VORLESUNGEN ÜBER DIE PRINZIPE DER MECHANIK

VON

LUDWIG BOLTZMANN
WEIL. PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK
A. D. UNIVERSITÄT WIEN

II. TEIL

DIE WIRKUNGSPRINZIPE · DIE LAGRANGESCHEN GLEICHUNGEN UND DEREN ANWENDUNGEN

ZWEITER UNVERÄNDERTER ABDRUCK

MIT 10 FIGUREN

1922

LEIPZIG · VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

Vorwort.

Erst hab' ich die Motto aus Goethe gewählt,
Dann selber eines zusammengestellt;
Nun las ich die Dichtungen Heines,
Doch Motto fand ich drin keines.

Im vorliegenden II. Teile der Vorlesungen über Mechanik habe ich mir die Behandlung des Prinzips der kleinsten Wirkung, der Hamiltonschen Prinzipe, sowie der damit zusammenhängenden Arbeiten von Helmholtz, Hölder, Voss und anderen zur Aufgabe gemacht. Doch habe ich das Hauptgewicht immer auf den physikalischen Sinn und den Zusammenhang mit den Sätzen der theoretischen Physik, nicht auf die rein mathematische Deduktion gelegt. Bezüglich der Ergänzungen, welche notwendig sind, alle Zweifel an die mathematische Strenge der Beweise zu beseitigen, verweise ich auf die Arbeiten der Mathematiker; mir war immer die physikalische Anschaulichkeit die Hauptsache.

Besondere Berücksichtigung mußten da die Beziehungen der Wirkungsprinzipe zur Gastheorie, Wärmetheorie und Elektrizitätslehre, sowie die Maxwell-, Helmholtz- und Hertzschen Sätze über zyklische Systeme finden. Doch bin ich nirgends in spezielle Physik eingegangen, sondern habe die Entwicklung nur so weit geführt, daß dann die Physik anknüpfen kann.

Gerade die Hamiltonschen Prinzipe der stationären und variierenden Wirkung setzen keinerlei andere Kenntnis voraus, als die der Gesamtenergie als Funktion aller Variabeln, von denen sie abhängt. Sie gestatten, wenn die Gesamtenergie in dieser Weise gegeben ist, die Ableitung aller Gleichungen für alle in Frage kommenden zeitlichen Veränderungen. Dieselben stellen daher die einzige einwurfsfrei begründete, in allen Fällen ohne weitere Kommentare unzweideutig anwendbare Energetik dar.

Der Begriff der mathematischen Variation schien mir dadurch an Anschaulichkeit zu gewinnen, daß ich daran den der physikalischen, der Aneinanderreihung unendlich vieler mathematischer Variationen zu einer endlichen Zustandsänderung knüpfte, wie derselbe besonders in der Wärmetheorie bei Betrachtung der mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes derselben in Verwendung kommt. Andererseits wurde ihm auch die Theorie kleiner endlicher Störungen bei der Methode der Variation der Konstanten gegenübergestellt.

Aus dem Hamiltonschen Prinzipe der stationären Wirkung leite ich die Lagrangesche Gleichung für generalisierte Koordinaten ab, welche zur Entwicklung der allgemeinen Theorie der Bewegung starrer Körper, dann zur Einführung elliptischer Koordinaten und zur Ableitung der Theorie der Relativbewegung benutzt werden.

Wichtige Anregung verdanke ich dem Artikel Voss' über diesen Gegenstand in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften und den Vorträgen über Mechanik auf der Naturforscherversammlung in Kassel, sowie Privatgesprächen, welche sich daran in Kassel und Göttingen knüpften.

Die übliche Formel für die Schwingungsdauer des konischen Kreispendels gilt, wie sich herausstellt, wenn dasselbe sein Gesicht immer nach derselben Richtung im Raume kehrt. Wenn es dasselbe immer der vertikalen Drehungsachse zukehrt, so hat es außer der Pendelbewegung noch eine Drehung um seine Längsachse. Wenn ein Pendel einen rotierenden Körper enthält, so ist die langsame Drehung seiner Schwingungsebene der Präzessionsbewegung unter sonst gleichen Umständen entgegengesetzt. Denn erstere folgt, wenn man sie als Superposition zweier gleicher entgegengesetzt gerichteter konischer Kreispendelbewegungen von verschiedener Schwingungsdauer auffaßt, der rascheren, die Präzession ist aber die Limite, der sich bei einer Elongation von 90° die langsamere nähert, während die Schwingungsdauer der rascheren ins Unendliche wächst.

Ich spreche noch den Wunsch aus, daß der starke physikalische Einschlag nicht den Mathematiker, und die etwas umfangreichen Formeln nicht den Physiker vor der Lektüre des Buches zurückschrecken mögen!

Wien, Juni 1904.

Ludwig Boltzmann.

Inhaltsverzeichnis.

I. Die Lagrangeschen Gleichungen.

Seite

§ 1. Integration der Relation, welche das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für einen Zeitmoment ausdrückt, nach der Zeit 1
§ 2. Ausschließung der Ungleichungen. Umkehrung des im vorigen Paragraphen entwickelten Satzes 6
§ 3. Prinzip der stationären Wirkung 9
§ 4. Begriff der verallgemeinerten Koordinaten 14
§ 5. Begriff der verallgemeinerten Kräfte 18
§ 6. Generalisierte Geschwindigkeit, lebendige Kraft, generalisiertes Moment. Eine sehr allgemeine Gleichung . . 22
§ 7. Erste Form der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen . 26
§ 8. Bedeutung der Variationsbedingungen für nicht holonome Systeme 30
§ 9. Zweite Form der Lagrangeschen Gleichungen 34
§ 10. Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen ohne Hilfe der Variationsrechnung 40
§ 11. Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten 42
§ 12. Nochmals Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse 47

II. Allgemeinste Drehung eines starren Körpers.

§ 13. Generalisierte Koordinaten zur Bestimmung der Lage eines starren um einen festen Punkt drehbaren Körpers . . 51
§ 14. Generalisierte Kräfte bei einer Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt 54
§ 15. Lebendige Kraft eines starren Körpers, der sich um einen festen Punkt dreht 57
§ 16. Die Eulerschen Gleichungen 60
§ 17. Behandlung dreier einfacher Spezialfälle 62
§ 18. Algebraische Lösung der Aufgabe im Falle des Fehlens äußerer Kräfte 66
§ 19. Poinsots geometrische Konstruktion 68
§ 20. Poloide, Serpoloide 72
§ 21. Allgemeine Gleichungen für die Drehung eines schweren Rotationskörpers um einen festen Punkt 76
§ 22. Spezialfälle 80

Seite

§ 23. Komponenten der Drehung um die fixen Achsen. Winkel der fixen und beweglichen Achsen 87
§ 24. Die Drehung, ausgedrückt durch die Differentiale der Kosinus der Winkel zwischen den fixen und beweglichen Achsen 89
§ 25. Verschiedene andere Relationen 93
§ 26. Die Zusammenfassung der in den behandelten speziellen Fällen gefundenen Resultate liefert die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers 97

III. Die verschiedenen Formen des Wirkungsprinzipes.

§ 27. Die Gleichungen, welche für nicht holonome generalisierte Koordinaten an die Stelle der Lagrangeschen treten 104
§ 28. Beispiel zum vorigen Paragraphen 112
§ 29. Variation der Integrationsgrenzen 116
§ 30. Ableitung der Gleichung, welche die Grundlage für das Folgende bildet 120
§ 31. Allgemeine Gleichung Jahobis 123
§ 32. Nochmals das Prinzip der stationären Wirkung 127
§ 33. Beispiele 130
§ 34. Helmholtz' Kräfte $\mathfrak{P}$ und Definition der p durch $\delta\Omega=0$ 132
§ 35. Das Wirkungsprinzip als Grundprinzip der gesamten Naturwissenschaft 135
§ 36. Das Prinzip der kleinsten Wirkung 139
§ 37. Variationsmethode, wobei auch die Independente, resp. die Zeit variiert wird 141
§ 38. Über die Verallgemeinerungen, welche Helmholtz dem Prinzipe der kleinsten Wirkung erteilte 145
§ 39. Jacobis Beleuchtung des Sinnes des Prinzipes der kleinsten Wirkung. Einfaches Beispiel für den Unterschied zwischen dem Prinzipe der stationären und dem der kleinsten Wirkung 149
§ 40 Verschiedene Fälle, wo die Grenzglieder verschwinden . 152
§ 41. Beispiel mit orthogonaler Variation 156

IV. Analogien mit physikalischen, besonders wärmetheoretischen Sätzen.

§ 42. Analogon der zugeführten Wärme 162
§ 43. Begriff der zyklischen und der damit verwandten Bewegungen 164
§ 44. Spezielle Beispiele 168

Seite

§ 45. Es wird weder Periodizität noch zyklischer Charakter der Bewegung vorausgesetzt 173
§ 46. Das erweiterte System. 176
§ 47. Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung . . . 178
§ 48. Betrachtung periodischer Bewegungen 181
§ 49. Theorie der Zykeln 185
§ 50. Der integrierende Faktor des Differentials der zyklisch zugeführten Energie. 190
§ 51. Adiabatische und isozyklische Bewegung 195
§ 52. Hertz' reziproke Beziehungen 197
§ 53. Helmholtz' Sätze über gemischte Zykeln 200
§ 54. Helmholtz' Reziprozitätssätze 209

V. Die Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichungen.

§ 55. Das Prinzip der variierenden Wirkung. 212
§ 56. Die beiden Hamiltonschen partiellen Differentialgleichungen 216
§ 57. Anwendung der ersten Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung 220
§ 58. Direkter Beweis der Richtigkeit der im vorigen Paragraphen gefundenen Resultate 223
§ 59. Berechnung der Wurfbewegung aus der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung als einfachstes illustrierendes Beispiel 226
§ 60. Elliptische Koordinaten 228
§ 61. Geometrische Bedeutung der elliptischen Koordinaten . 233
§ 62. Die elliptischen Koordinaten sind orthogonal 237
§ 63. Ausdruck der rechtwinkligen Koordinaten durch die elliptische 240
§ 64. Rektifikation der Krümmungslinien des Ellipsoides, Komplanation des Ellipsoides 246
§ 65. Kürzeste Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoide . . . 250
§ 66. Ein spezieller Fall des Dreikörperproblems 256

VI. Methode der Variation der Konstanten.

§ 67. Beziehung dieser Methode zu der der Variationsrechnung der reinen Mathematik. 263
§ 68. Lagranges Hilfssatz. 265
§ 69. Lagranges Methode der Variation der Konstanten. . . 268
§ 70. Beispiele. 276
§ 71. Direkte Methode der Variation der Konstanten. . . . 280
§ 72. Einführung der Hamiltonschen Konstanten 283

Seite

§ 73. Integration des Störungsproblems durch eine der Hamiltonschen analoge partielle Differentialgleichung 288

§ 74. Anwendung auf die Astronomie 291

§ 75. Hamilton-Jacobische Methode der Lösung des Zwei-Körperproblems 294

§ 76. Gleichungen für die Störung der Bahn eines Planeten durch die übrigen 300

VII. Gleichungen für die relative Bewegung.

§ 77. Absolute und relative Bewegung 302

§ 78. Erster Spezialfall. Das bewegliche Koordinatensystem dreht sich nicht 305

§ 79. Beispiele 306

§ 80. Zweiter Spezialfall. Das Koordinatensystem ist in Drehung begriffen 310

§ 81. Interpretation der gefundenen Gleichungen 312

§ 82. Weitere Spezialisierung 315

§ 83. Wiedereinführung rechtwinkliger Koordinaten 318

§ 84. Grundgleichungen für die Bewegung eines schweren Körpers relativ gegen die rotierende Erde 320

§ 85. Beispiele 323

§ 86. Bewegung auf einer Niveaufläche der scheinbaren Schwere 325

§ 87. Allgemeinste Gleichungen für die Relativbewegung . . 327

§ 88. Das Trägheitsgesetz 330

Berichtigungen 336

I. Die Lagrangeschen Gleichungen.

§ 1. Integration der Relation, welche das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für einen Zeitmoment ausdrückt, nach der Zeit.

Der Ausgangspunkt der nun folgenden Betrachtungen ist das im § 35 des I. Teiles durch die Relation 93) ausgedrückte, mit dem d'Alembertschen vereinigte Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

Es sei ganz wie in § 34 des I. Teiles ein beliebiges System materieller Punkte mit beliebigen inneren und äußeren Kräften gegeben, welches noch beliebigen Bedingungen unterworfen sein kann.

Die Kräfte, die von den Vorrichtungen ausgehen, durch welche das System gezwungen wird, die erwähnten Bedingungen zu erfüllen, nennen wir die impliziten Kräfte, sei es, daß diese Kräfte von äußeren Vorrichtungen oder von starren oder einseitigen Verbindungen der materiellen Punkte untereinander ausgehen; alle übrigen Kräfte nennen wir explizite. Bei den impliziten Kräften ist im ersteren Falle das Vorzeichen dadurch bestimmt, daß immer die von der Vorrichtung auf das System ausgeübten Kräfte die impliziten heißen, im letzteren Falle wird ihr Vorzeichen so bestimmt, wie es bei expliziten inneren Kräften schon im I. Teile geschah.

Die Massen, Kraftkomponenten und Koordinaten sowie die Differentiale und Variationen der letzteren aber sollen wie in § 71 des I. Teiles bezeichnet werden.

Wir nennen jede Bewegung des Systems, welche unter dem Einflusse der angenommenen Kräfte ohne Verletzung der gegebenen Bedingungen wirklich stattfinden kann, eine natürliche Bewegung. Irgend eine solche heben wir ein für allemal hervor und nennen sie die unvariierte Bewegung desselben.

Dann sei also x_k der Wert irgend einer (der k-ten) Koordinate zu irgend einer Zeit t bei dieser Bewegung; x'_k und x''_k sei die betreffende Geschwindigkeits- bez. Beschleunigungskomponente, $m_{3k-2} = m_{3k-1} = m_{3k}$ die Masse des k-ten materiellen Punktes, X_{3k-2}, X_{3k-1}, X_{3k} seien die nach den Koordinatenrichtungen geschätzten Komponenten der auf diesen Punkt wirkenden gesamten expliziten Kraft.

Wenn wir im ganzen n materielle Punkte haben, so sind dem k alle möglichen ganzen Zahlenwerte von 1 bis $3n$ zu erteilen.

Wir bezeichnen ferner wie im I. Teile § 33 das System als holonom, wenn sich sämtliche Bedingungsgleichungen auf ebenso viele Gleichungen von der Form

$$d\varphi(x_1 . x_2 \ldots x_{3n}, t) = 0 \tag{1}$$

reduzieren lassen. Ist dies nicht der Fall, so heißt das System ein nicht holonomes. Jede Bedingung, die sich durch Multiplikation mit einem integrierenden Faktor auf die Form 1) bringen läßt, nennen wir eine holonome, jede andere eine nicht holonome. Jedenfalls kann die l-te Bedingungsgleichung in der Form geschrieben werden:

$$\xi^{(l)} dt + \sum_1^{3n} {}_k \xi_k^{(l)} dx_k = 0 . \tag{2}$$

Siehe I. Teil § 33 Gleichungen 77) und 78).

Ist τ die Gesamtanzahl der Bedingungsgleichungen und lassen sich daraus nicht mehr als τ_1 Gleichungen von der Form 1) ableiten, wobei dann noch $\tau - \tau_1$ nicht holonome Bedingungsgleichungen übrigbleiben, so bezeichnen wir die Zahl $\tau - \tau_1$ als den Grad der Nichtholonomität des Systems. Unter der Form 2) ist natürlich auch die Gleichung 1) enthalten, wenn $\xi^{(l)} = \frac{\partial \varphi}{d t}$, $\xi_k^{(l)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ ist.

Übrigens besagt eine Gleichung von der Form 1) nicht ganz dasselbe wie eine Integralgleichung von der Form

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots x_{3n}, t) = 0 , \tag{3}$$

in welcher die Integrationskonstante einen bestimmten speziellen Wert hat, da durch die Differentialgleichung 1) die Koordinatenwerte für einen einzigen unter allen Zeitmomenten unbestimmt bleiben und bloß deren Veränderungen für alle übrigen Zeitmomente bestimmt werden.

Unter Anwendung der soeben auseinandergesetzten Bezeichnungsweise schreibt sich das mit dem d'Alembertschen vereinigte Prinzip der virtuellen Verschiebungen (vergl. Gleichungen 93) und 184) des I. Teiles, in der Form:

$$4) \qquad \sum_{1}^{3n} \left(m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2} - X_k\right) \delta x_k = 0 .$$

Wir beschränken uns im folgenden ausschließlich auf die Fälle, wo in den Bedingungsgleichungen und daher auch in dieser Relation nirgends ein Ungleichheitszeichen, sondern lediglich das Gleichheitszeichen gilt, und werden auf den Grund hiervon im Anfange des nächsten Paragraphen noch zurückkommen.

Ein vorgesetztes δ bezeichnet hierbei immer die Variation, welche die betreffende Größe erfährt, wenn man dem Systeme zur Zeit t eine beliebige virtuelle Verrückung erteilt (I. Teil, § 34). Dabei ist stets nur ein einziger bestimmter Zeitmoment t der Bewegung ins Auge gefaßt, alle übrigen Zeitmomente aber sind ganz außer Betracht gelassen. Der ins Auge gefaßte Zeitmoment dagegen ist aus ihnen vollkommen willkürlich ausgewählt. Daher können wir auch von Zeitmoment zu Zeitmoment fortschreiten und den Werten, welche die Koordinaten zu jedem Zeitmomente haben, willkürliche Zuwächse erteilen. Wir erhalten dann für jeden Zeitmoment besondere Werte von δx_k und es werden zuvörderst die für den nächsten Zeitmoment geltenden Werte dieser Größen absolut unabhängig sein von denen, die zu dem nächst vorhergehenden Zeitmomente gehören. Die Gleichung 4) wird auch gelten, wenn sich diese Größen von Zeitmoment zu Zeitmoment vollkommen diskontinuierlich ändern, so daß Integrale wie $\int \delta x_k \, dt$ absolut gar keinen Sinn haben, da die Größe δx_k unter dem Integralzeichen dann eine absolut diskontinuierliche Funktion der Zeit ist.

Unter allen möglichen Annahmen für die Werte der Variationen der Koordinaten wird es zwar verhältnismäßig wenige, aber doch noch immer unendlich viele geben, bei denen sich die δx_k zwar auch noch in ganz willkürlicher, aber in kontinuierlicher Weise mit der Zeit ändern. Wir können z. B.

$$\delta x_k = \varepsilon f_k(t) \tag{5}$$

setzen[1]), wobei ε eine unendlich kleine, für alle Koordinaten und zu allen Zeiten konstante Größe und $f_k(t)$ eine endliche kontinuierliche Funktion der Zeit ist.

Dieselbe kann für jeden Wert des k, d. h. für jede Koordinate ganz willkürlich gewählt werden, nur müssen alle diese Funktionen $f_k(t)$ so gewählt werden, daß die durch sie dargestellten Verschiebungen zu jeder Zeit virtuelle, d. h. mit den Bedingungen verträglich sind, denen das System gerade zur betreffenden Zeit t unterworfen ist. Ist also 2) die Gleichung, welche die betreffende Bedingung ausdrückt, so müssen die δx_k der Gleichung

$$\sum_1^{3n} {}_k\, \xi_k^{(l)}\, \delta x_k = 0 \tag{6}$$

genügen (vergl. I. Teil, § 34, Gleichung 88).[2]) In dem jetzt betrachteten speziellen Falle, daß die δx_k kontinuierliche

---

[1]) Die analoge Substitution für $\delta x_k''$ geht bei dem Prinzip des kleinsten Zwanges absolut nicht an, denn bei diesem muß ja für jeden Wert des k und zu allen Zeiten $\delta x_k = \delta x_k' = 0$ sein (vergl. die Gleichung 167) des I. Teiles). Würde man also analog mit Gleichung 5) jetzt während einer endlichen Zeit setzen $\delta x_k'' = \varepsilon \,.\, f_k(t)$, so könnte δx_k und $\delta x_k'$ höchstens für einzelne Momente, niemals aber für jeden Moment dieser Zeit gleich Null oder unendlich klein höherer Ordnung als ε sein. Wir haben uns also jetzt auf das Prinzip der virtuellen Verschiebungen zu beschränken.

[2]) Wir werden später einmal auch so variieren, daß wir irgend einem zu irgend einer Zeit t stattfindenden Zustande A der unvariierten Bewegung einen Zustand B der variierten Bewegung korrespondieren lassen, welcher zu einer etwas späteren Zeit $t + \delta t$ bei

Funktionen der Zeit, also durch Ausdrücke von der Form 5) darstellbar sind, haben Integrale wie

8) $$\int \delta x_k \, dt = \varepsilon \int f_k(t) \, dt$$

einen ganz bestimmten Sinn. Wir können also die für alle Zeitmomente gültige Gleichung 4) mit dt multiplizieren und über eine beliebige Zeit z. B. von t_0 bis t_1 integrieren, wodurch wir erhalten:

9) $$\int_{t_0}^{t_1} \sum_1^{3n}{}_k \left(m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2} - X_k \right) \delta x_k \, dt = 0.$$

Hierbei kann t_0 die Anfangszeit, t_1 das Ende der Bewegung sein; es kann aber auch t_0 ein beliebiger, t_1 ein beliebiger späterer Zeitmoment im Verlaufe der Bewegung sein. Bei den in der Natur wirklich vorkommenden Bewegungen, z. B. der der Gestirne, kann ja von einer Anfangs- oder Endzeit der Bewegung überhaupt nicht die Rede sein. Es ist t_0 nur der Anfang, t_1 das Ende des gerade ins Auge gefaßten Stückes der Bewegung.

Die Variationen δx_k der Koordinaten sollen in den zunächst folgenden Paragraphen nun zudem immer der Bedingung unterworfen werden, daß sie sowohl für $t = t_0$ als auch für $t = t_1$ sämtlich verschwinden. Für Zeiten, welche diesen beliebig benachbart sind, können sie dann schon wieder von Null verschiedene Werte haben. Erst viel später (von § 31 angefangen) werden wir auch den Fall betrachten, daß die Koordinatenvariationen an den Integrationsgrenzen ebenfalls nicht verschwinden.

---

der variierten Bewegung eintritt, so daß δx die Veränderung bezeichnet, welche irgend eine Koordinate x erfährt, wenn man von dem der Zeit t entsprechenden Zustand A der unvariierten Bewegung zu dem der Zeit $t + \delta t$ entsprechenden Zustand B der variierten Bewegung übergeht, also jetzt A und B korrespondierende Zustände sind. Bei dieser noch allgemeineren Art der Variation, welche wir aber im Texte vorläufig noch nicht anwenden, würden an Stelle der Gleichungen 6) des Textes die Gleichungen treten:

7) $$\xi^{(l)} \delta t + \sum_1^{3n}{}_k \xi_k^{(l)} \delta x_k = 0.$$

§ 2. Ausschließung der Ungleichungen. Umkehrung des im vorigen Paragraphen entwickelten Satzes.

Wir haben uns hierbei auf die Fälle beschränkt, wo in Relation 4) das Gleichheitszeichen gilt. Die Fälle, wo auch das Ungleichheitszeichen gelten kann, sind ohnedies weit weniger wichtig. Sie treten ein, falls in den Bedingungsgleichungen ebenfalls Ungleichungen vorkommen. Dann geschieht aber die Bewegung, solange die Vorrichtungen, welche die betreffenden Bedingungen erzeugen, in Wirksamkeit bleiben, nicht anders, als ob in den Bedingungen das Gleichheitszeichen gelten würde. Von dem Moment an aber, wo die materiellen Punkte in Positionen gekommen sind, wo jene Vorrichtungen nicht mehr wirken, geschieht die Bewegung sofort genau so, als ob die durch diese Vorrichtungen bewirkten Bedingungen gar nicht gelten würden. Es wird daher wieder die Gleichung 9) richtig sein. In derselben sind jedoch die δx_k, solange die betreffenden Vorrichtungen wirksam sind, so zu wählen, daß sie die betreffenden Bedingungen erfüllen, in denen aber das Gleichheitszeichen mit Ausschluß aller Ungleichheitszeichen zu setzen ist. Sobald dagegen gewisse Vorrichtungen zu wirken aufgehört haben, können die δx_k ganz ohne Rücksicht auf die durch die betreffenden Vorrichtungen bewirkten Bedingungen gewählt werden.

Die Zeitmomente, in denen jene Vorrichtungen gerade zu wirken aufhören oder anfangen, werden, singuläre Fälle ausgenommen, ohnedies in das Integral der linken Seite der Gleichung 9) nur einen Betrag liefern, welcher vernachlässigt werden kann. Dieses Integral ist also in eine Summe von Integralen zu zerlegen, in denen außer t_0 und t_1 alle diese Zeitmomente als Integrationsgrenzen vorkommen, so daß kein solcher Zeitmoment innerhalb eines Integrationsgebietes fällt.

Dadurch wird bewirkt, daß für jedes der Teilintegrale für alle innerhalb der Integrationsgrenzen liegenden Zeiten die Gleichung 9) gilt; denn die Bewegung geschieht innerhalb dieser Grenzen überall so, als ob sowohl in Gleichung 4) als auch in den Bedingungsgleichungen überall nur Gleichheitszeichen vorhanden wären; nur daß für einige Teilintegrale mehr, für andere weniger Bedingungen mit in Betracht zu ziehen sind. Für die Grenzen der Integration dagegen müssen noch besondere Grenzbedingungen aufgestellt werden, auf welche wir aber in diesen Vorlesungen um so weniger eingehen werden, als sie meines Wissens noch niemals untersucht worden sind.

Die Bedingung, daß das Integral 9) für alle virtuellen durch die Gleichung 5) ausgedrückten Variationen verschwinden muß, ist zwar nicht mehr so allgemein als die Form, in der wir das Prinzip der virtuellen Verschiebungen im I. Teile ausdrückten, da jetzt die Koordinatenvariationen kontinuierliche Funktionen der Zeit sein müssen, und nicht wie im I. Teile für jeden Zeitmoment vollkommen willkürlich und von den für alle übrigen Zeitmomente angenommenen vollkommen unabhängig sind. Es folgen aber aus der ersteren Bedingung, wenn wir den Fall ausschließen, daß die Bewegungsgleichungen sich längs einer endlichen Zeitstrecke von Moment zu Moment diskontinuierlich mit der Zeit ändern, und wenn in allen Bedingungen das Gleichheitszeichen gilt, nach den Regeln der Variationsrechnung noch immer die Bewegungsgleichungen der Mechanik.

Um dies zu beweisen, nehmen wir an, wir hätten im Integral 9) diejenigen Variationen, welche durch die Bedingungsgleichungen bestimmt sind, durch die übrigen unabhängigen ausgedrückt. Es müssen dann, wie wir sofort beweisen werden, wenn das Integral 9) unter den angenommenen Bedingungen stets verschwinden soll, die Koeffizienten aller dieser unabhängigen Variationen unter dem Integralzeichen für alle Zeiten verschwinden; dies war aber genau die Bedingung, aus der wir schon im I. Teile die Bewegungsgleichungen ableiteten.

Der noch ausständige Beweis kann in der folgenden Weise geführt werden. Wenn irgend ein Koeffizient einer der unabhängigen Variationen im Integral 9) nicht für alle Zeiten verschwinden würde, so könnte man dieser Variation unbeschadet der Bedingung, daß sie eine kontinuierliche Funktion der Zeit sein soll, für diejenigen Werte der Zeit, für welche der Koeffizient von einem positiven zu einem negativen Werte oder umgekehrt übergeht, sowie für die Zeiten t_0 und t_1 den Wert Null, für alle anderen Zeiten aber, für welche dieser Koeffizient positiv ist, ebenfalls einen positiven, für alle Zeiten, wo er negativ ist, einen negativen Wert erteilen.

Würde man dasselbe für alle anderen unabhängigen Variationen festsetzen, deren Koeffizienten nicht für alle Zeiten gleich Null sind, so würde das Integral 9) aus lauter positiven Gliedern bestehen, es könnte also nicht gleich Null sein. Sein Verschwinden für alle möglichen virtuellen Verrückungen, die von der gleichen Anfangslage zur gleichen Endlage übergehend sonst beliebige kontinuierliche Funktionen der Zeit sind, hat also zur Folge, daß nach Elimination der durch die Bedingungsgleichungen bestimmten Variationen die Koeffizienten aller übrigen unabhängigen Variationen zu allen Zeiten verschwinden müssen, woraus schon im I. Teile die Bewegungsgleichungen abgeleitet wurden.

Dies muß auch für Zeiten gelten, die beliebig nahe an t_0 und t_1 liegen, und daher auch für letztere Zeiten selbst, da wir Diskontinuitäten ausschlossen.

Es folgt also, falls in den Bedingungen nur Gleichheitszeichen gelten, nicht nur aus den Bewegungsgleichungen das Verschwinden des Integrals 9), sondern es folgen auch umgekehrt aus diesem Verschwinden für alle virtuellen Verrückungen, die kontinuierliche Funktionen der Zeit sind, unter den oben angegebenen Einschränkungen wieder die Bewegungsgleichungen. Ja wir sehen, daß der Beweis, kraft dessen wir im I. Teile bewiesen haben, daß die Bewegungsgleichungen eine notwendige Folge der Relation 4) sind, dadurch nichts an seiner Beweiskraft verliert, daß wir jetzt die Koordinatenvariationen als kontinuierliche Funktionen der Zeit ansehen.

§ 3. Prinzip der stationären Wirkung.

Wir haben diejenige Bewegung, wobei die k-te Koordinate zur Zeit t den Wert x_k hat und welche also unter den gegebenen Anfangsbedingungen den Bewegungsgleichungen gemäß vor sich geht (eine natürliche Bewegung ist), die unvariierte genannt. Dieser unvariierten Bewegung stellen wir die variierte gegenüber, bei welcher zur Zeit t die k-te Koordinate den Wert $x_k + \delta x_k$ hat, wobei δx_k durch Gleichung 5) gegeben ist. Da auch diese Größe eine kontinuierliche Funktion der Zeit ist, so macht bei der variierten Bewegung jeder materielle Punkt ebenfalls eine kontinuierliche Bewegung.

Da ferner für die Zeiten t_0 und t_1 die Variationen sämtlicher Koordinaten verschwinden, so wird bei der variierten Bewegung jeder Punkt zur Zeit t_0 von denselben Positionen ausgehen wie bei der unvariierten Bewegung, und auch wieder zur Zeit t_1 dieselbe Lage erreichen, wie bei der unvariierten Bewegung. Es kann sein, daß die variierte Bewegung bloß dadurch aus der unvariierten entstanden ist, daß die der Anfangszeit entsprechenden Werte der Geschwindigkeitskomponenten sämtlicher materieller Punkte unendlich wenig variiert wurden, so daß die variierte Bewegung nach denselben Bewegungsgleichungen vor sich geht, wie die unvariierte.

Meist wird dies aber nicht der Fall sein; die variierte Bewegung wird dann unter dem Einflusse von Kräften, welche dieselben Funktionen der Koordinaten sind, wie für die unvariierte Bewegung, nicht möglich sein; wir müssen diesen Kräften vielmehr neue unendlich kleine Kräfte hinzufügen, um zu bewirken, daß das System in jedem Zeitmomente die variierte Bewegung macht. Diese neuen Kräfte können daher rühren, daß wir jeden materiellen Punkt mit der Hand fassen und so führen, daß er sich genau der variierten Bewegung entsprechend bewegt, oder sie können wo immer sonst herrühren. Wir wollen sie immer die Zusatzkräfte nennen.

Wir kümmern uns übrigens vorläufig gar nicht um diese Zusatzkräfte, sondern betrachten die variierte Bewegung vielmehr bloß als eine im Gedanken neben die unvariierte, also neben die wirkliche hingestellte Bewegung.

Wir vergleichen gegenwärtig immer jeden beliebigen, zu einer beliebigen Zeit t stattfindenden Zustand der unvariierten Bewegung mit demjenigen Zustande der variierten Bewegung, welcher bei dieser zur gleichen Zeit t gehört und nennen die Zustände, welche wir vergleichen, korrespondierende. Wir setzen vor eine beliebige Größe das Zeichen δ, um den Zuwachs auszudrücken, welchen jene Größe erfährt, wenn man von einem beliebigen Zustande der unvariierten Bewegung zum korrespondierenden Zustande der variierten übergeht, wobei also bei unseren gegenwärtigen Betrachtungen t stets als konstant anzusehen ist. Das Zeichen d dagegen drückt den Zuwachs aus, welcher bei der unvariierten Bewegung eintritt, wenn t um dt wächst, wobei wieder von einer variierten Bewegung gar nicht die Rede ist.

Die Kraftkomponenten X_k, Y_k, Z_k sowie die Kraftfunktion V (sobald eine solche existiert), und die in den Bedingungsgleichungen auftretenden Größen φ und ξ sollen für die variierte Bewegung dieselben Funktionen der Koordinaten und eventuell von t sein wie für die unvariierte Bewegung. δV, $\delta\varphi$ etc. stellen also die Zuwächse dar, welche diese Größen dadurch erfahren, daß die Koordinaten von den Werten $x_1, x_2 \ldots$, die ihnen zu irgend einer Zeit t bei der unvariierten Bewegung zukommen, zu den Werten $x_1 + \delta x_1$, $x_2 + \delta x_2 \ldots$ übergehen, die sie im korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung haben. Es ist also:

10) $$\delta V = \sum_1^{3n} {}_k \frac{\partial V}{\partial x_k} \delta x_k$$

11) $$\delta \varphi = \sum_1^{3n} {}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \delta x_k$$

Die partiellen Ableitungen von $V + \delta V$ nach den Koordinaten liefern natürlich nur die Kräfte, welche bei Fort-bestand der für die unvariierte Bewegung geltenden Kraftgesetze bei derjenigen Konfiguration der materiellen Punkte wirksam wären, die diesen bei der variierten Bewegung zukommt, während die Kräfte, welche wir die Zusatzkräfte genannt haben, eine neu hinzukommende oder auch gar keine Kraftfunktion haben.

Da für die variierte Bewegung zu jeder beliebigen Zeit t der erste materielle Punkt die Abszisse

$$x_1 + \delta x_1 = x_1 + \varepsilon f_1(t)$$

hat, so ist bei der variierten Bewegung dessen Geschwindigkeitskomponente in der Abszissenrichtung zur Zeit t gleich:

$$\text{12)} \qquad \frac{d}{dt}(x_1 + \delta x_1) = \frac{d x_1}{dt} + \frac{d \delta x_1}{dt}.$$

Unserer Übereinkunft gemäß bezeichnen wir ganz allgemein den Zuwachs, den eine beliebige Größe beim Übergang von einem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung erfährt, durch ein vorgesetztes δ. Da wir die x-Komponente der Geschwindigkeit des ersten materiellen Punktes für die unvariierte Bewegung mit x_1' bezeichnet haben, so ist also der Zuwachs, welchen diese x-Komponente erhält, wenn man von einem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung übergeht, mit δx_1 zu bezeichnen. Daher ist nach Formel 12):

$$\delta x_1' = \frac{d \delta x_1}{dt}.$$

Ebenso erhält man allgemein

$$\text{13)} \qquad \delta x_k' = \frac{d \delta x_k}{dt}.$$

Ferner ist zur Zeit t die lebendige Kraft des ganzen Systems:

$$\text{14)} \qquad T = \tfrac{1}{2} \sum_1^{3n} {}_k\, m_k x_k'^2.$$

Der Zuwachs, den diese Größe beim Übergange von einem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung erfährt, ist also:

$$\text{15)} \qquad \delta T = \sum_1^{3n} {}^k m_k x'_k \delta x'_k .$$

Wir können nun in der Gleichung 9) jedes Glied der Summe einzeln nach t integrieren und sie in der Form schreiben:

$$\text{16)} \qquad \sum_1^{3n} {}^k \int_{t_0}^{t_1} m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2} \delta x_k \, dt - \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^{3n} {}^k X_k \delta x_k \, dt = 0.$$

Jedes einzelne Glied der ersten Summe hat die Form:

$$\int_{t_0}^{t_1} m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2} \delta x_k \, dt .$$

Integrieren wir partiell nach t, so geht es über in:

$$\left| m_k \frac{d x_k}{d t} \delta x_k \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m_k \frac{d x_k}{d t} \frac{d \delta x_k}{d t} \cdot dt .$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks verschwindet, da wir vorausgesetzt haben, daß sowohl für $t = t_0$ als auch für $t = t_1$ sämtliche δx_k verschwinden. Das zweite aber reduziert sich bei Einführung der obigen Bezeichnung auf:

$$\int_{t_0}^{t_1} m_k x'_k \delta x'_k \, dt .$$

Nehmen wir dieselbe Transformation mit allen Gliedern der ersten Summe der Gleichung 16) vor und fassen dann wieder alle zusammen, so finden wir, daß sich diese Summe auf $-\int_{t_0}^{t_1} \delta T \, dt$ reduziert. Wir können daher die Gleichung 16) auch in der Form schreiben

$$\text{17)} \qquad \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_1^{3n} {}^k X_k \delta x_k \right) dt = 0 ,$$

welche Relation man aus einem später zu erläuternden Grunde als das Prinzip der stationären Wirkung in seiner allgemeinsten Form zu bezeichnen pflegt. Nicht zutreffend ist es, sie das **Hamilton**sche Prinzip zu nennen, von dem sie, wie wir sehen werden, nur ein spezieller Fall ist.

Der Ausdruck $\sum_{1}^{3n} {}^{k} X_k \delta x_k$ der Formel 17) stellt die Arbeit dar, welche gegen die expliziten Kräfte geleistet wird, sobald das System aus der wirklichen Lage, die es zur Zeit t hat, in die korrespondierende, d. h. derselben Zeit entsprechende variierte Lage gebracht wird (vergl. I. Teil, §§ 16 und 26). Wenn eine Kraftfunktion V existiert, welche übrigens auch noch die Zeit explizit enthalten kann, so ist $X_k = -\partial V / \partial x_k$, daher nach Gleichung 10)

18) $$\sum_{1}^{3n} {}^{k} X_k \delta x_k = -\delta V,$$

wobei $-\delta V$ die gesamte Veränderung der Funktion V beim Übergang von der wirklichen zur variierten Bewegung unter Konstanthaltung der Zeit t ist. Existiert keine Kraftfunktion, oder sind die Kräfte überhaupt nicht bloß als Funktionen der Zeit und der Koordinaten gegeben, so wollen wir noch immer symbolisch

19) $$\sum_{1}^{3n} {}^{k} X_k \delta x_k = -\delta' V$$

setzen, wobei der beigefügte Strich ausdrückt, daß die Summe kein vollständiger Differentialausdruck ist. Wenn wir nicht wissen, ob diese Summe ein vollständiger Differentialausdruck ist oder nicht, so wollen wir dies durch zwei dem δ beigefügte Striche andeuten, so daß wir ganz allgemein die Gleichung 17) in der Form schreiben:

20) $$\int_{t_0}^{t_1} dt (\delta T - \delta'' V) = 0,$$

wobei stets

21) $$\delta'' V = -\sum_{1}^{3n} {}^{k} X_k \delta x_k$$

ist, und es sind beide Striche wegzulassen, wenn man sicher weiß, daß eine Kraftfunktion existiert; weiß man dagegen sicher, daß keine existiert oder die Kräfte überhaupt nicht als Funktionen der Koordinaten und der Zeit gegeben sind, so ist ein Strich zu setzen.

§ 4. Begriff der verallgemeinerten Koordinaten.

Die im vorigen Paragraphen entwickelte allgemeinste Form des Prinzipes der stationären Wirkung erweist sich als besonders nützlich bei der Koordinatentransformation. Wir haben bisher die Position jedes Massenpunktes des Systems durch dessen rechtwinklige Koordinaten bestimmt. Sehr oft empfiehlt es sich, irgend welche andere Variabeln einzuführen, welche ebenfalls dazu tauglich sind, die Position jedes Punktes des Systems zu jeder Zeit zu definieren. Man kann z. B. die Position jedes Punktes durch Polar- oder Semipolar- oder elliptische oder noch andere Koordinaten bestimmen. Wenn zwischen den Koordinaten der verschiedenen materiellen Punkte des Systems Gleichungen bestehen, so genügen oft wenige Variable zur Bestimmung der Lage sämtlicher materieller Punkte des Systems. So kann, wie wir im I. Teile ersahen, die Position eines vollkommen freien starren Körpers im Raume durch sechs Variable bestimmt werden. Zur Bestimmung der Lage eines um eine feste Achse drehbaren starren Körpers reicht sogar eine einzige Variable hin.

Wenn zwischen den $3n$ rechtwinkligen Koordinaten der n Punkte eines materiellen Systems τ Gleichungen bestehen, so sind noch $3n - \tau = i$ Koordinaten willkürlich; man sagt, das System hat i Freiheiten. Die Zahl der unabhängigen Variabeln, welche zur Bestimmung der Lage aller seiner Teile erforderlich ist, ist dann gleich der Zahl der Freiheiten i; es können aber auch mehr (s) Variable verwendet werden. Im letzteren Falle sind dieselben jedoch nicht voneinander unabhängig, sondern es werden zwischen denselben $\sigma = s - i$ Gleichungen bestehen und man kann sagen, daß durch Einführung der neuen Variable von den Bedingungsgleichungen $\tau - (s - i) = 3n - s$ eliminiert wurden, da früher τ, jetzt nur mehr $\sigma = s - i$ Bedingungsgleichungen vorhanden sind.

Diese Elimination von Bedingungsgleichungen wird häufig folgendermaßen bewerkstelligt. Man drückt die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten durch $3n$ neue Variabeln aus und wählt letztere so, daß einige derselben vermöge der Bedingungsgleichungen für alle Zeiten konstant bleiben, daher nicht den Charakter von Koordinaten, sondern von reinen Konstanten der Aufgabe haben, während nur die anderen als veränderliche Koordinaten übrig bleiben. Wenn z. B. ein materieller Punkt gezwungen ist, sich auf einer Kugelfläche zu bewegen, so drückt man zuerst seine rechtwinkligen Koordinaten durch gewöhnliche Polarkoordinaten aus, deren Ursprung der Mittelpunkt jener Kugelfläche ist. Eine der Polarkoordinaten, nämlich die Entfernung vom Kugelzentrum, ist dann konstant und es bleiben nur die beiden Polarwinkel als veränderliche Koordinaten übrig.

Es sei nun ein beliebiges System von n materiellen Punkten gegeben; die rechtwinkligen Koordinaten derselben sollen wieder mit $x_1\, x_2 \ldots x_{3n}$ bezeichnet werden, und auch alle übrigen bisherigen Bezeichnungen sollen beibehalten werden. Ferner seien $p_1\, p_2 \ldots p_s$ irgend welche andere Variable, durch deren Werte ebenfalls die Position sämtlicher materieller Punkte des Systems bestimmt ist. Wir wollen die p die verallgemeinerten Koordinaten des Systems oder kürzer die Parameter nennen. Nach dem Gesagten muß s gleich oder größer als die Anzahl i der Freiheiten des Systems sein und bestehen im letzteren Falle $s - i$ Gleichungen zwischen den p.

Durch die Werte der p soll die Lage, d. h. es sollen die rechtwinkligen Koordinaten $x_1\, x_2 \ldots x_{3n}$ sämtlicher materieller Punkte des Systems bestimmt sein. Die letzteren Größen sind daher Funktionen der ersteren, was man in folgender Form schreibt:

$$22)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= F_1\,(p_1, p_2 \ldots p_s, t)\\ x_2 &= F_2\,(p_1, p_2 \ldots p_s, t)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{3n} &= F_{3n}(p_1, p_2 \ldots p_s, t).\end{aligned}\right.$$ [1]

[1]) Sobald die rechtwinkligen Koordinaten mit den generalisierten durch ein Gleichungssystem von der Form 22) verbunden sind, be-

Der einfachste und am häufigsten vorkommende Fall wird der sein, daß die Funktionen F, welche die rechtwinkligen Koordinaten durch die generalisierten ausdrücken, die Zeit nicht explizit enthalten, daß sie also zu allen Zeiten dieselbe Form haben, was z. B. eintritt, wenn man rechtwinklige Koordinaten durch Polarkoordinaten etc. ausdrückt. Wir bezeichnen die generalierten Koordinaten dann als skleronome.

Die Funktionen F können aber auch mit der Zeit veränderliche Parameter enthalten, so daß ihre Form mit der Zeit kontinuierlich veränderlich ist. Man sagt dann, sie enthalten die Zeit explizit und drückt es dadurch aus, daß man unter dem Funktionszeichen F der Variabeln p noch die Variable t explizit beifügt (rheonome generalisierte Koordinaten). Letzterer Umstand wird immer eintreten, wenn durch Einführung der betreffenden generalisierten Koordinaten Bedingungsgleichungen eliminiert wurden, welche die Zeit explizit enthielten.

Am einfachsten und zweckmäßigsten ist es natürlich,

zeichnen wir die letzteren als holonome. In diesem Buche, mit Ausnahme von §§ 27 und 28 ist, sowie überhaupt in der bisherigen Mechanik, immer vorausgesetzt, daß die generalisierten Koordinaten holonome sind. Es kann auch sein, daß bloß die Differentiale der rechtwinkligen Koordinaten durch die der generalisierten gegeben sind, daß also im einfachsten Falle an Stelle der Gleichungen 22) Gleichungen von der Form

$$23)\qquad d x_k = \Pi^{(k)} d t + \sum_1^s{}_h \Pi_h^{(k)} d p_h$$

treten. Wenn diese Gleichungen nicht auf lauter Gleichungen von der Form

$$24)\qquad d x_k = d F_k(p_1, p_2 \ldots p_s, t)$$

reduzierbar sind, so bezeichnen wir die generalisierten Koordinaten als nicht holonome. Alsdann treten auch an Stelle der Gleichungen 25) entsprechende Differentialgleichungen. Für nicht holonome generalisierte Koordinaten bedürfen die meisten im Texte entwickelten Lehrsätze unter anderem schon die Lagrangeschen Gleichungen einer ganz wesentlichen Modifikation (vergl. §§ 27 und 28, dann Wien. Sitzungsber. 111, IIa, S. 1603, Dezember 1902). Wenn es nicht möglich ist, mehr als g der Gleichungen 23) auf die Form 24) zu bringen, so nennen wir g den Grad der Nichtholonomität der generalisierten Koordinaten.

wenn die Funktionen F der Gleichungen 22) eindeutig und kontinuierlich sind, da dann die Position des Systems durch die generalisierten Koordinaten eindeutig bestimmt ist. Doch läßt sich manchmal die Einführung mehrdeutiger Funktionen nicht vermeiden. Man kommt dann überein, daß die Werte der generalisierten Koordinaten mit bestimmten willkürlich gewählten beginnen und sich dann stets kontinuierlich mit der Zeit ändern sollen. Da auch die Werte der rechtwinkligen Koordinaten sich stets kontinuierlich mit der Zeit ändern, so ist dadurch jede Mehrdeutigkeit ausgeschlossen, solange man nicht an eine Stelle kommt, wo sich mehrere Funktionswerte verzweigen. An solchen Verzweigungsstellen oder anderen singulären Stellen, wo die Funktionen diskontinuierlich, unbestimmt oder unendlich werden, sind immer besondere Betrachtungen resp. besondere Festsetzungen notwendig, während an allen übrigen Stellen die zu entwickelnden Gleichungen richtig bleiben.

Wenn zwischen den generalisierten Koordinaten Gleichungen bestehen, so können natürlich die Funktionen F mittels derselben in verschiedene Formen gebracht werden, indem man die eine oder andere generalisierte Koordinate vermöge der zwischen den generalisierten Koordinaten bestehenden Gleichungen durch die übrigen ausdrückt, oder sonst gewisse in den Funktionen F vorkommende Ausdrücke unter Benutzung dieser Gleichungen in eine andere Form bringt.

Da zu jeder Reihe von kontinuierlich sich folgenden Wertekombinationen der x bis zu etwaigen Verzweigungspunkten oder singulären Stellen eine einzige kontinuierliche Reihe von Wertekombinationen der p gehört, so kann man aus den Gleichungen 22) jedenfalls auch umgekehrt die p als Funktionen der x ausdrücken, was auf folgende Form führen soll

$$25)\quad \begin{cases} p_1 = \Phi_1(x_1, x_2 \ldots x_{3n}, t) \\ p_2 = \Phi_2(x_1, x_2 \ldots x_{3n}, t) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ p_s = \Phi_s(x_1, x_2 \ldots x_{3n}, t), \end{cases}$$

wobei natürlich die Funktionen Φ ebenfalls in verschiedene Formen gebracht werden können, falls Gleichungen zwischen den rechtwinkligen Koordinaten bestehen. Auch die Funktionen Φ können mehrdeutig sein und einzelne singuläre Stellen haben, für welche dann die Gültigkeit der zu entwickelnden Gleichungen aufhört und besondere Betrachtungen erforderlich sind.

Es hätte keine Schwierigkeit, mittels der Gleichungen 22) in die ersten und zweiten Differentialquotienten der x nach der Zeit, sowie in die Ausdrücke für die Kräfte die p statt der x einzuführen. Die Substitution dieser Werte in die für die rechtwinkligen Koordinaten geltenden Bewegungsgleichungen würde dann in jedem speziellen Falle die Form liefern, welche die Bewegungsgleichungen nach Einführung der verallgemeinerten Koordinaten annehmen.

Wir wollen aber im folgenden zeigen, wie diese Form viel kürzer und ganz allgemein mittels des Prinzipes der stationären Wirkung gefunden werden kann.

§ 5. Begriff der verallgemeinerten Kräfte.

Es seien $x_1\, x_2 \ldots x_{3n}$ beliebige Koordinatenwerte, $p_1\, p_2 \ldots p_s$ die dazu gehörigen Werte der p oder bei Mehrdeutigkeit bestimmte dazu gehörige Werte der p. Den durch die Gleichungen 5) bestimmten Zuwächsen $\delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_{3n}$ der x sollen die Zuwächse $\delta p_1\, \delta p_2 \ldots \delta p_s$ der p entsprechen, welche also jedenfalls auch sonst vollkommen willkürlich sind, nur daß sie mit den etwa zwischen den p bestehenden Bedingungen vereinbar sein müssen; die durch sie bestimmte Verschiebung des Systems nennen wir die Verschiebung B. Dann folgt mit Ausnahme der singulären Stellen, von denen jedenfalls nur einzelne vorhanden sein sollen, aus den Gleichungen 22):

$$26)\qquad \delta x_k = \sum_1^s {}_h \frac{\partial x_k}{\partial p_h}\, \delta p_h \qquad k = 1, 2, \ldots 3n.$$

Wir ließen immer solche Zustände einander korrespondieren, welche zu gleichen Zeiten gehören, d. h. bei der durch das Zeichen δ angedeuteten Operation ist immer ein

Zustand der unvariierten mit dem der gleichen Zeit t entsprechenden Zustande der variierten Bewegung zu vergleichen. Infolgedessen muß bei Bildung von δx_k die Zeit t als unveränderlich angesehen werden, wogegen man für den während der Zeit dt bei der unvariierten Bewegung eintretenden Zuwachs von x_k die Formel erhält:

$$27)\qquad dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial t}\, dt + \sum_1^s{}^h \frac{\partial x_k}{\partial p_h}\, dp_h .$$

Die Koeffizienten der δp in Formel 26) sind die partiellen Ableitungen der Funktionen F nach den p, also selbst wieder Funktionen der p und eventuell der Zeit. Wenn man von bestimmten Werten der x und p ausgeht, so sind bis zu den singulären Stellen die δx eindeutig durch die δp bestimmt und umgekehrt, da nirgends außer in den Verzweigungspunkten ein zu gewissen p gehöriges Wertsystem der x kontinuierlich in ein anderes oder umgekehrt übergehen kann.

Substituiert man die Werte 26) in den Ausdruck 21) für die bei der fingierten Verschiebung B geleistete Arbeit des Systems, so nimmt dieser die Form an

$$28)\qquad -\delta'' V = \sum_1^{3n} X_k \delta x_k = \sum_1^s{}^h P_h \delta p_h ,$$

wobei

$$29)\qquad P_h = \sum_1^{3n}{}^k X_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h} \qquad h = 1, 2 \ldots s$$

ist. Durch Einführung dieser Größen erhält man aus Gleichung 17) oder 20):

$$30)\qquad \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_1^s{}^h P_h \delta p_h \right) dt = 0 .$$

Die Richtigkeit der Gleichung 17) wurde für beliebige virtuelle Verschiebungen bewiesen, welche jedoch sowohl für $t = t_0$ als auch für $t = t_1$ verschwinden müssen. Es gilt also die Gleichung 30) ebenfalls für beliebige mit den Bedingungsgleichungen verträgliche δp_h, sobald diese sämtlich für jede dieser beiden Zeiten verschwinden; denn man sieht leicht, daß, wenn sämtliche δx verschwinden, dann auch sämtliche δp verschwinden müssen und umgekehrt.

Die Größen P_k spielen eine ganz analoge Rolle wie früher die Größen X_k. Erstere heißen daher die verallgemeinerten Kräfte, und zwar P_h die in der Richtung der verallgemeinerten Koordinate p_h wirkende verallgemeinerte Kraft oder auch die Projektion oder Komponente der Gesamtkraft in der Richtung der Koordinate p_h. Wenn nämlich die Koordinatentransformation bloß in einem Übergange zu anders gerichteten Koordinatenachsen besteht, so sieht man leicht, daß P_h im gewöhnlichen Sinne des Wortes die Komponente der auf einen Punkt wirkenden Kraft in der Richtung der betreffenden neuen Koordinatenachse ist. $-\delta'' V$ ist die bei einer bloß gedachten Verschiebung geleistete Arbeit. Wollte man die während der Zeit dt für die unvariierte Bewegung wirklich geleistete Arbeit

$$\sum_1^{3n}{}_k X_k\, d x_k$$

berechnen, so wären natürlich für die dx die Werte 27) zu substituieren und es würde folgen $-dV + \frac{\partial V}{\partial t} dt$.

Wenn die X nur Funktionen der Koordinaten sind und auch die Funktionen F der Gleichungen 22) die Zeit nicht enthalten, so sind die P ebenfalls Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten, welche die Zeit nicht enthalten. Wir sagen dann, das System ist skleronom und skleronom bestimmt. Enthalten die X oder die F die Zeit explizit (ist das System rheonom oder rheonom bestimmt, oder beides) so wird dies auch wenigstens von einigen der P gelten. Sind dagegen die X auch von den Geschwindigkeitskomponenten oder noch komplizierteren Größen abhängig, so enthalten natürlich auch die P die Ableitungen der p nach der Zeit oder noch verwickelter gebaute Ausdrücke. Wenn die X die negativen partiellen Ableitungen einer Funktion V (der Kraftfunktion) nach der betreffenden Koordinate sind und V nur die Koordinaten und eventuell explizit die Zeit enthält, so daß

30a) $$X_k = -\frac{\partial V}{\partial x_k} \qquad k = 1, 2 \ldots 3n$$

ist, so wird, wie sofort aus Gleichung 29) ersichtlich ist:

31) $$P_h = -\sum_1^{3n}{}_k \frac{\partial V}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = -\frac{\partial V}{\partial p_h}.$$

Man erhält also dann die nach einer beliebigen generalisierten Koordinate wirkende generalisierte Kraft, indem man in der Kraftfunktion die rechtwinkligen Koordinaten x mittels der Gleichungen 22) durch die generalisierten Koordinaten ausdrückt, die so erhaltene Funktion der generalisierten Koordinaten und der Zeit nach der betreffenden generalisierten Koordinate partiell differenziert und schließlich das Vorzeichen umkehrt.

Wenn zwischen den p keine Gleichung mehr besteht, so kann man die nach p_h wirkende verallgemeinerte Kraft unabhängig von den rechtwinkligen Koordinaten und den Komponenten der äußeren Kräfte nach den Richtungen der rechtwinkligen Koordinatenachsen in der folgenden Weise definieren. Man läßt p_h um δp_h wachsen, die übrigen p aber konstant, sowie auch die Zeit, insofern die Form der p mit ihr veränderlich ist. Die dabei geleistete Arbeit $-\delta_h'' V$ durch den Parameterzuwachs δp_h dividiert ist die betreffende generalisierte Kraft. Es ist also:

32) $$P_h = -\frac{\delta_h'' V}{\delta p_h}.$$

Sind die p nicht voneinander unabhängig, so können natürlich für jedes einzelne P verschiedene Ausdrücke aufgestellt werden. Es lassen sich dann sämtliche äußere und innere nach jedem Parameter wirkenden Kräfte gar nicht durch alleinige Betrachtung der Arbeitsleistung bei jeder virtuellen Verschiebung voneinander trennen, gleichwie allein durch Angabe der Arbeitsleistung bei jeder virtuellen Verschiebung sämtliche Komponenten der auf alle materiellen Punkte wirkenden äußeren Kräfte nach den rechtwinkligen Koordinatenrichtungen in dem Falle ebenfalls noch keineswegs bestimmt sind, daß zwischen den rechtwinkligen Koordinaten Gleichungen bestehen.

Wenn aber die X, sowie die in den Gleichungen 22) vorkommenden Funktionen F gegeben sind und man daran keine Eliminationen mittels der Bedingungsgleichungen vornimmt, so sind die Ausdrücke 29) bestimmt. Es sind jene Werthe, welche die Formel 29) (resp. 32)) geben würde, wenn man ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen alle p bis auf p_h konstant läßt, aus den Gleichungen 22) die dazu gehörigen Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten und mittels der Formel 28) $\delta_h'' V$ berechnen würde.

Die generalisierten Kräfte haben natürlich nicht immer die Dimensionen einer Kraft im gewöhnlichen Sinne. Da $P_h \delta p_h$ immer die Dimensionen einer Arbeit hat, so hat z. B. P_h die Dimension einer mit einer Länge multiplizierten Kraft (einer Arbeit, eines Drehmomentes), wenn p_h ein Winkel, also eine bloße Zahl ist.

§ 6. Generalisierte Geschwindigkeit, lebendige Kraft, generalisiertes Moment. Eine sehr allgemeine Gleichung.

Wir wollen nun den Differentialquotienten einer beliebigen Größe nach der Zeit wieder mit einem angehängten Strich bezeichnen und die Differentialquotienten $p_1', p_2' \ldots$ der verallgemeinerten Koordinaten nach der Zeit die verallgemeinerten Geschwindigkeiten nennen. Die Division der Gleichung 27) durch dt liefert:

$$33) \qquad x_k' = \frac{\partial x_k}{\partial t} + \sum_1^{\nu} {}_h\, p'_h \frac{\partial x_k}{\partial p_h} \qquad k = 1, 2 \ldots 3n.$$

Da die partiellen Differentialquotienten der x_k Funktionen der p und der Zeit sind, so sind also durch diese Formel die gewöhnlichen Geschwindigkeitskomponenten x' als Functionen der verallgemeinerten Koordinaten p und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten p' ausgedrückt und zwar sind sie bezüglich der letzteren Größen linear. Diese Funktionen werden die Zeit dann noch explizit enthalten, wenn diese auch in den Funktionen F explizit enthalten ist (wenn die verallgemeinerten Koordinaten rheonom sind).

Der partielle Differentialquotient eines so ausgedrückten x'_k nach p'_h (d. h. der daraus unter Konstanthaltung aller übrigen p', aller p und der Zeit, wenn letztere explizit in $\partial x'_k / \partial p'_h$ enthalten ist, gebildete) ist

$$\frac{\partial x'_k}{\partial p'_h} = \frac{\partial x_k}{\partial p_h}, \tag{34}$$

also gleich dem aus 22) gebildeten partiellen Differentialquotienten des entsprechenden x nach dem entsprechenden p.

In den rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt ist die lebendige Kraft durch Formel 14) gegeben. Substituiert man für die x' die Werte 33), so folgt T als ganze Funktion zweiten Grades der p'. Wir wollen setzen

$$\left.\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} \sum_1^s{}^h \sum_1^s{}^k a_{hk}\, p'_h p'_k + \sum_1^s{}^h \beta_h p'_h + \gamma \\ &= \tfrac{1}{2} a_{11} p_1'^2 + \tfrac{1}{2} a_{22} p_2'^2 \ldots + a_{12} p'_1 p'_2 + \ldots \\ &\quad + \beta_1 p'_1 + \beta_2 p'_2 \ldots + \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

wobei wir unter a_{hk} und a_{kh} stets dieselbe Größe, nämlich den halben Koeffizienten von $p'_h p'_k$ im Ausdrucke für T verstehen. Die beiden Glieder, welche man erhält, einmal, wenn man in der ersten Summe den Summationsbuchstaben gleich h und in der zweiten gleich k, das andere Mal, wenn man in der ersten Summe den Summationsbuchstaben gleich k und in der anderen gleich h setzt, addieren sich dann zu $a_{hk} p'_h p'_k$.

Die Koeffizienten a, β und γ werden noch die generalisierten Koordinaten p in irgend einer von der Form der Funktionen F abhängigen Weise enthalten. Falls die Funktionen F der Gleichungen 22) die Zeit nicht explizit enthalten, also, wie wir uns ausdrückten, für skleronome generalisierte Koordinaten verschwinden die β und γ und T wird eine homogene quadratische Funktion der p'.

Man bezeichnet den partiellen, d. h. bei Konstanthaltung des t, aller p und aller übrigen p' gebildeten Differentialquotienten von T nach p'_h mit q_h und nennt ihn das betreffende generalisierte Moment. Es ist also:

$$q_h = \frac{\partial T}{\partial p'_h} = \sum_1^s{}^k a_{hk}\, p'_k + \beta_h. \tag{36}$$

Wenn man den Verlauf der unvariierten Bewegung verfolgt, so sind allerdings sämtliche p Funktionen der Zeit allein und freilich auch der Anfangswerte, mit denen die Bewegung begonnen hat, so daß bei einem gegebenen Systeme und gegebenen Anfangswerten, wenn eines der p gegeben ist, dadurch im allgemeinen alle anderen bestimmt sind, entweder eindeutig oder mehrdeutig, manchmal freilich unendlich vieldeutig, selbst so, daß sie noch eine kontinuierlich zwischen gewissen Grenzen liegende Mannigfaltigkeit von Werten annehmen können. Die p aber sind zudem die Differentialquotienten der entsprechenden p nach der Zeit.

In Formel 36) aber, wie auch schon früher bei Bildung aller partiellen Differentialquotienten, wird dies gar nicht berücksichtigt. Es wird für einen Augenblick T einfach als ein Ausdruck betrachtet, der in gegebener Weise aus den p und p' zusammengesetzt ist und ohne Rücksicht auf die Bedeutung der p und p' gerade so partiell differenziert wird, als ob sich jedes der p und jedes der p' unabhängig von allen anderen für sich allein beliebig ändern könnte, was z. B. dann wirklich der Fall wäre, wenn man nicht bloß die Zeit, sondern auch jeden der Anfangswerte der p und p' als beliebig veränderlich betrachten würde.

In dem speziellen Falle, daß die generalisierten Koordinaten mit den rechtwinkligen zusammenfallen, ist $p'_h = x'_h$, daher T durch den Ausdruck 14) gegeben und man hat

$$37)\qquad q_h = \frac{\partial T}{\partial x'_h} = m_h x'_h,$$

q_h ist also dann das, was wir schon im I. Teile das in der betreffenden Koordinatenrichtung geschätzte Bewegungsmoment genannt haben.

Denken wir uns in den Ausdruck für T die generalisierten Koordinaten eingeführt, so daß er die Form 35) annimmt, so folgt zunächst für jeden Zeitmoment:

$$38)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta T = \sum_1^s{}_h \frac{\partial T}{\partial p'_h}\,\delta p'_h + \sum_1^s{}_h \frac{\partial T}{\partial p_h}\,\delta p_h = \sum_1^s{}_h q_h\,\delta p'_h + \\ + \sum_1^s{}_h \frac{\partial T}{\partial p_h}\,\delta p_h . \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist δp_h der Zuwachs, welchen der Wert der generalisierten Koordinaten p_h beim Übergange von dem der Zeit t entsprechenden Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung erfährt. $p_h' = \frac{d p_h}{d t}$ ist der Wert der entsprechenden generalisierten Geschwindigkeit zu dieser Zeit für die unvariierte,

$$\frac{d p_h}{d t} + \frac{d \delta p_h}{d t} = p'_h + \delta p'_h,$$

der für den korrespondierenden Zustand der variierten Bewegung. Der Zuwachs, den diese generalisierte Geschwindigkeit beim Übergang von der unvariierten zur variierten Bewegung erfährt, ist also:

$$\delta p'_h = \frac{d \delta p_h}{d t} \tag{39}$$

Addiert man zur Gleichung 38) beiderseits den Ausdruck

$$\sum_1^s{}_h P_h \delta p_h,$$

multipliziert mit $d t$ und integriert von t_0 bis t_1, so ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T + \sum_1^s{}_h P_h \delta p_h\right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} d t \sum_1^s{}_h \left[q_h \delta p'_h + \left(\frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h\right) \delta p_h\right]. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Irgend ein Glied der ersten Summe der rechten Seite dieser Gleichung hat mit Inbegriff der Integration nach t die Form

$$\int_{t_0}^{t_1} q_h \delta p'_h d t,$$

was unter Berücksichtigung der Gleichung 39) durch partielle Integration gleich

$$\Big| q_h \delta p_h \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d q_h}{d t} \delta p_h d t$$

gefunden wird. Transformiert man jedes Glied der rechten Seite der Gleichung 40) in dieser Weise und vereinigt dann wieder alle diese Glieder, so folgt allgemein:

$$41)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T + \sum_1^s {}^h P_h \delta p_h\right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_1^s {}^h \left[-\frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h\right] \delta p_h + \sum_1^s {}^h q_h \delta p_h \Big|_{t_0}^{t_1} . \end{aligned}\right.$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung ist keineswegs an die Bedingung geknüpft, daß für die Integrationsgrenzen, also für $t = t_0$ und $t = t_1$, die Variationen sämtlicher Koordinaten verschwinden. Wenn dies jedoch der Fall ist, wenn also für $t = t_0$ und $t = t_1$ sämtliche δp verschwinden, so verschwindet das letzte Glied der rechten Seite der Gleichung 41). Andererseits aber verschwindet in diesem Falle auch die linke Seite dieser Gleichung gemäß der Gleichung 30) und es folgt somit in diesem speziellen Falle:

$$42)\qquad \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^s {}^h \left(-\frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h\right) \delta p_h \, dt = 0.$$

§ 7. Erste Form der Lagrangeschen Bewegungsgleichung

Wenn zwischen den p keine Bedingungsgleichungen bestehen, so sind in Gleichung 42) sämtliche δp voneinander unabhängig und man kann aus der Allgemeingültigkeit dieser Gleichung leicht beweisen, daß alle Koeffizienten aller δp für alle Zeiten verschwinden müssen. Denn würde der Koeffizient irgend eines der δp, z. B. der von δp_h, nicht für alle Zeiten verschwinden, so könnte man für alle Zeiten, für welche er positiv ist, auch δp_h positiv, für alle, für welche er negativ ist, auch δp_h negativ, dagegen alle anderen δp gleich Null wählen. Die linke Seite der Gleichung 42) wäre dann notwendig positiv und könnte nicht verschwinden, was mit dem eben Bewiesenen in Widerspruch steht. Man hat also zu allen Zeiten und, wenn alle Funktionen kontinuierlich sind, auch beliebig nahe an t_0 und t_1:

$$43)\qquad \frac{d q_h}{d t} - \frac{\partial T}{\partial p_h} = P_h, \quad h = 1, 2, 3 \ldots s.$$

Die Zahl s der generalisierten Koordinaten kann nicht kleiner sein, als die Zahl $i = 3n - \tau$ der Freiheiten des Systems, weil sonst eine Bestimmung der Lage sämtlicher Punkte des Systems durch die generalisierten Koordinaten unmöglich wäre. Ist $s = i$, so tritt der eben betrachtete Fall ein, daß zwischen den generalisierten Koordinaten keinerlei Bedingungsgleichungen bestehen. Die generalisierten Koordinaten werden aber nur dann holonom sein können, wenn das System selbst ein holonomes ist. Ist dagegen $s > i$, so bleiben zwischen den generalisierten Koordinaten noch $\sigma = s - i = s - 3n + \tau$ Bedingungsgleichungen übrig.

Beim Gebrauche rechtwinkliger Koordinaten hatte die l-te Bedingungsgleichung die Form 2). Führen wir vermöge der Gleichungen 22) und 27) die generalisierten Koordinaten ein, so nimmt diese Bedingungsgleichung die Form an

44) $$\pi^l \, dt + \sum_1^s {}_h \, \pi_h^l \, dp_h = 0,$$

wobei

44a) $$\pi^l = \xi^l + \sum_1^{3n} {}_k \, \xi_k^l \frac{\partial x_k}{\partial t}, \qquad \pi_h^l = \sum_1^{3n} {}_k \, \xi_k^l \frac{\partial x_k}{\partial p_h}.$$

Bei Bildung der partiellen Differentialquotienten der x sind diese natürlich vermöge der Gleichungen 22) als Funktionen von t und den p zu betrachten. Wenn eine Bedingungsgleichung von den generalisierten Koordinaten identisch erfüllt wird, so müssen für dieselbe sämtliche π identisch verschwinden.

Die der Bedingung 44) entsprechende Bedingungsgleichung für den Übergang von einem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustand der variierten Bewegung aber wird, falls nicht alle π verschwinden und sie daher identisch erfüllt ist, lauten:

45) $$\sum_1^s {}_h \, \pi_h^l \, \delta p_h = 0.$$

Die π sind natürlich jetzt Funktionen der generalisierten Koordinaten, welche auch die Zeit explizit enthalten können. Letzteres wird jedoch niemals der Fall sein, wenn die früher mit F und ξ bezeichneten Funktionen die Zeit nicht explizit enthielten.

Bei der in der Anmerkung auf Seite 5 § 1 angedeuteten Variationsmethode, bei welcher die korrespondierenden Zustände nicht gleichen Zeiten entsprechen und daher auch die Zeit variiert wird, welche wir aber vorläufig nirgends anwenden werden, müßten an Stelle der Gleichungen 45) die Gleichungen treten:

46) $$\pi^i \delta t + \sum_1^s {}^h \pi_h^i \delta p_h = 0 .$$

Falls das System holonom ist, werden auch die Bedingungsgleichungen 44) holonom sein, d. h. sich auf σ Gleichungen von der Form

47) $$d\varphi(p_1, p_2 \ldots p_s, t) = 0$$

reduzieren lassen. Wenn dagegen das System inholonom vom Grade g ist, so müssen g von den Gleichungen 44) übrig bleiben, die sich nicht auf diese Form bringen lassen.

Im ersten Falle haben die Bedingungen, welche für den Übergang vom unvariierten zum variierten Zustande gelten, ebenfalls die Form

48) $$\delta\varphi(p_1, p_2 \ldots p_s, t) = 0$$

und es kommt ihnen eine überaus einfache Bedeutung zu. Diese Gleichungen besagen nämlich, daß die Funktion φ beim Übergange von jedem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung ebenfalls denselben konstanten Wert behalten muß, der ihr auch für die ganze unvariierte Bewegung zukommt, daß also auch während der ganzen variierten Bewegung diese Funktion jenen konstanten Wert haben muß, oder mit anderen Worten, daß auch die variierte Bewegung aus lauter Lagen bestehen muß, welche mit den Bedingungsgleichungen vereinbar sind, d. h. selbst mit diesen vereinbar sein muß.

Wenn die Bedingungen in der Form gegeben sind: $\varphi =$

einer gegebenen Konstanten, so ist dieser Satz selbstverständlich umkehrbar, d. h. jedesmal wenn die variierte Bewegung in ihrem Verlaufe den Bedingungen genügt, muß ihnen auch jeder Übergang von einem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung genügen. Sind dagegen die Bedingungen bloß in der Form 47) gegeben, so könnte im Verlaufe der variierten Bewegung φ gleich einer Konstanten sein, deren Wert von dem für die unvariierte Bewegung geltenden etwas verschieden wäre. Dann könnte der Verlauf der unvariierten Bewegung den Bedingungen genügen und auch der der variierten für sich, nicht aber der Übergang von der einen zur anderen. Doch ist diese Möglichkeit sofort wieder ausgeschlossen, wenn die Koordinaten für $t = t_0$ und $t = t_1$ nicht variieren.

Die Bedeutung, welche den Variationsbedingungen im zweiten Falle, wenn das System inholonom ist, zukommt, wollen wir im nächsten Paragraphen erörtern. Hier wollen wir zunächst zeigen, wie die Gleichung 42) zu behandeln ist, wenn beliebige Bedingungsgleichungen zwischen den p gegeben sind, deren Anzahl σ sei. Wir setzen voraus, daß jede derselben in die Form 44) gebracht werden kann, welcher zwischen den Koordinatenvariationen die Bedingung 45) entspricht. Wir multiplizieren die Gleichung 45) mit einem zu bestimmenden Faktor λ_l, welcher Funktion der Koordinaten und der Zeit sein kann, summieren dann bezüglich l von 1 bis σ, multiplizieren ferner mit dt, integrieren von $t = t_0$ bis $t = t_1$ und addieren endlich das Resultat zur linken Seite der Gleichung 42).

Die λ können dann so bestimmt werden, daß in der auf diese Art erhaltenen Gleichung die Koeffizienten von σ der δp verschwinden. Die übrigen δp sind aber unabhängig und man beweist durch dieselbe Schlußweise, durch welche wir die Gleichungen 43) erhielten, daß auch ihre Koeffizienten verschwinden müssen. Die Nullsetzung aller dieser Koeffizienten liefert die Gleichungen:

49) $$\frac{d q_h}{d t} - \frac{\partial T}{\partial p_h} = P_h + \sum_1^{\sigma} l\, \lambda_l \pi_h^{(l)}, \quad h = 1, 2, 3 \ldots s.$$

Dies sind die allgemeinen von **Lagrange** zuerst angegebenen Bewegungsgleichungen in generalisierten Koordinaten. Falls eine Kraftfunktion existiert, nehmen sie die Form an

$$\text{50)} \qquad \frac{d\, q_h}{d\, t} = \frac{\partial\,(T-V)}{\partial\, p_h} + \sum_1^\sigma{}^l \lambda_l\, \pi_h^{(l)},$$

während man in diesem Falle auch schreiben kann

$$\text{51)} \qquad q_h = \frac{\partial\,(T-V)}{\partial\, p'_h},$$

wenn V die Geschwindigkeiten nicht enthält.

§ 8. Bedeutung der Variationsbedingungen für nicht holonome Systeme.

Wir gehen nun zur Erläuterung der Bedeutung über, welche die Variationsbedingungen für nicht holonome Systeme haben. In diesem Falle ist es durchaus nicht ein- und dasselbe, ob man sagt, der Verlauf der variierten oder der Übergang von der unvariierten zur variierten Bewegung solle die Bedingungsgleichungen erfüllen. Da nämlich dann gewisse Bedingungsgleichungen nicht integrabel sind, so brauchen sie, wenn sie von einem bestimmten Übergange aus einem Anfangszustande Z_1 in einen Zustand Z_2, und wiederum von einem Übergange aus dem Zustande Z_2 in einen Zustand Z_3 gelten, nicht auch von jedem anderen Übergange aus dem Zustande Z_1 in den Zustand Z_3 zu gelten. Daraus also, daß diese Bedingungsgleichungen für jeden Übergang aus einem Zustande der unvariierten Bewegung in den korrespondierenden Zustand der variierten Bewegung gelten (Übergang A), folgt dann nicht, daß sie auch für den Übergang von jedem zum nächsten Zustande der variierten Bewegung gelten (Übergang B).

Beim Übergange B gehen die Werte, welche die Koordinaten bei der variierten Bewegung zur Zeit t haben (h-te Koordinate $= p_h + \delta p_h$), in diejenigen über, welche sie für die variierte Bewegung zur Zeit $t + dt$ haben (h-te

Koordinate $= p_h + \delta p_h + d p_h + d\,\delta p_h$). Wir können daher die Form, welche die Gleichung 44) für diesen Übergang annimmt, symbolisch so schreiben:

$$d t\, \pi^l (p_h + \delta p_h, t) + \sum_{h=1}^{s} (d p_h + d\,\delta p_h) \,.\, \pi_h^l (p_h + \delta p_h, t) = 0 ,$$

was durch Subtraktion der Gleichung 44) liefert:

$$52)\quad \begin{cases} \delta \left[\pi^l\, d t + \sum_{h=1}^{s} \pi_h^{(l)} (p_h, t)\, d p_h \right] = \sum_{k=1}^{s} \dfrac{\partial \pi^{(l)}}{\partial p_k}\, \delta p_k\, d t + \\ \qquad + \sum_{h=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} \dfrac{\partial \pi_h^{(l)}}{\partial p_k}\, d p_h\, \delta p_k + \sum_{k=1}^{s} \pi_k^{(l)}\, d\, \delta p_k = 0 . \end{cases}$$

Gleichung 45) drückt aus, daß die entsprechende Bedingung für den Übergang A zur Zeit t gilt, d. h. für den Übergang vom ursprünglichen Zustande zur Zeit t zum variierten zur selben Zeit. Die Gleichung, welche ausdrückt, daß dieselbe Bedingung auch zur Zeit $t + d t$ für Übergang A erfüllt ist, d. h. für den Übergang aus dem der Zeit $t + d t$ entsprechenden ursprünglichen Zustande zu dem derselben Zeit entsprechenden variierten Zustande, finden wir, indem wir Gleichung 45), in welcher wir den Summationsbuchstaben auch mit k bezeichnen können, nach t differenzieren, wodurch folgt:

$$53)\quad \begin{cases} d \sum_{k=1}^{s} \pi_k^{(l)}\, \delta p_k = \sum_{k=1}^{s} \dfrac{\partial \pi_k^{(l)}}{\partial t}\, d t\, \delta p_k + \\ \qquad + \sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{s} \dfrac{\partial \pi_k^{(l)}}{\partial p_h}\, \delta p_k\, d p_h + \sum_{k=1}^{s} \pi_k^{(l)}\, d\, \delta p_k = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung 53) ist sicher mit 52) identisch, wenn allgemein

$$\frac{\partial \pi^{(l)}}{\partial p_k} = \frac{\partial \pi_k^l}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \pi_h^{(l)}}{\partial p_k} = \frac{\partial \pi_k^{(l)}}{\partial p_h}$$

ist, d. h. wenn die Bedingung holonom ist. Andernfalls sind beide Gleichungen im allgemeinen nicht identisch. Wenn also auch der Übergang von jedem Zustande der unvariierten zum entsprechenden Zustande der variierten Bewegung den Bedingungsgleichungen entsprechend geschieht, so folgt daraus noch nicht, daß auch die Reihenfolge aller variierten Zustände eine den Bewegungsgleichungen entsprechende Bewegung liefert.

Besonders auffallend tritt dies hervor, wenn man von dem variierten Zustande wieder zu einem neuen variierten Zustande etc. übergeht, bis man schließlich zu einer variierten Bewegung gelangt, welche um endliches von der ursprünglichen Bewegung, welche wir die unvariierte nannten, verschieden ist. Wenn dann auch jeder Übergang von jedem Zustande irgend einer der variierten Bewegungen zum korrespondierenden Zustande der nächstfolgenden variierten Bewegung den Bedingungsgleichungen gemäß erfolgt, so kann doch die Reihenfolge der Zustände, zu welcher man ganz zuletzt gelangt ist, eine Bewegung bilden, welche die Bewegungsgleichungen nicht mehr im entferntesten erfüllt.

Wenn z. B. das System eine Kugel ist, so ist die Bedingung, daß sie auf einer festen Fläche rollen muß, eine nicht holonome, wird also durch eine nicht integrable Gleichung von der Form 44), die aber weder die Zeit noch deren Differential enthält, dargestellt. Die Bedingung für die Richtigkeit der Gleichung 42) ist dann, daß der Übergang von jedem Zustande der unvariierten zu dem korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung durch Rollen auf dieser Fläche geschieht. Hieraus und aus dem Umstande, daß die unvariierte Bewegung ein Rollen auf derselben Fläche ist, folgt aber noch keineswegs, daß auch die durch die Reihenfolge der variierten Lagen dargestellte Bewegung wieder ein Rollen auf dieser Fläche ist.[1])

Bei holonomen Systemen können wir die Bedingungen, denen die variierte Bewegung genügen muß, in einem Satze aussprechen, in dem gar nicht davon die Rede ist, welchem Zustande der unvariierten Bewegung man jeden Zustand der variierten Bewegung korrespondieren läßt, in-

[1]) Vergl. Hölder, Gött. Nachr. 1896, Heft 2, S. 122.

dem wir bloß sagen, die variierte Bewegung muß als solche ganz unabhängig von der unvariierten den Bedingungsgleichungen genügen. Die Bedingungen dagegen, denen bei nicht holonomen Systemen die variierte Bewegung genügen muß, scheint ihrer Formulierung nach davon abhängig zu sein, welchen Zustand der variierten Bewegung man bei Bildung der δp mit einem jeden Zustande der unvariierten Bewegung vergleicht (ihm korrespondieren läßt), da wir sagten, die variierte Bewegung muß so geschehen, daß der Übergang von jedem Zustande der unvariierten Bewegung zu dem korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung den Bedingungsgleichungen genügt. Wir wollen dies kurz die Hölderschen Art der Variation nennen.

Es kann also die Frage aufgeworfen werden, ob eine bestimmte, dieser Bedingung genügende variierte Bewegung nicht aufhört, ihr zu genügen, wenn man nichts anderes verändert, als daß man mit jedem Zustande der unvariierten Bewegung nicht denselben Zustand der variierten Bewegung wie früher, sondern einen zu einer unendlich wenig verschiedenen Zeit gehörigen Zustand der variierten Bewegung korrespondieren läßt. Es muß dann, wenn man von der unvariierten Bewegung nach der Hölderschen Variationsart zu einer ersten variierten, von dieser wieder nach der Hölderschen Variationsart zu einer zweiten, dann zu einer dritten u. s. f. übergeht, bis man zu einer um endliches verschiedenen Bewegungsart gelangt, diese, die zwar den Bedingungen der Aufgabe im allgemeinen gar nicht mehr genügen wird, doch eine gewisse charakteristische Eigenschaft haben, welche zum Ausdruck bringt, daß sie durch lauter Variationen nach der Hölderschen Art aus einer den Bedingungen der Aufgabe genügenden Bewegung entstanden ist.

Daß in der Tat das charakteristische Merkmal der Hölderschen Variationsart nicht gestört wird, wenn man unter Beibehaltung derselben variierten Bewegung bloß jeden Zustand derselben einem etwas anderen Zustande der unvariierten Bewegung korrespondieren läßt, sieht man in der folgenden Weise: Wenn früher der Zustand B

der variierten Bewegung dem zur Zeit t gehörigen Zustande A der unvariierten Bewegung, jetzt dem zur Zeit $t + \delta t$ gehörigen Zustande A_1 der unvariierten Bewegung korrespondiert, so möge δp die frühere, $\delta_1 p$ die jetzige Variation irgend einer Koordinate p, dagegen dp der Zuwachs sein, welchen diese Koordinate bei der unvariierten Bewegung beim Übergang vom Zustande A zum Zustande A_1, also bei der natürlichen Bewegung während der Zeit δt erfährt, so daß $dp = p' \delta t$ ist. Es ist dann $\delta_1 p = \delta p - dp$, und da die Bedingungsgleichungen die dp linear enthalten, so müssen ihnen auch die $\delta_1 p$ genügen, wenn ihnen die δp genügen. Denn die dp genügen ihnen, weil sie einer natürlichen, also einer jedenfalls möglichen Bewegung entsprechen.

§ 9. Zweite Form der Lagrangeschen Gleichungen.

Wir können die Gleichung 49) in eine andere Form bringen, wenn wir statt der verallgemeinerten Geschwindigkeiten p' die Momente q einführen, wobei wir uns aber auf den Fall beschränken wollen, daß die Funktionen F der Gleichungen 22) die Zeit nicht explizit enthalten, daß also die mit β und γ bezeichneten Koeffizienten im Ausdruck für T verschwinden (daß die verallgemeinerten Koordinaten skleronom sind). Die Relationen 36), welche uns die q als Funktionen der p' ausdrücken, können, wenn man die Koeffizienten a als gegeben betrachtet, auch als s lineare Gleichungen aufgefaßt werden, aus denen umgekehrt die p' als lineare Funktionen der q bestimmt werden können. Die betreffenden Gleichungen lauten dann so:

54) $$p'_h = \sum_1^s {}_k\, b_{hk} q_k.$$

Die Koeffizienten a sind Funktionen der p, welche wir vermöge der Gleichungen 14), 22), 33) und 35) leicht berechnen können, wenn die Massen der materiellen Punkte und die Funktionen F gegeben sind. Daher sind auch die b Funktionen der p, die sich in bekannter Weise als Quotienten zweier die a enthaltender Determinanten darstellen. Die Determinante im Nenner ist für alle p' gleich, die im Zähler ist wegen $a_{hk} = a_{kh}$ ebenfalls für b_{hk} dieselbe wie für b_{kh}, woraus folgt:

55) $$b_{hk} = b_{kh}.$$

Die Auflösung der linearen Gleichungen 36) nach den q wäre nur dann unmöglich, wenn die Determinante aller a

56) $$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{12}, & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1s}, & a_{2s}, & \dots & a_{ss} \end{vmatrix}$$

verschwinden würde. Dies kann aber niemals für reelle Werte eintreten. T ist nämlich gleich $\frac{1}{2}\sum_1^{3n}{}^k m_k x_k'^2$, also eine Summe von Quadraten mit positiven Koeffizienten. Es kann also nur verschwinden, wenn alle x' und daher auch alle p' verschwinden. Das Verschwinden der Determinante 56) ist aber die Bedingung, daß die linearen Gleichungen für die p', welche man erhält, wenn man alle q gleich Null setzt, eine andere Auflösung als das Verschwinden sämtlicher p' zulassen. Würde also diese Determinante 56) verschwinden, so würden aus den Gleichungen 36) immer gewisse Werte der p' bestimmbar sein, welche nicht alle verschwinden, für welche aber alle q und daher auch T verschwinden würden, da ja, wie man sofort durch Einsetzen der Werte 36) für die q sieht,

57) $$T = \frac{1}{2}\sum_1^{s}{}^k p'_k q_k$$

ist. Die Gleichung 57) ergibt sich auch in folgender Weise. Wenn f eine homogene Funktion n-ten Grades von $y_1, y_2 \dots y_m$ ist, so hat man bekanntlich:

$$n f = \sum_1^{m}{}^k y_k \frac{\partial f}{\partial y_k}.$$

Setzt man $f = T$, $y_k = p'_k$, so folgt hieraus sofort die Gleichung 57), da T, wenn die Funktionen F die Zeit nicht explizit enthalten, eine homogene quadratische Funktion der p' und $\partial T / \partial p'_k = q_k$ ist. In den in 43) und 49) vorkommenden Größen $\partial T / \partial p_h$ ist T durch die Gleichung 35) als Funktion von den p und p' ausgedrückt zu denken, d. h. es sind bei der Differentiation alle übrigen p und alle p' als konstant zu betrachten. Wir können aber in T die p' vermöge der Gleichungen 54) als Funktionen der p und q ausdrücken. Dann erhalten wir T als Funktion der p und q ausgedrückt. Weil es homogene quadratische Funktion der p' war, diese aber wieder homogene lineare Funktionen der q sind, so wird T auch als homogene quadratische Funktion der q erscheinen. Es sei etwa:

$$58)\quad T = \frac{1}{2}\sum_1^s{}_h \sum_1^s{}_k c_{hk} q_h q_k = \frac{1}{2} c_{11} q_1^2 + \frac{1}{2} c_{22} q_2^2 + \dots + c_{12} q_1 q_2 + \dots$$

Die Koeffizienten c sind natürlich Funktionen der p und es ist identisch $c_{hk} = c_{kh}$.

Den aus diesem Ausdrucke gebildeten partiellen Differentialquotienten von T nach p_h, wobei also nebst der anderen p nicht die p', sondern die q als konstant zu betrachten sind, wollen wir mit

$$\frac{\partial_q T}{\partial p_h}$$

bezeichnen. Wir werden ihn erhalten, wenn wir zuerst T als Funktion von p und p' ausdrücken und darin die p' vermöge der Gleichungen 54) als Funktionen der p und q betrachten. Es ist also:

$$59)\quad \frac{\partial_q T}{\partial p_h} = \frac{\partial_{p'} T}{\partial p_h} + \sum_1^s{}_k \frac{\partial T}{\partial p'_k}\,\frac{\partial p'_k}{\partial p_h} = \frac{\partial_{p'} T}{\partial p_h} + \sum_1^s{}_k q_k \frac{\partial p'_k}{\partial p_h}$$

$\partial_{p'} T/\partial p_h$ ist die im ursprünglichen Sinne gebildete partielle Ableitung, wo T als Funktion der p und p' zu denken und unter Konstanthaltung der p' nur insofern nach p_h zu differenzieren ist, als diese Größe in den Koeffizienten a der Formel 35) vorkommt. $\partial p'_k/\partial p_h$ ist aber aus Formel 54) unter Konstanthaltung der q und alleinigen Differentiation der Koeffizienten b nach p_h zu bilden.

Bei Bildung von $\partial T/\partial p'_k$ ist es selbstverständlich, daß die übrigen p' und die p als konstant anzusehen sind, weshalb wir dem ∂ nicht den Index p' anhängten. Wie wir den Ausdruck 59) bildeten, so können wir auch den partiellen

Differentialquotienten von T nach q_h bilden, indem wir zuerst T als Funktion von p und p' ausdrücken und dann die p' durch die Gleichungen 54) durch p und q ausdrücken, wo dann bei Bildung der $\partial p' / \partial q$ die anderen q und die p als konstant zu betrachten sind. Es wird also:

60)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_h}{}^{1)} &= \sum_1^s {}_k \frac{\partial T}{\partial p'_k} \frac{\partial p'_k}{\partial q_h} = \sum_1^s {}_k q_k \frac{\partial p'_k}{\partial q_h} = \\ &= \sum_1^s {}_k q_k b_{kh} = p'_h = \frac{d p_h}{d t}. \end{aligned}\right.$$

Andererseits folgt aus Gleichung 58):

61)
$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_1^s {}_k c_{hk} q_k.$$

Da dies nach Gleichung 60) gleich dem durch Gleichung 54) gegebenen Werte von p'_h sein muß, und die Geschwindigkeiten und daher auch die q unabhängig von den Koordinaten alle möglichen Werte haben können, so müssen in 54) und 61) alle Koeffizienten der q gleich sein; man hat also allgemein:

62)
$$b_{hk} = c_{hk}.$$

Die partiellen Differentialquotienten der p' können wir folgendermaßen eliminieren. Wir denken uns in Gleichung 57) die p'_k vermöge der Gleichungen 54) als Funktionen der p und q ausgedrückt und dann nach p_h differenziert, indem wir die übrigen p und alle q konstant betrachten. Der Differentialquotient des T, den wir so links erhalten, ist genau das, was wir schon in 59) mit $\partial_q T / \partial p_h$ bezeichneten; ebenso ist rechts der Differentialquotient des p'_k das, was wir in der rechten Seite von 59) mit $\partial p'_k / \partial p_h$ bezeichneten. Wir erhalten also, indem wir 57) in der besprochenen Weise nach p_h partiell differenzieren

---

[1]) Wir unterlassen es wieder, in diesem Ausdrucke dem ∂ im Zähler den Index q anzuhängen, da es, wenn wir nach einem der q partiell differenzieren, selbstverständlich ist, daß wir alle übrigen q und alle p als konstant anzusehen haben.

$$2\frac{\partial_q T}{\partial p_h} = \sum_1^s{}^k q_k \frac{\partial p'_k}{\partial p_h},$$

was mit 59) zusammengehalten liefert:

$$\text{63)} \qquad \frac{\partial_{p'} T}{\partial p_h} = - \frac{\partial_q T}{\partial p_h}.$$

Wenn wir 57) genau in demselben Sinne, in dem wir es soeben nach p_h differenzierten, nun nach q_h differenzieren, so müssen wir alle übrigen q_h und alle p_h konstant lassen und die p' durch die p_h und q_h ausgedrückt denken. Die Summe rechts in 57) enthält offenbar das Glied $q_h p'_h$, welches nach q_h differenziert liefert

$$p'_h + q_h \frac{\partial p'_h}{\partial q_h},$$

während in allen anderen Gliedern dieser Summe das betreffende q als konstant zu betrachten ist. Mit Rücksicht hierauf erhält man aus 57)

$$2\frac{\partial T}{\partial q_h} = p'_h + \sum_1^s{}^k q_k \frac{\partial p'_k}{\partial q_h} = 2p'_h,$$

was mit Gleichung 60) übereinstimmt.

Will man in der von uns gewählten Bezeichnungsweise ausdrücken, daß in den Gleichungen 43), 49) und 50) bei Bildung der partiellen Differentialquotienten die p und p' als independent zu betrachten sind, so müßte man diese Gleichungen so schreiben:

$$\text{64)} \qquad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial_{p'} T}{\partial p_h} + P_h$$

und

$$\text{65)} \qquad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial_{p'} T}{\partial p_h} + P_h + \sum_1^\sigma{}^l \lambda_l \pi_{(h)}^{(l)}.$$

Würde man dagegen p und q bei Bildung der partiellen Differentialquotienten als independent betrachten, so würde hieraus nach 63) folgen:

$$\text{66)} \qquad \frac{dq_h}{dt} = + P_h - \frac{\partial_q T}{\partial p_h}$$

und

$$67)\qquad \frac{dq_h}{dt} = P_h - \frac{\partial_q T}{\partial p_h} + \sum_1^\sigma {}_l\, \lambda_l\, \pi_h^{(l)}.$$

Natürlich wird man die Indizes des ∂ weglassen, wenn man ein für allemal ausgemacht hat, welche partielle Differentialquotienten man meint.

Wenn die Kräfte eine Kraftfunktion haben, die nur die Koordinaten, eventuell noch die Zeit enthält, so verwandelt sich die Gleichung 67) in:

$$68)\qquad \frac{dq_h}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial p_h} - \frac{\partial_q T}{\partial p_h} + \sum_1^\sigma {}_l\, \lambda_l\, \pi_h^{l}.$$

Da aber V die q nicht enthält, so kann man die Gleichung 68) auch so schreiben:

$$69)\qquad \frac{dq_h}{dt} + \frac{\partial_q (T + V)}{\partial p_h} = \sum_1^\sigma {}_l\, \lambda_l\, \pi_h^{l}.$$

Setzt man nun

$$70)\qquad E = T + V,$$

so ist E die Größe, welche, wenn V die Zeit nicht enthält, während der ganzen Bewegung konstant bleiben muß. Man kann dann die Bewegungsgleichungen in der symmetrischen Form

$$71)\qquad \frac{dp_h}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_h}, \quad \frac{dq_h}{dt} = -\frac{\partial_q E}{\partial p_h} + \sum_1^\sigma {}_l\, \lambda_l\, \pi_h^{(l)}$$

schreiben, welche man die Hamiltonsche kanonische Form derselben nennt. Wenn nebst den Bedingungsgleichungen die einzige Größe E als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten, Momente und eventuell der Zeit gegeben ist, können die Bewegungsgleichungen ohne weiteres hingeschrieben werden. Falls keine Bedingungsgleichungen zwischen den p existieren, nehmen die Gleichungen 71) die symmetrische Form an:

$$72)\qquad \frac{dp_h}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_h}, \qquad \frac{dq_h}{dt} = -\frac{\partial_q E}{\partial p_h}.$$

Setzt man analog

73) $$T - V = H,$$

so erhalten die Gleichungen 64) und 65) eine ähnliche Form, nämlich:

74) $$\frac{d q_h}{d t} = \frac{\partial_{p'} H}{\partial p_h} + \sum_1^{\sigma} {}^l \lambda_l \pi_h^{(l)}, \qquad q_h = \frac{\partial H}{\partial p'_h},$$

wobei natürlich wieder das Glied $\sum_1^{\sigma} {}^l \lambda_l \pi_h^{(l)}$ entfällt, wenn zwischen den p keine Bedingungen bestehen.

§ 10. Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen ohne Hilfe der Variationsrechnung.

Wir wollen noch zeigen, wie man die Lagrangeschen Gleichungen ohne den Umweg über die Betrachtung der Variationen gewinnen kann, wobei aber natürlich die generalisierten Koordinaten jetzt wieder skleronom oder rheonom sein können. Die allgemeinen Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten können wir nach Gleichung 129) des I. Teiles, § 43 in der Form schreiben:

75) $$m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2} = X_k + \sum_1^{\tau} {}^l \lambda_l \xi_k^{(l)}.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\frac{\partial x_k}{\partial p_h}$, bilden sie für alle Werte des k und addieren alle so erhaltenen Gleichungen. Setzen wir wie früher

$$P_h = \sum_1^{3n} {}^k X_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h},$$

so erhalten wir in dieser Weise mit Rücksicht auf die Gleichungen 44a)

76) $$\sum_1^{3n} {}^k m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2} \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = P_h + \sum_1^{\sigma} {}^l \lambda_l \pi_h^{(l)},$$

wobei der Summenausdruck rechts verschwindet, wenn die generalisierten Koordinaten die betreffende Bedingung identisch erfüllen. Nun ist identisch:

$$77)\qquad \frac{d^2 x_k}{dt^2}\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{d}{dt}\left[x'_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right] - x'_k \frac{d}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial p_h}.$$

Im zweiten Faktor des letzten Gliedes kann man die Ordnung der Differentiation vertauschen. Denn es ist

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \sum_1^s{}_l \frac{\partial^2 x_k}{\partial p_h \partial p_l} p'_l + \frac{\partial^2 x_k}{\partial p_h \partial t}$$

$$x'_k = \sum_1^s{}_l \frac{\partial x_k}{\partial p_l} p'_l + \frac{\partial x_k}{\partial t},$$

daher

$$\frac{\partial x'_k}{\partial p_h} = \sum_1^s{}_l \frac{\partial^2 x_k}{\partial p_h \partial p_l} p'_l + \frac{\partial^2 x_k}{\partial p_h \partial t}$$

und

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{\partial x'_k}{\partial p_l},$$

wo bei der letzten partiellen Differentiation in x'_k alle p' und alle anderen p als konstant, also die Variablen p und p' als independent zu betrachten sind. Bei gleicher Auffassung der partiellen Differentialquotienten hatten wir nach 34):

$$\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{\partial x'_k}{\partial p'_h}.$$

Durch Substitution dieser Werte geht 77) über in:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2}\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{d}{dt}\left(x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p'_h}\right) - x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p_h}.$$

Multipliziert man mit m_k und summiert über alle Werte des k, so erhält man, da

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^{3n}{}_k m_k x_k'^2 = T,$$

also

$$\sum_1^{3n} m_k x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p'_h} = \frac{\partial T}{\partial p'_h} = q_h$$

ist,

$$\sum_1^{3n} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{d q_h}{dt} - \frac{\partial T}{\partial p_h}.$$

Durch Substitution dieses Wertes in die Gleichung 76) folgt:

$$\frac{d q_h}{d t} = \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h + \sum_1^{\tau} \lambda_l \pi_h^{(l)}.$$

Wir sind also ohne Variationsbetrachtungen zur Gleichung 49) gelangt, welche die allgemeinste Form der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen darstellt. Für jede Bedingungsgleichung, welche von den generalisierten Koordinaten identisch erfüllt wird, verschwinden sämtliche π. Wenn also alle Bedingungsgleichungen von den generalisierten Koordinaten identisch erfüllt werden, also zwischen den letzteren keine Bedingungsgleichungen mehr bestehen, so verschwinden überhaupt alle π, und es folgt

$$\frac{d q_h}{d t} = \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h,$$

was mit Gleichung 43) identisch ist.

§ 11. Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten.

Wir wollen zunächst die Anwendung der gefundenen Gleichungen an einigen möglichst einfach gewählten Beispielen zeigen.

Ein einziger materieller Punkt bewege sich in einer Ebene, ohne sonst einer Bedingung unterworfen zu sein. x, y seien seine rechtwinkligen, r, ϑ seine Polarkoordinaten. Letztere wählen wir als generalisierte Koordinaten. Wir setzen also:

$$p_1 = r, \quad p_2 = \vartheta, \quad p'_1 = r' = \frac{d r}{d t}, \quad p'_2 = \vartheta' = \frac{d \vartheta}{d t}.$$

Da $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ ist, so kann man durch direkte Differentiation nach der Zeit die ersten und zweiten Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit finden:

$$\frac{d x}{d t} = \frac{d r}{d t} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \frac{d \vartheta}{d t} \quad \text{etc.}$$

Die Substitution dieser Werte in die die rechtwinkligen Koordinaten enthaltenden Bewegungsgleichungen (§ 9 Gleichung 13) des I. Teiles) liefert uns ohne weiteres die Form, welche die Bewegungsgleichungen nach Einführung der Polarkoordinaten annehmen. Wir wollen jedoch hierzu mittels der Lagrangeschen Gleichungen gelangen, die uns in diesem Falle keinen anderen Nutzen gewähren, als daß sie die etwas weitläufige Rechnung abkürzen.

Wir suchen zuerst nach 32) die generalisierten Kräfte. r wachse bei konstantem ϑ um δr, d. h. der Punkt verschiebe sich um

78) $$AB = \delta r$$

in der Richtung r. Ist R die in dieser Richtung darauf wirkende äußere Kraft, so ist $-\delta_r'' V = R\,\delta r$ die Arbeit, daher

$$P_1 = \frac{-\delta_r'' V}{\delta r} = R$$

die nach r wirkende generalisierte Kraft. Wächst dagegen ϑ bei konstantem r um $\delta\vartheta$, so erfährt der Punkt die Verschiebung

79) $$AC = r\,\delta\,\vartheta$$

senkrecht zu r in der Richtung der wachsenden ϑ. Ist Θ die Komponente der darauf wirkenden äußeren Kraft in dieser Richtung, so ist $-\delta_\vartheta' V = \Theta \,.\, r\,\delta\,\vartheta$ die Arbeit; daher

$$P_2 = r\,\Theta$$

die nach ϑ wirkende generalisierte Kraft, welche keine Kraft im gewöhnlichen Sinne, sondern ein Moment ist, also die Dimension Kraft $\times$ Länge hat.

Während dt wächst gleichzeitig r um dr und ϑ um $d\vartheta$. Das Bewegliche legt also nach 78) und 79) in der Richtung r den Weg $AB = dr$, senkrecht darauf den Weg $AC = r\,d\vartheta$, im ganzen den Weg $AD = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}$ zurück. Seine Geschwindigkeit ist

$$\frac{AD}{dt} = \sqrt{r'^2 + r^2\vartheta'^2},$$

seine lebendige Kraft

80) $$T = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\vartheta'^2),$$

welche somit als Funktion der p und p' ausgedrückt ist. Man erhält hieraus

81) $$q_1 = \frac{\partial T}{\partial r'} = m\,r', \qquad q_2 = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = m\,r^2\,\vartheta',$$

82) $$\frac{\partial T}{\partial p_1} = \frac{\partial T}{\partial r} = m r \vartheta'^2, \quad \frac{\partial T}{\partial p_2} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0.$$

Daher liefern die Gleichungen 43):

$$\frac{d(m r')}{d t} - m r \vartheta'^2 = R, \quad \frac{d(m r^2 \vartheta')}{d t} = r\Theta$$

oder

$$m \frac{d^2 r}{d t^2} - m r \left(\frac{d\vartheta}{d t}\right)^2 = R, \quad m r \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} + 2m \frac{d r}{d t} \frac{d \vartheta}{d t} = \Theta.$$

Wollte man den Gleichungen die Form 66) geben, so müßte man T **durch** die p **und** q **ausdrücken.**

Aus 80) und 81) folgt:

83) $$T = \frac{q_1^2}{2m} + \frac{q_2^2}{2 m r^2},$$

und daher:

$$\frac{\partial_q T}{\partial r} = -\frac{q_2}{m r^3}, \quad \frac{\partial_q T}{\partial \vartheta} = 0.$$

Es sind also die Gleichungen 68) erfüllt. **Durch Substitution des Wertes von** q_2 **wird**

$$\frac{\partial_q T}{\partial r} = -\frac{\partial_{p'} T}{\partial r};$$

denn die partiellen Differentialquotienten in 81) sind diejenigen, die wir genauer mit $\partial_{p'} T / \partial r$ und $\partial_{p'} T / \partial \vartheta$ bezeichnet haben. Auch die Gleichungen 60) sind erfüllt; denn es folgt aus 83):

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{q_1}{m} = r', \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{q_2}{m r^2} = \vartheta'.$$

Die Gleichungen 66) aber nehmen die Form an

$$\frac{d q_1}{d t} = R - \frac{q_2}{m r^3}, \quad \frac{d q_2}{d t} = r\Theta,$$

deren Richtigkeit man leicht verifiziert, deren Nutzen man freilich in diesem einfachen Falle nicht einsieht.

Ebensowenig hat es in diesem einfachen Falle einen Zweck, die Gleichungen in die kanonische Form zu bringen, was wir aber doch bloß zur Erläuterung des Mechanismus der Methode ausführen wollen, der natürlich um so klarer wird, je einfacher das Beispiel ist. Seien X, Y die Komponenten der auf den materiellen Punkt in den Koordinatenrichtungen wirkenden äußeren Kraft und

$$X = -\frac{\partial V(x, y, t)}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V(x, y, t)}{\partial y},$$

dann ist:

$$P_1 = R = -\frac{\partial V(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, t)}{\partial r} = X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta$$

$$P_2 = r\Theta = -\frac{\partial V(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, t)}{\partial \vartheta} = -rX\sin\vartheta + rY\cos\vartheta.$$

Bezeichnen wir $V(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, t)$ kurz mit $V(r, \vartheta, t)$, so ist

$$E = T + V = \frac{m r'^2}{2} + \frac{m r^2 \vartheta'^2}{2} + V(r, \vartheta, t)$$

die Energie, welche für skleronome Systeme während der ganzen Bewegung konstant bleibt. Denn es ist dT gleich der von den äußeren Kräften der Masse zugeführten Arbeit

$$R\,dr + r\Theta\,d\vartheta = -dV + \frac{\partial V}{\partial t}dt.$$

Will man die kanonische Form herstellen, so hat man noch q_1 und q_2 für r' und ϑ' einzuführen, erhält also

$$E = \frac{q_1^2}{2m} + \frac{q_2^2}{2mr^2} + V(r, \vartheta, t),$$

und die kanonische Form der Gleichungen lautet, da p_1 mit r, p_2 mit ϑ identisch ist:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_1}, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_2}, \qquad \frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial r}, \qquad \frac{dq_2}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial \vartheta}.$$

Die Gleichungen 74) aber würden, wenn man $H = T - V$ setzt, lauten:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{d(mr')}{dt} = \frac{\partial H(r'\vartheta')}{\partial r}$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{d(mr\vartheta')}{dt} = \frac{\partial H(r'\vartheta')}{\partial \vartheta}$$

$$q_1 = mr' = \frac{\partial H}{\partial r'}, \qquad q_2 = mr\vartheta' = \frac{\partial H}{\partial \vartheta'}.$$

Natürlich würden alle diese Gleichungen auch für beliebig viele materielle Punkte gelten, die sich frei in der Ebene bewegen, wenn man Polarkoordinaten einführt. Nur würde dann V die Koordinaten aller Punkte enthalten.

Bei Transformation räumlicher rechtwinkliger Koordinaten x, y, z in räumliche Polarkoordinaten r, ϑ, φ will ich mich kürzer fassen. Sei

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad z = r\sin\vartheta\sin\varphi.$$

Wächst r bei konstantem ϑ und φ um δr, so verschiebt sich der Punkt um δr in einer Richtung, die wir die Richtung von r nennen. Wächst ϑ bei konstantem r und φ um $\delta\vartheta$, so verschiebt sich der Punkt um $r\,\delta\vartheta$ in einer Richtung, die wir kurz die von ϑ nennen. Wächst endlich φ bei konstantem r und ϑ um $\delta\varphi$, so verschiebt sich der Punkt um $r\sin\vartheta\,\delta\varphi$ in einer Richtung, die wir die von φ nennen. Die Komponenten der auf den Punkt wirkenden äußeren Kraft in diesen drei Richtungen seien R, Θ und Φ. Die drei Verschiebungsarbeiten sind $R\,\delta r$, $r\,\Theta\,\delta\vartheta$ und $r\sin\vartheta\,.\,\Phi\,\delta\varphi$, daher die drei generalisierten Kräfte:

$$P_1 = R. \quad P_2 = r\,\Theta, \quad P_3 = r\sin\vartheta\,.\,\Phi.$$

Die drei Komponenten des während dt zurückgelegten Weges in den drei eben besprochenen Richtungen sind dr, $r\,d\vartheta$, $r\sin\vartheta\,.\,d\varphi$. Daher ist die Geschwindigkeit

$$\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2},$$

und die lebendige Kraft

$$T = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\vartheta'^2 + r^2\varphi'^2\sin^2\vartheta),$$

woraus folgt

$$q_1 = \frac{\partial T}{\partial r'} = mr', \quad q_2 = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = mr^2\vartheta', \quad q_3 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = mr^2\sin^2\vartheta\,\varphi'.$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr(\vartheta'^2 + \varphi'^2\sin^2\vartheta), \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = mr^2\varphi'^2\sin\vartheta\cos\vartheta, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

und die Gleichungen 43) verwandeln sich nach einigen leichten Reduktionen in:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin^2\vartheta\right] = R$$

$$mr\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2m\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} - mr\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin\vartheta\cos\vartheta = \Theta$$

$$mr\sin\vartheta\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2m\sin\vartheta\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt} + 2mr\cos\vartheta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} = \Phi.$$

Alle weiteren Lagrange-Hamiltonschen Gleichungen liefern nichts mehr, was für dieses Problem von Wichtigkeit wäre, und zur bloßen Einübung mag das bei den ebenen Polarkoordinaten Erbrachte genügen.

§ 12. Nochmals Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

Um an einem Beispiele von der einfachsten Art zu zeigen, daß die Lagrangeschen Gleichungen auch ganz ohne Beziehung auf irgend ein rechtwinkliges Koordinatensystem angewendet werden können, betrachten wir nochmals den schon im I. Teile behandelten Fall der Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

Wenn sich irgend ein starrer Körper während einer unendlich kleinen Zeit dt um irgend eine Achse um einen unendlich kleinen Winkel dw dreht, so beschreibt ein materieller Punkt mit der Masse m_1 desselben, der sich in der Entfernung r_1 von der Drehungsachse befindet, dabei den unendlich kleinen Kreisbogen $ds = r_1\, dw$. Die Geschwindigkeit des materiellen Punktes ist daher:

$$c = \frac{ds}{dt} = r_1 \frac{dw}{dt}.$$

Die lebendige Kraft desselben ist:

$$\frac{m_1}{2} r_1^2 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2.$$

Ebenso ist die lebendige Kraft eines zweiten materiellen Punktes des Körpers von der Masse m_2, der sich in der Entfernung r_2 von der Drehungsachse befindet:

$$\frac{m_2}{2} r_2^2 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2.$$

Die gesamte lebendige Kraft des Körpers ist daher, wenn man dessen Trägheitsmoment $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$ bezüglich der Drehungsachse mit K bezeichnet:

84) $$T = \frac{K}{2} \left(\frac{dw}{dt}\right)^2.$$

Es soll nun auf das Massenteilchen m_1 irgend eine Kraft P_1 wirken. Wir legen durch m_1 eine Ebene E senkrecht zur Drehungsachse, welche diese im Punkte O durchschneide, und zerlegen die Kraft P_1 in zwei Komponenten, von denen die eine D_1 die Richtung der Drehungsachse hat, also senkrecht zur Ebene E steht, die andere Q_1 in diese Ebene fällt. n_1 sei die von O auf die Richtung von Q_1 gefällte Senkrechte. Da der Weg ds des Massenteilchens in die Ebene E fällt, so leistet die Kraft D_1 keine Arbeit. Die gesamte Arbeit der Kraft P_1 ist also gleich:

$$Q_1\, d s \cos(Q_1, ds) = Q_1\, r_1\, d w \cos(n_1, r_1) = Q_1\, n_1\, d w\,.$$

Nun ist aber das Produkt $Q_1 n_1$ nichts anderes als das, was wir im I. Teile, § 29 das Moment der Kraft P_1 bezüglich der Drehungsachse genannt haben. Wir wollen es mit M_1 bezeichnen. Sei P_2 irgend eine andere auf den festen Körper wirkende Kraft, und M_2 ihr Moment bezüglich der Drehungsachse, so findet man ebenso für die Arbeit dieser zweiten Kraft während der Drehung des Körpers um den unendlich kleinen Winkel dw den Wert $M_2\, dw$ etc.

Die gesamte Arbeit δA aller auf den Körper wirkenden Kräfte ist also, wenn wir jetzt den Drehungswinkel mit δw statt mit dw bezeichnen:

85) $$\delta A = \delta w \sum M = \delta w\, D_a\,;$$

dabei ist D_a die Summe der Drehungsmomente aller äußeren Kräfte um die Drehungsachse, wie im I. Teile § 55.

Es hat nun gar keine Schwierigkeit, die schon im I. Teile, § 55 auf anderem Wege gewonnene Bewegungsgleichung für einen festen Körper, der keiner anderen Bewegung als einer Drehung um eine feste Achse fähig ist, nochmals aus den Lagrangeschen Gleichungen zu gewinnen. Der dort mit w bezeichnete Winkel, um den sich der Körper von seiner Anfangslage bis zur Zeit t gedreht hat, ist die einzige Variable, durch welche die Position des Körpers bereits eindeutig bestimmt ist. Dies ist also die einzige generalisierte Koordinate p. Daher ist p' gleich der Winkelgeschwindigkeit $\omega = dw/dt$.

Die generalisierte Kraft findet man nach Gleichung 32), indem man den Ausdruck 85) durch $\delta p = \delta w$ dividiert. Es ist also $P = D_a$. Die lebendige Kraft ist nach Formel 84) $T = \frac{1}{2}\omega^2 K$. Daher ist:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial w} = 0\,, \quad q = \frac{\partial T}{\partial p'} = \frac{\partial T}{\partial \omega} = \omega K\,.$$

In der Gleichung 43) ist, weil nur eine generalisierte Koordinate p vorhanden ist, der Index wegzulassen. Man erhält also

$$\text{85a)} \qquad \frac{dq}{dt} - \frac{\partial T}{\partial p} = P,$$

und nach Substitution der gefundenen Werte

$$K \frac{d\omega}{dt} = D_a,$$

was mit dem im I. Teile, § 55 Gefundenen übereinstimmt.

Doch können wir nach dieser Methode natürlich nicht die Kräfte finden, welche auf die Lager wirken.

Andererseits können wir aber den Satz mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen noch bedeutend verallgemeinern. Wir denken uns beliebige feste Körper um beliebige feste Achsen drehbar, die durch Zahnräder oder Galsche Ketten (welche auch Masse haben können) so verbunden sind, daß ihre Winkelgeschwindigkeiten in konstantem Verhältnis stehen. Wir können dann den Weg p, welchen irgend ein Punkt einer Galschen Kette oder ein nicht in der Rotationsachse liegender Punkt eines rotierenden Körpers (der Antriebspunkt, driving-point) zurückgelegt hat, als verallgemeinerte Koordinate wählen.

p kehrt dann selbstverständlich nicht jedesmal zum Werte Null zurück, wenn der Antriebspunkt nach einem oder mehreren Umläufen wieder an die alte Stelle zurückgekehrt ist, sondern bloß wenn er ebenso viele Umläufe im einen wie im entgegengesetzten Sinne gemacht hat, so daß zwar durch den Wert von p die Position des Systems, nicht aber durch die letztere der Wert von p eindeutig bestimmt ist.

Die Geschwindigkeit jedes materiellen Punktes mit der Masse m_k des Systems ist dann gleich der Geschwindigkeit p' des Antriebspunktes, multipliziert mit einer Konstanten a_k, welche berechnet werden kann, wenn die Bedingungen des Systems gegeben sind. Die gesamte lebendige Kraft des Systems ist also:

$$\frac{p'^2}{2} \sum a_k^2 m_k .$$

Wenn der Weg p des Antriebspunktes um δp wächst, so ist die gesamte Arbeit aller auf das System wirkenden Kräfte gleich

$$\delta p \sum Q_k a_k,$$

wobei im letzten Ausdrucke a_k der Wert des Koeffizienten a für den Angriffspunkt irgend einer Kraft, Q_k deren Komponente in der Richtung des Weges $a_k \delta p$ des Angriffspunktes jener Kraft ist. Die generalisierte Kraft P, welche die generalisierte Koordinate p zu vergrößern sucht, ist also $\sum^k Q_k a_k$. Man nennt diese Größe auch das auf den Antriebspunkt reduzierte Moment aller Kräfte. Die **Lagrangesche** Gleichung 43) resp. 85a) verwandelt sich daher für unser System in:

$$\frac{d^2 p}{d t^2} \sum^k m_k a_k^2 = \sum^k Q_k a_k.$$

Da der Koeffizient von $d^2 p / d t^2$ konstant ist, so hat sie wieder genau die Form der Gleichung 13) des I. Teiles, welche für die Bewegung eines einzigen materiellen Punktes in einer geradlinigen oder krummlinigen Bahn gilt.

Diese Form tritt jedesmal auf, wenn die Position sämtliche Teile eines Systems durch eine einzige Variable p bestimmt ist und $\partial T / \partial p$ verschwindet, wenn also der Ausdruck für die lebendige Kraft bloß den Differentialquotienten der betreffenden Variablen nach der Zeit enthält, von dem Absolutwert dieser Koordinate selbst aber unabhängig ist. Dies trifft z. B. bei allen Systemen ein, welche **Helmholtz** Monozykel ohne langsam veränderliche Parameter nennt und von denen später ausführlich die Rede sein wird.

II. Allgemeinste Drehung eines starren Körpers.

§ 13. Generalisierte Koordinaten zur Bestimmung der Lage eines starren um einen festen Punkt drehbaren Körpers.

Wir gehen nun über zur Bewegung eines festen Körpers, in welchem ein einziger Punkt O fest gehalten wird, während er im übrigen vollkommen frei ist und auf den von außen beliebige Kräfte wirken. Es handelt sich zunächst darum, verallgemeinerte Koordinaten, d. h. Variable einzuführen, durch welche die Lage des festen Körpers im Raume zu einer beliebigen Zeit t eindeutig bestimmt wird.

Zu diesem Zwecke wählen wir den fest gehaltenen Punkt O zum Ursprunge zweier verschiedener rechtwinkliger Koordinatensysteme. Die Lage der Achsen OX, OY, OZ des einen (des fixen) Koordinatensystems soll im Raume unveränderlich sein. Die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ des anderen (des beweglichen) Koordinatensystems sollen ein für allemal fest mit dem Körper verbunden sein, so daß sie bei allen Bewegungen des festen Körpers ihre relative Lage gegen diesen nicht verändern, sondern sich einfach mit ihm mitbewegen.

Die relative Lage der beweglichen Koordinatenachsen gegen den Körper kann vorläufig noch ganz beliebig sein. Später werden wir sie so wählen, daß die beweglichen Koordinatenachsen Hauptträgheitsachsen des festen Körpers sind, was immer möglich ist, da nach I. Teil, § 59 in jedem festen Körper sich mindestens in einer Weise drei aufeinander senkrechte Gerade finden lassen, welche Hauptträgheitsachsen sind.

Beide Koordinatensysteme sollen kongruent (nicht Spiegelbilder) sein, also entweder beide französische oder beide englische (I. Teil, § 30). Im ersteren Falle nennen wir eine Drehung um eine gerichtete Drehungsachse positiv oder negativ, je nachdem sie für ein Auge, das von dorther blickt, wohin die Drehungsachse gerichtet ist, im Sinne des

Uhrzeigers oder im entgegengesetzten geschieht. Im letzteren Falle nehmen wir das Zeichen einer Drehung verkehrt. Immer ist also die Drehung, durch welche die positive Abszissenachse auf kürzestem Wege in die Lage der positiven y-Achse übergeht, eine positive Drehung um die positive z-Achse.

Zu irgend einer Zeit t ist nun die Lage des Körpers im Raume bestimmt durch die relative Lage des beweglichen Koordinatensystems gegen das fixe. Winkel, welche diese relative Lage eindeutig bestimmen, werden also auch die Lage des festen Körpers im Raume eindeutig bestimmen.

Um solche Winkel zu finden, verfahren wir folgendermaßen. Wir bezeichnen eine der beiden Hälften, in welche die Durchschnittslinie der fixen und beweglichen XY-Ebene durch den Punkt O geteilt wird, mit OR. Für den Zeitanfang kann man jede beliebige dieser beiden Hälften mit OR bezeichnen. Für alle anderen Zeiten ist dann dadurch bestimmt, welche der beiden Hälften für OR zu wählen ist, daß die Lage dieser Geraden OR sich kontinuierlich mit der Zeit verändern soll; es soll also die Gerade OR niemals während einer unendlich kleinen Zeit plötzlich in die entgegengesetzte Richtung überspringen.

Die relative Lage derartiger Geraden und Ebenen im Raume versinnlicht man sich am besten, wenn man sich wie in Fig. 1 die Punkte und größten Kreise perspektivisch zeichnet, in denen sie eine um den Punkt O mit dem Radius eins geschlagene Kugelfläche durchschneiden. Die Durchschnittspunkte sollen denselben Buchstaben erhalten, mit denen die Endpunkte der betreffenden Geraden bezeichnet wurden.

XRY und $\xi R \eta$ sind also die Quadranten der größten Kreise, in welchen der positive Quadrant der fixen resp. beweglichen XY-Ebene unsere Kugel durchschneidet. Der Winkel der Geraden OX und OR werde mit A bezeichnet und zwar beginne die Zählung dieses Winkels von OX und gehe in dem Sinne fort, in dem man auf kürzestem Wege von der positiven X-Achse zur positiven Y-Achse gelangt. Die ganze Richtungsänderung, welche man der Geraden OX

in diesem Sinne fort erteilen muß, bis sie in die Lage OR übergeht, sei eben der Winkel A. Bleibt daher OX fix und erhält A einen positiven Zuwachs, so dreht sich OR in positivem Sinne um OZ.

Der Winkel zwischen der fixen und beweglichen Z-Achse, und zwar von der ersteren im positiven Sinne um die Achse OR gegen die letzte gezählt, heiße C, so daß bei festem OZ und wachsendem C die Achse $O\zeta$ eine positive Drehung um OR macht. C ist daher auch der Winkel der beiden XY-Ebenen, und zwar derjenigen Halbebenen, in welche OR durch eine kleine positive Drehung um OZ resp. $O\zeta$ gelangt.

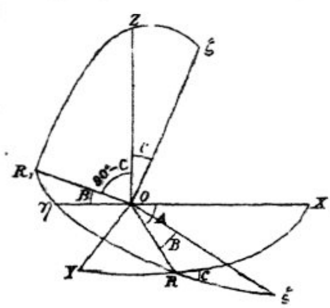

Fig. 1.

Da A deren Durchschnittslinie, C deren Neigung bestimmt, so bestimmen beide Winkel A und C die Lage der $\xi\eta$-Ebene relativ gegen das fixe Koordinatensystem, also auch im Raume eindeutig, wodurch auch die Lage von $O\zeta$ eindeutig bestimmt ist. Nach unserer Übereinkunft über die Art der Zählung des Winkels C entscheidet der Wert dieses Winkels auch, in welchem Sinne $O\zeta$ zu ziehen ist.

Die Lage der beweglichen Koordinatenachsen und damit die des festen Körpers ist also vollständig bestimmt, wenn noch der Winkel B der beweglichen Abszissenachse $O\xi$ mit der bereits bestimmten Geraden OR gegeben ist, und zwar soll dieser Winkel von OR gegen $O\xi$ in dem Sinne gezählt werden, in dem eine negative Drehung um $O\zeta$ erfolgt, so daß also bei fixem OR die bewegliche Abszissenachse und damit der Körper bei wachsendem B eine negative Drehung um $O\zeta$ macht.

Wir wollen die Winkel A, B, C so zählen, daß sie im Verlauf der Bewegung des Körpers niemals einen Sprung um den Betrag 2π machen. Sie können also auch größer als 2π, ja auch größer als beliebige Vielfache von 2π werden. Durch die Lage des festen Körpers sind daher die Werte dieser Winkel nicht eindeutig bestimmt; dagegen ist umgekehrt durch den Wert dieser drei Winkel die Lage des Körpers eindeutig bestimmt.

Diese drei Winkel können daher als die generalisierten Koordinaten unseres Problems gewählt werden, und wir wollen setzen:

$$p_1 = A, \quad p_2 = B, \quad p_3 = C.$$

Um die Lage dieser Winkel drastisch zu versinnlichen, können wir uns den Körper in einer sogenannten cardanischen Aufhängung denken. Von drei konzentrischen Ringen liege der erste fix in der $x\mathfrak{z}$-Ebene; der zweite sei im ersten um die fixe $\mathfrak{z}$-Achse drehbar und liege augenblicklich in der Ebene ZOR; der dritte sei im zweiten um die Achse OR drehbar und liege augenblicklich in der Ebene $RO\zeta$. Dieser trage erst den darin um die Achse $O\zeta$ drehbaren Körper, in dem eine gegebene, starr mit ihm verbundene zu $O\zeta$ senkrechte Gerade augenblicklich die Lage $O\xi$ habe.

§ 14. Generalisierte Kräfte bei der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

Ehe wir an die Aufstellung der Bewegungsgleichungen gehen, wollen wir folgende Aufgaben lösen: 1. Welche Lagenänderung erfährt der Körper, wenn B und C konstant bleiben und bloß A einen unendlich kleinen Zuwachs δA erfährt? Dabei bleibt selbstverständlich wie immer die Lage der fixen Koordinatenachsen im Raume unveränderlich. Da C und B konstant bleiben, so bleibt die Neigung der beweglichen $\mathfrak{z}$-Achse gegen die fixe konstant und auch der Winkelabstand der beweglichen Abszissenachse von OR. Es rückt nur OR um δA vor. Der ganze Körper dreht sich also, da er fix mit dem beweglichen Koordinatensysteme verbunden ist, um die Ache OZ im positiven Sinne um den Winkel δA.

Diese Drehung kann in zwei Komponenten zerlegt werden, eine um eine Achse, die mit der Richtung, welche augenblicklich der Achse $O\zeta$ zukommt, zusammenfällt, die andere um die Achse OR_1, welche die Durchschnittslinie der Ebene der beiden Z-Achsen mit der $\xi\eta$-Ebene ist. Dieselbe steht natürlich senkrecht auf $O\xi$ und OR, muß also mit $O\eta$ denselben Winkel B bilden, den $O\xi$ mit OR bildet, und wir wollen sie in dem Sinne ziehen, daß dieser Winkel von $O\eta$ gegen OR_1 gezählt gleich B, nicht um π davon verschieden ist.

$\xi R \eta R_1$ und $R_1 Z \zeta$ sind in der Fig. 1 die beiden größten Kreise, in denen einerseits die $\xi\eta$-Ebene, andererseits die Ebene der beiden Z-Achsen die Kugel schneiden.

Wir wollen noch den Kosinus irgend eines Winkels mit dem entsprechenden kleinen lateinischen, den Sinus mit dem entsprechenden kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen, also setzen:

86) $$\cos B = b, \quad \sin B = \beta, \quad \cos C = c, \quad \sin C = \gamma.$$

Dann ist $c\,\delta A$ die Komponente der Drehung δA um die Achse $O\zeta$, und $\gamma\,\delta A$ die Komponente um die Achse OR_1. Letztere kann wieder in zwei Komponenten um die Achsen $O\xi$ und $O\eta$ zerlegt werden. Da die Achse $O\xi$ mit OR_1 den Winkel $90^0 + B$ bildet, so sind die beiden letzteren Komponenten $-\beta\gamma\,\delta A$ und $b\gamma\,\delta A$. Die gesamte Lagenänderung, welche der feste Körper erfährt, wenn B und C konstant bleiben, dagegen A um δA wächst, kann also durch drei Drehungen $c\,\delta A$, $-\beta\gamma\,\delta A$ und $b\gamma\,\delta A$ um die drei beweglichen Koordinatenachsen hervorgerufen gedacht werden.

2. Nun soll A und C konstant bleiben, dagegen B um δB wachsen. Dann macht das bewegliche Koordinatensystem und daher auch der fix damit verbundene feste Körper die Drehung $-\delta B$ um die Achse $O\zeta$.

3. Wenn endlich A und B konstant bleiben und nur C um δC wächst, so dreht sich der Körper um den Winkel δC um die Achse OR, welche Drehung in die beiden Komponenten $b\,\delta C$ und $\beta\,\delta C$ um $O\xi$ und $O\eta$ zerlegt werden kann. Wenn wir im folgenden von „Drehungen um die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$“, oder von „Kräftemomenten oder Komponenten eines Vektors bezüglich derselben“ etc. sprechen, so ist das immer ein abgekürzter Ausdruck, statt zu sagen

„um oder bezüglich solcher Achsen, welche mit den Richtungen zusammenfallen, die augenblicklich die Koordinatenachsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ haben". Wir können das Resultat unserer Betrachtungen in der folgenden Tabelle darstellen, wo unter jeder Winkeländerung diejenigen Drehungen verzeichnet sind, welche zusammen jener Winkeländerung entsprechen.

87)

	δA	δB	δC
$O\xi$	$-\beta\gamma\,\delta A$	—	$b\,\delta C$
$O\eta$	$b\gamma\,\delta A$	—	$\beta\,\delta C$
$O\zeta$	$c\,\delta A$	$-\delta B$	—

Wir wollen nun zunächst die generalisierten Kräfte finden. Da die Winkel A, B, C die Rolle der generalisierten Koordinaten spielen, so finden wir die generalisierten Kräfte, indem wir gleichzeitig A, B, C um δA, δB und δC wachsen lassen und die bei der hierdurch erzeugten Lagenänderung, welche wir die Lagenänderung K nennen wollen, geleistete Arbeit $-\delta'' V$ auf die Form $P_1\,\delta A + P_2\,\delta B + P_3\,\delta C$ bringen. Die Koeffizienten der Variationen der generalisierten Koordinaten sind dann die generalisierten Kräfte. Da sich unendlich kleine Drehungen addieren, so setzt sich die Lagenänderung K aus der Summe aller im Schema 87) verzeichneten Drehungen zusammen. Sie kann daher durch drei Drehungen erzeugt gedacht werden, eine Drehung um die Achse $O\xi$ um den Winkel $-\beta\gamma\,\delta A + b\,\delta C$, eine um die Achse $O\eta$ um den Winkel $b\gamma\,\delta A + \beta\,\delta C$, und eine Drehung um die Achse $O\zeta$ um den Winkel $c\,\delta A - \delta B$.

Nach Formel 85) ist die Arbeit, welche geleistet wird, wenn sich ein fester Körper um irgend eine Achse um einen unendlich kleinen Winkel dreht, gleich dem Produkt des Drehungswinkels in die Summe der Momente aller auf den Körper wirkenden Kräfte bezüglich jener Achse. Bezeichnen wir daher die Summe der Momente aller auf unseren festen Körper wirkenden Kräfte bezüglich der Achsen $O\xi$ resp. $O\eta$ und $O\zeta$ mit D resp. E und F, so finden wir die durch die Drehung um $O\xi$ geleistete Arbeit, indem wir den betreffenden Drehungswinkel mit D multiplizieren, und dasselbe gilt für die Achsen $O\eta$ und $O\zeta$. Da ferner die gesamte Arbeit, welche bei der Superposition mehrerer unendlich kleiner Bewegungen geleistet wird, immer gleich der Summe der bei diesen Bewegungen einzeln geleisteten Arbeiten ist, so ist die gesamte mit $-\delta'' V$ bezeichnete Arbeit gleich:

$$D(-\beta\gamma\delta A + b\delta C) + E(b\gamma\delta A + \beta\delta C) + F(c\delta A - \delta B).$$

Setzt man den Koeffizienten von δA in diesem Ausdrucke gleich P_1, den von δB gleich P_2, den von δC gleich P_3, so erhält man:

88) $$P_1 = -\beta\gamma D + b\gamma E + cF, \quad P_2 = -F, \quad P_3 = bD + \beta E.$$

§ 15. Lebendige Kraft eines starren Körpers, der sich um einen festen Punkt dreht.

Wir wollen nun weiter den Wert berechnen, welchen die lebendige Kraft T des Körpers zu irgend einer Zeit t hat. Wir lassen zu diesem Zwecke eine unendlich kleine Zeit dt vergehen und bezeichnen mit dA, dB und dC die wirklichen Zuwächse dieser drei Winkel während der Zeit dt. Das Schema 87) gilt für beliebige unendlich kleine Zuwächse der Winkel, daher auch fur die Zuwächse dA, dB und dC. Die während der Zeit dt eintretende Lagenänderung des Körpers ist also äquivalent drei Drehungen, einer um den Winkel

89) $$d\varphi = -\beta\gamma\, dA + b\, dC$$

um die Achse $O\xi$, einer zweiten um den Winkel

90) $$d\chi = b\gamma\, dA + \beta\, dC$$

um die Achse $O\eta$, und einer dritten um den Winkel

91) $$d\psi = c\, dA - dB$$

um die Achse $O\zeta$.

Die durch diese drei Drehungen erzeugte Lagenänderung kann man auch durch eine einzige Drehung um den Winkel

$$dw = \sqrt{(d\varphi)^2 + (d\chi)^2 + (d\psi)^2}$$

um eine Achse Ω ersetzen, deren Winkel mit den drei Koordinatenachsen $O\xi$, $O\eta$ und $O\zeta$ mit (Ω, ξ), (Ω, η),

(Ω, ζ) bezeichnet werden sollen. Tragen wir die Winkeldrehung dw auf die Achse Ω auf, so erhalten wir nach den Gesetzen über die Zusammensetzung von Drehungen einen Vektor, dessen Projektionen auf die drei Koordinatenachsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ gleich $d\varphi$, $d\chi$ und $d\psi$ sind. Es ist also:

$$92)\quad d\varphi = dw\cos(\Omega\xi), \quad d\chi = dw\cos(\Omega\eta), \quad d\psi = dw\cos(\Omega\zeta).$$

Die Achse Ω heißt die augenblickliche Drehungsachse, weil die ganze Lagenänderung des festen Körpers während der Zeit dt durch eine einzige Drehung um diese Achse erzeugt werden kann. Wir bezeichneten den Quotienten der unendlich kleinen Zeit dt in die Winkeldrehung, welche während derselben eintritt, immer als die Winkelgeschwindigkeit. Es ist also $dw/dt = \omega$ die Winkelgeschwindigkeit jener Drehung um die Achse Ω, welche die ganze Lagenänderung des Körpers während der Zeit dt hervorbringt. Wir nennen sie die Gesamtwinkelgeschwindigkeit oder auch die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit;

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dw}{dt}\cos(\Omega, \xi), \qquad \frac{d\chi}{dt} = \frac{dw}{dt}\cos(\Omega, \eta)$$

und

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{dw}{dt}\cos(\Omega, \zeta)$$

aber nennen wir ihre Komponenten in den Richtungen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Bezeichnen wir die letzteren mit λ, μ, ν, so ist also

$$93)\quad \lambda = \omega\cos(\Omega, \xi), \quad \mu = \omega\cos(\Omega, \eta), \quad \nu = \omega\cos(\Omega, \zeta).$$

Ferner finden wir, wenn wir für $d\varphi$, $d\chi$ und $d\psi$ die Werte 89), 90) und 91) substituieren und wieder A', B', C' für dA/dt, dB/dt, dC/dt schreiben:

$$94)\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{d\varphi}{dt} = -\beta\gamma A' + bC', \quad \mu = \dfrac{d\chi}{dt} = b\gamma A' + \beta C', \\ \nu = \dfrac{d\psi}{dt} = cA' - B'. \end{cases}$$

Nun sahen wir (vergl. Formel 84), daß die lebendige Kraft eines Körpers, dessen gesamte Bewegung in einem bestimmten Zeitmomente sich auf eine bloße Drehung um irgend eine Achse reduziert, gleich dem halben Produkt des Trägheitsmomentes des Körpers bezüglich dieser Achse in das Quadrat der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit des Körpers ist. Daher ist die lebendige Kraft unseres Körpers $T = \frac{1}{2} K\omega^2$, wobei K dessen Trägheitsmoment bezüglich der Geraden Ω, also der augenblicklichen Drehungsachse ist.

Es seien ξ, η, ζ die Koordinaten irgend eines Massenteilchens m des Körpers bezüglich der beweglichen Koordinatenachsen. Ferner sei

$$G = \sum m(\eta^2 + \zeta^2), \quad H = \sum m(\xi^2 + \zeta^2), \quad J = \sum m(\xi^2 + \eta^2),$$
$$G' = \sum m\,\eta\,\zeta, \quad H' = \sum m\,\xi\,\zeta, \quad J' = \sum m\,\xi\,\eta,$$

wobei die Summen über alle Massenteilchen des Körpers zu erstrecken sind. Da die beweglichen Koordinatenachsen unveränderlich mit dem Körper verbunden sind, so bleiben diese sechs Größen während der ganzen Bewegung konstant.

G, H und J sind die Trägheitsmomente des Körpers bezüglich der drei beweglichen Koordinatenachsen. G, H, J, G', H', J' sind dieselben Größen, die wir in § 58 des I. Teiles mit a, b, c, d, e, f bezeichnet haben, während die dort mit α, β, γ bezeichneten Richtungskosinus der Achse, bezüglich welcher das Trägheitsmoment gesucht wird, jetzt die Werte λ/ω, μ/ω, ν/ω haben. Das Trägheitsmoment bezüglich der Achse Ω ist also nach der dort entwickelten Formel 151)

$$K = G\frac{\lambda^2}{\omega^2} + H\frac{\mu^2}{\omega^2} + J\frac{\nu^2}{\omega^2} - 2G'\frac{\mu\nu}{\omega^2} - 2H'\frac{\lambda\nu}{\omega^2} - 2J'\frac{\lambda\mu}{\omega^2},$$

woraus durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}\omega^2$ folgt:

95) $$T = \tfrac{1}{2}(G\lambda^2 + H\mu^2 + J\nu^2) - G'\mu\nu - H'\lambda\nu - J'\lambda\mu.$$

Da wir die Lage der beweglichen Koordinatenachsen relativ gegen den festen Körper wählen können wie wir wollen, so wird es am zweckmäßigsten sein, dies so zu tun, daß sie Hauptträgheitsachsen des festen Körpers sind. Da nach § 59 des I. Teiles jeder Körper mindestens drei aufeinander senkrechte Hauptträgheitsachsen hat, so ist dies immer möglich. Dann wird $G' = H' = J' = 0$, daher:

96) $$K = G\frac{\lambda^2}{\omega^2} + H\frac{\mu^2}{\omega^2} + J\frac{\nu^2}{\omega^2}$$

97) $$T = \tfrac{1}{2}(G\lambda^2 + H\mu^2 + J\nu^2).$$

Hätte der Körper keine andere Drehung, als die mit der Winkelgeschwindigkeit λ um die Achse $O\xi$, so wäre $T = \frac{1}{2} G\lambda^2$. Ebenso wäre die lebendige Kraft, wenn nur die Drehungen um die Achse $O\eta$ resp. $O\zeta$ vorhanden wären, $\frac{1}{2} H\mu^2$ resp. $\frac{1}{2} J\nu^2$. Die gesamte lebendige Kraft ist die Summe dieser drei lebendigen Kräfte, welche den Drehungen um $O\xi$ resp. $O\eta$ und $O\zeta$ allein entsprechen, wenn diese Koordinatenachsen Hauptträgheitsachsen sind, nicht aber in allen anderen Fällen, wie überhaupt die lebendige Kraft der Superposition mehrerer Bewegungen keineswegs immer gleich der Summe der lebendigen Kräfte der Einzelbewegung ist.

§ 16. Die Eulerschen Gleichungen.

Da wir drei verallgemeinerte Koordinaten haben, so haben wir in den Lagrangeschen Gleichungen 43) zu setzen $h = 1$, 2 und 3. Wir wollen zunächst die Gleichung

$$\text{98)} \qquad \frac{d q_2}{d t} - \frac{\partial T}{\partial p_2} = P_2$$

behandeln, welche wir erhalten, wenn wir $h = 2$ setzen. Da $p_2 = B$ ist, so wird:

$$q_2 = \frac{\partial T}{\partial B'} .$$

Bei Bildung des partiellen Differentialquotienten sind die beiden übrigen generalisierten Geschwindigkeiten, also A' und C', sowie alle Koordinaten A, B, C, daher auch b, β, c, γ ganz wie Konstante anzusehen. Nach den Gleichungen 94) enthält von den drei Größen λ, μ, ν bloß die letzte die Größe B' und es ist $\frac{\partial \nu}{\partial B'} = -1$, daher wird:

$$q_2 = \frac{\partial T}{\partial B'} = -\frac{\partial T}{\partial \nu} = H'\lambda + G'\mu - J\nu .$$

Bei der Differentiation nach $p_2 = B$ muß A, C, A', B', C', daher auch c und γ konstant betrachtet werden. Es folgt, wenn man sich der Bedeutung von b und β erinnert, aus den Gleichungen 94)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial B} = -b\gamma A' - \beta C' = -\mu ,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial B} = -\beta\gamma A' + b C' = \lambda , \qquad \frac{\partial \nu}{\partial B} = 0 ,$$

daher:

$$\frac{\partial T}{\partial p_2} = \frac{\partial T}{\partial B} = -\mu \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \lambda \frac{\partial T}{\partial \mu}.$$

Die Substitution dieser Werte und des Wertes von P_2 aus den Gleichungen 88) in Gleichung 98) liefert:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \nu}\right) = \mu \frac{\partial T}{\partial \lambda} - \lambda \frac{\partial T}{\partial \mu} + F. \tag{99}$$

Die beiden anderen Bewegungsgleichungen könnten wir ableiten, indem wir in den Lagrangeschen Gleichungen $h = 1$ und $h = 3$ setzen. Wir gelangen jedoch durch eine andere Betrachtungsweise rascher zum Ziele. Es wurden zwar die Winkel A, B, C, welche bezüglich der Koordinatenachsen eine unsymmetrische Lage haben, zur Ableitung der Gleichung 99) benutzt, sie kommen jedoch in der Gleichung selbst gar nicht mehr vor. Dieselbe enthält vielmehr bloß Größen, welche sich bei zyklischer Vertauschung der Koordinatenachsen selbst zyklisch vertauschen.

Genau so wie wir die Gleichung 99) ableiteten, hätte man eine andere Gleichung ableiten können, indem man den Winkel der beiden Abszissenachsen mit C, die Winkel der y- resp. η-Achse mit der Durchschnittslinie der beiden yx-Ebenen mit A resp. B bezeichnet hätte. Dann hätte man dieselbe Gleichung erhalten; nur wären darin die Größen λ, μ, ν, ferner die Größen D, E, F und ebenso G, H, J untereinander zyklisch vertauscht. Es werden also jedenfalls auch noch die beiden durch zyklische Vertauschung aus 99) folgenden Gleichungen

$$\tag{100} \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \lambda}\right) &= \nu \frac{\partial T}{\partial \mu} - \mu \frac{\partial T}{\partial \nu} + D \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right) &= \lambda \frac{\partial T}{\partial \nu} - \nu \frac{\partial T}{\partial \lambda} + E \end{aligned} \right.$$

richtig sein müssen. Hierbei ist nach 95)

$$\tag{101} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \lambda} &= G\lambda - J'\mu - H'\nu \\ \frac{\partial T}{\partial \mu} &= - J'\lambda + H\mu - G'\nu \\ \frac{\partial T}{\partial \nu} &= - H'\lambda - G'\mu + J\nu, \end{aligned} \right.$$

daher:

$$\nu \frac{\partial T}{\partial \mu} - \mu \frac{\partial T}{\partial \nu} = \mu\nu(H-J) + G'(\mu^2-\nu^2) + H'\lambda\mu - J'\lambda\nu. \tag{102}$$

Wählt man die beweglichen Koordinatenachsen so, daß sie Hauptträgheitsachsen des festen Körpers sind, was man natürlich immer tun wird, wenn nicht ganz spezielle Gründe dagegen sprechen, so wird $G' = H' = J' = 0$, daher

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = G\lambda, \quad \frac{\partial T}{\partial \mu} = H\mu, \quad \frac{\partial T}{\partial \nu} = J\nu, \tag{103}$$

und die Gleichungen 99) und 100) verwandeln sich in:

$$\left\{\begin{aligned} G\frac{d\lambda}{dt} &= (H-J)\mu\nu + D \\ H\frac{d\mu}{dt} &= (J-G)\lambda\nu + E \\ J\frac{d\nu}{dt} &= (G-H)\lambda\mu + F. \end{aligned}\right. \tag{104}$$

Diese Gleichungen heißen die Eulerschen Gleichungen. Sie bestimmen zunächst λ, μ, ν als Funktionen der Zeit und man hat dann noch A, B und C durch Integration der Gleichungen 94) als Funktionen der Zeit zu berechnen, wodurch erst die Bestimmung der Bewegung des Körpers, d. h. seiner Lage zu jeder Zeit gelungen ist, eine Aufgabe, die freilich häufig dadurch erschwert wird, daß man die Momente D, E, F der Kräfte erst berechnen kann, wenn man die Bewegung des Körpers im Raume selbst schon kennt.

§ 17. Behandlung dreier einfacher Spezialfälle.

Aus den Gleichungen 104) ist sofort folgendes ersichtlich:

1. Wenn die drei Hauptträgheitsmomente G, H und J verschieden sind, und keine äußeren Kräfte wirken, also $D = E = F = 0$ ist, so können die Gleichungen

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\nu}{dt} = 0$$

nur dann bestehen, d. h. die Rotationsachse kann ihre Lage gegen den Körper nur dann unverändert beibehalten, wenn entweder $\mu = \nu = 0$ oder $\lambda = \nu = 0$ oder $\lambda = \mu = 0$ ist,

d. h. wenn die Drehung um eine der drei Hauptträgheitsachsen stattfindet. Es stimmt dies mit dem im I. Teile, § 60 gefundenen Resultate überein, daß, wenn ein Körper um eine unveränderliche Achse rotiert, die nicht Hauptträgheitsachse ist, stets Kräfte auf diese Achse wirken müssen.

2. Wenn alle drei Hauptträgheitsmomente gleich sind, so werden die Gleichungen 104) voneinander unabhängig und jede derselben stimmt mit der Gleichung überein, welche wir für die Drehung um eine feste Achse erhalten haben. Es wird also dann die Drehung um eine der Koordinatenachsen durch die Drehung um die beiden anderen Koordinatenachsen nicht beeinflußt (als nur dadurch, daß durch jene anderen Drehungen etwa die Momente der Kräfte bezüglich der ersten Koordinatenachse geändert werden).

Die Drehung um jede der Koordinatenachsen geschieht also genau so, als ob der Körper nur um diese Achse drehbar wäre und in jedem Zeitmomente das gleiche Drehungsmoment um dieselbe drehend wirken würde. Wenn z. B. keine äußeren Kräfte wirken, so geschieht die Drehung um jede der Koordinatenachsen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

3. Es sollen zwei Hauptträgheitsmomente untereinander gleich, z. B. $G = H$, das dritte aber davon verschieden sein und keine äußeren Kräfte auf den Körper wirken, also $D = E = F = 0$ sein. Dann folgt aus der letzten der Gleichungen 104) $\nu =$ konst.; die beiden anderen aber verwandeln sich, wenn man setzt

105) $$\frac{J - G}{G}\nu = h$$

in

$$\frac{d\lambda}{dt} = -h\mu, \quad \frac{d\mu}{dt} = h\lambda,$$

woraus man ohne Schwierigkeit findet:

106) $$\lambda = i\cos[h(t+\tau)], \quad \mu = i\sin[h(t+\tau)].$$

i und τ sind die beiden Integrationskonstanten.

Wir wollen nun die geometrische Bedeutung der Größen $G\lambda$, $H\mu$ und $J\nu$ aufsuchen und zwar nicht bloß in diesem speziellen, sondern im ganz allgemeinen in diesem Abschnitte behandelten Falle. Irgend ein Massenteilchen m des festen Körpers befinde sich zur Zeit t im Punkte A des Raumes und gelange infolge der Drehung $\lambda\,dt$ nach B. Die Projektionen dieser beiden Punkte auf eine fixe Ebene, welche zur Zeit t mit der $\eta\zeta$-Ebene zusammenfällt, seien A' und B'. Dann ist $A'B' = OA'.\lambda.dt$. Die doppelte Fläche des Dreiecks $OA'B'$ aber ist $OA'^2.\lambda.dt$. Daher ist das, was wir in § 31 des I. Teiles das Flächenmoment der Masse m bezüglich der Achse $O\xi$ genannt haben, gleich $m.OA'^2.\lambda$, und die Summe der Flächenmomente aller Massenteilchen des Körpers bezüglich der Achse $O\xi$ ist $\lambda.\sum m\,OA'^2 = G\lambda$. Man sieht leicht, daß durch die Drehungen $\mu\,dt$ und $\nu\,dt$ jedes dieser Flächenmomente nur um einen verschwindenden Betrag geändert wird. Ebenso sind $H\mu$ und $J\nu$ die Summen der Flächenmomente aller Massenteilchen des Körpers bezüglich der Achsen $O\eta$ und $O\zeta$.

Diesen drei Größen sind (ebenfalls nach dem in § 31 des I. Teiles Auseinandergesetzten) zur Zeit t die Kosinus der drei Winkel proportional, welche diejenige Achse mit den drei Koordinatenachsen bildet, bezüglich welcher die Summe der Flächenmomente aller Massenteilchen des Körpers ein Maximum ist.

Nun kehren wir zu dem jetzt behandelten speziellen Falle zurück. Da keine äußeren Kräfte wirken, ist die Lage dieser Achse unveränderlich im Raume (vergl. wieder § 31 des I. Teiles). Wir wollen diejenige Hälfte derselben, um welche die Drehung im positiven Sinne geschieht, als die positive OZ-Achse wählen. Dann ist also der Kosinus und Sinus des Winkes der beiden z-Achsen:

$$107)\quad c = \frac{J\nu}{\sqrt{G^2\lambda^2+H^2\mu^2+J^2\nu^2}} = \frac{J\nu}{\sqrt{G^2 i^2+J^2\nu^2}}, \quad \gamma = \frac{G i}{\sqrt{G^2 i^2+J^2\nu^2}}.$$

Diese Ausdrücke, daher auch der Winkel der beiden z-Achsen, sind konstant.

Es soll nun die positive $O\zeta$-Achse in dem Sinne gezogen werden, daß ν positiv ist. Die Lage, welche die Achse der zu ν senkrechten Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{\lambda^2+\mu^2} = i$ zu

Anfang der Zeit hat, wählen wir als $O\xi$-Achse und ziehen sie wieder in dem Sinne, daß die Drehung des Körpers um die positive $O\xi$-Achse zu Anfang der Zeit im positiven Sinne geschieht. Dann ist für $t = 0$, $\mu = 0$ und λ positiv, daher in den Gleichungen 106) $\tau = 0$ und i positiv. Da auch die Drehung um OZ im positiven Sinne geschieht. so liegt zu Anfang, und daher immer C zwischen 0^0 und 90^0 und es ist in den Gleichungen 107) die Wurzel mit positivem Zeichen zu nehmen.

Die Gleichungen 94) liefern ferner:

$$108)\quad \begin{cases} \lambda = i\cos(ht) = -\beta\gamma\dfrac{dA}{dt}, \quad \mu = i\sin(ht) = b\gamma\dfrac{dA}{dt}, \\ \nu = \text{konst.} = c\dfrac{dA}{dt} - \dfrac{dB}{dt}. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen folgt

$$\frac{dA}{dt} = \pm\frac{i}{\gamma}, \quad B = ht \mp 90^0,$$

wo die oberen oder unteren Zeichen zusammengehören. Aus der letzten der Gleichungen 108) folgt

$$\nu = \pm\frac{ci}{\gamma} - h,$$

oder, wenn man die Werte c und γ aus 107) substituiert:

$$\nu = \pm\frac{J\nu}{G} - h.$$

Damit dies mit 105) stimmt, müssen die oberen Zeichen gewählt werden, und man hat:

$$B = ht - 90^0, \quad A = \frac{i}{\gamma}t + A_0 = \frac{\sqrt{G^2 i^2 + J^2\nu^2}}{G}t + A_0.$$

Die invariable Achse OZ liegt anfangs in der $\xi\zeta$-Ebene zwischen der positiven ξ- und positiven ζ-Achse, da die Komponente der Drehung um alle diese drei Achsen für $t = 0$ positiv ist; daher fällt OR mit der negativen $O\eta$-Achse zusammen, da um OR die Drehung von $+OZ$ gegen $+O\zeta$ also in unserem Falle auch von $+O\xi$ gegen $+O\zeta$ eine positive sein soll; denn bei einer positiven Drehung um OR muß C wachsen. Legen wir die OY-Achse in die Richtung. die anfangs $O\eta$ hat, also die OX-Achse in die anfängliche

Ebene der beiden z-Achsen und zwar in die Halbebene, die $O\xi$ enthält, so ist auch $A_0 = -90^0$.

$O\zeta$ beschreibt eine Kegelfläche um die Achse OZ, wobei sich die Ebene der beiden z-Achsen mit der Winkelgeschwindigkeit $A' = i/\gamma$ um die z-Achse dreht, was einer Drehung des Körpers um $O\zeta$ mit der Winkelgeschwindigkeit ν und gleichzeitig um eine in der Ebene der z-Achsen auf $O\zeta$ senkrechte Achse mit der Winkelgeschwindigkeit i entspricht. Die augenblickliche Drehungsachse Ω, um welche sich der Körper mit der ebenfalls konstanten Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{\nu^2 + i^2}$ dreht, liegt auch in der Ebene der beiden z-Achsen, und zwar zwischen OZ und $O\zeta$, wenn $G > J$, sonst auf der anderen Seite von OZ, da $\operatorname{tg}(Z, \zeta) = Gi/J\nu$, $\operatorname{tg}(\Omega, \zeta) = i/\nu$ ist.

§ 18. Algebraische Lösung der Aufgabe im Falle des Fehlens äußerer Kräfte.

Wir gehen nun über zur Betrachtung des Falles, wo das Trägheitsellipsoid ein dreiachsiges Ellipsoid ist und keine äußeren Kräfte wirken, also $D = E = F = 0$ ist, so daß die Gleichungen 104) folgende Form annehmen:

109) $$\begin{cases} G\dfrac{d\lambda}{dt} = (H - J)\mu\nu \\[2mm] H\dfrac{d\mu}{dt} = (J - G)\lambda\nu \\[2mm] J\dfrac{d\nu}{dt} = (G - H)\lambda\mu . \end{cases}$$

Multipliziert man von diesen Gleichungen die erste mit λ, die zweite mit μ, die dritte mit ν, und addiert alle drei, so erhält man:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{G\lambda^2 + H\mu^2 + J\nu^2}{2}\right) = 0.$$

Bezeichnet man daher den konstanten Wert des eingeklammerten Ausdruckes mit $\frac{1}{2}k^2$, so folgt

110) $$G\lambda^2 + H\mu^2 + J\nu^2 = k^2,$$

was nichts anderes als die Gleichung der lebendigen Kraft ist, da die linke Seite dieser Gleichung die doppelte lebendige Kraft des Körpers darstellt.

Multipliziert man von den Gleichungen 109) die erste mit $G\lambda$, die zweite mit $H\mu$, die dritte mit $J\nu$, und addiert wieder, so folgt in derselben Weise

$$111)\qquad G^2\lambda^2 + H^2\mu^2 + J^2\nu^2 = h^2,$$

wobei h eine zweite Integrationskonstante darstellt. Da $G\lambda$, $H\mu$ und $J\nu$ die Flächenmomente der gesamten Masse des Körpers bezüglich der Achsen $O\xi$, $O\eta$ und $O\zeta$ sind (vergl. § 17, Punkt 3), so ist h das maximale Flächenmoment des Körpers, also dessen Flächenmoment bezüglich der invariabeln Achse K (vergl. I. Teil, § 31), deren Winkel mit den beweglichen Koordinatenachsen durch die Gleichungen

$$112)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\cos(K,\xi) = \frac{1}{h} G\lambda, \qquad \cos(K,\eta) = \frac{1}{h} H\mu, \\ &\qquad\qquad \cos(K,\zeta) = \frac{1}{h} J\nu \end{aligned} \right.$$

gegeben sind. Ziehen wir sie immer in dem Sinne, daß das Flächenmoment des Körpers bezüglich derselben positiv ist, so haben wir h mit positiven Vorzeichen zu wählen, und die Kosinus der Formel 112) haben dasselbe Vorzeichen wie λ resp. μ und ν.

Die invariable Achse K behält während der ganzen Bewegung ihre Lage im Raume unveränderlich bei. Dagegen sind die Kosinus 112) veränderlich, da die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ sich mit dem Körper mitbewegen und daher ihre Lage im Raume fortwährend ändern.

Durch Elimination von ν resp. von μ aus den Gleichungen 110) und 111) erhalten wir μ resp. ν durch λ ausgedrückt. Substituieren wir die betreffenden Werte von μ und ν in die erste der Gleichungen 109), so erhalten wir:

$$113)\qquad dt = \frac{d\lambda\, G\sqrt{HJ}}{\sqrt{[h^2 - k^2 J + G(J-G)\lambda^2]\,[k^2 H - h^2 - G(H-G)\lambda^2]}}.$$

Es werden also die Größen λ, μ, ν im allgemeinen durch elliptische Funktionen der Zeit dargestellt.

Den speziellen Fall, wo zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, wo sich also die Funktionen auf trigonometrische reduzieren, haben wir schon erschöpfend im vorigen Paragraphen behandelt. Die elliptischen Funktionen reduzieren sich auch auf trigonometrische für $h = k\sqrt{H}$, wenn also der Abstand der im nächsten Paragraphen zu beschreibenden Ebene T vom Mittelpunkte des Trägheitsellipsoides gleich der mittleren Halbachse desselben ist.

Wie im allgemeinen Falle die Integrale von der obigen Form auf die sogenannte Normalform zu bringen und in einfachster Weise durch spezielle elliptische Funktionen auszudrücken sind, wird in den Lehrbüchern für diese Funktionen ausführlich gelehrt. Ich will darauf um so weniger eingehen, als eine einheitliche Bezeichnung der elliptischen Funktionen noch nicht eingeführt ist. Ich will vielmehr zur Entwickelung einer von Poinsot begründeten Theorie übergehen, welche uns gestattet, uns von der Art der Bewegung des in Rede stehenden Körpers ein anschauliches Bild zu machen.

§ 19. Poinsots geometrische Konstruktion.

Weder die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ noch das zum Punkte O gehörige Trägheitsellipsoid des festen Körpers verändern ihre Lage relativ gegen den Körper. Es genügt daher, sich von der Bewegung des Trägheitsellipsoides im Raume ein anschauliches Bild zu machen. Die Gleichung desselben ist entsprechend den Gleichungen 152) und 153) des I. Teiles, § 58

114) $$G\xi^2 + H\eta^2 + J\zeta^2 = 1\,,$$

wobei ξ, η, ζ die Koordinaten irgend eines Punktes des als Fläche zu denkenden Trägheitsellipsoides bezüglich der beweglichen Koordinatenachsen sind.

Die augenblickliche Drehungsachse Ω bildet mit den Koordinatenachsen Winkel, deren Kosinus nach den Gleichungen 93) gleich λ/ω, μ/ω, ν/ω sind. Bezeichnen wir mit Ω' den Punkt, wo dieselbe die Fläche des Trägheitsellipsoides durchsticht, so ist $O\Omega'$ derjenige Halbmesser des Trägheitsellipsoides, welcher die Richtung der augenblicklichen Drehungsachse hat. Ist ϱ dessen Länge, so sind

115) $$\xi = \frac{\varrho\lambda}{\omega}, \quad \eta = \frac{\varrho\mu}{\omega}, \quad \zeta = \frac{\varrho\nu}{\omega}$$

die Koordinaten seines Endpunktes Ω'. Da dieser Punkt auf dem Trägheitsellipsoide liegt, so erfüllen diese Werte die Gleichungen 114). Es ist also:

$$G\left(\frac{\varrho\lambda}{\omega}\right)^2 + H\left(\frac{\varrho\mu}{\omega}\right)^2 + J\left(\frac{\varrho\nu}{\omega}\right)^2 = 1,$$

woraus folgt:

116) $$\omega = k\varrho,$$

117) $$\xi = \frac{\lambda}{k}, \quad \eta = \frac{\mu}{k}, \quad \zeta = \frac{\nu}{k}.$$

Die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω ist also in jedem Momente proportional der Länge desjenigen Halbmessers des Trägheitsellipsoides, welcher die Richtung der augenblicklichen Drehungsachse hat.

Wir wollen noch im Punkte Ω' eine Tangentialebene T an das Trägheitsellipsoid legen. Die von O auf die Ebene T gefällte Normale habe die Länge p und bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel (p, ξ), (p, η), (p, ζ).

Wir machen nun von folgendem bekannten Satze der analytischen Geometrie Gebrauch. Wählt man die Achsen eines beliebigen Ellipsoides, dessen Halbachsen a, b, c sind, als Koordinatenachsen, zieht vom Mittelpunkte des Ellipsoides auf die im Punkte mit den Koordinaten ξ, η, ζ an dasselbe errichtete Tangentialebene eine Senkrechte, so hat diese die Länge

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}$$

und bildet mit den Koordinatenachsen Winkel, deren Kosinus

$$\cos(p, \xi) = \frac{\xi}{a^2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}, \quad \cos(p, \eta) = \frac{\eta}{b^2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}$$

$$\cos(p, \zeta) = \frac{\zeta}{c^2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}$$

sind. In unserem Falle sind die Halbachsen:

$$a = 1/\sqrt{G}, \quad b = 1/\sqrt{H}, \quad c = 1/\sqrt{J}.$$

Da Ω' der Berührungspunkt ist, so sind auch für ξ, η, ζ die Werte 117) einzusetzen, und es wird:

$$118) \quad \begin{cases} p = \frac{k}{h}, \quad \cos(p, \xi) = \frac{G\lambda}{h}, \quad \cos(p, \eta) = \frac{H\mu}{h}, \\ \cos(p, \zeta) = \frac{J\nu}{h}. \end{cases}$$

Die erste Formel zeigt, daß die Länge p der von O auf die Tangentialebene T gefällten Senkrechten im Verlaufe der Bewegung der Körper konstant bleibt, die drei übrigen, daß auch die Richtung dieser Senkrechten im Raume, daher auch relativ gegen die fixen Koordinatenachsen unveränderlich bleibt. Denn diese Senkrechte hat die Richtung der invariablen Achse, da ja die für $\cos(p, \xi)$, $\cos(p, \eta)$ und $\cos(p, \zeta)$ gefundenen Werte mit denen identisch sind, die wir für die Kosinus der Winkel fanden, welche die invariable Achse mit den beweglichen Koordinatenachsen bildet.

Wenn wir daher in der Richtung der invariablen Achse nach der Seite hin, um welche das maximale Flächenmoment mit positivem Zeichen erscheint, vom Punkte O aus die Strecke k/h auftragen und durch ihren Endpunkt eine zur invariablen Achse senkrechte Ebene T legen, so wird diese Ebene während der ganzen Bewegung des Körpers vom Trägheitsellipsoid berührt.

Wir berufen uns ferner auf folgenden allgemeinen phoronomischen Satz. Es seien uns zwei beliebige bewegte Körper gegeben, die sich in einem Momente in einem Punkte berühren, an dem die Oberfläche keines der beiden Körper eine Kante oder Spitze hat. Es sind drei Fälle möglich: 1. In der Relativbewegung des zweiten Körpers gegen den ersten Körper ist die Komponente der Geschwindigkeit desjenigen Punktes P des zweiten Körpers, in dem dieser den ersten berührt, normal zur Berührungsebene von Null verschieden. Sie muß, da wir die Gestalt der Körper als unveränderlich voraussetzen, in bezug auf den ersten Körper nach außen gerichtet sein, die beiden Körper trennen sich (wenigstens an dieser Stelle). Diese Geschwindigkeit muß sich zudem unmittelbar vorher diskontinuierlich mit der Zeit geändert haben, da sonst der Punkt P des zweiten Körpers aus dem Innern des ersten herauskommen müßte. 2. Diese Normalkomponente ist Null, aber der Punkt P hat relativ gegen den ersten Körper eine von Null verschiedene Geschwindigkeitskomponente, deren Richtung in die gemeinsame Tangentialebene fällt; dann sagt man, die Körper gleiten an dieser Stelle aneinander. 3. Auch die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit des Punktes P der relativen Bewegung des zweiten Körpers gegen den ersten Körper ist Null, so daß dessen Weg bei dieser Relativbewegung während einer unendlich kleinen Zeit dt klein höherer Ordnung als dt ist, also durch dt dividiert mit abnehmendem dt der Grenze Null zueilt; dann sagt man, die Körper rollen aufeinander.

Die folgende ist eine allgemeinere Definition des Rollens, von welcher die soeben gegebene ein Spezialfall ist und welche auch den Fall einschließt, daß mehrere Berührungspunkte vorhanden sind, die auch in Kanten oder Spitzen der Oberflächen liegen können; nur schließen wir den Fall aus, daß auf eine endliche Strecke unendlich viele Kanten oder Spitzen fallen. „Zwischen den Zeiten t und $t+dt$ findet ein Rollen zweier fester Körper aufeinander statt, wenn eine oder mehrere Stellen vorhanden sind, wo die Oberflächen beider Körper zur Zeit t die Entfernung Null hatten, und wenn an allen diesen Stellen je zwei Punkte des einen und anderen Körpers, welche zur Zeit t die Entfernung Null hatten, auch zur Zeit $t+dt$ eine Entfernung haben, die unendlich klein höherer Ordnung als dt ist."

Das Trägheitsellipsoid berührt die Ebene T nur in einem Punkte, und zwar hat der Punkt des Trägheitsellipsoides, in welchem dieses die Ebene T berührt, weder eine normale noch tangentiale Geschwindigkeit, da er in der augenblicklichen Drehungsachse liegt, deren sämtliche Punkte momentan ruhen (während dt nur Wege zurücklegen, die unendlich klein höherer Ordnung als dt sind). Das Trägheitsellipsoid rollt also auf der festen Ebene T, wodurch seine Bewegung vollständig bestimmt ist.

§ 20. Poloide, Serpoloide.

Die Bahn des festen Körpers, d. h. der Inbegriff der sukzessiven Lagen, die er im Verlaufe der Zeit annimmt, sowie auch der sukzessiven Lagen der augenblicklichen Drehungsachse ist durch die Gestalt und Größe des Trägheitsellipsoides und den Wert des Verhältnisses k/h vollständig bestimmt. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung ist gleich dem mit k multiplizierten Halbmesser ϱ des Trägheitsellipsoides, dessen Endpunkt in der Ebene T liegt. Um daher die Geschwindigkeit des Körpers in seiner Bahn bestimmen zu können, muß man k und h separat kennen. Die Punkte, in denen nacheinander die Berührung des Trägheitsellipsoides und der Ebene T stattfindet, bilden sowohl auf dem Ellipsoide als auch auf der Ebene eine kontinuierliche Kurve. Die erstere Kurve heißt die Poloide, die letztere die Serpoloide. Die Poloide hat eine lemniskatenartige Gestalt und besteht aus einem zusammenhängenden Zuge oder aus zwei abgesonderten Teilen. Die Serpoloide ist eine sternartige geschlossene oder ungeschlossene Kurve, ähnlich den in den Figg. 10, 11 etc. des I. Teiles, § 22 dargestellten Bahnen bei der Zentralbewegung.

Die Poloide ist der geometrische Ort aller Durchschnittpunkte der augenblicklichen Drehungsachse mit der Oberfläche des Trägheitsellipsoides. Bezeichnen wir wie im vorigen Paragraph mit ξ, η, ζ die Koordinaten eines dieser Punkte (des Punktes Ω'), so folgt aus den Gleichungen 111) und 117):

$$G^2\xi^2 + H^2\eta^2 + J^2\zeta^2 = \frac{h^2}{k^2}.$$

Der Punkt Ω' liegt also auch noch auf dem durch diese Gleichung dargestellten Ellipsoide, dessen Halbachsen der Richtung nach mit denen des Trägheitsellipsoides zusammenfallen, aber die Längen haben:

$$\frac{h}{kG},\quad \frac{h}{kH},\quad \frac{h}{kJ}.$$

Das letztere Ellipsoid ist also gestreckter, d. h. es weicht von der Kugelgestalt stärker ab als das Trägheitsellipsoid.

Die Durchschnittslinie der beiden Ellipsoide ist die Poloide. Es mögen beide Ellipsoide dreiachsig sein und zwar sei $G < H < J$, so daß also zur Achse $O\xi$ die größte Halbachse beider Ellipsoide und das kleinste Trägheitsmoment des Körpers gehört. Dieser soll nun unverändert bleiben und wir studieren verschiedene Bewegungen desselben, wobei die Anfangslage der augenblicklichen Drehungsachse. also das Verhältnis h/k wechseln soll, welches ja von den Anfangsgeschwindigkeiten der Teilchen des Körpers abhängt. Dann bleibt also das Trägheitsellipsoid unverändert und auch das zweite Ellipsoid bleibt ähnlich zu sich selbst und ändert nur seine absolute Größe.

Solange $h/k < \sqrt{G}$ ist, sind alle drei Halbachsen desselben kleiner als die des Trägheitsellipsoides; es liegt also das zweite Ellipsoid ganz innerhalb des Trägheitsellipsoides und die betreffenden Werte der Konstanten entsprechen keiner möglichen Bewegung. Wird $h/k = \sqrt{G}$, so berühren sich beide Ellipsoide an den beiden Polen der großen Achse. Der Körper dreht sich also mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes. Ist h/k ein wenig größer, so beginnen sich beide Ellipsoide ein wenig zu schneiden und zwar anfangs in zwei ganz kleinen, die beiden genannten Pole umgebenden Kurven. Die augenblickliche Drehungsachse bleibt also immer ganz nahe der Achse des kleinsten Trägheitsmomentes. Mit wachsendem Werte von h/k wächst auch das zweite Ellipsoid. Die beiden Schnittkurven entfernen sich immer mehr von den beiden Polen der größten Achse und vereinigen sich endlich zu einer einzigen Kurve, welche sich an zwei mit den Polen der mittleren Achse des Trägheitsellipsoides zusammenfallenden Punkten selbst durchschneidet und in der Form der sich selbst durchschneidenden Lemniskate ähnelt. Die Drehung kann zwar auch mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine Achse stattfinden, welche die Richtung der mittleren Halbachse des Trägheitsellipsoides hat, aber die augenblickliche Drehungsachse kann sich nicht in einem Kegel bewegen, dessen Seite immer einen sehr kleinen Winkel mit der Richtung der mittleren Halbachse des Trägheitsellipsoides einschließt.

Wächst h/k noch mehr, so zerfällt die lemniskatenartige Kurve wieder in zwei getrennte Hälften, welche aber jetzt die beiden Pole der kleinsten Achse des Trägheitsellipsoides umgeben und sich immer mehr nach diesen zurückziehen, bis für $h/k = \sqrt{J}$ die Berührung nur mehr in diesen stattfindet, der Körper also um die Achse seines größten Trägheitsmomentes rotiert. Ein ein wenig kleinerer Wert von h/k entspricht einer Bewegung des Körpers wobei die augenblickliche Drehungsachse immer sehr nahe der Achse des größten Trägheitsmomentes liegt. Größeren Werten entspricht keine mögliche Bewegung mehr.

Apparate zur Versinnlichung der geometrischen Darstellung der Bewegung eines frei um einen Punkt drehbaren Körpers haben Mach, Obermayer[1]) und andere konstruiert.

Die eine Hälfte des Trägheitsellipsoides ist aus Holz, Gips oder Metall modelliert und mittels eines Kugelgelenkes, das sich im Mittelpunkt des Ellipsoides befindet, nach allen Richtungen frei drehbar. Das Kugelgelenk wird durch folgende Vorrichtung getragen.

An einem horizontalen Brette, das die oben besprochene Ebene T darstellt, ist eine vertikal nach aufwärts gehende Stange befestigt, welche einen horizontalen Querstab trägt. Dieser Stab trägt dann nochmals höher oder tiefer stellbar eine kürzere vertikal nach abwärts gerichtete Stange, an deren unterem Ende das Kugelgelenk angebracht ist; man stellt nun die letztere Stange bald tiefer, bald weniger tief, jedoch immer so, daß das Ellipsoid das Brett berührt und kann bei jeder Einstellung der Stange vermöge des Kugelgelenkes das Ellipsoid auf dem Brette in solcher Weise wälzen, daß es ohne Gleitung rollt. Es führt dann genau dieselbe Bewegung aus, welche das mit einem frei um einen Punkt drehbaren Körper fest verbundene Trägheitsellipsoid

---

[1]) Carls Repertorium Bd. 4, S. 361 und Bd. 15, S. 54.

bei der ohne Einfluß von Kräften nach den Gesetzen der Mechanik erfolgenden Bewegung des Körpers ausführen würde.

Legt man durch die Serpoloide einen im Raume festen Kegel, durch die Poloide einen fest mit dem bewegten Körper verbundenen Kegel, welche beide ihre Spitze im festen Punkte O haben, so rollt während der Bewegung der letztere Kegel auf dem ersteren.

Man kann auch aus dieser Konstruktion die schon gefundenen Sätze über die Stabilität der Rotation um die Achse größten und kleinsten Trägheitsmomentes und die Labilität der Rotation um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmomentes herleiten. Wenn sich nämlich der Körper anfangs um eine Achse drehte, die mit der größten Achse des Trägheitsellipsoides einen sehr kleinen Winkel bildet (d. h. einen Winkel der klein ist gegen den Quotienten der größten Halbachse in die Differenz der größten und mittleren Halbachse), so ist p nur wenig kleiner als die größte Halbachse des Trägheitsellipsoides und alle Halbmesser desselben, welche erhebliche Winkel mit der größten Achse bilden, sind kleiner als p, reichen daher nicht bis zur Ebene T. Die Drehung muß also immer um eine Achse geschehen, die sehr nahe der größten Halbachse liegt, diese ist stabile Rotationsachse. Man kann auch sagen: Wenn sie anfangs Rotationsachse ist und dann eine sehr kleine, nur während kurzer Zeit wirkende störende Kraft auf den Körper wirkt, so weicht die gestörte Bewegung nach Aufhören der störenden Kraft für alle spätere Zeit nur sehr wenig von der ursprünglichen ab.

Man beweist ebenso, daß auch die kleinste Achse des Trägheitsellipsoides in demselben Sinne eine stabile Rotationsachse ist. Die Rotation kann auch eine beliebig lange Zeit hindurch gleichförmig um die mittlere Achse des Trägheitsellipsoides geschehen. Tritt aber dann durch kurze Zeit eine kleine störende Kraft auf, so geschieht nach ihrem Verschwinden die Rotation nicht mehr genau um die mittlere Achse. Die Gestalt der Poloide gleicht dann der einer Lemniskate, die sich nahezu an der Stelle, wo die mittlere

Achse die Ellipsoidfläche trifft, selbst schneidet, die der Serpoloide einer Spirale ähnlich der Bahn bei der Zentralbewegung, die dem Fußpunkte der Senkrechten p beliebig nahe kommen und sich beliebig oft um ihn herumschlingen kann und dann wieder davon entfernt. Die augenblickliche Drehungsachse entfernt sich daher immer mehr und schließlich um endliches von der mittleren Achse des Trägheitsellipsoides. Man sagt, die Rotation um diese kann zwar andauern, ist aber labil.

Falls das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, sieht man leicht, wie diese geometrische Darstellung wieder zu den Resultaten führt, die wir schon in § 17 analytisch ableiteten.

§ 21. Allgemeine Gleichungen für die Drehung eines schweren Rotationskörpers um einen festen Punkt.

Wir haben den Fall, daß zwei Hauptträgheitsmomente eines um einen festen Punkt beliebig beweglichen festen Körpers bezüglich dieses Punktes untereinander gleich sind, schon in § 17 ausführlich unter der Voraussetzung diskutiert, daß keine äußeren Kräfte wirken. Wir kehren zu diesem Falle, weil er der physikalisch wichtigste ist, nochmals zurück und setzen zunächst allgemein die Wirksamkeit ganz beliebiger äußerer Kräfte voraus. Später werden wir besonders auf die Schwerkraft unser Augenmerk richten.

Wir wählen die Achse des von den beiden anderen verschiedenen Trägheitsmomentes zur $O\zeta$-Achse, so daß also $G = H$ ist und die allgemeinen Gleichungen 104) folgendermaßen lauten:

$$
119)\qquad \begin{cases} D = G\lambda' + (J - G)\mu\nu \\ E = G\mu' - (J - G)\lambda\nu \\ F = J\nu'\,. \end{cases}
$$

Wir wollen bloß das Drehungsmoment F um die Achse $O\zeta$ in unseren Rechnungen belassen, es aber aus einem sogleich ersichtlichen Grunde mit $-\mathfrak{B}$ bezeichnen. Statt D und E aber wollen wir die Drehmomente $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ der äußeren

Kräfte um die Achsen OR und OZ einführen. Man findet aus den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken ξRZ und ηRZ der Fig. 1, § 13, Seite 53 leicht

$$120)\qquad \cos(O\xi, OZ) = -\beta\gamma, \qquad \cos(O\eta, OZ) = b\gamma$$

(vergl. das später vorkommende Schema 139) § 23). Es ist also:

$$\mathfrak{C} = Db + E\beta,$$
$$\mathfrak{A} = -D\beta\gamma + Eb\gamma + Fc.$$

Wir wollen hier für D, E, F. die Werte 119), darin aber für λ, μ, ν die Werte 94) und für λ', μ', ν' die daraus durch Differentiation nach der Zeit folgenden Werte:

$$\lambda' = -\beta\gamma A'' + bC'' - b\gamma A'B' - \beta c A'C' - \beta B'C'$$
$$\mu' = b\gamma A'' + \beta C'' - \beta\gamma A'B' + bcA'C' + bB'C'$$
$$\nu' = cA'' - B'' - \gamma A'C'$$

substituieren. Es folgt:

$$121)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{C} &= G(C'' - c\gamma A'^2) + J\gamma(cA'^2 - A'B') \\ \mathfrak{A} &= \frac{d}{dt}[J(c^2A' - cB') + G\gamma^2 A'] = \\ &\qquad = J(c^2A'' - cB'' - 2c\gamma A'C' + \gamma B'C') + \\ &\qquad + G(\gamma^2 A'' + 2c\gamma A'C') \\ \mathfrak{B} &= J\frac{d}{dt}(-cA' + B') = J(-cA'' + B'' + \gamma A'C'). \end{aligned}\right.$$

Man hätte diese Relationen leicht direkt aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 43) in der folgenden Weise erhalten können. Man sieht sofort, daß nach der durch Gleichung 32) ausgedrückten Definition der verallgemeinerten Kraft die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die verallgemeinerten Kräfte nach den Koordinaten A, B und C sind. Es liefern daher die Lagrangeschen Gleichungen:

$$122)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial A'} - \frac{\partial T}{\partial A} &= \mathfrak{A} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial B'} - \frac{\partial T}{\partial B} &= \mathfrak{B} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial C'} - \frac{\partial T}{\partial C} &= \mathfrak{C}. \end{aligned}\right.$$

Nun ist aber die lebendige Kraft:

$$T = \frac{G}{2}(\lambda^2 + \mu^2) + \frac{J}{2}\nu^2.$$

Die Substitution der Werte 94) gibt:

$$T = \frac{G}{2}(\gamma'^2 A'^2 + C'^2) + \frac{J}{2}(c A' - B')^2. \tag{123}$$

Die Einführung dieses Wertes in die Gleichungen 122) liefert sofort die Gleichungen 121). Es ist mir nicht ganz verständlich, warum Helmholtz, welcher dieselben Gleichungen nach der letzteren Methode entwickelt hat, sagt[1], das Moment $\mathfrak{B}$ (Helmholtz nennt es C) müsse seinen Stützpunkt am inneren beweglichen Ringe der kardanischen Aufhängung haben, durch welche er sich die freie Beweglichkeit des Körpers um einen Punkt vermittelt denkt. Für die bloße Tatsache, daß die Achse des Momentes $\mathfrak{B}$ sich mit der Achse des größten Hauptträgheitsmomentes des Körpers mitbewegen muß, ist doch dieser Ausdruck nicht ganz der richtige.

Falls das Moment der auf den festen Körper wirkenden äußeren Kräfte zu allen Zeiten bezüglich der Achse $O\zeta$ des von den beiden anderen verschiedenen Hauptträgheitsmomentes gleich Null ist, was z. B. immer der Fall ist, wenn die Angriffspunkte aller äußeren Kräfte auf dieser Achse liegen, ist $\mathfrak{B} = 0$, und die dritte der Gleichungen 121) liefert:

$$c A' - B' = \nu = \text{konst.} \tag{124}$$

Die Gleichungen 121) vereinfachen sich dann und man erhält:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{d}{dt}(J\nu c + G\gamma^2 A') \\ \mathfrak{C} &= G(C'' - c\gamma A'^2) + J\gamma\nu A'. \end{aligned}\right. \tag{125}$$

Wir spezialisieren nun diese Formeln weiter, indem wir annehmen, daß auf den in Rede stehenden Körper, der bezüglich des Drehpunktes zwei gleiche Hauptträgheits-

[1]) Helmholtz, Die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung, Borchardts Journ. Bd. 100, S. 154; Ges. Abh. Bd. 3, S. 223.

momente hat, nur eine einzige Kraft p von unveränderlicher Größe und Richtung wirkt, deren Angriffspunkt auf der durch den Drehpunkt gehenden Hauptträgheitsachse $O\zeta$ liegt, der das verschiedene Hauptträgheitsmoment entspricht. Dieser Fall ist z. B. realisiert, wenn bloß die Schwere auf den Körper wirkt und sein Schwerpunkt in $O\zeta$ liegt.

Wir wählen die unveränderliche Richtung der Kraft zur negativen fixen OZ-Achse. ziehen also im Falle der Schwere die positive fixe OZ-Achse vertikal nach aufwärts. Ferner wahlen wir diejenige Halbachse, auf welcher der Angriffspunkt der Kraft p, also im Falle der Schwere der Schwerpunkt liegt, als positive $O\zeta$-Achse und bezeichnen dessen Entfernung vom Drehpunkte mit l, so daß also im Falle der Schwere p das Gewicht des Körpers und l die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte ist. Die Kraft p übt jetzt nur ein Moment $p l \gamma$ aus, welches den Winkel C zu vergrößern sucht, keines in der Richtung der Winkel A oder B. Es ist also:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = p l \gamma,$$

und die Gleichungen 125) verwandeln sich in

126) $$J \nu c + G \gamma^2 A' = \varkappa,$$

127) $$G(C'' - c \gamma A'^2) + J \nu \gamma A' = p l \gamma,$$

wobei $\varkappa$ eine Konstante ist. Dazu kommt noch die Gleichung 124).

$C\lambda$, $H\mu$ und $J\nu$ sind die Flächenmomente des Körpers bezüglich der Richtungen, welche die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ augenblicklich im Raume haben.

128) $$G \lambda \cos(z, \xi) + H \mu \cos(z, \eta) + J \nu \cos(z, \zeta)$$

ist also das Flachenmoment des Körpers bezüglich der fixen Achse OZ. Nun ist $\cos(z,\zeta) = c$, $\cos(z, \xi) = -\beta\gamma$, $\cos(z, \eta) = b\gamma$ (vergl. Gleichung 120) und das Schema 139) des § 23). Substituiert man noch für λ, μ, ν die Werte 94), so geht der Ausdruck 128) in die linke Seite der Gleichung 126) über. Letztere Gleichung besagt also, daß das Flächenmoment des Körpers bezüglich der Achse OZ konstant ist, was selbstverständlich ist, da ja die Kraft p bezüglich dieser Achse stets das Moment Null hat.

Dazu kommt noch die Gleichung der lebendigen Kraft, welche wir am einfachsten in folgender Weise gewinnen. Wir multiplizieren die Gleichung 127) mit C' und addieren dazu die mit A' multiplizierte Ableitung der Gleichung 126) nach t. Es folgt:

$$G(C' C'' + \gamma^2 A' A'' + c\gamma\, C' A'^2) = p\, l\, \gamma\, C'$$

und daraus durch Integration

$$G(C'^2 + \gamma^2 A'^2) + 2\, p\, l\, c = \chi\,, \tag{129}$$

wobei χ eine neue Integrationskonstante ist. Daß dies in der Tat nichts anderes als die Gleichung der lebendigen Kraft ist, erkennt man leicht folgendermaßen. Da ν konstant ist, reduziert sich der veränderliche Teil der lebendigen Kraft auf $\frac{1}{2} G(\lambda^2 + \mu^2)$, was gemäß der Gleichungen 94) gleich $\frac{1}{2} G(C'^2 + \gamma^2 A'^2)$ ist. Die Arbeit der Kraft aber ist $\int p\, l\, \gamma\, d t = - p\, l\, c + \text{konst.}$

Eliminiert man aus den Gleichungen 126) und 129) die Größe A', so erhält man $d t$ durch einen Differentialausdruck gegeben, der nur C und $d C$ enthält. Die Substitution des so erhaltenen Ausdruckes für dt in Gleichung 126) liefert auch $d A$ in Form eines Differentialausdruckes, der nur C und $d C$ enthält. Die Integration des ersten Differentialausdruckes liefert C als elliptische Function von t, die des zweiten C als elliptische Funktion von A. Wir führen dies hier nicht weiter aus, sondern wollen nur in einigen noch spezielleren Fällen den Typus der Erscheinungen aus den Gleichungen herleiten.

§ 22. Spezialfälle.

I. Für $\nu = 0$ gehen die Gleichungen 126) und 129) in die Bewegungsgleichungen eines gewöhnlichen physischen Pendels über, das unter dem Einflusse der Schwerkraft allein um einen festen Punkt drehbar ist und folgende Bedingungen erfüllt:

1. Die Verbindungslinie des Drehpunktes und Schwerpunktes, welche wir die Pendelachse nennen, muß Hauptträgheitsachse sein.

2. Auf dieser Achse muß seine augenblickliche Drehungsachse zu Anfang der Zeit senkrecht stehen, wenn es zu dieser Zeit überhaupt eine Bewegung hatte.

3. Die Tragheitsmomente bezüglich aller durch den Drehpunkt senkrecht zur Pendelachse gelegten Achsen müssen gleich sein.

Die Gleichungen 126) und 129) stimmen in diesem Falle vollkommen mit den Gleichungen, welche wir im I. Teile, § 40 S. 144 ff für die Bewegung des einfachen Pendels fanden, wenn wir an Stelle des dort mit w bezeichneten Winkels $180^0 - C$, an Stelle des mit ϑ bezeichneten Winkels den Winkel A und an Stelle der Konstanten g, k und H die Konstante $l^2 p/G$, $l^2 \varkappa/G$ und $l^2 \chi/G$ setzen. Es tritt also an Stelle des Winkels, welchen die vom Aufhängepunkte nach dem beweglichen materiellen Punkte gezogene Gerade mit der Vertikalen bildet, der Winkel, den die Pendelachse mit der Vertikalen bildet, an Stelle des Winkels, den die durch den Aufhängepunkt und den beweglichen materiellen Punkt gelegte Vertikalebene mit einer fixen Vertikalebene bildet, der Winkel, den die durch die Pendelachse gelegte Vertikalebene mit einer fixen Vertikalebene bildet.

II. Wir betrachten den Fall, daß ν von Null verschieden ist, aber der schwere Körper sich niemals weit von seiner Ruhelage entfernt, so daß also die positive $O\zeta$-Achse immer nahezu vertikal nach abwärts gerichtet, und wenn wir $C = 180^0 - r$ setzen, r eine kleine Größe ist.[1]) Daher kann $\gamma = \sin C = r$, $c = \cos(180^0 - r) = -1 + \frac{1}{2} r^2$ gesetzt werden und die Gleichungen 126) und 129) verwandeln sich in:

130) $$r^2 (G A' + \tfrac{1}{2} J \nu) = \varkappa + J \nu,$$

131) $$G(r'^2 + r^2 A'^2) = \chi + 2 p l - p l r^2.$$

Wir wollen nun die Lage des Körpers nicht relativ gegen das fixe Koordinatensystem, sondern gegen ein drittes

---

[1]) Ein positives ν bedeutet also eine Rotation, die von der positiven y- gegen die positive x-Achse auf kürzestem Wege geschieht

Koordinatensystem OX', OY', OZ' bestimmen. OZ' soll immer mit der fixen z-Achse OZ zusammenfallen. OX' soll zu Anfang der Zeit mit OX zusammenfallen, sich aber in der festen xy-Ebene mit der konstanten Geschwindigkeit $\frac{J\nu}{2G}$ um die feste z-Achse im negativen Sinne drehen, also so, wie man auf kürzestem Wege von der positiven y- zur positiven x-Achse gelangt. Die beiden Achsen OX und OX' sollen also zur Zeit t den Winkel $\frac{J\nu t}{2G}$ miteinander einschließen. Zur selben Zeit ist daher der Winkel zwischen OR und OX'

$$\sphericalangle OR,\ OX' = A + \frac{J\nu t}{2G}.$$

Wir führen lieber den Winkel ϑ zwischen der Vertikalebene, die die Pendelachse $O\zeta$ enthält, und der $X'OZ'$-Ebene also den Winkel ein, welchen jene beiden von der z-Achse begrenzten Halbebenen miteinander bilden, von denen die eine die Achse $O\zeta$, die andere die Achse OX' enthält. Da die erstere Halbebene immer senkrecht auf OR steht, so ist:

132) $$\vartheta = (\sphericalangle OR,\ OX') - 90^0 = A + \frac{J\nu t}{2G} - 90^0.$$

Wenn h und k neue Integrationskonstanten sind, so gehen die Gleichungen 130) und 131) durch Einführung des Winkels ϑ über in

133) $$r^2\vartheta' = k,\ r'^2 + r^2\vartheta'^2 = h - \left(\frac{pl}{G} + \frac{J^2\nu^2}{4G^2}\right)r^2.$$

Dies sind aber genau wieder die Gleichungen, welche wir im I. Teile, § 40 S. 146 für sehr kleine Schwingungen des einfachen Pendels fanden. Bei kleinen Schwingungen geschieht also die Bewegung des rotierenden Pendels relativ gegen das fixe Koordinatensystem, oder, wie man sagt, absolut im Raume gerade so, wie die des gewöhnlichen nicht rotierenden Pendels relativ gegen ein Koordinatensystem, das sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{J\nu}{2G}$ im positiven Sinne um die nach aufwärts gezogene Vertikale dreht, also wenn dies die Winkelgeschwindigkeit der Erde wäre, wie die eines am Pole aufgehängten Foucaultschen Pendels relativ gegen die Erde. Beim rotierenden Pendel müssen noch die schon am Anfange dieses Paragraphen hervorgehobenen Bedingungen erfüllt sein, daß die Verbindungslinie vom Drehpunkt und Schwerpunkt Hauptträgheitsachse ist und daß die Trägheitsmomente bezüglich aller durch den Drehpunkt senkrecht zu dieser Verbindungslinie (der Pendelachse) gezogener Achsen gleich sind.

Die Pendelachse des nicht rotierenden Vergleichspendels kann sich natürlich, je nach den Werten der Konstanten, absolut im Raume in einer Ebene, einem elliptischen oder Kreiskegel bewegen.

Dieselbe Bewegung macht nach der alten Undulationstheorie des Lichtes ein Ätherteilchen, wenn sich geradlinig, elliptisch oder zirkular polarisiertes Licht in einem Körper fortpflanzt, der die Polarisationsebene dreht, denn es durchläuft ja dieselben Bewegungsphasen nacheinander, welche die verschiedenen Ätherteilchen des Strahles nach der alten Undulationstheorie gleichzeitig haben. Daher erklärt man die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes oft durch die Annahme, daß die Volumelemente Bestandteile enthalten, die um die Achse der magnetischen Kraft rotieren.

Dieselbe Bewegung erhält man auch, wenn man mit einem um die Pendelachse nach allen Seiten gleichbeschaffenen Pendel ein Gyrotrop fest verbindet, welches sich rasch um die Pendelachse als Rotationsachse dreht. Dieses Pendel schwingt wie ein Foucaultsches schwingen würde, wenn die Winkelgeschwindigkeit der Erde viel größer wäre oder wie obiges Ätherteilchen. Durch eine daran befestigte Büchse, aus welcher ein feiner Sandstrahl auf ein untergelegtes Brett fließt, kann man die Bahn eines Punktes der Achse fixieren. Entsprechend der ungleichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des rechts- und linkszirkular polarisierten Strahles hat das Pendel, wenn es als Kreispendel schwingt für die eine und andere Umlaufsrichtung verschiedene Schwingungsdauer.

III. Die Bewegung, welche man die Präzessionsbewegung eines Kreisels nennt, wird folgendermaßen erzeugt: Ein schwerer Rotationskörper, der sich sehr rasch um seine Rotationsachse $O\zeta$ dreht, wird möglichst ruhig auf eine Vorrichtung aufgesetzt, die einen vom Schwerpunkte verschiedenen Punkt O der Achse fixiert.

$\frac{1}{2} J\nu^2$ ist die Energie der Rotation des Körpers um die Achse $O\zeta$, welche während der ganzen Bewegung konstant bleibt.

$$E = \frac{G}{2}\gamma^2 A'^2 + \frac{G\,C'^2}{2} + p\,l(1 + c)$$

ist die übrige Energie des Körpers gegenüber der Ruhe desselben in seiner Gleichgewichtslage (d. h. letztere als Energienullpunkt gewählt). E muß nach Gleichung 129) natürlich ebenfalls konstant bleiben. Die Bedingung, daß C nahe gleich 180^0 sei, lassen wir nun fallen. Die Bedingung, daß der Körper sehr rasch rotiert, aber ruhig aufgesetzt wird, präzisieren wir dahin, daß E zu Anfang und daher immer klein gegen $\frac{1}{2} J\nu^2$ sein soll.

Da im Ausdrucke für E alle drei Addenden wesentlich positiv sind, so muß um so mehr der erste derselben $\frac{1}{2} G\gamma^2 A'^2$ klein gegenüber $\frac{1}{2} J\nu^2$ sein. Wir setzen nun voraus, daß G nicht sehr groß gegenüber J ist. Da jedenfalls $\gamma \gtreqless 1$ ist, so folgt, daß auch $G^2\gamma^4 A'^2$ klein gegen $J^2\nu^2$, daher $G\gamma^2 A'$ klein gegen $J\nu$ ist. Wenn wir die Werte zu Anfang der Zeit mit dem Index Null bezeichnen, so folgt aus 126):

$$c - c_0 = \frac{G\gamma_0^2 A'_0 - G\gamma^2 A'}{J\nu}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung sind im Zähler beide Ausdrücke klein gegen den Nenner, daher ist die ganze rechte Seite klein und c immer sehr nahe gleich c_0. Es wird also der Winkel C immer fast konstant bleiben, die Achse des Kreisels sinkt nicht, sondern behält ihre Neigung gegen die Vertikale.

IV. Bewegungen, wo C konstant ist, sind übrigens auch möglich, wenn $\frac{1}{2} J\nu^2$ nicht groß gegen E ist und wir wollen alle diese Bewegungen im folgenden unter einem behandeln. Wenn C konstant ist, muß nach 129) und 130) auch A' konstant sein. Setzt man die unter dieser Voraussetzung aus den Gleichungen 94) abgeleiteten Werte von $d\lambda/dt$ und dp/dt in die beiden ersten der Gleichungen 119), so folgt:

$$-b\gamma G A' B' = (G - J)\nu b \gamma A' + p l \gamma b$$
$$-\beta\gamma G A' B' = (G - J)\nu \beta \gamma A' + p l \gamma \beta .$$

Diese beiden Gleichungen sind identisch. Durch Kürzung der ersten mit $b\gamma$ oder der zweiten mit $\beta\gamma$ folgt mit Rücksicht auf 124):

134) $$G c A'^2 - J \nu A' + p l = 0$$

135) $$A' = \frac{J\nu \pm \sqrt{J^2\nu^2 - 4 G c p l}}{2 G c}.$$

Sei zuerst C gleich $180^0 - \varepsilon$, wobei $\varepsilon < 90^0$ ist, so wird:

$$A' = \frac{-J\nu \pm \sqrt{J^2\nu^2 + 4 G p l \cos\varepsilon}}{2 G \cos\varepsilon}.$$

Für $\nu = 0$ entspricht dies einem gewöhnlichen sogenannten Kreispendel, d. h. einem Pendel, dessen Schwerpunkt sich in einem horizontalen Kreise bewegt Die Dauer eines Hinganges ist π/A'. Ist ν von Null verschieden, so enthält das Kreispendel einen um die Verbindungslinie seines Schwerpunktes und Aufhängepunktes ohne Reibung rotierenden Körper. Die Schwingungsdauer ist dann verschieden, je nachdem das Pendel in der einen oder anderen Richtung herumgeht. Der Zahlenwert von A' ist größer, daher die Schwingungsdauer kürzer, wenn A' das entgegengesesetzte Vorzeichen wie ν hat, d. h. wenn der rotierende Körper, dessen Achse mit der negativen OZ-Achse einen spitzen Winkel bildet, so daß ein positives ν annähernd einer gleichsinnigen Rotation wie ein abnehmendes A entspricht, im gleichen Sinne rotiert als das Pendel herumgeht. Dies haben wir für sehr kleine Entfernungen von der Ruhelage schon sub II bewiesen und haben schon dort auf die Analogie hingewiesen mit der Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des rechts und links zirkularen Lichtes in Medien, welche die Polarisationsebene des Lichtes drehen.

Für $C = 90^0$ wird die Umlaufsgeschwindigkeit für die Umlaufsrichtung, für welche A' und ν entgegengesetzt bezeichnet sind, unendlich, für die andere gleich

$$136) \qquad \frac{p\,l}{J\nu}.$$

Ist C ein spitzer Winkel, so ist eine derartige Bewegung nur möglich für

$$J\nu \gtreqless 2\sqrt{G\,p\,l\,c},$$

und zwar, wenn das Ungleichheitszeichen gilt, mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten im gleichen Sinne.

Kehren wir wieder zu der sub III gemachten Spezialisierung zurück, d. h. nehmen wir an, daß ν sehr groß ist. Dann wird die eine Wurzel der Gleichung 134) in allen drei Fällen ($C < 90^0$, $C = 90^0$, $C > 90^0$) sehr groß (im zweiten genau unendlich). Die andere nimmt in allen drei Fällen mit wachsendem ν ab und hat für große ν angenähert den Wert 136). Sie entspricht also der bekannten sogenannten Präzessionsbewegung. Da A' positiv ist, so dreht sich dabei die Ebene der OZ- und $O\zeta$-Achse im positiven Sinne um OZ, wenn die Rotation im positiven Sinne um $O\zeta$ erfolgt.

Genau dieselbe Präzessionsbewegung ist natürlich immer möglich, wenn unter sonst gleichen Umständen statt der Schwerkraft beliebige andere Kräfte wirken, sobald sich nur deren Wirksamkeit auf ein Moment $\mathfrak{M}$ reduziert, das bloß die Achse $O\zeta$ gegen OZ oder davon wegzutreiben, also den Körper um eine auf diesen beiden Geraden senkrechte Achse zu drehen sucht. Man hat dann in den obigen Formeln bloß $\mathfrak{M}/\gamma$ statt $p\,l$ zu schreiben.

Den Sinn der Präzessionsbewegung findet man unter allen Umständen folgendermaßen: Man denkt sich zuerst die Achse $O\zeta$ auf kürzestem Wege senkrecht gegen OZ gedreht. Dann denkt man sich in einem beliebigen Punkte der Achse $O\zeta$, der nicht mit O zusammenfällt, eine Kraft angebracht, die den Körper in demselben Sinne wie das Moment $\mathfrak{M}$ zu drehen sucht, und verlängert diese Kraft in dem Sinne, in dem sie wirkt, bis zur Peripherie des rotierenden Körpers. Die Richtung, wohin sich der getroffene Punkt der Peripherie infolge der Rotationsbewegung des Körpers augenblicklich bewegt, fällt mit der Richtung zusammen, in der sich derselbe Punkt infolge der Präzession bewegt

§ 23. Komponenten der Drehung um die fixen Achsen. Winkel der fixen und beweglichen Achsen.

Zwischen den verschiedenen beim Probleme der Rotation eines festen Körpers um einen fixen Punkt vorkommenden Größen besteht noch eine große Anzahl wichtiger Beziehungen, welche wir nun kennen lernen wollen. Wir haben in den Gleichungen 94) die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω in drei Komponenten um die beweglichen Koordinatenachsen als Drehungsachsen zerlegt. Wir wollen sie nun in drei Komponenten um die drei fixen Koordinatenachsen OX, OY, OZ als Drehungsachsen zerlegen und diese letzteren Komponenten mit l, m, n bezeichnen. Wir betrachten jede der drei Lagenänderungen, welche eintreten, wenn

1. bei konstantem B und C der Winkel A um dA,
2. bei konstantem A und C der Winkel B um dB,
3. bei konstantem A und B der Winkel C um dC

wächst, und zerlegen jede in drei Drehungen um die drei fixen Koordinatenachsen. Die erste Lagenänderung bedarf keiner weiteren Zerlegung, da sie einer Drehung um OZ um den Winkel dA entspricht. Die zweite Lagenänderung ist eine Drehung um den Winkel dB im negativen Sinne um die Achse $O\zeta$, also um den Winkel $-dB$ im positiven Sinne um dieselbe Achse. Wir wollen den Durchschnittspunkt der beiden größten Kreise ζZ und $\xi\eta$ der Fig. 1, § 13 S. 53, welcher Z am nächsten liegt, mit R_1, und den der Verlängerung der beiden größten Kreise XRY und $\zeta Z R_1$ mit R_2 bezeichnen (letzterer Punkt ist in der Figur nicht gezeichnet). Die obige Drehung um die Achse $O\zeta$ zerlegen wir nun in zwei Komponenten um OZ und OR_2. Erstere ist $-c\,dB$, letztere $\gamma\,dB$. Letztere wird noch in zwei Komponenten $-\alpha\gamma\,dB$ und $+a\gamma\,dB$ um OX und OY zerlegt.

Die dritte oben betrachtete Lagenänderung bestand darin, daß bei konstantem A und B der Winkel C um dC wächst. Dabei dreht sich der Körper um die Achse OR um den Winkel dC, welche Drehung um die Achsen OX und OY die Komponenten $a\,dC$ und $\alpha\,dC$ liefert. Wenn wir also ganz wie im Schema 87) S. 56 in die erste Vertikalreihe die Komponenten der ersten, in die zweite die der zweiten, in die dritte die der dritten Lagenänderung schreiben; in die erste Horizontalreihe aber die Drehungskomponenten um OX, in die zweite die um OY, in die dritte die um OZ, so erhalten wir folgendes Schema:

137)

	dA	dB	dC
OX	—	$-\alpha\gamma\, dB$	$a\, dC$
OY	—	$a\gamma\, dB$	$\alpha\, dC$
OZ	dA	$-c\, dB$	

Um l, m, n zu finden genügt es anzunehmen, daß A während der Zeit dt um $dA = A'dt$, B um $dB = B'dt$, C um $dC = C'dt$ wächst. Die gesamte durch dt dividierte Drehung, welche der Körper dabei um die Achse OX erfährt, ist die Komponente l der Winkelgeschwindigkeit in der Richtung OX, und da Analoges für die Y- und Z-Achse gilt, so ist also:

138) $l = -\alpha\gamma B' + a C', \quad m = a\gamma B' + \alpha C', \quad n = A' - c B'.$

Wir wollen nun die Winkel, welche je eine bewegliche mit je einer fixen Koordinatenachse einschließt, durch die drei Winkel A, B, C ausdrücken. Wir bezeichnen den Kosinus jedes Winkels, den die Achse $O\xi$ mit irgend einer der fixen Koordinatenachsen einschließt, mit u. v und w haben die gleiche Bedeutung für die Achsen $O\eta$ und $O\zeta$. Je nachdem die bewegliche Koordinatenachse den betreffenden Winkel mit OX, OY oder OZ einschließt, soll der Buchstabe für den Kosinus unten den Index x, y oder z erhalten.

Wir denken uns in Fig. 1 wieder alle Punkte auf der Kugeloberfläche durch größte Kreise verbunden; dann finden wir u_x, u_y, v_x, v_y aus den sphärischen Dreiecken $XR\xi$, $YR\xi$, $XR\eta$, $YR\eta$, u_z und v_z aus den sphärischen Dreiecken $ZR\xi$ um $ZR\eta$, w_x und w_y aus den sphärischen Dreiecken ζRX und ζRY. Die in dieser Weise sich ergebenden Werte können wir in der folgenden Tabelle zusammenstellen:

139)

	OX	OY	OZ
$O\xi$	$u_x = a\,b + \alpha\,\beta\,c$	$u_y = \alpha\,b - a\,\beta\,c$	$u_z = -\beta\,\gamma$
$O\eta$	$v_x = a\,\beta - \alpha\,b\,c$	$v_y = \alpha\,\beta + a\,b\,c$	$v_z = b\,\gamma$
$O\zeta$	$w_x = \alpha\,\gamma$	$w_y = -a\,\gamma$	$w_z = c$

Nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie hat man ferner:

$$
140)\left\{\begin{array}{ll}
u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 & u_x^2 + v_x^2 + w_x^2 = 1 \\
v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1 & u_y^2 + v_y^2 + w_y^2 = 1 \\
w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 1 & u_z^2 + v_z^2 + w_z^2 = 1 \\
u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y = 0 & u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0 \\
u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z = 0 & u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0 \\
u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z = 0 & v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0
\end{array}\right.
$$

$$
140a)\left\{\begin{array}{lll}
u_x = v_y w_z - v_z w_y, & v_x = w_y u_z - w_z u_y, & w_x = u_y v_z - u_z v_y \\
u_y = v_z w_x - v_x w_z, & v_y = w_z u_x - w_x u_z, & w_y = u_z v_x - u_x v_z \\
u_z = v_x w_y - v_y w_x, & v_z = w_x u_y - u_x w_y, & w_z = u_x v_y - u_y v_x \\
 & \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} = 1, &
\end{array}\right.
$$

wobei in den Gleichungen 140a) das Zeichen wechseln müßte, wenn das lateinische und griechische Koordinatensystem nicht, wie in Schema 139) angenommen ist, kongruent, sondern Spiegelbilder wären. Hierfür sowie für die Formeln 140a) werden wir einen besonderen Beweis zu Anfang des § 25 liefern. Alle diese Formeln folgen auch durch Substitution der Werte des Schemas 139).

§ 24. Die Drehung, ausgedrückt durch die Differentiale der Kosinus der Winkel zwischen den fixen und beweglichen Achsen.

Wir bezeichnen nun mit u_x, v_x, u_y … die Werte, welche die Kosinus der Winkel zwischen den fixen und beweglichen Koordinatenachsen zur Zeit t haben, mit $u_x + d\,u_x$, $v_x + d\,v_x$,

$u_y + d u_y \ldots$ die Werte, welche dieselben Kosinus zur Zeit $t + dt$ haben, und wollen daraus die drei Drehungen $\lambda\, dt$, $\mu\, dt$, $\nu\, dt$ um die drei Achsen $O\xi, O\eta, O\zeta$ berechnen, welche zusammengenommen der gesamten Lagenänderung äquivalent sind, welche der Körper während der Zeit dt erfährt.

Wir wollen da die Achsen $O\xi, O\eta, O\zeta$ doppelt ziehen. Die einen sollen ohne unteren Index bezeichnet werden, sich mit dem Körper mitbewegen und zur Zeit $t + dt$ die Lagen $O\xi'''$, $O\eta'''$, $O\zeta'''$ haben. Die anderen $O\xi_1, O\eta_1, O\zeta_1$ sollen zur Zeit t mit $O\xi, O\eta, O\zeta$ zusammenfallen, aber fix im Raume und daher auch unveränderlich in ihrer Lage gegen OX, OY, OZ bleiben. Dann bilden also $O\xi, O\eta, O\zeta$ zur Zeit t und $O\xi_1, O\eta_1, O\zeta_1$ immer mit den fixen Koordinatenachsen Winkel, deren Kosinus u_x, v_x, $u_y \ldots$ sind. $O\xi'''$, $O\eta'''$ und $O\zeta'''$ aber bilden mit OX, OY, OZ Winkel, deren Kosinus $u_x + d u_x$, $v_x + d x_x$, $u_y + d u_y \ldots$ sind.

Die gesamte Lagenänderung des Körpers während der Zeit dt kann man sich durch folgende drei Drehungen hervorgebracht denken:

1. Der Körper erfährt die Drehung $\lambda\, dt$ um die Achse $O\xi_1$. Schon bei dieser Drehung soll die Achse $O\eta$ fest mit dem Körper verbunden sein und in die Lage $O\eta'$ übergehen. Es ist also der Winkel zwischen $O\eta$ und $O\eta'$ gleich dem Drehungswinkel $\lambda\, dt$. Da dieser Winkel sehr klein ist, so ist mit Vernachlässigung von unendlich kleinem höherer Ordnung:

$$\lambda\, dt = \sin(O\eta, O\eta') = \cos(O\zeta_1, O\eta').$$

2. Der Körper erfährt die Drehung $\mu\, dt$ um die Achse $O\eta_1$. Dabei soll die Achse $O\eta'$, welche natürlich wieder fest mit dem Körper verbunden ist, in die Lage $O\eta''$ übergehen. Da sie sich hierbei in einer Ebene verschiebt, die senkrecht auf der Ebene der beiden Geraden $O\zeta_1$ und $O\eta'$ steht, so ändert sich dabei der Kosinus der beiden letzteren Geraden nur um unendlich Kleines höherer Ordnung, mit dessen Vernachlässigung man daher hat:

$$\cos(O\zeta_1, O\eta'') = \lambda\, dt.$$

3. Der Körper erfährt noch die Drehung $\nu\, dt$ um die Achse $O\zeta_1$. Dadurch soll die noch immer fest mit dem

Körper verbundene Achse $O\eta''$ in die Lage $O\eta'''$ übergeführt werden. Da sie sich hierbei wieder in einer Ebene bewegt, die senkrecht auf der Ebene der beiden Geraden $O\xi_1$ und $O\eta''$ steht, so ändert sich deren Kosinus wieder um unendlich Kleines zweiter Ordnung, es ist also schließlich:

141) $$\cos(O\zeta_1, O\eta''') = \lambda\, dt.$$

$O\eta'''$ ist aber genau die Lage der Achse $O\eta$, welche schon oben mit $O\eta'''$ bezeichnet wurde. Denn es ist die Lage, die dadurch entsteht, daß der Körper seine gesamte während dt erfolgende Lagenänderung erfährt und dabei die Achse $O\eta$ fest mit ihm verbunden bleibt. Die Kosinus der Winkel, welche $O\eta'''$ mit den fixen Koordinatenachsen bildet, sind daher diejenigen Größen, welche wir mit $v_x + dv_x$, $v_y + dv_y$, $v_z + dv_z$ bezeichnet haben, während $O\zeta_1$ mit denselben Koordinatenachsen diejenigen Winkel bildet, deren Kosinus wir mit w_x, w_y und w_z bezeichnet haben. Daher ist:

142) $$\left\{\begin{aligned}\cos(O\zeta_1, O\eta''') &= w_x(v_x + dv_x) + w_y(v_y + dv_y) + \\ &+ w_z(v_z + dv_z) = w_x\, dv_x + w_y\, dv_y + w_z\, dv_z\end{aligned}\right.$$

wegen

143) $$v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0$$

(vergl. die Relationen 140).

Bedenken wir, daß in du_x etc. nur Glieder höherer Ordnung, die also durch dt dividiert mit abnehmendem dt sich der Grenze Null nähern, vernachlässigt sind, so daß die Quotienten du_x/dt etc. genau das sind, was man als die Differentialquotienten dieser Größen nach der Zeit bezeichnet, so erhalten wir, wenn wir den Ausdruck 142) in die Gleichung 141) einsetzen und durch dt dividieren:

144) $$\lambda = w_x \frac{dv_x}{dt} + w_y \frac{dv_y}{dt} + w_z \frac{dv_z}{dt}.$$

Die Differentiation der Gleichung 143), welche offenbar zu allen Zeiten gilt, nach der Zeit lehrt uns, daß die rechte Seite der Gleichung 144) auch gleich

$$-v_x \frac{dw_x}{dt} - v_y \frac{dw_y}{dt} - v_z \frac{dw_z}{dt}$$

ist. Man erhält daher auch:

$$145)\qquad \lambda = - v_x \frac{d w_x}{d t} - v_y \frac{d w_y}{d t} - v_z \frac{d w_z}{d t}.$$

Die zyklische Vertauschung liefert:

$$146)\quad \begin{cases} \mu = u_x \frac{d w_x}{d t} + u_y \frac{d w_y}{d t} + u_z \frac{d w_z}{d t} = - w_x \frac{d u_x}{d t} - w_y \frac{d u_y}{d t} - w_z \frac{d u_z}{d t} \\ \nu = v_x \frac{d u_x}{d t} + v_y \frac{d u_y}{d t} + v_z \frac{d u_z}{d t} = - u_x \frac{d v_x}{d t} - u_y \frac{d v_y}{d t} - u_z \frac{d v_z}{d t} \end{cases}$$

Diese Gleichungen könnten verifiziert werden, indem wir in ihre rechte Seite für $v_x, w_x \ldots$ ihre Werte aus dem Schema 139) einsetzen. Durch Differentiation dieser Werte nach der Zeit kann man $d v_x/d t$, $d w_x/d t \ldots$ finden, die dann auch in die rechte Seite der Gleichungen 144), 145) und 146) einzusetzen sind. Man würde so für die rechten Seiten in 144), 145) und 146) wieder die Werte erhalten, die nach 94) gleich λ, μ und ν sind.

Wir können analog auch l, m, n durch $u_x, v_x, u_y \ldots$ und deren Differentialquotienten nach der Zeit ausdrücken. $l d t$, $m d t$ und $n d t$ sind die drei Drehungswinkel, welche dem Körper um die Achsen OX, OY, OZ erteilt werden müssen, um die Lagenänderung zu erzeugen, welche er während der Zeit dt wirklich erfährt.

Man würde offenbar dieselbe relative Lagenänderung des Körpers relativ gegen die Achsen OX, OY, OZ erhalten, wenn man den Körper und damit die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ fix im Raume ließe, aber die drei fest miteinander verbundenen Koordinatenachsen OX, OY, OZ zuerst um OX um den Winkel $-l d t$, dann um OY um den Winkel $-m d t$, und zuletzt um OZ um den Winkel $-n d t$ drehen würde. Sie sollen dadurch in die Lagen OX''', OY''' und OZ''' übergehen. Da diese drei Geraden relativ gegen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ dieselbe Lage wie die Geraden, die wir früher mit $O\xi'''$, $O\eta'''$, $O\zeta'''$ bezeichneten, relativ gegen OX, OY, OZ haben, so ist z. B.:

$$147)\quad \begin{cases} \cos(OY''', O\xi) = u_y + d u_y, \quad \cos(OY''', O\eta) = v_y + d v_y, \\ \qquad \cos(OY''', O\zeta) = w_y + d w_y. \end{cases}$$

Um die Lage OY''' zu ermitteln, denken wir uns wieder die Achsen OX, OY, OZ doppelt gezeichnet. Die ersten ohne unteren Index sollen die oben besprochenen Drehungen um die Winkel $-l\,dt$, $-m\,dt$, $-n\,dt$ machen. Die zweiten, die wir mit OX_1, OY_1, OZ_1 bezeichnen wollen, sollen fix im Raume und daher auch relativ gegen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ bleiben, da wir jetzt auch die Lage der letzteren Achsen unveränderlich lassen. Die Drehung $-l\,dt$ geschieht um die Achse OX. Durch dieselbe gehe OY in die Lage OY' über, so daß man analog der Gleichung 141) hat:

148) $$-l\,dt = \sin(OY, OY') = \cos(OY', OZ_1).$$

Durch die beiden Drehungen $-m\,dt$ und $-n\,dt$ um die Achse OY_1 und OZ_1 soll die Gerade OY' in die Lagen OY'' und OY''' übergehen. Es ist dann OY''' mit der oben schon so bezeichneten Geraden identisch, und da durch die beiden zuletzt erwähnten Drehungen der Kosinus sich nur um unendlich Kleines zweiter Ordnung ändert, so folgt aus Gleichung 148):

149) $$\cos(OY''', OZ_1) = -l\,dt.$$

Da nun

$$\cos(OZ_1, O\xi) = u_z, \quad \cos(OZ_1, O\eta) = v_z, \quad \cos(OZ_1, O\zeta) = w_z$$

ist, so folgt aus den Gleichungen 147)

$$\cos(OY''', OZ_1) = u_z(u_y + du_y) + v_z(v_y + dv_y) + w_z(w_y + dw_y),$$

woraus wir in Verbindung mit Gleichung 149), ganz wie wir früher die Gleichung 144) erhielten, finden:

150) $$l = -u_z\frac{du_y}{dt} - v_z\frac{dv_y}{dt} - w_z\frac{dw_y}{dt} = u_y\frac{du_z}{dt} + v_y\frac{dv_z}{dt} + w_y\frac{dw_z}{dt},$$

mit zwei analogen durch zyklische Vertauschung gebildeten Gleichungen. Würde man die im Schema 139) zusammengestellten Werte für $u_x, v_x, u_y \ldots$ hier substituieren, aus diesen durch Differentiation nach der Zeit $du_x/dt\ldots$ bilden und auch diese Werte substituieren, so würde man wieder die Gleichungen 138) erhalten.

§ 25. Verschiedene andere Relationen

Betrachtet man die drei unter den Gleichungen 140) vorkommenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 &= 1 \\
u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z &= 0 \\
u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z &= 0
\end{aligned}
$$

als lineare Gleichungen für u_x, u_y, u_z und setzt die Determinante der Koeffizienten

$$
\begin{vmatrix} u_x, & u_y, & u_z \\ v_x, & v_y, & v_z \\ w_x, & w_y, & w_z \end{vmatrix} = \Delta,
$$

so folgt:

$$
151) \qquad \left\{ \begin{aligned}
u_x \Delta &= v_y w_z - v_z w_y \\
u_y \Delta &= v_z w_x - v_x w_z \\
u_z \Delta &= w_y v_x - w_x v_y .
\end{aligned} \right.
$$

Addiert man die Quadrate dieser drei Ausdrücke, so erhält man links Δ^2. Die rechte Seite kann man leicht in die Form

$$
(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)(w_x^2 + w_y^2 + w_z^2) - (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z)^2 = 1
$$

bringen. Es folgt also $\Delta = \pm 1$.

Bringt man die positive OX-Achse mit der positiven $O\xi$-Achse, und gleichzeitig die positive $O\eta$-Achse mit der positiven OY-Achse zur Deckung, so decken sich, falls die Koordinatensyteme kongruent sind, auch die positiven Z-Achsen. Es ist also $u_x = v_y = w_z = 1$, und aus der ersten der Gleichungen 151) folgt $\Delta = +1$. Falls die Koordinatensysteme Spiegelbilder sind, so deckt sich die positive Z-Achse mit der negativen ζ-Achse. Es ist also $u_x = v_y = -w_z = 1$ und es folgt $\Delta = -1$.

Natürlich behält Δ in beiden Fällen seinen Wert auch für alle anderen relativen Lagen der Koordinatenachsen, da es, wenn sich die Lage kontinuierlich ändert, nicht plötzlich von -1 zu $+1$ überspringen kann. Wir setzen immer kongruente Koordinatensysteme voraus, so daß also $\Delta = +1$ ist.

Wir wollen nun mit x, y, z die Koordinaten irgend eines Punktes P des festen Körpers bezüglich der fixen Koordinatenachsen zur Zeit t bezeichnen. ξ, η, ζ seien die

Koordinaten desselben Punktes bezüglich der beweglichen Koordinatenachsen. Die letzteren Koordinaten ändern sich natürlich nicht mit der Zeit. Dann hat man nach den bekannten Formeln für Koordinatentransformation:

$$152)\quad \begin{cases} x = u_x\xi + v_x\eta + w_x\zeta \\ y = u_y\xi + v_y\eta + w_y\zeta \\ z = u_z\xi + v_z\eta + w_z\zeta \end{cases}$$

$$153)\quad \begin{cases} \xi = u_x x + u_y y + u_z z \\ \eta = v_x x + v_y y + v_z z \\ \zeta = w_x x + w_y y + w_z z. \end{cases}$$

In jeder dieser Gleichungen zieht ein lateinisches x, y oder z auch den Index x oder y oder z nach sich, ein griechischer Buchstabe ξ, η oder ζ aber den Buchstaben u, v oder w.

Wir wollen nun die Zuwächse dx, dy, dz berechnen, welche die Koordinaten x, y, z durch diejenige Lagenänderung erfahren, die der Körper während der Zeit dt erfährt. Diese Lagenänderung kann durch die drei Drehungen $l\,dt$ um die Achse OX, $m\,dt$ um die Achse OY, $n\,dt$ um die Achse OZ erzeugt werden. Bezeichnet man die Koordinatenzuwächse, welche durch die erste resp. zweite oder dritte Drehung allein erzeugt würden, mit dem Index l resp. m oder n, so ist nach Formel 145) (§ 55 des I. Teiles):

$$\begin{array}{lll} dx_l = 0, & dy_l = -l z\,dt, & dz_l = l y\,dt \\ dx_m = m z\,dt, & dy_m = 0, & dz_m = -m x\,dt \\ dx_n = -n y\,dt, & dy_n = n x\,dt, & dn_n = 0. \end{array}$$

Die durch die gesamte, während dt stattfindende Lagenänderung entstehenden Koordinatenzuwächse sind bis auf unendlich Kleines höherer Ordnung die Superposition dieser Zuwächse. Dividiert man die Gesamtzuwächse durch dt, so eilen die Quotienten mit abnehmendem dt folgenden Grenzwerten zu, welche also die Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit darstellen:

$$
154) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = mz - ny \\ \dfrac{dy}{dt} = nx - lz \\ \dfrac{dz}{dt} = ly - mx. \end{cases}
$$

Dieselben Formeln erhält man, wenn man die erste der Gleichungen 152) nach der Zeit differenziert. Da die beweglichen Koordinatenachsen mit dem festen Körper unveränderlich verbunden sind, so sind dabei ξ, η, ζ als konstant zu betrachten. Es folgt also:

$$
\frac{dx}{dt} = \xi \frac{du_x}{dt} + \eta \frac{dv_x}{dt} + \zeta \frac{dw_x}{dt}.
$$

Substituiert man für ξ, η, ζ deren Werte aus den Gleichungen 153), so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen 150) wieder die erste der Gleichungen 154). Wenn man die halbe Masse jedes Massenpunktes des Körpers mit dem Quadrate seiner Geschwindigkeit $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ multipliziert, darin $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ durch die Werte 154) ersetzt und über alle Massenpunkte summiert, so erhält man wieder den Ausdruck 95) für die lebendige Kraft T, den wir schon kennen.

Unter den obigen Formeln haben alle, in denen die Momente D, E, F nicht vorkommen, einen rein geometrischen Charakter. In geometrischer Beziehung spielen aber die Achsen OX, OY und OZ genau dieselbe Rolle wie die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Die relativen Lagen und daher alle rein geometrischen Beziehungen bleiben vollkommen dieselben, ob die Achsen OX, OY, OZ fix sind und die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die augenblickliche Drehungsachse machen, deren Komponenten um die ersteren Achsen l, m, n, um die letzteren λ, μ, ν sind, oder ob umgekehrt die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ fix sind, und die Achsen OX, OY, OZ gerade die entgegengesetzte Drehung machen, deren Komponenten die Achse OX, OY, OZ dann natürlich $-l$, $-m$, $-n$, um die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ aber $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$ sind.

Wir können also in allen Formeln, welche die Drehungsmomente D, E, F nicht enthalten, die Achsen OX, OY, OZ mit den Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ und umgekehrt vertauschen, wodurch sich auch die Winkel A und B vertauschen, dagegen C in $-C$ und folglich auch C' in $-C'$ und γ in $-\gamma$ übergeht. Alle derartige Formeln von rein geometrischem Charakter bleiben daher richtig, wenn wir jede in der folgenden Reihe angeführte Größe mit der in der nächsten Reihe unter ihr stehenden. und umgekehrt jede in der zweiten Reihe stehende mit der darüber stehenden vertauschen:

$$x,\ y,\ z,\ u_y,\ u_z,\ v_x,\ v_z,\ w_x,\ w_y,\ l,\ m,\ n,\ A,\ C,\ \omega,\ OX,\ OY,\ OZ.$$
$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ v_x,\ w_x,\ u_y,\ w_y.\ u_z,\ v_z,\ -\lambda,\ -\mu,\ -\nu,\ B,\ -C,\ -\omega,\ O\xi,\ O\eta,\ O\zeta.$$

u_x, v_y, w_z dagegen müssen ungeändert bleiben. Durch diese Vertauschung erhält man z. B. aus $u_y = \alpha b - a \beta c$ die entsprechende Formel für v_x, ebenso aus $l = -\alpha \gamma B' + a C'$ den für $-\lambda$ gefundenen Wert etc. Derartige Vertauschungsregeln ersparen, wenn man die eine Hälfte der Formeln gefunden hat, die Arbeit der Ableitung der anderen Hälfte. Hat man aber alle Formeln bereits abgeleitet, so bilden die Vertauschungsregeln wenigstens eine oft willkommene Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung.

§ 26. Die Zusammenfassung der in den behandelten speziellen Fällen gefundenen Resultate liefert die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers.

Wir haben bewiesen, daß sich bei Einwirkung ganz beliebiger Kräfte auf einen vollkommen freien Körper dessen Schwerpunkt wie ein einziger materieller Punkt bewegt, auf den alle diese Kräfte gleichzeitig wirken und daß die Drehung um den Schwerpunkt so geschieht, als ob derselbe ohne Änderung der sonstigen Umstände festgehalten würde. Da wir die beiden letzteren Probleme nach dem vorgenommenen lösen können. so haben wir auch das allgemeine Problem der Bewegung eines vollkommen freien Körpers unter Einwirkung beliebiger Kräfte indirekt gelöst und es ist dies in der Tat der Weg, den man meist einschlagen wird, da man dadurch die kompliziertere Aufgabe in zwei möglichst einfache zerlegt. Natürlich haben wir aber damit noch nicht die Bewegungsgleichungen für den allgemeinsten Fall explizit hingeschrieben.

Behandelt man das Problem von vornherein in voller Allgemeinheit, so werden die Gleichungen zwar erheblich komplizierter und unanschaulicher, aber man hat den Vorteil, daß man alle Aufgaben, die wir nacheinander lösten, in derselben Formel beisammen hat und durch Spezialisierung derselben gewinnen kann. Wer sich für die Schönheiten dieser Behandlungsweise interessiert, der sei außer auf Lagranges Mécanique analytique auf Kirchhoffs Vorlesungen über Mechanik verwiesen.

Ich will hier nur kurz zeigen, wie man von den bisher behandelten Spezialfällen aus, da sie ja implizit den allgemeinsten Fall enthalten, auch wieder ohne große Schwierigkeit zu den allgemeinsten Formeln gelangen kann.

Um in der allgemeinsten Weise die Lage eines vollkommen freien festen Körpers gegen ein fixes Koordinatensystem OX, OY, OZ zu definieren, legen wir durch einen beliebigen Punkt Ω des festen Körpers drei Koordinatenachsen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$, die sich mit diesem fest verbunden mitbewegen (die beweglichen Koordinatenachsen).

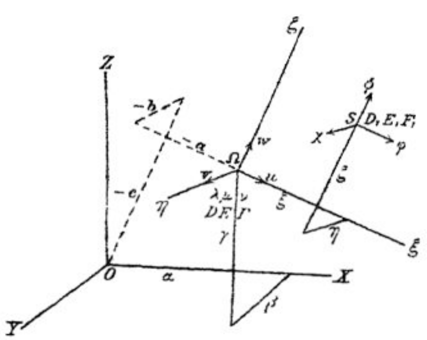

Fig. 2.

Wir bezeichnen mit α, β, γ, welche Buchstaben wir, sowie a, b, c jetzt nicht mehr in demselben Sinne wie bisher verwenden, die Koordinaten des Punktes Ω bezüglich des fixen Koordinatensystems, und mit u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes Ω in den Richtungen der beweglichen Koordinatenachsen; ferner mit a, b, c die Koordinaten des Punktes O bezüglich der beweglichen Koordinatenachsen, mit l, m, n und λ, μ, ν die Komponenten der augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeit des Körpers nach den fixen resp. beweglichen Koordinatenachsen, und mit ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunktes S des Körpers bezüglich der beweglichen Koordinatenachsen (vergl. Fig. 2). Endlich setzen wir analog wie früher:

$$u_x = \cos(X, \xi), \quad u_y = \cos(Y, \xi), \quad v_x = \cos(X, \eta) \ldots$$

Würde der Punkt Ω ruhen, so wären bei gleicher Drehbewegung des Körpers um den Punkt Ω die Komponenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes S in den Richtungen der beweglichen Koordinatenachse:

$$155) \qquad -\eta\nu + \zeta\mu, \quad -\zeta\lambda + \xi\nu, \quad -\xi\mu + \eta\lambda.$$

(Infolge der Drehung λ allein wären sie ja nach den Formeln 145) des I. Teiles Null, $-\lambda\zeta$, $+\lambda\eta$; addiert man dazu die durch zyklische Vertauschung folgenden Geschwindigkeitskomponenten infolge der Drehungen μ und ν, so folgen die Formeln 155); vergl. auch die Formeln 154).)

Dazu addiert sich noch die Progressivbewegung des Punktes Ω, so daß die wirklichen Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes S in der Richtung der beweglichen Koordinatenachsen

$$156) \quad \varphi = u - \eta\nu + \zeta\mu, \quad \chi = v - \zeta\lambda + \xi\nu, \quad \psi = w - \xi\mu + \eta\lambda$$

sind. Die lebendige Kraft der im Schwerpunkte vereint gedachten Gesamtmasse M des Körpers ist also:

$$157) \qquad \frac{M}{2}(\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2).$$

Die lebendige Kraft der Drehung um den Schwerpunkt ist:

$$158) \quad \tfrac{1}{2}(G\lambda^2 + H\mu^2 + J\nu^2) - G'\mu\nu - H'\lambda\nu - J'\lambda\mu = T_1.$$

Dabei haben G, H, J, G', H', J' dieselbe Bedeutung bezüglich dreier durch den Schwerpunkt parallel $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ und $\Omega\zeta$ gelegter Achsen, die sie früher bezüglich $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ hatten. Haben noch $G_1, H_1, J_1, G_1', H_1', J_1'$ dieselbe Bedeutung bezüglich der Achsen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$, so ist also

$$G_1 = G + M\xi^2, \qquad H_1 = H + M\eta^2, \qquad J_1 = J + M\zeta^2$$
$$G_1' = G' + M\eta\zeta, \qquad H_1' = H' + M\xi\zeta, \qquad J_1' = J' + M\xi\eta$$

(vergl. Formel 149), § 57 des I. Teiles).

Die gesamte lebendige Kraft des Körpers ist nach dem im I. Teile am Schlusse des § 64 entwickelten Theorem die Summe der Ausdrücke 157) und 158), also wenn man noch die Werte 156) substituiert:

$$159) \quad \begin{cases} T = \frac{M}{2}[(u - \eta\nu + \zeta\mu)^2 + (v - \zeta\lambda + \xi\nu)^2 + (w - \xi\mu + \eta\lambda)^2] + \\ \quad + \frac{1}{2}(G\lambda^2 + H\mu^2 + J\nu^2) - G'\mu\nu - H'\lambda\nu - J'\lambda\mu. \end{cases}$$

Wir wollen nun die Summe der Komponenten aller auf den Körper wirkenden Kräfte in den Richtungen der beweglichen Koordinatenachsen mit X, Y, Z bezeichnen. Die Größe X ist dann nach dem Schwerpunktssatze gleich der Gesamtmasse M des Körpers multipliziert mit der Beschleunigung des Schwerpunktes in der Richtung, die mit der Richtung zusammenfällt, welche die bewegliche Abszissenachse gerade zur Zeit t hat. Die Geschwindigkeitskomponente des Schwerpunktes in dieser Richtung ist zur Zeit t gleich φ. Zur Zeit $t + \tau$ haben die beweglichen Koordinatenachsen etwas andere Richtungen: $\Omega_1\xi_1$, $\Omega_1\eta_1$, $\Omega_1\zeta_1$. Die Komponenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes in diesen Richtungen sind zur Zeit $t + \tau$:

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{d\varphi}{dt}\tau, \quad \chi_1 = \chi + \frac{d\chi}{dt}\tau, \quad \psi_1 = \psi + \frac{d\psi}{dt}\tau.$$

Die Komponente der Geschwindigkeit des Schwerpunktes zur Zeit $t + \tau$ in der Richtung, welche die bewegliche Abszissenachse zur Zeit t hatte, ist daher:

$$\varphi_2 = \varphi_1 \cos(\Omega\xi, \Omega_1\xi_1) + \chi_1 \cos(\Omega\xi, \Omega_1\eta_1) + \psi_1 \cos(\Omega\xi, \Omega_1\zeta_1).$$

Nun ist bis auf unendlich Kleines höherer Ordnung $\cos(\Omega\xi, \Omega_1\xi_1) = 1$. Da wir ferner sahen, daß sich die Drehungen der Parallelverschiebung einfach superponieren, so ist analog mit 141)

$$\cos(\Omega\xi, \Omega_1\eta_1) = -\nu\tau, \qquad \cos(\Omega\xi, \Omega_1\zeta_1) = \mu\tau,$$

daher mit Vernachlässigung von unendlich Kleinem von der Ordnung τ^2:

$$\varphi_2 = \varphi + \frac{d\varphi}{dt}\tau - \chi\nu\tau + \psi\mu\tau.$$

Die Beschleunigung des Schwerpunktes in der Richtung, welche die bewegliche Abszissenachse zur Zeit t hatte, aber ist

$$\lim \frac{\varphi_2 - \varphi}{\tau} = \frac{d\varphi}{dt} - \nu\chi + \mu\psi,$$

und da diese Beschleunigung mit M multipliziert gleich X sein muß, so hat man schließlich:

$$M\frac{d\varphi}{dt} = M\nu\chi - M\mu\psi + X.$$

Diese Gleichung kann mit Rücksicht auf den Wert 159) von T und die Werte 156) von φ, χ, ψ auch so geschrieben werden

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} = \nu\frac{\partial T}{\partial v} - \mu\frac{\partial T}{\partial w} + X, \tag{160}$$

was mit der Gleichung 12) der 6. Vorlesung der Kirchhoffschen Mechanik übereinstimmt.

Da die Drehung um den Schwerpunkt genau so geschieht, als ob dieser festgehalten wäre, so hat man entsprechend den Gleichungen 99) und 100)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \lambda} = \nu\frac{\partial T_1}{\partial \mu} - \mu\frac{\partial T_1}{\partial \nu} + D_1, \tag{161}$$

wobei D_1 das Drehungsmoment aller auf den Körper wirkenden Kräfte um eine der beweglichen Abszissenachsen parallel durch den Schwerpunkt gezogene Achse ist. Bezeichnen wir mit D das Drehungsmoment derselben Kräfte bezuglich einer Achse, die mit der Lage der beweglichen Abszissenachse zur Zeit t zusammenfällt, so ist nach § 29 des I. Teiles

$$D = D_1 + \eta Z - \zeta Y.$$

Wir können daher die Gleichung 161) in der Form schreiben:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \lambda} = \nu\frac{\partial T_1}{\partial \mu} - \mu\frac{\partial T_1}{\partial \nu} - \eta Z + \zeta Y + D. \tag{162}$$

Nun folgt aus 158) und 159):

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{\partial T_1}{\partial \lambda} - \zeta \frac{\partial T}{\partial v} + \eta \frac{\partial T}{\partial w}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \frac{\partial T_1}{\partial \mu} - \xi \frac{\partial T}{\partial v} + \zeta \frac{\partial T}{\partial u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} = \frac{\partial T_1}{\partial \nu} - \eta \frac{\partial T}{\partial u} + \zeta \frac{\partial T}{\partial v}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \lambda} - \zeta \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} +$$

$$+ \eta \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} - \psi \frac{\partial T}{\partial v} + \chi \frac{\partial T}{\partial w} \quad \text{etc.}$$

Drückt man vermöge dieser Gleichungen die in 162) erscheinenden Werte von $\frac{\partial T_1}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial T_1}{\partial \mu}$ und $\frac{\partial T_1}{\partial \nu}$ durch $\frac{\partial T}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial T}{\partial \mu}$ und $\frac{\partial T}{\partial \nu}$ aus und substituiert für X, Y, Z deren Werte aus 160), so liefert die Gleichung 162)

163) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \nu \frac{\partial T}{\partial \lambda} - \mu \frac{\partial T}{\partial \nu} + w \frac{\partial T}{\partial v} - v \frac{\partial T}{\partial w} + D,$$

was mit Kirchhoffs Gleichungen 13) (l. c.) übereinstimmt.

Die Komponente der Geschwindigkeit des Schwerpunktes in der Richtung der fixen Abszissenachse ist entsprechend den Gleichungen 153):

$$u_x \varphi + v_x \chi + w_x \psi = \left(u_x \frac{\partial T}{\partial u} + v_x \frac{\partial T}{\partial v} + w_x \frac{\partial T}{\partial w}\right)\frac{1}{M}.$$

Da die fixen Achsen ihre Lage im Raume nicht ändern, so ist die Komponente der Beschleunigung des Schwerpunktes in der fixen Abszissenrichtung einfach der Differentialquotient dieser Größe nach der Zeit. Multipliziert man diesen noch mit M, so muß das Produkt gleich der Summe X_{fix} der Komponenten aller auf den Körper wirkenden Kräfte in der Richtung der fixen Abszissenachse sein, wodurch man die Gleichung

164) $$\frac{d}{dt}\left(u_x \frac{\partial T}{\partial u} + v_x \frac{\partial T}{\partial v} + w_x \frac{\partial T}{\partial w}\right) = X_{\mathrm{fix}}$$

erhält, welche mit der ersten der von Kirchhoff (l. c.) mit Nummer 14 bezeichneten Gleichungen identisch ist.

Endlich sind die Flächenmomente des ganzen Körpers bezüglich dreier durch dessen Schwerpunkt S parallel der augenblicklichen Richtung der Achsen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ gezogenen Achsen gleich $\frac{\partial T_1}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial T_1}{\partial\mu}$, $\frac{\partial T_1}{\partial\nu}$. Die Flächenmomente des Körpers bezüglich dreier gleichgerichteter, durch den fixen Koordinatenursprung O gezogener Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ sind nach § 31, S. 112 des I. Teiles um die Momente größer, welche der stets in S befindlichen und mit S mitbewegten Masse M bezüglich der letzteren Achsen zukäme. Da die Punkte O und S bezüglich der Achsen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ die Koordinaten a, b, c resp. ξ, η, ζ haben, so sind die Koordinaten von S bezuglich der Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ gleich $\xi - a$, $\eta - b$, $\zeta - c$. Die Geschwindigkeitskomponenten von S in den Richtungen der beweglichen Koordinatenachsen sind nach 156)

$$\frac{1}{M}\frac{\partial T}{\partial u}, \quad \frac{1}{M}\frac{\partial T}{\partial v}, \quad \frac{1}{M}\frac{\partial T}{\partial w},$$

daher ist das Flächenmoment der in S konzentriert gedachten Masse M bezüglich der Achse $O\xi$:

$$(\eta - b)\frac{\partial T}{\partial w} - (\zeta - c)\frac{\partial T}{\partial v}.$$

Das Flächenmoment m_ξ des ganzen Körpers bezüglich derselben Achse finden wir, indem wir hierzu noch $\frac{\partial T_1}{\partial\lambda}$ addieren. Daraus ergeben sich dann durch zyklische Vertauschung die Flächenmomente m_η und m_ζ des Körpers bezüglich $O\eta$ und $O\zeta$, so daß man hat:

$$165)\quad \left\{\begin{aligned} m_\xi &= (\eta - b)\frac{\partial T}{\partial w} - (\zeta - c)\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial T_1}{\partial\lambda} \\ m_\eta &= (\zeta - c)\frac{\partial T}{\partial u} - (\xi - a)\frac{\partial T}{\partial w} + \frac{\partial T_1}{\partial\mu} \\ m_\zeta &= (\xi - a)\frac{\partial T}{\partial v} - (\eta - b)\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial T_1}{\partial\nu}. \end{aligned}\right.$$

Das Flächenmoment des Körpers bezüglich der fixen Abszissenachse aber ist:

$$m_x = u_x m_\xi + v_x m_\eta + w_x m_\zeta.$$

Hier hat man für m_ξ, m_η, m_ζ die Werte 165) zu substituieren. Bedenkt man, daß die Abszisse des Punktes O bezüglich der Achsen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ gleich

$$a = -\alpha u_x - \beta u_y - \gamma u_z$$

ist, daß aus 160) folgt

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \eta \frac{\partial T}{\partial w} - \zeta \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial T_1}{\partial \lambda}$$

und nimmt dazu die vier aus diesen beiden Gleichungen durch zyklische Vertauschung folgenden Gleichungen, so ergibt sich unter Zuziehung der Gleichungen 140a):

$$166)\quad \left\{ \begin{aligned} m_x &= (\beta u_z - \gamma u_y) \frac{\partial T}{\partial u} + (\beta v_z - \gamma v_y) \frac{\partial T}{\partial v} + \\ &\quad + (\beta w_z - \gamma w_y) \frac{\partial T}{\partial w} + u_x \frac{\partial T}{\partial \lambda} + v_x \frac{\partial T}{\partial \mu} + w_x \frac{\partial T}{\partial \nu}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man den Differentialquotienten dieser Größe nach der Zeit gemäß dem Flächensatze gleich dem gesamten Drehungsmoment D_{fix} aller Kräfte bezüglich der fixen Abszissenachse und bildet aus der betreffenden Gleichung durch zyklische Vertauschung zwei neue Gleichungen, so erhält man das letzte System der für einen vollkommen freien Körper geltenden Gleichungen. Man sieht sofort, daß es unter Berücksichtigung der Abweichungen unserer Bezeichnungen von denen Kirchhoffs mit dem Gleichungssysteme identisch ist, welches dieser l. c. mit Nummer 15 bezeichnet.

III. Die verschiedenen Formen des Wirkungsprinzipes.

§ 27. Die Gleichungen, welche für nicht holonome generalisierte Koordinaten an die Stelle der Lagrangeschen treten.

Ehe wir die allgemeine Diskussion der verschiedenen Formen des Wirkungsprinzipes in Angriff nehmen, wollen wir noch die Zusatzglieder berechnen, welche zu den Lagrangeschen Gleichungen hinzutreten, wenn die angewandten generalisierten Koordinaten nicht holonom sind. Sie sind dann jedenfalls durch Gleichungen von der Form der Gleichungen 23) mit den rechtwinkligen verknüpft.

Wir nennen den aus diesen bei Konstanthaltung aller p_k folgenden Differentialquotienten von x_k nach t den partiellen nach t und bezeichnen ihn mit $\partial x_k/\partial t$; eine analoge Bedeutung hat $\partial x_k/\partial p_h$, so daß man also hat:

167) $$\frac{\partial x_k}{\partial t} = \Pi^k, \quad \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \Pi^k_h.$$

Aus denselben Gleichungen folgt:

168) $$x'_k = \Pi^k + \sum_1^s{}_h \Pi^k_h p'_h.$$

Dagegen ist bei Bildung der δx_k die Zeit konstant zu erhalten, so daß man hat:

169) $$\delta x_k = \sum_1^s{}_h \Pi^k_h \delta p_h.$$

Versteht man daher unter einem partiellen Differentialquotienten der x'_k einen solchen, wobei von den Variabeln t, p_h und p'_h alle konstant erhalten werden, bis auf die eine, nach welcher differenziert wird, so ist:

170) $$\frac{\partial x'_k}{\partial p_h} = \frac{\partial \Pi^k}{\partial p_h} + \sum_1^s{}_i \frac{\partial \Pi^k_i}{\partial p_h} p'_i,$$

171) $$\frac{\partial x'_k}{\partial p'_h} = \Pi^k_h = \frac{\partial x_k}{\partial p_h},$$

letzteres gemäß den Gleichungen 167). Durch Differentiation derselben Gleichungen folgt:

172) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = \frac{\partial \Pi^k_h}{\partial t} + \sum_1^s{}_i \frac{\partial \Pi^k_h}{\partial p_i} p'_i.$$

Es ist also:

$$\frac{\partial x'_k}{\partial p_h} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = \frac{\partial \Pi^k}{\partial p_h} - \frac{\partial \Pi^k_h}{\partial t} + \sum_1^s{}_i p'_i \left(\frac{\partial \Pi^k_i}{\partial p_h} - \frac{\partial \Pi^k_h}{\partial p_i}\right).$$

Wir setzen nun kürzehalber

173) $$\frac{\partial \Pi^k}{\partial p_h} - \frac{\partial \Pi^k_h}{\partial t} = \mathfrak{r}^k_h, \quad \frac{\partial \Pi^k_i}{\partial p_h} - \frac{\partial \Pi^k_h}{\partial p_i} = \mathfrak{r}^k_{hi},$$

so daß wir schreiben können:

$$174)\qquad \frac{\partial x'_k}{\partial p_h} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = \mathfrak{r}_h^k + \sum_1^s{}_i\, \mathfrak{r}_{hi}^k p'_i .$$

Die geometrische Bedeutung der hier neu eingeführten Größen ergibt sich durch folgende Betrachtungen.

Läßt man zuerst p_h um dp_h und hernach p_i um dp_i wachsen, so nimmt die Größe x_k zuerst um $\Pi_h^k dp_h$, hernach um $\left(\Pi_i^k + \frac{\partial \Pi_i^k}{\partial p_h} dp_h\right) dp_i$ zu. Diejenige Stelle des Raumes, wohin während dieses ganzen Prozesses der materielle Punkt, dessen Masse m_r ist, von seiner Ausgangsstellung aus verschoben wird, heiße B_{hi}^r. Nun soll umgekehrt zuerst p_i und dp_i und dann erst p_h um dp_h wachsen, so daß zuerst x_k um $\Pi_i^k dp_i$ und dann um $\left(\Pi_h^k + \frac{\partial \Pi_h^k}{\partial p_i} dp_i\right) dp_h$ wächst. Dabei gelange derselbe materielle Punkt, dessen Masse m_r ist, von seiner unverschobenen Lage nach A_{hi}^r. Man sieht sofort, daß, wenn $k = r$, $r + 1$ oder $r + 2$ ist, die Größe

$$\left(\frac{\partial \Pi_i^k}{\partial p_h} - \frac{\partial \Pi_h^k}{\partial p_i}\right) dp_h\, dp_i = \mathfrak{r}_{hi}^k\, dp_h\, dp_i$$

nichts anderes ist, als die Projektion der geraden Verbindungslinie $A_{hi}^r B_{hi}^r$ der beiden Punkte A_{hi}^r und B_{hi}^r des Raumes auf diejenige Koordinatenachse, nach welcher die x_k gezählt werden. Bezeichnet man diese Projektion mit $C_{hi}^k D_{hi}^k$, so ist also:

$$\mathfrak{r}_{hi}^k = \lim \frac{C_{hi}^k D_{hi}^k}{dp_h\, dp_i}.$$

Ähnlich seien E_h^r und F_h^r die beiden Punkte des Raumes, wohin sich das Massenteilchen m_r verschiebt, wenn einmal zuerst t um dt und dann p_h um dp_h, das andere Mal zuerst p_h um dp_h, dann erst t um dt wächst. Ferner sei $G_h^k H_h^k$ die Projektion von $E_h^r F_h^r$ auf diejenige Koordinatenachse, nach welcher die x_k gezählt werden. In derselben Weise, in der sich früher die geometrische Bedeutung von $\mathfrak{r}_{hi}^k$ ergab, findet man jetzt, daß

$$\xi_h^k = \lim \frac{G_h^k H_h^k}{d\,t\,d\,p_h}$$

ist.

Bezeichnet man die Faktoren, mit denen Lagrange die Bedingungsgleichungen 6) multipliziert, mit $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_r$, so folgt aus 6) und 4) in der bekannten Weise:

$$175)\qquad X_k = m_k x_k'' + \sum_1^r {}^l\, \mu_l\, \xi_k^l\,, \quad k = 1, 2, 3 \ldots 3n.$$

Führt man in dem Ausdrucke $\sum_1^{3n} {}^i X_k\, \delta x_k$ statt der δx_k die δp_h vermöge der Gleichungen 23) ein, welche in unserem Falle liefern: $\delta x_k = \sum_1^s {}^h\, \Pi_h^k\, \delta p_h$, so erhält man:

$$176)\qquad \sum_1^{3n} {}^k X_k\, \delta x_k = \sum_1^s {}^h \sum_1^{3n} {}^k X_k\, \Pi_h^k\, \delta p_h.$$

Der Koeffizient von δp_h in dem Ausdrucke rechts soll, wie bei holonomen generalisierten Koordinaten die nach der Koordinate p_h wirkende Kraft genannt und mit P_h bezeichnet werden, so daß man also hat

$$177)\qquad P_h = \sum_1^{3n} {}^k X_k\, \Pi_h^k = \sum_1^{3n} {}^k \left(m_k x_k'' + \sum_1^r {}^l\, \mu_l\, \xi_k^l\right) \Pi_h^k;$$

letzteres gemäß der Gleichung 175).

Wir wollen nun, wie wir es bei Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen im vorigen Paragraphen taten, den Ausdruck $x_k' \dfrac{\partial x_k}{\partial p_h}$ nach der Zeit differenzieren. Es folgt:

$$178)\qquad \frac{d}{d\,t}\left(x_k' \frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = x_k'' \frac{\partial x_k}{\partial p_h} + x_k' \frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right).$$

Bei holonomen Koordinaten kann man offenbar ohne weiteres

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = \frac{\partial x_k'}{\partial p_h}$$

setzen. Allein bei nichtholonomen ist dies nicht mehr gestattet. Denn es ist:

$$x_k' = \Pi^k + \sum_1^s {}^i\, \Pi_i^k\, p_i',$$

daher:

$$\frac{\partial x'_k}{\partial p_h} = \frac{\partial \Pi_h^k}{\partial p_h} + \sum_1^s {}^i \frac{\partial \Pi_i^k}{\partial p_i} p'_i,$$

wogegen:

$$\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \Pi_h^k,$$

daher:

179) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = \frac{d\,\Pi_h^k}{\partial t} + \sum_1^s {}^i \frac{\partial \Pi_h^k}{\partial p_i} p'_i$$

ist. Man hat daher:

$$\frac{d}{dt}\left(x'_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = x''_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h} + x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p_h} + x'_k\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial p_h} - \frac{\partial x'_k}{\partial p_h}\right),$$

oder nach Gleichung 174):

180) $$\frac{d}{dt}\left(x'_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = x''_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h} + x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p_h} - x'_k\left(\mathfrak{x}_h^k + \sum_1^s {}^i \mathfrak{x}_{hi}^k p'_i\right).$$

Wir multiplizieren nun diese Gleichung mit m_k, addieren beiderseits $\sum_1^\tau {}^l \mu_l \xi_k^l \frac{\partial x_k}{\partial p_h}$ und summieren schließlich bezüglich k von 1 bis $3n$.

Beginnen wir ganz links und schreiten zu immer mehr rechtsstehenden Gliedern der Gleichung 180) vor, so ist

1. nach Gleichung 171):

181) $$\sum_1^{3n} {}^k m_k \frac{d}{dt}\left(x'_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = \frac{d}{dt}\sum_1^{3n} {}^k m_k x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p'_h} = \frac{d q_h}{dt}.$$

q_h hat die bekannte Bedeutung. Es ist das Moment bezüglich der h-ten Koordinate und wird gebildet, indem man die lebendige Kraft

182) $$T = \sum_1^{3n} {}^k m_i x'^2_h$$

als Funktion der p_h und p'_h ausdrückt und dann nach p'_h partiell differenziert.

2. Wir betrachten zunächst den Fall, daß die p_h die Bedingungsgleichungen identisch erfüllen. Dann ist bei konstanter Zeit für jedes l $(1, 2 \ldots \sigma)$:

$$183)\qquad \sum_1^{3n}{}^k \xi_k^l\, \delta x_k = 0,$$

wenn sich die p_h beliebig ändern, daher auch, wenn alle anderen bis auf eines, das wir wieder p_h nennen wollen, sowie die Zeit konstant bleiben. Mit anderen Worten, es ist für jeden Wert von l und h:

$$184)\qquad \sum_1^{3n}{}^k \xi_k^l \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = 0, \quad l = 1, 2, 3 \ldots r. \quad h = 1, 2, 3 \ldots s.$$

3. Nach Gleichung 177) ist:

$$185)\qquad \sum_1^{3n}{}^k \left(m_k x_k'' + \sum_1^{r}{}^l \mu_l \xi_h^l \right) \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = P_h.$$

4. Aus Gleichung 182) folgt:

$$186)\qquad \sum_1^{3n}{}^k m_k x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p_h} = \frac{\partial T}{\partial p_h}.$$

Es ergibt sich also:

$$187)\qquad \frac{d q_h}{d t} = P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} - \sum_1^{3n}{}^k m_k x'_h \left(\mathfrak{x}_h^k + \sum_1^{s}{}^k \mathfrak{x}_{hi}^k\, p'_i \right).$$

Es sei nun $\mathfrak{v}_r$ sowohl die Größe als auch die Richtung der Geschwindigkeit des r-ten materiellen Punktes, welcher die Masse $m_r = m_{r+1} = m_{r+2}$ hat, so daß x'_r, x'_{r+1}, x'_{r+2} die Komponenten von $\mathfrak{v}_r$ in den drei Koordinatenrichtungen sind. Ferner seien $\mathfrak{u}_h^r$ und $\mathfrak{u}_{hi}^r$ die Richtungen und die durch $dt\,dp_h$ resp. $dp_h\,dp_i$ dividierten Größender Geraden, welche früher mit $E_h^r F_h^r$ und $A_{hi}^r B_{hi}^r$ bezeichnet wurden. Dann kann man die Gleichung 187) auch in der Form schreiben:

---

[1]) Wenn auch die Zeit δt wachsen würde, so würden die x zudem etwas andere Funktionen der p werden und man hätte jetzt für jedes l:

$$\xi^l \delta t + \sum_1^{3n}{}^k \xi_k^l\, \delta x_k = 0.$$

Diese Gleichung gilt jedoch für unsere jetzigen Betrachtungen nicht, da mit allen bisher durch das Zeichen δ bezeichneten Variationen keine Veränderung der Zeit verknüpft ist.

$$188)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d q_h}{d t} = P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} + \Sigma_r m_r \mathfrak{v}_r \Big[\mathfrak{u}_r^h \cos(\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_r^h) + \\ + \sum_1^s{}^i \mathfrak{u}_{hi}^r \cos(\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_{hi}^r) \Big], \end{aligned}\right.$$

wobei in der ersten Summe r bloß die Werte $1, 4, 7 \ldots 3n-2$ zu durchlaufen hat.

Hiermit ist also 1. erwiesen, dass die Lagrangeschen Gleichungen in unveränderter Form bei Anwendung nichtholonomer Koordinaten ungültig sind, und 2. jedesmal das Korrektionsglied berechnet, welches man ihnen beifügen muss, damit sie wieder gültig werden.

Der Beweis erleidet nur eine unwesentliche Modifikation, wenn die Anzahl s der generalisierten Coordinaten größer ist als die Anzahl $i = 3n - \tau$ der Freiheitsgrade des Systems. Dann bleiben zwischen den generalisierten Koordinaten noch $s - i = \sigma$ Bedingungsgleichungen bestehen, von denen einige holonom, andere nichtholonom sein können. Von den τ zwischen den rechtwinkligen Koordinaten bestehenden Bedingungsgleichungen werden dann also bloß $\tau - \sigma$ durch die generalisierten Koordinaten identisch erfüllt.

Die Variationen δx_k der rechtwinkligen Koordinaten bei konstanter Zeit müssen nach wie vor die τ Gleichungen 6) erfüllen. Wir können alle diese Gleichungen in eine einzige zusammenfassen, indem wir jede mit einem willkürlichen Faktor μ_l multiplizieren und nachher alle addieren. Dadurch erhalten wir die resultierende Gleichung:

$$189)\qquad \sum_1^\tau{}^l \sum_1^{3n}{}^k \mu_l \, \xi_k^l \, \delta x_k = 0 .$$

Die Festsetzung, daß diese Gleichung für beliebige Werte der μ bestehen soll, vertritt vollkommen die τ Gleichungen 6).

Wenn wir nun in der Gleichung 189) die δx durch die δp ersetzen, so muß sich die Anzahl der willkürlichen Faktoren λ von τ auf σ reduzieren, da ja zwischen den δp nur σ Gleichungen bestehen, welche wir in der Form schreiben wollen:

190) $$\sum_1^s{}^h \pi_h^l\, \delta p_h = 0\,, \quad l = 1, 2 \ldots \sigma.$$

Die Gleichung 189) muß sich daher nach Einführung der δp auf folgende reduzieren:

$$\sum_1^\sigma{}^l \sum_1^s{}^h \lambda_l\, \pi_h^l\, \delta p_h = 0\,,$$

wobei die λ jedenfalls σ lineare, voneinander unabhängige Funktionen der μ sind.

Die Faktoren $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\tau$ wurden nun nach **Lagrange** so gewählt, daß der Ausdruck

$$\sum_1^{3n}{}^k \left(X_k - m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2} + \sum_1^\tau{}^l \mu_l\, \xi_k^l \right) \delta x_k$$

für alle Werte der δx_k verschwindet. Nach Einführung der generalisierten Koordinaten verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$\sum_1^s{}^h \left\{ P_h - \frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial T}{\partial p_h} - \sum_1^{3n}{}^k m_k x'_k \left(\mathfrak{x}_h^k + \sum_1^s{}^i \mathfrak{x}_{hi}^k \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_1^\sigma{}^l \lambda_l\, \pi_k^l \right\} \delta p_h = 0$$

oder

$$\sum_1^\nu{}^h \left\{ P_h - \frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + \Sigma_r\, m_r\, \mathfrak{v}_r \left[\mathfrak{u}_h^r \cos(\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_h^r) + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \sum_1^s{}^i \mathfrak{u}_{hi}^r \cos(\mathfrak{v}_r\, \mathfrak{u}_{hi}^r) \right] + \sum_1^\sigma \lambda_l\, \pi_h^l \right\} \delta p_h = 0,$$

wobei wieder r die Werte $1, 4, 7 \ldots 3n - 2$ zu durchlaufen hat. Wegen der für die μ getroffenen Wahl, aus welcher analoge Eigenschaften für die λ resultierten, muß die linke Seite der letzten beiden Gleichungen für alle überhaupt möglichen Werte der δp_h verschwinden und man erhält die Bewegungsgleichungen:

$$191)\left\{\begin{aligned} \frac{d q_h}{d t} &= P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} - \sum_1^{3n}{}^k m_k x'_k \left(\mathfrak{x}_h^k + \sum_1^s{}^i \mathfrak{x}_{hi}^k p'_i \right) + \\ &\quad + \sum_1^\sigma{}^l \lambda_l \pi_h^l , \end{aligned}\right.$$

oder

$$192)\left\{\begin{aligned} \frac{d q_h}{d t} &= P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} + \Sigma_r m_r \mathfrak{v}_r \Big[\mathfrak{u}_h^r \cos (\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_h^r) + \\ &\quad + \sum_1^s{}^i \mathfrak{u}_{hi}^r \cos (\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_{hi}^r) \Big] + \sum_1^\sigma{}^l \lambda_l \pi_h^l = 0. \end{aligned}\right.$$

Die durch den Mangel der Holonomität der Koordinaten bedingten Zusatzglieder zu den Lagrangeschen Gleichungen sind also ganz dieselben geblieben, wie in dem Falle, dass die Anzahl der generalisierten Koordinaten gleich der Zahl der Freiheitsgrade des Systems ist, so daß zwischen den generalisierten Koordinaten keine Gleichungen mehr übrig bleiben und es ist somit die gestellte Aufgabe in voller Allgemeinheit gelöst.

§ 28. Beispiel zum vorigen Paragraphen.

Wir wollen die gefundenen allgemeinen Gleichungen an folgendem Beispiele[1]) illustrieren. Zwei Riemenscheiben sind durch einen Treibriemen verbunden, welcher parallel der Achse der Scheiben in ähnlicher Weise hin- und hergeschoben werden kann, wie man einen Treibriemen von einer wirkenden Scheibe auf eine Leerscheibe oder umgekehrt verschiebt. Die eine Riemenscheibe verjüngt sich nach einer Seite hin, wogegen sich die andere nach der entgegengesetzten Seite nach einem solchen Gesetze verjüngt, daß ein und derselbe Treibriemen überall paßt, wenn er in der geschilderten Weise verschoben wird. Eine solche Verschiebung des Riemens bewirkt gewissermaßen eine Veränderlichkeit der Radien r_1 und r_2 der beiden Riemenscheiben und daher auch des Übersetzungsverhältnisses $p_2 = r_1/r_2$.

[1]) Borchardts Journ. Bd. 98, Heft 1, S. 87, 1885.

Ist daher p'_1 die Winkelgeschwindigkeit der einen, w' die der anderen Riemenscheibe. so hat man $w' = p_2 p'_1$. Wenn p_2 veränderlich ist, so kann man p_2 und die gesamte Winkeldrehung p_1 der ersten Riemenscheibe während einer gewissen Zeit als Koordinaten eines Punktes A, der entweder der zweiten Riemenscheibe angehört oder mit ihr fest verbunden ist, wählen. Es sind dies nichtholonome Koordinaten, da es zur Bestimmung der Lage des Punktes A nicht gleichgültig ist, ob zuerst p_1 und dann p_2, oder umgekehrt zuerst p_2 und dann p_1 sich um dieselben Beträge ändern.

Der gleiche Effekt würde erzielt, wenn sich zwischen zwei nach entgegengesetzten Seiten konisch sich verjüngenden drehbaren Rotationskörpern eine Scheibe S drehen würde, die auf keinem der Rotationskörper gleiten könnte und die parallel ihrer Drehungsachse verschiebbar wäre.

Man kann vielleicht zweifeln, ob derartige Bedingungen ohne jede Gleitung realisierbar sind. Jedenfalls haben aber die Bedingungen, an welche wir uns das aus den beiden Riemenscheiben bestehende mechanische System gebunden dachten, genau die Eigenschaften, welche Hertz in seiner Mechanik von nichtholonomen Bedingungen fordert (Hertz's Mechanik, 1. Buch, Abschnitt IV). Daß das in diesem Beispiele gebrauchte mechanische System nicht holonom ist, ersieht man auch, wenn man bedenkt, dass die Winkelstellung w der zweiten Riemenscheibe nur durch die Gleichung $dp_2 = a\,dp_1$ bestimmt ist, welche nicht integriert werden kann. Daher ist diese Winkelstellung und die Lage jeder Masse, deren Bewegung davon abhängt, in nicht holonomer Weise durch die Koordinaten p_1 und p_2 bestimmt.

Die Summe der lebendigen Kraft aller mit den beiden Riemenscheiben fest verbundenen Massen kann als Funktion von p_2 und $\frac{dp_1}{dt}$ ausgedrückt werden. Sie ist

$$T = \tfrac{1}{2}(K + Lp_2^2)p'^2_1,$$

wenn t die Zeit ist und K und L die Trägheitsmomente aller mit der ersten, respektive zweiten Riemenscheibe fest verbundenen Massen bezüglich der jeweiligen Drehungsachsen sind. Alles übrige denken wir uns dabei massenlos, so unter anderen den Riemen, resp. die Scheibe S.

Wir wollen die Bewegungsgleichungen nur in dem speziellen Falle ableiten, daß unser ganzes System aus einem einzigen Massenpunkte von der Masse m besteht, welcher mit der Achse im unveränderlichen Abstande r davon fest verbunden ist, um welche die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit w' geschieht. Dann ist also $K = 0$, $L = m r^2$.

Wir wählen die Ebene, in welcher die Masse m rotiert, als Koordinatenebene, den Mittelpunkt des Kreises, in dem sie sich bewegt, als Koordinatenursprung, und bezeichnen die rechtwinkligen Koordinaten der Masse m zu irgend einer Zeit mit x_1, x_2.

Dann reduzieren sich die Gleichungen 23) auf

193) $$d x_1 = \Pi^1_1 \, d p_1 + \Pi^1_2 \, d p_2, \quad d x_2 = \Pi^2_1 \, d p_1 = \Pi^2_2 \, d p_2,$$

wobei

$$\Pi^1_2 = \Pi^2_2 = 0, \quad \Pi^1_1 = - p_2 x_2, \quad \Pi^2_1 = p_2 x_1.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial \Pi^1_1}{\partial p_1} = - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = - p_2{}^2 x_1$$

$$\frac{\partial \Pi^1_1}{\partial p_2} = - x_2 - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_2} = - x_2$$

$$\frac{\partial \Pi^2_1}{\partial p_1} = p_2 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = p_2{}^2 x_1, \quad \frac{\partial \Pi^2_1}{\partial p_2} = x_1 + p_2 \frac{\partial x_1}{\partial p_2} = x_1$$

194) $$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{x}^1_{12} &= - \mathfrak{x}^1_{21} = \frac{\partial \Pi^1_2}{\partial p_1} - \frac{\partial \Pi^1_1}{\partial p_2} = x_2 \\ \mathfrak{x}^2_{12} &= - \mathfrak{x}^2_{21} = \frac{\partial \Pi^2_2}{\partial p_1} - \frac{\partial \Pi^2_1}{\partial p_2} = - x_1 . \end{aligned} \right.$$

$$\mathfrak{x}^1_{11} = \mathfrak{x}^1_{22} = \mathfrak{x}^2_{11} = \mathfrak{x}^2_{22} = 0, \quad x'_1 = - x_2 p_2 p'_1, \quad x'_2 = x_1 p_2 p'_1 .$$

Das Gleichungssystem 187) reduziert sich auf die beiden Gleichungen:

195) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{d q_1}{d t} &= P_1 + \frac{\partial T}{\partial p_1} - m \left[x'_1 (\mathfrak{x}^1_{11} p'_1 + \mathfrak{x}^1_{12} p'_2) + \right. \\ &\qquad \left. + x'_2 (\mathfrak{x}^2_{11} p'_1 + \mathfrak{x}^2_{12} p'_2) \right] \\ \frac{d q_2}{d t} &= P_2 + \frac{\partial T}{\partial p_2} - m \left[x'_1 (\mathfrak{x}^1_{21} p'_1 + \mathfrak{x}^1_{22} p'_2) + \right. \\ &\qquad \left. + x'_2 (\mathfrak{x}^2_{21} p'_1 + \mathfrak{x}^2_{22} p'_2) \right], \end{aligned} \right.$$

und die Substitution der gefundenen Werthe liefert:

$$196)\qquad \frac{d(p_2^2 p'_1)}{dt} = \frac{1}{mr^2} P_1 + p_2 p'_1 p'_2, \quad P_2 = 0.$$

Die Lagrangeschen Gleichungen in ihrer gewöhnlichen Form aber würden falsche Bewegungsgleichungen liefern. So würde z. B. die gewöhnliche Lagrangesche Gleichung auf die Koordinate p_2 angewandt lauten:

$$\frac{dq_2}{dt} = P_2 + \frac{\partial T}{\partial p_2}.$$

Nun enthält der Ausdruck für T das p'_2 gar nicht, es ist also $q_2 = 0$, dagegen enthält er das ungestrichene p_2 und es ist $\partial T / \partial p_2 = mr^2 p_2 p'^2_1$. Aus der gewöhnlichen Form der Lagrangeschen Gleichung würde also folgen

$$P_2 = -mr^2 p_2 p'^2_1,$$

was, wie man leicht einsieht, eine Ungereimtheit wäre, wogegen das von uns gefundene Resultat $P_2 = 0$ physikalisch vollkommen evident ist.

Dieselben Gleichungen passen auf folgenden Fall. Mit einer horizontalen Achse sei eine vertikale ebene Scheibe fest verbunden. p_1 sei deren Drehung zu irgend einer Zeit. Daneben steht eine vertikale Achse von quadratischem Querschnitt, welche Massen trägt und deren Drehungswinkel w sei. Auf ihr gleite eine Röhre von gut passender Höhlung mit quadratischem Querschnitte. Mit der Röhre ist eine kreisförmige horizontale Scheibe vom Radius eins fest verbunden, welche auf der vertikalen Scheibe rollt und darauf zwar radial aber nicht tangential gleiten kann. Der veränderlich gedachte Abstand des Mittelpunktes der horizontalen Scheibe vom Punkte, wo die Verlängerung der horizontalen Achse die vertikale Achse trifft, ist p_2. Dem Übelstand, daß eine einzige in einem fixen Kreise bewegliche Masse durch zwei Koordinaten bestimmt erscheint, können wir abhelfen, indem wir die Gleichungen für den Fall ableiten, daß die Masse m oder eine zweite Masse mit der horizontalen Scheibe fest verbunden ist.

§ 29. Variation der Integrationsgrenzen.

Wir wollen nun wieder zu den Formeln des § 6 und speziell zur Gleichung 41) zurückkehren.

Für jede unter dem Einflusse gegebener Kräfte gegebenen Bedingungen gemäß erfolgende (natürliche) Bewegung gilt, wie dort bewiesen wurde, die Gleichung 42), aus welcher die Bewegungsgleichungen 43), resp. 49) folgen. Umgekehrt folgt aus den Bewegungsgleichungen die Gleichung 42); denn, wenn wir die allgemeinste Form der Bewegungsgleichungen, nämlich die Gleichung 49) mit δp_h multiplizieren und bezüglich aller h summieren, so erhalten wir

$$\sum_1^s{}^h \left(-\frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h\right) \delta p_h = \sum_1^r{}^l \sum_1^s{}^h \lambda^l \pi_h^l \delta p_h,$$

was infolge der Bedingungsgleichungen des Systems verschwindet. Multipliziert man die linke Seite mit dt und integriert von t_0 bis t_1, so ergibt sich in der Tat die Gleichung 42).

Mit Rücksicht auf diese Gleichung reduziert sich die Gleichung 41) auf:

$$197)\qquad \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_1^s{}^h P_h \delta p_h\right) dt = \sum_1^s{}^h \left| q_h \delta p_h \right|_{t_0}^{t_1}.$$

Diese Gleichung gilt jedesmal, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die unvariierte Bewegung muß eine „natürliche“ sein, d. h. sie muß mit den Bedingungsgleichungen vereinbar sein und ihr zeitlicher Verlauf muß die Bewegungsgleichungen des Systems erfüllen.

2. Die Variation muß ebenfalls mit den Bedingungsgleichungen vereinbar sein, d. h. für ein holonomes System muß jeder Zustand der variierten Bewegung, für ein nicht holonomes aber jeder Übergang von irgend einem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung mit den Bedingungsgleichungen vereinbar sein.

Besonders wichtig ist der Fall, daß eine Kraftfunktion V existiert, daß also

$$\sum_1^s {}^h P_h \delta p_h = - \delta'' V$$

die vollständige Variation einer Funktion $- V$ der verallgemeinerten Koordinaten darstellt und daher mit $- \delta V$ zu bezeichnen ist. Die Funktion V kann auch die Zeit explizit enthalten; allein dann darf die Zeit nicht variiert werden.

Da es für das Folgende von besonderer Wichtigkeit ist, so heben wir nochmals hervor, daß V lediglich die für die unvariierte Bewegung geltende Kraftfunktion bedeutet, und daß daher unter δV nur die Variation des V zu verstehen ist, welche dadurch bewirkt wird, daß bei der variierten Bewegung die Koordinaten statt p_h die Werthe $p_h + \delta p_h$ haben. Eine etwaige Kraftfunktion der Zusatzkräfte, welche den Übergang der unvariierten in die variierte Bewegung bewirken, ist niemals in δV einzubegreifen.

Wir setzen, wenn eine Kraftfunktion existiert, ein für allemal:

198) $$T - V = H, \quad T + V = E.$$

Die Gleichung 197) reduziert sich dann auf

199) $$\int_{t_0}^{t_1} \delta H dt = \sum_1^s {}^h \left. q_h \delta p_h \right|_{t_0}^{t_1}.$$

Es seien nun, wie bisher immer, p_h, p'_h und q_h die Werte einer beliebigen (der h-ten) Koordinate, der entsprechenden Geschwindigkeit und des entsprechenden Momentes zu irgend einer Zeit t für die unvariierte Bewegung, $\mathfrak{p}_h = p_h + \delta p_h$, $\mathfrak{p}' = p'_h + \delta p'_h$, $\mathfrak{q}_h = q_h + \delta q_h$ aber seien die Werte derselben Koordinate, Geschwindigkeit und desselben Momentes zur selben Zeit bei der variierten Bewegung.

Ferner seien T und V die Werte, welche die lebendige Kraft und die Kraftfunktion annehmen, wenn man darin für die Zeit, die Koordinaten und in T auch für die Geschwindigkeiten oder Momente die Werte t, p_h, p'_h, q_h substituiert, $\mathfrak{T} = T + \delta T$, $\mathfrak{V} = V + \delta V$ aber die Werte, welche diese Größen für dieselbe Zeit t annehmen, wenn man für die Koordinaten, Geschwindigkeiten und Momente die Werte $\mathfrak{p}_h$,

$\mathfrak{p}'_h$, $\mathfrak{q}_h$ substituiert. Da V und T dieselben Funktionen der Zeit, der Koordinaten und der Geschwindigkeiten oder Momente geblieben sind, so ist

200)
$$\delta V = \sum_1^s {}_h \frac{\partial V}{\partial p_h} \delta p_h = - \sum_1^s {}_h P_h \delta p_h .$$

201)
$$\delta T = \sum_1^s {}_h \left(\frac{\partial T}{\partial p'_h} \delta p'_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} \delta p_h \right).$$

Wir bezeichnen weiter mit p_h^0, p'^0_h, q_h^0, V_0, T_0, H_0 und E_0 die Werte dieser Größen für die untere Grenze t_0 der Integrale 197) und 199). $\mathfrak{p}_h^0 = p_h^0 + \overline{\delta p_h^0}$, $\mathfrak{p}'^0_h = p'^0_h + \overline{\delta p'^0_h}$, $\mathfrak{q}_h^0 = q_h^0 + \overline{\delta q'^0_h}$ aber seien die Werte der h-ten Koordinate, Geschwindigkeit und des h-ten Momentes bei der variierten Bewegung zur gleichen Zeit t_0. Ebenso seien p_h^1, p'^1_h, q_h^1, V_1, T_1, H_1 und E_1 die Werte der entsprechenden Größen für die unvariierte Bewegung zur Zeit t_1, und $\mathfrak{p}_h^1 = p_h^1 + \overline{\delta p_h^1}$, $\mathfrak{p}'^1_h = p'^1_h + \overline{\delta p'^1_h}$ und $\mathfrak{q}_h^1 = q_h^1 + \overline{\delta q_h^1}$ die Werte für den der Zeit t_1 entsprechenden Zustand der variierten Bewegung.

Wir setzen nun

202)
$$W = \int_{t_0}^{t_1} H\, dt$$

und bilden auch das diesem Integrale entsprechende Integral $\mathfrak{W} = W + \delta W$ für die variierte Bewegung. In diesem letzteren Integrale braucht aber die untere Grenze für die Zeit nicht mit der unteren Grenze t_0 der Zeit in dem für die unvariierte Bewegung geltenden Integrale W zusammenzufallen, sondern die erstere untere Grenze kann eine unendlich wenig von t_0 verschiedene Zeit $\mathfrak{t}_0 = t_0 + \delta t_0$ sein. Ebenso kann die obere Grenze des Integrales $\mathfrak{W}$ eine unendlich wenig von t_1 verschiedene Zeit $\mathfrak{t}_1 = t_1 + \delta t_1$ sein, so daß wir erhalten

203)
$$\mathfrak{W} = W + \delta W = \int_{\mathfrak{t}_0}^{\mathfrak{t}_1} (\mathfrak{T} - \mathfrak{V})\, dt = \int_{\mathfrak{t}_0}^{\mathfrak{t}_1} \mathfrak{H}\, dt,$$

in welcher Gleichung auch die unendlich kleinen Glieder erster Ordnung gleich sein müssen.

Nach den Regeln der Variationsrechnung hat man unendlich Kleines zweiter und höherer Ordnung zu vernachlässigen und findet somit:

$$
204)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta W &= (T_1 - V_1)\,\delta t_1 - (T_0 - V_0)\,\delta t_0 - \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta V)\,dt = \\
&= H_1\,\delta t_1 - H_0\,\delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \delta H\,dt.
\end{aligned}\right.
$$

Wenn V und die π die Zeit nicht explizit enthalten, also für skleronome durch skleronome Koordinaten bestimmte Systeme kann man übrigens ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\delta t_0 = 0$ setzen. Man denkt sich dann die variierte Bewegung zur selben Zeit beginnend, wie die unvariierte, was in diesem Falle ihren Verlauf in keiner Weise ändert. Die Variation der oberen Grenze δt_1 muß dann gleich dem Betrage gemacht werden, um wieviel die ganze Integrationszeit in dem durch Formel 203) bestimmten Integrale $\mathfrak{W}$ größer ist, als in dem durch Formel 202) gegebenen Integrale W.

Das Integral $\int_{t_0}^{t_1} \delta H\,dt$ in Gleichung 204) hat nun genau dieselbe Bedeutung wie in Gleichung 199). Wie dort kann man in $\delta H = \delta T - \delta V$ die Werte 200) und 201) substituieren, die mit $\delta p'$ behafteten Glieder partiell integrieren und schließlich die infolge der Bewegungsgleichungen des Systems und den Bedingungen sich auf Null reduzierenden Glieder weglassen. Man erhält dann wieder die Gleichung 199), nämlich

$$
\int_{t_0}^{t_1} \delta H\,dt = \sum_{h=1}^{h=s} \left| q_h\,\overline{\delta p_h} \right|_{t_0}^{t_1}.
$$

Die Substitution dieses Wertes in die Gleichung 204) aber liefert:

$$
205)\quad \delta W = H_1\,\delta t_1 - H_0\,\delta t_0 + \sum_1^s {}_h \left(q'_h\,\overline{\delta p^1_h} - q^0_h\,\overline{\delta p^0_h}\right).
$$

Man kann auch umgekehrt sagen, wenn man von irgend einem Übergange gewisser Anfangswerte zu gewissen Endwerten als der unvariierten Bewegung ausgeht und die

Gleichung 205) für alle variierten Übergänge gilt, welche den Bedingungen 45) entsprechen, so ist der unvariierte Übergang, von dem man ausging, immer eine den für die gegebenen Werte von V und π geltenden mechanischen Gleichungen entsprechende (eine „natürliche") Bewegung des Systems, da dann nach partieller Integration der $\delta p'$ enthaltenden Glieder in dem von t_0 bis t_1 erstreckten Integrale der Koeffizient der Variation jeder Koordinate, insofern dieselbe nicht durch die Bedingungsgleichungen bestimmt ist, für jedes t verschwinden muß, woraus man wieder die Bewegungsgleichungen des Systems erhält.

Die Gleichung 205) sagt daher, wenn sie für alle mit den auseinandergesetzten Bedingungen verträglichen Variationen einer gewissen zeitlichen Veränderung der p gilt, aus, daß diese Veränderung der p den Bewegungsgleichungen der Mechanik entspricht also die entsprechende Bewegung des Systems eine natürliche ist.

§ 30. Ableitung der Gleichung, welche die Grundlage für das Folgende bildet.

In Formel 205) sind $\overline{\delta p^1_h}$ und $\overline{\delta p^0_h}$ die Zuwächse, welche die h-te Koordinate erfährt, wenn man von den Zuständen der unvariierten Bewegung, welche zu den Zeiten t_0 und t_1, also den beiden Integrationsgrenzen des durch Formel 202) gegebenen Integrales W eintreten, zu denjenigen Zuständen übergeht, welche bei der variierten Bewegung zu denselben Zeiten t_0 und t_1 eintreten. Es ist besser, diejenigen Zuwächse einzuführen, welche eintreten, wenn man zu den Zuständen übergeht, welche bei der variierten Bewegung zu den Zeiten $\mathfrak{t}_0 = t_0 + \delta t_0$ und $\mathfrak{t}_1 = t_1 + \delta t_1$ eintreten, welche letztere Zeiten wieder die beiden Integrationsgrenzen des durch Formel 203) definierten Integrales $\mathfrak{W}$ bilden. Wir wollen die in letzterer Weise erhaltenen Koordinatenzuwächse durch Weglassung des darübergesetzten Querstriches bezeichnen. Beim Übergange von dem zur Zeit t_0 stattfindenden Zustande der unvariierten Bewegung zu dem zur gleichen Zeit t_0 stattfindenden Zustande der variierten Bewegung wächst die Koordinate p_h und $\overline{\delta p^0_h}$. Da bis auf unendlich Kleines sich auch bei der variierten Bewegung die Koordinate p_h zur Zeit t_0 mit der Geschwindigkeit p'^0_h ändert, so wächst beim Übergange von dem zur Zeit t_0 stattfindenden Zustande der variierten Bewegung zu dem zur Zeit $t_0 + \delta t_0$ stattfindenden Zustande derselben Bewegung p_h um $p'^0_h\,\delta t_0$. Die Summe dieser beiden Zuwächse ist die Größe, die wir soeben δp^0_h ohne Querstrich darüber nannten.

Es ist also $\delta p^0_h = \overline{\delta p^0_h} + p'^0_h\,\delta t_0$ und ebenso findet man $\delta p^1_h = \overline{\delta p^1_h} + p'^1_h\,\delta t_1$. Da zudem nach Gleichung 57) und 198) allgemein

$$\sum_1^s{}^h p'_h q_h = 2T \quad \text{und} \quad E = 2T - H$$

ist (ersterer aber nur für skleronome generalisierte Koordinaten), so erhält man:

$$206)\quad \begin{cases} \sum_1^s{}^h (q^1_h \overline{\delta p^1_h} - q^0_h \overline{\delta p^0_h}) = \sum_1^s{}^h (q^1_h\,\delta p^1_h - q^0_h\,\delta p^0_h) - \\ \qquad\qquad - 2(T_1\,\delta t_1 - T_0\,\delta t_0). \end{cases}$$

Die Substitution dieses Werthes in die Gleichung 205) aber liefert:

$$207)\quad \delta W = -E_1\,\delta t_1 + E_0\,\delta t_0 + \sum_1^s{}^h (q^1_h\,\delta p^1_h - q^0_h\,\delta p^0_h).$$

Diese Gleichung ist die Fundamentalgleichung, aus welcher wir nun eine Reihe allgemeiner Relationen ableiten wollen. Sie erfordert nicht, daß das System skleronom sei, aber die generalisierten Koordinaten müssen skleronom sein, d. h. die Lage des Systems muß durch sie zu allen Zeiten in gleicher Weise bestimmt sein. Es muß eine Kraftfunktion existieren, welche aber die Zeit explizit enthalten kann. Falls diese die Zeit nicht explizit enthält, ist natürlich $E_0 = E_1$.

Die Gleichung 207) zeigt, daß die Größe W, wenn die Zeit, die Anfangs- und die Endlagen nicht variiert werden, für natürliche Bewegungen ein Grenzwert ist. Wenn die Integrationsgrenzen nicht über ein gewisses Maß ausgedehnt werden[1])

[1]) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 64.

und die Kraftfunktion V konstant ist, also keine expliziten Kräfte wirken, so ist dieser Grenzwert stets ein absolutes Minimum. Man sieht dies am besten, wenn man rechtwinklige Koordinaten einführt. Es ist dann die zweite Variation von W gleich der Summe der mit den Massen multiplizierten Quadrate der Variationen der Geschwindigkeitskomponenten, also eine wesentlich positive Größe. Wenn dagegen explizite Kräfte wirken, so wären darüber noch besondere Untersuchungen notwendig, und es wäre vielleicht der Zusammenhang zwischen den Bedingungen der Existenz eines absoluten Minimums und der kinetischen Stabilität der betreffenden Bewegung von Interesse.

Man legte der Funktion W, weil sie in so vielen Fällen ein absolutes Minimum ist, eine metaphysische Bedeutung bei und nannte sie die Wirkung, besser hätte man sie freilich den „Kraftaufwand" genannt: denn man könnte sich metaphysische Gründe denken, weshalb die Natur alles mit dem kleinsten Kraftaufwande erreicht, kaum aber dafür, daß sie immer eine möglichst kleine Wirkung erzielt. Es machte übrigens schon Jacobi darauf aufmerksam, daß, wo Differentialgleichungen existieren, im allgemeinen immer auch ein bestimmtes Integral existieren wird, welches durch die den Differentialgleichungen entsprechenden Veränderungen zu einem Grenzwerte gemacht wird, daß es daher gar keine metaphysische Bedeutung hat, wenn es ein solches Integral auch für die Differentialgleichungen der Mechanik gibt.

Ohne irgend welche metaphysische Nebengedanken wollen wir trotzdem kürzehalber alle aus Gleichung 207) fließenden Relationen unter dem Namen „Wirkungsprinzipe" zusammenfassen. Das einfachste derselben war schon lange bekannt, aber erst durch Hamilton und noch vollkommener durch Jacobi erhielten wir eine allgemeine Übersicht über alle diese Relationen und ihren Zusammenhang, weshalb man wohl auch ihren Inbegriff, aber keineswegs bloß den im ersten Abschnitte behandelten Satz als das Hamiltonsche oder Hamilton-Jacobische Prinzip bezeichnen darf.

§ 31. Allgemeine Gleichungen Jacobis.

Ehe wir jedoch hierzu übergehen, wollen wir, Jacobi folgend, unsere Gleichungen noch verallgemeinern. Wir werden zwar in den folgenden Paragraphen dieses Buches nur Fälle betrachten, wo T eine homogene quadratische Funktion der p' ist. Man stößt aber manchmal auf Gleichungen, die sonst denen ganz analog sind, mit denen wir es hier zu tun haben; nur daß die p' in anderer Weise in T enthalten sind. Es ist daher nützlich, uns für einen Augenblick von jeder speziellen Annahme über das Vorkommen der p' in T unabhängig zu machen.

Sei H eine ganz beliebige Größe, welche in beliebiger Weise 1. eine independente Variable, welche wir behufs Vereinfachung der Sprechweise die Zeit nennen, 2. beliebige Funktionen $p_1, p_2 \ldots p_s$ der Zeit und 3. deren Differentialquotienten $p'_1, p'_2 \ldots p'_s$ nach der Zeit enthalte. Die partiellen Ableitungen des H nach den p', welche natürlich so zu bilden sind, als ob die p, p' und t independent wären, bezeichnen wir mit q. Wir setzen also:

$$208)\qquad q_h = \frac{\partial H}{\partial p'_h}, \quad h = 1, 2 \ldots s.$$

Durch diese s Gleichungen sind die q als Funktionen der p, p' und der Zeit gegeben. Wir nehmen an, daß sich daraus umgekehrt die p' als Funktionen der p, q und der Zeit finden lassen und daß sie dann in der Form erscheinen:

$$209)\qquad p'_h = \psi_h(p, q, t).$$

Alle diese Ausdrücke können entwickelt werden, wenn H als Funktion der p, p' und der Zeit gegeben ist. Wir setzen weiter:

$$210)\qquad E = \sum_{h=1}^{h=s} q_h p'_h - H.$$

Ferner nehmen wir an, daß von der Zeit t_0 bis zur Zeit t_1 die p, p' und q bestimmt sind durch ihre Anfangswerte und folgende Differentialgleichungen

$$211)\qquad \frac{d q_h}{d t} = -\frac{\partial_q E}{\partial p_h} + \sum_{l=1}^{l=\sigma} \lambda_l \pi_h^{(l)},$$

wo der Index q des ∂ ausdrückt, daß die partiellen Differentialquotienten so zu verstehen sind, daß E als Funktion der p, q und der Zeit auszudrücken, also die p' darin durch die Werte 209) zu ersetzen sind. Außerdem sollen die Zuwächse der p noch σ Bedingungsgleichungen von der Form

$$212)\qquad \tau\,dt + \sum_{h=1}^{h=s} \pi_h^{(l)}\,dp_h = 0, \quad l = 1, 2 \ldots \sigma$$

erfüllen, wodurch die λ bestimmt erscheinen. Sobald H gegeben ist, können die p als Funktionen der q ausgedrückt werden, es sind also durch die Gleichungen 211) und 212) die Gesetze der Veränderung der p, p' und q bestimmt. Den Inbegriff der mittels dieser Gleichungen aus gewissen Anfangswerten für alle Zeiten von t_0 bis t_1 folgenden Werte nennen wir die unvariierten Werte oder auch symbolisch die unvariierte Bewegung der Werte der p, p' und q.

Wir wollen nun den zu jeder Zeit hierbei eintretenden Werten der p unendlich kleine Zuwächse erteilen. Die dadurch entstehenden Werte der p nennen wir deren variierte Werte. p_h soll dabei zur Zeit t den Zuwachs δp_h erfahren. Sämtliche δp sollen sonst ganz willkürlich sein, nur sollen sie gleich endlichen kontinuierlichen differenzierbaren Funktionen der Zeit multipliziert mit einer unendlich kleinen Konstanten sein, und den Bedingungen

$$213)\qquad \sum_{h=1}^{h=s} \pi_h^{(l)}\,\delta p_h = 0. \quad l = 1, 2 \ldots \sigma$$

genügen. Der Inbegriff aller variierten Werte der p bildet wieder ein kontinuierlich mit der Zeit sich änderndes Wertsystem, das variierte oder die variierte Wertebewegung, bei welcher der Differentialquotient des p_h zur Zeit t gleich

$$\frac{dp_h}{dt} + \frac{d\,\delta p_h}{dt}$$

ist. Der zweite Addend ist also der Zuwachs $\delta p'_h$, den der Wert der Größe p'_h zur Zeit t beim Übergang von einem Wertsystem der ursprünglichen zum korrespondierenden (d. h. in unseren gegenwärtigen Betrachtungen zur gleichen Zeit gehörenden) der variierten Bewegung erfährt. Die entsprechenden Zuwächse der q findet man durch Variierung der Gleichungen 208).

Wir wollen nun das Integral $\int\limits_{t_0}^{t_1} H\,dt$ zunächst für die ursprüngliche Wertebewegung berechnen und dann den Zuwachs $\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} H\,dt$ suchen, welchen dieses Integral beim Übergang von der ursprünglichen zur variierten Bewegung erfährt. Nach den Regeln der Variationsrechnung ist, da wir in diesem Paragraphen die Zeitgrenzen nicht variieren:

$$214)\qquad \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} H\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \sum_{h=1}^{h=s} \left(q_h\, \delta p'_h + \frac{\partial_{p'} H}{\partial p_h}\, \delta p_h \right),$$

und man erhält durch partielle Integration:

$$215)\quad \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} H\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \sum_{h=1}^{h=s} \left(-\frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial_{p'} H}{\partial p_h} \right) \delta p_h + \sum_{h=1}^{h=s} \Big| q_h \delta p_h \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Wir denken uns nun in die Größe E einmal die Variabeln t, p, p', dann die Variabeln t, p, q eingeführt, indem wir die p' durch die Werte 209) ersetzen. Wenn dann sämtliche der Größen t, p, p' ganz willkürliche unendlich kleine Zuwächse $\delta_1 t$, $\delta_1 p_h$ und $\delta_1 p'_h$ erfahren, so wird das so oder so ausgedrückte E denselben Zuwachs $\delta_1 E$ erfahren müssen. Die aus den Gleichungen 208) hierbei folgenden Zuwächse der q bezeichnen wir mit $\delta_1 q$.

Aus Gleichung 210) folgt:

$$\delta_1 E = \sum_{h=1}^{h=s} p'_h\, \delta_1 q_h - \frac{\partial_{p'} H}{\partial p_h}\, \delta_1 p_h - \frac{\partial H}{\partial t}\, \delta_1 t.$$

Denkt man sich dagegen in E die Variabeln p, q und t eingeführt, so folgt:

$$\delta_1 E = \sum_{h=1}^{h=s} \left(\frac{\partial_q E}{\partial p_h}\, \delta_1 p + \frac{\partial_q E}{\partial q_h}\, \delta_1 q_h \right) + \frac{\partial E}{\partial t}\, \delta_1 t.$$

Da diese beiden Werte von $\delta_1 E$ für alle $\delta_1 p$, $\delta_1 q$ und $\delta_1 t$ identisch gleich sein müssen, so folgt:

$$216)\quad \frac{\partial_q E}{\partial p_h} = -\frac{\partial_{p'} H}{\partial p_h}, \qquad \frac{\partial_q E}{\partial q_h} = \frac{d p_h}{d t}, \qquad \frac{\partial E}{d t} = -\frac{\partial H}{d t}.$$

Genügt daher das System der unvariierten Werte (die unvariierte Wertebewegung) den Gleichungen 211), so folgt

$$\sum_{h=1}^{h=s}\left(-\frac{d q_h}{d t}+\frac{\partial_{p'} H}{\partial p_h}\right)\delta p_h=\sum_{h=1}^{h=s}\left(-\frac{d q_h}{d t}-\frac{\partial_q E}{\partial q_h}\right)\delta p_h=$$
$$=-\sum_{l=1}^{l=\sigma}\sum_{h=1}^{h=s}\lambda_l\,\pi_h^{(l)}\,\delta p_h,$$

was vermöge der Bedingungen 213) verschwindet. Man erhält also aus 215):

$$217)\qquad \delta\int_{t_0}^{t_1} H\,d t=\sum_{h=1}^{h=s}\Big|\,q_h\,\delta p'_h\,\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Man sieht sofort, daß diese Gleichung eine Verallgemeinerung der Gleichung 207) ist, welche man wieder erhält, wenn man speziell unter den p die generalisierten Koordinaten des dort betrachteten materiellen Systems und unter H den Ausdruck $T-V$ versteht, dagegen ist Gleichung 207) insofern weit allgemeiner, als in derselben auch die Integrationsgrenzen für die Zeit variiert werden, während in 217) die Zeit nicht variiert. Da T unter den für die Gleichung 207) geltenden Voraussetzungen der Gleichung 57) genügt, so geht unter ebendiesen Voraussetzungen die Gleichung 210) über in $E=2T-H$, was dann liefert: $E=T+V$.

Diese allgemeineren Gleichungen fallen jedoch nicht zusammen mit den mechanischen Bewegungsgleichungen, welche für den Fall gelten, daß die Koeffizienten der Quadrate und Produkte der verallgemeinerten Geschwindigkeiten im Ausdruck für die lebendige Kraft die Zeit explizit enthalten. Im letzteren Falle ist 207) und selbst die Lagrangeschen Gleichungen im allgemeinen nicht mehr richtig. So würde für rechtwinklige Koordinaten bei variabler Masse die Gleichung 207) nur gültig bleiben, wenn die Bewegungsgleichungen so lauten würden:

$$\frac{d q_h}{d t}=\frac{d}{d t}\left(m\frac{d x}{d t}\right)=-\frac{\partial H}{\partial p_h}=-\frac{\partial V}{\partial x}=X,$$

während man annimmt, daß auch bei veränderlicher Masse $m \frac{d^2 x}{d t^2} = X$ ist.

Hamel (Karlsruhe) hat die Lagrangeschen Gleichungen nach einer anderen Seite hin verallgemeinert, indem er statt der Momente lineare Funktionen derselben (Momentoide) einführte nachdem schon Lagrange und Poisson gewisse allgemeine Formeln aufgestellt hatten, in denen statt der Koordinaten und Momente irgend welche Funktionen derselben eingefügt erscheinen.

§ 32. Nochmals das Prinzip der stationären Wirkung.

Wir gelangen in folgender Weise zunächst wieder zum Prinzipe der stationären Wirkung. Wir lassen sowohl die untere Grenze t_0 als auch die obere Grenze t_1 in Formel 207) oder, wenn keine Kraftfunktion existiert, in Formel 199) unvariiert, so daß $\delta t_0 = \delta t_1 = 0$ ist, was, sobald die Kraftfunktion und die Bedingungsgleichungen die Zeit nicht explizit enthalten, darauf hinauskommt, daß wir die Zeitdauer der Bewegung, über welche das Integral 202) erstreckt ist, unvariiert lassen. Ferner lassen wir zur Zeit t_0, welche die untere Grenze das Integrals 202) bildet, sämtliche materiellen Punkte für die unvariierte und variierte Bewegung die gleiche Lage haben, so daß also δp^0_h, welches in diesem Falle mit $\overline{\delta p^0_h}$ identisch ist, für jedes h verschwindet. Endlich lassen wir die Variationen der Geschwindigkeit für die Zeit t_0 und die Zusatzkräfte, welche die unvariierte Bewegung in die variierte verwandeln, sonst zwar ganz willkürlich sein, binden sie aber an die eine Beschränkung, daß sie bewirken sollen, daß auch zur Zeit t_1 die Lage sämtlicher materieller Punkte für die unvariierte und variierte Bewegung dieselbe sein soll, so daß also auch $\delta p^1_h = \overline{\delta p^1_h}$ für jedes h verschwindet. Dann folgt also aus Gleichung 207):

$$\delta W = 0. \tag{218}$$

W ist ein sogenannter Grenzwert. Sein Zuwachs ist ein unendlich Kleines höherer Ordnung bezüglich der Zuwächse δp_h, $\delta p'_h$ und δq_h, welche die Werte der Koordinaten, Geschwindigkeiten und Momente zu irgend einer Zeit im allgemeinen erfahren.

Dieses Prinzip gilt, wie wir schon im I. Abschnitt sahen, und wie sich sofort ergibt, wenn man in Gleichung 199) statt in Gleichung 207) die Zeit und die Anfangs- und Endkoordinaten unvariiert läßt, auch wenn keine Kraftfunktion existiert. Nur darf dann das Variationszeichen nicht im gewöhnlichen Sinne vor das Integralzeichen gesetzt werden, sondern

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\, d t$$

muß bloß als ein symbolischer Ausdruck für

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta' V)\, d t$$

betrachtet werden. Um dies sinnfällig zu machen, könnte man wieder dafür $\delta' W$ schreiben, und sobald unentschieden ist, mit welchem Falle man es zu tun hat, $\delta'' W$, so daß also die allgemeinste Gleichung so lautet:

218 a) $$\delta'' W = 0.$$

Das Prinzip der stationären Wirkung gestattet, jede bestimmte mechanische Aufgabe auf eine rein phoronomische zu reduzieren, d. h. die Integrale der Bewegungsgleichungen jedes mechanischen Problems sind allgemein mit der zur Befriedigung der Grenzbedingungen nötigen Zahl von Integrationskonstanten gefunden, wenn die Lösung folgender Aufgabe gelungen ist: Die gegebene Zahl materieller Punkte ist im Verlaufe der zwischen zwei gegebenen Zeitmomenten t_0 und t_1 liegenden Zeit in solcher Weise kontinuierlich im Raume von einer bestimmten willkürlich gegebenen Anfangslage zu einer ebenso willkürlich gegebenen Endlage überzuführen, daß $W = \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\, d t$, was wir die Wirkung während dieser Zeit nannten, ein Grenzwert wird, wobei T eine durch die Natur des Systems gegebene Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten, V eine ebenfalls gegebene

Funktion der Koordinaten und der Zeit ist, welche beide Funktionen nebst den etwa vorhandenen Bedingungsgleichungen, die für holonome Systeme bei der unvariierten und variierten Überführung eingehalten werden müssen, die Natur des Problems bestimmt. Für nicht holonome Systeme muß jeder Übergang von den unvariierten zu den korrespondierenden variierten Werten die Bedingungen erfüllen.

Löst man die Bewegungsgleichungen der Mechanik für irgend eine mechanische Aufgabe in der geschilderten Weise mittels des Prinzipes der stationären Wirkung, so ist natürlich die Berechnung der Integrationskonstanten am einfachsten, wenn diese nicht dadurch bestimmt sind, daß die Werte der Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten für irgend eine Zeit ($t = t_0$, den Zeitanfang), sondern dadurch, daß die Werte der Koordinaten allein aber für zwei verschiedene Zeiten (t_0 und t_1, z. B. den Anfang und das Ende der Bewegung) gegeben sind. Sind sie in anderer Weise gegeben, so verfährt man folgendermaßen: Man denkt sich zuerst die Koordinatenwerte für $t = t_0$ und $t = t_1$ gegeben und findet so Integrale der Bewegungsgleichungen mit der nötigen Zahl von Integrationskonstanten. Hat man einmal so die Form der Integralgleichungen gefunden, so ist dann die Bestimmung der darin enthaltenen Integrationskonstanten aus irgend welchen anderen Grenzbedingungen bloß eine Aufgabe der gewöhnlichen Algebra und macht meist keine Schwierigkeit mehr.

Daß unter Einhaltung der Bedingungsgleichungen des Systems und der Grenzbedingungen $\delta t_0 = \delta t_1 = \delta p^0{}_h = \delta p^1{}_h = 0$ die Gleichung $\delta W = 0$ besteht, ist die Bedingung, daß die betreffende zeitliche Veränderung der p mit den Bewegungsgleichungen verträglich ist, also eine natürliche Bewegung darstellt. Ein spezieller Fall zeitlicher Veränderung ist es, wenn alle p sich gar nicht mit der Zeit ändern. Für diese Bewegung, welche für skleronome Systeme jedenfalls eine natürliche ist, ist dann $T = 0$, V konstant, $\delta W = -\delta[(t_1 - t_0) V] = -(t_1 - t_0)\delta V$. Die Bedingung, daß unter dem Einfluß gewisser Kräfte und Bedingungen vollkommene Ruhe des Systems möglich, d. h. wie man sich ausdrückt, daß sich die Kräfte am ruhenden Systeme unter der gegebenen Einschränkung der Bewegungsfreiheit das Gleichgewicht halten, ist also $\delta V = 0$ oder in rechtwinkligen Koordinaten $\sum_1^{3n}{}_h X_h \delta x_h = 0$. Dieses Prinzip, dessen Beweis Lagrange an die Spitze seiner Statik stellt, ist also ein einfacher spezieller Fall des Prinzipes der stationären Wirkung. Für rheonome Systeme gilt derselbe Beweis, wenn man $t_1 - t_0$ als sehr klein annimmt.

Wir nannten V die Kräftefunktion oder auch das Potential. Helmholtz nennt es das statische Potential. Weil sich für bewegte Systeme in gewissem Sinne der Ausdruck $H = T - V$ damit analog verhält, nennt Helmholtz die letztere Größe das kinetische Potential, den Ausdruck

$$\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} H\,d\,t = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1}(T - V)\,d\,t$$

nennt er das mittlere kinetische Potential und bezeichnet ihn mit $\overline{H}$. Es ist $W = (t_1 - t_0)\,\overline{H}$, und da beim Prinzip der stationären Wirkung $t_1 - t_0$ unvariiert bleiben muß, kann man dasselbe auch dahin aussprechen, daß das mittlere kinetische Potential $\overline{H}$ ein Grenzwert sein muß.

§ 33. Beispiele.

Erstes Beispiel über die Anwendung des Prinzipes der stationären Wirkung. Es sei ein einziger materieller Punkt gegeben, auf den gar keine (expliziten) Kräfte wirken und dessen Bewegung auch an gar keine irgendwie beschaffene Bedingungen geknüpft sei. Dann ist V konstant und man sieht sofort, daß man es ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gleich Null setzen kann. Die Wirkung während der Zeit $t_1 - t_0$ ist also, abgesehen von einem konstanten Faktor:

$$219) \qquad 2\,W = \int_{t_0}^{t_1} c^2\,d\,t = \int_{t_0}^{t_1}(u^2 + v^2 + w^2)\,d\,t.$$

An Stelle des Problems, in diesem Falle die Gesetze der Bewegung zu finden, tritt das geometrische Problem, den Punkt aus irgend einer gegebenen Anfangslage in irgend eine gegebene Endlage kontinuierlich mit der Zeit so überzuführen, daß der Ausdruck 219) bei konstantem t_0 und t_1 ein Grenzwert wird, wobei c die Geschwindigkeit, u, v, w deren Komponenten in den Koordinatenrichtungen sind. Da in diesem Integrale die Koordinaten nicht vorkommen, so ist es gar nicht notwendig, dieselben als Variable einzuführen; man kann gleich die Variabeln u, v und w beibehalten; nur hat man wegen der Unveränderlichkeit des Ausgangspunktes und Endpunktes der Bewegung die Bedingung beizufügen, daß die drei Integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} u\,dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} v\,dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} w\,dt$$

unveränderlich sein müssen. Um den Grenzwert des Integrals 219) unter der Nebenbedingung, daß die letzteren drei Integrale unveränderlich sein müssen, zu finden, hat man nach den Regeln der Variationsrechnung zur Variation des ersten Integrals die der drei letzten mit willkürlichen aber konstanten Faktoren λ, μ, ν multipliziert, hinzuzuaddieren, wodurch man erhält:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\,[(u+\lambda)\,\delta u + (v+\mu)\,\delta v + (w+\nu)\,\delta w] = 0\,.$$

In dieser letzteren Gleichung sind jetzt $\delta u, \delta v, \delta w$ ganz willkürlich. Daher müssen für den Grenzwert ihre Koeffizienten gleich Null, also $u = -\lambda$, $v = -\mu$, $w = -\nu$, also alle drei Geschwindigkeitskomponenten konstant sein (Galileis Trägheitsgesetz).

Die Aufgabe, daß ein einziger materieller Punkt gegeben ist, auf den keine expliziten Kräfte wirken, der aber gezwungen ist, sich entweder auf einer vorgeschriebenen Fläche oder auf einer vorgeschriebenen Kurve zu bewegen, wollen wir nicht weiter behandeln, da er nach dem Gesagten dem der Variationsrechnung Kundigen keine Schwierigkeit bereiten dürfte.

Zweites Beispiel. Wenn die Bewegung eines freien materiellen Punktes mit den Koordinaten x, y, z unter dem

Einfluß der Schwere zu suchen ist, so kann man die z Achse vertikal nach abwärts ziehen. Dann ist V gleich $-mgz$ und das Problem, die Bewegung des materiellen Punktes zu finden, reduziert sich auf die Aufgabe, einen Punkt so kontinuierlich während der gegebenen Zeit $t_1 - t_0$ von einer beliebig gegebenen Anfangslage in eine beliebig gegebene Endlage zu überführen, daß dabei das Integral

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] + mgz \right\} dt,$$

welches jetzt die Wirkung während der Zeit $t_1 - t_0$ darstellt, ein Grenzwert wird. Sucht man nach den bekannten Regeln der Variationsrechnung die Bedingung hierfür, wobei man am besten tut t_0, t_1 und dt unvariiert zu lassen, so folgt:

$$m \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dx}{dt} \frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\delta z}{dt} + g\delta z \right) dt = 0 .$$

Die partielle Integration und separate Nullsetzung der Koeffizienten von δx, δy und δz liefert dann die bekannten Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} - g = 0 .$$

Die sechs Integrationskonstanten bestimmen sich dadurch, daß für $t = t_0$ und $t = t_1$ die Werte der Koordinaten gegeben sind.

Auch bei dieser zweiten Aufgabe wollen wir den Fall, daß der materielle Punkt nicht frei, sondern gezwungen ist, entweder auf einer vorgeschriebenen Fläche oder auf einer Kurve zu bleiben, so daß der Grenzwert desselben Ausdrucks aber jetzt unter der Nebenbedingung zu suchen ist, daß die Koordinaten die Gleichung der Fläche oder die beiden Gleichungen der Kurve erfüllen müssen, dem Leser überlassen.

§ 34. Helmholtz' Kräfte $\mathfrak{P}$ und Definition der p' durch $\delta\Omega = 0$.

In der Physik kommt häufig der Fall vor, daß die Gesamtkraft aus zwei Summanden besteht, von denen der eine eine Kraftfunktion F hat, der andere bloß als Funktion der Zeit gegeben ist, so daß die nach irgend einer Koordinate p_h wirkende Kraft P_h die Form hat $-\frac{\partial F}{\partial p_h} + \mathfrak{P}_h$, wobei $\mathfrak{P}_h$ eine gegebene Funktion der Zeit ist. Dann hat man einfach den Fall einer die Zeit enthaltenden Kraftfunktion und in den entwickelten Gleichungen ist zu setzen:

$$220)\qquad V = F - \sum_1^s {}^h \mathfrak{P}_h p_h .$$

Es kann dann das betreffende System, seine Bewegung und auch die Kraftfunktion F gegeben sein und von den Gleichungen die Beantwortung der Frage gefordert werden, welche Kräfte $\mathfrak{P}_h$ zu den durch die Kraftfunktion F bestimmten zu jeder Zeit noch hinzugefügt werden müssen, um am gegebenen System die gegebene Bewegung hervorzurufen.

Werden die Kräfte $\mathfrak{P}_h$ von äußern Vorrichtungen auf das System ausgeübt, so sind dagegen $-\mathfrak{P}_h$ die Kräfte, welche umgekehrt das System auf jene Vorrichtungen ausübt.

Helmholtz hat eine Verallgemeinerung des Prinzips der stationären Wirkung gefunden, welche, weil sie in der Elektrodynamik Anwendung findet, hier noch erwähnt werden soll.

Er betrachtet $2s$ vollkommen independente Variabeln $p_1, p_2 \ldots p_s, p'_1, p'_2 \ldots p'_s$, welche im Verlaufe einer gegebenen Zeit (von t_0 bis t_1) beliebige, sich kontinuierlich folgende Werte durchlaufen sollen, so daß also jetzt von vornherein gar nicht vorausgesetzt ist, daß p'_h der Differentialquotient von p_h nach der Zeit ist. T sei eine beliebig gegebene Funktion der $2s$ Variabeln $p_1 p_2 \ldots p_s, p'_1 \ldots p'_s$, jedoch sei es bezüglich der p' eine ganze Funktion zweiten Grades, also durch einen Ausdruck von der Form 35) gegeben. Zwischen den $s+1$ Variabeln $t, p_1, p_2 \ldots p_s$ können noch σ holonome oder nicht holonome Bedingungsgleichungen von der Form $\pi^l dt + \sum_1^s {}^h \pi_h^l dp_h = 0$ bestehen. V und die π seien beliebig gegebene Funktionen dieser $s+1$ Variabeln.

Er stellt nun die Forderung, daß die Größe

$$221)\qquad \Omega = \int_{t_0}^{t_1} \left[T - V - \sum_1^s {}^h \left(p'_h - \frac{dp_h}{dt}\right) \frac{\partial T}{\partial p'_h} \right] dt$$

ein Grenzwert sein soll unter folgenden Bedingungen: 1. t_0 und t_1 und die Werte der ungestrichenen p zu diesen Zeiten sollen nicht variiert werden, so daß man auch dt nicht zu variieren braucht, 2. die Variationen der ungestrichenen p sollen die Bedingungen erfüllen $\sum_1^s {}^h\, \pi_h^l\, \delta p_h = 0$, $l = 1, 2 \ldots \sigma$.

Da die gestrichenen p völlig unabhängig sind, so muß die Variation $\delta'_i \Omega$, welche Ω erfährt, wenn man sonst alles unverändert läßt und nur eines der p', z. B. p'_i, um $\delta p'_i$ wachsen läßt, verschwinden. Die im Ausdrucke für Ω in der eckigen Klammer stehende Summe erfährt dann den Zuwachs

$$\delta p'_i \frac{\delta T}{\delta p'_i} + \sum_1^s {}^h \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t}\right) \frac{\delta T}{\delta p'_h \delta p'_i} \delta p'_i$$

und daher wird:

$$\delta'_i \Omega = \int_{t_0}^{t_1} \delta p'_i \, d t \sum_1^s {}^h \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t}\right) \frac{\delta^2 T}{\delta p'_h \delta p'_i};$$

da nun $\delta p'_i$ eine ganz willkürliche kontinuierliche Funktion von t ist, die nur die Bedingung zu erfüllen hat, daß sie für jeden Wert des t unendlich klein sein muß, so muß der Faktor von $\delta p'_i$ in dem zuletzt für $\delta'_i \Omega$ gefundenen Ausdrucke für jedes t verschwinden und man hat daher für jedes t und $i = 1, 2 \ldots s$:

222) $$\sum_1^s {}^h \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t}\right) \frac{\delta^2 T}{\delta p'_h \delta p'_i} = 0.$$

Dies sind für die s Größen $p'_h - \frac{d p_h}{d t}$ im ganzen s lineare homogene Gleichungen. Da nach Gleichung 35) $\frac{\delta T}{\delta p'_h \delta p'_i} = a_{hi}$ ist, so sind die Koeffizienten dieser linearen Gleichungen gleich den a_{hi}, und da nach 56) die Determinante dieser Koeffizienten nicht verschwindet, so können die sämtlichen linearen Gleichungen 222) nur erfüllt sein, wenn sämtliche Ausdrücke von der Form $p'_h - \frac{d p_h}{d t}$ verschwinden. Der in § 9 für das Nichtverschwinden dieser Determinante gegebene

Beweis gilt auch für rheonome generalisierte Koordinaten; denn man kann sich immer denken, daß die zwischen den rechtwinkligen und generalisierten Koordinaten zu einer bestimmten Zeit bestehenden Beziehungen unabhängig von der Zeit fortbestehen. Dann werden die generalisierten Koordinaten skleronom, ohne daß die a ihre Werte ändern.

Lediglich aus der Voraussetzung, daß der Ausdruck 221) unter den soeben präzisierten Bedingungen ein Grenzwert wird, folgt also, was früher Definition der p'_h war, daß $p'_h = \frac{d p_h}{d t}$ ist. Sobald aber dies bewiesen ist, wird der Ausdruck Ω der Gleichung 221) mit dem Ausdrucke W der Gleichung 202) identisch, und da auch die Bedingungen, unter denen jetzt Ω ein Grenzwert werden soll, identisch sind mit denen, unter denen früher W ein Grenzwert wurde, so folgt, wie damals so auch jetzt, daß die zeitliche Veränderung der p, für welche Ω ein Grenzwert wird, die Lagrangeschen Gleichungen der analytischen Mechanik erfüllt.

§ 35. Das Wirkungsprinzip als Grundprinzip der gesamten Naturwissenschaft.

Historisch führte natürlich offener oder versteckter die Vorstellung der Zentrikräfte zwischen materiellen Punkten zur allmählichen Entwicklung der Mechanik in ihrer heutigen Gestalt. Daraus allein darf man freilich noch nicht den Schluß ziehen, daß diese Vorstellung deswegen auch immer ihre Basis bleiben müsse. Es kommt ja oft genug vor, daß ein Satz, der zuerst unter gewissen beschränkenden Bedingungen gefunden wurde, sich später auch in allgemeineren Fällen als gültig erweist. So könnten die Prinzipien der Mechanik, wie das der virtuellen Verschiebungen oder das der stationären Wirkung, ebenfalls unter Bedingungen gelten, welche sich nicht durch Zentrikräfte realisieren lassen.

Es wurde in der Tat oft die Ansicht ausgesprochen, daß man die Vorstellung der Zentrikräfte ganz fallen lassen und an ihre Stelle irgend eines der allgemeinen Prinzipe zur Basis der Mechanik machen solle. Wählt man hierzu das Energieprinzip, so muß man, da dieses viel spezieller ist, als die Gleichungen der Mechanik, noch eine ganze Reihe anderer Sätze hinzunehmen und mit der Ableitung des Gesamtmaterials aus einem einheitlichen Prinzipe ist es wiederum vorbei. Dies wäre nicht notwendig, wenn man das Prinzip der stationären Wirkung wählen würde, da aus diesem in der Tat die Gleichungen der Mechanik in ihrer Gesamtheit folgen.

Es kann hier sogar der Fall ins Auge gefaßt werden, daß der Zustand von Systemen durch andere Koordinaten bestimmt ist, als solche, welche die Lage in einem dreidimensionalen Raume angeben. So haben z. B. Gibbs, Helmholtz u. a. Relationen aufgestellt, in denen die Temperatur, der elektrische Zustand und ähnliche Variabele vorkommen und welche die mechanischen Prinzipe, besonders das Prinzip der stationären Wirkung, als spezielle Fälle enthalten. Allein diese Relationen sind in anderer Hinsicht doch wieder viel weniger allgemein. Sie gelten manchmal ausschließlich für Zustände, die sich nur unendlich wenig vom Gleichgewichtszustande unterscheiden. Sie enthalten ferner der Mechanik fremde Dunkelheiten, wie den Begriff der Entropie, der Irreversibilität und zahlreiche erfahrungsmäßig gegebene Eigenschaften der Temperatur, Elektrizität etc., deren Vorstellung keineswegs so einfach ist, wie die der geometrischen Beziehungen von Punkten.

Es besteht die Möglichkeit, das Auftreten von Gleichungen, welche denen der Mechanik analog sind, in der Theorie der Elektrizität, der Wärme etc., sowie die besonderen Eigenschaften, welche den in diesen Theorien vorkommenden Größen zukommen, daraus zu erklären, daß diese Phänomene durch verborgene mechanische Bewegung verursacht sind und auch die Dunkelheiten im Verhalten der in der übrigen Physik vorkommenden Größen durch mechanische Bilder aufzuhellen, z. B. die des Entropie- und Irreversibilitätsbegriffes durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Verhalten sehr zahlreicher materieller Punkte.

Wenn ich sage, die mechanischen Bilder könnten imstande sein, derartige Dunkelheiten aufzuhellen, so meine ich damit nicht, daß die Lage und Bewegung materieller Punkte im Raume etwas wäre, dessen einfachste Elemente vollständig erklärbar sind. Im Gegenteile, die letzten Elemente unserer Erkenntnis zu erklären ist überhaupt nicht möglich; denn erklären heißt ja, auf Bekannteres, Einfacheres zurückführen und daher muß das, worauf alles zurückgeführt wird, immer unerklärbar bleiben. Wenn daher auch alles aus den einfachsten Grundbegriffen der Mechanik erklärt wäre, so würden diese dafür in aller Ewigkeit geradeso unerklärbar bleiben, wie es heute für uns auch die der Elektrizitätslehre sind.

Auch will ich nicht streiten, ob der Begriff der Lage im Raume, oder der der Temperatur, oder der einer elektrischen Ladung an sich klarer ist: ein solcher Streit wäre gegenstandslos. Nur wäre es sicher klarer, wenn wir nicht nur alle Bewegungserscheinungen an festen, tropfbaren und gasförmigen Körpern, sondern auch Wärme, Licht, Elektrizität, Magnetismus, Gravitation, alles durch die Vorstellung von Bewegungen materieller Punkte im Raume, also durch ein einziges einheitliches Prinzip erklären könnten, als wenn wir für jedes dieser Agentien wieder ein ganzes Inventar vollkommen fremdartiger Begriffe wie Temperatur, elektrische Ladung, Potential etc. brauchen, ob wir diese fremdartigen Begriffe nun als etwas vollkommen Selbständiges oder als lauter disparate für jede Energieform apart zu postulierende Energiefaktoren bezeichnen mögen.

Wenn man sich schon überhaupt um die künftigen Jahrhunderte oder gar Jahrtausende kümmern will, so will ich gerne zugeben, daß es vermessen wäre, zu hoffen, daß das heutige mechanische Weltbild selbst nur in seinen wesentlichsten Zügen sich in alle Ewigkeit erhalten werde.

Daher bin ich auch weit entfernt, von Versuchen, allgemeinere Gleichungen zu suchen, von denen die mechanischen nur spezielle Fälle sind, gering zu denken. Ja ich wäre mit dem Erfolge dieses Buches zufrieden, wenn ich durch den Nachweis, wie klar ein Weltbild sein kann und muß, dazu beigetragen hätte, daß die Konstruktion eines anderen noch umfassenderen und klareren Weltbildes, sei es auf Grundlage des Energieprinzips oder des Prinzips der stationären Wirkung oder der geradesten Bahn, gelänge. Nur dem Leichtsinne, welcher, bevor ein anderes derartiges Weltbild von der ersten Grundlage bis zur Anwendung auf die wichtigsten Erscheinungen, die schon so lange durch das alte Weltbild erschöpfend dargestellt worden sind, detailliert ausgearbeitet vorliegt, ja ohne von den Schwierigkeiten der Konstruktion desselben eine Ahnung zu haben, das alte Weltbild der Mechanik für einen überwundenen Standpunkt erklärt, möchte ich entgegenarbeiten. Vor allem dürfte man, wenn man das Bild materieller Punkte vermeiden will, nicht doch wieder in der Mechanik später materielle Punkte einführen, sondern man müßte von anders beschaffenen Einzelwesen oder Elementen[1]) ausgehen, deren Eigenschaften so klar wie die der materiellen Punkte zu schildern wären.

Ich schrieb das Vorstehende vor etwa sieben Jahren nieder, der Schlußsatz stellt also die von mir vor sieben Jahren gestellte Forderung dar (so alt ist der Grundstock des Manuskripts für das vorliegende Buch). Ich brachte alles das jetzt absichtlich unverändert zum Abdrucke. Was ich dort nach Jahrhunderten oder gar Jahrtausenden erwartete, ist in sieben Jahren zur Hälfte geschehen.

Aber nicht von der Energetik, nicht von der Phänomenologie ging der Hoffnungsstrahl einer nichtmechanischen Naturerklärung aus, sondern von einer Atomtheorie, die in phantastischen Hypothesen die alte Atomtheorie ebenso übertrifft, wie ihre Elementargebilde an Kleinheit die alten Atome übertreffen. Ich brauche nicht zu sagen, daß ich die moderne Elektronentheorie meine. Diese strebt gewiß nicht die Begriffe der Masse und Kraft, das Trägheitsgesetz etc. aus Einfacherem, leichter Verständlichem zu erklären, ihre einfachsten Grundbegriffe und Gesetze werden sicher ebenso

[1]) Vergl. Wied. Ann. Bd. 60, S. 247, 1897.

unerklärlich bleiben, wie für das mechanische Weltbild die der Mechanik. Aber der Vorteil, die gesamte Mechanik aus anderen, für die Erklärung des Elektromagnetismus ohnehin notwendigen Vorstellungen ableiten zu können, wäre ebenso groß, als wenn umgekehrt die elektromagnetischen Erscheinungen mechanisch erklärt werden könnten. Möge das erstere gelingen und dabei meine vor sieben Jahren gestellte Forderung erfüllt werden!

§ 36. Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Wir wollen nun annehmen, daß weder die Kraftfunktion V noch die Bedingungsgleichungen, die nun alle holonom sein sollen, die Zeit explizit enthalten d. h. daß das System skleronom sei. Dann braucht man t_0 nicht zu variieren, da man ohne Beschränkung der Allgemeinheit der unteren Grenze des auf die unvariierte Bewegung bezüglichen Integrales 202) die untere Grenze des der variierten Bewegung entsprechenden Integrales 203) zuordnen kann. δt_1 ist dann die Variation der ganzen Zeit $t_1 - t_0$, über welche die Integration sich erstreckt. Ferner ist dann in der Gleichung der lebendigen Kraft

$$E = T + V,$$

E eine während der unvariierten Bewegung konstante Größe; daher wird

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (2\,T - E)\,dt$$

$$\delta\,W = 2\,\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt - \int_{t_0}^{t_1} \delta E\,dt - E\,\delta t_1,$$

wogegen aus Gleichung 207) folgt:

$$\delta W = -\,E\,\delta\,t_1 + \sum_1^s{}^h (q^1_h\,\delta p^1_h - q^0_h\,\delta p^0_h).$$

Die Vergleichung dieser beiden Werte für $\delta\,W$ ergibt:

223) $$2\,\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta\,E\,dt + \sum_1^s{}^h (q^1_h\,\delta p^1_h - q^0_h\,\delta p^0_h).$$

Wir wollen zunächst das Prinzip der kleinsten Wirkung in seiner alten historischen Form ableiten. Wir setzen dabei voraus, daß das Intervall $t_1 - t_0$, über welches sich das Integral 202) erstreckt, den Zuwachs δt_1 erfährt, und dies ist ein wesentlicher Unterschied von dem früher behandelten Prinzipe der stationären Wirkung, wo dieses Zeitintervall unverändert blieb. Ferner setzen wir voraus, daß die der unteren Grenze t_0 entsprechenden Werte der Koordinaten für die variierte Bewegung dieselbe wie für die unvariierte sind, daß also δp^0_h für jedes h verschwindet. Die Geschwindigkeiten für die Zeit t_0, bei welcher sowohl für die unvariierte als auch für die variierte Bewegung die Integration beginnt, können zwar Variationen erfahren, jedoch nur so, daß die gesamte lebendige Kraft T_0 im Zeitmomente t_0 keine Veränderung erfährt, daß also die Konstante A unverändert bleibt. Ferner sollen alle Zusatzkräfte, welche noch eine weitere Variation der Bewegung bewirken, in keinem Zeitmomente eine Arbeit auf das materielle System übertragen oder ihm entziehen. Es soll daher für die variierte Bewegung $T + V$ zu Anfang denselben Wert E wie für die unvariierte Bewegung haben und auch zu allen späteren Zeiten soll die gesamte Energie $T + V$ für die variierte Bewegung denselben Wert E wie zu Anfang haben. Da aber auch für die unvariierte Bewegung $T + V = E$ ist, so ist allgemein $\delta E = 0$.

Dies wäre z. B. erfüllt, wenn die Zusatzkräfte dadurch bewirkt würden, daß jeder materielle Punkt in eine starre glatte Röhre eingeschlossen würde, deren Mittellinie unendlich wenig von der unvariierten Bahn des betreffenden materiellen Punktes abwiche und durch die Punkte ginge, wo sich der Punkt zu den Zeiten t_0 und t_1 bei der unvariierten Bewegung befand. Außerdem soll die Variation der für die Zeit t_0 geltenden Geschwindigkeiten und sollen die Zusatzkräfte noch so beschaffen sein, daß zu irgend einer Zeit $t_1 + \delta t_1$, welche gleich t_1 oder unendlich wenig verschieden von t_1 ist, sämtliche materielle Punkte genau in die Lage kommen, die sie für die unvariierte Bewegung zur Zeit t_1 hatten. Dann ist auch $\delta p^1_h = 0$ für jedes h und es folgt aus Gleichung 223)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,d\,t = 0. \tag{224}$$

Es wird also das Integral $\int_{t_0}^{t_1} T\,d\,t$ ein Grenzwert, welche Aussage das alte Prinzip der kleinsten Wirkung, wie es schon lange vor Hamilton ausgesprochen wurde, bildet. Dasselbe ist nur für den Fall, daß man die Zeit $t_1 - t_0$ also nach unserer Methode neben t_0 auch t_1 unvariiert läßt, ein spezieller Fall des Prinzips der stationären Wirkung.

§ 37. Variationsmethode, wobei auch die Independente, resp. die Zeit variiert wird.

Die alte Ableitungsweise des Prinzipes der kleinsten Wirkung, welcher auch wir im vorigen Paragraph gefolgt sind, setzt voraus, daß eine Kraftfunktion existiert, welche die Zeit nicht explizit enthält. Diese Voraussetzung war bei Ableitung der Gleichung 30) resp. 218a), welche den allgemeinsten Ausdruck des Prinzipes der stationären Wirkung darstellt, nicht notwendig. Es hat Helmholtz gezeigt, daß sie auch bei Ableitung des Prinzipes der kleinsten Wirkung nicht notwendig ist und daß daher aus letzterem Prinzipe die allgemeinen Grundgleichungen der Mechanik für skleronome Koordinaten in allen Fällen abgeleitet werden können, in denen sie aus Gleichung 4), 30) resp. 218a) (der allgemeinsten Form des Prinzipes der stationären Wirkung) abgeleitet werden können.

Ehe ich aber hierzu übergehe, will ich noch eine ungemein wichtige Verallgemeinerung der Variationsmethode besprechen. Ich habe absichtlich bisher die Variation des Zeitdifferentials unterlassen, um zu zeigen, wie sie durch Variation der Grenzen ersetzt werden kann. Wiewohl wir nun auch in den spätern Paragraphen nirgends mehr das Zeitdifferential variieren werden, so will ich diese Variation doch in diesem Paragraph besprechen, da ohne ihre Kenntnis der ganze Begriff der Variationsrechnung ein ungemein beschränkter bliebe.

Gerade bei Ableitung des Prinzipes der kleinsten Wirkung ist es natürlicher auch dt als variabel zu betrachten, d. h. die Annahme fallen zu lassen, daß zwei Zustände der unvariierten Bewegung jedesmal zeitlich gleich weit abstehen, wie die beiden korrespondierenden Zustände der variierten Bewegung.

Es drückt dann das einer Größe vorgesetzte δ immer den Zuwachs aus, welchen diese Größe erfährt, wenn man von dem irgend einer Zeit t entsprechenden Zustande der unvariierten Bewegung zu dem korrespondierenden Zustande der variierten übergeht, d. h. zu dem, welcher bei der variierten Bewegung einer ein wenig davon verschiedenen Zeit $t + \delta t$ entspricht. Dabei kann man δt ganz beliebig wählen, also z. B. als eine ganz beliebige Funktion von t auffassen, welche nur kontinuierlich und unendlich klein von der Ordnung der δ der übrigen Größen sein muß.

Am einfachsten ist es natürlich allgemein $\delta t = 0$ zu setzen, wie wir es im früheren taten; aber es können Gründe vorhanden sein, weshalb die Einführung eines von Null verschiedenen, irgendwie passend gewählten Wertes von δt rascher zum Ziele führt. Wir bleiben also vorläufig ganz allgemein und legen dem δt weiter gar keine Beschränkung auf, als daß es kontinuierlich und unendlich klein von der Ordnung der δ der übrigen Größen sein soll.

Um den Unterschied zwischen der Variation bei Konstanthaltung der independenten Variabeln und der Variation, bei der auch die independente variiert wird, noch deutlicher hervortreten zu lassen, will ich hier eine kurze Einschaltung über die Grundprinzipien der Variationsrechnung im allgemeinen machen. Dieselbe soll nur unzusammenhängende Bruchstücke ohne jede subtile mathematische Analyse bloß zur Beleuchtung der geometrischen und physikalischen Bedeutung der betreffenden Begriffe geben. Sie soll auch keine Einleitung zum Studium der Variationsrechnung sein, sondern nur etwa zum Nebengebrauche beim Studium eines elementaren Lehrbuches über Variationsrechnung von einigem Nutzen sein. Erst nach Absolvierung dieser Einschaltung will ich wieder zu unserer mechanischen Aufgabe zurückkehren.

Das einfachste Problem der Variationsrechnung ist das folgende: Man sucht eine Funktion $y = f(x)$ einer independenten Variabeln x so zu bestimmen, daß ein Integral von der Form:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')$$

ein Grenzwert wird. Dabei ist $y' = \frac{dy}{dx}$. x_0 und x_1 sind die konstant gegebenen oder in gegebener oder willkürlicher Weise veränderlichen Grenzen des Integrales.

In der Variationsrechnung denkt man sich nun die Funktion f, für welche der geforderte Grenzwert eintritt, gefunden und durch eine Kurve MN (Fig. 3, 4, 5) dargestellt. Dann denkt man sich die Funktion f unendlich wenig variiert, so daß eine unendlich benachbarte Kurve $M'N'$ entsteht. Man läßt nun jedem Punkte der unvariierten Kurve MN einen Punkt der variierten Kurve $M'N'$ korrespondieren und bezeichnet die Zuwächse, welche Abszisse und Ordinate des betreffenden Punktes erfahren, wenn man von irgend einem Punkte der unvariierten Kurve MN zu dem diesem Punkte korrespondierenden Punkte der variierten Kurve $M'N'$ übergeht, mit δx, δy.

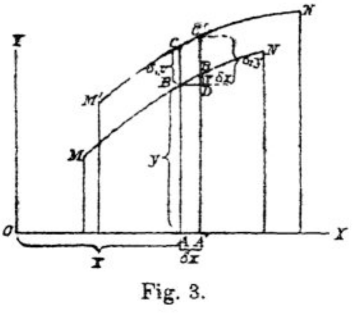

Fig. 3.

Am einfachsten und in den meisten Fällen am besten ist es, wenn man jedem Punkte der unvariierten Kurve denjenigen Punkt der variierten Kurve korrespondieren läßt, welcher vertikal darüber liegt, also dieselben Abszisse hat. Dann ist allgemein $\delta x = 0$, weil korrespondierende Punkte immer dieselbe Abszisse haben. δy aber, welches wir in diesem Falle als $\delta_1 y$ bezeichnen wollen, ist gleich der Ordinatendifferenz der beiden Punkte, in denen eine der Ordinatenachse parallele Gerade die beiden Kurven durchschneidet. BC in Fig. 3 wäre das $\delta_1 y$, wenn B der fragliche Punkt der unvariierten Kurve, C der ihm korrespondierende Punkt der variierten Kurve ist.

Es kann sich aber auch aus gewissen Gründen empfehlen, jedem Punkte der unvariierten Kurve mit der Abszisse x einen Punkt der variierten Kurve korrespondieren zu lassen, welche eine ein wenig verschiedene Abszisse $x + \delta x$ hat, wobei man für δx eine beliebige Funktion von x wählen kann. Das δx des Punktes B in Fig. 3 sei durch das Stück AA' dargestellt. Dann ist das dazu gehörige δy, das in diesem Falle mit $\delta_2 y$ bezeichnet werden soll, der Zuwachs, welchen die Ordinate erfährt, wenn man von dem Punkte B der unvariierten Kurve MN, der die Abszisse x hat, zu dem korrespondierenden Punkte C' der variierten Kurve $M'N'$, also zu demjenigen Punkte dieser Kurve übergeht, welcher die Abszisse $x + \delta x$ hat. In Fig. 3 ist $C'D$ gleich $\delta_2 y$. dy dagegen ist immer der Zuwachs, welchen die Ordinate der unvariierten Kurve erfährt, wenn man bei derselben die Abszisse x um dx wachsen läßt; die variierte Kurve kommt dabei gar nicht in Betracht.

In Fig. 4 sei $AA_1 = dx$, $DB_1 = dy$. Unter $d\delta y = \delta dy$ endlich versteht man den Zuwachs, den das δy erfährt,

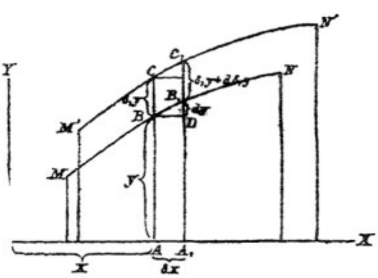

Fig. 4.

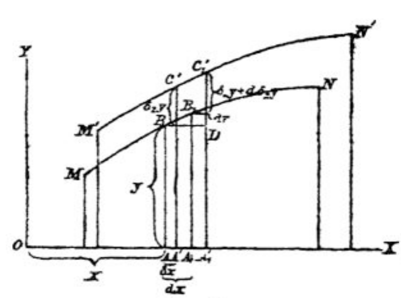

Fig. 5.

wenn man es als Funktion von x ausdrückt und in dieser Funktion x um dx wachsen läßt oder den dy erfährt, wenn man von den beiden Punkten B und B_1 Fig. 4 u. 5, deren

Ordinatendifferenz gleich dy ist, zu den beiden ihnen korrespondierenden Punkten (CC_1 in Fig. 4, $C'C'_1$ in Fig. 5) der variierten Bewegung übergeht. In Fig. 4 sind alle diese Größen für den Fall dargestellt, daß $\delta x = 0$ ist, in Fig. 5 dagegen für den Fall, daß δx von Null verschieden ist. Im ersten Falle soll das $d\delta y$ mit $d\delta_1 y$, im letzteren mit $d\delta_2 y$ bezeichnet werden.

Die Analogie der beiden hier betrachteten Variationsarten mit den soeben in der Mechanik angewandten liegt, wie ich glaube, klar zutage. Nur daß in der Mechanik t statt x die independente Variable und statt der dependenten Variablen y eine ganze Reihe von Variablen vorhanden ist. Man könnte sich bei dem mechanischen Probleme die Verhältnisse in derselben Weise versinnlichen, wenn man die Werte des t als Abszissen und die Werte irgend einer der Koordinaten oder generalisierten Geschwindigkeiten oder Momente als Ordinaten darüber auftragen würde.

Dies ist es, was ich über Variationsrechnung im allgemeinen einschalten wollte und wir kehren nun wieder zur mechanischen Aufgabe zurück.

§ 38. Über die Verallgemeinerungen, welche Helmholtz dem Prinzipe der kleinsten Wirkung erteilte.

Wir wollen also nun auch t der Variation unterwerfen. Sein Zuwachs heiße δt, d. h. wir lassen dem zur Zeit t stattfindenden Zustande der unvariierten Bewegung den zur Zeit $t + \delta t$ gehörenden Zustand der variierten Bewegung korrespondieren. Wir bleiben dabei in diesem Paragraph, wie schon bemerkt, ganz allgemein, d. h. wir legen dem δt sonst gar keine Beschränkung auf, als daß es eine kontinuierliche Funktion von t und unendlich klein von der Ordnung der δ der übrigen Größen sein soll.

Wir verfahren nun in der nachstehenden Weise. Wir bilden uns den Ausdruck

$$225)\qquad \int^{t_1} \left[2T\delta dt + \delta T dt + \sum_1^s{}^h P_h \delta p_h dt\right].$$

Diesen Ausdruck transformieren wir in der folgenden Weise. Wir ersetzen das erste Glied des Ausdrucks in der eckigen Klammer durch

$$\sum_1^s {}^h q_h p'_h \delta dt.$$

(was skleronome Koordinaten voraussetzt), das zweite durch:

$$\sum_1^s {}^h q_h \delta p_h dt + \sum_1^s {}^h \frac{\partial T}{\partial p_h} \delta p_h dt.$$

Die Summe dieser beiden Glieder reduziert sich dann auf:

226) $$\sum_1^s {}^h q_h \delta(p'_h dt) + \sum_1^s {}^h \frac{\partial T}{\partial p_h} \delta p_h dt.$$

Nun ist aber $p'_h dt = dp_h$, daher:

$$\delta(p'_h dt) = \delta dp_h = d\delta p_h.$$

Hieraus folgt.

227) $$\sum q_h \delta(p' dt) = \sum_1^s {}^h q_h \frac{d\delta p_h}{dt} dt.$$

Integriert man jedes Glied der letzteren Summe, wie wir es früher schon öfters taten, per partes, substituiert den so aus 227) erhaltenen Ausdruck in den nach 226) integrierten Ausdruck, dann diesen statt der beiden ersten Glieder des Ausdrucks 225) in diesen Ausdruck und bedenkt noch, daß kraft der Bewegungsgleichungen, weil die unvariierte Bewegung eine natürliche sein soll,

$$\sum_1^s {}^h \left(-\frac{dq_h}{dt} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h\right) \delta p_h = 0$$

ist und zwar sowohl, wenn keine, als auch wenn Bedingungsgleichungen vorhanden sind, so findet man:

228) $$\int_{t_0}^{t_1} [2T\delta dt + (\delta T + \sum_1 P_h \delta p_h) dt] = \sum_1^s (q^1_h \delta p^1_h - q^0_h \delta p^0_h).$$

Diese Gleichung umfaßt das Prinzip der stationären und das der kleinsten Wirkung; es ist vorausgesetzt, daß die generalisierten Koordinaten skleronom sind.[1]

1. Falls $\delta\, dt = 0$ ist, folgt, da wir die Integrationsgrenzen nicht variierten, wieder das Hamiltonsche Prinzip recte das Prinzip der stationären Wirkung.

2. Wenn die Variationen der Koordinaten für die Integrationsgrenzen verschwinden und außerdem die Variation speziell so ausgeführt wird, daß überall

229) $$\delta T = \sum_1^s P_h \delta p_h ,$$

also der Zuwachs der lebendigen Kraft immer gleich der durch Variation der Koordinaten geleisteten Arbeit ist, so daß die die Variation erzeugenden Zusatzkräfte niemals Arbeit leisten, so ist $\int\limits_{t_0}^{t_1} 2\,\delta(T\,dt) = 0$, daher auch

230) $$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} T\,dt = 0 ;$$

denn die Variation der Grenzen ist hier schon durch Variation des Zeitdifferentiales berücksichtigt.

Falls $\delta T - \sum_1^s P_h \delta p_h$ nicht die Variation eines Ausdrucks ist, der für endliche Teile der unvariierten Bewegung konstant ist, kann man sich vorstellen, daß die Bedingung 229) sich bloß darauf bezieht, welche Momente der variierten Bewegung man den verschiedenen Momenten der unvariierten korrespondieren läßt, so daß durch die Bedingung 229) der ganze Verlauf der variierten Bewegung in keiner Weise beschränkt wird, diese Bedingung vielmehr bloß die beiden Punkte bestimmt, welche für die variierte Bewegung als Anfangspunkt und Endpunkt der Integration gewählt werden

[1] Falls die Zeit variiert wird, folgt aus dem Verschwinden der Variationen der rechtwinkligen Koordinaten an beiden Zeitgrenzen keineswegs auch das Verschwinden der Variationen irgend welcher nicht skleronomer generalisierter Koordinaten an denselben Zeitgrenzen. Ersteres kann dann nichtholonomen Bedingungen widersprechen.

müssen. Für Anfang und Ende der Integration müssen dann noch die Koordinatenvariationen verschwinden. Denn da wir die Grenzen des Integrals nicht variiert haben, so muß der Zustand der unvariierten Bewegung, welche für diese die untere Integrationsgrenze bildet, dem Zustande korrespondieren, welcher für die variierte Bewegung die untere Integrationsgrenze bildet und dasselbe muß für die oberen Integrationsgrenzen gelten.

Dies wird besonders klar, wenn eine Kraftfunktion V existiert, welche aber die Zeit explizit enthält. Setzt man dann $T + V = E$, so ist:

$$\delta T - \sum_{1}^{s} {}^{h} P_h \delta p_h = \delta E.$$

Da aber V und folglich auch E die Zeit explizit enthalten, so durchläuft E sowohl für die unvariierte als auch für die variierte Bewegung eine Reihe kontinuierlich sich folgender Werte. Hat dann E nicht gerade für eine der Integrationsgrenzen ein Maximum oder Minimum, so kann die Bedingung 229) dahin ausgesprochen werden, daß der Anfangszustand der variierten Bewegung dort gewählt werden muß, wo für die variierte Bewegung E denselben Wert hat, den es für den Anfangszustand der unvariierten Bewegung hat und daß dasselbe auch für die Endzustände, d. h. für die den oberen Grenzen der Integrale entsprechenden Zustände gelten muß. Eine bestimmte Angabe, wie variiert werden muß, liegt dann noch darin, daß für die beiden Integrationsgrenzen die Variationen sämtlicher Koordinaten verschwinden müssen.

Es genügt dann überhaupt, abgesehen von den Stellen, wo E einen Grenzwert hat und vorausgesetzt, daß die Koordinatenvariation für die Integrationsgrenzen verschwinden, jedem Zustande der unvariierten Bewegung denjenigen der variierten korrespondieren zu lassen, wo E exakt denselben Wert hat, geradeso wie beim Prinzip der stationären Wirkung solche Zustände korrespondierten, für welche t exakt denselben Wert hat. Letztere Vorstellung ist uns so natürlich, da t niemals ein Maximum oder Minimum haben oder gar für eine endliche Strecke konstant sein kann; erstere Vorstellung ist uns unnatürlich, weil gerade für die wichtigsten Fälle E während der ganzen unvariierten und auch während der variierten Bewegung konstant ist. Hat es für beide Bewegungen denselben konstanten Wert, so ist in richtiger Weise variiert, allein dies ist nicht durch die Art und Weise bewirkt, wie sich die Zustände korrespondieren. Hat dagegen E für beide Bewegungen unendlich wenig verschiedene Werte, so kann dies durch keine Art der Zuordnung der Zustände gutgemacht werden.

§ 39. Jacobis Beleuchtung des Sinnes des Prinzipes der kleinsten Wirkung. Einfaches Beispiel für den Unterschied zwischen dem Prinzipe der stationären und dem der kleinsten Wirkung.

Es sei hier noch eines Umstandes erwähnt, auf den namentlich Jacobi großes Gewicht legt. Es soll die Variation der Koordinaten für beide Integrationsgrenzen verschwinden und es soll eine Kraftfunktion existieren, welche für die unvariierte und die variierte Bewegung die gleiche die Zeit nicht enthaltende Funktion der Koordinaten ist. Außerdem sollen die generalisierten Koordinaten skleronom sein. Dann besteht für beide Bewegungen die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$T + V = \text{konst.} = E.$$

Der Wert dieser Größe E, welche jetzt als eine gegebene Konstante zu betrachten ist, soll nun beim Übergange von der unvariierten zur variierten Bewegung auch keine Änderung erfahren.

Da nach Gleichung 35)

231) $$2T = \sum_1^s{}_h \sum_1^s{}_k a_{hk} \frac{dp_h}{dt} \frac{dp_k}{dt}$$

ist, so folgt:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2(E-V)}}\sqrt{\sum_1^s{}^h \sum_1^s{}^k a_{hk}\, dp_h\, dp_k}. \tag{232}$$

Unter den angegebenen Umständen muß nach Gleichung 224)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\, dt = 0$$

sein, was nach Gleichung 231) übergeht in

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^s{}^h \sum_1^s{}^k a_{hk} \frac{dp_h}{dt} dp_k = 0.$$

Da hier die Zeit, bei welcher die Integration beginnt, und ebenso die, wo sie endet, beliebig variieren können, und außerdem die Zeit in dem Integrale sonst in keiner Weise vorkommt, als daß dt im Nenner von $\frac{dp_h}{dt}$ steht, so kann man für dt seinen Wert aus Gleichung 232) einsetzen und erhält

$$\delta \int_0^1 \frac{\mp}{\sqrt{E-V}} \sqrt{\sum_1^s{}^h \sum_1^s{}^k a_{hk}\, dp_h\, dp_k} = 0. \tag{233}$$

Die Grenzen des Integrals bedeuten hier, daß von den gegebenen Anfangswerten der Koordinaten zu den ebenfalls gegebenen Endwerten derselben zu integrieren ist. Die Zeit ist da vollständig eliminiert. Die Gleichung 233) drückt also nur eine geometrische Bedingung für die Bahn des materiellen Systems aus, d. h. sie bestimmt die Bahnform für jeden einzelnen Punkt, und welche Punkte aller Bahnen aller materiellen Punkte zusammengehören, d. h. zu einer und derselben Zeit gehörige Lagen der materiellen Punkte darstellen.

Diese „Bahn des materiellen Systems" wird dahin bestimmt, daß unter Einhaltung der Bedingungsgleichungen die Variation 233) verschwinden muß. Wie aber diese Bahnen im Verlaufe der Zeit zurückgelegt werden, d. h. welcher Wert des t zu jeder geometrischen Konfiguration der Punkte gehört, wird durch die Gleichung 233) nicht bestimmt, sondern vielmehr durch Integration der Gleichung 232).

Da im Integrale der Gleichung 233) die Zeit gar nicht enthalten ist, so kann man sie nicht als independente Variable wählen. Wollte man in diesem Integrale durchaus eine bestimmte independente Variable haben, so könnte man eine der Koordinaten, z. B. p_1, als solche wählen und die Gleichung 233) schriebe sich in der Form

$$\delta \int_{p^0_1}^{p'_1} \frac{d p_1}{\sqrt{E - V}} \sqrt{\sum_1^s{}^h \sum_1^s{}^k a_{kh} \frac{d p_h}{d p_1} \frac{d p_k}{d p_1}} = 0,$$

wobei natürlich für $\frac{d p_1}{d p_1}$ der Wert eins zu setzen ist.

Wir wollen nun an einem ganz einfachen Beispiele den Unterschied zwischen dem Prinzipe der stationären und dem der kleinsten Wirkung erörtern.

Es bestehe das System aus einem einzigen materiellen Punkte, der entweder ganz frei oder gezwungen ist, auf einer vorgeschriebenen unveränderlichen Fläche zu bleiben, und auf den keine expliziten Kräfte wirken, d. h. keine als eventuell die Kraft, die ihn zwingt, auf dieser Fläche zu bleiben. Es ist V konstant, und da es für die variierte Bewegung der Koordinaten gleich derselben Funktion der Koordinaten sein muß, so hat es auch für diese denselben konstanten Wert.

Da ferner $V + T$ unserer Verabredung gemäß ebenfalls für die variierte und unvariierte Bewegung denselben konstanten Wert haben muß, so muß T und daher auch die Geschwindigkeit c des materiellen Punktes für beide Bewegungen gleich derselben Konstanten sein. Aus Gleichung 224) folgt daher, daß:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{m c^2}{2} dt = \frac{m c}{2} \int ds$$

ein Grenzwert sein muß. Da ferner m und c invariable Konstante sind, so muß

234) $$\delta \int ds = 0$$

sein, also die Länge $\int ds$ des Weges von einem unveränderlichen Ausgangspunkte zu einem unveränderlichen Endpunkte der Bewegung ein Grenzwert sein, ohne daß die zur Zurücklegung dieses Weges erforderliche Zeit für die variierte und unvariierte Bewegung gleich zu sein braucht.

Wollten wir dagegen das Prinzip der stationären Wirkung auf diesen Fall anwenden, so könnte, wie wir sahen, für die variierte Bewegung die Geschwindigkeit von Stelle zu Stelle ein wenig verschieden sein, müßte aber so variieren, daß die ganze Übergangszeit von einem fixen Ausgangspunkt zu einem fixen Endpunkte nicht variieren würde und das Integral 202), also auch (da V, $t_1 - t_0$ und m konstant sind) das Integral $\int_{t_0}^{t_1} c^2 dt$ ein Grenzwert würde.

§ 40. Verschiedene Fälle, wo die Grenzglieder verschwinden.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung läßt sich noch mehr verallgemeinern. Wir nahmen bisher an, daß der Ausgangspunkt und Endpunkt der Bahnen sämtlicher materieller Punkte nicht variiert, was wir den Fall A nennen wollen. Das letzte Glied der Gleichung 223) verschwindet aber auch noch in vielen anderen Fällen. 1. Im folgenden Falle, den wir den Fall B nennen wollen. Sowohl die variierte als auch die unvariierte Bewegung sollen periodisch sein, so daß bei ersterer nach einer endlichen Zeit i genau dieselben Bewegungszustände, sowohl Positionen als auch Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen, für sämtliche materielle Punkte gleichzeitig wiederkehren. Dasselbe soll gelten, wenn nochmals die Zeit i verläuft und dann wieder nach der Zeit i u. s. f. Für die variierte Bewegung soll analoges gelten; jedoch kann die Zeitdauer einer Periode unendlich wenig verschieden, z. B. gleich $i + \delta i$ sein. Setzt man dann

$$t_1 = t_0 + i, \ \delta t_1 = \delta i,$$

so gelten für jeden Wert des h infolge der Periodizität der Bewegung die Gleichungen:

$p^1_h = p^0_h,\ q^1_h = q^0_h,\ \mathfrak{p}^1_h = \mathfrak{p}^0_h$ oder $p^1_h + \delta p^1_h = p^0_h + \delta p^0_h$, daher:

$$\delta p^1_h = \delta p^0_h .$$

Es verschwinden also im letzten Gliede der Gleichung 223) zwar nicht die auf die obere und untere Grenze bezüglichen Glieder separat, aber sie werden für beide Grenzen gleich, so daß das ganze letzte Glied der Gleichung 223) doch verschwindet. Wir setzen jetzt immer skleronome skleronom bestimmte Systeme voraus.

Ein dritter Fall, wo dieses Glied verschwindet, ist der folgende, den wir den Fall C nennen. Wir bezeichnen mit L_0 die Stelle des Raumes, wo sich irgend ein materieller Punkt des Systems für die unvariierte Bewegung zur Zeit t_0 befindet, mit M_0 die Stelle, wo er sich für dieselbe Bewegung zur Zeit $t_0 + d t_0$ befindet, mit N_0 die Stelle, wo er sich bei der variierten Bewegung zur Zeit t_0 befindet. Wir wollen ferner die Lage der Punkte des Systems durch gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten bestimmen und es seien:

$$p_h,\ p_{h+1} \text{ und } p_{h+2}$$

die rechtwinkligen Koordinaten des eben besprochenen materiellen Punktes. Dann sind die Momente gleich den mit der Masse m multiplizierten Geschwindigkeiten; es sind also

$$\frac{1}{m} q^0_h\, d t_0,\quad \frac{1}{m} q^0_{h+1}\, d t_0 \quad\text{und}\quad \frac{1}{m} q^0_{h+2}\, d t_0$$

die Projektionen der Geraden $L_0 M_0$ auf die drei Koordinatenachsen. Dagegen sind:

$$\delta p^0_h,\ \delta p^0_{h+1} \quad\text{und}\quad \delta p^0_{h+2}$$

die Projektionen der Geraden $L_0 N_0$ auf die Koordinatenachsen. Wenn also diese beiden Geraden aufeinander senkrecht stehen, so muß, wie man sofort sieht, wenn man die Kosinusse der Winkel, welche jede der Geraden mit den Koordinatenachsen bildet, einführt

$$q^0_h\, \delta p^0_h + q^0_{h+1}\, \delta p^0_{h+1} + q^0_{h+2}\, \delta p^0_{h+2} = 0$$

sein.

Ebenso wollen wir mit L_1, M_1, N_1 die Stellen bezeichnen, wo sich derselbe materielle Punkt 1. auf der unvariierten Bahn zu den Zeiten t_1, 2. auf derselben Bahn zur Zeit $t_1 + dt_1$, 3. auf der variierten Bahn zur Zeit $t_1 + \delta t_1$ befindet. Dann ist

$$q^1{}_h \delta p^1{}_h + q^1{}_{h+1} \delta p^1{}_{h+1} + q^1{}_{h+2} \delta p^1{}_{h+2} = 0$$

die Bedingung, daß auch die Geraden $L_1 M_1$ und $L_1 N_1$ aufeinander senkrecht stehen. Wenn man daher die Variation der Anfangslage und Endlage so ausführt, daß jeder Punkt in der Ebene verschoben wird, welche senkrecht steht, auf seiner augenblicklichen Bewegungsrichtung in der unvariierten Bahn, was wir die orthogonale Grenzbestimmung oder Grenzbestimmung K nennen wollen, so verschwindet das letzte Glied der Gleichung 223) ebenfalls. Hierbei ist natürlich unter der Variation der Endlage die Verschiebung von der Stelle, wo sich der materielle Punkt in der unvariierten Bahn zur Zeit t_1 befand, welche die obere Grenze des Integrales 202) bildet, nach derjenigen Stelle zu verstehen, wo er sich in der variierten Bahn zur Zeit $t_1 + \delta t_1$ befindet, welche die obere Grenze des auf die variierte Bahn bezughabenden Integrales 203) ist.

Wenn das letzte Glied der Gleichung 223) verschwindet, so folgt aus derselben

$$2\delta \int_{t_0}^{t_1} T\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta E\, dt \tag{235)}$$

Wir wollen nun nicht, wie wir es in den letzten vier Paragraphen taten, voraussetzen, daß dem Systeme bei der Variation der Bewegung keine Energie zugeführt wird. Wir wollen vielmehr annehmen, die unvariierte Bewegung geschehe mit der konstanten Energie E, die variierte aber mit der ebenfalls konstanten, aber unendlich wenig davon verschiedenen Energie $E + \delta E$, so daß sich das erste Glied der rechten Seite der Gleichung 223) auf $(t_1 - t_0)\delta E$ reduziert. Die Kraftfunktion V soll die Zeit nicht explizit enthalten.

Wenn wir dann die Größe

$$\overline{T} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} T\,dt \tag{236}$$

als das Zeitmittel der lebendigen Kraft für die unvariierte Bewegung während der Zeit $t_1 - t_0$ bezeichnen, so erhalten wir aus Gleichung 223) jedesmal, wenn das letzte Glied dieser Gleichung verschwindet, also z. B. in jedem der Fälle, welche wir zu Anfang dieses Paragraphen die Fälle A, B und C genannt haben, die Gleichung:

$$\frac{\delta E}{\overline{T}} = \delta l \left[\left(\int_{t_0}^{t_1} T\,dt \right)^2 \right] = \delta l \left[\overline{T}^2 (t_1 - t_0)^2 \right], \tag{237}$$

wobei l den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Wir wollen die Bedeutung dieser Formel durch zwei Beispiele erläutern, deren erstes wir in diesem Paragraph bringen, während wir das zweite dem folgenden Paragraph vorbehalten. *1. Beispiel:* Es soll für irgend ein Wertegebiet der Integrationskonstanten der Fall B eintreten d. h. die Bewegung soll eine periodische sein, die sich nach der Zeit i, deren Länge Funktion der Integrationskonstanten sein kann, genau wiederholt.

Dies trifft zu, wenn das System ein einzelner materieller Punkt ist, der unter dem Einfluß einer der Entfernung vom Zentrum direkt proportionalen Anziehung oder einer das Newtonsche Gravitationsgesetz befolgenden Anziehung eine Zentralbewegung macht. Im letzteren Falle jedoch nur für dasjenige Wertegebiet der Integrationskonstanten, wo die Bahn ganz im Endlichen liegt.

Die Integrationskonstanten sollen anfangs bestimmte Werte haben, welche einer bestimmten Anfangsbewegung mit der Periode i_0 und der mittleren lebendigen Kraft $\overline{T}_0$ entsprechen. Dann soll dem Systeme eine kleine Energiemenge δE_0 zugeführt werden, wobei auch die Flächengeschwindigkeit eine beliebige davon unabhängige Veränderung erfahren kann. Die mit diesen neuen Werten der Integrationskonstanten stattfindende Zentralbewegung nennen wir die zweite; ihr entspreche die Periode i_1 und die mittlere lebendige Kraft $\bar{T}_1$. Hierauf soll in gleicher Weise unter abermaliger beliebiger unendlich kleiner Änderung der Flächengeschwindigkeit eine zweite Energiemenge δE_1 zugeführt werden, welche eine dritte Bewegungsart mit abermals veränderten Werten der Integrationskonstanten zur Folge hat. So fährt man fort, bis man eine ins Endliche verschiedene Schlußbewegung erhält, für welche die betreffenden Werte den Index m bekommen sollen.

Auf jede Veränderung der Bewegung kann man dann die Formel 237) anwenden, wobei man $t_1 - t_0$ immer gleich der Periode i der betreffenden Bewegung setzt. Summiert man alle in dieser Weise der Reihe nach für die verschiedenen Veränderungen der Bewegung erhaltenen Gleichungen, so folgt:

$$\sum \frac{\delta E}{\bar{T}} = l(\bar{T}^2_m\, i^2_m) - l(\bar{T}^2_0\, i^2_0).$$

Wenn sich die Werte der Integrationskonstanten in der geschilderten Weise um Endliches von ihren Anfangswerten entfernt haben, und dann in anderer Weise schließlich wieder zu ihren Anfangswerten zurückgekehrt sind, so wollen wir dies einen Kreisprozeß nennen. Für einen solchen ist $\bar{T}_m = \bar{T}_0$ und $i_m = i_0$, daher:

$$\sum \frac{\delta E}{\bar{T}} = 0.$$

Natürlich ist aber in diesem Falle auch $\sum \delta E = 0$; da man ja zur alten Bewegung zurückgekehrt ist, der dieselbe Energie innewohnt.

§ 41. Beispiel mit orthogonaler Variation.

Ein einziger materieller Punkt soll sich unter dem Einflusse von Kräften, die eine unveränderliche, die Zeit nicht explizit enthaltende Kraftfunktion haben, bewegen. Wir gehen von der unvariierten, mit der Energie E_0 stattfindenden Bewegung zu einer unendlich wenig verschiedenen mit der Energie $E_0 + \delta E_0$ stattfindenden Bewegung, dann zu einer mit der Energie $E_0 + \delta E_0 + \delta E_1$ etc. stattfindenden Bewegung über, bis wir endlich zu einer um Endliches verschiedenen Bewegung gelangen. Die Bewegung soll aber jetzt nicht jedesmal in einer geschlossenen Bahn geschehen. Es wird auch jetzt das letzte Glied der Gleichung 223) verschwinden und daher die Gleichung 237) gelten, wenn wir für die erste Bewegung die Grenzen der Integration beliebig wählen, aber für alle folgenden Bewegungen die Grenzen der Integration durch diejenige Konstruktion bestimmen, welche wir orthogonale Grenzbestimmung oder die Konstruktion K genannt haben d. h. als untere Grenze jedes folgenden Integrales soll die Zeit gewählt werden, wann der Punkt in der variierten Bahn die Ebene passiert, welche senkrecht zur augenblicklichen Bewegungsrichtung durch denjenigen Punkt der vorigen Bahn geht, wo er sich daselbst zur Zeit befand, welche damals untere Grenze des Integrales war. Durch die gleiche Konstruktion sollen sukzessive die oberen Grenzen der Zeit gefunden werden. Dann gilt wieder die Gleichung 237).

Wenn man jetzt abermals einen Kreisprozeß durchläuft, d. h. von der ursprünglichen Bahn $M_1 N_1$ durch fortwährende Variationen zu einer ganz anderen Bahn $M_3 N_3$ übergeht und dann wieder in einer anderen Weise (auf einem anderen Wege) zur alten Bahn $M_1 N_1$ mit den alten Integrationskonstanten zurückkehrt, so muß wieder $\sum \delta E = 0$ sein, aber $\sum \frac{\delta E}{T}$ braucht nicht gleich Null zu sein, da man durch fortwährende Anwendung der Konstruktion K bei Rückkehr zur selben Bahn durchaus nicht immer auf dieser Bahn auch zu demselben Ausgangspunkte und Endpunkte der Integration, also zu denselben Grenzen für t zu gelangen braucht, wenn man beim Übergange von der Bahn $M_3 N_3$ zur Bahn $M_1 N_1$ zurück nicht wieder dieselben Bahnen nur in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen hat, wie beim Hingange von der Bahn $M_1 N_1$ zur Bahn $M_3 N_3$, sondern wenn der Rückweg über ganz andere Bahnen, als der Hinweg erfolgt ist.

Wir wollen dies deutlichkeitshalber in einem ganz speziellen Falle durch Figuren versinnlichen. Sei eine endliche Strecke der ursprünglichen Bahn $M_1 N_1$ gerade (Fig. 6). Wir wählen die beiden Punkte A und B als Integrationsgrenzen. Wir wollen nämlich immer kurz sagen:

Fig. 6.

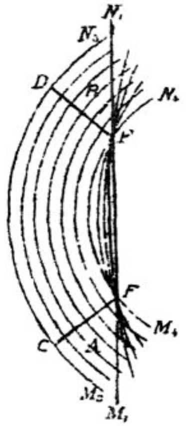

Fig. 7.

Ein Punkt ist Integrationsgrenze, wenn die Zeit, zu welcher das Bewegliche den betreffenden Punkt passiert, Integrationsgrenze des Integrales 202) ist. Die Variation der Bahn bestehe anfangs darin, daß sich dieses gerade Stück parallel zu sich selbst immer mehr nach links verschiebt, bis es in die Lage $M_2 N_2$ gelangt ist. Wenn wir die Grenzen fort und fort orthogonal variieren, so kommen wir endlich bei der Bahn $M_2 N_2$ zu den Punkten C und D als Integrationsgrenzen.

Während der weiteren Variation soll nun die Bahn sich immer mehr und mehr krümmen, bis wir zur Bahn $M_3 N_3$ gelangt sind. Sie soll aber dabei immer durch die beiden Punkte C und D gehen. Wenn wir daher weiter orthogonal variieren, so hören die Punkte C und D während dieser zweiten Periode der Variation nicht auf die Integrationsgrenzen zu bleiben. Nun soll die Bahn des Beweglichen wieder zur alten Form zurückkehren, aber nicht auf demselben Wege, auf welchem sie sich von $M_1 N_1$ in $M_3 N_3$ verwandelte. Diese weitere Art der Variation ist in Fig. 7 dargestellt. Es soll die Bahn zunächst ungefähr gleich gekrümmt bleiben, oder ihre Krümmung sogar noch etwas zunehmen. Dabei soll sich die Bahn aber immer mehr nach rechts verschieben (dritter Variationsprozeß). Die Reihe der Formen, welche die Bahn während des dritten Variationsprozesses durchläuft, nennen wir kurz die Kurvenschar S.

Wenn wir jetzt die Grenzen orthogonal transformieren, so kommen wir für die Punkte, welche der oberen und unteren Grenze des Integrales 223) entsprechen, auf die Punkteschar, die die beiden durch die Punkte C und D gehenden orthogonalen Trajektorien zur Kurvenschar S bilden. Diese beiden Trajektorien sollen die Gerade $M_1 N_1$, welche der ursprünglichen unvariierten Bahn angehört, in den beiden Punkten E und F treffen, welche also die Integrationsgrenzen darstellen, sobald die durch die Punkte E und F gehende Bahn von dem Beweglichen erreicht ist. Von da angefangen soll die Bahn in folgender Weise weiter variiert werden (vierter Variationsprozeß). Ihre Krümmung soll sich immer mehr vermindern; sie soll sich daher immer mehr der Geraden nähern, dabei aber nicht aufhören, durch die beiden Punkte E und F zu gehen. Wenn wir immer orthogonal transformieren, so bleiben also jetzt E und F die Integrationsgrenzen. Der vierte Variationsprozeß soll fortgesetzt werden, bis wieder die alte Bahn $M_1 N_1$ erreicht ist und überhaupt wieder der ganze Bewegungsprozeß derselbe geworden ist, der er bei der ursprünglichen unvariierten Bewegung war.

Wir haben also jetzt einen vollständigen Kreisprozeß durchlaufen. Der Bewegungsprozeß wurde fort und fort variiert, bis er schließlich genau wieder der alte geworden ist. Die Bahn ging von der Gestalt $M_1 N_1$ aus, transformierte sich allmählich in die Gestalt $M_3 N_3$ und kehrte dann auf anderem Wege wieder in die ursprüngliche Gestalt $M_1 N_1$ zurück. Obwohl daher das Integral $\int_{t_0}^{t_1} T\,d\,t$ zum Schluß wieder genau über denselben Bewegungszustand zu erstrecken ist, wie zu Anfang, so ist doch jetzt der Wert desselben ein ganz anderer, weil es zwischen ganz anderen Grenzen zu erstrecken ist. Ursprünglich waren nämlich die Integrationsgrenzen die Zeiten, während welcher das Bewegliche die Punkte A und B passierte. Jetzt sind es die Zeiten, während welcher es die Punkte E und F passiert, welche mit τ_0 und τ_1 bezeichnet werden mögen. Wenn wir daher durch das Integralzeichen jetzt eine Summe aller während des ganzen in Fig. 6 und 7 dargestellten Variationsprozesses eintretenden Zuwächse bezeichnen, so folgt aus Gleichung 237)

238) $$\int \frac{\delta E}{\bar{T}} = l\left[\int_{t_0}^{t_1} T\,d\,t\right]^2 - l\left[\int_{\tau_0}^{\tau_1} T\,d\,t\right]^2,$$

was im allgemeinen keineswegs gleich Null sein wird.

Um die Sätze, welche wir in diesem und dem vorigen Paragraphen behandelt haben noch weiter zu spezialisieren, können wir den schon im ersten Teile § 22 behandelten Fall einer Zentralbewegung benutzen, welche ein materieller Punkt von der Masse m ausführt, wenn er gegen ein festes Zentrum 0 mit der Kraft $\frac{m\lambda}{r^2} - \frac{m a}{r^3}$ gezogen wird.

Hierbei ist r die Entfernung des materiellen Punktes vom Anziehungszentrum, λ und a sind konstant. Aus den dort entwickelten Formeln findet man durch Ausführung einiger überaus einfacher Integrationen[1]) für die Zeit, welche das Bewegliche braucht, um vom Perihel (Perizentrum) zum Aphel (Apozentrum) zu gelangen, den Betrag:

$$\tau = -\frac{\pi\lambda}{h}\sqrt{-\frac{1}{h}}.$$

Ferner ergibt sich das vom Perihel zum Aphel erstreckte Integral

$$\int T\,d\,t = \pi\, m\left[-\frac{3\lambda}{2}\sqrt{-\frac{1}{h}} + \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{a+k^2}}\right].$$

[1]) Näheres über die Durchführung dieser Integrationen, auf welche ich hier nicht weiter eingehen will, da es bloße Übungsaufgaben zu den einfachsten Sätzen der Integralrechnung sind, findet man Wiener Sitzungsber. Bd. 75, II, Januar 1877.

Die Division dieser beiden Ausdrücke liefert:

$$\bar{T} = m h \left[\frac{3}{2} - \frac{a}{2\lambda}\sqrt{-\frac{h}{a+k^2}}\right]. \tag{238}$$

Der gesamte Zuwachs der Energie aber ist $\delta E = \delta h$. Es folgt also:

$$\frac{\delta E}{\bar{T}} = \frac{\delta h}{m h \left[\frac{3}{2} - \frac{a}{2\lambda}\sqrt{-\frac{h}{a+k^2}}\right]}. \tag{239}$$

Für $a = 0$ geschieht die Zentralbewegung nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze. Die Bahn ist, sobald sie überhaupt ganz im Endlichen liegt, eine geschlossene. Und es ist auch $\frac{\delta E}{T}$ ein vollständiges Differential. Ist dagegen a von Null verschieden, so sind die Bahnen im allgemeinen nicht geschlossen. Es ist dann auch $\frac{\delta E}{\bar{T}}$ kein vollständiges Differential der beiden als independent betrachteten Variabeln h und k (der durch die Anfangswerte bestimmten Integrationskonstanten der Bewegungsgleichung). Denn es ist allerdings für orthogonale Variation der Grenzen nach Formel 237): $\frac{\delta E}{\bar{T}} = \left. l(\int T\,dt)^2 \right|_{\text{Anf.}}^{\text{Ende}}$.

Allein wenn die Bahn nach beliebiger Variation der Größen h und k wieder dieselbe wird, so werden die Grenzen von $\int T\,dt$ bei fortwährender orthogonaler Variation keineswegs dieselben und $\left| l(\int T\,dt)^2 \right|_{\text{Anf.}}^{\text{Ende}}$ hat einen von Null verschiedenen Wert.

IV. Analogien mit physikalischen, besonders wärmetheoretischen Sätzen.

§ 42. Analogon der zugeführten Wärme.

Die spezielle Eigentümlichkeit der Gleichungen der Thermodynamik ist dadurch bedingt, daß der Zuwachs der zugeführten Wärme kein vollständiger Differentialausdruck ist. Nun ist aber das Differentiale δE der zugeführten Energie immer ein vollständiger Differentialausdruck, solange wir, wie in den Beispielen des vorigen Paragraphen, skleronome Systeme betrachten. Solange wir uns daher auf die Betrachtung solcher Systeme beschränken und das Differential der zugeführten Wärme mit dem Zuwachse δE der Gesamtenergie in Parallele stellen, ist also schon in diesem wichtigsten Stücke keine Analogie vorhanden.

Es hat aus diesem Grunde schon Clausius Systeme betrachtet, in denen Fernkräfte vorkommen, deren Wirkungsgesetz sich mit der Zeit ändert, so daß also an die Stelle gewisser, sonst in der Kraftfunktion V vorkommender Konstanten, mit der Zeit sehr langsam veränderliche Parameter treten und das betrachtete mechanische System rheonom ist.

Wenn man sich z. B. einen ein warmes Gas abschließenden Stempel unter dem Bilde äußerer auf die Gasmoleküle wirkender abstoßender Normalkräfte denkt, die bei großer Annäherung an die Oberfläche des Stempels plötzlich enorm große Werte annehmen, so kann man sich ein langsames Zurückweichen des Stempels unter dem Bilde einer langsamen Änderung der Kraftfunktion dieser Kräfte denken. Analog fingiert Clausius auch Zentralbewegungen, bei denen das Wirkungsgesetz der Zentralkraft mit der Zeit veränderliche Parameter enthält.

Es tritt aber bei dieser Clausiusschen Vorstellung der Veränderlichkeit des Wirkungsgesetzes der Naturkräfte eine Rechnungsschwierigkeit ein. Zur Kraftfunktion V dieser Kräfte tritt immer eine additive willkürliche Konstante hinzu, welche wir dadurch bestimmt denken können, daß für eine bestimmte Lage sämtlicher materieller Punkte des Systems (Nullniveau des Potentiales) $V = 0$ wird. Für skleronome Systeme ist es vollkommen gleichgültig, welche Lage man hierfür wählt. Ändert sich dagegen das Wirkungsgesetz der Kraft mit der Zeit, so ändert sich auch die Arbeit, welche die Überführung von einer Nulllage in eine andere erfordert. Der Absolutwert des V ändert sich daher in verschiedener Weise, je nachdem die eine oder andere Nulllage gewählt wird und um vollständig bestimmt zu sein, muß man angeben, welche besondere Lage man als Nulllage wählt.

Am besten ist es da wohl immer diejenige Lage zu wählen, wobei alle materiellen Punkte so weit voneinander und von allen übrigen auf sie wirkenden Punkten entfernt sind, daß auf keinen derselben mehr eine bemerkbare Kraft wirkt. In physikalischen Fällen wird diese Wahl der Nulllage immer möglich sein. Nur bei Kraftgesetzen, welche durch mathematische Abstraktion konstruiert sind, z. B. wenn die Kraft, welche zwischen zwei materiellen Punkten wirkt, der Entfernung derselben direkt proportional angenommen wird, kann diese Wahl der Nulllage unmöglich werden.

Die Clausiussche Annahme, daß sich das Wirkungsgesetz der zwischen den materiellen Punkten tätigen Kräfte mit der Zeit verändert, gibt zwar eine vollständige Analogie mit den thermodynamischen Gleichungen; allein in der Natur bemerken wir nichts, was darauf hindeuten würde, daß das Wirkungsgesetz gewisser Naturkräfte mit der Zeit veränderlich wäre. Ja es würde sogar die physikalische Forschung überhaupt aufhören, wenn wir nicht wüßten, ob die Naturgesetze, welche wir heute gefunden haben, auch noch für spätere Zeiten richtig sein werden. Es ist daher unter dieser Clausiusschen Annahme die Energiebilanz eine äußerst schwankende, zu einer unzweideutigen Definition derselben kann man nur unter mehr oder minder willkürlichen Annahmen gelangen und es empfiehlt sich, die Annahme der Veränderlichkeit des Wirkungsgesetzes der Kräfte durch die Voraussetzung zu ersetzen, daß mit den

n materiellen Punkten, welche das betrachtete System bilden, noch andere (ν) materielle Punkte in Wechselwirkung stehen. Die letzteren Punkte sollen während der unvariierten Bewegung vollständig unbeweglich sein; während der Variation der Bewegung aber außerordentlich langsam ihren Ort verändern. Dann fällt auch die oben erwähnte Rechnungsschwierigkeit wieder fort.

Es wird dann nicht die gesamte den n Punkten zugeführte Energie mit der zugeführten Wärme in Parallele gesetzt, sondern die Arbeit, welche die n Punkte infolge ihrer Bewegung unter dem Einflusse der von den ν Punkten auf sie ausgeübten Kräfte gewinnen, entspricht der einem Körper zugeführten äußeren Arbeit und bloß die übrige zugeführte Energie der zugeführten Wärme, so daß das Differential desjenigen Energieanteils, welches der zugeführten Wärme entspricht, kein vollständiges Differential ist, während das Differential der totalen zugeführten Energie es doch ist.

Die Lage der n materiellen Punkte soll durch s Koordinaten (die rasch veränderlichen), die der ν Punkte aber durch g Koordinaten (die langsam veränderlichen Parameter) bestimmt sein.

So erhält man z. B. in folgender Weise ein gutes Bild der umkehrbaren Zustandsänderungen eines Gases, welches durch einen Stempel abgeschlossen ist. Die Molekularbewegung und innere Atombewegung der Gasmoleküle läßt man der raschen Bewegung der betrachteten n materiellen Punkte entsprechen. Die Moleküle des Stempels, deren Wärmebewegung wir uns ohne erhebliche Änderung des Problems hinwegdenken können, läßt man den ν materiellen Punkten entsprechen, welche sich nur bei Variation des Zustandes des Gases (und zwar solange dessen Zustandsänderungen umkehrbar sind, außerordentlich langsam) bewegen.

§ 43. Begriff der zyklischen und der damit verwandten Bewegungen.

Es handelt sich nun noch darum, auch der raschen Bewegung der n materiellen Punkte solche Eigenschaften zuzuschreiben, daß sie sich möglichst zu einem treuen Abbilde der für die Wärmebewegung charakteristischen Eigenschaften eignet.

Die Aufgabe, eine kurze, systematische Zusammenstellung aller Grundtypen mechanischer Systeme zu geben, welche zu diesem Behufe verwendet wurden, wird dadurch erschwert, daß viele derselben einige Merkmale mit andern derselben gemein haben und die verschiedenen Autoren bald die einen, bald die andern Merkmale als die wesentlichsten ansahen, wodurch auch die Terminologie eine schwankende wurde. In der hier versuchten Zusammenstellung wird es mir daher weder gelungen sein Vollständigkeit noch größtmögliche Übersicht in der Klassifizierung zu erreichen und ich war auch gezwungen in der Terminologie bald von der des einen, bald wieder von der des andern Autors ein wenig abzuweichen.

Wenn wir die Grundanschauungen der mechanischen Theorie der Wärme akzeptieren, so besteht eine der hervorstechendsten Eigenschaften der Wärmeenergie darin, daß in einem warmen Körper zwar fortwährend die lebhafteste Bewegung der kleinsten Teilchen stattfindet, daß wir aber trotzdem in dem äußerlich sichtbaren und wahrnehmbaren Zustande desselben keine Veränderung bemerken, während wir sonst, wenn ein Körper sich bewegt, klar wahrnehmen, wie sich der Zustand desselben mit der Zeit fortwährend ändert.

Dieselbe Eigenschaft finden wir auch auf anderen Gebieten der Physik. Auch an einem ruhenden elektrischen Strome von unveränderlicher Intensität, in dessen Nachbarschaft sich ruhende Magnete oder Eisenmassen befinden, sehen wir außer in der treibenden Batterie nirgends die mindeste zeitliche Veränderung und trotzdem erklärt Maxwell die Eigenschaften desselben durch die Hypothese, daß das Wesen des elektrischen Stromes in einer heftigen Bewegung bestehe, deren Schauplatz teils das Innere des Stromleiters, teis auch der umgebende Äther ist.

Wir müssen uns also nach mechanischen Modellen umsehen, denen ähnliche Eigenschaften zukommen. Ein Beispiel eines solchen Modelles liefert ein starrer, rund um seine Achse herum absolut symmetrischer Rotationskörper, der keine andere Bewegung macht, als eine rapide Drehung um diese Achse. Ein anderes Beispiel liefert ein wirbelloser Strom einer absolut homogenen, inkompressibeln reibungslosen Flüssigkeit in einem in sich selbst zurücklaufenden Kanale mit absolut starren Wänden. Wir bezeichnen derartige Bewegungen als zyklische.

Spezielle zyklische Systeme wurden schon früher mehrfach in der Mechanik und Wärmetheorie besonders von Rankine verwendet. Maxwell behandelte zuerst allgemeine cyklische Systeme und verwendete sie zur Erklärung der elektromagnetischen und elektrodynamischen Erscheinungen. Ihre Anwendung auf die Wärmetheorie in allgemeinerer Form als es durch Rankine geschah, die Weiterentwicklung der schon von Maxwell aufgestellten Grundgleichungen für dieselben, sowie auch die Grundzüge der jetzt üblichen Terminologie dafür ist Helmholtz zu verdanken.

Zyklische Systeme im strengsten Sinne (wir wollen sie im folgenden echte Zykeln nennen) sind solche, in denen zwar beliebige Bewegungen stattfinden, jedoch so, daß, wenn irgend ein Massenteilchen eine Stelle des Raumes verläßt, immer sofort ein vollkommen gleich beschaffenes an dessen Stelle tritt, welches die gleiche gleichgerichtete Geschwindigkeit hat, die auch das erstere Teilchen an dieser Stelle des Raumes hatte. Eine Koordinate heißt eine echt zyklische, wenn das System eine solche Bewegung ausführt, sobald sich diese Koordinate unter Konstanthaltung der übrigen Koordinaten verändert.

Die Molekularbewegungen, welche nach der mechanischen Wärmetheorie die Wärme darstellen, sind nach den Vorstellungen dieser Theorie keine streng zyklischen. Nur wegen der großen Zahl der bewegten Moleküle erreicht immer, sobald ein Molekül aus einem gewissen Bewegungszustande austritt, bald in der Nachbarschaft ein anderes Molekül einen sehr ähnlichen Bewegungszustand, so daß wir äußerlich keine Veränderung wahrnehmen. Deshalb hat man den Begriff der echt zyklischen Systeme erweitert; das Charakteristikum der echt zyklischen Systeme besteht darin, daß ihre sämtlichen Eigenschaften nicht von dem Absolutwerte der echt zyklischen Koordinaten, sondern bloß von deren Änderungsgeschwindigkeiten abhängen. Der nach der Zeit nicht differenzierte Wert einer zyklischen Koordinate kann daher weder im Ausdrucke für die lebendige Kraft, noch in den Ausdrücken für die auf das System wirkenden Kräfte noch in den die Bedingungen ausdrückenden Funktionen vorkommen. In Verallgemeinerung des Begriffs der echt zyklischen Koordinaten wollen wir nach dem Vorgange Hertz' jede beliebige Koordinate, deren nach der Zeit nicht differenzierter Wert in allen diesen Ausdrücken nicht vorkommt, als eine zyklische Koordinate schlechtweg bezeichnen.

Wenn in einem Systeme weder innere noch äußere Kräfte tätig sind, wie dies Hertz von allen Systemen annimmt, so sind, falls auch keine Bedingungsgleichungen vorhanden sind, selbst die rechtwinkligen Koordinaten zyklische.

Eine gewisse Verwandtschaft mit den zyklischen Systemen haben solche Systeme, deren Bewegung eine periodische ist, bei denen also nach Verlauf einer gewissen Zeit immer wieder genau dieselben Bewegungszustände in derselben Reihenfolge wiederkehren, und welche wir kurz periodische Systeme nennen wollen. Dieselben können, wenn den periodisch bewegten Massen nur eine untergeordnete Rolle zufällt, fast alle Eigenschaften der zyklischen haben, wenn sie sich z. B. nur dadurch von echt zyklischen unterscheiden, daß sie rotierende Zahnräder, hin- und hergehende Kolben oder sonstige oszillierend sich bewegende Massen enthalten.

Helmholtz geht noch weiter und betrachtet Systeme, welche bloß der Bedingung unterworfen sind, daß nicht nur die Summe der kinetischen und potentiellen Energie, sondern jede dieser Energien für sich immer konstant bleibt. Er nennt diese Systeme isokinetische. Einen noch allgemeineren Begriff bildet Clausius, indem er eine Bewegung, wobei niemals der Wert irgend einer der rechtwinkligen Koordinaten oder irgend einer der Geschwindigkeitskomponenten eines materiellen Punktes nach den Koordinatenrichtungen über alle Grenzen wächst, wenn die Bewegung beliebig lang fortgesetzt wird, als eine stationäre bezeichnet, wofür ich aber lieber das Wort „finit“ gebrauchen will. Wenn außerdem noch die Bewegung zwar nicht in dem Sinne periodisch ist, daß nach Verlauf einer endlichen Zeit alle materiellen Punkte gleichzeitig exakt zu ihrer alten Lage, Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung zurückkehren und dann wieder die gleiche Bewegung von vorne beginnen, aber doch eine solche Regelmäßigkeit in der Bewegung herrscht, daß das Zeitmittel der lebendigen Kraft, einer Geschwindigkeitskomponente, oder des Wertes irgend einer rechtwinkligen Koordinate irgend eines materiellen Punktes oder der gesamten Kraftfunktion V etc. je einer festbestimmten Grenze zueilt, wenn man die Zeit, während welcher dieses Mittel genommen wird, ohne die Bewegung zu variieren, in beliebiger Weise über alle Grenzen wachsen läßt, so wollen wir eine solche Bewegung eine mesische nennen.

§ 44. Spezielle Beispiele.

Wir wollen, ehe wir an die Ausführung der Rechnung gehen, das Gesagte durch einige Beispiele erläutern.

Das *erste Beispiel* ist das schon mehrfach erwähnte, aus der kinetischen Theorie der Gase oder tropfbaren Flüssigkeiten. Das System wird gebildet durch n materielle Punkte, die sich ganz wie nach den Anschauungen der mechanischen Wärmetheorie die Moleküle eines dem van der Waalsschen Gesetze folgenden Gases oder einer tropfbaren Flüssigkeit in einem zylindrischen Gefäße mit starren Wänden bewegen, das oben durch einen vollkommen dichten, reibungslosen Stempel abgeschlossen ist. Die Erhöhung der lebendigen Kraft etwa durch von außen irgend woher kommende Molekularstöße korrespondiert der zur Temperaturerhöhung verwendeten zugeführten Wärme, wogegen die gegen die zwischen den n materiellen Punkten tätigen Innenkräfte geleistete Arbeit der inneren Arbeit korrespondiert. Die s Variabeln sind die zur Bestimmung der Lage der n materiellen Punkte notwendigen Größen.

Der Stempel bewegt sich immer nur langsam, so daß sein Druck immer nahe gleich dem Gegendrucke der materiellen Punkte ist, zwischen denen immer auch nahezu Gleichgewicht der lebendigen Kraft bestehen soll. Die g Variabeln bestimmen die Lage des Stempels. Die Arbeit der Kraft, welche der Stempel auf die materiellen Punkte ausübt, ist die äußere Arbeit. Sie ist gleich der Arbeit, welche die von außen auf den Stempel wirkenden Kräfte leisten. Dieses System ist bei genügend großer Zahl der Moleküle ein unechtes Zykel, isokinetisch, finit und mesisch, doch nicht periodisch.

Zweites Beispiel: Zentralbewegungsmodell. Wir betrachten ähnlich, wie wir es schon am Schlusse des Paragraphen 41 taten, die Zentralbewegung eines einzigen materiellen Punktes. Aber es sei Vorsorge getroffen, daß sich während der Zentralbewegung die beiden Konstanten λ und a langsam verändern können, welche das Gesetz bestimmen, nach dem die Zentralkraft wirkt.

An Stelle der Clausiusschen Annahme einer direkten Veränderlichkeit der Naturgesetze wollen wir uns die Veränderlichkeit von λ und a durch gewöhnliche mechanische Hilfsmittel bewirkt denken. Handelt es sich zunächst um die Zentralbewegung eines Planeten um die Sonne, so können wir uns etwa vorstellen, daß von außen stets Massen (Meteorsteine) in die Sonne stürzen, so daß deren Masse und daher auch deren Anziehungskraft gegen den Planeten mit der Zeit wächst. Wollte man einen geschlossenen Prozeß analog dem Carnotschen Kreisprozesse konstruieren, so müßten z. B. zuerst Massen in die Sonne stürzen. Hierbei würde äußere Arbeit gewonnen. Dann müßte die lebendige Kraft der Zentralbewegung, welcher die Wärmeenergie des warmen Körpers entspricht, vermindert werden. Dann müßten dieselben Massen wieder von der Sonne fort bis in unendliche Entfernung gebracht werden. Hierbei wäre weniger Arbeit zu leisten als früher beim Hineinstürzen gewonnen wurde, da ja der Planet jetzt entfernter ist und weniger Anziehung ausübt. Endlich müßte wieder die Energie der Umlaufsbewegung des Planeten durch eine entsprechende Energiezufuhr auf den alten Stand gebracht werden und wir nehmen an, daß Gestalt, Lage und Bewegungsgeschwindigkeiten zum Schlusse wieder dieselben wie zu Anfang des Prozesses sind. Da hier die Bahn stets eine geschlossene ist, so wäre bereits vollständige Analogie mit dem zweiten Hauptsatze vorhanden. Wenn $\overline{T}$ die mittlere lebendige Kraft des Planeten in seiner Umlaufsbewegung und δQ die Energie ist, die man ihm behufs Erhöhung der lebendigen Kraft seiner Umlaufsbewegung während eines unendlich kleinen Teiles des Prozesses zuführen muß, so ist nicht δQ, wohl aber $\delta Q/\overline{T}$ ein vollständiges Differential, sobald die Masse der Sonne stets so langsam zu- und abnimmt, daß die Zu- oder Abnahme während eines Planetenumlaufs als klein und gleichförmig mit der Zeit erfolgend betrachtet werden kann. Man kann dies durch Ausführung der Rechnung im Detail verifizieren, doch ist das Hineinstürzen von Massen in die Sonne immerhin ein für die Rechnung noch etwas unbequemer Vorgang.

Eine physikalisch zwar etwas abstrakte, aber mechanisch noch weit klarere Vorrichtung, welche in größter Allgemeinheit alle denkbaren Fälle illustriert, ist die folgende: eine sehr kleine vollkommen glatte Kugel von der Masse m bewege sich auf einer glatten horizontalen Ebene. Daran sei ein biegsamer massenloser Faden von unveränderlicher Länge befestigt, der durch ein Loch der Ebene geht, dann vertikal herabhängt und am Ende einen massenlosen, in einer vertikalen Röhre reibungslos beweglichen Magnetpol A trägt. Vertikal unter diesem befinde sich ein außerordentlich kurzer, um eine horizontale Achse drehbarer Magnet, dessen sehr nahe Pole B und C heißen sollen.

Man kann nun dem Kügelchen m während der Zentralbewegung durch kleine Stöße langsam lebendige Kraft zuführen (dies entspricht der Wärmezufuhr) und auch den Magneten langsam drehen (entsprechend der Bewegung des Stempels). So kann man den Zustand langsam variieren und auch wieder auf anderem Wege zum alten Bewegungszustande zurückkehren, indem man z. B. zuerst bei weniger lebhafter Bewegung des Kügelchens m den kurzen Magnet dreht, dann lebendige Kraft zuführt, dann bei heftiger Bewegung den kurzen Magnet langsam in die alte Lage zurückdreht und dann wieder gerade so viel lebendige Kraft entzieht, bis die lebendige Kraft den alten Wert erlangt hat und dabei auch die Bewegungsrichtung gerade so ändert, daß schließlich wieder dieselbe Bahn bei gleicher Lage des Magnets eintritt. Die Variabeln, welche die Position der Masse m in der Ebene bestimmen, sind die, welche wir früher die s Variabeln nannten, die g Variabeln reduzieren sich auf eine einzige, nämlich den Drehungswinkel des Magnets.

Man kann in zweifacher Weise bewirken, daß die von außen auf den Magneten wirksame Kraft nicht während der unvariierten Bewegung periodisch veränderlich, sondern nur, falls die Bewegung variiert wird, langsam mit der Zeit veränderlich zu sein braucht: erstens wenn man annimmt, daß die Umlaufszeit der Masse m sehr kurz und das Trägheitsmoment des Magneten bezüglich seiner Drehungsachse enorm groß ist, so daß er während der Wanderung der Masse m vom Perihel bis zum Aphel nur eine verschwindend kleine Drehung macht, zweitens wenn man auf der horizontalen Ebene statt einer einzigen unendlich viele vollkommen gleich beschaffene Massen m fingiert, welche alle möglichen Phasen derselben Zentralbewegung gleichzeitig haben, und sich, ohne sich gegenseitig zu stören, unabhängig voneinander bewegen und alle vom Magneten in gleicher Weise und durch Vermittlung der gleichen beschriebenen Vorrichtungen affiziert werden. Dadurch kann man das System in ein isokinetisches im Sinne **Helmholtz'** und zugleich auch in ein echt zyklisches verwandeln, wenn nämlich alle diese Massen die ganze Fläche, welche sie bei der Zentralbewegung im Verlauf der Zeit bestreichen, schon zu Anfang der Zeit in passender Weise kontinuierlich bedecken. Doch ist dann zur Bestimmung der Lage irgend eines der in Zentralbewegung begriffenen Massenteilchen nebst den langsam veränderlichen Koordinaten, welche die Position des oder der Magnete bestimmen, keineswegs die Kenntnis einer einzigen zyklischen Variabeln ausreichend, sondern es sind dazu noch zwei Variabeln (zwei rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, oder die Bahnlänge und die Bewegungsrichtung in gegebener Entfernung vom Kraftzentrum) erforderlich.

Will man bewirken, daß die Zentralbewegung jeder Masse nach dem **Newtonschen** Gravitationsgesetze erfolgt, so darf man keinen gewöhnlichen Magneten anwenden, sondern der Pol A muß von dem näheren Pole B mit einer der ersten Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft angezogen, von dem entfernten Pole C aber mit einer gleichen Kraft abgestoßen werden. Dann wird wieder nicht δQ, wohl aber $\delta Q/\overline{T}$ ein vollständiges Differential sein. Hat man gleichzeitig zwei Magnete, von denen der eine von der eben geschilderten Beschaffenheit ist, der andere aber nach demselben Gesetze wirkt, wie ein gewöhnlicher Magnet, und von denen jeder unabhängig von dem andern drehbar ist, so erhält man eine Zentralbewegung, bei welcher die Zentralkraft das am Ende des Paragraphen 41 erwähnte Gesetz befolgt und die beiden Konstanten λ und a unabhängig voneinander langsam verändert werden können.

Es ist dann auch $\delta Q/\overline{T}$ kein vollständiges Differential und man sieht, daß nicht für alle isokinetischen und auch nicht alle rein zyklischen Systeme $\delta Q/\overline{T}$ ein vollständiges Differential ist. Bezüglich der ausführlichen Berechnung aller Beispiele verweise ich auf Wien. Sitz. Ber. II, 92, S. 853 Okt. 1885, Exn. Rep. d. Physik 22, S. 135.

Drittes Beispiel. Eine Masse rotiert rasch um eine Achse und ihre Entfernung von der Achse ist der langsam veränderliche Parameter. Es ist dies ein lehrreiches Beispiel für ein zyklisches System im weiteren Sinne nach der Bezeichnungsweise **Hertz'**, welches kein echtes Zykel ist. Es soll Kürze halber im folgenden immer als das Zentrifugalmodell bezeichnet werden. Über die schöne Analogie, welche diese einfache mechanische Vorrichtung mit dem **Carnot**schen Satze und dem Verhalten vollkommener Gase zeigt, vergl. meine Vorlesungen über **Maxwells** Theorie der Elektrizität und des Lichtes 1. Band, 2. Vorlesung. Im selben Buche, 4. und 6. Vorlesung, ist auch eine Vorrichtung beschrieben, an welcher zwei voneinander unabhängige zyklische Bewegungen möglich sind.

Viertes Beispiel: Das Flüssigkeitsstrommodell. Eine reibungslose, inkompressible Flüssigkeit strömt wirbellos in einem in sich zurücklaufenden Kanale. Die Gestalt des Kanales und auch dessen Querschnitt an verschiedenen Stellen kann langsam veränderlich sein, ohne daß jedoch der gesamte Hohlraum des Kanales variiert. Dieses System ist ein echtes Zykel.

§ 45. Es wird weder Periodizität noch zyklischer Charakter der Bewegung vorausgesetzt.

Wir wollen nun zunächst die Rechnung möglichst allgemein durchführen. Wir denken uns n materielle Punkte (das Kügelchen m des Zentralbewegungsmodells), deren Lage durch s generalisierte Koordinaten bestimmt ist. Zwischen den letzteren können möglicherweise noch σ mit der Zeit vollkommen unveränderliche Bedingungen bestehen, die also auch für alle variierten Bewegungen dieselben bleiben müssen.

Später werden wir annehmen, daß die Bewegung dieser n materiellen Punkte eine zyklische oder eine damit verwandte ist. Vorläufig aber wollen wir sie noch ganz allgemein lassen.

Diese n Punkte bilden das betrachtete mechanische System. Außerdem sollen noch dreierlei materielle Punkte wirksam sein.

1. Mit den n materiellen Punkten sollen zunächst andere (n') in Wechselwirkung stehen, welche letztere ihre Lage im Raume immer unverändert beibehalten und daher ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit auch zu den n Punkten hinzugerechnet werden können. Es könnte sich z. B. beim Zentralbewegungsmodelle an der Stelle, wo der Faden durch das Loch geht, eine fixe unveränderliche Masse befinden, welche eine beliebige Zentralkraft auf das Kügelchen m ausübt. Solche Massen könnten auch anderswo in der Bahnebene des Kügelchen fix verteilt sein.

2. Außerdem sollen mit den n materiellen Punkten andere ν in Wechselwirkung stehen, deren durch g generalisierte Koordinaten (die langsam veränderlichen Variabeln

oder Parameter) bestimmte Lage manches Mal ganz unverändert, manches Mal wieder außerordentlich langsam veränderlich ist. Die ν Punkte werden bezüglich des betrachteten Systems als äußere angesehen. Sie entsprechen dem Magnete des Zentralbewegungsmodells.

3. Es sind noch andere (N) materielle Punkte vorhanden, welche bloß auf die ν Punkte, also gar nicht auf die n Punkte wirken sollen und daher ganz außerhalb des betrachteten Systems stehen. Die Kräfte, welche sie auf die ersteren Punkte ausüben, müssen den Kräften, welche die n Punkte auf die ν Punkte ausüben, vollständig das Gleichgewicht halten, solange die letzteren vollständig ruhen, der Zustand muß von dem des Gleichgewichtes sehr wenig verschieden sein, wenn sich die ν Punkte langsam bewegen. Es sind dies am Zentralbewegungsmodelle die Kräfte, welche am Magnete den Kräften, die der Pol A auf ihn ausübt, das Gleichgewicht halten müssen.

T sei die lebendige Kraft der n Punkte, F die Kraftfunktion aller von ihrer Wechselwirkung untereinander und der Wirkung der n' Punkte auf sie herstammenden Kräfte. Die Arbeit aller dieser Kräfte nennen wir die innere Arbeit, die der Kräfte, welche von den ν Punkten auf die n Punkte ausgeübt werden (der äußeren Kräften), nennen wir die äußere Arbeit. Die äußere Kraft nach einer Koordinate p_h der n Punkte, d. h. diejenige, welche vermöge der Wechselwirkung der n und der ν Punkte darauf wirkt, soll mit $\mathfrak{P}_h$ bezeichnet werden. Die zwischen den n und den ν Punkten wirkenden Kräfte sollen ebenfalls eine Kraftfunktion haben, welche mit Ω bezeichnet werden soll; dagegen soll die Gesamtkraftfunktion $F + \Omega$ aller zwischen den n, n' und ν Punkten wirkenden Kräfte V heißen. Sobald man es vorzieht von den ν Punkten gar nicht zu sprechen, ist die äußere Einwirkung auf die n Punkte einfach durch die Kräfte $\mathfrak{P}_h$ bestimmt, welche die Kraftfunktion Ω haben, die aber dann mit der Zeit langsam veränderliche Parameter enthält.

Es sollen sich zuerst die n materiellen Punkte bei unveränderlicher Lage der ν Punkte während der Zeit $t_1 - t_0$

bewegen, was wir als deren unvariierte Bewegung bezeichnen wollen. Die analog der Formel 236) berechneten Mittelwerte von T, V etc. während dieser Zeit sollen mit $\overline{T}$, $\overline{V}$ etc. bezeichnet werden.

Wir vergleichen mit der unvariierten Bewegung zunächst eine andere Bewegung, welche in unendlich wenig verschiedener Weise geschieht, zur selben Zeit t_0, wie die unvariierte Bewegung beginnt, und zu einer von t_1 unendlich wenig verschiedenen Zeit $t_1 + \delta t_1$ endet.

Irgend einem Zustande A der unvariierten Bewegung, welcher zu irgend einer Zeit t stattfindet, korrespondiert immer derjenige Zustand B der variierten Bewegung, welcher zur selben Zeit t stattfindet. Im Zustande B soll die lebendige Kraft T der n Punkte um δT größer sein als im Zustande A.

Die Werte der s Koordinaten sämtlicher n Punkte werden ebenfalls im Zustande B etwas andere sein als im Zustande A. Die durch diesen Umstand allein bewirkten Zuwächse von F, Ω und V bezeichnen wir mit δF, $\delta \Omega$ und δV. Ist ferner

240) $$P_h = -\frac{\partial F}{\partial p_h} + \mathfrak{P}_h$$

die gesamte, nach einer Koordinate p_h des Systems der n Punkte wirkende generalisierte Kraft, so ist also:

241) $$\delta F + \delta \Omega = \delta V = -\sum_1^s{}_h P_h \delta p_h .$$

Es ist also δV genau die auch im Vorhergehenden immer so bezeichnete Größe und stellt den Gesamtbetrag der dem Systeme der n Punkte zugeführten Energie dar, welcher auf Arbeitsleistung gegen alle auf die n Punkte wirkenden Kräfte verwendet wird. Da ferner δT den Zuwachs der lebendigen Kraft dieser Punkte darstellt, so müßte den n Punkten irgendwie die Gesamtenergie

242) $$\delta E = \delta T + \delta V = \delta J_n + \delta \Omega = \delta J_{n,\nu} - \delta_\nu \Omega$$

zugeführt werden, um den Zustand A des Systems in den Zustand B überzuführen. Die Krafte, welche diese Energie

Zufuhr bewirken und auf welche wir jetzt allein den Namen Zusatzkräfte beschränken wollen, sind ganz neue Kräfte, welche von allen während der unvariierten Bewegung wirkenden völlig verschieden sind. Diese Energie δE stellen wir mit der einem Körper zugeführten Wärme δQ in Parallele, $J_n = T + F$ dagegen, oder auch, wenn wir lieber wollen, $J_{\nu, n} = T + V$, setzen wir mit der gesamten inneren Energie eines warmen Körpers, der lebendigen Kraft der Molekularbewegung und der auf innere Arbeitsleistung verwendeten Wärme in Parallele.

§ 46. Das erweiterte System.

Die Zuwächse der Kraftfunktionen Ω und V, welche daher rühren, daß im Zustande B auch die ν materiellen Punkte etwas andere Lagen haben als im Zustande A, sollen mit $\delta_\nu \Omega$ und $\delta_\nu V$ bezeichnet werden, so daß der totale Zuwachs, den die Größen V und Ω beim Übergang vom Zustande A in den Zustand B erfahren,

$$243) \qquad \delta_{\text{tot.}} V = \delta V + \delta_\nu V, \qquad \delta_{\text{tot.}} \Omega = \delta \Omega + \delta_\nu \Omega$$

ist, und der Ausdruck

$$244) \qquad \delta J_{n,\nu} = \delta T + \delta V + \delta_\nu V$$

den totalen Zuwachs der Gesamtenergie $J_{n,\nu} = T + V$ des erweiterten Systems der $n + \nu$ Punkte darstellt.

Man kann daher sagen: Wenn die Überführung aus dem unvariierten in den variierten Zustand gerade zur Zeit t stattfände, so daß gerade der Zustand A in den Zustand B übergeführt würde, so würde dem System der n Punkte von den Zusatzkräften die Energie δE, durch die Einwirkung der ν Punkte die Energie $-\delta \Omega$ zugeführt, so daß seine innere Energie um $\delta J_n = \delta T + \delta F$ wächst oder es wird von der ganzen, durch Zusatzkräfte zugeführten Energie δE der Teil $\delta T + \delta F$ auf Vermehrung der Eigenenergie, der Anteil $\delta \Omega$ aber auf äußere Arbeitsleistung verwendet.

Ω ist die Kraftfunktion der Wechselwirkung der n und der ν Punkte. Da es sich hier bloß um ein mechanisches

Bild gewisser Naturerscheinungen handelt, so ist es vollkommen willkürlich, welche Punkte man dem betrachteten Systeme zuzählt und welche man als äußere ansieht. Es kann in dem einen Falle die eine, in dem anderen wieder eine andere Analogie mit den Eigenschaften warmer Körper besonders hervortreten. Man kann daher auch die ν Punkte noch zum betrachteten Systeme rechnen, so daß dann

$$V = F + \Omega$$

die potentielle, und

$$J_{n,\nu} = T + V = T + F + \Omega$$

die totale Energie des gesamten betrachteten Systems ist. Dann wäre wieder $\delta T + \delta V$ mit der zugeführten Wärme aber jetzt $\delta_\nu V = \delta_\nu \Omega$ mit der in Form von äußerer Arbeit dem Systeme zugeführten Energie in Parallele zu setzen, $-\delta_\nu \Omega$ der auf äußere Arbeitsleistung aufgewendeten Wärme,

Wenn die Kräfte, welche die Kraftfunktion Ω haben. keine gewöhnlichen Fernkräfte sind, sondern den Wert Null haben, bei einer gewissen Entfernung der Punkte, zwischen denen sie wirken, bei etwas größerer oder kleinerer Entfernung aber sofort ins Unendliche anwachsen, so ist ohnedies Ω konstant, daher

$$\delta \Omega + \delta_\nu \Omega = 0$$

und es kommen beide Auffassungen auf dasselbe hinaus. Bei dem Zentrifugalmodell ist diese Bedingung ohne weiteres erfüllt: beim Bilde eines von einem Stempel abgeschlossenen Gases kann man sich dieselbe jedenfalls ohne wesentliche Modifikation des Problems erfüllt denken, da ja auch in diesem Falle nur ein verschwindender Energiebetrag auf Veränderung der Kraftfunktion derjenigen Kräfte verwendet wird, die zwischen den Gasmolekülen und denjenigen des Stempels tätig sind, also die Variationen von Ω nicht in Betracht kommen.

Mit $\mathfrak{P}_h$ haben wir die Kräfte bezeichnet, welche die ν Punkte auf die n Punkte ausüben (der Stempel auf das Gas). Gleiche und gleich bezeichnete Kräfte üben für den Fall der Ruhe der ν Punkte die N Punkte auf die ν Punkte aus (die Hand oder belastende Gewichte von der Außenseite auf einen leicht beweglichen, das Gas abschließenden Stempel). Gleiche entgegengesetzt bezeichnete Krafte üben die n auf die ν oder die ν auf die N Punkte aus. Für eine außerordentlich langsame Bewegung der ν Punkte, wobei der ganze Prozeß nahezu umkehrbar ausfällt (umkehrbare Ausdehnung des Gases), gilt das eben Gesagte wenigstens mit sehr großer Annäherung.

Es ist daher $-\delta_\nu V$ auch die Arbeit, welche vermöge der Bewegung der ν Punkte gegen die Kräfte geleistet wird, die von dem N auf die ν Punkte ausgeübt werden und bewirken, daß letztere bei der unvariierten Bewegung in Ruhe bleiben, bei der variierten aber sich nur überaus langsam bewegen. Letztere Kräfte sind nämlich den Kräften $\mathfrak{P}_h$ vollständig gleich.

§ 47. Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung.

Es hat nun δE, δT und δV dieselbe Bedeutung wie in Formel 223 § 36. V enthält allerdings außer den Koordinaten der n auch noch die der ν Punkte und die die letzteren enthaltenden Ausdrücke spielen im Ausdrucke für die Kraftfunktion der n Punkte die Rolle langsam veränderlicher Parameter, sobald die ν Punkte sich langsam bewegen; allein dies geschieht niemals, solange die Bewegung unvariiert bleibt. Während der unvariierten Bewegung ist daher V eine die Zeit nicht explizit enthaltende Funktion der Koordinaten der n materiellen Punkte und das allein ist zu Anfang des § 36 vorausgesetzt. Die durch unendlich kleine Bewegung der ν Punkte eintretenden Wirkungen werden dort zu den Zusatzkräften gerechnet. Es gilt daher hier wieder die Gleichung 223), nämlich:

$$2\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta E\,dt + \sum_1^s{}_h (q_h^1\,\delta p_h^1 - q_h^0\,\delta p_h^0).$$

Wir haben bisher die unvariierte Bewegung während der Zeit $t_1 - t_0$ und daneben ganz davon unabhängig die variierte während der Zeit $t_1 + \delta t_1 - t_0$ betrachtet.

Wir wollen uns jetzt mit der Betrachtung des Überganges von der einen zur anderen beschäftigen. Da ist es zunächst vollkommen gleichgültig, zu welchem oder zu welchen im Verlauf der ganzen Zeit $t_1 - t_0$ liegenden Zeitmomenten die Zusatzkräfte den n Punkten Energie zugeführt haben. Dagegen ist es nicht gleichgültig, ob die gesamte Verrückung der ν Punkte in einem einzigen zwischen t_0 und t_1 liegenden Momente geschah oder sich aus mehreren Verrückungen zusammensetzte und wann im Verlauf der Zeit $t_1 - t_0$ diese eine resp. jede der Partialverrückungen stattfand. Der Wert, den der Zuwachs $\delta E - \delta \Omega = \delta(T + F) = \delta J_n$ der Gesamtenergie der n Punkte und ebenso der Wert, den der Zuwachs $\delta J_{n,\nu} = \delta T + \delta F + \delta_{\text{tot}}\,\Omega = \delta T + \delta_{\text{tot}}\,V$ der gesamten lebendigen Kraft und Kraftfunktion der $n + \nu$ Punkte am Ende der Bewegung, also zur Zeit $t_1 + \delta t_1$ hat, ist, wenn die Gesamtverschiebung der ν Punkte dieselbe ist, natürlich davon unabhängig, wann diese Verschiebung stattfand. Dagegen ist die gesamte äußere Arbeit, sei es, daß wir dieselbe als $\delta \Omega$ oder als $-\delta_\nu \Omega$ definieren, davon abhängig, wann die Verschiebung der ν Punkte stattfand, ebenso die Energie $\delta T + \delta V$, welche die Zusatzkräfte den n Punkten während der Zeit $t_1 - t_0$ im ganzen zuführen müssen. Denn letztere ist gleich $\delta T + \delta_{\text{tot}}\,V - \delta_\nu \Omega = \delta T + \delta F + \delta \Omega$.

Es sollen nun speziell die ν Punkte während der ganzen Zeit $t_1 - t_0$ der Bewegung sich gleichförmig aus der Lage, die sie für die unvariierte Bewegung haben, in die Lage hinüberbewegen, welche sie für die variierte Bewegung haben, so daß sie erstere Lage noch zur Zeit t_0 haben, letztere aber gerade zur Zeit t_1 erreichen. Während also die Bewegung der n Punkte mit großer oder kleiner Geschwindigkeit geschehen kann, sollen sich die ν Punkte unendlich langsam, aber vollkommen gleichförmig bewegen, so daß sie während der endlichen Zeit $t_1 - t_0$ nur sehr kleine Wege zurücklegen, weshalb wir die ihren Einfluß ausdrückenden Größen die langsam veränderlichen Parameter genannt haben.

Bezeichnen wir dann mit $\delta_\nu \Omega$ die Arbeit, welche von den ν Punkten gegen die von der Kraftfunktion Ω herstammenden Kräfte geleistet werden müßte, wenn die ganze Verschiebung der ν Punkte im Zeitmomente t vor sich ginge. so ist die bei der jetzt betrachteten allmählichen Verschiebung der ν Punkte während der Zeit dt geleisteten Arbeit gleich

$$\frac{\delta_\nu \Omega\, dt}{(t_1 - t_0)},$$

wobei $\delta_\nu \Omega$ für die verschiedenen Phasen der Bewegung verschieden, daher eine Funktion von t ist. Die ganze von den ν Punkten gegen die der Kraftfunktion Ω entstammenden Kräfte während der Zeit $t_1 - t_0$ geleistete Arbeit ist also im Falle der allmählichen Verschiebung der ν Punkte

$$245) \qquad \delta_\nu \Omega_1 = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \delta_\nu \Omega\, dt.$$

Wenn dabei auch passende Zusatzkräfte wirken, welche mit der Verschiebung der ν Punkte zusammen die unvariierte Bewegung in die variierte überführen, so daß sich die materiellen Punkte zur Zeit t_0 noch in der Weise bewegten, welche der unvariierten Bewegung zu dieser Zeit entspricht, wogegen sie sich zur Zeit $t_1 + \delta t_1$ genau in der Weise bewegen, welche ihnen in der variierten Bewegung zur Zeit $t_1 + \delta t_1$ (der der Endzeit t_1 der unvariierten Bewegung korrespondierenden Zeit) zukommt, so müssen die Zusatzkräfte den n materiellen Punkten die Energie

$$246) \quad \delta Q = \delta T + \delta_{\text{tot}} V - \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \delta_\nu \Omega\, dt = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta V) dt$$

zuführen. Wann während der Zeit $t_1 - t_0$ und in welcher Weise die Zusatzkräfte wirken, ist hierbei gleichgültig, sobald nur der Effekt der ist, daß schließlich genau die variierte Bewegung erzeugt wurde. Denn wenn der ganze Energiezuwachs der n Punkte und die Gesamtverschiebung der ν Punkte, also dadurch auch die nach außen abgegebene Energie dieselben sind, so ist dadurch die von den Zusatzkräften zugeführte Energie bestimmt.[1])

[1]) Falls das System ein echt zyklisches ist, d. h. falls in der unvariierten Bewegung an die Stelle jeder Masse, die ihren Platz

Nun ist aber $\delta T + \delta V$ dieselbe Größe, die in Formel 223 § 36 mit δE bezeichnet wurde und man erhält daher aus Gleichung 246

$$247) \qquad (t_1 - t_0)\,\delta Q = 2\delta \int_{t_1}^{t_0} T\,dt - \sum_1^s {}_h (q_h^1\,\delta p_h^1 - q_h^0\,\delta p_h^0).$$

§ 48. Betrachtung periodischer Bewegungen.

Falls sowohl die unvariierte als auch die variierte Bewegung periodisch sind, kann man sich die drei im vorigen Paragraphen behandelten Bewegungsarten, die unvariierte, die variierte und den allmählichen Übergang von der einen zur andern leicht zeitlich nacheinander realisiert denken. Ist i die Periode der unvariierten, $i + \delta i$ die der variierten Bewegung, so kann man setzen $t_1 = t_0 + i$, $\delta t_1 = \delta i$. Man kann sich dann zunächst mehrere Male während der Zeit i die unvariierte Bewegung vor sich gehend, dann während der Zeit i (auch $2i$, $3i$) die ν Punkte langsam verschoben und auch die Zusatzkräfte wirkend und endlich mehrere Male während der Zeit $i + \delta i$ die variierte Bewegung ablaufend denken. Man denkt sich dann alle diese Vorgänge nacheinander im Verlaufe der Zeit sich abspielend und kann, wenn man will, die Unterscheidung zwischen zeitlichen Änderungen und Variationen ganz fallen lassen.

---

verläßt, sogleich eine andere gleich beschaffene, mit einer gleichen gleichgerichteten Geschwindigkeit begabte Masse tritt, so daß die ν Punkte auf die letztere genau so wie auf die erstere wirken und falls dasselbe auch für die variierte Bewegung stattfindet, so hat $\delta_\nu\,\Omega$ für alle t den gleichen Wert und die obige Formel gilt auch, wenn die ν Punkte sich nicht gleichförmig aus der unvariierten in die variierte Lage bewegen, die äußere Arbeit ist dann ganz davon unabhängig, wann die Verschiebung der ν Punkte erfolgt. Doch wird noch immer vorausgesetzt, daß die Gesamtbewegung der ν Punkte während der Zeit $t_1 - t_0$ sehr klein ist. Selbst wenn sie ruckweise erfolgt, so darf immer nach endlicher Zeit wieder ein nur unendlich kleiner Ruck geschehen. Unter dieser Bedingung kann man dann die Größen, welche den Einfluß der ν Punkte ausdrücken, noch immer als die langsam veränderlichen Parameter betrachten.

In diesem Falle, daß sowohl die unvariierte Bewegung als auch die variierte periodisch sind, werden auch, wie wir gesehen haben, die Variationen an beiden Grenzen gleich und es ist:

$$\delta Q = \frac{2}{t_1 - t_0} \delta\left(\int_{t_0}^{t_1} T\,d\,t\right) = \frac{2}{i}\,\delta(i\,\bar{T}),$$

daher

248) $$\frac{\delta Q}{\bar{T}} = 2\frac{\delta(i\,\bar{T})}{i\,\bar{T}} = \delta\,l\,(i\,\bar{T})^2,$$

wobei l den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Nun herrscht eine nahezu vollständige Analogie mit dem zweiten Hauptsatze.

Man gehe zu immer anderen und anderen variierten Bahnen über, wobei auch die ν Punkte immer andere und andere Lagen annehmen, sich aber unendlich langsam gegenüber den n Punkten bewegen oder bei zyklischer Bewegung der n Punkte vielleicht auch immer nach einer endlichen Zeit einen unendlich kleinen Ruck machen sollen. In dieser Weise variiere man die Bewegung fortwährend, bis man endliche Änderungen aller Größen erhält, und durchlaufe schließlich einen vollständigen Kreisprozeß, d. h. man kehre endlich wieder zur selben Bewegung der n Punkte, verbunden mit gleicher Lage der ν Punkte, zurück, ohne daß man jedoch genau dieselben Bewegungen der n und Lagen der ν Punkte einfach in umgekehrter Reihenfolge wiederkehren ließ.

Dann wird die Summe aller hierbei durch die Zusatzkräfte den n Punkten zugeführten Energie, welche wir einfach mit $\int \delta Q$ bezeichnen wollen, für alle diese Variationen der Zustände im allgemeinen nicht verschwinden, obwohl man zum Schluß wieder zum Anfangszustande zurückgekehrt ist. Dagegen wird

$$\int \frac{\delta Q}{\bar{T}}$$

immer gleich Null sein. Denn $\delta Q/\bar{T}$ ist nach 248) der Zuwachs von $l(i\,\bar{T})^2$, $\int \frac{\delta Q}{\bar{T}}$ ist also die Differenz der Werte von $l(i\bar{T})^2$ im Anfangs- und Endzustande. Da im betrachteten Falle aber der Anfangs- und Endzustand identisch sind, so muß diese Differenz Null sein.

Wenn man z. B., was wir den Prozeß A nennen wollen, zuerst die ν Punkte verschiebt, dann die Bewegung der n Punkte beschleunigt, dann die ν Punkte wieder in ihre alte Lage bringt und schließlich den n Punkten wieder so viel Energie entzieht und auch ihre Geschwindigkeitsrichtungen gerade so ändert, daß ihre Bewegung genau wieder die alte wird, so wird $\int \delta Q/\bar{T}$ immer verschwinden. Dagegen wird $\int \delta Q$ im allgemeinen nicht Null sein. Letzterer Ausdruck wird natürlich von gleichem Absolutwerte, aber entgegengesetzt bezeichnet sein, wenn man irgend eine Reihe von Bewegungszuständen der n und Lage der ν Punkte gerade in der entgegengesetzten Weise durchläuft. (Prozeß B.)

Dem Prozesse A entspricht der folgende Vorgang: man läßt ein Gas sich zuerst ausdehnen, dann erwärmt man es, drückt es dann bei der höheren Temperatur auf das alte Volumen zusammen und kühlt es schließlich wieder ab, bis es den alten Zustand angenommen hat, alles in umkehrbarer Weise. Die direkte Umkehr eines solchen Vorganges entspricht dann dem Prozesse B.

Die von uns betrachteten Systeme unterscheiden sich insofern von warmen Körpern, als ihr Zustand durch ihre Energie und die Lage der ν Punkte (die äußere Umgebung) noch keineswegs bestimmt ist. So kann sich z. B. der materielle Punkt m des Beispiels 2 des § 44 bei gleicher Energie und gleicher äußerer Umgebung im Kreise oder in einer ellipsenartigen Bahn etc. bewegen.

Da $\int \frac{dQ}{T}$ (die Entropie) $= 2l(iT)$ ist und jede Funktion derselben mit dem integrierenden Faktor multipliziert wieder integrierender Faktor sein muß, so ist auch i integrierender Faktor von dQ. Da i die Zeit ist, innerhalb welcher ein Teilchen einen ganzen Umlauf macht, so ist $1/i$ die (ganz oder echt oder unecht gebrochene) Zahl der zyklischen Umläufe in der Zeiteinheit.

Unter einer periodischen Bewegung verstanden wir in diesem Paragraphen selbstverständlich eine solche, bei welcher nach Ablauf der Periode dieselben Werte der rechtwinkligen Koordinaten aller materiellen Punkte wiederkehren. Während, wie wir sahen, periodische Bewegungen die vollkommenste Analogie mit dem zweiten Hauptsatze zeigen, so gibt uns die am Schlusse des § 41 und in § 44 als Beispiel 2 behandelte Zentralbewegung in einer ungeschlossenen Bahn ein Beispiel einer nicht periodischen Bewegung von folgenden Eigenschaften: sie ist sonst den in diesem Paragraphen behandelten sehr ähnlich und kann sogar durch Betrachtung unendlich vieler in der gleichen Ebene bewegter Massenpunkte in eine echt zyklische (allerdings nicht monozyklische) verwandelt werden; doch verschwindet für dieselbe schon bei fixer Lage der ν Punkte (der Magnete, von denen die Werte von λ und a abhängen), daher um so mehr bei variierender Lage der ν Punkte, $\int \delta Q / \bar{T}$ über einen vollständigen Kreisprozeß erstreckt nicht, ja δQ hat überhaupt keine integrierende Faktoren.

Nur durch die Annahme des gleichzeitigen Vorhandenseins sehr vieler Systeme mit allen möglichen Flächengeschwindigkeiten, unter denen die Zustände nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung verteilt sind, kann in diesem Falle die Analogie mit dem zweiten Hauptsatze der Wärmelehre wiederhergestellt werden.

Durch die gleiche Annahme wird auch der oben erwähnte Mangel an Analogie zwischen warmen Körpern und dem von uns jetzt betrachteten Systeme von n materiellen Punkten beseitigt, daß der Zustand der ersteren zur vollen Bestimmtheit außer der Angabe der äußeren Umstände nur der des Wertes einer Variabeln (der Temperatur) bedarf, während auf die Bewegung der betrachteten Systeme nebst der Lage der ν Punkte und dem Energieinhalte noch andere die Anfangsbewegung der n Punkte bestimmende Integrationskonstanten ihrer Bewegungsgleichungen von Einfluß sein können. Hierauf soll jedoch hier nicht näher eingegangen werden.

§ 49. Theorie der Zykeln.

Wir gehen nun speziell zur Entwicklung einiger Lehrsätze aus der Theorie der Zykeln über. Wir verstehen, wie schon erwähnt, unter zyklischen Koordinaten schlechtweg solche, welche undifferenziert weder im Ausdrucke für lebendige Kraft noch auch in dem für die wirkenden Kräfte oder etwa vorhandenen Bedingungsgleichungen vorkommen. Wie ebenfalls bereits erwähnt, sind, falls keine Kräfte im gewöhnlichen Sinne der Mechanik und keine die Bewegungsfreiheit beschränkenden Bedingungen existieren, auch die rechtwinkligen Koordinaten zyklische. Allein sie definieren keine finite, d. h. keine Bewegung, bei welcher für beliebige Zeiten die rechtwinkligen Koordinaten und ihre Differentialquotienten nach der Zeit zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen sind. Dagegen ist die Variable, welche die Winkelstellung des im § 44 als Beispiel 3 beschriebenen Zentrifugalmodells definiert, eine zyklische Koordinate im erweiterten Hertzschen Sinne, welche, obwohl sie selbst mit wachsender Zeit ins Unendliche wachsen kann, doch unter allen Umständen eine finite Bewegung bestimmt.

Eine echt zyklische Koordinate dagegen ist eine solche, welche eine echt zyklische Bewegung bestimmt, d. h. wenn sie unter Konstanthaltung aller anderen Koordinaten veränderlich ist, so muß an die Stelle jeder Masse, welche ihren Ort im Raume verläßt, sogleich wieder eine andere vollkommen gleich beschaffene mit der gleichen Geschwindigkeit in gleicher Richtung bewegte Masse treten, worin das Merkmal der echt zyklischen Bewegung besteht.

Es sei ein System gegeben, welches folgende Bedingungen erfüllt: 1. unter den Variabeln, welche die Position seiner materiellen Punkte bestimmen, seien zyklische. 2. Gegenüber den Änderungsgeschwindigkeiten der zyklischen Variabeln (den zyklischen Geschwindigkeiten) seien die Differentialquotienten nach der Zeit (Änderungsgeschwindigkeiten) der übrigen Variabeln, welche zur Bestimmung dieser Position außerdem noch erforderlich sind, sehr klein; diese letzteren

Variabeln heißen deshalb die langsam Veränderlichen oder die Parameter; endlich 3. seien die zyklischen Beschleunigungen ebenfalls sehr klein gegenüber den zyklischen Geschwindigkeiten, d. h. die Änderungen der zyklischen Geschwindigkeiten, welche innerhalb von Zeiträumen eintreten, während denen sich die Absolutwerte der zyklischen Koordinaten schon sehr bedeutend verändert haben, seien noch immer sehr klein. Dann nennen wir das System ein zyklisches System oder noch kürzer ein Zykel.

Ist seine Bewegung zudem eine finite, so nennen wir es ein finites Zykel. Sind die zyklischen Variabeln lauter echt zyklische, so nennen wir es ein echtes Zykel. Ist nur eine unabhängige zyklische Variable vorhanden, so heißt das System ein Monozykel; sind deren zwei, so heißt es ein Bizykel; sonst im allgemeinen ein Polyzykel; wenn n unabhängige zyklische Variabeln vorhanden sind, ein n-Zykel.

An dem äußerlich wahrnehmbaren Zustande eines echten Zykels ist also, solange die Parameter konstant bleiben, trotz der lebhaften Bewegung innerhalb desselben keine Veränderung bemerkbar. Es zeigt sich dies an warmen Körpern, an Drähten, die von konstanten elektrischen Strömen durchflossen sind, aber auch an einem absolut symmetrischen, um seine Achse rotierenden Kreisel oder einer vollkommen homogenen, in einer in sich zurücklaufenden Röhre strömenden Flüssigkeit. Wenn dagegen die zyklischen Geschwindigkeiten und die Parameter sich langsam ändern, so entspricht dies einem Gase, welches langsam erwärmt oder umkehrbar ausgedehnt oder komprimiert wird. Ein anderes Beispiel ist die langsame Intensitätsänderung oder mechanische Ortsveränderung eines von einem elektrischen Strome durchflossenen Drahtes, oder die langsame Bewegung oder Deformation eines rotierenden Körpers oder eines von ponderabler Flüssigkeit, durchströmten Kanales.

Man kann die in den §§ 45—47 entwickelten allgemeinen Formeln auf Zykeln anwenden, dabei aber manche Vereinfachungen anbringen. Das Zykel soll wieder aus n materiellen Punkten bestehen, deren Lage also teils durch zyklische, teils durch langsam veränderliche Koordinaten bestimmt ist. Erstere wollen wir mit p_b, letztere mit p_a bezeichnen. Zwischen ihnen sollen keine Bedingungsgleichungen mehr bestehen. Diese n materiellen Punkte entsprechen denjenigen, welche wir auch in den §§ 45—47 die n materiellen Punkte nannten.

Da die p_b nicht undifferenziert in dem Ausdrucke für T vorkommen, so sind die nach den zyklischen Koordinaten p_b wirkenden Kräfte (die zyklischen Kräfte)

249) $$P_b = \frac{d q_b}{d t},$$

wobei

250) $$q_b = \frac{\partial T}{\partial p'_b}.$$

Die Kräfte P_b entsprechen den Zusatzkräften der §§ 45—47; die durch sie dem Zykel zugeführte Energie soll die zyklisch zugeführte heißen; sie entspricht der zugeführten Wärme.

Da ferner die Glieder, welche zweite Ableitungen der p_b oder p_a nach der Zeit enthalten oder welche bezüglich der p'_a von der 1. oder gar 2. Ordnung sind, als verschwindend angesehen werden gegenüber denjenigen, welche bloß p_a und p'_b enthalten, so sind die nach den Parametern p_a wirkenden Kräfte

251) $$P_a = -\frac{\partial T}{\partial p_a}.$$

Da T eine homogene quadratische Funktion der p'_b ist, so können alle p'_b und p_a konstant, daher $p''_b = p'_a = 0$ sein, wenn alle P_b verschwinden. Dagegen müssen, wenn dies stattfinden soll, die P_a im allgemeinen von Null verschiedene Werte haben. Wir unterscheiden nun verschiedene Klassen von nach den Parametern p_a wirkenden Kräften. Dieselben können teils von der Wechselwirkung der n Punkte herstammen, teils auch von der Wirkung anderer materieller Punkte, welche den n' Punkten der §§ 45—47 entsprechen und wie diese ein für allemal fix im Raume sein und die fixen materiellen Punkte heißen sollen. Sie können übrigens hier wie dort auch den n materiellen Punkten zugerechnet werden. Diese, teils von der Wechselwirkung der n Punkte, teils von der Einwirkung etwa vorhandener fixer materieller Punkte auf sie herrührenden Kräfte, welche wir alle als innere Kräfte bezeichnen, sollen jedenfalls eine skleronome Kraftfunktion haben, welche wir wieder mit F bezeichnen. Der gesamte aus dieser Ursache herstammende Anteil von P_a ist also $-\frac{\partial F}{\partial p_a}$.

Dazu müssen, damit die p_a konstant bleiben, im allgemeinen noch weitere Kräfte hinzukommen, welche wir mit $\mathfrak{P}_a$ bezeichnen und die äußern nach den Parametern wirkenden Kräfte nennen. Die materiellen Punkte, von denen sie ausgehen, entsprechen den ν materiellen Punkten der §§ 45—47 und sollen auch wieder die ν materiellen Punkte heißen. Sie werden für das betrachtete System als äußere angesehen.

Wenn exakt $p_b'' = p'_a = 0$ ist, also die zyklische Bewegung vollkommen stationär ist, so bleibt auch die Lage der ν Punkte vollständig unverändert und muß eine solche sein, daß exakt

$$252)\qquad P_a = \mathfrak{P}_a - \frac{\partial F}{\partial p_a} = -\frac{\partial T}{\partial p_a}$$

ist. Dies entspricht dem, was wir in §§ 45—47 die unvariierte Bewegung genannt haben. Setzen wir hier in der Theorie der Zykeln wieder

$$253)\qquad T - F = H, \quad T + F = E,$$

wobei die Buchstaben H und E dieselbe Bedeutung wie in §§ 45—47, aber eine etwas andere als in den übrigen Abschnitten dieses Buches haben, so können wir die Gleichungen 249) und 252) auch so schreiben:

$$254)\qquad \mathfrak{P}_a = -\frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad P_b = \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_b}.$$

Wenn die langsam veränderlichen Parameter und die Werte der p'_b sich sehr langsam verändern sollen, so müssen die $\mathfrak{P}_a$ ein wenig von den durch die obigen Gleichungen gegebenen Werten und die P_b ein wenig von Null verschieden sein. Diese letzteren Kräfte entsprechen dann denjenigen, welche wir in §§ 45 bis 47 die Zusatzkräfte genannt haben und sollen auch hier wieder diesen Namen beibehalten. Die von ihnen zugeführte Energie, die zyklisch zugeführte Energie, entspricht in der Wärmetheorie der zugeführten Wärme.

Die langsame Veränderung, welche die zyklische Bewegung durch die Zusatzkräfte sowie vermöge des Umstandes erfährt, daß die von den ν Punkten ausgehenden Kräfte nicht genau die durch die Gleichung 252) bestimmten Werte $\mathfrak{P}_a$ haben, entspricht dem, was wir in den §§ 45—47 die Variation der Bewegung genannt haben; jedoch ist es gegenwärtig nicht notwendig, die durch die langsame Bewegung der ν Punkte und die Wirksamkeit der Zusatzkräfte eintretende allmähliche Änderung der stationären zyklischen Bewegung als ein Problem der Variationsrechnung aufzufassen und die dabei eintretenden Zuwächse durch Verwendung des Zeichens δ besonders hervorzuheben. Man kann vielmehr diese allmähliche Zustandsänderung als eine gewöhnliche unter dem Einfluß der Zusatzkräfte und der Lagenänderung der ν Punkte im Verlaufe der Zeit stattfindende Bewegung auffassen. Es liegt dies besonders nahe bei den echten Zykeln, bei denen die unvariierte Bewegung gar keine sichtbare Zustandsänderung darstellt, so daß erst bei deren langsamer Variation wahrnehmbare zeitliche Veränderungen auftreten.

Die Werte von T, V etc. für einen beliebigen Zeitmoment der unvariierten Bewegung fallen für Zykeln mit den Mittelwerten $\overline{T}$, $\overline{V}$ etc. derselben Größen für die unvariierte Bewegung zusammen. Es ist gleichgültig, in welchem Zeitmomente der unvariierten Bewegung die Variation beginnt, welche ganz den Charakter einer unter dem Einflusse gegebener Kräfte stattfindenden mechanischen Bewegung hat und auch beliebig lange andauern, allmählich zu einer endlichen Variation wachsen und zu einer beliebigen Zeit enden kann. Wenn in irgend einer Phase derselben plötzlich $p_b'' = p_a' = 0$ wird, erhält man sofort die dieser Phase entsprechend zu denkende unvariierte Bewegung.

Es tritt hier deutlich zutage, wie die am Eingange dieses Buches betrachtete Variation ganz allmählich sich dem Charakter einer gewöhnlichen, im Verlaufe der Zeit stattfindenden Bewegung beliebig nähern kann, bei welcher nur einzelne Koordinaten viel rascher, andere viel langsamer veränderlich sind.

Wir wollen für diese allmählich mit der Zeit eintretenden Änderungen der zyklischen Bewegungen noch immer den Namen Variationen beibehalten und auch die Bewegungsgleichungen für die Änderungen der p_a, welche dadurch eintreten, daß die $\mathfrak{P}_a$ nicht genau die durch die Gleichungen 252) und 254) gegebenen Werte haben, erst in § 53 aufschreiben.

§ 50. Der integrierende Faktor des Differentials der zyklisch zugeführten Energie.

Die Arbeit, welche während der Variation der zyklischen Bewegungen in der Zeit dt von der Kraft P_b geleistet wird, ist nach Gleichung 249):

$$255)\qquad dQ_b = P_b\,dp_b = P_b p_b'\,dt = p_b'\,dq_b\,.$$

Die Summe dQ aller dQ_b ist die gesamte von allen Kräften P_b (den zyklischen oder Zusatzkräften) geleistete Arbeit, welche wir die dem Systeme zyklisch zugeführte Energie genannt haben und welche der zugeführten Wärme analog ist.

Falls das System ein Monozykel ist und man die einzige zyklische Variable ohne Index schreibt, so erhält man

$$dQ = p'\,dq$$

und wegen $T = p'q$,

$$256)\qquad \frac{dQ}{T} = \frac{dq}{q}\,.$$

Es ist also $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differential und lq die Entropie.

Diese Formel findet Anwendung auf alle echten Monozykeln, innerhalb deren beliebige Massen eine zyklische Bewegung machen, so daß sie alle innerhalb derselben Zeit i gleichzeitig zu ihrer Ausgangslage zurückkehren und dann von neuem dieselbe Bewegung machen. Solche Monozykeln werden von Helmholtz als einfache echte Monozykeln bezeichnet und man sieht leicht, daß sie einen Spezialfall der in § 48 behandelten periodischen Systeme bilden.

Wenn ein Zykel verschiedene Massensysteme besitzt, deren jedes eine in dieser Weise in sich zurücklaufende Bewegung macht, und wenn die Perioden $i, i_1, i_2, \ldots$ für die verschiedenen Systeme verschieden sind, so heißt das System ein ungefesseltes, oder nur teilweise gefesseltes Polyzykel, sobald die Dauer dieser Perioden außer von den Werten der langsam veränderlichen Parameter auch noch von denen mehrerer unabhängiger zyklischer Geschwindigkeiten abhängt, dagegen ein vollständig gefesseltes Polyzykel, oder ein zusammengesetztes Monozykel, wenn sie außer von den Parametern nur noch von dem Werte einer einzigen zyklischen Geschwindigkeit abhängt. Wenn im letzten Falle die Zahl der Verhältnisse $\frac{i_1}{i}, \frac{i_2}{i}, \cdots$ eine endliche ist und die Werte dieser Verhältnisse von denen der Parameter (der langsam veränderlichen Koordinaten) vollkommen unabhängig sind, so kann man sich diese Verhältnisse ohne wesentliche Änderung der mechanischen Bedingungen als rationale, wenn auch mit sehr großem gemeinsamen Nenner denken und daher einen längeren Zeitraum J finden, innerhalb dessen die Bewegung aller Massensysteme gleichzeitig eine periodisch wiederkehrende ist, so daß das gesamte mechanische System ein einfaches echtes Monozykel von der Periode J darstellt und alles von einem solchen Bewiesene darauf anwendbar ist.

Dies wird aber zweifelhaft, wenn die Anzahl der Verhältnisse $\frac{i_1}{i}, \frac{i_2}{i}, \cdots$ eine unendlich große ist und gilt jedenfalls nicht mehr, wenn die Werte dieser Verhältnisse kontinuierliche Funktionen der Parameter sind, weil dann die zyklischen Koordinaten im Vereine mit den Parametern im allgemeinen nicht mehr ein System holonomer Koordinaten bilden.[1]) Alle entwickelten Formeln gelten aber nur für holonome Koordinaten; denn wie wir schon in § 4 auf S. 16

[1]) Borchards Journal Bd. 98, 1. Heft S. 87, 1885; Wien. Sitz.-Ber. Bd. 111, S. 1603 1902. Wenn z. B. die parallelen Drehungsachsen zweier Körper sich nach entgegengesetzter Seite konisch verjüngen und ein Transmissionsriemen oder eine Friktionsscheibe so dazwischen kontinuierlich verschiebbar ist, daß sie bald einen dickeren Teil der ersten Achse mit einem dünneren der zweiten, bald wieder umgekehrt verbindet und man den Weg s eines nicht in der Drehungsachse liegenden Punktes des ersten Körpers als zyklische, die Verschiebung a des Riemens oder der Friktionsscheibe als langsam ver-

in der Anmerkung erwähnten, werden im ganzen Buche, mit Ausnahme der §§ 27 und 28, unter generalisierten Koordinaten immer nur holonome generalisierte Koordinaten verstanden. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen und nur noch den Beweis für einen sehr allgemeinen, von Helmholtz gefundenen Satz führen.

Sei ein beliebiges, zusammengesetztes monozyklisches (also vollständig gefesseltes polizyklisches) System gegeben, dessen langsam veränderliche Koordinaten mit p_a, dessen rasch veränderliche Koordinate mit p bezeichnet werden sollen. Es wird vorausgesetzt, daß bei passender Änderung der $\mathfrak{P}_a$ die Bewegung in genau ähnlicher Weise vor sich gehen kann, wobei nur sämtliche Geschwindigkeiten mit einer konstanten, für alle Geschwindigkeiten gleichen, aber ganz willkührlichen Zahl n multipliziert, also gewissermaßen die Zeitdauer aller Vorgänge auf den n-ten Teil reduziert erscheint; wenn dann nur ein einziger langsam veränderlicher Parameter p_a vorhanden ist, so ist die gesamte im Systeme enthaltene lebendige Kraft immer integrierender Nenner des Differentials der von außen zugeführten Energie; sind dagegen mehrere p_a vorhanden, so gilt dies ebenfalls jedesmal dann, wenn jenes Differential überhaupt integrierende Faktoren besitzt.

Sei zunächst nur ein langsam veränderlicher Parameter p_a vorhanden, so werden zwei Gattungen von Zustandsänderungen möglich sein. Erstens bei ungeänderten Bahnformen ändert sich bloß die Geschwindigkeit aller beweglichen Teile proportional. Zweitens ändern sich die Bahnformen. Die Gestalt der Bahnen hängt daher nur von einer einzigen unabhängig veränderlichen Größe ab, während die andere

---

änderliche Koordinate wählt, so gelangt ein nicht in der Rotationsachse liegender Punkt des zweiten Körpers im allgemeinen nicht an dieselbe Stelle, wenn zuerst s um eine endliche Größe σ und dann a um eine ebenfalls endliche Größe α wächst, oder wenn zuerst a um α und dann erst s um σ wächst. Wenn also auch durch a und ds/dt sämtliche Geschwindigkeiten, also falls wir ein echtes Zykel vor uns haben, der ganze erkennbare Zustand desselben gegeben ist, so sind doch nicht durch die Angabe der Werte von a und s die Positionen sämtlicher Punkte des Systems bestimmt, a und s sind also nicht holonome verallgemeinerte Koordinaten.

unabhängig veränderliche Größe bloß die Geschwindigkeit bestimmt, mit welcher die Bahnen durchlaufen werden. Falls man daher die Grenzen immer so variiert, daß das letzte Glied der Gleichung 223) verschwindet, muß man bei der Rückkehr zur alten Bahn auch zu den ursprünglichen Grenzen zurückgelangen, die beiden Glieder in Gleichung 238) rechts werden identisch und dQ/T wird ein vollständiges Differential.

Falls mehr als ein langsam veränderlicher Parameter p_a existiert, ist T im allgemeinen nicht mehr integrierender Nenner von dQ, da man bei Wiederkehr zu genau demselben Zustande des Systems im allgemeinen nicht mehr zu denselben Integrationsgrenzen zurückkommen wird, sobald die Grenzen immer so geändert werden, daß das letzte Glied in Gleichung 223) verschwindet; doch läßt sich auch in diesem Falle beweisen, daß T integrierender Nenner sein muß, falls überhaupt integrierende Faktoren von dQ existieren. Sei allgemein $dQ = M dN$ und man wähle T und die p_a als die independenten Variabeln.

Nach dem eben Bewiesenen muß, sobald alle p_a bis auf eines konstant sind, T integrierender Nenner von dQ sein; ist also g irgend einer der Indizes a und $d\sigma_g$ das zum Faktor T hinzutretende Differential, so folgt zunächst:

$$257)\qquad M\left(\frac{\partial N}{\partial T} dT + \frac{\partial N}{\partial p_g} dp_g\right) = T\left(\frac{\partial \sigma_g}{\partial T} dT + \frac{\partial \sigma_g}{\partial p_g} dp_g\right).$$

Diese Gleichung muß für alle Wertekombinationen der dabei als konstant vorausgesetzten Variabeln $p_1, p_2, \ldots p_{g-1}, p_{g+1} \ldots$ gelten. Wenn also M und N gegeben sind, so ist daraus σ_g bis auf einen nur die letzterwähnten Variabeln enthaltenden Ausdruck bestimmt. Dasselbe gilt auch für jeden beliebigen anderen der Indizes a, z. B. h; man hat also ebenso

$$258)\qquad M\left(\frac{\partial N}{\partial T} dT + \frac{\partial N}{\partial p_h} dp_h\right) = T\left(\frac{\partial \sigma_h}{\partial T} dT + \frac{\partial \sigma_h}{\partial p_h} dp_h\right),$$

wobei natürlich die Identität von σ_g und σ_h noch nicht erwiesen ist. Aus dieser und der Gleichung (257) folgt unmittelbar:

$$259)\qquad \frac{\partial \sigma_g}{\partial T} = \frac{\partial \sigma_h}{\partial T}.$$

Es können sich also σ_g und σ_h nur um Größen unterscheiden, welche kein T. sondern nur die p_a enthalten. Wir wollen setzen: $\sigma_g = \sigma + \Pi_g$, $\sigma_h = \sigma + \Pi_h$, wobei die Π nicht mehr Funktionen von T sind; dann folgt aus der Gleichung 257)

260) $$M \frac{\partial N}{\partial T} = T \frac{\partial \sigma}{\partial T}$$

und

261) $$M \frac{\partial N}{\partial p_g} = T\left(\frac{\partial \sigma}{\partial p_g} + \frac{\partial \Pi_g}{\partial p_g}\right)$$

für jeden Wert von g; hieraus ergibt sich weiter

262) $$d\,Q = M\,d\,N = T\left(d\,\sigma + \sum \frac{\partial \Pi_g}{\partial p_g} d\,p_g\right),$$

die Summe ist über alle möglichen Werte des Index g zu erstrecken. Da laut Übereinkunft $d\,Q$ einen integrierenden Faktor hat, so muß es jedenfalls auch einen besitzen, wenn man alle p_a bis auf zwei derselben, etwa p_g und p_h, konstant setzt. Dividiert man dann noch das Differential $d\,Q$ durch T, so ergibt sich:

263) $$\frac{\partial \sigma}{\partial T} d\,T + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial p_g} + \frac{\partial \Pi_g}{\partial p_g}\right) dp_g + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial p_h} + \frac{\partial \Pi_h}{\partial p_h}\right) d\,p_h = \frac{d\,Q}{T}.$$

Nach dem Gesagten muß auch dieser Differentialausdruck einen integrierenden Faktor haben. Schreibt man die bekannte Bedingung dafür hin, so sieht man, daß aus derselben folgt: entweder

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} = 0$$

oder

264) $$\frac{\partial^2 \Pi_g}{\partial p_g \partial p_h} = \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial p_g \partial p_h}$$

für alle Wertepaare von g und h. Die erste Gleichung kann nie erfüllt sein, da sonst bei Konstanthaltung der p_a zur Erhöhung der lebendigen Kraft gar keine Energiezufuhr notwendig wäre. Es müssen daher die Gleichungen 264) gelten, aus welchen folgt, daß $\sum \frac{\partial \Pi_g}{\partial p_g} d\,p_g$ das komplette Differential einer Funktion Π der p_a ist, weshalb dann $d\,Q = T d(\sigma + \Pi)$ wird.

§ 51. Adiabatische und isozyklische Bewegung.

Wenn für ein beliebiges Zykel alle $P_b = 0$ sind, dagegen die $\mathfrak{P}_a$ von den durch die Gleichungen 252) und 254) gegebenen Werten verschieden sind, so daß die Parameter p_a sich langsam verändern, so nennt man die Bewegung eine adiabatische. Dann folgt aus den Gleichungen 249), daß die Momente q_b bezüglich der zyklischen Koordinaten alle konstant sein müssen. Die zyklischen Geschwindigkeiten p'_b aber werden sich dann infolge der langsamen Änderung der Parameter allmählich ebenfalls langsam ändern. Wenn dagegen die P_b während der langsamen Änderung der Parameter stets solche Werte haben, daß die p'_b exakt unverändert bleiben, so nennt man die Bewegung eine isozyklische.

Ein Beispiel für die adiabatische Bewegung bildet ein um seine Achse rotierender Rotationskörper, oder das im § 44 als Beispiel 3 beschriebene Zentrifugalmodell, wenn niemals ein um die Rotationsachse drehendes Moment wirkt. Dagegen macht das Zentrifugalmodell eine isozyklische Bewegung, wenn durch passende, an der Kurbel wirkende Kräfte $\mathfrak{P}_b$ seine Umdrehungsgeschwindigkeit stets konstant erhalten wird, obwohl sich die verschiebbare Masse m der Drehungsachse bald langsam nähert, bald langsam davon entfernt.

Physikalische Analogien für die adiabatische Bewegung sind warme Körper, bei deren Zustandsänderung Wärme weder zugeführt noch entzogen wird (daher der Name adiabatisch auch für die analogen Bewegungen mechanischer Zykeln), elektrische Stromkreise, in denen unveränderliche elektromotorische Kräfte tätig sind, bewegte, mit konstanten Elektrizitätsmengen statisch geladene Leiter etc. Die entsprechenden physikalischen Vorgänge werden isozyklischen Bewegungen analog, wenn die Temperatur der warmen Körper, die Stromintensität der elektrischen Ströme, das Potential der elektrostatisch geladenen Leiter konstant erhalten wird. Bei einem rotierenden Körper tritt isozyklische Bewegung ein, wenn er in Riemen- oder Zahnradverbindung steht (gekoppelt ist) mit einem rotierenden Schwungrade von unendlicher Masse oder einem zu Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gezwungenen Körper; physikalische Analogien bietet ein warmer Körper, der mit einem unendlichen Wärmereservoir gut leitend verbunden ist, ein elektrischer Leiter, dessen Enden auf konstantem Potentialunterschied erhalten werden (mit den Polklemmen des Elektrizitätswerkes verbunden sind), in der Elektrostatik ein zur Erde abgeleiteter Körper, was Helmholtz auch als Koppelung mit der Erde, dem Wärmereservoir usw. bezeichnet.

In Gleichung 254) sind die partiellen Differentialquotienten so zu verstehen, daß die p'_b konstant zu halten sind, also die Zustandsänderungen isozyklisch zu geschehen haben. Wir wollen, wie es schon in § 9 geschah, partielle Differentialquotienten, bei deren Bildung die p'_b als konstant zu betrachten sind, mit dem Index p', solche dagegen, bei deren Bildung die q_b als konstant zu betrachten sind, mit dem Index q bezeichnen.

Man kann daher sagen: H ist die Kraftfunktion der nach den Parametern p_a wirkenden Kräfte $\mathfrak{P}_a$ für isozyklische Zustandsänderung, ihr entspricht in der Thermodynamik das isotherme thermodynamische Potential; bei jeder isozyklischen Bewegung ist

$$-\sum_a \frac{\partial H}{\partial p_a} d p_a = -d H = d F - d T$$

die von den auf das Cykel wirkenden Kräften $\mathfrak{P}_a$ bei Änderung der p_a dem Zykel zugeführte (d. h. die in Form von äußerer Arbeitsleistung zugeführte) Energie. Da der ganze Energiezuwachs $d E = d F + d T$ ist, so folgt $d Q = 2 d T$, die zyklisch zugeführte Energie ist daher gleich dem doppelten Zuwachs der kinetischen Energie.

Nach Gleichung 63) ist

$$\frac{\partial_q T}{\partial p_a} = -\frac{\partial_{p'} T}{\partial p_a} \quad \text{daher} \quad \frac{\partial_q E}{\partial p_a} = -\frac{\partial_{p'} H}{\partial p_a}.$$

Man kann also die erste der Gleichungen 254) auch so schreiben:

$$\mathfrak{P}_a = \frac{\partial_q E}{\partial p_a}. \tag{265}$$

Die äußeren Kräfte $\mathfrak{P}_a$ können daher auch als die adiabatischen partiellen Differentialquotienten von E nach den Koordinaten p_a und $-E$ als die adiabatische Kraftfunktion bezeichnet werden. Die gesamte, durch äußere Arbeitsleistung dem Systeme zugeführte Energie ist also bei adiabatischer Bewegung gleich dE, also gleich dem gesamten Energiezuwachs, was selbstverständlich ist, da sie in diesem Falle die einzige Energiezufuhr ist.

Durch Anwendung des gefundenen Theorems, daß sowohl bei adiabatischer als auch bei isozyklischer Zustandsänderung die äußeren Kräfte eine Kraftfunktion haben, auf die Wärmetheorie erhalten wir folgenden Satz: Wenn ein warmer fester Körper durch beliebige äußere Kräfte adiabatisch oder isotherm beliebig deformiert wird, so ist die Deformationsarbeit immer ein vollständiges Differential, als ob die äußeren Kräfte solchen, die von ruhenden Massenteilchen herrühren, das Gleichgewicht hielten, wenn auch die Massenteilchen des Körpers in lebhaftester Wärmebewegung begriffen sind.

§ 52. Hertz' reziproke Beziehungen.

1. Es möge sich der Zustand eines Zykels langsam adiabatisch einmal so verändern, daß nur der Parameter p_a und dp_a wächst, das andere Mal so, daß nur der Parameter $p_{a'}$ um $dp_{a'}$ wächst. Im ersten Falle möge die nach $p_{a'}$ wirkende äußere Kraft $\mathfrak{P}_{a'}$ um $d\mathfrak{P}_{a'}$, im zweiten Falle die nach p_a wirkende äußere Kraft $\mathfrak{P}_a$ um $d\mathfrak{P}_a$ wachsen, dann ist immer

$$\frac{d\mathfrak{P}_{a'}}{dp_a} = \frac{d\mathfrak{P}_a}{dp_{a'}},$$

dasselbe gilt auch, wenn alle Bewegungen isozyklisch erfolgen, wir können diese beiden Relationen ausführlicher so schreiben:

$$\frac{\partial_q \mathfrak{P}_{a'}}{\partial p_a} = \frac{\partial_q \mathfrak{P}_a}{\partial p_{a'}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial_{p'} \mathfrak{P}_{a'}}{\partial p_a} = \frac{\partial_{p'} \mathfrak{P}_a}{\partial p_{a'}},$$

der Beweis folgt unmittelbar aus den Gleichungen 254) und 265), d. h. aus dem Umstande, daß die äußeren Kräfte sowohl für die adiabatische als auch für die isozyklische Zustandsänderung eine Kraftfunktion haben.

2. Wegen

$$\mathfrak{P}_a = -\frac{\partial F}{\partial p_a} - \frac{\partial_q T}{\partial p_a}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_b} = 0 \quad \text{und} \quad p'_b = \frac{\partial T}{\partial q_b}$$

(letzteres nach 60)), findet man

266) $$\frac{\partial \mathfrak{P}_a}{\partial q_b} = -\frac{\partial_q p'_b}{\partial p_a}.$$

Wenn daher ein bei Konstanz aller übrigen q und aller Parameter erfolgender Zuwachs eines zyklischen Momentes q_b um dq_b einen Zuwachs der nach einem Parameter p_a wirkenden Kraft $\mathfrak{P}_a$ um $d\mathfrak{P}_a$ bewirkt, so bewirkt ein adiabatischer und bei Konstanz der übrigen Parameter erfolgende Zuwachs von p_a um dp_a einen entgegengesetzt wie $d\mathfrak{P}_a$ bezeichneten Zuwachs (eine Abnahme) der zyklischen Geschwindigkeit p'_b um dp'_b und zwar ist das Verhältnis der als Ursachen angenommenen Zuwächse dq_b und dp_a zu den als Wirkungen betrachteten Änderungen ($d\mathfrak{P}_a$ und dp'_b) gleich (wie **Hertz** sagt, das Verhältnis zwischen Ursachen und Wirkung ist in beiden Fällen gleich). Es ist unter diesen speziellen Umständen

267) $$\frac{d\mathfrak{P}_a}{dq_b} = -\frac{dp'_b}{dp_a}.$$

Da für ein Monozykel dp_b' und dq_b gleich bezeichnet sein muß, so gilt für ein solches auch folgender Satz: Wenn eine Vermehrung der zyklischen Geschwindigkeit p' bei Konstanz der Parameter die Kraft nach irgend einem Parameter p_a erhöht, so muß ein adiabatischer Zuwachs dieses Parameters bei Konstanz der anderen die zyklische Geschwindigkeit p' vermindern.

3 Es möge die Kraft P_b den in Gleichung 267) vorkommenden Zuwachs dq_b in der Zeit dt erzeugen, so ist $dq_b = P_b\,dt$, andererseits ist $\mathfrak{P}'_a = \frac{d\mathfrak{P}_a}{dt}$ die Geschwindigkeit, mit welcher dann die Kraft $\mathfrak{P}_a$ unter den Umständen wächst, unter denen die Gleichung 267) gilt. Die linke Seite der Gleichung 267) ist daher gleich $\mathfrak{P}'_a/P_b$ und wenn man für die rechte Seite wieder deutlichkeitshalber zur Schreibweise der Gleichung 266) zurückkehrt, so folgt aus 267)

268) $$\frac{\mathfrak{P}'_a}{P_b} = -\frac{\partial_q p'_b}{\partial p_a},$$

in Worten: Wenn alle Parameter konstant und alle nach den zyklischen Koordinaten wirkenden Kräfte bis auf eine (P_b) gleich Null sind, so soll während der Zeit dt die nach dem Parameter p_a wirkende Kraft $\mathfrak{P}_a$ um $\mathfrak{P}'_a dt$ wachsen, dann bewirkt eine adiabatische Zunahme von p_a unter Konstanz der übrigen Parameter eine Abnahme von p'_b und es ist wieder das Verhältnis von Ursache und Wirkung in beiden Fällen gleich, wenn wir die Kraft P_b als Ursache, die Änderungsgeschwindigkeit $\mathfrak{P}'_a$ der Kraft $\mathfrak{P}_a$ als ihre Wirkung, und andererseits den Koordinatenzuwachs dp_a als Ursache und die Abnahme $-dp'_b$ der zyklischen Geschwindigkeit p'_b als deren Wirkung betrachten.

4. Wegen

$$\mathfrak{P}_a = -\frac{\partial F}{\partial p_a} + \frac{\partial_{p'} T}{\partial p_a} \quad \text{und} \quad q_b = \frac{\partial_{p'} T}{\partial p'_b}$$

hat man

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_a}{\partial p'} = \frac{\partial_{p'} q_b}{\partial p_a}, \tag{269}$$

d. h. wenn bei Konstanz der übrigen zyklischen Geschwindigkeiten und der Parameter ein Zuwachs einer zyklischen Geschwindigkeit p'_b einen Zuwachs der nach einem Parameter p_a wirkenden äußeren Kraft $\mathfrak{P}_a$ bewirkt, so bewirkt auch ein isozyklischer Zuwachs von p_a bei Konstanz der übrigen Parameter einen Zuwachs des zu p'_b gehörigen zyklischen Momentes q_b und zwar ist, wie Hertz abgekürzt sagt, wieder für unendlich kleine Zuwächse das Verhältnis von Ursache und Wirkung in beiden Fällen gleich. Auch hat für Monozykeln wieder der Zuwachs der zyklischen Geschwindigkeit dasselbe Vorzeichen, wie der des zyklischen Momentes.

5. Genau so, wie aus Gleichung 266) die Gleichung 268) gewonnen wurde, so können wir auch aus Gleichung 269) eine neue bilden. Bei Bildung des partiellen Differentialquotienten der rechten Seite der letzteren Gleichung ist angenommen, daß die $\mathfrak{P}_a$ und P_b solche Werte haben, daß alle p'_b und alle Parameter mit Ausnahme eines einzigen p_a konstant bleiben. Die dabei nach der zyklischen Koordinate p_b wirkende Kraft soll P_b, die Zuwächse von p_a und q_b während

der Zeit dt aber sollen dp_a und dq_b heißen. Dann ist der Quotient $\frac{dq_b}{dp_a}$ gleich der in Formel 269) mit $\frac{\partial_{p'} q_b}{\partial p_a}$ bezeichneten Größe, es ist aber auch $dp_a = p'_a dt$ und $dq_b = P_b dt$: daher

$$\frac{\partial_{p'} q_b}{\partial p_a} = \frac{P_b}{p'_a}$$

und man kann die Gleichung 269) in der Form schreiben

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_a}{\partial p'_b} = \frac{P_b}{p'_a}. \tag{270}$$

In Worten ausgedrückt: Wenn bei Konstanz der übrigen zyklischen Geschwindigkeiten und der Parameter ein Anwachsen einer zyklischen Geschwindigkeit p'_b einen Zuwachs, der nach einem Parameter p_a wirkenden Kraft $\mathfrak{P}_a$ bewirkt, so muß behufs isozyklischen Wachsens von p_a bei Konstanz der übrigen Parameter in der Richtung der zyklischen Koordinate p_b eine positive Kraft P_b wirken und zwar ist wieder das Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen gleich, wenn man den Zuwachs von p'_b als Ursache, den Zuwachs von $\mathfrak{P}_a$ als deren Wirkung, andererseits die Geschwindigkeit p_a', mit welcher sich p_a isozyklisch ändert, als Ursache der Notwendigkeit der Kraft P_b und letztere als deren Wirkung bezeichnet.

Beim Beweise und der mathematischen Formulierung dieses Satzes ist in Hertz' Prinzipien der Mechanik Nr. 577) S. 245 überall das Zeichen ∂ zu viel.

§ 53. Helmholtz' Sätze über gemischte Zykeln.

Helmholtz hat einige Betrachtungen von noch etwas größerer Allgemeinheit angestellt. Es sei wieder ein System von n Punkten gegeben, welches mit n' ein für allemal und für immer fixen Punkten in Wechselwirkung stehen kann, welch letztere Punkte man auch, wenn man will, zu den n Punkten zählen kann. Die Kraftfunktion aller zwischen diesen Punkten wirksamen Kräfte sei F, die kinetische Energie der n Punkte sei T. Wir setzen diesmal wieder, wie in

§§ 45—52, aber abweichend von unserer sonstigen Bezeichnungsweise

$$T + F = E,$$
$$T - F = H.$$

so daß E die gesamte Energie der $n + n'$ Punkte ist. Unter den Koordinaten, welche die Position der n Punkte bestimmen, können zyklische sein, die wir wieder mit p_b bezeichnen wollen, d. h. ihre nicht nach der Zeit differentierten Werthe sollen weder in T noch in F vorkommen. Bloß die p'_b sollen in T vorkommen. Die Gesamtanzahl dieser zyklischen Koordinaten sei σ. Die Gesamtkraft, $-\partial F/\partial p_b$, welche die $n + n'$ Punkte nach irgend einer zyklischen Koordinate ausüben, muß also gleich Null sein. Die übrigen Koordinaten brauchen nicht gerade langsam veränderliche zu sein, sind also ganz beliebige Koordinaten. Wir nennen sie daher gewöhnliche Koordinaten und bezeichnen sie wieder mit p_k. Ihre Gesamtzahl sei s. Zwischen den p sollen keine Bedingungsgleichungen mehr bestehen. Ein solches System, welches zwar zyklische Koordinaten enthält, dessen übrige Koordinaten aber nicht oder wenigstens nicht alle als langsam veränderlich betrachtet werden, wollen wir ein gemischtes Zykel nennen und im Gegensatze dazu ein solches, welches nur zyklische und langsam veränderliche Koordinaten enthält, ein reines Zykel.

Am leichtesten wird das Verständnis der nun zu entwickelnden Gleichungen, wenn man sich die Beschaffenheit des Systems der $n + n'$ Punkte und die Kraftfunktion F, sowie auch die Bewegung der Punkte, also deren säntliche Koordinaten als Funktionen der Zeit, gegeben denkt und sich fragt, welche Kräfte P_b und $\mathfrak{P}_k$ nach den zyklischen Koordinaten wirken resp. zu den vermöge der Kraftfunktion F nach den gewöhnlichen Koordinaten wirkenden Kräften noch hinzukommen müssen, um die gegebene zeitliche Veränderung der Koordinaten zu erzeugen. Es müssen dann für die zyklischen Koordinaten die Gleichungen 254) also

271) $$P_b = \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_b}$$

und für die gewöhnlichen Koordinaten die gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen

$$\mathfrak{P}_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_h} - \frac{\partial H}{\partial p_h} \tag{272}$$

gelten. Für jeden Index b und h sei

$$\frac{\partial H}{\partial p'} = \frac{\partial T}{\partial p'} = q. \tag{273}$$

Die gesuchten Kräfte P_b und $\mathfrak{P}_h$ sollen wieder von beliebigen äußeren (den v) materiellen Punkten ausgehen, um die wir uns übrigens weiter gar nicht kümmern wollen. Sie können, wenn die Werte der p als Funktionen der Zeit gegeben sind, aus den Gleichungen 271) und 272) ebenfalls als Funktionen der Zeit gefunden werden, d. h. es kann die Frage beantwortet werden, welche äußere Kräfte P_b und $\mathfrak{P}_h$ in jedem Momente zu den durch die Kraftfunktion F bedingten noch hinzukommen müssen, um die gegebene Bewegung zu erzeugen.

Natürlich ist die Gültigkeit der Gleichungen 271) und 272) ganz davon unabhängig, welche Größen man darin als gegeben betrachtet und nach welchen man frägt. Diese Gleichungen sind auch richtig, wenn die P_b und $\mathfrak{P}_h$ als Funktionen der Zeit, ja selbst, wenn sie als Funktionen der Koordinaten, Geschwindigkeiten oder sonst beliebiger Größen gegeben wären und wenn die Aufgabe gestellt wäre, die Bewegung (d. h. die p'' bei gegebenen Anfangswerten der p und p') zu bestimmen. Nur würden im letzten Falle auch die linken Seiten der Gleichungen 271) und 272) die zu suchenden Unbekannten enthalten. Ja es ist eigentlich vollkommen willkürlich, welche Kräfte man zur Kraftfunktion F als innere, welche zu den $\mathfrak{P}_h$ als äußere rechnet, ob man die Körper, von denen gewisse Kräfte ausgehen, noch zum System rechnet oder als außenliegend ansieht, wenn man sich dann nur konsequent bleibt; so rechnet z. B. Helmholtz in der Elektrodynamik den galvanischen Leitungswiderstand bloß deshalb zu den $\mathfrak{P}$, weil er zu irreversibeln Vorgängen Anlaß gibt. Wir wollen aber behufs größerer Anschaulichkeit immer fingieren, daß F und die Bewegung des Systems gegeben wäre und nach den zu ihrer Herhaltung notwendigen P_b und $\mathfrak{P}_h$ gefragt werde.

Gleichungen von der Form der Gleichung 272) müssen auch an die Stelle der Gleichungen 252) und 254) treten, wenn man die in §§ 49—51 behandelte Theorie der Zykeln ohne jede Vernachlässigung entwickeln will oder überhaupt, wenn man die Frage lösen will, wie sich die langsam veränderlichen Parameter unter dem Einflusse gegebener $\mathfrak{P}_a$ mit der Zeit verändern. Denn wenn man diese Frage beantworten will, so darf man offenbar nicht p_a' und p_a'' vernachlässigen. In der Gleichung 271) und 272) aber findet sich keine Vernachlässigung mehr; denn die Bedingung, daß die zyklischen Koordinaten undifferenziert weder in T noch in F vorkommen, ist nicht bloß annäherungsweise, sondern vollkommen exakt realisiert.

Die Gleichung 272) hat die zu Anfang des § 34 angedeutete Form, welche man erhält, wenn man in der allgemeinen Lagrangeschen Gleichung 50) die $\pi = 0$ setzt und dem V die Form 220) erteilt.

Es sollen zunächst sämtliche $P_b = 0$ sein, so daß die zyklischen Bewegungen adiabatisch verlaufen.

Dann sind nach 271) die Größen

274) $$\frac{\partial H}{\partial p'_b} = q_b$$

zu allen Zeiten konstant. Sind die Werte dieser Konstanten gegeben, so können mittels der σ Gleichungen 274) die σ Größen p'_b aus T und daher auch aus H eliminiert werden. Da aber die Gleichungen 274) Glieder mit den ersten Potenzen der p' und solche die von den p' frei sind, enthalten, so wird nach dieser Elimination T eine Funktion zweiten Grades der übrigen p' (der p'_h) sein, welche nicht mehr homogen ist, sondern auch Glieder, die linear bezüglich der p'_h sind und ein von diesen ganz freies Glied enthält. Dann enthält also auch die Größe $\mathfrak{H}$, welche durch Elimination der p'_b aus H mittels der Gleichungen 274) entsteht, Glieder, die bezüglich der p'_h linear sind.

Ein Beispiel hierfür wäre ein System, welches einen um eine Hauptträgheitsachse reibungslos und widerstandslos rotierenden Körper enthält, wie das Pendel, das wir in § 22 behandelten. Der Winkel, dessen Differentialquotient nach der Zeit die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers bestimmt, wäre das betreffende p_b und es müßte angenommen werden, daß die Kräfte immer nur auf die beiden Spitzen der Achsen wirken, so daß niemals ein Drehmoment existiert, welches die Drehung beschleunigt oder verzögert. Der gleichen Bedingung unterworfene rotierende Körper denkt sich Maxwell zur Erklärung des Magnetismus innerhalb der Volumenelemente des Äthers vorhanden und erklärt dadurch, daß die elektromagnetische Energie des Äthers Glieder enthält, die bezüglich der Stromstärken linear sind, wogegen die rein elektrodynamische Energie eine homogene quadratische Funktion der Stromstärken ist. Er nimmt nämlich an, das die Stromstärken die Änderungsgeschwindigkeiten zyklischer Koordinaten sind.

Da $\mathfrak{H}$ dadurch aus H entstanden ist, daß man darin die p'_b vermöge der Gleichungen 274) als Funktionen der p_h und p'_h ausgedrückt hat, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_h} = \frac{\partial H}{\partial p_h} + \sum_{b=1}^{b=\sigma} \frac{\partial H}{\partial p'_b} \frac{\partial p'_b}{\partial p_h}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p'_h} = \frac{\partial H}{\partial p'_h} + \sum_{b=1}^{b=\sigma} \frac{\partial H}{\partial p'_b} \frac{\partial p'_b}{\partial p'_h}$$

oder wegen der Gleichungen 274)

$$\frac{\partial H}{\partial p_h} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_h} - \sum_{b=1}^{b=\sigma} q_b \frac{\partial p'_b}{\partial p_h}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p'_h} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p'_h} - \sum_{b=1}^{b=\sigma} q_b \frac{\partial p'_b}{\partial p'_h}.$$

Setzt man daher

275) $$H' = \mathfrak{H} - \sum_{b=1}^{b=\sigma} q_b p'_b,$$

so wird

$$\frac{\partial H'}{\partial p_h} = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \qquad \frac{\partial H'}{\partial p'_h} = \frac{\partial H}{\partial p'_h}.$$

Hier sind in H' die p'_b durch die Gleichungen 274) eliminiert zu denken, bei Bildung von $\frac{\partial H}{\partial p_h}$ und $\frac{\partial H}{\partial p'_h}$ aber als konstant zu betrachten. Die allgemeine Bewegungsgleichung 272) nimmt also, wenn man die p'_b mittels der Gleichungen 274) durch p_h und p'_h ausgedrückt denkt, für jedes p_h dieselbe Form

276)
$$\mathfrak{P}_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial H'}{\partial p'_h} - \frac{\partial H'}{\partial p_h}$$

an. Nur ist für H nun die Größe H' zu setzen, in der die p'_b durch die Gleichungen 274) als Funktionen von p_h und p'_h ausgedrückt zu denken sind, so daß H' im allgemeinen eine nicht homogene quadratische Funktion der p'_h ist.

Als Beispiel betrachten wir nochmals die schon in § 22 behandelte Aufgabe aus der Theorie der Rotation eines festen Körpers um einen fixen Punkt. Ein starrer Körper sei um einen festen Punkt drehbar. Sein Trägheitsellipsoid bezüglich dieses Punktes sei ein Rotationsellipsoid.

Wir wählen dieselben Bezeichnungen wie dort und es falle wieder die $O\zeta$-Achse mit der Rotationsachse des Trägheitsellipsoides zusammen.

Dann erfüllt die Variable B die Bedingungen, die wir den jetzt mit p_b bezeichneten Koordinaten beilegten. Ist also die nach B wirkende generalisierte Kraft $\mathfrak{B}$ zu allen Zeiten gleich Null, so ist nach 274)

$$\frac{\partial H}{\partial p'_b} = \frac{\partial H}{\partial B} = \frac{\partial T}{\partial B'} = \text{konst.}$$

Bezeichnen wir den Wert dieser Konstanten mit $-\nu J$, so folgt also aus der dritten der Gleichungen 121)

$$c A' - B' = \nu$$

übereinstimmend mit 124). Eliminiert man mittels dieser Gleichung B' aus dem Ausdrucke 123) für T, so folgt

277)
$$H = T = \frac{G}{2}(\gamma^2 A'^2 + C'^2) + \frac{J}{2}\nu^2.$$

F ist in unseren gegenwärtigen Rechnungen die Kraftfunktion der inneren Kräfte des Systems, also, da dieses ein einziger fester Körper ist, gleich Null. Die Schwere oder allgemeiner die Kräfte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ werden als äußere Kräfte angesehen und sind in den anderen Teil der Kraftfunktion $\sum_{h=1}^{h=s} \mathfrak{P}_h p_h$ (Gleichung 220) eingerechnet. H ist nämlich hier immer gleich $T - F$, nicht wie früher in diesem Buch gleich $T - V$.

Der Ausdruck 277) ist die in Gleichung 275) mit $\mathfrak{H}$ bezeichnete Größe. Aus dieser Gleichung folgt

$$278)\qquad H' = \mathfrak{H} + \nu J B' = \frac{G}{2}(\gamma^2 A'^2 + C'^2) + \nu J c A',$$

wobei die eine Konstante $-J\nu^2/2$ als überflüssig weggelassen wurde. Aus dieser Größe H' müssen die nach A und C wirkenden generalisierten Kräfte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ durch Gleichungen ableitbar sein, welche vollkommen die Form der Lagrangeschen haben. Es muß also

$$279)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H'}{\partial A'}\right) - \frac{\partial H'}{\partial A} \\ \mathfrak{C} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H'}{\partial C'}\right) - \frac{\partial H'}{\partial C} \end{aligned}\right.$$

sein. Durch Substitution des Wertes 278) für H' liefern diese Gleichungen tatsächlich in Übereinstimmung mit 125)

$$280)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{d}{dt}(G\gamma^2 A' + \nu J c) \\ \mathfrak{C} &= G(C'' - c\gamma A'^2) + J\nu\gamma A'. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen 279) haben vollkommen die Form der Lagrangeschen Gleichungen, aber H' enthält jetzt auch Glieder, die bezüglich der Geschwindigkeiten linear sind. Die Bewegungen können nicht in genau umgekehrter Weise vor sich gehen. Ein Pendel, mit dem ein rotierender Kreisel verbunden ist, hat, wie wir schon in § 22 sahen, für Schwingungen, bei denen sein Schwerpunkt sich im Kreise bewegt, bei der einen und anderen Umlaufsrichtung eine andere Schwingungsdauer, solange sich der Kreisel im selben Sinne dreht. Ganz analog enthält das Potential elektrischer Ströme bei Gegenwart permanenter Magnete, oder das von dem die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes abhängt, Glieder, die bezüglich der Stromstärken oder Geschwindigkeiten linear sind. Diese frappante Analogie ist natürlich kein Beweis, daß bei den letztgenannten physikalischen Erscheinungen wirklich verborgene Rotationsbewegungen eine Rolle spielen; aber sie würde durch diese Hypothese am ungezwungensten erklärt und weist jedenfalls darauf hin, daß das vergleichende Studium beider Arten von Erscheinungen weitere Aufschlüsse verspricht. Der in dem eben behandelten Beispiele betrachtete feste Körper ist übrigens ein reines Monozykel, wenn die Kräfte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ stets gerade solche Werte haben, daß A und C sich sehr langsam im Vergleiche zu B ändern, sonst ein gemischtes.

Einen Fall, wo H eine noch kompliziertere Funktion der Geschwindigkeiten sein kann, findet Helmholtz in folgender Weise. Es soll der Ausdruck für die lebendige Kraft aus zwei Summanden bestehen, von denen der eine nur gewisse Geschwindigkeiten p'_c, der andere nur die übrigen Geschwindigkeiten p'_d enthalten soll, so daß also

$$\partial^2 T / \partial p'_c \partial p'_d = 0$$

ist. Da F die Geschwindigkeiten gar nicht enthält, so folgt auch

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p'_c \partial p'_d} = 0.$$

Außerdem soll die äußere Kraft, die nach jeder der Koordinaten p_d wirkt, zu allen Zeiten gleich Null, also $\mathfrak{P}_d = 0$ sein. Hier und in allem folgenden ist von keinen zyklischen Bewegungen mehr die Rede.

Es sind nun jedenfalls Bewegungen des Systems möglich, für welche alle p'_d verschwinden, daher alle p_d zu allen Zeiten konstant bleiben. Da H kein bezüglich irgend eines p'_d lineares Glied enthält, so ist dann auch für jeden Index d

281) $$\frac{\partial H}{\partial p'_d} = 0$$

und aus Gleichung 272) folgt für jeden Index d

282) $$\frac{\partial H}{\partial p_d} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen können, von singulären Fällen abgesehen, die Koordinaten p_d als Funktionen von p_c und p'_c gefunden werden. Substituiert man die so gewonnenen Werte der p_d in H, so erhält man eine Funktion der p_c und p'_c, welche mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet werden soll. $\mathfrak{H}$ braucht dann keine quadratische Funktion der p'_c zu sein, sondern kann diese Größen in ganz beliebiger Weise enthalten, jedoch wird es eine gerade Funktion der p'_c sein. Dann ist

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_c} = \frac{\partial H}{\partial p_c} + \sum_d \frac{\partial H}{\partial p_d} \frac{\partial p_d}{\partial p_c}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p'_c} = \frac{\partial H}{\partial p'_c} + \sum_d \frac{\partial H}{\partial p_d} \frac{\partial p_d}{\partial p'_c},$$

daher wegen 281) und 282)

$$\text{283)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_c} = \frac{\partial H}{\partial p_c}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p'_c} = \frac{\partial H}{\partial p'_c}$$

und die Langrangeschen Gleichungen für die Koordinaten p_c erfahren keine Veränderung in der Form, wenn man darin $\mathfrak{H}$ für H einsetzt. Wenn aus dem Ausdrucke für H vermöge gewisser Bedingungsgleichungen gewisse Geschwindigkeiten eliminiert sind, so nennt Helmholtz das betreffende Problem ein unvollständiges, da es sich auf Berechnung der an diese Bedingungsgleichungen gebundenen Bewegungen beschränkt.

Wenn man zu physikalischen Vorgängen mechanische Analogien sucht, so kann man von vornherein nicht wissen, welche Variabeln man mit Koordinaten, welche mit Geschwindigkeiten in Parallele stehen soll. So kann man z. B. in der Elektrodynamik die dielektrischen Momente mit Koordinaten, die magnetischen mit Geschwindigkeiten und umgekehrt in Parallele stellen. Nun ist in der Physik in der Regel die Energie als Funktion der Variabeln experimentell gegeben. Ein vollständiges mechanisches Problem kann man daher als Analogie eines physikalischen Vorgangs nur dann benutzen, wenn der experimentell gegebene Ausdruck für die Energie von gewissen Variabeln eine homogene quadratische Funktion ist, welche dann mit Geschwindigkeiten in Parallele gestellt werden müssen. Wählt man dagegen ein unvollständiges mechanisches Problem als Analogie, so kann es vollkommen zweifelhaft werden, welche physikalische Variabeln man mit Geschwindigkeiten und welche mit Koordinaten in Parallele setzen soll, da beide in beliebiger Form im Ausdrucke für die Energie enthalten sein können.

§ 54. Helmholtz' Reziprozitätssätze.

Diese Reziprozitätssätze beziehen sich nicht wie die Hertzschen auf Zykeln, sondern auf ganz beliebige mechanische Systeme. Jedesmal, wenn eine Gleichung von der Form 272) gilt, folgt daraus

$$284)\qquad \mathfrak{P}_h = -\frac{\partial H}{\partial p_h} + \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p_k} p'_k + \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k} p''_k .$$

Sind nach der im vorigen Paragraphen beschriebenen Methode gewisse Koordinaten eliminiert, so bleibt diese Gleichung unverändert gültig, wenn man unter H diejenige Funktion versteht, für welche eben die Bewegungsgleichungen die Lagrangesche Form annehmen, also die Größe H', wenn die Gleichungen 276 gelten, die Größe $\mathfrak{H}$, wenn die Gleichungen 283) gelten. Wir wollen in folgendem für alle diese Größen denselben Buchstaben H gebrauchen, da die Gleichung 284) und diejenigen, welche wir nun daraus entwickeln wollen, für alle diese Fälle gleichmäßig gelten.

1. Nach Gleichung 284) ist die äußere Kraft $\mathfrak{P}_h$, welche zu den durch die Kraftfunktion F bestimmten Kräften hinzukommen muß, um die gegebene zeitliche Veränderung der Koordinaten hervorzurufen, eine lineare Funktion der Beschleunigungen p''_k und man sieht sofort, daß

$$285)\qquad \frac{\partial \mathfrak{P}_h}{\partial p''_k} = \frac{\partial \mathfrak{P}_k}{\partial p''_h} = \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k}$$

ist. Wenn also bei Konstanz der Koordinaten, Geschwindigkeiten und übrigen Beschleunigungen ein Zuwachs einer Beschleunigung p''_k einen Zuwachs einer mit anderem Index versehenen äußeren Kraft $\mathfrak{P}_h$ bewirkt, so bewirkt der gleiche

Zuwachs der Beschleunigung p''_h, die derselben Koordinate wie die Kraft $\mathfrak{P}_h$ entspricht, einen gleichen Zuwachs der der anderen Koordinate entsprechenden Kraft $\mathfrak{P}_k$.

Beispiel. Aus der zweiten der Gleichungen 121) ist ersichtlich, daß die Beschleunigung B'' von Einfluß auf die Kraft $\mathfrak{A}$ ist. Daher muß auch A'' von Einfluß auf $\mathfrak{B}$ und $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial B''} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial A''}$ sein. Beide Werte ergeben sich aus 121) in der Tat gleich $-\varepsilon J$.

2. Aus Gleichung 284) folgt weiter:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_k}{\partial p'_k} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p'_k} + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_k \partial p_k} + \sum_l \frac{\partial^3 H}{\partial p'_h \partial p'_k \partial p_l} p'_l + \sum_l \frac{\partial^3 H}{\partial p'_h \partial p'_k \partial p'_l} p''_l$$

oder wenn man die beiden letzten Summen so zusammenzieht, wie man es auch tun müßte, um von Gleichung 284) zu Gleichung 272) zurückzugelangen:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_h}{\partial p'_k} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p'_k} + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_k \partial p_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k}\right).$$

Bildet man ebenso $\partial \mathfrak{P}_k / \partial p'_h$, so sieht man, daß in allen Fällen, wo $\partial^2 H / \partial p'_h \partial p'_k$ (was nach 285) gleich $\partial \mathfrak{P}_h / \partial p''_k$ und auch gleich $\partial \mathfrak{P}_k / \partial p''_h$ ist), konstant speziell, wo es gleich Null ist, die Gleichung besteht

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_h}{\partial p'_k} = -\frac{\partial \mathfrak{P}_k}{\partial p'_h}.$$

In allen diesen Fällen gilt also folgendes: Wenn eine größere Geschwindigkeit p'_k bei Gleichheit aller übrigen Geschwindigkeiten und der Werte aller Koordinaten und Beschleunigungen ein größeres $\mathfrak{P}_h$ bedingt, so bedingt eine größere Geschwindigkeit p'_k natürlich wieder bei Gleichheit der übrigen Geschwindigkeiten und der Koordinaten und Beschleunigungen ein im selben Maße kleineres $\mathfrak{P}_h$.

Beispiel. Wenn ein fester, um einen festen Punkt drehbarer Körper sich so bewegt, daß C, A' und B' konstant sind und B' groß gegenüber A' ist, so macht er eine einfache Präzessionsbewegung. Die nach der Koordinate C wirkende generalisierte Kraft $\mathfrak{C}$ (das Moment der äußeren

Kräfte um die Achse OR) muß dann von Null verschieden sein und zwar muß es für positive A' und B' negativ sein und sein Absolutwert mit wachsendem A' wachsen, sodaß $\partial \mathfrak{C} / \partial A'$ negativ ist. Wenn also $\mathfrak{C}$ durch die Schwere erzeugt wird und OZ der Richtung derselben entgegengesetzt ist, so muß der Schwerpunkt auf der negativen $O\zeta$-Achse liegen. Ferner ist nach 121)

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial C''} = \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial A''} = 0.$$

Daher muß $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial C'}$ positiv und dem Zahlenwerte nach gleich $\partial \mathfrak{C} / \partial A'$ sein. Damit also ohne anderweitige Änderung der Verhältnisse C' von Null zu einem kleinen positiven Werte ansteige und diesen dann kurze Zeit konstant behalte, d. h. damit die positive $O\zeta$-Achse sinke, der Schwerpunkt also der Richtung der Schwere entgegen steige, ist ein Moment $\mathfrak{A}$ erforderlich, das in der Richtung der wachsenden A wirkt, also die Präzession zu beschleunigen sucht, was mit der Erfahrung stimmt. Natürlich ist dieser Beweis hier nur anwendbar, solange sich durch das Wachsen von C die übrigen Verhältnisse noch nicht geändert haben. Aus den Gleichungen 121) ergibt sich natürlich unmittelbar

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial C'} = - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial A'}.$$

Ebenso ist

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial C'} = - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial B'},$$

aber nicht

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial B'} = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial A'}$$

wegen

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial B''} = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial A''} = - c J.$$

Bezüglich des Nachweises, daß sich dieser Satz auch auf allen jenen Gebieten der Wärme- und Elektrizitätslehre und Chemie bewährt, wo Gleichungen gelten, die mit den für verborgene Bewegungen geltenden mechanischen Gleichungen analog sind, muß hier auf die zitierte Originalabhandlung Helmholtz' verwiesen werden. Es sei hier nur noch darauf hingewiesen, daß sich die Beziehung zwischen dem Prinzipe der kleinsten Wirkung und dem zweiten Hauptsatze auch insofern bewährt, als die meisten Relationen die man so erhält, sonst mittelst des zweiten Hauptsatzes bewiesen werden. (Beziehung zwischen Kompressionskoeffizient oder Elastizitätsmodul und Temperaturänderung bei Kompression oder Dehnung, Volumänderung beim Schmelzen und Schmelzpunktsänderung durch Druck, thermoelektromotorische Kraft und Peltierphänomen, Wärmeentwicklung in galvanischen Elementen und Abhängigkeit ihrer elektromotorischen Kraft von der Temperatur etc. etc. Ebenso muß ich bezüglich einer Reihe anderer Lehrsätze und Reziprozitäten sowie bezüglich der weiteren Anwendungen in der Wärmelehre und aller Anwendungen in der Elektrodynamik auf die Originalabhandlung verweisen, da sich dieselben zu weit vom Boden der reinen Mechanik entfernen.

V. Die Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichungen.

§ 55. Das Prinzip der variierenden Wirkung.

Wir kehren nun wieder zu dem ganz allgemeinen im § 30 betrachteten Falle zurück, haben aber die Absicht, die Art und Weise der Variation einer Reihe von neuen beschränkenden Bedingungen zu unterwerfen. Es soll ein holonomes System von n materiellen Punkten durch beliebige generalisierte Koordinaten $p_1, p_2 \ldots p_s$ bestimmt sein. Die lebendige Kraft T soll eine gegebene, die Zeit nicht enthaltende Funktion der Koordinaten und generalisierten Geschwindigkeiten (resp. der Koordinaten und Momente) sein; es soll eine Kraftfunktion V existieren, welche ebenfalls eine gegebene Funktion der Koordinaten sein soll und welche letztere die Zeit auch explizit enthalten kann. Die Zahl s der generalisierten Koordinaten soll jedoch genau gleich der der Freiheitsgrade des Systems sein, so daß zwischen den generalisierten Koordinaten keine Bedingungsgleichungen mehr bestehen. Es ist dies erforderlich, damit später die p_h^0 und p_h^1 unabhängig voneinander variiert werden können.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen 50) und 51) lauten dann wie folgt:

286) $$\frac{d q_h}{d t} = \frac{\partial_{p'} (T - V)}{\partial p_h},$$

wobei

$$q_h = \frac{\partial T}{\partial p'_h} = \frac{\partial (T - V)}{\partial p'_h}.$$

Durch diese Gleichungen und die Werte p_h^0 und q_h^0, welche sämtliche Koordinaten und Momente zu einer bestimmten Zeit t_0, die wir jetzt immer den Zeitanfang nennen wollen, haben, ist eine bestimmte Bewegung eindeutig bestimmt, welche wir die unvariierte Bewegung nennen. Wir können für dieselbe die einer beliebigen Zeit t zugehörigen Werte der Koordinaten und Momente aus den Bewegungsgleichungen als Funktionen von t, p_h^0 und q_h^0 berechnen. Wir können auch die Werte, welche zur Zeit t die Größen T und V und somit auch den Wert, welchen das Integral

287) $$W = \int_{t_0}^{t} (T - V)\, d t$$

hat, als Funktion der $2s$ Anfangswerte p_h^0 und q_h^0 und der Zeit t berechnen. Es ist jetzt bequemer die obere Grenze nicht mit dem Index 1 zu versehen, sondern sie ebenso zu bezeichnen, wie die Variable t unter den Integralzeichen, nach welcher integriert wird, da die letztere bald in unseren Formeln nicht mehr vorkommen wird und es dann lästig wäre, den Index 1 immer mitzuschleppen.

Da wir die Bewegungsgleichungen als gegeben annehmen, so erhalten wir durch Integration derselben s Gleichungen, welche uns die s Werte der Koordinaten p_h als Funktionen der $2s + 1$ Werte von p_h^0, q_h^0 und t ausdrücken. Aus diesen s Gleichungen zwischen den $3s + 1$ Größen p_h^0, p_h, q_h^0 und t können wir die s Größen q_h^0 als Funktionen der $2s + 1$ Werte von p_h^0, p_h und t ausdrücken. Substituieren wir die so erhaltenen Ausdrücke von q_h^0 in die Größe W, welche wir ja schon oben als Funktion der $2s+1$ Größen p_h^0, q_h^0 und t ausgedrückt haben, so erhalten wir für W' einen Ausdruck, welcher nur die $2s+1$ Variabeln p_h^0, p_h und t enthält, so daß also W' als Funktion dieser Variabeln dargestellt erscheint, was wir die **Hamiltonsche** Darstellungsweise nennen wollen.

Wir wollen nun wie bisher immer nebst dieser, der unvariierten Bewegung, eine von ihr unendlich wenig abweichende variierte Bewegung betrachten.

Über das Verhältnis der beiden Bewegungen machen wir jetzt die folgenden speziellen Voraussetzungen:

Der Zeitanfang t_0 soll für die variierte Bewegung, genau derselbe sein, d. h. die Funktion V soll, wenn sie die Zeit explizit enthält, zu Anfang der variierten Bewegung dieselbe Funktion der Koordinaten sein, wie zu Anfang der unvariierten. Sie soll auch zu jeder Zeit t der variierten Bewegung dieselbe Funktion der Koordinaten sein, wie zu derjenigen Zeit t der unvariierten Bewegung, welche vom Zeitanfang der unvariierten Bewegung ebensoweit absteht, wie die erstere Zeit t vom Zeitanfang der variierten Bewegung. Wir wollen die solchen Zeiten entsprechenden Zustände wieder korrespondierende nennen und sagen, der eine sei der Zustand der unvariierten, der andere der der variierten Bewegung, welcher zur Zeit t stattfindet.

Da wir vorläufig t_0 als absolut invariabel betrachten, so brauchten wir nirgends hervorzuheben, daß die betreffenden Größen auch Funktionen von t_0 sind.

Es sei hier noch die folgende Bemerkung beigefügt, die übrigens auch auf die in den vorigen Abschnitten behandelten Variationsprobleme Anwendung findet. Würde V die Zeit nicht explizit enthalten, so wäre die absolute Lage des Zeitpunktes t_0 in der Zeitreihe natürlich vollkommen gleichgültig. Diese absolute Lage t_0' in der Zeitreihe könnte für die variierte eine andere als die (t_0) für die unvariierte sein; es käme bloß darauf an, daß die Zeitabstände korrespondierender Zustände immer gleich wären, so daß, wenn irgend ein Zustand A der unvariierten Bewegung zur

Zeit t, und der korrespondierende Zustand B der variierten zur Zeit t' stattfände, $t' - t = t_0' - t_0$ wäre. Es würde dann t' die der Zeit t korrespondierende Zeit heißen. Doch ist die Vorstellung einfacher und nicht wesentlich verschieden, daß t' und t identische Zeiten sind; ebenso t_0' und t_0. Wir wollen uns daher immer dasselbe materielle System zur selben Zeit doppelt in zwei nahe gleichen Zuständen vorhanden denken, ohne daß das eine Exemplar des Systems das andere irgendwie beeinflußt.

Es soll nun gegenwärtig speziell die Variation so ausgeführt werden, daß nicht nur die Form der Funktionen T und V samt allen darin vorkommenden konstanten Parametern vollkommen unvariiert bleiben, sondern daß auch behufs Erzeugung der Variation der Bewegung nicht die mindesten Zusatzkräfte wirken, so daß die zu irgend einer Zeit der variierten Bewegung wirkenden Kräfte wieder genau gleich den partiellen Ableitungen derselben Funktion V nach den Koordinaten sein sollen und nur deshalb andere Werte haben können, weil die in diese partiellen Ableitungen zu substituierenden Werte der Koordinaten bei der variierten Bewegung etwas andere als im korrespondierenden Zustande der unvariierten Bewegung sind.

Die Variation des Integrales W soll also in diesem Paragraphen und im folgenden bloß durch drei Umstände bewirkt sein:

1. Sollen die Anfangswerte der Koordinaten für die variierte Bewegung etwas andere als für die unvariierte sein. Für die erstere soll der Anfangswert der h-ten Koordinate $p_h^0 + \delta p_h^0$, für die letztere p_h^0 sein.

2. Soll die obere Grenze des über die variierte Bewegung erstreckten Integrales W nicht die der oberen Grenze des über die unvariierte Bewegung erstreckten Integrales entsprechende Zeit t sein, sondern sie soll um δt weiter vom Zeitanfange abstehen als bei der unvariierten Bewegung.

3. Sollen die Anfangswerte der Momente für die variierte Bewegung ebenfalls etwas andere sein, als für die unvariierte. Der Anfangswert des h-ten Momentes soll für

die variierte Bewegung $q_h^0 + \delta q_h^0$, für die unvariierte Bewegung q_h^0 sein. Doch wollen wir nicht die Größen δq_h^0 in unsere Formeln einführen, sondern die Variationen δp_h der Endwerte der generalisierten Koordinaten. Unter δp_h verstehen wir die Größe, welche man zum Werte, den die h-te Koordinate bei der unvariierten, von den Anfangswerten p_h^0 und q_h^0 ausgehenden Bewegung zur Zeit t hat, hinzu addieren muß, um den Wert zu erhalten, den dieselbe Koordinate bei der variierten von den Anfangswerten $p_h^0 + \delta p_h^0$ und $q_h^0 + \delta q_h^0$ ausgehenden Bewegung zur Zeit $t + \delta t$ hat. Dagegen soll, wie schon bemerkt, die Beschaffenheit des materiellen Systems vollkommen unverändert bleiben, die Kraftfunktion soll dieselbe Funktion der Koordinaten und eventuell der Zeit bleiben und es sollen zu den durch sie bedingten Kräften keine neuen, noch auch irgendwelche andere äußere Einwirkungen hinzutreten.

Wir bezeichnen nun mit δW den Zuwachs, den W, also das Integral 287) dadurch erfährt, daß

1. die obere Grenze der Integration $t + \delta t$ statt t ist;

2. die Anfangswerte der Koordinaten $p_h^0 + \delta p_h^0$ statt p_h^0 sind, und

3. die Anfangswerte der Momente so gewählt sind, daß bei den neuen Anfangswerten der Koordinaten irgend eine, z. B. die h-te Koordinate zur Zeit $t + \delta t$ den Wert $p_h + \delta p_h$ hat, während sie bei der unvariierten, von den alten Anfangswerten ausgehenden Bewegung zur Zeit t den Wert p_h hatte.

Da die Gleichung 207) für jede beliebige Variation gilt, so muß sie auch für diesen speziellen Fall gelten. Welche Werte also auch immer δp_h^0, δp_h und δt haben mögen, man hat jedesmal

$$288)\qquad \delta W = -(T + V)\,\delta t + \sum_1^s {}^h (q_h\,\delta p_h - q_h^0\,\delta p_h^0).$$

§ 56. Die beiden Hamiltonschen partiellen Differentialgleichungen.

Wir wollen nun unter den partiellen Differentialquotienten der Größe W, wenn wir nicht ausdrücklich sagen, daß wir es anders meinen, immer diejenigen verstehen, welche man erhält, wenn man W in der Weise ausdrückt, welche wir die Hamiltonsche genannt haben, also als Funktion der p_h^0, p_h und der Zeit t, wobei wir die Abhängigkeit von t_0, da dieses immer als konstant betrachtet wird, nicht weiter berücksichtigen. Es ist also $\partial W / \partial t$ der durch den Zuwachs δt der Zeit dividierte Zuwachs $\delta_t W$ des W, welcher entsteht, wenn die obere Grenze des Integrales 287) um δt wächst, aber die Koordinatenwerte für die untere und obere Grenze dieselben bleiben, also $\delta p_h = \delta p_h^0 = 0$ ist. Dann erhält man aber aus der Gleichung 288)

289) $$\delta_t W = -(T + V)\delta t,$$

daher ist:

290) $$\frac{\partial W}{\partial t} = -T - V = -E,$$

was man als die erste Hamiltonsche partielle Differentialgleichung bezeichnet.[1])

Ebenso ist $\partial W / \partial p_h$ der durch den Zuwachs δp_h des für die obere Grenze des Integrales 287) geltenden Wertes der h-ten Koordinate dividierte Zuwachs $\delta_h W$ des W, welcher entsteht, wenn die beiden Grenzen des Integrales 287) sowie die Anfangswerte aller Koordinaten unverändert bleiben, die Anfangswerte der Momente aber sich so ändern, daß auch die für die obere Grenze des Integrales 287) geltenden Werte der Koordinaten alle bis auf p_h konstant bleiben. Dadurch erhält man aber aus Formel 288)

$$\delta_h W = q_h \delta p_h.$$

Es ist also

291) $$\frac{\partial W}{\partial p_h} = q_h.$$

Endlich findet man in gleicher Weise, indem man in Formel 288) alle Variationen gleich Null setzt, bis auf dp_h^0

292) $$\frac{\partial W}{\partial p_h^0} = -q_h^0.$$

---

[1]) Bei konstanten p_h^0 und q_h^0 wäre natürlich $\partial W / \partial t = T - V$.

Es mag hier nur beiläufig bemerkt werden, daß wir gerade so, wie wir bisher t_0 unverändert ließen und nur die obere Grenze t des Integrales 287) änderten, auch umgekehrt die obere Grenze konstant halten und t_0 verändern können, dann haben wir in W, das ja Funktion von t_0 und t ist, letzteres konstant zu lassen, so daß also bei konstantem t die Größe W als Funktion von t_0, p_h und p_h^0 auszudrücken ist. Dann folgt aus 207)

293) $$\frac{\partial W}{\partial t_0} = E_0,$$

was man die zweite Hamiltonsche partielle Differentialgleichung nennt. Die beiden Gleichungen $\partial W / \partial p_h = q_h$ und $\partial W / \partial p_h^0 = - q_h^0$ bleiben ungeändert, da daselbst t_0 und t konstant zu betrachten sind. In der Tat sind die $2s + 2$ Größen t_0, t und die p_h^0 und p_h alle independent voneinander veränderlich. t_0 und t sind für jede Art der Bewegung ganz willkürlich. Sind dafür bestimmte Werte gewählt, so bestimmen die p_h^0 und p_h die Art der Bewegung, also die $2s$ Integrationskonstanten der Bewegungsgleichungen. Wenn nämlich die p_h als Funktionen von t und $2s$ Integrationskonstanten gegeben sind und man in die betreffenden Gleichungen einmal $t = t$, dann $t = t_0$ setzt, so erhält man $2s$ Gleichungen, aus denen jene $2s$ Integrationskonstanten als Funktionen von t, t_0 und den p_h und p_h^0 bestimmt werden können.

Wir wollen uns übrigens hier um diese zweite Hamiltonsche partielle Differentialgleichung nicht weiter kümmern, sondern zunächst bloß, um die Art der Bildung der hier vorkommenden partiellen Differentialquotienten zu illustrieren, die Gesetze der Bewegung eines freien materiellen Punktes von der Masse m im Raume, auf den gar keine Kräfte wirken, also das Trägheitsgesetz als bekannt voraussetzen und daran die Richtigkeit der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung 290), sowie der Gleichung 291) und 292) verifizieren.

Es seien p_1, p_2, p_3 die drei rechtwinkligen Koordinaten des Punktes, p'_1, p'_2, p'_3 die konstanten Komponenten seiner Geschwindigkeit in den drei Koordinatenrichtungen. Dann ist, weil die Bewegung des Punktes geradlinig und gleichförmig ist:

$$294)\quad \begin{cases} p_1 = p'_1(t-t_0) + p_1^0, \quad p_2 = p'_2(t-t_0) + p_2^0, \\ p_3 = p'_3(t-t_0) + p_3^0, \end{cases}$$

ferner

$$295)\quad \begin{cases} T = \frac{m}{2}(p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3) = \frac{m}{2(t-t_0)^2}[(p_1 - p_1^0)^2 + \\ \qquad + (p_2 - p_2^0)^2 + (p_3 - p_3^0)^2]. \end{cases}$$

V ist konstant, daher:

$$296)\quad W = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{m c^2}{2} - V\right)dt = \frac{m(t-t_0)}{2}(p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3) - V(t-t_0).$$

Diese Größe muß erst als Funktion von t, p und p_0 ausgedrückt werden. Da:

$$297)\quad p'_1 = \frac{p_1 - p_1^0}{t - t_0} \text{ etc.}$$

ist, so folgt:

$$298)\quad W = \frac{m}{2(t-t_0)}[(p_1 - p_1^0)^2 + (p_2 - p_2^0)^2 + (p_3 - p_3^0)^2] - V(t-t_0).$$

Nun hat man nach den sieben als indenpendent zu betrachtenden Variabeln t, p und p^0 partiell zu differenzieren und erhält so

$$299)\quad \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{m}{2(t-t_0)^2}[(p_1 - p_1^0)^2 + (p_2 - p_2^0)^2 + (p_3 - p_3^0)^2] - V.$$

Es ist also in der Tat die Gleichung 290) erfüllt. Ebenso ist gemäß der zweiten Hamiltonschen Differentialgleichung $\frac{\partial W}{\partial t_0} = T + V$. Ferner wird

$$300)\quad \frac{\partial W}{\partial p_1} = \frac{m(p_1 - p_1^0)}{(t-t_0)} = m p'_1 = q_1$$

und ebenso sind die übrigen der Gleichungen 291) und 292) erfüllt. q_1 ist das Bewegungsmoment $m p'_1 = \partial T / \partial p'_1$, in welchem letzteren partiellen Differentialquotienten aber die p und p' als independente Variabeln zu gelten haben. q_1^0 ist wegen der Konstanz der Geschwindigkeitskomponenten gleich q_1.

§ 57. Anwendung der ersten Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung.

Wir haben in diesem Beispiele die Integrale der Bewegungsgleichungen als bekannt vorausgesetzt. Wo die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung praktisch zur Anwendung kommt, liegt die Sache natürlich anders. Da ist bloß T als Funktion der p und p', oder p und q, V aber als Funktion der p und eventuell der Zeit t gegeben. Die Integrale der Bewegungsgleichungen sind unbekannt. Man hat also zunächst, wenn T als Funktion von p und p' gegeben ist, durch partielle Differentiation nach den p' die Größen q zu bilden, dann diese statt der p' in T einzuführen, so daß jetzt T als Funktion von p und q erscheint. Darin hat man statt q_h zu substituieren $\partial W / \partial p_h$ und den so erhaltenen Wert von T in die erste Hamiltonsche partielle Differentialgleichung 290) zu substituieren. Die Form, welche diese dadurch annimmt, wollen wir symbolisch durch

$$301) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + T\left(\frac{\partial W}{\partial p_h}\right) + V = \frac{\partial W}{\partial t} + E\left(\frac{\partial W}{\partial p_h}\right) = 0$$

bezeichnen.

Dieselbe enthält in bekannter Weise die $s + 1$ in dieser Differentialgleichung als die independenten zu betrachtenden Variabeln p und t und die partiellen Differentialquotienten der als Funktion dieser independenten zu suchenden Unbekannten W nach den independenten Variabeln und zwar den partiellen Differentialquotienten $\partial W / \partial t$ linear, von den übrigen partiellen Differentialquotienten $\partial W / \partial p_h$ aber die Quadrate und Produkte je zweier.

Alle diese Operationen kann man vornehmen, ohne die Integrale der Bewegungsgleichungen zu kennen. Um nun letztere zu finden, ist es durchaus nicht nötig, die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung aufzusuchen. Es genügt, wenn man sich in irgend einer Weise ein sogenanntes vollständiges Integral verschafft, d. h. eine Funktion der $s + 1$ Variabeln p_h und t, welche der partiellen

Differentialgleichung genügt und genau so viele willkürliche voneinander unabhängige Konstanten enthält als partielle Differentialquotienten erster Ordnung in der Differentialgleichung vorkommen. Es kommen deren in unserer Differentialgleichung $s+1$ vor. Da aber die Unbekannte W undifferenziert in der Gleichung nicht vorkommt, so kommt eine Konstante jedenfalls additiv zu W hinzu und spielt später, da wir immer nur die Differentialquotienten von W brauchen, gar keine Rolle. Es genügt also eine Lösung der Differentialgleichung zu finden, welche s voneinander unabhängige willkürliche Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ enthält, von denen keine additiv zu W hinzutritt.

Wenn wir die mechanische Aufgabe vollständig gelöst hätten, so könnten wir W als Funktion von t, p_h, p_h^0 ausdrücken. Dieser Wert des W (er heiße W') wäre ein vollständiges Integral der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung 294), da er derselben genügt und die s willkürlichen voneinander unabhängigen Konstanten p_h^0 enthält, von denen keine additiv zu W hinzukommt. Denn für $t=t_0$ ist $W=0$.

Wir setzen nun allerdings voraus, daß wir die mechanische Aufgabe noch nicht gelöst haben. Wir kennen daher auch dieses eine vollständige Integral der Gleichung 294) nicht. Aber wir nehmen an, daß wir irgendwie ein anderes vollständiges Integral gefunden hätten, also eine die partielle Differentialgleichung 294) erfüllende Funktion von t, den p_h und noch s willkürlichen voneinander unabhängigen Konstanten α_h, von denen keine additiv zu dieser Funktion hinzukommt. Die Kenntnis dieses beliebigen anderen vollständigen Integrals genügt dann, um durch bloß partielle Differentiation s Gleichungen zu finden, aus denen die s unbekannten Variabeln so als Funktionen der Zeit und $2s$ unabhängiger Integrationskonstanten ausgedrückt werden können, daß sie die Bewegungsgleichungen 286) der mechanischen Aufgabe erfüllen, wodurch also die mechanische Aufgabe vollständig gelöst ist.

Wir wollen dieses andere noch um eine $(s+1)$-te Konstante α_0 vermehrte vollständige Integral augenblicklich mit W', später aber wieder mit W ohne Index bezeichnen. Die durch das Integral 287) definierte Wirkung W' für unser mechanisches Problem ist, als Funktion von t, p und p^0 ausgedrückt, ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung 301). W' verwandelt sich, wenn man die p durch p^0, q^0 und t ausdrückt, in eine Funktion von p^0, q^0 und t. Nimmt man an, jedes andere vollständige Integral W'' der partiellen Differentialgleichung 301) stelle dieselbe Wirkung dar, d. h. dieselbe Funktion der Zeit nur unter Einführung anderer Konstanten statt der Anfangswerte, so können die Integrationskonstanten des einen vollständigen Integrales nur Funktionen der Integrationskonstanten des anderen, also hier die p^0 nur Funktionen der α sein und es muß W' sich identisch in W'' verwandeln, wenn man für die p^0 dann diese Funktionen substituiert. Differenziert man das so erhaltene W'' partiell nach irgend einem α, z. B. nach α_h, so folgt:

$$\text{302)} \qquad \frac{\partial W''}{\partial \alpha_h} = \sum_1^s \frac{\partial W'}{\partial p_i^0} \frac{\partial p_i^0}{\partial \alpha_h}.$$

Nun können die $\frac{\partial p^0}{\partial \alpha}$ wieder nur die Integrationskonstanten enthalten. Ferner sind nach Gleichung 292) die $\frac{\partial W'}{\partial p^0}$ gleich den negativen q^0, also auch Integrationskonstanten. Es ist also die ganze rechte Seite der Gleichung 302) eine bloße Funktion der Integrationskonstanten; setzt man sie gleich β_h, so verwandelt sich die Gleichung 302) in

$$\text{303)} \qquad \frac{\partial W''}{\partial \alpha_h} = \beta_h,$$

welche Relation s Gleichungen darstellt, aus denen die s Größen p_h als Funktionen der Zeit und der $2s$ Integrationskonstanten α und β gefunden werden können, womit die Integrale der Gleichungen 286), also des mechanischen Problems gefunden sind. Berechnet man die p' und setzt in den betreffenden Gleichungen und den Gleichungen 303) $t = t_0$, so kann man leicht die α und β durch die p^0 und q^0 ausdrücken.

§ 58. Direkter Beweis der Richtigkeit der im vorigen Paragraphen gefundenen Resultate.

Wir wollen im folgenden, ohne uns auf eine Diskussion einzulassen, welcher Ergänzungen die Schlußweise am Ende des vorigen Paragraphen bedürfte, bloß auf die einfachste Art beweisen, daß die in der beschriebenen Weise mittels der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung für die p_h gefundenen Funktionen der Zeit wirklich die gesuchte Lösung der mechanischen Aufgabe sind, und zwar wollen wir diesen Beweis nach dem Vorgange Jacobis liefern, indem wir durch nachträgliche Differentiation zeigen, daß die Funktionen der Zeit, welche wir nach unserer Methode für die p erhalten und welche auch die erforderliche Anzahl willkürlicher Konstanten enthalten, wirklich die Bewegungsgleichungen 286) erfüllen.

Wir müssen da bloß die partielle Differentialgleichung 294) als gegeben und ein vollständiges Integral W derselben mit s voneinander unabhängigen Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$, von denen keine additiv zu W hinzutritt, als gefunden betrachten. Wenn wir dann

$$304)\qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha_h} = \beta_h, \quad h = 1, 2, \ldots s$$

setzen, so erhalten wir s Gleichungen, welche die Größen p_h als Funktionen von t und den Konstanten α_h und β_h bestimmen.

Von diesen Funktionen haben wir nachzuweisen, daß sie, was immer für Werte die Konstanten α_h und β_h haben mögen, immer den Bewegungsgleichungen 286) genügen. Unter q_h verstehen wir vorläufig nichts anderes als den partiellen Differentialquotienten des W nach p_h, wobei W als Funktion von t, der p_h und der α_h anzusehen ist. Die Gleichungen 291) sind also jetzt nicht als durch Rechnung gefundene Relationen, sondern vielmehr als die Definitionsgleichungen für die q anzusehen.

Der Annahme gemäß genügt W für alle möglichen Werte der Konstanten α_h der partiellen Differentialgleichung 301). Man kann daher diese Gleichung auch nach irgend einem α partiell differenzieren. Dabei wird die darin vorkommende Größe $q_h = \partial W / \partial p_h$ als Funktion von t, der p_h und der α_h zu betrachten sein. Man erhält also durch partielle Differentiation der Gleichung 301) nach α_h

305) $$\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_h} + \sum_1^s {}_i \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_h} = 0.$$

Die Differentialquotienten der p nach der Zeit, die wieder durch einen oben angehängten Strich markiert werden sollen, folgen durch Differentiation der Gleichung 303) nach der Zeit, die ja die Abhängigkeit der p von der Zeit angibt, wodurch man die mit den Gleichungen 304) identischen Gleichungen

304) $$\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_h} + \sum_1^s {}_i \frac{\partial^2 W}{\partial p_i \partial \alpha_h} p'_i = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_h} + \sum_1^s {}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_h} p'_i = 0.$$

erhält, denen wir wieder die Nummer 304) geben. Diese Relation 304) repräsentiert uns s lineare Gleichungen für die Größen p'_i, welche daraus als Funktionen von t, p_h und α_h gefunden werden können, oder auch als Funktionen von t, α_h und β_h, da die p_h durch die Gleichungen 303) als Funktionen von α_h und β_h ausgedrückt werden können. Die Koeffizienten der p'_i und das von p'_i freie Glied in den Gleichungen 304) sind aber ganz dieselben, wie die Koeffizienten der Größen $\partial E / \partial q_i$ und das nicht mit diesen Größen multiplizierte Glied in den Gleichungen 305). Wenn man daher die letzteren Gleichungen als s lineare Gleichungen für die Größen $\partial E / \partial q_i$ auffaßt, so erhält man diese Größen genau durch dieselben Determinanten ausgedrückt, wie die Größen p'_i, wenn man letztere aus den s linearen Gleichungen 304) bestimmt. Wir sehen also, ohne daß wir alle diese Determinanten hinzuschreiben brauchen, ein, daß allgemein

306) $$p'_i = \frac{\partial E}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \ldots . s$$

sein muß. Differenzieren wir andererseits die Gleichung 291) nach der Zeit, so erhalten wir:

$$
307)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d q_h}{d t} &= \frac{\partial^2 W}{\partial t\, \partial p_h} + \sum_1^s {}_i \frac{\partial^2 W}{\partial p_h\, \partial p_i} p'_i \\
&= \frac{\partial^2 W}{\partial t\, \partial p_h} + \sum_1^s {}_i \frac{\partial q_i}{\partial p_h} \frac{\partial E}{\partial q_i}.
\end{aligned}\right.
$$

Andererseits ist die Gleichung 294) identisch erfüllt, wenn man darin W als Funktion von t, p_h und α_h substituiert und für die $q_h = \partial W / \partial p_h$ die in diesem Sinne genommenen partiellen Differentialquotienten einsetzt. Es muß daher auch der partielle Differentialquotient der linken Seite der Gleichung 294) nach p_h gleich Null sein, bei dessen Bildung man t und die α_h als konstant anzusehen, die q_h aber als Funktionen von t, p_h und α_h zu betrachten hat, so daß E in doppelter Weise zu differenzieren ist 1. weil es explizit die Größe p_h enthält, 2. weil die darin vorkommenden Größen q_i Funktionen von p_h sind. Setzt man den so gebildeten partiellen Differentialquotienten der Gleichung gleich Null, so ergibt sich:

$$
\frac{\partial^2 W}{\partial t\, \partial p_h} + \frac{\partial E}{\partial p_h} + \sum_{i=1}^{i=u} \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial p_h} = 0.
$$

Subtrahiert man dies von der rechten Seite der Gleichung 307), so folgt

$$
\frac{d q_h}{d t} = -\frac{\partial E}{\partial p_h} \qquad h = 1, 2, \ldots s.
$$

Es ist also bewiesen, daß die Differentialquotienten der q_h nach der Zeit genau durch dieselben Gleichungen gegeben sind, welche für die mechanische Aufgabe gelten. Andererseits ist auch durch die Gleichungen 306) bewiesen, daß die p'_h aus E oder T (da ja

$$
\frac{\partial E}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}
$$

ist) in derselben Weise wie beim mechanischen Probleme zu bilden sind. Da sie also dieselben linearen Funktionen der q_h sind wie beim mechanischen Probleme und da wir schon sahen, daß die Differentialquotienten der q_h nach der Zeit dieselben Werte wie beim mechanischen Probleme haben, so folgt hieraus, daß auch die Ableitungen der p'_h nach der Zeit dieselben Werte wie beim mechanischen Probleme haben, also durch die Gleichungen 286) bestimmt sind. Es ist somit ganz allgemein bewiesen, daß die durch die Gleichungen 304) als Funktionen der Zeit und der $2s$ Integrationskonstanten α_h und β_h bestimmten Werte der p_h die Integrale der mechanischen Differentialgleichungen sind.

Die Ausführungen des § 57 lassen wieder so recht deutlich die universelle Bedeutung des Energiebegriffs erkennen. Man braucht bloß die Energie als Funktion der Koordinaten und Momente zu kennen und man ist unter Beiziehung der erforderlichen Anfangsbedingungen ohne weiteres imstande, die zeitliche Veränderung aller Koordinaten zu berechnen, ohne daß man ihre geometrische Bedeutung zu wissen braucht. Dies folgt übrigens auch schon aus den Gleichungen 72).

Falls V die Zeit nicht explizit enthält, kann man diese Variable immer aus der partiellen Differentialgleichung 301) hinwegschaffen, indem man setzt

308) $$W = \alpha t + U,$$

wobei U nur Funktion der Koordinaten sein soll. Die Differentialgleichung 301) verwandelt sich dann in die folgende:

309) $$\alpha + E\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right) = 0,$$

wobei das Symbol $E\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)$ ausdrückt, daß man in die Funktion $E = T + V$ für q_h zu substituieren hat $\partial U / \partial p_h$.

§ 59. Berechnung der Wurfbewegung aus der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung als einfachstes illustrierendes Beispiel.

Wir wollen nun zunächst die Bedeutung dieser Formel an einem möglichst einfachen Beispiele erörtern. Wir nehmen an, daß uns die Gesetze der Wurfbewegung noch unbekannt wären und daß wir dieselben aus der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung ableiten wollten. Es sei uns ein einziger vollkommen freier materieller Punkt mit der Masse m und den drei rechtwinkligen Koordinaten x, y, z gegeben, auf den nur die Schwerkraft wirkt. Die konstante Richtung dieser letzteren wählen wir als positive z-Achse und bezeichnen die ebenfalls konstante Beschleunigung der Schwere mit g. Dann ist:

$$s = 3, \quad p_1 = x, \quad p_2 = y, \quad p_3 = z.$$
$$V = -\,m g z,$$
$$q_1 = m x', \qquad q_2 = m y', \qquad q_3 = m z', \qquad T = \frac{1}{2m}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2).$$

In den letzteren Ausdruck sind statt der q die partiellen Differentialquotienten von W, respektive wenn man, da V die Zeit nicht explizit enthält, die Gleichung 309) anwendet, von U nach den Koordinaten zu substituieren. Es wird also

$$E = T + V = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] - m g z$$

und die Gleichung 309) geht daher über in

$$310) \qquad \alpha + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] - m g z = 0,$$

wobei W gleich $\alpha t + U$ ist. Da es sich nur um die Auffindung eines vollständigen Integrales handelt, so wollen wir setzen: $U = U_1 + U_2 + U_3$, wobei U_1 nur Funktion von x, U_2 nur Funktion von y, U_3 nur Funktion von z sein soll. Die partiellen Differentialquotienten verwandeln sich dann in gewöhnliche und die Gleichung 310) geht über in

$$2\alpha m + \left(\frac{d U_1}{d x}\right)^2 + \left(\frac{d U_2}{d y}\right)^2 + \left(\frac{d U_3}{d z}\right)^2 - 2 m^2 g z = 0,$$

welche sicher erfüllt ist, wenn wir setzen:

$$311) \quad \begin{cases} \dfrac{d U_1}{d x} = \alpha_1, \quad \dfrac{d U_2}{d y} = \alpha_2, \quad \dfrac{d U_3}{d z} = \sqrt{\alpha_3 + 2 m^2 g z} \\ \alpha = -\dfrac{1}{2m}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 311) folgt:

$$U_1 = \alpha_1 x + C_1, \qquad U_2 = \alpha_2 y + C_2$$
$$U_3 = \frac{1}{3 m^2 g}\sqrt{\alpha_3 + 2 m^2 g z}^{\,3} + C_3,$$

daher, da die Konstanten C_1, C_2, C_3 alle additiv zu W hinzukommen und deshalb weggelassen werden können

$$W = -\frac{t}{2m}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3) + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \\ + \frac{1}{3m^2 g}\sqrt{\alpha_3 + 2m^2 g z}^{\,3}.$$

Setzen wir

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \frac{\beta_3}{m g},$$

so erhalten wir also die drei Bewegungsgleichungen in der Form:

$$x = \frac{\alpha_1}{m} t + \beta_1, \quad y = \frac{\alpha_2}{m} t + \beta_2,$$

$$z = g\frac{t^2}{2} + 2\beta_3 t + \alpha_4,$$

wobei

$$\alpha_4 = \frac{2\beta_3^2}{g} - \frac{\alpha_3}{2m^2 g}$$

eine einfachere statt α_3 eingeführte Konstante ist. Dies sind in der Tat die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen für einen geworfenen Körper und es sind auch

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \alpha_1, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \alpha_2, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = \sqrt{\alpha_3 + 2m^2 g z}$$

die **Momente** mx', my' **und** mz' **bezüglich** der Koordinatenachsen.

Wir wollen nun zu Fällen übergehen, wo die **Hamiltonsche** partielle Differentialgleichung von wirklichem Nutzen ist, die also nicht mehr bloß den Charakter erläuternder Beispiele haben. Wir müssen da zunächst eine eigentümliche Art generalisierter Koordinaten, die sogenannten elliptischen, kennen lernen.

§ 60. Elliptische Koordinaten.

Es seien drei voneinander verschiedene positive, ein für allemal konstante Größen gegeben, deren größte wir mit a_1, deren mittlere mit a_2, deren kleinste wir mit a_3 bezeichnen, so daß also:

$$a_1 > a_2 > a_3.$$

Ferner seien x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im Raume. Wir denken uns für einen Augenblick auch diesen Größen x_1, x_2, x_3 bestimmte konstante endliche reelle, von Null verschiedene Werte erteilt. Dann wird der Ausdruck

$$\frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda}$$

eine Funktion $\psi(\lambda)$ des Wertes von λ sein, den wir augenblicklich allein als variabel betrachten.

Wir wollen eine negative Größe als um so kleiner bezeichnen, je größer ihr Zahlenwert ist, was wir eine Ungleichheit mit Einrechnung des Vorzeichens nennen wollen. Dann wächst $\psi(\lambda)$ kontinuierlich von 0 bis $+\infty$, d. h. bis zu einem beliebig großen positiven Werte, wenn λ kontinuierlich von $+\infty$ bis $-a_3^2+\varepsilon$ abnimmt, wobei ε im folgenden immer eine positive Größe sein soll, deren Wert man so klein wählen kann, als man nur will. Es muß also für irgend einen zwischen diesen Grenzen liegenden Wert λ_3 von λ die Funktion $\psi(\lambda)$ gleich 1 werden.

$\psi(\lambda)$ wächst nochmals kontinuierlich von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn λ kontinuierlich von $-a_3^2-\varepsilon$ bis $-a_2^2+\varepsilon$ abnimmt. Für einen zwischen diesen Grenzen liegenden Wert λ_2 von λ muß also nochmals $\psi(\lambda)=1$ werden.

Endlich wächst $\psi(\lambda)$ zum zweiten Male von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn λ kontinuierlich von $-a_2^2-\varepsilon$ bis $-a_1^2+\varepsilon$ abnimmt. Zwischen diesen Grenzen liegt ein dritter Wert λ_1 von λ, für den nochmals $\psi(\lambda)$ gleich 1 wird, für $\lambda<-a_1^2$ bleibt $\psi(\lambda)$ negativ. Es hat also die Gleichung

$$312) \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda}=1,$$

welche sich durch Multiplikation mit $(a_1^2+\lambda)(a_2^2+\lambda)(a_3^2+\lambda)$ in eine gewöhnliche algebraische Gleichung dritten Grades verwandelt, stets drei reelle Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 und es ist

$$313) \qquad +\infty>\lambda_3>-a_3^2>\lambda_2>-a_2^2>\lambda_1>-a_1^2.$$

Wir heben noch folgende Spezialfälle hervor:

1. Wenn x_1 sich beliebig der Null nähert, so nähert sich λ_1 der Grenze $-a_1^2$, während sich λ_2 und λ_3 den beiden Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda}=1 \tag{314}$$

nähern. Wir wollen daher sagen, für $x_1 = 0$ ist $\lambda_1 = -a_1^2$, λ_2 und λ_3 aber sind die Wurzeln der Gleichung 314), von denen man, wie oben, beweist, daß wenn x_2 und x_3 von Null verschieden sind, die eine zwischen $+\infty$ und $-a_3^2$, die andere zwischen $-a_3^2$ und $-a_2^2$ liegt. Wir wollen die erste mit λ_3, die zweite mit λ_2 bezeichnen.

2. Wenn sich x_2 der Null nähert, während x_1 und x_3 von Null verschieden sind, so nähert sich entweder λ_1 oder λ_2 der Grenze $-a_2^2$, je nachdem die kleinere Wurzel der Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda}=1 \tag{315}$$

a) kleiner, b) größer als $-a_2^2$ ist. Wenn daher $x_2 = 0$, x_1 und x_3 aber von Null verschieden sind, so setzen wir im ersten Falle $\lambda_2 = -a_2^2$, λ_1 gleich der kleineren dieser Wurzeln, im zweiten Falle $\lambda_1 = -a_2^2$ und λ_2 gleich der kleineren dieser Wurzeln, wogegen λ_3 immer gleich der größeren Wurzel der Gleichung 315) zu setzen ist.

3. Ebenso ist, wenn $x_3 = 0$, x_1 und x_2 aber von Null verschieden sind, λ_2 oder $\lambda_3 = -a_3^2$, λ_1 gleich der kleinsten Wurzel der Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda}=1 \tag{316}$$

und λ_3 oder λ_2 gleich der größeren Wurzel dieser Gleichung zu setzen, je nachdem dieselbe a) größer oder b) kleiner als $-a_3^2$ ist.

4. Ist $x_1 = x_2 = 0$, so setzen wir:

$$\lambda_1 = -a_1^2, \quad \lambda_2 = -a_2^2, \quad \lambda_3 = x_3^2 - a_3^2.$$

5. Für $x_1 = x_3 = 0$ wird:

$$\lambda_1 = -a_1^2 \quad \text{und}$$

a) falls $x_2^2 < a_2^2 - a_3^2$:

$$\lambda_3 = -a_3^2, \quad \lambda_2 = x_2^2 - a_2^2,$$

b) für $x_2^2 > a_2^2 - a_3^2$:

$$\lambda_3 = x_2^2 - a_2^2, \quad \lambda_2 = -a_3^2, \quad \text{endlich}$$

c) für $x_2^2 = a_2^2 - a_3^2$:

$$\lambda_3 = \lambda_2 = -a_3^2.$$

6) **Für** $x_2 = x_3 = 0$ wird

a) falls $x_1^2 > a_1^2 - a_3^2$:

$$\lambda_3 = x_1^2 - a_1^2, \quad \lambda_2 = -a_3^2, \quad \lambda_1 = -a_2^2,$$

b) für $x_1^2 = a_1^2 - a_3^2$:

$$\lambda_3 = \lambda_2 = -a^2, \quad \lambda_1 = -a_2^2,$$

c) für $a_1^2 - a_3^2 > x_1^2 > a_1^2 - a_2^2$:

$$\lambda_3 = -a_3^2, \quad \lambda_2 = x_1^2 - a_1^2, \quad \lambda_1 = -a_2^2,$$

d) für $x_1^2 = a_1^2 - a_2^2$:

$$\lambda_3 = -a_3^2, \; \lambda_1 = \lambda_2 = -a_2^2,$$

e) für $x_1^2 < a_1^2 - a_2^2$:

$$\lambda_3 = -a_3^2, \quad \lambda_2 = -a_2^2. \quad \lambda_1 = x_1^2 - a_1^2.$$

7. Wenn sich endlich x_1, x_2 und x_3 gleichzeitig der Grenze Null nähern, so nähern sich λ_1, λ_2 und λ_3 gleichzeitig den Grenzen $-a_1^2$, $-a_2^2$ und $-a_3^2$, weshalb wir für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ setzen wollen:

$$\lambda_3 = -a_3^2, \quad \lambda_2 = -a_2^2, \quad \lambda_1 = -a_1^2.$$

Falls mindestens eine der Koordinaten unendlich wird, setzen wir $\lambda_3 = \infty$. Wenn dann eine oder zwei der rechtwinkligen Koordinaten endlich oder unendlich niedrigerer Ordnung sind, so ist eines oder zwei der λ gleich einem a^2. Sind zwei rechtwinklige Koordinaten x_h und x_k untereinander von gleicher und von höherer Ordnung unendlich als die dritte, so folgt ein λ aus der Gleichung

$$\frac{x_h^2}{x_k^2} = -\frac{a_h^2 + \lambda}{a_k^2 + \lambda}; \tag{317}$$

sind endlich alle drei rechtwinkligen Koordinaten unendlich von gleicher Größenordnung, so sind für λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\text{318)} \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda}=0$$

zu wählen.

Nach diesen Festsetzungen gehört zu jeder Terne von reellen Werten der Koordinaten x_1, x_2, x_3 eine und nur eine bestimmte Terne von reellen Werten von λ_1, λ_2, λ_3, welche, falls keine der Koordinaten Null oder unendlich ist, den Ungleichungen 313) genügen. Lassen wir dagegen auch die Werte Null oder unendlich der Koordinaten zu, so genügen λ_1, λ_2, λ_3 Relationen, welche sonst mit den Ungleichungen 313) identisch sind, nur daß an Stelle jedes Ungleichheitszeichens das Ungleichheitszeichen oder Gleichheitszeichen stehen kann.

Die Relationen, welche hierdurch aus den Ungleichungen 313) entstehen, nennen wir die Relationen 313a).

Ebenso gehört zu jeder Terne von reellen Werten von λ_1. λ_2 und λ_3, welche den Ungleichungen 313) oder den Relationen 313a) genügen, eine und nur eine Terne, von reellen positiven Werten von x_1^2, x_2^2 und x_3^2; wenn an Stelle der Ungleichungen 313) die Relationen 313a) treten, werden auch die Werte Null und unendlich für jede der Koordinaten zulässig. Es sind also auch x_1, x_2 und x_3, folglich auch die Lage des Punktes, dessen Koordinaten x_1, x_2, x_3 sind, im Raume eindeutig bestimmt, sobald die zu x_1, x_2. x_3 gehörige Terne der Werte von λ_1, λ_2, λ_3 und noch das Vorzeichen der Koordinaten gegeben ist.

Wir können daher als generalisierte Koordinaten, durch welche die Lage irgend eines Punktes im Raume bestimmt ist, die zu den rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2, x_3 desselben gehörigen Werte von λ_1. λ_2 und λ_3 benutzen. Man nennt sie die elliptischen Koordinaten des betreffenden Punktes. Sie bestimmen die Lage desselben eindeutig, wenn noch das Vorzeichen der drei rechtwinkligen Koordinaten gegeben ist. Es sind also λ_1, λ_2, λ_3 eindeutige Funktionen von x_1, x_2, x_3, umgekehrt sind x_1, x_2, x_3 Funktionen von λ_1, λ_2, λ_3, die durch die letzteren Variabeln bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt sind.

§ 61. Geometrische Bedeutung der elliptischen Koordinaten.

Wir wollen nun das bisher Gesagte geometrisch interpretieren. Wir betrachten da zunächst in Gleichung 312) nebst a_1, a_2, a_3, welche wie immer gegebene, ein für allemal konstante Größen sein sollen, auch λ konstant. Die Gleichung gibt uns dann eine Relation zwischen den Koordinaten x_1, x_2, x_3, welcher alle Punkte einer gewissen Zentralfläche F zweiten Grades genügen. Wir nennen sie die dem betreffenden λ entsprechende Fläche zweiten Grades. Da in der Gleichung 312) alle ungeraden Potenzen der Koordinaten fehlen, so ist der Koordinatenursprung immer ihr Mittelpunkt und die Koordinatenachsen sind ihre Achsen.

Sehr großen positiven Werten von λ entspricht sehr nahe eine Kugel von sehr großem Radius. Diese verwandelt sich, wenn λ bis $-a_3^2$ abnimmt, in ein immer kleiner werdendes dreiachsiges Ellipsoid, dessen größte Achse die Richtung der x_1-Achse, dessen kleinste die der x_3-Achse hat. Dasselbe nähert sich, je mehr sich λ der Grenze $-a_3^2$ nähert, immer mehr der Fläche einer in der $x_1 x_2$-Ebene liegenden Ellipse E, deren Achsen die Koordinatenachsen sind und deren Halbachsen gleich $\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ und $\sqrt{a_2^2 - a_3^2}$ sind, welche also die Gleichungen hat:

$$319)\qquad \frac{x_1^2}{a_1^2 - a_3^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2 - a_3^2} = 1, \qquad x_3 = 0.$$

Wenn man zuerst dem λ einen sehr großen positiven, dann einen um eine sehr kleine Größe ε kleineren, dann wieder einen um ε kleineren Wert etc. erteilt, so erhält man lauter dreiachsige Ellipsoide, von denen jedes ganz innerhalb der vorigen liegt; der Raum wird also in lauter unendlich dünne ellipsoidische Schalen zerlegt, welche den ganzen unendlichen Raum vollständig erfüllen.

Ist λ wenig kleiner als $-a_3^2$, so ist die Fläche F ein einschaliges Hyperboloid, welches noch fast mit demjenigen

Teile der $x_1 x_2$-Ebene zusammenfällt, welcher außerhalb der Ellipse E liegt. Daher können wir sagen, daß die Fläche F für den Fall $\lambda = -a_3^2$ in die $x_1 x_2$-Ebene degeneriert und wir werden nach dem früheren Übereinkommen λ, so lange es größer als $-a_3^2$ ist und auch noch so lange es einem Punkte des von der Ellipse E umschlossenen Stückes der $x_1 x_2$-Ebene entspricht, mit λ_3 bezeichnen. Sobald es gleich $-a_3^2$ ist, aber einem Punkte der $x_1 x_2$-Ebene entspricht, der außerhalb jener Ellipse liegt, oder sobald es zwischen $-a_3^2$ und $-a_2^2$ liegt, also einem einschaligen Hyperboloide entspricht, werden wir es mit λ_2 bezeichnen, wogegen auf dem Umfange der Ellipse $\lambda_3 = \lambda_2 = -a_3^2$ ist.

Nimmt nun λ, welches jetzt λ_2 heißt, von $-a_3^2$ bis $-a_2^2$ ab, so breitet sich das einschalige Hyperboloid aus und geht für $\lambda = -a_2^2$ in denjenigen zusammenhängenden Teil der $x_1 x_3$-Ebene über, welcher von den beiden Ästen A_λ der Hyperbel

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_2^2 - a_3^2} = 1, \quad x_2 = 0 \tag{320}$$

begrenzt ist, für welchen also $\frac{x_1^2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_2^2 - a_3^2} < 1$ ist. Auf diesem Teile der $x_1 x_3$-Ebene ist λ noch mit λ_2 zu bezeichnen. Der andere Teil der $x_1 x_3$-Ebene, für welchen λ ebenfalls gleich $-a_2^2$ ist, aber schon mit λ_1 bezeichnet werden soll, ist die Grenze der zweischaligen Hyperboloide, in welche die Fläche F übergeht, sobald $\lambda < -a_2^2$ wird. Nähert sich λ dem Werte $-a_1^2$, so nähern sich beide Schalen dieser Hyperboloide von beiden Seiten immer mehr der gesamten $x_2 x_3$-Ebene.

Alle die einschaligen Hyperboloide, welche man erhält, wenn man

$$\lambda = -a_3^2 - \varepsilon, \quad \lambda = -a_3^2 - 2\varepsilon \ldots \lambda = -a_2^2$$

setzt und von denen wieder jedes folgende das vorhergehende nirgends schneidet, aber ihm überall unendlich nahe liegt, erfüllen wieder den ganzen unendlichen Raum kontinuierlich und zerlegen jede der früher besprochenen ellipsoidischen Schichten in lauter Ringe von unendlich kleinem Querschnitte.

Alle zweischaligen Hyperboloide endlich, welche den Werten $\lambda = -a_2^2 - \varepsilon,\ -a_2^2 - 2\varepsilon \ldots -a_1^2$ entsprechen, erfüllen noch einmal in derselben Weise den ganzen unendlichen Raum kontinuierlich und zerlegen jeden der besprochenen Ringe in lauter unendlich kleine Volumelemente. Diese Volumelemente sind rechtwinklige Parallelepipede, da sich, wie wir sofort beweisen werden, je ein Ellipsoid, je ein einschaliges und je ein zweischaliges Hyperboloid immer rechtwinklig durchschneiden.

Alle diese Formen, welche die Fläche F der Reihe nach annimmt, sind (die Fälle ausgenommen, wo sie in eine ebene Fläche degeneriert) konzentrische und koaxiale Flächen zweiten Grades, d. h. sie haben alle denselben Mittelpunkt (den Koordinatenursprung), und gleichgerichtete Achsen (die Koordinatenachsen). Sie sind auch konfokal, d. h. alle Kegelschnittlinien, in welchen sie durch die $x_1 x_2$-Ebene geschnitten werden, haben dieselben Brennpunkte, ebenso haben alle Kegelschnittlinien, in welchen sie durch die $x_1 x_3$-Ebene geschnitten werden, untereinander und alle, in welchen sie durch die $x_2 x_3$-Ebene geschnitten werden, wieder untereinander dieselben Brennpunkte.

Fur die Schnitte mit der $x_1 x_2$-Ebene liegen die Brennpunkte auf der x_1-Achse in der Entfernung $\sqrt{a_1^2 - a_2^2}$ vom Koordinatenursprunge O, für die Schnitte mit der $x_1 x_3$-Ebene ebenfalls auf der x_1-Achse in der Entfernung $\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ von O, für die Schnitte mit der $x_2 x_3$-Ebene auf der x_2-Achse in der Entfernung $\sqrt{a_2^2 - a_3^2}$ von O.

Man sieht dies leicht ein, wenn man bedenkt, daß, wenn A und B beliebige positive oder negative Konstanten sind und mit Einrechnung des Vorzeichens $A > B$ ist, die beiden Brennpunkte der Kegelschnittlinie, welche die Gleichung $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$ hat, auf der x-Achse in der Entfernung $\sqrt{A - B}$ vom Koordinatenursprunge liegen. Dies gilt sowohl, wenn A und B positiv sind, also die Kegelschnittlinie eine Ellipse ist, als auch wenn A positiv, dagegen B negativ ist, also die Kegelschnittlinie eine Hyperbel ist. Ja selbst wenn A und B beide negativ sind, also die Kegelschnittlinie ganz imaginär wird, was bei den Durchschnittslinien der oben betrachteten zweischaligen Hyperboloide mit der $x_2 x_3$ Ebene zutrifft, pflegt man diese Punkte noch immer ihre Brennpunkte zu nennen und zu sagen, daß diese reell bleiben.

Den drei Werten des λ, welche den Koordinaten eines gegebenen Punktes entsprechen und also gegenwärtig von uns als dessen generalisierte Koordinaten bezeichnet werden, entsprechen also immer drei konzentrische, koaxiale, homofokale Flächen zweiten Grades, ein dreiachsiges Ellipsoid, ein einschaliges und zweifächeriges Hyperboloid, welche sich, da die Koordinaten des gegebenen Punktes die Gleichung jeder der drei Flächen erfüllen, in dem gegebenen Punkte schneiden.

Falls eine oder zwei oder alle drei Koordinaten Null werden, degenerieren eine oder zwei oder alle drei Flächen

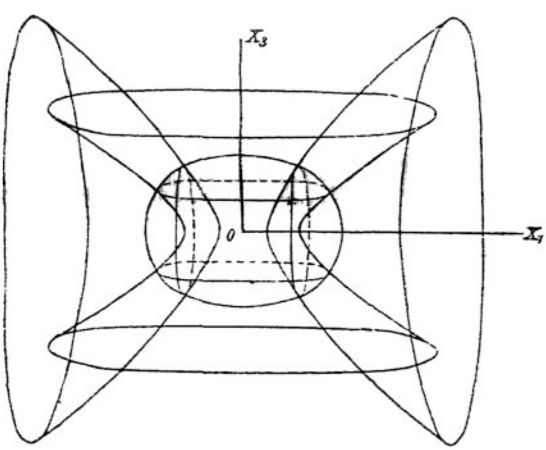

Fig. 8.

in eine oder in einen Teil einer der Koordinatenebenen. Falls mindestens eine der Koordinaten unendlich ist, degeneriert das Ellipsoid in eine Kugel von unendlichem Radius.

In Fig. 8 ist das Ellipsoid und das ein- und zweifächerige Hyperboloid (perspektivisch freilich nicht ganz richtig) gezeichnet, welche sich in dem mit einem Kreuze markierten beliebigen Punkte des Raumes durchschneiden. Auch sind die Durchschnittslinien der beiden Hyperboloide mit dem Ellipsoide gezeichnet. Wenn man diese Figur betrachtet, kann man sich leicht klar machen, wie die verschiedenen Flächen degenerieren, wenn gewisse Koordinaten des Durchschnittspunktes Null oder unendlich werden.

§ 62. Die elliptischen Koordinaten sind orthogonal.

λ_3 ist die größte Wurzel der Gleichung 312), kann also als eine Funktion von x_1, x_2, x_3 (sagen wir $f(x_1, x_2, x_3)$) betrachtet werden, welche man z. B. mittels der Cardanischen Formel explizit hinschreiben könnte, da ja die Gleichung 312) eine Gleichung dritten Grades für λ ist.

Lassen wir in dieser Funktion x_2 und x_3 konstant und betrachten bloß x_1 als veränderlich, so können wir ihren partiellen Differentialquotienten $\partial \lambda_3 / \partial x_1$ bilden. Dieser wird am besten in folgender Weise gefunden: Da λ_3 Wurzel der Gleichung 312) ist, so hat man:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda_3} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda_3} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda_3} = 1.$$

Läßt man darin x_2 und x_3 konstant, so folgt:

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1} = \frac{2}{\Delta_3^2} \frac{x_1}{a_1^2 + \lambda_3}.$$

Die analogen Gleichungen, welche man erhält, wenn man λ_3 nach x_2, x_3 und λ_2 und λ_1 nach allen x partiell differenziert, kann man in die Form

321) $$\frac{\partial \lambda_h}{\partial x_i} = \frac{2 x_i}{\Delta_h^2 (a_i^2 + \lambda_h)}$$

zusammenfassen, wobei sowohl i als auch h unabhängig voneinander jeden der drei Werte 1, 2 oder 3 haben können. Δ ist dabei eine abgekürzte Bezeichnung und es ist allgemein

322) $$\Delta_h = \sqrt{\sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2 + \lambda_h)^2}},$$

wobei wir immer das positive Zeichen der Wurzel wählen wollen. Der Index i unter dem Summenzeichen hat, wie hier immer die Bedeutung, daß dem i alle drei Werte 1, 2 und 3 zu erteilen sind, wogegen dem h ein bestimmter dieser drei Werte zu geben ist, gleichgültig welcher.

Die Gleichung des durch einen gegebenen Punkt gehenden dreiachsigen Ellipsoids finden wir, wenn wir die soeben mit $f(x_1, x_2, x_3)$ bezeichnete Funktion, welche uns λ_3 durch x_1, x_2, x_3 ausdrückt, gleich einer Konstanten, nämlich gleich dem diesem Punkte entsprechenden speziellen Werte von λ_3 setzen. Die Richtungskosinus der an dieses Ellipsoid im gegebenen Punkte errichteten Normalen N_3 sind daher nach den bekannten Formeln für die Richtungskosinus der an eine Fläche mit der Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) =$ konst. gezogenen Normalen

$$\cos(N_3, x_1) = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

$$\cos(N_3, x_2) = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\cos(N_3, x_3) = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

wobei n die positive Wurzel aus

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2$$

ist. Dabei sind die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ etc. so zu verstehen: es ist λ_3 als Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ von x_1, x_2, x_3 auszudrücken und dann, bei konstantem x_2 und x_3 nach x_1 zu differenzieren etc. Es ist also $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ etc. genau dasselbe, was wir in den Formeln 321) mit $\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_2}$ etc. bezeichneten. Wenn wir daher zu dieser Bezeichnungsweise zurückkehren, so erhalten wir

$$\cos(N_3, x_1) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_3}\right)^2}} \cdot \frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1}$$

und nach Substitution der Werte 321) und 322)

$$\cos(N_3, x_1) = \frac{1}{A_3^2} \frac{x_1}{a_1^2 + \lambda_3}.$$

Ebenso folgt:

$$\cos(N_3, x_2) = \frac{1}{A_3^2} \frac{x_2}{a_2^2 + \lambda_3},$$

$$\cos(N_3, x_3) = \frac{1}{A_3^2} \frac{x_3}{a_3^2 + \lambda_3}.$$

Die Gleichung des einschaligen, durch denselben Punkt mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 gehenden Hyperboloids erhalten wir in gleicher Weise, wenn wir zuerst die mittlere Wurzel λ_2 der Gleichung 312) als Funktion φ von x_1, x_2, x_3 ausdrücken und dann diese Funktion φ gleich dem dem betreffenden Punkte entsprechenden Werte von λ_2 setzen. Die Richtungskosinus der im selben Punkt an das einschalige Hyperboloid errichteten Normalen N_2 sind dann wieder den Größen $\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_3}$ proportional und analoges gilt für die Normale N_1, die man durch denselben Punkt mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 zu dem durch diesen Punkt gehenden zweifächerigen Hyperboloide ziehen kann. Die Formeln, welche man für die Richtungskosinus aller dieser Normalen erhält, kann man in die Formel zusammenfassen:

323) $$\cos(N_h, x_i) = \frac{1}{A_h^2} \frac{x_i}{a_i^2 + \lambda_h}.$$

Der Kosinus des Winkels, welchen irgend zwei (N_h und N_{h+1}) von diesen drei Normalen miteinander einschließen, ist daher

$$\begin{aligned}\cos(N_h, N_{h+1}) &= \cos(N_h, x_1)\cos(N_{h+1}, x_1) + \\ &+ \cos(N_h, x_2)\cos(N_{h+1}, x_2) + \cos(N_h, x_3)\cos(N_{h+1}, x_3) = \\ &= \frac{1}{A_h^2 A_{h+1}^2} \sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2 + \lambda_h)(a_i^2 + \lambda_{h+1})}.\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\frac{x_i^2}{(a_i^2 + \lambda_h)(a_i^2 + \lambda_{h+1})} = \frac{1}{\lambda_h - \lambda_{h+1}} \left(\frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda_{h+1}} - \frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda_h}\right),$$

daher

$$\sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2+\lambda_h)(a_i^2+\lambda_{h+1})} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_h - \lambda_{h+1}} \left[\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2+\lambda_{h+1}} - \sum \frac{x_i^2}{a_i^2+\lambda_h} \right]$$

In diesen Formeln kann h jeden beliebigen der Werte 1, 2 oder 3 annehmen, im letzteren Falle aber müssen wir den Index 4 immer als gleichbedeutend mit dem Index 1 betrachten. Wir wollen in allen analogen Formeln auch den Index 5 mit dem Index 2 etc., d. h. also alle Mod. drei kongruenten Zahlen, wenn sie im Index stehen, als gleichbedeutend betrachten. Der Punkt mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3, in welchem die beiden Normalen N_h und N_{h+1} errichtet sind, gehört beiden Zentralflächen zweiten Grades, zu denen diese beiden Normalen gezogen sind, an; daher müssen seine Koordinaten die Gleichung jeder dieser Zentralflächen erfüllen, es haben also beide Summen in der eckigen Klammer der rechten Seite der letzten Gleichung den Wert 1. Diese eckige Klammer reduziert sich auf Null und man erhält:

324) $$\sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2+\lambda_h)(a_1^2+\lambda_{h+1})} = 0,$$

daher auch:

325) $$\cos(N_h, N_{h+1}) = 0.$$

Alle drei Zentralflächen zweiten Grades durchschneiden sich daher in jedem Punkte rechtwinklig. Die Transformation in elliptischen Koordinaten ist eine Orthogonale. Man nennt die Einführung von $f_1(x_1, x_2, x_3)$, $f_2(x_1, x_2, x_3)$, $f_3(x_1, x_2, x_3)$ statt x_1, x_2, x_3 als Koordinaten orthogonal, sobald sich die drei Flächen, welche man erhält, wenn man f_1, f_2 und f_3 gleich drei beliebigen Konstanten setzt, immer rechtwinklig durchschneiden.

§ 63. Ausdruck der rechtwinkligen Koordinaten durch die elliptische.

Wir wollen nun die umgekehrte Aufgabe in Angriff nehmen, wenn λ_1, λ_2 und λ_3 gegeben sind, die dazu gehörigen Werte von x_1, x_2, x_3 als Funktionen von λ_1, λ_2, λ_3 und natürlich der immer konstant betrachteten Größen a_1, a_2, a_3 zu berechnen. Wir denken uns zunächst noch den drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 bestimmte konstante Werte, dem λ dagegen einen ganz beliebigen Wert beigelegt, so daß in dem Ausdrucke

$$326)\qquad \varphi(\lambda) = \frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda} - 1$$

zunächst λ allein als variabel betrachtet wird. Wir setzen ferner

$$327)\qquad f(\lambda) = (a_1^2+\lambda)(a_2^2+\lambda)(a_3^2+\lambda)\varphi(\lambda).$$

Dann ist $f(\lambda)$ eine ganze Funktion dritten Grades bezüglich λ und die immer mit λ_1, λ_2, λ_3 bezeichneten Größen sind die Wurzeln der Gleichung $f(\lambda) = 0$. Nach einem bekannten Satz aus der Theorie der Gleichungen ist also:

$$328)\qquad f(\lambda) = A(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3).$$

Setzt man hier für $f(\lambda)$ den Wert 327) ein, wobei für $\varphi(\lambda)$ noch der Wert 326) zu substituieren ist, folgt so $A = -1$, da der Koeffizient von λ^3 beiderseits gleich sein muß und man erhält:

$$329)\left\{\begin{array}{l} x_1^2(a_2^2+\lambda)(a_3^2+\lambda) + x_2^2(a_1^2+\lambda)(a_3^2+\lambda) + x_3^2(a_1^2+\lambda)(a_2^2+\lambda) \\ -(a_1^2+\lambda)(a_2^2+\lambda)(a_3^2+\lambda) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda). \end{array}\right.$$

Diese Gleichung gilt für jeden Wert von λ; es ist eine identische Gleichung, wenn man darin für λ_1, λ_2, λ_3 deren Werte als Funktionen von x_1, x_2, x_3, oder umgekehrt für x_1, x_2, x_3 deren Werte als Funktionen von λ_1, λ_2, λ_3 substituiert. Obige Gleichung bleibt also stets richtig, was immer man für λ für einen Wert substituieren mag.

Setzt man darin $\lambda = -a_1^2$, so erhält man:

$$330)\qquad x_1^2 = \frac{(a_1^2+\lambda_1)(a_1^2+\lambda_2)(a_1^2+\lambda_3)}{(a_1^2-a_2^2)(a_1^2-a_3^2)}$$

Setzt man dagegen in die Gleichung 329) $\lambda = -a_2^2$, so folgt:

$$331)\qquad x_2^2 = \frac{(a_2^2+\lambda_1)(a_2^2+\lambda_2)(a_2^2+\lambda_3)}{(a_2^2-a_1^2)(a_2^2-a_3^2)}.$$

Setzt man endlich $\lambda = -a_3^2$, so folgt:

$$332)\qquad x_3^2 = \frac{(a_3^2+\lambda_1)(a_3^2+\lambda_2)(a_3^2+\lambda_3)}{(a_3^2-a_1^2)(a_3^2-a_2^2)}.$$

Wir wollen nun allen drei Größen λ_1, λ_2 und λ_3 willkürliche unendlich kleine Zuwächse $d\lambda_1$, $d\lambda_2$, $d\lambda_3$ erteilen. Die dadurch entstehenden Zuwächse x_1, x_2, x_3 nennen wir deren vollständige Differentiale. Wir finden sie am leichtesten, wenn wir von der linken und rechten Seite der Gleichungen 330) den natürlichen Logarithmus nehmen und dann die vollständigen Differentiale dieser beiden Logarithmen gleich setzen. Ebenso verfahren wir mit Gleichung 331) und 332). Es folgen dann drei Gleichungen, welche wir in die gemeinsame Form

333) $$d x_i = \sum_h \frac{x_i\, d\lambda_h}{2(a_i^2 + \lambda_h)}$$

zusammenfassen können. Wir wollen in der letzten Gleichung zuerst $i = 1$, dann $i = 2$, dann $i = 3$ setzen, jede so erhaltene Gleichung quadrieren und dann die quadrierten Gleichungen addieren. Wir bekommen dann links den Ausdruck $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \sum_i dx_i^2$, den wir kürzer mit ds^2 bezeichnen wollen. Auf der rechten Seite verschwinden die Koeffizienten von

$$d\lambda_1 . d\lambda_2, \quad d\lambda_1 . d\lambda_3 \quad \text{und} \quad d\lambda_2 . d\lambda_3,$$

da dieselben genau gleich der Hälfte der Ausdrücke werden, welche in den Gleichungen 324) auf der linken Seite stehen, und vermöge dieser Gleichungen verschwinden. Der Koeffizient von $d\lambda_h^2$ aber wird gleich dem vierten Teile des Quadrates des in Gleichung 322) mit Δ_h bezeichneten Ausdrucks. Man erhält also:

334) $$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \tfrac{1}{4}(\Delta_1^2\, d\lambda_1^2 + \Delta_2^2\, d\lambda_2^2 + \Delta_3^2\, d\lambda_3^2).$$

In dem Ausdrucke, wie er durch Gleichung 322) gegeben ist, kommen sowohl die x_1, x_2, x_3 als auch die λ_1, λ_2, λ_3 vor; den Ausdruck, welchen man für Δ_h erhält, wenn man darin x_1, x_2, x_3 ebenfalls durch die λ ausdrückt, so daß nur mehr die letzteren Variabeln in Δ_h vorkommen, erhält man am kürzesten in folgender Weise.

Man betrachtet wieder in der durch die Gleichung 326) gegebenen Funktion $\varphi(\lambda)$ die Größen x_1, x_2, x_3, daher auch

λ_1, λ_2, λ_3 als konstant, die Größe λ dagegen als in beliebiger Weise veränderlich. Den Ausdruck, welchen man erhält wenn man unter diesen Voraussetzungen den Differentialquotienten $-\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}$ bildet und darin nach geschehener Differentiation $\lambda = \lambda_1$ setzt, bezeichnen wir mit $-\left[\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_1}$. Er ist genau gleich Λ_1^2, wie man sofort aus Gleichung 322) erkennt, wenn man darin $h = 1$ setzt. Ebenso ist

$$-\left[\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_2} = \Lambda_2^2, \quad -\left[\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_3} = \Lambda_3^2,$$

wobei die den eckigen Klammern unten angehängten Indizes die analoge Bedeutung haben.

Nun ist, wie wir sahen, in Gleichung 328) der Koeffizient $A = -1$. Substituiert man den betreffenden Wert von $f(\lambda)$ in die Gleichung 327), so folgt:

$$\varphi(\lambda) = \frac{(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)}{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3 + \lambda)}.$$

Bei der partiellen Differentiation nach λ sind x_1, x_2, x_3, daher auch λ_1, λ_2, λ_3, welche ja Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind, als konstant zu betrachten; es ist also

$$-\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)}{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)}$$

mehr noch einer Reihe von Gliedern, von denen aber jedes für $\lambda = \lambda_1$ verschwindet. Es ist also:

$$-\left[\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_1} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}{(a_1^2 + \lambda_1)(a_2^2 + \lambda_1)(a_3^2 + \lambda_1)}.$$

Diese Größe ist aber, wie wir sahen, gleich Λ_1^2. Bestimmt man in derselben Weise Λ_2^2 und Λ_3^2, so erhält man drei Formeln, welche man in die folgende Form zusammenfassen kann:

$$335) \qquad \Lambda_h = \sqrt{\frac{(\lambda_h - \lambda_{h+1})(\lambda_h - \lambda_{h+2})}{(a_1^2 + \lambda_h)(a_2^2 + \lambda_h)(a_3^2 + \lambda_h)}}.$$

Aus den Gleichungen 333) ergeben sich natürlich sofort die partiellen Differentialquotienten von x_1, x_2 oder x_3 nach

λ_1, λ_2 oder λ_3, wenn man erstere Größen als Funktion der letzteren auffaßt, z. B. die nach λ_1, indem man $d\lambda_2 = d\lambda_3 = 0$ setzt. Alle diesbezüglichen partiellen Differentialquotienten kann man in die eine Form zusammenfassen

$$\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_h} = \frac{x_i}{2(a_i^2 + \lambda_h)}, \tag{336}$$

wobei jeder der Indizes i und h unabhängig von dem anderen die Werte 1, 2 oder 3 annehmen kann. Vergleicht man dies noch mit der Formel 321), so kann man auch schreiben

$$\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_h} = \frac{1}{4} \varDelta_h^2 \frac{\partial \lambda_h}{\partial x_i}, \tag{337}$$

wo links die x als Funktionen der λ, rechts umgekehrt die λ als Funktionen der x zu betrachten sind. Die Gleichung 324) kann daher mit Rücksicht auf die Gleichungen 336) und 321) entweder in der Form

$$\sum_i \frac{\partial \lambda_h}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_{h+1}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_h} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_{h+1}} = 0 \tag{338}$$

geschrieben werden, wobei wieder im Index alle Mod. 3 kongruenten Zahlen als gleichbedeutend zu betrachten sind. Da die Richtungskosinus der Normalen, die wir im vorigen Paragraphen mit N_h bezeichneten, den Größen $\frac{\partial \lambda_h}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \lambda_h}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \lambda_h}{\partial x_3}$ proportional sind, so sind die linksstehenden der Relationen 338) nur die bekannten Gleichungen

$$\sum_i \cos(N_h, x_i) \cos(N_{h+1}, x_i) = 0,$$

welche ausdrücken, daß sich die Flächen zweiten Grades orthogonal schneiden. Analog sind die rechtsstehenden Relationen mit dem Gleichungen

$$\sum_i \cos(N_i, x_h) \cos(N_i, x_{h+1}) = 0$$

identisch.

Wir wollen nun mit A einen beliebigen Punkt des Raumes bezeichnen, der die rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2, x_3 und die elliptischen Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 hat.

Ferner sei B der Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$ und den dazu gehörigen elliptischen Koordinaten $\lambda_1 + d\lambda_1$, $\lambda_2 + d\lambda_2$, $\lambda_3 + d\lambda_3$, wobei dx_1, dx_2, dx_3 willkürlich sein können. Es sind dann $d\lambda_1$, $d\lambda_2$, $d\lambda_3$ die entsprechenden Zuwächse der elliptischen Koordinaten. Es können aber auch $d\lambda_1$, $d\lambda_2$, $d\lambda_3$ als willkürlich betrachtet werden, dann sind dx_1, dx_2, dx_3 die dazu gehörigen Zuwächse der rechtwinkligen Koordinaten.

Die in Formel 334) mit ds bezeichnete Größe ist dann die Entfernung der beiden Punkte A und B. Diese Formel stellt also die Länge eines willkürlich im Raume gezogenen Linienelementes dar. Wenn speziell der Punkt B auf demselben einschaligen und zweischaligen Hyperboloide wie der Punkt A liegt und nur das Ellipsoid, welches durch B geht, dem Werte $\lambda_3 + d\lambda_3$ von λ_3 entspricht, während das Ellipsoid, welches durch den Punkt A geht, dem Werte λ_3 entspricht, so wollen wir dem Punkte B den Index 3 anhängen und seine Entfernung AB_3 vom Punkte A mit ds_3 bezeichnen. In diesem Falle ist $d\lambda_1 = d\lambda_2 = 0$. Daher

339) $$ds_3 = \tfrac{1}{2} \Delta_3 \, d\lambda_3 .$$

Die Gerade ds_3 ist ein unendlich kleines, vom Punkte A aus gezogenes Stück der Durchschnittslinie des ein- und zweischaligen Hyperboloides, welche durch den Punkt A gehen, und steht, da diese beiden Flächen auf dem Ellipsoide senkrecht stehen, ebenfalls auf diesem senkrecht.

Der Wert, den ds annimmt, wenn $d\lambda_1 = d\lambda_3 = 0$ gesetzt wird, soll mit ds_2 bezeichnet werden. Es ist also

340) $$ds_2 = \tfrac{1}{2} \Delta_2 \, d\lambda_2 = AB_2$$

der Abstand des Punktes A mit den elliptischen Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 vom Punkte B_2, dessen elliptische Koordinaten λ_1, $\lambda_2 + d\lambda_2$, λ_3 sind. ds_2 kann auch als ein vom Punkte A aus gezogenes unendlich kleines Stück der Durchschnittslinie des durch A gehenden Ellipsoides mit dem durch A gehenden zweischaligen Hyperboloid definiert werden und steht senkrecht auf dem durch A gehenden einschaligen Hyperboloide.

Ebenso ist

341) $$d s_1 = \tfrac{1}{2} A_1\, d\lambda_1 = A B_1$$

der Abstand des Punktes A mit den elliptischen Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 und des Punktes B_1 mit den elliptischen Koordinaten $\lambda_1 + d\lambda_1$, λ_2, λ_3 oder ein von A aus gezogenes unendlich kleines Stück der Durchschnittslinie des durch A gehenden Ellipsoides und einschaligen Hyperboloides und steht senkrecht auf dem durch A gehenden zweischaligen Hyperboloide.

Der früher mit B bezeichnete Punkt mit den elliptischen Koordinaten $\lambda_1 + d\lambda_1$, $\lambda_2 + d\lambda_2$, $\lambda_3 + d\lambda_3$ ist die A vis à vis liegende Ecke des unendlich kleinen Parallelepipedes, von dem AB_1, AB_2 und AB_3 die drei in A zusammenstoßenden Kanten sind. ds ist die A und B verbindende Diagonale dieses Parallelepipedes.

Während wir in Formel 334) unter ds immer die positive Quadratwurzel aus $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ verstehen, sollen in den Formeln 339), 340) und 341) A_1, A_2 und A_3 wesentlich positive Größen sein, so daß also ds_1 dasselbe Vorzeichen wie $d\lambda_1$, ds_2 dasselbe wie $d\lambda_2$ und ds_3 dasselbe wie $d\lambda_3$ erhalten soll.

§ 64. Rektifikation der Krümmungslinien des Ellipsoides, Komplanation des Ellipsoides.

Einem bestimmten konstanten λ_3 entspricht ein bestimmtes dreiachsiges Ellipsoid. Alle einschaligen Hyperboloide, welche wir erhalten, wenn wir dem λ_2 alle Werte von $-a_3^2$ bis $-a_2^2$ erteilen, durchschneiden dasselbe in einer Kurvenschar, welche wir die Krümmungslinie erster Gattung des betreffenden Ellipsoides nennen. Ihre Tangenten zu jedem Punkte fallen nämlich, wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird, in die Richtung einer durch diesen Punkt gezogenen Hauptkrümmungsebene. Diese Krümmungslinien beginnen für $\lambda_2 = -a_3$ mit der Ellipse, in welcher die $x_1 x_2$-Ebene das Ellipsoid durchschneidet und enden für $\lambda_2 = -a_2^2$ in den beiden Stücken der Durchschnittslinie des Ellipsoides und desjenigen Teiles der $x_1 x_3$-Ebene, welcher zwischen den beiden Ästen der Hyperbel liegt, der die Gleichungen 320) zukommen. In Fig. 9 ist die obere der positiven x_3-Achse zugewendete Hälfte des Ellipsoides von oben, also von dorther betrachtet, wohin die kleinste Halbachse zeigt, perspektivisch gezeichnet. Die ausgezogenen Linien sind Krümmungslinien erster Gattung.

Erteilen wir dagegen in der Gleichung 312) dem λ_1 alle Werte zwischen $-a_2^2$ und $-a_1^2$, so erhalten wir die Gleichungen einer Schar zweifächeriger Hyperboloide, welche das Ellipsoid in einer zweiten Kurvenschar, den Krümmungslinien zweiter Gattung durchschneiden. Letztere sind in Fig. 9 punktiert.

Wenn wir die Formel für die Länge der Krümmungslinien eines beliebigen Ellipsoides finden wollen, so genügt es vollständig, dieselbe für das Ellipsoid zu suchen, welches dem Werte $\lambda_3 = 0$ entspricht; denn dieses Ellipsoid hat die Gleichung

342) $$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 .$$

Da aber die Konstanten a_1, a_2, a_3 ganz willkürlich sind, so können wir sie immer gleich den Halbachsen des gegebenen Ellipsoides machen, um dessen Krümmungslinien es sich handelt.

Die beiden Gleichungen einer Krümmungslinie erster Gattung dieses Ellipsoides finden wir, wenn wir nebst $\lambda_3 = 0$ noch λ_2 gleich irgend einer zwischen $-a_3^2$ und $-a_2^2$ liegenden Konstanten setzen. Das Linienelement einer solchen Krümmungslinie ist also zu bilden, indem wir in Formel 334) $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 =$ konst. setzen und λ_1 und $d\lambda_1$ wachsen lassen. Es ist also nach Formel 341) dieses Linienelement

$$ds_1 = \tfrac{1}{2} \Delta_1 \, d\lambda_1 .$$

Ein endliches Stück der Krümmungslinie ist

$$\tfrac{1}{2} \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} \Delta_1 \, d\lambda_1 ,$$

wobei λ_1^0 und λ_1^1 die dem Anfangspunkte und Endpunkte des Stückes entsprechenden Werte von λ_1 sind. Den vierten

Teil CD (Fig. 9) einer Krümmungslinie erhalten wir, wenn wir die untere Grenze λ_1^0 des Integrales gleich $-a_1^2$, die obere λ_1^1 gleich $-a_2^2$ setzen. Die Länge der ganzen, in sich geschlossenen Krümmungslinie ist das Vierfache dieses bestimmten Integrales. Den hier zu substituierenden Wert von Δ_1 erhalten wir, wenn wir in Formel 335) $\lambda_3 = 0$ und λ_2 gleich der vorgeschriebenen Konstanten setzen. Es ist also in allen diesen Integralen zu setzen

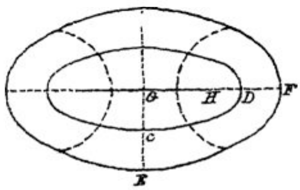

Fig. 9.

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{(a_1^2 + \lambda_1)(a_2^2 + \lambda_1)(a_3^2 + \lambda_1)}},$$

worin also alles bis auf die Integrationsvariable λ_1 konstant ist; die Integrale sind also Abelsche Integrale.

Ebenso ist die ganze Länge einer geschlossenen Krümmungslinie zweiter Gattung

$$2\int_{a_2^2}^{a_3^2} d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{(a_1^2 + \lambda_2)(a_2^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_2)}}.$$

Wir gelangen in der nachfolgenden Weise zur Komplanation des Ellipsoides.

Wir ziehen vom Punkte A mit den elliptischen Koordinaten λ_1 und λ_2 des Ellipsoides, für welches $\lambda_3 = 0$ ist, aus das Linienelement $ds_1 = \frac{1}{2}\Delta_1 d\lambda_1 = AB_1$ der durch A hindurch gehenden Krümmungslinie erster Gattung des Ellipsoides und das Linienelement $ds_2 = \frac{1}{2}\Delta_2 d\lambda_2 = AB_2$ der durch ihn hindurchgehenden Krümmungslinie zweiter Gattung des Ellipsoides. Ferner ziehen wir von B_2 aus auf dem Ellipsoide die unendlich kleine Gerade $B_2C \| AB_1$ und von B_1 aus die unendlich kleine Gerade $B_1C \| AB_2$. Die beiden zuletzt gezogenen Geraden sollen sich im Punkte C treffen. Dann kann die Figur AB_1CB_2A als ein unendlich kleines Rechteck vom Flächeninhalte $\frac{1}{4}\Delta_1\Delta_2 d\lambda_1 d\lambda_2$ und zugleich als ein Element der Oberfläche des Ellipsoides betrachtet werden, für welches $\lambda_3 = 0$ ist. Ein endliches Stück der Oberfläche dieses Ellipsoides ist also:

$$F = \tfrac{1}{4} \int\int \Lambda_1 \Lambda_2 \, d\lambda_1 \, d\lambda_2, \tag{343}$$

wobei alle Wertepaare von λ_1 und λ_2 in die Integration einzubegreifen sind, welche Punkten dieses Flächenstückes entsprechen.

Integriert man bei irgend einem gegebenen λ_2 bezüglich λ_1 von $-a_2^2$ bis $-a_1^2$, so umfaßt man einen ganzen Quadranten CD (Fig. 9) einer Krümmungslinie erster Gattung. Integriert man noch bezüglich λ_2 von $-a_3^2$ bis $-a_2^2$, so umfaßt man noch alle Quadranten der Krümmungslinien erster Gattung von EF bis GH, also einen Oktanten des ganzen Ellipsoids. Es hat also die ganze geschlossene Oberfläche des Ellipsoides, dessen Gleichung $\lambda_3 = 0$ ist, welches also die Gleichung 342) hat, den Wert:

$$2 \int_{-a_2^2}^{-a_3^2} \int_{-a_1^2}^{-a_2^2} \Lambda_1 \Lambda_2 \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 .$$

Setzen wir

$$(a_1^2 + \lambda_1)(a_2^2 + \lambda_1)(a_3^2 + \lambda_1) = b_1^2, \tag{344}$$

dagegen

$$(a_1^2 + \lambda_2)(a_2^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_2) = -b_2^2, \tag{345}$$

so sind vermöge der Grenzen, zwischen denen λ_1 und λ_2 liegen müssen, b_1^2 und b_2^2 wesentlich positive Größen. In den zuletzt entwickelten Integralen ist $\lambda_3 = 0$, daher

$$\Lambda_1 = \frac{1}{b_1} \sqrt{-\lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{b_2} \sqrt{-\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}. \tag{346}$$

Die Vorzeichen wurden in dieser Weise geschrieben, da $-\lambda_1$, $-\lambda_2$ und $\lambda_2 - \lambda_1$ lauter positive Größen sind. Es verwandelt sich daher das Integral 343) zunächst in

$$F = \tfrac{1}{4} \int\int \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{b_1 b_2} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 =$$

$$= \tfrac{1}{4} \int\int \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2^3}}{b_1 b_2} \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 - \tfrac{1}{4} \int\int \frac{\sqrt{\lambda_1^3 \lambda_2}}{b_1 b_2} \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 .$$

Da b_1 nur Funktion von λ_1, b_2 nur Funktion von λ_2 ist, so zerfällt jedes Doppelintegral in das Produkt zweier einfacher Integrale und man hat

$$F = \tfrac{1}{4}\int \frac{\sqrt{\lambda_1}}{b_1}\, d\lambda_1 \int \frac{\sqrt{\lambda_2^3}}{b_2}\, d\lambda_2 ,$$

$$= \tfrac{1}{4}\int \frac{\sqrt{\lambda_1^3}}{b_1}\, d\lambda_1 \int \frac{\sqrt{\lambda_2}}{b_2}\, d\lambda_2 .$$

Erinnert man sich an die Werte von b_1 und b_2, so sieht man, daß jedes der Integrale ein elliptisches und für das Rotationsellipsoid, wo entweder $a_1 = a_3$ oder $a_2 = a_3$ ist, durch gewöhnliche zyklometrische Funktionen ausdrückbar ist. Die ganze geschlossene Oberfläche des Ellipsoides erhält man natürlich, wenn man mit 8 multipliziert und $-a_1^2$ und $-a_2^2$ als Integrationsgrenzen für λ_1, dagegen $-a_3^2$ und $-a_2^2$ als Integrationsgrenzen für λ_2 wählt.

§ 65. Kürzeste Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoide.

Wir wollen nun die spezielle Form entwickeln, welche die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung im Falle der Bewegung eines einzigen vollkommen freien materiellen Punktes von der Masse m annimmt, wenn wir dessen Position im Raume durch die drei elliptischen Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 bestimmen, welche also jetzt die Rolle der früher mit $p, p_h \dots p_s$ bezeichneten generalisierten Koordinaten spielen.

Seien x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Koordinaten des materiellen Punktes zur Zeit t. Während einer unendlich kleinen Zeit dt sollen dieselben die Zuwächse dx_1, dx_2, dx_3 erfahren, während die dazu gehörigen Zuwächse der elliptischen Koordinaten $d\lambda_1$, $d\lambda_2$, $d\lambda_3$ heißen mögen. Wir setzen wie in Formel 334)

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

so daß ds der während der Zeit dt zurückgelegte Weg, ds/dt die Geschwindigkeit c des materiellen Punktes zur Zeit t und

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{d\,s}{d\,t}\right)^2$$

dessen lebendige Kraft ist. Da die Formel 334) für beliebige Koordinatenzuwächse gilt, so muß sie auch für die während der Zeit $d\,t$ eintretenden Koordinatenzuwächse gelten. Man hat also:

$$d\,s = \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta_1^2\;d\,\lambda_1^2 + \Delta_2^2\;d\,\lambda_2^2 + \Delta_3^2\;d\,\lambda_3^2}\,,$$

$$\frac{d\,s}{d\,t} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta_1^2\;\;\lambda'^2_1 + \Delta_2^2\;\;\lambda'^2_2 + \Delta_3^2\;\;\lambda'^2_3}\,,$$

wobei λ'_1, λ'_2, λ'_3 abgekürzte Bezeichnungen für die Differentialquotienten der λ nach der Zeit sind. Endlich wird

$$T = \frac{m}{8}(\Delta_1^2\,\lambda'^2_1 + \Delta_2^2\,\lambda'^2_2 + \Delta_3^2\,\lambda'^2_3).$$

Unser Rezept ging nun dahin, daß man zuerst in dem Ausdrucke für T die Momente q einzuführen, dann $\partial\,W/\partial p_h$ für q_h zu setzen und den so erhaltenen Wert von T in die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial\,W}{\partial\,t} + T + V = 0$$

zu substituieren habe. Unter den Momenten verstehen wir die partiellen Differentialquotienten des T nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten, also nach λ'_1, λ'_2 und λ'_3. Es ist also:

$$q_1 = \frac{\partial\,T}{\partial\,\lambda'_1} = \tfrac{1}{4}\,m\,\Delta_1^2\,\lambda'_1\,,$$

$$q_2 = \frac{\partial\,T}{\partial\,\lambda'_2} = \tfrac{1}{4}\,m\,\Delta_2^2\,\lambda'_2\,,$$

$$q_3 = \frac{\partial\,T}{\partial\,\lambda'_3} = \tfrac{1}{4}\,m\,\Delta_3^2\,\lambda'_3\,.$$

Daher:

$$T = \frac{2}{m}\left(\frac{q_1^2}{\Delta_1^2} + \frac{q_2^2}{\Delta_2^2} + \frac{q_3^2}{\Delta_3^2}\right).$$

Hier haben wir noch für q_1 zu substituieren $\partial\,W/\partial\,p_1$, also in unserem Falle $\partial\,W/\partial\,\lambda_1$; ebenso für q_2 und q_3 die Ausdrücke $\partial\,W/\partial\,\lambda_2$ und $\partial\,W/\partial\,\lambda_3$. Tun wir dies und substituieren den so erhaltenen Wert von T in die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung, so folgt also schließlich:

$$347)\quad \frac{\partial W}{\partial t}+\frac{2}{m}\left[\frac{1}{\Lambda_1^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2+\frac{1}{\Lambda_2^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2+\frac{1}{\Lambda_3^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2\right]+V=0,$$

wobei V als eine gegebene Funktion der Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 und etwa noch der Zeit t zu betrachten ist. Haben wir ein vollständiges Integral, also einen Wert von W gefunden, welcher dieser Differentialgleichung genügt und außer der additiv zu W hinzukommenden noch drei willkürlich voneinander unabhängige Konstanten enthält, so können wir daraus in der uns bekannten Weise die Bewegungsgleichungen herleiten.

Wir betrachten ein zweites mechanisches Beispiel. Ein materieller Punkt soll gezwungen sein, bei seiner Bewegung auf der Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoides zu verbleiben. Wir können die dem elliptischen Koordinatensysteme zugrunde liegenden Konstanten a_1, a_2, a_3 gleich den Halbachsen dieses Ellipsoides wählen. Dann ist $\lambda_3=0$ die Gleichung dieses Ellipsoides, welche also der materielle Punkt während seiner ganzen Bewegung erfüllen muß. Seine Position auf dem Ellipsoid wird durch die Werte der beiden anderen elliptischen Koordinaten λ_1 und λ_2 bestimmt. Da λ_3 konstant gleich Null ist, so reduziert $4\,ds^2$ auf $\Lambda_2^2\,d\lambda_2^2+\Lambda_1^2\,d\lambda_1^2$, daher T auf $\frac{m}{8}(\Lambda_2^2\,\lambda_2'^2+\Lambda_1^2\,\lambda_1'^2)$ und die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung auf:

$$348)\quad \frac{\partial W}{\partial t}+\frac{2}{m}\left[\frac{1}{\Lambda_1^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2+\frac{1}{\Lambda_2^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2\right]+V=0.$$

Falls außer den Kräften, welche den Punkt zwingen, auf dem Ellipsoide zu bleiben, keine anderen Kräfte auf ihn wirken, ist V konstant. Setzen wir dann

$$349)\quad W=-\left(\frac{2\,\alpha_1}{m}+V\right)t+U,$$

wobei U bloß Funktion von λ_1 und λ_2 sein soll und dem konstanten Faktor von t lediglich behufs Vereinfachung der Rechnung diese spezielle Form gegeben wurde, so reduziert sich die Gleichung 348) auf

$$350)\qquad \alpha_1 = \frac{1}{\Delta_1^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{1}{\Delta_2^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda_2}\right)^2.$$

Da $\lambda_3 = 0$ ist, so nehmen Δ_1 und Δ_2 wieder die Werte 346) an. Setzen wir außerdem noch $U = U_1 + U_2$, wobei U_1 bloß Funktion von λ_1, U_2 bloß Funktion von λ_2 ist, so reduzieren sich die partiellen Differentialquotienten auf gewöhnliche und die Gleichung 350) verwandelt sich in

$$351)\qquad \frac{b_1^2}{\lambda_1}\left(\frac{d\,U_1}{d\,\lambda_1}\right)^2 + \frac{b_2^2}{\lambda_2}\left(\frac{d\,U_2}{d\,\lambda_2}\right)^2 = \alpha_1\,\lambda_1 - \alpha_1\,\lambda_2.$$

Wir erfüllen diese Gleichung, wenn wir setzen

$$\frac{b_1^2}{\lambda_1}\left(\frac{d\,U_1}{d\,\lambda_1}\right)^2 = +\,\alpha_1\,\lambda_1 - \alpha_2,$$

$$\frac{b_2^2}{\lambda_2}\left(\frac{d\,U_2}{d\,\lambda_2}\right)^2 = +\,\alpha_2 - \alpha_1\,\lambda_2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, da b_1 bloß Funktion von λ_1 und b_2 bloß Funktion von λ_2 ist

$$U_1 = \int \frac{\sqrt{\alpha_1\,\lambda_1^2 - \alpha_2\,\lambda_1}}{b_1}\,d\,\lambda_1,$$

$$U_2 = \int \frac{d\,\lambda_2}{b_2}\sqrt{\alpha_2\,\lambda_2 - \alpha_1\,\lambda_2^2},$$

daher

$$352)\quad \left\{\begin{aligned} W = -\left(\frac{2\,\alpha_1}{m} + V\right)t + \int \frac{\sqrt{\alpha_1\,\lambda_1^2 - \alpha_2\,\lambda_1}}{b_1}\,d\,\lambda_1 \,+ \\ +\int \frac{\sqrt{\alpha_2\,\lambda_2 - \alpha_1\,\lambda_2^2}}{b_2}\,d\,\lambda_2. \end{aligned}\right.$$

Alle die Substitutionen, welche wir da machten, waren erlaubt, da es sich bei Ableitung der Bewegungsgleichungen aus der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung, wie wir wissen, bloß darum handelt, ein vollständiges Integral derselben zu finden, d. h. einen Ausdruck für W, welcher ihr genügt und die nötige Anzahl unabhängiger willkürlicher Konstanten hat. Der Ausdruck 352) aber ist ein solches vollständiges Integral, da er außer der additiv hinzukommenden Konstanten noch die zwei willkürlichen voneinander unabhängigen Konstanten α_1 und α_2 enthält

Setzt man seine partiellen Differentialquotienten nach der einen und nach der anderen Konstante gleich einer dritten resp. vierten willkürlichen Konstanten, so erhält man die beiden Bewegungsgleichungen. Da der partielle Differentialquotient von W nach α_2 die Zeit nicht enthält, so liefert er, gleich einer Konstanten $-\alpha_3/2$ gesetzt, die Gleichung der Bahn. Man erhält also für dieselbe

$$353)\qquad \int \frac{\sqrt{\lambda_2}\,d\lambda_2}{b_2\sqrt{\alpha_2-\alpha_1\lambda_2}} - \int \frac{\sqrt{\lambda_1}\,d\lambda_1}{b_1\sqrt{\alpha_1\lambda_1-\alpha_2}} = \alpha_3,$$

wobei man sich für b_2 und b_3 die Werte 344) und 345) substituiert zu denken hat, so daß also die Integrale ultraelliptische, für das Rotationsellipsoid elliptische werden.

Diese Gleichung enthält in Wirklichkeit nur zwei willkürliche Konstanten α_1/α_3 und α_2/α_3, welche so bestimmt werden können, daß die Koordinaten des gegebenen Ausgangspunktes des materiellen Punktes diese Gleichung befriedigen und daß im Ausgangspunkte die Richtung der durch diese Gleichung dargestellten Kurve die gegebene Bewegungsrichtung des materiellen Punktes hat.

Läßt man auf einer Kugelfläche von einem Punkte A aus nach allen darauf möglichen Richtungen materielle Punkte ausgehen, auf welche sonst keine Kräfte wirken, als diejenigen, welche sie zwingen, auf der Kugelfläche zu bleiben, so beschreiben alle diese materiellen Punkte größte Kreise, welche sich in dem A vis à vis liegenden Punkte B der Kugelfläche wieder treffen. Das zwischen A und irgend einem anderen Punkte A_1 eines solchen größten Kreises liegendes Stück AA_1 des größten Kreises ist so lange die absolut kürzeste Linie, die man auf der Kugelfläche von A nach A_1 ziehen kann, als der Punkt B nicht auf dem Stücke AA_1 zwischen A und A_1 liegt. Im letzteren Falle, wenn also der materielle Punkt auf dem Wege von A nach A_1 den Punkt B überschritten hat, ist der größte Kreisbogen ABA_1 nicht mehr die absolut kürzeste, auf der Kugel liegende Verbindungslinie der Punkte A und A_1, aber er ist noch ein Grenzwert, d. h. die Länge jeder anderen ihm unendlich nahen Verbindungslinie ACA_1 der Punkte A und A_1

auf der Kugel ist von der Länge des größten Kreisbogens ABA_1 um eine Größe verschieden, die unendlich klein höherer Ordnung ist, als der durchschnittliche Abstand irgend eines Punktes des größten Kreisbogens von dem ihm zunächst liegenden Punkte der Kurve ACA_1.

Wenn man nun von irgend einem Punkte A auf der Fläche eines dreiachsigen Ellipsoides in gleicher Weise nach allen Richtungen darauf materielle Punkte aussendet, auf welche sonst keine Kraft wirkt, als diejenige, welche sie zwingt, auf der Ellipsoidfläche zu bleiben, so schneiden sich alle Bahnen dieser Punkte, deren Gleichungen alle die Form der Gleichung 353) haben, nicht mehr nochmals in einem und demselben Punkte, sondern sie haben vis à vis vom Ausgangspunkte eine einhüllende, die sich nur dann auf den vis à vis von A liegenden Punkt reduziert, wenn A auf einer der Achsen des Ellipsoides liegt. Das Stück jeder solchen Bahn, das zwischen A und irgend einem anderen Punkte A_1 der Bahn auf dem Ellipsoide liegt, ist so lange die absolut kürzeste Linie, die man auf dem Ellipsoide zwischen A und A_1 ziehen kann, als beim Übergange von A nach A_1 kein Berührungspunkt mit jener einhüllenden durchlaufen wird. Im letzteren Falle ist es noch immer ein Grenzwert, da, wie wir in § 39 aus dem Prinzipe der kleinsten Wirkung bewiesen, die Bahn eines von keinen Kräften affizierten materiellen Punktes auf einer krummen Fläche immer ein Grenzwert sein muß. Es ist aber üblich, diese Bahn ohne weitere Erläuterung als eine kürzeste Linie auf der betreffenden Fläche zu bezeichnen und deshalb nennen wir auch alle durch die Gleichung 353) dargestellten Kurven kürzeste, loxodrome oder auch geodätische Kurven. Man sucht nämlich zu Schiff im allgemeinen in einer kürzesten Linie von der Ausgangs- zur Endstation zu steuern und in der Geodäsie wird die Entfernung zweier Orte der Erdoberfläche längs der kürzesten Linien gemessen.

Die Abhängigkeit der Lage des betrachteten materiellen Punktes auf dem Ellipsoide von der Zeit erhält man, wenn man den partiellen Differentialquotienten, der durch die

Gleichung 352) gegebenen Größe W nach α_1 gleich einer neuen Konstanten $-\frac{\alpha_4}{2}$ setzt. Dadurch ergibt sich:

$$\int \frac{\sqrt{\lambda_2^3}\, d\lambda_2}{b_2 \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2}} - \int \frac{\sqrt{\lambda_1^3}\, d\lambda_1}{b_1 \sqrt{\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2}} = \alpha_4 - \frac{4\,t}{m}.$$

Daraus folgt:

$$354)\qquad \frac{\sqrt{\lambda_2^3}\, \lambda'_2}{b_2 \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2}} - \frac{\sqrt{\lambda_1^3}\, \lambda'_1}{b_1 \sqrt{\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2}} = -\frac{4}{m},$$

während die Differentiation der Gleichung 353) liefert:

$$355)\qquad \frac{\sqrt{\lambda_2}\, \lambda'_2}{b_2 \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2}} - \frac{\sqrt{\lambda_1}\, \lambda'_1}{b_1 \sqrt{\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2}} = 0,$$

woraus durch Quadrierung folgt:

$$356)\qquad \frac{\lambda_2\, \lambda'^2_2}{b_2^2 (\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2)} - \frac{\lambda_1\, \lambda'^2_1}{b_1^2 (\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2)} = 0.$$

Multiplizieren wir das Quadrat der Gleichung 354) mit α_1, addieren dazu das mit $-\alpha_1 \lambda_1 \lambda_2$ multiplizierte Quadrat der Gleichung 355) und die mit $\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)$ multiplizierte Gleichung 356), so ergibt sich mit Rücksicht auf die Definition der Größen Δ durch die Gleichungen 346)

$$\Delta_2^2 \lambda'^2_2 + \Delta_1^2 \lambda'^2_1 = \frac{16\alpha_1}{m^2}.$$

Es ist also $4\alpha_1$ das Quadrat des Bewegungsmomentes, also gleich $m^2 c^2$.

Die Geschwindigkeit c umgekehrt ist $2\sqrt{\alpha_1}/m$, also während der ganzen Bewegung konstant, wie es nicht anders zu erwarten war. Der während der Zeit t zurückgelegte Bogen s der loxodromen Kurve ist also gleich ct und man erhält, wenn man in die Gleichung 353) s/c statt t schreibt, die Rektifikation der Krümmungslinien des dreiachsigen Ellipsoides.

§ 66. Ein spezieller Fall des Dreikörperproblems.

Wir wollen nun die Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse m betrachten, welcher von zwei fixen Zentren P und P' angezogen wird und zwar von jedem nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze. Wir bezeichnen die Länge der Geraden PP' mit $2e$, ihren Halbierungspunkt mit O und betrachten zuerst den speziellen Fall, daß die Anfangsgeschwindigkeit zu Anfang der Zeit in der Ebene liegt, die man durch P, P' und die Anfangslage des materiellen Punktes legen kann. Der Punkt bleibt dann immer in dieser Ebene.

Wir wählen den soeben mit O bezeichneten Punkt zum Koordinatenursprunge und ziehen die Abszissenachse OX_2 so, daß der Punkt P auf der positiven Abszissenachse, der Punkt P' auf der negativen Abszissenachse liegt, die Ordinatenachse OX_3 darauf senkrecht in der Ebene der Bahn, die Achse OX_1 senkrecht auf die Bahnebene. Der materielle Punkt befinde sich zur Zeit t im Punkte A, dessen rechtwinklige Koordinaten x_1, x_2, x_3 seien. Es ist dann $x_1 = 0$. Wir konstruieren ferner ein elliptisches Koordinatensystem. Die Konstanten a_1 und a_2 desselben sind willkürlich, a_3 soll jedoch so gewählt werden, daß

$$a_2^2 - a_3^2 = e^2 \tag{357}$$

ist, daß also P und P' die Brennpunkte der Ellipsen und Hyperbeln sind, in denen die konfokalen Flächen zweiten Grades, welche die elliptischen Koordinaten definieren, von der $x_2 x_3$-Ebene geschnitten werden. Die betreffenden elliptischen Koordinaten des Punktes A seien λ_1, λ_2, λ_3. Da für diesen Punkt $x_1 = 0$ ist, so ist auch $\lambda_1 = -a_1^2$. Die beiden zweischaligen Hyperboloide degenerieren in die $x_2 x_3$-Ebene. Die Relationen zwischen x_2, x_3 und λ_2, λ_3 finden wir, wenn wir in den Gleichungen 330), 331) und 332) setzen $\lambda_1 = -a_1^2$, wodurch wir wegen Gleichung 357) erhalten:

$$e^2 x_2^2 = \quad (a_2^2 + \lambda_2)(a_2^2 + \lambda_3),$$
$$e^2 x_3^2 = -(a_3^2 + \lambda_2)(a_2^2 + \lambda_3).$$

Die Addition dieser Gleichungen liefert:

$$x_2^2 + x_3^2 = a_2^2 + a_3^2 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

daher

$$x_2^2 + x_3^2 + e^2 = 2a_2^2 + \lambda_2 + \lambda_3 = w_2^2 + w_3^2,$$

wenn wir

$$w_2 = \sqrt{a_1^2 + \lambda_2}, \quad w_3 = \sqrt{a_1^2 + \lambda_3}$$

setzen, wobei die Wurzeln immer mit positivem Zeichen zu nehmen sind.

Bezeichnen wir die Abstände AP und AP' mit r und r', so ist

$$358) \quad \begin{cases} r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + e^2 - 2 e x_2} = w_3 - w_2 \\ r' = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + e^2 + 2 e x_2} = w_3 + w_2. \end{cases}$$

Die Vorzeichen sind richtig, da r, r', w_1 und w_2 positiv und mit Berücksichtigung des Vorzeichens $\lambda_3 > \lambda_2$, daher auch $w_3 > w_2$ ist. Wenn k und k' Konstanten sind, so ist die Kraftfunktion in diesem Falle:

$$V = -\frac{k}{r} - \frac{k}{r'} = \frac{k'(w_2 - w_3) - k(w_2 + w_3)}{w_3^2 - w_2^2} = \frac{(k' - k)\,w_2 - (k + k')\,w_3}{\lambda_3 - \lambda_2},$$

die lebendige Kraft ist

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{8}(\Delta_2^2 \lambda_2'^2 + \Delta_3^2 \lambda_3'^2) = \frac{2}{m}\left(\frac{q_2^2}{\Delta_2^2} + \frac{q_3^2}{\Delta_3^2}\right).$$

Δ_2 und Δ_3 erhält man, indem man wieder in den Formeln 335) setzt $\lambda_1 = -a_1^2$, wodurch folgt:

$$\Delta_2^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(a_2^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_2)}, \qquad \Delta_3^2 = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{(a_2^2 + \lambda_3)(a_3^2 + \lambda_3)}.$$

Ferner ist statt q_2 und q_3 zu setzen $\partial W / \partial \lambda_2$ und $\partial W / \partial \lambda_3$. Es wird also

$$T = \frac{2}{m(\lambda_2 - \lambda_3)}\left[(a_2^2 + \lambda_2)(a_1^2 + \lambda_2)\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - (a_2^2 + \lambda_3)(a_1^2 + \lambda_3)\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2\right].$$

Bevor wir dies in die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung 301) substituieren, wollen wir für λ_2 und λ_3 die Variabeln w_2 und w_3 einführen. Ferner wollen wir noch setzen:

$$359) \qquad W = \alpha_1 t + W_2 + W_3,$$

wobei W_2 nur Funktion von λ_2 oder w_2, W_3 nun Funktion von λ_3 oder w_3 sein soll. Es wird

$$2m\,\alpha_1(w_3^2 - w_2^2) + (e^2 - w_2^2)\left(\frac{d W_2}{d w_2}\right)^2 + (w_3^2 - e^2)\left(\frac{d W_3}{d w_3}\right)^2 +$$
$$+ 2m(k' - k)w_2 - 2m(k + k')w_3 = 0$$

und man kann setzen

$$(w_2^2 - e^2)\left(\frac{d W_2}{d w_2}\right)^2 = \alpha_2 + 2m(k' - k)w_2 - 2m\,\alpha_1\,w_2^2$$
$$(w_3^2 - e^2)\left(\frac{d W_3}{d w_3}\right)^2 = -\alpha_2 + 2m(k + k')w_3 - 2m\,\alpha_1\,w_3^2.$$

Die durch diese Gleichungen definierten Funktionen W_2 und W_3 sind elliptische und zwar erscheint W_2 zunächst als Funktion von w_2, W_3 als Funktion von w_3; beide können daher vermöge der Gleichungen 358) auch leicht als Funktionen von r und r ausgedrückt werden. Die Substitution in Gleichung 359) liefert zunächst W. Dessen nach α_2 genommener partieller Differentialquotient liefert gleich einer neuen Konstanten gesetzt die Gleichung der Bahn, wogegen man den zeitlichen Verlauf der Bewegung erhält, wenn man den partiellen Differentialquotienten von W nach α_1 gleich einer abermals neuen Konstanten setzt.

Wir wollen nun wieder die Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse m, der gegen zwei fixe Anziehungszentra P und P' mit der Kraft k/r^2 resp. k'/r'^2 gezogen wird, betrachten, wobei wieder r und r' die Entfernungen des materiellen Punktes zur Zeit t von P resp. P' sind. Es soll aber die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes nicht in der durch seine Anfangslage und P und P' hindurchgehenden Ebene liegen.

Wir wählen wieder den Halbierungspunkt der Geraden PP', deren Länge wir mit $2e$ bezeichnen, zum Koordinatenursprunge, ziehen von O gegen P die positive Abszissenachse OX_2, außerdem ziehen wir aber noch zwei beliebige fixe Koordinatenachsen OY und OZ auf OX_2 senkrecht im Raume. Zudem wenden wir noch eine bewegliche Ordinatenachse OX_3 an, welche stets senkrecht zu OX_2 immer in der durch OX_2 und die augenblickliche Lage A des materiellen Punktes m gehenden Ebene X_2OX_3 liegen soll.

Die Koordinaten des Punktes A bezüglich des beweglichen Koordinatensystemes OX_2 und OX_3 sollen mit x_2 und x_3 bezeichnet werden. Der veränderliche Winkel zwischen den Geraden OX_3 und OY, also zwischen der fixen xy-Ebene X_2OY und der beweglichen xy-Ebene X_2OX_3 soll mit ϑ bezeichnet werden. Dieser Winkel bestimmt die Lage der beweglichen xy-Ebene, während x_2 und x_3 die Lage des Punktes A auf derselben bestimmen. Durch die drei Variabeln x_2, x_3 und ϑ wird also die augenblickliche Lage A des materiellen Punktes im Raume eindeutig bestimmt.

Das Verhältnis der Variabeln λ_2, λ_3 zu x_2, x_3 drückte in der eben gelösten Aufgabe eine rein geometrische Beziehung aus, welche bloß auf die Lage in der x_2x_3-Ebene Bezug hat und ganz davon unabhängig ist, ob diese Ebene fix ist oder sich bewegt. Die geometrische Lage des Punktes A auf der X_2OX_3-Ebene ist aber jetzt genau dieselbe, wie früher, als sich der materielle Punkt in einer Ebene bewegte. Wir können also jetzt wie damals die Variabeln λ_2 und λ_3 statt x_2 und x_3 einführen. Es werden alle Gleichungen zwischen diesen vier Variabeln, welche sich auf die geometrische Lage des Punktes A auf der X_2OX_3-Ebene beziehen, vollkommen unverändert bleiben. Setzen wir wieder

$$a_2^2 + \lambda_2 = w_2^2, \quad a_3^2 + \lambda_3 = w_3^2,$$

so wird wieder

$$V = \frac{k}{r} - \frac{k'}{r'} = \frac{(k'-k)\,w_2 - (k'+k)\,w_3}{w_3^2 - w_2^2}.$$

Die Bewegung des materiellen Punktes während der Zeit dt kann in drei Komponenten zerlegt werden:

1. Es wächst x_2 um dx_2. Dadurch verschiebt sich der Punkt um das Stück dx_2 in der Richtung OX_2.

2. Es wächst x_3 um dx_3, dadurch verschiebt sich A um das Stück dx_3 in der Richtung OX_3.

3. Es wächst ϑ um $d\vartheta$. Die Verschiebung, welche durch diesen Umstand allein bewirkt würde, steht senkrecht auf den beiden früheren dx_2 und dx_3 und kann als ein

unendlich kleiner mit dem Radius x_3 beschriebener, dem Zentriwinkel $d\vartheta$ gegenüberliegender Kreisbogen von der Länge $x_3 d\vartheta$ betrachtet werden. Der gesamte vom materiellen Punkte während der Zeit dt beschriebene Weg ist also

$$ds = \sqrt{dx_2^2 + dx_3^2 + x_3^2\, d\vartheta^2}.$$

Nun bleiben aber die geometrischen Beziehungen zwischen λ_2, λ_3, x_2 und x_3 dieselben, daher ist

$$4(dx_2^2 + dx_3^2) = A_2^2\, d\lambda_2^2 + A_3^2\, d\lambda_3^2$$

und wenn man wieder die Differentialquotienten nach der Zeit durch angehängte Striche markiert

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\tfrac{1}{4}(A_2^2\,\lambda_2'^2 + A_3^2\,\lambda_3'^2) + x_3^2\,\vartheta'^2},$$

daher

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{8}(A_2^2\,\lambda_2'^2 + A_3^2\,\lambda_3'^2 + 4x_3^2\,\vartheta'^2),$$

woraus sich die den generalisierten Koordinaten λ_2, λ_3, ϑ entsprechenden Momente gleich

$$q_1 = \tfrac{1}{4} m A_2^2\,\lambda'_2, \quad q_2 = \tfrac{1}{4} m A_3^2\,\lambda'_3, \quad q_3 = m x_3^2\,\vartheta'$$

und daher

$$T = \frac{2}{m}\left(\frac{q_1^2}{A_2^2} + \frac{q_2^2}{A_3^2} + \frac{q_3^2}{4x_3^2}\right)$$

ergibt. Ehe wir dies in die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + T + V = 0$$

substituieren, haben wir darin für q_1, q_2, q_3 die partiellen Differentialquotienten des W nach den Koordinaten, also $\partial W/\partial \lambda_2$, $\partial W/\partial \lambda_3$ und $\partial W/\partial \vartheta$ einzusetzen. Wir wollen für λ_2 und λ_3 die Variabeln w_2 und w_3 einführen, erhalten also

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{2w_2}\frac{\partial W}{\partial w_2}, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = \frac{1}{2w_3}\frac{\partial W}{\partial w_3}$$

Diese Werte nebst $\partial W/\partial \vartheta$ sind in T für q_1, q_2 und q_3 zu schreiben. Ferner ist

$$\Lambda_2^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(a_2^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_2)} \qquad \frac{w_2^2 - w_3^2}{w_2^2\,(w_2^2 - e^2)},$$

$$\Lambda_3^2 = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{(a_2^2 + \lambda_3)(a_3^2 + \lambda_3)} = \frac{w_3^2 - w_2^2}{w_3^2\,(w_3^2 - e^2)},$$

$$\frac{1}{x_3^2} = -\frac{e^2}{(a_3^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_3)} = -\frac{e^2}{(w_2^2 - e^2)(w_3^2 - e^2)} =$$

$$= \frac{e^2}{w_2^2 - w_3^2}\left(\frac{1}{w_2^2 - e^2} - \frac{1}{w_3^2 - e^2}\right).$$

Endlich wollen wir noch setzen

$$W = \alpha_1 t + \alpha_3 \vartheta + W_2 + W_3,$$

wobei W_2 nur Funktion von λ_2 resp. w_2, W_3 nur Funktion von λ_3 resp. w_3 sein soll, so daß

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \alpha_3, \quad \frac{\partial W}{\partial w_2} = \frac{d W_2}{d w_2}, \quad \frac{\partial W}{\partial w_3} = \frac{d W_3}{d w_3}$$

wird. Es verwandelt sich schließlich nach Multiplikation mit $2m(w_2^2 - w_3^2)$ die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung in folgende Gleichung:

$$(w_2^2 - e^2)\left(\frac{d W_2}{d w_2}\right)^2 - (w_3^2 - e^2)\left(\frac{d W_3}{d w_3}\right)^2 + \frac{e^2 \alpha_3^2}{w_2^2 - e^2} - \frac{e^2 \alpha_3^2}{w_3^2 - e^2} +$$

$$+ 2m(k - k')w_2 + 2m(k' + k)w_3 + 2m\alpha_1 w_2^2 - 2m\alpha_1 w_3^2 = 0.$$

Zu dieser Gleichung addieren und subtrahieren wir eine dritte Konstante α_2 und spalten sie dann in die beiden Gleichungen:

$$(w_2^2 - e^2)\left(\frac{d W_2}{d w_2}\right)^2 = 2m(k' - k)w_2 - 2m\alpha_1 w_2^2 - \frac{e^2 \alpha_3^2}{w_2^2 - e^2} + \alpha_2,$$

$$(w_3^2 - e^2)\left(\frac{d W_3}{d w_3}\right)^2 = 2m(k + k')w_3 - 2m\alpha_1 w_3^2 - \frac{e^2 \alpha_3^2}{w_3^2 - e^2} + \alpha_2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt W_2 als ultraelliptische Funktion von w_2 und W_3 als ebensolche Funktion von w_3. Die beiden Gleichungen der Bahn erhält man, wenn man die beiden partiellen Differentialquotienten des W nach α_2 und α_3 je gleich zwei neuen Konstanten β_2 und β_3 setzt, den zeitlichen Verlauf der Bewegung aber erhält man, indem man den partiellen Differentialquotienten des W nach α_1

gleich einer letzten Konstanten β_1 setzt. Natürlich besteht die Gleichung der lebendigen Kraft und die auf die yz-Ebene bezügliche Flächenmomentengleichung, mit deren Deduktion aus unseren Schlußgleichungen ich mich aber nicht aufhalten will.

VI. Methode der Variation der Konstanten.

§ 67. Beziehung dieser Methode zu der der Variationsrechnung der reinen Mathematik.

Schon in § 8, in dem nächsten auf Entwicklung der Gleichung 53) folgenden Abschnitte, beschäftigten wir uns mit der Idee einer fortgesetzten Variation, bis man zu einem um Endliches verschiedenen Zustande gelangt. Im IV. Abschnitte hatten wir es dann schon wiederholt mit dem Begriffe des allmählichen Überganges der rein mathematischen Variation in eine kleine, durch physikalische Ursachen bewirkte wirkliche Änderung der Bewegung zu tun. Damit ist aber Bedeutung dieses Begriffes für die theoretische Physik noch lange nicht erschöpft.

Es gibt nämlich keinen einzigen Naturvorgang, welcher sich in so einfacher Weise abspielen würde, daß er absolut exakt in Gleichungen gefaßt werden könnte. Glücklicherweise ist jedoch häufig eine der wirkenden Ursachen bei weitem die ausschlaggebendste und man kann die Bewegung, welche durch sie allein erzeugt würde, in Gleichungen fassen, welche die wirkliche Bewegung angenähert darstellen und gewisse Integrationskonstanten enthalten. Die übrigen wirkenden Ursachen werden dann als solche betrachtet, welche jene einfache Bewegung stören und die Werte der Integrationskonstanten kontinuierlich langsam verändern. Diejenige einfache Bewegung, welche eintreten würde, wenn zur Zeit t plötzlich alle Störungen aufhören würden, und welche mit denjenigen Werten der Integrationskonstanten fortginge, welche diese bei der wirklichen Bewegung gerade zur Zeit t haben, heißt die oskulierende einfache Bewegung.

Diese Methode der Lösung komplizierter Probleme heißt die Methode der Variation der Konstanten. Ihre Durchführbarkeit beruht darauf, daß alle Ausdrücke nach Potenzen der als sehr klein betrachteten Störungen entwickelt werden und zuerst alle Potenzen mit Ausnahme der ersten vernachlässigt werden. Ist diese Rechnung durchgeführt, so können dann die Glieder zweiter Ordnung ebenfalls berücksichtigt werden u. s. f.

So ist in erster Instanz die Wirkung aller Kräfte eine Störung und die geradlinige, gleichförmige Bewegung, welche eintreten würde, wenn in einem bestimmten Momente alle Kräfte aufhören würden, die oskulierende. Ein geworfener Körper (Geschützprojektil) beschreibt in erster Annäherung die Fallparabel, die Störung durch den Luftwiderstand wird als klein betrachtet. Reibung, Mittelswiderstand, elastische Nachwirkung, elektromagnetische Dämpfung werden als kleine Störungen bei den Schwingungen von Pendeln, Magneten, bei akustischen und elektromagnetischen stehenden Schwingungen betrachtet. Die erste Anwendung und höchste Vollendung erfuhr jedoch diese Methode in der Astronomie, wo man die Bewegung jedes Planeten, Mondes oder Kometen unter dem Einflusse seines Zentralkörpers als dessen ungestörte Bahn, die Einflüsse aller übrigen Himmelskörper aber als kleine Störungen derselben betrachtet. Obwohl uns daher hier die astronomischen Aufgaben ferner liegen, so werden wir doch nicht umhin können, sie als Musterbilder für eine Rechnungsmethode, die auch in der übrigen Physik täglich häufiger in Anwendung kommt, hier in den Vordergrund zu rücken.

Die beschriebene Methode der Variation der Konstanten scheint der Idee nach grundverschieden von der in § 1 definierten und in den folgenden Paragraphen verwendeten Variationsmethode der reinen Mathematik. Praktisch sind beiden Methoden die nächsten Verwandten, da beide auf der Voraussetzung beruhen, daß die Variationen so klein sind, daß man die Glieder erster Ordnung für sich, die zweiter davon getrennt wiederum für sich etc. betrachten darf.

Wir wollen nun die Methode der Variation der Konstanten näher folgendermaßen definieren: Es sei die Berechnung der Bewegung eines mechanischen Systems, in dem Kräfte tätig sind, die eine gewisse Kraftfunktion V haben, gelungen. Die Lösung enthalte die nötige Zahl von Integrationskonstanten. Es soll daraus, dadurch daß man statt dieser Integrationskonstanten Funktionen der Zeit substituiert, die Lösung einer anderen Aufgabe abgeleitet werden, wobei dasselbe mechanische System sich unter dem Einflusse von Kräften bewegt, welche eine etwas von V verschiedene Kraftfunktion $V + \Omega$ haben. Wir wollen dieses Problem zunächst nach der Lagrangeschen Methode behandeln.

§ 68. Lagranges Hilfssatz.

Wir leiten vorerst eine allgemeine Relation ab. Es sei genau wie in § 55 ein beliebiges mechanisches System gegeben, das durch die generalisierten Koordinaten $p_1, p_2 \ldots p_s$ bestimmt ist. Wir setzen Einfachheit halber voraus, daß zwischen diesen keine Bedingungsgleichungen bestehen und eine Kraftfunktion V existiert, welche nur die Koordinaten und eventuell die Zeit enthält. Wir bezeichnen wie früher mit p' die Geschwindigkeiten, mit q die Momente, mit T die lebendige Kraft, welche wir bei Bildung der partiellen Differentialquotienten als homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten ausgedrückt denken und setzen $H = T - V$. Dann lauten nach 74) und 286) die Bewegungsgleichungen:

$$360)\qquad \frac{d q_h}{d t} = \frac{d}{d t}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_h}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad h = 1, 2 \ldots s.$$

Aus diesen Bewegungsgleichungen können die Koordinaten als Funktionen von der Zeit t und $2s$ Integrationskonstanten $C_1, C_2 \ldots C_{2s}$ gefunden werden. Wir wollen nun den Werten sämtlicher Integrationskonstanten unendlich kleine Zuwächse $\delta C_1, \delta C_2 \ldots \delta C_{2s}$ erteilen. Dadurch werden die zu irgend einer Zeit gehörigen Werte der Koordinaten, Geschwindigkeiten, Momente sowie alle Ausdrücke, welche Funktionen dieser Größen und der Zeit sind, ebenfalls unendlich kleine Zuwächse erfahren, die wir durch ein vorgesetztes δ bezeichnen wollen. Jeder derartige Ausdruck G kann, wie die Koordinaten, Geschwindigkeiten und Momente selbst, als Funktion von t, C_1, $C_2 \ldots C_{2s}$ ausgedrückt werden und es ist

$$\delta G = \sum_1^{2s}{}_h \frac{\partial G}{\partial C_h} \delta C_h .$$

Die den Werten $C + \delta C$ der Integrationskonstanten entsprechende Bewegung ist also eine spezielle variierte Bewegung im mathematischen Sinne der Variationsrechnung und wir knüpfen hier die Theorie der physikalischen nicht strenge unendlich kleinen Variationen vollständig an die der mathematischen Variationen an.

Wir wollen nun noch ein zweites Mal den Integrationskonstanten C_1, $C_2 \ldots C_{2s}$ beliebige andere, von den δC vollständig unabhängige, unendlich kleine Zuwächse $\varDelta C_1$, $\varDelta C_2 \ldots \varDelta C_{2s}$ erteilen. Dann ist ebenso der dadurch erzeugte Zuwachs des zu irgend einer Zeit gehörigen Wertes von G

$$\varDelta G = \sum_1^{2s}{}_h \frac{\partial G}{\partial C_h} \varDelta C_h .$$

Der Zuwachs, welchen δG erfährt, wenn man dann die δC und natürlich immer t unverändert, aber die C um $\varDelta C$ wachsen läßt, soll mit $\varDelta \delta G$, der von $\varDelta G$, wenn man bloß die C um δC wachsen läßt, mit $\delta \varDelta G$ bezeichnet werden. Dann ist offenbar

$$361) \qquad \varDelta \delta G = \delta \varDelta G = \sum_1^{2s}{}_k \sum_1^{2s}{}_h \frac{\partial^2 G}{\partial C_h \partial C_k} \delta C_h \varDelta C_k .$$

Lassen wir in $\partial H / \partial p'_h$ oder $\partial H / \partial p_h$ die C und δC wachsen, so erhalten wir die Größen

$$\delta \frac{\partial H}{\partial p'_h} \text{ und } \delta \frac{\partial H}{\partial p_h}$$

und da die δC von der Zeit ganz unabhängig sind, so folgt aus 360)

$$\frac{d}{dt}\delta\frac{\partial H}{\partial p'_h} - \delta\frac{\partial H}{\partial p_h} = 0.$$

Ebenso folgt

$$\frac{d}{dt}\Delta\frac{\partial H}{\partial p'_h} - \Delta\frac{\partial H}{\partial p_h} = 0.$$

Wir subtrahieren die zweite dieser beiden Gleichungen von der ersten, nachdem wir die erste mit Δp_h, die zweite mit δp_h multipliziert haben. Wenn wir noch

$$\delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}\frac{d\Delta p_h}{dt} - \Delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}\frac{d\delta p_h}{dt} = \delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}\Delta p'_h - \Delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}\delta p'_h$$

einmal addieren, dann subtrahieren, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\left[\Delta p_h\delta\frac{\partial H}{\partial p'_h} - \delta p_h\Delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}\right] =$$
$$= \Delta p_h\delta\frac{\partial H}{\partial p_h} + \Delta p'_h\delta\frac{\partial H}{\partial p'_h} - \delta p_h\Delta\frac{\partial H}{\partial p_h} - \delta p'_h\Delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}.$$

Wir wollen hier dem h alle Werte erteilen und alle so erhaltenen Gleichungen addieren. Da die durch δ und Δ angezeigten Variationen vollständig voneinander unabhängig sind, so ist die Summe der beiden positiven Glieder, die man so rechts erhält, nichts anderes als $\delta\Delta H$, die Summe der beiden negativen aber nichts anderes als $-\Delta\delta H$. Da nun diese beiden Größen nach 361) untereinander gleich sind, so verschwindet die rechte Seite und es wird

$$\frac{d}{dt}\sum_1^s{}^h\Delta p_h\delta\frac{\partial H}{\partial p'_h} = \frac{d}{\partial t}\sum_1^s{}^h\delta p_h\Delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}.$$

Da V die Geschwindigkeiten nicht enthält, so ist $\partial H/\partial p'_h = \partial T/\partial p'_h = q_h$, daher kann man die letzte Gleichung auch so schreiben:

362) $$\frac{d}{dt}\sum_1^s{}^h(\Delta p_h\delta q_h - \delta p_h\Delta q_h) = 0.$$

Aus der Größe

363) $$\sum_1^s{}^h(\Delta p_h\delta q_h - \Delta q_h\delta p_h)$$

muß also, wenn man alles durch die C und deren Variationen und die Zeit ausdrückt, die letztere herausfallen. Diese Größe kann so ausgedrückt nur Funktion der C und deren Variationen sein. Die letzteren enthält sie natürlich so, daß jedes Glied ein δC und ein $\varDelta C$ als Faktor hat.

Um zu zeigen, wie einfach der Sinn dieser Betrachtungen ist, wollen wir sie an einem ganz leichten Beispiele erörtern. Bestehe unser System aus einem einzigen materiellen Punkte von der Masse eins, dessen Abszisse p sei und der sich auf der Abszissenachse unter Einfluß einer Kraft $-a^2 p$ bewegt, die ihn gegen den Koordinatenanfangspunkt zieht und deren Intensität der Abszisse p proportional ist. Dann ist $p = C_1 \sin(at + C_2)$, $p' = a C_1 \cos(at + C_2)$

364) $$\left\{\begin{aligned} \delta p &= \delta C_1 \sin(at + C_2) + C_1 \delta C_2 \cdot \cos(at + C_2) \\ \delta p' &= a \delta C_1 \cos(at + C_2) - a C_1 \delta C_2 \cdot \sin(at + C_2) \\ \varDelta p &= \varDelta C_1 \sin(at + C_2) + C_1 \varDelta C_2 \cdot \cos(at + C_2) \\ \varDelta p' &= a \varDelta C_1 \cos(at + C_2) - a C_1 \varDelta C_2 \cdot \sin(at + C_2), \end{aligned}\right.$$

daher

$$\begin{aligned} \varDelta \delta p = \delta C_1 \cdot \varDelta C_2 \cos(at + C_2) + \delta C_2 \varDelta C_1 \cos(at + C_2) - \\ - C_1 \delta C_2 \varDelta C_2 \sin(at + C_2) \end{aligned}$$

und derselbe Wert folgt für $\delta \varDelta p$. Es ist $q = p'$. Die Gleichung 362) besagt daher, daß $\varDelta p \delta p' - \delta p \varDelta p'$ die Zeit nicht enthält, sondern nur Funktion der Integrationskonstanten und ihrer Variationen ist. In der Tat folgt aus 364)

$$\varDelta p \delta p' - \delta p \varDelta p' = a C_1 (\delta C_1 \varDelta C_2 - \varDelta C_1 \delta C_2).$$

Wir wollen nun zur Methode der Variation der Konstanten übergehen.

§ 69. Lagranges Methode der Variation der Konstanten.

Es seien die

365) $$p, \; p' \text{ und } q$$

als solche Funktionen der Zeit t und von $2s$ Integrationskonstanten C gefunden, daß die Gleichungen 360) erfüllt sind, in denen die Kraftfunktion V einen bestimmt gegebenen

Wert hat. Wir nennen die durch diese Werte der p bestimmte Bewegung die ungestörte. Nun sollen zu den während derselben wirkenden Kräften noch sehr kleine, die störenden hinzukommen, wodurch der Wert der Kraftfunktion von V in $V + \Omega$ übergehen soll. Ω ist natürlich im allgemeinen eine Funktion der Koordinaten und der Zeit, deren Wert aber immer klein sei. Die unter der Mitwirkung dieser störenden Kräfte stattfindende Bewegung nennen wir die gestörte.

Die Gleichungen 360*) für dieselbe unterscheiden sich von den Gleichungen 360) bloß dadurch, daß $V + \Omega$ an die Stelle von V tritt und wir stellen uns die Aufgabe in die Werte 365), welche die Gleichungen 360) für die ungestörte Bewegung befriedigen, statt der Konstanten C solche Funktionen der Zeit zu setzen, daß die hierdurch erhaltenen Variabeln

366) $$\bar{p},\ \bar{p}',\ \bar{q}$$

die Gleichungen 360*) für die gestörte Bewegung erfüllen.

Da nun die C variabel sind, so werden sie während der Zeit dt gewisse Zuwächse $dC_1,\ dC_2 \ldots dC_{2s}$ erfahren und wir wollen den Zuwachs, den irgend eine Funktion der Variabeln 365) dadurch erfährt, daß man darin bloß den C diese Zuwächse erteilt, durch Vorsetzen des Zeichens d_1 ausdrücken. Dieser Zuwachs ist bloß durch eine kleine Veränderung der Werte der Integrationskonstanten entstanden und hat daher ganz die Eigenschaften der früher mit δ oder Δ bezeichneten Zuwächse. Dann ist also

$$\frac{d\bar{p}_h}{dt} = \frac{dp_h}{dt} + \frac{d_1 p_h}{dt},$$

wobei das erste Glied rechts den Differentialquotienten des p_h nach der Zeit bei konstanten C ausdrückt.

Es sollen nun die $2s$ Größen C so gewählt werden, daß für jedes h

367) $$\frac{d_1 p_h}{dt} = 0$$

ist. Die physikalische Bedeutung der letzten Gleichung kann man sich folgendermaßen klar machen. Wenn man aus den Variabeln 365) die Variabeln 366) bildet. d. h. statt der C diejenigen Funktionen der Zeit setzt, welche wir finden werden, so erhält man die gestörte Bewegung. Wenn man nun von irgend einer Zeit t an plötzlich den C diejenigen konstanten Werte erteilt, welche sie gerade zu jener Zeit haben, so stimmen sowohl die Werte der p als auch der p' genau mit jenen überein, welche diese Größen hätten, wenn die C variabel blieben. Man erhält also durch diese Operation die Bewegung, welche das System in der Folgezeit machen würde, wenn zur Zeit t ohne Änderung der Positionen und Geschwindigkeiten der Systempunkte die störenden Kräfte plötzlich aufhören würden. Man nennt die Bewegung, welche dann einträte, die oskulierende ungestörte Bewegung.

Wenn z. B. V die Kraftfunktion der Sonnenanziehung auf die Erde, Ω die der anderen Himmelskörper ist, so liefert die plötzliche Konstantsetzung aller C die Ellipse, welche die Erde um die Sonne beschreiben würde, wenn plötzlich alle Störungen aufhörten. Noch einfacher: wenn wir das Übergewicht an der Atwoodschen Fallmaschine als Störung und Ω als dessen Kraftfunktion ansehen, so erhalten wir durch plötzliches Konstantmachen der C die Bewegung nach Abheben des Übergewichts.

Wir können daher die gestörte Bewegung so auffassen, als ob in jedem Zeitmomente die oskulierende ungestörte Bewegung statthätte. sich aber deren Integrationskonstanten allmählich mit der Zeit ändern würden; z. B. die gestörte Erdbahn so, als ob sich die Erde immer in einer Ellipse um die Sonne bewegte, deren Achsen, Ebene etc. sich langsam änderten, den freien Fall so. als ob die Bewegung in jedem Augenblicke gleichförmig wäre, aber die Geschwindigkeit sich mit der Zeit änderte.

Die Variabeln 366) sollen nun der Gleichung 360*) genügen, welche man aus 360) erhält, wenn man $V+\Omega$ statt V substituiert und welche wir so schreiben können:

$$\frac{d}{dt}\,\overline{\frac{\partial T}{\partial p'_h}} = \overline{\frac{\partial T}{\partial p_h}} + \overline{\frac{\partial V}{\partial p_h}} + \overline{\frac{\partial \Omega}{\partial p_h}}.$$

Die Querstriche drücken aus, daß überall die Variabeln 366) statt 365) substituiert sind Nun sind sowohl die $\bar{p}$ als auch die $\bar{p}'$ genau so wie die p und p' aus der Zeit und den C zusammengesetzt; nur daß in den ersteren die C als Funktionen der Zeit zu betrachten sind. Daher sind auch $\overline{V}$, $\overline{T}$, $\overline{\partial V/\partial p_h}$, $\overline{\partial T/\partial p_h}$ und $\overline{\partial T/\partial p'_h}$ die gleichen Funktionen der Zeit und der C wie die entsprechenden ungestrichenen Größen; nur daß wieder die C Funktionen der Zeit sind. Dies muß bei Bildung von $\frac{d}{dt}\overline{\frac{\partial T}{\partial p'_h}}$ beachtet werden. Wir denken uns daher in $\overline{\partial T/\partial p'_h}$ die p und p' als Funktionen der Zeit und der C ausgedrückt und bezeichnen durch Weglassung des Querstrichs ihren Differentialquotienten nach der Zeit bei konstanten C, durch das vorgesetzte d_1 aber den Zuwachs, der durch bloße Veränderung der C eintritt, also die Eigenschaften des früher durch das Zeichen δ oder Δ ausgedrückten Zuwachses hat. Dann ist also

$$\frac{d}{dt}\overline{\frac{\partial T}{\partial p'_h}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h} + \frac{d_1}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_h}.$$

Substituieren wir alle diese Werte in die Gleichung 360*), so folgt:

$$368)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h} + \frac{d_1}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h} = \overline{\frac{\partial T}{\partial p_h}} - \overline{\frac{\partial V}{\partial p_h}} - \overline{\frac{\partial \Omega}{\partial p_h}}.$$

Denken wir uns nun die p und p' als Funktionen der Zeit und der C ausgedrückt, so sind die in dieser Gleichung vorkommenden Größen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h},\quad \overline{\frac{\partial T}{\partial p_h}} \quad\text{und}\quad \frac{\partial V}{\partial p_h}$$

identisch ebenso aus t und den C zusammengesetzt, wie die Größen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h},\quad \frac{\partial T}{\partial p_h} \quad\text{und}\quad \frac{\partial V}{\partial p_h}$$

der Gleichung 360). Letztere Größen erfüllen aber dann letztere Gleichung identisch, d. h. für alle Werte der C und des t. Daher tilgen sich auch die entsprechenden Glieder identisch in der Gleichung 368) und diese reduziert sich auf

$$369) \qquad \frac{d_1}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h} = -\frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial p_h}.$$

Da nun Ω ein kleines Zusatzglied ist, so werden sich auch die Werte der Variabeln 366), wenigstens wenn die verstrichene Zeit nicht zu lange ist, nur wenig von denen der Variabeln 365) unterscheiden. Wir können daher angenähert in der ohnedies kleinen rechten Seite der letzten Gleichung letztere für erstere schreiben und die C konstant ansehen und erhalten:

$$369) \qquad \frac{d_1}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h} = -\frac{\partial \Omega}{\partial p_h}.$$

Dies sind s lineare Gleichungen zwischen den Größen dC/dt. Die Gleichungen 367) stellen nochmals s lineare Gleichungen zwischen denselben Größen dar, so daß alle diese Größen als Funktionen der Zeit bestimmt werden können. Ihre Werte für eine bestimmte Zeit stellen die $2s$ Integrationskonstanten dar.

Die $2s$ linearen Gleichungen für die dC/dt werden am leichtesten auf einem Umwege gelöst. Wir erteilen zu diesem Behufe bei der ungestörten Bewegung den C ganz willkürliche unendlich kleine Zuwächse ΔC_1, $\Delta C_2 \ldots \Delta C_{2s}$ und bezeichnen den Zuwachs, welchen die Variabeln 365) und irgendwelche Funktionen derselben dadurch erleiden, durch das vorgesetzte Δ. Wir multiplizieren ferner die Gleichung 369) mit Δp_h, die Gleichung 368) mit $-\Delta q_h$ und addieren alle diese Gleichungen, in denen dem h alle Werte von 1 bis s zu erteilen sind, dann folgt:

$$370) \qquad \sum_1^s {}_h \left(\Delta p_h \frac{d_1 q_h}{dt} - \Delta q_h \frac{d_1 p_h}{dt}\right) = -\sum_1^s {}_h \frac{\partial \Omega}{\partial p_h}\Delta p_h = -\Delta \Omega.$$

Hier wurde wieder q_h für $\partial T/\partial p'_h$ geschrieben; ferner bedeutet links die Größe $d_1 q_h$ den Zuwachs, den q_h erleidet, wenn die C irgendwelche Zuwächse dC_1, $dC_2 \ldots dC_{2s}$ erfahren, hat also denselben Sinn, wie die in 362) mit δq_h bezeichnete Größe. Nur daß bei $d_1 q_h$ die Zuwächse der C

mit $d\,C$, bei δq_h aber mit $\delta\,C$ bezeichnet wurden. Ja es sind die $d\,C$ im Grunde auch willkürlich Zuwächse, da ja Ω ganz nach Belieben gewählt werden kann.

Es wird daher nach Gleichung 362) der Ausdruck

$$371)\qquad \sum_{h=1}^{h=s}(\varDelta p_h\, d_t\, q_h - \varDelta q_h\, d_t\, p_h),$$

wenn man alle p, p' und q durch die C und t ausdrückt, nur eine Funktion der Integrationskonstanten C und ihrer Zuwächse $\varDelta\,C$ und $d\,C$ sein können. Natürlich muß er sowohl bezüglich der $d\,C$ als auch bezüglich der $\varDelta\,C$ linear und homogen sein, wie der Ausdruck 363) bezüglich der $\delta\,C$ und $\varDelta\,C$. Auch rechts können wir in Gleichung 370) im Ausdrucke für Ω die p durch die C und t ausdrücken. Da $\varDelta\,\Omega$ der Zuwachs ist, der bloß dadurch entsteht, daß die C um die $\varDelta\,C$ wachsen, so ist

$$\varDelta\,\Omega = \sum_1^{2s}{}_h \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,C_h}\varDelta\,C_h.$$

Nun sind aber die $\varDelta\,C$ vollkommen willkürlich. Wir können daher links und rechts die mit je einem $\varDelta\,C$ multiplizierten Glieder für sich einander gleich setzen. Wir erhalten so jedes $\partial\,\Omega/\partial\,C$ als lineare Funktion der $d\,C/d\,t$, deren Koeffizienten nicht die Zeit, nur die C enthalten, da die ganze linke Seite der Gleichung 370) die Zeit nicht enthält. Durch Auflösung dieser Gleichungen nach den $d\,C/d\,t$ erhalten wir umgekehrt letztere als lineare Funktionen der $\partial\,\Omega/\partial\,C$, deren Koeffizienten natürlich wieder nur die C, nicht die Zeit enthalten.

Die letzteren Gleichungen erhalten wir noch kürzer in folgender Weise: Wir bezeichnen die Werte der p und q für die Anfangszeit mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$. Wir können dieselben als die Integrationskonstanten C wählen, also die Variabeln 365), und daher auch die Größe Ω der rechten Seite der Gleichung 370) durch t und die $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ ausdrücken. Da $\varDelta\,\Omega$ der Zuwachs ist, den diese Größe bloß dadurch erfährt, daß die Integrationskonstanten die mit $\varDelta$ bezeichneten Zuwächse erfahren, so wird dann:

$$372) \qquad \Delta\,\Omega = \sum_1^s{}_h \left(\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{p}_h}\,\Delta\,\mathfrak{p}_h + \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{q}_h}\,\Delta\,\mathfrak{q}_h\right).$$

Die linke Seite der Gleichung 370) reduziert sich für die Anfangszeit auf

$$373) \qquad \sum_1^s{}_h \left(\Delta\,\mathfrak{p}_h\,\frac{d_1\,\mathfrak{q}_h}{d\,t} - \Delta\,\mathfrak{q}_h\,\frac{d_1\,\mathfrak{p}_h}{d\,t}\right)$$

und da sie die Zeit nicht explizit enthält, muß sie zu allen Zeiten diesen Wert haben.

Der Index 1 beim Differentialzeichen kann jetzt wegbleiben, da $\mathfrak{p}_h$ und $\mathfrak{q}_h$ die Integrationskonstanten selbst sind, also von den Veränderungen, die sie erleiden, wenn man unter Konstanthaltung der Integrationskonstanten die Zeit wachsen läßt, keine Rede sein kann. Man erhält also, wenn man in 370) die Werte 372) und 373) substituiert:

$$\sum_1^s{}_h \left[\left(\frac{d\,\mathfrak{q}_h}{d\,t} + \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{p}_h}\right)\Delta\,\mathfrak{p}_h - \left(\frac{d\,\mathfrak{p}_h}{d\,t} - \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{q}_h}\right)\Delta\,\mathfrak{q}_h\right] = 0$$

und da die Werte sämtlicher Integrationskonstanten und daher auch der mit Δ bezeichneten Zuwächse derselben willkürlich sind, so folgt

$$374) \qquad \frac{d\,\mathfrak{q}_h}{d\,t} = -\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{p}_h}. \qquad \frac{d\,\mathfrak{p}_h}{d\,t} = \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{q}_h}$$

Wollen wir lieber irgendwelche andere Integrationskonstanten $C_1, C_2, C_3 \ldots C_s$, einführen, so können wir diese als Funktionen der $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und umgekehrt ausgedrückt denken. Es ist also

$$\frac{d\,C_k}{d\,t} = \sum_1^s{}_h \left(\frac{\partial\,C_k}{\partial\,\mathfrak{p}_h}\,\frac{d\,\mathfrak{p}_h}{d\,t} + \frac{\partial\,C_k}{\partial\,\mathfrak{q}_h}\,\frac{d\,\mathfrak{q}_h}{d\,t}\right),$$

daher nach Substitution der Werte 374)

$$\frac{d\,C_k}{d\,t} = \sum_1^s{}_h \left(\frac{\partial\,C_k}{\partial\,\mathfrak{p}_h}\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{q}_h} - \frac{\partial\,C_k}{\partial\,\mathfrak{q}_h}\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{p}_h}\right),$$

Nun ist aber

375) $$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_h} = \sum_1^{2s}{}_k \frac{\partial \Omega}{\partial C_k} \frac{\partial C_k}{\partial \mathfrak{p}_h}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{q}_h} = \sum_1^{2s}{}_k \frac{\partial \Omega}{\partial C_k} \frac{\partial C_k}{\partial \mathfrak{q}_h},$$

daher

376) $$\frac{d C_k}{d t} = \sum_1^{2s}{}_l (C_k, C_l) \frac{\partial \Omega}{\partial C_l},$$

wobei symbolisch gesetzt wurde

377) $$(C_k, C_l) = \sum_1^{s}{}_h \left(\frac{\partial C_k}{\partial \mathfrak{p}_h} \frac{\partial C_l}{\partial \mathfrak{q}_h} - \frac{\partial C_k}{\partial \mathfrak{q}_h} \frac{\partial C_l}{\partial \mathfrak{p}_h}\right),$$

aus welcher Definition folgt:

378) $$(C_k, C_l) = -(C_l, C_k), \quad (C_k, C_k) = 0.$$

Wir haben bewiesen, daß die Koeffizienten der Gleichungen, welche die dC/dt durch die $\partial \Omega / \partial C$ ausdrücken, nur Funktionen der Integrationskonstanten sein können, es sind also die (C_h, C_k) konstante Größe. Natürlich ist der Zeitanfang vollkommen willkürlich; man kann also statt der $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ wieder die zu einer beliebigen Zeit t gehörigen Werte p, q setzen. Die Größe

379) $$(C_k, C_l) = \sum_1^{s}{}_h \left(\frac{\partial C_k}{\partial p_h} \frac{\partial C_l}{\partial q_h} - \frac{\partial C_k}{\partial q_h} \frac{\partial C_l}{\partial p_h}\right)$$

ist daher mit 377) vollkommen identisch und ebenfalls nur Funktion der Integrationskonstanten oder eine reine Konstante. Wenn daher $\varphi = C_k$ und $\psi = C_l$ zwei beliebige Integrale der Bewegungsgleichungen 360) sind, wobei φ und ψ Funktionen von t und den p und q sind, so muß der Wert der Größe

$$(C_k, C_l) = (\varphi, \psi) = \sum_1^{s}{}_h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \frac{\partial \psi}{\partial p_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \frac{\partial \psi}{\partial q_h}\right)$$

wieder von der Zeit unabhängig sein.

Dieser Satz wurde von **Poisson** gefunden. **Jacobi** erkannte, daß er auch zur Ableitung eines neuen Integrales aus zwei gefundenen benutzt werden kann. Sobald nämlich aus (φ, ψ) nicht alle p und q identisch herausfallen, so wird immer die Gleichung

$$(\varphi, \psi) = \text{konst.}$$

von denjenigen Werten der p und q, welche den Bewegungsgleichungen 360) genügen, erfullt. Diese Gleichung ist also jedenfalls ein Integral der Bewegungsgleichungen. Sie muß aber nicht ein neues sein. Sie kann auch eine Kombination der beiden benutzten Integrale $\varphi = C_k$, $\psi = C_l$ sein, so daß sie von allen Werten der p, q, welche diesen Gleichungen genügen, ebenfalls erfüllt wird. Sie kann auch ein anderes schon bekanntes Integral sein.

§ 70. Beispiele.

Sei ein System materieller Punkte gegeben, für welches bezüglich zweier Koordinatenachsen, z. B. der x- und y-Achse, die Gleichungen des Flächenprinzips

$$\text{380)} \quad \sum_1^n {}^h m_h (y_h z'_h - z_h y'_h) = a, \qquad \sum_1^n {}^h m_h (z_h x'_h - x_h z'_h) = b$$

gelten. Dann können wir diese beiden Ausdrücke als φ und ψ, die rechtwinkligen Koordinaten aber als p wählen. Es reduziert sich (φ, ψ) auf

$$-\sum_1^n {}^h \frac{1}{m_h}\left(\frac{\partial a}{\partial z'_h}\frac{\partial b}{\partial z_h} - \frac{\partial a}{\partial z_h}\frac{\partial b}{\partial z'_h}\right) = \sum_1^n m_h (x_h y'_h - y_h x'_h).$$

Da dieser Ausdruck nach dem Poissonschen Satze konstant sein muß, so lehrt dieser, daß, wenn für ein System die beiden Gleichungen 380) bestehen, daraus die Richtigkeit der analogen Gleichung für die dritte Koordinatenachse folgt.

Hat man aus 376) die p in weiterer Annäherung gefunden, wobei rechts die C als konstant betrachtet werden können, da ihre kleinen Änderungen mit den kleinen Größen $\partial \Omega / \partial C$ multipliziert sind, so erscheinen daselbst zu den Integrationskonstanten gewisse kleine Funktionen der Zeit addiert. Man kann diese korrigierten Werte in Ω einsetzen und nach

Potenzen der neu hinzugekommenen Glieder entwickeln. Man erhält dann zu dem Werte des Ω, den wir bisher benutzten, noch ein Glied hinzu. Man kann nun wie früher die Integrationskonstanten wiederum so variieren, daß die Werte der p die Bewegungsgleichungen inklusive der neu hinzugekommenen Glieder erfüllen und schließlich in dieser Weise die Annäherung so weit treiben, als man will.

Als Beispiel betrachten wir wieder den Fall, wo die Abszisse p eines auf der Abszissenachse beweglichen materiellen Punktes durch die Gleichung

381) $$\frac{d^2 p}{d t^2} = -a^2 p - \frac{\partial \Omega}{\partial p}$$

bestimmt ist. Das letzte Glied sei die störende Kraft. Für die ungestörte Bewegung ist

382) $$p = \mathfrak{p} \cos a t + \frac{\mathfrak{q}}{a} \sin a t = C_1 \sin(a t + C_2),$$

$$q = p' = -a \mathfrak{p} \sin a t + \mathfrak{q} \cos a t = a C_1 \cos(a t + C_2).$$

Daraus folgt:

$$d_1 p = d \mathfrak{p} \cos a t + \frac{d \mathfrak{q}}{a} \sin a t, \quad \Delta p = \Delta \mathfrak{p} \cos a t + \frac{\Delta \mathfrak{q}}{a} \sin a t$$

$$d_1 q = -a\, d \mathfrak{p} \sin a t + d \mathfrak{q} \cos a t, \quad \Delta q = -a\, \Delta \mathfrak{p} \sin a t + \Delta \mathfrak{q} \cos a t$$

$$d_1 q\, \Delta p - d_1 p\, \Delta q = d \mathfrak{q}\, \Delta \mathfrak{p} - d \mathfrak{p}\, \Delta \mathfrak{q} = -\Delta \Omega\, d t,$$

wobei in Ω zu setzen ist $p = \mathfrak{p} \cos a t + \frac{\mathfrak{q}}{a} \sin a t$. Daher folgt

383) $$\frac{d \mathfrak{p}}{d t} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{q}}, \quad \frac{d \mathfrak{q}}{d t} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}}.$$

Lautet die Gleichung 381) so: $\frac{d^2 p}{d t^2} = -a^2 p + f(t)$, so ist

$$\Omega = -p f(t) = -\mathfrak{p} f(t) \cos a t - \frac{\mathfrak{q}}{a} f(t) \sin a t.$$

Es folgt daher aus 383)

384) $$\mathfrak{p} = -\frac{1}{a} \int f(t) \sin(a t)\, d t, \quad \mathfrak{q} = \int f(t) \cos(a t)\, d t.$$

Man sieht leicht, daß die hier behandelte Methode in diesem einfachen Falle mit der Methode identisch ist, nach welcher aus dem allgemeinen Integrale einer linearen Differentialgleichung ohne zweiten Teil das der entsprechenden mit zweitem Teile abgeleitet wird und welche man gemeiniglich ebenfalls die Methode der Variation der Konstanten zu nennen pflegt. Wollte man die Konstanten C einführen, so wäre

$$C_1 = \sqrt{p^2 + \frac{q^2}{a^2}} = \sqrt{\mathfrak{p}^2 + \frac{\mathfrak{q}^2}{a^2}},$$

$$C_2 = \operatorname{arctg} \frac{a p}{q} - a t = \operatorname{arctg} \frac{a \mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} - a t_0 ,$$

$$(C_1, C_1) = (C_2, C_2) = 0 ,$$

$$(C_1, C_2) = -(C_2, C_1) = \frac{\partial C_1}{\partial q} \frac{\partial C_2}{\partial p} - \frac{\partial C_1}{\partial p} \frac{\partial C_2}{\partial q} =$$

$$= \frac{\partial C_1}{\partial \mathfrak{q}} \frac{\partial C_2}{\partial \mathfrak{p}} - \frac{\partial C_1}{\partial \mathfrak{p}} \frac{\partial C_2}{\partial \mathfrak{q}} = \frac{1}{a C_1} .$$

$$\Omega = - C_1 f(t) \sin (a t + C_2) .$$

Die Gleichungen 376) gehen daher uber in

$$385) \quad \frac{d C_1}{d t} = \frac{f(t)}{a} \cos (a t + C_2), \qquad \frac{d C_2}{d t} = - \frac{f(t)}{a C_1} \sin (a t + C_2) .$$

Würde man aus den Gleichungen 385) C_1 und C_2 exakt bestimmen und diese Werte in die Gleichung 381) substituieren, so würde man eine exakte Lösung der Aufgabe erhalten, dagegen nur eine angenäherte, wenn man die Gleichungen 385) dadurch in lineare verwandeln würde, daß man auf der rechten Seite dieser Gleichungen, wo noch der sehr kleine Faktor $f(t)$ dabei steht, C_1 und C_2 als Konstanten ansähe. Jedenfalls aber erhält man eine exakte Lösung, wenn man die Werte 384) für $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ in die Formel 382) einsetzt, und $\frac{\partial \Omega}{\partial p}$ bloß als Funktion der Zeit gegeben ist. Enthält es dagegen noch p, so kann man folgendes sukzessives Annäherungsverfahren einschlagen. Man gibt den bisher mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ bezeichneten Konstanten den Index Null, den variabeln Größen, welche bei der zweiten Annäherung sich zu ihnen dazu addieren, den Index Eins, denen die beim dritten Grade der Annäherung sich weiter dazu addieren, den Index Zwei etc. Dann ist in erster Annäherung

$$p = \mathfrak{p}_0 \cos(a t) + \frac{\mathfrak{q}_0}{a} \sin(a t),$$

Ω aber, welches wir als Funktionen von p und t in der Form $\Omega(p, t)$ schreiben, gleich

$$\Omega_0 = \Omega\left(\mathfrak{p}_0 \cos a t + \frac{\mathfrak{q}_0}{a} \sin a t, t\right).$$

Man erhält daher statt der Formeln 383)

$$\mathfrak{q}_1 = -\int d t\, \Omega'_0 \cos(a t), \qquad \mathfrak{p}_1 = \frac{1}{a}\int d t \sin a t\, \Omega'_0 .$$

Dabei sollen Ω', Ω'' ... die sukzessiven partiellen Ableitungen des Ω nach p sein. Der Index Null bedeutet, daß hinterher $\mathfrak{p}_0 \cos a t + \frac{\mathfrak{q}_0}{a} \sin a t$ für p zu setzen ist. Es ist also in zweiter Annäherung

$$p = (\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1) \cos a t + \frac{\mathfrak{q}_0 + \mathfrak{q}_1}{a} \sin a t$$

und zu Ω_0 tritt das Glied hinzu:

$$\left(\mathfrak{p}_1 \cos a t + \frac{\mathfrak{q}_1}{a} \sin a t\right) \Omega'_0 = \Omega_1 .$$

Man erhält daher eine weitere Annäherung, wenn man zu $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ noch die Größen $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_2$ addiert. Dabei ist:

$$\mathfrak{p}_2 = \int d t \frac{\partial \Omega_1}{\partial \mathfrak{q}_0} = -\frac{1}{a^2}\int d t\, \Omega''_0 \sin a t \left[\cos a t \int \Omega'_0 \sin a t\, d t - \right.$$
$$\left. - \sin a t \int \Omega'_0 \cos a t\, d t\right] + \frac{1}{a^2}\int d t\, \Omega'_0 \left[\cos a t \int d t\, \Omega''_0 \sin^2 a t - \right.$$
$$\left. - \sin a t \int d t\, \Omega''_0 \sin a t \cos a t\right.$$

Ein analoger Ausdruck folgt für $\mathfrak{q}_2 = \int d t \frac{\partial \Omega_1}{\partial \mathfrak{p}_0}$. Der Wert

$$p = (\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2) \cos a t + \frac{\mathfrak{q}_0 + \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2}{a} \sin a t$$

bildet also den dritten Grad der Annäherung. Die Integrationen reduzieren sich, wenn Ω als Funktion von p und t gegeben ist, auf Quadraturen, die aber natürlich bald sehr weitschweifig werden.

§ 71. Direkte Methode der Variation der Konstanten.

Die bisher befolgte Lagrangesche Methode gewährt zwar manchen Einblick in den inneren Zusammenhang; doch ist sie immerhin mehr indirekt. Wir wollen daher die im § 69 gewonnenen Resultate unabhängig von der dortigen Beweisführung nochmals ableiten. Wir führen sogleich die Variabeln p und q ein, schreiben also die Bewegungsgleichungen für das unvariierte Problem in der Form:

386) $$\frac{d p_h}{d t} = \frac{\partial_q E}{\partial q_h}, \quad \frac{d q_h}{\partial t} = -\frac{\partial_q E}{\partial p_h}$$

für das variierte aber in der Form:

387) $$\frac{d p_h}{d t} = \frac{\partial E}{\partial q_h}, \quad \frac{d q_h}{d t} = -\frac{\partial_u E}{\partial p_h} - \frac{\partial \Omega}{\partial p_h}.$$

wobei T die lebendige Kraft, V die Kraftfunktion des unvariierten, $V + \Omega$ die des variierten Problems und $E = T + V$ ist.

Es seien $C_1, C_2 \ldots C_{2s}$ willkürliche voneinander unabhängige Kostanten,

388) $$\varphi_k(p, q, t) = C_k, \quad k = 1, 2 \ldots 2s,$$

die Integrale des unvariierten Problems also der Gleichungen 386), so daß

389) $$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_1^s {}_h \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \frac{\partial E}{\partial q_h} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} \frac{\partial E}{\partial p_h}\right) = 0$$

ist. Wir wollen nun die C_k gleich solchen mit einer willkürlichen Konstanten vermehrten Funktionen der Zeit setzen, daß 388) die Integrale des variierten Problems, also der Gleichungen 387) werden. Aus 388) folgt zunächst:

390) $$\frac{d C_k}{d t} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_1^s {}_h \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \frac{d p_h}{d t} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} \frac{d q_h}{d t}\right).$$

Solange die C konstant sind, müssen die Gleichungen 388) die Integrale der Gleichungen 386) sein. Die bei Konstanz der C aus 388) gebildeten Werte von

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_h}$$

müssen daher die Gleichungen 389) identisch erfüllen. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes erhält man, wenn man in Gleichung 390) für $\frac{d p_h}{d t}$ und $\frac{d q_h}{d t}$ ihre Werte aus 387) substituiert, was erlaubt ist, da ja die C so als Funktionen der Zeit gewählt werden sollen, daß die Gleichungen 387) erfüllt sind

$$\frac{d C_k}{d t} = -\sum_1^s {}_h \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} \frac{\partial \Omega}{\partial p_h}.$$

Dafür kann man auch schreiben:

$$\text{391)} \qquad \frac{d C_k}{d t} = \sum_1^s {}_h \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \frac{\partial \Omega}{\partial q_h} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} \frac{\partial \Omega}{\partial p_h} \right) = (\varphi_k, \Omega),$$

da ja Ω die q nicht enthält, daher $\partial \Omega / \partial q_h = 0$ ist. Da Ω klein ist, können in der letzten Gleichung rechts für p und q die für das unvariierte Problem geltenden Funktionen der Zeit gesetzt werden. Wir wollen nun die partiellen Differentialquotienten $\partial \varphi_1 / \partial p_h \ldots$ einfach mit $\partial C_1 / \partial p_h \ldots$ bezeichnen, um nicht beide Buchstaben φ und C mitschleppen zu müssen. Daher schreiben wir auch in Gleichung 391) $\partial C_k / \partial p_h$ und $\partial C_k / \partial q_h$ für $\partial \varphi / \partial p_h$ und $\partial \varphi / \partial q_h$.

Denken wir Ω durch t und die C ausgedrückt, so wird

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_h} = \sum_{l=1}^{l=2s} \frac{\partial \Omega}{\partial C_l} \frac{\partial C_l}{\partial p_h}, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial q_h} = \sum_{l=1}^{l=2s} \frac{\partial \Omega}{\partial C_l} \frac{\partial C_l}{\partial q_h} = 0,$$

daher verwandelt sich Gleichung 391) in

$$\text{392)} \qquad \frac{d C_k}{d t} = \sum_1^{2s} {}_l (C_k, C_l) \frac{\partial \Omega}{\partial C_l},$$

wodurch die Gleichung 376) in einfachster Weise bewiesen ist. (C_k, C_l) ist wie dort durch die Gleichung 379) gegeben. Doch haben wir hier keinen Beweis erbracht, daß nicht (C_k, C_l) außer den C auch noch die Zeit explizit enthalten könne. Es hat jedoch keine Schwierigkeit diesen Beweis ebenfalls direkt zu führen. Seien $C_k = \varphi(p, q, t)$ und $C_l = \psi(p, q, t)$ zwei der Integrale 388), so ist nach 379) die Definition von (C_k, C_l) die folgende:

$$(C_k, C_l) = \sum_1^s {}_h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \frac{\partial \psi}{\partial q_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \frac{\partial \psi}{\partial p_h} \right).$$

daher ist

$$393)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(C_k, C_l)}{dt} = \sum_1^s {}_h \Bigg(& \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial q_h} + \frac{\partial \psi}{\partial q_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} - \\ & - \frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial p_h} - \frac{\partial \psi}{\partial p_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \Bigg), \end{aligned} \right.$$

da $\varphi = C_k$ ein Integral der Gleichungen 386) ist, so hat man analog mit 389)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_1^s {}_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} \right) = 0.$$

Durch partielle Differentiation dieser identischen Gleichungen nach p_h oder q_h folgt

$$394)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial p_h} = \sum_1^s {}_i \Bigg(& \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_h\, \partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial^2 E}{\partial p_i\, \partial p_h} \\ & - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i\, \partial p_h} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial^2 E}{\partial p_h\, \partial q_i} \Bigg), \end{aligned} \right.$$

$$395)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial q_h} = \sum_1^s {}_i \Bigg(& \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_h\, \partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial^2 E}{\partial p_i\, \partial q_h} - \\ & - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i\, \partial q_h} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial^2 E}{\partial q_h\, \partial q_i} \Bigg). \end{aligned} \right.$$

Anderseits folgt direkt, indem man wieder für dp_h/dt und dq_h/dt die Werte 386) substituiert:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_h}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial p_h} + \sum_1^s {}_i \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_h\, \partial p_i} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_h\, \partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} \right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_h}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial q_h} + \sum_1^s \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i\, \partial q_h} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_h\, \partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} \right);$$

die Substitution der Werte 394) und 395) in diese Gleichungen liefert:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_h}\right) = \sum_1^s{}_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial^2 E}{\partial p_h \partial q_i}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_h}\right) = \sum_1^s{}_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial q_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial^2 E}{\partial q_h \partial q_i}\right).$$

Die Werte von $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial p_h}\right)$ und $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_h}\right)$ findet man, indem man ψ mit φ vertauscht. Substituiert man diese vier Werte in 393), so erhält man rechts eine Doppelsumme, in der sich, wie man leicht sieht, je zwei Glieder heben. Es folgt also $d(C_k, C_l)/dt = 0$, (C_k, C_l) kann die Zeit nicht explizit enthalten.

§ 72. Einführung der Hamiltonschen Konstanten.

Wir haben das Problem jetzt in der allgemeinsten Weise gelöst und in den Gleichungen 392) ganz beliebige Integrationskonstanten eingeführt. Diese Gleichungen vereinfachen sich, wie Jacobi gezeigt hat, enorm, wenn man solche Integrationskonstanten einführt, wie man sie bei der Integration der Differentialgleichungen 386) des ungestörten Problems nach der Hamiltonschen Methode erhält.

Man hat da zuerst ein vollständiges Integral der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{dt} + E = 0$$

zu suchen, welches s voneinander unabhängige Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_s$ enthält, von denen keine additiv zu W hinzukommt. Die Gleichungen

396) $$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2 \ldots \frac{\partial W}{\partial \alpha_s} = \beta_s$$

sind dann Integralgleichungen der Gleichungen 386), d. h. sie drücken die p als Funktionen der $2s$ willkürlichen Integrationskonstanten α und β so aus, daß die Gleichungen 386) erfüllt sind. Die α und β sind also $2s$ willkürliche Integrationskonstanten und da die Formeln 392) von beliebigen derartigen Integrationskonstanten gelten, so müssen sie auch von den α und β gelten. Wir können diese so als Funktionen der Zeit mit additiven willkürlichen Konstanten bestimmen, daß die Gleichungen 396) die Integrale der Gleichungen 387) sind. Dazu ist erforderlich, daß die α und β den den Gleichungen 392) analogen Gleichungen:

397) $$\left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha_k}{dt} &= \sum_1^s {}_l(\alpha_k, \alpha_l)\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_l} + \sum_1^s {}_l(\alpha_k, \beta_l)\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_l} \\ \frac{d\beta_k}{dt} &= \sum_{l=1}^{l=s}(\beta_k, \alpha_l)\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_l} + \sum_{l=1}^{l=s}(\beta_k, \beta_l)\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_l}, \end{aligned}\right.$$

genügen. Es ist

398) $$(\alpha_k, \alpha_l) = \sum_{h=1}^{h=s}\left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_h}\frac{\partial \alpha_l}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h}\frac{\partial \alpha_l}{\partial p_h}\right)$$

und ähnliche Bedeutungen haben (α_k, β_l) und (β_k, β_l). Hierbei ist jedoch jedes α oder β als Funktion der p, q und von t ausgedrückt zu denken.

Wir wollen Kürze halber jede partielle Differentiation von W nach α_h durch den oben angehängten Index h, jede nach p_k durch den unten angehängten Index k markieren, so daß z. B.

$$W_{12}^{34} = \frac{\partial^4 W}{\partial p_1\, \partial p_2\, \partial \alpha_3\, \partial \alpha_4}$$

ist. Dann können wir die Gleichungen 396) so schreiben

399) $$W^h = \beta_h,$$

wogegen die q aus den Gleichungen

400) $$W_h = q_h$$

folgen.

Wollen wir die in 398) vorkommende Größe $\partial \alpha_k / \partial p_h$ bestimmen, so haben wir p_h und dp_h wachsen zu lassen; dagegen alle übrigen p und alle q und t als Konstanten anzusehen. Sämtliche α werden sich dabei verändern. $d\alpha_k$ sei der Zuwachs von α_k. Es folgt daher aus 400)

$$401)\quad \left\{\begin{aligned} & W_1^1\, d\alpha_1 + W_1^2\, d\alpha_2 \ldots W_1^s\, d\alpha_s + W_{1h}\, dp_h = 0 \\ & W_2^1\, d\alpha_1 + W_2^2\, d\alpha_2 \ldots W_2^s\, d\alpha_s + W_{2h}\, dp_h = 0 \\ & \qquad \cdots\cdots \\ & W_s^1\, d\alpha_1 + W_s^2\, d\alpha_2 \ldots W_s^s\, d\alpha_s + W_{sh}\, dp_h = 0. \end{aligned}\right.$$

Setzen wir

$$402)\qquad \varDelta = \begin{vmatrix} W_1^1, & W_1^2 & \ldots & W_1^s \\ W_2^1, & W_2^2 & \ldots & W_2^s \\ & \cdots & \cdots & \\ W_s^1, & W_s^2 & \ldots & W_s^s \end{vmatrix}$$

und bezeichnen die Unterdeterminante nach W_h^k mit $\varDelta_h^k$, setzen also

$$403)\qquad \varDelta_h^k = \frac{\partial \varDelta}{\partial W_h^k}\cdot$$

so folgt aus 401)

$$\frac{d\alpha_k}{dp_h} = -\frac{1}{\varDelta}\sum_{i=1}^{i=s} W_{ih}\, \varDelta_i^k.$$

Hier ist aber $d\alpha_k$ derjenige Zuwachs des α_k, der entstand, indem nur p_h und dp_h wuchs, während die übrigen p und alle q konstant blieben. Es ist also die so berechnete Größe $d\alpha_k/dp_h$ das, was in 398) mit $\partial\alpha_k/\partial p_h$ bezeichnet wurde und man hat

$$404)\qquad \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_h} = -\frac{1}{\varDelta}\sum_1^s{}_i\, \varDelta_i^k W_{ih}.$$

Will man $\partial\alpha_k/\partial q_h$ finden, so sind alle p und alle q außer q_h konstant zu lassen. Daher folgt aus 400)

$$\begin{aligned} & W_1^1\;\; d\alpha_1 + W_1^2\;\; d\alpha_2 \ldots W_1^s\;\; d\alpha_s = 0 \\ & \qquad \cdots\cdots \\ & W_h^1\;\; d\alpha_1 + W_h^2\;\; d\alpha_2 \ldots W_h^s\;\; d\alpha_s = dq_h \\ & W_{h+1}^1 d\alpha_1 + W_{h+1}^2 d\alpha \ldots W_{h+1}^s ds = 0. \\ & \qquad \cdots\cdots \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $d\alpha_k/dq_h$, also die in 398) mit $\partial\alpha_k/\partial q_h$ bezeichnete Größe, gleich

$$405)\qquad \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h} = \frac{1}{\varDelta}\varDelta_h^k.$$

Aus 399) findet man, wenn alle p konstant sind

406) $$d\beta_k = W^{1k}\,d\alpha_1 + W^{2k}\,d\alpha_2 \ldots W^{sk}\,d\alpha_s.$$

Wir wollen nun auch alle q bis auf q_h konstant, letzteres aber um dq_h wachsen lassen. Die Quotienten von dq_h in die dabei entstehenden Zuwächse von $d\beta_k$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2 \ldots$ sind die von uns mit $\partial\beta_k/\partial q_h$, $\partial\alpha_1/\partial q_h \ldots$ bezeichneten Größen. Die Division von 406) durch dq_h liefert daher

407) $$\frac{\partial\beta_k}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^{i=s} W^{ik}\frac{\partial\alpha_i}{\partial q_h}.$$

Sind endlich alle q und alle p bis auf p_h konstant, welches letztere um dp_h wächst, so folgt aus 399)

$$d\beta_k = W_h^k\,dp_h + \sum_1^s{}_i\, W^{ik}\,d\alpha_i$$

und die Division durch dp_h liefert

408) $$\frac{\partial\beta_k}{\partial p_h} = W_h^k + \sum_1^s{}_i\, W^{ik}\frac{\partial\alpha_i}{\partial p_h}.$$

Substituieren wir in

409) $$(\alpha_k, \alpha_l) = \sum_{h=1}^{h=s}\left(\frac{\partial\alpha_k}{\partial p_h}\frac{\partial\alpha_l}{\partial q_h} - \frac{\partial\alpha_k}{\partial q_h}\frac{\partial\alpha_l}{\partial p_h}\right)$$

die Werte 404) und 405), so folgt

$$(\alpha_k, \alpha_l) = \frac{1}{\Delta^2}\sum_{h=1}^{h=s}\sum_{i=1}^{i=s}\left(\Delta_i^k\Delta_h^l - \Delta_h^k\Delta_i^l\right)W_{ih}.$$

In dieser Doppelsumme ist der Koeffizient von W_{hi} gleich und entgegengesetzt bezeichnet, wie der von W_{ih}. Da aber $W_{hi} = W_{ih}$, so hebt sich das Glied mit W_{hi} gegen das mit W_{ih} und daher heben sich überhaupt je zwei Glieder der Doppelsumme gegenseitig und man hat also

410) $$(\alpha_k, \alpha_l) = 0.$$

Wir wollen nun in den Ausdruck

$$(\alpha_k, \beta_l) = -(\beta_l, \alpha_k) = \sum_{h=1}^{h=s}\left(\frac{\partial\alpha_k}{\partial p_h}\frac{\partial\beta_l}{\partial q_h} - \frac{\partial\alpha_k}{\partial q_h}\frac{\partial\beta_l}{\partial p_h}\right)$$

zunächst nur für

$$\frac{\partial \beta_l}{\partial q_h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \beta_l}{\partial p_h}$$

die Werte 407) und 408) substituieren. Es folgt

$$(\alpha_k, \beta_l) = -\sum_{h=1}^{h=s} \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h} W_h^l + \sum_{\iota=1}^{\iota=s} W^{\iota l} \sum_{h=1}^{h=s} \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_h} \frac{\partial \alpha_\iota}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h} \frac{\partial \alpha_\iota}{\partial p_h}\right).$$

Im zweiten Addenden rechts ist die nach h genommene Doppelsumme nichts anderes als (α_k, α_ι), verschwindet also nach 410). Im ersten Summanden substituieren wir für $\partial \alpha_k / \partial q_h$ den Wert 405). Nach einem bekannten Satze der Determinantenlehre ist gemäß der Definitionen 402) und 403)

$$\sum_1^s{}_h W_h^l \varDelta_h^k$$

gleich Null oder gleich $\varDelta$, je nachdem k gleich l oder davon verschieden ist. Daher ist auch

$$411) \quad \begin{cases} (\alpha_k, \beta_l) = -(\beta_l, \alpha_k) = -1 \quad \text{für} \quad k = l, \\ (\alpha_k, \beta_l) = -(\beta_l, \alpha_k) = 0 \quad \text{für} \quad k \gtrless l. \end{cases}$$

Substituiert man endlich in

$$(\beta_k, \beta_l) = \sum_{h=1}^{h=s} \left(\frac{\partial \beta_k}{\partial p_h} \frac{\partial \beta_l}{\partial q_h} - \frac{\partial \beta_k}{\partial q_h} \frac{\partial \beta_l}{\partial p_h}\right)$$

die Werte 407) und 408), so erhält man drei Glieder.

1. Die dreifache Summe

$$\sum_1^s{}_i \sum_1^s{}_j W^{ik} W^{jl} \sum_1^s{}_h \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial p_h} \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_h} \frac{\partial \alpha_j}{\partial p_h}\right),$$

welche verschwindet, da die nach h zu nehmende Summe gleich (α_i, α_j) ist.

2. Vermöge des nach 408) außerhalb der Summe stehenden Gliedes von $\partial \beta_k / \partial p_h$ die Doppelsumme

$$\sum_{\iota=1}^{\iota=s} W^{\iota l} \sum_{h=1}^{h=s} W_h^k \frac{\partial \alpha_\iota}{\partial q_h},$$

welche sich durch Substitution des Wertes 405) unter Anwendung der soeben angewendeten Sätze über Determinanten auf W^{kl} reduziert.

3. Vermöge des analogen Gliedes von $\partial \beta_l / \partial p_k$ die Doppelsumme

$$-\sum_{i=1}^{i=s} W^{ik} \sum_{h=1}^{h=s} W_h^l \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_h},$$

welche sich ebenso auf $-W^{kl}$ reduziert. Es ist also allgemein

412) $$(\beta_k, \beta_l) = 0$$

Vermöge der Relationen 410), 411) und 412) nehmen die Gleichungen 397) die einfache Form an:

413) $$\frac{d\alpha_k}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_k}, \quad \frac{d\beta_k}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_k}.$$

§ 73. Integration des Störungsproblems durch eine der Hamiltonschen analoge partielle Differentialgleichung.

Die Konstanten α in dem vollständigen Integral W der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung 294) sind irgendwelche Funktionen der Anfangswerte $\mathfrak{p}$ der Koordinaten. Wir können sie jedenfalls gleich den $\mathfrak{p}$ selbst setzen. Dann wird nach 292)

$$\frac{\partial W}{\partial \mathfrak{p}_h} = -\mathfrak{q}_h.$$

Die β werden also gleich den negativen $\mathfrak{q}$. Wir können also in den Gleichungen 413) die α den $\mathfrak{p}$ gleichsetzen. Dann werden die β gleich den negativen $\mathfrak{q}$ und erhalten so wieder die Gleichungen 374), von denen wir in der Beweisführung des § 69 ausgingen.

Wir sahen in § 58, daß jedesmal, wenn zwischen den $2s$ Variabeln $p_1, p_2, \ldots q_s$ Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{dp_h}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_h}, \quad \frac{dq_h}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_h}$$

bestehen, wobei E eine beliebige Funktion $E(p, q, t)$ der p, q und der Zeit sein kann und keineswegs bezüglich der q homogen und vom zweiten Grade sein muß, deren Integrale aus einem vollständigen Integrale der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + E\left(p, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) = 0,$$

welche der Hamiltonschen vollkommen analog ist, hergeleitet werden können. Dies gilt also auch hier, da die Gleichungen 413) genau die in Rede stehende Form haben. Die entsprechende partielle Differentialgleichung wäre, wenn wir das betreffende W mit dem Index 1 versehen:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} - \Omega = 0 \tag{414}$$

wo in Ω die p und q durch t, α und β auszudrücken sind und nachher für jedes β_h zu setzen ist $\frac{\partial W}{\partial \alpha_h}$.

Nehmen wir an, wir hätten ein vollständiges Integral dieser partiellen Differentialgleichung $W_1(\alpha_h, \alpha'_h, t)$ gefunden, wobei die α'_h die s unabhängigen Integrationskonstanten sind, von denen keine additiv zu W hinzukommen darf. Dann sind durch die Gleichungen

$$\frac{\partial W_1}{\partial \alpha'_h} = \beta'_h$$

die Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen 413) gegeben. Die α' und β' sind die $2s$ Integrationskonstanten. Übrigens würde nichts hindern, die Rolle der α und β zu vertauschen. Dann würde

$$\frac{\partial W_1}{dt} + \Omega = 0,$$

die partielle Differentialgleichung und die α wären durch $\partial W_1 / \partial \beta$ zu ersetzen.

Man kann übrigens in der folgenden Weise umgekehrt, die partielle Differentialgleichung 414) direkt ableiten, und so W_1 durch die früher eingeführten Funktionen ausdrücken.

Sei W_0 ein vollständiges Integral der **Hamiltonschen** partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} + E = \frac{\partial W_0}{\partial t} + T + V = 0$$

für das ungestörte Problem. α seien die s Konstanten desselben.

415)
$$\frac{\partial W_0}{\partial \alpha_h} = \beta_h$$

seien die Integrale der Gleichungen 386) des ungestörten Problems, die entsprechenden q sind durch die Gleichungen

416)
$$\frac{\partial W_0}{\partial p_h} = q_h$$

gegeben. Es sei nun W die Wirkungsfunktion für das variierte Problem, also

$$\frac{\partial W}{\partial t} + E + \Omega = 0,$$

wobei W als Funktion von t, p und deren Anfangswerte p^0 ausgedrückt zu denken ist. Dann ist bei konstanten p^0

417)
$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial W}{\partial p_h} dp_h = -(E + \Omega) dt + \sum q_h \, dp_h.$$

Es sollen nun in den Gleichungen 415) die α und β gleich solchen Funktionen der Zeit gesetzt werden, daß die daraus folgenden Werte von p die Lösungen der Gleichungen 387) für das gestörte Problem sind. Setzt man in W_0 ebenfalls α und β gleich diesen Funktionen der Zeit, so soll es in $\bar{W}_0$ übergehen, was keineswegs mit W identisch ist, da $\bar{W}_0$ die Größe ist, in welche

$$\int_{t_0}^{t} (T + V) \, dt$$

übergeht, wenn man vor Ausführung der Integration darin die p und q aus den Gleichungen 415) und 416) entnimmt, und dabei α und β konstant betrachtet und erst nach Ausführung der Integration α und β gleich den betreffenden Funktionen der Zeit setzt, wogegen in

$$W = \int_{t_0}^{t} (T + V + \Omega)\, dt$$

die p und q zwar auch den Gleichungen 415) und 416) zu entnehmen, aber schon vor Ausführung der Integration die α und β als Funktionen der Zeit zu betrachten sind. Es folgt

$$d\overline{W}_0 = \frac{\partial W_0}{\partial t} dt + \sum_1^s{}_h \frac{\partial W_0}{\partial p_h} dp_h + \sum_1^s{}_h \frac{\partial W_0}{\partial \alpha_h} d\alpha_h$$

und da die Gleichungen 415) und 416) bei konstanten α und β genau ebenso wie bei variabeln aussehen

$$d\overline{W}_0 = -E\,dt + \sum_1^s{}_h q_h\, dp_h + \sum_1^s{}_h \beta_h\, d\alpha_h.$$

Subtrahiert man hiervon die Gleichung 417), so folgt also

$$d(\overline{W}_0 - W) = \Omega\, dt + \sum_1^s{}_h \beta_h\, d\alpha_h.$$

Bezeichnen wir nun die Differenz $\overline{W}_0 - W$ mit W_1, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = \Omega, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_h} = \beta_h.$$

Drückt man in der ersten dieser Gleichungen Ω durch t und die α und β aus und substituiert statt der β wieder $\frac{\partial W}{\partial \alpha}$, so hat man wieder die partielle Differentialgleichung, welche der Hamiltonschen vollkommen analog ist.

§ 74. Anwendung auf die Astronomie.

Wir haben schon in § 67 bemerkt, daß wir alle physikalischen Probleme ohne Ausnahme nur angenähert zu lösen vermögen, so daß der Fall die Regel bildet, daß größere

Annäherungen an die Wirklichkeit nach einer Methode gefunden werden müssen, welche dem Wesen nach mit der eben entwickelten Störungsrechnung übereinstimmt. Die höchste Vollendung hat aber diese Störungsrechnung in der Astronomie gefunden und es sei daher hier gestattet, die Grundprinzipien der astronomischen Störungstheorie gewissermaßen als typisches Beispiel zu entwickeln.

Wir betrachten zu diesem Behufe die Sonne samt allen Planeten und stellen uns die Aufgabe, die Störungen zu berechnen, welche die Bahn eines derselben (wir wollen ihn Kürze halber den Mars nennen) durch die übrigen Planeten erfährt. Wir betrachten sämtliche Himmelskörper als materielle Punkte von bestimmter Masse, welche nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze aufeinander wirken. Wir beziehen sie zunächst auf ein fest mit dem Fixsternhimmel verbundenes Koordinatensystem. Sei m_s die Sonnenmasse, ξ_s, η_s, ζ_s ihre rechtwinkligen Koordinaten zu einer bestimmten Zeit t. Dieselben Größen sollen zur selben Zeit für den Mars die Werte m_0, ξ_0, η_0, ζ_0, für die anderen Planeten m_1, ξ_1, η_1, ζ_1, m_2, ξ_2, η_2, ζ_2 ... m_n, ξ_n, η_n, ζ_n haben. Ferner sei r_{hk} die Entfernung der Masse mit dem Index h und der mit dem Index k und $\varkappa$ die Gravitationskonstante.

Dann können die Bewegungsgleichungen in der Form geschrieben werden

$$\frac{d^2 \xi_h}{d t^2} = - \varkappa \sum_{s,0}^{n}{}_k \frac{(\xi_h - \xi_k) m_k}{r_{hk}^3}.$$

Dabei wurde mit m_h wegdividiert. Dem h kann jeder der Werte s, 0, 1, 2 ... n erteilt werden und ebenso ist die Summe so zu verstehen, daß dem k die Werte s, 0, 1, 2 ... n zu erteilen sind. Das Glied, für welches $h = k$ ist, ist aus der Summe wegzulassen. Analoge Gleichungen gelten für die y- und z-Achse.

Wir setzen nun

$$\xi_h - \xi_s = x_h, \quad \eta_h - \eta_s = y_h, \quad \zeta_h - \zeta_s = z_h$$

$$\varrho_h = \sqrt{x_h^2 + y_h^2 + z_h^2} = r_{sh},$$

so daß ϱ_h die Entfernung des Planeten mit der Masse m_h von der Sonne ist und

$$r_{hk} = \sqrt{(x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + (z_h - z_k)^2}$$

wird. Dann lautet die auf die x-Achse bezügliche Bewegungsgleichung für die Sonne

$$\frac{d^2 \xi_s}{d t^2} = \frac{\varkappa m_0 x_0}{\varrho_0^3} + \varkappa \sum_1^n {}_k \frac{m_k x_k}{\varrho_k^3},$$

die entsprechende Gleichung für den Mars aber lautet

$$\frac{d^2 \xi_0}{d t^2} = - \frac{\varkappa m_s x_0}{\varrho_0^3} - \varkappa \sum_1^n {}_k \frac{m_k (x_0 - x_k)}{r_{0k}^3}.$$

Die Subtraktion der beiden letzten Gleichungen liefert

$$\frac{d^2 x_0}{d t^2} = - \frac{\varkappa (m_0 + m_s) x_0}{\varrho_0^3} - \varkappa \sum_1^n {}_k m_k \left(\frac{x_k}{\varrho_k^3} + \frac{x_0 - x_k}{r_{0k}^3} \right).$$

Analoge Gleichungen gelten für die y- und z-Richtung. Wir werden im folgenden den Index Null weglassen, die übrigen Indizes aber unverändert beibehalten, so daß die letzte Gleichung sich so schreibt

$$418) \qquad \frac{d^2 x}{d t^2} = - \varkappa \frac{(m_s + m) x}{\varrho^3} - \varkappa \sum_1^n {}_k m_k \left(\frac{x_k}{\varrho_k^3} + \frac{x - x_k}{r_k^3} \right)$$

mit zwei analogen, für die y- und z-Richtung.

Hier sind x, y, z die Koordinaten des Planeten, dessen Störung wir bestimmen wollen bezüglich eines Koordinatensystems OX, OY, OZ, dessen Koordinatenachsen fixe Richtungen im Raume (gegen den Fixsternhimmel) haben, dessen Ursprung aber immer im Sonnenmittelpunkte liegt. Die zeitlichen Änderungen von x, y, z bestimmen also die Bewegung des Mars relativ gegen die Sonne, also jene Bewegung, welche gerade der Beobachtung zugänglich ist. x_k, y_k, z_k sind die Koordinaten irgend eines anderen Planeten relativ gegen das Koordinatensystem OX, OY, OZ, also relativ gegen die Sonne,

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ist die Entfernung des Mars von der Sonne,

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}$$

die von jenem anderen Planeten,

$$\varrho_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}$$

die jenes anderen Planeten von der Sonne.

Es stellt nun das erste Glied der rechten Seite der Gleichung 418) die ungestörte Bewegung des Mars relativ gegen die Sonne dar, welche genau so erfolgt, wie seine absolute Bewegung im Raume erfolgen würde, wenn die Sonne ein im Raume fixer Zentralkörper von der Masse $m_s + m$ wäre; die übrigen Glieder aber stellen die Störungen durch die anderen Planeten dar. Alle betreffenden Kräfte haben eine Kraftfunktion. Setzt man nämlich

$$419)\quad V = -\frac{\varkappa(m_s + m)}{\varrho}, \quad \Omega = \varkappa \sum_1^n {}_k\, m_k \left(\frac{x x_k + y y_k + z z_k}{\varrho_k^3} - \frac{1}{r_k} \right),$$

so kann die Gleichung 415) so geschrieben werden:

$$419\text{a})\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{d t^2} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, & \dfrac{d^2 y}{d t^2} = -\dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ & \dfrac{d^2 z}{d t^2} = -\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{cases}$$

Es ist also V die Kraftfunktion bei der ungestörten Bewegung, Ω die der störenden Kräfte. Wir haben daher folgende beiden Aufgaben zu lösen: 1. Wir haben die ungestörte Bewegung mittels der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung zu bestimmen, wobei wir sechs Integrationskonstanten α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 erhalten. 2. Wir haben statt dieser Konstanten mittels der Gleichungen 413) solche Funktionen der Zeit einzuführen, daß die gestörte Bewegung dargestellt wird.

§ 75. Hamilton-Jacobische Methode der Lösung des Zwei-Korperproblems.

Die erste Aufgabe fällt sachlich zusammen mit der Bestimmung der elliptischen Bahn eines Planeten um die

Sonne, welche wir schon im I. Teile § 21 ausgeführt haben. Wir müssen also hier diese Aufgabe ein zweites Mal nach einer ganz verschiedenen Methode lösen.

Wir bestimmen die Lage des in Betracht kommenden Planeten M (des Mars) im Raume in folgender Weise. Wir denken uns die Sonne S im Mittelpunkte des kugelförmigen Himmelsgewölbes und die Ekliptik als größten Kreis des letzteren. Daß die Lage dieses größten Kreises so gewählt wird, daß die (natürlich ebenfalls gestörte) Erdbahn zu einer gewissen Zeit in seine Ebene fällt, ist für unsere Rechnungen unwesentlich. Nur daß alle Planeten sich nicht allzu weit von dieser Ebene entfernen, wird benutzt. Der größte Kreis der Himmelskugel, welcher durch den Pol der Ekliptik und den Planeten M geht, treffe die Ekliptik im Punkte N. Der Winkelabstand dieses Punktes vom Frühlingspunkte (die Länge des Planeten) heiße φ, der Winkel MSN (die Breite des Planeten) heiße ϑ (vergl. Fig. 10 S. 298). Dann sind ϱ, ϑ und φ gewöhnliche Polarkoordinaten. Die Formeln 419a) zeigen, daß die Bewegung des Mars relativ gegen die Sonne genau so vor sich geht, wie dessen absolute im Raume geschähe, wenn seine Masse gleich eins wäre und V resp. Ω die Kraftfunktionen für die ungestörte Bewegung resp. die der störenden Kräfte wären. Es genügt daher das letztere Problem zu lösen. Für dasselbe wäre die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}[\varrho'^2 + \varrho^2 \vartheta'^2 + \varrho^2 \cos^2\vartheta\, \varphi'^2]$$

(vgl. § 11, wo r für ϱ und $90^0 - \vartheta$ für ϑ geschrieben ist).

Daraus ergibt sich

$$q_1 = \frac{\partial T}{\partial \varrho'} = \varrho', \quad q_2 = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = \varrho^2 \vartheta', \quad q_3 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \varrho^2 \cos^2\vartheta\, \varphi',$$

daher

$$T = \tfrac{1}{2}\left[q_1^2 + \frac{q_2^2}{\varrho^2} + \frac{q_3^2}{\varrho^2 \cos^2\vartheta}\right].$$

Setzt man $\varkappa(m_s + m) = \lambda$, so wird also

$$V = -\frac{\lambda}{\varrho}, \quad E = T - \frac{\lambda}{\varrho}.$$

Die **Hamilton**sche partielle Differentialgleichung $\frac{\partial W}{d t} + E = 0$ lautet also, wenn man für E den Wert $T - \frac{\lambda}{\varrho}$ und darin für q_1, q_2, q_3 die Ausdrücke $\frac{\partial W}{\partial \varrho}$, $\frac{\partial W}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial W}{\partial \varphi}$ substituiert, wie folgt:

$$\frac{\partial W}{d t} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2 \cos^2 \vartheta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right] - \frac{\lambda}{\varrho} = 0.$$

Ein vollständiges Integrale dieser partiellen Differentialgleichung finden wir folgendermaßen: Wir setzen

$$W = \alpha_1 t + \alpha_2 \varphi + P + \Theta,$$

wobei P nur Funktion von ϱ, Θ nur Funktion von ϑ sein soll. Dadurch nimmt die partielle Differentialgleichung die Gestalt an:

$$\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d P}{d \varrho}\right)^2 + \frac{1}{2\varrho^2}\left(\frac{d \Theta}{d \vartheta}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{2 \varrho^2 \cos^2 \vartheta} - \frac{\lambda}{\varrho} = 0,$$

welcher genügt wird, wenn man setzt

$$\left(\frac{d \Theta}{d \vartheta}\right)^2 = \alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}, \qquad \left(\frac{d P}{d \varrho}\right)^2 = \frac{2\lambda}{\varrho} - 2\alpha_1 - \frac{\alpha_3^2}{\varrho^2}.$$

Bezeichnet man mit ϑ_1 und ϱ_1 die unteren Integrationsgrenzen, welche wir nach Belieben wählen können, so wird also

$$\Theta = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} d\vartheta \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}}, \qquad P = \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{d \varrho}{\varrho} \sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1 \varrho^2 - \alpha_3^2}.$$

$$\text{420)} \quad \left\{ \begin{aligned} W = \alpha_1 t + \alpha_2 \varphi + \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} d\vartheta \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}} \, + \\ + \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} \sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^2 - \alpha_3^2}. \end{aligned} \right.$$

Die drei Integrale der Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3$$

verwandeln sich daher in:

$$421)\quad \beta_1 = t - \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^2 - \alpha_3^2}}$$

$$422)\quad \beta_2 = \varphi - \alpha_2 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta\sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\vartheta}}}$$

$$423)\quad \beta_3 = \alpha_3 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\vartheta}}} - \alpha_3 \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^2 - \alpha_3^2}}.$$

Aus dem zweiten folgt

$$424)\quad d\varphi = \alpha_2 \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta\sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\vartheta}}}.$$

Ist daher $\alpha_2 = \alpha_3$, so ist ϑ immer gleich Null und die Bahn des Planeten fällt genau in die Ekliptik. In allen anderen Fällen muß $\alpha_2 < \alpha_3$ sein. Nun bewegen sich aber alle Planeten in Bahnen, die der Ekliptik nahe liegen, um die Sonne. Es wächst also φ fortwährend, ϑ dagegen schwankt zwischen einem positiven und negativen Werte, also, da der Grenzwert von ϑ nur eintreten kann, wenn die Wurzel der Formel 424) verschwindet, zwischen dem kleinsten positiven und den dem Zahlenwerte nach kleinsten negativen Winkel, dessen Kosinus gleich α_2/α_3 ist. Dieser Winkel ist aber der Winkel ψ zwischen der Bahnebene des Planeten und der Ekliptik. Es ist also

$$425)\quad \cos\psi = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}.$$

ϑ nimmt jedenfalls auch den Wert Null an, wir können daher $\vartheta_1 = 0$ setzen.

Aus Formel 421) erhalten wir

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{\varrho}\sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^2 - \alpha_3^2}.$$

Für das Perihel und Aphel verschwindet $d\varrho/dt$. Ist also ϱ_1 die Perihel-, ϱ_2 die Apheldistanz des Planeten (Mars) von der Sonne, so sind diese Größen die Wurzeln der Gleichung

$$\varrho^2 - \frac{\lambda}{\alpha_1}\varrho + \frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1} = 0.$$

Es ist also

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{\lambda}{\alpha_1}, \qquad \varrho_1\varrho_2 = \frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1}.$$

ϱ_1 soll zugleich in den Integralen 420) bis 423) als untere Grenze für ϱ gewählt werden. Wenn wir dann mit τ eine der Zeiten bezeichnen, wann der Planet (Mars) das Perihel passiert, folgt aus Gleichung 421)

426) $$\beta_1 = \tau.$$

Ist nun a die große, b die kleine Halbachse der Bahnellipse des Mars, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ die Exzentrizität dieser Ellipse, so folgt

$\varrho_1 = a(1-e), \quad \varrho_2 = a(1+e), \quad \varrho_1 + \varrho_2 = 2a, \quad \varrho_1\varrho_2 = a^2(1-e^2),$

daher

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{2a}, \qquad \alpha_3 = \sqrt{\lambda a(1-e^2)} = \sqrt{\lambda p},$$

wobei p der Parameter, die zum Brennpunkte gehörige Ordinate der Bahnellipse ist.

Wir wollen uns nun in Fig. 10 die Lage der verschiedenen Punkte auf der Himmelskugel versinnlichen.

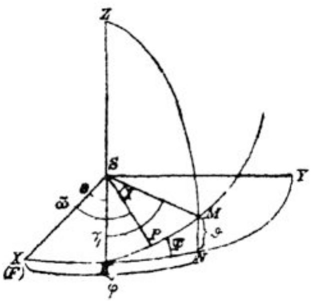

Fig. 10.

XY sei die Ekliptik, X der Frühlingspunkt, Z der Pol der Ekliptik, K der aufsteigende Knoten der Marsbahn, P das Perihel des Mars, M der Punkt, wo sich der Mars zu irgend einer Zeit t befindet. Dann sind $\sphericalangle XSN = \varphi$ und $\sphericalangle MSN = \vartheta$ die Polarkoordinaten des Mars M zur Zeit t, $\sphericalangle MKN = \psi$ ist die Neigung der Marsbahn gegen die Ekliptik, $\sphericalangle XSK = \theta$ ist die Länge des aufsteigenden Knotens der Marsbahn.

Bezeichnen wir den Winkel KSM mit η, so folgt aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke MKN

$$\text{427)}\qquad \sin\vartheta = \sin\psi\sin\eta$$

und wir können, da ψ konstant ist, in dem ersten Integrale der Gleichung 423) η statt ϑ als Integrationsvariable einführen. Da $\cos\psi = \alpha_2/\alpha_3$ war und wir $\vartheta_1 = 0$ wählten, so wird dieses Integral

$$\alpha_3\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\vartheta}}} = \eta$$

und die Gleichung 423) geht über in

$$\text{428)}\qquad \beta_3 = \eta - \alpha_3\int_{\varrho_1}^{\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^2 - \alpha_3^2}}\cdot$$

Da man für den aufsteigenden Knoten K hat $\vartheta = 0$, so folgt aus 422)

$$\beta_2 = \theta$$

und aus 428) folgt

$$\beta_3 = \eta_P,$$

wobei η_P der dem Perihel der Marsbahn zugehörige Wert des η ist. In der Astronomie nennt man die Summe $\theta + \eta_P$ die Länge $\tilde\omega$ des Perihels der Marsbahn, den Winkel MSP die wahre Anomalie χ des Mars zur Zeit t, $\eta + \theta = \tilde\omega + \chi$ seine in der Bahn gemessene Länge, φ aber seine in der Ekliptik gemessene Länge. Es ist also

$$\beta_3 = \eta_P = \tilde\omega - \theta$$
$$\chi = \eta + \theta - \tilde\omega = \eta - \eta_P.$$

Zwischen den sechs Integrationskonstanten

$$\text{429)}\qquad a,\ e,\ \psi,\ \tau,\ \theta,\ \tilde\omega$$

und

$$\text{430)}\qquad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$$

bestehen also die Gleichungen:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{2a},\quad \alpha_2 = \cos\psi\sqrt{\lambda a(1-e^2)}.\quad \alpha_3 = \sqrt{\lambda a(1-e^2)} = \sqrt{\lambda p}.$$

$$\beta_1 = \tau, \quad \beta_2 = \theta, \quad \beta_3 = \tilde{\omega} - \theta \tag{431}$$
$$a = \frac{\lambda}{2\alpha_1}, \quad e^2 = 1 - \frac{2\alpha_1 \alpha_3^2}{\lambda^2}, \quad \cos\psi = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}.$$

Die beiden Konstanten θ und ψ bestimmen die Lage der Bahnebene jedes beliebigen Planeten, $\tilde{\omega}$ bestimmt dann die Richtung nach dem Perihel, τ die Durchgangszeit durch das Perihel.

Wie man dann mittels a, e den wirklichen Ort des Planeten im Raume zu jeder Zeit finden kann, sahen wir schon im I. Teile § 21. Man führt die mittlere Anomalie ein, indem man in Gleichung 421) setzt

$$\varrho = a(1 - e\cos u). \tag{432}$$

Die Integration liefert

$$\frac{\lambda}{\sqrt{a^3}}(t - \tau) = u - e\sin u. \tag{433}$$

Ist t gegeben, so wird zunächst aus dieser Gleichung das dazu gehörige u bestimmt; Gleichung 432) liefert dann ϱ. Die Einführung des Wertes 432) in 427) und Ausführung der Integration aber liefert:

$$\chi = \eta + \theta - \tilde{\omega} = 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}\right).$$

Aus dem Werte von η aber findet man ϑ mittels der Gleichung 427), während das sphärische Dreieck MKN der Fig. 10 liefert:

$$\mathrm{tg}(\varphi - \theta) = \cos\psi\,\mathrm{tg}\,\eta.$$

Es sind also sämtliche Polarkoordinaten ϱ, ϑ, φ und daher auch die rechtwinkligen x, y, z als Funktionen von t, a, e, ψ, τ, θ und $\tilde{\omega}$, daher vermöge der Gleichungen 431) auch als Funktionen von t, α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 gefunden.

§ 76. Gleichungen für die Störung der Bahn eines Planeten durch die übrigen.

In erster Annäherung geschieht nun die Bewegung des Mars in der Nähe einer gegebenen Zeit t in einer elliptischen Bahn mit gewissen Werten der Konstanten 429), daher auch der Konstanten 430). Die Störungen kann man so auffassen, als ob die Werte dieser Konstanten langsam geändert würden und es liefern die Gleichungen 413):

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}, \quad \frac{d\alpha_3}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3},$$
$$\frac{d\beta_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}, \quad \frac{d\beta_3}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}.$$

Nun folgt aus den Gleichungen 431):

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1} = \frac{\partial\Omega}{\partial\tau}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2} = \frac{\partial\Omega}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\beta_2} + \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial\beta_2} = \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega},$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3} = \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega},$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda}{2\alpha_1^2}\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{2a^2}{\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial\tau},$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\alpha_3^2}{\lambda^2 e}\frac{d\alpha_1}{dt} - \frac{2\alpha_1^3}{\lambda^2 e}\frac{d\alpha_3}{dt} = \frac{p}{\lambda e}\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} + \frac{1}{ae}\sqrt{\frac{p}{\lambda}}\frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\alpha_3\sin\psi}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega}\right) - \frac{\alpha_2}{\alpha_3^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda p}\sin\psi}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + (1-\cos\psi)\frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega}\right],$$

ferner ist

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1} = \frac{\partial\Omega}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} =$$
$$= -\frac{\lambda}{2\alpha_1^2}\frac{\partial\Omega}{\partial a} - \frac{\alpha_3^2}{\lambda^2 e}\frac{\partial\Omega}{\partial e} = -\frac{2a^2}{\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial a} - \frac{p}{e\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial e}.$$

Analog folgt

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda p}\sin\psi}\frac{\partial\Omega}{\partial\psi}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3} = -\frac{1}{ae}\sqrt{\frac{p}{\lambda}}\frac{\partial\Omega}{\partial e} + \frac{\cot\psi}{\sqrt{\lambda p}}\frac{\partial\Omega}{\partial\psi},$$

daher

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{2a^2}{\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial a} - \frac{p}{e\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial e},$$
$$\frac{\partial\theta}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda p}\sin\psi}\frac{\partial\Omega}{\partial\psi}.$$
$$\frac{d\tilde\omega}{dt} = \frac{d\beta_2}{dt} + \frac{d\beta_3}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda p}}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\psi} - \frac{1}{ae}\sqrt{\frac{p}{\lambda}}\frac{\partial\Omega}{\partial e}.$$

Hiermit sind sämtliche Störungsformeln berechnet. In der Astronomie bezeichnet man gewöhnlich den Faktor von $t - \tau$ in Gleichung 433) mit n und führt statt λ die Konstante n mittels der Gleichung $\lambda = n\sqrt{a^3}$ ein.

Berechnet man nur die Störungsglieder erster Ordnung so addieren sich die von den verschiedenen Himmelskörpern bewirkten Störungen. Um die Störung des Mars durch einen anderen Planeten (den Jupiter) zu berechnen, braucht man im Ausdrucke 419) für Ω nur ein Glied beizubehalten, hat also

$$\Omega = \frac{\varkappa m_1 (x x_1 + y y_1 + z z_1)}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}^3} - \frac{\varkappa m_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}.$$

Hier sind sowohl die Koordinaten x, y, z des Mars, als auch die Koordinaten x_1, y_1, z_1 des Jupiter in der früher auseinandergesetzten Weise durch t und die Werte der Größen 429) auszudrücken, welche für den betreffenden Planeten gelten. Bei der partiellen Differentiation nach den für den Mars geltenden Größen 429) ist t als konstant anzusehen. Die für den Jupiter geltenden Werte der Größen 429) sind bei Berechnung der Glieder erster Ordnung überhaupt als konstant zu betrachten, so daß Ω bloß als Funktion von t und den für den Mars geltenden Größen 429) ausgedrückt erscheint. Erst bei Berechnung der Störungsglieder höherer Ordnung müßte auch berücksichtigt werden, daß sich die Jupiterbahn, während derselbe störend wirkt, selbst ebenfalls langsam ändert.

VII. Gleichungen für die relative Bewegung.

§ 77. Absolute und relative Bewegung.

Wir können bloß die Abstände der Teile der verschiedenen Körper voneinander, also bloß deren relative Lage bestimmen. Es gibt keine Erfahrung, in der sich ein absoluter Raum bemerkbar machen würde. Trotzdem haben wir zu Anfang des I. Teiles ein bestimmtes Koordinatensystem eingeführt, welches nahezu die Rolle eines absoluten Raumes spielt. Wir taten dies bloß, weil sich bei Einführung dieses bestimmten Koordinatensystems die Gesetze für die relative Bewegung der Körper viel einfacher aussprechen lassen, als bei Einführung anderer ganz willkürlich gewählter Koordinatensysteme.

Wir wollen damit keineswegs die Wahrscheinlichkeit oder gar die Notwendigkeit behaupten, daß noch neue Erfahrungen gefunden werden könnten, mittels deren dieses besondere Koordinatensystem sich näher bestimmen ließe, oder welche eine Auswahl eines bestimmten, aus allen den Systemen, welche wir in § 11 des I. Teiles taugliche Bezugssysteme nannten und damit die Bestimmung eines absoluten Raumes gestatten, welche, wie man sich ausdrückt, die Existenz des absoluten Raumes beweisen würden.

Wir sahen nämlich in § 11 des I. Teiles, daß diese Reduktion der Bewegungsgesetze auf die einfachste Form keineswegs bloß bei Zugrundelegung eines einzigen bestimmten Koordinatensystems S eintritt, sondern daß man mit gleichem Erfolge sehr verschiedene Koordinatensysteme zugrunde legen kann. Alle diese Koordinatensysteme nannten wir dort taugliche Bezugssysteme. Die Richtung der Achsen im Raume kann dabei für einen bestimmten Zeitmoment und die Lage des Koordinatenanfangspunktes für zwei Zeitmomente ganz beliebig relativ gegen das eine schon als taugliches Bezugssystem gefundene Koordinatensystem S orientiert sein. Hat man jedoch für einen Zeitmoment die Richtung der Achsen gewählt, so ist sie dadurch für alle übrigen Zeitmomente bestimmt. Man bezeichnet alle Richtungen, welche eine bestimmte Achse dann zu allen Zeiten hat, als parallel.

Hat man ferner die Lage des Koordinatenursprungs zu zwei Zeitmomenten gewählt, so ist wieder die Lage des Koordinatenursprungs zu allen übrigen Zeitmomenten bestimmt. Man nennt die Bewegung, welche der Koordinatenursprung hierbei macht, eine geradlinige und gleichförmige.

Die Frage, wie sich die Gesetze der Lagenänderung der Körper modifizieren, d. h. wie sich die Bewegungsgleichungen verändern, wenn wir zu den verschiedenen Zeiten Coordinatensysteme zugrunde legen, welche diesen Bedingungen nicht genügen, ist offenbar von hohem theoretischen Interesse.

Sie ist aber auch von praktischem Werte; denn wir beobachten stets nur die Relativbewegung eines materiellen Systems gegen ein zweites, welches nahezu unveränderlich ist oder wenigstens als unveränderlich angesehen wird. So beobachten wir die Bewegung des Planetensystems relativ gegen den Fixsternhimmel, die irdischer Körper relativ gegen die Erde oder irgend welche fix mit ihr verbundene Objekte. Bei gewissen Experimenten beobachten wir auch die Bewegung von Flüssigkeiten oder sonstigen Gegenständen relativ gegen ein absichtlich in Rotation versetztes Gefäß oder Gehäuse. Die in einem bewegten Wagen oder Schiffe befindlichen Personen können die Bewegung ihrer Körper und anderer Gegenstände relativ gegen den Wagen oder das Schiff beobachten usw.

In allen diesen Fällen handelt es sich für uns lediglich um die relative Bewegung des ersten Systems gegen das zweite oder ein mit dem zweiten fix verbundenes Koordinatensystem. Letzteres hat in allen Fällen bis auf den ersten sicher nicht die Eigenschaften eines tauglichen Bezugssystems. Die Natur der Fixsterne ist uns viel zu unbekannt und der Fixsternhimmel selbst ein viel zu unbestimmter Begriff, als daß man mit Sicherheit entscheiden könnte, ob ein mit ihm fix verbundenes Koordinatensystem ein taugliches Bezugssystem wäre; aber Eigenbewegungen von Fixsternen sind bereits konstatiert und jedenfalls ist es auch da von Wichtigkeit zu wissen, was für einen Einfluß es auf die Bewegungsgleichungen des Planetensystems hätte, wenn das zugrunde gelegte Koordinatensystem kein taugliches Bezugssystem wäre.

Wenn die Bewegung eines Körpersystems relativ gegen ein zweites berechnet werden soll und die Bewegung des zweiten Systems relativ gegen ein taugliches Bezugssystem bekannt ist, so könnte man in jedem speziellen Falle so verfahren: man könnte zuerst die Bewegung des ersten

Systems relativ gegen dasselbe Bezugssystem berechnen und erst dann aus der relativen Bewegung beider Systeme gegen das gemeinsam zugrunde gelegte taugliche Bezugssystem die relative Bewegung des ersten Systems gegen das zweite berechnen.

Es ist aber von großem Vorteile, diese Arbeit nicht in jedem speziellen Falle besonders auszuführen, sondern ein für allemal die Regeln anzugeben, nach denen unmittelbar die Bewegung des ersten Systems relativ gegen das zweite System oder ein damit fix verbundenes Koordinatensystem gefunden werden kann, sobald die des zweiten Systems gegen ein taugliches Bezugssystem gegeben ist, welches wir das ruhende Koordinatensystem nennen. Wir nehmen an, daß sämtliche Teile des zweiten Systems starr miteinander verbunden sind. Mit ihm denken wir uns ein zweites (das bewegliche) Koordinatensystem starr verbunden. Die Aufgabe ist dann, die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung des ersten Körpersystems relativ gegen das bewegliche Koordinatensystem zu finden.

§ 78. Erster Spezialfall. Das bewegliche Koordinatensystem dreht sich nicht.

Wir betrachten nun zuerst den Spezialfall, daß das zweite System, daher auch das damit verbundene bewegliche Koordinatensystem keine Drehung relativ gegen ein taugliches Bezugssystem hat. Die Achsen des letzteren wollen wir mit $O_1 X_1$, $O_1 Y_1$ und $O_1 Z_1$ bezeichnen. Die Achsen OX, OY und OZ des beweglichen fest mit dem zweiten System verbunden Koordinatensystems wollen wir zu irgend einer Zeit den ersteren Koordinatenachsen parallel wählen. Sie werden ihnen dann zu allen Zeiten parallel bleiben und die Lage des beweglichen Koordinatensystems relativ gegen das taugliche Bezugssystem ist zu jeder Zeit bestimmt, wenn wir die Koordinaten a, b, c ihres Koordinatensprungs O bezüglich des tauglichen Bezugssystems kennen.

Da sich unserer Annahme gemäß alle Körper kontinuierlich bewegen, so wird auch die Bewegung des Systems, welches wir das zweite genannt haben, jedenfalls so beschaffen sein, daß a, b, c kontinuierliche Funktionen der Zeit sind, welche endliche erste und zweite Differentialquotienten haben. Dies soll also angenommen werden, da die entgegengesetzte Annahme keine physikalische Bedeutung hätte. Die Bewegung des zweiten Systems soll uns ferner gegeben sein. Es sollen also a, b, c bekannte Funktionen der Zeit sein.

Wir bezeichnen mit x_1, y_1, z_1 die auf das taugliche Bezugssystem bezogenen Koordinaten irgend eines materiellen Punktes m des ersten Systems, dessen Bewegung berechnet werden soll, während die des zweiten Systems und daher auch die der beweglichen Koordinatenachsen als gegeben vorausgesetzt wird.

Vermöge der Definition eines tauglichen Bezugssystems gelten für x_1, y_1, z_1 die gewöhnlichen Gleichungen der Mechanik

$$434)\qquad m\frac{d^2 x_1}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2 y_1}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2 z_1}{dt^2} = Z,$$

wobei X, Y, Z die Komponenten der auf m wirkenden Gesamtkraft in den drei Koordinatenrichtungen sind.

Diese drei Gleichungen würden uns die Bewegung des materiellen Punktes m relativ gegen das taugliche Bezugssystem bestimmen. Wir suchen aber nicht diese, sondern die Bewegung relativ gegen das bewegliche Koordinatensystem, also die Gleichungen für die Veränderungen der Koordinaten x, y, z, welche dem Massenpunkte m zukommen, wenn wir ihn auf das bewegliche Koordinatensystem beziehen.

Da die Achsen beider Koordinatensysteme immer parallel bleiben und die Koordinaten des Ursprungs des beweglichen Koordinatensystems bezüglich des tauglichen Bezugssystems a, b, c sind, so ist

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b, \quad z_1 = z + c.$$

Substituiert man dies in die Gleichungen 434), so erhält man

$$
435)\quad \left\{
\begin{aligned}
m\frac{d^2 x}{dt^2} &= X - m\frac{d^2 a}{dt^2}, \\
m\frac{d^2 y}{dt^2} &= Y - m\frac{d^2 b}{dt^2}, \\
m\frac{d^2 z}{dt^2} &= Z - m\frac{d^2 c}{dt^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dies sind die gewünschten Gleichungen, welche uns die Änderung der Koordinaten x, y, z eines beliebigen Massenpunktes m des fraglichen materiellen Systems, dessen relative Bewegung wir finden wollen und welches wir das erste System nannten, bezüglich des beweglichen mit dem zweiten System fix verbundenen Koordinatensystems angeben.

Die Bewegung des ersten Systems relativ gegen das bewegliche Koordinatensystem geschieht also genau so, als ob letzteres ein taugliches Bezugssystem wäre und auf jedes Massenteilchen m außer den Kräften X, Y, Z, welche in der Tat darauf wirken, noch die drei Kräfte $-m\,d^2a/dt^2$, $-m\,d^2b/dt^2$, $-m\,d^2c/dt^2$ in den drei Koordinatenrichtungen wirken würden.

Dadurch haben wir die neue Aufgabe auf eine schon bekannte zurückgeführt. Wir haben die Rechnung ganz so auszuführen, als ob das bewegliche Koordinatensystem ein taugliches Bezugssystem wäre; nur müssen wir den in der Tat wirkenden Kräften noch diese neuen Kräfte hinzufügen, durch deren Hinzufügung sich dann die Bewegungsgleichungen auf die alte uns schon gewohnte Form reduzieren; deshalb nennen wir diese hinzuzufügenden Kräfte die Reduktionskräfte.

Sei umgekehrt die Bewegung des ersten Systems relativ gegen das bewegliche Koordinatensystem gegeben und seien

$$
X_1 = X - m\frac{d^2 a}{dt^2}, \qquad Y_1 = Y - m\frac{d^2 b}{dt^2},
$$
$$
Z_1 = Z - m\frac{d^2 c}{dt^2}
$$

die Kräfte, welche dieselbe Bewegung relativ gegen ein taugliches Bezugssystem erzeugen würden, so sind

$$X = X_1 + m\,\frac{d^2 a}{d t^2}, \qquad Y = Y_1 + m\,\frac{d^2 b}{d t^2},$$
$$Z = Z_1 + m\,\frac{d^2 c}{d t^2}$$

die Kräfte, welche die Bewegung relativ gegen das in der vorgeschriebenen Weise bewegte Koordinatensystem erzeugen. Wir müssen daher den Kräften X_1, Y_1, Z_1, welche diese Bewegung relativ gegen ein taugliches Bezugssystem erzeugen würden, noch die Kräfte $m\frac{d^2 a}{d t^2}$, $m\frac{d^2 b}{d t^2}$, $m\frac{d^2 c}{d t^2}$ hinzufügen, um das System außerdem noch so zu führen, daß es dieselbe Bewegung relativ gegen das in der vorgeschriebenen Weise bewegte Koordinatensystem ausführt, weshalb wir die letzteren hinzuzufügenden Kräfte die Führungskräfte nennen wollen.

Es bestätigt sich neuerdings, daß die Reduktionskräfte nur gleich Null sind, d. h. daß die alte Form der Bewegungsgleichungen ohne Hinzufügung neuer Kräfte nur dann erhalten bleibt, wenn die Bewegung des zweiten Koordinatensystems relativ gegen das erste eine geradlinige und gleichförmige ist.

Wenn jede Masse jedes der beiden Systeme eine gleichgerichtete, der Masse proportionale Kraft wirken würde, so würde dadurch die Relativbewegung beider Systeme gar nicht geändert. Derartige Kräfte wären also für denjenigen, der nur jene beiden Systeme wahrnimmt, nicht bemerkbar. Größe und Richtung der auf die Masseneinheit wirkenden Kraft könnten dabei natürlich noch beliebig mit der Zeit veränderlich sein.

§ 79. Beispiele.

Als Beispiel für die Reduktionskräfte betrachten wir einen Eisenbahnwagen, welcher in der Richtung der Abszissenachse fährt. Irgend ein bestimmter Punkt desselben habe zur Zeit t die Abszisse a. An der Decke sei eine Hängelampe befestigt, auf einem fest mit dem Wagen verbundenen Tischchen stehe ein Glas, das eine Flüssigkeit enthält. Sobald die Geschwindigkeit des Wagens zu- oder abnimmt, bewegt sich die Lampe, sowie die im Glase enthaltene Flüssigkeit eventuell das Glas selbst, wenn es nicht genug Reibung gegen die Tischplatte hat, für einen relativ gegen den Wagen ruhenden Beschauer genau so, als ob zu jeder Zeit auf jedes Massenteilchen außer den in der Tat darauf wirkenden Kräften noch die Kraft $-m d^2 a / d t^2$ in der Richtung der Bewegung des Wagens wirkte.

Den Begriff der Führungskräfte illustriert folgende Betrachtung: Um in dem besprochenen Eisenbahnwagen einen menschlichen Körper ruhig auf einer Bank sitzend zu erhalten, muß zu den Kräften, welche auch im ruhenden Wagen wirken würden, auf jedes Massenteilchen noch die Kraft $m d^2 a / d t^2$ in der Bewegungsrichtung des Wagens dazu kommen. Diese Kraft wird von der Rücklehne, dem Sitze eventuell dem Stützpunkte der Füße ausgehen und durch innere Kräfte passend auf die Massenteilchen des Körpers verteilt werden. Die Lehne wird bei Beschleunigung der Fahrt stärker, bei Verzögerung schwächer auf den Rücken drücken. Bei sehr starker Verzögerung, z. B. sehr plötzlichem Stillstand des Wagens kann der Druck der Lehne auf den Rücken negativ werden; man muß den Rücken mit Gewalt, z. B. die Füße anstemmend, an die Lehne andrücken, wenn der Oberkörper sich nicht nach vorne neigen soll.

Ein anderes Beispiel von Führungskräften ist folgendes. Man hält das eine Ende eines Fadens, den wir als unausdehnsam betrachten wollen, in der Hand; am anderen Ende des Fadens soll ein schwerer Körper befestigt sein. Die Hand soll dasjenige System sein, welches wir in der allgemeinen Theorie das zweite nannten, der schwere Körper soll das erste System sein. Wenn die Hand ruht oder sich gleichförmig bewegt, so muß die Spannung des Fadens, wenn der schwere Körper in relativer Ruhe gegen die Hand bleiben soll, genau gleich dem Gewichte desselben sein. Bewegt sich die Hand mit beschleunigter Bewegung vertikal nach abwärts, so muß auf den schweren Körper, wenn der Faden gleiche Länge behalten soll, eine abwärts wirkende Führungskraft hinzukommen, es muß daher, da dessen Gewicht unverändert bleibt, die aufwärts ziehende Spannung des Fadens abnehmen. Bewegt sich dagegen die Hand verzögert nach abwärts oder beschleunigt nach aufwärts, so muß die Spannung des Fadens wachsen, so daß dieser bei raschem Anhalten einer Abwärtsbewegung oder raschem Beginn einer schnellen Aufwärtsbewegung der Hand reißen kann, selbst wenn seine Festigkeit erheblich größer, als das Gewicht der angehängten Last ist.

§ 80. Zweiter Spezialfall. Das Koordinatensystem ist in Drehung begriffen.

Wir wollen nun den Spezialfall betrachten, daß das System, welches wir als das zweite bezeichnet haben, keine andere Bewegung hat, als daß es sich um eine in einem tauglichen Bezugssysteme fixe Achse relativ gegen dieses dreht.

Wir wählen die Drehungsachse $OZ = OZ_1$ zur Z-Achse. OX_1 und OY_1 seien zwei beliebige andere aufeinander und auf $OZ = OZ_1$ senkrechte Koordinatenachsen, deren Lage gegen das taugliche Bezugssystem unverändert bleibe, so daß die Koordinatenachsen OX_1, OY_1, OZ_1 selbst ein taugliches Bezugssystem bilden, da sie mit einem solchen fix verbunden sind.

Dagegen seien OX, OY zwei andere aufeinander und auf OZ senkrechte, ebenfalls durch den Punkt O gehende Koordinatenachsen, welche zu irgend einer Zeit (dem Zeitanfange) mit OX_1, OY_1 zusammenfielen, aber immer mit dem zweiten Systeme fest verbunden mit rotieren, so daß der Winkel $X_1 OX$ gleich demjenigen Winkel w ist, um welchen sich das zweite System zur betreffenden Zeit relativ gegen ein taugliches Bezugssystem im positiven Sinne gedreht hat. Derselbe soll eine gegebene Funktion der Zeit sein, welche einen endlichen ersten und zweiten Differentialquotienten hat, wodurch die Bewegung des zweiten Systems vollständig gegeben ist.

Wir suchen die Relativbewegung irgend eines anderen Massensystems (des ersten) gegen das zweite, also gegen die Achsen OX, OY, OZ. Wir haben also die Aufgabe, die Veränderungen der Koordinaten x, y, z eines beliebigen

Massenteilchens m des ersten Systems bezogen auf dieses Koordinatensystem zu finden. Wir könnten diese Aufgabe folgendermaßen lösen.

Seien x_1, y_1, z_1 die Koordinaten desselben Massenteilchens bezüglich des Koordinatensystems OX_1, OY_1, OZ_1 und X_1, Y_1, Z_1 die Komponenten der gesamten auf m wirkenden Kräfte in den Richtungen OX_1, OY_1, OZ_1; dann ist, da die letzteren Achsen ein taugliches Bezugssystem bilden

$$436)\qquad m\frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1\,,\quad m\frac{d^2 y_1^2}{dt^2} = Y_1\,,\quad m\frac{d^2 z_1}{dt^2} = Z_1\,.$$

Da ferner w der Winkel der beiden x-Achsen ist, so hat man

$$437)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x\cos w - y\sin w\,,\\ y_1 &= x\sin w + y\cos w\,,\\ z_1 &= z\,. \end{aligned}\right.$$

Da w als Funktion von t gegeben ist, kann man daraus die zweiten Differentialquotienten von x_1, y_1, z_1 nach der Zeit berechnen. Substituiert man sie in die Gleichungen 436), so ergeben sich daraus nach passenden Reduktionen die Gleichungen für die zweiten Differentialquotienten von x, y, z nach der Zeit, welche man sucht.

Doch ist dies Verfahren, wenn man es nicht durch Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen abkürzt, wovon später die Rede sein soll, etwas umständlich. Kürzer gelangt man zum Ziele, wenn man Semipolarkoordinaten einführt.

Sei r der senkrechte Abstand des Massenteilchens m von der z-Achse und seien ϑ und ϑ_1 die Winkel, welche r mit den beiden positiven Abszissenachsen OX und OX_1 einschließt. Dann sind r, ϑ_1 und z gewöhnliche Semipolarkoordinaten zur Bestimmung der Lage bezüglich eines tauglichen Bezugssystems. Wenn wir daher die Richtung der positiven z-Achse kurz als die z-Richtung, die Richtung der Verlängerung von r, welches wir uns immer von der z-Achse gegen die Masse m hingezogen denken, als die Richtung von r, und die auf beiden senkrechte in dem Sinne, in dem sich m bei wachsenden ϑ und ϑ_1 bewegt, gezogene Richtung als die Richtung von ϑ, und mit Z, R und Θ die Komponenten der auf m wirkenden Gesamtkraft in diesen drei Richtungen bezeichnen, so hat man nach § 11

$$438)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2 r}{d t^2} - m r\left(\dfrac{d\vartheta_1}{d t}\right)^2 = R, \\ m\cdot r\dfrac{d^2\vartheta_1}{d t^2} + 2m\dfrac{d\vartheta_1}{d t}\dfrac{d r}{d t} = \Theta. \\ m\dfrac{d^2 z}{d t^2} = Z. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen, welche uns die absolute Bewegung der Masse m, d. h. deren Bewegung bezogen auf ein taugliches Bezugssystem geben, finden wir sofort die gesuchte Relativbewegung, wenn wir statt ϑ_1 den Polarwinkel ϑ mit der beweglichen Achse OX einführen, da ja r und z von der Drehung nicht affiziert werden. Da wir den Winkel der beiden Abszissenachsen zur Zeit t mit w bezeichnet haben, so ist, wenn wir die Winkelgeschwindigkeit dw/dt des zweiten Koordinatensystems relativ gegen das taugliche Bezugssystem mit ω bezeichnen

$$\frac{d\vartheta_1}{d t} = \frac{d\vartheta}{d t} + \omega, \quad \frac{d^2\vartheta_1}{d t^2} = \frac{d^2\vartheta}{d t^2} + \frac{d\omega}{d t}.$$

Substituiert man dies in die Gleichungen 438), so folgt:

$$439)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2 r}{d t^2} - m r\left(\dfrac{d\vartheta}{d t}\right)^2 = R + m r\omega^2 + 2 m r\omega\dfrac{d\vartheta}{d t}, \\ m r\dfrac{d^2\vartheta}{d t^2} + 2m\dfrac{d\vartheta}{d t}\dfrac{d r}{d t} = \Theta - m r\dfrac{d\omega}{d t} - 2m\omega\dfrac{d r}{d t}, \\ m\dfrac{d^2 z}{d t^2} = Z. \end{cases}$$

§ 81. Interpretation der gefundenen Gleichungen.

Die Gleichungen für die Veränderung von r, ϑ und z sind hiermit wieder genau in die Form der Gleichungen 438) gebracht. Die Bewegung relativ gegen das sich drehende Koordinatensystem geschieht also wieder genau so, als ob dasselbe fix (d. h. ein taugliches Bezugssystem) wäre und auf irgend einen materiellen Punkt m außer den Kräften, welche tatsächlich darauf wirken, noch folgende Kräfte wirksam wären:

1. Eine Kraft von der Intensität $m r \omega^2$, in der Richtung von r, welche wir die Zentrifugalkraft K_1 nennen wollen.

2. Eine Kraft von der Intensität $m r\, d\omega/dt$, welche der Richtung, die wir die Richtung ϑ genannt haben, gerade entgegenwirkt. Diese zweite Kraft wollen wir die tangentiale Reduktionskraft nennen und mit K_2 bezeichnen.

3. Eine Kraft von der Intensität $2 m \omega p$, wobei p die Projektion der gesamten Geschwindigkeit c des materiellen Punktes m auf die xy-Ebene ist. Diese dritte Kraft heißt die Coriolissche Kraft K_3. Ihre Richtung liegt in der xy-Ebene, steht senkrecht auf der Richtung der mit p bezeichneten Geschwindigkeitskomponente, also auch auf der Geschwindigkeit c selbst, und wirkt in dem Sinne, daß ihre Richtung in die Richtung von p durch eine Drehung in dem Sinne, in dem sich der Bezugskörper dreht, also bei positivem ω in demselben Sinne, wie die positive x-Achse in die positive y-Achse auf kürzestem Wege übergeführt wird.

Diese drei Kräfte wollen wir wieder die Reduktionskräfte nennen. Fügen wir sie für jeden materiellen Punkt m des Systems, welches wir das erste genannt haben, den ohnehin darauf wirkenden Kräften bei, so können wir die relative Bewegung dieses Systems gegen die in Drehung begriffenen Koordinatenachsen (oder gegen das damit fest verbundene zweite System) genau so berechnen, als ob dieselben ruhen würden, d. h. ein taugliches Bezugssystem wären.

Was wir unter 1. und 2. von der Zentrifugalkraft K_1 und der tangentialen Reduktionskraft K_2 gesagt haben, lehrt der unmittelbare Anblick der Gleichungen 439). Nur das unter 3. von der Coriolisschen Kraft K_3 Behauptetete bedarf noch der Erläuterung. Wenn man die Zentrifugalkraft K_1 und die tangentiale Reduktionskraft K_2 hinzugefügt hat, so muß man, wie der Anblick der Gleichungen 439) lehrt, noch zwei Kräfte hinzufügen, um aus den Gleichungen 439) solche Gleichungen zu erhalten, welche genau die Form der Gleichungen 438) haben, d. h. damit die Bewegung genau so geschieht, als ob die Achsen OX, OY, OZ ein taugliches Bezugssystem wären.

Diese beiden Kräfte, deren Hinzufügung noch notwendig ist, sind: 1. Die Kraft $R' = 2m\omega r\, d\vartheta/dt$ in der Richtung r. 2. Die Kraft $\Theta' = -2m\omega\, dr/dt$ in der Richtung von ϑ. Wir haben also noch nachzuweisen, daß die **Coriolissche** Kraft K_3 in der Tat die resultierende dieser beiden Kräfte ist. Dies geschieht so: dr/dt, $r\,d\vartheta/dt$ und dz/dt sind die drei Komponenten der Geschwindigkeiten c in den drei Richtungen r, ϑ und z. Die beiden ersten dieser Größen sind daher die Projektionen der mit p bezeichneten Geschwindigkeitskomponente in den Richtungen r und ϑ, so daß man hat:

$$\frac{dr}{dt} = p\cos(p, r), \qquad r\frac{d\vartheta}{dt} = p\sin(p, r).$$

Daher ist:

$$440)\left\{\begin{aligned} R' &= 2m\omega p\sin(p, r) = 2m\omega p\cos[\sphericalangle(p, r) - 90^{0}], \\ \Theta' &= 2m\omega p\cos(p, r) = 2m\omega p\sin[\sphericalangle(p, r) - 90^{0}], \end{aligned}\right.$$

R' und Θ' sind also in der Tat die Komponenten einer einzigen Kraft von der Intensität $K_3 = 2m\omega p$, deren Richtung um 90^0 gegen die Richtung von p in dem der Drehung des Bezugskörpers entgegengesetzten Sinne gedreht ist, also in dem Sinne, in welchem man die positive y-Achse auf kürzestem Wege in die Richtung der positiven x-Achse drehen kann.

Wenn umgekehrt gewisse Kräfte R_1, Θ_1 eine bestimmte Bewegung bezüglich eines tauglichen Bezugssystems hervorbringen, so müssen ihnen noch die Kräfte $-K_1$, $-K_2$ und $-K_3$ zugefügt werden, um dieselbe Bewegung relativ gegen ein sich mit der veränderlichen Winkelgeschwindigkeit ω drehendes Koordinatensystem zu erzeugen, $-K_1$, $-K_2$, und $-K_3$ sind also die Führungskräfte, welche den zur Erzeugung einer gewissen Bewegung bezüglich eines ruhenden Koordinatensystems erforderlichen Kräften noch hinzugefügt werden müssen, um jede Masse so zu führen, daß sie dieselbe Bewegung relativ gegen ein sich drehendes Koordinatensystem macht.

§ 82. Weitere Spezialisierung.

Wir können auf das erste materielle System gewisse äußere Kräfte wirkend denken, und nun die Kräfte, welche das zweite System auf das erste ausüben müßte, wenn das zweite ruhte, mit denjenigen vergleichen, welche es auf das erste ausüben muß, wenn sich das zweite in gegebener Weise bewegt, wobei in beiden Fällen dieselbe gegebene Relativbewegung angenommen wird. Die Kräfte, welche im zweiten Falle dazu kommen müssen, sind die Führungskräfte.

Wenn sich das bewegliche Koordinatensystem gleichförmig dreht und jedes Massenteilchen des ersten Systems relativ gegen dasselbe ruht, so verschwinden K_2 und K_3. Dann muß also das zweite System auf das erste, um die relative Ruhe zu erhalten, genau dieselben Kräfte ausüben, als ob bei gleichen äußeren Kräften beide ruhen würden, aber auf jedes Massenteilchen des ersten Systems noch die Zentrifugalkraft K_1 wirken würde, welche also in diesem Falle die einzige Zusatzkraft ist.

Auf jedes Massenteilchen des ersten Systems muß außer den Kräften, welche bei Ruhe beider Systeme das Gleichgewicht herhalten würden, noch eine der Zentrifugalkraft entgegengesetzte Kraft, die Zentripetalkraft, wirken, welche also die Führungskraft ist, die jedes Massenteilchen des ersten Systems in dem Kreise herumführt, den es bei der Drehung beschreibt.

Sobald die Drehung des zweiten Systems beschleunigt oder verzögert ist, tritt zur Zentripetalkraft noch die der tangentialen Reduktionskraft K_2 entgegengesetzte Kraft hinzu, von der im übrigen das Gleiche gilt wie von der Zentripetalkraft. Doch reichen auch diese beiden Kräfte noch nicht aus, sobald das erste System eine Bewegung relativ gegen das zweite macht. Dann tritt auch noch die der Coriolisschen Kraft K_3 entgegengesetzte auf. Will man den für die Relativbewegung des ersten Systems gegen das bewegliche Koordinatensystem geltenden Gleichungen dieselbe Form geben, als ob dieses ein taugliches Bezugssystem wäre, so muß man K_1, K_2, K_3 hinzufügen. Zu den Kräften aber, welche das ruhend gedachte zweite System auf das erste ausübt, muß man $-K_1$, $-K_2$, $-K_3$ hinzufügen, um die Kräfte zu finden, die es bei seiner vorgeschriebenen Bewegung auf das erste ausüben muß, um bei diesem die gleiche Relativbewegung zu unterhalten.

Sei z. B. der Hohlraum eines Gefäßes ein Rotationskörper mit vertikaler Achse, um welche das Gefäß mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in Drehung begriffen sei. Im Gefäße soll sich Quecksilber, Wasser und Öl befinden, eventuell sollen auch feste Körper darin sein. Vermöge der Reibung wird ein stationärer Zustand erst eintreten, wenn alle Flüssigkeiten und feste Körper weder untereinander noch gegen das rotierende Gefäß mehr eine Relativbewegung haben. Das betreffende Gleichgewicht kann genau so berechnet werden, als ob das Gefäß samt seinem Inhalte ruhen würde, aber auf jedes Massenteilchen des letzteren außer der Schwere noch die entsprechende Zentrifugalkraft wirken würde. Dadurch wird auch auf die Gefäßwand im ruhenden Gefäße derselbe Druck erzeugt, welcher im bewegten Gefäße unter dem Einflusse der Schwere allein herrscht.

Ebenso kann das Gleichgewicht eines an einem Faden aufgehängten schweren Körpers, der in gleichförmiger Rotation begriffen ist, genau so gefunden werden, als ob derselbe ruhte und auf jeden Punkt desselben außer der Schwere noch die Zentrifugalkraft wirkte. Vom Widerstande der nur teilweise mitrotierenden Luft ist dabei natürlich abgesehen. Damit dieser nicht stören würde, müßte der Aufhängefaden samt der umgebenden Luft in einem mit gleicher Geschwindigkeit rotierenden Gefäße eingeschlossen sein.

Wenn ein schwerer Körper irgendwo auf der Erde an einer unausdehnsamen oder elastischen Schnur aufgehängt ist und relativ gegen die Erde ruht, so verhält er sich genau so, als ob er samt der Erde ruhte und außer der Anziehung der Erde und der Spannung der Schnur noch die Zentrifugalkraft infolge der Achsendrehung der Erde auf ihn wirkte. Die Schnur nimmt also die Richtung der Resultierenden aus der wirklichen Anziehung der Erde auf den

Körper und der Zentrifugalkraft infolge der Erdrotation an. Diese Richtung heißt die Richtung der scheinbaren Schwere oder der scheinbaren Beschleunigung der Schwere oder kurz die Vertikalrichtung an der betreffenden Stelle der Erdoberfläche. Sie trifft, wenn diese Stelle auf der nördlichen Erdhälfte liegt, die Erdachse nicht im Erdmittelpunkte O', sondern südlich davon im Punkte O. Die Spannung der Schnur, welche den Körper trägt, ist ebenfalls nicht gleich der Anziehungskraft der Erde auf den Körper, sondern der Resultierenden dieser Anziehungskraft und der Zentrifugalkraft. Man nennt diese Resultierende, welche die Spannung der Schnur oder den Druck des schweren Körpers auf seine Unterlage im Falle der relativen Ruhe gegen den Erdkörper stets bestimmt, das scheinbare Gewicht jenes schweren Körpers an dieser Stelle der Erde. Das durch die Masse des Körpers dividierte scheinbare Gewicht nennt man die scheinbare Beschleunigung der Schwere an der betreffenden Stelle der Erde. Wenn ein Körper daselbst frei fällt, d. h. wenn außer der Erdanziehung keine Kraft auf ihn wirkt,[1]) so hat übrigens, wie wir sehen werden, seine Beschleunigung relativ gegen die Erde nur in Momenten, wo er gerade die Geschwindigkeit Null relativ gegen die Erde hat, genau die Größe und Richtung der im betreffenden Punkte herrschenden scheinbaren Beschleunigung der Schwere.

Wir werden in der Hydrostatik sehen, daß im Falle des Gleichgewichtes die Oberfläche einer Flüssigkeit immer senkrecht zur Resultierenden aller Kräfte stehen muß, die auf ein Teilchen der Oberfläche wirken. Die Meeresfläche muß daher im Zustande der relativen Ruhe gegen die Erde an jedem Orte senkrecht auf der Vertikalrichtung dieses Ortes stehen. Die Erfahrung lehrt, daß auch die Oberfläche des festen Erdkörpers, abgesehen von den gegen die Dimensionen der Erde verschwindend kleinen Erhebungen, Hügeln

[1]) Die durch seine Bewegung und die Erddrehung bedingten Zusatzkräfte sind dabei natürlich nicht zu den auf den Körper wirkenden Kräften gerechnet, da wir sie bloß fingieren, um uns die Rechnung zu erleichtern.

und Bergen, senkrecht auf dieser Richtung steht, vielleicht weil dieser zu einer Zeit, wo die Erde schon nahezu dieselbe Umdrehungsgeschwindigkeit hatte, flüssig war, vielleicht auch, weil er noch immer genügend verschiebbar ist, um in so langer Zeit die entsprechende Gestalt anzunehmen. Es ist daher die Erde keine Kugel, sondern nahezu ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid.

§ 83. Wiedereinführung rechtwinkliger Koordinaten.

Wir wollen zunächst in den Gleichungen 439) wieder die rechtwinkligen Koordinaten einführen, welche sich auf die Achsen OX, OY, OZ beziehen, von denen wir schon zu Anfang des § 80 Gebrauch gemacht hatten. Wir können dies am leichtesten, wenn wir bedenken, daß die Bewegung genau so vor sich geht als ob sie relativ gegen ein taugliches Bezugssystem geschähe, wenn wir zu den tatsächlich auf m wirkenden Kräften, deren Resultierende in den Richtungen der drei Koordinatenachsen OX, OY, OZ die Komponenten X, Y, Z haben soll, noch die drei Kräfte K_1, K_2, K_3 hinzufügen, welche alle in der Richtung OZ die Komponente Null haben. Da K_1 die Richtung von r hat, so sind $m\omega^2 x$ und $m\omega^2 y$ seine Komponenten in den Richtungen OX und OY. Da ferner die Kraft $K_2 = mr\,d\omega/dt$ auf r senkrecht steht und nach der früher angegebenen Regel in dem Sinne wirkt, in dem ω wächst, so daß wenn $d\omega/dt$ und die Koordinaten des materiellen Punktes m positiv sind, ihre x-Komponente positiv, ihre y-Komponente aber negativ ist, so sind: $my\,d\omega/dt$, $-mx\,d\omega/dt$ ihre Komponenten in den Richtungen OX und OY. Da endlich K_3 senkrecht auf der mit p bezeichneten Geschwindigkeit steht und für positive Werte von dx/dt und dy/dt in der x-Richtung eine positive, in der y-Richtung eine negative Komponente hat, so sind $2m\omega dy/dt$ und $-2m\omega\,dx/dt$ seine Komponenten in den Richtungen OX und OY. Fügen wir alle diese Kräfte den tatsächlich auf m wirkenden Kräften X, Y, Z bei, so erhalten wir die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen, welche nach Division durch m folgendermaßen lauten:

$$
441) \quad \left\{ \begin{aligned}
\frac{d^2 x}{d t^2} &= \frac{1}{m} X + \omega^2 x + y \frac{d \omega}{d t} + 2 \omega \frac{d y}{d t}, \\
\frac{d^2 y}{d t^2} &= \frac{1}{m} Y + \omega^2 y - x \frac{d \omega}{d t} - 2 \omega \frac{d x}{d t}, \\
\frac{d^2 z}{d t^2} &= \frac{1}{m} Z.
\end{aligned} \right.
$$

Sehr leicht findet man diese Gleichungen direkt mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen für generalisierte Koordinaten. Man kann offenbar die Koordinaten x, y, z der Masse m relativ gegen das rotierende Koordinatensystem als Variable betrachten, welche dessen Position zu jeder Zeit eindeutig bestimmen und daher Langranges Gleichungen anwenden, in denen x, y, z für p_1, p_2, p_3 ... zu setzen ist. Aus den Gleichungen 437) folgt:

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= x' \cos w - y' \sin w - x \omega \sin w - y \omega \cos w, \\
y'_1 &= x' \sin w + y' \cos w + x w \cos w - y \omega \sin w.
\end{aligned}
$$

Die lebendige Kraft der Masse m ist

$$
\begin{aligned}
T = \frac{m}{2}(x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1) = m \Big[\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} + \\
+ (x^2 + y^2) \frac{\omega^2}{2} + (x y' - y x') \omega \Big].
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\frac{\partial T}{\partial x} = m(\omega^2 x + \omega y'), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = m(\omega^2 y - \omega x'), \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0,
$$

$$
\frac{\partial T}{\partial x'} = m(x' - \omega y), \quad \frac{\partial T}{\partial y'} = m(y' + \omega x), \quad \frac{\partial T}{\partial z'} = m z'.
$$

Die Substitution dieser Werte in die Lagrangeschen Gleichungen, welche in diesem Falle lauten

$$
\frac{d}{d t}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = X
$$

mit zwei analogen für die y- und z-Achse liefert sofort die Gleichungen 441).

Es ist dies ein Beispiel für die Anwendung generalisierter Koordinaten, welche die Zeit explizit enthalten, weshalb auch die lebendige Kraft T hier eine inhomogene quadratische Funktion der x', y', z' ist.

§ 84. Grundgleichungen für die Bewegung eines schweren Körpers relativ gegen die rotierende Erde.

Wir wollen nun in Kürze eines der wichtigsten Probleme der Relativbewegung behandeln, nämlich das der Bewegung eines schweren Körpers relativ gegen die in Drehung begriffene Erde. Wir betrachten bloß die Bewegung eines schweren materiellen Punktes von der Masse m relativ gegen die Erde.

Es sei N der Nordpol der Erde, A der auf der nördlichen Hemisphäre gelegene Punkt, wo sich der materielle Punkt m zu Anfang der Zeit befand. Wir ziehen durch A ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die $A\zeta$-Achse ist der Richtung der scheinbaren Schwere im Punkte A entgegengesetzt. Die negative $A\zeta$-Achse schneidet die Erdachse im Punkte O. Den Winkel NOA bezeichnen wir mit $90 - \varepsilon$, so daß ε die geographische Breite von A ist. Die $A\eta$-Achse ist im Punkte A südlich, die $A\xi$-Achse westlich gerichtet. Die Normale vom Punkte A auf die Erdachse habe den Fußpunkt O', AA' sei ihre Verlängerung über A hinaus. Sowohl der Punkt A als auch die Achsen $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$ sind während der Drehung der Erde fest mit dieser verbunden.

Zu irgend einer Zeit t habe der Punkt m die Koordinaten ξ, η, ζ bezüglich dieses Koordinatensystems. c sei seine Geschwindigkeit relativ gegen die Erde, $u = \frac{d\xi}{dt}$, $v = \frac{d\eta}{dt}$, $w = \frac{d\zeta}{dt}$ deren Komponenten bezüglich derselben Koordinatenachsen. Ξ, H, Z seien die Komponenten der Gesamtkraft mit Einschluß der Zentrifugalkraft, welche auf m wirkt, in den Koordinatenrichtungen, so daß also, wenn nur die Anziehung der Erde wirken würde, im Punkte A selbst $\Xi = \mathsf{H} = 0$, $-Z$ gleich dem scheinbaren Gewichte mg der

Masse m wäre, wenn g die scheinbare Beschleunigung der Schwere in A ist.

Wir können die für ruhende Körper geltenden Gleichungen der Mechanik anwenden, wenn wir den Kräften Ξ, H, Z noch die Coriolissche Kraft beifügen. Man beweist leicht, daß die Resultierende der durch mehrere Geschwindigkeiten geweckten Coriolisschen Kräfte gleich der durch die Resultierende jener Geschwindigkeiten geweckten Coriolisschen Kraft ist.

Die durch die Geschwindigkeitskomponente u geweckte Coriolissche Kraft hat die Intensität $2mu\omega$ und steht auf u senkrecht in einer zur Erdachse normalen Ebene. Sie hat die Richtung AO', da diese durch die Erddrehung auf kürzestem Wege in die positive $A\xi$-Richtung übergehrt. ω ist die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung. Die Komponenten der durch u geweckten Coriolisschen Kraft in den Richtungen $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$ sind also Null, $-2mu\omega\sin\varepsilon$, $-2mu\omega\cos\varepsilon$.

Um die durch die Geschwindigkeitskomponenten v und w geweckten Coriolisschen Kräfte zu finden, müssen wir diese beiden Geschwindigkeitskomponenten auf eine zur Erdachse senkrechte Ebene projizieren. Die Projektionen sind $v\sin\varepsilon$ und $w\cos\varepsilon$ und haben beide die Richtung AA'. Die durch sie geweckten Coriolisschen Kräfte haben daher beide die Richtung $A\xi$ und sind $2m\omega v\sin\varepsilon$ bezw. $2m\omega w\cos\varepsilon$.

Fügen wir alle diese Coriolisschen Kräfte den Kräften Ξ, H, Z bei, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen:

$$442)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{m}\Xi + 2\omega(v\sin\varepsilon + w\cos\varepsilon),\\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m}H - 2\omega u\sin\varepsilon,\\ \frac{dw}{dt} &= \frac{1}{m}Z - 2\omega u\cos\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

Man pflegt diese Gleichungen gewöhnlich auf einem anderen Wege abzuleiten. Man wählt zuerst O als Koordinatenursprung, ON als positive z-Achse und legt die y-Achse durch O in den geographischen Meridian des Ortes A. Sind

x, y, z die Koordinaten des Punktes m zur Zeit t bezüglich dieses Koordinatensystems, so gelten für x, y, z die Gleichungen 441). In diese Gleichungen werden dann ξ, η, ζ durch Koordinatentransformation eingeführt. Die Transformationsgleichungen sind, wie man leicht sieht, die folgenden:

$$443)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi = x, \quad \eta = y\sin\varepsilon - z\cos\varepsilon, \quad \zeta = y\cos\varepsilon + z\sin\varepsilon - OA, \\ y = \eta\sin\varepsilon + (\zeta + OA)\cos\varepsilon, \quad z = -\eta\cos\varepsilon + (\zeta + OA)\sin\varepsilon, \\ \Xi = X, \quad \mathrm{H} = Y\sin\varepsilon - Z\cos\varepsilon, \quad \mathrm{Z} = Y\cos\varepsilon + Z\sin\varepsilon. \end{array}\right.$$

Es folgen wieder die Gleichungen 442).

Man hat hierbei einen Vorteil. Die Gravitationswirkung der Erde auf m hat jedenfalls eine Kraftfunktion φ, welche mit genügender Annäherung als Funktion von z und $\sqrt{x^2 + y^2}$ betrachtet werden kann. Wirkt daher nur die Schwere, so sind X, Y, Z die negativen partiellen Ableitungen 443) von $\psi = \varphi - \frac{m\,\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ nach den Koordinaten.

Um $-\Xi$, $-\mathrm{H}$, $-\mathrm{Z}$ zu erhalten aber braucht man bloß in diesen Ausdruck ξ, η, ζ für x, y, z einzuführen und dann nach ξ, η, ζ partiell zu differenzieren.

Man erhält so ganz allgemein die Gleichungen:

$$444)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{m}\left(\Xi' - \dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + 2\,\omega\,(v\sin\varepsilon + w\cos\varepsilon), \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m}\left(\mathrm{H}' - \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) - 2\,\omega\,u\sin\varepsilon, \\ \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{1}{m}\left(\mathrm{Z}' - \dfrac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right) - 2\,\omega\,u\cos\varepsilon, \end{array}\right.$$

wobei die ψ enthaltenden Glieder die Wirkung der Schwere und Zentrifugalkraft darstellen, Ξ', H', Z' aber sind die Komponenten der Kräfte, welche etwa sonst noch auf die Masse m wirken.

Es läßt sich aber die Funktion ψ doch nur angenähert ermitteln und wir werden mit der Gleichungen 442) auskommen.

§ 85. Beispiele.

Es möge sich der Punkt m nur wenig von seiner Ausgangsstelle A entfernen. Da daselbst die $A\zeta$-Achse der scheinbaren Schwere entgegengerichtet ist, so ist dort, wenn nur die Schwere wirkt, $\Xi = \mathrm{H} = 0$, $Z = -mg$ In unmittelbarer Nähe von A hat man daher die Gleichungen:

$$445) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 2\,\omega(v\sin\varepsilon + w\cos\varepsilon), \\ \frac{dv}{dt} &= -\,2\,\omega\,u\sin\varepsilon, \\ \frac{dw}{dt} &= -\,g - 2\,\omega\,u\cos\varepsilon. \end{aligned} \right.$$

1. *Schuß nach Süden.* Der Punkt m habe zu Anfang eine sehr große horizontale südlich gerichtete Geschwindigkeit v. Aus der ersten der Gleichungen 445) folgt, daß er allmählich dazu eine westliche Geschwindigkeit $u = 2\omega t v \sin\varepsilon$ erhält. Er weicht also westlich ab. Erst wenn u größer geworden ist, wirkt es wieder auf v, und wenn die Vertikalbewegung länger gedauert hat, wirkt auch sie auf u; das erste, was man bemerkt, ist aber die westliche Abweichung. Da ihre Geschwindigkeit u der Zeit proportional ist, so ist die Westverschiebung $\xi = \omega t^2 v \sin\varepsilon$ dem Quadrate der Zeit proportional.

Ebenso erfährt ein westlich geworfener Körper eine Norddeviation, ein nördlich geworfener eine Ost- und ein östlich geworfener eine Süddeviation. Man sagt der südlich geworfene Körper kommt in Gegenden, wo die absolute östliche Geschwindigkeit der Punkte der Erdoberfläche infolge der Erdrotation größer ist, bleibt also westlich zurück, wogegen ein nördlich geworfener Körper östlich der darunter befindlichen Erdoberfläche voraneilt.

Ein nach West geworfener Körper aber bewegt sich absolut im Raume in der durch den im Raume fix gedachten Punkt A gehenden Vertikalebene. Geht dagegen der Punkt mit der Erde mit, so dreht sich die durch A gehende

Vertikalebene, und zwar ihre westliche Hälfte nach Süd, so daß die alte Vertikalebene nach Nord davon abweicht.

2. *Benzenbergs Fallversuche.* Der Punkt m falle ohne Anfangsgeschwindigkeit frei. Es ist in erster Annäherung:

$$w = -g\,t, \quad u = -\omega\,g\,t^2 \cos\varepsilon, \quad \xi = -\frac{\omega}{3}\,g\,t^3 \cos\varepsilon.$$

Der Körper fällt also nicht in der Vertikalen (der Richtung eines durch einen ruhenden schweren Körper gespannten Fadens), sondern weicht östlich ab und es ist der Absolutwert der Deviation der dritten Potenz der Fallzeit proportional. Es wäre leicht, die Annäherung weiter zu treiben und die Glieder mit ω^2 zu berechnen, doch erscheint dies nicht notwendig.

3. *Foucaults Pendel.* Wenn ein langes Pendel nur kleine Exkursionswinkel beschreibt, so kann man es mit genügender Annäherung als einen materiellen Punkt betrachten, welcher sich in der $\xi\,\eta$-Ebene bewegt und auf den immer eine gegen dessen Ruhelage A wirkende und der Entfernung von derselben proportionale Kraft wirkt. Es ist also in den Gleichungen 442) zu setzen $w = 0$, $\Xi = -m\,a^2\,\xi$, $\mathrm{H} = -m\,a^2\,\eta$. Diese verwandeln sich daher in

$$\frac{d^2\xi}{d\,t^2} = -a^2\,\xi + 2\,b\,\frac{d\,\eta}{d\,t},$$

$$\frac{d^2\eta}{d\,t^2} = -a^2\,\eta - 2\,b\,\frac{d\,\xi}{d\,t},$$

wobei $b = \omega \sin\varepsilon$.

Das allgemeine Integral ist

$$\xi = A\cos(n_1\,t + B) + C\cos(n_2\,t + D),$$

$$\eta = A\sin(n_1\,t + B) - C\sin(n_2\,t + D),$$

wobei

$$n_1 = \sqrt{a^2 + b^2} - b, \quad n_2 = \sqrt{a^2 + b^2} + b,$$

oder da b klein gegen a ist

$$n_1 = a - b, \quad n_2 = a + b.$$

Die einfachste partikuläre Lösung ist

$$\xi = A\left[\cos(a-b)t + \cos(a+b)t\right] = \quad 2A\cos bt\cos at,$$
$$\eta = A\left[\sin(a-b)t - \sin(a+b)t\right] = -2A\sin bt\cos at.$$

Das Pendel schwingt daher anfangs westöstlich nach der Zeit $\frac{\pi}{2b} = \frac{\pi}{2\omega\sin\varepsilon}$ nordsüdlich, d. h. die Westelongation ist kontinuierlich in eine Nordelongation übergegangen usw. Die Schwingungsebene dreht sich in der Zeit 24 Stunden mal $\sin\varepsilon$ um 360^0 der Erddrehung entgegengesetzt, also genau so, als ob die Lage der Schwingungsebene im Raume fix wäre und sich die Erde mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega\sin\varepsilon$ darunter hinwegdrehen würde, was die Komponente ihrer Winkelgeschwindigkeit um die Vertikale des Punktes A als Achse ist. Doch geschieht die Bewegung nur, wenn A einer der Pole der Erde ist, exakt in dieser Weise. Für alle anderen Lagen bewirken die durch die Vertikalbewegung des Pendels verursachten Deviationen kleine Abweichungen, welche wir mit diesen Vertikalbewegungen vernachlässigt haben.

§ 86. Bewegung auf einer Niveaufläche der scheinbaren Schwere.

Da die Schwere groß ist gegenüber der Coriolisschen Kraft, so werden, wenn sich die Masse m weit bewegt, zuerst die Störungen bemerkbar sein, welche dadurch entstehen, daß die Schwere in Richtung und Größe variiert. Ist der Punkt m gezwungen, sich auf einer Niveaufläche der scheinbaren Schwere zu bewegen, so wird aber diese durch den Gegendruck, welcher ihn hierzu zwingt, immer aufgehoben. Dann kann man also mit größerer Annäherung als sonst die Bahn des Beweglichen aus den Gleichungen 442) berechnen, ohne daß man die Funktionen φ und ψ zu kennen braucht.

Es soll außer der scheinbaren Schwere und der Kraft, welche den Punkt m zwingt, auf einer Niveaufläche derselben zu bleiben, keine Kraft wirken. Dann erhält man so lange die Niveaufläche, als eben (mit der $\xi\eta$-Ebene zusammenfallend) betrachtet werden darf, aus 442) die beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = 2 \omega \sin \varepsilon \frac{d \eta}{d t}, \qquad \frac{d^2 \eta}{d t^2} = -2 \omega \sin \varepsilon \frac{d \xi}{d t}.$$

Ist für $t = 0$ z. B. $\xi = \eta = 0$, $\frac{d \xi}{d t} = u_0$, $\frac{d \eta}{d t} = v_0$, so liefert die Integration

$$\xi = \frac{v_0}{c} [1 - \cos (c t)] + \frac{u_0}{c} \sin (c t),$$

$$\eta = \frac{u_0}{c} [\cos (c t) - 1] + \frac{v_0}{c} \sin (c t),$$

wobei $c = 2 \omega \sin \varepsilon$. Die Gleichung der Bahn ist

$$\left(\xi - \frac{v_0}{c}\right)^2 + \left(\eta + \frac{u_0}{c}\right)^2 = \frac{u_0^2 + v_0^2}{c^2}.$$

Dieselbe ist also ein Kreis vom Radius $\frac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{2 \omega \sin \varepsilon}$. Dies ist der Weg, den ein mit der Geschwindigkeit $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$ bewegter Körper etwa in $\frac{2}{\sin \varepsilon}$ Stunden zurücklegen würde. Der ganze Kreis wird in $\frac{12}{\sin \varepsilon}$ Stunden beschrieben, während welcher Zeit die Bewegungshindernisse wohl längst die Geschwindigkeit des Beweglichen aufgezehrt haben. Die früher gefundenen Seitenabweichungen horizontal geworfener Körper sind dadurch bedingt, daß sich diese in Bögen dieses Kreises bewegen. Umgekehrt folgt aus der schon früher gefundenen Tatsache, daß die Seitenabweichung für jede horizontale Wurfbewegung im selben Sinne erfolgt und gleiche Krümmung erzeugt, von selbst wieder die Bewegung im Kreise.

Wollte man die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Niveaufläche der scheinbaren Schwere nicht relativ gegen die Erde, sondern absolut im Raume berechnen, so müßte man bedenken, daß die Schwere allein nicht senkrecht auf der besprochenen Niveaufläche steht, sondern tangential dazu eine Komponente hat, die der der Zentrifugalkraft immer gerade entgegengesetzt ist. Diese Komponente bewirkt, daß ein Körper, welcher gezwungen ist, sich in einer Niveaufläche der scheinbaren Schwere zu bewegen, wenn er anfangs die Geschwindigkeit hat, welche derselben Stelle des Erdkörpers vermöge der Erdrotation zukommt, sich absolut im Raume nicht in einer geodätischen Linie der Niveaufläche der scheinbaren Schwere, sondern in einem zur Erdachse senkrechten Parallelkreise derselben bewegt. Wenn er eine gleichgerichtete, aber größere oder kleinere Geschwindigkeit hat, erklärt diese Komponente die Seitenabweichung, falls man von der Betrachtung der Absolutbewegung des Körpers ausgeht und diese erst nachher mit der der Erde vergleicht.

§ 87. Allgemeinste Gleichungen für die Relativbewegung.

Wir wollen nur noch weniges über den allgemeinen Fall sagen, daß ein beliebiges starres System (das zweite System) eine vollständig beliebige Bewegung macht und die Bewegung eines anderen (des ersten Systems) relativ gegen die des zweiten zu berechnen ist.

Wir können die Bewegung des zweiten Systems zusammensetzen aus einer Bewegung eines Punktes Ω desselben (des Schwerpunktes oder auch irgend eines anderen Punktes) in einer Kurve und einer Drehung um eine stets durch diesen Punkt gehende Achse, die augenblickliche Drehungsachse, wobei jedoch sowohl die Lage der Achse als auch die Winkelgeschwindigkeit der Drehung sich kontinuierlich mit der Zeit ändern kann. Wir führen ganz wie in § 80 ein fixes Koordinatensystem OX, OY, OZ und ein bewegliches $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ ein. Die Achsen des letzteren sollen fix mit dem zweiten Systeme verbunden sein, sein Ursprung soll der besprochene Punkt Ω sein.

Was wir suchen, sind die Gleichungen für die Veränderung der Koordinaten ξ, η, ζ irgend eines materiellen Punktes m des ersten Systems bezüglich des zweiten beweglichen Koordinatensystems, während wir auf die Koordinatenachsen x, y, z desselben Punktes bezüglich des fixen Koordinatensystems die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen der Mechanik anwenden können. Am raschesten kommen wir da unzweifelhaft wieder mittels der Lagrangeschen

Gleichungen zum Ziele. Wir bezeichnen, wie in § 26 die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes Ω des zweiten Systems in den Richtungen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$, welche augenblicklich die beweglichen Koordinatenachsen haben, mit u, v, w; ferner die Komponenten der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit des zweiten Systems, also auch des beweglichen Koordinatensystems in denselben Richtungen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ und $\Omega\zeta$ mit λ, μ, ν. Wenn dann ein Punkt mit den Koordinaten ξ, η, ζ bezüglich des beweglichen Koordinatensystems fest mit diesem verbunden wäre, so daß ξ, η, ζ mit der Zeit unveränderlich wären, so wären dessen Geschwindigkeitskomponenten in den Richtungen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ und $\Omega\zeta$ nach den Gleichungen 156)

$$446)\qquad u+\mu\zeta-\nu\eta,\qquad v+\nu\xi-\lambda\zeta,\qquad w+\lambda\eta-\mu\xi.$$

Wir können uns die Bewegung des zweiten Systems und damit die des beweglichen Koordinatensystems dadurch gegeben denken, daß uns dessen Anfangslage und die Werte von u, v, w, λ, μ, ν zu jeder Zeit gegeben sind. Ist die Bewegung des zweiten Systems irgendwie anders gegeben, so können doch daraus die Werte dieser sechs Größen für jede Zeit berechnet werden. Die Koordinaten ξ, η, ζ irgend eines Massenteilchens m des ersten Systems bezüglich des beweglichen Koordinatensystems sind im allgemeinen nicht mit der Zeit unveränderlich. Ihre Differentialquotienten nach der Zeit seien ξ', η', ζ'. Wir finden daher die Gesamtkomponenten der Geschwindigkeit des Massenteilchens m in den Richtungen, welche $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ und $\Omega\zeta$ augenblicklich haben, indem wir zu den drei Ausdrücken 446) noch ξ' bezw. η' und ζ' addieren. Diese drei gesamten Geschwindigkeitskomponenten des Massenteilchens m sind also

$$\xi'+u+\mu\zeta-\nu\eta,\quad \eta'+v+\nu\xi-\lambda\zeta,\quad \zeta'+w+\lambda\eta-\mu\xi,$$

und die augenblickliche lebendige Kraft des Massenteilchens m ist

$$T=\frac{m}{2}\left[(\xi'+u+\mu\zeta-\nu\eta)^2+\right.$$
$$\left.+(\eta'+v+\nu\xi-\lambda\zeta)^2+(\zeta'+w+\lambda\eta-\mu\xi)^2\right].$$

Bezeichnen wir also mit Ξ die Kraft, welche in der Richtung $\Omega\xi$ auf das Bewegliche wirkt, so ist die auf die Abszissenrichtung bezügliche Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = \Xi,$$

oder nach Substitution des Wertes für T

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\xi' + u + \mu\zeta - \nu\eta) - \frac{1}{m}\Xi = \\
&= \nu(\eta' + v + \nu\xi - \lambda\zeta) - \mu(\zeta' + w + \lambda\eta - \mu\xi) = \\
&= \nu(\eta' + v) - \mu(\zeta' + w) + \xi(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - \lambda(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta).
\end{aligned}$$

Die auf die beiden anderen Koordinatenachsen bezüglichen Gleichungen entstehen daraus durch zyklische Vertauschung.

Es wäre leicht, Gleichungen abzuleiten, in denen andere zur Bestimmung der Bewegung des zweiten Systems dienende Variable vorkommen, z. B. die Komponenten der Geschwindigkeit von Ω und der Rotationsgeschwindigkeit in den Richtungen der fixen Koordinatenachsen, sowie die verschiedenen Zusatz- bezw. Reduktionskräfte geometrisch zu diskutieren. Doch will ich hierauf nicht näher eingehen, da diese allgemeinen Gleichungen bisher keine Anwendung gefunden haben. Es sei nur noch bemerkt, daß, wenn man die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit eines starren Systems in Komponenten zerlegt, zwar die wirkliche augenblickliche Geschwindigkeit jedes Punktes die Superposition der Geschwindigkeiten ist, die er infolge der Komponenten hätte, dies aber keineswegs von den Beschleunigungen gilt, die ja aus unendlich kleinen zweiter Ordnung folgen und unendlich Kleines zweiter Ordnung wurde beim Beweise des Satzes von der Zusammensetzung der Drehungen vernachlässigt. Deshalb sind auch die Zusätze, Reduktions- und Führungskräfte, welche wegen einer Rotation des Bezugssystems anzubringen sind, keineswegs einfach die Superposition derjenigen, welche infolge jeder der Komponenten der Rotation anzubringen wären, wenn diese allein vorhanden wäre.

§ 88. Das Trägheitsgesetz.

Wir wollen nun zum Schlusse auf eine fundamentale Schwierigkeit zurückkommen, welche sich in den einfachsten Grundgesetzen der Mechanik findet, nämlich auf die Formulierung des Trägheitsgesetzes, wenn man keinen absoluten, transzendenten Raum einführen will. Wir sind dieser Schwierigkeit in der einfachsten Weise aus dem Wege gegangen, indem wir von etwas Wirklichem oder Existierenden gar nicht sprachen, sondern die Materie durch bloße Gedankenbilder, die materiellen Punkte ersetzten, unbekümmert darum, ob dies nicht auch in anderer Weise (z. B. unter Zugrundelegung eines anderen Koordinatensystems) mit gleichem Erfolge geschehen könne.

Gedankenbilder zu formen, wie wir wollen, kann uns niemand verwehren und daher auch nicht nebst den materiellen Punkten noch ein Koordinatensystem (das taugliche Bezugssystem) in dieselben aufzunehmen. Wir nennen diese Gedankenbilder nur deshalb hinterher wahr, weil sie uns nützlich sind, die künftigen Erscheinungen (unsere künftigen Empfindungen) möglichst vollständig und mühelos vorauszusagen, d. h. ihnen unsere Willensimpulse anzupassen.

Ein innerer Grund der Behauptung, daß die Gedankenbilder, in denen das Bezugssystem vorkommt, nicht exakt mit der Erfahrung sollten stimmen können, ist mir nicht erfindlich. Ich finde im Gegenteile, daß gerade diese Behauptung a priori etwas über die Erfahrung auszusagen bestrebt ist, was diese uns nicht früher selbst sagte. Ich kann daher in dieser Beziehung Mach nicht beipflichten, welcher, wenn ich ihn recht verstanden habe, daraus, daß unsere Gedanken nur Beziehungen zwischen den Objekten darzustellen haben, schließt, daß das Trägheitsgesetz nur durch die Fixsternwelt bestimmt sein könnte. Wäre das hier entwickelte Bild absolut richtig, so wären eben die Beziehungen zwischen den Objekten so, daß zu ihrer einfachsten Darstellung im Geist ein solches Bezugssystem gehörte. Daß der Fixsternhimmel bezüglich dieses Bezugssystems absolut drehungsfrei ist, wäre keine Notwendigkeit, daß er es sehr angenähert ist, aber wäre aus der großen Entfernung, die bei starker Drehung enorme Zentripetalkräfte fordern würde, erklärbar.

Für jemand, der die ganze, endlich gedachte Fixsternwelt übersähe, bestünde sogar die theoretische Möglichkeit, ihre Drehung mittels des Foucaultschen Pendels oder eines Gyrotrops zu konstatieren, wie wir sie für die Erde konstatieren könnten, wenn uns das Licht und damit die Kenntnis anderer Himmelskörper fehlte. Allerdings wäre diese Konstatierung keine unbedingte. Aber, wollte man sie leugnen, so müßte man die noch weit unnatürlichere und den Voraussetzungen dieses Buches zuwiderlaufende Annahme einer von einer fixen Geraden auf alle Massen ausgeübten, der Masse und Entfernung proportionalen Kraft und dazu noch der entsprechenden, auch von der Geschwindigkeit und Lage im Raume (gegen die Fixsternwelt) abhängigen Coriolisschen Kraft machen. Auch würde ein einziges Foucaultsches Pendel oder Gyrotrop nicht hinreichen; denn da könnte die Möglichkeit so kleiner störender Kräfte wohl kaum sicher verneint werden. Aber wenn die verschiedensten Foucaultschen Pendel, Streintzschen Gyrotrope, nach Lange geschleuderten materiellen Punkte usw. usw. in ihrer relativen Bewegung gegen die Sternenwelt, die ich natürlich endlich und als Ganzes beobachtbar annehme, alle auf eine Rotation der letzteren hinwiesen, so könnten wir doch als höchstwahrscheinlich hinstellen, daß sich bei Annahme derselben, also Aufnahme eines Bezugssystems in unser Gedankenbild, die Erscheinungen am einfachsten erklären oder sagen wir lieber beschreiben, im Gedanken nachbilden lassen, wie wir ja schon jetzt überzeugt sind daß sich bei Annahme einer Rotation der Erde die kosmischen Erscheinungen allein in vernünftiger Weise beschreiben lassen.

Daß es einen wirklichen Körper α gebe, der stets bezüglich unseres tauglichen Bezugssystems ruhte und dasselbe daher ersetzen könnte, wäre eine absurde Idee. Als bloßes Gedankending aber nenne ich es lieber „Bezugssystem“ als

„Körper α“. Schon der Name „Körper“ scheint mir so unpassend, wie möglich.

Bleiben wir also wieder bei der Annahme, die in diesem Buche beschriebenen Bilder würden die Natur exakt darstellen und die Welt wäre endlich. Dann müßte allerdings ihre durch ihren Schwerpunkt gehende invariable Achse bezüglich jedes tauglichen Bezugssystems ihre Richtung unveränderlich beibehalten und das gesamte Flächenmoment der Welt bezüglich derselben müßte konstant sein. Das hat aber keine andere Bedeutung als die folgende: Gegeben sind uns nur die relativen Lagen aller Teile der Welt zu allen Zeiten. Wir können sie auf ein beliebiges zu jeder Zeit wieder beliebig anders gewähltes Koordinatensystem beziehen und auch je zwei Zeitstrecken nach Belieben gleich oder verschieden lang nennen. Aber nur bei einer bestimmten Bezeichnung der Zeitstrecken als gleich lang und nur bei bestimmten zeitlichen Reihenfolgen der Lagen dieser Koordinatensysteme ist die Bedingung erfüllt, daß die auf sie bezogenen Veränderungen jedes materiellen Punktes der Welt die einfachen in diesem Buche dargelegte Gleichungen der Mechanik erfüllen. Nur wenn dies der Fall ist, nennen wir die zeitliche Reihenfolge der betreffenden Koordinatensysteme ein taugliches Bezugssystem.

Für jedes solche taugliche Bezugssysteme nun muß nach dem Bewiesenen die durch den Schwerpunkt der Welt gehende Achse, bezüglich welcher die Summe der Flächenmomente der Welt ein Maximum ist, eine unveränderliche Lage haben und diese Summe muß selbst eine Konstante sein. Natürlich ist dabei noch vorausgesetzt, daß man sich die Welt überhaupt endlich denken will. Es könnten aber ganz gut die mechanischen Differentialgleichungen für eine solche Reihenfolge von Lagen des Koordinatensystems ihre einfache Form annehmen, für welche das konstante Flächenmoment der Welt um seine durch den Schwerpunkt gehende invariable Achse nicht den Wert Null hat, so daß also gewissermaßen die Welt in Drehung begriffen wäre, die freilich im selben Maße klein sein müßte als die Welt groß ist.

So gänzlich unwahrscheinlich es ist, daß unsere Kenntnisse wirklich sich jemals so ausbreiten werden, so können wir uns doch im Gedanken in die Lage versetzen, daß wir die ganze Fixsternwelt, wenn wir uns dieselbe überhaupt endlich denken, so gut kennen würden, als wir heute unsere Erde kennen und daß wir eine Drehung derselben so sicher nachweisen könnten, als die der Erde. Wenn es das Licht nicht gäbe, uns also außer der Erde kein Himmelskörper bekannt wäre, so wären wir sicher viel später zum Begriffe der absoluten Drehung gelangt. Wir hätten aber auch sicher durch Versuche an Gyroskopen, Pendeln usw. dazu gelangen können und wären auch wahrscheinlich dazu gelangt. Es ist also keineswegs bloß die Beziehung zum Fixsternhimmel, was diesen Begriff bedingt.

Daß die sukzessiven Lagen der Hauptträgheitsachsen der Welt bezüglich ihres Schwerpunkts ein solches taugliches Bezugssystem bilden, wäre natürlich möglich und unserer bisherigen Erfahrung nicht widersprechend, nach welcher beliebige, unveränderlich mit dem nahe unveränderlichen Fixsternhimmel verbundene Achsen taugliche Bezugssysteme sind. Unter dieser Annahme wäre die Aufnahme eines besonderen Koordinatensystems überflüssig, da dessen Lage aus den sukzessiven relativen Lagen aller Teile der Welt für jeden Zeitmoment berechnet werden könnte. Da aber die Richtigkeit einer solchen Annahme durch nichts bewiesen oder beweisbar ist, so ist es zwar sicher gut, auf ihre Möglichkeit hinzuweisen, es wäre aber offenbar eine unerlaubte Beschränkung der Allgemeinheit, sie an die Spitze der Mechanik zu stellen.

Ganz hiervon unabhängig ist die Frage, ob die hier entwickelten mechanischen Gleichungen und damit auch das Trägheitsgesetz nicht vielleicht bloß angenähert richtig sind und ob nicht bei einer richtigeren Formulierung die Unwahrscheinlichkeit oder sagen wir Inhomogenität, die in der Notwendigkeit der Aufnahme eines Koordinatensystems neben den materiellen Punkten in das Bild liegt, von selbst wegfällt.

Da wies Mach auf die Möglichkeit hin, daß wir ein richtigeres Bild durch die Annahme erhalten, nur die Beschleunigung der Entfernungsänderung je zweier Massenteilchen sei hauptsächlich durch die benachbarten Massen, die Geschwindigkeit dieser Änderung aber durch eine Formel bestimmt, in welcher die sehr entfernten Massen den Ausschlag geben. Dadurch wird natürlich jede Aufnahme eines Koordinatensystems in das Bild vermieden, da jetzt nur von Entfernungen die Rede ist. Freilich führt Mach dafür andere Schwierigkeiten ein, so die Endlichkeit der Welt, eine Art Fernwirkung auf die allergrößten Distanzen usw. Diese Schwierigkeiten schienen mir speziell nicht so groß, wie vielleicht manchem anderen Physiker, sie haben aber immerhin das Mißliche, daß sie jede erfahrungsmäßige Kontrolle für alle Zeiten auszuschließen scheinen. Auch die exakte Ableitung des Superpositionsgrinzips durch fortwährende Anwendung der neuen Form des Trägheitsgesetzes auf den Schwerpunkt der in Wechselwirkung begriffenen Massen scheint mir nicht unmittelbar auf der Hand zu liegen. Ferner ist $\frac{d^2 \Sigma m r}{d t^2} = 0$ erst eine Gleichung, also doch nicht der Aussage ganz äquivalent, daß sich ein Punkt geradlinig und gleichförmig bewegt.

Unter allen Umständen erscheint mir eine derartige Erweiterung unseres Blickes durch den Hinweis auf die Möglichkeit, daß das, was uns das Gewisseste und Naheliegendste scheint, vielleicht nur angenähert richtig ist, höchst wertvoll. Es steht in einer Linie mit dem Hinweise auf die Möglichkeit, daß sich die Entfernungen der Fixsterne vielleicht nur in einem nichteuklidischen Raume von enorm geringer Krümmung konstruieren lassen, was ja insofern auch mit dem Trägheitsgesetze zusammenhängt, daß dann ein bewegter Körper, auf den keine Kräfte wirken, in Äonen an die alte Stelle zurückkehren müßte, falls das betreffende Krümmungsmaß positiv ist.

In allen diesen Betrachtungen gingen wir von der Voraussetzung der Endlichkeit der ganzen Welt aus. Denkt man sich die Welt unendlich, so werden Begriffe, wie der Schwerpunkt, die invariable Achse, die Hauptträgheitsachsen usw. der Welt vollkommen gegenstandslos. Man müßte dann annehmen, daß das Trägheitsgesetz durch eine Formel bestimmt wird, nach welcher die naheliegenden Massen von verschwindenden, die in Siriusweiten befindlichen vom größten, die noch viel entfernteren Massen aber wieder von verschwindendem Einfluß auf die Formulierung des Trägheitsgesetzes sind.

Alle Schwierigkeiten bei Formulierung des Trägheitsgesetzes vermeidet die elektromagnetische Theorie der Materie, indem sie annimmt, daß die Maxwellschen Gleichungen für das Verhalten des Lichtäthers und die Bewegung der Elektronen in demselben das Primäre sind, aus dem für letztere das Trägheitsgesetz für die Bewegung relativ gegen den Lichtäther und die übrigen Gesetze der Mechanik folgen. Für die Teilchen des Lichtäthers aber gilt das Trägheitsgesetz nicht; die Maxwellschen Gleichungen müßten so gefaßt werden, daß sie bloß die Wechselwirkung nebeneinanderliegender Volumelemente bestimmen, zu ihrer Fassung also kein absoluter Raum erforderlich ist. Eine Entwicklung dieser gegenwärtig noch ganz unausgearbeiteten Theorie liegt uns hier ferne.

Berichtigungen.

S. 41 Z. 11 v. o $\frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{\partial x'_k}{\partial p_h}$ statt $\frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{\partial x'_k}{\partial p_l}$.

S. 114 Z. 15 v. o. $dx_2 = \Pi_1^2 \, dp_1 + \Pi_2^2 \, dp_2$ statt $dx_2 = \Pi_1^2 \, dp_1 = \Pi_2^2 \, dp_2$.

S. 114 Z. 21 v. o.

$$\frac{\partial \Pi_1^2}{\partial p_1} = p_2 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = - p_2^2 \, x_1 \quad \text{statt} \quad \frac{\partial \Pi_1^2}{\partial p_1} = p_2 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + p_2^2 \, x_1 .$$

S. 133 Z. 1 v. u. muß lauten:

$$\Omega = \int_{t_0}^{t_1} \left[T - V - \sum_{1}^{s} {}_h \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t} \right) \frac{\partial T}{\partial p'_h} \right] d t .$$

S. 134 Z. 12 bis 14 v. o. müssen lauten:

$$\delta p'_i \frac{\partial T}{\partial p'_i} + \sum_{1}^{s} {}_h \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial p'_h \, \partial p'_i} \, \delta p'_i$$

und daher wird:

$$\delta'_i \Omega = \int_{t_0}^{t_1} \delta p'_i \, d t \sum_{1}^{s} {}_h \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial p'_h \, \partial p'_i} .$$

S. 134 Z. 9 v. u. muß lauten:

$$\sum_{1}^{s} {}_h \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial p'_h \, \partial p'_i} = 0 .$$

S. 134 Z. 7 v. u. $\frac{\partial^2 T}{\partial p'_h \, \partial p'_i} = a_{hi}$ statt $\frac{\delta T}{\delta p'_h \, \delta p'_i} = a_{hi}$.