

**Sławomir Śmiech**

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

---

## ANALIZA STABILNOŚCI OCEN PARAMETRÓW MODELI PREDYKCYJNYCH DLA CEN ENERGII NA RYNKU DNIA NASTĘPNEGO<sup>1</sup>

---

**Streszczenie:** Celem pracy jest ocena wrażliwości wpływu długości próby i wartości odstających na parametry modeli predykcyjnych. Analiza była prowadzona na indeksie cen energii IRDN notowanym na Towarowej Giełdzie Energii SA. Biorąc pod uwagę charakterystyczne dla cen energii tzw. piki cenowe, zdecydowano się porównać wyniki badań dla modeli budowanych w sposób klasyczny oraz metodami odpornymi. Otrzymane rezultaty pokazały, że wzięcie ok. 600 obserwacji pozwala otrzymać stabilne oceny parametrów modeli i prognozy punktowe. Zmienność prognoz dla modeli estymowanych klasycznie i metodami odpornymi okazały się porównywalne. Różniły się natomiast między sobą poziomy wartości otrzymanych prognoz.

**Słowa kluczowe:** prognozowanie cen energii, metody odporne, piki cenowe, modele autoregresyjne.

### 1. Wstęp

Specyfika handlu energią elektryczną wynika z tego, że jest ona towarem, którego nie można efektywnie przechowywać. Cała wyprodukowana energia jest natychmiast przesyłana do odbiorcy, a niedobory energii nie mogą być zaspokojone zapasami magazynowymi. Wystąpienie nieoczekiwanej nadwyżki popytu nad podażą (np. spowodowanej awarią albo gwałtownym załamaniem pogody) powoduje, że ceny energii na rynku spot gwałtownie rosną, tworząc tzw. piki cenowe, a skala zmian jest wielokrotnie wyższa w porównaniu z innymi instrumentami finansowymi. Występowanie ekstremalnych obserwacji w szeregach czasowych powoduje komplikacje podczas budowania modeli predykcyjnych.

Inną charakterystyczną cechą szeregów cen energii jest nakładanie się sezonowości godzinowej, dziennej i miesięcznej. Do modelowania i prognozowania cen energii wykorzystywana jest szeroka klasa modeli. Wśród nich znajdziemy metody liniowe (AR, ARX) i nieliniowe modele szeregów czasowych [Misiorek 2006], me-

---

<sup>1</sup> Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/03/B/HS4/01134.

tody wykorzystujące analizę harmoniczną [Geman, Roncoroni 2006] czy modele przełącznikowe [Janczura, Weron 2010]. Przegląd tych ostatnich w kontekście występowania pików cenowych znajdziemy w pracy [Janczura i in. 2012]. Część badaczy opowiada się za ujęciem obserwacji odstających w próbie, na podstawie której szacuje się model. Inni proponują zastosowanie procedury dwuetapowej. W pierwszym kroku filtruje się szeregi czasowe, by po pierwsze wskazać obserwacje odstające, a następnie zastąpić je stosownymi wartościami. W drugim kroku buduje się modele predykcyjne na przefiltrowanych wcześniej szeregach czasowych.

Celem pracy jest ocena wrażliwości parametrów liniowych modeli regresyjnych w zależności od liczebności zastosowanej próby. Porównane zostaną własności liniowych modeli regresyjnych (modeli autoregresyjnych), których parametry będą estymowane w sposób klasyczny (metodą najmniejszych kwadratów, w skrócie mnk) oraz metodami odpornymi, tj. estymatorem momentów (mm) oraz regresją kwantylową (qr). Ocena odporności modeli estymowanych trzema metodami polega tutaj na badaniu stabilności ocen parametrów modeli oraz stabilności uzyskiwanych na ich podstawie prognoz punktowych, przy założeniu, że modele budowane są rekursywnie. Idea rekursywnego stosowania modeli jest realizowana w kolejnych etapach [Osińska 2008, s. 88]. W pierwszym buduje się model na podstawie całej próby. W drugim kroku i kolejnych z próby eliminowana jest najstarsza obserwacja. Pozostałe „świeższe” elementy szeregu pozostają w próbie. W przypadku gdy pomijana obserwacja była odstająca (pik cenowy), powinno się zaobserwować drastyczną zmianę ocen parametrów oraz prognoz. Warto zaznaczyć, że w każdym kroku wyznaczana jest prognoza na ten sam moment. Zmiany ocen parametrów i prognoz będą tym większe, im „mniej odporna” jest zastosowana procedura estymacji. Przeprowadzona analiza ma wskazać minimalną liczebność próby, dla której otrzymane wyniki estymacji będą stabilne. Główna hipoteza badawcza, jaką można sformułować przy takiej konstrukcji badania, głosi, że wyniki estymacji parametrów i prognozy punktowe zbudowane za pomocą metod odpornych są mniej wrażliwe na występowanie obserwacji odstających.

Analizie poddany zostanie podstawowy indeks Towarowej Giełdy Energii SA notowany na rynku dnia następnego. Indeks ten charakteryzuje ważoną wolumenem dzienną cenę energii. Zastosowanie danych dziennych pozwoliło na wyeliminowanie godzinowych wahań sezonowych i pozwoliło uprościć zastosowane modele.

## 2. Metodyka badań

Naruszenie założenia normalności rozkładu składnika losowego w modelu generującym dane w przypadku klasycznej metody najmniejszych kwadratów (mnk) nie powoduje ani obciążenia, ani braku zgodności estymatora. Jednak w takiej sytuacji można wskazać, że zmniejsza się efektywność estymatora mnk. Jako rozwiązanie problemu braku normalności klasyczna literatura [Maddala 2002, s. 487] proponuje albo ustalenie rozkładu składnika losowego i stosowną do tego estymację, albo takie

przekształcenie zmiennej objaśnianej, aby w wyniku otrzymać rozkład normalny. Innym rozwiązaniem jest zastosowanie estymacji metodami odpornymi.

Poniżej przedstawiono zasady estymacji parametrów równania regresji w przypadku metody mnk oraz dwóch metod odpornych: regresji kwantylowej oraz metody momentów. Niech  $Z^n = \{(y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n)\}$ , gdzie  $y_i \in R$ , zaś  $x_i \in R^p$  stanowi wektor zmiennych objaśniających. W modelu liniowej regresji przewidujemy wartość  $Y$  za pomocą kombinacji liniowej  $X' \beta$ . Reszty modelu oznaczmy  $r_i(\beta) = Y - x_i' \beta$ . Estymator najmniejszych kwadratów wektora parametrów  $\beta$  używamy, minimalizując wyrażenie:

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^n [Y - x_i' \beta]. \quad (1)$$

W przypadku regresji kwantylowej estymacja parametrów modelu polega na minimalizacji wyrażenia:

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^n [Y - \xi_{\tau}(x_i' \beta)], \quad (2)$$

gdzie:  $\xi_{\tau}(x) = F_{y|x}^{-1}(\tau)$  jest kwantylem warunkowym rzędu  $\tau \in [0,1]$  dla  $y|x$ . Jeśli przyjmiemy  $\tau = 0,5$  otrzymamy regresję medianową, które będzie wykorzystywana w części empirycznej.

Z kolei M estymator (największej wiarygodności) otrzymamy przez minimalizację funkcji celu [Venables, Ripley 2002, s. 156]:

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^n \rho(r_i(\beta)), \quad (3)$$

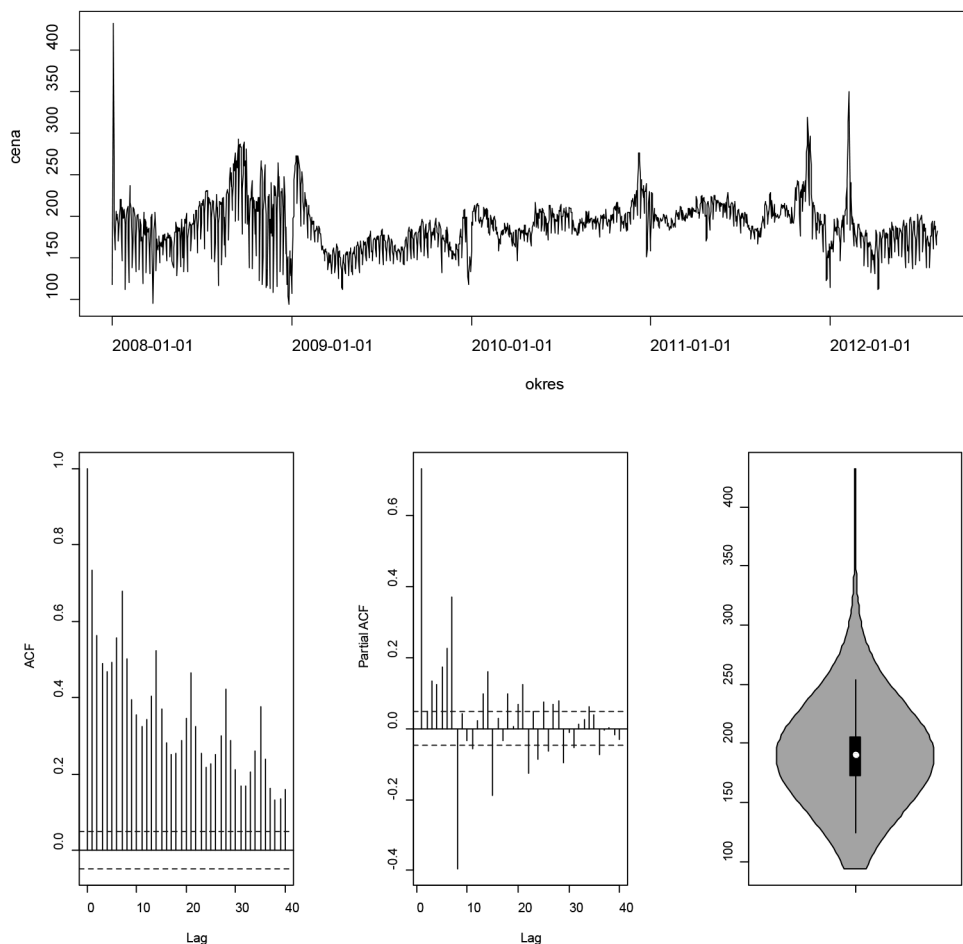
gdzie:  $\rho(r) = \rho(-r)$  i  $\rho$  jest funkcją monotonicznie malejącą dla  $r \geq 0$ .

W literaturze można znaleźć sporo propozycji szczegółowych rozwiązań dla M estymatorów, które różnią się przyjęciem stosownej funkcji  $\rho$  oraz sposobem minimalizacji położenia i rozrzutu reszt  $r_i(\beta)$ . W efekcie dostaje się estymatory, które różnią się odpornością na różnego rodzaju punkty odstające.

Estymacja parametrów w modelach autoregresyjnych (ogólnie modelach szeregów czasowych) jest zagadnieniem wyjątkowo złożonym. Dzieje się to za sprawą tego, że obserwacja odstająca może wielokrotnie oddziaływać na wartości szacowanych parametrów. Jest to związane z „pamięcią” procesu generującego dane. Klasyfikację rodzajów jednostek odstających w przypadku analizy szeregów czasowych oraz stosowane modele prezentuje w literaturze polskojęzycznej Kosiorowski [2012].

### 3. Charakterystyka danych

Do analizy wybrano indeks IRDN notowany na Towarowej Gieldzie Energii SA. Jego wartości to średnia cena energii [PLN/MWh] ważona wolumenem wszystkich transakcji na sesji giełdowej, licząc po dacie dostawy dla całej doby. Dane wykorzystane w analizie pochodzą ze strony <http://www.tge.pl/pl>. Szereg zawierał 1667 dziennych obserwacji z okresu od 1 stycznia 2008 do 8 sierpnia 2012 r.



**Rys. 1.** Wartość indeksu IRDN, wykresy autokorelacji i autokorelacji cząstkowej oraz wykres skrzypcowy

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 1 przedstawia wartości indeksu, z których kilka wyraźnie odstaje od poziomu typowego. Największa zmiana cen, o 202%, nastąpiła w drugim dniu notowań, tj. 2 stycznia 2008 r. Z kolei 28 stycznia 2008 r., 12 listopada 2008 r. i 1 grudnia 2008 r. wartość indeksu z dnia na dzień wrosła ponad 70%. W większości przypadków wysokie ceny wracały do wcześniejszego poziomu już następnego dnia. Wykresy autokorelacji i autokorelacji cząstkowej wskazują z jednej strony na własność powrotu do średniej (ACF), z drugiej na występowanie sezonowości dziennej. Wykres skrzypcowy<sup>2</sup> pokazuje natomiast asymetrię rozkładu, która wynika m.in. z tego, że wśród wartości odstających dominują ekstremalnie wysokie ceny energii.

#### 4. Analiza modeli predykcyjnych

Jako że celem pracy jest analiza stabilności ocen parametrów oraz prognoz w zależności od długości próby, należało wskazać zestaw zmiennych objaśniających w modelu, które reprezentują stochastyczne właściwości szeregu czasowego. Kierując się przejrzystością, zdecydowano, aby wykorzystać prosty model autoregresyjny i dołączyć do niego deterministyczne zmienne wskazujące na sezonowość dzienną. Zastosowanie procedury rekurencyjnej wykluczyło możliwości wskazania jednego, optymalnego modelu ze względu na wykorzystywane powszechnie kryteria informacyjne. Okazało się, że w zależności od długości wykorzystywanej próby kryteria wskazywały różne „optymalne” specyfikacje. W związku z tym zdecydowano, aby zbudować i oceniać model możliwie skromnie sparametryzowany, który jednak zawiera najważniejsze ze względu na strukturę stochastyczną szeregu zmienne<sup>3</sup>. Rysunki 2.a-b przedstawiają, jak zmienia się wartość  $R^2$  i skorygowanego  $R^2$  (adjusted  $R^2$ ) w zależności od liczby parametrów modelu (ilustracja dla największej możliwej próby). Rysunek 2.a pokazuje, że dopasowanie modeli przestaje się znacznie poprawiać po dodaniu kolejnej zmiennej, jeśli w modelu znajduje się co najmniej 5 zmiennych objaśniających. Z kolei rysunek 2.b wskazuje na zmienne, które występują w najlepszych, tj. maksymalizujących  $R^2$ , modelach, przy zadanej liczebności zmiennych objaśniających. Przykładowo zmienne objaśniające najlepszego modelu z trzema parametrami to: stała (intercept), lag 7, lag 13. Współczynnik determinacji w takim modelu jest na poziomie 68%. Ze względu na przejrzystość rysunku zilustrowano najlepsze podzbiory zmiennych przy założeniu, że ich liczba nie przekroczy 13. Do zmiennych, które są włączane do optymalnych modeli w pierwszej kolejności, należą te, które reprezentują sezonowość, tj. lag7 (zmienna opóźniona o 7 okresów), lag6, lag13, oraz s6 (zmienna zero-jedynkowa wskazująca sobotę). Ostatecznie zdecydowano się estymować model zawierający 9 parametrów:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-3} + \beta_2 y_{t-4} + \beta_3 y_{t-6} + \beta_4 y_{t-7} + \beta_5 y_{t-9} + \beta_6 y_{t-13} + s_5 d_5 + s_6 d_6 + \varepsilon_t,$$

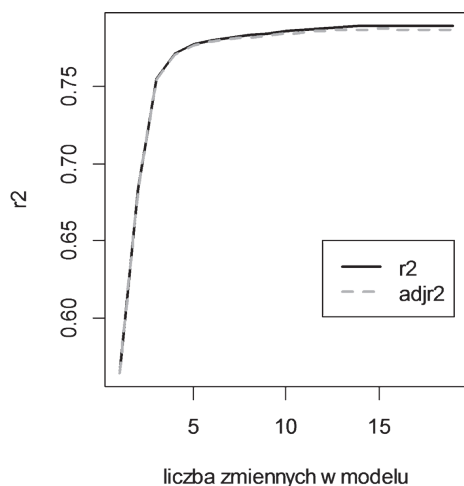
<sup>2</sup> Wykres skrzypcowy jest efektywnym połączeniem wykresu pudełkowego oraz wykresu gęstości.

<sup>3</sup> Wśród potencjalnych zmiennych objaśniających znalazły się wszystkie opóźnienia do 13 włącznie oraz zmienne zero-jedynkowe wskazujące na kolejne dni tygodnia.

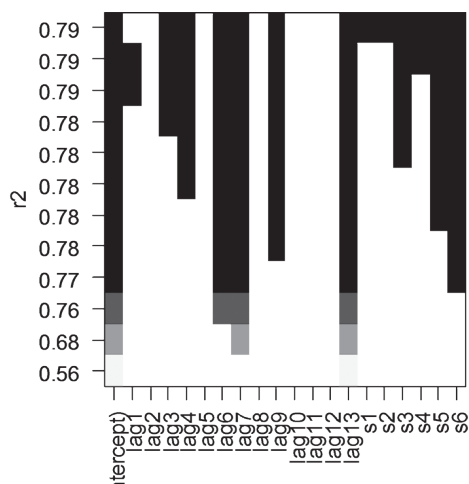
gdzie:  $d_i$  to zmienna wskazująca na  $i$ -ty dzień tygodnia,  $\varepsilon_i$  zaś oznacza składnik losowy<sup>4</sup>.

Po ustaleniu postaci modelu rekurencyjnie estymowano i zapisywano jego parametry oraz każdorazowo wyznaczano prognozę punktową na jeden okres, tj. na dzień 9 sierpnia 2012 r. W ten sposób można było zobaczyć, jaki jest wpływ zmian ocen parametrów modeli na przewidywaną cenę energii.

Łącznie zbudowano 1580 modeli. Pierwszy z nich był estymowany na próbie liczącej 1667 obserwacji, ostatni wykorzystywał jedynie 87 najnowszych wartości szeregu.



**Rys. 2a.** Zmiana wartości  $R^2$  na skutek zmiany liczby zmiennych objaśniających w modelu



**Rys. 2b.** Zmienne ujęte w optymalnych modelach liczących określoną liczbę regresorów

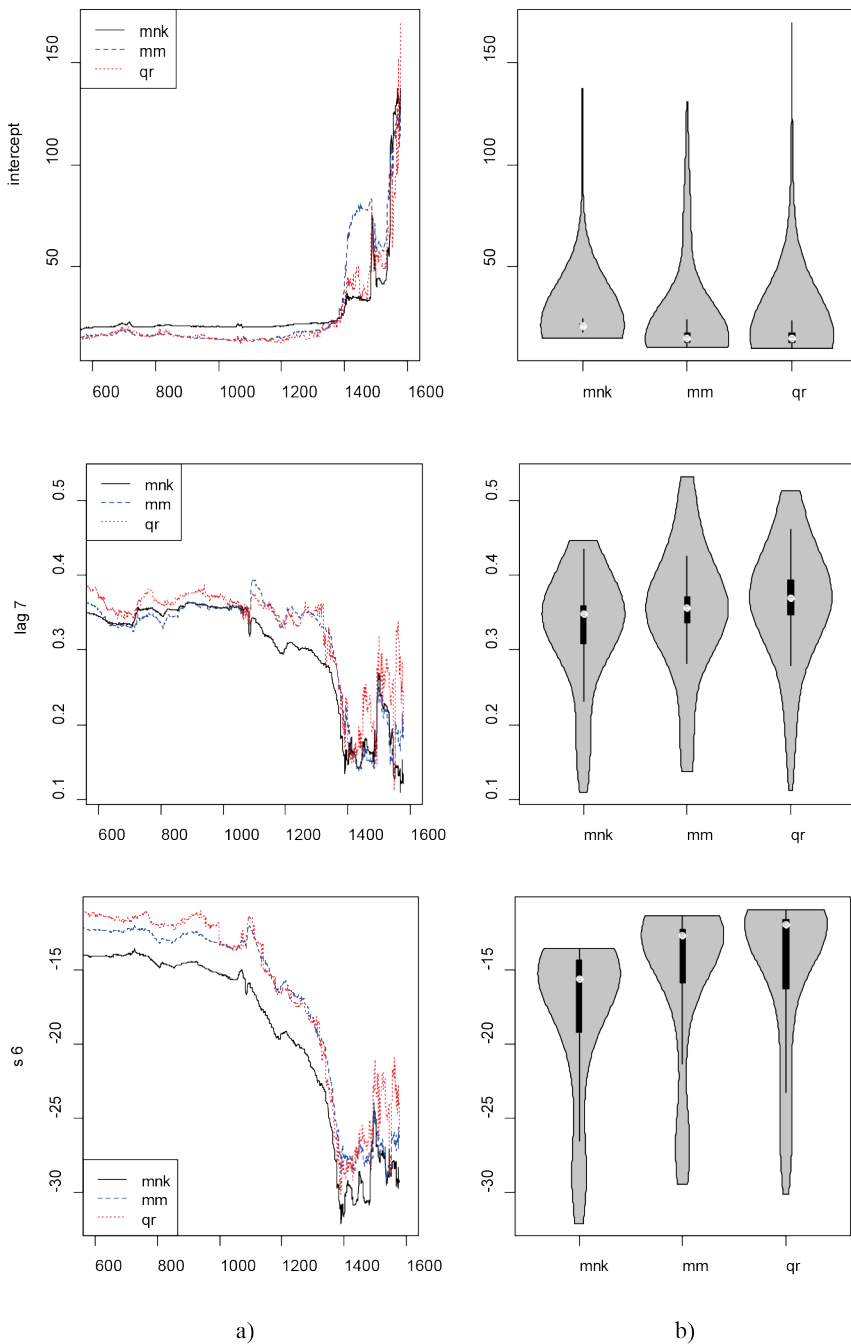
Źródło: opracowanie własne.

Oceny wybranych parametrów modeli oraz ich rozkłady zostały zaprezentowane na rys. 3. a-b. Wykres na rysunkach 3.a wskazuje szereg ocen danego parametru, które zostały wyznaczone w kolejnych krokach procedury dla trzech metod estymacji.

Ze względu na czytelność wykresy nie pokazują ocen parametrów dla każdej próby, a jedynie te, które zostały wyznaczone dla danych zaczynających się od 600 i kolejnych obserwacji<sup>5</sup>. Zatem punkty z lewej strony wykresu pokazują, jaka jest ocena wartości danego parametru modelu przy estymacji na podstawie próby składającej się z obserwacji  $(y_{600}, \dots, y_{1667})$ . Punkty z prawej strony oznaczają ocenę dokonaną na podstawie próby  $(y_{1580}, \dots, y_{1667})$ . Wykres z prawej strony ilustruje rozkład wartości parametrów dla poszczególnych metod estymacji. Przedstawione wy-

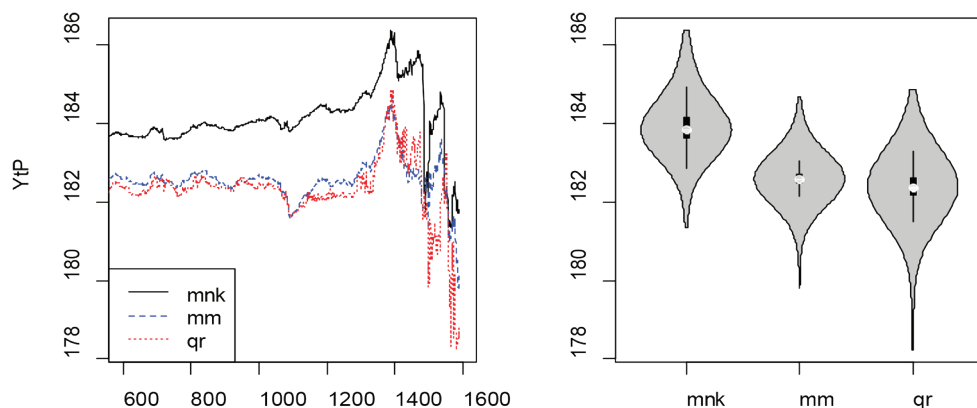
<sup>4</sup> Wykonano również obliczenia dla innych specyfikacji – bogatszych oraz uboższych, co nie zmieniło ogólnych wniosków.

<sup>5</sup> Oceny uzyskane dla dłuższych prób były stabilne.



**Rys. 3. a-b.** Oceny wybranych parametrów dla 500 ostatnich modeli estymowanych metodą mnk, mm, qr oraz ich rozkłady porównane za pomocą wykresów skrzypcowych

Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 4.** Prognozy punktowe dla 1000 „ostatnich” modeli estymowanych metodą mnk, mm, qq oraz ich rozkłady porównane za pomocą wykresów skrzypcowych

Źródło: opracowanie własne.

niki pozwalają zauważyć następujące prawidłowości. Wraz ze zmniejszaniem się liczebności próby zmienność ocen parametrów rośnie. Szczególnie jest to widoczne w przypadku oceny stałej w modelu. Dla prób obejmujących co najmniej 300 najświeższych obserwacji oceny są stabilne i wynoszą w zależności od zastosowanej metody estymacji od 14 do 24.

W przypadku zmniejszenia liczebności próby wartości ocen stałej modelu rosną gwałtownie, przekraczając wartość 100 dla wszystkich metod estymacji. Nakładają się tutaj zapewne dwie własności. Pierwsza to wzrost wariancji estymatorów w przypadku coraz mniej licznej próby. Druga to wpływ obserwacji odstających.

Wykresy skrzypcowe pozwalają poczynić dwie dodatkowe uwagi. Po pierwsze, nie widać, aby metoda mnk dawała oceny parametrów charakteryzujące się większą zmiennością. Zakres uzyskanych wartości dla tej metody estymacji jest porównywalny z wynikami otrzymanymi metodami odpornymi. Po drugie, wyniki otrzymane metodą mnk są przesunięte w stosunku do dwóch pozostałych. Dowodzi to większego wpływu wartości odstających na oceny mnk, które stają się przez to obciążone.

Z kolei rys. 4 pokazuje, jak zachowują się prognozy otrzymywane rekurencyjnie za pomocą poszczególnych metod. Wykresy prognoz należy interpretować tak samo jak wykresy dla parametrów modeli. Na lewym wykresie pokazano szereg prognoz na dzień 9 sierpnia przy założeniu, że próba, na podstawie której wyznaczany jest model predykcyjny, zaczyna się od obserwacji zaznaczonej na osi poziomej. Podobnie jak w przypadku ocen parametrów modeli nie ma podstaw do twierdzenia, że estymator mnk generuje prognozy z większą zmiennością. Można natomiast zauważyć, że wykres prognoz uzyskanych modelami szacowanymi mnk ma więcej dużych załamań niż modele szacowane metodą momentów. Ponadto prognozy uzyskane metodą mnk są z reguły wyższe niż te otrzymane pozostałymi metodami. Potwier-



dzają to wykresy skrzypcowe. Mediana, kwartyle i wartości minimum i maksimum rozkładu prognoz dla metody mnk znajdują się na wykresie powyżej odpowiednich wartości dla pozostałych rozkładów. Dowodzi to wpływu obserwacji odstających – pików cen, które skutkują obciążeniem parametrów modeli i zawyżeniem (w stosunku do metod odpornych) prognoz.

## 5. Podsumowanie

W przypadku liniowych modeli autoregresyjnych, ale także wszystkich innych modeli szeregów czasowych, jednym z podstawowych problemów, jaki należy rozwiązać, jest wybór długości próby. Ma to znaczenie zarówno dla towarowych rynków energii o długiej historii, gdzie wykorzystywanie wszystkich dostępnych historycznych obserwacji nie ma sensu, jak i rynków dopiero co się kształtujących. W ciągu lat zmieniały się przecież regulacje rynkowe, struktura pozyskiwania energii czy technologia, a uczestnicy uczyli się swoich ról.

Treścią niniejszej pracy była ocena wrażliwości ocen punktowych parametrów modeli w zależności od długości wykorzystanej w badaniu próby. Dodatkowym problemem w przypadku prognozowania cen energii jest powszechne występowanie pików cenowych, które potrafią skutecznie zniekształcić badaną próbę. W związku z tym parametry modeli były szacowane klasycznie, tj. metodą najmniejszych kwadratów oraz metodami odpornymi – metodą momentów oraz regresją medianową. Modele dawały wyniki, które były wrażliwe na długość próby. Okazały się również wrażliwe na wartości odstające. Nie można precyzyjnie określić minimalnej liczebności próby, która zagwarantuje stabilność wyników. Niemniej jednak zaprezentowane symulacje pokazują, że już przy wykorzystywaniu ok. 600 obserwacji różnice w ocenach parametrów modeli i w konsekwencji w prognozach nie różnią się znacząco przy niewielkim skracaniu lub wydłużaniu próby. Przy stosowaniu mniej licznych prób rośnie ryzyko, że wskutek włączenia obserwacji odstającej prognoza będzie wyższa lub niższa nawet o kilka złotych za MWh.

Kolejnym zagadnieniem podjętym w pracy było porównanie zróżnicowania otrzymywanych wyników w zależności od zastosowanej metody estymacji. Spodziewano się w szczególności, że wykorzystanie metod odpornych pozwoli generować bardziej stabilne prognozy. Zaprezentowane symulacje pokazały, że tak nie jest. Zmienność rozkładu empirycznego prognoz uzyskanych mnk była co najwyżej taka jak w wypadku metod odpornych. Z drugiej strony metody odporne dawały przeciętnie niższe prognozy, co może przemawiać na ich korzyść. W analizowanym szeregu przeważały bowiem dodatnie piki cenowe, co – jak się wydaje – sztucznie podnosiło prognozy uzyskane mnk.

Przeprowadzone badanie stanowi pierwszy krok analizy prognoz cen na towarowej giełdzie energii. Drugi krok będzie się odnosił bezpośrednio do trafności prognoz, co jest z pewnością tematem znacznie ważniejszym z punktu widzenia uczestników rynku energii.

## Literatura

- Geman H., Roncoroni A., *Understanding the fine structure of electricity prices*, "Journal of Business" 2006, no 79.
- Janczura J., Trück S., Weron R., Wolff R., *Identifying spikes and seasonal components in electricity spot price data: A guide to robust modeling*, preprint, 2012.
- Janczura J., Weron R., *An empirical comparison of alternate regime-switching models for electricity spot prices*, "Energy Economics" 2010, no 32.
- Kosiorowski D., *Wstęp do statystyki odpornej. Kurs z wykorzystaniem środowiska R*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, 2012.
- Maddala G.S., *Ekonometria*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2006.
- Misiorek A., Truck S., Weron R., *Point and interval forecasting of spot electricity prices: Linear vs. non-linear time series models*, "Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics" 2006, no 10(3), article 2.
- Osińska M., *Ekonometryczna analiza zależności przyczynowych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, 2008.
- Venables W.N., Ripley B.D., *Modern Applied Statistics with S*, Fourth edition, Springer, 2002.

### ANALYSIS OF THE STABILITY OF PARAMETERS ESTIMATES AND FORECASTS IN THE NEXT-DAY ELECTRICITY PRICES

**Summary:** The purpose of this paper is to investigate the sensitivity of the length of a sample and the impact of outliers on the parameters of predictive models. The analysis was conducted on IRDN, an index of energy prices, which is the general index of the Polish Power Exchange. Taking into account extreme observations, known as electricity price spikes, it was decided to compare the results of tests for models built in the classical way and robust methods. The analysis indicates that taking approximately 600 observations allow to obtain stable parameter estimates and forecasts. Volatility of forecasts obtained by different methods were comparable. At the same time the levels of the values of forecasts in robust and classical methods differed one from another.

**Keywords:** electricity price forecasting, robust modelling, price spike, autoregression models.