

Politechnika Wrocławska
Instytut Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów

Raport serii **PREPRINTY** nr 02/2008

Modelowanie oddziaływań struktur wirowych ze ścianami w przepływach lepkich metodą cząstek wirowych

Ziemowit Miłosz Malecha

Słowa kluczowe: metoda wirowa
warstwa przyścienna
zjawisko erupcji

Praca doktorska

Promotor: dr hab. inż. Henryk Kudela, prof PWr

WROCŁAW, 2008

*Przede wszystkim dziękuję mojemu promotorowi Panu Prof. dr hab. Henrykowi Kudeli za
pomoc w realizacji niniejszej pracy.
Gorąco dziękuję także moim rodzicom, rodzeństwu oraz przyjaciołom za wsparcie i pomoc w
trudnych chwilach wątpienia.
Oby wysiłek włożony w tę pracę przyczynił się do szczęścia i pokoju.*

Spis treści

Spis treści	i
Spis rysunków	iii
Spis tabel	vii
Wykaz ważniejszych oznaczeń	viii
1 Wprowadzenie – przegląd literatury	1
1.1 Wirowość w mechanice płynów	1
1.2 Nagła erupcja i separacja warstwy przyściennej	2
2 Cele, tezy i zakres pracy	13
3 Opis metody wirowej "wir w komórce"	15
3.1 Równania ruchu płynu	15
3.2 Podstawy kinematyki ruchu wirowego	15
3.3 Matematyczne podstawy metody dyskretnych wirów	18
3.3.1 Opis ruchu cieczy nielepkiej w zmiennych Lagrange'a	18
3.3.2 Algorytm dekompozycji lepkościowej	19
3.4 Opis metody obliczeniowej „wir w komórce”	21
3.4.1 Aproksymacja funkcji ciągłej przez dyskretny rozkład cząstek	22
3.4.2 Wybór jądra interpolującego	23
3.4.3 Realizacja warunku brzegowego na ścianie	24
3.4.4 Warunek typu Dirichleta dla wirowość na ścianie – metoda I	25
3.4.5 Warunek typu Neumanna dla wirowość na ścianie – metoda II	27

3.4.6	Metoda wymiany intensywności cząstek PSE	28
3.4.7	Uwagi do realizacji numerycznej	31
3.4.8	Algorytm numeryczny	32
4	Zagadnienia testowe	35
4.1	Przepływ laminarny w kanale prostokątnym. Przepływ Poiseuille'a	35
4.2	Drugie zagadnienie Stokesa	39
4.3	Przepływ w kwadratowej komorze z ruchomą ścianką	42
4.4	Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem – stopień	45
4.5	Podsumowanie wyników testowych.	49
5	Oddziaływanie struktur wirowych ze ścianami	50
5.1	Oddziaływanie łaty wirowej i ściany	50
5.1.1	Wprowadzenie	50
5.1.2	Obliczenia numeryczne	53
5.2	Oddziaływanie kilku łat wirowych ze ścianą	70
5.2.1	Oddziaływanie dipola wirowego ze ścianą	70
5.2.2	Przepływ wywołany łatami wirowymi o przeciwnych cyrkulacjach	76
5.3	Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem – stopień	84
5.4	Opływ kwadratu w pobliżu ściany płaskiej.	88
6	Podsumowanie	95
A	Separacja w równaniach warstwy przyściennej Prandtla	98
	Bibliografia	103

Spis rysunków

1.1	Linie prądu w okolicy punktu separacji.	3
1.2	Schemat Prandtla. Linie prądu oraz wektory prędkości w sąsiedztwie separacji. . .	4
1.3	Przepływ w kwadratowej komorze. $Re = 3200$, widoczne stacjonarne strefy recyrkulacji wraz z punktami separacji.	4
1.4	Dwa rodzaje punktów separacji.	5
1.5	Schemat linii prądu w okolicy punktu separacji.	6
1.6	Profile prędkości odpowiadające liniom prądu z górnego slajdu rysunku 1.5.	6
1.7	Schemat mechanizmu niestacjonarnej separacji. Deformacja elementów płynu w miejscu separacji.	7
1.8	Schemat przepływu wywołanego wirami unoszonym w przepływie równomiernym. Górny obraz przedstawia rozkład linii prądu. Dolny obraz przedstawia rozkład prędkości i ciśnienia pod wirami.	8
1.9	Schemat wiru spinowego, symetrycznego (lewy obraz) i asymetrycznego (prawy obraz).	11
3.1	Proces interpolacji w pobliżu ściany. Masa cząstki wirowej jest rozkładana na 9 pobliskich węzłów siatki.	25
3.2	Zjawisko nadmiernego skupiania się cząstek wirowych w obszarach przepływu o dużych gradientach prędkości.	32
3.3	Proces redystrybucji mas cząstek na węzły siatki	33
4.1	Pole prędkości i wirowości w kanale prostokątnym dla $Re = 100$	36
4.2	Zmiana błędu maksymalnego w czasie $Re = 100$	37
4.3	Długość formowania się profilu prędkości w zależności od liczby Reynoldsa.	38

4.4	Zagadnienie Stokesa II. Pole wirowe wraz z wektorami prędkości, $Re = 400$, $t=10.8$	40
4.5	Profile prędkości dla $t = 13$ oraz dla $t = 14.4$, $Re = 400$, $\Delta x = 0.02$ $\Delta t = 0.01$. . .	41
4.6	Obszar obliczeniowy oraz występujące struktury wirowe.	42
4.7	Linie prądu dla przepływu w komorze kwadratowej.	44
4.8	Schemat geometrii przepływu w kanale z gwałtownym rozszerzeniem.	45
4.9	Obrazy linii prądu wraz z polem wartości funkcji prądu (technika rozlanej barwy) oraz wektorami prędkości w zależności od liczby Reynoldsa.	46
4.10	Obrazy linii prądu wraz z polem wartości funkcji prądu (technika rozlanej barwy) oraz wektorami prędkości w zależności od liczby Reynoldsa. Uwaga zmieniona skala w stosunku do rysunku 4.9	47
4.11	Porównanie prezentowanych wyników z wynikami eksperymentalnymi i numerycznymi innych badaczy.	48
5.1	Wizualizacja przepływu turbulentnego w warstwie przyściennej [45]	51
5.2	Oddziaływanie wiru wzdłużnego i ściany. Zaadaptowane od Jimenez i Moin [29] . .	51
5.3	Chwilowe kontury wirowości otrzymane metodą PIV. Obraz przedstawia przekrój wiru naszyjnikowego. Linia przerywana oznacza wirowość ujemną, natomiast ciągła dodatnią [72].	52
5.4	Erupcja warstwy przyściennej wywołana obecnością wiru naszyjnikowego [77]. . . .	52
5.5	Obszar obliczeniowy rozważanego zagadnienia.	53
5.6	Ideowy schemat obszaru przyściennego tuż przed erupcją [76]	54
5.7	Strefa recyrkulacji zwiastująca erupcję warstwy przyściennej. Na rysunku widoczne jest pole kierunków wraz z kilkoma liniami prądu na tle pola wirowości	55
5.8	Interakcja łąty wirowej i ściany. $Re = 177$, $\nu = 0.002$. Brak strefy recyrkulacji przyściennej. Rysunek przedstawia pole wirowe wraz z wybranymi liniami prądu. . .	56
5.9	Interakcja łąty wirowej i ściany. $Re = 353$, $\nu = 0.001$. Widoczna strefa recyrkulacji przyściennej dla $t = 10$	57
5.10	Interakcja łąty wirowej i ściany. $Re = 1414$, $\nu = 0.00025$. Widoczne silne wyciąganie strefy recyrkulacji, $t = 14$	58
5.11	Interakcja łąty wirowej i ściany. $Re = 1767$, $\nu = 0.0002$. Pojawienie się punktu siodłowego na liniach prądu, $t = 15$. Zjawisko erupcji.	60
5.12	Zjawisko erupcji dla $Re = 3534$, $\nu = 0.0001$	62

5.13	Zjawisko erupcji dla $Re = 17670$, $\nu = 0.00002$. Widoczny regeneracyjny charakter zjawiska, $t = 90$	63
5.14	Powiększona ramka z rys. 5.13 dla czasu $t = 100$. Sekwencja wtórnych struktur wirowych.	64
5.15	Punkt siodłowy, $Re = 1767$, $\nu = 0.0002$. Porównaj z kryterium MRS, rysunek 1.5.	64
5.16	Ewolucja strefy recyrkulacji z rysunku 5.7. Rozwój zjawiska erupcji.	65
5.17	Ewolucja cząstek płynu z obszaru przyściennego, $Re = 177$, $\nu = 0.002$. Brak zjawiska erupcji. Rysunek przedstawia ruch pasywnych cząstek – markerów.	66
5.18	Ewolucja cząstek płynu z obszaru przyściennego, $Re = 3534$, $\nu = 0.0001$. Widoczne zjawisko erupcji. Rysunek przedstawia ruch pasywnych cząstek – markerów.	67
5.19	Eksperyment demonstrujący narodziny wiru wtórnego [55]	68
5.20	Obszar obliczeniowy rozważanego zagadnienia.	71
5.21	Wizualizacja kolizji dipola ze ścianą [82]. Porównanie z wynikami numerycznymi, $\nu = 0.0001$, $Re = 3534$	72
5.22	Oddziaływanie dipola wirowego ze ścianą, $Re = 707$	72
5.23	Oddziaływanie dipola wirowego ze ścianą, $Re = 17670$, $a = 0.5$. Widoczne zjawisko erupcji.	74
5.24	Oddziaływanie dipola wirowego ze ścianą, $Re = 17670$, $a = 0.3$. Zjawisko erupcji oraz utrata symetrii.	75
5.25	Obszar obliczeniowy rozważanego zagadnienia.	76
5.26	Szkic pary wzdluznych wirów wspolpradowych [55].	77
5.27	Wizualizacja przeplywu w turbulენტnej warstwie przyściennej (lewa strona) wraz ze schematem (prawa strona). Widok z góry [30].	77
5.28	Schemat chwilowego pola prędkości w turbulენტnej warstwie przyściennej. Widok w płaszczyźnie przekroju poprzecznego przeplywu [76].	78
5.29	Oddziaływanie łał wirowych o przeciwnych cyrkulacjach ze ścianą, $\nu = 0.0005$. Rysunek przedstawia pole wirowe wraz z wybranymi liniami prądu.	79
5.30	Oddziaływanie łał wirowych o przeciwnych cyrkulacjach ze ścianą, $\nu = 0.0001$. Utrata symetrii w obszarze przyściennym.	81
5.31	Oddziaływanie łał wirowych o przeciwnych cyrkulacjach ze ścianą, $\nu = 0.00002$. Regeneracyjny charakter erupcji.	82

5.32	Oddziaływanie szeregu naprzemiennie rotujących łat wirowych ze ścianą, $\nu = 0.00002$. Na rysunku widać utratę symetrii oraz trzy kolejne pokolenia wirów wtórnych.	83
5.33	Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem. Pole wirowe (ramka górną) oraz funkcja prądu wraz z liniami prądu.	84
5.34	Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem. Tworzenie się ko- lejnego wiru za stopniem (w narożniku).	85
5.35	Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem. Oddzielenie strefy recyrkulacji od stopnia.	85
5.36	Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem. Rozpad strefy re- cyrkulacji. Ruch wirów w dół strumienia.	86
5.37	Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem. Erupcje skoncen- trowanej wirowości ze ścian.	87
5.38	Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem. Ścieżka wirowa Karmana.	87
5.39	Obszar obliczeniowy, opływu przeszkody w pobliżu ściany	89
5.40	Opływ kwadratu w pobliżu ściany, linie prądu. Zjawisko erupcji.	91
5.41	Opływ kwadratu w pobliżu ściany, pole wirowe. Zjawisko erupcji.	93
5.42	Punkt siodłowy w strefie recyrkulacji w obszarze przyściennym. Porównaj z kryte- rium MRS, rysunek 1.5	94

Spis tabel

4.1	Oszacowanie rzędu zbieżności dla pierwszej metody generacji wirowości	37
4.2	Oszacowanie rzędu zbieżności dla drugiej metody generacji wirowości	37
4.3	Długość formowania się profilu prędkości w zależności od liczby Re	38
4.4	Oszacowanie rzędu zbieżności dla pierwszej metody generacji wirowości	41
4.5	Oszacowanie rzędu zbieżności dla drugiej metody generacji wirowości	41
4.6	Porównanie położenia środka pierwotnego wiru podstawowego.	43

Wykaz ważniejszych oznaczeń

\mathbf{B}	— potencjał wektorowy;
C	— stała, liczba rzeczywista;
$G(\mathbf{x})$	— funkcja Greena (rozwiązanie fundamentalne) Równania Laplacea;
h	— krok siatki numerycznej;
H	— wysokość, m ;
L	— długość, m ;
n	— współrzędna normalna, kierunek prostopadły do ściany;
N	— liczba wirów;
p	— ciśnienie, N/m^2 ;
r	— promień, odległość między dwoma punktami;
Re	— liczba Reynoldsa;
s	— współrzędna styczna, kierunek styczny do ściany;
t	— czas, s ;
\mathbf{u}	— wektor prędkości, m/s ;
u, v	— składowe wektora prędkości;
x, y	— współrzędne przestrzenne;
Δt	— krok czasowy;
$\Delta x, \Delta y$	— kroki siatki numerycznej;
γ	— intensywność warstwy wirowej;
Γ	— intensywność cząstki wirowej, m^2/s ;
ν	— kinematyczny współczynnik lepkości, m^2/s ;
ρ	— gęstość płynu, kg/m^3 ;
ψ	— funkcja prądu;
$\boldsymbol{\omega}$	— wektor wirowości;
ω	— pole wirowości w przestrzeni dwuwymiarowej, $1/s$;

Rozdział 1

Wprowadzenie – przegląd literatury

1.1 Wirowość w mechanice płynów

Doniosłość znaczenia wirowości w mechanice płynów bardzo dobrze oddają słowa Kuchemanna (1965), który określił je mianem ścięgien i mięśni dynamiki płynów. W rzeczywistych przepływach istnieje niemal nieskończenie bogata różnorodność i złożoność struktur wirowych i związanych z nimi zjawisk hydrodynamicznych.

Zjawiska generowania dźwięku, wibracji, zaburzenia siły nośnej i sterowności, zmiana warunków wymiany ciepła, czy warunków mieszania związane są właśnie ze strukturami wirowymi. Warto tutaj dodać że obecność wirów w przepływie może być korzystna bądź nie. Są miejsca gdzie struktury wirowe są pożądane (intensyfikacja mieszania, czy wymiany ciepła, dodatkowa siła nośna), są takie gdzie ich obecność może być niebezpieczna (zaburzenia sterowności, zjawisko rezonansu) [21, 65, 47, 4]. Szablony przykładem, może być tutaj zjawisko dynamicznego przeciągnięcia (*ang. dynamic stall*) występujące przy opływie profilu płata lotniczego. Zjawisku temu towarzyszy struktura wirowa generowana nad skrzydłem samolotu, która gdy jest nad skrzydłem znacznie zwiększa siłę nośną samolotu, lecz w momencie oderwania tej struktury następuje nagłe i znaczące pogorszenie warunków lotu co może prowadzić w skrajnym przypadku do utraty sterowności. Z powyższych przykładów jasno wynika że badanie dynamiki pola wirowego oraz umiejętność kontroli struktur wirowych jest bardzo pożądane.

Wirowość ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$) jest obecna we wszystkich przepływach rzeczywistych. Warunek braku poślizgu na ściankach sztywnych, nieciągłości składowych stycznych pola prędkości lub niezachowawcze siły masowe (związane np. z różnicami gęstości) powodują produkcję wirowo-

wości, która jest unoszona i ulega dyfuzji w płynie. Dla przepływów nieściśliwych, a o takich traktuje powyższa rozprawa, źródłem wirowości jest ścianka sztywna.

Sformułowanie równań ruchu cieczy w ujęciu wirowości ω i prędkości \mathbf{u} wydaje się więc niezmiernie interesujące i korzystne, gdyż daje możliwość śledzenia dynamiki pola wirowego i bezpośrednio badać przyczyny, miejsca i skutki rodzenia się struktur wirowych w przepływie. Daje to początek metodom wirowym, gdzie ciągłe pole wirowe jest zastępowane dyskretnym rozkładem cząstek wirowych. Cząstki wirowe są nośnikami informacji o polu wirowym, a ich ruch, zgodny z aktualnym polem prędkości, oraz wzajemne oddziaływanie odpowiada ewolucji pola wirowego. Tak sformułowane zagadnienie posiada wiele interesujących cech. Jedną z nich jest gromadzenie się elementów wirowych w miejscach gdzie gradienty prędkości są największe, pozwala to uzyskać dokładniejszą informację o tych miejscach. Początek metod wirowych datuje się na lata trzydzieste XX wieku. W 1931 roku Rosenhead w pracy [66] badał dynamikę dwuwymiarowej warstwy wirowej dzieląc ją na elementy wirowe, których wzajemne oddziaływanie obliczał z prawa Biota-Savarta. Jednak prawdziwy rozkwit metod wirowych nastąpił wraz z rozwojem technik komputerowych i mocy obliczeniowych gdyż pozwoliło to wprowadzić do obliczeń dużą ilość cząstek wirowych.

1.2 Nagła erupcja i separacja warstwy przyściennej

Przepływ turbulentny w pobliżu ścian jest bardzo powszechny. Można się z nim zetknąć zarówno w przepływach zewnętrznym (opływ płatów, statków, łopatek turbin, elementów skrzydeł, czy kadłubów) jak i wewnętrznym (rurociągi, komory). Turbulencja jest bardzo skomplikowaną formą ruchu płynu i jednocześnie bardzo powszechną. Ruch turbulentny charakteryzuje się fluktuacją wszystkich składowych pola prędkości zarówno w czasie jak i w przestrzeni.

Z obserwacji doświadczalnych wynika, że wirowość jest zlokalizowana zazwyczaj w niewielkim obszarze, ale jej rozkład jednoznacznie określa pole prędkości w całym obszarze przepływu. Wynika stąd, że różnorodność i złożoność przepływu turbulentnego, jak również zjawiska w nim zachodzące są ściśle związane z dynamiką pola wirowości [7, 6]. Znaczna część wirowości skupiona jest w okolicach przyściennych, ponieważ jedynym miejscem, gdzie może się ona wygenerować jest właśnie ściana. Dla cieczy lepkiej zarówno składowa normalna prędkości, jak i składowa styczna do brzegu powinny przyjmować wartość zero. Przy ścianie tworzy się więc cienka warstwa pośrednicząca między skończoną wartością prędkości wewnątrz obszaru prze-

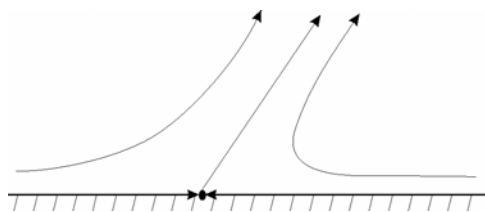
pływu a wartością zero na ścianie i, jak wiemy z teorii warstwy przyściennej [5], jej grubość maleje ze wzrostem liczby Reynoldsa ($\sim 1/\sqrt{Re}$).

Mechanizm produkcji wirowości na ścianie można opisać używając terminu warstwy wirowej. Nieciągłość pola prędkości na którym następuje skokowa zmiana prędkości, od zera do skończonej wartości prędkości wewnątrz przepływu, nazywamy warstwą wirową, której intensywności równa jest skokowi składowej stycznej pola prędkości.

Jeżeli w pewnej ustalonej chwili czasu wykorzystamy wirowość do wyznaczenia pola prędkości to na ścianie otrzymamy prędkość styczną u_s różną od zera, tym samym naruszając warunki brzegowe na prędkość. Niepożądaną składową styczną prędkości można wyeliminować przyjmując, że wzdłuż brzegu stałego powstaje warstwa wirowa, której intensywność jest taka aby zapewnić warunek braku poślizgu między cieczą, a ścianą [10]. Następnie warstwa wirowa dyfunduje ze ściany tym samym wprowadzając nową wirowość do wnętrza przepływu.

Transport wirowości ze ścian do wnętrza przepływu może odbywać się na dwa sposoby. Pierwszy z nich związany z dyfuzją jest mało intensywny i ograniczony. Drugi sposób, dużo bardziej intensywny, związany jest ze zjawiskiem niestacjonarnej separacji warstwy przyściennej prowadzącym do erupcji elementów płynu z okolicy ściany do wnętrza przepływu.

Termin separacja jest pojęciem używanym zarówno przy opisie przepływów stacjonarnych jak i niestacjonarnych przez co nie jest terminem jednoznacznym. Dla przepływów stacjonarnych, niezmiennych w czasie, powierzchnia ciała stałego jest jednocześnie linią prądu. Prędkość płynu na ścianie jest równa zero ale posiada pewną niezerową wartość w dowolnie małej odległości od ścianki. Zjawisko separacji zachodzi, gdy w jednym punkcie na ścianie spotykają się elementy płynu o przeciwnie skierowanych wektorach prędkości, rysunek 1.1. Punkt ten nazy-



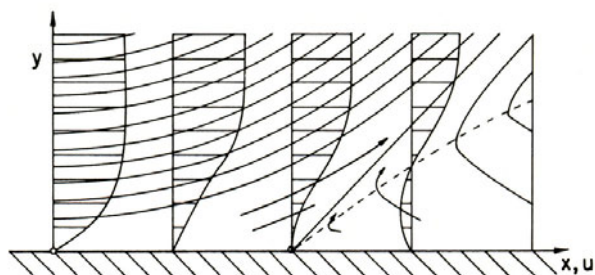
Rys. 1.1: Linie prądu w okolicy punktu separacji.

wa się punktem separacji bądź stagnacji, a spotykające się w nim elementy płynu zaczynają oddalać się od ścianki. W punkcie separacji naprężenia styczne oraz wirowość równają się zero:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{dla } y = 0. \quad (1.1)$$

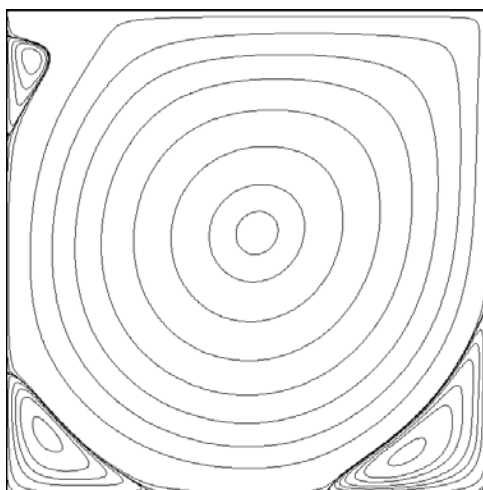
Powyższe kryterium jest ważne dla stacjonarnych przepływów z małą liczbą Reynoldsa. Zostało ono przedstawione po raz pierwszy przez Prandtla w 1904 roku [78]. Kryterium to zostało wyprowadzone w oparciu o równania ruchu warstwy przyściennej (równania Prandtla) i jest ono jednoznaczne z pojawieniem się osobliwości w polu prędkości w rozwiązaniu równań Prandtla (składowa normalna prędkości w punkcie separacji dąży do nieskończoności, patrz dodatek A).

Rysunek 1.2 przedstawia schemat rozkładu linii prądu wraz z wektorami prędkości w okolicach miejsca separacji. Jednym z przykładów przepływów stacjonarnych, w których można



Rys. 1.2: Schemat Prandtla. Linie prądu oraz wektory prędkości w sąsiedztwie separacji.

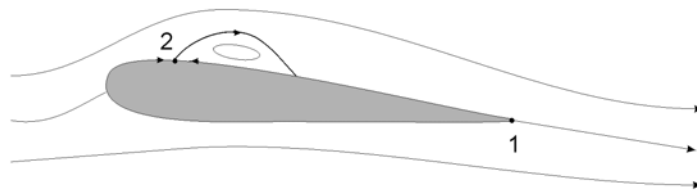
zaobserwować miejsca w których dochodzi do separacji jest przepływ w kwadratowej komorze z ruchomą ścianką, rysunek 1.3, oraz cały szereg innych przepływów, w których tworzą się stacjonarne strefy recyrkulacji (opływ walca, stopnia, gwałtowne rozszerzenie itd.).



Rys. 1.3: Przepływ w kwadratowej komorze. $Re = 3200$, widoczne stacjonarne strefy recyrkulacji wraz z punktami separacji.

Punkty separacji w zależności od przyczyn powstawania mogą być podzielona na dwa rodzaje. Pierwszy typ ma charakter kinematyczny i powstaje na skutek rozdziału przepływu równoległego podczas opływu ciała, punkt numer 1 na rysunku 1.4. W tym przypadku wirowość nie odgrywa znaczącej roli, gdyż nie ona warunkuje istnienie tego punktu. Natomiast drugi rodzaj jest ściśle związany z istnieniem wirowości w przepływie i występuje tylko w pewnych warunkach. W mechanice płynów właśnie ten drugi rodzaj jest właściwym punktem separacji [47].

Jak było już to powiedziane wcześniej, wirowość istniejąca wewnątrz przepływu indukuje na ścianie warstwę wirową. W konsekwencji może to doprowadzić do pojawienia się przepływu wstecznego oraz strefy recyrkulacji, w której obecny jest punkt separacji, rysunek 1.4.

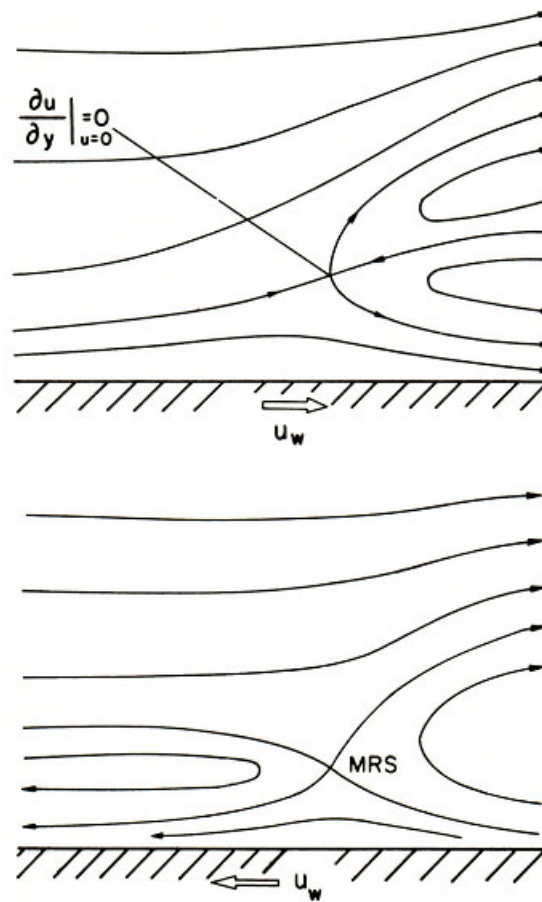


Rys. 1.4: Dwa rodzaje punktów separacji.

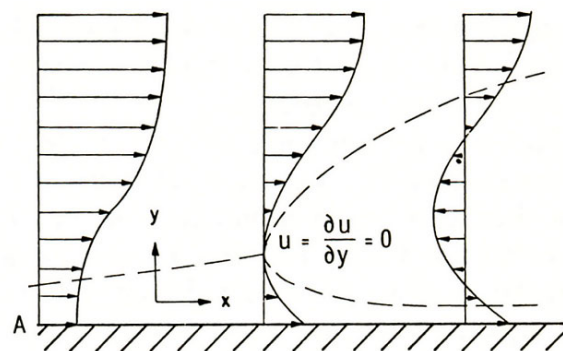
Moore, Rott oraz Sears przytoczyli argumenty wskazujące na to, że kryterium zaproponowane przez Prandtla 1.1 jest jednak niedostateczne dla niektórych przepływów stacjonarnych z dużą liczbą Reynoldsa, oraz dla przepływów niestacjonarnych. W przypadku tych drugich mówi się o niestacjonarnej separacji. Przykładem może być przepływ z dużą liczbą Reynoldsa nad poruszającą się ścianą. W takim przypadku separacja może być sygnalizowana przez tzw. kryterium MRS (Moore, Rott, Sears) [18, 68, 73]. Według kryterium MRS separacja zachodzi wewnątrz przepływu w miejscu gdzie znikają naprężenia styczne oraz prędkość jest równa zero (punkt stagnacji):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{dla } u = 0. \quad (1.2)$$

Rysunki 1.5 przedstawiają schemat linii prądu w okolicy punktu separacji gdy ścianka porusza się zgodnie, lub przeciwnie do kierunku ruchu strumienia. W takim przypadku punkt separacji spełnia kryterium MRS (1.2) i jest punktem siodłowym. Natomiast rysunek 1.6 przedstawia profile prędkości odpowiadające liniom prądu z rysunku 1.5. Analityczny dowód potwierdzający poprawność kryterium MRS można znaleźć w pracy [18] dotyczącej niestacjonarnej separacji. Autorzy [18] zwracają uwagę na fakt, że osobliwość (składowa normalna prędkości



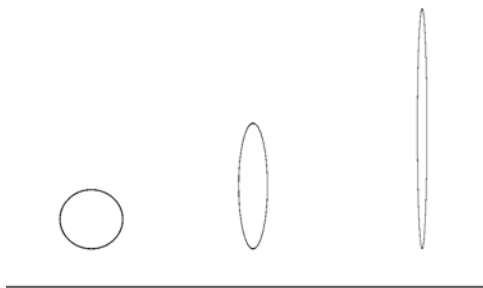
Rys. 1.5: Schemat linii prądu w okolicy punktu separacji.



Rys. 1.6: Profile prędkości odpowiadające liniom prądu z górnego slajdu rysunku 1.5.

dąży do nieskończoności) związana z nagłą erupcją warstwy przyściennej, rozwija się w równaniu ciągłości. Fizycznie oznacza to, że infinitezymalna cząstka płynu w punkcie separacji jest zginiata w kierunku równoległym do ścianki. Ponieważ objętość cząstki musi zostać zachowana

wana, ściskanie w kierunku równoległym musi być skompensowane bardzo szybką ekspansją w kierunku prostopadłym do ścianki (rys. 1.7). Prowadzi to do wyrzucenia płynu znajdującego się ponad ściskanym regionem, daleko od ścianki. Cytowani autorzy prowadzili badania analityczne w zmiennych Lagrange'a. Pokazali oni, że kryterium MRS jest spełnione w przypadku niestacjonarnej separacji. Wykorzystali do badań równania warstwy przyściennej Prandtla.



Rys. 1.7: Schemat mechanizmu niestacjonarnej separacji. Deformacja elementów płynu w miejscu separacji.

Zjawiska niestacjonarnej separacji i erupcji warstwy przyściennej były w centrum zainteresowania różnych badaczy. W wielu miejscach można natknąć się na próbę zdefiniowania tych zjawisk. Poniżej zostaną przedstawione niektóre z nich. Prandtl opisał zjawisko niestacjonarnej separacji następująco:

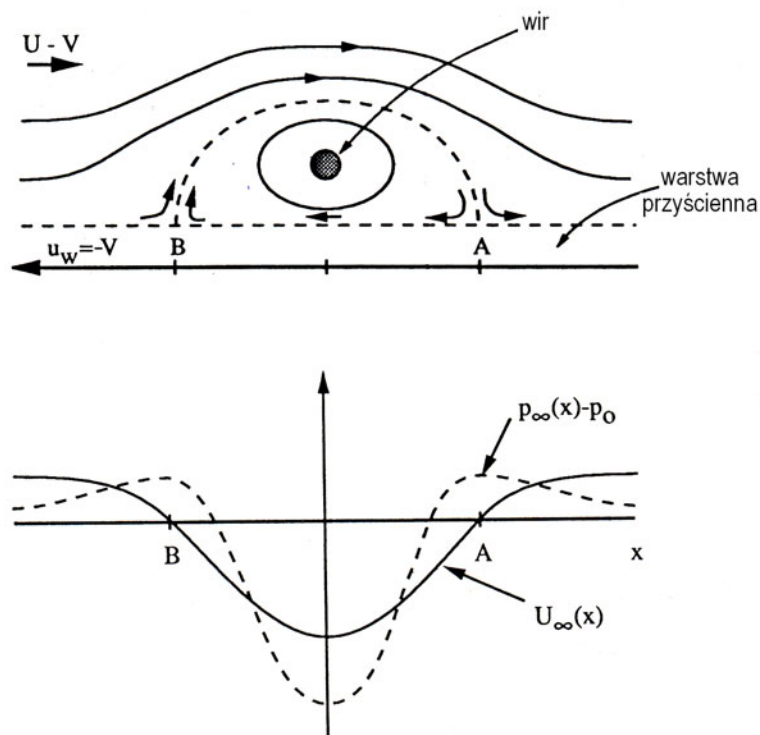
„...warstwa płynu wstrzeliwuje samą siebie do wnętrza przepływu powodując jego kompletną zmianę.”

Doligalski, Walker, Smith, Van Dommelen i inni autorzy [21, 22, 80, 84, 56, 14] w swoich badaniach zajmowali się problematyką niestacjonarnej separacji. W ich pracach można odnaleźć zarówno materiał doświadczalny jak i obliczeniowy. Jednym z głównych wątków w pracy [21] była wzajemna interakcja wirów i ścian, gdzie zjawisko separacji zostało opisane następującymi słowami:

„Przy dużych liczbach Reynoldsa laminarna warstwa przyścienna wykazuje dużą skłonność do nagłej, skoncentrowanej erupcji w regionach przeciwnego gradientu ciśnienia. Nowoczesna terminologia określa takie zdarzenie mianem separacji. Separacja prowadzi do oderwania warstwy przyściennej od powierzchni. (...)”.

Powyższy cytat pochodzi z pracy, gdzie badane było wzajemne oddziaływanie wiru punkto-
wego i ściany. Zagadnienie to zostało określone mianem pierwszego problemu kanonicznego.

Zwrócono tam uwagę na fakt iż poruszający się wir powoduje powstanie wstecznego gradientu ciśnienia co w konsekwencji może doprowadzić do narodzin nowej struktury wirowej w warstwie przyściennej. Pojawienie się strefy recyrkulacji przy ścianie było rozpoznane jako zwiastun nagłej erupcji.



Rys. 1.8: Schemat przepływu wywołanego wirem unoszonym w przepływie równomiernym. Górny obraz przedstawia rozkład linii prądu. Dolny obraz przedstawia rozkład prędkości i ciśnienia pod wirem.

W celu lepszego zrozumienia powyższych stwierdzeń rozważmy przepływ z rysunku 1.8. Rysunek ten przedstawia szkic, na którym wir punktowy jest unoszony przez równomierny przepływ w okolicy ściany płaskiej. Górny obraz z rysunku 1.8 przedstawia rozkład chwilowych linii prądu w układzie odniesienia poruszającym się wraz z wirem. Wir ten indukuje po swojej prawej stronie ruch w kierunku do ściany, a po swojej lewej stronie od ściany. Linia prądu, zaznaczona linią przerywaną, oddziela obszar przepływu wstecznego (strefa recyrkulacji) od przepływu zewnętrznego. Na granicy przepływu wstecznego i przepływu zewnętrznego pojawiają się dwa punkty stagnacji **A** i **B**, gdzie punkt **B** jest punktem separacji. Jeżeli przepływ równomierny, w którym znajduje się wir, ma prędkość U , a prędkości wiru wynosi $(-V)$, to

wypadkowa prędkość przepływu będzie równa $(U - V)$. W układzie odniesienia poruszającym się wraz z wirami ściana porusza się z prędkością $u_w = -V$. Dolny obraz z rysunku 1.8 przedstawia rozkład prędkości i ciśnienia w obszarze przyściennym wywołany obecnością wiru w pobliżu ściany. Przyjmując, że x mierzy dystans w kierunku przepływu można zauważyć że minimum prędkości znajduje się dokładnie pod środkiem wiru w punkcie $x = 0$. Jeżeli p_0 oznacza ciśnienie w przepływie niezaburzonym to minimalna wartość ciśnienia bezwzględne także występuje w punkcie $x = 0$. Na lewo od punktu $x = 0$ prędkość przepływu $U_\infty(x)$ rośnie monotonicznie do zera w punkcie stagnacji **B**. Temu wzrostowi prędkości towarzyszy monotoniczny wzrost ciśnienia. Zatem na lewo od wiru istnieje obszar przeciwnego (do kierunku ruchu) gradientu ciśnienia.

Zjawisko wybuchu tłumaczy w jaki sposób wyrzucane są porcje skoncentrowanej wirowości, a wraz z nimi elementy płynu, poza obszar warstwy przyściennej. Wyrzucana wirowość cechuje się intensywnością porównywalną z intensywnością pierwotnej struktury wirowej (powodującej erupcję) oraz tym że silnie oddziałują z wirami macierzystym. W konsekwencji prowadzi to do znacznych zmian w polu przepływu. W wyżej cytowanych pracach zwrócono uwagę, iż dokładne określenie lokalizacji i czasu zjawiska erupcji jest bardzo trudne. Dlatego stanowi zarówno wyzwanie dla eksperymentatorów jak i metod obliczeniowych. Zwrócono uwagę na fakt iż metody obliczeniowe opierające się na siatce numerycznej mogą nie odtworzyć tego zjawiska, zasugerowano że odpowiednimi metodami mogą okazać się metody Lagrangowskie.

Studując oddziaływanie struktur wirowych ze ścianami oraz zjawiska zachodzące w obszarach przyściennych powinno się zwrócić szczególną uwagę na rzeczywisty trójwymiarowy charakter tych problemów. W pracy [76] dotyczącej struktur wirowych w turbulentnej warstwie przyściennej zwrócono uwagę na znaczną złożoność takiego przepływu. Turbulentny przepływ w pobliżu ścian jest powszechny. Występuje między innymi przy opływie skrzydeł samolotów, powierzchni statków, czy łopatek turbin. W wielu przypadkach zewnętrzne pole prędkości jest faktycznie bezwirowe. Jednak dla odpowiednio dużych liczb Reynoldsa już niewielkie zaburzenie w polu przepływu może ulec znacznemu wzmocnieniu, powodując przejście do turbulencji w warstwie przyściennej. Zwiastunem przejścia jest pojawienie się zaburzenia typu Tollmeinschlichting (TS). Następnie w procesie, który nie jest do końca jasny, zaburzenie to nasila się i załamuje, ostatecznie przekształcając się w struktury wirowe. Wiry te posiadają charakterystyczny kształt spinki do włosów, dlatego zostały nazwane wirami spinkowymi. Pojawienie się tego typu struktur w warstwie przyściennej prowadzi do znacznego skomplikowania pola prze-

pływu. Dodatkowo na skutek oddziaływania wirów spinkowych ze ścianą dochodzi do zjawiska regeneracji, na ścianie powstają kolejne pokolenia wirów spinkowych. Początkowo laminarna warstwa przyścienna przechodzi w pełni turbulentną.

Innym mechanizmem prowadzącym do zmiany reżimu przepływu w pobliżu ściany jest zjawisko obejścia (ang. *bypass*). Jest to gwałtowna zmiana charakteru przepływu na turbulentny z pominięciem etapów pośrednich (brak zaburzeń typu Tollmein-Schlichting). Mechanizm ten może się rozwinąć, gdy w przepływie głównym pierwotnie istnieje ruch wirowy albo w formie turbulencji albo w formie pojedynczych struktur wirowych (np. wykreowanych na opływanych przeszkodach) [76, 64].

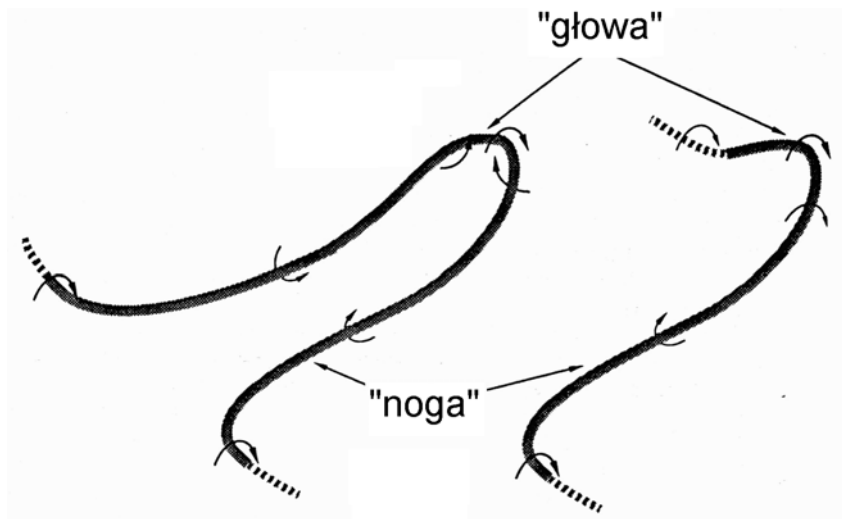
Przepływ turbulentny, zwłaszcza w pobliżu ściany, przez długi czas wydawał się bardzo chaotyczny i trudny do opisu. Jednak wiele badań przeprowadzonych na przestrzeni lat pozwoliło zauważyć pewne regularności i cechy charakterystyczne dla przepływu turbulentnego. Badania przeprowadzone na Uniwersytecie Stanforda na przełomie lat 50 i 60 dowiodły istnienia, niepodjęzowanych wcześniej, regularności w turbulentnej warstwie przyściennej [30]. Między innymi zaobserwowano jak pęcherzyki wodorowe, używane w eksperymentach, układały się w charakterystyczne długie smugi wzdłuż kierunku przepływu. Zaobserwowano rejony, w których przepływ charakteryzował się dużą prędkością, oddzielone rejonami o małej prędkości.

Powtarzalność i powszechność występowania charakterystycznych smug w obszarach przyściennych sugerowało istnienie pewnego determinizmu w przepływach turbulentnych. Następnym czego wprowadzono pojęcie „struktury koherentne” aby zwrócić uwagę, iż przepływ w rejonach przyściennych posiada pewien podstawowy i uporządkowany charakter [45, 67, 71, 9].

Kolejną ważną i powtarzalną cechą, zaobserwowaną w rejonach przyściennych, było zjawisko nagłej erupcji warstwy przyściennej prowadzącej do wyrzucenia elementów płynu z obszarów przyściennych do wnętrza przepływu w postaci nowej struktury wirowej. Zjawiska wybuchu były poprzedzane względnie spokojnymi okresami. Badania Corino i Brodkeya [15] wskazują iż zjawisko nagłej erupcji jest nieodzownie związane z oddziaływaniem zewnętrznego obszaru przepływu, który penetruje obszar przyścienny. Prowadzi to do wybuchu w obszarze przyściennym. Następnie ponownie tworzą się charakterystyczne smugi w warstwie przyściennej. Związane jest to ze względnie spokojnym okresem i wszystko powtarza się na nowo. Dlatego można powiedzieć, że przepływ w pobliżu ściany przechodzi przez cykliczny proces regeneracji i erupcji [44].

Zjawisko nagłej erupcji warstwy przyściennej jest podstawowym procesem produkcji i trans-

portu wirowości do zewnętrznych obszarów przepływu. Jak było to zaznaczone wcześniej, w rzeczywistych przepływach trójwymiarowych dynamika ruchu w warstwie przyściennej jest głównie związana z klasą struktur wirowych znanych jako wiry spinkowe (rys. 1.9). Symetryczna



Rys. 1.9: Schemat wiru spinkowego, symetrycznego (lewy obraz) i asymetrycznego (prawy obraz).

struktura wiru spinkowego została pierwotnie zaproponowana przez Theodorsena w 1952 roku i może być traktowana jako najprostszy model tłumaczący zjawiska zachodzące w pobliżu ściany. Inne charakterystyczne struktury wirowe zaobserwowane w pobliżu ściany to wir podkowisty (łukowy) lub wir podłużny, współprądowy [64, 24]. Wiry te jednak mogą być traktowane jako niesymetryczne wiry spinkowe (rys. 1.9).

Wiry spinkowe mogą rozwinąć się w przepływie ścinającym w obszarach, gdzie pole wirowe charakteryzuje się dużymi krzywiznami. „Nogi” wirów zbliżają się do ściany, natomiast „głowa” powiększa się i jednocześnie oddala się od ściany. Podczas ruchu wiru spinkowego jego „nogi” oddziałują ze ścianą co w rezultacie prowadzi do nagłej erupcji warstwy przyściennej. Efektem tego jest powstanie wtórnego wiru spinkowego.

Zjawisko erupcji w warstwie przyściennej wskazuje na różne aspekty turbulentnej warstwy przyściennej. Takie przepływy mogą być bardzo korzystne dla procesów wymiany ciepła, czy masy. Jest to związane ze wzrostem intensywności mieszania oraz nasileniem ruchów konwekcyjnych. Dlatego polepszenie warunków wymiany ciepła może być uzyskane poprzez intensyfikację erupcji w warstwie przyściennej. Z drugiej strony erupcje powodują wzrost zaburzenia pola ciśnień powodując szum i inne zakłócenia. Wzmocnienie wymiany pędu prowadzi do wzro-

stu sił oporu. W przepływach, w których konieczne jest zmniejszenie zakłóceń, czy siły oporu, niezbędne jest kontrolowanie i zapobieganie nagłym wybuchom warstwy przyściennej.

W pracy [8] przedstawione są badania numeryczne trójwymiarowego ruchu płynu wywołanego ruchem wirów nad ścianką, gdzie do rozwiązania równań Naviera–Stokesa użyto metody spektralnej. Autorzy zwrócili uwagę na niestabilności pojawiające i rozwijające się w warstwie przyściennej dla wysokich liczb Reynoldsa. Niestabilności manifestowały się w formie oscylacji konturów wirowości o względnie wysokiej częstotliwości. Częstotliwość i amplituda tych oscylacji wzrastała wraz z liczbą Re . Natomiast dla odpowiednio wysokich liczb Reynoldsa oscylacje te penetrowały zewnętrzny obszar przepływu, zwiastując załamanie struktury lokalnego pola przepływu. Autorzy ponadto zwrócili szczególną uwagę na tworzący się wąski korytarz, rozdzielający strefy recyrkulacji w warstwie przyściennej, łączący przepływ zewnętrzny ze ścianą. Korytarzem tym unoszona była wirowość ze ścianki do wnętrza przepływu w postaci wąskich struktur. W badaniach tych jednak nie zaobserwowano niestacjonarnej erupcji. Pojawiające się w przepływie oscylacje wirowości o wysokiej częstotliwości mogły jedynie sugerować początek zjawiska niestacjonarnej separacji warstwy przyściennej.

Wielu naukowców, próbując zrozumieć lub opisać zjawisko niestacjonarnej separacji, bada równania Prandtla. Natomiast w obecnej pracy zjawisko to jest analizowane w oparciu o pełne równania Naviera – Stokesa. W niniejszej pracy zjawisko niestacjonarnej separacji, prowadzące do nagłej erupcji warstwy przyściennej, rozumiane jest jako wyrzucenie elementów płynu, zamkniętych w strukturze wirowej, z obszaru przyściennego do wnętrza przepływu.

Rozdział 2

Cele, tezy i zakres pracy

Cel pracy

- Usprawnienie metody cząstek wirowych oraz weryfikacja różnych sposobów realizacji warunku przylegania cieczy do ścian poprzez generację wirowości na ścianie.
- Numeryczne badanie zjawiska erupcji warstwy przyściennej wywołanej łąką wirową w zależności od liczby Reynoldsa (lepkości) metodą cząstek wirowych. Demonstracja obecności zjawiska erupcji w innych zagadnieniach przepływowych.

Cel użytkowy

- Opracowanie programu komputerowego do modelowania przepływów lepkich metodą cząstek wirowych.

Tezy pracy

- Charakter oddziaływania struktur wirowych ze ścianami silnie zależy od lepkości. Istnieje graniczna wartość liczby Reynoldsa powyżej której występuje zjawisko erupcji warstwy przyściennej.
- Zjawisko erupcji jest inicjowane pojawieniem się punktu siodłowego na liniach prądu wewnątrz obszaru przepływu. Jest to podstawowy mechanizm transportu skoncentrowanej wirowości i cząstek przyściennych płynu do wnętrza przepływu.

- Algorytm generacji wirowości na ścianie poprawnie realizuje warunek przylegania cieczy do ścian przez co metoda cząstek wirowych jest pełnoprawną metodą obliczeniową do modelowania przepływów lepkich. Metoda szczególnie dobrze nadaje się do modelowania zjawisk o charakterze wirowym.

Zakres pracy

Zakres pracy obejmował:

- Sformułowanie równań ruchu w ujęciu wirowości ω i funkcji prądu ψ dla dwuwymiarowego przepływu lepkiego w obecności ścianek.
- Usprawnienia metody cząstek wirowych - proces symulacji lepkości, przekazywanie informacji z cząstek na węzły siatki. Opracowanie algorytmu numerycznego dla dwóch różnych metod realizacji warunku brzegowego na wirowość zapewniającego warunek przylegania cieczy do ściany.
- Weryfikacja poprawności opracowanej metody cząstek wirowych poprzez porównanie otrzymanych wyników ze znanymi rozwiązaniami analitycznymi oraz porównanie z eksperymentem. Wyznaczenie rzędu zbieżności metody cząstek wirowych dla dwóch różnych sposobów realizacji warunku przylegania cieczy do ściany
- Badania nad oddziaływaniem pojedynczej struktury wirowej ze ścianą (łaty wirowej) w zależności od liczby Reynoldsa. Analiza zjawiska niestacjonarnej separacji prowadzącego do erupcji elementów płynu z obszarów przyściennych do wnętrza przepływu.
- Badania nad oddziaływaniem dipola wirowego i szeregu łat wirowych ze ścianą. Demonstracja zjawiska oderwania warstwy przyściennej w innych zagadnieniach przepływowych.

Rozdział 3

Metoda wirowa typu "wir w komórce"

3.1 Równania ruchu płynu

Dynamikę nieściśliwego, lepkiego płynu w dwuwymiarowej przestrzeni opisują równania Naviera–Stokesa i równanie ciągłości [16, 61, 5]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.2)$$

gdzie $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v)$ jest wektorem prędkości, $p(\mathbf{x}, t)$ – ciśnieniem, ρ – gęstością, ν – kinematycznym współczynnikiem lepkości; w równaniu nie uwzględniono sił masowych ($\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0$). Przyjęto także, że płyn jest jednorodny ($\rho = \text{const}$).

Równania ruchu należy uzupełnić warunkiem początkowym :

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

oraz warunkiem brzegowym :

$$\mathbf{u}|_{\mathcal{S}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_{\mathcal{S}}, t), \quad (3.4)$$

gdzie \mathcal{S} – powierzchnia ograniczająca obszar \mathcal{D} .

3.2 Podstawy kinematyki ruchu wirowego

Analiza pola prędkości jest często prowadzona w oparciu o dekompozycję pola prędkości \mathbf{u} na sumę dwóch pól wektorowych: pola bezźródłowego \mathbf{u}_1 i pola bezwirowego \mathbf{u}_2 (tzw. dekom-

pozycja Helmholtza–Hodge'a) [5, 48]. Sformułowanie to opiera się na twierdzeniu o rozkładzie pola wektorowego:

Twierdzenie 1 (Twierdzenie o rozkładzie). *Dowolne, ciągle pole wektorowe \mathbf{a} , zadane w całej przestrzeni i przyjmujące w nieskończoności wraz ze swoimi pierwszymi pochodnymi wartość zero, można przedstawić w sposób jednoznaczny w postaci sumy dwóch pól wektorowych: pola bezźródłowego \mathbf{a}_1 ($\nabla \cdot \mathbf{a}_1 = 0$) i bezwirowego \mathbf{a}_2 ($\nabla \times \mathbf{a}_2 = 0$):*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2.$$

Stosując powyższe twierdzenie do pola prędkości \mathbf{u} otrzymujemy wspomniany rozkład:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,$$

gdzie: \mathbf{u}_1 jest polem bezźródłowym ($\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$),

\mathbf{u}_2 jest polem bezwirowym ($\nabla \times \mathbf{u}_2 = 0$).

Jeżeli ciecz jest nieściśliwa ($\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$), to wkład do pola prędkości pochodzi tylko od rozkładu wirowości. Warunek nieściśliwości cieczy będzie spełniony automatycznie dla pewnego pola wektorowego \mathbf{B} takiego, że:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{B}. \quad (3.5)$$

Pole wektorowe \mathbf{B} nazywane jest potencjałem wektorowym. Potencjał wektorowy \mathbf{B} określa pole prędkości z dokładnością do pewnego pola potencjalnego $\nabla\varphi$, czyli $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} + \nabla\varphi$ też spełnia równanie (3.5). Dlatego dla pola \mathbf{B} przyjmuje się dodatkowo warunek, że $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Ponieważ $\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}$, więc:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \boldsymbol{\omega}. \quad (3.6)$$

Równanie (3.6) można przekształcić korzystając z tożsamości wektorowej:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta\mathbf{B}, \quad (3.7)$$

gdzie $\Delta\mathbf{B}$ oznacza wektor o składowych $(\Delta B_1, \Delta B_2, \Delta B_3)$, a Δ jest operatorem Laplace'a, do postaci:

$$\Delta\mathbf{B} = -\boldsymbol{\omega} \quad (3.8)$$

Rozwiązanie równania (3.8) można wyrazić przy pomocy funkcji Greena następująco:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = - \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) dv. \quad (3.9)$$

Funkcja Greena dla równania Poissona (w obszarze nieograniczonym przy założeniach, że w nieskończoności $\omega \rightarrow 0$ i $\mathbf{u} \rightarrow 0$) ma postać:

$$G(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln(r) & \text{dla dwóch wymiarów,} \\ -\frac{1}{4\pi r} & \text{dla trzech wymiarów,} \end{cases} \quad (3.10)$$

gdzie $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ i $r = |\mathbf{r}|$.

Ze względu na to iż niniejsza praca dotyczy modelowania równań ruchu płynu w dwóch wymiarach dlatego dalsze rozważania będą zawężone do tego przypadku.

W przestrzeni dwuwymiarowej wektor wirowości ω , jak również potencjał wektorowy \mathbf{B} mają tylko jedną składową różną od zera $\omega = (0, 0, \omega_3)$, $\mathbf{B} = (0, 0, \psi)$. Składową ψ zwykle nazywa się funkcją prądu. Równania (3.8) sprowadzają się do jednego równania postaci:

$$\Delta\psi = -\omega, \quad (3.11)$$

gdzie $\omega = \omega_3$. Dla płaszczyzny funkcję Greena opisuje pierwsze z równań (3.10), więc rozwiązanie równania 3.11 ma postać:

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \omega(x', y') \ln r dx' dy'. \quad (3.12)$$

Składowe pola prędkości $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{B}$ wyrażają się jako:

$$u(x, y) = \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{\omega(x', y')(y' - y)}{r^2} dx' dy', \quad (3.13)$$

$$v(x, y) = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{\omega(x', y')(x' - x)}{r^2} dx' dy'. \quad (3.14)$$

Ze wzorów (3.13, 3.14) widać, iż dla zadanego pola wirowości ω można wyznaczyć pole prędkości na dwa sposoby. Całki we wzorach (3.13, 3.14) można zastąpić następującymi sumami:

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_q \frac{\Gamma_q (y - y_q)}{r^2 + \delta^2}, \quad (3.15)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_q \frac{\Gamma_q (x - x_q)}{r^2 + \delta^2}, \quad (3.16)$$

gdzie Γ oznacza intensywność cząstki wirowej (patrz podrozdział 3.4), a indeks q numeruje cząstki wirowe. Parametr δ^2 jest użyty jako zabieg formalny w celu usunięcia osobliwości. Wzory (3.15, 3.16) są podstawą dla metod wirowych bezpośrednich (metoda kropel wirowych) [12]. W metodach bezpośrednich aby wyznaczyć prędkość jednej cząstki wirowej należy

uwzględnić jej oddziaływanie ze wszystkimi innymi cząstkami w przepływie. Konieczność obliczania wzajemnego oddziaływania typu każda z każdą stanowi wadę metod bezpośrednich. Liczba działań arytmetycznych w komputerze jest proporcjonalna do kwadratu z liczby cząstek $\sim N^2$, gdzie N jest liczbą cząstek.

Prędkości cząstek można obliczyć także w sposób pośredni korzystając z równania Poissona na funkcję prądu (3.11), które można rozwiązać metodą różnic skończonych. Pole prędkości obliczane jest w węzłach siatki numerycznej, a następnie z węzłów siatki interpolowane na cząstki. Stanowi to podstawę metody obliczeniowej „wir w komórce” [13], która została wykorzystana w niniejszej pracy. Liczba działań w tej metodzie oszacowana jest na $O(M \log M + N)$, gdzie M jest liczbą węzłów siatki. Jeżeli liczba cząstek wirowych użytych w obliczeniach jest znaczna np. $N \approx 20000$ to metoda ta jest około 20-30 razy szybsza niż metoda bezpośrednia [38].

3.3 Matematyczne podstawy metody dyskretnych wirów

Równanie (3.1) można przekształcić do równania Helmholtza opisującego zmianę wirowości w czasie [5, 12]:

$$\omega_t + u\omega_x + v\omega_y = \nu\Delta\omega. \quad (3.17)$$

Wirowość ω wiąże się z polem prędkości poprzez funkcję prądu ψ następująco:

$$\Delta\psi = -\omega; \quad u = \psi_y, v = -\psi_x. \quad (3.18)$$

W przestrzeni dwuwymiarowej wektor rotacji prędkości ma tylko jedną, różną od zera składową, prostopadłą do płaszczyzny ruchu $rot(\mathbf{u}) = k\omega = v_x - u_y$, gdzie k oznacza wersor jednostkowy prostopadły do płaszczyzny. Zwrócimy uwagę, że wektorowe równie (3.1) zostało zastąpione równaniem skalarnym na funkcję $\omega(x, y, t)$. W równaniu (3.17) nie wstępuje już ciśnienie.

W granicy, gdy $\nu \rightarrow 0$, równanie (3.17) przechodzi w równanie Eulera dla cieczy nielepkiej.

3.3.1 Opis ruchu cieczy nielepkiej w zmiennych Lagrange'a

W przestrzeni dwuwymiarowej równanie Helmholtza dla cieczy nielepkiej przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \omega_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Z równań (3.19) wynikają dwa podstawowe dla metody dyskretnych wirów fakty:

- Dowolna porcja wirowości zawarta wewnątrz zamkniętej, poruszającej się wraz z cieczą krzywej jest stała (twierdzenie Kelwina) [12].
- Linie wirowe są unoszone wraz z cieczą. Wirowość wzdłuż trajektorii cząstki jest stała (twierdzenie Helmholtza) [12].

Niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ oznacza początkowe położenie infinitezymalnej cząstki cieczy. Cząstka cieczy w czasie ruchu podąża pewną trajektorią. Po czasie t cząstka, która w chwili początkowej była w położeniu α jest w położeniu $\mathbf{x}(\alpha, t)$. Trajektorię cząstki „ α ” otrzymuje się jako rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(\alpha, 0). \quad (3.20)$$

Równanie Eulera zastępowane jest nieskończonym układem równań różniczkowych postaci (3.20), w którym α oznacza zbiór położenia początkowych cząstek cieczy.

Przy modelowaniu przepływów lepkich metodami wirowymi stosuje się algorytm dekompozycji lepkościowej: w pierwszym etapie rozwiązuje się równanie Eulera dla cieczy nielepkiej (3.20), a w następnym kroku równanie dyfuzji. Równania ruchu cieczy lepkiej w zmiennych Lagrange'a, uzupełnione członem modelującym dyfuzję mają postać [16, 35]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{d\omega}{dt} &= \nu \Delta \omega. \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.3.2 Algorytm dekompozycji lepkościowej

Algorytm dekompozycji lepkościowej można stosować zarówno w przestrzeni dwuwymiarowej jak i trójwymiarowej. Poniżej zostanie przedstawiony algorytm dekompozycji lepkościowej dla przestrzeni dwuwymiarowej.

Niech $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ będzie polem prędkości wygenerowanym w n -tym kroku czasowym $t^n = n \Delta t$. Wówczas równanie transportu wirowości (3.17) można schematycznie zapisać w postaci [16]:

$$\frac{d\omega}{dt} = \mathcal{A}\omega + \mathcal{B}\omega, \quad (3.22)$$

$$-(\mathbf{u} \cdot \nabla)(\omega) \equiv \mathcal{A}\omega, \quad \nu \Delta(\omega) \equiv \mathcal{B}\omega,$$

gdzie operatorowi \mathcal{A} przypisuje się część konwekcyjną, a \mathcal{B} reprezentuje dyfuzję. Całkując powyższe równanie na przedziale $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ z warunkiem początkowym $\omega(n\Delta t) = \omega^n$

otrzymujemy rozwiązanie w formie operatorowej:

$$\omega^{n+1} \cong e^{(A+B)\Delta t} \omega^n. \quad (3.23)$$

W algorytmie dekompozycji lepkościowej równanie (3.22) rozwiązywane jest w dwóch krokach:

- w pierwszym kroku rozwiązuje się równanie Eulera dla cieczy nielepkiej:

$$\frac{d\omega}{dt} = \mathcal{A}\omega \quad (3.24)$$

z warunkiem początkowym ω^n . Rozwiązanie ma postać:

$$\omega^{n+\frac{1}{2}} = e^{\mathcal{A}\Delta t} \omega^n. \quad (3.25)$$

- Następnie rozwiązywane jest równanie dyfuzji z warunkiem początkowym $\omega^{n+\frac{1}{2}}$:

$$\frac{d\omega}{dt} = \mathcal{B}\omega. \quad (3.26)$$

W efekcie otrzymujemy rozwiązanie dla ω^{n+1} :

$$\omega^{n+1} = e^{\mathcal{B}\Delta t} \omega^{n+\frac{1}{2}} = \left(e^{\mathcal{B}\Delta t} e^{\mathcal{A}\Delta t} \right) \omega^n. \quad (3.27)$$

W ogólnym przypadku mamy:

$$e^{\mathcal{A}\Delta t} e^{\mathcal{B}\Delta t} \neq e^{(\mathcal{A}+\mathcal{B})\Delta t}, \quad (3.28)$$

gdyż, operatory \mathcal{A} i \mathcal{B} nie komutują, $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$. Można to zauważyć rozwijając powyższe eksponentjalne formuły w szereg Taylora względem Δt :

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{A}\Delta t} e^{\mathcal{B}\Delta t} &= \left(I + \Delta t \mathcal{B} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathcal{B}^2 + \dots \right) \cdot \left(I + \Delta t \mathcal{A} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathcal{A}^2 + \dots \right), \\ e^{(\mathcal{A}+\mathcal{B})\Delta t} &= \left(I + \Delta t (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \frac{\Delta t^2}{2} (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \dots \right), \end{aligned}$$

gdzie I oznacza operator jednostkowy. Można pokazać, że te dwa szeregi są równe tylko gdy operatory \mathcal{A} i \mathcal{B} komutują, $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. W ogólnym przypadku dla niekomutujących operatorów prawdziwe jest oszacowanie:

$$e^{(\mathcal{A}+\mathcal{B})\Delta t} = e^{\mathcal{A}\Delta t} e^{\mathcal{B}\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (3.29)$$

Zatem metoda dekompozycji lepkościowej jest w każdym kroku czasowym algorytmem rzędu drugiego, ale na całym przedziale $[0, t]$, rozważając N kroków czasowych Δt , jest rzędu $\mathcal{O}(\Delta t)$.

W zmiennych Lagrange'a algorytm dekompozycji lepkościowej wyraża się wzorami:

- W pierwszy podkroku czasowym modelowane jest unoszenie cząstek w przepływie nielepkiem:

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t), \quad p = 1, \dots, N, \quad (3.30)$$

$$\frac{d\omega_p}{dt} = 0.$$

- W drugim podkroku, w nowych położeniach modelowane jest zjawisko dyfuzji (ν – kinematyczny współczynnik lepkości):

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = 0, \quad (3.31)$$

$$\frac{d\omega_p}{dt} = \nu \Delta\omega(\mathbf{x}_p),$$

gdzie \mathbf{x}_p oraz ω_p oznaczają odpowiednio: położenie oraz wirowość unoszoną przez element płynu.

W przepływach dwuwymiarowych człon lepkościowy można modelować różnymi metodami. Popularną i łatwą w użyciu, lecz mało dokładną, jest stochastyczna metoda przypadkowego błędzenia. Istnieje też szereg metod deterministycznych np.: metoda prędkości dyfuzyjnej, wymiany intensywności cząstek, czy metoda siatkowo-cząsteczkowa [38, 16]. W niniejszej pracy użyto deterministycznej metody wymiany intensywności cząstek *PSE* (*ang. particle strength exchange*).

3.4 Opis metody obliczeniowej „wir w komórce”

W obecnej pracy do rozwiązania równania Helmholtza (3.17) została wykorzystana metoda wirowa typu „wir w komórce”. Jest to metoda siatkowo-cząsteczkowa. Zmianę pola wirowości modeluje się w zmiennych Lagrange’a, natomiast pole prędkości oblicza się na siatce numerycznej. Dzięki temu metoda jest znacznie szybsza od metod wirowych bezpośrednich przy jednoczesnym zachowaniu „lagrangowskiego charakteru” obliczeń. Metoda „wir w komórce” dobrze modeluje przepływy, w których pola prędkości i wirowości charakteryzują się wysoką dynamiką [40, 42, 41].

Jak było to już powiedziane wcześniej, równania (3.17) oraz (3.18) opisują ewolucję pola wirowego oraz ruch cieczy lepkiej. W metodzie wirowej typu „wir w komórce” ciągłe pole wirowości zastępowane jest dyskretnym rozkładem miar Diraca – „cząstkami wirowymi”, których

ruch modeluje ewolucję pola wirowości [16, 39]:

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{x}) &\cong \tilde{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^N \Gamma_p(\mathbf{x}_p) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p), \\ \Gamma_p(\mathbf{x}_p) &= \int_{A_p} \omega(x, y) dA \approx h^2 \omega(\mathbf{x}_p), \\ \mathbf{x}_p &\in A_p, \quad |A_p| = h^2,\end{aligned}\tag{3.32}$$

gdzie indeks p numeruje cząstki wirowe, Γ oznacza intensywności cząstki wirowej, a $\mathbf{x}_p = (x_p, y_p)$ jest jej położeniem. Dystrybucja $\delta(\mathbf{x})$ jest deltą Diraca.

3.4.1 Aproksymacja funkcji ciągłej przez dyskretny rozkład cząstek

Dla $\omega \in C^0(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ aproksymacja (3.32) w sensie miarowym spełnia zależność ($\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$) [38]:

$$\int_{\mathcal{D}} \omega(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \approx \sum_{p=1}^N \Gamma_p(\mathbf{x}_p, t),\tag{3.33}$$

Wzór kwadraturowy (3.33) uogólnia się na aproksymację cząsteczkową dla dowolnej funkcji $\varphi \in C_o^0(\mathbb{R}^2)$ (funkcja ciągła o zwartym nośniku):

$$\int_{\mathcal{D}} \omega(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{p=1}^N \Gamma_p(\mathbf{x}_p, t) \varphi(\mathbf{x}_p).\tag{3.34}$$

Można badać jakość aproksymacji (3.34) definiując błąd:

$$\mathcal{E}(\omega) \equiv \int_{\mathcal{D}} \omega(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \sum_{p=1}^N \Gamma_p(\mathbf{x}_p, t) \varphi(\mathbf{x}_p).\tag{3.35}$$

Warto przytoczyć lemat dotyczący oszacowania błędu (3.35) dla funkcji $\omega(\mathbf{x})$ zakładając, że jest ona elementem przestrzeni Sobolewa $W^{m,p}$ (funkcja f jest elementem przestrzeni Sobolewa $W^{m,p}$, jeżeli dla $0 \leq |\gamma| \leq m$ spełniony jest warunek $\int_{\mathcal{D}} |D^\gamma f(x)|^p dx < \infty$, gdzie $D^\gamma f(x)$ jest pochodną uogólnioną funkcji f).

Niech B_j oznacza j -tą komórkę $j = (j_1, j_2)$ w \mathbb{R}^2 taką, że:

$$B_j = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; (j_i - \frac{1}{2})h \leq x_i \leq (j_i + \frac{1}{2})h, i = 1, 2, \}.\tag{3.36}$$

Przy pewnych technicznych założeniach [62] prawdziwe jest oszacowanie:

$$|\mathcal{E}_i(\omega)| \leq C h^{m+\frac{d}{p}} \sum_j |\omega|_{m,p,B_j},\tag{3.37}$$

gdzie C jest pewną stałą niezależną od h , $p > d/m$, $q = 1 - 1/p$.

Funkcja φ odgrywa podstawową rolę w dokładności rozwiązania równań ruchu płynu metodą „wir w komórce”. W szczególności funkcja φ może być B-funkcją sklejaną [38, 63, 51], lub, jak ma to miejsce w obecnej pracy, jądrem interpolacyjnym odpowiedniego rzędu.

3.4.2 Wybór jądra interpolującego

Ważnym elementem prezentowanej metody obliczeniowej jest przekazywanie informacji o polu wirowości z cząstek wirowych na węzły regularnej siatki. Proces ten został wykonany za pomocą interpolacji. Dokładność procesu interpolacji jest związana z rzędem jądra interpolacyjnego. Rząd jądra interpolacyjnego odpowiada stopniowi wielomianu z jakiego jest to jądro zbudowane. Jądra interpolacyjne danego rzędu dokładnie aproksymują odpowiednio funkcje liniowe, kwadratowe, czy wielomiany wyższych stopni. Jądra interpolacyjne pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu mają postać:

- Jądro pierwszego rzędu (interpolacja liniowa)

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases} \quad (3.38)$$

- Jądro drugiego rzędu

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{dla } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ (1 - x)(2 - x)/2, & \text{dla } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}, \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases} \quad (3.39)$$

- jądro trzeciego rzędu (formuła Everetta)

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} (1 - x^2)(2 - x)/2, & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ (1 - x)(2 - x)(3 - x)/6, & \text{dla } 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases} \quad (3.40)$$

Powyższe jądra interpolacyjne nie mają ciągłych pochodnych, a jądra od drugiego rzędu w górę nie są nawet ciągłe. Jednak posiadają one dobre właściwości interpolacyjne dla funkcji charakteryzujących się dużymi gradientami. Jest to szczególnie pożądana cecha dla przepływów w pobliżu ścian, gdzie dokładność interpolacji jest bardzo ważna [35].

Jądra interpolacyjne (3.38, 3.39, 3.40) zachowują odpowiednio pierwszy, drugi i trzeci moment pola wirowości korzystając z 2^d , 3^d , 4^d węzłów siatki (d – wymiar przestrzeni):

$$M_a = \int \omega(x)x^a dx = const, \quad a = 0, 1, 2, \dots \quad (3.41)$$

Proces redystrybucji mas cząstek na węzły siatki można także przeprowadzić używając funkcji sklepanych *B-spline* [38, 63]. Jest to bardziej korzystne, dla algorytmów obliczeniowych, gdzie występują duże nieregularności w rozkładzie cząstek wirowych w przepływie. Wadą funkcji *B-spline* jest to, iż zachowują one tylko cyrkulację i pierwszy moment pola wirowości, co powoduje że nie odtwarzają dobrze funkcji charakteryzujących się dużymi gradientami [35].

W metodzie obliczeniowej prezentowanej w niniejszej pracy użyte zostało jądro interpolacyjne drugiego rzędu (3.39). Jądro to, dla przestrzeni dwuwymiarowej, rozkłada masę każdej cząsteczki wirowej na 9 pobliskich węzłów siatki. Dwuwymiarowe jądro interpolujące otrzymujemy mnożąc jednowymiarowe jądra interpolacyjne:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y). \quad (3.42)$$

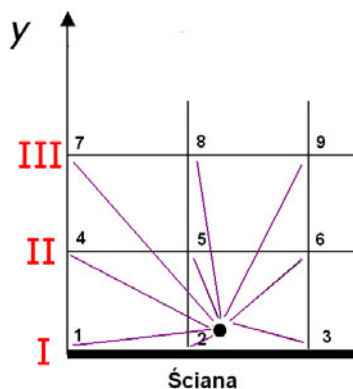
Jądro interpolujące (3.39) może być stosowane tylko w obszarach nieograniczonych. Aby uniknąć problemu z „wylewaniem się” wirowości poza obszar obliczeniowy w pobliżu ścian musimy stosować jądra interpolacyjne „jednostronne”. W praktyce oznacza to że interpolacja dla cząstek, które znajdowały się w odległości mniejszej niż pół skoku siatki od ściany przebiegała według następującego schematu (rys. 3.1):

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2, & \text{dla węzłów z rzędu I (węzły nr 1,2,3),} \\ x(2 - x), & \text{dla węzłów z rzędu II (węzły nr 4,5,6),} \\ x(x - 1), & \text{dla węzłów z rzędu III (węzły nr 7,8,9),} \\ 0, & \text{dla pozostałych węzłów,} \end{cases} \quad (3.43)$$

gdzie I oznacza węzły leżące na ścianie, II oraz III oznacza odpowiednio oczka siatki leżące w 1 i 2 rzędzie powyżej ścianki. Jądro interpolujące określone formułą (3.43) również obejmuje 9 sąsiednich węzłów siatki oraz ma takie same właściwości jak zależność określona wzorem (3.39).

3.4.3 Realizacja warunku brzegowego na ścianie

Warunek (3.4) dla równania ruchu cieczy lepkiej wyraża fakt braku poślizgu cieczy na ścianie. Zarówno składowa normalna do brzegu jak i składowa styczna pola prędkości powinna być



Rys. 3.1: Proces interpolacji w pobliżu ściany. Masa cząstki wirowej jest rozkładana na 9 pobliskich węzłów siatki.

równa zero. Przejście do opisu ruchu cieczy w języku wirowości i funkcji prądu zdecydowanie uprościło równania ruchu jednak spowodowało konieczność postawienia warunku brzegowego dla wirowości na ściankach sztywnych w celu rozwiązania równania Helmholtza (3.17). W artykule z 1990 roku problem określenia „wartości wirowości na ścianie” podany został jako jeden z wciąż nierozwiązanych problemów w mechanice płynów [79].

Próby matematycznego sformułowania tego zagadnienia nierozzerwalnie łączą się z fizyczną interpretacją generacji wirowości na ścianach sztywnych. Interpretacja fizyczna często dyktuje sposób numerycznego modelowania procesu generacji wirowości.

W praktyce numerycznej dotyczącej metod wirowych realizacja warunku brzegowego na wirowość jest związana z warunkiem braku poślizgu na ścianie sztywnej. Zapewnienie warunku przylegania płynu do ściany realizuje się poprzez generację odpowiedniej porcji wirowości na niej. Można to osiągnąć przez odpowiednio dobraną wartość wirowości lub też strumień wirowości [34, 38, 86]. W niniejszej pracy, przez analogię do równań różniczkowych cząstkowych, odpowiednią wartość wirowości na ścianie nazwano warunkiem brzegowym typu Dirichleta, natomiast strumień wirowości nazwano warunkiem brzegowym typu Neumanna.

3.4.4 Warunek typu Dirichleta dla wirowość na ścianie – metoda I

Historycznie pierwszym podejściem do określenia odpowiedniej wartości wirowości na ścianie sztywnej jest podejście nazwane lokalnym. Już w roku 1933 Thom wprowadził do obliczeń odpowiednią formułę o charakterze lokalnym, bez uzależnienia od innych punktów brzegu. Istnieje też podejście, do określenia rozważanych warunków brzegowych, o charakterze glo-

balnym, całkowym. W tym przypadku aby otrzymać warunek brzegowy dla wirowości należy rozwiązać równanie całkowe, co w konsekwencji prowadzi do układu równań algebraicznych wiążących ze sobą wszystkie punkty brzegu [2, 36]. W pracy [86] pokazano, że wiele schematów o charakterze globalnym równoważne jest schematom lokalnym. Globalne schematy całkowe są, w przeciwieństwie do lokalnych, trudne w zastosowaniach.

Określenie lokalnych warunków brzegowych dla wirowości przebiega następująco :

1. Dla cieczy lepkiej żądamy, aby składowa styczna prędkości na ścianie sztywnej była równa prędkości ścianki, czyli :

$$u_s = -\frac{\partial\psi}{\partial n} = u_w, \quad (3.44)$$

gdzie u_s oznacza styczną prędkość cieczy na ścianie, u_w oznacza prędkość ściany, natomiast n oznacza kierunek prostopadły do ściany. Warunek nieprzenikania cieczy przez ściankę (prędkość normalna do ścianki równa zero) zapewnia warunek brzegowy na funkcję prądu: $\psi = const$.

2. Następnie jeżeli do równania Poissona na funkcję prądu (3.11) zastosujemy 5-punktowy schemat różnicowy, to dla punktów, które leżą na ścianie otrzymamy:

$$-\omega_{i,0} = \frac{\psi_{i+1,0} - 2\psi_{i,0} + \psi_{i-1,0}}{\Delta s^2} + \frac{\psi_{i,1} - 2\psi_{i,0} + \psi_{i,-1}}{\Delta n^2}. \quad (3.45)$$

3. Zastępując równanie (3.44) schematem różnicowym otrzymamy:

$$\frac{\psi_{i,1} - \psi_{i,-1}}{2\Delta n} = u_w \Rightarrow \psi_{i,-1} = \psi_{i,1} - 2\Delta n u_w \quad (3.46)$$

oraz korzystając z faktu, że funkcja prądu ma wartość stałą na ścianie $\psi_{i+1,0} = 2\psi_{i,0} = \psi_{i-1,0}$ ostatecznie otrzymamy:

$$-\omega_{i,0} = \frac{2(\psi_{i,1} - \psi_{i,0} - \Delta n u_w)}{\Delta n^2}. \quad (3.47)$$

Powyższe równanie nazywane jest formułą Thoma. Pozwala ona na określenie wartości wirowości na brzegu przez wartość funkcji prądu w odległości Δn od ściany. W pracy [86] można znaleźć tablicę różnych wzorów wyższego rzędu. Jednak jak stwierdzono w [86] trudno wskazać jakiś wzór o zdecydowanie najlepszych własnościach. W celu spełnienia warunku (3.44) przylegania cieczy do ścian, użyto następującego sposobu generacji wirowości na ścianie. Przyjęto że formuła Thoma (3.47) określa właściwą wartość wirowości, która powinna panować na

brzegu, aby spełniony był warunek przylegania (3.44). Jeżeli w wyniku redystrybucji cyrkulacji cząstek wirowych obecnych w przepływie w punktach brzegowych wirowość jest różna od tej określonej wzorem (3.47), to w węźle tym dodawana jest wirowość tak, aby równość (3.47) była spełniona, czyli:

$$\omega_B = \omega_{stare} + \omega_{dod}, \quad (3.48)$$

gdzie ω_{stare} oznacza wirowość otrzymaną w węzłach brzegowych siatki po redystrybucji cyrkulacji cząstek wirowych istniejących w przepływie, a ω_{dod} wirowość którą należy dodać.

W zastosowanym algorytmie numerycznym w niniejszej pracy dodatkowa wartość wirowości ω_{dod} była wyznaczana w brzegowych węzłach siatki leżących na ścianach. Dodatkowa wirowość była zamieniana na cyrkulację $\Gamma_{dod} = h^2 \omega_{dod}$. Dodatkowa cyrkulacja była następnie dodawana do cyrkulacji cząstek wirowych znajdujących się w punktach pokrywających się z brzegowymi węzłami siatki numerycznej ($\Gamma_{nowe} = \Gamma_{stare} + \Gamma_{dod}$). Dzięki czemu zastosowany algorytm nie wymagał wprowadzania nowych cząstek do przepływu, a jedynie modyfikował cyrkulację cząstek znajdujących się na ścianach.

3.4.5 Warunek typu Neumanna dla wirowość na ścianie – metoda II

Druga metoda wykorzystywana w powyższej pracy polega na wyznaczeniu odpowiedniego strumienia wirowości ze ściany do wnętrza przepływu. Odpowiada to warunkowi brzegowemu typu Neumanna. Metoda ta opiera się na dynamicznym opisie generacji wirowości podanym przez Lighthilla [46].

Przyjmijmy, że ściana jest nieruchoma. Gdy rozwiązujemy równie Eulera ($\nu = 0$), wirowość rozłożona wewnątrz przepływu będzie generowała na ścianie sztywniej prędkość styczną u_s różną od zera. Można uważać, że wzdłuż brzegu stałego powstaje warstwa wirowa o intensywności $\gamma = u_s$. Aby zrozumieć jak strumień wirowości może kompensować niepożądaną składową styczną pola prędkości zapiszmy równanie ruchu cieczy lepkiej (3.1) na ścianie:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \nu \frac{\partial \omega}{\partial n}, \quad (3.49)$$

gdzie zmienna s oznacza pochodną w kierunku stycznym do ściany, a n w kierunku normalnym. Widać, że przyspieszenie związane jest z gradientem ciśnienia, jak również ze strumieniem wirowości. Jeżeli na ścianie pojawia się różna od zera składowa styczna pola prędkości to możemy ją interpretować, że w krótkim przedziale czasu Δt pojawiło się dodatkowe przyspieszenie:

$$\frac{u_s^{n+1} - u_s^n}{\Delta t} = \nu \frac{\partial \omega}{\partial n}. \quad (3.50)$$

Dodatkowe przyspieszenie musi być skompensowane dodatkowym strumieniem wirowości $\nu \frac{\partial \omega}{\partial n}$. Jeżeli założymy że w chwili Δt pole prędkości spełnia warunek przylegania do ściany to składowa styczna prędkości jest równoważona następująco:

$$u_s = \nu \Delta t \frac{\partial \omega}{\partial n}. \quad (3.51)$$

Stąd, pochodna wirowości w kierunku prostopadłym do ściany przyjmuje wartość:

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = -\frac{\gamma}{\nu \Delta t}. \quad (3.52)$$

Aby wprowadzić do obszaru przepływu wirowość wywołaną dodatkowym strumieniem wirowości rozwiązywane jest następujące zagadnienie brzegowo początkowe dla równania dyfuzji:

$$\begin{aligned} \omega_t &= \nu \Delta \omega, \\ \omega(x, y, t = 0) &= 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} &= -\frac{\gamma}{\nu \Delta t}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Należy zwrócić uwagę, że wartość początkowa wirowości jest równa zero. Wirowość otrzymana w węzłach siatki z rozwiązania zagadnienia (3.53) jest zamieniana na cyrkulację i dodawana do cyrkulacji cząstek już istniejących w przepływie.

Do rozwiązania równania (3.53) został wykorzystany program do szybkiego, bezpośredniego rozwiązywania równań eliptycznych. W tym celu pochodna po czasie została zastąpiona ilorazem różnicowym:

$$\omega_t^{n+1} = \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} = \frac{\omega^{n+1}}{\Delta t}, \quad (\omega^n = 0). \quad (3.54)$$

W rezultacie doprowadziło to do równania eliptycznego postaci:

$$\begin{aligned} \Delta \omega^{n+1} - \frac{\omega^{n+1}}{\nu \Delta t} &= 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} &= -\frac{\gamma}{\nu \Delta t}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

3.4.6 Metoda wymiany intensywności cząstek PSE

W tradycyjnych obliczeniach siatkowych dyfuzja jest realizowana na siatce numerycznej. Jednak w przypadku prowadzenia obliczeń w zmiennych Lagrange'a bardziej naturalne jest zasymulowanie tego efektu bezpośrednio na cząstkach. W ciągu ostatnich lat powstało wiele metod symulacji lepkości. Bardzo popularna i łatwa w zastosowaniu jest metoda stochastyczna przypadkowego błędzenia, w której efekt dyfuzji uzyskuje się jako efekt losowego zaburzenia

położenia cząstek wirowych. Jednak wyniki uzyskiwane tą metodą nie są zadawalające, szczególnie dla dużych liczb Reynoldsa. Błąd metody jest proporcjonalny do $\frac{1}{\sqrt{N}}$, gdzie N jest ilością cząstek.

Drugą klasą metod symulacji lepkości są metody deterministyczne. Jedną z nich jest metoda wymiany intensywności cząstek *PSE Particle Strength Exchange*. Podstawową ideą metody *PSE* jest zastąpienie różniczkowego operatora Laplace'a operatorem całkowym Δ_ε , który dla trzech wymiarów przyjmuje postać [16, 38, 83]:

$$\Delta_\varepsilon \omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int (\omega(\mathbf{y}) - \omega(\mathbf{x})) \eta_\varepsilon(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y}. \quad (3.56)$$

Funkcja obciążenia $\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-3} \eta(\mathbf{x}/\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) rzędu r jest funkcją symetryczną spełniającą następujące warunki:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} x_i x_j \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 2\delta_{ij} \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3, \\ \int_{\mathbb{R}^3} x_i^{k_1} x_j^{k_2} \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0 \quad \text{dla } k_1 + k_2 = 1 \text{ lub } 3 \leq k_1 + k_2 \leq r + 1, \\ \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{x}|^{r+2} |\eta(\mathbf{x})| d\mathbf{x} &< \infty. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Dodatkowym warunkiem jaki musi być spełniony aby metoda *PSE* była skuteczna jest odpowiedni dobór parametru ε . Parametr ten musi być tak dobrany aby spełniona była zależność $\varepsilon/r_{ij} > 1$, tzn. nośniki sąsiednich cząstek nakładały się (r_{ij} – odległość pomiędzy cząstkami i i j). W praktyce oznacza to, że każda cząstka powinna mieć możliwość komunikacji z określoną liczbą sąsiadujących cząstek w celu wymiany intensywności cyrkulacji. Przy założeniach (3.57) spełnione jest oszacowanie na operator całkowy dla składowych pola wirowości (3.56) [16, 83]:

$$\|\Delta_\varepsilon \omega_i - \Delta \omega_i\|_{0,p} \leq C_i \varepsilon^r \|\omega_i\|_{r+2,p}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.58)$$

gdzie ω_i należy do przestrzeni Sobolewa ($\omega_i \in W^{r+2,p}(\mathbb{R}^3)$ dla $p \in [1, \infty]$), a normę $\|\cdot\|$ rozumie się w sensie przestrzeni Sobolewa.

Dowód powyższego oszacowania oraz analizę stabilności metody wymiany intensywności cząstek można odnaleźć np. w [63].

Dla przestrzeni dwuwymiarowej ($\omega = (0, 0, \omega_3)$, $\omega_3 = \omega$) prawą stroną równania (3.56) można zastąpić sumą:

$$\Delta_\varepsilon \omega(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_i (\omega(\mathbf{y}) - \omega(\mathbf{x})) \eta_\varepsilon(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad (3.59)$$

gdzie indeks i numeruje węzły siatki obliczeniowej. Drugie z równań (3.31) aproksymowane jest zatem wyrażeniem[17]:

$$\frac{d\Gamma_p}{dt} = \nu \varepsilon^{-2} \sum_q (\Gamma_q - \Gamma_p) \eta \left(\frac{\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_p}{\varepsilon} \right). \quad (3.60)$$

Powyższe równanie było rozwiązywane w trakcie obliczeń metodą Eulera. Kluczową sprawą dla skuteczności i zbieżności metody PSE jest odpowiedni wybór funkcji obciążenia $\eta(\mathbf{x})$. Istnieje wiele funkcji spełniających przytoczone wcześniej kryteria. Przykładowe funkcje $\eta(\mathbf{x})$, o nośniku nieograniczonym, zostały przedstawione np. w pracy VanderLindena [83]. Jednak funkcje o nośniku nieograniczonym mają zasadniczą wadę, wymagają komunikowania się każdej cząstki ze wszystkimi pozostałymi cząstkami w obszarze przepływu. Oznacza to że złożoność obliczeniowa takiego algorytmu jest rzędu $O(N^2)$, gdzie N oznacza liczbę cząstek w przepływie. Powoduje to długie czasy obliczeniowe i wymaga dużego nakładu pracy komputera. W niniejszej pracy podobnie jak w pracy [16], aby przyspieszyć czas obliczeń, wybrano funkcję $\eta(\mathbf{x})$ rzędu $r = 2$ o nośniku ograniczonym w postaci:

$$\eta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathcal{C} \frac{1}{1 + |\mathbf{x}|^2} & \text{dla } |\mathbf{x}| \leq 2, \\ 0 & \text{dla } |\mathbf{x}| > 2. \end{cases} \quad (3.61)$$

W przypadku funkcji o nośniku ograniczonym złożoność obliczeniowa jest rzędu $O(m \cdot N)$, gdzie m oznacza liczbę cząstek objętych nośnikiem funkcji $\eta(\mathbf{x})$. Ponieważ $m \ll N$ oraz m jest najczęściej stała więc złożoność obliczeniowa takiego algorytmu jest liniowa. Drugą ważną cechą charakteryzującą funkcję obciążenia jest jej rząd r , od którego zależy rząd aproksymacji. Przez rząd funkcji rozumie się zerowanie odpowiednich momentów określonych drugą z formuł w (3.57). Wybór odpowiedniej funkcji $\eta_\varepsilon(\mathbf{x})$ umożliwia więc podnoszenie rzędu metody. Ze wzorów (3.59) oraz (3.60) widać, że podniesienie rzędu powoduje powiększenie nośnika funkcji $\eta_\varepsilon(\mathbf{x})$ co z kolei wydłuża czas obliczeń. W powyższej metodzie konieczne jest aby w otoczeniu cząstki dla której obliczany jest efekt dyfuzji (wynikający z lepkości) znajdowały się inne cząstki wirowe (co najmniej od kilku do kilkunastu [35]).

Stała \mathcal{C} z równania (3.61) jest tak dobierana, aby spełniony był pierwszy z warunków (3.57):

$$\int_{\mathbb{R}^3} x^2 \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2. \quad (3.62)$$

Dla przypadku dwuwymiarowego wartość \mathcal{C} wyznaczamy:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2) \frac{\mathcal{C}}{1 + |x|^2} dx dy = 4 \quad (3.63)$$

Następnie przechodząc do zmiennych biegunowych mamy:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{\mathcal{C} r^2}{1 + r^2} r dr d\phi = 2\pi \mathcal{C} \int_0^2 \frac{r^3}{1 + r^2} dr \approx 7.5102 \mathcal{C} = 4. \quad (3.64)$$

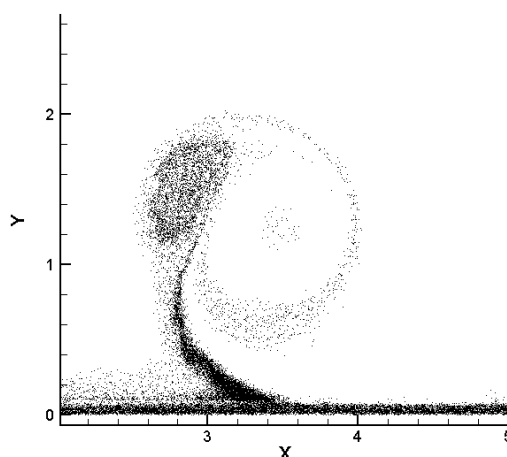
Stała \mathcal{C} dla przypadku dwuwymiarowego wynosi zatem 0.5326. Powyższe rozważania dotyczą przypadku gdy obszarem działania funkcji $\eta(\mathbf{x})$ jest okrąg. Takie podejście jest uzasadnione, gdy cząstki wirowe są przypadkowo rozlokowane w obszarze przepływu. Natomiast cechą charakterystyczną algorytmu zastosowanego w obecnej pracy jest rozkładanie cząstek na regularną sieć w każdym kroku czasowym. Powoduje to że dziedzina funkcji obciążenia (3.61) może być zastąpiona kwadratem. Na potrzeby obecnej pracy obszarem działania jądra obciążenia był kwadrat o rozmiarach $-1.5 < x < 1.5$; $-1.5 < y < 1.5$ W takim przypadku stała \mathcal{C} jest równa 0.835.

3.4.7 Uwagi do realizacji numerycznej

Metoda *PSE* wymaga aby w obrębie funkcji obciążenia (3.61) znajdowała się zawsze określona ilość cząstek wirowych. Jest to konieczne ponieważ każda cząstka musi wymieniać się cyrkulacją z innymi cząstkami. Najlepiej jest gdy cząstki są rozłożone równomiernie, wtedy bowiem jądro funkcji zawiera dokładnie taką samą liczbę cząstek równomiernie oddalonych od siebie.

Ponieważ cząstki wirowe poruszają się zgodnie z aktualnym polem prędkości, więc mają tendencję do skupiania się w miejscach o dużych gradientach prędkości. W konsekwencji może doprowadzić do tego, iż w pewnych rejonach obszaru obliczeniowego cząstki wirowe będą nadmiernie zagęszczone a w innych będzie ich za mało. Dlatego aby metoda *PSE* była zbieżna wymagany jest dodatkowy zabieg numeryczny porządkujący rozkład cząstek w przepływie. Zabieg ten w literaturze anglojęzycznej nosi nazwę *remeshingu*. W praktyce zalecany był proces *remeshingu* co kilkanaście kroków czasowych.

Rysunek 3.2 przedstawia wynik obliczeń dla algorytmu numerycznego, w którym nie był stosowany zabieg *remeshingu*. Rysunek przedstawia rozkład cząstek wirowych dla przepływu wywołanego ruchem łaty wirowej w obecności ściany płaskiej i jest jednym z wyników pracy autora niniejszej rozprawy [40, 42]. Na obrazie wyraźnie widoczne są miejsca nadmiernego skupiania się cząstek wirowych.



Rys. 3.2: Zjawisko nadmiernego skupiania się cząstek wirowych w obszarach przepływu o dużych gradientach prędkości.

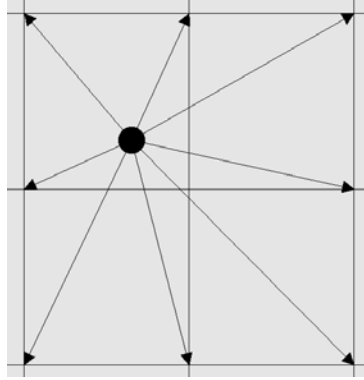
W obecnej pracy, aby uzyskać równomierną dystrybucję cząstek wirowych w przepływie, po kroku adwekcji wiry były rozkładane na regularną siatkę (*remeshing* był stosowany w każdym kroku czasowym). Reorganizacja położenia i cyrkulacji cząstek była sterowana funkcją interpolującą drugiego rzędu, taką samą jaka była użyta w celu redystrybucji cyrkulacji cząstek na pobliskie węzły siatki, wzór (3.39). Zastosowanie tego samego algorytmu dla redystrybucji i porządkowania położenia cząstek oznaczało w praktyce że podczas prowadzenia obliczeń zabieg ten był wykonywany tylko raz w jednym kroku czasowym.

W obecnej pracy struktura rozkładu uporządkowanych cząstek była więc taka sama jak struktura siatki numerycznej. Gwarantowało że każda cząstka wirowa komunikowała się z dokładnie 8 innymi wirami objętymi nośnikiem funkcji (3.61), co jest zgodne z duchem metody intensywności wymiany cząstek. Ostatecznie krok dyfuzyjny był realizowany zgodnie z wyrażeniem (3.60).

3.4.8 Algorytm numeryczny

Obszar obliczeniowy \mathcal{D} pokryty był prostokątną siatką numeryczną o równomiernym kroku h .

1) W n -tym kroku czasowym $t^n = n\Delta t$, intensywność cząstek wirowych była rozkładana na węzły siatki, rysunek 3.3 (proces redystrybucji wzory 3.39, 3.43)



Rys. 3.3: Proces redystrybucji mas cząstek na węzły siatki

2) Po redystrybucji rozwiązywane było na siatce równanie Poissona na funkcję prądu ψ :

$$\Delta\psi = -\omega \quad (3.65)$$

Dla rozwiązania powyższego równania w pracy przyjęto warunki brzegowe różnego typu (okresowe, Dirichleta lub Neumanna) w zależności od rozpatrywanego problemu obliczeniowego. Do rozwiązania równań (3.65) wykorzystano procedurę *DFPS2H* z biblioteki numerycznej *IMSL FORTRAN Numerical Libraries*, gdzie dwuwymiarowe zagadnienie Poissona jest rozwiązywane szybką, bezpośrednią metodą czwartego rzędu $O(h^4)$.

3) Prędkość w węzłach siatki obliczana była za pomocą metody różnic skończonych ze wzoru $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$. W tym celu użyty został schemat centralny, który jest schematem drugiego rzędu:

$$u(x_i, y_j) = \frac{\psi(x_i, y_{j+1}) - \psi(x_i, y_{j-1})}{2\Delta y} \quad (3.66)$$

$$v(x_i, y_j) = \frac{\psi(x_{i+1}, y_j) - \psi(x_{i-1}, y_j)}{2\Delta x} \quad (3.67)$$

4) Realizacja warunku brzegowego dla wirowości na ścianach sztywnych (Metoda I lub II, podrozdział 3.4.3).

5) Ruch cząstek zgodnie z aktualnym polem prędkości. Prędkość w położeniach cząstek $\mathbf{u}_p = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p)$ była obliczana przez interpolację rzędu drugiego, $\mathbf{u}_p = \sum_{i,j} \mathbf{u}_{i,j} \cdot l_{i,j}(\mathbf{x}_p)$, gdzie

$l_{i,j}(\mathbf{x})$ – wielomian interpolacyjny Lagrange'a. Nowe położenia cząstek były obliczane poprzez rozwiązanie układu równań (3.30) metodą Huena drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} p_p^{n+1} &= x_p^n + \Delta t u(x_p^n), \\ x_p^{n+1} &= x_p^n + 0.5\Delta t \left(u(p_p^{n+1}) + u(x_p^n) \right). \end{aligned} \quad (3.68)$$

6) Porządkowanie położenia cząstek *remeshing*, wzory (3.39, 3.43) czyli rozkład cząstek wirowych na regularną sieć, która w obecnej pracy pokrywała się z siatką numeryczną.

7) Zmiana cyrkulacji cząstek metodą *PSE*, wzór (3.60).

Rozdział 4

Zagadnienia testowe

4.1 Przepływ laminarny w kanale prostokątnym. Przepływ Poiseuille'a

Przepływ w kanale prostokątnym jest jednym z niewielu przypadków dla których znane jest rozwiązanie analityczne równań Naviera-Stokesa. Mimo swej prostoty, przepływ ten jest dobrym przykładem, dla którego porównanie istniejących rozwiązań analitycznych z otrzymanymi wynikami numerycznymi pozwala przetestować poprawność stosowanej metody numerycznej rozwiązania równań ruchu płynu. Porównano dwie metody generacji wirowości na ścianie. Metodę wykorzystującą warunek brzegowy typu Dirichleta (patrz podrozdział 3.4.3: Metoda I), oraz metodę opartą na warunku brzegowym typu Neumanna (patrz podrozdział 3.4.3: Metoda II).

Rozwiązanie analityczne przepływu w kanale prostokątnym (rozwiązanie Poiseuille'a) wyraża się następująco:

$$\frac{u}{u_{max}} = 4 \frac{y}{H} \left(1 - \frac{y}{H}\right), \quad (4.1)$$

gdzie H oznacza wysokość kanału, u_{max} jest prędkością maksymalną w kanale.

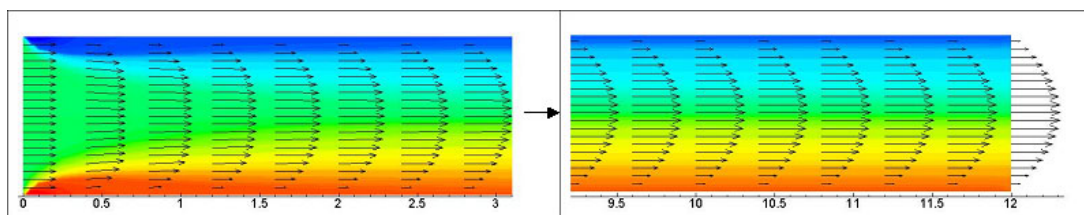
We wzorze 4.1 nie występuje lepkość, więc rozwiązanie Poiseuille'a nie zależy od liczby Reynoldsa. Wzór ten opisuje jedynie kształt profilu prędkości, który w tym przypadku jest parabolą. Zbadano jednak jak zależy długość formowania się profilu prędkości od liczby Reynoldsa. Z badań eksperymentalnych wiadomo, że odległość, potrzebna do ustalenia się parabolicznego profilu prędkości, rośnie wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa. Dzieje się tak dlatego iż dla większej liczby Reynoldsa reakcja wywierana na płyn przez ścianę potrzebuje więcej czasu aby

ogarnąć cały przekrój kanału. Dlatego aby zbadać zgodność wyników numerycznych z eksperymentem przebadano także długość formowania się profilu prędkości w zależności od liczby Reynoldsa. Ponadto na podstawie uzyskanych wyników oszacowano rząd zbieżności proponowanego algorytmu obliczeniowego.

Obszarem obliczeniowym był prostokąt $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H\}$, gdzie $H = 1$. Długość L została tak dobrana, w zależności od liczby Reynoldsa, aby zminimalizować wpływ warunku brzegowego na wylocie na uzyskiwane wyniki. Na wlocie $x = 0$ przyjęto równomierny profil prędkości $u_0 = 1$, co jest równoważne warunkowi brzegowemu $\psi(0, y) = y$ na funkcję prądu. Na ściankach sztywnych przyjęto warunek brzegowy $\psi = const$, na ściance dolnej $\psi = 0$, a na ściance górnej $\psi = 1$. Na wylocie przyjęto warunek brzegowy typu Neumanna $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$. Obliczenia prowadzono do czasu t_{end} uzyskania stacjonarnego rozwiązania numerycznego. Obliczenia sprawdzające wykonano w szerokim zakresie liczb Reynoldsa, dla różnych wielkości siatki numerycznej i z różnymi wielkościami kroku czasowego. Dla tak postawionego zagadnienia liczbę Reynoldsa definiuje się w następujący sposób:

$$Re = \frac{dU}{\nu}, \quad (4.2)$$

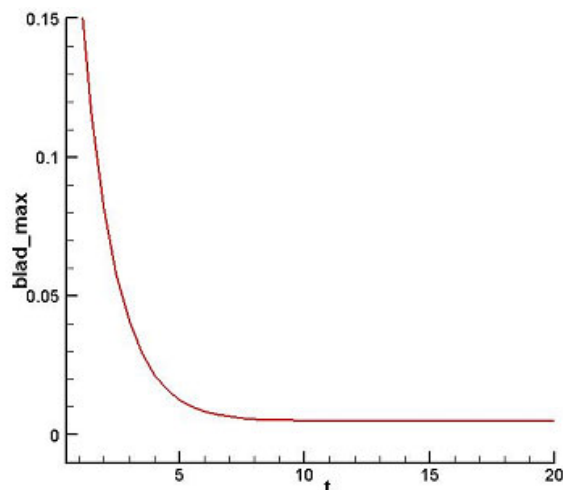
gdzie d oznacza wysokość kanału (przyjęto $d = 1$), U prędkość średnią, a ν jest kinematycznym współczynnikiem lepkości. Rysunek (4.1) przedstawia przykładowo wybrane rozwiązanie numeryczne dla $Re = 100$. Na rysunku widoczne jest pole wirowe wraz z naniesionymi wektorami pola prędkości. Kolor czerwony oznacza dodatnią wartość wirowości, natomiast niebieski ujemną. Uzyskane rozwiązanie numeryczne porównano z analitycznym rozwiązaniem Poiseuil-



Rys. 4.1: Pole prędkości i wirowości w kanale prostokątnym dla $Re = 100$

le'a dla kanału prostokątnego. Na rysunku 4.2 przedstawiono proces ustalania się rozwiązania w czasie. Wykres zamieszczony na tym rysunku przedstawia zmianę wartości maksymalnego błędu profilu prędkości na wylocie z kanału dla $Re = 100$. Na wykresie tym można zauważyć iż rozwiązanie ustabilizowało się po upływie około 10 jednostek czasowych.

W celu uzyskania rzędu zbieżności metody numerycznej, obliczenia wykonywano na siatkach numerycznych o różnym skoku siatki $\Delta x = \Delta y = h$ i z krokiem czasowym $\Delta t = \frac{1}{2}h$.

Rys. 4.2: Zmiana błędu maksymalnego w czasie $Re = 100$.

Tabele 4.1 oraz 4.2 przedstawiają przykładowe zestawienie błędów numerycznych profilu prędkości na wylocie z kanału w normie L_∞ dla $Re = 100$. Normę L_∞ oraz wyznaczenie rzędu zbieżności określa następująca formuła:

$$\| E(u, u^h) \|_\infty = \max_{\mathbf{x} \in D} | u(\mathbf{x}, t_{end}) - u^h(\mathbf{x}, t_{end}) | \leq Ch^\alpha, \quad (4.3)$$

gdzie α nazywamy rzędem metody.

$Re = 100$, METODA I						
błąd	$\Delta x = 0.2$ 1	$\Delta x = 0.1$ 2	$\Delta x = 0.05$ 3	rząd 1-2	rząd 2-3	rząd 1-3
max	0.07549	0.02007	0.00502	1.91	2.00	1.96

Tabela 4.1: Oszacowanie rzędu zbieżności dla pierwszej metody generacji wirowości

$Re = 100$, METODA II						
błąd	$\Delta x = 0.2$ 1	$\Delta x = 0.1$ 2	$\Delta x = 0.05$ 3	rząd 1-2	rząd 2-3	rząd 1-3
max	0.06884	0.02660	0.00806	1.37	1.72	1.55

Tabela 4.2: Oszacowanie rzędu zbieżności dla drugiej metody generacji wirowości

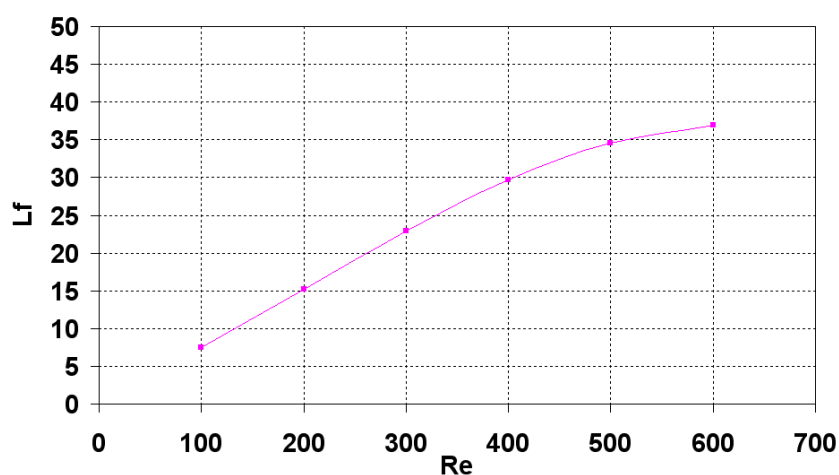
Z przeprowadzonych badań wynika że rząd zbieżności metody „wir w komórce” proponowanej w obecnej pracy wyniósł ~ 2.0 dla generacji wirowości metodą pierwszą oraz ~ 1.6 dla generacji wirowości metodą drugą. Z danych literaturowych [50] wiadomo że długość formowania się profilu prędkości L_f zależy w przybliżeniu liniowo od liczby Reynoldsa: $L_f = C \cdot Re \cdot d$,

gdzie d oznacza średnicę kanału, a C jest wartością stałą. Tabela 4.3 zawiera uzyskane wyniki dla zakresu liczb Reynoldsa od 100 do 600. Wartość L_f została wyznaczona na podstawie analizy prędkości u w osi kanału. Odległość (poczynając od wlotu do kanału) na której stwierdzono, że wartość prędkości nie różni się więcej niż o 0.1% od wartości prędkości na końcu kanału przyjęto jako długość formowania się profilu prędkości. Rysunek 4.3 przedstawia za-

Re	Lf 0.1%	U_{max}	C
100	7.50	1.493	0.075
200	15.20	1.493	0.076
300	22.95	1.493	0.077
400	29.70	1.492	0.074
500	34.60	1.491	0.069
600	36.90	1.489	0.062

Tabela 4.3: Długość formowania się profilu prędkości w zależności od liczby Re

leżność długości formowania się profilu L_f od liczby Reynoldsa. Na podstawie uzyskanych wyników widać iż zależność ta ma charakter bardzo zbliżony do liniowego. Oznacza to że produkcja wirowości na ścianach oraz jej dysypacja jest właściwie odtwarzana przez proponowaną metodę obliczeniową. Z przedstawionych obrazów przepływu widać, że wirowość do wnętrza obszaru dostaje się tylko na drodze dyfuzji.



Rys. 4.3: Długość formowania się profilu prędkości w zależności od liczby Reynoldsa.

4.2 Drugie zagadnienie Stokesa

Kolejnym zagadnieniem testowym, dla którego również znane jest rozwiązanie analityczne było drugie zagadnienie Stokesa. Jest to bardziej wymagające zagadnienie w porównaniu do przepływu w kanale. Zagadnienie jest niestacjonarne. Ruch cieczy powodowany jest drgającą poziomo ścianą. Prędkości na ścianie (warunek brzegowy) wyraża się następującą formułą:

$$u(y = 0, t) = U_0 \cos(\omega t), \quad (4.4)$$

gdzie: U_0 jest prędkością ścianki (amplitudą), a ω w tym przypadku oznacza częstotliwość. Natomiast rozwiązanie analityczne wyraża się wzorem:

$$u(y, t) = U_0 \cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right). \quad (4.5)$$

Pierwszy człon równania (4.5), $U_0 \cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right)$, opisuje ruch oscylacyjny płytki z amplitudą U_0 oraz częstotliwością ω . Drugi człon równania, $\exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right)$, jest odpowiedzialny za tłumienie oscylacji wraz z oddalaniem się od ścianki. Na podstawie drugiego członu równania widać, że oscylacje mają ograniczony zasięg oraz szybko zanikają. Dzieje się tak ponieważ tłumienie ma eksponentalny charakter.

W celu oszacowania odległości na jaką propagowane jest zaburzenie wywołane oscylacyjnym ruchem ściany sprawdzimy co dzieje się z rozwiązaniem na prostej $\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) = \text{const}$. Maksymalna odległość penetracji zaburzenia wystąpi, gdy funkcja \cos przyjmie wartość jeden, tzn. gdy:

$$\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) = 0. \quad (4.6)$$

Przekształcając równanie (4.6) względem y otrzymamy zależność: $y = \omega t \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$. Przykładowo założymy, że $y = 4\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$, podstawiając do równania (4.5) otrzymamy:

$$u = U_0 \exp\left(\frac{-4}{\sqrt{2}}\right) \simeq 0.06U_0.$$

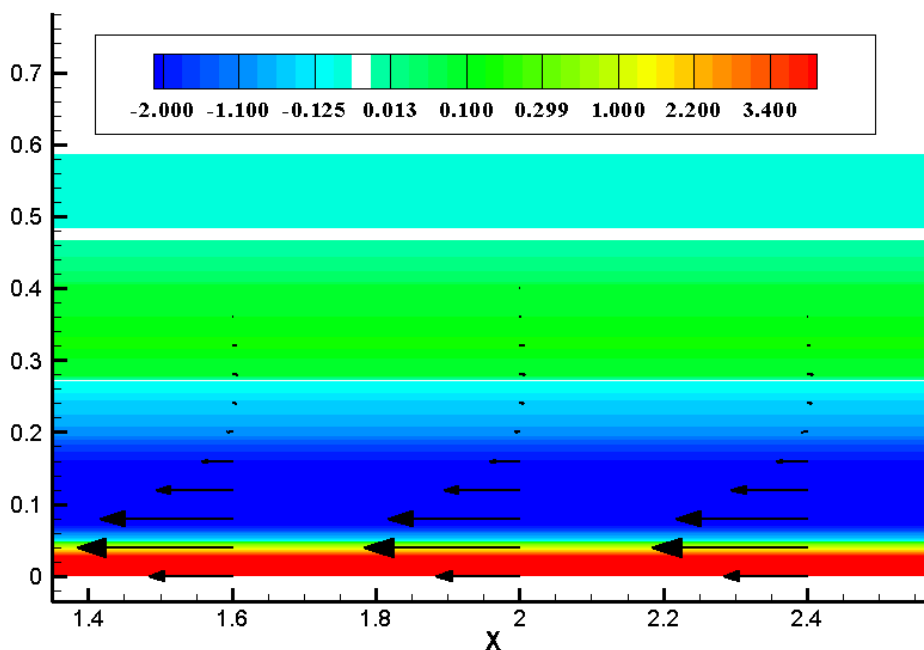
Przyjmując, że od miejsca gdzie $u = 0.06U_0$ zaburzenia są wystarczająco małe, otrzymamy zależność opisującą zakres penetracji zaburzenia:

$$\delta = 4\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}.$$

Z powyższej zależności widać, że zasięg oddziaływania do wnętrza przepływu nie zależy od czasu i jest proporcjonalny do $\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$.

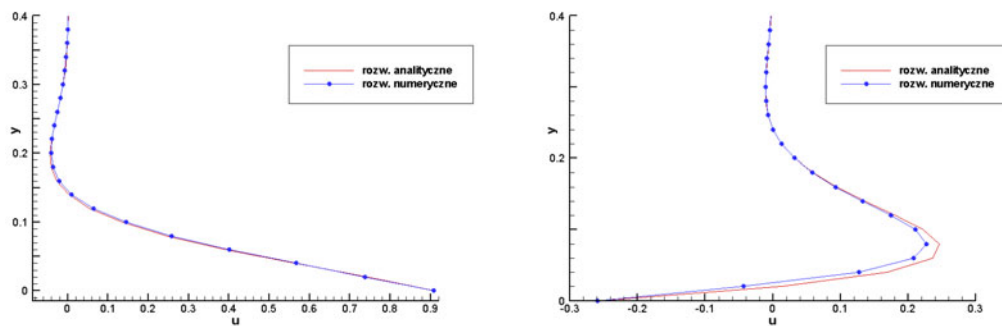
Należy tutaj dodać iż rozwiązanie analityczne (4.5) dotyczy przypadku gdy ściana oraz obszar w kierunku normalnym od niej są nieograniczone. Realizacja takich warunków w przypadku metody numerycznej jest niemożliwe. Dlatego jako obszar obliczeniowy przyjęto kwadrat $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$. Rozmiar obszaru obliczeniowego był tak dobrany aby zminimalizować wpływ warunków brzegowych na uzyskane rozwiązanie. W tym celu porównano rozwiązania numeryczne uzyskane na obszarach obliczeniowych o różnych wielkościach. Stwierdzono że dla $y \geq 4$ uzyskane wyniki numeryczne praktycznie nie różnią się od siebie.

W obliczeniach numerycznych na ścianie sztywnej postawiony został warunek brzegowy opisany formułą (4.4), w kierunku x został nałożony warunek okresowości, natomiast na górnym brzegu użyty został warunek brzegowy typu Neumanna $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$. Rysunek 4.4 przedstawia przykładowe rozwiązanie rozważanego zagadnienia dla $Re = 400$, $\omega = 1$ oraz $U_0 = 1$. Na obrazie widoczne jest chwilowe pole wirowości wraz z wektorami prędkości dla $t = 10.8$. Natomiast rysunek 4.5 przedstawia porównanie profili prędkości rozwiązania dokładnego i przybliżonego dla dwóch różnych czasów.



Rys. 4.4: Zagadnienie Stokesa II. Pole wirowe wraz z wektorami prędkości, $Re = 400$, $t=10.8$

Obliczenia zostały przeprowadzone na siatce równomiernej $\Delta x = \Delta y = h$ dla różnych wartości h i z krokiem czasowym $\Delta t = \frac{1}{2}h$. Tabele 4.4 oraz 4.5 przedstawiają przykładowe wyniki wraz z oszacowaniem rzędu zbieżności metody „wir w komórce” dla dwóch metod generacji

Rys. 4.5: Profile prędkości dla $t = 13$ oraz dla $t = 14.4$, $Re = 400$, $\Delta x = 0.02$ $\Delta t = 0.01$

wirowości na ścianie. Błąd był liczony według normy L_∞ a rząd zbieżności oszacowany zgodnie z (4.3) Z przeprowadzonych badań wynika że rząd zbieżności proponowanej metody wyniósł ~ 1.4 dla generacji wirowości z warunkiem brzegowym typu Dirichleta (metoda I, podrozdział 3.4.3) oraz ~ 1.3 dla generacji wirowości z warunkiem brzegowym typu Neumanna (metoda II, podrozdział 3.4.3).

Re	$\Delta x = 0.08$ 1	$\Delta x = 0.04$ 2	$\Delta x = 0.02$ 3	rząd 1-2	rząd 2-3	rząd 1-3
200	0.080	0.031	0.009	1.36	1.77	1.56
400	0.107	0.053	0.017	1.01	1.60	1.31

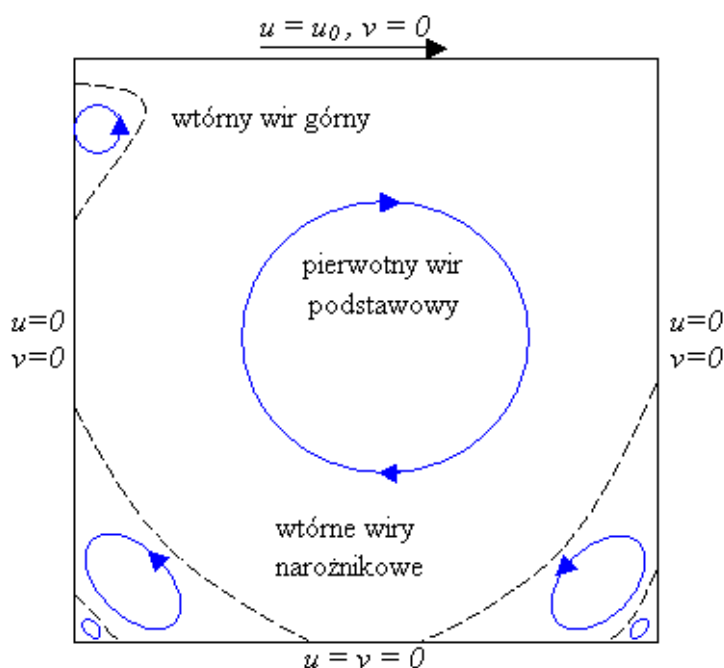
Tabela 4.4: Oszacowanie rzędu zbieżności dla pierwszej metody generacji wirowości

Re	$\Delta x = 0.08$ 1	$\Delta x = 0.04$ 2	$\Delta x = 0.02$ 3	rząd 1-2	rząd 2-3	rząd 1-3
200	0.238	0.101	0.035	1.23	1.52	1.38
400	0.312	0.158	0.059	1.01	1.43	1.22

Tabela 4.5: Oszacowanie rzędu zbieżności dla drugiej metody generacji wirowości

4.3 Przepływ w kwadratowej komorze z ruchomą ścianką

Jednym z najbardziej znanych przypadków testowych jest przepływ w kwadratowej komorze [75] (rys. 4.6). Przepływ w komorze o długości boku $L = 1$ jest wywołany ruchem górnej ścianki z prędkością $u_0 = 1$, a pozostałe ścianki są nieruchome. W zależności od liczby Reynoldsa, $Re = \frac{u_0 L}{\nu}$, w komorze powstaje szereg charakterystycznych struktur wirowych (rys. 4.6). Mimo, że nie istnieje rozwiązanie analityczne dla tak postawionego zagadnienia problem ten został szeroko omówiony i przebadany zarówno numerycznie [25, 27] jak i eksperymentalnie [31, 32, 49, 59] przez wielu badaczy. Stąd też porównanie otrzymanych obecnie wyników z wynikami uzyskanymi przy użyciu innych sprawdzonych metod obliczeniowych jest bardzo dobrym testem poprawności proponowanego algorytmu. Najczęściej porównuje się położenie środka wiru pierwotnego, wartości na liniach prądu oraz obraz funkcji prądu w zależności od liczby Reynoldsa.



Rys. 4.6: Obszar obliczeniowy oraz występujące struktury wirowe.

Obliczenia sprawdzające prowadzono w szerokim zakresie liczb Reynoldsa i dla różnych wielkości siatki numerycznej i z różnymi wielkościami kroku czasowego. Prezentowane w niniejszej pracy wyniki numeryczne dotyczą przepływu z liczbą $Re = 100, 400, 1000, 3200, 5000, 7500, 10000$. Głównym parametrem porównawczym dla przepływu w kwadratowej komorze jest położenie środka pierwotnego wiru podstawowego, oraz rozkład linii prądu. Wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa obserwuje się przemieszczanie wiru podstawowego w kierunku geo-

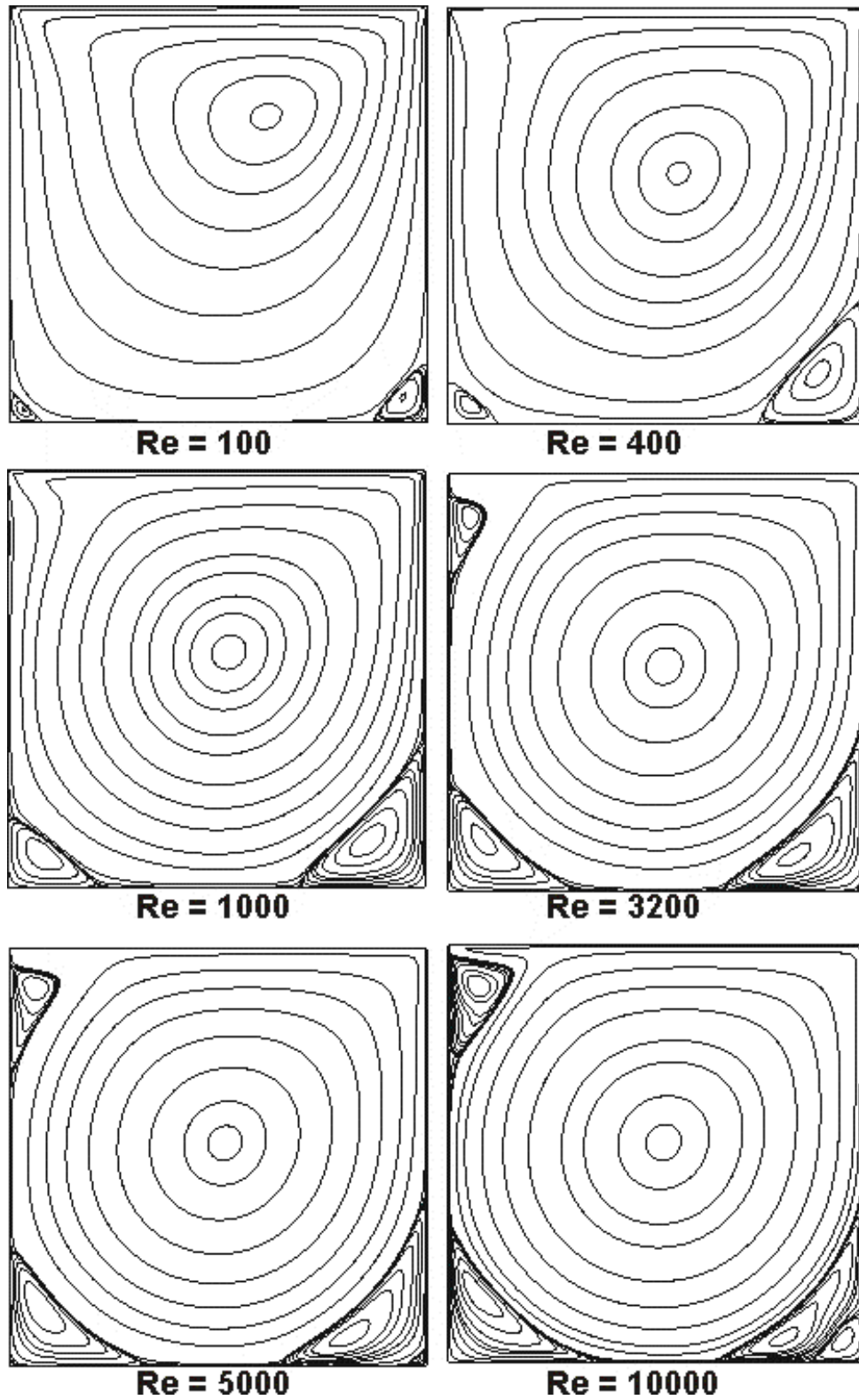
metrycznego środka komory, oraz obserwuje się pojawianie się wtórnych wirów narożnikowych dolnych oraz wtórnego wiru górnego. Wszystkie te zjawiska są ściśle związane z wartością liczby Reynoldsa. Rysunek 4.7 przedstawia rozkład linii prądu w zależności od liczby Reynoldsa. W tym przypadku użyty został warunek brzegowy na wirowość typu Neumanna (patrz podrozdział 3.4.3: Metoda II). Dla metody opierającej się na warunku brzegowym na wirowość typu Dirichleta obrazy są prawie identyczne. Cechą charakterystyczną omawianego przepływu jest kształt i ilość pojawiających się wirów wtórnych wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa. Dla liczb Reynoldsa mniejszych od 1000 w przepływie występuje pierwotny wir podstawowy i wiry wtórne, które wraz ze wzrostem wartości Re powiększają swe rozmiary. Krytycznym momentem przepływu w komorze jest liczba $Re = 3200$, kiedy to pojawia się wyraźny wir wtórny górny. Następnie wraz ze wzrostem Re wir wtórny górny powiększa się, natomiast w narożnikach dolnych pojawiają się kolejne coraz mniejsze i słabsze wiry. Wszystkie te zjawiska można zaobserwować na rysunku 4.7. Ponadto uzyskane w obecnych obliczeniach rozkłady linii prądu są niemal identyczne do tych uzyskanych przez innych wcześniej cytowanych badaczy.

Podczas prowadzenia obliczeń dla przepływu w komorze zauważono, że przepływ ustala się i przybiera charakter stacjonarny dla liczb Reynoldsa do 7500 włącznie. Natomiast dla liczb $Re \geq 10000$ przepływ zaczyna być niestacjonarny. Manifestuje się to szczególnie w położeniu, ilości i kształcie wirów wtórnych, które przestają być stacjonarne i ulegają ciągłym zmianom.

Dodatkowo w tabeli 4.6 zestawiono współrzędnych środka pierwotnego wiru podstawowego z dostępnymi w literaturze wynikami.

Re	Metoda I (x, y)	Metoda II (x, y)	Ghia <i>et al.</i> [25] (x, y)	Ho <i>et al.</i> [28] (x, y)
100	(0.6163, 0.7360)	(0.6164, 0.7336)	(0.6172, 0.7344)	(0.6154, 0.7368)
400	(0.5520, 0.6030)	(0.5531, 0.6031)	(0.5547, 0.6055)	(0.5550, 0.6078)
1000	(0.5310, 0.5650)	(0.5310, 0.5638)	(0.5313, 0.5625)	(0.5342, 0.5615)
3200	(0.5185, 0.5386)	(0.5185, 0.5386)	(0.5165, 0.5469)	--
5000	(0.5178, 0.5340)	(0.5165, 0.5337)	(0.5117, 0.5352)	--
7500	(0.5163, 0.5319)	(0.5161, 0.5301)	(0.5117, 0.5322)	--
10000	(0.5160, 0.5298)	(0.5159, 0.5273)	(0.5117, 0.5333)	--

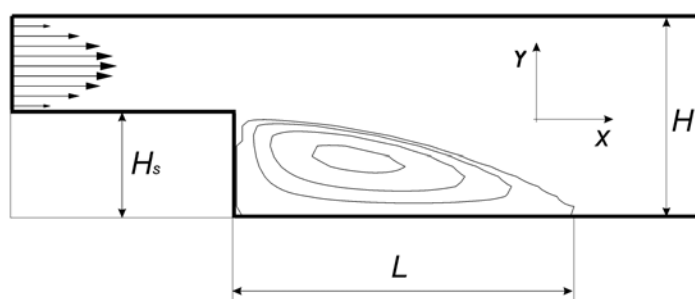
Tabela 4.6: Porównanie położenia środka pierwotnego wiru podstawowego.



Rys. 4.7: Linie prądu dla przepływu w komorze kwadratowej.

4.4 Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem – stopień

Kolejnym testem sprawdzającym poprawność prezentowanej metody obliczeniowej „wir w komórce” jest przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem. Przepływ ten został dokładnie przeanalizowany zarówno numerycznie [33, 69, 87, 38, 39, 37, 54], jak i eksperymentalnie [3, 19], dzięki temu może służyć jako dobry test porównawczy. Wyniki otrzymane w obecnych badaniach zostały porównane z wynikami eksperymentalnymi prezentowanymi przez Armely’ego w [3], oraz z innymi wynikami numerycznymi otrzymanymi innymi metodami obliczeniowymi.

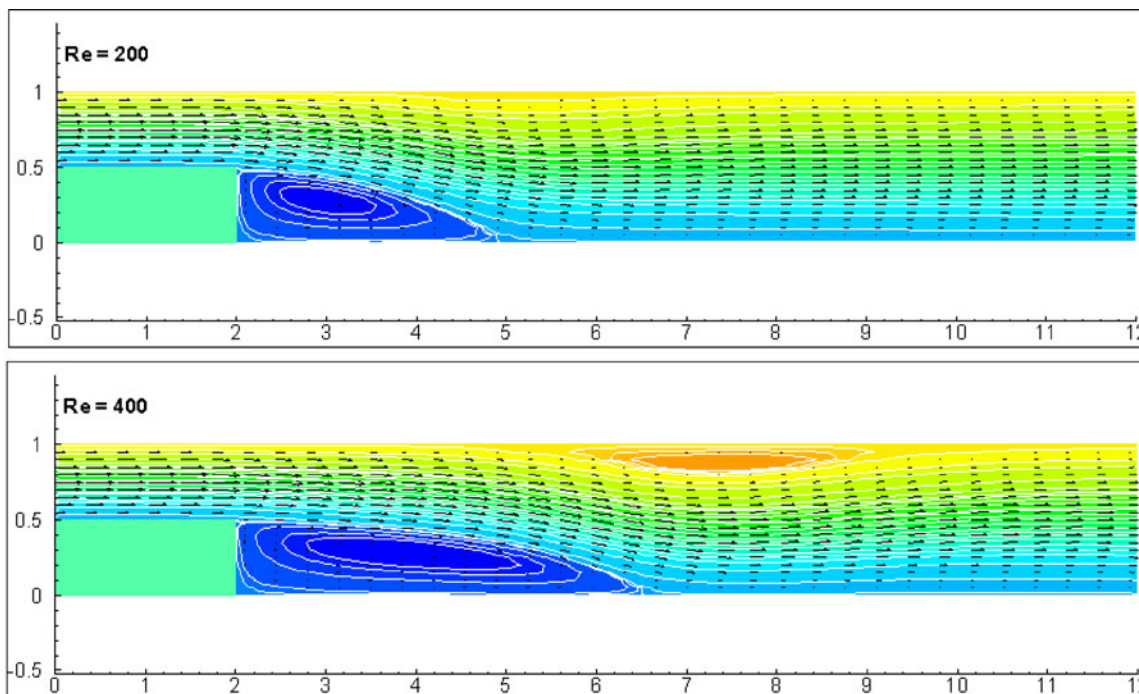


Rys. 4.8: Schemat geometrii przepływu w kanale z gwałtownym rozszerzeniem.

Schemat obszaru obliczeniowego wraz z układem współrzędnych przedstawiono na rysunku 4.8. Na rysunku zaznaczono długość strefy recyrkulacyjnej L , która zmienia się wraz z liczbą Reynoldsa i jest wielkością porównawczą, charakterystyczną dla omawianego przepływu. Liczbę Reynoldsa zdefiniowano jako $Re = UH_s/\nu$, gdzie H_s jest wysokością stopnia, a U prędkością średnią na wlocie. Przyjęto że rozkład prędkości na wlocie jest paraboliczny $u = -24y^2 + 12y$ z prędkością średnią równą jedności $U = 1$. Umożliwiło to porównanie wyników numerycznych niniejszej pracy z wynikami podanymi w wyżej wymienionych cytowaniach. Na ścianie dolnej i na stopniu założono, że $\psi = 0$, a na ścianie górnej $\psi = 0.5$. Na wylocie z kanału przyjęto, że $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$. Ponadto, aby zapewnić warunek przylegania cieczy do ścian, na ścianach sztywnych użyto warunku brzegowego na wirowość typu Dirichleta (metoda I, podrozdział 3.4.3).

Stosunek całkowitej szerokości kanału H do wysokości stopnia H_s przyjęto jako równą 0.5. Całkowita długość kanału, którą zastosowano do obliczeń, wynosiła $22H$. Długość kanału została dobrana, metodą prób, aby zminimalizować wpływ warunku brzegowego na wylocie z

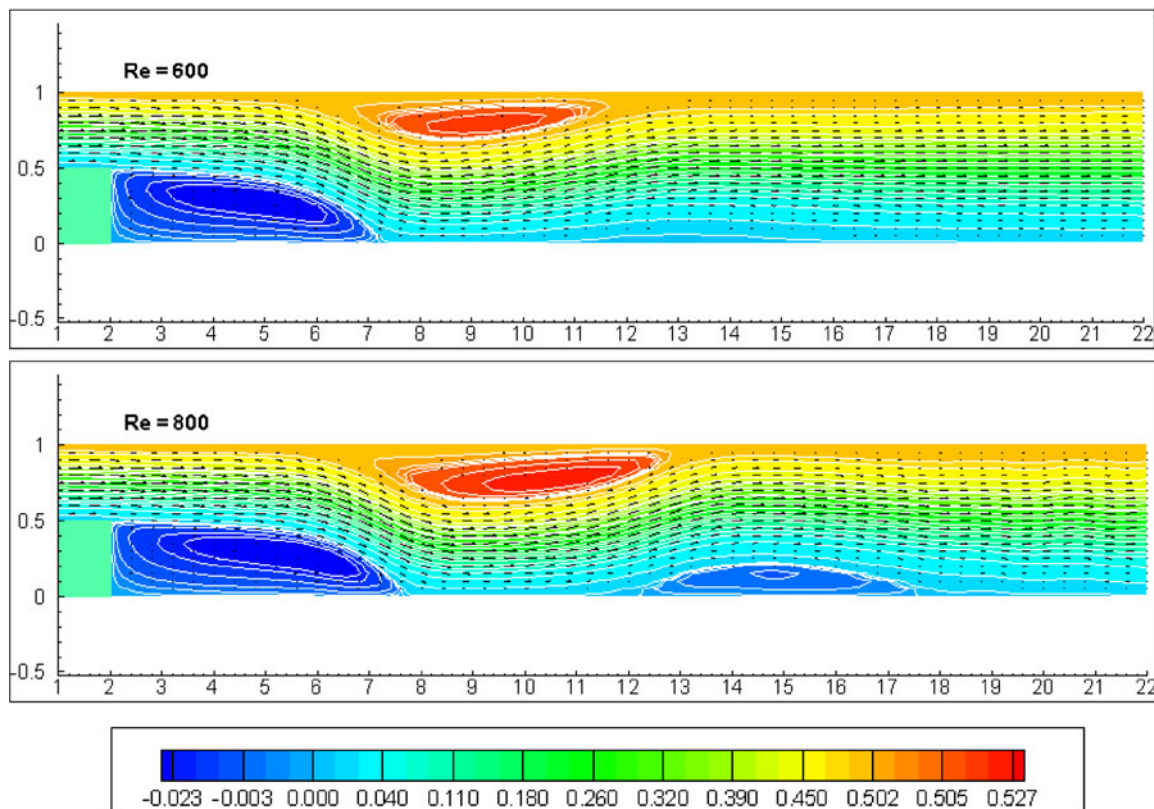
kanału na otrzymane wyniki. Długość części przewężonej od wlotu kanału do stopnia przyjęto $2H$. Skok siatki numerycznej przyjęto $\Delta x = \Delta y = 0.05$, natomiast krok czasowy całkowania $\Delta t = 0.01$.



Rys. 4.9: Obrazy linii prądu wraz z polem wartości funkcji prądu (technika rozlanej barwy) oraz wektorami prędkości w zależności od liczby Reynoldsa.

Jak zostało to zaznaczone wcześniej, w powyższej pracy do rozwiązania równania Poissona na funkcję prądu zostały wykorzystane szybkie algorytmy bezpośrednie do rozwiązywania równań eliptycznych. Algorytmy te stosuje się do obszarów regularnych (prostokątnych). Aby móc zastosować je do bardziej złożonych obszarów posłużono się metodą macierzy pojemnościowej [38]. W obecnej pracy metodę macierzy pojemnościowej wykorzystano do rozwiązania równania Poissona na funkcję prądu dla przepływu w kanale z gwałtownym rozszerzeniem (obecny przypadek, oraz podrozdział 5.3) oraz opływu przeszkody w pobliżu ściany płaskiej (podrozdział 5.4).

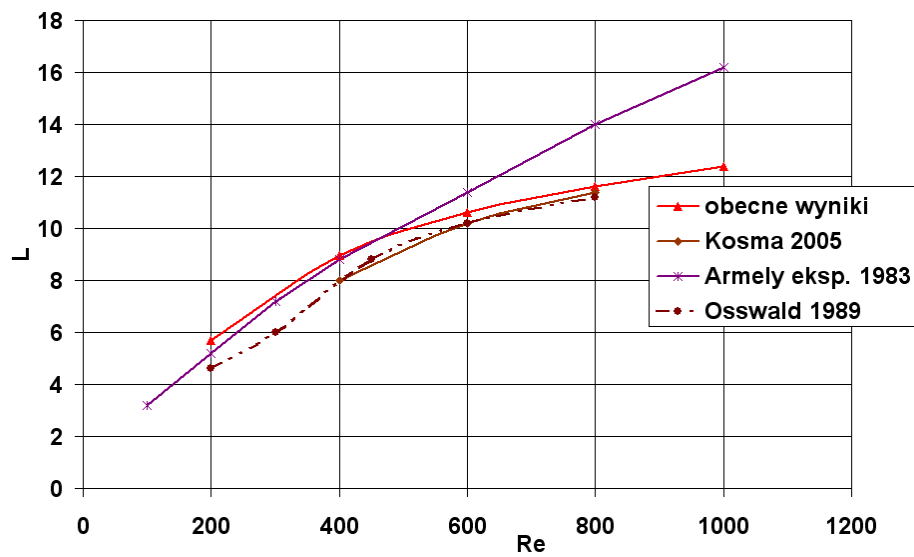
Rysunek 4.9 przedstawia wyniki numeryczne dla liczb Reynoldsa 200, 400, a rysunek 4.10 dla liczb Reynoldsa 600, 800. Na rysunku 4.10 została zmieniona skala w stosunku do rysunku 4.9. Z pomiarów eksperymentalnych wynika, że strefa recyrkulacji za stopniem powinna wzrastać liniowo aż do liczby $Re = 800$. W obecnych obliczeniach strefa ta wzrasta liniowo do wartości około $Re = 500$, co można zauważyć na rysunku rys. 4.11. Następnie wzrost jest wol-



Rys. 4.10: Obrazy linii prądu wraz z polem wartości funkcji prądu (technika rozlanej barwy) oraz wektorami prędkości w zależności od liczby Reynoldsa. Uwaga zmieniona skala w stosunku do rysunku 4.9

niejszy. Podobne zachowanie można zaobserwować w wynikach uzyskanych innymi metodami obliczeniowymi. Wykres 4.11 przedstawia porównanie obecnych wyników z innymi wynikami numerycznymi oraz z eksperymentem. Na tle innych metod obliczeniowych prezentowana metoda wypada bardzo dobrze. Z badań eksperymentalnych wiadomo także iż wraz ze wzrostem liczby Re w kanale pojawiają się dodatkowe strefy recyrkulacyjne, najpierw na ścianie górnej, następnie pojawia się druga strefa recyrkulacji na ścianie dolnej. Uzyskane wyniki bardzo dobrze również oddają to zjawisko. Na rysunku 4.10 można zauważyć dodatkowe strefy recyrkulacyjne, a ich miejsce i moment pojawienia zgadza się z wynikami eksperymentalnymi prezentowanymi w pracach [3, 33, 54].

Wraz z dalszym zwiększaniem liczby Reynoldsa (powyżej 800) strefa recyrkulacji nadal się wydłużała i stała się niestacjonarna. Powstające dodatkowe strefy recyrkulacyjne, na górnej i dolnej ścianie kanału, przybrały także niestacjonarny charakter i przemieszczały się wraz z płynem. Przy dalszym zwiększaniu liczby Reynoldsa strefa recyrkulacji za stopniem uległa



Rys. 4.11: Porównanie prezentowanych wyników z wynikami eksperymentalnymi i numerycznymi innych badaczy.

skróceniu na skutek rozpadu. Przy liczbie Reynoldsa równej około 3000 strefa recyrkulacji cyklicznie odrywała się od stopnia co doprowadziło do powstania zjawiska podobnego do ścieżki wirowej Karmana. Dokładniejsze omówienie powyżej przedstawionych zjawisk znajduje się w następnym rozdziale.

4.5 Podsumowanie wyników testowych.

Na podstawie przeprowadzonych testów sprawdzających widać, że metoda wirowa typu „wir w komórce” daje dobre wyniki numeryczne, a proponowane algorytmy generacji wirowości na ścianie zapewniają warunek przylegania cieczy do ścian.

W obecnej pracy przedstawiono i przetestowano dwie metody generacji wirowości na ścianach sztywnych. Pierwsza metoda oparta na formule Thoma (3.47), pozwalała wyznaczyć odpowiednią wartość wirowości na ścianie (warunek brzegowy typu Dirichleta) z rozkładu funkcji prądu wewnątrz przepływu. Natomiast w metodzie drugiej określany był strumień wirowości (warunek typu Neumanna). Obie metody dawały podobne wyniki.

Na podstawie dwóch pierwszych testów sprawdzających (przepływ w kanale prostokątnym i drugie zagadnienie Stokesa) metoda oparta na formule Thoma pozwoliła uzyskać trochę wyższą zbieżność i mniejszy błąd maksymalny (tabele 4.1, 4.2, 4.4, 4.5). Jednak bardziej wymagający test jakim był przepływ w komorze kwadratowej dał niemal identyczne wyniki dla obu metod. Jak można zauważyć w tabeli 4.6 położenia środków podstawowego wiru pierwotnego są niemal identyczne dla pierwszej i drugiej metody produkcji wirowości dla szerokiego zakresu liczb Reynoldsa.

Przeprowadzone badania pokazały, że obie metody generacji wirowości dają podobne wyniki. Dlatego kryterium wyboru jednej z nich może być np. czas obliczeń. Łatwość implementacji przemawia za pierwszą metodą wykorzystującą warunek brzegowy typu Dirichleta. W metodzie drugiej, opierającej się na wyznaczeniu odpowiedniego strumienia wirowości ze ściany, dodatkowo w każdym kroku czasowym trzeba rozwiązać zagadnienie dyfuzji z warunkiem brzegowym typu Neumanna.

Rozdział 5

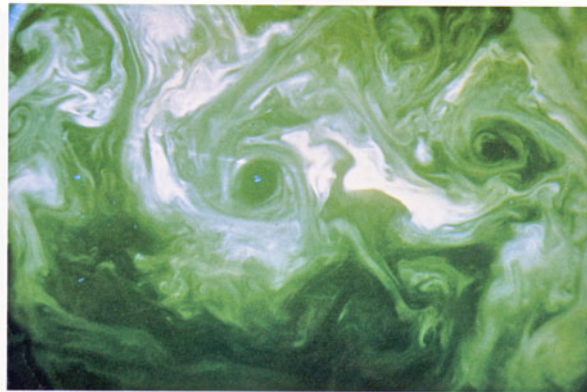
Oddziaływanie struktur wirowych ze ścianami

5.1 Oddziaływanie łaty wirowej i ściany

5.1.1 Wprowadzenie

Obrazy przepływu w turbulentnej warstwie przyściennej ujawniają niezwykle złożoną strukturę przepływu (rys. 5.1). Dominującymi elementami obecnymi w takich przepływach są struktury wirowe. Tak skomplikowany obraz przepływu może wynikać ze wzajemnego oddziaływania struktur wirowych ze sobą oraz ze ścianami. Cechami przepływu turbulentnego są między innymi dyssypacja energii, mieszanie, czy niestacjonarność. Wirowość, która może powstać tylko na brzegu, może być transportowana do wnętrza przepływu przez procesy dyfuzyjne, jak na przykład w przepływie Poiseuille'a (rys. 4.1). Dla przepływów turbulentnych musi jednak istnieć mechanizm bardziej intensywnego zasilania przepływu przez wirowość. Wydaje się że takim mechanizmem jest zjawisko erupcji warstwy przyściennej. Przez erupcję, jak było to już zaznaczone wcześniej, rozumie się tutaj gwałtowne oderwanie z obszaru przyściennego wirowości w postaci strugi wirowości wraz z elementami płynu i wyrzucenie ich do wnętrza przepływu.

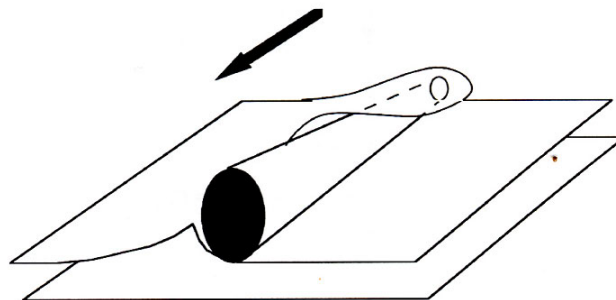
Zjawisko erupcji jest nieodzownie związane z dużą koncentracją wirowości w niewielkich obszarach przyściennych, oraz wzajemnym oddziaływaniem struktur wirowych ze ścianami. Na podstawie danych literaturowych (rozdział 1), wiadomo że charakterystycznymi strukturami zaobserwowanymi w pobliżu ścian są wiry spinkowe (rys. 1.9), podkowiaste oraz współprądowe



Rys. 5.1: Wizualizacja przepływu turbulentnego w warstwie przyściennej [45]

wiry podłużne [29, 55, 64, 26, 65].

Oddziaływanie dwuwymiarowej łąty wirowej ze ścianą można uważać za uproszczone oddziaływanie trójwymiarowej struktury wirowej ze ścianą, rysunek 5.2. W takim przypadku łąta wirowa jest rozumiana jako dwuwymiarowy przekrój wiru z rysunku 5.2. Występowanie zjawiska

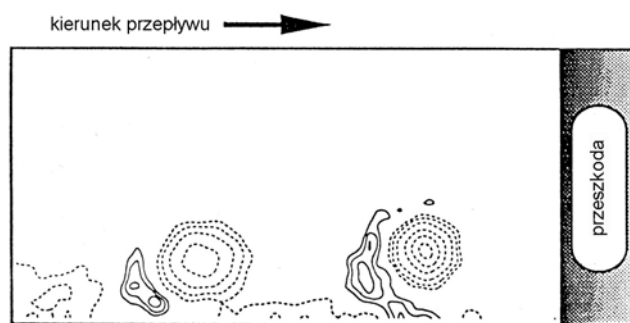


Rys. 5.2: Oddziaływanie wiru wzdłużnego i ściany. Zaadaptowane od Jimenez i Moin [29]

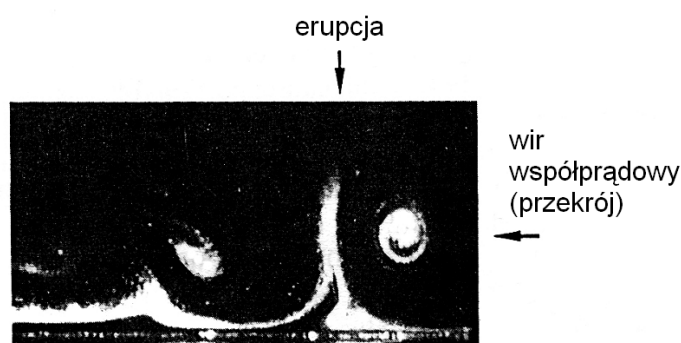
erupcji warstwy przyściennej w przepływach rzeczywistych zostało potwierdzone wieloma badaniami laboratoryjnymi. Zjawisko erupcji zaobserwowano między innymi podczas oddziaływania wirów naszyjnikowych (podkowiastych) ze ścianą [21, 72, 77]. Wiry naszyjnikowe powstają przy opływanych przeszkodach. Struktury te mają bardzo złożoną trójwymiarową strukturę i otaczają przeszkodę tworząc „naszyjnik” lub inaczej „podkowę”, a ich „nogi” rozciągają się za przeszkodą w dół strumienia. Wiry te powstają podczas opływu filarów, rurek, wystających elementów kadłubów statków, czy skrzydeł samolotów.

Na Rysunku 5.3 widać chwilowe kontury wirowości, otrzymane podczas badań laboratoryj-

nych metodą PIV (particle image velocimetry). Widoczny wir naszyjnikowy (kontur przerywana) oddziałując ze ścianą powoduje wyrzucenie wirowości ze ściany (kontur ciągły). Natomiast rysunek 5.4 ukazuje laboratoryjną wizualizację erupcyjnego charakteru warstwy przyściennej wywołanej obecnością „nóg” wiru naszyjnikowego. W tym przypadku rdzenie wirów zostały naznaczone przy pomocy pęcherzyków wodorowych. Na rysunku wyraźnie widać wyrzucane ze ściany elementy płynu, które następnie ulegały zwinięciu tworząc wtórną strukturę wirową [77]. Zarówno na rysunku 5.3 oraz 5.4 przedstawiony jest przekrój wiru naszyjnikowego aczkolwiek w różnych miejscach (przed przeszkodą i za przeszkodą) tworząc dwuwymiarowy obraz.



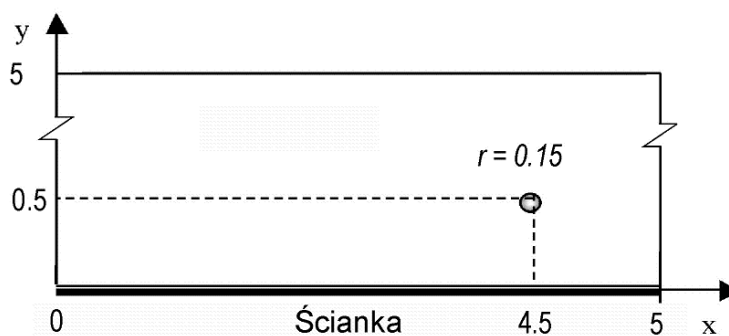
Rys. 5.3: Chwilowe kontury wirowości otrzymane metodą PIV. Obraz przedstawia przekrój wiru naszyjnikowego. Linia przerywana oznacza wirowość ujemną, natomiast ciągła dodatnią [72].



Rys. 5.4: Erupcja warstwy przyściennej wywołana obecnością wiru naszyjnikowego [77].

5.1.2 Obliczenia numeryczne

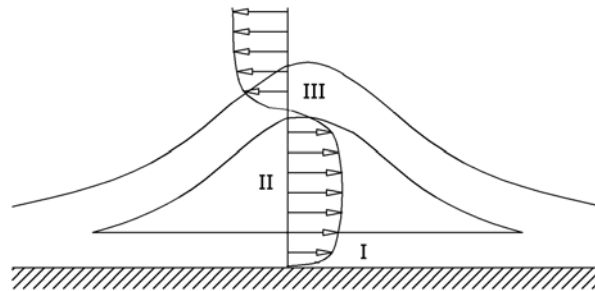
Rysunek 5.5 przedstawia schemat obszaru obliczeniowego wraz z łatą wirową. Przez łatę wirową rozumie się tutaj skończony obszar skoncentrowanej wirowości. W chwili początkowej płyn jest nieruchomy. Rozmiar obszaru obliczeniowego został dobrany metodą prób i błędów tak aby zminimalizować wpływ warunków brzegowych na wynik symulacji. Ostatecznie został wybrany obszar o długości $L = 5$ i wysokości $H = 5$. Założono, że zarówno pole prędkości jak i wirowości w kierunku osi x jest okresowe. Na dolnej ($y = 0$) i górnej ($y = 5$) granicy przyjęto zerową wartość funkcji prądu $\psi = 0$. Początkowe położenie łaty wirowej było w punkcie $x_0 = 4.5$, $y_0 = 0.5$, a jej początkowy promień wynosił $r = 0.15$, wirowość $\omega_0 = -5$. Rozmiar siatki numerycznej oraz kroku czasowego wynosił odpowiednio $\Delta x = \Delta y = 0.01$, $\Delta t = 0.01$. Cyrkulacja łaty wirowej wynosiła: $\Gamma = \omega_0 \pi r^2 = -0.3534$.



Rys. 5.5: Obszar obliczeniowy rozważanego zagadnienia.

Indukowane pole prędkości przez łatę wirową w obecności ściany powoduje jej ruch od strony prawej do lewej. Kierunek ruchu jest determinowany znakiem cyrkulacji jaki posiada rozważana struktura ($\Gamma < 0$). Łata wirowa indukuje pole prędkości, którego składowa styczna na ścianie jest różna od zera. Jak było to opisane wcześniej, aby zrealizować warunek przylegania cieczy do ściany na ścianie jest generowana dodatkowa wirowość. Wzdłuż ściany powstaje warstwa wirowa. Maksymalna prędkość indukowana przez łatę znajduje się dokładnie pod nią. W tym miejscu ciśnienie przyjmuje wartość minimalną. Oddalając się na lewo od rozważanej struktury wirowej, zgodnie z kierunkiem ruchu, prędkość maleje. Natomiast ciśnienie rośnie. Oznacza to że gradient ciśnienia jest przeciwny do wzdłużnego kierunku ruchu łaty. Istnienie wstecznego gradientu ciśnienia sprzyja powstaniu zjawiska oderwania warstwy przyściennej. Przy ścianie tworzy się pęcherz wirowy (wir kieszeniowy). Zamknięte linie prądu tworzą wir, w

którym znajdują się elementy płynu z warstwy przyściennej. W obecnej pracy wir pęcherzowy będzie nazywany strefą recyrkulacji przyściennej. W zależności od lepkości strefa recyrkulacji przyściennej może zwiastować zjawisko niestacjonarnej separacji. Powstająca strefa recyrkulacji przyściennej przypomina pęcherzyk, który rośnie w kierunku prostopadłym do ściany i ostatecznie prowadzi do erupcji warstwy przyściennej.



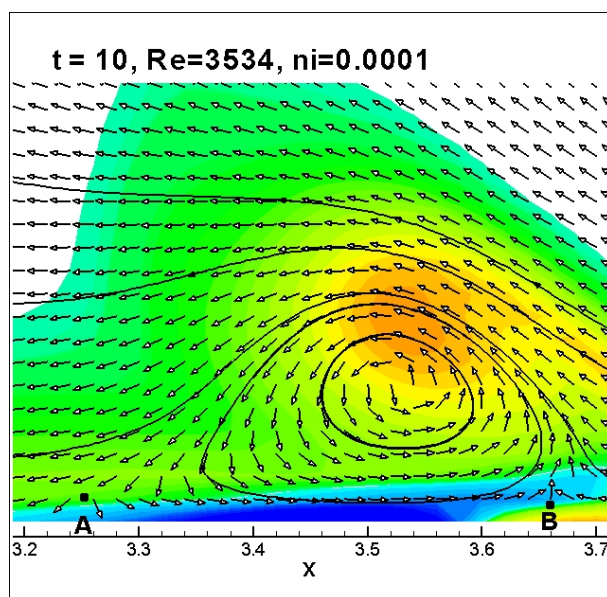
Rys. 5.6: Ideowy schemat obszaru przyściennego tuż przed erupcją [76].

W pracach [57, 58, 81, 76] badano oderwanie warstwy przyściennej przy pomocy równań warstwy przyściennej Prandtla. Rysunek 5.6 przedstawia schemat linii prądu tuż przed separacją warstwy przyściennej. Linie prądu dzielą obszar przepływu na trzy części. Strefa numer I przedstawia lepłą warstwę przyścienną. Natomiast w strefie II kierunek przepływu jest przeciwny do głównego kierunku przepływu. Strefa II-ga rozdziela strefę I i III. Uważana jest ona za obszar pozbawiony wirowości i sterujący procesem erupcji. Dla porównania na rysunku 5.7 przedstawiono obszar przyścienne przepływu w okolicy miejsca erupcji będący wynikiem badań numerycznych przeprowadzonych w niniejszej pracy. Rysunek ten przedstawia pole kierunków oraz kilka linii prądu na tle pola wirowego. Czerwony kolor oznacza dodatnią wirowość, natomiast niebieski ujemną. Porównując rysunki 5.6 i 5.7 widać jakościowe podobieństwo. Jednak w naszym przypadku obszar II zawiera wirowość. Płyn krąży wewnątrz obszaru ograniczonego linią prądu. Różnica ta być może wynika to stąd, że rysunek 5.6 otrzymano na podstawie badań zjawiska oderwania warstwy przyściennej korzystając z równań Prandtla. Dla równań tych zakłada się, że prędkość prostopadła do ściany jest wiele razy mniejsza od prędkości równoległej do ściany ($v \ll u$). Stąd brak jest krążenia płynu w strefie II na rys. 5.6.

Na rysunku 5.7 można zauważyć dwa punkty stagnacji ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) oznaczone jako **A** i **B**. Punkt **A** jest punktem z którego elementy płynu odpływają w przeciwnych kierunkach (punkt przylegania). Natomiast w punkcie **B** trafiają na siebie elementy płynu o przeciwnie skierowa-

nych wektorach prędkości. Spotykające się w tym miejscu elementy płynu zaczynają oddalać się od ściany. Punkt **B** nazywany jest punktem separacji.

Dla przepływów z dużą liczbą Reynoldsa strefa recyrkulacji przyściennej ulega silnej deformacji. Krytycznym momentem jest pojawienie się w jej wnętrzu punktu siodłowego, który początkuje zjawisko niestacjonarnej separacji prowadzące do nagłej erupcji elementów płynu z okolicy ściany.



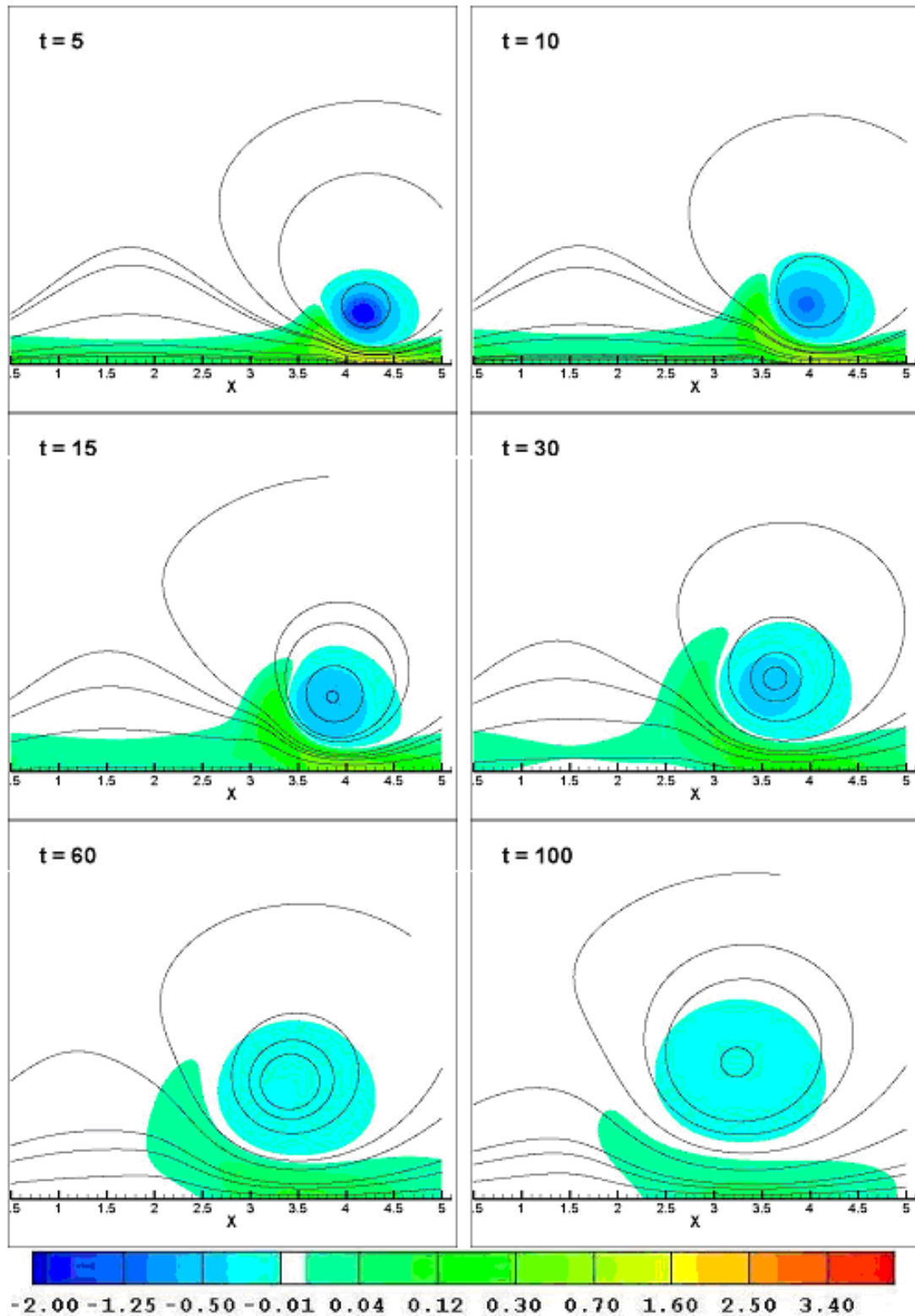
Rys. 5.7: Strefa recyrkulacji zwiastująca erupcję warstwy przyściennej. Na rysunku widoczne jest pole kierunków wraz z kilkoma liniami prądu na tle pola wirowości

Dla przebadania wpływu lepkości na charakter oddziaływania łaty wirowej ze ścianą wprowadzono liczbę Reynoldsa:

$$Re = \frac{\Gamma}{\nu} \quad (5.1)$$

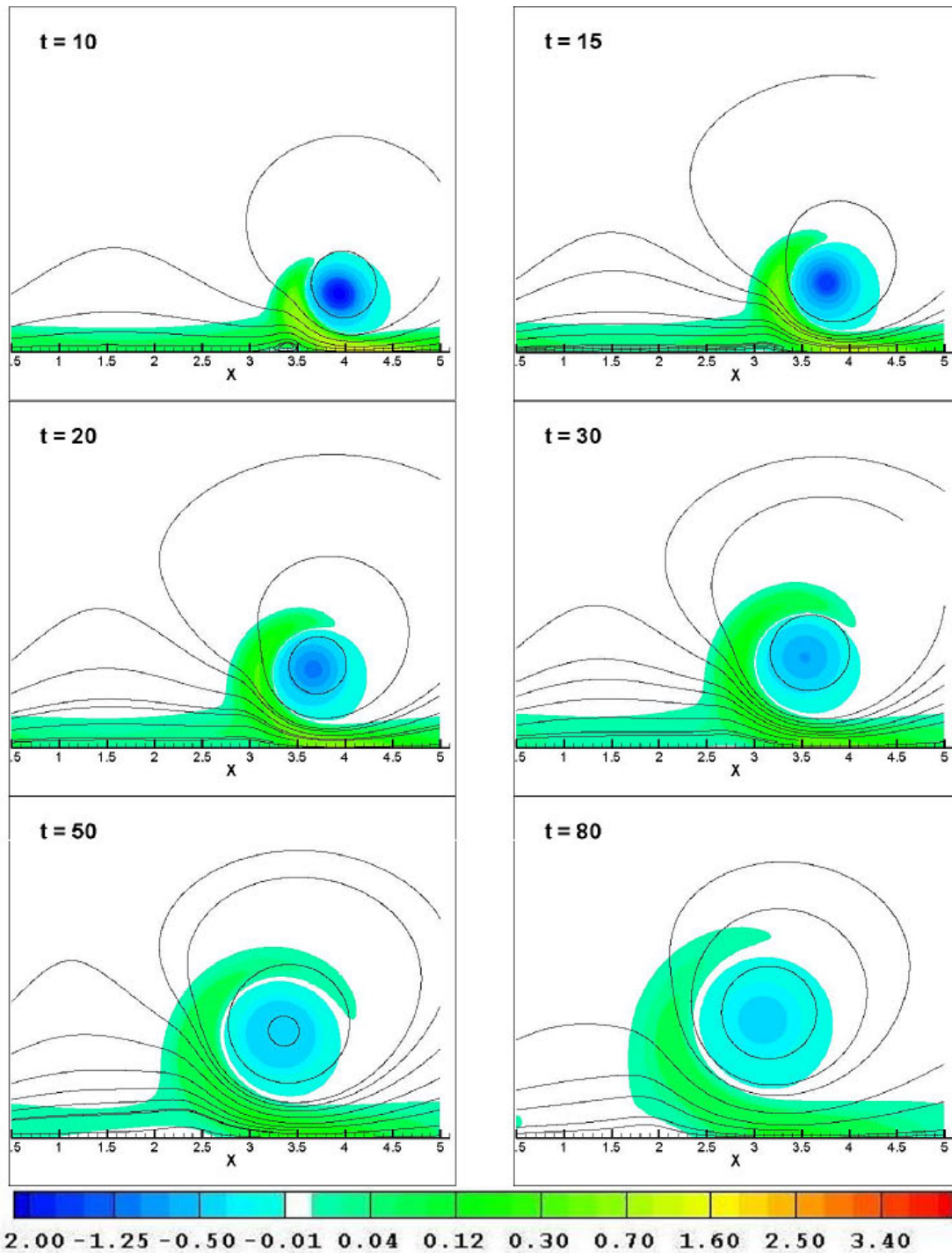
gdzie Γ jest cyrkulacją łaty wirowej.

Na rysunku 5.8 przedstawiono pole wirowości wraz z wybranymi liniami prądu wytworzone przez łatę wirową dla małej liczby Reynoldsa ($Re = 177$, $\nu = 0.002$). W tym przypadku przy ścianie nie formuje się strefa recyrkulacji, nie ma więc także punktu separacji. Należy pamiętać, że cząstki wirowe użyte w obliczeniach pokazują ewolucję pola wirowości i ruch tych cząstek nie odbywa się wzdłuż trajektorii ruchu cząstek płynu. Wirowość „schodzi” ze ściany na skutek dyfuzji.



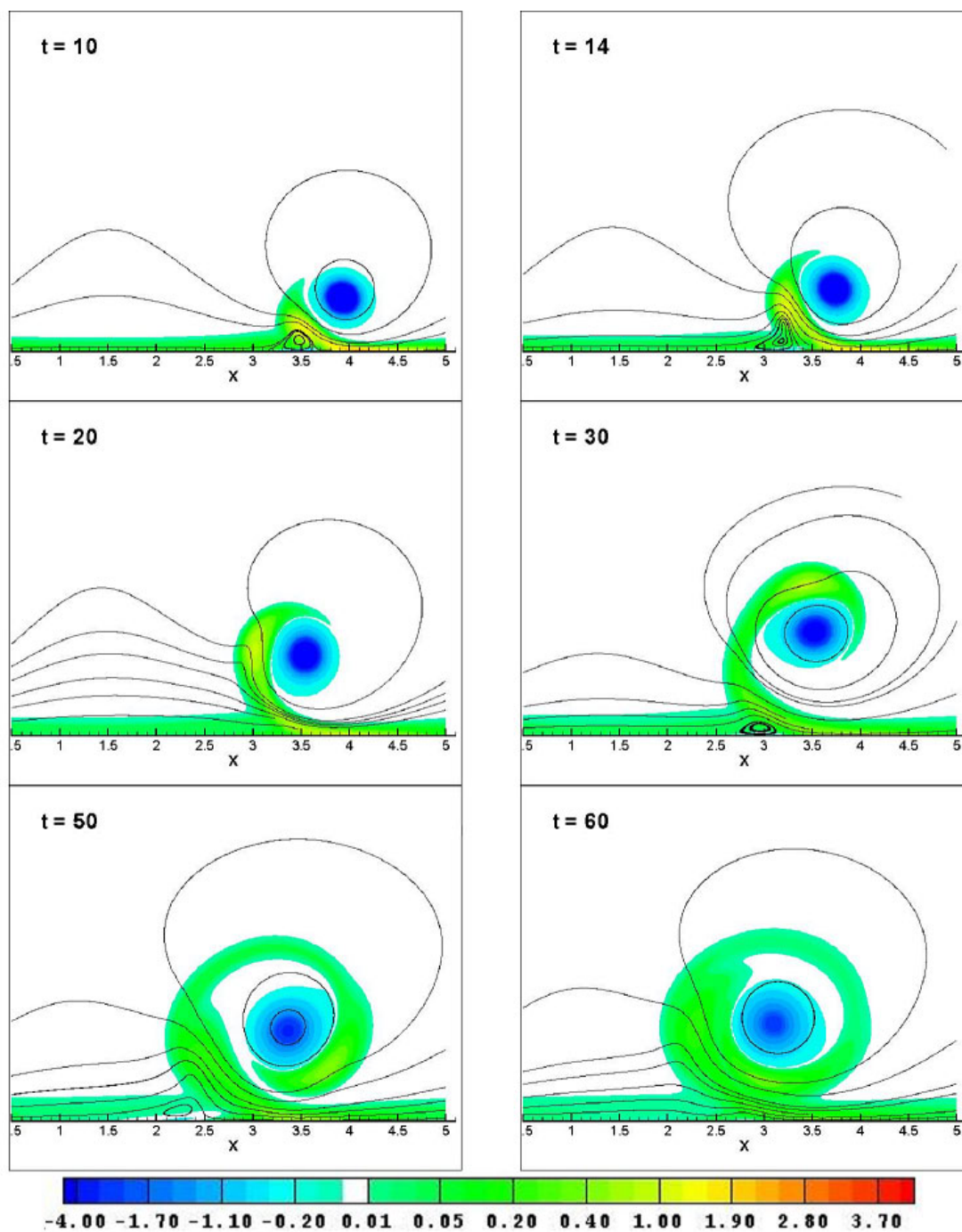
Rys. 5.8: Interakcja łaty wirowej i ściany. $Re = 177$, $\nu = 0.002$. Brak strefy recyrkulacji przyściennej. Rysunek przedstawia pole wirowe wraz z wybranymi liniami prądu.

Zwiększenie liczby Reynoldsa do wartości $Re = 353$ ($\nu = 0.001$), rysunek 5.9, powoduje że w warstwie przyściennej tworzy się strefa recyrkulacji (pęcherz wirowy), która jednak na skutek dużej wartości współczynnika lepkości nie rozwija się.



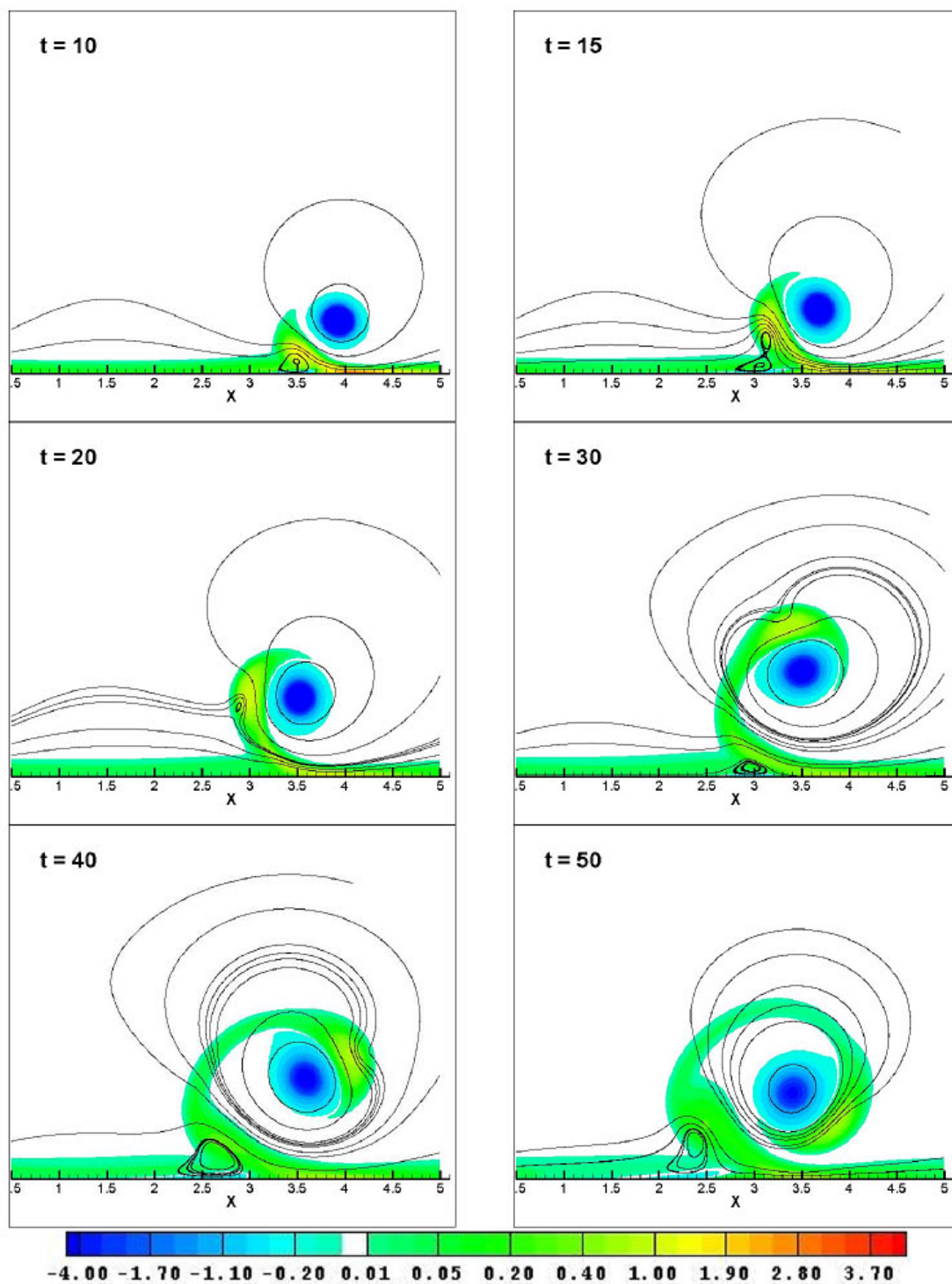
Rys. 5.9: Interakcja łaty wirowej i ściany. $Re = 353$, $\nu = 0.001$. Widoczna strefa recyrkulacji przyściennej dla $t = 10$.

Rysunek 5.10 przedstawia badany problem dla $Re = 1414$ ($\nu = 0.00025$). Na rysunku można zaobserwować, że powstająca strefa recyrkulacji przyściennej zaczyna być wyciągana w kierunku normalnym od ściany ($t = 14$). Jednak nie dochodzi jeszcze do erupcji warstwy przyściennej. Odrzuwająca się wirowość ze ściany powoduje jedynie zakrzywienie linii prądu.



Rys. 5.10: Interakcja łaty wirowej i ściany. $Re = 1414$, $\nu = 0.00025$. Widoczne silne wyciąganie strefy recyrkulacji, $t = 14$.

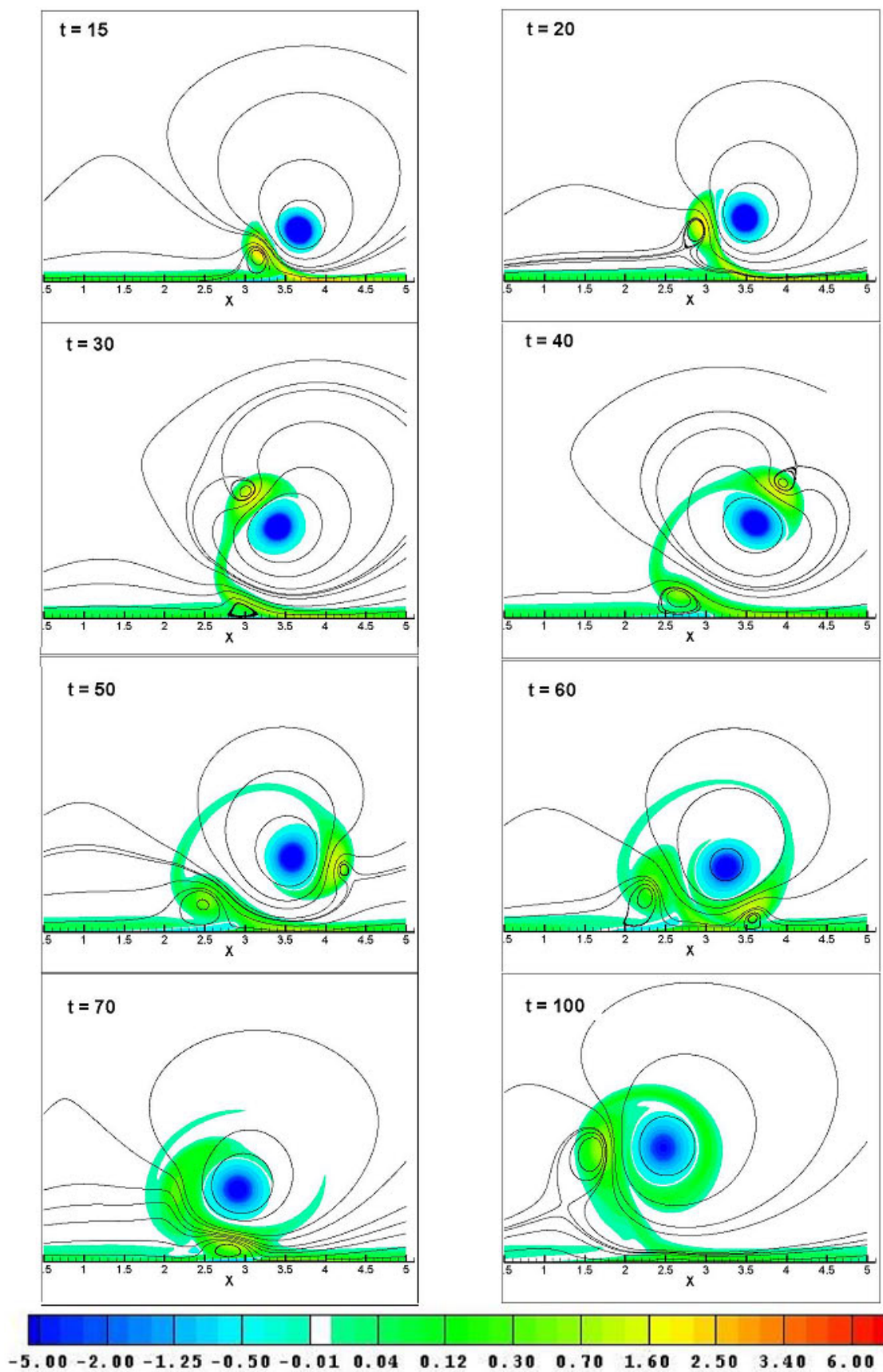
Dla $Re = 1767$ ($\nu = 0.0002$), rysunek 5.11), w przepływie manifestuje się nowe zjawisko, zjawisko erupcji elementów płynu z obszaru przyściennego. W tym przypadku, podobnie jak poprzednio, strefa recyrkulacji jest silnie wyciągana w kierunku normalnym od ściany. Dochodzi do podziału strefy recyrkulacji. Linie prądu tworzą charakterystyczny kształt cyfry „8”. Wewnątrz warstwy przyściennej powstaje punkt siodłowy (ramka dla $t = 15$ oraz rysunek 5.15). Jest to także punkt separacji. Pojawienie się punktu siodłowego na liniach prądu jest zgodne z kryterium Moorea–Rotta–Searsa. Konsekwencją tego jest zjawisko erupcji, które manifestuje się jako wyrzucenie porcji płynu ze strefy przyściennej do środka przepływu. Porcja ta jest zamknięta wewnątrz nowej struktury wirowej (zamknięte linie prądu) (ramka dla $t = 20$). Mamy więc tutaj do czynienia z separacją wiru. Strukturę charakteryzującą się zamkniętymi liniami prądu będziemy nazywali dalej wirem, bądź strukturą wirową. Na skutek działania lepkości oderwany od ściany wir ulega rozproszeniu, ramka dla $t = 30$.

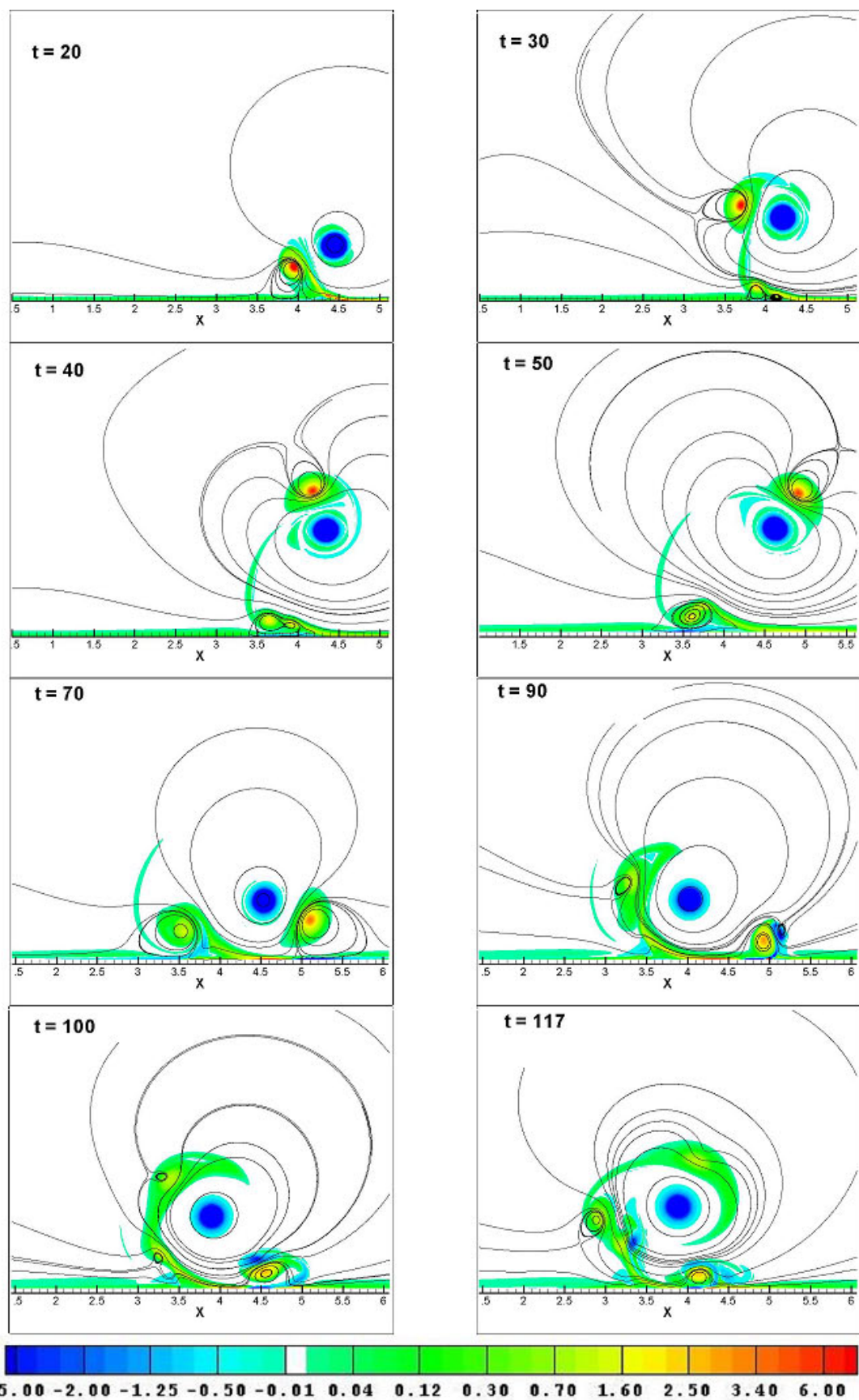


Rys. 5.11: Interakcja łąty wirowej i ściany. $Re = 1767$, $\nu = 0.0002$. Pojawienie się punktu siodłowego na liniach prądu, $t = 15$. Zjawisko erupcji.

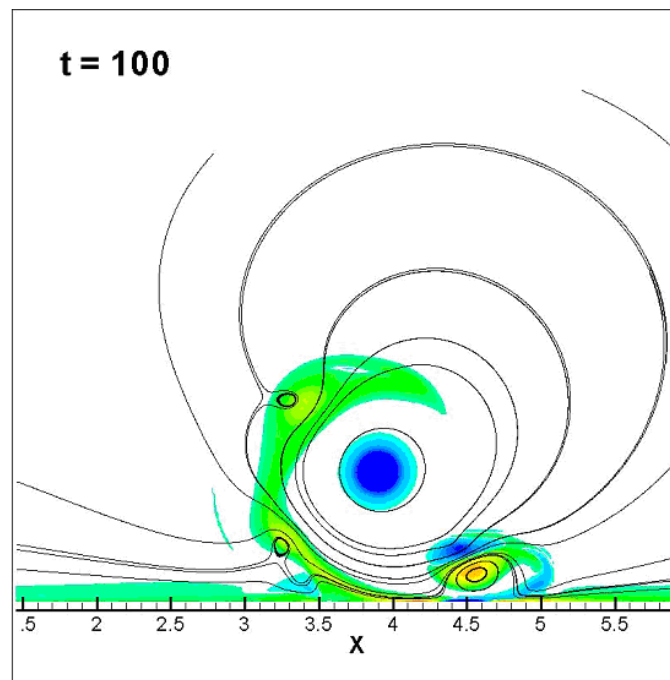
Rysunek 5.12 przedstawia zjawisko erupcji warstwy przyściennej dla liczby Reynoldsa $Re = 3534$ ($\nu = 0.0001$). W tym przypadku wygenerowana struktura wirowa na ścianie ma dużą intensywność i nie ulega rozproszeniu. Na rysunku 5.12 erupcję można zaobserwować dwukrotnie (ramki $t = 20$, $t = 100$). Dalsze zwiększanie liczby Reynoldsa powoduje ciągłą komplikację obrazu erupcji. Rysunek 5.13 przedstawia omawiany przepływ dla $Re = 17670$ ($\nu = 0.00002$). Pojawiają się tutaj jakościowo nowe zjawiska, ze ściany nie zrywa się jedna struktura wirowa, lecz sekwencja kilku struktur wirowych (ramka dla $t = 100$ oraz rys. 5.14). Po okrążeniu pierwotnej łąty wirowej zerwany ze ściany wir też wywołuje erupcję. Proces ma charakter regeneracyjny. Oznacza to że może wystąpić kilkakrotnie, wcześniej zerwane wiry także inicjują zjawisko erupcji (rysunek 5.13, ramka dla $t = 90$). Dla tak dużych liczb Reynoldsa obraz przepływu w okolicy miejsca separacji warstwy przyściennej jest bardzo złożony. Pozwala to jakościowo zrozumieć złożoność rzeczywistych przepływów turbulentnych w pobliżu ściany.

Na rysunku 5.16 przedstawiono powiększone obrazy przebiegu zjawiska separacji dla $Re = 3534$. Sekwencja obrazów pokazuje co dzieje się dalej ze strefą recyrkulacji przyściennej z rysunku 5.7, powstałej na skutek wzajemnego oddziaływania łąty wirowej i ściany. Literą **A** oznaczony jest punkt przylegania (*ang. attachment point*), literą **B** punkt separacji oraz literą **S** punkt siodłowy. Kolejne ramki przedstawiają rozwój zjawiska erupcji. Z upływem czasu strefa recyrkulacji wraz punktem separacji oraz punktem przylegania przesuwa się wzdłuż ściany zgodnie z kierunkiem przepływu (od prawej do lewej), ramka dla $t = 13.6$. Jednocześnie wirowość zawarta wewnątrz zamkniętego konturu indukuje na ścianie wirowość przeciwnego znaku (kolor niebieski). Wyindukowana wirowość oddziela wir od ściany. Strefa recyrkulacji jest rozciągana w kierunku stycznym przy samej ścianie oraz jednocześnie wyciągana w kierunku normalnym od ściany. Skutkuje to rozpadem obszaru recyrkulacji na dwie struktury wirowe. Linie prądu zamykają się w charakterystyczną „ósemkę” z punktem siodłowym **S**, ramka dla $t = 17.2$. Pojawienie się punktu siodłowego powoduje rozpad strefy recyrkulacji przyściennej na dwie niezależne struktury wirowe. Jedna z nich jest szybko unoszona do góry, natomiast druga pozostaje przy ścianie tworząc strefę recyrkulacji. Punkt siodłowy wraz z cząstkami płynu zamkniętymi wewnątrz linii prądu i wirującymi względem środka tworzy wir, który jest unoszony do wnętrza przepływu. Pozostała przy ścianie strefa recyrkulacji zanika, ramki dla $t = 18$ oraz $t = 20$.

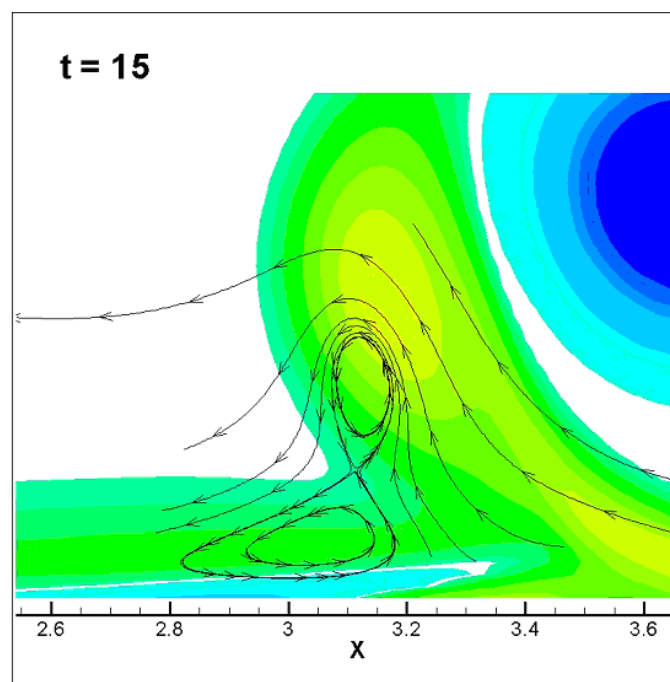
Rys. 5.12: Zjawisko erupcji dla $Re = 3534$, $\nu = 0.0001$.



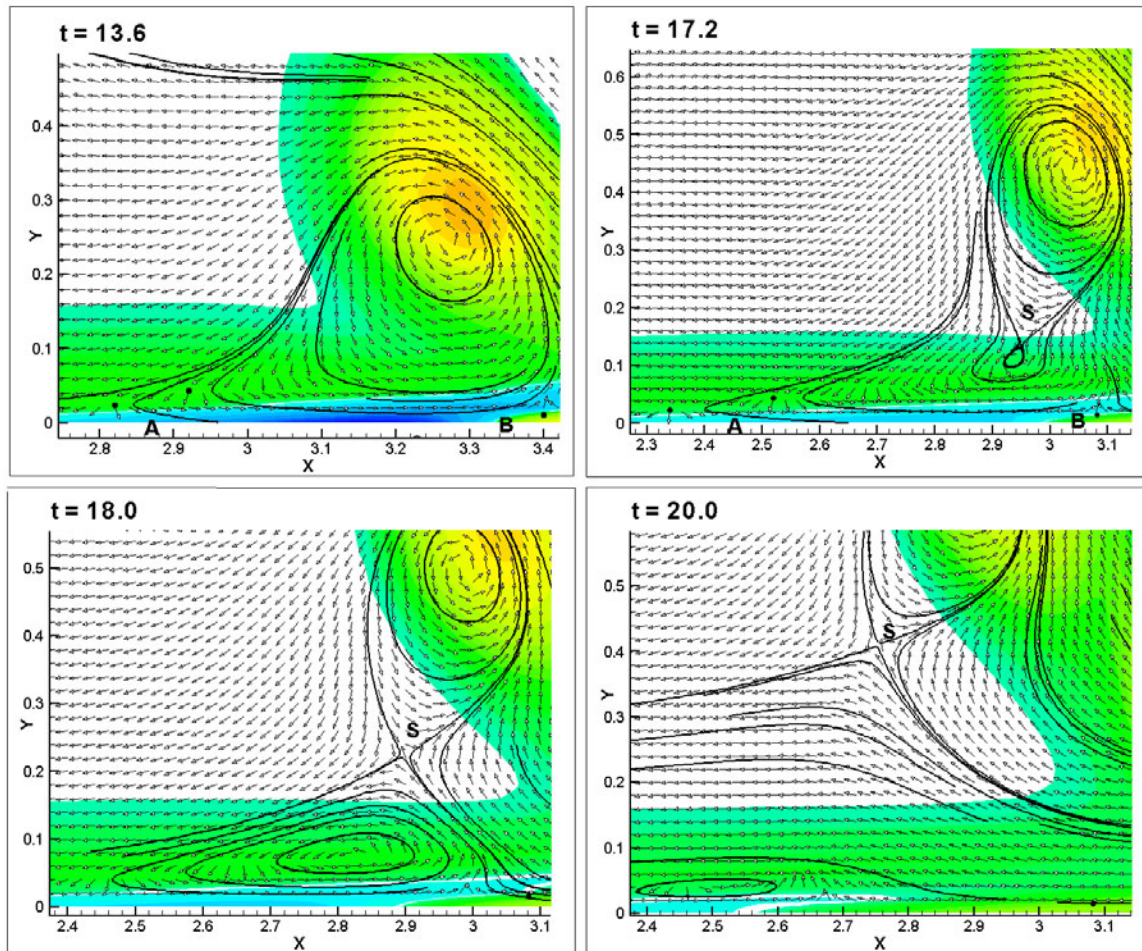
Rys. 5.13: Zjawisko erupcji dla $Re = 17670$, $\nu = 0.00002$. Widoczny regeneracyjny charakter zjawiska, $t = 90$.



Rys. 5.14: Powiększona ramka z rys. 5.13 dla czasu $t = 100$. Sekwencja wtórnych struktur wirowych.



Rys. 5.15: Punkt siodłowy, $Re = 1767$, $\nu = 0.0002$. Porównaj z kryterium MRS, rysunek 1.5.

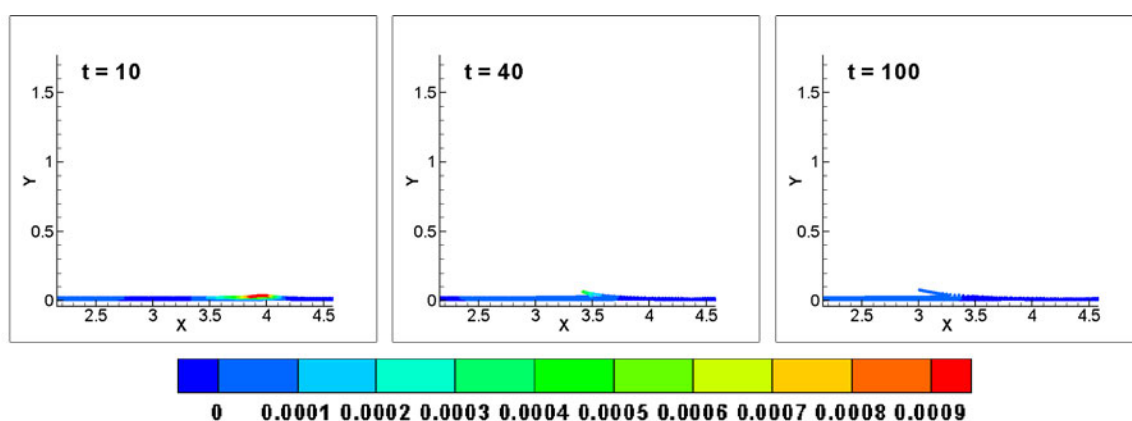


Rys. 5.16: Ewolucja strefy recyrkulacji z rysunku 5.7. Rozwój zjawiska erupcji.

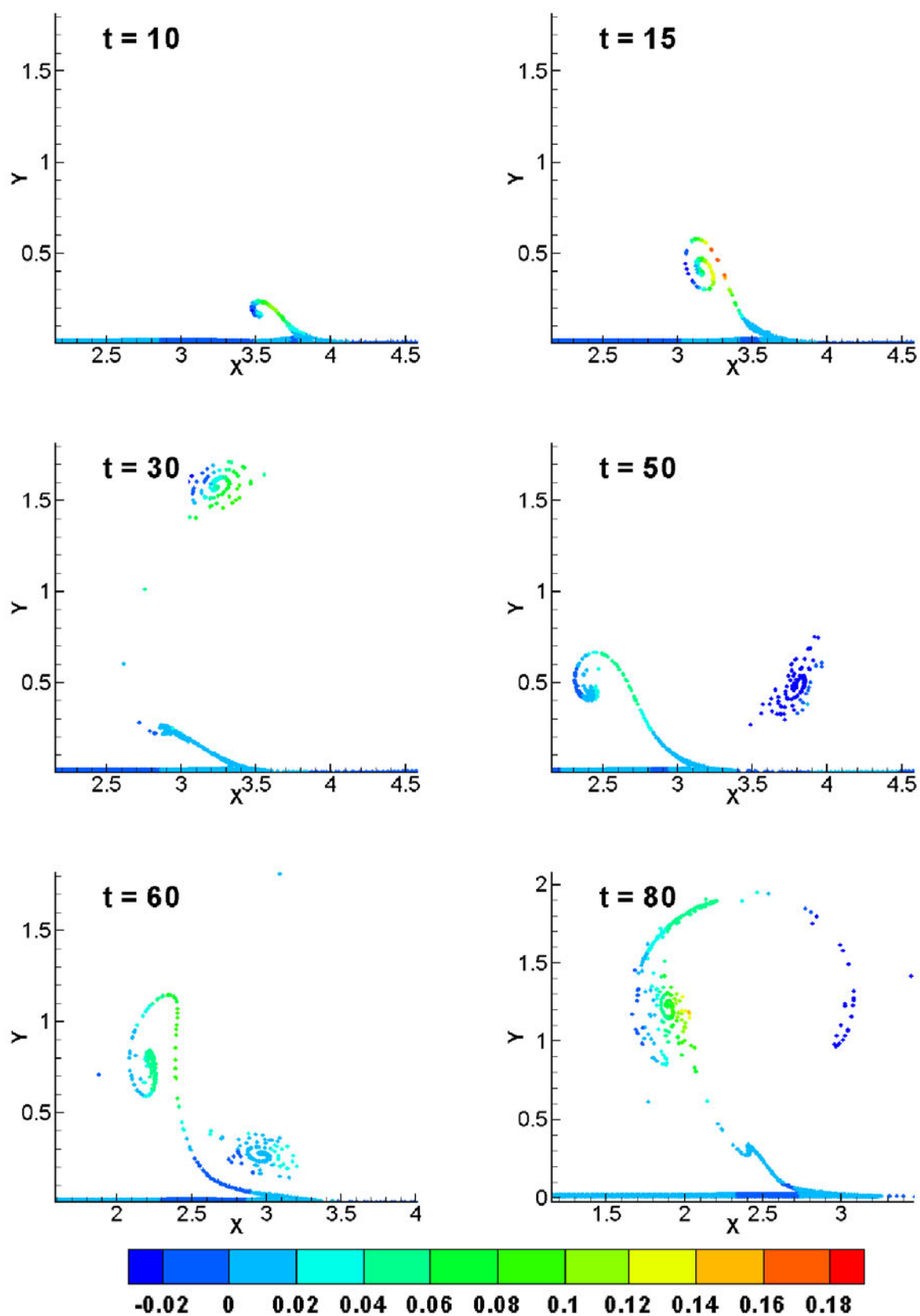
W celu lepszego zilustrowania zjawiska erupcji elementów płynu z obszaru przyściennego do wnętrza przepływu wykonano następujący eksperyment numeryczny. Wzdłuż ściany umieszczono pasywne cząstki (markery), których ruch ilustrował ewolucję elementów płynu z obszaru przyściennego. Markery były umieszczone w czterech rzędach. Odstęp między rzędami, w kierunku normalnym od ściany, wynosił $0.5\Delta y$. Ostatni rząd markerów znajdował się więc na wysokości $2\Delta y = 0.02$ od ściany.

Rysunek 5.17 przedstawia ewolucję elementów płynu (markerów) z obszaru przyściennego dla liczby $Re = 177$ (porównaj rys. 5.8). Kolor cząstek odpowiada wartości składowej normalnej pola prędkości v . Na obrazie widać, iż nie dochodzi do zjawiska erupcji, cząstki płynu pozostają przy ścianie przez cały czas trwania ruchu. Jedynie markery z najwyższego rzędu są nieznacznie unoszone przez pole prędkości generowane przez łatę wirową, lecz nie oddalają się do ściany.

Rysunek 5.18 przedstawia ewolucję cząstek płynu z obszaru przyściennego dla liczby $Re = 3534$ (porównaj rys. 5.12). Na obrazie wyraźnie widać zjawisko oderwania warstwy przyściennej. Cząstki płynu z obszaru przyściennego, zamknięte w strukturze wirowej, są gwałtownie wyrzucane do wnętrza przepływu (ramka dla $t = 10$, $t = 15$). Wyraźnie widać, że pasywne cząstki krążą wewnątrz struktury wirowej. Zaraz za pierwszym oderwanym od ściany wirem zrywa się kolejny (ramka dla $t = 50$). Powyższy eksperyment jasno pokazuje, iż zjawisko erupcji jest odpowiedzialne za transport cząstek płynu oraz wirowości ze ściany do wnętrza przepływu.

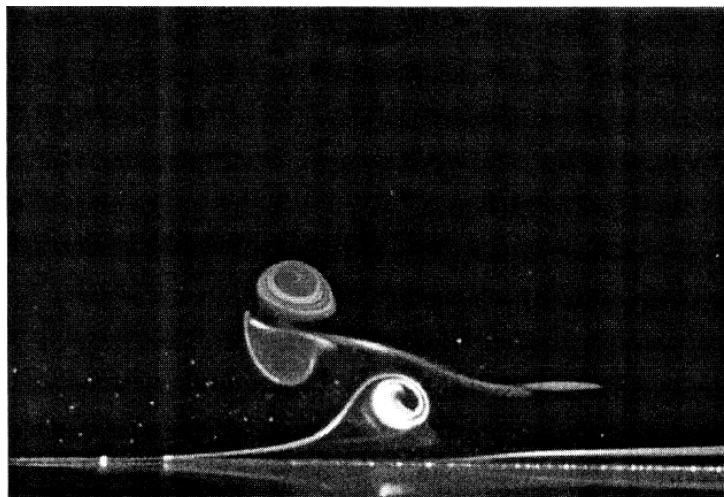


Rys. 5.17: Ewolucja cząstek płynu z obszaru przyściennego, $Re = 177$, $\nu = 0.002$. Brak zjawiska erupcji. Rysunek przedstawia ruch pasywnych cząstek – markerów.



Rys. 5.18: Ewolucja cząstek płynu z obszaru przyściennego, $Re = 3534$, $\nu = 0.0001$. Widoczne zjawisko erupcji. Rysunek przedstawia ruch pasywnych cząstek – markerów.

Przedstawione powyżej wyniki wskazują, iż zjawisko erupcji warstwy przyściennej może być efektem wzajemnego oddziaływania łąty wirowej i ściany. Należy tutaj podkreślić, że „schodząca” ze ściany wirowość nie zawsze jest jednoznaczna z erupcją warstwy przyściennej. Dla przepływów lepkich cząstki wirowości nie poruszają się jak cząstki cieczy. Cząstki wirowości mogą przechodzić w poprzek linii prądu na skutek dyfuzji, natomiast cząstki cieczy poruszają się wzdłuż linii prądu, zgodnie z polem prędkości. Dla małych liczb Reynoldsa „schodząca” ze ściany wirowość jest zbyt słaba aby zamknąć linie prądu i uwięzić w nich elementy płynu z warstwy przyściennej. Duża lepkość zapobiega nadmiernej koncentracji wirowości w warstwie przyściennej. Przeprowadzone obliczenia pokazały iż zjawisko erupcji jest poprzedzone pojawieniem się strefy recyrkulacji przyściennej. Strefa ta dla małych liczb Reynoldsa ($Re < 1414$) ulega rozproszeniu i zanika, więc pojawienie się punktu separacji przy ścianie nie jest wystarczającym kryterium wystąpienia zjawiska erupcji warstwy przyściennej.



Rys. 5.19: Eksperyment demonstrujący narodziny wiru wtórnego [55]

Dla większych liczb Reynoldsa ($Re \geq 1767$) wirowość koncentruje się w niewielkich obszarach przyściennych, a strefa recyrkulacji jest silnie wyciągana w kierunku normalnym od ściany, co powoduje pojawienie się punktu siodłowego na liniach prądu, czyli punktu separacji, wewnątrz przepływu.

Zastosowana wirowo-cząsteczkowa metoda obliczeniowa „wir w komórce” dobrze zamodelowała nagłą erupcję warstwy przyściennej ukazując interesujące cechy tego zjawiska. Ma to swoje źródło w fakcie iż obliczenia prowadzone były zmiennych Lagrange'a oraz w tym iż wszystkie znaczące elementy zjawiska erupcji jak generacja i dyfuzja wirowości ze ściany oraz

późniejsze jej oddziaływanie z łąką wirową były bezpośrednio włączone w proces obliczeniowy.

Przedstawione w tym podrozdziale badania numeryczne wykazały, że wzajemne oddziaływanie wiru i ściany może doprowadzić do narodzin nowej struktury wirowej na ścianie, która następnie może przejść do przepływu w postaci nowego wiru, rysunek 5.12. Zjawisko to zostało także zaobserwowane podczas badań laboratoryjnych. Rysunek 5.19 przedstawia narodziny wiru wtórnego będące konsekwencją wzajemnego oddziaływania wiru pierwotnego i ściany. Rysunek ten przedstawia przekrój rzeczywistych trójwymiarowych struktur wirowych.

5.2 Oddziaływanie kilku łań wirowych ze ścianą

Ważną zaletą metody prezentowanej w obecnej pracy jest łatwość badania dynamiki dowolnych struktur wirowych oraz ich oddziaływania ze ścianami. Ponieważ rozwiązywana jest wirowa postać równań Naviera–Stokesa (równanie 3.17), żądany kształt i rozkład struktur wirowych zadaje się bezpośrednio poprzez zadanie odpowiedniego warunku początkowego na wirowość: $\omega(t = 0, \mathbf{x}) = \omega_0(\mathbf{x})$.

5.2.1 Oddziaływanie dipola wirowego ze ścianą

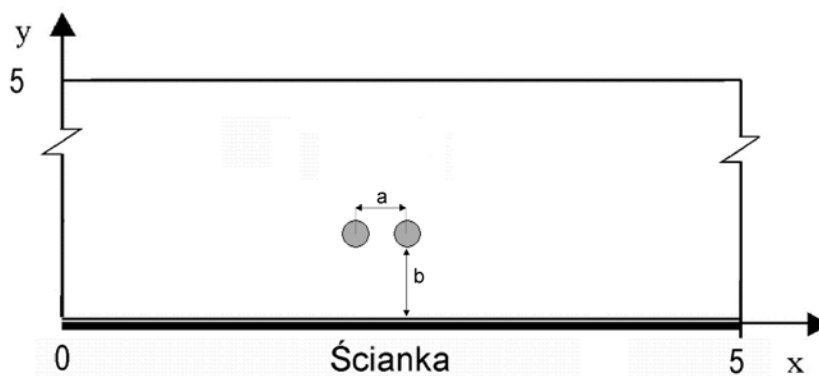
Dipolem wirowym nazywamy układ dwóch łań wirowych o równych wartościach cyrkulacji lecz przeciwnym znaku, znajdujących się w pewnej odległości od siebie.

Oddziaływanie dipola wirowego ze ścianą było badane zarówno eksperymentalnie jak i numerycznie [52]. Prezentowane w literaturze wyniki nie skupiają się jednak na zjawisku odewania warstwy przyściennej lecz na ruchu dipola wirowego w obecności ściany. Wyniki eksperymentalne pokazały, że dipol porusza się w kierunku ściany zbliżając się do niej na pewną odległość poczym zaczyna poruszać się w przeciwnym kierunku. Zjawisko takie nazywano odbiciem [82, 52]. Niestety przeprowadzenie badań eksperymentalnych dla dłuższych czasów ruchu jest bardzo trudne ze względu na fakt iż po kolizji ze ścianą struktura dipola ulega rozpadowi. Przeprowadzone obecnie badania numeryczne pozwoliły zbadać oddziaływanie tej struktury wirowej i ściany dla dłuższych czasów i zbadać co dzieje się po kolizji. Ponadto porównanie wyników numerycznych z wynikami eksperymentalnymi jest dobrym testem sprawdzającym prezentowanej metody obliczeniowej.

Rysunek 5.20 przedstawia schemat obszaru obliczeniowego wraz z dipolem wirowym. W chwili początkowej ciecz była w spoczynku. Obszar obliczeniowy miał długość $L = 5$ i wysokość $H = 5$. Warunki brzegowe w celu rozwiązania równania Poissona na funkcję prądu były następujące: w kierunku x założono, że pola prędkości i wirowości są okresowe, natomiast dla dolnej ($y = 0$) i górnej ($y = 5$) granicy przyjęto $\psi = 0$. W celu zapewnienia warunku braku poślizgu między płynem a ścianą przyjęto warunek typu Dirichleta na wirowość.

Początkowe położenie dipola określały dwa parametry: a – odległość między środkami łań tworzących dipol, b – odległość dipola od ściany. Początkowy promień łań dipola wynosił $r = 0.15$, a ich początkowe wartości wirowości były równe lecz miały przeciwny znak (wirowość lewej łąty ω_L była ujemna, a prawej ω_P dodatnia). Dzięki temu wzajemne oddziaływanie łań

dipola powodował jego ruch w stronę ściany (w dół). Rozmiar siatki numerycznej oraz kroku czasowego wynosił odpowiednio $\Delta x = \Delta y = 0.01$, $\Delta t = 0.01$. Dla powyższego przypadku liczbę Reynoldsa możemy zdefiniować podobnie jak dla oddziaływania pojedynczej łaty wirowej ze ścianą, równanie 5.1, podstawiając za Γ cyrkulację pojedynczej łaty dipola.



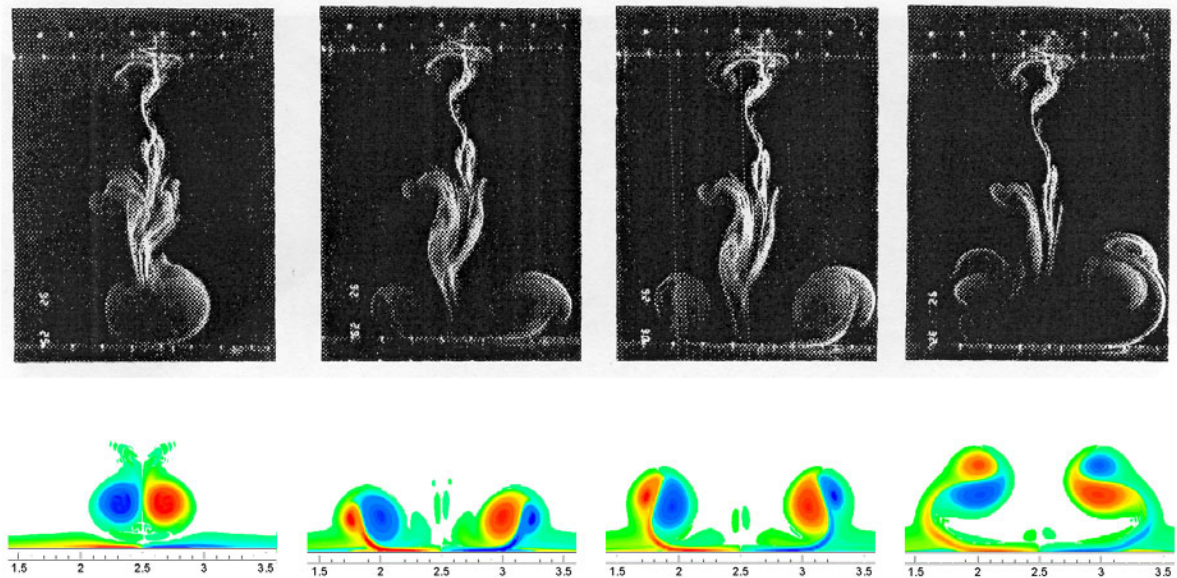
Rys. 5.20: Obszar obliczeniowy rozważanego zagadnienia.

Wyniki numeryczne wykazują wysoką jakościową zgodność z eksperymentem, rysunek 5.21. Eksperyment prezentowany na rysunku 5.21 jest wynikiem pracy [82], gdzie dipolową strukturę uzyskano poprzez wstrzyknięcie niewielkiej objętości płynu do płynu o innej gęstości. Dzięki czemu uzyskany przepływ można było traktować dla początkowych chwil czasu jako dwuwymiarowy.

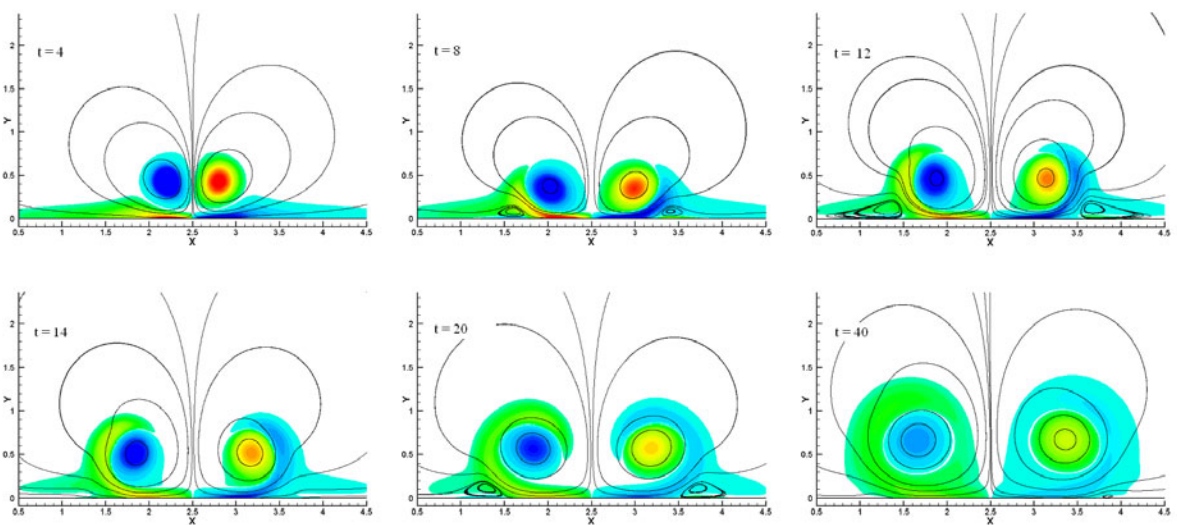
Zarówno rozmiary jak i położenia pierwotnych i wtórnych struktur wirowych są bardzo podobne. Jako pierwotne struktury rozumie się tutaj łaty dipola wirowego, natomiast strukturami wtórnymi są wiry powstałe na skutek oddziaływania dipola ze ścianą i oderwane od ściany. Charakterystyczną cechą oddziaływania dipola wirowego ze ścianą jest jego odbicie. Podobnie jak dla przypadku oddziaływania pojedynczej łaty wirowej i ściany obrazy przepływu zależą od liczby Reynoldsa.

Zmniejszanie lepkości powoduje coraz większą złożoność przepływu. Począwszy od pojawiających się tylko pęcherzy wirowych (stref recyrkulacji przyściennej), a kończąc na zjawisku erupcji warstwy przyściennej, gdzie elementy płynu z okolic ściany są przenoszone do wnętrza przepływu przez zrywające się ze ścianą nowe wiry.

Rysunek 5.22 przedstawia pole przepływu dla $\nu = 0.0005$ ($Re = 707$), $\omega_L = -5$, $\omega_R = 5$, $a = 0.5$ oraz $b = 0.75$. Na obrazie jest widoczne pole wirowe wraz z wybranymi liniami prądu. Dla tak małej liczby Reynoldsa zjawisko erupcji nie pojawia się. Na skutek oddziaływania dipola



Rys. 5.21: Wizualizacja kolizji dipola ze ścianą [82]. Porównanie z wynikami numerycznymi, $\nu = 0.0001$, $Re = 3534$.



Rys. 5.22: Oddziaływanie dipola wirowego ze ścianą, $Re = 707$.

ze ścianą tworzą się tylko strefy recyrkulacji przyściennej, a sam dipol nieznacznie odbija się od ściany jednocześnie nawijając na siebie wirowość powstającą na ścianie. W tym przypadku nie możemy powiedzieć, że dipol wirowy spowodował powstanie wtórnych struktur wirowych. Ze ściany odprowadzana jest wirowość jednak zbyt słaba aby zamknąć linie prądu w wir.

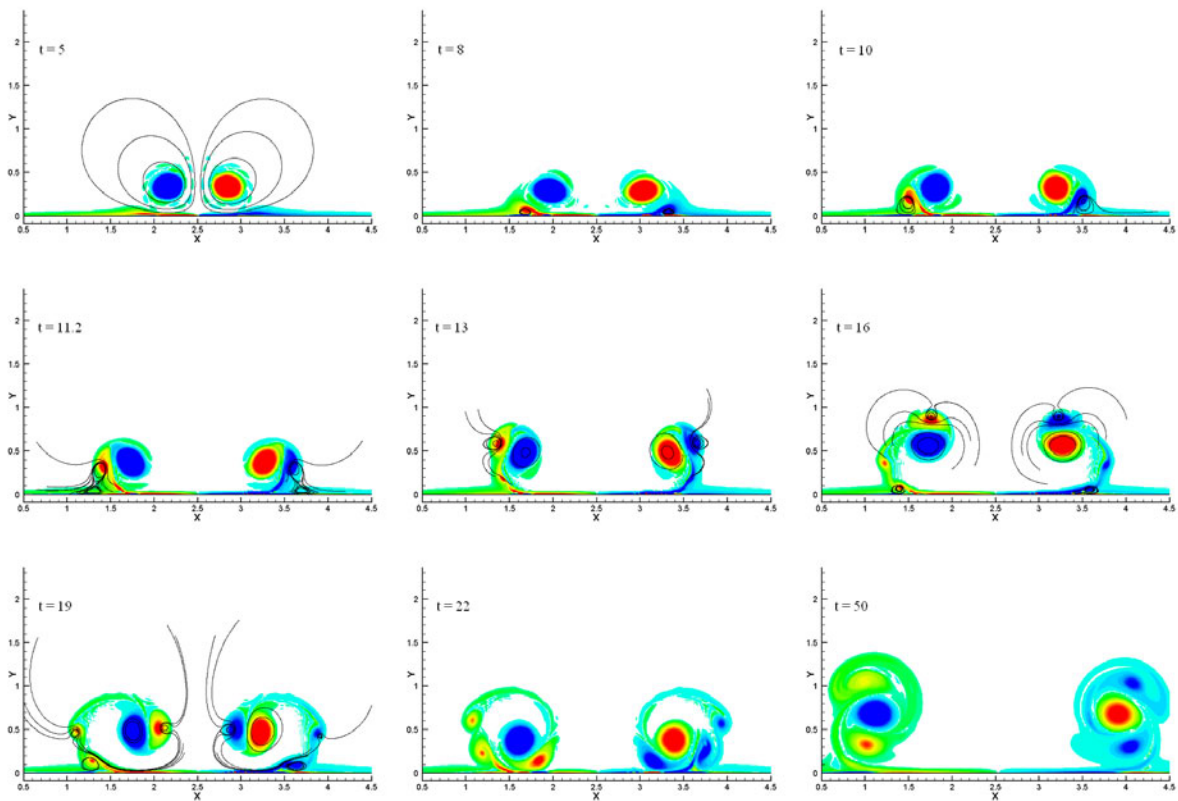
Rysunek 5.23 przedstawia pole wirowości wraz z wybranymi liniami prądu dla $Re = 17670$, $a = 0.5$, $b = 0.75$. Mimo wysokiej liczby Reynoldsa pole przepływu zachowuje symetrię. Dla czasu $t = 4$ wir pierwotny zbliżając się do ściany indukuje silną warstwę wirową przeciwnego znaku na ścianie. Następnie w warstwie przyściennej tworzą się dwie strefy recyrkulacji, każda po jednej stronie, $t = 8$. Podczas trwania ruchu strefy recyrkulacji przyściennej są silnie wyciągane do góry, aż wewnątrz nich pojawia się punkt siodłowy. Powoduje to rozpad wirów przyściennych na dwie niezależne struktury wirowe, $t = 11.2$. Zachodzi tutaj więc zjawisko erupcji warstwy przyściennej, elementy płynu z obszarów przyściennych są unoszone we wnętrzu wirów do środka przepływu. OdrYWające się od ściany wiry powodują zasadniczą zmianę w ruch poszczególnych łat wirowych dipola. Struktury wtórne wraz ze strukturami pierwotnymi formują pary, które początkowo razem unoszą się do góry. Ponieważ cyrkulacja pierwotnych łat wirowych jest większa niż wtórnych pary te poruszają się po łuku i zbliżają się ponownie do ściany, $t = 13 - 19$. Dipol pierwotny jest na tyle silny, iż przy ponownym przejściu w pobliżu ściany powoduje zerwanie kolejnych wirów ze ściany, $t = 19$. Następnie łaty wirowe dipola pierwotnego zaczynają poruszać się wzdłuż ściany, oddalając się od siebie. Duża odległość jaka dzieli łaty dipola powoduje, iż ich wzajemne oddziaływanie zaczyna być na tyle słabe, że można traktować je jako niezależne struktury wirowe.

Z powyższego opisu można wyciągnąć wniosek, iż gdy łaty wirowe tworzące dipol są znacznie oddalone od siebie, to można traktować je jako niezależne struktury wirowe. Słabe wzajemne oddziaływanie łat dipola wirowego skutkuje tym, że przepływ zachowuje symetrię.

Sytuacja przedstawia się inaczej, gdy łaty dipola wirowego leżą tak blisko siebie, że się stykają ($a = 0.3$) przez co silnie oddziaływają na siebie. Wzajemne oddziaływanie łat dipola jest silniejsze niż poprzednio. Przejawia się to znacznym ich zniekształceniem w początkowej fazie ruchu, rysunek 5.24 dla $t = 1$. Silne oddziaływanie łat dipola i ściany prowadzi do utraty symetrii w przepływie, $t = 9$.

W literaturze nie ma odpowiednich badań eksperymentalnych dokumentujących zjawisko utraty symetrii dla takiego przepływu. Lecz badania eksperymentalne nad innymi przepływami wskazują, że utrata symetrii jest typowym zjawiskiem w przepływach rzeczywistych. Przykładem może być ruch w kanale z gwałtownym symetrycznym rozszerzeniem, gdzie mimo pełnej symetrii zagadnienia dochodzi do jej złamania [1, 11, 23].

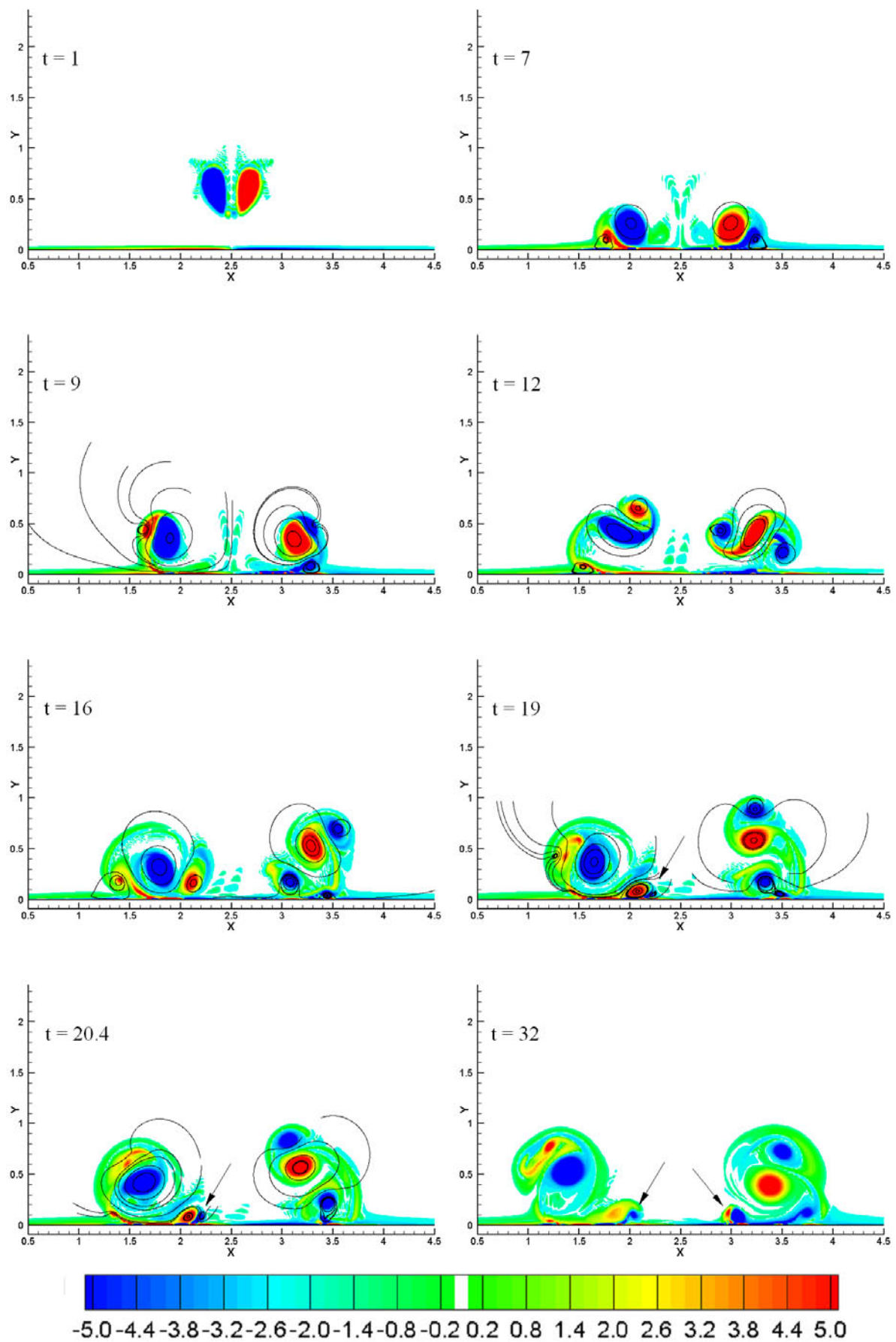
W omawianym przepływie można zauważyć także, iż wygenerowane wcześniej na ścianie struktury wirowe, zbliżając się do ściany, powodują także erupcję warstwy przyściennej. Jest



Rys. 5.23: Oddziaływanie dipola wirowego ze ścianą, $Re = 17670$, $a = 0.5$. Widoczne zjawisko erupcji.

to widoczne na rysunku 5.24 dla czasów $t = 19$, $t = 20.4$ oraz $t = 32$ (patrz strzałki).

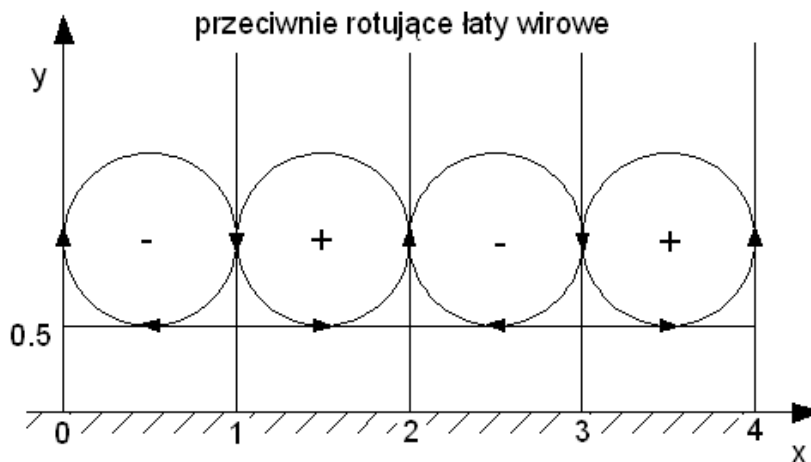
Podsumowując powyższe wyniki można zauważyć, że dwuwymiarowy dipol wirowy może być w przybliżeniu potraktowany jako przekrój pierścienia wirowego. Zjawiska zachodzące na skutek oddziaływania dipola wirowego ze ścianą takie jak: odbicie, czy oderwanie od ściany wtórnych struktur wirowych zachodzą także dla oddziaływania pierścienia wirowego ze ścianą [53].



Rys. 5.24: Oddziaływanie dipola wirowego ze ścianą, $Re = 17670$, $a = 0.3$. Zjawisko erupcji oraz utrata symetrii.

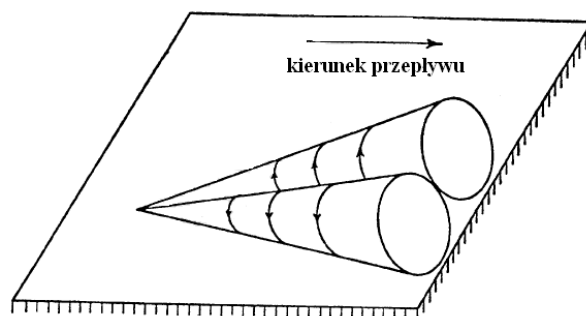
5.2.2 Przepływ wywołany łatami wirowymi o przeciwnych cyrkulacjach

Rysunek 5.25 przedstawia schemat obszaru obliczeniowego wraz z łatami wirowymi o przeciwnych cyrkulacjach. Na początku obliczeń płyn był w spoczynku. Obszar obliczeniowy miał długości $L = 4$ i wysokości $H = 6$. Warunki brzegowe w celu rozwiązania równania Poissona na funkcję prądu były następujące: w kierunku x został nałożony warunek okresowości, natomiast dla dolnej ($y = 0$) granicy przyjęto $\psi = 0$, a dla górnej ($y = 6$) granicy przyjęto $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$. Początkowy promień łat wirowych wynosił $r = 0.5$, a ich początkowe wirowości miały naprzemiennie wartość ujemną i dodatnią, -5 oraz 5 . Rozmiar siatki numerycznej oraz kroku czasowego wynosił odpowiednio $\Delta x = \Delta y = 0.01$, $\Delta t = 0.01$. Dla powyższego przypadku liczbę Reynoldsa możemy zdefiniować podobnie jak dla oddziaływania pojedynczej łaty wirowej ze ścianą, równanie 5.1, podstawiając za Γ cyrkulację jednej z łat wirowych.



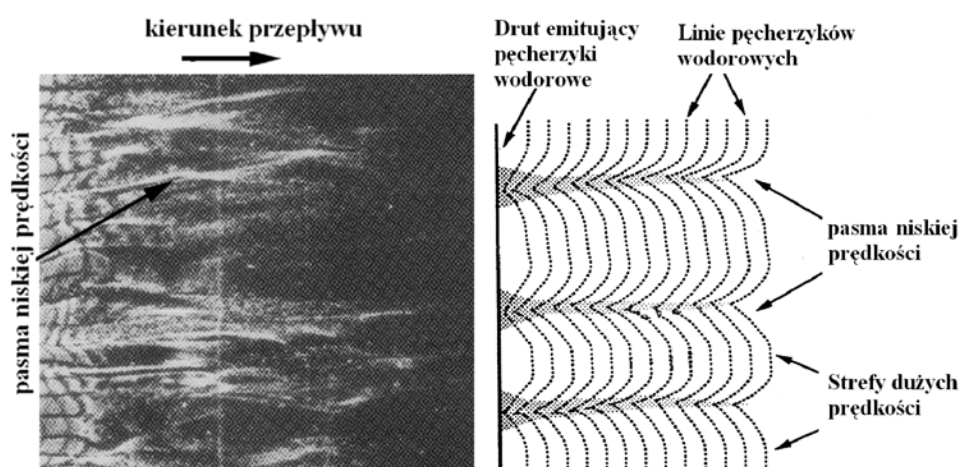
Rys. 5.25: Obszar obliczeniowy rozważanego zagadnienia.

Motywacją do przebadania takiego zagadnienia był fakt, iż strukturami wirowymi zaobserwowanymi w rejonach przyściennych, w przepływach turbulentnych, są między innymi przeciwnie rotujące wiry wzdłużne [8, 55], rysunek 5.26. W takim przypadku rysunek 5.25 może być rozumiany jako przekrój poprzeczny przez takie struktury wirowe. Kierunek przepływu jest prostopadły do płaszczyzny rysunku. Głównym celem, w tak postawionym zagadnieniu, jest obserwacja zachowania się przepływu w pobliżu ściany przy obecności tych struktur wirowych.



Rys. 5.26: Szkic pary wzdluznych wirów wspolpradowych [55].

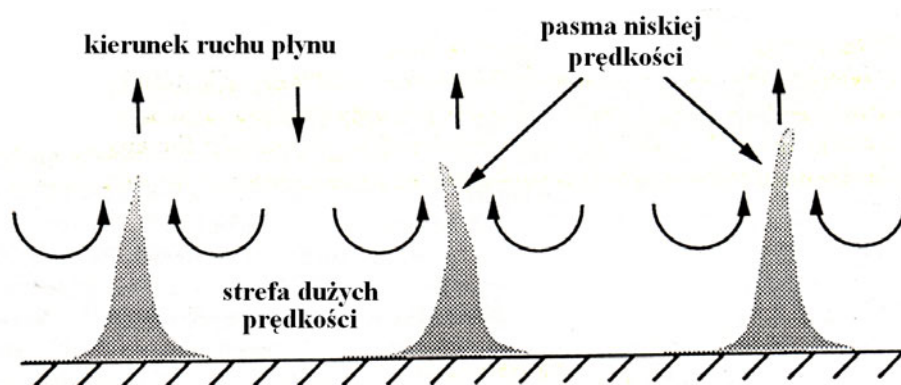
Badania eksperymentalne z wykorzystaniem pęcherzyków wodorowych pokazały, że powszechną cechą turbulentnej warstwy przyściennej jest występowanie pasm płynu o niskiej prędkości (*ang. low-speed streaks*) [76, 30]. Pęcherzyki wodorowe, użyte w eksperymencie przemieszczały się z regionów o względnie dużej prędkości do sąsiednich stref charakteryzujących się niską prędkością i tam się grupowały, rysunek 5.27. Lewa ramka rysunku 5.27 przedstawia wizualizację przepływu w turbulentnej warstwie przyściennej, natomiast prawa schemat tego przepływu (widok z góry) [30].



Rys. 5.27: Wizualizacja przepływu w turbulentnej warstwie przyściennej (lewa strona) wraz ze schematem (prawa strona). Widok z góry [30].

Strefy niskiej prędkości układają się w wydłużone pasma rozciągające się zgodnie z kierunkiem przepływu. Ich wymiar w kierunku przepływu jest znacznie większy od ich wymiaru poprzecznego. Badania chwilowych pól prędkości pokazały że struktura przepływu poprzecznego w obszarze przyściennym jest podobna do schematu z rysunku 5.28. Jak można zauważyć gromadzenie się pęcherzyków wodorowych jest spowodowane zbieganiem się przepływu w

płaszczyźnie poprzecznej. Towarzyszy temu jednoczesny odpływ od ściany. Z kolei po środku stref szybkiego ruchu płyn porusza się w kierunku do ściany.



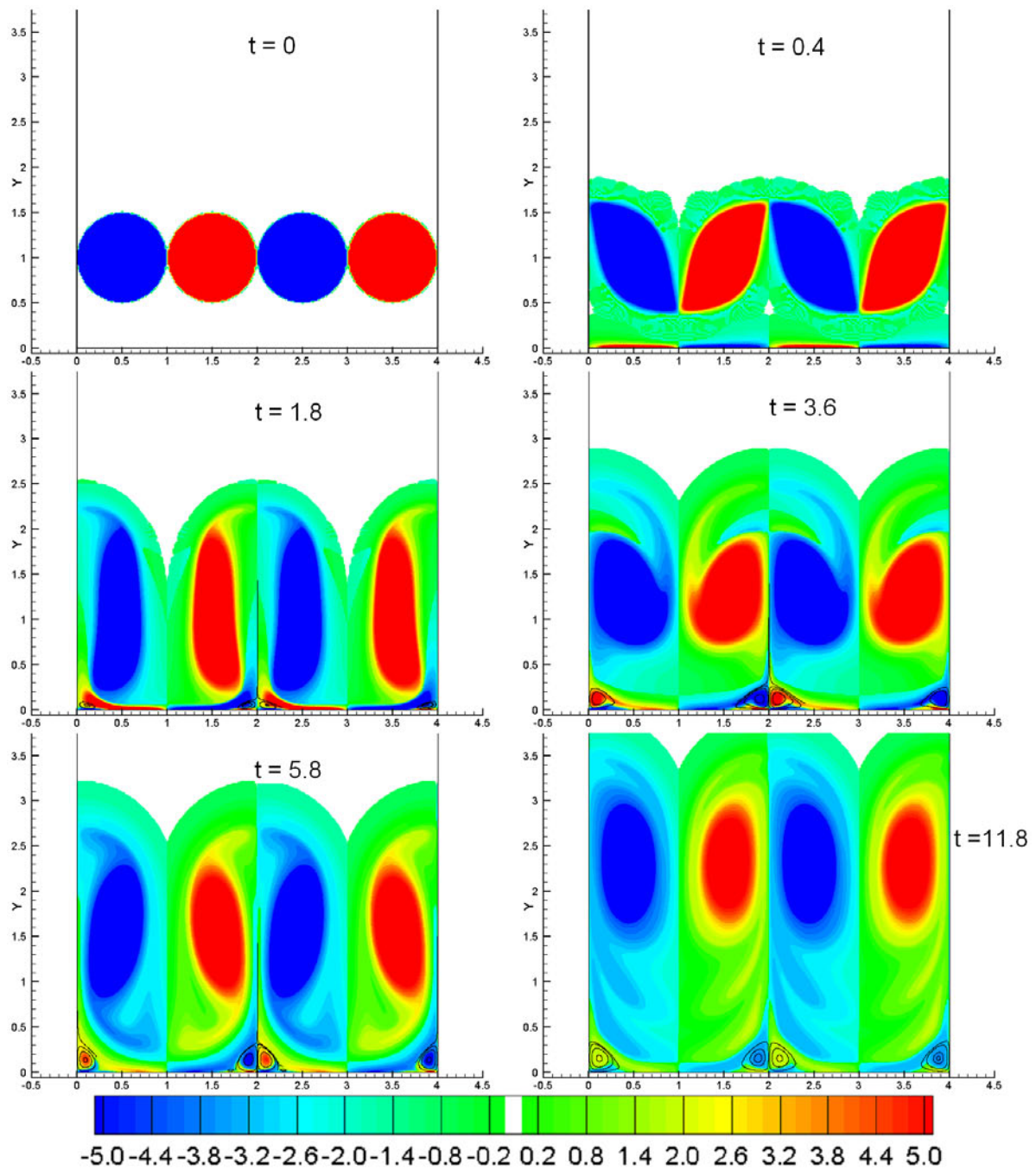
Rys. 5.28: Schemat chwilowego pola prędkości w turbulентnej warstwie przyściennej. Widok w płaszczyźnie przekroju poprzecznego przepływu [76].

Pasma niskiej prędkości utrzymują się w pobliżu ściany przez względnie długie okresy czasu. W tym czasie także warstwa płynu przyściennego wydaje się być pasywna i obojętna na zaburzenia zewnętrznego obszaru przepływu. Okres ten kończy się gdy pasma płynu o niskiej prędkości, na skutek oddziaływania przepływu zewnętrznego, są unoszone w kierunku normalnym od ściany i zaczynają oscylować. Następnie elementy płynu tworzące te strefy są gwałtownie wyrzucane do zewnętrznego obszaru przepływu. Po nagłej erupcji w rejonie przyściennym następuje ponownie spokojny i pasywny okres, w którym na nowo pojawiają się pasmowe strefy płynu o niskiej prędkości.

Naprzemiennie rotujące pary wirów powodują także powstanie pasm płynu o niskiej prędkości. Wiry te transportują płyn z dużą prędkością w kierunku ściany (rys. 5.25 obszary dla $x = 1, 3$), gdzie jest on zwalniany i przemieszcza się w kierunku stref wypływu (obszary dla $x = 0, 2, 4$). Rzeczywiste struktury wirowe występujące w turbulентnej warstwie przyściennej są bardziej złożone niż rotujące pary łatek wirowych. Uważa się że taką podstawową strukturą jest wir spinkowy, którego krótka charakterystyka została przedstawiona w rozdziale 1.2. Pasma niskiej prędkości są w gruncie rzeczy śladami pozostawianymi w obszarze przyściennym przez przemieszczające się wiry spinkowe [55, 64].

Obecnie prezentowane zagadnienie mimo, iż jest dużo prostsze, wydaje się ciekawe, gdyż „nogi” wiru spinkowego, rysunek 1.9, mogą być w przybliżeniu potraktowane jako naprzemiennie rotująca para wirów. Rysunek 5.29 przedstawia wyniki obliczeń numerycznych dla

przypadku, gdy lepkość $\nu = 0.0005$. Rysunek przedstawia pole wirowe wraz z wybranymi liniami prądu.



Rys. 5.29: Oddziaływanie łat wirowych o przeciwnych cyrkulacjach ze ścianą, $\nu = 0.0005$.

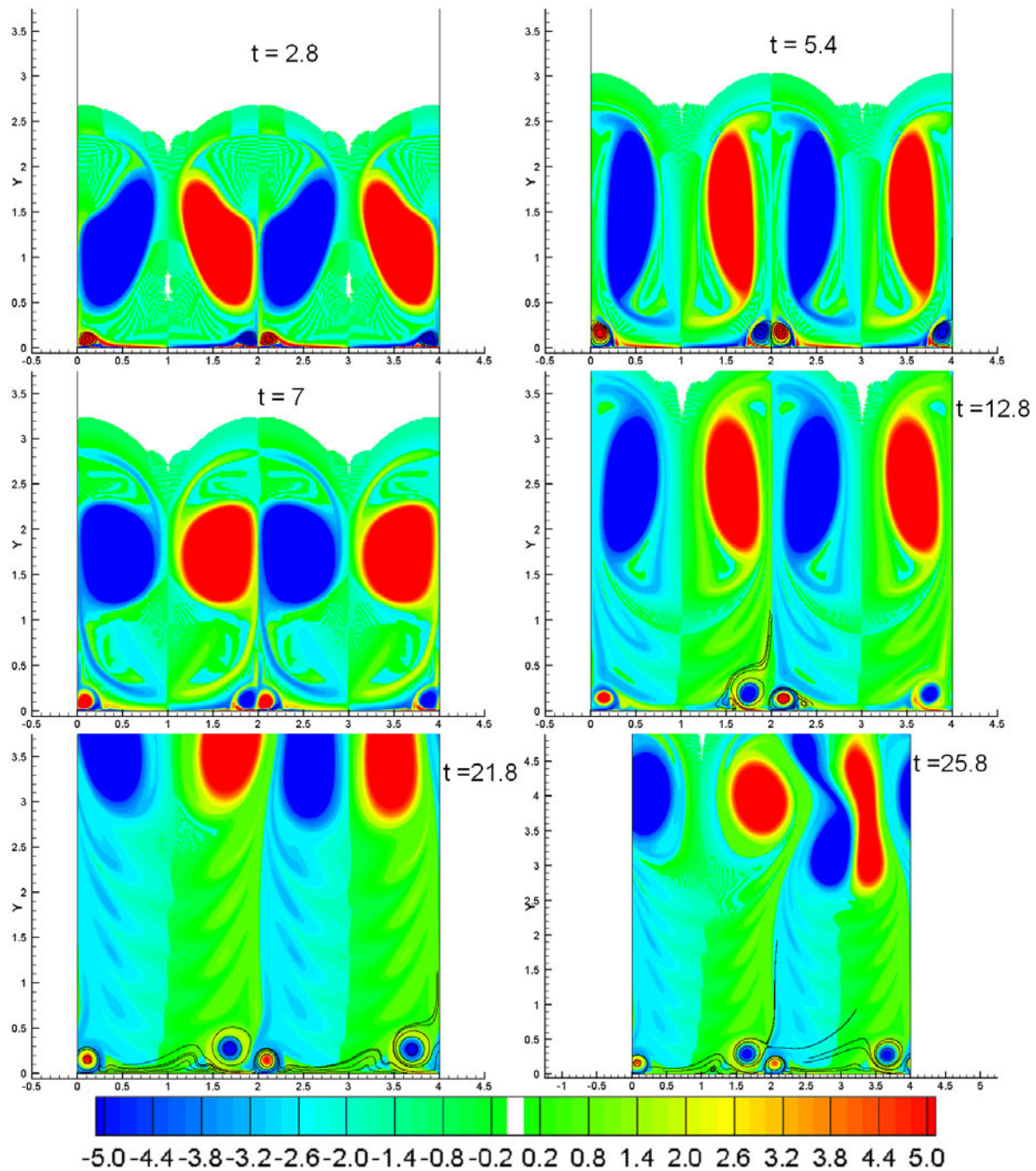
Rysunek przedstawia pole wirowe wraz z wybranymi liniami prądu.

Ramka dla $t = 0$ przedstawia stan początkowy omawianego przepływu. Łaty wirowe stykają się, przez co ich wzajemne oddziaływanie jest bardzo silne. Prowadzi to do znacznych zmian ich kształtu. Każda z łat indukuje wirowość przeciwnego znaku na ścianie. Przy ścianie powstają naprzemienne pasma przeciwnej wirowości, ramka dla $t = 0.4$. Na styku tych pasm pojawiają się pary przeciwnie rotujących stref recyrkulacji przyściennej, ramka dla $t = 3.6$. Powstałe struktury przyścienne mają podobną strukturę do dipola przedstawionego na rysunku 5.20 w podrozdziale 5.2.1. Oznacza to iż indukują one pole prędkości, które powoduje ich ruch w kierunku ściany. Dla dalszych czasów widać jak strefy recyrkulacji przyściennej są silnie wyciągane do góry, lecz na skutek dużej lepkości płynu struktury te pozostają przy ścianie. Podczas trwania ruchu pierwotne łaty wirowe poruszają się w kierunku przeciwnym do ściany zachowując symetrię.

Przepływ ulega zasadniczej zmianie wraz ze zmniejszeniem lepkości. Rysunek 5.30 przedstawia omawiany przepływ dla współczynnika lepkości kinematycznej $\nu = 0.0001$. Początkowo pole przepływu zachowuje się podobnie jak dla $\nu = 0.0005$. Jednak zasadnicza zmiana następuje dla czasu $t = 12.8$, gdzie widoczna jest utrata symetrii przepływu w obszarze przyściennym. Lewa łata przyściennej struktury dipolowej o ujemnej wirowości (niebieska) wyraźnie odrywa się od ściany i unosi się do wnętrza przepływu, natomiast dodatnia łata (czerwona) pozostaje przy ścianie. Utrata symetrii w obszarze przyściennym zwiastuje utratę symetrii w całym obszarze przepływu. Dla czasu $t = 25.8$ widać całkowitą utratę symetrii pierwotnych łat wirowych.

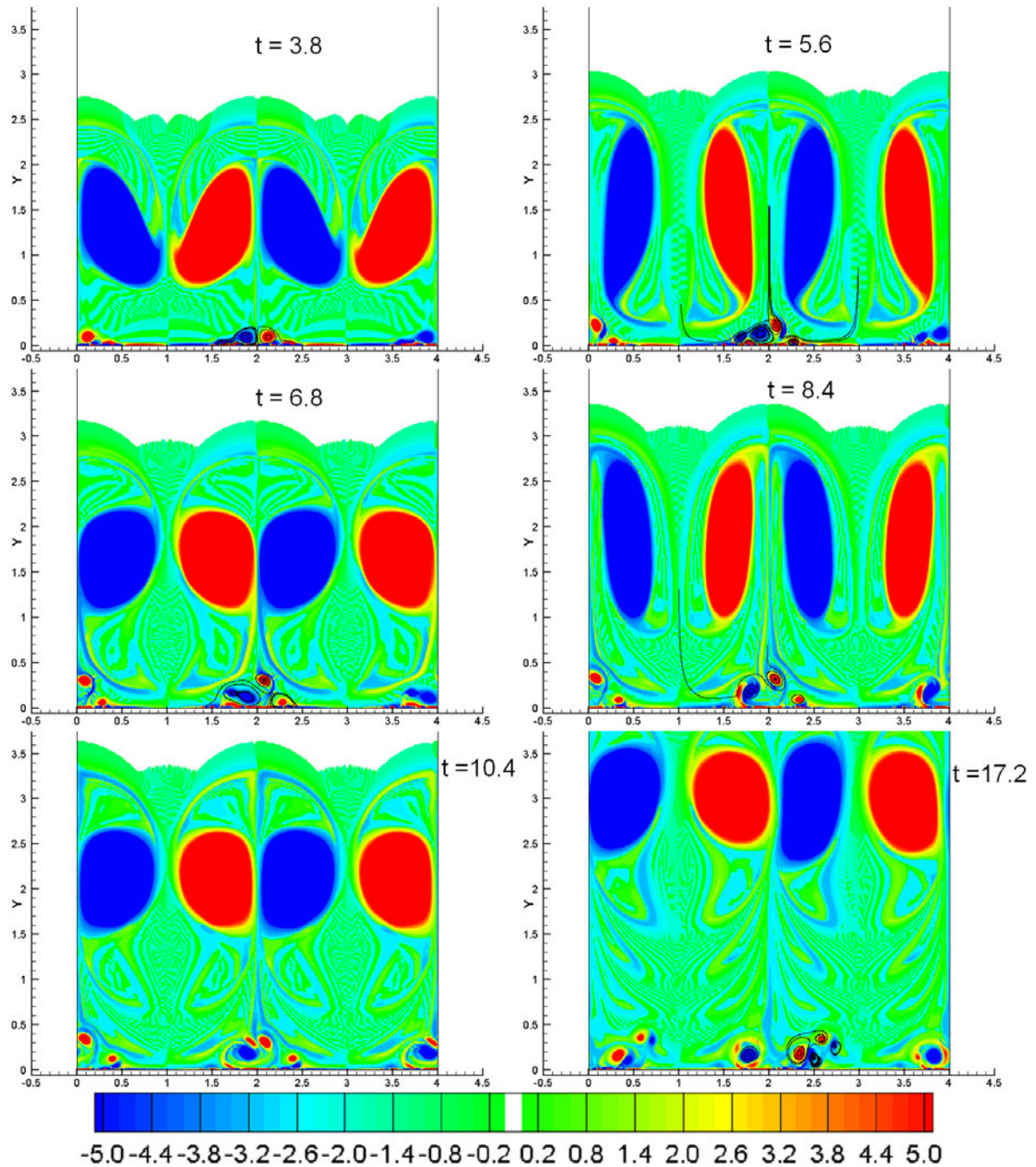
Wraz z dalszym zmniejszaniem lepkości obszar przepływu przybiera jeszcze bardziej skomplikowany charakter. Rysunek 5.31 przedstawia omawiany przepływ dla $\nu = 0.00002$. Struktura obszaru przyściennego wywołana obecnością naprzemiennych łat wirowych jest dużo bardziej złożona niż poprzednio. Przy ścianie powstają struktury wirowe o różnych kształtach i wielkościach, ramka dla $t = 5.6$. Następnie odrywają się one od ściany, ramka dla $t = 6.8$, $t = 8.4$. Pierwsza odrywa się łata o dodatniej wirowości, odwrotnie niż w poprzednim przypadku dla $\nu = 0.0001$, gdzie pierwsza oderwała się łata o ujemnej wirowości (porównaj rysunek 5.30, ramka dla $t = 12.8$ i kolejne).

Zjawiskiem jakie występuje dla tak małej lepkości, jest regeneracja. Pierwotne naprzemiennie ustawione łaty wirowe powodowały powstanie wtórnych struktur wirowych na ścianie. Wiry wtórne także indukowały wirowość przeciwnego znaku na ścianie i były na tyle silne, że powodowały powstanie kolejnego pokolenia wirów. Począwszy od czasu $t = 8.4$ można zaobserwować jak wtórne wiry powodują oderwanie kolejnych wirów ze ściany, które to z kolei

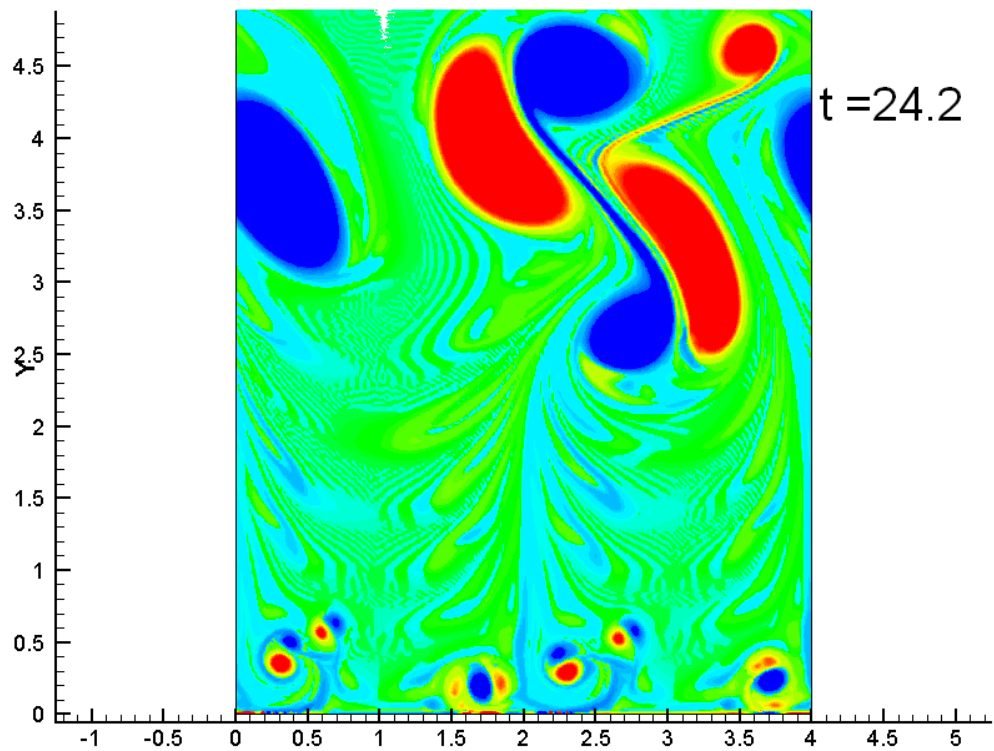


Rys. 5.30: Oddziaływanie łańcuchów wirów o przeciwnych cyrkulacjach ze ścianą, $\nu = 0.0001$. Utrata symetrii w obszarze przyściennym.

powodują zerwanie kolejnych struktur ze ścianą. Skutkiem czego w przepływie istnieją struktury pierwotne oraz trzy dalsze pokolenia wirów. Wiry z każdego kolejnego pokolenia są mniejsze i słabsze. Jest to dobrze widoczne na rysunku 5.32, gdzie widoczna jest także utrata symetrii przepływu.



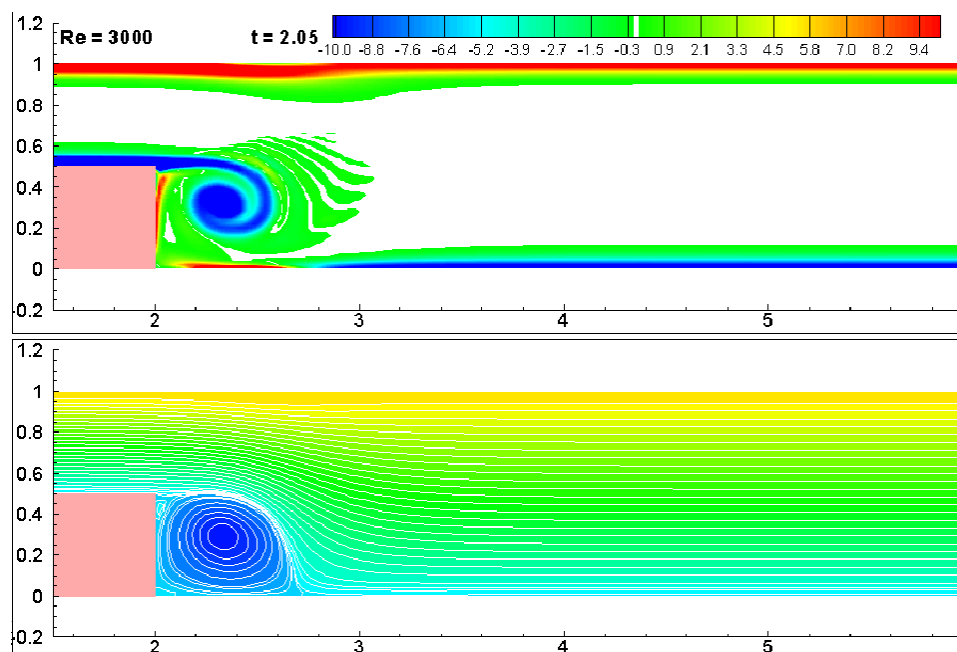
Rys. 5.31: Oddziaływanie łat wirowych o przeciwnych cyrkulacjach ze ścianą, $\nu = 0.00002$. Regeneracyjny charakter erupcji.



Rys. 5.32: Oddziaływanie szeregu naprzemiennie rotujących łańcuchów wirowych ze ścianą, $\nu = 0.00002$. Na rysunku widać utratę symetrii oraz trzy kolejne pokolenia wirów wtórnych.

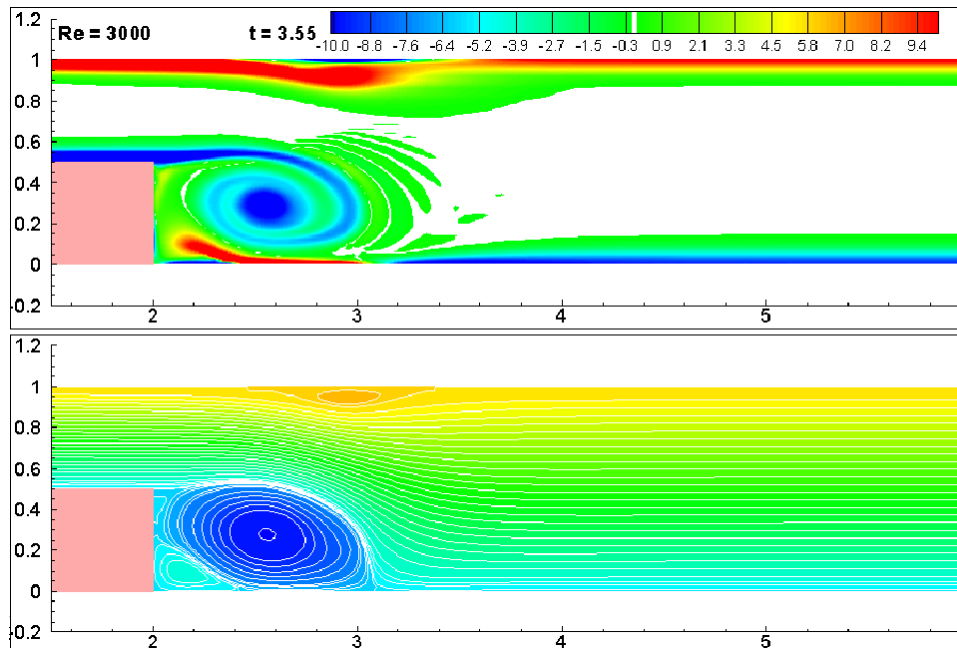
5.3 Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem – stopień

W obecnym paragrafie zostanie przedstawiony przepływ przez kanał z gwałtownym jednostronnym rozszerzeniem dla liczby Reynoldsa równej 3000. Geometrycznie to zagadnienie jest takie samo jak w rozdziale dotyczącym testów porównawczych (podrozdział 4.4, rysunek 4.8). Na wlocie do kanału przyjęto równomierny profil prędkości $U = 1$. Podczas prowadzenia badań przetestowano przepływy w szerokim zakresie liczb Reynoldsa. Zauważono że od liczby Reynoldsa równej około 3000 w przepływie zachodzi jakościowa zmiana. Rysunki zamieszczone w bieżącym podrozdziale przedstawiają ewolucję pola wirowego (górny), oraz funkcji prądu. Obraz jest różny od tych dla liczb Re poniżej 1000 (rys. 4.9, 4.10). Zasadniczą różnicą jest to, że przepływ przybiera charakter nieustalony. W kanale można zaobserwować naprzemienną sekwencję przeciwnych struktur wirowych, przypominających ścieżkę wirową Karmana. Nasuwa się pytanie o mechanizm tak radykalnej zmiany w przepływie oraz jak doszło do rozpadu strefy recyrkulacji za opływającym stopniem. Odpowiedź na te pytania można ułatwić analiza pola wirowości.

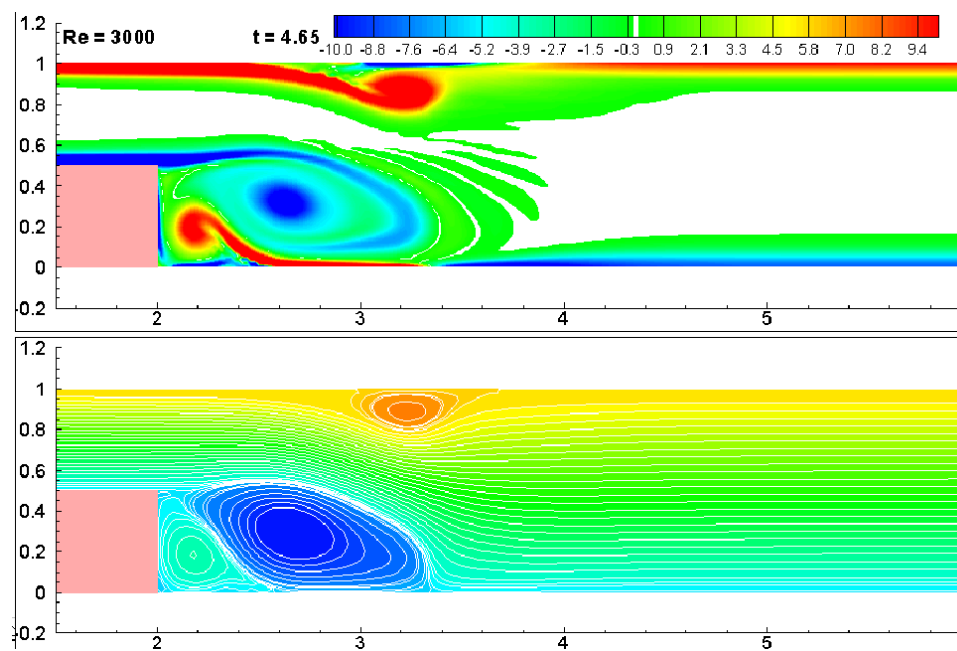


Rys. 5.33: Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem. Pole wirowe (ramka górna) oraz funkcja prądu wraz z liniami prądu.

Na rysunku 5.33 wyraźnie widać jak skoncentrowana wirowość „schodzi” z ostrej krawe-

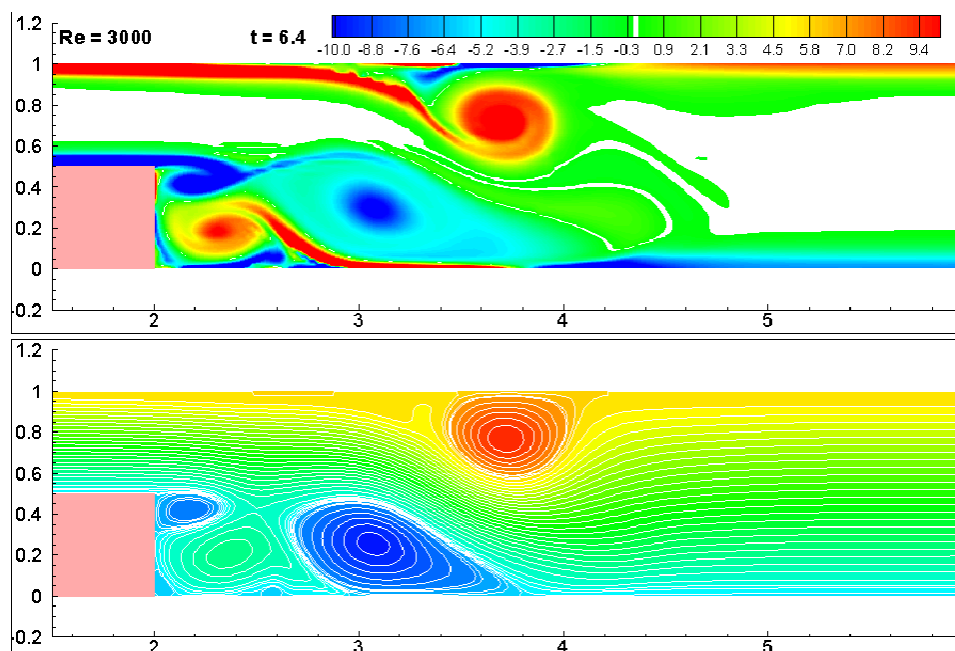


Rys. 5.34: Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem. Tworzenie się kolejnego wiru za stopniem (w narożniku).



Rys. 5.35: Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem. Oddzielenie strefy recyrkulacji od stopnia.

dzi stopnia zwiijając się w strukturę wirową. Tak skoncentrowana wirowość indukuje wirowości przeciwnego znaku na ścianie (kolor czerwony), która odrywa się od ścian w kształcie przypominającym „język”. Jest to widoczne na rysunku 5.34, zarówno na dolnej, jak i górnej ścianie.

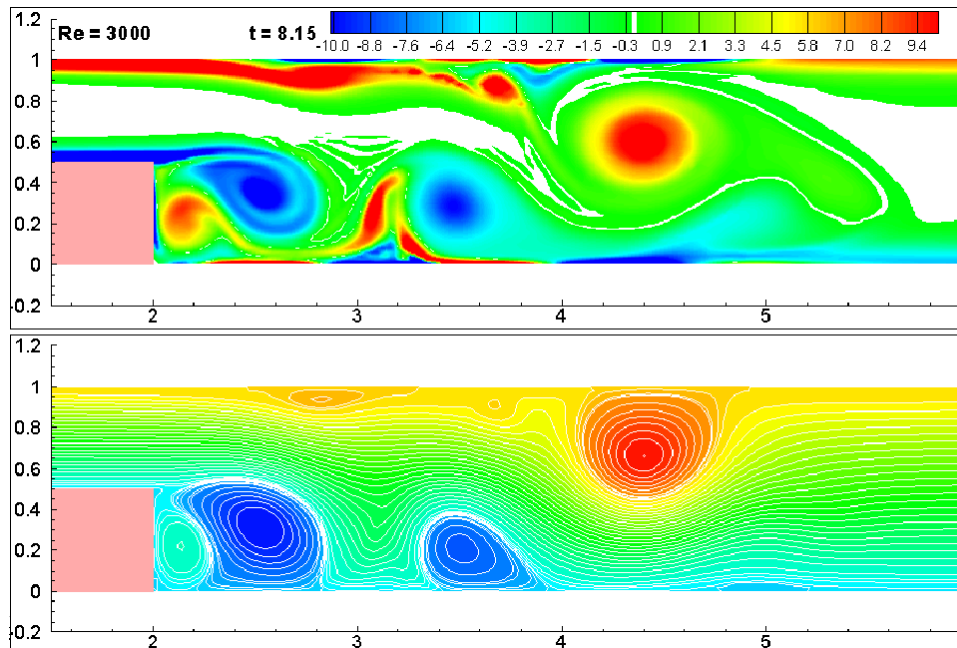


Rys. 5.36: Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem. Rozpad strefy recyrkulacji. Ruch wirów w dół strumienia.

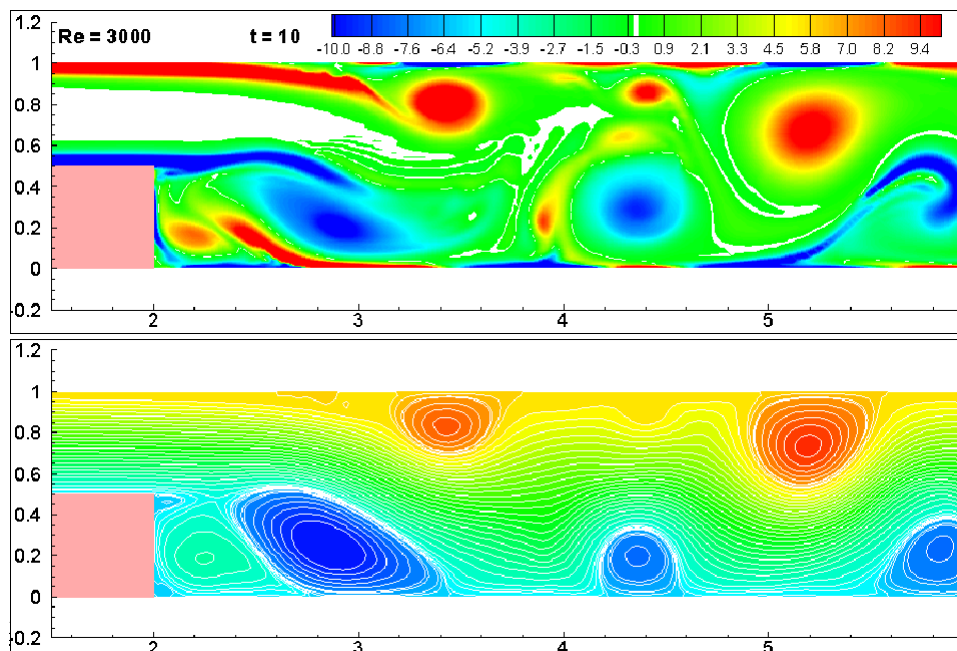
Wirowość „schodząca” ze ściany zaczyna się oddalać i jednocześnie związa się w kolejną strukturę wirową, rysunek 5.35. Nowe wiry są wyraźnie widoczne na dolnej i górnej ścianie. Indukują one ponownie wirowość przeciwnego znaku przy ścianie (kolor niebieski). Nowo powstały w narożniku wir jest na tyle silny, iż powoduje przerwanie wysnutego z krawędzi stopnia włókna wirowości, przez co pierwszy wir odrywa się od stopnia i przemieszcza się wraz z polem prędkości, rysunek 5.36. Z krawędzi zaczyna sływać kolejna porcja wirowości (kolor niebieski) jednocześnie związając się i tworząc kolejną strukturę wirową, a przy ścianach powstają kolejne strefy recyrkulacji. Zjawisko to nie występuje w przepływie laminarnym (Re poniżej 1000), gdzie ustala się stała strefa recyrkulacji za stopniem.

Na rysunku 5.37 można zaobserwować całą serię skoncentrowanych wąskich obszarów wirowości odrywających się od ściany. Praktycznie każda zrywająca się z krawędzi struktura wirowa powoduje, podczas swojego ruchu w dół przepływu, erupcję skoncentrowanej wirowości z warstwy przyściennej. Przedstawione powyżej zjawiska są cykliczne przez co w kanale możemy obserwować naprzemiennie występujące przeciwne struktury wirowe, przypominające ścieżkę Karmana, rysunek 5.38.

Powyższe badania pokazują, że zjawisko erupcji wywołane łąką wirową (opisane wcześniej) jest obecne również w przepływach w kanale. Praktycznie w całej objętości kanału widoczne



Rys. 5.37: Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem. Erupcje skoncentrowanej wirowości ze ścian.



Rys. 5.38: Przepływ w kanale z jednostronnym gwałtownym rozszerzeniem. Ścieżka wirowa Karmana.

są liczne erupcje wirowości z obszarów przyściennych do wnętrza przepływu. Sugeruje to, że zjawisko oderwania jest powszechne w przepływach rzeczywistych nawet dla mało skomplikowanych geometrii.

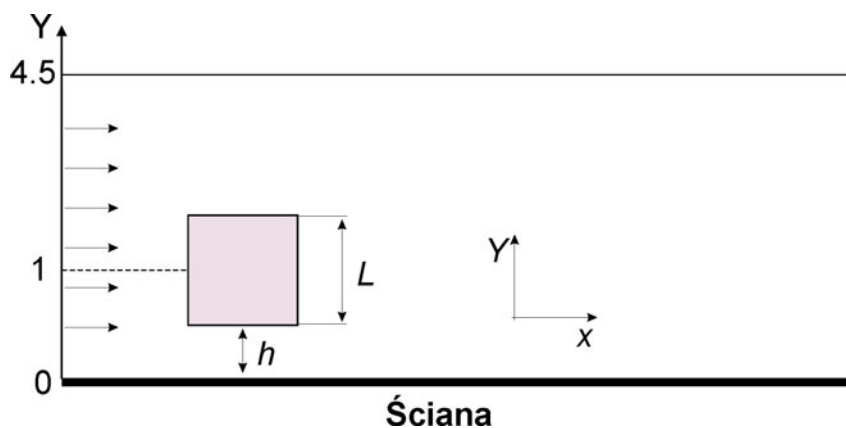
5.4 Opływ kwadratu w pobliżu ściany płaskiej.

Opływ przeszkody, na przykład cylindra o przekroju kwadratu dla odpowiednio wysokich liczb Reynoldsa, powoduje naprzemienne zrywanie się struktur wirowych. Następnie wiry te, jako swobodne struktury, unoszone są wraz z przepływem. Jak zostało to pokazane w podrozdziale 5.1, wir w pobliżu ściany może wywołać zjawisko erupcji. Dlatego interesującym jest przebadanie wzajemnego oddziaływania wiru, powstałego na skutek opływu przeszkody, ze ścianą. Będzie to treścią niniejszego podrozdziału.

W literaturze można znaleźć badania eksperymentalne [60] jak również numeryczne [20] opływu walca o przekroju koła w pobliżu ściany płaskiej. Bliskość ściany powoduje dodatkowe zaburzenia w śladzie aerodynamicznym powstającym za opływaną przeszkodą. Co z kolei wpływa na siłę nośną i siłę oporu powstającą na opływanym przedmiocie. Struktury wirowe odrywające się od walca oddziałują ze ścianą i indukują na niej wirowość. Ponieważ z walca naprzemienne odrywają się wiry o przeciwnych cyrkulacjach powoduje to dodatkowe zaburzenia w warstwie przyściennej. Dla dużych liczb Reynoldsa oddziaływanie to może doprowadzić do zjawiska oderwania warstwy przyściennej, czy innych zjawisk zachodzących w turbulentnej warstwie przyściennej [74, 76].

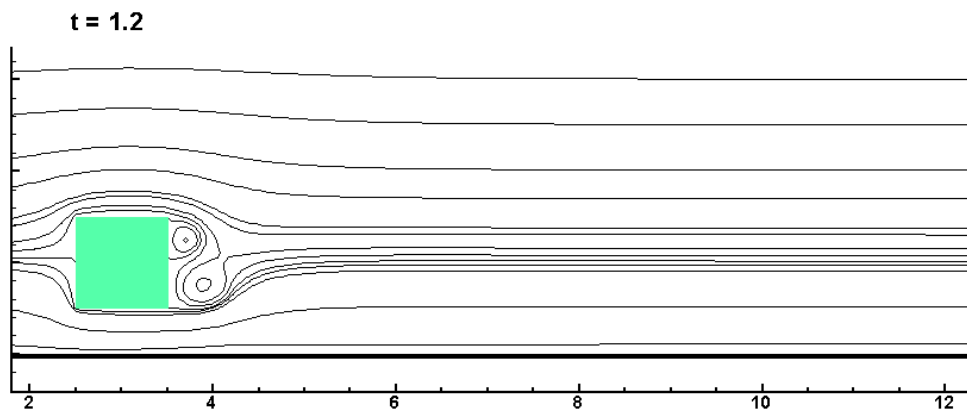
Celem bieżącego podrozdziału jest pokazanie, że opływ przeszkody w pobliżu ściany płaskiej i powstające za przeszkodą struktury wirowe mogą doprowadzić do zjawiska erupcji warstwy przyściennej. Rysunek 5.39 przedstawia geometrię obszaru obliczeniowego. Na lewym brzegu obszaru założono równomierny rozkład prędkości $U = 1$ co odpowiadało warunkowi brzegowemu na funkcję prądu $\psi = y$. Na brzegu górnym, dolnym oraz na kwadracie założono $\psi = const$. Na brzegu dolnym przyjęto $\psi = 0$, na górnym $\psi = 4.5$, a na kwadracie $\psi = 1$. Na prawym brzegu obszaru obliczeniowego przyjęto $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$. Ponadto brzeg dolny był ścianą sztywną. Opływaną przeszkodą był kwadrat o długości boku $L = 1$ i umieszczony w odległości $h = 0.5$ od ściany. Rozmiar siatki numerycznej oraz kroku czasowego wynosił odpowiednio $\Delta x = \Delta y = 0.025$, $\Delta t = 0.01$. Prezentowane poniżej obliczenia były prowadzone dla liczby $Re = 2000$, gdzie $Re = \frac{LU}{\nu}$.

Sekwencja obrazów na rysunkach 5.40 oraz 5.41 ukazuje zjawisko erupcji warstwy przyściennej, prowadzące do narodzin nowej struktury wirowej. Rysunek 5.40 przedstawia rozkład linii prądu, natomiast rysunek 5.41 obrazuje odpowiadające im pole wirowe. W lewym górnym rogu naniesiony jest bieżący czas ruchu. Obraz (a) przedstawia tworzące się strefy recyrkulacji

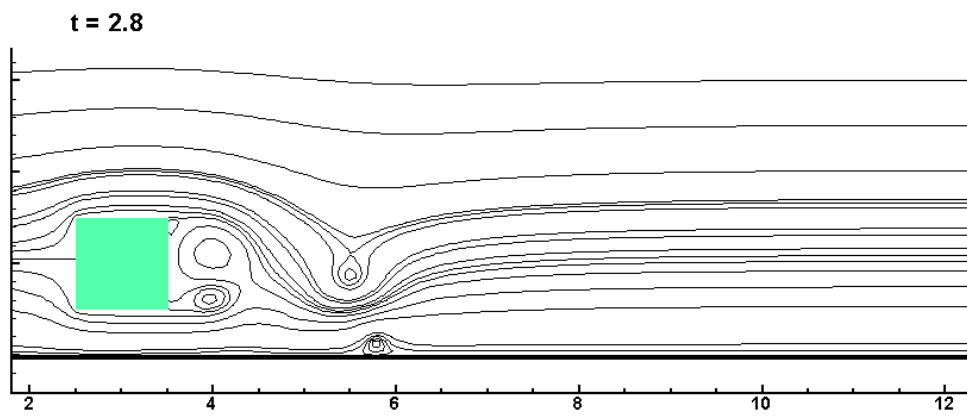


Rys. 5.39: Obszar obliczeniowy, opływu przeszkody w pobliżu ściany .

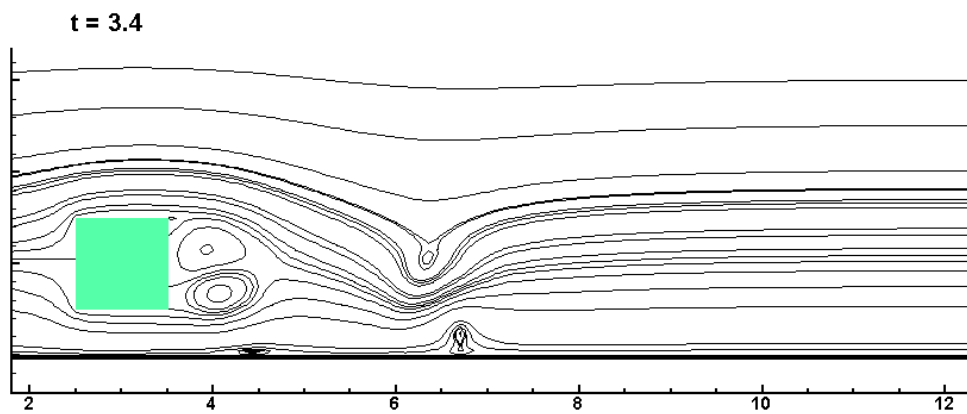
za przeszkodą. Na obrazie (b) wyraźnie widać powstałą na przeszkodzie i oderwaną od niej strukturę wirową. Powoduje ona powstanie strefy recyrkulacji w pobliżu ściany o przeciwnej wirowości. Na obrazie (b) przedstawiającym pole wirowe (rys. 5.41) widać ponadto że strefie recyrkulacji odpowiada wznosząca się i zwijająca do środka wirowość. Poza tym można zauważyć, że wirowość ta także indukuje wirowość przeciwnego znaku na ścianie (kolor czerwony), co powoduje że skoncentrowana wirowość związana ze strefą recyrkulacji przestaje bezpośrednio przylegać do ściany. Na obrazie (c) można zauważyć jak strefa recyrkulacji wyciągana jest do góry, a w jej wnętrzu tworzy się punkt siodłowy, powiększenie rysunek 5.42 (porównaj z rysunkiem 1.5 prezentującym kryterium MRS niestacjonarnej separacji). Oprócz tego następny wir odrywa się od przeszkody i powoduje powstanie kolejnej strefy recyrkulacji. W polu wirowym widać jak skoncentrowana wirowość odrywa się od ściany w postaci wtórnej łaty wirowej. Na obrazach (d, e, f) widać jak powstały wir na ścianie oddala się od niej znacznie wpływając na pole przepływu. Na obrazie (f) można zauważyć, że każdy kolejny wir odrywający się od przeszkody powoduje zjawisko erupcji. Natomiast ramka (f) z rysunku 5.41 przedstawia obraz pola wirowego dla czasu $t = 20$, gdy całe pole przepływu pokryte jest chaotycznie występującymi skoncentrowanymi obszarami wirowości. Część z nich powstała na skutek opływu przeszkody, a część na skutek erupcji warstwy przyściennej. Taki rozkład wirowości w polu przepływu odpowiada bardzo nieuporządkowanemu i szybkiemu ruchowi. Łaty wirowe poruszają się w różnych kierunkach i z różną prędkością powodując serię kolejnych erupcji skoncentrowanej wirowości ze ściany.



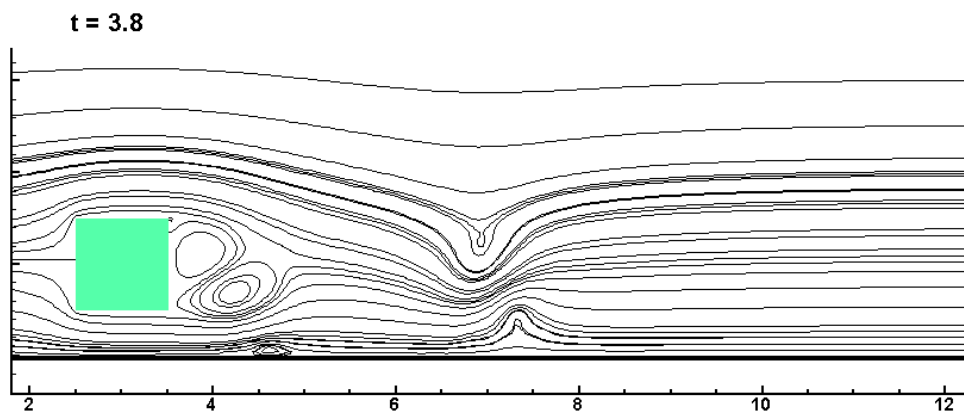
(a)



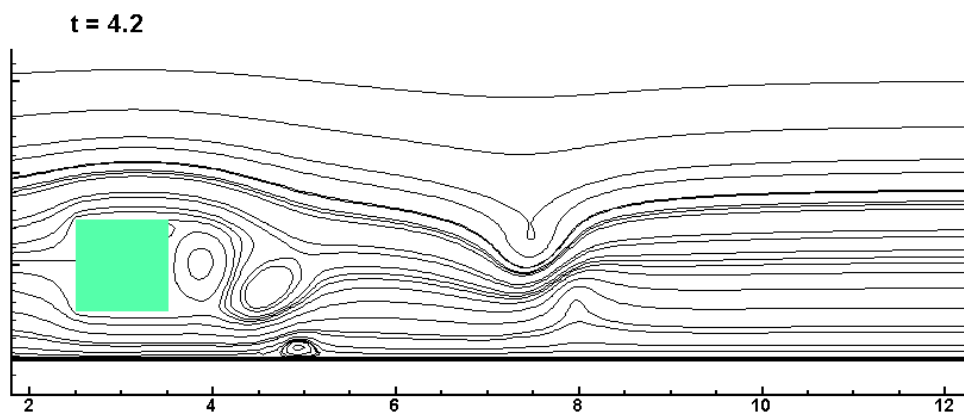
(b)



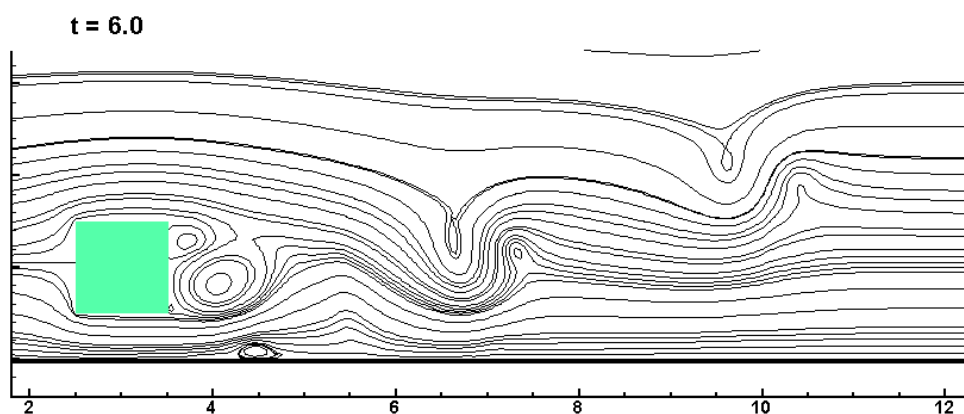
(c)



(d)

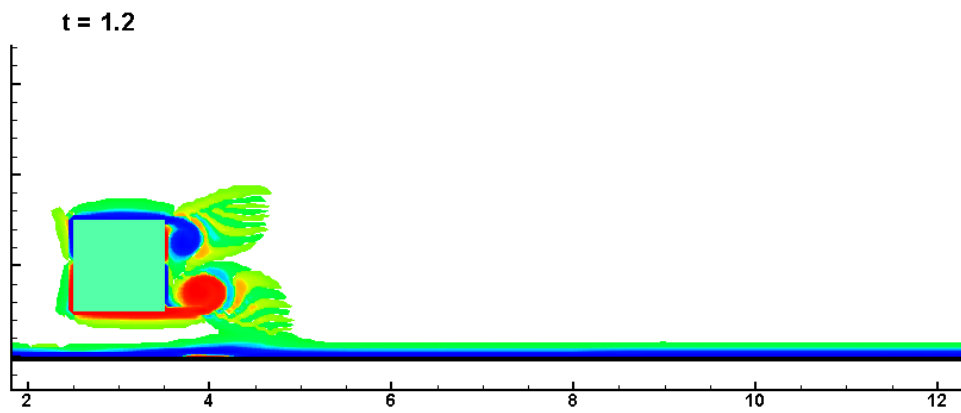


(e)

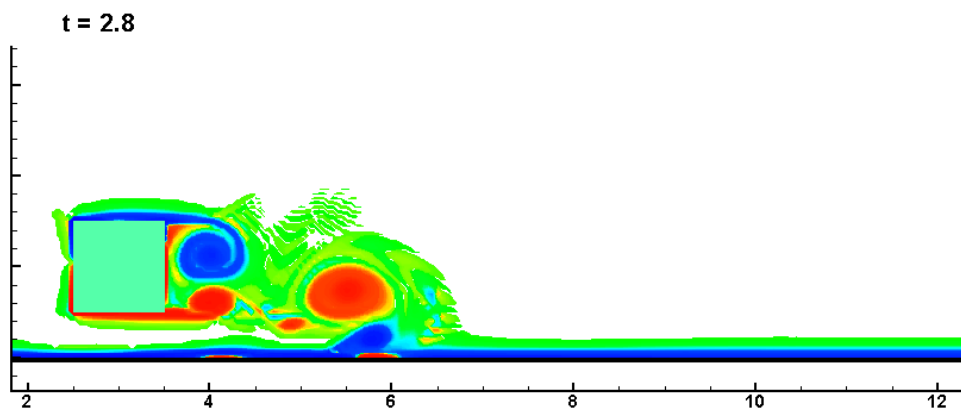


(f)

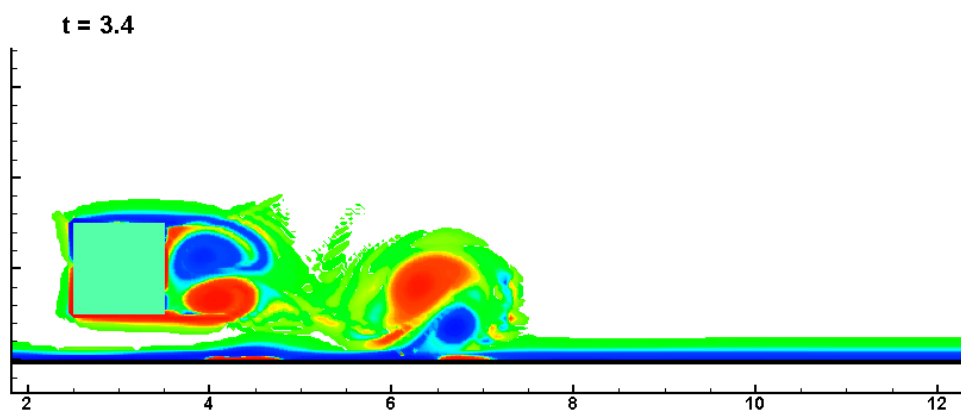
Rys. 5.40: Optyw kwadratu w pobliżu ściany, linie prądu. Zjawisko erupcji.



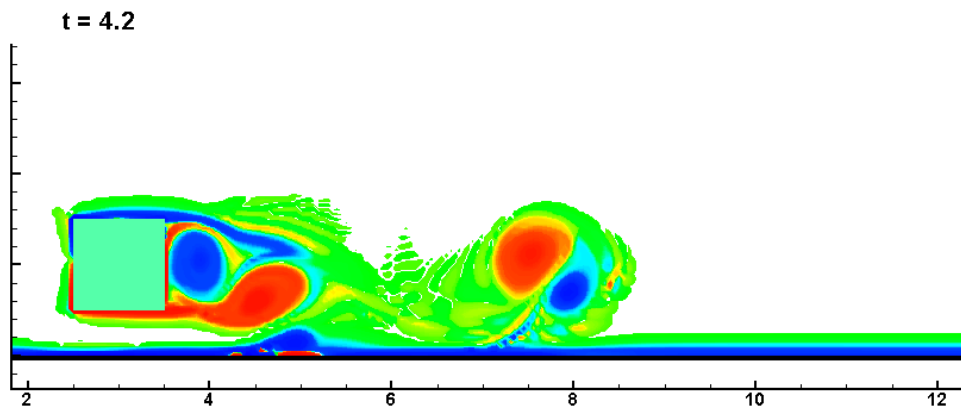
(a)



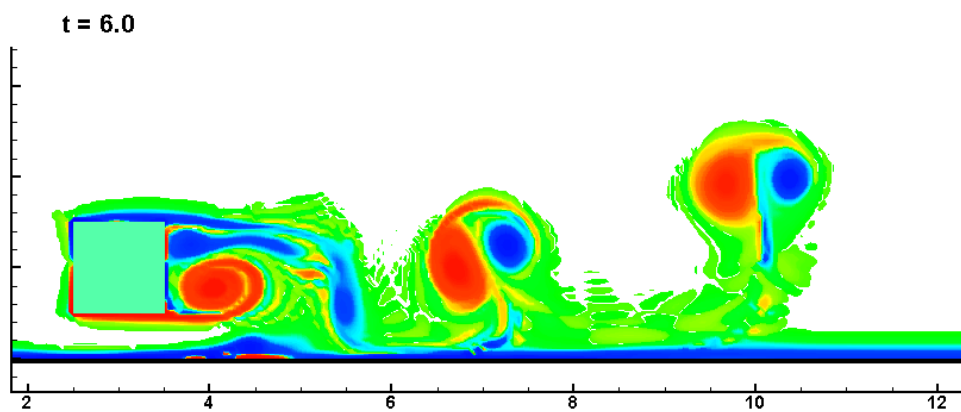
(b)



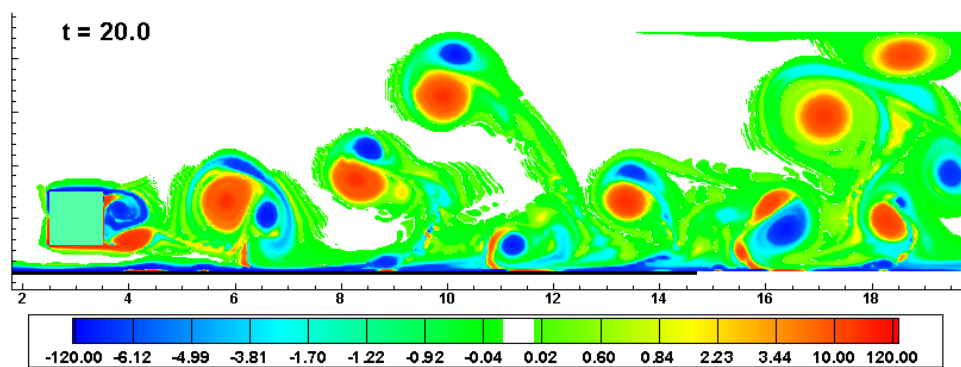
(c)



(d)

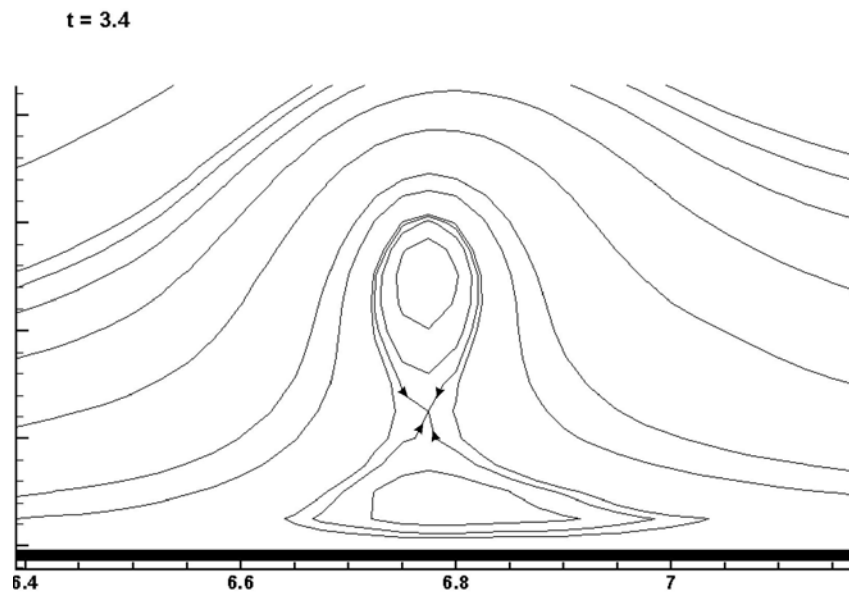


(e)



(f)

Rys. 5.41: Optyw kwadratu w pobliżu ściany, pole wirowe. Zjawisko erupcji.



Rys. 5.42: Punkt siodłowy w strefie recyrkulacji w obszarze przyściennym. Porównaj z kryterium MRS, rysunek 1.5 .

Rozdział 6

Podsumowanie

Jednym z celów niniejszej pracy było przebadanie opracowanego algorytmu obliczeniowego metody cząstek wirowych z punktu widzenia analizy numerycznej. Badania miały za zadanie sprawdzenie czy metoda cząstek wirowych, z generacją wirowości na ścianie, pozwala uzyskać rozwiązania numeryczne zbieżne do rozwiązania dokładnego. W pracy zbieżność taką pokazano na licznych przykładach. Tym samym wykazano, że metoda cząstek wirowych typu "wir w komórce" jest poprawną metodą numeryczną. Jej niezaprzeczalną zaletą jest łatwość modelowania zagadnień w których dominują zjawiska wirowe.

Następnym celem pracy było przeprowadzenie badań numerycznych nad zjawiskiem erupcji warstwy przyściennej wywołanej łątą wirową (wirem o skończonym nośniku) oraz demonstracja tego zjawiska w różnych zagadnieniach przepływowch. Przeprowadzone obliczenia pokazały że zjawisko to występuje powszechnie dla przepływów z dużą liczbą Reynoldsa (małą lepkością).

Porównanie otrzymanych wyników z rzeczywistymi trójwymiarowymi obrazami laboratoryjnymi pokazało, że prezentowana metoda obliczeniowa mimo iż jest dwuwymiarowa może być przydatna także w zrozumieniu zjawisk zachodzących w przepływach trójwymiarowych.

Otrzymane wyniki potwierdzają postawione na początku pracy tezy. Wykazano, że można skutecznie zapewnić warunek braku poślizgu na ścianie poprzez produkcję odpowiedniej wartości wirowości, lub strumienia wirowości na ścianie. Warunek Dirichleta i Neumanna na wirowość na ścianie mają zbliżoną dokładność, jednak algorytm wykorzystujący warunek Dirichleta wymaga mniejszego nakładu obliczeń.

Pokazano że charakter oddziaływania struktur wirowych ze ścianami silnie zależy od lepkości. Istnieje graniczna wartość liczby Reynoldsa powyżej której zachodzi zjawisko nagłej erupcji

elementów płynu z obszarów przyściennych do wnętrza przepływu. Jest ono istotnym mechanizmem transportu wirowości w przepływach z dużą liczbą Reynoldsa. Zjawisko erupcji jest poprzedzone pojawieniem się punktu siodłowego (punktu stagnacji) na liniach prądu wewnątrz przepływu. Punkt ten inicjuje rozpad strefy recyrkulacji przyściennej, w której zamknięte są elementy płynu z obszarów przyściennych, na dwie niezależne struktury wirowe. Struktury te charakteryzują się zamkniętymi liniami prądu. Jedna z nich wraz z przyściennymi cząstkami płynu, krążącymi wokół jej środka, jest gwałtownie wyrzucana do przepływu zewnętrznego.

Zmniejszanie lepkości powoduje dalsze komplikacje przepływu, ze ściany zrywają się sekwencje struktur wirowych. Zjawisko erupcji przybiera charakter regeneracyjny, jest inicjowane wielokrotnie przez pierwotną strukturę wirową oraz przez wcześniej zerwane wiry ze ściany. Przedstawione wyniki dają możliwość intuicyjnego wglądu w rozwój i mechanizm samopodtrzymywania się turbulencji przyściennej. Rozpoznanie i możliwość sterowania procesem erupcji jest wartościowe także z punktu widzenia zastosowań inżynierskich. Zjawisko erupcji intensyfikuje procesy mieszania, wymiany masy i ciepła, lecz jest także źródłem dodatkowych zakłóceń w przepływie (szum, fluktuacje siły oporu i siły nośnej) .

Dodatki

Dodatek A

Separacja w równaniach warstwy przyściennej Prandtla

Zgodnie z teorią warstwy przyściennej zaproponowanej przez Prandtla, wpływ lepkości jest znaczący tylko w pobliżu ściany. Dlatego możliwe jest podzielenie pola przepływu na dwa obszary. Pierwszy z nich to warstwa przyścienna, gdzie siły lepkościowe są znaczące. Natomiast drugi zewnętrzny obszar może być traktowany jako obszar nielepki opisany równaniami Eulera. Warstwa przyścienna jest więc obszarem w którym prędkość styczna do ścianki zmienia swoją wartość od wartości prędkości ścianki do prędkości wewnątrz przepływu. Jeżeli dodatkowo założymy, że gradienty w kierunku normalnym od ścianki są dużo większe od tych w kierunku stycznym otrzymamy równania Prandtla [43] :

$$u_x + v_y = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$uu_x + vv_y = -\frac{1}{\rho}p_x + \nu u_{yy}, \quad (\text{A.2})$$

$$UU_x = -\frac{1}{\rho}p_x, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} u = v = 0 \text{ dla } y = 0 \\ u \rightarrow U(x) \text{ dla } y \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

gdzie U oznacza prędkość na zewnątrz warstwy przyściennej.

Równania ruchu w warstwie przyściennej prowadzą do wniosku że składowa styczna prędkości u jest dużo większa od składowej normalnej v , ($u \gg v$). Ponieważ powyższy związek jest nieodzownie związany z równaniami Prandtla powinien być on spełniony aby rozwiązania

tych równań miały sens fizyczny. Fakt iż ($u \gg v$) prowadzi do wniosku, że ciecz porusza się wzdłuż powierzchni ciała praktycznie nie odchylając się od niej. Oznacza to że niemożliwy jest transport wirowości z obszaru przyściennego do wnętrza przepływu. Jednak wirowość przechodzi z warstwy przyściennej do wnętrza przepływu, gdyż przepływ turbulentny w całym swym obszarze jest ruchem wirowym. Wirowość może urodzić się tylko na brzegu, więc jedyną drogą przenikania wirowości do wnętrza przepływu jest zjawisko separacji w warstwie przyściennej. Prowadzi to do wniosku, że dla równań Prandtla oderwanie warstwy przyściennej może nastąpić tylko w punktach osobliwych.

Z przeprowadzonych powyżej rozważań wynika także charakter tych osobliwości. Jeżeli w punkcie separacji, przepływ odrywa się od ścianki i przechodzi do wnętrza obszaru, oznacza to że składowa normalna prędkości przestaje być mała w porównaniu ze składową styczną. Warunek ($u \gg v$) przestaje być spełniony, a składowa v staje się wielkością przynajmniej tego samego rzędu co składowa u . Z rozważań nad równaniami Prandtla wynika że $v/u \sim Re^{-1/2}$, a zatem wzrost v do wartości porównywalnej ze składową u oznacza zwiększenie składowej normalnej prędkości \sqrt{Re} razy [43, 85]. $Re = \frac{Ul}{\nu}$, gdzie U jest prędkością charakterystyczną, a l wymiarem charakterystycznym.

Dla dużych liczb Reynoldsa można więc przyjąć, że składowa normalna prędkości v wzrasta nieskończenie:

$$v(x_s, y) = \infty. \quad (\text{A.5})$$

, gdzie punkt x_s oznacza punkt oderwania. Obszarowi do punktu oderwania odpowiadają współrzędne $x < x_s$, natomiast $y = 0$ oznacza ścianę.

Ze wzoru (A.5) wynika, że szybkość narastania funkcji v w punkcie $x = x_s$ jest również nieskończona:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x=x_s} = \infty, \quad (\text{A.6})$$

a z równania ciągłości mamy również:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_s} = \infty \quad (\text{A.7})$$

lub:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{u=u_0} = 0 \quad (\text{A.8})$$

, gdzie x jest rozpatrywana jako funkcja u i y , a $u_0(y) = u(x_s, y)$ i jest profilem prędkości dla $x = x_s$. W pobliżu punktu separacji zakłada się, że zarówno różnica $x_s - x$ jak i $u_0 - u$ jest

mała. Dlatego $x_s - x$ można rozwinąć w szereg potęgowy, który dla ustalonego y przyjmuje postać (do wyrazu drugiego rzędu):

$$x_s(u_0) = x(u) + \frac{\partial x}{\partial u}(u - u_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u - u_0)^2. \quad (\text{A.9})$$

Korzystając z równania (A.8) oraz przekształcając powyższy wzór względem u otrzymamy :

$$u(x, y) = u_0(y) + \alpha(y)(x_s - x)^{1/2}, \quad (\text{A.10})$$

gdzie:

$$\alpha(y) = \left[1/2 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right)_{u=u_0} \right]^{-1/2}.$$

Korzystając z równania ciągłości (A.1) możemy napisać:

$$v_y = -u_x = \frac{\alpha(y)}{2\sqrt{x_s - x}}. \quad (\text{A.11})$$

Natomiast całkując względem y otrzymamy równanie dla v :

$$v = \frac{\beta(y)}{\sqrt{x_s - x}}, \quad (\text{A.12})$$

gdzie β jest funkcją y wyrażoną wzorem:

$$\beta(y) = \frac{1}{2} \int \alpha(y) dy.$$

Pole prędkości (u, v) w okolicy punktu separacji opisują więc wzory (A.10) oraz (A.12). Widać więc że osobliwość, która pojawia się w punkcie separacji (dla $x = x_s$) oznacza, że składowa prędkości v staje się nieskończona.

Aby wyznaczyć postać funkcji $\alpha(y)$ należy skorzystać z równania (A.2), w którym pochodna u_{yy} dla punktu $x = x_s$ oraz gradient dp/dx nie są nieskończone. Wyrazy, uu_x , vu_y , stojące po lewej stronie równania (A.2) są nieskończone. Dlatego dla obszaru w pobliżu punktu separacji można napisać:

$$uu_x + vu_y = 0. \quad (\text{A.13})$$

Z równania ciągłości mamy że $uu_x = -vv_y$, następnie podstawiając tą zależność do równania (A.13) oraz mnożąc obustronnie przez -1 otrzymamy:

$$uv_y - vu_y = u^2 \left(\frac{v}{u} \right)_y = 0. \quad (\text{A.14})$$

Przyjmując, że $u \neq 0$ w punkcie oderwania $x = x_s$, można wywnioskować że iloraz $\frac{v}{u}$ nie zależy od zmiennej y . Korzystając z zależności (A.10) oraz (A.12), przy uwzględnieniu wyrazów wyższego rzędu, można napisać:

$$\frac{v}{u} = \frac{\beta(y)}{u_0(y)\sqrt{x_s - x}}. \quad (\text{A.15})$$

Aby powyższe wyrażenie było tylko funkcją x , funkcja $\beta(y)$ musi być postaci:

$$\beta(y) = \frac{1}{2}Au_0(y), \quad (\text{A.16})$$

gdzie A jest dowolną stałą liczbową. Tak więc w punkcie separacji, gdzie $u(y) = u_0(y)$ mamy:

$$v = \frac{Au_0(y)}{2\sqrt{x_s - x}}. \quad (\text{A.17})$$

Z drugiej strony z równań (A.11) oraz (A.12) wynika że funkcje $\alpha(y)$ i $\beta(y)$ są powiązane zależnością $\alpha = 2\beta'$. Następnie różniczkując równanie (A.16) względem y otrzymamy:

$$\beta' = \frac{1}{2}A\frac{du_0}{dy}. \quad (\text{A.18})$$

Korzystając z zależności $\alpha = 2\beta'$ otrzymamy wzór na funkcję α :

$$\alpha = A\frac{du_0}{dy}. \quad (\text{A.19})$$

Ostatecznie rozkład prędkości w okolicy punktu separacji wyrażają wzory:

$$u(x, y) = u_0(y) + A\frac{du_0}{dy}(x_s - x)^{1/2}, \quad (\text{A.20})$$

$$v = \frac{Au_0}{2\sqrt{x_s - x}}. \quad (\text{A.21})$$

Równania (A.20), oraz (A.21) opisują składowe pola prędkości u i v w pobliżu punktu separacji. Z równania (A.21) widać iż w punkcie oderwania dla $x_s = x$ składowa prędkości v staje się nieskończona, czyli pojawia się osobliwość. Natomiast poza punktem oderwania, gdy $x > x_s$, powyższe wzory tracą fizyczny sens, gdyż pierwiastki przyjmują wartości ujemne. Równania Prandtla opisują więc ruch tylko do tego właśnie punktu.

Z warunków brzegowych, dla przepływów lepkich, wiadomo iż na ścianie sztywnej oraz nieruchomej ($y = 0$), powinno być $u = v = 0$. Dlatego ze wzorów (A.20) oraz (A.21) można wywnioskować, że w punkcie separacji zachodzi:

$$u_0 = 0, \quad \left(\frac{du_0}{dy}\right)_{y=0} = 0. \quad (\text{A.22})$$

Podsumowując powyższą analizę można wyszczególnić następujące właściwości stacjonarnej dwuwymiarowej warstwy przyściennej w okolicy punktu separacji:

1. W punkcie separacji dla $x_s = x$ zachodzi: $(u_y)_{y=0} = 0$. Oznacza to także, że naprężenia styczne $\tau_x = 0$.
2. Składowa u pola prędkości zmienia się jak $(x_s - x)^{1/2}$, natomiast składowa pionowa v zmienia się jak $(x_s - x)^{-1/2}$.
3. Rozwiązanie równań Prandtla jest osobliwe w punkcie separacji i nie może być kontynuowane poza ten punkt.

Powyższa analiza pozwala również zrozumieć własności rozkładu ciśnienia $p(x)$ w pobliżu punktu separacji. Równanie (A.2) na ścianie ($y = 0$) przyjmuje postać:

$$\nu (u_{yy})_{y=0} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad (\text{A.23})$$

zatem znak gradientu ciśnienia jest taki sam jak znak drugiej pochodnej prędkości stycznej u na ścianie. Widać stąd, że ustalenie znaku u_{yy} na ścianie umożliwi analizę rozkładu ciśnienia w okolicy punktu oderwania. W obszarze do punktu oderwania pierwsza pochodna prędkości u jest większa od zera: $(u_x)_{y=0} > 0$ (przy oddalaniu się od ściany u jest dodatnie i rośnie). Natomiast w punkcie oderwania $x = x_s$ mamy: $(u_x)_{y=0} = 0$, co prowadzi do wniosku że w punkcie tym $(u_{yy})_{y=0} > 0$ [70]. Zatem:

$$\left(\frac{dp}{dx} \right)_{x=x_s} > 0, \quad (\text{A.24})$$

co oznacza że w pobliżu punktu oderwania ciecz porusza się od ciśnienia niższego do wyższego. Gradient ciśnienia jest więc przeciwny do gradientu prędkości.

Bibliografia

- [1] N. Alleborn, K. Nandakumar, H. Raszillier, and F. Durst. Further contributions on the two-dimensional flow in a sudden expansion. *Journal of Fluid Mechanics*, 330:169–188, 1997. [cytowanie na str. 73]
- [2] C.R. Anderson. Vorticity boundary conditions and boundary vorticity generation for two-dimensional viscous incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 80:72–97, 1989. [cytowanie na str. 26]
- [3] B.F. Armaly, F. Durst, J.C.F. Pereira, and Schonung B. tyt. *Journal of Fluid Mechanics*, 127:476, 1983. [cytowanie na str. 45, 47]
- [4] K. Bajer. *Wpływ wirów na procesy transportu*. Instytut Geofizyki, Uniwersytet Warszawski, 2005. [cytowanie na str. 1]
- [5] G.K Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1970. [cytowanie na str. 3, 15, 16, 18]
- [6] P. Bradshaw. Turbulence modeling with application to turbomachinery. *Progress in Aerospace Sciences*, 32:575–624, 1996. [cytowanie na str. 2]
- [7] P. Bradshaw. Understanding and prediction of turbulent flow - 1996. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 18:45–54, 1997. [cytowanie na str. 2]
- [8] K.W. Brinckman and J.D.A. Walker. Instability in a viscous flow driven by streamwise vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, 432(1):127–166, 2001. [cytowanie na str. 12, 76]
- [9] B.J. Cantwell. Organized Motion in Turbulent Flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 13:457–515, 1981. [cytowanie na str. 10]
- [10] C.M. Casciola, R. Piva, and P. Bassanini. Vorticity generation on a flat surface in 3D flows. *Journal of Computational Physics*, 129:345–356, 1996. [cytowanie na str. 3]

- [11] W. Cherdron, F. Durst, and Whitelaw J.H. Asymmetric flows and instabilities in symmetric ducts with sudden expansion. *Journal of Fluid Mechanics*, 84:13–31, 1978. [cytowanie na str. 73]
- [12] A.J. Chorin and Marsden J.E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer, 1979. [cytowanie na str. 17, 18, 19]
- [13] J.P. Christiansen. Numerical simulation of hydrodynamics by the Method of Point Vortices. *Journal of Computational Physics*, 13:363–379, 1973. [cytowanie na str. 18]
- [14] F. Chuang and A.T. Conlisk. The effect of interaction on the boundary layer induced by a convected rectilinear vortex. *Journal of Computational Physics*, 200:337–365, 1989. [cytowanie na str. 7]
- [15] E.R. Corino and R.S. Brodkey. A visual investigation of the wall region in turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 37(1):1–30, 1969. [cytowanie na str. 10]
- [16] G.H. Cottet and P. Koumoutsakos. *Vortex method: theory and practice*. Cambridge University Press, 2000. [cytowanie na str. 15, 19, 21, 22, 29, 30]
- [17] G.H. Cottet, B. Michaux, S. Ossia, and G. VanderLinden. A comparison of spectral and vortex methods in three-dimensional incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 175:702–712, 2002. [cytowanie na str. 30]
- [18] S.J. Cowley, L.L. Van Dommelen, and Lam S.T. On the use of lagrangian variables in descriptions of unsteady boundary-layer separation. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 333(1):343–378, 1990. [cytowanie na str. 5]
- [19] M.K. Denham and M.A. Patrick. Laminar flow over a downstream-facing step in two-dimensional flow channel. *Trans. Instn Chem. Engrs*, 52:361–367, 1974. [cytowanie na str. 45]
- [20] A. Dipankar and T.K. Sengupta. Flow past a circular cylinder in the vicinity of a plane wall. *Journal of Fluids and Structures*, 20(1):403–423, 2005. [cytowanie na str. 88]
- [21] T.L. Doligalski, C.R. Smith, and J.D.A. Walker. Vortex interactions with walls. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 26(1):573–616, 1994. [cytowanie na str. 1, 7, 51]
- [22] T.L. Doligalski and J.D.A. Walker. The boundary layer induced by a convected two-dimensional vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 139(1):1–28, 1984. [cytowanie na str. 7]
- [23] F. Durst, C.F. Pereira, and Tropea C. The plane symmetric sudden-expansion flow at low Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 248:567–58, 1993. [cytowanie na str. 73]

- [24] R.E. Falko. A coherent structure model of the turbulent boundary layer and its ability to predict Reynolds number dependence. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 336:103–129, 1991. [cytowanie na str. 11]
- [25] U. Ghia, K.N. Ghia, and C.T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equation and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48:387–411, 1982. [cytowanie na str. 42, 43]
- [26] A.J. Grass, R.J. Stuart, and Mansour-Tehrani M. Vortical structures and coherent motion in turbulent flow over smooth and rough boundaries. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 336:35–65, 1991. [cytowanie na str. 51]
- [27] P.M. Gresho, S.T. Chan, and R.L. Lee. A modified finite element method for solving the time-dependent, incompressible Navier–Stokes equations. Part 2: Applications. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 4:619–640, 1984. [cytowanie na str. 42]
- [28] C.J. Ho and F.H. Lin. Numerical simulation of three-dimensional incompressible flow by a new formulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 23:1073–1084, 1996. [cytowanie na str. 43]
- [29] J. Jimenez and P. Moin. The minimal flow unit in near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 225(1):213–226, 1991. [cytowanie na str. iv, 51]
- [30] S.J. Kline, W.C. Reynolds, F.A. Schraub, and P.W. Raunstadler. The structure of turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 95(1):741–773, 1967. [cytowanie na str. v, 10, 77]
- [31] J.R. Koseff and R.L. Street. On end wall effect in a lid-driven cavity flow. *Trans. of ASME, Journal of Fluids Engineering*, 106:385–389, 1984. [cytowanie na str. 42]
- [32] J.R. Koseff and R.L. Street. The lid-driven cavity flow: A synthesis of qualitative and quantitative observations. *Trans. of ASME, Journal of Fluids Engineering*, 106:390–398, 1984. [cytowanie na str. 42]
- [33] Z. Kosma and B. Noga. Numerical simulations of viscous fluid motions using the artificial compressibility method. *Chemical and Process Engineering*, 27:761–781, 2006. [cytowanie na str. 45, 47]
- [34] P. Koumoutsakos, A. Leonard, and F. Pepin. Boundary Condition for Viscous Vortex Methods. *Journal of Computational Physics*, 113:52–61, 1994. [cytowanie na str. 25]

- [35] P.D. Koumoutsakos. *Direct Numerical Simulations of Unsteady Separated Flows Using Vortex Methods*. California Institute of Technology, 1993. praca doktorska. [cytowanie na str. 19, 23, 24, 30]
- [36] P.D. Koumoutsakos and D. Shiels. Simulations of the viscous flow normal to an impulsively started and uniformly accelerated flat plate. *Journal of Fluid Mechanics*, 328:177–227, 1996. [cytowanie na str. 26]
- [37] H. Kudela. *Modelowanie zjawisk hydrodynamicznych metodami dyskretnych wirów*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1995. Prace Naukowe Instytutu Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów Politechniki Wrocławskiej nr 48, seria Monografie nr 25. [cytowanie na str. 45]
- [38] H. Kudela. *Numeryczne modelowanie przepływów cieczy lepkiej metodami dyskretnych wirów. Deterministyczne metody symulacji lepkości*, 1998. Instytut Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów, Raport SPR nr 53/98. [cytowanie na str. 18, 21, 22, 23, 24, 25, 29, 45, 46]
- [39] H. Kudela. Application of the vortex-in-cell method for the simulation of two-dimensional viscous flow. *Task Quarterly*, 3(3):343–360, 1999. [cytowanie na str. 22, 45]
- [40] H. Kudela and Z.M. Malecha. Badanie zjawiska erupcji warstwy przyściennej metodą cząstek wirowych. *Inżynieria Chemiczna i Procesowa*, 27:833–845, 2006. [cytowanie na str. 21, 31]
- [41] H. Kudela and Z.M. Malecha. Modelowanie dwuwymiarowych przepływów w obszarach o złożonej geometrii metodą cząstek wirowych. *Inżynieria Chemiczna i Procesowa*, 27:707–719, 2006. [cytowanie na str. 21]
- [42] H. Kudela and Z.M. Malecha. Investigation of unsteady vorticity layer eruption induced by vortex patch using vortex particles method. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 45:785–800, 2007. [cytowanie na str. 21, 31]
- [43] L.D. Landau and E.M. Lifszyc. *Hydrodynamika*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1994. [cytowanie na str. 98, 99]
- [44] R. Legendre and R. Werle. Toward the Elucidation of Three-Dimensional Separation. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 33:129–154, 2001. [cytowanie na str. 10]
- [45] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Kluwer, 1997. [cytowanie na str. 10, 51]
- [46] M.J. Lighthill. *Introduction. Boundary Layer Theory*. Oxford Univ. Press, 1963. edited by J. Rosenhead. [cytowanie na str. 27]

- [47] H. J. Lugt. *Vortex flow in nature and technology*. John Wiley and Sons, 1983. [cytowanie na str. 1, 5]
- [48] J.S. Marshall. *Inviscid incompressible flow*. John Wiley & Sons, Inc, 2001. [cytowanie na str. 16]
- [49] C. Migeon. Details on the start-up development of the Taylor-Gortler like vortices inside a square-section lid-driven cavity for $1000 \leq Re \leq 3200$. *Experiments in Fluids*, 33:594–602, 2002. [cytowanie na str. 42]
- [50] B.R. Munson, D.F. Young, and T.H. Okiishi. *Fundamentals of Fluid Mechanics*. John Wiley and Sons, Inc., 2002. [cytowanie na str. 37]
- [51] G. Nurnberger. *Aproximation by spline function*, volume 1127. Springer Verlag, 1989. [cytowanie na str. 23]
- [52] P. Orlandi. Vortex dipole rebound from a wall. *Phys. Fluids*, 8(1):1429–1436, 1990. [cytowanie na str. 70]
- [53] P. Orlandi and R. Verzicco. Vortex rings impinging on walls: axisymmetric and three-dimensional simulations. *Journal of Fluid Mechanics*, 256:615–646, 1993. [cytowanie na str. 74]
- [54] G.A. Osswald, K.N. Ghia, and U. Ghia. Study of incompressible seperated flow using an implicit time-dependent technique. w zbiorze *AIAA, Sixth CFD Conf., Danvers, MA*, page 686, 1983. [cytowanie na str. 45, 47]
- [55] R.L. Panton. Overview of the self-sustaining mechanisms of wall turbulence. *Progress in Aerospace Sciences*, 0(1):1–43, 2001. [cytowanie na str. v, 51, 68, 76, 77, 78]
- [56] L.L. Pauley, P. Moin, and Reynolds W.C. The structure of two-dimensional separation. *Journal of Fluid Mechanics*, 220:397–411, 1990. [cytowanie na str. 7]
- [57] V.J. Peridier, F.T. Smith, and Walker J.D.A. Vortex-induced boundary-layer separation. Part 1. The unsteady limit problem. *Journal of Fluid Mechanics*, 232(1):99–131, 1991. [cytowanie na str. 54]
- [58] V.J. Peridier, F.T. Smith, and Walker J.D.A. Vortex-induced boundary-layer separation. Part 2. Unsteady interacting boundary-layer theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 232(1):133–165, 1991. [cytowanie na str. 54]
- [59] A.K. Prasad and J.R. Koseff. Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity flow. *Phys. Fluids A*, 1(2):208–218, 1989. [cytowanie na str. 42]

- [60] S.J. Price, D. Sumner, J.G. Smith, K. Leong, and M.P. Paidoussis. Flow visualization around a circular cilinder near to a plane wall. *Journal of Fluids and Structures*, 16(1):175–191, 2002. [cytowanie na str. 88]
- [61] L. Quartapelle. *Numerical solution of the incompressible Navier–Stokes equations*. Birkhauser Verlag, 1993. [cytowanie na str. 15]
- [62] P.A. Raviart. *An analysis of particle methods, numerical methods in fluid dynamics*, volume 1127. Springer Verlag, Berlin, 1985. edited by F. Brezzi. [cytowanie na str. 22]
- [63] Paweł Regucki. *Modelowanie trójwymiarowych przepływów wirowych metodami dyskretnych wirów*. PhD thesis, Politechnika wrocławska, 2003. [cytowanie na str. 23, 24, 29]
- [64] S.K. Robinson. Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23(1):601–639, 1991. [cytowanie na str. 10, 11, 51, 78]
- [65] D. Rockwell. Vortex-body interaction. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30:199–229, 1998. [cytowanie na str. 1, 51]
- [66] L. Rosenhead. The point vortex approximation of a vortex sheet. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 134:170–192, 1931. [cytowanie na str. 2]
- [67] A. Roshko. Structure of Turbulent Shear Flows: A New Look. *AIAA Journal*, 14:1349–1357, 1976. [cytowanie na str. 10]
- [68] N. Rott. Unsteady viscous flows in the vicinity of a separation point. *Q. Appl. Math.*, 13(1):444–451, 1956. [cytowanie na str. 5]
- [69] R. Savoie and Y. Gagnon. Numerical Simulation of the Starting Flow Down a Step. *ESAIM: Proceedings*, 1:377–386, 1996. [cytowanie na str. 45]
- [70] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill Book Company, 1979. [cytowanie na str. 102]
- [71] W. Schoppa and F. Hussain. Coherent structure dynamics in near-wall turbulence. *Fluid Dynamics Research*, 26:119–139, 2000. [cytowanie na str. 10]
- [72] C.V. Seal, C.R. Smith, O. Akin, and D. Rockwell. Instantaneous velocity and vorticity characteristics in the juncture region of rectangular block-plate. *Journal of Fluid Mechanics*, 000(1):000–000, 1994. [cytowanie na str. iv, 51, 52]
- [73] W.R. Sears. Some recent developments in airfoil theory. *J. Aeronaut Sci.*, 23(1):490–499, 1956. [cytowanie na str. 5]

- [74] T.K. Sengupta, S. De, and S. Sarkar. Vortex-induced instability of an incompressible wall-bounded shear layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 493(1):277–286, 2003. [cytowanie na str. 88]
- [75] P.N. Shankar and M.D. Deshpande. Fluid mechanics in the driven cavity. *Annual Review of Fluid Mechanics*, pages 93–136, 2000. [cytowanie na str. 42]
- [76] C. R. Smith and D. A. Walker. *In Fluid Vortices. Chapter IV: Turbulent wall-layer vortices*. Kluwer, 1996. [cytowanie na str. iv, v, 9, 10, 54, 77, 78, 88]
- [77] C.R. Smith, J.P. Fitzgerald, and J.J. Greco. Cylinder end-wall vortex dynamics. *Phys. Fluids*, 3(1):2031–2057, 1991. [cytowanie na str. iv, 51, 52]
- [78] D.P. Telionis. *Unsteady viscous flow*. Springer–Verlag New York Inc., 1981. [cytowanie na str. 4]
- [79] L. Trefethen and R.L. Panton. Some unanswered questions in fluid mechanics. *Appl. Mech. Rev.*, 43(B):278–287, 1990. [cytowanie na str. 25]
- [80] L.L. Van Dommelen. Lagrangian Description of Unsteady Separation. *Lectures in Applied Mathematics*, 28(1):701–719, 1991. [cytowanie na str. 7]
- [81] L.L. Van Dommelen and J.J. Cowley. On the Lagrangian description of unsteady boundary layer separation. Part 1. General theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 210(1):593–626, 1990. [cytowanie na str. 54]
- [82] G.J.F. Van Heijst and J.B. Flor. *Mesoscale/Synoptic Coherent Structures in Geophysical Turbulence*. Elsevier, Amsterdam, 1989. [cytowanie na str. v, 70, 71, 72]
- [83] G. VanderLinden. *Simulation de la turbulence par la méthode particulière*. Grenoble, 1998. [cytowanie na str. 29, 30]
- [84] J.D.A Walker. The boundary layer due to rectilinear vortex. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 359(1):167–188, 1978. [cytowanie na str. 7]
- [85] Z.U.A Warsi. *Fluid Dynamics. Theoretical and Computational Approaches*. CRC Press, 1999. [cytowanie na str. 99]
- [86] E. Weinan and L. Jian-Guo. Vorticity Boundary Condition and Related Issues for Finite Difference Schemes. *Journal of Computational Physics*, 124:368–382, 1996. [cytowanie na str. 25, 26]
- [87] J. Zhu. The Second-Order Projection Method for the Backward-Facing Step Flow. *Journal of Computational Physics*, 117:318–331, 1995. [cytowanie na str. 45]

ZESPÓŁ BADAWCZY:

mgr inż. Ziemowit MALECHA

ODBIORCY:

1. Rada Naukowa Instytutu Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów	3
2. Biblioteka Główna	1
3. Biblioteka I-20	1
4. Promotor	1
5. Autor	1
<hr/>	
	Razem: 7

Raport złożono
w Dziale Wydawnictw I-20
w czerwcu 2008