

Mariola Piłatowska

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

WYBÓR RZĘDU AUTOREGRESJI W ZALEŻNOŚCI OD PARAMETRÓW MODELU GENERUJĄCEGO

Streszczenie: W artykule pokazano zachowanie się różnych kryteriów wyboru modelu AR (kryteria informacyjne: AIC, BIC, HQ, oraz sekwencyjną metodę badania istotności współczynników autoregresji) przy założeniu różnych wartości parametrów modelu autoregresyjnego i różnych wielkości próby. Wskazano też na dużą przydatność skorygowanego kryterium AIC (AIC_c), rzadko stosowanego w polskich badaniach, do wyboru rzędu autoregresji, szczególnie w małych próbach. Podkreślono, że wybór rzędu autoregresji można rozpatrywać w kontekście wyboru prawdziwego modelu generującego (prawdziwego rzędu autoregresji), jak również w kontekście wyboru najlepszego modelu prognostycznego (czyli wyboru rzędu modelu AR, który dałby prognozy o najmniejszych błędach prognoz). Rozważania te zilustrowano analizą symulacyjną.

Słowa kluczowe: funkcja autokorelacji, spektrum procesu autoregresyjnego, kryteria wyboru rzędu autoregresji, wybór modelu prognostycznego.

1. Wstęp

Modele autoregresyjne stanowią przydatne narzędzie w badaniach empirycznych (np. w ekonomii, demografii, medycynie) ze względu na to, że są łatwe w użyciu (estymacja parametrów i interpretacja) oraz umożliwiają szybkie wyznaczanie prognoz. Zasadniczym problemem związanym ze stosowaniem tych modeli do modelowania szeregów czasowych jest ustalenie rzędu autoregresji (przy założeniu, że szeregi są już stacjonarne). Należy podkreślić, że wybór rzędu autoregresji odgrywa też bardzo ważną rolę w wielu innych zagadnieniach ekonometrycznych, m.in. przy testowaniu istnienia pierwiastków jednostkowych (*unit root tests*) – por. np. [Hall 1994; Stock 1994; Ng, Perron 1995; DeJong i in. 1992], czy też ustalaniu rzędu modelu VAR [Lütkepohl 1993, s. 135-138]. Stąd kwestie dotyczące ustalania rzędu autoregresji są ciągle ważne.

Do najbardziej popularnych metod ustalania rzędu autoregresji należą kryteria informacyjne, a wśród nich kryterium Akaike’a [1973] – AIC, kryterium Schwarza [1978] – BIC i kryterium Hannana-Quinna [1978] – HQ. W mniejszym zakresie wykorzystuje się skorygowane kryterium Akaike’a – AIC_c [Sugiura 1978], które w małych próbach ma przewagę nad kryterium AIC i może konkurować z kryte-

rium BIC pod względem poprawnego wyboru rzędu autoregresji. W polskiej literaturze kryterium to jest prawie nieznanne. Oprócz kryteriów informacyjnych stosuje się metody bazujące na testowaniu istotności współczynników autoregresji, m.in. metodę sekwencyjną [Hall 1994]. Poprawność wyboru rzędu autoregresji zależy, jak pokazały badania symulacyjne, w dużej mierze od przyjętego kryterium wyboru i wielkości próby. W wielu badaniach (np. takich autorów, jak Hurvich i Tsai [1989, Neath, Cavanaugh [1997] czy Sclove [1987]) uwaga skupiona jest bardziej na ocenie stosowanych kryteriów niż na wpływie przyjętych w eksperymentach symulacyjnych wartościach współczynników autoregresji, tzn. często przyjmuje się takie wartości parametrów, przy których stopień odtworzenia modelu generującego dane jest wysoki. Pomija się w ten sposób fakt, że dane generowane z modeli autoregresyjnych o różnych wartościach parametrów mają inne własności w sensie takich charakterystyk procesu stochastycznego, jak funkcja autokorelacji i funkcja gęstości spektralnej (spektrum). W rezultacie wyniki dotyczące stopnia odtworzenia modelu generującego dane mogą być zbyt optymistyczne czy też nadmiernie preferować określone metody ustalania rzędu autoregresji.

Celem artykułu jest pokazanie konsekwencji przyjęcia określonych wartości parametrów w autoregresyjnym modelu generującym rzędu drugiego, AR(2), dla poprawnego ustalenia rzędu autoregresji i wyboru modelu prognostycznego. Zbadano zachowanie się kryteriów informacyjnych (AIC, BIC, HQ i AIC_C) i sekwencyjnej metody testowania istotności współczynników autoregresji w wyborze rzędu autoregresji przy założeniu różnej wielkości próby. Wskazano też pewne rekomendacje dotyczące stosowania kryteriów informacyjnych, szczególnie kryterium AIC_C oraz sekwencyjnej metody testowania istotności parametrów. Porównano podejście informacyjne i testowe w wyborze rzędu autoregresji, a także wskazano na przewagę kryteriów informacyjnych w stosunku do podejścia testowego, co nie jest powszechnie znanym faktem¹.

Dodatkowo rozważano kwestię ustalania rzędu autoregresji (w zależności od wartości współczynników autoregresji) w kontekście wyboru modelu prognostycznego. W związku z tym postawiono pytanie, czy modele autoregresyjne o rzędzie autoregresji ustalonym według kryteriów informacyjnych i sekwencyjnej metody będą jednocześnie najlepszymi modelami prognostycznymi w sensie minimum średniokwadratowego błędu prognoz.

2. Funkcja autokorelacji i spektrum dla procesów autoregresyjnych o różnych współczynnikach

W wielu badaniach symulacyjnych dotyczących zachowania się kryteriów informacyjnych czy testów statystycznych w wyborze rzędu modelu autoregresji uwaga

¹ Na fakt ograniczonej wartości podejścia testowego w identyfikacji i wyborze modelu zwracał uwagę już Akaike [1981]. Podobnie Granger i in. [1995] wskazywali, że lepiej stosować podejście informacyjne w wyborze modelu niż formalne testowanie hipotez.

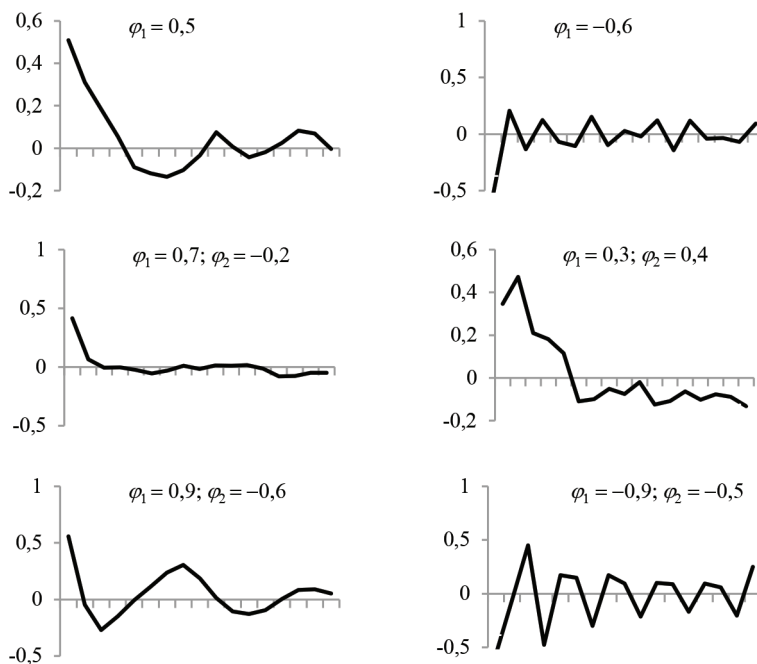
skupiona jest na ocenie stosowanych metod, a w mniejszym zakresie na przyjętych w symulacjach wartościach parametrów modeli generujących. Na przykład Boekee i Buss [1981]² ustalali rząd modelu AR dla danych generowanych przez model autoregresji rzędu drugiego o parametrach $\phi_1 = -0.8$ i $\phi_2 = -0.9$ oraz liczby obserwacji $n = 50, 100, 200, 400$ (liczba powtórzeń wynosiła 50), stosując kryteria informacyjne. Hurvich i Tsai [1989] w swoim badaniu symulacyjnym, porównując zachowanie się kryteriów informacyjnych Akaike'a (AIC), skorygowanego kryterium AIC (AIC_c), kryterium Schwarza (BIC) oraz Hannana-Quinna (HQ) w wyborze rzędu modelu autoregresji na podstawie małej próby ($n = 30$), przyjęli również wysokie wartości parametrów generującego modelu AR(2), tj. $\phi_1 = 0,99$, $\phi_2 = -0,8$. Te same wartości parametrów modelu AR(2) przyjęli Neath, Cavanaugh [1997], ustalając rząd modelu autoregresji z wykorzystaniem kryterium BIC i jego modyfikacji dla małej próby ($n = 23$). We wszystkich tych badaniach parametry modelu AR(2) wskazywały na silną autoregresję, a w takich przypadkach można oczekiwać wysokiego udziału poprawnych wskazań rzędu autoregresji, co rzeczywiście wystąpiło³.

Pomija się w ten sposób kwestię konsekwencji przyjęcia określonych wartości współczynników autoregresji dla otrzymanych wyników. Konsekwencje te niewątpliwie występują i można je zilustrować, pokazując własności szeregów czasowych generowanych z modeli autoregresyjnych przy różnych współczynnikach. Własności te uwidaczniają się w przebiegu funkcji autokorelacji i funkcji gęstości spektralnej (spektrum). Przebieg tych funkcji dla procesów autoregresji rzędu pierwszego i drugiego o zadanych współczynnikach prezentują rys. 1 i 3.

Funkcja autokorelacji (ACF – *Autocorrelation Function*) szeregu generowanego z modelu autoregresji rzędu pierwszego, AR(1), o współczynniku 0,5 maleje do zera (por. rys. 1). Taki kształt funkcji autokorelacji wykazuje wiele szeregów ekonomicznych (por. [Granger 1966]). Jeżeli współczynnik jest ujemny, $\phi_1 = -0,6$, funkcja autokorelacji wykazuje oscylacje wokół zera, które stopniowo maleją w miarę wzrostu opóźnienia. Szeregi o takim kształcie funkcji autokorelacji nie są typowe dla analiz ekonomicznych. Szeregi generowane z modeli autoregresji rzędu drugiego, AR(2), wykazują bardziej zróżnicowany przebieg funkcji autokorelacji. Na przykład funkcja autokorelacji dla modelu autoregresji rzędu drugiego, AR(2), ze współczynnikami $\phi_1 = 0,3$ i $\phi_2 = 0,4$ ma wyższą wartość dla opóźnienia 2 niż 1 – por. rys. 1. Dla $\phi_1 = 0,7$ i $\phi_2 = -0,2$ funkcja autokorelacji opada bardzo szybko i jest prawie równa zeru dla opóźnień większych niż 4 ($k \geq 4$). Przebieg funkcji autokorelacji dla modelu AR(2) ze współczynnikami $\phi_1 = 0,9$ i $\phi_2 = -0,6$ jest odmienny, tj. wykazuje powoli gasnące oscylacje wokół zera. Taki przebieg funkcji autokorelacji odzwierciedla tzw. pseudoperiodyczność szeregów czasowych (por. [Wilks 2006]).

² Cytowanie za Sclove [1987].

³ Na przykład procent poprawnych wskazań rzędu autoregresji ($q = 2$) w badaniu Hurvicha i Tsai [1989] wyniósł 74% dla kryterium AIC_c , 91% dla kryterium BIC i 51% dla kryterium AIC, natomiast w badaniu Neatha i Cavanaugh [1997] – 87,8% dla kryterium BIC.



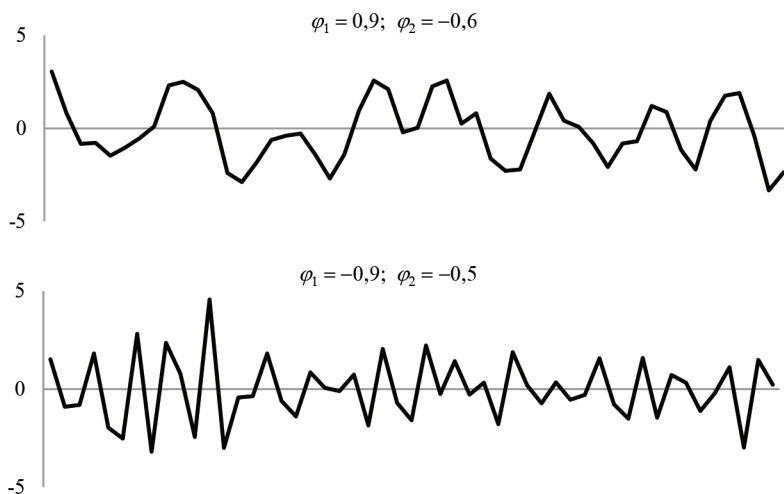
Rys. 1. Funkcje autokorelacji dla procesów autoregresji rzędu pierwszego, AR(1), i drugiego, AR(2), o różnych współczynnikach autoregresji (dla danych generowanych o liczbie obserwacji 100)

Źródło: opracowanie własne.

To znaczy, że funkcja autokorelacji dla niewielkiej liczby początkowych opóźnień jest silnie dodatnia, potem dla kolejnych dalszych opóźnień jest ujemna, aby znowu stać się dodatnią dla następnych opóźnień. Należy podkreślić, że periodyczność tego typu nie jest ścisłą periodycznością, a jedynie pseudoperiodycznością wynikającą z własności modelu AR(2) o zadanych współczynnikach autoregresji. Na przykład realizacja szeregu generowanego z AR(2) o współczynnikach 0,9 i $-0,6$ wykazuje pseudoperiodyczność, tj. szczyty i dołki w szeregu czasowym wydają się pojawiać co 6 lub 7 okresów (por. rys. 2), ale nie są one tak regularne, jak byłyby w przypadku rzeczywiście występującej periodyczności. Właściwość ta jest wyrażona w formie dodatniego wierzchołka w przebiegu funkcji autokorelacji dla opóźnień o odstępnie 6 lub 7 okresów (por. rys. 1). Natomiast szczyty i dołki są oddalone od siebie o 3 lub 4 okresy. Ogólnie szereg taki jest postrzegany jako szereg o dużej zmienności.

Ta zdolność modelu AR(2) do wykazywania pseudoperiodyczności jest widoczna też w przebiegu spektrum⁴ (por. rys. 3). Szeregi generowane z modelu AR(2) o współ-

⁴ Przykładowe spektra (z wagami Bartletta) na rys. 3 dotyczą procesów autoregresyjnych AR(2) generowanych dla liczby obserwacji 100.

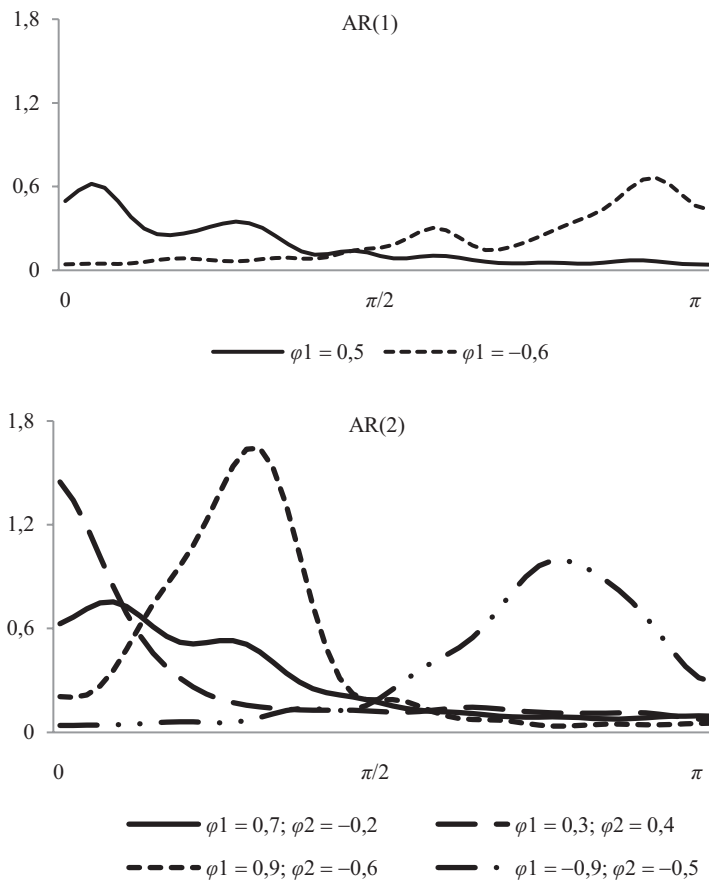


Rys. 2. Przykładowe szeregi AR(2) z pseudoperiodycznością (dla danych generowanych o liczbie obserwacji 50)

Źródło: opracowanie własne.

czynnikach odpowiednio $\varphi_1 = 0,9$ i $\varphi_2 = -0,6$ oraz $\varphi_1 = -0,9$ i $\varphi_2 = -0,5$ wykazują pseudoperiodyczność, co pokazują szerokie wierzchołki w spektrum dla częstości średnich i wysokich, a wysoka wartość spektrum w tych częstościach sugeruje, że największy udział w wariancji procesu mają wahania średnio- i krótkookresowe. Spektrum dla szeregu generowanego z modelu AR(2) o współczynnikach $\varphi_1 = 0,3$ i $\varphi_2 = 0,4$ przyjmuje wartości wysokie dla częstości niskich i bliskich zeru, a następnie opada w miarę wzrostu częstości, co oznacza, że największy udział w wariancji procesu mają wahania długookresowe. Taki kształt spektrum jest typowy dla procesów ekonomicznych (por. [Granger 1966]), przy czym występuje on nie tylko dla procesów AR(2), ale również dla AR(1). W przypadku szeregu generowanego przy współczynnikach $\varphi_1 = 0,7$ i $\varphi_2 = -0,2$ spektrum też opada w miarę wzrostu częstości, ale wartości spektrum dla częstości zerowej, jak również w szerokim paśmie częstości niskich, są wyraźnie mniejsze niż w poprzednim przypadku, a dodatkowo wierzchołki spektrum w niskich częstościach są szersze i bardziej płaskie. Taki kształt spektrum przypomina spektrum dla procesu AR(1) ze współczynnikiem $\varphi_1 = 0,5$ (por. rys. 3).

Podobieństwo przebiegu spektrum dla procesu AR(2) generowanego przy pewnych współczynnikach i spektrum dla procesu AR(1) sugeruje, że własności tak wygenerowanych danych mogą wydawać się zbliżone, a zastosowanie różnych metod wyboru rzędu autoregresji może prowadzić do ustalenia rzędu jako $q = 1$, podczas gdy właściwy rząd autoregresji q był równy 2. W konsekwencji procent odtworzenia modelu generującego, tj. AR(2), może być zaniżony. Warto zatem zbadać, jakie są



Rys. 3. Spektrogramy procesów autoregresji rzędu pierwszego AR(1) i drugiego AR(2) o różnych współczynnikach autoregresji (na podstawie danych generowanych dla liczby obserwacji 100)

Źródło: obliczenia własne.

konsekwencje przyjęcia pewnych wartości współczynników autoregresji w modelu generującym, np. w modelu autoregresji rzędu drugiego AR(2), dla poprawnego ustalenia rzędu autoregresji.

3. Metody wyboru rzędu autoregresji

Do ustalania rzędu autoregresji najczęściej wykorzystuje się kryteria informacyjne oraz sekwencyjną metodę testowania współczynników autoregresji. Spośród kryteriów informacyjnych w polskiej literaturze najbardziej popularne są kryteria Akaike'a (AIC), Schwarza (BIC) i Hannana-Quinna (HQ). Ogólną postać kryterium informacyjnego można zapisać następująco:

$$IC = -2 \ln L(\hat{\theta}) + K c(n),$$

gdzie $L(\hat{\theta})$ – maksymalizowana funkcja wiarygodności względem nieznanych parametrów θ , K – całkowita liczba parametrów szacowanych na podstawie próby, włączając stałą i σ^2 , n – liczba obserwacji w próbie. Składnik $K c(n)$ jest na ogół rozpatrywany w kategoriach pewnej „kary”, która jest funkcją liczby parametrów modelu oraz wielkości próby. $c(n)$ przyjmuje różne wartości w zależności od kryterium, tzn. dla kryterium AIC – $c(n) = 2$, dla kryterium BIC – $c(n) = \ln(n)$, a dla kryterium HQ – $c(n) = 2 \ln(\ln(n))$. Jeśli kara jest duża, to preferowane są „oszczędniejsze” w parametry modele, natomiast jeśli kara jest mała, to – mniej „oszczędne” w parametry modele.

W ramach danego kryterium wybiera się taki rząd modelu autoregresji, któremu odpowiada minimalna wartość kryterium. Stosowanie kryterium AIC prowadzi na ogół do wyboru wyższego rzędu autoregresji niż w przypadku kryterium BIC, a kryterium HQ wskazuje na ogół na pośredni rząd autoregresji w stosunku do rzędu AR ustalonego przez kryteria AIC i BIC⁵.

Oprócz kryteriów AIC, BIC i HQ do ustalania rzędu autoregresji można zastosować skorygowane kryterium AIC (AIC_c), które w niewielkim jednak zakresie⁶ wykorzystuje się w polskiej literaturze. Kryterium to zaleca się stosować w przypadku małej liczby obserwacji, jeżeli występuje zbyt dużo parametrów w stosunku do liczby obserwacji. W takiej sytuacji standardowe kryterium AIC na ogół zachowuje się słabo, tj. wskazuje mało „oszczędne” w parametry modele.

Skorygowane kryterium AIC_c (por. [Sugiura 1978]) ma postać⁷:

$$AIC_c = AIC + \frac{2K(K+1)}{n-K-1}.$$

Kryterium AIC_c zawiera dodatkowy składnik (*bias-correction term*) w stosunku do zwykłego kryterium AIC. Generalnie kryterium AIC_c zaleca się stosować, gdy stosunek liczby obserwacji do liczby szacowanych parametrów (n/K) jest niski, tj. mniejszy od 40 (por. [Burnham, Anderson 2002, s. 66-67]). W podjęciu decyzji o stosowaniu AIC czy AIC_c należy wziąć K z modelu najbardziej rozbudowanego

⁵ Warto podkreślić, że w procesie wyboru rzędu autoregresji wszystkie modele kolejnych rzędów powinny być szacowane dla tej samej liczby obserwacji. Pomijanie tego faktu w badaniach empirycznych może prowadzić do błędnego ustalenia rzędu autoregresji. Wynika to z tego, że wnioskowanie przeprowadza się warunkowo względem danego zbioru danych, a zatem porównywanie kryteriów informacyjnych z modeli autoregresyjnych szacowanych na podstawie różnej liczby obserwacji jest nieuzasadnione. Ponadto wszystkie modele powinny odnosić się do zmiennej objaśnianej ujętej w tej samej formie (por. [Burnham, Anderson 2002, s. 80-81]), ponieważ kryteria informacyjne z modeli np. dla poziomów zmiennej i logarytmów zmiennej nie są w pełni porównywalne. Fakt ten jest często ignorowany.

⁶ Przykłady stosowania kryterium AIC_c można znaleźć w pracy Piłatowskiej [2011].

⁷ Por. również [Hurvich, Tsai 1989; 1995].

spośród zbioru modeli-kandydatów. Jeśli stosunek n/K jest wystarczająco wysoki, to AIC i AIC_C są podobne, a zatem prowadzą do wyboru tego samego modelu.

Równie popularną jak kryteria informacyjne metodą ustalania rzędu autoregresji jest sekwencyjna metoda badania istotności współczynników autoregresji, która występuje w dwóch wersjach od ogółu do szczegółu (*general to specific rule*) i od szczegółu do ogółu (*specific to general rule*). W pierwszej wersji, od ogółu do szczegółu, zaczyna się od modelu autoregresji najwyższego rzędu q (q_{\max}) i przeprowadza się testowanie istotności ostatniego współczynnika stojącego przy największym opóźnieniu (q_{\max}), a następnie redukuje się q aż do otrzymania istotnego współczynnika. W drugiej wersji, od szczegółu do ogółu, testowanie istotności współczynników autoregresji zaczyna się od modelu autoregresji rzędu najniższego, np. $q = 1$, a następnie stopniowo zwiększa się q aż do otrzymania nieistotnego współczynnika. Zalecanym podejściem jest wersja od ogółu do szczegółu, ponieważ podejście od szczegółu do ogółu nie jest ogólnie asymptotycznie poprawne (por. [Hall 1994]).

4. Wyniki badania symulacyjnego

W celu pokazania zachowania się różnych kryteriów wyboru rzędu modelu autoregresyjnego (tj. kryteriów informacyjnych i sekwencyjnej metody testowania istotności współczynników autoregresji) przy założeniu różnych wartości parametrów modelu autoregresyjnego przeprowadzono eksperyment symulacyjny⁸.

Przyjęto następujący schemat modelu generującego AR(2):

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

gdzie ε_t jest białym szumem o rozkładzie $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

Współczynniki autoregresji dla poszczególnych wersji stacjonarnego modelu AR(2) były następujące: model 1: $\phi_1 = 0,3$, $\phi_2 = 0,4$, model 2: $\phi_1 = 0,7$, $\phi_2 = -0,2$, model 3: $\phi_1 = 0,9$, $\phi_2 = -0,6$, model 4: $\phi_1 = -0,9$, $\phi_2 = -0,5$. We wszystkich modelach dla zachowania dodatnich wartości generowanego szeregu przyjęto następujące wartości stałej: $\phi_0 = 5$ dla modelu 1 i 2 oraz $\phi_0 = 10$ dla modelu 3 i 4. Dwa pierwsze modele generują dane o typowym przebiegu funkcji gęstości spektralnej (spektrum), a dwa kolejne – dane, które wykazują pseudoperiodyczność (por. rys. 3). Dane były generowane dla liczby obserwacji $100 + n + 10$, $n = 30, 50, 100$, przy czym pierwszych 100 obserwacji było pomijane dla uniknięcia wpływu wartości startowych przyjętych w symulacji, a 10 ostatnich obserwacji zostało zachowanych dla wyznaczenia błędów prognoz *ex post*. W rezultacie modele autoregresji kolejnych rzędów ($q = 0, 1, 2, \dots, q_{\max}$) były szacowane dla liczby obserwacji $n = 30, 50, 100$. Rząd modelu AR, przy założeniu, że maksymalny rząd autoregresji q_{\max} był równy 10, wybierano, stosując kryteria informacyjne AIC , BIC , HQ i AIC_C oraz sekwencyjną

⁸ Symulacje zostały wykonane z wykorzystaniem języka skryptowego programu Gretl.

metodę badania istotności współczynników autoregresji stojących przy najdalszym opóźnieniu⁹ (z_{lag} w tab. 1-4). Wyniki wyboru danego rzędu autoregresji przez poszczególne kryteria są zaprezentowane w tab. 1-4 w postaci procentowych udziałów wyboru danego rzędu autoregresji w ogólnej liczbie replikacji równej 1000.

Modele autoregresyjne wybrane przez poszczególne kryteria w kolejnych replikacjach zostały wykorzystane do wyznaczenia prognoz na 1, 2, ..., 10 okresów naprzód, tzn. jeżeli w danej replikacji kryterium, np. AIC, wskazywało na rząd autoregresji równy 3, to z modelu AR(3) wyznaczane były prognozy, jeżeli w kolejnej replikacji kryterium AIC wybierało rząd AR równy 2, to z tego modelu były obliczane prognozy itd. Należy zaznaczyć, że przy obliczaniu prognoz zmiennej objaśnianej za jej opóźnione wartości przyjmowano wartości prognoz otrzymane w poprzednich okresach, czyli prognozy były dynamiczne. Wyniki w postaci średniokwadratowych błędów prognoz MSE (*Mean Square Error*) uśrednione po replikacjach dla poszczególnych kryteriów oraz różnych horyzontów prognozowania prezentują tab. 5-8.

W przypadku szeregu generowanego z modelu 1 (o współczynnikach $\varphi_1 = 0,3$, $\varphi_2 = 0,4$), dla którego spektrum ma wysokie wartości dla częstości niskich i opada do zera w miarę wzrostu częstości (por. rys. 3), procent wyboru właściwego rzędu $q = 2$ był wysoki dla wszystkich kryteriów informacyjnych, przy czym kryterium BIC wskazywało model AR(2) najczęściej (por. tab. 1). Jednak w miarę spadku liczby obserwacji wszystkie kryteria znacznie częściej identyfikowały szereg jako AR(1), a dla $n = 30$ wyraźnie wzrosła liczba przypadków, w których wybierany rząd autoregresji był równy 0. Warto zauważyć, że najwyższy udział poprawnych wskazań rzędu AR(2) miało kryterium AIC_C (por. tab. 1, $n = 30$).

Dla szeregu generowanego z modelu 2 (o współczynnikach $\varphi_1 = 0,7$, $\varphi_2 = -0,2$), o spektrum opadającym w miarę wzrostu częstości, mającym jednak znacznie niższe wartości w częstościach niskich niż w przypadku danych z modelu 1 (por. rys. 3), wszystkie kryteria w dużym stosunkowo procencie przypadków identyfikowały szereg jako AR(1), a nie AR(2), szczególnie w małej próbie ($n = 50$ i 30), por. tab. 2. Najwyższy udział wyboru rzędu $q = 2$ dla dużej próby (dla $n = 100$) miało kryterium HQ i AIC_C , a dla średniej i małej próby ($n = 50$ i 30) – kryterium AIC_C .

W przypadku danych generowanych z modelu 3 (o współczynnikach $\varphi_1 = 0,9$, $\varphi_2 = -0,6$) i modelu 4 (o współczynnikach $\varphi_1 = -0,9$, $\varphi_2 = -0,5$), charakteryzujących się spektrum o bardzo wysokich wartościach dla częstości średnich oraz wysokich (por. rys. 3), wszystkie kryteria w bardzo dużym procencie przypadków wskazywały poprawnie rząd autoregresji $q = 2$, dla każdej wielkości próby, por. tab. 3 i 4, przy czym kryterium BIC dominowało nad pozostałymi kryteriami. Warto podkreślić, że w małej próbie ($n = 30$) kryterium AIC_C dało porównywalne wyniki jak kryterium BIC.

⁹ Redukowanie rzędu AR przeprowadzano aż do momentu otrzymania istotnego współczynnika, przy czym istotność współczynników autoregresji badano za pomocą testu *t*-Studenta na poziomie istotności 0,05.

Tabela 1. Procentowy udział wyboru rzędu autoregresji przez kryteria selekcji (dane generowane z modelu 1)

Model AR(2)	Kryteria	Rząd autoregresji											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
		$n = 100$											
Model 1 $\varphi_1 = 0,3$ $\varphi_2 = 0,4$	AIC	0,0	1,2	69,8	11	7,2	4,3	2,7	1,2	0,9	0,8	0,9	
	BIC	0,8	5,5	89,8	3,2	0,6	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	HQ	0,3	2,4	85,4	7,1	2,9	1,2	0,3	0,2	0,0	0,1	0,1	
	AIC _c	0,0	1,4	75,9	9,8	6,6	3,1	1,4	0,7	0,2	0,4	0,5	
	z_{lag}	0,5	3,1	65,4	4,2	4,6	4,2	3,2	3,0	3,7	3,7	4,4	
			$n = 50$										
	AIC	4,3	10,8	57,5	10,1	5,7	3,1	2,4	1,9	1,2	1,3	1,7	
	BIC	14,4	25,4	54,5	4,5	1,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	HQ	7,6	17,5	61,6	7,1	3,1	1,1	0,7	0,7	0,1	0,2	0,3	
	AIC _c	5,8	15,1	63,1	8,5	4,3	1,2	0,8	0,8	0,2	0,2	0,0	
	z_{lag}	6,0	19,2	45,0	3,4	4,6	3,0	3,6	3,5	3,1	4,3	4,3	
			$n = 30$										
	AIC	16,9	19,4	35,8	7,6	5,5	3,1	2,3	2,3	2,4	2,0	2,7	
	BIC	34,7	27,8	31,8	2,9	0,9	0,6	0,6	0,2	0,1	0,3	0,1	
	HQ	22,2	24,7	37,4	5,3	2,9	1,7	1,2	1,3	0,9	1,0	1,4	
AIC _c	25,0	28,1	38,1	4,5	2,3	1,0	0,6	0,2	0,1	0,0	0,1		
z_{lag}	24,0	20,1	26,3	2,9	3,6	3,6	4,8	2,7	4,2	4,1	3,7		

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Procentowy udział wyboru rzędu autoregresji przez kryteria selekcji (dane generowane z modelu 2)

Model AR(2)	Kryteria	Rząd autoregresji										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		$n = 100$										
Model 2 $\varphi_1 = 0,7$ $\varphi_2 = -0,2$	AIC	0,0	18,8	56,7	9,5	4,8	3,5	2,3	0,7	1,1	1,6	1,0
	BIC	0,0	46,7	51,8	1,2	0,2	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	HQ	0,0	30,0	62,4	4,7	1,4	1,0	0,1	0,0	0,1	0,2	0,1
	AIC _c	0,0	21,3	61,1	8,7	4,0	1,9	1,3	0,3	0,2	1,0	0,2
	z_{lag}	0,0	28,5	41,3	2,6	3,5	3,8	4,7	3,5	4,7	3,9	3,5
		$n = 50$										
	AIC	0,0	33,1	40,7	8,7	5,1	3,2	3,2	1,7	1,6	1,2	1,5
	BIC	0,7	60,8	34,7	2,9	0,4	0,1	0,3	0,0	0,1	0,0	0,0
	HQ	0,0	46,1	40,7	6,5	3,2	1,0	1,1	0,6	0,3	0,3	0,2
	AIC _c	0,0	40,3	44,1	8,0	3,9	1,2	1,3	0,4	0,5	0,2	0,1
	z_{lag}	0,2	43,9	25,4	3,4	3,5	3,1	5,3	3,5	4,5	2,9	4,3

Tabela 2, cd.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	AIC	1,0	41,2	29,6	7,8	5,6	3,4	2,3	2,4	1,7	2,3	2,7
	BIC	6,3	61,8	25,1	3,7	1,3	0,5	0,7	0,0	0,2	0,2	0,2
	HQ	2,5	50,5	29,8	6,4	4,1	2,2	1,1	0,9	1,0	0,6	0,9
	AIC _c	2,9	56,4	30,8	5,8	2,3	0,7	0,9	0,0	0,1	0,1	0,0
	Z _{lag}	4,4	47,3	15,2	3,5	4,6	4,3	3,9	2,9	4,9	3,7	5,3

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Procentowy udział wyboru rzędu autoregresji przez kryteria selekcji (dane generowane z modelu 3)

Model AR(2)	Kryteria	Rząd autoregresji											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
		$n = 100$											
Model 3 $\varphi_1 = 0,9$ $\varphi_2 = -0,6$	AIC	0,0	0,0	69,1	12,3	6,0	3,4	3,0	1,9	1,6	1,0	1,7	
	BIC	0,0	0,0	96,7	2,4	0,6	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	HQ	0,0	0,0	87,7	7,1	2,3	1,1	0,8	0,8	0,0	0,1	0,1	
	AIC _c	0,0	0,0	75,0	12,2	4,9	2,4	2,7	1,1	0,8	0,5	0,4	
	Z _{lag}	0,0	0,0	67,9	2,8	3,1	4,5	5,2	4,3	4,4	2,6	5,2	
			$n = 50$										
		AIC	0,0	0,1	70,2	10,9	5,4	3,4	3,0	2,3	1,8	1,3	1,6
		BIC	0,0	0,7	92,1	4,8	1,6	0,3	0,2	0,0	0,3	0,0	0,0
		HQ	0,0	0,2	82,4	8,3	3,4	1,9	1,3	1,1	0,5	0,5	0,4
		AIC _c	0,0	0,2	80,7	9,6	3,9	2,1	1,4	1,1	0,5	0,3	0,2
		Z _{lag}	0,0	0,6	70,8	3,4	3,1	3,1	4,1	3,2	4,7	3,9	3,1
			$n = 30$										
		AIC	0,0	1,5	65,6	9,7	7,2	2,9	3,5	2,0	3,0	1,7	2,9
		BIC	0,1	4,5	86	5,5	2,1	0,5	0,7	0,2	0,2	0,1	0,1
		HQ	0,0	2,6	75,6	9	5,6	1,7	1,9	0,7	1,4	0,7	0,8
	AIC _c	0,0	3	84,2	8,4	2,6	0,8	0,6	0,3	0,1	0,0	0,0	
	Z _{lag}	0,1	4,4	66,1	3,6	2,6	2,4	4,9	3,8	4,2	3,9	4,0	

Źródło: obliczenia własne.

Należy wskazać na dużą przydatność kryterium AIC_c, które wypadło zawsze lepiej (wyższy procent poprawnych wskazań rzędu $q = 2$) niż kryterium AIC, por. tab. 1, 2, 3 i 4, a szczególnie zachodzi to dla małej próby. Oznacza to, że kryterium AIC powinno być zastąpione przez kryterium AIC_c.

Tabela 4. Procentowy udział wyboru rzędu autoregresji przez kryteria selekcji (dane generowane z modelu 3)

Model AR(2)	Kryteria	Rząd autoregresji											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
		$n = 100$											
Model 4 $\varphi_1 = -0,9$ $\varphi_2 = -0,5$	AIC	0,0	0,0	69,9	11,2	6,3	3,1	3,1	2,6	1,7	1,0	1,1	
	BIC	0,0	0,2	95,5	3,4	0,7	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	
	HQ	0,0	0,0	88,3	7,5	2,2	0,8	0,5	0,6	0,0	0,1	0,0	
	AIC _c	0,0	0,0	75,9	11,5	4,9	2,4	1,9	2,0	1,0	0,1	0,3	
	z_{lag}	0,0	0,0	67,9	3,3	3,5	3,2	4,9	4,2	4,8	3,5	4,7	
			$n = 50$										
	AIC	0,0	0,4	67,8	10,3	7,2	4,1	3,3	2,0	2,2	1,6	1,1	
	BIC	0,0	3,6	90,5	4,4	1,1	0,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	HQ	0,0	1,5	82,4	7,2	4,3	2,0	1,0	0,4	0,5	0,5	0,2	
	AIC _c	0,0	0,9	80,2	8,9	5,2	2,3	1,1	0,5	0,5	0,3	0,1	
	z_{lag}	0,0	2,4	65,1	3,2	4,2	3,7	4,6	3,9	4,2	3,8	4,9	
			$n = 30$										
	AIC	0,2	4,3	62,4	9,6	5,7	3,6	4,2	2,6	2,5	2,5	2,4	
	BIC	0,4	10,9	78,2	5,2	2,0	1,0	1,2	0,3	0,3	0,3	0,2	
	HQ	0,3	5,5	71,3	8,5	4,9	2,5	2,5	1,2	1,4	1,0	0,9	
AIC _c	0,3	7,8	78,2	7,1	3,7	1,2	1,3	0,1	0,3	0,0	0,0		
z_{lag}	0,5	10,5	58,3	3,5	4,1	3,8	5,3	3,6	3,3	3,9	3,2		

Źródło: obliczenia własne.

Znamienne, że dla wszystkich typów szeregów sekwencyjna metoda testowania istotności współczynników autoregresji wskazywała najniższy procent przypadków poprawnej identyfikacji rzędu AR (por. wyniki dla z_{lag} w tab. 1, 2, 3 i 4) w porównaniu do kryteriów informacyjnych. Dodatkowo sekwencyjna metoda testowania istotności w większym procencie przypadków niż kryteria informacyjne wybierała wyższe rzędy autoregresji, $q = 3, 4, \dots, 10$. Sugeruje to wyraźną przewagę kryteriów informacyjnych nad sekwencyjną metodą testowania istotności współczynników w poprawnym ustalaniu rzędu autoregresji.

Podsumowując wyniki ustalania rzędu autoregresji na podstawie danych generowanych z modeli AR(2) o różnych współczynnikach, można stwierdzić, że w przypadku danych, którym odpowiada spektrum o wysokich wartościach dla pewnego wyróżnionego pasma częstości, można spodziewać się wysokiego procentu przypadków poprawnej identyfikacji rzędu autoregresji (por. model 1, 3, 4) przez wszystkie kryteria wyboru rzędu AR (oczywiście pewne kryteria będą miały przewagę nad pozostałymi). Natomiast jeżeli wartości spektrum są relatywnie niewysokie (jak w przypadku modelu 2) i kształt spektrum jest bardziej podobny do spektrum dla

procesu AR(1) z dodatnim współczynnikiem autoregresji, to w znacznie większym procencie przypadków szereg będzie błędnie identyfikowany jako AR(1). Zatem procent poprawnych wskazań rzędu modelu generującego związany jest z wartościami współczynników autoregresji przyjętymi przy generowaniu danych z modeli autoregresji. Budując zatem scenariusze symulacyjne, warto pamiętać, że przyjęcie pewnych wartości parametrów autoregresyjnego modelu generującego może już z góry zapewnić zbyt optymistyczne wyniki co do stopnia odtworzenia modelu generującego dane czy też nadmiernie preferować pewne metody ustalania rzędu autoregresji. Uwaga ta ma zastosowanie nie tylko do modeli AR(2) rozważanych w artykule, ale ogólnie do modeli autoregresji rzędu q , AR(q) czy też do szerszej klasy modeli, tj. ARMA(q, p), dla których ustala się nie tylko rząd autoregresji q , ale również rząd średniej ruchomej p .

Wybór rzędu autoregresji można rozpatrywać z punktu widzenia odtworzenia modelu generującego (tzn. poprawnego ustalenia rzędu autoregresji) – jak zostało to przedstawione powyżej – oraz wyboru modelu prognostycznego (czyli wyboru takiego modelu autoregresji, który dałby prognozy o najmniejszych błędach prognoz). Ten drugi cel wydaje się mieć większe praktyczne znaczenie w związku z tym, że najczęściej nie jest nieznanym model generujący dane, a zatem niemożliwe jest rozważanie kwestii wyboru poprawnego rzędu autoregresji. Dlatego postawiono pytanie, czy modele autoregresyjne o rzędzie autoregresji ustalonym według kryteriów informacyjnych i sekwencyjnej metody będą jednocześnie najlepszymi modelami prognostycznymi w sensie minimum średniokwadratowego błędu prognoz *ex post* (MSE) oraz w jakim stopniu przyjęcie określonych wartości współczynników autoregresji w badaniach symulacyjnych będzie określać zdolność prognostyczną modeli. Wyniki średnich błędów prognoz o różnym horyzoncie prognozowania (uśrednionych po replikacjach) wyznaczonych z modeli autoregresyjnych, których rząd został wybrany przez kryteria informacyjne i metodę sekwencyjną, zawierają tab. 5-8.

Błędy prognoz z modeli prognostycznych dla danych generowanych z modelu 1 (o współczynnikach $\varphi_1 = 0,3$, $\varphi_2 = 0,4$) w dużej próbie ($n = 100$) są najniższe w przypadku, gdy do prognozowania wykorzystano model autoregresji o rzędzie q wybranym przez kryterium BIC (por. tab. 5). Wynikało to z tego, że stosowanie tego kryterium prowadziło do otrzymania najwyższego udziału poprawnych wyborów rzędu autoregresji $q = 2$ (por. tab. 1). W próbach o mniejszej wielkości ($n = 50$ i 30) błąd MSE jest najniższy w sytuacji, gdy prognozy wyznaczono z modelu autoregresji o rzędzie ustalonym przez kryterium AIC_c (por. tab. 5), które jednocześnie zapewniało otrzymanie największego udziału poprawnych wskazań rzędu autoregresji (por. tab. 1). W przypadku zatem danych generowanych z modelu 1 kryterium wypadające najlepiej w odtworzeniu prawdziwego rzędu autoregresji ($q = 2$) było jednocześnie kryterium prowadzącym do wyboru modelu o największej zdolności prognostycznej.

Tabela 5. MSE dla prognoz z modeli wybranych przez poszczególne kryteria (dane generowane z modelu 1)

Model AR(2)	Kryteria	Horyzont prognozowania						
		1	2	3	5	8	10	
$n = 100$								
Model 1 $\varphi_1 = 0,3$ $\varphi_2 = 0,4$	AIC	1,042	1,163	1,227	1,388	1,529	1,558	
	BIC	1,029	1,135	1,191	1,354	1,493	1,523	
	HQ	1,027	1,135	1,195	1,358	1,496	1,525	
	AIC _c	1,035	1,150	1,211	1,373	1,511	1,542	
	z_{lag}	1,045	1,164	1,228	1,394	1,539	1,572	
	$n = 50$							
	AIC	1,097	1,212	1,307	1,431	1,568	1,623	
	BIC	1,103	1,228	1,306	1,423	1,545	1,600	
	HQ	1,084	1,202	1,293	1,418	1,551	1,607	
	AIC _c	1,078	1,197	1,290	1,414	1,544	1,600	
	z_{lag}	1,096	1,235	1,338	1,468	1,599	1,659	
	$n = 30$							
	AIC	1,225	1,351	1,462	1,650	1,848	1,944	
	BIC	1,201	1,337	1,419	1,560	1,678	1,722	
	HQ	1,214	1,333	1,433	1,599	1,752	1,826	
AIC _c	1,178	1,304	1,394	1,542	1,673	1,722		
z_{lag}	1,275	1,386	1,496	1,672	1,847	1,928		

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 6. MSE dla prognoz z modeli wybranych przez poszczególne kryteria (dane generowane z modelu 2)

Model AR(2)	Kryteria	Horyzont prognozowania					
		1	2	3	5	8	10
1	2	3	4	5	6	7	8
$n = 100$							
Model 2 $\varphi_1 = 0,7$ $\varphi_2 = -0,2$	AIC	1,089	1,350	1,486	1,534	1,594	1,616
	BIC	1,065	1,333	1,474	1,517	1,577	1,603
	HQ	1,068	1,337	1,476	1,524	1,583	1,607
	AIC _c	1,086	1,350	1,485	1,530	1,589	1,612
	z_{lag}	1,116	1,375	1,506	1,556	1,615	1,635
$n = 50$							
	AIC	1,094	1,401	1,517	1,628	1,643	1,650
	BIC	1,072	1,355	1,469	1,585	1,613	1,622
	HQ	1,078	1,367	1,483	1,603	1,625	1,634
	AIC _c	1,087	1,371	1,484	1,599	1,622	1,633
	z_{lag}	1,108	1,409	1,533	1,658	1,687	1,694

Tabela 6, cd.

1	2	3	4	5	6	7	8
	$n = 30$						
	AIC	1,272	1,504	1,654	1,790	1,830	1,833
	BIC	1,229	1,414	1,547	1,671	1,701	1,711
	HQ	1,218	1,436	1,584	1,724	1,747	1,750
	AIC _c	1,204	1,409	1,549	1,668	1,701	1,709
	z_{lag}	1,336	1,579	1,731	1,871	1,889	1,899

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 7. MSE dla prognoz z modeli wybranych przez poszczególne kryteria (dane generowane z modelu 3)

Model AR(2)	Kryteria	Horyzont prognozowania					
		1	2	3	5	8	10
		$n = 100$					
Model 3 $\varphi_1 = 0,9$ $\varphi_2 = -0,6$	AIC	1,052	1,547	1,685	1,850	1,997	2,107
	BIC	1,045	1,522	1,655	1,821	1,962	2,069
	HQ	1,048	1,529	1,666	1,832	1,973	2,081
	AIC _c	1,046	1,537	1,675	1,841	1,988	2,098
	z_{lag}	1,059	1,554	1,692	1,863	2,010	2,118
	$n = 50$						
	AIC	1,079	1,561	1,771	1,938	2,106	2,181
	BIC	1,046	1,496	1,692	1,860	2,029	2,114
	HQ	1,067	1,538	1,745	1,912	2,080	2,158
	AIC _c	1,068	1,535	1,739	1,904	2,070	2,150
	z_{lag}	1,090	1,589	1,812	1,982	2,164	2,231
	$n = 30$						
	AIC	1,212	1,780	2,007	2,179	2,270	2,350
	BIC	1,100	1,653	1,857	2,010	2,122	2,208
	HQ	1,168	1,731	1,930	2,086	2,188	2,272
AIC _c	1,089	1,642	1,844	2,004	2,118	2,204	
z_{lag}	1,280	1,903	2,135	2,255	2,336	2,413	

Źródło: obliczenia własne.

Dla danych generowanych z modelu 2 (o współczynnikach $\varphi_1 = 0,7$, $\varphi_2 = -0,2$) najniższe błędy MSE dla dużej próby ($n = 100$) występują w przypadku, gdy prognozy wyznaczono na podstawie modeli o rzędzie autoregresji ustalonym przez kryteria HQ i AIC_c (por. tab. 6). Równocześnie stosowanie tych kryteriów zapewniało naj-

wyższy udział poprawnej identyfikacji rzędu autoregresji (por. tab. 2). Oznacza to, że w tym przypadku kryterium informacyjne najlepiej wybierające rząd autoregresji jest jednocześnie kryterium prowadzącym do wyboru najlepszego modelu prognostycznego pod względem najmniejszych błędów prognoz *ex post*. Nie zachodzi to już w przypadku średniej i małej próby ($n = 50$ i 30), dla których najniższe błędy prognoz otrzymuje się, gdy model prognostyczny został wybrany z wykorzystaniem kryterium BIC (z wyjątkiem horyzontu prognozowania $h = 1$, por. tab. 6), podczas gdy zastosowanie kryterium AIC_c dawało największy (choć ogólnie nie za wysoki) udział poprawnej identyfikacji rzędu $q = 2$ (por. tab. 2). W przypadku danych generowanych z modelu 2, o kształcie spektrum podobnym do spektrum szeregu AR(1), kryterium BIC w większości przypadków wskazywało na rząd $q = 1$, a więc niewłaściwy rząd autoregresji. Mimo to, modele te okazały się przydatne w prognozowaniu.

Tabela 8. MSE dla prognoz z modeli wybranych przez poszczególne kryteria (dane generowane z modelu 4)

Model AR(2)	Kryteria	Horyzont prognozowania						
		1	2	3	5	8	10	
		$n = 100$						
Model 4 $\varphi_1 = -0,9$ $\varphi_2 = -0,5$	AIC	1,038	1,450	1,631	1,786	1,912	1,942	
	BIC	1,016	1,424	1,595	1,750	1,882	1,916	
	HQ	1,018	1,431	1,608	1,762	1,891	1,924	
	AIC_c	1,027	1,435	1,614	1,766	1,896	1,929	
	z_{lag}	1,044	1,460	1,638	1,803	1,934	1,958	
			$n = 50$					
	AIC	1,054	1,517	1,718	1,852	1,969	2,009	
	BIC	1,012	1,467	1,667	1,793	1,909	1,951	
	HQ	1,024	1,471	1,673	1,810	1,925	1,967	
	AIC_c	1,027	1,477	1,681	1,816	1,930	1,970	
	z_{lag}	1,082	1,570	1,791	1,912	2,014	2,049	
			$n = 30$					
	AIC	1,284	1,676	1,837	2,058	2,206	2,253	
	BIC	1,216	1,573	1,730	1,946	2,074	2,106	
	HQ	1,246	1,631	1,788	2,016	2,171	2,212	
AIC_c	1,220	1,576	1,735	1,950	2,078	2,112		
z_{lag}	1,289	1,704	1,902	2,133	2,289	2,338		

Źródło: obliczenia własne.

W przypadku danych generowanych z modelu 3 (o współczynnikach $\varphi_1 = 0,9$, $\varphi_2 = -0,6$) i modelu 4 (o współczynnikach $\varphi_1 = -0,9$, $\varphi_2 = -0,5$) najniższe błędy prognoz otrzymano wtedy, gdy do prognozowania wykorzystano modele o rzędzie

autoregresji ustalonym za pomocą kryterium BIC (por. tab. 7 i 8, $n = 100$ i 50), które jednocześnie było kryterium identyfikującym rząd autoregresji $q = 2$ w najwyższym procencie przypadków (por. tab. 3 i 4). W małej próbie najniższe błędy MSE otrzymuje się na podstawie modeli o rzędzie autoregresji ustalonym z wykorzystaniem kryterium AIC_C (por. tab. 7), mimo że w przypadku danych generowanych z modelu 3 największy procent poprawnych wskazań rzędu autoregresji dawało zastosowanie kryterium BIC (por. tab. 3). Dla danych generowanych z modelu 4 prognozy wyznaczone z modeli o rzędzie autoregresji wybranym z wykorzystaniem kryteriów BIC i AIC_C miały porównywalną wielkość błędów prognoz (por. tab. 8), chociaż w przypadku kryterium BIC błędy prognoz były nieznacznie niższe. Stosowanie tych kryteriów (BIC i AIC_C) w największym procencie przypadków prowadziło do wyboru właściwego rzędu autoregresji (por. tab. 4), co w konsekwencji przejawiało się w postaci wysokiej zdolności prognostycznej.

Stosowanie sekwencyjnej metody testowania istotności współczynników autoregresji zarówno do ustalania rzędu autoregresji, jak i do wyboru modelu prognostycznego prowadziło do wyraźnie gorszych wyników (odpowiednio w sensie niższego procentu poprawnych wskazań rzędu autoregresji i wyższych błędów prognoz) niż w przypadku kryteriów informacyjnych (por. wyniki dla z_{lag} w tab. 5-8). W konsekwencji do ustalania rzędu autoregresji, jak również wyboru modelu prognostycznego należy rekomendować kryteria informacyjne, szczególnie kryterium BIC w dużych próbach i kryterium AIC_C w małych próbach.

Należy jednak podkreślić, że najniższe błędy prognoz z modeli wybranych za pomocą poszczególnych kryteriów niekoniecznie muszą korespondować z ich trafnością (por. tab. 9). Najwyższy udział prognoz trafnych, przy liberalnej wartości granicznej względnego błędu prognoz, tj. 15%, wystąpił dla danych generowanych z modelu 1 (o współczynnikach $\varphi_1 = 0,3$, $\varphi_2 = 0,4$) i modelu 3 (o współczynnikach $\varphi_1 = 0,9$, $\varphi_2 = -0,6$), charakteryzujących się wysokimi wartościami spektrum odpowiednio dla niskich i średnich częstości (por. rys. 3). Niższy, ale również dość wysoki udział prognoz trafnych obserwuje się dla danych generowanych z modelu 2 (o współczynnikach $\varphi_1 = 0,7$, $\varphi_2 = -0,2$), które miały spektrum ze szczytami dla dość szerokiego pasma częstości niskich, ale o niższej wartości niż w przypadku danych z modelu 1. Dużo niższy udział prognoz trafnych występuje dla danych generowanych z modelu 4 (o współczynnikach $\varphi_1 = -0,9$, $\varphi_2 = -0,5$), dla których spektrum charakteryzuje się wysokim udziałem wahań o częstościach wysokich w ogólnej wariancji szeregu. W tym ostatnim przypadku wskazuje to na dominację wahań krótkookresowych, co powoduje, że szereg cechuje się dużą zmiennością i jest trudno prognozowalny.

Podsumowując, należy stwierdzić, że w przypadku danych generowanych przez modele (1, 3, 4), dla których spektrum ma wysokie wartości dla pewnego pasma częstości, wybór rzędu autoregresji przez kryteria informacyjne pozwalał otrzymać modele, które w prognozowaniu zachowywały się najlepiej, tj. dawały prognozy o najmniejszych błędach prognoz. Natomiast w przypadku danych generowanych

Tabela 9. Procent trafnych prognoz (przy granicznym błędzie względnym 15%) otrzymanych z modeli wybranych przez poszczególne kryteria dla horyzontu prognozowania $h = 1$ i 10

Kryteria	Modele generujące							
	Model 1 $\varphi_1 = 0,3, \varphi_2 = 0,4$		Model 2 $\varphi_1 = 0,7, \varphi_2 = -0,2$		Model 3 $\varphi_1 = 0,9, \varphi_2 = -0,6$		Model 4 $\varphi_1 = -0,9, \varphi_2 = -0,5$	
	$h = 1$	$h = 10$	$h = 1$	$h = 10$	$h = 1$	$h = 10$	$h = 1$	$h = 10$
	$n = 100$							
AIC	97,8	94,0	86,5	73,6	94,6	83,5	46,6	32,7
BIC	97,7	94,0	86,6	74,1	95,2	83,9	46,6	32,6
HQ	97,8	94,0	87,0	74,1	95,0	83,8	46,9	32,7
AIC _C	97,8	94,0	86,8	73,7	94,6	83,6	47,2	32,5
z_{lag}	97,8	94,0	86,8	74,0	95,0	82,9	46,7	33,5
	$n = 50$							
AIC	97,8	94,0	86,7	74,1	95,0	85,6	45,8	33,3
BIC	97,7	95,0	86,8	73,6	95,2	86,1	46,8	34,2
HQ	97,7	94,0	86,8	73,8	95,1	86,1	46,4	33,8
AIC _C	97,9	94,0	86,5	74,0	95,0	86,1	46,5	33,8
z_{lag}	97,3	94,0	86,2	73,3	94,8	85,7	45,6	33,1
	$n = 30$							
AIC	97,1	91,0	81,8	72,7	92,2	82,0	43,4	35,9
BIC	97,5	92,0	83,0	74,4	93,4	83,0	45,5	35,7
HQ	97,2	92,0	82,8	73,3	92,8	82,8	43,9	35,3
AIC _C	97,5	92,0	83,1	73,8	93,4	83,0	44,8	35,9
z_{lag}	96,7	91,0	80,9	72,5	92,0	81,2	42,8	35,5

Źródło: obliczenia własne.

z modelu 2, o relatywnie niższych wartościach spektrum dla szerokiego pasma częstości niskich, dla średniej i małej próby ($n = 50$ i 30), najniższe błędy prognoz otrzymuje się z modeli (głównie AR(1)) wybranych przez kryterium BIC, a nie przez kryterium AIC_C najlepiej odtwarzające właściwy rząd autoregresji (por. tab. 2). Sugeruje to dużą przydatność kryterium BIC w wyborze modelu prognostycznego. Należy również podkreślić dobre zachowanie kryterium AIC_C zarówno przy ustalaniu rzędu autoregresji, jak i przy wyborze modelu prognostycznego, szczególnie w małych próbach. Wyraźnie gorsze wyniki otrzymano z wykorzystaniem sekwencyjnej metody testowania, zarówno do ustalania rzędu autoregresji, jak i wyboru modelu prognostycznego. Wskazuje to, że metoda ta nie może raczej konkurować z kryteriami informacyjnymi.

5. Zakończenie

Z przeprowadzonego badania symulacyjnego wynika, że przyjęcie określonych wartości współczynników autoregresji w modelu generującym dane determinuje wyniki w sensie poprawnej identyfikacji rzędu autoregresji. W przypadku danych, dla których spektrum miało wysokie wartości dla pewnego przedziału częstości, procent poprawnej identyfikacji rzędu autoregresji był znacznie wyższy niż w przypadku, gdy spektrum miało niższe wartości dla pewnego pasma częstości i ogólnie bardziej płaski przebieg. Fakt ten powinien być uwzględniany w badaniach symulacyjnych.

Na ogół kryterium informacyjne identyfikujące w największym stopniu prawdziwy rząd autoregresji było jednocześnie kryterium, które pozwalało wybrać model prognostyczny o najmniejszych błędach prognoz. Zachodziło to w przypadku, gdy dane otrzymane z modelu generującego miały spektrum o wysokich wartościach dla określonego przedziału częstości. Gdy spektrum miało relatywnie niewysokie wartości dla pewnego przedziału częstości, to kryterium informacyjne najlepiej wybierające rząd autoregresji nie zawsze pokrywało się z kryterium najlepiej wybierającym model prognostyczny. W dużych próbach uniwersalnym kryterium, w sensie przydatności do ustalania rzędu autoregresji, jak również wyboru modelu prognostycznego, wydaje się kryterium BIC, a w małych – kryterium AIC_C . Porównując podejście informacyjne i testowe zarówno w wyborze rzędu autoregresji, jak i w wyborze modelu prognostycznego, zauważyć można zdecydowaną przewagę podejścia bazującego na kryteriach informacyjnych. Z tego powodu preferowanym podejściem powinno być podejście informacyjne.

Literatura

- Akaike H., *Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle*, 2nd International Symposium on Information Theory, B.N. Petrov and F. Csaki (eds.), Akademiai Kiado, Budapest 1973, s. 267-281.
- Akaike H., *Modern Development of Statistical Methods*, [w:] P. Eykhoff (red.), *Trends and Progress in System Identification*, Pergamon Press, Paris 1981.
- Boekee D.E., Buss H.H., *Order Estimation of Autoregressive Models*, 4th Aachener Kolloquium: Theorie und Anwendung der Signalverarbeitung [Proceedings of the 4th Aachen Colloquium: Theory and application of signal processing], 1981, s. 126-130.
- Burnham K.P., Anderson D.R., *Model Selection and Multi-Model Inference*, Springer, New York 2002.
- DeJong D.N., Nankervis J.C., Savin N.E., Whiteman C.H., *The power problems of unit root tests for time series with autoregressive error*, "Journal of Econometrics" 1992, no 53, s. 323-343.
- Granger C.W.J., *The typical spectral shape of an economic variable*, "Econometrica" 1966, no 34.
- Granger C.W.J., King M.L., White H., *Comments on testing economic theories and the use of model selection criteria*, "Journal of Econometrics", no 67.
- Hall A., *Testing for s unit root in time series with pretest data-based model selection*, "Journal of Business and Economic Statistics" 1994, no 12, s. 461-470.
- Hannan E.J., Quinn B.G., *The determination of the order of an autoregression*, "Journal of "Royal Statistical Society" 1978, no 41, s. 190-195.

- Hurvich C.M., Tsai C.L., *Model selection for extended quasi-likelihood models in small samples*, "Biometrics" 1995, no 51, s. 1077-1084.
- Hurvich C.M., Tsai C.-L., *Regression and time series model selection in small samples*, "Biometrika" 1989, no 76, s. 297-307.
- Lütkepohl H., *Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York Tokyo 1993.
- Neath A.A., Cavanaugh J.E., *Regression and time series model selection using variants of the schwarz information criterion*, "Communications in Statistics – Theory and Methods" 1997, no 26, s. 559-580.
- Ng S., Perron P., *Unit root test in ARMA models with data-dependent methods for the selection of the truncation lag*, "Journal of American Statistical Association" 1995, no 90, s. 268-281.
- Piłatowska M., *Porównanie kryteriów informacyjnych i predykcyjnych w wyborze modelu*, Prace i Materiały Wydziału Zarządzania UG nr 4/8, 2011, s. 499-512.
- Schwarz G., *Estimating the dimension of a model*, "Annals of Statistics" 1978, no 6.
- Sclove S.L., *Application of model-selection criteria to some problems in multivariate analysis*, "Psychometrika" 1987, no 52, s. 333-343.
- Stock J.H., *Unit Root, Structural Breaks, and Trends*, [w:] R.F. Engle, M.L. McFadden (red.), *Handbook of Econometrics*, vol. IV, North-Holland, Amsterdam 1994.
- Sugiura N., *Further analysis of the data by akaike's information criterion and the finite correction*, "Communications in Statistics, Theory and Methods" 1978, no A7, s. 13-26.
- Wilks D.S., *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences*, Elsevier, New-York 2006.

AUTOREGRESSIVE ORDER SELECTION DEPENDING ON PARAMETERS OF GENERATING MODEL

Summary: The paper shows the performance of different criteria selecting the autoregression order: AIC, BIC, HQ and sequential rule of testing the significance of the last coefficient) assuming different values of autoregression coefficients and different sample sizes. It has been indicated that corrected AIC (AIC_c), rarely used in Polish studies, is very useful in selecting the autoregression order particularly in small samples. It has been emphasized that the issue of order selection may be considered in two contexts, namely in the context of selecting the true order of autoregressive model (true data generating model) and in choosing the best forecasting model. These considerations have been illustrated by the results of simulation study.

Keywords: autocorrelation function, spectrum of autoregressive process, selection criteria of autoregression order, choosing the forecasting model.