

Kamil Jodź

Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

ISSN 1644-6739

Streszczenie: W artykule została przedstawiona metodologia stochastycznego modelowania intensywności zgonów na przykładzie modeli: Lee-Cartera, Renshawa-Habermmana oraz Plata. W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano oszacowania parametrów modeli opisujących poziom umieralności w polskiej populacji. Na podstawie oszacowanych modeli wyznaczono prognozy dalszego trwania życia w Polsce.

Słowa kluczowe: natężenie zgonów, model Lee-Cartera, model Renshawa-Habermmana, model Plata, modelowanie stochastyczne.

DOI: 10.15611/sps.2014.12.13

1. Wstęp

Od 1950 do 2010 r. przeciętna długość życia noworodka w Polsce wydłużyła się o 18 lat. Ciągły proces wydłużania się ludzkiego życia stał się poważnym wyzwaniem dla firm ubezpieczeniowych oraz dla polskiego systemu emerytalnego. Wysokości składek emerytalnych i ubezpieczeniowych są najczęściej wyliczane w oparciu o przekrojowe tablice trwania życia, publikowane przez Główny Urząd Statystyczny. Tablice te z założenia nie uwzględniają faktu wydłużania się przeciętnego dalszego trwania życia, wraz z kolejnymi latami kalendarzowymi, co powoduje, że jest ono niedoszacowane. Kompletna analiza intensywności zgonów oraz dalszego trwania życia powinna zawierać podejście zarówno przekrojowe, jak i kohortowe. Podejście kohortowe dotyczy analizy demograficznej poszczególnych grup osób urodzonych w tym samym roku. Modelem, który opisuje zmiany w poziomie umieralności związane zarówno z wiekiem, jak i rokiem kalendarzowym, jest model Lee-Cartera. Model wraz z jego licznymi wariantami zyskał w ostatnich latach wielu zwolenników. W artykule zostanie przedstawiona metodologia stochastycznego modelowania intensywności zgonów na przykładzie trzech modeli: Lee-Cartera, Renshawa-Habermmana oraz Plata.

Praca ma następujący podział. W części drugiej omówiono pokrótce niektóre historyczne metody modelowania umieralności. Część trzecia zawiera szczegółowy opis wybranych, stochastycznych modeli intensywności zgonów oraz metody ich estymacji. Kolejna część zawiera wartości uzyskanych estymatorów oraz prognozę dalszego trwania życia w Polsce. W ostatniej części zawarto podsumowanie oraz wnioski.

2. Tło historyczne

Tablice trwania życia mają początek w rejestrach osób zmarłych. Rejestry te prowadzone w XVI–XVII w. miały na celu informować oraz ostrzegać władze o niekorzystnej sytuacji epidemiologicznej w dużych miastach. Rosnąca liczba zgonów w rejestrach mogła świadczyć o początkach zarazy w mieście. Wczesna reakcja władz zmniejszyła skalę strat, które w przypadku epidemii mogły być bardzo duże. W tym miejscu należałoby wspomnieć o jeszcze wcześniejszych tablicach pochodzących z III w. n.e., tzw. tablicach Ulpiana. Jednakże ich interpretacja oraz przeznaczenie nie do końca są jasne, dlatego można przyjąć, że tablice trwania życia pojawiły się po raz pierwszy w XVII w. Autorem jednej z pierwszych prac poświęconych zmianom w poziomie umieralności był Edmund Halley. Stworzył on tablice trwania życia dla miasta Wrocławia, oparte na obserwacjach liczby zgonów i wielkości populacji w badanym roku. Podejście takie jest stosowane powszechnie również dzisiaj. E. Halley na podstawie swoich tablic stwierdził, że ówczesne renty sprzedawane przez państwo są niedo wartościowane, a ich cena nie zależy od wieku nabywcy. Wraz ze wzrostem zainteresowania matematyków tematyką prognozowania dalszego trwania życia pojawiły się pierwsze analityczne modele dotyczące intensywności zgonów. Jednym z pierwszych modeli był model stworzony przez de Moivre'a, który zakładał, że istnieje nieprzekraczalny wiek ω , jaki są w stanie osiągnąć jednostki w badanej populacji. Prawo to można zapisać w następujący sposób:

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t},$$

gdzie:

μ_t – natężenie zgonów w momencie t .

Kolejnym istotnym krokiem w modelowaniu umieralności było prawo zaproponowane przez Gompertza. Natężenie liczby zgonów w tym prawie ma analityczną postać funkcji wykładniczej:

$$\mu_t = A \times B^t,$$

gdzie:

A, B – dodatnie stałe.

Gompertz twierdził, że powyższą formułę można interpretować jako „przeciętny ubytek odporności na śmierć” w badanej populacji [Haberman 1996]. Uogólnieniem prawa Gompertza jest prawo Makehama:

$$\mu_t = C + A \times B^t.$$

Prawo to z pewnymi modyfikacjami (np. z różnymi parametrami wyznaczonymi dla grup wiekowych 0–9, 9–55, 55–95) było w późniejszym okresie powszechnie stosowane. Nie tylko funkcje wykładnicze były rozważane do analitycznego opisu umieralności. Weibull zaproponował do opisu umieralności w pewnych populacjach funkcję potęgową [Pitacco 2004]:

$$\mu_t = A \times t^n.$$

Dalsze trwanie życia jest zmienną losową, mimo to w pionierskich pracach modele długości życia miały charakter deterministyczny. Dopiero w drugiej połowie XX w. zagościł na stałe modele z losową wartością opisującą obecną wartość świadczenia ubezpieczeniowego wyrażoną jako funkcja dalszego losowego trwania życia. Z roku na rok dysponujemy coraz dłuższymi szeregami czasowymi, które pozwalają na zaobserwowanie trendu umieralności i prognozowanie przyszłych poziomów natężenia zgonów. W modelowaniu stochastycznym przyjmuje się, że wartości intensywności zgonów są realizacjami pewnej zmiennej losowej.

3. Modele stochastyczne

Jednym z obecnie najpopularniejszych modeli tego typu jest model Lee-Cartera (LC) wraz z jego licznymi modyfikacjami. W 1992 r. R. Lee oraz L. Carter zaproponowali model oparty na podejściu związanym z analizą głównych składowych, a następnie dopasowali model do danych amerykańskich z lat 1900–1987 [Lee, Carter 1992]. W metodologii tej zmienną objaśnianą jest logarytm rocznego współczynnika natężenia zgonów $\ln(m_{x,t})$. Postać modelu dana jest wzorem:

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \times \kappa_t + \varepsilon_{x,t},$$

gdzie:

$m_{x,t}$ – roczne współczynniki natężenia zgonów,

α_x – średnie względem czasu poziomy umieralności, estymowane jako średnie arytmetyczne logarytmów rocznych współczynników natężeń zgonów: $\alpha_x = \frac{1}{T} \sum_t \ln(m_{x,t})$,

κ_t – zmiany poziomów umieralności w czasie,

β_x – modyfikacja wartości κ_t w zależności od wieku x ,

$\varepsilon_{x,t}$ – niezależne zmienne losowe o średniej zero oraz stałej wariancji.

Parametry κ_t i β_x nie są wyznaczone jednoznacznie. Podstawiając $\tilde{\kappa}_t = c\kappa_t$ i $\tilde{\beta}_x = \beta_x/c$ w miejscach κ_t i β_x można uzyskać takie same wartości $\ln(m_{x,t})$. Z tego powodu wprowadza się dwa warunki zapewniające identyfikowalność modelu:

$$\sum_t \kappa_t = 0, \sum_x \beta_x = 1.$$

Charakter parametrów uniemożliwia wykorzystanie takich standardowych metod estymacji, jak np. klasyczna metoda najmniejszych kwadratów. R. Lee i L. Carter rozwiązali ten problem, stosując metodę odwołującą się do rozkładu wartości osobliwych macierzy (SVD). Podejście takie wymaga założenia o homoskedastyczności składnika losowego $\varepsilon_{x,t}$. Przeprowadzone badania [Brouhns i in. 2002] wskazują na to, że wariancja nie jest równomiernie rozłożona. Zjawisko to jest wyraźnie widoczne np. przy porównaniu wariancji w grupach wiekowych 30–50 lat oraz 80–100 lat. Alternatywą dla metody SVD jest metoda największej wiarygodności. W tej metodzie estymacji zakładamy, że liczba zgonów jest zmienną losową o rozkładzie Poissona, a dokładniej:

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(\hat{m}_{x,t} E_{x,t}),$$

gdzie:

$$\hat{m}_{x,t} = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t),$$

$E_{x,t}$ – centralna liczba osób narażanych na ryzyko zgonu.

Istotą tej metody jest maksymalizacja logarytmu funkcji wiarygodności, który w przypadku modelu Lee-Cartera ma postać:

$$\ln L = \sum_x \sum_t [D_{x,t} \ln(m_{x,t} E_{x,t}) - E_{x,t} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) - \ln(D_{x,t}!)].$$

W równaniu występuje iloczyn szacowanych składników β oraz κ , dlatego nie można ich oszacować standardowymi metodami. Rozwiązaniem tego problemu jest zastosowanie podejścia iteracyjnego. W każdym kroku iteracyjnym szacowany jest jeden z parametrów, przy niezmiennych wartościach pozostałych wcześniej oszacowanych parametrów, zgodnie z ogólną zasadą:

$$\hat{\theta}^{(v+1)} = \hat{\theta}^{(n)} - \frac{\partial L^{(v)}/\partial \theta}{\partial^2 L^{(v)}/\partial \theta^2}.$$

Dla konkretnych parametrów wyrażenie to przybiera postaci:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^{(v+1)} &= \hat{\alpha}^{(n)} - \frac{\sum_t (D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}^{(x)})}{\sum_t \hat{D}_{x,t}^{(x)}}, \\ \hat{\kappa}^{(v+1)} &= \hat{\kappa}^{(n)} - \frac{\sum_t (D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}^{(x)}) \hat{\beta}_x^{(v)}}{\sum_t \hat{D}_{x,t}^{(x)} (\hat{\beta}_x^{(v)})^2}, \\ \hat{\beta}^{(v+1)} &= \hat{\beta}^{(n)} - \frac{\sum_t (D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}^{(x)}) \hat{\kappa}_t^{(v)}}{\sum_t \hat{D}_{x,t}^{(x)} (\hat{\kappa}_t^{(v)})^2}.\end{aligned}$$

Procedura jest stopowana w momencie, gdy przyrost wartości funkcji wiarygodności nie przewyższa 10^{-7} . Efektywnymi punktami startowymi są $\kappa_t = 0$ oraz $\beta_x = 0,01$ [Jodź 2013].

Jednym z najważniejszych powodów, dla których model został stworzony i oszacowany, jest możliwość dokonania na jego podstawie prognoz. Do tego konieczna jest ekstrapolacja κ_t , parametru opisującego zmiany w umieralności w czasie. Załóżmy, że κ_t ma charakter błędzenia losowego z dryfem, tzn.

$$\kappa_t = \kappa_{t-1} + c + \xi_t,$$

gdzie:

ξ_t – niezależne składniki losowe o jednakowych rozkładach normalnych $N(0, \sigma^2)$.

Estymacja parametrów c oraz σ^2 została przeprowadzona analogicznie jak w pracach N. Li, R. Lee i S. Tuljapurkara [2004] oraz J. Bijak i B. Więckowskiej [2008]. Estymatory powyższych parametrów mają postać:

$$\hat{c} = (\kappa_T - \kappa_1)/(T - 1)$$

oraz

$$\widehat{\sigma^2} = 1/(T - 1) \sum_{t=2}^T (\kappa_t - \kappa_{t-1} - \hat{c})^2.$$

Mając powyższe oszacowania, możemy dokonać ekstrapolacji parametru κ na chwilę $T + s$:

$$\kappa_{T+s} = \kappa_T + (\hat{c} + sc \cdot \eta) \cdot s + \hat{\sigma} \cdot \sum_{\tau=T+1}^{T+s} \xi_{\tau},$$

gdzie η ma rozkład normalny $N(0,1)$, zaś $sc \approx \hat{\sigma}/\sqrt{T-1}$ jest błędem oszacowania stałej c .

W 2006 r. A.E. Renshaw oraz S. Haberman przedstawili modyfikację modelu Lee-Cartera. Zauważyli, że część zmienności w poziomie natężenia zgonów można przypisać efektowi kohortowemu, czyli przynależeniu badanych jednostek do grupy osób urodzonych w tym samym roku [Renshaw, Haberman 2006]. Model ten (RH) można zapisać w następującej postaci:

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x^0 \gamma_{t-x} + \beta_x^1 \kappa_t + \varepsilon_{x,t}.$$

Interpretacja parametrów α_x , β_x^1 oraz κ_t jest taka sama jak w modelu Lee-Cartera. Dodatkowy parametr γ_{t-x} w modelu Renshawa-Habermana opisuje zmiany w poziomie umieralności wynikające z przynależności do kohorty osób urodzonych w roku $t - x$. W tym przypadku również pojawia się problem z jednoznacznością parametrów, dlatego wprowadza się następujące warunki: $\sum_x \beta_x^0 = 1$, $\sum_x \beta_x^1 = 1$ oraz $\gamma_{t_{\min}-x_{\max}} = 0$.

Za autorami tego modelu przyjmujemy dodatkowo, że estymatory nieznanymi parametrów wyznaczane są z wykorzystaniem metody iteracyjnej:

$$\hat{\gamma}_z^{(v+1)} = \hat{\gamma}_z^{(v)} + \frac{\sum_{z=t-x} (D_{xt} - \hat{D}_{xt}^{(x)}) \hat{\beta}_x^{0(v)}}{\sum_{z=t-x} \hat{D}_{xt}^{(x)} (\hat{\beta}_x^{0(v)})^2},$$

$$\hat{\beta}_x^{0(v+1)} = \hat{\beta}_x^{0(v)} + \frac{\sum_x (D_{xt} - \hat{D}_{xt}^{(x)}) \hat{\gamma}_{t-x}^{(v)}}{\sum_t \hat{D}_{xt}^{(x)} (\hat{\gamma}_{t-x}^{(v)})^2},$$

$$\hat{\kappa}^{(v+1)} = \hat{\kappa}^{(v)} + \frac{\sum_x (D_{xt} - \hat{D}_{xt}^{(x)}) \hat{\beta}_x^{1(v)}}{\sum_t \hat{D}_{xt}^{(x)} (\hat{\beta}_x^{1(v)})^2},$$

$$\hat{\beta}_x^{1(v+1)} = \hat{\beta}_x^{1(v)} + \frac{\sum_x (D_{xt} - \hat{D}_{xt}^{(x)}) \hat{\kappa}_t^{(v)}}{\sum_t \hat{D}_{xt}^{(x)} (\hat{\kappa}_t^{(v)})^2}.$$

Model jest ekstrapolowany w analogiczny sposób jak model Lee-Cartera.

Kolejną modyfikacją stochastycznego modelu Lee-Cartera jest model zaproponowany przez R. Plata w 2009 r. (określany skrótem PL) [Plat 2009]. Ulepszeniem w tym modelu jest dodanie kolejnego, zależnego od wieku parametru, mającego wpływ na poziom intensywności zgonów w młodszych grupach wiekowych. Pomimo dodania nowego składnika, mającego uchwycić specyficzny charakter zmian w poziomie umieralności osób młodych, konstrukcja modelu pozwala na stosowanie go dla całego przedziału wiekowego. Postać modelu dana jest wzorem:

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \kappa_t^1 + \kappa_t^2(\bar{x} - x) + \kappa_t^3(\bar{x} - x)^+ + \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t},$$

gdzie $(\bar{x} - x)^+ = \max(\bar{x} - x, 0)$.

Szacowanie parametrów modelu odbywa się w sposób iteracyjny:

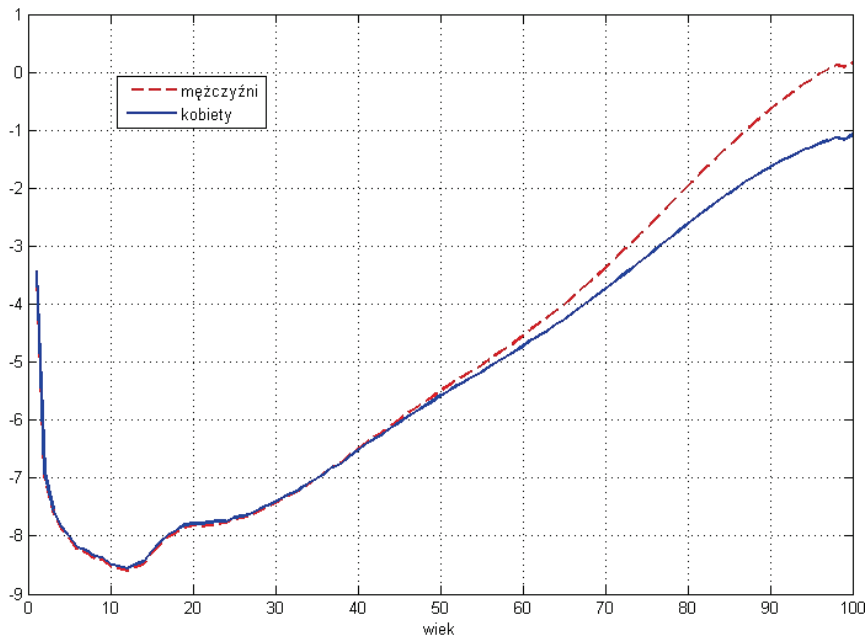
$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_z^{(v+1)} &= \hat{\gamma}_z^{(v)} + \frac{\sum_{z=t-x}(D_{xt} - \hat{D}_{xt}^{(x)})}{\sum_{z=t-x}\hat{D}_{xt}^{(x)}}, \\ \hat{\kappa}^1{}^{(v+1)} &= \hat{\kappa}^1{}^{(v)} + \frac{\sum_x(D_{xt} - \hat{D}_{xt}^{(x)})}{\sum_x\hat{D}_{xt}^{(x)}}, \\ \hat{\kappa}^2{}^{(v+1)} &= \hat{\kappa}^2{}^{(v)} + \frac{\sum_x(D_{xt} - \hat{D}_{xt}^{(x)})(\bar{x} - x)}{\sum_x\hat{D}_{xt}^{(x)}(\bar{x} - x)^2}, \\ \hat{\kappa}^3{}^{(v+1)} &= \hat{\kappa}^3{}^{(v)} + \frac{\sum_x(D_{xt} - \hat{D}_{xt}^{(x)})(\bar{x} - x)^+}{\sum_x\hat{D}_{xt}^{(x)}\{(\bar{x} - x)^+\}^2}.\end{aligned}$$

4. Wartości estymatorów i prognozy

We wszystkich trzech modelach parametr α szacowany jest tak samo: $\hat{\alpha}_x = \frac{1}{T} \sum_t \ln(m_{x,t})$. Na rysunku 1 przedstawione są wartości estymatora parametru α_x dla kobiet i mężczyzn.

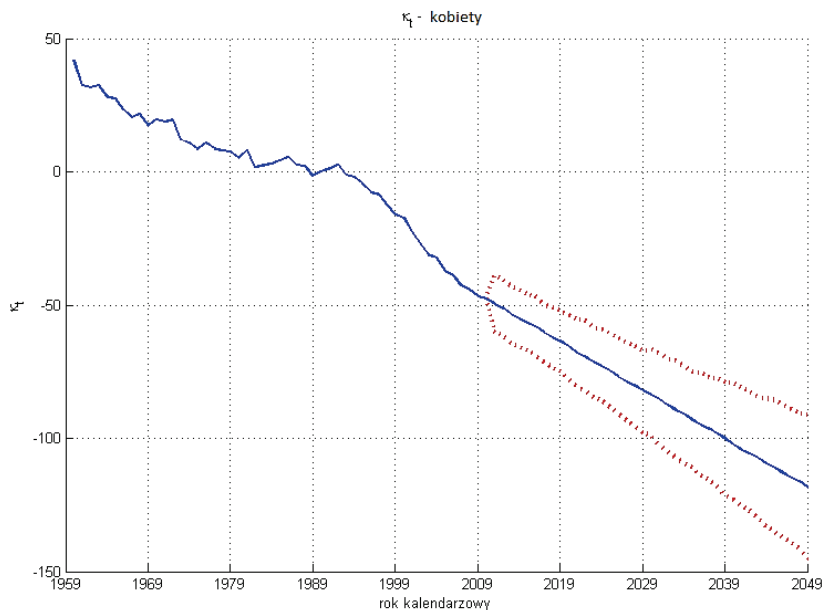
Analizując powyższy wykres, można zauważyć, że od 50. roku życia powiększa się różnica w średnim poziomie umieralności między kobietami a mężczyznami (na korzyść kobiet). Wysokie wartości $\hat{\alpha}_x$ w grupie osób najmłodszych związane są z wysoką śmiertelnością noworodków, co jest zgodne z prowadzonymi obserwacjami.

Na następnych rysunkach znajdują się oszacowane oraz ekstrapolowane wartości parametrów κ . Parametrów, które opisują tempo zmian umieralności w kolejnych latach kalendarzowych.



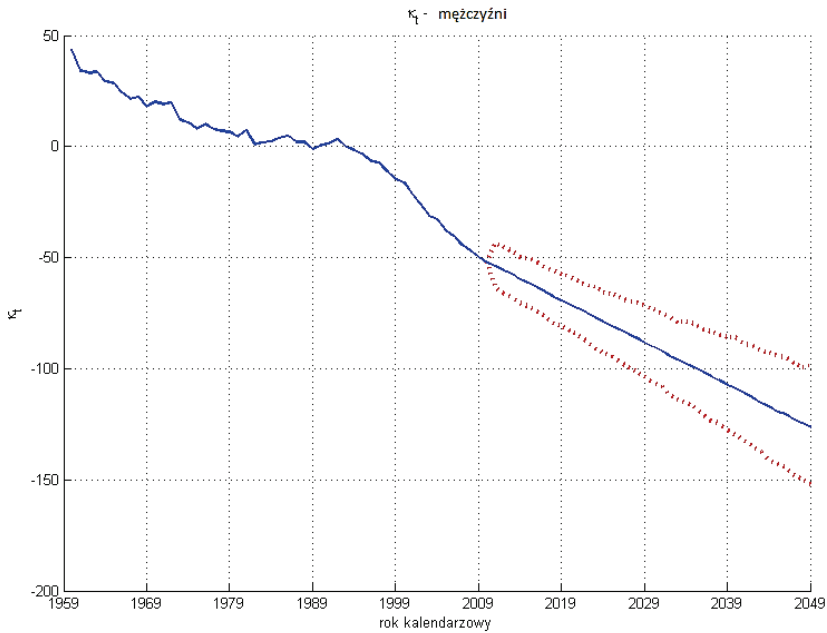
Rys. 1. Wykres wartości estymatorów parametru α dla danych polskich

Źródło: opracowanie własne.



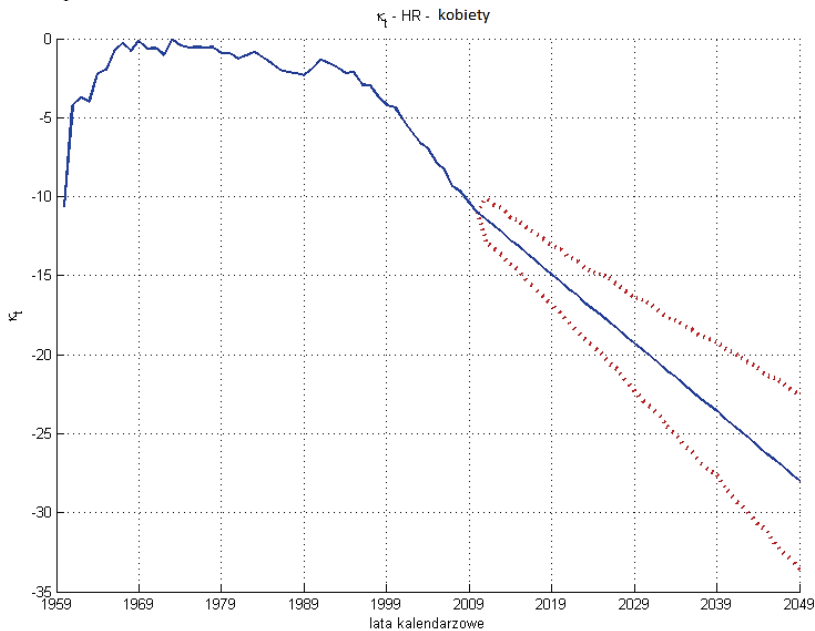
Rys. 2. Wykres wartości estymatorów κ w modelu LC – kobiety

Źródło: opracowanie własne.



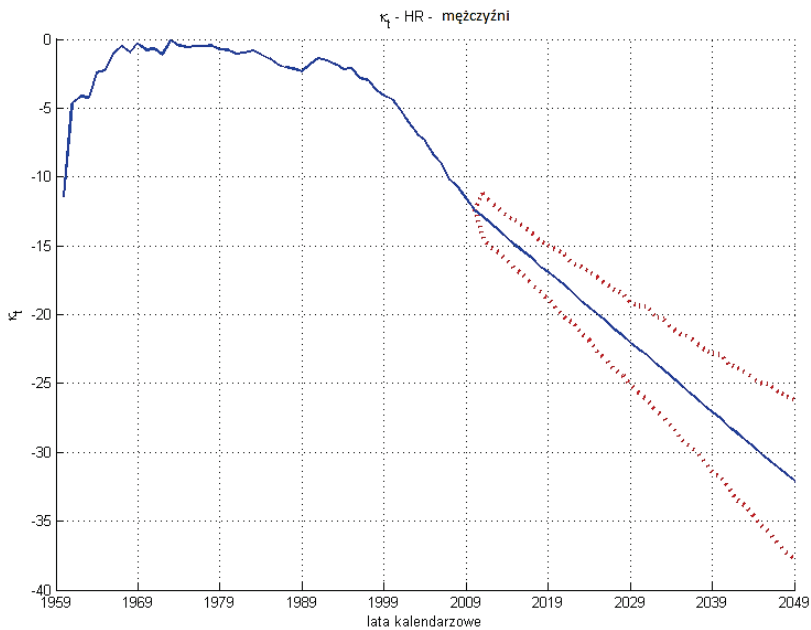
Rys. 3. Wykres wartości estymatora parametru κ w modelu LC – mężczyźni

Źródło: opracowanie własne.



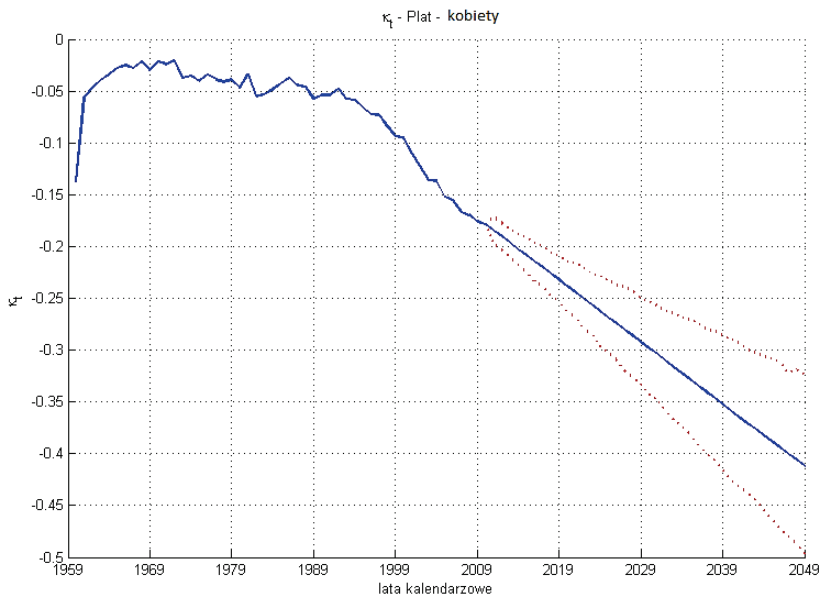
Rys. 4. Wykres wartości estymatora parametru κ w modelu RH – kobiety

Źródło: opracowanie własne.



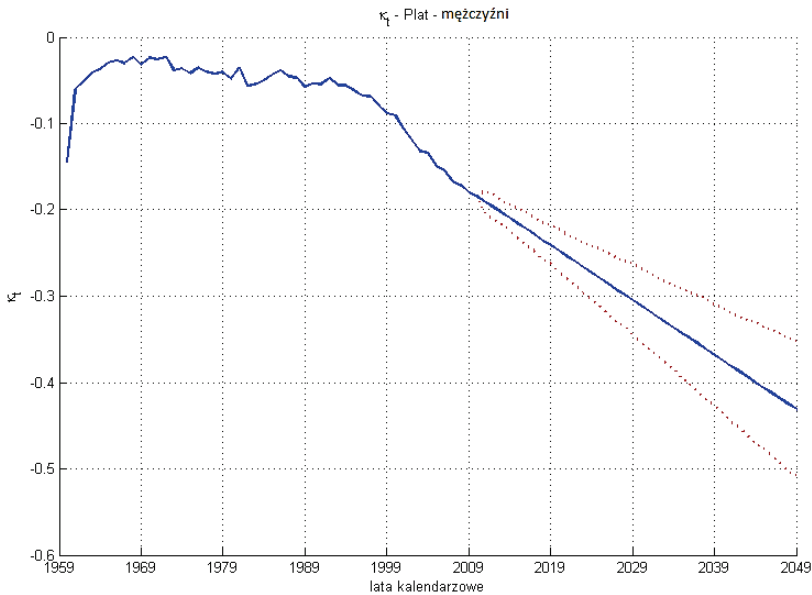
Rys. 5. Wykres wartości estymatora parametru κ w modelu RH – mężczyźni

Źródło: opracowanie własne.



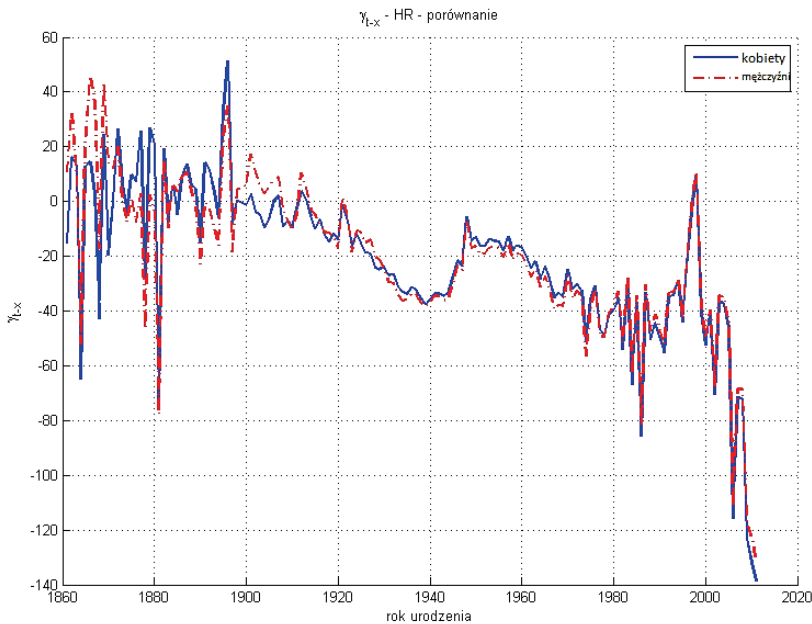
Rys. 6. Wykres wartości estymatora parametru κ w modelu PLat – kobiety

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 7. Wykres wartości estymatora parametru κ w modelu PL – mężczyźni

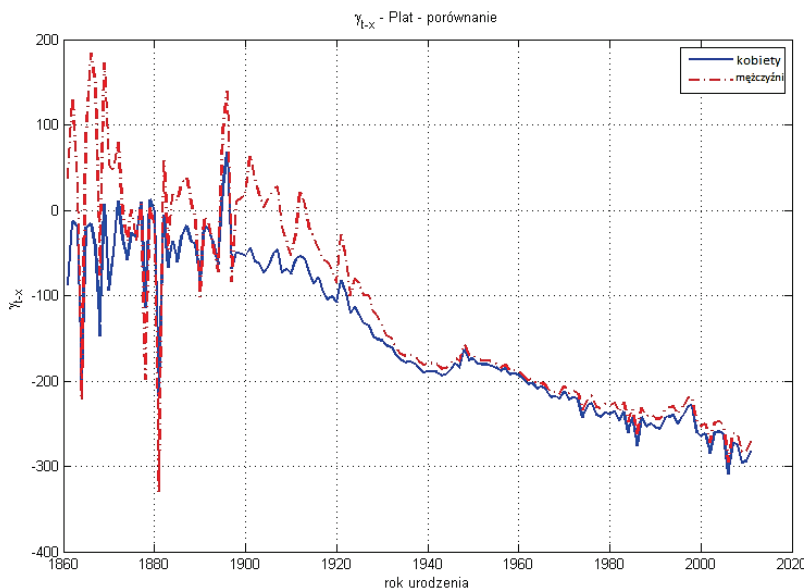
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 8. Wykres wartości estymatora parametru γ w modelu RH

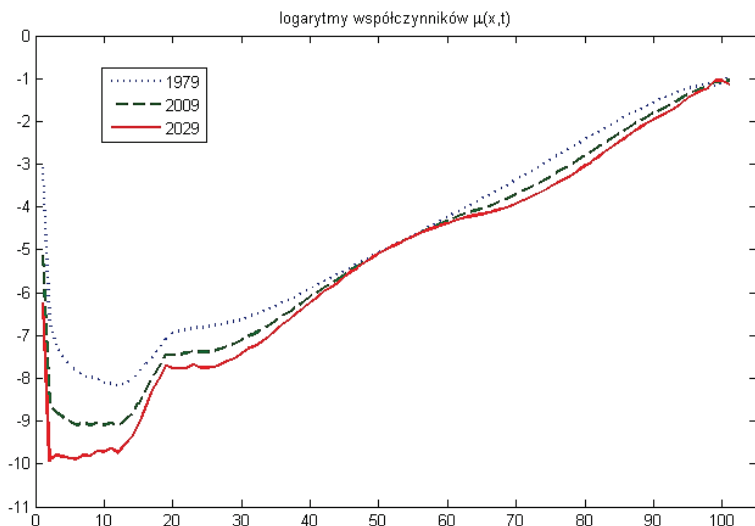
Źródło: opracowanie własne.

Rysunki 8 i 9 przedstawiają oszacowania parametru γ . Duże wahania wartości tego współczynnika na początku i na końcu wykresu wynikają z tego, że nie dysponujemy pełną informacją o zgonach w skraj-



Rys. 9. Wykres wartości estymatora parametru γ w modelu PL

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 10. Wykres współczynników zgonów μ dla kobiet i mężczyzn z Polski – łącznie

Źródło: opracowanie własne.

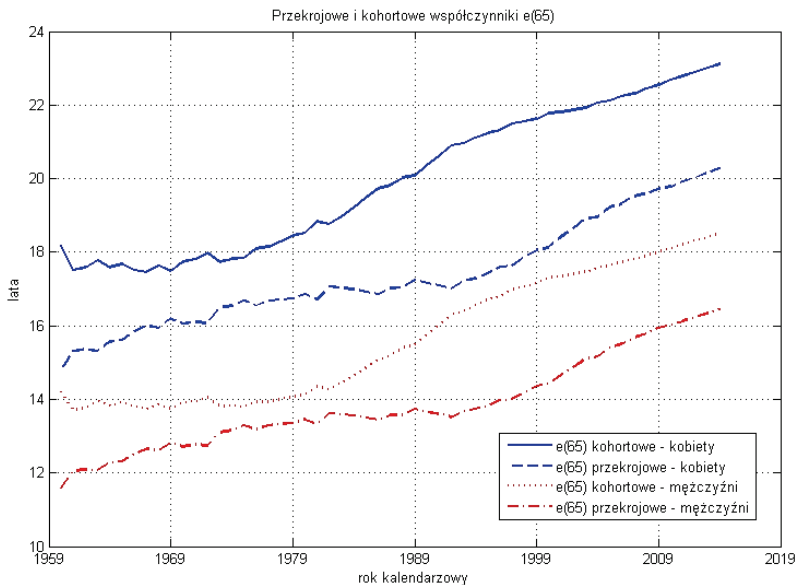
nych kohortach. Na przykład nie wiemy, jak będzie wyglądał rozkład zgonów w kohorcie osób urodzonych w 2005 r., bo te osoby nadal żyją. Na wykresie można również zauważyć nietypową zmianę tendencji z malejącej na rosnącą w zachowaniu się parametru γ w okresie 1940–1950, co zapewne jest efektem zmian w polskiej populacji, jakie nastąpiły w czasie oraz po zakończeniu II wojny światowej.

Wyestymowane parametry pozwalają na wyznaczenie wartości teoretycznych logarytmu intensywności zgonów oraz na konstrukcję prognoz przeciętnego dalszego trwania życia w Polsce. Następny rysunek przedstawia przykładową prognozę wielkości natężenia zgonów uzyskaną na podstawie modelu Lee-Cartera.

Tabela 1. Przekrojowe i kohortowe dalsze trwanie życia

Rok	Przekrojowe e^p (65)		Kohortowe e^c (65)	
	kobiety	mężczyźni	kobiety	mężczyźni
1969	16,20	12,84	17,49	13,74
1989	17,25	13,73	20,08	15,48
2009	19,73	15,93	22,55	17,97
2016	20,51	16,66	23,22	18,67

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 11. Kohortowe dalsze trwanie życia osoby w wieku 65 lat dla kobiet i mężczyzn z Polski

Źródło: opracowanie własne.

Wyliczone na podstawie oszacowanych i prognozowanych wartości $\mu_{x,t}$ przeciętne dalsze trwanie życia 65-latka w ujęciu przekrojowym i kohortowym, zostało zaprezentowane w tab. 1 i na rys. 11.

5. Podsumowanie i wnioski

Z przeprowadzonych badań wynika, że modelowanie intensywności zgonów z użyciem modeli stochastycznych, takich jak modele Lee-Cartera, Renshawa-Habermmana oraz Plata, pozwala na wyliczenie przeciętnego dalszego trwania życia zarówno w ujęciu przekrojowym, jak i w ujęciu wzdłużnym (kohortowym). W kalkulacji składek w ubezpieczeniach długoterminowych należy uwzględnić podejście kohortowe, które stanowi uzupełnienie dla powszechnie stosowanego podejścia przekrojowego. Z porównania wartości przekrojowego dalszego trwania życia oraz kohortowego dalszego trwania życia wynika, że ta druga wartość w przypadku polskich danych jest istotnie większa. W sytuacji, gdy obserwowany jest spadek poziomu umieralności, podejście przekrojowe, które nie doszacowuje wartości dalszego trwania życia, powinno być uzupełniane o podejście kohortowe.

Literatura

- Bijak J., Więckowska B., *Prognozowanie przeciętnego dalszego trwania życia na podstawie modelu Lee-Cartera – wybrane zagadnienia*, [w:] W. Ostasiewicz (red.), *Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2008, s. 9–27.
- Bowers N. et al., *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, USA, Schaumbury 1997.
- Brouhns N., Denuit M., Vermunt J., *A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected life tables*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2002, Vol. 31, s. 373–393.
- Haberman S., *Landmarks in the history of actuarial science (up to 1919)*, Actuarial Research Paper No. 84, Faculty of Actuarial Science and Insurance, City University London, UK, 1996.
- Imhoff E. van, *The exponential multidimensional demographic projection model*, „Mathematical Population Studies” 1990, Vol. 2, s. 171–182.
- Jodź K., *Stochastyczne modelowanie intensywności zgonów na przykładzie Polski*, „Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH” 2013, t. 31, s. 199–213.
- Koissi M.-C., Shapiro A., Högnäs G., *Evaluating and extending the Lee-Carter model for mortality forecasting: Bootstrap confidence interval*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2006, Vol. 38, s. 1–20.
- Lee R., Carter L., *Modeling and forecasting U.S. mortality*, „Journal of the American Statistical Association” 1992, Vol. 87, s. 659–671.
- Li J., Chan W., Cheung S., *Structural changes in the Lee-Carter mortality indexes: detection and implications*, „North American Actuarial Journal” 2011, Vol. 15, s. 13–31.

- Li N., Lee R., Tuljapurkar S., *Using the Lee-Carter method to forecast mortality for populations with limited data*, „International Statistical Review” 2004, Vol. 72, s. 19–36.
- Mitchell D., Brockett P., Mendoza-Arriaga R., Muthuraman K., *Modeling and forecasting mortality rates*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2013, Vol. 52, s. 275–285.
- Pitacco E., *From Halley to “frailty”: A review of survival models for actuarial calculations*, „Giornale dell’Istituto Italiano degli Attuari” 2004, Vol. 67, No. 1/2, s. 17–47.
- Plat R., *On stochastic mortality modeling*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2009, Vol. 45, s. 393–404.
- Renshaw A.E., Haberman S., *A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors*, „Insurance: Mathematics and Economics”, 2006, Vol. 38, s. 556–570.

STOCHASTIC MODELING MORTALITY

Summary: This article presents the methodology of stochastic modeling mortality on the example of the models: Lee-Carter, Renshaw-Haberman and Plat. As a result of calculations, estimated model parameters describing the level of mortality in the Polish population have been obtained. Based on the estimated models predictions of life expectancy in Poland have been made.

Keywords: mortality rate, Lee-Carter model, Renshaw-Haberman model, Plata model, stochastic modeling.