

PRACE NAUKOWE
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 312

RESEARCH PAPERS
of Wrocław University of Economics No. 312

Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

Redaktor naukowy
Joanna Dębicka



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2013

Redaktor Wydawnictwa: Dorota Pitulec

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Beata Mazur

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:

www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,

The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,

a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon

http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa

www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2013

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695-315-1

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp	7
Wojciech Bijak , Ubezpieczenia na życie jako niejednorodne łańcuchy Markowa.....	9
Joanna Dębicka , Wpływ zmian parametrów tablic trwania życia w krajach Unii Europejskiej na wielkości aktuarialne	29
Kamil Gala , Analiza ubezpieczeń dla wielu osób z wykorzystaniem funkcji copula.....	50
Stanisław Heilpern , Złożony proces Poissona z zależnymi okresami między szkodami i wielkościami szkód	67
Magdalena Homa , Rozkład wypłaty w ubezpieczeniu na życie z funduszem kapitałowym a ryzyko finansowe	78
Helena Jasiulewicz , Uogólnienie klasycznego procesu nadwyżki finansowej w czasie dyskretnym.....	88
Agnieszka Marciniuk , Długowieczność i instrumenty finansowe związane z długowiecznością	100
Daniel Sobiecki , Dwustopniowe modelowanie składki za ubezpieczenie komunikacyjne OC	116

Summaries

Wojciech Bijak , Non-homogenous Markov chain models for life insurance..	28
Joanna Dębicka , Varying parameters of life tables in the European Union: influence on actuarial amounts	47
Kamil Gala , Analysis of multiple life insurance using copulas.....	66
Stanisław Heilpern , Compound Poisson process with dependent interclaim times and claim amounts	77
Magdalena Homa , Distribution of the payments in the unit-linked life insurance and financial risk	87
Helena Jasiulewicz , Generalization of a classical process of a financial surplus process in discrete time	99
Agnieszka Marciniuk , Longevity and financial instrument related to longevity	115
Daniel Sobiecki , Two-stage premium modelling in MTPL	134

Helena Jasiulewicz

Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

UOGÓLNIENIE KLASYCZNEGO PROCESU NADWYŻKI FINANSOWEJ W CZASIE DYSKRETNYM*

Streszczenie: W pracy analizowany jest dyskretny proces nadwyżki finansowej ze zmienną składką, reasekuracją i inwestycją nadwyżki finansowej. Wyznaczone są prawdopodobieństwa ruiny w czasie skończonym i nieskończonym. W przypadku roszczeń całkowitych o rozkładach lekkoogonowych, które wypłaca ubezpieczyciel, uzyskano oszacowanie z góry prawdopodobieństwa ruiny za pomocą współczynnika Lundberga. Dla roszczeń całkowitych o rozkładach ciężkoogonowych podano aproksymację prawdopodobieństwa ruiny dla dużego kapitału początkowego. Wyniki zilustrowano przykładami liczbowymi w przypadku reasekuracji proporcjonalnej.

Słowa kluczowe: dyskretny proces ryzyka, prawdopodobieństwo ruiny, stopa procentowa, składki losowe, reasekuracja.

1. Wstęp

W teorii ryzyka od prawie wieku kontynuowane są prace dotyczące nadwyżki finansowej firmy ubezpieczeniowej w czasie ciągłym. Powstały bardzo zaawansowane modele w stosunku do klasycznego ciągłego procesu ryzyka. Znacznie skromniejsze są badania odnoszące się do dyskretnego procesu nadwyżki finansowej, choć ten model jest bardziej naturalny w opisie rzeczywistości. Przegląd wyników dotyczących dyskretnego procesu nadwyżki finansowej znajduje się w pracy [Jasiulewicz 2010]. Niniejsze opracowanie jest jednym z cyklu prac starających się przybliżyć klasyczny dyskretny proces nadwyżki finansowej do realiów funkcjonowania firmy ubezpieczeniowej. Mianowicie, uwzględnienie inwestowania nadwyżki finansowej zwiększa bezpieczeństwo firmy ubezpieczeniowej. O tym traktują prace [Cai 2002a, 2002b; Cai, Dickson 2004; Tang, Tsitsiashvili 2003; Yang 1999]. Na zwiększenie bezpieczeństwa firmy ubezpieczeniowej duży wpływ ma reasekuracja. Wyniki dotyczące dyskretnego procesu ryzyka z uwzględnieniem inwestycji i reasekuracji znajdują się w pracach [Diasparra, Romera 2009; Jasiulewicz 2013; Jasiulewicz, Kordecki 2013].

* Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki.

W tym artykule badany jest dyskretny proces ryzyka ze zmienną składką ubezpieczeniową, z zastosowaniem reasekuracji i inwestowania nadwyżki finansowej. W punkcie 2 podane są nowe wyniki oraz ich dowody. W punkcie 3 przedstawiono przykłady liczbowe w przypadku reasekuracji proporcjonalnej. Opracowanie kończy się podsumowaniem.

W niniejszej pracy odejście od stałej składki zakładanej w dotychczasowych artykułach nie wynika ze zmiany wielkości portfela w badanym okresie, ale z innych przyczyn, np. wypłaty dywidendy, która wpływa na zmniejszenie nadwyżki finansowej firmy ubezpieczeniowej. Uwzględnienie tego faktu może się odbyć w ten sposób, że narzut na składkę netto jest zmienny w zależności od tego, czy dywidenda został wypłacony, czy nie. Załóżmy, że składka napływa ze stałą szybkością $c > 0$. Przy całkowitym roszczeniu Z_n w okresie n oraz stopie dywidendy d_n nadwyżka finansowa U_n wyraża się wzorem

$$U_n = c - Z_n - d_n U_n.$$

Po przekształceniu dostajemy

$$U_n = c_n - Z'_n,$$

gdzie $c_n = c / (1 + d_n)$, a $Z'_n = Z_n / (1 + d_n)$. Wielkość c_n można potraktować jako składkę w okresie n .

W pracy zakładamy, że całkowite roszczenia Z_n są niezależne, o jednakowej dystrybuancie $W(z)$ i wartości oczekiwanej μ . Przez C_n oznaczamy składkę losową w okresie n przyjmującą wartości c_1, c_2, \dots, c_m . Zakładamy, że ciąg C_n stanowi jednorodny łańcuch Markowa o rozkładzie początkowym $\tilde{\pi}$ i o macierzy przejścia $\mathbf{P} = [\tilde{p}_{ij}]$. W każdym okresie n nadwyżka finansowa jest inwestowana według losowej stopy procentowej I_n . Zakładamy, że ciąg I_n jest jednorodnym łańcuchem Markowa o stanach i_1, \dots, i_l , o rozkładzie początkowym π oraz macierzy przejścia $\mathbf{P} = [p_{ij}]$. Ubezpieczyciel stosuje reasekurację według reguły opisanej funkcją $h(x, b)$ o własności $0 \leq h(x, b) \leq x$. Parametr b jest traktowany jako poziom retencji. Dla reasekuracji proporcjonalnej funkcja $h(x, b)$ jest postaci

$$h(x, b) = bx,$$

gdzie $b \in (0, 1]$. Dla reasekuracji nadwyżki szkody funkcja $h(x, b)$ jest postaci

$$h(x, b) = \begin{cases} x, & x \leq b, \\ b, & x > b, \end{cases}$$

gdzie $b > 0$. Stratę zatrzymaną przez ubezpieczyciela na poziomie retencji b oznaczamy przez $Z_n^{ce} = h(Z_n, b)$, a jej dystrybuantę przez $V(z)$. Zatem reasekurator pokrywa roszczenia wielkości $Z_n^{re} = Z_n - Z_n^{ce}$, za które otrzymuje od ubezpieczyciela część składki według zasady wartości oczekiwanej

$$c_{re} = (1 + \eta) E Z_n^{re},$$

gdzie $\eta > 0$ jest narzutem reasekuratora na składkę netto. Przy poziomie retencji b składka ubezpieczyciela w okresie n wynosi

$$C_n(b) = C_n - (1 + \eta)(EZ_n - Eh(Z_n, b)). \quad (1)$$

Wartości losowej składki $C_n(b)$ oznaczamy przez $c_1(b), \dots, c_m(b)$, a funkcję rozkładu prawdopodobieństwa przez $p_k = \Pr(C_n(b) = c_k(b))$. Zauważmy, że $p_k = \Pr(C_n = c_k)$, a ponadto rozkład początkowy i macierz przejścia łańcucha Markowa $C_n(b)$ są takie same jak dla C_n . Wówczas nadwyżka finansowa U_n^b wyraża się wzorem

$$U_n^b = U_{n-1}^b(1 + I_n) + C_n(b) - h(Z_n, b), \quad U_0^b = u \geq 0. \quad (2)$$

Jak zwykle przez T oznaczamy moment ruiny:

$$T = \begin{cases} \inf \{k > 0 : U_k^b < 0\}, \\ 0, \text{ gdy } U_k^b \geq 0 \text{ dla } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Niech $\Psi_n^b(u, i_s, c_t)$ oznacza prawdopodobieństwo ruiny w czasie skończonym $(0, n]$, które jest zdefiniowane następująco

$$\begin{aligned} \Psi_n^b(u, i_s, c_t) &= \Pr(U_k^b < 0 \text{ dla pewnego } k \leq n \mid U_0^b = u, I_0 = i_s, C_0 = c_t) \\ &= \Pr\left(\bigcup_{k=1}^n (U_k^b < 0) \mid U_0^b = u, I_0 = i_s, C_0 = c_t\right). \end{aligned}$$

Przez $\Psi^b(u, i_s, c_t)$ oznaczamy prawdopodobieństwo ruiny w czasie nieskończonym $(0, \infty)$:

$$\Psi^b(u, i_s, c_t) = \Pr\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k^b < 0) \mid U_0^b = u, I_0 = i_s, C_0 = c_t\right).$$

Poziom retencji b powinien być taki, aby ruina nie była zdarzeniem pewnym, tzn. prawdopodobieństwo ruiny nie zachodziło z prawdopodobieństwem 1 w skończonym czasie. Dlatego przyjmuje się założenie

$$EZ_n^{ce} < EC_n(b).$$

Dla reasekuracji proporcjonalnej $h(z, b) = bz$, $b \in (0, 1)$:

$$EZ_n^{ce} < EC_n(b) \Leftrightarrow b > \frac{1}{\eta}(1 + \eta - EC_n), \quad (3)$$

gdy $EZ_n = \mu = 1$. W dalszych rozważaniach zakładamy, że ciągi $\{Z_n\}$, $\{I_n\}$, $\{C_n\}$ są wzajemnie niezależne.

2. Prawdopodobieństwo ruiny

Wyniki dotyczące prawdopodobieństwa ruiny zostały wyprowadzone w postaci wzorów rekurencyjnych (twierdzenie 1).

Twierdzenie 1. Niech $EZ_n^{ce} < EC_n(b)$. Dla $u \geq 0$

$$\Psi_1^b(u, i_s, c_t) = \sum_{k=1}^m \tilde{p}_{tk} \sum_{j=1}^l p_{sj} \bar{V}(u(1+i_j) + c_k(b)), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}^b(u, i_s, c_t) &= \sum_{k=1}^m \tilde{p}_{tk} \sum_{j=1}^l p_{sj} (\bar{V}(u(1+i_j) + c_k(b)) \\ &+ \int_0^{u(1+i_j)+c_k(b)} \Psi_n^b(u(1+i_j) + c_k(b) - z, i_j, c_k(b)) dV(z)). \end{aligned} \quad (5)$$

Dowód. Niech $Z_1^{ce} = z$, $I_1 = i_j$, $C_1 = c_k$. Jeżeli $z > u(1+i_j) + c_k(b)$, to ruina nastąpi w pierwszym okresie. Zatem

$$\Psi_1^b(u, i_s, c_t) = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^m p_{sj} \tilde{p}_{tk} \bar{V}(u(1+i_j) + c_k(b)).$$

Ruina w pierwszych $n+1$ okresach może zajść na dwa wykluczające się sposoby:

- ruina nastąpi już w pierwszym okresie albo
 - ruiny nie będzie w pierwszym okresie, ale zajdzie w następnych n okresach.
- Ponieważ proces U_n^b jest stacjonarny i ma przyrosty niezależne, więc

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}^b(u, i_s, c_t) &= \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^m p_{sj} \tilde{p}_{tk} (\bar{V}(u(1+i_j) + c_k(b)) \\ &+ \int_0^{u(1+i_j)+c_k(b)} \Psi_n^b(u(1+i_j) + c_k(b) - z, i_j, c_k(b)) dV(z). \quad \square \end{aligned}$$

Wniosek 1. Niech $EZ_n^{ce} < EC_n(b)$. Dla $u \geq 0$ prawdopodobieństwo ruiny w czasie nieskończonym:

$$\begin{aligned} \Psi^b(u, i_s, c_t) &= \sum_{k=1}^m \tilde{p}_{tk} \sum_{j=1}^l p_{sj} (\bar{V}(u(1+i_j) + c_k(b)) \\ &+ \int_0^{\infty} \Psi^b(u(1+i_j) + c_k(b) - z, i_j, c_k(b)) dV(z)). \end{aligned} \quad (6)$$

Dowód. Biorąc obustronną granicę we wzorze (5) przy $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy tezę. \square

Wzory rekurencyjne na prawdopodobieństwo ruiny można przedstawić w postaci macierzowej, co ułatwia obliczenia za pomocą wielu programów¹.

Oznaczmy

$$\Psi_n^b(u) = [\Psi_n^b(u, i_j, c_k)] \text{ oraz } \mathbf{V}_n = [v_{jk}^{(n)}],$$

gdzie

$$v_{jk}^{(1)} = \bar{V}(u(1+i_j) + c_k(b))$$

oraz dla $n \geq 2$

$$v_{jk}^{(n+1)} = v_{ij}^{(1)} + \int_0^{u(1+i_j)+c_k(b)} \Psi_n^b(u(1+i_j) + c_k(b) - z, i_j, c_k(b)) dV(z).$$

Wtedy wzory (4) i (5) przyjmują postać

$$\Psi_n^b(u) = \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{V}_n \mathbf{P}.$$

Jeżeli Z_n^{ce} mają rozkłady lekkoogonowe, to istnieje współczynnik dopasowania, za pomocą którego wyznaczono górne oszacowanie typu Lundberga prawdopodobieństwa ruiny (twierdzenie 2).

Twierdzenie 2. Niech C_1, C_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach. Jeżeli $E Z_1^{ce} < E C_1(b)$ oraz istnieje stała dodatnia $R(b)$ spełniająca równanie

$$E e^{R(b)(h(Z_1, b) - C_1(b))} = 1,$$

to

$$\Psi^b(u, i_s, c_i) \leq \xi(b) E \left(e^{-R(b)u(1+I_1)} \mid I_0 = i_s \right),$$

gdzie

$$\xi(b) = \sup_{x \geq 0} \frac{e^{R(b)x} \bar{V}(x)}{\int_x^\infty e^{R(b)z} dV(z)}, \quad 0 < \xi(b) \leq 1.$$

Dowód. Dla każdego $x \geq 0$ i stałej $c > 0$

$$\bar{V}(x+c) = \frac{e^{R(b)x} \bar{V}(x+c)}{\int_x^\infty e^{R(b)z} dV(z)} e^{-R(b)x} \int_x^\infty e^{R(b)z} dV(z). \quad (7)$$

¹ Obliczenia w tym artykule zostały wykonane za pomocą programu *Maxima*, <http://maxima.sourceforge.net/>.

Podstawiając $y = z + c$ we wzorze (7), dostajemy

$$\bar{V}(x+c) = \frac{e^{R(b)(x+c)} \bar{V}(x+c)}{\int_{x+c}^{\infty} e^{R(b)y} dV(y)} e^{-R(b)(x+c)} \int_{x+c}^{\infty} e^{R(b)y} dV(y). \quad (8)$$

Niech

$$g(x+c) = \frac{\int_{x+c}^{\infty} e^{R(b)y} dV(y)}{e^{R(b)(x+c)} \bar{V}(x+c)}.$$

Zachodzą oczywiste nierówności

$$g(x+c) \geq \inf_{x \geq 0} g(x+c) \geq \inf_{x \geq 0} g(x).$$

Stąd

$$(g(x+c))^{-1} \leq \left(\inf_{x \geq 0} g(x) \right)^{-1} = \sup_{x \geq 0} \frac{e^{R(b)x} \bar{V}(x)}{\int_x^{\infty} e^{R(b)z} dV(z)}.$$

Niech

$$\xi(b) = \sup_{x \geq 0} \frac{e^{R(b)x} \bar{V}(x)}{\int_x^{\infty} e^{R(b)z} dV(z)}. \quad (9)$$

Dla $y \geq x+c$

$$\int_{x+c}^{\infty} e^{R(b)y} dV(y) \geq e^{R(b)(x+c)} \int_{x+c}^{\infty} dV(y) = e^{R(b)(x+c)} \bar{V}(x+c).$$

Zatem $g(x+c) \geq 1$, a stąd $0 \leq \xi(b) \leq 1$. Ostatecznie mamy oszacowanie

$$\bar{V}(x+c) \leq \xi(b) e^{-R(b)(x+c)} \int_{x+c}^{\infty} e^{R(b)y} dV(y). \quad (10)$$

Ponieważ

$$\int_{x+c}^{\infty} e^{R(b)y} dV(y) \leq \int_0^{\infty} e^{R(b)y} dV(y) = M_{Z_1}^{ce}(R(b)),$$

więc

$$\bar{V}(x+c) \leq \xi(b) e^{-R(b)(x+c)} M_{Z_1}^{ce} R(b). \quad (11)$$

Ze wzoru (4) tw. 1 mamy

$$\Psi_1^b(u, i_s, c_t) = \sum_{k=1}^m \tilde{p}_k \sum_{j=1}^l p_{sj} \bar{V}(u(1+i_j) + c_k(b)),$$

gdzie $\tilde{p}_k = \Pr(C_1 = c_k)$, $k = 1, \dots, m$. Z nierówności (11) mamy

$$\bar{V}\left(u(1+i_j) + c_k(b)\right) \leq \xi(b) e^{-R(b)(u(1+i_j)+c_k(b))} M_{Z_1}^{ce}(R(b)).$$

Zatem

$$\Psi_1^b(u, i_s, c_t) \leq \xi(b) M_{Z_1}^{ce}(R(b)) \sum_{k=1}^m \tilde{p}_k \sum_{j=1}^l p_{sj} e^{-R(b)u(1+i_j)} e^{-R(b)c_k(b)}.$$

Ponieważ

$$M_{Z_1}^{ce}(R(b)) \sum_{k=1}^m \tilde{p}_k e^{-R(b)c_k(b)} = 1,$$

więc

$$\Psi_1^b(u, i_s, c_t) \leq \xi(b) \sum_{j=1}^l p_{sj} e^{-R(b)u(1+i_j)} = \xi(b) \mathbb{E}\left(e^{-R(b)u(1+I_1)} \mid I_0 = i_s\right).$$

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla n , a pokażemy, że jest również prawdziwe dla $n+1$. Ze wzoru (5) tw. 1 mamy

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}^b(u, i_s, c_t) &= \sum_{k=1}^m \tilde{p}_k \sum_{j=1}^l p_{sj} (\bar{V}(u(1+i_j) + c_k(b)) \\ &+ \int_0^{u(1+i_j)+c_k(b)} \Psi_n^b(u(1+i_j) + c_k(b) - z, i_j, c_k(b)) dV(z)). \end{aligned} \quad (12)$$

Ze wzoru (10) dostajemy oszacowanie

$$\bar{V}(u(1+i_j) + c_k(b)) \leq \xi(b) e^{-R(b)(u(1+i_j)+c_k(b))} \int_{u(1+i_j)+c_k(b)}^{\infty} e^{R(b)y} dV(y). \quad (13)$$

Z założenia indukcyjnego, gdy $0 \leq z \leq u(1+i_j) + c_k(b)$, dostajemy oszacowanie

$$\Psi_n^b(u(1+i_j) + c_k(b) - z, i_j, c_k(b)) \leq \xi(b) \sum_{p=1}^l p_{sp} e^{-R(b)(u(1+i_j)+c_k(b)-z)(1+i_p)}.$$

Ponieważ $1+i_p > 1$, więc

$$\Psi_n^b(u(1+i_j) + c_k(b) - z, i_j, c_k(b)) \leq \xi(b) e^{-R(b)(u(1+i_j)+c_k(b)-z)}. \quad (14)$$

Wykorzystując oszacowania (13) i (14), we wzorze (12) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}^b(u, i_s, c_t) &\leq \xi(b) \sum_{k=1}^m \tilde{p}_k \sum_{j=1}^l p_{sj} (e^{-R(b)u(1+i_j)+c_k(b)} \int_{u(1+i_j)+c_k(b)}^{\infty} e^{R(b)y} dV(y) \\ &+ \int_0^{u(1+i_j)+c_k(b)} e^{-R(b)(u(1+i_j)+c_k(b)-z)} dV(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \xi(b) M_{Z_1}^{ce}(R(b)) \sum_{k=1}^m \tilde{p}_k e^{-R(b)c_k(b)} \sum_{j=1}^l p_{sj} e^{-R(b)u(1+i_j)} \\
 &= \xi(b) E \left(e^{-R(b)u(1+I_1)} \mid I_0 = i_s \right).
 \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n^b(u, i_s, c_t) = \Psi^b(u, i_s, c_t),$$

więc górne oszacowanie podane w tw. 2 zachodzi dla prawdopodobieństwa ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym. □

Wiadomo, że nie można stosować twierdzenia 2 w przypadku, gdy Z_n^{ce} mają rozkłady ciężkoogonowe, ponieważ dla tych rozkładów nie istnieje współczynnik dopasowania. Dla takich rozkładów została podana aproksymacja prawdopodobieństwa ruiny dla dużego kapitału początkowego u (twierdzenie 3).

Rozkład F na $(-\infty, \infty)$ jest rozkładem o regularnie zmieniającym się ogonie, jeżeli istnieje pewna stała $\alpha \geq 0$ taka, że dla każdego $y > 0$ zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} = y^{-\alpha}.$$

Klasę takich rozkładów oznacza się przez $R_{-\alpha}$.

Twierdzenie 3. Niech Z_n ma dystrybucję $W \in R_{-\alpha}$ dla pewnego $\alpha > 0$ oraz $1 + I_n > 0$. Jeżeli dla dowolnego ustalonego $I_0 = i_s$

$$0 < E \left[\left(\frac{1}{1 + I_1} \right)^\alpha \mid I_0 = i_s \right] < \infty,$$

to przy reasekuracji proporcjonalnej

$$\Psi_n^b(u, i_s, c_t) \sim A_n(i_s) \bar{V}(u), \quad \text{gdy } u \rightarrow \infty,$$

gdzie

$$A_n(i_s) = E \left[\left(1 + A_{n-1}(I_1) \right) \left(\frac{1}{1 + I_1} \right)^\alpha \mid I_0 = i_s \right],$$

z warunkiem $A_0(i_s) = 0$.

Dowód tego twierdzenia jest kompilacją dowodów z prac [Cai, Dickson 2004; Jasiulewicz, Kordecki 2013].

3. Przykłady liczbowe dla reasekuracji proporcjonalnej

Dokładne prawdopodobieństwa ruiny są wyznaczone z tw. 1 dla straty Z_n^{ce} o rozkładzie wykładniczym i rozkładzie Pareto. W przypadku rozkładu wykładniczego dystrybuanta zmiennej losowej Z_n^{ce} jest postaci $V(x) = 1 - e^{-x/b}$ dla $x \geq 0$. Natomiast w przypadku rozkładu Pareto $V(x) = 1 - (b\beta/x)^\alpha$ dla $x \geq b\beta$, gdzie $\beta = 0.2$ i $\alpha = 1.25$. W obliczeniach przyjęto, że łańcuch I_n jest dwustanowy o stanach $i_1 = 0.03$, $i_2 = 0.05$ oraz macierzy przejścia

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

Uznano również, że składka losowa $C(b)$ przyjmuje dwie wartości: $c_1(b) = 1.2 - (1 + \eta)(1 - b)$, $c_2(b) = 1.15 - (1 + \eta)(1 - b)$, gdzie $\eta = 0.2$. Macierz przejścia dla łańcucha Markowa C_n jest postaci

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

Warunek (3) jest spełniony dla $b \geq 0.2$, przy przyjętym w obliczeniach $\mu = 1$.

W tab. 1 przedstawiono wartości liczbowe prawdopodobieństwa ruiny $\Psi_5^b(u, i_s, c_t)$ dla $u = 1, 2, 3, 4, 5$ i $b = 0.2, 0.3, \dots, 0.9, 1.0$, gdy $i_s = 0.03$ i $i_s = 0.05$ a $c_t = 1.2$ oraz $c_t = 1.15$. Wyniki są otrzymane dla Z_n^{ce} o rozkładzie wykładniczym. Tabela 2 zawiera wartości liczbowe prawdopodobieństwa ruiny $\Psi_3^b(u, i_s, c_t)$ dla $u = 1, 2, 3, 4, 5$ i $b = 0.2, 0.3, \dots, 0.9, 1.0$, gdy $i_s = 0.03$ i $i_s = 0.05$ a $c_t = 1.2$ oraz $c_t = 1.15$. Wyniki są otrzymane dla Z_n^{ce} o rozkładzie Pareto. Graficzna prezentacja wyników z tab. 1 i 2 jest przedstawiona odpowiednio na rys. 1 i 2.

Tabela 1. Prawdopodobieństwo $\Psi_5^b(u, i_s, c_t)$ ruiny dla rozkładu wykładniczego

i_s	c_t	u	b									
			0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
3%	1.2	1	0.0260	0.0700	0.1100	0.1500	0.1800	0.2000	0.2200	0.2400	0.2500	
		2	0.0004	0.0058	0.0190	0.0380	0.0590	0.0800	0.1000	0.1200	0.1400	
		3	0.0000	0.0004	0.0026	0.0083	0.0170	0.0290	0.0420	0.0560	0.0700	
		4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0016	0.0047	0.0097	0.0170	0.0250	0.0340	
		5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0031	0.0062	0.0110	0.0160	
	1.15	1	0.0240	0.0660	0.1100	0.1400	0.1700	0.1900	0.2100	0.2300	0.2400	
		2	0.0004	0.0055	0.0180	0.0360	0.0560	0.0770	0.0960	0.1100	0.1300	
		3	0.0000	0.0003	0.0025	0.0079	0.0160	0.0280	0.0400	0.0530	0.0670	
		4	0.0000	0.0000	0.0003	0.0016	0.0044	0.0092	0.0160	0.0240	0.0320	
		5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0011	0.0029	0.0059	0.0100	0.0150	

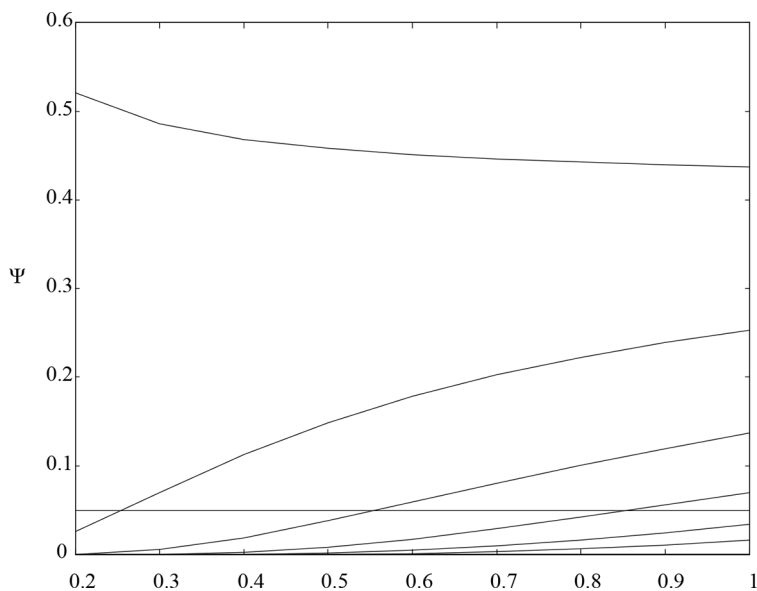
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5%	1.2	1	0.0470	0.1300	0.2100	0.2700	0.3300	0.3700	0.4100	0.4400	0.4700
		2	0.0000	0.0110	0.0350	0.0700	0.1100	0.1500	0.1900	0.2200	0.2500
		3	0.0000	0.0000	0.0048	0.0150	0.0320	0.0530	0.0770	0.1000	0.1300
		4	0.0000	0.0000	0.0006	0.0030	0.0085	0.0180	0.0300	0.0460	0.0630
		5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0022	0.0056	0.0110	0.0190	0.0290
	1.15	1	0.0440	0.1200	0.2000	0.2600	0.3200	0.3600	0.3900	0.4300	0.4500
		2	0.0008	0.0100	0.0330	0.0660	0.1000	0.1400	0.1800	0.2100	0.2400
		3	0.0000	0.0006	0.0046	0.0140	0.0300	0.0500	0.0740	0.0980	0.1200
		4	0.0000	0.0000	0.0005	0.0028	0.0081	0.0170	0.0290	0.0430	0.0600
		5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0020	0.0053	0.0110	0.0180	0.0280

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Prawdopodobieństwo ruiny $\Psi_3^b(u, i_s, c_i)$ dla rozkładu Pareto

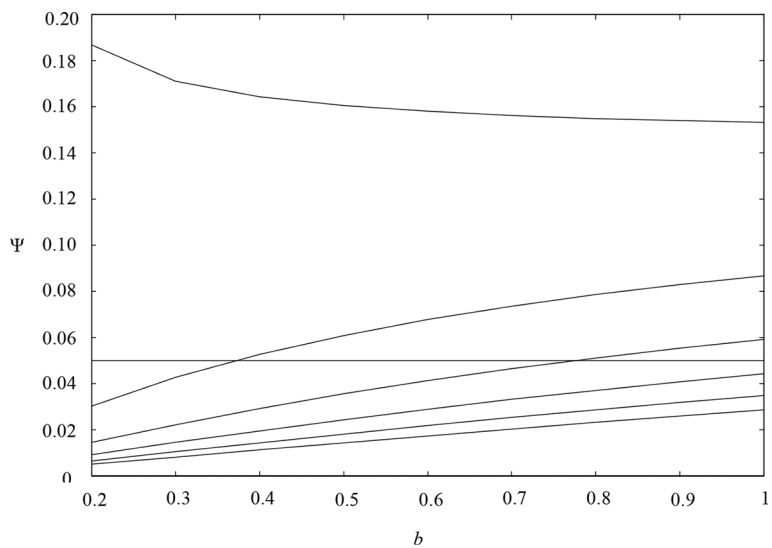
i_s	c_i	u	b								
			0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
3%	1.2	1	0.0300	0.0430	0.0530	0.0610	0.0680	0.0740	0.0790	0.0830	0.0870
		2	0.0150	0.0220	0.0290	0.0360	0.0410	0.0460	0.0510	0.0550	0.0590
		3	0.0093	0.0150	0.0200	0.0240	0.0290	0.0330	0.0370	0.0410	0.0440
		4	0.0067	0.0110	0.0140	0.0180	0.0220	0.0250	0.0290	0.0320	0.0350
		5	0.0051	0.0082	0.0110	0.0140	0.0170	0.0200	0.0230	0.0260	0.0290
	1.15	1	0.0290	0.0410	0.0510	0.0590	0.0650	0.0710	0.0760	0.0800	0.0840
		2	0.0140	0.0220	0.0280	0.0340	0.0400	0.0450	0.0490	0.0540	0.0570
		3	0.0090	0.0140	0.0190	0.0240	0.0280	0.0320	0.0360	0.0390	0.0430
		4	0.0064	0.0100	0.0140	0.0180	0.0210	0.0240	0.0280	0.0310	0.0340
		5	0.0049	0.0079	0.0110	0.0140	0.0170	0.0200	0.0220	0.0250	0.0280
5%	1.2	1	0.0560	0.0790	0.0970	0.1100	0.1300	0.1400	0.1500	0.1500	0.1600
		2	0.0270	0.0410	0.0540	0.0660	0.0760	0.0860	0.0950	0.1000	0.1100
		3	0.0170	0.0270	0.0360	0.0450	0.0530	0.0610	0.0690	0.0760	0.0820
		4	0.0120	0.0200	0.0270	0.0340	0.0400	0.0470	0.0530	0.0590	0.0650
		5	0.0094	0.0150	0.0210	0.0270	0.0320	0.0380	0.0430	0.0480	0.0530
	1.15	1	0.0540	0.0760	0.0940	0.1100	0.1200	0.1300	0.1400	0.1500	0.1600
		2	0.0260	0.0400	0.0520	0.0630	0.0740	0.0830	0.0910	0.0990	0.1100
		3	0.0170	0.0260	0.0350	0.0430	0.0520	0.0590	0.0660	0.0730	0.0790
		4	0.0120	0.0190	0.0260	0.0320	0.0390	0.0450	0.0510	0.0570	0.0620
		5	0.0091	0.0150	0.0200	0.0260	0.0310	0.0360	0.0410	0.0460	0.0510

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 1. Wykresy $\Psi_5^b(u, 0.05, 1.2)$ dla rozkładu wykładniczego, dla $u = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ od najwyższego do najniższego

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Wykresy $\Psi_3^b(u, 0.05, 1.2)$ dla rozkładu Pareto, dla $u = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ od najwyższego do najniższego

Źródło: opracowanie własne.

4. Podsumowanie

Rozważany w pracy dyskretny model nadwyżki finansowej uwzględnia wiele czynników wpływających na bezpieczeństwo finansowe firmy ubezpieczeniowej. Dzięki temu model lepiej opisuje rzeczywiste środowisko ekonomiczne, w którym działają zakłady ubezpieczeniowe. Techniczny zabieg, aby wypłaty dywidendy pomniejszające nadwyżkę finansową uwzględnić w składce, pozwolił stosunkowo prosto analizować proces ryzyka w kontekście prawdopodobieństwa ruiny. Potwierdzają to tabele oraz wykonane na ich podstawie wykresy. Łatwo z nich odczytać, jaki powinien być poziom reasekuracji, aby przy posiadanym kapitale początkowym zapewnić poziom ryzyka bankructwa firmy akceptowalny przez ubezpieczyciela, i odwrotnie, jaki powinien być kapitał początkowy, aby przy zadanym poziomie reasekuracji ryzyko upadłości firmy było małe.

Literatura

- Cai J., *Discrete time risk models under rates of interest*, "Prob. Eng. Inf. Sci." 2002a, no. 16, s. 309-324.
- Cai J., *Ruin probabilities with dependent rates of interest*, "J. Appl. Probab." 2002b, no. 39, s. 312-323.
- Cai J., Dickson D.C.M., *Ruin probabilities with a Markov chain interest model*, "Insurance Math. Econom." 2004, no. 35, s. 513-525.
- Diasparra M.A., Romera R., *Bounds for the the ruin probability of a discrete-time risk process*, "J. Appl. Probab." 2009, no. 46, s. 99-112.
- Jasiulewicz H., *Discrete-time financial surplus models for insurance companies*, „Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH” 2010, nr 21, s. 225-255.
- Jasiulewicz H., *Dyskretny proces ryzyka z uwzględnieniem reasekuracji i losowej stopy procentowej*, „Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych” 2013 (w druku).
- Jasiulewicz H., Kordecki W., *Ruin probability of a discrete-time risk process with proportional reinsurance and investment for exponential and Pareto distributions*, arXiv:1306.3479v1 [q-fin.RM] 2013.
- Tang Q., Tsitsiashvili G., *Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risk*, "Stochastic Processes Appl." 2003, no. 108, s. 299-325.
- Yang H., *Non-exponential bounds for ruin probability with interest effect included*, "Scand. Actuarial J." 1999, no. 99, s. 66-79.

GENERALIZATION OF A CLASSICAL PROCESS OF A FINANCIAL SURPLUS PROCESS IN DISCRETE TIME

Summary: In the paper a discrete finance surplus process with variable premium, reinsurance and investment of the finance surplus is analysed. Ruin probability in a finite and infinite time are determined. For total claims with light-tailed distributions covered by an insurer, an upper estimation is obtained by Lundberg coefficient. For total claims with heavy-tailed distributions an approximation of ruin probability for a large initial capital is given. The obtained results are illustrated by examples for a proportional reinsurance.

Keywords: discrete time risk process, ruin probability, rate of interest, random premiums, reinsurance.