

# PRACE NAUKOWE

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

# RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

Nr 386

## **Efektywność – rozważania nad istotą i pomiarem**

Redaktorzy naukowi

Tadeusz Dudycz

Grażyna Osbert-Pociecha

Bogumiła Brycz



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
Wrocław 2015

Redakcja wydawnicza: Barbara Majewska  
Redakcja techniczna i korekta: Barbara Łopusiewicz  
Łamanie: Małgorzata Czupryńska  
Projekt okładki: Beata Dębska

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania  
znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa  
[www.pracnaukowe.ue.wroc.pl](http://www.pracnaukowe.ue.wroc.pl)  
[www.wydawnictwo.ue.wroc.pl](http://www.wydawnictwo.ue.wroc.pl)

Publikacja udostępniona na licencji Creative Commons  
Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 3.0 Polska  
(CC BY-NC-ND 3.0 PL)



© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
Wrocław 2015

**ISSN 1899-3192**  
**e-ISSN 2392-0041**

**ISBN 978-83-7695-501-8**

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Zamówienia na opublikowane prace należy składać na adres:  
Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
tel./fax 71 36 80 602; e-mail: [econbook@ue.wroc.pl](mailto:econbook@ue.wroc.pl)  
[www.ksiegarnia.ue.wroc.pl](http://www.ksiegarnia.ue.wroc.pl)

Druk i oprawa: EXPOL

## Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	9
<b>Sławomir Czetwertyński:</b> Korzyści skali w gospodarce internetowej.....	11
<b>Marcin Flotyński:</b> The efficiency of stock market indices in Poland – the empirical evidence.....	27
<b>Daniel Gach:</b> Problematyka pomiaru efektywności układów partnerskich w biznesie.....	51
<b>Piotr Głowicki:</b> Przegląd rozwiązań w zakresie oceny efektywności szkoleń.....	64
<b>Józefa Gryko:</b> Elastyczność finansowa a zdolność do inwestycji w czasie kryzysu finansowego na przykładzie spółek publicznych w Polsce.....	78
<b>Marta Kluzek:</b> Efektywność ulg podatkowych sprzyjających innowacyjności w Polsce.....	89
<b>Dorota Kuchta, Anna Ślusarczyk:</b> Application of proactive and reactive project scheduling – case study.....	99
<b>Joanna Lizińska, Leszek Czapiewski:</b> Determinanty <i>underpricingu</i> w Polsce i na innych wybranych rynkach wschodzących.....	112
<b>Gabriel Łasiński, Łukasz Fil:</b> Multimedia jako czynnik podnoszący efektywność treningu sportowego szermierzy w opinii trenerów w Wielkiej Brytanii.....	126
<b>Grzegorz Łukasiewicz:</b> Zakres i skutki raportowania kapitału intelektualnego we współczesnych organizacjach.....	134
<b>Natalia Marska-Dzioba:</b> Efektywność wykorzystania zasobów Państwowego Funduszu Rehabilitacji Osób Niepełnosprawnych – wyniki projektu badawczego.....	151
<b>Joanna Mrowicka:</b> Efektywność leczenia antybiotykoterapii celowanej i empirycznej w leczeniu szpitalnym.....	175
<b>Bogdan Nogalski, Przemysław Niewiadomski:</b> Model racjonalnej decyzji implementacyjnej wytwórcy na rynku mechanizacji rolnictwa – koncepcja i zastosowanie.....	193
<b>Tomaz Norek:</b> Efektywność procesów innowacyjnych realizowanych przez polskie przedsiębiorstwa sektora MSP. Rezultaty badań empirycznych ...	209
<b>Jarosław Nowicki:</b> Budowanie i transfer wartości w spółkach notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie – ujęcie sektorowe.....	230
<b>Grażyna Osbert-Pociecha:</b> Potrzeba zarządzania energią ludzi w organizacji jako uwarunkowanie wzrostu efektywności.....	245
<b>Radosław Pastusiak, Magdalena Jasiniak:</b> Wpływ SSE na sytuację ekonomiczną gmin.....	261

<b>Artur Prędko:</b> Analiza kosztowa polskich bibliotek publicznych za pomocą metody DEA oraz porównanie z wynikami uzyskanymi przy użyciu stochastycznej granicznej funkcji kosztu .....	276
<b>Artur Stefański:</b> Inwestycje przedsiębiorstw rodzinnych .....	297
<b>Edward Radośniński, Tomasz Karczyński:</b> Wpływ giełd światowych na notowania giełd Europy Środkowo-Wschodniej – analiza trendów i autokorelacji .....	306
<b>Witold Rekuć, Leopold Szczurowski:</b> Zmiany czynników podziału zasadniczej dotacji dydaktycznej w jednostce szkoły wyższej .....	317
<b>Katarzyna Tracz-Krupa:</b> Efektywność a skuteczność wykorzystania środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki w perspektywie 2007-2013 w Polsce .....	329
<b>Grzegorz Urbanek:</b> Marka a zysk ekonomiczny przedsiębiorstwa na przykładzie wybranych spółek notowanych na GPW w Warszawie .....	343
<b>Sławomir Wyciślak:</b> Podejście systemowe jako źródło efektywności w działaniach organizacji .....	357

## Summaries

<b>Sławomir Czetwertyński:</b> Economies of scale in internet economy .....	26
<b>Marcin Flotyński:</b> Efektywność indeksów giełdowych w Polsce – ujęcie empiryczne .....	50
<b>Daniel Gach:</b> The problem of measuring the effectiveness of partnership in business .....	63
<b>Piotr Głowicki:</b> Training effectiveness assessment – solutions review .....	77
<b>Józefa Gryko:</b> Financial flexibility and corporate investment during financial crises based on public companies in Poland .....	88
<b>Marta Kluzek:</b> Effectiveness of tax reliefs supporting innovation in Poland. ....	98
<b>Dorota Kuchta, Anna Ślusarczyk:</b> Zastosowanie proaktywnego i reaktywnego harmonogramowania projektów – studium przypadku .....	111
<b>Joanna Lizińska, Leszek Czapiewski:</b> Determinants of IPO underpricing in Poland and other selected emerging markets .....	125
<b>Gabriel Łasiński, Łukasz Fil:</b> Multimedia as a factor raising fencers' effectiveness during sports training according to trainers from Great Britain ...	133
<b>Grzegorz Łukasiewicz:</b> Scope and impact of intellectual capital reporting in contemporary organizations .....	150
<b>Natalia Marska-Dzioba:</b> Efficient use of resources of the state fund for rehabilitation of disabled people (PFRON) – the results of the research project .....	174
<b>Joanna Mrowicka:</b> Effectiveness of antibiotic targeted and empirical therapy in hospital treatment .....	192

<b>Bogdan Nogalski, Przemysław Niewiadomski:</b> Model of a rational implementation decision of a manufacturer on the market of agricultural mechanisation – concept and application.....	208
<b>Tomasz Norek:</b> The effectiveness of innovative processes implemented by the SME companies in Poland. The results of empirical research.....	229
<b>Jarosław Nowicki:</b> Value building and value transfer in companies listed on the Warsaw Stock Exchange – sectoral approach.....	244
<b>Grażyna Osbert-Pociecha:</b> The need of management of people’s energy in the organization as a conditional increase in efficiency .....	260
<b>Radosław Pastusiak, Magdalena Jasiniak:</b> Impact of SSE on the economic situation of municipalities.....	275
<b>Artur Prędko:</b> Cost analysis of Polish public libraries with the DEA method and a comparison with results obtained by using the stochastic frontier cost function.....	296
<b>Artur Stefański:</b> Investments of family businesses .....	305
<b>Edward Radośniński, Tomasz Karczyński:</b> Impact of the world exchange markets on Eastern and Central Europe market’s quotations – analysis of trends and autocorrelations .....	316
<b>Witold Rekuć, Leopold Szczurowski:</b> Changes of basic educational subsidy factors distribution in a university unit.....	328
<b>Katarzyna Tracz-Krupa:</b> Efficiency and effectiveness of Human Capital Operational Program expenditure in the perspective of 2007-2013 in Poland.....	342
<b>Grzegorz Urbanek:</b> The Brand and economic profit of the company – the case of selected companies listed on the Warsaw Stock Exchange .....	356
<b>Sławomir Wyciślak:</b> The system approach as the source of efficiency in organization activities .....	365

**Artur Prędkie**

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

e-mail: predkia@uek.krakow.pl

---

## **ANALIZA KOSZTOWA POLSKICH BIBLIOTEK PUBLICZNYCH ZA POMOCĄ METODY DEA ORAZ PORÓWNANIE Z WYNIKAMI UZYSKANymi PRZY UŻYCIU STOCHASTYCZNEJ GRANICZNEJ FUNKCJI KOSZTU<sup>1</sup>**

---

**Streszczenie:** Celem pracy jest analiza empiryczna efektywności kosztowej bibliotek publicznych przeprowadzona za pomocą metody DEA (*Data Envelopment Analysis*). Uzyskane wyniki porównano następnie z rezultatami otrzymanymi za pomocą metodologii alternatywnej w pracy [Osiewalski, Osiewalska 2006], w której wykorzystano podejście bayesowskie dla estymacji stochastycznej, granicznej funkcji kosztu bibliotek publicznych. Praca ma również cel metodologiczny, jakim jest porównanie obu podejść do analizy efektywności kosztowej. Wskazano wady i zalety obu metodologii oraz podobieństwa i różnice pomiędzy nimi.

**Słowa kluczowe:** DEA, analiza kosztowa bibliotek, efektywność kosztowa, funkcja kosztu.

DOI: 10.15611/pn.2015.386.18

### **1. Wstęp**

Badania nad kosztami i efektywnością bibliotek prowadzone są na świecie od lat siedemdziesiątych – zob. np. [Morse 1972; Holtman i in. 1976]. Są one uważane w wielu krajach za użyteczne narzędzie zarządzania tymi jednostkami pożytku publicznego. W niektórych krajach, zgodnie z sugestią Komisji Wspólnot Europejskich [Fugei 1989], dostosowano nawet sprawozdawczość biblioteczną do potrzeb analiz ekonomicznych. Efektywność bibliotek można rozumieć różnorodnie, np. jako stopień wykorzystania zasobów [Morse 1972] lub stopień zaspokojenia potrzeb użytkownika [Van House, Childers 1993]. W niniejszej pracy traktujemy jednak pojęcie efektywności kosztowej jako element mikroekonomicznej teorii procesu produkcyjnego. Do

---

<sup>1</sup> Publikacja została sfinansowana ze środków przyznanych Wydziałowi Zarządzania Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, w ramach dotacji na utrzymanie potencjału badawczego.

konstrukcji mierników tego rodzaju efektywności wykorzystuje się tu pojęcie funkcji kosztu. W pierwszej kolejności, do oszacowania funkcji kosztu, jej charakterystyk oraz miernika efektywności kosztowej, wykorzystamy tzw. metodę DEA (*Data Envelopment Analysis*). Uzyskane wyniki zostaną następnie porównane z rezultatami otrzymanymi w pracy [Osiewalska, Osiewalski 2006], w której wykorzystano tzw. podejście bayesowskie w estymacji stochastycznej, granicznej funkcji kosztu, jej charakterystyk i alternatywnego miernika efektywności kosztowej na tych samych danych.

W części pierwszej pracy opisano więc metodologię DEA pod kątem analizy kosztowej. W części drugiej dość skrótowo przedstawiono wspomnianą metodologię alternatywną, ze szczególnym podkreśleniem różnic pomiędzy omawianymi podejściami. Przekładają się one bowiem na późniejsze różnice w wynikach otrzymanych w części empirycznej pracy. W części trzeciej opracowania opisano użyte dane empiryczne oraz sposób ich wykorzystania w ramach konkurencyjnych metodologii. W części czwartej przedstawiono wyniki empiryczne uzyskane przez autora przy wykorzystaniu metody DEA. Porównano je także z odpowiednimi rezultatami uzyskanymi za pomocą podejścia bayesowskiego we wspomnianej pracy [Osiewalski, Osiewalska 2006]. W zakończeniu podkreślono znaczenie metodologiczne pracy oraz podano odnośniki bibliograficzne do wybranych prac autora, związanych z analizą różnego rodzaju efektywności.

## 2. Analiza kosztowa w ramach metody DEA

Metoda analizy otoczki (obwiedni) danych<sup>2</sup> ma charakter deterministyczny i służy głównie do pomiaru różnego rodzaju efektywności względnej jednorodnej technologicznie grupy  $n$  obiektów. Przyjmuje się zwykle następujące naturalne założenia.

**Założenie 1.** Mamy dane dotyczące ilości zużywanych nakładów i uzyskiwanych produktów dla wspomnianych  $n$  obiektów w postaci wektorów  $\mathbf{x}_j = [x_{1j}, \dots, x_{mj}]$  oraz  $\mathbf{y}_j = [y_{1j}, \dots, y_{sj}]$ , gdzie  $j = 1, \dots, n$ .

**Założenie 2.** Badane jednostki posługują się jednorodną technologią reprezentowaną przez zbiór możliwości produkcyjnych  $T$ . Zbiór  $T$  jest minimalnym w sensie inkluzji zbiorem zawierającym zaobserwowane plany produkcyjne  $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$ , mającym własność wypukłości oraz swobodnego dysponowania (nieefektywności).

Wprost z założeń 1 i 2 wynika, iż zbiór  $T$  jest postaci:

$$T = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}_+^{m+s} : \exists \lambda_j \geq 0 : \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \mathbf{x} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{x}_j, \mathbf{y} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{y}_j\}. \quad (1)$$

Użyto zapisu wektorowego, tak więc nierówności należy odczytywać po współrzędnych. Jest to jedna z tzw. technologii płatkami liniowych, przy której nie narzu-

<sup>2</sup> Tłumaczenie polskiej nazwy metody DEA – zob. [Welfe i in. 2002].

camy z góry określonego typu globalnych efektów skali. Będziemy je więc mogli badać lokalnie w części empirycznej pracy. Szczegóły w odniesieniu do innych technologii płatami liniowych oraz definicje i zestawy możliwych własności zbioru  $T$  można znaleźć np. w pracy [Prędko 2012].

W naszym przypadku będą występować dodatkowo stałe czynniki produkcji, zapiszemy więc zaobserwowane wektory ilości nakładów w postaci:

$$\mathbf{x}_j = [x_{1j}, \dots, x_{kj}; x_{k+1,j}, \dots, x_{mj}] = [\mathbf{x}_{zm,j}; \mathbf{x}_{st,j}], j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

gdzie pierwsze  $k$  czynników uznamy za zmienne, a pozostałe za stałe, bez straty ogólności rozważań. W celu przeprowadzenia analizy kosztowej musimy również posiadać informacje dotyczące cen jednostkowych nakładów zmiennych dla wszystkich jednostek w badanej grupie:

$$\mathbf{w}_j = [w_{1j}, \dots, w_{kj}], j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Analiza kosztowa rozpoczyna się zwykle od minimalizacji formuły kosztów zmiennych, przy założeniu występowania wybranej technologii płatami liniowej – zob. np. [Färe i in. 1994, r. 3.2]. W praktyce sprowadza się to do rozwiązania dla  $o = 1, \dots, n$  programu liniowego postaci:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k w_{io} X_{io} &\rightarrow \text{MIN} & (4) \\ X_{1o} &\geq \sum_{j=1}^n \lambda_{oj} x_{1j} \\ &\dots\dots\dots \\ X_{ko} &\geq \sum_{j=1}^n \lambda_{oj} x_{kj} \\ X_{k+1,o} &= \sum_{j=1}^n \lambda_{oj} x_{k+1,j} \\ &\dots\dots\dots \\ X_{mo} &= \sum_{j=1}^n \lambda_{oj} x_{mj} \\ Y_{1o} &\leq \sum_{j=1}^n \lambda_{oj} y_{1j} \\ &\dots\dots\dots \\ Y_{so} &\leq \sum_{j=1}^n \lambda_{oj} y_{sj} \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{oj} &= 1 \end{aligned}$$

$X_{io}, \lambda_{oj} \geq 0, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$  (zmiennie decyzyjne).

Równości w programie (4) reprezentują czynniki stałe.





$$\begin{aligned} v_{r0} &\geq 0, r = 1, \dots, s \\ \omega_0 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

W wyniku  $n$ -krotnego rozwiązania tego zadania uzyskujemy:

- optymalną wartość funkcji celu równą ponownie minimalnym kosztom zmiennym<sup>4</sup>,
- wartości optymalne zmiennych decyzyjnych służące konstrukcji charakterystyk funkcji kosztów.

Za odpowiednik krótkookresowej funkcji kosztów zapisanej w punktach danych, można uznać właśnie wartość optymalną programu (6):

$$C(\mathbf{y}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{x}_{st,0}) = \sum_{i=k+1}^m x_{i0} \tilde{\mu}_{i0}^* + \sum_{r=1}^s y_{r0} v_{r0}^* + \omega_0^*, \quad o = 1, \dots, n, \quad (7)$$

gdzie wartości optymalne zmiennych decyzyjnych oznaczono gwiazdką.

Zauważmy, że funkcja ta zależy od wektora cen  $\mathbf{w}_0$  w sposób ukryty<sup>5</sup>, tzn. jedynie poprzez warunki brzegowe programu (6) dotyczące zmiennych  $\mu_{10}, \dots, \mu_{k0}$ . Dodatkowo, z twierdzeń łączących program primalny i dualny wynika, że:

$$\forall i = 1, \dots, k : (x_{i0}^* > 0 \Rightarrow \mu_{i0}^* = w_{i0}). \quad (8)$$

Oznacza to, że przy dodatniej wielkości idealnej  $i$ -tego czynnika zmiennego wartość optymalna  $\mu_{i0}^*$  może być interpretowana jako cena tego nakładu. Tak więc, gdy wszystkie nakłady idealne okażą się dodatnie, od wektora cen  $\mathbf{w}_0$  zależą również warunki ograniczające programu (6). Rozważana funkcja kosztów jest w ogólności kawałkami liniowa<sup>6</sup> względem swych argumentów, ponieważ optymalne wielkości zmiennych decyzyjnych mogą ulec zmianie w zależności od wybranego punktu danych. Jest to ściśle związane ze zdefiniowaną wcześniej technologią, która również jest płacami liniowa.

Mając powyższe informacje, można przystąpić do podania wzorów na charakterystyki funkcji kosztów:

- koszt krańcowy względem  $r$ -tego produktu

$$\frac{\partial C}{\partial y_r}(\mathbf{y}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{x}_{st,0}) = v_{r0}^*, \quad r = 1, \dots, s \quad (9)$$

- koszt krańcowy względem  $i$ -tego czynnika stałego

<sup>4</sup> Wartości optymalne funkcji celu zadania primalnego i dualnego są sobie równe, o ile rozwiązania optymalne tych zadań istnieją – zob. np. [Kukuła (red.) 2011, s. 26].

<sup>5</sup> Mimo to zachowują się wymagane własności funkcji kosztów w odniesieniu do cen czynników zmiennych. Przykładowo, przy wzroście tych cen rośnie wartość funkcji kosztów.

<sup>6</sup> Ze względu na wielość argumentów, którymi są produkty, czynniki stałe oraz w sposób ukryty również ceny czynników zmiennych należałoby mówić raczej o funkcji kosztów „płacami liniowej”, podobnie jak w przypadku zbioru możliwości produkcyjnych  $T$ .

$$\frac{\partial C}{\partial x_i}(\mathbf{y}_o, \mathbf{w}_o, \mathbf{x}_{st,o}) = \tilde{\mu}_{i0}^*, \quad i = k+1, \dots, m. \quad (10)$$

Należy jednak pamiętać, że wzory (9) i (10) są prawdziwe tylko w przypadku, gdy zmiany jednostkowe odpowiednio ilości produktu lub nakładu stałego nie powodują zmiany rozwiązania optymalnego programu (6). Ze względu na brak jawnej zależności nie można wyprowadzić wzoru na koszt krańcowy względem ceny  $i$ -tego czynnika zmiennego, oznaczony przez  $\frac{\partial C}{\partial w_i}(\mathbf{y}_o, \mathbf{w}_o, \mathbf{x}_{st,o})$ .

Mając wzory na koszty krańcowe, można podać również formuły na odpowiednie elastyczności:

- elastyczność kosztowa względem  $r$ -tego produktu

$$E_{C/y_r}(\mathbf{y}_o, \mathbf{w}_o, \mathbf{x}_{st,o}) = v_{r0}^* y_{r0} / C(\mathbf{y}_o, \mathbf{w}_o, \mathbf{x}_{st,o}), \quad r = 1, \dots, s, \quad (11)$$

- elastyczność kosztowa względem  $i$ -tego czynnika stałego

$$E_{C/x_i}(\mathbf{y}_o, \mathbf{w}_o, \mathbf{x}_{st,o}) = \tilde{\mu}_{i0}^* x_{i0} / C(\mathbf{y}_o, \mathbf{w}_o, \mathbf{x}_{st,o}), \quad i = k+1, \dots, m. \quad (12)$$

Miarą wpływu efektu skali jest wtedy tzw. współczynnik efektu skali:

$$v(\mathbf{y}_o, \mathbf{w}_o, \mathbf{x}_{st,o}) = \sum_{r=1}^s E_{C/y_r}(\mathbf{y}_o, \mathbf{w}_o, \mathbf{x}_{st,o}). \quad (13)$$

Przy czym obowiązuje zastrzeżenie podane po wzorze (10). Wynika z niego w szczególności, iż nie powinno się liczyć charakterystyk dla obiektów uznanych za efektywne kosztowo ( $EK(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o) = 1$ ). Na punktach danych, które im odpowiadają, jest bowiem rozpięta kawałkami liniowa funkcja kosztów, którą rozważamy. Oznacza to, że w ich otoczeniu pochodne, a tym samym odpowiednie wartości optymalne, które służą do definiowania charakterystyk, nie są jednoznacznie wyznaczone. W części empirycznej pracy będziemy więc wyliczać wartości charakterystyk jedynie dla jednostek nieefektywnych.

W pracy [Osiewalski, Osiewalska 2006] użytej do porównań obliczono jedynie elastyczności kosztowe oraz współczynnik efektu skali, stąd w niniejszej pracy również ograniczymy się do tych wielkości. Należy jednak zaznaczyć, że we wspomnianej pracy źródłowej obliczono za pomocą alternatywnej metodologii charakterystyki, których nie można uzyskać w ramach DEA – np. oceny miar rozproszenia, czy tzw. łączny efekt kosztowy zwiększania jakości usług.

### 3. Stochastyczna graniczna funkcja kosztu

Stochastyczny model granicznej funkcji kosztu można przedstawić w postaci równania<sup>7</sup>:

$$C_j = f(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_j, \mathbf{x}_{st,j}; \boldsymbol{\beta}) \exp(u_j + v_j); \quad j = 1, \dots, n \quad (14)$$

wraz z szeregiem założeń o jego składowych:

$C_j$  – obserwowany koszt zmienny obiektu  $j$ -tego<sup>8</sup>,

$f(\cdot)$  – krótkookresowa funkcja kosztu zadana za pomocą wektora nieznanymi parametrow  $\boldsymbol{\beta}$ ,

$\mathbf{q}_j = [q_{1j}, \dots, q_{sj}]$  – wektor rzeczywistych ilości produktów dla obiektu  $j$ -tego,

$u_j$  – asymetryczny i dodatni składnik losowy modelujący nieefektywność,

$v_j$  – symetryczny względem zera składnik losowy odzwierciedlający wpływ czynników przypadkowych i błędów pomiaru.

Zakłada się zwykle, że ciągi zmiennych losowych  $\{u_j\}_{j=1}^n$ ,  $\{v_j\}_{j=1}^n$  są i.i.d. (*independent and identically distributed*), zaś składnik losowy  $u_j + v_j$  określa się mianem *złożonego*. Przyjmując taki model, zakładamy więc, że obserwowany koszt zmienny powstaje w wyniku zaburzenia kosztu minimalnego przez nieefektywność oraz błędy pomiaru i czynniki przypadkowe.

W pracy [Osiewalski, Osiewalska 2006] przyjmuje się niezbędne założenia szczegółowe, które umożliwiają późniejszą estymację nieznanymi parametrów:

- $u_j$  mają rozkład wykładniczy o nieznannej wartości oczekiwanej  $\lambda$ ,
- $v_j$  mają rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0 i nieznannej wariancji  $\sigma^2$ ,
- $f(\cdot)$  jest postaci Cobba-Douglasa tzn.:

$$f(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_j, \mathbf{x}_{st,j}; \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 q_{1j}^{\beta_1} \cdot \dots \cdot q_{sj}^{\beta_s} x_{k+1,j}^{\beta_{s+1}} \cdot \dots \cdot x_{mj}^{\beta_{s+m-k}} w_{1j}^{\beta_{s+m-k+1}} \cdot \dots \cdot w_{kj}^{\beta_{s+m}} \quad (15)$$

gdzie wektor parametrów  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0, \dots, \beta_{s+m}]$ .

Zwykle utożsamia się produkty rzeczywiste z zaobserwowanymi, tzn. przyjmuje się, iż:

$$\forall j = 1, \dots, n: \mathbf{q}_j = \mathbf{y}_j. \quad (16)$$

Jednak we wspomnianej pracy źródłowej zastosowano alternatywny schemat modelowania. Przyjęto mianowicie, iż:

$$\forall j=1, \dots, n \quad \forall r = 1, \dots, s: q_{rj} = y_{rj} \cdot \exp(\alpha_r + \gamma_r z_j), \quad (17)$$

<sup>7</sup> W celach porównawczych użyto oznaczeń wprowadzonych w poprzedniej części opracowania.

<sup>8</sup> Zdefiniowany w mianowniku wzoru (5).

gdzie  $\gamma_r > 0$ ,  $\alpha_r$  są parametrami, zaś  $z_j$  pewnym czynnikiem wpływającym korzystnie na wielkość poszczególnych produktów<sup>9</sup>. Wykorzystując wzór (17) w ramach formuły (15) i porządkując czynniki uzyskujemy ostatecznie:

$$f(\mathbf{y}_j, \mathbf{w}_j, \mathbf{x}_{st,j}; \boldsymbol{\beta}^*) = \beta_0^* y_{1j}^{\beta_1} \cdot \dots \cdot y_{sj}^{\beta_s} x_{k+1,j}^{\beta_{s+1}} \cdot \dots \cdot x_{m_j}^{\beta_{s+m-k}} w_{1j}^{\beta_{s+m-k+1}} \cdot \dots \cdot w_{kj}^{\beta_{s+m}} \exp(\beta_{s+m+1} z_j), \quad (18)$$

gdzie  $\beta_0^*$  oraz  $\beta_{s+m+1}$  są odpowiednimi kombinacjami<sup>10</sup> dotychczas wprowadzonych parametrów, zaś  $\boldsymbol{\beta}^* = [\beta_0^*, \beta_1, \dots, \beta_{s+m+1}]$ .

Po zdefiniowaniu modelu statystycznego przechodzi się do estymacji (na podstawie danych) nieznanych parametrów zebranych w wektorze  $\boldsymbol{\beta}^*$  oraz wskaźników efektywności postaci  $\exp(-u_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Ze wzoru (14) wynika, iż:

$$\exp(-u_j) = f(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_j, \mathbf{x}_{st,j}; \boldsymbol{\beta}) \exp(v_j) / C_j. \quad (19)$$

Miernikiem efektywności jest więc iloraz podlegającego wahaniom czysto losowym kosztu minimalnego oraz kosztu zaobserwowanego. Estymacja może być przeprowadzona na gruncie klasycznym za pomocą tzw. stochastycznej analizy granicznej (*Stochastic Frontier Analysis – SFA*) – zob. np. [Kumbhakar, Lovell 2000]. Jednak stwarza ona wiele niedogodności i ograniczeń, zwłaszcza w zakresie oceny efektywności. Stąd autorzy zastosowali do celów estymacji tzw. podejście bayesowskie. Na wstępie nadaje się parametrom tzw. rozkłady *a priori* wyrażające naszą teoretyczną wiedzę o procesie produkcyjnym, który badamy. Następnie za pomocą odpowiednich procedur (losowanie Gibbisa), opierając się na danych, konstruuje się tzw. rozkłady *a posteriori* parametrów. Zwykle znacząco różnią się one od rozkładów *a priori*, ponieważ uwzględniają już wiedzę o procesie produkcyjnym zawartą w danych. Wartości oczekiwane parametrów oraz odchylenia z rozkładów *a posteriori* przyjmuje się odpowiednio jako ich oceny oraz miary błędu estymacji. Szczegóły w zakresie analizy bayesowskiej stochastycznych modeli granicznych można znaleźć np. w monografii [Osiewalski 2001].

W ostatnim etapie, wykorzystując uzyskane oceny parametrów, estymuje się wartości odpowiednich charakterystyk procesu produkcyjnego oraz wskaźniki efektywności<sup>11</sup>. Podaje się również oceny ich rozproszenia związane z ich statystyczną istotnością. W przypadku krótkookresowej funkcji kosztu typu Cobba-Douglasa zadanej wzorem (18), elastyczności kosztowe względem produktów, czynników stałych i cen czynników zmiennych stanowią bezpośrednio parametry znajdujące się

<sup>9</sup> Wzór (17) to propozycja modelowania wpływu czynników jakościowych na wielkość produktu.

<sup>10</sup> Interpretowalne są jedynie  $\beta_0^*$  oraz  $\beta_{s+m+1}$ . Postać odpowiednich kombinacji oraz ich składowe nie mają więc żadnego, praktycznego znaczenia.

<sup>11</sup> Oceny wskaźnika efektywności i jego rozproszenia to odpowiednio wartość oczekiwana i odchylenie z rozkładu *a posteriori* zmiennej losowej  $\exp(-u_j)$ .

w odpowiedniej potęgze. Suma  $\beta_1 + \dots + \beta_s$  jest więc współczynnikiem efektu skali. W pracy [Osiewalski, Osiewalska 2006] nie korzysta się w związku z tym kosztów krańcowych, lecz estymuje bezpośrednio odpowiednie elastyczności. Dodatkowo interpretuje się ocenę parametru  $\beta_{s+m+1}$ , modelującą wpływ jednoczesnego zwiększenia jakości usług na koszt zmienny.

Porównując treści zawarte w części pierwszej i drugiej pracy uwidaczniają się zasadnicze różnice metodologiczne, które mogą się przekładać na różnice w uzyskanych wynikach. Po pierwsze metoda DEA ma tu charakter deterministyczny, nie uwzględnia więc wpływu czynników czysto losowych na wyniki. Przeciwnie niż w przypadku metodologii alternatywnej, gdzie wprowadzono składnik losowy  $v_j$ , który modeluje owe czynniki. Wynika z tego w szczególności, iż w przypadku oceny wskaźnika efektywności  $\exp(-u_j)$  oraz ocen parametrów zebranych w wektorze  $\beta$  jest sens mówić o ich rozproszeniu. Co więcej, można obliczyć oceny rozproszenia dla wspomnianych wielkości.

Druga zasadnicza różnica polega na tym, że model procesu produkcyjnego opisany w części pierwszej ma charakter nieparametryczny, podczas gdy stochastyczny model granicznej funkcji kosztu jest konstrukcją parametryczną. Wynika z tego w szczególności, iż funkcja kosztu w przypadku DEA jest zadana w punktach danych i ma charakter wybitnie lokalny<sup>12</sup>. Podczas gdy w ramach metodologii alternatywnej jest ona zadana globalnie analitycznym wzorem. Przypomnijmy też, iż kształt empirycznej funkcji kosztów w DEA powoduje, że wartości jej charakterystyk jest sens liczyć jedynie dla obiektów nieefektywnych. Podczas gdy w ramach metodologii alternatywnej, ze względu na gładki kształt oszacowanej funkcji kosztów zadanej parametrycznie, charakterystyki można obliczyć we wszystkich punktach danych. Zwróćmy też uwagę, że w przypadku metody analizy otoczki danych funkcja kosztu dotyczy bezpośrednio minimalnych kosztów zmiennych – zob. wzór (7). Natomiast zmienną objaśnianą, w przypadku stochastycznej granicznej funkcji kosztu, jest ze względu na losowość zaobserwowany koszt zmienny – zob. wzór (14).

Pomiar efektywności przebiega na podobnej zasadzie, tzn. w obu przypadkach staramy się porównać minimalne koszty zmienne, możliwe do uzyskania przy zadanych wielkościach cen czynników zmiennych, produktów oraz ilości czynników stałych, z kosztami zaobserwowanymi. Jednak w przypadku modelu stochastycznego w konstrukcji wskaźnika efektywności uwzględniamy ponownie wpływ czynników losowych. Dodatkową różnicę stanowi parametryczna zależność pomiędzy ilością produktów zaobserwowanych i rzeczywistych zadana wzorem (17) i związany z tym interpretowalny parametr  $\beta_{m+s+1}$ . Autor opracowania nie znalazł w dostępnej literaturze przedmiotu jej odpowiednika w ramach nieparametrycznej procedury, jaką jest DEA. W ramach analizy otoczki danych przyjmuje się po prostu, zgodnie ze wzorem (16), iż produkty zaobserwowane to jednocześnie produkty rzeczywiste. Jest to zresztą zgodne z deterministycznym charakterem tej metody.

---

<sup>12</sup> Tzn. jej postać analityczna najczęściej ulega zmianie w zależności od wybranego punktu z danych, w którym ją przedstawiamy.

#### 4. Dane empiryczne i sposób ich wykorzystania

Dane wykorzystane w niniejszym opracowaniu oraz w pracy [Osiewalski, Osiewalska 2006] mają charakter ankietowy i pochodzą z roku 2000<sup>13</sup>. Dotyczą 240 polskich bibliotek powiatowych, miejskich i gminnych. Niestety, ankieta nie jest kontynuowana, stąd nie ma możliwości aktualizacji wyników. Zdecydowano się na analizę efektywności kosztowej ze względu na to, iż są to jednostki *non profit* dotowane z budżetu państwa, więc sfera kosztów działalności ma tu kluczowe znaczenie. Ponadto, co podkreśla np. Vitaliano [1997], produkty bibliotek są egzogeniczne. Oznacza to, że to klienci tworzą ilości poszczególnych produktów, a nie biblioteka.

Dobór właściwych nakładów i produktów jest sprawą kluczową w badaniu empirycznym z zakresu analizy procesu produkcyjnego, ma bowiem zasadniczy wpływ na uzyskiwane wyniki i sposób ich interpretacji. W celach porównawczych ustalono zestaw podobny jak w pracy [Osiewalski, Osiewalska 2006]. Za nakłady bibliotek publicznych przyjęto:

- $x_1$  – liczba etatów personelu bibliotecznego<sup>14</sup>,
- $x_2$  – liczba tytułów czasopism z okresu bieżącego,
- $x_3$  – liczba woluminów książek zakupionych w roku bieżącym,
- $x_4$  – inne zbiory i materiały z okresu bieżącego,
- $x_5$  – liczba miejsc w czytelnich (czynnik stały).

Natomiast za produkty uznano:

- $y_1$  – liczba czytelników zarejestrowanych w bibliotece,
- $y_2$  – liczba wypożyczonych książek,
- $y_3$  – liczba odwiedzin w czytelnich i kącikach czytelniczych.

Za produkty przyjęto te usługi, które biblioteka mogłaby sprzedawać, gdyby była firmą prywatną. Byłaby więc opłata za przynależność (np. jak w klubie,  $y_1$ ), za wypożyczenie (np. jak w wypożyczalni płyt DVD,  $y_2$ ) i za wejście (np. jak w muzeum,  $y_3$ ). Ze względu na krótkookresowy charakter analizy za czynniki zmienne przyjęto pracę ( $x_1$ ) oraz zbiory biblioteki pozyskane w okresie bieżącym ( $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ ). Do analizy konieczna jest znajomość ich cen, za które przyjęto roczne ceny średnie. Powstają one poprzez podzielenie łącznych kosztów związanych z danym czynnikiem przez jego ilość dla każdego obiektu. Wyjątkiem jest nakład  $x_4$ , w którego przypadku dysponujemy jedynie łącznymi kosztami zakupu. Przyjęto więc dość racjonalne założenie, iż jego roczna cena średnia jest nieznaną, lecz jednakową dla wszystkich bibliotek. Bez straty ogólności rozważań przyjmuje się, że jest ona jednostkowa, co umożliwia zastąpienie brakujących ilości czynnika  $x_4$  przez jego łączne koszty zakupu w ramach obu metodologii. Czynniki stałe reprezentuje jedynie liczba miejsc w czytelnich ( $x_5$ ).

<sup>13</sup> Autor pracy chciałby w tym miejscu podziękować Prof. dr. hab. Jackowi Osiewalskiemu i dr Annie Osiewalskiej za udostępnienie zebranych przez nich danych.

<sup>14</sup> Bibliotekarze plus pozostały personel pomocniczy.

Włączenie większej liczby nakładów stałych reprezentujących kapitał biblioteki okazało się problematyczne ze względów numerycznych i modelowych. Kluczową rolę gra tu rozmiar problemu. Mamy bowiem 240 obiektów, które w przyjętej wersji z 5 nakładów „wytwarzają” 3 produkty. Oznacza to, że przykładowo program liniowy (4) ma 9 warunków ograniczających, 244 zmienne decyzyjne i należy go rozwiązać 240 razy (dla każdego obiektu osobno). Z tego powodu zrezygnowano z ogólnie dostępnych pakietów, zaś autor na potrzeby niniejszej pracy rozszerzył kod procedury simpleksowej dostępny w programie GAUSS 12.0<sup>15</sup>. Korzysta ona z dwóch parametrów kalibrujących. Jeden z nich jest związany z optymalizacją funkcji celu, a drugi ze zmianą zmiennych w bazie simpleksowej. Próbowano rozszerzyć problem o kolejne, być może istotne, czynniki stałe typu: powierzchnia biblioteki, liczba stanowisk komputerowych dla czytelników czy liczba woluminów książek i tytułów czasopism z okresów poprzednich (zastana). Niestety, dobranie odpowiednich wartości wspomnianych parametrów kalibrujących, dających sensowne wyniki dla każdego z 240 obiektów, okazało się zadaniem zbyt trudnym dla autora. Należy jeszcze zwrócić uwagę, że dane dotyczące poszczególnych nakładów czy produktów charakteryzują się różnymi rzędami wielkości. Podjęto oczywiście próby ich przeskalowania, nie przyniosło to jednak zadowalających rezultatów.

Przyjęto, mimo różnej wielkości i umiejscowienia bibliotek, że funkcjonują one na podobnej zasadzie. Założono więc, kluczową w metodologii DEA, jednorodność technologiczną grupy badanych obiektów. Podobnie zresztą jak w pracy [Osiewalski, Osiewalska 2006], gdzie zdefiniowano *jedną* funkcję kosztów reprezentującą wspólną technologię. We wspomnianej pracy, ze względów numerycznych oraz ze względu na krótkookresowy charakter analizy, również rezygnuje się z większej liczby nakładów stałych. Wprowadza się tam wprawdzie do modelu liczbę komputerów dostępnych dla czytelników, nie jest ona jednak traktowana jako czynnik stały, lecz jako zmienna jakościowa wpływająca na wielkość poszczególnych produktów i powiązana z nimi zależnością analityczną – zmienna „z” ze wzoru (17). Jak wspomniano wcześniej, jej wprowadzenie na gruncie metody DEA nie jest możliwe ze względów modelowych.

Na koniec tej części opracowania przedstawiono wybrane statystyki empiryczne danych. Ze względu na licznosc danych, ich ilustracja jest możliwa jedynie w tak uproszczony sposób.

W tabeli 1 przedstawiono odpowiednie statystyki dotyczące ilości nakładów i produktów. Widoczna jest wspomniana wcześniej rozpiętość rzędów wielkości danych. Zarówno w zakresie danej zmiennej (por. wielkości min. i max.), jak i między zmiennymi (por. średnie czy mediany między kolumnami tabeli 1). Ponadto po porównaniu odchylenia standardowego (wiersz „odchyl.”) ze średnimi widoczne jest duże rozproszenie rozkładów empirycznych. Są one również dalekie od symetrii, co wynika z porównania mediany i średniej.

---

<sup>15</sup> Autor chciałby w tym miejscu podziękować Prof. UEK dr hab. Annie Pajor, która jest autorką procedury bazowej.



Dla porządku przedstawiono również statystyki empiryczne cen czynników zmiennych.

**Tabela 1.** Wybrane statystyki empiryczne nakładów i produktów

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
min.	0,88	1,00	2,00	0,00	2,00	263,00	698,00	47,00
max.	112,70	559,00	18 058,00	34 855,00	441,00	74 003,00	1 643 662,00	232 300,00
średnia	10,59	49,64	997,26	1 155,98	53,23	4 395,34	85 932,70	10 567,74
mediana	3,50	22,00	480,00	0,00	30,00	1 364,00	29 797,00	2 836,00
odchyl.	18,22	77,98	17 48,67	3 875,13	62,07	8 152,12	162 403,36	20 885,52

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 2.** Wybrane statystyki empiryczne cen czynników zmiennych

	$w_1$	$w_2$	$w_3$
min.	8 484,00	24,00	0,29
max.	29 880,00	298,67	43,58
średnia	17 717,06	100,36	15,93
mediana	17 508,00	90,83	15,73
odchyl.	3 355,81	43,79	4,92

Źródło: opracowanie własne.

Zaznaczmy raz jeszcze, że przedstawiono tu średnie ceny roczne. Przykładowo  $w_1$  oznacza średnią płacę pracownika w danej bibliotece uzyskaną przez niego w ciągu roku. Przypomnijmy, iż cenę  $w_4$  jako nieznaną i stałą przyjęto arbitralnie na poziomie jednostkowym dla celów obliczeniowych.

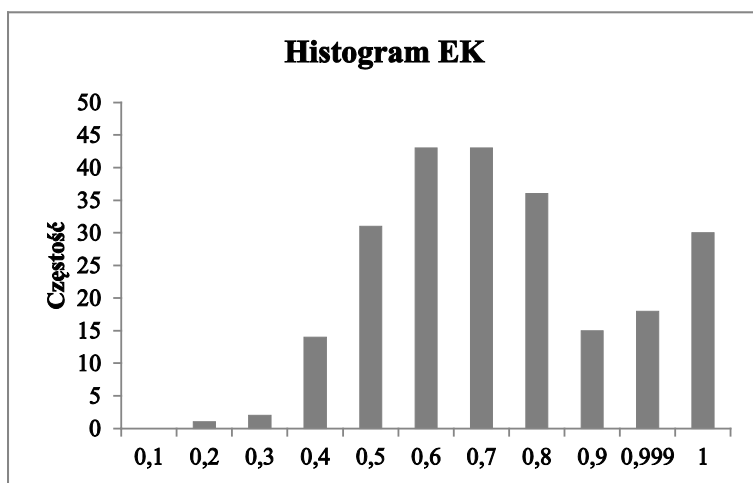
## 5. Omówienie uzyskanych wyników

Przy użyciu wspomnianej wcześniej implementacji procedury simpleksowej rozwiązano najpierw dla każdego obiektu osobno program (4). Dla siedmiu obiektów nie udało się uzyskać sensownych, interpretowalnych wyników, co jest związane z problemami numerycznymi wzmiankowanymi w poprzedniej części pracy. Dla pozostałych uzyskano w pierwszej kolejności minimalne koszty zmienne, idealne ilości nakładów oraz optymalne wielkości tzw. wag intensywności – zob. komentarze do programu (4) umieszczone w pierwszej części pracy. Za ich pomocą przeprowadzono podstawową analizę kosztową, która jednakże została już omówiona szczegółowo w jednej z poprzednich prac autora [Prędko 2014] na zbliżonym zestawie nakładów i produktów.

W niniejszym opracowaniu omówiona zostanie druga część analizy kosztowej w ramach metody DEA, związana z interpretacją rezultatów uzyskanych w wyniku rozwiązania programu liniowego (6). Jedynie ta część analizy jest bowiem zbieżna i porównywalna z wynikami otrzymanymi w wyniku zastosowania metodologii alternatywnej w pracy [Osiewalski, Osiewalska 2006]. W celu uproszczenia procedur obliczeniowych rozwiązanie optymalne programu (6) dla każdej z jednostek uzyskano z ostatnich tablic simpleksowych odpowiednich programów pierwotnych (4).

Przypomnijmy, że w wyniku rozwiązania zadania (6) można uzyskać ponownie minimalne koszty zmienne, które posłużą do otrzymania wartości miernika efektywności EK dla każdego obiektu – zob. wzór (5). Możliwe jest również oszacowanie funkcji kosztu i jej charakterystyk lokalnie, w punktach danych, za pomocą odpowiednio formuły (7) i wzorów (9)–(13), lecz jedynie dla obiektów nieefektywnych. Ze względu na licznosc danych przy opisie wyników będziemy się w dalszym ciągu posługiwać wybranymi statystykami empirycznymi.

Zacznijmy od przedstawienia wyników dotyczących wartości miernika efektywności  $EK(x_j, y_j)$  oraz porównania z ocenami miernika efektywności  $\exp(-u_j)$  uzyskanych za pomocą metodologii alternatywnej ( $j = 1, \dots, 233$ ). Przypomnijmy, iż pominięto 7 obiektów dla których nie udało się uzyskać sensownych wyników w ramach metodologii DEA.



**Rys. 1.** Histogram rozkładu empirycznego miernika EK

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 1 przedstawiono histogram rozkładu empirycznego miernika EK  $(x_j, y_j)$ . W grupie jednostek o najniższej efektywności znajduje się 17 bibliotek. Miernik  $EK(x_j, y_j)$  nie przekracza w ich przypadku poziomu 0,4 – tzn. mogłyby one obniżyć swoje zaobserwowane koszty zmienne o 60% lub więcej. Jak zwykle w

przypadku użycia metodologii DEA mamy do czynienia z dość liczną frakcją jednostek w pełni efektywnych – 30 bibliotek w ostatniej kolumnie histogramu. Najliczniejsze grupy stanowią jednak biblioteki, których stopień efektywności mieści się w zakresie 0,5-0,6 oraz 0,6-0,7 (po 43 biblioteki), a więc mogłyby one obniżyć swoje obecne koszty o 30-50%.

**Tabela 3.** Statystyki empiryczne dotyczące wskaźników efektywności

	EK	exp(-u)	wsp. korelacji
min.	0,1866	0,8114	0,5061
max.	1,0000	0,9653	wsp. rang
średnia	0,6808	0,9194	0,5609
mediana	0,6655	0,9252	
odchyl.	0,2011	0,0255	

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 3 widoczne są statystyki empiryczne dla obu wskaźników. Wartości miernika  $EK(x_j, y_j)$  (kol. 2) mieszczą się w zakresie [0,1866; 1], zaś średnia efektywność liczona za pomocą metody analizy otoczki danych wynosi 0,6808. Oznacza to, iż średnio rzecz biorąc minimalne koszty zmienne biblioteki stanowią około 68% kosztów zaobserwowanych. Poziom efektywności połowy z rozważanych bibliotek nie przekracza wartości 0,6655. Interpretacje te należy jednak traktować z dużą ostrożnością, ponieważ odchylenie standardowe dotyczące tych wartości jest z nimi porównywalne i wynosi około 0,2.

Przechodząc do porównań, oceny alternatywnego wskaźnika efektywności wskazują, że efektywność kosztowa bibliotek jest średnio rzecz biorąc wyższa niż w ramach DEA i charakteryzuje się dużo mniejszym rozproszeniem (kol. 3). Wynika to najprawdopodobniej z opisanych wcześniej różnic metodologicznych. W ramach DEA „rozpinamy” kawałkami liniową funkcję kosztów na najbardziej odstających punktach danych, które uznane zostają za jednostki efektywne. Pozostałe jednostki znajdują się często dość daleko od tej otoczki, a im większa jest ta odległość tym mniejsza wartość miernika  $EK(x_j, y_j)$ . W metodologii alternatywnej oszacowana graniczna funkcja kosztów o charakterze parametrycznym przebiega najczęściej „pomiędzy” punktami danych. Wynika to z faktu, iż bierzemy tu pod uwagę również błędy w danych w postaci symetrycznego składnika losowego. Ponadto oceny parametrów samej funkcji, jak i składników losowych są tak dobierane, by nastąpiło jak największe dopasowanie do danych. Stąd odległości punktów danych od oszacowanej granicznej funkcji kosztów są tu znacznie mniejsze i na dodatek wynikają z dwóch źródeł: losowości danych i braku efektywności. Sama nieefektywność jest tu wtedy stosunkowo niewielka, co wyraża się właśnie niezbyt wysokimi wartościami oceny miernika  $exp(u_j)$ .

Zwróćmy jednak uwagę na istotnie dodatnie współczynniki korelacji Pearsona i rang Spearmana przedstawione w tabeli 3. Oznaczają one, że w wyniku zastosowania dwóch, niezależnych metodologii uzyskano stosunkowo zbieżne wyniki w odniesieniu do efektywności bibliotek. Na przykład biblioteka, która jest uznawana za wysoce efektywną w ramach DEA, ma dużą szansę być efektywną również wg metodologii alternatywnej. Zbieżność wyników dotyczy zarówno samych wartości mierników (wsp. korelacji Pearsona), jak i rankingów ustalonych obiema metodami (wsp. rang Spearmana). Ma to istotne znaczenie, ponieważ podnosi wiarygodność uzyskanych rezultatów.

Przejdźmy teraz do przedstawienia wyników dotyczących oszacowań charakterystyk kawałkami liniowej funkcji kosztu w punktach danych uzyskanych za pomocą metody analizy otoczki danych. Przypomnijmy, że z powodów braku ich jednoznaczności dla obiektów efektywnych wyniki dotyczą jedynie jednostek nieefektywnych (203 obiekty). W tabeli 4 przedstawiono statystyki empiryczne wartości kosztów krańcowych produktów i czynnika stałego.

**Tabela 4.** Statystyki empiryczne dotyczące kosztów krańcowych (DEA)

	k.kr.y1	k.kr.y2	k.kr.y3	k.kr.x5
min.	0,000	0,000	0,000	-4464,489
max.	37,879	2,617	4,162	3941,577
średnia	6,360	0,592	0,427	251,781
mediana	0,276	0,634	0,000	171,148
odchyl.	10,072	0,589	0,921	790,444

Źródło: opracowanie własne.

Zacznijmy od wpływu wzrostu liczby czytelników zarejestrowanych w bibliotece ( $y_1$ ) na jej minimalne koszty zmienne (kol. 2). Jest on nieujemny i bardzo różny w zależności od tego, który obiekt weźmiemy pod uwagę. Świadczy o tym szeroki zakres jego zmienności [0; 37,879] oraz stosunkowo duża wartość odchylenia standardowego w stosunku do średniej. Średnio rzecz biorąc rejestracja dodatkowego czytelnika w bibliotece pociąga za sobą wzrost kosztów zmiennych o 6,36 zł, jednak ten dodatkowy koszt osiąga dla jednej z bibliotek nawet wartość 37,88 zł. Istnieje stosunkowo duża frakcja obiektów, dla których rejestracja dodatkowego czytelnika nie ma wpływu na jego koszty zmienne (98 bibliotek) – zerowa wartość odpowiednich kosztów krańcowych. Przekłada się to na stosunkowo niską wartość mediany (w porównaniu ze średnią) – zmiana minimalnych kosztów zmiennych w przypadku połowy obiektów nie przekracza kwoty 0,28 zł.

Wpływ wzrostu liczby wypożyczonych książek ( $y_2$ ) na minimalne koszty zmienne jest nieujemny i dużo słabszy w porównaniu z wpływem wzrostu liczby czytelników (kol. 3, przedział zmienności [0; 2,617]). W dalszym ciągu jednak wartość odchylenia standardowego jest porównywalna ze średnią. Ponownie istnieje duża frak-

cja obiektów, których koszty zmienne nie ulegają zmianie wraz ze wzrostem liczby wypożyczonych książek (77 obiektów). Powoduje to, iż wartość mediany jest również bardzo niska, lecz tym razem porównywalna z wartością średnią, co wynika ze stosunkowo niewielkich zmian kosztów towarzyszących zmianom ilości tego produktu.

Podobnie jest w przypadku wpływu zmian liczby osób odwiedzających czytelnię ( $y_3$ ) na minimalne koszty zmienne biblioteki (kol. 4). Tym razem jednak frakcja bibliotek, których koszty nie zmieniają się na skutek wzrostu liczby osób odwiedzających czytelnię, jest tak duża (150 obiektów), że mediana również osiąga wartość zerową. Zdaniem autora, tak duże frakcje obiektów nieefektywnych o zerowych kosztach krańcowych ze względu na poszczególne produkty są ściśle związane z postacią funkcji kosztów i ogólniej technologii definiowanej w ramach metodologii DEA. Funkcja kosztów jest kawałkami liniowa, a właściwie „płatami liniowa”, mamy tu bowiem do czynienia z więcej niż dwoma wymiarami (trzy produkty, czynnik stały i koszt zmienny). Analizując zmiany produktów, poruszamy się w tej wielowymiarowej przestrzeni w kierunkach odpowiadających osiom reprezentującym wspomniane produkty. Docierając do płatami liniowej funkcji kosztów rozpiętej na danych, często natrafiamy na jej „płaskie” fragmenty, które są równoległe do osi produktu, którego zmiany badamy.

Przejdźmy teraz do wpływu zmian liczby miejsc w czytelniach (czynnik stały  $x_5$ ) na minimalne koszty zmienne biblioteki (kol. 5). Po pierwsze zwróćmy uwagę, że wzrost o 1 miejsce czytelnicze może spowodować zarówno wzrost (135 obiektów), jak i spadek (68 obiektów) kosztów biblioteki. Teoretycznie, przy optymalnym zaangażowaniu tego czynnika, znak tych kosztów krańcowych powinien być ujemny. Otrzymane wyniki wskazują więc, że w naszym przypadku wiele bibliotek publicznych może mieć zbyt dużą liczbę miejsc w czytelniach w stosunku do optimum (przy ustalonych poziomach usług bibliotecznych i zadanych cenach czynników). Analogiczne jakościowo wyniki uzyskano w pracy [Osiewalski, Osiewalska 2006], w której oszacowana elastyczność kosztowa czynnika stałego ma znak dodatni<sup>16</sup>. Po drugie, wpływ zmian czynnika stałego na koszty oprócz dwukierunkowości wykazuje też ogromne zróżnicowanie co do jego siły – przedział zmienności [−4464,489; 3941,577]. Średnio rzecz biorąc, wzrost liczby miejsc w czytelnii o jedno powoduje wzrost kosztów zmiennych o 251,78 zł. Są jednak biblioteki, w których minimalne koszty zmienne spadają wtedy o 4464,49 zł albo wzrastają o 3941,58 zł! Ponownie mamy do czynienia z dużym odchyleniem standardowym, podkreślającym omawianą zmienność wpływu i sugerującym ostrożność przy interpretacji wyników w odniesieniu do wszystkich bibliotek jednocześnie. Przy tak dużym odchyleniu i zakresie zmienności, różnica między medianą a średnią nie wydaje się znacząca.

Niestety, wyniki dotyczące oszacowań odpowiednich kosztów krańcowych za pomocą metodologii alternatywnej nie zostały umieszczone w pracy [Osiewalski, Osiewalska 2006]. Stąd w niniejszej pracy nie będziemy porównywać rezultatów

<sup>16</sup> Co przekłada się oczywiście na dodatni znak odpowiedniego kosztu krańcowego.

w tym zakresie. Brak ten wynika zdaniem autora z potęgowej postaci stochastycznej granicznej funkcji kosztu. Parametry umieszczone w odpowiednich potęgach są jednocześnie elastycznościami kosztowymi względem produktów, czynnika stałego oraz cen czynników zmiennych – zob. wzór (18). W takiej sytuacji zwyczajowo interpretuje się od razu oceny elastyczności bez rozważania wcześniej odpowiednich kosztów krańcowych. Pomija się więc interpretację wpływu ilościowych zmian produktów, czynników stałych i cen czynników zmiennych na minimalne koszty zmienne i przechodzi od razu do zmian względnych (procentowych).

W tabeli 5 przedstawiono więc statystyki empiryczne dotyczące elastyczności kosztowych względem produktów i nakładu czynnika stałego, uzyskane w ramach metodologii DEA. Przypomnijmy, iż uzyskanie elastyczności kosztowych względem cen czynników zmiennych nie jest wykonalne w ramach analizy otoczki danych – zob. komentarz po wzorze (10), w części pierwszej pracy. Oznacza to, że porównanie z wynikami otrzymanymi w odniesieniu do tych elastyczności w pracy [Osiewalski, Osiewalska 2006] również nie będzie możliwe. W tabeli 5 umieszczono także wartości współczynnika efektu skali, który jest ściśle związany z elastycznościami kosztowymi względem produktów – zob. wzór (13).

**Tabela 5.** Statystyki empiryczne dotyczące elastyczności kosztowych (DEA)

	$E_{C/y_1}$	$E_{C/y_2}$	$E_{C/y_3}$	$E_{C/x_5}$	$v$
min.	0,000	0,000	0,000	-0,696	0,000
max.	1,364	1,517	0,789	1,920	1,550
średnia	0,213	0,435	0,056	0,216	0,704
mediana	0,007	0,552	0,000	0,132	0,737
odchyl.	0,333	0,414	0,142	0,363	0,307

Źródło: opracowanie własne.

Okazuje się, że zakresy zmian względnych kosztów nie są tak znaczące jak omówionych już zmian bezwzględnych. W reakcji na 1-procentowy wzrost liczby czytelników/liczby wypożyczonych książek/liczby odwiedzin w czytelnich/liczby miejsc w czytelnich minimalne koszty zmienne poszczególnych bibliotek zmieniają się odpowiednio w następujących zakresach procentowych:  $[0,000; 1,364]/[0,000; 1,517]/[0,000; 0,789]/[-0,696; 1,920]$ . W przypadku elastyczności kosztowych względem produktów w dalszym ciągu występują oczywiście znaczące frakcje obiektów o zerowej elastyczności, zaś zmienny znak kosztów krańcowych względem czynnika stałego przenosi się na odpowiednią elastyczność kosztową. Odchylenia standardowe są w dalszym ciągu znaczące w porównaniu z odpowiednimi, średnimi elastycznościami, co skłania do ostrożności przy interpretacjach ogólnych, dotyczących wszystkich bibliotek.

Interpretacje poszczególnych elastyczności przebiegają bardzo podobnie jak w przypadku odpowiadających im kosztów krańcowych. Z tym że – jak wspomniano wcześniej – mówimy tu o zmianach liczonych w procentach. Stąd bardziej interesujące wydaje się przejście od razu do porównań z wynikami uzyskanymi w pracy [Osiewalski, Osiewalska 2006]. Musimy jednak pamiętać w tym miejscu o pewnej zasadniczej różnicy metodologicznej. Z powodu przyjęcia potęgowej postaci granicznej funkcji kosztów elastyczności kosztowe są tu stałe po obiektach. W DEA, ze względu na lokalny charakter funkcji kosztu, zależą one od biblioteki, którą rozważamy (reprezentowanej przez punkt danych). Z ocenami elastyczności uzyskanymi w ramach metodologii alternatywnej porównamy więc odpowiednie średnie elastyczności otrzymane za pomocą metody analizy otoczki danych. Uwzględnimy również mierniki rozproszenia wartości będących przedmiotem porównania. W przypadku DEA są to odchylenia standardowe uzyskanych wartości empirycznych odpowiednich elastyczności, zaś w przypadku metodologii alternatywnej oceny odchylen odpowiednich parametrów uzyskane z ich rozkładów *a posteriori*. Wszystkie te rezultaty zebrano w tabeli 6.

**Tabela 6.** Średnie elastyczności kosztowe (DEA) i oceny odpowiednich elastyczności uzyskane w ramach metodologii alternatywnej wraz z miernikami rozproszenia

	DEA		met. alternat.	
	średnia	odchyl.	wart. oczek.	odchyl.
$E_{C/y_1}$	<b>0,213</b>	0,333	<b>0,634</b>	0,063
$E_{C/y_2}$	<b>0,435</b>	0,414	<b>0,153</b>	0,055
$E_{C/y_3}$	<b>0,056</b>	0,142	<b>0,020</b>	0,014
$E_{C/x_5}$	<b>0,216</b>	0,363	<b>0,126</b>	0,031

Źródło: opracowanie własne.

Widoczne jest, że odchylenia w przypadku DEA są niestety większe od odpowiednich wartości średnich. Wynika to ze specyfiki technologii płatami liniowej, o czym była mowa już wcześniej w kontekście różnic w wartościach mierników efektywności uzyskanych obiema metodami. Mimo to z konieczności uznamy średnie elastyczności za statystyki reprezentujące lokalną funkcję kosztu dla wszystkich bibliotek. W metodologii alternatywnej mierniki rozproszenia są dużo mniejsze niż oceny elastyczności. Jedynie w przypadku liczby odwiedzin w czytelnich ( $y_3$ ) są porównywalne. Uzyskane wyniki są więc w większości istotne statystycznie, czyli można je uznać za w miarę pewne wartości charakteryzujące alternatywną, potęgową funkcję kosztów.

W ramach metodologii DEA wzrostowi liczby czytelników ( $y_1$ ) o 1% towarzyszy wzrost minimalnych kosztów zmiennych średnio o 0,213%. Używając jednak metodologii alternatywnej, dochodzimy do wniosku, że zmiana kosztów jest znacz-

nie większa i wynosi 0,634%. Zupełnie odwrotna sytuacja ma miejsce w przypadku 1-procentowego wzrostu wypożyczeń ( $y_2$ ). Koszty zmienne ulegają wtedy zmianie o 0,435/0,153% w ramach odpowiednio metody analizy otoczki danych i metodologii alternatywnej. W przypadku 1-procentowego wzrostu liczby odwiedzin w czytelnich ( $y_3$ ) obie metodologie sugerują raczej niewielki wzrost kosztów zmiennych. Przy czym jest on nieco większy dla DEA. Jednoprocentowa zmiana liczby miejsc w czytelnich (czynnik stały  $x_5$ ) powoduje wzrost kosztów zmiennych średnio o 0,216% dla metody analizy otoczki danych oraz o 0,126% dla metodologii alternatywnej. Zwróćmy uwagę, że obie metodologie sugerują, iż liczba miejsc w czytelnich jest obecnie zbyt duża, skoro znak elastyczności kosztowej względem czynnika stałego nie jest ujemny<sup>17</sup>.

Na koniec części empirycznej pracy przejdźmy do kwestii typu efektu skali, jest ona bowiem ściśle związana z elastycznościami kosztowymi względem produktów. W ramach obu metodologii jego miernikiem jest ich suma, zwana współczynnikiem efektu skali – zob. wzór (13). W przypadku metodologii alternatywnej jego wartość wynosi więc 0,807 dla wszystkich bibliotek – suma trzech pierwszych ocen elastyczności z kol. 4 tabeli 6. W krótkim okresie mamy więc do czynienia z globalnie rosnącym efektem skali, tzn. w przypadku jednoczesnego, jednoprocentowego wzrostu liczby czytelników, wypożyczeń i liczby odwiedzin w czytelnich koszt zmienny wzrośnie jedynie o 0,807%. Globalny charakter typu efektu skali jest ponownie konsekwencją przyjęcia potęgowej postaci granicznej funkcji kosztu. W pracy źródłowej podano również rozproszenie 0,026, które towarzyszy tej wielkości. Jak widać jest ono stosunkowo nieznaczące, podobnie jak w przypadku elastyczności.

W ramach DEA funkcja kosztu ma jednak charakter lokalny, co przekłada się również na typ efektu skali, który jest zmienny i zależny od biblioteki będącej przedmiotem analizy. Średnia ze współczynników efektu skali policzona dla wszystkich bibliotek znajduje się w odpowiednim miejscu kolumny 6, tabeli 5 i wynosi 0,704. Sugeruje to, że średnio rzecz biorąc mamy tu do czynienia również z rosnącym efektem skali. Trzeba jednak ponownie pamiętać o znaczącej wielkości odchylenia wynoszącej 0,307.

Wobec lokalnego charakteru charakterystyk liczonych w ramach DEA istotne od strony empirycznej byłoby podejście uwzględniające indywidualność poszczególnych obiektów. Pomocna byłaby np. analiza histogramów empirycznych dla poszczególnych charakterystyk, podobnie jak miało to miejsce dla miernika efektywności  $EK(x_j, y_j)$ . Praca byłaby jednak wtedy zbyt rozbudowana, skupiono się więc głównie na wynikach średnich umożliwiających porównanie z rezultatami uzyskanymi za pomocą metodologii alternatywnej. Warto jednak wspomnieć w odniesieniu do właśnie omawianego typu efektu skali, że aż 177 bibliotek na 203 obiekty nieefektywne charakteryzuje się rosnącymi efektami skali. Oznacza to, że przeważają one również indywidualnie w grupie bibliotek, co potwierdza informację uzyskaną z odpowiedniej średniej.

<sup>17</sup> Zobacz omówienie wyników dotyczących krańcowego kosztu czynnika stałego.



## 6. Zakończenie

Niniejsza praca, mimo zasadniczo empirycznego charakteru, ukazuje również możliwości metodologii DEA w zakresie analizy kosztowej jednorodnej technologicznie grupy jednostek gospodarczych. Poprzez porównanie z powszechnie używaną stochastyczną funkcją graniczną dostrzegamy wzajemne różnice, mocne i słabe strony obu metodologii. W osobnym opracowaniu [Prędkie 2014] znajduje się część analizy kosztowej, której nie można przeprowadzić w ramach wybranej metodologii alternatywnej, co zwiększa dodatkowo konkurencyjność metody analizy otoczki danych. W rodzimych aplikacjach wykorzystuje się DEA najczęściej do analizy efektywności technicznej i związanej z nią technologii płatami liniowej. Autor opracowania chciałby zachęcić do korzystania z tej metodologii również przy analizie efektywności kosztowej i związanej z nią kawałkami liniowej funkcji kosztów. Co więcej, możliwa jest również szersza analiza efektywności ekonomicznej w zakresie przychodu i zysku – zob. np. prace [Prędkie 2004, 2007ab, 2008].

## Literatura

- Färe R., Grosskopf S., Lovell C.A.K., 1994, *Production Frontiers*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Fugei D., 1989, *Library statistics for policy making. Report of a workshop held in Luxemburg, 1 February 1988*, Commission of the European Communities (EUR 11894 EN), Luxembourg.
- Holtman A.G., Tabasz T., Kruse W., 1976, *The demand for local public services, spillovers, and urban decay: the case of public libraries*, *Public Finance Quarterly*, vol. 4, s. 97-113.
- Kukuła K. (red.), 2011, *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Kumbhakar S., Lovell C., 2000, *Stochastic frontier analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Morse P. M., 1972, *Measures of library effectiveness*, *The Library Quarterly*, Vol. 42, s. 15-30.
- Osiewalski J., 2001, *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Osiewalski J., Osiewalska A., 2006, *Stochastyczna graniczna funkcja kosztu dla polskich bibliotek publicznych*, [w:] A. Zeliaś (red.), *Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków, s. 179-193.
- Prędkie A., 2004, *Badanie efektywności jednostek gospodarczych w sferze przychodów za pomocą metody DEA*, [w:] T. Trzaskalik (red.), *Metody i Zastosowania Badań Operacyjnych '04*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice, s. 285-295.
- Prędkie A., 2005, *Wykorzystanie dualnych programów liniowych w badaniu efektywności jednostek produkcyjnych metodą DEA*, *Przegląd Statystyczny*, Tom 52, nr 2, s. 57-72.
- Prędkie A., 2007a, *Liniowe programy dualne w analizie przychodu metodą DEA*, *Przegląd Statystyczny*, Tom 54, Nr 1, s. 94-108.
- Prędkie A., 2007b, *Pomiar i dekompozycja efektywności zysku za pomocą metody DEA*, *Prace Naukowe AE we Wrocławiu*, nr 1167, s. 220-231.
- Prędkie A., 2008, *Konstrukcja względnej miary efektywności jednostek produkcyjnych za pomocą zysku potencjalnego i rzeczywistego*, *Przegląd Statystyczny*, t. 55, nr 4, s. 28-39.
- Prędkie A., 2012, *Geneza zbiorów możliwości produkcyjnych wykorzystywanych w DEA*, *Zeszyty Naukowe UEP*, nr 241, s. 126-137.

- Prędko A., 2014, *Pomiar efektywności kosztowej polskich bibliotek publicznych za pomocą metody DEA*, Studia Ekonomiczne – Zeszyty Naukowe UE w Katowicach, w recenzji.
- Van House N.A., Childers T.A., 1993, *The public library effectiveness study: the complete report*, Chicago, American Library Association.
- Vitaliano D. F., 1997, *X - inefficiency in the public sector: the case of libraries*, Public Finance Review, vol. 25, s. 629-643.
- Welfe A., Brzeszczyński J., Majsterek M., 2002, *Słownik terminów metod ilościowych*, PWE, Warszawa.

## **COST ANALYSIS OF POLISH PUBLIC LIBRARIES WITH THE DEA METHOD AND A COMPARISON WITH RESULTS OBTAINED BY USING THE STOCHASTIC FRONTIER COST FUNCTION**

**Summary:** The aim of the paper is an empirical analysis of cost efficiency of public libraries by means of the DEA (Data Envelopment Analysis) approach. We collate our results with the ones obtained by [Osiewalska, Osiewalski 2006], who employ the Bayesian methodology to estimate stochastic cost frontier for the objects in question. Another, methodological objective of the study is a comparison of the two approaches to cost efficiency analysis. The merits and demerits of both are examined, along with their similarities and differences.

**Keywords:** DEA, cost analysis of libraries, cost efficiency, cost function.