ISSN 1507-3866

Antoni Smoluk
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

WYKRES COSINUSA JEST ELIPSĄ

Streszczenie: Artykuł ma trzy cele: dydaktyczny, naukowy i kulturalny. Proponuje się, analogicznie do określenia ciągu, nową definicję funkcji okresowej. Funkcją okresową jest każda funkcja, której dziedziną jest grupa koła $T = \{z \in C : |z| = 1\}$ liczb zespolonych o module 1. Wykres funkcji okresowej leży na cylindrze $T \times R$. Wynika stąd, że wykresem cosinusa jest elipsa $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

Słowa kluczowe: dziedzina, wykres funkcji, funkcja okresowa, warunkowe ekstrema, cylinder.

DOI: 10.15611/ekt.2014.2.05

Consuetudo est altera natura.
(*Przyzwyczajenie jest drugą naturą.*)

Funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych, nazywa się krótko ciągiem; z tych samych powodów – precyzja i głęboka treść – funkcje okresowe potrzeba definiować inaczej niż dotychczas – krócej i jaśniej. Funkcja określona na kole, czyli funkcja, której dziedziną jest grupa koła, $T = \left\{e^{it}\colon t \in R\right\}$, nazywa się funkcją okresową. Multiplikatywna grupa T jest bowiem izomorficzna z addytywną grupą ilorazową $R/2\pi$ liczb rzeczywistych R, gdzie naturalnie $R/2\pi$ jest rodziną klas abstrakcji relacji równoważności $x = y$ (mod 2π). Jak wykresem funkcji $f : X \to Y$ jest podzbiór produktu $X \times Y$, tak wykres funkcji okresowej leży na cylindrze $T \times R$ lub ogólniej $T \times Y$. Funkcje okresowe – rozumiane tradycyjnie – są funkcjami niezmienniczymi – automorfizmami – względem działania podgrupy addytywnej $\{2\pi k : k \in Z\}$ grupy R, gdzie Z jest grupą liczb całkowitych; orbita funkcji okresowej jest jednym punktem.

Uwaga. *Wykresem funkcji cosinus* $\left\{\left(e^{it}, \cos t\right) : t \in R\right\}$ *jest elipsa*

$$\frac{X^2}{2} + Y^2 = 1.$$

Widać to nieomal bezpośrednio. Funkcja f: $R^2 \to R$ dwóch zmiennych, określona wzorem $f(x, y) = x$, osiąga ekstrema warunkowe, pod warunkiem $x^2 + y^2 = 1$, w punktach: $A = (1, 0)$ – maksimum, oraz $B = (-1, 0)$ – minimum. Naturalnie

$$\left\{(x, y) \in R^2\!: \ x^2 + y^2 = 1\right\} = \left\{(\cos t, \sin t)\!: \ t \in R\right\};$$

przecięcie płaszczyzny $z = x$, czyli zbioru

$$\{(x, \ y, \ x) \in R^3\!: \ (x, y) \in R^2\},$$

z cylindrem

$$\left\{(x, y, z) \in R^3\!: (x, y) \in R^2, \ x^2 + y^2 = 1\right\},$$

w R^3, jest właśnie wykresem funkcji cosinus, a więc elipsą. Równanie tej elipsy, zapisane w nowych współrzędnych:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z,$$
$$Y = y,$$
$$Z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z,$$

jest dane wyżej; jest bowiem $z = x$, więc: $X = \sqrt{2}x$, $Y = y$, $Z = 0$. Równania parametryczne zaś dane są wzorami:

$$X = \sqrt{2}\cos t, \ Y = \sin t, \ Z = 0, \ t \in R.$$

Analogicznie, badając ekstrema warunkowe funkcji $g(x, y)$, przy tym samym warunku, widzimy, iż wykresem funkcji sinus jest elipsa

$$X^2 + \frac{Y^2}{2} = 1.$$

Jest to obrócony o $\frac{\pi}{2}$ wykres funkcji cosinus.

Funkcje $f(x, y) = x$ oraz $g(x, y) = y$ są naturalnie rzutami na pierwszą i drugą oś. Funkcja $h(x, y) = \max\{x, y\}$ nie jest projekcją, ale zasługuje na nazwę semiprojekcji. Nie jest to funkcja gładka – w punktach prostej $y = x$ nie ma pochodnej. Cztery punkty:

$$A = (0, 1), \ B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ C = 1, 0), \ D = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

są lokalnymi ekstremami warunkowymi h na zbiorze $x^2 + y^2 = 1$; w A i C funkcja h osiąga maksima, a w B i D – minima. Przecięcie cylindra wykresem funkcji h jest nową funkcją okresową – w połowie sinusem i w połowie cosinusem. Wykres tej funkcji nie jest tworem płaskim. Podobnie rzecz się ma, gdy zamiast h weźmiemy funkcję $j(x, y) = \min \{x, y\}$. Przykłady te niegładkich ciągłych funkcji okresowych typu *spline* – funkcji sklejanych – pokazują, jak produktywna dydaktycznie jest zmiana definicji funkcji okresowej. Ciągła funkcja okresowa $f \in C(T, R)$ jest przecięciem powierzchni $F \in C([-1,1]^2, R)$ z cylindrem. Odwzorowanie przestrzeni Banacha $C([-1,1]^2, R)$ w przestrzeń $C(T, R)$, które funkcji F przypisuje jej zawężenie do zbioru T, jest liniową surjekcją o normie 1; w obu przestrzeniach myślimy o normie Czebyszewa.

Wierzę, że wzmianka o wykresie funkcji sinus i definicji funkcji okresowej w ogólności będzie użyteczna dla nauczycieli – szczególnie tych, którzy widzą matematykę jako naukę o świecie fizycznym, dla których matematyka nie jest odmianą abstrakcyjnych wielowymiarowych szachów. Poznajemy to tylko, co istnieje. Nie ma nauki o niebycie. Przyjęcie grupy koła T za dziedzinę funkcji okresowej wyjaśnia istotę wszystkich przebiegów periodycznych w naturze: biologii, fizyce, ekonomii, kosmosie. W wirach powietrznych mieszkają przecie piękne panny – eteryczne wiły. Ruch wirowy jest powszechny. Jego istotą jest bowiem dążenie do równowagi. Czas ma naturę kołową – co jest, już było, co było – będzie. Jeśli celem szkoły jest wychowywanie, przekazywanie wiedzy i urabianie kultury naukowej, to niewątpliwie funkcje okresowe tak właśnie trzeba traktować. Stare nawyki jednak zmienia się opornie – tradycja jest stabilna. Sondaż wśród matematyków różnego szczebla (próba – z pewnością niereprezentatywna – liczyła kilkanaście osób) pokazał, że idea tu głoszona jest całkowicie obca dzisiejszym absolwentom wydziałów matematycznych. Nawet para – *nulla calamitas sola* – tytularnych profesorów matematyki, po dwóch dniach detalicznych objaśnień, nie chwyciła, czym jest cosinus. Pomysł z nieznanych mi powodów ostro zwalczany, jak szkodliwa i zła nauka, nie przystaje więc do stanu umysłów dzisiejszych matematyków. Może przeważa lęk przed nowym i prostym? Tak bywa u ludzi starszych – nie trzeba się uczyć, wystarcza rutyna. Moimi rozmówcami byli jednak w przewadze ludzie młodzi i bardzo młodzi. *Durnowo krysty, win kryczy pusty*. To dosadne przysłowie Rusinów lepiej pasuje do nas – rozpasanych w swej wolności – Polaków niż do dumnych Kozaków. Zawsze mamy swoje zdanie. Być może nawet ten esej jest tego przykładem. A ponadto już Arystoteles uważał, że *purus mathematicus* to *purus stupidus*. Pewnie coś w tym jest, bo mówi się, iż matka znanego matematyka żaliła się – chyba jednak z poczuciem dumy – sąsiadce: *mam trzech synów – dwóch normalnych i matematyka*.

Ja wiem lepiej – sinus jest linią falistą i niczym więcej. Wójtów matematycznych skorych do takich wypowiedzi jest w naszej – polskiej – matematyce sporo. A przecież jest to stara idea – koło jako dziedzina funkcji okresowej – dobrze znana specjalistom od analizy Fouriera. Tytułem przykładu podam dwa cytaty. Najpierw z trudnej popularnej książki *Kalejdoskop matematyczny* Hugona Steinhausa: „Gdy nawiniemy papier na świecę, potem przetniemy świecę ukośnie ostrym nożem i rozwiniemy papier, otrzymamy sinusoidę” [Steinhaus 1954, s. 234]. Cytat drugi jest z równie pięknie napisanej książki – tym razem specjalistycznej; jest nim pierwsze zdanie wstępu Jean-

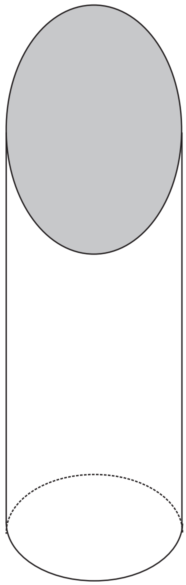
-Pierre’a Kahane’a do jego dzieła o szeregach Fouriera zbieżnych absolutnie [Kahane 1970]: „Książka traktuje o funkcjach klasy *A*, czyli o funkcjach ciągłych na okręgu o absolutnie zbieżnym szeregu Fouriera”. Steinhaus rozwija elipsę i pokazuje sinusoidę, Kahane zwija sinusoidę i otrzymuje elipsę, chociaż tego wyraźnie nie pisze. Jest więc sinusoida – linia falista, jest elipsa – sinus. Przestrzeń Banacha okresowych ciągłych funkcji na prostej jest izomorficzna i izometryczna z przestrzenią funkcji ciągłych na okręgu. *Repetitio est mater studiorum*. Dziedziną funkcji okresowej *ex definitione* jest grupa koła T. Definicja ta rozszerza się natychmiast na funkcje dwuokresowe określone na torusie T^2 i ogólnie na funkcje wielookresowe, których dziedziną jest produkt T^n. W tym jest cała sprawa. Można to uważać – mówiąc górnolotnie – za namiastkę nowego paradygmatu w teorii funkcji okresowych. Odrzućmy wygodną rutynę, a będzie lepiej, naturalniej, prościej. Może najwięcej zyska się zwolenników kołowej dziedziny funkcji okresowych, gdy poszerzymy wykład o przedstawioną tu myśl. Słuchacze sami zadecydują, co przyjąć za definicję. Pojawi się więcej modeli, teoria stanie się bogatsza, a wiedza szersza. Celem nauki jest wszak doskonałość.

August Kekulé, chemik niemiecki, twórca teorii budowy związków organicznych, w 1865 roku odkrył pierścieniową naturę benzenu i podał klasyczny dziś wzór strukturalny. Wzór ten powstał w sennej wizji, gdy zdrzemnął się przy biurku. Było to prawdziwe olśnienie. Podobnie rzecz ma się z elipsą i cosinusem. Elipsa jako wykres cosinusa pojawiła się we śnie. Zasługuje więc na uwagę i z tego także powodu. Sny bywają prorocze. Jest to drobny przyczynek – *toutes proportions gardées* – do psychologii odkryć naukowych. Największym pomnikiem sinusa jest chyba wrocławska wieża niebiańska *Sky Tower* (rys. 1).

Z powodu cosinusowej batalii profesor Bolesław Kopociński wygotował fraszkę na wzór nagrobków hryciańskich; Hrycianki to wieś koło Nowogródka. Żart w porę zawsze jest celny – trafia w sedno: czasem wspiera, innym razem rujnuje. Dziękuję w imieniu wszystkich sinusów i cosinusów bez względu na skutek.

Epitafium

Tut lażyt Anton Smaljuk,
Prafiessor wsjakich nauk.
Na miaso nie mieł wkusa,
A dumał o kasinusach.
Ho! ho! ho!
Szczoż wsiakim da taho?



Rys. 1. Monument sinusa

Literatura

Kahane J.-P., *Séries de Fourier absolument convergentes*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 50, Springer-Verlag. Berlin1970.

Steinhaus H., *Kalejdoskop matematyczny*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1954.

GRAPH OF THE COSINE FUNCTION IS AN ELLIPSE

Summary: Periodic function – it is a proposition of a new definition – has as its domain the multiplicative group $T = \{z \in C : |z| = 1\}$ of complex numbers with module one. Therefore the graph of the function $f : T \to R$ lies on the cylinder $T \times R$, and so the graph of cosine function is the ellipse $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

Keywords: domain, graph, periodic function, conditional extrema, cylinder.