepewności czy ryzyka człowiek nie kieruje się tylko obliczeniami, lecz też swoją (osobistą) postawą nie tylko odnośnie skutków zajścia zdarzenia, lecz także swoim, wewnętrznym odczuciem możliwości zajścia zdarzenia.

Jeżeli zamiast prawdopodobieństwa zdarzeń przyjmiemy subiektywne wagi określające możliwość zajścia zdarzeń, to wskaźnik dobroci decyzji, czyli „wartości" niepewnej pespektywy p można by określić w postaci wzoru:

$$V(p) = \sum w_i \, u(x_i).$$

Wagi w_i można by traktować jako funkcje prawdopodobieństw $w_i = p^*(x_i)$. Wskaźnik służący jako miernik dobroci decyzji miałby wówczas postać:

$$V(p) = \sum p^*(x_i) u(x_i).$$

Jest to tzw. teoria ważonej użyteczności. Została ona nawet zaksjomatyzowana.
Przyjmijmy, że relacja na zbiorze rozkładów prawdopodobieństwa spełnia następujące cztery warunki:

W1. Jest to relacja porządku słabego.

W2. Jeżeli $p \approx q,$ to dla dowolnej liczby $\alpha \in (0{,}1)$ istnieje liczba $\beta \in (0{,}1)$, taka że równoważność $\alpha p + (1-\alpha)r \approx \beta q + (1-\beta)r$ zachodzi dla dowolnego rozkładu *r*.

W3. Jeśli p $\succ q$ oraz q $\succ$ r, to $\alpha p + (1-\alpha)r \succ q$ oraz $\beta\beta + (1-\beta)r$ dla pewnych liczb $\alpha, \beta \in (0{,}1)$.

W4. Jeśli $p \approx q,$ to dla każdej liczby $\alpha \in (0{,}1)$ istnieje liczba $\beta \in (0{,}1),$ taka że dla dowolnego rozkładu *r* zachodzi równoważność:

$$\alpha p + (1-\alpha)r \approx \beta q + (1-\beta)r.$$

Jeżeli te warunki są spełnione, to istnieją funkcje użyteczności *u* oraz funkcja wagowa *w*, takie że

$$p \succ q \Leftrightarrow u(p)w(q) > u(q)w(p).$$

Jeśli funkcja wagowa jest dodatnia, to

$$p \succ q \Leftrightarrow u(p)/w(p) > u(q)/w(p).$$

Oznacza to, że sytuację ryzykowną ocenia się według następującej ważonej funkcji użyteczności:

$$V(p) = \sum p(x) u^* (x).$$

Gdzie funkcja wagowa ma postać:

$$u^*(x) = \frac{u(x)w(x)}{\sum w(x)p(x)}.$$

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 13(19)

Alternatywnie można określić „zniekształcone" prawdopodobieństwo:

$$p^*(x) = \frac{p(x)w(x)}{\sum w(x)p(x)}.$$

Wówczas mamy funkcję użyteczności:

$$V(p) = \sum u(x)p^*(x).$$

W chwili obecnej opublikowano już wiele alternatywnych teorii wobec teorii von Neumana i Morgensterna. W języku angielskim określane są one zwykle *non-expected utility*, czyli jako nieoczekiwane użyteczności.

Teoria taka nie spełnia jednak warunku monotoniczności, uważanego za warunek konieczny. Warunek ten oznacza, że ważona funkcja użyteczności powinna zachowywać porządek dominacji stochastycznej (pierwszego rzędu).

Warunek monotoniczności spełnia model rangowo-zależnej oczekiwanej użyteczności.

Jest to bardzo ciekawy model w pełni odzwierciedlający podejście, które zaproponował M. Allais do podejmowania racjonalnych decyzji w warunkach niepewności.

Istota modelu polega na tym, że „deformacji" (transformacji) podlegają skumulowane rozkłady prawdopodobieństwa, nie zaś pojedyncze prawdopodobieństwa zajścia niekorzystnych zdarzeń. Przyjmijmy jak poprzednio, że ocenie podlegają loterie $\tilde{x} = (x_1 x_2, \dots, x_n; p_{1,} p_2, \dots, p_n)$. Oznaczając symbolem $u(x_i)$ użyteczność wyniku x_i, zaś symbolem q funkcję deformującą prawdopodobieństwa, wskaźnik dobroci (użyteczności) całej loterii definiuje się następująco:

$$V(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)\left[q\left(\sum_{j=1}^{i} p_j\right) - q\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right)\right].$$

Ważną cechą wyróżniającą powyższe podejście od wszystkich innych jest to, że uwzględnia się w nim postawę decydenta wobec niepewności wyników podejmowanych decyzji. Niezależnie od tego uwzględnia się postawę wobec prawdopodobieństwa niekorzystnych zdarzeń.

W pierwszym przypadku postawę decydenta charakteryzuje się na skali pesymizm-optymizm, w drugim przypadku, na skali asekurant-ryzykant. Decydent definiowany jest jako pesymista względem wielkości losowej $\tilde{x}$, jeśli

$$\int x \, dq\,(F_{\tilde{x}}) \leq \int x \, dF_{\tilde{x}}.$$

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 13(19)

W przypadku przeciwnej nierówności decydenta określa się mianem optymisty. Łatwo sprawdzić, że decydent jest pesymistą tylko wówczas, gdy stosuje funkcję deformującą prawdopodobieństwa q, taką że $q(p) \geq p$, jeśli $p \geq q(p)$ dla każdego p, to postawę decydenta określa się jako optymistyczną. Miarę asekuranctwa stanowi strach przed ryzykiem, definiowany w postaci ceny ryzyka

Najwcześniej opublikowano tzw. teorię subiektywną oczekiwanej użyteczności, częściej nazywaną teorią perspektyw Kahnemana i Twersky'ego. Jest to też najbardziej radykalne odstępstwo od kanonu oczekiwanej użyteczności. Podejmowanie decyzji zgodne z tą teorią nie polega na jednorazowym akcie maksymalizacji oczekiwanej użyteczności, lecz jest ono procesem składającym się z dwóch etapów. Na pierwszym etapie stosowane są różne podejścia heurystyczne polegające na „zredagowaniu" (ang. *editing*) zadania i przygotowaniu go do drugiego etapu, na którym dokonuje się maksymalizacji oczekiwanej użyteczności.

Oczekiwaną użyteczność loterii (czyli niepewnej perspektywy) określa się w postaci wzoru:

$$v(p) = \sum v(x_i)\pi(p_i).$$

Formalnie jest to identyczna postać wzoru z wszystkimi innymi wzorami na oczekiwaną użyteczność. Jest jednak i podstawowa różnica. Do określenia funkcji użyteczności potrzebny jest punkt odniesienia (ang. *reference point*). Punkt ten rozdziela to, co decydent uważa za stratę, od tego, co jest dla niego zyskiem. Część dotycząca straty jest funkcją wklęsłą, zaś dotycząca zysków ma kształt funkcji odzwierciedlającej awersję do ryzyka, czyli jest funkcją wypukłą.

Warto także zauważyć, że pojęcie „subiektywna oczekiwana użyteczność" jest tu rozumiana ze względu na subiektywne (psychologiczne) preferencje decydenta. Takie samo określenie tzn. subiektywna oczekiwana użyteczność zostało niezależnie użyte przez Savage'a. Mimo identyczności określeń, oba mają różne znaczenia.

7. Uwagi końcowe

Problematyka ryzyka jest obecnie omawiana w wielu różnych pracach, głównie dotyczących takich dziedzin, jak ubezpieczenia, zarządzanie i ekonomia szeroko rozumiana. W każdej z tych dziedzin stosowana jest jednak odrębna klasyfikacja, a także słownictwo. Słownictwo w literaturze polskiej, a szczególnie w tej dotyczącej ubezpieczeń, jest wyjątkowo niedbałe, często urągające elementarnym zasadom estetyki języka. W języku polskim ryzyko występuje tylko w liczbie pojedynczej, ryzykiem nie można ani sterować, ani zarządzać, ani dzielić się nim czy też zatrzymywać go. Unikając jakiejkolwiek krytyki stosowanego słownictwa, w artykule niniejszym zaproponowano możliwie prostą i intuicyjną definicję ryzyka. Poza tym dokonano takiej klasyfikacji, która w zamierzeniu miała obejmować wszystkie możliwe sytuacje ryzykowne. Zarówno sama klasyfikacja, jak i zastosowana terminologia bazują na zdrowym rozsądku i być może trzeba będzie je modyfikować. Drugi cel artykułu ma charakter raczej dydaktyczny, który jest także związany głównie ze słownictwem. W literaturze ekonomicznej najczęściej występującym słowem jest prawdopodobnie słowo „użyteczność". Bardzo często jest ono używane w sensie zdroworozsądkowym, jako coś pożytecznego, wartościowego czy użytecznego. Ale jest też ono stosowane w sensie formalnym, czyli matematycznym, jako numeryczna reprezentacja relacji preferencji. Po raz pierwszy takie rozumienie użyteczności zaproponował Bernoulli. Niefortunnie to samo pojęcie zostało użyte przez Morgensterna i von Neumanna, ale w zupełnie innym sensie. Istniejące zamieszanie terminologiczne pogłębił jeszcze bardziej L. Savage, formułując swoją niezwykle wyrafinowaną matematycznie teorię oczekiwanej użyteczności. W artykule starano się wyjaśnić różnice między tymi różnymi podejściami do zagadnienia formalizacji sytuacji ryzykownych i sposobów radzenia sobie z nimi.

Podziękowania

Dzięki wnikliwej recenzji anonimowych recenzentów udało się usunąć wiele niedociągnięć, jakie były w pierwotnej wersji artykułu. Niestety ze względu na ograniczoną objętość artykułu nie było możliwe uwzględnić sugestii Recenzentów ilustracji poszczególnych klas ryzyka typowymi przykładami praktycznymi. W celu umożliwienia czytelnikowi zapoznania się z takimi przykładami w spisie literatury zostały wymienione podstawowe publikacje w języku polskim dotyczące różnych zastosowań.

Literatura

Domański Cz. (red.), *Nieklasyczne metody oceny efektywności i ryzyka*, PWE, Warszawa 2011.
Fishburn P., *Mathematics of decision theory*, Mouton, Paris 1972.
Fishburn P., *Nonlinear preference and utility theory*, Wheatsheaf Books, 1988.
Fishburn P., *Tieorija poleznosti dla prinjatija reszenij*, Nauka, Moskwa 1978.
French S., *Decision theory: an introduction to the mathematics of rationality*, Ellis Horwood, New York 1993.
Gollier Ch., *The Economics of Risk and Time*, MIT Press, 2004.

Jajuga K., (red.), *Zarządzanie ryzykiem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.
Karni E., *Risk aversion and saving behavior: summary and extension*, „International Economic Review" 1982, Vol. 23, No. 1, s. 35–42.
Kreps D.M., *Notes on the theory of choice*, Westview Press, London 1988.
Lind N.C. (red.), *Technological risk*, University of Waterloo Press, 1982.
Mayerson R.B., *An axiomatic derivation of subjective probability, utility, and evaluation functions*, „Theory and Decision" 1979, Vol. 11, s. 339–352.
Munier B. (ed.), *Risk, decision and rationality*, Reidel, 1988.
Ostasiewicz W., *Ryzyko i ubezpieczenia*, [w:] Ostasiewicz W. (red.), *Składki i ryzyko ubezpieczeniowe. Modelowanie stochastyczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2004, s. 11–14.
Ostasiewicz W., *Użyteczność*, [w:] Ostasiewicz W. (red.), *Metody ilościowe w ekonomii*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 1999, s. 259–299.
Pratt J.W., *Risk Aversion in the Small and in the Large*, „Econometrica" 1964, Vol. 32, s. 122–136.
Quiggin J., *Generalized expected utility theory. The rank-dependent model*, Kluwer, Boston 1993.
Rybicki W., *Dualizm zadań kwantyfikacji ryzyka i postaw wobec niego*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 878. Ekonometria 6, Wrocław 2000, s. 160–174.
Rybicki W., *Mathematics of Utility and Risk. Three Papers on Stochastic Economy, Finance and Insurance*, „Argumenta Oeconomica" 1997, No. 1(4), s. 245–270.
Schmidt U., *Axiomatic utility theory under risk. Non-Archimedean representations and application to insurance economics*, Springer, 1998.
Skorupka D., *Methods of Construction Projections Risk Assesment*, MOCRA, LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH&Co, KG and licensors, Saarbruckers 2012.
Starmer Ch., *Developments in non-expected utility theory: the hunt for a descriptive theory of choice under risk*, „Journal of Economic Literature" 2000, Vol. 38, s. 332–382.
Winkler-Drews T., *Zarządzanie ryzykiem zmiany ceny*, PWE, Warszawa 2009.
Yaari M.E., *Dual Theory of Choice under Risk*, „Econometrica" January 1987, Vol. 55, Issue 1, s. 95–115.

STATISTICAL ANALYSIS OF RISKY SITUATIONS

Summary: The paper contains a new classification of risk situations, which enables the unified treatment of all kinds of problems concerning risk and uncertainty. One of the implications which one can draw from this classification is that there is no sense to formulate general risk theories. In majority of situation the so called risk management is based on common sense supported by past experiences and some analytical tools. However, there are situations of a particular practical significance which for nearly one hundreds of years have been intensively investigated. As a result of these endeavors a number of models have been developed, particularly models known as expected utility models, and non-expected utility models. One of the main goals of this paper is to highlight the meaning of the basic notations used in these models: utility and subjective expected utility.

Keywords: risks classification, utility maximization, risk theories, subjective utility theories.