Równowagi Nasha w grach dynamicznych: istnienie i aproksymacja

Łukasz Balbus

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Andrzeja Nowaka

Politechnika Wrocławska
Instytut Matematyki i Informatyki
Wrocław 2008

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

Teoria gier jest dziedziną matematyki zajmującą się rozwiązywaniem problemów w przypadku, gdy zachodzi konflikt interesów. Znajduje szerokie zastosowanie w ekonomii, biologii, socjologii a także w informatyce. Opisuje ona interakcje między graczami, a także bada wpływ ich zachowania na środowisko.

Ponieważ w grach niekooperacyjnych gracze zazwyczaj nie mogą przewidzieć strategii swoich rywali, a interakcje między graczami mają wpływ na wypłaty poszczególnych graczy zostało wprowadzone pojęcie równowagi. Jest to układ strategii graczy, od którego odstępstwo przez pojedynczego gracza jest nieopłacalne. Pojęcie to zostało wprowadzone przez Cournota [17]. Rozpatrywał on wówczas problem duopolu czyli rozważał grę dwuosobową. Pojęcie równowagi zostało rozszerzone na problem oligopolu przez Johna Nasha [38, 39], stąd z jego nazwiska wywodzi się pojęcie równowagi Nasha.

Pojęcie gry stochastycznej wprowadził Shapley [55]. W grze stochastycznej każdy gracz podejmuje decyzje w ustalonych etapach. Decyzja gracza uzależniona jest od aktualnego stanu gry, który w tym przypadku pochodzi ze zbioru skończonego. Aktualny stan jest zmienną losową zależną od historii gry, czyli od stanów gry i układów decyzji poszczególnych graczy we wcześniejszych etapach. Shapley rozpatruje gry o sumie zerowej, w której całkowitą wypłatą dla gracza jest oczekiwana wartość sumy dziennych wypłat zdyskontowanych na moment rozpoczęcia gry. W pracy Shapleya wykazano istnienie stacjonarnych strategii optymalnych.

W roku 1964 Fink [22] zajmował się modelem zdyskontowanej gry stochastycznej o sumie niezerowej, w której jednak zbiór stanów nadal ma tylko skończenie wiele elementów. Wykazał on istnienie równowagi Nasha łącząc dwie idee - klasyczny dowód Nasha i równania optymalności Bellmana. W swojej pracy wykorzystał między innymi Twierdzenie Kakutaniego o punkcie stałym [56]. Dla zdyskontowanych gier stochastycznych o sumie niezerowej i o zbiorze stanów mocy continuum problem istnienia równowagi Nasha (nawet w zbiorze strategii zrandomizowanych) w ogólnym przypadku jest otwarty. Pewne twierdzenia o istnieniu ϵ - równowagi zostały uzyskane za pomocą dyskretyzacji przestrzenii stanów w pracach [41, 45, 62, 64]. Są jednak klasy gier dla których istnienie równowagi udało się wykazać. W najbardziej ogólnym przypadku strategie graczy zależą od historii gry. Zatem postać strategii jest bardzo skomplikowana w porównaniu do przypadku zdyskontowanych gier o sumie zerowej, w której udało się wykazać istnienie równowagi stacjonarnej. Problemowi temu przyglądali się Mertens i Parthasarathy [36]. Istnienie stacjonarnej równowagi w grze o sumie niezerowej i zbioru stanów mocy continuum wykazano dopiero w pracy Himmelberga, Parthasarathy'ego Raghavana i Van-Vlecka [28].

Kolejnym przykładem jest praca Parthasarathy'ego i Sinha'y [47]. Założono tu, że prawdopodobieństwo przejścia jest bezatomowe, oraz nie zależy ono od aktualnego stanu gry, a jedynie od układu decyzji graczy. Założono, że decyzje graczy pochodzą ze zbioru skończonego. Uogólnienie powyższego modelu znajduje się w pracy Nowaka [42]. Prawdopodobieństwo przejścia jest skończoną kombinacją liniową miar bezatomowych ze współczynnikami zależnymi od stanu gry i akcji graczy. Przy pomocy nieskończenie wymiarowej wersji Twierdzenia Kakutaniego i Twierdzenia Lapunowa o obrazie wektorowej miary bezatomowej wykazano istnienie stacjonarnej równowagi Nasha.

Szczególnym przypadkiem gier niekooperacyjnych są gry supermodularne. Przy pomocy wyników pracy Milgroma i Robertsa [37] można zawężyć klasę decyzji w grach dynamicznych do stacjonarnych strategii będących funkcjami monotonicznymi. Gry supermodularne rozważane były przez Amira [3], Curtata [18] i Nowaka [44].

Inną podklasą gier stochastycznych jest klasa gier eksploatacji zasobów. Ta klasa może mieć zastosowanie przy problemach typu: jaką ilość danego odnawialnego surowca skonsumować, a ile zostawić na następny okres. Gry tego typu mogą mieć zastosowanie w takich problemach jak eksploatacja lasów czy połowy ryb. Stan gry oznaczający ilość zasobów jest zmienną losową zależną od ilości pozostawionego surowca w poprzednim okresie. Model połowu ryb zaproponowali Levhari i Mirman [32]. Prawdopodobieństwo przejścia było zastąpione deterministyczną funkcją produkcji. Ważną własnością tej funkcji było przecięcie się jej z diagonalą układu współrzędnych w punkcie zerowym i w pewnym punkcie o dodatniej odciętej. Przecięcie następowało w taki sposób, że przy mniejszych zasobach produkcja powodowała zwiększenie ilości zasobów w następnym okresie, natomiast przy większych zasobach następował spadek ilości zasobów. Bardziej ogólną postać takiej funkcji wprowadzili Dutta i Sundaram [21], natomiast stochastyczny odpowiednik takiej funkcji zastosowano między innymi w pracy Majumdara i Sundarama [33] oraz Dutty i Sundarama [20]. W grze Levhariego i Mirmana pojawił się problem *tragedii współistnienia.* Skonsumowanie zbyt małej ilości surowca powoduje zmniejszenie zysków gracza, a powoduje wzrost zysków przeciwników. Natomiast pobranie zbyt dużej ilości surowca powoduje zmniejszenie ilości surowca w przyszłości, co powoduje zanik zysków zarówno dla gracza jak i oponentów. Tragedię współistnienia w swoich modelach kwestionowali także Dutta i Sundaram [21], ale ich rozważania dotyczyły tylko duopolu.

Sundaram [58], Majumdar i Sundaram [33] oraz Dutta i Sundaram [20] rozważali symetryczną grę eksploatacji zasobów. Za pomocą Twierdzenia Schaudera wykazali istnienie stacjonarnej równowagi w klasie funkcji dolnie półciągłych.

Podobnie jak w grach supermodularnych, również w niektórych grach eksploatacji zasobów istnienie niezrandomizowanych stacjonarnych równowag Nasha zostało wykazane przez zawężenie zbioru strategii do rodziny funkcji jednakowo ciągłych i wykorzystaniu twierdzenia Arzeli - Ascoliego, a następnie twierdzenia o punkcie stałym. Takiego sposobu użył Amir [2, 5]. Za pomocą Twierdzenia Topkisa o maksymalizacji funkcji supermodularnej [60] wykazał istnienie stacjonarnej równowagi w klasie funkcji monotonicznych i lipschitzowskich ze wspólną stałą. Z kolei Balbus i Nowak w [9] otrzymali podobne własności równowagi, korzystając z wyników w pracy [10], w której przy pomocy Twierdzenia Shaudera wykazano istnienie równowagi Nasha, nie precyzując jej własności.

Kolejnym problemem w teorii gier stochastycznych jest kwestia zbieżności równowag Nasha i wypłat Nasha w grze o skończonym horyzoncie czasowym, gdy długość horyzontu dąży do nieskończoności. Praca Raghavana, Tijsa i Vrieze'a [49] pokazuje, że w ogólnym przypadku problem ten jest ma negatywne rozwiązanie, ponieważ zbiór równowag Nasha może być wieloelementowy, a także w odróżnieniu od procesu decyzyjnego nie jest łatwo stworzyć odpowiedniego operatora zwężającego. W pracy Nowaka i P. Szajowskiego [46] problem zbieżności funkcji równowagi udało się rozwiązać w przypadku gier dwuosobowych. Prawdopodobieństwo przejścia było skończoną kombinacją miar probabilistycznych w tym delty Diraca skupionej w punkcie zero. Za pomocą równań Bellmana otrzymano monotoniczną zbieżność funkcji równowag Nasha w grze ze skończonym horyzontem czasowym do funkcji stacjonarnej równowagi Nasha w grze o nieskończonym horyzoncie. Przy okazji udowodniono istnienie równowagi Nasha nie korzystając z Twierdzenia Schaudera. Z kolei Balbus i Nowak [8] udowodnili zbieżność zarówno równowag Nasha, jak również funkcji równowag, co zostało opisane w Rozdziale 3. Autorzy tej pracy rozpatrywali grę wieloosobową, ale rozważania ograniczyli do gier symetrycznych. Problem zbieżności rozwiązał także P. Szajowski w pracy [59]. Tym razem gra była niesymeryczna i wieloosobowa, ale współczynniki przy prawdopodobieństwie przejścia miały inną formę.

Grami eksploatacji zasobów zajmowali się również Cave [16], Fisher i Mirman [23], Mendelsohn i Sobel [35], Sobel [57] oraz Więcek [63].

Gry stochastyczne, a w szczególności gry eksploatacji zasobów można rozpatrywać jako podklasę gier wielogeneracyjnych z czynnikiem altruistycznym stale równym jeden. W grach wielogeneracyjnych gracze występują w wielu pokoleniach i tworzą dynastie. Każdy gracz żyje przez jeden etap gry, a po nim natychmiast pojawia się potomek. W obrębie danej dynastii wszyscy gracze mają tę samą funkcję wypłaty, która zależy tylko od stanu gry, zależnego od stanu i układu decyzji w czasie życia poprzedniego pokolenia.

Model gry wielogeneracyjnej za stałym współczynnikiem altruistycznym wprowadzili Phelps i Pollak [48]. W ich pracy podobnie jak w kolejnych występowała tylko jedna dynastia. W pracy Harrisa i Laibsona [26] sposób dyskontowania zaproponowany przez autorów pracy [48] został nazwany *quasi-geometrycznym*. Ponadto w tej pracy wprowadzono pojęcie *Mocnej* i *Słabej Hiperbolicznej Relacji Eulera*. Wykazano, że równowaga Nasha spełnia *Słabą Hiperboliczną Relację Eulera*. Podali również warunki na spełnienie *Mocnej Hiperbolicznej Relacji Eulera*. *Quasi-geometryczny* sposób dyskontowania pojawił się również w przykładzie obliczeniowym w pracy L. Maliar i S. Maliar [34].

Alj i Haurie [1] wprowadzili grę, w której w każdym pokoleniu występują przedstawiciele różnych dynastii, w taki sposób, że w każdym etapie wszystkie dynastie mają po jednym przedstawicielu. Stany i strategie pochodziły ze zbioru skończonego. Rozwiązanie problemu istnienia doskonałej równowagi Nasha w grach wielogeneracyjnych pojawił się również w pracach Bernheima i Ray'a [12] oraz Leiningera [31]. W tych pracach użyto deterministycznej funkcji przejścia. W tym samym czasie postać rozwiązania pojawiła się w pracach Lane-Leiningera [29, 30] oraz Bernheima i Raya [11]. W powyższych pracach, podobnie jak w pracach Arrowa [6] i Dasgupty [19] użyto sposobu dyskontowania w oparciu o postulat, że preferencje graczy zależą tylko od jego własnej konsumpcji i konsumpcji bezpośredniego następcy. W drugiej części pracy Arrow rozpatrzył przypadek, gdy preferencje każdego gracza zależą od jego konsumpcji oraz od konsumpcji m potomków (m ustalone dowolnie). Powyższe rozważania uogólnili Harris [25], a następnie Amir [4], który wprowadził losowe prawdopodobieństwo przejścia. Prawdopodobieństwo przejścia podobnie jak w [2] miało dystrybuantę wklęsłą względem warunku i podobnie jak w [2] znaleziono stacjonarną równowagę w klasie funkcji monotonicznych i lipschitzowskich ze stałą 1.

Kolejny przykład gry wielogeneracyjnej zaprezentował Nowak [43]. Prawdopodobieństwo przejścia było kombinacją wypukłą skończonej ilości miar zależnych od aktualnego stanu. Była to struktura prawdopodobieństwa znana z prac Nowaka [42], Nowaka i P. Szajowskiego [46], oraz Balbusa i Nowaka [8]. W tej pracy zbiór multi - strategii został poszerzony do pewnego zwartego podzbioru zbioru strategii zrandomizowanych. Jednak równowa Nasha, otrzymana jako punkt stały pewnego ciągłego operatora jest niezrandomizowana.

Gry wielogeneracyjne spełniające *stacjonarny postulat* rozważał również Rawls [50]. Zaproponował on *zasadę sprawiedliwego oszczędzania*, zwaną także zasadą maksyminową. Preferencje graczy zależały tylko od ich własnych konsumpcji. Z drugiej strony reguła Rawls'a uwzględniała potrzeby następców i polegała na tym aby każdy potomek osiągnął przynajmniej pewne minimum. Kryterium Rawls'a zastosowali Arrow [6] i Dasgupta [19]. Arrow przyjął liniową funkcję produkcji.

Stacjonarny postulat powoduje, że w wielu grach wielogeneracyjnych z nieskończonym horyzonem czasowym można uzyskać stacjonarną doskonałą równowagę Nasha, stosując odpowiednie twierdzenia o punkcie stałym. Od tej zasady odeszli Saez-Marti i Weibull [54]. Rozważany przez nich model zawierał czynnik dyskonta zmienny w czasie. Zaproponowany przez nich model jest równoważny pewnemu modelowi gry wielogeneracyjnej z pewnym czynnikiem altruistycznym, który jest także zmienny w czasie. Co więcej każdej funkcji dyskonta odpowiada funkcja wagi altruistycznej w sposób "jeden na jeden". Ponieważ z każdym pokoleniem zmieniają się preferencje graczy wyznaczenie stacjonarnej doskonałej równowagi jest niemożliwe.

Niniejsza rozprawa dotyczy modeli altruistycznych z *quasi-hiperboliczną* funkcją dyskonta, w których występuje zasada *stacjonarnego postulatu.* W ogólnym przypadku czynnik altruistyczny może zależeć od aktualnego stanu. We wszystkich rozdziałach rozważane są gry z wklęsła i odpowiednio gładką funkcją użyteczności, natomiast prawdopodobieństwa przejścia są kombinacjami wypukłymi miar probabilistycznych, które w najbardziej ogólnym przypadku zależą od bieżącego stanu.

W Rozdziale 2 przedstawiono rezultaty pracy Balbusa i Nowaka [10], w której zastosowano model Alj i Haurie'go [1] w celu uogólnienia tradycyjnych gier eksploatacji zasobów, które były prezentowane przez Amira [2], Nowaka [42], Balbusa i Nowaka [8], czy Nowaka i P. Szajowskiego [46]. Prawdopodobieństwo przejścia jest kombinacją wypukłą dwóch miar probabilistycznych niezależnych od obecnego stanu. Nie jest to szczególny przypadek prawdopodobieństwa znanego z pracy Amira [2], bo w odróżnieniu od niego, dystrybuanta warunkowa prawdopodobieństwa przejścia jest nieciągła względem warunku w punkcie zerowym. Istnienie stacjonarnej doskonałej równowagi Nasha udowodniono przy pomocy Twierdzenia Schaudera, konstruując przy pomocy słabej* - topologii zwarty podzbiór zbioru strategii zrandomizowanych i odpowiedni operator. Konstrukcja tego operatora była możliwa dzięki udowodnieniu jednoznaczności równowagi Nasha za pomocą pomocniczej gry statycznej. Ponieważ nie było możliwe zastosowanie Twierdzenia Gabaya i Moulina [24], ani Twierdzenia Rosena [52, 27], problem jednoznaczności rozwiązano elementarnie definiując nowy porządek na przestrzenii R^n i rozważając własności funkcji malejących.

W pozostałych rozdziałach przedstawiono modele dyskontowanych gier stochastycznych. Rozdział 3 przedstawia rezultaty z pracy [8]. Rozważono symetryczną grę wieloosobową z prawdopodopodobieństwem przejścia będącym kombinacją wypukła skończonej ilości miar probabilistycznych zależnych od obecnego stanu. W tym modelu istnieje stan pochłaniający (zerowy), który daje zerową użytecznoć, a więc powoduje, że gra się kończy. Udowodniono, że równowagi Nasha w grach o skończonym horyzoncie monotonicznie zbiegają do równowagi w grze z nieskończonym horyzontem. Powyższy sposób pokazuje (podobnie jak praca [46]), że istnienie równowagi można wykazać z pominięciem Twierdzenia Schaudera. Oprócz tego jak pokazuje zamieszczony przykład, równowagę w grze z nieskończonym horyzontem można aproksymować, równowagami w grze o skończonym horyzoncie.

Kolejny rozdział opisuje model symetrycznej gry stochastycznej eksploatacji zasobów z prawdopodobieństwem przejścia znanym z Rozdziału 2 i pracy [10]. Dopuszczono sytuację, gdy żądania graczy przekraczają dostępne zasoby. W takim przypadku gracze dzielą między sobą dostępne zasoby na równe części i gra się kończy. Podobny sposób podziału rozważali Majumdar i Sundaram [33]. Istnienie równowagi Nasha w grze obciętej do zbioru multi-strategii takich, które uniemożliwiają graczom przekroczenie dostępnych zasobów, zostało już wykazane w pracy [10] i Rozdziale 2. Okazuje się, że jest to także równowaga Nasha w grze rozszerzonej i to zarówno ze skończonym jak i nieskończonym horyzontem czasowym. Ponadto podobnie jak w [2] jest to funkcja monotoniczna i mająca własność Lipschitza ze stałą 1. Dodatkowo zastosowanie równowagi z ograniczeniami daje większy zysk niż podział wszystkich zasobów między siebie. Wyniki tego rozdziału znajdują się w pracy [9].

W ostatnim rozdziale rozważane są asymptotyczne własności równowag Nasha w dyskontowanej i niesymetrycznej grze eksploatacji zasobów znanej z pracy [46]. Postać równowagi jak również postać odpowiedniej wypłaty jest znana z prac Amira [2, 5]. Dodatkowo z Rozdziału 2 i z prac [10, 24] można wywnioskować, że zachodzi jednoznaczność równowag w grze ze skończonym horyzontem. W tym rozdziale wykazano, że równowagi i odpowiednie funkcje wypłat zbiegają (przy $\beta \to 1$) jednostajnie do pewnej funkcji, która okazała się być ϵ - równowagą w β - dyskontowanych grach stochastycznych o skończonym horyzoncie czasowym dla dostacznie dużych β. Za pomocą zbieżności równowag udowodnionych w [46], podobne wyniki uzyskano w grze z nieskończonym horyzontem.

Rozdział 2

Gry stochastyczne wielogeneracyjne

Rezutaty niniejszego rozdziału pochodzą z publikacji [10]. Głównym celem tej części pracy jest wykazanie istnienia równowagi doskonałej w grze wielogeneracyjnej. Model gry wielogeneracyjnej, przedstawia się następująco:

- $T = \{1, 2, \ldots\}$ jest *zbiorem kroków gry*,
- Dla każdego $t \in T$, $G_t = \{1_t, 2_t, \ldots, m_t\}$ jest *pokoleniem* m graczy,
- Dla każdego $i \in M := \{1, \ldots, m\}$, $F_i := \{i_t\}_{t \in T}$ jest *dynastią*, a każdy gracz $i_{t+1} \in G_{t+1}$ jest *potomkiem* gracza $i_t \in G_t$,
- $S \subset R_+$ jest przedziałem zawierającym 0 zwanym *przestrzenią stanów*,
- $A_i(s)$ - *przestrzeń akcji* dla każdego gracza $i_t \in F_i$ przy stanie $s \in S$. Niech

$$A(s) := A_1(s)\times, \ldots, \times, A_m(s) \quad \text{oraz} \quad C := \{(s, x) : s \in S, x \in A(s)\}.$$

- $r_i : C \to R$ jest funkcją wypłaty (użyteczności) gracza $i_t \in F_i$. W każdym kroku $t \in T$, przy stanie $s_t \in S$, każdy gracz $j_t \in G_t$ wybiera akcję $x_{j_t} \in A_j(s)$. Wtedy gracz $i_t \in F_i$ otrzymuje *bieżącą użyteczność* $r_i(s_t, x_{1_t}, \ldots, x_{m_t})$.
- q - jest *prawdopodobieństwem przejścia* ze zbioru C do zbioru S zwanym *prawem ruchu*. Jeśli s_t jest stanem dla kroku $t \in T$, gracze z pokolenia G_t wybierają akcje $x_t \in A(s_t)$, $q(\cdot|s_t, x_t)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa następnego stanu.
- $\alpha : S \to [0, 1]$ jest ciągłą funkcją. Dla każdego $t \in T$ oraz $s_t \in S$, $\alpha(s_t)$ nazywamy *współczynnikiem altruizmu*.
- $\beta \in (0, 1)$ nazywamy *czynnikiem dyskonta*.

2.1 Istnienie stacjonarnej równowagi Nasha w grze eksploatacji zasobów

Niech Φ_i będzie zbiorem funkcji borelowskich $f_i : S \to S$ takich, że $f_i(s) \in A_i(s)$ dla dowolnego $s \in S$ i niech

$$\Phi := \Phi_1 \times \ldots \times \Phi_m.$$

Strategią markowską dla gracza $i_t \in G_t$ nazywamy funkcję $f_{i_t} \in \Phi_i$. *Multi-strategią* dla pokolenia G_t nazywamy funkcję $f_t := (f_{1_t}, \ldots, f_{m_t}) \in \Phi$. Dla każdego $t \in T$ niech

$$f^t := \{f_\tau : \tau = t+1, t+2, \ldots\}.$$

Wtedy f^t jest zbiorem multi-strategii stosowanych przez wszystkie pokolenia następujące po G_t. *Użyteczność* dla gracza $i_t \in G_t$ definiujemy jako:

$$\gamma_{i_t}(f^t)(s_t) := r_i(s_t, f_t(s_t)) + \alpha(s_t) E_{s_t}^{f^t} \left(\sum_{\tau=t+1}^{\infty} \beta^{\tau-t} r_i(s_\tau, f_\tau(s_\tau)) \right), \tag{2.1}$$

gdzie $E_{s_t}^{f^t}$ jest operatorem wartości oczekiwanej dla jedynej miary probabilistycznej $P_{s_t}^{f^t}$ (zdefiniowanej na zbiorze wszystkich możliwych historii gry startującej ze stanu s_t) wyznaczonej przez f^t i prawdopodobieństwo przejścia q zgodnie z Twierdzeniem Ionescu Tulcea (Proposition V.1.1 w [40]). Załóżmy, że każdy gracz $i_t \in G_t$ stosuje tą samą strategię $f_i \in \Phi_i$. W tym przypadku mówimy, że gracze z dynastii F_i używają *stacjonarnej strategii.* Zakładając, że wszystkie dynastie w każdym kroku używają tej samej strategii i kładąc $f := (f_1, \ldots, f_m)$ zauważamy, że multi-strategia

$$f^t := \{f_\tau = f : \tau = t+1, t+2, \ldots\},$$

jest taka sama dla wszystkich $t \in T$. Stąd można ją nazwać *stacjonarną multi-strategią* w grze międzygeneracyjnej. Zauważmy, że powyższa multi-strategia jest wyznaczona przez pewną funkcję $f \in \Phi$.

Spróbujemy przedstawić wyrażenie (2.1) w bardziej czytelnej postaci dla multi-strategii stacjonarnych. Dla każdej ograniczonej funkcji v i $f \in \Phi$ kładziemy:

$$\left[Q_f^1 v\right](s) := \int_S v(s') q(ds'|s, f(s)), \tag{2.2}$$

gdzie $s \in S$ i $f := (f_1, \ldots, f_m)$. Dla dowolnego $t \in T$ zdefiniujmy:

$$\left[Q_f^{t+1} v\right](s) := \left[Q_f^1 Q_f^t v\right](s). \tag{2.3}$$

Dla każdej stacjonarnej muli-strategii $f := (f_1, \ldots, f_m) \in \Phi$, $t \geq 2$ i $s_t \in S$ definiujemy

$$J_i(f)(s_t) := r_i(s_t, f_i(s_t)) + \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \beta^{\tau-t} \left[Q_f^{\tau-t} r_i(f_i)\right](s_t), \tag{2.4}$$

gdzie $r(f_i)(s) := r_i(s_t, f_i(s_t))$. Gdy wszystkie pokolenia używają stacjonarnej multi-strategii, z (2.1) i z (2.4) wynika, że funkcja użyteczności dla każdego gracza i_t z dynastii F_i jest taka sama i zadana jest wzorem:

$$\gamma_{i_t}(f)(s_t) := \gamma_{i_t}(f^t)(s_t) = r_i(s_t, f_i(s_t)) + \alpha(s_t)\beta \int_S J_i(f)(s_{t+1}) q(ds_{t+1}|s_t, f(s_t)).$$

Dla każdego $f \in \Phi$, $s \in S$ rozważamy jednokrokową grę $\Gamma(f, s)$ o sumie niezerowej, gdzie funkcja wypłaty dla gracza i jest postaci:

$$k_i(s, f)(x) := r_i(s, x) + \alpha(s)\beta \int_S J_i(f)(s')q(ds'|s, x), \tag{2.5}$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_m) \in A(s)$ jest multi-strategią m graczy.

Definicja 1 *$f^* \in \Phi$ jest stacjonarną równowagą doskonałą w grze międzygereracyjnej jeśli dla każdego $s \in S$, $f^*(s) \in A(s)$ jest czystą równowagą Nasha w grze $\Gamma(f^*, s)$.*

Wprowadźmy teraz podstawowe założenia:

A1 Dla każdego $i \in M$ zbiór akcji jest postaci:

$$A_i(s) := [0, a_i(s)],$$

gdzie funkcje a_i są nieujemne, niemalejące i ciągłe oraz dla każdego $s \in S$ spełniają nierówność:

$$a_1(s) + \ldots + a_m(s) \le s.$$

R1 Dla każdego $i \in M$, oraz $x := (x_1, \ldots, x_m) \in A(s)$, funkcje bieżącej użyteczności są postaci:

$$r_i(s, x) := u_i(x_i).$$

Zakładamy ponadto, że funkcje u_i są ściśle wklęsłe, rosnące i dwukrotnie różniczkowalne, przy czym $u_i(0) = 0$.

P1 Prawdopodobieństwo przejśca q jest następującej postaci: $q(\{0\}|0, (0, \ldots, 0)) = 1$, oraz gdy $s > 0$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in A(s)$,

$$q(\cdot|s, x) = g\left(s - \sum_{j=1}^{m} x_j\right)\mu(\cdot) + \left(1 - g\left(s - \sum_{j=1}^{m} x_j\right)\right)\nu(\cdot), \tag{2.6}$$

gdzie $g : S \to [0, 1]$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną, ściśle wklęsłą i rosnącą.

Uwaga 1 Z założenia **P1** wynika, że dla każdego $s_t \in S$, $x_t := (x_{1_t}, x_{2_t}, \ldots, x_{m_t}) \in A(s_t)$, rozkład prawdopodobieństwa następnego stanu $q(\cdot|s_t, x_t)$ zależy od poziomu łącznej inwestycji

$$I(s_t, x_t) = s_t - \sum_{i=1}^{m} x_{i_t}.$$

Uwaga 2 Czasami zakłada się, że miara μ we wzorze (2.6) stochastycznie dominuje miarę ν. Oznacza to, że dla każdej funkcji niemalejącej zachodzi nierówność

$$\int_S v(s')\mu(ds') \geq \int_S v(s')\nu(ds').$$

Wtedy zwiększenie poziomu łącznej inwestycji w pokoleniu G_t powoduje, że zwiększa się także oczekiwany stan zasobów w następnym pokoleniu. To założenie stosowano między innymi w [18, 43], oraz w Rozdziale 4 niniejszej pracy.

Uwaga 3 Przedstawiony model można zinterpretować następująco: S jest zbiorem wspólnych zasobów graczy, które mogą być przez nich wykorzystywane do konsumpcji, lub inwestowania. Zbiory $A_i(s)$ określają granice konsumpcji dla gracza $i_t \in G_t$ przy stanie s. Warto zwrócić uwagę, że bieżąca użyteczność gracza i_t zależy wyłącznie od jego własnej konsumpcji. Przejście ze stanu s_t do stanu s_{t+1} odbywa się zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa opisanym za pomocą formuły (2.6). Prawdopodobieństwo przejścia zależy od poziomu łącznej inwestycji wszystkich graczy z pokolenia G_t, przez którą należy rozumieć $I(s_t, x_t)$.

Uwaga 4 Koncepcja równowagi doskonałej przedstawionej w Definicji 2.1 pochodzi z pracy Alj i Haurie'go [1], gdzie rozpatrywano gry o skończonych zbiorach stanów i akcji, bez szczególnej interpretacji ekonomicznej. Alj i Haurie uogólnili pojęcie równowagi w mode-lu wielogeneracyjnym wprowadzonym do literatury ekonomicznej przez Phelpsa i Pollaka [48], którzy zakładali, że każda generacja składa się z jednego reprezentanta ($m = 1$) i rozpatrywali model z deterministyczną funkcją przejścia. Wersję stochastyczną modelu Phelpsa i Pollaka studiował Amir [4], po czym w miarę ogólny rezultat w tym zakresie podał Nowak [43]. Niniejsza praca stanowi rozszerzenie wyników Amira i Nowaka [4, 43], polegające na tym, że użyteczność przedstawicieli generacji G_t uwzględnia konsumpcję wszystkich następnych pokoleń.

Uwaga 5 Definicja 2.1 wydaje się być nieco skomplikowana. Łatwiej zrozumieć problem w niej poruszany przyjmując $m = 1$. W takim przypadku chodzi o znalezienie polityki, która stanowi najlepszą odpowiedź dla każdej geneacji, gdy wszyscy stosują stałą regułę konsumpcji. Z matematycznego punktu widzenia chodzi o znalezienie punktu stałego pewnego odwzorowania określonej przestrzeni funkcyjnej w siebie, dającego równowagę między generacjami, której nikomu nie opłaca się zmienić (zaburzyć).

Uwaga 6 Przedstawiony wyżej model może być inaczej interpretowany. Możemy przyjąć, że $i_t = i$ dla każdego t, czyli cała dynastia jest w istocie tym samym graczem. W tym przypadku mamy na uwadze m graczy, których użyteczności ulegają zmianie w czasie. Użyteczność gracza i na początku okresu t wyrażona wzorem W_{i_t} uwzględnia fakt, że zmienia swój punkt widzenia na przyszłe poziomy konsumpcji przez uwzględnienie współczynnika $\alpha(s_t)$. Tak może się dziać na początku każdego okresu. Mamy wówczas uogólnienie standardowego modelu z czynnikiem dyskonta β. Czasami w litera-turze i_t nazywany jest sobowtórem gracza i o numerze t (self t). Zmieniając swoje spojrzenie na przyszłość gracz i modyfikuje klasyczną użyteczność dyskont znaną na początku każdego okresu. Czasami pojawia się sytuacja, że $\alpha(s_t) < 1$, co oznacza, że gracz zaczyna mniej myśleć o przyszłości, niż mu się wcześniej wydawało. Tego typu interpretacja jest przyjęta w pracy [26]. Jeśli $\alpha(\cdot) = 1$, to model o którym piszemy redukuje się do do standardowej gry stochastycznej z czynnikiem dyskonta β, w której użyteczności w graczy nie zmieniają się w czasie. W Rozdziałach 3, 4 i 5 będziemy analizowali grę z $\alpha = 1$, która ma standardową interpretację.

W niniejszym rozdziale zmierzamy do udowodnienia następującego rezultatu.

Twierdzenie 1 *Każda wielogeneracyjna gra eksploatacji zasobów z nieskończonym horyzontem spełniająca założenia **A1**, **R1** i **P1** posiada stacjonarną równowagę doskonałą.*

Uwaga 7 W przypadku $\alpha = 1$ twierdzenie 1 przynosi nowy rezultat o istnieniu stacjonarnej równowagi Nasha w grze stochastycznej z continum stanów.

2.2 Jednoznaczność równowagi Nasha w grze pomocniczej

Ten podrozdział ma charakter pomocniczy. Użyjemy następujących oznaczeń: jeśli $(x_1, \ldots, x_k) \in R^k$, wtedy

$$\bar{x} := \sum_{j=1}^{k} x_j, \quad \text{oraz} \quad \bar{x}_{-i} = \sum_{j \neq i}^{m} x_j.$$

Niech $d = (d_1, \ldots, d_k)$, $d_i > 0$. Ponadto niech $U_i : [0, d_i] \to R_+$, $H_i : [0, \bar{d}] \to R$ będą ustalonymi funkcjami. Rozważmy pomocniczą jednokrokową k - osobową grę Γ_k dla której $i-$ ty gracz ($i = 1, \ldots, k$) wybiera strategię ze zbioru $[0, d_i]$. Funkcja wypłaty $i-$ tego gracza jest postaci

$$w_i(x) \quad = \quad U_i(x_i) + c_i H_i(\bar{x}),$$

gdzie $x := (x_1, \ldots, x_k)$, $c_i > 0$. W niniejszym podrozdziale wprowadzono następujące założenie:

C: Funkcje U_i oraz H_i są ściśle wklęsłe i klasy C^2. Ponadto U_i jest rosnąca, natomiast H_i jest malejąca.

Zmierzamy do udowodnienia pomocniczego rezultatu:

Twierdzenie 2 *Przypuśćmy, że zachodzi warunek **C**. Wtedy gra Γ_k ma dokładnie jedną równowagę Nasha.*

Do udowodnienia powyższego rezultatu potrzebujemy kilku lematów. Niech $(R^k, \prec)$ będzie przestrzenią z następującą binarną relację $\prec$:

Definicja 2 *$x := (x_1, \ldots, x_k) \prec y = (y_1, \ldots, y_k)$ wtedy i tylko wtedy gdy:*

$$\bar{x}_{-i} \leq \bar{y}_{-i}$$

dla każdego $i = 1, \ldots, k$.

Lemat 1 *$(R^k, \prec)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym.*

Dowód Łatwo udowodnić, że relacja $\prec$ jest zwrotna i przechodnia. Wystarczy wykazać słabą asymetrię relacji. Niech $x \prec y$ oraz $y \prec x$. Wtedy dla dowolnego i mamy

$$\sum_{j \neq i} (x_j - y_j) = 0.$$

Łatwo zauważyć, że różnica wektorów $r := x - y$ spełnia układ Cramera $Ar = 0$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det(A) \neq 0$, więc $r = 0$, czyli $x = y$. $\square$

Definiujemy funkcję najlepszych odpowiedzi dla i - tego gracza jako

$$B_i(\bar{x}_{-i}) := \arg \max_{a \in [0, d_i]} \left\{ U_i(a) + c_i H_i(a + \bar{x}_{-i}) \right\}.$$

Dla każdego $x := (x_1, \ldots, x_k)$ niech

$$B(x) := (B_1(\bar{x}_{-1}), B_2(\bar{x}_{-2}), \ldots, B_k(\bar{x}_{-k})).$$

Z naszych założeń wynika, że $B(x)$ ma jeden element.

Lemat 2 *Funkcja $B : (R^k, \prec) \to (R^k, \prec)$ jest nierosnąca.*

Dowód Niech

$$\lambda_i(a,y) := U_i(a) + c_i H_i(a+y), \quad a \in [0,d_i], \quad y \in [0,\overline{d}_i]$$

oraz

$$\phi_i(y) := \text{argmax}_{a\in[0,d_i]}\lambda_i(a,y), \quad y \in [0,\overline{d}_i]. \tag{2.7}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial a \partial y} \le 0,$$

λ_i jest funkcją submodularną. Z Twierdzenia 6.1 w pracy Topkisa [60] lub ze strony 5-7 w książce Rossa [53] można wywnioskować, że ϕ_i is nierosnąca i ciągła. Stąd wynika, że $B : (R^k, \prec) \to (R^k, \le)$ is nierosnąca. Ponieważ dla x, $z \in R^k$, $x \le z$ pociąga za sobą $x \prec z$, funkcja $B : (R^k, \prec) \to (R^k, \prec)$ jest również nierosnąca. □

Lemat 3 *Jeśli x i z są równowagami Nasha w grze Γ_k oraz $x \prec z$, wtedy $x = z$.*

Dowód Niech x, z , będą równowagami w grze Γ_k, oraz $x \prec z$. Wtedy z Lematu 2 $z = B(z) \prec B(x) = x$. Stąd i z Lematu 1 wynika, że $x = z$.□

Lemat 4 *Niech $\xi : [0,b] \to R$ będzie funkcją ciągłą. Załóżmy, że istnieje przeliczalny i domknięty zbiór $Z \subset [0,b]$ taki, że $\xi'(y)$ istnieje i $\xi'(y) > -1$ dla $y \in [0,b] \setminus Z$. Jeśli $y_0 \in (0,b]$ i $y \in [0,y_0)$, wtedy*

$$\xi(y) < \xi(y_0) - (y - y_0), \tag{2.8}$$

oraz jeśli $y_0 \in [0,b)$ i $y \in (y_0,b]$ zachodzi

$$\xi(y) > \xi(y_0) - (y - y_0). \tag{2.9}$$

Dowód Definiujemy

$$p(y) := \xi(y) - \xi(y_0) + (y - y_0), \quad y \in [0,b].$$

Ta funkcja jest ciągła na $[0,b]$ i różniczkowalna w każdym punkcie $y \in [0,b] \setminus Z$. Ponadto $p'(y) = \xi'(y) + 1 > 0$ dla dowolnego $y \in [0,b] \setminus Z$, oraz p jest ciągła na $[0,b]$. Stąd wynika, że funkcja p jest ściśle rosnąca na $[0,b]$. Zatem jeśli $y_0 \in (0,b]$, oraz $y \in [0,y_0)$, wtedy $p(y) < p(y_0) = 0$, co pociąga za sobą nierówność (2.8). Jeśli $y_0 \in [0,b)$ oraz $y \in (y_0,b]$, wtedy $p(y) > p(y_0) = 0$, co pociąga za zobą (2.9). □

Lemat 5 *Funkcja ϕ_i zdefiniowana w (2.7) jest różniczkowalna w każdym punkcie $y \in [0,d_i] \setminus Z$, gdzie Z jest zbiorem przeliczalnym i domkniętym. Ponadto $\phi_i(y) > -1$ dla każdego $y \in [0,d_i] \setminus Z$.*

Dowód Definiujemy $\Delta_i := \{y \in [0, \overline{d}_i] : 0 < \phi_i(y) < d_i\}$. W dowodzie Lematu 2 wykazano, że ϕ_i jest funkcją ciągła i nierosnącą. Stąd, Δ_i jest przedziałem lub $\Delta_i = \emptyset$. Niech $D_i := \mathrm{Int}(\Delta_i)$. Gdyby $\Delta_i = \emptyset$, wtedy ϕ_i byłaby funkcją stałą na $[0, \overline{d}_i]$ i stąd zaszłoby $\phi_i'(y) = 0 > -1$ dla dowolnego $y \in [0, \overline{d}_i]$. Załóżmy więc, że $\Delta_i \neq \emptyset$. Niech $D_i = (\eta_1, \eta_2)$. Jeśli $\eta_1 > 0$, wtedy $\phi_i(y) = d_i$ dla każdego $y \in [0, \eta_1)$ i stąd $\phi_i'(y) = 0$ dla $y \in [0, \eta_1)$. Jeśli $\eta_2 < \overline{d}_i$, wtedy $\phi_i(y) = 0$ dla każdego $y \in (\eta_2, \overline{d}_i]$ i stąd $\phi_i'(y) = 0$ dla $y \in (\xi_2, \overline{d}_i]$. Zdefiniujmy $Z_0 := \{y \in (\eta_1, \eta_2) : u_i''(y) = 0\}$. Jest to zbiór przeliczalny i domknięty. Rozważmy dowolnie ustalony $y \in [0, \bar{d}_i] \setminus Z_0$. Z założenia **C**, $\phi_i(y)$ jest jedynym rozwiązaniem równania

$$U_i'(\phi_i(y)) + c_i H_i'(\phi_i(y) + y) = 0. \tag{2.10}$$

Z Twierdzenia o Funkcjach Uwikłanych i z (2.10) wnioskujemy, że ϕ_i jest funkcją różniczkowalną w każdym punkcie y oraz spełniona jest zależność

$$U_i''(\phi_i(y))\phi_i'(y) + c_i H_i''(\phi_i(y) + y)(\phi_i'(y) + 1) = 0. \tag{2.11}$$

Niech $Z = Z_0 \cup \{\eta_1, \eta_2\}$. Wtedy zbiór Z jest przeliczalny i domknięty. Z zależności (2.11) mamy

$$\phi_i'(y) = -\frac{c_i H_i''(\phi_i(y) + y)}{c_i H_i''(\phi_i(y) + y) + U_i''(\phi_i(y))} > -1,$$

dla każdego $y \in [0, \bar{d}_i] \setminus Z$, co kończy dowód. □

Dowód Twierdzenia 2 Zauważmy, że funkcja najlepszych odpowiedzi B_i dla gracza i ma postać $B_i(\overline{x}_i) = \phi_i(\overline{x}_i)$. Z Lematu 5, B_i spełnia założenia Lematu 4. Przypuśćmy, że Γ_k posiada dwie różne równowagi Nasha $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ oraz $z = (z_1, z_2, ..., z_k)$. Z Lematu 3 wynika, że muszą istnieć różne indeksy i oraz j takie, że $\overline{x}_i > \overline{z}_i$ i jednocześnie $\overline{x}_j < \overline{z}_j$. Z Lematu 4 otrzymujemy

$$B_i(\overline{x}_i) > z_i - (\overline{x}_i - \overline{z}_i) \quad \text{oraz} \quad B_j(\overline{x}_j) < z_j - (\overline{x}_j - \overline{z}_j).$$

oraz równoważnie

$$B_i(\overline{x}_i) - x_i > \overline{z} - \overline{x} \quad \text{oraz} \quad B_j(\overline{x}_j) - x_j < \overline{z} - \overline{x}.$$

Zatem

$$B_i(\overline{x}_i) - x_i > B_j(\overline{x}_j) - x_j,$$

co oznacza, że x nie jest punktem stałym B, a tym samym nie jest równowagą Nasha w grze Γ_k. Sprzeczność kończy dowód. □

Twierdzenie 2 można rozszerzyć na m osobową grę $\tilde{\Gamma}_m$ o wypłatach w postaci

$$\tilde{w_i}(x) = U_i(x_i) + c_i H_i(\bar{x}),$$

gdzie $x := (x_1, \ldots, x_m) \in R^m$, $x_i \in [0, d_i]$ oraz c_i jest właściwe dla $i = 1, \ldots, m$.

Twierdzenie 3 *Jeśli spełnione jest założenie **C**, wtedy gra $\tilde{\Gamma}_m$ ma dokładnie jedną równowagę Nasha.*

Dowód Niech $I := \{i : c_i \leq 0\}$. Bez straty ogólności można założyć, że $I \neq \emptyset$. Dla wszystkich $i \in I$ oraz $\overline{x}_i$, funkcja $\tilde{w}_i$ jest nierosnąca w x_i. Stąd dla każdego gracza $i \in I$ i $\overline{x}_i$, mamy

$$B_i(\overline{x}_i) = \text{argmax}_{x_i \in [0,d_i]}(U_i(x_i) + c_i \tilde{H}_i(x_i + \overline{x}_i)) = d_i.$$

Niech $x_i^* := d_i$ dla dowolnego $i \in I$. Jeśli $I = \{1, 2, ..., m\}$, wtedy $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*) = (d_1, d_2, ..., d_m)$ jest jedyną równowagą w grze $\tilde{\Gamma}_m$. Bez straty ogólności można założyć, że $I = \{k+1, ..., m\}$ z $1 \leq k \leq m-1$. Jeśli $k = 1$, wtedy jedyna równowaga Nasha jest w postaci $x^* = (x_1^*, d_2, ..., d_m)$ gdzie

$$x_1^* := \text{argmax}_{x_1 \in [0,d_1]}(U_1(x_1) + c_1 \tilde{H}_1(x_1 + \overline{d}_1)).$$

Przyjmijmy, że $2 \leq k \leq m-1$. Rozważmy $\tilde{\Gamma}_k$ z

$$\tilde{H}_i := H_i\left(\overline{x} + \sum_{j=k+1}^{m} d_j\right),$$

gdzie $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $c_i > 0$ dla każdego $i = 1, 2, ..., k$. Z Twierdzenia 2, gra $\tilde{\Gamma}_k$ ma jedyną równowagę Nasha nazywaną $(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*)$. Niech $x^* := (x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, d_{k+1}, ..., d_m)$. Wtedy x^* jest jedyną równowagą Nasha w grze $\tilde{\Gamma}_m$. $\square$

Uwaga 8 Twierdzenie 2 nie zachodzi, jeśli założymy, że funcje U_i są tylko wklęsłe. Niech $U_i(x_i) = x_i$, $c_i = 1/e$, oraz $H_i(x_1 + x_2) = 1 - e^{-(x_1+x_2)}$, $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$. Każda para (x_1^*, x_2^*) spełniająca równość $x_1^* + x_2^* = 1$ jest równowagą Nasha w tej grze.

Uwaga 9 Gdy założymy dodatkowo, że $U_i''(x) < 0$ dla każdego $x \in [0, d_i]$, twierdzenie 2 można udowodnić za pomocą mocniejszej wersji Twierdzenia Rosena [52, 27].

2.3 Istnienie równowagi Nasha w grze z nieskończonym horyzontem

Definiujemy

$$\zeta := \frac{\mu + \nu}{2}.$$

Strategia skorelowana jest to borelowskie prawdopodobieństwo przejścia $\psi(\cdot|\cdot)$ takie, że $\psi(A(s)|s) = 1$ dla każdego $s \in S$. Przez Ψ_ζ oznaczamy przestrzeń klas równoważności skorelowanych strategii, w której strategie w obrębie tej samej klasy są sobie równe ζ-prawie wszędzie. Każda funkcja $f \in \Phi$ może być traktowana jako element $\psi \in \Psi_\zeta$ taki, że $\psi(\{f(s)\}|s) = 1$ ζ-p.w.

Przez funkcję Carathéodory'ego na zbiorze C rozumiemy $w : C \to R$ taką, że $w(s,\cdot)$ jest ciągła na $A(s)$, $w(\cdot,a)$ jest funkcją mierzalną na S, oraz funkcja $s \to \max_{a\in A(s)} |w(s,a)|$ jest ζ - całkowalne na S. Ponieważ wszystkie zbiory $A(s)$ są zwarte, Ψ_ζ jest przestrzenią zwartą i metryzowalną w słabej* topologii. Szczegóły można znaleźć w pracach [7, 61]. W niniejszej pracy wykorzystamy fakt, że $\psi_n \to \psi$ w Ψ_ζ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej funkcji Carathéodory'ego w na C

$$\int_S \int_{A(s)} w(s,x)\psi_n(dx|s)\zeta(ds) \to \int_S \int_{A(s)} w(s,x)\psi(dx|s)\zeta(ds) \quad \text{gdy} \quad n \to \infty. \tag{2.12}$$

Lemat 6 *Jeśli $\psi_n \to \psi$ w Ψ_ζ, wtedy dla każdej funkcji Carathéodory'ego zbieżność w (2.12) zachodzi gdy ζ zastąpimy przez μ, lub ν.*

Dowód Łatwo zauważyć, że teza wynika z definicji ζ, oraz z faktu, że $\mu,\nu \ll \zeta$. □

Oznaczmy $L_\infty(\zeta) := L_\infty(S,\zeta)$ jako przestrzeń Banacha złożoną z funkcji ζ-istotnie ograniczonych o dziedzinie w zbiorze S i wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych. Niech dla $L_\infty(\zeta)$ będzie daną słaba* topologią $\sigma(L_\infty(\zeta), L_1(\zeta))$. Słaba gwiazdka zbieżność ciągu $\{v_n\}$ do $v \in L_\infty(\zeta)$ jest oznaczone przez $v_n \xrightarrow{*} v$ w $L_\infty(\zeta)$.

Dla każdej mierzalnej i ograniczonej funkcji $v : S \mapsto R$ i $\psi \in \Psi$, niech

$$[Q_\psi^{(1)}v](s) := \int_{A(s)} \int_S v(s')q(ds'|s,x)\psi(dx|s) \quad \text{oraz} \quad [Q_\psi^{(t+1)}v](s) := [Q_\psi^{(1)}Q_\psi^{(t)}v](s).$$

Lemat 7 *Załóżmy, że zachodzi **P1**. Niech $v_n \xrightarrow{*} v \in L_\infty(\zeta)$ oraz $\psi_n \to \psi$ w Ψ. Wtedy dla dowolnego $t \in T$, mamy $Q_{\psi_n}^{(t)}v_n \xrightarrow{*} Q_\psi^{(t)}v$ in $L_\infty(\zeta)$ przy $n \to \infty$.*

Dowód Niech $t = 1$. Zachodzi

$$Q_{\psi_n}^{(1)}v_n - Q_\psi^{(1)}v = (Q_{\psi_n}^{(1)}v - Q_\psi^{(1)}v) + (Q_{\psi_n}^{(1)}v_n - Q_{\psi_n}^{(1)}v). \tag{2.13}$$

Z definicji zbieżności ciągu ψ_n do ψ w przestrzenii Ψ_ζ wynika, że wyrażenie w pierwszym nawiasie z prawej strony równości (2.13) dąży do 0 ($n \to \infty$) w słabej* gwiazdka topologii na $L_\infty(\zeta)$. Zauważmy

$$|[Q_{\psi_n}^{(1)}(v_n - v)](s)| \le \left|\int_S (v_n(s') - v(s'))\mu(ds')\right| + \left|\int_S (v_n(s') - v(s'))\nu(ds')\right|.$$

Stąd i z faktu $\mu \ll \zeta$, oraz $\nu \ll \zeta$ wynika, że $[Q_{\psi_n}^{(1)}(v_n - v)](s)$ zbiega jednostajnie do zera w $s \in S$. Stąd $Q_{\psi_n}^{(1)}(v_n - v) \xrightarrow{*} 0$ w $L_\infty(\zeta)$. Więc lemat jest udowodniony dla $t = 1$. Dowód dla dowolnego $t \in T$ przebiega indukcyjnie. □

Dla każdego $\psi \in \Psi$, $k \ge 2$, i $s \in S$, definiujemy

$$J_i(\psi)(s) := u_i(\psi)(s) + \sum_{\tau=k+1}^{\infty} \beta^{\tau-k}[Q_\psi^{(\tau-k)}u_i(\psi)](s), \tag{2.14}$$

gdzie

$$u_i(\psi)(s) := \int_{A(s)} \tilde{u}_i(x)\psi(dx|s),$$

$x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in A(s)$ oraz $\tilde{u}_i(x) := u_i(x_i)$.

Lemat 8 *Jeśli spełnione są założenia **A1,R1** oraz **P1**, wtedy funkcje $\psi \mapsto \int_S J_i(\psi)(s)\mu(ds)$ oraz $\psi \mapsto \int_S J_i(\psi)(s)\nu(ds)$ są ciągłe na Ψ.*

Dowód Zauważmy, że szereg (2.14) jest jednostajnie zbieżny. Stąd teza wynika natychmiast z definicji zbieżności w Ψ, (2.14), oraz Lematów 6, 7. □

Dowód Twierdzenia 1 Dla każdego $\psi \in \Psi$, $s \in S$ definiujemy grę o sumie niezerowej $\Gamma(\psi, s)$ w której przestrzenią akcji jest $A(s)$ i dla dowolnego $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in A(s)$ funkcja użyteczności dla gracza i wynosi

$$k_i(s,\psi)(x) = u_i(x_i) + \beta\alpha(s)\int_S J_i(\psi)(s')q(ds'|s,x). \tag{2.15}$$

Jak zwykle niech $\overline{x} = \sum_{j=1}^m x_j$. Z **P1**, mamy

$$k_i(s,\psi)(x) = u_i(x_i) + \beta\alpha(s)[c_i(\psi) + d_i(\psi)g(s - \overline{x})], \tag{2.16}$$

gdzie

$$c_i(\psi) = \int_S J_i(\psi)(s')\nu(ds') \quad \text{oraz} \quad d_i(\psi) = \int_S J_i(\psi)(s')\mu(ds') - \int_S J_i(\psi)(s')\nu(ds').$$

Przy założeniach **R1** i **P1**, z Twierdzenia 3, oraz (2.16) wynika, że gra $\Gamma(\psi, s)$ ma jedyną równowagę Nasha, zwaną $f_\psi(s) \in A(s)$. Warunki ciągłości i jednoznaczność równowagi Nasha w $\Gamma(\psi, s)$ implikuje, że funkcja $s \mapsto f_\psi(s)$ jest ciągła.

Definiujemy $\mathcal{N} : \Psi \mapsto \Psi$ jako $\mathcal{N}(\psi) := [f_\psi]$, gdzie $[f_\psi]$ oznacza klasą funkcji $f \in \Phi$ takich, że $f = f_\psi$ ζ-p.w. Zauważmy, że jeśli $\psi_n \to \psi_0$ w Ψ (przy $n \to \infty$), wtedy (z Lematu 8) $c_i(\psi_n) \to c_i(\psi_0)$ oraz $d_i(\psi_n) \to d_i(\psi_0)$ dla wszystkich i. Z (2.16), mamy

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in A(s)} |k_i(s,\psi_n)(x) - k_i(s,\psi_0)(x)| = 0.$$

Powyższy fakt i jednoznaczność równowagi Nasha w grze $\Gamma(\psi, s)$ (dla wszystkich ψ i $s \in S$) (Twierdzenie 3) implikują, że $f_{\psi_n}(s) \to f_{\psi_0}(s)$ dla dowolnego $s \in S$ gdy $n \to \infty$. Z Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej wynika, że $[f_{\psi_n}] \to [f_{\psi_0}]$ w Ψ (ze słabą* topologią). Pokazano, że $\mathcal{N}$ jest funkcją ciągłą. Z Twierdzenia Schaudera-Tikhonov's o punkcie stałym (Rozdział II, Warga [61]), istnieje $\psi^* \in \Psi$ takie, że $\psi^* = \mathcal{N}(\psi^*)$. To oraz definicja $\mathcal{N}(\psi^*)$ implikuje istnienie zbioru borelowskiego $B_1 \subset S$ i pewnego $f^* \in \Phi$ takiego, że $f^*(s) = \psi^*(s)$ dla każdego $s \in B_1$ oraz $\zeta(B_1) = 1$. Ponadto wiemy, że $f^*(s)$ jest jedyną równowagą Nasha w grze $\Gamma(\psi^*, s)$ dla każdego $s \in B_1$. Niech $s \in S \setminus B_1$. Ponieważ μ, $\nu \ll \zeta$, mamy $\mu(S \setminus B_1) = 0$ i $\nu(S \setminus B_1) = 0$. Stąd wynika, że w obu grach $\Gamma(\psi^*, s)$ i $\Gamma(f^*, s)$ funkcje użyteczności są takie same dla każdego gracza $i \in M$ oraz dla dowolnego $s \in S$. Stąd $f^*(s)$ jest czystą równowagą Nasha w grze $\Gamma(f^*, s)$ dla dowolnego $s \in S$, co kończy dowód. □

2.4 Istnienie i jednoznaczność równowagi Nasha w grze ze skończonym horyzontem czasowym

Niech $n \geq 2$ skończonym horyzontem gry. Niech $T_n := \{1, 2, ..., n\}$. Niech $\{f_t\}_{t \in T_n}$ będzie ciągiem strategii każdego pokolenia w grze o skończonym horizoncie. Mamy $f_t = (f_{1_t}, f_{2_t}, ..., f_{m_t})$ oraz $f_t \in \Phi$. Niech

$$f^t := \{f_\tau : \tau = t, ..., n\}, \quad t \in T_n.$$

Dla wszystkich $t \leq n-1$, *funkcja użyteczności* dla gracza $i_t \in G_i$ jest zdefiniowana jako

$$\gamma_{n,i_t}(f^t)(s_t) := u_i(f_{i_t}(s_t)) + \alpha(s_t) E_{s_t}^{f^t} \left(\sum_{\tau=t+1}^{n} \beta^{\tau-t} u_i(f_{i_\tau}(s_\tau)) \right). \tag{2.17}$$

Jeśli $t = n$, wtedy

$$\gamma_{n,i_t}(f^t)(s_t) = \gamma_{n,i_n}(f^n)(s_n) := u_i(f_{i_n}(s_n)). \tag{2.18}$$

Z (2.17) oraz (2.18), można zauważyć (dla $t \leq n-1$), że

$$\gamma_{n,i_t}(f^t)(s_t) = u_i(f_{i_t})(s_t) + \alpha(s_t)\beta \int_S \gamma_{n-1,i_{t+1}}(f^{t+1})(s_{t+1}) q(ds_{t+1}|s_t, f_{i_t}(s_t)). \tag{2.19}$$

Dla dowolnych $t \leq n-1$, $f^{t+1} = \{f_{t+1}, ..., f_n\}$, oraz $s_t \in S$, oznaczmy $\Gamma(f^{t+1}, s_t)$ - grę o sumie niezerowej granej przez pokolenie G_t, z przestrzenią strategii $A(s_t)$ i funkcją użyteczności dla gracza $i_t \in G_t$

$$k_{i_t}(x) = k_{i_t}(f^{t+1}, s_t)(x) := u_i(x_{i_t}) + \alpha(s_t)\beta \int_S \gamma_{n,i_{t+1}}(f^{t+1})(s_{t+1}) q(ds_{t+1}|s_t, x), \tag{2.20}$$

gdzie $x = (x_{1_t}, x_{2_t}, ..., x_{m_t}) \in A(s_t)$ jest profil strategiczny dla pokolenia G_t. Równości (2.19), (2.17) umożliwiają zdefiniowanie równowagi doskonałej w grze ze skończonym horyzontem.

Definicja 3 *Niech $\tilde{f} := \{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, ..., \tilde{f}_n\}$, gdzie $\tilde{f}_t = (\tilde{f}_{1_t}, \tilde{f}_{2_t}, ..., \tilde{f}_{m_t}) \in \Phi$. Markowską równowagę doskonałą w międzygeneracyjnej grze o skończonym horyzoncie nazywamy ciąg $\tilde{f}$ taki, że*

$$\tilde{f}_{i_n}(s_n) = argmax_{a \in A_i(s_n)} u_i(a) \quad \text{dla każego} \quad s_n \in S, \quad i_n \in G_n, \tag{2.21}$$

i dla każdego $t \leq n-1$, $i_t \in G_t$, $s_t \in S$, $\tilde{f}_t(s_t)$ jest równowagą Nasha w grze $\Gamma(\tilde{f}^{t+1}, s_t)$.

Twierdzenie 4 *Przy założeniach **A1**, **R1** i **P1** gra międzygeneracyjna o skończonym horyzoncie ma jedyną równowagę doskonałą.*

Dowód Konstrukcaja równowagi doskonałej przebiega za pomocą indukcji wstecznej. Łatwo wykazać, że $\tilde{f}^n$ jest jednoznacznie wyznaczona w (2.21). Zauważmy, że funkcja użyteczności k_{i_t} dla gracza $i_t \in G_t$ zdefiniowana przez (2.20) jest ciągła na $A(s_t)$ ściśle wklęsła lub rosnąca względem x_{i_t} niezależnie od strategii pozostałych graczy. Funkcja wypłaty dana jest wzorem

$$k_{i_t}(x) = u_i(x_{i_t}) + \alpha(s_t)\beta h_{i_{t+1}}(s_t, x),$$

gdzie

$$\begin{aligned} h_{i_{t+1}}(s_t, x) &:= \int_S \gamma_{n,i_{t+1}}(\tilde{f}^{t+1})(s_{t+1})\nu(ds_{t+1}) \\ &+ \left(\int_S \gamma_{n,i_{t+1}}(\tilde{f}^{t+1})(s_{t+1})\mu(ds_{t+1}) - \int_S \gamma_{n,i_{t+1}}(\tilde{f}^{t+1})(s_{t+1})\nu(ds_{t+1})\right) g(s - \overline{x}). \end{aligned}$$

Jednoznaczność równowagi Nasha wynika z Twierdzenia 3 zastosowanej w każdej grze $\Gamma(\tilde{f}^{t+1}, s_t)$, $t \leq n-1$. □

Rozdział 3

Aproksymacja równowagi Nasha w grze symetrycznej eksploatacji zasobów

Rezultaty niniejszego rozdziału zostały opublikowane w pracy [8]. Jak już wspomniano w Uwadze 6, począwszy od tego rozdziału rozważamy standardową grę stochastyczną m - osobową, przyjmując $\alpha = 1$. Udowodniono, że w grze symetrycznej równowagi Nasha dla gier skończenie krokowych są zbieżne monotonicznie do równowagi w grze nieskończenie krokowej, gdy horyzont czasowy wzrasta. Podobna zbieżność zachodzi także dla wypłat Nasha.

Gdy f jest markowską strategią łączną dla graczy, wypłata dla gracza i w grze z nieskończonym horyzontem czasowym wyrażona jest wzorem

$$\gamma_i(f)(s) = E_s^f \left(\sum_{t=1}^{\infty} r_i(s_t, f_t(s_t)) \beta^{t-1} \right). \tag{3.1}$$

W przypadku gry n - krokowej wypłata dla i - tego gracza wynosi

$$\gamma_{n,i}(f)(s) = E_s^f \left(\sum_{t=1}^{n} r_i(s_t, f_t(s_t)) \beta^{t-1} \right). \tag{3.2}$$

W niniejszym rozdziale przyjmujemy następujące założenia:

A2 Zachodzi **A1** oraz dodatkowo $a_i(s) = a(s) \leq s/m$ dla każdego $i \in M$.

R2 Zachodzi **R1** i dodatkowo $u_i(s) = u(s)$ dla każdego $i \in M$.

P2 Prawdopodobieństwo przejśca q jest następującej postaci:

$$q(\cdot|s,x) = \sum_{j=1}^{L} g_j \left(s - \sum_{j=1}^{m} x_j \right) \mu_j(\cdot|s) + g_0 \left(s - \sum_{j=1}^{m} x_j \right) \delta_0(\cdot), \tag{3.3}$$

gdzie $L \in N$, dla $j = 1, \ldots, L$, $g_j : S \to [0,1]$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną, ściśle wklęsłą i rosnącą, $\mu_j(\cdot|\cdot)$ są pewnymi rozkładami prawdopodobieństw przejścia z S

do S, $\delta_0(\cdot)$ - delta Diraca skupiona w 0. Ponadto $g_0 : S \to [0,1]$, $g_0(0) = 1$ i spełniona jest równość

$$\sum_{j=0}^{L} g_j(\cdot) = 1.$$

Zatem mamy do czynienia z grą symetryczną, to znaczy, że zbiór akcji, oraz funkcja użyteczności są takie same dla wszystkich graczy. Udowodnienie głównych rezultatów poprzedzono analizą pomocniczej gry jednokrokowej.

3.1 Pomocnicza gra jednokrokowa

W tym podrozdziale rozpatrujemy pomocniczą symetryczną m-osobową grę, w której zbiór strategii dla graczy to $I = [0, d]$ gdy $d > 0$. Założono, że $U : I \to [0, \infty)$ jest jest funkcją ściśle wklęsłą i rosnącą taką, że $U(0) = 0$ oraz, że $H_k : [0, md] \to [0, \infty)$ są to funkcje ściśle wklęsłe i malejące ($k = 1, ..., L$). Ponadto u, h_k są dwukrotnie różniczkowalne. Niech G^c będzie grą symetryczną w której funkcja wypłaty jest

$$w_i^c(x) := U(x_i) + \sum_{k=1}^{L} c_k H_k \left(\sum_{t=1}^{m} x_t \right),$$

gdzie $x = (x_1, ..., x_m) \in I^m$, $c = (c_1, ..., c_L)$ spełniają warunek $c_k \geq 1$ dla wszystkich k. Niech $G = G^c$ oraz $w_i^c = w_i$ gdy $c_k = 1$ dla każdego k.

Przy powyższych założeniach gry G i G^c mają symetryczne rwnowagi Nasha, którą oznaczono przez $x^* = (a^*, ..., a^*)$ i odpowiednio przez $y^* = (b^*, ..., b^*)$.

Lemat 9 *Zachodzi*

$$b^* \leq a^* \quad \textit{oraz} \quad w_i(x^*) \leq w_i^c(y^*)$$

dla każdego gracza i.

Dowód *Krok 1.* Na początku pokażemy, że $b^* \leq a^*$. Definiujemy

$$w(a, t, c) := U(a) + \sum_{k=1}^{L} c_k H_k(a + (m-1)t)$$

gdzie a, $t \in I$, $c = (c_1, ..., c_L)$ i kładziemy $w(a, t) := w(a, t, c)$, gdy $c_k = 1$ dla wszystkich k. Niech $\varphi(t) := \arg\max_{a \in I} w(a, t)$. Mamy

$$\frac{\partial^2 w(a, t)}{\partial a \partial t} = (m-1) \sum_{k=1}^{L} H_k''(a + (m-1)t) \leq 0,$$

co oznacza, że w jest funkcją submodularną. Z Twierdzenia Topkisa w [60] lub książki Rossa [53], funkcja φ jest niemalejąca i ciągła. Zatem przecięcie wykresu funkcji φ z diagonalą na I^2 zawiera jeden punkt zwany (a^*, a^*). Zauważmy, że

$$w(a^*, a^*) = \max_{a \in I} w(a, a^*) = \max_{a \in I} \left[U(a) + \sum_{k=1}^{L} H_k(a + (m-1)a^*) \right]$$

co oznacza, że $(a^*, ..., a^*) \in I^m$ jest symetryczną równowagą Nasha w grze G.

Podobnie definiujemy $\varphi(t, c) := \arg\max_{a \in A} w(a, t, c)$. Zauważmy

$$\frac{\partial^2 w(a,t,c)}{\partial a \partial c_k} = H_k'(a + (m-1)t) \leq 0,$$

zatem $(a, c) \to w(a, t, c)$ jest funkcją submodularną przy każdym ustalonym t. Z Twierdzenia Topkisa [60] $\varphi(t, c)$ jest funkcją ciągłą i nierosnącą względem $c \in R^L$. (Oczywiście na R^L rozważamy porządek produktowy.) Ponieważ $c_j \geq 1$, dla dowolnego j, otrzymujemy

$$\varphi(t, c) \leq \varphi(t) \quad \text{dla dowolnego} \quad t \in I. \tag{3.4}$$

Dla ustalonego c możey zaobserwować, że wykres funkcji $t \to \varphi(t, c)$ przecina diagonalę w $[0, d]^2$ w dokładnie jednym punkcie nazywanym (b^*, b^*). Oczywiście, $(b^*, ..., b^*) \in [0, d]^m$ jest symmetryczną równowagą Nasha w grze G^c. Z (3.4) wynika, że $b^* \leq a^*$.

Krok 2. Niech $t^* := \arg\max_{t \in I} \kappa_c(t)$ gdzie

$$\kappa_c(t) := U(t) + \sum_{k=1}^{L} c_k H_k(mt). \tag{3.5}$$

(Oczywiście, κ_c jest funkcją ściśle wklęsłą.) Kładziemy $\kappa := \kappa_c$ gdy wszystkie współczynniki $c_k = 1$. Udowodnimy, że $t^* \leq b^*$. Przypuśćmy, że t^* jest rozwiązaniem równania

$$U'(t) + \sum_{k=1}^{L} m c_k H_k'(mt) = \kappa_c'(t) = 0.$$

Zauważmy

$$\lambda(t) := U'(t) + \sum_{k=1}^{L} c_k H_k'(mt) \geq U'(t) + \sum_{k=1}^{L} m c_k H_k'(mt) = \kappa_c'(t) \tag{3.6}$$

dla każdego $t \in I$. Załóżmy, że $\lambda(b^0) = 0$. Wtedy z (3.6) wynika, że $t^* \leq b^0$. Gdy $b^0 = b^*$ otrzyujemy natychmiast $t^* \leq b^*$. Zachodzi to, gdy $b^* \in (0, d)$. Gdy $b^* = d$, wtedy oczywiście $t^* \leq b^*$. Przypuśćmy, że $b^* = 0$. Wtedy z definicji t^* i założeń, że funkcje h_k są malejące oraz, że $(0, ..., 0) \in I^m$ jest równowagą Nasha otrzymujemy

$$U(0) + \sum_{k=1}^{L} c_k H_k(0) \geq U(t^*) + \sum_{k=1}^{L} c_k H_k(t^*) \geq U(t^*) + \sum_{k=1}^{L} c_k H_k(mt^*) \geq U(0) + \sum_{k=1}^{L} c_k H_k(0).$$

Ponieważ u jest ściśle wklęsła, podobnie jak funkcje H_k, a także stałe c_k są dodatnie otrzymujemy $t^* = 0$. Stąd $t^* = b^* = 0$.

Krok 3. Jeśli $\kappa_c'(t) < 0$ dla każdego $t \in (0, d)$, wtedy $t^* = 0 \leq b^*$.

Krok 4. Jeśli $\kappa_c'(t) > 0$ dla każdego $t \in (0, d)$, wtedy $t^* = d$.

Zauważmy, że

$$U'(t) + \sum_{k=1}^{L} c_k H_k'(mt) \geq \kappa_c'(t) > 0$$

dla wszystkich $t \in (0, d)$. Zatem otrzymujemy $b^* \in \{0, d\}$. Gdy $b^* = d$ mamy $t^* = b^*$. Przypuśćmy, że $b^* = 0$. Wtedy z założenia, że $(0, ..., 0) \in I^m$ jest równowagą Nasha i definicji t^*, otrzymujemy

$$U(0) + \sum_{k=1}^{L} c_k H_k(0) \geq U(d) + \sum_{k=1}^{L} c_k H_k(d) \geq U(d) + \sum_{k=1}^{L} c_k H_k(md) \geq U(0) + \sum_{k=1}^{L} c_k H_k(0).$$

To oznacza, że $\kappa_c(0) = \kappa_c(d) = \kappa_c(t^*)$ i przeczy założeniu, że κ_c jest ściśle wklęsła. Dowiedliśmy, że $t^* \leq b^* \leq a^*$.

Krok 5. Definiujemy $E := \{t \in I : \kappa_c(t) \geq \kappa(a^*)\}$. Widać, że E jest przedziałem oraz a^*, $t^* \in E$. Zatem $b^* \in E$. Mamy więc $w_i(x^*) \leq w_i^c(y^*)$ dla każdego gracza i. □

Z Lematu 9 i Twierdzenia 2 natychmiast otrzymujemy:

Lemat 10 *Gra G^c ma dokładnie jedną równowagę Nasha i jest ona symetryczna.*

3.2 Główne rezultaty

Niech $B_0(S)$ będzie przestrzenią wszystkich ograniczonych *nieujemnych* borelowskich funkcji $v : S \to R$ takich, że $v(0) = 0$. Przez $\bar{F}$ oznaczamy zbiór wszystkich multi - strategii $\tilde{f} = (f, f, ..., f) \in \Phi$. Zauważmy, że istnieje odwzorowanie typu 1-1 między $f \in F$ i $\tilde{f} \in \tilde{F}$. Zdefiniujemy dobrze znany operator w programowaniu dynamicznym odpowiednim dla tej gry. Niech $\tilde{f} \in \tilde{F}$, oraz $v \in B_0(S)$. Niech

$$(T_f v)(s) = u(f(s)) + \beta \int_S v(s') q(ds'|s, \tilde{f}(s)) \tag{3.7}$$

gdzie $\tilde{f}(s) = (f(s), ..., f(s)) \in A(s)$. Ponieważ $v(0) = 0$, z **P2**, wynika, że $T_f v \in B_0(S)$ oraz

$$(T_f v)(s) = u(f(s)) + \beta \sum_{j=1}^{L} \int_S v(s') \mu_j(ds'|s) g_j(s - m f(s)). \tag{3.8}$$

Dla każdego $v \in B_0(S)$ oraz $s \in S$, definiujemy grę symetryczną $\Gamma(v, s)$ z funkcją wypłaty dla gracza i postaci:

$$k_i(v, s, x) := u(x_i) + \beta \int_S v(s') q(ds'|s, x)$$

gdzie $x = (x_1, ..., x_m) \in A(s)$. Zauważmy, że dla każdego $v \in B_0(S)$ i dla dowolnego $s \in S_+$, mamy

$$k_i(v, s, x) = u(x_i) + \beta \int_{S_+} v(s') q(ds'|s, x). \tag{3.9}$$

Ponieważ $v \geq 0$, z (3.9), założenia **P2** i Lematu 9, wynika, że, dla każdego $s \in S$, ta gra ma (czystą) symetyczną równowagę Nasha $SNE\Gamma(v, s)$. Łatwo widać, że $SNE\Gamma(v, s) = (0, 0, ..., 0)$ dla $s = 0$.

Rozważmy najpierw grę o skończonym horyzoncie. Za pomocą indukcji wstecznej Rieder [51] otrzymał procedurę wyznaczania zrandomizowanej równowagi Nasha w każdej $n-$ krokowej grze. Przy naszych założeniach, jesteśmy w stanie otrzymać niezrandomizowaną równowagę i otrzymać dodatkowo monotoniczność dla równowagi Nasha i funkcji równowagi.

Niech n będzie horyzontem gry. Niech $f_1(s) := a(s)$ dla każdego $s \in S$. Wtedy

$$v_1(s) := \max_{a \in A(s)} u(a) = u(f_1(s))$$

dla każdego $s \in S$. Oczywiście $v_1 \in B_0(S)$. Jeśli $v_0(s) := 0$ dla każdego $s \in S$, wtedy $\tilde{f}_1(s) = SNE\Gamma(v_0, s)$. Innymi słowy, $\tilde{f}_1(s)$ jest symetryczną równowagę Nasha w grze jednokrokowej, natomiast v_1 jest funkcją równowagi dla wszystkich graczy oraz $v_1 = T_{f_1} v_0$. Używając Lematu 9, można zdefiniować $\tilde{f}_2, ..., \tilde{f}_n \in \tilde{F}$, a także $v_2, ..., v_n \in B_0(S)$ następująco

$$\tilde{f}_k(s) := SNE\Gamma(v_{k-1}, s) \quad \text{oraz} \quad v_k(s) := (T_{f_k} v_{k-1})(s) \tag{3.10}$$

dla $s \in S$ i $k = 2, ..., n$. Rozważmy n-krokową strategię Markowa $\pi_i^{(n)}$ zdefiniowaną jako

$$\pi_i^{(n)} = (f_1^*, f_2^*, ..., f_n^*) := (f_n, f_{n-1}, ..., f_1) \tag{3.11}$$

gdzie $f_k \in F$ odpowiada profilowi $\tilde{f}_k \in \tilde{F}$ $(k = 1, ..., n)$. (Łatwo widać $f_k^* = f_{n-k+1}$.)

Otrzymano następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5 *Każda n-krokowa gra stochastyczna spełniająca założenia* ***A2,R2, P2*** *i* ***L*** *posiada niezrandomizowaną Markowską równowagę Nasha* $\pi^{(n)} = (\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, ..., \pi_m^{(n)})$ *z* $\pi_i^{(n)}$ *zdefiniowaną w (3.10) i (3.11),* $i = 1, ..., m$. *Funkcja równowagi w grze n-krokowej dla* $i-$ *tego gracza jest* $v_n \in B_0(S)$ *(niezależnie od i). Ponadto mamy*

$$v_n(s) \geq v_{n-1}(s) \quad \textit{oraz} \quad f_n(s) \leq f_{n-1}(s) \tag{3.12}$$

dla każdego $s \in S$.

Dowód Stwierdzenie, że $\pi^{(n)}$ jest równowagą Nasha wynika z powyższej konstrukcji i równań Bellmanna dla programowania dynamicznego w grach o skończonym horyzoncie, [13, 14] i [53]. Należy udowodnić (3.12). Oczywiście, $f_k(0) = 0$ oraz $v_k(0) = 0$ dla dowolnego k, zatem (3.12) zachodzi dla $s = 0$. Ustalmy $s > 0$ oraz gracza i. Definiujemy

$$\eta(a) := u(a) + \beta \int_{S_+} v_1(s') q(ds'|s, a, \tilde{g}_{-i})$$

gdzie $\tilde{g} := \tilde{f}_2$. Z (3.7), (3.8) oraz definicji v_2 i $g = f_2$ mamy

$$v_2(s) = (T_g v_1)(s) = \max_{a \in A(s)} \eta(a). \tag{3.13}$$

Z założeń **R2** i **P2** mamy $\eta'(a) \leq u'(a)$ dla każdego $a \in A(s)$. To oraz (3.13) implikuje, że $f_2(s) = \arg\max_{a \in A(s)} \eta(a) \leq f_1(s)$. Stąd też $v_2(s) \geq v_1(s)$. Niech $v_{n-1}(s) \geq v_{n-2}(s)$ oraz

$f_{n-1}(s) \leq f_{n-2}(s)$ dla dowolnego $s \in S$ i dla pewnego n. Niech $s \in S_+$. Rozważmy grę G z podrozdziału 3.1, gdzie $U(x) = u(x)$ dla dowolnego $x \in A(s)$ oraz

$$H_k \left(\sum_{t=1}^{m} x_t \right) := g_k(s(x))\beta \int_{S_+} v_{n-2}(s')\mu_k(ds'|s),$$

gdzie $x = (x_1, ..., x_m) \in A(s)$. Następnie rozważmy grę G^c, w której

$$c_k H_k \left(\sum_{t=1}^{m} x_t \right) := g_k(s(x))\beta \int_{S_+} v_{n-1}(s')\mu_k(ds'|s)$$

z c_k zdefiniowanym jako:

$$c_k := \frac{\int_{S_+} v_{n-1}(s')\mu_k(ds'|s)}{\int_{S_+} v_{n-2}(s')\mu_k(ds'|s)}.$$

Z Lematu 9 otrzymujemy $v_n(s) \geq v_{n-1}(s)$ i $f_n(s) \leq f_{n-1}(s)$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 6 *Każda m - osobowa stochastyczna gra eksploatacji zasobów z nieskończonym horyzontem spełniająca założenia **A2,R2,P2,L** ma niezrandomizowaną stacjonarną i symetryczną równowagę Nasha $\tilde{f}^* \in \tilde{F}$. Ponadto dla każdego $s \in S$ mamy*

$$v^*(s) := \lim_{n\to\infty} v_n(s) = \gamma_i(\tilde{f}^*)(s) \quad \textit{oraz} \quad f^*(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s).$$

Dowód Granice v^* oraz f^* istnieją na mocy Twierdzenia 5. Oczywiście $v^*(0) = 0$ i $f^*(0) = 0$. Niech $s \in S_+$. Kładziemy $\phi^n(s) := (f_n(s), ..., f_n(s)) \in A(s)$. Z (3.7) oraz (3.8) mamy

$$\begin{aligned} v^*(s) &= \lim_{n\to\infty} v_n(s) = \lim_{n\to\infty} (T_{f_n} v_{n-1})(s) \\ &= u(f^*(s)) + \beta \int_{S_+} v^*(s')q(ds'|s, \tilde{f}^*(s)) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} v^*(s) &= \lim_{n\to\infty} \max_{a\in A(s)} \left[u(a) + \beta \int_{S_+} v_{n-1}(s')q(ds'|s, (a, \phi^n_{-i}) \right] \\ &= \max_{a\in A(s)} \left[u(a) + \beta \int_{S_+} v^*(s')q(ds'|s, (a, \tilde{f}^*_{-i}(s))) \right]. \end{aligned}$$

Zatem dla $s \in S_+$ mamy

$$\begin{aligned} v^*(s) &= u(f^*(s)) + \beta \int_S v^*(s')p(ds'|s, \tilde{f}^*(s)) \\ &= \max_{a\in A(s)} \left[u(a) + \beta \int_S v^*(s')p(ds'|s, (a, \tilde{f}^*_{-i}(s))) \right]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Oczywiście, (3.14) zachodzi dla $s = 0$ z $f^*(0) = 0$ oraz $v^*(0) = 0$. Z postaci równań Bellmana i strategii optymalnej dla programowania dyskontowanego opisanego w [14] lub w [13] można wywnioskować, że

$$v^*(s) = \gamma_i(\tilde{f}^*)(s) = \sup_{\pi_i \in \Pi_i} \gamma_i(\pi_i, \tilde{f}^*_{-i})(s)$$

dla dowolnego $s \in S$ oraz dowolnego gracza i, więc $\tilde{f}^*$ jest symmetryczną i stacjonarną równowagą Nasha. □

Niech

$$J_k(v)(s) := \int_{S_+} v(s')\mu_k(ds'|s)$$

dla $v \in B_0(S)$.

Twierdzenie 7 *Przypuśćmy, że spełnione są założenia* ***A2,R2, P2*** *i* ***L****. Ponadto* $S = [0, s_0]$*, funkcje* $s \to a(s)$ *oraz* $s \to J_k(v)(s)$ *są ciągłe dla dowolnego* k *i każdej funkcji ciągłej* $v \in B_0(S)$*. Wtedy granice*

$$v_n(s) \to v^*(s) \quad \textit{oraz} \quad f_n(s) \to f^*(s) \quad \textit{as} \quad n \to \infty$$

są jednostajne w $s \in S$*.*

Dowód Z Lematu 10 oraz (3.14) funkcje f^* i v^* są ciągłe. Z (3.10) oraz Lematu 10 wnioskujemy więc, że każde v_n oraz f_n są funkcjami ciągłymi. Zatem teza twierdzenia wynika z (3.12) oraz Twierdzenia Diniego. □

3.3 Przykład

W tej części znaleziono ϵ-równowagę w grze dwuosobowej. Niech $S = [0, 1]$, $A(s) = [0, s/2]$, $u(a) = 4a - 4a^2$ dla $s \in S$, $a \in A(s)$. Załóżmy, że prawdopodobieństwo przejścia p ma postać

$$q(\cdot|s, x) = g(s(x))\mu(\cdot) + [1 - g(s(x))]\delta_0(\cdot),$$

gdzie $x = (x_1, x_2) \in A(s) \times A(s)$, $s(x) = s - x_1 - x_2$ oraz $g(s(x)) = 2s(x) - s^2(x)$, μ jest miarą probabilistyczną na S mającą gęstość $\rho(s) = 2s$. Niech $\beta = 0.6$. Dla gry n - krokowej z $n = 7$, funkcje równowagi $v_1, ..., v_7$ i równowagi Nasha $\pi_i^{(7)} = (f_1^*, ..., f_7^*)$ są następujące: $f_7^*(s) = f_1(s) = s/2$ oraz $v_1(s) = -s^2 + 2s$, dla każdego $s \in S$, oraz $f^*_{(8-k)}(s) = f_k(s) = s/2$ dla $s \le s_k$, $v_k(s) = -s^2 + 2s$ dla $s \le s_k$, $k = 2, ..., 7$, gdzie funkcje f_k i wartości s_k są dane w poniższej tabeli.

k	$f_k(s)$	s_k
2	$0,1s+0,3$	$0,75$
3	$0,10278053624628s+0,29443892750745$	$0,74125$
4	$0,10304563274190s+0,29390873451620$	$0,74040937386917$
5	$0,10307183192095s+0,29385633615811$	$0,74032623479516$
6	$0,10307443003588s+0,29385113992824$	$0,74031798947798$
7	$0,10307468777241s+0,29385062445517$	$0,74031717152542$

k	$v_k(s)$
2	$-0,36s^2+1.44s+0.06$
3	$-0,36886679046082s^2+1,47546716184326s+0,04203283815674$
4	$-0,36970892125888s^2+1,47883568503552s+0,04034556722614$
5	$-0,36979211754163s^2+1,47916847016652s+0,04017906024316$
6	$-0,36980036763464s^2+1,47920147053855s+0,04016255050549$
7	$-0,36980118605213s^2+1,47920474420853s+0,04016091274062$

Mamy

$$\max_{s\in S}(v_7(s)-v_6(s))=\varepsilon:=0.00000081748762. \tag{3.15}$$

Niech $w:=v_6$ i $g^*:=f_7$. Wtedy

$$w(s)\le v_7(s)=(T_{g^*}w)(s)\quad \text{dla każdego}\quad s\in S. \tag{3.16}$$

Z programowania dynamicznego przedstawionego w literaturze [13, 14] oraz (3.16), wnioskujemy, że

$$w(s)\le \gamma_i(\bar{g}^*)(s)\le \sup_{\pi_i\in\Pi_i}\gamma_i(\pi_i,\bar{g}^*_{-i})(s). \tag{3.17}$$

Innymi słowy, z (3.15) mamy

$$\max_{a\in A(s)}[u(a)+\beta\int_S w(s')p(ds'|s,(a,\bar{g}^*_{-i}(s)))]=v_7(s)\le w(s)+\varepsilon\quad \text{dla każdego}\quad s\in S. \tag{3.18}$$

Z programowania dynamicznego [13, 14] i (3.18), otrzymujemy

$$\sup_{\pi_i\in\Pi_i}\gamma_i(\pi_i,\bar{g}^*_{-i})(s)\le w(s)+\frac{\varepsilon\|u\|}{1-\beta}=w(s)+\frac{5\varepsilon}{2}, \tag{3.19}$$

gdzie $s\in S$, $\|u\|=\max_{a\in[0,1/2]}u(a)=1$ oraz ε jest zadaną liczbą w (3.15). Z (3.17) i (3.19), $\bar{g}^*$ jest ϵ-równowagą z $\epsilon=2.5\varepsilon$.

Rozdział 4

Gra eksploatacji zasobów bez ograniczeń

Rezultaty niniejszego rozdziału zostały opublikowane w pracy [9]. Przedstawiony został model stochastycznej i symetrycznej gry m - osobowej, w której gracze nie mają ograniczeń co do planowania własnej konsumpcji. Celem tego rozdziału jest wykazanie, że równowagi Nasha w grze z ograniczeniami na konsumpcję dominują w sensie Pareto równowagę Nasha polegającą na całkowitej konsumpcji na początku gry. Rozpatrywany model spełnia dodatkowe założenia:

A3 Dla każdego $i \in M$ zbiór akcji jest postaci:

$$A_i(s) := [0, s].$$

R3 Dla każdego $i \in M$, oraz $x := (x_1, \ldots, x_m) \in A(s)$, funkcje bieżącej użyteczności są postaci:

$$r_i(s, x) := \begin{cases} u(x_i) & \text{gdy} \quad \sum\limits_{j=1}^{m} x_j \leq s, \\ u(s/m) & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Zakładamy ponadto, że funkcja u jest ściśle wklęsła, rosnąca i dwukrotnie różniczkowalna, oraz $u(0) = 0$.

P3 Spełnione jest założenie **P1** i dodatkowo miara probabilistyczna μ stochastycznie dominuje ν, czyli tak jak wspomniano w uwadze 2, dla każdej funkcji niemalejącej v spełniona jest nierówność

$$\int\limits_S v(s')\mu(ds') \geq \int\limits_S v(s')\nu(ds').$$

Uwaga 10 Gdy za miarę ν przyjmiemy δ_0, otrzymamy model opisywany w rozdziale 3. Zatem przedstawione prawdopodobieństwo przejścia ma bardziej ogólną postać.

Podobnie jak w Rozdziale 3 zakładamy, że gra jest standardową β - dyskontowaną grą stochastyczną ze skończonym lub nieskończonym horyzontem czasowym. Zatem wypłata dla gracza i jest w postaci (3.2) dla skończonego horyzontu lub (3.1) dla nieskończonego horyzontu.

4.1 Symetryczna równowaga Nasha w grze z ograniczeniami

W tym podrozdziale wprowadzono dodatkowe ograniczenia. Założono, że zbiór akcji dostępnych dla każdego gracza jest w postaci $A_i^c(s) = [0, s/m]$. Wtedy

$$A^c(s) := A_1^c(s) \times \ldots \times A_m^c(s).$$

Niech

$$C^c := \{(s,x) : s \in S, x \in A^c(s)\}.$$

Niech F^c będzie zbiorem wszystkich borelowskich funkcji $f : S \to R_+$ takich, że $f(s) \in A^c(s)$ dla dowolnego $s \in S$. Funkcja użyteczności dla każdego gracza jest postaci $r_i(s,x) = u(x_i)$. Dla dowolnej borelowskiej i ograniczonej funkcji $v : S \to R$ takiej, że $v(0) = 0$ można wyznaczyć pomocniczą symetryczną grę $G(v,s)$ z funkcją wypłaty

$$k_i(v,s,x) := U(x_i) + cH\left(s - \sum_{j=1}^{m} x_j\right), \tag{4.1}$$

gdzie

$$U(\cdot) := u(\cdot) + \beta \int_S v(s')\nu(ds'),$$

$$H(\cdot) := \beta \left(\int_S v(s')\mu(ds') - \int_S v(s')\nu(ds')\right) g(\cdot),$$

oraz

$$c := \int_S v(s')\mu(ds') - \int_S v(s')\nu(ds').$$

Z założenia **P1** wynika, funkcja $H(\cdot)$ jest wklęsła, rosnąca i dwukronie różniczkowalna.

Oznaczenie: Dla $s \in S$ i dowolnego $i = 1, \ldots, m$ niech $x \in A_i^c(s)$. Definiujemy $\tilde{x} := (x, x, \ldots, x) \in A^c(s)$.

Twierdzenie 8 *Każda skończenie krokowa gra stochastyczna z ograniczeniami spełniająca założenia **R3**, **P3** i **L** ma jedyną symetryczną równowagę Nasha. Ponadto funkcja równowagi jest niemalejąca względem stanu.*

Dowód Ponieważ $s = 0$ jest stanem absorbującym bez straty ogólności można założyć, że $s > 0$. Gra jednokrokowa ma tylko jedną symetryczną równowagę Nasha i jest to

$\pi^{(1)} := (f_1, \dots, f_m)$ gdzie $f_i(s) = s/m$ dla każdego gracza i. Funkcja równowagi jest taka sama dla wszystkich graczy i wynosi

$$v_1(s) := \max_{a \in A_i^c(s)} u(a) = u(s/m).$$

Z założenia **R3** jest to niemalejąca funkcja. Przez indukcję przypuśćmy, że teza twierdzenia zachodzi dla gry n - krokowej. Wystarczy zatem udowodnić tezę dla gry $(n+1)$ - krokowej. Niech $\pi^{(n)} := \left(\tilde{f}_n, \tilde{f}_{n-1}, \dots, \tilde{f}_1\right)$ będzie jedyną symetryczną równowagą Nasha w grze n - krokowej stosowaną począwszy od drugiego kroku. Przez v_n oznaczono odpowiednią funkcję użyteczności. Z założenia indukcyjnego wiemy, że v_n jest niemalejąca. Rozważmy grę $G(v_n, s)$. Funkcja użyteczności wynosi $k_i(v_n, s, \cdot)$. Z założenia indukcyjnego wynika, że parametr c we wzorze (4.1) jest nieujemny. Stąd i z Lematu (10) wynika, że istnieje jedyna symetryczna równowaga Nasha $\tilde{f}_{n+1}$ w grze $G(v_n, s)$. Gdy $s = 0$ $f_{n+1}(s) = s/m$. Z programowania dynamicznego stwierdzamy, że $\pi^{(n+1)} = \left(\tilde{f}_{n+1}, \pi^{(n)}\right)$ jest równowagą Nasha w grze $(n+1)$ - krokowej. Pozostało do pokazania, że funkcja $v_{n+1}(\cdot)$ jest niemalejąca. Do tego należy udowodnić, że funkcja $y^*_{n+1}(s) := s - (m-1)f^*_{n+1}(s)$ jest niemalejąca.

Niech $Y_i(s) := [\frac{s}{m}, \frac{s}{m-1}]$ dla każdego i oraz $s \in S$. Niech $Y(s) := Y_1(s) \times \cdots \times Y_m(s)$. Rozważmy grę pomocniczą $\bar{G}(v_n, s)$ gdzie funkcja użyteczności dla gracza i jest

$$\xi_i(s, y) := U\left(\frac{s - y_i}{m-1}\right) + cH\left(\frac{sm - \sigma(y)}{m-1}\right)$$

gdzie $y = (y_1, ..., y_m) \in Y(s)$. Zauważmy

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial s \partial y_i} \;=\; -\frac{1}{(m-1)^2} U''\left(\frac{s - y_i}{m-1}\right) - \frac{m}{(m-1)^2} cH''\left(\frac{sm - \sigma(y)}{m-1}\right) \geq 0.$$

Stąd ξ_i jest funkcją supermodularną na kracie $L := \{(s, y_i) : s \in S, y_i \in Y_i(s)\}$ z porządkiem produktowym, co wynika z wyników zaprezentowanych w pracach Rossa [53] i Topkisa [60]. Dalej z Topkisa w [60] funkcja najlepszych odpowiedzi dla gracza i zdefinowana jako

$$B_i(s, y_{-i}) \;:=\; \arg\max_{y_i \in Y_i(s)} \xi_i(s, y_{-i}, y_i)$$

jest niemalejąca na $s \in S$. Ponieważ

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial y_j \partial y_i} \;=\; \frac{1}{(m-1)^2} cH''\left(\frac{sm - \sigma(y)}{m-1}\right) \leq 0,$$

dla wszystkich $i \neq j$, $\xi_i(s, y)$ jest funkcją submodularną na kracie $Y(s)$, [53] i [60]. Znowu z Twierdzenia Topkisa funkcja najlepszych odpowiedzi dla gracza i dla ustalonego $s \in S$, jest niemalejąca w y_{-i}.

Niech $\tilde{y}^*(s) = (y^*(s), \dots, y^*(s))$ będzie jedyną symetryczną równowagą w $\bar{G}(v_n, s)$. Dla każdego $s > 0$ oraz gracza i, mamy $y^*(s) = B_i(s, \tilde{y}^*_{-i}(s))$. Pokażemy teraz, że y^* jest nierosnąca. Niech $s_1 < s_2$. Wtedy dla dowolnego i, mamy

$$0 \;=\; y^*(s_1) - B_i(s_1, \tilde{y}^*_{-i}(s_1)) \geq y^*(s_1) - B_i(s_2, \tilde{y}^*_{-i}(s_1)),$$

oraz

$$0 \;=\; y^*(s_2) - B_i(s_2, \tilde{y}^*_{-i}(s_2)).$$

Stąd

$$y^*(s_1) - B_i(s_2, \tilde{y}^*_{-i}(s_1)) \le y^*(s_2) - B_i(s_2, \tilde{y}^*_{-i}(s_2)). \tag{4.2}$$

Przypuśćmy, że $y^*(s_2) < y^*(s_1)$. Wtedy dla dowolnego i, $\tilde{y}^*_{-i}(s_2) < \tilde{y}^*_{-i}(s_1)$ względem porządku produktowego. Z monotoniczności B_i, wnioskujemy, że

$$B_i(s_2, \tilde{y}^*_{-i}(s_1)) - B_i(s_2, \tilde{y}^*_{-i}(s_2)) \le 0.$$

Stąd i z (4.2) dochodzimy do sprzeczności, że $y^*(s_1) < y^*(s_1)$. Zatem mamy $y^*(s_1) \le y^*(s_2)$.

Definiujemy

$$x_i^*(s) := x^*(s) := \frac{s - y^*(s)}{m-1}, \quad x^*(s) := (x_1^*(s), ..., x_m^*(s)). \tag{4.3}$$

Ponieważ $\tilde{y}^*(s)$ jest symetryczną równowagą Nasha w grze $\bar{G}(v_n, s)$, łatwo pokazać, że $\tilde{x}^*(s)$ jest równowagą w $G(v_n, s)$. Z jednoznaczności symetrycznej równowagi $G(v_n, s)$, (Lemat 10), $\tilde{x}^*(s) = \tilde{f}^*_{n+1}(s)$ dla każdego $s \in S$. Z (4.3) wynika, że $x^* = f^*_{n+1}$ jest funkcją niemalejącą w $s \in S$. W końcu dowodzimy, że v_{n+1} jest funkcją niemalejącą. Niech $s_1 \le s_2$. Mamy $f^*_{n+1}(s) = x^*(s)$ dla wszystkich s oraz ponieważ g niemalejące, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
v_{n+1}(s_1) &= \max_{x_i \in A_c(s_1)} \{U(x_i) + cg(s_1 - (m-1)x^*(s_1) - x_i)\} \\
&\le \max_{x_i \in A_c(s_2)} \{U(x_i) + cg\,(s_1 - (m-1)x^*(s_1) - x_i)\} \\
&\le \max_{x_i \in A_c(s_2)} \{U\,(x_i) + cg(s_2 - (m-1)x^*(s_2) - x_i)\} \\
&= v_{n+1}(s_2),
\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Rozważmy grę z nieskończonym horyzontem. Z Twierdzenia 1 w [10] istnieje stacjonarna symetryczna równowaga Nasha $\bar{f}^* = (f^*, ..., f^*)$, $f^* \in F_c$. Funkcja równowagi to v^*. Wiadomo, że $\bar{f}^*(s)$ jest jedyną równowagą Nasha w grze $G(v^*, s)$. Udowodnimy, że v^* jest niemalejąca.

Twierdzenie 9 *Załóżmy, że dyskontowana gra stochastyczna spełnia założenia **R3 P3** i **A3**. Wtedy funkcja równowagi v^* w grze stochastycznej z ograniczeniami i z nieskończonym horyzontem jest funkcją niemalejącą.*

Dowód Definiujemy

$$c := \int_S v^*(s')\mu(ds') - \int_S v^*(s')\nu(ds').$$

Jeśli $c \ge 0$, wtedy można powtórzyć rozumowanie z Twierdzenia 8 rozważając grę $G(v^*, s)$ i wtedy pokazujemy, że v^* nierosnąca. Przypuśćmy, że $c < 0$. Wtedy jedyna symmetryczna stacjonarna równowaga w $G(v^*, s)$ jest postaci $\bar{x}^*(s) = (s/m, ..., s/m)$. Stąd $v^*(s) = u(s/m)$ dla wszystkich $s \in S$. Ponieważ μ stochastycznie dominuje ν, zachodzi $c \ge 0$, co przeczy założeniu. Stąd $c \ge 0$ i dowód jest zakończony. □

4.2 Symetryczna równowaga Nasha w grze bez ograniczeń

W tym podrozdziale rozważamy grę, w której gracze mogą wybierać dowolnie duży poziom konsumpcji.

Twierdzenie 10 *Przypuśćmy, że zachodzą **R3** i **P3**. Niech $\pi_k^* = (\bar{f}_k^*, ..., \bar{f}_1^*)$ będzie symetryczną markowską równowagą Nasha w grze k - krokowej grze bez ograniczeń skonstruowanej w Twierdzeniu 8. Wtedy π_k^* jest równowagą Nasha w k-krokowej grze bez ograniczeń.*

Dowód Teza zachodzi dla $s = 0$ or $n = 1$. Niech $s > 0$ i załóżmy, że teza zachodzi dla $n \geq 1$. Rozważmy grę $(n+1)$ - krokową. Oznaczmy $\pi_{n+1}^* = (\bar{f}_{n+1}^*, ..., \bar{f}_1^*)$ symetryczną równowagę w tej grze skonstruowaną w Twierdzeniu 8 Z założenia indukcyjnego $\pi_n^* = (\bar{f}_n^*, ..., \bar{f}_1^*)$ jest symetryczną równowagą Nasha w n-krokowej podgrze bez ograniczeń startującej z drugiego stanu. Oznaczmy wspólną wypłatę równowagową dla wszystkich graczy przez v_n.

Oznaczmy

$$\bar{f}_{n+1}^*(s) = (f_{n+1}^*(s), ..., f_{n+1}^*(s)).$$

Niech $(\bar{f}_{n+1}^*)_{-i}(s)$ oznacza $\bar{f}_{n+1}^*(s)$ bez i - tej współrzędnej.

$$\varphi(x) := r(s,x) + \beta \int_S v_n(s') p(ds'|s, (\bar{f}_{n+1}^*)_{-i}(s), x), \quad x \in A(s) = [0,s]^m.$$

Używając definicję c oraz H, daną w dowodzie Twierdzenia 8, otrzymamy

$$\varphi(x) \;\; = \;\; u(x) + cH((m-1)x_{n+1}^*(s) - x)$$

jeśli $x \leq s-(m-1)f_{n+1}^*(s)$ oraz $\varphi(x) = u(s/m)$, w przeciwnym razie. Wystarczy pokazać, że

$$f_{n+1}^*(s) = \arg\max_{x \in A(s)} \varphi(s). \tag{4.4}$$

Z Twierdzenia 8 otrzymujemy $c \geq 0$. Z **R3** oraz **P3**, φ jest ściśle wklęsła na $I := \Big[0, s-(m-1)f_{n+1}^*(s)\Big]$. Wiemy, że

$$f_{n+1}^*(s) = \arg\max_{x \in [0,s/m]} \varphi(s). \tag{4.5}$$

Stąd $\varphi(f_{n+1}^*(s)) \geq \varphi(s/m)$. Przypuśćmy, że $x \notin I$ oraz $x \leq s$. Ponieważ $s/m \in I$, mamy

$$\begin{aligned} \varphi(f_{n+1}^*(s)) \;\; &\geq \;\; \varphi(s/m) \\ &= \;\; u(s/m) + cH((m-1)f_{n+1}^*(s) - s/m) \\ &\geq \;\; u(s/m) \\ &= \;\; \varphi(x). \end{aligned}$$

Przypuśćmy $f_{n+1}^*(s) = s/m$. Jeśli $x \in (s/m, s]$, wtedy $x \notin I$, oraz $\varphi(f_{n+1}^*(s)) \geq \varphi(x) = \varphi(s/m)$. Załóżmy, że $f_{n+1}^*(s) < s/m$. Ponieważ φ jest ściśle wklęsła na I oraz zachodzi (4.5), dochodzimy do wniosku, że $\varphi(f_{n+1}^*(s)) \geq \varphi(x)$ dla dowolnego $x \in I$. Pokazaliśmy, że zachodzi (4.4). □

Twierdzenie 11 *Załóżmy, że zachodzi **R3** i **P3**. Wtedy stacjonarna symetryczna równowaga Nasha $\bar{f}^*$ w grze z ograniczeniami jest też równowagą w grze bez ograniczeń.*

Dowód Dowód przebiega podobnie jak dowód Twierdzenia 10. Wystarczy skorzystać z Twierdzenia 8, z którego wynika, że v jest funkcją niemalejącą.□

Na koniec udowodnimy następujący rezutlat.

Twierdzenie 12 *Przy założeniach **R3** i **P3** mamy*

$$v_n(s) \geq u(s/m) \quad oraz \quad v^*(s) \geq u(s/m), \quad s \in S.$$

gdzie v_n (v^*) są wspólnymi wypłatami równowagowymi w grze n-krokowej (nieskończenie krokowej).

Dowód W grze jednokrokowej powyższe nierówności są widoczne, bo $v_1(s) = u(s/m)$, $s \in S$. Niech $n > 1$. Z Twierdzenia 8 i 10, mamy

$$\begin{aligned} v_n(s) &= k_i(s, v_{n-1}, \bar{f}_n^*(s)) \\ &\geq u(s/m) + \beta \int_S v_{n-1}(s') q(ds'|s, (\bar{f}_n^*)_{-i}(s), s/m) \\ &\geq u(s/m). \end{aligned}$$

Dla gry z nieskończonym horyzontem, z Twierdzenia 9 i 11 otrzymujemy

$$\begin{aligned} v^*(s) &= k_i(s, v, \bar{f}^*(s)) \\ &\geq u(s/m) + \beta \int_S v^*(s') q(ds'|s, \bar{f}_{-i}^*(s), s/m) \\ &\geq u(s/m) \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

4.3 Przykład

Rozważmy m - osobową grę stochastyczną z $S = [0,1], u(x) = \sqrt{x}, g(y) = \sqrt{y}, \rho_\mu(s) = 2\,s, \rho_\nu(s) = 26\,(1-s)^{25}$, gdzie ρ_μ oraz ρ_ν są gęstościami μ i odpowiednio ν. Niech $\pi_k^* = (\bar{f}_k, ..., \bar{f}_1^*)$ będzie symetryczną Markowską równowagą Nasha w grze k-krokowej. Odpowiednia użyteczność dla każdego gracza oznaczono przez v_k. Wtedy:

$$v_1(s) = \sqrt{s/m}, \quad s \in S,$$

oraz $v_{n+1}(0) = 0$ podczas gdy dla $s > 0$, mamy

$$v_{n+1}(s) = \sqrt{f_{n+1}^*(s)} + \beta\sqrt{s - m f_{n+1}^*(s)} \int_0^1 v_n(t)(\rho_\mu(t) - \rho_\nu(t))dt + \beta \int_0^1 v_n(t)\,\rho_\nu(t)\,dt.$$

Oczywiście, $f_1^*(s) = s/m$ i dla $n > 1$, f_n^* spełnia równość

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\beta \int_0^1 v_n(t)(\rho_\mu(t) - \rho_\nu(t))dt}{2\sqrt{s - mx}} = 0,$$

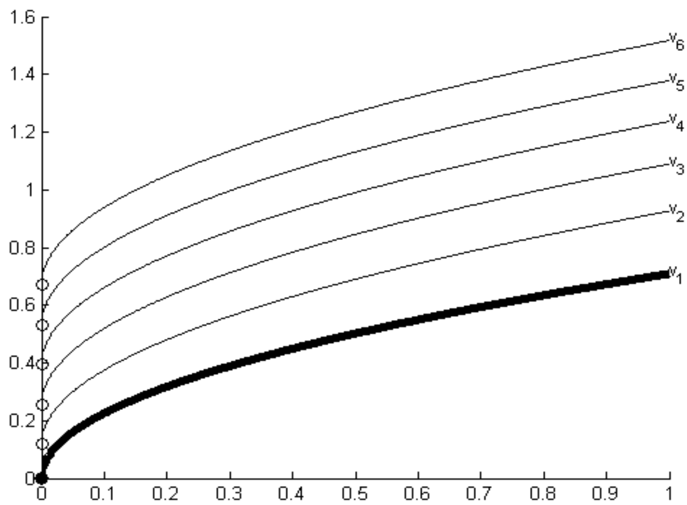
lub równoważnie,

$$\sqrt{s - mx} - \beta\sqrt{x} \int_0^1 v_n(t)(\rho_\mu(t) - \rho_\nu(t))dt \;\; = \;\; 0. \tag{4.6}$$

Z (4.6) otrzymujemy

$$x = f_{n+1}^*(s) = \frac{s}{\left(\beta \int_0^1 v_n(t)(\rho_\mu(t) - \rho_\nu(t))dt\right)^2 + m}. \tag{4.7}$$

Całka w (4.7) w każdym kroku była obliczana numerycznie metodą trapezów. Niech $m = 2$ oraz $\beta = 0.99$. Poniższy wykres pokazuje funkcje równowagi w grach z ograniczeniami dla różnych wartości kroków k ($s \geq 0$). Widać, że $v_k(s) > v_1(s)$ dla $k > 1$ oraz $s \in (0, 1]$.



Rysunek 4.1: Funkcje równowagi w grze skończenie krokowej.

Rozdział 5

Asymptotyczne własności równowag Nasha w dyskontowanych grach stochastycznych

W tym rozdziale rozpatrzono dwuosobową niesymetryczną β - dyskontowaną grę stochastyczną. Celem tego rozdziału jest zbadanie asymptotycznych własności równowag Nasha i funkcji równowag gdy $\beta \to 1$. Z tego względu użyteczności dla gracza i ($i = 1, 2$) zdefiniowane w (3.2) i (3.1) oznaczamy $\gamma_{i,n}^{\beta}(f)(s)$ i odpowiednio $\gamma_i^{\beta}(f)(s)$.

Ponadto gra spełnia założenie **R1** oraz

S S jest przedziałem ograniczonym. Niech $S = [0, s^*]$.

A4 Spełnione jest założenie **A1**. Ponadto dla $i = 1, 2$ funkcje a_i są lipschitzowskie ze stałą równą 1.

P4 Prawdopodobieństwo przejścia jest postaci (3.3). Założono dodatkowo, że dla $j = 1, \ldots, L$ miary $\mu_j(\cdot|s)$ nie zależą od s. Oznaczamy więc $\mu_j(\cdot) := \mu(\cdot|s)$ dla dowolnego $s \in S$.

5.1 Asymptotyczna równowaga w grze ze skończonym horyzontem czasowym

Niech

$$\mathcal{E} := \left\{ f : S \to S \, : 0 \leq \frac{f(s_1) - f(s_2)}{s_1 - s_2} \leq 1 \right\}.$$

Łatwo widać, że $\mathcal{E}$ jest zbiorem funkcji niemalejących ze stałą Lipschitza równą 1. W tym podrozdziale rozpatrzono grę ze skończonym horyzontem. Z tego względu można dopuścić również gry β - dyskontowane z $\beta = 1$. Wtedy wypłata dla gracza jest równa sumie dziennych wypłat.

Dla każdego $(v_1, v_2) \in B_0(S) \times B_0(S)$ ($B_0(S)$ jest zdefiniowane w podrozdziale 3.2), $s \in S$, $\beta \in (0, 1]$ wyznaczono grę $\Gamma(\beta, v_1, v_2, s)$, w której funkcja wypłaty dla każdego gracza i jest równa

$$k_i(\beta, v_i, s, x) = u_i(x_i) + \beta \int_{S_+} v_i(s')q(ds'|s, x), \tag{5.1}$$

gdzie $x = (x_1, x_2) \in A(s)$. Ponieważ $v_i \geq 0$, zachodzą założenia **R2** i **P4** oraz funkcja wypłaty jest w postaci (5.1), z wyników w artykule [46] można wywnioskować, że dla dowolnego $s \in S$, gra ma czystą równowagę Nasha $NE\Gamma(\beta, v_1, v_2, s)$.
Oczywiście $NE\Gamma(\beta, v_1, v_2, s) = (0, 0)$ dla $s = 0$.

Niech $\beta \in (0, 1]$ będzie czynnikiem dyskonta, natomiast n będzie horyzontem gry. Dla $i = 1, 2$ i $s \in S$ niech $f_{i,1}^{\beta}(s) := a_i(s)$, oraz

$$v_{i,1}^{\beta}(s) := \max_{a_i \in A_i(s)} u_i(a) = u_i(f_{i,1}^{\beta}(s)).$$

Oczywiście $v_{i,1}^{\beta} \in B_0(S)$. Jeśli $v_{i,0}^{\beta}(s) := 0$ dla dowolnego $s \in S$, wtedy

$$\bar{f}_1^{\beta} := (f_{1,1}^{\beta}(s), f_{2,1}^{\beta}(s)) = NE\Gamma(\beta, v_{1,0}^{\beta}, v_{2,0}^{\beta}, s).$$

Zatem $\bar{f}_1^{\beta}$ jest równowagą Nasha w grze jednokrokowej, $v_{i,1}^{\beta}$ jest funkcją równowagi Nasha dla gracza i oraz $v_{i,1}^{\beta} = k_i(\beta, v_{i,0}, s, (a_1(s), a_2(s)))$. Rozumując analogicznie jak w [46], można zdefinować $f_{i,2}^{\beta}, ..., f_{i,n}^{\beta} \in F_i$ oraz $v_{i,2}^{\beta}, ..., v_{i,n}^{\beta} \in B_0(S)$ w następujący sposób

$$\begin{aligned} \bar{f}_k^{\beta} := (f_{1,k}^{\beta}, f_{2,k}^{\beta}) &:= NE\Gamma(\beta, v_{1,k-1}^{\beta}, v_{2,k-1}^{\beta}, s) \quad \text{oraz} \\ v_{i,k}^{\beta}(s) &:= k_i(\beta, v_{i,k-1}^{\beta}(s), s, \bar{f}_k^{\beta}(s)), \end{aligned}$$

gdzie $s \in S$ oraz $k = 2, ..., n$. Na mocy Twierdzenia 2 wynika, że powyższe definicje są poprawne, ponieważ grę $\Gamma(\beta, v_1, v_2, s)$ można sprowadzić do gry z podrozdziału 2.2. Rozważmy strategie n - krokowe jako $\pi_i^{(n),\beta}$ dla gracza i zdefiniowanej jako

$$\pi_i^{(n),\beta} = (f_{i,1}^{\beta *}, f_{i,2}^{\beta *}, ..., f_{i,n}^{\beta *}) := (f_{i,n}^{\beta}, f_{i,n-1}^{\beta}, ..., f_{i,1}^{\beta}).$$

(Oczywiście $f_{i,k}^{\beta} = f_{i,n-k+1}^{\beta *}$.) Niech $\pi^{(n),\beta} := \left(\pi_1^{(n),\beta}, \pi_2^{(n),\beta}\right)$. Oznaczmy $f_{i,n} := f_{i,n}^{\beta}$, $v_{i,n} := v_{i,n}^{\beta}$, oraz $\pi^{(n)} := \left(\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}\right) := \left(\pi_1^{(n),\beta}, \pi_2^{(n),\beta}\right)$ gdy $\beta = 1$.

Z powyższej konstrukcji i równania Bellmana dla programowania dynamicznego w grze ze skończonym horyzoncie (na przykład [13, 14, 53] lub [53]) wynika, że $\pi^{(n),\beta}$ jest równowagą Nasha w grze n - krokowej β-dyskontowanej. Z Twierdzenia 14.4.1 w książce Amira [5] oraz Lematu 2.1 w [2] dla dowolnego $\beta \in (0, 1)$, zachodzi $f_{i,n}^{\beta}(\cdot) \in \mathcal{E}$. Ponadto $v_{i,n}^{\beta}(\cdot)$ są funkcjami niemalejącymi i ciągłymi.

Lemat 11 *Dla dowolnego $n \in N$, oraz $i = 1, 2$ zachodzi*

$$f_{i,n}^{\beta}(s) \to f_{i,n}(s) \quad \text{gdy } \beta \to 1,$$

oraz

$$v_{i,n}^{\beta}(s) \to v_{i,n}(s) \quad gdy\ \beta \to 1$$

jednostajnie względem $s \in S$.

Dowód Bez straty ogólności można założyć, że $s > 0$. Łatwo widać, że teza zachodzi dla $n = 1$. Załóżmy, że

$$f_{i,n}^{\beta}(s) \to f_{i,n}(s) \quad \text{gdy } \beta \to 1$$

oraz

$$v_{i,n}^{\beta}(s) \to v_{i,n}(s) \quad \text{gdy } \beta \to 1$$

jednostajnie względem $s \in S$ (dla $i = 1, 2$). Ustalmy $s \in S$. Z równań Bellmana dla gracza i otrzymujemy

$$\begin{aligned} v_{i,n+1}^{\beta}(s) &= u_i(f_{i,n+1}^{\beta}(s)) + \beta \sum_{j=1}^{L} \int_S v_{i,n}^{\beta}(s')\mu_j(ds')g_j\left(s - f_{1,n+1}^{\beta}(s) - f_{2,n+1}^{\beta}(s)\right) \\ &\geq u_i(x_i) + \beta \sum_{j=1}^{L} \int_S v_{i,n}^{\beta}(s')\mu_j(ds')g_j\left(s - x_i - f_{3-i,n+1}^{\beta}(s)\right), \end{aligned}$$

dla dowolnego $(x_1, x_2) \in A(s)$. Niech β_N będzie dowolnym ciągiem takim, że $\beta_N \to 1$ oraz $f_{i,n+1}^{\beta_N}(s)$ jest zbieżny dla $i = 1, 2$. Niech

$$x_i^*(s) \ := \ \lim_{N\to\infty} f_{i,n+1}^{\beta_N}(s).$$

Z założenia indukcyjnego i Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej (dla $j = 1, \ldots, L$) mamy

$$\int_S v_{i,n}(s')\mu_j(ds') = \lim_{N\to\infty} \int_S v_{i,n}^{\beta_N}(s')\mu_j(ds').$$

Stąd i z ciągłości funkcji u_i $(i = 1, 2)$ oraz g_j $(j = 1, \ldots, L)$ mamy (dla $(s, x_1, x_2) \in D$)

$$\begin{aligned} & u_i(x_i^*(s)) + \sum_{j=1}^{L} \int_S v_{i,n}(s')\mu_j(ds')g_j\left(s - x_1^*(s) - x_2^*(s)\right) \\ \geq\ & u_i(x_i) + \sum_{j=1}^{L} \int_S v_{i,n}(s')\mu_j(ds')g_j\left(s - x_i - x_{3-i}^*(s)\right), \end{aligned}$$

co oznacza, że $\left(\left(x_1^*, \pi_1^{(n)}\right), \left(x_2^*, \pi_2^{(n)}\right)\right)$ jest równowagą Nasha w grze $(n+1)$ - krokowej gdy $\beta = 1$. Z Twierdzenia 4 równowaga Nasha w tej grze jest jedyna. Stąd $f_{i,n+1}(s) = x_i^*(s) = \lim_{\beta \to 1} f_{i,n+1}^\beta(s)$. Z ciągłości k_i otrzymujemy

$$v_{i,n+1}(s) = \lim_{\beta \to 1} v_{i,n+1}^\beta(s).$$

Z Lematu 2.1 w [2] i Twierdzenia 14.4.1 w [5] funkcje $s \to f_{i,n+1}^\beta(s) \in \mathcal{E}$ i $s \to v_{i,n+1}^\beta(s)$ są niemalejące i ciągłe. Powtarzając rozumowanie z Lematu 14.5.3 w [5] otrzymujemy jednostajną zbieżność $f_{i,n+1}^\beta(\cdot)$ i $v_{i,n+1}^\beta(\cdot)$ dla $\beta \to 1$. $\square$

Lemat 12 *Dla dowolnego $n \in N$ niech*

$$\psi_i^{(n),\beta} := (\phi_i^{(n),\beta}, \phi_i^{(n-1),\beta}, ..., \phi_i^{(1),\beta})$$

będzie pewną rodziną strategii dla i - tego gracza zależną od $\beta \in (0,1]$. Załóżmy ponadto, że istnieje granica

$$\psi_i^{(n)} := \lim_{\beta \to 1} \psi_i^{(n),\beta}. \tag{5.2}$$

Jeśli zbieżność w (5.2) jest jednostajna, wtedy dla $i = 1, 2$ oraz $n \in N$ zachodzi

$$\lim_{\beta \to 1} \left(\sup_{s \in S} \left| \gamma_{n,i}^\beta(\psi_1^{(n),\beta}, \psi_2^{(n),\beta})(s) - \gamma_{n,i}^\beta(\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)})(s) \right| \right) = 0. \tag{5.3}$$

Dowód Bez straty ogólności można założyć, że $s > 0$. Wiadomo, że dla $n = 1$ teza twierdzenia jest prawdziwa. Przypuśćmy zatem, że teza (5.3) zachodzi dla pewnego ustalonego n. Zauważmy, że

$$\left| \gamma_{n+1,i}^\beta \left(\psi_1^{(n+1),\beta}, \psi_2^{(n+1),\beta} \right)(s) - \gamma_{n+1,i}^\beta \left(\psi_1^{(n+1)}, \psi_2^{(n+1)} \right)(s) \right| \le$$

$$\left| u_i(\phi_i^{(n+1),\beta}(s)) - u_i(\phi_i^{(n+1)}(s)) \right| + \beta \Delta_\beta(s), \tag{5.4}$$

gdzie

$$\Delta_\beta(s) = \left| \omega_1^\beta(s) - \omega_2^\beta(s) \right|,$$

$$\omega_1^\beta(s) = \int_S \gamma_{n,i}^\beta \left(\psi_1^{(n),\beta}, \psi_2^{(n),\beta} \right)(s') q(ds'|s, \phi_1^{(n+1),\beta}(s), \phi_2^{(n+1),\beta}(s))$$

oraz

$$\omega_2^\beta(s) = \int_S \gamma_{n,i}^\beta \left(\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)} \right)(s') q(ds'|s, \phi_1^{(n+1)}(s), \phi_2^{(n+1)}(s)).$$

Ze zbieżności jednostajnej w (5.2) oraz jednostajnej ciągłości funkcji u_i wynika, że pierwsza część (5.4) dąży jednostajnie do 0. Wystarczy teraz dowieść, że $\left\|\Delta^\beta(\cdot)\right\|_\infty$ dąży do 0, gdy $\beta \to 1$. Zauważmy, że

$$\omega_1^\beta(s) = \sum_{j=1}^{L} \left(\int_S \gamma_{n,i}^\beta \left(\psi_1^{(n),\beta}, \psi_2^{(n),\beta} \right)(s') \mu_j(ds') g_j \left(s - \phi_1^{(n+1),\beta}(s) - \phi_2^{(n+1),\beta}(s) \right) \right).$$

Ustalmy dowolnie $\epsilon > 0$. Ponieważ (z założeń lematu) $\phi_i^{(n+1),\beta}(\cdot)$ jest jednostajnie zbieżne, gdy $\beta \to 1$, oraz funkcje $g_j(\cdot)(j = 1, \ldots, L)$ są jednostajnie ciągłe, istnieje β_1 takie, że dla dowolnego $\beta > \beta_1$ zachodzi

$$\omega_1^\beta(s) \le \sum_{j=1}^{L} \left(\int_S \gamma_{n,i}^\beta \left(\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)}\right)(s')\mu_j(ds')g_j\left(s - \phi_1^{(n+1)}(s) - \phi_2^{(n+1)}(s)\right)\right) + \epsilon$$

$$= \omega_2^\beta(s) + \epsilon,$$

oraz

$$\omega_1^\beta(s) \ge \sum_{j=1}^{L} \left(\int_S \gamma_{n,i}^\beta \left(\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)}\right)(s')\mu_j(ds')g_j\left(s - \phi_1^{(n+1)}(s) - \phi_2^{(n+1)}(s)\right)\right) - \epsilon =$$

$$= \omega_2^\beta(s) - \epsilon.$$

Ponieważ ϵ jest dowolny i niezależny od s, $||\Delta_\beta(\cdot)||_\infty \to 0$, gdy $\beta \to 1$. □

Twierdzenie 13 *Dla dowolnego ε istnieje stała β_0 taka, że jeśli $\beta > \beta_0$, profil $\left(\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}\right)$ jest ε- równowagą w β - dyskontowanej grze n - krokowej.*

Dowód Z Lematu 11 $\pi^{(n),\beta}$ jest jednostajnie zbieżna do $\pi^{(n)}$ (gdy $\beta \to 1$) dla każdego $n \in N$. Łatwo zauważyć, że dla $n = 1$ i $s = 0$ teza Twierdzenia jest prawdziwa. Niech $s > 0$. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnego n. Stąd istnieje stała β_1 taka, że dla każdego $\beta > \beta_1$, $\pi^{(n)}$ jest $\varepsilon/4$ - równowagą w grze n - krokowej. Niech $\psi^{(n+1)} = \left(\phi^{(n+1)}, \phi^{(n)}, \ldots, \phi^{(1)}\right)$ będzie dowolną strategią Markowa dla gracza i w grze $(n+1)$ - krokowej. Z założenia **P3**, jednostajnej ciągłości u_i $(i = 1, 2)$, g_j $(j = 1, \ldots, L)$ wynika, że istnieje β_1 taka, że dla wszystkich $\beta > \beta_1$ zachodzi

$$\gamma_{n+1,i}^\beta \left(\pi_1^{(n+1)}, \pi_2^{(n+1)}\right)(s) \quad =$$

$$= u_i\left(f_{i,n+1}(s)\right) + \beta \int_S \gamma_{n,i}^\beta \left(\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}\right)(s')q\left(ds' \,|s, f_{1,n+1}(s), f_{2,n+1}(s)\right)$$

$$\ge \quad u_i\left(f_{i,n+1}^\beta(s)\right) + \beta \int_S \gamma_{n,i}^\beta \left(\pi_1^{(n,\beta)}, \pi_2^{(n,\beta)}\right)(s')q\left(ds' \middle| s, f_{3-i,n+1}^\beta(s), f_{i,n+1}^\beta(s)\right)$$

$$- \quad \varepsilon/4,$$

co wynika z Lematów 11 i 12. Dalej z równań Bellmana (Ross [53]) otrzymujemy

$$\ge \quad u_i\left(\phi^{(n+1)}(s)\right) + \beta \int_S \gamma_{n,i}^\beta \left(\pi_1^{(n,\beta)}, \pi_2^{(n,\beta)}\right)(s')q\left(ds' \middle| s, f_{3-i,n+1}^\beta(s), \phi^{(n+1)}(s)\right)$$

$$- \quad \varepsilon/4,$$

ponieważ profil $\pi^{(n+1),\beta}$ jest równowagą Nasha w grze $n+1$ krokowej. Z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\geq \quad u_i\left(\phi^{(n+1)}(s)\right) + \beta \int_S \gamma^{\beta}_{n,i}\left(\pi^{(n,\beta)}_{3-i}, \psi^{(n)}\right)(s')q\left(ds' \middle| s, f^{\beta}_{3-i,n+1}(s), \phi^{(n+1)}(s)\right)$$
$$- \quad \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Z Lematów 12, 11 wynika, że istnieje β_2 taka, że dla $\beta > \beta_2$, $s \in S$

$$\left|\gamma^{\beta}_{n,i}\left(\pi^{(n,\beta)}_{3-i}, \psi^{(n)}\right)(s) - \gamma^{\beta}_{n,i}\left(\pi^{(n)}_{3-i}, \psi^{(n)}\right)(s)\right| \leq \varepsilon/4.$$

Stąd gdy $\beta_3 := \max(\beta_1, \beta_2)$, wtedy dla dowolnego $\beta > \beta_3$ mamy

$$\gamma^{\beta}_{n+1,i}\left(\pi^{(n+1)}_1, \pi^{(n+1)}_2\right)(s) \geq$$

$$\geq \quad u_i\left(\phi^{(n+1)}(s)\right) + \beta \int_S \gamma^{\beta}_{n,i}\left(\pi^{(n)}_{3-i}, \psi^{(n)}\right)(s')q\left(ds' \middle| s, f^{\beta}_{3-i,n+1}(s), \phi^{(n+1)}(s)\right)$$
$$- \quad \frac{3}{4}\varepsilon.$$

Z Lematu 12 i jednostajnej ciągłości g_j istnieje β_4 taka, że jeśli $\beta > \beta_4$

$$\beta \int_S \gamma^{\beta}_{n,i}\left(\pi^{(n)}_{3-i}, \psi^{(n)}\right)(s')q\left(ds' \middle| s, f^{\beta}_{3-i,n+1}(s), \phi^{(n+1)}(s)\right) \geq$$

$$\beta \int_S \gamma^{\beta}_{n,i}\left(\pi^{(n)}_{3-i}, \psi^{(n)}\right)(s')q\left(ds' \middle| s, f_{3-i,n+1}(s), \phi^{(n+1)}(s)\right) - \varepsilon/4.$$

Do zakończenia dowodu wystarczy przyjąć $\beta_0 := \max(\beta_3, \beta_4)$. □

5.2 Asymptotyczna równowaga w grze z nieskończonym horyzontem

Dla gracza i niech $\mathcal{M}_i$ będzie zbiorem strategii markowskich.

Lemat 13 *Niech $\psi := (\psi_1, \psi_2)$ będzie dowolną multi-strategią Markowa. Wtedy*

$$\sup_{\psi \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2} \left|\gamma^{\beta}_{i,n}(\psi)(s) - \gamma^{\beta}_i(\psi)(s)\right| \to 0, \quad gdy \quad n \to \infty$$

jednostajnie względem $s \in S$, i $\beta \in (0,1)$.

Dowód Zauważmy, że

$$\gamma_i^\beta(\psi)(s) = \sum_{t=1}^{\infty} E_s^\psi \left(u_i \left(\psi_{i,t}(s_t) \right) \beta^{t-1} \right),$$

gdzie $\psi_{i,t}$ jest poziomem konsumpcji dla gracza i w kroku t jeśli gracz stosuje strategię ψ_i. Z założenia **P4** dla $t > 1$ zachodzi

$$\begin{aligned} z_t^\beta(s) &:= E_s^\psi \left(u_i(\psi_{i,t}(s_t))\beta^{t-1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{L} \beta^{t-1} \int_S u_i(\psi_{i,t}(s'))\mu_j(ds') E_s^\psi \left(g_j(s_{t-1} - \psi_{1,t}(s_{t-1}) - \psi_{2,t}(s_{t-1})) \right) \\ &\leq ||u||_\infty \sum_{j=1}^{L} E_s^\psi \left(g_j(s_{t-1} - \psi_{1,t}(s_{t-1}) - \psi_{2,t}(s_{t-1})) \right). \end{aligned}$$

Niech

$$h_t^{j,\beta}(s) = E_s^\psi \left(g_j(s_{t-1} - \psi_{1,t}(s_{t-1}) - \psi_{2,t}(s_{t-1})) \right).$$

Z założenia **P4** mamy

$$h_t^{j,\beta}(s) = \sum_{k=1}^{L} \int_S g_j(s' - \psi_{1,t}(s') - \psi_{2,t}(s'))\mu_k(ds') h_{t-1}^{k,\beta}(s). \tag{5.5}$$

Niech $h_t^\beta(s) := \max_{j=1,\dots,L} \left\{ h_t^{j,\beta}(s) \right\}$. Z (5.5) oraz **P4** mamy

$$h_t^\beta(s) \leq C * h_{t-1}^\beta(s) \leq C^{t-1} h_1^\beta(s) \leq C^{t-1},$$

gdzie

$$C = \sum_{k=1}^{L} \int_S g_j(s')\mu_k(ds').$$

Oczywiście $0 < C < 1$, oraz C jest stałą niezależną od s i β. Ponieważ

$$z_t^\beta(s) \leq ||u||_\infty lC^{t-1},$$

z kryterium Weierstrassa szereg $z_t^\beta(s)$ jest jednostajnie zbieżny w (s, β), co kończy dowód.
□

Lemat 14 *Dla dowolnego $\beta \in (0,1]$ niech $\left(\psi_1^\beta, \psi_2^\beta\right) \in \Phi$ będzie stacjonarną multi - strategią. Jeśli dla $i = 1,2$ zachodzi*

$$\lim_{\beta \to 1} \sup_{s \in S} \left| \psi_i^\beta(s) - \psi_i(s) \right| = 0,$$

wtedy

$$\lim_{\beta \to 1} \sup_{s \in S} \left| \gamma_i^\beta \left(\psi_1^\beta, \psi_2^\beta \right)(s) - \gamma_i^\beta \left(\psi_1, \psi_2 \right)(s) \right| = 0.$$

Dowód Niech $\epsilon > 0$. Z Lematu 13 dla wystarczająco dużych n mamy

$$\left|\gamma_i^\beta\left(\psi_1^\beta,\psi_2^\beta\right)(s)-\gamma_i^\beta\left(\psi_1,\psi_2\right)(s)\right|\leq\left|\gamma_{i,n}^\beta\left(\psi_1^\beta,\psi_2^\beta\right)(s)-\gamma_{i,n}^\beta\left(\psi_1,\psi_2\right)(s)\right|+\epsilon. \tag{5.6}$$

Z Lematu 12 po przejściu do granicy $\beta \to 1$, lewa strona wyrażenia (5.6) nie jest większa niż ϵ. □

Bazując na wynikach w pracy [46], oraz korzystając z twierdzenia 2, można uzyskać zbieżność równowag Nasha w grze ze skończonym horyzontem czasowym do stacjonarnej równowagi Nasha w grze z nieskończonym horyzontem czasowym.

Lemat 15 *Dla dowolnego $i = 1, 2$, oraz $\beta \in (0, 1)$ istnieje granica*

$$f_i^\beta(s) := \lim_{n\to\infty} f_{i,n}^\beta(s). \tag{5.7}$$

Powyższa zbieżność jest jednostajna względem $s \in S$. Ponadto stacjonarna multi-strategia $\pi^\beta := (\pi_1^\beta, \pi_2^\beta)$, $\pi_i^\beta := \left(f_i^\beta, f_i^\beta, \ldots\right)$ jest równowagą Nasha w β - dyskontowanej i nieskończenie wiele krokowej grze.

Dowód Ustalmy β. W pracy [46] została udowodniona zbieżność $v_{i,n}^\beta \to v_i^\beta$, gdy $n \to \infty$. Stąd i z twierdzenia 2 natychmiast otrzymujemy zbieżność w (5.7). Ponadto z [2] oraz [5] wynika, że każda funkcja $f_{i,n}^\beta(\cdot) \in \mathcal{E}$. Stąd natychmiast otrzymujemy jednostajną zbieżność ciągu $f_n^\beta(\cdot)$ dla dowolnego β. Z równań Bellmana można natychmiast zauważyć, że π^β jest stacjonarną równowagą Nasha w β - dyskontowanej grze z nieskończonym horyzontem. □

Lemat 16 *Dla $i = 1, 2$ istnieje jednostajna granica*

$$f_i^*(s) := \lim_{\beta\to\infty} f_i^\beta(s).$$

Dowód Niech β_1, oraz β_2 będą dowolne. Z lematu 15 wynika, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ mamy

$$\left|f_i^{\beta_1}(s) - f_i^{\beta_2}(s)\right| \leq \left|f_{i,n}^{\beta_1}(s) - f_{i,n}^{\beta_2}(s)\right| + \epsilon/2,$$

dla dowolnego $s \in S$ i wystarczająco dużych n. Z Lematu 11 istnieje stała β_0 taka, że jeśli $\beta_1, \beta_2 > \beta_0$ wtedy

$$\left|f_{i,n}^{\beta_1}(s) - f_{i,n}^{\beta_2}(s)\right| \leq \epsilon/2.$$

Ponieważ ϵ oraz $s \in S$ są dowolne, dowód jest skończony. □

Dla $i = 1, 2$ definiujemy $\pi_i^* := (f_i^*, f_i^*, \ldots)$.

Twierdzenie 14 *Dla dowolnego ε oraz $n \in \mathcal{E}$ istnieje β_0 taka, że jeśli $\beta > \beta_0$, stacjonarna multi - strategia (π_1^*, π_2^*) jest ε- równowagą w β - dyskontowanej grze z nieskończonym horyzontem.*

Dowód Niech $\epsilon > 0$. Dla dostatecznie dużych β mamy

$$\gamma_i^\beta (\pi_1^*, \pi_2^*)(s) \quad \geq \quad \gamma_i^\beta \left(\pi_1^\beta, \pi_2^\beta\right)(s) - \epsilon. \tag{5.8}$$

Powyższa nierówność zachodzi z Lematów 14 i 16. Niech (ψ_1, ψ_2) będzie dowolną multistrategią. Stąd i z (5.8) zachodzą nierówności

$$\begin{aligned}\gamma_1^\beta (\pi_1^*, \pi_2^*)(s) &\geq \gamma_1^\beta \left(\psi_1, \pi_2^\beta\right)(s) - \epsilon \\ \gamma_2^\beta (\pi_1^*, \pi_2^*)(s) &\geq \gamma_2^\beta \left(\pi_1^\beta, \psi_2\right)(s) - \epsilon.\end{aligned}$$

Z Lematu 13 dla wystarczająco dużych n mamy

$$\begin{aligned}\gamma_1^\beta (\pi_1^*, \pi_2^*)(s) &\geq \gamma_{1,n}^\beta \left(\psi_1, \pi_2^\beta\right)(s) - 2\epsilon \\ \gamma_2^\beta (\pi_1^*, \pi_2^*)(s) &\geq \gamma_{2,n}^\beta \left(\pi_1^\beta, \psi_2\right)(s) - 2\epsilon.\end{aligned}$$

Z Lematu 12 mamy

$$\begin{aligned}\gamma_1^\beta (\pi_1^*, \pi_2^*)(s) &\geq \gamma_{1,n}^\beta (\psi_1, \pi_2^*)(s) - 3\epsilon \\ \gamma_2^\beta (\pi_1^*, \pi_2^*)(s) &\geq \gamma_{2,n}^\beta (\pi_1^*, \psi_2)(s) - 3\epsilon.\end{aligned}$$

Z Lematu 13 można przejść do granicy $n \to \infty$, aby otrzymać

$$\begin{aligned}\gamma_1^\beta (\pi_1^*, \pi_2^*)(s) &\geq \gamma_1^\beta (\psi_1, \pi_2^*)(s) - 3\epsilon \\ \gamma_2^\beta (\pi_1^*, \pi_2^*)(s) &\geq \gamma_2^\beta (\pi_1^*, \psi_2)(s) - 3\epsilon.\end{aligned}$$

Ponieważ ϵ jest dowolny, można zdefiniować $\varepsilon = 3\epsilon$ aby otrzymać ε - równowagę. □

5.3 Przykład

Rozważmy grę dwuosobową w której $S = [0, 1]$, $a_1(s) = a_2(s) = s/2$, $u_1(s) = u_2(s) = \sqrt{s}$, natomiast prawdopodobieństwo przejścia jest w postaci

$$p(\cdot\, | s, x) = \sqrt{s - x_1 - x_2}\mu(\cdot) + \left(1 - \sqrt{s - x_1 - x_2}\right)\delta_0(\cdot),$$

gdzie μ jest rozkładem jednostajnym na $[0, 1]$. Z [8] oraz Twierdzenia 4 istnieje jedyna symetryczna równowaga Nasha w β dyskontowanej grze o skończonym horyzoncie. Zauważmy, że

$$f_{1,1}^\beta(s) = f_{2,1}^\beta(s) = s/2,$$

oraz

$$v_{1,1}^\beta(s) = v_{2,1}^\beta(s) = \sqrt{s/2}.$$

Dla $i = 1, 2$ oraz $n \geq 1$ otrzymujemy $\pi_i^{(n),\beta} = f_{i,n}^\beta$ dla

$$f_{i,n}^\beta(s) = \frac{s}{2 + c_n^2},$$

oraz funkcję równowagi

$$v_{i,n}^{\beta}(s) = \frac{1+\beta c_n^2}{\sqrt{c_n^2+2}}\sqrt{s},$$

gdy c_n zdefiniowano indukcyjnie: $c_1 = 0$ oraz dla $n \geq 1$

$$c_{n+1} = \frac{2}{3}\frac{1+\beta c_n^2}{\sqrt{c_n^2+2}}.$$

Jeśli weźmiemy granicę $n \to \infty$, otrzymamy

$$c^{\beta} = \sqrt{\frac{\sqrt{(18-8\beta)^2+16(9+4\beta^2)}-(18-8\beta)}{2(18-8\beta)}}.$$

Z Twierdzenia 6 oraz 7 natychmiast wnioskujemy, że

$$f_i^{\beta}(s) = \frac{s}{2+\left(c^{\beta}\right)^2},$$

oraz, że $\pi^{\beta} := \left(f_1^{\beta}, f_2^{\beta}\right)$ jest stacjonarną równowagą Nasha w β - dyskontowanej grze z nieskończonym horyzontem, a także

$$v_i^{\beta}(s) = \frac{1+\beta\left(c^{\beta}\right)^2}{\sqrt{\left(c^{\beta}\right)^2+2}}\sqrt{s}$$

jest funkcją równowagi. Biorąc granicę $\beta \to 1$ otrzymamy

$$f_i^{*}(s) = \frac{20}{30+\sqrt{192}}s,$$

oraz

$$v_i^{*}(s) = \frac{\sqrt{192}+10}{\sqrt{20\sqrt{192}+600}}\sqrt{s}.$$

Z Twierdzenia 14 wynika, że stacjonarna strategia $\pi^* = (f_1^*, f_2^*)$ jest ε równowagą β - dyskontowanej nieskończenie krokowej grze, gdy β jest wystarczająco duże.

Bibliografia

[1] Alj A., Haurie A. (1983). Dynamic equilibria in multigenerational stochastic games. *IEEE Transac- tions on Automatic Control*, AC-28:193-203

[2] Amir R. (1996). Continuous stochastic games of capital accumulation with convex transitions. *Games and Economic Behavior*, 15:111-131

[3] Amir R. (1996). Cournot Oligopoly and the Theory of Supermodular Games. *Games and Economic Behavior*, 17:132-148

[4] Amir R. (1996). Strategic international bequest with stochastic convex production. *Economic Theory*, 8:367-376

[5] Amir R. (2006). Dynamic Games in Economics. *Handbook on Optimal Growth* (R-A. Dana, C. Le Van, T. Mitra, K. Nishimura eds.), 1:443-477

[6] Arrow K.J. (1973). Rawls's principle of just saving. *Swedish Journal of Economics*, 74:323-335

[7] Balder E.J. (1980). An extension of usual model in statistical decision theory with application to stochastic optimal problems. *Journal of Optimal Multivariate Analysys*, 10:385-397

[8] Balbus Ł, Nowak A.S. (2004). Construction of Nash Equilibria in Symmetric Stochastic Games of Capital Accumulation. *Mathematical Methods of Operation Research*, 60:267-277

[9] Balbus Ł, Nowak A.S. (2005). Nash Equilibria in Symmetric Unconstrained Games. *International Games Theory Review*, Praca przyjęta do druku

[10] Balbus Ł, Nowak A.S. (2005). Perfect equilibria in multigenerational stochastic games of resource extraction. *Automatica* Praca przyjęta do druku

[11] Bernheim D., Ray D. (1983). Altruistic growth economies I: Existence of bequest equilibria. IMSSS D.P. 419 Stanford University

[12] Bernheim D., Ray D. (1987). Economic growth with intergenerational altruism. *Review of economic studies*, 54:227-242

[13] Bertsekas D.P., Shreve S.E. (1978). Stochastic Optimal Control: the Discrete-Time Case. Academic Press, New York 1978

[14] Blackwell D. (1965). Discounted dynamic programming. *The Annals of Mathematical Statistics*, 36: 226-235

[15] Brock W.A., Mirman L.J. (1973). Optimal economic growth and uncertainty: the no discounting case. *International Economic Review*, 14:560-573

[16] Cave J. (1987). The cold fish war: long term competition in dynamic game. *Rand Journal of Economics*, 18

[17] Cournot A. (1938). Researches into the Mathematical Principles of the theory of Wealth. Mc Millan, New York

[18] Curtat L.O. (1996). Markov equilibria in stochastic games with complementarities. *Games and Economic Behavior*, 17:177-199

[19] Dasgupta P. (1974). On some problems arising from Professor Rawls's conception of distributive justice. *Theory and Decision*, 4:325-344.

[20] Dutta P., Sundaram R. (1992). Markovian equilibrium in class of stochastic games: Existence theorems for discounted and undiscounted models. *Economic Theory*, 2:197-214

[21] Dutta P., Sundaram R. (1993). The tragedy of the commons?. *Economic Theory*, 3:413-426

[22] Fink A.M. (1964). Equilibrium points of stochastic noncooperative games. *J.Sci.Hiroshima Univ. Ser. A,* 28:89-93

[23] Fisher R., Mirman L. (1996). The complete fish wars: Biological and dynamic interactions. *Journal of Environmental Economics and Management*, 30:34-42

[24] Gabay D., Moulin H. (1980). On the uniqueness and stability of Nash equilibria in noncooperative games. *Applied Stochastic Control in Econometrics and Menagement Science*, (A.Bensoussan et al. eds.), 271-293, North-Holland

[25] Harris C. (1986). Consistent Markov plans. Mimeo, Oxford University

[26] Harris C., Laibson D. (2001). Dynamic choices of hiperbolic consumers. *Econometrica*, 69:935-957

[27] Haurie A., Krawczyk J.B. An Introduction to dynamic games

[28] Himmelberg C.J., Parthasarathy T., Raghavan T.E.S., Van Vleck F. (1976). Existence of p-equilibrium and optimal stationary strategies in stochastic games. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 60:245-251

[29] Lane J., Leininger W. (1984). Price-characterisation and Pareto-efficiency of game equilibrium-growth. *Journal of Economics*, 44:329-347

[30] Lane J., Leininger W. (1986). Differentable Nash equilibria in altruistic economies. *Journal of Economics*, 44:347-367

[31] Leininger W. (1986). The existence of perect equilibria in a model of growth with altruism between generations. *Review of Economics Studies*, 53:349-367

[32] Levhari D., Mirman L. (1980). The great fish war: Example using a dynamic Cournot Nash solution. *Bell Journal Economic*, 11:322-344

[33] Majumdar M.K., Sundaram R.K. (1988). Symmetric stochastic games of resource extraction: The existence of nonrandomized stationary equilibrium. *Stochastic Games and Related Topics*, (Ferguson et al. eds.), Kluwer Academic Publishing

[34] Maliar L., Maliar S. (2005). Solving the neoclasical growth model with quasi-geometric discounting: a grid based euler-Equation. *Computational Economics*, 26:163-172

[35] Mendelsohn R., Sobel M., (1981). Capital accumulation and the optimization of renewable resources. *Journal of Economic Theory*, 23:143-246

[36] Mertens J.F., Parthasarathy T. (1991). Non-zero sum stochastic games. *Stochastic games and related topics*, (T.E.S. Raghavan et al. eds.), Kluwer Academic Publishing

[37] Milgrom P., Roberts J. (1990). Rationalizability, learning, and equilibrium in games with strategic complementarities. *Econometrica*, 58:1255-1277

[38] Nash J.F. (1950). Equilibrium points in n - person games. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 36:48-49

[39] Nash J.F. (1951). Non cooperative games. *Ann. Math.*, 54:286-295

[40] Neveu J. (1965). Mathematical foundations of the calculus of probability. San Francisco: Holden-Day.

[41] Nowak A.S. (1985). Existence of equilibium stationary strategies in discounted non-cooperative stochastic games with uncountabe state space. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 45:591-602

[42] Nowak A.S. (2003). On a new class of nonzero-sum discounted stochastic games having stationary Nash equilibrium points. *International Journal of Game Theory*, 32: 121-132

[43] Nowak A.S. (2006). On perfect equilibria in stochastic models of growth with intergenerational altruism. *Economic Theory*, 28:73-83

[44] Nowak A.S. (2007). On Stochastic Games in Economics. *Mathematical Methods of Operations Research*, 66:513-530

[45] Nowak A.S., Altman E. (2002). ε - equilibria for stochastic games with uncountable state space and unbounded costs. *Society for industrial and Applied Mathematics*, 40:1821-1839

[46] Nowak A.S., Szajowski P. (2003). On Nash equilibria in stochastic games of capital accumulation. *Game Theory and Applications* (L.A. Petrosjan, V.V. Mazalov, Eds.), 9: 119-129

[47] Parthasarathy T., Sinha S. (1991). Egsistence of equilibrium in discounted noncooperative stochastic games with uncountable state space and state-independent transition. *International Journal Game Theory*, 32:121-132

[48] Phelps E.S, Pollak R.A. (1968). On Second-Best National Saving and Game-Equilibrium Growth. *The Review of Economic Studies*, 2:185-199

[49] Raghavan T.E.S., Tijs S.H., Vrieze O.J. (1985). On stochastic games with additive reward and transition structure. *Journal of Optimal Theory and Applications*, 47:451-464

[50] Rawls J. (1971). A theory of justice. Harvard University Press, Cambridge, MA

[51] Rieder U. (1979). Equilibrium plans for nonzero-sum Markov games. *Game Theory and Related Topics* (O. Moeschlin, D. Pallaschke, Eds.), pp.91-102 North Holland, Amsterdam

[52] Rosen J.B. (1965). Existence and uniquness for concave n-person games. *Econometrica*, 33:520-534

[53] Ross S. (1984). Introduction to Stochastic Dynamic Programming. Academic Press, New York

[54] Saez-Marti M., Weibull J.W. (2005). Discounting and altruism to future decision-makers. *Journal of Economic Theory*, 122:254-266

[55] Shapley L.S. (1953). Stochastic games. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 39: 1095-1100

[56] Smart D. (1974). Fixed-Point Theorems. Cambridge University Press

[57] Sobel M. (1982) Stochastic fishery game with myopic equilibria. *Essays in the Economics of Reneable Resources* (L. Mirman, D. Spulber eds.), North-Holland 259-268

[58] Sundaram R.K. (1989). Perfect equilibrium in a class of symmetric stochastic games. *Journal Economic Theory*, 47:153-177

[59] Szajowski P. (2006). Constructions of Nash equilibria in stochastic games of resource extraction with additive transition structure. *Mathematical Methods of Operations Research*, 63: 239-260

[60] Topkis D. (1978). Minimizing a submodular function on a lattice. *Operation Research*, 26:305-321

[61] Warga J. (1972). Optimal control of differential and functional equations. Academic Press, New York.

[62] Więcek P. (2003). Convex stochastic games of capital accumulation with nondivisible money unit. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 57:403-417

[63] Więcek P. (2003). Continous convex stochastic games of capital accumulation. *Annals of the International Society of Dynamic Games* , 7:111-125

[64] Whitt W. (1980). Reprezentation and approximation of noncooperative sequential games. *S.I.A.M. Journal of Control Opptimization*, 18:33-48