PRACE NAUKOWE
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 309
RESEARCH PAPERS
of Wrocław University of Economics No. 309

Społeczno-gospodarcze aspekty statystyki

Redaktorzy naukowi
Zofia Rusnak
Edyta Mazurek

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2013

Redaktor Wydawnictwa: Joanna Szynal

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Beata Mazur

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:
www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,
The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon
http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-398-4

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS nr 309 • 2013
Społeczno-gospodarcze aspekty statystyki ISSN 1899-3192

Stanisław Heilpern
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

ZALEŻNE PROCESY RYZYKA

Streszczenie: Praca dotyczy procesów ryzyka, w których zależne mogą być wypłaty i sąsiednie okresy między wypłatami. Badane jest prawdopodobieństwo ruiny oraz wpływ stopnia zależności na wielkość prawdopodobieństwa ruiny. Struktura zależności opisana jest dwuwymiarowym rozkładem gamma lub funkcją łączącą. W tym drugim przypadku rozpatrywana jest oczekiwana zdyskontowana funkcja straty. Jest to miara ryzyka, której szczególnym przypadkiem jest prawdopodobieństwo ruiny oraz transformata Laplace'a czasu ruiny. Omawiane są również inne przypadki występowania zależności w procesach ryzyka: zależne wypłaty oraz zależne okresy między wypłatami.

Słowa kluczowe: proces ryzyka, zależność, funkcja łącząca, prawdopodobieństwo ruiny, oczekiwana zdyskontowana funkcja straty, czas ruiny.

1. Wstęp

W pracy rozpatrywane są procesy ryzyka, w których w odróżnieniu od klasycznych podejść występować mogą zależne zmienne i procesy losowe. Tego typu procesy są bardziej „realistyczne", lepiej modelują rzeczywiste zagadnienia dotyczące ubezpieczeń. Klasyczne założenie o niezależności jest zwykle zbyt idealistyczne, jednak wygodne z punktu widzenia teoretycznego, matematycznego.

Omawiany jest głównie przypadek, gdy zależność zachodzi między wielkością wypłaty i sąsiednim okresem między wypłatami oraz gdy okresy te mają rozkład wykładniczy. Struktura zależności zadana jest dwuwymiarowym rozkładem gamma oraz funkcją łącząca (ang. *copula*), głównie Spearmana. Interesuje nas prawdopodobieństwo ruiny oraz wpływ stopnia zależności na to prawdopodobieństwo. W przypadku struktury zależności opisanej funkcją łączącą rozpatrywana jest ogólniejsza niż prawdopodobieństwo ruiny miara ryzyka: oczekiwana zdyskontowana funkcja straty. Obejmuje ona też oprócz prawdopodobieństwa ruiny transformatę Laplace'a czasu ruiny.

Przedstawiona praca jest kontynuacją artykułów [Heilpern 2010; Heilpern 2011; Heilpern 2012; Heilpern 2013; Heilpern (w recenzji)]. W końcowej części artykułu przypomniano modele ryzyka, gdy zależne mogą być wypłaty, jak i okresy między wypłatami.

2. Proces ryzyka

W pracy rozpatrywany będzie następujący proces ryzyka:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

gdzie u jest kapitałem początkowym, a c jest intensywnością napływu składki. Wypłaty opisane są zmiennymi losowymi X_i, a $N(t)$ jest procesem liczącym wypłaty. Przedstawia on liczbę wypłat, które pojawiły się do chwili t. Proces liczący wypłaty $N(t)$ wyznaczony jest przez okresy między wypłatami W_i:

$$N(t) = \max\left\{n \geq 0\colon \sum_{i=1}^{n} W_i \leq t\right\}.$$

Ponadto założymy, że zmienne losowe W_i, przedstawiające okresy między wypłatami, mają ten sam rozkład o wartości oczekiwanej $E(W_i) = \frac{1}{\lambda}$. Również wypłaty X_i , traktowane będą jako zmienne losowe o tym samym rozkładzie o wartości oczekiwanej $E(X_i) = \frac{1}{\beta}$.

Rozpatrywać będziemy w pracy zagadnienie pojawienia się ruiny, czyli momentu T, w którym proces przyjmie po raz pierwszy wartość ujemną:

$$T = \inf\{t\colon U(t) < 0\}.$$

Interesować nas będzie głównie prawdopodobieństwo ruiny przy ustalonej wartości kapitału początkowego u, czyli funkcja o postaci

$$\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u).$$

W przypadku gdy składki nie są w stanie pokryć pojawiających się wypłat, tzn. gdy zachodzi warunek $c\beta \leq \lambda$, wystąpienie ruiny jest zdarzeniem pewnym, czyli $\psi(u) = 1$. Zatem w dalszej części pracy przyjmować będziemy, że rozpatrywany proces ryzyka $U(t)$ spełnia nierówność przeciwną: $c\beta > \lambda$.

Prawdopodobieństwo ruiny można wyznaczyć w inny sposób. Niech $Y_i = X_i - cW_i$ będzie spadkiem procesu ryzyka, a $M = \max_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{n} Y_k$ największym spadkiem. Wtedy

$$\psi(u) = P(M > u).$$

W klasycznym modelu ryzyka przyjmuje się, że występujące zmienne czy procesy losowe są niezależne [Kaas i in. 2001; Ostasiewicz (red.) 2000; Rolski i in. 1999]. Często proces liczący wypłaty $N(t)$ jest procesem Poissona. Okresy między wypłatami mają w tym przypadku rozkład wykładniczy z dystrybuantą:

$$F_{W_i}(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Wtedy prawdopodobieństwo ruiny dla ekstremalnych wartości kapitału początkowego: zerowego i granicznego, nieskończenie dużego, jest równe:

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c\beta}, \lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0.$$

Na ogół prawdopodobieństwa ruiny nie można przedstawić w postaci jawnego wzoru. Da się tak zrobić gdy wypłaty mają tzw. rozkład fazowy [Rolski i in. 1999]. Rozkłady fazowe obejmują między innymi rozkłady wykładnicze oraz kombinacje wypukłe tych rozkładów. W szczególności gdy wypłaty X_i mają rozkład wykładniczy, czyli:

$$F_{X_i}(t) = 1 - e^{-\beta t},$$

to prawdopodobieństwo ruiny wyraża się formułą [Kaas i in. 2001; Ostasiewicz (red.) 2000; Rolski i in. 1999]:

$$\psi(u) = \frac{\lambda m}{c} Exp\left(-\frac{c - \lambda m}{cm} u\right).$$

Istnieją też wzory na prawdopodobieństwo ruiny, gdy wypłaty mają rozkład dyskretny [Kaas i in. 2001]. Jednakże wzór ma wtedy charakter kombinatoryczny i jego złożoność rośnie wraz z liczbą wartości zmiennej losowej X_i.

Rozpatruje się również przypadek, gdy okresy między wypłatami są niezależnymi zmiennymi losowymi o dowolnym, niekoniecznie wykładniczym rozkładzie. Wtedy proces ryzyka jest nazywany procesem Sparre Andersena [Rolski i in. 1999].

Ponadto oprócz prawdopodobieństwa ruiny przedmiotem badania może być ogólniejsza miara ryzyka: oczekiwana zdyskontowana funkcja straty. Określona może być ona wzorem [Cheung i in. 2010; Gerber, Shiu 1998]:

$$m(u;\delta) = E\left(e^{-\delta T} w(U(T^-), |U(T)|) I(T < \infty) | \, U(0) = u\right),$$

gdzie $w(x, y)$ jest funkcją straty zależną od wartości procesu tuż przed ruiną $U(T^-)$ oraz od straty w momencie ruiny $|U(T)|$, $\delta \geq 0$ jest stopą dyskontową, a $I(A)$ indykatorem równym 1, gdy zdarzenie A zachodzi, i 0, gdy nie zachodzi.

Gdy $w(x, y) = y$, to $m(u; \delta)$ jest oczekiwaną, obecną wartością straty w momencie ruiny. Interesujący jest przypadek, gdy funkcja straty jest zdegenerowana: $w(x, y) = 1$, a stopa dyskontowa δ jest dodatnia. Otrzymujemy wtedy transformatę Laplace'a czasu ruiny o postaci

$$\phi_T(\delta; u) = E\left(e^{-\delta T} I(T < \infty) | \, U(0) = u\right).$$

Natomiast prawdopodobieństwo ruiny otrzymujemy, gdy $w(x, y) = 1$ oraz $\delta = 0$.

3. Zależna wypłata i okres między wypłatami

Załóżmy teraz, że wektory losowe (W_i, X_i) są niezależne, ale w odróżnieniu od klasycznego modelu pary zmiennych W_i oraz X_i mogą być zależne. Modele ryzyka dopuszczające występowanie zależności pomiędzy okresem między wypłatami a sąsiednią wypłatą były rozpatrywane między innymi w pracach [Albrecher, Boxma 2004; Ambagaspitiya 2009; Boudreault i in. 2006; Cheung i in. 2010; Cossette, Marceau, Marri 2008; Cossette, Marceau, Marri 2010; Heilpern 2013]. Jest to najczęściej rozpatrywany model ryzyka dopuszczający zależność. Można tu w niektórych przypadkach wyznaczyć dokładnie prawdopodobieństwo ruiny. Znajduje on między innymi zastosowanie w modelowaniu tzw. szkód katastroficznych, na przykład występujących podczas trzęsień ziemi [Boudreault i in. 2006; Cossette, Marceau, Marri 2008]. Przykładowo zaobserwowano, że zachodzi zależność między długością okresu między poszczególnymi wstrząsami, a wielkością spowodowanych przez wstrząsy szkód. Często szkody występujące po dłuższej przerwie są większe.

3.1. Dwuwymiarowy rozkład gamma

R.S. Ambagaspitiya [2009] rozpatrywał proces ryzyka, w którym losowy wektor (W_i, X_i) miał dwuwymiarowy rozkład gamma Kimble-Morana zadany funkcją generującą momenty postaci:

$$M_{W,X}(s_1, s_2) = \frac{1}{\left(\left(1 - \frac{s_1}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{s_2}{\beta}\right) - \rho\frac{s_1 s_2}{\lambda\beta}\right)^m},$$

gdzie parametr m jest liczbą naturalną, $0 \leq \rho < 1$, a funkcja generująca momenty losowego wektora (W, X) o łącznej gęstości jest równa:

$$M_{W,X}(s_1, s_2) = E(e^{s_1 W} e^{s_2 X}) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{s_1 t} e^{s_2 x} f_{W,X}(t, x) dt dx.$$

Wtedy zmienne brzegowe W oraz X mają rozkłady gamma z parametrami równymi odpowiednio (m, λ) i (m, β), czyli są sumą m niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym, a ρ jest współczynnikiem korelacji między zmiennymi. Zmienne losowe W i X są nieujemnie skorelowane, czyli $\rho \geq 0$.

Prawdopodobieństwo ruiny jest określone wtedy wzorem:

$$\psi(u) = \sum_{j=1}^{m} B_j e^{-s_j u},$$

gdzie

$$s_j = \frac{\lambda\beta}{2(1-\rho)c}\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta}\right)^2 + 4c\,\frac{1-\rho}{\lambda\beta}\left(1 - e^{2(j-1)\pi i/m}\right)}\right),$$

$j = 1, 2, \dots, m$, oraz

$$B_j = \left(1 - a_j\right)^m \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{m} \left(1 - \frac{s_j}{s_k}\right)^{-1},$$

gdzie

$$a_j = \frac{\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta}\right)^2 + 4c\frac{1-\rho}{\lambda\beta}\left(1 - e^{2(j-1)\pi \mathrm{i}/m}\right)}}{\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta}\right)^2 + 4c\frac{1-\rho}{\lambda\beta}}}$$

oraz $\mathbf{i}^2 = -1$.

Gdy współczynnik korelacji $\rho = 1$, to zmienne losowe są ściśle zależne liniowo, tzn. zachodzi między nimi zależność:

$$X = \frac{\lambda}{\beta} W.$$

Funkcja tworząca momenty jest wtedy równa:

$$M_{W,X}(s_1, s_2) = \frac{1}{\left(1 - \frac{s_1}{\lambda} - \frac{s_2}{\beta}\right)^m},$$

a dwuwymiarowa zmienna losowa (W, X) jest skupiona na prostej $x = \frac{\lambda}{\beta} w$ o łącznej gęstości:

$$f(w, x) = e^{-\beta x} (\lambda w)^{m-1} \frac{\lambda\beta}{(m-1)!} \delta_{\beta x - \lambda w},$$

gdzie $\delta_t = \begin{cases} 1 & \text{gdy } t = 0 \\ 0 & \text{gdy } t \neq 0 \end{cases}$ jest deltą Diraca. Dla ściśle zależnych zmiennych W i X

$$Y_i = \left(\frac{\lambda}{\beta} - c\right) W < 0,$$

ponieważ założyliśmy, że $c\beta > \lambda$. Stąd największy spadek procesu $M < 0$ oraz $\psi(u) = 0$ dla każdej wartości kapitału początkowego $u \geq 0$.

W przypadku gdy $\rho = 0$, otrzymujemy niezależność okresów W_i między wypłatami a sąsiednią wypłatą X_i. Mamy wtedy klasyczny proces ryzyka Sparre Andersena.

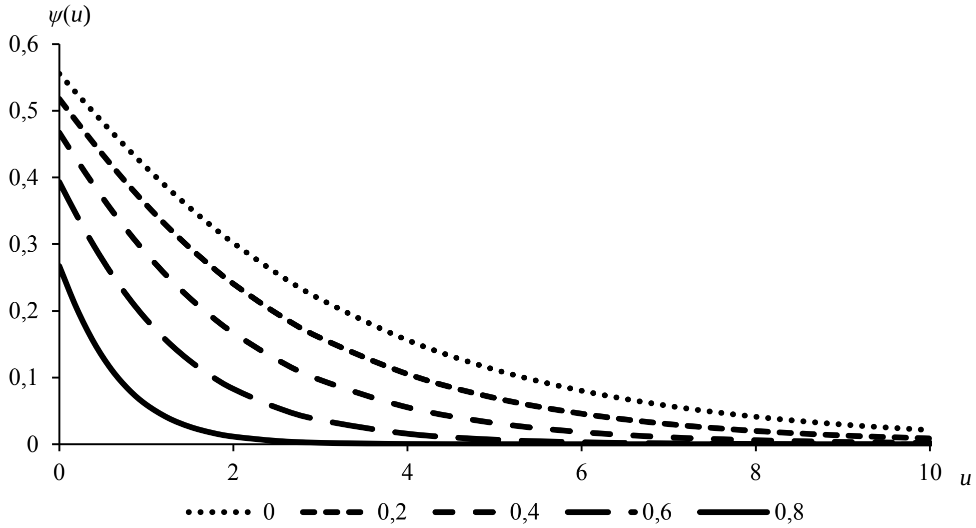
Gdy $m = 1$, otrzymujemy dwuwymiarowy rozkład wykładniczy. Prawdopodobieństwo ruiny określone jest wtedy prostą formułą [Heilpern 2013]:

$$\psi(u) = Be^{-zu},$$

gdzie

$$z = \frac{\lambda\beta}{(1-\rho)c}\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta}\right) \text{ oraz } B = 1 - \frac{2\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta}\right)}{\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta}\right)^2 + 4(1-\rho)\frac{c}{\lambda\beta}}}.$$

Obliczając pochodne, można pokazać, że B jest malejącą, a z rosnącą funkcją parametru ρ. Prawdopodobieństwo ruiny maleje wtedy wraz ze wzrostem stopnia zależności między zmiennymi W i X, reprezentowanego przez współczynnik korelacji ρ.



Rys. 1. Prawdopodobieństwo ruiny dla różnych wartości współczynnika korelacji ρ

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 1. Niech $m = 2$, $\lambda = 2$, $\beta = 1$ oraz $c = 3$. Wtedy prawdopodobieństwo ruiny jest określone wzorem

$$\psi(u) = B_1 e^{-s_1 u} + B_2 e^{-s_2 u}.$$

Przykładowo dla $\rho = 0{,}5$ jest ono równe

$$\psi(u) = 0{,}4801 e^{-2u/3} - 0{,}0458 e^{-2u}.$$

Na rysunku 1 zostały przedstawione wykresy funkcji $\psi(u)$ dla różnych wartości współczynnika korelacji ρ: 0; 0,2; 0,4; 0,6 oraz 0,8. Widzimy, że i w tym przypadku prawdopodobieństwo ruiny maleje dla każdej wartości u wraz ze wzrostem stopnia zależności ρ.

3.2. Funkcje łączące

Strukturę zależności między zmiennymi W oraz X możemy też modelować za pomocą funkcji łączących (ang. *copula*). Funkcja łącząca C jest łącznikiem między dystrybuantą łączną a dystrybuantami brzegowymi [Nelsen 1999; Heilpern 2007]:

$$F_{W,X}(t, x) = C(F_W(t), F_X(x)).$$

Niezależności odpowiada funkcja $C_I(u, v) = uv$, ścisłej zależności zgodnej (współmonotoniczności) $C_M(u, v) = \min(u, v)$, a przeciwnej (przeciwmonotoniczności) $C_W(u, v) = \max\{0, u + v - 1\}$.

Cossete, Marceau, Marri [2008; 2010] rozpatrywali strukturę zależności opisaną funkcją łączącą Farlie-Gumbel-Morgensterna postaci:

$$C_\theta^{FGM}(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v),$$

gdzie $-1 \leq \theta \leq 1$. Parametr θ przedstawia stopień zależności zmiennych. Jest on związany ze współczynnikiem korelacji τ-Kendalla formułą $\tau_\theta = \frac{2\theta}{9}$. Oddaje jedynie słabą zależność między rozpatrywanymi zmiennymi, ponieważ współczynnik korelacji przyjmuje wtedy wartości wyłącznie z przedziału $\left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right]$. Model ten możemy więc zastosować, gdy występują słabe zależności zmiennych W i X.

Autorzy pracy [Cossette, Marceau, Marri 2010] zajmowali się wyznaczeniem oczekiwanej zdyskontowanej funkcji straty $m(u; \delta)$. W przypadku gdy wypłaty X_i oraz okresy między wypłatami W_i mają rozkład wykładniczy oraz gdy funkcja straty jest postaci $w(x, y) = y$, możemy wyznaczyć dokładne prawdopodobieństwo ruiny, opierając się na transformacie Laplace'a funkcji $m(u; \delta)$ [Cossette, Marceau, Marri 2010]. I w tym przypadku można zauważyć, że prawdopodobieństwo ruiny maleje wraz ze wzrostem stopnia zależności [Cossette, Marceau, Marri 2010; Heilpern 2013].

Prawdopodobieństwo ruiny, jak i w przypadku ogólniejszym, oczekiwaną zdyskontowaną funkcję straty można wyznaczyć również dla wykładniczych wypłat, gdy struktura zależności zmiennych losowych W i X opisana jest prostą funkcją łączącą Spearmana [Heilpern (w recenzji)]:

$$C_\alpha(u, v) = (1 - \alpha)C_I(u, v) + \alpha C_M(u, v),$$

gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$. Jest to kombinacja wypukła funkcji łączącej C_I odpowiadającej niezależności oraz ścisłej zależności C_M. Parametr α oddaje wtedy stopień zależności między zmiennymi. Jest on równy wartości współczynnika korelacji Spearmana. Dla $\alpha = 0$ mamy niezależność, a dla $\alpha = 1$ ścisłą zależność. Zdyskontowaną funkcję straty będziemy w tym przypadku oznaczać symbolem $m(u; \delta, \alpha)$.

Dla wypłat X_i mających rozkład wykładniczy o gęstości $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$ oraz funkcji straty zależnej jedynie od wartości straty w momencie ruiny, czyli $w(x, y) = w(y)$, oczekiwana zdyskontowana funkcja straty określona jest znanym wzorem:

$$m(u;\, \delta,\, \alpha) = m(0;\, \delta,\, \alpha)e^{Ru},$$

gdzie R jest ujemnym pierwiastkiem uogólnionego równania Lundeberga $E(e^{-\delta W}e^{s(cW-X)}) = 1$, uwzględniającego dyskonto. Natomiast wartość $m(0;\, \delta,\, \alpha)$ otrzymamy, korzystając z postaci transformaty Laplace'a oczekiwanej, zdyskontowanej funkcji straty [Heilpern (w recenzji)]:

$$m^*(s;\, \delta, \alpha) = \int_0^\infty e^{-su} m(u;\, \delta, \alpha)du = \frac{n(s)}{d(s)}.$$

Funkcja $n(s)$ jest wielomianem drugiego stopnia, a $d(s)$ stopnia trzeciego. Można pokazać [Heilpern (w recenzji)], że pierwiastki mianownika są również pierwiastkami uogólnionego równania Lundeberga, a pierwiastki licznika ρ_1, ρ_2 są dodatnimi pierwiastkami tego równania. Wartość oczekiwanej, zdyskontowanej funkcji straty w zerze $m(0;\, \delta,\, \alpha)$ jest jednym z rozwiązań układu równań $n(\rho_i) = 0$, dla $i = 1,2$. Dokładniejsze informacje na ten temat znajdują się w pracy [Heilpern (w recenzji)].

Jawną postać funkcji $n(s)$, $d(s)$, uogólnionego równania Lundeberga, jak i $m(0;\, \delta,\, \alpha)$ można otrzymać, korzystając np. pakietu Mathematica. Jednak wzory tych funkcji są dość skomplikowane, zwłaszcza wzór dotyczący $m(0;\, \delta,\, \alpha)$ zajmuje bardzo dużo miejsca. Dlatego też wzory te nie będą w pracy prezentowane. Jednak gdy funkcja straty jest zdegenerowana, tzn. $w(x, y) = 1$, a stopa dyskontowa $\delta = 0$, czyli dla prawdopodobieństwa ruiny, wzory te przyjmują już o wiele prostszą postać. Mianowicie prawdopodobieństwo ruiny przyjmuje wtedy prostą, podobną do klasycznej postać:

$$\psi_\alpha(u) = \psi_\alpha(0)e^{Ru},$$

gdzie prawdopodobieństwo ruiny dla zerowego kapitału początkowego wynosi:

$$\psi_\alpha(0) = \frac{2c(1-\alpha)\beta\lambda}{c^2\beta^2 + c(1-\alpha)\beta\lambda - \lambda^2 + \sqrt{4c\beta\lambda(-c\beta+\lambda)^2 + (c^2\beta^2 - c(3-\alpha)\beta\lambda + \lambda^2)^2}}.$$

Natomiast stała:

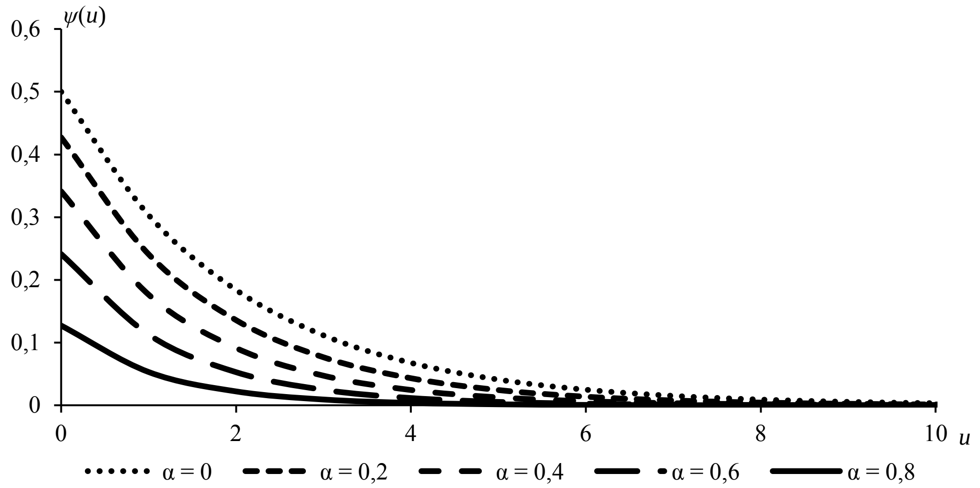
$$R = \frac{-c^2\beta^2 + 3c\beta\lambda - c\alpha\beta\lambda - \lambda^2 - \sqrt{(c^2\beta^2 - 3c\beta\lambda + c\alpha\beta\lambda + \lambda^2)^2 + 4c\beta\lambda(c\beta-\lambda)^2}}{2c(c\beta-\lambda)}$$

jest ujemnym pierwiastkiem uogólnionego równania Lundeberga $E(e^{s(cW-X)}) = 1$. Przyjmuje ono w tym przypadku postać [Heilpern (w recenzji)]:

$$s\beta\lambda(\lambda - c\beta) + s^2(c^2\beta^2 - 3c\beta\lambda + c\alpha\beta\lambda + \lambda^2) + s^3c(c\beta - \lambda) = 0.$$

Ponadto można pokazać, że gdy α rośnie, to $\psi_\alpha(u)$ maleje [Heilpern (w recenzji)]. Czyli, tak jak i we wcześniej rozpatrywanych modelach, prawdopodobieństwo ruiny maleje wraz ze wzrostem stopienia zależności zmiennych losowych W oraz X. Zależność ta zachodzi dla każdej wartości kapitału początkowego u.

Przykład 2. Niech $\lambda = 1$, $\beta = 1$ oraz $c = 2$. Prawdopodobieństwa ruiny dla wartości parametru α równe odpowiednio 0; 0,2; 0,4; 0,6 oraz 0,8 przedstawione są na rys. 2.



Rys. 2. Prawdopodobieństwo ruiny dla różnych wartości parametru α, gdy struktura zależności opisana jest funkcją łączącą Spearmana

Źródło: opracowanie własne.

Dla $\alpha = 1$, czyli ścisłej zależności, otrzymujemy w przypadku wykładniczych wypłat zerowe prawdopodobieństwo ruiny dla każdej wartości u. Należy jednak pamiętać, że w ogólnym przypadku nie jest to prawda. Przykładowo, gdy $\lambda = c = 1$, a wypłaty mają rozkład Pareta:

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{2}{x+2}\right)^2,$$

to: $X = l(W)$, gdzie $l(w) = 2(e^{t/2} - 1)$ oraz $Y_i = X - W = g(W)$, oraz $g(t) = 2e^{t/2} - 2 - t$. Wtedy

$$\psi(u) = P\left(\max_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n} Y_k > 0\right) \geq P(Y_1 > u) = P\big(W > g^{-1}(u)\big) = e^{-g^{-1}(u)} > 0.$$

Jak już zostało wcześniej wspomniane, gdy zdyskontowana funkcja straty jest zdegenerowana: $w(x, y) = 1$, a stopa dyskontowa $\delta > 0$, to otrzymujemy transformatę Laplace'a czasu ruiny. Należy przy tym pamiętać, że zmienna losowa T jest niewłaściwa. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że przyjmie ona wartość skończoną dla ustalonej wartości kapitału początkowego u, jest równe z definicji prawdopodobieństwu ruiny:

$$\psi(u) = P(T < \infty |\ U(0) = u).$$

Może więc ona przyjąć nieskończoną wartość z dodatnim prawdopodobieństwem. Dlatego też oczekiwana zdyskontowana funkcja straty, gdy funkcja straty $w(x, y) = 1$, jest równa:

$$\phi_T(\delta; u) = E\big(e^{-\delta T} I(T < \infty) |\, U(0) = u\big) =$$
$$= E\big(e^{-\delta T} | T < \infty, U(0) = u\big) P(T < \infty |\, U(0) = u).$$

Z powyższego równania możemy więc wyznaczyć transformatę Laplace'a uciętego czasu ruiny:

$$T^*(\delta; u) = E\big(e^{-\delta T} | T < \infty, U(0) = u\big) = \frac{\phi_T(\delta; u)}{\psi(u)}.$$

Znając transformatę Laplace'a, możemy wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej, korzystając ze wzoru [Rolski i in. 1999]:

$$E(T; u) = E(T | T < \infty, U(0) = u) = -\left.\frac{dT^*(\delta; u)}{d\delta}\right|_{\delta=0}.$$

Przykład 3. Niech $\lambda = 1$, $\beta = 1$ oraz $c = 2$. W tabeli 1 podane są wartości oczekiwanego czasu ruiny, przy założeniu, że ruina wystąpi, dla wybranych wartości parametru α oddającego stopień zależności oraz dla kapitału początkowego $u = 0$. Widzimy, że w przypadku gdy ruina zajdzie, to oczekiwany czas zajścia ruiny maleje wraz ze wzrostem stopnia zależności α.

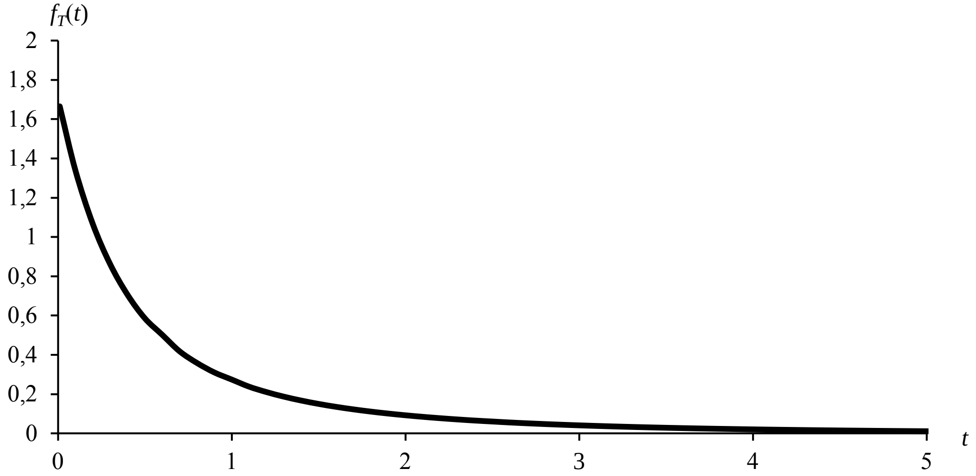
Tabela 1. Wartości oczekiwanego czasu ruiny dla równych wartości parametru α

α	$\psi(0)$	$E(T; 0)$
0	0,5	1
0,1	0,465153	0,998456
0,2	0,427158	0,993595
0,4	0,341128	0,972978
0,6	0,241128	0,937709
0,8	0,127158	0,889838

Źródło: opracowanie własne.

Rozkład uciętego czasu ruiny możemy wyznaczyć, odwracając transformatę Laplace'a $T^*(\delta; u)$. W przykładzie 4 wykorzystano przy odwracaniu transformaty algorytm Gavera-Wynn-Rho [Abate, Valko 2004] zaimplementowany w Mathematica 7 [Valko 2002].

Przykład 4. (cd. przykładu 3) Na rysunku 3 przedstawiony jest wykres gęstości czasu ruiny $f_T(t)$, przy założeniu, że ruina wystąpi dla parametru $\alpha = 0,5$ oraz dla kapitału początkowego $u = 0$.



Rys. 3. Gęstość czasu wystąpienia ruiny dla $\alpha = 0{,}5$

Źródło: opracowanie własne.

Przykładowo prawdopodobieństwo zdarzenia, że czas wystąpienia ruiny będzie krótszy niż 1 pod warunkiem, że dojdzie do ruiny, wynosi

$$P(T < 1 | T < \infty, U(0) = 0) = 0{,}7375.$$

4. Inne przypadki zależności

W poprzednich przypadkach, gdy istnieje zależność między wielkością wypłaty a okresem między wypłatami, można zauważyć pewną regularność. Wraz ze wzrostem stopnia zależności maleje prawdopodobieństwo ruiny dla każdej wartości kapitału początkowego u. Ponadto dla nieskończenie dużego kapitału początkowego prawdopodobieństwo ruiny równa się zero, tzn.:

$$\psi(\infty) = \lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0.$$

Załóżmy teraz, że wielkości wypłat X_i są zależnymi zmiennymi losowymi, niezależnymi od okresów między wypłatami W_i, które między sobą są niezależne. W tej sytuacji nie zaobserwujemy powyżej przedstawionej regularności. W skrajnym przypadku ścisłej zależności zmiennych X_i, gdy wypłaty opisane są tą samą zmienną losową, tzn. zachodzi $X_i = X$, prawdopodobieństwo ruiny opisane jest następującą formułą: [Heilpern 2010]

$$\psi_s(u) = \int_0^{c/\lambda} \psi_x(u) dF_X(x) + 1 - F_X\left(\frac{c}{\lambda}\right),$$

gdzie $\psi_x(u)$ jest prawdopodobieństwem ruiny, gdy wypłaty są nielosowe oraz $P(X_i = x) = 1$. Można pokazać, że gdy $F_X\left(\frac{c}{\lambda}\right) < 1$, to $\psi_S(0) < \psi_I(0)$ oraz $\psi_S(\infty) > \psi_I(\infty) = 0$ [Heilpern 2010]. Widzimy, że relacja między prawdopodobieństwami ruiny dla ściśle zależnych i niezależnych wypłat istotnie zależy od wartości kapitału początkowego, a prawdopodobieństwo ruiny dla nieskończenie dużej wartości kapitału początkowego może być dodatnie.

Podobny brak regularności możemy zaobserwować, gdy struktura zależności wypłat opisana jest archimedesową funkcją łączącą. Jest to funkcja określona wzorem:

$$C(u_1, \dots, u_n) = g^{-1}(g(u_1) + \dots + g(u_n)),$$

gdzie g: (0, 1] $\to R_+$ jest ciągłą, malejącą funkcją taką, że $\lim_{u\to 0} g(u) = \infty$, $g(0) = 1$ oraz g^{-1} jest funkcją całkowicie monotoniczną na $[0, \infty)$ [Nelsen 1999; Heilpern 2007]. Wtedy istnieje zmienna losowa Θ taka, że wypłaty X_i są warunkowo niezależne dla ustalonej wartości zmiennej Θ [Nelsen 1999; Heilpern 2007]. Zmienną tę możemy interpretować jako wpływ zewnętrznych czynników na proces ryzyka $U(t)$. Wtedy prawdopodobieństwo ruiny opisane jest wzorem [Heilpern 2010]:

$$\psi(u) = \int_{\theta_0}^{\infty} \psi(u|\theta) dF_\Theta(\theta) + F_\Theta(\theta_0),$$

gdzie $\psi(u|\theta)$ jest prawdopodobieństwem ruiny dla ustalonej wartości zmiennej losowej $\Theta = \theta$, θ_0 jest rozwiązaniem równania

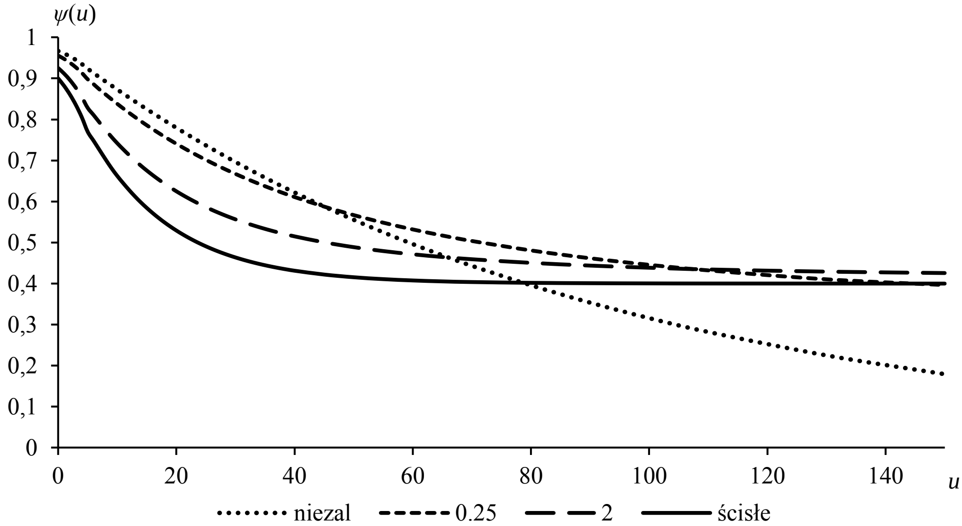
$$\int_0^{\infty} e^{-\theta g(1-F_X(x))} dx = c\beta.$$

Wtedy dla $F_\Theta(\theta_0) > 0$ otrzymujemy, podobne jak dla ściśle zależnych wypłat, relacje: $\psi(0) < \psi_I(0)$ oraz $\psi(\infty) > \psi_I(\infty) = 0$.

W tym przypadku dla niektórych wartości kapitału początkowego możemy zaobserwować brak monotoniczności. Największe prawdopodobieństwo ruiny nie występuje dla skrajnych wartości stopni zależności, ale dla wartości pośrednich. Przykładowo w pracy [Heilpern 2011] przyjęto, że struktura zależności opisana jest funkcją łączącą Claytona:

$$C_\alpha(u_1, \dots, u_n) = (u_1^{-\alpha} + \dots + u_n^{-\alpha})^{-1/\alpha},$$

gdzie parametr $\alpha > 0$ oddaje stopień zależności, współczynnik korelacji τ Kendalla wynosi $\tau = \frac{\alpha}{\alpha+2}$, a wypłaty mają rozkład dwupunktowy. Na rysunku 4 przedstawiono prawdopodobieństwo ruiny, gdy $\lambda = 4$, $c = 24$, a $P(X_i = 5) = 0{,}6$ oraz $P(X_i = 7) = 0{,}4$ dla niezależnych i ściśle zależnych wypłat oraz gdy $\alpha = 0{,}25$ i 2. Odpowiada to wartości współczynnika korelacji $\tau = 0{,}1111$ i 0,5. Dla nieskończenie dużego kapitału początkowego największe prawdopodobieństwo ruiny otrzymujemy dla parametru α równego w przybliżeniu 7, czyli $\tau = 0{,}7778$.



Rys. 4. Prawdopodobieństwo ruiny dla różnych stopni zależności wypłat

Źródło: [Heilpern 2011].

Podobną sytuację mamy gdy okresy między wypłatami W_i są zależne. Wtedy prawdopodobieństwa ruiny dla ściśle zależnych okresów między wypłatami oraz gdy struktura zależności opisana jest archimedesową funkcją łącząca określone są wzorami [Heilpern 2012]:

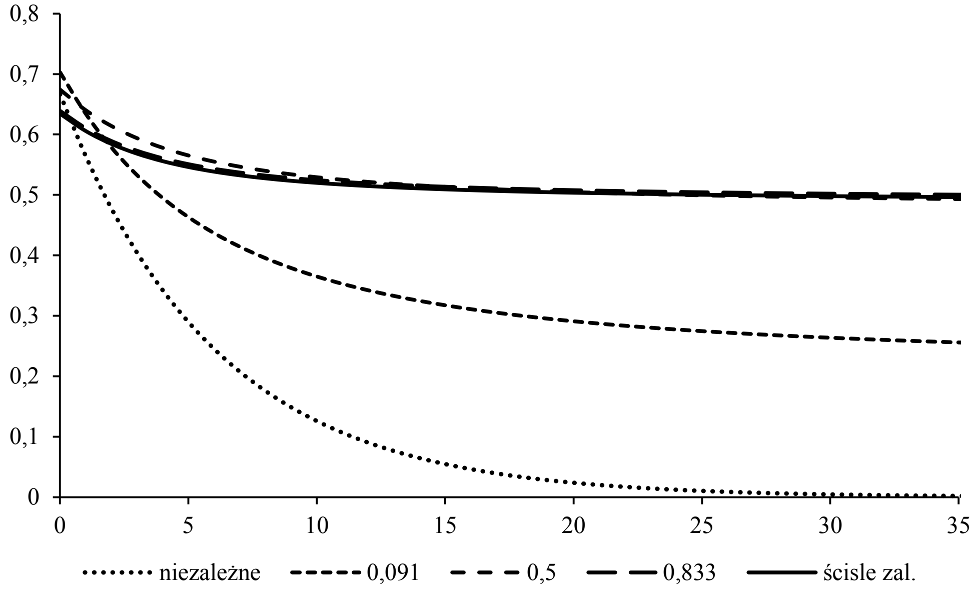
$$\psi_s(u) = \int_{1/(c\beta)}^{\infty} \psi_t(u) dF_W(t) + 1 - F_W\left(\frac{1}{c\beta}\right),$$

$$\psi(u) = \int_{0}^{\theta_0} \psi(u|\theta) dF_\Theta(\theta) + 1 - F_\Theta(\theta_0),$$

gdzie θ_0 jest rozwiązaniem równania

$$c\beta \int_0^\infty e^{-\theta g(1-F_W(t))} dt = 1.$$

W tym przypadku zależność między stopniem zależności a prawdopodobieństwem ruiny jest jeszcze bardziej nieregularna. Nawet dla zerowego kapitału początkowego u największe prawdopodobieństwo ruiny może zachodzić dla pośrednich stopni zależności. Przykładowo dla $\beta = 0{,}5$, $c = 3$, $\lambda = 1$, wykładniczych wy-



Rys. 5. Prawdopodobieństwo ruiny dla różnych stopni zależności okresów między wypłatami

Źródło: [Heilpern 12].

płat X_i i okresów między wypłatami W_i oraz funkcji łączącej Claytona jest ono osiągalne dla wartości parametru α bliskiej 0,2, czyli dla współczynnika korelacji Kendalla $\tau = 0{,}098$ [Heilpern 2012].

5. Podsumowanie

W pracy badane były procesy ryzyka, w których osłabione zostało standardowe założenie o niezależności występujących procesów czy zmiennych losowych. Rozpatrywano przypadki, gdy dopuszczana była zależność wypłat i sąsiednich okresów między wypłatami, zależność poszczególnych wypłat oraz zależność okresów między wypłatami. Wyznaczano podstawowe miary ryzyka: prawdopodobieństwo ruiny oraz wartości oczekiwanej zdyskontowanej funkcji straty.

Badany też był wpływ stopnia zależności na wielkości tych miar ryzyka. W pierwszym przypadku, gdy zależne były wypłaty i sąsiednie okresy między wypłatami, zaobserwowano pewną regularność. Wraz ze wzrostem stopnia zależności maleją wartości tych miar ryzyka, głównie prawdopodobieństwo ruiny. Natomiast w dwóch kolejnych przypadkach regularność ta nie występuje. Obserwujemy brak monotoniczności. Największe prawdopodobieństwo ruiny występuje dla pośrednich wartości stopnia zależności, a nie dla skrajnych. Badana relacja zależy też od wartości kapitału początkowego.

Literatura

Abate J., Valko P.P. , *Multi-precision Laplace Transform inversion*, „International Journal for Numerical Methods in Enginering" 2004, nr 60, ss. 979-993.

Albrecher H., Boxma O.J., *A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2004, nr 35, ss. 245-254.

Ambagaspitiya R.S., *Ultimate ruin probability in the Sparre Andersen model with dependent claim sizes and claim occurrence times*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2009, nr 44, ss. 464-472.

Boudreault M., Cossette H., Landiault D., Marceau E., *On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes*, „Scandinavian Actuarial Journal" 2006, nr 5, ss. 265-285.

Cheung E.C.K., Landiault D., Willmot G.E., Woo J-K., *Structural properties of Gerber-Shiu functions in dependent Sparre Andersen models*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2010, nr 46, ss. 117-126.

Cossette H., Marceau E., Marri F., *On the compound Poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern copula*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2008, 43, s. 444-455.

Cossette H., Marceau E., Marri F., *Analysis of ruin measures for the classical compound Poisson risk model with dependence*, „Scandinavian Actuarial Journal" 2010, nr 3, ss. 221-245.

Gerber H. U., Shiu E. S., *On the time value of ruin*, „Nord American Actuarial Journal" 1998, nr 2, ss. 48-78.

Heilpern S., *Funkcje łączące*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2007.

Heilpern S., *Wyznaczanie prawdopodobieństwa ruiny, gdy struktura zależności wypłat opisana jest Archimedesową funkcją łączącą*, [w:] W. Otto (red.), *Zagadnienia Aktuarialne, Teoria i Praktyka*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2010, ss. 11-20.

Heilpern S., *Analiza wpływu stopnia zależności wypłat na prawdopodobieństwo ruiny*, „Ekonometria" 2011, nr 29, ss. 92-104.

Heilpern S., *Risk processes with dependent claim size and claim occurrence times*, „Śląski Przegląd Statystyczny" 2012, nr 10, ss. 57-68.

Heilpern S., *Proces ryzyka z zależnymi okresami między wypłatami – analiza prawdopodobieństwa ruiny*, „Studia Ekonomiczne" 2013, nr 133, ss. 7-19.

Heilpern S., *The ruin measures for the compound Poisson risk model with dependence based on a Spearman copula* (w recenzji).

Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M., *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer, Boston 2001.

Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer, New York 1999.

Ostasiewicz W. (red.), *Modele aktuarialne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2000.

Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., *Stochastic processes for insurance and finance*, Willey, New York 1999.

Valko P.P., Abate J., *Numerical Laplace Inversion*, http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/4738/ 2002.

DEPENDENT RISK PROCESSES

Summary: The paper is devoted to risk process, in which the claim amount and the neighboring interclaim times may be dependent. The probability of ruin is studied and the influence of the degree of dependence on the probability of ruin is investigated. The dependent structure is described by the bivariate gamma distribution or the Spearman copula. The expected discounted penalty function is investigated in the second case. It is a measure of risk, the generalization of the probability of ruin and the Laplace transform of the time of ruin. Other cases of dependent risk processes are studied, too.

Keywords: risk process, dependence, copula, probability of ruin, expected discounted penalty function, time of ruin.