

Biblioteka Główna | OINT
Politechniki Wrocławskiej



100100151063

Biblioteka
Politechniki Wrocławskiej

4615 III



PROF. S. P. TIMOSZENKO

KURS WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

PRZEŁOŻYŁ Z IV-GO WYDANIA ROSYJSKIEGO I UZUPEŁNIŁ

M. T. HUBER

INŻYNIER, DOKTOR NAUK TECHNICZNYCH, PROFESOR LWOWSKIEJ POLITECHNIKI, CZŁONEK CZYNNY
AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH W WARSZAWIE I TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WE LWOWIE

WYDANE Z ZAPOMOĞĄ MINISTERSTWA HANDLU I PRZE-
MYSŁU, ORAZ MINISTERSTWA ROBÓT PUBLICZNYCH*

BRACIA BAZAŃSCY
KSIĘGARNIA I SKŁAD NUT
GRUDZIĄDZ - BYDGOSZCZ
LIPOWA 1. - GDAŃSKA 18



LWÓW — WARSZAWA
KSIĄŻNICA POLSKA T-WA NAUCZYCIELI SZKÓŁ WYŻSZYCH
MCMXXI



3480192/1



Inn. 1615.

PRZEDMOWA TŁUMACZA

Przymusowym wywczasom w rosyjskiej niewoli zawdzięczam poznanie dzieł prof. S. P. Timoszenki, którego wybitne prace na polu mechaniki technicznej były mi przedtem znane z publikacji francuskich i niemieckich. Jego „Kurs soprotiwlenja materjałow“ odznacza się tak cennymi zaletami, że nawet w innych warunkach nie zawahałbym się w wyborze tej właśnie książki dla jej przyswojenia naszej literaturze. Niewiele bowiem możnaby przytoczyć dzieł z tej dziedziny, któreby, zachowując techniczny charakter i przystępność wykładu, osiągnęły równie wysoki poziom naukowy. Nawet bardzo poczytne i przez techników różnych narodowości cenione książki z tego zakresu nie są wolne od licznych nieścisłości, a przytem powtarzają bezkrytycznie niektóre poglądy dawnych autorytetów, uznane w nauce za błędne. Takich usterek nie znalazłem w kursie prof. Timoszenki, mimo całe bogactwo i obfitość treści.

W przekładzie opuściłem rozdział VII (§§ 48—53) traktujący o momentach bezwładności figur płaskich, albowiem te rzeczy można znaleźć w każdej prawie książce poświęconej mechanice ogólnej lub statyce wykreślnej. Natomiast dodałem niektóre uzupełnienia na podstawie własnych prac, przeważnie nieznanymi autorowi oryginału. Te dodatki (lub też drobne zmiany) odróżniłem w rękopisie ujęciem w klamry.

Mam nadzieję, że książka uczyni zadość piękącej potrzebie polskich techników, albowiem od „Wykładu wytrzymałości materjałow“ Wl. Klugera z r. 1875 nie posiadamy nowszego kompletnego kursu politechnicznego dla tego tak niesłychanie ważnego działu mechaniki technicznej (Prof. L. Karasiński w Warszawie zdążył niestety wydać tylko pierwszą część swej interesującej „Wytrzymałości tworzyw“).

Szczerą podziękę winienem prof. S. P. Timoszence za prawdziwie koleżeńskie i bezinteresowne poparcie mej pracy w trudnych warunkach jeńca wojennego, a Ministerstwu handlu i przemysłu, oraz Ministerstwu robót publicznych za wydatną pomoc materialną, która umożliwiła wydanie książki przy obecnym naszym przesileniu gospodarczem. Wyrazy wdzięczności należą się także „Technicznemu Towarzystwu wydawniczemu“ w Warszawie, które zrezygnowało wspaniałomyślnie z swych praw do rękopisu, nabytych jeszcze w r. 1917 w Moskwie.

We Lwowie w styczniu 1921 r.

M. T. HUBER

WSTĘP

Przy projektowaniu budowli i maszyn gra nader ważną rolę kwestja dobrania wymiarów dla oddzielnych części, czyli elementów konstrukcyjnych. Aby tę kwestję rozstrzygnąć, należy przede wszystkim określić siły zewnętrzne, które będą działać na konstrukcję, a następnie znaleźć z nich siły wewnętrzne, powstające w poszczególnych elementach. Dla zapewnienia bezpieczeństwa i trwałości konstrukcji, trzeba obrać wymiary poszczególnych części tak, ażeby siły wewnętrzne nie przekraczały pewnych norm, ustanowionych dla rozmaitych materiałów konstrukcyjnych na podstawie doświadczalnego badania ich wytrzymałości.

Ogół metod analitycznych, służących do wyznaczenia sił wewnętrznych, tudzież sposobów, któremi posługujemy się przy doświadczalnym badaniu wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych, stanowi przedmiot nauki o wytrzymałości.

W wykładzie tego przedmiotu można wysuwać na pierwszy plan bądź to część teoretyczną, bądź też doświadczalną, zależnie od celu, jaki mamy przed sobą, atoli w ogólnym rozwoju nauki okazuje się, że obiedwie części są zarówno ważne. Teoretyczne spekulacje mogą się okazać bezpłodnymi, o ile się nie opierają na doświadczeniach. Tak samo i oddzielne doświadczenia bez teoretycznego uogólnienia nie wystarczają do wyprowadzenia prawideł potrzebnych do racjonalnego obliczenia i nie posłużą do dalszego rozwoju nauki.

Ścisły związek między rozlicznymi działami techniki konstrukcyjnej a nauką o wytrzymałości, zapewniający tej nauce coraz to nowe zakresy zastosowania i wprowadzający w życie racjonalne metody obliczeń, powstał dopiero niedawno łącznie z olbrzymim rozwojem spóczesnej techniki. Dawni inżynierowie i architekci obchodzili się bez obliczeń. Przy obiorze wymiarów szli po omacku, drogą czystej empirji. Nowe budowle były zwykle kopjami dawniejszych. Typy budowli zmieniały powoli swój wygląd, a same budowle były niejako obiektami doświadczalnymi. Skoro budowla nowego typu okazała się trwałą, to służyła za wzór dla następnych. Kwestja ekonomji nie grała szczególnej roli i dlatego potrzebną trwałość zabezpieczano nadmiernem powiększaniem wymiarów. Dawano zbyt grube ściany, stawiano potężne kolumny i słupy, nie licząc się z ilością spotrzebowanych materiałów budowlanych, z ilością ludzkiej pracy i z czasem potrzebnym do wzniesienia budowli.

Pierwsze naukowe prawidła, które się stały początkiem nauki o wytrzymałości, pojawiły się w pierwszej połowie XVII-go wieku. Sławny Galileusz zwrócił uwagę na to, że mechanika ciał sztywnych nie wystarcza do rozwiązania kwestji wytrzymałości, że należy pójść dalej i uwzględnić fizyczne własności materiałów, ich wytrzymałość i zdolność do pewnej zmiany kształtu pod wpływem sił zewnętrznych. W związku z działalnością budowniczą Galileusza, powstały kwestje wytrzymałości belek. Temu zadaniu poświęcił Galileusz szczególną uwagę i udało mu się rozwiązać zagadnienie zgięcia belki jednym końcem utwierdzonej (np. zamurowanej w ścianie), a obciążonej na drugim swobodnym końcu. Dalszym rozwojem teorii zgięcia belek, ważnej dla zastosowań praktycznych, zajął się francuski uczoney Coulomb. Liczne wyniki jego badań nie straciły po dziś dzień swojej wartości. Wzorami Coulomb'a posługujemy się dotychczas przy badaniu skręcenia okrągłych prętów i przy wyznaczaniu naporu ciał sypkich na ograniczające je ściany.

W XVIII-ym wieku rozwijali dalej teorię wytrzymałości znakomici matematycy Daniel i Jakób Bernoulli; Euler i Lagrange zajmowali się teorią zgięcia prętów. Interesując się matematyczną stroną zagadnienia zwracali uwagę przede wszystkim na całkowanie równania różniczkowego zgiętej osi pręta i rozpatrywali różne możliwe postacie równowagi zgiętych prętów. Praktyczne znaczenie traktowanych zadań pozostało nierozpatrzone, a wyników otrzymanych przez matematyków nie wyzyskali technicy. Osobliwie interesującym jest los pewnego zagadnienia, rozwiązane przez Eulera. Chodziło o stałość równowagi prostego długiego pręta, ściskanego w kierunku osi siłami działającymi na jego oba końce. Wiadomo, że pod wpływem takich sił może pręt utracić pierwotną prostą postać i „wyhoczyć się“. Otóż Euler znalazł wyrażenie matematyczne dla tej wartości ściskającej siły, po której przekroczeniu nastąpi wyboczenie pręta, ale wzór jego pozostał na razie bez praktycznego zastosowania. Stosując formułę Eulera tam, gdzie jej stosować nie wolno, zdecydowali bardzo szybko inżynierowie „nieprawdziwość teorii“ i przy rozwiązywaniu zagadnień wytrzymałości ściskanych prętów, zaczęli się posługiwać formułami empirycznymi różnego rodzaju. Dopiero w stosunkowo niedawnym czasie, w związku z obliczaniem długich prętów, stosowanych w konstrukcji żelaznych mostów, pojawiła się kwestja poprawności wzoru Eulera. Wyjaśniono granice stosowności tego wzoru i obecnie używają go powszechnie w technice. Ale na to potrzeba było półtora stulecia, aby pogodzić teorię z praktyką.

Rozwój teorii wytrzymałości materiałów, w pierwszej połowie XIX-go wieku, zawdzięczamy głównie pracy inżynierów francuskich. Pierwsza Francja położyła jako fundament wyższego wykształcenia technicznego obszerne przygotowanie matematyczne; a znajomość matematyki pozwoliła francuskim inżynierom opracowywać z powodzeniem różnorodne działy nauk technicznych. W tym czasie pojawia się książka Navier'a: „Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées“ (1824 r.), która, zawierając kompletny wykład wytrzymałości materiałów, nie straciła po dziś dzień swego znaczenia. W tymże czasie zapoczątkowano ogólną teorię równowagi ciał sprężystych, rozwijającą się dalej w naukę „teorii sprężystości“.

Wzajemne zbliżenie teorii i techniki sprzyjało szczególnie rozwojowi nauki o wytrzymałości. Budownictwo mostów, kolejnictwo i spóczesna budowa maszyn, następczają wciąż nowe i nowe zadania. Od badania wytrzymałości poszczególnych prętów trzeba było przejść do studjum układów złożonych z takich prętów. Takie układy nabrały szczególnego znaczenia praktycznego w związku z konstrukcją mostów żelaznych. Dla obliczenia mostów wypracowano metody wykreślne, grające obecnie bardzo ważną rolę. Spóczesna budowa maszyn, dopuszczająca niekiedy bardzo wielkie prędkości ruchu elementów maszynowych, zmusiła do zwrócenia bacznej uwagi na wpływ sił bezwładności. Pokazało się, że siły te wywołują niekiedy znaczne naprężenia w elementach i mogą nawet być powodem zniszczenia maszyn. Nie rzadkie np. są przypadki „eksplozji“ kół zamachowych i szybko wirujących krążków turbin parowych. W związku z powiększeniem prędkości ruchu wzrasta też i znaczenie powstających przytem drgań. W niektórych warunkach mogą drgania wywołać bardzo wielkie naprężenia dodatkowe i spowodować zniszczenie maszyny. Często zdarzające się pęknięcia wałów w motorach Diesel'a, stoją zapewne także w związku z powstającymi podczas ruchu drganiami i uderzeniami. Z podobnymi zadaniami, odnoszącymi się do wpływu uderzeń i drgań na siły wewnętrzne, spotykamy się przy obliczaniu mostów kolejowych. Doświadczenia i liczne teoretyczne badania wykazują, że pod działaniem obciążeń poruszających się po moście powstają naprężenia znacznie większe od tych, jakie można obserwować w przypadkach spoczynku owych obciążeń.

Nie będziemy wyliczać całego szeregu nowych zagadnień nauki o wytrzymałości, które z kolei stawia spóczesna technika. Zauważymy tylko, że rozwiązanie rozlicznych kwestji z nauki o wytrzymałości, komplikuje się jeszcze w wielu przypadkach przez dodatkowe warunki, dyktowane pożądaną ekonomją konstrukcji. Spóczesny inżynier musi budować nie tylko trwale, ale i tanio. Wypada projektować konstrukcje silne, trwałe, przy najmniejszym spożyczeniu materiałów, pracy ludzkiej i czasu. Wiele twórczej energii zwraca się obecnie w tym kierunku, dzięki czemu technika osiągnęła wielkie sukcesy i stworzyła znaczną liczbę nowych typów konstrukcyj o przedziwnej lekkości.

Wskutek szybkiej zmiany typów konstrukcyjnych i wielkiej różnorodności materiałów, nie można teraz przy obiorze wymiarów części składowych iść drogą czystej empirji; niema czasu

czekać, aż praktyka pokaże zachowanie się poszczególnych konstrukcji w warunkach rzeczywistych. Wszystko należy przewidzieć i naprzód obmyśleć. Tego można dokonać tylko rachunkiem opartym na naukowych podstawach i widzimy istotnie, że z rozwojem techniki budowlanej, z powiększeniem wartości ludzkiej pracy i udoskonaleniem własności materiałów, idzie w parze coraz większe znaczenie teoretycznych obliczeń, coraz większej dokładności wymaga się, wprowadzając stopniowo w zakres badań warunki dopełniające, które można było pominąć przy pierwszych obliczeniach, robionych „z grubsza“.

Równoległe z wzrostem znaczenia badań teoretycznych zwiększa się także doniosłość laboratoriów. Pierwotnym zadaniem laboratoriów mechanicznych było badanie wytrzymałości i sprężystych własności rozmaitych materiałów budowlanych. Obecnie rozszerzyło się ich pole działania; obok badania materiałów zajmują się laboratorja także badaniem całych elementów konstrukcyjnych, a nawet modeli całych konstrukcji. Takie doświadczenia mają niekiedy charakter sprawdzający i służą do przekonania się o słuszności poprzednich badań teoretycznych; często jednak mają też i samodzielne znaczenie.

Zagadnienie techniczne wyphywające z codziennych potrzeb praktyki nie zawsze może oczekiwać na zupełne rozwiązanie teoretyczne; w tych więc przypadkach, kiedy teoria nie dostarcza rozwiązania bezpośredniego, kiedy nie można ująć w rachunek wszystkich okoliczności komplikujących zadanie, uciekamy się do doświadczeń. Badamy na modelach wytrzymałość konstrukcji i otrzymujemy tą drogą odpowiedź potrzebną dla praktyki. Doświadczenia tego typu grają ważną rolę w najnowszych czasach w związku z budową olbrzymich żelaznych mostów. Niezwykłe rozmiary budowli zniewoliły projektujących inżynierów do stworzenia elementów konstrukcyjnych nowego typu, różniącego się znacznie od przyjętych ogólnie i używanych dotychczas. Zupełne rozjaśnienie kwestji wytrzymałości takich elementów można było uzyskać tylko drogą specjalnych doświadczeń.

Wzajemne zbliżenie teorii i techniki w zakresie nauki o wytrzymałości, które zaznaczyliśmy powyżej, można zauważyć i w innych działach umiejętności technicznych. Znaczenie teorii i rola naukowego badania w technice wciąż wzrasta, co oczywiście wpływa na wymagania stawiane współczesnemu inżynierowi i musi się odbić na stanie wyższego wykształcenia technicznego. Nie wystarcza już rzemieślnicze wyuczenie się, przygotowujące inżyniera do szablonowej pracy w jakiegokolwiek ciasnej specjalności; potrzeba także inżynierów-teoretyków z obszernym przygotowaniem naukowym i z uzdolnieniem do badań laboratoryjnych. Popyt na inżynierów tego typu zaznacza się zwłaszcza w krajach wiodących prym w przemysłowym rozwoju, gdzie wyciężona walka o byt, zmusza poszczególne przedsiębiorstwa pracować nieustannie nad dalszym udoskonaleniem swoich wyrobów. Aby uczynić zadość tej potrzebie, wprowadzono w niektórych niemieckich politechnikach, cały szereg nieobowiązkowych wykładów treści matematycznej, które każdemu chętnemu słuchaczowi pozwalają osiąść poważne przygotowania matematyczne, nie ustępujące w obszarze uniwersyteckiemu. Ustanowiono stopień naukowy doktora-inżyniera, udzielany za naukowe opracowanie zadań technicznych, a nie rzadkie są wypadki, w których prywatne przedsiębiorstwa, oceniające znaczenie naukowego przygotowania, wysyłają swoich inżynierów do zakładów naukowych dla słuchania wykładów uzupełniających i uzyskania stopnia doktorskiego. Także w niektórych uniwersytetach niemieckich pojawiła się dążność do wzajemnego zbliżenia teorii z techniką. Ustanowiono w tym celu katedry nauk technicznych, urządzono laboratorja inżynierskie, zorganizowano seminarja, w których mogą razem pracować teoretycy i inżynierowie. Jako przykład można przytoczyć uniwersytet w Getyndze, gdzie na czele tego ruchu stoją tacy uczeni, jak F. Klein, C. Runge i L. Prandtl. Dzięki ich energii powstały stałe wykłady o charakterze technicznym, założono laboratorja techniczne, a słuchacze wydziału matematycznego mogą uczęszczać na cały szereg kursów stosowanej matematyki i mechaniki, mogą brać udział w seminarjach poświęconych współczesnym technicznym zagadnieniom, np. rozmaitym działom elektrotechniki, hydrauliki, statyki budowli i żeglugi powietrznej.

Taka wspólna praca teoretyków i inżynierów sprzyja głębszemu naukowemu opracowaniu kwestji technicznych i poruszając nowe zagadnienia, współdziała w dalszym rozwoju czystej nauki. W tem zjednoczeniu tkwi rękojmia przyszłych wielkich zdobyczy nauki i techniki.

CZĘŚĆ I

ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE

ROZDZIAŁ I

ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE W GRANICACH SPRĘŻYSTOŚCI

§ 1. POJĘCIA ZASADNICZE

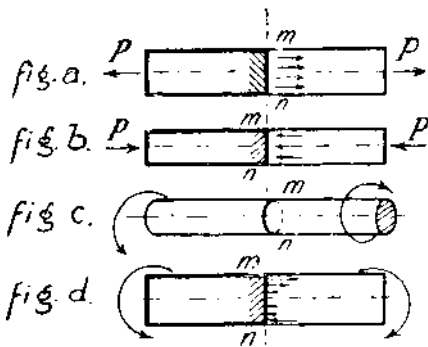
W mechanice ogólnej uważa się ciała stałe za doskonale sztywne, czyli przyjmuje się, że odległości między oddzielnymi punktami ciała nie zmieniają się pod działaniem sił zewnętrznych. Takie założenie odpowiada pierwszemu przybliżeniu i wystarcza przy traktowaniu całego szeregu zagadnień statyki, dynamiki i astronomji, skoro jednakże przejdziemy do badania warunków trwałości budowli i maszyn, to napotykamy zadania bardziej złożone, w których należy wziąć pod uwagę zdolność ciał stałych do zmiany swej postaci pod wpływem sił zewnętrznych. Warunki równowagi ciała idealnie sztywnego okazują się i tutaj koniecznymi warunkami równowagi, atoli nie są warunkami wystarczającymi i trzeba je uzupełnić na podstawie badań fizycznych własności ciał. Jako fundament służy zwykle hipoteza molekularna. Według niej uważamy ciała za złożone z bardzo małych cząsteczek, pomiędzy którymi działają siły wewnętrzne, zwane międzycząsteczkowymi. Siły te przeszkadzają każdej zmianie wzajemnego położenia cząsteczek i pojawiają się bądźto jako siły przyciągające, jeżeli jakieś wpływy zewnętrzne dążą do powiększenia naturalnych wzajemnych odległości cząsteczek, bądź też jako siły odpychające, jeżeli podobne przy czyny dążą do zmniejszenia tychże odległości.

Jeżeli na takie ciało działa układ sił w równowadze, to pod ich wpływem zmieni ciało swą postać geometryczną, czyli odkształci się; oddzielne cząsteczki będą zmieniać swoje wzajemne położenia tak długo, aż nastąpi równowaga między siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi (międzycząsteczkowymi). Siły zewnętrzne wykonują przytem pracę zamieniającą się w energję potencjalną odkształconego ciała. Uderzającym w oczy przykładem nagromadzenia energii jest każda zgięta sprężyna powozowa lub zwinięta sprężyna zegarowa. Jeżeli zmniejszamy siły zewnętrzne, które wywołały odkształcenie, to ciało dąży w większym lub mniejszym stopniu do odzyskania pierwotnej postaci i oddaje częściowo pracę wydaną na odkształcenie.

Tę własność ciał powracania do pierwotnej postaci i nagromadzenia w sobie energii potencjalnej w sposób odwracalny, nazywamy sprężystością. Jeżeli ciało oddaje całkowitą pracę wywołaną na wywołanie odkształcenia (czyli krótko „pracę odkształcenia“) i powraca dokładnie do pierwotnej postaci, to nazywamy je doskonale sprężystem. Przy niezupełnem odzyskaniu postaci pierwotnej określa się stopień sprężystości ciała stosunkiem pracy oddanej do pracy potrzebowanej na odkształcenie. Liczne materiały budowlane okazują się praktycznie jako doskonale sprężyste w dość obszernych granicach i zadaniem konstruktora jest obrać takie wymiary elementów konstrukcyjnych, przy których odkształcenia nie przekraczają granic sprężystości. Wówczas

mogą konstrukcje trwale spełniać swoje zadanie, albowiem z ustaniem działania sił zewnętrznych powrócą do pierwotnej postaci.

Ogólna teoria równowagi ciał sprężystych jest przedmiotem teorii sprężystości. W wykładach nauki o wytrzymałości poprzestajemy na rozpatrywaniu najprostszycy zagadnień, mających zarazem największe praktyczne znaczenie. Przedewszystkiem zajmujemy się badaniem odkształceń prętów kształtu graniastosłupa lub walca. Przyjmując, że poprzeczne rozmiary pręta są małe w porównaniu z jego długością, możemy w wielu przypadkach uprościć znacznie zadanie i znaleźć rozwiązanie drogą elementarną. Ogólna metoda, którą będziemy się posługiwać w dalszym ciągu, polega na tem, że pomyślnym przekrojem dzielimy odkształcone ciało na dwie części i rozpatrujemy warunki równowagi jednej z nich. Jeżeli całe ciało było w równowadze, to będzie w równowadze i rozpatrywana część ciała; trzeba tylko na powierzchnię przekroju działać siłami zastępującymi działanie odciętej części na część rozpatrywaną. Te siły, rozmieszczone w sposób ciągły na poprowadzonym przekroju, przedstawiają układ równoważący siły zewnętrzne działające na rozpatrywaną część ciała. W przypadku prętów o postaci graniastosłupa lub walca będziemy brać pod uwagę przekroje płaskie, zwykle normalne do osi pręta. Jeżeli siły zewnętrzne działające na jedną część pręta sprowadzają się do jednej siły, której linja działania leży w osi pręta, to mamy do czynienia z przypadkiem rozciągania (fig. a) lub ściskania (fig. b) (rys. 1). Na rysunku rozpatrujemy



Rys. 1

lewą część pręta, a siły wewnętrzne w przekroju mn przedstawiają działanie prawej części na lewą. W tych przypadkach, kiedy siły zewnętrzne działające na jedną część pręta sprowadzają się do pary sił, leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta, mamy do czynienia ze zjawiskiem skręcania (fig. c). Gdy wreszcie siły zewnętrzne działające na rozpatrywaną część pręta sprowadzają się do pary leżącej w płaszczyźnie równoległej do osi pręta, to powstaje przypadek zginania (fig. d).

We wszystkich przytoczonych przykładach można bez trudności znaleźć przy pomocy statyki wypadkową sił zewnętrznych, działających na przekrój mn . W przypadku rozciągania lub ściskania otrzymujemy jedną siłę leżącą na osi pręta. Przy skręcaniu znajdujemy wypadkową parę sił, której płaszczyzna jest prostopadła do osi pręta. Nakoniec w przypadku zgięcia leży para sił, do której się sprowadzają siły wewnętrzne rozmieszczone w przekroju mn , w płaszczyźnie przechodzącej przez oś pręta.

Te wyniki otrzymane na podstawie równań statyki ciała sztywnego nie wystarczają jednak do zawyrokowania o wytrzymałości pręta; do tego trzeba jeszcze poznać prawo rozmieszczenia sił wewnętrznych w przekroju. Okazuje się bowiem, że ciało stawia dopóty skuteczny opór siłom wewnętrznym, dopóki natężenie sił wewnętrznych, czyli napięcie¹⁾ nie przekroczy nigdzie pewnych granic. Z najprostszem zadaniem będziemy mieli do czynienia w tym przypadku, kiedy napięcia rozkładają się równomiernie w przekroju i wszędzie mają jeden i ten sam kierunek. Dzielic wypadkową tych napięć przez pole przekroju pręta znajdziemy siłę przypadającą na każdą jednostkę pola tego przekroju. Wielkość ta charakteryzuje zupełnie natężenie²⁾ wewnętrznych sił sprężystości działających w płaszczyźnie naszego przekroju; nazwiemy ją krótko naprężeniem. W ogólnym przypadku będzie rozkład napięć w przekroju nierównomiernym, podobnie jak np. nierównomiernym jest rozkład naporu cieczy na ściany naczynia. Dla określenia wielkości wewnętrznych sił sprężystości w każdym punkcie przekroju uogólnimy wprowadzone pojęcie naprężenia. Dajmy na to, że chodzi o dowolny punkt N przekroju pręta. Wydzielmy około tego punktu z przekroju element pola δF i znajdziemy wypadkową napięć określających działanie odciętej części pręta na część rozpatrywaną, ale tylko na obszarze pola δF .

¹⁾ [Tak przetłumaczyłem rosyjski wyraz „usilje” odpowiadający bardzo dobrze angielskiemu „stress”, nie mogąc się oswoić z wprowadzonym już dawno przez prof. J. J. Boguskiego (przy przekładach z angielskiego) terminem „wysil”].

²⁾ [W znaczeniu „intensitas”].

Niechaj δP będzie wielkością tej wypadkowej, natomiast granica do której zdąża wartość stosunku

$$\frac{\delta P}{\delta F}, \dots \dots \dots (1)$$

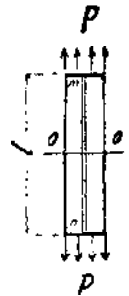
gdy δF dąży do zera, będzie charakteryzować natężenie wewnętrznych sił sprężystości. Tę wielkość będziemy nazywać naprężeniem w punkcie N płaszczyzny przekroju δF . Jej wymiarem jest siła: (długość)² a zatem techniczną jednostką naprężenia będzie kilogram¹⁾, na centymetr kwadratowy (kg/cm^2). Stosownie do tego określenia będzie naprężenie odpowiadające naporowi cieczy na ściany naczynia w każdym punkcie proporcjonalne względem głębokości h , w której leży rozpatrywany punkt i równe ciężarowi słupa cieczy o podstawie równej 1 cm^2 , a wysokości h .

§ 2. PRAWO HOOKE'A

Przy badaniu rozciągania albo ściskania pryzmatycznych prętów chodzi o to, aby znaleźć wzajemną zależność między wielkością sił wewnętrznych, a odpowiadającą im zmianą długości pręta. Dajmy na to, że dany pręt (rys. 2) o długości l podlega działaniu sił rozciągających rozłożonych równomiernie na obu przekrojach końcowych. Pod działaniem tych sił przedłuży się pręt o pewną wielkość λ .

Jeżeli pręt podzielimy w myśli na podłużne elementy, t. z. włókna, to okazuje się że wszystkie elementy znajdują się w tychże samych warunkach, wszystkie wydłużą się o tę samą wielkość.

Przetnijmy pręt płaszczyzną OO , prostopadłą do kierunku sił rozciągających; skoro odrzucimy dolną część, to dla równowagi górnej części trzeba na przekrój $O'O$ działać siłami wewnętrznymi (napręciami), których wypadkowa jest równa P i skierowana pionowo w dół. Zważywszy, że te napręcia określają działanie dolnej części na górną, a wszystkie włókna znajdują się w tych samych warunkach, możemy przyjąć rozkład napręć w płaszczyźnie poprzecznej przekroju jako równomierny. W takim przypadku wielkość



Rys. 2

$$p = \frac{P}{F} \dots \dots \dots (2)$$

określa wartość naprężenia w każdym elemencie obranego przekroju, a zatem i dowolnego innego przekroju prostopadłego do osi.

Do określenia odkształcenia pręta będziemy używać stosunku przedłużenia λ do pierwotnej długości l , jako liczby niezależnej od tejże. Ten stosunek

$$e = \frac{\lambda}{l} \dots \dots \dots (3)$$

nazywa się wydłużeniem względnym, albo właściwym²⁾. Liczne doświadczenia nad rozciąganiem i ściskaniem prętów sporządzonych z rozmaitych materiałów konstrukcyjnych wykazały, iż dopóki naprężenia nie przekroczą pewnych granic (charakterystycznych dla każdego materiału), można z dostateczną dokładnością przyjąć ich wielkość za proporcjonalną względem odpowiedniego wydłużenia właściwego t. j.

$$p = Ee, \text{ albo } e = \frac{p}{E} \dots \dots \dots (4)$$

Tę prostą zależność między naprężeniem i odpowiadającym mu wydłużeniem sformułował najpierw Hooke (czytaj Huk) w r. 1676. Ten angielski uczyony znalazł doświadczalnie, że wydłużenie pręta jest

¹⁾ [To znaczy ciężar kilograma. $1 \text{ kg}/\text{cm}^2$ jako jednostka naprężenia nosi także nazwę: „nowa atmosfera“].

²⁾ [Liczba e przedstawia zarazem bezwzględne wydłużenie jednostki długości któregośkolwiek włókna rozciąganego pręta i dlatego nazywają ją także wydłużeniem jednostkowym].

wprost proporcjonalne względem obciążającej siły i długości, a odwrotnie względem pola przekroju poprzecznego, czyli

$$\lambda = \frac{Pl}{EF} \dots \dots \dots (5)$$

Stałą E nazywamy modułem sprężystości przy rozciąganiu¹⁾. Wielkość E będzie oczywiście dla różnych materiałów różna. Nawet dla jednego i tego samego materiału niema moduł sprężystości wartości stałej, lecz waha się nieco w zależności od rozlicznych domieszek i pierwotnej obróbki. Są i takie materiały, w których wartość modułu sprężystości zależy od kierunku rozciągania. Np. przy rozciąganiu kryształów zmienia się E w zależności od tego, do której z osi jest kierunek sił rozciągających równoległy. W dalszym ciągu będziemy się zajmować prawie wyłącznie odkształceniami takich ciał, w których własności sprężyste są we wszystkich kierunkach jednakowe. Takie ciała noszą nazwę izotropowych, albo równokierunkowych.

Oto szereg wartości modułu E :

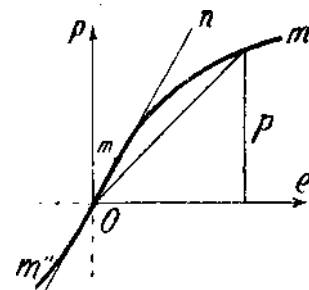
Materiał	E kg/cm ²
Żelazo spawalne	1,9 . 10 ⁶ do 2,1 . 10 ⁶
Żelazo zlewne i stal	2,0 . 10 ⁶ do 2,2 . 10 ⁶
Glin wyciągany	7,5 . 10 ⁵
„ odlewany	6,6 . 10 ⁵
Miedź wyciągana	1,2 . 10 ⁶
„ odlewana	1,1 . 10 ⁶
Nikiel	2,2 . 10 ⁶
Cynk wyciągany	4,1 . 10 ⁵
Dębina wzdłuż włókien	10,8 . 10 ⁴
Sośnina „ „	9,2 . 10 ⁴
Surowiec szary	8,0 . 10 ⁵ do 1,05 . 10 ⁶

Prosty związek proporcjonalności między naprężeniem p , a odpowiadającym wydłużeniem e zachodzi, jak już nadmieniliśmy, tylko w pewnych granicach. Tę wartość p , przy której zaczynają się dostrzegalne zboczenia prawa Hooke'a, nazywają granicą proporcjonalności. Ta wielkość zależy nietylko od natury materiału, lecz także i od jego poprzedniej obróbki mechanicznej. Dla niektórych materiałów jest granica proporcjonalności wcale wysoka, dla żelaza kowalnego np. równa się około 2000 kg/cm² (dla stali jeszcze więcej), u innych zaś materiałów można już przy niewielkich naprężeniach zauważyć zboczenia od prawa Hooke'a.

Przy doświadczeniach z rozciąganiem notuje się prócz granicy proporcjonalności drugą wielkość charakteryzującą sprężyste własności materiału; jest nią granica sprężystości. Tak nazywano wartość naprężenia, względnie wydłużenia właściwego, po której przekroczeniu pojawiają się pierwsze odkształcenia trwałe, t. j. nie znikające po usunięciu działania siły rozciągającej. Dla naprężeń mniejszych od naprężenia na granicy sprężystości powinien materiał zachowywać się jako doskonale sprężysty (ob. § 1). Atoli obserwacja tak pojmowanej granicy sprężystości (teoretycznej granicy sprężystości) jest nader trudną i zależną od dokładności środków pomiaru. Z tego powodu przez granicę sprężystości rozumiemy zwykle tę wartość naprężenia, przy której trwałe odkształcenie jest pewną określoną częścią odkształcenia całkowitego (praktyczna gr. spr.). Wielkość ta zależy zatem od umowy.

¹⁾ [Anglicy nazywają E „modułem Young'a”. W polskiej literaturze technicznej utarła się nazwa „spółczynnik sprężystości”, odpowiedniejsza raczej dla odwróconej wartości $1:E$. Nie przypisując w tym przypadku kwestji nazw przesadnej ważności (jak to np. czyni Bach), zaznaczymy jednak, że znaczenie stałej E określałaby najlepiej nazwa: „moduł rozciągania sprężystego”, $1:E$ zaś: „spółczynnik rozciągania sprężystego”].

Takie materiały, jak kamień, beton i żelazo lane posiadają bardzo niską granicę proporcjonalności. Już przy stosunkowo niewielkich naprężeniach pojawiają się u nich zbroczenia od prawa Hooke'a¹⁾. Znaną doświadczalnie zależność między wydłużeniami, a odpowiednimi naprężeniami przedstawiamy z korzyścią wykresem, czyli diagramem. Na osi poziomej np. odcinamy wydłużenie jednostkowe e (rys. 3), a na osi pionowej odpowiadające im naprężenia p , wtedy każdy stan rozciąganego pręta przedstawia się na płaszczyźnie ep oddzielnym punktem, a cały proces rozciągania przedstawi się pewną linią Om' . Linja ta będzie oczywiście prostą Om , dopóki naprężenia są proporcjonalne względem wydłużeń, czyli dopóki nie przekroczono granicy sprężystości. Dla takich materiałów, jak żelazo lane, rosną następnie odkształcenia prędzej aniżeli naprężenia i otrzymamy dalej krzywą mm' , zwróconą wypukłością ku górze (ku osi p). Skoro przejdziemy od rozciągania do ściskania, to otrzymamy linię Om'' , która dla żelaza lanego przedstawia się podobnie, jak na rys. (3) i składa się z prostej wychodzącej z punktu O i krzywej zwróconej wypukłością w dół (ku osi p). Części prostoliniowe diagramu są często bardzo krótkie i wskutek tego niedostrzegalne przy zwykłych doświadczeniach technicznych z żelazem lanym, w których stosujemy od razu dość znaczne naprężenia, atoli obie części mają to samo nachylenie względem osi, czyli należą do jednej i tej samej prostej²⁾. Postać linii $m'm''$ można w każdym poszczególnym przypadku znaleźć doświadczalnie. Pożądanem byłoby niekiedy określić ją analitycznie. Istnieje nie mało formuł³⁾ ogólnej postaci



Rys. 3

$$e = f(p),$$

które z większą lub mniejszą dokładnością przedstawiają zależność między p i e . Każda z nich zawiera pewne stałe znalezione z doświadczeń. Im więcej takich stałych, tem większa oczywiście dokładność, z którą formuła odtwarza wyniki doświadczeń. Obecnie stosują najczęściej do żelaza lanego i kamieni formułę potęgową

$$e = \alpha p^m, \dots \dots \dots (6)$$

w której α i m przedstawiają stałe doświadczalne.

W przypadku $m = 1$ daje powyższy wzór prawo Hooke'a, a współczynnik α , zwany współczynnikiem wydłużenia jest wówczas odwróconą wartością modułu sprężystości E . Gdy $m > 1$, to otrzymujemy krzywą zwróconą wypukłością do góry, podobnie jak krzywa rozciągania żelaza lanego, jeżeli zaś $m < 1$, to odpowiadająca krzywa zwraca się wklęsłością do góry, a naprężenia rosną prędzej niż wydłużenia. Ze zjawiskiem tego rodzaju spotykamy się np. przy rozciąganiu skórzanych pasów.

Jako przykład przytoczymy kilka formuł z doświadczeń Bacha:

$$e = \frac{1}{1338000} p^{1,083} \text{ dla rozciąganego żelaza lanego}$$

$$e = \frac{1}{250000} p^{1,132} \text{ dla ściskanego granitu}$$

$$e = \frac{1}{415} p^{0,7} \text{ dla rozciąganej skóry (z pasów transmisyjnych).}$$

Doświadczenia wykazały⁴⁾, że przy dość wielkich wartościach naprężeń daje wzór potęgowy wyniki zupełnie zadawalające, a zależność (6) między e i p odpowiada, przy stosownym

¹⁾ Przy bardzo małych naprężeniach można a priori spodziewać się, że każdy materiał podlegać musi prawu Hooke'a (P. t.).

Dla żelaza lanego potwierdziły to subtelne doświadczenia Grüneisena przy naprężeniach 0 do 9 kg/cm². (Berichte d. Deutschen phys. Gesellschaft. 1906).

²⁾ [W przekładzie podkreślono to zdanie jeszcze silniej od autora, ponieważ w wielu nawet wybitnych książkach można się spotkać z odmiennem błędnym mniemaniem].

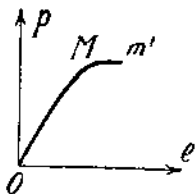
³⁾ R. Mehmke: „Zum Gesetz der elastischen Dehnungen“. Z. f. Math. u. Ph. 1897.

⁴⁾ C. Bach: „Elastizität u. Festigkeit“. Wyd. V, str. 81. Berlin 1905.

dobrze stałych α i m , ze znaczną dokładnością rzeczywistości. Niezgodność formuły potęgowej z doświadczeniem przy bardzo małych naprężeniach, objaśnia przytoczona powyżej rozprawa Grüneisena¹⁾).

§ 3. OPÓŹNIENIE SPRĘŻYSTE

Dotychczas przyjmowaliśmy, że każdej określonej wartości naprężenia rozciągającego odpowiada pewne względne wydłużenie e , które się wytwarza bardzo szybko podczas działania siły rozciągającej pręt. Dokładniejsze doświadczenia wykazują jednak, że na wielkość odkształcenia ma pewien wpływ czas nawet w tych granicach, w których można je uważać za doskonale sprężyste. Odkształcenie rośnie z czasem, coraz to wolniej, zbliżając się niejako asymptotycznie do określonej wartości, przy której dopiero zachodzi równowaga sił zewnętrznych i wewnętrznych. Podobnie nie znika zupełnie odkształcenie sprężyste natychmiast po usunięciu sił zewnętrznych, lecz dopiero po pewnym czasie, przyczem prędkość zanikania szybko maleje. Zjawisko to nosi nazwę opóźnienia sprężystego. Gra ono ważną rolę przy odkształcaniu ciał pochodzenia organicznego, jak powrozów, rzemieni i t. p. U metali, w granicach naprężeń, dopuszczalnych przez technikę konstrukcyjną, niema opóźnienie sprężyste znaczenia praktycznego i inżynier nie potrzebuje się z nim liczyć²⁾).



Rys. 4

O wiele większą rolę gra to ciekawe zjawisko w dziedzinie fizyki, gdzie posiada już obszerną literaturę³⁾). Badania wykazują, że opóźnienie sprężyste pojawia się w tym słabszym stopniu, im bardziej jednorodnym jest materiał. W kryształach kwarcu np., jeżeli zachodzi wogóle opóźnienie sprężyste, to tylko tak małe, że nie przekracza błędów przy najdokładniejszym pomiarze odkształcenia. Prawda, że i w tym przypadku nie brak pewnych zmian wydłużenia z czasem, jednakowoż wielkość tego pozornego opóźnienia sprężystego i charakter zależności od czasu objaśniają się zupełnie, jeżeli uwzględnić termiczne i elektryczne zmiany ciała przy odkształceniu⁴⁾).

§ 4. ENERGJA ODKSZTAŁCENIA PRZY ROZCIĄGANIU

Niechaj na dolny koniec pręta umocowanego górnym końcem w położeniu pionowym działa obciążenie, którego wielkość wzrasta stopniowo od zera do wartości P . Wtedy związek między całkowitem wydłużeniem λ , a wielkością siły przedstawi w granicach ważności prawa Hooke'a prosta Oa (rys. 5).

Weźmy pod uwagę dowolny stan pręta określony punktem m . Jeżeli odpowiedniej wartości rozciągającej siły udzielimy nieskończenie małego przyrostu, to wydłużenie pręta wzrośnie o d .

¹⁾ [Formuła potęgowa ma charakter doświadczalno-praktyczny i nie może mieć zgola pretensji do miana „prawa”, któremi ją obdarzają niektóre nasze podręczniki pod wpływem pewnego odłamu niemieckiej literatury technicznej. Gdyby istniała formuła przedstawiająca uogólnienie prawa Hooke'a, to musiałaby przedewszystkiem, w granicach bardzo małych wartości e i p , dać się przekształcić na formułę Hooke'a, albo, co na jedno wychodzi, musiałaby krzywa przedstawiająca uogólnioną formułę mieć w początku współrzędnych charakter linii prostej nachylonej pod kątem ostrym do obu osi. Dla każdego punktu na tej części miałby stosunek $p : e$ wartość prawie stałą i określałby moduł sprężystości E w odpowiednim przedziale małych naprężeń i odkształceń. Tymczasem wzór potęgowy (6) nie dopuszcza tego przekształcenia, gdyż krzywa, która go przedstawia, jest w początku współrzędnych styczną do osi p w przypadku $m > 1$, zaś w przypadku $m < 1$ jest styczną do osi e , jak się łatwo przekonać przy pomocy różniczkowania. W pierwszym przypadku byłby zatem moduł sprężystości dla nieskończenie małych naprężeń nieskończenie wielki, w drugim zaś nieskończenie mały, co jest oczywistą niedorzecznością. Mimo to posiada formuła potęgowa pewne zalety praktyczne, które w znacznej części usprawiedliwiają jej rozpowszechnienie. Z pośród formuł z dwiema stałymi, pozwala ona najłatwiej obliczyć te stałe z danego szeregu doświadczeń, przy pomocy przekształcenia logarytmicznego

$$\log p = \log \alpha + m \log e,$$

Punkty o współrzędnych $\log e$, $\log p$ leżą bowiem wtedy na linii prostej, której położenie względem osi określa wartość stałych $\log \alpha$ i m . Nadto, o ile nie chodzi o przedział małych naprężeń, nie mający zwykle znaczenia w nauce o wytrzymałości, zalicza się (według przytoczonej powyżej pracy Mehmke'go) formuła potęgowa do najdokładniejszych z pośród rozlicznych proponowanych wzorów z dwiema stałymi].

²⁾ [O ile nie zajmuje się samodzielnym badaniem sprężystości i wytrzymałości materiałów].

³⁾ H. Winkelmann: „Handbuch d. Physik“. I. Bd. 1908. Str. 796.

⁴⁾ A. Joffé: „Elastische Nachwirkung im kristallinenischen Quarz“. Ann. d. Phys. IV Folge. Bd. 20. J. 1906.

i o tyleż obniży się obciążenie, wykonując przytem pracę elementarną równą iloczynowi siły i przesunięcia. Na rys. (5) przedstawia się ta praca polem zakreskowanego paska elementarnego. Przechodząc teraz kolejno od jednego stanu do stanu nieskończenie bliskiego, możemy obliczyć całkowitą pracę T , wykonaną przez siłę obciążającą przy jej zmianie od zera do pewnej końcowej wartości P . Na rys. (5) wyobraża tę pracę pole trójkąta, a zatem

$$T = \frac{P\lambda}{2} = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{\lambda^2 EF}{2l} \quad (7)$$

przy uwzględnieniu rów. (5).

Ażeby otrzymać wynik niezależny od rozmiarów badanego pręta, obliczymy pracę odniesioną do jednostki objętości. Zważywszy, że objętość pręta jest równa Fl , znajdziemy:

$$\frac{T}{Fl} = \frac{1}{2} \frac{P}{F} \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2} p e = \frac{p^2}{2E}$$

Praca ta przekształca się widocznie na energję potencjalną odkształconego pręta i jeżeli jego materiał jest doskonale sprężysty, to przy zmniejszaniu obciążenia zamieni się energja potencjalna napowrót w pracę. Pominęliśmy przytem zmiany termiczne i elektryczne towarzyszące odkształceniu pręta, albowiem te interesujące zjawiska nie mają, jak dotąd, praktycznego znaczenia¹⁾.

Ażeby mieć wyobrażenie o ilości energii, jaka może być nagromadzona w rozciąganym pręcie w granicach stosowalności prawa Hooke'a, obliczymy ją w przypadku żelaza o granicy proporcjonalności 2000 kg/cm^2 i module sprężystości $E = 2 \cdot 10^{10} \text{ kg/cm}^2$. Przy pomocy rów. (7) znajdziemy, że w jednym centymetrze sześciennym takiego żelaza można nagromadzić 1 kg/cm^2 energii. Dla kauczuku zaś można przyjąć $E = 10 \text{ kg/cm}^2$, a granicę sprężystości 20 kg/cm^2 , wobec czego energja nagromadzona w 1 cm^3 kauczuku może osiągnąć wartość 20 kg/cm^2 .

§ 5. ZMIANA ROZMIARÓW POPRZECZNYCH PRZY ROZCIĄGANIU

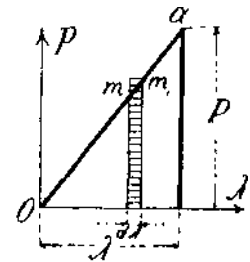
Rozciąganiu prętów towarzyszy zmniejszenie poprzecznych rozmiarów i do zupełnego scharakteryzowania własności sprężystych ciała równokierunkowego nie wystarcza sam moduł sprężystości E , lecz trzeba jeszcze podać wielkość określającą skurczenie poprzeczne przy rozciąganiu podłużnem.

Jeżeli przez e oznaczymy względne wydłużenie w kierunku rozciągania, to wielkością odpowiadającego poprzecznego skurczenia jest σe , przyczem σ jest ułamkiem właściwym, leżącym między granicami 0 a 0,5. Nazywamy go liczbą (stosunkiem) Poisson'a na cześć francuskiego matematyka, który spróbował oznaczyć σe drogą analityczną na podstawie molekularnej hipotezy budowy materji. Z obliczenia Poisson'a wynikło, że dla wszystkich ciał równokierunkowych powinno być σ stałe i równe $\frac{1}{4}$. Późniejsze bardzo liczne doświadczenia nie potwierdziły jednakże tego wniosku teoretycznego i okazały, że liczba Poisson'a jest dla różnych materiałów różna. Liczba ta jest obok E drugą stałą charakteryzującą sprężyste własności materiałów równokierunkowych. Oto wartości σ dla niektórych materiałów²⁾:

Materiał	σ	Materiał	σ
Żelazo kowalne . .	0,28	Cynk	0,27
Stal	0,29	Brąz	0,36
Miedź	0,34	Korek	0,00
Nikiel	0,33	Kauczuk	0,47
Glin (aluminium) . .	0,36	Parafina	0,50

¹⁾ W literaturze technicznej zajmuje się tą kwestją interesująca książka C. Kriemlera: „Einführung in die energetische Baustatik“. Berlin 1911.

²⁾ Tablica zawiera średnie wartości z danych w „Handbuch d. Phys.“ Winkelmann'a. Nowsze bardzo dokładne oznaczenia σ przeprowadził Williams (Phil. Mag. 1912).



Rys. 5

Znając wartość σ można obliczyć zmianę objętości pręta przy rozciąganiu w granicach proporcjonalności. Długość pręta powiększa się w stosunku $(1 + e) : 1$, a rozmiary poprzeczne zmniejszają się w stosunku $(1 - \sigma e) : 1$. Objętość przy rozciągnięciu ma się przeto do objętości pierwotnej jak $(1 + e)(1 - \sigma e)^2$ do 1. Zważywszy, że e i σe są bardzo małymi ułamkami, można z pominięciem małych wyższego rzędu napisać:

$$(1 + e)(1 - \sigma e)^2 = 1 + e(1 - 2\sigma),$$

a zatem stosunek przyrostu i objętości przy rozciąganiu pręta do objętości pierwotnej będzie równy:

$$[1 + e(1 - 2\sigma) - 1] : 1 = e(1 - 2\sigma).$$

Materiały, u których wartość σ jest bliską 0,5, zmieniają, jak widzimy z powyższego wyrażenia, bardzo nieznacznie swoją objętość przy rozciąganiu. Nieprawdopodobnym jest, aby istniały ciała, dla których $\sigma > 0,5$, gdyż w takim razie rozciąganie wywoływałoby zmniejszenie objętości ciała.

Przechodząc od rozciągania do ściskania prętów, otrzymamy spęcznienie (rozszerzenie) poprzeczne, przyczem w granicach proporcjonalności ma σ tę samą wartość liczbową, co przy rozciąganiu.

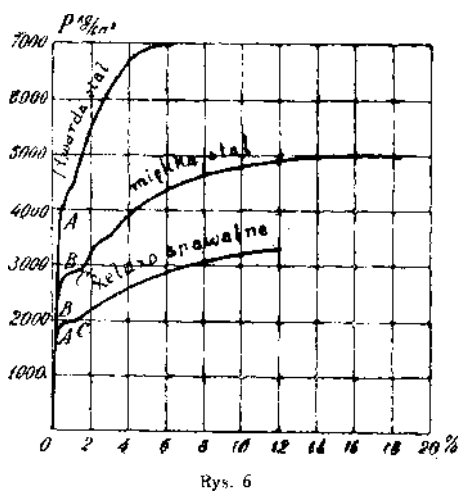
U materiałów takich, jak żelazo i stal jest względne wydłużenie w granicach proporcjonalności bardzo małe, wskutek czego można nie uwzględniać zmiany przekroju poprzecznego przy obliczaniu naprężeń i modułu E , a wszystkie rachunki można odnosić do pierwotnego pola przekroju poprzecznego. Ale dla materiałów zdolnych do wielkich odkształceń sprężystych, jak kauczuk, trzeba przy obliczeniu E wziąć pod uwagę i zmianę przekroju, co znacznie komplikuje rachunek¹⁾.

ROZDZIAŁ II

ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE POZA GRANICAMI PROPORCJONALNOŚCI

§ 6. DIAGRAM ROZCIĄGANIA

Dotychczas zajmowaliśmy się rozpatrywaniem rozciągania i ściskania w granicach proporcjonalności. Przy dalszym wzroście odkształcenia ustaje ważność prawa Hooke'a; między wydłużeniami a odpowiadającymi im naprężeniami zachodzi zależność bardziej złożona i dla różnych materiałów rozmaita. Tę zależność przedstawia się zwykle wykreślnie. Na jednej z osi prostokątnego układu współrzędnych odcinamy wielkości proporcjonalne względem wydłużeń, a na drugiej odpowiadające wartości naprężeń. Otrzymałą tym sposobem krzywą nazywamy diagramem, albo wykresem rozciągania.



Rys. 6

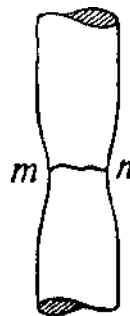
Maszyny używane do badania materiałów przy rozciąganiu są zwykle zaopatrzone w aparat kreślący diagram samoczynnie. Otrzymany z doświadczenia diagram charakteryzuje wcale dobrze własności materiału i dlatego rozpatrzmy nieco szczegółowiej jego postać dla żelaza kowalnego i stali, materiałów, z którymi najczęściej mamy do czynienia przy obliczeniach.

Na rys. (6) widzimy takie krzywe dla żelaza spawalnego, miękkiej i twardej stali. Wszystkie trzy diagramy mają część początkową prostoliniową, bardzo słabo nachyloną względem osi rzędnych. Ta część odpowiada prawu Hooke'a.

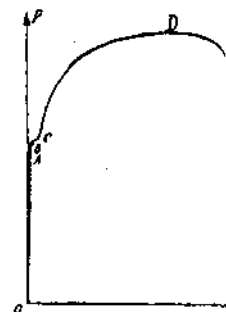
Od granicy proporcjonalności (oznaczonej na krzywej dla żelaza spawalnego literą *A*) zaczynają odkształcenia wzrastać silniej aniżeli naprężenia, linja diagramu zakrzywia się, zwracając wypukłość ku górze. W dalszym ciągu pojawia się nagle szybko postępujące wydłużenie pręta bez jednoczesnego wzrostu siły rozciągającej. Na diagramie odpowiada temu zjawisku mniej więcej prosta pozioma, zaczynająca się

¹⁾ O. Frank: „Die Analyse endlicher Dehnungen u. die Elastizität d. Kautschuks“. Ann. d. Phys. 1906. str. 602.

w punkcie $B^1)$. Przy dalszem zwiększaniu obciążenia odzyskuje materiał ponownie odporność przeciw rozciągającej sile i rzędne wykresu znowu rosną tak długo, dopóki nie pojawi się na badanym pręcie „szyjka“, t. j. miejscowe zwięźlenie przekroju mn (rys. 7). Od tej chwili koncentrują się dalsze odkształcenia w okolicy szyjki. Ponieważ przy tem zmniejsza się znacznie przekrój poprzeczny, więc dalsze wydłużenie zachodzi przy zmniejszającej się sile. Całkowity diagram ma przeto wygląd przedstawiony na rys. (8).



Rys. 7



Rys. 8

W diagramie wyróżniamy trzy ważne punkty: Punkt A , odpowiadający granicy proporcjonalności, punkt B , zwany punktem krytycznym²⁾ i na koniec punkt D , określający wielkość siły potrzebnej do rozerwania pręta. Poprzednio wprowadziliśmy już pojęcie (praktycznej) granicy sprężystości (ob. § 1). Rozumieliśmy przez nią tę wartość naprężenia rozciągającego, przy której trwałe odkształcenie osiąga pewną, ustaloną przez umowę, część odkształcenia całkowitego. U żelaza kowalnego i stali są trwałe odkształcenia do punktu A nadzwyczaj małe, wskutek czego bardzo często mówimy o granicy sprężystości, mając na myśli „granicę proporcjonalności“ tych materiałów. Punkt krytyczny leży oczywiście powyżej granicy sprężystości. Zboczenia od prawa Hooke'a w części AB diagramu objaśniają zwykle niejednorodnością budowy materiału i nierównomiernością rozkładu naprężeń w przekrojach poprzecznych rozciąganego pręta³⁾. Wskutek tych przyczyn powstają lokalne przeciążenia materiału towarzyszące miejscowym trwałym odkształceniom. Czem doskonalszy materiał, tem mniejsza część AB , tem bliżej siebie leżą granica proporcjonalności i punkt krytyczny.

Zjawiska, odpowiadające punktowi krytycznemu, wskazują na to, że w materiale zachodzą w owej chwili znaczne zmiany. Jeżeli powierzchnia rozciąganego pręta żelaznego jest polerowana, to przy zbliżaniu się do punktu krytycznego można dostrzec na niej pojawienie się linii nachylnych do osi pręta. Nazywają je linjami Lüders'a od niemieckiego inżyniera, który je pierwszy zauważył. Do badania tych linii używa się specjalnego mikroskopu. Zaznaczyć wypada, że zastosowanie mikroskopu do badania własności metali zajęło w ostatnich latach wielu badaczy i doprowadziło do całego szeregu ciekawych odkryć. Ogół metod stosowanych przy tych badaniach należy do dziedziny metalografii.

Badania mikroskopowe wykazują, że takie materiały jak żelazo składają się z ziarn krystalicznych, rozdzielonych substancją o innym składzie, a linje Lüdersa, przedstawiające się nieuzbrojonym oczom jako wąziutkie bruzdy z podniesionymi brzegami, okazują się pod mikroskopem jako zbiór kryształów, które doznały przesunięć w płaszczyznach spójności⁴⁾. Pierwsze linje Lüdersa pojawiają się w postaci cieniuchnych kreseczek natychmiast po przekroczeniu granicy proporcjonalności i są bardzo czułym objawem tego przekroczenia⁵⁾. Przy dalszem rozciąganiu pojawiają się dwa układy linii przecinających się wzajemnie i nachylnych pod jednym i tym samym kątem do osi pręta. Kąt ten okazuje się charakterystycznym dla każdego metalu⁶⁾. Na pojawienie się trwałych odkształceń wskazuje nadto, obok linii Lüdersa, podwyższenie temperatury pręta. Dopóki

¹⁾ Bardziej szczegółowe badania wykazują, że od tego punktu może odkształcenie wzrastać nawet przy zmniejszeniu się wartości rozciągającej siły. To zmniejszenie zaś jest tem znaczniejsze, im ostrożniej zbliżać się z wartością obciążenia do punktu krytycznego. Interesujące wyniki otrzymał w tej dziedzinie A. M. Dragomirow. Dokładne zdjęcie diagramu w okolicy punktu krytycznego uzyskał na drodze fotograficznej prof. W. E. Dalby: „Load-Extension diagrams obtained Photographically“. Engineering 1902. Str. 503.

²⁾ [Nazwa „punkt krytyczny“, używana w literaturze angielskiej, odpowiada niemieckiej „Fließgrenze“ albo „Streckgrenze“, co tłumaczono u nas przez „granicę płynności“, lub „granicę płynięcia“ (w „Techniku“ wprowadzono termin „granica ciastowatości“). Za odpowiedniejszą od tych ostatnich uważamy nazwę „gr. plastyczności“].

³⁾ A. M. Smith: „The elastic breakdown of non-ferrous metals“. Engineering 1909. Str. 593.

Mnóstwo danych doświadczalnych podaje Hartmann w książce: „Phénomènes qui accompagnent la déformation permanente“ 1900.

Ob. także W. Mason: Proc. of Phys. Soc. London 1911. 23, str. 305.

⁴⁾ I. A. Ewing: „The strength of materials“.

⁵⁾ M. A. Woropajew: „Ob opredjelenij naprjaženij i deformacij w brusiach bolszoj kriwizny“. Izv. Kiev. Pol. Inst. 1910.

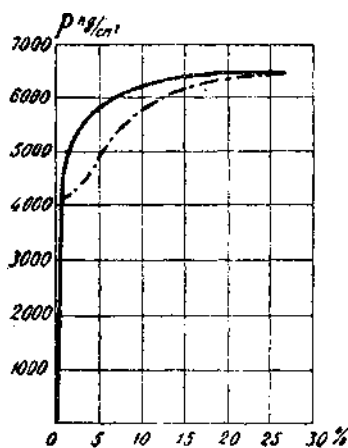
⁶⁾ Rejtö: „Innere R'eibung“. 1897.

nie przekroczymy granicy sprężystości, towarzyszy odkształceniu obniżenie temperatury, czego można się było spodziewać na podstawie rozważań termodynamicznych. To obniżenie jest jednak bardzo małe i można je wykazać tylko przy pomocy termo-elementu i czułego galwanometru. Z pojawieniem się odkształceń trwałych zamienia się odpowiadająca praca odkształcenia za pośrednictwem „tarcia wewnętrznego“ na ciepło i temperatura pręta podwyższa się silnie¹⁾.

Pojawienie się trwałych odkształceń wywołuje także nagłą zmianę magnetycznej przenikliwości²⁾.

§ 7. WPŁYW CZASU NA WYDŁUŻENIA

Przy rozpatrywaniu rozciągania w granicach proporcjonalności nadmieniliśmy już, że wydłużenie rośnie nieco z czasem i nazwaliśmy to zjawisko opóźnieniem sprężystym. Po przekroczeniu granicy sprężystości staje się wpływ czasu daleko silniejszym. Mierząc wydłużenie przy pomocy rozpowszechnionego aparatu zwierciadełkowego, powiększającego wydłużenia 500 razy, można wygodnie obserwować powolny wzrost wydłużenia przy niezmiennym obciążeniu. W takim przypadku mówią, że materiał „płyynie“. Jeżeli obciążenie przekroczyło pewną granicę, to takie wydłużanie pręta może z czasem zakończyć się rozerwaniem.



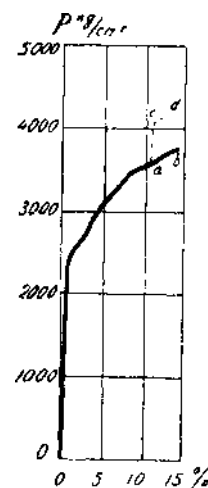
Rys. 9

Szczególnie silny wpływ czasu zachodzi u takich materiałów, jak cynk i ołów. Ogromne znaczenie ma dla nich prędkość, z jaką rośnie obciążenie. Le Chatelier zrobił w tym kierunku interesujące doświadczenie. Rozciągając pręty cynkowe przekonał się, że do rozerwania pręta w ciągu jednej minuty potrzeba było naprężenia 2400 kg/cm^2 , zaś przy doświadczeniu trwającym całą godzinę wystarczyło 1150 kg/cm^2 . Jeżeli dalej przedłużyć trwanie doświadczenia, to można jeszcze nieco zmniejszyć wielkość naprężenia rozrywającego. Zauważymy nadto, że wpływ czasu objawia się najsilniej w pierwszej chwili działania obciążenia, poczem po pewnym przeciągu czasu staje się przyrost wydłużenia nieodróżnialnym.

U takich materiałów jak żelazo kowalne i stal jest wpływ czasu daleko słabszy, wszelako diagramy rozciągania zmieniają się nieco, zależnie od prędkości, z jaką rośnie obciążenie przy doświadczeniu. Na rys. (9) przedstawiono diagramy, odpowiadające rozrywaniu żelaznego drutu³⁾. Linja pełna przedstawia wynik doświadczenia dokonanego w przeciągu pięciu minut, kreskowana zaś — wynik doświadczenia 5000 razy powolniejszego. Wpływ czasu okazuje się tutaj znacznie słabszy, jak w przypadku cynku i w praktyce można przyjąć, że wydłużenie żelaznego pręta, wywołane obciążeniem wzrastającym stopniowo w ciągu kilku minut nie zmieniłoby się przy dłuższym działaniu obciążenia.

Jeżeli, rozciągnawszy pręt poza punkt krytyczny, pozwolimy obciążeniu działać przez dłuższy czas, to oprócz powiększenia wydłużenia możemy jeszcze stwierdzić istotne zmiany własności materiału. Okazuje się np., że po takiej operacji staje się żelazo twardszem, do rozerwania pręta potrzeba większego obciążenia niż pierwotnie, a całkowite przedłużenie przy rozerwaniu staje się mniejszem. [Mówiąc inaczej powiększa się wytrzymałość materiału, a zmniejsza jego plastyczność].

Na rys. (10) przedstawiono wyniki dwu doświadczeń nad wyżarzonym żelaznym drutem⁴⁾. Linja pełna przedstawia diagram rozciągania przy ciągłym wzroście obciążenia. Przy drugim doświadczeniu doprowadzono obciążenie do stanu odpowiadającego punktowi a diagramu i pozwolono obciążeniu działać odtąd stale przez $45\frac{1}{2}$ godzin. Pod wpływem dalszego powiększenia obciążenia otrzymano następnie kreskowaną część diagramu a c d.



Rys. 10

¹⁾ Hort: Zeit. d. V. d. Ing. 1906. Str. 1831.

A. Dinnik: „Opredielenie prediela uprugosti po izmienienu temperatury tiela“. Izv. Kiew. Pol. Inst. 1909.

²⁾ L. Fraichet: Revue d'artillerie. Fevr. 1904.

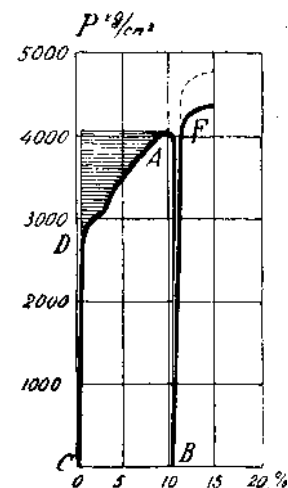
³⁾ I. A. Ewing: „The strength of materials“.

⁴⁾ I. A. Ewing: „On Certain Effects of Stress on soft Iron Wires“. Proc. of Roy. Soc. 1880.

§ 8. PODWYŻSZENIE PUNKTU KRYTYCZNEGO [CZYLI GRANICY PLASTYCZNOŚCI]

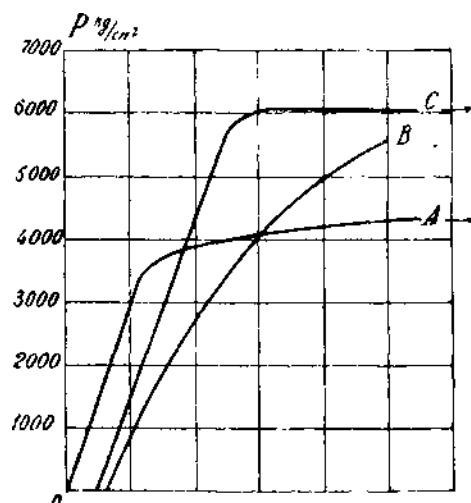
Przekroczeniu punktu krytycznego towarzyszą, jakśmy widzieli, znaczne zmiany w materiale i dla praktyki jest rzeczą zasadniczej wagi wyjaśnić wpływ tych zmian na własności sprężyste i wytrzymałość materiału. Już Gerstner robił pierwsze doświadczenia w tym kierunku i przekonał się, że wydłużenie sprężyste, stanowiące poza punktem krytycznym niewielką część całkowitego wydłużenia nie przestaje być proporcjonalnym względem obciążenia.

Jeżeli zmniejszamy obciążenie pręta po rozciągnięciu go do punktu *A* diagramu (rys. 11), to przy powrotnym przebiegu odkształceń otrzymamy np. prostą *AB*, równoległą do początkowej prostej *CD*. W rezultacie pozostaje trwałe wydłużenie pręta określone odcinkiem *CB*. Tak rozciągnięty pręt objawia znaczną zmianę swoich własności. Przy powtórnej obciążeniu wywołują już bardzo nieznaczne siły wydłużenie trwałe, a na ich wielkość wywiera wielki wpływ czas. Takie obniżenie granicy sprężystości jest zwłaszcza widoczne, jeżeli powtarzamy obciążenie natychmiast po ukończeniu opisanego doświadczenia. Skoro pozwolimy prętowi „wypocząć“ i powtórne doświadczenie robimy po upływie dłuższego czasu (np. po miesiącu), to można stwierdzić odzyskanie sprężystych własności materiału, który znowu podlega wcale dokładnie prawu Hooke'a. Granica proporcjonalności okazuje się przytem znacznie podwyższoną i może osiągnąć wartość tego naprężenia, które wywołało rozciągnięcie pręta przy poprzednim doświadczeniu. Na diagramie przedstawia to prosta *BF*. Począwszy od punktu *F* otrzymujemy dalszą krzywą, która jest jakby przedłużeniem krzywej *DA*. Nagła zmiana wydłużeń, zachodząca przy punkcie *F*, ma takiż sam charakter, jak w poprzednim doświadczeniu przy punkcie *C* na rys. (6). Powodując znaczne wydłużenie pręta, osiągamy przeto przesunięcie punktu krytycznego w górę¹⁾.



Rys. 11

Jeżeli poprzednio rozciągnięty pręt poddamy wstrząśnieniom, albo ogrzejemy nieco (do 100° C), to pokazuje się, że własności sprężyste powracają znacznie prędzej. Dla ilustracji podamy wyniki kilku doświadczeń z prętem stalowym²⁾. Na rys. (12) przedstawia diagram *A* pierwsze doświadczenie, zaś diagram *B* powtórne rozciąganie pręta po upływie 10 minut od ukończenia pierwszego. Widzimy tutaj znaczne zboczenia od prawa Hooke'a już przy nieznacznych obciążeniach. Linję *C* nakoniec otrzymano dla tegoż pręta po ogrzewaniu go przy temperaturze 100° C przez cztery minuty.



Rys. 12

Takie podgrzanie, jak widać z diagramu, przywróciło materiałowi całkowicie jego sprężyste własności. Dla wyrazistości rysunku przesunięto nieco punkty początkowe diagramów względem siebie.

Pierwsze rozciągnięcie żelaznego pręta poza punkt krytyczny podwyższa granicę proporcjonalności i zmniejsza jego rozciągliwość, a więc działa podobnie jak hartowanie na stal. Z tą okolicznością należy się liczyć w praktyce, albowiem żelazne elementy konstrukcyjne podlegają często obróbce „na zimno“ i przy tem doznają znacznych odkształceń trwałych. Np. wskutek krajania blachy nożycami staje się narażona na obróbkę krawędź blachy twardszą i przy zginaniu takiej blachy

pojawiają się często pęknięcia, ponieważ materiał utracił w tem miejscu znaczną część swej plastyczności, t. j. zdolności do znoszenia odkształceń trwałych. Podobne zjawisko można obserwować przy przebijaniu otworów na nity w żelaznych blachach. Brzeg otworu staje się twardszym

¹⁾ Objaśnienie mechanizmu tego zjawiska można znaleźć w interesującej książce W. Rosenhain'a: „An introduction to the Study of Physical Metallurgy“. II wyd. r. 1915, str. 247.

²⁾ I. Muir: Phil. Trans. of. Roy. Soc. 1899.

od reszty materiału. Przy rozciąganiu wstęgi, zaopatrzonej w otwory przebijane, nie może stwardniała część materiału nadążyć za odkształceniem reszty i wskutek tego przenoszą się na nią większe naprężenia, wywołując łatwo rysy i pęknięcia.

Ażeby zapobiec szkodliwemu działaniu przebijania dziur, zastępuje się przebijanie kosztowniejszym wierceniem. Dla oszczędności przebija się otwory mniejszym kalibrem, a następnie powiększa się świdrem do żądanej średnicy, usuwając przez to stwardniałą warstwę materiału z korzyścią dla trwałości konstrukcji.

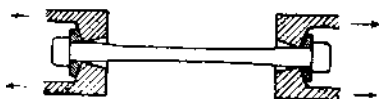
Opisaną własnością twerdnienia żelaza kowalnego, wskutek znacznych odkształceń, posługują się nieraz w technice. Tak np. cylindry pras hydraulicznych poddaje się niekiedy najpierw ciśnieniu wewnętrznemu przekraczającemu znacznie to największe ciśnienie, przy którym prasa będzie pracować. Tym sposobem zapewnia się na przyszłość niezmiennosc średnicy cylindra i szczelne przyleganie tłoka. Przytem należy zauważyć, że podobna operacja osiąga cel i zwiększa trwałość konstrukcji tylko wtedy, gdy element poprzednio rozciągnięty będzie i nadal narażony wyłącznie na ciągnięcie. Doświadczenia wykazały bowiem ¹⁾, że u prętów z żelaza kowalnego rozciąganych poza punkt krytyczny pojawiają się przy ściskaniu jako oznaki osłabienia: trwałe odkształcenie i zboczenia od prawa Hooke'a, już przy stosunkowo niewielkich obciążeniach.

W tych przeto wypadkach, w których przygotowawcze odkształcenia mają na celu zabezpieczenie niezmienności konstrukcji, należy stosować odkształcenia tego samego rodzaju, co odkształcenia, na które będzie narażona odnośna część konstrukcji podczas jej funkcjonowania, to znaczy: element można poprzednio narażać na znaczne rozciągnięcie, jeżeli na przyszłość będzie tylko ciągniony, zaś na skurczenie, jeżeli ma być nadal wyłącznie ściskany.

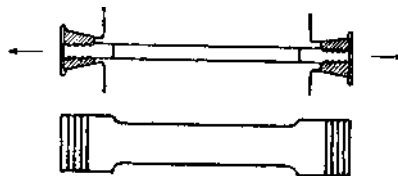
Żelazo narażone już raz na odkształcenia trwałe, może odzyskać pierwotną plastyczność przez wyżarzenie, t. j. ogrzewanie przy temperaturze czerwonego żaru (około 700° C) przez mniej więcej pół godziny i następne powolne ostudzenie. Badania mikroskopowe świadczą, że tą drogą wracają do pierwotnej postaci owe kryształki, które doznały trwałych odkształceń postaciowych przy przekroczeniu punktu krytycznego. W zwykłych warunkach walcowania żelaza i stali opuszcza materiał maszynę przy tak wysokiej temperaturze, że niknie prawie wpływ obróbki na wysokość punktu krytycznego [o ile produkt walcowania jest dość masywny. Cienkie blachy, wstęgi i kształtówki okazują tem większą wytrzymałość i mniejszą plastyczność, im są cieńsze]. Zwykłe targowe żelazo zachowuje się po wyżarzeniu prawie tak samo, jak w stanie naturalnym. Inna sprawa z obróbką żelaza na zimno; jej towarzyszy zawsze znaczne podwyższenie punktu krytycznego. Ażeby zapobiec szkodliwym następstwom twardości materiału, uciekamy się w praktyce często do wyżarzenia części, które podlegały obróbce na zimno.

§ 9. BADANIE METALI ZAPOMOCĄ „PRÓBY ROZRYWANIA“

Próba rozrywania jest podstawowym doświadczeniem przy badaniu wytrzymałości metali. Badanemu prętowi nadajemy przekrój kołowy (rys. 13) lub prostokątny (rys. 14). Najistotniejsze znaczenie przy tych doświadczeniach ma osiowe przeniesienie siły rozciągającej. Dla prętów wal-



Rys. 13



Rys. 14

cowych osiąga się to łatwo zapomocą specjalnych podkładek kulistych. W przypadku płaskich próbek, uchwyconych zwykle przy pomocy nasiekanych klinów, jest przeniesienie siły z natury rzeczy mniej doskonałe. To też prętów tego kształtu używa się tylko wtedy, gdy zachodzą szczególne trudności sporządzenia pręta okrągłego z danego materiału, np. przy badaniu blach i cienkich kształtówek.

¹⁾ Bauschinger: Mitt. aus d. mech. techn. Lab. in München 1886.

Wydłużenie długości rachunkowej pręta wyraża się zwykle w odsetkach tejże długości. Jeżeli h oznacza długość rachunkową pręta po rozerwaniu, a l długość pierwotną, to

$$\frac{h - l}{l} \cdot 100$$

określa przedłużenie w odsetkach. [Doświadczenia pokazały, co zresztą można było przewidzieć a priori, że postać pręta próbnego miewa często znaczny wpływ na wyniki końcowe, t. j. na wielkość naprężenia rozrywającego i wydłużenia przy rozerwaniu]. Ażeby przeto zapewnić porównywalność wyników różnych doświadczeń, należy używać prętów próbnych o jednej i tej samej postaci. Jeżeli zaś to nie jest możliwe, to przynajmniej trzeba zachować związek między długością rachunkową a przekrojem, określony wzorem (8).

Odstępstwa od tej reguły mogą doprowadzić do znacznych różnic zwłaszcza w wartości rozciągnięcia, t. j. całkowitego wydłużenia przy rozrywaniu prętów z tego samego materiału o różnej postaci. Główna przyczyna tkwi w tem, że nie wszystkie części pręta rozciągają się jednakowo; największe rozciągnięcie przypada na część odpowiadającą szyjce. Im dłuższa ta część w porównaniu do całej rachunkowej długości, tem większe wypadnie procentowe rozciągnięcie.



Rys. 15

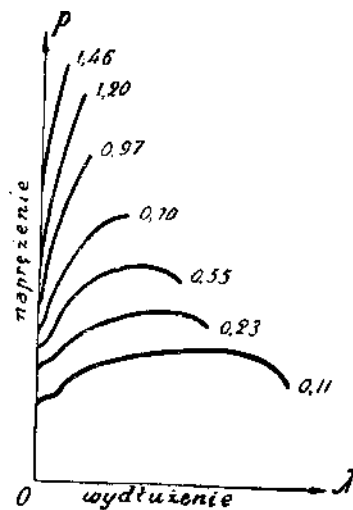
Nawzajem, przyczyny utrudniające wykształcenie szyjki, wywołują zmniejszenie procentowego przedłużenia. Pręty np. z wyłobionem dokoła wyłobieniem (rys. 15) rozciągają się mniej niż pręty o stałym przekroju. Wpływ takich złobków jest tem znaczniejszy, im mniejszą część długości pręta zajmują. Pęknięcie zachodzi oczywiście w osłabionym przekroju. Wytworzeniu się szyjki przeszkadzają przytem sąsiednie części pręta o większym przekroju.

Obok wartości rozciągnięcia używa się także do oceny plastyczności materiału skurczenia poprzecznego w szyjce. Jeżeli oznaczymy przez F pole przekroju pierwotnego, a przez F_1 pole najmniejszego przekroju po rozerwaniu, to

$$\frac{F - F_1}{F} \cdot 100$$

określa procentowe skurczenie przekroju poprzecznego.

Wysoki stopień plastyczności objawia się jako bardzo cenna własność materiałów w tych przypadkach, kiedy jakaś konstrukcja podlega oprócz obciążeń statycznych także działaniu uderzeń i wstrząśnień. Materiał kruchy, t. j. materiał o niskim stopniu plastyczności może spowodować w tych warunkach całkiem nieoczekiwane katastrofy.



Rys. 16

Przy odbiorze większych partij żelaza i stali z fabryk, ustania się pewne techniczne warunki, którym materiał winien czynić zadość. Zwykle poprzestaje się na żądaniu, aby doraźna wytrzymałość i procentowe rozciągnięcie nie były niższe od pewnych granic, obranych zależnie od celu, do którego służyć będzie konstrukcja. Tak np. na mosty żąda się żelaza o rozciągliwości nie mniejszej jak 16 do 20%. Na kotły parowe używa się żelaza o jeszcze większej plastyczności, czyli, jak się wyrażają praktycy, jeszcze miększego. Należy zauważyć, że rozciągliwość i wytrzymałość zwykłego żelaza i stali, stoją ze sobą w dość ścisłym związku. Skoro podwyższyć wytrzymałość żelaza kowalnego np. przez zwiększenie zawartości węgla, koniecznej, jak wiadomo, przymieszki w każdym żelazie technicznym, to jednocześnie obniża się rozciągliwość. Związek tego rodzaju unaczynia rys (16) zawierający szereg diagramów rozciągania żelaza i stali. Zawartość węgla w odsetkach zaznaczona na każdym diagramie. [Istnieją także przymieszki, jak np. nikiel, wpływające korzystnie tak na wytrzymałość jak i plastyczność. Bliższe szczegóły należą do materiałoznawstwa i technologii].

§ 10. PRACA POTRZEBNA DO ROZERWANIA

Pokazaliśmy już pierwej (w § 4), że pole zawarte między krzywą diagramu, osią odciętych i końcową rzędną określa pracę wykonaną przy rozciąganiu. Wielkość tego pola można zawsze przedstawić wzorem (rys. 17):

$$T = \eta \cdot OH \cdot CD,$$

w którym oznacza OH rozciąganie pręta przy rozerwaniu, CD — największą wartość siły rozciągającej, η — t. zw. „spółczynnik pełności“. Ta liczba jest widocznie mniejsza od jedności i, jak wykazały doświadczenia L. Tetmajera, waha się dla jednego i tego samego materiału w tak ciasnych granicach, że praktycznie można ją uważać za stałą charakterystyczną dla materiału. Aby otrzymać wielkość niezależną od rozmiarów pręta, podzielimy pracę przez jego objętość. Znalaziona tą drogą „praca właściwa“ materiału przedstawia się wyrażeniem

$$\frac{T}{lF} = \eta \cdot \frac{OH}{l} \cdot \frac{CD}{F} = \eta e p_{max}$$

Tutaj oznacza e wydłużenie względne, a p_{max} — największe ciągnięcie (naprężenie rozciągające). Właściwa praca wyłożona na rozerwanie może do pewnego stopnia charakteryzować odporność materiału na uderzenia. Pod tym względem będzie materiał tem lepszy, im większą się okaże ta praca.

W budownictwie dopuszcza się nieraz żelazo o doraźnej wytrzymałości leżącej poniżej pewnej normy, jeżeli ten ubytek wynagradza większa rozciągliwość. Praktyczna możliwość takiej kompensaty wyraża się specjalnymi formułami, w które wchodzi tak doraźna wytrzymałość R , jak i rozciągliwość e . Przy dostawach żelaza na mosty żądają np., aby był zachowany warunek

$$R + 2e \geq 85,$$

w którym R ma być wyrażone w kg/mm^2 , a e w odsetkach. A więc, dajmy na to, żelazo o rozciągliwości 20% winno mieć doraźną wytrzymałość nie mniejszą od $45 kg/mm^2$.

W tych przypadkach, w których nie rozporządzamy całkowitym diagramem, można wyznaczyć pracę przy rozrywaniu z trzech danych, odpowiadających obciążeniu na granicy proporcjonalności OA , największemu obciążeniu CD i całkowitemu wydłużeniu OH . Do tego służy przybliżony wzór

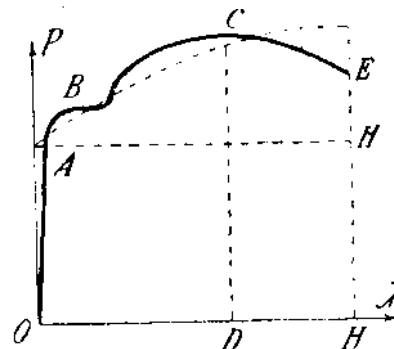
$$T = OH \cdot OA + \frac{2}{3} OH (DC - OA),$$

oparty na przyjęciu, że pole diagramu składa się z prostokąta $OAHH$ i odcinka parabolicznego o podstawie OH i wysokości $DC - AO$. Wartość pracy właściwej potrzebnej do rozerwania niektórych materiałów podajemy poniżej.

M a t e r j a ł	Praca własc. w $\frac{kg \cdot m.}{cm^3}$
Żelazo spawalne	2 do 7
„ zlewne	6 do 8
Miękka stal	8 i więcej

§ 11. ŚCISKANIE

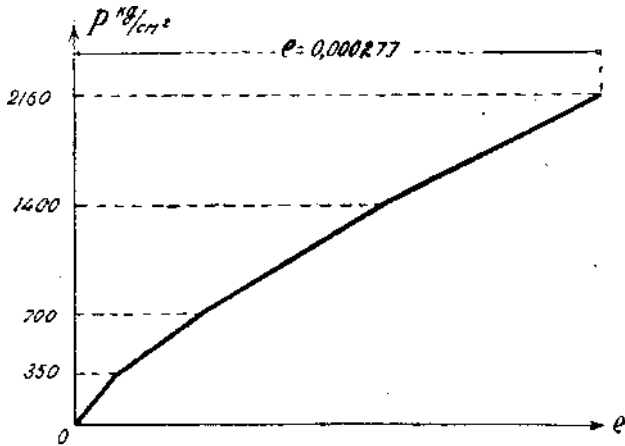
W granicach proporcjonalności jest związek między skróceniem pręta a siłą ściskającą zupełnie oznaczony wartością modułu sprężystości przy ściskaniu, który równa się zawsze modułowi sprężystości przy rozciąganiu i dlatego będziemy go oznaczać tą samą literą E . Poza granicami proporcjonalności staje się zależność między odkształceniami a naprężeniami bardziej złożoną i przedstawiamy ją zwykle wykreslnie. Diagramy ściskania wyglądają rozmaicie, zależnie od tego, czy badany materiał jest kruchy, czy też plastyczny. Dla materiałów kruchych, jak żelazo lane, kamień,



Rys. 17

beton i t. d. ma diagram postać uwidocznioną na rys. (18), który przedstawia wynik jednego z doświadczeń Bacha z granitem. Diagram ten można oczywiście zastąpić formułą analityczną. Zadowolając się przybliżeniem, jakie daje formuła potęgowa, możemy dla tegoż doświadczenia napisać

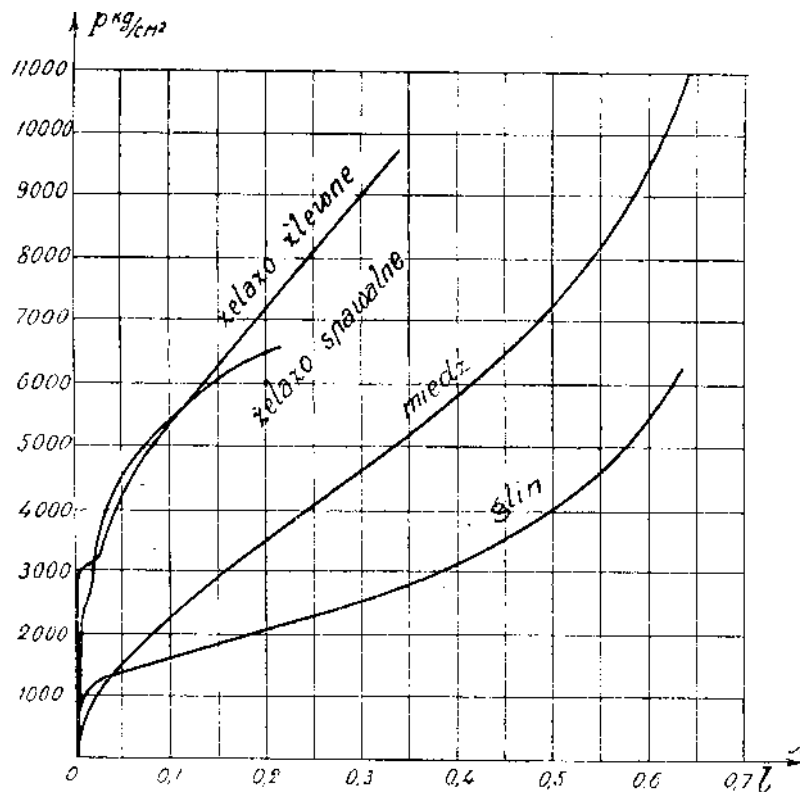
$$e = \frac{p^{1,13}}{250000}$$



Rys. 18

Kilka diagramów dla materiałów plastycznych zestawiono na rys. (19). U żelaza kowalnego znajdujemy i tutaj punkt krytyczny [granicę plastyczności], cechujący się nagłą zmianą kierunku linii diagramu na poziomy, poczem znowu linja się podnosi i często wygina później wklęsłością ku osi rzędnych (osi naprężeń), a więc przeciwnie jak przy rozciąganiu. Ta różnica jest jednak raczej pozorna i tłumaczy się łatwo rozszerzeniem poprzecznym przy ści-

skaniu, dzięki któremu staje się pole przekroju coraz większem i coraz większego potrzeba obciążenia nawet wówczas, gdyby ciśnienie na jednostkę pola miało pozostać stałem¹⁾.



Rys. 19

Powtarzając ściskanie, można u żelaza kowalnego i stali dostrzec tak samo, jak przy powtórnem rozciąganiu, podwyższenie punktu krytycznego, zwiększenie twardości i wpływ czasu

¹⁾ [Dla materiałów o wysokim stopniu plastyczności, jak np. miedź, nie ma nawet linja diagramu granicy praktycznej, gdyż powiększając ciągle obciążenie, zamieniamy w końcu pierwotną postać słupka na cienki krążek o średnicy kilkakrotnie zwiększonej, a kontynuowaniu doświadczenia staje na przeszkodzie ograniczona siła maszyny. Gdybyśmy byli w stanie powiększać obciążenie bez granic, to i grubość krążka malałaby z pewnością dalej, a linja diagramu zbliżałaby się asymptotycznie do prostej równoległej do osi sił w odległości l od tejże (l — pierwotna długość słupka)].

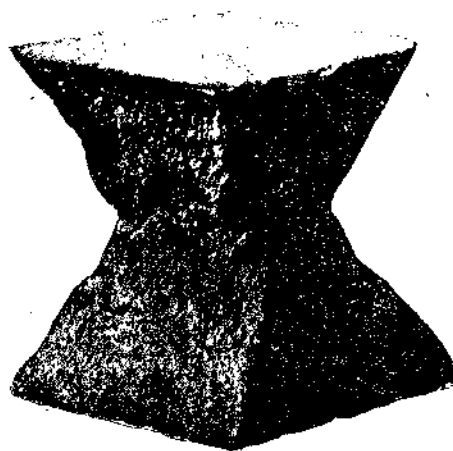
przy obciążeniach przekraczających punkt krytyczny. Naprężenia, odpowiadające punktowi krytycznemu, mają przytem w przybliżeniu tę samą wartość, co przy rozciąganiu¹⁾.

Doświadczenia nad ściskaniem napotykają na szereg poważnych trudności. W celu zapewnienia równomiernego rozkładu naprężeń w płaszczyźnie przekroju poprzecznego jest pożądanem, aby obserwowana część ściskanego pręta była możliwie odległa od jego końców i dlatego należałoby używać dość długich prętów; wtedy jednak każda najmniejsza niedokładność w osiowym działaniu siły, najmniejsze początkowe skrzywienie pręta i najmniejsza niejednorodność materiału wywołują prędzej czy później wygięcie pręta, zwane w tym przypadku „wyboczeniem“. Skoro zaś weźmiemy słupki dostatecznie niskie, aby wyboczenia uniknąć, to mamy z nową trudnością do czynienia. Maszyna do badania wywiera nacisk na podstawy słupka zapomocą starannie obrobionych płyt stalowych. Przy ściskaniu zwiększają się rozmiary poprzeczne słupka, ale u podstaw napotyka to rozszerzenie na przeszkodę w postaci sił tarcia w płaszczyźnie przylegania płyt do słupka. Siły te są oczywiście skierowane ku środkowi podstawy, wskutek czego mamy w pobliżu podstaw do czynienia nie z prostym ściskaniem, lecz ze zjawiskiem wielce złożonym. Z powodu tych trudności nie robi się zwykle doświadczeń nad ściskaniem dla metali. Dla oceny ich wytrzymałości i sprężystości przy ściskaniu wystarczają dane z doświadczeń przy rozciąganiu, jeżeli przyjmiemy (zgodnie z dotychczasowymi badaniami), że dla żelaza kowalnego, stali i innych jeszcze metali odpowiadają granica proporcjonalności i punkt krytyczny przy ściskaniu naprężeniom tej samej wielkości co przy rozciąganiu. Co się tyczy doraźnej wytrzymałości przy rozgniataniu, to dla materiałów plastycznych niepodobna podać jakichkolwiek określonych wartości, gdyż przy doświadczeniach nie można doprowadzić do wyraźnego zniweczenia spójności.

Przy badaniu materiałów kruchych rezygnujemy raczej z próby rozciągania na korzyść próby ściskania, którą przeprowadzamy aż do zupełnego pokonania spójności. Do tego używa się próbek o postaci kostek różnej wielkości [zależnie od siły maszyny, którą dysponujemy]. Z żelaza lanego robi się kostki o długości krawędzi 3 cm, z kamienia 5 lub 7 cm. Przy badaniu bardzo niejednorodnych materiałów, jak np. beton, wypada stosować jeszcze większe rozmiary.

Przez doraźną wytrzymałość przy ściskaniu należy analogicznie do rozciągania rozumieć iloraz z obciążenia rozgniatającego przez pole przekroju. Ale wielkości tak obliczone na podstawie doświadczeń z kostkami nie będą właściwie określać takiej wytrzymałości, albowiem wpływ tarcia na podstawach kostki jest tak znaczny, że nie można uważać rozkładu ciśnienia za równomierny. Wielkości „wytrzymałości kostkowej“ mają tylko względne znaczenie i mogą w przybliżeniu określać stosunek wytrzymałości przy ściskaniu odpowiadających kruchych materiałów.

Wpływ tarcia na podstawach odbija się wyraźnie na sposobie, w jaki pęka i kruszy się materiał ściskanej kostki. Z kostki pozostaje po doświadczeniu część o postaci przedstawionej na rys. (20). Materiał przylegający do płyt maszyny pozostaje całym, a odpadają tylko z bocznych ścian części wypchnięte niejako przez dwa przeciwległe ostrosłupowe kliny z materiału niepozabawionego spójności. Zupełnie inaczej wygląda zgnieciona kostka, jeżeli usunąć tarcie na podstawach przez posmarowanie parafiną²⁾. Wtedy powstają pęknięcia równoległe do ścian bocznych i dzielące kostkę na kilka części. Wartość otrzymanej przytem wytrzymałości jest znacznie mniejszą, niż przy zgniataniu kostki zwykłym sposobem. Dla zmniejszenia wpływu tarcia używają też czasem podkładek z miększego materiału, co jednakże przysparza nowe źródło błędów. Najracjonalniej byłoby nadać próbkom postać walców o tyle wysokich, ażeby wpływ tarcia w głowach na zgniecenie w środkowej części stał się możliwie



Rys. 20

¹⁾ Moore: Bull. of. Univ. Illinois Nr. 68.

²⁾ A. Föppl: Mitt. aus d. mech. techn. Lab. in München. Heft 27.

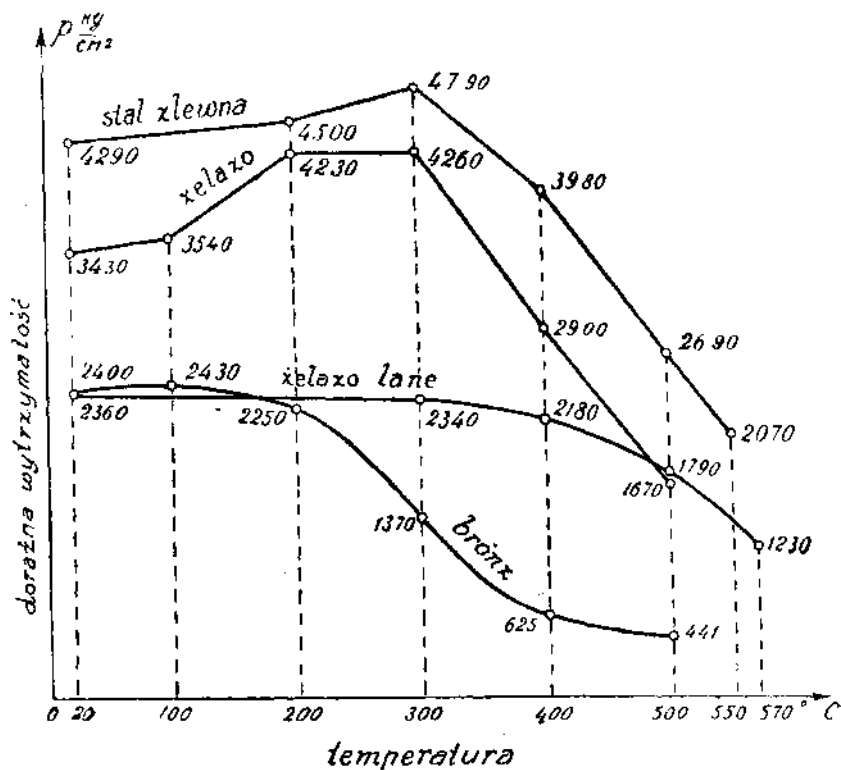
mały, a zarazem nie tak wysokich, ażeby się pojawił zakłócający wpływ wybożenia. Odpowiedni stosunek wysokości do średnicy słupka można znaleźć doświadczalnie¹⁾.

Na zakończenie podajemy tablicę wartości doraźnej wytrzymałości przy ściskaniu dla niektórych materiałów.

Żelazo lane	5000 do 8000 kg/cm^2
Granit	800 „ 2000 „
Piaskowiec	500 „ 1800 „
Wapień	400 „ 2000 „
Cegła	150 „ 300 „
Beton	60 „ 400 „
Sośnina	245 „
Dębina	345 „
Buczyna	320 „
} w kierunku włókien	

§ 12. WPŁYW TEMPERATURY

Podane powyżej wyniki doświadczeń nad wytrzymałością materiałów odnoszą się do badań w zwykłej temperaturze pokojowej. Ale w praktyce zachodzi niekiedy potrzeba oceny wytrzymałości także przy wysokiej temperaturze, na jaką np. są narażone kotły parowe, cylindry motorów wybuchowych i t. d. Przeprowadzone w tym kierunku badania²⁾ wykazały, że znaczne podwyższenie



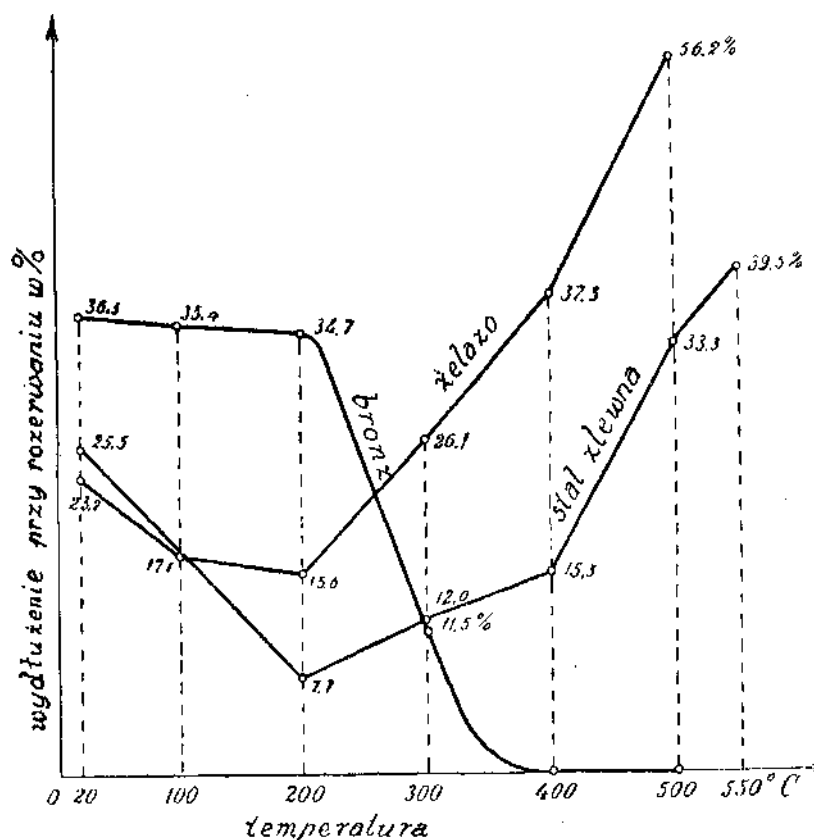
Rys. 21

temperatury zmniejsza wogóle wytrzymałość, jakkolwiek u żelaza kowalnego i stali zachodzi maximum wytrzymałości przy temperaturze 200 do 300°C. Daleko wrażliwszą na podwyższenie temperatury jest jednakże rozciągliwość. Próbkę odlewu stalowego np. okazują przy temperaturze

¹⁾ Por. L. Prandtl und Rinne: Neues Jahrb. f. Mineralogie. 1907.

²⁾ R. Baumann: „Die Festigkeitseigenschaften der Metalle in Wärme und Kälte“. 1907.

około 200° tylko trzecią część tej rozciągliwości, jaką posiadają w zwykłej temperaturze. Dla brązu spada rozciągliwość przy 400° C prawie do zera. Podane poniżej diagramy (rys. 21 i 22) przedstawiają przebieg zmiany wytrzymałości i plastyczności ze wzrostem temperatury dla niektórych materiałów.



Rys. 22

Obniżeniu temperatury do -80°C towarzyszy, jak wykazały doświadczenia, powiększenie wytrzymałości przy rozciąganiu i zmniejszenie rozciągliwości. Wyniki niektórych doświadczeń podaje poniższa tablica ¹⁾.

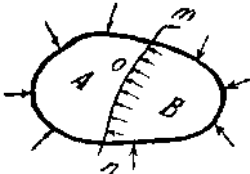
Materiał	Temperatura °C	Doraż. wytrz. przy rozciąg. kg/cm^2	Całkowite wydłużenie %	Skurczenie przekroju %
Żelazo zlewne	- 80	4270	23,8	32,6
	- 20	4170	26,2	34,9
	+ 20	3970	27,7	39,9
Miękka stal	- 80	4520	23,4	61,9
	- 20	4360	33,3	61,6
	+ 20	4040	32,8	62,7
Stal sprężynowa	- 80	8440	10,9	23,8
	- 20	8420	14,0	24,1
	+ 20	7720	16,0	28,8
Stal niklowa	+ 20	8800	10,7	60,8
	+200	9100	8,7	60,0
	+400	7300	7,0	74,0

¹⁾ Szereg nowych danych można znaleźć w publikacji F. C. Lea. Engineering 1914. Str. 487.

O NAPRĘŻENIACH PRZY ROZCIĄGANIU I ŚCISKANIU

§ 13. NAPRĘŻENIA W PRZYPADKU PROSTEGO ROZCIĄGANIA

Naprężenie w danym punkcie O odkształconego ciała określamy ogólnie w następujący sposób: Prowadzimy przez punkt O przekrój powierzchnią mn (rys. 23), rozdzielającą dane ciało na dwie części A i B , i rozpatrujemy równowagę jednej z tych części np. A . Oprócz sił zewnętrznych (obciążeń) na nią działających, musimy teraz wziąć pod uwagę siły wewnętrzne, czyli napięcia w przekroju mn , określające działanie odciętej części B na część rozpatrywaną. Rozkład tych sił na powierzchni mn będzie wogóle nierównomiernym i ażeby określić ich natężenie w jakimkolwiek punkcie O , obierzemy element δF należący do powierzchni mn i zawierający punkt O . Ten element leży oczywiście w płaszczyźnie stycznej do mn w punkcie O . Niech napięcia działające na element δF mają wypadkową δP .



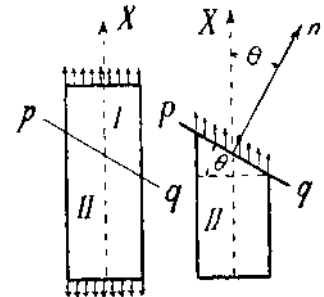
Rys. 23

Wtedy przez wielkość naprężenia w danym punkcie O danego elementu δF rozumiemy granicę stosunku

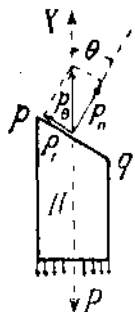
$$\frac{\delta P}{\delta F},$$

a jako kierunek naprężenia weźmiemy kierunek wypadkowej δP . Przez obrany punkt O można poprowadzić nieskończoną ilość płaskich elementów rozmaicie nachylonych. Każdemu z nich będzie odpowiadać pewne naprężenie. [Ogół tych naprężeń określa „stan napięcia“ w rozpatrywanym punkcie]. Łatwo zrozumieć, że naprężenia w poszczególnych elementach nie mogą być od siebie zupełnie niezależne. Prawo zmiany naprężenia w zależności od kierunku płaskiego elementu znajdziemy najpierw dla najprostszego stanu napięcia, jaki zachodzi przy rozciąganiu lub ściskaniu pryzmatycznych prętów. Rozkład naprężeń w przekroju prostopadłym do osi pręta rozpatrywaliśmy już powyżej (ob. § 1); teraz przejdziemy do przekrojów nachylonych do osi (rys. 24).

Odrzuciwszy w myśli górną część pręta odciętą przekrojem pq , weźmy pod uwagę część dolną. Kierunek płaszczyzny przekroju określimy kątem ϑ , jaki tworzy jej normalna zewnętrzna n z osią pręta (osią X -ów). Pole przekroju pq równa się $F \cdot \cos \vartheta$. Siły zastępujące działanie odrzuconej części pręta na część rozpatrywaną sprowadzają się do wypadkowej P skierowanej ku górze. W płaszczyźnie pq rozkładają się naprężenia równomiernie, każde bowiem włókno pręta doznaje takich samych odkształceń. Wielkość naprężenia p_ϑ w dowolnym punkcie przekroju pq , znajdziemy, dzieląc wypadkową P przez pole przekroju; a zatem



Rys. 24



Rys. 25

$$p_\vartheta = \frac{P \cos \vartheta}{F},$$

czyli wielkość naprężenia zależy od nachylenia przekroju pq . Kierunek zaś jest widocznie identyczny z kierunkiem osi X -ów.

Rozłożmy teraz naprężenie p_ϑ na składową normalną p_n i styczną p_t . Z rys. (25) wynika, że

$$\left. \begin{aligned} p_n &= p_\vartheta \cos \vartheta = \frac{P}{F} \cos^2 \vartheta = p \cos^2 \vartheta, \\ p_t &= p_\vartheta \sin \vartheta = \frac{P}{F} \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{P}{2F} \sin 2\vartheta = \frac{p}{2} \sin 2\vartheta, \end{aligned} \right\} \dots \dots (9)$$

jeżeli przez p oznaczymy naprężenie w przekroju prostopadłym do osi. A zatem naprężenia normalne osiągają największą wartość p w przekrojach normalnych, a naprężenia sty-

czne w przekrojach nachylonych do osi pod kątem $\vartheta = 45^\circ$. Nadto widać ze znalezionych formuł, że

$$(p_t)_{\max} = \frac{1}{2} (p_n)_{\max} = \frac{1}{2} p$$

Pomyślmy sobie dwa nieskończenie bliskie i równoległe przekroje p_1q_1 i p_2q_2 (rys. 26) i działajmy na przekrój p_1q_1 napręciami zastępującymi działanie części I na część II, to nieskończenie cienka warstwa $p_1q_1p_2$ będzie pod wpływem tych sił w równowadze. Naprężenia normalne dążą, jak widać z rysunku, do zwiększenia wzajemnej odległości obu przekrojów; naprężenia styczne zaś do wzajemnego przesunięcia tychże. Te ostatnie nazywamy dlatego także napręciami przesuwającymi, albo ścinającymi.

Porównajmy naprężenia w przekrojach wzajemnie prostopadłych (rys. 27). Jeżeli nachylenie jednego przekroju, np. pq , określa kąt ϑ , to $270^\circ + \vartheta$ określi nachylenie drugiego (rs), a odpowiadające naprężenia składowe będą według (9):

$$p'_n = p \cos^2 (270^\circ + \vartheta) = p \sin^2 \vartheta,$$

$$p'_t = \frac{p}{2} \sin (180^\circ + 2\vartheta) = -\frac{p}{2} \sin 2\vartheta.$$

A zatem:

$$p'_n + p_n = p, \quad p'_t = -p_t.$$

Szczególnie ważną jest własność naprężeń ścinających przedstawiona drugim z powyższych równań, które wyraża, że:

Naprężenia styczne w dwu przekrojach wzajemnie prostopadłych są co do bezwzględnej wartości równe. [Różnica znaków algebraicznych wskazuje na to, że kierunki obu naprężeń nie są jednobieżne, t. zn., że idąc w myśl z biegiem strzałki jednego naprężenia po powierzchni rozpatrywanej części aż do krawędzi przecięcia się obu przekrojów i przechodząc następnie na przekrój drugi, napotykamy strzałkę o biegu przeciwnym].

Zaznamy na koniec, że stosownie do równań (9) będzie dla $\vartheta = 90^\circ$

$$p_n = p_t = 0,$$

to znaczy, że w przekrojach podłużnych pręta nie ma żadnych naprężeń, czyli, że sąsiednie podłużne elementy („włókna“) pręta nie przenoszą na siebie nawzajem żadnych sił¹⁾.

Powyższe wywody dokonane na przypadku siły rozciągającej P zastosujemy także łatwo w przypadku siły ściskającej. Wystarczy tylko odwrócić kierunki naprężeń.

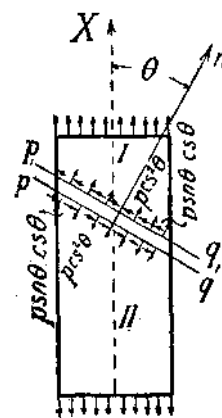
W dalszym ciągu umówimy się uważać naprężenia ciągnące, czyli ciągnięcia, za dodatnie, a cisnące, czyli ciśnienia, za ujemne²⁾.

§ 14. ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ W PRZYPADKU ROZCIĄGANIA LUB ŚCISKANIA W DWU KIERUNKACH WZAJEMNIE PROSTOPADŁYCH [CZYLI W DWUWYMIAROWYM STANIE NAPIĘCIA]

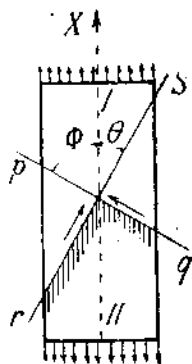
Niechaj na dwie pary przeciwległych ścian prostopadłościennego pręta AB (rys. 28) działają równomiernie rozłożone naprężenia normalne o wypadkowych P_x , P_y równoległych odpowiednio do osi X , Y tegoż prostopadłościennu. Poła odpowiadających ścian prostopadłościennu oznaczymy przez F_x i F_y .

¹⁾ [Ten wniosek pozostaje oczywiście ważnym tylko tak długo, dopóki spełniają się założenia, z których wypływa równomierny rozkład naprężeń w każdym przekroju prostopadłym do osi pręta. Z chwilą np. tworzenia się szyjki przy rozrywaniu pręta, upadają te założenia i pojawia się wzajemne oddziaływanie włókien. Podobnie ma się rzecz w przypadkach prętów złożonych podłużnie z różnych materiałów, np. drutu miedzianego z „duszą“ stalową i t. p.]

²⁾ [Odwrotną umowę napotykamy w podręcznikach fizyki].



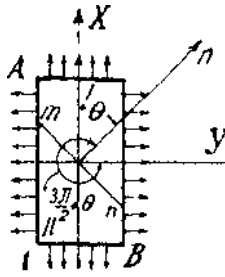
Rys. 26



Rys. 27

Naprężenia w przekrojach prostopadłych do osi X , względnie Y będą oczywiście normalnymi i określą się równaniami

$$p_x = \frac{P_x}{F_x} \quad \text{i} \quad p_y = \frac{P_y}{F_y}$$



Rys. 28

Obliczymy teraz naprężenia w przekroju mn , prostopadłym do płaszczyzny rysunku i wyznaczonym zapomocą kąta ϑ . Przytem będziemy rozpatrywać działanie górnej części pręta na część dolną. Całkowite naprężenia znajdziemy, jak łatwo zauważyć, sumując naprężenia wywołane ciągnięciem w kierunku osi X -ów i naprężenia wywołane ciągnięciem w kierunku osi Y -ów. Wyrażenia dla pierwszych otrzymaliśmy powyżej (rów. 9), trzeba w nich tylko zamiast P i F wstawić P_x i F_x .

Dla otrzymania drugich wystarczy zastąpić w rów. (9) $\frac{3\pi}{2} + \vartheta$, a P i F przez P_y i F_y . W ten sposób znajdziemy

$$p_n = p_x \cos^2 \vartheta + p_y \sin^2 \vartheta, \quad \dots \quad (10)$$

$$p_t = \frac{p_x}{2} \sin 2\vartheta - \frac{p_y}{2} \sin 2\vartheta = \frac{1}{2} (p_x - p_y) \sin 2\vartheta \quad \dots \quad (11)$$

Z otrzymanych wzorów wynika z łatwością, że największe naprężenia styczne w przekrojach prostopadłych do płaszczyzny XY są nachylone do osi pod kątem 45° . Ich wielkość określa równanie:

$$(p_t)_{\max} = \frac{p_x - p_y}{2} \quad \dots \quad (12)$$

Co się tyczy naprężeń normalnych, to, szukając w znany sposób krańcowych wartości prawej strony równania (10), znajdujemy, że p_n osiąga największą, względnie najmniejszą wartość dla $\vartheta = 0$ i $\vartheta = 90^\circ$. Jedna z nich jest zatem równa p_x , a druga p_y . Jeżeli np. $p_x > p_y$, to $(p_n)_{\max} = p_x$, a $(p_n)_{\min} = p_y$; skoro zaś w szczególnym przypadku $p_x = p_y$, to i wszystkie p_n są sobie równe, a $p_t = 0$.

Łatwo wykazać, podobnie jak w poprzednim paragrafie, że naprężenia styczne w dwu wzajemnie prostopadłych przekrojach są sobie równe co do bezwzględnej wartości.

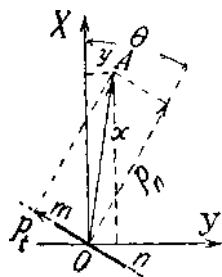
Rozpatrzyliśmy naprężenia w płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny XY . Jeżeli w szczególności zwrócimy uwagę na płaszczyzny równoległe do osi X lub Y , to naprężenia w nich będą określone temi samymi wzorami, co dla prostego rozciągania, albowiem siły rozciągające równoległe do płaszczyzny przekroju nie mogą w nim wywołać żadnych naprężeń.

W wywodach niniejszego paragrafu przyjęliśmy, że naprężenia p_x i p_y są ciągnięciami. Gdyby jedno z nich, albo obadwa były ciśnieniami, to wystarczy oczywiście zmienić odpowiednio znaki algebraiczne, ażeby z uzyskanych formuł korzystać w każdym przypadku.

§ 15. ELIPSA NAPRĘŻEŃ

Prawo zmiany naprężenia w zależności od kąta ϑ , wyrażone wzorami (10) i (11) można z korzyścią przedstawić wykreslnie.

Dla każdego płaskiego elementu mn , prostopadłego do płaszczyzny XY i przechodzącego przez dany punkt O kreślmy odcinek OA , przedstawiający co do kierunku i wielkości naprężenie w elemencie mn . Przy zmianie położenia elementu zmienia się oczywiście wielkość i kierunek odpowiadającego naprężenia, a punkt A opisuje przytem pewną krzywą. Ażeby znaleźć jej równanie, ustawimy wyrażenia dla współrzędnych x i y punktu A . Z rys. (29) widać, że



Rys. 29

$$x = p_n \cos \vartheta + p_t \sin \vartheta,$$

$$y = p_n \sin \vartheta - p_t \cos \vartheta.$$

Po wstawieniu w powyższe równania zamiast p_n i p_t ich wartości (10) i (11) otrzymamy:

$$x = p_x \cos \vartheta, \quad y = p_y \sin \vartheta,$$

a rugując z tych równań kąt ϑ znajdziemy

$$\frac{x^2}{p_x^2} + \frac{y^2}{p_y^2} = 1,$$

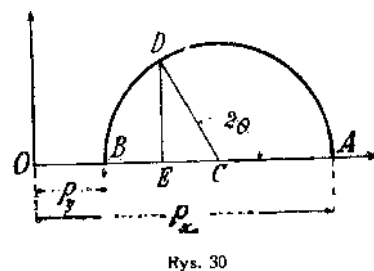
czyli równanie elipsy o półosiach p_x i p_y . Nazywamy ją elipsą naprężeń. [Z tego geometrycznego obrazu widać odrazu, że dane naprężenia normalne p_x i p_y określają krańcowe wartości

t. j. maximum lub minimum naprężeń w mnogości rozpatrywanych elementów. W przekrojach odpowiadających tym naprężeniom nie ma oczywiście naprężeń stycznych. Nazywają je przekrojami głównymi, a odpowiadające im naprężenia naprężeniami głównymi]. W przypadku, gdy jedno z naprężeń, np. p_y , staje się zerem, mamy do czynienia z prostym rozciąganiem w kierunku osi X -ów. Elipsa zamienia się wówczas w odcinek prostej. Jeżeli $p_x = p_y$, to elipsa staje się kołem, a zatem naprężenia we wszystkich rozpatrywanych elementach są równe i prostopadłe do elementów. Naprężenia styczne zaś znikają w tym przypadku, jak widać z wzoru (11). Mamy wtedy do czynienia z równomiernym [dwuwymiarowym] rozciąganiem w płaszczyźnie XY .

§ 16. PRZEDSTAWIENIE NAPRĘŻEŃ SPOSOBEM MOHR'A (KOŁO NAPRĘŻEŃ)

Wykreślona dla punktu O elipsa naprężeń nie pozwala jeszcze z samego rysunku odnaleźć łatwo kierunku naprężenia dla dowolnie obranego przekroju i naodwrot. Tej niedogodności nie posiada inny geometryczny obraz rozkładu naprężeń, polegający na przedstawieniu wykreslnem formuł (10) i (11).

Na osi X dowolnie obranego prostokątnego układu współrzędnych odmierzamy odcinki OA i OB , przedstawiające w pewnej skali naprężenia p_x i p_y . Na rys. (30) przyjęto, że $p_x > p_y > 0$. Na odcinku $AB = p_x - p_y$, jako na średnicy, zakreslamy półkoło. Współrzędne punktów tego półkoła określają, jak łatwo okazać, wielkości naprężeń składowych p_n i p_t . Oznaczywszy bowiem przez ϑ kąt, jaki tworzy z osią X na rys. (29) normalna zewnętrzna przekroju elementarnego mn i odmierzywszy następnie jego dwukrotną wartość 2ϑ na rys. (30), jako kąt środkowy ACD nakreślonego koła, znajdujemy wartość rzędnej punktu D :



$$DE = DC \sin 2\vartheta = \frac{p_x - p_y}{2} \sin 2\vartheta,$$

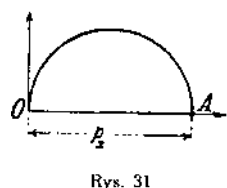
zaś wartość odciętej:

$$OE = OC - CE = \frac{p_x + p_y}{2} - \frac{p_x - p_y}{2} \cos(\pi - 2\vartheta) =$$

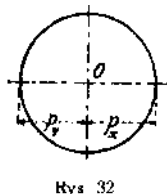
$$= p_x \cos^2 \vartheta + p_y \sin^2 \vartheta.$$

A zatem odcięta i rzędna punktu D przedstawiają odpowiednio wielkości naprężenia normalnego i stycznego określone wzor. (10) i (11).

Jeżeli jedno z naprężeń danych np. p_y staje się zerem (proste rozciąganie), to koło naprężeń dotyka osi Y w początku O (rys. 31). Jeżeli zaś jedno z naprężeń będzie ciśnieniem, to odcinamy je w kierunku ujemnym na osi odciętych. Rys. (32) przedstawia szczególny przypadek, w którym $p_x = -p_y$.



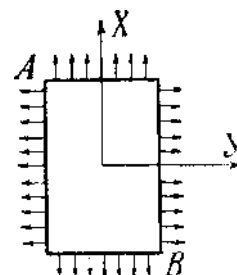
Rys. 31



Rys. 32

§ 17. ZWIĄZEK MIĘDZY ODKSZTAŁCENIEM I NAPRĘŻENIEM W DWUWYMIAROWYM STANIE NAPIĘCIA

Niechaj na materialny prostopadłościan AB rys. (33) działają naprężenia rozciągające p_x i p_y w kierunkach osi X i Y . Gdyby zachodziło tylko jedno z nich, np. p_x , to odpowiadającym wydłużeniem względem w kierunku X byłoby $\frac{p_x}{E}$, przyczem E oznacza moduł sprężystości przy rozciąganiu. Ale na wydłużenie w kierunku X ma także wpływ ciągnięcie w kierunku Y , a mianowicie zmniejsza je o $\sigma \frac{p_y}{E}$, przyczem σ jest liczbą Poisson'a. Wypadkowe wydłużenie właściwe w kierunku osi X określa przeto wzór:



Rys. 33

$$e_x = \frac{p_x}{E} - \sigma \frac{p_y}{E} \dots \dots \dots (13)$$

Analogicznie znajdujemy

$$e_y = \frac{p_y}{E} - \sigma \frac{p_x}{E} \dots \dots \dots (14)$$

jako wydłużenie względne w kierunku osi Y .

Wyraziwszy przy pomocy wzorów (13) i (14) naodwrot naprężenia przez odkształcenia otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{E}{1 - \sigma^2} (e_x + \sigma e_y), \\ p_y &= \frac{E}{1 - \sigma^2} (e_y + \sigma e_x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

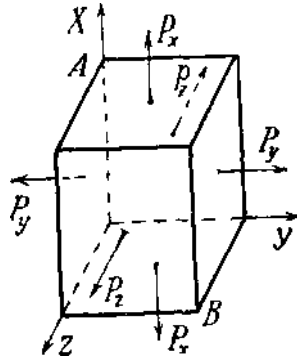
Ostatnie wzory pozwalają łatwo odpowiedzieć na następujące pytanie: Jak wielkie muszą być naprężenia p_y , któreby przeszkodziły prostopadłocianowi, rozciąganiem w kierunku X, skurczyć się w kierunku Y? Podstawiając w formułach (15) $e_y = 0$, znajdziemy:

$$p_x = \frac{E}{1 - \sigma^2} e_x, \quad p_y = \sigma \frac{E}{1 - \sigma^2} e_x, \quad \text{a zatem} \\ p_y = \sigma p_x.$$

§ 18. ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ W TRÓJWYMIAROWYM STANIE NAPIĘCIA

Jeżeli na ściany materialnego prostopadłocianu AB (rys. 34) działają równomiernie rozłożone naprężenia P_x, P_y, P_z w trzech kierunkach równoległych do osi X, Y i Z , natenczas mówimy o trójwymiarowym stanie napięcia. Odpowiadającymi naprężeniami w przekrojach prostopadłych do osi będą widocznie:

$$p_x = \frac{P_x}{F_x}, \quad p_y = \frac{P_y}{F_y}, \quad p_z = \frac{P_z}{F_z}.$$

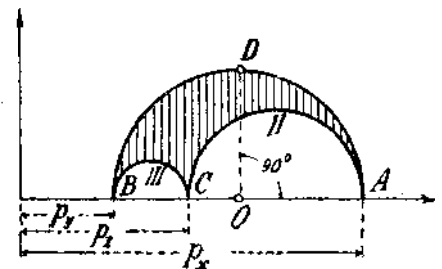


Rys. 34

Jeżeli weźmiemy pod uwagę przekroje równoległe do jednej z osi np. Z (a do innych dowolnie nachylone), to przynależne im naprężenia będą zależne tylko od sił prostopadłych do tejże osi, a więc od sił P_x i P_y . Siły P_z , jako równoległe do tych przekrojów, nie wywołają w nich żadnych naprężeń. W takim razie naprężenia normalne i styczne w tych przekrojach określają również formuły (10) i (11) w § 14. Zmianę tych naprężeń przy obrocie przekroju około osi Z przedstawia odpowiednie koło Mohr'a I (rys. 35) zakreślone na odcinku $AB = p_x - p_y$, jako na średnicy. Podobnym rozumowaniem znajdziemy, że naprężenia w przekrojach równoległych do osi X ,

względnie Y , przedstawiają się kołami III, względnie II, o średnicach $BC = p_z - p_y$ i $CA = p_x - p_z$. Tą drogą można łatwo zbadać naprężenia dla trzech układów płaszczyzn. Co się tyczy przekrojów nachylonych do wszystkich trzech osi, to można dowieść, że odpowiadające im naprężenia przedstawiają się współrzędnymi punktów leżących między trzema półkami w polu zakreślanym na rysunku. (Dowód można znaleźć np. w dziele A. Föppla: „Vorl. üb. techn. Mech.“ Bd. V). Wykres wykonano przy założeniu, że $p_x > p_z > p_y > 0$. W takim przypadku największe wogóle naprężenie normalne, odpowiadające najdłuższej odciętej, jest równe p_x . Największe zaś naprężenie styczne mierzy się największą rzędną i odpowiada punktowi D na półkolu I. Z konstrukcji tego półkola wynika, że płaszczyzna największego naprężenia stycznego jest równoległa do osi Z -ów i połowi kąt między osiami X a Y . Nadto

$$(p_t)_{\max} = OD = \frac{p_x - p_y}{2},$$



Rys. 35

czyli największe naprężenie ścinające w trójwymiarowym stanie napięcia jest równe połowie różnicy między największym i najmniejszym naprężeniem normalnym.

W szczególnym przypadku

$$p_x = p_y = p_z = p$$

zlewają się punkty A, B i C w jeden, np. O , a promienie wszystkich trzech kół stają się zerami. Punkt O określa wtedy w zupełności stan napięcia, a ponieważ leży na osi odciętych, więc naprę-

żenia styczne w każdym dowolnym przekroju są równe zero, a normalne są wszystkie równe odciętej punktu O , t. j. p . W tym przypadku mielibyśmy do czynienia z wszechstronnym równomiernym rozciąganiem. [Taki stan napięcia byłby niewątpliwie interesującym, gdyby się dał zrealizować. Natomiast bardzo łatwo wywołać wszechstronne równomierne ściskanie, zanurzwszy ciało jednolite w cieczy znajdującej się pod wysokim ciśnieniem].

§ 19. ODKSZTAŁCENIA PRZY TRÓJWYMIAROWYM STANIE NAPIĘCIA

Ażeby otrzymać wydłużenie względne w kierunku jednej z osi współrzędnych, np. osi X , należy wziąć pod uwagę nie tylko wydłużenie $\frac{p_x}{E}$, wywołane naprężeniem p_x , lecz także skrócenia $\sigma \frac{p_y}{E}$ i $\sigma \frac{p_z}{E}$, wywołane naprężeniami rozciągającymi w kierunku osi Y i Z . Całkowite wydłużenie w kierunku osi X wyrazi się zatem formułą:

$$e_x = \frac{p_x}{E} - \sigma \left(\frac{p_y}{E} + \frac{p_z}{E} \right)$$

Analogiczne wzory otrzymamy dla wydłużeń w kierunku Y i Z . Po prostym przekształceniu napiszemy wszystkie trzy formuły w postaci:

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E} [p_x - \sigma(p_y + p_z)] \\ e_y &= \frac{1}{E} [p_y - \sigma(p_x + p_z)] \\ e_z &= \frac{1}{E} [p_z - \sigma(p_x + p_y)] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

W przypadku wszechstronnego równomiernego rozciągania lub ściskania, t. j. gdy

$$p_x = p_y = p_z = \pm p, \quad \text{będzie}$$

$$e_x = e_y = e_z = e = \pm \frac{p}{E} (1 - 2\sigma)$$

Jeżeli v_0 oznacza pierwotną objętość (przed odkształceniem), a v objętość odkształconego prostopadłościanu, to

$$v = v_0 (1 + e)^3,$$

albo z pominięciem wyrazów zawierających e^2 i e^3 , ze względu na to, że e jest bardzo małe:

$$v = v_0 (1 + 3e).$$

Względna zmianą objętości będzie przeto

$$\frac{v - v_0}{v_0} = 3e = \pm \frac{3p}{E} (1 - 2\sigma).$$

Przy prostym rozciąganiu nazwaliśmy modułem sprężystości (modułem Young'a) stosunek naprężenia rozciągającego do wywołanego nim względnego wydłużenia. Analogicznie będziemy nazywać modułem sprężystości przy odkształceniu objętościowym, t. zn. przy wszechstronnym rozciąganiu lub ściskaniu, stosunek naprężenia p do odpowiadającego względnego rozszerzenia lub skurczenia objętości, czyli odkształcenia objętościowego właściwego. Oznaczywszy tę wielkość przez k , mamy tedy:

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}$$

[Z ostatnich wzorów można, podobnie jak w § (5) wywnioskować, że σ musi być mniejsze od 0,5, albowiem w razie przeciwnym wywoływałoby wszechstronne rozciąganie zmniejszenie objętości, zaś ściskanie jej zwiększenie, co wypada uważać a priori za wykluczone].

ROZDZIAŁ IV

ZASTOSOWANIA OTRZYMANYCH WYNIKÓW

§ 20. STOPIEŃ BEZPIECZEŃSTWA, CZYLI PEWNOŚĆ

Tak zwane obliczenie prętów, narażonych na rozciąganie lub ściskanie, polega na rozwiązaniu zadań dwojakiego rodzaju. W jednym przypadku trzeba znaleźć największe obciążenie pręta z danego materiału o danych rozmiarach, które ten pręt trwale wytrzymawać będzie. W drugim zaś jest obciążenie dane, a szukamy wymiarów pręta, odpowiadających warunkom jego wytrzymałości. Dla rozwiązania tych zadań należy najpierw odpowiedzieć na następujące pytanie: Jakie największe ciągnięcie lub ciśnienie można dopuścić w danym materiale? Otóż na podstawie badań doświadczalnych nad rozciąganiem i ścisaniem, znamy granicę proporcjonalności, punkt krytyczny i doraźną wytrzymałość danego materiału. Stosownie do tych wyników należy ustalić tę wartość naprężenia, którą dla danego materiału uznajemy za bezpieczną (dopuszczalną)¹⁾, t. j. zapewniającą trwałą użytek projektowanej konstrukcji. Widzieliśmy, że naprężenia przekraczające niewiele granicę proporcjonalności, powodują trwałe odkształcenia u materiałów takich, jak żelazo kowalne i stal; te odkształcenia wzrastają z czasem i mogą doprowadzić do znacznych zmian postaci elementu konstrukcyjnego. To jest oczywiście niedopuszczalne, wobec czego musimy wymiary elementu konstrukcyjnego obierać tak, aby naprężenia nie przekraczały granicy proporcjonalności. Wogóle nie przekracza naprężenie, uznane za bezpieczne, wielokrotnej części doraźnej wytrzymałości danego materiału. Jeżeli przez R' oznaczymy doraźną wytrzymałość danego materiału, a przez R odpowiadające naprężenie bezpieczne, to

$$R = \frac{R'}{n}$$

przyczem n oznacza t. zw. stopień bezpieczeństwa, czyli pewność. Obiór stosownej wartości dla n , albo, co na jedno wychodzi, obiór wielkości naprężenia bezpiecznego, przedstawia nader ważne zadanie, albowiem trwałość i koszt konstrukcji zależy nie tylko od dokładności obliczenia, lecz także od mniej lub więcej udatnego obioru naprężeń bezpiecznych. Obrawszy za wysokie wartości możemy w rezultacie otrzymać konstrukcję niedostatecznie trwałą; przy naprężeniach bezpiecznych zbyt małych będzie bezpieczeństwo zapewnione, ale zato konstrukcja ciężka, nieekonomiczna.

Przy różnorodności warunków, w których funkcjonują części składowe budowli i maszyn, tudzież przy wahaniu się wytrzymałości jednego i tego samego materiału, niepodobna raz na zawsze unormować naprężeń bezpiecznych. W każdym dziale techniki można napotkać swoiste normy, przeważnie ustalone praktyką. Tutaj zrobimy tylko parę ogólnych uwag, które trzeba mieć na względzie przy obiorze stopnia pewności.

W naszych rozważaniach uważaliśmy materiały za ciała jednolite i równokierunkowe, wskutek czego będą nasze wnioski tem dokładniejsze, im mniej zbacza materiał od przyjętych warunków. Dla żelaza kowalnego i stali będą nasze wywody bardziej dokładne, niż np. dla drzewa lub kamienia. Stopień bezpieczeństwa, który w znacznej mierze zależy od stopnia dokładności obliczeń, powinien być przeto mniejszym w przypadku żelaza kowalnego i stali, a większym dla mniej doskonałych materiałów budowlanych. W praktyce obiera się często w pierwszym przypadku „czterokrotną“ pewność, t. j. $n = 4$, w drugim zaś przyjmuje się $n = 8$ do 10.

Na obiór wielkości naprężenia bezpiecznego wpływa też w znacznym stopniu dokładność w określeniu sił zewnętrznych, działających na element, który obliczyć mamy. Niekiedy można te siły tylko w przybliżeniu ocenić, a niepewność oceny trzeba oczywiście pokryć powiększeniem stopnia bezpieczeństwa, nazywanym trafnie przez Anglików „spółczynnikiem niewiadomości“ (factor of ignorance).

¹⁾ [W znanym podręczniku: „Technik“ użyto przymiotnika „dopuszczalny“ wyłącznie na oznaczenie wielkości naprężenia, unormowanej przepisami władz. Uznając pewną pożyteczność tego rozróżnienia pojęć, nie będziemy jednak przestrzegać go ściśle, gdyż niema obawy nieporozumienia].

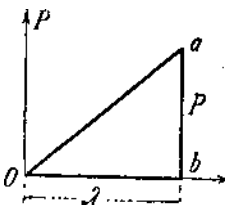
Jest rzeczą jasną, że tak pojmowany stopień bezpieczeństwa musiałaby określać liczba nieco większa od tej, którą go określano dotychczas, ale zarazem nie ulega wątpliwości, że nowe określenie pewności jest racjonalniejsze od dawnego, zakorzenionego silnie w umysłach inżynierów.

W odmiennych, niż budowie, warunkach znajdują się ruchome części składowe niektórych maszyn. Obciążeniem zmiennym są u nich siły bezwładności, proporcjonalne względem ciężaru własnego. Tutaj zatem wystarczy najczęściej dawne pojmowanie stopnia bezpieczeństwa, prowadzące do wartości naprężenia bezpiecznego, niezależnej od rozmiarów elementu.

Zwiększenie wartości naprężenia bezpiecznego, stosownie do nowego określenia pewności, ma dla wielkich konstrukcyj budowlanych ogromne znaczenie praktyczne, gdyż podwyższa granicę możliwych rozpiętości i zmniejsza koszt budowlanych.

§ 21. WPŁYW OBCIĄŻENIA DZIAŁAJĄCEGO NAGLE

Przy stopniowym wzrastaniu obciążenia przedstawia się zależność między wydłużeniami λ a siłą P w granicach proporcjonalności linią prostą Oa (rys. 36). Dla każdej wartości λ znajdziemy z rysunku odpowiadającą wartość P . Pole trójkąta Oab , jak okazano powyżej (ob § 4), przedstawia energię potencjalną, nagromadzoną w pręcie przy odkształceniu. Każdej wartości λ odpowiada zupełnie określona ilość energii V :



Rys. 36

$$V = \frac{P\lambda}{2} = \frac{\lambda^2}{2l} EF, \text{ po uwzględnieniu, że } \frac{P}{F} = \frac{\lambda}{l} E.$$

Jeżeli obciążenie wzrasta stopniowo, to zachodzi ciągle równowaga między siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi. Praca wykonana przez obciążenie przekształca się całkowicie w energię odkształcenia. Przy nagłym działaniu obciążenia zamienia się część pracy siły ciężkości w energię kinetyczną spadającego ciężaru, który nabywa pewnej prędkości i dzięki temu przekracza położenie równowagi. Pręt otrzymuje w pierwszej chwili wydłużenie większe, niż przy stopniowym wzrastaniu obciążenia, wskutek czego powstają drgania. Szczegółowo rozpatrzmy to zjawisko w części dynamicznej, tutaj poprzestaniemy na wyznaczeniu wartości największego wydłużenia, co da się wykonać na podstawie najelementarniejszych rozważań.

Największe wydłużenie pręta zajdzie wówczas, kiedy prędkość opadającego ciężaru, a więc i jego energia kinetyczna stają się zerem. W owej chwili zamieniła się praca siły ciężkości zupełnie w energię potencjalną odkształconego pręta. Jeżeli przez λ oznaczymy wartość największego wydłużenia, to praca obciążenia P będzie równa $P\lambda$. Wartość energii potencjalnej, odpowiadającej sprężystemu wydłużeniu o λ wyrażono powyżej. Porównanie obu wielkości daje

$$P\lambda = \frac{\lambda^2 EF}{2l},$$

z czego wynika $\lambda = \frac{2Pl}{EF}$, albo wydłużenie względne

$$e = 2 \frac{P}{E}, \text{ jeżeli } p = \frac{P}{F} \quad \dots \quad (19)$$

Widzimy przeto, że przy nagłym działaniu obciążenia P powstaje w pierwszej chwili wydłużenie, a zatem i naprężenie dwa razy większe od odpowiadających wielkości, otrzymanych przy stopniowym wzrastaniu obciążenia, czyli innymi słowy, od wydłużenia i naprężenia przy obciążeniu statycznym tejże samej wielkości. [W dalszym ciągu wytwarzają się wahania około położenia równowagi, odpowiadającego obciążeniu statycznemu, które rychło ustają, czyli „wygasają“, wskutek tarcia wewnętrznego i innych oporów mniejszego znaczenia.

Analogicznym do powyższego rozumowaniem łatwo znaleźć, że, jeżeli odwrócimy nagle kierunek danego obciążenia statycznego, to powstaje w pierwszej chwili odkształcenie i naprężenie trzy razy większe od odpowiednich wielkości statycznych. Zauważyć jednak trzeba, że te wyniki nie są zupełnie ścisłe, gdyż przy rozpatrywaniu przemian energii, pominęliśmy bezwładność samego pręta. Popelniony błąd będzie widocznie tem mniejszy, im mniejszą wartość ma stosunek ciężaru własnego pręta do obciążenia].

Mając np. obliczyć przekrój pręta obciążonego stałą siłą P_0 i obciążeniem P , działającym nagle, użyjemy równania:

$$F = \frac{P_0 + 2P}{R}$$

[Od obciążenia nagle działającego należy odróżnić obciążenia uderzające, których działanie rozpatrzmy później].

§ 22. ZNUŻENIE METALI

W różnorodnych konstrukcjach wszelkich gałęzi techniki mamy bardzo często do czynienia z obciążeniami zmiennymi. Siły wewnętrzne, wywołane niemi, w poszczególnych częściach składowych mogą przytem doznawać znacznych wahań swej wartości. Gdy np. przejeżdża pociąg kolejowy przez most, zwiększają się przeważnie siły wewnętrzne, wywołane już przedtem ciężarem własnym mostu, ale nierzadko zmniejszają się niektóre, a nawet zmieniają swój znak. Podczas ruchu maszyny parowej jest trzon łokowy i korbowy narażony naprzemian na rozciąganie i ściskanie. Napięcia lin i łańcuchów u maszyn do podnoszenia ciężarów zmieniają także swoją wielkość podczas pracy maszyn. Znacznym zmianom podlegają również siły wewnętrzne sprężyn różnego rodzaju, osi wozów drogowych i kolejowych, wałów motorów i t. p.

Już praktyka wykazała, że wahania wielkości sił wewnętrznych wywierają bardzo szkodliwy wpływ na trwałość materiału i że elementy, narażone na działanie wielokrotnie zmiennych obciążeń pękają niekiedy przy naprężeniach znacznie mniejszych od doraźnej wytrzymałości, a nawet mniejszych od granicy proporcjonalności danego materiału. To zjawisko, studjowane dotąd tylko na metalach, otrzymało nazwę znużenia metali. Zwykle próby rozrywania, opisane powyżej (§ 9), nie wystarczają do osądzenia, o ile materiał okaże się wytrzymałym przy napięciach zmiennych. Jeżeli bowiem pręt żelazny, narażony przez dłuższy czas na działanie często zmieniających się obciążeń, spróbujemy rozerwać w zwykły sposób, to nie dostrzeżemy żadnego uszczerbku pierwotnej wytrzymałości. Procentowe wydłużenie i poprzeczne skurczenie nie doznają również zmiany. Inny wszakże wynik otrzymujemy, doprowadzając pręt do rozerwania przez wielokrotne powtarzanie zmian obciążenia. Pęknięcie posiada wówczas taki sam wygląd, jak dla materiału zupełnie kruchego.

Zanim przeprowadzono doświadczalne badania nad znużeniem metali, uwzględniali inżynierowie szkodliwy wpływ zmiennych napięć, mnożąc obciążenie czynnikiem większym od jednostki. Pierwsze doświadczenia w tym kierunku wykonał W. Fairbairn, ale dopiero obszerne badania Wöhler'a¹⁾ rzuciły więcej światła na kwestję znużenia metali.

§ 23. DOŚWIADCZENIA WÖHLER'A

Najistotniejsze wyniki, do których doszedł Wöhler w ciągu dziesięcioletniej pracy doświadczalnej (1860 do 1870), są następujące:

1) Materiały, jak żelazo kowalne i stal, można doprowadzić do rozerwania naprężeniem mniejszem od doraźnej wytrzymałości, skoro tylko wielkość naprężenia zmienimy dostateczną ilość razy.

2) Liczba zmian naprężenia, potrzebna do rozerwania pręta, zależy nie tylko od wielkości największego naprężenia, lecz także od różnicy między krańcowymi wartościami naprężeń.

3) Im ta różnica mniejsza, tem większej liczby wahań w wartości naprężenia potrzeba do wywołania pęknięcia materiału.

4) Można znaleźć taką graniczną wartość różnicy między największem a najmniejszym naprężeniem, przy której materiał wytrzyma praktycznie dowolną liczbę zmian, [jeżeli jedna z granic, między którymi waha się naprężenie, jest daną].

5) Ta graniczna wartość różnicy naprężeń jest tem mniejsza, im wyższą wartość ma największe naprężenie.

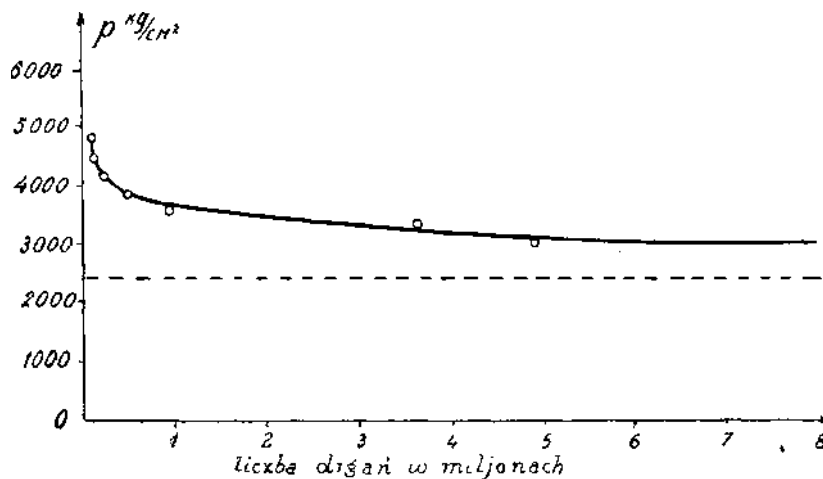
¹⁾ Wöhler: „Über die Festigkeitsversuche mit Eisen u. Stahl“. Zeitschr. f. Bauw. 1870. Obacz także W. L. Kirpiczew, Wiestnik Ob-stwa Technologow z 1914 r.

Ażeby pokazać, jak się zmienia liczba potrzebnych do rozerwania wahnień przy zmianie różnicy między krańcowymi wartościami naprężeń, przytoczymy tablicę dla przypadku, w którym naprężenie wahało się między ciągnięciem a ciśnieniem o równej bezwzględnej wartości¹⁾.

Najw. ciągnięcie kg/cm ²	Najw. ciśnienie kg/cm ²	Różnica naprężeń kg/cm ²	Liczba wahnień przed pęknięciem
+ 2400	- 2400	4800	56 430
2250	2250	4500	99 000
2100	2100	4200	183 145
1940	1940	3880	479 490
1810	1810	3620	909 840
1650	1650	3300	3 632 588
1510	1510	3020	4 917 992
1350	1350	2700	19 186 791
1200	1200	2400	(132 250 000) (bez pęknięcia)

Te doświadczenia wykonano na prętach z żelaza spawalnego firmy amerykańskiej Phoenix C²⁾. Doraźna wytrzymałość tego żelaza przy zwykłym rozrywaniu okazała się równą 3600 kg/cm², rozciągliwość około 20%.

Dla lepszego przeglądu przedstawiono wyniki tych doświadczeń wykreślone na rys. (37) Jako odcięte mamy tutaj liczbę wahań naprężenia w milionach, jako rzędne zaś odpowiadające wartości różnicy naprężeń w kg/cm².



Rys. 37

Okazuje się, że punkty otrzymane z doświadczeń tworzą krzywą posiadającą asymptotę równoległą do osi odciętych, a odpowiadającą tej granicy różnicy naprężeń, której przekroczenie musi doprowadzić do rozerwania pręta po skończonej liczbie wahnień obciążenia. Ta granica równa się tutaj 2400 kg/cm², a odpowiadające krańcowe wartości naprężenia są: + 1200 kg/cm² i - 1200 kg/cm². Te wartości leżą poniżej zwykłej granicy proporcjonalności żelaza spawalnego, a doraźna wytrzymałość przewyższa je trzykrotnie.

Jeżeli naprężenie, nie zmieniając znaku, waha się między zerem a pewną wartością dodatnią, to dla doprowadzenia do pęknięcia potrzeba większych naprężeń. W tym przypadku dały doświadczenia z poprzednim materiałem wyniki następujące:

Najw. naprężenia (kg/cm ²)	Najmn. naprężenia (kg/cm ²)	Różnica naprężeń (kg/cm ²)	Liczba wahnień przed pęknięciem
+ 3600	0	3600	800
3300	0	3300	106 910
3000	0	3000	340 853
2700	0	2700	409 481
2400	0	2400	10 141 645
3300	1500	1800	2 373 424
3300	1800	1500	(4 000 000) (bez pęknięcia)

¹⁾ Te wyniki otrzymano z doświadczeń nad zginaniem okrągłych prętów; bezpośrednie doświadczenia z prętami rozciąganiem i ściskaniem przeprowadził O. Reynolds (ob. § 24).

²⁾ Liczby wzięto z książki Unwin'a „Testing of Materials of construction“.

Granica niższa naprężeń niebezpiecznych wypada tutaj 2400 kg/cm^2 , ma przeto wartość dwa razy większą, niż w poprzednim przypadku. Jeżeli minimum naprężenia obierzemy większe od zera, to ta granica będzie leżeć jeszcze wyżej, a odpowiadająca różnica między maximum a minimum naprężenia zmniejszy się.

W poniższej tablicy zestawiono te krańcowe wartości naprężeń, przy których pręt wytrzymywał dowolnie wielką liczbę wahań naprężenia.

Rodzaj obciążenia	Wyższa granica najw. naprężenia w kg/cm^2	Wyższa granica różnicy naprężeń w kg/cm^2
Od ciągnięcia do równego mu ciśnienia	$+ 1200 = \frac{1}{3} R'$	2400
Od ciągnięcia do zera	$+ 2400 = \frac{2}{3} R'$	2400
Doraźna wytrzymałość	$+ 3600 = R'$	0

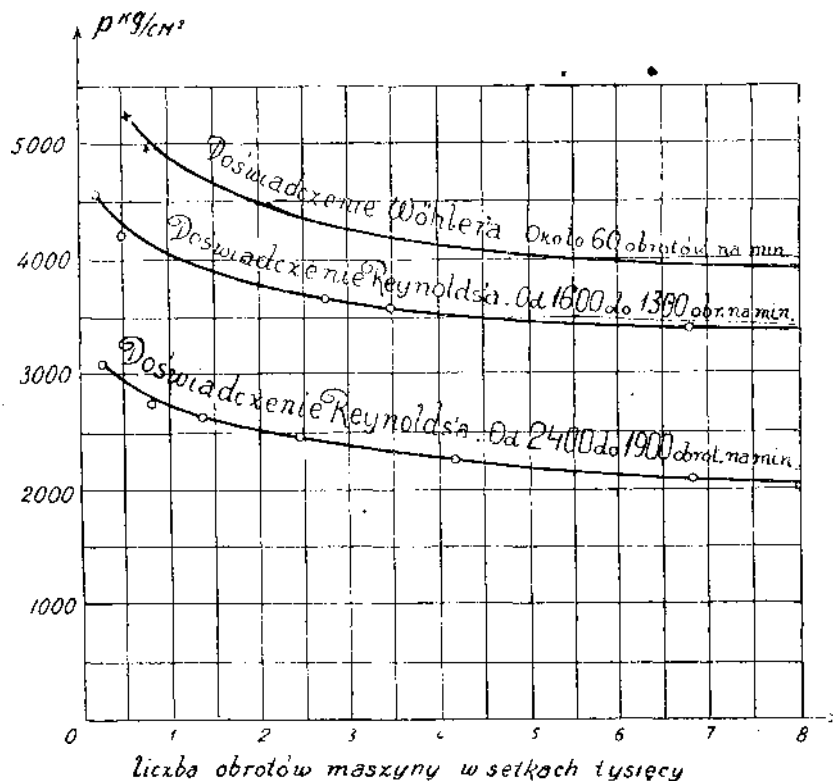
Dla twardszego materiału wypadają nieco odmienne stosunki. Jako przykład przytoczymy wyniki doświadczeń Wöhlera ze stałą zlewną Kruppa o doraźnej wytrzymałości 7700 kg/cm^2 i rozciągłości 12% .

Rodzaj obciążenia	Wyższa granica najw. naprężenia w kg/cm^2	Wyższa granica różnicy naprężeń w kg/cm^2
Od ciągnięcia do równego mu ciśnienia	$2250 = 0,29 R'$	4500
Od ciągnięcia do zera	$3750 = 0,49 R'$	3750
Doraźna wytrzymałość	7700	0

W r. 1874 powtórzył Spangenberg doświadczenia Wöhlera i otrzymał mniej więcej te same wyniki. Takimi samymi maszynami i sposobami badania posługiwali się B. Baker i Bauschinger. Początkowe doświadczenia Bauschingera potwierdziły rezultaty Wöhlera, ale dalsze badania ogłoszone przez A. Föppla, dały w przypadku wahań się naprężeń między ciągnięciem a równym mu ciśnieniem, znacznie większe wartości granicy naprężeń od otrzymanych przez Wöhlera¹⁾.

§. 24. DOŚWIADCZENIA O. REYNOLDS'A i J. H. SMITH'A²⁾. [WPŁYW CZĘSTOŚCI WAHAŃ OBCIĄŻENIA NA GRANICĘ NAPRĘŻEŃ ROZRYWAJĄCYCH]

W tych doświadczeniach były pręty narażone naprzemian na ciągnięcie i ciśnienie siłami bezwładności ciężaru poruszającego się do góry i na dół. Stosunek między wielkościami ciągnięcia i ciśnienia zależny od prędkości ruchu maszyny



Rys. 38

¹⁾ Mitteil. aus d. mech. techn. Labor. in München. Heft XIII u. XXV.

²⁾ „On a Throw-Testing Machine for Reversals of Mean Stress“. Phil. Trans. Roy. Soc. 1902.

wahał się przytem od 1,12 do 1,18. Podczas gdy u Wöhlera była częstość zmian niewielka, 60 do 80 na minutę, to maszyna Reynolds'a dawała 1300 do 2400 zmian na minutę, przyczem się pokazało, że większa częstość obniża dalej wartość naprężenia rozrywającego. Widać to dobrze z wykreślonego porównania wyników badań Reynolds'a i Smith'a z badaniami Wöhlera (rys. 38), odnoszącymi się do żelaza zlewne o doraźnej wytrzymałości 4000 kg/cm^2 i rozciągliwości 29% ¹⁾.

Szczególnie szkodliwy wpływ ma powiększenie częstości wahań na materiały kruche. Dla porównania przytaczamy poniżej wyniki doświadczeń z żelazem zlewne o doraźnej wytrzymałości 3800 kg/cm^2 , punkcie krytycznym 2700 kg/cm^2 i rozciągliwości 29% , a stalą zlewne o doraźnej wytrzymałości 9100 kg/cm^2 , punkcie krytycznym 6200 kg/cm^2 i rozciągliwości $3,8\%$.

Żelazo zlewne

Różnica naprężeń (kg/cm^2) niezbędna dla rozerwania po 1 milionie wahań	Częstość wahań na minutę	Stosunek różnicy naprężeń do naprężenia w punkcie krytycznym
3800 (Wöhler)	60 do 80	—
3300	1337	1,22
3000	1516	1,12
2400	1744	0,89
1940	1917	0,72

Stal zlewna

Różnica naprężeń (kg/cm^2) niezbędna dla rozerwania po 1 milionie wahań	Częstość wahań na minutę	Stosunek różnicy naprężeń do naprężenia w punkcie krytycznym
4270 (Wöhler)	60 do 80	—
3150	1320	0,50
2880	1660	0,46
2630	1820	0,42
2060	1990	0,33

W przeciwstawieniu do doświadczeń Wöhlera przy małej częstości, okazuje się przy bardzo wielkiej częstości wahań wytrzymałość badanej stali nie większa od żelaza zlewne, jakkolwiek doraźna wytrzymałość przewyższa przeszło dwukrotnie taką wytrzymałość żelaza zlewne.

§ 25. DOŚWIADCZENIA STANTON'A I BAIRSTOW'A

W tych doświadczeniach badano zwykle gatunki żelaza kowalnego i stali, napotykanego w praktyce. Pręty do doświadczeń brano w ich naturalnym stanie i nie poddawano ich wyżarzeniu. Maszyna, służąca do badania, była zbudowana na tej samej zasadzie, co maszyna O. Reynolds'a i wykonywała normalnie 800 obrotów na minutę. Pokazało się, że przy takiej częstości zbliżają się wyniki doświadczeń bardziej do wyników Wöhlera niż Reynolds'a. Z doświadczeń Stanton'a i Bairstow'a wynika nawet, że zmiana częstości od 60 do 800 na minutę nie ma istotnego wpływu na graniczną wartość różnicy naprężeń. Dzięki specjalnym urządzeniom można było przy doświadczeniach zmieniać stosunek największego ciągnięcia do ciśnienia między granicami 1,40 a 0,72. Przy tych zmianach okazała się graniczna różnica naprężeń stałą. Stosunek granicznej różnicy naprężeń do granicy proporcjonalności podaje dla niektórych materiałów tablica następująca:

Materiał	Granica proporc.	Punkt krytyczny	Doraźna wytrzyma- łość	Rozciągli- wość w %	Stosunek granicznej różnicy naprężeń	
					do granicy proporc.	do doraźnej wytrzym. ²⁾
w kg/cm^2						
Bessem. stal Nr. 3 . .	4340	4560	7470	12,9	1,13	0,33
„ „ Nr. 2 . .	3930	4400	6860	17,0	1,21	0,35
„ „ Nr. 1 . .	3360	3730	4480	22,8	1,25	—
Żel. zlewne Nr. 2 . .	2250	2480	4440	24,6	1,80	0,46
„ „ Nr. 1 . .	1670	2100	3430	28,0	1,76	0,43
Żel. spawalne Nr. 2 . .	2100	2300	4020	23,8	1,44	0,37
„ „ Nr. 1 . .	2240	2580	3730	27,0	1,51	0,45

¹⁾ A. Morley: „Strength of materials“. 1908. Str. 75.

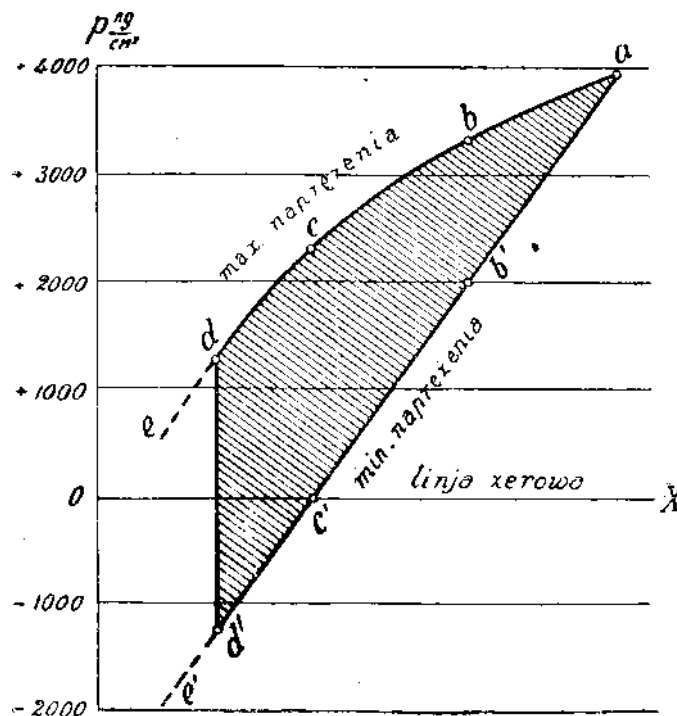
²⁾ Liczby tej ostatniej kolumny odpowiadają wahaniom naprężeń między ciągnięciem i równym mu ciśnieniem; pierwszej np., t. j. 0,33, odpowiada $\pm 2450 \text{ kg/cm}^2$.

W najnowszych czasach przeprowadził B. Hopkinson bardzo interesujące doświadczenia nad działaniem zmiennych napięć przy wielkiej częstotliwości wahań. Przy pomocy elektromagnesu udało mu się doprowadzić częstość wahań do 7000 na minutę, przy czym się pokazało, że graniczna różnica między ciągnięciem a równym mu ciśnieniem jest przy takiej częstości znacznie większa, aniżeli przy częstości 1000 do 2000 na minutę. B. Hopkinson przypisuje ten wynik okoliczności, że przy bardzo krótkim działaniu obciążenia jest granica sprężystości wyższą, niż w przypadku działania statycznego¹⁾.

§ 26. NAPRĘŻENIA BEZPIECZNE PRZY ZMIENNYCH NAPIĘCIACH

Jak widać z przytoczonych doświadczeń, poprzestawano przy badaniu zużycia metali głównie na dwu wartościach stosunku największego naprężenia do najmniejszego. W jednym przypadku zmieniało się naprężenie od zera do pewnej wartości dodatniej, w drugim zaś było naprężenie naprzemian ciągnięciem i ciśnieniem o tej samej bezwzględnej wartości. W praktyce mamy jednak do czynienia z najróżnorodniejszymi stosunkami między największym a najmniejszym naprężeniem, ażeby więc przy obliczeniu zużytkować dane doświadczalne, wypada interpolować hipotetycznie odpowiednie wartości największego naprężenia, które pręt znieśie przy dowolnie wielkiej liczbie wahań naprężenia. Najdogodniej wykonać to wykreślnie w sposób następujący²⁾:

Obieramy prostą $e'a$ (rys. 40), dowolnie nachyloną do osi odciętych, której rzędne uważamy za p_{\min} . Gdybyśmy od każdego punktu tej prostej odcieśli w kierunku osi rzędnych graniczne wartości różnicy naprężeń Δ , to otrzymalibyśmy krzywą, wystarczającą do obliczenia w każdym przypadku. Z doświadczeń znamy tylko parę punktów tej krzywej, ale dzięki samemu tylko prze-



Rys. 40

świadczeniu o regularności jej przebiegu możemy ją wykreślić z wystarczającą dla praktyki dokładnością. Wykres można zastąpić równaniem analitycznym, oczywiście możliwie najprostszym. Przytoczymy jedną postać tego równania rozpowszechnioną w praktyce, a przystosowaną do wyników Wöhlera dla żelaza kowalnego i miękkiej stali:

$$p_{\max} = \frac{2}{3} R' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p_{\min}}{p_{\max}} \right) \dots \dots \dots (20)$$

¹⁾ Proc. of. the Roy. Soc. A. Vol. 74; Vol. 86, r. 1912.

²⁾ A. Morley: „Strength of materials“, 1908, str. 79.

Stromeyer (Engineering 1914, str. 421) podaje metodę oznaczenia zdolności materiału do wytrzymywania przemennych obciążeń z doświadczeń krótkotrwałych.

R' oznacza tutaj, jak poprzednio, doraźną wytrzymałość materiału. Krzywa, określona tem równaniem, jest, jak łatwo zauważyć, parabolą. W przypadku $p_{\min} = p_{\max}$, t. j. gdy obciążenie się nie zmienia, wypada z formuły (20) istotnie $p_{\max} = R'$, jak być powinno. Jeżeli $p_{\min} = 0$, t. j. gdy naprężenie zmienia się od zera do pewnej wartości dodatniej, daje formuła $p_{\max} = \frac{2}{3} R'$. Nakoniec w przypadku, gdy naprężenie waha się między ciągnieniem, a równem mu ciśnieniem, czyli $p_{\max} = -p_{\min}$, znajdziemy z formuły $p_{\max} = \frac{1}{3} R'$.

Obie dwie ostatnie wartości szczególne odpowiadają przytoczonym powyżej wynikom doświadczeń Wöhlera. Dla trzech sposobów działania obciążenia mają się do siebie krańcowe wartości naprężeń jak 3:2:1. Taki sam stosunek należy oczywiście zachować między naprężeniami bezpiecznymi. Na podstawie tych rozważań zestawiono poniżej umieszczoną tablicę naprężeń bezpiecznych przyjmowanych przy obliczaniu elementów maszynowych¹⁾. Podane w niej normy dla naprężeń bezpiecznych przedstawiają pewne średnie wartości, od których można znacznie odstąpić w szczególnych przypadkach. Bardziej szczegółowe dane, odnoszące się do naprężeń dopuszczalnych, można znaleźć w odpowiednich działach konstrukcji maszyn²⁾.

Materiał	Naprężenia dopuszczalne w kg/cm^2		
	Obc. stałe	Obc. waha się od 0 do +	Obc. waha się od - do +
Żelazo spawalne	900	600	300
„ zlewne	900 do 1200	600 do 800	300 do 400
Stal zlewna	1200 do 1500	800 do 1000	400 do 500
Żelazo lane	300	200	100
Odlew stalowy	600 do 900	400 do 600	200 do 300
Stal sprężynowa	7500	5000	—

Naprężenia bezpieczne w konstrukcjach inżyniersko-budowlanych przyjmuje się zwykle znacznie wyższe. Tak np. dopuszczają nowe normy niemieckie dla konstrukcji żelaznych w więzaniach dachowych do $1600 kg/cm^2$, a w mostach do $1400 kg/cm^2$. Tak wysokie naprężenia tłumaczą się częściowo mniejszym stopniem zmienności obciążenia; nadto większa prostota konstrukcji inżynierskich pozwala stosować formuły obliczenia z większą dokładnością³⁾.

§ 27. PRZYCZYNY ZJAWISKA ZNUŻENIA METALI

Mimo bardzo liczne doświadczenia nie można uważać zjawiska znużenia metali za zupełnie zbadane. Najistotniejszą rolę gra tutaj zapewne ta okoliczność, że nawet najdoskonalsze materiały konstrukcyjne, jak żelazo kowalne i stal, nie są ciałami doskonale sprężystymi i po usunięciu obciążenia nie powracają zupełnie dokładnie do pierwotnego stanu. Te zboczenia od doskonałej sprężystości, niedostrzegalne przy doraźnym badaniu rozciągania, sumują się powoli i stają się widoczne po większej liczbie zmian obciążenia.

Ten fakt, że przy nieustannych zmianach nie tylko wielkości, lecz także i znaku naprężenia, zachodzi pęknięcie nawet przy naprężeniach niższych od granicy proporcjonalności, objaśniają

¹⁾ C. Bach: „Die Maschinen-Elemente“, 1908.

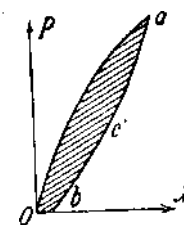
²⁾ W książce P. Stephan'a: „Die Festigkeitseigenschaften der Konstruktionsmaterialien des Maschinenbaues“, Berlin, r. 1911, można znaleźć wiele danych co do naprężeń dopuszczalnych w budowie maszyn.

³⁾ [Niższe normy naprężeń bezpiecznych dla konstrukcji maszynowych podyktowała inżynierom praktyka jeszcze z tego powodu, ponieważ wymogi sztywności konstrukcyjnej są z natury rzeczy wogóle większe dla maszyn, aniżeli dla konstrukcji budowlano-inżynierskich].

doraźnym podwyższeniem tej granicy podczas zwykłego rozciągania; takie rozciąganie bowiem nie jest niczem innym, jak tylko rodzajem obróbki na zimno, która, jak wiadomo, podwyższa wogóle granicę proporcjonalności. Jeżeli jednak rozciąganie i ściskanie następują naprzemian wielokrotnie, to, jak wykazały badania Bauschingera¹⁾, obniża się granica proporcjonalności, dążąc jednakże do pewnej granicznej wartości, którą nazwano naturalną granicą sprężystości. Ażeby zatem nieustanne wahania się napięcia między dodatnią i równą jej ujemną wartością nie doprowadziły do pęknięcia, powinno naprężenie nie przekraczać tej naturalnej granicy sprężystości²⁾.

W bardzo ścisłym związku ze znużeniem metali stoi zjawisko histerezy. Dokładne badania wykazały, że nawet przy niewielkich odkształceniach, nie dochodzących do granicy proporcjonalności, zachodzą pewne procesy o charakterze nieodwracalnym, tak, jakby każde działanie sił pozostawiało pewien ślad na własnościach materiału. W danej chwili okazują się te własności funkcjami wszystkich poprzednich stanów materiału. Do takich nieodwracalnych procesów należą zmiany własności magnetycznych i termo-elektrycznych³⁾, a także zjawiska cieplne. Przy odkształceniu zmienia się temperatura badanego ciała i zaczyna się wymiana ciepła między ciałem, a środowiskiem otaczającym. Taki proces bywa zwykle nieodwracalnym i jest połączony z rozpraszaniem energii cieplnej. Nieodwracalność warunkują nadto, oprócz wyliczonych przyczyn, niedoskonała sprężystość materiału i naprężenia początkowe, które w nim powstały pod wpływem pierwotnej obróbki.

Dla wyznaczenia energii, rozprószonej przy odkształceniu, posługujemy się najdogodniej diagramem (rys. 41). Przy odkształceniu wskutek siły wzrastającej od zera do pewnej wartości otrzymujemy linię Oca , zwykle bardzo mało różniącą się od prostej. Jeżeli następnie zmniejszamy stopniowo siłę aż do zera i otrzymamy linię $ac'b$, nie nakrywającą poprzedniej, to pole $Ocaac'b$ określa tę część energii, która przyjęła postać nieodwracalną, czyli rozprószyła się. Tak się objawia histereza sprężysta. Czem mniejsze pole diagramu histerezy, tembardziej zbliża się materiał do ciała idealnie sprężystego i tem mniejszego wpływu można oczekiwać od powtórnych obciążeń. Na tej zasadzie zrobiono próbę oceny zdolności materiału do znoszenia przemennych obciążeń przy pomocy diagramu odpowiadającego jednemu obciążeniu i odciążeniu próbnego pręta⁴⁾.



Rys. 41

Jeszcze jaśniejszy obraz rozpraszania energii przy odkształceniach otrzymamy, obserwując drgania wywołane siłami sprężystości. Skoro pobudzimy pręt do drgań, to po niedługim czasie zauważymy zmniejszanie się amplitudy; wahania stopniowo „wygasają“ (zamiarają). Jak wykazały badania doświadczalne, nie wystarczają do objaśnienia tego zjawiska opory zewnętrzne; ono wskazuje wyraźnie na powstawanie w materiale pręta obok sił sprężystości, mających potencjał, jeszcze innych sił wewnętrznych, rozpraszających energię, czyli, innymi słowy, wskazuje na istnienie t. zw. tarcia wewnętrznego. Studium wygasania drgań może rzucić pewne światło na zjawisko znużenia metali⁵⁾.

Lord Kelvin zauważył, że jeżeli zmusić pręt do drgań przez dłuższy przeciąg czasu, np. kilka dni, to zamieranie drgań staje się szybszem, jak gdyby tarcie wewnętrzne się wzmożyło. To samo zjawisko częściowej zamiany energii na pracę wewnętrzną będzie zachodzić przy wielokrotnie powtarzaniu obciążeniu. Im ta praca większa, im szybsze wygasanie drgań, tem bliżej do pokonania spójności materiału, tem wyraźniejsze oznaki znużenia.

Do wyjaśnienia zjawiska znużenia metali przyczyniło się znacznie zastosowanie badania mikroskopowego. Okazało się, że niespodziewane złamania elementów, narażonych na działanie przemennych obciążeń, dadzą się w wielu przypadkach objaśnić obecnością mikroskopijnych

¹⁾ Mitteil. aus d. mech.-techn. Laborat. in München. Heft XIII.

²⁾ T. Stanton and L. Bairstow: „On the Resistance of Iron and Steel to reversals of direct Stress“. Min. of Proc. Civ. eng. 1906.

³⁾ I. A. Ewing: „The strength, of materials“. str. 55.

⁴⁾ Frolowski: „Gisterezis“.

B. Hopkinson: „The elastic Hysteresis of steel“. Engineering, r. 1912, str. 827.

⁵⁾ H. Le Chatelier: „Sur l'essai des métaux par amortissement des mouvements vibratoires“. Revue de Métallurgie, r. 1909.

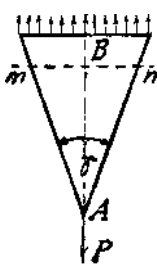
M. A. Guiller: „Intervention de l'amortissement dans l'essais de fer“. Tamże, r. 1909.

szczelin w materiale ¹⁾. Takie szczeliny powodują znaczne nierównomierności w rozkładzie naprężeń [w otoczeniu szczelin powstają, jak zobaczymy poniżej, naprężenia o wiele większe od tych, jakiby powstały bez szczelin], a rozwijając się stopniowo, doprowadzają ostatecznie pręt do pęknięcia.

Proces stopniowego zniweczenia spójności u kryształków żelaza pod działaniem przemiennych napięć badał szczegółowo prof. I. A. Ewing ²⁾. Do doświadczeń służyło szwedzkie żelazo o doraźnej wytrzymałości 3700 kg/cm^2 i rozciągliwości 27% . Przy pomocy mikroskopu śledzono zmiany, zachodzące w oddzielnych kryształach wskutek wahan naprężeń od ciągnięcia do równego mu ciśnienia. Już przy stosunkowo niewielkich naprężeniach $\pm 1100 \text{ kg/cm}^2$ można było dostrzec, po dostatecznej liczbie wahań, że niektóre kryształy w najbardziej narażonych częściach pręta pokrywały się rysami. Badanie mikroskopowe wykazało, że te rysy są zewnętrznym objawem przesunięć zachodzących w płaszczyznach spójności poszczególnych kryształów. Przedłużając działanie przemiennych obciążeń na obserwowany element, można było widzieć, jak niektóre z tych przesunięć, przekształcały się stopniowo na szczelinki. Przy dalszych powtarzaniach wahań naprężenia zużywa się nieodwracalna część pracy odkształcenia przeważnie na zniszczenie spójności materiału około tworzącej się szczeliny. Wskazuje na to produkt zniszczenia — delikatny pyłek, pojawiający się na brzegach szczeliny. Ta okoliczność, że cała praca niszcząca koncentruje się w określonym przekroju, wyjaśnia, dlaczego nie zmieniają się plastyczne własności pozostałej masy pręta i dlaczego charakter złomu, uwarunkowany rozwojem początkowej szczeliny, jest taki sam, jak u materiałów kruchych.

§ 28. ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE PRĘTÓW O ZMIENNYM PRZEKROJU

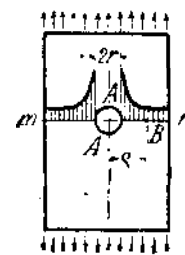
Wzory do obliczeń, oznaczone powyżej liczbami (17) i (18), stosuje się często do prętów o przekroju zmiennym, jakkolwiek wyprowadziliśmy je dla przypadku stałego przekroju. Otrzymane przytem wyniki mogą być zadowalające, o ile niema w pręcie nagłych zmian przekroju. W przeciwnym razie staje się niezbędnym uzupełniające badanie rozkładu naprężeń w miejscach, gdzie nagle zmiany przekroju zachodzą. Zagadnienie jest wielce złożone i nie dopuszcza elementarnego rozwiązania. Poprzestaniemy przeto na przytoczeniu ostatecznych wyników dla kilku ważniejszych prostych przypadków. Te wyniki pozwolą nam wysnuć szereg ogólnych wniosków, mających ważne znaczenie praktyczne.



Rys. 42

Jako pierwszy przykład rozważymy rozciąganie pręta AB (rys. 42), o szerokości linjowo zmiennej, a grubości stałej. W dowolnym przekroju poprzecznym mn będzie rozkład ciągnięć wcale nierównomiernym, a stopień tej nierównomierności zależy od wielkości kąta γ . Pewnego wyobrażenia o prawie rozkładu naprężeń można nabrać przy obserwacji odkształceń. W tym celu należy sporządzić model pręta z miękkiego kauczuku i opatrzyć go na ścianach bocznych układem linii równoległych do mn . Przy rozciąganiu siłą P zakrzywiają się te linie, a odległość między nimi

zwiększa się niejednakowo w różnych punktach. Największe odkształcenie, odpowiadające największym ciągnięciom, powstaną w osi pręta, najmniejsze na brzegach. Dokładne badania wykazały, że różnica między największym, a średnim naprężeniem przy wartości $\gamma = 10^\circ$, nie przekracza $1,3\%$. W tym przypadku można zatem z dostateczną dokładnością posługiwać się wzorami, wyprowadzonymi dla prętów przyrównanych. Przy $\gamma = 30^\circ$ osiąga różnica między największym naprężeniem a jego średnią wartością już 13% . Dalsze zwiększenie kąta γ pociąga za sobą oczywiście jeszcze większą nierównomierność w rozkładzie naprężeń.



Rys. 43

O wiele większe znaczenie praktyczne posiada drugi przykład, a mianowicie rozciąganie wstęgi, osłabionej okrągłym otworem w środku (rys. 43). W płaszczyźnie przekroju poprzecznego mn , przechodzącego przez środek otworu rozłożą się naprężenia najbardziej nierównomiernie.

¹⁾ T. Andrews: „Microscopic internal flaws inducing fracture in Steel“. Engineering, r. 1896, str. 35.

²⁾ „On the fracture of metals under repeated alternations of stress. Phil. Trans. of Roy. Soc., r. 1903.

Ob. także: W. L. Kirpiczew: „Ob ustalości metallow w zwiazu s ich kristalliczeskim strojeniem“. Wiest. Obszcz. Technologow r. 1914.

M. A. Woropajew: „Ob ustalości czuguna“. Izv. Kiew. Pol. Inst. 1914.

Stromeyer: Engineering 1914, str. 421.

Ten rozkład można znaleźć drogą analityczną, jeżeli średnica otworu $2r$ jest mała w porównaniu do szerokości wstęgi. Wtedy określa naprężenie p' w dowolnym punkcie B rozpatrywanego przekroju, wzór¹⁾:

$$p' = \frac{p}{2} \left(2 + \frac{r^2}{\rho^2} + 3 \frac{r^4}{\rho^4} \right),$$

w którym ρ oznacza odległość punktu B od środka otworu, a p średnią wartość naprężenia.

Na rysunku przedstawiono prawo rozkładu naprężeń zakreskowanym diagramem. Na brzegu otworu, gdzie $\rho = r$, znajdujemy:

$$p' = 3p,$$

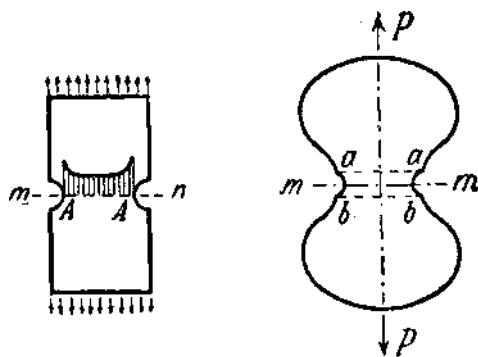
czyli największe naprężenie ma potrójną wartość tego, które obliczamy zwykłą formułą, wyprowadzoną dla prętów pryzmatycznych. Jeżeli otwór okrągły zastąpimy eliptycznym o osi dłuższej, skierowanej prostopadłe do rozciągającej siły, to przewyżka naprężenia na brzegach otworu będzie jeszcze większą. Stopień nierównomierności w rozkładzie naprężeń wzrasta wraz ze stosunkiem osi wielkiej do osi małej elipsy²⁾. Z tego widać, że wąska szczelina, prostopadła do kierunku rozciągającej siły, wywołuje olbrzymie lokalne naprężenia w materiale; skoro zaś szczelina ma kierunek do siły równoległy, to nie ma prawie wpływu na rozkład naprężeń.

[Podczas gdy pierwsza szczelina pręt rozciągany bardzo osłabia, to druga nie ma na jego wytrzymałość żadnego wpływu. Nie trudno zrozumieć, że całkiem przeciwnie będzie się rzecz miała w przypadku ściskania pręta. Naprężenia na końcach poprzecznej szczeliny będą wprawdzie w pierwszej chwili działania obciążenia bardzo wielkie w stosunku do średniej wartości, jakkolwiek jeszcze małe w porównaniu do wartości niebezpiecznej, atoli w miarę powiększania obciążenia szczelina się zwiera i dalszy wzrost naprężeń będzie już równomierny. W rezultacie zatem nie dostrzeżemy zmniejszenia doraźnej wytrzymałości, jeżeli tylko szczelina była dostatecznie wąska. Natomiast szczeliny podłużne w większej ilości mogą bardzo osłabić pręt ściskany, gdyż takie szczeliny mają w przypadku ściskania tendencję do otwierania się. To objaśnia prawie zupełnie małą wytrzymałość, jaką okazuje drewno, zwłaszcza z drzew szpilkowych, przy ściskaniu siłą równoległą do włókien, w porównaniu do wytrzymałości przy rozciąganiu w tymże kierunku].

Przyjmijmy teraz, że osłabienie wstęgi uskuteczniło się zapomocą półkolistych wycięć na brzegach (rys. 44). Przybliżony rozkład naprężeń w przekroju najbardziej zwężonym mn przedstawia zakreskowany diagram. Jeżeli promień wycięć jest mały w porównaniu do szerokości wstęgi, to naprężenia w punktach AA są dwa razy większe od średniej wartości naprężenia³⁾. Nadając wycięciom postać wydłużoną, w kierunku prostopadłym do siły działającej, otrzymamy naprężenia jeszcze większe.

„Osire“ zmiany przekroju poprzecznego napotykamy w praktyce bardzo często. Do badania wytrzymałości zaprawy cementowej używa się np. próbek w postaci ósemki (rys. 45), które rozciągane w kierunku długości siłą P , pękają oczywiście w przekroju osłabionym mn . Iloraz z siły rozrywającej przez pole osłabionego przekroju uważa się za wartość doraźnej wytrzymałości zaprawy cementowej. Ta wartość będzie jednak niewątpliwie mniejszą od rzeczywistej wytrzymałości, którąbyśmy znaleźli rozrywając pręt pryzmatyczny z tego samego materiału, albowiem wskutek ostrej zmiany przekroju poprzecznego, nie będzie rozkład naprężeń w przekroju mn równomiernym, a pęknięcie rozpocznie się w najsilniej naprężonych miejscach, na brzegach zwężonego przekroju.

Ażeby ocenić stopień nierównomierności w rozkładzie naprężeń, robił A. Föppl doświadczenia z modelem gumowym⁴⁾. Proste równoległe aa i bb , wykreślone na płaskich ścianach modelu, zamieniały się przy rozciąganiu na krzywe, zwrócone ku sobie wypukłością. Odkształcenia na brzegach okazały się przytem około cztery razy większe niż w środku.



Rys. 44

Rys. 45

¹⁾ Kirsch: Zeitschrift d. V. deutsch. Ing. r. 1898.

S. Timoszenko: „O wlianiy kruglych otwierstij na raspredjelenie napriazhenij w plastinkach“. Izv. Kiew. Polit. Inst. r. 1907.

²⁾ C. E. Inglis: Engineering, 1913, str. 415.

G. Kolosow: „Ploskaja zadacza teorij uprugosti“, 1909.

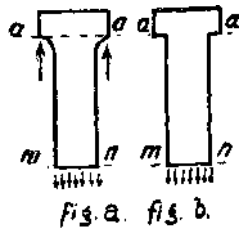
³⁾ A. Leon: „Ueber die Spannungsverteilung in der Umgebung einer halbkreisförmigen Kerbe“. Mitt. d. mech. tech. Labor. Wien, 1908.

⁴⁾ A. Föppl: „Festigkeitslehre“, 1905. Str. 9.

Te doświadczenia nie mogły oczywiście posłużyć do ilościowego znaczenia największych naprężeń, co powiodło się później Coker'owi przy zastosowaniu próbek ze szkła i badania rozkładu naprężeń przy pomocy spolaryzowanego światła¹⁾. Pokazało się, że największe naprężenia na brzegach zwężonego przekroju są około 1,75 razy większe od średniej wartości naprężenia.

[Stąd możnaby łatwo wysnuć wniosek, że badanie próbek pryzmatycznych z takiej samej zaprawy cementowej powinno dać znacznie większe (około 1,75 razy) wartości doraźnej wytrzymałości. Atoli doświadczenie nie potwierdziło na razie tego wniosku. Na podstawie swoich doświadczeń twierdzi nawet Bach²⁾, że raczej ma się rzecz przeciwnie, jednakże musimy to twierdzenie uważać co najmniej za przedwczesne. W swoich doświadczeniach używał Bach prętów pryzmatycznych o znacznie większych rozmiarach przekroju od przekroju zwykłych próbek ósemkowatych. Inne zaś doświadczenia wykazały niejednokrotnie, że ten sam cement objawia tem większą doraźną wytrzymałość, im mniejsze są rozmiary próbki. Jedni tłumaczą to zjawisko innemi warunkami procesu tężenia zaprawy cementowej w wielkiej masie, niż w małej; są jednak tacy, jak np. znakomity fizyk W. Voigt, którzy wogóle nie posiadają tej wiary zakorzenionej głęboko w umysłach inżynierów, że niebezpieczeństwo pęknięcia lub przekroczenia granicy sprężystości zależy w danym materiale jedynie od wielkości naprężeń i od pewnych stałych, właściwych materiałowi. Istotnie przeczą temu liczne fakty, na które bądźto nie zwracano, bądźto uwagi w kołach techników, bądź też błędnie je tłumaczono. Ci drudzy twierdzą przeto, że warunki wytrzymałości zależą wogóle nie tylko od wielkości naprężeń i od stałych charakterystycznych dla materiału, lecz także od rozmiarów ciała, a nawet od rozmieszczenia naprężeń. Powróćmy jeszcze do tej interesującej i ważnej kwestji w odpowiednim miejscu; tutaj nadmienimy tylko, że w naszym przypadku są prawdopodobnie obadwa poglądy potrzebne do objaśnienia zjawiska].

To samo zjawisko miejscowego powiększenia naprężeń spotykamy przy rozciąganiu zwykłego sworznia (rys. 46, fig. a). W przekroju mn , oddalonym od miejsca działania sił zewnętrznych, można przyjąć równomierny rozkład naprężeń, ale dla przekroju aa przy główce sworznia będzie takie założenie bardzo dalekiem od rzeczywistości. Największe naprężenia powstaną na konturze przekroju, najmniejsze w jego środku. Stopień nierównomierności w rozkładzie naprężeń będzie zależał od krzywizny powierzchni łączących główkę z trzonem sworznia. Im większa ta krzywizna, tem większą będzie nadwyżka naprężeń. Gdy niema zupełnie powierzchni przejściowej (fig. b), to teoretyczne rozwiązanie daje nieskończenie wielkie naprężenia na konturze³⁾.



Rys. 46

Jako ogólny wniosek możemy wygłosić regułę następującą: Zmiany wielkości przekroju poprzecznego wywołują zawsze nierównomierny rozkład naprężeń; stopień nierównomierności jest tem wyższy, im ostrzejsza zmiana przekroju.

§ 29. ROZRYWANIE PRĘTÓW O ZMIENNYM PRZEKROJU

Wnioski, odnoszące się do wpływu ostrych zmian przekroju na rozkład naprężeń, są prawdziwe tylko tak długo, dopóki materiał podlega prawu Hooke'a. Skoro tylko w jakimkolwiek miejscu naprężenie przekroczy granicę proporcjonalności, to prawo rozkładu naprężeń zmienia się. Z chwilą pojawienia się odkształceń trwałych zaczynają wogóle naprężenia rozkładać się bardziej równomiernie, a ostatecznie będzie wpływ ostrych zmian przekroju na wielkość obciążenia rozrywającego rozmaity, zależnie od zdolności materiału do odkształceń plastycznych. W materiałach o znacznej rozciągliwości, jak np. żelazo kowalne, miedź, miękka stal i t. p., wywołują ostre zmiany przekroju zwiększenie doraźnej wytrzymałości (mierzonej ilorazem siły rozrywającej przez pole najmniejszego przekroju). Łatwo to objaśnić, mając na względzie dwie okoliczności, wpływające różnie na wielkość doraźnej wytrzymałości:

- 1) Dzięki obecności ostrych zwężeń przekroju poprzecznego będzie rozkład naprężeń w miejscu osłabionem nierównomiernym.
- 2) Przy rozciąganiu pręta aż do przerwania będzie wytworzenie szyjki utrudnione wskutek obecności zgrubionych części pręta w sąsiedztwie miejsca pęknięcia.

¹⁾ Coker: Engineering, 1912.

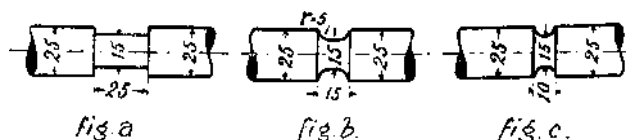
²⁾ C. Bach: „Elastizität u. Festigkeit“.

³⁾ Filon: Phil. Trans. of Roy. Soc. Vol. 198.

Pierwsza okoliczność powinna wywołać zmniejszenie obciążenia rozrywającego, ale jej wpływ staje się niewielkim w przypadku materiałów plastycznych. Po przekroczeniu granicy proporcjonalności będą naprężenia w najbardziej narażonych miejscach wzrastać powolniej, niż odkształcenia i podczas dalszego rozciągania wygładzają się coraz bardziej nierówności w rozkładzie naprężeń.

Druga okoliczność musi natomiast sprzyjać powiększeniu doraźnej wytrzymałości, a jej wpływ, jak pokazuje doświadczenie, przeważa przy rozrywaniu prętów z żelaza kowalnego i miedzi.

Dla przykładu przytoczymy wyniki doświadczeń Bacha nad żelaznymi prętami z wytoczonem wytłobieniem (rys. 47).



Rys. 47

Postać pręta	Doraźna wytrzymałość (kg/cm ²)	Skurczenie poprzeczne przekroju w %
Walcowa (bez złóbka)	4250	66
Fig. a	4420	63
Fig. b	5020	55
Fig. c	5890	50

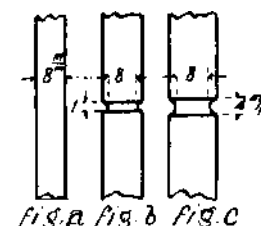
Inne wyniki otrzymamy dla materiałów kruchych. Tutaj przeważające znaczenie ma pierwsza przyczyna. Materiał nie znosi większych odkształceń trwałych i dlatego nierównomierność rozkładu naprężeń zachowuje się do chwili pęknięcia.

Doświadczenia nad prętami szklanymi z okrągłym otworem (rys. 43) wykazały np.¹⁾ doraźną wytrzymałość o 40% mniejszą niż u prętów pryzmatycznych.

Na podstawie wszelkich dotychczasowych doświadczeń można wyprowadzić wniosek, że ostre zmiany przekroju, wywołujące znaczne nadwyżki naprężeń, nie okazują szkodliwego wpływu na wytrzymałość, jeżeli obciążenie zachowuje wartość stałą, a materiał jest niezbyt kruchy. Zupełnie inaczej przedstawia się rzecz, gdy pręt podlega działaniu obciążeń zmiennych. W tym przypadku może, jak wiadomo, nastąpić pęknięcie przy naprężeniach mniejszych od zwykłej granicy proporcjonalności, a więc kiedy wszelkie wnioski, odnoszące się do nierównomierności rozkładu naprężeń, pozostają ważne. Doświadczenia przeprowadzone w tym kierunku przez A. Föppl'a²⁾ wykazały istotnie, że ostre zmiany przekroju poprzecznego, znacznie pomniejszają wytrzymałość prętów na obciążenia powtarzające się wielokrotnie.

Pokazało się np., że wytrzymałość prętów, przedstawionych na rys. (48) i rozerwanych przy jednej i tej samej, lecz niewielkiej liczbie zmian obciążenia, mają się do siebie kolejno jak 100 : 70 : 89. Gdyby dobrać wielkości naprężeń tak, aby pęknięcie prętów nastąpiło dopiero po kilku milionach wahań obciążenia, to różnice wytrzymałości byłyby jeszcze większe.

Jest rzeczą ciekawą, że taki sam stosunek między wytrzymałościami daje doraźne rozrywanie prętów o tych samych rozmiarach, ale sporządzonych ze szkła. Widzimy przeto, że w przypadku przemiennego obciążenia grają ostre zmiany przekroju taką samą rolę u materiałów plastycznych, co przy doraźnym obciążeniu u materiałów zupełnie kruchych, zmniejszając znacznie wytrzymałość prętów.



Rys. 48

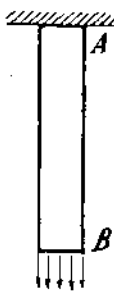
¹⁾ A. Leon: „Über die Zerstörungen in tunnelartig gelochten Gesteinen“. Mitteil. aus d. mech.-techn. Labor. Wien 1910.

— „Kerbgröße u. Kerbwirkung“, Wien 1902.

²⁾ Mitteil. aus d. mech.-techn. Laborat. München, Heft 31.

§ 30. WPŁYW CIĘŻARU WŁASNEGO. PRĘTY O RÓWNOMIERNEJ WYTRZYMAŁOŚCI PRZY ROZCIĄGANIU

Dotychczas braliśmy pod uwagę przy obliczeniu naprężeń tylko siły zewnętrzne, działające na końce pręta, ale niekiedy trzeba się liczyć z jego własnym ciężarem. Niechaj np. na pręt AB (rys. 49), utwierdzony pionowo w górnym końcu, działa siła P , rozłożona równomiernie) na końcu dolnym. W dolnym przekroju będzie oczywiście panować naprężenie



Rys. 49

$$p = \frac{P}{F},$$

w górnym zaś będą naprężenia większe, gdyż muszą równoważyć nie tylko siłę P , lecz także ciężar własny pręta. Oznaczywszy przez γ ciężar jednostki objętości, znajdziemy zatem naprężenie w górnym przekroju:

$$p_1 = \frac{P + Fl\gamma}{F} = p + l\gamma.$$

Przy obliczeniu ze względu na wytrzymałość należy wziąć pod uwagę górny przekrój, jako przekrój niebezpieczny. Tutaj naprężenie powinno nie przekraczać wartości dopuszczalnej R , a zatem:

$$\frac{P + Fl\gamma}{F} \leq R.$$

Stąd obliczymy niezbędną wielkość pola przekroju pręta:

$$F = \frac{P}{R - l\gamma} \quad \dots \quad (21)$$

Z otrzymanej formuły widać, że wpływ ciężaru własnego rośnie szybko wraz z długością pręta. Gdy było $l = \frac{R}{\gamma}$, to znaleźlibyśmy $F = \infty$, t. zn. nie można skonstruować pręta czyniącego zadość żadanemu warunkowi wytrzymałości, jeżeli jego długość równa się ilorazowi z naprężenia dopuszczalnego przez ciężar właściwy pręta.

Gdyby $l\gamma = R$, t. j. doraźnej wytrzymałości materiału, to pręt przerwie się pod samym własnym ciężarem. [Odpowiadającą długość $l = R : \gamma$ nazywamy długością zerwania danego materiału].

Ażeby ocenić, przy jakiej długości ma wpływ ciężaru własnego praktyczne znaczenie, obliczymy tę długość graniczną, przy której np. pręt żelazny może unieść bezpiecznie tylko swój własny ciężar. Kładąc $R = 1000 \text{ kg/cm}^2$, ciężar właściwy żelaza (kownego) $\gamma = 7,6 \text{ kg/dm}^3 = 0,0076 \text{ kg/cm}^3$, znajdujemy

$$l = \frac{R}{\gamma} = \frac{1000}{0,0076} \text{ cm} = 1316 \text{ m}.$$

[Przy długości kilku a nawet kilkunastu metrów, można zatem najczęściej pominąć przy obliczeniu ciężar własny pręta wiszącego pionowo].

Teoretycznie można znaleźć taką postać pręta o przekroju zmiennym, ażeby w każdym przekroju było naprężenie jednakowe i równe dopuszczalnemu; będzie to oczywiście zarazem pręt o najmniejszym ciężarze przy danych warunkach wytrzymałości. Dolny przekrój pręta F_0 znajdziemy z równania:

$$F_0 = \frac{P}{R}.$$

Nazwijmy pole przekroju odległego o x od końca przez F_x , a przez Q_x ciężar odpowiedniej dolnej części pręta, natenczas

$$F_x R = P + Q_x \quad \dots \quad (a)$$

W przekroju nieskończenie bliskim, t. j. odległym od końca o $x + dx$, będzie:

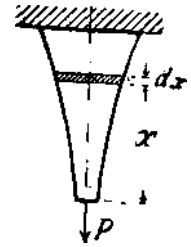
$$(F_x + dF_x) R = P + Q_x + F_x \gamma dx \quad \dots \quad (b)$$

Ostatni wyraz po prawej stronie przedstawia ciężar elementu zakreskowanego na rys. (51). Odjąwszy rów. (a) od równania (b) znajdziemy

$$R dF_x = F_x \gamma dx, \text{ albo } \frac{dF_x}{F_x} = \frac{\gamma}{R} dx.$$

Stąd po zcałkowaniu otrzymamy

$$\log F_x = \frac{\gamma}{R} x + C, \text{ albo } F_x = e^{\frac{\gamma}{R} x + C} = C_0 e^{\frac{\gamma}{R} x}.$$



Rys. 51

Stała dowolna $C_0 = e^C$ powinna czynić zadość warunkowi krańcowemu, t. j. dla $x = 0$ ma być $F_x = F_0$. A zatem $C_0 = F_0$ i ostatecznie równanie

$$F_x = F_0 e^{\frac{\gamma}{R} x} \quad \dots \quad (22)$$

określa analitycznie postać pręta o równomiernej wytrzymałości.

W praktyce stosuje się często dla łatwiejszego wykonania, zamiast ciągłej zmiany przekroju, zmianę stopniami (rys. 52). Przy wyznaczeniu następujących po sobie przekrojów poprzecznych łatwo dojść do formuły ogólnej. Pole F_1 przekroju najniższej części o długości l_1 znajdziemy przy pomocy formuły (21):

$$F_1 = \frac{P}{R - l_1 \gamma}.$$

Przechodząc do części drugiej od dołu możemy do wyznaczenia F_2 użyć tego samego wzoru, jeżeli zamiast siły obciążającej wstawimy siłę wewnętrzną przeniesioną przez część pierwszą, t. j. $F_1 R$. A zatem

$$F_2 = \frac{F_1 R}{R - l_2 \gamma} = \frac{P R}{(R - l_1 \gamma)(R - l_2 \gamma)}.$$

Analogicznie mamy dla n -tej części

$$F_n = \frac{F_{n-1} R}{R - l_n \gamma} = \frac{P R^{n-1}}{(R - l_1 \gamma)(R - l_2 \gamma) \dots (R - l_n \gamma)}$$

Jeżeli $l_1 = l_2 = \dots = \frac{L}{n}$, to

$$F_n = \frac{P}{R} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{L}{n} \cdot \frac{\gamma}{R}\right)^n} \quad \dots \quad (23)$$

Obliczenie przekrojów poprzecznych poszczególnych części pręta nie przedstawia teraz żadnych trudności. Przy zwiększaniu liczby części n w nieskończoność przechodzi na granicy wzór (23) w formułę (22).

§ 31. OBLICZENIE ROZPIĘTYCH CIĘGIEN¹⁾

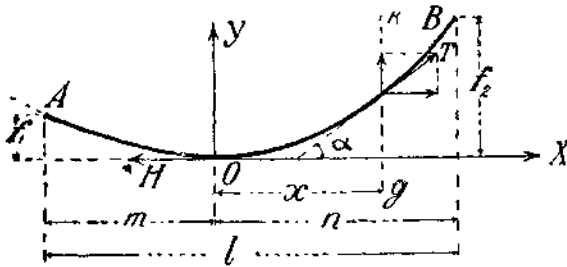
[Sznury, liny, giętkie druty, łańcuchy i t. p. elementy konstrukcyjne zdolne do przeniesienia w kierunku swej długości tylko sił rozciągających nazywamy wogóle cięgnami²⁾. Cięgna miewają najczęściej przekrój stały i są obciążone własnym ciężarem].

Rozpatrzmy cięgno w równowadze zawieszone końcami na dwu stałych punktach A i B (rys. 53). Chodzi o znalezienie postaci równowagi cięgna i wielkości napięcia w każdym punkcie. Obierzmy początek współrzędnych O w najniższym punkcie cięgna. Styczna pozioma w tym punkcie niech

¹⁾ Wiele wskazówek co do literatury przedmiotu i tablic dla obliczeń przewodów elektrycznych znajdzie czytelnik w książce R. Weill'a: „Beanspruchung u. Durchhang von Freileitungen“ 1910.

²⁾ Nazwa wprowadzona przez Komitet Redakcyjny „Technika“.

będzie osią X -ów; zaś normalna skierowana w górę osią Y -ów.. Napiszmy warunki równowagi dla części ciężna wydzielonej przekrojami OY i kg . Oznaczmy przez H napięcie w najniższym punkcie, a przez T napięcie w przekroju kg (oba napięcia uważamy za styczne do krzywej zwisania), znajdziemy z warunku rzutów na oś X -ów:



Rys. 53

$$H = T \cos \alpha \quad \dots \quad (a)$$

Przy ustawieniu warunku rzutów na oś Y -ów występuje także ciężar własny ciężna. Jeżeli się ograniczymy do przypadków najczęstszych w praktyce, w których łuk utworzony przez ciężno jest bardzo „płaski“, to ciężar wydzielonej części można w przybliżeniu przyjąć równy qx , przyczem q oznacza ciężar jednostki długości ciężna. (Długość łuku zastąpiono tutaj długością jego rzutu). A zatem:

$$qx = T \sin \alpha \quad \dots \quad (b)$$

Z podzielenia równań (a) i (b) wypada:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H},$$

a po zcałkowaniu

$$y = \frac{qx^2}{2H} + C.$$

Z warunku $y = 0$ dla $x = 0$ wynika, że stała $C = 0$. A zatem

$$y = \frac{qx^2}{2H}$$

jest przybliżeniem równaniem postaci równowagi ciężna.

Wstawimy za x kolejno wartości odpowiadające punktom zawieszenia, t. j. $x = -m$ i $x = n$, znajdziemy rzędne

$$f_1 = \frac{qm^2}{2H}, \quad f_2 = \frac{qn^2}{2H} \quad \dots \quad (c)$$

Gdy punkty zawieszenia leżą w równej wysokości, to $f_1 = f_2 = f$, $m = n = \frac{l}{2}$, a więc

$$f = \frac{ql^2}{8H}, \quad \text{albo} \quad H = \frac{ql^2}{8f} \quad \dots \quad (24)$$

Ta formuła pozwala obliczyć napięcie ciężna z danej strzałki zwisania f i rozpiętości l .

W ogólniejszym przypadku nierównej wysokości punktów zawieszenia A i B znajdziemy

$$f_2 - f_1 = h = \frac{q}{2H} (n^2 - m^2) = \frac{ql}{2H} (n - m)$$

uwzględniając, że $m + n = l$. Stąd

$$n = \frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql}, \quad m = \frac{l}{2} - \frac{Hh}{ql}.$$

Podstawiając otrzymane wartości dla m i n w formuły (c), będziemy mogli obliczyć napięcie H przy danej wartości h .

[Do obliczenia H można jeszcze użyć następującego rachunku: Z równań (c) znajdziemy z łatwością

$$m = \sqrt{f_1} \sqrt{\frac{2H}{q}}, \quad n = \sqrt{f_2} \sqrt{\frac{2H}{q}}, \quad \text{a zatem}$$

$$m + n = l = (\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}) \sqrt{\frac{2H}{q}}, \quad \text{czyli}$$

$$H = \frac{q}{2} \left(\frac{l}{\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}} \right)^2 \quad \dots \quad (24a)$$

Tym wzorem będziemy obliczać napięcie, jeżeli są dane wielkości f_1 , f_2 i l , np. z pomiaru na wykonanej konstrukcji].

[Czasami może zająć potrzeba obliczenia wartości H , jeżeli dane są tylko punkty zawieszenia, a więc h i l , a nadto rzeczywista długość cięgna s uważanego w pierwszym przybliżeniu za nierozciągliwe. W tym celu musimy najpierw wyrazić długość łuku krzywej przez współrzędne jej punktów końcowych. Długość łuku OB :

$$s_1 = \int_0^n \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^n \left[1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx,$$

Przy założeniu zrobionem poprzednio, że łuk jest bardzo płaski, a więc $\frac{dy}{dx}$ bardzo małe, możemy rozwinąć wyrażenie pod znakiem całkowania w szereg i opuściwszy wyrazy małe tych wyższych rzędów napisać

$$s_1 = \int_0^n \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{qx}{H}\right)^2\right] dx,$$

albo po wykonaniu całkowania

$$s_1 = n \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{qn}{H}\right)^2\right].$$

Podobnie będzie:

$$s_2 = m \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{qm}{H}\right)^2\right].$$

Zważywszy, że $m + n = l$ znajdziemy po dodaniu obu powyższych równań i łatwym przekształceniu:

$$s_1 + s_2 = s = l + \frac{1}{6} \frac{q^3}{H^3} (l^3 - 3lmn),$$

z czego wypływa:

$$mn = \frac{l^3}{3} - 2 \frac{s-l}{l} \frac{H^3}{q^3}.$$

A zatem wielkości m i n są pierwiastkami kwadratowego równania

$$z^2 - lz = 2 \frac{s-l}{l} \frac{H^3}{q^3} - \frac{l^3}{3}.$$

Uwzględniając, że założenie $f_2 > f_1$ pociąga za sobą nierówność $n > m$, znajdziemy stąd

$$m = \frac{l}{2} - \sqrt{2 \frac{s-l}{l} \frac{H^3}{q^3} - \frac{1}{12} l^3},$$

$$n = \frac{l}{2} + \sqrt{2 \frac{s-l}{l} \frac{H^3}{q^3} - \frac{1}{12} l^3},$$

a po wstawieniu tych wartości w równanie uzyskane przez odjęcie od siebie równań (c)

$$H = \frac{ql}{h} \sqrt{2 \frac{s-l}{l} \frac{H^3}{q^3} - \frac{1}{12} l^3}$$

Rozwiązawszy to również względem H otrzymamy na koniec formułę

$$H = \frac{ql}{\sqrt{12 \left[2 \left(\frac{s}{l} - 1\right) - \left(\frac{h}{l}\right)^3\right]}} \quad \dots \quad (24b)$$

pozwalającą obliczyć napięcie cięgna o danym ciężarze jednostkowym q , długości s , rozpiętości l i różnicy wysokości punktów zawieszenia h , pod warunkiem, że łuk utworzony przez cięgno jest dostatecznie płaski, aby przedsięwzięte uproszczenia dały wystarczającą dokładność.

W rzeczywistości zmienia się skutek napięcia H długość cięgna s w przybliżeniu na

$$s' = s \left[1 + \frac{H}{EF}\right] \quad \dots \quad (24c)$$

jeżeli pominiemy niewielką zmienność napięcia wzdłuż cięgna. Po wstawieniu tej wartości we wzór (24b) i uporządkowaniu względem niewiadomej H , otrzymalibyśmy równanie stopnia trzeciego niedogodne do rozwiązania. Zwykle dojdziemy prędzej do celu drogą kolejnych przybliżeń, to znaczy, obliczymy najpierw H z formuły (24b), potem odpowiadające s' z (24c), a podstawivszy s' na miejscu s w formule (24b) obliczymy nową wartość napięcia, dajmy na to, H' , przy pomocy której możemy znaleźć dokładniejszą wartość s'' długości łuku i t. d. Niekiedy będzie H' już dostatecznie przybliżoną wartością napięcia, co nietrudno poznać po małej wartości różnicy $H - H'$.

§ 32. WPŁYW TEMPERATURY

Długość cięgna zmienia się także wskutek zmiany temperatury i jakkolwiek ta zmiana jest nieznaczna, to jednak może mieć ogromny wpływ na wielkość napięcia, względnie na zwisanie, jeżeli łuk utworzony przez cięgno jest bardzo płaski. Oznaczmy przez f_0 strzałkę cięgna przy temperaturze t_0 i szukajmy napięcia i strzałki przy temperaturze t . W tym celu wyprowadzimy najpierw wzór wyrażający długość cięgna s przez jego rozpiętość l i strzałkę f , przy założeniu, że

punkty zawieszenia leżą w równej wysokości. W poprzednim paragrafie otrzymaliśmy w przypadku bardzo płaskiego łuku zwisania $y = \frac{qx^2}{2H}$, albo na podstawie formuły (24): $y = -\frac{4fx^2}{l^2}$. Długość łuku s obliczymy według wzoru:

$$s = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left[1 + \left(\frac{8fx}{l^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx,$$

albo, rozwijając funkcję pod znakiem całkowania w szereg i pomijając wyrazy małe wyższych rzędów, znajdziemy:

$$s = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{8fx}{l^2}\right)^2\right] dx = 2 \left(\frac{l}{2} + \frac{4}{3} \frac{f^2}{l}\right) = l \left(1 + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2}\right) \quad (25)$$

Otrzymałą formułę będziemy w dalszym ciągu stosować przy badaniu zgięcia belek; w zagadnieniu zajmującym nas obecnie, mamy według niej:

$$s_0 = l \left(1 + \frac{8}{3} \frac{f_0^2}{l^2}\right).$$

Podwyższeniu temperatury od t_0 do t odpowiadać będzie zwiększenie długości ciężna o

$$l\alpha(t - t_0),$$

przyczem α oznacza współczynnik wydłużenia termicznego materiału ciężna. Ponieważ przedłużeniu towarzyszy zwiększenie strzałki zwisania, więc napięcie przewodu musi się zmniejszyć z wartości H_0 na pewną wartość H (przez H oznaczyliśmy wprawdzie napięcie w najniższym punkcie, ale przy małych strzałkach można z wielką dokładnością uważać napięcie wzdłuż ciężna za stałe). Długością ciężna przy nowej temperaturze t będzie tedy:

$$s = s_0 + l\alpha(t - t_0) + \frac{H - H_0}{EF} l.$$

Ostatni wyraz w tej formule przedstawia sprężyste skrócenie ciężna wywołane zmniejszeniem napięcia. Wstawiając zamiast s i s_0 , H i H_0 wyrażenia tych wielkości przez strzałki zwisania f i f_0 , znajdziemy:

$$l \left(1 + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2}\right) = l \left(1 + \frac{8}{3} \frac{f_0^2}{l^2}\right) + l\alpha(t - t_0) + \frac{q l^3}{8EF} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f_0}\right),$$

z czego dla wyznaczenia f otrzymamy równanie trzeciego stopnia:

$$f^3 - f \left[\frac{8}{3} \frac{f_0^2}{l^2} + \alpha(t - t_0) - \frac{q l^2}{8EF} \frac{1}{f_0} \right] - \frac{3}{8} \frac{q l^4}{EF} = 0 \quad (26)$$

Obliczywszy stąd f , znajdziemy nader łatwo H .

Niekiedy dogodniej otrzymać wielkość f nie w postaci funkcji pierwotnej strzałki f_0 , lecz jako funkcję pierwotnego napięcia H_0 . Wówczas przekształcimy równ. (26) przy pomocy (24) na następujące:

$$f^3 - f \left[\frac{1}{24} \cdot \frac{q^2 l^2}{H_0^2} + \alpha(t - t_0) - \frac{H_0}{EF} \right] - \frac{3}{8} \frac{q l^4}{EF} = 0 \quad (27)$$

To równanie można jeszcze nieco uprościć, wprowadzając zamiast H_0 pierwotne napięcie $p_0 = \frac{H_0}{F}$ i zamiast ciężaru jednostki długości ciężna q , ciężar jednostki objętości

$\gamma = \frac{q}{F}$. W ten sposób otrzymamy:

$$f^3 - f \left[\frac{1}{24} \frac{\gamma^2 l^2}{p_0^2} + \alpha(t - t_0) - \frac{p_0}{E} \right] - \frac{3}{8} \frac{\gamma l^4}{E} = 0 \quad (27')$$

Podobnie można rozwiązać zadanie obliczenia napięcia ciężna wskutek dodatkowego obciążenia, które np. zachodzi u przewodów elektrycznych wskutek powłoki lodowej, naporu wiatru i t. d.

Równania (27) i (27') mają postać

$$f^3 = af + b,$$

jeżeli a i b oznaczają dane wielkości. Pierwiastki tego równania znajduje się najprościej wykreslnie (rys. 54). W tym celu odmierzymy wartość f na osi odciętych i kreślmy krzywą OR o równaniu $y = f^3$. Punkt przecięcia R tej krzywej z prostą mn , określoną równaniem $y = af + b$, wyznaczy szukaną wartość ON strzałki f .

[§ 32a. DOKŁADNIEJSZA TEORJA ROZPIĘTYCH CIĘGIEN]

[Jeżeli ciężno zwisa znacznie w stosunku do rozpiętości, to przybliżone obliczenie paragrafu (31) może nie być wystarczające. Aby znaleźć dokładną postać równowagi ciężna, musimy przybliżony warunek równowagi, określony równaniem (b) (§ 31), zastąpić ściślym

$$qs = T \sin \alpha,$$

z którego przez różniczkowanie otrzymamy:

$$q ds = d(T \sin \alpha).$$

Ponieważ $T = \frac{H}{\cos \alpha}$ (rów. (a) w § 31), więc zamiast powyższego równania możemy napisać

$$q ds = d(H \operatorname{tg} \alpha),$$

a podstawivszy za ds i $\operatorname{tg} \alpha$ ich analityczne wartości, znajdziemy stąd:

$$q \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = H \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Ogólną całką tego równania różniczkowego jest

$$y = \frac{1}{2} \frac{H}{q} \left[e^{\frac{q}{H}(x+C)} + e^{-\frac{q}{H}(x+C)} \right] + C',$$

o czym się łatwo przekonać przez dwukrotne różniczkowanie i rugowanie stałych dowolnych C i C' . Przy naszym obiorze układu spólrzędnych (rys. 53) wypływa z warunku $\frac{dy}{dx} = 0$ dla $x=0$, że $C=0$; zaś z warunku $y=0$ dla $x=0$ wynika

$C' = -\frac{H}{q}$. A zatem równanie

$$y = \frac{1}{2} \frac{H}{q} \left(e^{\frac{qx}{H}} + e^{-\frac{qx}{H}} \right) - \frac{H}{q} \quad \dots \quad (a)$$

określa dokładnie postać równowagi ciężna (krzywa łańcuszkowa). Jeżeli początek spólrzędnych obniżymy o długość $\frac{H}{q}$, zwaną parametrem łańcuszkowej, to równanie uprości się jeszcze i przybierze formę najpowszechniej używaną:

$$y = \frac{1}{2} \frac{H}{q} \left(e^{\frac{qx}{H}} + e^{-\frac{qx}{H}} \right) \quad \dots \quad (a')$$

Dla długości łuku łańcuszkowej pomiędzy początkiem spólrzędnych a dowolnym punktem (x, y) znajdziemy w znany sposób wzór:

$$s_x = \left(\frac{1}{2} \frac{H}{q} e^{\frac{qx}{H}} - e^{-\frac{qx}{H}} \right) \quad \dots \quad (b)$$

Celem porównania z przybliżoną formułą paragrafu (31) zastąpimy funkcje wykładnicze przez rozwinięcie

$$e^{\pm \frac{qx}{H}} = 1 \pm \frac{qx}{H} + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{qx}{H}\right)^2 \pm \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{qx}{H}\right)^3 + \dots,$$

a znajdziemy:

$$s_x = x \left(1 + \frac{1}{6} \frac{q^2 x^2}{H^2} + \frac{1}{120} \frac{q^4 x^4}{H^4} + \dots \right)$$

Zatrzymując dwa pierwsze wyrazy w szeregu po prawej stronie otrzymamy formułę przybliżoną, której dokładność będzie widocznie o tyle wystarczającą, o ile

$$\frac{qx}{H} < 1, \quad \text{czyli} \quad x < \frac{H}{q}.$$

Długość łuku łańcuszkowej da się z korzyścią wyrazić przez rzędną y punktu końcowego. Napiszmy w tym celu rów. (a) w postaci

$$y + \frac{H}{q} = \frac{1}{2} \frac{H}{q} \left(e^{\frac{qx}{H}} + e^{-\frac{qx}{H}} \right),$$

podnieśmy je obu stronnie do kwadratu i odejmijmy następnie kwadraty obu stron równania (b), natenczas znajdziemy

$$\left(y + \frac{H}{q} \right)^2 - s_x^2 = \left(\frac{H}{q} \right)^2,$$

z czego po uproszczeniu i rozwiązaniu względem s_x wynika:

$$s_x = \sqrt{y \left(y + 2 \frac{H}{q} \right)} \quad \dots \quad (y)$$

Skoro obliczymy według tego wzoru długość obu części łańcuszkowej OA i OB (rys. 53) i dodamy je do siebie, to otrzymamy całkowitą długość ciężna

$$s = \sqrt{f_1 \left(f_1 + 2 \frac{H}{q} \right)} + \sqrt{f_2 \left(f_2 + 2 \frac{H}{q} \right)} \quad \dots \quad (z)$$

Rozwiązując to równanie względem $\frac{H}{q}$ znajdziemy:

$$\frac{H}{q} = \frac{1}{2} (f_1 + f_2) \frac{s^2 - h^2}{h^2} - \frac{s}{h} \sqrt{f_1 f_2 \frac{s^2 - h^2}{h^2}}, \quad \dots \quad (e)$$

przyczem, jak powyżej $h = f_2 - f_1$.

otrzymanej przez rozwiązanie równania (24b) względem s , a w razie potrzeby poprawić ją przy pomocy (κ) jakkolwiek metodą przybliżenia. Zważywszy, że rów. (κ) wyraża związek między trzema wielkościami $\frac{h}{c}$, $\frac{l}{c}$ i $\frac{s}{c}$, nie trudno zresztą ułożyć tablicę uproszczającą znakomicie znalezienie dokładnej wartości s .

W szczególnym przypadku równej wysokości punktów zawieszenia, t. j. gdy $h = 0$, $f_1 = f_2 = f$, przekształcają się wzory (ϵ), (η), (ι) i (κ) na następujące:

$$\frac{H}{q} = \frac{s^2}{8f} - \frac{f}{2}, \quad \dots \dots \dots (\epsilon')$$

$$f = \sqrt{\left(\frac{H}{q}\right)^2 + \frac{1}{4}s^2} - \frac{H}{q}, \quad \dots \dots \dots (\eta')$$

$$\frac{l}{c} = 2 \log \left[1 + \frac{f}{c} + \sqrt{\frac{f}{c} \left(\frac{f}{c} + 2\right)} \right], \quad \dots \dots \dots (\iota')$$

$$\frac{l}{c} = 2 \log \left[\frac{1}{2} \frac{s}{c} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{s}{c}\right)^2} \right], \quad \dots \dots \dots (\kappa')$$

przyczem $c = \frac{H}{q}$, jak poprzednio.

Ostatnia formuła (κ') jest odwróceniem następującej:

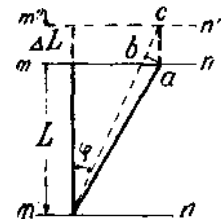
$$s = c \left(e^{\frac{1}{2} \frac{l}{c}} - e^{-\frac{1}{2} \frac{l}{c}} \right) \quad \dots \dots \dots (\beta')$$

Co się tyczy wpływu zmiany temperatury, to dokładne obliczenia nie dają wyników praktycznych wskutek zbytnej złożoności równań, nie dopuszczających ogólnego rozwiązania względem niewiadomych. Na szczęście nie są takie obliczenia i potrzebne, gdyż wpływ temperatury jest znaczny tylko przy małych strzałkach zwisania, a wtedy wzory przybliżone do poprzedniego paragrafu dają dokładność zupełnie zadowalającą].

§ 33. OBLICZENIE LIN DRUCIANYCH

Z obliczeniem lin drucianych mamy do czynienia przy projektowaniu kolei linowych, transmisji, wind górniczych i t. p. O wytrzymałości takich lin wyrokuje się zwykle na podstawie danych doświadczalnych, jakkolwiek teoria może dostarczyć pewnych ważnych wskazówek, odnoszących się do rozkładu naprężeń i to drogą bardzo prostych rozważań¹⁾. Tutaj ograniczymy się do najprostszego przypadku, w którym lina składa się z prostego drutu środkowego, t. zw. „duszy“ i nawiniętych na niej drutów zewnętrznych. Jeżeli przyjmiemy, że każdy płaski przekrój poprzeczny liny pozostaje płaskim podczas jej rozciągania, to, pomijając poprzeczne skurczenie przy rozciąganiu, znajdziemy łatwo zależność pomiędzy odpowiednimi wydłużeniami duszy i drutów zewnętrznych. Obierzmy dwa przekroje poprzeczne liny mn

i $m'n'$ (rys. 55) w odległości wzajemnej L . Z drutów zewnętrznych odcinają te przekroje długość $\frac{L}{\cos \varphi}$, jeżeli φ oznacza kąt nachylenia drutu do osi liny. Wskutek rozciągania zwiększy się odległość przekrojów o ΔL , co uwydatniliśmy na rysunku przesunięciem przekroju mn w położenie $m'n''$. Punkt a drutu zewnętrznego, przedstawionego linią Oa przesunie się równoległe do osi liny i zajmie położenie c , przyczem $ac = \Delta L$. Z bardzo małego trójkąta prostokątnego abc znajdziemy wydłużenie rozpatrywanej części drutu zewnętrznego



Rys. 55

$$bc = \Delta L \cos \varphi,$$

przyczem pomijamy bardzo małą zmianę kąta φ wywołaną wydłużeniem liny. Dzieląc tę wielkość przez pierwotną długość $\frac{L}{\cos \varphi}$ znajdziemy względne wydłużenie drutu zewnętrznego

$$e_1 = \Delta L \cos \varphi : \frac{L}{\cos \varphi} = \frac{\Delta L}{L} \cos^2 \varphi.$$

Jeżeli wszystkie druty są z tego samego materiału, to z prawa Hooke'a wynika jako wielkość napięcia w duszy

$$S_0 = EF \frac{\Delta L}{L},$$

a w nawiniętym drucie

$$S_1 = EF \cdot \frac{\Delta L}{L} \cdot \cos^2 \varphi.$$

¹⁾ H. Benndorf: „Beiträge zur Theorie der Drahtseile“. Zeitschr. d. öst. Ing. u. Arch. Ver. 1904.

[Ob. także książkę inż. K. Miłkowskiego p. t. „Prowolocznyj kanat w teorij i gornoj praktiki“. Charków 1898—1904].

[W polskiej literaturze posiadamy obszerne opracowanie teorii lin inż. H. Czopowskiego p. t. „Obliczenie lin drucianych“. Przegląd techn. z r. 1905].

Niech będzie n liczbą drutów zewnętrznych. Rzutując wszystkie napięcia w przekroju na kierunek siły rozciągającej P otrzymamy warunek równowagi w postaci:

$$S_0 + n S_1 \cos \varphi = EF \frac{\Delta L}{L} (1 + n \cos^3 \varphi) = P,$$

stąd znajdziemy

$$S_0 = \frac{P}{1 + n \cos^3 \varphi}, \quad S_1 = \frac{P \cos^3 \varphi}{1 + n \cos^3 \varphi}.$$

Odpowiadające naprężenia w drutach określamy zatem formuły

$$p_0 = \frac{P}{F} \frac{1}{1 + n \cos^3 \varphi}, \quad p_1 = \frac{P}{F} \frac{\cos^3 \varphi}{1 + n \cos^3 \varphi}.$$

Na podstawie tych wyników można wywnioskować, że lina druciana ma wytrzymałość mniejszą od sumy wytrzymałości drutów, z których się składa, gdyż o ile kąt φ jest różny od zera, to

$$\frac{P}{F(n+1)} < p_1 < p_0.$$

Wytrzymałość zależy od kąta φ i ubywa, gdy ten kąt wzrasta. [Wydłużenie sprężyste liny okazuje się natomiast większe od wydłużenia pręta o tym samym przekroju i z tego samego materiału, albowiem

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{P}{EF(1 + n \cos^3 \varphi)} > \frac{P}{EF(n+1)}].$$

Doświadczenia potwierdzają z dostateczną dokładnością te wyniki rozważań teoretycznych. Według badań doświadczalnych Tetmajera¹⁾ waha się zmniejszenie wytrzymałości zależnie od konstrukcji od 8,4% do 13,7%.

[Mimo to może lina okazać się znacznie wytrzymalszą od jednego pręta z tego samego materiału o przekroju równym sumie przekrojów wszystkich drutów liny. Doświadczenie bowiem poucza, że doraźna wytrzymałość drutu z danego materiału jest tem większa, im drut jest cieńszy. Spostrzeżono to już dawno²⁾ i ustanowiono formułę empiryczną dla doraźnej wytrzymałości drutów:

$$R' = R'_0 + \frac{c}{d} \quad \dots \quad (a)$$

w której d oznacza grubość drutu, a R'_0 i c stałe charakterystyczne dla materiału. Inżynierowie objaśniają to zjawisko znanym im dobrze wpływem obróbki na zimno, która w tym przypadku polega na przeciąganiu przez drutownicę. Aż do tłumaczy tylko mniej istotną część zjawiska, gdyż wyzarczenie nie zmienia formy zależności R' od d , wywołując tylko pewne obniżenie wartości stałych R'_0 i c . Wobec tego twierdzą specjaliści-technologowie, że przyczyną większej wytrzymałości cieńszych drutów jest ich szybsze ostygnięcie po wyzarczeniu. Takie objaśnienia dyktuje technikom zakorzeniona głęboko wiara w prostotę zjawisk wytrzymałości (por. uwagi na końcu § 28), wiara poparta pozornie ogromną ilością doświadczeń. Zwykle doświadczenia nad ciałami dość dużych rozmiarów pozwalają rzeczywiście sądzić, że np. wartość ilorazu z siły rozrywającej przez przekrój pręta jest niezależna od wielkości i postaci przekroju, że zatem wartość ta określa stałą właściwą materiałowi, którą dlatego nazwano wytrzymałością materiału. Skoro jednakże przejdziemy do ciał o wyjątkowo małych rozmiarach, to, jak widzimy na przykładzie cienkich drutów, sprawa przedstawia się całkiem inaczej. Mniemana stała R' okazuje się zależną od grubości drutu, a więc od liniowych rozmiarów przekroju poprzecznego. Dla czegoż nie zauważono tego na grubych prętach, używanych w zwykłych doświadczeniach? Odpowiedź bardzo prosta: Bo wskutek małej rzeczywistej wartości stałej c w wyrażeniu (a) dla R' znika praktycznie wartość wyrazu $\frac{c}{d}$ wobec R'_0 , jeżeli tylko d jest dostatecznie wielkie.

Zwiększenie wytrzymałości cienkich drutów jest najprawdopodobniej objawem t. zw. wytrzymałości powierzchniowej, to znaczy tych zjawisk spójności, które zachodzą na swobodnej powierzchni ciał, a właściwie w bardzo cienkiej molekularnej warstwie zewnętrznej ciał. Fizycy wiedzą od dawna, że ta warstwa powierzchniowa objawia spójność znacznie większą niż wnętrze ciała, dla którego miarą spójności jest t. zw. wytrzymałość objętościowa. W szczególności uderzającej postaci występuje to zjawisko u cieczy, które, nie posiadając prawie żadnej wytrzymałości objętościowej, objawiają, jak wiadomo z nauki o włoskowatości, pewną dającą się dobrze zmierzyć wytrzymałość powierzchniową. Przyjmując analogiczne zjawisko u ciał stałych możemy teoretycznie uzasadnić formułę (a) dla wytrzymałości drutów. W tym celu oznaczmy wytrzymałość objętościową przez R'_0 , a wytrzymałość powierzchniowej warstwy o grubości Δ przez R'_1 . Wtedy siła rozrywająca P_w rozdziela się na dwie części, z których jedna działa na zmniejszony przekrój drutu o polu $(d-2\Delta)^2 \frac{\pi}{4}$, a druga na przekrój warstwy powierzchniowej, którego pole równa się $\frac{d^2 \pi}{4} - \frac{(d-2\Delta)^2 \pi}{4}$. A zatem:

$$P_w = (d-2\Delta)^2 \frac{\pi}{4} R'_0 + \left[\frac{d^2 \pi}{4} - \frac{(d-2\Delta)^2 \pi}{4} \right] R'_1.$$

Dzieląc obustronnie przez $F = \frac{d^2 \pi}{4}$ otrzymamy wytrzymałość drutu

$$\frac{P_w}{F} = \left(1 - \frac{2\Delta}{d}\right)^2 R'_0 + \left[1 - \left(1 - \frac{2\Delta}{d}\right)^2\right] R'_1 = R' = R'_0 + 4 \left(\frac{\Delta}{d} - \frac{\Delta^3}{d^3}\right) (R'_1 - R'_0) \quad \dots \quad (b)$$

¹⁾ L. Tetmajer: „Die angewandte Elastizitäts u. Festigkeitslehre“. Wien 1905.

²⁾ Fizyk G. Quincke, technolog K. Karmarsch.

Wielkość Δ będzie bardzo małą tego samego rzędu, co odległości międzycząsteczkowe, a więc w przypadku najcieńszych nawet drutów technicznych można $\left(\frac{\Delta}{d}\right)^2$ pominąć wobec $\frac{\Delta}{d}$. Wskutek tego przybiera nasza formuła postać

$$R' = R_0 + \frac{4\Delta(R_1 - R_0)}{d} \dots \dots \dots (c)$$

zgodną z empirycznym wzorem (a), przyczem okazuje się, że stała

$$c = 4\Delta(R_1 - R_0),$$

określająca wytrzymałość powierzchniową, jest zależna od grubości warstwy powierzchniowej i różnicy między wytrzymałością tej warstwy, a wytrzymałością wnętrza.

Wzór (c), względnie (a), stałby się oczywiście bardzo niedokładnym, gdyby wartość d zbliżała się do Δ . W takim jednak przypadku, nie mającym na razie praktycznego znaczenia, lecz nader interesującym ze stanowiska ogólnonaukowego, należałoby zastosować nieuproszczoną formułę teoretyczną (b), która, co prawda, wymaga jeszcze doświadczalnego sprawdzenia].

§ 34. ZAGADNIENIA STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

Przy obliczaniu prętów narażonych na rozciąganie lub ściskanie napotykamy niekiedy przypadki, w których siła wewnętrzna w pręcie jest niewiadomą, nie dającą się oznaczyć przy pomocy samych tylko ogólnych warunków równowagi. Takie przypadki nazywamy statycznie niewyznaczalnymi. Dla znalezienia niewiadomych sił trzeba wziąć pod uwagę odkształcenia prętów i dlatego ostateczne wartości sił będą wogóle zależne od rozmiarów i sprężystych własności prętów.

Jako przykład rozpatrzmy najpierw przypadek przedstawiony na rys. (56). Na trzech równoległych prętach I, II, III wisi ciężar P . Do obliczenia sił wewnętrznych w prętach dostarcza statyka w tym przypadku tylko dwu równań; w celu ustawienia trzeciego trzeba się uciec do rozważania sprężystych odkształceń. Dla uproszczenia przyjmiemy, że cały układ jest symetryczny względem linii działania siły P ; wydłużenia wszystkich trzech prętów będą wtedy równe (jeżeli samo ciało obciążające P uważamy za sztywne). A zatem:

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{S_1}{E_1 F_1} = \frac{S_2}{E_2 F_2} = \frac{S_3}{E_3 F_3} \dots \dots \dots (a)$$

Z powodu założenia symetrii będzie $E_1 = E_3$, $F_1 = F_3$, a więc $S_1 = S_3$. Warunek równowagi daje:

$$S_1 + S_2 + S_3 = 2S_1 + S_2 = P \dots \dots \dots (b)$$

Z równań (a) i (b) łatwo teraz obliczyć niewiadome S_1 i S_2 .

Podobny przypadek zachodzi przy obliczeniu prętów złożonych z różnych materiałów, jak np. słupów żelazno-betonowych (rys. 57). Jeżeli środek pola przekroju żelaznych wkładek i środek pola przekroju betonowego leżą w tym samym punkcie na linii działania siły ściskającej P , to można widocznie przyjąć równomierny rozkład odkształceń w całym przekroju. Zakładając nadto ważność prawa Hooke'a i odróżniając odpowiednio wielkości odnoszące się do żelaza i betonu wskaźnikami f i b , mamy:

$$e = \frac{p_t}{E_t} = \frac{p_b}{E_b},$$

z czego wynika:

$$p_t : p_b = E_t : E_b = \underline{n}.$$

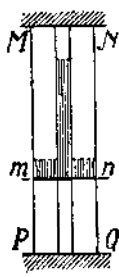
A zatem stosunek naprężeń żelaza i betonu nie zależy od wielkości przekrojów, lecz tylko od wartości \underline{n} stosunku modułów sprężystości tych materiałów¹⁾. Diagram rozkładu naprężeń jest na rysunku uwidoczniony przez zakreskowanie.

[Do obliczenia bezwzględnej wartości naprężeń posłuży jak poprzednio równanie równowagi:

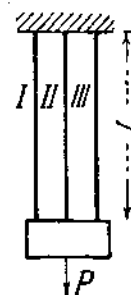
$$P = F_b p_b + F_t p_t = F_b p_b + \underline{n} F_t p_b, \text{ z czego}$$

$$p_b = \frac{P}{F_b + \underline{n} F_t}.$$

¹⁾ [Zważywszy, że beton okazuje znaczne zboczenia od prawa Hooke'a, należy w powyższym rozważaniu rozumieć przez E_b pewną średnią wartość stosunku naprężenia do odpowiadającego mu względnego wydłużenia, czyli t. zw. średni moduł sprężystości. Liczba \underline{n} będzie zatem określać stosunek modułu sprężystości żelaza do średniego modułu sprężystości betonu i będzie się wahać w dość obszernych granicach zależnie od wartości naprężenia. W praktyce przyjmuje się $\underline{n} = 10$ do 15].



Rys. 57



Rys. 56

Powyższe wyniki wyrażają następujące proste prawidła obliczenia:

Naprężenie betonu jest równe naprężeniu, któreby powstało w słupie betonowym litym, o przekroju równym sumie przekroju betonu i n -krotnego przekroju żelaza w danym słupie. Naprężenie zaś żelaza jest n -krotnem naprężeniem betonu.

Przekrój o polu $F_b + nF_f$ nazywamy krótko sprowadzonym (zredukowanym) przekrojem betonu).

W poprzednim wywodzie przyjęliśmy, że pręt żelazny wewnątrz betonu jest narażony na proste ściskanie. Taby było słuszne tylko wtedy, gdyby beton nie przeszkadzał rozszerzeniu poprzecznemu żelaza, t. j. jeżeliby liczba Poisson'a σ miała tę samą wartość dla betonu, co dla żelaza.

[W rzeczywistości jest σ betonu znacznie mniejsze od σ żelaza, wskutek czego doznaje żelazo poprzecznego ściskania od otaczającego betonu. Nawzajem wywierają wkładki żelazne na beton ciśnienie działające podobnie, jak ciśnienie cieczy, zamkniętej w grubościennej rurze, działa na tę rurę. Wielkość tego ciśnienia da się nawet wyznaczyć teoretycznie, ale tylko w przypadku, gdy odległość okrągłego pręta od konturu przekroju betonu jest znaczna w porównaniu do jego grubości¹⁾. Łatwo zrozumieć, że działanie rozsadzające żelaznych prętów może być dla betonu niebezpieczne tylko w przeciwnym skrajnym przypadku małej odległości tych prętów od zewnętrznej powierzchni słupa. Jak dotąd, zapobiega się temu przestrzeganiem pewnych reguł praktycznych bez naukowego uzasadnienia].

W układach statycznie niewyznaczalnych nie może długość któregośkolwiek pręta zmieniać się niezależnie od długości innych prętów, wskutek czego błędy w długości, popełnione przy sporządzeniu prętów, albo zmiany długości, wywołane ogrzaniem, mogą wywołać znaczne siły wewnętrzne bez udziału obciążeń. Powracając do poprzedniego naszego przykładu (rys. 56), przyjmijmy dla uproszczenia rozważań, że wszystkie pręty są zrobione z jednego i tego samego materiału i mają jednakowe przekroje o polu F . Jeżeli np. pręt środkowy sporządzono nieco dłuższy od skrajnych, to przy zestawieniu (montowaniu) układu wypadnie go nieco ścisnąć i dopiero wstawić na przeznaczone miejsce. Dążność pręta II do odzyskania pierwotnej długości wywoła oczywiście napięcia rozciągające w prętach I i III.

Jeżeli oznaczymy przez X siłę ściskającą w pręcie II, to siły rozciągające w prętach I i III będą równe $\frac{1}{2}X$. Wielkość X znajdziemy łatwo z warunku równej długości pręta środkowego i prętów zewnętrznych po zestawieniu. Niech δl oznacza nadwyżkę długości pręta II; jego długość zatem równa się

$$l + \delta l - \frac{Xl}{EF},$$

a długości prętów skrajnych

$$l + \frac{Xl}{2EF}.$$

Warunek równości daje przeto:

$$l + \delta l - \frac{Xl}{EF} = l + \frac{Xl}{2EF},$$

z czego wynika:

$$p_x = \frac{X}{F} = \frac{2}{3} \frac{\delta l}{l} E$$

jako wartość naprężenia w pręcie II wywołanego niedokładnością wykonania. (Naprężenie zestawcze).

Ażeby nabyć wyobrażenia o wielkości takich naprężeń obliczymy je np. dla przypadku, w którym nadwyżka długości żelaznego pręta równa się 0,001 długości projektowanej. Wtedy

$$p_x = \frac{2}{3} \cdot 0,001 \cdot 2 \cdot 10^8 \text{ kg/cm}^2 = 1333 \text{ kg/cm}^2.$$

Naprężenia prętów skrajnych są dwa razy mniejsze. Przy działaniu obciążenia P sumują się naprężenia wywołane błędami wykonania z naprężeniami wywołanymi obciążeniem.

Z takim samym zadaniem mamy do czynienia przy podwyższeniu temperatury środkowego pręta z t_0 na t stopni. Swobodnemu wydłużeniu pręta II przeszkadzają inne pręty i w rezultacie powstanie w pręcie II ciśnienie, a w I i III ciągnienie. Dla wyznaczenia tych naprężeń, które nazwiemy krótko termicznymi, można użyć poprzednich wywodów, wstawiwszy tylko na

¹⁾ Por. M. T. Huber: „Obliczenie wymiarów belek betonowych obustronnie uzbrojonych“. Czasop. techniczne. 1906. Ust. 2: „Działanie uzbrojenia ściskanego“.

miejsce δl wartość termicznego wydłużenia pręta $\alpha (t - t_0)l$, przyczem α oznacza współczynnik wydłużenia termicznego.

Silny wpływ niedokładności w rozmiarach i różnic temperatury na wielkość naprężeń, wywołuje znaczne trudności przy zestawianiu konstrukcyj statycznie niewyznaczalnych i obniża stopień dokładności obliczeń, co wypada kompensować obniżeniem norm dla naprężeń dopuszczalnych.

§ 35. O NAPRĘŻENIACH W ŚCIANACH NACZYŃ¹⁾

Tutaj zajmiemy się tylko takimi zagadnieniami, w których grubość ścianki jest bardzo mała w porównaniu do rozmiarów naczynia i do promieni krzywizny powierzchni zewnętrznych. Te zadania nasuwają się przy obliczeniu zbiorników dla wody, gazu, kotłów parowych i t. d. Naczyniom tego rodzaju nadaje się zwykle postać powierzchni obrotowych i obiera się rozmiary tak, aby odkształcenia wywołane naporem płynu na ściany były małe. W takim przypadku można pominąć zmiany krzywizny ścian, ich wygięcia i przyjąć równomierny rozkład naprężeń przez całą grubość ścianki. (Miejsca, do których się to założenie nie stosuje, zaznaczymy w rozdz. XVII).

Będziemy oznaczać przez

δ grubość ścianki naczynia (w *cm*),

q ciśnienie na ściankę (w *kg/cm²*),

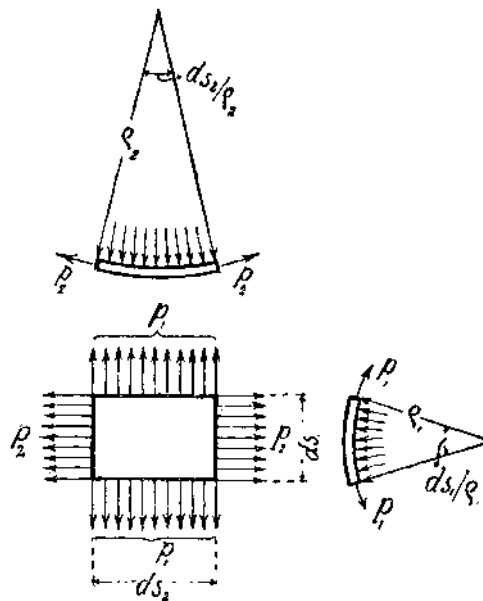
ρ_1, ρ_2 główne promienie krzywizny powierzchni połowiącej grubość ścianki (w *cm*), przyczem ρ_2 jest promieniem odpowiadającym przekrojowi południkowemu.

Dla ustawienia podstawowego równania równowagi wytniemy ze ścianki element nieskończenie bliskimi przekrojami południkowymi i dwoma przekrojami normalnymi do południka (rys. 58). Niech oznaczają ds_2 i ds_1 długości boków wyciętego elementu leżące odpowiednio wzdłuż południka i w kierunku doń prostopadłym. Kąty między poprowadzonymi przekrojami będą oczywiście odpowiednio równe $\frac{ds_1}{\rho_1}$ i $\frac{ds_2}{\rho_2}$. Naprężenia normalne w tych przekrojach p_1 i p_2 określają siły zewnętrzne działające na brzegi elementu o polach $\delta \cdot ds_2$ i $\delta \cdot ds_1$.

Wielkości tych sił są zatem równe:

$$p_1 ds_2 \cdot \delta \text{ i } p_2 ds_1 \cdot \delta.$$

(Naprężenia styczne na brzegach są wykluczone przez symetrię). Oprócz tego działa na powierzchnię elementu ciśnienie płynu q , dające siłę $q ds_1 ds_2$. (Ciężar własny można najczęściej pominąć). Napiszmy teraz warunek równowagi rzutując wszystkie siły na kierunek normalnej do powierzchni elementu (wystawionej w środku). Każda z sił $p_1 ds_2 \cdot \delta$, działających na przeciwległe brzegi elementu o długościach ds_2 , tworzy z płaszczyzną styczną do jego powierzchni kąt $\frac{1}{2} \frac{ds_1}{\rho_1}$ a zatem rzut jednej siły



Rys. 58

na normalną jest z pominięciem nieskończenie małych wyższego rzędu równy $\frac{1}{2} \frac{ds_1}{\rho_1} p_1 ds_2 \cdot \delta$, zaś suma algebraiczna rzutów obu sił

$$= \delta \cdot \frac{p_1}{\rho_1} ds_1 \cdot ds_2.$$

¹⁾ L. Forchheimer: „Die Berechnung ebener u. gekrümmter Behälterböden“. Berlin 1909.

Brauer: „Festigkeitslehre“. Str. 128.

F. Bleich: „Die Eisenkonstr. im städt. Gaswerk Wien-Leopoldau“. Eisenbau 1913. Str. 51.

H. Lorenz: „Technische Elastizitätslehre“. Str. 26.

Podobnie będzie sumą rzutów obu sił, działających na brzegi elementu o długościach ds_1 :

$$\delta \cdot \frac{p_2}{\rho_2} ds_1 \cdot ds_2.$$

Przy kierunkach sił przyjętych na rysunku, będzie przeto warunkiem równowagi równanie:

$$\delta \cdot \frac{p_1}{\rho_1} ds_1 ds_2 + \delta \cdot \frac{p_2}{\rho_2} ds_1 ds_2 = q ds_1 ds_2,$$

czyli

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{q}{\delta} \quad (28)$$

Łatwo zauważyć, że w rozpatrywanym elemencie powstaje jeszcze trzecie naprężenie o kierunku prostopadłym do tamtych dwu, które na powierzchni stykającej się z płynem ma wartość ciśnienia q tego płynu i zmniejsza się idąc w głąb ścianki ku powierzchni zewnętrznej aż do zera, względnie do wartości ciśnienia zewnętrznego. Atoli to naprężenie jest przy poczynionych założeniach zawsze bardzo małe w porównaniu do p_1 i p_2 , wobec czego można je pominąć.

Otrzymane równanie zastosujemy do niektórych szczególnych przypadków.

1) Naczynie kuliste, podlegające działaniu równomiernie rozłożonego wewnętrznego ciśnienia q , rozszerzy się nieco, zachowując jednakże postać kulistą. Z symetrii wynika, że

$$p_1 = p_2 = p,$$

a rów. (28) da nam

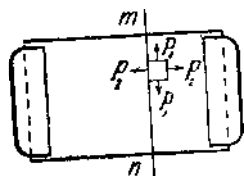
$$p = \frac{q\rho}{2\delta}, \quad (29)$$

albo, gdy mamy obliczyć grubość ścianki przy dopuszczalnej wartości R naprężenia p :

$$\delta = \frac{q\rho}{2R} \quad (29a)$$

Jeżeli naczynie kuliste jest narażone na (równomiernie rozłożone) ciśnienie zewnętrzne, to trzeba tylko zmienić znak we wzorze (29). Zamiast ciągnięć powstaną w ściance ciśnienia.

2) Kocioł walcowy (rys. 59) jest narażony na zewnętrzne stałe ciśnienie q . Rozpatrzmy osobno naprężenia w punktach walcowej części kotła, a osobno naprężenia w dnach, przyczem przyjmiemy, że rozważane punkty są dość odległe od miejsca połączenia den z częścią walcową. Dla punktów części walcowej jest $\rho_2 = \infty$, a z rów. (28) otrzymamy



Rys. 59

$$p_1 = \frac{q\rho_1}{\delta} \quad (30)$$

Tutaj ρ_1 oznacza oczywiście promień walca. Naprężenia p_1 dążą do rozerwania kotła wzdłuż tworzącej walca. Nazwiemy je naprężeniami obwodowymi. Ażeby znaleźć naprężenia podłużne, czyli ciągnięcia p_2 , przetnijmy kocioł płaszczyzną prostopadłą do osi walca i rozpatrzmy warunek równowagi jednej części. Naprężenia p_2 rozmieszczone równomiernie na pierścieniowym polu przekroju, dadzą siłę wypadkową

$$P = 2\pi\rho_1\delta \cdot p_2,$$

działającą w osi walca. Tę siłę równoważy napór pary na dno kotła o wielkości $\pi\rho_1^2q$. A zatem:

$$2\pi\rho_1\delta \cdot p_2 = \pi\rho_1^2q,$$

skąd

$$p_2 = \frac{q\rho_1}{2\delta} \quad (31)$$

Naprężenia podłużne są przeto dwa razy mniejsze od naprężeń obwodowych.

Co się tyczy naprężeń w dnach, to w przypadku ich kulistej formy można zastosować wprost wzór (29) wyprowadzony dla naczynia kulistego. Przy innej postaci den wypadnie udać się na drogę ogólną, wskazaną w następnym przykładzie.

3) Naczynie napełnione wodą doznaje w każdym punkcie ściany ciśnienia proporcjonalnego względem głębokości y . Ciśnienie to $q = \gamma y$, jeżeli γ oznacza ciężar jednostki objętości wody (lub innej cieczy). Wywołany temi ciśnieniami całkowity napór na naczynie równa się oczywiście ciężarowi wody w naczyniu. Dajmy na to, że ciężar ten jest zrównoważony naprężeniami p_2 rozmieszczonymi równomiernie na swobodnej krawędzi naczynia, którego przekrój południkowy

przedstawia rys. (60). Oś symetrii naczynia jest przytem pionowa. Kierunek naprężeń p_2 będzie stycznym do linii przekroju południkowego. Obliczmy teraz naprężenia odpowiadające punktom dowolnego równoleżnika mn o promieniu r i głębokości y (mierzonej od zwierciadła wody). Naprężenia południkowe p_2 znajdziemy podobnie, jak w poprzednim zadaniu. Przez równoleżnik mn poprowadzimy przekrój pobocznica stożka mkn . Naprężenia p_2 rozmieszczone równomiernie w tym przekroju, sprowadzają się do wypadkowej siły działającej w kierunku osi Y (w górę). Jej wielkość

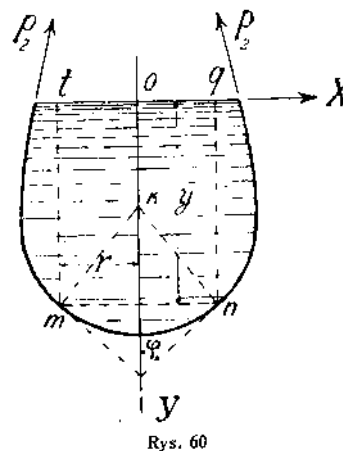
$$P = 2\pi r \cdot \delta \cdot p_2 \cos \varphi.$$

Siła P równoważy się z ciężarem wody Q o objętości ograniczonej pobocznica walca $mtqn$ i dnem danego naczynia. Ten ciężar określa łatwa do wyprowadzenia formuła:

$$Q = 2\pi \gamma \int_0^r xy dx.$$

A zatem

$$p_2 = \frac{\gamma}{\delta \cos \varphi} \frac{1}{r} \int_0^r xy dx, \quad \dots \quad (a)$$



Rys. 60

skąd na podstawie równania przekroju południkowego możemy wyznaczyć wielkość p_2 . Do obliczenia p_1 posłuży rów. (28).

Szczegółowo wykonamy obliczenie w prostym przypadku, gdy naczynie ma postać stożka (rys. 61). Wówczas jeden z promieni krzywizny staje się nieskończenie wielkim, drugi zaś równa się

$$ln = \frac{h-y}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \alpha$$

Podstawowe równanie (28) przybierze postać:

$$p_1 = \frac{\gamma y}{\delta}, \text{ a zatem } p_1 = \rho_1 \frac{\gamma y}{\delta} = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{\delta \cos \alpha} y(h-y).$$

Naprężenia równoleżnikowe p_1 znikają przeto w zwierciadle wody i u wierzchołka stożka. W przekrojach pośrednich zmieniają się według diagramu parabolicznego i osiągają największą wartość dla $y = \frac{h}{2}$, gdzie

$$(p_1)_{\max} = \frac{\gamma h^2}{4\delta} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Naprężenia południkowe p_2 (działające w przekroju równoleżnikowym) obliczymy przy pomocy ogólnej formuły (a):

$$p_2 = \frac{\gamma}{\delta \cos \alpha} \cdot \frac{1}{r} \int_0^r x(h - x \operatorname{ctg} \alpha) dx = \frac{\gamma r}{\delta \cos \alpha} \left(\frac{h}{2} - \frac{r}{3} \operatorname{ctg} \alpha \right).$$

Ze względu na to, że promień r wyraża się przez y wzorem

$$r = (h-y) \operatorname{tg} \alpha$$

otrzymamy

$$p_2 = \frac{\gamma}{6\delta} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} (h-y)(h+2y).$$

A zatem i to naprężenie zmienia się z głębokością według diagramu parabolicznego i staje się zerem dla $y = h$, t. j. w wierzchołku stożka, a osiąga największą wartość dla $y = \frac{h}{4}$.

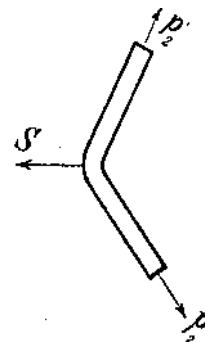
$$(p_2)_{\max} = \frac{3}{16} \frac{\gamma}{\delta} h^2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Jeżeli postać naczynia jest tego rodzaju, że przekrój południkowy posiada załom (rys. 62), to promień krzywizny ρ_2 staje się w tym miejscu zerem, a podstawowe równanie przybiera postać:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{p_2}{0} = \frac{p}{\delta},$$

z której wynikałoby $p_1 = \infty$, o ile p_2 nie jest przypadkowo zerem.

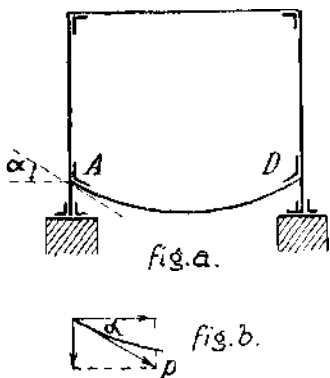
Ażeby w tym przypadku umożliwić równowagę w rozpatrywanym miejscu, przy poczynionych na wstępie założeniach co do naprężeń, trzeba widocznie na równoleżnik załomu działać odpowiednimi napięciami S . Gdyby tych napięć nie było, to w miejscu załomu powstałyby wielkie odkształcenia wywołane zgięciem ścianki. Dla uniknięcia tych odkształceń wzmacnia się zwykle w praktyce równoleżnik załomu osobnym pierścieniem.



Rys. 62

Jako przykład przedstawiono na rys. (63) zwykły typ zbiornika na wodę w kolejowych wodociągach. Kuliste dno jest połączone ze ścianką walcową za pośrednictwem kątownek, których profil uwidoczniło w punktach *A* i *D*. Te kątowniki tworzą pierścień dość sztywny, aby przeszkodzić niepożądanym odkształceniom ścianki. Podamy tutaj przybliżone obliczenie pierścienia podporowego, oparte na założeniu ścianek idealnie gładkich. W danym przypadku przyjmijmy więc, że ścianki mogą być narażone tylko na rozciąganie. Ciągnięcia p , powstające w dnie zbiornika pod wpływem naporu wody, a nachylone w miejscu załomu pod kątem α do poziomu, rozkładamy na poziomą i pionową składową (fig *b*). Ta ostatnia przenosi się bezpośrednio na podporę ścianki bocznej, pierwsza zaś wywołuje ściskanie pierścienia podporowego [podobnie, jak napięcie sprych koła rowerowego, wywołuje ściskanie w obręczy]. Składowa pozioma, przypadająca na jednostkę długości pierścienia ma wartość

$$S = p \delta \cdot \cos \alpha.$$



Rys. 63

Dla wyznaczenia naprężeń ściskających w pierścieniu rozpatrzmy równowagę połowy pierścienia odciętej przekrojem średnicowym (rys. 64). Na każdy element pierścienia, odpowiadający kątowi środkowemu $d\varphi$, przypada zewnętrzny nacisk $p \delta \cdot \cos \alpha \cdot \rho \cdot d\varphi$. Jeżeli przez P oznaczymy siłę wewnętrzną w pierścieniu, zastępującą działanie odciętej części na część rozpatrywaną, to rzutując wszystkie siły na kierunek P otrzymamy:

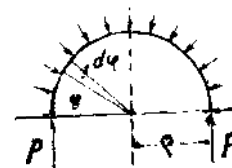
$$2P = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} S \rho \sin \varphi \cdot d\varphi = 2S\rho,$$

a zatem

$$P = S\rho = p \delta \cdot \rho \cos \alpha.$$

Dzieląc wielkość napięcia P przez pole przekroju pierścienia, znajdziemy wartość ciśnienia w pierścieniu.

Kwestię stateczności ściskanego pierścienia rozważymy w rozdziale poświęconym stateczności układów sprężystych.



Rys. 64

§ 36. O TEORJACH WYTRZYMAŁOŚCI

Przy obliczeniu prętów rozciąganych lub ściskanych rozwiązuje się kwestja wytrzymałości bez szczególnych trudności. Posiadamy poddostatkiem danych doświadczalnych co do granicy proporcjonalności, punktu krytycznego i doraźnej wytrzymałości dla rozmaitych materiałów konstrukcyjnych, posiadamy także wskazówki co do granicznych naprężeń przy powtarzających się obciążeniach. Według tych danych oznacza się w każdym poszczególnym przypadku wielkości naprężeń dopuszczalnych R . Skoro jednak przejdziemy do bardziej złożonych zadań rozciągania lub ściskania w dwu kierunkach wzajemnie prostopadłych [dwuwymiarowy stan napięcia], z jakimi np. mieliśmy do czynienia przy obliczaniu ścianek naczyń, albo do jeszcze ogólniejszych przypadków rozciągania i ściskania w trzech kierunkach wzajemnie prostopadłych (rys. 34), to zauważymy przedewszystkiem możliwość nieskończonej różnorodności stosunków, zachodzących między wartościami naprężeń p_x , p_y i p_z (naprężeń składowych). Ażeby w tych przypadkach zawyrokujeć o wytrzymałości, trzeba by, biorąc ściśle, dla każdej z osobna wartości stosunku naprężeń składowych przeprowadzić szereg doświadczeń celem wyznaczenia granicy proporcjonalności, punktu krytycznego i doraźnej wytrzymałości. Pomimo wielką ważność takich badań, posiadamy dotychczas bardzo niewiele danych doświadczalnych w tym kierunku i dlatego w przypadkach złożonego stanu napięcia musimy wyrokować o wytrzymałości na podstawie doświadczeń nad prostym rozciąganiem i ściskaniem.

W dalszym ciągu będziemy uważać dwa jakiegokolwiek przypadki stanu napięcia za przypadki równej wytrzymałości, jeżeli przy proporcjonalnym powiększeniu naprężeń (składowych) dojdziemy w obu przypadkach razem do granicy niebezpiecznej. Jako taką można uważać albo punkt krytyczny, albo pęknięcie. Zdecydujemy się na obiór punktu krytycznego [gr. plastyczności] za

żadna dowolnie wielka wartość ciśnienia nie staje się niebezpieczną dla materiału. Ale ten sam wynik otrzymalibyśmy przy wszechstronnym równomiernym rozciąganiu, co już nie przemawia do przekonania i raczej budzi pewne wątpliwości. Prawda, że taki stan napięcia nie da się praktycznie urzeczywistnić, że zatem zarzuty tego rodzaju nie obniżają wielkiej praktycznej wartości trzeciej hipotezy, wszelako napominają one do ostrożności w uogólnianiu wyników doświadczeń nad wytrzymałością i wskazują na właściwą rolę owej hipotezy jako ważnej reguły praktycznej. Można ją stosować z całym zaufaniem tylko do tych materiałów, jakie były przedmiotem doświadczeń i do tych stosunków naprężeń (składowych), które niezbyt wiele się różnią od badanych doświadczalnie. Weźmy np. taki materiał, jak szkło, w porównaniu z metalami technicznymi nadzwyczaj jednolity, równokierunkowy i podlegający w bardzo obszernych granicach prawu Hooke'a. Tymczasem trzecia hipoteza nie stosuje się zupełnie do szkła, gdyż pociąga za sobą widocznie równość naprężeń bezpiecznych przy rozciąganiu i ściskaniu, podczas gdy wytrzymałość przy ściskaniu szkła jest kilkakrotnie większą od wytrzymałości przy rozciąganiu. Na szkło można także obserwować objawy wytrzymałości powierzchniowej występujące tutaj jeszcze jaskrawiej niż na drutach metalowych.

Z tych i innych jeszcze faktów doświadczalnych, o których będzie mowa przy innej sposobności, okazuje się, że zjawiska wytrzymałości są bez porównania bardziej złożone od zjawisk sprężystości i prawdopodobnie nawet nie dadzą się określić ściśle stałymi charakterystycznymi dla materiału, analogicznie do stałych sprężystości. Dlatego też nie muszą liczyć na trwałe powodzenie i inne proste hipotezy o jednej lub dwu stałych, jakie napotykałyśmy w nowszej literaturze¹⁾, jakkolwiek mogą również dostarczyć pożytecznych reguł praktycznych].

§ 37. ŚCISKANIE KUL I WALCÓW

Z przypadkami ściskania kul i walców spotykamy się tak w konstrukcji maszyn (łożyska kulowe i wałkowe), jak i w budowlach inżynierskich (łożyska podporowe mostów, przeguby wielkich sklepień i t. p.). Rozkład naprężeń w otoczeniu miejsca stykania się jest wielce skomplikowany i nie da się znaleźć drogą elementarną²⁾. Ograniczymy się zatem do podania wyników, którymi można się posługiwać przy obliczeniach³⁾.

Przy ściskaniu dwu kul z siłą P (rys. 66) powstanie wskutek odkształceń powierzchnia stykania mn , ograniczona konturem kołowym o promieniu a bardzo małym w porównaniu do promieni r_1 i r_2 obu kul. Wielkość tego promienia określa wzór:

$$a = 1,11 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \quad (34)$$

otrzymany z ogólnego, podanego przez Hertz'a po podstawieniu wartości liczby Poisson'a $\sigma = 0,3$. Na powierzchni stykania rozkładają się ciśnienia nierównomiernie, a największe ciśnienie w środku oblicza się z formuły

$$p_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right)^2} = 1,5 \frac{P}{\pi a^2} \quad (35)$$

W szczególnym przypadku przyciskania kuli do płaskiej ściany, t. j. gdy $r_1 = r$, $r_2 = \infty$, przekształca się powyższe formuły na następujące:

$$a = 1,11 \sqrt[3]{\frac{P}{E} r} \quad (34)' \quad p_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}} \quad (35)'$$

W ostatnim wzorze można zauważyć wybitną cechę, odróżniającą go od wzorów dla naprężeń otrzymywanych poprzednio. W rozpatrywanych dotąd przypadkach była zależność naprężenia od siły zewnętrznej zawsze liniowa, wskutek czego naprężenia p_1 i p_2 , wywołane odpowiednio siłami P_1 i P_2 działającymi każda z osobna, sumowały się w przypadku jednoczesnego działania obu sił. Przy ściskaniu dwu kul nie sumują się działania sił zewnętrznych, albowiem naprężenie zmienia się proporcjonalnie względem trzeciego pierwiastka z siły. Aby np. wywołać naprężenie dwa razy większe, trzeba użyć 8 razy większej siły, oczywiście przy założeniu, że nie przekroczyliśmy przytem nigdzie granicy proporcjonalności. [Stopień pewności n , określony stosunkiem obciążenia niebezpiecznego do obciążenia dopuszczalnego, będzie zarazem równy stosunkowi sześciątów naprężenia niebezpiecznego i dopuszczalnego].



Rys. 66

¹⁾ O. Mohr: „Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze...“ Z. d. V. d. I. 1910, str. 1524.

M. T. Huber: „Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału“. Czasop. techn. 1904. Ob. także:

A. Föppl u. L. Föppl: „Drang u. Zwang“, tom I, r. 1920, str. 50.

Roth: „Die Festigkeitstheorien und...“, Zeitschr. f. Math. u. Ph. 48. 1902.

²⁾ Ogólne rozwiązanie odnośnego zagadnienia teorii sprężystości znalazł w r. 1882 H. Hertz. Ob. Gesamm. Werke. Bd. I. „Ueber die Berührung fester elastischer Körper u. über die Härte“. Opracowaniem szczegółów ważnych zwłaszcza dla zastosowań technicznych zajmują się następujące rozprawy:

M. T. Huber: „Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper“, Ann. d. Phys. 1904.

Th. Friesendorf: „Teorja szatja soprikasajuszczich sia twiordych tiel“. Petersburg 1905.

A. N. Dinnik: „Udar i szatje uprugich tiel“. Izv. Kiev. Pol. Inst. 1909.

S. Fuchs: „Hauptspannungstrajektorien...“, Phys. Zeitschr. 14. 1913.

M. T. Huber u. S. Fuchs: „Spannungsverteilung bei der Ber. zw. elast. Zylinder. Phys. Zeitschr. 15. 1914.

³⁾ Wywód formuł znajdzie czytelnik także w dziele autora p. t. „Kurs teorii uprugosti“. Część I. 1914. str. 221.

Jeżeli przyjmiemy dla p_{max} oznaczoną wartość, to, jak widać z rów. (35)', określimy temsamem wartość stosunku $P : r^2$ w przypadku przyciskania kuli do płaskiej ściany. Wówczas możemy także napisać

$$P = k d^2.$$

przyczem d oznacza średnicę kuli, a stała k da się wyrazić przez E i przyjętą wartość p_{max} . Wartość k da się także oznaczyć bezpośrednio drogą doświadczalną¹⁾, a stąd można obliczyć odpowiednią wartość bezpieczną dla p_{max} . Tą drogą znaleziono np. dla kulek łożyskowych z hartowanej stali o granicy proporcjonalności około $10\,000 \text{ kg/cm}^2$ i $E = 2\,120\,000 \text{ kg/cm}^2$, jako graniczną wartość $k = 50 \text{ kg/cm}^2$, co odpowiada według formuły (35)' $p_{max} = 37\,450 \text{ kg/cm}^2$.

Do tak olbrzymich wartości może zatem dojść naprężenie w środku powierzchni zetknięcia bez niebezpieczeństwa dla materiału dzięki tej okoliczności, że element podlegający temu naprężeniu jest zarazem, jak uczy teoria, ściskany poprzecznie z obu stron naprężeniami o wielkości około $0,8 p_{max}$. Stan naprężenia tego elementu uzmawia rys. (67). Wskutek tego mierzy się wyężenie materiału w myśl trzeciej hipotezy różnicą $p_{max} - 0,8 p_{max} = 0,2 p_{max}$, której wartość w naszym przypadku równa się 7490 kg/cm^2 . [Toby odpowiadało nawet dość znacznej pewności przeciw osiągnięciu granicy proporcjonalności materiału

$$n = \frac{10000^2}{7490^2} = \sim 2,4$$

jest widocznie wartością tej pewności].

Teoria wskazuje jednak jeszcze na inne miejsce, niebezpieczne na powierzchni stykania, a mianowicie na obwodzie koła zetknięcia, gdzie różnica między największym i najmniejszym naprężeniem jest równa $0,267 p_{max}$, co odpowiada w naszym przypadku wartości wyężenia równej około $10\,000 \text{ kg/cm}^2$, a więc granicy proporcjonalności. Trzecia hipoteza nadaje się przeto i tutaj wcale dobrze, podczas gdy pierwsza i druga zupełnie zawodzi²⁾.

Jeżeli kula o promieniu r_1 dotyka wydrążonej powierzchni kulistej o promieniu r_2 (rys. 68), to można również posługiwać się wzorami (34) i (35), uważając jednak w nich r_2 za ujemne. Łatwo zauważyć, że kula wytrzyma w tym przypadku większy nacisk. [Tutaj może się także zdarzyć, że a nie wypadnie małe w porównaniu do r_1 , jak przyjęto w teorii. Doświadczenie poucza jednak (por. przytoczoną powyżej pracę Stribeck'a), że główne wyniki, t. j. wielkość a i całkowite odkształcenie w kierunku działającego nacisku, względnie zbliżenie środków kul, dogadzają wzorom teoretycznym bardzo dobrze aż do $a = \frac{1}{5} r$, jakkolwiek nie ulega wątpliwości, że w pobliżu obwodu

koła zetknięcia będzie rzeczywisty stan naprężenia różnić się coraz bardziej od teoretycznego w miarę wzrostu a i to na korzyść bezpieczeństwa. Dzięki temu można przy nieco większych wartościach a zadowolnić się obliczeniem według wyężenia w środku koła zetknięcia. Przytem należy pamiętać, że jeżeli R oznacza wartość bezpieczną naprężenia przy prostym rozciąganiu lub ściskaniu dla materiału kul, a R' doraźną wytrzymałość, to dla otrzymania tego samego stopnia bezpieczeństwa $n = R' : R$ trzeba przyjąć w obliczeniu kul według formuły (35) jako wartość naprężenia dopuszczalnego

$$R^* = R' : \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{R R'^2}.$$

A zatem

$$R^* = 0,2 p_{max} = 0,0776 \sqrt[3]{E^2 \left(\frac{r_1 \pm r_2}{r_1 r_2} \right)^2 P},$$

z czego obliczymy dopuszczalne obciążenie przy n -krotnej pewności:

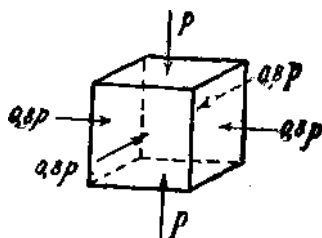
$$P = \frac{2140 R'^3}{n E^2} \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 \pm r_2} \right)^3 \dots \dots \dots (35a)$$

Podane formuły teoretyczne dają jeszcze jedną cenną wskazówkę dla praktyki, a mianowicie zalecają bardzo wymownie używanie na kulki łożyskowe materiału o jak najwyższej wytrzymałości, względnie najwyższej granicy sprężystości, albowiem podwyższenie tej granicy do 2, 3, ... m -krotnej wartości zwiększa dopuszczalne obciążenie kulki 8, 27, ... m^3 - razy. Ogromne znaczenie wysokiej granicy sprężystości materiału na kulki łożyskowe i pierścienie je obejmujące wyłoniło się powoli z doświadczeń praktycznych bez udziału teorii, ale ile trudu, kosztów i zawodów można było oszczędzić, gdyby wcześniej zajęto się zastosowaniem teorii, oceni każdy inżynier, znający historię rozwoju łożysk kulkowych].

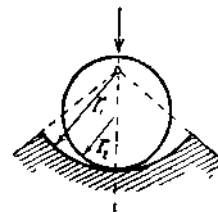
¹⁾ Stribeck: „Kugellager für beliebige Belastungen“. Z. d. V. d. I. 1901.

Schwinning: „Versuche über die zulässige Belastung von Kugel- und Rollenlagern“. Z. d. V. d. I. 1901.

²⁾ [To było powodem, że nawet wybitni inżynierowie-badacze, stojący na tradycyjnym gruncie drugiej hipotezy, stracili zaufanie do wzorów teoretycznych, niewątpliwie bardzo dokładnych, dopóki promień koła zetknięcia jest mały wobec promienia kuli (jedno z głównych założeń teorii Hertz'a), albowiem sprawdzonych przez liczne bardzo staranne doświadczenia. Zamiast szukać objaśnienia dla olbrzymich wartości naprężeń bezpiecznych przez rewizję podstaw teorii wytrzymałości — jedynie racjonalną drogą — odrzucili poprostu formuły dokładne, zastępując je przybliżeniami, zbudowanymi tak, aby wypadła ta sama wartość naprężenia bezpiecznego, co w przypadku prostego rozciągania lub ściskania. Taką metodę należy stanowczo, jako nienaukową, odrzucić. Nie pojawiłaby się ona zapewne, gdyby nie zakorzeniona w umysłach inżynierów wiara w prostotę zjawisk wytrzymałości, o której pisaliśmy już poprzednio. Dla ilustracji może posłużyć znany podręcznik C. Bach'a „Elastizität u. Festigkeit“].



Rys. 67



Rys. 68

Przechodząc do ściskania walców ograniczymy się do przypadku, w którym walce dotykają się wzdłuż tworzących (rys. 69). Obciążenie przypadające na jednostkę długości walca oznaczmy przez P' i przyjmiemy, że długość walca jest wielka w porównaniu do średnicy. Wtedy szerokość paska zetknięcia, wytworzonego przy wzajemnym nacisku walców, określa formuła:

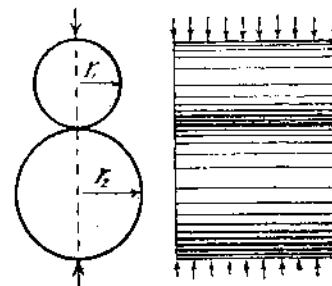
$$b = 3,04 \sqrt{\frac{P'}{E} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \quad (36)$$

Największe ciśnienia zachodzą w linii środkowej paska zetknięcia. Ich wielkość obliczamy wzorem:

$$p_{\max} = 0,418 \sqrt{P' E \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}} \quad (37)$$

Kładąc w powyższych formułach $r_1 = r$, $r_2 = \infty$, otrzymamy odpowiednie wzory dla przyciskania walca o promieniu r do płaskiej ściany, a mianowicie:

$$b = 3,04 \sqrt{\frac{P'}{E} r} \quad (36)' \quad p_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{P' E}{r}} \quad (37)'$$



Rys. 69

[Z odwrócenia formuł (37) i (37)' widać, że obciążenie walców odpowiadające danej wartości największego naprężenia jest proporcjonalne względem kwadratu tej wartości. Zwiększając zatem 2, 3, ... n -krotnie wartość naprężenia bezpiecznego, powiększamy zarazem odpowiednie obciążenie bezpieczne walca 4, 9, ... n^2 -razy. Ten ważny wynik wskazuje podobnie, jak powyżej dla kul, na praktyczne znaczenie wysokiej granicy sprężystości materiału. Stosując np. waliki łożyskowe z twardej stali, zamiast o wiele tańszego żelaza lanego, można dzięki tej okoliczności zmniejszyć koszt łożyska belek mostowych].

Przy danej wartości p_{\max} jest obciążenie P' proporcjonalne względem promienia walca przyciskanego do płaskiej ściany, czyli, co na jedno wychodzi, obciążenie odniesione do jednostki przekroju osiowego $P:dl$ jest stałe (d średnica, l długość walca). Dla wałków z twardej stali dopuszczają w konstrukcji łożysk mostowych ciśnienia 6000 do 7000 kg/cm^2 co odpowiada wartości $P:dl = 50$ do 70 kg/cm^2 .

Normy urzędowe [w tym przypadku przesadnie ostrożne] dopuszczają np. w Rosji tylko $P:dl = 30$ do 35 kg/cm^2 .

[Stosownie do trzeciej hipotezy, która oddała tak dobre usługi w przypadku kul, okaże się i w przypadku walców wartość bezpieczna największego ciśnienia wyższą od naprężenia dopuszczalnego R przy prostym ściskaniu, albowiem w środku paska zetknięcia doznaje materiał trójwymiarowego stanu napięcia określonego naprężeniami p_x (o kierunku równoległym od osi walca), p_y (o kierunku prostopadłym do tej osi i do kierunku nacisku) i p_z (o kierunku działania nacisku P'). Wszystkie trzy naprężenia są ciśnieniami, przy czym $p_y = p_z = p_{\max}$, zaś $p_x = 0,6 p_{\max}$.

Wyężenie materiału określi według trzeciej hipotezy różnica

$$p_{\max} - 0,6 p_{\max} = 0,4 p_{\max}$$

i ta wielkość ma być równa wartości bezpiecznej naprężenia R , czyli

$$p_{\max} = 2,5 R.$$

Obciążenie walców, przy którym jest ten warunek spełniony, można uważać za bezpieczne].

CZEŚĆ II

ŚCINANIE I SKRĘCANIE

ROZDZIAŁ V

ŚCINANIE

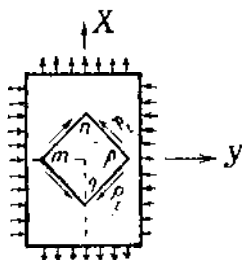
§ 38. PROSTE ŚCINANIE

Przy rozpatrywaniu jednoczesnego działania rozciągania i ściskania w dwu wzajemnie prostopadłych kierunkach otrzymaliśmy wzory (10) i (11) dla naprężeń p_n i p_t w przekroju wyznaczonym kątem β . Teraz zatrzymamy się przy szczególnym przypadku, w którym

$$p_x = -p_y = p,$$

t. j. gdy mamy ciągnięcie wzdłuż osi X -ów i równe mu ciśnienie w kierunku osi Y -ów. Największe naprężenia styczne zachodzą w przekrojach nachylonych do osi X i Y pod kątem 45° . Jeżeli takimi przekrojami wydzielimy z ciała element $mnpq$ (rys. 70) i zastąpimy działanie reszty ciała na ten element siłami, to na ściany elementu będą działać tylko naprężenia ścinające. Naprężenia normalne, jak widać z formuły (10), stają się zerami. Wielkością naprężeń stycznych będzie

$$p_t = \frac{p_x - p_y}{2} = p;$$



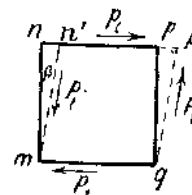
Rys. 70

jest to więc ta sama wielkość, jaką posiadają obadwa naprężenia w kierunku X i Y . Stan napięcia, w jakim się znajduje element $mnpq$, nazwiemy prostym (albo czystym) ścinaniem. Pod wpływem naprężeń stycznych, działających na ściany elementu $mnpq$ zamieniają się proste kąty elementu na ukośne. Jeżeli podstawa $mnpq$ była pierwotnie kwadratem, to po odkształceniu zamieni się na romb. Przekątna pionowa nq wydłuży się, a pozioma mp skróci

się o tę samą wielkość, a ponieważ wydłużenia i skrócenia są wielkościami bardzo małymi, więc długość boku rombu będzie, z pominięciem małych wyższego rzędu, równa pierwotnej długości boku kwadratu

Niechaj $mnpq$ (rys. 71) przedstawia kwadratową podstawę elementu przed odkształceniem, a $mn'p'q$ romb otrzymamy z kwadratu wskutek działania naprężeń stycznych p_t , odpowiadających prostemu ścinaniu. Ten romb obrócono na rysunku w taki sposób, że jeden z jego boków zlewa się z bokiem mq kwadratu $mnpq$. Odcinek mn' nazywa się bezwzględnym posunięciem krawędzi np względem krawędzi mq . Stosunek

$$\frac{mn'}{mn} = \operatorname{tg} \beta,$$



Rys. 71

określający odkształcenie przy prostym ścinaniu, nazywamy posunięciem względnym, albo właściwym. Zważywszy, że mamy do czynienia tylko z bardzo małymi odkształceniami, możemy

podstawić w przybliżeniu kąt β zamiast $\operatorname{tg} \beta$, czyli przyjąć, że posunięcie względne równa się zmianie kąta pierwotnie prostego.

Podobnie jak przy prostym rozciąganiu ustanowiliśmy związek między wydłużeniem względnym, a odpowiadającym mu ciągnięciem, tak ustawimy teraz zależność między posunięciem względnym β a odpowiadającym mu naprężeniem stycznym p_t .

Przy rozpatrywaniu rozciągania i ściskania w dwu wzajemnie prostopadłych kierunkach ustawiliśmy następujący związek między naprężeniami p_x i p_y a odpowiadającymi odkształceniami e_x i e_y :

$$e_x = \frac{p_x}{E} - \sigma \frac{p_y}{E}, \quad e_y = \frac{p_y}{E} - \sigma \frac{p_x}{E}.$$

W przypadku czystego ścinania jest

$$p_x = -p_y = p_t,$$

a zatem

$$e_x = -e_y = e = \frac{p_t}{E} (1 + \sigma).$$

Dla ustawienia szukanego związku między β i p_t trzeba tylko wyrazić β przez e . Z rys. (72) czytamy:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) = \frac{Op'}{On'} = \frac{Op(1-e)}{On(1+e)} = \frac{1-e}{1+e}.$$

Ze względu na to, że β i e są bardzo małe, można pomijając wielkości małe wyższych rzędów napisać:

$$\frac{1-e}{1+e} = 1 - 2e, \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{1 - \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{\beta}{2}} = 1 - \beta,$$

a zatem

$$1 - \beta = 1 - 2e \quad \text{i} \quad \beta = 2e \quad \dots \quad (38)$$

t. j. posunięcie względne równa się co do wartości bezwzględnej podwójnemu wydłużeniu względnemu jednej przekątnej, albo podwójnemu skróceniu względnemu drugiej. Wyraziwszy e przez p_t , otrzymamy:

$$\beta = \frac{2(1+\sigma)}{E} p_t.$$

Otrzymana formuła daje szukany związek między naprężeniami stycznymi przy czystym ścinaniu a wielkością posunięcia względnego. Posunięcie względne jest zatem proporcjonalne względem odpowiadającego naprężenia ścinającego. Oznaczywszy

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)} \quad \dots \quad (39)$$

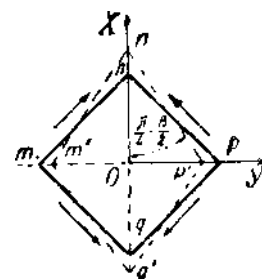
możemy to wyrazić równaniem:

$$\beta = \frac{p_t}{G} \quad \dots \quad (40)$$

Zależność β od p_t jest przeto taka sama, jak zależność e od p przy prostym rozciąganiu lub ściskaniu, tylko zamiast modułu sprężystości E mamy tutaj wielkość analogiczną G , którą będziemy nazywać modułem sprężystości przy prostym ścinaniu [albo krócej modułem sprężystości postaciowej]. Ostatnia nazwa tłumaczy się tem, że proste ścinanie jest tym szczególnym rodzajem odkształcenia, które nie zmienia objętości elementu, lecz tylko jego postać geometryczną. Skoro znamy wielkości E i σ , to możemy obliczyć G ze wzoru (40); przy $\sigma = \frac{1}{3}$ wypada

$$G = \frac{3}{8} E.$$

Jak zobaczymy poniżej, łatwiej znaleźć doświadczalnie G , aniżeli σ , wobec czego zwykle oblicza się σ z formuły (40).



Rys. 72

§ 39. ENERGJA POTENCJALNA ŚCINANIA

Wyobraźmy sobie kostkę o krawędzi l , na której ściany prostopadłe do płaszczyzny rysunku działają siły styczne równomiernie rozłożone i rosnące podczas działania w sposób ciągły od zera do końcowej wartości Q . Pod działaniem tych sił kostka się odkształci i jeżeli np. przyjmiemy podstawę AD za unieruchomioną, to ściana widoczna przybierze postać rombu $ABCD$. Siły zewnętrzne wykonują przytem pracę, zamieniającą się w energję potencjalną odkształcenia. Aby ją obliczyć postąpimy najprościej tak, jak to czyniliśmy w przypadku prostego rozciągania (ob. § 4). Na osi odciętych odmierzymy posunięcie bezwzględne S ściany BC w odniesieniu do ściany AD , a na osi rzędnych — odpowiadające wartości sił ścinających. W granicach proporcjonalności otrzymamy linjową zależność między temi wielkościami. Pracę sił działających na ścianę BC przedstawi, jak przy rozciąganiu, pole trójkąta i praca ta będzie się równać

$$T = \frac{QS}{2}.$$

Co się tyczy sił działających na ściany boczne, to ich praca przy rozpatrywaniem odkształceniu jest równa zeru, gdyż przesunięcia są prostopadłe do kierunku sił.

Zważywszy, że

$$S = \beta l = \frac{Ql}{FG},$$

przyczem F oznacza pole ściany, możemy pracę sił zewnętrznych przy prostem ścinaniu przedstawić w jednej z dwu form następujących:

$$T = \frac{Q^2 l}{2FG} = \frac{\beta^2}{2} FGl.$$

Jeżeli ten wynik podzielimy przez objętość kostki Fl , to znajdziemy energję potencjalną odniesioną do jednostki objętości, czyli „właściwą pracę odkształcenia“:

$$\frac{T}{Fl} = \frac{p_1^2}{2G} = \frac{\beta^2 G}{2} \quad \dots \quad (41)$$

§ 40. O NAPRĘŻENIACH BEZPIECZNYCH PRZY ŚCINANIU

Wielkość naprężeń dopuszczalnych, względnie „stopień bezpieczeństwa“, zależy w znacznej mierze od stopnia pewności obliczeń i od sposobu działania sił zewnętrznych, wobec czego nie możemy podać tutaj określonych wielkości naprężeń bezpiecznych dla poszczególnych materiałów. Stosowniejszem na to miejscu są działy konstrukcyjne nauk technicznych. W ogólnym wykładzie nauki o wytrzymałości, na podstawie danych doświadczalnych i opartych na nich teoryj wytrzymałości, można odpowiedzieć tylko na pytanie: Jaki stosunek powinien zachodzić między naprężeniami bezpiecznymi przy prostem rozciąganiu i czystem ścinaniu, jeżeli w obu przypadkach dadzą się naprężenia dokładnie wyznaczyć?

Wychodząc z pierwszej hipotezy (por. § 36) doszlibyśmy do wniosku, że dla zapewnienia tego samego stopnia bezpieczeństwa przy czystem ścinaniu powinny dopuszczalne naprężenia ścinające być równe naprężeniom dopuszczalnym przy prostem rozciąganiu. Takiego wniosku doświadczenie nie potwierdza i w praktyce już od dawna używają niższych norm dla naprężeń ścinających niż dla ciągnięć.

Na podstawie drugiej hipotezy, t. j. hipotezy największego wydłużenia określałoby wartość bezpieczną R_t naprężenia ścinającego równanie:

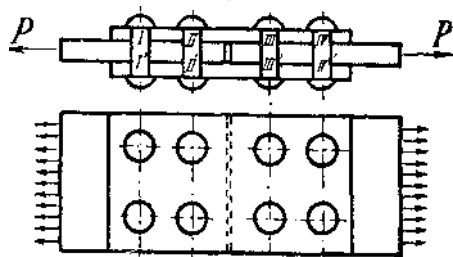
$$\frac{R_t (1 + \sigma)}{E} = \frac{R}{E},$$

przedstawiające warunek równych wydłużeń w obu przypadkach. R oznacza przytem, jak poprzednio, wartość dopuszczalną ciągnięcia. Z tegoby wynikało:

$$R_t = \frac{R}{1 + \sigma} \quad \dots \quad (42)$$

poniżej w rozdziale o zgięciu, dochodzi się właśnie w tych miejscach do naprężeń ścinających równych zeru). Zadanie komplikuje jeszcze ta okoliczność, iż pod działaniem sił zewnętrznych sworzeń zgina się nieco i w płaszczyznach mn i $m'n'$ powstaną nie tylko styczne, ale i normalne naprężenia. Te wszystkie komplikujące okoliczności pomija się przy zwykłych obliczeniach w praktyce i stosuje się do obliczenia / równanie napisane powyżej. Jest to na razie usprawiedliwione, dopóki sprawdzona przez doświadczenie ściślejsza teoria nie dostarczy formuł dokładniejszych. Niedokładność obliczenia wypada skompensować zmniejszeniem wartości naprężenia dopuszczalnego.

Obliczenie nitów. Nity są narażone głównie na ściecie w płaszczyznach przylegania nitowanych części (rys. 75). Zadanie jest tutaj widocznie jeszcze bardziej złożone, niż w przypadku jednego sworznia, gdyż nie tylko nie znamy prawa rozkładu naprężeń w przekrojach nitów, lecz także rozkładu siły P , działającej na połączenia, na poszczególne nity. W praktyce postępuje się zatem podobnie jak w poprzednim przykładzie, t. j. przyjmuje się równomierny rozkład siły na wszystkie nity. Stąd formuła obliczenia:

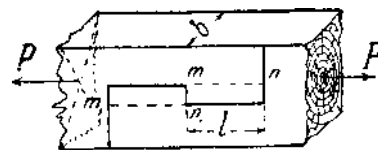


Rys. 75

$$P : n \frac{\pi d^2}{4} \leq R_t,$$

w której n oznacza liczbę przekrojów nitów narażonych na ścinanie, a d grubość nitu. W przypadku przedstawionym na rys. (75) jest widocznie $n = 8$.

W rzeczywistości nawet średnia wartość naprężenia ścinającego w nitach różni się znacznie od tej, jakoby wypadła z podzielenia siły przez n -krotny przekrój nitu, albowiem znaczną część siły P równoważy tarcie w płaszczyźnie stykania połączonych części. Tarcie powstaje dzięki temu, że nity zakłada się na gorąco; po ostygnięciu nity się kurczą i przyciskają silnie do siebie łączone blachy¹⁾. [Rzeczywiste średnie naprężenia będą zatem mniejsze od obliczonych, wobec czego możnaby wartość R_t przyjąć większą niż przy obliczeniu sworznia. Jak widzimy są nity wogóle narażone nietylko na ścinanie i zginanie lecz nadto na rozciąganie w kierunku swej osi. Zaznaczymy jeszcze, że średnica nitu jest w pewnym związku z grubością łączonych części. Związek ten wynika po części z wymogów konstrukcyjnych, w części zaś z warunku racjonalnego wyzyskania wytrzymałości materiału. Zajmiemy się nim na innym miejscu].



Rys. 76

Ścinanie w połączeniach belek drewnianych. W przykładzie przedstawionym na rys. (76) jest drewno narażone na ściecie w płaszczyznach mn i m_1n_1 równoległych do sił zewnętrznych P . Tutaj oczywiście będzie rozkład naprężeń również nierównomierny. Największe naprężenia powstaną koło punktów m i n_1 . Mimo to rachuje się w praktyce według formuły:

$$\text{Średnie naprężenie } \frac{P}{bl} \leq R_t.$$

ROZDZIAŁ VI

SKRĘCANIE

§ 42. SKRĘCANIE PRĘTA OKRĄGŁEGO

Przy doświadczalnym badaniu skręcenia utwierdza się zwykle jeden koniec pręta, a na drugi działa się parą sił leżącą w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta. Doświadczenie poucza, że dopóki moment pary skręcającej nie przekracza pewnej granicy, to kąt skręcenia, czyli kąt obrotu

¹⁾ Bach, Z. d. V. d. Ing. 1912.

Rudeloff: „Versuche mit Nietverbindungen...“. Berlin 1912. Ostatnia praca oświetla fundamentalną rolę tarcia przy prawidłowym działaniu połączeń nitowych.

swobodnego końca względem utwierdzonego, jest proporcjonalny względem tego momentu. Przy powiększeniu długości pręta zwiększa się kąt skręcenia proporcjonalnie względem długości. Gdy zwiększamy grubość pręta, to kąt skręcenia zmniejsza się nader szybko. Jak wykazały doświadczenia Wertheim'a jest kąt skręcenia odwrotnie proporcjonalny względem czwartej potęgi średnicy pręta. Wyniki doświadczeń można przedstawić formułą:

$$\varphi = k \frac{Ml}{d^4},$$

w której oznacza φ — kąt skręcenia, M — moment skręcający, l — długość pręta, d — jego średnicę, wreszcie k — współczynnik zależny od sprężystych własności materiału.

Wzór dla kąta skręcenia da się łatwo wyprowadzić drogą analityczną. W tym celu zrobimy założenie odpowiadające kołowej symetrii naszego przypadku, że przekroje poprzeczne pręta nie doznają wskutek skręcenia żadnego odkształcenia, a tylko obracają się około osi pręta. W tych warunkach będą elementy pręta narażone na czyste ścinanie. Jakoż wyobraźmy sobie na powierzchni bocznej pręta sieć kwadratów elementarnych, utworzoną przez kontury kołowe przekrojów poprzecznych o wzajemnej odległości dx i tworzące walca (rys. 77). Weźmy pod uwagę element, którego ścianę zewnętrzną tworzy kwadracik $mnpq$. Przy skręcaniu przesunie się ściana mn elementu względem pq i zajmie nowe położenie $m'n'$. Bezwzględna wielkością posunięcia będzie mm' , a posunięcie względne β określi formuła:

$$\beta = \frac{mm'}{dx}.$$

Jeżeli przez φ oznaczymy kąt obrotu jakiegokolwiek przekroju poprzecznego względem pewnego obranego przekroju, np. leżącego na utwierdzonym końcu pręta, to różnica kątów obrotu dwu nieskończenie bliskich przekrojów ab i $a'b'$ będzie $d\varphi$, a zatem posunięcie względne

$$\beta = \frac{r d\varphi}{dx},$$

przyczem r oznacza promień przekroju kołowego. Gdy zamiast elementu na walcowej powierzchni pręta weźmiemy element leżący wewnątrz pręta na walcu współosiowym o promieniu $\rho < r$, to ten element będzie również narażonym na czyste ścinanie, a odpowiadające mu posunięcie względne określi widocznie formuła

$$\beta_\rho = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$

Stosownie bowiem do naszego założenia pozostanie każdy promień przekroju i po skręceniu prostym, a tylko obróci się względem pierwotnego położenia o kąt φ .

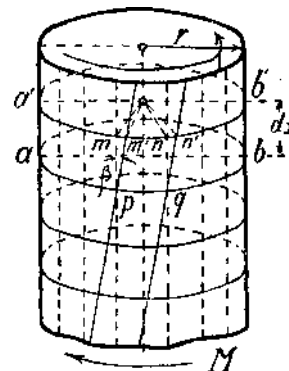
Znając wielkość kąta β , obliczymy wielkość odpowiadającego naprężenia ścinającego p_t , mnożąc β przez moduł sprężystości postaciowej G , czyli

$$p_t = G \rho \frac{d\varphi}{dx}.$$

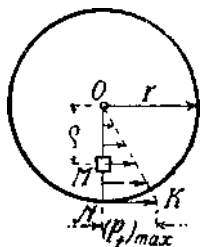
Te naprężenia będą oczywiście działać nie tylko na ściany elementu leżące na przekrojach poprzecznych, lecz także na ściany do nich prostopadłe i leżące na przekrojach osiowych. (Pierwsze mają kierunek prostopadły, drugie zaś równoległy do osi pręta). Niech rys. (78) przedstawia przekrój ab skręconego pręta. Naprężenie w dowolnym elemencie pola dF tego przekroju jest prostopadłe do promienia OM i według powyższej formuły proporcjonalne względem ρ , t. j. względem odległości elementu od środka przekroju. Największe zatem naprężenia ścinające wystąpią na obwodzie przekroju; ich wartością będzie

$$(p_t)_{\max} = G r \frac{d\varphi}{dx}.$$

Wykreśliwszy w każdym punkcie dowolnego promienia ON przekroju poprzecznego wektor przedstawiający naprężenie w tym punkcie, widzimy, że końce tych wektorów leżą na prostej OK . W ten sposób, przez rozpatrywanie odkształceń pręta znaleźliśmy prawo rozkładu naprężeń w płaszczyźnie przekroju poprzecznego. Do oznaczenia wielkości



Rys. 77



Rys. 78

naprężeń potrzeba jeszcze jednego równania, którego nam dostarczy statyka. Ponieważ siły zewnętrzne działające na koniec skrzyżowanego pręta tworzą parę sił o momencie M , leżącą w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta, więc siły sprężystości w dowolnym przekroju poprzecznym ab , określające działanie górnej części pręta na dolną, muszą się także sprowadzać do pary sił równoważonej tamtą. Mając ogólne wyrażenie dla naprężenia w dowolnym punkcie przekroju, możemy obliczyć moment pary wypadkowej sił wewnętrznych względem środka przekroju O . Moment siły $p_t dF$, działającej na element pola dF , położony w odległości ρ od środka O , jest widocznie równy

$$p_t dF \cdot \rho = G \rho \frac{d\varphi}{dx} dF \cdot \rho.$$

Sumowanie momentów, odpowiadających wszystkim elementom pola leżącym między okręgami o promieniu ρ i $\rho + d\rho$, przedstawia się w bardzo prosty sposób, albowiem $p_t \cdot \rho$ jest dla tych elementów stałe, czyli

$$\int p_t \cdot \rho \cdot dF = p_t \rho \int dF.$$

Tutaj oznacza $\int dF$ pole pierścienia utworzonego przez okręgi o promieniach ρ i $\rho + d\rho$. Wielkość tego pola, z pominięciem nieskończenie małych wyższych rzędów, równa się $2\pi\rho d\rho$, a zatem sumą momentów sił wewnętrznych odpowiadających polu tego pierścienia jest

$$2\pi\rho^3 G \cdot \frac{d\varphi}{dx} d\rho.$$

W celu otrzymania ogólnej sumy momentów dla całego przekroju, trzeba powyższe wyrażenie zcałkować w granicach $\rho = 0$ i $\rho = r$. A zatem moment skrzyżający:

$$M = \int_0^r 2\pi\rho^3 G \frac{d\varphi}{dx} d\rho = 2\pi G \frac{d\varphi}{dx} \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} G \frac{d\varphi}{dx}.$$

Stąd

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{G \cdot \frac{\pi r^4}{2}}.$$

Przez całkowanie otrzymujemy wyrażenie dla kąta skrzyżania

$$\varphi_x = \frac{Mx}{G \cdot \frac{\pi r^4}{2}} + C.$$

Jeżeli x będziemy mierzyć od przekroju utwierdzonego, to $\varphi = 0$ przy $x = 0$, a więc $C = 0$. Podstawiając dla przekroju końcowego $x = l$ i $\frac{\pi r^4}{2} = I_p$, t. j. biegunowemu momentowi bezwładności koła przekroju, znajdziemy

$$\varphi_l = \frac{Ml}{GI_p} \dots \dots \dots (44)$$

[Na otrzymanej formule teoretycznej dla kąta skrzyżania widzimy jasno zupełną zgodność z przytoczonym powyżej wzorem empirycznym, jeżeli stałej k nadamy znaczenie $\frac{32}{\pi G}$. Nasze założenie okazało się przeto słusznym].

Po podstawieniu wartości $\frac{d\varphi}{dx}$, znalezionej powyżej, w wyrażenie dla p_t otrzymamy ogólną formułę dla naprężenia ścinającego w skrzyżanym pręcie:

$$p_t = \frac{M\rho}{I_p},$$

z której dla $\rho = r$ znajdziemy:

$$(p_t)_{\max} = \frac{Mr}{I_p} \dots \dots \dots (45)$$

Wzorem (44) i (45) posługujemy się przy obliczeniu okrągłych wałów. Wzór (44) pozwala rozwiązać dwa ważne zadania techniczne:

I. Z danego momentu skrzyżającego i rozmiarów wału znaleźć kąt skrzyżania.

II. Z obserwowanego kąta skrzyżania i danych rozmiarów wału znaleźć wielkość momentu skrzyżającego.

Z tem zagadnieniem spotykamy się przy wyznaczeniu dzielności (pracy na sekundę) maszyny na podstawie pomiaru kąta skręcenia¹⁾.

Formuła (44) pozwala nadto wyznaczyć drogą doświadczalną moduł sprężystości postaciowej G [zwany też modułem skręcenia]. Wystarczy w tym celu zmierzyć kąt skręcenia, odpowiadający danemu momentowi skręcającemu i rozmiary pręta, a we wzorze (44) pozostanie tylko jedna niewiadoma G . Stosując do pomiaru kąta aparat zwierciadłowy, możemy znaleźć G ze znaczną dokładnością.

Otrzymane formuły teoretyczne dadzą się łatwo uogólnić dla przekroju pierścieniowego. W pobliżu osi panują, jak widzieliśmy, bardzo małe naprężenia, wobec czego możemy z korzyścią dla ciężaru własnego wału, a także dla jego sztywności, zastosować wał wydrążony. W praktyce napotykamy wały wydrążone u większych maszyn parowych, gdzie ich średnica osiąga nierzadko 50 cm, a także w motorach lotniczych i w motorach Diesel'a. Przy wyprowadzeniu podstawowej formuły należy tylko zmienić granice całkowania. Jeżeli r_0 i r_1 oznaczają wewnętrzny i zewnętrzny promień wału, to

$$M = 2\pi G \int_{r_0}^{r_1} \rho^3 d\rho,$$

z czego

$$M = G \frac{d\varphi}{dx} \left(\frac{\pi r_1^4}{2} - \frac{\pi r_0^4}{2} \right).$$

Dla naprężeń w wydrążonych wałach otrzymamy zaś wyrażenie:

$$(p_t)_{\max} = \frac{M r_1}{\frac{\pi r_1^4}{2} - \frac{\pi r_0^4}{2}} = \frac{M r_1}{I_p}.$$

§ 43. SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU PROSTOKĄTNYM

Naprężenie powstające przy skręcaniu prętów nieokrągłych nie dadzą się wyznaczyć drogą elementarną. Zagadnienie komplikuje się w tym przypadku wielce z powodu nieuniknionego zakrzywienia przekrojów poprzecznych. Widzimy je np. na załączonej fotografii (rys. 79) zdjętej z silnie skręconego prostokątnego pręta, na którym poprzednio nakreślono sieć kwadratów. Jak łatwo dostrzeż, odkształcają się postaciowo najsilniej kwadraciki odpowiadające środkowym punktom boków prostokątnego przekroju. Tam więc powstaną największe naprężenia ścinające. Natomiast u wierzchołków prostokąta, t. j. na bocznych krawędziach pręta, nie doznają kwadraciki dostrzegalnej zmiany, t. zn., że naprężenia styczne w tych miejscach są równe zeru.

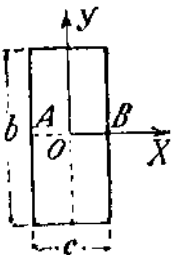
[Ten ostatni wynik łatwo przewidzieć z teoretycznego rozważania. Wogóle przy skręcaniu zwykłym sposobem nie mogą istnieć skończone naprężenia ścinające w wierzchołkach dowolnego przekroju pręta, jeżeli kąt wewnętrzny w tych wierzchołkach jest mniejszy od π . Gdyby bowiem takie naprężenie zachodziło w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, to miałoby w rozpatrywanym wierzchołku różną od zera składową p_t' prostopadłą przynajmniej do jednej z obu stycznych konturu, wychodzących z tego wierzchołka. To zaś być nie może, albowiem według prawa równości odpowiadających naprężeń stycznych w dwu przekrojach wzajemnie prostopadłych, wystąpiłoby naprężenie styczne o tej samej wielkości p_t' i na swobodnej ścianie pręta, wolnej wogóle od sił powierzchniowych (z wyjątkiem tych miejsc, w których pręt jest uchwycony odpowiadającymi elementami konstrukcyjnymi, służącymi do przeniesienia sił). Inaczej ma się rzecz w przypadku, gdy kąt wewnętrzny jest większy od π . W takim wierzchołku powstają, jak zobaczymy poniżej, napięcia styczne wogóle tem większe, im bardziej ten kąt przewyższa π].

Nie wdając się tutaj w przybliżone sposoby obliczenia naprężeń, ograniczymy się do podania wyników ścisłego rozwiązania, które można znaleźć w wykładach teorii sprężystości²⁾. Rys. (80) przedstawia przekrój poprzeczny pręta. Największe naprężenia zachodzą w środkach dłuższych boków prostokąta A i B . Ich wielkość określa formuła

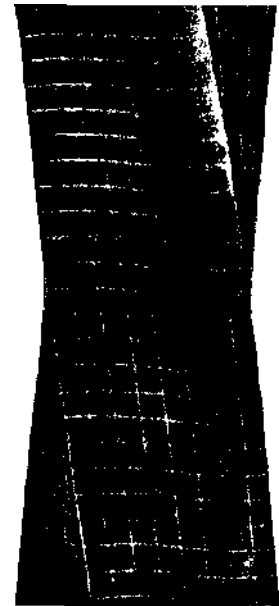
$$(p_t)_{\max} = \frac{M}{\mu b c^3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (46)$$

w której μ oznacza współczynnik liczbowy zależny jeszcze od stosunku $b:c$ boków prostokąta. Szereg wartości μ podaje poniżej tablica A , którą z wystarczającą dla praktyki dokładnością można zastąpić przybliżonym wzorem:

$$(p_t)_{\max} = (3b + 1,8c) \frac{M}{b^3 c^3}.$$



Rys. 80



Rys. 79

¹⁾ Wskazówki co do aparatów do pomiaru kąta skręcania znajdzie czytelnik w Z. d. V. d. Ing. 1914, str. 615.

²⁾ Znalazł je najpierw Barré de Saint-Venant; por. dodatek do § 156 kursu Navier'a: „La resistance des corps solides“, 1864.

TABLICA A.

$\frac{b}{c} =$	1	1,5	1,75	2	2,50	3	4	10	∞
$\mu =$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,312	0,333
$\alpha =$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,312	0,333
$\gamma =$	1	0,572	0,469	—	0,307	—	0,186	0,074	0

Do obliczenia kąta skręcenia φ służy wzór:

$$\varphi = \frac{Ml}{\alpha G b c^3} \quad (47)$$

Wartość współczynnika liczbowego α podaje również tablica A.

Niekiedy wypada obliczyć naprężenia styczne w innych jeszcze punktach obwodu przekroju prostokątnego. Do tego można użyć dalszych wyników liczbowych znalezionych przez de Saint-Venant'a. Naprężenie w punkcie odpowiadającym środkowi krótszego boku prostokąta otrzymamy przy pomocy trzeciego wiersza tablicy A, gdzie γ oznacza stosunek tego naprężenia do największego, określonego wzorem (46).

§ 44. SKRĘCANIE W PRZYPADKACH INNYCH POSTACI PRZEKROJU

De Saint-Venant rozwiązał zagadnienie skręcenia jeszcze dla wielu innych przekrojów, nie mających przeważnie dotąd zastosowania praktycznego. Dlatego poprzestaniemy na przedstawieniu teoretycznych wyników dla przypadku przekroju eliptycznego. Oznaczywszy odpowiednio przez $2a$ i $2b$ wielką i małą oś elipsy, mamy następujące wyrażenie dla kąta skręcenia:

$$\varphi = \frac{Ml(a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3} = \frac{4\pi^2 M l I_p}{F^2 G} \quad (48)$$

przyczem $F = ab\pi$ oznacza pole przekroju poprzecznego, a $I_p = \frac{\pi a^3 b}{4} + \frac{\pi a b^3}{4}$ biegunowy moment bezwładności elipsy,

t. j. całkę postaci $\int_{(F)} \rho^2 dF$. Największe naprężenia ścinające zachodzą na końcach osi małej. Ich wielkość określa formuła:

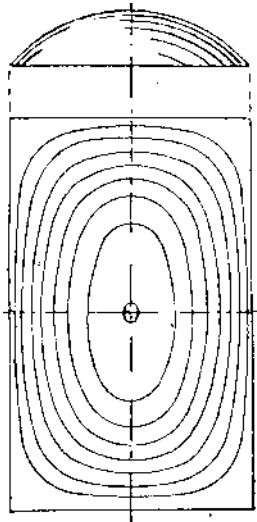
$$(p)_{\max} = \frac{2M}{\pi a b^2} \quad (49)$$

która dla $a = b$ przybiera postać wyprowadzoną powyżej dla przekroju kołowego.

Co się tyczy innych postaci przekroju poprzecznego, to zaznaczymy, że wyrażenie dla kąta skręcenia da się zawsze przedstawić w formie:

$$\varphi = \frac{Ml}{C}$$

C oznacza tutaj stałą zależną od sprężystych własności materiału, tudzież od rozmiarów i kształtu przekroju. Będziemy ją nazywać sztywnością skręcania. De S.-Venant okazał dla całego szeregu konturów, że można otrzymać dość dokładną wartość C , jeżeli dany przekrój zastąpić eliptycznym o równym polu i równym momencie bezwładności I_p . Dodać jednak trzeba ważny warunek, aby dany przekrój był pełny. Wtedy można się przeto posługiwać formułą (48). Dla przekrojów z otworami traci wzór de S. Venant'a zupełnie swą ważność.



Rys. 81

Przejrzysty obraz rozkładu naprężeń można otrzymać przy pomocy pewnej analogii, na którą zwrócił uwagę prof. Prandtl¹⁾. Jeżeli otwór o tym samym kształcie, co dany przekrój, nakryjemy cienką sprężystą błoną i obciążymy ją równomiernie rozłożonym ciśnieniem, to powierzchnia ugięcia błony posłuży do poznania prawa rozmieszczenia naprężeń stycznych w płaszczyźnie poprzecznego przekroju.

Przeciąwszy ową powierzchnię układem płaszczyzn równo odległych i równoległych do płaszczyzny konturu, otrzymujemy układ krzywych o własnościach następujących:

- 1) Styczna w dowolnym punkcie krzywej wskazuje kierunek naprężenia ścinającego w tymże punkcie.
- 2) Gęstość krzywych charakteryzująca nachylenie powierzchni błony jest proporcjonalna względem wielkości naprężeń stycznych.
- 3) Objętość V zawarta między płaszczyzną konturu a powierzchnią ugięcia jest proporcjonalna względem sztywności skręcenia pręta C , a mianowicie:

$$C = \frac{4GS}{p} V.$$

Tutaj oznacza S — napięcie błony odniesione do jednostki długości konturu, a p — ciśnienie wywarte na błonę. Te trzy twierdzenia umożliwiają oznaczenie rozkładu naprężeń przy najróżnorodniejszych konturach przekroju poprze-

¹⁾ Jahresb. d. deutschen Math.-Vereinigung. 1904, str. 32.

cznego¹⁾. Rys. (81) przedstawia układ krzywych określających w powyższy sposób stan odkształcenia błony, a zarazem stan napięcia w przekroju skręconego pręta, dla przypadku konturu prostokątnego. Widzimy tutaj największą gęstość krzywych w środku dłuższych boków, t. j. tam, gdzie zachodzą największe naprężenia ścinające; w wierzchołkach zaś te naprężenia znikają²⁾.

§ 45. ZASTOSOWANIA

Przy obliczeniu wałów występuje zwykle jako wielkość dana, nie moment skręcający M , lecz dzielnosc (moc) maszyny, t. j. praca przeniesiona przez wał w jednej sekundzie. Z tego można oznaczyć moment, jeżeli znamy ilość obrotów wału na minutę n . Wtedy bowiem robi wał w jednej sekundzie $\frac{n}{60}$ obrotów, czyli obraca się o kąt $\varphi = 2\pi \frac{n}{60}$, a zatem moment pary M wykonuje pracę $M\varphi = \frac{\pi}{30} Mn$. Jeżeli N oznacza dzielnosc maszyny w „koniach parowych“, to $75N$ będzie wyrażać dzielnosc w kgm/sek , a $75.100.N$ w $kgcm/sek$. Łącząc oba wyrażenia na pracę w równanie

$$\frac{\pi}{30} Mn = 7500 N,$$

znajdziemy stąd moment skręcający M , a wstawivszy jego wartość we wzór (45) otrzymamy:

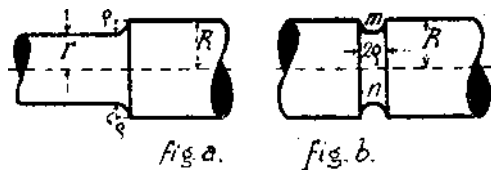
$$(p)_{\max} = \frac{7500 \cdot 30 \cdot N}{\frac{1}{2} \pi^2 n r^3} = \frac{N}{n} \cdot \frac{36 \cdot 10^5}{\pi^2 d^3} \quad (kg/cm^2).$$

Tutaj oznacza d średnicę obliczanego wału. Aby grubosc wału czynila zadosć warunkowi wytrzymałości, trzeba za $(p)_{\max}$ wstawić R_t i rozwiązać równanie względem d . Do obliczenia wałów narażonych wyłącznie na skręcanie posłuży przeto formuła:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{N}{n} \cdot \frac{36 \cdot 10^5}{\pi^2 R_t}} = \sim \sqrt[3]{\frac{N}{n} \cdot \frac{36 \cdot 10^4}{R_t}} \quad (50)$$

Co się tyczy wielkości naprężeń dopuszczalnych, to ona zależy w znacznej mierze od sposobu działania sił zewnętrznych i od stopnia zmienności momentu skręcającego. Stała wartość momentu jest w praktyce prawie wykluczona. Najczęściej zmienia się moment skręcający w dość obszernych granicach wskutek niejednostajności biegu maszyn i sił bezwładności kół osadzonych na wale. Tę kwestię rozpatrzemy szczegółowo w przedostatniej części, poświęconej zagadnieniom dynamiki. Tutaj zaznaczymy tylko, że naprężenia bezpieczne wypada obniżyć znacznie w przypadkach większej niejednostajności momentu skręcającego.

Oprócz przyczyn dynamicznych zniewalają do obniżenia naprężeń dopuszczalnych przy zastosowaniu rów. (50) także naprężenia dodatkowe (nadwyżki naprężeń) w miejscach zmiany grubości wału (rys. 83). W takich miejscach rozkład naprężeń, jakkolwiek oczywiście kołowo symetryczny, różni się znacznie od rozkładu znalezionego dla wału o stałym przekroju. Ta okolicznosc ma ważne znaczenie praktyczne, albowiem wały posiadają bardzo często miejscowe zmiany przekroju wedłu fig. (a) i (b), a wtedy wartość największych naprężeń zależy w wysokim stopniu od promienia ρ krzywej przejściowej, łączącej w osiowym przekroju obadwa przekroje wału. Prof. A. Föppl³⁾ zwrócił pierwszy uwagę na rolę krzywizny powierzchni wału w miejscu zmiany w przekroju i okazał, że w przypadku przedstawionym na fig. (a) pracuje przeważnie zewnętrzna część materiału. Obliczenie sprowadza się w przybliżeniu do oznaczenia naprężeń w wale wydrążonym, którego średnica zewnętrzna równa się $2r$, a grubosc ściany $1,5\rho$.



Rys. 83

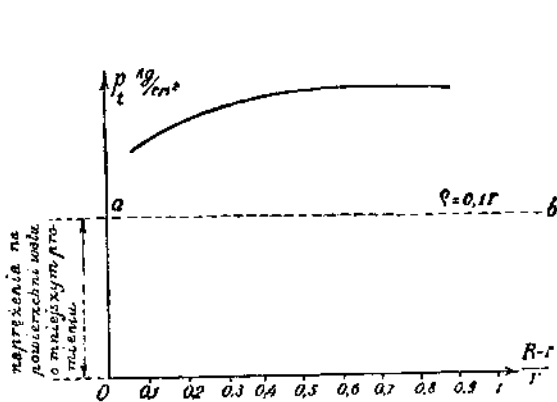
¹⁾ Ob. Anthes. Dinglers pol. Journal. 1906, str. 342.

²⁾ Wyznaczeniem naprężeń przy skręcaniu prętów rurowych zajmuje się cenna praca R. Bredt'a w Zeitschr. d. V. d. Ing. 1896, a nadto podręcznik H. Lorenza: „Technische Elastizitätslehre“ str. 101. Ob. także S. P. Timoszenko: „Teorja uprugosti“, cz. I, str. 162, wyd. z r. 1914.

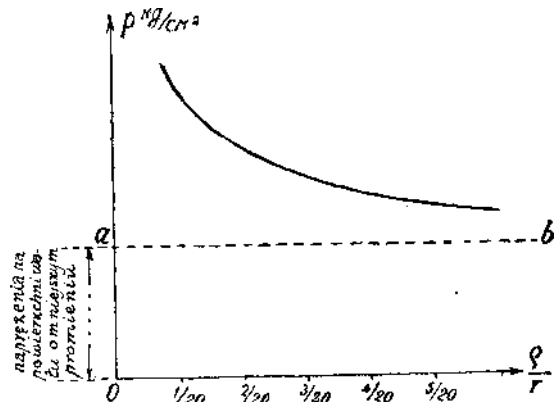
³⁾ Zeitsch. d. V. d. Ing. 1906, str. 1032.

Dalszem opracowaniem tego tematu zajął się Willers¹⁾, który przy pomocy metod wykreślnych, roztrząsnął cały szereg przypadków i podał sposób dokładniejszego obliczenia. Ograniczymy się do przytoczenia następujących wyników:

W przypadku przedstawionym na fig. (b) zachodzą największe naprężenia w miejscach *m* i *n*, gdzie promień wału jest równy $R - \rho$. Jeżeli ρ jest małe wobec R , to te naprężenia mają dwukrotną wartość naprężeń obliczonych dla wału o stałym przekroju według formuły (45). W przypadku przedstawionym na fig. (a) komplikuje się zadanie przez to, że wartość największych naprężeń zależy nie tylko od stosunku $R : r$, lecz także od promienia ρ krzywej przejściowej. Im ten promień jest mniejszy, tem gwałtowniejsze przejście od jednego przekroju wału do drugiego i tem większe powstaną nadwyżki naprężeń. Najistotniejsze wyniki przedstawiają diagramy na rys. (84) i (85). Pierwszy z nich odpowiada stałej wartości stosunku $\rho : r = 0,1$, a jego rzędne wyznaczają wartość największego naprężenia ścinającego w zależności od wartości



Rys. 84



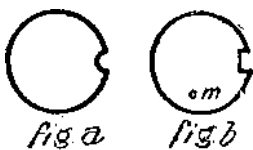
Rys. 85

stosunku $(R - r) : r$ odmierzonego na osi odciętych. Rzędne prostej *ab* przedstawiają wartość naprężenia na powierzchni cieńszej części wału w znacznej odległości od miejsca zmiany przekroju. Jak widać z rysunku, otrzymujemy tem większą nadwyżkę naprężenia, im większy jest promień R w porównaniu do r . Wielkość nadwyżki zbliża się przytem asymptotycznie do wartości odpowiadającej wałowi z krążkiem, gdy R staje się bardzo wielkiem wobec r . Drugi diagram odpowiada stałej wartości stosunku $r : R = 3 : 4$ i określa rzędne wartości największego naprężenia ścinającego w zależności od stosunku $\rho : r$. Jak należało oczekiwać, objawia się zmniejszenie promienia ρ powiększeniem nadwyżki naprężenia.

Na podstawie wykonanych obliczeń dochodzi Willers do wniosku, że przy używanych zwykle stosunkach przy przejściu z cieńszej do grubszej części wału można przyjąć dla największych naprężeń wartość równą 1,75 największego naprężenia w wale o stałym promieniu r , czyli rachować według wzoru

$$(p_t)_{\max} = 1,75 \frac{M}{\frac{1}{2} \pi r^3} = \frac{28}{\pi} \cdot \frac{M}{d^3} \quad (51)$$

Oprócz zmian grubości, mogą być przyczyną zwiększenia naprężeń w wałach podłużne wykroje, np. złobki na kliny i t. p. Teoretyczne badania wykazały²⁾, że w przypadku półokrągłego wykroju (rys. 86, fig. a) jest naprężenie na dnie



Rys. 86

złobka dwa razy większe od tego, któreby zachodziło na powierzchni wału bez złobka, pod warunkiem, że promień złobka jest mały w porównaniu do promienia wału. Jeżeli kontur złobka posiada kąty wklęsłe, jak np. w złobku prostokątnym na fig. (b), to naprężenia w wierzchołkach tych kątów rosną teoretycznie w nieskończoność. [Znaczy to praktycznie, że w tych miejscach znajdą odkształcenia trwałe, oczywiście na bardzo małym obszarze przekroju, już przy bardzo małych siłach zewnętrznych]. Podwyższenie naprężeń mogą także wywołać otwory podłużne, jakie się trafiają jako błędy w materiale. Nieskończenie mały otwór walcowy uzmysłowiony kółeczkiem *m* na rys. (86), fig. (b), wywołuje teoretycznie podwojenie wartości naprężeń w punkcie konturu leżącym najbliżej powierzchni wału, jeżeli otwór leży blisko tej powierzchni.

Wszystkie wyliczone przypadki podwyższenia naprężeń mają charakter czysto miejscowy i trudno by je było obserwować przy zwykłych próbach wytrzymałości prętów na skręcanie.

Jeżeli badamy doświadczalnie pręt z żelaza kowalnego, miękkiej stali, lub innego materiału zdolnego do znacznych odkształceń trwałych, to takie odkształcenia powstaną najpierw w owych miejscach, narażonych na lokalne nadwyżki naprężeń, wskutek czego przy dalszem zwiększaniu momentu skręcającego, będzie rozkład naprężeń w tych miejscach i w ich otoczeniu różnić się znacznie od teoretycznego. [Różnica polega mianowicie na bez porównania większej równomier-

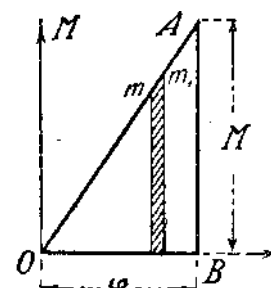
¹⁾ Zeitschr. f. Math. u. Ph. 1907, str. 325.
 Ob. także: A. Timpe, Math. Ann. T. 71, 1911, str. 480.
²⁾ Larmour: Phil. Mag. 1892, str. 76.
 G. Filon: Lond. Phil. Trans. 193 (1900), str. 309.

ności rzeczywistego rozkładu miejscowego od znalezionej drogą analityczną przy założeniu nieograniczonej ważności prawa Hooke'a]. Ta okoliczność wyjaśnia bardzo dobrze, dlaczego czynniki wywołujące miejscowe nadwężenia materiału nie mają dostrzegalnego wpływu na wielkość do-
 rażnej wytrzymałości przy skręcaniu prętów¹⁾. Aby nadwyżki naprężeń stwierdzić doświadczalnie, trzeba by używać prętów z materiału kruchego, np. ze szkła, albo wykonywać doświadczenia przy powtarzającym się obciążeniu²⁾. Przy zmiennych napięciach może w miejscach przeciążonych rozpocząć się zniszczenie spójności, jako objaw zużycia materiału. Ta ostatnia okoliczność ma szczególne znaczenie dla konstrukcji maszyn, gdzie mamy przeważnie do czynienia ze zmiennymi napięciami. [Tem też tłumaczy się częściowo, dlaczego przy zwykłych sposobach obliczenia przyjmuje praktyka znacznie mniejsze naprężenia dopuszczalne w konstrukcji maszyn, aniżeli w budowach inżynierskich].

§ 46. ENERGJA POTENCJALNA PRZY SKRĘCANIU

Jeżeli na swobodny koniec pręta utwierdzonego drugim końcem działa para skręcająca, której moment wzrasta w sposób ciągły, to siły pary wykonują podczas odkształcenia pręta pracę, zamieniającą się w energję potencjalną tego pręta. Dla wyznaczenia energii potencjalnej zastosujemy znowu (podobnie jak w § 4) wykreślne przedstawienie pracy. Na osi odciętych odmierzymy kąty skręcenia φ , a jako rzędne odpowiadające wartości momentu skręcającego. W ten sposób otrzymamy pochyłą prostą OA (rys. 87), przyjmując naturalnie, że przy odkształceniu nie przekraczają naprężenia nigdzie granicy proporcjonalności. Weźmy jakikolwiek chwilowy stan pręta, określony punktem m . Aby od tego punktu przejść do nieskończenie bliskiego m_1 , trzeba momentowi skręcającemu udzielić przyrostu dM , przyczem kąt skręcenia wzrośnie o $d\varphi$. Praca sił zewnętrznych przy obrocie o kąt $d\varphi$ przedstawi się polem zakreskowanego paska diagramu. Całkowitą zaś pracę sił wewnętrznych przy zmianie kąta skręcenia od O do φ wyznaczy pole trójkąta OAB , albo wyrażenie

$$\frac{M\varphi}{2}.$$



Rys. 87

Przy pomocy związku między M a φ można energję potencjalną wyrazić jako funkcję jednej lub drugiej z tych wielkości. Wstawivszy za φ wartość z (44) otrzymamy dla pręta okrągłego:

$$V = \frac{M^2 l}{2GI_p}, \quad \dots \quad (52)$$

zaś w zależności od φ przedstawi się energja potencjalna wyrażeniem:

$$V = \frac{GI_p}{2l} \varphi^2 \quad \dots \quad (53)$$

Dla dowolnej postaci przekroju poprzecznego mieliśmy

$$\varphi = \frac{Ml}{C},$$

a zatem energja skręcenia

$$V = \frac{1}{2} \frac{M^2 l}{C} \quad \dots \quad (54)$$

W poszczególnych przypadkach trzeba tylko wstawić odpowiednią wartość sztywności przy skręcaniu C .

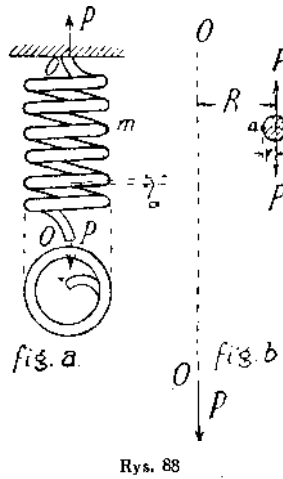
§ 47. OBLICZENIE SPRĘŻYN ŚRUBOWYCH

Przyjmijmy, że oba końce sprężyny O, O (rys. 88) leżą w osi walca, na którym zresztą tworzy oś (linja środkowa) sprężyny linję śrubową. Niechaj górny koniec będzie utwierdzony, a dolny obciążony siłą P . Przy obliczeniu chodzi nie tylko o wielkość naprężeń, lecz także o wydłużenie

¹⁾ H. Moore. Univ. of Illinois Bull. Vol. VII. 1909. Nr. 42.

²⁾ A. Föppel. Mitt. aus d. mech. Lab. München. Heft 31, 1909.

całej sprężyny pod wpływem danego obciążenia. Dla uproszczenia przyjmiemy, że kąt α , jaki tworzy styczna do linii śrubowej z poziomem jest tak mały, że siłę P można w przybliżeniu uważać za prostopadłą do tej stycznej¹⁾. Wówczas będzie każdy element długości drutu tworzącego sprężynę narażony głównie na skręcanie momentem $P \cdot R$, o czym się łatwo przekonać w sposób następujący: Przecinamy sprężynę w punkcie m płaszczyzną przechodzącą przez oś walca OO' i rozpatrujemy warunek równowagi górnej części. Aby zachować jej równowagę, trzeba na przekrój działać siłami zewnętrznymi, zastępującymi działanie na nią części odciętej. Na odciętej części dolnej sprężyny działa tylko siła P leżąca w płaszczyźnie poprowadzonego przekroju w odległości R od jego środka. Nie zmienimy warunków równowagi, jeżeli w środku przekroju umieścimy jeszcze dwie siły P (fig. b) znoszące się nawzajem, z których jedna jest geometrycznie równa danemu obciążeniu; wtedy działanie odciętej części na górną sprowadza się do siły P działającej na środek przeprowadzonego przekroju i do pary sił o momencie $P \cdot R$, działającej w płaszczyźnie w przybliżeniu prostopadłej do linii śrubowej, a więc do pary skręcającej. [O ile grubość $2r$ drutu, z którego sporządzono sprężynę, jest mała w porównaniu do promienia R , to para skręcająca wywoła w przekroju sprężyny prawie taki



Rys. 88

sam rozkład naprężeń ścinających, jak przy skręcaniu prostego pręta]. Co się tyczy siły P działającej na środek przekroju, to ona może wywołać tylko naprężenia ścinające, które dla uproszczenia będziemy w pierwszym przybliżeniu uważać za rozłożone równomiernie. Największe naprężenie wypadkowe znajdzie zatem w punkcie a i obliczymy je wzorem:

$$(\rho_t)_{\max} = \frac{PR}{\frac{1}{2}\pi r^3} + \frac{P}{\pi r^2} = \frac{P}{\pi r^3} \left(2\frac{R}{r} + 1 \right).$$

Ponieważ według zaznaczonego powyżej założenia jest $2R:r$ liczbą dość wielką, więc dodatek 1 po prawej stronie można wobec niej opuścić, czyli można pominąć wpływ siły ścinającej P wobec działania momentu skręcającego PR . Stąd formuła praktyczna do obliczenia wytrzymałości sprężyny:

$$(\rho_t)_{\max} \approx \frac{2PR}{\pi r^3}.$$

W podobny sposób można obliczyć sprężyny stożkowo-śrubowe²⁾. Kilka przykładów obliczenia znajdzie czytelnik w wydany przez autora zbiorze zadań³⁾.

Ażeby obliczyć wydłużenie sprężyny użyjemy wyrażenia dla energii potencjalnej, przyczem weźmiemy pod uwagę tylko odkształcenia wywołane skręceniem, inne bowiem grają tylko drugorzędą rolę. W takim razie możemy zastosować wzór (52), w którym za l trzeba podstawić długość drutu równą w przybliżeniu $n \cdot 2R\pi$, jeżeli n oznacza liczbę zwojów. A zatem

$$V = \frac{P^2 R^3 \cdot n \cdot 2\pi R}{2GI_p}.$$

Z drugiej strony jest praca odkształcenia, t. j. praca sił zewnętrznych równa $\frac{1}{2} P\lambda$, jeżeli λ oznacza całkowite wydłużenie sprężyny. Dopóki bowiem naprężenia nie przekroczą granic proporcjonalności, będą odkształcenia sprężyny wzrastać proporcjonalnie względem wielkości siły, a praca przedstawi się polem trójkątnego diagramu, podobnie jak w przypadkach rozciągania lub skręcania prostego pręta. Warunek równości pracy sił zewnętrznych i energii potencjalnej w przypadku odkształceń zupełnie sprężystych daje:

$$\frac{P\lambda}{2} = \pi \cdot \frac{P^2 R^3 n}{GI_p},$$

¹⁾ Doświadczalne sprawdzenie przybliżonych wzorów do obliczenia sprężyn śrubowych znajduje się w pracy Zacharias'a: „Untersuch. an zylindr. Schraubenfedern“. Mitt. u. Forschungsarb. Heft 106.

²⁾ Ob. V. Meyer. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1900, str. 1791, a także Engineering, 1912, str. 207.

³⁾ S. P. Timoszenko: „Sbornik zadacz“. Wyd. 3-cie 1915.

z czego znajdziemy:

$$\lambda = \rho \cdot \frac{4nR^3}{Gr^4} \dots \dots \dots (55)$$

Podobnie można znaleźć wzory dla sprężyn o przekroju prostokątnym lub kwadratowym, postępując się ogólną formułą (54). Po sporządzeniu podlegają sprężyny zwykle hartowaniu, a ponieważ hartowana stal posiada bardzo wysoką granicę proporcjonalności, więc normy naprężeń bezpiecznych dla sprężyn są bardzo wysokie: R_t waha się w granicach 4000 do 8000 kg/cm^2 .

CZĘŚĆ III

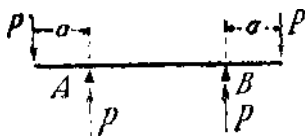
ZGINANIE PROSTYCH PRĘTÓW¹⁾

ROZDZIAŁ VIII

WEWNĘTRZNE SIŁY SPRĘŻYSTOŚCI PRZY ZGINANIU PRĘTÓW PRYZMATYCZNYCH

§ 54. POJĘCIE ZGINANIA

Zjawisko zginania charakteryzuje się wogóle tem, że przekroje poprzeczne pręta prostego, pierwotnie równoległe, nachylają się względem siebie, przyczem oś pręta się zakrzywia. Dla wyznaczenia wewnętrznych sił sprężystości przy zginaniu, zastosujemy poprzednią metodę. Rozcinamy zginany pręt na dwie części i rozpatrujemy równowagę jednej z nich. Działanie drugiej części na część rozpatrywaną zastępujemy przytem siłami wewnętrznymi rozłożonemi w poprowadzonym przekroju w sposób ciągły. W przypadku rozciągania sprowadzały się te siły do wypadkowej działającej wzdłuż osi pręta. Przy ścinaniu sprowadzały się do siły leżącej w płaszczyźnie przekroju. Przy rozpatrywaniu skręcania sprowadzaliśmy wszystkie siły wewnętrzne działające w płaszczyźnie przekroju do pary sił leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta. Przy badaniu zginania otrzymujemy wogóle złożony układ sił, lecz na razie ograniczymy się do prostszego przypadku „czystego zginania“, w którym siły wewnętrzne, działające na przekrój jakiegokolwiek odciętej części pręta, sprowadzają się do pary leżącej w płaszczyźnie osi pręta, a więc prostopadłej do przekroju. Siły zewnętrzne działające na część odciętą sprowadzają się wówczas również do takiejże pary. Taki przypadek bardzo łatwo zrealizować w sposób przedstawiony na rys. (104). Belka wystająca



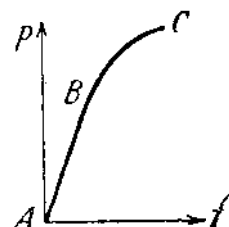
Rys. 104

poza podpory A i B jest obciążona symetrycznie na końcach siłami P . Wtedy już z warunku symetrii wynika, że reakcje podpór są także równe P . Dla jakiegokolwiek przekroju leżącego między podporami tworzą siły zewnętrzne odciętej części parę o momencie równym Pa . Możemy jeszcze uprościć nasze zadanie, zakładając symetrię przekroju względem płaszczyzny rysunku, która jest zarazem płaszczyzną obciążenia. W takich warunkach zajdzie zgięcie w tejże płaszczyźnie, a siły wewnętrzne w przekroju poprzecznym sprowadzą się do pary leżącej w tej płaszczyźnie. Co się tyczy prawa rozkładu naprężeń w przekroju, to kwestja ta nie da się rozwiązać przy pomocy samej statyki, do tego potrzeba pewnych uzupełniających założeń, opartych po części na doświadczeniu, a po części na pewnych przypuszczeniach. Słuszność przypuszczeń wynika z tego, że doświadczenie potwierdza osnute na nich wywody. Te przypuszczenia stwierdzono także ścisłemi badaniami teoretycznemi, podawanemi w wykładach teorii sprężystości.

¹⁾ W tej części opuszczono w przykładzie rozdział VII, traktujący o momentach bezwładności figur płaskich, ponieważ te rzeczy można znaleźć w książkach poświęconych statyce wykreślnej, lub mechanice ogólnej.

§ 55. DANE DOŚWIADCZALNE

Przy doświadczalnym badaniu zgięcia można obserwować przesunięcia poszczególnych punktów pręta (ich ugięcia) i odkształcenia oddzielnych elementów. Przy obserwacji ugięć przedstawia się ich zależność od wielkości sił zewnętrznych najdogodniej wykreślić. Odmierzając na osi odciętych wielkości ugięcia f , a na osi rzędnych odpowiadające wartości sił zginających P , znajdziemy, że dla materiałów podlegających prawu Hooke'a zachodzi w pewnych granicach zależność linjowa między f i P . Diagramem będzie wtedy odcinek prostej AB (rys. 105) nachylonej do osi współrzędnych. Przy dalszym wzroście sił powstają odkształcenia trwałe i linja diagramu zakrzywi się wypukłością do góry. Podobnie jak przy rozciąganiu można tutaj zauważyć zjawisko podwyższenia granicy proporcjonalności i wpływ powtarzających się obciążeń.



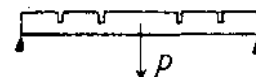
Rys. 105

Co się tyczy odkształceń poszczególnych elementów zginanego pręta, czyli belki, to widać odrazu, że po stronie wypukłej są elementy narażone na rozciąganie, a po stronie wklęsłej na ściskanie (rys. 106). To całkiem oczywiste założenie nie odrazu weszło do teorii zgięcia. Sławny Galileusz, fundator nauki



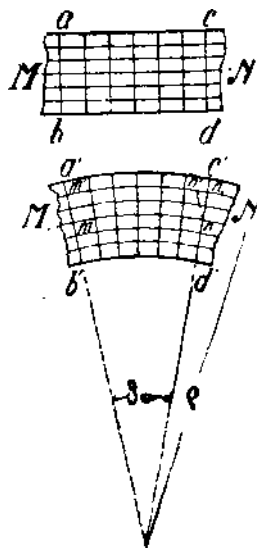
Rys. 106

o wytrzymałości materiałów¹⁾, nie zwracał wcale uwagi przy badaniu zgięcia na zmianę postaci belki i rozpatrywał ją jako ciało idealnie sztywne. Następni badacze zauważyli, że elementy po stronie wypukłej belki są rozciągane, a dopiero znacznie później przekonano się o ścisaniu elementów po stronie wklęsłej. Rozstrzygające znaczenie miało w tym kierunku doświadczenie wykonane przez Duhamel'a. W tym doświadczeniu obciążono środek drewnianej belki, podpartej w obu końcach (rys. 107), siłą P . Górną część belki naderżnięto



Rys. 107

w kilku miejscach piłą do połowy jej grubości i szpary w ten sposób utworzone wypełniono przylegającymi szczelnie deszczułkami. Jeżeliby oddzielne włókna zginanej belki były narażone tylko na rozciąganie, to taka operacja osłabiłaby znacznie belkę, która wytrzymałaby zatem o wiele mniejsze obciążenie, niż belka cała. Jeżeli zaś w górnej części belki zachodzi ściskanie włókien, to szczelne wypełnienie naderżnięć powinno znieść ich wpływ na zmniejszenie wytrzymałości przy zginaniu, co właśnie potwierdziły doświadczenia Duhamel'a.



Rys. 108

Nasuwa się teraz kwestja rozkładu naprężeń na wysokości belki. Skoro belkę o przekroju poprzecznym prostokątnym opatrzymy na bocznych ścianach prostokątną siatką (rys. 108) i obciążymy w sposób przedstawiony na rys. (104), t. j. narazimy na czyste zginanie, to po zgięciu można dostrzec, że proste ab i cd , pierwotnie prostopadłe do osi belki, pozostają prostymi i prostopadłymi do zgiętej osi. Elementarne prostokąty siatki skrzywiają się, ale ich kąty wierzchołkowe pozostają proste. Jeżeli zrobimy bardzo prawdopodobne przypuszczenie, że takie same odkształcenia zachodzą i wewnątrz belki, to przekroje poprzeczne pozostają przy odkształceniu płaskimi, a zgięcie belki polega na tem, że każdy przekrój obraca się względem sąsiedniego o pewien kąt elementarny $\delta\alpha$. Ponieważ górne włókna są rozciągane a dolne ścisane, więc musi między nimi leżeć warstwa pierwotnie płaska i pozioma, której włókna nie zmieniają swej długości. Nazywamy ją warstwą obojętną. Ślad tej warstwy na płaszczyźnie rysunku naznaczono linią MN . Powyższe przyjęcia wystarczają do ustawienia prawa rozkładu naprężeń w przekrojach poprzecznych belki. Niech będzie ρ promieniem krzywizny linii MN , a ds wzajemną odległością przekrojów ab i cd przed zgięciem. Zważywszy, że długość ds odpowiednich części włókien warstwy obojętnej nie zmienia się wskutek zginania, możemy napisać

$$ds = \rho d\alpha.$$

¹⁾ W przedmowie do dzieła Navier'a „Résumé des leçons sur la résistance des corps solides“, Paris 1864, umieścił de S.-Venant interesujący szkic historyczny rozwoju nauki o wytrzymałości materiałów.

Długości odcinków innych włókien leżących między obranemi przekrojami zamieniają się widocznie na długości proporcjonalne względem odległości od środka krzywizny. Oznaczmy zmianę długości włókna przez Δds , a odległość włókna od warstwy obojętnej przez z (obiedwie wielkości będziemy pojmować jako algebraiczne). Po zgięciu będzie $\rho + z$ odległością włókna o długości $ds + \Delta ds$ od środka krzywizny, a zatem

$$\frac{ds + \Delta ds}{ds} = \frac{\rho + z}{\rho},$$

czyli

$$e = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{z}{\rho} \quad (61)$$

Ten wynik wyraża, że względne wydłużenia włókien są proporcjonalne względem ich odległości od warstwy obojętnej. Największych zatem wydłużeń doznają włókna skrajne, t. zn. najbardziej oddalone od warstwy obojętnej. Mierząc te wydłużenia podczas doświadczenia możemy oczywiście oznaczyć położenie warstwy obojętnej. W naszym przypadku wykazały liczne doświadczenia, że warstwa obojętna leży w połowie wysokości prostokątnego przekroju belki. [Przekonamy się niebawem, że ten wynik jest konsekwencją linowego rozkładu wydłużeń, prawa Hooke'a i warunków równowagi].

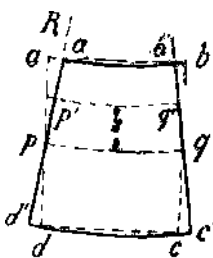
Wydłużeniom i skróceniom włókien zginanej belki muszą widocznie towarzyszyć linowe odkształcenia poprzeczne. Najoczywistszem jest to dla włókien leżących na powierzchni belki, na którą żadne siły zewnętrzne nie działają. Rozszerzenia, względnie skurczenia poprzeczne włókien będą, jak wiadomo z § (5), równe $\sigma \cdot e$, jeżeli σ oznacza liczbę Poisson'a. Rozdzielwszy w myśli belkę na poprzeczne włókna poziome, widzimy, że takie włókna doznają powyżej warstwy obojętnej skróceń, a poniżej wydłużeń. Gdyby włókna podłużne nie przeszkadzały sobie wzajemnie przy odkształceniu poprzecznym, co zajdzie niewątpliwie w przypadku przekroju bardzo wąskiego w stosunku do wysokości, to odkształcenia poprzeczne byłyby również proporcjonalne względem odległości od warstwy obojętnej i przedstawiałyby się wyrażeniem

$$e' = \sigma e = \sigma \frac{z}{\rho} \quad (61a)$$

Wówczas powstałoby niejako zgięcie przekroju poprzecznego do krzywizny o bezwzględnej wartości $\frac{1}{\rho'} = \sigma \cdot \frac{1}{\rho}$, a o kierunku promienia wprost przeciwnym kierunkowi promienia krzywizny zgiętej osi pręta. Górna powierzchnia belki byłaby poprzecznie wklęsła, a dolna wypukła (rys. 109).

Doświadczenia okazały, że takie odkształcenie zachodzi istotnie nawet przy stosunkowo znacznej szerokości przekroju prostokątnego¹⁾. Gołym okiem można je dostrzec przy zginaniu prętów z miękkiego kauczuku. U belek metalowych można wyznaczyć poprzeczne zgięcie przekroju (w jego płaszczyźnie) przy pomocy dokładnych aparatów zwierciadełkowych.

[Z tego doświadczalnego faktu możemy wysnuć wniosek, że podłużne włókna belki nie wywierają na siebie nawzajem żadnego uw. gi godnego działania przy czystym zgięciu. To jednak będzie prawdziwem o tyle, o ile szerokość przekroju nie jest zbyt wielka w porównaniu do jego wysokości. Wogóle nie trudno się przekonać, przy pomocy geometrycznych rozważań, że związek (61a) jest w przypadku większych odkształceń tylko mniej lub więcej przybliżony. W samej rzeczy poprzeczne zakrzywienie warstwy środkowej, którą nazwaliśmy warstwą obojętną, nie jest możliwe bez jednoczesnych odkształceń podłużnych tej warstwy i, co zatem idzie, bez naprężeń podłużnych. Te naprężenia musiałyby być w punktach p i q (rys. 109) ciągnieniami, gdyż promień krzywizny odpowiednich włókien podłużnych jest widocznie nieco większy od promienia włókna środkowego (przy założeniu zgięcia głównego wypukłością do góry), które wskutek tego byłoby nawzajem podłużnie ściśnięte. To nie może pozostać bez wpływu na zależność e' od z , ale ten wpływ będzie tak długo znikomo mały, dopóki szerokość prostokątnego przekroju jest mała w porównaniu do promieni krzywizny, przy tej samej wysokości, albo dopóki szerokość przekroju nie jest wielka wobec jego wysokości. Łatwo to zrozumieć biorąc pod uwagę przypadek skrajny bardzo wielkiej szerokości. Wyobraźmy sobie np. czyste zginanie prostokątnego kawałka blachy. Wtedy można gołym okiem dostrzec zakrzywienie w płaszczyźnie zginania, natomiast zakrzywienie poprzeczne jest zgoła niewidoczne, i dopiero przy użyciu subtelnych aparatów dałoby się stwierdzić na brzegach blachy. Przeważająca część środkowa blachy nie bierze udziału w poprzecznym zakrzywieniu i przybiera postać pobocznicy walca].



Rys. 109

¹⁾ Cornu. C. R. 1869, T. 64, str. 333.

§ 56. O NAPRĘŻENIACH W PRZYPADKU CZYSTEGO ZGINANIA

Wskutek przyjęcia, że poprzeczne przekroje pręta pozostają płaskimi, a włókna podłużne nie uciskają siebie nawzajem, sprowadza się zjawisko czystego zginania do rozciągania i ściskania włókien belki. Mając we wzorze (61) wyrażenie dla wydłużenia względnego, otrzymamy zaraz odpowiadające naprężenie p_z , mnożąc je przez moduł sprężystości E . A zatem

$$p_z = E \frac{z}{\rho} \quad (62)$$



Rys. 110

To równanie wyraża linjowe prawo rozkładu naprężeń w przekroju i przedstawia się wykreslnie diagramem złożonym

z dwu trójkątów (rys. 110). Zauważymy przytem, że dodatnie wartości z rachujemy od warstwy obojętnej w kierunku od środka krzywizny.

Otrzymaawszy prawo rozkładu naprężeń, oznaczymy ich wielkość przy pomocy równań statyki. Niechaj rys. (111) przedstawia jeden z poprzecznych przekrojów belki. Obierzmy środek ciężkości przekroju za początek prostokątnego układu współrzędnych, którego oś X-ów jest osią belki, a oś Z-ów leży w płaszczyźnie pary zginającej (płaszczyźnie obciążenia). Według czynionego powyżej założenia będzie oś Z osią symetrii przekroju, a zatem płaszczyzna XZ będzie płaszczyzną symetrii belki. Ze symetrii wnosimy, że ta płaszczyzna będzie zarazem płaszczyzną zginania, a przeto ślad

warstwy obojętnej na płaszczyźnie rysunku, który nazwiemy osią obojętną, musi być równoległy do osi Y. Siły zewnętrzne, działające na rozpatrywaną część belki, sprowadzają się do pary sił, leżącej w płaszczyźnie ZX. Dla równowagi trzeba, aby siły wewnętrzne w poprowadzonym przekroju sprowadzały się także do pary o momencie tej samej wielkości, lecz przeciwnego znaku. Jeżeli dF oznacza element pola przekroju poprzecznego, to przypadające nań naprężenie przedstawi wyrażenie:

$$p_z dF = E \frac{z}{\rho} dF,$$

a rzutując wszystkie naprężenia na osie współrzędnych, otrzymamy

$$X = \int p_z dF = \frac{E}{\rho} \int z dF, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Ażeby naprężenia w płaszczyźnie poprzecznego przekroju sprowadzały się do pary sił musi być

$$\int z dF = 0;$$

a zatem, przyjmąwszy hipotezę płaskich przekrojów, doszliśmy z warunków równowagi do wniosku, że oś obojętna przechodzi przez środek ciężkości przekroju. Ten wynik stwierdzono doświadczeniami¹⁾.

Dowiedziemy teraz, że para wypadkowa napięć w przekroju leży w płaszczyźnie ZX, czyli, że ich momenty względem osi X i Z są równe zero. Otóż moment pary wypadkowej względem osi X jest równy zero, ponieważ wszystkie napięcia są do tej osi równoległe. Dla oznaczenia momentów względem osi Z-ów, trzeba każde napięcie elementarne $E \frac{z}{\rho} dF$ pomnożyć przez odpowiadające ramię y i zesumować otrzymane iloczyny elementarne. Szukanym momentem będzie tedy:

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int z y dF = \frac{E I_{zy}}{\rho}.$$

Ale oś Z jest według założenia osią symetrii przekroju, a zatem osie Y i Z są głównymi osiami bezwładności, a $I_{zy} = 0$. Wskutek tego znika widocznie i ogólny moment napięć względem

¹⁾ [Oczywiście w granicach ważności prawa Hooke'a; poza temi granicami wychodzi oś obojętna ze środka przekroju, a wielkość i kierunek jej przesunięcia zależą od postaci przekroju i od diagramu wydłużeń materiału].

osi Z -ów. W ten sposób okazaliśmy, że siły wewnętrzne sprowadzają się do pary leżącej w płaszczyźnie ZX działania sił zewnętrznych.

Zanim przejdziemy do wyznaczenia naprężeń, uogólnimy nieco nasz dowód. Dotychczas wychodziliśmy dla prostoty z założenia, że oś Z -ów jest osią symetrii poprzecznego przekroju belki. To nam pozwoliło wywnioskować, że płaszczyzna zginania schodzi się z płaszczyzną działania sił, że zatem oś obojętna OY jest prostopadła do tej płaszczyzny. Otóż warunek prostopadłości osi obojętnej do płaszczyzny działania sił spełnia się i w ogólniejszym przypadku zgięcia. Jak bowiem łatwo zauważyć, stosowaliśmy w poprzednim wywodzie warunek symetrii tylko raz, a mianowicie przy obliczeniu momentu M_z i dowiedliśmy, że ten moment równa się zero, ponieważ $I_{yz} = 0$. Ale moment odśrodkowy I_{yz} staje się zerem nie tylko dla przekrojów symetrycznych, lecz także dla przekrojów o dowolnej postaci, jeżeli tylko osie Y i Z są głównymi osiami bezwładności przekroju. Z tego wynika, że przy działaniu par zginających w płaszczyźnie ZX , przechodzącej przez jedną z głównych osi bezwładności przekroju poprzecznego, będzie druga oś główna służyć jako oś obojętna, ponieważ tylko pod tym warunkiem mogą wewnętrzne siły sprężystości zrównoważyć parę sił zewnętrznych o momencie M .

Płaszczyzny, przechodzące przez oś belki i jedną z głównych osi bezwładności przekroju poprzecznego, będziemy nazywać płaszczyznami głównymi. (W dalszym ciągu przyjmujemy zawsze, że kierunek głównych osi nie zmienia się wzdłuż belki). Na podstawie powyższych wywodów możemy wystawić twierdzenie następujące:

Przy działaniu par zginających w jednej z głównych płaszczyzn belki, zachodzi zgięcie w tejże płaszczyźnie.

Ten przypadek zginania jest praktycznie najważniejszy. Ogólniejszy przypadek, w którym płaszczyzna par zginających jest nachylona do płaszczyzn głównych, rozpatrzemy poniżej.

Do wyznaczenia naprężeń p_z posłuży drugi rodzaj warunków równowagi, t. j. warunek momentów. Jeżeli oś obojętną (oś Y -ów) obierzemy za oś momentów, to ogólny moment sił zginających względem tej osi równa się oczywiście momentowi pary M , zaś sumą algebraiczną momentów sił wewnętrznych $p_z dF$ będzie $\int z p_z dF$. Wstawivszy za p_z wartość z rów. (62) i przyrównawszy otrzymane wyrażenie do M znajdziemy

$$\frac{E}{\rho} \int z^2 dF = M,$$

albo, ponieważ całka po lewej stronie określa geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi Y , który oznaczymy przez I_y , więc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_y} \quad \dots \quad (63)$$

Ta formuła pozwala z danej wartości M i rozmiarów belki obliczyć ρ . Krzywizna $\frac{1}{\rho}$ jest odwrotnie proporcjonalna względem iloczynu EI_y . Wielkości EI_y i EI_z będziemy w dalszym ciągu nazywać głównymi sztywnościami belki i oznaczać odpowiednio przez B_y i B_z . Znając krzywiznę, możemy obliczyć naprężenie w dowolnym włóknie, odległym o z od osi obojętnej, za pomocą rów. (62), które po wstawieniu wartości ρ z (63) przybierze postać:

$$p_z = \frac{Mz}{I_y} \quad \dots \quad (64)$$

Krańcowe wartości naprężeń zajdą oczywiście we włóknach najbardziej oddalonych od osi obojętnej, czyli krótko we włóknach skrajnych. Oznaczywszy przez h_1 i h_2 odległości włókien skrajnych od osi obojętnej (rys. 111) otrzymamy:

$$p_{\max} = \frac{Mh_1}{I_y}, \quad p_{\min} = -\frac{Mh_2}{I_y} \quad \dots \quad (65)$$

Każdą z dwu czysto geometrycznych wielkości

$$\frac{I_y}{h_1} = W_1 \quad \text{i} \quad \frac{I_y}{h_2} = W_2$$

nazwiemy modułem przekroju ¹⁾). Naprężenia skrajne będą równe, jeżeli $h_1 = h_2$, a więc i $W_1 = W_2 = W$. Przekroje czyniące zadość temu warunkowi będą najodpowiedniejsze dla belek z materiałów o równej wytrzymałości przy rozciąganiu i przy ściskaniu. Wogóle możemy napisać zamiast (65)

$$\rho_{\max} = \frac{M}{W} \quad \dots \quad (66)$$

gdyż to równanie pozwala obliczyć każde z dwu naprężeń krańcowych, jeżeli znamy odpowiadającą wartość modułu przekroju W .

§ 57. ZGIĘCIE UKOŚNE

Zgięcie nazywamy ukośnem, gdy płaszczyzna pary zginającej nie jest zarazem płaszczyzną główną belki. Okażemy przedewszystkiem, że wtedy płaszczyzna zgięcia nie będzie się schodzić z płaszczyzną działania sił i że wskutek tego oś obojętna nie będzie prostopadłą do płaszczyzny obciążenia.

Niechaj rys. (112) przedstawia poprzeczny przekrój belki, na którym układ współrzędnych YZ odpowiada głównym centralnym osiom bezwładności przekroju. UU niech będzie śladem płaszczyzny pary zginającej. Przypuśćmy, że i w danym przypadku płaszczyzna zgięcia schodzi się z płaszczyzną działania sił, a wtedy osią obojętną byłaby prosta VV prostopadła do UU . Gdyby to przyjęcie było słuszne, to odpowiadające wewnętrzne siły sprężystości sprowadziłyby się do pary sił, leżącej w płaszczyźnie UU , a ich moment względem UU powinienby być równym zeru. Znajdziemy wyrażenie dla tego momentu M_u .

Na podstawie formuły (62) będzie napięcie, przypadające na element pola dF , położony w odległości u od osi obojętnej VV , równe

$$E \frac{u}{\rho} dF.$$

Dla obliczenia momentu M_u trzeba każde napięcie elementarne pomnożyć przez odpowiadające ramię v i następnie otrzymane iloczyny zesumować. A zatem:

$$M_u = \frac{E}{\rho} \int u v dF = \frac{E}{\rho} I_{uv}.$$

Otóż ta wielkość nie staje się zerem, ponieważ osie U i V nie są, według założenia, głównymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego (ob. § 50). Nasze przypuszczenie, że oś obojętna jest prostopadłą do płaszczyzny działania sił, nie odpowiada przeto rzeczywistości.

Oznaczmy przez α kąt, jaki tworzy oś obojętna nn z osią Y (rys. 113), a przez φ kąt między UU (płaszczyzną pary zginającej) i osią Z . Niechaj kierunek momentu zginającego będzie taki, że po prawej stronie nn powstają w przekroju ciśnienia, a po lewej ciągnienia. Moment pary zginającej M , przedstawiony na rysunku wektorem Ok , prostopadłym do płaszczyzny UU , da się rozłożyć na składowe:

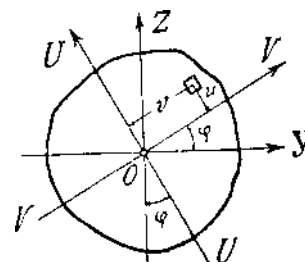
$$M_z = M \sin \varphi; \quad M_y = M \cos \varphi.$$

Te składowe działają w płaszczyznach XY i XZ , które są głównymi płaszczyznami zginanej belki; naprężenia wywołane przez M_y i M_z można zatem obliczyć według formuły (64) poprzedniego paragrafu. Całkowite naprężenie w jakimkolwiek punkcie przekroju znajdziemy, sumując naprężenia, obliczone oddzielnie dla M_y i M_z . Przy tem sumowaniu trzeba oczywiście uwzględnić i znak naprężenia. Z naszego założenia co do kierunku momentu M wynika, że M_y wywołuje ciągnienia w I i II ćwiartce przekroju, a ciśnienia w III i IV ćwiartce. Moment zaś M_z wywołuje w II i III ćwiartce ciągnienia, a w I i IV ciśnienia. Całkowite naprężenie w dowolnym punkcie M o współrzędnych y i z będzie przeto równe:

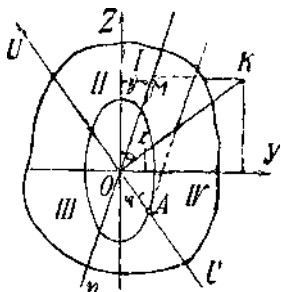
$$\frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = M \left(\frac{z \cos \varphi}{I_y} - \frac{y \sin \varphi}{I_z} \right).$$

To naprężenie jest liniową funkcją współrzędnych punktu.

¹⁾ Używają też niezbyt szczęśliwej nazwy: „moment oporu“.



Rys. 112



Rys. 113

Jeżeli w każdym punkcie przekroju przedstawić naprężenie wektorem, oczywiście prostopadłym do płaszczyzny przekroju, to końce tych wektorów będą leżeć w jednej płaszczyźnie. Linja przecięcia tej płaszczyzny z płaszczyzną przekroju poprzecznego będzie osią obojętną, albowiem w tej linii są naprężenia równe zeru. Równanie osi obojętnej otrzymamy, przyrównując powyższe wyrażenie dla naprężeń do zera, czyli:

$$\frac{z \cos \varphi}{I_y} - \frac{y \sin \varphi}{I_z} = 0 \quad (67)$$

Kąt nachylenia tej prostej względem osi Y wyznaczy równanie:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z}{y} = \frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \varphi \quad (68)$$

Gdy w szczególności

$$I_y = I_z,$$

t. j. gdy elipsa bezwładności staje się kołem, a każdą parę osi wzajemnie prostopadłych można uważać za osi główne, to

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi,$$

czyli płaszczyzna zgięcia schodzi się z płaszczyzną zginającej pary.

Przy pomocy elipsy bezwładności można znaleźć łatwą konstrukcję osi obojętnej. Niech będzie

$$I_y = F r_y^2; \quad I_z = F r_z^2;$$

przyczem r_y i r_z oznaczają główne promienie bezwładności przekroju poprzecznego. Rów. (68) da się teraz napisać w postaci

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_y^2}{r_z^2} \operatorname{tg} \varphi \quad (68)'$$

Napiszmy jeszcze równanie stycznej do elipsy bezwładności w dowolnym punkcie y_0, z_0 tej elipsy, a mianowicie:

$$\frac{y y_0}{r_z^2} + \frac{z z_0}{r_y^2} = 1.$$

Tangens kąta nachylenia tej stycznej do osi Y równa się

$$-\frac{y_0}{z_0} \cdot \frac{r_y^2}{r_z^2}.$$

Jeżeli punkt $y_0 z_0$ obierzemy w miejscu przecięcia się prostej UU z elipsą bezwładności, to

$$\frac{y_0}{z_0} = -\operatorname{tg} \varphi,$$

a tang. kąta nachylenia stycznej do elipsy w tym punkcie równa się

$$\frac{r_y^2}{r_z^2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Porównawszy ten wynik z wyrażeniem dla $\operatorname{tg} \alpha$ w formule (68)', widzimy, że oś obojętna jest równoległa do stycznej, poprowadzonej w punkcie przecięcia się płaszczyzny pary zginającej z elipsą bezwładności przekroju. Możemy to wyrazić jeszcze w sposób następujący:

Kierunek płaszczyzny pary zginającej i kierunek odpowiadającej osi obojętnej są kierunkami sprzężonymi względem centralnej elipsy bezwładności przekroju.

To twierdzenie, znalezione jednocześnie przez Bresse'a i de Saint-Venant'a, pozwala wyznaczyć wykreślnie kierunek osi obojętnej z wielką łatwością. Z rys. (113) widać dobrze, że im większa różnica obu promieni bezwładności, tem bardziej zbliża się płaszczyzna zgięcia do płaszczyzny najmniejszej sztywności belki. Co się tyczy największych naprężeń rozciągających i ściskających, to oczywiście znajdą one w punktach najbardziej oddalonych od osi obojętnej.

[Przy nieco zawilszej postaci przekroju najdogodniej znaleźć te punkty drogą wykreślną. Dla przekroju prostokątnego np. leżą punkty największych naprężeń zawsze w wierzchołkach prostokąta.]

Wielkość naprężeń wyznaczamy, sumując naprężenia wywołane każdym z momentów składowych M_y i M_z z osobna.

§ 58. ZGINANIE BELKI SIŁAMI PROSTOPADŁEMI DO OSI

Zatrzymamy się teraz na przypadku najczęściej spotykanym, w którym siły zginające leżą w jednej z głównych płaszczyzn belki. Niechaj rys. (114) przedstawia układ sił w równowadze P_1, P_2, \dots, P_3 , działających na belkę AB . Poprowadźmy dowolny przekrój poprzeczny ab i rozpatrzmy warunki równowagi jednej części belki, np. prawej. Aby zachować jej równowagę, trzeba na przekrój ab działać naprężeniami, zastępującymi wpływ odrzuconej części na część rozpatrywaną. Te naprężenia tworzą oczywiście układ równoważny układowi sił zewnętrznych P_1, P_2 i P_3 , działających na odrzuconą lewą część belki. Można je sprowadzić do jednej siły pionowej Q działającej w środku przekroju ab i do pary sił o momencie M . Siła Q jest według prawideł statyki równa sumie algebraicznej sił danych, t. j.

$$Q = P_1 - P_2 - P_3,$$

a moment pary równa się sumie algebraicznej momentów sił działających na część odciętą względem środka przekroju, czyli

$$M = P_1 l_1 - P_2 l_2 - P_3 l_3.$$

Za dodatni kierunek siły będziemy przytem uważać taki, przy którym siła dąży do przesunięcia lewej części belki z dołu do góry. Kierunek momentów zaś przyjmujemy jako dodatni, jeżeli dąży do obrotu lewej części belki w kierunku wskazówki zegara. Siłę Q nazywamy siłą poprzeczną albo ścinającą, wielkość M zaś momentem zginającym. [A zatem: Siła poprzeczna Q , działająca w pewnym przekroju belki jest geometrycznie równa wypadkowej wszystkich sił zewnętrznych, działających na lewą część belki odciętą danym przekrojem. Moment zginający M w danym przekroju belki jest sumą algebraiczną momentów wszystkich sił zewnętrznych, działających na lewą część belki odciętą owym przekrojem, względem środka tego przekroju].

Gdybyśmy zredukowali w ten sam sposób siły działające na prawą część belki, to otrzymalibyśmy widocznie siłę Q' i parę M' , tej samej wielkości co Q i M , ale przeciwnego kierunku, gdyż wszystkie siły działające na prawą i lewą część muszą czynić zadość warunkom równowagi, czyli $Q + Q' = 0$ i $M + M' = 0$. Często okaże się dogodniejszym obliczenie dla części prawej niż dla lewej, ażeby więc nie popaść w sprzeczność, trzeba przy obliczeniu dla prawej części trzymać się odwrotnej umowy co do znaków.

Siły wewnętrzne w rozpatrywanym przekroju będą określać naprężenia w elementach jego pola. Te siły wewnętrzne i odpowiadające im naprężenia rozkładamy, jak zwykle, na styczne i normalne. Wszystkie siły wewnętrzne muszą być w równowadze z siłami zewnętrznymi, działającymi na część odciętą, z czego wynika, że siła poprzeczna Q równoważy się z samymi stycznymi siłami wewnętrznymi, a normalne siły wewnętrzne równoważą zosobna moment zginający M . Wyrazamy to krócej słowami: Siła poprzeczna wywołuje naprężenia ścinające, a moment zginający wywołuje naprężenia normalne w rozpatrywanym przekroju. Te ostatnie znajdziemy zatem tak samo, jak w przypadku czystego zgięcia momentem M . Pozostaje jeszcze zająć się wyznaczeniem naprężeń ścinających. Do tego dostarcza statyka tylko jedno równanie, które powiada: Suma algebraiczna rzutów napięć we wszystkich elementach przekroju na oś pionową równa się sile poprzecznej Q . Prawo rozkładu naprężeń ścinających będzie można znaleźć na podstawie pewnych przypuszczeń. Poświęcimy temu następnemu paragraf, a tutaj wyprowadzimy jeszcze pewien związek między M a Q , który gra ważną rolę przy obliczaniu belek.

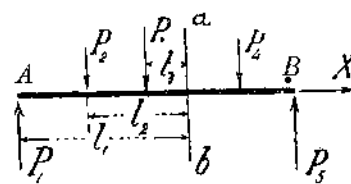
Przesuńmy przekrój ab (rys. 114) w kierunku X o element długości belki dx . Jeżeli nad przekrojem nie było siły skupionej, to takie przesunięcie nie wywoła zmiany siły poprzecznej Q , natomiast moment M przyrośnie o wielkość dM , określoną widocznie równaniem:

$$dM = P_1 dx - P_2 dx - P_3 dx = Q dx,$$

z którego wynika

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad \dots \quad (69)$$

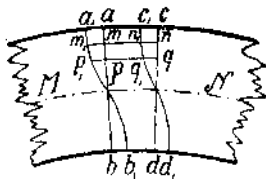
czyli pochodna momentu zginającego względem x [t. j. zmiana momentu w pewnym miejscu belki, odniesiona do jednostki długości] równa się sile poprzecznej Q .



Rys. 114

§ 59. NAPRĘŻENIE ŚCINAJĄCE PRZY ZGINANIU

Ażeby otrzymać prawo rozkładu naprężeń ścinających, zwrócimy się do rozpatrzenia odpowiadających odkształceń. Wiemy, że naprężenia styczne, działające na ściany elementu prostopadłościennego, wywołują jego odkształcenie postaciowe. Wskutek odkształceń tego rodzaju, włókna mn



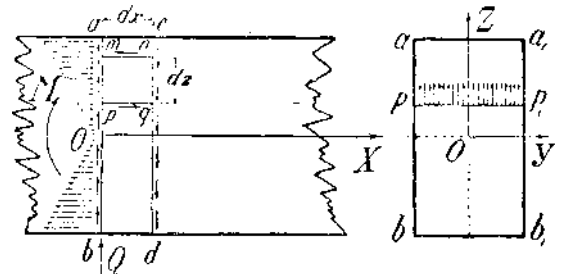
Rys. 115

i pq zginanej belki (rys. 115), pierwotnie normalne do płaszczyzn przekrojów poprzecznych ab i cd , tworzą po zgięciu z odpowiadającymi płaszczyznami przekrojów poprzecznych kąty ukośne. Element $mnpq$ przybiera postać $m_1n_1p_1q_1$. Ponieważ zmiana kątów jest w różnych punktach przekroju różna, więc musi jej towarzyszyć zakrzywienie przekroju. Linje a_1b_1 i c_1d_1 przedstawiają na rys. (115) przybliżoną postać tych zakrzywionych przekrojów. Największe odkształcenie postaciowe elementów zachodzi tutaj w warstwie obojętnej. Na górnej i dolnej ścianie belki w punktach a_1, c_1 i b_1, d_1 ,

nie ulegają kąty proste elementów żadnej zmianie. Opisane zjawisko łatwo zaobserwować zginając pręty z kauczuku. W tym celu trzeba tylko boczną ścianę pręta pokryć siecią małych kwadratów.

Dla takich materiałów, jak żelazo kowalne i stal, są zakrzywienia przekrojów bardzo małe i nie zwracano na nie długo żadnej uwagi; przyjmowano poprostu, że we wszystkich przypadkach zginania pozostają przekroje płaskimi, jak przy „czystym zgięciu“. Dopiero przez zbadanie zakrzywienia przekrojów poprzecznych udało się S. Venant'owi ustalić prawo rozkładu naprężeń stycznych. Pokazało się, że zakrzywienia przekrojów nie wpływają na wielkości wydłużeń i skróceń podłużnych włókien belki. Elementy mn i pq , otrzymujące wydłużenia przy obrocie przekroju ab względem cd , nie zmieniają swej długości przy zakrzywieniu przekrojów poprzecznych, lecz zajmują tylko nowe położenia m_1n_1 i p_1q_1 . Z tego powodu ciągnięcia i ciśnienia, uwarunkowane obrotem przekrojów ab i cd , a zależne od wielkości momentu zginającego, nie zmieniają się przy zakrzywieniu przekrojów, zależnym od wielkości napięć stycznych, a więc i od siły poprzecznej.

Przy elementarnym wyprowadzeniu prawa rozkładu naprężeń stycznych przyjmujemy, że przekrój poprzeczny jest prostokątem. W dalszym ciągu będzie można wywód uogólnić i dla innych postaci przekroju. Niechaj ab (rys. 116) przedstawia przekrój poprzeczny belki. Odrzucamy lewą część belki, a jej działanie na część prawą zastępujemy siłami sprężystości. Naprężenia normalne (ciągnięcia i ciśnienia) są równoważne momentowi zginającemu M , zaś naprężenia styczne muszą być równoważne sile poprzecznej Q , wobec czego przyjmujemy je jako równoległe do osi Z -ów. Przyjmujemy nadto, że wielkość naprężenia stycznego w jakimkolwiek punkcie poprzecznego przekroju zależy tylko od odległości tego punktu od osi obojętnej OY . W takim razie naprężenia styczne we wszystkich elementach, leżących na jakiegokolwiek prostej pp_1 , równoległej do OY , będą wielkością stałą, a zatem będzie stałą i zmiana kątów u tychże elementów, czyli przekrój poprzeczny zakrzywi się podług powierzchni walcowej. Tworzące tej powierzchni będą równoległe do osi Y -ów. Powyższe przypuszczenia co do kierunku i rozkładu naprężeń stycznych są, jak wykazuje dokładne rozwiązanie tegoż zadania w teorii sprężystości, bardzo bliskie rzeczywistości. W przypadku kwadratowego przekroju poprzecznego nie przekraczają zboczenia 6% , w przypadku przekroju prostokątnego o stosunku wysokości do podstawy równym 2, nie przekracza błąd 2% . Przy węższych prostokątach jest błąd jeszcze mniejszy. Zauważymy, że wyznaczenie naprężeń stycznych ma największe praktyczne znaczenie właśnie dla wąskich przekrojów poprzecznych.



Rys. 116

Wykażemy teraz, że naprężenia styczne w płaszczyźnie przekroju poprzecznego warunkują pojawienie się naprężeń stycznych i w płaszczyznach równoległych do warstwy obojętnej. W tym celu pomiędzy dwoma bliskimi przekrojami ab i cd (rys. 116) wydzielimy przez całą szerokość belki elementarny prostopadłościan $mnpq$ o ścianach mn i pq równoległych do warstwy obojętnej. Weźmiemy pod uwagę naprężenia styczne, działające na ściany wydzielonego elementu. Na ścianę mp działa naprężenie styczne p_1 , skierowane w górę, które zastępuje działanie lewej odciętej

części belki na prawą, naprężenie styczne zaś na ścianie nq będzie mieć kierunek wprost przeciwny, ponieważ ono przedstawia działanie prawej części belki na lewą. Wielkość tego naprężenia różni się bardzo mało od naprężenia na ścianie mp , gdyż przekroje ab i cd obrano bardzo blisko siebie. Przy zbliżaniu tych przekrojów muszą naprężenia na ścianach mp i nq zżądać w granicy oczywiście do działania i równego mu przeciwdziałania. Napięcia styczne na ścianach mp i nq sprowadzają się do pary sił [o momencie]:

$$b \cdot p_t \cdot dx \cdot dz.$$

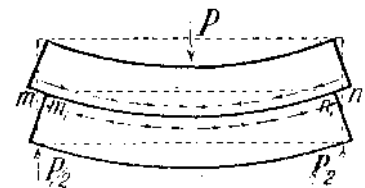
Tutaj oznaczyliśmy przez b wymiar wydzielonego prostopadłościanu w kierunku osi Y , t. j. szerokość belki. Aby wydzielony element był w równowadze, musimy przyjąć, że na ścianach mn i pq , równoległych do warstwy obojętnej, także działają naprężenia styczne, równoległe do osi X -ów. Jeżeli p'_t jest wielkością tych naprężeń, to ich momentem będzie:

$$b \cdot p'_t \cdot dx \cdot dz.$$

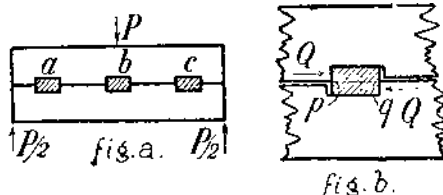
Warunek równowagi wydzielonego elementu daje:

$$b p_t dx dz = b p'_t dx dz, \text{ skąd } p_t = p'_t,$$

czyli: naprężenie styczne w jakimkolwiek elemencie poprzecznego przekroju równa się naprężeniu stycznemu w płaskim elemencie, przesuniętym przez tenże sam punkt równoległe do warstwy obojętnej. O istnieniu naprężeń stycznych w płaskich elementach, równoległych do warstwy obojętnej, można się przekonać drogą doświadczalną. Jeżeli dwa jednakowe pręty o przekroju prostokątnym złożymy i zginamy siłą działającą w środku ich rozpiętości, to przy zakrzywieniu odkształca się każdy pręt samostatnie; dolne włókna każdego pręta rozciągają się, górne ściskają, a końcowe przekroje, leżące pierwotnie w jednej płaszczyźnie, obracają się (i przesuują względem siebie), jak pokazano na rys. (117). W powierzchni przylegania ścian mn i m_1n_1 obu prętów, zachodzi przytem oczywiście ślizganie. Aby temu ślizganiu przeszkodzić i zmusić pręty do działania jako całość, muszą w powierzchni przylegania działać naprężenia styczne o kierunkach wskazanych na rysunku. W praktyce osiągamy tego rodzaju wzajemne połączenie dwu belek (drewnianych) przy pomocy klinów lub klocków, przedstawionych na rys. (118). Przy zgięciu są beki



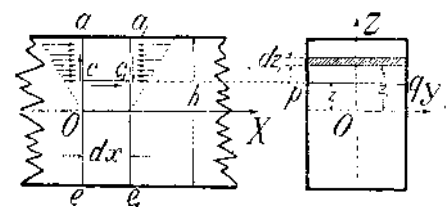
Rys. 117



Rys. 118

narazone na działanie sił ścinających. [Na rys. (118), fig. (b) przedstawiono siły Q , działające na klocek c i dążące do ścięcia klocka w płaszczyźnie pq]. Po tych przygotowawczych uwagach można bez szczególnych trudności znaleźć prawo rozkładu naprężeń stycznych w płaszczyźnie przekroju poprzecznego.

Niechaj M oznacza wielkość momentu zginającego w dowolnie obranym przekroju ae belki przedstawionej na rys. (119). Szukajmy naprężeń stycznych dla punktów przekroju poprzecznego, leżących w odległości z od warstwy obojętnej, czyli



Rys. 119

na prostej pq równoległej do osi obojętnej przekroju. Te naprężenia będą co do wielkości równe naprężeniom stycznym w płaszczyźnie cc_1 , równoległej do warstwy obojętnej i przechodzącej przez prostą pq . Aby znaleźć ich wartość, rozpatrzmy warunek równowagi elementu aa_1cc_1 , ograniczonego dwoma nieskończenie bliskimi przekrojami poprzecznymi ae i a_1e_1 , płaszczyzną cc_1 i zewnętrzną powierzchnią belki. Jeżeli na tą powierzchnię pomiędzy przekrojami a_1e_1 i ae nie działają żadne siły zewnętrzne, to wypadnie nam rozpatrzeć tylko naprężenia, działające na ściany ac , a_1c_1 i cc_1 wydzielonego elementu. Na ściany ac i a_1c_1 będą działać, obok naprężeń normalnych, zależnych od wielkości momentu zginającego M , także i naprężenia styczne. Na ścianę cc_1 działają tylko naprężenia styczne p_t , których wielkości szukamy. Zestawmy rzuty na oś X -ów wszystkich sił, działających na element aa_1cc_1 . Napięcia styczne w płaszczyźnie cc_1 jako równoległe do osi X -ów, dadzą przy rzutowaniu siłę:

$$b \cdot dx \cdot p_t,$$

jeżeli b jest szerokością przekroju poprzecznego belki. Napięcia styczne na ścianach ac i a_1c_1 dadzą przy rzutowaniu zero, ponieważ zakrzywienie przekrojów przy zgięciu jest bardzo małe, wobec czego można kierunek tych napięć uważać za prostopadły do osi X -ów. Co się tyczy naprężeń normalnych na tychże ścianach, to prawo ich rozkładu jest nam znane. W jakimkolwiek punkcie przekroju ae , leżącym w odległości z_1 od osi obojętnej, mamy:

$$p_{z_1} = -\frac{M z_1}{I_y}$$

Znak minus napisaliśmy dlatego, ponieważ przy obranym na rysunku kierunku osi Z -ów odpowiada dodatnim wartościom M i z_1 ciśnienie p_{z_1} . Jeżeli ze ściany ac wydzielimy pasek o szerokości dz_1 , to przypadające nań normalne siły wewnętrzne dają wypadkową o wielkości

$$\frac{M z_1}{I_y} b dz_1$$

Rzutuując na oś X -ów napięcia normalne, działające na ścianę ac , otrzymamy siłę:

$$\frac{M}{I_y} \int_{-z}^{+z} z_1 b dz_1$$

W tenże sam sposób znajdziemy rzut na oś X -ów napięć normalnych na ścianie a_1c_1 . Jeżeli wielkość momentu zginającego w przekroju a_1e_1 , nieskończenie bliskim ae , oznaczymy przez $M + dM$, to sumą rzutów odpowiadających napięć normalnych będzie:

$$-\frac{M + dM}{I_y} \int_{-z}^{+z} z_1 b dz_1$$

Na podstawie tych wyników napiszemy jako warunek równowagi elementu aca_1c_1 :

$$-\frac{M + dM}{I_y} \int_{-z}^{+z} z_1 b dz_1 + \frac{M}{I_y} \int_{-z}^{+z} z_1 b dz_1 + b p_t dx = 0$$

z czego:

$$p_t = \frac{dM}{dx} \frac{\int_{-z}^{+z} z_1 b dz_1}{I_y b} = \frac{Q S_z}{I_y b} \quad (70)$$

Tutaj zużytkowaliśmy formułę (69), a oprócz tego oznaczyliśmy dla uproszczenia literą S_z wielkość $\int_{-z}^{+z} z_1 b dz_1$, przedstawiającą moment statyczny części przekroju powyżej pq , względem osi obojętnej. Dla prostokąta jest

$$S_z = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Wstawivszy tę wartość w (70) znajdziemy, że wielkość naprężeń stycznych w płaszczyźnie przekroju zmienia się według prawa parabolicznego:

$$p_t = \frac{Q}{I_y b} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) = \frac{Q}{2 I_y} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (a)$$

Największą wartość osiągają te naprężenia w warstwie obojętnej, t. j. dla $z = 0$, a mianowicie:

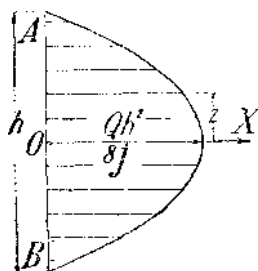
$$(p_t)_{\max} = \frac{Q h^2}{8 I_y} = \frac{Q h^2}{\frac{8}{3} b h^3} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} \quad (71)$$

przyczem $F = bh$ oznacza pole prostokątnego przekroju poprzecznego.

Z formuły (71) wnosimy, że największe naprężenie styczne przekracza $1\frac{1}{2}$ -krotnie jego średnią wartość. W elementach przekroju najbardziej oddalonych od osi obojętnej, czyli przy

$$z = \pm \frac{h}{2} \quad \text{jest} \quad p_t = 0$$

Gdy wykreślimy pionowy odcinek $AB = h$, t. j. wysokości belki (rys. 120) i w każdym jego punkcie wystawimy poziome odcinki, równe odpowiadającym wartościom p_t , to oczywiście otrzymamy para-



Rys. 120

bole. Jej osią symetrii będzie OX . Pole tej paraboli, pomnożone przez szerokość belki b , określi wypadkową wszystkich naprężeń stycznych. Ta wypadkowa musi się równać sile poprzecznej Q , co łatwo sprawdzić. W samej rzeczy pole naszej paraboli równa się:

$$\frac{Q h^2}{8 I_y} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{Q}{b},$$

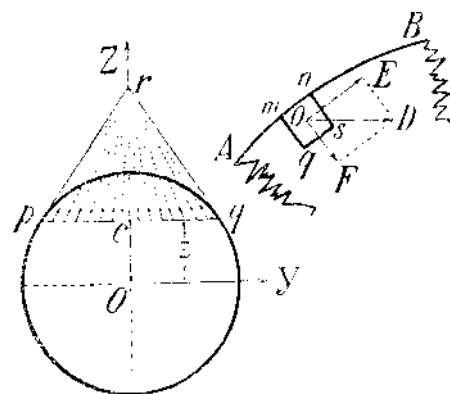
a mnożąc tę wielkość przez b , otrzymujemy Q .

§ 60. ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ ŚCINAJĄCYCH W PRZEKROJU KOŁOWYM

W przypadku kołowego przekroju poprzecznego nie można żadną miarą uzasadnić przyjęcia, że naprężenia styczne mają kierunek osi OZ , leżącej w płaszczyźnie działania sił zginających. Jeżeli weźmiemy prostą pq (rys. 121), odległą o z od osi obojętnej, to w różnych punktach tej prostej będzie nachylenie naprężeń stycznych względem osi OZ rozmaite. Atoli z warunku symetrii można wywnioskować, że kierunek naprężenia stycznego w punkcie c schodzi się z kierunkiem OZ . W punktach zaś p i q muszą naprężenia styczne mieć kierunek stycznych pr i qr do obwodu przekroju. Niechaj bowiem $m n q s$ (fig. b) przedstawia prostokątny element pola przekroju poprzecznego, obrany przy konturze AB . Wydzielmy z belki prostopadłościenny element o podstawie $m n q s$ i ścianie bocznej $m n$, należącej do zewnętrznej powierzchni belki. Gdyby naprężenie styczne w elemencie przekroju $m n q s$ miało kierunek OD , różny od kierunku $m n$ stycznego do konturu przekroju, to możnaby je rozłożyć na składowe: OE , równoległe do $m n$ i OF prostopadłe do $m n$. Rozważając równowagę elementarnego prostopadłościanu, przekonałiśmy się już niejednokrotnie (ob str. 91), że istnienie naprężenia stycznego p_t na pewnej ścianie tego prostopadłościanu pociąga za sobą istnienie naprężeń stycznych tejże samej wielkości i na ścianach prostopadłych do p_t . W naszym przypadku zatem widzimy, że istnienie naprężenia OF wymaga istnienia takiegoż naprężenia na ścianie $m n$, leżącej na powierzchni belki. Jeżeli ta powierzchnia [jak to najczęściej bywa] jest wolna od sił zewnętrznych, to OF musi się równać zero i, co zatem idzie, naprężenia styczne w punktach leżących na konturze przekroju muszą mieć kierunek stycznych do konturu. W ten sposób ustaliliśmy kierunek naprężenia stycznego w punktach p , q i c . Ponieważ te trzy kierunki schodzą się w jednym punkcie, przeto przyjmuje się, że kierunki naprężeń w innych punktach prostej $p q$ przechodzą również przez ten punkt r . Dla wyznaczenia wielkości naprężeń wypadnie uczynić jeszcze jedno przyjęcie, podobne jak w przypadku przekroju prostokątnego, a mianowicie, że pionowe składowe naprężeń stycznych we wszystkich punktach prostej $p q$ mają wielkość stałą, zależną tylko od odległości z . Na podstawie powyższych dwu założeń możemy teraz bez trudności znaleźć wielkość pionowej składowej naprężenia, idąc tą samą drogą, co w przypadku przekroju prostokątnego. Wyprowadzone tam równanie równowagi pozostaje w mocy; podobnie zachowa swą ważność i formuła (70) dla wielkości naprężeń, tylko będzie określać nie wielkość całego naprężenia, lecz wielkość jego składowej pionowej. Składową poziomą, a zatem i całkowitą wielkość naprężenia stycznego łatwo już wtedy znaleźć, ponieważ kierunek naprężenia jest znany. Ażeby wykazać o ile powyższe upraszczające założenia są zbliżone do prawdy, zauważymy, że wartość największych naprężeń stycznych, obliczona na podstawie tych założeń dla przekroju kołowego, różni się od wyników ścisłego rozwiązania teorii sprężystości o 5%. Taką dokładność można uważać za wystarczającą do praktycznych celów.

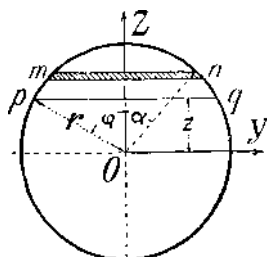
Obliczmy wielkość naprężeń stycznych w punktach prostej $p q$ (rys. 122). Pionową składową naprężeń będzie, na podstawie formuły (70):

$$\frac{Q S_z}{I_y(p q)} \dots \dots \dots (70)$$



Rys. 121

Tutaj podstawiliśmy długość odcinka pq zamiast szerokości belki b ; S_z oznacza moment statyczny części przekroju, leżącej powyżej pq , względem osi obojętnej. Dla obliczenia S_z rozłożymy odpowiadającą część przekroju na elementy prostymi równoległymi do pq ; niech będzie mn jednym z elementarnych pasków. Dla wygody rachunku obierzemy kąt α za zmienną niezależną; wtedy długość paska mn równa się $2r \sin \alpha$, szerokość paska — $d(r \cos \alpha) = r \sin \alpha d\alpha$, odległość paska od osi OY równa się $r \cos \alpha$, a zatem:



Rys. 122

$$S_z = \int_0^\varphi 2r \sin \alpha \cdot r \sin \alpha d\alpha \cdot r \cos \alpha = 2r^3 \int_0^\varphi \sin^3 \alpha d(\sin \alpha) = \frac{2r^3}{3} \sin^3 \varphi.$$

Wstawivszy to w wyrażenie (70)' i zważywszy, że $pq = 2r \sin \varphi$,

znajdziemy dla pionowej składowej naprężenia stycznego wielkość:

$$\frac{Qr^2 \sin^3 \varphi}{3I_y} = \frac{Qr^2 (1 - \cos^2 \varphi)}{3I_y} = \frac{Q(r^2 - z^2)}{3I_y} \quad (72)$$

Pozioma składowa naprężenia stycznego będzie mieć różną wartość w różnych punktach prostej pq ; największą osiągnie widocznie w p i q (rys. 121), a mianowicie [na podstawie formuły (72)]:

$$\frac{Qr^2 \sin^2 \varphi}{3I_y} \cdot \operatorname{ctg} \varphi.$$

Wielkością całkowitego naprężenia stycznego w punktach p i q będzie przeto:

$$\frac{Qr^2 \sin^2 \varphi}{3I_y} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} = \frac{Qr^2 \sin \varphi}{3I_y}.$$

Największą wartość osiągają naprężenia styczne na osi obojętnej OY , t. j. dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$, a mianowicie:

$$(p)_{\max} = \frac{Qr^2}{3I_y} = \frac{Qr^2}{\frac{3}{4} \pi r^4} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \quad (73)$$

Tutaj oznacza F pole przekroju poprzecznego. Otrzymana formuła poucza, że największa wartość naprężenia stycznego równa się $\frac{4}{3}$ jego wartości średniej.

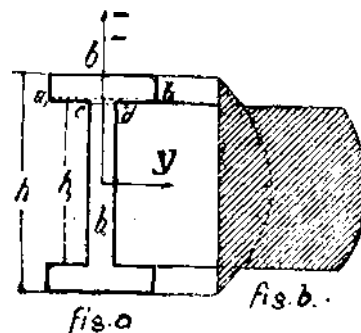
§ 61. ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ ŚCINAJĄCYCH W PRZEKROJU DWUTEOWYM

Belkom żelaznym nadaje się często przekrój dwuteowy, przedstawiony na rys. (123), [zwany także przekrojem I]. Zalety takiego przekroju wykażemy poniżej. Przy obliczeniu naprężeń stycznych używa się tych samych założeń, co w przypadku przekroju prostokątnego, czyli przyjmuje się, że te naprężenia są równoległe do osi Z i że one są równe dla wszystkich punktów, równoodległych od osi Y . Wielkość naprężeń określi zatem formuła:

$$p_t = \frac{QS_z}{I_y \cdot (\text{szerokość przekroju})}$$

Przy obliczeniu naprężenia w jakimkolwiek punkcie wąskiej części przekroju (ścianka belki) trzeba wziąć szerokość b_1 , a dla rozszerzonej części przekroju (stopka belki) szerokość b .

Zauważymy, że powyższa formuła daje bardzo dokładne wyniki dla punktów oddalonych od stopek, natomiast w miejscach połączenia stopek ze ścianką jest zupełnie niezadowolająca. Obliczając bowiem naprężenia dla punktów prostej $a_1 b_1$ (rys. 123), leżącej nieco powyżej miejsca połączenia, wypada brać w rachunek szerokość stopki b , zaś dla punktów prostej $c d$, leżącej nieco poniżej miejsca połączenia, trzeba podstawić dla szerokości przekroju wartość b_1 ; nasza formuła prowadzi tedy do nagłej zmiany wielkości naprężenia w rozpatrywanym miejscu połączenia. W rzeczywistości zmieniają się naprężenia w sposób ciągły, a prawo ich rozkładu w owym miejscu różni się znacznie od tego, które wyraża formuła.



Rys. 123

Jeżeli prawo rozkładu naprężeń stycznych na wysokości przekroju przedstawimy wykreślnie, jak to uczyniliśmy dla przekroju prostokątnego, to otrzymamy fig. (b) (rys. 123). Prawo zmienności naprężeń stycznych w stopkach wypada także samo, jak prostokąta, a mianowicie [formuła (a)]:

$$p_t = \frac{Q}{2I_y} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Odpowiadającą temu równaniu parabolę wykropkowano na fig. (b) w środkowej części. Dla punktów ścianki określi wielkość naprężeń stycznych formuła:

$$p_t = \frac{QS_z}{b_1 I_y} = \frac{Q}{b_1 I_y} \left[\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} \left(1 - \frac{b_1}{b} \right) - b_1 \frac{z^2}{2} \right],$$

która przedstawia również paraboliczne prawo rozkładu naprężeń na wysokości przekroju. Największe i najmniejsze naprężenie styczne w ściance belki otrzymamy, podstawiając odpowiednio:

$$z = 0 \quad \text{i} \quad z = \pm \frac{h_1}{2}.$$

Wtedy:

$$(p_t)_{\max} = \frac{Qbh^2}{8b_1 I_y} \left[1 - \left(\frac{h_1}{h} \right)^2 \left(1 - \frac{b_1}{b} \right) \right],$$

$$(p_t)_{\min} = \frac{Qbh^2}{8b_1 I_y} \left(1 - \frac{h_1^2}{h^2} \right).$$

Gdy b_1 jest małe w porównaniu do b , to wielkości p_{\max} i p_{\min} różnią się od siebie niewiele. Zauważymy jeszcze jedną okoliczność, mającą praktyczne znaczenie. Jak widać z rys. (123) i z formuł dla naprężeń stycznych, przenosi się na stopki belki tylko nieznaczna część siły ścinającej Q , a przeważna jej część przypada na ściankę belki. Wziąwszy np.:

$$b = 12 \text{ cm}, \quad b_1 = 1,2 \text{ cm}, \quad h = 30 \text{ cm}, \quad h_1 = 26 \text{ cm}, \quad I_y = 11200 \text{ cm}^4,$$

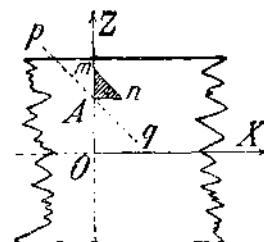
znajdziemy dla ścianki

$$(p_t)_{\max} = 0,0326 Q, \quad (p_t)_{\min} = 0,0250 Q.$$

Na samą ściankę przenosi się 0,94 (Q ¹⁾).

§ 62. O NAPRĘŻENIACH GŁÓWNYCH W ZGINANEJ BELCE

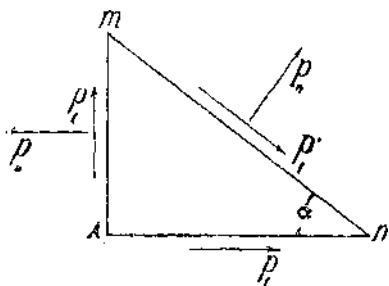
Postępując się formułami poprzednich paragrafów, możemy znaleźć wielkość naprężeń normalnych i ścinających w płaszczyźnie dowolnego przekroju poprzecznego zginanej belki. W praktycznych obliczeniach poprzestaje się zwykle na tem; z wielkości znalezionych tym sposobem naprężeń wyrokuje się o wytrzymałości obliczanej belki. [Jest to najczęściej dopuszczalne dzięki tej okoliczności, że w miejscach największych naprężeń normalnych nie ma z reguły naprężeń ścinających i nawzajem, tam, gdzie naprężenia ścinające osiągają największą wartość, nie ma naprężeń normalnych, albo też te naprężenia grają podrzędną rolę]. Są jednakże przypadki, gdzie taki rachunek nie wystarcza i trzeba dokładnie określić miejsce niebezpieczne i panujący w niem stan napięcia. Rozpatrzmy stan napięcia w dowolnym punkcie A przekroju belki (rys. 124). Tutaj znamy naprężenia w elemencie Am przekroju poprzecznego i w elemencie An poziomego przekroju. Jeżeli przez ten punkt poprowadzimy przekroje elementarne nachylone do poprzednich i prostopadłe do płaszczyzny ZX , to naprężenia w tych przekrojach będą zależne od ich kierunku. Niechaj pq będzie jednym z tych przekrojów. Zamiast szukać naprężeń w tym przekroju, możemy przejść do nieskończenie bliskiego przekroju równoległego mn . Naprężenia w pq i mn będą się widocznie różnić od siebie nieskończenie mało, gdyż naprężenia zmieniają się wogóle od punktu do punktu w sposób ciągły. Naprężenia w płaskim elemencie mn można łatwo znaleźć z warunków równowagi trójgraniastego elementu o podstawie Amn . Długość krawędzi tego elementu, prostopadłych do płaszczyzny rysunku



Rys. 124

¹⁾ [Dokładniejsze rozwiązania dla niektórych praktycznie ważnych przekrojów znajdzie czytelnik w pracy Dr. Z. Fuchs'a p. t. „Zur Berechnung der Schubspannungen in gebogenen Stäben“. Z. d. V. d. Ing., r. 1914, str. 1330].

przyjmijmy równą 1. Niechaj Amn (rys. 125) przedstawia nasz element w większej skali. Na ścianę pionową działa naprężenie normalne p_n i styczne p_t , zaś na ścianę poziomą tylko naprężenie styczne p_t . Nieznane naprężenia na ścianie mn oznaczmy przez p'_n (normalne) i p'_t (styczne). Co się tyczy znaków algebraicznych naprężeń, to umówimy się uważać kierunki obrane na rysunku za dodatnie. Niechaj F oznacza pole ściany mn , nachylonej do ściany poziomej An pod kątem α . Wtedy pola ścian Am i An będą odpowiednio równe $F \sin \alpha$ i $F \cos \alpha$. Wielkości napięć, przypadających na każdą ze ścian elementu, otrzymamy, mnożąc naprężenia przez odpowiadające pola.



Rys. 125

Mamy tutaj do czynienia z płaskim układem sił, a więc z trzema analitycznymi warunkami równowagi: dwa warunki rzutów i jeden warunek momentów. Do znalezienia dwu niewiadomych p'_n i p'_t wystarczą dwa równania, wobec czego napiszemy tylko obadwa warunki rzutów. Jako kierunki osi rzutów obierzemy przytem kierunki niewiadomych naprężeń p'_n i p'_t , gdyż wtedy każde z otrzymanych równań będzie zawierać tylko jedną niewiadomą. Rzutując na kierunek p'_n mamy:

$$p'_n F + p_t F \cos \alpha \sin \alpha + p_t F \sin \alpha \cos \alpha - p_n F \sin^2 \alpha = 0,$$

zaś rzutowanie na kierunek p'_t daje:

$$p'_t F + p_t F \cos^2 \alpha - p_t F \sin^2 \alpha - p_n F \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

z czego otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} p'_n &= p_n \sin^2 \alpha - p_t \sin 2\alpha = \frac{p_n}{2} (1 - \cos 2\alpha) - p_t \sin 2\alpha, \\ p'_t &= p_n \frac{\sin 2\alpha}{2} - p_t \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Znalezione równania określają zależność naprężeń p'_n i p'_t od kąta α . Szukajmy ich wartości krańcowych w znany analityczny sposób. Dla p'_n mamy warunek:

$$\frac{dp'_n}{d\alpha} = p_n \sin 2\alpha - 2p_t \cos 2\alpha,$$

skąd

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2p_t}{p_n} \quad (75)$$

To równanie daje w obrębie 360° dwie wartości dla α , różniące się od siebie o 90° , gdyż $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} (2\alpha + 180^\circ) = \operatorname{tg} 2(\alpha + 90^\circ)$. Jednej z nich odpowiadać będzie widocznie maximum, a drugiej minimum, ponieważ druga pochodna:

$$\frac{d^2 p'_n}{d\alpha^2} = 2p_n \cos 2\alpha + 4p_t \sin 2\alpha$$

zmienia swój znak przy zmianie α na $\alpha + 90^\circ$. Przy pomocy rów. (75) otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\alpha &= \pm \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \pm \frac{2p_t}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}}, \\ \cos 2\alpha &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \pm \frac{p_n}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Obrawszy przy \sin i \cos najpierw znak $-$, a potem $+$, i wstawiwszy w pierwszą z formuł (74), otrzymamy następujące krańcowe wartości naprężeń normalnych:

$$\left. \begin{aligned} p'_{\max} &= \frac{p_n}{2} \left(1 + \frac{p_n}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}} \right) + \frac{2p_t^2}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}} = \frac{p_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}, \\ p'_{\min} &= \frac{p_n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Naprężenia p_{\max} i p_{\min} nazywamy naprężeniami głównymi, a odpowiadające im kierunki, określone równaniem (75), kierunkami głównymi. Porównyując równanie warunkowe $\frac{dp'_n}{d\alpha} = 0$

z wyrażeniem dla p'_t (rów. 74), widzimy, że gdy $\frac{dp'_n}{d\alpha} = 0$, to i $p'_t = 0$, czyli, że w przekrojach głównych (gdzie p_n jest max. albo min.) nie ma naprężeń ścinających. [Rozpatrzony tutaj stan napięcia nie jest przeto ogólniejszym od tego, którym się zajmowaliśmy w § 14]. Wyciąwszy w rozpatrywanym miejscu belki płaszczyznami o kierunkach głównych element prostopadłościenny, otrzymamy przypadek jednoczesnego rozciągania lub ściskania w dwu wzajemnie prostopadłych kierunkach. Z tego można od razu wywnioskować, że największe naprężenia ścinające zachodzą w płaszczyznach nachylonych do kierunków głównych pod kątem 45° (ob. § 14). Wartością największych naprężeń stycznych będzie zaś połowa różnicy największego i najmniejszego z naprężeń normalnych, czyli na podstawie formuł (77):

$$(p_t)_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2} \quad \dots \quad (78)$$

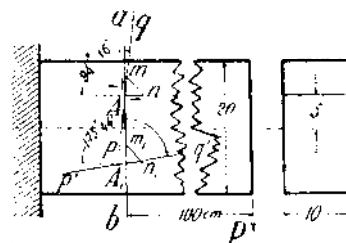
Ażeby pokazać, jak się wyznacza wielkość i kierunek naprężeń głównych, przerobimy przykład liczbowy.

Pręt o przekroju prostokątnym $10 \times 20 \text{ cm}^2$, lewym końcem utwierdzony, jest narażony na zgięcie obciążeniem $P = 1000 \text{ kg}$ swobodnego prawego końca (rys. 126). Znajdziemy wielkość i kierunek głównych naprężeń w punkcie A , oddalonym od warstwy obojętnej o $\frac{h}{4} = 5 \text{ cm}$, a od siły P o 1 m . Naprężenie normalne w elemencie Am ma wartość:

$$p_n = \frac{Mz}{I} = \frac{1000 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 12}{10 \cdot 20^3} = 75 \text{ kg/cm}^2.$$

Naprężenia styczne w elementach Am i An wyznaczmy z formuły:

$$p_t = \frac{QS_z}{Ib} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 7,5 \cdot 12}{10 \cdot 10 \cdot 20^3} = 5,63 \text{ kg/cm}^2.$$



Rys. 126

Obadwa naprężenia opatrzymy znakiem +, zgodnie z umową, którą zrobiliśmy przy wywodzie formuł (75) i (77), gdyż z warunków równowagi prawej części belki wypadają kierunki oznaczone strzałkami na rys. (126). Formuła (75) daje:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2p_t}{p_n} = \frac{2 \cdot 5,63}{75} = 0,1501,$$

skąd

$$2\alpha = 8^\circ 32', \text{ albo } 2\alpha = 188^\circ 32';$$

a zatem:

$$\alpha = 4^\circ 16', \text{ albo } \alpha = 94^\circ 16'.$$

Znajdujemy tedy dwa wzajemnie prostopadłe elementy, którym odpowiadają główne naprężenia. Wielkościami głównych naprężeń będą:

$$p_{\max} = \frac{p_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2} = 37,5 + \frac{1}{2} \sqrt{75^2 + 4 \cdot 5,63^2} = 75,42 \text{ kg/cm}^2,$$

$$p_{\min} = \frac{p_n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2} = -0,42 \text{ kg/cm}^2.$$

Ażeby wyznaczyć, któremu z powyżej znalezionych elementów odpowiada p_{\max} , a któremu p_{\min} , zauważymy, że przy wywodzie otrzymaliśmy p_{\max} , biorąc wyrażenia (76) dla $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$ ze znakiem -. Przy naszych danych są p_n i p_t wielkościami dodatnimi, przeto odpowiadający kąt 2α będzie leżeć w III-ciej ćwiartce (\sin i \cos ujemne), a znalezione naprężenie $p_{\max} = 75,42 \text{ kg/cm}^2$ będzie działać w elemencie płaskim, nachylonym pod kątem $\alpha = 94^\circ 16'$. Przytem trzeba oczywiście kąt α odmierzać tak, jak to przyjęto przy wyprowadzeniu podstawowych formuł, co uwidoczniono na rys. (126), gdzie ten element przedstawia prosta pq .

Znajdziemy teraz kierunki i wielkości naprężeń głównych w punkcie A , leżącym 5 cm poniżej warstwy obojętnej. Wielkość i znak p_t pozostaje bez zmiany, natomiast p_n zmienia swój znak na przeciwny. A więc:

$$p_n = -75 \text{ kg/cm}^2, \quad p_t = +5,63 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot 5,63}{75} = -0,1501, \quad 2\alpha = 180^\circ - 8^\circ 32' = 171^\circ 28'$$

albo

$$2\alpha = 360^\circ - 8^\circ 32' = 351^\circ 28',$$

czyli

$$\alpha = 85^\circ 44', \quad \text{albo} \quad \alpha = 175^\circ 44'.$$

$$p_{\max} = -\frac{75}{2} + \sqrt{\left(\frac{75}{2}\right)^2 + 5,63^2} = +0,42 \text{ kg/cm}^2.$$

To naprężenie odpowiada elementowi płaskiemu, dla którego

$$\sin 2\alpha = -\frac{2p_t}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}} = -\frac{5,63}{37,9},$$

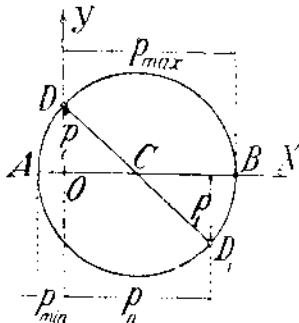
$$\cos 2\alpha = -\frac{p_n}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}} = +\frac{37,5}{37,9}.$$

Ponieważ $\sin 2\alpha$ jest ujemne, a $\cos 2\alpha$ dodatnie, więc 2α leży w IV-ej ćwiartce i odpowiadająca wartość $\alpha = 175^\circ 44'$. Na rys. (126) przedstawia $p'q'$ element płaski o tem nachyleniu.

Największe naprężenia styczne w punktach A i A_1 mają wielkość wspólną i równą:

$$(p_t)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{75}{2}\right)^2 + 5,63^2} = \sim 37,9 \text{ kg/cm}^2.$$

Jeżeli weźmiemy punkty najbardziej odległe od warstwy obojętnej, to odpowiadające naprężenia styczne stają się zerem, a zatem naprężenie normalne p_n będzie jednym z naprężeń głównych; drugie naprężenie główne równa się oczywiście zeru. W punktach leżących w warstwie obojętnej znikają naprężenia normalne p_n , a naprężenia główne, jak widać z formuł (77), będą równej wielkości i przeciwnego znaku. W tych punktach mamy zatem do czynienia ze stanem napięcia, odpowiadającym czystemu ścinaniu.

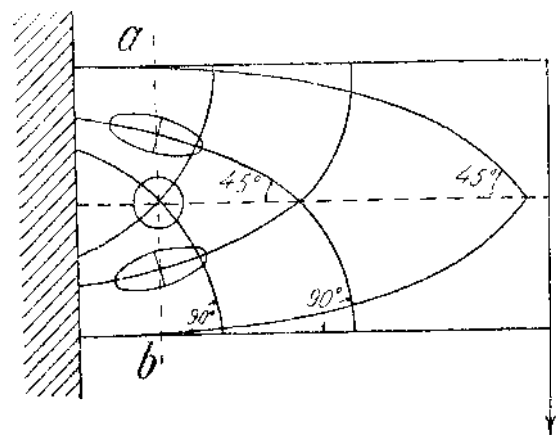


Rys. 127

[Promień koła określa wartość $(p_t)_{\max}$, zaś kąt OCD i OCD_1 przedstawiają podwójną wartość kątów, jakie tworzą kierunki główne z przekrojem An na rys. (125) lub (126)].

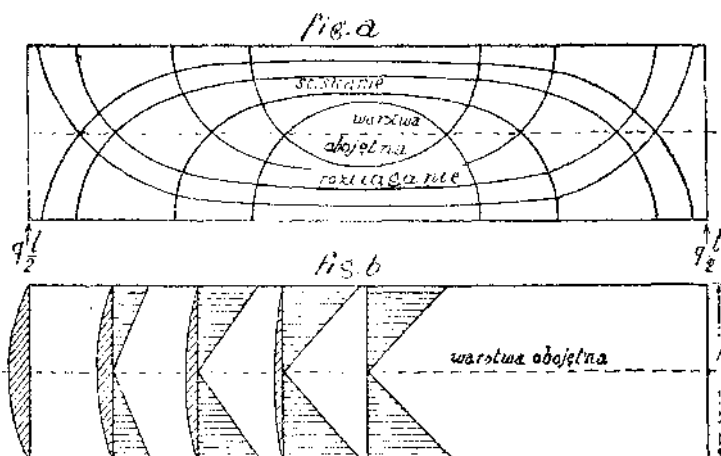
Znalazłszy dla jakiegokolwiek punktu p_{\max} , p_{\min} i odmierzywszy od tego punktu odcinki, przedstawiające te naprężenia tak co do wielkości jak i kierunku, wykreślimy łatwo odpowiadającą elipsę naprężeń. Na rys. (128) uwidoczniono elipsy naprężeń dla kilku punktów przekroju ab . Elipsy odpowiadające najwyższemu i najniższemu punktowi przekroju przekształcają się na odcinki prostych poziomych, ponieważ jedno z głównych naprężeń staje się zerem. We warstwie obojętnej, gdzie główne naprężenia są co do wielkości równe, przekształca się elipsa na koło.

W różnych punktach zginanej belki mają naprężenia główne różne kierunki. Rys. (128) uzmysławia jeszcze dwa układy krzywych, mających tę własność, że styczna w dowolnym punkcie



Rys. 128

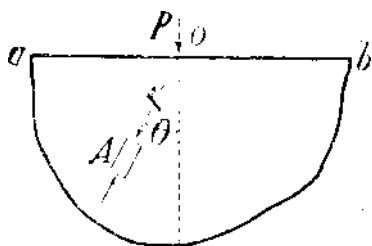
każdej krzywej wskazuje kierunek naprężenia głównego w punkcie styczności. W naszym przypadku daje jeden układ krzywych kierunki ciągnięć głównych, a drugi kierunki ciśnień głównych. Takie krzywe nazywają się trajektorjami naprężeń. Na rys. (129) przedstawiono rozkład naprężeń w przypadku zgięcia belki o przekroju prostokątnym, w obu końcach podpartej i obciążonej ciężarem ql , rozłożonym równomiernie na całej długości. Fig. (b) przedstawia dla różnych przekrojów belki liniowy rozkład naprężeń normalnych i paraboliczny rozkład naprężeń stycznych. Naprężenia normalne rosną ku środkowi rozpiętości; odwrotnie zachowują się naprężenia styczne, które osiągają największą wartość na podporach. Fig. (a) przedstawia trajektorje naprężeń dla tejże belki¹⁾.



Rys. 129

§ 63. O NAPRĘŻENIACH MIEJSCOWYCH

Formuły otrzymane powyżej dla naprężeń normalnych i stycznych przy zginaniu, można uważać za zupełnie zadowalające dla punktów, których odległość od miejsca działania sił zewnętrznych nie przekracza największego wymiaru poprzecznego przekroju belki²⁾. Dlatego dalsze wywody będą tym pewniejsze, im mniejsze są poprzeczne wymiary w porównaniu do długości pręta. W pobliżu miejsc bezpośrednio obciążonych powstają miejscowe naprężenia, które mogą w znacznym stopniu zmodyfikować wyprowadzone dotychczas prawa rozkładu naprężeń. W przypadku sił skupionych przedstawia się wyznaczenie naprężeń miejscowych, jako zadanie złożone, nie dające się rozwiązać drogą elementarną. Pewne wyobrażenie o rozkładzie naprężeń w miejscu działania siły skupionej może dać rozwiązanie zadania o rozkładzie naprężeń w następującym przypadku:



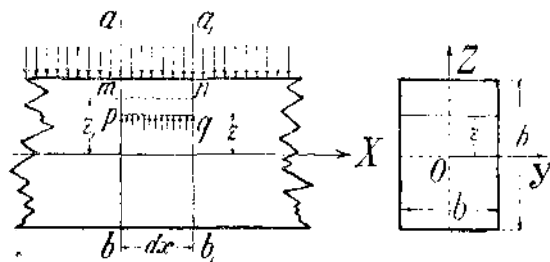
Rys. 130

Na prostoliniowy brzeg ab nieograniczonej cienkiej płyty działa [prostopadle do brzegu] siła P , leżąca w płaszczyźnie płyty (rys. 130). Ścisłe rozwiązanie pokazuje, że w danym przypadku zachodzi radialny rozkład ciśnień. W każdym punkcie płyty panuje proste ciśnienie w kierunku promienia r , łączącego rozpatrywany punkt z punktem O , w którym działa siła P . Wielkość naprężenia określa formuła:

$$p = - \frac{2P \cos \alpha}{\pi \delta r} \quad (79)$$

Tutaj oznacza δ grubość płyty, a α kąt nachylenia promienia r do kierunku siły P . Jak widać, naprężenia maleją szybko w miarę oddalania się elementu płyty od punktu działania siły.

W przypadku obciążenia, rozłożonego równomiernie na górnej powierzchni belki prostokątnej, można miejscowe naprężenia obliczyć w przybliżeniu drogą elementarną. W tym celu rozpatrzmy równowagę elementu belki $mnpq$ (rys. 131), ograniczonego dwoma przekrojami poprzecznymi o wzajemnej odległości dx i przekrojem poziomym, oddalonym o z od warstwy obojętnej. W tym ostatnim przekroju powstaną ciśnienia p'_z , wywołane obciążeniem na górnej powierzchni belki, które oczywiście dla $z = +\frac{h}{2}$ muszą mieć wartość q , zaś dla $z = -\frac{h}{2}$ wartość 0. Dla dowolnego z znajdziemy ich wartość z warunku rzutów na oś pionową wszystkich sił zewnętrznych działających na rozpatrywany element. W tym warunku wystąpią widocznie tylko następujące siły:



Rys. 131

- 1° Obciążenie $q dx$ górnej podstawy elementu ze znakiem --.
- 2° Wypadkowa z ciśnieniem p'_z na dolną podstawę, t. j. $+ p'_z b dx$.

¹⁾ Parę interesujących konstrukcyj znajduje czytelnik w artykule J. Wagner'a: „Kurven reiner Schubbeanspruchung der geraden Balkenträger mit rechteckigem Querschnitt“. Zeitschr. d. öst. Ing. u. Arch. Ver. 1911, str. 615.

²⁾ Ob. I. Lewin: „Więstnik Inżynierów 1915“.

3° Wypadkowa z naprężeń ścinających p_t na ścianie mp , t. j. $+\int p_t dF$ i

4° Wypadkowa z naprężeń ścinających $\left(p_t + \frac{dp_t}{dx} dx\right)$ na ścianie nq , t. j.

$$-\int \left(p_t + \frac{dp_t}{dx} dx\right) dF.$$

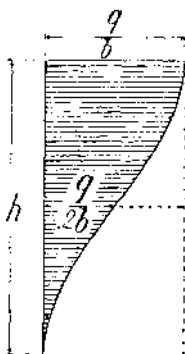
Jak wiadomo

$$p_t = \frac{Q S_{z_1}}{I_y b}, \text{ a zatem } \frac{dp_t}{dx} dx = \frac{S_{z_1}}{I_y b} \cdot \frac{dQ}{dx} dx,$$

zważywszy zaś, że siła poprzeczna zmniejsza się o $q dx$ przy przejściu od przekroju x do $x + dx$, napiszemy $\frac{dQ}{dx} dx = -q dx$

Rzędną dowolnego punktu ścian bocznych oznaczmy przytem przez z_1 . Stosownie do tego będzie pole dF paska elementarnego ściany bocznej mp lub nq równać się $b dz_1$. Po podstawieniu tych wartości w powyższe całki otrzymamy:

$$\int p_t dF = \frac{Q}{I_y} \int_x^{\frac{h}{2}} S_{z_1} dz_1; \quad \int \left(p_t + \frac{dp_t}{dx} dx\right) dF = \frac{Q - q dx}{I_y} \int_x^{\frac{h}{2}} S_{z_1} dz_1.$$



Rys. 132

Warunek równowagi przybiera tedy postać:

$$p'_z b dx - q dx + \frac{Q}{I_y} \int_x^{\frac{h}{2}} S_{z_1} dz_1 - \frac{Q - q dx}{I_y} \int_x^{\frac{h}{2}} S_{z_1} dz_1 = 0.$$

z czego wynika:

$$p'_z = \frac{q}{b} \left(1 - \frac{1}{I_y} \int_x^{\frac{h}{2}} S_{z_1} dz_1\right).$$

Wstawivszy w miejsce momentu statycznego S_{z_1} i momentu bezwładności I_y ich wartości:

$$S_{z_1} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2\right) \quad \text{i} \quad I_y = \frac{bh^3}{12},$$

znajdziemy po wykonaniu całkowania i uproszczeniu:

$$p'_z = \frac{q}{2b} \left(1 + 3 \frac{z}{h} - 4 \frac{z^2}{h^2}\right) \quad \dots \quad (80)$$

Prawo rozmieszczenia naprężeń p'_z wzdłuż wysokości przekroju przedstawia wykreślenie rys. (132).

ROZDZIAŁ IX

OBLICZENIE BELEK

§ 64. WYZNACZENIE REAKCYJ PODPOROWYCH

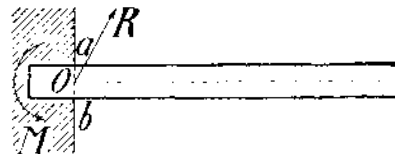
Wyłożywszy metody wyznaczenia naprężeń w belkach zginanych, przejdziemy do zastosowań praktycznych. Obliczenie takich belek musimy rozpocząć od wyznaczenia sił zewnętrznych, które można podzielić na dwie grupy: Do pierwszej należą obciążenia, jakie belka ma dźwigać. Te są zazwyczaj zgóry dane i należą do kategorii sił czynnych. Belka przenosi obciążenia na podpory, wywierając na nie naciski i doznając nawzajem reakcyj, równych i wprost przeciwnych naciskom podporowym. Reakcje podpór, jako siły bierne, stanowią drugą grupę sił zewnętrznych. Ogół sił zewnętrznych, t. j. obciążenie i reakcje danej belki, musi czynić zadość ogólnym warunkom równowagi, to też te warunki posłużą przedewszystkiem do obliczenia nieznanymi reakcyj. Jeżeli liczba warunków do tego nie wystarcza, to mamy do czynienia z zagadnieniem statycznie niewyznaczalnym. Brakujące równania warunkowe ustawiamy wówczas na podstawie rozpatrywania odkształceń belki. Ograniczając się do przypadków, w których wszystkie siły zewnętrzne leżą w jednej płaszczyźnie, otrzymamy trzy analityczne warunki równowagi¹⁾:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M = 0,$$

¹⁾ W dalszym ciągu przyjęto płaszczyznę działania sił za płaszczyznę XY , oś belki za oś X -ów, a oś Y -ów skierowano pionowo w górę.

z których dadzą się wyznaczyć trzy niewiadome. Dla statycznej wyznaczalności potrzeba zatem, aby reakcje sprowadzały się do trzech elementów, czyli dały się określić trzema wielkościami algebraicznymi. Rozróżniamy następujące sposoby podparcia belki:

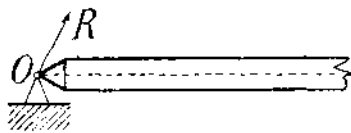
a) Utwierdzenie. Mówimy, że belka jest zupełnie utwierdzoną w punkcie O jej osi (rys. 133), jeżeli przekrój poprzeczny ab , odpowiadający temu punktowi, nie zmienia swego położenia i kierunku przy zgięciu belki. Układ sił wewnętrznych w przekroju podporowym ab , zapobiegający przesunięciu i obrotoowi tego przekroju, da się wogóle sprowadzić do jednej siły R , działającej na jego środek ciężkości i do jednej pary o momencie M . W ten sposób sprowadza się wyznaczenie reakcyj podporowych w przypadku zupełnego utwierdzenia końca belki do znalezienia trzech elementów: 1) wielkości momentu utwierdzenia M , 2) wielkości reakcji R i 3) kierunku siły R . Wyznaczenie wielkości i kierunku R można oczywiście zastąpić wyznaczeniem dwu składowych siły R , wziętych w kierunkach osi współrzędnych.



Rys. 133

[Utwierdzenie realizuje się w praktyce przez zamurowanie końca belki, przyśrubowanie i t. p. Utwierdzenie może być niepełnym w dwojakim znaczeniu: 1) Przekrój podporowy, a z nim cała belka, może się przesuwać w kierunku osi belki. Wtedy reakcja R musi być, przy pominięciu tarcia, prostopadłą do osi i tworzy przeto jeden element niewiadomy. Drugim jest oczywiście moment utwierdzenia M . 2) Przekrój podporowy może się obrócić około osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku o pewien mały kąt α . Liczba niewiadomych elementów nie zmniejsza się wtedy i równa się znowu 3].

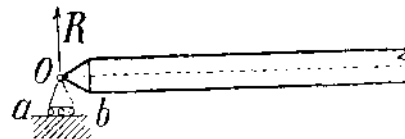
b) Podparcie stałe (rys. 134) w punkcie O osi belki zachodzi wówczas, gdy punkt O jest unieruchomiony, ale odpowiadający mu przekrój może się obracać około tego punktu. Reakcje podporowe przedstawia w tym przypadku jedna siła R , przechodząca przez punkt O . Jako niewiadome występują: 1) wielkość R i 2) kierunek siły R , albo też dwie składowe tej siły wzięte w kierunku osi współrzędnych.



Rys. 134

[Stale podparcie urzeczywistnia się w praktyce najdoskonalej przy pomocy przegubu, umieszczanego, co prawda, nie zawsze w osi belki. To tłumaczy jasno sposób schematycznego oznaczenia stałego punktu podparcia, zastosowany na rys. (134) i innych].

c) Podparcie ruchome zachodzi wtedy w punkcie O osi belki (rys. 135), jeżeli ten punkt ma jeden stopień swobody, t. j. może się przesuwać tylko w jednym kierunku. Zwykle nim bywa kierunek osi belki, ale wogóle można przepisać każdy inny kierunek. Odpowiadający przekrój może przytem obracać się około punktu O . Reakcja R musi tutaj widocznie przechodzić przez punkt O i być prostopadłą do kierunku możliwego przesunięcia (z pominięciem tarcia), a zatem do jej określenia wystarcza jeden element, t. j. wielkość R .



Rys. 135

[Podparcie ruchome wykonywa się w praktyce najdoskonalej przez przymocowanie przegubu do płyty opartej na wałkach równoległych, mogących się toczyć na nieruchomej podstawie (łożysko wałkowe). Stąd schematyczny rys. (135)].

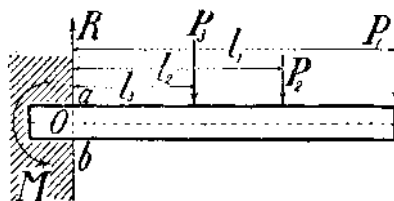
Z powyższych rozważań wynika, że belka będzie statycznie wyznaczalną tylko w następujących trzech przypadkach:

I. Belka jednym końcem utwierdzona (rys. 136). Moment utwierdzenia oblicza się z warunku momentów:

$$M = -(P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3).$$

Reakcja R w punkcie O jest pionowa, bo nie ma danych sił zewnętrznych poziomych. Z warunku rzutów wypada:

$$R = P_1 + P_2 + P_3.$$



Rys. 136

II. Belka na dwu podporach: stałej i ruchomej. Najczęściej mamy do czynienia z przypadkami szczególnymi,

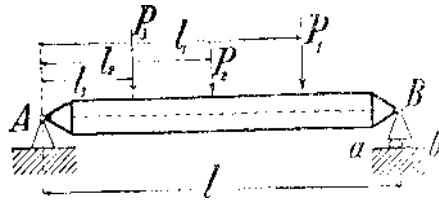
w których siły są prostopadłe, a kierunek przesunięcia ruchomej podpory równoległy do osi belki (rys. 137). Wtedy reakcje podpór muszą być dla równowagi prostopadłe do osi belki. Ich wartość znajdujemy najdogodniej z warunku momentów, obierając za środek momentów naprzemian to jeden, to drugi punkt podparcia. Oznaczywszy odległość podpór, czyli rozpiętość belki

przez l , a reakcje temi samymi literami, które posłużyły do oznaczenia punktów podparcia, otrzymamy w odniesieniu do rys. (137) warunek momentów względem punktu A :

$$Bl + P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 = 0,$$

z czego wypada

$$B = - \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3}{l}.$$

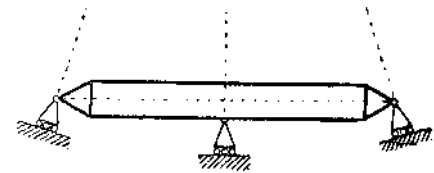


Rys. 137

Znak minus wskazuje, że kierunek reakcji B jest przeciwny kierunkowi sił danych.

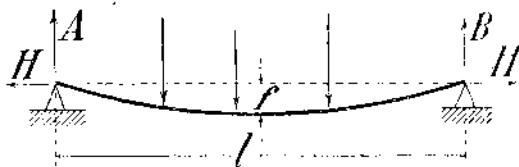
III. Belka na trzech podporach ruchomych rys. (139). W tym przypadku, mającym raczej teoretyczne

znaczenie, przedstawia każda reakcja podporowa jeden niewiadomy element, a mianowicie wielkość reakcji. Z trzech równań równowagi dadzą się te wielkości wyznaczyć z łatwością, wyjąwszy osobliwy przypadek, w którym wszystkie trzy reakcje przecinają się w jednym punkcie, mogącym leżeć także w nieskończoności. Wtedy bowiem nie jest belka ustalona w płaszczyźnie działania sił, lecz może się obrócić około owego punktu o nieskończenie mały kąt. Odpowiadające warunki równowagi przestają być równaniami od siebie niezależnymi, wskutek czego niewiadome przedstawiają się w postaci nieoznaczonej.



Rys. 139

Powracając jeszcze do przypadku II-go, zauważymy, że w praktyce konstruuje się jedną z podpór jako ruchomą tylko dla belek o znacznej rozpiętości. Mniejsze belki kładzie się zwykle na podporach nieruchomych. Przy zgięciu takich belek pod wpływem obciążenia siłami pionowymi



Rys. 138

pojawiają się nie tylko reakcje pionowe A i B , lecz także i poziome H (rys. 138), zapobiegające zbliżeniu końców belki. Wywołane temi siłami podłużne ciągnięcia są przy zwykłych rozmiarach belek małe i można je pominąć w porównaniu z naprężeniami wskutek zginania. Przekonamy się o tem zapomocą następującego rozważania: Jeżeliby jedna z podpór była ruchomą, to przy zgięciu zbli-

żyłyby się podpory nawzajem o długość δl , równą różnicy między długością zakrzywionej osi belki, a długością jej rzutu poziomego. Przy małych ugięciach można w przybliżeniu linię ugięcia o strzałce f zastąpić parabolą, której długość łuku różni się od długości cięciwy, jak wiadomo z § (32), o

$$\delta l = \frac{8}{3} \frac{f^2}{l} \dots \dots \dots (25)$$

Przy nieruchomych podporach muszą mieć siły podłużne H widocznie taką wielkość, aby wywołane nimi przedłużenie belki było dokładnie równe znalezionemu powyżej zbliżeniu podpór. Odpowiadające wydłużenie względne i ciągnięcie wyrażają zatem formuły:

$$e = \frac{\delta l}{l} = \frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2}, \quad p = \frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2} \cdot E.$$

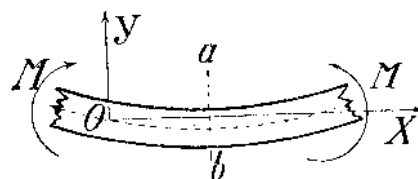
W żelaznych konstrukcjach np. nie dopuszcza się zwykle ugięć większych nad $\frac{1}{500} l$. Wstawwszy tę wartość i wartość $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, znajdziemy $p = \sim 21 \text{ kg/cm}^2$. Jest to wielkość kość bardzo mała w porównaniu do naprężenia dopuszczalnego, wobec czego można śmiało pominąć podłużne ciągnięcia przy obliczeniu takich belek. Zato w przypadku zginania cienkich prętów i blach mogą te ciągnięcia, jak zobaczymy później, odegrać ważniejszą rolę.

§ 65. DIAGRAM MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH I DIAGRAM SIŁ POPRZECZNYCH

Przy obliczeniach belek wypada wyznaczać wielkość naprężeń normalnych i stycznych w różnych przekrojach poprzecznych. W tym celu, jak okazano powyżej, trzeba znać wielkość momentu zginającego M i siły poprzecznej Q w odpowiadających przekrojach. Ażeby uprościć szukanie przekrojów niebezpiecznych, przedstawiamy wykreślnie zmienność momentu zgi-

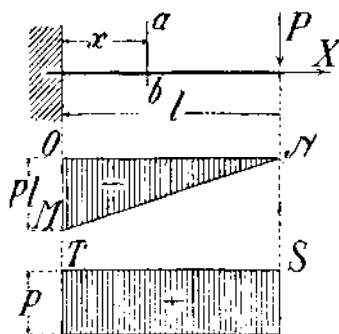
zginającego i siły poprzecznej wzdłuż osi belki, obierając tę oś za oś odciętych i odmierając jako rzędne odpowiadające wartości M , względnie Q . W ten sposób otrzymujemy t. zw. wykresy, czyli diagramy momentów zginających i sił poprzecznych. Konstrukcję tych diagramów przedstawimy najdogodniej na szczegółowych przykładach.

Obroną za oś X -ów oś belki ustawimy w myśli poziomo, a oś Y -ów skierujemy pionowo w dół. Moment zginający będziemy uważać za dodatni, jeżeli odpowiadająca para sił zewnętrznych obracałaby lewą odciętą część belki w kierunku wskazówki na zegarze, czyli, jeżeli wywołane tym momentem wygięcie osi jest skierowane wypukłością w dół (rys. 140). Siłę poprzeczną zaś przyjmijmy za dodatnią, jeżeli wyznaczona z sił zewnętrznych lewej odciętej części belki jest skierowana w górę.



Rys. 140

Belka jednym końcem utwierdzona, a na drugim swobodnym obciążona siłą P (rys. 141). Moment zginający M w jakimkolwiek przekroju ab , odległym o x od końca



Rys. 141

utwierdzonego, obliczymy najdogodniej sprowadzając do środka przekroju siły działające na prawą odciętą część belki. A zatem:

$$M = -P(l - x).$$

Temu równaniu odpowiada trójkątny diagram momentów wyznaczony wartościami

$$M_{(x=l)} = 0 \quad \text{i} \quad M_{(x=0)} = -Pl.$$

Wykres sił poprzecznych przedstawia się jako prostokąt o wysokości P , gdyż uwzględnivszy umowę co do znaku siły poprzecznej, znajdujemy w dowolnym przekroju $Q = P$. To samo wynika na podstawie formuły (69).

Jeżeli belka jest obciążona układem sił skupionych P_1, P_2, \dots (rys. 142), to w każdym przedziale między dwiema sąsiednimi siłami będzie określać moment inne wyrażenie i tak w l -szym przedziale (licząc od strony prawej):

$$M_I = -P_1(l_1 - x),$$

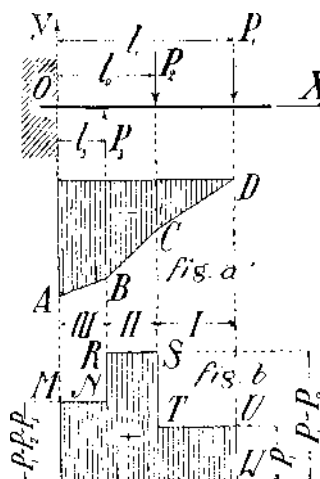
w II-gim:

$$M_{II} = -P_1(l_1 - x) - P_2(l_2 - x),$$

w III-cim zaś:

$$M_{III} = -P_1(l_1 - x) - P_2(l_2 - x) + P_3(l_3 - x).$$

W obrębie każdego przedziału zmienia się moment zginający linjowo. Przy przejściu z jednego przedziału w drugi zmienia się nachylenie prostej diagramu, który przedstawia się przeto jako wielobok (fig. a). Siła poprzeczna jest w każdym przedziale stała, a więc jej diagram składa się z prostokątów (fig. b). I w tym przypadku łatwo sprawdzić formułę (69), różniczkując wyrażenia dla momentów zginających w różnych przedziałach. Wielkość tych pochodnych daje widocznie tang. kąta nachylenia prostej diagramu momentów w odpowiadającym przedziale. Zauważymy jeszcze, że w miejscach działania sił skupionych zmieniają się analityczne wyrażenia dla momentów, a pochodne, dające wielkość siły poprzecznej zrywają ciągłość. Rozkład naprężeń w tych miejscach (ob. formułę 79) nie da się określić na podstawie zwykłych formuł dla naprężeń stycznych i normalnych.

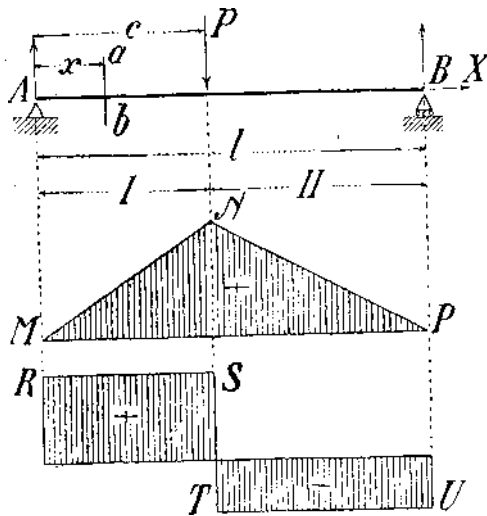


Rys. 142

Belka w obu końcach podparta i obciążona siłą skupioną P (rys. 113). Z warunku momentów względem prawego i lewego punktu podparcia znajdziemy reakcje:

$$A = \frac{P(l-c)}{l}, \quad B = \frac{Pc}{l}.$$

Moment zginający w dowolnym przekroju po lewej stronie siły P przedstawi formuła:



Rys. 143

$$M_I = + \frac{P(l-c)}{l} x.$$

po prawej zaś

$$M_{II} = + \frac{P(l-c)}{l} x - P(x-c) = \frac{Pc}{l} (l-x).$$

Moment zmienia się zatem linjowo w każdym z obu przedziałów i jest wszędzie dodatni. Największą wartość osiąga moment zginający w przekroju pod siłą P , t. j. dla $x=c$, a mianowicie:

$$M_{max} = \frac{Pc(l-c)}{l}.$$

Diagram momentów ma postać linii łamanej MNP , która z osią X -ów tworzy trójkąt. Siła poprzeczna w przedziale po lewej stronie siły P jest dodatnia i równa reakcji A , czyli:

$$Q_I = \frac{P(l-c)}{l}.$$

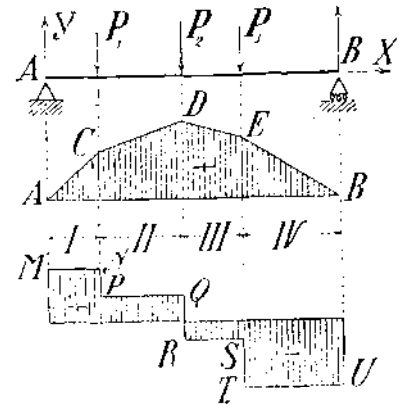
Przy przejściu na prawą stronę siły P zmienia siła poprzeczna zarazem wielkość i znak, gdyż od reakcji A trzeba odjąć P , czyli:

$$Q_{II} = \frac{P(l-c)}{l} - P = - \frac{Pc}{l}.$$

Diagram sił poprzecznych przedstawia się jako linia łamana $RSTU$, tworząca z osią X -ów dwa prostokąty.

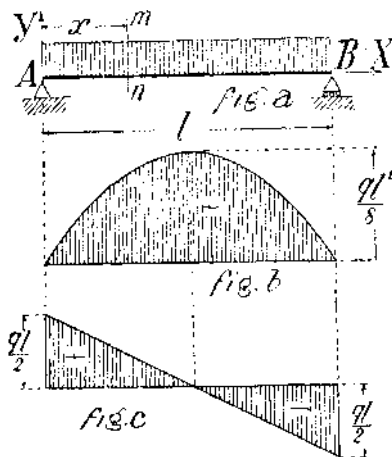
Jeżeli na belkę w obu końcach podpartą działa układ ciężarów skupionych P_1, P_2, \dots (rys. 144), to łatwo znaleźć tą samą drogą wieloboczny diagram momentów $ACDEB$ i schodkową linię sił poprzecznych $MNPQRSTU$. Największą wartość osiąga moment widocznie pod jednym z ciężarów. (W obranym przykładzie pod ciężarem P_2). W przekroju, gdzie zachodzi M_{max} , zmienia siła poprzeczna swój znak, czyli linia sił poprzecznych przecina oś X -ów. To wynika bezpośrednio ze związku

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$



Rys. 144

Przy pomocy twierdzenia, wyrażonego tem równaniem, można uprościć szukanie przekroju niebezpiecznego. Wystarczy w tym celu wykreślić linię sił poprzecznych, a tam, gdzie ona przecina oś X -ów, leży przekrój niebezpieczny.



Rys. 145

Belka w obu końcach podparta i obciążona równomiernie na całej rozpiętości (rys. 145). Jeżeli q oznacza obciążenie jednostki długości belki, to całkowite obciążenie równa się ql . Obie reakcje są oczywiście równe $\frac{1}{2} ql$. Moment zginający w dowolnym przekroju belki mn znajdziemy, biorąc moment wszystkich sił leżących po jednej stronie (np. lewej) rozpatrywanego przekroju względem jego środka. Moment reakcji A będzie równy

$$+ \frac{ql}{2} x,$$

zaś moment obciążenia ciągłego na przestrzeni x jest równy

$$- qx \cdot \frac{x}{2} = - \frac{qx^2}{2}.$$

A zatem moment zginający

$$M = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx(l-x)}{2}.$$

Odpowiadający diagram jest parabolą. Maximum momentu zginającego zachodzi, jak się łatwo przekonąć w środku rozpiętości, czyli dla $x = \frac{l}{2}$ i ma wartość:

$$M_{\max} = \frac{1}{8} q l^2.$$

Jeżeliby obciążenie $q l$ skupić w środku rozpiętości, to M_{\max} byłoby dwa razy większe. Siłą poprzeczną w przekroju $m n$ jest widocznie:

$$Q = \frac{q l}{2} - q x.$$

Linia sił poprzecznych jest zatem prostą, przecinającą oś X -ów w środku rozpiętości, t. j. tam gdzie zachodzi M_{\max} .

Gdy obciążenie ciągłe jest rozłożone równomiernie tylko na pewnej części rozpiętości (rys. 146), to położenie przekroju niebezpiecznego znajdziemy najłatwiej kreśląc linię sił poprzecznych. Z warunku momentów względem prawej podpory znajdziemy reakcję:

$$A = \frac{q c^2}{2l}.$$

Reakcją prawej podpory będzie zaś:

$$B = q c - A = q c - \frac{q c^2}{2l} = \frac{q c}{2l} (2l - c).$$

Siła poprzeczna na lewej nieobciążonej części belki będzie widocznie równa reakcji lewej podpory. Odpowiadającą część linii sił poprzecznych przedstawi odcinek prostej MN równoległej do osi X -ów. W dowolnym przekroju $m n$ części obciążonej będzie siłą poprzeczną:

$$Q = \frac{q c^2}{2l} - q(x + c - l).$$

Temu wyrażeniu odpowiada prosta nachylona NP (fig. b). Jej punkt przecięcia z osią X -ów określa położenie przekroju, w którym zachodzi M_{\max} . Co się tyczy linii momentów zginających, to dla nieobciążonej części belki będzie nią prosta nachylona względem osi X -ów, gdyż moment zginający zmienia się według prawa:

$$M_I = A x = \frac{q c^2}{2l} x.$$

W części obciążonej zaś zmienia się ten moment według prawa parabolicznego:

$$M_{II} = A x - \frac{q}{2} (x + c - l)^2.$$

Przekrój, który odpowiada największemu momentowi zginającemu, znajdziemy z warunku:

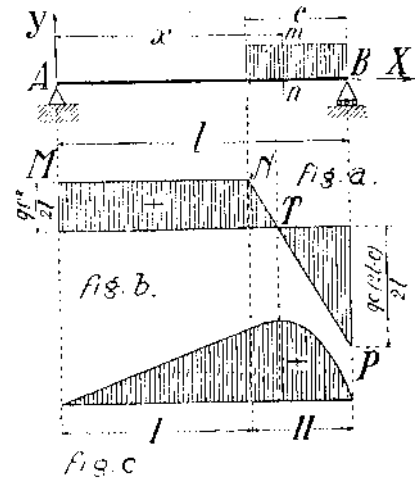
$$\frac{dM_{II}}{dx} = \frac{q c^2}{2l} - q(x + c - l) = 0,$$

skąd

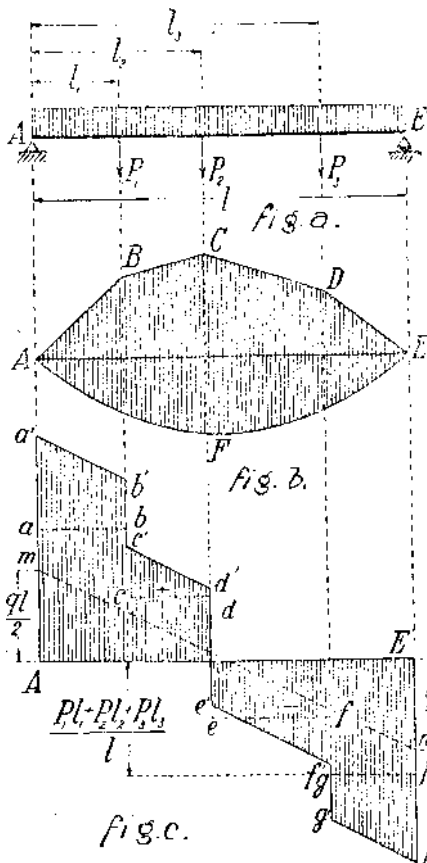
$$x = \frac{(l - c)^2 + l^2}{2l}.$$

Diagram momentów zginających przedstawiono na fig. (c).

Jeżeli na belkę działa jednocześnie obciążenie ciągłe i układ ciężarów skupionych (rys. 147), to w celu wykresnego przedstawienia zmienności momentu zginającego wzdłuż belki najdogodniej skonstruować osobno diagram momen-

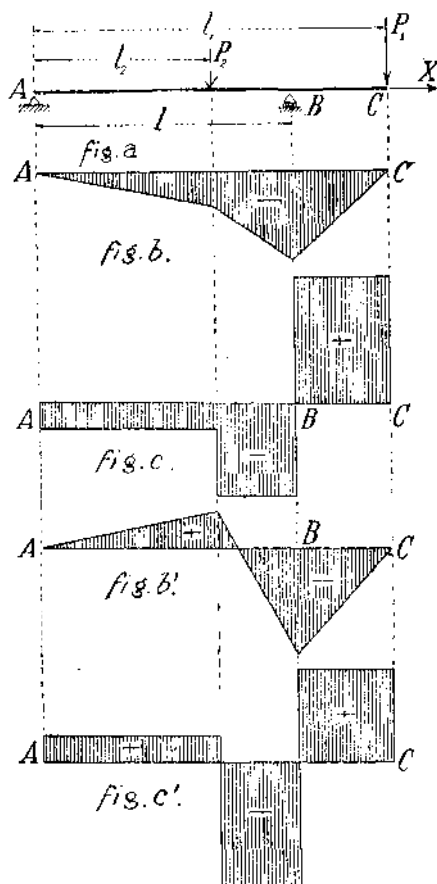


Rys. 146



Rys. 147

tów wywołanych obciążeniem ciągłym, a osobno dla sił skupionych. Odmierzając rzędne



Rys. 148

pierwszego diagramu na dół, a drugiego do góry od osi X -ów (fig. b), otrzymamy widocznie żądany wykres momentów wywołanych obciążeniem całkowitem. Tak samo można postąpić i przy konstrukcji diagramu sił poprzecznych (fig. c).

Jeżeli podpory nie leżą na końcach belki, to szukanie linii momentów i sił poprzecznych nie ulegnie żadnej zasadniczej zmianie. Pewne właściwości tego przypadku przedstawimy na przykładzie belki wystającej, czyli wspornikowej (rys. 148), obciążonej dwiema siłami skupionymi P_1 i P_2 . Z warunku momentów względem punktu podparcia A znajdujemy reakcję prawej podpory:

$$B = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2}{l},$$

skierowaną widocznie w górę. Natomiast wartość reakcji lewej podpory, t. j.

$$A = P_1 + P_2 - B = \frac{P_1(l-l_1) + P_2(l-l_2)}{l}$$

może wypaść dodatnia albo ujemna. W tym ostatnim przypadku będzie reakcja skierowana z góry na dół, a odpowiadające diagramy momentów i sił poprzecznych przedstawiają figury (b) i (c). W przypadku reakcji A skierowanej w górę przecina linia sił poprzecznych dwa razy oś (fig. c') w punktach, gdzie moment zgięcia osiąga największą dodatnią i ujemną wartość.

§ 66. OBLICZENIE NAPRĘŻEŃ NIEBEZPIECZNYCH

Mając diagramy momentów i sił poprzecznych znajdziemy łatwo te przekroje, w których należy oczekiwać szczególnie wielkich, a właściwie niebezpiecznych naprężeń, czyli przekroje niebezpieczne. Największe ciągnięcia i ciśnienia otrzymamy oczywiście w przekrojach, gdzie moment zginający osiąga największą wartość. Największe zaś naprężenia ścinające będą odpowiadać przekrojom o największej wartości siły poprzecznej Q . Jakkolwiek naprężenia ścinające panują także i w przekrojach ukośnych włókien skrajnych, to jednak w obliczeniach technicznych ograniczają się zwykle do rozpatrzenia naprężeń w elementach leżących w płaszczyźnie przekroju poprzecznego i przyjąwszy pewną postać przekroju obierają jego wymiary tak, aby te naprężenia nie przekraczały ustalonych norm. Wtedy formuły obliczenia mają postać następującą:

$$\frac{M_{\max}}{W} < R, \quad \frac{Q_{\max} S}{I b} < R_t.$$

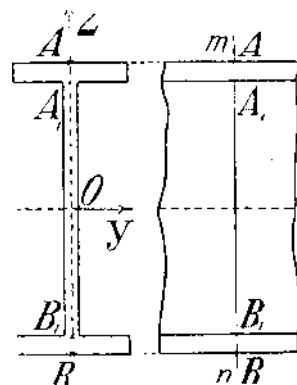
Tutaj wielkości I i W odnoszą się do głównej osi bezwładności przekroju, która jest zarazem osią obojętną, a b oznacza szerokość przekroju.

Dla naprężenia dopuszczalnego R przyjmuje się tę samą wartość, co przy prostym rozciąganiu, względnie ścisaniu. Co się tyczy stycznego naprężenia dopuszczalnego R_t , to dla metali plastycznych wypada wziąć $R_t = 0,5 R$ (zob. § 36), dla innych zaś materiałów, stosownie do szczegółowych danych doświadczalnych.

[Nadto należałoby uwzględnić, zależnie od postaci przekroju i sposobu działania sił, stopień niedokładności formuły dla p_t].

Jeżeli zachodzi działanie obciążeń zmiennych, to trzeba odpowiednio zmienić dopuszczalną wielkość naprężeń, przyczem należy się kierować wywodami, otrzymanymi przy rozpatrywaniu zjawiska zużycia metali.

Łatwo zrozumieć, że powyższy sposób obliczenia wystarczy w przypadkach przekrojów o zwartej postaci, jak np. prostokątnego i kołowego, wtedy bowiem widać od razu, że w miejscach, gdzie naprężenia normalne mogą osiągnąć wartość niebezpieczną, nie grają żadnej roli naprężenia styczne i nawzajem. Skoro jednakże mamy do czynienia z przekrojami smukłymi, jak np. przekrój **T** (teowy), lub **I** (dwuteowy) walcowanych kształtówek, to, o ile w danym przekroju poprzecznym schodzą się razem znaczne wartości momentu zginającego i siły poprzecznej, można w nim znaleźć miejsca, gdzie jednocześnie obadwa rodzaje naprężeń osiągają wyjątkowo wielkie wartości, gdzie zatem wypadnie obliczyć naprężenia główne, ażeby można określić wytrzymałość materiału na podstawie jednej z teorii wytrzymałości, przedstawionych w § 36. Takim miejscem będzie np. w belce **I** (rys. 149) punkt A_1 , lub B_1 , gdyż tam naprężenia normalne są mało co mniejsze od wartości skrajnych, a naprężenia ścinające również mało się różnią od największej wartości, jaką osiągają w osi obojętnej. Tam też powstają naprężenia główne



Rys. 149

$$p_{\max} = \frac{p_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}, \quad p_{\min} = \frac{p_n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2},$$

(por. § 62), które mogą być niebezpieczniejsze dla materiału od naprężeń we włóknach skrajnych i środkowych.

Dajmy na to, że w rozpatrywanym przekroju mn (rys. 149) panuje moment zginający i siła poprzeczna o wartościach:

$$M = 5 \cdot 10^5 \text{ kgcm}, \quad Q = 15 \cdot 10^3 \text{ kg}.$$

Wtedy najw. naprężenie w punkcie A będzie (wymiary przekroju wzięto z przykładu w § 61 i przyjęto, że w A zachodzi rozciąganie, a w B ściskanie):

$$p_n = \frac{M}{W} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 15}{11200} = \sim 670 \text{ kg/cm}^2.$$

Dla punktu A_1 zaś są naprężenia normalne i styczne odpowiednio równe:

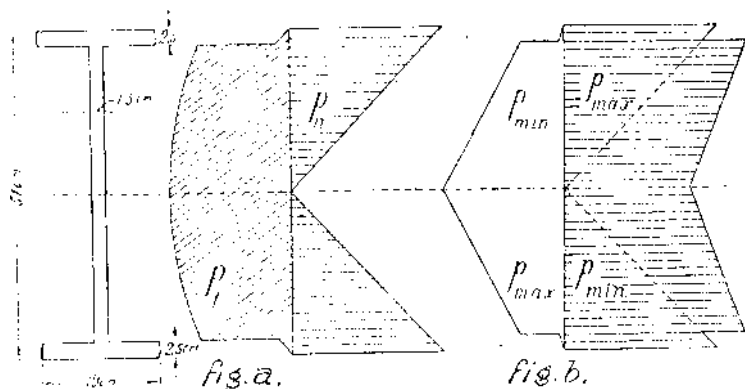
$$p_n = \frac{670 \cdot 13}{15} = \sim 580 \text{ kg/cm}^2, \quad p_t = 375 \text{ kg/cm}^2.$$

Naprężenia główne, obliczone według formuł powyżej przytoczonych, mają tutaj następujące wartości:

$$p_{\max} = \frac{580}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{580^2 + 4 \cdot 375^2} = +764 \text{ kg/cm}^2,$$

$$p_{\min} = \frac{580}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{580^2 + 4 \cdot 375^2} = -184 \text{ kg/cm}^2.$$

Ich różnica, (określająca wytrzymałość materiału według III hipotezy), t. j. $p_{\max} - p_{\min} = 948 \text{ kg/cm}^2$, jest o wiele większą od odpowiadających różnic we włóknach skrajnych (670 kg/cm^2) i włóknie środkowym ($2 \cdot 375 = 750 \text{ kg/cm}^2$). Także przy zastosowaniu I lub II hipotezy otrzymalibyśmy największe wytrzymałość materiału w punkcie A_1 . Ocenę wytrzymałości takiej belki należy przeto oprzeć na obliczeniu naprężeń głównych w miejscu A_1 .



Rys. 150

Rys. (150) przedstawia rozmieszczenie naprężeń ścinających, normalnych i głównych na wysokości przekroju I o rozmiarach uwidoczni-onych na rysunku, przy założeniu, że $Q = 40 \cdot 10^3 \text{ kg}$, $M = 203 \cdot 10^4 \text{ kgcm}$. I w tym przypadku znajdujemy największe wartości naprężeń głównych w miejscach połączenia stopek ze ścianką belki.

Ażeby ustawić ogólne wzory do obliczeń praktycznych, musimy się oprzeć

na którejś z teorii wytrzymałości. Każda z nich prowadzi oczywiście do odmiennych formuł. Ze względu na to, że smukłe przekroje stosujemy tylko do belek walcowanych z żelaza kowalnego i stali, okazuje się jedynie racjonalną teorią III, według której o wytrzymałości decyduje największa różnica naprężeń głównych. Warunek wytrzymałości będzie mieć przeto postać:

$$p_{\max} - p_{\min} = \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2} \leq R. \quad (83)$$

Dla porównania napiszemy jeszcze warunek wytrzymałości na podstawie II-giej hipotezy, która uważa największe wydłużenie za miarę wyężenia materiału. Będzie nim widocznie:

$$p_{\max} - \sigma p_{\min} \leq R,$$

albo, po wyrażeniu naprężeń głównych przez p_n i p_t w płaszczyźnie przekroju i wstawieniu $\sigma = 0,3$ (dla żel. kowalnego i stali):

$$0,35 p_n + 0,65 \sqrt{p_n^2 + 4 p_t^2} \leq R^1) (82)$$

W naszych obliczeniach nie uwzględniliśmy jeszcze trzeciej kategorii naprężeń, t. j. ciśnień pionowych, wywołanych bezpośrednio działaniem obciążenia. Te ciśnienia mogą także grać ważną rolę przy wyznaczeniu wyężenia materiału, niestety jednak dadzą się tylko w szczególnych przypadkach oznaczyć z jaką taką dokładnością. W § 63 obliczyliśmy je dla belki prostokątnej, obciążonej równomiernie.

[Przy takimże obciążeniu można ciśnienia pionowe obliczyć i dla belki \perp , gdzie one osiągają widocznie największą wartość w ścianie tuż pod górną stopką. W przypadku obciążeń skupionych musimy poprzestać na ocenie zgrubsza wielkości tych naprężeń, biorąc do pomocy doświadczenie i zastępując ciężar skupiony obciążeniem rozłożonym równomiernie na odpowiedniej długości. Wszystkich rachunków tego rodzaju niepodobna najczęściej ująć w ogólne formuły, z którychby np. można obliczyć wymiary przekroju o danym kształcie, jeżeli są dane obciążenia, a więc M i Q , tudzież wartość naprężenia dopuszczalnego. Zwykle wypadnie obrać przekrój na razie tak, aby dogadzał tylko jednemu z warunków, a mianowicie, aby naprężenie normalne we włóknach skrajnych, wywołane największym momentem zginającym nie przekraczało przyjętej wielkości dopuszczalnej, a dopiero potem wyszukać miejsca niebezpieczne, obliczyć w nich naprężenia główne z uwzględnieniem wszystkich wpływów i sprawdzić, czy największa różnica naprężeń głównych nie przekracza również dopuszczalnej wartości naprężenia przy prostym rozciąganiu. Jasnym jest przytem, że norma dla naprężenia dopuszczalnego powinna być tem wyższą, im dalej idziemy w uwzględnieniu rozmaitych wpływów, czyli im dokładniej wyznaczamy wyężenie materiału. Gdybyśmy byli w stanie obliczyć ściśle wartość naprężeń niebezpiecznych we wszelkich warunkach, jakim w przyszłości podlegać będzie dany element konstrukcyjny, to nicby nie przeszkadzało podejść z wartością naprężenia dopuszczalnego blisko naturalnej granicy sprężystości].

Na zakończenie zaznaczymy, że przy obliczeniu wysokich belek dwuteowych nie wolno się ograniczyć do sprawdzenia warunków wytrzymałości, lecz trzeba zwrócić szczególną uwagę na stopień stateczności konstrukcji. Niewystarczająca stateczność zniewala niekiedy do obniżenia wartości naprężenia dopuszczalnego. Do tej kwestji powrócimy przy ogólnem badaniu stateczności układów sprężystych.

§ 67. OBLICZENIE BELEK NITOWANYCH KSZTAŁTU I

W konstrukcjach żelaznych mają bardzo obszerne zastosowanie belki dwuteowe, złożone z pionowej ścianki, czterech kąłówek i jednej lub kilku par nakładek, połączonych nitami w jedną całość. Nitowanie odbywa się przy wysokiej temperaturze nitu, wskutek czego nity ściskają po ostygnięciu części połączone tak silnie, że belka zachowuje się jak lita. Atoli obecność otworów na nity może w znacznej mierze zmodyfikować prawo rozkładu naprężeń w przekroju, jakie otrzymaliśmy dla belki litej. Jak pokazały badania teoretyczne i doświadczalne, może wielkość naprężeń wzrosnąć znacznie w pobliżu otworów. Przy rozciąganiu blach zwiększają otwory wartość naprężenia w trójnasób (§ 28); przy czystem ścinaniu, które zachodzi w warstwie obojętnej belki, rosną naprężenia na brzegach otworów nawet w czwórnasób²⁾. Te wyniki odnoszą się, co prawda, do otworów niezapełnionych. Jeżeli otwór jest wypełniony nitem, to rozkład naprężeń będzie oczywiście odmienny [i, jak się zdaje, znacznie korzystniejszy]. Warto także zapamiętać, że szczególnie szkodliwy wpływ na wytrzymałość belki wywierają podłużne otwory, umieszczone wzdłuż warstwy obojętnej³⁾ [oczywiście, jeżeli w przekroju przechodzącym przez otwór zachodzi znaczna siła poprzeczna przy sto-

¹⁾ [Ten wzór najbardziej rozpowszechniony w podręcznikach, jest nietylko nieracjonalny, ale nawet, jak widzimy, bardziej złożony od uzasadnionego doświadczalnie wzoru (83). Z tego powodu tłumacz wysunął na pierwszy plan wzór (83), oparty na trzeciej teorii wytrzymałości, pomijając nadto w głównym tekście najprostszy wzór:

$$p_{\max} \leq R (81)$$

wplywający z hipotezy największego naprężenia, również nie potwierdzonej przez doświadczenie].

²⁾ S. P. Timoszenko: „O wlianiij kruglych otwierstij...“, Izv. Kij. Pol. Inst. 1907.

³⁾ Pfeleiderer. „Der Einfluss von Löchern oder Schlitzten...“. Mitt. u. Forschungsarbeiten, Heft 97, 1911.

sunkowo małym momencie zginającym]. Oprócz otworów mogą znacznie osłabić belkę nacięcia na jej powierzchni. Pewne wyobrażenie o powstających przytem nadwyżkach naprężeń można nabyć na podstawie tego, co powiedziano poprzednio o prętach z wytoczonym żłóbkiem (karbem). Szczególnie szkodliwe działanie takich naprężeń miejscowych okaże się przy obciążeniach powtarzających się i w przypadku belek z materiałów kruchych. W praktyce, jak dotąd, mało się liczą z wyliczonymi przypadkami przecięcia materiału, a wpływ osłabienia przekroju uwzględniają z gruba, wstawiając np. zamiast I_y w formule:

$$p_z = \frac{Mz}{I_y}$$

moment bezwładności „netto“, jaki otrzymamy po odjęciu momentu bezwładności otworów od momentu bezwładności całego przekroju.

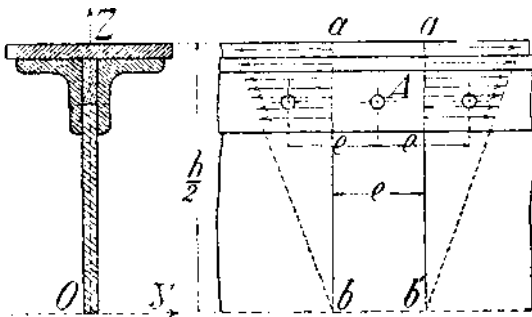
Co się tyczy naprężeń stycznych w ściance, to ich wartość powiększa się wskutek otworów na nity. Siła poprzeczna przenosi się, jak wiadomo, prawie całkowicie na ściankę, a ponieważ szereg otworów na nity w odstępach e zmniejsza pole przekroju ścianki w stosunku $\frac{e-d}{e}$, jeżeli d oznacza średnicę nitów (rys. 151),

więc średnia wartość naprężeń ścinających wzrośnie w stosunku $\frac{e}{e-d}$. Dlatego używają do oznaczenia największych naprężeń ścinających w belkach nitowanych następującej formuły:

$$(p_t)_{\max} = \frac{QS}{Ib} \cdot \frac{e}{e-d} \quad (84)$$

Tutaj oznacza I moment bezwładności całego przekroju względem osi obojętnej, S moment statyczny połowy przekroju względem tej osi, zaś b grubość ścianki. I i S oblicza się przytem zwykle bez potrącenia otworów na nity.

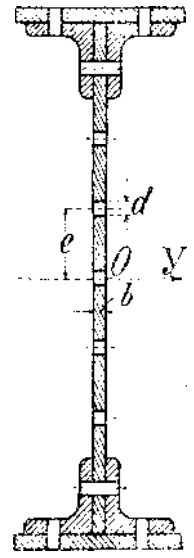
Przedstawimy teraz te przybliżone sposoby, jakich używają w praktyce do obliczenia odstępów nitów e . Grubość nitów stosuje się do grubości łączonych części, ale zależność tę rozpatrzmy na innym miejscu. Przy obliczeniu nitów służących do połączenia kątówek ze ścianką, które będziemy nazywać krótko nitami „poziomymi“ (rys. 152), przyjmuje się najniekorzystniejsze warunki, pomijając tarcie między połączonymi częściami i przyjmując możliwość ścięcia nitów w płaszczyźnie przylegania kątówek do ścianek. Ażeby oznaczyć wielkość siły przypadającej na jeden nit, rozpatrzmy dwa przekroje poprzeczne ab i $a'b'$, połowiące odstęp między środkami nitów. Przy zgięciu belki przenosi się na nit A różnica naprężeń normalnych, przypadających na pola przekrojów kątówek i nakładek. Na element pola dF le-



Rys. 152

wego i prawego przekroju działają odpowiednio napiecia $\frac{M}{I_y} z dF$ i $\frac{M_1}{I_y} z dF$, jeżeli przyjmiemy, że rozkład naprężeń jest taki sam, jak dla belki litej. To przyjęcie jest równoważne z przypuszczeniem, że nity łączące (tak poziome, jak i pionowe) zachowują się jak zupełnie sztywne i wskutek tego nie zachodzą względne przesunięcia nakładek, kątówek i ścianki. Biorąc pod uwagę odkształcenie nitów znaleźlibyśmy, że belka nitowana jest nieco słabsza od litej. To osłabienie nie przekracza jednakże w zwykłych warunkach 6%¹⁾. Sumując teraz różnicę naprężeń bezwzględnych $\frac{M - M_1}{I_y} z dF$ na całym polu F , otrzymamy jako wartość siły T przeniesionej na nit:

$$T = \frac{M - M_1}{I_y} \int z dF = \frac{M - M_1}{I_y} \cdot S'$$



Rys. 151

¹⁾ Por. Arnovlevič, Zeitschr. f. Arch. u. Ing.-wesen. 1910, str. 57.

Przez S' oznaczyliśmy tutaj moment statyczny przekrojów kątek i nakładek względem osi obojętnej OY . Uwzględniając, że $\frac{M - M_1}{e}$ jest średnią wartością stosunku $\frac{dM}{dx} = Q$ między obranymi przekrojami, czyli $M - M_1 = eQ$, znajdziemy dla T wzór:

$$T = \frac{QeS'}{I_y} \quad \dots \quad (85)$$

Ponieważ nity poziome są narażone na ścięcie w dwu płaszczyznach (po obu stronach ścianki), więc średnią wartość naprężenia ścinającego w nicie obliczymy z wzoru:

$$p_t = \frac{2T}{\pi d^2} = \frac{2QeS'}{I\pi d^2} \quad \dots \quad (86)$$

To równanie pozwala obliczyć odstęp nitów e z danych wartości d i naprężenia dopuszczalnego.

Przy obliczeniu belek dwuteowych litych wskazaliśmy już na ważność wyznaczenia naprężeń głównych w punktach przekroju odpowiadających przejściu ścianki w stopkę. Z tą samą okolicznością wypada się liczyć i przy obrachowaniu belek nitowanych. W najniekorzystniejszych warunkach okażą się tutaj punkty leżące na wysokości nitów poziomych, gdyż według naszych przypuszczeń (pominięcie tarcia) oprócz naprężeń ścinających p_t'' , odpowiadających ogólnemu odkształceniu samej ścianki, przenoszą się w tym miejscu na ściankę siły T za pośrednictwem nitów. Te siły dążą do ścięcia ścianki w płaszczyźnie przechodzącej przez środki nitów. Przyjmując równomierny rozkład naprężeń ścinających, znajdziemy ich wartości z równania:

$$p_t' = \frac{T}{(e-d)b},$$

albo po podstawieniu za T wartości z (85):

$$p_t' = \frac{QS'}{Ib} \cdot \frac{e}{e-d}.$$

Do obliczonych naprężeń p_t' trzeba dołączyć jeszcze wymienione powyżej naprężenia p_t'' , powstające w ściance pod wpływem siły poprzecznej Q . Określi je formuła:

$$p_t'' = \frac{QS''}{Ib} \cdot \frac{e}{e-d},$$

w której S'' oznacza moment statyczny części ścianki, leżącej powyżej linii środków nitów, względem osi obojętnej. Tę część uwidoczniono na rys. (152) gęstszym zakreskowaniem. Oznaczywszy przez $S = S' + S''$ moment statyczny gęsto zakreskowanej części całego przekroju, przedstawimy naprężenie wypadkowe wzorem:

$$p_t = p_t' + p_t'' = \frac{QS}{Ib} \cdot \frac{e}{e-d}, \quad \dots \quad (87)$$

który w połączeniu ze zwykłą formułą:

$$p_n = \frac{Mz}{I}$$

dla naprężenia normalnego pozwoli obliczyć naprężenia główne według wzoru:

$$\left. \begin{array}{l} p_{\max} \\ p_{\min} \end{array} \right\} = \frac{p_n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_n}{2}\right)^2 + p_t^2}.$$

[Powyższe rachunki wydają się na pierwszy rzut oka jako bardzo niepewne, gdyż z jednej strony zaniedbują tarcie między nitowanymi częściami, które, jak wykazały doświadczenia, gra dominującą rolę, a z drugiej strony nie liczą się zupełnie z nierównomiernościami rozkładu naprężeń, wywołanymi przez otwory. Ale błędy wywołane temi obiema niedokładnościami mają znaki przeciwne i zdarzyć się może, że się nawzajem zniosą, tak iż przybliżony zgruba rachunek będzie wcale dobrze odpowiadać rzeczywistości. Praktyka, jak się zdaje, przemawia za tem, że w tym przypadku nie zawiodła inżynierów intuicja. W każdym jednak razie ostrożność nie zawadzi i przy obliczeniu w powyższy sposób belek nitowanych będzie wskazaniem obniżyć naprężenia dopuszczalne w porównaniu do wartości uznanych za bezpieczne dla belek litych].

Nowsze doświadczenia z nitowanymi belkami **I** pokazują, że ich złamanie zachodzi zwykle wskutek niewystarczającej stateczności pasa ściskanego, albo niestateczności stosunkowo cienkiej ścianki pionowej¹⁾.

§ 68. OBLICZENIE ZŁOŻONYCH BELEK DREWNIANYCH

W przypadkach wielkich momentów zginających używa się dla lepszego wyzyskania materiału belek złożonych z dwu, a w razie potrzeby z trzech, przyczem najczęściej łączy się je klinami (dyblami) i śrubami w sposób przedstawiony na rys. (153). Działanie klinów objaśniliśmy już w § 59. Śruby zaś mają widocznie głównie konstrukcyjne znaczenie. Rozpatrzmy przypadek belki podwójnej o szerokości b i wysokości $2h$. Jeżeli e oznacza odstęp klinów, to siła ścinająca T , przypadająca na jeden klin, będzie równa wypadkowej z naprężeń ścinających p_t , jakoby działały w poziomym środkowym przekroju o polu $b \cdot e$, gdyby belka była litą, czyli

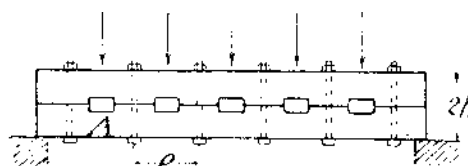
$$T = b e p_t.$$

A ponieważ

$$p_t = \frac{QS}{Ib} = \frac{3}{2} \frac{Q}{2bh},$$

więc

$$T = \frac{3}{4} \frac{Qe}{h} \quad \dots \quad (88)$$



Rys. 153

Przy obliczeniu klinów przyjmuje się zwykle głębokość wrębu (3 do 4 cm) i oznacza się szerokość a z warunku, aby opór przeciwko zgnieceniu włókien wrębu był równy oporowi klina przeciwko ścięciu. Znając wymiary klina, a zatem i wartość siły T , którą może znieść z żądanym stopniem bezpieczeństwa, możemy obliczyć odstęp klinów e z formuły (88). Ten odstęp nie będzie wogóle stałym, lecz zmienia się odwrotnie proporcjonalnie względem wartości siły poprzecznej Q . Wskutek osłabienia belek wrębami wstawia się we wzór dla obliczenia największych naprężeń normalnych

$$(p_n)_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}$$

wartość

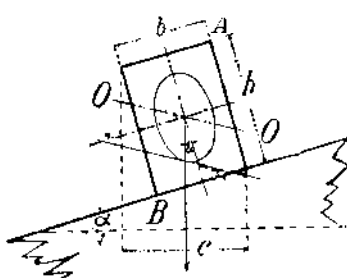
$$W = \left| \frac{b(2h)^3}{12} - \frac{b(2c)^3}{12} \right| : h.$$

W miejscach, gdzie przypadają śruby łączące, trzeba nadto uwzględnić osłabienie przekroju przez otwór na śrubę. Prócz tego zmniejsza się naprężenie dopuszczalne w porównaniu do tego, jakie przyjmujemy dla belek litych o 30%²⁾.

§ 69. OBLICZENIE PŁATWI

Belki poziome, leżące na pochylej pościeli dachu i podtrzymujące jego pokrycie, nazywamy płatwiami (l. p. płatów). Zwykle działają one jako belki w obu końcach podparte i równomiernie obciążone, obliczamy je więc według największego momentu

$$M_{\max} = \frac{1}{8} q l^2.$$



Rys. 155

Ze względu na występujący tutaj przypadek zgięcia ukośnego, znajdujemy najdogodniej wartość największego naprężenia normalnego, rozłożywszy moment na momenty składowe, działające w płaszczyznach głównych belki. Jeżeli przekrój jest prostokątem (rys. 155) o podstawie b i wysokości h , nachylonej do pionu pod kątem α , to największe naprężenie normalne powstaje widocznie w punkcie A . Łatwo okazać, że jego wielkość określa formuła:

$$p_A = \frac{6M \cos \alpha}{b h^2} + \frac{6M \sin \alpha}{b^2 h}.$$

¹⁾ Ob. F. Moore. University of Illinois Bulletin 68, 1913.

²⁾ Według doświadczeń prof. E. Kidwell'a (Michigan College of Mines) równa się wytrzymałość belki złożonej 75% wytrzymałości odpowiadającej belki litej przy zastosowaniu klinów dębowych, a 80% przy klinach żelaznych.

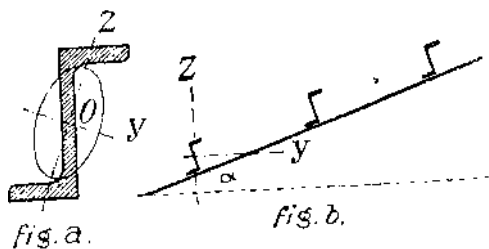
Ze względu na to, że

$$b \cos \alpha + h \sin \alpha = c,$$

przyczem c jest sumą rzutów boków b i h na poziom, da się powyższa formuła napisać w postaci:

$$p_A = \frac{6 M c}{b^2 h^2}.$$

Na płacie żelazne używa się z korzyścią kształtów Z (rys. 156), których przekrój ma osie główne nachylone do ścianki i stopki. Ponieważ stopki leżą w płaszczyźnie połączy dachu, nachylonej do poziomu pod kątem α , więc może się zdarzyć, że płaszczyzna główna płaty będzie zorientowana pionowo i że, powstanie zgięcie w tejże płaszczyźnie. Ządzie to oczywiście przy kącie nachylenia dachu równym kątowi nachylenia osi Y (fig. a) przekroju do stopki. Wtedy płaszczyzna zginania będzie odpowiadać największej sztywności przekroju, czyli piatek będzie pracować w najkorzystniejszych warunkach których, praktycznie biorąc, nie zmienia małe odchylenia wartości kąta α .

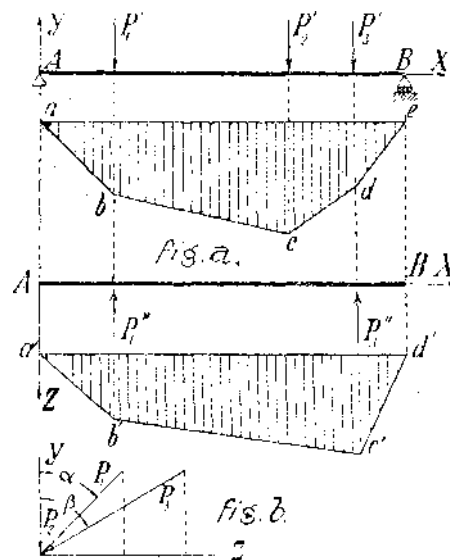


Rys. 156

W przypadku obciążenia belki siłami prostopadłymi do jej osi, a nie leżącymi w jednej płaszczyźnie, rozkładamy każdą siłę na dwie składowe, leżące w głównych płaszczyznach belki i badamy zgięcie w każdej płaszczyźnie osobno. Weźmy np. belkę AB (rys. 157, fig. a) w obu końcach podpartą i obciążoną siłami P_1, P_2, P_3 . Niech będą XY i XZ płaszczyznami głównymi belki. Znając kąty nachylenia α, β, \dots (fig. b) danych sił względem płaszczyzny XY , łatwo obliczyć ich składowe. W płaszczyźnie XY zachodzi zgięcie pod wpływem sił $P'_1 = P_1 \cos \alpha, P'_2 = P_2 \cos 0 = P_2, P'_3 = P_3 \cos \beta$; zaś w płaszczyźnie XZ będą siłami zginającymi: $P''_1 = P_1 \sin \alpha, P''_2 = P_2 \sin 0 = 0, P''_3 = P_3 \sin \beta$. Dla tych sił łatwo skonstruować diagramy momentów zginających $abcde$ i $a'b'c'd'$. Przekrój niebezpieczny będzie widocznie leżeć w miejscu działania jednej z sił, jednakowoż niekoniecznie w przekroju, gdzie moment ma największą wartość, albowiem naprężenia zależą nie tylko od wielkości momentu, lecz także od kąta nachylenia płaszczyzny momentu względem płaszczyzn głównych. Przy wyznaczeniu naprężeń trzeba sumować naprężenia wywołane zgięciem w każdej z płaszczyzn głównych osobno. Jeżeli momenty w płaszczyznach XY i XZ oznaczymy odpowiednio przez M_x i M_y , to naprężenia normalne p w dowolnym punkcie przekroju poprzecznego określi wzór:

$$p = \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y z}{I_y}.$$

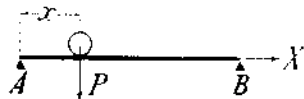
Znaki algebraiczne należy przytem obrać w zależności od kierunku momentów.



Rys. 157

§ 70. OBCIĄŻENIE RUCHOME

W przypadku obciążeń ruchomych, jaki zachodzi np. u mostów, żurawi i t. p., komplikuje się zadanie przez to, że dla każdego rozpatrywanego przekroju belki trzeba najpierw znaleźć najniekorzystniejsze położenie ruchomego obciążenia. W najprostszyc przypadkach można kwestję rozwiązać bez wszelkich trudności drogą analityczną. Weźmy np. belkę o rozpiętości l (rys. 158), obciążoną jednym ciężarem ruchomym P . Przy wszelkiem położeniu ciężaru będzie diagram momentów zginających mieć postać trójkąta. Wierzchołek trójkąta, odpowiadający największemu momentowi zginającemu, leży pod ciężarem, a wielkość tego momentu określa równanie:



Rys. 158

$$M_{\max} = \frac{P x (l - x)}{l}.$$

Przy przesunięciu ciężaru zmienia się M_{\max} według prawa paraboli i osiąga największą wartość przy $x = \frac{l}{2}$. Co się tyczy siły poprzecznej, to przy dowolnem położeniu

ciężaru ma siła poprzeczna po każdej jego stronie wartość stałą i równą odpowiadającej reakcji podporowej. Aby uzyskać największą wartość reakcji, trzeba ciężar przysunąć do jednej z podpór; a zatem

$$Q_{\max} = P.$$

Jeżeli na belkę działa układ dwu ciężarów o stałej wzajemnej odległości d (rys. 159), to diagram momentów zgięcia jest czworokątem. Dajmy na to, że $P_1 > P_2$, natenczas najkorzystniejszym będzie to położenie, któremu odpowiada maximum momentu pod ciężarem P_1 . Oznaczmy przez x odległość tego ciężaru od lewej podpory, znajdziemy jako wartość momentu w przekroju x :

$$M = \frac{x}{l} [P_1(l-x) + P_2(l-x-d)].$$

Z warunku $\frac{dM}{dx} = 0$ otrzymamy:

$$x = \frac{1}{2} \left(l - d \cdot \frac{P_2}{P_1 + P_2} \right),$$

a po wstawieniu tej wartości w wyrażenie dla M , znajdziemy największy moment zginający. Dla otrzymania największej wartości siły poprzecznej trzeba oczywiście przysunąć ciężary całkiem do lewej podpory.

Metodę analityczną można zastosować do poszukiwania położenia niekorzystnych także wtedy, gdy ruchomy układ ciężarów składa się z większej ich liczby, ale prostsze i bardziej przejrzyste rozwiązanie otrzymamy, stosując metodę wykreślną. W tym celu naznaczmy na belce szereg przekrojów i dla każdego z nich wyszukujemy te położenia obciążeń, przy których Q i M przybierają największe wartości. Dajmy na to, że chodzi o przekrój mn (rys. 160). Ażeby odpowiedzieć na pytanie, jak trzeba rozmieścić obciążenie dla otrzymania w tym przekroju Q_{\max} ,

rozpatrzmy najpierw działanie jednego ciężaru o wielkości 1. Przy położeniu uwidocznionym na rysunku, siła poprzeczna w przekroju mn jest równa lewej reakcji podporowej $\frac{1 \cdot x}{l}$. Prawo jej zmienności przy przesuwaniu ciężaru przedstawiają rzędne prostej $C'B'$ (fig. b), odcinającej nad lewą podporą rzędną równą 1 (jednostce siły).

Kiedy ciężar, równy 1, znajduje się na lewo od przekroju mn , to siłę poprzeczną w tym przekroju otrzymamy, odejmując od reakcji lewej podpory jednostkę siły. Na fig. (b) wykonano to odejmowanie wykreślnie przez poprowadzenie prostej $A'D' \parallel B'C'$. Ujemne rzędne tej prostej na przestrzeni lewej części belki określają zmianę siły poprzecznej w przekroju mn przy przesuwaniu jednostki ciężaru na teże części. Całkowity obraz zmienności siły poprzecznej w przekroju mn przedstawiają zakreskowane pola (fig. b), przyczem znaki obrano według przyjętej umowy. Odcinki prostych $C'B'$ i $A'D'$, ograniczające zakreskowane pola, przedstawiają linię wpływową dla siły poprzecznej w przekroju mn . Przy jej pomocy łatwo obliczyć Q dla dowolnego układu obciążeń. Gdy mamy jeden ciężar P , położony w jakimkolwiek przekroju belki, to trzeba zmierzyć rzędną linii wpływowej w tym przekroju, a jej wielkość y , przedstawiającą siłę poprzeczną, powstałą pod wpływem obciążenia równego jednostce, pomnożyć przez wielkość ciężaru P . Jeżeli zaś mamy układ ciężarów P_1, P_2, \dots , to siłę poprzeczną przedstawi wyrażenie:

$$Q = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots \quad (a)$$

Dla otrzymania największej dodatniej wartości Q trzeba obciążyć prawą część rozpiętości i ustawić ciężary tak, aby suma (a) przybrała największą wartość. Największą ujemną wartość Q znajdziemy obciążwszy lewą część rozpiętości.

Skonstruujemy teraz linię wpływową dla momentu zginającego w przekroju mn . Jeżeli ciężar 1 leży na prawej części belki (fig. a), to momentem w przekroju mn będzie: $\frac{1 \cdot x}{l} a_1$. To wyrażenie określa rzędne prostej $B''C''$, odcinającej u lewej podpory rzędną równą a_1 . Skoro przesuniemy ciężar na lewą część belki, to moment w przekroju mn będzie równy $\frac{1 \cdot (l-x)}{l} a$ i przedstawia go rzędne prostej $A''C''$, odcinającej u podpory B'' rzędną równą a . Linia wpływowa $A''C''B''$ daje nam prawo zmienności momentu w mn przy przesuwaniu ciężaru równego 1. W przypadku obciążenia danym ruchomym układem ciężarów P_1, P_2, \dots znajdziemy wielkość momentu zginającego w przekroju mn , mierząc odpowiadające rzędne y_1, y_2, \dots i obliczając sumę

$$P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots \quad (b)$$

Przy badaniu wytrzymałości w przekroju mn trzeba ciężary ustawić tak, aby suma (b) przybrała największą wartość.

§ 71. PORÓWNANIE PRZEKROJÓW POPRZECZNYCH O RÓŻNEJ POSTACI

Mając dane siły zginającej i rozmiary przekroju poprzecznego, możemy oznaczyć stan napięcia w dowolnym punkcie i zarazem ocenić stopień bezpieczeństwa belki. Przy projektowaniu mamy jednak przed sobą zagadnienie odwrotne; chodzi mianowicie o to, aby znaleźć przekrój poprzeczny dla belki, czyniący zadość nietylko warunkowi wytrzymałości, lecz także warunkowi ekonomji. Innymi słowy należy przy danych własnościach materiału nadać taką postać przekrojowi poprzecznemu, ażeby belka była nietylko dostatecznie wytrzymała, lecz także, aby jej ciężar był możliwie mały. W różnych dziedzinach techniki wypracowała praktyka najodpowiedniejsze typy przekrojów poprzecznych. Tutaj zwrócimy uwagę na główne własności typów najczęściej używanych.

Przy czystym zginaniu mają warunki wytrzymałości postać:

$$\frac{M h_1}{I} \leq R_1 \quad \text{i} \quad \frac{M h_2}{I} \leq R_2,$$

przyczem h_1 i h_2 oznaczają odpowiednio oddalenia rozciąganych i ściskanych włókien skrajnych od osi obojętnej, a R_1 i R_2 wartości dopuszczalnego ciągnięcia i ciśnienia. Jeżeli materiał jest tego rodzaju, że $R_1 = R_2$, to powinno być $h_1 = h_2$, a zatem

$$\frac{I}{h_1} = \frac{I}{h_2} = W.$$

Warunki wytrzymałości sprowadzają się wówczas do jednego następującego:

$$\frac{M}{W} \leq R.$$

Z tego warunku wyznaczamy potrzebną wielkość modułu przekroju W . Ponieważ ciężar belki jest proporcjonalny względem pola przekroju F , więc przekrój będzie tem korzystniejszy, im większy jest stosunek $W : F$.

[Ten stosunek ma wymiar długości, wobec czego jeszcze dogodniej będzie użyć stosunku $W : F^{\frac{3}{2}}$ jako miary „wydatności“ przekroju, ponieważ jego wymiarem jest zero].

Postaramy się oświetlić związek między modułem W , a polem F przekroju poprzecznego w kilku szczególnych przypadkach.

a) Prostokąt o podstawie b i wysokości h ; $W = \frac{1}{6} b h^2$, $F = b h$.

Stąd

$$\frac{W}{F} = \frac{h}{6} = 0,167 h,$$

$$\left[\frac{W}{F^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{h}{b}} = 0,167 \sqrt{\frac{h}{b}} \right],$$

czyli przekrój tem korzystniejszy im większe h w porównaniu do b . Powiększenie wysokości h ogranicza jednak warunek stateczności, który rozpatrzemy później (§ 56).

b) Koło. $W = \frac{\pi r^3}{4}$, $F = \pi r^2$, a więc $\frac{W}{F} = \frac{r}{4} = 0,125 d$.

Porównajmy wartości stosunku $W : F$ dla przekroju kwadratowego i kołowego o tej samej wielkości pola. Wtedy bok kwadratu h jest ze średnicą koła związany równaniem:

$$h = \frac{d \sqrt{\pi}}{2},$$

a zatem dla tego kwadratu będzie

$$\frac{W}{F} = \frac{h}{6} = \frac{d \sqrt{\pi}}{12} = 0,147 d.$$

Porównyując tę wartość z odpowiadającym wynikiem dla przekroju kołowego, widzimy, że przekrój kwadratowy jest korzystniejszy.

[Stosunek $W : F^{\frac{3}{2}}$ posiada dla koła wartość $\frac{1}{4 \sqrt{\pi}} = 0,141$. Porównyując ją z odpowiadającą wartością dla prostokąta, znajdziemy łatwo, że dla wszelkich wartości dogadzających warunkowi

$$h : b > 0,713$$

jest przekrój prostokątny korzystniejszy od kołowego].

Przekrój prostokątny i kołowy napotykamy przeważnie w przypadku belek drewnianych. Belkom żelaznym nadaje się racjonalniejsze przekroje poprzeczne. Zważywszy, że przy zginaniu jest wytrzymałość materiału należycie wyzyskaną tylko we włóknach skrajnych, wypada przy projektowaniu przekroju skupiać materiał jak najdalej od osi obojętnej. Jeżeliby wszystek materiał był rozmieszczony w dwu cienkich paskach o wzajemnej odległości h (wysokość belki), to teoretycznie byłoby to najkorzystniejszym. Moment bezwładności w tym przypadku $I = F \left(\frac{h}{2}\right)^2$, zaś moduł przekroju $W = I : \frac{h}{2} = \frac{F h}{2}$. Stosunek $W : F$ otrzymałby wartość $0,5 h$. W praktyce muszą obie

części przekroju być połączone ścianką, a grubość ścianki musi być wystarczająca, aby wytrzymać naprężenia stycznne, uwarunkowane siłą poprzeczną. W ten sposób dochodzimy do przekroju dwuteowego (przekroju **I**).

c) Belki dwuteowe bywają nitowane i walcowane. W ostatnim przypadku zachodzi między modułem a polem przekroju dość stały stosunek

$$W : F = \text{od } 0,31 h \text{ do } 0,30 h.$$

Ten stosunek łatwo znaleźć przy pomocy tablic dla belek **I**, które zawierają wartości W , F i h . Belki dwuteowe mają jeszcze tę wyższość nad wysokimi belkami prostokątnymi, iż są sztywniejsze w kierunku prostopadłym do płaszczyzny ścianki.

[I tutaj oczywiście nie można iść zbyt daleko z powiększeniem smukłości przekroju, już to z powodu niebezpieczeństwa naprężeń miejscowych, już też ze względu na warunek stateczności. Belki nitowane miewają kształty smuklejsze, ale za to wzmacnia się i usztywnia ich ściankę t. zw. żebrami].

d) Przekroje rurowe (rys. 161). Już Galileusz zwrócił uwagę na korzyści zastosowania przekrojów wydrążonych zamiast pełnych. Pierwsze mosty żelazne o większej rozpiętości wykonano jako belki rurowe. Później zastąpiono cienkie ścianki pionowe kratą i tak powstały spólczesne typy belek kratowych.

e) O przekrojach poprzecznych geometrycznie podobnych. Skoro przekrój poprzeczny belki zmienimy na geometrycznie podobny, to pole przekroju F , moduł W i moment bezwładności I zmieniają się odpowiednio jak kwadrat, sześćcian i czwarta potęga liniowych wymiarów przekroju. Oznaczywszy przez F_0 , W_0 i I_0 wielkości odnoszące się do określonego profilu, otrzymamy przy n -krotnym powiększeniu jego wymiaru liniowego wielkości:

$$F = n^2 F_0, \quad W = n^3 W_0, \quad I = n^4 I_0.$$

Z tego można wysnuć kilka wniosków mających praktyczne znaczenie. Przyjmijmy np., że belka zgina się pod wpływem obciążenia rozłożonego równomiernie na powierzchni. Jak się zmienią naprężenia przy proporcjonalnym powiększeniu wszystkich wymiarów belki, jeżeli natężenie obciążenia pozostaje bez zmiany? Całkowite obciążenie rośnie przytem widocznie jak kwadrat wymiarów liniowych, a więc moment zginający będzie wzrastać proporcjonalnie względem sześciastu tychże wymiarów. Ponieważ moduł przekroju wzrasta w tymże samym stosunku, przeto największe naprężenia zginające nie ulegną widocznie zmianie. Belki geometrycznie podobne będą przy wymienionem obciążeniu równowyttrzymałymi.

Skoro obciążenie rośnie proporcjonalnie względem sześciastu liniowych wymiarów, jak np. ciężar własny belki, to moment zginający będzie wzrastać przy proporcjonalnym zwiększeniu wszystkich wymiarów jak czwarta potęga wymiaru liniowego, podczas gdy moduł przekroju rośnie proporcjonalnie względem sześciastu tegoż wymiaru. Naprężenia, wywołane ciężarem własnym, wra- stają zatem, w przypadku belek geometrycznie podobnych, proporcjonalnie względem rozpiętości. Znaczenie naprężeń wskutek ciężaru własnego rośnie z rozmiarami konstrukcji. Dla belki określonego typu, przy danej wytrzymałości materiału, można łatwo znaleźć tę graniczną rozpiętość, przy której naprężenia wskutek ciężaru własnego osiągają wartości naprężeń dopuszczalnych użytego materiału. Dalsze zwiększenie rozpiętości staje się możebnem tylko przez powiększenie wytrzymałości materiału. Ogromne rozpiętości, jakie napotykamy teraz w budownictwie mostów i znaczne długości spólczesnych wielkich okrętów stały się możliwymi tylko przez zastosowanie wyborowego materiału, np. stali o wysokiej wytrzymałości.

Jeżeli poprzeczne przekroje belek są geometrycznie podobne, to między polem F i modułem przekroju W zajdzie związek:

$$F = \alpha W^{\frac{2}{3}}, \quad \dots \dots \dots (a)$$

przyczem wielkość liczbowego spólczynnika α zależy jedynie od postaci przekroju, czyli jest dla danej postaci stałą. Przy obiorze rozmiarów poprzecznych wychodzimy z formuły:

$$W = \frac{M}{R},$$

w której M jest wielkością największego momentu zgięcia, a R naprężeniem dopuszczalnym. Wtedy pole przekroju poprzecznego wyrazimy, na podstawie (a), wzorem:

$$F = \alpha \left(\frac{M}{R} \right)^{\frac{2}{3}},$$

zaś dla ciężaru własnego belki otrzymamy wyrażenie:

$$Fl\gamma = \alpha l\gamma \left(\frac{M}{R} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Tutaj oznacza γ ciężar jednostki objętości materiału. Ciężar belek o geometrycznie podobnych przekrojach, rośnie przeto przy tej samej rozpiętości proporcjonalnie względem $M^{\frac{2}{3}}$.

Jeżeli belkę w obu końcach podpartą i równomiernie obciążoną zastąpimy dwiema belkami o rozpiętości dwa razy mniejszej, to wskutek tego moment zginający zmniejszy się cztery razy, a ciężar dwu belek będzie mniejszy od ciężaru pierwotnej belki $4^{\frac{2}{3}} = 2,52$ razy.

Gdy trzeba jakąkolwiek przestrzeń o rzucie poziomym prostokątnym nakryć układem równo-odległych belek, położonych równoległe do jednego z boków prostokąta, a obciążenie przeniesione na belki jest rozłożone równomiernie na polu tegoż prostokąta, to przy zmniejszeniu liczby belek n -razy zwiększa się tyleż razy obciążenie przypadające na każdą z belek, a zarazem i wielkość momentu zginającego. Ciężar każdej belki wzrośnie $n^{\frac{2}{3}}$ -razy, a ponieważ liczba belek jest n -razy mniejsza, więc ogólny ciężar belek zmniejszy się w stosunku $1 : n^{\frac{1}{3}}$.

Przy doborze przekroju wypada często kierować się nie tylko warunkami wytrzymałości, lecz także warunkiem dostatecznej sztywności belki, scharakteryzowanej wielkością EI . Nierzadko ograniczamy wartość strzałki ugięcia, jaką belka może otrzymać pod wpływem danych obciążeń. Łatwo się przekonać, że zadowalając warunki wytrzymałości nie zawsze czynimy jednocześnie zadość warunkowi sztywności. Przy tych samych największych naprężeniach normalnych uginają się belki o rozmaitych przekrojach poprzecznych niejednakowo. Jeżeli ρ jest promieniem krzywizny w przekroju niebezpiecznym, a h wysokością przekroju, to wartość największych wydłużeń i skróceń, a zarazem i wartość odpowiadających naprężeń, jest określona stosunkiem $\frac{h}{2} : \rho$ (form. 61). Przy stałej wartości tego stosunku, czyli przy stałym największym naprężeniu normalnym, będzie promień krzywizny tem większy, a zatem ugięcia tem mniejsze, im większa jest wysokość belki h .

f) Przekrój szyny kolejowej (rys. 162) jest niesymetryczny względem osi obojętnej, jednakże zwykle tak ukształtowany, aby $h_1 = h_2$.

[Oprócz wielu względów konstrukcyjnych decydowały tutaj o kształcie wymogi znacznej sztywności we wszystkich kierunkach przy dostatecznej wytrzymałości, przyczem uwzględniono także naprężenia miejscowe i ścieranie głowki szyny wskutek ruchu pociągów].

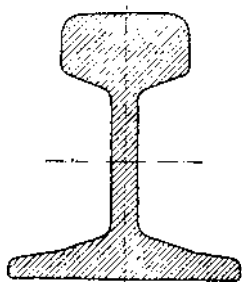
g) Przekrój teowy (T) i przekrój przedstawiony obok niego na rys. (163) są używane przy budowie okrętów. Te przekroje nie są widocznie tak korzystne, jak przekrój I, tak z powodu rozmieszczenia materiału, jak i nierówności skrajnych naprężeń. Skoro za miarę wydajności tych przekrojów przyjmiemy znowu

stosunek modułu do pola przekroju, to dla używanych w praktyce profilów ostatniego przekroju będzie:

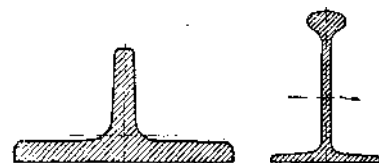
$$\frac{W}{F} = \text{od } 0,23 h \text{ do } 0,22 h.$$

Obiór podobnych przekrojów dla żelaza kowalnego usprawiedliwiają tylko względy konstrukcyjne. Inaczej ma się rzecz, jeżeli materiał belki ma różną wytrzymałość przy rozciąganiu i ściskaniu (np. żelazo lane).

Wtedy będzie odpowiedniejszą postacią przekroju niesymetryczna względem osi obojętnej i tak dobrana, aby naprężenia we włóknach skrajnych były proporcjonalne względem odpowiednich

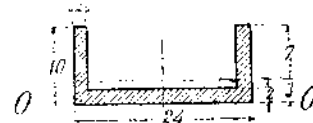


Rys. 162



Rys. 163

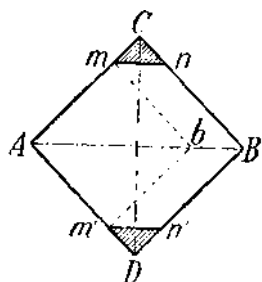
wartości naprężeń dopuszczalnych przy rozciąganiu i ściskaniu. Z tego wynika, że stosunek $h_1 : h_2$ powinien być równy stosunkowi naprężeń bezpiecznych. Weźmy np. przekrój U (rys. 164). Przy rozmiarach uwidoczonych na rysunku jest środek ciężkości przekroju odległy o 3 cm od osi OO . Jeżeli dolne włókna skrajne są rozciągane, a górne ściskane, to największe wartości ciśnień i ciągnięć mają się do siebie jak 7 : 3. Zmieniając wymiary ramion i podstawy (ścianki) profilu, można dojść do każdej dowolnej wartości stosunku największego ciągnięcia do największego ciśnienia.



Rys. 164

Na zakończenie zwróćmy uwagę jeszcze na jedną okoliczność, mającą niekiedy praktyczne znaczenie. Moduł przekroju W określa wielkości największych naprężeń normalnych przy zgięciu; należy jednak pamiętać, że moduł przekroju nie zawsze się zmniejsza ze zmniejszeniem pola przekroju. Bywają przypadki, w których przez odcięcie pewnych części przekroju można W powiększyć. Tak się zachowują przekroje, u których warstwa włókien skrajnych jest wąska w porównaniu do szerokości środkowych części przekroju. Dla przekrojów takich np. jak kwadratowy przy zginaniu w płaszczyźnie przekątnej, kołowy, trójkątny i t. p., powiększa się zrazu W , jeżeli niewielką grubość włókien skrajnych usuniemy. U pierwszego z wymienionych przekrojów można w ten sposób wywołać zwiększenie W , dochodzące do 5%, co łatwo okazać następującym rachunkiem:

Momentem bezwładności kwadratu o boku a (rys. 165) względem przekątnej jest $I = \frac{a^4}{12}$, a odpowiedni moduł przekroju



Rys. 165

kroju $W = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$. Odetnijmy z przekroju zakreskowane trójkąty cięciwami równymi i równoległymi do osi obojętnej AB . Przyjmijmy $mC = m'D = \dots = \alpha a$ i obliczmy moment bezwładności obciętego przekroju, rozłożywszy go na kwadrat $Ambm'$ o boku $a(1 - \alpha)$ i dwa równoległoboki $bmnB$ i $bBn'm'$. W ten sposób otrzymamy:

$$I_1 = \frac{a^4(1 - \alpha)^3}{12} (1 + 3\alpha),$$

a zatem moduł przekroju

$$W = \frac{a^4(1 - \alpha)^3(1 + 3\alpha)\sqrt{2}}{12a(1 - \alpha)}$$

Jak się łatwo przekonać, osiągnie W maximum przy $\alpha = \frac{1}{9}$. Po wstawieniu tej wartości w wyrażenie dla W znajdziemy wartość W_{\max} o 5% większą od wartości odpowiadającej przekrojowi pierwotnemu. Ze ścięcia warstwy skrajnej powiększa w tym przypadku zrazu wartość W , zrozumieć łatwo, zważywszy, że $W = I : \frac{h}{2}$, a ubytek h wskutek ścięcia jest zrazu stosunkowo mniejszy, niż ubytek wysokości h .

ROZDZIAŁ X

LINJA UGIĘCIA BELKI

§ 72. RÓWNANIE LINJI UGIĘCIA

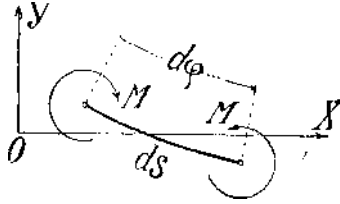
Przy obliczeniach zachodzi często potrzeba wyznaczenia nie tylko wielkości naprężeń, wywołanych w belce działaniem danych obciążeń, lecz także i wielkości odpowiadających odkształceń. Niekiedy wymaga się, aby wartość największego ugięcia belki (strzałka ugięcia) nie przekraczała danej części rozpiętości l . Od kwestji postaci ugiętej osi rozpoczynamy rozwiązanie takich zagadnień, przy których ogólne warunki równowagi nie wystarczają do znalezienia reakcji podporowych. Zbyteczne podparcia określają warunki dodatkowe dla zgiętej osi i temi warunkami posługujemy się w celu wyznaczenia reakcji.

Obierzmy pierwotną oś belki (ustawioną poziomo) za oś X -ów, a oś Y -ów skierujmy pionowo w górę. Zakrzywiona postać belki będzie zupełnie określona równaniem zgiętej osi o postaci ogólnej $y = f(x)$. Tego równania dostarczy znaleziona poprzednio formuła (63)¹⁾:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI},$$

¹⁾ Tę formułę otrzymaliśmy dla przypadku czystego zgięcia. O ile zmienia się krzywizna osi wskutek naprężeń ściskających objaśnimy poniżej (ob. § 81). Wpływ tych naprężeń (uwarunkowanych siłą poprzeczną) jest zwykle niewielki i dlatego pomijamy go przy rozwiązywaniu zadań praktycznych.

sকoro w niej zastąpimy krzywiznę $1:\rho$ znanem wyrażeniem różniczkowem. W ten sposób otrzymamy równanie różniczkowe ugiętej osi, czyli linii ugięcia w ogólnej postaci¹⁾:



Rys. 166

$$\pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI} \quad (89)$$

Zamiast tego równania będziemy używać prawie wyłącznie uproszczonej przybliżonej formy, która powstaje z powyższej przez opuszczenie w mianowniku wyrazu $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. Najczęściej bowiem mamy do czynienia z ugięciami bardzo małymi w porównaniu do rozmiarów belki, przyczem i wartość $\frac{dy}{dx}$ jest bardzo małym ułamkiem, tem bardziej zatem można pominąć kwadrat tej wielkości wobec jednostki. Przybliżone równanie linii ugięcia ma przeto postać:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \pm M \quad (90)$$

Co do znaków zauważymy, że w § 58 umówiliśmy się uważać moment zginający za dodatni, jeżeli on dąży do obrotu odciętej lewej części belki w kierunku wskazówek zegara. Ten moment wywołuje widocznie w rozpatrywanym przekroju zakrzywienie osi belki, skierowane wypukłością w stronę ujemnych Y-ów (rys. 166). Przy takim zakrzywieniu rośnie wartość pochodnej $\frac{dy}{dx}$ ze wzrostem x , a przeto druga pochodna jest dodatnia i w naszym równaniu (90) trzeba zatrzymać znak plus.

Przy zmianie położenia osi spółrzędnych, albo przy odmiennie umowie co do znaków momentu zginającego, może się zmienić i znak w rów. (90), wobec czego przy rozwiązywaniu szczegółowych zadań lepiej ustalać znak za każdym razem z osobna, obierając go w ten sposób, aby obie części równania (90) były tego samego znaku²⁾.

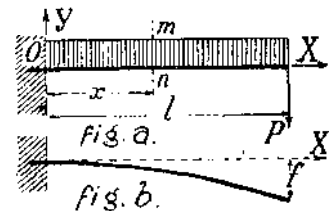
§ 73. UGIĘCIE BELKI JEDNYM KĄNCEM UTWIERDZONEJ

Niech obciążenie belki składa się z siły skupionej P , działającej na jej swobodny koniec i ciężaru ql , rozłożonego równomiernie na całej długości l belki (rys. 167). Momentem zginającym w przekroju mn będzie z uwzględnieniem prawidła znaków, przyjętego w § 65:

$$M = -P(l-x) - \frac{q(l-x)^2}{2}$$

Równanie linii ugięcia przybierze tedy postać:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -P(l-x) - \frac{q(l-x)^2}{2}$$



Rys. 67

Całkując obustronnie raz, otrzymamy:

$$EI \frac{dy}{dx} = -P \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{q}{2} \left(l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + C \quad (a)$$

¹⁾ Krzywizną odpowiadającą elementowi belki o długości ds będzie $\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}$ (rys. 166). Ponieważ $\text{tg } \varphi = \frac{dy}{dx}$, a więc:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d \left(\text{arctg } \frac{dy}{dx} \right)}{ds} = \frac{d \left(\text{arctg } \frac{dy}{dx} \right)}{dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}$$

Wykonawszy różniczkowanie, dojdziemy do wyrażenia po lewej stronie. rów. (89).

²⁾ [W bardzo wielu książkach przyjmują stałe, że dodatnia oś Y-ów jest skierowana pionowo w dół, a dodatni moment M zgina belkę wklęsłością ku górze. Tej umowie odpowiada oczywiście znak — po prawej stronie rów. (90). Natomiast kierunkowi dodatnich Y-ów, przyjętemu na rys. (166), odpowiada (przy tej samej umowie co do znaku M) znak + po prawej stronie rów. (90)].

przyczem C oznacza dowolną stałą całkowania. Oznaczmy ją łatwo z warunku podparcia belki. Lewy koniec belki jest w naszym przypadku utwierdzony, a więc odpowiadający mu przekrój poprzeczny O nie obraca się przy ugięciu, czyli zakrzywiona oś belki będzie styczną do osi OX w punkcie O . Napiszemy przeto:

$$\text{Dla } x=0 \text{ jest } \frac{dy}{dx} = 0.$$

Z tego warunku wynika, że w rów. (a) trzeba przyjąć $C=0$. Podstawiając teraz w tem równaniu $x=l$, obliczymy kąt nachylenia stycznej na prawym końcu belki, a mianowicie:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{Pl^3}{2EI} - \frac{ql^3}{6EI} \quad \dots \quad (91)$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie daje nam kąt nachylenia stycznej wywołany siłą P , drugi zaś kąt wywołany obciążeniem ql . Aby otrzymać ugięcia belki y , trzeba zcałkować znowu równanie (a). Uwzględniając, że $C=0$, znajdziemy:

$$Ely = -P\left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{q}{2}\left(\frac{l^3x^2}{2} - \frac{l^2x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + D \quad \dots \quad (b)$$

Stałą dowolną D wyznaczmy z drugiego warunku podparcia, który powiada, że lewy utwierdzony koniec belki jest nieruchomy, t. j.:

$$y=0 \quad \text{przy } x=0.$$

Temu warunkowi czyni widocznie zadość wartość $D=0$. Rów. (b) pozwala wyznaczyć wielkość ugięcia y w dowolnym przekroju, czyli jest równaniem linii ugięcia. Największe ugięcie zajdzie oczywiście u prawego końca belki; znajdziemy je podstawiając $x=l$, a więc:

$$(Ely)_{x=l} = -\frac{Pl^3}{3} - \frac{ql^4}{8}.$$

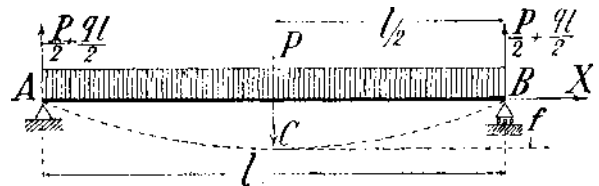
Stąd:

$$y_{x=l} = -\frac{Pl^3}{3EI} - \frac{ql^4}{8EI} \quad \dots \quad (92)$$

Pierwszy człon tego wyrażenia przedstawia ugięcie wskutek siły skupionej P , drugi zaś ugięcie wskutek obciążenia ql . Jeżeli $P=ql$, to te ugięcia mają się do siebie jak 8:3. Znak ugięcia wypadł ujemny, ponieważ belka ugina się w stronę ujemnych Y -ów.

§ 74. UGIĘCIE BELKI W OBU KOŃCACH PODPARTEJ

Skoro belkę AB (rys. 168) zgina siła skupiona P , działająca w środku rozpiętości i równomiernie rozłożone obciążenie ql , to największe ugięcie zajdzie widocznie w środku C . Wielkość tego ugięcia można znaleźć przy pomocy wyników poprzedniego paragrafu. Krzywa ugięcia będzie oczywiście symetryczna względem środka C , a styczna do niej w tym punkcie będzie równoległa do osi X . Każda połowa belki znajduje się zupełnie w tych samych warunkach, co poprzednio rozpatrywana belka, jednym końcem utwierdzona. Jeżeli weźmiemy pod uwagę prawą połowę belki BC , to można ją



Rys. 168

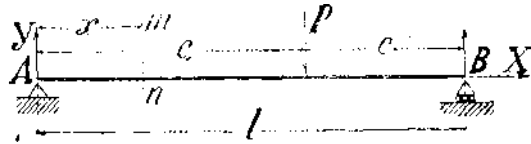
uważać za belkę utwierdzoną końcem C i obciążoną na końcu B siłą $\frac{P}{2} + \frac{ql}{2}$, skierowaną w górę.

Tę siłę przedstawia reakcja podporowa belki AB . Prócz tego działa na rozpatrywaną belkę BC obciążenie równomiernie rozłożone o kierunku przeciwnym owej reakcji. Na podstawie formuły (92) wyznaczmy wywołane temi siłami ugięcie końca B , t. j.

$$f = \frac{\left(\frac{P}{2} + \frac{ql}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^2}{3EI} - \frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^4}{8EI} = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \quad \dots \quad (93)$$

Ugięcie belki AB w przekroju C przedstawi oczywiście również wyrażenie (93), tylko z przeciwnym znakiem. Pierwszy wyraz określa ugięcie, wywołane siłą P , drugi zaś ugięcie wskutek obciążenia równomiernie rozłożonego ql .

Jeżeli siła skupiona obciąża belkę nie w środku rozpiętości (rys. 169), to szukanie równania linii ugięcia komplikuje się nieco. Zależnie od tego, po której stronie ciężaru P obieramy przekrój, wypadają dwa różne wyrażenia analityczne dla momentu zginającego i dlatego równanie różniczkowe linii ugięcia ma odmienną postać dla każdej z obu części belki. Dla lewej części będzie niem:



Rys. 169

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{Pc}{l} x.$$

Całkując raz, znajdziemy prawo zmienności kąta nachylenia stycznnej w postaci:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Pc}{l} \frac{x^2}{2} + D,$$

przyczem D oznacza dowolną stałą całkowania. Powtórne całkowanie daje:

$$EI y = -\frac{Pc}{l} \frac{x^3}{6} + Dx + D_1,$$

jako równanie linii ugięcia lewej części belki. Nową stałą dowolną D_1 łatwo wyznaczyć z warunku, że lewy koniec belki jest podparty, a więc ugięcie tego końca równa się zeru, czyli:

$$y = 0 \quad \text{przy} \quad x = 0.$$

Temu warunkowi czyni zadość $D_1 = 0$. Wyznaczenie stałej D jest możliwe tylko po rozpatrzeniu równania linii ugięcia dla prawej części belki.

Wyznaczenie wartości stałych całkowania można znacznie uprościć przy pomocy następującego sposobu. Wyrzawszy moment zginający w dowolnym przekroju prawej części belki przez siły leżące po lewej części tego przekroju, otrzymamy równanie różniczkowe linii ugięcia prawej części w postaci:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Pc}{l} x - P(x - c_1).$$

Wynik pierwszego i drugiego całkowania można przedstawić w następującej formie:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Pc}{l} \frac{x^2}{2} - \frac{P(x - c_1)^2}{2} + C,$$

$$EI y = \frac{Pc}{l} \frac{x^3}{6} - \frac{P(x - c_1)^3}{6} + Cx + C_1.$$

Otrzymaliśmy tedy cztery stałe dowolne: D, D_1 dla lewej części belki i C, C_1 dla prawej, atoli dzięki powyższej formie równania linii ugięcia prawej części belki sprowadza się liczba stałych do dwu. W samej rzeczy, w miejscu działania siły P , t. j. dla $x = c_1$, muszą obie gałęzie linii ugięcia mieć wspólną styczną i wspólną rzędną, a zatem:

$$\left. \frac{Pc}{l} \frac{x^2}{2} + D \right|_{x=c_1} = \left. \frac{Pc}{l} \frac{x^2}{2} - \frac{P(x - c_1)^2}{2} + C \right|_{x=c_1},$$

$$\left. \frac{Pc}{l} \frac{x^3}{6} + Dx + D_1 \right|_{x=c_1} = \left. \frac{Pc}{l} \frac{x^3}{6} - \frac{P(x - c_1)^3}{6} + Cx + C_1 \right|_{x=c_1}.$$

Stąd wynika: $C = D$ i $C_1 = D_1$.

Sprowadziwszy liczbę stałych do dwu, możemy je znaleźć z warunków na końcach belki. Z warunku podporowego na lewym końcu wynika, jak widzieliśmy, że $D_1 = C_1 = 0$. Na prawym końcu jest ugięcie także równe zeru, a więc kładąc $x = l$ w równaniu prawej gałęzi linii ugięcia, otrzymamy, dla wyznaczenia stałych C i D , równanie:

$$\frac{Pc}{l} \frac{l^3}{6} - \frac{P(l - c_1)^3}{6} + Cl = 0.$$

Uwzględniając, że $l - c_1 = c$, znajdziemy:

$$C = D = \frac{Pc(c^3 - l^3)}{6l}.$$

Równaniem linii ugięcia dla lewej części belki będzie przeto:

$$EIy = \frac{Pcx}{6l}(x^2 + c^2 - l^2) \quad \dots \quad (94)$$

Przedstawiony sposób można stosować i w ogólniejszym przypadku zginania belki układem sił skupionych. Ustawiając dla każdej części belki między dwiema sąsiednimi siłami odpowiadające równanie różniczkowe i całkując je, znajdziemy, że ogólna liczba stałych dowolnych jest równa dwukrotnej liczbie owych części. Skoro jednakże przedstawimy wyniki całkowania w takiej postaci, jak to uczyniliśmy powyżej w przypadku obciążenia belki jedną siłą skupioną, to liczbę stałych całkowania sprowadzimy do dwu. Oznaczywszy przez R lewą reakcję podporową, P_1, P_2, P_3, \dots siły zginające, c_1, c_2, c_3, \dots ich odległości od lewej podpory i na koniec przez l rozpiętość belki, otrzymamy następujące równania różniczkowe linii ugięcia w kolejnych przedziałach belki, rozpoczynając od lewej podpory:

- I. $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Rx,$
 - II. $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Rx - P_1(x - c_1),$
 - III. $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Rx - P_1(x - c_1) - P_2(x - c_2),$
-

Pierwsze całki tych równań przedstawimy w postaci:

- I. $EI \frac{dy}{dx} = \frac{Rx^2}{2} + C,$
 - II. $EI \frac{dy}{dx} = \frac{Rx^2}{2} - \frac{P_1(x - c_1)^2}{2} + C_1,$
 - III. $EI \frac{dy}{dx} = \frac{Rx^2}{2} - \frac{P_1(x - c_1)^2}{2} - \frac{P_2(x - c_2)^2}{2} + C_2,$
-

Całkując powtórnie otrzymamy wyrażenia:

- I. $EIy = \frac{Rx^3}{6} + Cx + D,$
 - II. $EIy = \frac{Rx^3}{6} - \frac{P_1(x - c_1)^3}{6} + C_1x + D_1,$
 - III. $EIy = \frac{Rx^3}{6} - \frac{P_1(x - c_1)^3}{6} + \frac{P_2(x - c_2)^3}{6} + C_2x + D_2,$
-

Z warunku, że na granicy I-go i II-go przedziału, t. j. przy $x = c_1$, muszą obadwa odpowiadające równania dać tę samą wartość ugięcia i nachylenia stycznej, wynika:

$$C = C_1 \quad \text{i} \quad D = D_1.$$

Podobnie z równości ugięć i kątów nachylenia stycznych dla $x = c_2$, na granicy II-go i III-go przedziału, wnosimy, że:

$$C_1 = C_2 \quad \text{i} \quad D_1 = D_2.$$

Powtarzając to rozumowanie dla każdej pary sąsiednich przedziałów, znajdziemy:

$$C = C_1 = C_2 = C_3 = \dots; \quad D = D_1 = D_2 = D_3 = \dots$$

Pozostaje zatem rzeczywiście wyznaczyć tylko dwie stałe dowolne, bez względu na ilość przedziałów. Z warunków podparcia obu końców belki otrzymamy:

$$D = D_1 = D_2 = \dots = 0 \quad \text{i} \quad C = C_1 = C_2 = \dots = \frac{1}{l} \left[-\frac{Rl^3}{6} + \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{P_n(l - c_n)^3}{6} \right].$$

Te wyniki znajdujemy, przyrównywując do zera ugięcia lewego i prawego podpartego końca belki. Wyznaczywszy stałe, napiszemy łatwo równania linii ugięcia dla każdego przedziału belki. Tym sposobem można się posługiwać także w przypadku, gdy, oprócz sił skupionych, działa na belkę i obciążenie ciągłe. Trzeba tylko, aby prawo zmienności obciążenia wzdłuż belki dało się przedstawić jedną i tą samą funkcją x we wszystkich przedziałach. Tak się rzecz ma np. przy obciążeniu równomiernie rozłożonym, lub zmieniającym się linijowo na całej długości belki.

Powrócimy teraz do zgięcia belki jedną siłą skupioną i roztrząśniemy równanie (94). Przy położeniu obciążenia przyjętem na rysunku (169), t. j. gdy $c < c_1$, zachodzi największe ugięcie oczywiście w lewym przedziale belki. Przyrównywuając pochodną wyrażenia (94) do zera, znajdziemy:

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - c^2)} \quad (95)$$

jako wartość odciętej odpowiadającej największemu ugięciu. Odpowiadająca wartość ugięcia

$$y_{\max} = -\frac{Pc}{9EI} \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - c^2)^3} \quad (96)$$

Zauważyć wypada, że przekrój, w którym zachodzi największe ugięcie, leży zawsze blisko środka rozpiętości belki. Gdy ciężar P działa w środku belki, to największe ugięcie powstaje w obciążonym przekroju. Odsuwając P od środka coraz dalej, otrzymamy w granicy $c = 0$, a położenie przekroju odpowiadające największemu ugięciu określi według wzoru (95) odcięta:

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577 l.$$

W ten sposób odległość przekroju o największym ugięciu od środka belki nie przekracza nigdy $0,577 l$. Zważywszy, że około miejsca największego ugięcia zmienia się ugięcie mało ze zmianą odciętej x (własność funkcji w pobliżu *max.* lub *min.*), dochodzimy do następującego wniosku: W przypadku obciążenia belki siłą skupioną, można z dostateczną dokładnością przyjąć, że ugięcie belki w środku rozpiętości równa się największemu ugięciu; popełniony przytem błąd, jak zobaczymy dalej, nie przekracza w najniekorzystniejszym przypadku 2,5%. Podstawiając w rów. (94) zamiast x wielkość $\frac{l}{2}$, otrzymamy ugięcie środka belki:

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{Pc}{48EI}(3l^2 - 4c^2) \quad (97)$$

Oprócz zgięcia belki wypadnie niekiedy wyznaczyć kąty obrotu przekrojów końcowych. Ponieważ te kąty są małe, więc będziemy je mierzyć bezwzględną wartością pochodnej $\frac{dy}{dx}$ w końcach belki. Przy pomocy rów. (94) znajdziemy kąt obrotu ϑ_1 lewego końca belki, kładąc $x = 0$ w równaniu:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Pcx^2}{2l} - \frac{Pc(l^2 - c^2)}{6l}.$$

A zatem:

$$\vartheta_1 = -\frac{Pc(l^2 - c^2)}{6EI} \quad (98)$$

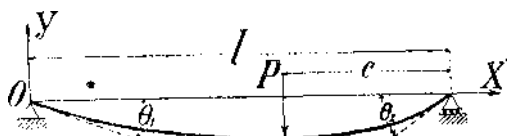
Wartość ϑ_1 wypadła ujemna, albowiem przy obranym układzie spólrzędnych (rys. 170) jest pochodna $\frac{dy}{dx}$ ujemna. W dalszym ciągu umówimy się, aby kąt ϑ_1 mierzyć od osi OX w kierunku wskazówki zegara i dlatego będziemy opuszczać znak $-$ w formule (98). Ta formuła dostarczy nam także wartości kąta obrotu ϑ_2 , jeżeli w niej c zastąpimy przez $l - c$, czyli:

$$\vartheta_2 = \frac{Pc(l - c)(2l - c)}{6EI} \quad (99)$$

Kąt ϑ_2 będziemy mierzyć od osi belki w kierunku przeciwnym wskazówce zegara. Gdy ciężar P znajduje się w środku belki, t. j. $c = \frac{l}{2}$, to

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{Pl^2}{16EI} \quad (100)$$

Rozpatrzmy teraz szczegółowo przypadek krańcowy, w którym c dąży do zera, czyli siła P zbliża się do prawej podpory. Jeżeli przytem siłę P będziemy powiększać według takiego prawa, aby Pc pozostawało stałym, to otrzymamy w granicy zginanie belki parą sił o momencie $M = Pc$,



Rys. 170

działającą na prawy koniec belki. Równanie zgiętej osi znajdziemy dla tego przypadku, kładąc w wyrażeniu (94) $c = 0$ i $Pc = M$. A zatem:

$$EIy = \frac{Mx}{6l}(x^2 - l^2) \quad (101)$$

Różniczkując to równanie wyznaczmy kąt nachylenia stycznej:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{6EI}(3x^2 - l^2) \quad (102)$$

Największe ugięcie znajdzie w przekroju, gdzie styczna jest pozioma, czyli $\frac{dy}{dx} = 0$. Wtedy $3x^2 - l^2 = 0$, a stąd

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l$$

Wstawiając znaną wartość x w wyrażenie (101), otrzymamy największe ugięcie:

$$f = \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI} = 0,0641 \frac{Ml^2}{EI}$$

Ugięcie w środku równa się

$$\frac{Ml^2}{16EI} = 0,0625 \frac{Ml^2}{EI} \quad (103)$$

jest więc około 2,5% mniejsze od f .

Podstawiając w wyrażenie (102) wartości $x = 0$ i $x = l$, znajdujemy kąty nachylenia stycznych końcowych:

$$\vartheta_1 = \frac{Ml}{6EI} \quad \text{i} \quad \vartheta_2 = \frac{Ml}{3EI} \quad (104)$$

Tymi wzorami wypadnie nam często posługiwać się przy rozpatrywaniu statycznie niewyznaczalnych przypadków zgięcia belek.

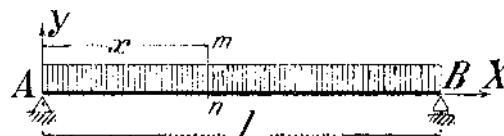
§ 75. UGIĘCIE BELKI W OBU KOŃCACH PODPARTEJ POD WPLYWEM OBCIĄŻENIA RÓWNOMIERNIE ROZŁOŻONEGO. (Rys. 171)

Jeżeli q oznacza obciążenie jednostki długości belki, to reakcje podporowe będą:

$$A = B = \frac{ql}{2},$$

a moment zginający w dowolnym przekroju mn :

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$



Rys. 171

Równanie różniczkowe linii ugięcia ma zatem postać:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

Po zcałkowaniu otrzymamy:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{ql}{4}x^2 - \frac{qx^3}{6} + C \quad (a)$$

Stałą C można wyznaczyć z warunku symetrii linii ugięcia względem środka belki, t. zn. z warunku:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{dla} \quad x = \frac{l}{2}$$

Odpowiadającym równaniem warunkowym jest:

$$\frac{ql^3}{16} - \frac{ql^3}{48} + C = 0, \quad \text{a stąd} \quad C = -\frac{ql^3}{24}$$

Podstawiając otrzymaną wartość C w rów. (a) i wykonawszy powtórne całkowanie, znajdziemy:

$$EIy = \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3x}{24} + C_1$$

Stała dowolna C_1 musi być równa zero, ponieważ dla $x = 0$ jest $y = 0$. Ostatecznie napiszemy dla danego przypadku równanie linii ugięcia belki w następującej postaci:

$$y = -\frac{ql^3}{24EI} x \left(1 - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) \quad (b)$$

Największe ugięcie znajdzie widocznie w środku rozpiętości; znajdziemy je z rów. (b), podstawiając w niem $x = \frac{l}{2}$. A zatem:

$$y_{\max} = -\frac{5ql^4}{384EI} \quad (c)$$

Kąty obrotu końcowych przekrojów belki będą co do wielkości równe, a wyznaczymy je z rów. (a), kładąc $C = -\frac{ql^3}{24}$ i $x = 0$. W ten sposób otrzymamy:

$$\vartheta_1 = \frac{ql^3}{24EI}$$

§ 76. SKŁADANIE SKUTKÓW DZIAŁANIA SIŁ

Rozpatrzyliśmy powyżej przypadki działania na belkę siły skupionej, obciążenia równomiernie rozłożonego i pary sił. Przy pomocy otrzymanych wyników można znacznie uprościć obliczenie ugięć i kątów obrotu końców belki, powstałych pod działaniem obciążeń bardziej złożonych, posługując się zasadą składania skutków działania sił, czyli zasadą superpozycji. Dopóki odkształcenia są małe, a rozkład sił taki, że ich działanie nie zależy od odkształceń¹⁾, można przesunięcie każdego punktu odkształconego ciała otrzymać jako sumę przesunięć, wywołanych poszczególnymi siłami z osobna.

Dajmy na to, że na belkę, w obu końcach podpartą, działa układ sił skupionych. Przy obliczeniu ugięcia w środku można zastosować form. (97). Dla wszystkich sił leżących na prawej połowie belki będzie oznaczać c odległość od prawej podpory, zaś dla sił działających na lewą połowę będzie c odległością od lewej podpory. Całkowite ugięcie otrzymamy przez sumowanie ugięć, powstających pod wpływem oddzielnych sił. W przypadku obciążenia ruchomego będzie ugięcie w środku tem większe, im bliżej środka znajduje się obciążenie. Jeżeli nad osią belki wykreślić krzywą, której rzędne, odpowiadające odciętym c na prawej połowie belki, równają się (ob. form. 97):

$$\frac{c}{48EI} (3l^2 - 4c^2)$$

i przedłużyć ją symetrycznie nad lewą połowę, to obliczenie ugięcia, wywołanego w środku belki danym układem sił, upraszcza się znacznie. Wystarczy każdą z sił pomnożyć przez odpowiednią rzędną krzywej (rys. 172) i dodać otrzymane wyniki. Rzędna krzywej w dowolnym punkcie belki C określa w obranej podziałce ugięcie środka belki, wywołane jednostką obciążenia, umieszczoną w tymże punkcie C . Nasza krzywa jest zatem t. zw. linią wpływową dla ugięcia belki.

Od układu sił skupionych łatwo przejść do obciążenia ciągłego, równomiernie rozłożonego. Jeżeli qdc jest obciążeniem elementu długości belki dc , położonego w odstępnie c od prawej podpory ($0 < c < \frac{l}{2}$), to odpowiadającym ugięciem w środku będzie:

$$\frac{qcdc}{48EI} (3l^2 - 4c^2).$$

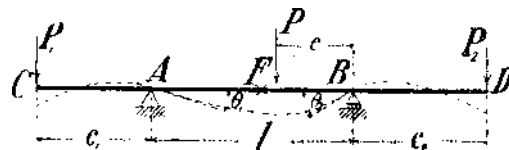
Całkowite ugięcie znajdziemy, sumując ugięcia wywołane obciążeniami elementarnymi, a więc:

$$f = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{qcdc}{48EI} (3l^2 - 4c^2) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$$

Gdy obciążenie jest rozłożone równomiernie tylko na pewnej części rozpiętości, to przy obliczeniu ugięcia, trzeba tylko zmienić w odpowiedni sposób granice całkowania.

¹⁾ Przypadki, w których przesunięcia punktów pręta, wywołane odkształceniem, okazują istotny wpływ na działanie sił, rozpatrzmy w rozdz. XV.

Jako przykład bardziej złożony rozpatrzmy zgięcie belki wspornikowej (z wystającymi końcami) pod wpływem sił skupionych P_1 , P_2 i P_3 (rys. 173). Dajmy na to, że chodzi o znalezienie ugięcia na końcu C i w środku rozpiętości F . Przy rozwiązaniu zadania ogólnym sposobem, należałoby dla każdego z czterech przedziałów belki CA , AF , FB i BD napisać osobne równanie różniczkowe, potem zcałkować wszystkie równania i wyznaczyć dowolne stałe z warunków krańcowych. Rozwiązanie uprościmy znacznie przez zastosowanie zasady superpozycji. Jakoż weźmy pod uwagę ugięcie w punkcie F . Wpływ siły P_1 i P_2 na to ugięcie jest widocznie odpowiednio równoważny z wpływem momentu zginającego $-P_1 c_1$, w przekroju podporowym A i momentu $-P_2 c_2$ w przekroju B . Same wielkości sił P_1 i P_2 nie grają tutaj roli. Od nich zależą tylko reakcje podparć i siły poprzeczne w wystających częściach belki (wspornikach). Ugięcie wywołane parami sił, działającymi w przekrojach podporowych, obliczymy przy pomocy wzoru (103). Ugięcie zaś wskutek siły P określi wzór (97). A zatem ugięcie wypadkowe punktu F przedstawi wyrażenie:



Rys. 173

$$f = \frac{Pc}{48EI} (3l^3 - 4c^3) - \frac{P_1 c_1 l^2}{16EI} - \frac{P_2 c_2 l^2}{16EI}.$$

Podobnie znajdziemy przy pomocy wzorów (98) i (104) kąt nachylenia ϑ_1 zgiętej osi w punkcie A , a mianowicie:

$$\vartheta_1 = \frac{Pc}{6EI} \cdot \frac{l^2 - c^2}{l} - \frac{P_1 c_1 l}{3EI} - \frac{P_2 c_2 l}{6EI}.$$

Dla wyznaczenia ugięcia punktu C rozważmy zginanie wspornika AC . Jeżeliby styczna do linii ugięcia w punkcie A była poziomą, to szukane ugięcie określiłaby (bez względu na znak) formuła:

$$\frac{P_1 c_1^3}{3EI}.$$

Ale przekrój A obrócił się o kąt ϑ_1 , wskutek czego zająd dodatkowe przesunięcia punktów wspornika. Dla punktu C jest to przesunięcie (co do bezwzględnej wartości) równe $c_1 \vartheta_1$, a zatem ugięcie wypadkowe punktu C równa się:

$$\frac{P_1 c_1^3}{3EI} - c_1 \vartheta_1.$$

Pozostaje jeszcze wstawić w miejsce ϑ_1 wartość znaną powyżej.

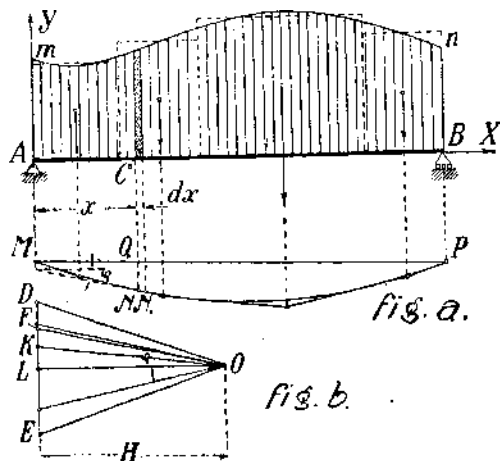
Szereg przykładów zastosowania zasady superpozycji, będziemy mieli poniżej przy rozpatrywaniu statycznie niewyznaczalnych przypadków zgięcia.

§ 77. LINJA UGIĘCIA JAKO KRZYWA SZNUROWA

Dla znalezienia linii ugięcia wypada, jak widzieliśmy, całkować równanie:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M.$$

To całkowanie można także wykonać wykreślnie. Dla objaśnienia metody wykreślnej, przedstawimy konstrukcję, którą się posługują przy szukaniu momentów zginających w belce obciążonej w sposób ciągły.



Rys. 174

Niechaj mn (rys. 175) przedstawia linię obciążenia belki AB . Jej rzędnym należy przypisać wymiar siły podzielonej przez długość, aby pole paska elementarnego $q dx$ określało obciążenie przypadające na element długości belki dx . Dla znalezienia momentów zginających dzielimy pole (powierzchnię) obciążenia rzędnymi (wykropkowanymi na rys. 175) na kilka części i zastępujemy każdą część siłą skupioną w jej środku ciężkości. Jeżeli dla otrzymanego w ten sposób układu sił skupionych wykreślimy wielobok sznurowy, to rzędne tego wieloboku, odpowiadające punktom podziału, określają dokładnie wielkości momentów zginających w tych punktach. Te wielkości znajdujemy, jak wiadomo, mnożąc owe rzędne,

mierzone w podziałce długości, przez odległość biegunową H , mierzoną w podziałce sił. W innych punktach są momenty, przedstawione rzędnymi wieloboku, widocznie nieco większe od momentów, odpowiadających danemu obciążeniu ciągłemu. Powiększając liczbę części, na które podzieliśmy powierzchnię obciążenia, zwiększymy zarazem liczbę boków odpowiadającego wielo-

boku sznurowego, a zmniejszymy różnicę między momentami, określonymi przez rzędne wieloboku, a momentami odpowiadającymi danemu obciążeniu. W granicy zamieni się przeto wielobok sznurowy na krzywą sznurową, przedstawiającą ściśle diagram momentów zginających przy danym obciążeniu ciągiem¹⁾.

Ustawimy teraz równanie różniczkowe naszej krzywej sznurowej. Styczna do krzywej w jakimkolwiek punkcie N tworzy z osią X kąt φ . Poprowadźmy w wieloboku sił odpowiadający promień OF , to dla kąta nachylenia stycznej otrzymamy:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{FL}{OL} \quad \dots \quad (a)$$

jeżeli OL oznacza promień poziomy o wielkości H . Przy przejściu od punktu N do nieskończenie bliskiego punktu N_1 , zmienia styczna swój kierunek. Jeżeli stycznej w N_1 odpowiada promień OK , natenczas dla tang. kąta nachylenia stycznej w N_1 można napisać wyrażenie:

$$\frac{dy}{dx} + d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{KL}{OL} \quad \dots \quad (b)$$

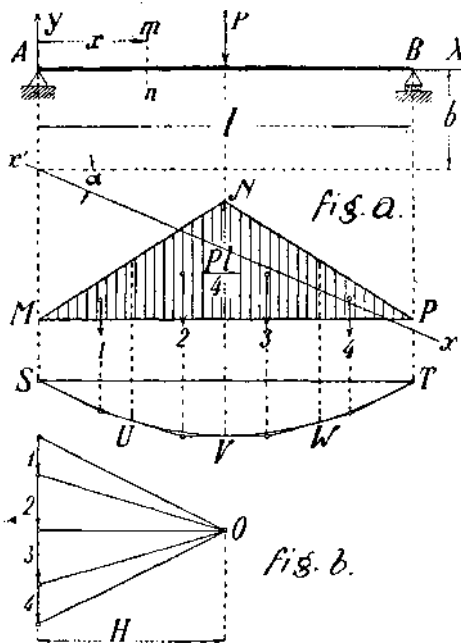
Odejmując od (b) równość (a), otrzymamy:

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{FK}{OL} = \frac{q dx^2}{H},$$

a zatem równaniem różniczkowym krzywej sznurowej będzie:

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = q \quad \dots \quad (105)$$

Wykreślona konstrukcja linii ugięcia polega na zupełnej zgodności tego równania z równaniem



Rys. 175

różniczkowym zgiętej osi belki $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M$. Natężeniu obciążenia q odpowiada w równaniu linii ugięcia wielkość momentu zginającego M , zaś odległości biegunowej H — wielkość sztywności belki przy zginaniu EI . Dla wykreślenia linii ugięcia trzeba sobie przedstawić belkę pod wpływem pewnego fikcyjnego obciążenia ciągłego, zmieniającego się według tego samego prawa, co i moment zginający M i skonstruować dla tego obciążenia krzywą sznurową, przyjmąwszy za odległość biegunową wielkość EI . Przy tej konstrukcji wypadnie pole obciążenia podzielić na części, obliczyć pole każdej części, a wielkość tego pola odciąć w pewnej podziałce na wieloboku sił. Ponieważ wymiarem rzędnych linii obciążenia jest w danym przypadku: siła \times długość (moment), więc pola będą mieć wymiar siła \times (długość)². Jest to zarazem i wymiar sztywności belki EI . Obrawszy teraz pewną podziałkę dla wielkości o wymiarze: siła \times (długość)², będziemy w tej podziałce odcinać elementy pola obciążenia na wieloboku sił, jakoteż odległość biegunową. Odpowiadająca krzywa sznurowa będzie mieć równanie różniczkowe identyczne z równaniem różniczkowym linii ugięcia belki. Dla otrzymania przy pomocy tej krzywej ugięć belki, trzeba popro-

wadzić bok zamykający tak, aby uczynić zadość warunkom na końcach belki i od tego boku mierzyć rzędne. Objasnimy to bliżej na szczegółowych przykładach.

I. Belka w obu końcach podparta. Przy obciążeniu siłą skupioną P w środku belki przedstawia się diagram momentów jako trójkąt równoramienny MNP (rys. 175, fig. a) o wyso-

¹⁾ [Tę krzywą kreślimy w praktyce z dostateczną dokładnością, wpisując w otrzymany wielobok sznurowy łuki paraboliczne, styczne do boków w punktach, odpowiadających rzędnym, którymi podzieliłiśmy obciążenie na części].

²⁾ $FK = q dx$, ponieważ odcinek wyznaczony dwoma promieniami na wieloboku sił musi się równać wypadkowej wszystkich sił między odpowiadającymi bokami wieloboku sznurowego. W rozpatrywanym przypadku jest ta wypadkowa równa obciążeniu $q dx$ między przekrojami, przechodzącymi przez N i N_1 .

kości $\frac{Pl}{4}$. Ten trójkąt uważamy za powierzchnię obciążenia i dzieląc go np. na 4 części o tej samej szerokości równej $\frac{l}{4}$, kreślimy odpowiadający wielobok sznurowy dla odległości biegunowej $H = EI$, a następnie wpisujemy w wielobok krzywą sznurową. Odległość biegunową odmierzamy przytem oczywiście w podziałce fikcyjnych sił, których wymiarem jest: siła \times (długość)². Równaniem różniczkowym lewej części tej krzywej będzie:

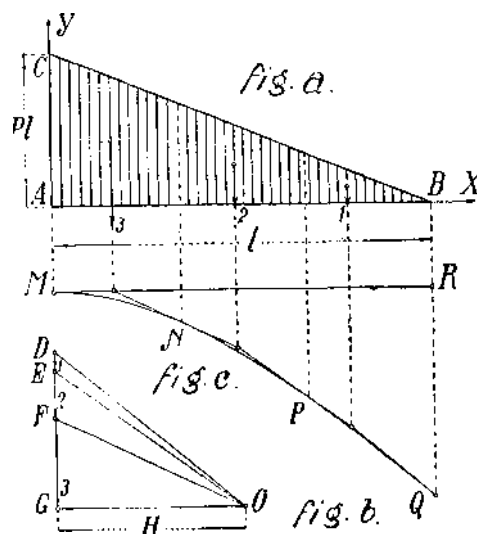
$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = \frac{P}{2} x \quad \dots \quad (c)$$

Gdybyśmy mierzyli rzędne y od dowolnej prostej $x'x'$ (fig. a) w płaszczyźnie XY , zamiast od osi X -ów, to i te rzędne czyniłyby zadość równaniu (c), Zmiana położenia osi, od której mierzymy rzędne, jest bowiem równoznaczna z podstawieniem w rów. (c) wielkości $y_1 = y - ax - b$ zamiast wielkości y . Aby otrzymać ugięcia belki będziemy mierzyć rzędne krzywej sznurowej od linii zamykającej ST , łączącej punkty przecięcia krzywej z pionowami, przechodzącymi przez podpory belki A i B . Przy takim obiorze boku zamykającego nie tylko czynimy zadość równaniu (c) lecz także i warunkom podporowym; y staje się zerem przy $x = 0$ i $x = l$. W przekrojach pośrednich będzie przeto y dawać rzeczywiste ugięcie belki i to w tej samej skali, w której wykonano rysunek belki. Taka konstrukcja nie dałaby się jednak najczęściej wykonać, albowiem dopuszczalne ugięcia nie przekraczają $\frac{1}{2000}$ do $\frac{1}{500}$ rozpiętości. Dlatego zwiększamy podziałkę ugięć wielokrotnie zapomocą stosownego zmniejszenia odległości biegunowej. Skoro np. zamiast $H = EI$ odmierzymy jako odległość biegunową $\frac{1}{100} EI$, to otrzymamy rzędne linii ugięcia 100 razy większe. Dla pewnego pomyślanego obciążenia pozostaje bowiem moment określony iloczynem z odległości biegunowej H i rzędnej krzywej sznurowej stałym, jakiegokolwiek obierzemy H .

II. Belka jednym końcem utwierdzona. Przy obciążeniu siłą P działającą na swobodny koniec belki (rys. 176) przedstawia się linja momentów jako prosta CB nachylona względem osi X . Przyjawszy pole trójkąta ACB za powierzchnię obciążenia fikcyjnego, kreślimy dla tego obciążenia krzywą sznurową $MNPQ$, której równanie różniczkowe ma postać:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = -P(l - x).$$

Ażeby otrzymać ugięcia belki, należy rzędne y mierzyć od prostej MR , stycznej do krzywej sznurowej w punkcie $x = 0$, odpowiadającym miejscu utwierdzenia. Przy takim obiorze linii zamykającej czynimy zadość warunkowi krańcowemu u lewej podpory, a mianowicie: $(y)_{x=0} = 0$. Drugi warunek, t. j. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0$, będzie również spełniony, ponieważ biegun O obraliśmy tak, aby linja zamykająca $MR \parallel OG$ wypadła pozioma.



Rys. 176

§ 78. WYKREŚLNO-ANALITYCZNY SPOSÓB WYZNACZENIA UGIĘCIA BELEK

Zważywszy, że ugięcia belki określają rzędne wieloboku sznurowego, wykreślonego dla linii momentów jako linii obciążenia, możemy zastąpić konstrukcję krzywej sznurowej obliczeniem momentów dla tego fikcyjnego obciążenia i tą drogą znaleźć ugięcia. Kombinując w ten sposób przejrzysty obraz geometryczny linii momentów z prostym rachunkiem, omijającym najczęściej całkowanie, możemy dojść do celu nawet prędzej, niż metodą ogólną. Do objaśnienia sposobu posłużą następujące przykłady:

I. Belka AB w obu końcach swobodnie podparta i obciążona w środku siłą P (rys. 177). Linja momentów przedstawia się jako trójkąt ACB o wysokości $\frac{Pl}{4}$. Uważając go za linję

obciążenia otrzymujemy całkowitą wartość fikcyjnego obciążenia $\frac{Pl^2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{8}$, a zatem fikcyjna reakcja równa się $\frac{Pl^2}{16}$. Aby wyznaczyć ugięcie belki, wystarczy obliczyć moment M , wywołany fikcyjnym obciążeniem i podzielić go przez odległość biegunową, która się równa sztywności belki EI .

A zatem ugięcie w dowolnym punkcie:

$$y = \frac{M}{EI} \quad (106)$$

W środku belki jest $M = \frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl^2}{48}$, a zatem strzałka ugięcia

$$f = \frac{1}{EI} \cdot \frac{Pl^2}{48}$$

co otrzymaliśmy już poprzednio (wzór 93) drogą ogólną.

Tangens kąta nachylenia stycznej do linii ugięcia znajdziemy teraz przez różniczkowanie równania (106), czyli:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \frac{dM}{dx} = \frac{Q}{EI} \quad (107)$$

przyczem Q oznacza siłę poprzeczną, powstała wskutek fikcyjnego obciążenia. Zastosujemy tę formułę do obliczenia kątów nachylenia stycznych do linii ugięcia na podporach. Tutaj siła poprzeczna jest co do wielkości równa reakcji $\frac{Pl^2}{16}$, a zatem szukane kąty:

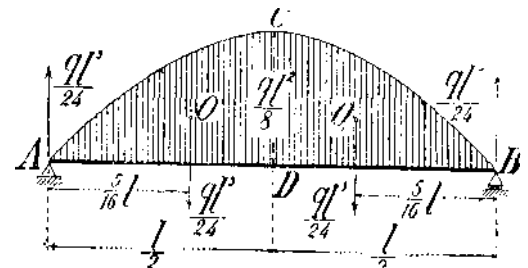
$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{Pl^2}{16EI}$$

Aby wartości kątów zgadzały się i co do znaku z reakcjami podporowymi, wywołanymi fikcyjnym obciążeniem, przyjmiemy za dodatnie: obrót lewego końca belki w kierunku wskazówki zegara, a prawego w kierunku przeciwnym.

II. Belka AB w obu końcach swobodnie podparta i zginana obciążeniem rozłożonym równomiernie o wielkości $q \text{ kg/m}$ (rys. 178). Diagram momentów jest parabolą ACB , której rzędna wierzchołkowa równa się $\frac{1}{8} ql^2$.

Odpowiadające całkowite obciążenie fikcyjne równa się $\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l$, a reakcje podporowe równają się $\frac{ql^2}{24}$. Kąty nachylenia linii ugięcia na podporach wypadają z wzoru (107), a mianowicie:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{ql^2}{24EI} \quad (108)$$



Rys. 178

W celu obliczenia strzałki ugięcia zaznaczymy, że środki ciężkości wycinków parabolicznych ACD i BCD leżą w odległości $\frac{5}{16}l$ od pionowych podporowych¹⁾. Fikcyjnym momentem zginającym w środku belki będzie przeto:

$$M = \frac{ql^2}{24} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{24} \cdot \frac{3l}{16} = \frac{5}{384} ql^2, \text{ a strzałka ugięcia } f = \frac{M}{EI} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^2}{EI}$$

¹⁾ Według znanego wzoru dla środka ciężkości figur płaskich mamy:

$$x_c = \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx}{\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) dx} = \frac{5}{16} l$$

III. Belka w obu końcach swobodnie podparta i obciążona siłą skupioną P w dowolnym przekroju (rys. 179). Diagram momentów przedstawia się jako trójkąt $A'C'B'$. Aby znaleźć ugięcia, przyjmijmy linię $A'C'B'$ za linię obciążenia ciągłego, którego wielkość równa się polu trójkąta $A'C'B'$. Dla znalezienia reakcji podporowych, wywołanych pomyślanym obciążeniem, wyznaczmy położenie środka ciężkości O trójkąta $A'C'B'$. Odległość pionowej, przechodzącej przez O , od prawego końca B' będzie równa $\frac{1}{3}(b+l)$. Reakcje podpór otrzymają przeto wartości:

$$A' = \frac{Pab}{2} \cdot \frac{b+l}{3} \cdot \frac{1}{l} = \frac{Pab(b+l)}{6l},$$

$$B' = \frac{Pab}{2} \cdot \frac{a+l}{3} \cdot \frac{1}{l} = \frac{Pab(a+l)}{6l}.$$

Kąty obrotu końców belki określają wzory:

$$\vartheta_1 = \frac{Pab(b+l)}{6lEI}, \quad \vartheta_2 = \frac{Pab(a+l)}{6lEI}.$$

Ugięcie obciążonego przekroju znajdziemy, utworzywszy dla tego miejsca wyrażenie na moment M wskutek pomyślanego obciążenia:

$$M = \frac{Pab(b+l)}{6l} \cdot a - \frac{Pa^2b}{2l} \cdot \frac{a}{3} = \frac{Pa^2b^2}{3l}, \quad \text{z czego } f = \frac{Pa^2b^2}{3lEI}.$$

Ugięcie jakiegokolwiek przekroju lewej części belki w odległości x od lewej podpory:

$$y_1 = \frac{1}{EI} \left[\frac{Pab(b+l)}{6l} \cdot x - \frac{Px^2b}{2l} \cdot \frac{x}{3} \right] = \frac{Pbx(l^2 - \frac{2}{3}lx - x^2)}{6lEI}.$$

Dla dowolnego przekroju po prawej stronie siły P będzie ugięcie w odległości x_1 od prawej podpory:

$$y_2 = \frac{Pax_1(l^2 - a^2 - x_1^2)}{6lEI}.$$

Otrzymane wyniki łatwo doprowadzić do zgodności z tem, co znaleziono poprzednio przez całkowanie równania różniczkowego.

IV. Posługując się metodą wykreślno-analityczną, łatwo otrzymać formuły dla kątów ϑ_1 i ϑ_2 (rys. 180) przy zgięciu belki parą sił, działającą na jej koniec, np. A . Reakcjami podporowymi będą w tym wypadku:

$$A = -\frac{M}{l}, \quad B = +\frac{M}{l}.$$

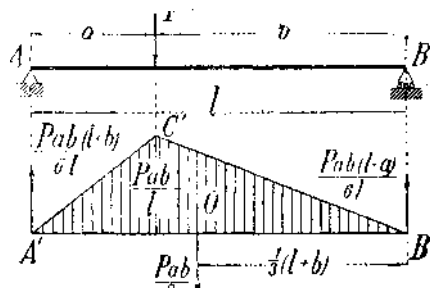
Diagram momentów zginających przedstawia się jako trójkąt $A'C'B'$. Uważając $C'B'$ za linię obciążenia, znajdziemy dla odpowiadających fikcyjnych reakcyj wartości:

$$A' = \frac{2}{3} \frac{Ml}{2} \quad \text{i} \quad B' = \frac{1}{3} \frac{Ml}{2}.$$

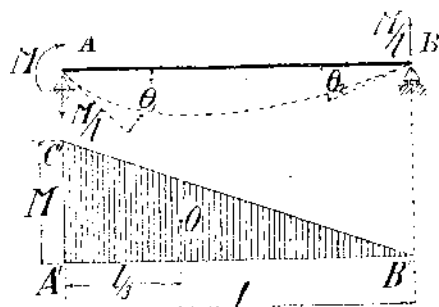
Szukane kąty obrotu stycznych końcowych określają przeto wzory:

$$\vartheta_1 = \frac{Ml}{3EI}, \quad \vartheta_2 = \frac{Ml}{6EI}.$$

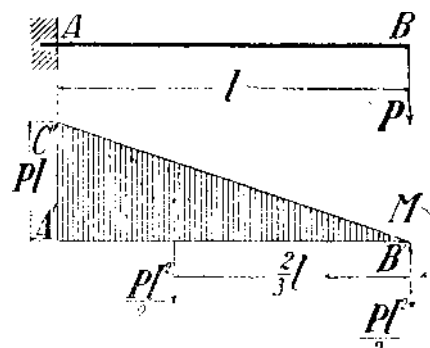
V. Belka AB jednym końcem utwierdzona, a na drugim swobodnym obciążona siłą P (rys. 181). Diagram momentów ma postać trójkąta prostokątnego $A'C'B'$ o wysokości Pl , równej momentowi utwierdzającemu. Uważając ten diagram za linię obciążenia, otrzymamy ugięcia z formuły (106), jeżeli obliczymy fikcyjne momenty. Do tego potrzebna jest znajomość fikcyjnych reakcyj, które muszą czynić zadość warunkom podporowym. W poprzednich przykładach belek obu końcami swobodnie podpartych wyznaczaliśmy i fikcyjne reakcje tak, jak dla belki w obu końcach podpartej, ponieważ ugięcia na podporach, a więc i fikcyjne momenty



Rys. 179



Rys. 180



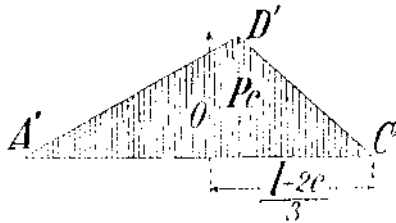
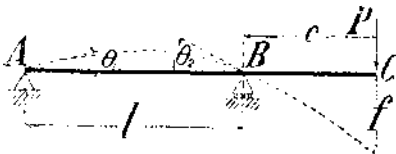
Rys. 181

w tych punktach, muszą być równe zero. Tutaj jednakże w miejscu utwierdzenia A jest $y = 0$ i $\frac{dy}{dx} = 0$, a więc fikcyjny moment i siła poprzeczna muszą być równe zero, co wymaga przyjęcia, że koniec A' jest swobodny, a fikcyjna reakcja i moment utwierdzenia wystąpią na końcu B' . Pierwsza ma widoczną wielkość $B' = \frac{Pl^2}{2}$, moment utwierdzenia zaś $M = \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l$. Ugięcie końca B (strzałka ugięcia) przedstawia zatem wyrażenie:

$$f = \frac{M}{EI} = \frac{Pl^3}{3EI},$$

zaś tangens kąta nachylenia stycznej równa się $\frac{B'}{EI} = \frac{1}{2} \frac{Pl}{EI}$.

VI. Belka wystająca (wspornikowa), swobodnie podparta na końcu A i w punkcie B , a obciążona na drugim końcu C siłą skupioną P (rys. 182). Momenty zginające, przedstawione trójkątnym diagramem $A'D'C'$ są widocznie ujemne. Uważając je za fikcyjne obciążenie rozpatrzmy odpowiadające warunki podporowe. Reakcje podporowe można przyjąć tylko w punktach A' i C' ; gdybyśmy bowiem umieścili reakcję w jakimkolwiek pośrednim punkcie, to fikcyjna siła



Rys. 182

poprzeczna doznałaby w tym miejscu nagłej zmiany, którejby odpowiadał załom w linii ugięcia. Taki zaś załom jest oczywiście wykluczony. Ponieważ ugięcie w punkcie A jest równe zero, więc w punkcie A' należy umieścić tylko reakcję. W punkcie zaś C' trzeba nadto działać momentem podporowym, odpowiadającym ugięciu f w tym punkcie. Wielkość reakcji A' znajdziemy z warunku, że moment zginający wskutek fikcyjnego obciążenia w przekroju B jest równy zero, bo ugięcie jest zerem. A zatem:

$$A'l = -\frac{Pcl}{2} \cdot \frac{l}{3}, \text{ z czego } A' = -\frac{Pcl}{6}.$$

Wtedy reakcja C' wypadnie z równania:

$$A' + C' = \frac{Pc(l+c)}{2}, \text{ czyli } C' = Pc \left(\frac{l}{3} + \frac{c}{2} \right).$$

Moment podporowy M w punkcie C' znajdziemy jako moment wszystkich sił fikcyjnych, działających na belkę $A'C'$, względem punktu C' , a więc:

$$M = \frac{Pc(l+c)}{2} \cdot \frac{l+2c}{3} - \frac{Pcl}{6} (l+c) - \frac{Pc^2(l+c)}{3}.$$

Teraz możemy bez trudności wyznaczyć ugięcia i kąty nachylenia stycznych w różnych przekrojach belki. Dzieląc np. wielkości A' i M przez EI , otrzymamy:

$$\theta_1 = -\frac{Pcl}{6EI}, \quad f_c = \frac{Pc^2(l+c)}{3EI}.$$

Też same wyniki można otrzymać prościej, posługując się zasadą superpozycji.

§ 79. BELKI O RÓWNOMIERNEJ WYTRZYMAŁOŚCI PRZY ZGINANIU

Dotąd przyjmowaliśmy zawsze, że pręty narażone na zginanie mają postać symetryczną. Rozmiary pręta obieraliśmy w ten sposób, aby w przekroju niebezpiecznym, t. j. w przekroju, gdzie moment zginający ma największą wartość, uczynić zadość warunkowi wytrzymałości. Rzecz jasna, że wyznaczone w ten sposób rozmiary przekroju poprzecznego będą dla wszystkich innych przekrojów, z wyjątkiem przekroju niebezpiecznego, zbyt wielkie. Moglibyśmy je zmniejszyć bez uszczerbku dla wytrzymałości, dobierając wymiary każdego przekroju stosownie do zachodzącego w nim momentu zginającego i siły poprzecznej. Wtedy w każdym przekroju otrzymamy wyciężenie materiału równe dopuszczalnemu i dalej nie można pójść ze zmniejszeniem rozmiarów bez osłabienia belki. Otrzymana takim sposobem postać pręta nosi nazwę belki o równomiernej wytrzy-

małości. W licznych przypadkach, kiedy można pominąć wpływ sił poprzecznych, wyprowadzamy ogólny warunek, któremu powinna czynić zadość taka postać belki z podstawowej formuły

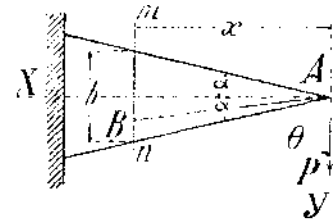
$$\frac{M}{W} = R.$$

M zmienia się wzdłuż belki i według tego samego prawa należy zmieniać moduł przekroju W . Przyjmujemy przytem, że wzór powyższy, wyprowadzony dla prętów pryzmatycznych, można z dostatecznym przybliżeniem zastosować do prętów o przekroju zmiennym. Będzie to niewątpliwie słusznym, o ile zmiany przekroju są dość łagodne.

Dla porównania przytoczymy dokładne rozwiązanie zadania w przypadku, przedstawionym na rys. (183). Belka jednym końcem utwierdzona, a na drugim obciążona siłą P , ma postać klina o stałej grubości w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku. W dowolnym punkcie B przekroju mn określają naprężenie normalne i styczne wzory następujące¹⁾:

$$p_n = \frac{My}{I} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \alpha, \quad p_t = \frac{Py^2}{I} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \alpha.$$

Tutaj oznacza I moment bezwładności przekroju mn , y rzędną punktu B , α kąt, jaki tworzy wektor AB z kierunkiem siły i 2α kąt wierzchołkowy klina. Przy małej wartości kąta α różni się czynnik $\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \alpha$ mało od jedności, wobec czego rozkład naprężeń normalnych różni się bardzo mało od liniowego rozkładu w przypadku stałego przekroju. Znaczna natomiast różnica zachodzi w rozkładzie naprężeń stycznych, które stają się zerem dla $y=0$, a we włóknach skrajnych osiągną największą wartość około $\frac{3P}{F}$, t. j. trzy razy większą od wartości średniej²⁾.



Rys. 183

Rozpatrzymy teraz parę przykładów belek o równomiernej wytrzymałości.

Belka jednym końcem utwierdzona i obciążona na drugim, swobodnym, siłą skupioną P (rys. 184). Moment zginający w dowolnym przekroju o odciętej x , mierzonej od końca B , jest bez względu na znak, równy Px . A zatem przy postaci równej wytrzymałości musi W czynić zadość warunkowi:

$$\frac{Px}{W} = \text{const.} = R \quad (a)$$

Zadanie jest widocznie jeszcze nieoznaczone nawet wtedy, gdy obierzemy jako postać przekroju, dajmy na to prostokąt. Oznaczonem staje się zagadnienie dopiero, gdy postawimy waru-

nek dodatkowy, że np. podstawa prostokąta ma być stałą. Wówczas wysokość y będzie się zmieniać według równania:

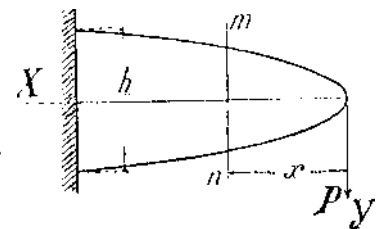
$$\frac{M}{W} = \frac{6Px}{by^2} = R = \frac{6Pl}{bh^2},$$

jeżeli przez h oznaczymy wysokość przekroju w miejscu utwierdzenia. Stąd:

$$y^2 = \frac{h^2}{l} x,$$

czyli kontur belki otrzyma w widoku postać paraboli, której wierzchoł-

kiem jest swobodny koniec belki (rys. 185). Ponieważ pole paraboli równa się $\frac{2}{3}$ pola opisanego prostokąta hl , więc znaleziona postać równomiernej wytrzymałości dałaby okrągło 33% oszczędności na materiale³⁾.



Rys. 185

¹⁾ Ob. S. P. Timoszenko: „Teorja uprugosti“. 1914, str. 130.

²⁾ [Ten wynik prowadzi napozór do sprzeczności ze znanym rozkładem parabolicznym w przypadku stałego przekroju prostokątnego. W rzeczywistości jednak ta sprzeczność nie zachodzi, ponieważ, przy określonej wielkości przekroju mn , i danym momencie M w tymże przekroju, sprowadza się przedstawione rozwiązanie dla $\alpha = 0$ do szczególnego przypadku czystego zginania. W istocie, gdy α staje się zerem, to punkt działania siły P oddala się do nieskończoności, a więc siła P , określająca wartość siły poprzecznej znika wobec momentu M].

³⁾ [Przy założeniu, że ciężar własny belki jest znikomy w porównaniu do obciążenia P].

[W rzeczywistości trzeba ze względu na siłę poprzeczną zmodyfikować nieco otrzymany kształt belki. Na swobodnym końcu belki jest wprawdzie moment zerem, ale siła poprzeczna ma tę samą wartość, co w innych przekrojach, wskutek czego musi przekrój na końcu belki mieć wartość skończoną. Wywołane przez to zwiększenie ilości materiału będzie widocznie nieznaczne, o ile stosunek $l:h$ jest dość wielki].

Co się tyczy ugięcia belki o równomiernej wytrzymałości, to oczywiście będzie ono większe, aniżeli dla belki o stałym przekroju i da się obliczyć przy pomocy równania różniczkowego linii ugięcia z tem samym mniej więcej przybliżeniem, do jakiego prowadzi przyjęcie linjowego rozkładu naprężeń dla belki o zmiennym przekroju. Łatwo zrozumieć, że to przybliżenie będzie tem znaczniejsze, im łagodniejsza zmiana przekroju wzdłuż belki, czyli im mniejsze kąty nachylenia tworzą z osią belki styczne do jej przekrojów południkowych. Przeprowadzając rachunek dla naszego przypadku, musimy w równaniu różniczkowym linii ugięcia

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = Px$$

uważać l za zmienne i wstawić zań wartość

$$I = \frac{bh^3}{12} \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$$

A zatem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12Px l^{\frac{3}{2}}}{Ebh^3 x^{\frac{3}{2}}} = \frac{12Pl^{\frac{3}{2}}}{Ebh^3} x^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{12Pl^{\frac{3}{2}}}{Ebh^3} 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

Stałą dowolną C wyznaczmy z warunku, aby dla $x=l$ był kąt nachylenia stycznej równy zeru. Stąd:

$$C = -\frac{24Pl^2}{Ebh^3} = -\frac{2Pl^2}{EI_0},$$

przyczem $I_0 = \frac{bh^3}{12}$ jest momentem bezwładności przekroju w miejscu utwierdzenia. Powtórne całkowanie daje:

$$y = \frac{12Pl^{\frac{3}{2}}}{Ebh^3} \frac{3}{4} x^{\frac{3}{2}} - \frac{24Pl^2}{Ebh^3} x + C_1.$$

Z warunku: dla $x=l$ jest $y=0$, znajdujemy wartość stałej

$$C_1 = \frac{8Pl^3}{Ebh^3}.$$

Ta stała określa zarazem ugięcie swobodnego końca belki, t. j.:

$$f = \frac{2Pl^3}{3EI_0},$$

które przeto wypada dwa razy większe, niż u belki o stałym przekroju bh . Oszczędność materiału jest okupiona zmniejszeniem sztywności pręta.

Jeżeli przyjmiemy jako warunek dodatkowy dla określenia postaci belki o równomiernej wytrzymałości, że wysokość prostokątnego przekroju pozostaje stałą, natomiast zmienna szerokość, którą oznaczymy przez y , dogadza równaniu:

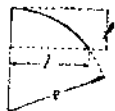
$$\frac{6Px}{h^2y} = \frac{6Pl}{bh^2} = \text{const.},$$

przyczem b oznacza szerokość przekroju utwierdzonego. Stąd

$$y = \frac{b}{l} x,$$

czyli szerokość zmienia się linjowo. Ilość materiału na taką belkę jest widocznie dwa razy mniejsza, aniżeli w belce o stałym przekroju bh .

Linia ugięcia naszej belki jest łukiem koła, albowiem



Rys. 186

$$\frac{M}{EI} = \frac{12Px}{Eh^2y} = \frac{12Pxl}{Ebh^3x} = \frac{Pl}{EI_0} = \text{const.},$$

czyli krzywizna jest stałą. Stąd łatwo znaleźć strzałkę ugięcia f (rys. 186), postępując się proporcją

$$f:l = l:(2\rho - f),$$

z której po opuszczeniu małej wielkości f^2 w obec $2\rho f$ wypadnie:

$$f = \frac{l^2}{2\rho} = \frac{l^2}{2} \frac{Pl}{EI_0} = \frac{Pl^3}{2EI_0}.$$

Ugięcie jest zatem o 50% większe, aniżeli w przypadku stałego przekroju o momencie bezwładności I_0 .

Zdjawszy po jednej nakładce, otrzymujemy przekrój o module $W_2 = 4980 \text{ cm}^3$. Dopuszczalnym momentem zginającym dla tego przekroju będzie $M_2 = 4980 \cdot 1000 = 498 \cdot 10^4 \text{ kgcm}$.

Po zdjęciu dwu nakładek mamy $W_3 = 3640 \text{ cm}^3$, a odpowiadający moment $M_3 = 364 \cdot 10^4 \text{ kgcm}$.

Nakoniec przekrój bez nakładek, złożony ze ścianki i czterech kątowników ma $W_4 = 2280 \text{ cm}^3$, a $M_4 = 228 \cdot 10^4 \text{ kgcm}$.

Ażeby teraz wyznaczyć długość nakładek, kreślimy na diagramie momentów (fig. a) proste równoległe do osi belki AB , których rzędne przedstawiają wielkości momentów M_1, M_2, M_3 i M_4 . Odpowiadające im cięciwy paraboli określają widocznie teoretycznie potrzebne długości nakładek. Tę długość należy powiększyć o wielkość konieczną dla połączenia nitami z zewnętrznymi częściami belki. Otrzymany w ten sposób kształt belki zbliża się dość dobrze do teoretycznej postaci równomiernej wytrzymałości i daje znaczną oszczędność materiału. Zato ugięcie takiej belki będzie większe niżby było, gdybyśmy obrali przekrój wszędzie stały.

Linję ugięcia możnaby wyznaczyć analitycznie, podzieliwszy belkę na części o przekroju stałym, ale o wiele prościej dochodzimy do celu drogą wykreślną, wskazaną w § 77. Zmianie przekroju w oddzielnych częściach odpowiada zmiana odległości biegunowej $H = EI$. Niechaj np. części 1. i 5. diagramu momentów (rys. 190) odpowiadają przekrojom z jedną nakładką, części 2 i 4

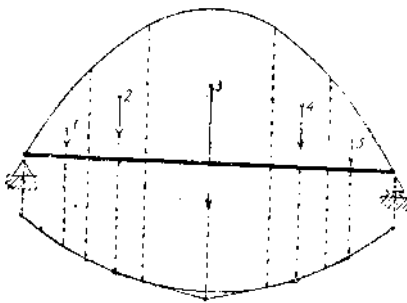


fig. (a)

Rys. 190

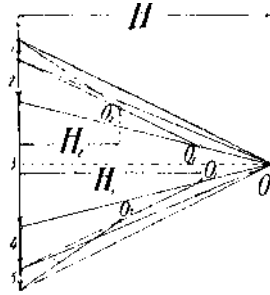
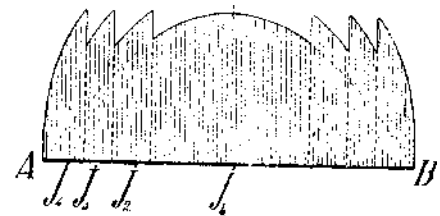


fig. (b)

przekrojom z dwiema nakładkami, a część 3 przekrojowi o trzech nakładkach. Wykreślimy wielobok sił fikcyjnych 1, 2, 3, 4, 5 (fig. b), których wielkość przedstawia w znanej skali odpowiednie pola powierzchni momentów, uważanej za powierzchnię obciążenia. Obierzmy biegun O w odległości H , równej największej sztywności belki i poprowadźmy zeń dwa promienie ograniczające odcinek 3, odpowiadający części belki z trzema nakładkami. Dla wy-

kreślenia następnych promieni obieramy bieguny O_1, O_1 w odległości H_1 , równej sztywności belki przy dwu nakładkach i z tych biegunów prowadzimy promienie do początku odcinka 2 i końca odcinka 4. Nakoniec dla odcinków skrajnych obieramy bieguny O_2, O_2 w odległości H_2 , odpowiadającej sztywności belki przy jednej nakładce i kreślimy promienie skrajne. Wykreśliwszy teraz wielobok sznurowy o bokach równoległych do odpowiednich promieni i wpisawszy weń w znany sposób krzywą sznurową, otrzymamy linię ugięcia belki w skali n -razy większej od skali długości rysunku belki, jeżeli odległości biegunowe odmierzyliśmy w skali n -razy mniejszej od skali sił fikcyjnych 1, 2, ... 5.

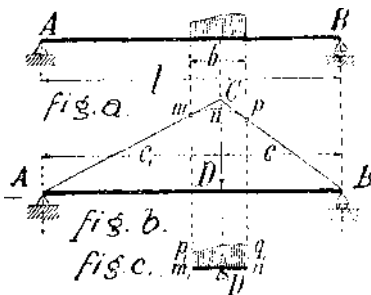
Zamiast zmieniać odległość biegunową dla wykreślenia wieloboku sznurowego, można przekształcić stosownie powierzchnię momentów, jako powierzchnię fikcyjnego obciążenia. W tym celu zatrzymujemy np. część środkową (rys. 190, fig. a), odpowiadającą przekrojom o momencie bezwładności I_1 , a rzędne części 2 i 4 powiększamy w stosunku $I_1 : I_2$, jeżeli I_2 oznacza moment bezwładności przekroju w tych częściach. Tak samo zwiększamy rzędne części 1 i 5, w których momentem bezwładności przekroju jest I_3 , a mianowicie w stosunku $I_1 : I_3$. Kreśląc dla tak przekształconej powierzchni fikcyjnego obciążenia krzywą sznurową przy odległości biegunowej $H = EI_1$, otrzymamy również linię ugięcia belki, albowiem wartość krzywizny określa ułamek $\frac{M}{EI}$, a zamiast zmniejszać jego mianownik, kładąc kolejno po I_1 wartość I_2 i I_3 , można to samo osiągnąć przez zwiększenie licznika M w stosunku $I_1 : I_2$ i $I_1 : I_3$. Rys. (191) przedstawia przekształconą w ten sposób powierzchnię momentów z rys. (189), odpowiadającą rozpatrywanemu powyżej przykładowi liczbowemu.



Rys. 191

§ 30. WPŁYW SPOSOBU ROZŁOŻENIA OBCIĄŻENIA NA WIELKOŚĆ MOMENTU ZGINAJĄCEGO I STRZAŁKĘ UGIĘCIA BELEK

Przy obliczeniu belek wypada nieraz zastąpić dane obciążenie, rozłożone na niewielkiej części rozpiętości, innym obciążeniem temuż statycznie równoważnym. Często np. zastępujemy obciążenie, rozmieszczone na niewielkim odcinku b (rys. 192) jedną siłą skupioną w środku ciężkości powierzchni obciążenia. Jak się odbija taka zamiana obciążenia na wielkości największego momentu zginającego, na wielkości ugięcia i kątach obrotu końców belki? Aby odpowiedzieć na to pytanie zastosujemy z korzyścią sposób wykreślno-analityczny. Zastąpienie obciążenia ciągłego siłą skupioną wywołuje zmianę diagramu momentów tylko na długości b obciążonej części (fig. b). Zamiast linii łamanej ACB , odpowiadającej sile skupionej, otrzymamy przy rozłożeniu obciążenia na odcinku b krzywoliniowy kontur mnp . Różnice momentów przy dwu różnych sposobach obciążenia będą się zmieniać widocznie według tego samego prawa, co wielkości momentów zginających dla beleczki $m_1 n_1$ (fig. c) o długości b , podpartej w punkcie D , który leży na pionowej śródka ciężkości powierzchni obciążenia $m_1 p_1 q_1 n_1$. Największa różnica momentów przy obciążeniach mających ten sam kierunek znajdzie w punkcie D .



Rys. 192

Jeżeli obciążenie jest rozłożone równomiernie na odcinku b , to $qb = P$,

a największa różnica momentów równa się:

$$\frac{qb^2}{8} = \frac{Pb}{8} \tag{a}$$

Zmienność różnicy momentów przedstawiono na rys. (193). Zważywszy, że $m_1 p_1$ i $p_1 n_1$ są łukami parabol, stycznych w m_1 i n_1 , znajdziemy, że pole zakreskowanej powierzchni momentów równa się:

$$\frac{1}{3} \frac{qb^2}{8} b = \frac{qb^3}{24} = \frac{Pb^2}{24} \tag{b}$$



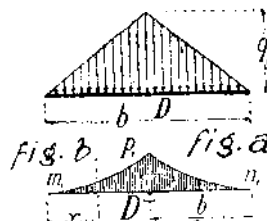
Rys. 193

Gdy obciążenie odcinka b zmienia się według prawa trójkąta (rys. 194), to

$$P = \frac{q_0 b}{2}$$

Różnice momentów na obciążonej długości b są identyczne z momentami zginającymi dla beleczki $m_1 D n_1$ tejże długości, podpartej w D . Największą różnicą, odpowiadającą punktowi D jest:

$$\frac{q_0 b}{4} \cdot \frac{b}{6} = \frac{Pb}{12} \tag{c}$$



Rys. 194

Pole powierzchni momentów, zakreskowanej na fig. (b), równa się:

$$\frac{2}{3} \int_0^b \frac{2q_0 x}{b} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} dx = \frac{q_0 b^3}{96} = \frac{Pb^2}{48} \tag{d}$$

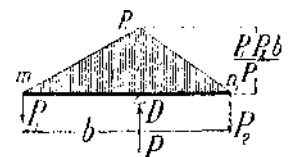
Jeżeli założymy, że wszystkie siły obciążające odcinek b (rys. 192) mają jeden i ten sam kierunek, to największe różnice momentów przy przejściu od siły skupionej do innego układu sił, rozmieszczonych na długości b , powstaną w przypadku, gdy łuk mnp stanie się linią prostą, t. j. gdy siłę P zastąpimy dwiema siłami P_1 i P_2 , działającymi po końcach odcinka b . Zmiana

różnic momentów wzdłuż odcinka b , da się wówczas przedstawić momentami zginającymi dla belki, wyobrażonej na rys. (195). Największa różnica odpowiada punktowi D i równa się

$$\frac{P_1 P_2 b}{P}$$

. W szczególnym przypadku

$$P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$$



Rys. 195

mamy różnicę równą

$$\frac{Pb}{4} \tag{e}$$

a odpowiadające pole powierzchni momentów, zakreskowane na rys. (195), równa się

$$\frac{Pb^2}{8} \tag{f}$$

W podobny sposób można zbadać różnice momentów, wywołane przez wszelkie inne zastąpienie obciążenia na odcinku b obciążeniem statycznie równoważnym. W najogólniejszym przypadku da się wartość największej różnicy, czyli błęd wielkości momentu, przedstawić formułą:

$$\delta M = k \frac{Pb}{4} \tag{g}$$

w której P oznacza wypadkową obciążenia odcinka b , k zaś współczynnik, zależny od rozkładu obciążenia. Przy zastąpieniu siły skupionej P dwiema równymi siłami (jak powyżej) będzie ten współczynnik równy 1. W przypadku zastąpienia siły P obciążeniem równomiernym qb jest $k = \frac{1}{2}$. Nakoniec, przy obciążeniu według prawa trójkąta (rys. 194), wypada $k = \frac{1}{3}$.

Dla oceny względnego błędu wielkości momentów zginających, porównamy znalezione powyżej wartości δM z wartością momentu pod ciężarem P , działającym w punkcie D (rys. 192). Ten moment równa się $\frac{Pcc_1}{l}$, a zatem względny błąd momentu można przedstawić wyrażeniem:

$$k \frac{Pb}{4} : \frac{Pcc_1}{l} = \frac{kbl}{4cc_1} \quad (h)$$

Jeżeli odcinek b nie leży blisko podpór, czyli, gdy c i c_1 są tego samego rzędu, co rozpiętość l , to względny błąd będzie rzędu $\frac{b}{l}$.

Rozpatrzmy teraz, jak te zamiany obciążeń odbijają się na wielkości ugięć belki. Aby znaleźć ugięcia belki w obu końcach podpartej, trzeba wyobrazić sobie tę belkę obciążoną powierzchnią momentów. Moment zginający wskutek otrzymanego tą drogą fikcyjnego obciążenia, podzielony przez sztywność belki EI , da nam szukane ugięcie w dowolnym przekroju belki. Skoro część belki b (rys. 192) jest równomiernie obciążona, to przy zastąpieniu tego obciążenia siłą P skupioną w punkcie D , zmniejszamy powierzchnię momentów o wielkość $\frac{Pb^2}{24}$ (formuła b). Reakcja lewej podpory, wywołana fikcyjnym obciążeniem, zmniejszy się o $\frac{Pb^2}{24} \cdot \frac{c}{l}$, co spowoduje zmniejszenie momentu zginającego (wskutek tegoż fikcyjnego obciążenia) w przekroju D , w przybliżeniu, o wielkość $\frac{Pb^2}{24} \cdot \frac{cc_1}{l}$. Dzieląc ten wynik przez EI , otrzymamy zmniejszenie ugięcia, uwarunkowane przez zastąpienie siły skupionej obciążeniem równomiernym na długości b . Zastępując siłą skupioną obciążeniem trójkątnym (rys. 194), zmniejszamy powierzchnię momentów o wielkość $\frac{Pb^2}{48}$ (wzór d). Temu odpowiada zmniejszenie ugięcia równe

$$\frac{Pb^2}{48} \frac{cc_1}{lEI}$$

Skoro siłę skupioną zastąpimy dwiema siłami równymi $P_1 = P = \frac{P}{2}$, to otrzymamy zmniejszenie powierzchni momentów równe $\frac{Pb^2}{8}$, a odpowiadające zmniejszenie ugięcia będzie równe

$$\frac{Pb^2}{8} \frac{cc_1}{lEI}$$

W najogólniejszym przypadku można to zmniejszenie przedstawić wzorem:

$$\delta f = k_1 \frac{Pb^2}{8} \frac{cc_1}{lEI} \quad (i)$$

Porównywując ten wynik z ugięciem

$$f = \frac{Pc^2c_1^2}{3lEI}$$

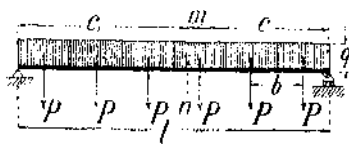
wywołanem siłą skupioną w miejscu jej działania, znajdziemy

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{3k_1}{8} \frac{b^2}{cc_1} \quad (j)$$

jako wyrażenie dla względnego błędu ugięcia.

Gdy wielkości c i c_1 są tego samego rzędu, co l , to względny błąd ugięcia będzie rzędu $\frac{b^2}{l^2}$. Z przybliżeniem siły P do jednej z podpór, względny błąd (j) rośnie, zbliżając się do wielkości rzędu $\frac{b}{l}$.

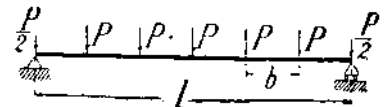
Znalezione wyniki pozwalają łatwo ocenić wpływ, jaki wywiera na ugięcie belki zastąpienie jakiegokolwiek obciążenia, rozpostartego na całej rozpiętości belki, lub na znacznej części tejże, dowolnym innym obciążeniem (statycznie równoważnym).



Rys. 196

Jako przykład weźmiemy belkę równomiernie obciążoną (rys. 196). Zastępując na każdym odcinku o długości b obciążenie równomierne siłą skupioną $P = qb$, zwiększamy pole powierzchni momentów o $\frac{Pb^2}{24} \cdot \frac{l}{b}$ (form. b). Reakcje podporowe, wywołane odpowiadającym fikcyjnym obciążeniem, powiększą się o $\frac{Pb^2}{24} \cdot \frac{l}{2b}$. Utworzywszy wyrażenie dla odpowiadającej zmiany momentu zgięcia, powstałego wskutek obciążenia fikcyjnego i podzieliwszy je przez EI , znajdziemy następujący wzór dla zmiany ugięcia δf w dowolnym przekroju mn :

$$\delta f = \left(\frac{Pb^2}{24} \frac{l}{2b} \cdot c_1 - \frac{Pb^2}{24} \cdot \frac{c_1}{b} \cdot \frac{c_1}{2} \right) \frac{1}{EI} = \frac{ql^4}{48EI} \cdot \frac{b^2}{l^2} \cdot \frac{c_1}{l} \left(1 - \frac{c_1}{l} \right) \quad (k)$$



Rys 197

Jeżelibyśmy obciążenie równomierne każdego odcinka zastąpili dwiema siłami $\frac{P}{2}$ działającymi na końcach odcinka, to doszlibyśmy do obciążenia przedstawionego na rys. (197). Takiej zamianie towarzyszy zmniejszenie powierzchni momentów, a zatem i zmniejszenie ugięć. Z formuł (b) i (f) wynika, że zmniejszenie powierzchni momentów równa się $\left(\frac{Pb^2}{8} - \frac{Pb^2}{24} \right) \frac{l}{b} = \frac{Pb^2}{12} \cdot \frac{l}{b}$; wzór (k) przybierze przeto w danym przypadku postać:

$$\delta f = - \frac{ql^4}{24EI} \frac{b^2}{l^2} \cdot \frac{c_1}{l} \left(1 - \frac{c_1}{l} \right) \quad (l)$$

Jako drugi przykład weźmiemy przypadek obciążenia belki, przedstawiony na rys. (198). Przy zastąpieniu tego obciążenia siłami skupionymi $P = \frac{q_0 b}{2}$, działającymi w środkach ciężkości każdego z trójkątów, otrzymamy zwiększenie powierzchni momentów o $\frac{Pb^2}{48} \cdot \frac{l}{b}$ (ob. wzór d), a więc zamiast formuły (k) mamy teraz:

$$\delta f = \frac{q_0 l^3}{192 EI} \cdot \frac{b^2}{l^2} \cdot \frac{c_1}{l} \left(1 - \frac{c_1}{l}\right) \quad (m)$$



Rys. 198

Skoro zaś obciążenie, przedstawione na rys. (198), zastąpimy obciążeniem równomiernie rozłożonym $q = \frac{q_0}{2}$, to zmniejszy się powierzchnia momentów, a z nią i ugięcie belki. Zmniejszenie pola momentów równa się na podstawie wzorów (b) i (d):

$$\left(\frac{Pb^2}{24} - \frac{Pb^2}{48}\right) \frac{l}{b},$$

a zatem zamiast formuły (k) otrzymamy:

$$\delta f = \frac{q_0 l^3}{192 EI} \cdot \frac{b^2}{l^2} \cdot \frac{c_1}{l} \left(1 - \frac{c_1}{l}\right).$$

W podobny sposób można zbadać i inne przypadki zastąpienia jednego obciążenia innym statycznie równoważnym pierwszymu.

§ 81. WPŁYW NAPRĘŻEŃ ŚCINAJĄCYCH NA UGIĘCIE BELEK

Przy wywodzie podstawowego równania różniczkowego dla zgiętej osi belki (rów. 90) uwzględniliśmy tylko działanie momentu zginającego M . Zakrzywienie osi przedstawiało się jako skutek rozciągania podłużnych włókien po jednej stronie warstwy obojętnej i ściskania takichże włókien po drugiej stronie. Przy tym założeniu poprzeczne przekroje belki pozostają płaskimi i prostopadłymi do zgiętej osi. W ogólniejszym przypadku zginania belki działają w płaszczyźnie przekroju poprzecznego oprócz naprężeń normalnych jeszcze i naprężenia styczne, [uwarunkowane wielkością siły poprzecznej Q]. Wywołane nimi odkształcenia mogą w pewnych warunkach okazać istotny wpływ na ugięcie belki. Ten wpływ ocenimy w następujący sposób:

Przez y_1 oznaczmy ugięcia, uwarunkowane działaniem samych momentów zginających, a przez y_2 ugięcia wywołane siłą poprzeczną; natenczas będzie całkowitem ugięciem w jakimkolwiek przekroju

$$y = y_1 + y_2.$$

Stosownie do tego przedstawi krzywiznę linii ugięcia wyrażenie:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{d^2 y_2}{dx^2}.$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie przedstawia krzywiznę określoną równaniem (90), drugi zaś daje krzywiznę wywołaną ścinaniem. Ponieważ chodzi o wyznaczenie krzywizny osi belki, więc trzeba wziąć pod uwagę naprężenia ścinające w elementach położonych w środkach ciężkości przekroju. Dla tych elementów da się kąt odkształcenia postaciowego β przedstawić wzorem:

$$\beta = \frac{kQ}{FG} = \frac{k}{FG} \frac{dM}{dx},$$

w którym k jest współczynnikiem, zależnym od postaci przekroju poprzecznego (ob. wzory 71 i 73). Gdy β nie zmienia się wzdłuż belki, to ścinanie nie wywoła oczywiście zakrzywienia osi, a dodatkowe ugięcie y_2 będzie wyrażać liniowa funkcja x .

Krzywizna $-\frac{d^2 y_2}{dx^2}$, uwarunkowana zmianą kąta β wzdłuż osi belki, jest z tym kątem związana równaniem:

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = - \frac{d\beta}{dx}.$$

Znak minus pochodzi stąd, ponieważ dodatnim wartościom pochodnej $\frac{d\beta}{dx}$ odpowiada widocznie zakrzywienie osi wypukłością ku górze, a więc przeciwnie, niż przy dodatnich wartościach $\frac{d^2 y}{dx^2}$. [Układ współrzędnych obrano jak powyżej w § 72 i następujących]. Uwzględniwszy powyższe równanie, jakoteż związek między y_1 i M , określony podstawowym równaniem (90), otrzymamy:

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = - \frac{k}{FG} \frac{d^2 M}{dx^2} = - \frac{kEI}{FG} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2} \right).$$

Równaniem różniczkowym linii ugięcia belki będzie przeto:

$$EI \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{d^2 y_2}{dx^2} \right) = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M \cdot \frac{kEI}{FG} \frac{d^2 M}{dx^2} \quad (a)$$

Jako przykład rozpatrzmy zgięcie belki jednym końcem utwierdzonej pod obciążeniem złożonym z równomiernie rozłożonego q/l i skupionego na swobodnym końcu P (rys. 167). Moment zginający określi w tym przypadku wyrażenie:

$$M = - P(l-x) - \frac{q}{2} (l-x)^2.$$

Równanie różniczkowe (a) linii ugięcia belki przybierze postać:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(l-x) - \frac{q}{2}(l-x)^2 + \frac{kEI}{FG} q.$$

Całkując je, znajdujemy:

$$EI y = -P \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{q}{2} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{kEI}{FG} \frac{qx^2}{2} + Cx + D.$$

Stała dowolna D ma wartość 0 , ponieważ ugięcie utwierdzonego końca belki równa się 0 . Co się tyczy stałej C , to ona jest co do wielkości równa kątowi nachylenia względem osi X stycznej do linii ugięcia w utwierdzonym końcu belki. Ten kąt równa się zeru, jeżeli ustalenie końca jest tego rodzaju, że nie dopuszcza obrotu elementu osi belki przy zgięciu, atoli równa się $k \cdot \frac{P+qI}{FG}$, jeżeli ustalenie nie pozwala tylko na obrót elementu pola, wydzielonego z przekroju poprzecznego w jego środku ciężkości. W tym ostatnim bowiem przypadku element osi belki, położony u przekroju utwierdzonego, tworzy z osią X -ów kąt, równy kątowi odkształcenia postaciowego wskutek siły poprzecznej $P+qI$, a zatem

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = k \frac{P+qI}{FG}.$$

Zależnie od sposobu utwierdzenia będzie tedy równanie linii ugięcia mieć jedną z następujących postaci:

$$EI y = -P \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{q}{2} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + k \frac{EI}{FG} \frac{qx^2}{2},$$

$$EI y = -P \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{q}{2} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) - k \frac{EI}{FG} \frac{qx^2}{2} - kEI \frac{P+qI}{FG} x.$$

W przypadku obciążenia samą siłą skupioną P , określi całkowitą strzałkę ugięcia przy drugim sposobie utwierdzenia¹⁾ wzór:

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} \left(1 + \frac{3kE}{G} \frac{r^2}{l^2} \right),$$

przyczem r oznacza promień bezwładności przekroju. Drugi wyraz w nawiasie odpowiada ugięciu, uwarunkowanemu działaniem siły poprzecznej. Dla takich przekrojów, jak prostokąt i koło, jest to dodatkowe ugięcie niewielkie i można je najczęściej pominąć. Tak np. dla belki o przekroju prostokątnym i stosunku rozpiętości do wysokości

$$\frac{h}{l} = 0,1, \quad \text{mamy:} \quad \frac{r^2}{l^2} = \frac{h^2}{12l^2} = \frac{1}{1200}, \quad k = 1,5, \quad \frac{E}{G} = 2(1+\nu) = \sim 2,6,$$

wobec czego ugięcie dodatkowe wynosi mniej niż 1% ugięcia głównego (uwarunkowanego samymi momentami zgięcia). Zatu dla przekroju \perp może wpływ naprężeń stycznych być znacznie większym, jak to się okaże z następnego przykładu.

W przypadku belki w obu końcach podpartej i równomiernie obciążonej napiszemy równanie różniczkowe (a) zgiętej osi w postaci:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{qI}{2} x - \frac{qx^2}{2} + \frac{kEI}{FG} q.$$

Jego całką ogólną będzie:

$$EI y = \frac{qIx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + \frac{kEI}{FG} \frac{qx^2}{2} + Cx + D.$$

Z warunku, że ugięcia na końcach belki t. j. dla $x=0$ i $x=l$ stają się zerem, znajdujemy:

$$D = 0; \quad C = -\frac{qI^3}{24} - \frac{kEI}{FG} \frac{qI}{2}.$$

Dodatkowe ugięcie, uwarunkowane naprężeniami ścinającymi, określi przeto równanie:

$$y_2 = \frac{k}{FG} \left(\frac{qx^2}{2} - \frac{qIx}{2} \right) = \frac{kM}{FG},$$

z którego czytamy, że dodatkowe ugięcia są proporcjonalne względem rzędnych diagramu momentów. Ten wniosek pozostaje ważnym i dla innych przypadków obciążenia belki w obu końcach podpartej, z wyjątkiem przypadku zginania parą sił M_0 , działającą na jeden koniec belki. Wówczas bowiem określi kąt β równanie

$$\beta = \frac{k}{FG} \cdot \frac{M_0}{l},$$

czyli β pozostaje wzdłuż belki stałym. Wobec tego nie mogą naprężenia styczne przyczynić się do zakrzywienia osi belki, a ponieważ jej końce spoczywają na podporach o stałej wysokości, więc nie będzie wcale dodatkowego ugięcia wskutek naprężeń ścinających.

Powróćmy teraz do belki równomiernie obciążonej, znajdziemy ugięcie jej środka, które będzie zarazem strzałką ugięcia, w postaci:

$$f = \frac{5}{384} \frac{qI^4}{EI} + \frac{k}{FG} \frac{qI^2}{8}.$$

¹⁾ [Tylko ten sposób odpowiada dość dobrze praktycznym sposobom utwierdzenia w przypadkach, gdy zachodzą siły poprzecznej].

Tutaj drugi wyraz przedstawia dodatkowe ugięcie wskutek naprężeń ścinających. Szukamy wielkości tego dodatkowego ugięcia dla belki \bar{I} , dobranej w ten sposób, aby największe naprężenia styczne i normalne były dokładnie równe odpowiadającym naprężeniom dopuszczalnym R_t i R . Wówczas

$$\frac{k Q_{\max}}{F} = \frac{k q l}{2F} = R_t \quad \text{i} \quad \frac{M_{\max}}{W} = \frac{q l^2 h}{8 I \cdot 2} = R,$$

a zatem

$$\frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{EI} = \frac{5 R l^2}{24 E h} \quad \text{i} \quad \frac{k}{FG} \cdot \frac{q l^2}{8} = \frac{R_t l}{4G}.$$

Stosunek strzałki ugięcia wskutek sił poprzecznych do strzałki ugięcia wskutek momentów będzie:

$$f_2 : f_1 = \frac{R_t l}{4G} : \frac{5}{24} \cdot \frac{R l^2}{E h} = \frac{6}{5} \cdot \frac{R_t}{R} \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{h}{l}.$$

Przy wartościach $R_t = 0,5 R$ i $E = 2,6 G$ staje się ten stosunek równym:

$$f_2 : f_1 = 1,56 \frac{h}{l}.$$

Widać z tego, że u krótkich belek może wpływ naprężeń ścinających na ugięcie osiągnąć znaczną wartość i nie należy go zaniedbywać¹⁾. Zauważymy wszelako, że w praktyce wypada zwykle obierać większą grubość ścianki od potrzebnej ze względu na wytrzymałość, dla zapewnienia wystarczającej stateczności ścianki. Nadto zmniejsza się przekrój pasów belki od środka ku podporom. Obie te okoliczności zmniejszają wartość stosunku $f_2 : f_1$ i nieco usprawiedliwiają praktykowany zwykle sposób obliczenia ugięć, przy którym poprzestaje się na wyznaczeniu f_1 z pominięciem f_2 .

ROZDZIAŁ XI

STATYCZNIE NIETYCZALNE PRZYPADKI ZGIĘCIA BELEK

§ 82. ZBĘDNE USTALENIA

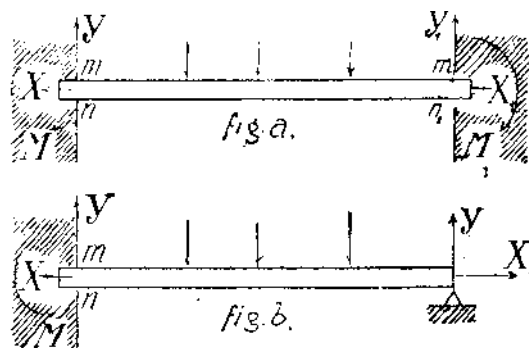
Przy rozpatrywaniu różnych sposobów podparcia wyjaśniliśmy, w jakich warunkach wystarczają równania równowagi do wyznaczenia reakcji podporowych. Jeżeli liczba niewiadomych, przedstawiających reakcje, jest większa od liczby równań równowagi, to zagadnienie staje się statycznie niewyznaczalne i dla znalezienia reakcji trzeba się uciec do rozważań odkształcenia belki. W przypadku belek spoczywających na dwu podporach rozróżniamy dwa główne sposoby ustalenia końców prowadzące do statycznej niewyznaczalności reakcji, a mianowicie:

I. Oba końce belki utwierdzone (rys. 199, fig. a), wskutek czego obadwa przekroje podporowe m, n i m_1, n_1 są unieruchomione.

II. Jeden koniec utwierdzony, a drugi podparty (fig. b), czyli na jednym końcu unieruchomiony przekrój, a na drugim środek przekroju²⁾.

Przy pierwszym sposobie ustalenia końców belki sprowadza się znajdowanie reakcji do określenia sześciu niewiadomych wielkości: dwu momentów utwierdzenia M i M_1 , dwu składowych pionowych reakcji Y, Y_1 i dwu składowych poziomych reakcji X, X_1 .

W drugim przypadku mamy pięć niewiadomych elementów reakcji podporowych, gdyż $M_1 = 0$. Przy działaniu samych obciążeń pionowych dają warunki równowagi przedewszystkiem $X = -X_1$, czyli reakcje poziome są co do wielkości równe, a wprost przeciwne co do kierunku. Okazaliśmy



Rys. 199

¹⁾ Bardziej szczegółowe studjum kwestji wpływu naprężeń stycznych na zginanie można znaleźć w kursie I. G. Bubnowa: *Stroitielnaja mechanika korabla*. Część I, str. 308.

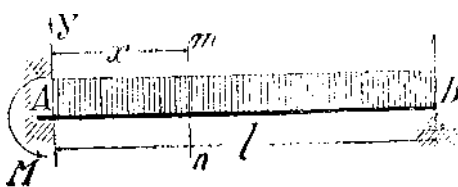
²⁾ [Biorąc ściśle, należałoby w drugim sposobie odróżnić jeszcze dwa możliwe przypadki podparcia drugiego końca, t. j. podparcie ruchome i stałe. Podobnie może być i utwierdzenie stałe lub ruchome. Pierwsze odpowiada zupełnemu unieruchomieniu przekroju, drugie zaś ustala tylko kierunek płaszczyzny przekroju, pozwalając jednocześnie na przesunięcia w kierunku osi belki. Wobec tego ilość statycznie niewyznaczalnych przypadków belki z ustalonymi końcami będzie właściwie znacznie większą. Mimo to wystarczy rozpatrzeć tylko powyższe dwa przypadki, jako praktycznie najważniejsze i typowe. Poznawszy je, może czytelnik załatwić bez trudności i inne.]

już pierwszej (§ 64), że przy tak małych ugięciach, jakie dopuszczamy najczęściej w praktyce, można siły podłużne X pominąć i przyjąć, że obciążeniom pionowym odpowiadają tylko pionowe reakcje Y i Y_1 . Wtedy pozostają przy pierwszym sposobie ustalenia cztery niewiadome: M , M_1 , Y i Y_1 , a tylko dwa równania równowagi; dwie przeto niewiadome są statycznie niewyznaczalne, czyli zbędne (zbyteczne, nadliczbowe), gdyż odpowiadają zbędnym ustaleniom końców belki. Przy drugim sposobie ustalenia będziemy mieć tylko jedną wielkość statycznie niewyznaczalną.

Jako zbędne ustalenia w obu rozpatrywanych przypadkach I i II wypada uważać utwierdzenia. Gdyby ich nie było, otrzymalibyśmy belki w obu końcach podparte, a więc statycznie wyznaczalne. Wprowadzając dodatkowe ustalenia nakładamy wogóle na zgięcie belki warunki uzupełniające, którymi możemy się posłużyć do znalezienia zbędnych niewiadomych. Wprowadzając np. utwierdzenie zapobiegające obrotowi końca belki, wprowadzamy temsamem jako zbędną niewiadomą moment pary utwierdzającej, czyli moment utwierdzenia. Skoro zatem koniec belki nie może się obracać, to styczna do linii ugięcia belki w utwierdzonym przekroju musi mieć pierwotny kierunek osi belki. Z tego warunku uzupełniającego możemy obliczyć moment utwierdzenia. Tym sposobem można, przy rozpatrywaniu statycznie niewyznaczalnych przypadków zgięcia, ustawić zawsze tyle równań uzupełniających, ile mamy zbędnych niewiadomych. Te uzupełniające równania układa się najprościej przy pomocy zasady superpozycji. Będziemy przeto stosować następujące postępowanie: Najpierw usuniemy wszystkie zbędne ustalenia i sprowadzimy w ten sposób dane zadanie do zadania statycznie wyznaczalnego. Łatwo teraz znaleźć ugięcie belki i kąt nachylenia stycznej w dowolnym przekroju. Potem dobieramy zbędne niewiadome tak, aby dogodzić warunkom ustalenia.

§ 83. ZGIĘCIE BELKI RÓWNOMIERNIE OBCIĄŻONEJ, W JEDNYM KOŃCU UTWIERDZONEJ, A W DRUGIM PODPARTEJ (rys. 200)

Usunąwszy utwierdzenie, odpowiadające zbędnej niewiadomej, otrzymujemy belkę w obu końcach podpartą, dla której w § 75 znaleźliśmy równanie linii ugięcia:



Rys. 200

$$y = - \frac{q l^3}{24 EI} \left(x - 2x \frac{x^2}{l^2} + x \frac{x^3}{l^3} \right)$$

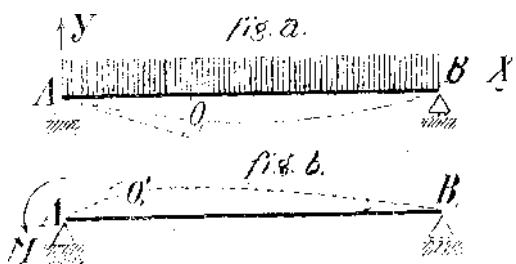
i kąty obrotu końców:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{q l^3}{24 EI}$$

Przyjmijmy teraz, że na tą samą belkę działa w lewym końcu tylko para sił o momencie M . Odpowiednie równanie ugiętej osi i kąt obrotu lewego końca ϑ'_1 , otrzymamy z formuł (101) i (104), jeżeli w nich zamiast x wstawimy $(l-x)$, czyli:

$$y = \frac{M}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} - \frac{lx}{3} \right), \quad \vartheta'_1 = \frac{Ml}{3EI}$$

Mamy tedy rozwiązane dwa elementarne przypadki zgięcia przedstawione figurami (a) i (b) na rys. 201. Składając je znaleźlibyśmy rozwiązanie naszego zagadnienia, gdyby moment utwierdzenia M był znany. Pozostaje przeto jeszcze dobrać wartość M tak, aby dogadzała warunkom podporowym lewego końca. Otóż ten koniec nie może się obrócić, a zatem kąt ϑ_1 , uwarunkowany ciąglem obciążeniem, musi być co do wielkości równy, a co do znaku przeciwny kątowi ϑ'_1 . Porównywując otrzymane powyżej wyrażenia dla tych kątów, znajdziemy:



Rys. 201

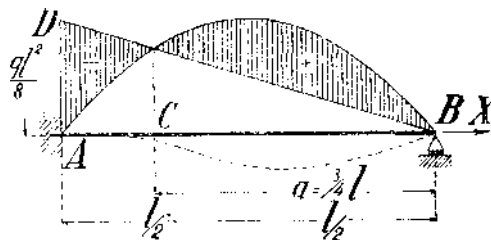
$$\frac{q l^3}{24 EI} = \frac{Ml}{3EI}$$

Stąd
$$M_0 = - \frac{q l^2}{8} \quad (109)$$

Prawo zmienności momentu zginającego wzdłuż belki otrzymamy, jeżeli od rzędnych parabol, jako diagramu momentów dla obciążenia równomiernego belki w obu końcach podparłej, odejmiemy rzędne

prostej BD (rys. 202), przedstawiający momenty wywołane parą sił M , działającą na lewy koniec belki. Różnica rzędnych jest uwidoczniła na rysunku zakreskowaniem. Największa wartość momentu, równa $\frac{1}{8}ql^2$, zachodzi w miejscu utwierdzenia. Tu leży zatem przekrój niebezpieczny¹⁾.

Reakcje podpór A i B otrzymamy sumując reakcje wskutek obciążenia ciągłego z reakcjami wskutek pary sił o momencie M . Pierwszemu układowi obciążeń odpowiadają równe reakcje o wielkości $\frac{ql}{2}$, skierowane w górę. Dzia-



Rys. 202

łaniu pary sił M odpowiada na lewej podporze reakcja $\frac{M}{l} = \frac{ql}{8}$, skierowana również w górę, na prawej zaś reakcja tej samej wielkości, lecz skierowana w dół. A zatem:

$$A = \frac{ql}{2} + \frac{ql}{8} = \frac{5}{8}ql, \quad B = \frac{ql}{2} - \frac{ql}{8} = \frac{3}{8}ql \quad (110)$$

W przekroju C , gdzie moment zmieniając swój znak staje się zerem, zmienia swój znak i krzywizna linii ugięcia, czyli powstaje punkt przegięcia. Położenie punktu C znajdziemy z warunku, że momenty wywołane obciążeniem ciągłym i parą M , znoszą się nawzajem. Oznaczywszy przez a odległość przekroju C od prawej podpory, otrzymamy:

$$\frac{ql}{8} \cdot a = \frac{ql}{2} a - \frac{qa^2}{2}, \quad \text{a stąd} \quad a = \frac{3}{4}l.$$

Nakoniec znajdziemy ugięcia belki superponując ugięcia, wywołane osobno obciążeniem ciągłym i parą sił o momencie M , a mianowicie:

$$y = -\frac{ql^3}{24EI} \left(x - 2x \frac{x^2}{l^2} + x \frac{x^3}{l^3} \right) - \frac{ql^2}{8EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} - \frac{lx}{3} \right) = \frac{ql}{24EI} \left(-\frac{3}{2} \frac{x^3}{l^3} + \frac{5}{2} \frac{x^4}{l^4} - \frac{x^4}{l^4} \right).$$

Dla znalezienia strzałki ugięcia przyrównamy do zera pochodną $\frac{dy}{dx}$ i z tego warunku, uproszczonego do postaci

$$x^2 - \frac{15}{8}lx + \frac{3}{4}l^2 = 0,$$

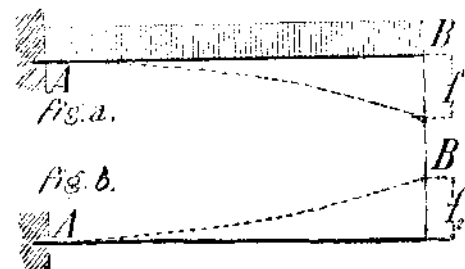
otrzymamy

$$x = \frac{l}{16}(15 - \sqrt{33}) = 0,579l.$$

Podstawiając tę wartość w wyrażenie dla y , mamy strzałkę ugięcia

$$f = \frac{ql^4}{185EI}.$$

Przy rozwiązaniu naszego zadania przyjęliśmy moment pary utwierdzającej jako „zbędną niewiadomą“. Odpowiadającym „zbędnym ustaleniem“ okazuje się to, które przeszkadza obrotowi lewego końca. Można by jednak iść inną drogą, a mianowicie przyjąć za zbędną niewiadomą reakcję podporową prawego końca belki. Wtedy zbędnym ustaleniem byłoby oczywiście to, które przeszkadza swobodnemu ugięciu tego końca. Odrzucając zbędne ustalenie, dochodzimy znowu do statycznie wyznaczalnego przypadku zgięcia, a mianowicie do zginania belki jednym końcem utwierdzonej (rys. 203, fig. a). Pod działaniem obciążenia ciągłego ugiąłby się koniec belki B o



Rys. 203

$$f_1 = \frac{ql^4}{8EI}.$$

¹⁾ [Jest to ta sama wartość, jaką ma największy moment w środku belki w obu końcach podporanej i tak samo obciążonej. W tym przypadku zatem nie wpływa utwierdzenie końca na zwiększenie odporności belki.]

W rzeczywistości jest ten koniec podparty, a więc jego ugięcie jest równe zeru; reakcja B musi przeto mieć taką wielkość, aby wywołane przez nią ugięcie (fig. b)

$$f_2 = \frac{Bl^3}{3EI}$$

było równe co do wielkości f_1 . Stąd równanie

$$\frac{ql^4}{8EI} = \frac{Bl^3}{3EI},$$

którego rozwiązanie względem B daje:

$$B = \frac{3}{8} ql,$$

zgodnie z wynikiem (110). Mając reakcję B , znajdziemy resztę niewiadomych, t. j. moment utwierdzenia i reakcję A z równań równowagi.

Rozwiążemy jeszcze to zadanie z uwzględnieniem wpływu naprężeń ścinających na zgięcie. Usuwając prawą podporę i zastępując jej działanie siłą B , skierowaną ku górze, dobieramy wielkość tej siły tak, aby ostateczne ugięcie prawego końca belki było równe zeru. Skoro przyjmiemy, że w miejscu utwierdzenia nie obraca się element przekroju, to element osi obraca się o kąt

$$\frac{k(ql - B)}{FG},$$

a ugięcie końca belki, przy jednoczesnym działaniu siły B i obciążeniu ql , przedstawi się (ob. § 81) wyrażeniem:

$$\frac{Bl^3}{3EI} \left(1 - \frac{3kE r^2}{G l^2}\right) - \frac{ql^4}{8EI} \left(1 - \frac{4kE r^2}{G l^2}\right).$$

Przyrównawszy je do zera i wprowadziwszy dla skrótowania wielkość

$$\delta = \frac{kE r^2}{G l^2},$$

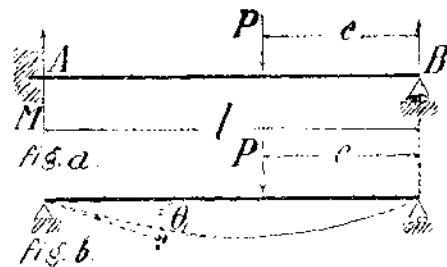
dojdziemy do następującego wyrażenia dla prawej reakcji podporowej:

$$B = \frac{3}{8} ql \frac{1 + 4\delta}{1 + 3\delta}.$$

§ 84. ZGIĘCIE BELKI JEDNYM KOŃCEM UTWIERDZONEJ A DRUGIM PODPARTEJ POD DZIAŁANIEM SIŁY SKUPIONEJ

Jako wielkość statycznie niewyznaczalną obierzemy moment utwierdzający M , który zapobiega obrotowi lewego końca belki (rys. 204, fig. a). Usunąwszy zbędne ustalenie, otrzymamy belkę w obu końcach podpartą (fig. b). Lewy koniec obróci się przytem o kąt ϑ_1 , określony wzorem (98):

$$\vartheta_1 = \frac{Pc(l^2 - c^2)}{6lEI}.$$



Moment utwierdzenia M musi mieć taką wielkość, aby wywołany nim samym kąt obrotu (fig. c)

$$\vartheta_1' = \frac{Ml}{3EI}$$

był co do wielkości równy, a co do znaku przeciwny kątowi ϑ_1 . Do wyznaczenia M otrzymujemy więc równanie:

$$\frac{Ml}{3EI} = \frac{Pc(l^2 - c^2)}{6lEI},$$

z którego

$$M = \frac{Pc(l^2 - c^2)}{2l^2} \quad (111)$$

Mając wyrażenie dla momentu utwierdzającego, możemy wielkości reakcyj podporowych A i B znaleźć z warunków równowagi. Reakcję B znajdziemy np. z warunku momentów względem punktu A , t. j.

$$Bl - P(l - c) = - \frac{Pc(l^2 - c^2)}{2l^2}.$$

Stąd

$$B = \frac{P(l - c)^2(2l + c)}{2l^3} \quad (112)$$

Rys. 204

Równanie linii ugięcia otrzymamy dodawszy do ugięć, wywołanych siłą skupioną, ugięcia powstałe wskutek pary utwierdzającej.

Z wyrażenia (111) widać, jak się zmienia wielkość momentu utwierdzającego w zależności od c , t. j. od położenia obciążenia. Dla $c=0$ i $c=l$ jest $M=0$. Największa wartość M odpowiada położeniu ciężaru, które znajdziemy łatwo z warunku $\frac{dM}{dc} = 0$, czyli $l^2 - 3c^2 = 0$. A zatem dla $c = \frac{l}{\sqrt{3}}$ jest

$$M_{\max} = \frac{Pl}{3\sqrt{3}} = 0,192Pl \quad (113)$$

Jeżeli dla każdej wartości c wystawimy rzędne o wielkości $\frac{c(l^2 - c^2)}{2l^2}$, to otrzymana w ten sposób krzywa (rys. 205) pozwala znaleźć łatwo wielkość momentu utwierdzającego przy układzie sił skupionych np. P_1, P_2, P_3, P_4 . Niech będzie y_1 rzędną krzywej odpowiadającą położeniu ciężaru P_1 ; wtedy iloczyn

$$P_1 y_1 = \frac{P_1 c (l^2 - c^2)}{2l^2}$$

jest niczem innym, jak wielkością momentu utwierdzenia wywołanego ciężarem P_1 . Przy jednoczesnym działaniu ciężarów P_1, P_2, P_3, \dots będzie moment utwierdzający

$$M = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots = \sum P y.$$

Krzywa ACB jest linią wpływową dla momentu utwierdzającego. Rzędna tej linii w dowolnym przekroju belki określa widocznie wielkość momentu zginającego, jaki powstaje wskutek obciążenia owego przekroju jednostką siły. Przy pomocy linii wpływowej łatwo znaleźć wielkość momentu utwierdzającego i dla przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego, określonego wielkością $q \frac{kg}{m}$. Obierzmy w odległości c od prawej podpory element długości belki dc , to przypadające nań obciążenie będzie równe qdc . To obciążenie, uważane za skupione, wywołuje moment utwierdzenia:

$$dM = \frac{c(l^2 - c^2)}{2l^2} q dc.$$

Dla otrzymania momentu utwierdzającego, wywołanego obciążeniem całkowitem, trzeba złożyć działania obciążeń elementarnych, a zatem:

$$M = \int_0^l \frac{c(l^2 - c^2) q dc}{2l^2} = \frac{ql^3}{8}.$$

Zarazem widzimy, że moment utwierdzający M równa się iloczynowi pola ograniczonego linią wpływową i osią belki przez q .

Rozpatrzmy teraz zmianę momentu zginającego wzdłuż belki. W tym celu trzeba momenty, uwarunkowane działaniem siły P , składać z momentami wywołanymi parą utwierdzającą M . Uwzględniając znaki momentów znajdziemy łatwo, że prawo zmienności momentów zginających wzdłuż belki przedstawiają pionowe odcinki w zakreskowanej powierzchni na rys. 206. Największy moment zachodzi widocznie albo na utwierdzonym końcu belki, gdzie

$$M = \frac{Pc(l^2 - c^2)}{2l^2},$$

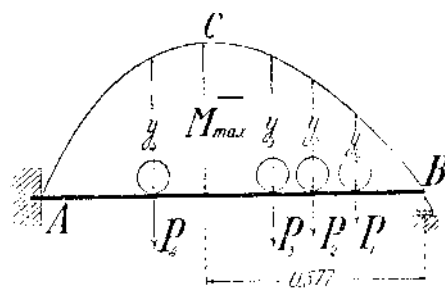
albo też w przekroju obciążonym, gdzie

$$M_c = \frac{Pc(l-c)}{l} - \frac{cPc(l^2 - c^2)}{2l^2} = \frac{Pc}{2l^3} (l-c)^2 (2l+c) \quad (114)$$

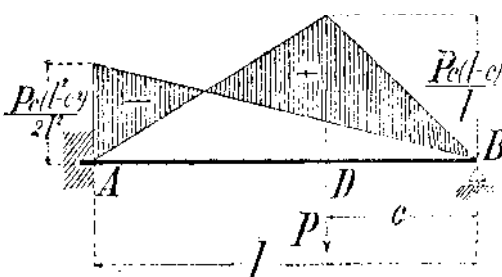
Skoro w szczególności $c = \frac{l}{2}$, to

$$M = \frac{3}{16} Pl, \quad M_c = \frac{3}{16} Pl \left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{5}{32} Pl,$$

a przekrój niebezpieczny znajduje się w miejscu utwierdzenia.



Rys. 205



Rys. 206

Największy moment dodatni odpowiada warunkowi $\frac{dM_c}{dc} = 0$, z którego znajdziemy

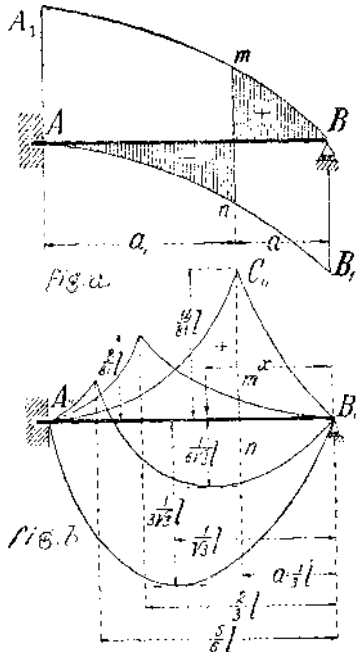
$$c = \frac{1}{2} l(\sqrt{3} - 1) = 0,366 l.$$

Odpowiadającą wartością największego momentu jest

$$(M_c)_{\max} = \frac{3}{8} (2\sqrt{3} - 3) Pl = 0,174 Pl.$$

W przypadku działania obciążeń ruchomych najdogodniej posługiwać się liniami wpływowymi. Jeżeli na osi AB (rys. 207) wystawimy rzędne o wielkości (wz. 112):

$$\frac{1 \cdot (l-x)^2(2l+x)}{2l^3},$$



Rys. 207

to otrzymana w ten sposób krzywa AB_1 przedstawia linię wpływową dla reakcji podporowej B . (Odciętą c przekroju obciążonego zastąpiliśmy we wzorze (112) wielkością x , mierzoną tak samo od prawej podpory). Rzędna krzywej AB_1 , w dowolnym przekroju przedstawia wielkość reakcji B , wywołanej jednostką ciężaru, umieszczoną w tymże przekroju.

Siła poprzeczna w przekroju mn , przy działaniu obciążenia po lewej stronie od tego przekroju, równa się reakcji B , wobec czego część linii AB_1 , na lewo od przekroju mn może służyć za linię wpływową dla siły poprzecznej w mn . Z przejściem ciężaru na prawą stronę belki staje się siła poprzeczna równą reakcji B minus wielkość ciężaru, czyli $B - 1$. Tę różnicę przedstawia linia A_1B równoległa do AB_1 . Linia A_1nmB ograniczająca wraz z osią belki zakresowaną powierzchnię jest zatem linią wpływową dla sił poprzecznych Q . Przy obciążeniu układem sił skupionych P_1, P_2, \dots będzie siłę poprzeczną określać suma $P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots$, przyczem y_1, y_2, \dots oznaczają rzędne linii wpływowej z odpowiednimi znakami

Szukajmy teraz linii wpływowej dla momentu zginającego w przekroju mn . Dopóki ciężar znajduje się po lewej stronie przekroju, równa się moment zginający momentowi reakcji B i przedstawia się wyrażeniem:

$$1 \cdot \frac{(l-x)^2(2l+x)}{2l^3} a \quad (a)$$

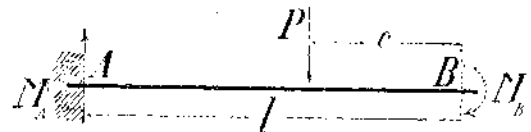
Kiedy ciężar przejdzie na prawą stronę przekroju, to moment zginający będzie równy:

$$1 \cdot \frac{(l-x)^2(2l+x)}{2l^3} a - 1 \cdot (a-x) = \frac{x}{2l^3} [2l^3 - a(3l^2 - x^2)] \quad (b)$$

Krzywe A_1C_1' i $C_1'B_1'$ (fig. b), których rzędne określają wyrażenia (a) i (b), są liniami wpływowymi dla momentu zginającego w przekroju mn . Na fig. (b) przedstawiono także linie wpływy dla momentów w dwu innych przekrojach, przyczem podziałkę rzędnych obrano trzy razy większą od podziałki odciętych.

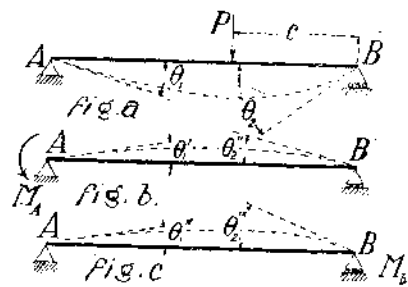
§. 85. ZGIĘCIE BELKI OBU KOŃCAMI UTWIERDZONEJ

Przy takim ustaleniu belki mamy dwie wielkości statycznie niewyznaczalne. Jako takie obierzemy momenty utwierdzające M_A i M_B (rys. 208), które zapobiegają obrotowi końców belki przy zginaniu. Usunąwszy odpowiadające „zbędne ustalenia” otrzymamy przypadek statycznie wyznaczalny belki w obu końcach podpartej. Pod działaniem siły skupionej P obraca się lewy koniec belki o kąt (form. 98):



Rys. 208

$$\vartheta_1 = \frac{Pc(l^2 - c^2)}{6EI}$$



Rys. 209

Ponieważ ten koniec jest utwierdzony, więc momenty podporowe M_A i M_B (rys. 209, fig. b i c) muszą być takie, aby wywołane nimi kąty obrotu (form. 104):

$$\vartheta_1' = \frac{M_A \cdot l}{3EI} \quad \text{i} \quad \vartheta_1'' = \frac{M_B l}{6EI}$$

dały w sumie kąt równy co do wielkości, a co do znaku przeciwny kątowi ϑ_1 . Stąd równanie warunkowe:

$$\frac{Pc(l^2 - c^2)}{6EI} = \frac{l}{6EI} (2M_A + M_B).$$

W podobny sposób ustawimy i drugie równanie odnoszące się do prawego końca belki (wz. 99):

$$\frac{Pc(l-c)(2l-c)}{6lEI} = -\frac{l}{6EI}(2M_B + M_A).$$

Rozwiązawszy je, znajdziemy:

$$M_A = -\frac{Pc^2(l-c)}{l^3}, \quad M_B = -\frac{Pc(l-c)^2}{l^3} \quad (115)$$

Wyznaczywszy M_A i M_B z warunków odkształcenia belki, obliczymy reakcje podporowe A i B z warunków równowagi. Warunek momentów względem punktu podparcia B daje:

$$Al = -M_A + Pc + M_B,$$

z czego

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{Pc}{l} + \frac{-M_A + M_B}{l} = \frac{Pc}{l} + \frac{Pc(l-c)(2c-l)}{l^3} \\ B &= P - A = \frac{P(l-c)}{l} - \frac{Pc(l-c)(2c-l)}{l^3} \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

W przypadku szczególnym obciążenia w środku belki, t. j. dla $c = \frac{l}{2}$, będzie $A = B = \frac{P}{2}$,

$$M_A = M_B = -\frac{Pl}{8} \quad (117)$$

Posługując się wzorami (115) łatwo przedstawić wykreslinie zależność momentów podporowych od położenia ciężaru. Wykreślimy krzywą dla momentu M_A , odmierzając w każdym przekroju rzędną wielkości $c^2(l-c):l^3$, a otrzymamy linię wpływową dla momentu podporowego M_A (rys. 210). Maximum momentu zachodzi dla $c = \frac{2}{3}l$. Przy obciążeniu układem ciężarów skupionych P_1, P_2, P_3, \dots będzie

$$M_A = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots$$

Jeżeli belka dźwiga ciężar równomiernie rozłożony $q \text{ kg/m}$, to odpowiadające momenty podporowe są równe, a ich wielkości znajdziemy mnożąc pole wpływowe ACB przez q . Moment podporowy dM_A , powstający pod działaniem obciążenia elementarnego qdc , leżącego w odległości c od prawej podpory, będzie bowiem:

$$dM_A = -\frac{qdc \cdot c^2(l-c)}{l^3},$$

a moment M_A wskutek całego obciążenia otrzymamy przez sumowanie elementów dM_A :

$$M_A = -q \int_0^l \frac{c^2(l-c)dc}{l^3} = -\frac{ql^2}{12} \quad (118)$$

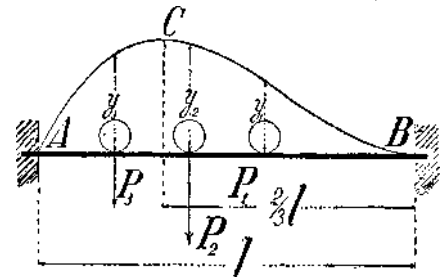
Zmianę momentu zginającego wzdłuż belki przy danym położeniu ciężaru P znajdziemy, złożywszy momenty uwarunkowane siłą P (działającą na belkę w obu końcach podpartą) z momentami wywołanymi działaniem na belkę każdej z par M_A i M_B z osobna. Biorąc pod uwagę znaki momentów, otrzymamy diagram momentów przedstawiony na rysunku (211) zakreskowaną powierzchnią. Największy moment ujemny odpowiada jednej z podpór, dodatni zaś przekrojowi bezpośrednio obciążonemu. Ostatnią wielkość łatwo

obliczyć przy pomocy rysunku, a mianowicie:

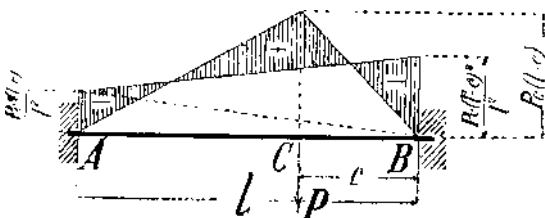
$$M_C = \frac{Pc(l-c)}{l} - \frac{Pc(l-c)^2}{l^2} - \frac{l-c}{l} \frac{Pc^2(l-c)}{l^3} - \frac{c}{l} \frac{2Pc^2(l-c)^2}{l^3} \quad (119)$$

Największą wartość będzie mieć M_C przy $c = \frac{l}{2}$, t. j.

$$(M_C)_{\max} = +\frac{Pl}{8} \quad (120)$$



Rys. 210



Rys. 211

Diagram momentów dla obciążenia równomiernie rozłożonego przedstawia na rys. (212) zakresko-



Rys. 212

wana powierzchnia. Parabola ACB o największej rzędnej $\frac{q l^2}{8}$ daje wielkości momentów zginających w przypadku podparcia obu końców, zaś prosta DE równoległa do osi belki i odcinająca rzędne o wielkości $\frac{q l^2}{12}$ przedstawia momenty zginające wskutek obu par utwierdzających (wz. 118). Zważywszy, że te momenty są ujemne, należy rzędne prostej DE odjąć od rzędnych paraboli ACB .

Przy działaniu obciążeń ruchomych najdogodniej przeprowadzić obliczenie belki zapomocą linii wpływowych. Odmierzwszy od osi belki wielkości:

$$\frac{1 \cdot x}{l} + \frac{1 \cdot x(l-x)(2x-l)}{l^3},$$

otrzymamy krzywą BA_1 (rys. 213) przedstawiającą linię wpływową dla reakcji A (wz. 116). Siła poprzeczna Q w dowolnym przekroju belki równa się reakcji A , dopóki jednostka ciężaru leży po prawej stronie przekroju. Z przejściem ciężaru na lewą stronę trzeba przy obliczeniu Q odjąć od reakcji jednostkę ciężaru, wskutek czego linja wpływowa dla Q przedstawi się odcinkami dwu krzywych równoległych A_1B i AB_1 . Prawej części belki odpowiada krzywa A_1B , lewej zaś krzywa AB_1 .

Ażeby skonstruować linię wpływową dla momentu zginającego M w do-

wolnym przekroju mn , zauważymy, że dopóki ciężar znajduje się na prawej części belki, to

$$M = M_A + A a_1 = a_1 \left[\frac{1 \cdot x}{l} + \frac{1 \cdot x(l-x)(2x-l)}{l^3} \right] - \frac{1 \cdot x^2(l-x)}{l^2},$$

słowo zaś ciężar przejdzie na lewą stronę przekroju, to

$$M = B a + M_B.$$

Na rysunku (214) wykreślono linje wpływowe dla przekrojów położonych w odległości $\frac{1}{2}l$, $\frac{2}{3}l$, $\frac{3}{4}l$, $\frac{11}{12}l$ i l od prawej podpory. Podziałka rzędnych jest cztery razy większa od podziałki odciętych¹⁾.

W przypadku dowolnego obciążenia stałego znajdujemy momenty podporowe najprościej sposobem wykreślno-analitycznym (por. § 78). W tym celu usuwamy zbyteczne ustalenia i badamy zgięcie belki w obu końcach podpartej. Niechaj ADB (rys. 215) przedstawia diagram momentów zginających

dla danego obciążenia. Oznaczywszy przez Ω pole diagramu, a przez C środek ciężkości tego pola znajdziemy kąty obrotu końców belki z wzorów:

$$\vartheta_1 = \frac{\Omega b}{lEI} \quad \text{i} \quad \vartheta_2 = \frac{\Omega a}{lEI}.$$

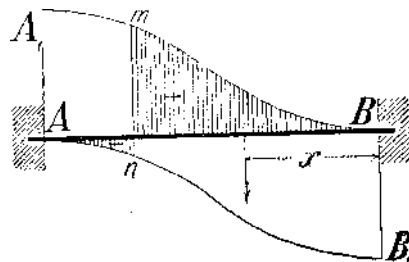
Momenty podporowe należy tak dobrać, aby wywołane nimi obroty końców znosiły się z powyższymi. Stosując gotowe wzory (104) dla zgięcia belki momentem działającym na jej koniec otrzymamy równania:

$$\frac{M_A l}{3EI} + \frac{M_B l}{6EI} = -\frac{\Omega b}{lEI}, \quad \frac{M_B l}{3EI} + \frac{M_A l}{6EI} = -\frac{\Omega a}{lEI}.$$

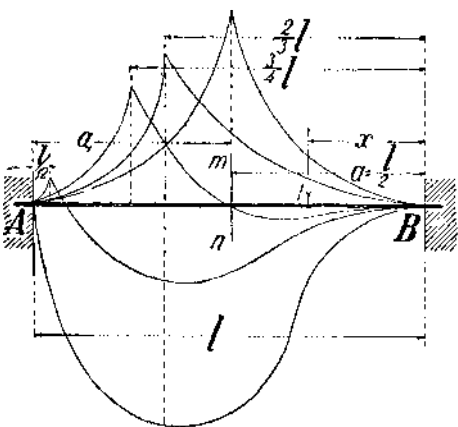
Stąd:
$$M_A = -\frac{2\Omega}{l^2}(2b-a), \quad M_B = -\frac{2\Omega}{l^2}(2a-b) \quad (121)$$

Znalazłszy w ten sposób wielkości statycznie niewyznaczalne, wyznaczymy łatwo inne elementy zgięcia, posługując się zasadą superpozycji.

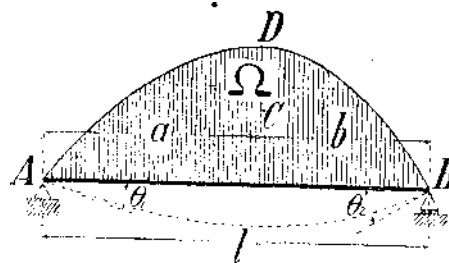
Powyzsza metoda da się łatwo uogólnić w przypadkach zmiennego przekroju belki. Okazałiśmy już w § 79, że zginanie belek o przekroju zmiennym sprowadza się do zginania belek



Rys. 213



Rys. 214



Rys. 215

¹⁾ Szczegółowe tablice linii wpływowych dla belki w obu końcach utwierdzonej można znaleźć w książce A. Lederer'a: „Analytische Ermittl. u. Anwend. v. Einflusslinien“.

pryzmatycznych, jeżeli rzędne powierzchni momentów zredukujemy zapomocą czynnika $\frac{I_0}{I}$, przy-
czem I oznacza moment bezwładności rozpatrywanego przekroju belki, a I_0 stały moment bez-
władności pewnego przekroju, obranego zresztą dowolnie. Uważając zredukowaną powierzchnię
momentów za powierzchnię obciążenia, znajdziemy kąty obrotu końców, podzieliwszy przez EI_0
reakcje podporowe wywołane fikcyjnym obciążeniem. Ponieważ te kąty są dzięki utwierdzeniu równe
zeru, więc trzeba reakcje podporowe wskutek fikcyjnego obciążenia przyrównać do zera, aby otrzy-
mać dwa równania o niewiadomych M_A i M_B . Ich postać ogólną znajdziemy w następujący sposób:

Jeżeli oznaczymy przez M_x^o moment zginający dla belki w obu końcach podpartej (rys. 216)
i uwzględnimy, że powierzchnie momentów odpowiadające parom utwierdzającym M_A i M_B są trójkątami ACB i ADB ,
to całkowitym momentem zgięcia w dowolnym przekroju x
będzie:

$$M_x = M_x^o + M_A \frac{l-x}{l} + M_B \frac{x}{l}.$$

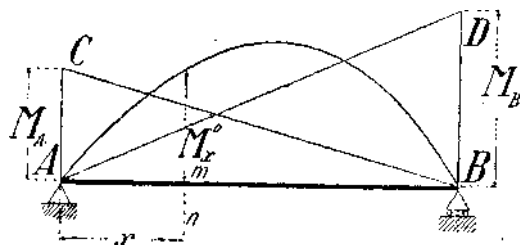
Rzędne zredukowanej powierzchni momentów określi za-
tem wyrażenie:

$$\frac{I_0}{I} \left[M_x^o + M_A \frac{l-x}{l} + M_B \frac{x}{l} \right],$$

a reakcję podporową B wskutek fikcyjnego obciążenia przedstawi wzór:

$$B = \frac{I_0}{l} \left[\int_0^l \frac{M_x^o x dx}{I} + \frac{M_A}{l} \int_0^l \frac{(l-x)x dx}{I} + \frac{M_B}{l} \int_0^l \frac{x^2 dx}{I} \right]. \quad (122)$$

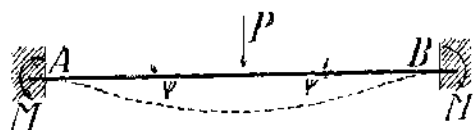
Analogiczne równanie można napisać i dla reakcji A . Wyraziwszy I jako funkcję x , wykonawszy całko-
wanie i przyrównawszy do zera wyrażenia dla A i B , otrzymamy szukane równania do obliczenia M_A i M_B .



Rys. 216

§ 85. BELKI Z KOŃCAMI SPRĘŻYŚCIE UTWIERDZONEMI

W powyższych przykładach można było zauważyć, że utwierdzenie końców belki wywołuje
zmniejszenie ugięcia, a zwykle i zmniejszenie naprężeń. Aby jednak formuły wyprowadzone
dla belek utwierdzonych, można było stosować z zupełnym zaufaniem w jakimkolwiek danym przy-
padku, trzeba koniecznie sprawdzić, czy utwierdzenie jest zupełne, czyli doskonałe, to znaczy,
czy istotnie wyklucza obrót końców belki. W tych bowiem przypadkach, w których pod działaniem
sił zewnętrznych zajdzie choćby bardzo mały obrót końców belki, skutek utwierdzenia widocznie
się zmniejsza, a działanie belki zbliża się do działania w warunkach zwykłego podparcia końców¹⁾.
Częstokroć można przyjąć kąt obrotu jako proporcjonalny względem momentu działającego na
utwierdzony koniec i jeżeli po usunięciu sił zewnętrznych odkształcenia znikają, to mówimy
o utwierdzeniu sprężystym. Oznaczmy przez φ kąt obrotu końca pod wpływem momentu
zginającego M , natomiast przy utwierdzeniu sprężystym $\varphi = kM$. Spółczynnik k charakteryzuje
stopień sztywności utwierdzenia. Doskonałemu utwierdzeniu odpowiada $k = 0$, swobodnemu pod-
parciu $k = \infty$. Jeżeli wartość k jest znana, to zagadnienie
zgięcia belki jest zupełnie określone.



Rys. 217

Jako przykład znajdziemy wielkość momentów podpo-
rowych dla przypadku przedstawionego na rys. (217). Siła
skupiona P działa na środek rozpiętości belki o sprężystości
utwierdzonych końcach A i B . Pod wpływem tego obciąże-
nia obrócą się końce belki o jeden i ten sam kąt ψ (przy założeniu równej sztywności utwierdzenia na
obu końcach). Oznaczmy przez M wielkość powstających przy tem momentów podporowych; natomiast:

$$M = \frac{P}{k}.$$

¹⁾ [Biorąc ściśle, nie mamy w rzeczywistości nigdy do czynienia z utwierdzeniem zupełnym, gdyż wszelki materiał, otaczający nawet najdokładniej koniec utwierdzony, doznaje odkształceń pod działaniem sił zewnętrznych i wskutek tego pozwala na pewien obrót tego końca. Mówimy wtedy o utwierdzeniu niezupełnym, albo niedoskonałym].

Wskazówki co do różnych sposobów ustalania końców, stosowanych do belek żelaznych, tudzież co do stopnia sztywności tych ustaleń, znajdzie czytelnik w książce F. Pietzker'a: „Festigkeit der Schiffe“, Berlin 1911, str. 21.

Gdyby końce belki były podparte i mogły obracać się zupełnie swobodnie, to wskutek obciążenia siłą P obróciłyby się o kąt:

$$\vartheta = \frac{Pl^2}{16EI}, \text{ przyczem widocznie } \vartheta > \psi.$$

Różnica $\vartheta - \psi = \varphi$ jest właśnie tym kątem, o jaki obracają się końce wskutek działania momentów podporowych M . Ponieważ te momenty są co do wielkości równe, a co do kierunku wprost przeciwnie, więc kąty obrotu końców mają wartości:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{Ml}{3EI} + \frac{Ml}{6EI} = \frac{Ml}{2EI} \quad (123)$$

A zatem dla φ możemy napisać:

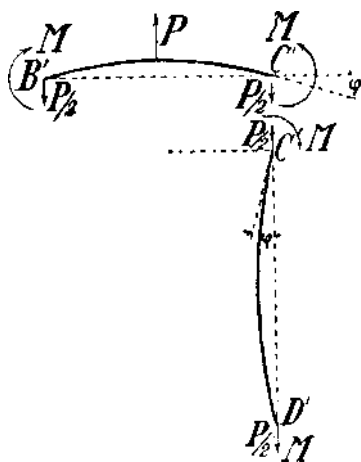
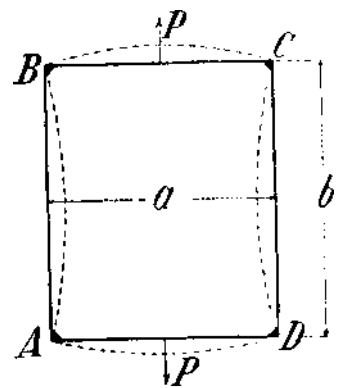
$$\vartheta - \psi = -\frac{Ml}{2EI}.$$

Podstawivszy tu zamiast ψ i ϑ ich wartości, otrzymamy:

$$\frac{Pl^2}{16EI} - kM = -\frac{Ml}{2EI}.$$

Przy wartości $k = 0$, znajdziemy stąd $M = -\frac{Pl}{8}$, a więc jak w przypadku doskonałego utwierdzenia; dla $k = \infty$ otrzymamy $M = 0$, t. j. swobodne podparcie końców.

W szczególnie prosty sposób da się określić wartość współczynnika k w przypadkach, gdy końce zginanego pręta są przytwierdzone do prętów o znanych wymiarach. Zadania tego typu napotykaemy przy obliczeniu ram z sztywnymi węzłami¹⁾.



Weźmy np. ramę prostokątną (rys. 218), obciążoną siłami P , działającymi na środki prętów BC i AD . Każdy z prętów ramy zachowuje się jak belka w obojczykach sprężystości utwierdzonej i obliczenie sprowadza się widocznie do wyznaczenia momentów utwierdzenia, t. j. momentów zginających w węzłach ramy. Dla uproszczenia przyjmijmy, że pręty przeciwległe mają ten sam przekrój. Odształcenie ramy będzie wtedy symetryczne względem linii działania sił P i będzie wyglądać mniej więcej w sposób przedstawiony na rysunku; momenty węzłowe zaś będą oczywiście równe. Wydzielmy z ramy pręt poziomy BC , to na jego końce musimy dla równowagi działać pionowymi reakcjami, równymi $\frac{P}{2}$ i momentami węzłowymi M (rys. 218). Takie same momenty będą zginać pręty pionowe, u których pionowe reakcje $\frac{P}{2}$ występują jako siły rozciągające. [Reakcje poziome u tych prętów są oczywiście wykluczone, ponieważ nie ma sił zewnętrznych, któreby się z nimi równoważyły]. Dzięki sztywności węzłów obrócić się końce prętów, schodzące się w jednym węzle, o jeden i ten sam kąt φ . Weźmy pod uwagę koniec C pręta BC . Gdyby ten pręt był swobodnie podparty na końcach, to te końce obróciłyby się o kąt $\frac{Pa^2}{16EI}$; momenty M wywołają jednak obrót w stronę przeciwną o kąt $\frac{Ma}{2EI}$, a wypadkowym kątem obrotu będzie:

$$\varphi = \frac{Pa^2}{16EI} - \frac{Ma}{2EI}.$$

Pręt pionowy CD zakrzywia się tylko pod działaniem momentu M (wpływ siły podłużnej $\frac{P}{2}$ jest przy małych zakrzywieniach znikomy; będziemy się z nim liczyć w przypadkach prętów bardzo smukłych, o czym później). Odpowiadający kąt obrotu końcowych przekrojów

$$\varphi_1 = \frac{Mb}{2EI_1}.$$

Z sztywności połączeń węzłowych wynika warunek $\varphi = \varphi_1$, czyli

$$\frac{Pa^2}{16EI} - \frac{Ma}{2EI} = \frac{Mb}{2EI_1}; \text{ a stąd } M = \frac{Pa}{8} \frac{1}{1 + \frac{b}{a} \frac{I}{I_1}} \quad (124)$$

Rys. 218

¹⁾ Szczegółowe badanie ram różnego rodzaju można znaleźć w książce Björnsta d'a: „Die Berechnung v. steifen Rahmen“. Ob. także książkę Kleinogel'a, poświęconą tej samej kwestji. Kilka interesujących przykładów obliczenia ram znajduje się w artykułach: W. André, Zeitschr. f. Brückenbau z r. 1915, str. 35 i 105. L. Herzka, Eisenbau z r. 1915, str. 27. G. Kaufmann: tamże w r. 1913, str. 266.

Wartość momentu węzłowego, czyli momentu podporowego dla każdego z prętów ramy, zależy, jak widzimy, od stosunków długości i sztywności prętów poziomych do pionowych. Gdy I_1 staje się bardzo wielkiem wobec I_2 , to ułamek $\frac{1}{1 + \frac{b}{a} \frac{I_1}{I_2}}$

staje się równym jedności, a moment podporowy dąży do wartości $\frac{Pa}{8}$, którą znaleźliśmy dla przypadku zupełnego utwierdzenia końców. Przy giętkich prętach pionowych ma powyższy ułamek małą wartość i moment podporowy M będzie mały. Znając wartość M , możemy bez trudności obliczyć ugięcia prętów i wielkości naprężeń.

Rozważmy jeszcze jedno zadanie, jakie napotyka się przy obliczeniu mostów. Na prostokątnej ramie $ABCD$, podpartą w punktach A i D , działa siła pozioma H (rys. 219). Rozmiary ramy, sztywności poszczególnych prętów i przybliżona postać odkształcenia są uwidocznione na rysunku. Wskutek sztywności węzłów powstaną w nich momenty M i M_1 , o kierunkach oznaczonych strzałkami. Jeżeli nadto przyjmiemy, że siła H rozdziela się po połowie na węzły B i C ¹⁾, to wszystkie siły zewnętrzne, działające na każdy z prętów, będą określone. Rozpora BC będzie się zginać jak belka w obu końcach podparta. Na podstawie znanych wzorów znajdziemy kąt obrotu lewego końca

$$\varphi = \frac{Mb}{3EI_2} - \frac{Mb}{6EI_2} = \frac{Mb}{6EI_2}$$

Podobnie będzie dla rozpory AD

$$\varphi_1 = \frac{M_1 b}{6EI_0}$$

Rozpatrując pręt AB jako belkę dolnym końcem utwierdzoną możemy ustawić związek między kątami φ i φ_1 . Na wytworzenie kąta φ składają się trzy przyczyny: a) obrót pręta w płaszczyźnie utwierdzenia o kąt φ_1 , b) zgięcie pręta siłą $\frac{H}{2}$, działająca na górny koniec, które wywołuje obrót tego końca o kąt $\frac{H}{2} \cdot \frac{h^2}{2EI_1}$ i wreszcie c) działanie momentu zginającego M , które wywołuje obrót górnego końca w przeciwną stronę o kąt $\frac{Mh^2}{EI_1}$. A zatem:

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{Hh^2}{4EI_1} - \frac{Mh}{EI_1}$$

albo, po wstawieniu wartości za φ i φ_1 :

$$\frac{Mb}{6EI_2} = \frac{M_1 b}{6EI_0} + \frac{Hh^2}{4EI_1} - \frac{Mh}{EI_1} \quad (*)$$

Drugie równanie między M i M_1 otrzymamy z warunku momentów sił zewnętrznych pręta AB , a mianowicie:

$$M + M_1 = \frac{Hh}{2} \quad (b)$$

Z obu równań (a) i (b) znajdziemy:

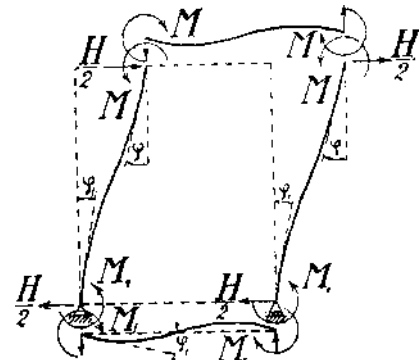
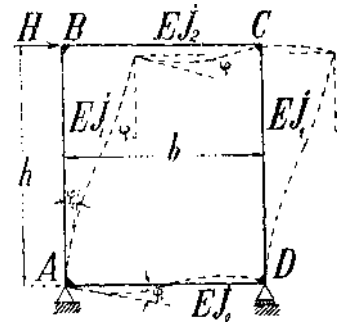
$$M = H \frac{\frac{bh}{6EI_0} + \frac{h^2}{2EI_1}}{\frac{b}{3EI_2} + \frac{b}{3EI_0} + \frac{2h}{EI_1}} \quad (125)$$

W szczególnym przypadku bardzo sztywnej rozpory dolnej, otrzymamy, kładąc $EI_0 = \infty$:

$$M = \frac{Hh}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b}{6h} \frac{I_1}{I_2}} \quad (126)$$

Wielkość momentu M zależy wówczas od stosunku $I_1 : I_2$. Przy $I_2 = 0$, t. j. przy bardzo giętkiej rozporze górnej, wypada $M = 0$. Każdy ze słupów (prętów pionowych) będzie się zachowywać, jak belka dolnym końcem utwierdzona. Jeżeli zaś górna rozpora jest również bardzo sztywna w porównaniu do słupów, to podstawivszy $I_2 = \infty$ mamy:

$$M = \frac{Hh}{4} \quad (127)$$

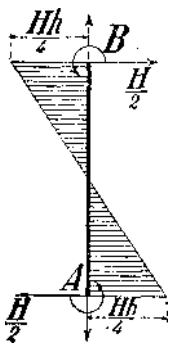


Rys. 219

¹⁾ To przypuszczenie odpowiada pominięciu skrócenia rozpory BC i zbliżenia się jej końców przy zgięciu w porównaniu z przesunięciami punktów B i C .

²⁾ Ten wynik otrzymamy, zważywszy, że para sił, działająca na pręt jednym końcem utwierdzony, wywołuje zgięcie w łuk koła. Krzywizna będzie równa $\frac{M}{EI_1}$, a kąt obrotu drugiego końca znajdziemy, pomnożywszy krzywiznę przez długość łuku h .

W tym przypadku będą słupy narażone na zgięcie i rozciąganie w sposób przedstawiony na rys. (220). Siła rozciągająca o wartości $\frac{2M}{b}$ odpowiada reakcji podporowej rozpory BC.



Rys. 220

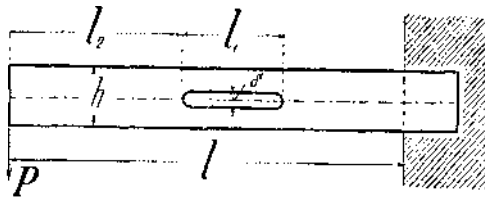
Ostatni wynik można zastosować do oceny wpływu podługowatych otworów, wyciętych w warstwie obojętnej zginanych belek. Rys. (221) przedstawia belkę jednym końcem utwierdzoną i zginaną siłą P. W warstwie obojętnej znajduje się podługowaty otwór o długości l_1 i szerokości δ . Poprowadźmy na końcach otworu przekroje AA₁, BB₁ (rys. 222) i rozpatrzmy siły zewnętrzne wydzielonej niemi części belki. Działanie usuniętej lewej części sprowadza się do pary sił o momencie $M_0 = Pl_1$, wywołującej ciągnięcia i ciśnienia w przekroju, tudzież do siły P. Wpływ tej siły da się ocenić przy pomocy formuł wyprowadzonych dla ramy z doskonale sztywnymi rozporami. Części ABEF i A₁B₁EF będą narażone dodatkowo na zginanie momentami $\frac{Pl_1}{4}$, działającymi w przekrojach końcowych i na siły

podłużne o wielkości $2\frac{Pl_1}{4} : 2a = \frac{Pl_1}{4a}$. Przytem oznacza a odległość środków ciężkości przekrojów

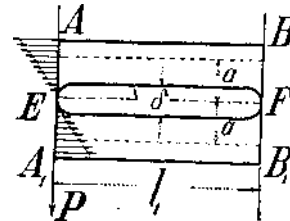
obu części od środka pierwotnego całego przekroju, przyjętego jako symetryczny względem osi obojętnej. Oznaczyszmy oprócz tego przez W moduł przekroju poprzecznego belki, a przez W₁ i F₁ moduł i pole przekroju każdej z części ABEF i A₁B₁EF, znajdziemy wartość największych naprężeń uwarunkowanych siłą P zapomocą wzoru:

$$p_1 = \frac{Pl_1}{4aF} + \frac{Pl_1}{4W_1}$$

Do tego trzeba dołączyć naprężenia wywołane zginaniem całej belki przez moment M₀. Ze względu na to, że istnienie



Rys. 221



Rys. 222

otworu modyfikuje znacznie rozkład tych naprężeń, weźmiemy dla pewności ich największą wartość jako dodatek t. j. $p_2 = \frac{M_0}{W}$. Największe całkowite naprężenia określi zatem wzór:

$$p = \frac{M_0}{W} + \frac{Pl_1}{4} \left(\frac{1}{aF} + \frac{1}{W_1} \right) \dots \dots \dots (128)$$

potwierdzony z dostateczną dokładnością doświadczeniami¹⁾.

§ 87. BELKA DWUPRZĘŚŁOWA

Belkę spoczywającą na więcej niż dwu podporach nazywamy ciągłą albo wieloprzęśłową. Część belki ciągłej leżącej między dwiema po sobie następującymi podporami nazywa się przęsłem. W dalszym ciągu przyjmiemy, że jedna z podpór jest nieruchomą, a inne mogą się przesuwać w kierunku osi belki, mającej zwykle położenie poziome. Wtedy pod wpływem obciążeń pionowych powstaną tylko pionowe reakcje. Równania równowagi sprowadzają się w danym przypadku do dwóch, z których można wyznaczyć dwie niewiadome. Pozostałe niewiadome występują jako „zbyteczne“ i do ich wyznaczenia trzeba zastosować metodę, jaką posługiwaliśmy się przy szukaniu momentów podporowych belek z utwierdzonymi końcami. Zacniemy od najprostszego przypadku belki spoczywającej na trzech podporach. Jako wielkość statycznie niewyznaczalną przyjmiemy reakcję środkowej podpory. Ta podpora stanowi „zbędne ustalenie“, zapobiegające pionowemu przesunięciu pewnego przekroju belki. Usunąwszy środkową podporę otrzymamy belkę w obu końcach swobodnie podpartą. Dla takiej belki znajdziemy bez trudności ugięcie wskutek danego obciążenia w dowolnym przekroju poprzecznym, a zatem i w przekroju odpowiadającym środkowej podporze. Następnie obliczymy osobno ugięcie, jakiego wywołała siła pionowa dowolnej wielkości, działająca na przekrój nad środkową podporą. Jeżeli wielkość i kierunek tej siły wyzna-

¹⁾ Ob. przytoczony powyżej (str. 147) artykuł Pfeleiderer'a.

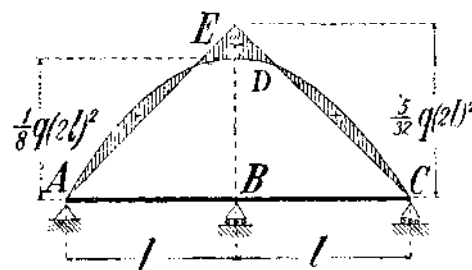
czyimy z warunku, aby wywołane nią ugięcie owego przekroju zniosło się z ugięciem powstałym wskutek danego obciążenia, to znajdziemy zarazem reakcję środkowej podpory.

Jako przykład rozpatrzmy najpierw przypadek belki równoprzęsłowej, dźwigającej równomiernie rozłożone obciążenie q kg/m. Po usunięciu środkowej podpory B (rys. 223) belka się ugnie, a odpowiadającym ugięciem przekroju B jest podług wzoru (93):

$$f = \frac{5}{384} \frac{q(2l)^4}{EI}$$

Jeżeli na ten sam przekrój będzie działać siła pionowa B , skierowana do góry, to ona wywoła ugięcie przeciwnego znaku o wartości bezwzględnej

$$f_1 = \frac{P(2l)^3}{48EI}$$



Rys. 223

Pozostaje teraz dobrać wartość P tak, aby oba ugięcia się zniosły, czyli aby było:

$$\frac{5}{384} \cdot \frac{q(2l)^4}{EI} = \frac{B(2l)^3}{48EI}$$

Stąd

$$B = \frac{5}{8} 2ql = \frac{5}{8} Q. \quad (129)$$

jeżeli przez Q oznaczymy całkowite obciążenie belki. Znalaziona tym sposobem siła B daje nam wielkość szukanej reakcji środkowej podpory. Reakcje podpór skrajnych będą z powodu symetrii równe, a więc ich wspólną wartością będzie

$$\frac{1}{2} (Q - \frac{5}{8} Q) = \frac{3}{16} Q.$$

Mając reakcję środkowej podpory, znajdziemy z łatwością diagram momentów zginających. Linja momentów wywołanych obciążeniem równomiernie rozłożonym po usunięciu środkowej podpory jest parabolą ADC . Wskutek siły skupionej B powstają momenty przedstawione diagramem trójkątnym AEC . Przy jednoczesnym działaniu obciążenia i reakcji B określi momenty zginające różnica rzędnych obu diagramów, uwidoczniiona na rys. (223) przez zakreskowanie. Moment zginający w dowolnym przekroju, odległym o x od lewej podpory, określi formuła:

$$M = \frac{3}{16} Qx - \frac{qx^2}{2}$$

Ten moment osiąga największą wartość dodatnią dla $x = \frac{3}{8} l$:

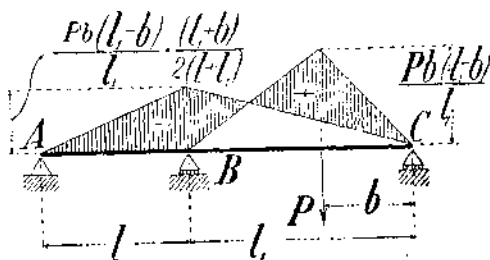
$$M_{\max} = \frac{9}{128} ql^2 \quad (130)$$

zaś największą wartość ujemną nad środkową podporą:

$$M_{\min} = -\frac{ql^2}{8} \quad (131)$$

Weźmy teraz pod uwagę przypadek obciążenia siłą skupioną P , odległą o b od prawej podpory skrajnej (rys. 224). Dla większej ogólności wywodów przyjmijmy, że rozpiętości przęseł l i l_1 są nierówne. Gdy usuniemy zbyteczną środkową podporę, to pod działaniem siły P obniży się przekrój B , a odpowiadające ugięcie określi wz. (94), a mianowicie:

$$f = Pbl \frac{(l+l_1)^2 - b^2 - l^2}{6EI(l+l_1)}$$



Rys. 224

Teraz obierzemy dla reakcji środkowej podpory taką wiel-

kość B , która by zniosła ugięcie wywołane siłą P . Wskutek siły B ugię się jej punkt działania o wielkość

$$f_1 = \frac{B l^2 l_1^2}{3EI(l+l_1)}$$

(por. § 78, przykład III). Dla wyznaczenia B otrzymamy przeto równania:

$$\frac{B l^2 l_1^2}{3EI(l+l_1)} = \frac{P b l [(l+l_1)^2 - b^2 - l^2]}{6EI(l+l_1)}, \text{ z którego } B = \frac{P b [(2l+l_1)l_1 - b^2]}{2l l_1^2} \quad (132)$$

W szczególnym przypadku równych przęseł ($l=l_1$) będzie:

$$B = \frac{P b}{2l^2} (3l^2 - b^2) \quad (133)$$

Mając reakcję środkowej podpory, znajdziemy łatwo inne elementy zgięcia przy pomocy zasady superpozycji. Zmianę momentu zginającego wzdłuż belki, przedstawia na rysunku zakreskowane pole.

§ 88. WPŁYW PODWYŻSZENIA LUB OBNIŻENIA ŚRODKOWEJ PODPORY

Przy wywodach poprzedniego paragrafu zakładaliśmy, że wszystkie trzy podpory leżą dokładnie w tej samej wysokości. Tutaj rozpatrzmy na prostych przykładach, jaki wpływ na nasze obliczenia może wyrzucić obniżenie, lub podwyższenie środkowej podpory. Weźmy znowu przypadek dwu równych przęseł obciążonych równomiernie i przypuśćmy, że środkowa podpora jest niższa od skrajnych o wielkość δ . Wtedy równanie dla wyznaczenia B przybierze postać:

$$\frac{5}{384} \frac{Q(2l)^3}{EI} = \frac{B(2l)^3}{48EI} + \delta, \text{ a stąd: } B = \frac{5}{8} Q + \frac{6EI\delta}{l^3} \quad (134)$$

Reakcje podpór skrajnych będą równe:

$$\frac{3}{16} Q + \frac{3EI\delta}{l^3}$$

Moment zginający nad środkową podporą zmniejszy się i będzie równy:

$$M = \left(\frac{3}{16} Q + \frac{3EI\delta}{l^3} \right) l - \frac{q l^2}{2} = -\frac{q l^2}{8} \left(1 - \frac{24EI\delta}{q l^3} \right) \quad (135)$$

Drugi wyraz w nawiasie przedstawia wpływ obniżenia δ na wielkość momentu podporowego M . Weźmy np. belkę żelazną ($E = 2.10^6 \text{ kg/cm}^2$) o wysokości $h = 0,1 \text{ l}$. Dajmy na to, że największe naprężenia w belce, obliczone przy założeniu równej wysokości podpór są równe:

$$p_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{q l^2}{8I} \cdot \frac{h}{2} = 800 \text{ kg/cm}^2.$$

W takim przypadku

$$\frac{24EI\delta}{q l^3} = \frac{3Eh\delta}{2l^2 p_{\max}} = \frac{300}{8} \frac{\delta}{h}$$

Jak widać, wystarczy obniżenie środkowej podpory o $\delta = 0,01 h$, aby naprężenia zmieniły się prawie o 40%. Ta okoliczność obniża w znacznym stopniu pewność wszelkich rachunków, odnoszących się do belek ciągłych i zniwala w takich przypadkach do obniżenia normy naprężeń dopuszczalnych.

§ 89. RÓWNANIE TRZECH MOMENTÓW¹⁾

Sposób, przyjęty powyżej dla wyznaczenia reakcji środkowej podpory belki dwuprzęsłowej, można także zastosować przy dowolnej liczbie podpór pośrednich. Naprzykład w przypadku belki na czterech podporach usuniemy dwie podpory środkowe i znajdziemy ugięcia w odpowiadających im przekrojach, jakie powstają pod wpływem danych obciążeń. Potem w punktach podparcia działamy dwiema siłami pionowymi o takiej wielkości i kierunku, aby wywołane nimi ugięcia zniosły się z ugięciami wskutek obciążeń danych. Te siły będą właśnie szukanymi reakcjami podpór. Przy większej liczbie podpór staje się jednak taka metoda niedogodną, albowiem każde z otrzymanych równań zawiera wszystkie niewiadome. Zadanie upraszcza się, jeżeli obierzemy jako wielkości sta-

¹⁾ To równanie ustawił pierwszy inż. Bertot (Comptes rendus de la Société des Ing. civils; 1855, str. 278). Dalszy rozwój teorii belek ciągłych zawdzięczamy głównie następującym autorom:

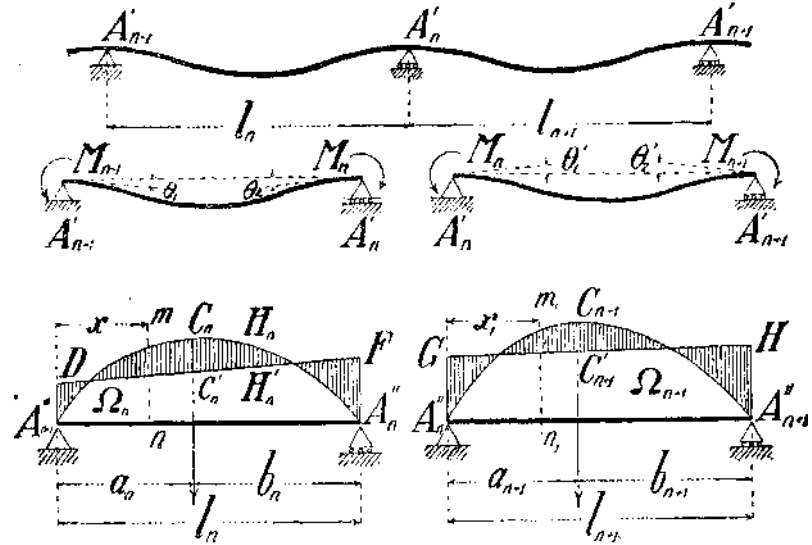
Mohr: „Abh. aus d. Gebiete der techn. Mechanik“.

Winkler: „Beitr. z. Theorie d. kontin. Brückenträger“. Ziviling. 1862.

Weyrauch: „Allg. Theorie der kontin. u. einf. Träger“. Leipzig 1873.

Müller-Breslau: „Die graph. Statik d. Baukonstruktionen“. T. II, cz. 2-ga.

tycznie niewyznaczalne, nie reakcje, lecz momenty podporowe, t. j. momenty zginające w przekrojach leżących nad podporami. Rys. (225) przedstawia dwa po sobie następujące przęsła belki ciągłej. Przez A'_0, A'_1, A'_2, \dots oznaczmy kolejne punkty podparcia, przez l_1, l_2, \dots rozpiętości przęseł. Wyobraźmy sobie naszą belkę wieloprzęsłową, przeciętą przekrojami podporowymi. Każde z przęseł można wówczas uważać za belkę w obu końcach częściowo utwierdzoną. Momenty podporowe będą momentami utwierdzającymi. Jeżeli potrafimy je obliczyć, to wyznaczymy następnie z łatwością momenty zginające, siły poprzeczne w dowolnym przekroju i reakcje podpór belki ciągłej. Niechaj krzywa $A_{n-1}'' C_n A_n''$ przedstawia taką linię momentów M_x wydzielonego przęsła belki, jakoby powstała, gdyby nie było momentów podporowych, czyli w przypadku swobodnego podparcia obu końców przęsła. Diagram momentów wywołanych oddzielnie samymi tylko momentami utwierdzającymi M_{n-1} i M_n , działającymi na swobodnie podparte końce rozpatrywanego przęsła, przedstawia się jako trapez $A_{n-1}'' D F A_n''$. Przyjąwszy znak tych momentów zgięcia, jak to zwykle bywa, za przeciwny znakowi momentów wskutek obciążeń, otrzymamy diagram momentów wypadkowych, przez odejmowanie rzędnych obu diagramów. Na rysunku przedstawia go zakreskowa powierzchnia. Wielkość momentów w jakimkolwiek przekroju odległym o x od lewej podpory A_{n-1}'' określi przeto wyrażenie:



Rys. 225

Stąd znajdziemy siłę poprzeczną w tymże przekroju:

$$M_x = M_x^0 + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n} + M_n \frac{x}{l_n} \quad (136)$$

Tutaj oznacza Q_x^0 siłę ścinającą, jakoby powstała przy swobodnym podparciu obu końców przęsła.

Oznaczywszy wartość Q_x^0 dla $x=0$ przez A_n , zaś dla $x=l_n$ przez $-B_n$, widzimy, że A_n i B_n nie są niczem innym, jak reakcjami belki w obu końcach podparcia i dźwigającej to samo obciążenie, co n -te przęsło. Wtedy siła poprzeczna po obu końcach n -go przęsła wyrazi się wzorami (według 137):

$$[Q_x]_{x=0} = A_n + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}, \quad [Q_x]_{x=l_n} = -B_n + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \quad (138)$$

Otrzymane formuły można zastosować do dowolnego przęsła, wstawiając tylko odpowiednią wartość za n . Zużytkujemy je dla znalezienia reakcji podpory A_n' , jako różnicy wartości siły poprzecznej w przekrojach nieskończenie bliskich po prawej i lewej stronie podpory. Siła poprzeczna z lewej strony

$$[Q_x]_{x=l_n} = -B_n + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n},$$

zaś po stronie prawej:

$$[Q_x]_{x=0} = A_{n+1} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}}.$$

A zatem reakcja n -tej podpory:

$$A_n' = (Q_x)_{x=0}^{(n+1)} - (Q_x)_{x=l_n}^{(n)} = A_{n+1} + B_n + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \quad (139)$$

¹⁾ Przy obiorze znaków momentów kierujemy się poprzednim prawidłem, t. j. bierzemy momenty podporowe M_{n-1} i M_n ze znakiem +, jeżeli one wywołują zgięcie belki wypukłością w dół.

Jeżeli jakiś ciężar skupiony znajduje się nad samą podporą, to należy go oczywiście dołączyć do reakcji obliczonej według formuły (139).

Przy pomocy wzorów (136), (137) i (139) można wszystkie potrzebne do obliczeń elementy wyrazić przez momenty podporowe. Pozostaje jeszcze ustawić dostateczną liczbę równań dla obliczenia tych momentów. Do tego posłuży warunek ciągłości kierunku stycznej do linii ugięcia, zastosowany w punktach podparcia. Linje ugięcia sąsiednich przęseł muszą w punkcie podparcia mieć wspólną styczną. Otrzymamy stąd tyle równań, ile jest niewiadomych momentów podporowych. Dla uproszczenia rachunku przyjmujemy, że przekrój belki jest stały, a wszystkie podpory są w równej wysokości. Do obliczenia kątów nachylenia stycznych do linii ugięcia, użyjemy metody wykreślno-analitycznej (§ 78). Uważając powierzchnię momentów za powierzchnię obciążenia, znajdziemy kąt nachylenia jako iloraz z reakcji, powstałej wskutek fikcyjnego obciążenia, przez sztywność belki. W ten sposób otrzymamy dla prawego końca n -go przęsła:

$$\vartheta_2 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{M_n l_n}{3} + \frac{M_{n-1} l_n}{6} + \frac{\Omega_n a_n}{l_n} \right),$$

przyczem Ω_n oznacza wielkość powierzchni momentów $A_{n-1}'' C_n A_n''$ (rys. 225), odpowiadającej obciążeniu n -go przęsła, zaś a_n odcięta środka ciężkości tego pola. Podobnie będzie dla lewego końca $(n+1)$ -go przęsła:

$$\vartheta_1' = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_n l_{n+1}}{3} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Obie części linii ugięcia będą mieć w punkcie podparcia A_n' wspólną styczną, jeżeli $\vartheta_2 = -\vartheta_1'$, czyli

$$-\frac{M_n l_n}{3} + \frac{M_{n-1} l_n}{6} + \frac{\Omega_n a_n}{l_n} = -\frac{M_n l_{n+1}}{3} - \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6} - \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}},$$

skąd

$$M_{n-1} l_n + 2 M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6 \frac{\Omega_n a_n}{l_n} - 6 \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \quad (140)$$

Znalezione równanie zawiera wielkości trzech po sobie następujących momentów podporowych. Napisawszy analogiczne równania dla każdej pary sąsiednich przęseł, otrzymamy tyle równań, ile jest pośrednich podpór, a zatem tyle, ile jest niewiadomych momentów podporowych¹⁾.

Jeżeli jeden, albo oba końce belki są utwierdzone, to do równań postaci (140) trzeba dołączyć warunki utwierdzenia. Dajmy na to, że lewy koniec belki nie może się obracać, natenczas związek między momentem M_0 w przekroju utwierdzonym, a momentem podporowym M_1 znajdziemy jako warunek, że kąt

$$\vartheta_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_1 l_1}{6} + \frac{M_0 l_1}{3} + \frac{\Omega_1 b_1}{l_1} \right) = 0.$$

Takież równanie można ustawić i w przypadku utwierdzenia prawego końca. Te równania wraz z równaniami (140) posłużą do wyznaczenia momentów podporowych w miejscach utwierdzenia.

Równania, wyrażające związek między trzema po sobie następującymi momentami podporowymi, można łatwo uogólnić w przypadku nierównej wysokości podpór. Oznaczmy przez β_n i β_{n+1} kąty nachylenia prostych, łączących punkty podparcia w n -tem i $(n+1)$ -szym przęsle (rys. 226); wtedy kąty, jakie końcowe styczne tworzą z poziomem, zależą nie tylko od obciążenia przęsła i momentów podporowych, lecz także od wielkości $\beta_n, \beta_{n+1}, \dots$. Wzór dla kąta ϑ_2 , utworzonego z poziomem przez styczną do linii ugięcia w punkcie A_n , przybierze teraz postać:

$$\vartheta_2 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{M_n l_n}{3} + \frac{M_{n-1} l_n}{6} + \frac{\Omega_n a_n}{l_n} \right) - \beta_n.$$

Zupełnie w ten sam sposób otrzymamy dla lewego końca $(n+1)$ -go przęsła:

$$\vartheta_1' = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_n l_{n+1}}{3} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right) - \beta_{n+1}.$$

Warunek $\vartheta_2 = -\vartheta_1'$ prowadzi do równania:

$$M_{n-1} l_n + 2 M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6 \frac{\Omega_n a_n}{l_n} - 6 \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} + 6 EI (\beta_n - \beta_{n+1}) \quad (141)$$

¹⁾ W sprawie uproszczeń przy rozwiązywaniu tego układu równań ob. pracę P. M. Frandsen'a w „Eisenbau“ 1913, str. 440.

Wielkość momentów podporowych zależy tedy od położenia podpór. Wpływ obniżenia podpory jest tem większy, im większą jest sztywność belki EI .

W powyższym wywodzie przyjęliśmy, że położenie podpór, a więc i kąty $\beta_n, \beta_{n+1}, \dots$ są z góry dane; stąd jednak nietrudno przejść do przypadku, w którym nierówna wysokość podpór jest uwarunkowana ich sprężystym „osiadaniem” pod działaniem odpowiadających nacisków podporowych. Przyjmijmy, że podatność wszystkich podpór jest jednaka i że jej wielkość określa nacisk D potrzebny do osiadania podpory o jednostkę długości; natenczas wielkość osiadania n -tej podpory pod wpływem nacisku na nią działającego (wz. 139) określi wyrażenie:

$$h_n = \frac{A_n'}{D} = \frac{1}{D} \left(A_{n+1} + B_n + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} - \dots - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \right) \quad (a)$$

Podobne wyrażenie możemy ustawić dla wszystkich podpór i , jeżeli podpory leżały pierwotnie na równej wysokości, to dla kątów β , wchodzących w rów. (141), otrzymamy oczywiście wyrażenia:

$$\beta_n = \frac{h_n - h_{n-1}}{l_n}, \quad \beta_{n+1} = \frac{h_{n+1} - h_n}{l_{n+1}}$$

Wstawivszy te wartości kątów w rów. (141) i zastąpiwszy w nich wielkości osiadania podpór h odpowiadającymi wyrażeniami (a), dojdziemy do równań dla belki ciągłej, spoczywającej na sprężystych podporach. Łatwo zauważyć, że te równania będą zawierały już nie trzy, lecz pięć po sobie następujących momentów podporowych¹⁾.

§ 90. SZCZEGÓŁOWE PRZYPADKI OBCIĄŻENIA BELKI CIĄGŁEJ

W poprzednim paragrafie sprowadziliśmy obliczenie belki wieloprzęsłowej do rozwiązania układu równań linjowych. Zadanie można jeszcze uprościć obliczywszy wprzód wyrażenia $\frac{\Omega_n a_n}{l_n}$ i $\frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}$ dla najczęściej napotykanych przypadków obciążenia²⁾. Tutaj podamy dwa najprostsze przykłady takiego rachunku.

I. Obciążenie rozłożone równomiernie na całej belce ($q \text{ kg/m}$). Linje momentów są w tym przypadku parabolami. Wielkość pola Ω_n określa formuła:

$$\Omega_n = \frac{2}{3} q \frac{l_n^2}{8} l_n,$$

a równanie (140) przybierze postać:

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -\frac{q}{4} (l_n^3 + l_{n+1}^3) \quad (142)$$

W przypadku dwu przęseł równych i końców podpartych będzie $M_0 = M_2 = 0$, zaś moment nad podporą środkową wypadnie z rów. (142):

$$M_1 = -\frac{q l^2}{8}.$$

Ten sam wynik otrzymaliśmy już poprzednio inną drogą (wz. 131). W przypadku trzech równych przęseł będzie:

$$M_0 = M_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = M.$$

Wielkość M znajdziemy z równania:

$$2M \cdot 2l + Ml = -\frac{q}{4} 2l^3.$$

Stąd

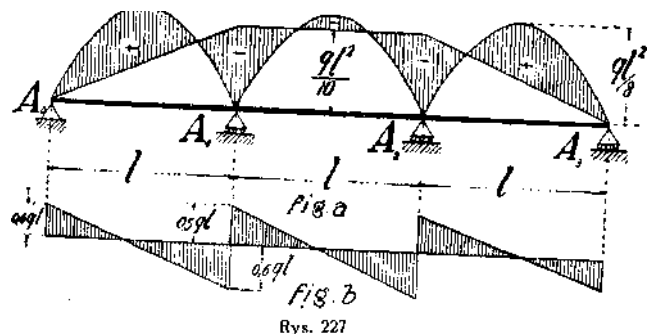
$$M = -\frac{q l^2}{10}.$$

Diagram momentów zginających przedstawia rysunek (227). Posługując się wzorem (139)

znajdziemy zaraz następujące wielkości reakcyj podporowych:

$$A_1 = A_2 = ql + \frac{ql}{10} = \frac{11}{10} ql, \quad A_0 = A_3 = \frac{1}{2} (3ql - 2 \frac{11}{10} ql) = 0,4 ql.$$

Do wykreślenia linii sił poprzecznych, przedstawionej na fig. (b), użyjemy wzoru (137).



¹⁾ Zastosowanie tych równań do obliczenia mostów o belkach ciągłych i mostów pontonowych znajdzie czytelnik w przytoczonej powyżej książce Müller-Breslau'a, t. II 2.

²⁾ Dla obciążeń, zmieniających się według prawa trójkąta, trapezu i paraboli, podano odpowiadające wzory w Beton u. Eisen z r. 1915, str. 209.

Jeżeli liczba podpór jest wielka, a przęsła równe i obciążenie, jak powyżej, stałe na całej długości belki, to dla podpór środkowych, dość odległych od końców, można uważać momenty za równe, czyli napisać:

$$M_{n-1} = M_n = M_{n+1} = M.$$

Wtedy otrzymamy z rów. (142):

$$6Ml = -\frac{ql^3}{2}, \quad M = -\frac{ql^3}{12}.$$

Momenty podporowe mają zatem tę samą wielkość, co momenty utwierdzenia belki w obu końcach poziomo utwierdzonej. (Można to było przewidzieć już na podstawie tej okoliczności, że styczne do linii ugięcia na podporach belki o nieskończenie wielu równych przęsłach muszą być, przy powyżej przyjętem obciążeniu, poziome). Dla przypadku obciążenia rozłożonego równomiernie, istnieją tablice wartości momentów i reakcyj podporowych¹⁾. Przy ich pomocy można bez trudności dokonać obliczenia belek wieloprzęsłowych.

II. Obciążenie siłami skupionymi w n -tem i $(n+1)$ -szym przęśle. Pola Ω_n i Ω_{n+1} (rys. 228) mają teraz postać trójkątów $A_{n-1}C_nA_n$ i $A_nC_{n+1}A_{n+1}$. Rzędne ich wierzchołków mają wartość:

$$\frac{P_n c_n d_n}{l_n} \quad \text{i} \quad \frac{P_{n+1} c_{n+1} d_{n+1}}{l_{n+1}},$$

a zatem pola trójkątów określają wzory:

$$\Omega_n = \frac{1}{2} P_n c_n d_n, \quad \Omega_{n+1} = \frac{1}{2} P_{n+1} c_{n+1} d_{n+1}.$$

Położenie środków ciężkości O_n i O_{n+1} tych pól wyznaczą odcięte:

$$a_n = \frac{1}{3} (l_n + c_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{3} (l_{n+1} + d_{n+1}).$$

Równanie (140) przybierze przeto postać:

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -\frac{P_n c_n d_n (l_n + c_n)}{l_n} - \frac{P_{n+1} c_{n+1} d_{n+1} (l_{n+1} + d_{n+1})}{l_{n+1}}. \quad (143)$$

§ 91. RÓWNANIE DWÓCH MOMENTÓW¹⁾

Przy pomocy równania trzech momentów sprowadzamy obliczenie belki ciągłej do rozwiązania układu równań linjowych. To rozwiązanie da się łatwo wykonać tylko w przypadku niewielkiej liczby przęseł. Z rosnącą liczbą podpór wzrasta i liczba równań, a razem z nią praktyczne trudności obliczenia, wobec czego wypada szukać sposobów upraszczających zadanie. Najprędzej prowadzi do celu sposób osnuty na t. zw. twierdzeniu o dwóch momentach. Przy jego zastosowaniu unikamy rozwiązywania układu równań i mamy do czynienia tylko z rozwiązywaniem oddzielnych równań o jednej niewiadomej. Patrząc na wykres momentów (rys. 225), łatwo zauważyć, że moment w dowolnym przekroju jakiegokolwiek przęsła można znaleźć, jeżeli znamy momenty zginające w dwu jakichkolwiek punktach tego przęsła. Diagram momentów jest bowiem ograniczony krzywą, zupełnie określoną obciążeniem rozpatrywanego przęsła, tudzież prostą, której położenie zależy od momentów podporowych. Znając wartości momentów w dowolnych dwu punktach, znajdziemy dwa punkty tej prostej, a tem samem i cały diagram momentów. Odpowiednią konstrukcję wykonano na rys. (225) dla n -go przęsła przy założeniu, że dane są momenty zginające w przekrojach, odpowiadających punktom C_n i H_n . Według danego obciążenia wykreślono krzywą $A_{n-1}''C_nA_n''$. Od punktów C_n i H_n odmierzone na rzędnych odcinki C_nC_n' i H_nH_n' , przedstawiające dane momenty. Prosta DF , przechodząca przez otrzymane punkty C_n' i H_n' , określa wraz z krzywą $A_{n-1}''C_nA_n''$ prawo zmienności momentu zginającego na długości rozpatrywanego przęsła. Skoro dokonamy tej konstrukcji dla n -go przęsła, to dla jej przeprowadzenia w sąsiednim

¹⁾ Ob. „Hülte“, cz. I, str. 452 (VII wyd. z r. 1909).

Bardziej szczegółowe tablice znajdują się w książce: A. Cart et L. Portes: „Calcul des ponts métalliques par la méthode des lignes d'influence“.

²⁾ To równanie wyprowadził Maurice Lévy. Ob. „La statique graphique“. II partie, Paris 1866.

$(n+1)$ -szem przęśle wystarcza znajomość momentu zginającego tylko w jednym dowolnie obranym punkcie; drugi jest określony wartością momentu M_n , wspólnego dla n -go i $(n+1)$ -go przęśla. Przechodząc w ten sposób od przęśla do przęśla, otrzymamy zupełny diagram momentów belki ciągłej.

W jakimkolwiek przekroju x (rys. 225) n -go przęśla i w przekroju x_1 przęśla $(n+1)$ -go wyrażają się momenty zginające odpowiednio równaniami:

$$M_x = M_x^0 + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n} + M_n \frac{x}{l_n}, \quad M_{x_1} = M_{x_1}^0 + M_n \frac{l_{n+1} - x_1}{l_{n+1}} + M_{n+1} \frac{x_1}{l_{n+1}},$$

(według wz. 136). Obliczywszy z powyższych równań M_{n-1} , M_{n+1} i wstawivszy ich wartości w równanie trzech momentów:

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6 \frac{\Omega_n a_n}{l_n} - 6 \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}},$$

otrzymamy:

$$\frac{(M_x - M_x^0) l_n^3}{l_n - x} + \frac{(M_{x_1} - M_{x_1}^0) l_{n+1}^3}{x_1} + M_n \left[2(l_n + l_{n+1}) - \frac{x l_n}{l_n - x} - \frac{(l_{n+1} - x_1) l_{n+1}}{x_1} \right] = -\frac{6 \Omega_n a_n}{l_n} - \frac{6 \Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

W to równanie wchodzi, prócz momentów M_x i M_{x_1} , jeszcze moment podporowy M_n . Można go jednak wyrugować, obrawszy wielkości x i x_1 tak, aby współczynnik przy M_n stał się zerem, czyli, aby się spełnił warunek:

$$2(l_n + l_{n+1}) - \frac{x l_n}{l_n - x} - \frac{(l_{n+1} - x_1) l_{n+1}}{x_1} = 0 \quad (144)$$

Wtedy otrzymamy między M_x i M_{x_1} zależność:

$$\frac{(M_x - M_x^0) l_n^3}{l_n - x} + \frac{(M_{x_1} - M_{x_1}^0) l_{n+1}^3}{x_1} = -\frac{6 \Omega_n a_n}{l_n} - \frac{6 \Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \quad (145)$$

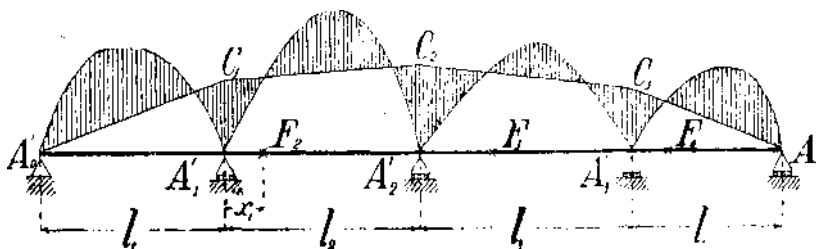
która nosi nazwę równania dwu momentów. Momenty M_x^0 i $M_{x_1}^0$ w przekrojach x i x_1 są tutaj wielkościami znanymi, obliczonymi jak dla belki w obu końcach podpartej. Przekroje x i x_1 , związane równaniem (144), będziemy nazywać przekrojami „odpowiadającymi“ w sąsiednich przęślach.

W przypadku belki ciągłej z końcami swobodnie podpartymi, mamy dwa przekroje, w których momenty są znane, a mianowicie przekroje po obu końcach belki, gdzie te momenty stają się zerami. Zaczniemy od lewej podpory A_0' (rys. 229). Odpowiadający przekrój w drugim przęśle znajdziemy przy pomocy rów. (144). Przyjmując w niem $x=0$, otrzymamy:

$$2(l_1 + l_2) - \frac{l_2(l_2 - x_1)}{x_1} = 0.$$

A zatem punkt F_2 odpowiadający A_0' , dzieli drugie przęśło w stosunku:

$$\frac{l_2 - x_1}{x_1} = k_2 = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_2} \quad (146)$$



Rys. 229

Wstawiając znaną takim sposobem wartość x_1 w rów. (145) i kładąc w niem $x=0$ i $M_x=0$, wyznaczmy wielkość M_{x_1} momentu zginającego w przekroju F_2 . Od przekroju F_2 przechodzimy do odpowiadającego mu przekroju F_3 w trzecim przęśle. Położenie przekroju wyznaczmy znowu na podstawie rów. (144). Uwzględniając oznaczenie przez k_2 wartości stosunku $\frac{l_n - x}{x}$ dla drugiego przęśla i oznaczając przez k_3 stosunek podziału trzeciego przęśla przez F_3 , możemy rów. (144) napisać w postaci:

$$2(l_2 + l_3) - \frac{l_3}{k_2} - k_3 l_3 = 0, \quad \text{skąd} \quad k_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{k_2} \right) \quad (147)$$

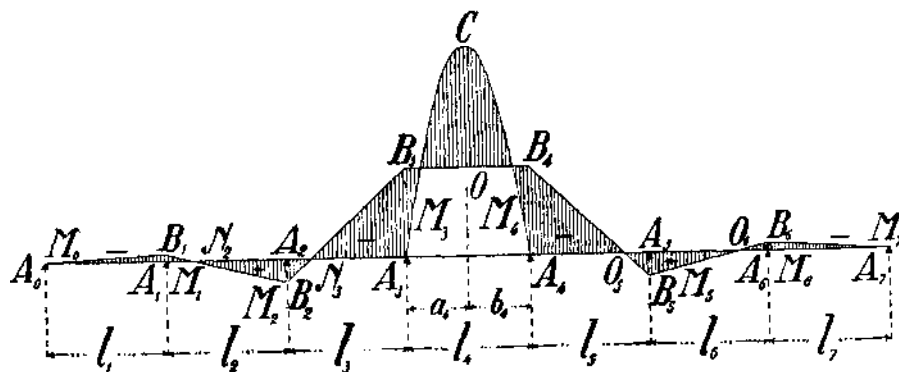
Wyznaczywszy w ten sposób położenie F_3 i wstawivszy w równ. (145) zamiast M_x wielkość momentu w F_2 , znajdziemy moment w przekroju F_3 . Tak postępując dalej, znajdziemy momenty w przekrojach $F_4, F_5 \dots$ Przy przejściu od przekroju F_n do F_{n+1} określimy położenie F_{n+1} stosunkiem k_{n+1} . Wielkość k_{n+1} jest związana z k_n równaniem (144), które można napisać w postaci:

$$2(l_n + l_{n+1}) - \frac{l_n}{k_n} - k_{n+1} l_{n+1} = 0. \quad \text{Stąd} \quad k_{n+1} = 2 + \frac{l_n}{l_{n+1}} \left(2 - \frac{1}{k_n} \right) \quad (148)$$

Wyznaczenie momentu zginającego w każdym nowym przęśle wymaga przeto rozwiązania dwu równań, z których każde zawiera tylko jedną niewiadomą. Tą drogą unikamy rozwiązywania złożonego układu równań, do których prowadzi często posługiwanie się równaniem trzech momentów. Znalazłszy momenty zginające w F_2, F_3, F_4, \dots i uwzględnivszy, że na końcach belki są momenty równe zero, mamy wielkości momentów w dwu przekrojach prawego skrajnego przęśla (przekroje A_4' i F_4 na rys. 229) i w jednym przekroju każdego z pozostałych przęseł. To zaś wystarczy, jak wykazaliśmy, do przeprowadzenia linii łamanej $A_0'C_1C_2C_3A_4'$, a zatem i do konstrukcji diagramu momentów.

§ 92. WPŁYW OBCIĄŻENIA JEDNEGO PRZĘŚLA

Jeżeli w jakimkolwiek przęśle nie ma obciążenia, to odpowiadające pole momentów przedstawia dla tego przęśla linja prosta. Weźmy jako przykład belkę siedmioprzęsłową i przyjmijmy, że tylko przęsło środkowe jest obciążone (rys. 230)



Rys. 230

i to równomiernie. Przy swobodnem podparciu końców belki będą momenty podporowe

$$M_0 = M_7 = 0.$$

Dla wyznaczenia pozostałych momentów zastosujemy rów. (140) do każdej pary sąsiednich przęseł, zaczynając od lewej podpory A_0 . Dla pierwszych dwu przęseł otrzymamy:

$$2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{M_2}{M_1} = -\frac{2(l_1 + l_2)}{l_2} = -k_2.$$

Momenty podporowe M_2 i M_1 mają zatem znaki przeciwne. Linja momentów w drugim przęśle przedstawia się jako prosta B_1B_2 , przecinająca oś w punkcie N_2 . Położenie tego punktu jest zupełnie określone stosunkiem k_2 i nie zależy wcale od sposobu obciążenia przęseł, leżących na prawo od rozpatrywanego. Przy jakimkolwiek obciążeniu tych przęseł będzie moment zginający w N_2 zerem i tam powstanie punkt przegięcia. Łatwo zauważyć, że otrzymany punkt N_2 jest identyczny z punktem F_2 , znalezionym powyżej przy zastosowaniu równania dwu momentów (por. wz. 146).

Rozpatrzmy teraz przęsło drugie i trzecie. Rów. (140) przyjmuje dla nich postać:

$$M_1l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3l_3 = 0.$$

Stąd, uwzględniając znaną wartość stosunku $M_2:M_1$, otrzymamy:

$$\frac{M_3}{M_2} = -\frac{2(l_2 + l_3)}{l_3} + \frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{l_2}{2(l_1 + l_2)} = -k_3 \quad \text{i} \quad k_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{k_2}\right).$$

Ponieważ $-k_2$ jest widocznie liczbą ujemną, więc M_3 i M_2 mają znaki różne. Prosta B_2B_3 , nachylona do osi, jest linją momentów dla trzeciego przęśla. Punkt N_3 odpowiada w tem przęśle punktowi przegięcia przy dowolnem obciążeniu wszystkich przęseł leżących na prawo. Jego położenie określa w zupełności wielkość k_3 ; jest ono identyczne z położeniem punktu F_3 znalezionego poprzednio (wz. 147). Taką drogą znaleźlibyśmy dalsze stałe punkty N_4, N_5, \dots jako punkty przegięcia, gdyby były obciążone tylko przęsła leżące na prawo od rozpatrywanych. Wielkości k_2, k_3, k_4, \dots nie zależą od owych obciążeń i są zupełnie określone stosunkiem rozpiętości przęseł. Wartość k_{n+1} wyraża się przez k_n zapomocą ogólnej formuły (148). W przypadku równych rozpiętości znajdziemy łatwo:

$$k_2 = 4, \quad k_3 = 3,75, \quad k_4 = k_5 = \dots 3,73.$$

Jeżelibyśmy szli od prawego końca belki, to zupełnie takim samym sposobem znaleźlibyśmy stałe punkty O_6, O_5, O_4, \dots jako punkty przegięcia przy obciążeniu belki po lewej stronie rozpatrywanego przęśla. Wprowadzwszy dla tego przypadku oznaczenie:

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} = -k'_n,$$

otrzymamy do obliczenia k'_n ogólne równanie:

$$k'_n = 2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{k'_{n+1}} \right) \dots \dots \dots (148)'$$

Określiwszy położenie stałych punktów $N_2, N_3, \dots, O_6, O_6, \dots$, możemy łatwo wykreślić diagram momentów zginających, gdy znane są wartości momentów podporowych M_3 i M_4 , odpowiadające przęsłu obciążonemu. Do tego trzeba będzie tylko poprowadzić przez stałe punkty linie łamane $B_3 B_2 B_1 A_0$ i $B_4 B_5 B_6 A_7$. Aby znaleźć M_3 i M_4 , ustawimy równania trzech momentów, biorąc pod uwagę najpierw przęsło trzecie i czwarte, a następnie czwarte i piąte. Te równania mają postać:

$$M_3 l_3 + 2 M_3 (l_3 + l_4) + M_4 l_4 = -6 \frac{\Omega_4 b_4}{l_4},$$

$$M_3 l_4 + 2 M_4 (l_4 + l_6) + M_5 l_6 = -6 \frac{\Omega_4 a_4}{l_4},$$

którą łatwo przekształcić na następującą:

$$M_4 l_4 + M_3 l_4 \left[2 + \frac{l_3}{l_4} \left(2 + \frac{M_2}{M_3} \right) \right] = -6 \frac{\Omega_4 b_4}{l_4},$$

$$M_3 l_4 + M_4 l_4 \left[2 + \frac{l_6}{l_4} \left(2 + \frac{M_5}{M_4} \right) \right] = -6 \frac{\Omega_4 a_4}{l_4}.$$

Zważywszy, że

$$\frac{M_2}{M_3} = -\frac{1}{k_3} \quad \text{i} \quad \frac{M_5}{M_4} = -\frac{1}{k_6},$$

możemy przy pomocy wzorów (148) i (148)' przedstawić powyższe równania w prostszej postaci:

$$M_4 l_4 + M_3 l_4 k_3 = -\frac{6 \Omega_4 b_4}{l_4}, \quad M_3 l_4 + M_4 l_4 k'_4 = -\frac{6 \Omega_4 a_4}{l_4},$$

Stąd

$$M_3 = \frac{6 \Omega_4 (b_4 k'_4 - a_4)}{l_4^2 (1 - k_3 k'_4)}, \quad M_4 = \frac{6 \Omega_4 (a_4 k_3 - b_4)}{l_4^2 (1 - k_3 k'_4)}.$$

W najogólniejszej formie, przy obciążeniu n -go przęsła, napiszemy dla odpowiadających momentów podporowych wyrażenia:

$$M_{n-1} = \frac{6 \Omega_n (b_n k'_n - a_n)}{l_n^2 (1 - k_n k'_n)}, \quad M_n = \frac{6 \Omega_n (a_n k_n - b_n)}{l_n^2 (1 - k_n k'_n)} \dots \dots \dots (149)$$

W ten sposób obliczenie belki ciągłej przy obciążeniu jednego przęsła sprowadza się do wyznaczenia stałych $k_2, k_3, \dots, k'_2, k'_3, \dots$ na podstawie wzorów (148) i (148)', oraz do obliczenia M_{n-1} i M_n według wz. (149). Liczby $k_2, k_3, \dots, k'_2, k'_3, \dots$ są zawsze większe od 2, a zatem momenty podporowe maleją szybko w miarę oddalenia od obciążonego przęsła.

Przyjmijmy np., że wszystkie przęsła belki, przedstawionej na rys. (230), są równe, a na środkowym przęsle znajduje się równomiernie rozłożone obciążenie $q \text{ kg/m}$; wtedy:

$$k_2 = 4, \quad k_3 = 3,75, \quad k_4 = 3,73, \quad k_6 = 4, \quad k'_3 = 3,75, \quad k'_4 = 3,73,$$

$$\frac{6 \Omega_4 b_4}{l_4} = \frac{1}{4} q l^2.$$

A zatem (według wz. 149):

$$M_3 = M_4 = -\frac{1}{18,9} q l^2, \quad M_2 = M_6 = -\frac{1}{3,75} M_3, \quad M_1 = M_7 = +\frac{1}{4 \cdot 3,75} M_3.$$

Tak szybkie zmniejszanie się momentów podporowych pozwala przy obliczeniu belek o wielkiej liczbie przęseł pomijać zupełnie wpływ przęseł bardziej oddalonych od przęsła rozpatrywanego. Gdyby w naszym przykładzie wziąć pod uwagę tylko przęsła sąsiadujące bezpośrednio z obciążonym przęsłem czwartym, to otrzymalibyśmy

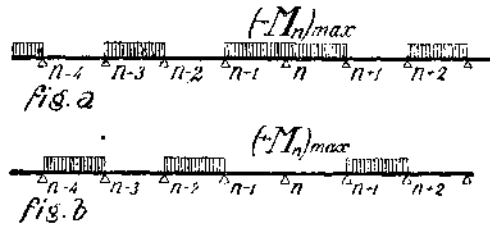
$$M_2 = M_6 = 0, \quad M_3 = M_4 = -\frac{1}{20} q l^2.$$

Wartości M_3 i M_4 różnią się tylko o 5% od znalezionych powyżej. Skoro odrzucimy przęsła skrajne i rozpatrzmy belkę pięcioprzęsłową, to wypadnie $M_3 = M_4 = -\frac{1}{19} q l^2$. Ta wielkość różni się od rzeczywistej, w przybliżeniu o $\frac{1}{2}$ %.

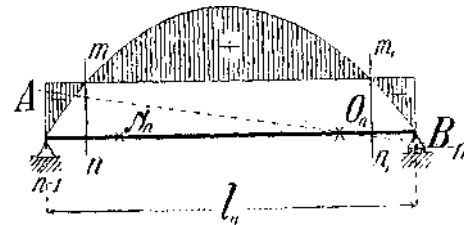
§ 93. NAJNIKORZYSTNIEJSZE OBCIĄŻENIE BELKI CIĄGŁEJ

Jeżeli na belkę ciągłą działają oprócz stałych sił jeszcze obciążenia ruchome, to przy obliczeniu zachodzi kwestja najniekorzystniejszego położenia obciążenia. W obliczeniach belek mostowych zastępuje się zwykle obciążenia ruchome obciążeniem równowaznym, rozłożonym równomiernie na poszczególnych przęsłach belki. Nie trudno wybrać te przęsła, które należy obciążyć w każdym szczególnym przypadku, skoro uwzględnimy wyniki poprzedniego §-u, odnoszące się do wpływu obciążenia jednego przęsła. Zaczniemy od rozpatrzenia tego położenia obciążenia, któremu odpowiada największa wartość momentu zginającego. Dajmy na to, że chodzi o przekrój nad n -tą podporą. Aby otrzymać największą

ujemną wartość M_n , trzeba obciążyć przede wszystkim przęśło n -te i $(n+1)$ -sze, a z dalszych przęseł należy obciążyć co drugie, jak to uwidoczniło na fig. (a) (rys. 231). Taki rozkład obciążenia tłumaczy się jasno tą okolicznością, że na końcach obciążonego przęśła powstają momenty ujemne, a znaki dalszych momentów podporowych zmieniają się kolejno. Dla otrzymania zaś największej dodatniej wartości M_n trzeba obciążenia rozmieścić oczywiście w sposób przedstawiony na fig. (b).

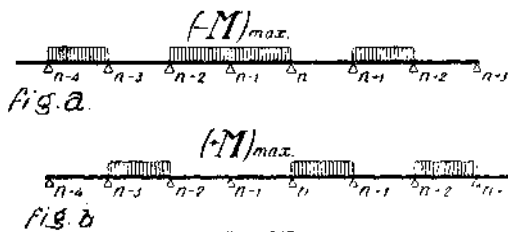


Rys. 231

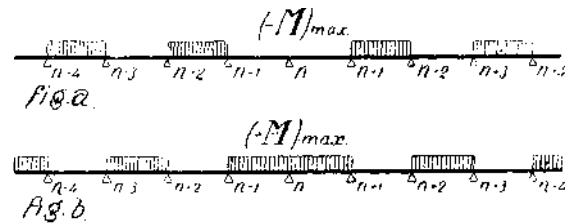


Rys. 232

Rozpatrzmy teraz rozmaite przekroje na długości n -go przęśła. Rys. (232) przedstawia diagram momentów, odpowiadający obciążeniu tego przęśła (pozostałe przęśła wolne od obciążenia). Będziemy w nim rozróżnić trzy przedziały. Jeżeli rozpatrywany przekrój leży pomiędzy $(n-1)$ -szą podporą, a przekrojem $m-n$ (rys. 232), to obciążenie, spoczywające na n -tem przęśle, wywoła w nim moment zginający ujemny. Moment tego samego znaku powstanie także w przekroju wskutek obciążenia wszystkich tych przęseł, którym odpowiada ujemny moment podporowy M_{n-1} . Dla otrzymania największej wartości momentu ujemnego w rozpatrywanym przekroju, należy przeto rozmieścić obciążenie w sposób, przed

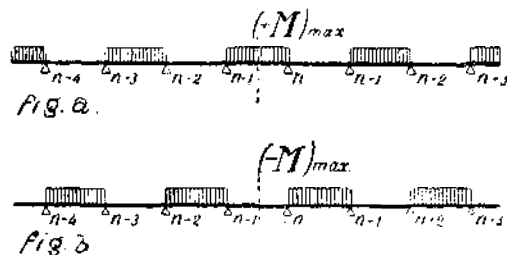


Rys. 233

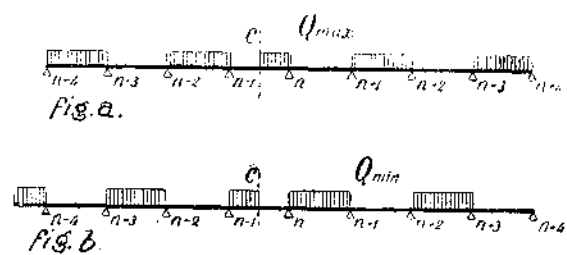


Rys. 234

stawiony na fig. (a) (rys. 233). Największemu zaś momentowi dodatniemu odpowiada rozmieszczenie obciążenia według fig. (b). Przejdźmy teraz do przekrojów leżących w przedziale między przekrojem $m-n$, a stałym punktem N_n . Obciążenie rozmieszczone na n -tem przęśle wywoła w tych przekrojach moment zginający dodatni. Dla otrzymania największego momentu ujemnego musi n -te przęśło pozostać nieobciążone, z innych zaś przęseł trzeba obciążyć te, którym odpowiada ujemny moment podporowy M_{n-1} . Rozkład obciążeń przedstawia fig. (a) na rys. (234). Na fig. (b) uwidoczniło rozmieszczenie obciążeń, odpowiadające największemu dodatniemu momentowi zginającemu w tychże przekrojach. Jeżeli rozpatrywany przekrój leży w przedziale $N_n O_n$, t. j. między punktami stałymi, to wskutek obciążenia n -go przęśła powstanie w nim



Rys. 235



Rys. 236

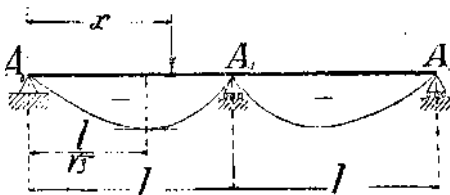
moment zginający dodatni. Aby otrzymać jego największą wartość należy oprócz n -go przęśła obciążyć po lewej stronie wszystkie te przęśła, którym odpowiada dodatnia wartość momentu podporowego M_{n-1} ; po prawej zaś wszystkie przęśła, którym odpowiada dodatnia wartość M_n . Rozmieszczenie obciążeń przedstawiono na fig. (a) (rys. 235). Dla otrzymania największej wartości momentu ujemnego trzeba rozmieścić obciążenie według fig. (b).

Przejdźmy na koniec do rozpatrzenia najniekorzystniejszego obciążenia belki ciągłej ze względu na siły poprzeczne w dowolnym przekroju n -go przęśła. Z wzoru (137) wnosimy, że na n -tem przęśle trzeba rozmieścić obciążenie tak samo, jak na belce w obu końcach podpartej. Co się tyczy innych przęseł, to dla otrzymania Q_{max} należy obciążyć te z nich, którym odpowiadają dodatnie wartości M_n , a ujemne wartości M_{n-1} . Aby zaś otrzymać Q_{min} trzeba widocznie obciążyć te przęśła, które poprzednio były nieobciążone. Ogólne rozmieszczenie obciążeń przedstawiono na rys. (236).

§ 94. LINJE WPŁYWOWE DLA BELEK CIĄGLYCH

Zastąpienie ruchomego układu ciężarów skupionych równoważnym obciążeniem ciągłym, rozłożonym równomiernie, upraszcza znacznie obliczenie belek ciągłych, ale, postępując się tą metodą, można niekiedy popełnić znaczne błędy w obliczeniu największych wartości wielkości statycznych. Aby dokładniej zbadać działanie ruchomych ciężarów skupionych, wypada uciec się do linii wpływowych. Jako przykład rozpatrzmy konstrukcję tych linii dla najprostszego przypadku belki o dwu równych przęsłach (rys. 237). Zaczniemy od linii wpływowej dla momentu podporowego M_1 , odpowiadającego podporze A_1 . Przyjmąwszy jednostkę ciężaru w przekroju x lewego przęsła i zastosowawszy ogólny wz. (143), znajdziemy:

$$M_1 = -\frac{1 \cdot x(l^2 - x^2)}{4l^2} \quad (150)$$



Rys. 237

Odcinając dla każdej wartości x odpowiadające wartości M_1 jako rzędne, otrzymamy linię wpływową dla M_1 w lewym przęsle. Dla prawego przęsła otrzymamy taką samą krzywą, położoną symetrycznie względem A_1 (rys. 237). (Rzędne linii wpływowej, jako ujemne, odmierzyliśmy w dół). Przyrównawszy pochodną $\frac{dM_1}{dx}$ do zera, znajdziemy, że największa rzędna odpowiada wartości $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

Szukajmy teraz linii wpływowej dla momentu zginającego w jakimkolwiek przekroju pierwszego przęsła, w odległości a od lewej podpory. Na podstawie wzoru (136) mamy:

$$M_a = M_a^0 + M_1 \cdot \frac{a}{l}.$$

Linia wpływowa dla pierwszego przęsła będzie mieć dwie gałęzie. Dopóki ciężar znajduje się na lewo od rozpatrywanego przekroju ($x < a$),

$$M_a^0 = \frac{1 \cdot (l-x)a}{l} - 1 \cdot (a-x) = \frac{1 \cdot x(l-a)}{l}.$$

Po przejściu ciężaru na prawą część przęsła ($x > a$), otrzymamy:

$$M_a^0 = \frac{1 \cdot (l-x)a}{l}.$$

Odpowiadające równanie linii wpływowej będzie miało dla lewej części postać:

$$M_a = \frac{1 \cdot x(l-a)}{l} - \frac{1 \cdot x(l^2-x^2)}{4l^2} \cdot \frac{a}{l} = x \left(1 - \frac{5}{4} \frac{a}{l} \right) + \frac{x^3}{4l^2} \cdot \frac{a}{l},$$

zaś dla części prawej postać:

$$M_a = \frac{1 \cdot (l-x)a}{l} - \frac{1 \cdot x(l^2-x^2)}{4l^2} \cdot \frac{a}{l} = \frac{a}{l} \left(l - \frac{5}{4}x + \frac{x^3}{4l^2} \right).$$

Na lig. (a) i (b) (rys. 288) przedstawiono linie wpływowe dla dwu położen przekroju. W pierwszym przypadku $a < \frac{4}{5}l$, a linia wpływowa nie przecina osi X-ów; wszystkie rzędne w pierwszym przęsle są dodatnie. W drugim przypadku przecina linia wpływowa oś X-ów w punkcie, którego odciętą x łatwo znaleźć z równania:

$$M_a = x \left(1 - \frac{5}{4} \frac{a}{l} \right) + \frac{x^3}{4l^2} \cdot \frac{a}{l} = 0.$$

Mając takie linie wpływowe, nie trudno obrać położenie obciążenia w pierwszym przęsle tak, aby w danym przekroju zaszło M_{max} . Przy obciążeniu prawego przęsła ma moment zginający w rozpatrywanym przekroju przęsła lewego wartość:

$$M_a = M_1 \frac{a}{l}.$$

Linia wpływowa ma przeto w drugim przęsle tę samą postać co linia wpływowa dla momentu podporowego M_1 , tylko jej rzędne są zmniejszone w stosunku $a:l$.

Reakcja lewej podpory

$$A_0' = A_0 + \frac{M_1}{l}.$$

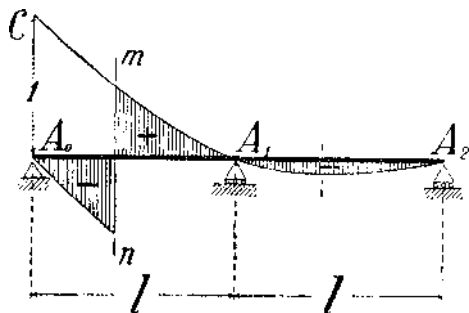
Jeżeli przez A_0 oznaczymy reakcję, obliczoną jak dla belki w obu końcach podpartej. Dopóki jednostka ciężaru znajduje się na lewym przęsle w odległości x od lewej podpory, otrzymamy:

$$A_0' = \frac{1 \cdot (l-x)}{l} - \frac{1 \cdot x(l^2-x^2)}{4l^3}.$$

Odpowiadającą linię wpływową $A_1 C$ wykreślono na rys. (239). Gdy ciężar przechodzi na prawe przęsło, to:

$$A_0' = \frac{M_1}{l},$$

a odpowiadająca linia wpływowa ma taką postać, jak dla M_1 . Dla jej wykreślenia trzeba tylko rzędne linii wpływowej dla M_1 , mierzone w podzielnice momentów, podzielić przez długość l .



Rys. 239

Posługując się linią wpływową dla reakcji A_0' łatwo skonstruować linię wpływową dla siły poprzecznej w jakimkolwiek przekroju mn . Dopóki jednostka ciężaru znajduje się na prawo od przekroju mn , siła poprzeczna równa się reakcji A_0' . Po przejściu obciążenia na lewą stronę przekroju, trzeba od reakcji A_0' odjąć jednostkę ciężaru, aby otrzymać siłę poprzeczna. W ten sposób wykreślono na rys. (239) linię wpływową dla siły poprzecznej, ograniczającą zakreślowane pole.

W przypadku belek wieloprzęsłowych rozpoczniemy od obliczenia liczb k i k' , określających punkty stałe N i O . Następnie dzielimy każde przęsło na kilka równych części i umieszczamy jednostkę ciężaru kolejno w każdym punkcie podziału. Umieściwszy ciężar, obliczamy najbliższe momenty podporowe według wzorów (149). Pozostałe momenty podporowe znajdujemy przy pomocy liczb k i k' . Teraz można wyznaczyć w każdym przekroju moment zginający i siłę poprzeczna zapomocą wz. (136) i (137). Skoro dokonamy wszystkich tych obliczeń dla określonego położenia jednostki ciężaru, przenosimy ciężar na przekrój następujący i powtarzamy rachunek. Wykonawszy obliczenia dla wszystkich naznaczonych przekrojów, będziemy mieć dostateczną ilość danych do konstrukcji linii wpływowej. Żmudne rachunki można przylem znacznie skrócić przez użycie gotowych tablic¹⁾, podających rzędne linii wpływowych w różnych przekrojach belki.

§ 95. BELKI CIĄGŁE O PRZEKROJU ZMIENNYM

We wszystkich naszych wywodach przyjmowaliśmy dotąd, że sztywność belki jest na całej długości stała. Atoli w praktyce mamy prawie zawsze do czynienia z belkami o przekroju zmiennym, jakkolwiek dla uproszczenia obliczeń przyjmuje się i w tych przypadkach stałą wartość EI . Powstałe wskutek tego błędy, jak można wnosić z rachunków szczegółowych dla kilku szczególnych przypadków²⁾, są, wogóle mówiąc, niewielkie. Jeżeli większa dokładność jest pożądana, to postępujemy drogą kolejnych przybliżeń w sposób następujący: Dla danych obciążeń i rozpiętości przęseł obliczamy momenty i reakcje podporowe, jak dla belki o stałym przekroju. Stosownie do tych wielkości dobieramy następnie wymiary przekrojów poprzecznych. Dla otrzymanej w ten sposób belki o przekroju zmiennym, będą momenty podporowe widocznie różne od obliczonych poprzednio i dlatego wypadnie powtórzyć rachunek uwzględniając obrane wymiary. Na znalezionych z drugiego obliczenia wartościach momentów i reakcyj podporowych można już poprzestać i według nich obrać ostateczne rozmiary przekrojów poprzecznych. Dalsze powtarzania obliczeń są zbyteczne, gdyż one zmieniłyby bardzo mało wyniki drugiego rachunku. Przy powtórnym obliczeniu trzeba, jak widzimy, wyznaczyć momenty podporowe i reakcje dla belki o zmiennym przekroju. Można tego dokonać albo obierając za wielkości statycznie niewyznaczalne reakcje podpór, jak to uczyniliśmy w przypadku belki dwuprzęsłowej (§ 87), albo też posługując się równaniem trzech momentów, które należy teraz uogólnić dla belki o przekroju zmiennym. Związek między trzema po sobie następującymi momentami podporowymi znajdziemy tak, jak w przypadku przekroju stałego, jeżeli weźmiemy pod uwagę, że dwa sąsiednie przęsła mają na środkowej podporze wspólną styczną do linii ugięcia. Jeżeli ϑ_2 oznacza kąt obrotu prawego końca n -go przęsła, a ϑ_1' kąt obrotu lewego końca $(n+1)$ -go przęsła, to równanie trzech momentów wyrazi warunek

$$\vartheta_2 = -\vartheta_1' \quad \dots \quad (a)$$

¹⁾ Szczegółowe tablice dla belek równoprzęsłowych na trzech i czterech podporach wydał Lederer p. t. „Analyt. Ermittelt. u. Anwend. v. Einflusslinien“.

Liczne tablice dla belek wieloprzęsłowych znajdują się w przytoczonej poprzednio książce: A. Cart et L. Portes, tudzież w artykule Dupuy et Guenot w Annales d. Ponts et Chaussées, 1897.

²⁾ Ob. Koechlin'a: „Applications de la statique graphique, r. 1889, str. 343.

Kąty ϑ_2 i ϑ'_1 otrzymamy najprościej sposobem wykreślno-analitycznym, wyznaczając je jako reakcje podporowe wskutek fikcyjnego obciążenia ciągłego, zmieniającego się według prawa $\frac{M}{EI}$. Wstawiając w miejsce M jego wartość, znajdziemy dla n -go przęsła:

$$\frac{M}{EI} = \frac{M_{0,n}}{EI} + \frac{M_{n-1}(l_n - x)}{EI l_n} + \frac{M_n x}{EI l_n}.$$

Dla $(n+1)$ -go przęsła otrzymamy analogicznie:

$$\frac{M}{EI} = \frac{M_{0,n+1}}{EI} + \frac{M_n(l_{n+1} - x)}{EI l_{n+1}} + \frac{M_{n+1} x}{EI l_{n+1}}.$$

W obu powyższych równaniach oznacza x odciętą, mierzoną od lewego końca odpowiadającego przęsła. Nacisk na środkową podporę A_n , wywołany fikcyjnym obciążeniem lewego przęsła będzie:

$$\vartheta_2 = \frac{1}{l_n} \left[\int_0^{l_n} \frac{M_{0,n} x dx}{EI} + \frac{M_{n-1}}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{(l_n - x)x dx}{EI} + \frac{M_n}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{x^2 dx}{EI} \right].$$

Podobnie będzie nacisk na tę samą podporę wskutek fikcyjnego obciążenia prawego przęsła:

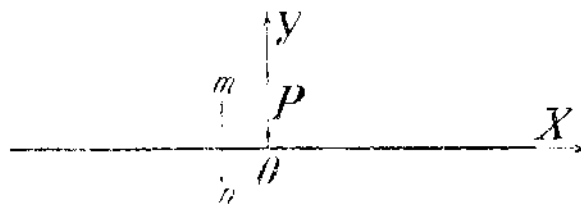
$$\vartheta'_1 = \frac{1}{l_{n+1}} \left[\int_0^{l_{n+1}} \frac{M_{0,n+1}(l_{n+1} - x) dx}{EI} + \frac{M_n}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \frac{(l_{n+1} - x)^2 dx}{EI} + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \frac{(l_{n+1} - x)x dx}{EI} \right].$$

Wykonawszy całkowanie i wstawiając wyniki w rów. (a), otrzymamy szukany związek między trzema momentami¹⁾.

§ 96. ZGIĘCIE BELEK, SPOCZYWAJĄCYCH NA SPRĘŻYSTEM PODŁOŻU

W całym szeregu zadań technicznych mamy do czynienia ze zgięciem belek, podpartych sprężystością na całej swej długości²⁾. W tych warunkach znajdują się np. podkłady kolejowe, podłużnice podparte gęsto ułożonymi poprzecznkami i t. p. Aby w każdym z tych przypadków otrzymać rozwiązanie zadania, musimy znać dokładnie sprężyste własności podłoża i ustawić zależność między naciskami a odpowiadającymi im osiadaniem tego podłoża. Przyjmujemy, że poddanie się podłoża jest w dowolnym punkcie proporcjonalne względem ciśnienia wywartego na podłożu. Takie przypuszczenie nie może być oczywiście ścisłe, ale jest najprostsze i jak dotąd, daje wyniki zadowalające³⁾. Załóżymy nadto, że zginany pręt jest złączony z podłożem w ten sposób, że w płaszczyźnie stykania mogą się pojawić nie tylko ciśnienia, ale i ciągnienia, rozpoczniemy od następującego przypadku:

Na bardzo długi pręt działa w środku siła skupiona P (rys. 240). Umieścimy początek współrzędnych w punkcie działania siły i skierujemy oś X -ów,



Rys. 240

leżącą w osi pręta na prawo, a oś Y -ów pionowo w górę. Pod działaniem siły P wygnie się pręt tak, że linia ugięcia będzie zwrócona w punkcie O wypukłością w kierunku ujemnych Y -ów. Równaniem zgiętej osi pręta będzie:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M.$$

¹⁾ Obliczeniem belek ciągłych o zmiennym przekroju zajmuje się nowa książka Suter'a (Berlin 1916).

²⁾ Odnosne zadanie opracował najpierw Winkler w książce: „Die Lehre v. d. Elastizität u. Festigkeit“ z r. 1867. Ob. także: Müller-Breslau, die graph. Statik. d. Baukonstr. T. II, cz. 2-ga, str. 229.

S. P. Timoszenko: „Kurs teorij uprugosti“, cz. II, str. 4, wyd. z r. 1916.

Szereg zadań z dziedziny obliczenia nawierzchni kolejowej znajduje się w książce Zimmermann'a: „Die Berechnung d. Eisenbahn-Oberbaues“, r. 1888.

³⁾ A. Föppl: „Mitt. aus d. Mech. techn. Labor.“. München, Heft 27. R. 1900.

Weźmy pod uwagę przekrój poprzeczny mn i oznaczmy przez p nacisk wyarty przez sprężyste podłoże na belkę, odniesiony do jednostki długości belki. Jeżeli Q jest siłą poprzeczną w przekroju mn , to w sąsiednim przekroju, odległym o dx od mn będzie siłą poprzeczną $Q + dQ = Q + p \cdot dx$; a zatem:

$$\frac{dQ}{dx} = p.$$

Różniczkując dwa razy równanie linii ugięcia i uwzględniając, że

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad \text{a} \quad \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = p,$$

otrzymamy:

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = p, \quad \dots \dots \dots (151)$$

Według przyjęcia, uczynionego powyżej, jest nacisk p w dowolnym punkcie proporcjonalny względem osiadania podłoża, czyli proporcjonalny względem ugięcia pręta. Oznaczywszy współczynnik proporcjonalności przez k , możemy równ. (151) napisać w postaci:

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -ky \quad \dots \dots \dots (151)'$$

Znak $-$ po prawej stronie znaku równości pochodzi stąd, ponieważ dodatnim ugięciom y odpowiadają ujemne naciski podłoża (skierowane w dół). Otrzymaliśmy tedy równanie różniczkowe liniowe ze stałymi współczynnikami. Ogólna całka tego równania zawiera cztery stałe dowolne, które trzeba wyznaczyć z warunków krańcowych pręta. Wprowadziwszy oznaczenie:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad \dots \dots \dots (152)$$

możemy ogólną całkę przedstawić w formie¹⁾:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x \quad \dots \dots (153)$$

W naszym zadaniu wystarczy wyznaczyć wartość stałych dla jednej, np. prawej gałęzi linii ugięcia druga bowiem gałąź będzie do niej symetryczną. Wartość ugięcia w przekrojach bardzo oddalonych od miejsca obciążonego dąży oczywiście do zera. Zważywszy, że jednocześnie dąży wartość $e^{\alpha x}$ do nieskończoności, widzimy, że dla spełnienia powyższego warunku należy przyjąć $C_1 = C_2 = 0$. Wtedy równanie linii ugięcia dla prawej połowy nieskończonej długiej belki przybierze postać:

$$y = e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x).$$

Do wyznaczenia stałych C_3 i C_4 posłużą warunki w punkcie działania siły P . Tutaj z powodu symetrii jest styczna pozioma, czyli

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad \dots \dots \dots (a)$$

zaś siła poprzeczna po prawej stronie przybiera dla $x = 0$ wartość $-\frac{P}{2}$, czyli:

$$\left[EI \frac{d^3y}{dx^3} \right]_{x=0} = -\frac{P}{2} \quad \dots \dots \dots (b)$$

¹⁾ Zważywszy, że $\sqrt[4]{-\frac{k}{EI}} = \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \cdot \sqrt[4]{-1}$, otrzymamy cztery pierwiastki równania pomocniczego: $\alpha(1+i)$, $\alpha(1-i)$, $\alpha(-1+i)$, $\alpha(-1-i)$. Odpowiadające całki szczególne równania (151)' będą przeto:

$$e^{\alpha(1+i)x}, e^{\alpha(1-i)x}, e^{\alpha(-1+i)x}, e^{\alpha(-1-i)x}.$$

Uwzględniając, że $e^{\alpha xi} + e^{-\alpha xi} = 2 \cos \alpha x$, zaś $e^{\alpha xi} - e^{-\alpha xi} = 2i \sin \alpha x$, dochodzimy do ogólnej całki (153).

Ponieważ $y' = \alpha e^{-\alpha x} [C_3 (\cos \alpha x + \sin \alpha x) + C_4 (\cos \alpha x - \sin \alpha x)]$, więc z warunku (a) wypływa $C_3 = C_4$, a y można przedstawić wyrażeniem:

$$y = C e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x),$$

z czego dalej wynika:

$$y' = -2 C \alpha e^{-\alpha x} \sin \alpha x,$$

$$y'' = 2 C \alpha^2 e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x),$$

$$y''' = 4 C \alpha^3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x.$$

Stosownie do znalezionej wyrażenia dla trzeciej pochodnej napiszemy warunek (b) w postaci:

$$4 C \alpha^3 = -\frac{P}{2EI}, \quad \text{skąd} \quad C = -\frac{P}{8EI} \cdot \frac{1}{\alpha^3}.$$

Szukanym równaniem linii ugięcia pręta będzie przeto:

$$y = -\frac{P}{8EI} \frac{1}{\alpha^3} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) = -\frac{P}{8EI \alpha^3} \eta_1. \quad (154)$$

Przy pomocy wyrażen dla y'' i y''' , łatwo ustawić następujące wzory dla momentu zginającego M i siły poprzecznej Q w dowolnym przekroju belki:

$$M = -\frac{P}{4\alpha} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x) = \frac{P}{4\alpha} \eta_1,$$

$$Q = -\frac{P}{2} e^{-\alpha x} \cos \alpha x = -\frac{P}{2} \eta_2.$$

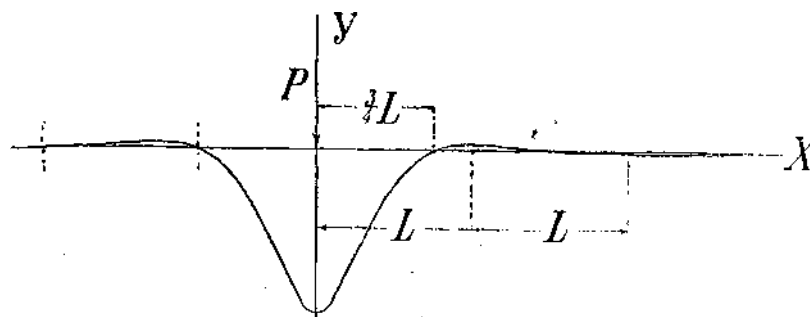
Największe ugięcie zachodzi w punkcie $x = 0$ i ma wartość:

$$f = \frac{P}{8EI} \frac{1}{\alpha^3} = \frac{P\alpha}{2k}. \quad (154')$$

Jak widać z rów. (154) ma linja ugięcia kształt falisty. Długość fali odpowiada zmianie kąta αx o 2π i równa się:

$$2L = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{4EI}{k}}. \quad (155)$$

Wysokość fal maleje szybko w miarę oddalenia od miejsca obciążonego, dzięki czynnikowi $e^{-\alpha x}$. Na rys. (241) przedstawiono linję ugięcia (w przesadnej podziałce wysokości), a w tablicy niżej



Rys. 241

umieszczonej podano wartości funkcji η_1 , η_1 i η_2 , określających zmianę ugięcia, momentu i siły poprzecznej wzdłuż belki.

Tablica wartości funkcji η , η_1 , η_2 .

αx	η	η_1	η_2	αx	η	η_1	η_2
0,0	1,0000	1,0000	-1,0000	3,6	-0,03659	-0,01241	0,02450
0,1	0,9907	0,8100	-0,9003	3,7	-0,03407	-0,00787	0,02097
0,2	0,9651	0,6398	-0,8024	3,8	-0,03138	-0,00401	0,01770
0,3	0,9267	0,4888	-0,7077	3,9	-0,02862	-0,00077	0,01469
0,4	0,8784	0,3564	-0,6174	$\frac{5}{4}\pi$	-0,02786	0,00000	0,01393
0,5	0,8231	0,2415	-0,5323	4,0	0,02583	0,00189	0,01197
0,6	0,7628	0,1431	0,4530	4,1	-0,02309	0,00403	0,00953
0,7	0,6997	0,0599	0,3798	4,2	-0,02042	0,00572	0,00735
$\frac{1}{4}\pi$	0,6448	0,0000	-0,3224	4,3	-0,01787	0,00699	0,00544
0,8	0,6354	-0,0093	-0,3131	4,4	-0,01546	0,00791	0,00377
0,9	0,5712	-0,0657	-0,2527	4,5	-0,01320	0,00852	0,00234
1,0	0,5083	-0,1108	-0,1988	4,6	-0,01112	0,00786	0,00113
1,1	0,4476	-0,1457	-0,1510	4,7	-0,00921	0,00898	0,00011
1,2	0,3899	-0,1716	-0,1091	$\frac{5}{4}\pi$	0,00898	0,00898	0,00000
1,3	0,3355	-0,1897	-0,0729	4,8	-0,00748	0,00892	-0,00072
1,4	0,2849	-0,2011	-0,0419	4,9	-0,00593	0,00870	-0,00139
1,5	0,2384	0,2068	-0,0158	5,0	-0,00455	0,00837	-0,00191
$\frac{1}{2}\pi$	0,2079	-0,2079	0,0000	5,1	-0,00334	0,00795	-0,00230
1,6	0,1959	0,2077	0,0059	5,2	-0,00229	0,00746	-0,00259
1,7	0,1576	-0,2047	0,0235	5,3	-0,00139	0,00692	-0,00277
1,8	0,1234	-0,1985	0,0376	5,4	-0,00063	0,00636	-0,00287
1,9	0,0932	-0,1899	0,0484	$\frac{3}{4}\pi$	0,00000	0,00579	-0,00290
2,0	0,0667	-0,1794	0,0563	5,5	0,00001	0,00578	-0,00290
2,1	0,0439	-0,1675	0,0618	5,6	0,00053	0,00520	-0,00287
2,2	0,0244	-0,1548	0,0652	5,7	0,00095	0,00464	-0,00279
2,3	0,0080	-0,1416	0,0668	5,8	0,00127	0,00409	-0,00268
$\frac{3}{4}\pi$	0,0000	-0,1340	0,0670	5,9	0,00152	0,00356	-0,00254
2,4	-0,0056	-0,1282	0,0669	6,0	0,00169	0,00307	-0,00238
2,5	-0,0166	-0,1149	0,0658	6,1	0,00180	0,00261	-0,00221
2,6	-0,0254	-0,1019	0,0636	6,2	0,00185	0,00219	-0,00202
2,7	-0,0320	-0,0895	0,0608	$\frac{5}{4}\pi$	0,00187	0,00187	-0,00187
2,8	-0,0369	-0,0777	0,0573	6,3	0,00187	0,00181	-0,00184
2,9	-0,0403	-0,0666	0,0534	6,4	0,00184	0,00146	-0,00165
3,0	-0,04226	-0,05632	0,04929	6,5	0,00179	0,00115	-0,00147
3,1	-0,04314	-0,04688	0,04501	6,6	0,00172	0,00087	-0,00129
π	0,04321	-0,04321	0,04321	6,7	0,00162	0,00063	-0,00113
3,2	-0,04307	-0,03831	0,04069	6,8	0,00152	0,00042	-0,00097
3,3	-0,04224	-0,03060	0,03642	6,9	0,00141	0,00024	-0,00082
3,4	-0,04079	-0,02374	0,03227	7,0	0,00129	0,00009	-0,00069
3,5	-0,03887	0,01769	0,02828	$\frac{3}{4}\pi$	0,00120	0,00000	-0,00060

Posługując się tą tablicą i zasadą superpozycji, można łatwo obliczyć długą belkę, spoczywającą na sprężystym podłożu i obciążoną dowolnym układem sił. Trzeba tylko, aby siły były dość odległe od końców belki.

Im większa jest sztywność belki i podatność podłoża (im mniejsze k), tem większa wypada długość fali $2L$, tem dłuższy zatem powinien być pręt, aby go można było uważać za nieskończenie długi, jak w powyższem rozwiązaniu. Ten abstrakcyjny przypadek jest najprostszymi ze względu na wyznaczenie stałych całkowania, a otrzymane wyniki można z dostateczną dokładnością zastosować do rzeczywistych prętów, jeżeli ich długość $l > 4L$. W przypadku krótszych prętów, trzeba oczywiście zmienić warunki krańcowe. Nie można już przyjmować, że poddanie się podłoża na końcach pręta jest równe zeru, natomiast należy przyjąć, że tam znika moment zginający i siła poprzeczna. Ostatecznie mamy następujące warunki dla wyznaczenia stałych dowolnych:

$$\begin{aligned} 1) \quad y'' = 0 \quad \text{przy} \quad x = \frac{l}{2}; & \quad 2) \quad y''' = 0 \quad \text{przy} \quad x = \frac{l}{2}; \\ 3) \quad y' = 0 \quad \text{przy} \quad x = 0; & \quad 4) \quad y''' = -\frac{P}{2EI} \quad \text{przy} \quad x = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego zadania można zastosować np. do badania rozkładu ciśnień płyty łożyskowej na mur (uważając płytę za pręt na sprężystym podłożu). Stopień nierównomierności w rozkładzie ciśnień wzrasta z długością pręta. Gdy $l = \frac{\pi}{\alpha}$, to ciśnienie i ugięcie na końcach stają się zerem. Ugięcie zaś w środku równa się¹⁾:

$$1,09 \frac{P \alpha}{2k} \dots \dots \dots (156)$$

W podobny sposób szuka się rozkładu ciśnień na grunt w przypadku betonowej płyty fundamentowej²⁾.

Bardziej złożonem jest zagadnienie zgięcia podkładu kolejowego (rys. 242). Tutaj trzeba rozpatrywać dwie części linii ugięcia: jedna od $x = \frac{l}{2}$ do $x = \frac{l}{2} - a$, a druga między środkami szyn, które pośredniczą w działaniu ciężarów P . Do każdej części stosuje się ogólną całkę (153), ale stałe dowolne trzeba wyznaczyć dla każdej części osobno. W tym celu wypadnie ustawić 8 równań dla znalezienia tyluż stałych dowolnych. Na końcach podkładu moment zginający i siła poprzeczna są równe zeru, a zatem napiszemy dwa równania warunkowe:

$$y'' = 0 \quad \text{i} \quad y''' = 0 \quad \text{przy} \quad x = \frac{l}{2}.$$

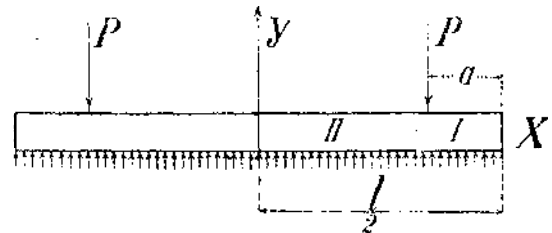
W środku podkładu jest styczna do linii ugięcia z powodu symetrii pozioma, a siła poprzeczna równa się zeru. Otrzymamy więc jeszcze dwa równania następujące:

$$y' = 0 \quad \text{i} \quad y''' = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0.$$

Pozostałe cztery równania można ustawić na podstawie warunków na granicy obu części. Obie części linii ugięcia mają tutaj widocznie: 1) jednakie ugięcie y , 2) wspólną styczną, czyli równe wartości y' , 3) te same wartości momentu zginającego, a zatem równe wartości y'' i 4) siła poprzeczna przy przejściu z jednej części do drugiej zmienia się o wielkość P , co wyraża równanie:

$$\left[y''_{II} - y''_{I} \right]_{x=\frac{l}{2}-a} = \frac{P}{EI}.$$

Rozwiązanie otrzymanych w ten sposób ośmiu równań nie przedstawia zasadniczych trudności, ale wymaga uciążliwych rachunków³⁾.



Rys. 242

¹⁾ Ob. Winkler'a: „Theorie d. Brücken“, str. 184.

²⁾ Zastosowanie teorii do obliczenia fundamentu doków znajdzie czytelnik w Zeitschr. f. Bauwesen z r. 1908, str. 477.

³⁾ To zadanie traktuje szczegółowo Zimmermann w książce przytoczonej powyżej, a także D. Bobylew w „Sborn. Inst. Inż. Put. Soobszcz.“ z r. 1902.

§ 97. BELKI NA SPRĘŻYSTYCH PODPORACH

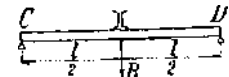
Przy pomocy wyników poprzedzającego paragrafu można znaleźć przybliżone rozwiązanie dla przypadku zgięcia belki, spoczywającej na szeregu podpór sprężystych.

Przyjmijmy, że belka AB (rys. 243) spoczywa na podporach o jednakowej podatności, które leżą w równych odstępach na jednym poziomie. Taki przypadek zachodzi np., jeżeli rozpatrywana belka jest podparta układem jednakowych belek poprzecznych. Przy dostatecznej gęstości podpór, nacisk wyarty na belkę AB jakimkolwiek ciężarem skupionym P , będzie się rozkładać na kilka poprzecznic i warunki zgięcia belki będą w przybliżeniu takie, jak w przypadku ciągłego sprężystego podłoża. Aby mieć możliwość zastosowania otrzymanych powyżej formuł (154)' i (156) dla ugięcia, trzeba określić wartość wielkości k , charakteryzującej podatność podłoża. Niech będą R_1, R_2, \dots naciskami, przeniesionymi przez belkę AB na poszczególne poprzecznice.

Te naciski będą proporcjonalne względem odpowiadających ugięć, a współczynnik proporcjonalności można bez trudności znaleźć w każdym szczególnym przypadku.

Przypuśćmy np., że poprzecznice są w obu końcach podparte, a belka podłużna spoczywa na środku poprzecznic (rys. 244). Obniżenie punktu podparcia wywołane ugięciem poprzecznic równa się:

$$f = \frac{Rl^3}{48E'I}$$

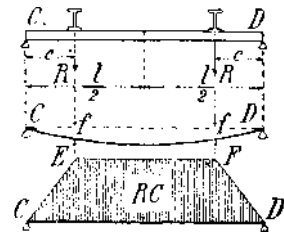


Rys. 244

przyczem oznacza l rozpiętość poprzecznic, a $E'I$ jej sztywność.

Jeżeli, jak to bywa u mostów, dwie belki podłużne, obciążone jednakowo, spoczywają na poprzecznicach CD (rys. 245) w równej odległości od jej podpór, to ugięcie poprzecznic pod belkami podłużnymi będzie:

$$f = \frac{c^2(3l-4c)}{6E'I} R.$$



Rys. 245

Najprościej można to wykazać metodą wykreślno-analityczną. Wyobraźmy sobie poprzecznice obciążoną powierzchnią momentów $CEFD$. Wskutek tego fikcyjnego obciążenia powstaną reakcje podporowe:

$$C = D = \frac{Rc(l-c)}{2}$$

i momenty zginające w przekrojach pod belkami podłużnymi:

$$M_c = \frac{Rc(l-c)}{2} \cdot c - \frac{Rc^2}{2} \cdot \frac{c}{3} = \frac{c^2(3l-4c)}{6} R.$$

Podzieliwszy znaną wartość M_c przez sztywność belki $E'I$, otrzymamy powyższe wyrażenie dla ugięcia. Z wzorów dla ugięcia znajdziemy w pierwszym przypadku:

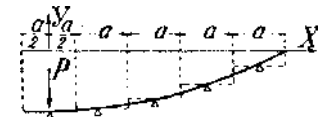
$$R = \frac{48E'I}{l^3} f,$$

w drugim zaś

$$R = \frac{6E'I}{c^2(3l-4c)} f.$$

Zastąpmy teraz reakcję R , jako siłę zewnętrzną belki podłużnej, obciążeniem, rozłożonym równomiernie na długości a , równej odległości podpór (rys. 246). Wielkość tego obciążenia określi wyrażenie:

$$p = \frac{R}{a}.$$



Rys. 246

Wtedy belka będzie pod działaniem obciążenia ciągłego, przedstawionego linią schodkową. Im większą jest liczba podpór, na które się przenosi nacisk wskutek ciężaru P , tem bardziej zbliży się to obciążenie do obciążenia zmieniającego się w sposób ciągły według prawa:

$$p = \frac{R}{a} = -ky,$$

jeżeli y oznacza ugięcie belki podłużnej w rozpatrywanym przekroju. Dla rozważanych powyżej szczególnych przypadków ma współczynnik k wartości następujące:

$$\text{I) } k = \frac{48 E' I'}{a l^3}; \quad \text{II) } k = \frac{6 E' I'}{a c^2 (3l - 4c)} \quad (157)$$

Wyznaczywszy k i sprowadziwszy w ten sposób nasze zadanie do zginania belki na sprężystym podłożu, możemy wielkość ugięcia w obciążonym miejscu obliczyć według wzoru (154)', albo (156). Od ugięcia łatwo przejść do nacisku, którego doznaje jakakolwiek poprzecznicą od belki podłużnej. W tym celu trzeba pomnożyć ciśnienie $k y$ przez odstęp podpór a . Wstawiając zamiast y wartość największego ugięcia (wz. 154'), otrzymamy:

$$R_{\max} = \frac{P \alpha a}{2} \quad (158)$$

dla przypadku, w którym belka podłużna jest przymocowana do poprzecznic, a (stosownie do wz. 156)

$$R_{\max} = 1,09 \frac{P \alpha a}{2} \quad (158)'$$

dla przypadku, gdy końce belki podłużnej mogą się swobodnie podnieść.

Jeżeli nacisk belki podłużnej przenosi się na niewielką liczbę poprzecznic, to do wyznaczenia reakcji R można użyć warunku, że w miejscach skrzyżowania się jest ugięcie belki podłużnej i poprzecznej wspólne. Ogólny tok rachunku objaśnimy na najprostszym przykładzie. Dwie belki podłużne, obciążone w środku siłami skupionymi P , spoczywają na trzech poprzecznicach (rys. 247). Przy założeniu symetrii będą reakcje podpór skrajnych równe i na podstawie statyki można napisać:

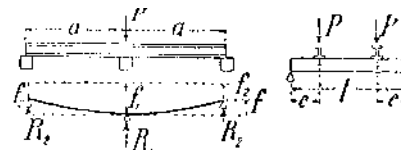
$$P = R_1 + 2 R_2 \quad (a)$$

Oprócz tego wypada z poprzednio wyprowadzonego wzoru:

$$f_1 = \frac{c^2 (3l - 4c)}{6 E' I'} R_1, \quad f_2 = \frac{c^2 (3l - 4c)}{6 E' I'} R_2,$$

a stąd:

$$f = f_1 - f_2 = \frac{c^2 (3l - 4c)}{6 E' I'} (R_1 - R_2).$$



Rys. 247

Tę samą wielkość f możemy znaleźć drugą drogą, rozpatrując ugięcie belki podłużnej. Linja ugięcia tej belki będzie mieć z powodu symetrii styczną poziomą nad środkową podporą, wobec czego można każdą połowę belki traktować jako belkę jednym końcem utwierdzoną i zginaną siłą R_2 , działającą na drugi koniec. Wówczas:

$$f = f_1 - f_2 = \frac{R_2 a^3}{3 E I},$$

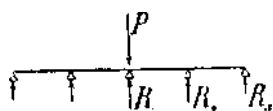
przyczem oznacza a odstęp poprzecznic, zaś $E I$ sztywność belki podłużnej. Z porównania obu wyrażeń dla $f_1 - f_2$ otrzymamy:

$$R_1 - R_2 = 2 \gamma R_2 \quad (b)$$

jeżeli oznaczymy

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{a^3}{3 E I} \cdot \frac{6 E' I'}{c^2 (3l - 4c)}$$

Rozwiązując układ równań (a) i (b), znajdujemy:



Rys. 248

$$R_1 = \frac{1 + 2\gamma}{3 + 2\gamma} P, \quad R_2 = \frac{1}{3 + 2\gamma} P \quad (159)$$

Podobną drogą łatwo rozwiązać zadanie rozkładu obciążenia na 5 poprzecznic (rys. 248). Wzory dla wyznaczenia reakcji będą następujące:

$$R_1 = \frac{1 + 18\gamma + 7\gamma^2}{5 + 34\gamma + 7\gamma^2} P, \quad R_2 = \frac{1 + 11\gamma}{5 + 34\gamma + 7\gamma^2} P, \quad R_3 = \frac{1 - 3\gamma}{5 + 34\gamma + 7\gamma^2} P \quad (160)$$

Przy wartości $\gamma > \frac{1}{3}$ otrzymujemy R_3 ujemne, skoro zatem belka podłużna nie jest przymocowana do poprzecznic, to obciążenie przeniesie się tylko na 3 poprzecznicę. Przy powiększeniu

liczby poprzecznic, na które się przenosi obciążenie, staje się wskazana droga do rozwiązania dość długą¹⁾.

Dla porównania obu metod obliczenia weźmiemy następujący przykład liczbowy: Szyna o sztywności $EI = 2 \cdot 10^8 \text{ kg.cm}^2$ przenosi obciążenie na 3 drewniane podkłady, mające sztywność $E'I' = 23 \cdot 10^8 \text{ kg.cm}^2$. Odstęp między osiami poprzecznic $a = 50 \text{ cm}$, długość poprzecznicy $l = 210 \text{ cm}$, odstęp między szynami $l - 2c = 170 \text{ cm}$. Na podstawie znalezionych wzorów otrzymamy:

$$\gamma = \frac{a^2 E'I'}{EIc^2(3I - 4c)} = 0,653; \quad R_1 = \frac{1 + 2\gamma}{3 + 2\gamma} P = 0,53 P.$$

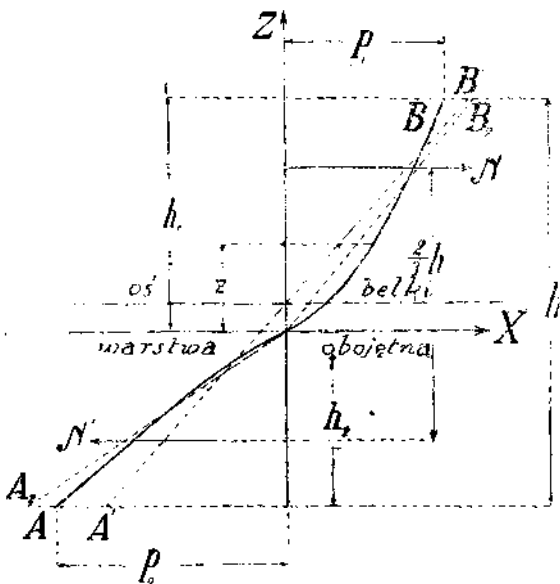
Jeżeli reakcje skupione zastąpimy rozmieszczeniem w sposób ciągły i obliczymy środkową reakcję z formuły (158)', to wypadnie: $k = 1250 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha = 0,0199$, $R_1 = 0,54 P$. Jeżeli szyny o tej samej sztywności przenoszą nacisk wywołany ciężarem P na 5 poprzecznic o sztywności $E'I' = 12 \cdot 10^8 \text{ kg.cm}^2$ i wzajemnej odległości $a = 40 \text{ cm}$, to $k = 819 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha = 0,0179$, a według wzoru (158)' reakcja środkowej popory $R_1 = 0,39 P$. Obliczenie tejże reakcji według formuły (160) daje taki sam wynik $R_1 = 0,39 P$. Z przytoczonych przykładów widać, że wz. (158)' daje, nawet przy niewielkiej liczbie podpór, zadowalające wyniki i należy się nim posługiwać przy obliczaniu poprzecznic mostowych. Do tegoż wniosku dochodzimy przy zastosowaniu metody przybliżonej do obliczania szyn²⁾.

ROZDZIAŁ XII

ZGINANIE BELEK Z MATERJAŁU NIEPODLEGAJĄCEGO PRAWU HOOKE'A

§ 98. WYZNACZENIE NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH SPOSOBEM ANALITYCZNYM

Przy wyprowadzeniu podstawowych formuł teorii zgięcia polegaliśmy na założeniu, że płaskie przekroje poprzeczne pręta pozostają i po zgięciu płaskimi. W takim przypadku wydłużenia i skrócenia podłużnych elementów zginanego pręta są proporcjonalne względem ich odległości z od warstwy obojętnej. Przyjawszy, że materiał podlega prawu Hooke'a, przeszliśmy od odkształceń do



Rys. 249

naprężeń i znaleźliśmy, że te ostatnie zmieniają się również linjowo w zależności od z . Wyniki otrzymane tą drogą można stosować z wielką dokładnością przy obliczaniu belek z żelaza kowalnego i stali, o ile odkształcenia nie przekraczają granic sprężystości. Takie materiały, jak żelazo lane, kamień i beton, okazują, jak wiadomo, znaczne zboczenia od prawa Hooke'a i kwestja rozmieszczenia naprężeń komplikuje się u nich znacznie. Z doświadczeń okazało się, że i w tym przypadku płaskie przekroje poprzeczne pozostają po zgięciu płaskimi³⁾ lecz linjowemu rozkładowi odkształceń odpowiada bardziej złożone prawo rozkładu naprężeń. Dla znalezienia tego prawa trzeba najpierw z doświadczeń nad rozciąganiem i ścisaniem określić zależność między odkształceniami i naprężeniami. Wiemy już, że u takich materiałów, jak żelazo lane lub kamień, rosną naprężenia wolniej od odkształceń; dlatego też linja przedstawiająca zmianę naprężeń normalnych na wysokości przekroju belki ma kształt uzmysłowiony na rys. (249).

Zamiast prostej $A'B'$, odpowiadającej rozkładowi naprężeń w przypadku ważności prawa Hooke'a, otrzymujemy esowatą krzywą AOB , przecinającą oś Z -ów po tej stronie środka ciężkości przekroju,

¹⁾ Ob. Proskurjakow: „Strojitielnaja mechanika“, cz. I, str. 265.

²⁾ Ob. S. Timoszenko: „K' woprosu o prochnosti rels“. Sborn. Inst. Inz. Put. Soobszcz. r. 1915.

[Pokrewne zadania rozpatrują następujące prace:

K. Skibiński: „Beitrag zur Berechnung des Querschwellenoberbaues“, Zeit. d. öst. Ing. u. Arch. Ver. 1899.

Dr. K. Wątarek: „Nawierzchnia poprzeczna pod działaniem sił pionowych“. Czas. techn. 1908].

³⁾ Ob. interesującą pracę: Eugen Meyer. „Die Berechnung d. Durchbiegung von Stäben, deren Material d. Hooke'schen Gesetze nicht folgt“. Ph. Z. r. 1907.

gdzie leżą włókna ściskane. Można wyznaczyć położenie punktu O , odpowiadającego osi obojętnej przekroju i obliczyć naprężenia, jeżeli wpraw wyrazimy analitycznie związek między odkształceniami i naprężeniami.

Przyjmąwszy dla tego związku (przybliżoną) formułę potęgową (6)¹⁾ otrzymamy dla względnego wydłużenia e włókien, rozciąganych (górnym na rys. 249) wyrażenie:

$$\left. \begin{aligned} e = \alpha_1 p^{m_1} = \frac{z}{\rho}, \quad \text{z czego} \quad p = \left(\frac{z}{\alpha_1 \rho} \right)^{\frac{1}{m_1}}; \\ -e = \alpha_2 p^{m_2} = -\frac{z}{\rho}, \quad \text{a więc} \quad p = \left(-\frac{z}{\alpha_2 \rho} \right)^{\frac{1}{m_2}}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a)$$

Wielkości $\alpha_1, \alpha_2, m_1, m_2$ są przytem stałymi sprężystości materiału, ρ promieniem krzywizny warstwy obojętnej, a p oznacza bezwzględną wartość naprężenia. Gdy zamiast z weźmiemy odległości h_1 i h_2 włókien skrajnych, to na podstawie powyższego otrzymamy dla największych ciągnięć p_1 i największych ciśnień p_2 wzory następujące:

$$p_1 = \left(\frac{h_1}{\alpha_1 \rho} \right)^{\frac{1}{m_1}} \quad ; \quad p_2 = \left(\frac{h_2}{\alpha_2 \rho} \right)^{\frac{1}{m_2}} \quad \dots \dots \dots (b)$$

Stąd

$$\frac{p_1^{m_1}}{p_2^{m_2}} = \frac{\alpha_2 h_1}{\alpha_1 h_2} \quad \dots \dots \dots (161)$$

Z porównania formuł (a) i (b) znajdziemy:

$$\frac{p^{m_1}}{p_1^{m_1}} = \frac{z}{h_1} \quad ; \quad \frac{p^{m_2}}{p_2^{m_2}} = -\frac{z}{h_2} \quad \dots \dots \dots (c)$$

t. j. m -te potęgi ciągnięć lub ciśnień mają się do siebie, jak odległości odpowiadających włókien od osi obojętnej. Przy $m_1 = m_2 = 1$ dochodzimy do linowego rozkładu naprężeń.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia położenia osi obojętnej, tudzież wielkości p_1 i p_2 . Do tego posłużą równania równowagi. Przy zginaniu pręta parami sił o momencie M , muszą wewnętrzne siły sprężystości sprowadzać się także do pary sił, a zatem rzuty wszystkich napięć normalnych na oś X -ów dadzą w sumie zero, ich moment ogólny zaś będzie równy M . (Dla uproszczenia zakładamy, że płaszczyzna działania sił jest zarazem płaszczyzną symetrii przekroju). Z tego wynikają równania:

$$\int_0^{h_1} p dF = \int_0^{h_2} p dF; \quad \int_0^{h_1} p dF \cdot z + \int_0^{h_2} p dF \cdot (-z) = M \quad \dots \dots \dots (d)$$

Wstawiając tutaj zamiast p wartości z (c) i dołączając równ. (161), oraz równanie: $h_1 + h_2 = h$, otrzymamy dostateczną liczbę warunków, do znalezienia niewiadomych h_1, h_2, p_1 i p_2 .

W szczególnym przypadku przekroju prostokątnego o szerokości b , napiszemy równ. (d) w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1}{h_1^{\frac{m_1}{m_1}}} \int_0^{h_1} z^{\frac{1}{m_1}} dz - \frac{p_2}{h_2^{\frac{m_2}{m_2}}} \int_0^{h_2} z^{\frac{1}{m_2}} dz = 0, \\ \frac{b p_1}{h_1^{\frac{m_1}{m_1}}} \int_0^{h_1} z^{1+\frac{1}{m_1}} dz + \frac{b p_2}{h_2^{\frac{m_2}{m_2}}} \int_0^{h_2} z^{1+\frac{1}{m_2}} dz = M. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (d)$$

Po wykonaniu kwadratur przybierze pierwsze z tych równań postać:

$$\frac{m_1}{m_1+1} h_1 p_1 - \frac{m_2}{m_2+1} h_2 p_2 = 0 \quad \dots \dots \dots (162)$$

¹⁾ Badaniem zgięcia na podstawie formuły potęgowej zajął się najpierw C. Bach. Ob. jego: „Elastizität u. Festigkeit“, wyd. z r. 1905, str. 224, a nadto:

W. Schüle, Dinglers polyt. Journ. r. 1902, str. 149.

Tiraspołskij, Biulet. Polit. Obszczestwa z r. 1902.

M. T. Huber, Z teorii zgięcia belki prostokątnej na podstawie „prawa potęgowego“. Wiad. mat. 1903.

Pinegin, Mitteil. über Forschungsarb., Zeszyt 48, str. 43.

H. Herbert, Diss. Göttingen, r. 1909.

I. Petermann, Diss. Berlin, r. 1914.

Przyjawszy jakąkolwiek określoną wartość dla p_1 , znajdziemy na podstawie (161) wyrażenie dla p_2 . Po wstawieniu go w równ. (162) będziemy mogli znaleźć stosunek $\frac{h_1}{h_2}$ i tem samem wyznaczyć położenie osi obojętnej. Dla znalezienia wartości M skorzystamy z drugiego z równań (d)'. Wykonawszy całkowania otrzymamy:

$$\frac{m_1}{2m_1+1} b p_1 h_1^2 + \frac{m_2}{2m_2+1} b p_2 h_2^2 = M \quad (163)$$

Ponieważ wielkości h_1 i h_2 są już znane, więc otrzymane równanie pozwala z wielkości p_1 znaleźć odpowiadającą wartość M . Jeżeli materiał podlega prawu Hooke'a, to $m_1 = m_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$, a równ. (163) upraszcza się do postaci:

$$\frac{b p h^2}{12} + \frac{b p h^2}{12} = M, \quad \text{z której} \quad p = M : \frac{b h^2}{6}.$$

Dochodzimy tedy do znanej formuły dla naprężeń we włóknach skrajnych.

§ 99. PRZYBLIŻONY SPOSÓB WYZNACZENIA NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH ¹⁾

Przybliżony sposób obliczenia naprężeń normalnych polega na tem, że zamiast rozkładu naprężeń, przedstawionego krzywą AOB (rys. 249), przyjmuje się tak w części belki rozciąganej, jak i ściskanej rozkład linjowy, określony prostymi OB_1 i OA_2 . Takie przyjęcie jest równoznaczne z przypuszczeniem, że materiał podlega prawu Hooke'a tak przy rozciąganiu, jak i ściskaniu, ale współczynnik sprężystości E_1 części rozciąganej jest różny od współczynnika sprężystości E_2 części ściskanej. Wtedy największe ciągnięcia p_1 i ciśnienia p_2 określają widocznie wzory:

$$p_1 = \frac{E_1 h_1}{\rho} \quad \text{i} \quad p_2 = \frac{E_2 h_2}{\rho} \quad (a)$$

Przeprowadzimy obliczenie tych naprężeń dla przekroju prostokątnego o szerokości b . Łatwo okazać, że w tym przypadku przedstawia wypadkową z ciągnięć N_1 i wypadkową z ciśnień N_2 formuły:

$$N_1 = \frac{p_1 b h_1}{2} \quad \text{i} \quad N_2 = \frac{p_2 b h_2}{2}.$$

Ponieważ siły wewnętrzne w przekroju sprowadzają się do pary sił, więc

$$N_1 = N_2, \quad \text{czyli} \quad p_1 h_1 = p_2 h_2 \quad (b)$$

Wstawivszy za p_1 i p_2 wyrażenia (a), otrzymamy:

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2, \quad \text{albo} \quad h_1^2 : h_2^2 = E_2 : E_1.$$

Uwzględniając, że $h_1 + h_2 = h$, znajdziemy tedy:

$$h_1 = \frac{h \sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} \quad \text{i} \quad h_2 = \frac{h \sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} \quad (164)$$

Te formuły określają położenie osi obojętnej w zależności od stosunku współczynników sprężystości przy rozciąganiu i ściskaniu. Utwórzmy teraz moment wszystkich sił wewnętrznych w przekroju. Zważywszy, że te siły sprowadzają się do pary, znajdziemy ich ogólny moment, mnożąc wypadkową N (lub N') sił zgodnie skierowanych przez ramię pary, równe, jak widać z rysunku, $\frac{2}{3} h$. A zatem:

$$M = N \cdot \frac{2}{3} h = \frac{p_1 b h_1 h}{3} = \frac{p_1 b h^2}{3} \frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} \quad (c)$$

a stąd:

$$p = \frac{3M}{b h^2} \left(1 + \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right) \quad (165)$$

Posługując się tym wzorem można przy danym momencie sił zewnętrznych znaleźć wartość największych ciągnięć. Jeżeli przyjmiemy $E_1 = E_2$, to otrzymamy formułę (66), wyprowadzoną dla materiałów podlegających prawu Hooke'a.

W dalszym ciągu będzie nam jeszcze potrzebny związek między M a promieniem krzywizny ρ . Otrzymamy go najprościej, wstawivszy w równ. (c) zamiast p_1 wyrażenie (a). A zatem:

$$M = \frac{E_1 h_1 b h^2}{3 \rho} \frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} = \frac{1}{\rho} \frac{b h^3}{12} \frac{4 E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2} \quad (166)$$

¹⁾ {Wyznaczenie naprężeń z równań wyprowadzonych w poprzednim paragrafie prowadzi nawet w najprostszym przypadku przekroju prostokątnego do rachunków zbyt zawyłych dla praktycznych zastosowań. Zważywszy nadto, że stałe sprężystości materiału niepodlegającego prawu Hooke'a nie dają się łatwo wyznaczyć i wahają się w dość obszernych granicach, możemy często przestać na obliczeniu przybliżonym}.

Otrzymany wzór można doprowadzić do zgodności z wz. (63), wyprowadzonym dla materiałów podlegających prawu Hooke'a, oznaczwszy przez

$$E' = \frac{4 E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2}$$

„sprowadzony moduł sprężystości“. Wtedy rów. (166) przybierze postać:

$$M = \frac{E'}{\rho} \cdot \frac{b h^3}{12} \dots \dots \dots (166)'$$

Wielkość E' zależy od stosunku $E_1 : E_2$; np. dla $E_1 : E_2 = 0,5$ jest $E' = 0,68 E_2$; dla $E_1 : E_2 = 0,1$ wypada $E' = 0,23 E_2$.

§ 100. WYKREŚLNA METODA WYZNACZENIA NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH

Gdy nie znamy zależności między naprężeniami i odkształceniami w formie analitycznej, ale z doświadczeń posiadamy diagramy dla rozciągania i ściskania danego materiału, to rozkład naprężeń normalnych przy zginaniu można bez trudności znaleźć drogą wykreslną. Wychodząc z hipotezy płaskich przekrojów, znajdziemy, że wydłużenie jest proporcjonalne względem odległości od warstwy obojętnej, czyli

$$e = \frac{z}{\rho} = e_0 z.$$

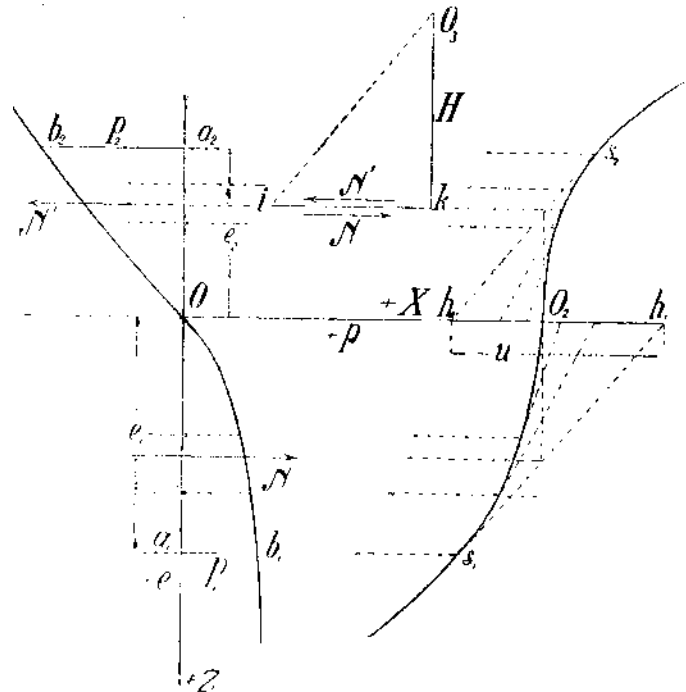
Wielkość e_0 jest co do liczbowej wartości równa wydłużeniu włókna, oddalonego o jednostkę długości od warstwy obojętnej. Odcinając na osi Z -ów wielkości wydłużeń, a w kierunku poziomym odpowiadające wartości naprężeń p , wzięte z uprzednich doświadczeń, otrzymamy krzywą $b_1 O b_2$ (rys. 250), przedstawiającą prawo zmienności naprężeń normalnych na wysokości belki (ciągnięcia odpowiadają dolnej części rysunku). Przy wyznaczeniu wielkości naprężeń normalnych i położenia osi obojętnej wyjdziemy z równań (d) w § (98). Jeżeli uwzględnimy, że

$$z = \frac{e}{e_0} \text{ i } dz = \frac{de}{e_0},$$

to te równania przybiorą dla prostokątnego przekroju postać:

$$\int_0^{e_1} p de = \int_0^{e_2} p de \dots \dots \dots (a)$$

$$\frac{b}{e_0^2} \left(\int_0^{e_1} p e de + \int_0^{e_2} p e de \right) = M \dots \dots \dots (b)$$



Rys. 250

Pierwsze z tych równań wyraża widocznie warunek równości pól $O a_1 b_1$ i $O a_2 b_2$, który pozwala znaleźć położenie osi obojętnej. W tym celu przyjmiemy wartość największych ciągnięć p_1 i znajdziemy odpowiadającą wartość największego wydłużenia e_1 , a zatem i wielkość pola $a_1 O b_1$. Dla wyznaczenia p_2 trzeba teraz poprowadzić prostą poziomą $a_2 b_2$ tak, aby zachodziła równość

$$a_1 O b_1 = a_2 O b_2.$$

Znalazszy tym sposobem wielkości e_1 i e_2 , mamy dla wyznaczenia odległości h_1 i h_2 włókien skrajnych od warstwy obojętnej:

$$h_1 : h_2 = e_1 : e_2, \text{ a więc } \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{h_1}{h} = \frac{e_1}{e_1 + e_2}.$$

Stąd:

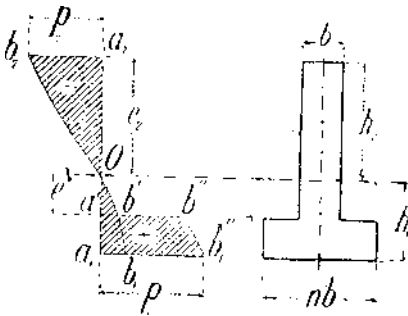
$$h_1 = h \frac{e_1}{e_1 + e_2} \text{ i } e_0 = \frac{e_1}{h_1} = \frac{e_1 + e_2}{h} \dots \dots \dots (c)$$

Dla wyznaczenia momentu wewnętrznych sił sprężystości zużytkujemy rów. (b). Łatwo zauważyć, że czynnik, ujęty w nawias, jest momentem statycznym obu pól $O a_1 b_1$ i $O a_2 b_2$ względem osi X . (Moment statyczny każdego z obu pól wypada tutaj uważać za dodatni). Ten moment łatwo znaleźć wykreslnie (§ 53), kreśląc odpowiadającą krzywą sznurową $s_1 O s_2$ (rys. 250). Styczne w punktach s_1 i s_2 , odpowiadających skrajnym rzędnym $a_1 b_1$ i $a_2 b_2$, odetną na osi X -ów długość u , proporcjonalną względem szukanego momentu statycznego. Aby otrzymać jego wielkość, trzeba odcinek u , mierzony w tejże podziałce, co e , pomnożyć przez odległość biegunową H , mierzoną w podziałce, obranej dla wielkości N , równej polu $a_1 O b_1$. Ponieważ e ma wymiar liczby oderwanej, więc pole $a_1 O b_1$, a z niem i wielkość $H \cdot u$, mają wymiar naprężenia,

t. j. $\frac{\text{siła}}{\text{długość}^2}$. Wstawivszy znaną wartość momentu statycznego w rów. (b) i uwzględnivszy wyrażenie (c), otrzymamy:

$$\frac{b h^3}{(e_1 + e_2)^2} H u = M.$$

Wyłożony sposób badania rozkładu naprężeń da się łatwo uogólnić dla przypadku przekrojów złożonych z prostokątów, jak np. przekroje T lub I. W przypadku przekroju T (rys. 251) przyjmie podstawowe rów. (a) postać:



Rys. 251

$$\int_0^{e'} p de + \int_{e'}^{e_1} n p de = \int_0^{e_2} p de.$$

Tutaj oznaczyliśmy przez e' wydłużenie włókien w miejscu połączenia ścianki ze stopką, a przez n stosunek szerokości stopki do grubości ścianki. Napisane równanie wyraża równość pól a_2Ob_2 i $a_1Ob'b''_1$. Na przestrzeni $a'a_1$ zwiększono rzędne krzywej $Ob'b_1$ n -krotnie. Dla przekroju T możemy dobrać grubość stopki $h_1 - h'$ ($h' = Oa'$) w ten sposób, aby stosunek największego ciągnięcia do największego ciśnienia miał określoną wartość. Na podstawie danych doświadczalnych kreślimy krzywą b_1Ob_2 i według niej krzywą $b''b''_1$ o n -razy większym pole ściskania Oa_2b_2 . Teraz pozostaje tylko poprowadzić prostą $a'b'$ tak, aby pole rozciągania równało się polu ściskania. Zważywszy, że

$$a'a_1 = e_1 \cdot e' = e_0 (h_1 - h'),$$

znajdziemy szukaną grubość stopki:

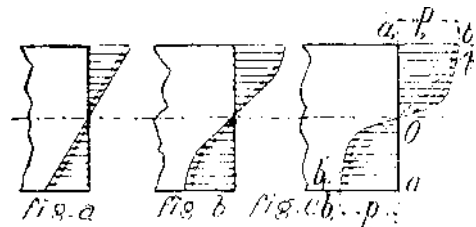
$$h_1 - h' = \frac{e_1 - e'}{e_0} = h \frac{e_1 - e'}{e_1 + e_2}.$$

Metoda wykreslna pozwala badać zgięcie prętów z żelaza kowalnego poza granicami sprężystości. Weźmy np. pręt o poprzecznym przekroju prostokątnym. Dopóki wartość największych naprężeń nie przekracza granicy proporcjonalności, to naprężenia normalne rozkładają się linjowo (fig. a, rys. 252). Z wzrostem momentu zginającego pojawiają się odkształcenia trwałe, zrazu w warstwach zewnętrznych o małej grubości (fig. b); potem obszar odkształceń trwałych ciągle wzrasta, a wskutek tego staje się rozkład naprężeń wzdłuż wysokości przekroju krzywoliniowym (fig. c). Wielkość naprężeń skrajnych p_1 i p_2 będzie widocznie mniejsza, aniżeli wypada ze zwykłego wzoru, odpowiadającego linjowemu rozkładowi naprężeń, przedstawionemu prostą $b'Ob'_1$.

Mając wielkości największych odkształceń e_1, e_2 i uwzględniając, że

$$e_1 + e_2 = h,$$

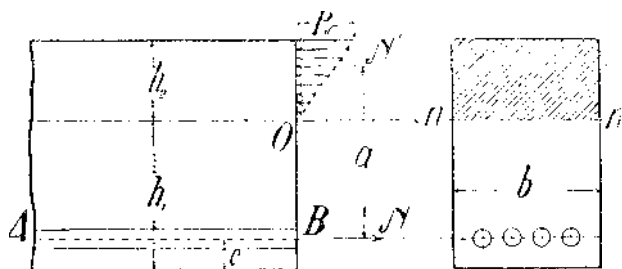
możemy wyznaczyć ρ i w ten sposób przejść do badania linii ugięcia belki. Wskutek złożonego prawa rozkładu naprężeń poza granicami sprężystości, prowadzi obliczenie ugięcia nawet przy najprostszysch sposobach obciążenia do uciążliwych rachunków¹⁾.



Rys. 252

§ 101. WYZNACZENIE NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH W BELKACH ŻELAZNO-BETONOWYCH

Beton wytrzymuje, jak wiadomo, daleko większe ciśnienia niż ciągnięcia, i dlatego przy zginaniu betonowej belki o przekroju prostokątnym pojawia się pęknięcie po stronie włókien rozciąganych. Umieściwszy pośród włókien rozciąganych pręty żelazne AB (rys. 253), osiągamy znaczne wzmocnienie belki przy bardzo korzystnych warunkach, dzięki nader silnemu przyleganiu („przyczepności“) żelaza do otaczającego go betonu po jego skrzepnięciu. W belce, tym sposobem wzmocnionej, można wyzyskać zupełnie wytrzymałość betonu na ściskanie kosztem stosunkowo małej ilości droższego żelaza, chroniąc zarazem żelazo od wpływów atmosferycznych. Konstrukcje żelazno-betonowe, stanowiące odrębną dziedzinę techniki budowlanej, mają obszerną literaturę specjalną, która obejmuje i metody obliczenia tak elementów, jakoteż całych budowli z żel.-betonu. Tutaj ograniczymy się do przedstawienia najprostszysch zadań, aby objaśnić na przykładzie podstawowe założenia, na których polega obliczenie. Przy wyznaczeniu naprężeń normalnych wychodzimy z hipotezy płaskich przekrojów. Według niej będą odkształcenia włókien podłużnych proporcjonalne względem ich odległości od osi obojętnej nn , a zatem naprężenie w żelazie ma się tak do naprężenia w betonie doń przylegającym, jak współczynnik sprężystości żelaza do współczynnika sprężystości betonu. Ażeby wedle możliwości wyzyskać wytrzymałość żelaza, dopuszcza się w niem naprężenia takiej wielkości, iż odpowiadające im ciągnięcia w betonie mają już wartość niebezpieczną. Z tego powodu nie liczy się zupełnie na wytrzymałość rozciąganych włókien betonu i przyjmuje się schematyczny rozkład naprę-



Rys. 253

¹⁾ Ob. przytoczoną powyżej (§ 98) pracę F. Meyer'a.

zeń uwidoczniiony na rys. (253¹). Zważywszy, że pole przekroju żelaza F_1 jest małe w porównaniu do przekroju betonu, możemy pominąć zmiany naprężeń w żelazie na wysokości belki i uważać naprężenie w żelazie p_1 za równomiernie rozłożone. Oznaczmy prócz tego przez c odległość osi prętów żelaznych od spodu belki, a przez h_2 odległość osi obojętnej od wierzchu belki ($h = h_1 + h_2$). Ponieważ normalne siły wewnętrzne przekroju sprowadzają się do pary sił o momencie M , więc:

$$p_b \frac{bh_2}{2} = p_1 F_1 \quad \dots \dots \dots (a)$$

Z tego warunku znajdziemy położenie osi obojętnej. W tym celu wstawimy wyrażenia dla naprężeń

$$p_b = \frac{E_b h_2}{\rho}, \quad p_1 = \frac{F_1 (h_1 - c)}{\rho} = \frac{F_1 (h - h_2 - c)}{\rho}$$

w rów. (a), a rozwiązawszy je względem h_2 otrzymamy:

$$h_2 = \frac{nF_1}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b(h-c)}{nF_1}} \right] \quad \dots \dots \dots (167)$$

przyczem $n = E_1 : E_b$.

Wyznaczymy położenie osi obojętnej, znajdziemy ramię pary, do której się sprowadzają siły wewnętrzne:

$$a = \frac{2}{3} h_2 + h_3 - c.$$

Momentem tej pary będzie:

$$M = \frac{bh_2}{2} p_b \cdot a = p_1 F_1 a.$$

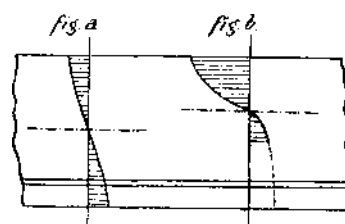
Stąd:

$$p_b = \frac{2M}{abh_2}, \quad p_1 = \frac{M}{F_1 a} \quad \dots \dots \dots (168)$$

¹) [Obliczone w ten sposób największe ciśnienia w betonie i ciągnięcia w żelazie będą wogóle różnić się znacznie od rzeczywistych, wszelako taka metoda obliczenia okazała się w praktyce najracjonalniejszą z następujących powodów:

Przedewszystkiem okazuje beton znaczne zboczenia od prawa Hooke'a, a stałe sprężystości rozmaitych kawałków betonu, sporządzonych tak samo z takich samych materiałów, wykazują zwykle dość wielkie różnice. O ściśle obliczeniu naprężeń nie może być zatem mowy. Powtóre, gdyby nawet własności sprężyste betonu były bardziej ustalone, to wskutek wielkich zboczeń od prawa Hooke'a prowadzi „dokładne“ obliczenie do tak zawitych formuł, że ich zastosowanie praktyczne jest w ogólności wykluczone. Nakoniec trzeba zwrócić uwagę na to, że o wytrzymałości belki żel.-betonowej, narażonej na zginanie, nie decyduje wielkość ciągnięć w betonie, lecz tylko wartości naprężeń w żelazie i w skrajnych ściskanych włóknach betonu. Jak bowiem wykazały doświadczenia, osiąga moment zginający wartość niebezpieczną dopiero wówczas, gdy przekraczamy granicę sprężystości wkładki żelaznej, a bo osiągamy granicę wytrzymałości ściskanych włókien betonu. Rozkład naprężeń w betonie przedstawia się wtedy mniej więcej tak, jak to pokazuje fig. (b) na rys. (253/A).

Pęknięcia, jakie mogą się już przedtem pojawić w rozciąganych warstwach betonu, a które pojawić się muszą z chwilą przekroczenia granicy sprężystości w żelazie, mają tylko ten skutek, że rolę rozciąganych warstw betonu biorą na siebie pręty żelazne. Natomiast rozkład naprężeń, przedstawiony na fig. (a), odpowiada małym wartościom momentu zginającego. Przy coraz mniejszej wartości momentu, będzie rozkład naprężeń zbliżać się coraz bardziej do linowego. Doświadczenia okazują nadto, że oś obojętka zmienia swoje położenie z wzrostem momentu zginającego i mianowicie zbliża się do włókien ściskanych, gdy moment rośnie. Łatwo teraz spostrzec, że stan przedstawiony na fig. (a) da się z pewnym przybliżeniem ująć w rachunek przez przyjęcie linowego rozkładu naprężeń w całym przekroju, zaś stan odpowiadający fig. (b) — przez przyjęcie linowego rozkładu w warstwach ściskanych z pominięciem ciągnięć w betonie, co prowadzi do schematycznego rozkładu naprężeń na rys. (253). Dla wygody w wysłowie



Rys. 253 A

wystawieniu nazywają stan odpowiadający fig. (a) I-szą fazą, zaś stan uzmystłowiony na fig. (b) II-gą fazą zgięcia belki żel.-betonowej. (Por. M. Thullie „Teoria żelbetu“. Lwów 1915). Przy obliczeniu wytrzymałości należy oczywiście przyjąć fazę II, jeżeli zaś chodzi o wielkość ugięcia, lub wielkości statycznie niewyznaczalne, to racjonalnijszym będzie przyjęcie fazy I, albowiem wymienione wielkości zależą od odkształceń we wszystkich przekrojach belki, a w przypadkach praktycznych zachodzi II-ga faza jednocześnie tylko lokalnie, a mianowicie w najbliższym sąsiedztwie przekrojów, odpowiadających największym wartościom momentu zginającego. Z diagramu odkształceń dla betonu widać, że jego współczynnik sprężystości,

określony wartością ilorazu różniczkowego $\frac{dp}{de} = E_b$, maleje w miarę wzrostu naprężenia p ; stosunek współczynnika sprężystości żelaza do współczynnika sprężystości betonu, t. j. $n = \frac{E_1}{E_b}$, będzie przeto wzrastać razem z p . Wobec tego

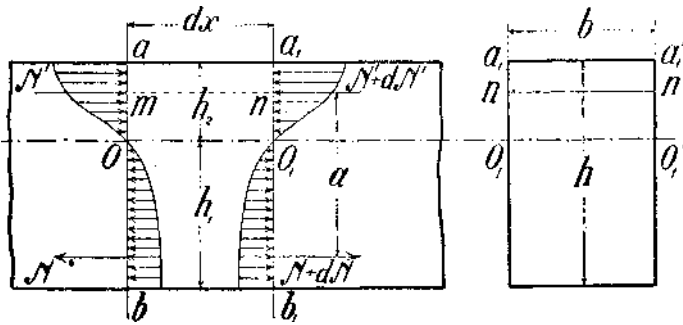
wypadnie przyjąć większą wartość tego stosunku w fazie II niż w fazie I. Polegając na dotychczasowym materiale doświadczalnym możemy zalecić jako średnią wartość $n = 10$ dla fazy I, a $n = 15$ dla fazy II. (Por. M. T. Huber: „W sprawie racjonalnego oznaczania wymiarów belek żel.-betonowych“, „Obliczenie belek żel.-betonowych typu Hennebique'a“, „Obliczenie wymiarów belek betonowych obustronnie uzbrojonych“. Czasop. techn. 1905 i 1906. Nadto: „Działanie uzbrojenia w betonie“. Czasop. techn. 1920, nr. 11 i 12)].

Przy zastosowaniu wzorów (167) i (168) do obliczenia naprężeń w danej belce żel.-betonowej, trzeba pamiętać o przyjętym warunku upraszczającym, że wkładki żelazne zajmują tylko małą część wysokości belki.

[W przypadku wzmocnienia belki betonowej żelazną kształtką i t. p. wypadłoby ustawić ogólniejsze wzory lub uciec się do metody wykreślnej, podobnie jak w § 100].

§ 102. ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH (ŚCINAJĄCYCH)

Po rozpatrzeniu kwestji rozkładu naprężeń normalnych na wysokości belki (w §§ 98 do 100) można łatwo obliczyć i naprężenia styczne. Obrawszy dwa nieskończenie bliskie przekroje poprzeczne np. AB i $A'B'$ (rys. 254), pomiędzy którymi nie ma sił zewnętrznych na belkę działających, znajdziemy siłę styczną w płaszczyźnie poziomej mn , oddzielającej element $amna_1$, jako różnicę napięć normalnych, przypadających na ściany am i a_1n tegoż elementu.



Rys. 254

Oznaczmy odpowiednio przez N i N' wypadkowe napięcia normalnych w obu częściach przekroju, leżących poniżej i powyżej osi obojętnej, a ich wzajemną odległość przez a . Największe naprężenia styczne powstaną widocznie w warstwie obojętnej OO_1 , i mają wartość

$$(p_t)_{\max} = \frac{dN'}{b dx}$$

Zważywszy, że $a dN' = dM = Q dx$, gdzie Q oznacza siłę poprzeczną, znajdziemy:

$$(p_t)_{\max} = \frac{Q}{ab} \quad (169)$$

Ten wzór stosuje się do belki prostokątnej z jakiegokolwiek materiału nie podlegającego prawu Hooke'a. W odniesieniu do belki żel.-betonowej (rys. 253) będzie $a = h - \frac{h_2}{3} - c$, a zatem

$$(p_t)_{\max} = \frac{3Q}{b(3h - 3c - h_2)} \quad (170)$$

Oprócz tych naprężeń przy obliczaniu belek żel.-betonowych grają ważną rolę naprężenia styczne na powierzchni przylegania betonu do żelaza. Gdy weźmiemy, jak powyżej, dwa nieskończenie bliskie przekroje poprzeczne belki, to różnica wypadkowych sił wewnętrznych w żelaznych prętach będzie:

$$dN = \frac{Q dx}{a}$$

Oznaczywszy przez S wielkość powierzchni prętów żelaznych, przypadającą na jednostkę długości belki i przyjąwszy równomierny rozkład naprężeń stycznych na tej powierzchni, otrzymamy:

$$(p_t)_{b,t} S dx = \frac{Q dx}{a}, \text{ z czego wynika:}$$

$$(p_t)_{b,t} = \frac{Q}{aS} = \frac{3Q}{(3h - 3c - h_2)S} \quad (171)$$

Stosunek naprężeń ścinających w warstwie obojętnej do takichże naprężeń na powierzchni żelaza równa się:

$$\frac{(p_t)_{\max}}{(p_t)_{b,t}} = \frac{S}{b} \quad (172)$$

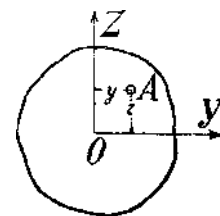
ROZDZIAŁ XIII

WYTRZYMAŁOŚĆ ZŁOŻONA

§ 103. ZGIĘCIE W POŁĄCZENIU Z ROZCIĄGANIEM LUB ŚCISKANIEM

Dotąd zajmowaliśmy się tylko takimi przypadkami zgięcia, w których siły zewnętrzne przecinały oś pręta pod kątem prostym. W tych przypadkach sprowadzały się wewnętrzne siły sprężystości, działające w jakimkolwiek przekroju poprzecznym, do pary sił i do siły poprzecznej, leżącej w płaszczyźnie przekroju. Teraz rozpatrzmy zadanie ogólniejsze, w którym siły zewnętrzne, działające na belkę, przecinają jej oś pod dowolnymi kątami. Każdą z tych sił możemy rozłożyć na dwie składowe: jedną skierowaną wzdłuż osi pręta, a drugą do niej prostopadłą. Te ostatnie zginają pręt, pierwsze zaś, zwane siłami podłużnymi, wywołują przede wszystkim rozciąganie

ganie lub ściskanie. Ich wpływ na zginanie będzie znikomy, dopóki rozmiary poprzeczne pręta są niezbyt małe w porównaniu do jego długości. (Wpływ sił podłużnych na zgięcie cienkich a giętych prętów będzie zbadany w rozdz. XV). Pomijając wpływ sił podłużnych na zgięcie, możemy obliczyć naprężenie w jakimkolwiek punkcie *A* przekroju poprzecznego (rys. 255), sumując naprężenie, wywołane siłą podłużną i naprężenie wskutek zginania siłami prostopadłymi. Jeżeli oznaczymy przez *P* wypadkową wszystkich sił podłużnych, leżących po jednej stronie rozpatrywanego przekroju, a przez *M_y* i *M_z* momenty sił zewnętrznych, działających na rozpatrywaną część belki, względem osi *Y* i *Z*, to naprężeniem normalnym w punkcie *A* będzie:

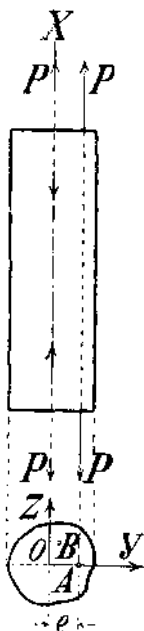


Rys. 255

$$p = \frac{P}{F} \pm \frac{M_y z}{I_y} \pm \frac{M_z y}{I_z} \quad (173)$$

Znaki w tym wzorze należy obracać stosownie do kierunku momentów.

Zastanowimy się teraz szczegółowo nad przypadkiem, kiedy jednoczesne zginanie i rozciąganie lub ściskanie pręta jest wywołane mimośrodowym działaniem siły podłużnej. Niechaj dwie równoważące się siły *P* (rys. 256) działają na końcowe przekroje pręta w punktach *A*, leżących na głównej osi bezwładności *OY* przekroju poprzecznego. Przez *e* oznaczymy mimośród obciążenia, t. j. odległość linii działania siły od osi pręta. Zastąpmy daną siłę *P* układem statycznie równoważnym, złożonym z siły *P*, działającej w środku ciężkości przekroju i pary sił o momencie *Pe*. Ta para wywoła widocznie zgięcie w płaszczyźnie *XY*, a siła osiowa *P* wywoła rozciąganie pręta. Naprężenie w dowolnym punkcie *B* przekroju poprzecznego określi, przy obranym układzie współrzędnych, wzór:



Rys. 256

$$p = \frac{P}{F} + \frac{M_z y}{I_z} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{e y}{r_z^2} \right) \quad (174)$$

w którym *r_z* oznacza odpowiadający promień bezwładności. Rozkład naprężeń jest zatem liniowy. Jeżeli weźmiemy przekrój poprzeczny prostokątny (rys. 257), to otrzymamy największe i najmniejsze wartości naprężeń, wstawiając we wzór (174)

$$y = \pm \frac{b}{2}.$$

Mamy więc:

$$p_{\max/\min} = \frac{P}{F} \left(1 \pm \frac{b e}{2 r_z^2} \right),$$

albo ponieważ dla prostokąta

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} = \sqrt{\frac{ab^3}{12ab}} = \frac{b}{2\sqrt{3}},$$

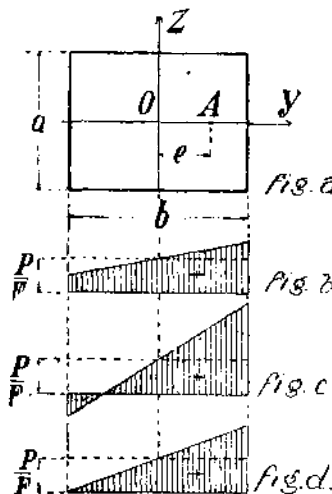
$$p_{\max/\min} = \frac{P}{F} \left(1 \pm \frac{6 e}{b} \right) \quad (175)$$

Dopóki $e < \frac{b}{6}$, powstają w całym przekroju naprężenia

tego samego znaku; ich rozkład uwidoczniono na fig. (b). Skoro $e > \frac{b}{6}$, to naprężenia skrajne *p_{max}* i *p_{min}* mają znaki różne, a rozkład naprężeń przedstawia fig. (c). W szczególnym przypadku, gdy $e = \frac{b}{6}$, jest

$p_{\max} = \frac{2P}{F}$, a $p_{\min} = 0$, czyli największa wartość naprężenia jest dwa razy większa od wartości, jakąbyśmy otrzymali przy środkowym działaniu siły *P*. Diagram trójkątny na fig. (d) daje w rozpatrywanym przypadku rozkład naprężeń.

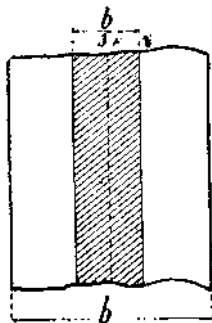
Gdy *P* jest siłą ściskającą, to otrzymamy analogiczne wyniki. Dopóki siła ściskająca działa w środku przekroju poprzecznego, to naprężenia rozkładają się w przekroju równomiernie; im bardziej oddala się siła od środka, tem większą staje się różnica między naprężeniami skrajnymi.



Rys. 257

W przypadku pręta o przekroju prostokątnym, ściskanego siłą P , która przecina kierunek jednej z głównych osi bezwładności (rys. 257), znajdzie największe ciśnienie w skrajnych elementach tej części przekroju, która leży po stronie działania siły. Przy mimośrodku $e = \frac{b}{6}$ będzie największe ciśnienie mieć wartość $\frac{2P}{F}$, zaś naprężenie skrajne po stronie przeciwnej staje się zerem.

Przy mimośrodku $e > \frac{b}{6}$ powstaną po przeciwnej stronie ciągnięcia. Ta okoliczność ma szczególne znaczenie w przypadku materiałów o małej wytrzymałości przy rozciąganiu, jak np. w przypadku słupów i ścian murowanych. Aby w murze nie powstały ciągnięcia, musi wypadkowa z obciążeń pionowych trafiać środkową trzecią część grubości muru (rys. 258), wtedy bowiem $e \leq \frac{b}{6}$.



Rys. 258

Przejdźmy teraz do ogólniejszego przypadku obciążenia mimośrodkowego, kiedy kierunek siły nie przecina żadnej z głównych osi bezwładności przekroju poprzecznego. Niechaj (m, n) oznaczają spólrzędne środka obciążenia A (rys. 259), odniesione do głównych osi bezwładności przekroju OY i OZ . Siła P , działająca w punkcie A , da się zastąpić także siłą, działającą w środku O i parą sił o ramieniu OA i momencie $P \cdot OA$. Ta para leży w płaszczyźnie OA , przechodzącej przez oś pręta, i można ją rozłożyć na dwie składowe, działające w głównych płaszczyznach belki, przechodzących

przez OY i OZ . Momenty tych par składowych będą odpowiednio równe $P \cdot m$ i $P \cdot n$. Naprężenie p w dowolnym elemencie pola dF o spólrzędnych y, z znajdziemy jako sumę algebraiczną naprężeń, wywołanych oddzielnie przez proste ściskanie i zginanie w obu płaszczyznach głównych. A zatem:

$$p = \frac{P}{F} + \frac{Pmy}{I_z} + \frac{Pnz}{I_y}$$

Podstawivszy w miejsce momentów bezwładności iloczyny pola przekroju przez kwadraty odpowiadających promieni bezwładności, sprowadzimy powyższe wyrażenie do postaci:

$$p = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{my}{r_z^2} + \frac{nz}{r_y^2} \right)$$

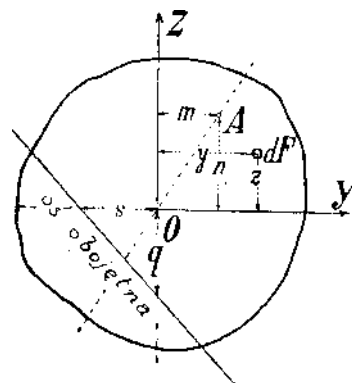
Aby znaleźć oś obojętną wystarczy przyrównać prawą stronę tego równania do zera. Otrzymamy tedy

$$\frac{my}{r_z^2} + \frac{nz}{r_y^2} + 1 = 0 \quad (176)$$

jako równanie osi obojętnej. Położenie tej prostej można określić zapomocą odcinków s i q , jakie ona wyznacza na osiach Y i Z . Z rów. (176) znajdziemy, podstawivjąc kolejno $y=0$ i $z=0$:

$$(z)_{y=0} = q = -\frac{r_y^2}{n}, \quad (y)_{z=0} = s = -\frac{r_z^2}{m}$$

Łatwo zauważyć, że między spólrzędnymi m i n środka obciążenia, a odcinkami s i q , wyznaczonymi przez oś obojętną, zachodzi związek tego rodzaju: Jeżeli środek obciążenia ma nawzajem spólrzędne s i q , to oś obojętną wyznacza odcinki m i n . Dla każdego środka obciążenia A możemy znaleźć odpowiadającą oś obojętną. Skoro przemieszczamy środek obciążenia, to odpowiadająca oś obojętną będzie także zmieniać położenie. Okażemy, że gdy A porusza się po linii prostej, to odpowiadająca oś obojętną obraca się około stałego punktu, który nawzajem odpowiada jako środek obciążenia owej prostej, jako osi obojętnej. Niech będzie $A_1 A_2$ prostą, po której porusza się środek obciążenia (rys. 260). Dla każdego położenia punktu A na tej linii można siłę P zastąpić dwiema siłami jej równoległymi, działającymi w punktach $A_1 A_2$, leżących na głównych osiach



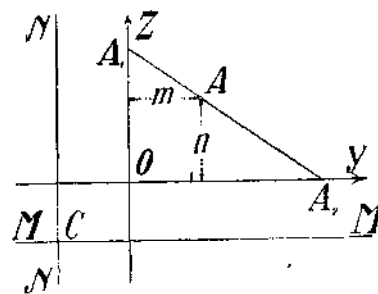
Rys. 259

bezwładności przekroju poprzecznego. Prosta MM , odpowiadająca jako oś obojętna środkowi obciążenia A_1 , będzie równoległa do osi Y -ów. Jej odległością od osi będzie

$$q = -\frac{r_y^2}{OA_1}$$

Podobnie znajdziemy oś NN , odpowiadającą punktowi A_2 jako środkowi obciążenia. W punkcie C przecięcia się linii MM i NN będzie naprężenie zerem przy dowolnym położeniu punktu A na prostej A_1A_2 , przez ten punkt przejdą zatem osie obojętne, odpowiadające wszelkim położeniom środka A na prostej A_1A_2 , czyli przy przesuwaniu się środka obciążenia po prostej, obraca się odpowiednio oś obojętna około stałego punktu C . Spółrzędne punktu C wyznaczamy według takich samych wzorów, jak i współrzędne środka obciążenia, odpowiadającego prostej A_1A_2 jako osi obojętnej, z czego wnosimy nawzajem, że:

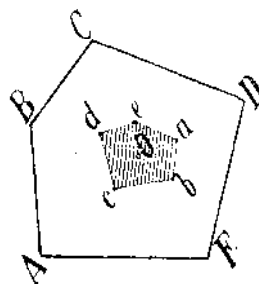
Skoro oś obojętna obraca się około stałego punktu, to odpowiadający środek obciążenia posuwa się po prostej, która jest nawzajem osią obojętną dla środka obrotu jako środka obciążenia.



Rys. 260

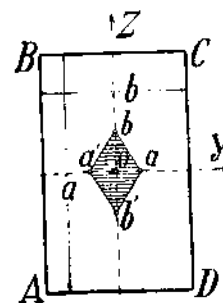
§ 104. RDZEŃ CZYLI JĄDRO PRZEKROJU

W słupach murowanych, ściskanych mimośrodkowo siłą P , jest często niepożądanym powstanie się ciągnięć, które zachodzi, jak wiadomo, przy większych mimośrodkach obciążenia. Nasuwa się tedy pytanie, przy jakich położeniach środka obciążenia powstaną w całym przekroju tylko ciśnienia. Miejscem geometrycznym takich środków obciążenia będzie pole pewnej figury, zwanej rdzeniem, czyli jądrem danego przekroju. Aby znaleźć kontur rdzenia wystarczy widocznie poprowadzić wszystkie proste, dotykające kontur przekroju, a nie przecinające go i uważając je za osie obojętne wyszukać odpowiadające środki obciążenia. Te środki tworzą kontur rdzenia. Skoro środek obciążenia wyjdzie poza obręb otrzymanego rdzenia, to odpowiadająca oś obojętna zbliży się do środka ciężkości przekroju poprzecznego i przetnie figurę przekroju, przyczem powstaną naprężenia o różnych znakach. Jeżeli figura przekroju jest jakimkolwiek wielobokiem, to łatwo okazać, że kontur

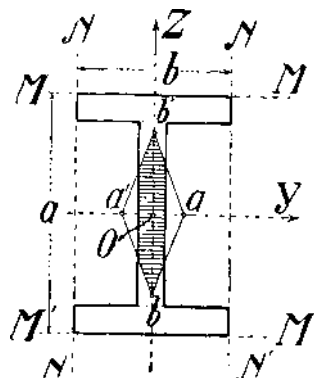


Rys. 261

odpowiadającego rdzenia będzie także wielobokiem. Niech będzie $ABCDE$ danym przekrojem poprzecznym (rys. 261). Bokom wieloboku, jako osiom obojętnym, odpowiadają punkty a, b, c, d, e konturu rdzenia, jako środki obciążenia. Jeżeli obciążenie działa w punkcie a , względnie b , to odpowiednią osią obojętną jest AB , względnie BC . Aby przejść z położenia AB w położenie BC , należy oś obojętną obrócić około wierzchołka B . Ale obrotowi osi obojętnej odpowiada, jak dowiedliśmy, przesunięcie środka obciążenia po linii prostej, łączącej punkty a i b . Odcinek ab jest zatem jednym z boków wielokąta $abcde$, tworzącego rdzeń przekroju. Wierzchołkom konturu przekroju będą odpowiadać boki konturu rdzenia.



Rys. 262



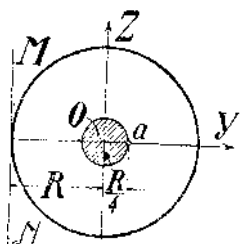
Rys. 263

W przypadku przekroju prostokątnego odpowiadają bokom prostokąta, jako osiom obojętnym, środki obciążenia, leżące na osiach OY i OZ (rys. 262) w odległości $\frac{b}{6}$, względnie $\frac{a}{6}$, od środka przekroju. Ten wynik znaleźliśmy już w poprzednim paragrafie. Łącząc otrzymane cztery wierzchołki prostymi, otrzymamy romb $ab a' b'$, przedstawiający rdzeń prostokątnego przekroju. Przekątne tego rombu mają odpowiednio długości $\frac{a}{3}$ i $\frac{b}{3}$.

Dla przekroju dwuteowego (przekroju **I**) (rys. 263) będzie rdzeń mieć również postać rombu, albowiem proste, dotykające kontur prze-

kroju, a nie przecinające go, t. j. proste MM , $M'M'$ i NN , $N'N'$, tworzą prostokąt opisany. Aby wyznaczyć np. punkt a , odpowiadający prostej NN , użyjemy wzoru (174), podstawiając w nim $y = -\frac{b}{2}$ i przyrównując prawą stronę do zera. Stąd wypadnie

$$\frac{eb}{2r_z^2} = 1, \text{ czyli } e = \overline{Oa} = \frac{2r_z^2}{b}.$$



Rys. 264

W ten sam sposób znajdziemy położenie punktu b), a mianowicie:

$$\overline{Ob} = \frac{2r_y^2}{a}.$$

W przypadku przekroju kołowego (rys. 264) musi być rdzeń kołem, którego promień znajdziemy z wzoru (174), a mianowicie:

$$\overline{Oa} = e = \frac{r_z^2}{R}, \text{ przyczem } R \text{ oznacza promień danego koła.}$$

Ponieważ dla koła jest $r_z^2 = \frac{\pi R^4}{4\pi R^2} = \frac{R^2}{4}$, więc promień kołowego rdzenia:

$$\overline{Oa} = \frac{R}{4}.$$

Dla przekroju pierścieniowego, stosowanego np. do kominów, będzie rdzeń z powodu symetrii także kołem. Jego promień znajdziemy według tego samego wzoru, co poprzednio, wstawiając tylko w miejsce promienia bezwładności r_z odpowiednie wyrażenie dla pierścienia kołowego. Jeżeli oznaczymy przez R i r odpowiednio promień zewnętrzny i wewnętrzny pierścienia, to jego moment bezwładności będzie równy

$$\frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}.$$

Odpowiadający promień bezwładności obliczymy z formuły:

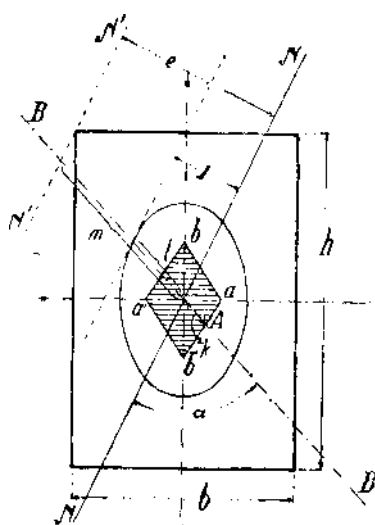
$$r_z^2 = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4\pi(R^2 - r^2)} = \frac{R^2 + r^2}{4}.$$

Promieniem rdzenia przekroju będzie zatem:

$$e = \frac{r_z^2}{R} = \frac{R^2 + r^2}{4R}.$$

W szczególności dla $r = 0$ otrzymamy: $e = \frac{R}{4}$, jak poprzednio; dla $R = r$, t. j. dla pierścienia nie-

skończenie wąskiego: $e = \frac{R}{2}$.



Rys. 265

Rdzenia przekroju można użyć z korzyścią przy obliczeniu naprężeń w przypadku ukośnego zgięcia (§ 57). Weźmy np. przekrój prostokątny (rys. 265). Na rysunku uwidoczniono elipsę bezwładności i rdzeń przekroju. Jeżeli moment zgięcia działa w płaszczyźnie, przecinającej przekrój poprzeczny w linii BB , to odpowiadająca oś obojętna NN będzie średnicą elipsy bezwładności, sprzężoną z kierunkiem BB . Naprężenia zmieniają się linjowo i, jeżeli przez p_1 oznaczymy wielkość naprężenia w punktach najbardziej oddalonych w odstępnie e od osi obojętnej, to w odległości z od osi obojętnej będzie naprężeniem normalnym:

$$p_z = \frac{p_1 z}{e}.$$

Jeżeli przez M oznaczymy wielkość momentu zginającego w rozpatrywanym przekroju, a przez α kąt między płaszczyzną momentu

a warstwą obojętną, to, ustawiając równanie momentów wszystkich sił wewnętrznych i zewnętrznych względem NN , dojdziemy do równania:

$$M \sin \alpha = \frac{P_1}{e} \int z \cdot z dF = \frac{P_1}{e} I_N, \text{ a stąd:}$$

$$p_1 = \frac{M e \sin \alpha}{I_N} \quad (177)$$

Przez I_N oznaczyliśmy tutaj moment bezwładności przekroju względem osi obojętnej. Obliczenie p_1 upraszcza się przy pomocy własności rdzenia przekroju. Umieścimy w punkcie A siłę ściskającą P , wtedy $M = Pk$, przyczem k oznacza odpowiedni promień rdzenia OA . Oś obojętną będzie prosta $N'N'$, równoległa do NN . Dla punktów prostej $N'N'$ będą ciągnięcia, wywołane zginaniem, a obliczone według wzoru (177), równe ciśnieniom $\frac{P}{F}$, wywołanym siłą P , działającą w środku, a zatem:

$$\frac{P}{F} = \frac{Pke \sin \alpha}{I_N}, \text{ z czego } \frac{e \sin \alpha}{I_N} = \frac{1}{Fk}.$$

Wstawivszy to we wz. (177), otrzymamy:

$$p_1 = \frac{M}{Fk} \quad (178)$$

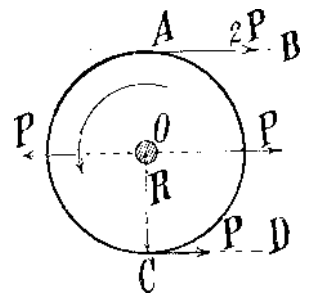
Uogólnijmy nasze pierwotne określenie modułu przekroju (momentu oporu) przyjmując $W = Fk$ natenczas

$$p_1 = \frac{M}{W} \quad (178')$$

Że to uogólnienie nie stoi w sprzeczności z określeniem W , przyjętem poprzednio, łatwo się przekonać, umieściwszy środek obciążenia na jednej z głównych osi bezwładności przekroju. Skoro w rozpatrywanym przypadku przyjmiemy środek obciążenia w b' , to $k = \frac{h}{6}$, a więc $W = Fk = \frac{bh \cdot h}{6}$, co się zgadza z wartością modułu przekroju, odpowiadającego zgięciu w płaszczyźnie głównej. Zastosowanie wzoru (178) uprościłoby się znakomicie, gdyby tablice profilów normalnych zawierały także i rysunek odpowiadającego rdzenia.

§ 105. ZGINANIE I SKRĘCANIE

Jednoczesnemu działaniu zginania i skręcania podlegają szczególnie często wały maszyn. Tutaj, oprócz sił przecinających oś wału, jak np. ciężar własny lub ciężar kół, osadzonych na wale, działają takie siły, jak napięcie cięgien transmisyjnych, nacisk przeniesiony przez trzon mechanizmu korbowego i t. d. Linje działania tych sił nie przecinają osi wału, wobec czego zginaniu będzie towarzyszyć skręcenie. Rys. (266) przedstawia jedno z kół wału transmisyjnego. Oznaczmy przez $2P$ napięcie we wchodzącej części AB cięgna, a przez P napięcie w części CD . Działanie tego ostatniego napięcia można widocznie sprowadzić do momentu skręcającego $M_1 = PR$ o kierunku, przeciwnym wskazówce zegara i do siły P , działającej na środek ciężkości O przekroju wału. Podobnie da się działanie napięcia $2P$ w części AB cięgna zastąpić momentem skręcającym $M_2 = 2PR$ o kierunku zgodnym z wskazówką zegara i siłą $2P$, działającą na punkt O . W ten sposób sprowadza się działanie napięć obu części cięgna do siły $P + 2P = 3P$, zginającej wał, i do pary o momencie $M = PR$, dążącej do obrotu wału w kierunku wskazówki zegara. Jeżeli na wale znajduje się większa liczba kół, to, idąc powyższą drogą, dojdziemy zawsze do układu sił, przecinających oś wału pod kątem prostym i do par skręcających. Dla wyznaczenia naprężeń w dowolnym przekroju wału należy znaleźć wielkości momentu zginającego i skręcającego. Siły zginające mogą leżeć nie w jednej płaszczyźnie, wobec czego wypadnie rozłożyć te siły na składowe, leżące w dwu wzajemnie prostopadłych płaszczyznach, przechodzących przez oś wału. Skoro przez M_1 i M_2



Rys. 266

oznaczymy składowe momenty zgięcia w rozpatrywanym przekroju, odpowiadające tym płaszczyznom, natenczas wypadkowym momentem zginającym będzie

$$M_{zg} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}.$$

W przypadku przekroju okrągłego będzie każda oś główną, zgięcie zajdzie przeto w płaszczyźnie momentu M_{zg} , a wartością największych naprężeń normalnych będzie:

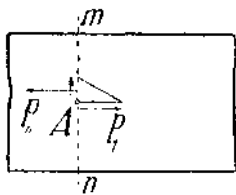
$$p_{max} = \frac{M_{zg} r}{I} = \frac{4 M_{zg}}{\pi r^3} \quad \dots \quad (a)$$

przyczem r oznacza promień wału. Oprócz naprężeń normalnych działają w płaszczyźnie przekroju poprzecznego naprężenia styczne, wywołane siłą poprzeczną i momentem skręcającym. U wałów mogą decydować o wytrzymałości tylko naprężenia ścinające wskutek skręcania, albowiem ich największe wartości schodzą się z największymi wartościami naprężeń normalnych, wywołanych we włóknach skrajnych momentem zginającym. Tam osiągają naprężenia skręcające wartość

$$(p_t)_{max} = \frac{M_{sk} \cdot r}{I_p} = \frac{2 M_{sk}}{\pi r^3} \quad \dots \quad (b)$$

przyczem M_{sk} oznacza moment skręcający.

Jeżeli w rozpatrywanym przekroju mn weźmiemy na powierzchni wału punkt A , odpowiadający największemu naprężeniu normalnemu (rys. 267), to w elemencie przekroju mn , przechodzącym przez ten punkt, działa tak naprężenie normalne określone wzorem (a), jakoteż naprężenie styczne wyrażone wzorem (b). W przechodzącym zaś przez A elemencie przekroju podłużnego osiowego będą działać tylko naprężenia styczne. Zupełnie w ten sam sposób, jak przy wyznaczeniu największych naprężeń w przypadku ogólnego zginania, można tutaj wyszukać dwie płaszczyzny, przechodzące przez A i mające tę własność, że w nich działają tylko naprężenia normalne. Nazwiemy je płaszczyznami głównymi, a odpowiadające im naprężenia — naprężeniami głównymi. Ich wielkości będą na podstawie wzorów (77):



Rys. 267

$$p_{max} = \frac{p_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}; \quad p_{min} = \frac{p_n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}.$$

Wstawivszy tutaj wartość p_n i p_t , wyrażone wzorami (a) i (b), otrzymamy:

$$p_{max} = \frac{M_{zg}}{2W} \pm \frac{1}{2W} \sqrt{M_{zg}^2 + M_{sk}^2} = \frac{1}{2W} (M_{zg} + \sqrt{M_{zg}^2 + M_{sk}^2}) \quad \dots \quad (179)$$

Przez W oznaczyliśmy przytem moduł przekroju poprzecznego. Otrzymany wzór da się interpretować w ten sposób, że największe naprężenie, wywołane jednoczesnym zginaniem i skręcaniem okrągłych wałów, jest takie same, jakieby powstało przy czystym zginaniu fikcyjnym momentem o wielkości

$$M = \frac{1}{2} (M_{zg} + \sqrt{M_{zg}^2 + M_{sk}^2}).$$

Wyznaczywszy wielkości największego i najmniejszego naprężenia i przyjąwszy stosownie do warunków pracy wału wielkość naprężeń bezpiecznych R , możemy przejść do ustawienia wzoru dla obliczenia średnicy wału. Postać wzoru będzie rozmaita, zależnie od tego, jaka teoria wytrzymałości będzie służyć za podstawę wywodu. Skoro jako miarę wyężenia materiału przyjmujemy największe wydłużenie względne (II-ga teoria), to rozmiary wału należałoby obrać tak, aby

$$p_{max} - \sigma p_{min} \leq R,$$

czyli, po wstawieniu zamiast p_{max} i p_{min} ich wartości (179), i podstawieniu $\sigma = 0,3$ [w przypadku żelaza kowalnego lub stali]:

$$\frac{1}{W} (0,35 M_{zg} + 0,65 \sqrt{M_{zg}^2 + M_{sk}^2}) \leq R \quad \dots \quad (180)$$

Ten wzór, noszący nazwę wzoru de S.-Venant'a, stosują często przy obliczeniu wałów maszynowych. Przeciwno temu podniesiono w ostatnich czasach niemało zarzutów, osobliwie ze strony inżynierów angielskich, a praktyka przechodzi powoli do wzoru, osnutego na III-ciej teorii wytrzymałości, która zaleca wyznaczać wymiary konstrukcji według wartości największych naprężeń

stycznych¹⁾. Postępując się wyrażeniami dla p_{\max} i p_{\min} , możemy odpowiadający wzór przedstawić w postaci:

$$p_{\max} - p_{\min} = \frac{1}{W} \sqrt{M_{zg}^2 + M_{sk}^2} \leq R \quad (181)$$

Tego wzoru należy używać przy obliczeniu wałów, albowiem on jest oparty na hipotezie, potwierdzonej doświadczalnie [dla metali plastycznych].

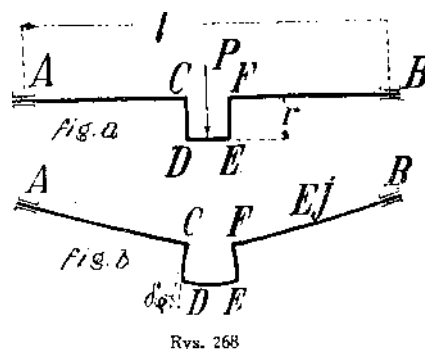
Co się tyczy obioru wielkości R , to wypada powtórzyć to samo, co powiedziano w rozdziale o skręcaniu. Wielkość naprężenia dopuszczalnego zależy od sposobu działania sił zewnętrznych i od ukształtowania miejsc zmiany przekroju części wału o różnych grubościach. Im raptowniej zmieniają się przekroje wału, tem większe będą nadwyżki naprężeń, które trzeba mieć na względzie.

§ 106. OBLICZENIE WAŁU KORBOWEGO WYGINANEGO

Zagadnienie rozmieszczenia naprężeń w wyginanym wale korbowym, jakkolwiek praktycznie bardzo ważne, nie posiada dotąd rozwiązania zupełnie zadowalającego. Brak dotychczas pewnych danych co do rozkładu ciśnień wzdłuż czopa i nie mamy formuł do obliczenia naprężeń w miejscach złączenia oddzielnych części wału. W zwykłych obliczeniach upraszcza się zadanie, zakładając: 1) że podpory wału leżą w środkach panewek, 2) że kąty między osiami poszczególnych części wału nie zmieniają się przy jego odkształceniu, a do każdej z części można zastosować wzory wyprowadzone dla prętów przyzmatycznych²⁾. Rozwiązanie zadania, oparte na takich założeniach, będzie naturalnie pierwszym przybliżeniem, ale o dalszem udoskonaleniu obliczeń drogą czysto teoretyczną trudno pomyśleć. Przy tych wymiarach wałów, z jakimi się spotykamy w praktyce, muszą grać ogromną rolę rozmaite przypadkowe przyczyny, jak np. niedokładności w rozmieszczeniu podpór, nieregularne zużycie panewek i t. d., a jaśniejsze wyobrażenie o charakterze i wielkości naprężeń możemy otrzymać tylko na podstawie badań doświadczalnych³⁾.

Jeżeli wał jest osadzony na dwu łożyskach, to przy założeniach przedstawionych powyżej znajdziemy bez trudności reakcje podporowe i wyznaczmy dla każdego przekroju poprzecznego wielkość momentu zginającego i skręcającego. Grubość wału można następnie obliczyć z wzoru (181). W przypadku wału podpartego trzema lub więcej łożyskami, staje się zadanie obliczenia reakcji statycznie niewyznaczalnym i dla jego rozwiązania musimy rozpatrywać odkształcenie wału, co wykonamy najdogodniej przy pomocy metody wykreślno-analitycznej. Jako najprostsz przykład weźmiemy wał wyginany $ACDEFB$ (rys. 268) o stałej sztywności zginania EI , spoczywający na dwu podporach A, B i obciążony siłą P , działającą w płaszczyźnie linii środkowej korby $CDEF$. Linja ugięcia wału będzie miała postać uwidocznioną na fig. (b). Wzdłuż części AC, DE i FB będą momenty zginające, a zatem i krzywizna linii ugięcia, takie same jak dla prostego pręta o długości l i sztywności EI , obciążonego w odpowiadającym przekroju siłą P . Co się tyczy części CD i FE , to na długości każdej z nich pozostaje moment zginający stałym. Weźmy np. część CD . Dla każdego przekroju poprzecznego tej części będzie moment zginający równy reakcji podporowej A , pomnożonej przez ramię AC . Wskutek działania stałego momentu zegniesz się oś części CD w łuk koła o promieniu

$$R = \frac{EI}{M_c}$$



Rys. 268

¹⁾ [Bardzo u nas rozpowszechnione podręczniki niemieckie tego rodzaju, jak „Hütte“ (w polskim wydaniu „Technik“) i t. p., ignorują niestety po dziś dzień postępy nauki i umieszczają wciąż wyłącznie wzory, oparte na niezgodnej z doświadczeniem II-giej teorii].

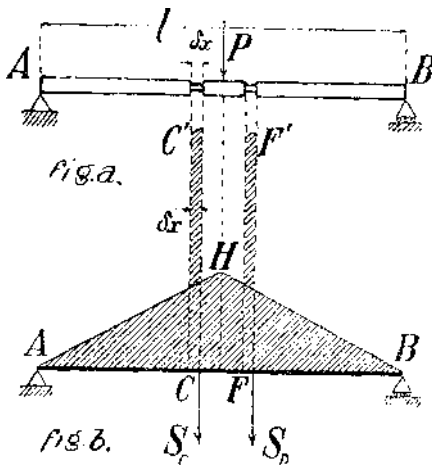
²⁾ Ob. pracę G. Düffling'a: „Beiträge zur Bestimmung der Formänderungen gekrümmter Kurbelwellen“. Berlin, 1906.

³⁾ Ob. pracę M. A. Woropajewa: „Izłom korenych wałow dwigatielej“. Izv. Kijewsk. Pol. Inst. z r. 1911.

jeżeli przez M_c oznaczymy moment w przekroju C . Styczne do linii ugięcia w punktach C i D zawierają kąt:

$$(\delta\varphi)_c = \frac{r}{R} = \frac{M_c r}{EI} \quad \dots \quad (a)$$

Wskutek zgięcia korb CD i FE nie będzie linia ugięcia części DE , podniesiona do wysokości CF , łączyć się gładko z częściami AC i FB . W punktach C i F otrzymamy nagłe zmiany kąta nachylenia stycznych o wielkości $(\delta\varphi)_c$ i $(\delta\varphi)_D$. Dzięki temu ugnie się wał więcej, niż odpowiadający



Rys. 269

prosty pręt o tej samej sztywności, a dla otrzymania wielkości ugięcia trzeba wał zastąpić prętem, opatrzonym w punktach C i F nagłym osłabieniem przekroju (rys. 269). Wskutek tych osłabień powiększy się silnie krzywizna zgiętej osi pręta w miejscach C i F . Zmniejszając długość osłabionych części i wielkość odpowiadającej im sztywności dojdziemy w granicy do załamania linii ugięcia, zakładając oczywiście, że odkształcenie zachodzi w granicach proporcjonalności. Rozmiary części osłabionej można zawsze tak obrać, aby otrzymać kąty załamania równe $(\delta\varphi)_c$ i $(\delta\varphi)_D$; wtedy ugięcie pręta zastępczego będzie identyczne z ugięciem naszego wału. Jeżeli przez EI_1 oznaczymy sztywność ze względu na zginanie w miejscu osłabionem, to równaniem linii ugięcia na długości osłabienia będzie

$$EI_1 \frac{d^2 y}{dx^2} = M,$$

a kąt między stycznymi do linii ugięcia, poprowadzonymi w końcach osłabionej części, obliczymy wzorem:

$$\delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{M dx}{EI_1}.$$

Ażebym wpływ osłabienia był równoważny wpływowi zginania korb CD i EF , trzeba przyjąć równości:

$$\frac{M_c \delta x}{EI_1} = \frac{M_c r}{EI} \quad \text{i} \quad \frac{M_D \delta x}{EI_1} = \frac{M_D r}{EI},$$

z czego wypada:

$$\delta x = r \frac{EI_1}{EI} \quad \dots \quad (b)$$

Im mniejsze jest EI_1 , tem mniejszą będzie i długość osłabionych części. Sprowadzając w ten sposób zgięcie wału do zgięcia osłabionego pręta, możemy znaleźć ugięcie drogą wykresno-analityczną. W tym celu wyobraźmy sobie belkę pod działaniem fikcyjnego obciążenia trójkątnego AHB , przedstawiającego powierzchnię momentów dla obciążenia siłą P . Na długości osłabionych części należy widocznie powiększyć rzędne diagramu momentów w stosunku $EI:EI_1$. Zmniejszając długość δx , musimy w tym samym stosunku zmniejszyć i EI_1 (wzór b). Wielkość zakreskowanych pól CC' i FF' pozostaje przytem niezmienną i równa się:

$$S_c = \delta x \cdot \overline{CC'} = \frac{r EI_1}{EI} M_c \cdot \frac{EI}{EI_1} = M_c r \quad \text{i} \quad S_D = \delta x \cdot \overline{FF'} = M_D r \quad \dots \quad (c)$$

Te pola można zastąpić w granicy siłami skupionymi o wielkości wyrażonej wzorami (c); wtedy ugięcie w jakimkolwiek przekroju wału będzie proporcjonalne względem odpowiedniego momentu zginającego wskutek fikcyjnego obciążenia ciągłego AHB i fikcyjnych sił skupionych S_c i S_D (rys. 269). Dla uproszczenia rozważań przyjęliśmy dotąd stałą sztywność EI we wszystkich częściach wału. W przypadku zmiennego przekroju można wszystkie części sprowadzić także do pewnej stałej sztywności EI_0 , trzeba tylko w diagramie momentów na długości każdej części zmienić rzędne w stosunku $EI_0:EI$, przyczem EI oznacza sztywność, odpowiadającą rozpatrywanej części. To samo należy uczynić z wielkością fikcyjnych sił skupionych.

Rys. (270) przedstawia wał wyginany wsparty na dwu łożyskach A i B . Wymiary i momenty bezwładności przekrojów podane w centymetrach. Dla wyznaczenia ugięcia sprowadzono wał do

przekroju stałego, odpowiadającego części AC ($I = 531 \text{ cm}^4$). Wskutek tego na długości $C'F'$ zwiększono rzędne powierzchni momentów w stosunku 531:490. W części $F'G'$ zmienia się powiększenie rzędnych od $\frac{531}{322}$ do $\frac{531}{201}$. Nakoniec w części $G'B'$ zwiększono rzędne w stosunku 531:64. Co się tyczy fikcyjnych sił skupionych S_C i S_D , to obliczono je według wzorów:

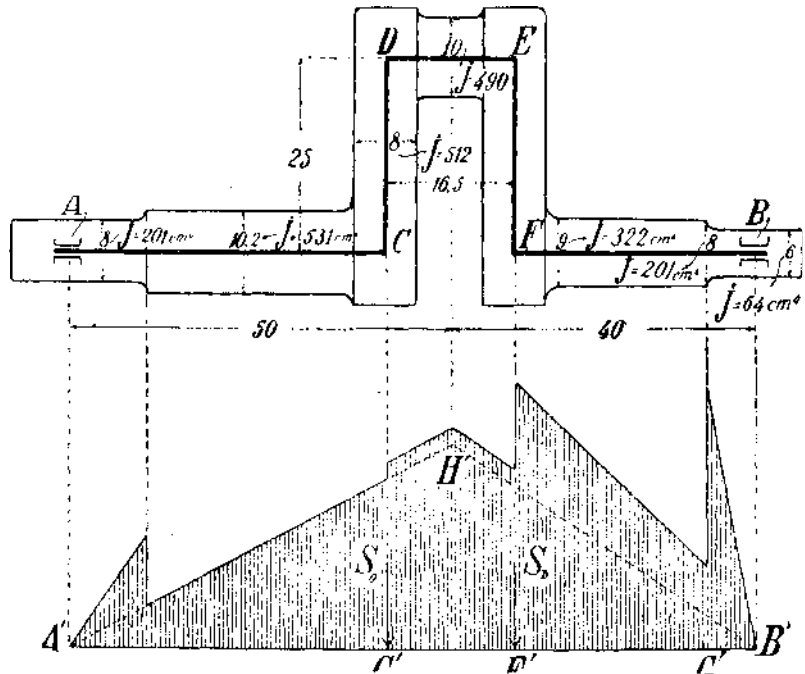
$$S_C = M_C \cdot 25 \cdot \frac{531}{512} \text{ kg.cm}^2, \quad S_D = M_D \cdot 25 \cdot \frac{531}{512} \text{ kg.cm}^2.$$

W przypadku, kiedy siła zginająca jest prostopadła do płaszczyzny korby $CDEF$ (rys. 271), można ugięcie wału znaleźć takim samym sposobem. Trzeba tylko uwzględnić, że części CD i EF będą teraz narażone na zginanie i skręcanie. Kąty załamania $(\delta\varphi)_C$ i $(\delta\varphi)_D$ będą określone wielkością skręcenia. Biorąc pod uwagę, że momenty skręcające części CD i EF są dokładnie równe momentom zginającym M_C i M_D , które występowały w poprzednim zadaniu, otrzymamy:

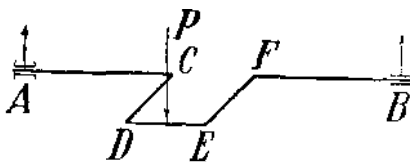
$$(\delta\varphi)_C = \frac{M_C r}{C} \quad \text{i} \quad (\delta\varphi)_D = \frac{M_D r}{C}.$$

Cała różnica od wyników poprzedniego zadania polega na tym, że zamiast sztywności zginania dla części CD i EF wchodzi we wzory sztywność skręcenia C . Mając te wyniki, łatwo rozwiązać zagadnienie zgięcia wału korbowego przy dowolnym nachyleniu siły do płaszczyzny korby; trzeba tylko tę siłę rozłożyć na dwie składowe i badać zginanie wskutek każdej składowej z osobna.

W przypadku podparcia wału na trzech lub więcej łożyskach, możemy tym samym sposobem, co poprzednio, sprowadzić zadanie do zgięcia prostego pręta z osłabionymi przekrojami. Jako wielkości statycznie niewyznaczalne najdogodniej przyjąć reakcje łożysk środkowych. Najpierw usuwamy środkowe podpory i badamy zgięcie wału spoczywającego na dwu podporach skrajnych, poczem dobieramy wielkości statycznie niewyznaczalne, tak, aby one zniósły ugięcie wału w przekrojach odpowiadających łożyskom środkowym.



Rys. 270



Rys. 271

CZĘŚĆ IV

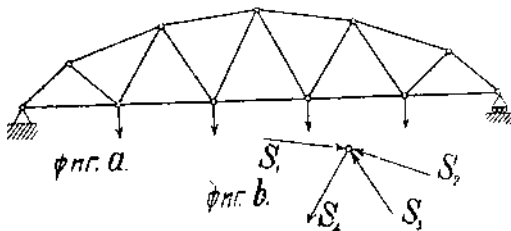
PRACA WEWNĘTRZNYCH SIŁ SPREŻYSTOŚCI¹⁾

ROZDZIAŁ XIV

OGÓLNE METODY OBLICZENIA UKŁADÓW STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH

§ 107. UKŁADY STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

Statycznie niewyznaczalnemi nazywamy te układy, dla których ogólne warunki równowagi nie wystarczają do wyznaczenia sił wewnętrznych lub reakcyj podporowych. Do tej kategorii zaliczają się roztrząśnione powyżej przypadki zgięcia belek wieloprzęsłowych i belek ze zbędnymi ustaleniami, a także w pewnych warunkach i układy złożone z prętów, czyli kratownice. Te ostatnie zyskały obszerne zastosowanie, zwłaszcza w konstrukcji mostów i dachów żelaznych. Przy



Rys. 272

obliczeniu kratownic przyjmuje się zwykle, że pręty łączą się w węzłach idealnymi przegubami bez tarcia. W tych warunkach siły zewnętrzne, działające tylko na węzły układu (rys. 272), wywołują wyłącznie rozciąganie lub ściskanie prętów. Skoro wydzielimy w myśli jakikolwiek węzeł (rys. b), to dla jego równowagi mamy 2, względnie 3 równania warunkowe, zależnie od tego, czy pręty leżą w jednej płaszczyźnie czy też nie. Dla kratownicy, mającej n węzłów, można przeto napisać odpowiednio $2n$ lub $3n$ równań. Jeżeli liczba równań zgadza się z liczbą nie-

wiadomych sił, do których zaliczamy tak siły wewnętrzne, jak i reakcje podporowe, a nadto układ jest geometrycznie niezmiennym, to wszystkie niewiadome dadzą się znaleźć z warunków równowagi. Obliczenie takich kratownic jest przedmiotem wykładów statyki wykresłnej. Jeżeli zaś liczba niewiadomych jest większa od liczby równań, to mamy do czynienia z układem statycznie niewyznaczalnym. Dla znalezienia sił wewnętrznych w prętach „zbędnych“ lub dla wyznaczenia „zbędnych“ reakcyj podporowych, trzeba do równań statyki dołączyć warunki uzupełniające, ustawione na podstawie rozpatrzenia odkształceń układu. Jeszcze bardziej złożone układy statycznie niewy-

¹⁾ Przy opracowaniu niniejszego rozdziału autor posługiwał się następującymi dziełami:

W. L. Kirpiczew. „Lisznija niezwiestnyja w stroitelnoj mechanikie“.

O. Mohr. „Abhandl. a. d. Gebiete der techn. Mechanik“.

A. Föppl. „Vorlesungen ü. techn. Mechanik“. Bd. II, III u. V.

H. Müller-Breslau. „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre“. 1904.

A. Castigliano. „Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme“.

Literaturę przedmiotu i historję rozwoju metod obliczenia układów statycznie niewyznaczalnych opracował szczegółowo M. Grüning w „Encyclopädie d. Math. Wissensch.“. Bd. IV, II, str. 419.

[Powyższy odsyłacz odnosi się do rozdziału XIV, gdyż rozdz. XV zawiera głównie wyniki własnej pracy autora].

znaczalne powstaną, skoro uwzględnimy sztywność połączeń węzłowych. Wtedy do niewiadomych sił wewnętrznych rozciągających lub ściskających przybywają niewiadome momenty zginające, a liczba zbytecznych niewiadomych silnie wzrasta, co znacznie komplikuje i utrudnia rozwiązanie zadania. W dalszym ciągu spotkamy się z bardzo różnorodnymi zadaniami i jako „zbyteczne“ niewiadome wypadnie obrać najróżnorodniejsze wielkości. Ażeby nasze wywody uogólnić i umożliwić ich zastosowanie we wszelkich przypadkach, będziemy się posługiwać najogólniejszą zasadą statyki, t. j. zasadą prac przygotowanych i ogólną własnością układów sprężystych, jaką jest zdolność nagromadzenia przy odkształceniu energii w postaci odwracalnej.

§ 108. ENERGJA POTENCJALNA UKŁADU SPRĘŻYSTEGO

Wszelkie techniczne konstrukcje przedstawiają się zwykle jako układy sprężyste, które się odkształcają pod wpływem obciążeń. Praca, wykonana przytem przez siły zewnętrzne, zamienia się na energję potencjalną układu. Ilość energii jest zupełnie określona końcową zmianą postaci i nie zależy od tego, według jakiego prawa wzrastały odkształcenia. Dla obliczenia ilości energii nagromadzonej w układzie sprężystym przyjmujemy, że obciążenia, wywołujące odkształcenie układu, wzrastają w sposób ciągły od zera do swojej wartości końcowej. To wzrastanie ma być przytem tak powolne, że siły bezwładności poruszających się mas można zupełnie pominąć. W tych warunkach będziemy mieli w ciągu całego odkształcenia równowagę między siłami zewnętrznymi a wewnętrznymi siłami sprężystości. Cała praca sił zewnętrznych zamieni się na energję potencjalną układu (jeżeli pominiemy tarcie, jakie zająć może w miejscach podparcia). Zadanie wyznaczenia energii odkształcenia sprowadza się w ten sposób do obliczenia pracy sił zewnętrznych. Taką samą wartość bezwzględną, jak praca sił zewnętrznych, ma i praca wewnętrznych sił sprężystości, albowiem podczas odkształcenia w przyjętych warunkach, zachodzi zawsze równowaga obu układów sił. Praca sił wewnętrznych będzie więc różnić się tylko znakiem od energii potencjalnej, nagromadzonej przy odkształceniu układu.

W rozpatrzonych poprzednio przypadkach rozciągania lub ściskania, ścinania i skręcania prętów przyrządkowych, okazaliśmy, że końcowa wartość energii, nagromadzonej w pręcie przy odkształceniu jest równa połowie iloczynu z końcowej wartości siły przez składową przesunięcia punktu działania siły, wziętą w kierunku jej działania (ob. §§ 4, 21, 39, 46). Tenże sam wynik można otrzymać i w ogólnym przypadku, jako konsekwencję prawa Hooke'a. Wyobraźmy sobie, że wszystkie siły, działające na dany układ, wzrastają od zera do swych końcowych wartości tak, że ich wzajemny stosunek jest w każdej chwili ten sam, co między końcowymi wartościami sił. Jeżeli materiał układu podlega przytem prawu Hooke'a, a działania sił są od siebie nawzajem niezależne, to przesunięcia punktów działania sił będą w każdej chwili proporcjonalne względem ich wielkości, a praca każdej z sił będzie równa iloczynowi końcowej wartości siły przez odpowiadające przesunięcie (ob. §§ 21, 46 i 47). Ten wynik otrzymał już Clapeyron, który znalazł także ogólne wyrażenie dla energii potencjalnej odkształconego ciała. Lamè, w swoim kursie teorii sprężystości¹⁾, podkreśla szczególne znaczenie twierdzenia Clapeyrona dla statyki konstrukcyj technicznych i stosuje je do obliczenia kratownic. Gdy w jakimkolwiek węźle kratownicy działa siła Q , a f jest przesunięciem punktu działania siły w kierunku tejże siły, to przy wzroście od zera aż do wartości końcowej Q wykona siła pracę

$$T = \frac{Qf}{2}.$$

Z drugiej strony praca ta równa się energii potencjalnej układu. Jeżeli S_1 , F_1 i l_1 oznaczają odpowiednio siłę wewnętrzną, pole przekroju poprzecznego i długość dowoinego pręta układu, to energję potencjalną tego pręta (wz. 7) będzie:

$$\frac{S_1^2 l_1}{2 E F_1}.$$

¹⁾ Ob. „Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité...“ 2-gie wyd. z r. 1866, str. 79.

a całkowitą energię układu określi formuła:

$$V = \sum \frac{S_i^2 l_i}{2EF_i} \dots \dots \dots (182)$$

w której sumowanie odnosi się do wszystkich prętów układu. Przyrównywując tę wartość energii potencjalnej do pracy sił zewnętrznych, otrzymał Lamè równanie:

$$Qf = \sum \frac{S_i^2 l_i}{EF_i},$$

z którego można znaleźć ugięcie f , skoro na podstawie równań statyki wyznaczyliśmy najpierw wartości S_i .

§ 109. ENERGJA POTENCJALNA PRZY ZGINANIU

W przypadku czystego zgięcia momentem M nastąpi względny obrót dwu przekrojów mn i pq (rys. 273) o kąt

$$\varphi = \frac{l}{\rho} = \frac{IM}{EI}.$$

Wyobraźmy sobie, że przy odkształceniu pozostaje przekrój mn nieruchomym i że moment wzrasta od zera do swej końcowej wartości M , to praca momentu będzie równa energii potencjalnej rozpatrywanej części pręta (§ 46):

$$V = \frac{M\varphi}{2} = \frac{M^2 l}{2EI} = \frac{\varphi^2 EI}{2l} \dots \dots \dots (183)$$

Przy ogólnem zgięciu zmienia się moment wzdłuż pręta i powstają oprócz normalnych jeszcze naprężenia styczne. Wpływ naprężeń stycznych staje się znaczniejszym tylko w przypadku krótkich prętów, i dlatego przy obliczeniu energii zgięcia pomija się zwykle pracę naprężeń stycznych. Wziąwszy pod uwagę element belki, ograniczony dwoma przekrojami poprzecznymi o wzajemnej odległości dx , możemy przy obliczeniu energii dV , w nim nagromadzonej, uważać moment zginający za stały i napisać na podstawie rów. (183):



Rys. 273

$$dV = \frac{M^2 dx}{2EI}, \text{ albo } dV = \frac{EI}{2} \cdot \frac{(d\varphi)^2}{dx} \dots \dots \dots (184)$$

Kąt między dwoma nieskończenie bliskimi przekrojami

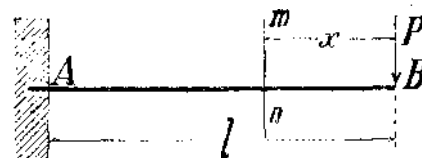
$$d\varphi = \frac{dx}{\rho},$$

albo w przybliżeniu, o ile promień krzywizny ρ jest dostatecznie wielki w porównaniu do długości belki

$$d\varphi = \frac{d^2 y}{dx^2} dx$$

Wstawivszy to w wyrażenie dla dV i wykonawszy sumowanie na całej długości pręta, znajdziemy całkowitą energję potencjalną zgiętego pręta:

$$V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}, \text{ albo } V = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \dots \dots (184)$$



Rys. 274

Tutaj występuje M jako wielkość zmienna, zależna od rozmieszczenia sił zewnętrznych.

Jako przykład rozpatrzmy przypadek zgięcia belki, jednym końcem utwierdzonej, siłą P , obciążającą drugi jej koniec (rys. 274). W przekroju mn , leżącym w odległości x od obciążonego końca jest moment zginający: $M = Px$.

Wstawiając tę wartość w pierwszą z formuł (184), otrzymamy:

$$V = \frac{P^2 l^3}{6 EI}.$$

Przyrównanie tego wyrażenia do pracy siły zewnętrznej P daje:

$$\frac{Pf}{2} = \frac{P^2 l^3}{6 EI},$$

z czego znajdziemy wzór dla strzałki ugięcia f , zgodny ze znalezionym poprzednio inną drogą.

Wzory (184) można zastosować i w tym przypadku, kiedy przekrój zmienia się wzdłuż pręta. Sztywność EI będzie wówczas funkcją x .

Zajmiemy się teraz oceną wpływu naprężeń ścinających na ugięcie belki i w tym celu ustawimy najpierw odpowiednie wyrażenie dla energii potencjalnej. Energię, nagromadzoną w elemencie narażonym na proste ścinanie, określa wyprowadzony powyżej wz. (41). Stosując go do warstwy elementarnej belki, ograniczonej dwoma przekrojami o wzajemnej odległości dx , którą to warstwę podzielimy na elementy o objętości $dF \cdot dx$, przyczem dF oznacza element pola przekroju, otrzymany przez całkowanie na obszarze pola przekroju:

$$dV_1 = \int_F \frac{p_t^2 dF dx}{2G}$$

jako wyrażenie energii, nagromadzonej w warstwie elementarnej o grubości dx przez działanie naprężeń ścinających p_t . Jeżeli zamiast naprężenia p_t wstawimy jego wartość wyrażoną przez siłę poprzeczną Q (wz. 70) i zcałkujemy wzdłuż osi belki, natenczas całkowita energia ścinania, nagromadzona w belce, przedstawi się wzorem:

$$V_1 = \int_0^l dx \int_F \left(\frac{QS}{Ib} \right)^2 \frac{dF}{2G}.$$

W przypadku prostokątnego przekroju poprzecznego, o podstawie b i wysokości h , będzie wielkość S dla jakiegokolwiek punktu, leżącego w odległości z od osi obojętnej, równa (§ 59):

$$S_z = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Wstawiając to w poprzednie równanie i przyjąwszy $dF = b dz$, znajdziemy po zcałkowaniu

$$V = \frac{3}{5} \int_0^l \frac{Q^2 dx}{b h G} \quad \dots \quad (185)$$

W podobny sposób można znaleźć odpowiednie wyrażenia i dla innych postaci przekroju poprzecznego. Ogólnie możemy napisać:

$$V = k' \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2F G} \quad \dots \quad (186)$$

przyczem k' oznacza liczbę stałą, zależną od postaci przekroju.

Dla przekroju prostokątnego znaleźliśmy właśnie $k' = 1,2$. W przypadku przekroju dwuteowego (przekroju **I**) zmienia się k' od 2 (dla wysokości 50 cm) do 2,4 (dla wysokości 8 cm). Całkowite wyrażenie dla energii potencjalnej ogólnego zgięcia otrzymamy, sumując wartość energii, odpowiadającej działaniu momentu zgięcia, z powyżej znalezionem wyrażeniem dla energii ścinania. A zatem:

$$V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} + k' \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2F G} \quad \dots \quad (187)$$

To sumowanie jest uzasadnione niezależnością działania momentu i siły poprzecznej. Przy odkształceniu postaciowem, wywołanem naprężeniami ścinającymi, nie wykonują naprężenia normalne, jako

prostopadle do kierunku przesunięcia, żadnej pracy. Nawzajem nie wykonują widocznie pracy i naprężenia ścinające przy wydłużeniu elementów wskutek naprężeń normalnych. Siła poprzeczna nie wywołuje przeto żadnych zmian w pracy wykonanej przez moment zginający i nawzajem. W innych przypadkach złożonego stanu napięcia, np. przy jednoczesnym działaniu zginania i skręcania albo zginania i ściskania, możemy zwykle obliczyć energję całkowitą przez sumowanie energii, odpowiadających składowym stanom napięcia. Takie postępowanie da się często uzasadnić niezależnością prac, odpowiadających odkształceniom różnego typu. Przypadki wyjątkowe, w których takie obliczenie staje się niedopuszczalnem, rozpatrzemy poniżej.

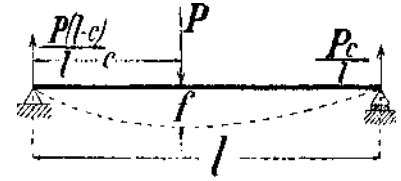
§ 110. UOGÓLNIONE SPÓŁRZĘDNE I UOGÓLNIONE SIŁY

Z pojęcia ciała sprężystego wynika, że energja potencjalna, nagromadzona przy odkształceniu, zależy od ostatecznej zmiany postaci ciała i jest zupełnie określona tą zmianą. Jakkolwiekbyśmy odkształcili ciało sprężyste, to zawsze przy powrocie do pewnej określonej postaci równowagi przybierze energja potencjalna tę samą wartość, odpowiadającą tej postaci. Wielkości zmienne niezależne, określające odkształconą postać ciała, nazwiemy *spółrzednymi*. Energja potencjalna będzie zatem jednoznacznie określona funkcją tych *spółrzednych*. Za *spółrzedne* mogą służyć w rozmaitych szczególnych przypadkach rozmaite wielkości. Tak np. przy badaniu rozciągania prętów jest odkształcenie zupełnie określone wielkością wydłużenia; w swoim czasie przyjęliśmy tę wielkość za *spółrzedną* i w zależności od niej ustawiliśmy wyrażenie dla energii potencjalnej. Przy rozpatrywaniu skręcenia określał zmianę postaci kąt skręcenia φ i tę wielkość uważaliśmy za *spółrzedną*. Podobnie przyjęliśmy za *spółrzedną* czystego zginania kąt względnego obrotu końcowych przekrojów pręta (§ 109). Wyliczyliśmy tylko kilka najprostszych przypadków, w których zmianę postaci określa jedna wielkość, jedna *spółrzedna*. Ale często wypadnie mieć do czynienia z kilku *spółrzednymi*, a w najogólniejszym przypadku z nieskończoną liczbą *spółrzednych*. Wprowadzając uogólnione pojęcie *spółrzednych*, wypada posługiwać się uogólnionem pojęciem siły. W licznych bowiem przypadkach dogodniej rozpatrywać nie każdą siłę z osobna, lecz pewne grupy sił. Często np. spotykamy się z parami sił, które są zupełnie określone momentami. Niekiedy znowu mamy do czynienia z obciążeniem równomiernie rozłożonem wzdłuż belki. Działanie sił zewnętrznych jest w tym przypadku zupełnie określone „natężeniem“ obciążenia, t. j. wielkością obciążenia, przypadającego na jednostkę długości belki. Przy badaniu zgięcia belki na dwu podporach, obciążonej jednym ciężarem skupionym, mamy do czynienia z siłą zginającą i odpowiednimi reakcjami podpór. Ten układ trzech sił jest zupełnie określony wielkością owego ciężaru skupionego i dlatego można rozpatrywać całą grupę sił jako jedną uogólnioną siłę.

W poprzednio roztrząsanych przykładach już się posługiwaliśmy uogólnionemi siłami i wyrażaliśmy energję potencjalną ciała jako funkcję tych sił. Np. przy rozciąganiu pręta mieliśmy do czynienia nie z jedną siłą, lecz z dwiema siłami rozciągającemi równomiernie i wprost przeciwnemi. Przy skręcaniu i czystem zginaniu mieliśmy po dwie pary sił, równoważące się nawzajem. Tę grupę sił określa wielkość momentu pary M , a energję odkształcenia przedstawiliśmy w postaci funkcji uogólnionej siły M . Przy obiorze uogólnionych *spółrzednych* i uogólnionych sił trzeba mieć na oku pewną określoną odpowiedniość między temi wielkościami. *Spółrzedna* może mieć wymiar długości, wymiar oderwanej liczby, pola i t. p. Otóż każdemu typowi *spółrzednej* odpowiada określony typ uogólnionej siły. Jak należy pojmować tę odpowiedniość, najlepiej objaśnić na przykładach. Przy rozpatrywaniu prostego rozciągania przyjęło za uogólnioną *spółrzedną* wydłużenie pręta λ . Uogólniona siła przedstawiała się jako dwie równoważące się nawzajem siły P . Jeżeli *spółrzednej* λ udzielimy nieskończenie małego przyrostu $\delta\lambda$, to siły zewnętrzne wykonują przytem pracę $P\delta\lambda$, równą iloczynowi uogólnionej siły przez przyrost *spółrzednej*. Przy skręcaniu i czystem zgięciu mieliśmy *spółrzedną* φ i uogólnioną siłę M . Praca sił zewnętrznych, wykonana podczas zmiany *spółrzednej* o wielkości $\delta\varphi$ będzie $M\delta\varphi$, t. j. znowu przedstawia się iloczynem siły przez przyrost *spółrzednej*. Tem też określa się wzmiankowana powyżej odpowiedniość między uogólnionemi *spółrzednymi* i uogólnionemi siłami. Obrawszy raz pewien układ *spółrzednych*, musimy uogólnione

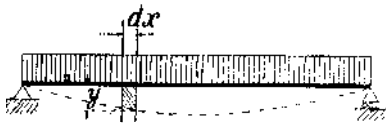
siły obrać tak, aby iloczyny sił zewnętrznych przez przyrosty współrzędnych dawały pracę sił zewnętrznych. Przytoczmy jeszcze parę przykładów:

Belka w obu końcach podparta i zginana siłą skupioną P (rys. 275). Grupę złożoną z siły P i odpowiadających reakcji przyjmiemy za uogólnioną siłę. Praca tych sił przy odkształceniu belki jest zupełnie określona zmianą wielkości ugięcia f , wobec czego należy w danym przypadku przyjąć to ugięcie za uogólnioną współrzędną.



Rys. 275

Rozpatrzmy teraz zgięcie belki obciążeniem równomiernie rozłożonym (rys. 276). Oprócz danego obciążenia będą na belkę działać nadto reakcje podpór. Cała ta grupa sił jest określona natężeniem obciążenia q , to też przyjmiemy tę wielkość za uogólnioną siłę. Jaką wielkość wypadnie w takim przypadku przyjąć za uogólnioną współrzędną? Aby na to pytanie odpowiedzieć, znajdziemy wyrażenie dla pracy sił zewnętrznych przy odchyleniu belki od położenia równowagi. Jeżeli przez y oznaczymy ugięcie belki w dowolnym przekroju, a przez δy nieskończenie małą zmianę tego ugięcia, to praca obciążenia na długości dx będzie równa $q dx \delta y$. Praca całego obciążenia wyrazi się przez



Rys. 276

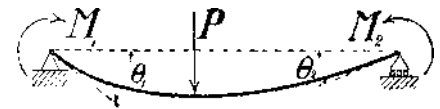
$$\int_0^l q dx \cdot \delta y = q \int_0^l dx \delta y \quad (a)$$

Ze względu na to, że $\int_0^l y dx$ jest niczym innym, jak polem F ,

zawartem między pierwotną osią belki a linią ugięcia, można wyrażenie (a) przedstawić w postaci $q \delta F$. Jako uogólnioną współrzędną,

zgodnie z wypowiedzianym określeniem, należy przeto przyjąć wielkość F .

Weźmiemy jeszcze przykład, w którym zmianę postaci pręta określa kilka współrzędnych, a mianowicie belkę zginaną siłą P , oraz parami sił M_1 i M_2 , działającymi na jej końce (rys. 277). Tutaj rozróżniamy trzy niezależne od siebie grupy sił. Jedna z tych grup składa się z siły P i wywołanych nią reakcji podporowych. Dwie inne grupy są utworzone z par M_1 i M_2 wraz z odpowiadającymi im reakcjami podpór. Te grupy sił przyjmiemy za uogólnione siły i określimy je wielkościami P , M_1 i M_2 . Aby znaleźć odpowiadające uogólnione współrzędne, rozpatrzmy pracę sił zewnętrznych przy bardzo małym odchyleniu belki od położenia równowagi. Pary sił M_1 i M_2 wykonują pracę tylko wtedy, gdy zmieniają się kąty obrotu końców ϑ_1 i ϑ_2 . Siła P zaś pracuje przy zmianie ugięcia f w obciążonym przekroju. Oznaczmy przez $\delta \vartheta_1$, $\delta \vartheta_2$ i δf przyrosty ϑ_1 , ϑ_2 i f przy odchyleniu belki od położenia równowagi, a pracę sił zewnętrznych odpowiadającą temu odchyleniu przedstawi wyrażenie:



Rys. 277

$$M_1 \cdot \delta \vartheta_1 + M_2 \delta \vartheta_2 + P \delta f.$$

Wielkości ϑ_1 , ϑ_2 i f będą przeto uogólnionymi współrzędnymi w danym przypadku.

§ 111. OGÓLNE WYRAŻENIE ENERGII POTENCJALNEJ CIAŁ SPRĘŻYSTYCH

W rozpatrywanych przez nas przykładach (ob. § 108) można było energję potencjalną przedstawić albo jako funkcję sił zewnętrznych albo jako funkcję współrzędnych. W obu przypadkach wypadła funkcja kwadratowa jednorodna. Przechodząc od szczegółowych przykładów do przypadku ogólnego, wyjaśnimy przedewszystkiem, w jakich warunkach energia odkształcenia wyrazi się funkcją kwadratową jednorodną. W tym celu użyjemy zasady prac przygotowanych („wyobraźalnych“). Wydzielmy z układu sprężystego jeden punkt materialny. Oprócz sił zewnętrznych będą nań działać wewnętrzne siły sprężystości, zastępujące działanie reszty układu na wydzielony punkt. Dla równowagi tego punktu musi praca sił zewnętrznych i wewnętrznych nań działających, przy

się działania poszczególnych sił, a każda spółrzędna zależy linjowo od sił. Dla uogólnionych spółrzędnych otrzymamy wyrażenia:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= a_1 \Phi + b_1 \Psi + c_1 \Theta + \dots \\ \psi &= a_2 \Phi + b_2 \Psi + c_2 \Theta + \dots \\ \vartheta &= a_3 \Phi + b_3 \Psi + c_3 \Theta + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (192)$$

Tutaj oznaczają a_1, \dots, c_1, \dots wielkości stałe, zależne od własności układu sprężystego. Stałe dodajniki nie wchodzą w wyrażenia (192), ponieważ nasze spółrzędne mierzymy od naturalnego stanu układu (bez naprężeń), a zatem wartości $\varphi, \psi, \vartheta, \dots$ muszą się równać zeru, skoro siły $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$ stają się zerem. Rozwiązując równania (192) względem $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$ wyrazimy uogólnione siły przez spółrzędne. Te wyrażenia będą linjowymi funkcjami spółrzędnych o postaci:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= A_1 \varphi + B_1 \psi + C_1 \vartheta + \dots \\ \Psi &= A_2 \varphi + B_2 \psi + C_2 \vartheta + \dots \\ \Theta &= A_3 \varphi + B_3 \psi + C_3 \vartheta + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (193)$$

Podstawivszy te wartości w równania (191), znajdziemy, że pochodne cząstkowe energii potencjalnej względem spółrzędnych są linjowymi funkcjami tychże spółrzędnych, a ponieważ te funkcje nie zawierają stałych dodajników, więc energję potencjalną układu przedstawia jednorodna kwadratowa funkcja spółrzędnych. Wstawivjąc zaś zamiast spółrzędnych ich wyrażenia (192), znajdziemy energję potencjalną w postaci jednorodnej kwadratowej funkcji sił zewnętrzných.

Jako przykład weźmiemy zgięcie belki w obu końcach podpartej pod wpływem par sił, działających na te końce. Za uogólnione spółrzędne przyjmivmy kąty obrotu przekrojów końcowych ϑ_1 i ϑ_2 ; odpowiadającemi uogólnionemi siłami będą wtedy momenty par M_1 i M_2 . Układ równań (192) przybierze w tym przypadku postać (§ 78):

$$\vartheta_1 = \frac{M_1 l}{3EI} + \frac{M_2 l}{6EI}, \quad \vartheta_2 = \frac{M_2 l}{3EI} + \frac{M_1 l}{6EI} \quad \dots \dots \dots (a)$$

Rozwiązując te równania względem uogólnionych sił, znajdziemy wyrażenia, odpowiadające układowi (193):

$$M_1 = \frac{2EI}{l}(2\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad \text{i} \quad M_2 = \frac{2EI}{l}(2\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Zważywszy, że według (191) jest

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta_1} = M_1 \quad \text{i} \quad \frac{\partial V}{\partial \vartheta_2} = M_2,$$

otrzymamy wyrażenie dla energii potencjalnej w postaci następującej jednorodnej kwadratowej funkcji spółrzędnych:

$$V = \frac{2EI}{l}(\vartheta_1^2 - \vartheta_1 \vartheta_2 + \vartheta_2^2).$$

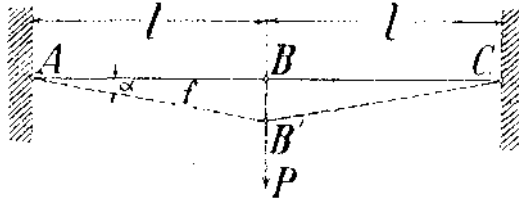
Jeżeli zamiast spółrzędnych wstawivmy ich wyrażenia przez uogólnione siły M_1 i M_2 , to otrzymamy:

$$V = \frac{l}{6EI}(M_1^2 + M_1 M_2 + M_2^2).$$

Niekiedy obiera się dla uproszczenia uogólnione spółrzędne tak, aby w wyrażeniu dla energii potencjalnej znikaly wyrazy, zawierające iloczyny spółrzędnych. Spółrzędne, dogadzające temu warunkowi nazywają się głównemi albo normalnemi. Grają one ważną rolę w teorii drgań. W dalszym ciągu będziemy ich używać przy badaniu zgięcia belek.

§ 112. PRZYPADKI WYJĄTKOWE

Przy ustawieniu ogólnego wyrażenia dla energii odkształcenia przyjęliśmy, że ciało podlega prawu Hooke'a i że zachodzi zasada superpozycji. Jeżeli jednak układ jest tego rodzaju, że jego odkształcenie zmienia istotnie działanie sił zewnętrznych, to zasada superpozycji nie zachodzi, a energia nie da się wyrazić jednorodną kwadratową funkcją współrzędnych. Objasnimy to na przykładach.



Rys. 278

Dwa pręty pryzmatyczne o równej długości l , leżące na jednej prostej, są połączone ze sobą i ze stałymi ścianami zapomocą przegubów A, B, C (rys. 278). Na ten układ działa jedyna siła P w punkcie B . Pod jej działaniem pręty się wydłużają, a przegub B przejdzie w położenie B' . Odkształcenie układu jest zupełnie określone przesunięciem f punktu B . Tę wielkość przyjmiemy za

uogólnioną współrzędną; odpowiadającą uogólnioną siłą będzie widocznie ciężar P wraz z reakcjami w przegubach A i C . Szukajmy wyrażenia dla energii potencjalnej odkształconego układu. Jeżeli przez α oznaczymy kąt obrotu prętów, wywołany ich odkształceniem, to dla wydłużenia prętów znajdziemy wyrażenie:

$$\lambda = \frac{l}{\cos \alpha} - l.$$

Uwzględniając, że kąt α jest bardzo mały i zastępując $\cos \alpha$ w przybliżeniu przez $1 - \frac{\alpha^2}{2}$, możemy napisać:

$$\lambda = l \frac{\alpha^2}{2}.$$

Zamiast $\sin \alpha$ będziemy w dalszym ciągu pisać α . Z warunku równowagi w węźle B' znajdziemy jako wartość siły wewnętrznej w prętach $S = \frac{P}{2\alpha}$. Odpowiadającym wydłużeniem prętów będzie: $\frac{P}{2\alpha} \frac{l}{EF}$. Z porównania obu wartości λ otrzymamy:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{P}{EF}},$$

a zatem siła wewnętrzna

$$S = \frac{P}{2\alpha} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{P^2 EF}$$

Energia potencjalna nagromadzona w układzie przy rozciąganiu prętów będzie równa:

$$V = \frac{S^2 l}{EF} = \frac{Pl}{4} \sqrt[3]{\frac{P}{EF}} \quad \dots \quad (a)$$

Jak widać, nie otrzymaliśmy kwadratowej funkcji sił zewnętrznych, co też było do przewidzenia, ponieważ współrzędna

$$f = l\alpha = l \sqrt[3]{\frac{P}{EF}} \quad \dots \quad (194)$$

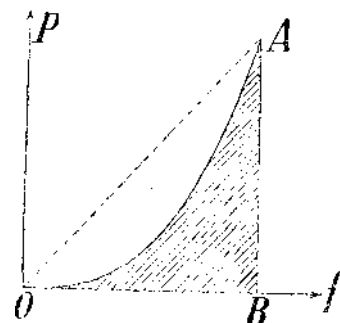
nie jest liniową funkcją siły P . Przy pomocy ostatniej formuły można energię potencjalną układu przedstawić wyrażeniem:

$$V = \frac{Pf}{4}.$$

Ten wynik różni się od innych, otrzymanych w poprzednich przykładach. Dopóki przesunięcia były proporcjonalne względem sił, to energia potencjalna była równą połowie iloczynu końcowej wartości siły przez odpowiadającą współrzędną. W danym przypadku równa się energia tylko ćwierci

tego iloczynu. Znaczenie tego wyniku objaśni najlepiej diagram, przedstawiający zależność P od f (rys. 279). Jeżeli przy pomocy wzoru (194) odmierzymy odpowiadające sobie wartości f i P jako odcięte i rzędne punktów diagramu, to nie otrzymamy prostej, jak to bywało pierwiej, lecz pewną krzywą OA . Pole zawarte między krzywą, osią odciętych i rzędną końcową, przedstawia pracę siły P podczas odkształcenia (przy założeniu, że siła rośnie w sposób ciągły od zera do końcowej swej wartości) i jest zarazem miarą energii potencjalnej, nagromadzonej w układzie. To pole jest mniejsze od pola trójkąta OAB , odpowiadającego linijowej zależności między siłą a przesunięciem. Wstawimy za P wartość obliczoną z równ. (194), wyrazimy energię potencjalną jako funkcję f , a mianowicie:

$$V = \frac{EF}{4l^3} f^4.$$



Rys. 279

Tutaj wchodzi czwarta potęga współrzędnej f . Przez różniczkowanie znajdujemy:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \frac{EF}{l^3} f^3 = P.$$

Posługując się tem ogólnem prawidłem, że pochodna energii potencjalnej względem współrzędnej równa się odpowiadającej sile, można uprościć rozwiązanie zadania. W tym celu wyrażamy wydłużenie pręta przez współrzędną f równaniem

$$l = \sqrt{l^2 + f^2} - l = \frac{1}{2} \frac{f^2}{l},$$

przyczem uwzględniono, że f jest małe wobec l , a więc

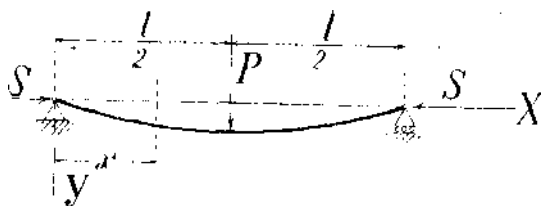
$$\sqrt{l^2 + f^2} = l \left(1 + \frac{f^2}{l^2} \right)^{\frac{1}{2}} = l \left(1 + \frac{1}{2} \frac{f^2}{l^2} \right).$$

Energja potencjalna układu

$$V = \frac{\lambda^2 EF}{l} = \frac{EF}{4l^3} f^4.$$

Różniczkując to wyrażenie względem f , otrzymamy siłę P jako funkcję f .

Jako drugi przykład rozpatrzmy najprostszyp przypadek jednoczesnego działania zgięcia i ściskania (rys. 280). Belka w obu końcach podparta jest obciążona w środku rozpiętości siłą prostopadłą P , a nadto ściskana siłami podłużnymi S . W danym przypadku zasada superpozycji nie może mieć zastosowania, albowiem odkształcenie (ugięcie), wywołane siłą P , zmienia działanie sił podłużnych S , które wywołują nie tylko ściskanie, lecz mają także wpływ na zgięcie belki. Należy tedy oczekiwać, że energja potencjalna zgiętego pręta nie będzie funkcją jednorodną kwadratową. Jakoż równanie różniczkowe równowagi przybiera w danym przypadku postać:



Rys. 280

$EIy'' = -\frac{P}{2}x - Sy.$

Jego ogólną całką jest, jak łatwo się przekonać przez podstawienie:

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{Px}{2S},$$

przyczem

$$\alpha = \sqrt{\frac{S}{EI}},$$

zaś A i B są dowolnymi stałymi całkowania. Warunki krańcowe dla wyznaczenia tych stałych są następujące:

$$\text{Dla } x=0 \text{ ma być } y=0, \text{ zaś dla } x=\frac{l}{2} \text{ ma być } y'=0.$$

Pierwszy warunek da nam $B=0$, a z drugiego znajdujemy:

$$A = -\frac{P}{2\alpha S \cos \frac{\alpha l}{2}}$$

Ostatecznie napiszemy równanie linii ugięcia lewej połowy belki w postaci:

$$y = -\frac{P}{2\alpha S \cos \frac{\alpha l}{2}} \sin \alpha x - \frac{Px}{2S} \quad \dots \quad (c)$$

Podstawiając tutaj $x = \frac{l}{2}$, znajdziemy strzałkę ugięcia:

$$f = \frac{P}{2\alpha S} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2} \right).$$

Ten wynik da się przedstawić w dogodniejszej formie, jeżeli zastąpimy S wartością $\alpha^2 EI$. Po łatwych przekształceniach otrzymujemy:

$$f = \frac{Pl^3}{48EI} \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2} = f_0 \mu \quad \dots \quad (195)$$

Tutaj oznaczono przez f_0 ugięcie, otrzymane przy działaniu samej siły prostopadłej P . Współczynnik μ zależy od rozmiarów belki i od wielkości siły podłużnej¹⁾, zaś ugięcie f zależy linjowo od siły P . Zależność od siły podłużnej jest bardziej złożona. Ustawmy teraz wyrażenie dla energii zginania pręta. Wstawiając zamiast ugięcia y , znalezione powyżej wyrażenie (a), otrzymamy:

$$V = EI \int_0^{\frac{l}{2}} (y'')^2 dx = \frac{P^2 l \left(1 - \frac{\sin \alpha l}{\alpha l} \right)}{16 S \cos^2 \frac{\alpha l}{2}} \quad \dots \quad (196)$$

Dołączając do tego energję ściskania $\frac{S^2 l}{2EF}$, znajdziemy całkowitą energję odkształconego pręta. Jak i w poprzednim przypadku nie przedstawia się wyrażenie energii jako jednorodna kwadratowa funkcja sił zewnętrznych.

Nakoniec wskażemy jeszcze na zagadnienie ściskania kul i walców (§ 37). Tutaj wielkość spłaszczenia nie jest proporcjonalną względem nacisku, wobec czego energia potencjalna również nie będzie się wyrażać funkcją jednorodną kwadratową.

Wszystkie powyższe przypadki są jednakże wyjątkami z reguły; zagadnienia jednoczesnego działania zginania i rozciągania, albo zginania ze ściskaniem, stanowią [obok przypadku ściskania kul i walców] niemal że jedyne przykłady praktycznego znaczenia, w których nie zachodzi zasada superpozycji. Z tego powodu dalsze twierdzenia, przy wywodzie których przyjmujemy, że energia potencjalna jest jednorodną kwadratową funkcją współrzędnych, znajdują w rozlicznych działach nauki o wytrzymałości jak najszerze zastosowanie.

§ 113. TWIERDZENIE CASTIGLIANO'Ń

Powyżej dowiedliśmy, że pochodna energii potencjalnej względem jakiejkolwiek współrzędnej równa się odpowiadającej sile (wz. 191). Twierdzenie Castigliano'Ń wyraża nawzajem, że pochodna

¹⁾ Okażemy później (rozdz. XV), że dla prętów o wymiarach poprzecznych niezbyt małych w porównaniu z długością zbliża się współczynnik μ do jednostki. W takim razie można pominąć wpływ siły podłużnej na ugięcie i posługiwać się, jak to czyniliśmy poprzednio, zasadą superpozycji.

energji potencjalnej względem jakiegokolwiek siły jest równa odpowiadającej spólrzędnej. Dla zastosowania twierdzenia Castigliano'a trzeba energję potencjalną przedstawić jako funkcję niezależnych sił zewnętrznych, a funkcja ta powinna być kwadratową jednorodną. Twierdzenie Castigliano'a łatwo sprawdzić na szczególnych przypadkach rozpatrywanych poprzednio; dowód ogólny przeprowadzimy w następujący sposób:

Ażeby utworzyć pochodną energii potencjalnej względem dowolnej uogólnionej siły, np. Φ , trzeba tej sile udzielić bardzo małego przyrostu $\delta\Phi$ i znaleźć odpowiadający przyrost energii potencjalnej δV . Wiemy, że przy ważności prawa Hooke'a i zasady superpozycji przedstawia się każda ze spólrzędnych $\varphi, \psi, \vartheta, \dots$ jako linjowa funkcja uogólnionych sił $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$ (wz. 192) i jeżeli sile Φ udzielimy przyrostu $\delta\Phi$, to odpowiadającymi przyrostami spólrzędnych będą:

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} \delta\Phi, \quad \delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\Phi} \delta\Phi, \quad \delta\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial\Phi} \delta\Phi \dots \dots \dots (a)$$

Przy tej zmianie spólrzędnych wykonują siły zewnętrzne układu pracę elementarną δT , która się zamienia na odpowiedni przyrost energii potencjalnej δV . Z pojęcia uogólnionych sił i spólrzędnych wynika następujące wyrażenie dla pracy sił zewnętrznych na przesunięciach $\delta\varphi, \delta\psi, \delta\vartheta, \dots$:

$$\delta T = (\Phi + \delta\Phi) \delta\varphi + \Psi \delta\psi + \Theta \delta\vartheta + \dots$$

Przyrównawszy to wyrażenie do przyrostu energii potencjalnej i opuściwszy dodajnik $\delta\Phi \cdot \delta\varphi$, jako nieskończenie mały wyższego rzędu, otrzymamy po podstawieniu wartości (a):

$$\delta V = \Phi \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} \delta\Phi + \Psi \frac{\partial\psi}{\partial\Phi} \delta\Phi + \Theta \frac{\partial\vartheta}{\partial\Phi} \delta\Phi + \dots,$$

a stąd

$$\frac{\partial V}{\partial\Phi} = \lim \left(\frac{\delta V}{\delta\Phi} \right) = \Phi \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} + \Psi \frac{\partial\psi}{\partial\Phi} + \Theta \frac{\partial\vartheta}{\partial\Phi} + \dots \dots \dots (b)$$

Ale pochodna cząstkowa $\frac{\partial V}{\partial\Phi}$ da się obliczyć jeszcze w drugi sposób, a mianowicie przez różniczkowanie równania:

$$2V = \Phi\varphi + \Psi\psi + \Theta\vartheta + \dots,$$

wyrażającego twierdzenie Clapeyron'a, że energia potencjalna układu równa się połowie sumy iloczynów sił przez odpowiadające im spólrzędne (§ 108). Mamy tedy:

$$2 \frac{\partial V}{\partial\Phi} = \varphi + \Phi \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} + \Psi \frac{\partial\psi}{\partial\Phi} + \Theta \frac{\partial\vartheta}{\partial\Phi} + \dots \dots \dots (c)$$

Przy tem różniczkowaniu uwzględniliśmy, że $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$ są wielkościami niezależnymi, spólrzędne zaś $\varphi, \psi, \vartheta, \dots$ są wogóle zależne od wszystkich sił. Z odjęcia od siebie równań (b) i (c) wynika wzór:

$$\frac{\partial V}{\partial\Phi} = \varphi \dots \dots \dots (197)$$

który wyraża twierdzenie Castigliano'a, że pochodna energii potencjalnej układu względem jakiegokolwiek siły równa się odpowiadającej spólrzędnej.

Twierdzenie Castigliano'a dostarcza nader wygodnego sposobu do wyznaczenia przesunięć; trzeba jednak pamiętać, aby energję potencjalną przedstawić w postaci funkcji niezależnych sił, a funkcja ta powinna być kwadratową jednorodną. W tych przypadkach, kiedy nie zachodzi zasada superpozycji, może posługiwanie się twierdzeniem Castigliano'a prowadzić do błędnych wyników, o czem łatwo się przekonać, stosując twierdzenie dla rozpatrywanych powyżej przypadków wyjątkowych (§ 112).

Korzyści z zastosowania twierdzenia Castigliano'a wykażemy najlepiej na przykładach.

Jako pierwszy przykład weźmiemy sprężynę śrubową, rozciąganą siłami P (rys. 88)¹⁾. Energią potencjalną układu jest (wz. 52):

$$V = \frac{M^2 l}{2GI_p} = \frac{P^2 R^2 \cdot 2\pi R n}{2GI_p}.$$

¹⁾ Kwestję odkształceń różnego rodzaju sprężyn traktuje szczegółowo książka A. Castigliano'a: „Theorie der Biegungs- und Torsions-Federn“.

Spólrzdną, odpowiadającą uogólnionej sile P będzie szukane wydłużenie sprężyny λ . Na podstawie twierdzenia Castigliano'a otrzymamy:

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{PR^3 2\pi n}{GI_p},$$

co zgadza się z wynikiem otrzymanym pierwiej inną drogą (wz. 55).

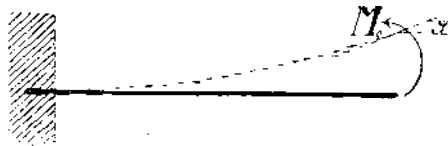
Znajdziemy teraz ugięcie belki jednym końcem utwierdzonej i obciążonej na drugim siłą P . Energię potencjalną wyrazimy jako funkcję siły P , wtedy odpowiednią spólrzdną będzie widocznie ugięcie końca belki f . Pomijając wpływ naprężeń ścinających, mamy:

$$V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}, \quad M = Px, \quad f = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{Pl^3}{3EI}$$

Rozpatrzmy dalej zgięcie tejże belki parą sił o momencie M_0 , działającą na swobodny koniec (rys. 281). Energię potencjalną wyrażamy jako funkcję M_0 . Odpowiadającą tej uogólnionej sile spólrzdną będzie kąt obrotu końca belki φ . Według twierdzenia Castigliano'a znajdziemy:

$$\varphi = \frac{\partial V}{\partial M_0} = \frac{\partial}{\partial M_0} \int_0^l \frac{M_0^2 dx}{2EI} = \frac{\partial}{\partial M_0} \left(\frac{M_0^2 l}{2EI} \right) = \frac{M_0 l}{EI}$$

Niekiedy trzeba znaleźć wielkość takich przesunięć, dla których niema odpowiadających sił zewnętrznych; wtedy wypadnie wprowadzić obciążenia fikcyjne (pomocnicze). Dajmy na to, że w ostatnim przykładzie interesuje nas nie kąt φ , lecz pionowe ugięcie końca belki (poziomej). Wprowadzamy tedy fikcyjną siłę pionową P , działającą na koniec belki. Przesunięciem odpowiadającym wprowadzonej sile będzie szukane ugięcie f . Na podstawie twierdzenia Castigliano'a:



Rys. 281

Tutaj

$$f = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$M = M_0 + Px, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = x$$

(jeżeli siłę pionową skierujemy do góry, aby otrzymać ugięcie ze znakiem dodatnim), a zatem:

$$f = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_0 + Px)x dx = \frac{M_0 l^2}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}$$

Ponieważ siły P w rzeczywistości niema, więc w otrzymanym wyniku trzeba podstawić $P=0$; szukanem ugięciem końca belki pod wpływem pary sił, nań działającej, będzie przeto:

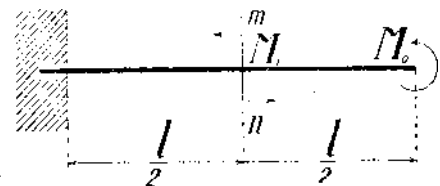
$$f = \frac{M_0 l^2}{2EI}$$

Przypuśćmy teraz, że w tym samym przypadku zginania belki parą sił, chcemy znaleźć kąt obrotu jakiegokolwiek przekroju pośredniego, np. przekroju m n w połowie rozpiętości (rys. 282). Wtedy umieścimy w tym przekroju fikcyjną parę sił M_1 . Odpowiadającą tej parze spólrzdną będzie szukany kąt φ_1 . Energia potencjalna w danym przypadku:

$$V = \frac{M_0^2 l}{2EI} + \frac{(M_0 + M_1)^2 l}{2EI},$$

a zatem:

$$\varphi_1 = \frac{\partial V}{\partial M_1} = \frac{(M_0 + M_1)l}{2EI}$$



Rys. 282

Zważywszy, że w rzeczywistości niema pary sił M_1 , podstawiamy w otrzymanym wyniku $M_1=0$, a wtedy:

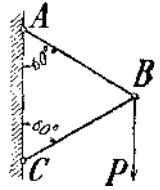
$$\varphi_1 = \frac{M_0 l}{2EI}$$

Nakoniec rozpatrzmy układ dwu prętów AB i BC (rys. 283) o równej długości i jednakowym przekroju poprzecznym, połączonych przegubami ze sobą i ze stałą ścianą. Przy pomocy twierdzenia Castigliano'a znajdziemy przesunięcie przegubu B pod wpływem siły pionowej P . Dzięki przegubom będą pręty narażone tylko na rozciąganie i ściskanie. Przy obranych kątach nachylenia będzie tak siła rozciągająca pręt AB , jak i siła ścisająca pręt BC , równa P , a zatem:

$$V = 2 \frac{P \cdot l}{2EF},$$

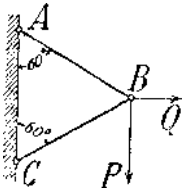
zaś przesunięcie pionowe przegubu B :

$$f = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{2Pl}{EF}.$$



Rys. 283

Dla otrzymania poziomej składowej przesunięcia punktu B wypadnie wprowadzić fikcyjną siłę poziomą Q (rys. 284). Siły wewnętrzne w prętach przy jednoczesnym działaniu sił P i Q będą:



Rys. 284

$$P + \frac{Q}{\sqrt{3}} \text{ dla pręta } AB, \text{ zaś } -P + \frac{Q}{\sqrt{3}} \text{ dla pręta } BC.$$

$$V = \frac{\left(P + \frac{Q}{\sqrt{3}}\right)^2 l}{2EF} + \frac{\left(P - \frac{Q}{\sqrt{3}}\right)^2 l}{2EF},$$

a zatem poziome przesunięcie h punktu B przedstawi się wyrażeniem:

$$h = \frac{\partial V}{\partial Q} = \frac{\left(P + \frac{Q}{\sqrt{3}}\right) l}{\sqrt{3} \cdot EF} - \frac{\left(P - \frac{Q}{\sqrt{3}}\right) l}{\sqrt{3} \cdot EF} = \frac{2Ql}{3EF}.$$

Ponieważ w rzeczywistości niema siły Q , więc w powyższym wyniku trzeba podstawić $Q=0$, wobec czego $h=0$.

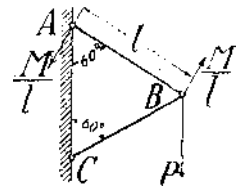
Gdyby zachodziła potrzeba wyznaczenia kąta obrotu jakiegokolwiek pręta, np. pręta AB , (wskutek działania siły P), to należałoby wprowadzić fikcyjną uogólnioną siłę, której jako spólrzędna odpowiada szukany kąt obrotu pręta AB . Taką uogólnioną siłą będzie widocznie para o momencie M (rys. 285). Siły tej pary o wielkości $\frac{M}{l}$ niech będą prostopadłe do osi pręta. Wtedy ich praca przy jego wydłużeniu jest równa zeru. Przy obrocie pręta o kąt φ wykonują te siły pracę $M\varphi$. Aby znaleźć wyrażenie dla energii potencjalnej układu, przy jednoczesnym działaniu siły P i pary M , trzeba wyznaczyć siły wewnętrzne (napięcia) w prętach AB i BC .

Napięcie rozciągające w pręcie AB będzie:

$$P - \frac{M}{l} \lg 30^\circ = P - \frac{M}{l\sqrt{3}},$$

a napięcie ścisające w pręcie BC równa się:

$$P - \frac{M}{l \cos 30^\circ} = P - \frac{2M}{l\sqrt{3}}.$$



Rys. 285

Po obliczeniu V znajdziemy, stosując twierdzenie Castigliano'a, kąt

$$\varphi = \frac{\partial V}{\partial M} = \frac{\left(P - \frac{M}{l\sqrt{3}}\right) l}{l\sqrt{3} \cdot EF} - \frac{2\left(P - \frac{2M}{l\sqrt{3}}\right) l}{l\sqrt{3} \cdot EF} = \frac{3Pl}{l\sqrt{3} \cdot EF} + \frac{5Ml}{3l^2 \cdot EF}.$$

Podstawiając tutaj $M=0$, ze względu na to, że w warunkach naszego zadania nie było pary sił, otrzymamy:

$$\varphi = \frac{P\sqrt{3}}{EF}.$$

Znak — otrzymaliśmy dlatego, bo pod wpływem siły P obraca się pręt AB w kierunku przeciwnym działaniu pary M .

Dla uproszczenia rachunków wzięliśmy układ złożony tylko z dwu prętów, ale twierdzenie Castigliano'a da się z powodzeniem zastosować do układów o większej liczbie prętów. Przy jego pomocy można znaleźć nie tylko przesunięcia węzłów, lecz także kąty obrotu poszczególnych prętów i zmiany kątów między prętami.

§ 114. ZASADA NAJMNIJSZEJ PRACY

Zasada najmniejszej pracy daje ogólną i bardzo wygodną metodę obliczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych. Można ją otrzymać jako bezpośredni wniosek z twierdzenia Castigliano'a¹⁾. Jeżeli energję potencjalną odkształconego układu przedstawimy jako funkcję sił, to pośród tych sił będą tak dane obciążenia, jak i szukane wielkości statycznie niewyznaczalne. Dla większej jasności rozpatrzmy najpierw osobno zastosowanie zasady najmniejszej pracy do wyznaczenia zbytecznych reakcyj podporowych, a następnie zastosujemy ją do znalezienia niewiadomych sił wewnętrznych układu. Zbyteczne reakcje podporowe powstają wskutek zbędnych ustaleń. Usunąwszy te ustalenia i zastąpiwszy ich działanie na układ nieznanymi na razie siłami X, Y, Z, \dots , dochodzimy do układu statycznie wyznaczalnego, na który oprócz sił danych działają nieznanne siły X, Y, Z, \dots . Energję potencjalną układu możemy przedstawić w postaci funkcji danych obciążeń i wielkości statycznie niewyznaczalnych X, Y, Z, \dots , jako zmiennych niezależnych, albowiem reszta reakcyj jest z nimi związana ogólnymi warunkami równowagi, a zatem da się wyrazić przez dane obciążenia i wielkości X, Y, Z, \dots . Wówczas, według twierdzenia Castigliano'a pochodne

$$\frac{\partial V}{\partial X}, \frac{\partial V}{\partial Y}, \frac{\partial V}{\partial Z}, \dots$$

przedstawiają składowe przesunięcia odpowiadające siłom X, Y, Z, \dots (Przesunięcia i siły pojmujemy tutaj w znaczeniu uogólnionem). Podpory mogą być nieruchome i ruchome. W pierwszym przypadku niema wogóle przesunięcia, w drugim zaś jest składowa przesunięcia, wzięta w kierunku reakcji, zerem, o ile wykluczmy tarcie. W obu zatem przypadkach otrzymamy:

$$\frac{\partial V}{\partial X}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial Y}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial Z}=0, \quad \dots \quad (198)$$

Mamy więc tyle równań warunkowych, ile jest wielkości statycznie niewyznaczalnych. Obliczenie wielkości statycznie niewyznaczalnych jest, jak widać, równoznaczne z poszukiwaniem takich wartości dla X, Y, Z, \dots , przy których energja potencjalna V staje się maximum albo minimum. Nie trudno dowieść, że w danym przypadku zachodzi minimum. Jakoż energja potencjalna jest jednorodną kwadratową funkcją sił zewnętrznych, ma przeto postać:

$$V = A\Phi^2 + B\Psi^2 + C\Theta^2 + A'\Phi\Psi + B'\Psi\Theta + \dots$$

Ta wielkość jest zawsze dodatnia (dla jakichkolwiek wartości zmiennych Φ, Ψ, \dots), wskutek czego współczynniki A, B, C, \dots muszą być także dodatnie, dodatniemi będą zatem i drugie pochodne V względem sił, co, jak wiadomo, jest warunkiem minimum. Stąd otrzymujemy prawo następujące:

Dla znalezienia wielkości statycznie niewyznaczalnych, trzeba ich wartości dobrać tak, aby energja potencjalna układu była minimum.

Wyobraźmy sobie, że wielkości X, Y, Z, \dots zmieniają się, nie przestając, wraz z resztą sił zewnętrznych, czynić zadość ogólnym warunkom równowagi. Każdemu układowi wartości X, Y, Z, \dots będzie odpowiadać określona wartość energii potencjalnej. Otóż powyższe prawo, zwane zasadą najmniejszej pracy, powiada, że w rzeczywistości pojawi się tylko taki układ wartości, X, Y, Z, \dots , któremu odpowiada najmniejsza wartość energii potencjalnej.

¹⁾ Zasadę najmniejszej pracy przedłożył L. E. Menabrea akademji nauk w Turynie w r. 1857, a więc znacznie wcześniej, nim pojawiła się słynna praca A. Castigliano'a: „Nuova teoria intorno all' equilibrio dei sistemi elastici“, zawierająca dowód jego twierdzenia.

Jako pierwszy przykład zastosowania zasady najmniejszej pracy weźmiemy belkę o stałym przekroju, utwierdzoną na jednym, a podpartą na drugim końcu i obciążoną równomiernie na całej długości ciężarem $q \text{ kg/m}$ (rys. 286). Za wielkość statycznie niewyznaczalną obierzemy reakcję prawej podpory X . Pominąwszy wpływ sił ścinających, otrzymamy dla V wyrażenie:

$$V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}, \text{ przyczem } M = Xx - \frac{qx^2}{2}, \text{ a } \frac{\partial M}{\partial X} = x.$$

Według zasady najmniejszej pracy będzie:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{Xl^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = 0, \text{ a stąd } X = \frac{3}{8} ql.$$

Ten wynik otrzymaliśmy poprzednio inną drogą. Jeżeliby pod wpływem obciążenia podpora B obniżyła się o wielkość δ , to na podstawie twierdzenia Castigliano'a otrzymalibyśmy dla wyznaczenia X równanie:

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{Xl^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = -\delta.$$

Przesunięciu δ daliśmy znak $-$ dlatego, bo ono zachodzi w kierunku przeciwnym działaniu siły.

Zamiast reakcyjnej siły możemy jako zbyteczną niewiadomą uważać reakcyjną parę M_0 , zapobiegającą obrotowi przekroju podporowego A . Momentem zginającym w dowolnym przekroju m będzie:

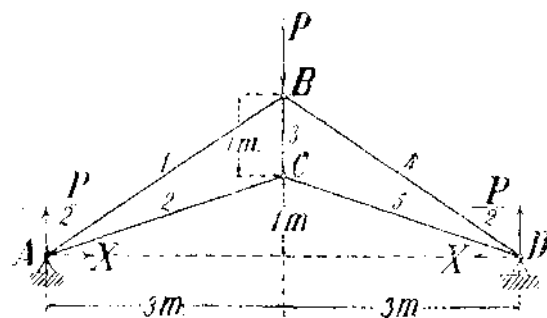
$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} + M_0 \frac{x}{l}, \text{ a } \frac{\partial M}{\partial M_0} = \frac{x}{l}.$$

Przesunięcie odpowiadające M_0 (kąt obrotu przekroju A) równa się zero, a zatem:

$$\frac{\partial V}{\partial M_0} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_0} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} + \frac{M_0 x}{l} \right) \frac{x}{l} dx = 0.$$

Wykonawszy całkowanie dojdziemy do znanego wyniku (wz. 109):

$$M_0 = -\frac{ql^2}{8}.$$



Rys. 287

Weźmy teraz jako drugi przykład wyznaczenie reakcji stałych podpór A i D więzaru kratowego (rys. 287), obciążonego jedną siłą pionową P . Długości prętów i pola ich przekrojów poprzecznych zawiera następująca tablica:

Nr.	$l \text{ cm}$	$F \text{ cm}^2$	S_0	$S_1 X$	$\frac{IS_1 S_0}{F}$	$\frac{IS_1^2}{F}$
1	360,6	25	$-1,803P$	$+1,202 X$	$-31,24P$	20,82
2	316,2	15	$+1,581 P$	$-2,108 X$	$-70,26P$	93,68
3	100,0	10	$+1,000 P$	$-1,333 X$	$-13,34P$	17,78
4	360,6	25	$-1,803P$	$+1,202 X$	$-31,24P$	20,82
5	316,2	15	$+1,581 P$	$-2,108 X$	$-70,26P$	93,68
					$\Sigma \dots -216,34P$	246,78

Jeżeliby jedna z podpór, np. D była ruchomą, to reakcje można znaleźć z warunków równowagi. Przy danym obciążeniu byłyby te reakcje widocznie pionowe i każda z nich równałaby się $\frac{P}{2}$. Mając wielkości tych reakcji, znajdziemy łatwo odpowiadające siły wewnętrzne S_0 w prętach kratownicy. Wielkości S_0 podaje również tablica. Ponieważ jednak obie podpory są stałe, więc obok pionowych reakcji $\frac{P}{2}$ powstaną także reakcje poziome, zapobiegające wzajemnemu oddaleniu się podpór. Warunki równowagi nie wystarczają do wyznaczenia wielkości X reakcji poziomych; znajdziemy je więc przy pomocy zasady najmniejszej pracy. W tym celu trzeba niewiadome siły X dołączyć do danych sił zewnętrznych, wyznaczyć odpowiadające siły wewnętrzne we wszystkich prętach i ustawić wyrażenie V dla energii potencjalnej układu. Warunek

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad \dots \quad (a)$$

posłuży do znalezienia wielkości X . Siły wewnętrzne w prętach można według zasady superpozycji przedstawić wyrażeniem: $S_0 + S_1 X$. Tutaj oznacza S_1 te wartości sił wewnętrznych, jakieby powstały w prętach układu pod działaniem reakcji poziomych w przypadku $X = 1$ (jednostka siły). Wyznaczenie wartości S_1 nie przedstawia żadnych trudności. Całkowitą energią układu będzie

$$V = \sum \frac{l(S_0 + S_1 X)^2}{2EF} \quad \dots \quad (b)$$

przyczem sumowanie odnosi się do wszystkich prętów układu. Dla obliczenia X mamy przeto równanie:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \sum \frac{l S_1 (S_0 + S_1 X)}{EF} = 0, \text{ a stąd } X = - \frac{\sum \frac{l S_0 S_1}{F}}{\sum \frac{l S_1^2}{F}} \quad \dots \quad (c)$$

jeżeli przyjmiemy tę samą wartość E dla wszystkich prętów. Wartości wyrazów $\frac{l S_0 S_1}{F}$ i $\frac{l S_1^2}{F}$ zestawiono w powyższej tablicy. Przy jej pomocy łatwo znaleźć

$$X = \frac{216}{247} P = 0,88 P.$$

Dla uproszczenia rozwiązania wzięliśmy kratownicę, złożoną tylko z pięciu prętów. Tok rachunku pozostaje jednak niezmienny w bardziej złożonych przypadkach.

Przejdziemy teraz do przypadku, w którym wielkościami stałymi niewyznaczalnymi są siły wewnętrzne, np. napięcia w zbędnych prętach układu. Zobaczmy, że zasada najmniejszej pracy zachowuje i tutaj swą ważność. Przyjmijmy na razie, że w danym układzie znajduje się tylko jeden pręt zbędny. Usuńmy go, a jego działanie na resztę układu zastąpmy dwiema równymi i wprost przeciwnymi siłami X . Energia potencjalna V_1 reszty układu da się wyrazić jako funkcja wielkości X i danych obciążeń. Sam pręt zbędny będzie pod działaniem sił $-X$. Jego energię potencjalną oznaczmy przez V_2 . Energią całego układu będzie więc

$$V = V_1 + V_2 \quad \dots \quad (d)$$

Stosując twierdzenie Castigliano'a do wydzielonego zbędnego pręta, otrzymamy jego wydłużenie δ , a mianowicie:

$$\frac{\partial V_2}{\partial (-X)} = \delta.$$

Tę samą wielkość δ znajdziemy według twierdzenia Castigliano'a jako pochodną cząstkową energii reszty układu, t. j.

$$\frac{\partial V_1}{\partial X} = \delta.$$

Ze względu na równość (d) będzie zatem:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial V_1}{\partial X} + \frac{\partial V_2}{\partial X} = 0.$$

Jeżelibyśmy mieli do czynienia z większą ilością zbędnych prętów w układzie, to nazywając napięcia w nich przez X, Y, Z, \dots otrzymamy dla ich wyznaczenia równania:

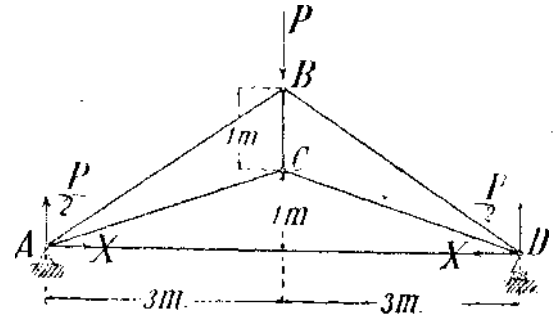
$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0, \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \frac{\partial V}{\partial Z} = 0, \dots$$

Weźmy dla przykładu belkę kratową, przedstawioną na rys. (288), która się różni od rozpatrywanej poprzednio obciążeniem ściągną AD i jedną podporą ruchomą. Układ ten jest zatem „zewnętrznie” statycznie wyznaczalny, ale „wewnętrznie” nie, gdyż zawiera 4 węzły i 6 prętów, a więc o jeden pręt za wiele. (Liczba koniecznych prętów jest $2.4 - 3 = 5$). Jako zbyteczny pręt przyjmijmy najdogodniej AD i oznaczmy jego napięcie przez X . Ustawmy wyrażenie dla energii potencjalnej układu. Potencjalną energią ściągną AD o przekroju F_0 i długości L będzie

$$V_1 = \frac{X^2 L}{2EF_0}$$

Dla uzyskania wyrażenia energii potencjalnej V_2 reszty układu, trzeba działanie ściągną zastąpić dwiema siłami X ; wówczas, posługując się wyrażeniem (b) w zadaniu poprzednio traktowanym, otrzymamy:

$$V_2 = \sum \frac{l(S_0 + S_1 X)^2}{2EF}, \text{ a zatem } V = \frac{X^2 L}{2EF_0} + \sum \frac{l(S_0 + S_1 X)^2}{2EF}$$



Rys. 288

Dla wyznaczenia niewiadomego napięcia X w ściągnięciu znajdziemy teraz równanie:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{XL}{EF_0} + \sum \frac{l(S_0 + S_1 X) S_1}{EF} = 0, \text{ a stąd } X = - \frac{\sum \frac{S_0 S_1 l}{F}}{L + \sum \frac{l S_1^2}{F}} \quad (e)$$

Sumowanie odnosi się tutaj do wszystkich niezbędnych prętów układu. Jeżeli powiększymy pole F_0 przekroju ściągną, to jego wydłużenie będzie ubywać; w granicy dla $F_0 = \infty$ przechodzi rozwiązanie (e) w wynik (c) otrzymany dla przypadku doskonałego ustalenia obu podpór. Przy zmniejszaniu F_0 aż do zera dąży i wartość napięcia X do zera, a belka kratowa zbliża się swojemi własnościami do belki statycznie wyznaczalnej o jednej stałej, a drugiej ruchomej podporze.

Weźmy teraz wymiary niezbędnych prętów z poprzedniego przykładu (por. str. 201), a pole przekroju ściągną przyjmijmy równe 50 cm^2 . Wtedy

$$X = \frac{216 P}{12 + 247} = 0,836 P.$$

Jeżelibyśmy przyjęli pole przekroju ściągną 10 razy mniejsze, t. j. 5 cm^2 , toby wypadło

$$X = \frac{216 P}{120 + 247} = 0,59 P.$$

Przy zupełnej nieruchomości węzłów A i D otrzymaliśmy poprzednio

$$X = 0,88 P.$$

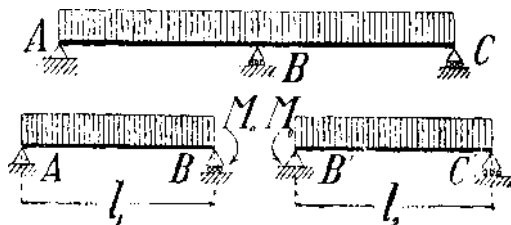
W roztrąszonym przykładzie znajdował się tylko jeden pręt zbędny; atoli przy dowolnej liczbie zbędnych prętów pozostaje tok rachunku niezmienny. Pręty zbyteczne zastępujemy siłami zewnętrznymi X, Y, Z, \dots i znajdujemy napięcia w pozostałych prętach w postaci

$$S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_3 Z + \dots$$

Wyrażeniem dla energii potencjalnej układu będzie tedy:

$$V = \frac{X^2 l_1}{2EF_1} + \frac{Y^2 l_2}{2EF_2} + \frac{Z^2 l_3}{2EF_3} + \dots + \sum \frac{(S_0 + S_1 X + S_2 Y + \dots)^2 l}{2EF}$$

Utworzywszy pochodne $\frac{\partial V}{\partial X}, \frac{\partial V}{\partial Y}, \frac{\partial V}{\partial Z}, \dots$ i przyrównawszy je do zera, znajdziemy tyle równań, ile jest niewiadomych sił wewnętrznych. Te równania są linjowe względem niewiadomych i określają je jednoznacznie.



Rys. 289

Dotychczas przyjmowaliśmy, że wielkością wewnętrznie statycznie niewyznaczalną jest siła wewnętrzna w zbędnym przecię. Działanie zbędnego pręta na resztę układu zastępowaliśmy uogólnioną siłą X , złożoną z dwu sił równych i wprost przeciwnych. Nasze rozumowanie i podstawowe równania (198) pozostają jednak ważne i wówczas, kiedy wielkość statycznie niewyznaczalną X będzie przedstawiać jakakolwiek inna kombinacja sił, np. układ dwu znoszących się nawzajem par sił. Objaśnimy to na przykładzie belki dwuprzęsłowej ABC (rys. 289), obciążonej równomiernie ciężarem $q \text{ kg/m}$.

Za wielkość statycznie niewyznaczalną obierzemy, nie jak dawniej, reakcję środkowej podpory, lecz odpowiadający moment podporowy M_0 . Podzielmy belkę przekrojem B na dwie części. Każda z nich przedstawia belkę w obu końcach podpartą, a więc przypadek statycznie wyznaczalny. Lewą połowę belki zgina oprócz równomiernego obciążenia para sił M_0 , obrana za zbytęcną niewiadomą, prawą zaś połowę zgina obciążenie równomierne i para sił $-M_0$. Niechaj V_1 i V_2 oznacza odpowiednio energię potencjalną lewej i prawej połowy belki. Wtedy na podstawie twierdzenia Castigliano'a:

$$\frac{\partial V_1}{\partial M_0} = \varphi \quad \text{i} \quad \frac{\partial V_2}{\partial (-M_0)} = \varphi,$$

przyczem φ jest kątem obrotu przekroju B . A zatem:

$$\frac{\partial V}{\partial M_0} = \frac{\partial V_1}{\partial M_0} + \frac{\partial V_2}{\partial M_0} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (f)$$

Otrzymane równanie posłuży do wyznaczenia niewiadomej M_0 . Pomijając pracę naprężeń ścinających, mamy:

$$V_1 = \int_0^{l_1} \frac{M^2 dx}{2EI},$$

przyczem

$$M = \frac{ql_1}{2} x + \frac{M_0 x}{l_1} - \frac{qx^2}{2}, \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = + \frac{x}{l_1},$$

a zatem:

$$\frac{\partial V_1}{\partial M_0} = \frac{1}{EI} \int_0^{l_1} M \frac{x}{l_1} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{ql_1^3}{6} + \frac{M_0 l_1}{3} - \frac{ql_1^3}{8} \right),$$

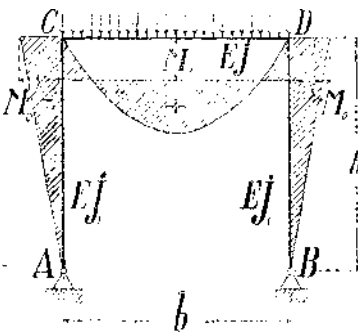
Podobnież:

$$\frac{\partial V_2}{\partial M_0} = \frac{1}{EI} \left(\frac{ql_2^3}{6} + \frac{M_0 l_2}{3} - \frac{ql_2^3}{8} \right).$$

Podstawiając to w rów. (f), znajdziemy:

$$M_0(l_1 + l_2) = - \frac{1}{8} q(l_1^3 + l_2^3).$$

To równanie można było także napisać odrazu, stosując twierdzenie o trzech momentach.



Rys. 290

Jako drugi przykład rozpatrzmy zgięcie ramy prostokątnej $ACDB$ (rys. 290), wspartej na dwu stałych przegubach A i B . Pod działaniem obciążenia, rozłożonego równomiernie, będzie pręt CD zginać się tak, jak belka z końcami sprężysto utwierdzonymi. Za wielkość statycznie niewyznaczalną obierzemy wartość M_0 momentu zginającego w przekrojach C i D . Wtedy momentem zginającym w jakimkolwiek przekroju pręta CD , odległym o x od C będzie:

$$M_1 = \frac{qb}{2} x - \frac{qx^2}{2} + M_0, \quad \text{zaś} \quad \frac{\partial M_1}{\partial M_0} = +1.$$

Moment zginający dla słupów AC i BD w odległości x od dolnego końca będzie:

$$M_2 = - \frac{M_0 x}{h}, \quad \text{a} \quad \frac{\partial M_2}{\partial M_0} = - \frac{x}{h}.$$

Rozkład momentów zginających przedstawiono na rysunku zakreskowanymi polami.

Według zasady najmniejszej pracy otrzymujemy dla wyznaczenia M_0 równanie:

$$\frac{\partial V}{\partial M_0} = \frac{1}{EI} \int_0^b M_1 \frac{\partial M_1}{\partial M_0} dx + \frac{2}{EI_1} \int_0^h M_2 \frac{\partial M_2}{\partial M_0} dx = 0.$$

[Przy obliczeniu energii potencjalnej pominięto wpływ sił podłużnych i poprzecznych jako niewielki w porównaniu do wpływu momentów zginających. Popetniony przez to błąd będzie widocznie tem mniejszy, im smuklejsze są pręty ramy].

Wstawiając wartości za M_1 , M_2 i wykonawszy całkowanie, znajdziemy:

$$M_0 = - \frac{qb^2}{12 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h}{b} \frac{EI}{EI_1} \right)}.$$

¹⁾ Znak dla M_0 obrano tutaj w przypuszczeniu, że moment podporowy jest dodatni.

§ 115. ZASADA WZAJEMNOŚCI PRZESUNIĘĆ

Posługując się zasadą najmniejszej pracy, możemy bez trudności znaleźć wielkości statycznie niewyznaczalne przy stałym obciążeniu układu. Przy obliczeniu kratownic sprowadza się zadanie, jak widzieliśmy, do konstrukcji dwu planów sił Cremona'y: jednego dla znalezienia napięć S_0 i drugiego dla napięć S_1 . W przypadku obciążenia ruchomego, jak to bywa przy obliczeniu mostów, żórawi i t. p. staje się zastosowanie zasady najmniejszej pracy niedogodnym, ponieważ wymagałoby szukania wielkości statycznie niewyznaczalnych dla każdego położenia obciążenia. Dla uproszczenia rozwiązania takich zadań używamy linii wpływowych. Konstrukcja tych linii ułatwia się znacznie przez zastosowanie zasady wzajemności przesunięć, która jest wynikiem tego, że energia potencjalna układu V wyraża się jednorodną kwadratową funkcją współrzędnych $\varphi, \psi, \vartheta, \dots$

czyli:
$$V = a\varphi^2 + b\psi^2 + c\vartheta^2 + \dots + a'\varphi\psi + b'\psi\vartheta + c'\varphi\vartheta + \dots \quad (a)$$

Odpowiadające uogólnione siły $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$ określają równania:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 2a\varphi + a'\psi + b'\vartheta + \dots \\ \Psi &= \frac{\partial V}{\partial \psi} = 2b\psi + a'\varphi + c'\vartheta + \dots \\ \Theta &= \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 2c\vartheta + b'\varphi + c'\psi + \dots \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Przy pomocy powyższych wyrażenń dowiedziemy twierdzenia o wzajemności przesunięć. Rozpatrzmy dwa stany układu sprężystego. Niechaj stan I-szy określają współrzędne $\varphi_1, \psi_1, \vartheta_1, \dots$ i odpowiadające im siły $\Phi_1, \Psi_1, \Theta_1, \dots$; II-gi stan niech określają współrzędne $\varphi_2, \psi_2, \vartheta_2, \dots$ i siły $\Phi_2, \Psi_2, \Theta_2, \dots$. Wyobraźmy sobie, że siły odpowiadające I-mu stanowi wykonały pracę na przesunięciach φ_2, ψ_2, \dots odnoszących się do stanu II-go. Praca ta równa się:

$$\begin{aligned} &\Phi_1\varphi_2 + \Psi_1\psi_2 + \Theta_1\vartheta_2 + \dots = \\ &= 2a\varphi_1\varphi_2 + a'(\psi_1\varphi_2 + \varphi_1\psi_2) + 2b\psi_1\psi_2 + b'(\vartheta_1\varphi_2 + \varphi_1\vartheta_2) + 2c\vartheta_1\vartheta_2 + c'(\vartheta_1\psi_2 + \psi_1\vartheta_2) + \dots \end{aligned}$$

Tutaj przy pomocy równości (b) wyraziliśmy siły $\Phi_1, \Psi_1, \Theta_1, \dots$ przez współrzędne $\varphi_1, \psi_1, \vartheta_1, \dots$. Otrzymane wyrażenie okazuje się zupełnie symetrycznym względem współrzędnych I-go i II-go stanu. Z tego wynika, że otrzymalibyśmy dokładnie taką samą pracę, gdybyśmy zmusili siły II-go stanu Φ_2, Ψ_2, \dots do wykonania pracy na przesunięciach φ_1, ψ_1, \dots odpowiadających stanowi I-mu, czyli:

$$\Phi_1\varphi_2 + \Psi_1\psi_2 + \Theta_1\vartheta_2 + \dots = \Phi_2\varphi_1 + \Psi_2\psi_1 + \Theta_2\vartheta_1 + \dots \quad (199)$$

To równanie wyraża twierdzenie, noszące nazwę zasady wzajemności przesunięć. Szczególny przypadek tego twierdzenia ogłosił Maxwell¹⁾ w r. 1864 wraz z zastosowaniem do obliczenia kratownic. W najogólniejszej postaci dowiedli je włoski uczone E. Betti²⁾ i angielski fizyk lord Rayleigh³⁾.

Weźmy pod uwagę najprostszy przypadek, kiedy mamy do czynienia tylko z dwiema uogólnionymi siłami, np. z siłami Φ i Ψ . Dajmy na to, że przy I-szym stanie staje się siła Ψ zerem i działa tylko siła Φ_1 . Wartości współrzędnych, odpowiadających siłom Φ i Ψ dla tego stanu niech będą φ_1 i ψ_1 . Jako stan II-gi przyjmijemy ten, w którym siła Φ staje się zerem i działa tylko siła Ψ_2 . Współrzędne, odpowiadające temu stanowi, nazwiemy przez φ_2 i ψ_2 ; wtedy rów. (199) przybierze postać:

$$\Phi_1\varphi_2 = \Psi_2\psi_1, \text{ albo } \frac{\Phi_1}{\Psi_2} = \frac{\psi_1}{\varphi_2} \quad (200)$$

Skoro w szczególności $\Phi_1 = \Psi_2$, to $\psi_1 = \varphi_2$.

¹⁾ C. Maxwell, „On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames“, Phil. Mag. t. 27, str. 294.

²⁾ E. Betti, Il nuovo Cimento (ser. 2), t. 7 i 8, r. 1872.

³⁾ Lord Rayleigh, Scientific Papers, t. I, str. 179.

Otrzymany wynik da się wysłowić w następujący sposób:

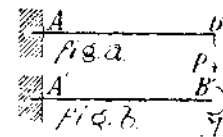
Jeżeli na dany układ działają dwie uogólnione siły, równe co do liczebnej wartości, to zmiana współrzędnej, odpowiadającej II-giej sile, wywołana działaniem siły I-szej, jest taka sama, jak zmiana współrzędnej, odpowiadającej I-szej sile, pod wpływem siły II-giej.

Znaczenie i zastosowanie tego twierdzenia objaśnia najlepiej przykłady. Jako pierwszy weźmiemy belkę w obu końcach podpartą (rys. 291). Obciążmy ją najpierw siłą P , działającą w przekroju I, a następnie taką samą siłą, działającą na przekrój II. Współrzędnymi dla tych sposobów obciążenia będą ugięcia w przekrojach I i II. Przyjmijmy, że przy działaniu siły P w przekroju I powstają w przekrojach I i II ugięcia f_1 i f_2 , natomiast przy działaniu siły P tylko w przekroju II powstają w tychże przekrojach ugięcia f_1' i f_2' ; wtedy na podstawie form. (200)

$$f_2 = f_1',$$

t. j. przy przeniesieniu siły P z I do II, ugięcie przekroju II przenosi się do przekroju I. [Innymi słowy: Ugięcie w przekroju II, wywołane siłą P , działającą na przekrój I, równa się ugięciu w przekroju I, wywołanemu siłą P , działającą na przekrój II].

Jako drugi przykład obierzemy belkę jednym końcem utwierdzoną (rys. 292) i rozpatrzmy dwa stany tej belki: 1^o) zgięcie pod wpływem siły P , działającej na swobodny koniec (fig. a) i 2^o) zgięcie parą sił o momencie M (fig. b). Współrzędnymi, odpowiadającymi tym stanom obciążenia będą odpowiednio: ugięcie końca belki i kąt obrotu przekroju końcowego. Jeżeli siła P i moment M mają równe wartości liczebne, to na podstawie wzoru (200) możemy powiedzieć, że kąt obrotu przekroju końcowego, jaki powstał pod działaniem siły P , jest liczbowo równy wartości ugięcia końca belki pod wpływem momentu M . Łatwo sprawdzić ten wniosek przy pomocy znanych



Rys. 292

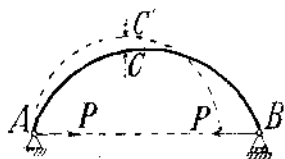
wzorów. Kątem obrotu przekroju końcowego wskutek działania siły P będzie $\varphi = \frac{P l^2}{2 E I}$; ugięcie zaś końca belki pod wpływem pary sił określa formuła:

$$f = \frac{M l^2}{2 E I}$$

Skoro więc P jest liczbowo równe M , to

$$\varphi = f.$$

Weźmy jeszcze pod uwagę pręt zakrzywiony, czyli łuk (rys. 293), oparty jednym końcem A na stałym, a drugim B na ruchomym przegubie. Dajmy na to, że pod wpływem dwu sił P , równych i wprost przeciwnych, działających na punkty A i B , odkształci się łuk w sposób uwidoczony na rysunku. Dowolny punkt łuku C zajmie przytem położenie C' , przyczem przez δ oznaczmy składową pionową przesunięcia CC' . Na podstawie zasady wzajemności przesunięć możemy przewidzieć, że pionowa siła P , działająca w punkcie C , wywoła przesunięcie przegubu ruchomego B po linii AB o tej samej wielkości δ .



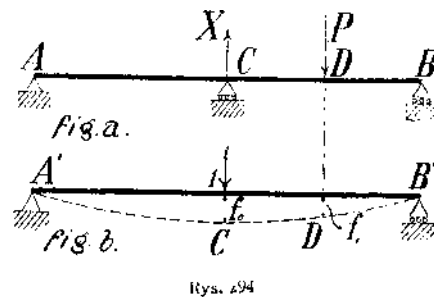
Rys. 293

Przy pomocy zasady wzajemności przesunięć możemy, obrawszy w odpowiedni sposób dwa porównywane stany układu, ustawić dostateczną liczbę równań dla obliczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych. Przebieg rachunku najdogodniej objaśnić na szczegółowych przykładach.

§ 116. ZASTOSOWANIE ZASADY WZAJEMNOŚCI PRZESUNIĘĆ DO OBLICZENIA BELEK CIĄGŁYCH

Rozpocznijmy od najprostszego przypadku belki dwuprzęsłowej (rys. 294). Za zbyteczną niewiadomą obieramy reakcję środkowej podpory. Znajdziemy wielkość tej reakcji przy obciążeniu belki jedną siłą P . W tym celu usuwamy podporę środkową, zastępujemy jej wpływ siłą X skier-

rowaną ku górze (jej wielkość ma być taka, aby zniweczyła ugięcie, wywołane w przekroju podporowym danym obciążeniem) i rozpatrujemy zgięcie belki AB , w obu końcach podpartej. Jako I-szy stan weźmiemy zgięcie siłami P i X , jako II-gi zgięcie siłą równą jednostce, działającą w przekroju C (fig. b). Niech będą f_0 i f_1 ugięciami w punktach C i D , odpowiadającymi drugiemu sposobowi obciążenia; wtedy według zasady wzajemności przesunięć otrzymamy:



Rys. 294

$$Pf_1 - Xf_0 = 1.0 \quad (a)$$

Drugi wyraz opatrzyliśmy tutaj znakiem minus, ponieważ ugięcie f_0 zachodzi w kierunku przeciwnym kierunkowi X . Jednostkę siły po prawej stronie równości (a) pomnożyliśmy przez zero, albowiem odpowiadające jej przesunięcie (ugięcie u środkowej podpory) przy I-szym stanie obciążenia jest równe zero. Niewiadomą reakcję X obliczymy tedy z rów. (a):

$$X = \frac{Pf_1}{f_0} \quad (b)$$

Przy przesuwaniu obciążenia wzdłuż belki, pozostaje mianownik f_0 stałym, a zatem reakcja podporowa będzie proporcjonalna względem ugięcia f_1 . W przypadku obciążenia układem ciężarów P , otrzymamy reakcję podporową przez sumowanie wyrażień, podobnych do wyrażenia (b), czyli:

$$X = \frac{\sum Pf}{f_0} \quad (c)$$

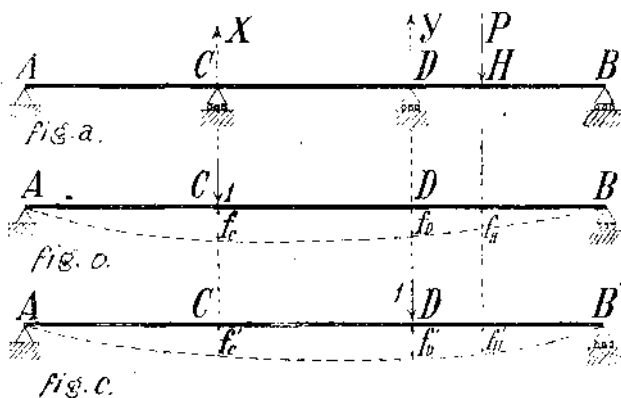
Każdą z sił I-go stanu należy pomnożyć przez odpowiadające ugięcie stanu II-go, wobec czego linja ugięcia belki AB , pod wpływem jednostki obciążenia, działającej w przekroju C , gra rolę linji wpływowej dla reakcji podpory środkowej. Mając tę krzywą, łatwo obliczyć reakcję środkowej podpory z wzoru (c), przy dowolnym rozkładzie obciążenia. Jeżelibyśmy za zbytęcną niewiadomą przyjęli reakcję skrajnej podpory B , to linją wpływową okazałaby się linja ugięcia belki podpartej w A i C , a obciążonej na końcu B jednostką ciężaru (rys. 295). Do obliczenia niewiadomej reakcji posłuży również wzór (c).



Rys. 295

Rozpatrzmy teraz przypadek belki na czterech podporach (rys. 296). Najpierw znajdziemy wielkości reakcyj podporowych

przy obciążeniu jedną siłą skupioną P . Usuwamy podpory środkowe, ich działania na belkę zastępujemy siłami X i Y , skierowanymi w górę (wielkości tych sił muszą być takie, aby zniknęły ugięcia w C i D) i rozpatrujemy zgięcie belki AB siłami X , Y i P (fig. a). Oprócz tego stanu, odpowiadającego obciążeniom rzeczywistym, rozpatrzmy jeszcze zgięcie belki AB jednostką siły, działającą w punkcie C (fig. b) i zgięcie jednostką siły, działającą w punkcie D (fig. c). Niechaj będą f_c, f_D, f_H , tudzież f'_c, f'_D, f'_H , ugięciami w punktach C, D i H , odpowiadającymi dwu ostatnim sposobom obciążenia. Zastosujmy zasadę wzajemności przesunięć najpierw do I-go i II-go stanu (fig. a i b), a następnie do stanu I-go i III-go (fig. a i c), to otrzymamy równania:



Rys. 296

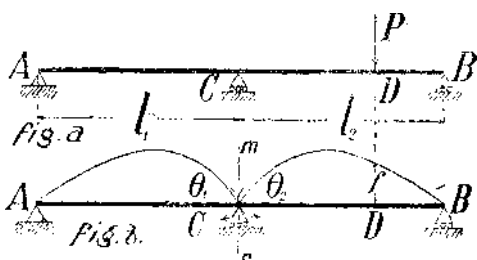
$$Pf_H - Xf_c - Yf_D = 1.0, \quad Pf'_H - Xf'_c - Yf'_D = 1.0,$$

z których:

$$X = P \frac{f_H f'_D - f'_H f_D}{f_c f'_D - f'_c f_D}, \quad Y = P \frac{f_H f'_c - f'_H f_c}{f_D f'_c - f'_D f_c} \quad (d)$$

Mianowniki wyrażeń, otrzymanych dla X i Y , nie zależą widocznie od położenia ciężaru P . Liczniki są określone wielkościami f_H i f_H' dla dowolnego położenia siły P , które to wielkości będą znane, skoro znajdziemy postać linii ugięcia dla II-go i III-go sposobu obciążenia. Mając te krzywe, łatwo obliczyć wartości współczynników przy P w wyrażeniach (d) dla dowolnego położenia ciężaru, a według nich łatwo skonstruować linie wpływowe dla obu reakcyj podporowych.

Zastosujemy teraz zasadę wzajemności przesunięć do wyznaczenia linii wpływowej dla momentu podporowego M_C belki dwuprzęsłowej AB (rys. 297). Jako I-szy stan przyjmujemy stan rzeczywisty belki, kiedy na nią działa obciążenie skupione P . Przy II-gim stanie niema siły P , a zamiast szukanej niewiadomej M_C , działa uogólniona siła równa jednostce. Aby urzeczywistnić stan II-gi, rozdzielimy belkę przekrojem mn na dwie części i na każdą z nich działamy w poprowadzonym przekroju jednostką zginającego momentu (fig. b). Ta grupa, złożona z dwu równoważących się par sił i odpowiadających im reakcyj podporowych, przedstawia uogólnioną siłę tego samego typu, co i szukana wielkość M_C . Belki AC i CB są końcami oparte i bez trudności znajdziemy ich linie ugięcia. Kąty obrotu, końców określają wzory:



Rys. 297

$$\vartheta_1 = \frac{1 \cdot l_1}{3EI}, \quad \vartheta_2 = \frac{1 \cdot l_2}{3EI}.$$

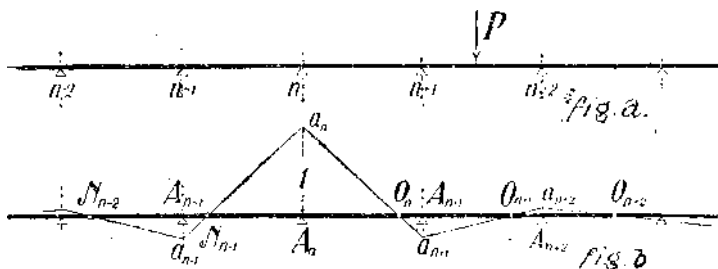
Mamy teraz przy I-szym stanie ciężar P i niewiadomą uogólnioną siłę M_C . Odpowiadającymi im przesunięciami II-go stanu będą: ugięcie f punktu D i kąt $\vartheta_1 + \vartheta_2$. W II-gim stanie będziemy mieć uogólnioną siłę złożoną z dwu par znoszących się nawzajem i odpowiadających im reakcyj podporowych. Odpowiadające tej uogólnionej sile przesunięcie w I-szym stanie równa się zeru, gdyż w rzeczywistości jest belka ciągła, a więc względny obrót końców C części AC i CB jest niemożliwy. Zasada wzajemności przesunięć daje:

$$-Pf + M_C(\vartheta_1 + \vartheta_2) = 1.0, \quad \text{a stąd } M_C = \frac{Pf}{\vartheta_1 + \vartheta_2}.$$

Tutaj mianownik nie zależy od położenia obciążenia P ; przy zmianie tego położenia zmienia się moment podporowy według tego samego prawa, co ugięcia f , powstające przy działaniu sił stanu II-go. Odpowiadające linie ugięcia belek AC i CB (fig. b) będą przeto szukanymi liniami wpływowymi. Przy działaniu na belkę AB układu ciężarów skupionych P_1, P_2, \dots, P_n obliczymy moment podporowy według wzoru:

$$M_C = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i f_i}{\vartheta_1 + \vartheta_2}.$$

W podobny sposób można skonstruować linię wpływową dla jakiegokolwiek momentu podporowego M_n belki wieloprzędłowej (rys. 298). Jako stan I-szy przyjmujemy rzeczywisty stan belki, przedstawiony na fig. (a). Dla otrzymania II-go stanu przetniemy belkę nad n -tą podporą i umieścimy tam dwie równe a wprost przeciwne pary sił o momencie równym jednostce. Za rzędne linii wpływowej dla M_n będą służyć ugięcia belki, odpowiadające II-mu stanowi, a wielkość M_n będzie określać ten sam wzór, co w poprzednim przypadku. Obliczenie kątów ϑ_1 i ϑ_2 , tudzież ugięć f , nie przedstawia trudności, ponieważ poszczególne przęsła belki ciągłej możemy rozpatrywać jako belki w obu końcach podparte i zginane parami sił, działającymi na końce. Momenty tych zginających par wyznaczy linia łamana $a_{n-1} a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots$, poprowadzona przez punkty stałe $N_{n-2}, N_{n-1}, O_n, O_{n+1}, O_{n+2}, \dots$ (fig. b). Mając linie wpływowe dla momentów podporowych, możemy pozostałe linie wpływowe znaleźć przy pomocy wzorów (136) i (137).



Rys. 298

§ 117. LINJE WPŁYWOWE DLA BELKI WZMOCNIONEJ (WIESZAROWEJ)

Belka AB (rys. 299), obciążona siłą P , jest wzmocniona przy pomocy słupów CE , DF i ścięgien AE , EF i FB . Oznaczmy przez $E_1 I$ sztywność przy zginaniu belki AB , przez E_1 i F_1 — współczynnik sprężystości i pole przekroju poprzecznego ścięgien, na koniec przez E_2 i F_2 — współczynnik sprężystości i pole przekroju słupów. Choć belka ma cztery punkty podparcia, to jednak mamy do czynienia tylko z jedną wielkością statycznie niewyznaczalną, ponieważ siły wewnętrzne w słupach, jak to wynika z warunków równowagi węzłów E i F są zawsze sobie równe. Obracamy napięcie X ścięgna poziomego EF za wielkość statycznie niewyznaczalną, wyrazimy siłę ściskającą w słupach przez $X \operatorname{tg} \alpha$, a siły rozciągające w ścięgnach pochyłych AE i FB przez $X \sec \alpha$. Wszystkie zatem siły, działające na belkę AB , wyrażają się przez P i X . Wyznamy X , postępując zasadą wzajemności przesunięć. Jako I-szy stan przyjmijemy rzeczywisty stan układu, kiedy nań działa siła P i siły X , zastępujące ścięgno EF . Stan II-gi przedstawia fig. (b). Tutaj usunięto siły zewnętrzne, a zamiast zbytecznej niewiadomej X umieszczono siły równe jednostce. Siłom P i X pierwszego stanu odpowiadają w II-gim stanie przesunięcia f_x i zbliżenie δ punktów E i F . Przesunięciem I-go stanu, odpowiadającym siłom II-go stanu jest widocznie wydłużenie ścięgna EF , równe $\frac{Xl}{3E_1 F_1}$. Zasada wzajemności przesunięć daje zatem równanie:

$$-P f_x + X \delta = -1 \cdot \frac{Xl}{3E_1 F_1}, \text{ z którego wynika } X = \frac{P f_x}{\delta + \frac{l}{3E_1 F_1}} = \frac{P f_x}{k} \quad (201)$$

Mianownik we wzorze (201), oznaczony dla krótkości literą k , nie zależy od położenia ciężaru P , a przy jego przesuwaniu po belce będzie siła X zmieniać się według tego samego prawa, co i ugięcie belki AB w II-gim stanie (fig. b). Linia ugięcia przy tym stanie będzie zatem służyć za linię wpływową dla szukanej wielkości X . Konstrukcja linii wpływowej sprowadza się w ten sposób do znalezienia ugięć f_x i zbliżenia δ przy II-gim stanie belki. Ugięcia znajdziemy tak, jak dla belki prostej podpartej w A i B , oraz obciążonej w punktach C i D siłami o wielkości $l \operatorname{tg} \alpha$, równymi napięciom w słupach. Co się zaś tyczy zbliżenia δ , to najdogodniej znaleźć je przy pomocy twierdzenia Castigliano'a. Oznaczając dla jasności przez S siłę równą jednostce, znajdziemy dla energii potencjalnej rozciąganych prętów AE i FB , tudzież ściskanych słupów i zginanej belki, odpowiednio wyrażenia:

$$V_1 = \frac{S^2 l}{3 \cos^2 \alpha E_1 F_1}, \quad V_2 = -\frac{S^2 \operatorname{tg}^2 \alpha h}{E_2 F_2}, \quad V_3 = \frac{5 S^3 h^2 l}{18 EI}$$

Wyrażenie dla V_3 łatwo otrzymać przy pomocy wzoru dla ugięcia belki, obciążonej symetrycznie dwiema równymi siłami (ob. § 97). Różniczkując całkowitą energię $V = V_1 + V_2 + V_3$ względem S (częstkowo) i kładąc w otrzymanej pochodnej $S=1$, znajdziemy szukane zbliżenie:

$$\delta = \frac{2}{3} \frac{l}{E_1 F_1 \cos^3 \alpha} + \frac{2 h \operatorname{tg}^3 \alpha}{E_2 F_2} + \frac{5}{9} \frac{h^2 l}{EI}$$

Mając linię wpływową dla napięcia X , możemy łatwo skonstruować linię wpływową dla momentu zginającego w dowolnym przekroju belki. Weźmy pod uwagę przekrój mn i ustawmy ciężar P w odległości x_1 od prawej podpory (fig. c).

Na koniec belki A będzie działać, oprócz reakcji pionowej $\frac{P x_1}{l}$, napięcie

pręta AE , a zatem moment w przekroju mn będzie się składać z dwu części:

z momentu obliczonego, jak dla belki w dwu punktach podpartej i z momentu napięcia w ścięgnie. Oznaczmy przez y rzędną zawartą między osią belki, a osią ścięgna w przekroju mn , otrzymamy:

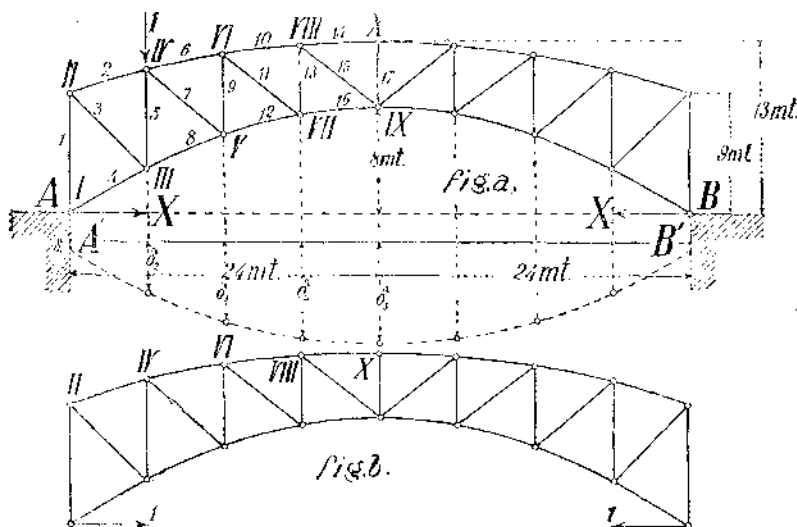
$$M_x = \frac{P x_1 x}{l} - X y = P \left(\frac{x x_1}{l} - \frac{f_x y}{k} \right) \quad (202)$$

Ta formuła, jak łatwo sprawdzić, zachowuje ważność i dla środkowej części belki, gdzie y ma stałą wartość, równą h . Pierwszy wyraz w nawiasie przedstawia rzędnę linii wpływowej ACB , skonstruowanej jak dla belki w obu końcach podpartej. Drugi zaś wyraz przedstawia wpływ napięcia X i można go otrzymać, mnożąc rzędnę poprzednio skonstruowanej linii wpływowej dla X przez rzędną y . Przez odejmowanie otrzymamy rzędnę szukanej linii wpływowej. Na fig. (c) uwidoczniono zakreskowaniem odpowiadającą powierzchnię wpływową.

§ 118. ZASTOSOWANIE ZASADY WZAJEMNOŚCI PRZESUNIĘĆ DO OBLICZENIA KRATOWNIC STATYCZNIE NIWYZNACZALNYCH

Zasada wzajemności przesunięć dostarcza w tym przypadku dogodnego sposobu do wyznaczenia zbytecznych niewiadomych przy działaniu obciążeń ruchomych. W szczególnie prosty sposób rozwiązują się zadania, w których mamy do czynienia tylko z jedną wielkością statycznie niewyznaczalną. Rozpatrzmy z osobna przypadek, kiedy zbyteczną niewia-

domą jest reakcja stałej podpory, i przypadek, w którym jest nią napięcie zbędnego pręta. Jako pierwszy przykład weźmiemy łuk kratowy dwuprzegubowy (rys. 300), obciążony siłami pionowymi. Składowe poziome reakcji w przegubach A i B będą w tych warunkach równe (na mocy warunku rzutów sił wewnętrznych). Każdą z nich nazywamy „parciem poziomym”, lub „rozporą” łuku. Ich wielkość X wypadnie przyjąć za zbytęcną niewiadomą. Jeżeli np. założymy, że ruchome obciążenie przenosi się tylko na węzły pasu górnego, to dla konstrukcji linii wpływowej trzeba jednostkę obciążenia umieszczać kolejno na każdym z górnych węzłów, a wyznaczwszy dla każdego takiego położenia odpowiadającą wartość parcia poziomego (rozporu), trzeba te wielkości odmierzyć jako rzędne w odpowiadających punktach dowolnej osi poziomej $A'B'$. Linia łamana, łącząca otrzymane w ten sposób punkty, będzie szukaną linią wpływową. Pokażemy jak można znaleźć rzędne $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6$ tej linii wpływowej przy pomocy zasady wzajemności przesunięć. Umieścimy jednostkę ciężaru nad jednym z węzłów (rys. 300, fig. a). Składowe pionowe reakcji wypadają w danym przypadku widocznie takie same, jak gdyby łuk był belką prostą na podporach A i B ; składowe poziome oznaczyliśmy już przez X . Stan układu przy tym sposobie obciążenia przyjmijmy za I-szy. Stan II-gi odpowiada obciążeniu przedstawionemu na fig. (b), gdy na daną kratownicę działają w przegubach podporowych dwie siły o wielkości 1, znoszące się nawzajem. Oznaczmy przez h wywołane tem obciążeniem zbliżenie przegubów podporowych, a przez



Rys. 300

$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6$ — pionowe przesunięcia węzłów II, IV, VI, VIII, X. Można je znaleźć kreśląc plan przesunięć Williot'a¹⁾. Stosując zasadę wzajemności przesunięć do obu powyższych stanów, znajdziemy:

$$Xh - 1 \cdot \delta_1 = 0, \text{ a stąd } X = \frac{1 \cdot \delta_1}{h}.$$

Jednostka ciężaru, umieszczona w którymkolwiek z węzłów pasu górnego, wywołuje więc parcie poziome, proporcjonalne względem pionowego przesunięcia tego węzła pod wpływem sił przedstawionych na fig. (b). Skoro od prostej $A'B'$ na rzędnych, odpowiadających górnym węzłom, odetniemy znalezione powyżej przesunięcia i połączymy otrzymane punkty linią łamaną, to rzędne tej linii dają wielkość proporcjonalną względem parcia poziomego przy dowolnym położeniu jednostki ciężaru ruchomego. Wykreślona linia może zatem służyć za linię wpływową dla parcia poziomego. Jeżeli mamy kilka ciężarów pionowych P_i , to mierząc rzędne δ_i , odpowiadające każdemu z tych ciężarów, otrzymamy wartość parcia poziomego (rozporu):

$$X = \frac{\sum P_i \delta_i}{h}.$$

Przejdziemy teraz do konstrukcji linii wpływowej dla siły wewnętrznej (napięcia) w pręcie zbędnym. Weźmiemy tę samą kratownicę, co w poprzednim przykładzie, lecz jeden z przegubów przyjmijmy za ruchomy, a za to połączymy obydwie przeguby ścięgnem AB , które widocznie będzie zbędnym prętem kratownicy. Obecne zadanie różni się od poprzedniego tylko tem, że przeguby podporowe mogą się przesunąć względem siebie w kierunku prostej AB . Jeżeli L oznacza pierwotną długość, F — pole przekroju, a X — napięcie ścięgna, to odległość między przegubami zwiększy się o wielkość $\frac{XL}{EF}$. Za I-szy stan układu przyjmijmy obciążenie jednostką siły w jednym z górnych węzłów i siłami X , zastępującymi wpływ ścięgna. Za II-gi stan obierzemy działanie na przeguby dwu sił, znoszących się nawzajem, o wielkości 1 (rys. 300, fig. b). Niech będzie h zbliżeniem się przegubów podporowych, a $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6$ — pionowymi przesunięciami górnych węzłów II, IV, VI, VIII, X, wywołanymi drugim stanem obciążenia; natenczas według zasady wzajemności przesunięć otrzymamy:

$$-1 \cdot \delta_1 + X \cdot h = \frac{-1 \cdot XL}{EF}.$$

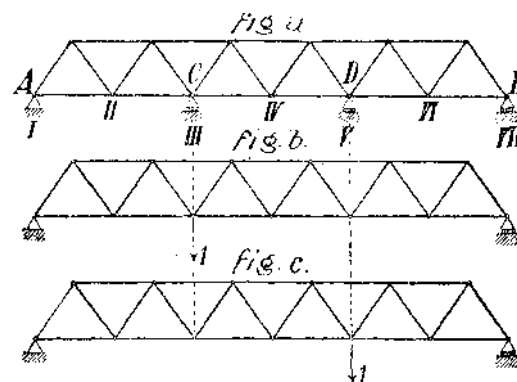
Znakiem minus opatrzone te wyrazy, w których siły i przesunięcia mają przeciwny kierunek. Wielkością parcia poziomego (rozporu), odpowiadającego jednostce obciążenia, umieszczonej w węźle II, będzie więc:

$$X = \frac{1 \cdot \delta_1}{h + \frac{1 \cdot L}{EF}}.$$

¹⁾ Sposób Williot'a podaje np. kurs statyki wykresłnej W. L. Kirpiczewa.

Otrzymane wyrażenie różni się od parcia poziomego przy stałych przegubach [a bez ścięgna] tylko wielkością mianownika, wobec czego skonstruowana poprzednio linja wpływowa nadaje się i do tego przypadku, jeżeli tylko zmienimy spólczynnik proporcjonalności. Zauważymy jeszcze, że nasze rozumowania nie uległyby zmianie, gdybyśmy za zbytęcną niewiadomą przyjęli napięcie jakiegokolwiek innego pręta danej kratownicy.

Jako przykład układu z dwiema „zbytęcnymi niewiadomymi“ [dwukrotnie statycznie niewyznaczalnego] można wziąć ciągłą belkę kratową na czterech podporach (rys. 301). Niechaj obciążenie ruchome przenosi się na dolne węzły kratownicy. Lewą podporę przyjmujemy za stałą, inne zaś za ruchome. Za zbytęczne niewiadome najdogodniej wziąć reakcje podpór środkowych. Dla konstrukcji linii wpływowych trzeba znaleźć pionowe przesunięcia dolnych węzłów przy obciążeniach jednostkowych, uwidocznionych na fig. (b) i (c). Dla wyznaczenia rzędnych linii wpływowej, odpowiadających dolnym węzłom II, III, IV, V i VI, można się posługiwać wzorami (d) (§ 116), otrzymanymi dla belek litych.



Rys. 301

§ 118. METODA MOHR'A

Sposób obliczenia układów statycznie niewyznaczalnych, obmyślany przez Mohr'a ¹⁾, polega na zastosowaniu zasady prac przygotowanych. Niechaj układ sprężysty będzie w równowadze pod działaniem uogólnionych sił zewnętrznych $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$ i niech oznaczają T, U, \dots odpowiadające siły wewnętrzne układu. Wyobraźmy sobie, że przy stałych wartościach sił zewnętrznych i wewnętrznych doznały poszczególne punkty układu przesunięć przygotowanych (t. j. przesunięć elementarnych, możliwych dla danego układu). Oznaczmy przez $\delta\phi, \delta\psi, \delta\theta, \dots$, tudzież przez $\delta t, \delta u, \dots$ zmiany spólrzędnych sił zewnętrznych i wewnętrznych, odpowiadające tym przesunięciom, natenczas podstawowe równanie równowagi (wz. 189) przedstawi się w postaci:

$$\Phi \delta\phi + \Psi \delta\psi + \Theta \delta\theta + \dots + T \delta t + U \delta u + \dots = 0 \quad (203)$$

To równanie będzie się sprawdzać dla wszelkich przesunięć możliwych. Obierając dla $\delta\phi, \dots, \delta u, \dots$ kolejno rozmaite wartości, otrzymamy coraz nowe równania równowagi i nasze zadanie polega na tem, aby wybrać z nich równania najdogodniejsze do wyznaczenia niewiadomych. Dla większej jasności zaczniemy od szczególnego przypadku i rozpatrzmy układy prętów (kratownicy) z idealnymi przegubami w węzłach. Jeżeli przyjmujemy, że siły zewnętrzne działają na węzły, to pręty będą narażone wyłącznie na rozciąganie albo ściskanie, a działanie każdego pręta na węzły, które on łączy, można zastąpić dwiema siłami równymi i wprost przeciwnymi. Rys. (302) przedstawia pręt AB , rozciągany napięciem S . Jego działanie na przeguby A i B można zastąpić siłami S , skierowanymi od węzłów. Przypuśćmy, że po przesunięciu zajęły węzły A i B położenie A' i B' . Siły S wykonują przytem pracę $-S\delta l$, przyczem δl oznacza wydłużenie pręta. To wyrażenie pozostaje widocznie bez zmiany, jeżeli pręt jest ścispany, wtedy bowiem zmieniają się znaki obu wielkości S i δl . Stosownie do tego można dla idealnych kratownic, obciążonych tylko w węzłach napisać rów. (203) w postaci:

$$\Phi \delta\phi + \Psi \delta\psi + \Theta \delta\theta + \dots = \sum S \delta l \quad (204)$$

przyczem sumowanie odnosi się do wszystkich prętów układu.

Zastosujmy otrzymane równanie najpierw do układu statycznie wyznaczalnego. Skoro w takim układzie usuniemy jeden pręt, to układ zamieni się na mechanizm ruchomy; węzły, między którymi ów pręt się znajdował, możemy zbliżyć lub oddalić od siebie i zamiast niego wstawić pręt o innej długości. Z tego wnosimy, że przyrosty δl , których udzielamy długościom poszczególnych prętów, aby otrzymać przygotowane odkształcenie układu, są w przypadku kratownic statycznie

¹⁾ O. Mohr. „Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger“ i „Beitrag zur Theorie des Fachwerks“. Zeitschr. f. Arch. u. Ing.-wesen z lat 1874, 1875 i 1885.

wyznaczalnych zupełnie dowolnymi wielkościami nieskończenie małymi. Możemy przyjąć wydłużenia wszystkich prętów, z wyjątkiem jednego, równe zero. W takim razie rów. (204) będzie zawierać tylko jedno niewiadome napięcie, które przedstawimy wyrażeniem:

$$S = \frac{\Phi \delta \varphi + \Psi \delta \psi + \Theta \delta \theta + \dots}{\delta l}$$

Licznik przedstawia tutaj pracę, wykonaną przez siły zewnętrzne na przesunięciach odpowiadających wydłużeniu rozpatrywanego pręta. W kursach statyki wykresłej wyklada się o najprostszych sposobach obliczenia tej pracy. Tutaj nie będziemy się zatrzymywać nad tem i przejdziemy do układów statycznie niewyznaczalnych. Niechaj zatem dana kratownica, oprócz prętów koniecznych, zabezpieczających jej geometryczną niezmiennosć, posiada jeszcze pręty „zbędne“. Ażeby taki pręt dał się wstawić między dwoma odpowiadającymi węzłami, powinna jego długość odpowiadać dokładnie wzajemnej odległości tych węzłów. Jeżeli danym długościom prętów koniecznych udzielimy jakichkolwiek oznaczonych przyrostów, to przez to określimy zupełnie przesunięcia wszystkich węzłów układu i zmiany długości prętów zbędnych. Z tego powodu w układach statycznie niewyznaczalnych nie możemy dysponować dowolnie wydłużeniami prętów, lecz musimy dobrać wielkości δl tak, aby uczynić zadość pewnym czysto geometrycznym warunkom. Posługując się sposobem Mohr'a, rozwiązujemy to geometryczne zadanie przez porównanie dwóch stanów układu, podobnie jak przy zastosowaniu zasady wzajemności przesunięć i obliczamy każdym razem pracę układu napięć, odpowiadających jednemu stanowi na przesunięciach stanu drugiego. Dla objaśnienia toku rachunku rozpatrzmy najprostsze zadanie, gdy układ ma tylko jeden pręt zbędny. Niechaj X oznacza napięcie w tym pręcie. Usuwając zbyteczny pręt i zastępując jego działanie na resztę układu siłami X , otrzymujemy układ statycznie wyznaczalny, na który oprócz danych obciążeń działają nieznanne na razie siły X . Ten stan nazwiemy I-szym. Odpowiadające mu napięcia w prętach składają się z dwóch części: z napięć wywołanych obciążeniami danymi i z napięć powstałych wskutek działania dwu wprost przeciwnych sił X . Kreślimy więc najpierw plan Cremona'y dla naszego układu przy założeniu, że działają tylko obciążenia dane i otrzymujemy napięcia S_0^i . Następnie usuwamy wszystkie obciążenia, zamiast sił X bierzemy siły równe 1 i kreśląc drugi plan Cremona'y znajdujemy napięcia S_1^i . Wówczas napięcie i -tego pręta przy jednoczesnym działaniu danych obciążeń i sił X przedstawi formuła:

$$S_i = S_0^i + S_1^i X.$$

Odpowiadającym wydłużeniem pręta będzie:

$$\delta l_i = \frac{(S_0^i + S_1^i X) l_i}{EF_i}$$

Wydłużenie pręta zbędnego o długości l i napięciu X jest widocznie równe $\frac{Xl}{EF}$. Jako stan II-gi przyjmijmy taki, w którym usunięto dane obciążenia, a siły X zastąpiono dwiema wprost przeciwnymi siłami o wielkości 1. Odpowiadające napięcia w prętach oznaczyliśmy już przez S_1^i . Praca przygotowana sił II-go stanu będzie równa zero, ponieważ dla każdego węzła zosobna zachodzi równowaga sił działających na ten węzeł. Jeżeli weźmiemy za przesunięcia przygotowane te rzeczywiste przesunięcia, które odpowiadają I-mu stanowi układu, to otrzymamy równanie pracy:

$$-1 \cdot \frac{Xl}{EF} - \sum_{i=1,2,3,\dots} S_1^i \frac{(S_0^i + S_1^i X) l_i}{EF_i} = 0 \quad \dots \quad (205)$$

Pierwszy wyraz przedstawia pracę jednostki siły w II-gim stanie na przesunięciu, odpowiadającym wydłużeniu zbędnego pręta w I-szym stanie. Sumowanie w drugim wyrazie równania (205) odnosi się do wszystkich koniecznych prętów układu. Dla zbytecznej niewiadomej X znajdziemy z (205) wyrażenie:

$$X = - \frac{\sum \frac{S_0^i S_1^i l_i}{EF_i}}{\sum \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i} + \frac{1 \cdot l}{EF}} \quad \dots \quad (206)$$

Jeżeli przyjmiemy współczynnik sprężystości materiału stały dla wszystkich prętów, to wzór (206) stanie się identycznym z wzorem (e) w § 114, wyprowadzonym przy pomocy zasady najmniejszej pracy.

Całe nasze rozumowanie da się zastosować i w tym przypadku, kiedy wielkością statycznie niewyznaczalną jest reakcja podporowa. Przytem zajdzie tylko ta różnica, że przesunięcie, odpowiadające tej reakcji, jest zerem. Dlatego zniknie pierwszy wyraz w rów. (205), a wyrażenie dla zbytecznej niewiadomej przybierze postać:

$$X = - \frac{\sum \frac{S_0^i S_1^i l_i}{EF_i}}{\sum \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i}} \quad (207)$$

zgodną zupełnie z formułą (c) w § 114.

Jeżeli układ zawiera więcej zbytecznych niewiadomych (wielkości statycznie niewyznaczalnych), to zastępując je odpowiadającymi siłami X, Y, Z, \dots otrzymamy układ sił statycznie wyznaczalny. Napięcia w prętach niezbędnych wyrażą się wzorami o postaci:

$$S_i = S_0^i + S_1^i X + S_2^i Y + S_3^i Z + \dots$$

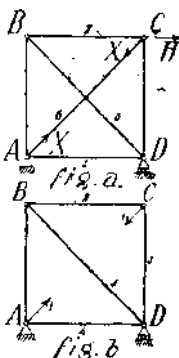
Ten stan obierzemy za I-szy. Za II-gi stan uważać będziemy taki, w którym usunięto wszelkie siły zewnętrzne i zbyteczne niewiadome, a zamiast jednego z prętów zbędnych umieszczono w odpowiednich węzłach dwie siły wprost przeciwne równe 1. Każąc napięciom II-go stanu wykonywać pracę na przesunięciach, odpowiadających stanowi I-mu, otrzymamy kolejno równania:

$$\left. \begin{aligned} -1 \cdot \frac{X l_x}{EF_x} - \sum \frac{S_1^i (S_0^i + S_1^i X + S_2^i Y + S_3^i Z + \dots) l_i}{EF_i} &= 0 \\ -1 \cdot \frac{Y l_y}{EF_y} - \sum \frac{S_2^i (S_0^i + S_1^i X + S_2^i Y + S_3^i Z + \dots) l_i}{EF_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

[W tych równaniach odpowiadają wskaźniki x, y, \dots przy długościach l i polach przekroju poprzecznego F prętów, napięciom X, Y, Z, \dots w tychże prętach]. Znalezione równania są linjowe względem niewiadomych X, Y, Z, \dots , a ich liczba równa się liczbie tych niewiadomych.

§ 120. ZASTOSOWANIE SPOSOBU MOHR'A DO OBLICZENIA KRĄKOWNIC STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH

Ogólny tok rachunku sposobem Mohr'a, wyłożony w poprzednim paragrafie, objaśnimy teraz przykładami szczegółowymi. Jako pierwszy przykład weźmiemy kwadratową ramę $ABCD$ z dwiema przekątnymi i obliczymy napięcia w prętach powstałe wskutek działania siły poziomej H (rys. 303). Jedną z podpór przyjmiemy za stałą, a drugą za ruchomą.



Rys. 303

Układ okazuje się statycznie wyznaczalnym zewnątrz (t. j. ze względu na reakcje podporowe), a niewyznaczalnym wewnątrz (t. j. ze względu na napięcia w prętach). Cztery węzły są połączone 6-u prętami, a zatem jeden pręt jest zbędny. Jako taki przyjmiemy przekątną AC i oznaczmy przez X odpowiadające napięcie. Rzeczywisty stan układu przedstawiony na fig. (a) przyjmijmy za stan I-szy; II-gi stan uwidoczony na fig. (b) otrzymujemy, usuwając zbędny pręt i wstawiając zamiast niego dwie siły wprost przeciwne, równe 1. Dla wyznaczenia X użyjemy wzoru (206). Wielkości $S_0^i, S_1^i, S_1^i S_0^i l_i, (S_1^i)^2 l_i$, wchodzące w ten wzór, zestawiono dla większej wygody w osobną tablicę (str. 214). Pola przekrojów poprzecznych przyjęto dla uproszczenia za równe. Mamy tedy:

$$\sum S_1^i S_0^i l_i = -a H \left(2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\sum (S_1^i)^2 l_i = a (2 + \sqrt{2}).$$

Wstawiając to we wzór (206), znajdujemy:

$$X = \frac{H (3 + 2\sqrt{2})}{4 + 2\sqrt{2}}.$$

W ten sposób sprowadza się cały rachunek do rozwiązania dwu bardzo prostych zadań statyki, t. j. do wyznaczenia napięć S_0^i i S_1^i w układzie statycznie wyznaczalnym, co się wykonywa najprościej, kreśląc odpowiadające plany sił Cremona'y.

TABLICA do rys. 303

Liczba porządkowa pręta	Długość l	S_0	S_1	$S_0 S_1 l$	$S_1^2 l$
1	a	H	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{aH}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
2	a	H	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{aH}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
3	a	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{a}{2}$
4	a	H	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{aH}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
5	$a\sqrt{2}$	$-H\sqrt{2}$	$+1$	$-2aH$	$a\sqrt{2}$
6	$a\sqrt{2}$				

Zastosujemy teraz sposób Mohr'a do wyznaczenia zbytecznej reakcji podporowej łuku kratowego dwuprzegubowego, przedstawionego na rys. (300). Tutaj pod wpływem obciążeń pionowych powstaną nie tylko reakcje pionowe, lecz także poziome. Pierwsze łatwo wyznaczyć z warunku momentów sił zewnętrznych, tak samo, jak dla belki prostej o rozpiętości AB . O drugich zaś wypowiadają warunki równowagi tylko to, że są równe i wprost przeciwne. Ich wartość X znajdziemy przy pomocy sposobu Mohr'a. Usuwamy zbędne ustalenie, zapobiegające rozsunięciu się podpór łuku, a jego działanie zastępujemy siłami X . Ten stan układu nazwiemy I-szym. Jako drugi stan przyjmijemy taki, w którym nie ma sił zewnętrznych, a zamiast sił X mamy dwie wprost przeciwne siły równe 1 (fig. b). Ponieważ wskutek usunięcia zbędnego ustalenia stał się układ statycznie wyznaczalnym, więc przy pomocy dwóch planów Cremona'y możemy znaleźć napięcia S_0^I , odpowiadające danym obciążeniom, tudzież napięcia S_1^I , wywołane w prętach układu siłami, przedstawionymi na fig. (b). Mając te wielkości, zestawimy następującą tablicę, w której podano także wymiary prętów i wielkości napieć, obliczone przy założeniu, że we wszystkich górnych węzłach oprócz skrajnych działa ciężar $1f$, a w skrajnych ciężar $0,5f$.

TABLICA do rys. 300

L. p. pręta	l cm	F cm ²	S_0 kg	S_1	$\frac{S_0 S_1 l}{EF}$	$\frac{S_1^2 l}{EF}$
1	900	115	-4000	+ 0,59	$- 9,25 \cdot 10^{-3}$	$1,360 \cdot 10^{-6}$
2	630	118	-3000	+ 0,50	- 4,00 "	0,667 "
3	810	89,9	+3900	- 0,65	-11,45 "	1,900 "
4	720	115	0	- 1,16	0 "	4,230 "
5	730	89,9	-3800	+ 0,47	- 7,27 "	0,895 "
6	610	118	-6200	+ 1,00	-16,00 "	2,580 "
7	770	89,9	+3950	- 0,64	-10,80 "	1,750 "
8	650	115	+3150	- 1,60	-14,25 "	7,250 "
9	600	89,9	-2750	+ 0,30	- 2,75 "	0,300 "
10	600	118	-8600	+ 1,43	-31,20 "	5,200 "
11	750	89,9	+3200	- 0,55	- 7,31 "	1,260 "
12	620	115	+6200	- 2,05	-34,30 "	11,300 "
13	530	89,9	-1150	+ 0,03	- 0,10 "	0,027 "
14	600	118	-9700	+ 1,60	-39,40 "	6,500 "
15	770	89,9	+1400	- 0,23	- 1,38 "	0,226 "
16	600	115	-8600	- 2,43	-54,50 "	15,400 "
17	500	89,9	- 250	- 0,14	+ 0,05 "	6,028 "

Wstawiając dane z tej tablicy we wz. (207), znajdziemy:

$$X = \frac{243,9 \cdot 10^{-3}}{60,87 \cdot 10^{-6}} = \sim 4000 \text{ kg.}$$

§ 121. ZASTOSOWANIE SPOSOBU MOHR'A DO WYZNACZENIA PRZESUNIĘĆ

Skoro wyznaczmy napięcia w prętach, to możemy obliczyć odpowiadające wartości δl i dalsze badanie odkształcenia kratownicy sprowadza się do zadania czysto geometrycznego: z danych zmian długości prętów znaleźć przesunięcia węzłów. To zadanie rozwiązuje Mohr przy pomocy zasady prac przygotowanych. Podobnie jak przy szukaniu zbytecznych niewiadomych, trzeba tutaj za każdym razem porównywać dwa stany układu. Za I-szy przyjmujemy stan rzeczywisty, dla którego szukamy przesunięć. Dla otrzymania II-go stanu usuwamy wszystkie dane obciążenia i zbyteczne niewiadome, jeżeli układ jest statycznie niewyznaczalny, i działamy na układ uogólnioną siłą równą 1, odpowiadającą szukanemu przesunięciu. Przystawiając do zera pracę sił II-go stanu na przesunięciach, odpowiadających stanowi I-mu, otrzymamy równanie dla wyznaczenia szukanej wielkości. Skoro przez x oznaczymy szukane przesunięcie, przez δl_i wydłużenia prętów, odpowiadające I-mu stanowi, a przez S_i napięcia w prętach przy stanie II-gim, natenczas równaniem dla znalezienia x będzie:

$$1 \cdot x - \sum S_i \delta l_i = 0 \quad (209)$$

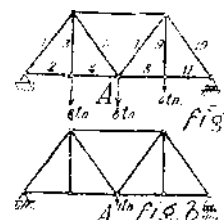
Zastosujemy to do przykładu przedstawionego na rys. (304). Belka kratowa statycznie wyznaczalna podlega działaniu obciążeń pionowych w węzłach pasu dolnego. Wymiary prętów i napięcia S_0^i zestawiono w tabelcy umieszczonej poniżej. Dajmy na to, że chodzi o pionowe ugięcie środkowego węzła A w pasie dolnym. Siłą, odpowiadającą temu przesunięciu, będzie siła pionowa, działająca na węzeł A , wobec czego jako II-gi stan układu trzeba przyjąć obciążenie, przedstawione na fig. (b). Napięcia S_i dla tego stanu, jakoteż wartości iloczynów:

$$E S_i \delta l_i = S_i \frac{S_0^i l_i}{F_i}$$

podaje również tablica. (Jako wartość współczynnika sprężystości E przyjęto tutaj $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$). Wstawiając dane z tej tablicy w rów. (209), znajdziemy:

$$x = \sum S_i \delta l_i = \frac{822}{2000} = \sim 0,41 \text{ cm.}$$

W podobny sposób można znaleźć przesunięcia w przypadku układu statycznie niewyznaczalnego. Usuwa się zbędne ustalenia i zbędne pręty, a ich działanie na układ zastępujemy odpowiadającymi siłami, znalezionymi jednym z powyższych wskazanych sposobów. Tą drogą zamienia się układ na statycznie wyznaczalny i przy obliczeniu przesunięć mamy do czynienia tylko z prętami niezbędnymi.



Rys. 304

TABLICA do rys. 304

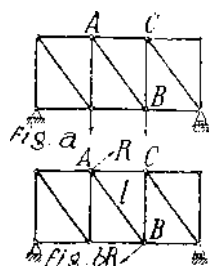
L. p. pręta	l_i (cm)	F_i (cm ²)	S_0^i (t)	S_i (t)	$E S_i \delta l_i$
1	500	30	- 13,75	- 0,625	143
2	300	15	+ 8,25	+ 0,375	62
3	400	10	+ 8,00	0	0
4	300	15	+ 8,25	+ 0,375	62
5	500	10	+ 3,75	+ 0,625	117
6	500	20	- 10,50	- 0,750	24
7	500	10	+ 6,25	+ 0,625	195
8	300	15	+ 6,75	+ 0,375	51
9	400	10	+ 4,00	0	0
10	500	30	- 11,25	- 0,625	117
11	300	15	+ 6,75	+ 0,375	51

Pokazaliśmy tedy, jak, przy użyciu sposobu Mohr'a, można obliczyć przesunięcie jakiegokolwiek węzła kratownicy w danym kierunku. Ale przy obliczeniach wypada niekiedy wyznaczyć kąt obrotu poszczególnych prętów, to znów znaleźć zmianę kątów między prętami. Te zadania można rozwiązać bez trudności, obracając w stosowny sposób siły, odpowiadające II-mu stanowi układu. Skoro nam chodzi np. o kąt obrotu pręta AB (rys. 305), to jako II-gi stan trzeba przyjąć obciążenie przedstawione na fig. (b). Na końce pręta działają tutaj siły R prostopadle do jego osi i tworzące parę o momencie

$$Rl = 1.$$

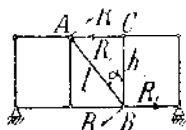
Przy obrocie pręta AB o kąt $\delta \varphi$ wykona ta para pracę $1 \cdot \delta \varphi$. Jeżeli przez $S_0^i l_i$ oznaczymy napięcia wywołane rzeczywistym obciążeniem kratownicy, a przez S_i napięcia w II-gim stanie układu, to zasada prac przygotowanych da nam równanie:

$$1 \cdot \delta \varphi - \sum \frac{S_0^i l_i}{E F_i} S_i = 0,$$



Rys. 305

z którego można znaleźć szukany kąt obrotu pręta AB . Skoro chcemy znaleźć zmianę kąta α między prętami AB i BC , to jako II-gi stan należy przyjąć obciążenie dwiema parami, przedstawione na rys. (306), przyczem siły R i R_1 trzeba obrać tak, aby



Rys. 306

Zmianę kąta α znajdziemy z równania:

$$Rl = R_1 h = 1.$$

$$1 \cdot \delta \alpha - \sum \frac{S_0^i h}{E F_i} S_i = 0.$$

§ 122. ZASTOSOWANIE SPOSOBU MOHR'A DO BADANIA STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH PRZYPADKÓW ZGIĘCIA BELEK

W odróżnieniu od zadań poprzednich mamy tutaj do czynienia z nieskończoną ilością spólrzędnych, ponieważ ugięciu w każdym przekroju belki można udzielić dowolnego przyrostu, byleby uczynić zadość warunkowi ciągłości. Przy obiorze spólrzędnych takiego układu postąpimy w ten sposób: Szeregiem przekrojów poprzecznych dzielimy belkę na elementy dx . Energia zgięcia takiego elementu jest zupełnie określona odpowiadającą wielkością momentu zginającego M (z pominięciem wpływu naprężeń ścinających, zależnych od sił poprzecznych). Jako spólrzędna dla tego momentu będzie służyć kąt względnego obrotu dwu nieskończenie bliskich przekrojów:

$$\delta \varphi = \frac{M dx}{EI}.$$

Tak samo, jak przy badaniu odkształcenia kratownicy, wypadnie nam porównać dwa stany układu. Jako I-szy stan przyjmujemy rzeczywisty stan układu, kiedy oprócz danych sił zewnętrznych działają na układ także reakcje statycznie niewyznaczalne X, Y, Z, \dots , zastępujące ustalenia zbędne. Stan II-gi otrzymamy, usuwając wszystkie siły zewnętrzne oraz zbędne niewiadome, i działając zamiast jednej z tych niewiadomych siłą równą 1. Przyrównując do zera pracę sił II-go stanu na przesunięciach stanu I-go, otrzymamy potrzebne nam równanie. Oznaczywszy przez M_1 moment zginający przy II-gim stanie, a przez x przesunięcie I-go stanu, odpowiadające szukanej zbędnej niewiadomej X , napiszemy równanie równowagi w postaci:

$$1 \cdot x - \int \frac{M dx}{EI} M_1 = 0 \quad \dots \quad (210)$$

Zastosujemy to do przypadku belki jednym końcem utwierdzonej, a drugim podparte, zginanej obciążeniem równomiernie rozłożonym $q \text{ kg/cm}$ (rys. 307). Za zbędną niewiadomą przyjmujemy reakcję prawej podpory X . Momentem zginającym przekroju mn będzie przy I-szym stanie:

$$M = Xx - q \frac{x^2}{2}.$$

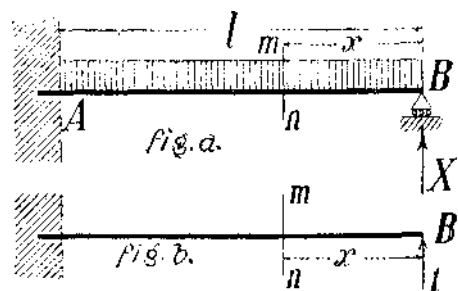
Tenże moment w II-gim stanie równa się:

$$M_1 = 1x.$$

Wielkość X znajdziemy przeto z równania

$$\int_0^l \frac{1}{EI} \left(Xx - q \frac{x^2}{2} \right) x dx = 0.$$

Pierwszy wyraz w rów. (210) znika w naszym przypadku, albowiem podpora B nie doznaje przesunięć w kierunku reakcji X . Wykonawszy całkowanie dojdziemy do znanej już wartości X .

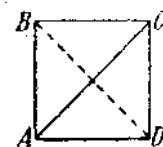


Rys. 307

§ 123. O NAPRĘŻENIACH PIERWOTNYCH W UKŁADACH STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH

Zauważyliśmy już pierwiej, że w układach statycznie wyznaczalnych [elementarna] zmiana długości jakiegokolwiek pręta, lub położenia punktów podparcia nie wywołuje naprężeń dodatkowych. W odmiennych warunkach znajdują się układy, mające „zbędne pręty“, lub „zbędne ustalenia“, czyli układy statycznie niewyznaczalne. Geometryczne rozmiary układu są zupełnie określone prętami i ustaleniami „niezbędnymi“, ażeby więc jakikolwiek pręt dodatkowy nie wywołał nowych napięć w układzie, musi długość tego pręta być dokładnie równą odległości między odpowiadającymi węzłami. Podobnie musi mieć dodatkowa podpora ściśle określone położenie. Objasnimy to jeszcze na przykładach.

Układ $ABCD$ (rys. 308) posiada jeden pręt zbyteczny, a mianowicie przekątną BD . Jeżeli długość tej przekątnej nie odpowiada odległości między węzłami B i D , to dla wstawienia jej na miejsce wypadnie ją nieco ścisnąć lub rozciągnąć. Wstawiwszy przekątną w napiętym stanie, wywołamy oczywiście napięcia i w pozostałych prętach układu. Te napięcia nie mają nic wspólnego z napięciami, wywołanymi w prętach przez siły zewnętrzne i będą zależne tylko od tego, o ile pierwotna długość przekątnej BD różni się od odległości między węzłami B i D . Te napięcia będą zachodzić i wówczas, gdy żadne siły zewnętrzne na układ nie działają.



Rys. 308

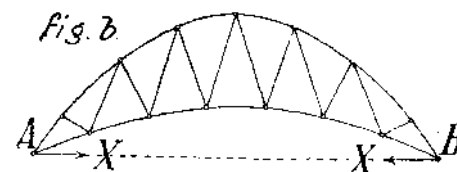
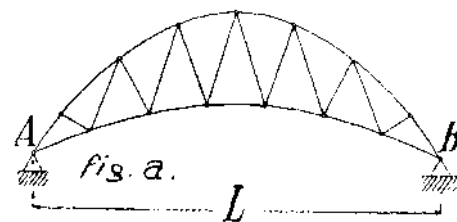
Jako drugi przykład weźmiemy belkę ciągłą dwuprzęsłową (rys. 309). Środkowa podpora okazuje się zbędną i skoro ją umieścimy wyżej lub niżej od prostej AC , łączącej podpory skrajne, to przez to wywołamy w belce naprężenia dodatkowe niezależne od sił zewnętrznych, na belkę działających.



Rys. 309

Pokażemy teraz na szczegółowych przykładach, jak przy pomocy wyprowadzonych twierdzeń ogólnych można wyznaczyć dodatkowe napięcia (względnie wywołane niemi naprężenia), uwarunkowane niedokładnościami w położeniu podpór, lub w długościach „zbędnych prętów”. Te zadania mają znaczenie praktyczne także dlatego, ponieważ niekiedy odstępuje się rozmyślnie od geometrycznych wymiarów części składowych konstrukcji, aby wywołać pewne naprężenia pierwotne, które potem sumują się

z naprężeniami wskutek sił zewnętrznych. Czasami udaje się tą drogą osiągnąć korzystniejszy rozkład naprężeń w układzie. Weźmy np. łuk dwuprzegubowy (rys. 310). Obie podpory mają stałe przeguby, jedno zatem ustalenie okazuje się zbytecznym, a mianowicie to, które zapobiega zmianie odległości końcowych węzłów A i B . Jeżeli odstęp między temi węzłami jest dokładnie równy odległości podpór, to można kratownicę ustawić swobodnie na podporach, a w układzie nie powstaną żadne naprężenia początkowe. Przyjmijmy teraz, że odstęp między węzłami A i B jest większy od odległości podpór o małą wielkość δ . Ażeby kratownicę wstawić na miejsce, musimy zbliżyć do siebie węzły A i B o wielkość δ , działając na nie siłami X . Po wstawieniu kratownicy na miejsce, powstaną przeto w prętach napięcia, odpowiadające siłom X . Dla znalezienia X najdogodniej zastosować twierdzenie Castigliano'a. Oznaczmy przez S_1 napięcia, jakiego powstały w prętach naszej kratownicy, gdyby zamiast sił X działały siły równe 1. (Łatwo je znaleźć kreśląc plan sił Cremona'y). Wtedy przy działaniu sił X powstaną napięcia $S_1 X$. Energią potencjalną układu będzie

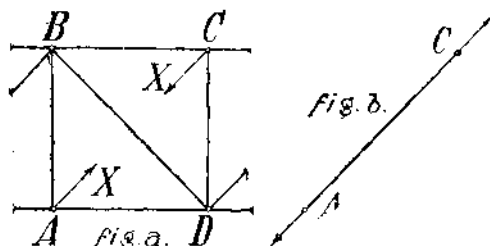


Rys. 310

$$V = \sum \frac{(S_1)^2 X^2 l_i}{2EF_i},$$

a na podstawie twierdzenia Castigliano'a otrzymamy:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \sum \frac{(S_1)^2 X l_i}{EF_i} = \delta, \quad \text{skąd } X = \frac{\delta}{\sum \frac{(S_1)^2 l_i}{EF_i}} \quad (211)$$



Rys. 311

Podobnież można znaleźć napięcie w belce kratowej ciągłej, wywołane niejednakową wysokością podpór.

Weźmy teraz przypadek, kiedy długość jakiegokolwiek pręta układu statycznie niewyznaczalnego nie odpowiada odległości między węzłami. Dajmy na to, że pręt AC (rys. 311) jest krótszy od odstępu między węzłami A i C o wielkość δ . Dla wstawienia tego pręta trzeba będzie rozcią-

gnąć go o δ i potem w takim napiętym stanie przymocować go do węzłów A i C . Taki pręt będzie oczywiście wywierał na węzły działanie, które możemy zastąpić siłami X . Do ich obliczenia możemy użyć twierdzenia Castigliano'a. Niech będą $S_1^i X$ napięciami w prętach kratownicy, powstałymi wskutek sił X , natenczas energia potencjalna układu:

$$V_1 = \Sigma \frac{(S_1^i)^2 X^2 l_i}{2EF_i}, \text{ a zatem } \frac{\partial V_1}{\partial X} = X \Sigma \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i}$$

określa zbliżenie węzłów A i C pod wpływem sił X . Energią rozpatrywanego pręta AC (fig. b) będzie:

$$V_2 = \frac{X^2 l}{2EF}, \text{ a więc wielkość } \frac{\partial V_2}{\partial X} = \frac{Xl}{EF}$$

przedstawi nam jego wydłużenie pod działaniem sił X . Jest rzeczą jasną, że zbliżenie węzłów A i C , dodane do wydłużenia pręta AC , musi dać wielkość δ . Stąd równanie:

$$X \Sigma \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i} + X \frac{l}{EF} = \delta, \text{ z którego obliczymy: } X = \frac{\delta}{\frac{l}{EF} + \Sigma \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i}} \quad (212)$$

§ 124. NAPRĘŻENIA TERMICZNE W UKŁADACH STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH

W kratownicy statycznie wyznaczalnej nie powstaną dodatkowe naprężenia przy równomiernej zmianie temperatury jakichkolwiek prętów układu, a tembardziej przy takiejże zmianie temperatury całego układu, ponieważ zmiany długości oddzielnych elementów są od siebie niezależne. Inaczej ma się rzecz u kratownic statycznie niewyznaczalnych. Tutaj zmiany długości elementów nie mogą być dowolne, wobec czego podwyższenie lub obniżenie temperatury wywołuje zwykle podobny skutek, jak błędy w długości prętów, lub w położeniu podpór. Naprężenia wywołane zmianą temperatury, czyli naprężenia termiczne, mogą być niekiedy bardzo znaczne i przy obliczeniach trzeba je dołączyć do naprężeń powstałych wskutek danych obciążeń. Obliczenia naprężeń termicznych można dokonać przy pomocy ogólnych twierdzeń dowiedzionych poprzednio. Tok rachunku objaśnimy na przykładach.

Weźmy łuk dwuprzegubowy, przedstawiony na rys (310). Skoro temperatura wszystkich prętów podniesie się o t^0 , to przy swobodnem wydłużeniu każdy z prętów zwiększyłby swą długość o αlt , przyczem α oznacza współczynnik wydłużenia termicznego, a l długość pręta. Pierwotna rozpiętość łuku L zwiększyłaby się o długość

$$\delta = \alpha Lt.$$

Wskutek stałości przegubów podporowych pojawiają się reakcje X , przeszkadzające zwiększeniu rozpiętości. Ich wielkość znajdziemy oczywiście z warunku, że wywołane nimi skrócenie rozpiętości znosi się z powiększeniem δ wskutek podwyższenia temperatury. Dla wyznaczenia X można zatem zastosować wzór (211) z poprzedniego paragrafu. Podstawiając zamiast δ powyższą wartość otrzymamy:

$$X = \frac{\alpha Lt}{\Sigma \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i}} \quad (213)$$

Podobnież można użyć wzoru (212) z poprzedniego paragrafu do określenia naprężeń, jakie powstają wskutek podwyższenia temperatury jakiegokolwiek jednego pręta. Podwyższenie temperatury pewnego pręta jest bowiem równoznaczne z tem, że długość pręta jest większą od odległości między odpowiadającymi węzłami o wielkość $\delta = \alpha lt$. W takim razie musi być pręt uprzednio ściśnięty i po wstawieniu na miejsce będzie dążył do rozsunęcia odpowiadających węzłów. Napięcie ogrzanego pręta, jakie przytem powstaje, znajdziemy na podstawie wzoru (212), a mianowicie:

$$X = - \frac{\alpha lt}{\frac{l}{EF} + \Sigma \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i}} \quad (214)$$

Jeżeli mamy do czynienia z podwyższeniem temperatury całego szeregu prętów w danym układzie, to najdogodniej posłużyć się sposobem Mohr'a. Wydłużenie prętów wskutek jednoczesnego działania obciążeń i podwyższenia temperatury przedstawi wzór postaci:

$$\delta l_i = \alpha l_i t_i + \frac{(S_0^i + S_1^i X + S_2^i Y + S_3^i Z + \dots) l_i}{EF_i}$$

Ten stan układu będziemy uważać za I-szy. Stan II-gi obieramy tak, jakśmy to czynili poprzednio, t. j. usuwamy wszystkie obciążenia i zbyteczne niewiadome, a jedną z tych niewiadomych zastępujemy siłami równymi 1. Przyrównyując do zera pracę sił II-go stanu na przesunięciach, odpowiadających stanowi I-mu, otrzymamy dostateczną liczbę równań do obliczenia zbytecznych niewiadomych. W przypadku układu z jednym prętem zbędnym, przybierze równanie postać:

$$-1 \left(\alpha l t + \frac{X l}{EF} \right) - \sum_{i=1, 2, 3, \dots} S_1^i \left(\frac{S_0^i + S_1^i X}{EF_i} + \alpha l_i t_i \right) = 0 \quad \dots \quad (215)$$

Stąd można obliczyć X .

ROZDZIAŁ XV

PRZYBLIZONY SPOSÓB BADANIA ZGIĘCIA PRĘTÓW ¹⁾

§ 125. OGÓLNY ZARYS METODY

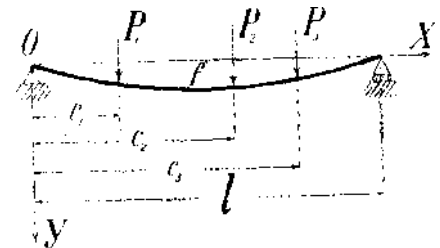
Badanie zgięcia prętów, polegające na całkowaniu odpowiadających równań różniczkowych, nie przedstawia żadnych trudności, dopóki da się stosować zasada superpozycji, albo w przypadkach statycznie niewyznaczalnych, dopóki liczba zbytecznych niewiadomych jest niewielka. Atoli już badanie jednoczesnego działania zginania ze ściskaniem lub rozciąganiem (§ 112) prowadzi do zbyt zawitych wzorów, nieprzydatnych do praktycznego zastosowania, a w tych przypadkach zgięcia, gdzie mamy do czynienia z większą ilością zbytecznych niewiadomych, wymaga obliczenie bardzo żmudnej, a niekiedy i wprost niewykonalnej pracy, polegającej na rozwiązaniu układu wielu równań. W wielu wypadkach można rozwiązanie takich zadań uprościć i otrzymać wynik przybliżony z dostateczną dla praktycznych zastosowań dokładnością, bez uciekania się do całkowania odpowiadających równań. Metoda przybliżona polega na zastosowaniu zasady prac przygotowanych; punkt wyjścia stanowi zatem rów. (190). Weźmy pod uwagę belkę prostą, obciążoną układem ciężarów pionowych P_i (rys. 312). Zważywszy, że praca każdej z sił na dowolnym przesunięciu przygotowanym jest równa $P_i \delta y_i$, przyczem δy_i oznacza przyrost ugięcia pod siłą P_i , możemy rów. (190) przedstawić w postaci:

$$\sum_{i=1, 2, 3, \dots} P_i \delta y_i - \delta V = 0 \quad \dots \quad (216)$$

co wyraża, że praca sił zewnętrznych na jakimkolwiek możliwym odchyleniu zgiętej osi belki od położenia równowagi równa się odpowiadającemu przyrostowi energii potencjalnej. Ponieważ podczas przesunięć przygotowanych siły P_i zachowują stałe wartości, więc rów. (216) da się jeszcze przedstawić w postaci:

$$\delta (\sum_{i=1, 2, 3, \dots} P_i y_i - V) = 0 \quad \dots \quad (217)$$

Znaczy to, że przyrost wyrażenia ujętego w nawiasy przy jakimkolwiek możliwym odchyleniu od położenia równowagi osiąga swoją wartość krańcową, t. j. maximum albo minimum. Ten wniosek



Rys. 312

¹⁾ Obszerniej traktuje tę kwestję praca autora: „Primienjenje normalnych koordinat k' izsljedowanju izgiba stierzniej i plastinok“. Izw. Kijews. Pol. Inst. 1910 r.

Ob. także „Kurs Teorij Uprugosti“, cz. II, str. 50.

z którego można znaleźć wartość parametru f . Do tego trzeba tylko wyrazić V jako funkcję ugięcia. Na podstawie wyników poprzednio otrzymanych (wz. 184) mamy dla energii zgięcia wyrażenie:

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{EI}{2} \frac{\pi^4 f^2}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} f^2 \quad (220)$$

Wstawiając je w rów. (219) otrzymamy:

$$f = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \Sigma P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} \quad (221)$$

Ażby ocenić dokładność tego wzoru zastosujemy go do kilku szczególnych przypadków.

Jeżeli na belce znajduje się jeden ciężar P , to ugięciem w środku będzie:

$$f = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} P \sin \frac{\pi c}{l}$$

Przy $c = \frac{l}{2}$, t. j. przy obciążeniu leżącym w środku rozpiętości:

$$f = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} = \frac{1}{48,7} \frac{Pl^3}{EI}$$

Ten wynik różni się od dokładnej formuły:

$$f = \frac{Pl^3}{48 EI}$$

w przybliżeniu o 1,5%.

Skoro będziemy zmniejszać odległość c , a przytem zwiększać P w ten sposób, aby iloczyn Pc zachowywał stałą wartość M , to w granicy dojdziemy do zginania belki parą sił, działającą na koniec. Zważywszy, że przy małych wartościach c :

$$\sin \frac{\pi c}{l} = \frac{\pi c}{l},$$

otrzymamy dla ugięcia w środku wyrażenie:

$$f = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \cdot P \frac{\pi c}{l} = \frac{2}{\pi^3} \cdot \frac{Ml^2}{EI} = \frac{Ml^2}{15,5 EI}$$

t. j. wielkość różniącą się od dokładnego rozwiązania mniej więcej o 3%. A zatem nawet dla tak skrajnego położenia obciążenia daje wzór przybliżony wynik wcale zadowalający.

Od zgięcia siłami skupionymi łatwo przejść do obciążenia ciągłego, rozłożonego według dowolnego prawa. Oznaczmy przez q natężenie obciążenia, które w ogólnym przypadku będzie pewną funkcją zmiennej x . Jeżeli wydzielimy obciążenie elementarne $q dx$ w odległości x od lewej podpory, to wywołane tem obciążeniem ugięcie środka belki będzie:

$$\delta f = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} q dx \sin \frac{\pi x}{l}$$

Sumując działania obciążeń elementarnych, znajdziemy całkowite ugięcie:

$$f = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \int_0^l q \sin \frac{\pi x}{l} dx \quad (222)$$

W szczególnym przypadku równomiernego rozkładu obciążenia, t. j. dla stałego q , otrzymamy:

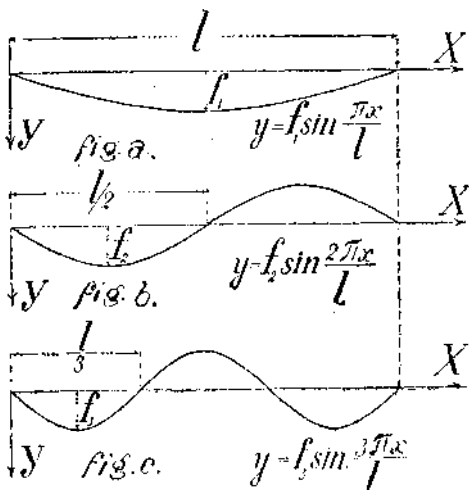
$$f = \frac{2ql^3}{\pi^4 EI} \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} = \frac{ql^4}{76,5 EI}$$

Dokładne rozwiązanie daje w tym przypadku:

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} = \frac{ql^4}{76,8 EI}$$

Błąd przybliżonego rozwiązania jest przeto mniejszy od 1/2%.

Jeżeli nam zależy na większej dokładności, to trzeba, jak już powiedzieliśmy, zwiększyć liczbę dowolnych parametrów, wchodzących w wyrażenie dla zgiętej osi. W rozpatrywanym przypadku można to powiększenie osiągnąć przez superpozycję oddzielnych sinusoid. Przyjmijmy np.



Rys. 313

$$y = f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + f_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (223)$$

Każdemu wyrazowi tego szeregu będzie odpowiadać sinusoida o innej długości fali (rys. 313). Każda z nich czyni zadość warunkom krańcowym i aby przez superpozycję sinusoid otrzymać postać najbliższą szukanej, trzeba wielkości f_1, f_2, \dots dobrać tak, aby wyrażenie (218) przybrało wartość maksimum albo minimum. Wstawmy w to wyrażenie wartość y z rów. (223), a otrzymamy:

$$\Sigma P_i \left(f_1 \sin \frac{\pi c_i}{l} + f_2 \sin \frac{2\pi c_i}{l} + f_3 \sin \frac{3\pi c_i}{l} + \dots \right) - V = 0.$$

Utworzywszy pochodne względem dowolnych parametrów f_1, f_2, \dots i przyrównawszy je do zera, mamy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial f_1} &= \Sigma P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} \\ \frac{\partial V}{\partial f_2} &= \Sigma P_i \sin \frac{2\pi c_i}{l} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (224)$$

Dla wyznaczenia wielkości f_1, f_2, \dots trzeba w te równania zamiast V wstawić wartość:

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{2l^3} \int_0^l \left(f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + 2^2 f_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + 3^2 f_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} (f_1^2 + 2^4 f_2^2 + 3^4 f_3^2 + \dots) \quad (225)$$

Ostatni wynik łatwo otrzymać, zważywszy, że wyrażenie pod znakiem całki, po wykonaniu potęgowania, będzie zawierać człony dwójakiej postaci:

$$2 n^2 f_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot m^2 f_m \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \text{i} \quad n^4 f_n^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l}, \quad \text{przyczem} \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

oraz że $\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0$ przy $m \neq n$ zaś $\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$.

Równania (224) napiszemy przeto w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4 EI}{2l^3} f_1 &= \Sigma P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}, \\ \frac{\pi^4 EI}{2l^3} 2^4 f_2 &= \Sigma P_i \sin \frac{2\pi c_i}{l}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

a stąd

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \Sigma P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}, \\ f_2 &= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \Sigma P_i \sin \frac{2\pi c_i}{l}, \\ f_3 &= \frac{1}{3^4} \cdot \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \Sigma P_i \sin \frac{3\pi c_i}{l}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Dla znalezienia ugięcia trzeba tylko te wartości f_1, f_2, \dots wstawić w wyrażenie (223) dla y .

Biorąc pod uwagę, np. przypadek obciążenia jedną siłą skupioną P w środku rozpiętości, mamy:

$$c = \frac{l}{2}, \quad \sin \frac{\pi c}{l} = 1; \quad \sin \frac{2\pi c}{l} = 0; \quad \sin \frac{3\pi c}{l} = -1; \dots$$

a więc:

$$f_1 = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} P, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = -\frac{1}{3^4} \cdot \frac{2l^3}{\pi^4 EI} P, \dots$$

Wyrażenie dla linii ugięcia (wz. 223) przebierze w tym przypadku postać:

$$y = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^4} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^4} \sin \frac{5\pi x}{l} - \dots \right)$$

Ażeby znaleźć ugięcie w środku belki, trzeba wstawić $x = \frac{l}{2}$, a wtedy:

$$f = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right).$$

Zatrzymując tylko pierwszy wyraz szeregu, dojdziemy do otrzymanego poprzednio pierwszego przybliżenia. Dwa pierwsze wyrazy szeregu dadzą nam drugie przybliżenie:

$$f = \frac{2}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{81} \right) \frac{P l^3}{EI} = \frac{P l^3}{48,1 EI},$$

różniące się od rozwiązania dokładnego o mniej niż $\frac{1}{4}\%$. W dalszym ciągu będziemy zwykle poprzestawać na pierwszym przybliżeniu, dającym dokładność zupełnie wystarczającą do celów praktycznych.

Jeżeli się będziemy posługiwać pojęciami „uogólnionej spórzędnej“ i „uogólnionej siły“, to równania (219) i (224), które stosowaliśmy do znalezienia parametrów f, f_1, f_2, \dots , przybierają bardzo proste znaczenie. Weźmy np. równanie (219). Przypuszczając, że nasza belka zgina się podług sinusoidy

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}$$

zamieniliśmy ją tem samym w układ o jednym stopniu swobody. Dla określenia wszystkich elementów zgięcia, t. j. ugięcia, kąta nachylenia stycznej i krzywizny w dowolnym przekroju, wystarczy znać tylko wielkość f . Tę wielkość przyjmiemy za uogólnioną spórzędną układu. Jakże będzie w takim przypadku wyglądać uogólniona siła? Ażeby odpowiedzieć na to pytanie udzielmy naszej spórzędnej bardzo małego przyrostu δf i znajdziemy pracę odpowiadającą temu przyrostowi. Czynnikiem, przez który trzeba pomnożyć δf , ażeby otrzymać pracę, będzie tedy, stosownie do określenia przyjętego dawniej, szukaną uogólnioną siłą. Przyrostowi spórzędnej δf odpowiada przesunięcie punktu działania siły P_i o wielkość $\delta f \sin \frac{\pi c_i}{l}$, przyczem powstanie praca $P_i \delta f \sin \frac{\pi c_i}{l}$. Pracę wszystkich obciążeń działających na belkę przedstawi suma:

$$\delta f \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l},$$

a zatem $\sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}$ jest niczem innym, jak uogólnioną siłą, odpowiadającą spórzędnej f . Po tych rozważaniach można równ. (219) otrzymać od razu przez przyrównanie pochodnej energii potencjalnej względem spórzędnej do odpowiedniej uogólnionej siły. To samo można powiedzieć w odniesieniu do równań (224). Wielkości f_1, f_2, f_3, \dots okazują się uogólnionymi spórzędnymi układu, a sumy po prawej stronie tych równań będą odpowiadającymi uogólnionymi siłami. W wyrażeniu dla V (wz. 225) wchodzi tylko kwadraty wielkości f_1, f_2, \dots , które przeto okazują się „głównymi“, albo „normalnymi“ spórzędnymi układu.

§ 127. JEDNOCZESNE DZIAŁANIE ROZCIĄGANIA LUB ŚCISKANIA I ZGIĘCIA

Dopóki poprzeczne rozmiary pręta nie są zbyt małe w porównaniu z jego długością, można, przy jednoczesnym działaniu sił podłużnych i poprzecznych, posługiwać się zasadą superpozycji i dodawać naprężenia wskutek zgięcia do naprężeń wskutek sił podłużnych. Atoli w przypadku prętów giętkich może takie składanie doprowadzić do większych błędów, ponieważ siły podłużne wywołują przy pewnych warunkach znaczne zmiany w naprężeniach zginających. Badanie wpływu sił podłużnych na ugięcie sprowadza się do całkowania równania różniczkowego linii ugięcia, a ostateczne wyrażenie dla ugięcia, nawet w najprostszyc przypadkach¹⁾, przedstawia się dość zawiłą formułą, niedogodną do obliczeń (§ 112). Przybliżona metoda okazuje się w tych przypad-

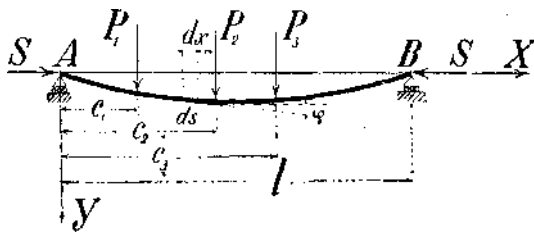
¹⁾ Szereg zadań, tego rodzaju obejmują prace A. P. Van der Vliet'a, umieszczone w „Izw. Sobr. Inż. Put. Soobszcz.“ z lat 1900–1903 i w „Izw. Petersb. Polit. Inst.“ z r. 1904. W tych pracach znajdują się tablice szczegółowe, ułatwiające znacznie obliczenia. Rozwiązanie tychże samych zadań znajduje się w dziele autora: „Kurs Teorij Uprugosti“, cz. II, str. 27.

Ob. także: Tolle, Z. d. Ver. deutsch. Ing. z r. 1897, str. 855.

Forchheimer, Z. d. Ver. deutsch. Ing. z r. 1906, str. 58.

Kwestję naprężeń dopuszczalnych w przypadku jednoczesnego działania zgięcia i ściskania rozpatruje szczegółowo praca K. S. Zawrjewa w „Wiestniku Ob-a Technologow“ z r. 1913. Podane w tej pracy tablice uproszczają znacznie obliczenia.

kach szczególnie dogodną. Przy jej użyciu otrzymujemy dla ugięcia bardzo proste formuły, wykazujące jasno, jak się zmienia wpływ sił podłużnych na zgięcie w zależności od rozmiarów pręta.



Rys. 314

Niech zatem belka AB , zginana siłami poprzecznymi P_1, P_2, \dots , podlega nadto działaniu siły podłużnej ściskającej S (rys. 314). Przyjmijmy w pierwszym przybliżeniu, że belka zgina się według sinusoidy

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}$$

i obierzmy wielkość f za uogólnioną spórzędną. Aby znaleźć odpowiadającą uogólnioną siłę, udzielimy spórzędnej f nieskończenie małego przyrostu δf i wyznaczmy

odpowiadającą wartość pracy sił zewnętrznych. Co się tyczy obciążeń pionowych, to ich pracę, jak widzieliśmy, przedstawia wyrażenie

$$\delta f \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}.$$

Pracę zaś sił podłużnych znajdziemy, obliczywszy zbliżenie końców zginanej belki. To zbliżenie będzie widocznie równe różnicy między długością łuku zgiętej osi, a długością odpowiadającej cięciwy AB . Różnica między długością elementu ds (rys. 314), a długością jego rzutu dx równa się

$$ds - dx = ds(1 - \cos \varphi) = 2 ds \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Przy małych zakrzywieniach można w otrzymanym wyniku wstawić

$$ds = dx \quad \text{i} \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} y',$$

a zbliżenie końców belki przy zgięciu przedstawi się wzorem:

$$\delta l = \int_0^l (ds - dx) = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx \quad \dots \quad (226)$$

Jeżeli belka zgina się według sinusoidy, to

$$\delta l = \frac{\pi^2 f^2}{2l^3} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2 f^2}{4l} \quad \dots \quad (227)$$

Udzielając ugięciu f nieskończenie małego przyrostu, wywołujemy tem samym dodatkowe zbliżenie końców belki o wielkości

$$\frac{\partial \delta l}{\partial f} \delta f = \frac{\pi^2 f}{2l} \delta f,$$

przyczem siły podłużne S wykonują pracę

$$S \frac{\pi^2 f}{2l} \delta f.$$

Dołączając to do pracy sił pionowych P_i , znajdziemy:

$$\left(\sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} + S \frac{\pi^2 f}{2l} \right) \delta f.$$

Czynnik ujęty w nawias jest tutaj uogólnioną siłą, odpowiadającą spórzędnej f . Przyrównawszy pochodną energii potencjalnej względem spórzędnej do odpowiadającej siły, otrzymamy równanie:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} + S \frac{\pi^2 f}{2l}.$$

Stąd po wstawieniu zamiast V wyrażenia (220) wypadnie:

$$f = \frac{2 l^3 \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}}{\pi^4 EI \left(1 - \frac{S l^3}{\pi^2 EI}\right)}$$

Skoro porównamy ten wynik z wyrażeniem dla ugięcia (221), odpowiadającym działaniu samych obciążeń pionowych i dla krótkości oznaczymy to ugięcie przez f_0 , to otrzymamy wzór:

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{S l^3}{\pi^2 EI}} \quad \dots \quad (228)$$

Drugi wyraz w mianowniku ocenia wpływ podłużnej siły na ugięcie. W przypadku prętów o małej smukłości jest stosunek $S: \frac{\pi^2 EI}{l^3}$ małym ułamkiem, a rola siły podłużnej jest przeto znikoma. Ten wpływ wzrasta z powiększeniem giętkości pręta, czyli z powiększeniem jego smukłości. Gdy siła podłużna ma wartość $\frac{\pi^2 EI}{l^2}$, to mianownik we wzorze (228) staje się zerem, a zatem bardzo małe obciążenie prostopadłe może wywołać wielkie ugięcie. Tę wartość siły podłużnej będziemy nazywać krytyczną i oznaczymy stosunek $S: \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ przez α^2 . Wówczas

$$f = \frac{f_0}{1 - \alpha^2} = \mu' f_0 \quad \dots \quad (229)$$

Wpływ siły podłużnej na ugięcie jest zupełnie określony jej stosunkiem do krytycznej wartości siły. Dla oceny dokładności otrzymanego wzoru, obliczymy kilka wartości współczynnika μ' i porównamy je z wartościami μ wyznaczonymi według dokładnego wzoru (195) dla przypadku zgięcia ciężarem skupionym, umieszczonym w środku rozpiętości. Wynik obliczeń zestawiono w poniższej

$\frac{\pi^2 \alpha^2}{4} = 0$	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0
$\mu' = 1,00$	1,09	1,25	1,68	2,55	5,27
$\mu = 1,00$	1,09	1,25	1,67	2,53	5,22

tablicy, z której widać, jak wzrasta wpływ siły podłużnej na zgięcie w miarę zwiększenia α^2 . Przy $\frac{\pi^2 \alpha^2}{4} = 0,5$, t. j. kiedy wielkość siły podłużnej równa się mniej więcej jednej piątej części wartości krytycznej, jej wpływ na zgięcie objawia się zwiększeniem strzałki o 25%; przy sile dwa razy większej równa się ugięcie dodatkowe 68% z f_0 . Różnica między formułą dokładną a przybliżoną jest bardzo mała; dla przypadków objętych tablicą nie przekracza nigdzie 1%. Taka dokładność jest naturalnie całkiem wystarczającą dla zastosowań praktycznych. Gdyby jeszcze większe przybliżenie było pożądanem, to należałoby wziąć ogólne wyrażenie dla ugięcia (wz. 223) i odpowiadającą formułę (225) dla energii potencjalnej. Z przejściem do obciążenia ciągłego rośnie dokładność przybliżonego wzoru (228). Przy równomiernie rozłożonym obciążeniu błąd popełniony, w najgorszym przypadku, nie przekracza $1/2\%$. W przypadku parabolicznego rozkładu obciążenia jest błąd jeszcze mniejszy. W praktyce możemy przeto zawsze się posługiwać wzorem przybliżonym, jeżeli tylko wszystkie siły pionowe mają ten sam kierunek. Tenże wzór da się zastosować i przy zgięciu belki parami sił, działającymi na jej końce, byleby tylko obie pary zginały belkę w tę samą stronę.

Od siły podłużnej ściskającej przechodzimy łatwo do przypadku siły rozciągającej, zmieniając tylko znak wielkości S . Jeżeli poprzestaniemy na pierwszym przybliżeniu, to ugięcie środkowego przekroju równa się

$$f = \frac{f_0}{1 + \alpha^2} \quad \dots \quad (230)$$

przyczem α^2 zachowuje poprzednie znaczenie. W przypadku rozciągania prętów smukłych może α^2 być większe od 1 (w praktyce α^2 nie przekracza 10) i, jak wskazuje obliczenie następných przybliżeń, maleje dokładność wzoru (230) wraz z powiększeniem α^2 . Dla sił skupionych już przy $\alpha^2=2$ osiąga błąd przybliżonego wzoru 4,3%. W przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego jest dokładność znacznie większą i np. dla $\alpha^2=10$ błąd nie przekracza 1,7%.

Obliczywszy według wzorów przybliżonych ugięcie, znajdziemy łatwo wielkość momentu zginającego, uwarunkowanego działaniem sił podłużnych. Dla środka belki moment ten jest równy:

$$\pm Sf = \pm \frac{Sf_0}{1 \mp \alpha^2}.$$

Znaki górne odnoszą się tutaj do przypadku siły ściskającej S , dolne zaś do przypadku siły rozciągającej. Weźmy np. przypadek jednoczesnego ściskania siłą S i zginania siłą P , umieszczoną w środku pręta. Moment zginający w środkowym przekroju ma największą wartość

$$M = \frac{Pl}{4} + Sf = \frac{Pl}{4} \left(1 + \frac{0,823 \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right).$$

Tutaj wstawiliśmy zamiast f_0 wartość $\frac{Pl^3}{48EI}$.

W przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego o natężeniu q , jest moment zginający w środku rozpiętości równy:

$$M = \frac{ql^2}{8} + Sf = \frac{ql^2}{8} \left(1 + \frac{1,028 \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right).$$

Powyższe wzory dla największych momentów zginających dają, w przypadku sił ściskających, dostatecznie dokładne wyniki. Przy siłach rozciągających, gdy α^2 staje się ujemnem, przedstawi się największy moment jako różnica dwóch wielkości. Przy wielkich wartościach α^2 , kiedy wpływ sił podłużnych staje się szczególnie wielkim, zbliżają się obie wielkości do siebie i dlatego moment, obliczony z ich różnicy, może wypaść ze znacznym błędem. Z tego powodu przy $\alpha^2 > 3$ ¹⁾ wypadnie dla obliczenia momentu zginającego użyć dalszych przybliżeń.

Dla otrzymania dalszych przybliżeń trzeba wziąć dla y ogólne wyrażenie:

$$y = f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + f_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots$$

Wzajemne zbliżenie końców belki przy zgięciu przedstawi się wtedy wzorem:

$$\delta l = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \left(f_1 \cos \frac{\pi x}{l} + 2f_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + 3f_3 \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{4l} (f_1^2 + 2^2 f_2^2 + 3^2 f_3^2 + \dots).$$

Ostatni wynik otrzymujemy łatwo, zważywszy, że:

$$\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}, \quad \text{zaś} \quad \int_0^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0,$$

jeżeli $m \neq n$ (liczby całkowite).

Przyjmijmy f_1, f_2, \dots za uogólnione współrzędne i znajdziemy odpowiadające wartości uogólnionych sił. Udzielmy jednej ze współrzędnych f_m przyrostu δf_m , wtedy ugięcie belki przyrośnie o

$$\delta y = \delta f_m \sin \frac{m\pi x}{l},$$

a zbliżenie δl zmieni się o wielkość

$$\frac{\partial \delta l}{\partial f_m} \delta f_m = \frac{m^2 \pi^2}{2l} f_m \delta f_m.$$

Siły prostopadle P_i wykonują przytem pracę:

$$\sum P_i \sin \frac{m\pi c_i}{l} \delta f_m.$$

Pracę, wykonaną siłami podłużnymi S , przedstawi wyrażenie:

$$\pm S \frac{m^2 \pi^2}{2l} f_m \delta f_m,$$

przyczem znak $+$ odpowiada sile ściskającej, a $-$ rozciągającej. A więc uogólnioną siłą, odpowiadającą współrzędnej f_m , będzie:

$$\sum P_i \sin \frac{m\pi c_i}{l} \pm S f_m \frac{m^2 \pi^2}{2l}.$$

¹⁾ Przy $\alpha^2=3$ wynosi błąd M_{\max} dla obciążenia równomiernego około 2,5%.

Przyrównując pochodne energii potencjalnej (wz. 225) względem jakiegokolwiek współrzędnej do odpowiadającej siły, otrzymamy równania postaci:

$$\frac{m^3 \pi^4 EI}{2l^3} f_m = \sum P_i \sin \frac{m \pi c_i}{l} \pm S f_m \frac{m^3 \pi^3}{2l}.$$

Stąd znajdujemy:

$$f_m = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \frac{\sum P_i \sin \frac{m \pi c_i}{l}}{m^3 (m^2 \mp \alpha^2)},$$

przyczem α^2 ma poprzednie znaczenie.

Wstawiając otrzymane w ten sposób wartości współrzędnych f_1, f_2, \dots w ogólne wyrażenie dla y , znajdziemy:

$$y = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \left[\frac{\sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{1^3 (1^2 \mp \alpha^2)} + \frac{\sum P_i \sin \frac{2\pi c_i}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^3 (2^2 \mp \alpha^2)} + \frac{\sum P_i \sin \frac{3\pi c_i}{l} \sin \frac{3\pi x}{l}}{3^3 (3^2 \mp \alpha^2)} + \dots \right] \quad (a)$$

Ten wynik można zastosować także i w tym przypadku, kiedy na belkę działa obciążenie ciągłe o natężeniu q . (W ogólnym przypadku będzie q pewną funkcją c). Obciążenie $q dc$, przypadające na element długości dc , można zastąpić siłą skupioną. Sumując działanie poszczególnych elementów obciążenia ciągłego, otrzymamy z wzoru (a):

$$y = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \left[\int_0^l q \sin \frac{\pi c}{l} dc \sin \frac{\pi x}{l} + \int_0^l q \sin \frac{2\pi c}{l} dc \sin \frac{2\pi x}{l} + \int_0^l q \sin \frac{3\pi c}{l} dc \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right] \quad (b)$$

W przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego jest q stałe, a wyrażenie dla ugięcia przybierze postać:

$$y = \frac{4ql^4}{\pi^4 EI} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1^3 (1^2 \mp \alpha^2)} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^3 (3^2 \mp \alpha^2)} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^3 (5^2 \mp \alpha^2)} + \dots \right] \quad (c)$$

§ 128. ZGIĘCIE BELEK OBU KOŃCAMI UTWIERDZONYCH

W przypadku utwierdzenia końców belki będą ugięcia na podporach i kąty nachylenia stycznych równe zero. Przy działaniu sił pionowych, zgodnie skierowanych, ma zgięta oś dwa punkty przegięcia, a maximum ugięcia leży w pobliżu środka rozpiętości (rys. 315). Uczynimy zadość tym wszystkim warunkom i otrzymamy przybliżoną postać krzywej, jeżeli dla zgiętej osi przyjmiemy równanie:

$$y = \frac{f}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Łatwo okazać, że y i y' stają się zerami przy $x=0$ i $x=l$. Największe ugięcie odpowiada środkowi rozpiętości i równa się f . Obracwszy w ten sposób postać krzywej, zamieniliśmy tem samym naszą belkę w układ o jednym stopniu swobody. Jako uogólnioną współrzędną weźmiemy wielkość f . Jeżeli współrzędnej f udzielimy elementarnego przyrostu δf , to punkt działania jakiegokolwiek ciężaru P_i przesunie się o wielkość:

$$\delta y_i = \frac{\delta f}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l} \right).$$

Siły pionowe P_1, P_2, \dots wykonują przy tem pracę:

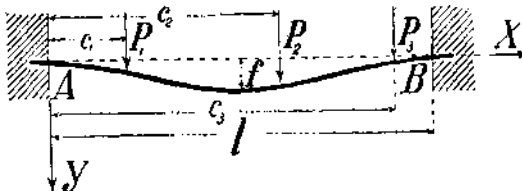
$$\delta f \cdot \frac{1}{2} \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l} \right).$$

Uogólnioną siłą, odpowiadającą współrzędnej f , będzie przeto

$$\frac{1}{2} \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l} \right),$$

zaś równanie dla wyznaczenia f ma postać:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \frac{1}{2} \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l} \right) \quad (231)$$



Rys. 315

Wartością energii potencjalnej w danym przypadku będzie:

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{2\pi^2 f^2}{l^3} EI \int_0^l \cos^2 \frac{2\pi x}{l} dx = \frac{\pi^4 EI f^2}{l^3} \quad (232)$$

Wstawivszy to w rów. (231) znajdziemy:

$$f = \frac{l^3}{4\pi^4 EI} \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l}\right) \quad (233)$$

Gdy w szczególności działa na belkę tylko jeden ciężar w środku, to otrzymamy:

$$f = \frac{Pl^3}{2\pi^4 EI} = \frac{Pl^3}{194,8 EI},$$

zamiast dokładnego rozwiązania $\frac{Pl^3}{192 EI}$. Błąd wynosi zatem około 1,5%.

W przypadku obciążenia ciągłego należy sumowanie zastąpić całkowaniem. Wzór dla ugięcia napiszemy wówczas w formie następującej:

$$f = \frac{l^3}{4\pi^4 EI} \int_0^l q \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right) dx \quad (233')$$

Dla równomiernie rozłożonego obciążenia q mamy:

$$f = \frac{ql^3}{4\pi^4 EI} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right) dx = \frac{ql^4}{4\pi^4 EI}.$$

I tutaj popełniony błąd nie przekracza 1,5%.

Rozpatrzmy teraz wpływ siły podłużnej S na ugięcie belki. Zatrzymując poprzednie wyrażenie dla y znajdziemy najpierw wartość uogólnionej siły, odpowiadającej spólrzędnej f . Przy zmianie f będą wykonywać pracę nietylko pionowe obciążenia P_i , lecz także siły podłużne S . Praca sił pionowych wyrazi się tym samym wzorem, co w przypadku poprzedzającym. Dla obliczenia pracy sił podłużnych utwórzmy wyrażenie dla zbliżenia końców zginanej belki. Na podstawie wzoru (226) mamy

$$\delta l = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{\pi^2 f^2}{2l^3} \int_0^l \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2 f^2}{4l} \quad (234)$$

Udzielając spólrzędnej f przyrostu δf , znajdziemy, że zbliżenie końców zmienia się o wielkość:

$$\frac{\partial \delta l}{\partial f} \delta f = \frac{\pi^2 f}{2l} \delta f,$$

a odpowiadająca praca sił S równa się

$$S \frac{\pi^2 f}{2l} \delta f.$$

Dołączając do tego pracę sił P_1, P_2, \dots , znajdziemy dla szukanej uogólnionej siły wyrażenie:

$$\frac{1}{2} \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l}\right) + \frac{\pi^2 f}{2l} S.$$

Równanie dla wyznaczenia f napiszemy teraz w postaci:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \frac{1}{2} \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l}\right) + \frac{\pi^2 f}{2l} S.$$

Wstawivszy zamiast V wartość z wz. (232), otrzymamy dla ugięcia wzór:

$$f = \frac{l^3}{4\pi^4 EI} \cdot \frac{1}{1 - \frac{S l^2}{4\pi^2 EI}} \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l}\right).$$

Gdy przez f_0 oznaczymy ugięcie wywołane działaniem samych tylko sił pionowych P_i i zatrzymamy oznaczenie

$$S: \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \alpha^2,$$

to powyższa formuła przybierze postać:

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{\alpha^2}{4}} \quad \dots \quad (235)$$

W przypadku sił podłużnych, rozciągających, trzeba tylko zmienić znak S , a zatem:

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{\alpha^2}{4}} \quad \dots \quad (236)$$

Porównywując to z wynikami poprzedniego paragrafu, widzimy, że w przypadku końców utwierdzonych grają siły podłużne mniejszą rolę, niż przy końcach podpartych. Wpływ tych sił na ugięcia można przeto częścię zupełnie pominąć.

Wzory (235) i (236) wypada uważać za pierwsze przybliżenie. Dla otrzymania dokładniejszej wartości ugięć i dla obliczenia momentów podporowych, można użyć następującego sposobu:

Najpierw usuwamy zbyteczne ustalenia, zapobiegające obrotowi końców belki i znajdujemy dla otrzymanej tym sposobem belki w obu końcach podpartej ugięcie i kąty obrotu końców. Następnie dobieramy momenty podporowe tak, aby one przywróciły obrócone końce belki w ich pierwotne położenie. Dla rozwiązania tego zadania będą nam potrzebne wzory wyrażające ugięcie i kąty obrotu końców belki wywołane działaniem momentów podporowych. Otrzymamy je przez całkowanie równania różniczkowego linii ugięcia belki. Dajmy na to, że belka AB (rys. 316) zgina się wskutek momentu M , działającego na jej lewy koniec i wskutek sił ściskających S . Równaniem różniczkowym zgiętej osi będzie:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(l-x)}{l} - Sy.$$

Ogólna całka tego równania ma postać:

$$y = A \cos \frac{\alpha \pi x}{l} + B \sin \frac{\alpha \pi x}{l} + \frac{M(l-x)}{S l}, \quad \text{przyczem } \alpha^2 = \frac{S l^2}{\pi^2 EI}.$$

Stałe całkowania A i B znajdziemy z warunków krańcowych. W naszym przypadku y staje się zerem przy $x=0$ i przy $x=l$. Mamy więc dwa równania warunkowe:

$$A + \frac{M}{S} = 0, \quad A \cos \alpha \pi + B \sin \alpha \pi = 0,$$

z których znajdujemy:

$$A = -\frac{M}{S}, \quad B = \frac{M}{S} \operatorname{ctg} \alpha \pi,$$

a zatem:

$$v = \frac{M}{S} \left[\operatorname{ctg} \alpha \pi \sin \frac{\alpha \pi x}{l} - \cos \frac{\alpha \pi x}{l} + \frac{l-x}{l} \right] = \frac{M l^2}{\alpha^2 \pi^2 EI} \left[\frac{\sin \frac{\alpha \pi (x-l)}{l}}{\sin \alpha \pi} + 1 - \frac{x}{l} \right].$$

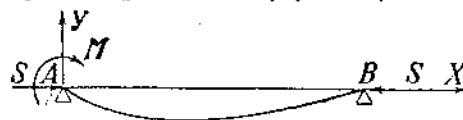
Utworzywszy pochodną $\frac{dy}{dx}$ i podstawivszy w niej kolejno $x=0$ i $x=l$, otrzymamy wzory dla kątów obrotu belki, [znaki ustalone według umowy z § 74]:

$$\delta_1 = \frac{M l}{\alpha \pi EI} \left(\frac{1}{\alpha \pi} - \operatorname{ctg} \alpha \pi \right), \quad \delta_2 = \frac{M l}{\alpha \pi EI} \left(\frac{1}{\sin \alpha \pi} - \frac{1}{\alpha \pi} \right) \quad \dots \quad (237)$$

Łatwo sprawdzić, że przy małych wartościach $\alpha \pi$, t. j. przy małych wartościach siły podłużnej, znalezione wzory zgadzają się z otrzymanymi powyżej formułami (104).

Jeżeli teraz na belkę działają po obu końcach dwa momenty M_1 i M_2 , oraz siły ściskające S , to dla kątów obrotu otrzymamy wzory:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{M_1 l}{\alpha \pi EI} \left(\frac{1}{\alpha \pi} - \operatorname{ctg} \alpha \pi \right) + \frac{M_2 l}{\alpha \pi EI} \left(\frac{1}{\sin \alpha \pi} - \frac{1}{\alpha \pi} \right), \\ \delta_2 &= \frac{M_2 l}{\alpha \pi EI} \left(\frac{1}{\alpha \pi} - \operatorname{ctg} \alpha \pi \right) + \frac{M_1 l}{\alpha \pi EI} \left(\frac{1}{\sin \alpha \pi} - \frac{1}{\alpha \pi} \right). \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (237)$$



Rys. 316

Dla $M_1 = M_2 = M$ będzie

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{Ml}{\alpha\pi EI} \left(\frac{1}{\sin \alpha\pi} - \operatorname{ctg} \alpha\pi \right) = \frac{Ml}{EI} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha\pi} \quad (238)$$

Gdy zamiast siły ściskającej mamy siłę podłużną rozciągającą, to wypadnie zmienić znak α^2 i, co zatem idzie, wielkość α zastąpić wszędzie przez αi . Wówczas wzór (238) przybierze postać:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{Ml}{EI} \frac{\operatorname{tgh} \frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha\pi} \quad (238)'$$

w której tgh oznacza „tangens hyperbolicus“. Mając wzory (237) i (238), możemy bez trudności rozwiązywać zadania zgięcia belki obu końcami utwierdzonej.

Rozpatrzmy np. przypadek zgięcia belki obciążeniem równomiernie rozłożonym. Usunąwszy utwierdzenie końców, znajdziemy dla ugięcia, według wzoru (c) w § 127, wyrażenie:

$$y = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1^3(1^2 + \alpha^2)} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^3(3^2 + \alpha^2)} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^3(5^2 + \alpha^2)} + \dots \right]$$

Różniczkując względem x i podstawiając w pochodnej $x = 0$, otrzymujemy dla kątów obrotu końców wzór:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{4ql^3}{\pi^4 EI} \left[\frac{1}{1^2(1^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{3^2(3^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{5^2(5^2 + \alpha^2)} + \dots \right]$$

Ponieważ według warunku utwierdzenia końce belki się nie obracają, więc momenty podporowe obracają końce belki o kąty równe i wprost przeciwne tym, które powstały wskutek obciążenia ciągłego. Dla wyznaczenia M otrzymamy w przypadku siły podłużnej ściskającej równanie:

$$\frac{Ml}{EI} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha\pi} = \frac{4ql^3}{\pi^4 EI} \left[\frac{1}{1^2(1^2 - \alpha^2)} + \frac{1}{3^2(3^2 - \alpha^2)} + \frac{1}{5^2(5^2 - \alpha^2)} + \dots \right],$$

zaś w przypadku rozciągania siłą podłużną:

$$\frac{Ml}{EI} \frac{\operatorname{tgh} \frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha\pi} = \frac{4ql^3}{\pi^4 EI} \left[\frac{1}{1^2(1^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{3^2(3^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{5^2(5^2 + \alpha^2)} + \dots \right].$$

Zważywszy, że:

$$\frac{1}{1^2(1^2 - \alpha^2)} + \frac{1}{3^2(3^2 - \alpha^2)} + \frac{1}{5^2(5^2 - \alpha^2)} + \dots = \frac{\pi^4}{96} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}}{\frac{1}{3} \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^3},$$

$$\frac{1}{1^2(1^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{3^2(3^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{5^2(5^2 + \alpha^2)} + \dots = \frac{\pi^4}{96} \frac{\operatorname{tgh} \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}}{\frac{1}{3} \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^3},$$

otrzymamy dla momentów podporowych wzory:

$$\left. \begin{aligned} M &= -\frac{ql^3}{12} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}}{\frac{1}{3} \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}} \quad (\text{w przypadku siły ściskającej}), \\ M &= \frac{ql^3}{12} \frac{\operatorname{tgh} \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}}{\frac{1}{3} \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^3 \operatorname{tgh} \frac{\alpha\pi}{2}} \quad (\text{w przypadku siły rozciągającej}) \end{aligned} \right\} \quad (239)$$

Według tych wzorów łatwo obliczyć momenty podporowe, skoro siła podłużna jest znana.

§ 129. PRZYPADEK NIEZNANYCH SIŁ PODŁUŻNYCH²⁾

W rozpatrywanych powyżej przypadkach uważaliśmy siły podłużne S jako dane. Atoli w praktyce spotykamy się często także z zadaniami, w których siły podłużne są nieznane. Takie siły pojawiają się zwłaszcza wskutek zbytecznego ustalenia końców. Podpory bowiem bywają nieraz tak urzą-

¹⁾ Do tej równości dochodzimy najłatwiej, porównyując ugięcie wyznaczone z wzoru (195) z wartością otrzymaną z ogólnego wzoru (a) w § 127, przy działaniu jednej siły P w środku rozpiętości.

²⁾ Bardziej szczegółowo traktuje to zadanie „Kurs Teorii Uprugosti“ autora, cz. II, str. 45.

dziane, że końce belki nie mogą się przy zgięciu zbliżyć do siebie. Wtedy zginaniu towarzyszą siły podłużne, rozciągające oś belki. Wielkość tych sił łatwo znaleźć przy pomocy formuł (230) i (236), wyprowadzonych powyżej. Jeżeli końce belki są zupełnie unieruchomione, to różnica między długością łuku i cięciwy AB (rys. 314) musi być równa wydłużeniu, jakiego doznaje oś belki pod działaniem sił rozciągających S , wywołanych zgięciem. Przy pomocy wyrażenia dla δl (wzór 227) otrzymamy równanie:

$$\frac{\pi^2 f^2}{4 l} = \frac{Sl}{EF},$$

przyczem F oznacza pole przekroju poprzecznego belki. Zważywszy, że

$$S = \alpha^2 \pi^2 \frac{EI}{l^3},$$

i wstawimy zamiast f przybliżone wyrażenie (230), znajdziemy równanie:

$$\frac{f_0^2}{(1 + \alpha^2)^2} = 4 \alpha^2 r^2 \quad \dots \quad (240)$$

Tutaj oznacza r odpowiadający promień bezwładności przekroju poprzecznego. Równanie (240) zawiera tylko jedną niewiadomą wielkość α^2 ; wyznaczywszy ją, możemy bez trudności obliczyć S . Dla rozwiązania najdogodniej przedstawić rów. (240) w następującej postaci:

$$\alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 = \frac{f_0^2}{4r^2} \quad \dots \quad (240)'$$

Prawą stronę można obliczyć z danych rozmiarów belki i obciążeń pionowych. Następnie łatwo znaleźć α^2 przy pomocy tablicy kwadratów liczb. Oto przykład liczbowy takiego rachunku:

Pręt żelazny o przekroju kwadratowym $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ i długości $l = 80 \text{ cm}$, podparty nieruchomo w obu końcach, jest obciążony ciężarem równomiernie rozłożonym $q = 0,5 \text{ kg/cm}$. Przy tych rozmiarach:

$$F = 1 \text{ cm}^2, \quad I = \frac{1}{12} \text{ cm}^4, \quad r^2 = \frac{1}{12} \text{ cm}^2, \quad f_0 = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI} = 1,6 \text{ cm}, \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2.$$

Równanie (240)' daje:

$$\alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 = 7,68, \quad \text{z czego } \alpha^2 = \sim 1,37,$$

a zatem

$$S = \alpha^2 \pi^2 \frac{EI}{l^3} = \sim 352 \text{ kg}.$$

Ugięcie w środku

$$f = \frac{f_0}{1 + \alpha^2} = \frac{1,6}{2,37} = 0,67 \text{ cm},$$

a więc największy moment zginający będzie mieć wartość:

$$M = \frac{q l^3}{8} - S f = \frac{q l^3}{8} \left(1 - \frac{1,028 \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) = 0,4 \frac{q l^3}{8} = 160 \text{ kg cm}.$$

Dla największychciągnięć otrzymamy tedy wartość:

$$p_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{M}{W} = 352 + \frac{160}{\frac{1}{6}} = \sim 1310 \text{ kg/cm}^2.$$

Rozwiążemy jeszcze to zadanie przy założeniu końców utwierdzonych. W tym przypadku

$$f_0 = \frac{1}{384} \frac{q l^4}{EI} = 0,32 \text{ cm}, \quad \text{a } f = \frac{f_0}{1 + \frac{\alpha^2}{4}}.$$

Równanie dla wyznaczenia α^2 będzie mieć postać

$$\alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right)^2 = \frac{f_0^2}{4r^2} = 0,307.$$

Stąd

$$\alpha^2 = \sim 0,27, S = \alpha^2 \pi^2 \frac{EI}{l^3} = 69 \text{ kg} \text{ i } f = \frac{0,32}{1 + \frac{0,27}{4}} = 0,30.$$

Moment zginający w płaszczyźnie utwierdzenia równa się według przybliżonego wzoru¹⁾:

$$M = \frac{q l^3}{12} \cdot \frac{Sf}{2} = \sim 256 \text{ kg cm.}$$

Największą wartość ciągnięć znajdziemy z wzoru:

$$p_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{M}{W} = \sim 69 + 1536 = 1605 \text{ kg/cm}^2.$$

Pokazuje się, że wartość największych naprężeń jest większa w przypadku utwierdzenia końców, niż w przypadku ich podparcia. [Utwardzenie okazuje się przeto w tych warunkach niekorzystnym]. Taki wynik objaśnia się tem, że w przypadku utwierdzenia końców wypada siła podłużna, zmniejszająca wielkość największego momentu, mniejsza, niż przy podparciu końców.

We wszystkich poprzednich wywodach przyjmowaliśmy, że siły zginające działają w jednej z głównych płaszczyzn belki. Jeżeli płaszczyzna działania sił nie schodzi się z jedną z płaszczyzn głównych, to wypadnie siły rozłożyć w dwu kierunkach wzajemnie prostopadłych, odpowiadających głównym osiom bezwładności przekroju poprzecznego. Stosując wyprowadzone wzory, znajdziemy bez trudności ugięcie w każdej płaszczyźnie głównej, a stąd i ugięcie całkowite.

§ 130. WZORY DLA OBLICZEŃ W PRZYPADKU JEDNOCZESNEGO DZIAŁANIA ZGIĘCIA I ŚCISKANIA

Przy pomocy wyłożonej powyżej metody przybliżonej, możemy ocenić wpływ siły podłużnej na ugięcie i obliczyć największe naprężenia, które powstają przy jednoczesnym działaniu zgięcia i ściskania. Te naprężenia będą linjowo zależne od wielkości sił prostopadłych do osi belki, wpływ zaś siły podłużnej jest bardziej złożony, i w przypadkach, gdy siła podłużna zbliża się do wartości krytycznej, mogą już niewielkie zmiany siły odbić się znacznie na wielkości ugięcia, a więc i na wielkości naprężeń. Tę okoliczność należy uwzględnić przy obiorze naprężeń dopuszczalnych w przypadku jednoczesnego działania zgięcia i ściskania.

Nazwijmy przez R naprężenie dopuszczalne przy prostym rozciąganiu i przyjmijmy, że ono równa się $\frac{1}{k}$ -tej granicy sprężystości materiału R_1 . Przy takim obiorze naprężenia dopuszczalnego pręt rozciągany dojdzie do niebezpiecznego stanu napięcia i może doznać trwałych odkształceń tylko wtedy, gdy siła rozciągająca wzrośnie k -krotnie. Dzięki linjowej zależności naprężeń od sił zachodzi tutaj między obciążeniem bezpiecznym, a obciążeniem, przy którym zaczynają się trwałe odkształcenia, stosunek równy stosunkowi naprężenia dopuszczalnego do naprężenia na granicy sprężystości. Obierając pewien stopień pewności w odniesieniu do naprężeń, będziemy mieli tenże sam stopień pewności i co do obciążeń. Inaczej jednak ma się rzecz przy jednoczesnym działaniu zgięcia i ściskania, albo zgięcia i rozciągania. Niechaj np. pręt w obu końcach podparty ściska siła S i zgina obciążenie równomiernie rozłożone o natężeniu q . Największy moment zginający w środku rozpiętości określa wzór (ob. § 127):

$$M = \frac{q l^3}{8} \left(1 + \frac{1,028 \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right), \text{ przyczem } \alpha^2 = \frac{S l^2}{\pi^2 EI}.$$

¹⁾ Przy małych wartościach α^2 wynik, otrzymany podług tego przybliżonego wzoru, różni się nader mało od tego, który wynika z wzoru (239). Przy $\alpha^2 = 1$ odpowiadający błąd jest nieco większy od 1%, a przy $\alpha^2 = 2$ około 2,5%. Gdy α^2 jest wielkie, to siłę podłużną można obliczyć na podstawie wzorów przybliżonych, a do obliczenia momentu podporowego można użyć wzoru (239).

Oznaczywszy przez F pole przekroju poprzecznego, a przez W jego moduł („moment oporu“), otrzymamy dla największych ciśnień wyrażenie:

$$\frac{S}{F} + \frac{ql^2}{8W} \left(1 + \frac{1,028 \alpha^2}{1 - \alpha^2}\right) \quad \dots \quad (a)$$

Przy powiększeniu sił zewnętrznych będą wzrastać nie tylko S i q , lecz także i α^2 , wobec czego naprężenia, obliczone wzorem (a), będą wzrastać prędzej, niż siły, i to tem prędzej, czem bardziej α^2 zbliża się do 1. Gdybyśmy obrali rozmiary pręta tak, aby naprężenia, określone wzorem (a), równały się naprężeniu R , dopuszczalnemu przy prostym rozciąganiu, to przy k -krotnym zwiększeniu wszystkich sił zewnętrznych, naprężenia przekroczą granicę sprężystości i pręt dozna odkształceń trwałych. Z tego widać, że stopień pewności będzie w rozpatrywanym przypadku mniejszy, aniżeli przy prostym rozciąganiu i gdy α^2 różni się niewiele od 1, to niewielki przyrost siły podłużnej może pociągnąć za sobą zniszczenie pręta.

Dla zabezpieczenia w rozpatrywanym przypadku takiego samego stopnia pewności, jak przy prostym rozciąganiu, trzeba wymiary pręta dobrać tak, aby przy k -krotnym powiększeniu wszystkich sił zewnętrznych największe naprężenia wyznaczone na podstawie wzoru (a), osiągnęły wartość, odpowiadającą granicy sprężystości. Dla obliczenia pręta mamy tedy warunek:

$$\frac{kS}{F} + \frac{kql^2}{8W} \left(1 + \frac{1,028 k \alpha^2}{1 - k \alpha^2}\right) \leq R,$$

albo po podzieleniu przez k

$$\frac{S}{F} + \frac{ql^2}{8W} \left(1 + \frac{1,028 k \alpha^2}{1 - k \alpha^2}\right) \leq R \quad \dots \quad (b)$$

Przez wprowadzenie czynnika k po lewej stronie wzoru (b) zwiększamy wartość siły podłużnej i w ten sposób uwzględniamy tę okoliczność, że przy jednoczesnym działaniu sił podłużnych i poprzecznych (obciążeń prostopadłych) są naprężenia nieliniową funkcją wielkości siły podłużnej. Z rozpatrzonego przypadku szczególnego możemy wysnuć następujący ogólny wniosek: Przy obliczeniu prętów narażonych na siły podłużne i poprzeczne można przyjąć naprężenie dopuszczalne, jak dla prostego rozciągania, jednakowoż dla zapewnienia należytego stopnia bezpieczeństwa trzeba w takim przypadku, przy uwzględnieniu wpływu siły podłużnej na wielkość momentu zginającego, pomnożyć tę siłę przez współczynnik większy od 1, równy stosunkowi granicy sprężystości materiału do naprężenia dopuszczalnego przy prostym rozciąganiu. Łatwo dostrzec, że przy takim sposobie obliczenia wypadną największe naprężenia, w przypadku działania siły podłużnej ściskającej, mniejsze od R , a w przypadku rozciągającej siły podłużnej większe od R ¹⁾.

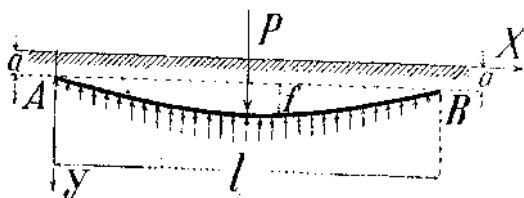
§ 131. ZGIĘCIE BELEK LEŻĄCYCH NA SPRĘŻYSTEM PODŁOŻU

Rozwiązanie tego zadania drogą całkowania odpowiadającego równania różniczkowego prowadzi, jak widzieliśmy (§ 96), do dość zawilego wyrażenia dla linii ugięcia i wyznaczenie ugięć w różnych szczególnych przypadkach wymaga niemało rachunkowej pracy. Te obliczenia można niekiedy znacznie uprościć przez zastosowanie metody przybliżonej. Ta metoda jest szczególnie korzystna wtedy, gdy można poprzestać na pierwszym przybliżeniu. Rozpatrzmy tutaj dwa zadania: a) zgięcie belki z końcami swobodnymi pod wpływem siły działającej w środku i b) zgięcie belki z końcami podpartymi. W obu przypadkach zakładamy, że belka jest na całej długości złączona z podłożem sprężystem. Przypadek bardzo wielkiej długości pręta rozpatrzyliśmy już poprzednio, przyczem się okazało, że oś pręta zgina się pod działaniem siły skupionej podług krzywej falistej, a długość fali zależy od stopnia podatności podłoża i od sztywności pręta przy zginaniu. Przy założeniu, że na każdą jednostkę długości pręta przypada reakcja podłoża równa ky , znaleźliśmy dla długości półfali wyrażenie (wz. 155, § 96):

$$L = \frac{\pi}{\alpha}, \text{ jeżeli } \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}.$$

¹⁾ Por. pracę K. S. Zawrjewa, przytoczoną powyżej (w § 127).

Gdy weźmiemy stosunkowo krótki pręt, którego długość l jest mniejsza od długości półfali L , to pod działaniem siły skupionej w środku pręta powstanie zgięcie podług krzywej bez punktów przegięcia (rys. 317), przyczem końce pręta obniżą się o pewną wielkość a . Największe ugięcie, odpowiadające środkowi belki będzie równe $a + f$. Dla wyznaczenia a i f użyjemy metody przybliżonej. Przyjmiemy, że pręt zgiął się według sinusoidy¹⁾, a wtedy ugięcie w jakimkolwiek przekroju przedstawi się równaniem:



Rys. 317

$$y = a + f \sin \frac{\pi x}{l} \quad (a)$$

W to wyrażenie wchodzi dwa parametry a i f ; przyjmijmy je za współrzędne układu. Skoro współrzędnej a udzielimy przyrostu δa , to siła P wykona pracę $P \delta a$, a zatem P będzie uogólnioną siłą odpowiadającą współrzędnej a . Tak samo przekonamy się, że i współrzędnej f odpowiada siła P . W takim razie:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = P \quad \text{i} \quad \frac{\partial V}{\partial f} = P \quad (b)$$

Dla wyznaczenia a i f trzeba w otrzymane równania wstawić wartość V . Energia potencjalna układu składa się w danym przypadku z dwóch części: z energii zgięcia V_1 , dla której możemy użyć wyrażenia (220), i z energii odkształcenia podłoża V_2 . Reakcja podłoża, przypadająca na element belki o długości dx , równa się $ky dx$. Ta reakcja wzrasta przy zgięciu od zera do swej końcowej wartości, przyczem ugięcie zmienia się proporcjonalnie względem reakcji od zera do y , przeto praca zużyta na odkształcenie podłoża da się przedstawić w postaci

$$V_2 = \int_0^l ky dx \frac{y}{2} = \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx.$$

Wstawiając za y wartość (a) i wykonawszy całkowanie znajdziemy:

$$V_2 = \frac{kl}{2} \left(a^2 + \frac{4af}{\pi} + \frac{f^2}{2} \right).$$

Całkowita energia układu będzie zatem:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi^4 f^2 EI}{4l^3} + \frac{kl}{2} \left(a^2 + \frac{4af}{\pi} + \frac{f^2}{2} \right).$$

Po podstawieniu wartości V przybiorą równania (b) postać następującą:

$$kla + \frac{2klf}{\pi} = P; \quad \frac{\pi^4 f EI}{2l^3} + \frac{klf}{2} + \frac{2kla}{\pi} = P.$$

Pierwsze z tych równań daje:

$$a = \frac{P}{kl} - \frac{2f}{\pi} \quad (c)$$

Wstawiając to w równanie drugie, otrzymamy dla ugięcia f wyrażenie:

$$f = \frac{\pi - 2}{\pi} \cdot \frac{P}{\frac{\pi^4 EI}{2l^3} + \frac{kl}{2} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right)} = \frac{\pi - 2}{\pi} \cdot \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \cdot \frac{1}{1 + \frac{kl^4}{\pi^4 EI} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right)} \quad (d)$$

Zastosujmy otrzymane wzory do szczególnego przypadku. Pręt stalowy ($E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$) o przekroju kwadratowym $6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ i długości 80 cm , obciążony w środku siłą $P = 1000 \text{ kg}$,

¹⁾ Bardziej szczegółowe rozwiązanie zagadnienia zgięcia belki, spoczywającej na sprężystym podłożu i zastosowanie przybliżonej metody w przypadku belek o zmiennym przekroju znajdzie czytelnik w dziele autora: „Kurs Teorii Uprugosti”, cz. II, str. 20.

Ob. także pracę stud. N. W. Krasnopierowa, Izw. Pietrogr. Pol. Inst. z r. 1916.

spoczywa na sprężystym podłożu o współczynniku podatności $k = 240 \text{ kg/cm}^2$. Podstawiając te dane we wzór (d) znajdziemy najpierw

$$f = P \cdot 10^{-4} \cdot 0,148,$$

następnie z (c) otrzymamy

$$a = P \cdot 10^{-4} \cdot 0,427,$$

a zatem największe ugięcie równa się:

$$a + f = P \cdot 10^{-4} \cdot 0,575 \text{ cm}.$$

Stosunkiem ugięcia środka belki do ugięć końców będzie:

$$(a + f) : a = 0,575 : 0,427 = 1,35.$$

Taki sam stosunek znajdzie między odpowiadającymi ciśnieniami na podłożu. Aby znaleźć wielkość nacisku, przypadającego na jednostkę długości w jakimkolwiek przekroju pręta, trzeba pomnożyć ugięcie przez współczynnik k . Odpowiadające ciśnienie otrzymamy, dzieląc ten iloczyn przez szerokość belki. Na końcach belki otrzymamy jako wartość nacisku na jednostkę pola:

$$p_0 = P \cdot 0,427 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{k}{1} = 10,3 \text{ kg/cm}^2.$$

Dla środka belki mamy:

$$p_1 = 1,35 p_0 = 13,9 \text{ kg/cm}^2.$$

Jeżeli to zadanie rozwiążemy przez całkowanie równania różniczkowego, to znajdziemy¹⁾:

$$p_0 = 10,3 \text{ kg/cm}^2, p_1 = 14,0 \text{ kg/cm}^2.$$

Jak widać z tego, daje metoda przybliżona i tutaj dokładność zupełnie wystarczającą. Rozwiązanie zadania sprowadza się do podstawienia danych liczbowych w gotowe wzory (c) i (d), podczas gdy przy użyciu dokładnego sposobu trzeba każdym razem najpierw wyznaczyć wszystkie dowolne stałe całkowania, co wymaga, w danym przypadku, niemało pracy.

Rozpatrzmy teraz zgięcie belki z końcami podpartymi, obciążonej układem sił skupionych P_i . Jeżeli długość belki l jest mniejsza od długości półfal L , odpowiadającej danemu podłożu sprężystemu, to możemy, stosując metodę przybliżoną, poprzestać na pierwszym przybliżeniu i przyjmując, że zgięcie zachodzi według sinusoidy:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Wówczas skorzystamy z wyników otrzymanych pierwiej przy badaniu zgięcia belek końcami podpartych (§ 126). Aby ująć w rachunek wpływ sprężystego podłoża, trzeba w rów. (219) wstawić odpowiednią wartość energii potencjalnej, składającej się w danym przypadku z dwu części: z energii zgięcia V_1 i energii odkształcenia podłoża V_2 . Wartość V_1 znamy już, V_2 zaś obliczymy w ten sposób:

$$V_2 = \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx = \frac{k f^2 l}{4}.$$

A zatem

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} f^2 + \frac{kl}{4} f^2,$$

a rów. (219) przyjmie postać:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = f \left(\frac{kl}{2} + \frac{\pi^4 EI}{2l^3} \right) = \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}.$$

Stąd

$$f = \frac{2l^3 \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}}{\pi^4 EI} \cdot \frac{1}{1 + \frac{kl^4}{\pi^4 EI}} \quad (241)$$

¹⁾ Wynik zaczerpnięty z kursu Föppl'a, wyd. 3-cie, str. 244.

Tenże sam wynik można otrzymać i inną drogą, rozważając zgięcie belki w obu końcach podpartej pod działaniem sił skupionych P_1, P_2, \dots i obciążenia ciągłego, którego natężenie zmienia się według prawa:

$$q = -ky = -kf \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Na podstawie wzorów (221) i (222) znajdziemy:

$$f = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \left(\sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} + \int_0^l q \sin \frac{\pi x}{l} dx \right),$$

a stąd, po wstawieniu wartości za q , otrzymamy znaleziony powyżej wzór (241).

Od zgięcia belki siłami skupionymi łatwo przejść do obciążenia ciągłego. Zamiast sumy skończonej liczby dodajników, wchodzących we wzór (241), otrzymamy całkę, rozpostartą na całą długość belki, a wyrażenie dla ugięcia napiszemy w postaci:

$$f = \frac{2l^3 \int_0^l q \sin \frac{\pi x}{l} dx}{\pi^4 EI} \cdot \frac{1}{1 + \frac{kl^4}{\pi^4 EI}} \dots \dots \dots (241)'$$

Dla obciążenia równomiernie rozłożonego jest q stałe, a wzór powyższy przekształci się na następujący:

$$f = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} \cdot \frac{1}{1 + \frac{kl^4}{\pi^4 EI}} \dots \dots \dots (242)$$

Pierwsze przybliżenie nie daje dostatecznej dokładności przy umieszczeniu siły skupionej blisko jednej z podpór, albo przy zgięciu belki parą sił, działającą na jej końce. W takich przypadkach, lub wogóle, jeżeli większa dokładność jest pożądana, wypada uciec się do dalszych przybliżeń. W tym celu trzeba użyć ogólnego wyrażenia dla y (wz. 223) i odpowiadającej wartości (225) dla energii potencjalnej. Na belkę będzie działać, oprócz sił P_1, P_2, \dots , obciążenie ciągłe, odpowiadające reakcji sprężystego podłoża. Natężenie tego obciążenia zmienia się podług prawa:

$$q = -ky = -k \left(f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + f_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right).$$

Równanie (224) napiszemy teraz w postaci:

$$\frac{\partial V}{\partial f_1} = \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} + \int_0^l q \sin \frac{\pi x}{l} dx,$$

$$\frac{\partial V}{\partial f_2} = \sum P_i \sin \frac{2\pi c_i}{l} + \int_0^l q \sin \frac{2\pi x}{l} dx,$$

Podstawiając zamiast V i q ich wartości, i wykonując całkowanie, znajdujemy:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} \cdot \frac{1}{1 + \frac{kl^4}{\pi^4 EI}}, \\ f_2 &= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \sum P_i \sin \frac{2\pi c_i}{l} \cdot \frac{1}{1 + \frac{kl^4}{2^4 \pi^4 EI}}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (e)$$

Wstawiwszy te wartości f_1, f_2, \dots w wyrażenie dla y , otrzymamy równanie zgiętej osi. W przypadku obciążenia jedną siłą w środku belki ($c = \frac{l}{2}$) będzie:

$$y = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 + \frac{kl^4}{\pi^4 EI}} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^4 \left(1 + \frac{kl^4}{3^4 \pi^4 EI} \right)} + \dots \right] \dots \dots \dots (243)$$

Przy działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego q należy w miejsce $\sum P_i \sin \frac{n\pi c_i}{l}$ w równaniach (e) wstawić wielkość:

$$\int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2lq}{n\pi}$$

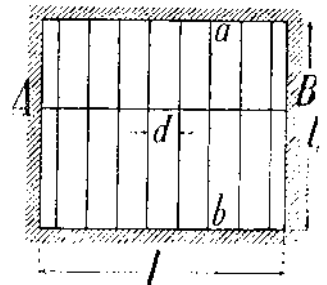
dla n nieparzystego, a 0 dla n parzystego. Równaniem linii ugięcia będzie tedy;

$$y = \frac{4q l^4}{\pi^5 E I} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 + \frac{kl^4}{\pi^4 E I}} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^5 \left(1 + \frac{kl^4}{3^4 \pi^4 E I}\right)} + \dots \right] \quad (243 a)$$

Na podstawie tych ogólnych wyrażeń dla linii ugięcia można nabrać wyobrażenia o błędach, które popełniamy, poprzestając na pierwszym przybliżeniu.

§ 132. OBLICZENIE BELEK SKRZYŻOWANYCH

Przy obliczeniu inżynierskich konstrukcyj napotykamy nierzadko kwestję wytrzymałości płaskich ścianek, narażonych na obciążenie ciągłe. Jako przykłady można przytoczyć szczelne przegrody w okrętach i wrota śluz, wytrzymaujące napór wody. Zwykle buduje się taką ściankę z żelaznej blachy, wzmocnionej układem skrzyżowanych belek, położonych w dwu wzajemnie prostopadłych kierunkach równoległych do boków (prostokątnej) ścianki. Do obliczenia tych belek zastosujemy metodę przybliżoną¹⁾ w przypadku przedstawionym na rys. (318). Żelazne blachy ścianek są przymocowane do układu jednakowych i równo odległych beleczek pionowych, czyli słupów, które się opierają na belce poziomej AB . Przyjmujemy, że nacisk wody rozkłada się równomiernie na słupy, że zatem każdy z nich znosi to samo obciążenie ciągłe Q , zmieniające się według prawa trójkąta lub trapezu. To obciążenie przenosi się częściowo na podpory skrajne, po części zaś na belkę poziomą AB . Nacisk na tę belkę będzie oczywiście zależnym od jej sztywności. Gdyby była doskonale sztywna, t. zn. gdyby się nie ugięła pod wpływem przeniesionych na nią nacisków, to każdy słup przedstawiałby się jako belka ciągła dwuprzęsłowa na stałych podporach. Nacisk na środkową podporę byłby równy αQ , przyczem α oznacza współczynnik zależny od położenia belki poziomej. Jeżeli ona podpira słupy w połowie wysokości, to dla rozkładu obciążenia według trójkąta, albo trapezu $\alpha = \frac{5}{8}$. Dla każdego szczególnego przypadku działania



Rys. 318

obciążenia i położenia podpór można wogóle znaleźć α sposobami poprzednio wyłożonemi i całe obliczenie słupów nie przedstawi trudności. W rzeczywistości jest zadanie znacznie zawilsze, ponieważ zwykle nie można pominąć ugięcia belki poziomej i przy obliczeniu słupów trzeba uwzględnić poddanie się środkowej podpory, równe odpowiadającemu ugięciu y belki AB . To poddanie się wywoła zmniejszenie reakcji środkowej podpory o pewną wielkość γy , jeżeli przez γ nazwiemy współczynnik zależny od sztywności słupów i od rozmieszczenia podpór (§ 88). Przy dwóch równych przesłach

$$\gamma = \frac{48 E_1 I_1}{l_1^3} \quad (a)$$

jeżeli $E_1 I_1$ oznacza sztywność słupów, a l_1 ich długość. Nacisk przenoszony się na belkę poziomą przedstawi formuła:

$$R = \alpha Q - \gamma y \quad (b)$$

Dla uproszczenia badania tej belki zastąpimy naciski skupione obciążeniem ciągłym. W tym celu rozłożymy każdą siłę R równomiernie na długości d , równej odstępowi słupów. Przy znaczniejszej liczbie słupów (jeżeli ich liczba nie mniejsza od 5), można otrzymany w ten sposób schodkowy rozkład obciążenia (rys. 246) zastąpić ciągłym; wówczas natężenie obciążenia w dowolnym przekroju belki poziomej przedstawi się wzorem:

$$\frac{\alpha Q}{d} - \frac{\gamma y}{d} = q - ky \quad (c)$$

Belka pozioma jest zatem w takich warunkach, jak pręt z końcami podpartymi, spoczywający na sprężystym podłożu i zginany obciążeniem równomiernie rozłożonym q . Dla wyznaczenia ugięć można użyć albo ogólnego wyrażenia (wz. 243), albo poprzestać na pierwszym przybliżeniu (wz. 242). Co się tyczy słupów, to słupy skrajne będą w warunkach bliskich belce ciągłej na stałych podporach. Dla słupa środkowego będzie poddanie się środkowej podpory największe, jeżeli oczywiście wykluczmy przypadki, kiedy belka pozioma jest tak giętka, że przy zgięciu powstaje na niej więcej jak jedna półfala. To poddanie się podpory środkowej, a zarazem ugięcie środka belki poziomej f , może być w niektórych warunkach tak wielkie, że reakcja R , określona wzorem (b), otrzymuje wartość ujemną. W takim przypadku belka pozioma nie tylko nie przynosi żadnej korzyści, ale nawet okazuje się wprost szkodliwą, gdyż powiększa naprężenia w środkowych słupach. Tego można uniknąć tylko należytym obciążeniem poprzecznych rozmiarów belki poziomej. Dlatego zwrócimy się do wzoru (b).

¹⁾ Szczegółowiej rozpatruje to zadanie „Kurs Teorii Uprugosti“ autora, cz. II, str. 16.

Wstawiając w nim zamiast y przybliżoną wartość ugięcia (wz. 242) dla środka belki poziomej, otrzymamy wyrażenie reakcji środkowej podpory dla środkowego słupa w postaci:

$$R = \alpha Q - \gamma f = \alpha Q - \gamma \frac{4q l^4}{\pi^3 EI} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k l^4}{\pi^4 EI}},$$

albo, zważywszy, że w danym przypadku

$$q = \frac{\alpha Q}{d}, \quad k = \frac{\gamma}{d},$$

wyrażenie

$$R = \alpha Q \left[1 - \frac{\gamma}{\pi^3 EI d} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\gamma l^4}{\pi^4 EI d}} \right] = \alpha Q \left(1 - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\beta}{1 + \beta} \right) \quad (d)$$

przyczem dla skrócenia wprowadziliśmy oznaczenie:

$$\beta = \frac{\gamma l^4}{\pi^4 EI d} \quad (e)$$

W przypadku, gdy belka pozioma połowi długość słupów, jest

$$\beta = \frac{48}{\pi^4} \cdot \frac{E_1 I_1}{EI} \left(\frac{l}{l_1} \right)^3 \frac{l}{d} \quad (e')$$

Jeżeli znamy rozmiary belek, to możemy znaleźć β i przy pomocy wzoru (d) wyjaśnić warunki działania słupa środkowego. Belka pozioma staje się bezużyteczną, gdy reakcja R wypada równa zeru, t. j. kiedy

$$1 - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\beta}{1 + \beta} = 0, \quad \text{czyli } \beta = \frac{\pi}{4 - \pi} = \sim 3,6 \quad (244)$$

W praktyce należy rozmiary belki poziomej obierać tak, aby odpowiadająca wartość β była znacznie mniejszą od wielkości, określonej wzorem (244). Jako przykład weźmiemy ściankę o konturze kwadratowej, złożoną z dziewięciu równoległych słupów, podpartych w połowie wysokości belką poziomą. Dla obliczenia współczynnika β użyjemy formuły (e)', podstawiając w niej $l:d = 10$ i $l = l_1$. Jeżeli dla słupów wziąć profil \cup Nr 10 ($I_1 = 213 \text{ cm}^4$), a dla belki poziomej profil \perp Nr 40 ($I = 26100 \text{ cm}^4$), to $\beta = 0,040$, a reakcja podporowa (wz. d)

$$R = 0,95 \alpha Q = 0,594 Q.$$

W danym przypadku można przeto pominąć zgięcie belki poziomej i obliczać słupy przy założeniu podpór stałych. Jeżeli zmniejszyć sztywność belki poziomej i przyjąć np.

$$I = 2020 \text{ cm}^4, \quad \text{to } \beta = 0,520, \quad \text{a } R = 0,565 \alpha Q.$$

Teraz, dzięki ugięciu belki poziomej, zmniejszyła się reakcja R w porównaniu z przypadkiem poprzednim prawie o 40%. Wziąwszy belkę poziomą o tym samym przekroju, co słupy, otrzymalibyśmy dla owej reakcji wartość ujemną. W tych warunkach staje się belka pozioma szkodliwą.

Bez wszelkich trudności można przybliżoną metodę zastosować i do przypadku, kiedy końce belki poziomej są utwierdzone. Przyjawszy w pierwszym przybliżeniu, że belka zgina się według krzywej:

$$y = \frac{f}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right),$$

znajdziemy wielkość ugięcia f w środku rozpiętości przy pomocy wzoru (233)', skoro w nim zamiast q wstawimy wartość wyznaczoną z równania (c). Po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$f = \frac{q l^4}{4\pi^4 EI} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3k l^4}{16\pi^4 EI}}.$$

Ten wynik różni się od wzoru (242), którym posługiwaliśmy się przy podpartych końcach belki poziomej, tem, że zamiast wielkości

$$\frac{k l^4}{\pi^4 EI} = \beta,$$

wchodzi weń wielkość

$$\frac{3}{16} \frac{k l^4}{\pi^4 EI} = \beta' \quad (245)$$

Wzór dla wyznaczenia środkowej reakcji środkowego słupa będzie zatem mieć postać:

$$R = \alpha Q \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\beta'}{1 + \beta'} \right) \quad (246)$$

Cały tok rachunku pozostaje zresztą taki sam, jak w poprzednim przypadku.

Jeżeli układ słupów opiera się na dwu belkach poziomych, to nazywając ich ugięcia odpowiednio przez y_1 i y_2 znajdziemy łatwo dla pośredkowych podporowych reakcyj słupów wyrażenia:

$$R_1 = \alpha_1 Q - \gamma_1 y_1 - \gamma_1' y_2, \quad R_2 = \alpha_2 Q - \gamma_2 y_1 - \gamma_2' y_2.$$

Stałe współczynniki $\alpha_1, \dots, \gamma_2'$ można znaleźć z rozwiązywania zgięcia belki na 4 podporach i wpływu na to zgięcie poddania się podpór pośrednich. Zastępując, tak jak w przypadku poprzednim, siły skupione obciążeniem ciągłym, znajdziemy, że każda z belek poziomych niesie obciążenie ciągle zmieniające się według prawa:

$$q = \frac{R_1}{d} = q_1 - k_1 y_1 - k_1' y_2 \quad \text{dla pierwszej belki;}$$

$$q = \frac{R_2}{d} = q_2 - k_2 y_1 - k_2' y_2 \quad \text{dla drugiej belki.}$$

Ograniczając się do pierwszego przybliżenia możemy przyjąć

$$y_1 = f_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad y_2 = f_2 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Do wyznaczenia ugięć f_1 i f_2 użyjemy wzoru (241)'. W nim trzeba tylko wstawić zamiast q wyżej napisane wartości. Wykonawszy całkowanie otrzymamy dla wyznaczenia f_1 i f_2 równania:

$$f_1 = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \left(\frac{2l}{\pi} q_1 - \frac{k_1 f_1 l}{2} - \frac{k_1' f_2 l}{2} \right), \quad f_2 = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \left(\frac{2l}{\pi} q_2 - \frac{k_2 f_1 l}{2} - \frac{k_2' f_2 l}{2} \right).$$

Mając f_1 i f_2 , możemy przejść do badania zgięcia słupów i do wyznaczenia R_1 i R_2 .

Jeżeli mamy wiele belek poziomych (tworzących ze słupami całą sieć skrzyżowanych, rys. 319), to wskazany powyżej sposób obliczenia staje się niedogodnym; dla otrzymania rozwiązania przybliżonego postąpimy przeto w następujący sposób: Obciążenie ciągłe, działające na ściankę, skupimy w punktach przecięcia się belek poziomych i pionowych. Przez to usuniemy miejscowe zgięcie belek między dwoma węzłami, ale ogólny charakter powierzchni ugięcia ścianki pozostaje niezmienny. Jeżeli kontur ścianki różni się niewiele od kwadratu, to w pierwszym przybliżeniu można przyjąć, że przekroje powierzchni ugięcia płaszczyznami poziomymi i pionowymi są sinusoidami. Oznaczwszy przez w ugięcie ścianki, możemy zatem powierzchnię ugięcia przedstawić analitycznie w sposób następujący:

$$w = f \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l_1} \quad (247)$$

Wstawiając $x = \text{const.} = c$, znajdujemy przekrój pionowy powierzchni ugięcia. Równaniem odpowiadającej krzywej będzie:

$$w = f \sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi y}{l_1}.$$

Tak samo można znaleźć dowolny przekrój płaszczyzną poziomą. W ten sposób określamy zgięcie wszystkich belek układu jedną wielkością f , czyli otrzymujemy układ o jednym stopniu swobody. Obierzmy f za współrzędną układu i szukamy odpowiadającej wartości uogólnionej siły. Przyrostowi współrzędnej δf odpowiada dodatkowe ugięcie ścianki:

$$\delta w = \delta f \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l_1}.$$

Przy tej zmianie ugięcia obciążenie ciągłe o natężeniu q wykonywa pracę:

$$\delta f \int_0^l \int_0^{l_1} q \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l_1} dx dy.$$

Mnożnik przy δf w tem wyrażeniu będzie szukaną uogólnioną siłą. Równanie dla wyznaczenia f ma przeto postać:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \int_0^l \int_0^{l_1} q \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l_1} dx dy \quad (248)$$

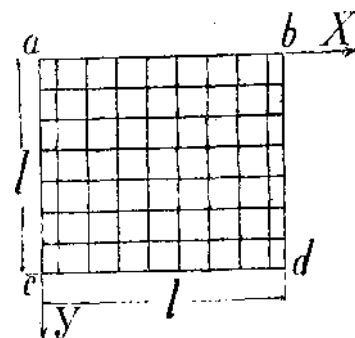
Pozostaje tylko znaleźć wyrażenie dla energii potencjalnej V jako funkcji f , co nie nastęrcza żadnych trudności, ponieważ każda z belek ugina się podług określonej sinusoidy. Wyznaczywszy z rów. (248) wielkość f i otrzymawszy takim sposobem pierwsze przybliżenie dla ugiętej powierzchni ścianki, możemy przejść do obliczenia dodatkowych naprężeń wskutek miejscowego wygięcia belek, czego łatwo dokonać przy pomocy teorii belek ciągłych. Próbne rachunki wykazały, że znalezione w ten sposób pierwsze przybliżenie daje wyniki zupełnie zadowalające. Jeżeli potrzeba większej dokładności, to naturalnie można się uciec do dalszych przybliżeń. W przypadku naporu hydrostatycznego nadaje się do drugiego przybliżenia wyrażenie:

$$w = f \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l_1} + f_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l_1},$$

uwzględniające wpływ nierównomierności rozkładu ciśnienia na wysokości ścianki¹⁾.

¹⁾ Dalsze szczegóły znajdzie czytelnik w dziele autora „Kurs Teorii Uprugosti“, cz. II, str. 72.

[Biorąc ściśle należałoby jeszcze przy obliczeniu energii potencjalnej V uwzględnić skręcenie belek sieci, jakoteż współdziałanie blachy do tych belek przymocowanej. Obie okoliczności zwiększają sztywność całego układu, a więc zmniejszają naprężenia w belkach sieci, niekiedy w dość znacznym stopniu].



Rys. 319

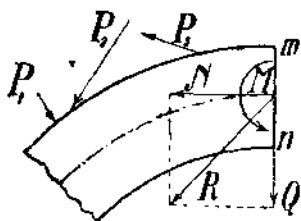
CZĘŚĆ V

PRĘTY ZAKRZYWIONE

ROZDZIAŁ XVI

§ 133. ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ

Zagadnienie zgięcia prętów zakrzywionych ograniczymy do tych przypadków, w których oś (linja środkowa) pręta jest krzywą płaską. Przyjmiemy nadto, że wszystkie siły zewnętrzne leżą w płaszczyźnie krzywizny i że w tej płaszczyźnie leży także jedna z głównych osi bezwładności każdego poprzecznego przekroju pręta¹⁾. Wtedy zgięcie osi pręta, które przyjmujemy za bardzo małe, będzie zachodzić w płaszczyźnie działania sił, czyli w płaszczyźnie obciążenia. Przy badaniu rozkładu naprężeń będziemy się posługiwać poprzednią metodą. Pręt utrzymywany w równowadze siłami zewnętrznymi P_1, P_2, \dots dzielimy na dwie części dowolnie poprowadzonym przekrojem mn ,



Rys. 320

normalnym do zgiętej osi i rozważamy warunki równowagi jednej z tych części, np. lewej (rys. 320). Siły zewnętrzne działające na tę część można sprowadzić do jednej siły R , przechodzącej przez środek ciężkości przekroju i do pary sił o momencie M . Te siły równoważą napięcia rozłożone w przekroju mn i zastępujące działanie odciętej części pręta na część rozpatrywaną. Zacniemy od tego przypadku, w którym $R = 0$, t. j. gdy wszystkie siły zewnętrzne, leżące po jednej stronie przekroju mn , sprowadzają się do pary sił M . Z warunków równowagi wnosimy, że i siły wewnętrzne, działające w płaszczyźnie mn muszą się sprowadzać do pary o momencie równym co do bezwzględnej wartości momentowi M ,

a co do znaku przeciwnym. Ażeby znaleźć prawo rozkładu napięć w przekroju, wyjdziemy z hipotez przyjętych już poprzednio przy badaniu zgięcia prętów prostych (§ 59). Przypuśćmy, że przy działaniu momentu zginającego M powstaną w płaszczyźnie przekroju poprzecznego tylko naprężenia normalne, a ich rozkład jest taki, że przy zgięciu przekrój pozostaje płaskim. Wyniki, otrzymane na podstawie tych hipotez, potwierdzono z dostateczną dokładnością tak badaniami teoretycznymi, jakoteż i doświadczeniami, przytoczonymi poniżej²⁾.

¹⁾ Zgięcie pręta zakrzywionego podług koła pod wpływem sił prostopadłych do płaszczyzny krzywizny rozpatruje K. Federhofer w pracy „Berechnung des senkrecht zu seiner Ebene belasteten Bogenträgers“, Z. f. Math. u. Ph. 62 Bd. z roku 1913.

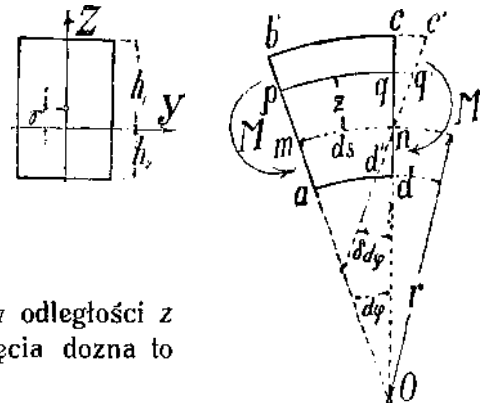
Ob. także „Kurs Theor. Uprug.“, cz. II, str. 88.

²⁾ Teorię zgięcia prętów zakrzywionych, opartą na hipotezie płaskich przekrojów, rozwinięto głównie w pracach następujących:

Winkler „Formänderung und Festigkeit gekrümmter Körper“, Civilingenieur z r. 1858, str. 232; tegoż „Elastizität u. Festigkeit“ r. 1867, str. 253;

Grashof „Theorie d. Elastizität und Festigkeit“, r. 1878, str. 251.

Wydzielmy z pręta dwoma nieskończenie bliskimi przekrojami element klinowaty $abcd$ (rys. 321). Pod działaniem momentu zginającego M obróci się przekrój cd , względem ab o pewien kąt $\delta d\varphi$ i zajmie położenie $c'd'$. Przy przyjętym kierunku momentu, który będziemy uważać za dodatni, powstaną w górnych włóknach ciągnięcia, zaś w dolnych ciśnienia. Powierzchnia mn stanowić będzie warstwę obojętną, w której pierwotna długość włókien ds pozostaje niezmienną. Nazwijmy przez r pierwotny promień krzywizny, odpowiadający łukowi mn , a przez $d\varphi$ pierwotny kąt między przekrojami ab i cd , natenczas



Rys. 321

$$ds = r d\varphi.$$

Pierwotna długość dowolnego włókna pq , znajdującego się w odległości z od warstwy obojętnej, będzie równa $(r + z) d\varphi$. Wskutek zgięcia dozna to włókno wydłużenia bezwzględnego

$$qq' = z \cdot \delta d\varphi;$$

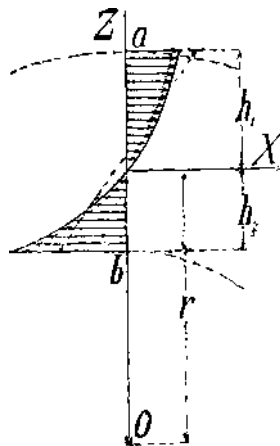
jego wydłużenie względne określi zatem wzór:

$$e = \frac{z \cdot \delta d\varphi}{(r + z) d\varphi}.$$

Przyjmując, że włókna podłużne nie wywierają na siebie nawzajem uwagi godnego ciśnienia, możemy przejść łatwo od wydłużeń do odpowiadających im naprężeń:

$$p = E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{z}{r + z} \quad \dots \quad (249)$$

Skoro otrzymane prawo rozkładu naprężeń normalnych przedstawimy wykreślnie (rys. 322), wystawiając w każdym punkcie przekroju odcinek normalny x , równy odpowiadającemu naprężeniu, to otrzymamy krzywą:



Rys. 322

$$x = A \frac{z}{r + z},$$

przyczem A jest czynnikiem stałym. Naprężenia zmieniają się przeto według prawa hiperbolicznego, przyczem hiperbola ma asymptotę prostopadłą do ab i przechodzącą przez środek krzywizny O . We wzór (249) wchodzi dwie nieznanne dotąd wielkości r i $\frac{\delta d\varphi}{d\varphi}$. Do ich wyznaczenia posłużą równania równowagi. Suma algebraiczna sił wewnętrznych w przekroju ab ma być równa zero i ich moment względem dowolnej osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku ma być równy momentowi zginającemu M ; a zatem:

$$\int_F p dF = E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{z dF}{r + z} = 0 \quad \dots \quad (a)$$

$$\int_F p z dF = E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{z^2 dF}{r + z} = M \quad \dots \quad (b)$$

Zauważmy, że

$$\int \frac{z^2 dF}{r + z} = \int \left(z - \frac{rz}{r + z} \right) dF = \int z dF - r \int \frac{z dF}{r + z}.$$

Druga całka na podstawie rów. (a) staje się zerem, a więc:

$$\int_F \frac{z^2 dF}{r + z} = \int_F z dF = S = F\gamma \quad \dots \quad (250)$$

Tutaj oznacza S moment statyczny przekroju poprzecznego względem osi obojętnej, a γ odstęp osi obojętnej od środka ciężkości przekroju (rys. 321).

Wstawiając to w rów. (b), otrzymamy: $E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{S}$ (251)

a wzór (249) przybierze postać: $p = \frac{M}{S} \cdot \frac{z}{r+z}$ (249)

Dla największego i najmniejszego naprężenia mamy tedy wzory:

$$p_{\max} = \frac{M}{S} \frac{h_1}{r+h_1} \quad \text{i} \quad p_{\min} = -\frac{M}{S} \frac{h_2}{r-h_2} \quad (252)$$

Widzimy stąd, że obliczenie naprężeń przy zgięciu wymaga uprzedniego znalezienia wielkości S , t. j. określenia położenia osi obojętnej. Jak zobaczymy poniżej, można tego dokonać bez szczególnych trudności.

Jeżeli poprzeczne wymiary pręta są małe w porównaniu do promienia krzywizny, to wielkość z w mianowniku wyrażenia (a) można pominąć wobec r . Równanie (a) przekształci się wówczas na

$$\int_F z dF = 0,$$

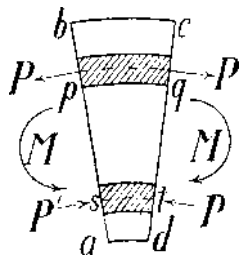
co wyraża, że oś obojętna przechodzi przez środek ciężkości przekroju. Z rów. (b) otrzymamy wtedy:

$$E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{rM}{I}, \quad \text{albo} \quad \delta d\varphi = \frac{M ds}{EI} \quad (253)$$

a formuła (249) dla naprężeń otrzyma postać taką samą, jak w przypadku zgięcia prętów prostych. W dalszym ciągu, przy rozpatrywaniu szczególnych przypadków, objaśnimy przy jakich wartościach rozmiarów poprzecznych można bez znaczniejszych błędów zastąpić hiperboliczny rozkład linjowym. Takie zastąpienie upraszcza naturalnie obliczenia w znacznym stopniu.

Przy wywodzie podstawowego wzoru dla rozkładu naprężeń normalnych przyjęliśmy, że przy zgięciu włókna podłużne nie wywierają na siebie nawzajem nacisku. W rzeczywistości jednak muszą zachodzić między włóknami ciśnienia, jak się o tem można przekonać drogą elementarnych rozważań. Wydzielmy z klinowatego elementu $abcd$ (rys. 323), ograniczonego dwoma przekrojami poprzecznymi ab i cd , podłużne włókno pq . To włókno będzie rozciągane wskutek działania momentów M . Niechaj P będzie wielkością odpowiadającą napięciu. Te napięcia są normalne względem płaszczyzn przekrojów poprzecznych i przy geometrycznym dodawaniu dadzą wypadkową, skierowaną ku warstwie obojętnej. Zupełnie tak samo można się przekonać, że napięcia ściskające P' , działające na końce włókna st , wydzielonego ze ściskanej części pręta, dadzą także wypadkową, skierowaną ku warstwie obojętnej. Te siły warunkują wzajemny nacisk włókien podłużnych, przy czem odpowiadające ciśnienia rosną w miarę zbliżania się do warstwy obojętnej. Wpływ tych napięć na rozkład naprężeń normalnych w płaszczyźnie przekroju poprzecznego okazuje się niewielkim¹⁾ i w dalszym ciągu nie będziemy go uwzględniać. [Inaczej ma się rzecz z wpływem napięć poprzecznych na odkształcenie linii środkowej, co prawda, tylko w przypadku wyjątkowo smukłych kształtów przekroju, jak np. przekrój rurowy o cienkich ścianach]. Pozostawimy także bez rozpatrzenia kwestję wpływu odkształcenia całego przekroju poprzecznego na rozkład naprężeń normalnych²⁾.

Ścisłe rozwiązanie zagadnienia rozkładu naprężeń w płaszczyźnie przekroju poprzecznego krzywego pręta posiadamy tylko w tym przypadku, gdy przekrój przedstawia wydłużony prostokąt³⁾. Nazwijmy przez b i a zewnętrzną i wewnętrzną



Rys. 323

¹⁾ Ob. Pfeleiderer „Die Beanspruchung stabförmiger Träger mit gekrümmter Mittellinie“, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. z r. 1907, str. 209.

²⁾ To zadanie rozwiązał najpierw prof. I. Jewniewicz; ob. „Rukowodstwo k' izuczenju zakonow soprotiwlenij stroitjnych materjałow“, r. 1868, str. 131. Z obcych autorów potrącają o tę kwestję np.:

Müller-Breslau w dziele „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre“, wyd. III, str. 208.

E. S. Andrews „Theory of stresses in crane and coupling hooks“, Drapers Company Research Memoirs I z r. 1904.

³⁾ Pierwsze badania teoretyczne rozkładu naprężeń w zginanych krzywych prętach przeprowadził prof. Ch. Götting; ob. Izw. SPB. Techn. Inst. z r. 1881.

Przypadek zginania parą sił i siłą poprzeczną rozwiązał L. Prandtl; ob. kurs Föppla, t. 5, str. 72, a później:

A. Timpe, Zeitschr. f. Math. u. Phys. z r. 1905, str. 348.

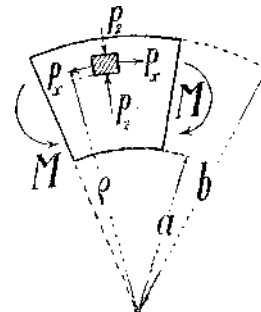
W rosyjskiej literaturze pojawiły się odnośne prace:

N. Mitińskiego: „Ob izgibie kriwych brusjew“, Sborn. Inst. Inż. Put. Soobszcz. z r. 1900 i

S. Bełzeckiego: „Płaskaja zadacza teorij uprugosti w cilindriczeskich koordinatach“, Izw. Sobr. Inż. Put. Soob. z r. 1906, str. 146.

promień zarysu krzywego pręta (rys. 324), przez p_x naprężenia normalne działające w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, a przez p_z naprężenia normalne, wynikające z wzajemnego działania na siebie elementów włókien podłużnych. Wtedy dokładne rozwiązanie przedstawia się wzorami¹⁾:

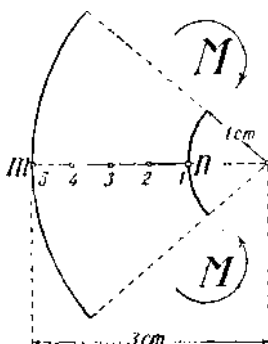
$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{4M}{C} \left(b^2 - a^2 - a^2 \lg \frac{\rho}{a} - b^2 \lg \frac{b}{\rho} - \frac{a^2 b^2}{\rho^2} \lg \frac{b}{a} \right) \\ p_z &= \frac{4M}{C} \left(-a^2 \lg \frac{\rho}{a} - b^2 \lg \frac{b}{\rho} + \frac{a^2 b^2}{\rho^2} \lg \frac{b}{a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (254)$$



Rys. 324

Porównawcze obliczenia wykazały, że w przypadkach, kiedy wysokość przekroju $b - a < \frac{1}{4} \frac{a+b}{2}$, rozwiązanie przybliżone (wz. 249') różni się bardzo mało od powyższego ścisłego. Różnica obu formuł wzrasta z powiększeniem wysokości przekroju, ale zarazem staje się wątpliwą i ważność naszych rachunków. Tak bowiem dokładne, jak i przybliżone wzory, opieramy na założeniu, że rozpatrywany przekrój jest odległy od miejsca działania sił i że poprzeczne rozmiary pręta są małe w porównaniu do jego długości. Oba te warunki przestają się spełniać w miarę wzrostu wysokości przekroju; jednocześnie wywierają coraz większy wpływ naprężenia miejscowe, powstające w miejscu działania sił zewnętrznych i wywołujące znaczne zmiany w rozkładzie naprężeń, znalezionym poprzednio²⁾.

Przy takich warunkach należy przywiązywać wielką wagę do doświadczalnego sprawdzenia otrzymanych wzorów. W pierwszych doświadczeniach, dokonywanych nad prętami zakrzywionymi, doprowadzono je do złamania i oznaczono wielkość obciążenia łamiącego³⁾. Tą drogą można było znaleźć wytrzymałość badanego pręta, jednakowoż to nie wystarczyło do otrzymania nawet przybliżonego obrazu rozkładu naprężeń w zwykłych warunkach pracy krzywego pręta, ponieważ materiał przy wysokich naprężeniach, poprzedzających złamanie, przestaje podlegać prawu Hooke'a, wobec czego tracą ważność formuły teoretyczne, znalezione powyżej. Dopiero późniejsze doświadczalne badania miały na celu sprawdzenie wzorów teoretycznych przez obserwację odkształceń pręta⁴⁾. Dopóki materiał, zginanego pręta (taki jak żel. kowalny i stal) pracuje w granicach sprężystości, odkształcenia podlegają prawu Hooke'a. Zboczenie od tego prawa wykazuje chwilę pojawienia się odkształceń trwałych w najbardziej wyciężonym miejscu pręta. Wyznaczając dla tego miejsca wielkość naprężeń według wyprowadzonych powyżej wzorów i znając z przygotowawczych doświadczeń wartość granicy sprężystości badanego materiału, można osądzić stopień dokładności teoretycznych wzorów. Ten sam wynik można też osiągnąć przeprowadzając doświadczenia nad prętami o polerowanej powierzchni i wnosząc o przekroczeniu granicy sprężystości z pojawienia się linii Lüdersa⁵⁾. Bardziej szczegółowy obraz rozkładu naprężeń otrzymujemy na podstawie doświadczeń z prętami sporządzonymi z materiału przezroczystego, np. ze szkła. Drogą optyczną można wówczas stwierdzić położenie warstwy obojętnej⁶⁾ i znaleźć różnicę naprężeń $p_x - p_z$ w dowolnym punkcie. Poniżej zestawiono wyniki doświadczeń nad szklanym prętym o przekroju prostokątnym (rys. 325) wraz z odpowiadającymi wartościami teoretycznymi w pięciu punktach przekroju mn ⁷⁾.



Rys. 325

Punkt	Wartości teoretyczne					Wartości doświadczalne
	przybliżone		dokładne			
	według hipotezy płas. przekr. $p_x \left(\frac{kg}{mm^2} \right)$	według hipotezy linowego rozkt. p_x	p_x	p_z	$p_x - p_z$	
1	-0,463	-0,302	-0,435	-0,000	-0,435	-0,435
2	-0,121	-0,151	-0,115	-0,086	-0,029	0,000
3	+0,050	0,000	+0,046	-0,071	+0,117	+0,109
4	+0,155	+0,151	+0,145	-0,034	+0,179	+0,163
5	+0,224	+0,302	+0,219	0,000	+0,219	+0,217

¹⁾ Ob. autora „Kurs teorij uprugosti“, cz. I, str. 110 (r. 1914).

²⁾ Wpływem naprężeń miejscowych zajmuje się praca autora: „O raspredelenij napriazhenij w krugowom koleje“ Izv. Kijew. Pol. Inst. z r. 1908.

³⁾ Ob. C. Bach „Elastizität u. Festigkeit“, wyd. III, str. 476.

A. Föppl „Mitteil. aus d. mech. techn. Labor.“, München, r. 1898, str. 36.

⁴⁾ Ob. przytoczoną powyżej pracę E. S. Andrews'a.

Szczegółowym badaniem rozkładu naprężeń w hakach zajmuje się doświadczalna praca Preuss'a, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. z r. 1911.

Ob. także „Mitteil. über Forschungsarb.“, Nr. 126.

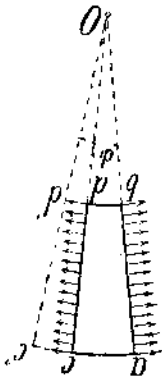
⁵⁾ Ob. M. A. Woropajew „Opredjelenie napr. i deform. w brusiach bolszoj kriwizny“, Izv. Kij. Pol. Inst. z r. 1910.

⁶⁾ Ob. Coker „The Optical Determination of Stress“, Phil. Mag. z r. 1910, str. 740, tudzież Engineering z r. 1911, str. 565. Zasady optycznej metody badania stanu napięcia w ciałach przezroczystych wyłuszcza praca W. Ł. Kirpiczewa w Wiest. Ob-a Technologow z r. 1913.

⁷⁾ Liczby zaczerpnięte z pracy I. Aue „Zur Ber. d. Spannungen in gekr. Stäben unter. Anwend. d. opt. Methode“, r. 1910.

Okazuje się, że doświadczalne wartości różnicy $p_x - p_z$ zgadzają się bardzo dobrze z wynikami obliczeń według wzorów dokładnego rozwiązania. Hipoteza płaskich przekrojów daje także dla wartości największych naprężeń wyniki zadowalające. Natomiast hipoteza linowego rozkładu naprężeń prowadzi, przy obranych stosunkach wysokości przekroju do promienia krzywizny pręta, do znacznych błędów.

Dotychczas rozpatrywaliśmy stan napięcia w przekrojach poprzecznych krzywego pręta, wywołany działaniem pary zginającej o momencie M . Teraz przyjmiemy, że oprócz pary działa jeszcze siła R , przechodząca przez środek ciężkości rozpatrywanego przekroju (rys. 326). Rozłożmy tę siłę na dwie składowe: N , normalną względem przekroju i Q , leżącą w płaszczyźnie przekroju. O sile podłużnej N możemy przyjąć, że rozkłada się w przekroju równomiernie i wywołuje względne wydłużenie włókien równe: $\frac{N}{EF}$. Kli-



Rys. 326

nowaty element pręta ograniczony dwoma przekrojami poprzecznymi ab i cd (rys. 326) odkształci się tak, że przekrój cd zajmie położenie $c'd'$, a ponieważ przyrosty długości włókien podłużnych są proporcjonalne względem odległości od środka krzywizny O , więc kierunek $c'd'$ przejdzie przez punkt O . Przy takim odkształceniu nie zmienia się promień krzywizny pręta, a tylko kąt $d\varphi$ między dwoma sąsiednimi przekrojami poprzecznymi otrzyma przyrost $\delta d\varphi$. Względne powiększenie kąta równa się widocznie względnemu wydłużeniu włókien, a zatem:

$$\delta d\varphi = d\varphi \cdot \frac{N}{EF} \quad (255)$$

Siła poprzeczna Q wywoła naprężenia styczne, które jednakże grają podrzędną rolę przy zgięciu krzywych prętów i dlatego zwykle nie bierze się ich w rachubę. W tych zaś przypadkach, kiedy naprężeń stycznych pominąć nie można, przyjmuje się w przybliżeniu, że prawo ich rozkładu w płaszczyźnie przekroju poprzecznego jest takie same, jak w przypadku prętów prostych.

§ 134. SZCZEGÓŁOWE PRZYPADKI ZGIĘCIA KRZYWYCH PRĘTÓW

Obliczenia naprężeń normalnych według wz. (249), wyprowadzonego na podstawie hipotezy płaskich przekrojów wymaga, jak widzieliśmy, uprzedniego wyznaczenia położenia osi obojętnej, do czego służy równanie:

$$\int_F \frac{z dF}{r+z} = 0 \quad (a)$$

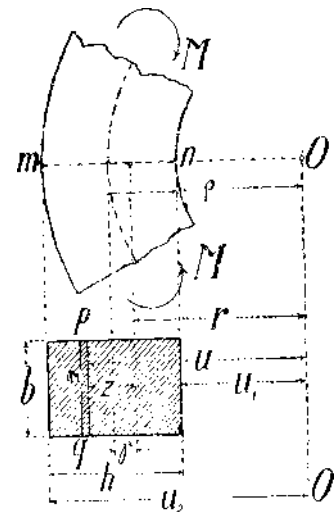
Tok obliczenia odległości r osi obojętnej od środka krzywizny przedstawimy na szczególnych przykładach.

Przekrój prostokątny. Dziąc pole prostokąta (rys. 327) na elementy prostymi równoległymi do OO i oznaczając przez u odległości każdego takiego elementu pq od osi OO , możemy rów. (a) przedstawić w postaci

$$b \int_{u_1}^{u_2} \frac{(u-r) du}{u} = b \int_{u_1}^{u_2} \left(1 - \frac{r}{u}\right) du = 0.$$

Wykonawszy całkowanie otrzymamy dla r wyrażenie:

$$r = \frac{u_2 - u_1}{\lg u_2 - \lg u_1} = \frac{h}{\lg \frac{u_2}{u_1}} \quad (256)$$

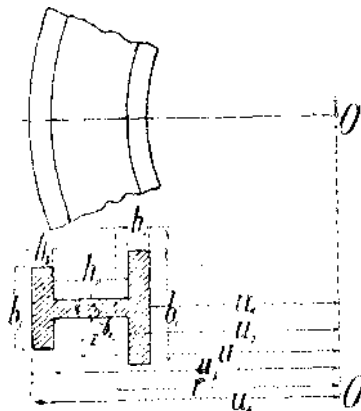


Rys. 327

z którego, przy pomocy tablic logarytmów naturalnych, łatwo znaleźć wielkość r , a zatem i odległość γ osi obojętnej od środka ciężkości przekroju. Nie trudno okazać, że oś obojętka przesuwa się od środka ciężkości przekroju ku środkowi krzywizny i to tem bardziej, im mniejszą jest wartość stosunku $\rho : h$, jeżeli ρ jest odległością środka ciężkości przekroju od środka krzywizny. W ta-

blicy, umieszczonej poniżej, znajdują się wartości największych ciągnięć i ciśnień przy różnych wartościach stosunku $\rho : h$, obliczone według wzoru (252). Obok nich zestawiono dla porównania wartości tychże naprężeń, obliczonych na podstawie formuły dla prętów prostych. Z tablicy widać, że dzięki hiperbolicznemu rozkładowi naprężeń, staje się różnica bezwzględnych wartości p_{max} i p_{min} bardzo znaczną przy małych wartościach stosunku $\rho : h$, że nadto wartość największego, bezwzględnie biorąc, naprężenia jest dla krzywego pręta większą, niż w przypadku pręta prostego o tym samym przekroju. Z wzrostem stosunku $\rho : h$ znika różnica w rozkładach naprężeń między prętem krzywym a prostym; przy $\rho : h = 4$ zboczenia nie przekraczają 9%, a przy $\rho : h = 10$ tylko 3%. Jeżeli poprzestaniemy na dokładności 10%, to, począwszy od $\rho : h = 4$ można obliczać pręty krzywe według wzorów wyprowadzonych dla prętów prostych¹⁾. Takie pręty będziemy w dalszym ciągu nazywać „prętami o małej krzywiznie”. Z nimi mamy przeważnie do czynienia przy obliczeniu konstrukcyj inżynierskich, np. łuków, mostów łukowych, sklepień i t. p. Pręty, u których $\rho : h < 4$ spotykamy dość często w konstrukcji maszyn, np. jako haki, ucha, ogniwa łańcuchów i t. p. Takie pręty będziemy nazywać „prętami o wielkiej krzywiznie” i będziemy je obliczać przy pomocy wzorów, wyprowadzonych z hipotezy płaskich przekrojów.

$\frac{\rho}{h}$	Hipoteza płaskich przekrojów	Hipoteza linjowego rozkładu
1	$p_{max} = 4,4 \frac{M}{F\rho}$ $p_{min} = - 9,2 \text{ „}$	$+ 6 \frac{M}{F\rho}$ $- 6 \text{ „}$
2	$p_{max} = 10,25 \text{ „}$ $p_{min} = - 14,4 \text{ „}$	$+ 12 \text{ „}$ $- 12 \text{ „}$
3	$p_{max} = 16,1 \text{ „}$ $p_{min} = - 20,2 \text{ „}$	$+ 18 \text{ „}$ $- 18 \text{ „}$
4	$p_{max} = 22,2 \text{ „}$ $p_{min} = - 26,2 \text{ „}$	$+ 24 \text{ „}$ $- 24 \text{ „}$
10	$p_{max} = 58 \text{ „}$ $p_{min} = - 62 \text{ „}$	$+ 60 \text{ „}$ $- 60 \text{ „}$



Rys. 328

będą sobie równe. W tym celu, jak widać z wzorów (252), trzeba uczynić zadość warunkowi:

$$\frac{u_3 - r}{u_4} = \frac{r - u_1}{u_1}$$

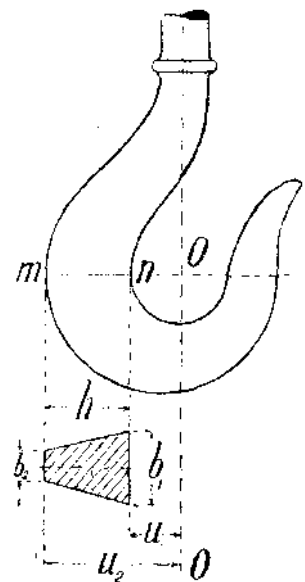
Przyjąwszy wielkości u_4, u_1 i obliczywszy r , znajdziemy z wzoru (257) potrzebne wartości stosunków między pozostałymi rozmiarami. W przypadkach, gdy środek ciężkości przekroju leży w środku wysokości, jest wartość naprężenia na wklęsłej powierzchni pręta większa, niż na wypukłej. Aby te naprężenia zrównać, trzeba środek ciężkości przekroju zbliżyć do środka krzywizny osi pręta. W przypadku przekroju I można to osiągnąć, obierając $b_1 > b_3$.

Przekrój trapezowy stosuje się często w hakach (rys. 329). Równanie dla wyznaczenia r ma postać:

$$\int_F \frac{(u-r) dF}{u} = 0, \text{ skąd } r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{u}} \quad (b)$$

Zważywszy, że szerokość przekroju jest przy naszych oznaczeniach równa:

$$y = b_2 + (b_1 - b_2) \frac{u_2 - u}{u_2 - u_1}, \text{ zaś } dF = y du,$$



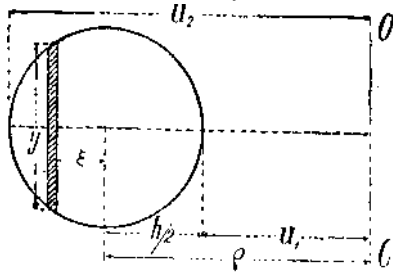
Rys. 329

¹⁾ Co się tyczy powstających przy tem błędów ob. Weyrauch'a „Bogenträger“, II wyd. z r. 1911, str. 32.

otrzymamy z rów. (b):

$$r = \frac{F}{\left[b_2 + \frac{u_2(b_1 - b_2)}{u_2 - u_1} \right] \lg \frac{u_2}{u_1} - (b_1 - b_2)} \quad (258)$$

Zauważymy, że w rozpatrywanym przekroju *mn* haka działa oprócz momentu zginającego także siła podłużna *N*, równa ciężarowi podnoszonemu przez hak. Naprężenia wskutek siły podłużnej, rozłożone równomiernie w przekroju, należy zatem dodać do naprężeń, wywołanych działaniem momentu zginającego.



Rys. 330

Kładąc w otrzymanym powyżej wzorze $b_1 = 0$, wyznaczmy położenie osi obojętnej dla przekroju trójkątnego.

Przekrój okrągły. Szerokość przekroju w odległości ξ od środka (rysunek 330) równa się:

$$y = 2 \sqrt{\frac{h^2}{4} - \xi^2}$$

Rów. (b) dla wyznaczenia *r* napiszemy przeto w postaci:

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{du}{u}} = \frac{F}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{2 \sqrt{\frac{h^2}{4} - \xi^2}}{\rho + \xi} d\xi} = \frac{F}{2\pi \left(\rho - \sqrt{\rho^2 - \frac{h^2}{4}} \right)} \quad (259)$$

We wszystkich rozpatrywanych przypadkach określa odległość osi obojętnej od środka ciężkości przekroju różnica

$$\gamma = \rho - r$$

Jeżeli *r* mało się różni od ρ , to taki sposób obliczenia może prowadzić do znacznie większych błędów w oznaczeniu wielkości γ . Ta niedogodność da się usunąć w sposób następujący. Zamiast odległości *z* od osi obojętnej, wprowadzimy odległość

$$z' = z - \gamma$$

od prostej równoległej do tej osi i przechodzącej przez środek ciężkości przekroju. Wówczas równanie dla wyznaczenia osi obojętnej przekształci się w ten sposób:

$$\int_F \frac{z dF}{\rho + z} = \int_F \frac{(z' + \gamma) dF}{\rho + z'} = \int_F \frac{z' dF}{\rho + z'} + \gamma \int_F \frac{dF}{\rho + z'} = 0 \quad (c)$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\int_F \frac{z' dF}{\rho + z'} = -\varphi F \quad (260)$$

przyczem *F* jest polem przekroju; natenczas:

$$\int_F \frac{dF}{\rho + z'} = \frac{1}{\rho} \int_F \frac{\rho dF}{\rho + z'} = \frac{1}{\rho} \int_F \left(1 - \frac{z'}{\rho + z'} \right) dF = \frac{1}{\rho} F(1 + \varphi)$$

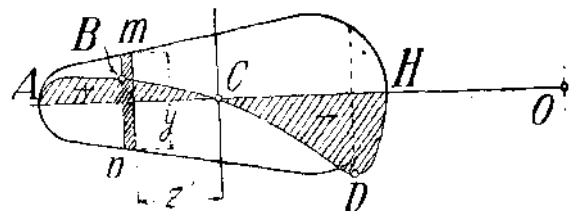
Wstawivszy tę wartość w powyżej napisane rów. (c), otrzymamy:

$$\gamma = \frac{\rho \varphi}{1 + \varphi} \quad (261)$$

Liczbę φ można znaleźć analitycznie lub wykreślnie. Przy wyznaczeniu analitycznym użyjemy rozwinięcia:

$$\int_F \frac{z' dF}{\rho + z'} = \frac{1}{\rho} \int_F z' \left(1 - \frac{z'}{\rho} + \frac{z'^2}{\rho^2} - \dots \right) dF$$

Otrzymany tą drogą szereg jest silnie zbieżny i przy obliczeniach można poprzestać na niewielu wyrazach. Np. dla przekroju prostokątnego o wysokości *h* i szerokości *b* mamy:



Rys. 331

$$-\varphi F = \frac{1}{\rho} \int_F z' \left(1 - \frac{z'}{\rho} + \frac{z'^2}{\rho^2} - \dots \right) dF = \frac{b}{\rho} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z' \left(1 - \frac{z'}{\rho} + \frac{z'^2}{\rho^2} - \dots \right) dz'$$

a stąd

$$\varphi = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2\rho}\right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{h}{2\rho}\right)^6 + \dots$$

Podobnie znajdziemy dla przekroju kołowego:

$$\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{h}{2\rho}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{h}{2\rho}\right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{h}{2\rho}\right)^6 + \dots$$

Dla konturów złożonych (rys. 331) można wyznaczyć wartość φ wykreślnie. W tym celu redukuje się długość y każdego paska elementarnego przekroju w stosunku $z' : (\rho + z')$ i otrzymujemy w ten sposób krzywą $ABCDH$, której rzędne po lewej stronie środka C będą widocznie dodatnie, a po prawej ujemne. Algebraiczna suma pól $ABCA$ i $CHDC$ jest oczywiście równa

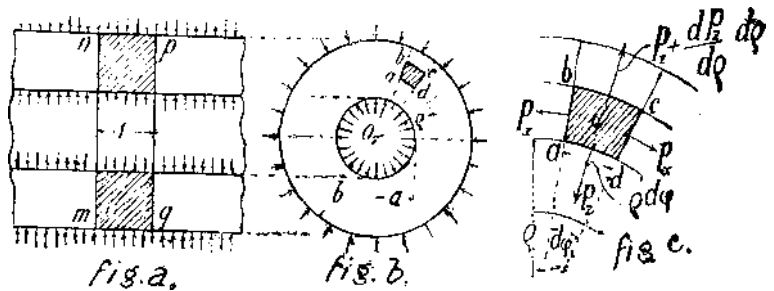
$$\int \frac{z' dF}{\rho + z'} = -\varphi F.$$

Postępując się planimetrem, znajdziemy łatwo wartość φ .

§ 135. ZADANIE LAMÉ'GO

Tę nazwę otrzymało zagadnienie rozkładu naprężeń w pierścieniu kołowym o przekroju prostokątnym, narażonym wewnątrz i zewnątrz na równomiernie rozłożone ciśnienia. Można sobie wyobrazić ten pierścień wycięty z rury walcowej dwoma przekrojami poprzecznymi mn i pq (rys. 332, fig. a). Ponieważ pod działaniem ciśnień równomiernie rozłożonych będą odkształcenia i naprężenia we wszystkich przekrojach poprzecznych rury jednakowe, więc możemy się ograniczyć do rozpatrzenia pierścienia, którego wymiarem w kierunku osi rury jest jednostka długości.

Oznaczmy odpowiednio przez a i b wielkość wewnętrznego i zewnętrznego promienia, a przez p_a i p_b odpowiadające ciśnienia. Dla określenia stanu napięcia w jakimkolwiek punkcie o odległości ρ od osi pierścienia, wydzielimy u tego punktu element $abcd$ (fig. b) dwiema spółośiowymi powierzchniami walcowymi o promieniach ρ i $\rho + d\rho$, oraz dwoma przekrojami osiowymi, zamykającymi kąt $d\varphi$. Dzięki symetrii



Rys. 332

oddzielne punkty pierścienia przesuwają się przy odkształceniu tylko w kierunku promieni, a te przesunięcia są dla punktów równoodległych od osi jednakowe. Wobec tego kąty proste wydzielonego elementu $abcd$ pozostają prostymi, a na jego ścianach bocznych nie będzie naprężeń stycznych. Naprężenia normalne na ścianach ab i cd , leżących w przekrojach południkowych, będą także z powodu symetrii równe; oznaczmy je przez p_x . Naprężenie normalne, działające na ścianę ad , odpowiadającą powierzchni walca o promieniu ρ , nazwiemy przez p_r ; wtedy naprężeniem na ścianie przeciwległej bc , odległej od środka $\rho + d\rho$, będzie $p_r + \frac{dp_r}{d\rho} d\rho$ ¹⁾. Między naprężeniami obwodowymi p_x i radialnymi p_r zachodzi zależność podyktowana warunkami równowagi. Ażeby ją napisać rzucamy siły działające na wydzielony element na kierunek promienia Ob i przyrównujemy sumę rzutów do zera. Na ściany ab i cd działają siły normalne o wielkości $p_x \cdot d\rho \cdot 1$. Rzutując je na Ob , otrzymamy:

$$-p_x d\rho \cdot 1 \cdot d\varphi \dots \dots \dots (a)$$

¹⁾ Na rysunku przyjęliśmy p_x i p_r jako ciągnienia. Jeżeli z rachunku wypadnie dla któregośkolwiek z tych naprężeń wartość ujemna, to będzie to znaczyć, że mamy do czynienia z ciśnieniem.

przyczem A i B są dowolnymi stałymi. Wyznamy je z warunków krańcowych dla naprężeń. W tym celu wstawimy zamiast u wartość w wyrażeniach (d) dla naprężeń i znajdziemy:

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2} \left[A(1+\sigma) + \frac{B}{\rho^2}(1-\sigma) \right],$$

$$p_z = \frac{E}{1-\sigma^2} \left[A(1+\sigma) - \frac{B}{\rho^2}(1-\sigma) \right].$$

Na zewnętrznej powierzchni pierścienia, t. j. przy $\rho=b$, staje się naprężenie p_x równe ciśnieniu zewnętrznemu, t. j. $-p_b$. Podobnie na powierzchni wewnętrznej jest $p_x = -p_a$. Te warunki dają następujące dwa równania dla wyznaczenia stałych A i B :

$$A(1+\sigma) - \frac{B}{b^2}(1-\sigma) = -p_b \frac{1-\sigma^2}{E},$$

$$A(1+\sigma) - \frac{B}{a^2}(1-\sigma) = -p_a \frac{1-\sigma^2}{E}.$$

Stąd:

$$A = \frac{1-\sigma}{E} \cdot \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}, \quad B = \frac{1+\sigma}{E} \cdot \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{b^2 - a^2}.$$

Wyznamywszy stałe dowolne, przedstawimy wyrażenia dla naprężeń w postaci:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} + \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{\rho^2 (b^2 - a^2)}, \\ p_z &= \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} - \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{\rho^2 (b^2 - a^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (262)$$

Skoro w szczególności niema ciśnienia zewnętrznego, czyli $p_b = 0$, to wzory dla naprężeń przybierają postać:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{p_a a^2 (b^2 + \rho^2)}{\rho^2 (b^2 - a^2)} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{\rho^2} + 1 \right), \\ p_z &= -\frac{p_a a^2 (b^2 + \rho^2)}{\rho^2 (b^2 - a^2)} = -\frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{\rho^2} + 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (263)$$

W tym przypadku są naprężenia obwodowe wyłącznie ciągnięciami. One osiągają największą wartość na wewnętrznej powierzchni rury, t. j. przy $\rho=a$, najmniejszą zaś przy $\rho=b$;

$$(p_x)_{\max} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} p_a; \quad (p_x)_{\min} = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} p_a, \quad (264)$$

$$(p_x)_{\max} : (p_x)_{\min} = \frac{a^2 + b^2}{2a^2}.$$

Im mniejsza przeto grubość ściany rury, tem mniej nierównomiernie rozkładają się naprężenia obwodowe. Naprężenia radialne wypadają wszędzie ujemne, są więc ciśnieniami. Te naprężenia znikają na zewnętrznej powierzchni, a stają się równe $-p_a$ na wewnętrznej powierzchni rury. Przesunięcie dowolnego punktu:

$$u = A\rho + \frac{B}{\rho} = \frac{1-\sigma}{E} \cdot \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} \cdot \rho + \frac{1+\sigma}{E} \cdot \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{(b^2 - a^2)\rho}.$$

W przypadku szczególnym, gdy $p_b = 0$, powiększy się promień wewnętrzny σ :

$$\delta_1 = \frac{a p_a}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \sigma \right) \quad (265)$$

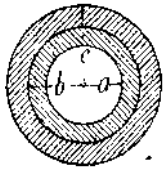
Przy działaniu tylko zewnętrznego ciśnienia mamy dla naprężeń następujące wzory:

$$p_x = -\frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right), \quad p_z = -\frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \quad (266)$$

Odpowiadające zmniejszenie promienia zewnętrznego:

$$\delta_2 = \frac{b p_b}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \sigma \right) \quad (267)$$

Przy pomocy wyrażeń dla δ_1 i δ_2 łatwo rozwiązać zagadnienie rozkładu naprężeń w ściankach składowych rur walcowych. Takie rury stosuje się przy bardzo wysokich ciśnieniach wewnętrznych, ażeby otrzymać korzystniejszy rozkład naprężeń obwodowych na grubości ścianki rury. Z wzoru (264) widać, że w ściance litej nie może wielkość $(p_x)_{max}$ w żadnym wypadku być mniejszą od p_a , a powiększenie grubości ścianki ponad pewną granicę ma wpływ bardzo mały na wielkość naprężeń krańcowych. Materiał można lepiej wyzyskać, składając ścianę rury z dwu rur (rys. 333) o rozmiarach tak dobranych, aby przy zestawieniu powstały pewne naprężenia początkowe. W tym celu bierze się promień wewnętrzny wierzchniej rury nieco mniejszy od promienia wewnętrznej rury środkowej. Rury można na siebie nasunąć po uprzednim ogrzaniu rury zewnętrznej do odpowiedniej temperatury. Przy ostygnięciu kurczy się ta rura i w powierzchni przylegania obu rur powstaje ciśnienie p , ściskające rurę wewnętrzną, a rozciągające zewnętrzną. To ciśnienie wywoła skrócenie zewnętrznej średnicy rury środkowej, określone wzorem (267) dla δ_2 i zwiększenie wewnętrznej średnicy wierzchniej rury o wielkość przedstawioną wzorem (265) dla δ_1 . Jeżeli przez 2δ oznaczymy różnicę między temi średnicami, przyjętą przy sporządzeniu rur, to wielkość niewiadomego narazie ciśnienia p znajdziemy z warunku:



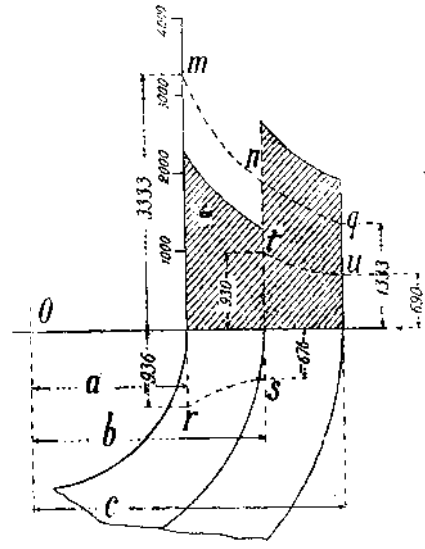
Rys. 333

Stąd:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{pb}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \sigma \right) + \frac{pb}{E} \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \delta \right) = \frac{pb}{E} \cdot \frac{2b^3(c^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}$$

$$p = \frac{E\delta}{b} \cdot \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{2b^3(c^2 - a^2)} \quad (268)$$

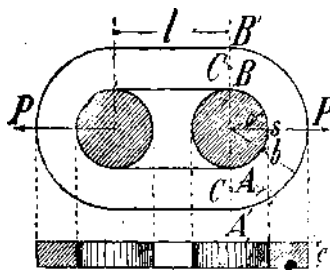
Na rys. (334) przedstawiono wykresnie rozkład naprężeń p_x dla następujących danych: $a = 10 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$, $c = 20 \text{ cm}$, $\delta = 0,012 \text{ cm}$ i $p_a = 2000 \text{ kg/cm}^2$. Przyjąwszy dla żelaza kowalnego $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, znajdziemy z wzoru (268), że $p = 260 \text{ kg/cm}^2$. Pod działaniem tego ciśnienia powstaną w rurze wewnętrznej naprężenia ściskające p_x , których rozkład na grubości ścianki przedstawia krzywa kropkowana rs . W rurze zewnętrznej powstaną zarazem obwodowe ciągnięcia o rozkładzie przedstawionym krzywą tu . Jeżeli rurę złożoną poddamy wewnętrznemu ciśnieniu, to powstające przytem obwodowe ciągnięcia określa wzór (263). Na rysunku przedstawiono prawo ich zmiany krzywą mng . Sumując te naprężenia ze znalezionymi powyżej naprężeniami początkowymi, otrzymamy rozkład uwidoczniiony na rysunku zakreśkowanym polem. Z tego przykładu widać jasno, jak można wyzyskać lepiej materiał zewnętrznej rury, wywołując sztucznie naprężenia początkowe.



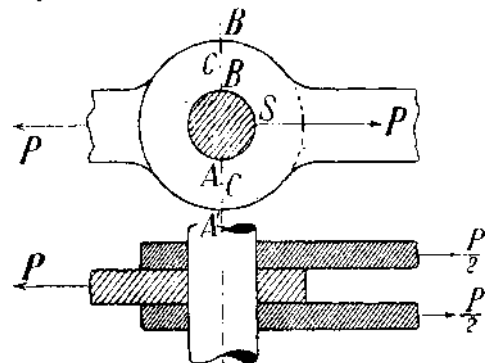
Rys. 334

§ 136. OBLICZENIE UCHA W POŁĄCZENIU SWORZNIOWEM I OGNIW ŁAŃCUCHÓW

Z wyniku poprzedniego paragrafu można skorzystać dla przybliżonego obliczenia elementów, przedstawionych na rys. (335) i (336). Główna trudność przy wyznaczeniu naprężeń polega tutaj na tem, że nie znamy prawa rozkładu ciśnień, przeniesionych przez walcowy sworzень ASB na wewnętrzną powierzchnię ucha lub ogniwa. Rozkład ciśnień będzie zależeć tak od dokładności obróbienia, jakoteż od odkształceń obu stykających się części. Przy obliczeniach praktycznych zadowalano się dawniej bardzo grubym przybliżeniem, uważając połowę ucha za belkę podpartą w punktach C i obciążoną ciężarem P , bądź to skupionym, bądź też równomiernie rozłożonym wzdłuż AB . Niektórzy późniejsi autorowie¹⁾ proponują obliczenie tych elementów jako prętów krzywych, ale zasadniczą kwestję rozkładu ciśnień pomiędzy sworzniem a uchem załatwiają zupełnie dowolnie, przyjmując albo nacisk skupiony w punkcie S , albo obciążenie równomiernie rozłożone wzdłuż AB . Czyniąc jedno z tych założeń, można znaleźć



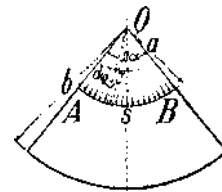
Rys. 335



Rys. 336

1) Ob. Blumenfeld „Berechnung von gekrümmten Stäben“, Zeitsch. d. V. d. Ing., r. 1907. Baumann, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. z r. 1908, str. 397.

łatwo tę wartość siły P , przy której musiałyby się pojawić trwałe odkształcenia i sprawdzić ten wynik drogą doświadczalną. W tym kierunku wykonano liczne badania ¹⁾ z różnorodnymi uchami i ogniwami. Obserwacje chwili pojawienia się linii Lüdersa na bocznej polerowanej powierzchni rozciąganej próbki pozwalają ustalić położenie przekroju niebezpiecznego i wyznaczyć obciążenie odpowiadające pojawieniu się odkształceń trwałych. Te doświadczenia wykazały całkowitą niezgodność obliczeń z rzeczywistością i kazały poszukiwać bardziej zadowalających podstaw dla rachunku. Szereg doświadczeń nad modelami z gumy wykazał, że w miejscu przylegania do sworznia ucho się nie zgina, lecz odkształca tak, jak ścianka rury walcowej, narażonej na ciśnienie wewnętrzne, rozłożone równomiernie. Dlatego przy obliczeniu należy się uciec do wzorów Lamè'go (264). Wielkość p_a , wchodząca w te wzory, można znaleźć w następujący sposób: Niechaj 2α oznacza kąt środkowy, odpowiadający powierzchni przylegania (rys. 337), zaś c grubość ucha w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku. Nacisk na element powierzchni, odpowiadający kątowi $d\varphi$, równa się $p_a a d\varphi c$. Rzutuując te naciski elementarne na kierunek Os i przyrównując sumę rzutów do siły rozciągającej P , znajdziemy:



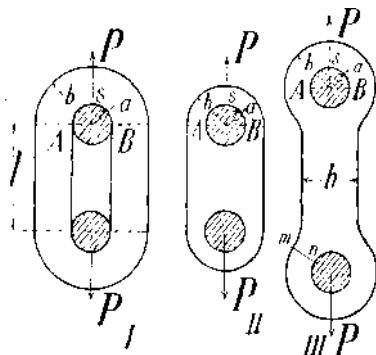
Rys. 337

$$F = 2 \int_0^\alpha p_a a c d\varphi \cdot \cos \varphi = 2 p_a a c \sin \alpha, \text{ a stąd } p_a = \frac{P}{2 a c \sin \alpha}.$$

W praktyce mamy zwykle do czynienia z przypadkiem, w którym $\alpha = 90^\circ$. Wówczas:

$$p_a = \frac{P}{2ac}.$$

Wstawivszy otrzymaną wartość p_a we wzór (264), otrzymamy wielkość największych ciągnięć obwodowych i możemy wyznaczyć tę wartość P , której powinno odpowiadać pojawienie się trwałych odkształceń i linii Lüdersa. Aby przedstawić o ile powyższa podstawa obliczenia odpowiada rzeczywistym warunkom pracy ucha, przytoczymy wyniki doświadczeń nad próbkami, przedstawionymi na rysunku (338). W tablicy oprócz danych doświadczalnych i wyników obliczenia według wzoru Lamè'go, umieszczono także wyniki obliczeń, otrzymanych przy założeniu: 1°) siły skupionej w punkcie S i 2°) obciążenia rozłożonego równomiernie na średnicy sworznia AB . W obu ostatnich przypadkach traktowano ucho jako pręt zakrzywiony i wyznaczono naprężenia na podstawie hipotezy płaskich przekrojów.



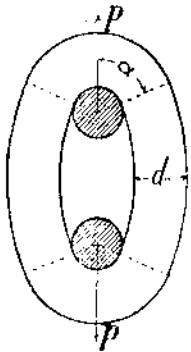
Rys. 338

Typ ucha	Obciążenie odpowiadające chwili pojawienia się odkształceń trwałych w kg							Granica sprężystości w kg/cm ²	
	a	b	l	h	Siła skup.	Równom. obciąż.	Wzór Lamè'go		Dane doświadczalne
w cm									
I	1	2	5,5	—	420	658	2400	2600	2000
	1	3	5,5	—	1120	1500	3200	3600	2000
	2	5	5	—	1600	2590	5800	6400	2000
II	1	2	—	4	353	526	2400	2600	2000
III	1	3	—	2,5	680	910	2720	3000	1700
	1	2,5	—	3	590	870	2900	3300	2000

Powyższa tablica wykazuje dobitnie, że ze wszystkich sposobów obliczenia zbliżają się najbardziej do rzeczywistości wyniki, otrzymane na podstawie wzoru Lamè'go. Ten wzór daje zadowalające wartości dla największych naprężeń nawet w tych przykładach, gdy zachodzi nieścisle

¹⁾ Ob. przytoczoną powyżej pracę M. A. Woropajewa.

przyleganie sworznia do wewnętrznej powierzchni ucha, co bywa wynikiem niedokładności przy praktycznym wykonaniu połączeń¹⁾. Przy obliczeniu ogniw zwykłych łańcuchów (rys. 339) komplikuje się zadanie jeszcze i tem, że przekrój poprzeczny nie jest prostokątny, lecz okrągły. Szerokę odnośnych doświadczeń wykazał jednak, że i w tym przypadku można znaleźć siłę, odpowiadającą pojawieniu się pierwszych odkształceń trwałych przy pomocy powyższego sposobu. W tym celu zastępujemy przekrój okrągły prostokątnym o tem samym polu i wysokości równej średnicy d . Szerokością zastępczego przekroju poprzecznego będzie zatem:



Rys. 339

$$c = \frac{\pi d^2}{4} : d = \frac{\pi d}{4},$$

zaś odpowiadającym ciśnieniem p_x , występującem we wzorze Lamè'go będzie

$$p_x = \frac{P}{2 a c \sin \alpha} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \sin \alpha} = \frac{P}{F \sin \alpha}.$$

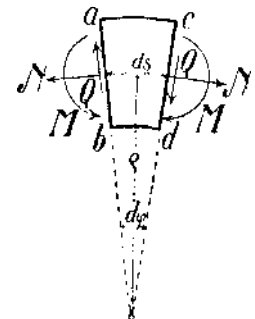
Wtedy na podstawie formuły (264) otrzymamy:

$$(p_x)_{\max} = \frac{p_x (b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} = \frac{1,25 P}{F \sin \alpha} \quad (269)$$

Ten sztuczny sposób obliczenia nie daje, naturalnie, wyobrażenia o rzeczywistym rozkładzie naprężeń w rozciąganiem ogniwie, lecz otrzymany wynik nie jest pozbawiony praktycznej wartości, ponieważ ostateczny wzór zgadza się dobrze z danymi doświadczalnemi.

§ 137. ODKSZTAŁCENIE PRĘTÓW ZAKRZYWIONYCH

Przesunięcia poszczególnych punktów krzywego pręta pod działaniem sił zewnętrznych znajduje się najprościej przy pomocy twierdzenia Castigliano'a. Do tego potrzeba wyrażenia dla energii potencjalnej pręta jako funkcji sił zewnętrznych. W tym celu obliczymy najpierw energję nagromadzoną przy odkształceniu w klinowatym elemencie krzywego pręta, zawartym między dwoma nieskończenie bliskimi przekrojami ab i cd (rys. 340). W ogólnym przypadku będą na ten element działać momenty zginające M , siły podłużne N i poprzeczne Q . Utwórzmy wyrażenie dla pracy tych sił przy ich powolnym wzroście od zera aż do wartości końcowej. Moment M wywoła przyrost kąta $d\varphi$ o wielkość $\delta d\varphi$ określoną wzorem (251) i wykonywa przytem pracę:



Rys. 340

$$\frac{M \delta d\varphi}{2} = \frac{M^2 d\varphi}{2SE} = \frac{M^2 ds}{2SE\rho} \quad (a)$$

Siła podłużna wywoła wydłużenie elementu w kierunku osi pręta. Odpowiadająca energia wydłużenia równa się:

$$\frac{N^2 ds}{2EF} \quad (b)$$

Oprócz tego siła podłużna zmieni kąt $d\varphi$ o wielkość, określoną formułą (255). Przytem wykonują momenty pracę:

$$M \cdot \frac{Nd\varphi}{EF} = \frac{MNds}{EF\rho} \quad (c)$$

Co się tyczy pracy siły poprzecznej Q , to obliczymy ją tak samo, jak dla pręta pryzmatycznego (wz. 186), ponieważ przyjęliśmy w przybliżeniu to samo prawo rozkładu naprężeń ścinających. Sumując, znajdujemy szukane wyrażenie dla energii nagromadzonej w elemencie pręta:

$$dV = \frac{M^2 ds}{2ES\rho} + \frac{N^2 ds}{2EF} + \frac{MNds}{EF\rho} + \frac{k' Q^2 ds}{2FG}$$

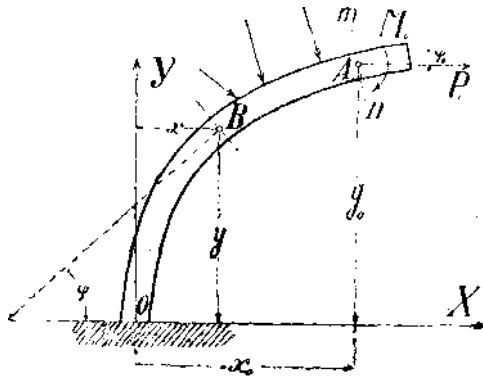
¹⁾ Zmniejszając promień zewnętrzny b i szerokość h w przypadku ucha typu III-go, można dojść do takiego kształtu, u którego bardziej wyężoną okaże się część ucha nieprzylegająca do sworznia. W tych warunkach będą miejscami niebezpiecznymi przekroje mn w miejscu połączenia ucha z częścią prostą. Dla wyznaczenia naprężeń niebezpiecznych trzeba wtedy rozpatrywać ucho jako pręt krzywy, a można zupełnie pominąć odkształcenie tej części ucha, na którą sworzni wywiera nacisk bezpośrednio.

Energję potencjalną całego pręta określi zatem wzór:

$$V = \int_0^s \left(\frac{M^2}{2ES\rho} + \frac{N^2}{2EF} + \frac{MN}{EF\rho} + \frac{k'Q^2}{2FG} \right) ds \quad (270)$$

Przy obliczeniu odkształceń w zagadnieniach praktyki mamy przeważnie do czynienia z prętami o „małej krzywiznie”. Wówczas można z wystarczającym przybliżeniem uprościć znacznie ogólne wyrażenie dla energii potencjalnej, opuszczając dwa ostatnie wyrazy w nawiasach wzoru (270) i zastępując nadto w pierwszym wyrazie wielkość $S\rho$ przez zbliżoną do niej co do wartości wielkość momentu bezwładności przekroju poprzecznego¹⁾. Formuła dla V przybierze tedy uproszczoną postać:

$$V = \int_0^s \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{N^2}{2EF} \right) ds \quad (271)$$



Rys. 341

a więc taką samą jak dla pręta prostego. Na szczegółowym przykładzie poniżej rozpatrzmy wpływ tych uproszczeń na dokładność wyników.

Odkształcenie osi pręta będzie zupełnie określone, skoro znamy dla każdego przekroju poprzecznego przesunięcie jego środka i kąt obrotu przekroju. Dajmy na to, że trzeba zbadać odkształcenie pręta $OBĀ$, dolnym końcem utwierdzonego (rys. 341). Wyprowadzimy wzory dla zmiany położenia dowolnego przekroju poprzecznego mn . Aby znaleźć kąt obrotu tego przekroju, powstający pod działaniem sił zewnętrznych, trzeba do danych obciążeń dołączyć fikcyjny moment M_0 , działający na przekrój mn i wyprowadzić pochodną energii potencjalnej pręta względem M_0 . Podstawiając w ostatecznym wyniku $M_0 = 0$, znajdziemy szukany kąt $\delta\varphi_0$. Wyrażenie dla energii potencjalnej będzie miało postać:

$$V = \int_0^s \left[\frac{(M+M_0)^2}{2ES\rho} + \frac{N^2}{2EF} + \frac{(M+M_0)N}{EF\rho} + \frac{k'Q^2}{2FG} \right] ds.$$

Tutaj oznacza M moment zginający uwarunkowany danymi siłami zewnętrznymi, zaś M_0 wprowadzony przez nas moment fikcyjny. Całkowanie musi się rozpościerać na część pręta między płaszczyzną utwierdzenia, a rozpatrywanym przekrojem mn , ponieważ tylko odkształcenie tej części ma wpływ na szukaną zmianę położenia przekroju. Stosując twierdzenie Castigliano'a otrzymamy:

$$\delta\varphi_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial M_0} \right)_{M_0=0} = \int_0^s \left(\frac{M}{ES\rho} + \frac{N}{EF\rho} \right) ds \quad (272)$$

Gdybyśmy użyli przybliżonego wyrażenia dla energii potencjalnej, to szukany kąt obrotu przedstawiałaby formuła:

$$\delta\varphi_0 = \int_0^s \frac{M ds}{EI} \quad (272')$$

Ostatni wynik stosuje się najczęściej w obliczeniach praktyki. Aby znaleźć przesunięcie środka przekroju mn w kierunku osi X -ów, trzeba do danych obciążeń dołączyć fikcyjną siłę P_0 mającą tenże kierunek. Wskutek tego przybywa w dowolnym przekroju moment dodatkowy $P_0(y_0 - y)$ i dodatkowa siła podłużna $P_0 \cos \varphi$. Przybliżony wzór (271) dla energii potencjalnej napiszemy teraz w postaci:

$$V = \int_0^s \left\{ \frac{[M + P_0(y_0 - y)]^2}{2EI} + \frac{(N + P_0 \cos \varphi)^2}{2EF} \right\} ds.$$

¹⁾ To wynika stąd, że przy $\frac{z}{r} = 0$, musi wzór (249) zgadzać się z wzorem (64) dla prostego pręta.

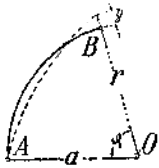
Tworząc pochodną tego wyrażenia względem P_0 i podstawiając w końcowym wyniku $P_0 = 0$, otrzymujemy dla szukanego przesunięcia wzór:

$$\delta x_0 = \int_0^s \frac{M(y_0 - y) ds}{EI} + \int_0^s \frac{N \cos \varphi ds}{EF} = y_0 \int_0^s \frac{M ds}{EI} - \int_0^s \frac{M y ds}{EI} + \int_0^{x_0} \frac{N dx}{EF} \quad (273)$$

W podobny sposób znajdziemy formułę dla przesunięcia punktu A w kierunku osi Y -ów, a mianowicie:

$$\delta y_0 = -x_0 \int_0^s \frac{M ds}{EI} + \int_0^s \frac{M x ds}{EI} + \int_0^{y_0} \frac{N dy}{EF} \quad (274)$$

Otrzymane wzory rozwiązują całkowicie kwestję odkształcenia krzywego pręta i sprowadzają wyznaczenie wielkości $\delta \varphi_0$, δx_0 , δy_0 do obliczenia kilku całek, co można wykonać drogą analityczną albo wykreslną¹⁾.



Rys. 342

W szczególnym przypadku, kiedy pierwotna oś zakrzywionego pręta jest łukiem koła, można zamiast przesunięć poszczególnych punktów znaleźć równanie zgiętej osi pręta, analogicznie jak przy zgięciu belek prostych. Niech będzie łuk koła AB (rysunek 342) o promieniu a pierwotną osią pręta, która po zgięciu przybiera postać przedstawioną linią kreskową. Oznaczmy przesunięcia punktów osi w kierunku promieni przez y i napiszmy równanie linii ugięcia we współrzędnych biegunowych o początku O :

$$r = f(\varphi), \text{ przyczem } r = a + y. \quad (d)$$

Dla promienia krzywizny we współrzędnych biegunowych mamy wzór:

$$\rho = \frac{[r^2 + (\frac{dr}{d\varphi})^2]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2(\frac{dr}{d\varphi})^2 - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2}}$$

Podstawiając $r = a + y$ i opuściwszy po rozwinięciu wyrazy, zawierające wielkości małe wyższego rzędu

$$y^2, \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2, y \frac{d^2 y}{d\varphi^2}, \dots,$$

otrzymamy

$$\rho = \frac{a^3 + 3a^2 y}{a^2 + 2ay - a \frac{d^2 y}{d\varphi^2}}$$

Przyrost krzywizny osi pręta będzie więc równy:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{a} = -\frac{y + \frac{d^2 y}{d\varphi^2}}{a^2 + 3ay}$$

Skoro w ostatnim wyniku pominiemy wyraz $3ay$ w porównaniu do a^2 , to, uwzględniając, że

$$ds = a d\varphi$$

otrzymamy

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{a} = -\frac{y}{a^2} - \frac{d^2 y}{ds^2} \quad (e)$$

Z drugiej strony, z rozpatrywania odkształceń elementu pręta, zawartego między dwoma przekrojami poprzecznymi wynika:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{a} = \frac{d\varphi + \delta d\varphi}{ds} - \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\delta d\varphi}{ds}$$

Dla prętów o „małej krzywiznie“ otrzymamy, pomijając wpływ siły podłużnej (wz. 253):

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{a} = \frac{\delta d\varphi}{a d\varphi} = \frac{M}{EI}$$

¹⁾ Ob. Baumann „Einfaches Verfahren zur Ermittlung der Formänderung ebengekrümmter stabförmiger Körper“, Z. d. Ver. d. Ing. z r. 1910, str. 1677.

a równanie zgiętej osi pręta przybierze postać¹⁾:

$$EI \left(\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{y}{a^2} \right) = -M \quad (275)$$

Przy $a = \infty$ przechodzi to równanie w równanie linii ugięcia pręta prostego (wz. 90).

W praktyce mamy niekiedy do czynienia ze zgięciem prętów lekko zakrzywionych, u których pierwotna strzałka ugięcia jest mała w porównaniu do rozpiętości. Przy działaniu na taki pręt sił poprzecznych można w podstawowym równaniu (275) pominąć drugi wyraz po lewej stronie i szukać ugięć tak samo, jak i w przypadku prętów przyrównanych. Jeżeli oprócz sił poprzecznych zginających działają na lekko zakrzywiony pręt i siły podłużne, to pierwotne zakrzywienie może mieć istotny wpływ na ugięcie, a dla oceny tego wpływu najdogodniej użyć przybliżonej metody, wyłożonej w rozdziale XV²⁾. Oznaczmy przez y_0 pierwotne ugięcie pręta, a przez y_1 ich przyrosty pod wpływem sił zginających. Wtedy całkowite ugięcie w jakimkolwiek przekroju pręta będzie równe:

$$y = y_0 + y_1.$$

Przyjmijmy, że mamy pręt w obu końcach podparty o długości l , a początkowe zakrzywienie przedstawia szereg trygonometryczny:

$$y_0 = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (f)$$

Zakrzywienie wskutek zgięcia można przedstawić wyrażeniem:

$$y_1 = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (g)$$

Wielkości a_1, a_2, \dots przyjmijmy za uogólnione współrzędne, określające odkształcenie pręta. Przedstawmy energię potencjalną zgięcia i wzajemne zbliżenie końców pręta przy zgięciu w postaci funkcji obranych współrzędnych. Na podstawie wzoru (225) otrzymamy dla energii potencjalnej zgięcia wyrażenie:

$$V = \frac{\pi^4 EI}{4 l^3} \sum_{n=1,2,3,\dots} n^4 a_n^2.$$

Zbliżenie końców pręta wskutek zgięcia równa się, na podstawie ogólnego wzoru (226):

$$\begin{aligned} \delta l &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{d(y_1 + y_0)}{dx} \right]^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l \frac{dy_0}{dx} \frac{dy_1}{dx} dx = \\ &= \frac{\pi^2}{4l} \sum n^2 a_n^2 + \frac{\pi^2}{2l} \sum n^2 a_n b_n \quad (h) \end{aligned}$$

Przyjmijmy, że na nasz pręt działa równomiernie rozłożone obciążenie q i podłużna siła rozciągająca S . Jeżeli jakiegokolwiek współrzędnej a_n udzielimy przyrostu δa_n , to siły zewnętrzne wykonują przytem pracę:

$$\delta a_n \int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx - S \frac{\delta \delta l}{\delta a_n} \delta a_n = \delta a_n \left[\int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx - S \frac{\pi^2}{2l} n^2 (a_n + b_n) \right].$$

Czynnik przy δa_n przedstawia tutaj uogólnioną siłę odpowiadającą współrzędnej a_n . Przyrównując pochodną energii potencjalnej układu względem uogólnionej współrzędnej do odpowiadającej uogólnionej siły, otrzymujemy równanie:

$$\frac{\pi^4 n^4 EI}{2 l^3} a_n = \int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx - S \frac{\pi^2 n^2}{2l} (a_n + b_n),$$

z którego, po wprowadzeniu poprzedniego oznaczenia:

$$a_n = \frac{S l^3}{\pi^2 EI},$$

znajdziemy:

$$a_n = \frac{2 l^3}{\pi^4 EI} \int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \frac{a^2 b_n}{n^2 + a^2}.$$

¹⁾ To równanie otrzymał najpierw J. Boussinesq; ob. C. R. t. 97, str. 843, r. 1883.

Rozwiązaniem całego szeregu zadań, odnoszących się do zgięcia prętów kołowo zakrzywionych, zajmuje się praca R. Mayera; ob. Zeitschr. f. Math. u. Phys. z r. 1913, t. 61, str. 246.

Zgięcie prętów kołowo zakrzywionych pod wpływem sił prostopadłych do płaszczyzny koła rozpatrywał już de Saint-Venant; ob. C. R., t. 17 z r. 1843.

Ob. nadto pracę Kannenbergera w Öster. Woch. f. d. öf. Baud. z r. 1912.

²⁾ Ob. pracę autora: „Ob izgibie slogka iskriwlonnych stierzniej“. Wiest. Ob-wa Technologow z r. 1913.

Wykonawszy całkowanie i wstawiając otrzymane w ten sposób wartości spółrzędnych w ogólne wyrażenie dla ugięcia, otrzymamy:

$$y_1 = \frac{4qI^4}{\pi^5 EI} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1^3(1^2 + \alpha^2)} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^3(3^2 + \alpha^2)} + \dots \right] + \left(\frac{\alpha^3 b_1 \sin \frac{\pi x}{l}}{1^3 + \alpha^2} + \frac{\alpha^3 b_2 \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^2 + \alpha^2} + \dots \right) \quad (k)$$

Pierwsza część tego wyrażenia zgadza się zupełnie z tem, cośmy otrzymali pierwiej dla ugięcia prętów pryzmatycznych (ob. wz. c w § 127). Druga część określa wpływ pierwotnego zakrzywienia na działanie siły podłużnej.

Otrzymany wzór (k) zastosujemy do szczególnego przypadku. Niechaj np. pręt stalowy, w obu końcach podparty, o długości $l = 150 \text{ cm}$ i przekroju poprzecznym kwadratowym $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$, zgina się pod wpływem własnego ciężaru i siły podłużnej $S = 100 \text{ kg}$. Pierwotne ugięcie niech przytem przedstawia równanie:

$$y_0 = -0,8 \sin \frac{\pi x}{l} - 0,3 \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

(Znak $-$ wskazuje, że pierwotne wygięcie jest skierowane w górę). Podstawiając $E = 2,2 \cdot 10^9 \text{ kg/cm}^2$ i $qI = 1,2 \text{ kg}$ znajdziemy:

$$\alpha^2 = \frac{S I^2}{\pi^2 EI} = 1,25, \quad \frac{4qI^4}{\pi^5 EI} = 0,289 \text{ cm}.$$

Wstawiając te wartości we wzór (k) dla ugięcia, otrzymamy:

$$y_1 = \left(0,129 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,001 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right) + \left(0,444 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,071 \sin \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Pierwsza suma przedstawia ugięcia pręta pryzmatycznego, druga zaś, złożona z dwu wyrazów, daje ugięcia uwarunkowane początkową krzywizną.

Jeżeli siłę podłużną zwiększymy 10-krotnie, to otrzymamy $\alpha^2 = 12,5$, a wzór (k) da nam:

$$y_1 = \left(0,021 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,0005 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right) + \left(0,740 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,227 \sin \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Widzimy, że tutaj siła podłużna ma dominujący wpływ; ona znosi znaczną część początkowego wygięcia pręta.

Natomiast siła ściskająca dąży do powiększenia pierwotnego zakrzywienia pręta. Dla wyznaczenia ugięć można użyć poprzedniej formuły (k), zmieniając tylko znak α^2 .

Rozpatrzmy jeszcze przypadek, w którym siła podłużna nie jest zgóry dana, lecz powstaje wskutek tego, że końce zginanego pręta są unieruchomione. Przyjmijmy, że pierwotne zakrzywienie pręta da się przedstawić sinusoidą:

$$y_0 = b_1 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Pod działaniem obciążenia równomiernie rozłożonego ugięcie wzrasta i pojawia się siła podłużna rozciągająca, która zapobiega wzajemnemu zbliżeniu się końców. Poprzestając na głównych członach wzoru (k), otrzymujemy dla ugięcia wyrażenie:

$$y_1 = \frac{4qI^4}{\pi^5 EI} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 + \alpha^2} - \frac{\alpha^2 b_1}{1 + \alpha^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Niewiadomą na razie wielkość α^2 znajdziemy z warunku, że zbliżenie końców pręta wskutek zgięcia równa się wydłużeniu, wywołanemu siłą podłużną. Na podstawie wzoru (h) dla zbliżenia, otrzymamy:

$$\frac{(f_0 - \alpha^2 b_1)^2}{(1 + \alpha^2)^2} - \frac{2b_1(f_0 - \alpha^2 b_1)}{1 + \alpha^2} = 4\alpha^2 r^2 \quad (l)$$

Tutaj $f_0 = \frac{4qI^4}{\pi^5 EI}$ przedstawia przybliżone wyrażenie dla ugięcia pręta bez działania siły podłużnej; r zaś jest promieniem bezwładności przekroju poprzecznego. Wyznacząwszy z rów. (l) α^2 , znajdziemy siłę podłużną, a następnie ugięcia i naprężenia w pręcie.

§ 138. OBLICZENIE OKRĄGŁEGO PIERŚCIENIA

Kwestja oznaczenia odkształceń krzywego pręta ma praktyczne znaczenie w związku z rozwiązaniem zadań statycznie niewyznaczalnych. Jako pierwszy przykład weźmiemy obliczenie kołowego pierścienia o stałym przekroju, rozciąganego lub ściskanego siłami P , działającymi wzdłuż pewnej, np. pionowej średnicy koła (rys. 343). W takich, mniej więcej, warunkach będą się znajdować okrągłe ogniwa rozciąganego łańcucha. Odwróciwszy zaś kierunki sił P , otrzymamy wzory, przydatne do obliczenia ścian rur walcowych, ściskanych między dwiema równoległymi płaszczyznami. Ze symetrii wynika, że tak przekroje poprzeczne aa i bb , odpowiadające średnicy poziomej, jakoteż przekroje mn i pq , zachowują swoje położenie po odkształceniu, a stan odkształcenia

i napięcia wszystkich czterech ćwiartek pierścienia jest jednakowy. Rozpatrzmy ćwiartkę I. Przekrój mn będziemy uważać za utwierdzony, a na przekrój aa działamy siłami zastępującymi działanie dolnej części pierścienia na górną. To działanie sprowadza się z powodu symetrii do siły $\frac{P}{2}$ i momentu o nieznannej jeszcze wielkości M_0 .

Wielkość M_0 znajdziemy z warunków odkształcenia obranej ćwiartki. Przekrój aa nie zmienił swego położenia, a zatem kąt obrotu $\delta\varphi$ staje się dla niego zerem. Na mocy wzoru (272) otrzymamy tedy równanie:

$$\delta\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M}{ES\rho} + \frac{N}{EF\rho} \right) \rho d\varphi = 0.$$

Moment zginający i siłę podłużną w dowolnym przekroju pierścienia, nachylonym do poziomej średnicy pod kątem φ , określają następujące wzory:

$$M = \frac{P}{2}\rho(1 - \cos\varphi) + M_0, \quad N = \frac{P}{2}\cos\varphi. \quad (a)$$

Wstawiając te wartości w powyższe równanie i wykonawszy całkowanie, otrzymamy:

$$M_0 = -\frac{P\rho}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) - \frac{P}{\pi} \frac{S}{F},$$

albo, zważywszy, że $S = F\gamma$,

$$M_0 = -\frac{P\rho}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \frac{\gamma}{\rho} \right) \quad (276)$$

Jeżeli pominiemy wpływ siły podłużnej i wyjdziemy z przybliżonego wzoru (272)', to znajdziemy:

$$M_0 = -\frac{P\rho}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = -0,182 P\rho \quad (277)$$

Z porównania otrzymanych wyników przekonujemy się, że wpływ siły podłużnej i przesunięcia osi obojętnej na wielkość statycznie niewyznaczalną M_0 staje się znacznym tylko w przypadku prętów o większej krzywiznie. Błędy przybliżonego wzoru w przypadku prostokątnego przekroju pierścienia o wysokości h zestawiono w obok umieszczonej tablicy dla kilku wartości w stosunku $\rho : h$.

$\frac{\rho}{h} =$	1	1,5	2	3
$\frac{\gamma}{\rho} =$	0,090	0,038	0,021	0,009
Błąd =	15,8%	6,7%	3,7%	1,6%

Dla M_0 wypadła nam wartość ujemna, co dowodzi, że moment ten ma kierunek przeciwny przyjętemu na rysunku. To było do przewidzenia, jeżeli zważywszy, że pod działaniem sił rozciągających P musi wzrastać promień krzywizny pierścienia w przekrojach aa i bb .

Wyznaczywszy M_0 , łatwo znaleźć moment zginający w dowolnym przekroju pierścienia przy pomocy ogólnego wyrażenia (a). Kładąc $\varphi = \frac{\pi}{2}$ i wstawiając zamiast M_0 wartość przybliżoną według wzoru (277), otrzymamy moment zginający M_1 dla przekrojów mn i pq :

$$M_1 = 0,318 P\rho.$$

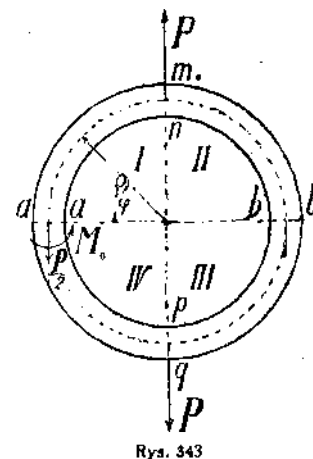
W tych przekrojach osiągają naprężenia normalne wskutek zgięcia największą wartość.

Do obliczenia wydłużenia pionowej średnicy pierścienia użyjemy twierdzenia Castigliano'a. Dokładniejszym wyrażeniem dla energii potencjalnej będzie w tym przypadku (wzór 270):

$$V = 4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M^2}{2ES\rho} + \frac{N^2}{2EF} + \frac{MN}{EF\rho} + \frac{k'Q^2}{lFG} \right) d\varphi.$$

Wstawiając za M , N i Q ich wartości:

$$M = \frac{P\rho}{2} \left(\frac{2}{\pi} - \cos\varphi - \frac{2}{\pi} \frac{\gamma}{\rho} \right), \quad N = \frac{P}{2} \cos\varphi, \quad Q = \frac{P}{2} \sin\varphi$$



i tworząc pochodną energii potencjalnej względem P , znajdujemy szukane zwiększenie średnicy:

$$\delta = \frac{P\rho^3}{ES\rho} \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\gamma^2}{\rho^2} \right) + \frac{2\gamma}{\rho} \left[\frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\gamma}{\rho} \right) - \frac{\pi}{8} \right] + \frac{k'E}{2G} \frac{\gamma}{\rho} \pi \right\}.$$

Gdy pominiemy działanie sił podłużnych i poprzecznych, tudzież przesunięcie osi obojętnej γ , to otrzymamy dla δ następujący prosty wzór:

$$\delta = \frac{P\rho^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) = 0,149 \frac{P\rho^3}{EI}.$$

Ten wynik można otrzymać także przez całkowanie równania (275), które w danym przypadku ma postać:

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{y}{\rho^2} = - \frac{P\rho}{EI} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\cos \varphi}{2} \right), \text{ albo: } \frac{d^2y}{d\varphi^2} + y = - \frac{P\rho^3}{EI} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\cos \varphi}{2} \right).$$

Łatwo się przekonać, że ogólną całką tego równania jest

$$y = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \frac{P\rho^3}{4EI} \varphi \sin \varphi - \frac{P\rho^3}{\pi EI}.$$

Stałe dowolne A i B wyznaczmy z warunku, aby $\frac{dy}{d\varphi}$ stało się zerem przy $\varphi = 0$ i $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ponieważ końcom średnicy poziomej i pionowej odpowiadają największe przesunięcia w kierunku promienia. Wówczas:

$$y = \frac{P\rho^3}{4EI} \cos \varphi + \frac{P\rho^3}{4EI} \varphi \sin \varphi - \frac{P\rho^3}{\pi EI}.$$

Zmniejszenie średnicy poziomej równa się:

$$- 2(y)_{\varphi=0} = \frac{P\rho^3}{EI} \frac{4-\pi}{2\pi} = 0,137 \frac{P\rho^3}{EI},$$

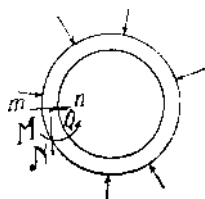
zaś zwiększenie pionowej średnicy:

$$2(y)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{P\rho^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) = 0,149 \frac{P\rho^3}{EI},$$

zgodnie z otrzymaną powyżej formułą przybliżoną.

Rozpatrywany przykład zgięcia pierścienia stanowi najprostsze zadanie tego rodzaju. Dzięki symetrii mieliśmy do czynienia tylko z jedną zbyteczną niewiadomą M_0 . Przy dowolnym obciążeniu pierścienia (rys. 344) będziemy mieć trzy wielkości statycznie niewyznaczalne, które obliczymy najłatwiej przy pomocy zasady najmniejszej pracy. Przecinamy pierścień w (teoretycznie dowolnym) przekroju mn . [Obieramy go oczywiście tak, aby rachunek możliwie uprościć]. Wzajemne działanie części po obu stronach przekroju można w najogólniejszym przypadku zastąpić siłami N, Q i parą o momencie M . Skoro znajdziemy te trzy wielkości, to obliczenie momentu zginającego, siły podłużnej i poprzecznej w jakimkolwiek przekroju pierścienia nie przedstawi trudności. Przyjąwszy M, N i Q za zbyteczne niewiadome, możemy utworzyć wyrażenie dla energii potencjalnej pierścienia w zależności od tych wielkości i wyznaczyć je z równań:

$$\frac{\partial V}{\partial M} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial N} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial Q} = 0.$$



Rys. 344

§ 139. ŁUK DWUPRZEGUBOWY

Przyjmijmy, że przeguby podporowe łuku, obciążonego układem sił pionowych, leżą w równej wysokości (rys. 345). Po rozłożeniu każdej z reakcyj podporowych na składową poziomą i pionową, możemy składowe pionowe wyznaczyć zupełnie tak samo, jak dla belki w obu końcach swobodnie podpartej, gdyż przy ustawieniu warunku momentów względem A lub B znikają momenty składowych poziomych. Dla obliczenia tych ostatnich daje statyka tylko jedno równanie, a mianowicie: suma rzutów na oś poziomą równa się zero. Przy obecności samych obciążeń pionowych wnosimy stąd, że poziome reakcje są co do wielkości równe, a co do kierunku przeciwnie. Ich wspólną wartość H , zwaną „parciem poziomem” łuku, znajdziemy przy pomocy twierdzenia Castigliano’a. Zważywszy, że przy obliczeniu łuków mamy do czynienia z prętami o małej krzywiznie, weźmiemy dla energii potencjalnej układu wartość przybliżoną (wz. 271). A zatem:



Rys. 315

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \int_0^s \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} ds + \int_0^s \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial H} ds = \delta l. \quad \dots \quad (a)$$

Tutaj jest δl przesunięciem odpowiadającym uogólnionej sile H , t. j. wzajemnym zbliżeniem obu przegubów. W szczególnym przypadku doskonałego ustalenia podpór jest $\delta l = 0$, a dla wyznaczenia H otrzymamy równanie:

$$\int_0^s M \frac{\partial M}{\partial H} ds + \int_0^s N \frac{\partial N}{\partial H} ds = 0 \quad \dots \dots \dots (a')$$

w którym całkowanie rozciąga się na całą długość łuku. Moment zginający w dowolnym przekroju łuku różni się od odpowiadającego momentu M_0 dla belki o tej samej rozpiętości i tem samym obciążeniu tylko o moment siły poziomej H . Oznaczywszy przez y rzędne osi [linii środkowej] łuku, możemy napisać:

$$M = M_0 - Hy \quad \dots \dots \dots (b)$$

Co się tyczy siły podłużnej N , to bez wielkiego błędu w końcowym wyniku możemy ją przyjąć za stałą na całej długości łuku i równą parciu poziomemu H . Wstawiając wartości M i N w rów. (a)', otrzymamy:

$$-\int \frac{M_0 y ds}{EI} + H \int \frac{y^2 ds}{EI} + H \int \frac{ds}{EF} = 0,$$

a stąd:

$$H = \frac{\int \frac{M_0 y ds}{EI}}{\int \frac{y^2 ds}{EI} + \int \frac{ds}{EF}} \quad \dots \dots \dots (278)$$

W przypadku łuku o stałym przekroju przedstawi się wyrażenie dla H w następującej prostszej postaci:

$$H = \frac{\int M_0 y ds}{\int y^2 ds + r^2 s} \quad \dots \dots \dots (278)'$$

jeżeli r oznacza promień bezwładności przekroju, a s długość osi łuku. Dla niezbyt płaskich łuków w będzie r małe w porównaniu do y , wobec czego można pominąć drugi wyraz w mianowniku wzoru (278)' i napisać w przybliżeniu:

$$H = \frac{\int M_0 y ds}{\int y^2 ds} \quad \dots \dots \dots (278)''$$

Ten wzór zastosujemy do przypadku, kiedy oś łuku jest parabolą o równaniu

$$y = x(l-x) \frac{4f}{l^2},$$

a obciążenie jest równomiernie rozłożone na rzucie poziomym łuku. Wówczas:

$$M_0 = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2}x(l-x).$$

Z porównania wyrażeń dla M_0 i y otrzymamy:

$$M_0 = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{y}{f},$$

a po wstawieniu we wz. (278)'' znajdziemy wyrażenie dla parcia poziomego:

$$H = \frac{ql^2}{8f} \quad \dots \dots \dots (279)$$

Tego wzoru można używać do przybliżonego wyznaczenia parcia poziomego H nie tylko dla łuku parabolicznego, ale i dla łuków odcinkowych o innym kształcie.

Powróćmy teraz do ogólniejszego rów. (a) i zastosujemy je do wyznaczenia napięć powstających w łuku wskutek zmiany temperatury łuku o t° ¹⁾. Jeżeliby jedna z podpór była ruchomą, to takiemu podwyższeniu temperatury towarzyszyłoby powiększenie odległości między przegubami o

$$\delta l = \alpha l t,$$

przyczem α jest współczynnikiem termicznego wydłużenia materiału łuku. Aby przesunięty przegub wrócił na miejsce, trzeba nań działać siłą poziomą H_1 , której wielkość znajdziemy łatwo przy pomocy twierdzenia Castigliano'a. Podstawiając w rów. (a):

$$\delta l = \alpha l t, \quad N = H_1 \quad \text{i} \quad M = -H_1 y,$$

otrzymamy:

$$H_1 = \frac{\alpha l t}{\int \frac{y^2 ds}{EI} + \int \frac{ds}{EF}}$$

Całkowite parcie poziome, wywołane działaniem obciążeń pionowych i podwyższeniem temperatury określi przeto wzór:

$$H = \frac{\int \frac{M_0 y ds}{EI} + \alpha l t}{\int \frac{y^2 ds}{EI} + \int \frac{ds}{EF}} \quad (280)$$

Obliczenie całek wchodzących w powyższe wzory da się zastąpić konstrukcją wykresną. Wielkości

$$\int \frac{M_0 y ds}{EI} \quad \text{i} \quad \int \frac{y^2 ds}{EI}$$

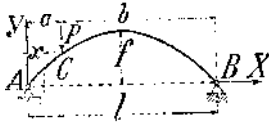
przedstawiają momenty statyczne względem osi X -ów pewnych fikcyjnych obciążeń ciągłych o natężeniu $\frac{M_0}{EI}$ i $\frac{y}{EI}$, działających na oś łuku. Wielkość

$$\int \frac{ds}{EF} \approx \int \frac{dx}{EF} \quad \text{[dla dość płaskich łuków]}$$

można uważać za pole ograniczone krzywą, której rzędne są równe $\frac{1}{EF}$.

§ 140. LINJE WPŁYWOWE DLA ŁUKU DWUPRZEGUBOWEGO

Przy działaniu na łuk obciążeń ruchomych najdogodniej przeprowadzić obliczenia przy pomocy linii wpływowych. Zbadajmy najpierw wpływ położenia ciężaru P (rys. 346) na wielkość wywołanego nim parcia poziomego H . Przekrój łuku przyjmijmy przytem za stały i zastosujemy wzór (278)^f. Reakcjami pionowymi będą przy obróceniu położeniu ciężaru:



Rys. 346

a zatem:

$$A = \frac{P b}{l} \quad \text{i} \quad B = \frac{P a}{l},$$

$$M_0 = \frac{P b}{l} x \quad \text{dla lewej części łuku, a}$$

$$M_0 = \frac{P a}{l} (l - x) \quad \text{dla prawej części.}$$

Wyrażenie dla parcia poziomego (wzór 278)^f przybierze postać:

$$H = \frac{\frac{P b}{l} \int_A^C x y ds + \frac{P a}{l} \int_C^B (l - x) y ds}{\int y^2 ds + r^2 s}$$

Dla uproszczenia dalszych obliczeń zastąpimy element łuku ds przez element jego rzutu poziomego dx . Taka zamiana, jak wykazały szczegółowe obliczenia, wywołuje tylko nieznaczne błędy w końcowej wartości H . Wzór dla parcia poziomego napiszemy tedy w postaci:

$$H = \frac{\frac{P b}{l} \int_0^a x y dx + \frac{P a}{l} \int_a^l (l - x) y dx}{\int_0^l y^2 dx + r^2 l} \quad (281)$$

¹⁾ Kwestja naprężeń termicznych w związku z budową wielkich łuków mostowych z betonu lub żelbetu nabiera w naszych warunkach klimatycznych poważnego praktycznego znaczenia, wobec czego wypada zbadać dokładniej rozkład temperatury na grubości łuku. Niektóre daty doświadczalne w tej sprawie można znaleźć w interesującym artykule C. H. Paul and Mayhew, Ob. Trans. Amer. Civil. Eng. Vol. 79 (r. 1915).

W szczególności dla łuku parabolicznego o równaniu (§ 139):

$$y = x(l-x) \frac{4f}{l^2}$$

znajdziemy po wstawieniu wartości y i wykonaniu całkowania:

$$H = \frac{5}{8} P \frac{a(l-a) \left(1 + \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right)}{fl \left(1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}\right)} \dots \dots \dots (282)$$

Otrzymane wyrażenie daje dla $P = 1$ szukane równanie linii wpływowej. Największa rzędna linii wpływowej odpowiada środkowi rozpiętości. Jej zmianę w zależności od stosunku $f:l$ przedstawia załączona tablica. (Przy obliczaniu przyjęto $r^2 = 0,0004 l^2$). Równanie linii wpływowej dla parcia poziomego można

znacznie uprościć, jeżeli zważymy, że czynnik $\frac{5}{8} \left(1 + \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right)$

zmienia się stosunkowo mało przy zmianie a od 0 do $\frac{l}{2}$ (w granicach od $\frac{5}{8}$ do $\frac{25}{32}$) i w przybliżeniu można jego wartość k przyjąć

za stałą. (Dla $\frac{f}{l} = \frac{1}{5}$ przyjmuje się $k = 0,78$, dla bardziej płaskich łuków $k = 0,75$). Wówczas:

$$H = kP \frac{a(l-a)}{fl \left(1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}\right)} \dots \dots \dots (283)$$

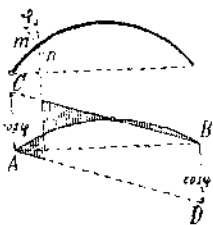
$\frac{f}{l} =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
Przy $P = 1, H_{max} =$	0,58	0,77	0,96

Odpowiadająca linia wpływowa dla H jest parabolą. Linję wpływową dla momentu zginającego M w dowolnym przekroju łuku mn (rys. 347) wykreśliśmy, biorąc pod uwagę, że

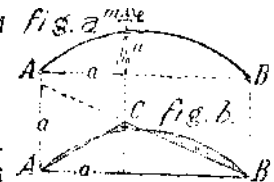
$$M = M_0 - Hy_a.$$

Rzędne szukanej linii wpływowej otrzymamy jako różnice rzędnych trójkąta ACB (fig. b), przedstawiającego linję wpływową dla M_0 i wielkości Hy_a . Te ostatnie otrzymujemy, mnożąc rzędne dla parcia poziomego H przez stały czynnik y_a . Siła poprzeczna Q w dowolnym przekroju łuku przedstawia się wzorem:

$$Q = Q_0 \cos \varphi - H \sin \varphi,$$



Rys. 348



Rys. 347

jeżeli Q_0 oznacza siłę poprzeczną dla belki prostej o tej samej rozpiętości, co łuk. Rzędne linii wpływowej dla siły poprzecznej tworzy dla prawej części łuku różnica rzędnych prostej BC (rys. 348) i wielkości $H \sin \varphi$. W równie prosty sposób można skonstruować i linje wpływowe dla siły podłużnej, jeżeli zważymy, że

$$N = Q_0 \sin \varphi + H \cos \varphi.$$

§ 141. NAJNIEKORZYSTNIEJSZE OBCIĄŻENIE ŁUKU

Ażeby znaleźć ten rozkład obciążenia łuku, któremu odpowiadają największe naprężenia normalne w dowolnie obranym przekroju mn (rys. 349), można, zamiast konstrukcji linii wpływowych, użyć t. zw. „linji oddziaływania“. Ta linja jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się obu reakcyj podporowych, wywołanych ruchomym ciężarem P . Jej rzędne y określa proporcja:

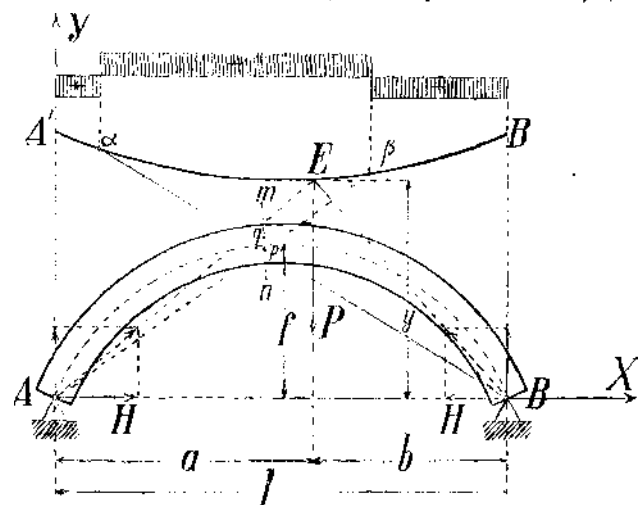
$$y : a = A : H = \frac{Pb}{l} : H,$$

z której po wstawieniu wartości H z wzoru (282), otrzymamy równanie krzywej oddziaływania:

$$y = \frac{\frac{8}{5} f \left(1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}\right)}{1 + \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}}$$

Jeżeli weźmiemy dla parcia poziomego uproszczone wyrażenie (283), to „krzywa oddziaływania“ stanie się prostą równoległą do osi X -ów. Jej równaniem będzie:

$$y = \frac{f \left(1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}\right)}{k}$$

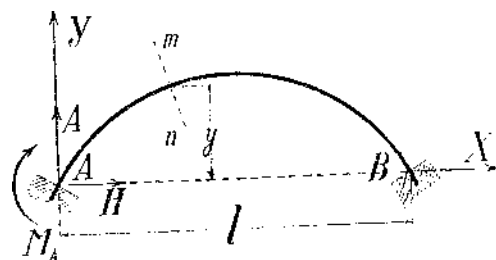


Rys. 349

Mając „krzywą oddziaływania“ można bardzo łatwo wyznaczyć reakcje dla dowolnego położenia siły P . Znajdziemy teraz te miejsca, które należy obciążyć, aby górne włókna w przekroju mn doznawały największychciągnięć. Niech będą p i q krańcowymi punktami rdzenia przekroju. Poprowadźmy przez p prostą Ap , Bp i przedłużmy je do przecięcia się z „krzywą oddziaływania“ w punktach β i α . Jeżeli ciężar leży po prawej stronie punktu β , to lewa reakcja podporowa łuku przetnie rozpatrywany przekrój mn poniżej punktu p i wywoła w górnych włóknach przekroju ciągnięcia. To samo zajdzie i przy położeniu ciężaru po lewej stronie punktu α . Największe ciągnięcia w górnych włóknach rozpatrywanego przekroju otrzymamy przeto obciążając części łuku $A\alpha$ i βB . Aby otrzymać największe ciśnienia w tychże włóknach, trzeba umieścić obciążenie między punktami α i β . Naprężenia w dolnej części przekroju mn można zbadać tym samym sposobem; trzeba tylko poprowadzić dwie proste łączące przeguby A i B z górnym punktem rdzennym q . Przedłużając te proste do przecięcia się z „krzywą oddziaływania“ znajdziemy szukane przedziały obciążenia.

§ 142. ŁUK BEZPRZEGUBOWY

Taki łuk ma oba końce utwierdzone, a zatem każdy z nich dostarcza następujących trzech niewiadomych: wielkość reakcji, jej kierunek i punkt działania. Trzy warunki równowagi nie wystarczają do wyznaczenia sześciu niewiadomych; brakujące trzy równania można jednak ustawić rozważając odkształcenia łuku.



Rys. 350

Jako wielkości statycznie niewyznaczalne obierzemy moment utwierdzenia M_A , wielkość pionowej składowej H i poziomej składowej N reakcji lewej podpory (rys. 350). Te wielkości znajdziemy przy pomocy zasady najmniejszej pracy. Przyjawszy, że ustalenie końców jest doskonale, czyli, że punkt A nie może doznać przesunięcia, a przekrój A obrotu, mamy:

$$\frac{\partial V}{\partial M_A} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial H} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial N} = 0 \quad \dots \quad (a)$$

Dla energii potencjalnej możemy wziąć uproszczone wyrażenie (271). Wchodzące w nie wielkości M i N łatwo przedstawić jako funkcje zbytecznych niewiadomych i sił zewnętrznych, a mianowicie:

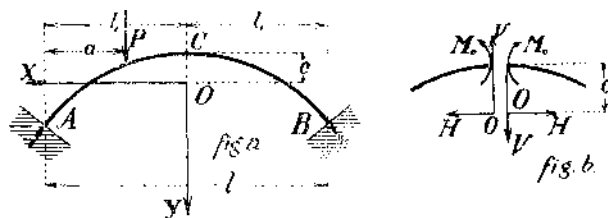
$$M = M_A + Ax - Hy - M', \quad N = -A \sin \varphi - H \cos \varphi + N'$$

W tych wyrażeniach oznaczyliśmy przez M' moment względem środka przekroju mn danych obciążeń, działających na lewą część łuku, a przez N' rzut tych obciążeń na kierunek normalnej do przekroju mn . Wstawivszy napisane wartości M i N w równania (a), otrzymamy po skróceniu przez wspólny czynnik E :

$$\left. \begin{aligned} M_A \int \frac{ds}{l} + A \int \frac{x ds}{l} - H \int \frac{y ds}{l} &= \int \frac{M' ds}{l} \\ M_A \int \frac{x ds}{l} + A \int \frac{x^2 ds}{l} - H \int \frac{xy ds}{l} + A \int \frac{\sin^2 \varphi ds}{F} + H \int \frac{\sin \varphi \cos \varphi ds}{F} &= \int \frac{M' x ds}{l} + \int \frac{N' \sin \varphi ds}{F} \\ M_A \int \frac{y ds}{l} + A \int \frac{xy ds}{l} - H \int \frac{y^2 ds}{l} - A \int \frac{\sin \varphi \cos \varphi ds}{F} - H \int \frac{\cos^2 \varphi ds}{F} &= \int \frac{M' y ds}{l} - \int \frac{N' \cos \varphi ds}{F} \end{aligned} \right\} \quad (284)$$

Wyznaczenie zbytecznych niewiadomych sprowadza się w ten sposób do rozwiązania trzech równań linjowych. Główna trudność rozwiązania polega na wielkiej ilości pracy rachunkowej przy wyznaczeniu całek określonych, wchodzących w powyższe równania. Liczbę całek można zmniejszyć znacznie przez odpowiedni obiór współrzędnych¹⁾, a żmudny rachunek da się zastąpić konstrukcjami wykreślnymi. Te sposoby, mające wielkie znaczenie praktyczne, głównie przy obliczeniu sklepień kamiennych i betonowych, stanowią przedmiot wykładu statyki budowli, gdzie także porusza się ważną kwestję najkorzystniejszego kształtu łuku lub sklepienia²⁾.

Tutaj objaśnimy niektóre z uproszczeń w przypadku działania jednej siły skupionej na łuk symetryczny (rys. 351). Mając rozwiązanie tego zadania, możemy łatwo skonstruować linie wpływowe dla wielkości statycznie niewyznaczalnych, a przy pomocy tych linii rozwiążemy kwestję naprężeń, powstających w łuku pod działaniem ruchomego układu ciężarów ze sobą związanych. To bowiem zadanie wypada rozwiązywać przy obliczeniu mostów kamiennych i betonowych. Przy konstrukcji linii wpływowych szczególnie korzystnym jest zastosowanie zasady wzajemności przesunięć. Jako zbyteczne niewiadome przyjmijemy siły określające naprężenia w szwie kluczowym C . Ogól napięć, działających w przekroju C , można



Rys. 351

¹⁾ E. Mörsch „Berechnung von eingespannten Gewölben“, Schweiz. Bauz., XLVII, Nr 7 i 8.

R. Schönhofer „Statische Untersuchung von Bogen- und Wölbragwerken“ r. 1908.

²⁾ W rosyjskiej literaturze jest poświęcona tej kwestji praca S. Bełzeckiego: „Racjonalnyja formy spłosnych uprugich arok“, r. 1905.

sprowadzić do jednej siły i jednej pary sił. Punkt działania siły umieścimy w odległości c od wierzchołka C osi łuku, przy czym c obierzemy w dalszym ciągu tak, aby możliwie uprościć konstrukcję linii wpływowej. Rozłożywszy siłę na składowe poziomą i pionową i obrawszy dla sił i momentu kierunki, wskazane na fig. (b), sprowadzamy obliczenie do konstrukcji linii wpływowych dla H , V i M_0 . Przy zastosowaniu zasady wzajemności przesunięć będziemy rzeczywisty stan układu, przedstawiony na rys. (351), porównywać z jednym ze stanów, uzmysłowionych na rys. (352). Dla otrzymania tych pomyslnych stanów odrzucamy zbyteczne niewiadome H , V i M_0 , zamieniając w ten sposób łuk na dwa oddzielne krzywe pręty, utwierdzone dolnymi końcami w A i B , a zginane siłami równymi jednostce, działającymi na górne końce.

Do zastosowania zasady wzajemności przesunięć będą nam potrzebne przesunięcia górnych końców C naszych krzywych prętów, oraz przesunięcia punktu m , odpowiadającego miejscu działania pionowej siły P (rys. 352). Te przesunięcia będziemy pojmować w uogólnionem znaczeniu. Tak np. przesunięciem, odpowiadającym uogólnionej sile V rzeczywistego stanu układu (rys. 351) będzie względne pionowe przesunięcie punktów C dla każdego z przypadków, przedstawionych na rysunku (352). Te przesunięcia oznaczymy przez δ_{VV} ; δ_{VH} ; δ_{VM} . Pierwszy z wskaźników oznacza, że mamy do czynienia z przesunięciem, odpowiadającym sile V . Drugi zaś wskaźnik objaśnia, jakiego typu siłą równą 1 to przesunięcie wywołano. Siły H stanu rzeczywistego będą odpowiadać w stanach pomyslnych zwiększenia wzajemnych odległości punktów O , które się przyjmuje jako niezmiennie połączone z końcowymi przekrojami C naszych prętów. Te przesunięcia oznaczymy przez: δ_{HV} ; δ_{HH} ; δ_{HM} . Uogólnionej sile M_0 stanu rzeczywistego będzie odpowiadać względny obrót końcowych przekrojów C przy stanach pomyslnych. Odpowiadające kąty obrotu oznaczymy przez: δ_{MV} ; δ_{MH} ; δ_{MM} . Nakoniec pionowe przesunięcia punktu m przy stanach pomyslnych [rys. (352), fig. (a), fig. (b), fig. (c)] oznaczymy odpowiednio przez: f_V ; f_H ; f_M . Zastosujmy teraz zasadę wzajemności przesunięć do rzeczywistego stanu układu i do stanu pomyslnego, który uzmysławia fig. (a). Ponieważ w stanie rzeczywistym nie zachodzi względny ruch obu części łuku w przekroju C , przeto przesunięcia stanu rzeczywistego, odpowiadające siłom stanu pomyslnego, będą równe zeru. Praca sił stanu pomyslnego na odpowiadających przesunięciach stanu rzeczywistego staje się tedy zerem. A zatem będzie równą zeru i praca sił stanu rzeczywistego na odpowiadających przesunięciach stanu pomyslnego, czyli:

$$M_0 \delta_{MV} + H \delta_{HV} + V \delta_{VV} + P f_V = 0.$$

Porównywując w podobny sposób stan rzeczywisty ze stanami pomyslnymi, przedstawionymi na fig. (b) i (c) rys. (352) otrzymamy:

$$M_0 \delta_{MH} + H \delta_{HH} + V \delta_{VH} + P f_H = 0,$$

$$M_0 \delta_{MM} + H \delta_{HM} + V \delta_{VM} + P f_M = 0.$$

Przy pomocy warunków symetrii można się od razu przekonać, że niektóre z przesunięć stają się zerami i uprościć przez to otrzymane powyżej równania do wyznaczenia zbytecznych niewiadomych. Weźmy pod uwagę pomyslny stan, przedstawiony na fig. (a). Lewy pręt różni się od prawego tylko kierunkiem siły zewnętrznej, wobec czego przesunięcia odpowiadających punktów tych prętów będą zawsze co do wielkości równe, ale co do kierunku przeciwne. W takim przypadku przesunięcie δ_{VV} , przedstawiające względne pionowe rozsuniecie punktów C , będzie równe podwójnemu ugięciu w przekroju C lewego pręta, zaś przesunięcia δ_{MV} i δ_{HV} będą równe zeru, ponieważ poziomy odstęp między punktami O pozostaje w danym przypadku niezmiennym, a względny kąt obrotu przekrojów C jest równy zeru. A zatem dla pomyslnego stanu (a) napiszemy [ob. wzory (272)', (273) i (274) dla przesunięć]:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{VV} &= 2 \int_0^s \frac{xM \cdot ds}{EI} + 2 \int_0^s \frac{N dy}{EF} = 2 \int_0^s \frac{x^2 ds}{EI} + 2 \int_0^s \frac{\sin \varphi dy}{EF} \\ \delta_{MV} &= 0 \\ \delta_{HV} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a)$$

W podobny sposób otrzymamy dla pomyslnych przypadków (b) i (c):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{VH} &= \delta_{HV} = 0, \\ \delta_{MH} &= 2 \int_0^s \frac{M ds}{EI} = 2 \int_0^s \frac{y ds}{EI}, \\ \delta_{HH} &= 2 \int_0^s \frac{(c+y) M ds}{EI} - 2 \int_0^s \frac{N dx}{EF} - 2c \int_0^s \frac{M ds}{EI} = 2 \int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} + 2 \int_0^s \frac{\cos \varphi dx}{EF} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (b)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{VM} &= \delta_{MV} = 0, \\ \delta_{HM} &= \delta_{MH} = 2 \int_0^s \frac{y ds}{EI}, \\ \delta_{MM} &= 2 \int_0^s \frac{1 \cdot ds}{EI} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (c)$$

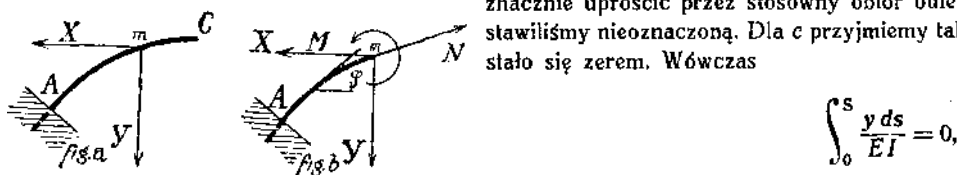
Na podstawie tego przybiorą równania do wyznaczenia zbytecznych niewiadomych postać następującą:

$$\left. \begin{aligned} V \delta_{VV} + P f_V &= 0, \\ M_0 \delta_{MH} + H \delta_{HH} + P f_H &= 0, \\ M_0 \delta_{MM} + H \delta_{HM} + P f_M &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (d)$$

Pierwsze z tych równań daje:

$$V = -P \frac{f_V}{\delta_{VV}}$$

A zatem linja pionowych ugięć (mierzonych jako dodatnie w kierunku dodatniej osi Y) dla pomyślanego stanu (a) przedstawia linję wpływową niewiadomej V . Konstrukcję linii wpływowych dla dwu pozostałych niewiadomych M_0 i H można znacznie uprościć przez stosowny obiór odległości c , którą dotychczas pozostawiliśmy nieoznaczoną. Dla c przyjmijmy taką wielkość, aby przesunięcie δ_{MH} stało się zerem. Wówczas



Rys. 353

czyli początek współrzędnych O leży w środku ciężkości osi łuku, jeżeli jako ciężar jednostkowy tej osi przyjmijmy w dowolnym przekroju $1/EI$.

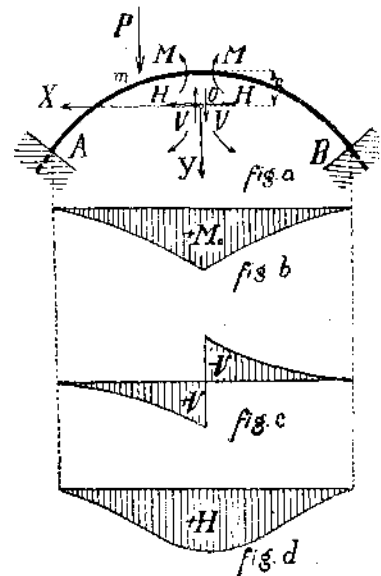
Przy takim obiorze odstępów c drugie i trzecie z równań (d) dadzą:

$$H = -P \frac{f_H}{\delta_{HH}} \quad \text{i} \quad M_0 = -P \frac{f_M}{\delta_{MM}}$$

W ten sposób konstrukcja linii wpływowych dla H i M_0 sprowadza się do wyznaczenia pionowych ugięć w przypadkach pomyślanych, przedstawionych na fig. (b) i (c) rys. (352). Te ugięcia można obliczyć przy pomocy ogólnego wzoru (274) dla pionowych przesunięć. Umieściwszy początek współrzędnych w punkcie m , którego ugięcia szukamy i obrawszy kierunki osi, sił i momentów według rys. (353), otrzymamy dla pionowego przesunięcia w kierunku osi y wyrażenie:

$$f = - \int_0^s \frac{x M ds}{EI} - \int_0^s \frac{N ds \sin \varphi}{EF} \dots \dots \dots (e)$$

Pierwszy wyraz tego wzoru przedstawia ugięcie wskutek momentu zginającego, a drugi wskutek siły podłużnej. Wyznaczenia ugięcia można dokonać drogą analityczną lub wykreslną. W pierwszym przypadku sprowadza się zadanie do przybliżonego obliczenia całek określonych, w drugim zaś do całkowania wykreslnego. Przy wykreslnem rozwiązaniu możemy korzystać z tego, że pierwsza całka we wzorze (e) przedstawia moment względem punktu m pewnego obciążenia ciągłego osi sklepienia o natężeniu M/EI . Skoro połowę sklepienia (łuku) AC podzielimy na szereg kłińców o grubości δs , mierzonej na osi, a na środek ciężkości każdego kłińca działamy pionową siłą o wielkości $M \delta s/EI$ i wykreślimy dla tego układu sił równoległych wielobok sznurkowy, to rzędne otrzymanego tą drogą pola momentów dadzą nam w określonej skali¹⁾ wartości ugięć wywołanych momentem M . Ugięcia wskutek siły podłużnej, przedstawione drugą całką wzoru (e) znajdziemy jako wypadkową sił pionowych, rozmieszczonych w sposób ciągły wzdłuż łuku Am o natężeniu $N \sin \varphi/EF$.



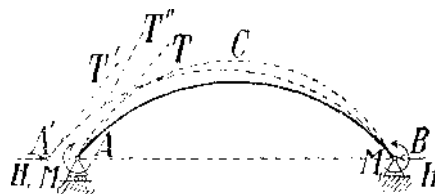
Rys. 354

Dla obliczenia przesunięć δ_{VV} , δ_{HH} , δ_{MM} skorzystamy z wzorów (a), (b) i (c). Zawarte w nich całki określone można zawsze z dostatecznym dla praktyki przybliżeniem obliczyć przy pomocy wzoru Simpson'a lub Cotes'a. W ten sposób wyznaczają się wszystkie elementy, zapomocą których można wykreślić linje wpływowe dla obranych zbytecznych niewiadomych H , V i M_0 . Ogólną postać tych linii przedstawia rys. (354). Zauważymy jeszcze, że sporządzając modele łuków i poddając je działaniu par M_0 , oraz sił H i V ,

¹⁾ Wielkości $M \delta s/EI$, które traktujemy jako siły, przedstawiają liczby oderwane, które wyobrażamy odcinkami. Jeżeli odległość biegunową przyjęto w tejże podziałce równą jednostce, to ugięcia wypadną w tej samej skali co rysunek sklepienia. Zmniejszając n -krotnie odległość biegunową, powiększamy tyleż razy skalę ugięć.

można otrzymać linje wpływowe na drodze doświadczalnej, co przedstawia interes w przypadku konstrukcji złożonych, np. przy badaniu współudziału części konstrukcyjnych, związanych ze sklepieniem w ogólnej pracy łuku.

Naszkicujemy teraz ogólny tok rozwiązania zagadnienia naprężeń, powstających w łukach z utwierdzonymi końcami przy podwyższeniu temperatury. Do tego prowadzi najprościej twierdzenie Castigliano'a. Łuk uczynimy statycznie wyznaczalnym, jeżeli utwierdzenie jednego końca, np. prawego, zastąpimy przegubem stałym, a drugiego przegubem przesuwalnym (rys. 355). Wówczas łuk odkształci się swobodnie wskutek podwyższenia temperatury o t° , a jego rozpiętość l zwiększy się o αlt . Dobierzmy teraz układ sił, jakim trzeba działać na łuk, aby przekroje podporowe łuku wróciły w pierwotne położenie. Przedewszystkiem sprowadzimy w pierwotne położenie przegub A , przy pomocy siły poziomej o H_1 . Oś łuku zegnę się przytem i zajmie położenie ACB . Styczna do osi w punkcie A przejdzie z położenia $A'T'$, równoległego do położenia pierwotnego AT , w położenie AT'' . Takż sam obrót stycznej zajdzie i u prawej podpory. Ażeby styczne końcowe wróciły w pierwotne położenie, musimy na końcu łuku działać momentami M_1 . W przypadku symetrycznego kształtu łuku będą te momenty równe i przy ich działaniu w punktach A i B nie powstaną dodatkowe reakcje pionowe. Naprężenia w dowolnym przekroju łuku będą wyznaczone wielkościami momentów M i sił poziomych H_1 . Dla momentu zginającego i siły podłużnej otrzymujemy wyrażenia:



Rys. 355

$$M = M_1 - H_1 y, \quad N = -H_1 \cos \varphi.$$

Energję potencjalną układu można przedstawić jako funkcję tych wielkości. Zważywszy, że przy wspólnem działaniu M i H_1 , jest przesunięcie odpowiadające uogólnionej sile H_1 równe αlt , a przesunięcie odpowiadające M_1 jest równe zeru (gdyż ostateczny kierunek stycznej AT jest równoległy do $A'T'$), otrzymamy dwa równania:

$$\frac{\partial V}{\partial M_1} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial V}{\partial H_1} = \alpha lt.$$

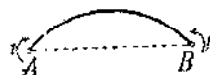
Wstawwszy w wyrażenie dla energii potencjalnej wartości M i N znajdziemy:

$$\left. \begin{aligned} M_1 \int \frac{ds}{EI} - H_1 \int \frac{y ds}{EI} &= 0 \\ M_1 \int \frac{y ds}{EI} - H_1 \int \frac{y^2 ds}{EI} - H_1 \int \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} &= -\alpha lt \end{aligned} \right\} \quad (285)$$

Z tych równań wyznajdziemy wielkości momentów podporowych i parcia poziomego, wywołanych podwyższeniem temperatury łuku.

Dla sprawdzenia wyprowadzimy te same równania sposobem Mohr'a. Jako pierwszy stan obierzemy rzeczywisty stan układu, w którym pod wpływem podwyższenia temperatury powstały momenty podporowe M_1 i parcie poziome H_1 . Odpowiadające temu stanowi odkształcenia każdego elementu łuku, zawartego między dwoma nieskończenie bliskimi przekrojami poprzecznymi określa zmiana kąta:

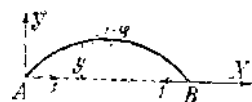
$$\delta d\varphi = \frac{M ds}{EI} = \frac{(M_1 - H_1 y) ds}{EI}$$



Rys. 356

i wydłużenie elementu

$$\delta ds = \alpha t ds - \frac{H \cos \varphi}{EF} ds.$$



Rys. 357

Jako drugi stan przyjmijmy ten, w którym na oswobodzone końce łuku działają dwie wprost przeciwne pary sił równe 1 (rys. 356). Moment zginający w każdym przekroju poprzecznym łuku będzie równy 1, a praca sił drugiego stanu na przesunięciach odpowiadających stanowi pierwszemu przedstawi się formułą:

$$\int \frac{(M_1 - H_1 y) ds}{EI} \cdot 1.$$

Tę wielkość należy, stosownie do zasady prac przygotowanych, przyrównać do zera. W ten sposób otrzymujemy pierwsze z równań (285). Dla ustawienia drugiego równania porównamy rzeczywisty stan układu ze stanem, w którym na oswobodzone końce łuku działają dwie wprost przeciwne siły poziome równe 1 (rys. 357). Moment zginający dla dowolnego przekroju równa się $-1 \cdot y$, a siła podłużna $-1 \cdot \cos \varphi$. Praca sił tego stanu na przesunięciach stanu pierwszego przedstawia się wyrażeniem:

$$-\int \frac{y(M_1 - H_1 y) ds}{EI} - \int \alpha t \cos \varphi ds + \int \frac{H_1 \cos^2 \varphi ds}{EF}.$$

Przyrównawszy je do zera otrzymamy drugie z równań (285).

§ 143. ŁUK PARABOLICZNY O KOŃCACH UTWIERDZONYCH (BEZPRZEGUBOWY)

W przypadku płaskiego łuku parabolicznego o stałym przekroju można uprościć ogólne równania (284) dla wyznaczenia zbytecznych niewiadomych, przyjmując w przybliżeniu:

$$ds = dx, \quad \cos \varphi = 1, \quad \sin \varphi = 0, \quad N' = 0.$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{ds}{l} &= \int_0^1 \frac{dx}{l} = \frac{l}{l}, & \int_0^s \frac{ds}{l} x &= \int_0^1 x \frac{dx}{l} = \frac{l^2}{2l}; \\ \int_0^s \frac{x^2 ds}{l} &= \int_0^1 \frac{x^2 dx}{l} = \frac{l^3}{3l}, & \int_0^s \frac{y ds}{l} &= \int_0^1 \frac{y dx}{l} = \frac{2}{3} \frac{fl}{l}; \\ \int_0^s \frac{xy ds}{l} &= \int_0^1 \frac{xy dx}{l} = \frac{fl^2}{3l}, & \int_0^s \frac{y^2 ds}{l} &= \int_0^1 \frac{y^2 dx}{l} = \frac{8}{15} \frac{f^2 l}{l}. \end{aligned}$$

Wstawiając te wyniki w równania (284), otrzymamy:

$$M_A + A \frac{l}{2} - \frac{2}{3} Hf = \frac{1}{l} \int_0^1 M' dx,$$

$$M_A + \frac{2}{3} Al - \frac{2}{3} Hf = \frac{2}{l^2} \int_0^1 M' x dx,$$

$$M_A + A \frac{l}{2} - H \left(\frac{4}{5} f + \frac{3}{2} \frac{r^2}{l} \right) = \frac{3}{2fl} \int_0^1 M' y dx.$$

Odejmując trzecie równanie od pierwszego, znajdujemy wyrażenie dla parcia poziomego:

$$\frac{2}{15} H \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right) fl = f \int_0^1 M' dx - \frac{3}{2} \int_0^1 M' y dx;$$

odejmując zaś od drugiego równania pierwsze, mamy:

$$\frac{Al^3}{6} = 2 \int_0^1 M' x dx - l \int_0^1 M' dx.$$

Nakoniec dla momentu M_H otrzymamy (z pominięciem wyrazów opatrzonych czynnikiem $\frac{r^2}{f^2}$) wyrażenie:

$$M_H = \frac{9}{l} \int_0^1 M' dx - \frac{6}{l^2} \int_0^1 M' x dx - \frac{15}{2fl} \int_0^1 M' y dx.$$

Gdy w szczególności na łuk działa tylko jedna siła skupiona P , odległa od pionowych podporowych odpowiednio o a i b ($a + b = l$), to wielkość M' jest równa zero dla lewej części, dla prawej zaś $= P(x - a)$. Wtedy:

$$\begin{aligned} \int_0^1 M' dx &= P \int_a^1 (x - a) dx = \frac{1}{2} P b^2, \\ \int_0^1 M' x dx &= P \int_a^1 (x - a) x dx = \frac{1}{6} P (l - a)^2 (2l + a), \\ \int_0^1 M' y dx &= \frac{4Pf}{l^2} \int_a^1 (l - x)(x - a) x dx = \frac{Pf}{3l^2} (l - a)^2 (l + a). \end{aligned}$$

Wstawiając te wartości w znalezione powyżej wyrażenia dla wielkości statycznie niewyznaczalnych znajdziemy:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{15}{4} \cdot \frac{a^2 (l - a)^2 P}{fl^3 \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right)} = \frac{2a^2 b^2 P}{l^3} \cdot \frac{15}{8f \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right)}, \\ A &= \frac{(l - a)^2 (l + 2a) P}{l^3} = \frac{l^3 - 3a^2 l + 2a^3}{l^3} P, \\ M_H &= - \frac{a (l - a)^2 (2l - 5a)}{2l^3} P = - \frac{ab^2}{l^3} P \cdot \left(1 - \frac{5a}{2l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (286)$$

Na podstawie tych wzorów można skonstruować linie wpływowe dla zbytecznych niewiadomych, a przy ich pomocy można także znaleźć linie wpływowe dla M , N i Q . Dla wyznaczenia najniekorzystniejszego obciążenia łuku użyjemy z korzyścią

„krzywej oddziaływania”. Rzędną y_1 jakiegokolwiek punktu E tej krzywej (rys. 358) wyznaczmy z warunku, że całkowita reakcja lewej podpory przechodzi przez ten punkt. Ta reakcja jest wypadkową z momentu M_A , oraz sił A i H , działających w punkcie A , a zatem:

$$M_A + Aa - Hy_1 = 0.$$

Stąd:

$$y_1 = \frac{M_A + Aa}{H}$$

Wstawiając tutaj wartości M_A i A , znalezione dla łuku parabolicznego, otrzymamy:

$$y_1 = \frac{6}{5} \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right) f \quad \dots \quad (287)$$

Linia oddziaływania jest więc w danym przypadku prostą $A'B'$, równoległą do osi X -ów. Ta linia nie wystarcza jeszcze do wyznaczenia reakcyj wywołanych danym obciążeniem, albowiem punkty działania całkowitych reakcyj podporowych nie schodzą się z końcami A i B łuku. Dla znalezienia kierunku reakcyj obliczymy $\text{tg } \gamma$, jaki reakcja tworzy z osią X -ów, a mianowicie:

$$\text{tg } \gamma = \frac{A}{H} = \frac{4}{15} \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right) f \frac{l+2a}{a^2}.$$

Równanie linii działania reakcyj lewej podpory napiszemy tedy w postaci:

$$\begin{aligned} y &= y_1 + (x-a) \text{tg } \gamma = \frac{6}{5} \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right) f + \frac{4}{15} (x-a) \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right) f \frac{l+2a}{a^2} = \\ &= \frac{2f}{15} \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right) \left[\frac{2lx}{a^2} - \frac{2(l-2x)}{a} + 5 \right] \quad \dots \quad (a) \end{aligned}$$

Przy przesunięciu ciężaru zmienia się a i otrzymamy coraz to nowe proste o równaniu (a). Ich owiniętą znajdziemy, rugując parametr a z tegoż równania i różnicania:

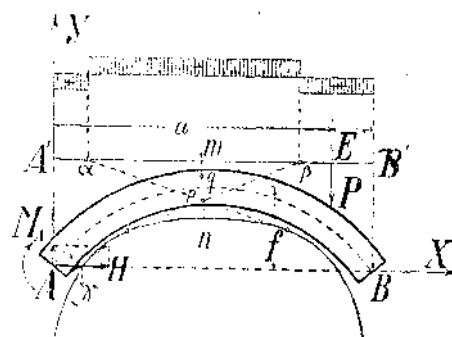
$$0 = \frac{2f}{15} \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right) \left[-\frac{4lx}{a^3} + \frac{2(l-2x)}{a^2} \right],$$

które wypływa z (a) przez różniczkowanie względem a . Wynik rugowania jest następujący:

$$y = \frac{f}{15} \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right) \left[10 - \frac{(l-2x)^2}{lx} \right] \quad \dots \quad (288)$$

Nakreśliwszy krzywą owiniętą według tego równania i mając krzywą oddziaływania, znajdziemy łatwo kierunek reakcyj podporowych dla każdego położenia ciężaru. Wystarczy w tym celu z punktu E przecięcia się kierunku siły P z linią oddziaływania poprowadzić styczną do krzywej owiniętej.

Rozpatrzmy jeszcze naprężenia w dowolnym przekroju poprzecznym mn . Niechaj będą p i q krańcowymi punktami rdzenia przekroju. Poprowadźmy przez p proste $p\beta$ i $p\alpha$ styczne do owiniętej, przecinające linię oddziaływania w punktach β i α . Dla każdego ciężaru, leżącego po prawej stronie punktu β , przejdzie lewa reakcja podporowa poniżej p i wywoła w górnych włóknach przekroju mn ciągnienia. To samo można powożyć i odnośnie do ciężarów leżących po lewej stronie punktu α . A zatem dla otrzymania największych ciągnięć w górnych włóknach przekroju mn , trzeba obciążyć łuk w przedziałach $A'\alpha$ i $\beta B'$. Obciążenie przedziału $\alpha\beta$ wywoła w tychże włóknach największe ciśnienia. Aby rozwiązać kwestię rozkładu obciążeń dla otrzymania największych naprężeń w dolnych włóknach przekroju mn trzeba poprowadzić styczne do owiniętej przez górny punkt q rdzenia przekroju. Dalsze szczegóły obliczenia łuków i sklepień można znaleźć w działach specjalnych¹⁾.



Rys. 3:8

¹⁾ Winkler „Die Lehre von d. Elastizität u. ...“, r. 1867, str. 293.
Weyrauch, „Theorie der elastischen Bogenträger“.
Mehrtens, „Die Statik d. Baukonstruktionen“, t. I.I.
[Thullie, „Podręcznik teorii mostów“, cz. II, Lwów, 1913].

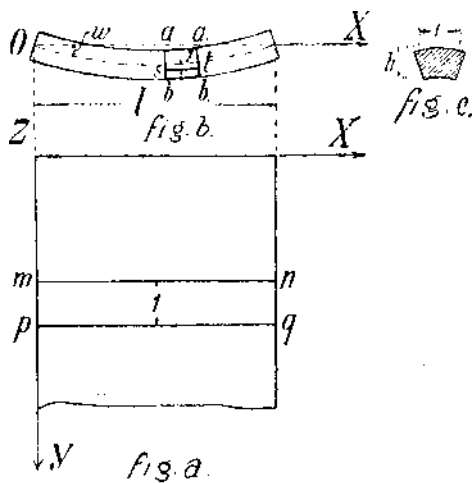
CZĘŚĆ VI

ROZDZIAŁ XVII

ZGIĘCIE CIENKICH PŁYT

§ 144. ZGIĘCIE PŁYTY PODŁUG POWIERZCHNI WALCOWEJ

Elementarna teoria zgięcia płyt ma wiele wspólnego z wyłożoną poprzednio teorią zgięcia prętów. Wywody opierają się na pewnych założeniach upraszczających, które pozwalają drogą elementarną znaleźć wielkości ugięć płyty i powstających przytem naprężeń dla kilku przypadków szczególnych, mających większe znaczenie praktyczne. Będziemy rozpatrywać płyty o grubości h stałej i małej w porównaniu do długości i szerokości płyty. Płaszczyznę połowiącą grubość nazwiemy



Rys. 359

płaszczyznę środkową płyty. Ta płaszczyzna gra w teorii zgięcia płyt taką samą rolę, jak warstwa obojętna przy zgięciu prętów. Wogóle będziemy rozpatrywać tylko ugięcia małe wobec grubości płyty h ; to ograniczenie odpada jednak przy zgięciu według powierzchni walcowej. Przyjmiemy dalej, że każdy element prostoliniowy, prostopadły do płaszczyzny środkowej, pozostaje po zgięciu prostoliniowym i prostopadłym do powierzchni ugięcia, t. j. powierzchni, która powstaje z płaszczyzny środkowej wskutek zgięcia. To przyjęcie odpowiada hipotezie płaskich przekrojów w teorii zgięcia prętów. Osie X i Y prostokątnego układu współrzędnych obierzemy w płaszczyźnie środkowej, a oś Z skierujemy prostopadle do tej płaszczyzny.

Weźmy teraz pod uwagę przypadek, kiedy płyta o stałej szerokości l i nieograniczonej długości w kierunku osi Y -ów (rys. 359) zgina się podług powierzchni walcowej o tworzących równoległych do osi Y . Warunki odkształcenia będą przytem we wszystkich przekrojach prostopadłych do osi Y jednakie, wobec czego możemy się ograniczyć do rozpatrzenia zgięcia skrawka $mnpq$ o szerokości l (fig. a). Na skutek uczynionych powyżej założeń przekroje poprzeczne ab i a_1b_1 tego skrawka (fig. b) pozostaną przy zgięciu płaskimi, a względne wydłużenie jakiegokolwiek podłużnego elementu st , leżącego w odległości z od płaszczyzny środkowej, będzie równe:

$$e = \frac{z}{\rho},$$

jeżeli ρ oznacza promień krzywizny. Wyrażenie dla wydłużenia jest więc takie same, jak w przypadku zgięcia prętów, atoli wartość odpowiadających naprężeń będzie inna. Przyczyna tego jest następująca: Przy zgięciu pręta odkształca się przekrój poprzeczny w sposób uzmysłowiony na fig. (c).

Przy zgięciu naszego skrawka takiego odkształcenia nie będzie, gdyż zapobiegają temu sąsiednie części zginanej płyty. Przy rozciąganiu lub ściskaniu nie doznają włókna podłużne odpowiadającego zwężenia lub rozszerzenia poprzecznego, co może być tylko wynikiem pewnych naprężeń bocznych. Oznaczmy odpowiednio przez p_x i p_y naprężenia normalne w płaszczyznach prostopadłych do osi X -ów i Y -ów. Na podstawie ogólnych wzorów (15) możemy napisać:

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_x + \sigma e_y), \quad p_y = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_y + \sigma e_x).$$

Zważywszy, że w danym przypadku jest

$$e_x = \frac{z}{\rho} \quad \text{i} \quad e_y = 0,$$

otrzymamy:

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2} \cdot \frac{z}{\rho}, \quad p_y = \frac{\sigma E}{1-\sigma^2} \cdot \frac{z}{\rho}.$$

Moment napięć normalnych, rozłożonych w przekroju poprzecznym rozpatrywanego skrawka, będzie równy:

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\sigma^2} \cdot \frac{z^2 dz}{\rho} = \frac{E}{1-\sigma^2} \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \frac{1}{\rho} \quad \dots \quad (289)$$

Porównyując ten wynik z tem, co mieliśmy przy rozpatrywaniu zgięcia prętów (wz. 63), widzimy różnicę tylko w tem, że zamiast momentu bezwładności poprzecznego przekroju równego $\frac{1 \cdot h^3}{12}$, wchodzi we wzór (289) nieco większa wielkość

$$\frac{1 \cdot h^3}{12(1-\sigma^2)}.$$

Dzięki połączeniu z sąsiednimi częściami płyty okazuje się skrawek $mnpq$ bardziej sztywnym od belki o tym samym przekroju. Dla uproszczenia wzorów wprowadzimy oznaczenie:

$$\frac{E}{1-\sigma^2} \cdot \frac{h^3}{12} = C \quad \dots \quad (290)$$

Wielkość C gra w teorii zgięcia płyt tę samą rolę, co sztywność B w teorii zgięcia prętów. Będziemy ją nazywać sztywnością płyty przy zginaniu walcowem, albo krócej walcową sztywnością płyty. Przy tem znakowaniu napiszemy wzór dla krzywizny w postaci:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{C} \quad \dots \quad (289')$$

Tutaj oznacza M moment zginający odniesiony do poprzecznego przekroju skrawka o szerokości 1. Wstawiając znaną wartość dla krzywizny we wzory dla naprężeń, otrzymamy:

$$p_x = \frac{12Mz}{h^3} \quad \text{i} \quad p_y = \sigma \frac{12Mz}{h^3}.$$

Naprężenia p_x będą przeto takie same jak w belce o przekroju $1 \times h$. Atoli oprócz tego pojawiają się naprężenia p_y , zapobiegające odkształceniu przekroju poprzecznego. Takie naprężenia powinny działać na brzegach skrawka $mnpq$, aby zaszło jego zgięcie według powierzchni walcowej¹⁾.

§ 145. OBLICZENIE DŁUGICH PŁYT PROSTOKĄTNYCH

Jeżeli obciążenie ciągłe zginające długą prostokątną płytę nie zmienia swojego natężenia w kierunku długości płyty, to w miejscach, odległych od krótkich boków płyty, można bez wielkiego błędu przyjąć powierzchnię ugięcia za walcową. Wydzielając, jakśmy to uczynili w poprzednim paragrafie, skrawek płyty o szerokości 1, możemy naprężenia p_x znaleźć dla tego skrawka tak

¹⁾ Postać powierzchni skrawka w przypadku, gdy niema naprężeń p_y , rozpatrzono w interesującej książce Searle'a: *Experimental Elasticity*, str. 50.

To równanie wyprowadzono przy założeniu, że końce pręta są przegibnie połączone z punktami bezwzględnie stałymi, że zatem zbliżenie końców $\frac{\pi^2 f^2}{4l}$ (wz. 227), uwarunkowane zgięciem osi pręta, jest dokładnie równe wydłużeniu pręta wskutek siły podłużnej. Ale tego równania można używać tylko w tym przypadku, kiedy podłużne brzegi płyty mogą się przy zgięciu swobodnie obracać, a zupełnie się przytem nie zbliżają. Uogólnimy tedy nasze wywody przyjmując takie sposoby ustalenia, które pozwalają na pewne zbliżenie podłużnych krawędzi płyty. Dajmy na to, że takiemu zbliżeniu przeszkadzają sprężyste rozpory. W takim przypadku siła podłużna S , rozciągająca wydzielony skrawek, będzie siłą ściskającą dla rozpór. Jeżeli F_1 oznacza pole przekroju rozpór, przypadające na skrawek o szerokości 1, to skrócenie rozpór będzie równe:

$$\frac{Sl}{EF_1}$$

Dla wyznaczenia α^2 mamy więc warunek następujący: Zbliżenie końców skrawka wywołane zgięciem równa się sumie z wydłużenia skrawka i skrócenia rozpór, czyli:

$$\frac{\pi^2 f^2}{4l} = \frac{(1-\sigma) \cdot Sl}{E \cdot 1 \cdot h} + \frac{Sl}{EF_1}$$

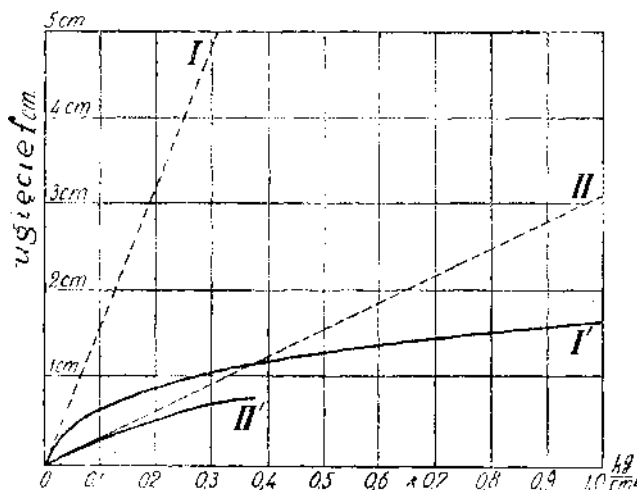
Pierwszy wyraz po prawej stronie powyższego równania jest opatrzony czynnikiem $(1-\sigma^2)$, ponieważ przyjmujemy, że wydłużeniu środkowej powierzchni płyty w kierunku osi X -ów nie towarzyszy skrócenie poprzeczne w kierunku osi Y -ów. Wstawiliśmy zamiast S i f ich wyrażenia przez α^2 , otrzymamy¹⁾:

$$\alpha^2(1+\alpha^2) = \frac{3f_0^2}{h^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{F_1(1-\sigma^2)}} = \frac{3f_0^2}{h^2} k \quad (295)$$

Spółczynnik k , określony powyższem równaniem, nazywają „spółczynnikiem rozporu“. Z powiększeniem sztywności rozpór dąży ta liczba do wartości 1. Przy $k=1$ zamienia się równanie (295) na wyprowadzone poprzednio rów. (240)²⁾. Zupełnie tym samym sposobem otrzymamy dla płyt z utwierdzonymi brzegami podłużnymi:

$$\alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right) = \frac{3f_0^2}{h^2} k \quad (296)$$

Wielkość siły podłużnej S jest proporcjonalna względem α^2 i jak widać z otrzymanych równań (295) i (296) rośnie wraz powiększeniem f_0 . Im mniejsza jest sztywność płyty i im większy stosunek $l:h$, tem większy będzie wpływ siły podłużnej na ugięcie i na wielkość naprężeń. Utwierdzenie podłużnych brzegów płyty zmniejsza f_0 kilkakrotnie, co się odbija silnie na wielkości siły podłużnej S . Na rys. (360) przedstawiono wzrost ugięć przy powiększeniu obciążenia równomiernie rozłożonego q od 0 do 1 kg/cm^2 , działającego na płytę o szerokości $l=122 \text{ cm}$ i sztywności $C=185 \cdot 10^3 \text{ kg.cm}$. Proste I i II, wykresowane na rysunku, dają nam wzrost ugięć płyty w przypadku brzegów podpartych i utwierdzonych przy braku sił podłużnych S . Linje pełne I' i II' przed-

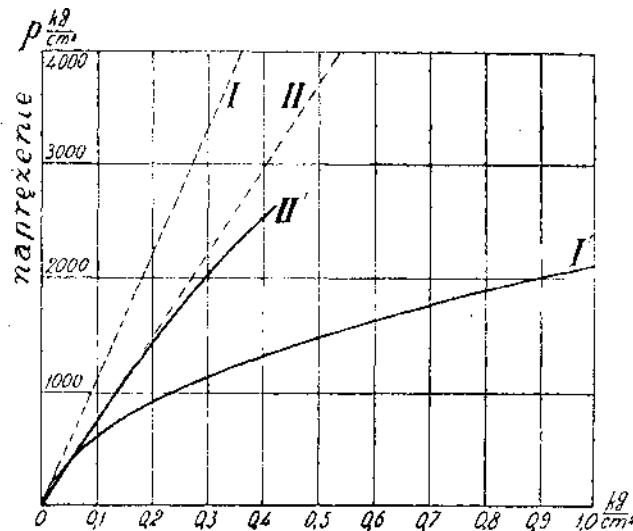


Rys. 360

¹⁾ Bez szczególnych trudności można ustawić równanie dla wyznaczenia α^2 i w tym przypadku, gdy płyta podlega oprócz zgięcia, nadto działaniu naprężeń rozciągających S_0 , rozłożonych równomiernie na podłużnych brzegach płyty. Jeżeli S oznacza, jak pierwej, naprężenie rozciągające w płycie po zgięciu, to naprężenie ściskające w rozpórach równa się $S-S_0$, a odpowiadające względne skrócenie rozpór przedstawi wyraz: $\frac{S-S_0}{EF_1}$. Wielkość S znajdziemy zaś z warunku:

$$\frac{\pi^2 f^2}{4l} = \frac{(1-\sigma^2)Sl}{Eh} + \frac{(S-S_0)l}{EF_1}$$

stawiają wzrost ugięć płyty przy obecności sił podłużnych. Wielkość S obliczono przytem przy założeniu, że brzegi płyty zupełnie się nie przesuwały, że zatem „spółczynnik rozporu“ k jest równy 1. Przy brzegach swobodnie obracalnych (linje I i I') da się zauważyć już przy małych



Rys. 361

obciążeniach wpływ siły podłużnej i ten wpływ rośnie szybko wraz z wielkością obciążenia. W przypadku brzegów utwierdzonych (linje II i II') jest rola siły podłużnej nie tak znaczna.

Jeszcze dobitniej przedstawi się wpływ siły podłużnej przy różnych sposobach ustalenia brzegów płyty, jeżeli będziemy śledzić zmiany największych naprężeń powstających przy ugięciu płyty. Na rys. (361) przedstawiają proste I i II odpowiednio wzrost największych naprężeń przy podparciu i utwierdzeniu brzegów, jeżeli niema sił podłużnych. Wskutek obecności siły podłużnej idzie wzrost największych naprężeń powolniej i dla rozpatrywanej płyty przedstawia go krzywa I' w przypadku brzegów podpartych, a krzywa II' w przypadku brzegów utwierdzonych. W tym ostatnim przypadku pozostaje wpływ siły podłużnej niewielkim niemal do granicy sprężystości; zato w przypadku brzegów podpartych gra siła podłu-

zna rolę zasadniczej wagi. Dzięki jej działaniu rosną naprężenia o wiele powolniej, niż przy krawędziach swobodnie przesuwalnych i ostatecznie otrzymujemy wynik wprost przeciwny temu, jaki mieliśmy przy rozpatrywaniu zgięcia belek. Okazuje się mianowicie, że pod względem naprężeń znajdują się płyty z utwierdzonymi brzegami w gorszych warunkach, niż płyty, u których brzegi podłużne mogą się obracać swobodnie.

Obliczenie długich płyt prostokątnych, narazonych na równomiernie rozłożone obciążenie q kg/cm^2 , ułatwią podane poniżej tablice I i II¹⁾. Tablica I odnosi się do przypadku płyty o brzegach podpartych i zawiera ciągnieria p_1 , wywołane siłą podłużną i największe całkowite naprężenia p_2 wskutek jednoczesnego działania zgięcia i rozciągania. W rubrykach dla p_1 i p_2 podano wartości naprężeń sprowadzonych, otrzymanych przez pomnożenie odpowiadającego względnego wydłużenia przez współczynnik sprężystości materiału (przy układaniu tablicy przyjęto $E = 2,2 \cdot 10^8$ kg/cm^2 , $\sigma = 0,3$). To są te naprężenia, z którymi mamy do czynienia przy obliczeniach na podstawie drugiej teorii wytrzymałości. Dla otrzymania naprężeń rzeczywistych trzeba liczby tablicy podzielić przez $1 - \sigma^2$. Z równań (295) i (296) widać łatwo, że wielkość α^2 zależy przy określonym obciążeniu i przy określonym sposobie ustalenia brzegów, tylko od stosunku $l : h$. To samo da się wywnioskować i co do naprężeń na podstawie wzorów (293) i (294). Z tego powodu podano w tablicach naprężenia p_1 i p_2 w zależności od stosunku $l : h$, który zmieniano w granicach $l : h = 80$ do $l : h = 240$. Im ten stosunek jest większy i im większe jest obciążenie q , tem większą rolę grają siły podłużne. Co się tyczy współczynnika rozporu k , to w tych przypadkach, w których zmniejszenie k wywołuje zrazu zwiększenie naprężenia, a potem jego zmniejszenie, podano w tablicach największą wartość naprężenia przy zmianie k w granicach: $\frac{1}{2} < k < 1$.

Tablica II odnosi się do przypadku długiej płyty prostokątnej z utwierdzonymi brzegami. Przy takim sposobie ustalenia zachodzą największe naprężenia na brzegach płyty. Badając przy pomocy przytoczonych powyżej wzorów zgięcie elementarnego skrawka, wydzielonego z płyty, znajdziemy, że przy małych obciążeniach, dopóki rozciągająca siła podłużna, wywołana zgięciem, jest mała, moment podporowy ma dwa razy większą wartość od momentu zginającego w środku rozpiętości skrawka. Wraz z powiększeniem obciążenia rośnie stosunek momentu podporowego do momentu w środku rozpiętości. Cała rozpiętość wydzielonego skrawka da się podzielić na część środkową, zajmującą przeszło $\frac{4}{5}$ rozpiętości²⁾,

¹⁾ Te tablice zaczerpnięto z litografowanego kursu I. G. Bubnowa „Stroitel'naja mechanika korablja“. Tablice ułożone w zastosowaniu do pokładów mostowych znajdują się w pracy N. W. Tierpugowa, ob. Izw. Kijew. Pol. Inst. z r. 1908.

Szczegółowe studjum kwestji zgięcia długich płyt prostokątnych znajduje się w książce I. G. Bubnowa: „Stroitel'naja mechanika korablja“, t. II, str. 545.

²⁾ Bliższe objaśnienie tej kwestji znajdzie czytelnik w przytoczonej książce I. G. Bubnowa, str. 593.

w której naprężenie nigdzie nie przekracza największego naprężenia w środkowym przekroju skrawka i dwie części skrajne obejmujące razem mniej jak $\frac{1}{5}$ rozpiętości, w których największe naprężenia przewyższają wielkość krańcowych naprężeń w środku rozpiętości. Tablica II zawiera sprowadzone naprężenia p_1 , odpowiadające sile podłużnej rozciągającej i największe naprężenia p_2 wskutek jednoczesnego działania zgięcia i rozciągania w środku rozpiętości wydzielonego skrawka elementarnego. Największe naprężenia u podpartego brzegu płyty będą większe od p_2 , jednakowoż w przypadkach stałego obciążenia płyty nie liczymy się zwykle z temi naprężeniami i dopuszczamy nawet pojawienie się odkształceń trwałych u brzegu utwierdzonego. Skoro przy stałym wzroście obciążenia przekroczą naprężenia utwierdzonego brzegu płyty granicę sprężystości, to przy dalszym powiększeniu q będzie moment podporowy wzrastać słabiej, niż to wynika z wzorów, wyprowadzonych przy założeniu doskonałej sprężystości materiału, a brzeg płyty zajmie położenie pośrednie między położeniami odpowiadającymi swobodnemu podparciu i doskonałemu utwierdzeniu brzegu. Wówczas największe naprężenia w środku rozpiętości będą leżeć między odpowiadającymi wartościami p_1 , przytoczonymi w tablicach I i II, obliczonymi przy założeniu doskonałej sprężystości materiału.

TABLICA I
Brzegi płyty podparte

q kg/cm ²		$\frac{l}{h} = 80$		$\frac{l}{h} = 120$		$\frac{l}{h} = 160$		$\frac{l}{h} = 200$		$\frac{l}{h} = 240$	
		$k = 1$	$k \cong 0,5$	$k = 1$	$k \cong 0,5$	$k = 1$	$k \cong 0,5$	$k = 1$	$k \cong 0,5$	$k = 1$	$k \cong 0,5$
0,3	$p_1 =$	189	—	380	275	510	390	615	480	710	555
	$p_2 =$	—	—	1060	1120	1075	1100	1095	1095	1130	1095
0,4	$p_1 =$	261	—	475	350	630	490	755	590	865	680
	$p_2 =$	—	—	1240	1300	1250	1285	1285	1260	1320	1270
0,5	$p_1 =$	325	220	510	425	740	575	880	690	1010	790
	$p_2 =$	1300	1410	1390	1460	1410	1435	1450	1415	1495	1415
0,6	$p_1 =$	385	270	655	495	840	655	1000	780	1140	895
	$p_2 =$	1450	1570	1525	1600	1550	1565	1600	1550	1665	1555
0,7	$p_1 =$	445	315	730	560	985	730	1110	870	1270	995
	$p_2 =$	1590	1720	1645	1720	1680	1685	1740	1680	1820	1700
0,8	$p_1 =$	500	360	805	620	1025	800	1220	955	1385	1090
	$p_2 =$	1710	1850	1760	1835	1800	1795	1875	1800	1965	1835
0,9	$p_1 =$	555	400	875	675	1110	870	1320	1040	1500	1180
	$p_2 =$	1830	1970	1860	1940	1920	1900	2005	1910	2100	1955
1,0	$p_1 =$	610	455	945	730	1200	985	1415	1115	1615	1270
	$p_2 =$	1930	2080	1960	2035	2030	2000	2130	2010	2220	2060
1,1	$p_1 =$	660	485	1010	780	1280	1000	1515	1190	1720	1355
	$p_2 =$	2030	2185	2055	2130	2140	2095	2250	2110	2345	2155
1,2	$p_1 =$	705	525	1075	835	1355	1060	1605	1260	—	—
	$p_2 =$	2130	2285	2145	2220	2245	2175	2360	2205	—	—
1,3	$p_1 =$	755	555	1140	880	1430	1125	1695	1330	—	—
	$p_2 =$	2220	2380	2230	2305	2345	2270	2465	2305	—	—
1,4	$p_1 =$	800	670	1205	930	1505	1185	1785	1400	—	—
	$p_2 =$	2305	2465	2320	2385	2435	2355	2570	2400	—	—
1,5	$p_1 =$	845	710	1265	980	1580	1245	1865	1470	—	—
	$p_2 =$	2390	2555	2405	2460	2525	2440	2670	2500	—	—
1,6	$p_1 =$	890	750	1330	1030	1655	1300	1945	1525	—	—
	$p_2 =$	2470	2635	2490	2535	2620	2530	—	—	—	—
1,7	$p_1 =$	930	785	1390	1075	1725	1350	2020	1585	—	—
	$p_2 =$	2545	2715	2575	2610	—	—	—	—	—	—

TABLICA II
Brzegi płyty utwierdzone

q kg/cm ²		$\frac{l}{h} = 80$		$\frac{l}{h} = 120$		$\frac{l}{h} = 160$		$\frac{l}{h} = 200$		$\frac{l}{h} = 240$	
		$k = 1$	$k \geq 0,5$	$k = 1$	$k \geq 0,5$	$k = 1$	$k \geq 0,5$	$k = 1$	$k \geq 0,5$	$k = 1$	$k \geq 0,5$
0,3	$p_1 =$	—	—	150	90	310	215	455	330	565	430
	$p_2 =$	—	—	—	—	1030	1110	1070	1175	1085	1095
0,4	$p_1 =$	—	—	215	135	415	290	575	425	710	535
	$p_2 =$	—	—	1080	1120	1215	1305	1240	1300	1260	1265
0,5	$p_1 =$	—	—	280	180	510	365	685	520	840	640
	$p_2 =$	—	—	1245	1320	1375	1465	1395	1430	1430	1415
0,6	$p_1 =$	65	10	345	230	595	435	795	600	960	735
	$p_2 =$	—	—	1400	1495	1510	1600	1535	1560	1585	1545
0,7	$p_1 =$	95	30	410	275	680	500	895	675	1075	825
	$p_2 =$	—	—	1545	1645	1635	1720	1620	1680	1725	1670
0,8	$p_1 =$	125	55	470	320	760	560	995	750	1185	910
	$p_2 =$	1180	900	1675	1785	1750	1835	1795	1790	1860	1785
0,9	$p_1 =$	155	75	530	365	835	620	1085	825	1295	995
	$p_2 =$	1370	1155	1790	1915	1860	1940	1910	1900	1990	1895
1,0	$p_1 =$	185	95	530	410	910	680	1175	895	1400	1075
	$p_2 =$	1535	1360	1900	2035	1965	2040	2020	1995	2110	2005
1,1	$p_1 =$	215	115	650	450	985	740	1265	965	1500	1155
	$p_2 =$	1675	1535	2005	2145	2065	2185	2130	2095	2220	2110
1,2	$p_1 =$	240	135	700	490	1055	795	1350	1035	—	—
	$p_2 =$	1800	1685	2105	2245	2160	2225	2235	2185	—	—
1,3	$p_1 =$	270	155	755	530	1125	850	1430	1100	—	—
	$p_2 =$	1905	1820	2195	2345	2255	2310	2335	2275	—	—
1,4	$p_1 =$	300	180	810	570	1195	900	1505	1160	—	—
	$p_2 =$	2000	1945	2280	2435	2345	2390	2440	2360	—	—
1,5	$p_1 =$	330	200	860	610	1260	950	1575	1215	—	—
	$p_2 =$	2085	2065	2365	2520	2430	2470	2534	2445	—	—
1,6	$p_1 =$	360	220	910	650	1325	1000	1645	1275	—	—
	$p_2 =$	2155	2175	2440	2605	2515	2550	—	—	—	—
1,7	$p_1 =$	390	240	955	685	1390	1045	1705	1335	—	—
	$p_2 =$	2220	2280	2520	2690	—	—	—	—	—	—

§ 146. ZGIĘCIE ZŁOŻONE Z DWU ZGIĘĆ WALCOWYCH

Ażeby płyta zgięta się według powierzchni walcowej, której tworzące są równoległe do osi Y , winien zachodzić, jak widzieliśmy, określony stosunek między naprężeniami p_x i p_y , a mianowicie musi być:

$$p_y = \sigma p_x.$$

Jeżeli ten stosunek ma inną wartość od określonej powyższą równością, to otrzymamy bardziej złożoną postać powierzchni ugięcia płyty. Wydzielmy z płyty przekrojami prostopadłymi do osi X i Y prostopadłościan (rys. 362), którego wysokością jest grubość płyty h , a podstawą kwadrat o boku równym l i przyjmijmy, że na jego boczne ściany działają tylko naprężenia normalne p_x i p_y , sprowadzające się odpowiednio do par o momentach M_1 i M_2 . Wychodząc z przyjętej pod-

stawowej hipotezy wnosimy, że przy zgięciu płyty pozostają ściany boczne płaskimi, a płaszczyzna środkowa gra rolę warstwy obojętnej. Krzywizny powierzchni środkowej, odpowiadające przekrojom normalnym płaszczyznami ZX i ZY , oznaczymy przez

$\frac{1}{R_1}$ i $\frac{1}{R_2}$. Wtedy odkształcenie warstwy elementarnej odległej o z od płaszczyzny środkowej¹⁾ [na rys. (362) zakreskowano boczne ściany tej warstwy], określą wydłużenia (względne):

$$e_x = \frac{z}{R_1} \quad \text{i} \quad e_y = \frac{z}{R_2} \quad \dots \quad (a)$$

Odpowiadające tym odkształceniom naprężenia łatwo znaleźć z ogólnych wzorów:

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_x + \sigma e_y) \quad \text{i} \quad p_y = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_y + \sigma e_x).$$

Po podstawieniu powyższych wartości e_x i e_y , otrzymamy:

$$p_x = \frac{Ez}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2} \right), \quad p_y = \frac{Ez}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1} \right) \quad \dots \quad (b)$$

Utworzywszy ogólne momenty naprężeń bezwzględnych, działających na ściany boczne prostopadłocianu i przyrównawszy je do M_1 i M_2 , znajdziemy:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{E}{1-\sigma^2} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2} \right] \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = C \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2} \right) \\ M_2 &= \frac{E}{1-\sigma^2} \left[\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1} \right] \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = C \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (297)$$

Te wzory pozwalają ze znanych wielkości M_1 i M_2 wyznaczyć odpowiadające wartości promienia krzywizny R_1 i R_2 . Nietrudno zauważyć, że R_1 i R_2 są w danym przypadku głównymi promieniami krzywizny powierzchni ugięcia, ponieważ wydłużenia określone wzorami (a) przedstawiają krańcowe wartości wydłużeń w wydzielonej warstwie elementarnej. Wydłużenie tej warstwy w jakimkolwiek kierunku nachylonym względem osi X pod kątem ϑ będzie miało pewną wartość pośrednią i da się przedstawić w postaci:

$$\frac{z}{\rho} = e_x \cos^2 \vartheta + e_y \sin^2 \vartheta = \frac{z}{R_1} \cos^2 \vartheta + \frac{z}{R_2} \sin^2 \vartheta,$$

jeżeli ρ jest promieniem krzywizny, odpowiadającym kierunkowi ϑ . Zależność między promieniami krzywizny ma tedy postać:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \vartheta}{R_1} + \frac{\sin^2 \vartheta}{R_2}.$$

Kombinując wyrażenia dla momentów (wz. 297) z wzorami (b) dla naprężeń, znajdziemy po podstawieniu $z = \frac{h}{2}$:

$$(p_x)_{\max} = \frac{6M_1}{h^2} \quad \text{i} \quad (p_y)_{\max} = \frac{6M_2}{h^2}.$$

Bez trudności można także ustawić wyrażenie dla energii potencjalnej nagromadzonej przy zgięciu płyty w wydzielonym elemencie. Ściany boczne elementu, pozostając przy zgięciu płaskimi, obracają się o kąty odpowiednio równe: $\frac{1}{R_1}$ i $\frac{1}{R_2}$; momenty zaś M_1 i M_2 , rosnące stopniowo od zera do swych końcowych wartości, wykonują przytem pracę:

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} \right) = \frac{C}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} \right)^2 + \frac{2\sigma}{R_1 R_2} \right] \quad (298)$$

¹⁾ z mierzymy w kierunku wypukłości.

która przedstawia szukaną wartość energii potencjalnej, odniesionej do jednostki powierzchni zginanej płyty. W zastosowaniu do elementu płyty o krawędziach dx i dy należy widocznie powyższe wyrażenie pomnożyć przez pole $dx \cdot dy$.

W szczególnym przypadku, gdy główne promienie krzywizny są równe i mają wspólną wartość R , dają wyrażenia (297):

$$M_1 = M_2 = M = \frac{C(1 + \sigma)}{R} \quad (299)$$

Ponieważ płyta zgina się przytem podług powierzchni kuli, więc rozkład naprężeń będzie w każdym normalnym przekroju płyty jednaki. Na pole przekroju $1 \cdot h$ przypada moment M . Na podstawie tego można nawzajem wywnioskować, że przy dowolnej postaci konturu zgina się płyta podług powierzchni kuli, jeżeli na ścianach, odpowiadających konturowi, działają tylko naprężenia normalne, sprowadzające się na długości konturu ds do momentu Mds . Promień kulistej powierzchni ugięcia będzie równy:

$$R = \frac{C(1 + \sigma)}{M}.$$

§ 147. NAPRĘŻENIA TERMICZNE W PŁYTACH

Otrzymany powyżej wynik można zastosować do rozwiązania interesującego zadania o naprężeniach termicznych w płytach. Jeżeli płyta oddziela dwie przestrzenie o różnej temperaturze, to bez wielkiego błędu można przyjąć, że na grubości płyty zmienia się temperatura linjowo. Według tegoż prawa będą się zmieniać i wydłużenia termiczne, co wywoła w płycie o swobodnych brzegach wygięcie kuliste. Biorąc za punkt wyjścia temperaturę, odpowiadającą płaszczyźnie środkowej i oznaczając przez t całkowity spadek temperatury na grubości płyty, znajdziemy dla wydłużeń na powierzchniach płyty wyrażenia:

$$+ \frac{\alpha t}{2} \quad \text{i} \quad - \frac{\alpha t}{3}.$$

Z drugiej strony określa te wydłużenia promień R kulistej powierzchni zgięcia wyrażeniami:

$$+ \frac{h}{2R} \quad \text{i} \quad - \frac{h}{2R};$$

a zatem:

$$R = \frac{h}{\alpha t} \quad (300)$$

Jeżeli brzegi płyty są zupełnie swobodne, to takie zakrzywienie nie wywoła żadnych naprężeń. Atoli w przypadku utwierdzenia brzegów wzdłuż całego konturu powstaną reakcyjne momenty, których wielkość znajdziemy w bardzo prosty sposób. Okazaliśmy, że równomierny rozkład momentów wzdłuż konturu płyty wywołuje zgięcie kuliste. Natężenie momentów M możemy obrać tak, aby wywołana niemi krzywizna była co do wielkości równa, a co do znaku przeciwna krzywiznie uwarunkowanej nierównomiernem ogrzaniem. Przy działaniu takich momentów pozostanie płyta płaską, a jej brzegi nie obrócą się; warunek utwierdzenia będzie zatem spełniony. Na podstawie wzorów (299) i (300) określi szukaną wielkość M równanie:

$$M = \frac{C(1 + \sigma)\alpha t}{h}.$$

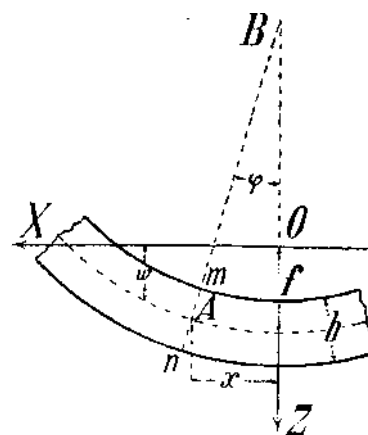
Odpowiadającą wartością największych naprężeń będzie:

$$p_{\max} = \frac{6M}{h^2} = \frac{6C(1 + \sigma)\alpha t}{h^2} = \frac{E\alpha t}{2(1 - \sigma)} \quad (301)$$

Okazuje się, że te naprężenia zupełnie nie zależą od grubości płyty, zważywszy jednak, że spadek temperatury t^1) jest zwykle tem większy, im płyta jest grubsza, dochodzimy do wniosku, że naprężenia termiczne grają ważniejszą rolę w grubych płytach, niż w cienkich. (Zaznaczymy tutaj fakt, ogólnie znany, iż retorty, podlegające działaniu wysokich temperatur, okazują się najtrwałszymi, jeżeli ich ścianki mają najmniejszą grubość). Wzoru (301) można używać także do przybliżonego wyznaczenia naprężeń termicznych w rozmaitych powłokach, jak np. w ściankach i dnach kotłów, w ściankach rur płomiennych i t. d., a nawet w tych przypadkach, kiedy grubość ściany jest bardzo znaczna, jak to np. zachodzi w murowanych kominach. Otrzymany wzór daje wyniki nieróżniące się zbyt wiele od tych, które wyływają z dokładnego rozwiązania zadania o naprężeniach termicznych w grubościennych walcowych rurach²⁾).

§ 148. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE POWIERZCHNI UGIĘCIA PŁYTY OKRĄGLEJ SYMETRYCZNIE OBCIĄŻONEJ

Ograniczmy się tutaj do rozpatrzenia dwu szczególnych przypadków obciążenia, a mianowicie obciążenia rozłożonego równomiernie i skupionego w środku płyty. Ogólniejsze przypadki środkowo-symetrycznego obciążenia płyty można także rozwiązać drogą elementarną, jednakowoż ostateczne wzory dla naprężeń i ugięć wypadają bardziej złożone. Początek spórzędnych umieścimy w środku środkowej płaszczyzny płyty nieodkształconej i weźmiemy pod uwagę przekrój południkowy ZX (rys. 363). Zgodnie z przyjętą hipotezą prostolinjowe elementy prostopadłe do płaszczyzny środkowej pozostaną po zgięciu prostymi i prostopadłymi do powierzchni ugięcia płyty. Szereg takich elementów ułożonych przed odkształceniem na powierzchni walca obrotowego o promieniu x , utworzy po odkształceniu powierzchnię stożka obrotowego o wierzchołku B , przyczem każdy element mn obróci się około swego środka A o pewien kąt φ . Krzywizną powierzchni ugięcia płyty w przekroju południkowym będzie widocznie:

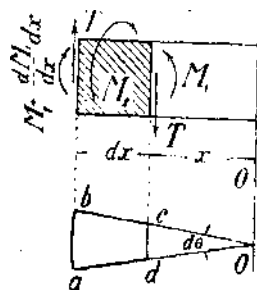


Rys. 363

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Co się tyczy drugiej krzywizny głównej, to dla jakiegokolwiek punktu A jest odpowiadający promień krzywizny R_2 równy AB , a zatem:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\varphi}{x}.$$



Rys. 364

Przy badaniu zgięcia płyty pominiemy wpływ naprężeń stycznych na ugięcie. Wówczas można się posługiwać wzorami (297) i napisać dla natężenia momentów M_2 w przekroju południkowym wyrażenie:

$$M_2 = C \left(\frac{\varphi}{x} + \sigma \frac{d\varphi}{dx} \right).$$

Dla przekroju normalnego prostopadłego do płaszczyzny południkowej, otrzymamy:

$$M_1 = C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma \frac{\varphi}{x} \right).$$

Po tych przygotowaniach przystąpimy do badania warunków równowagi elementu płyty $abcd$ (rys. 364), wyciętego dwoma nieskończenie bliskimi przekrojami południkowymi i dwoma wałcami

¹⁾ Przez t rozumiemy różnicę temperatur obu powierzchni płyty. Temperatura przylegającego do płyty środowiska może różnić się znacznie od temperatury odpowiadającej powierzchni płyty. Ob. pracę Holborn'a i Dittenberg'a w *Mittel. u. Forschungsarb. Heft 2. Zmianę temperatury w ścianie parowego kotła badano szczegółowo na drodze doświadczalnej. Ob. Poensgen, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1916, str. 27.*

²⁾ [Dokładne rozwiązanie tego zadania znajdzie czytelnik w pracy tłumacza p. t. „O natężeniach wywołanych nierównym ogrzaniem wewnętrznej i zewnętrznej ściany rury“. *Czas. techn. r. 1906*].

spółosiowemi o promieniach x i $x + dx$. Na boczne ściany elementu ad i bc , leżące w przekrojach południkowych będą działać momenty zginające $M_2 dx$; na ścianę cd , odpowiadającą powierzchni walca o promieniu x , będzie działać moment:

$$M_1 x d\vartheta$$

i na koniec na ścianę przeciwległą ab moment:

$$\left(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial x} dx\right) (x + dx) d\vartheta.$$

Utwórzmy moment wszystkich tych sił względem osi OO , prostopadłej do dwusiecznej kąta $d\vartheta$. Uwzględniając kierunek strzałek wskazany na rysunku i pomijając nieskończenie małe wyższego rzędu, otrzymamy dla szukanego momentu wyrażenie:

$$\left(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial x} dx\right) (x + dx) d\vartheta - M_1 x d\vartheta - M_2 dx d\vartheta = \left(M_1 + x \frac{\partial M_1}{\partial x} - M_2\right) dx d\vartheta \quad (a)$$

Przejdziemy teraz do wyznaczenia naprężeń stycznych, działających na wydzielony element. Ze symetrii odkształcenia wnosimy, że na ścianach ad i bc , leżących w przekrojach południkowych, nie będzie żadnych naprężeń stycznych. Na ścianach zaś ab i cd będą działały naprężenia styczne w kierunku pionowym. Ich sumę znajdziemy na podstawie następującego rozważania: Weźmy walcowy przekrój płyty o promieniu x i oznaczmy przez T sumę napięć stycznych, odniesioną do jednostki obwodu walca. Wszystkie napięcia styczne dadzą wówczas pionową wypadkową, równą $T \cdot 2\pi x$. Ta siła musi być widocznie co do wielkości równa, a co do kierunku przeciwna obciążeniu płyty, rozłożonemu w obrębie koła o promieniu x . Przy jednoczesnym działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego o natężeniu q i siły skupionej w środku P , otrzymamy dla wyznaczenia T równanie:

$$T \cdot 2\pi x = qx^2 + P, \quad \text{skąd} \quad T = \frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x}.$$

Napięcia styczne, działające na ścianę cd wydzielonego elementu, sprowadzają się do wypadkowej:

$$Tx d\vartheta = x \left(\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x} \right) d\vartheta.$$

Pomijając nieskończenie małe wyższego rzędu, znajdziemy, że moment napięć stycznych, działających na ścianach ab i cd rozpatrywanego elementu, wzięty względem osi przechodzącej przez środek elementu i równoległej do OO , równa się:

$$Tx d\vartheta dx = x \left(\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x} \right) d\vartheta dx \quad (b)$$

Dla równowagi elementu potrzeba aby momenty (a) i (b) były co do wielkości równe, a co do znaku przeciwne, a więc:

$$M_1 + x \frac{\partial M_1}{\partial x} - M_2 + x \left(\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x} \right) = 0. \quad (c)$$

Wstawiając zamiast M_1 i M_2 powyżej znalezione wyrażenia, otrzymamy równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = -\frac{qx}{2C} - \frac{P}{2\pi Cx}.$$

To równanie da się przedstawić w dogodniejszej postaci, jeżeli uwzględnimy, że:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} \right) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x\varphi) \right].$$

A zatem:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d(x\varphi)}{dx} \right] = -\frac{qx}{2C}.$$

Pierwsze całkowanie daje:

$$\frac{1}{x} \frac{d(x\varphi)}{dx} = -\frac{qx^2}{4C} - \frac{P}{2\pi C} \log x + C_1.$$

Mnożąc obie strony przez x i całkując powtórnie, otrzymamy:

$$x\varphi = -\frac{qx^4}{16C} - \frac{Px}{2\pi C} \left(\frac{x^2 \lg x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

a stąd:

$$\varphi = -\frac{qx^3}{16C} - \frac{Px}{8\pi C} (2 \lg x - 1) + C_1 \frac{x}{2} + \frac{C_2}{x}. \quad (302)$$

Ażeby otrzymać wyrażenie dla ugięć płyty, zważmy, że φ jest kątem, jaki tworzy styczna do południka z osią X -ów, a więc:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \text{i} \quad \frac{dw}{dx} = \frac{qx^3}{16C} + \frac{Px}{8\pi C} (2 \log x - 1) - \frac{C_1}{2} x - \frac{C_2}{x},$$

z czego po zcałkowaniu wypływa:

$$w = \frac{qx^4}{64C} + \frac{Px^2}{8\pi C} (\lg x - 1) - \frac{C_1 x^2}{4} - C_2 \lg x + C_3. \quad (303)$$

Stałe dowolne wchodzące w wyrażenia (302) i (303) trzeba w każdym szczególnym przypadku wyznaczyć z warunków krańcowych płyty.

§ 149. ZGIĘCIE OKRĄGŁEJ PŁYTY WSKUTEK OBCIĄŻENIA RÓWNOMIERNIE ROZŁOŻONEGO

Najprościej rozwiązuje się zadanie w przypadku doskonałego utwierdzenia brzegu płyty. Wówczas:

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{dla } x = r,$$

jeżeli r jest promieniem obwodu. Prócz tego wynika z warunków symetrii:

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{dla } x = 0.$$

Przyjmując w ogólnych wzorach poprzedniego paragrafu $P = 0$, otrzymamy tedy dla wyznaczenia stałych C_1 i C_2 następujące równania:

$$\left[\frac{qx^3}{16C} - \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_2}{x} \right]_{x=r} = 0, \quad \left[\frac{qx^3}{16C} - \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_2}{x} \right]_{x=0} = 0.$$

Stąd:

$$C_1 = \frac{qr^2}{8C} \quad \text{i} \quad C_2 = 0.$$

Wstawivszy te wartości w wyrażenie dla φ , otrzymamy:

$$\varphi = \frac{qx}{16C} (r^2 - x^2). \quad (304)$$

Momenty zginające odniesione do jednostki długości będą:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= C \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sigma \frac{\varphi}{x} \right) = \frac{q}{16} \left[r^2 (1 + \sigma) - x^2 (3 + \sigma) \right], \\ M_2 &= C \left(\frac{\varphi}{x} + \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{q}{16} \left[r^2 (1 + \sigma) - x^2 (1 + 3\sigma) \right] \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Naprężenia p_x i p_y w dowolnym punkcie o odległości z od środkowej płaszczyzny określają wzory:

$$p_x = \frac{12 M_1 z}{h^3}, \quad p_y = \frac{12 M_2 z}{h^3}.$$

Naprężenia p_x osiągają największą wartość na utwierdzonym obwodzie płyty, gdzie $M_1 = -\frac{qr^2}{8}$, a mianowicie:

$$(p_x)_{\max} = \frac{3}{4} \frac{qr^2}{h^3}.$$

Naprężenie p_y w tychże punktach ma wartość $\frac{3}{4} \frac{qr^2}{h^2} \cdot \sigma$. W środku płyty jest:

$$M_1 = M_2 = \frac{qr^2}{16} (1 + \sigma),$$

a naprężenia, odpowiadające środkowi dolnej powierzchni płyty, będą:

$$p_x = p_y = \frac{3}{8} \frac{qr^2}{h^2} (1 + \sigma).$$

Przy obliczeniu płyt wyjdziemy z trzeciej teorii wytrzymałości. Ponieważ p_x i p_y są tego samego znaku, a trzecie naprężenie p_z , działające w płaszczyznach prostopadłych do osi Z -ów, przyjmujemy równe zero, (ciśnienie obciążenia ciągłego jest najczęściej bardzo małe w porównaniu do naprężeń wskutek zginania), więc pierwsza i trzecia teoria wytrzymałości są w danym przypadku zgodne. Okazuje się tedy, że najniebezpieczniejszymi są punkty utwierdzonego obwodu płyty, a warunek wytrzymałości ma postać:

$$(p_x)_{\max} = \frac{3}{4} \frac{qr^2}{h^2} \equiv R \quad \dots \quad (305)$$

przyczem R oznacza naprężenie dopuszczalne (bezpieczne). Gdybyśmy zastosowali drugą teorię wytrzymałości, to warunek wytrzymałości przybrałby formę:

$$p_x - \sigma p_y = \frac{3}{4} \frac{qr^2}{h^2} (1 - \sigma^2) \equiv R.$$

Wyznamy teraz kształt powierzchni ugięcia płyty. Na podstawie ogólnego wyrażenia (303) mamy:

$$w = \frac{qx^4}{64C} - \frac{qr^2x^2}{32C} + C_3.$$

Zważywszy, że na obwodzie jest ugięcie równe zero, znajdziemy:

$$C_3 = \frac{qr^4}{64C},$$

a zatem:

$$w = \frac{qx^4}{64C} - \frac{qr^2x^2}{32C} + \frac{qr^4}{64C} = \frac{q}{64C} (r^2 - x^2)^2.$$

Największe ugięcie w środku płyty będzie równe:

$$f = \frac{qr^4}{64C} \quad \dots \quad (306)$$

Ażeby otrzymać główne wzory dla zgięcia okrągłej płyty podpartej swobodnie na obwodzie, zastosujemy zasadę superpozycji, którą posługiwaliśmy się często przy badaniu zgięcia prętów. Dopiero co rozpatrzony przypadek zgięcia płyty utwierdzonej na obwodzie można sobie wyobrazić jako wynik jednoczesnego działania obciążenia ciągłego i momentów podporowych o natężeniu $-\frac{qr^2}{8}$. Jeżeli do tych sił dołączymy równomiernie rozłożone na obwodzie momenty zginające o natężeniu:

$$M = + \frac{qr^2}{8},$$

to dochodzimy oczywiście do zgięcia płyty podpartej na obwodzie pod wpływem obciążenia równomiernie rozłożonego. Dodatkowe momenty zegną płytę podług powierzchni kuli i wywołają w każdym przekroju normalnym momenty zginające o natężeniu $\frac{qr^2}{8}$. Dołączając je do wyrażenia (a) znajdziemy, że w przypadku podparcia obwodu:

$$M_1 = \frac{q}{16} \left[(3 + \sigma) r^3 - (3 + \sigma) x^3 \right], \quad M_2 = \frac{q}{16} \left[(3 + \sigma) r^3 - (1 + 3\sigma) x^3 \right].$$

Największe natężenie osiągają momenty zginające w środku płyty, gdzie:

$$M_1 = M_2 = \frac{3 + \sigma}{16} q r^2.$$

Odpowiadającymi wartościami największych naprężeń będą:

$$(p_x)_{\max} = (p_y)_{\max} = \frac{6 M_1}{h^3} = \frac{3(3 + \sigma)}{8} \frac{q r^2}{h^3}.$$

Warunek wytrzymałości na podstawie pierwszej i trzeciej teorii napiszemy w postaci:

$$\frac{3(3 + \sigma)}{8} \frac{q r^2}{h^3} \equiv R,$$

albo wstawiając zamiast σ wartość 0,3 (dla żelaza kowalnego i stali):

$$1,24 \frac{q r^2}{h^3} \equiv R \quad (307)$$

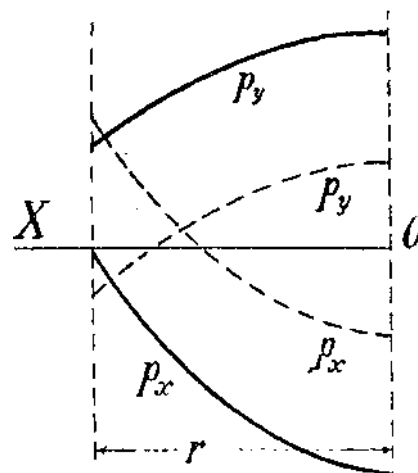
Wychodząc z drugiej teorii (teorii największego wydłużenia) otrzymalibyśmy warunek wytrzymałości:

$$p_x - \sigma p_y = \frac{3(3 + \sigma)(1 - \sigma)}{8} \frac{q r^2}{h^3} \equiv R,$$

który dla $\sigma = 0,3$ przybiera postać:

$$0,87 \frac{q r^2}{h^3} \equiv R.$$

Do porównania naprężeń $(p_x)_{\max}$ i $(p_y)_{\max}$ przy swobodnem podparciu obwodu i jego utwierdzeniu posłuży diagram (rys. 365), w którym linje pełne przedstawiają zmianę naprężeń w zależności od x w przypadku płyty o brzegu podpartym, zaś linje przerywane spełniają to samo zadanie dla płyty o brzegu utwierdzonym.



Rys. 365

Ażeby znaleźć ugięcie w środku płyty, trzeba do wyrażenia (306), otrzymanego poprzednio, dołączyć ugięcie, wywołane momentami zginającymi M . Te momenty zginają płytę podług powierzchni kuli o promieniu:

$$\rho = \frac{C(1 + \sigma)}{M} = \frac{8C(1 + \sigma)}{q r^2},$$



Rys. 366

(ob. wz. 299) i wywołują dodatkowe ugięcie f_1 , którego wielkość wyznaczymy z rys. (366). Zważywszy, że f_1 jest bardzo małe w porównaniu do r , znajdziemy:

$$2\rho f_1 = r^2,$$

a wstawiając za ρ wartość, znajdzioną powyżej, otrzymamy:

$$f_1 = \frac{q r^4}{16 C (1 + \sigma)}.$$

Całkowite ugięcie w środku płyty podpartej na obwodzie określi przeto wzór:

$$f = \frac{q r^4}{64 C} + \frac{q r^4}{16 C (1 + \sigma)} = \frac{q r^4}{64 C} \frac{5 + \sigma}{1 + \sigma} \quad (308)$$

To ugięcie jest w przybliżeniu cztery razy większe od ugięcia płyty o brzegu utwierdzonym.

§ 150. ZGIĘCIE OKRĄGŁEJ PŁYTY SIŁĄ SKUPIONĄ W ŚRODKU¹⁾

Ogólne wyrażenie dla φ napiszemy w tym przypadku w postaci (wz. 302):

$$\varphi = -\frac{Px}{8\pi C}(2\log x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}.$$

Zakładając utwierdzenie obwodu płyty mamy dla wyznaczenia stałych dowolnych dwa warunki następujące:

$$\left[-\frac{Px}{8\pi C}(2\log x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x} \right]_{x=0} = 0, \text{ i}$$

$$\left[-\frac{Px}{8\pi C}(2\log x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x} \right]_{x=r} = 0.$$

Zważywszy, że:

$$[x \lg x]_{x=0} = \left[\frac{\lg x}{\frac{1}{x}} \right]_{x=0} = 0,$$

otrzymamy z pierwszego równania $C_2 = 0$. Drugie równanie daje:

$$C_1 = \frac{P}{4\pi C}(2\lg r - 1),$$

a zatem:

$$\varphi = \frac{Px}{4\pi C} \lg \frac{r}{x}.$$

Natężenie momentów zginających M_1 i M_2 określają wzory:

$$\begin{aligned} M_1 &= C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma \frac{\varphi}{x} \right) = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \sigma) \lg \frac{r}{x} - 1 \right] \\ M_2 &= C \left(\frac{\varphi}{x} + \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \sigma) \lg \frac{r}{x} - \sigma \right] \end{aligned} \quad (a)$$

Te momenty przybierają na obwodzie wartości

$$M_1 = -\frac{P}{4\pi} \quad \text{i} \quad M_2 = -\frac{\sigma P}{4\pi}.$$

Odpowiadające wartości największych naprężeń będą:

$$(p_x)_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi h^2} \quad \text{i} \quad (p_y)_{\max} = \frac{3}{2} \sigma \frac{P}{\pi h^2} \quad (309)$$

Okazuje się, że te wielkości zupełnie nie zależą od promienia płyty. Dla porównania tego wyniku z wzorem (305) napiszemy ten ostatni w postaci:

$$\frac{3}{4\pi} \frac{Q}{h^2} \stackrel{=}{=} R,$$

przyczem Q oznacza całkowite obciążenie płyty. R zatem skupienie obciążenia w środku płyty podwaja naprężenia na obwodzie. Co się tyczy naprężeń w pobliżu środka płyty, to, jak widać z wzorów (a), ich wielkość rośnie w miarę jak x maleje. Przy $x = 0$ stają się M_1 i M_2 , a zarazem i odpowiadające im naprężenia nieskończenie wielkimi. Tutaj nasze formuły, otrzymane na podstawie całego szeregu założeń tracą właściwie ważność, a istotnego znaczenia nabierają naprężenia miejscowe, których rozkładu nie można znaleźć drogą elementarną²⁾.

¹⁾ Zgięcie okrągłej płyty siłą, działającą mimośrodowo, rozpatrzył Clebsch; ob. „Théorie de l'élasticité des corps solides”, przekład de S.-Venant'a, str. 774.

Przybliżone rozwiązanie tego zadania podał A. Föppl; ob. Sitzungsber. d. Math. Ph. Klasse d. Akad. zu München, r. 1912.

²⁾ Przybliżone rozwiązanie tej kwestji dał Hencky w rozprawie: „Der Spannungszustand in rechteckigen Platten”, r. 1913, str. 54.

Znajdziemy teraz postać powierzchni ugięcia. Na podstawie ogólnego wyrażenia dla ugięcia (wz. 303) mamy:

$$w = \frac{Px^2}{8\pi C} \left(\lg \frac{x}{r} - \frac{1}{2} \right) + C_3.$$

Stałą dowolną C_3 znajdziemy z warunku, że ugięcie na obwodzie równa się zero, a zatem:

$$C_3 = - \left[\frac{Px^2}{8\pi C} \left(\lg \frac{x}{r} - \frac{1}{2} \right) \right]_{x=r} = \frac{Pr^2}{16\pi C},$$

$$w = \frac{Px^2}{8\pi C} \lg \frac{x}{r} + \frac{P}{16\pi C} (r^2 - x^2).$$

W środku płyty, gdzie $x=0$, staje się pierwszy wyraz po prawej stronie zerem, i dla strzałki ugięcia otrzymamy (przy $\sigma = 0,3$) wyrażenie:

$$f = \frac{Pr^2}{16\pi C} = 0,22 \frac{Pr^2}{Eh^3} \quad (310)$$

Z porównania tego wyniku z wzorem (306) wnosimy, że przy działaniu siły skupionej w środku płyty jest strzałka ugięcia cztery razy większa, niż w przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego o tej samej wielkości.

W rozpatrywanym przypadku zgięcia płyty, mamy oprócz siły skupionej P jeszcze momenty podporowe o natężeniu $-\frac{P}{4\pi}$. Aby przejść do płyty podpartej, trzeba widocznie dołączyć do tych sił momenty równomiernie rozłożone na obwodzie o natężeniu $+\frac{P}{4\pi}$. Te momenty wywołają dodatkowe zgięcie płyty podług kuli o promieniu:

$$\rho = \frac{C(1+\sigma)}{M} = \frac{4\pi C(1+\sigma)}{P}$$

Odpowiadające dodatkowe ugięcie w środku określi wzór:

$$f = \frac{r^2}{2\rho} = \frac{Pr^2}{8\pi C(1+\sigma)}$$

Dołączając to do wyniku (310) znajdziemy strzałkę ugięcia okrągłej płyty podpartej na obwodzie:

$$f = \frac{3+\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{Pr^2}{16\pi C} = 0,55 \frac{Pr^2}{Eh^3} \quad (311)$$

Co się tyczy naprężeń, to potrzebne do ich wyznaczenia wartości M_1 i M_2 otrzymamy, dołączając do wyrażen (a) wielkość $\frac{P}{4\pi}$.

§ 151. ZGIĘCIE OKRĄGŁEJ PŁYTY Z KOLISTYM OTWOREM W ŚRODKU

Przy symetrycznym rozkładzie obciążenia można to zadanie rozwiązać drogą elementarną stosowaną w poprzednich przypadkach. Jeżeli na płycie spoczywa obciążenie równomiernie rozłożone (rys. 367), to siłę styczną T , przypadającą na jednostkę długości przekroju walcowego o promieniu x określi równanie:

$$T \cdot 2\pi x = \pi q (x^2 - a^2), \quad \text{z czego } T = \frac{qx}{2} - \frac{qa^2}{2x}.$$

Wstawiając to wyrażenie w ogólne rów. (c) (§ 148) zamiast wielkości $\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x}$, znajdziemy po zcałkowaniu kolejno:

$$\varphi = -\frac{qx^2}{16C} + \frac{qa^2x}{8C} (2 \lg x - 1) + \frac{C_1x}{2} + \frac{C_2}{x}$$

$$w = \frac{qx^4}{64C} - \frac{qa^2x^2}{8C} (\lg x - 1) - \frac{C_1x^2}{2} - C_2 \lg x + C_3.$$



Rys. 367

Stałe dowolne C_1 , C_2 i C_3 znajdujemy w każdym szczególnym przypadku z warunków na obwodzie zewnętrznym i wewnętrznym.



Rys. 368

Jeżeli na płytę działają siły pionowe, rozłożone równomiernie na obwodzie wewnętrznym (rys. 368) i mające wypadkową P , to równanie powierzchni ugięcia będzie takie same, jak w przypadku pełnej płyty, obciążonej w środku siłą P (§ 150). Stałe całkowania można znaleźć z warunków na obwodzie wewnętrznym i zewnętrznym. Dobierając w odpowiedni sposób te warunki, można otrzymać wzory, potrzebne do obliczenia pierścieniowych pokryw kanałów, tłoków maszyn parowych i t. d.¹⁾

§ 152. GRANICE STOSOWALNOŚCI WYPROWADZONYCH WZORÓW

Wyłożona teoria zgięcia okrągłych płyt opiera się na szeregu założeń, przyjętych bez uzasadnienia. wobec czego doświadczalne sprawdzenie otrzymanych wyników przedstawia interes nader ważny. Badania dokonane w tym kierunku²⁾ wykazały, że wzory otrzymane dla ugięcia płyt, dają wyniki zupełnie zadowalające, dopóki strzałka ugięcia f jest mała w porównaniu do grubości płyty ($f < 0,2h$). Przy większych ugięciach dostrzeżono znaczne zboczenia od linjowej zależności między obciążeniami a odpowiadającymi ugięciami. Ugięcia rosną powolniej od obciążeń i płyta okazuje się sztywniejszą, niżby wypadła z wzorów teoretycznych. Aby znaleźć przyczynę tej niezgodności teoretycznych wzorów z doświadczeniem przy większych ugięciach płyty rozpatrzmy najprostszypadek zgięcia kulistego. Elementarna teoria zgięcia płyt polega między innymi na przypuszczeniu, że powierzchnia środkowa nie odkształca się i gra rolę warstwy obojętnej. Wydłużenie oddzielnych elementów płyty, równoległych do powierzchni środkowej, są proporcjonalne względem odległości od tej powierzchni i osiągają największą wartość $\frac{h}{2\rho}$ na powierzchni zewnętrznej płyty (ρ jest promieniem kuli jako powierzchni ugięcia). Łatwo okazać, że wygięcie kuliste płyty jest niemożliwe bez odkształceń w płaszczyźnie środkowej. Te odkształcenia są przy małych ugięciach znikome, atoli przy większych ugięciach, osiągają wielkości tego samego rzędu co wydłużenie $\frac{h}{2\rho}$.

Niech AOB (rys. 369) przedstawia południkowy przekrój środkowej powierzchni płyty, wygiętej podług kuli o promieniu ρ . Jeżeli w środkowej powierzchni nie zająd przy zgięciu odkształcenia, to długość łuku OB musi się równać pierwotnemu promieniowi płyty

$$OB' = r = \rho \delta.$$

Przypuściwszy brak odkształcenia powierzchni środkowej w kierunku promienia, otrzymamy w konsekwencji odkształcenie tejże powierzchni w kierunku do promienia prostopadłym. Weźmy bowiem pod uwagę punkty A i B . Przed odkształceniem leżały te punkty na kole o promieniu r , po odkształceniu zaś będzie promień tego koła równy

$$CB = \rho \sin \delta.$$

Elementy leżące na obwodzie tego koła doznają przeto w kierunku obwodu skrócenia o wielkości względnej:

$$e = \frac{\rho \delta - \rho \sin \delta}{\rho \delta} \approx \frac{\delta^3}{6}.$$

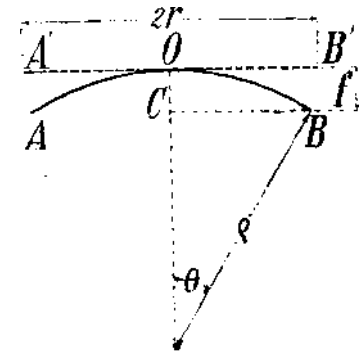
Zważywszy, że

$$f = \rho (1 - \cos \delta) \approx \frac{\rho \delta^2}{2},$$

możemy wzór dla e napisać w postaci:

$$e = \frac{f}{3\rho}.$$

Znalezione odkształcenie powierzchni środkowej będzie małe w porównaniu do $\frac{h}{2\rho}$ tylko w tym przypadku, kiedy f jest małe wobec h . Jeżeli f i h są wielkościami tego samego rzędu, to odkształcenia powierzchni środkowej, które pomijamy



Rys. 369

¹⁾ Cały szereg przykładów tego rodzaju roztrząsają prace M. Ensslin'a: „Studien über die Beanspruchung und Formänderung kreisförmiger Platten“, Dingers Polyt. Journ. z r. 1903 i 1904.

Obliczenie tłoków i literaturę tego przedmiotu znajdzie czytelnik w pracy C. Pfeleiderer'a „Die Berechnung der Scheibenkolben“, Mitt. ü. Forschungsarb. z r. 1911, Nr 97.

Co do sprawy obliczenia kołnierzy rur (flansz) ob. Łukina „K'teorij i rasczotu flanciewych sojedinenij“, r. 1911.

²⁾ C. Bach, Elastizität u. Festigkeit, wyd. V, str. 585.

A. Föppl, Mitt. d. Mech. Techn. Labor. München, r. 1900.

Steinthal, Engineering, r. 1911, str. 677.

Crawford, Royal. Soc. Edinburgh, r. 1912.

M. Ensslin, Dingers Polyt. Journ. r. 1913, str. 677.

w elementarnej teorii zgięcia, będą wielkościami tego samego rzędu, co i wydłużenia $\frac{h}{2\rho}$ ¹⁾. Ten wniosek, odnoszący się do kulistego wygięcia, można rozciągnąć i na inne przypadki zgięcia płyt. Wyjątek stanowi widocznie zgięcie podług powierzchni rozwijalnej.

Zaznaczymy jeszcze jedną okoliczność, którą należy uwzględnić przy porównaniu danych doświadczalnych z wynikami obliczeń teoretycznych. W naszych wywodach przyjęliśmy, że na obwodzie płyty nie ma reakcji leżących w jej płaszczyźnie, któreby przeszkadzały wzajemnemu zbliżeniu się przeciwległych punktów obwodu przy zgięciu. W rzeczywistości będzie podparcie obwodu prawie zawsze takie, że to zbliżenie zająć nie może. Wskutek tego będą zgięciu płyty towarzyszyć napięcia rozciągające, działające w płaszczyźnie środkowej. Wielkość tych napięć i ich wpływ na ugięcie można wyznaczyć tą samą metodą przybliżoną, którą stosowaliśmy przy badaniu zgięcia płyty według powierzchni walcowej. Nie zatrzymujemy się tutaj przy tem zadaniu, ponieważ ono nie ma większego praktycznego znaczenia. Przy małych ugięciach nie grają napięcia rozciągające roli godnej uwagi; przy silnych zaś zakrzywieniach płyty tracą ważność wzory, otrzymane na podstawie elementarnej teorii.

§ 153. ENERGJA POTENCJALNA ZGIĘTEJ PŁYTY

Poprzednio wyprowadziliśmy już wyrażenie dla energii potencjalnej zgiętej płyty w zależności od głównych promieni krzywizny (wz. 298). Dla dalszych zastosowań okaże się korzystniejszym wyrażenie energii potencjalnej jako funkcji ugięcia płyty w . Ażeby utworzyć to wyrażenie wydzielimy z płyty przekrojami równoległymi do płaszczyzn ZX i ZY (rys. 370, fig. a) element o krawędziach dx , dy i h . Odpowiadające wartości krzywizny będą:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ i } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Jeżeliby te przekroje były przekrojami głównymi, to energię wydzielonego elementu przedstawiałoby według wzoru (298) wyrażenie:

$$dV_1 = \frac{C}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (a)$$

W ogólnym przypadku będzie wyrażenie dla energii elementu nieco bardziej złożone, ponieważ każda nieskończenie cienka warstwa pozioma wydzielonego elementu, leżąca w odległości z od płaszczyzny środkowej (na fig. c zakreskowano widoczne ściany boczne rozpatrywanej warstwy) będzie nie tylko narażona na rozciąganie lub ściskanie w kierunku osi X i Y , lecz także na ścinanie. Wielkość odpowiadającego odkształcenia postaciowego i wartość energii potencjalnej warstwy elementarnej znajdziemy na podstawie rozważań geometrycznych. Rozpatrzmy przesunięcia wierzchołków A , B , C i D tej warstwy w kierunkach osi X i Y przy zgięciu płyty. Te przesunięcia są wywołane obrotem pionowych krawędzi wydzielonego elementu. Z fig. (b) widać, że punkt A doznaje w kierunku osi X -ów przesunięcia:

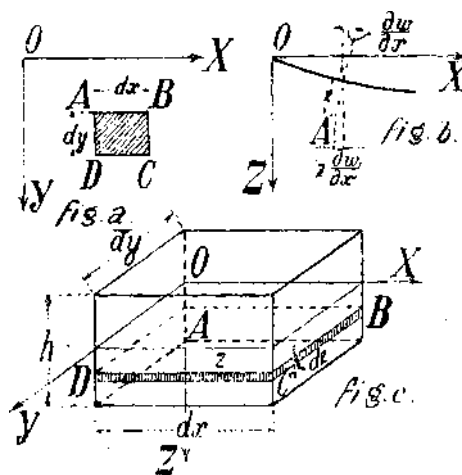
$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Podobnie będzie przesunięciem punktu A w kierunku osi Y -ów:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Jeżeli teraz przejdziemy do punktu B , odległego od A o dx , to jego przesunięcie w kierunku osi Y -ów określi wyrażenie:

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx = -z \frac{\partial w}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx.$$



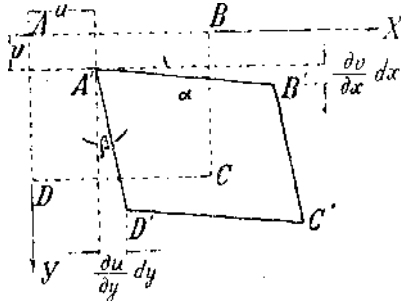
Rys. 370

¹⁾ Odpowiadające zadanie sprowadza się nawet w najprostszych przypadkach do całkowania równań nieliniowych i da się rozwiązać tylko sposobem przybliżonym. Ob. pracę autora: „R'woprosu o bolszych progibach“, Sborn. Inst. Inż. Puł. Soobszcz. z r. 1915.

Podobnie będzie przesunięciem punktu D w kierunku osi X -ów:

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy = -z \frac{\partial w}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy.$$

Dla większej jasności przedstawiono na rys. (371) rzut poziomy warstwy elementarnej $ABCD$ przed odkształceniem i po odkształceniu (przy założeniu, że u i v są dodatnie). Kąłem odkształcenia postaciowego rozpatrywanej warstwy jest:



Rys. 371

$$\alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Odpowiadające naprężenie ścinające będzie równe:

$$-2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} G,$$

a energię potencjalną odkształcenia postaciowego rozpatrywanej warstwy określi wyrażenie:

$$2z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 G dx dy dz \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Zmieniając z w granicach od $-\frac{h}{2}$ do $+\frac{h}{2}$ i sumując wyrażenia elementarne postaci (b), otrzymamy energię odkształcenia postaciowego dV_2 , nagromadzoną w wydzielonym elemencie płyty, a mianowicie:

$$dV_2 = 2G \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 z^2 dx dy dz = 2G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \cdot \frac{h^3}{12} = C(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad . \quad (c)$$

Dodając (a) i (c), otrzymamy szukane ogólne wyrażenie dla całkowitej energii potencjalnej elementu płyty w postaci:

$$dV = dV_1 + dV_2 = \frac{C}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ = \frac{C}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\sigma) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad . \quad . \quad (312)$$

Energję potencjalną całej płyty otrzymamy przez sumowanie wyrażeń elementarnych postaci (312) na całej powierzchni płyty¹⁾.

§ 154. PRZYBLIŻONA METODA BADANIA ZGIĘCIA PŁYT

Przy badaniu zgięcia płyt można zastosować tę samą metodę przybliżoną, której używaliśmy do wyznaczenia ugięcia prętów w rozdziale XV. Czyniąc zadość warunkom na obwodzie przyjmujemy

$$w = \varphi(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

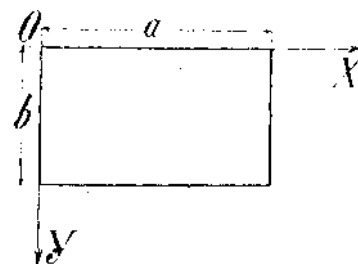
jako przybliżone równanie powierzchni ugięcia, przyczem funkcja $\varphi(x, y)$ zawiera jeden lub kilka dowolnych parametrów. Te parametry grają rolę uogólnionych współrzędnych i możemy ich wartość dobrać tak, aby przyjęta postać równowagi (a) zbliżała się możliwie najbardziej do postaci rzeczywistej. Wyznaczenie parametrów odbywa się tak samo, jak przy badaniu zgięcia prętów. Ustawiamy wyrażenie dla energii potencjalnej zgiętej płyty i pochodne tego wyrażenia względem uogólnionych współrzędnych (parametrów) przyrównujemy do odpowiadających uogólnionych sił. Tą

¹⁾ [Płyty betonowe uzbrojone „na krzyż” zachowują się z wielkim przybliżeniem jak płyty z materiału różnokierunkowego. Obliczeniem elementarnem energii potencjalnej takich płyt zajmuje się praca tłumacza: „Die Grundlagen einer rationalen Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten”, Z. d. öst. Ing. & Arch. V. r. 1914].

[Ogólną teorię takich płyt wraz z rozwiązaniem licznych zadań praktycznego znaczenia zawierać będzie obszerna praca tłumacza, jaka się ukaże wkrótce w publikacjach Lwowskiego Towarzystwa Naukowego p. t. „Teoria płyt prostokątnie-różnokierunkowych wraz z technicznymi zastosowaniami do płyt żel.-betonowych, krat belkowych i t. p.”].

drogą utworzymy tyle równań, ile jest dowolnych parametrów. Jako przykład rozpatrzmy przypadek zgięcia płyty prostokątnej, przyczem, poprzestając na pierwszym przybliżeniu weźmiemy wyrażenie dla powierzchni ugięcia z jednym dowolnym parametrem. Przyjmiemy, że kontur płyty, obciążonej równomiernie ($q \text{ kg/cm}^2$) różni się niewiele od kwadratu (rys. 372). W przypadku podparcia obwodu uczynimy zadość warunkom krańcowym, jeżeli przyjmiemy, że przekroje powierzchni ugięcia płaszczyznami ZX i ZY są sinusoidami, czyli że równanie powierzchni ugięcia ma postać

$$w = f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (b)$$



Rys. 372

Łatwo się przekonać, że na obwodzie płyty jest

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Odpowiadające momenty M_1 i M_2 stają się przeto zerami, jak tego wymagają warunki krańcowe przy podparciu obwodu. Dla

$$x = \frac{a}{2} \quad \text{i} \quad y = \frac{b}{2},$$

t. j. w środku płyty wypada $w = f$.

Utwórzmy teraz wyrażenie dla energii potencjalnej płyty. Na podstawie wzoru (312) mamy:

$$V = \frac{C}{2} \int_0^a dx \int_0^b dy \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\sigma) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dy \quad (313)$$

Wstawiając za w wartość (b) i uwzględniając, że

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = \int_0^a \int_0^b \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4},$$

otrzymamy po prostych przekształceniach:

$$V = \frac{\pi^4}{8} C f^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \quad (314)$$

Przyjawszy dla ugięcia wyrażenie (b) przemieniliśmy tem samem płytę w układ o jednym stopniu swobody. Wszystkie elementy zgięcia określa wielkość strzałki ugięcia f . Tę wielkość przyjmiemy za uogólnioną współrzędną i znajdziemy odpowiadającą wielkość uogólnionej siły. Skoro współrzędnej f udzielimy przyrostu elementarnego δf , to obciążenie $q dx dy$, przypadające na element pola płyty, wykona przytem pracę:

$$q dx dy \cdot \delta f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Całkowita praca wykonana przez obciążenie płyty równa się zatem:

$$\delta f \int_0^a dx \int_0^b q \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dy = \delta f \cdot \frac{4qab}{\pi^2},$$

a więc szukana uogólniona siła równa się $\frac{4}{\pi^2} qab$. Wielkość f znajdziemy z równania:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \frac{\pi^4}{4} C f ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 = \frac{4qab}{\pi^2}.$$

Przyjawszy, że $a > b$ i wprowadziliśmy oznaczenie $b : a = \mu$, znajdziemy:

$$f = \frac{16q b^4}{\pi^6 C (1 + \mu^2)^2} \quad (315)$$

Stopień dokładności tego przybliżonego wzoru można osądzić według wyników umieszczonych w poniższej tablicy¹⁾. Przez dokładną wartość ugięcia rozumiemy tutaj wartość otrzymaną z całkowania równania różniczkowego powierzchni ugięcia płyty.

μ	Dokładne ugięcie	Przybliżone ugięcie	$(p_y)_{\max}$ [dokład.]
0	$0,0130 \frac{qb^4}{C}$	—	$0,75 \cdot \frac{qb^2}{h^2}$
$\frac{1}{3}$	—	—	0,72 „
$\frac{1}{2}$	0,0101 „	$0,0106 \frac{qb^4}{C}$	0,61 „
$\frac{2}{3}$	—	—	0,48 „
1	0,00406 „	0,00416 „	0,29 „

Dla płyty kwadratowej równa się błąd przybliżonego wzoru około 2,5%. Dla prostokątnej o stosunku boków $\mu = 0,5$ wypada błąd 5%. Ze wzrostem długości płyty powiększa się błąd, co było do przewidzenia, ponieważ powierzchnia ugięcia w środkowej części płyty zbliża się do powierzchni walcowej; do obliczeń wypadnie wówczas używać raczej wzorów otrzymanych w § 145.

Największe naprężenia w przypadku podparcia obwodu powstają w środku płyty w przekroju normalnym do krótszych boków. Z tablicy widać, że w miarę wzrostu długości płyty te naprężenia zdążają szybko do wartości odpowiadającej płycie nieskończenie długiej ($\mu = 0$). Jeżeli brzegi płyty

nie mogą się przesuwac przy zginaniu, to pojawią się napięcia rozciągające powierzchnię środkową. Dla długich płyt można je wyznaczyć tak samo, jak przy zginaniu według powierzchni walcowej. W przypadku płyt o konturze mało różnym od kwadratu staje się zadanie bardziej złożonym²⁾. Wpływ tych napięć na zgięcie płyty będzie przy małych ugięciach nieznaczny.

Rozpatrzmy teraz zgięcie płyty prostokątnej utwierdzonej na całym obwodzie. Dla powierzchni ugięcia trzeba dobrać takie wyrażenie, aby nie tylko w , lecz także $\frac{\partial w}{\partial x}$ i $\frac{\partial w}{\partial y}$ stawały się zerem na utwierdzonym konturze płyty. Tym warunkom czyni zadość równanie:

$$w = \frac{f}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \quad \dots \quad (c)$$

Łatwo sprawdzić, że przy $x = 0, x = a, y = 0$ i $y = b$

staje się zerem tak ugięcie w , jakoteż pierwsze pochodne $\frac{\partial w}{\partial x}$ i $\frac{\partial w}{\partial y}$. Wstawimy wyrażenie dla ugięcia (c) we wzór (313) i wykonawszy potrzebne przekształcenia, otrzymamy:

$$V = \frac{\pi^4}{8} C f^2 a b \left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4} \right) \quad \dots \quad (316)$$

Obierzmy f za uogólnioną spółrzedną. Praca obciążenia równomiernie rozłożonego, odpowiadająca przyrostowi spółrzednej δf , będzie równa:

$$q \frac{\delta f}{4} \int_0^a dx \int_0^b dy \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) dx dy = q \frac{ab}{4} \delta f,$$

a zatem siła odpowiadająca spółrzednej f równa się $q \frac{ab}{4}$. Wielkość f wyznaczymy z równania:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \frac{\pi^4}{4} C a b f \left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4} \right) = q \frac{ab}{4}.$$

Wprowadziwszy poprzednie oznaczenie $b : a = \mu$, otrzymamy:

$$f = \frac{1}{\pi^4} \frac{q b^4}{C} \cdot \frac{1}{3 + 2\mu^2 + 3\mu^4} \quad \dots \quad (317)$$

¹⁾ Szczegółowe tablice do obliczenia płyt prostokątnych o podpartym obwodzie znajdzie czytelnik w dziele autora: „Kurs teorii uprugosti“, cz. II, str. 290.

²⁾ Ob. pracę autora: „Primienienie normalnych koordinat...“, Izv. Kijew. Polit. Inst. z r. 1909.

Tablica umieszczona poniżej zawiera wyniki, otrzymane na podstawie tej przybliżonej formuły. Dla porównania przytoczono również i wyniki dokładniejszych badań¹⁾, z których zaczerpnięto także podane wartości naprężeń.

W przypadku płyt zbliżonych do kwadratowych daje przybliżony wzór dla ugięcia wyniki zupełnie zadowalające. Z powiększeniem długości płyty błąd wzrasta, a począwszy od $\mu = 0,5$ można wykonywać obliczenia według wzorów otrzymanych dla zgięcia walcowego ($\mu = 0$).

Największe naprężenia powstają w środku dłuższych boków płyty, t. j. dla $y = 0$, lub b i $x = \frac{a}{2}$. Jak widać z tablicy, już przy $\mu = \frac{2}{3}$

zbliżają się największe naprężenia do tych wartości, jakie wypadają dla płyty prostokątnej nieskończenie długiej. Wpływ napięć rozciągających, powstających przy zgięciu płyt z unieruchomionymi brzegami, jest w praktyce zawsze bardzo mały i można go pominąć, jeżeli tylko naprężenia w utwierdzonym brzegu nie przekraczają granicy sprężystości.

μ	Dokładne ugięcie	Przybliżone ugięcie	$(p_y)_{max}$
0	$0,00260 \frac{q b^4}{C}$	—	$0,500 \frac{q b^2}{h^2}$
$\frac{1}{2}$	0,00253 „	$0,00278 \frac{q b^4}{C}$	0,497 „
$\frac{2}{3}$	0,00213 „	0,00229 „	0,467 „
$\frac{4}{5}$	—	—	0,399 „
1	0,00126 „	0,00128 „	0,290 „

§ 155. OBLICZENIE ŚCIAN (PŁYT) ZAKRZYWIONYCH, CZYLI POWŁOK

Pomimo całą ważność praktyczną, jest obliczenie powłok dotychczas bardzo mało opracowane, ponieważ zupełne rozwiązanie zadania przedstawia wiele trudności natury czysto matematycznej. Dla otrzymania przybliżonych rozwiązań trzeba się uciekać do rozmaitych założeń uproszczających, zależnie od rozmiarów i warunków pracy obliczanych części składowych. Często np. pomija się zgięcie powłoki i uwzględnia się tylko rozciągania lub ściskania, uważane za równomiernie rozłożone na grubości ścianki. Tego sposobu używaliśmy już przy obliczeniu cienkościennych naczyń, narażonych na ciśnienie gazów lub cieczy. Są naodwrot przypadki, w których główną rolę grają naprężenia zginające, wobec których można pominąć rozciągania lub ściskania środkowej powierzchni powłoki²⁾. Taką drogą otrzymano szereg rozwiązań, mających większe znaczenie w akustyce, a mianowicie zbadano kwestję drgań powłok walcowych stożkowych i kulistych³⁾.

W niektórych prostszych przypadkach można otrzymać zupełne rozwiązanie przy uwzględnieniu i zgięcia i odkształcenia powierzchni środkowej. Jako przykład przytoczymy obliczenie rury walcowej. Jeżeli obciążenie nie zmienia się wzdłuż osi walca, to możemy się ograniczyć do rozpatrzenia odkształceń pierścienia elementarnego, wyciętego dwoma przekrojami prostopadłymi do osi rury o wzajemnej odległości 1. Do obliczenia takiego pierścienia zastosujemy przeto prawidła, wyłożone w rozdziale o prętach zakrzywionych, uwzględniając jednakowoż, że dzięki połączeniu wy-

¹⁾ Ogólną metodę badania zgięcia płyty prostokątnej utwierdzonej na obwodzie podają prace B. Kojalowicza (ros.) „O pewnym równaniu różniczkowym cząstkowym 4-go rzędu“, r. 1902 i W. Ritz'a „Über die neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der math. Physik“. Journ. f. Math. z r. 1909, str. 1.

Niektóre wyniki liczbowe znajdują się w dyplomowej pracy D. Pistrakowa: „Izgiб тонкой пластинки“, Izv. Kijew. Polit. Inst. z r. 1910.

Szczegółowe tablice dla obliczenia płyt o brzegach podpartych i utwierdzonych znajdują się w przytoczonej powyżej książce I. G. Bubnowa. Por. nadto:

H. Hencky „Der Spannungszustand in rechteckigen Platten“, München 1913;

Ä. Nádai „Die Formänderungen u. die Spannungen v. rechteckigen elastischen Platten“, Z. d. Ver. D. Ing. z r. 1914, str. 487.

[B. G. Galierkin „Izgiб priamougolnych plastinok...“ Petrograd 1917].

²⁾ Kilka zadań tego rodzaju rozpatrzył autor w pracy: „K'woprosu o deformatsjach i ustojczivosti cilindriczeskoj obołoczki“, Wiestnik Obszcz. Technologow z r. 1914.

³⁾ Sprawę obliczenia powłok rozpatruje bardziej szczegółowo „Kurs teorji uprugosti“, cz. II, str. 362.

[Ob. także A. i L. Föppel „Drang und Zwang“, t. II, rozdz. V, 1920].

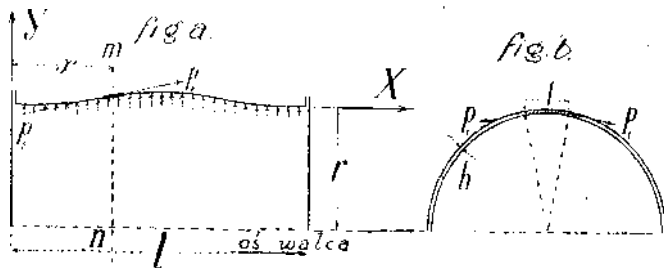
dzielonego pierścienia z sąsiednimi częściami rury staje się niemożliwym odkształcenie poprzecznego przekroju pierścienia przy zginaniu. Ta okoliczność, jakżeśmy się przekonali (§ 144), powiększa nieco sztywność pierścienia. Zamiast wielkości

$$EI = E \cdot \frac{1 \cdot h^3}{12} \quad (h \text{ grubość ściany}),$$

trzeba wprowadzić w rachunek sztywność walcową:

$$C = \frac{E \cdot 1 \cdot h^3}{(1 - \sigma^2) 12}.$$

W przypadku okrągłego przekroju poprzecznego rury można przy badaniu odkształceń zastosować ogólne rów. (275)¹⁾. Na końcach rury, w miejscach połączenia jej z kołnierzami lub dnem, będą warunki odkształcenia znacznie więcej złożone.



Rys. 373

Dokładne rozwiązanie tego zadania przedstawia wielkie trudności, atoli w przypadku okrągłego przekroju poprzecznego i obciążeń symetrycznych względem osi rury można badanie uprościć i sprowadzić zadanie do wyznaczenia zgięcia skrawka elementarnego, wydzielonego wzdłuż tworzącej walca. Rys. (373) przedstawia podłużny i poprzeczny przekrój cylindra, narażonego na równomierne ciśnienie wewnętrzne q . Oznaczmy przez y ugięcie wy-

dzielonego skrawka w jakimkolwiek przekroju poprzecznym mn . (Na fig. *b* uwidoczniono przekrój wydzielonego skrawka przez zakreskowanie). To ugięcie równa się radialnemu przesunięciu punktów powierzchni walcowej, leżących w przekroju mn . Wydłużenie względne obwodu walca w przekroju mn równa się:

$$e_1 = \frac{y}{r}.$$

Odpowiadające ciągnięcie obwodowe p_1 , dążące do rozerwania walca wzdłuż tworzącej, wyznaczymy z wzoru

$$e_1 = \frac{1}{E} (p_1 - \sigma p_2),$$

w którym p_2 oznacza ciągnięcie podłużne, wywołane naporem na dna. Dla p_2 mamy równanie:

$$p_2 = \frac{\pi r^2 q}{2\pi r h} = \frac{r q}{2h}.$$

A zatem:

$$p_1 = E e_1 + \sigma p_2 = \frac{E y}{r} + \sigma \frac{r q}{2h}.$$

Z fig. (*b*) widać, że naprężenia obwodowe p_1 dają składową w kierunku promienia, przeszkadzającą ugięciu wydzielonego skrawka. Wielkość radialnego napięcia, przypadającego na jednostkę długości skrawka równa się:

$$p_1 h \frac{1}{r} = \frac{E h y}{r^2} + \frac{\sigma q}{2} \quad \dots \quad (a)$$

Dołączyszy to wyrażenie z odpowiednim znakiem do obciążenia ciśnieniem wewnętrznym q , napiszemy równanie różniczkowe dla linii ugięcia skrawka w postaci:

$$C \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{E h y}{r^2} + q \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \quad \dots \quad (b)$$

Wprowadziliśmy tutaj sztywność walcową C , ponieważ wskutek połączenia elementarnego skrawka z sąsiednimi częściami rury, staje się niemożliwym odkształcenie poprzecznego przekroju skrawka,

¹⁾ Szereg zadań tego rodzaju zawiera praca Forchheimer'a w Zeitschr. d. öst. Ing. u. Arch. Ver. z r. 1914, str. 133. Ob. także rozprawę doktorską V. Mayer'a: „Über Elastizität ü. Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens“. Co do obliczenia rur o przekroju eliptycznym ob. Mayer-Mita, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. z r. 1914.

charakterystyczne dla zgięcia pręta. Otrzymane równanie zgadza się z otrzymanem poprzednio przy badaniu zgięcia belek, spoczywających na sprężystym podłożu. Ogólną całką tego równania jest:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x + \frac{q}{Eh} \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) r^2,$$

przyczem

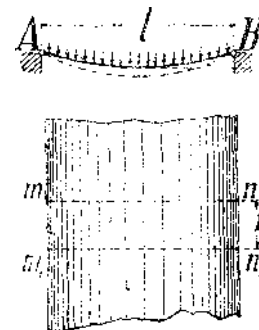
$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4Cr^2}}.$$

Stałe dowolne C_1, \dots, C_4 dadzą się wyznaczyć z warunków na końcach wydzielonego skrawka. Jeżeliby dna były doskonale sztywne, to te warunki są następujące:

$$y = 0 \text{ dla } x = 0 \text{ i } x = l; \quad y' = 0 \text{ dla } x = 0 \text{ i } x = l.$$

Bez szczególnych trudności można rozwiązać nasze zadanie także z uwzględnieniem odkształcenia dna. W tym przypadku trzeba stałe dowolne wyznaczyć z warunków połączenia ścianki z dnem. Badanie zgięcia podłużnego skrawka, wyciętego ze ściany walca, można rozciągnąć na przypadki zmiennego ciśnienia q i zmiennej grubości ścianki h ¹⁾. Te zadania mają praktyczne znaczenie w związku z obliczeniem zbiorników na płyny lub ciała sypkie.

Na zakończenie weźmiemy jeszcze jedno zadanie, przedstawiające pewien interes praktyczny w związku z obliczeniem pokładów mostowych. Przyjmijmy, że walcowa powłoka opiera się na dwu równoległych krawędziach (rys. 374) i podlega działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego o natężeniu q . Przy obliczeniu możemy się ograniczyć do rozpatrzenia elementu powłoki zawartego między dwoma przekrojami $m_1 n_1$ i $m_2 n_2$, normalnymi do tworzących walca, o wzajemnej odległości l . W przypadku przegibnego nieruchomego podparcia brzegów, można obliczać ten element jako łuk dwuprzegubowy, jeżeli jednak początkowa strzałka f zwisającej powłoki jest mała w porównaniu z rozpiętością l , to do obliczenia można użyć przybliżonego sposobu, wyłożonego w § 137. Zważywszy, że przekrój poprzeczny wydzielonego skrawka nie odkształca się przy zgięciu, wypadnie nam wprowadzić sztywność walcową:



Rys. 374

$$C = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)},$$

a wtedy wielkość α^2 , przedstawiająca stosunek siły podłużnej rozciągającej S , jaka powstaje wskutek zgięcia skrawka, do krytycznej wartości siły, będzie określona wzorem:

$$\alpha^2 = \frac{12 S l^3 (1 - \sigma^2)}{\pi^2 E h^3}.$$

Równanie (I), otrzymane w § (137) dla pręta, przybierze teraz postać:

$$\frac{(f_0 - \alpha^2 b_1)^2}{(1 + \alpha^2)^2} + \frac{2 b_1 (f_0 - \alpha^2 b_1)}{1 + \alpha^2} = \frac{\alpha^2 h^2}{3} \quad (318)$$

Tutaj oznacza h grubość powłoki, b_1 początkową wartość strzałki, f_0 strzałkę ugięcia skrawka, obliczoną jak dla belki w obu końcach podpartej o sztywności C . Mając te wielkości, wyznaczamy z powyższego równania α^2 , a stąd i siłę podłużną S . Dalszy rachunek nie przedstawia już żadnych trudności. Niżej umieszczona tablica zawiera wartości strzałki ugięcia f (w środku), naprężeń p_1 wskutek siły podłużnej rozciągającej i największych naprężeń p_2 , obliczone dla żelaznej powłoki o grubości $h = 1 \text{ cm}$, rozpiętości $l = 100 \text{ cm}$ i $b_1 = 0, 1, 2$ i 3 cm ²⁾. Z tej tablicy widać, jak początkowe zakrzywienie wpływa na siły wewnętrzne i odkształcenie powłoki. Dzięki temu zakrzywieniu zmniejsza się wielkość siły podłużnej, jakoteż wielkość naprężeń zginających. Przy strzałce początkowej $b_1 = 3 \text{ cm}$ jest rola zgięcia znikoma, a siłę podłużną możemy znaleźć, obliczając wydzielony skrawek, jak giętkie ciągnio³⁾.

Z wyznaczeniem naprężeń w powłokach kulistych mamy do czynienia przy obliczeniu kopuł, dachów kłóń i t. p. W przypadku powłoki podpartej wzdłuż kołowego konturu i obciążonej symetrycznie w sposób ciągły, otrzymujemy przybliżone rozwiązanie, pomijając naprężenia zginające i uwzględniając tylko rozciąganie i ściskanie środkowej powierzchni powłoki.

¹⁾ Ob. C. Runge, Zeitschr. f. Math. u. Ph., t. 51, r. 1914, str. 254.

H. Reissner, Beton u. Eisen, t. 7, r. 1908.

T. Pöschl u. K. Terzaghi, „Berechn. v. Behältern...“, r. 1913.

Ob. także „Kurs teorii uprugosti“, cz. II, str. 20.

H. Lorenz, „Technische Elastizitätstheorie“, r. 1913, str. 603.

²⁾ Obliczenie tablicy wykonał inż. K. Czajłyszew przy założeniu $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ i $\sigma = 0,3$.

³⁾ Wpływ krzywizny w przypadku płyty prostokątnej o długości boków tego samego rzędu rozpatrzył autor w nocie ogłoszonej w Sborn. Inst. Inż. Put. Soobszcz. z r. 1914.

q kg/cm ²	$b_1 = 0$			$b_1 = 1 \text{ cm}$			$b_1 = 2 \text{ cm}$			$b_1 = 3 \text{ cm}$		
	f cm	P_1	P_2	f cm	P_1	P_2	f cm	P_1	P_2	f cm	P_1	P_2
		kg/cm ²			kg/cm ²			kg/cm ²			kg/cm ²	
0,1	0,445	107	570	0,10	101	191	0,03	60	78	0,01	43	43
0,2	0,639	221	873	0,18	191	347	0,06	119	149	0,03	83	83
0,3	0,769	320	1094	0,25	272	482	0,09	176	218	0,04	124	124
0,4	0,870	410	1273	0,31	350	608	0,11	229	331	0,06	164	164
0,5	0,953	493	1426	0,37	421	727	0,14	288	342	0,07	205	205
0,6	1,025	570	1566	0,42	490	832	0,16	342	402	0,09	243	243
0,8	1,148	713	1801	0,51	620	1004	0,22	443	540	0,11	323	323
1,0	1,251	845	2003	0,59	739	1188	0,26	547	625	0,13	402	402
1,5	1,453	1143	2427	0,76	1030	1480	—	—	—	—	—	—
2,0	1,614	1409	2765	0,89	1270	1870	—	—	—	—	—	—

W tym przypadku, gdy podparte brzegi powłoki mogą przy odkształceniu przemieszczać się swobodnie w kierunku normalnych do powierzchni powłoki, otrzymane tą drogą rozwiązanie przybliżone daje wyniki o dokładności zupełnie wystarczającej dla praktyki¹⁾. Jeżeli jednak brzegi powłoki są ustalone tak, że nie mogą swobodnie się obracać, albo przesuwac, to wzdłuż brzegów powstają napięcia, które mogą wywołać znaczne naprężenia miejscowe. Te naprężenia maleją szybko w miarę oddalenia od podpartego konturu²⁾, wobec czego mogą pozostać nieuwzględnione, o ile powłoka jest narażona na obciążenie stałe lub tylko przypadkowe.

¹⁾ Ob. H. Reissner, Festschrift Müller-Breslau, r. 1912 [i Vierteljahrschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich 60 (1915) S. 23].

²⁾ Te naprężenia można obliczyć w przybliżeniu przy pomocy metody, wskazanej przez O. Blumenthal'a. Ob. Z. I. Math. u. Phys. Bd. 62, str. 359.

Wykład tej metody w zastosowaniu do jednego szczególnego przypadku znajdzie czytelnik w pracy autora: „Raschet sfericzeskich obołoczek“. Ob. Wiestnik O-wa Technologow z r. 1913.

Szereg rozwiązań odnoszących się do powłoki stożkowej i kulistej znajduje się w pracy Meissner'a, ob. Phys. Zeitschr. z r. 1913, str. 343.

Ob. także pracę Keller'a, „Mitteil. ü. Forschungsarb.“.

CZĘŚĆ VII

ZAGADNIENIA DYNAMICZNE NAUKI O WYTRZYMAŁOŚCI

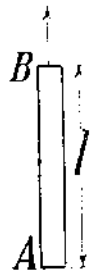
ROZDZIAŁ XVIII

WPLYW SIŁ BEZWŁADNOSCI

§ 156. O NAPRĘŻENIACH W PRĘTACH PORUSZAJĄCYCH SIĘ

Spółczesna technika, a w szczególności spółczesna konstrukcja maszyn, stawia cały szereg zadań, w których kwestja wytrzymałości nie da się rozstrzygnąć w sposób zadowolający, dopóki nie uwzględnimy ruchu obliczanych elementów. Siły bezwładności, drgania i uderzenia mogą bowiem grać bardzo ważną rolę przy większych prędkościach ruchu, wobec czego pomijać ich nie wolno¹⁾. Mimo to ma opracowanie zadań dynamiki w nauce o wytrzymałości zakres daleko skromniejszy, aniżeli opracowanie kwestyj statycznych, musimy więc w dalszym toku wykładu poprzestać na kilku najprostszyc przykładach.

Kwestja naprężeń dynamicznych rozwiązuje się najłatwiej w tych przypadkach, kiedy można pominąć odkształcenia obliczanych części i przyjąć, że one się poruszają jako ciało doskonale sztywne. Wówczas, stosownie do danego ruchu maszyny, wyznaczymy bez trudności przyśpieszenia oddzielnych elementów obliczonej konstrukcji i znajdziemy odpowiadające wartości sił bezwładności. Dołączając te siły do danych sił zewnętrznych, prowadzimy dalszy rachunek tak samo, jak w zadaniach statycznych. Rozpatrzmy np. wpływ sił bezwładności na naprężenia w poruszających się prętach. Jeżeli pręt porusza się w kierunku swojej osi, to siły bezwładności wywołają w nim dodatkowe ciągnienia lub ciśnienia, zależne od wielkości przyśpieszenia i ciężaru właściwego materiału pręta. Niechaj pręt AB (rys. 375) podnosi się pionowo w górę pod wpływem siły działającej na koniec B . Gdyby ruch pręta był jednostajny, to na każdy jego element działałaby tylko siła ciężkości, i jeżeli q oznacza ciężar jednostki długości pręta, to siła wewnętrzna w przekroju B byłaby równa ql , t. j. ciężarowi pręta. Skoro teraz założymy ruch jednostajnie przyśpieszony i oznaczmy przez a wielkość odpowiadającego przyśpieszenia, to na każdy element pręta o długości dx będzie działać oprócz jego ciężaru $q dx$ i siła bezwładności, mająca w danym przypadku ten sam kierunek, co siła ciężkości. Dla określenia wielkości siły bezwładności, działającej na element, trzeba masę elementu $\frac{q}{g} dx$ pomnożyć przez przyśpieszenie a . Napiecie rozciągające w przekroju B będzie równe:



Rys. 375

$$q \left(1 + \frac{a}{g} \right) l.$$

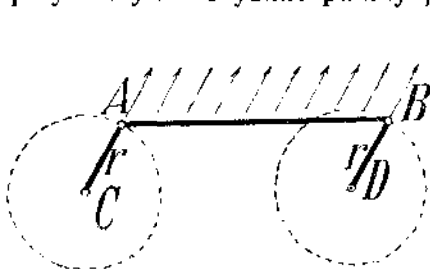
¹⁾ Ważność zadań dynamiki w nauce o wytrzymałości podkreślił prof. A. Sommerfeld w interesującym artykule w Zeitschr. d. Ver. d. Ing. z r. 1902, str. 390.

Jeżeliby w dolnym końcu pręta wisiał nadto ciężar Q , to dla siły wewnętrznej w przekroju B otrzymalibyśmy wyrażenie:

$$(ql + Q) \left(1 + \frac{a}{g} \right) \dots \dots \dots (319)$$

Przy wielkich wartościach przyśpieszenia a mogą ciągnienia, wywołane siłami bezwładności, przewyższać wielokrotnie naprężenia, wywołane obciążeniem statycznym. Tę okoliczność zużytkował O. Reynolds (§ 24) przy konstrukcji swojej maszyny do badania zużycia metali. Pręt próbny wraz z przymocowanym do dolnego końca stosunkowo niewielkim ciężarem Q wykonywa w tej maszynie pionowe ruchy okresowe o bardzo wielkiej częstotliwości (do 2000 wahań na minutę). Wartość powstających przytem sił bezwładności dochodzi do sześćdziesięciokrotnej wielkości ciężaru Q .

Jeżeli kierunek ruchu postępowego pręta jest różny od kierunku jego osi, to siły bezwładności wywołują nie tylko napięcia podłużne, lecz także i momenty zginające pręt. W praktyce zachodzą przypadki, kiedy powstałe w ten sposób naprężenia zginające osiągają znaczną wielkość; należy je przeto wziąć w rachubę. Jako przykład przytoczymy obliczenie łącznika korb sprzężonych osi lokomotywy i trzonu korbowego maszyny parowej. Podczas ruchu lokomotywy trzon AB (rys. 376) oprócz ruchu wspólnego z lokomotywą (przyjętego za jednostajny) wykonywa jeszcze ruch względny, przy którym wszystkie punkty jego osi opisują koła o promieniu r ze stałą prędkością kątową ω .



Rys. 376

Siłę bezwładności przypadającą na element łącznika o długości dx i masie $\frac{q}{g} dx$ przedstawia tutaj siła odśrodkowa o wielkości $\frac{q}{g} dx \cdot \omega^2 r$. Jej kierunek jest w każdej chwili równoległy do kierunku obu korb CA i DB . Łącznik AB jest zatem narażony na zgięcie tak, jakby nań działało obciążenie rozłożone równomiernie o natężeniu:

$$\frac{q}{g} \omega^2 r$$

w kierunku równoległym do korby. Najniekorzystniejszy przypadek obciążenia zajdzie widocznie, gdy korby zajmą położenie pionowe, gdyż siły bezwładności będą wtedy prostopadłe do osi łącznika. Powstający wskutek tego największy moment zginający zajdzie w środku łącznika, a jego wielkość przy stałym przekroju łącznika określi wzór:

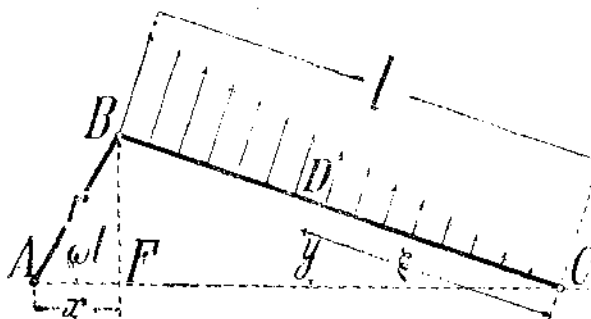
$$M = \frac{1}{8} \frac{q}{g} \omega^2 r l^2.$$

Dołączwszy do tego moment ciężaru własnego, znajdziemy:

$$M_{\max} = \frac{ql^3}{8} \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right) \dots \dots \dots (320)$$

Naprężenia wskutek zgięcia trzeba złożyć z naprężeniami wywołanymi siłą podłużną w łączniku. Z wzoru (320) widać, że siły bezwładności przybierają szczególnie wielką wartość przy wielkich prędkościach ruchu i że wielkość M_{\max} jest proporcjonalna względem ciężaru jednostki długości łącznika. Dla zmniejszenia tego ciężaru nadaje się łącznikom w szybkobieżnych lokomotywach przekrój poprzeczny I (dwuteowy), korzystniejszy od prostokątnego.

Przy obliczeniu trzonu korbowego (rys. 377) przyjmują zwykle, że poziome składowe przesunięć wszystkich punktów osi trzonu są równe przesunięciu punktu F , t. j. rzutu końca korby B . To założenie jest tem bliższe prawdy, im większą jest długość trzonu w porów-



Rys. 377

naniu do długości korby r . Mierząc czas od chwili, w której korba zajmuje położenie poziome, określimy położenie punktu F równaniem:

$$x = r \cos \omega t.$$

Co się tyczy przesunięć pionowych y , to one są dla różnych punktów trzonu różne. Dla jakiegokolwiek punktu D w odległości ξ od końca trzonu C mamy:

$$y = r \sin \omega t \cdot \frac{\xi}{l}.$$

Rzutami przyspieszenia punktu D będą:

$$x'' = -r \omega^2 \cos \omega t, \quad y'' = -r \omega^2 \sin \omega t \cdot \frac{\xi}{l}.$$

Kierunek przyspieszenia y'' można przyjąć w przybliżeniu za prostopadły do osi trzonu korbowego. Odpowiadające temu przyspieszeniu siły bezwładności odniesione do jednostki długości trzonu, t. j.

$$-\frac{q}{g} y'' = \frac{q}{g} r \omega^2 \sin \omega t \cdot \frac{\xi}{l}$$

wywołają zgięcie trzonu jako obciążenie ciągłe, zmieniające się od wartości 0 w końcu C do wartości $\frac{q}{g} r \omega^2 \sin \omega t$ w końcu B . Najniekorzystniejszy przypadek otrzymamy dla $\sin \omega t = 1$. Maximum momentu zginającego w przypadku stałego przekroju zachodzi w odległości:

$$\xi = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

od punktu C i ma wartość:

$$M_{\max} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \frac{q}{g} r \omega^2 l^2 = 0,128 \frac{q}{g} \frac{r \omega^2 l^2}{2} \quad (321)$$

§ 157. NAPRĘŻENIA W WIRUJĄCYM PIERŚCIENIU

Z kwestią naprężeń w szybko wirującym pierścieniu spotykamy się przy obliczeniu wieńca kół zamachowych, bębna turbin parowych, kotwicy prądnic i t. p.¹⁾ Jeżeli grubość pierścienia w kierunku radialnym jest mała w porównaniu z jego promieniem, to można przyjąć w przekroju pierścienia równomierny rozkład ciśnień, powstających w nim wskutek obrotu. Oznaczmy przez q ciężar jednostki obwodu pierścienia, a przez ω stałą prędkość kątową obrotu. Jeżeli r jest średnią wartością promienia, to siła bezwładności, przypadająca na wydzielony element pierścienia równa się:

$$\frac{q}{g} r \omega^2 = \frac{q}{g} \frac{v^2}{r}.$$

Siły bezwładności mają w danym przypadku kierunek radialny i są rozłożone równomiernie na obwodzie pierścienia. Wywołane nimi ciągnięcie wyznaczmy zupełnie w ten sam sposób, jak w ściance rury narażonej na wewnętrzne stałe ciśnienie (§ 35). Napięcie obwodowe:

$$T = r \frac{q}{g} \frac{v^2}{r} = \frac{q v^2}{g}.$$

Dzieląc wielkość tego napięcia przez pole przekroju poprzecznego pierścienia, znajdziemy szukane ciągnięcie:

$$p = \frac{T}{F} = \frac{\gamma v^2}{g} \quad (322)$$

¹⁾ Werner. „Die mech. Beanspruchung rasch laufender Magneträder“, r. 1904.

Lorenz, „Berechnung rotierender Trommeln“, Z. d. Ver. d. Ing., r. 1910, str. 1397.

jeżeli γ oznacza ciężar właściwy materiału pierścienia. Wielkość naprężenia zależy więc tylko od ciężaru właściwego materiału i prędkości obwodowej v . Dla żelaza zlewnego daje otrzymany wzór następujące wartości naprężeń przy różnych prędkościach:

$v =$	25	50	100	150	200	400 <i>m/sek</i> ,
$p =$	50	200	800	1800	3200	12800 <i>kg/cm²</i> .

Już przy prędkościach 150 *m/sek* zbliżają się naprężenia do granicy proporcjonalności. Aby można stosować większe prędkości, trzeba pierścienie zastąpić krążkami i sporządzić je z wyborowego materiału o wielkiej wytrzymałości, np. ze stali niklowej.

§ 158. NAPRĘŻENIA W WIRUJĄCYCH KRĄŻKACH

Z obliczeniem szybko wirujących krążków mamy do czynienia przy projektowaniu turbin parowych, przy wyznaczeniu niebezpiecznej prędkości dla kamieni szlifierskich¹⁾ i t. d. W przypadku stałej i małej grubości krążka można zagadnienie naprężeń, wywołanych siłami bezwładności, rozwiązać z wielką dokładnością drogą elementarną. Tok rozwiązania tego zadania zbliża się wielce do stosowanego przy wywodzie wzorów Lamè'go. Wydzielamy z krążka element *abcd* (rys. 332) i z warunków jego równowagi znajdujemy związek między naprężeniami p_x i p_z . W tym celu rzutujemy wszystkie siły zewnętrzne elementu na kierunek promienia *ob*. Oprócz sił „powierzchniowych” mamy tutaj i „masowe” siły bezwładności:

$$\frac{\gamma \omega^2 \rho}{g} \rho d \varphi d \rho,$$

mające kierunek promienia. Zamiast równania (c), otrzymanego przy traktowaniu zadania Lamè'go, będziemy mieli równanie:

$$p_z + \rho \frac{\partial p_z}{\partial \rho} - p_x + \frac{\omega^2 \rho^2 \gamma}{g} = 0 \quad \dots \quad (a)$$

Wyrażenie (d) z § (135) dla p_x i p_z w zależności od przesunięcia radialnego u zachowuje swą ważność, a więc:

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{u}{\rho} + \sigma \frac{du}{d\rho} \right), \quad p_z = \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{du}{d\rho} + \sigma \frac{u}{\rho} \right).$$

Wstawiając te wartości w równanie (a) otrzymamy:

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho^2} + \frac{\omega^2 \rho \gamma (1-\sigma^2)}{Eg} = 0.$$

Wprowadzając dla skrócenia oznaczenie:

$$\frac{\omega^2 \gamma (1-\sigma^2)}{Eg} = A \quad \dots \quad (b)$$

możemy otrzymane powyżej równanie przedstawić w postaci:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d(u\rho)}{d\rho} \right] + A\rho = 0,$$

a stąd po zcałkowaniu znajdujemy:

$$u = -\frac{A\rho^3}{8} + \frac{C_1\rho}{2} + \frac{C_2}{\rho} \quad \dots \quad (c)$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 trzeba wyznaczyć z warunków krańcowych. Tutaj rozpatrzmy dwa szczególne przypadki, a mianowicie: krążek z otworem w środku i krążek pełny.

U krążka z otworem muszą naprężenia radialne zniknąć dla $\rho = a$ i $\rho = b$, jeżeli a oznacza promień otworu, a b zewnętrzny promień krążka. Wstawiając znaną wartość u w wyrażenie dla naprężenia p_x , otrzymamy:

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2} \left[-\frac{3+\sigma}{8} A\rho^2 + \frac{1+\sigma}{2} C_1 - (1-\sigma) \frac{C_2}{\rho^3} \right].$$

Warunki krańcowe dają dla wyznaczenia C_1 i C_2 równania:

$$\begin{aligned} -\frac{3+\sigma}{8} A a^2 + \frac{1+\sigma}{2} C_1 - (1-\sigma) \frac{C_2}{a^3} &= 0, \\ -\frac{3+\sigma}{8} A b^2 + \frac{1+\sigma}{2} C_1 - (1-\sigma) \frac{C_2}{b^3} &= 0, \end{aligned}$$

¹⁾ Ob. Stodola, „Die Dampfturbinen“, wyd. 4-te z r. 1910, str. 248;
Grübler, Zeit. d. Ver. d. Ing. z r. 1897, str. 860 i z r. 1905, str. 535;
H. Holzer, „Berechn. d. Scheibenräder“, Zeit. f. d. gesammte Turbinenwesen, r. 1913.

z których znajdujemy:

$$C_1 = \frac{3 + \sigma}{4(1 + \sigma)} (a^2 + b^2) A, \quad C_2 = \frac{3 + \sigma}{8(1 - \sigma)} a^2 b^2 A.$$

Dla naprężeń p_x i p_z otrzymamy przeto wyrażenia:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{3 + \sigma}{1 - \sigma^2} \cdot \frac{AE}{8} \left(-\frac{1 + 3\sigma}{3 + \sigma} \rho^2 + a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{\rho^2} \right), \\ p_z &= \frac{3 - \sigma}{1 - \sigma^2} \cdot \frac{AE}{8} \left(-\rho^2 + a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{\rho^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (323)$$

Wprowadzając napowrót wartość A (wz. b) i nowe oznaczenia:

$$a : b = \alpha, \quad \rho : b = \varphi,$$

możemy wzory dla naprężeń przedstawić w prostszej postaci:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{\gamma v^2}{g} \cdot \frac{3 + \sigma}{8} \left(1 + \alpha^2 - \frac{1 + 3\sigma}{3 + \sigma} \varphi^2 + \frac{\alpha^2}{\varphi^2} \right), \\ p_z &= \frac{\gamma v^2}{g} \cdot \frac{3 + \sigma}{8} \left(1 + \alpha^2 - \varphi^2 - \frac{\alpha^2}{\varphi^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (323)$$

Tutaj oznacza v prędkość ωb zewnętrznego brzegu krążka. Naprężenia radialne stają się równe zero dla $\varphi = \alpha$ i $\varphi = 1$, czyli na wewnętrznym i zewnętrznym brzegu krążka. Dla pośrednich wartości φ są naprężenia p_x dodatnie i, jak łatwo sprawdzić, osiągają maximum dla:

$$\varphi = \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \text{kiedy} \quad \rho = b\sqrt{\alpha} = \sqrt{ab}.$$

Wstawiając tę wartość ρ we wz. (323) znajdziemy:

$$(p_x)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \cdot \frac{3 + \sigma}{8} (1 - \alpha)^2 \dots \dots \dots (324)$$

Co się tyczy naprężeń p_x , to one są również wszędzie dodatnie i, co łatwo zauważyć, osiągają największą wartość przy najmniejszej wartości φ , t. j. na brzegu otworu, gdzie $\varphi = \alpha$, a mianowicie:

$$(p_x)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \cdot \frac{3 + \sigma}{4} \left(1 + \frac{1 - \sigma}{3 + \sigma} \alpha^2 \right) \dots \dots \dots (325)$$

Porównyując (324) i (325) widzimy, że o wytrzymałości krążka decydują naprężenia $(p_x)_{\max}$; krążek należy zatem obliczać na podstawie wzoru (325).

Zbadajmy, jaki wpływ ma wielkość otworu na wartość największych ciągnięć. Przy małym otworze jest a małe w porównaniu do b i wielkość α^2 można pominąć. Wtedy:

$$(p_x)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \cdot \frac{3 + \sigma}{4} \dots \dots \dots (325)$$

Drugi skrajny przypadek otrzymamy, gdy a zbliża się co do wielkości do b i krążek zamienia się w pierścień, którego grubość w kierunku promienia jest bardzo mała. Wtedy można przyjąć $\alpha = 1$, a wzór (325) daje:

$$(p_x)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g},$$

t. zn. dokładnie tę samą wartość, jaką znaleźliśmy pierwiej dla cienkiego pierścienia (§ 157). Z otrzymanych wyników widać, że w przypadku krążka z otworem w środku jest miejscem niebezpiecznym brzeg otworu.

Ażeby uniknąć wielkich naprężeń materiału, stosują niekiedy konstrukcje, które umożliwiają połączenie osi z krążkiem bez robienia otworu w środku. Rozpatrzmy tedy jak się rozkładają naprężenia w przypadku krążka pełnego. Dla wyznaczenia stałych całkowania C_1 i C_2 będziemy teraz mieli następujące warunki: 1) Przesunięcie radialne u musi w środku krążka równać się zero i 2) naprężenie p_z staje się zerem na obwodzie krążka. Aby uczynić zadość pierwszemu warunkowi, trzeba w wyrażeniu (c) przyjąć $C_2 = 0$, a wtedy dla wyznaczenia C_1 daje drugi warunek równanie:

$$-\frac{3 + \sigma}{8} A b^2 + \frac{1 + \sigma}{2} C_1 = 0, \quad \text{z którego:} \quad C_1 = \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} \frac{A b^2}{4}.$$

Dla naprężeń p_x i p_z otrzymamy teraz wyrażenia:

$$p_x = \frac{\gamma v^2}{g} \cdot \frac{3 + \sigma}{8} \left(1 - \frac{1 + 3\sigma}{3 + \sigma} \frac{\rho^2}{b^2} \right), \quad p_z = \frac{\gamma v^2}{g} \cdot \frac{3 + \sigma}{8} \left(1 - \frac{\rho^2}{b^2} \right).$$

Obadwa naprężenia są dodatnie i wzrastają, gdy ρ maleje, t. j. w miarę zbliżania się do środka krążka. Dla $\rho = 0$ będzie:

$$(p_x)_{\max} = (p_z)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \cdot \frac{3 + \sigma}{8} \dots \dots \dots (326)$$

Znalezione wartości naprężeń są dwa razy mniejsze od tych, jakie wypadły dla krążka z bardzo małym otworem w środku

§ 159. KRĄŻEK O RÓWNOMIERNEJ WYTRZYMAŁOŚCI

Znaleźliśmy, że w przypadku krążka o stałej grubości są naprężenia proporcjonalne względem kwadratu prędkości obwodowej v krążka. Dla materiału o danej wytrzymałości można zawsze ustalić graniczną wartość v , poza którą muszą największe naprężenia przekroczyć normę dopuszczalną dla materiału. Aby można stosować bezpiecznie większe prędkości wypada budować krążki o zmiennej grubości. Przy obliczeniu naprężeń w takim krążku wyjdziemy, jak poprzednio, z założenia, że naprężenia nie zmieniają się na grubości krążka. To przyjęcie, jak wykazały dokładniejsze badania¹⁾, zbliża się bardzo do rzeczywistości u krążków niezbyt grubych. Naprzykład dla krążka o postaci bardzo spłaszczonej elipsoidy obrotowej, przy największej grubości równej $\frac{1}{8}$ średnicy zewnętrznej, zboczenia od równomiernego rozkładu naprężeń na grubości krążka nie przekraczają 5%. Dla ustalenia zależności między naprężeniami p_x i p_z zwrócimy się do warunku równowagi elementu $abcd$ (rys. 332), wydzielonego z krążka dwoma spłosiowemi powierzchniami walcowemi. Jeżeli y oznacza zmienną grubość krążka, to napięcia działające na boczne ściany elementu ab i cd będą równe:

$$p_x \cdot y \cdot d\rho.$$

Napięcia na ścianach ad i bc określą wyrażenia:

$$p_z \cdot y \cdot \rho \cdot d\varphi \quad \text{i} \quad p_z y \rho d\varphi + d(p_z y \rho d\varphi).$$

Dolączając do tych napięć siły bezwładności:

$$y \cdot \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho \cdot \frac{\gamma \omega^2 \rho}{g},$$

i rzutując wszystkie siły na kierunek promienia, otrzymujemy równanie równowagi:

$$d(p_z y \rho d\varphi) + y \rho d\varphi d\rho \frac{\gamma \omega^2 \rho}{g} - p_x y d\rho d\varphi = 0.$$

albo:

$$\frac{d}{d\rho} (p_z y \rho) - p_x y + \frac{y \rho^2 \gamma \omega^2}{g} = 0 \quad \dots \dots \dots (a)$$

Stosunek p_x do p_z zmienia się zatem w zależności od prawa, według którego będzie się zmieniać grubość krążka y . Najkorzystniejszym okazuje się widocznie ten przypadek, w którym naprężenia p_x i p_z są sobie równe i mają na całym krążku wartość stałą, równą naprężeniu dopuszczalnemu. Przyjmując tedy w rów. (a):

$$p_x = p_z = R,$$

otrzymamy:

$$\rho \frac{dy}{d\rho} + \frac{y \rho^2 \gamma \omega^2}{Rg} = 0, \quad \text{albo:} \quad \frac{dy}{y} = - \frac{\gamma \omega^2}{Rg} \rho d\rho,$$

a stąd:

$$y = y_0 e^{-\frac{\gamma \omega^2 \rho^2}{2Rg}} \quad \dots \dots \dots (327)$$

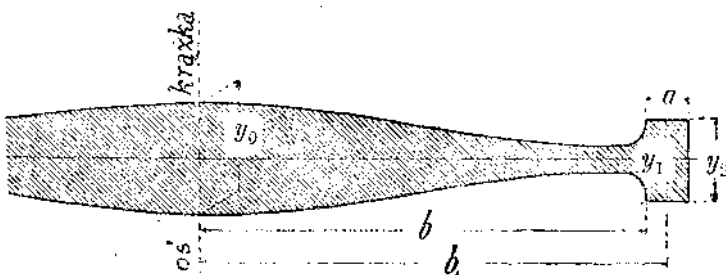
Tutaj oznacza y_0 grubość krążka w środku. Wyznamy ją w zależności od warunków na obwodzie krążka. Kwestja odkształceń krążka o równomiernej wytrzymałości rozwiązuje się w bardzo prosty sposób. Równym naprężeniom p_x i p_z będą odpowiadać równe wydłużenia względne:

$$e_x = e_z = \frac{(1 - \sigma) R}{E}$$

Przesunięcie jakiegokolwiek punktu w kierunku promienia będzie równe:

$$u = \frac{(1 - \sigma) R}{E} \rho \quad \dots \dots \dots (328)$$

Przejdźmy teraz do warunków na obwodzie krążka. W praktyce zaopatruje się krążek turbiny szerszym wieńcem (rys. 378), do którego są przymocowane łopatki turbiny. Przekroju poprzecznego tego wieńca nie można obracać dowolnie dla krążka o równomiernej wytrzymałości; jego rozmiary znajdziemy z następującego rozważania. Przy obrocie krążka działają



na wieńiec oprócz sił bezwładności jeszcze i naprężenia R w miejscu geometrycznego połączenia krążka z wieńcem. Rozmiary wieńca należy dobrać tak, aby zwiększenie jego wewnętrznego promienia b było dokładnie równe rozszerzeniu krążka o równomiernej wytrzymałości i promieniu zewnętrznym b . Siły, przypadające na jednostkę długości wieńca, określa formuła:

$$q = \frac{a y_0 \gamma}{g} \omega^2 b_1 - R y_1 \frac{b}{b_1},$$

¹⁾ Ob. A. Stodola, „Die Dampfturbinen“, r. 1910, str. 617, tudzież artykuł tegoż autora w Zeitschr. d. Ver. d. Ing. z r. 1907, str. 1269.

w której b_1 oznacza odległość środka poprzecznego przekroju wieńca od środka krążka. Wydlużenie względne wieńca równa się:

$$e = \frac{q b_1}{a y_2} \frac{1}{E},$$

a zwiększenie promienia wewnętrznego:

$$eb = \frac{q b_1}{a y_2} \cdot \frac{b}{E}.$$

Porównyując to z wydłużeniem promienia krążka, obliczonym według wzoru (328), otrzymamy potrzebny związek między rozmiarami wieńca:

$$\frac{1-\sigma}{E} Rb = \frac{q b_1}{a y_2} \frac{b}{E} \quad (329)$$

O wielkościach y_1 i y_2 decydują zwykle wymogi konstrukcyjne; rów. (329) określa przeto tę grubość wieńca a , jakiej potrzeba, aby w miejscu (geometrycznego) połączenia krążka z wieńcem zachodziły naprężenia równe R .

Dalsze szczegóły obliczenia można znaleźć w dziełach specjalnych, poświęconych turbinom parowym¹⁾.

§. 160. NAPRĘŻENIA W WIENCIE KOŁA ZAMACHOWEGO

Przy obliczeniu koła zamachowego ze względu na wytrzymałość poprzestają zwykle na wyznaczeniu naprężeń w wieńcu uważanym za pierścień obracający się z daną prędkością kątową ω . Atoli sprychy przeszkadzając swobodnemu rozszerzeniu się wieńca, zmniejszają wprawdzie w nim siłę rozciągającą, lecz jednocześnie wywołują dodatkowe naprężenia zginające. Obliczymy te naprężenia przy założeniu stałej prędkości kątowej koła. W tym przypadku są sprychy narazone wyłącznie na rozciąganie, a odpowiadającą siłę rozciągającą X można znaleźć przy pomocy zasady najmniejszej pracy. Przy ustawieniu wyrażenia dla energii potencjalnej, wystarcza widocznie wziąć pod uwagę część koła, wydzieloną dwoma przekrojami południkowymi, połowiącymi kąty między przyległymi sprychami (rys. 379). Niech będzie 2α wielkością kąta między dwiema po sobie następującymi sprychami. Działanie reszty wieńca na część rozpatrywaną można zastąpić siłą podłużną N_0 i parą sił o momencie M_0 . Z warunków symetrii wnosimy, że siła poprzeczna w rozpatrywanych przekrojach musi być równa zeru. Jeżeli q oznacza ciężar jednostki długości wieńca, a r jego promień, to z warunku rzutów wszystkich sił zewnętrznych na kierunek sprychy otrzymamy:

$$2 N_0 \sin \alpha - X = 2 \int_0^\alpha \frac{q r d\varphi}{g} \omega^2 r \cos(\alpha - \varphi),$$

a stąd:

$$N_0 = \frac{q r^2 \omega^2}{g} - \frac{X}{2 \sin \alpha}.$$

Dla przedstawienia M_0 jako funkcji X skorzystamy z tej okoliczności, że przekroje końcowe wydzielonej części wieńca nie obracają się, że zatem (wz. 272'):

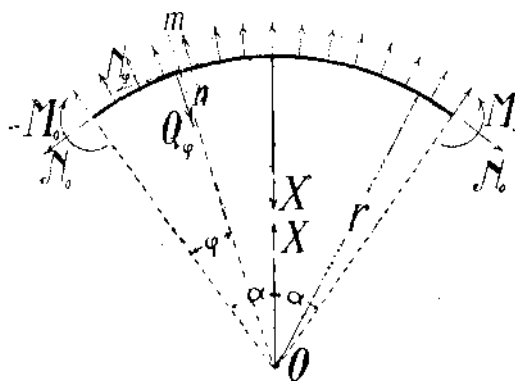
$$\int_0^\alpha M_\varphi r d\varphi = 0 \quad (a)$$

Tutaj oznaczyliśmy przez M_φ moment zginający w dowolnym przekroju wieńca, zamykającym z przekrojem początkowym kąt φ . Tę wielkość określi wyrażenie:

$$M_\varphi = M_0 - N_0 r (1 - \cos \varphi) - \frac{q \omega^2 r}{g} \cdot 2 r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = M_0 + \frac{X r}{2} \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \alpha}.$$

Wstawiając je w rów. (a) i wykonawszy całkowanie, znajdziemy:

$$M_0 = -\frac{X r}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right).$$



Rys. 379

¹⁾ Liczne dane co do postaci równomiernej wytrzymałości wirujących krążków zawiera praca R. Basch'a i A. Leon'a: „Über rotierende Scheiben gleichen Fliehkraftwiderstandes“. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien. 1907.

Rachunkową metodę obliczenia krążków o zmiennej grubości podał autor w pracy: „Woprosy prochnosti w parowych turbinach“. Wiestn. Ob-a Technologow z r. 1912.

Zastosowaniem metody W. Ritz'a do obliczenia krążków turbinowych zajmuje się interesująca praca Pöschl'a w Zeitschr. f. d. gesamte Turbinenwesen z r. 1913.

Tablice pomocnicze do obliczenia krążków znajdują się w książce Donat'a: „Die Berechnung rotierender Scheiben u. Ringe...“. R. 1912.

Mając wyrażenia dla M_0 i N_0 , znajdujemy wielkości siły podłużnej i poprzecznej, tudzież wielkość momentu zginającego w przekroju mn :

$$N_\varphi = N_0 \cos \varphi + \frac{q \omega^2 r}{g} 2r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{q}{g} r^2 \omega^2 - \frac{X}{2} \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha},$$

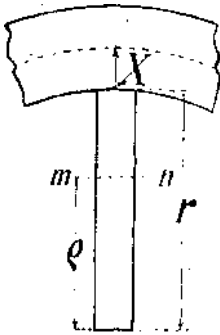
$$Q_\varphi = N_0 \sin \varphi - \frac{q \omega^2 r}{g} 2r \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = -\frac{X}{2} \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha},$$

$$M_\varphi = -\frac{Xr}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{Xr}{2} \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \alpha} = \frac{Xr}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} \right).$$

Energję potencjalną wydzielonej części wieńca przedstawimy na podstawie przybliżonej formuły (271) w postaci:

$$V_1 = 2 \int_0^\alpha \frac{M_\varphi^2 r d\varphi}{2EI} + 2 \int_0^\alpha \frac{N_\varphi^2 r d\varphi}{2EF}.$$

Tutaj oznacza odpowiednio I i F moment bezwładności i pole przekroju poprzecznego wieńca. Obliczymy teraz energję potencjalną sprzchy, narażonej na rozciąganie (rys. 380). Długość sprzchy przyjmiemy równą długości promienia koła zamachowego, a pole przekroju poprzecznego (przyjętego za stały) oznaczymy przez F_1 ; wtedy napięcie N w przekroju mn , wziętym w odległości ρ od środka koła, będzie się składać z siły X określającej działanie wieńca na sprzchę i sił bezwładności działających na zewnętrzną część sprzchy. Otrzymamy tedy:



Rys. 380

$$N = X + \frac{F_1 \gamma}{g} (r - \rho) \omega^2 \frac{r + \rho}{2} = X + \frac{F_1 \gamma \omega^2}{2g} (r^2 - \rho^2).$$

Energję potencjalną sprzchy przedstawi zatem wyrażenie:

$$V_2 = \int_0^r \frac{N^2 d\rho}{2EF_1}.$$

Pomijając odkształcenie innych części koła zamachowego, otrzymamy dla całkowitej energii odkształcenia wyrażenie:

$$V = V_1 + V_2.$$

Do wyznaczenia niewiadomej X posłużmy, według zasady najmniejszej pracy, równanie:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0.$$

Wstawivszy wartość V , znajdziemy po szeregu przekształceń:

$$X = \frac{q \omega^2 r^2}{g} \frac{1}{F_1^2 f_2(\alpha) - f_1(\alpha) + \frac{F}{F_1}} \quad (330)$$

jeżeli dla skrócenia wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right), \quad f_2(\alpha) = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha}.$$

Użycie wzoru (330) ułatwia umieszczona poniżej tablica wartości $f_1(\alpha)$ i $f_2(\alpha)$, odpowiadających różnej liczbie sprych n .

$n =$	4	6	8	10	12
$f_1(\alpha) =$	0,643	0,957	1,274	1,592	1,910
$f_2(\alpha) =$	0,00608	0,00169	0,00076	0,000395	0,000125

Obliczwszy napięcie sprzchy X , znajdziemy bez trudności wielkość momentu zginającego, siły podłużnej i poprzecznej w dowolnym przekroju wieńca i możemy obliczyć odpowiadające wartości naprężeń.

W przypadku zmiennej prędkości kątowej koła zamachowego przybývają obok radialnych sił bezwładności jeszcze siły bezwładności styczne, odpowiadające przyspieszeniu kątowemu. Te siły wywołują zgięcie sprych, przyczem naprężenia zginające będą tem większe, im naglejsze są zmiany prędkości kątowej koła. Jeżeli ω oznacza przyspieszenie kątowe koła zamachowego, to przyspieszeniem stycznem punktów wieńca będzie $r\omega$. Odpowiadające styczne siły bezwładności dają względem osi koła moment:

$$M = \frac{Q}{g} \omega r^2,$$

przyczem Q oznacza ciężar koła zamachowego. Ten moment przenosi się na wał za pośrednictwem sprchy; dla momentu zginającego każdej sprchy w miejscu jej osadzenia na piaście można przeto przyjąć wartość:

$$M_0 = \frac{M}{n} = \frac{Q}{ng} \omega r^2 \quad (331)$$

Nietrudno też znaleźć prawo zmienności momentu zginającego wzdłuż sprchy. Dla uproszczenia zadania pominiemy stosunkowo małe zgięcie wieńca¹⁾ i wpływ sił bezwładności działających na masę sprchy. Wówczas każda sprcha przedstawia się jako belka utwierdzona końcem A (rys. 381) i obciążona na drugim końcu siłą P , oraz parą sił M . Związek zaś między siłą a parą określa warunek, że styczna do zgiętej osi sprchy w jej końcu B , a zarazem normalna do wieńca przechodzi przez punkt A , odpowiadający środkowi koła. Ugięcie końca sprchy pod wpływem P i M będzie równe:

$$f = \frac{Pr^3}{3EI_1} - \frac{Mr^2}{2EI_1}$$

Kąt nachylenia stycznej w punkcie B :

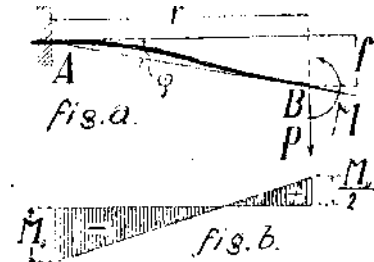
$$\varphi = \frac{Pr^2}{2EI_1} - \frac{Mr}{EI_1}$$

Ten kąt określa nadto równanie:

$$\varphi = \frac{f}{r} = \frac{Pr^2}{3EI_1} - \frac{Mr}{2EI_1}$$

Z porównania obu wyrażeń dla φ wynika:

$$M = \frac{Pr}{3}$$



Rys. 381

Diagram momentów zginających dla sprchy przedstawia fig. (b). Otrzymane wzory rozwiązują kwestję wytrzymałości w przypadku koła zamachowego jednolitego. Jeżeli koło jest złożone z części, to trzeba nadto zbadać wytrzymałość w miejscach połączenia. Te miejsca okazują się zwykle najbardziej niebezpiecznymi, ponieważ konstrukcje połączeń stosowane w praktyce nie wykluczają możliwości względnych przesunięć połączonych części²⁾.

ROZDZIAŁ XIX

O DRGANIACH UKŁADÓW SPRĘŻYSTYCH

§ 161. SWOBODNE DRGANIA UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Kwestja drgań układów sprężystych ma nie tylko znaczenie teoretyczne, lecz także wielką doniosłość praktyczną³⁾. Z zadaniami tego rodzaju spotykamy się w różnych dziedzinach konstrukcji maszyn: np. przy obliczeniu wałów maszyn okrętowych, wałów turbin parowych i belek podtrzymujących szybkobieżne, a niezupełnie zrównoważone maszyny. Z takimi zadaniami, tylko w zawilszej postaci ma do czynienia projektujący inżynier przy badaniu drgań okrętów, lub wyznaczeniu naprężeń dynamicznych w mostach, drgających pod wpływem ruchomych obciążeń. W pewnych warunkach mogą powstające drgania być bardzo znaczne, wobec czego należy wywołać nimi naprężenia wziąć w rachubę. Te naprężenia zmieniają nie tylko swoją wielkość, ale i znak. Przy szybkich drganiach powstaje w krótkim przeciągu czasu wielka liczba zmian znaku naprężeń, co się odbija szczególnie szkodliwie na wytrzymałości materiału i konstrukcji. Z wyliczonych

¹⁾ Bardziej szczegółowe badanie tej kwestji znaleźć można w pracy H. Bauer'a: „Die Festigkeitsberechnung der Schwungräder“, *Dingl. P. J.* z r. 1908, str. 353.

²⁾ Opis doświadczalnych badań odkształceń koła zamachowego znajduje się w artykule S. H. Barraclough'a: „An Optical Method of determining the deformations of a Rotating Fly-Wheel“, *Proc. Civ. Eng.*, v. CL., str. 398.

³⁾ Najbardziej wyczerpująco traktuje teorię drgań układów sprężystych dzieło lorda Rayleigh'a: „Theory of sound“. Jakkolwiek ta książka jest poświęcona zagadnieniom akustyki, to jednak można w niej znaleźć cały szereg rozwiązań o wielkiej praktycznej doniosłości. Przystępniejszy wykład teorii drgań zawiera książka Lamb'a: *The Dynamical theory of sound*.

Ob. także: B. Hopkinson: „Vibrations of systems having one degree of Freedom“;

A. Bouaric: „Oscillations et Vibrations, ...“, Paris, 1912.

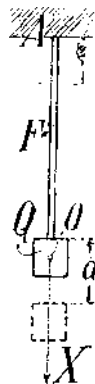
A. N. Kryłow: „O niektórych różniczkowych równaniach...“, 1913.

W tej ostatniej książce, napisanej dla inżynierów, interesujących się mechaniką, wyłożono metody całkowania równań różniczkowych, mających znaczenie techniczne. Osobliwie szczegółowo rozpatrzono zadania drgań prętów.

Ob. także „Kurs teorii uprugosti“, cz. II, str. 171.

powyżej przykładów widać, że inżynier stoi niekiedy przed kwestją drgań układów bardzo złożonych, dla których dokładne i wyczerpujące rozwiązanie zadania przedstawia wielkie trudności. W takich przypadkach ograniczamy się najczęściej do rozwiązania przybliżonego i sprowadzamy zagadnienie do badania układu o jednym stopniu swobody. Analogiczną metodą posługiwaliśmy się już w statycznych zadaniach zgięcia prętów (rozd. XV).

Drgania sprężyste układu mogą powstać wśród rozmaitych okoliczności; jeżeli one zachodzą bez współdziałania sił zewnętrznych, albo pod wpływem sił stałych, to nazywamy je swobodnymi lub własnymi drganiami układu. Podstawowe własności drgań przedstawimy na najprostszym przykładzie pionowych drgań (wahnień) ciężaru Q , zawieszono go na sprężystym pręcie AO (rys. 382), przyczem pominiemy masę, a więc i ciężar własny pręta. Przy statycznym działaniu ciężaru wydłuży się pręt o wielkość:



Rys. 382

$$\lambda = \frac{Ql}{EF}$$

Niech będzie O położeniem środka masy ciężaru Q , odpowiadającym stanowi równowagi. Aby zmusić ciężar do drgań w kierunku pionowym, postąpimy tak: Zapomocą odpowiedniej siły pionowej wywołamy dodatkowe wydłużenie pręta o dowolnej wielkości a i pozostawimy następnie ciężar samemu sobie. Wtedy ciężar zacznie wykonywać ruch okresowy około położenia równowagi, odchylając się od punktu O do góry i na dół o wielkość a . Dla ustawienia równania różniczkowego tego ruchu weźmiemy pod uwagę wszystkie siły działające na ciężar. W chwili, kiedy środek ciężaru znajduje się w O , siła ciężkości Q równoważy się z odpowiadającym napięciem pręta AO . Weźmy teraz dowolne inne położenie ciężaru podczas drgania i oznaczmy przez x spólrzędną środka masy, odpowiadającą temu położeniu (dodatnie x mierzymy od punktu O w dół). Wówczas, oprócz siły ciężkości Q , skierowanej pionowo w dół, będą na ciężar działać: napięcie w pręcie równe

$$Q + \frac{xEF}{l}$$

i skierowana w górę siła bezwładności

$$- Q \frac{d^2x}{g dt^2}$$

Równanie ruchu będzie przeto następujące:

$$Q - \left(Q + \frac{xEF}{l} \right) - \frac{Q}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0, \quad \dots \quad (a)$$

przyczem wielkość pomocniczą k , zwaną częstością drgań, określa wzór:

$$k = \sqrt{\frac{EFg}{Ql}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \quad \dots \quad (332)$$

Ogólna całka otrzymanego równania różniczkowego ma postać:

$$x = A \sin kt + B \cos kt \quad \dots \quad (b)$$

Stałe dowolne A i B należy wyznaczyć tak, aby czyniły zadość warunkom początkowym ruchu. W chwili początkowej odchyliśmy ciężar z położenia równowagi o długość a i pozostawiliśmy go samemu sobie, nie udzieliliśmy mu prędkości początkowej, a zatem

$$\text{dla } t = 0, \quad x = a \quad \text{i} \quad x' = 0.$$

Stąd równania do wyznaczenia A i B :

$$[A \sin kt + B \cos kt]_{t=0} = a, \quad [Ak \cos kt + Bk \sin kt]_{t=0} = 0.$$

Drugie z tych równań daje $A=0$, a wtedy wypływa z pierwszego $B=a$. Wstawiliśmy te wartości w ogólną całkę (b), otrzymamy:

$$x = a \cos kt, \quad x' = -ak \sin kt \quad \dots \quad (c)$$

wilszą; trzeba rozwiązać równanie różniczkowe cząstkowe i zbadać rozmaite typy możliwych drgań układu. W zagadnieniach technicznych gra najistotniejszą rolę ten typ drgań, któremu odpowiada okres najdłuższy. Są to t. zw. podstawowe drgania układu. Do znalezienia ich okresu używamy metody przybliżonej. Na podstawie danych doświadczalnych przyjmujemy typ drgań, t. j. postać tych odchyśleń, które układ otrzymuje przy drganiach i zamieniamy tym sposobem układ złożony w układ o jednym stopniu swobody¹⁾. Dla objaśnienia toku rachunku rozpatrzmy kilka zadań.

Jako pierwszy przykład weźmiemy przypadek ciężaru zawieszzonego na pręcie. Przyjmijmy na razie, że pręt jest pozbawiony masy. Kiedy podczas drgania ciężar Q osiąga jedno ze swoich położeń skrajnych, to jego prędkość, a zatem i energia kinetyczna układu staje się zerem. Potencjalna energia osiąga w tejże chwili największą wartość, ponieważ jej odpowiadają największe odkształcenia sprężystego pręta. Gdy ciężar przechodzi przez średnie położenie (położenie równowagi), to jego prędkość i energia kinetyczna mają największą wartość, energia potencjalna zaś osiąga swoje minimum. W ten sposób podczas drgań zmienia się wciąż wielkość energii kinetycznej i potencjalnej, wszelako ich suma, t. j. całkowita energia układu, pozostaje stałą, ponieważ dotąd pomijaliśmy w naszych wywodach opory, jakie napotyka ciężar Q podczas ruchu i nie uwzględnialiśmy rozpraszania energii. Energia potencjalna układu będzie sumą z energii rozciągania pręta i energii ciężkości zawieszzonego ciężaru, czyli równa się:

$$\frac{EF}{2l}(x + \lambda)^2 - Qx, \quad \dots \quad (a)$$

jeżeli x odmierzamy od położenia równowagi środka ciężaru Q . Energia kinetyczna układu będzie równa energii kinetycznej samego ciężaru, t. j.

$$\frac{Q}{2g}x'^2, \quad \dots \quad (b)$$

gdyż przyjęliśmy, że pręt jest pozbawiony masy. Otrzymamy tedy równanie:

$$\frac{EF}{2l}(x + \lambda)^2 - Qx + \frac{Q}{2g}x'^2 = \text{const.},$$

albo, uwzględniając, że

$$\lambda = \frac{Ql}{EF},$$

$$\frac{EF}{2l}x^2 + \frac{Q}{2g}x'^2 = \text{const.} \quad \dots \quad (c)$$

Różniczkując względem t dojdziemy do równania drgań, rozpatrzonego w poprzednim paragrafie:

$$\frac{Q}{g}x'' + \frac{EF}{l}x = 0.$$

Położenie układu będzie zupełnie określone współrzędną x , a przesunięcie jakiegokolwiek przekroju pręta, leżącego w odległości ξ od punktu zawieszenia (rys. 378) będzie równe:

$$u = \frac{x\xi}{l} \quad \dots \quad (d)$$

Ocenimy teraz wpływ masy pręta na okres drgań układu²⁾. Jeżeli masa pręta jest niewielka w porównaniu do masy ciężaru Q , to możemy bez wielkiego błędu przyjąć, że typ podstawowych drgań układu będzie taki sam, jak i w przypadku pręta bez masy. Przesunięcie dowolnego przekroju pręta przy drganiach określi poprzedni wzór (d), a energia potencjalna rozciągania pręta przy odchyleniu ciężaru o x z położenia równowagi zachowa poprzednią wartość. Co się tyczy energii kinetycznej układu, to ona zmienia się nieco; do energii kinetycznej poruszającego się ciężaru trzeba dołączyć energię kinetyczną pręta. Skoro przez q nazwiemy ciężar jednostki długości pręta, to energię kinetyczną elementu pręta, wydzielonego w odległości ξ od punktu zawieszenia, przedstawi wyrażenie:

$$q \frac{d\xi}{2g} \left(\frac{x'\xi}{l} \right)^2.$$

Energia kinetyczna całego pręta będzie równa:

$$\int_0^l q \frac{d\xi}{2g} \left(\frac{x'\xi}{l} \right)^2 = \frac{ql}{3g} \frac{x'^2}{2},$$

a energię kinetyczną całego układu wyrazi wzór:

$$\frac{x'^2}{2g} \left(Q + \frac{ql}{3} \right).$$

¹⁾ Ten sposób zaproponował lord Rayleigh; ob. Theory of sound, wyd. 2-gie, str. 111 i 287.

²⁾ Swobodne drgania tego układu zbadał już Poisson. Jego drgania wymuszone rozpatruje praca autora: „O wymuszonych kolebaniach pryzmatycznych stierźniej”, Izw. Kij. Pol. Inst. z r. 1910 i artykuł A. N. Kryłowa p. t. „Niekotoryja zamieczania o kreszerach i indikatorach”, Izv. Imp. Akad. Nauk., z r. 1909, Nr. 9.

Ostatecznie, zamiast rów. (c), wyprowadzonego dla pręta bez masy, otrzymamy:

$$\frac{EF}{2l} x^3 + \frac{x^3}{2g} \left(Q + \frac{ql}{3} \right) = \text{const.}$$

Równanie ruchu jest więc takie same, jak w przypadku pręta pozbawionego masy, u którego zawieszono ciężar $Q + \frac{ql}{3}$.

Dla obliczenia okresu drgań podstawowych układu z uwzględnieniem masy pręta, można użyć poprzedniego wzoru (334), dodawszy jednak do ciężaru Q jedną trzecią ciężaru własnego pręta.

Jako drugi przykład rozpatrzmy drgania ciężaru umieszczonego na poziomej belce (rys. 379, fig. b). Pomijając masę belki znajdujemy dla okresu drgań wzór:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}}, \quad \dots \dots \dots (e)$$

w którym f oznacza (statyczne) ugięcie belki pod ciężarem. Aby ocenić w przybliżeniu wpływ masy belki na okres drgań, postąpimy tak samo, jak w poprzednim przypadku. Przypuśćmy, że typ drgań pozostaje ten sam, co i dla belki bez masy. Energia potencjalna zgiętej belki zachowuje wartość poprzednią i trzeba tylko zmienić postać wyrażenia dla energii kinetycznej układu. Do energii kinetycznej drgającego ciężaru należy dołączyć energię kinetyczną belki. Obliczenia tej ostatniej można dokonać na podstawie następujących rozważań: Przyjęliśmy, że w rozpatrywanym przypadku typ drgań jest taki sam, jak dla belki pozbawionej masy. Z tego wynika, że w każdej chwili między ugięciem y w dowolnym przekroju belki, a ugięciem y w środku rozpiętości zachodzi ta sama zależność, co i przy statycznym zgięciu belki. Na podstawie równania linii ugięcia belki obciążonej w środku mamy:

$$y = \frac{3l^2 x - 4x^3}{l^3}$$

Jeżeli q oznacza ciężar jednostki długości belki, to jej energię kinetyczną w dowolnej chwili przedstawi wyrażenie:

$$2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{q dx}{2g} y^2 = \frac{q y^2}{g l^3} \int_0^{\frac{l}{2}} (3l^2 x - 4x^3)^2 dx = \frac{17}{35} \frac{ql}{g} \frac{y^2}{2}$$

Energia kinetyczna jest zatem taka, jakąby miała belka pozbawiona masy z umieszczonym w środku rozpiętości ciężarem $\frac{17}{35} ql$. Okres drgań układu z uwzględnieniem masy belki można obliczyć w przybliżeniu według wzoru (e), jeżeli tylko przez f będziemy rozumieć strzałkę ugięcia powstającą pod wpływem ciężaru $Q + \frac{17}{35} ql$, skupionego w środku rozpiętości.

Gdy ciężar belki jest mały w porównaniu do ciężaru Q , to powyższa przybliżona metoda obliczenia okresu T jest bardzo dokładną. Dla praktycznych zastosowań jest okolicznością nader ważną, że nawet przy większych wartościach ql daje wyłożona metoda zupełnie zadowalające wyniki. Weźmy bowiem pod uwagę skrajny przypadek, kiedy $Q = 0$ i trzeba obliczyć okres podstawowych drgań belki nieobciążonej. Stosując metodę przybliżoną, znajdziemy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{17}{35} ql I^3}{48 EI g}} = 2\pi \frac{l^2}{9,94} \sqrt{\frac{q}{EI g}} \quad \dots \dots \dots (335)$$

Natomiast dokładne rozwiązanie tego zadania, oparte na całkowaniu odpowiadającego równania różniczkowego cząstkowego, daje:

$$T = 2\pi \frac{l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{q}{EI g}} = 2\pi \frac{l^2}{9,87} \sqrt{\frac{q}{EI g}} \quad \dots \dots \dots (335')$$

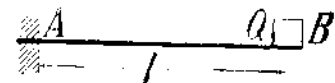
Różnica między rozwiązaniem przybliżonym a dokładnym nie dochodzi 1%.

Oceniając wpływ masy belki na okres drgań, wychodziliśmy z założenia, że przy drganiach ma oś belki taki sam kształt, jak i przy zgięciu statycznym. Można też przyjąć i inną przybliżoną postać wygięcia, dobierając ją tak, aby uczynić zadość warunkom na końcach belki. Dajmy na to np., że belka zgina się przy drganiach według sinusoidy. Wtedy przy poprzednich znaczeniach x i y mamy:

$$y = y \sin \frac{\pi x}{l},$$

a energią kinetyczną belki będzie:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{q dx}{g} y^2 = \frac{ql}{2} \frac{y^2}{2g}$$



Rys. 384

Ten sam wynik otrzymalibyśmy, jeżelibyśmy przyjęli, że belka jest pozbawiona masy, a połowę ciężaru belki skupili w środku rozpiętości. A zatem, przyjmąwszy zgięcie według sinusoidy otrzymaliśmy $\frac{1}{2} ql$ zamiast $\frac{17}{35} ql$. Różnica obu wyników jest niewielka.

Jeżeli chcemy zbadać drgania belki jednym końcem utwierdzonej (rys. 384), to pierwsze przybliżenie dla okresu drgań otrzymamy, podstawiając we wzorze:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}}$$

zamiast f wartość statycznego ugięcia belki pod działaniem ciężaru Q . Aby ocenić wpływ własnego ciężaru belki, trzeba przyjąć postać linii ugięcia przy drganiach, odpowiadających typowi podstawowemu. Skoro przypuścimy, że postać zgiętej osi jest taka sama, jak przy statycznym działaniu siły pionowej na koniec B , to krocząc poprzednią drogą znajdziemy, że wartość energii kinetycznej będzie ta sama, co dla belki pozbawionej masy i opatrzonej na końcu ciężarem $\frac{33}{140}ql$. Aby ocenić wpływ własnej masy, trzeba we wzór dla T podstawić zamiast f ugięcie statyczne, odpowiadające obciążeniu końca belki siłą¹⁾:

$$Q + \frac{33}{140}ql \quad \dots \quad (336)$$

Tymże sposobem można zbadać kwestję drgań belek o przekroju zmiennym²⁾ i belek kratowych.

§ 163. DRGANIA PRZY OPORZE ŚRODOWISKA

W poprzednich wywodach nie uwzględnialiśmy wpływu oporów, jakie zachodzą przy drganiach. Opory środowiska, w którym układ sprężysty wykonywa drgania, zmniejszają stopniowo amplitudę drgań; drgania słabną, czyli „gasną”. Wielkość oporu zależy od prędkości ruchu; gdy prędkość jest dość mała, to można niekiedy uważać opór za proporcjonalny względem prędkości i przyjąć:

$$R = -\alpha \frac{dx}{dt} \quad \dots \quad (a)$$

przyczem współczynnik proporcjonalności α zależy od rozmiarów i postaci ciała. Ten współczynnik ma znaczenie oporu, jaki zachodzi przy prędkości równej 1. Znak minus wskazuje, że opór ma zawsze kierunek przeciwny prędkości. Przechodząc do przypadku ciężaru Q zawieszono na pręcie sprężystym pozbawionym masy (rys. 378) i rzutując wszystkie siły działające na ciężar, oraz siły bezwładności na oś X -ów, otrzymamy równanie:

$$Q - \left(Q + \frac{EFx}{l} \right) - \frac{Q}{g} \frac{d^2x}{dt^2} - \alpha \frac{dx}{dt} = 0, \text{ albo: } \frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = 0 \quad \dots \quad (b)$$

przyczem

$$k = \sqrt{\frac{EFg}{Ql}}, \quad 2n = \frac{\alpha g}{Q}.$$

Ogólną całką tego równania będzie:

$$x = e^{-nt} [A \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + B \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t)].$$

Przyjmijmy, że w chwili początkowej ($t = 0$) jest $x = a$, natenczas $B = a$. Wielkość prędkości początkowej obierzemy dla uproszczenia dalszych rozważań tak, aby A stało się zerem; dla x otrzymamy wtedy wyrażenie:

$$x = e^{-nt} a \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t).$$

Znalezione rozwiązanie poucza, że ruch jest przy $k > n$ okresowym, lecz amplituda drgań zmniejsza się stopniowo. W chwili początkowej odchylenie ciężaru od położenia równowagi jest równe a ; po upływie czasu odpowiadającego pełnemu okresowi drgań, nie wraca ciężar w pierwotne położenie; jego odchylenie od położenia równowagi będzie równe ae^{-nT} , a zatem będzie mniejsze od wartości początkowej. Po drugim wahnięciu będzie odchylenie miało wartość ae^{-2nT} i t. d. Amplitudy maleją tedy według szeregu geometrycznego o ilorazie e^{-nT} . Im większą wartość ma współczynnik n , t. j. im większy jest opór środowiska, tem prędzej gasną drgania.

Rozpatrzmy teraz okres drgania T . Wskutek oporów stała się jego wielkość

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} \quad \dots \quad (337)$$

większą, niż w przypadku „drgań swobodnych”. Gdy opory są niewielkie, jak to najczęściej bywa, to n wypada małe w porównaniu do k i dlatego okres drgań mało się zmienia

¹⁾ Postać wygięcia belki jednym końcem utwierdzonej, powstająca przy drganiach, badano doświadczalnie; ob. Garrett, „On the lateral vibration of bars”, Phil. Mag. t. 8, str. 581.

²⁾ Inną przybliżoną metodą badania drgań belek zajmuje się nader interesująca praca: I. Morrow, „On the lateral vibration of loaded and unloaded bars”, Phil. Mag. z r. 1905 i 1906.

równania bez ostatniego wyrazu dołączymy szczególne rozwiązanie równania z ostatnim wyrazem. Tę rozwiązanie będziemy szukać w postaci:

$$x = M \sin pt + N \cos pt.$$

Podstawiając je w rów. (b) otrzymamy:

$$-Mp^2 \sin pt - Np^2 \cos pt + 2Mnp \cos pt - 2Nnp \sin pt + Mk^2 \sin pt + Nk^2 \cos pt = q \sin pt.$$

Stałe M i N wyznaczymy z równań:

$$-Np^2 + 2Mnp + Nk^2 = 0, \quad -Mp^2 - 2Nnp + Mk^2 = q,$$

z których pierwsze przedstawia sumę algebraiczną współczynników przy $\cos pt$, a drugie także sumę współczynników przy $\sin pt$. Stąd:

$$M = \frac{q(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}, \quad N = -\frac{2npq}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}.$$

Ogólna całka równania (b) ma zatem postać:

$$x = e^{-nt} \left[A \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + B \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \right] + \frac{q(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \sin pt - \frac{2npq}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \cos pt \quad (d)$$

Wielkości A i B można znaleźć z warunków początkowych. Nie trudno zauważyć, że pierwsza część całki (d), opatrzona czynnikiem e^{-nt} , maleje nieustannie z upływem czasu, dążąc do zera, tak, iż praktycznie wystarcza liczyć się tylko z drugą częścią, niezależną od warunków początkowych. Ta druga część proporcjonalna względem wielkości q , przedstawi „wymuszone drgania” układu. Wyrażenie dla drgań wymuszonych:

$$x = \frac{q(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \sin pt - \frac{2npq}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \cos pt \quad (e)$$

można uprościć przez wprowadzenie oznaczeń:

$$\frac{q(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} = C \cos \alpha, \quad \frac{2npq}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} = C \sin \alpha \quad (f)$$

Wyrażenie (e) przekształci się wobec tego na następujące:

$$x = C \cos \alpha \sin pt - C \sin \alpha \cos pt = C \sin(pt - \alpha) \quad (h)$$

Wielkość C i α znajdujemy łatwo z wzorów (f), a mianowicie:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2np}{k^2 - p^2}, \quad C = \frac{q}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{q \sin \alpha}{2np} \quad (k)$$

Na podstawie otrzymanych wzorów (h) i (k) wnosimy, że drgania wymuszone mają taki sam okres:

$$T = \frac{2\pi}{p},$$

jak i drgania punktu zawieszenia, czyli równy okresowi siły wymuszającej drganie. Porównując (h) i (k) widzimy, że zależnie od znaku α będą drgania wymuszone, albo spaźniać się w stosunku do drgań punktu zawieszenia, albo je wyprzedzać. Przy $k > p$, t. j. gdy częstość „własnych drgań” układu jest większa od częstości drgań punktu zawieszenia (częstości drgań przyczyny wzbudzającej drgania wymuszone), będzie α dodatnie; drgania wymuszone będą się wtedy opóźniać w odniesieniu do drgań punktu zawieszenia. Gdy $k < p$, to α jest ujemne, a więc drgania wymuszone wyprzedzają drgania punktu zawieszenia. Kiedy drgania o tym samym okresie nie zgadzają się, mówimy, że znajdują się w różnych „fazach”. Różnicę faz określa w naszym przypadku

wielkość α . Jeżeli w szczególnym przypadku $k=p$, t. j. gdy częstota „własnych“ drgań układu jest taka sama, jak i częstota drgań punktu zawieszenia, to:

$$\operatorname{tg} \alpha = \infty, \quad \alpha = \pm \frac{\pi}{2},$$

czyli drgania ciężaru spażniają się lub wyprzedzają drgania punktu zawieszenia o $\frac{1}{2}$ okresu. Gdy punkt zawieszenia zajmuje swoje średnie położenie, to ciężar znajduje się w jednym z położeń skrajnych.

Rozpatrzmy teraz, jak się zmieniają amplitudy drgań wymuszonych wskutek zmiany częstoty drgań p punktu zawieszenia. Największe odchylenia ciężaru Q od położenia średniego określa wielkość C (wzory h i k). Skoro p jest bardzo małe, t. j. gdy punktowi zawieszenia udzielono drgań powolnych, to w wyrażeniu dla C możemy pominąć wyrazy p^2 i $4n^2 p^2$ w porównaniu do k^2 . W takim przypadku:

$$C = \frac{q}{k^2} = \frac{EFbg}{Ql} \cdot \frac{EFg}{Ql} = b,$$

czyli drgania ciężaru Q są takie same, jak i punktu zawieszenia. Przy bardzo wielkiej wartości p , t. j. gdy punkt zawieszenia wykonywa drgania bardzo szybkie, mianownik wyrażenia dla C staje się bardzo wielkim, a zatem amplituda drgań wymuszonych będzie bardzo mała, ciężar Q pozostaje prawie nieruchomym w przestrzeni. Weźmy np. przypadek, kiedy $p=10k$, t. j. gdy częstota drgań punktu zawieszenia jest 10 razy większą od częstoty własnych drgań układu. Kładąc $n=0$, czyli pomijając wpływ oporów, znajdziemy:

$$C = \frac{q}{99k^2} = \frac{b}{99} = \sim 0,01 b.$$

Amplituda drgań ciężaru jest zatem jedną setną amplitudy drgań punktu zawieszenia. To zjawisko można wyzyskać w konstrukcji przyrządów do zapisywania drgań, jak np. sejsmografów, notujących drgania skorupy ziemskiej i pallografów, zapisujących drgania w korpusie statków. Ciężar zawieszony na sznurze gumowym może służyć jako najprostsz aparat do notowania drgań¹⁾. Dajmy na to, że chcemy zapisać drgania w korpusie okrętu i znamy naprzód w przybliżeniu częstota tych drgań p . Obierzemy tedy długość sznura gumowego i wielkość ciężaru Q tak, aby częstota własnych drgań tego układu była kilka razy mniejszą od p . Jeżeli teraz przyczepimy sznur do pokładu, to przy drganiu statku będzie ciężar Q odchyłać się bardzo mało od średniego położenia, a przymocowany do niego ołówek zapisze na obracającym się bębnie, którego oś jest niezmiennie połączoną z pokładem, drgania tegoż pokładu. Na tej samej zasadzie możnaby zbudować aparaty do notowania drgań mostów przy przejeździe pociągu.

Znajdziemy teraz tę częstota drgań punktu zawieszenia, której odpowiadają największe wartości C . Utworzywszy pochodną C względem p i przyrównawszy ją do zera, otrzymamy:

$$p = \sqrt{k^2 - 2n^2}.$$

Ponieważ wielkość n jest zwykle bardzo mała w porównaniu do k , więc można wygłosić twierdzenie następujące:

Amplituda drgań wymuszonych wzrasta ze zbliżeniem się częstoty siły do częstoty własnych drgań układu.

Na rys. (386) przedstawiono wykresnie związek między amplitudą wymuszonych drgań a częstotą p drgań punktu zawieszenia, na podstawie następującego przekształcenia wzoru (k):

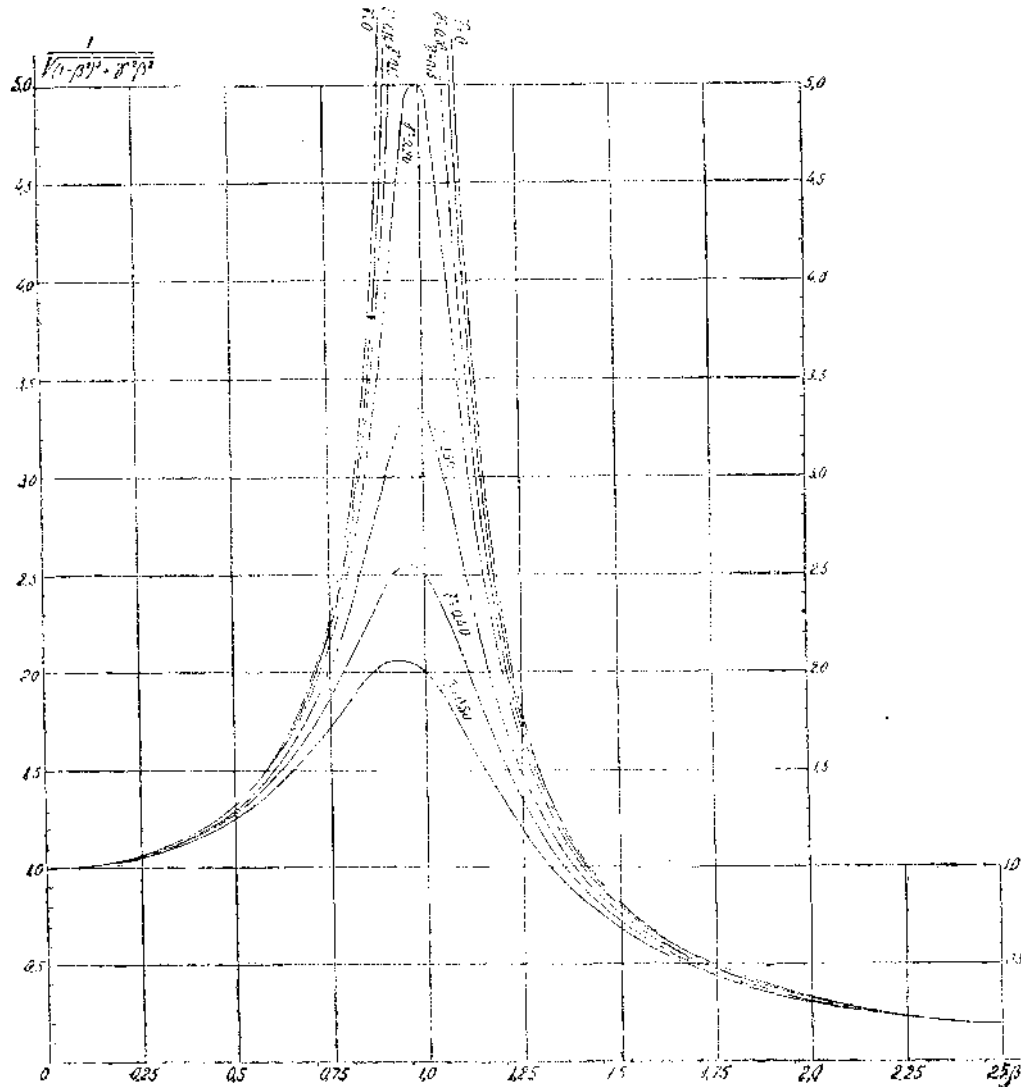
$$C = \frac{q}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4n^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}} = b \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + \beta^2 \gamma^2}},$$

przyczem:

$$\beta = \frac{p}{k} \quad \text{i} \quad \gamma = \frac{2n}{k}.$$

¹⁾ Ob. kurs A. N. Kryłowa: Teorja drgań (po ros.).

Odcinając na osi poziomej wartości β , a na osi rzędnych wartości czynnika przy b (w wyrażeniu dla C), otrzymamy dla różnych wartości γ układ krzywych, na którym widać, że przy zbliżeniu p do k ($\beta=1$) wzrasta bardzo szybko amplituda drgań wymuszonych. Wartość C przy rozmaitych wielkościach p podaje (dla $k=10$ i $n=0,2$) niżej umieszczona tablica. Wielkość b , t. j. amplitudę drgań punktu zawieszenia przyjęto tutaj równą jednostce. Zjawisko wzrastania amplitudy drgań wymuszonych, przy zbliżeniu p do k będzie tem wybitniejsze, im mniejszy jest opór środo-



Rys. 386

wiska, t. j. im mniejszy jest spódczynnik n . Przy $n=0$ i $p=k$ wypadnie $C=\infty$, czyli amplituda drgań wymuszonych rośnie bez granic. Wzrastanie amplitud drgań wymuszonych przy $p=k$ nosi nazwę, zapożyczoną z akustyki, „zjawiska spółbrzmienia“ czyli rezonansu. To zjawisko gra w niektórych przypadkach praktycznych nader ważną rolę, albowiem z wzrastaniem drgań, rosą zwykle naprężenia materiału, co może doprowadzić do zgoła nieoczekiwanych przypadków zniszczenia maszyny, lub zawalenia się budowli.

$p =$	1	5	8	9	9,5	10	10,5	11	12	13	15	20
$C =$	1	1,3	2,8	5,2	9,5	25	9,5	4,6	2,2	1,4	0,8	0,3

§ 165. PRAKTYCZNE ZNACZENIE ZJAWISKA SPÓŁBRZMIENIA

Wywody poprzedniego paragrafu polegały na zupełnie określonym sposobie wzbudzenia drgań ciężaru Q , a mianowicie przez wprowadzenie w ruch okresowy punktu zawieszenia. Napisawszy warunki równowagi dla sił, działających na ciężar Q , doszliśmy do równania (b). Łatwo zauważyć, że nic się nie zmieni w warunkach ruchu, jeżeli punkt zawieszenia pozostanie nieruchomym, a drganie będzie wywoływać siła R , zmieniająca się według prawa:

$$R = q \frac{Q}{g} \sin pt.$$

Równanie ruchu pozostanie niezmienione także i w tych przypadkach, gdy zamiast sprężystego pręta mamy sprężynę śrubową, albo gdy ciężar Q przymocujemy do belki w obu końcach podpartej, oczywiście pod warunkiem, że zjawisko zachodzi w granicach sprężystości i ważności prawa Hooke'a. Wydłużenie sprężyny i ugięcie belki będą proporcjonalne względem działających sił; zmieni się tylko współczynnik proporcjonalności. Jako przykład rozpatrzmy następujące zadanie, mające znaczenie praktyczne:

Na belce w obu końcach swobodnie podpartej ustawiono w środku motor, wywołujący przy pewnych prędkościach znaczne drgania. Takie drgania wywierają szkodliwy wpływ nie tylko przez powiększenie naprężeń w materiale, lecz także przez stopniowe rozluźnianie połączeń nitowych, sworzniowych i t. p. Zachodzi pytanie, jak, znając ciężar motoru i rozmiary belki, ustalić te prędkości, przy których mogą powstać silne drgania? Jeżeliby wszystkie części motoru były zupełnie zrównoważone, to nie byłoby przyczyn, wywołujących ruchy okresowe, drgania nie powstałyby wcale. W rzeczywistości niema zwykle mowy o zupełnym zrównoważeniu i podczas biegu maszyny wytwarzają się okresowe siły bezwładności, warunkujące drgania wymuszone. Prawa, według których te siły bezwładności zmieniają się z czasem, mogą być dość złożone. Roztrząśniemy najpierw zadanie przy najprostszym założeniu. Dajmy na to, że działanie niezrównoważonych mas maszyny jest równoważone z działaniem obracającego się ciężaru q , skupionego w odległości r od wału ¹⁾. W takim przypadku siły bezwładności przy stałej prędkości kątowej motoru sprowadzają się do jednej siły odśrodkowej. Kierunek siły będzie się zmieniać podczas obrotu, ale jej wielkość pozostanie stałą i równą:

$$P = \frac{q}{g} \frac{v^2}{r} = \frac{q}{g} \omega^2 r,$$

jeżeli g oznacza przyspieszenie ciężkości, v prędkość ciężaru q , zaś ω prędkość kątową obrotu. Przy zaznaczonym na rys. (387) położeniu maszyny przedstawia szczególny interes pionowa składowa siły odśrodkowej, gdyż ona właśnie wywołuje poprzeczne drgania belki. Jeżeli kąt obrotu promienia r będziemy mierzyć od prostej poziomej, to rzutem pionowym siły odśrodkowej będzie:

$$R = P \sin \omega t,$$

czyli siła pionowa zmienia się tak, jak przyjęliśmy w rozpatrywanym poprzednio przypadku drgań wymuszonych. Drgania będą wyjątkowo silne, skoro wartość prędkości kątowej obrotu zbliży się do k , t. j. do częstości „drgań swobodnych“, jakie wykonywa przymocowany do belki ciężar Q bez udziału innych sił zewnętrznych ²⁾.



Rys. 387

¹⁾ W takiej postaci było urządzone doświadczenie nad drganiami wymuszonymi w mech. labor. Kijows. Inst. Polit.

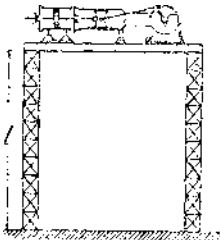
²⁾ Podobne działanie okazują „przeciwwagi“ kół lokomotyw na drgania mostów. Doświadczenia pouczają, że przy określonych prędkościach jazdy mogą powstać znaczne drgania mostu pod działaniem przeciwwag. Ob. F. E. Turneaur, Some experiments on bridges under moving train Loads. Trans. Am. Soc. C. E. v. 41, str. 410.

Wyznaczenie częstości drgań k nie przedstawia żadnych trudności: z dostateczną dokładnością można ją znaleźć sposobem przybliżonym (§ 162). Niebezpieczną, t. zw. „krytyczną”, prędkość kątową znajdziemy z wzoru:

$$\omega_{kr} = k = \sqrt{\frac{48 E I g}{Q + \frac{17}{35} Q_1}} \quad (338)$$

w którym Q_1 oznacza ciężar własny belki.

Podobnego rodzaju zadanie przedstawia przypadek, opisany przez Sommerfeld'a¹⁾ (rys. 388). Motor jest ustawiony, w lokalu wspartym na żelaznych pionowych słupach i trzeba znaleźć tę prędkość maszyny, przy której powstają silne drgania. Jeżeli znamy rozmiary słupów, ciężar budowli i motoru, to obliczenie częstości własnych drgań układu nie przedstawia trudności. Od poprzedniego przypadku różni się niniejszy tem, że siła wzbudzająca drgania jest poziomą składową siły bezwładności. Uważając słupy za belki jednym końcem utwierdzone, znajdziemy krytyczną prędkość kątową z wzoru:



Rys. 388

$$\omega_{kr} = k = \sqrt{\frac{g}{f}} = \sqrt{\frac{3 E I g}{\left(Q + \frac{33}{140} Q_1\right) l^3}} \quad (339)$$

Tutaj oznacza Q ciężar budowli wraz z motorem, a Q_1 ciężar wszystkich słupów.

Przyjmowaliśmy dotąd, że siły bezwładności można zastąpić siłą odśrodkową jednego ciężaru, obracającego się z tą samą prędkością kątową, co i maszyna. W rzeczywistości będzie wyrażenie dla sił bezwładności najczęściej bardziej złożone i siła wzbudzająca drgania przedstawi się jako wypadkowa całego szeregu sił, przyczem każda ze składowych zmienia się według funkcji sinus albo cosinus o okresie, który jest całkowitą wielokrotnością okresu pełnego obrotu maszyny. W najogólniejszej postaci da się siłę R przedstawić wyrażeniem:

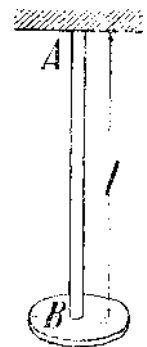
$$R = P_1 \sin \omega t + P_2 \sin 2 \omega t + P_3 \sin 3 \omega t + \dots + Q_1 \cos \omega t + Q_2 \cos 2 \omega t + \dots \quad (a)$$

Zasadniczej wagi jest tutaj dla nas ta okoliczność, że nawet najbardziej złożoną siłę, wzbudzającą drgania, można przedstawić jako sumę prostych elementów, zmieniających się według funkcji sinus lub cosinus. Umiemy już znaleźć działanie każdego takiego elementu. Aby otrzymać działanie siły R należy tylko zesumować działania oddzielnych składowych. Te działania sumują się dzięki temu, że równanie różniczkowe ruchu jest linjowe. Skoro okres jakiegokolwiek składowej zbliża się do okresu własnych drgań układu, to amplituda drgań, odpowiadających tej składowej, przybiera wybitną wartość i może osiągnąć znaczną wielkość, wobec czego może wywołać znaczne naprężenia dodatkowe. Dajmy na to, że $\omega = k$ (t. j. częstości własnych drgań układu), wtedy główne znaczenie w wyrażeniu (a) będą mieć wyrazy $P_1 \sin \omega t$ i $Q_1 \cos \omega t$. Jeżeliby prędkość maszyny była taka, że $2\omega = k$ lub $3\omega = k$, to najistotniejszymi wyrazami byłyby $P_2 \sin 2\omega t$, $Q_2 \cos 2\omega t$, albo $P_3 \sin 3\omega t$, $Q_3 \cos 3\omega t$ i t. d. Stąd wniosek następujący: Jeżeli częstość własnych drgań układu jest równą albo wielokrotną prędkości kątowej obrotu maszyny, to można oczekiwać bardzo znacznych drgań wymuszonych. (Tutaj ograniczamy się do głównego typu drgań układu, mającego zwykle największe znaczenie praktyczne). Aby więc uniknąć drgań i połączonych z nimi dodatkowych naprężeń, trzeba albo zmienić prędkość kątową obrotu, albo też częstość własnych drgań układu. Można to osiągnąć przez zmianę rozmiarów konstrukcji. Zmniejszając np. rozmiary belki w omówionym powyżej przypadku, można przez to zmniejszenie usunąć drgania i połączone z nimi naprężenia dynamiczne.

§ 166. DRGANIA SKRĘCAJĄCE (TORSYJNE)

Z tego rodzaju drganiami wypada się liczyć głównie przy projektowaniu wałów maszyn okrętowych. Okazuje się, że w pewnych warunkach mogą powstać w takich wałach znaczne drgania. Te drgania wywołują wielkie naprężenia dodatkowe i w niektórych przypadkach mogą doprowadzić do pęknięcia wału. Inżynier niemiecki Frahm wyznaczał drogą doświadczalną kąt skręcenia wału okrętowego podczas pracy maszyny i z tego kąta obliczał odpowiadające naprężenia. Doświadczenia pokazały, że przy pewnej prędkości wału powstawały silne drgania i naprężenia zmieniały się w granicach $+600$ i -166 kg/cm^2 , podczas gdy statyczne naprężenia były obliczone na 218 kg/cm^2 . A zatem nie tylko wielkość, lecz także znak naprężenia ulegały zmianie. Widocznie te prędkości, przy których spostrzegamy szczególnie silne drgania, odpowiadają zjawisku spółbrzmienia. Aby usunąć możliwość pojawienia się silnych drgań, trzeba umieć obliczyć okres własnych drgań wału z jego rozmiarów, a te rozmiary tak obrać, aby okres własnych drgań wału nie zgadzał się z okresem pełnego obrotu maszyny.

Studjum drgań skręcających zaczniemy od następującego najprostszego przykładu. Okrągły pręt AB (rys. 389), utwierdzony pionowo górnym końcem, posiada na drugim



Rys. 389

¹⁾ Ob. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. z r. 1904.

końcu krążek B , stale z nim połączony. Skoro krążek obrócimy o pewien kąt, skręcając przez to pręt o tenże kąt α i pozostawimy następnie układ samemu sobie, to powstaną drgania torsyjne. Ich okres będzie zależeć od rozmiarów pręta, własności materiału i od rozmieszczenia masy krążka. Weźmy pod uwagę chwilowe położenie, jakie krążek zajmie podczas ruchu i nazwijmy przez φ odpowiadający kąt skręcenia; wtedy moment sił sprężystości skręconego pręta, działający na krążek, będzie mieć wartość:

$$M = \varphi \frac{GI_p}{l}.$$

Równaniem ruchu krążka (z pominięciem oporów) będzie:

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{GI_p}{I} \varphi = 0, \text{ albo } \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0, \text{ przyczem } k = \sqrt{\frac{GI_p}{\Theta I}},$$

a Θ jest momentem bezwładności krążka względem osi obrotu. Ogólną całką otrzymanego równania jest:

$$\varphi = A \sin kt + B \cos kt.$$

Zważywszy, że w chwili początkowej jest $\varphi = \alpha$ i $\varphi' = 0$, przekształci się powyższe rozwiązanie na następujące:

$$\varphi = \alpha \cos kt.$$

Mamy tedy znowu do czynienia z prostym drganiem o częstości k . Okres drgań określi wyrażenie:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta I}{GI_p}}. \quad (340)$$

Jeżeli na krążek działa zmienny moment

$$M = -N \sin pt,$$

skręcający pręt, oraz opór środowiska, proporcjonalny względem prędkości, to równanie ruchu otrzymuje postać:

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{GI_p}{I} \varphi + \beta \varphi' = N \sin pt, \text{ albo: } \varphi'' + 2n\varphi' + k^2\varphi = q \sin pt, \quad (a)$$

przyczem

$$2n = \frac{\beta}{I}, \quad q = \frac{N}{\Theta}.$$

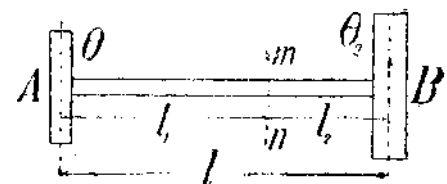
Równanie (a), zgodne z równaniem (b) w § (164), określa drgania w przypadku działania sił zewnętrznych, wzbudzających je. Amplituda drgań może osiągnąć znaczną wielkość, gdy p , t. j. częstość wahań momentu wzbudzającego, zbliża się do wielkości k , t. j. częstości własnych drgań układu.

Stosując metodę przybliżoną, możemy bez trudności ocenić wpływ masy pręta na okres drgań krążka. Przypuśćmy, że przytem typ drgań będzie taki sam, jak w przypadku pręta pozbawionego masy; wówczas kąt obrotu dowolnego przekroju pręta, odległego o ξ od końca utwierdzonego, będzie równy $\frac{\varphi \xi}{l}$, przyczem φ oznacza kąt obrotu krążka. Jeżeli przez ϑ oznaczymy moment bezwładności elementu pręta o długości l względem jego osi, to energia kinetyczna pręta będzie równa:

$$\int_0^l \left(\frac{\varphi \xi}{l} \right)^2 \frac{\vartheta d\xi}{2} = \frac{1}{3} \frac{\varphi^2 \vartheta l}{2}.$$

Z otrzymanego wyniku wnosimy, że dla oznaczenia wpływu masy pręta na okres drgań krążka trzeba do momentu bezwładności krążka dodać jedną trzecią momentu bezwładności pręta.

Od rozpatrzonego najprostszego przypadku łatwo przejść do zadania bardziej złożonego, napolykanego w praktyce szczególnie często. Na końcach wału znajdują się krążki o momentach bezwładności Θ_1 i Θ_2 (rys. 390); mamy znaleźć częstość własnych drgań tego układu. Skoro skręcimy wał dwiema równymi i wprost przeciwnymi parami sił, a następnie pozostawimy układ samemu sobie, to krążki będą wykonywać drgania obrotowe około osi AB . Kierunki obrotu obu krążków będą przytem przeciwne, można przeto między nimi znaleźć taki przekrój wału mn , który przy drganiach pozostaje nieruchomym. Ten przekrój nazwiemy „przekrojem węzłowym“. Obie części wału, rozdzielone przekrojem węzłowym można uważać za utwierdzone w tym przekroju, a ich długość l_1 i l_2 znaj-



Rys. 390

dziemy z warunku, że okresy drgań obu części muszą być jednakowe. Wielkości tych okresów będą na podstawie wzoru (340) odpowiednio równe:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_1 l_1}{GI_p}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_2 l_2}{GI_p}}.$$

A zatem:

$$\sqrt{\frac{\Theta_1 l_1}{GI_p}} = \sqrt{\frac{\Theta_2 l_2}{GI_p}}, \quad \text{albo: } \Theta_1 l_1 = \Theta_2 l_2, \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{\Theta_2}{\Theta_1},$$

czyli przekrój węzłowy dzieli długość wału na części odwrotnie proporcjonalne względem momentów bezwładności krążków. Zważywszy, że $l_1 + l_2 = l$, otrzymamy:

$$l_1 = \frac{\Theta_2 l}{\Theta_1 + \Theta_2}, \quad l_2 = \frac{\Theta_1 l}{\Theta_1 + \Theta_2}.$$

Szukany okres własnych drgań układu T i ich częstość k określa przeto równania:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_1 \Theta_2 l}{GI_p (\Theta_1 + \Theta_2)}} \quad (341)$$

$$k = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GI_p (\Theta_1 + \Theta_2)}{\Theta_1 \Theta_2 l}} \quad (342)$$

Jako przykład liczbowy weźmiemy maszynę okrętową o potrójnej ekspansji i dzielności 3000 HP, wykonującą normalnie 75 obrotów na minutę. Wał ma długość 50 m i średnicę $d = 35$ cm. Spółczynnik sprężystości $G = 880000$ kg/cm². Ciężar śruby = 6480 kg, a odpowiadający promień bezwładności = 1 m. Ciężar korb maszyny = 4500 kg przy promieniu bezwładności 0,40 m. Ciężar innych poruszających się części maszyny, który trzeba dodać do ciężaru korb = 7750 kg. Odpowiadający promień bezwładności = 0,60 m.

Z tych danych wyznaczmy: moment bezwładności wszystkich obracających się części maszyny, sprowadzony do promienia 60 cm:

$$\Theta_1 = \frac{4500}{981} \cdot 40^2 + \frac{7750}{981} \cdot 60^2 = \frac{9750}{981} \cdot 60^2 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{sek}^2$$

i moment bezwładności śruby:

$$\Theta_2 = \frac{6480}{981} \cdot 100^2 = \frac{18000}{981} \cdot 60^2 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{sek}^2.$$

Stąd obliczymy liczbę własnych drgań układu na minutę:

$$n = \frac{60}{T} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{GI_p (\Theta_1 + \Theta_2)}{\Theta_1 \Theta_2 l}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{880000 \cdot 14700 \cdot 27750 \cdot 3600 \cdot 981}{9750 \cdot 18000 \cdot 3600^2 \cdot 5000}} = \sim 319.$$

Przy dokładniejszym obliczeniu okresu własnych drgań wypadnie uwzględnić następujące dwie okoliczności¹⁾:

1) Wał miewa zwykle przekrój zmienny. W takim przypadku zamiast rzeczywistej długości wału, trzeba będzie wziąć pewną długość fikcyjną l , którą otrzymamy, sprowadzając oddzielne części wału do jednej, zresztą dowolnej, wspólnej średnicy. Dajmy na to, że na wale znajduje się zgrubienie o średnicy D na długości a ; wskutek tego zgrubienia staje się wał sztywniejszym, jego kąt skręcenia przy jednym i tym samym momencie skręcającym będzie mniejszy, niż dla wału o stałej średnicy d . Kąty skręcenia są wprost proporcjonalne względem długości i odwrotnie proporcjonalne względem momentów bezwładności przekrojów poprzecznych, t. j. względem czwartej potęgi średnic, wobec czego sztywność wału się nie zmieni, jeżeli zamiast części o długości a i średnicy D wstawimy część o długości

$$a_1 = a \left(\frac{d}{D} \right)^4$$

i średnicy d . Tym sposobem można zawsze wał o zmiennym przekroju zastąpić pewnym wałem fikcyjnym o stałej średnicy.

2) Dla dokładniejszego obliczenia trzeba niekiedy uwzględnić masę samego wału i jego własny moment bezwładności Θ_0 . Uwzględniając wyrażenia dla l_1 i l_2 znajdziemy, że dla przybliżonej oceny wpływu masy wału trzeba zamiast Θ_1 i Θ_2 wstawić odpowiednio wielkości:

$$\Theta_1 + \frac{\Theta_0}{3} \frac{\Theta_2}{\Theta_1 + \Theta_2} \quad \text{i} \quad \Theta_2 + \frac{\Theta_0}{3} \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2} \quad (343)$$

¹⁾ Bardziej szczegółowe badanie drgań wałów znajdzie czytelnik w pracy autora: „O zjawiskach spółbrzmienia w wałach” (po ros.), Izw. Petersb. Polit. Inst. z r. 1905.

Dokładnym rozwiązaniem zadania drgania wału z dwoma krążkami zajmuje się praca autora: „O wymuszonych drganiach prętów przyzmatycznych” (po ros.), Izw. Kijew. Polit. Inst. z r. 1910.

Drganie wałów z trzema krążkami rozpatrzył Roth w Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. z r. 1904.

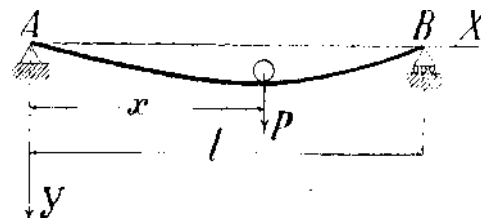
Wprowadziwszy tę poprawkę w naszym przykładzie, otrzymamy $n = 315$ zamiast 319. Skoro maszyna będzie wykonywać nie 75 lecz np. 78 lub 79 obrotów na minutę, to można oczekiwać powstania silnych drgań, ponieważ $79 \cdot 4 = 316$, a $78 \cdot 4 = 312$. Prędkość krytyczna będzie więc odpowiadać 78-u do 79-u obrotom na minutę. Zboczenie od prędkości krytycznej na 5 do 6 obrotów wystarcza zupełnie, jak wykazały doświadczenia Frahm'a, do zapewnienia spokojnego biegu maszyny.

Przy obliczeniach wałów maszyn okrętowych są zwykle wiadome naprzód: liczba obrotów wału, jego długość i rozmiary śruby. Średnicę wału trzeba dobrać tak, aby częstość własnych drgań wału nie była całkowitą wielokrotnością prędkości kątowej obrotu przy normalnym biegu maszyny. Niekiedy wypadnie w tym celu zmniejszyć średnicę wału i takie zmniejszenie rozmiarów, dzięki powstrzymaniu silnych drgań, obniża dodatkowo naprężenia dynamiczne, a wskutek tego zwiększa wytrzymałość wału.

§ 167. DRGANIE BELKI POD WPŁYWEM RUCHOMEGO OBCIĄŻENIA

Przy obliczeniach belek mostowych, podlegających działaniu ciężarów ruchomych, wyznacza się zwykle naprężenia statycznie, t. zn. przyjmuje się, że z jednego położenia w drugie przechodzi obciążenie z prędkością nieskończenie małą. Zachodzi tedy pytanie, o ile różnią się naprężenia, otrzymane tą drogą od rzeczywistych i jak na ich wielkość wpływa prędkość ruchu obciążenia? To zagadnienie nie ma dotąd zupełnego rozwiązania, atoli wpływ niektórych czynników wyjaśniono już w dostatecznej mierze. Tutaj rozpatrzmy wpływ sił bezwładności toczącego się ciężaru i wpływ drgania belki. Jeżeli poruszający się ciężar jest znaczny w porównaniu do ciężaru belki, to w pierwszym przybliżeniu można masę belki pominąć i wziąć w rachubę tylko siły bezwładności ruchomego ciężaru P (rys. 391). Przy nieskończenie małej prędkości ruchu będą siły bezwładności też nieskończenie małe i ugięcie pod obciążeniem można wyznaczyć według znanego wzoru (§ 78):

$$y = \frac{P(lx - x^2)^2}{3EI} \quad (a)$$



Rys. 391

W pierwszym przybliżeniu¹⁾ można przyjąć, że i przy skończonej prędkości ruchu v m/sek będzie rów. (a) określać tor ruchu ciężaru P . W takim razie łatwo obliczyć dodatkowy nacisk ciężaru na belkę, uwarunkowany siłami bezwładności. Wyrażenie dla pionowej składowej sił bezwładności ma postać:

$$Q = -\frac{P}{g} \frac{d^2 y}{dt^2},$$

albo, zważywszy, że $x = vt$ i wstawiwszy wartość (a) za y :

$$Q = -\frac{Pv^2}{g} \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Pv^2}{g} \frac{2P}{3EI} (l^2 - 6lx + 6x^2).$$

Największą wartość sił bezwładności otrzymamy dla środka rozpiętości, t. j. dla $x = \frac{l}{2}$, a mianowicie:

$$Q_{\max} = \frac{Pv^2}{g} \cdot \frac{Pl}{3EI}.$$

Całkowity nacisk ciężaru na belkę w tym miejscu będzie równy:

$$P + Q = P \left(1 + \frac{v^2 Pl}{3EIg} \right) = P \left(1 + \frac{16v^2}{l^2} \cdot \frac{f_{st}}{g} \right) = P \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \quad (344)$$

przyczem:

$$f_{st} = \frac{Pl^3}{48EI}, \quad \text{zaś} \quad \frac{1}{\beta} = \frac{16v^2}{l^2} \cdot \frac{f_{st}}{g}.$$

Przy zwykłych wartościach prędkości v i dopuszczalnych u mostów wielkościach stosunku $f_{st}:l$, jest wartość $\frac{1}{\beta}$ mała i wzór (344) określa dość dokładnie wpływ sił bezwładności toczącego się ciężaru.

¹⁾ Odpowiadające przybliżone rozwiązanie podał pierwszy prof. Willis, który się zajmował kwestją drgań mostów w r. 1846 w sławnej angielskiej komisji dla prób żelaza. Szczegółowe traktowanie zadania w tej postaci znajdzie czytelnik w kursie teorii sprężystości Clebsch'a, przełożonym przez de S.-Venanta, str. 597.

Pierwsze dokładne rozwiązanie zadania o odkształceniu belki pozbawionej masy pod wpływem ciężaru toczącego się po niej podał angielski uczoney G. G. Stokes¹⁾. Na podstawie tego rozwiązania można napisać następujący wzór przybliżony dla nacisku, wywarłego przez obciążenie w środku rozpiętości:

$$P + Q = P \left(1 + \frac{1}{\beta - 3} \right) \quad (345)$$

Jeżeli obciążeniem, poruszającym się po belce, jest oś lokomotywy lub wozu, to oprócz ciężaru własnego osi z kołami P trzeba uwzględnić nacisk P_1 , przeniesiony na oś przez sprężyny. Ten nacisk można uważać z wystarczającym przybliżeniem za stały nie zmieniający się wskutek ugięcia belki. Wtedy nacisk osi na belkę określi wyrażenie:

$$P_1 + P \left(1 + \frac{1}{\beta - 3} \right).$$

Wielkość P_1 jest zwykle kilkakrotnie większą od P , wobec czego nawet przy małych wartościach β okazuje się wpływ sił bezwładności nieznacznym. Według obliczeń Zimmermann'a dodatkowy nacisk, uwarunkowany siłami bezwładności, w najniekorzystniejszym przypadku (przy prędkości 100 km/godz i wysokości belki 30 cm) nie przekracza 14% nacisku statycznego.

Przyjawszy w przybliżeniu, że rów. (a) przedstawia tor poruszającego się ciężaru, można drogą elementarną ocenić także i wpływ masy belki. Tutaj ograniczymy się do podania ostatecznego wyniku dla wartości największego momentu zginającego²⁾:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} \left(1 + \frac{1}{\beta - 3} \right) + \frac{Ql}{8} \left(1 + \frac{5}{4} \frac{1}{\beta} \right) \quad (346)$$

Pierwsza część tego wyrażenia przedstawia moment zginający, wywołany działaniem toczącego się ciężaru, druga zaś daje moment zginający wskutek ciężaru własnego belki Q .

Otrzymane wzory uwzględniają wpływ przyczyn dynamicznych tylko w tym przypadku, kiedy ciężar belki jest mały w porównaniu do ciężaru poruszającego się na niej. Z powiększeniem rozpiętości belki rośnie szybko wpływ jej ciężaru własnego i u mostów o większej rozpiętości ma ciężar własny większe znaczenie, niż ciężar ruchomy. W tym drugim skrajnym przypadku można, dla otrzymania przybliżonego rozwiązania, pominąć siły bezwładności ciężaru ruchomego i sprowadzić zadanie do badania drgań belki pod wpływem sił zmiennych³⁾. Dla ocenienia warunków, przy których drgania wymuszone mogą osiągnąć znaczną wielkość, jest nader ważną znajomość okresu podstawowych drgań belki, który można znaleźć metodą przybliżoną, wyłożoną w § (162). Jeżeli belka ma przekrój stały, to okres jej drgań oblicza się według wzoru (335). Przy pomocy tego wzoru zestawiliśmy w poniższej tablicy okresy drgań T dla różnych rozpiętości mostu. Przy obliczeniach wyznaczono ciężar mostu według tablic dla ciężaru własnego mostów kolejowych⁴⁾, wysokość belek przyjęto równą 0,1 rozpiętości, a naprężenie dopuszczalne 800 kg/cm². Wpływu odkształcenia kraty na ugięcie mostu nie uwzględniono, wobec czego obliczone wartości T będą prawdopodobnie mniejsze od rzeczywistych.

Rozpiętość mostu l (w metrach)	10	20	40	60	80	100
Okres drgań podstawowych T (w sek.)	0,046	0,079	0,129	0,181	0,226	0,270
Wartość α dla $v = 10$ m/sek	0,023	0,020	0,016	0,015	0,014	0,0135
Wartość α dla $v = 30$ m/sek	0,069	0,060	0,048	0,045	0,042	0,040

¹⁾ „Discussion of a differential equation relating to the breaking of Railway Bridges“. Math. and Phys. Papers, v. II, str. 179.

Rozwiązanie tegoż samego zadania pojawiło się pięćdziesiąt lat później w często cytowanej pracy Dra Zimmermann'a: „Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last“.

Inne rozwiązanie przy pomocy rachunku różnic skończonych znajduje się w interesującej pracy N. P. Petrowa: „Wpływ postępowej prędkości koła na naprężenia w szynie“ (po ros.). Zap. Imp. Russk. Techn. Ob-a z r. 1903.

Ob. także następujące prace autora: „K' woprosu o procznosti rels“, Sborn. Inst. Inż. Put. Soobszcz. z r. 1915 i „K' woprosu o wibraciach rels“, Izv. Elektrot. Inst. z r. 1915.

²⁾ Szczegółowy wywód można znaleźć w przytoczonej powyżej książce Clebsch'a, str. 609.

³⁾ Już Stokes zauważył, że ruch ciężarów musi wywołać w belce drgania. Do wyznaczenia tych drgań zastosował metodę przybliżoną, wyłożoną w dodatku do pracy powyżej cytowanej.

Dokładne rozwiązanie zagadnienia drgań belki w przypadku, gdy można pominąć masę toczącego się ciężaru, podał A. N. Kryłow w pracy: „Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben“, Math. Annalen, Bd. 61.

Inną metodą traktuje ten problem praca autora: „O wymuszonych drganiach prętów przyrównanych“ (po ros.). Tam też rozpatrzono kwestję wpływu przeciwwag na drgania mostów.

⁴⁾ „Der Brückenbau“, Handb. d. Ingenieurwissensch. II Bd. 2 Abt., str. 6.

Amplituda drgań wzbudzonych przez ruch ciężaru po belce będzie zależec od prędkości ruchu. Największa amplituda powstaje w przypadku spółbrzmienia, gdy czas, potrzebny do przebieżenia przez ciężar rozpiętości mostu, równa się połowie okresu drgań podstawowych, t. j. gdy:

$$T = \frac{2l}{v}$$

Z naszej tablicy widać, że przy stosowanych obecnie prędkościach pociągów jest zjawisko spółbrzmienia wykluczone, po nieważ stosunek

$$\alpha = T : \frac{2l}{v}$$

jest małym ułamkiem. Obliczenia wykazują, że w przypadku poruszającego się ciężaru można stosunek ugięcia dynamicznego do statycznego z dostateczną dokładnością przedstawić równaniem:

$$f_d = f_{st}(1 + \alpha) = f_{st} \left(1 + \frac{Tv}{2l} \right) \quad (347)$$

Biorąc pod uwagę zwykłe wartości α , widzimy, że przyrost ugięcia, wywołany szybkim ruchem ciężarów, jest niewielki. O wiele większy wpływ na rozkołysanie mostu mogą okazać przeciwwagi kół lokomotywy. Jeżeli obrót koła dokonywa się w przedziale czasu, równym okresowi T drgań podstawowych, to zajdzie zjawisko spółbrzmienia i powstaną silne drgania. (W najniekorzystniejszych przypadkach może amplituda drgań wymuszonych, z pominięciem oporów, osiągnąć wartość 15 do 25 razy większą od ugięcia $Pl^2/48EI$, przyczem P oznacza siłę bezwładności przeciwwagi. U szybkobieżnych lokomotyw dochodzi P do 5t). W przypadku mostów drogowych mogą powstać znaczne drgania przy przemarszu oddziałów piechoty miarowym krokiem. Tutaj okres zmiany obciążenia jest równy czasowi, odpowiadającemu jednemu krokowi i zjawisko spółbrzmienia może zajść u mostów z dłuższym okresem drgań własnych. Takie warunki mamy zwłaszcza w mostach wiszących.

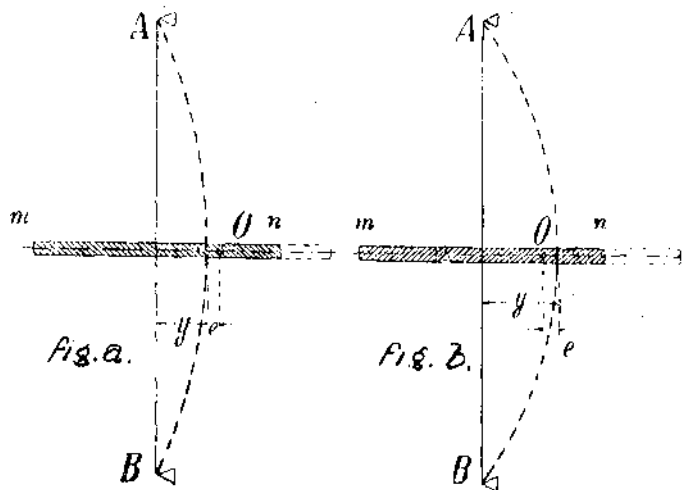
Oprócz naprężeń dodatkowych, uwarunkowanych drganiami mostu, wypada uwzględnić także i wpływ innych przyczyn dynamicznych. Większe znaczenie, osobiwie dla mostów o małej rozpiętości, mogą mieć uderzenia kół na stykach szyn, uderzenia wskutek nierównego zużycia obręczy i nierówności toru. Tych kwestyj niepodobna rozwiązać drogą czysto teoretyczną; tutaj są niezbędne równoległe badania doświadczalne nad drganiami mostów przy przejeździe pociągów i nad zmianami w naprężeniach oddzielnych części składowych. Takich doświadczeń mamy dotąd bardzo niewiele; zbyt mało aby w zadowalający sposób ocenić wpływ rozlicznych przyczyn dynamicznych na naprężenia.

§ 168. PRĘDKOŚĆ KRYTYCZNA DLA GIĘTKIEGO WAŁU LAVAL'A

Teoria giętkich wałów obudziła szczególne zainteresowanie dzięki szerokiemu rozpowszechnieniu turbin parowych w rozlicznych dziedzinach techniki. Wielkie prędkości kątowe wywołały cały szereg oryginalnych konstrukcyj, do których należy i giętki wał Laval'a. Nawet przy najdokładniejszym sporządzeniu może środek ciężkości zbaczać od osi obrotu i przy obliczeniu trzeba uwzględnić siły bezwładności zginające wał. Przy wielkich prędkościach kątowych rośnie wpływ tych sił i już małe niedokładności mogą być przyczyną bardzo znacznych naprężeń dodatkowych. Dla przykładu weźmiemy koło turbiny o średnicy 760 mm i prędkości obwodowej 420 m/sek. Jeżeli na obwodzie umieścimy dodatkową masę 0,1 kg, to odpowiadającą jej siłą odśrodkową będzie:

$$P = \frac{0,1}{9,81} \cdot \frac{420^2}{0,38} = 5000 \text{ kg.}$$

Jak widzimy, drobna niedokładność wykonania może pociągnąć za sobą bardzo niebezpieczne naprężenia. Wprowadzenie do praktyki giętkich wałów usuwa to niebezpieczeństwo i umożliwia osiągnięcie spokojnego ruchu maszyny przy olbrzymich prędkościach. Rozważmy następujący najprostszyp przypadek: Na wał AB (rys. 392), podparty w punktach A i B , osadzono w środku krążek mn . Środek ciężkości krążka O nie leży na osi obrotu AB , a jego mimośród równa się e . Przy obrocie koła będzie zatem wał narażony na zgięcie siłą odśrodkową:



Rys. 392

$$P = m(y + e)\omega^2 \quad (a)$$

jeżeli oznaczymy przez y ugięcie wału w środku rozpiętości, a przez m masę koła. (Masę wału pomijamy jako małą w porównaniu do masy koła). Ugięcie y da się wyrazić, w zależności od wielkości zginającej siły i rozmiarów wału, równaniem:

$$y = \alpha P,$$

przyczem

$$\alpha = \frac{l^3}{48 EI} \text{ w przypadku podparcia końców wału, a}$$

$$\alpha = \frac{l^3}{192 EI} \text{ w przypadku utwierdzenia końców.}$$

Po wstawieniu wartości $y = \alpha P$ w rów. (a), znajdziemy:

$$y = \frac{\alpha m e \omega^2}{1 - \alpha m \omega^2} \dots \dots \dots (b)$$

Przy małej wartości ω powstaną zatem małe ugięcia, którym będą odpowiadać małe naprężenia. Wielkość ugięcia rośnie jednak szybko z przybliżeniem mianownika w wyrażeniu (b) do zera, dla

$$1 - \alpha m \omega^2 = 0$$

wypada ugięcie nieskończenie wielkie. Ten wynik wskazuje na szczególne niebezpieczeństwo przy prędkości

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{1}{\alpha m}} \dots \dots \dots (348)$$

zwanej „prędkością krytyczną“. Aby przy stopniowym zwiększaniu prędkości przy doświadczeniach przekroczyć wartość krytyczną, trzeba budować osobne urządzenia w celu zapobieżenia pojawieniu się silnych drgań poprzecznych. Czasem jednego obrotu przy prędkości krytycznej będzie:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots \dots \dots (349)$$

Tutaj oznacza l ugięcie wału, jakieby powstało w jego poziomym położeniu pod wpływem ciężaru własnego koła turbinowego. A zatem prędkość krytyczna jest równa częstości wahań wahadła matematycznego o długości równej ugięciu wału, albo równa się częstości swobodnych drgań poprzecznych wału z kołem osadzonym w środku. Dochodzimy tedy do następującego wniosku: Ażeby wyznaczyć liczbę obrotów n , przy której wał doznaje silnych drgań, czyli zaczyna „bić“, trzeba ułożyć wał wraz z kołem osadzonym w środku poziomo na dwu podporach i wywołać w jakikolwiek sposób drgania poprzeczne. Liczba tych drgań na minutę będzie właśnie równa liczbie obrotów n , przy której wał „bije“. Zjawiska odpowiadające prędkości krytycznej można przeto rozpatrywać jako drgania wymuszone pod wpływem sił bezwładności niezrównoważonych mas. Skoro osiągnięto prędkość krytyczną, to nawet najbardziej wytrzymały wał musiałby ulec zniszczeniu, gdyby nie było oporów przeszkadzających bocznym drganiom. Jeżeli przejdzie poza prędkość krytyczną, to, jak wykazuje doświadczenie, można znowu otrzymać spokojny ruch; wał przestaje „bić“. Okazuje się, że w tych warunkach leży środek ciężkości koła turbinowego nie tak, jak przyjęliśmy na fig. (a), lecz między osią geometryczną a linią wygięcia wału (fig. b). Odpowiadającym wyrażeniem dla siły odśrodkowej jest:

$$P = m(y - e)\omega^2.$$

Ugięcie wyznaczmy z równania:

$$y = \alpha P = \alpha m(y - e)\omega^2, \text{ a więc } y = \frac{\alpha m e \omega^2}{\alpha m \omega^2 - 1} = \frac{e}{1 - \frac{1}{\alpha m \omega^2}},$$

albo na podstawie wzoru (348):

$$y = \frac{e}{1 - \left(\frac{\omega_{kr}}{\omega}\right)^2}.$$

Ten wzór jest ważny dla prędkości większych od krytycznej. Jak widać, zwiększenie prędkości pomniejsza wygięcia, które zdążają do granicy $y = e$; czyli środek ciężkości koła zdąża do zajęcia położenia na osi geometrycznej wału. Sam wał będzie opisywać po zgięciu pewną powierzchnię obrotową. Że ta postać ruchu, ustalająca się przy prędkościach większych od krytycznej jest trwałą, czyli stateczną, przekonano się drogą doświadczalną i wykazano analitycznie¹⁾. Korzyść z zastosowania giętkiego wału staje się teraz jasną, albowiem ugięcia y są tem mniejsze, im mniejszą wartość ma stosunek $\omega_{kr} : \omega$; pomniejszamy zaś tę wartość, zmniejszając licznik, a więc zmniejszając sztywność wału.

Jeżeli na nieważkim wale osadzono dwa krążki (koła), to otrzymamy dwa różne typy drgań poprzecznych i odpowiednio do tego można znaleźć dwie wartości krytycznej prędkości kątowej. Z powiększeniem liczby krążków staje się badanie kwestji prędkości krytycznych coraz trudniejszym, wobec czego w praktyce używają albo formuły empirycznej Dunkerley'a²⁾, albo przybliżonej metody wykreślnej³⁾. Według Dunkerley'a krytyczną prędkość kątową ω określa przy obecności kilku krążków równanie:

$$\frac{1}{\omega^2} = \sum_{i=1,2,3,\dots} \frac{1}{\omega_i^2} \quad \dots \quad (c)$$

w którym oznacza ω_i krytyczną prędkość kątową, obliczoną dla przypadku, kiedy na wale znajduje się tylko krążek odróżniony wskaźnikiem i . Sumowanie odnosi się oczywiście do wszystkich krążków⁴⁾.

W poprzedzających rozważaniach przyjmowaliśmy oś wału jako pionową i tym sposobem wyklucziliśmy wpływ własnego ciężaru krążka na zjawisko „bicia”. Jeżeli dla poziomego położenia osi wału ocenimy wpływ ciężaru własnego krążka to otrzymamy dla ω_{kr} wartości mniejsze, aniżeli znaleziono przy pionowym położeniu wału⁵⁾.

Okazemy to na przypadku jednego krążka osadzonego z mimośrodem e . Wskutek działania ciężaru własnego punkt O , w którym skupiamy masę krążka m (rys. 393) nie będzie opisywać koła, ecz krzywą bardziej złożoną. Do obrotu ze stałą prędkością kątową przybywa jeszcze ruch punktu O w kierunku promienia.

Przy ustawieniu równania różniczkowego ruchu punktu O w kierunku Y trzeba będzie dla sił bezwładności napisać wyrażenie:

$$-m \frac{d^2 y}{dt^2} + m \omega^2 (y + e).$$

Wtedy stosując zasadę d'Alembert'a i rzutując wszystkie siły działające na punkt O na kierunek osi Y , otrzymamy:

$$-m \frac{d^2 y}{dt^2} + m \omega^2 (y + e) + mg \cos \omega t - \frac{y}{\alpha} = 0,$$

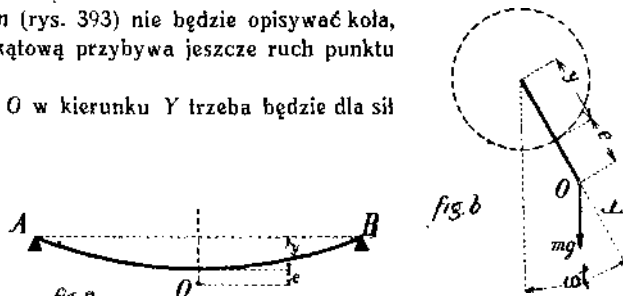
a stąd: $\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2 \right) y = g \cos \omega t + \omega^2 e.$

Otrzymaliśmy przeto równanie różniczkowe dla drgań wymuszonych na osi Y . Czynniki

$$\frac{1}{m\alpha} - \omega^2$$

przedstawia kwadrat częstości drgań własnych układu, zaś wielkość ω częstość siły wymuszającej drgania. Zjawisko współbrzmienia, odpowiadające biciu wału, powstanie, jeżeli

$$\frac{1}{m\alpha} - \omega^2 = \omega^2,$$



Rys. 393

¹⁾ Ob. A. Föppl, Vorles. üb. technische Mechanik, Bd. IV;

F. Klein u. A. Sommerfeld, „Theorie des Kreisels“, Heft 4, § 9.

²⁾ Phil. Trans. Lond. Soc., t. 185, str. 270.

³⁾ Ob. A. Stodola, Die Dampfturbinen, wyd. 4, str. 301.

⁴⁾ Wzór (c) sprawdzili doświadczalnie z dostateczną dokładnością Dunkerley i Stodola; ob. Die Dampfturbinen, str. 306.

Teoretycznym badaniem wartości krytycznych prędkości przy kilku krążkach zajmuje się praca C. Chree w Phil. Mag. z r. 1904, str. 504.

W sprawie rozwiązania tegoż zagadnienia przy pomocy metody Ritz'a ob. pracę autora: „Woprosy procznosti w parowych turbinach“, Wiestn. Ob-a Technologow z r. 1912.

⁵⁾ Ob. artykuł w Engineering z r. 1916, str. 152, 197.

a stąd

$$\omega_{kr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{m a}} \quad (348)$$

Z porównania z wzorem (348) wnosimy, że przy poziomem położeniu osi wału zmniejsza się wartość ω_{kr} w stosunku $1:\sqrt{2}$, w porównaniu z wartością dla położenia pionowego.

§ 169. KRYTYCZNA PRĘDKOŚĆ KĄTOWA DLA WAŁU NIEOBCIĄŻONEGO

Jeżeli przyjmiemy, że środek ciężkości każdego przekroju poprzecznego wału leży na geometrycznej osi obrotu, to niema przyczyn zewnętrznych, któreby mogły wywołać skrzywienie wału. W celu wyznaczenia krytycznej wartości prędkości kątowej postąpimy nieco inaczej, niż w poprzednim paragrafie. Zaczniemy od rozpatrzenia poprzecznych drgań wału. Dopóki wał się nie obraca, to stawia opór wszelkim siłom zginającym; skoro go odchylimy z położenia równowagi i następnie pozostawimy samemu sobie, to wykonywa drgania około położenia równowagi, a częstość drgań będzie tem większa, im większą jest sztywność wału przy jednym i tym samym ciężarze własnym. Sztywność przy zginaniu mierzy wartość sił dążących do przywrócenia początkowej postaci równowagi wału. Jeżeli podczas obrotu wału z dowolną stałą prędkością wygnieśmy go nieco i pozostawimy samemu sobie, to dopóki prędkość kątowa jest mniejsza od krytycznej, wykona wał szereg drgań poprzecznych i po ich wygaśnięciu przybierze napowrót postać prostolinjową, przyczem jednakże siła, dążąca do przywrócenia tej postaci, niejako słabnie. To zjawisko tłumaczy się wpływem siły odśrodkowej, działającej na masę zgiętego wału. Na każdy element wału o długości dx odchylonej od pierwotnego położenia o y , przypada siła odśrodkowa $\frac{q}{g} \omega^2 y dx$, jeżeli q oznacza ciężar jednostki długości wału. (Przekrój wału przyjmujemy stały). Wał okazuje się jakby narażonym na obciążenie ciągłe, proporcjonalne w każdym przekroju względem wielkości ugięcia. Powiększając prędkość kątową obrotu, zwiększamy zarazem natężenie tego ciągłego obciążenia. Ostatecznie dojdziemy do takiej prędkości, że siły bezwładności wystarczą do zrównoważenia sił sprężystości i wał pozostanie trwale w stanie wygiętym. Odpowiadająca temu prędkość będzie krytyczną, ponieważ przy niej wszelka przypadkowa przyczyna może za sobą pociągnąć silne skrzywienie wału. Aby znaleźć prędkość krytyczną ustawimy równanie różniczkowe wygiętej osi wału w postaci (151) z § (96):

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{g} \omega^2 y.$$

Ogólną całką tego równania będzie:

$$y = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x} + C \sin \alpha x + D \cos \alpha x,$$

przyczem

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{q \omega^2}{EI g}} \quad (350)$$

Szukajmy tych wartości α , a więc i ω , przy których będą spełnione warunki na końcach wału, t. j.:

$$\text{dla } x=0; \quad y=0 \quad \text{i} \quad \frac{d^2 y}{dx^2}=0; \quad \text{dla } x=l; \quad y=0 \quad \text{i} \quad \frac{d^2 y}{dx^2}=0,$$

ponieważ przyjęliśmy swobodne podparcie końców. Na wyznaczenie stałych dowolnych mamy warunki:

I) $A + B + D = 0,$

II) $A \alpha^2 + B \alpha^2 - D \alpha^2 = 0,$

III) $A e^{\alpha l} + B e^{-\alpha l} + C \sin \alpha l + D \cos \alpha l = 0,$ IV) $A \alpha^2 e^{\alpha l} + B \alpha^2 e^{-\alpha l} - C \alpha^2 \sin \alpha l - D \alpha^2 \cos \alpha l = 0.$

Z I-go i II-go warunku wynika, że $D = 0, A = -B$. Aby uczynić zadość warunkowi III-mu i IV-mu, trzeba przyjąć:

$$A = -B = 0; \quad \sin \alpha l = 0 \quad (a)$$

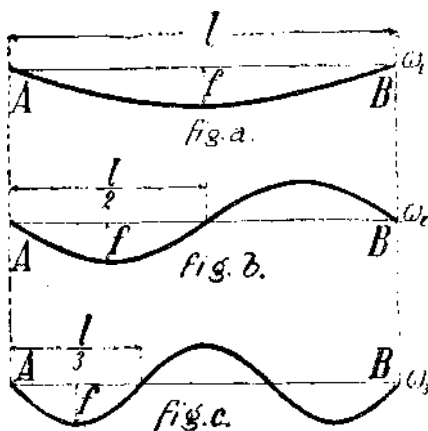
Otrzymany warunek (a) pozwala nam określić tę wartość α , przy której staje się możliwą zgiętą postać równowagi wału. Najmniejszą odpowiadającą wartość prędkości kątowej otrzymamy, kładąc $\alpha = \frac{\pi}{l}$. Po podstawieniu tej wartości w rów. (350) znajdziemy:

$$\omega_{kr} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI g}{q}} \quad (351)$$

Odpowiadający okres jednego obrotu wału równa się:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{kr}} = 2\pi \frac{l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{q}{EI g}}$$

Otrzymany wynik jest zgodny z wzorem (335)', a więc i w tym przypadku jest prędkość krytyczna identyczną z częstością poprzecznych drgań wału. Jeżelibyśmy w rów. (a) podstawili kolejno $\alpha = \frac{2\pi}{l}, \frac{3\pi}{l}, \dots$, to otrzymalibyśmy inne formy zgięcia (rys. 394), odpowiadające wyższym typom poprzecznych drgań.



Rys. 394

Każdej takiej postaci odpowiada właściwa prędkość krytyczna, a stosunek kolejnych prędkości będzie następujący:

$$\omega_{1kr} : \omega_{2kr} : \omega_{3kr} = 1 : 4 : 9.$$

Zwiększając stopniowo prędkość obrotu, można podczas doświadczenia zaobserwować różne typy drgań przy odpowiadających krytycznych prędkościach.

Jeżeli na wale znajduje się szereg krążków, to przy ich równomiernym rozłożeniu wzdłuż wału można całą masę krążków rozłożyć na długości wału i przy obliczeniu krytycznej prędkości użyć wzorów, wyprowadzonych dla wału o stałej średnicy (wz. 351). Trzeba tylko pamiętać, że krążki, zwiększając masę wału, nie powiększają jego sztywności¹⁾.

§ 170. O NAPRĘŻENIACH PRZY UDERZENIU

Przy rozpatrywaniu zagadnień statyki przyjmowaliśmy, że siły działające wzrastają od zera do swej końcowej wartości tak, że w każdej chwili zachodzi równowaga między siłami zewnętrznymi, a wewnętrznymi siłami sprężystości. Tylko wśród takich warunków dane obciążenie nie wywoła w układzie sprężystym drgań i towarzyszących im dodatkowych naprężeń. W rzeczywistości części składowe technicznych konstrukcyj są narażone nie tylko na obciążenia, działające statycznie, lecz także podlegają często nagłemu działaniu sił i doznają uderzeń. Naprężenia, wywołane temi przyczynami osiągają nieraz wielkość bardzo znaczną i należy je wziąć w rachubę. Zacniemy od wyznaczenia odkształceń i naprężeń, wywołanych uderzeniem w prętach, t. j. ciałach, których dwa wymiary można uważać za małe w porównaniu do trzeciego. Odnośne zadania rozwiązują się w bardzo prosty sposób w przypadku, gdy można pominąć masę pręta, a zatem i odpowiadające jej siły bezwładności²⁾. Tylko dzięki wpływowi sił bezwładności działanie, wywarłe na dowolny punkt pręta, przenosi się na inne punkty nie w tej samej chwili, lecz potrzebuje do przeniesienia pewnego skończonego przedziału czasu. Jeżeli pominiemy masę pręta, co można uczynić w przypadku, gdy ta masa jest małą wobec masy uderzającego ciała, to zagadnienie sprowadza się łatwo do zadania statycznego, a mianowicie do szukania odkształceń pręta pod wpływem siły działającej na miejsce uderzenia. Wielkość tej siły będzie w każdej chwili proporcjonalna względem odkształceń przez nią wywołanych, przy założeniu, że naprężenia przy uderzeniu nie przekraczają granicy sprężystości. Sposób wyznaczenia odpowiadających naprężeń przedstawimy na przykładach szczegółowych.

Pionowy pręt AB (rys. 395) o długości l , utwierdzony górnym końcem, jest narażony na uderzenie ciężarem Q spadającym swobodnie (bez oporów) wzdłuż osi pręta. W chwili zetknięcia ciężaru z głową mn , umieszczoną w dolnym końcu pręta (początek uderzenia) będzie prędkość ciężaru równa się:

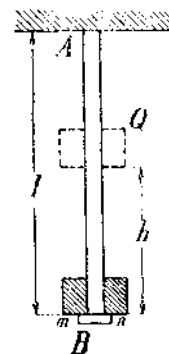
$$v = \sqrt{2gh}.$$

Dalszemu swobodnemu ruchowi spadającego ciężaru przeszkadza głowa mn . Nacisk wywarły przytem przez ciężar na głowę będzie rozciągać pręt tak długo, aż prędkość ciężaru stanie się równą zeru. Łatwo obliczyć odpowiadające tej chwili największe wydłużenie λ . W tym celu trzeba pracę siły ciężkości, działającej na Q , przyrównać do energii potencjalnej, nagromadzonej w pręcie AB przy jego wydłużeniu o λ . A zatem:

$$Q(h + \lambda) = \frac{\lambda^2 EF}{2l}.$$

Rozwiązując otrzymane równanie względem λ , znajdujemy:

$$\lambda = \lambda_{st} + \sqrt{\lambda_{st}^2 + 2\lambda_{st}h} \quad \dots \quad (352)$$



Rys. 395

¹⁾ Kwestję oporu girostatycznego krążków rozpatruje Stodola w dziele: Die Dampfturbinen, wyd. 4-e, str. 288 i 298.

²⁾ Badanie uderzenia w tem pierwszym przybliżeniu znajduje się już w następujących dziełach:

Th. Young, „A course of lect. on natural philosophy“, r. 1807, str. 135.

L. V. Poncelet, „Introd. à la mécanique industrielle“, wyd. III z r. 1870, str. 418.

Tutaj oznacza λ_{st} wielkość $Ql:EF$, przedstawiającą statyczne wydłużenie pręta AB pod działaniem ciężaru Q . Jeżeli wysokość spadania wyrazimy przez prędkość v , której nabywa ciężar na początku uderzenia, to równ. (352) można przedstawić w postaci:

$$\lambda = \lambda_{st} + \sqrt{\lambda_{st}^2 + \lambda_{st} \frac{v^2}{g}} \quad (352)'$$

Gdy w szczególności $v = 0$, to wzór powyższy daje $\lambda = 2\lambda_{st}$, t. j. ciężar działający nagle (ale bez uderzenia) wywołuje wydłużenie dwa razy większe od tego, jakie odpowiada położeniu równowagi. Ten wynik otrzymaliśmy już pierwej w § (21).

Wyznamy teraz wielkość naprężeń rozciągających p_{max} , które odpowiadają największemu wydłużeniu λ :

$$p_{max} = \frac{\lambda}{l} E.$$

Podstawiając za λ wartość z (352)', a zamiast λ_{st} wielkość $Ql:EF$, znajdziemy:

$$p_{max} = \frac{Q}{F} + \sqrt{\left(\frac{Q}{F}\right)^2 + \frac{QE}{Fl} \frac{v^2}{g}} \quad (353)$$

Wielkość naprężeń zależy, jak widzimy, nie tylko od pola przekroju poprzecznego pręta, lecz także od jego długości. Im większa jest długość l , tem mniejsze będą naprężenia przy uderzeniu. Przy znacznej wysokości spadku h można pominąć wielkość λ_{st} wobec h , a wtedy dla największego wydłużenia otrzymamy wzór:

$$\lambda = \sqrt{2\lambda_{st}h} = \sqrt{\lambda_{st} \frac{v^2}{g}} \quad (354)$$

Odpowiadającym naprężeniem będzie:

$$p'_{max} = \frac{E\lambda}{l} = \sqrt{\frac{QE}{Fl} \frac{v^2}{g}} \quad (355)$$

Jeżeli przez R nazwiemy dopuszczalne ciągnięcie, to z wzoru (355) znajdziemy łatwo tę graniczną wartość energii kinetycznej ciała uderzającego, przy której naprężenie osiąga wielkość dopuszczalną, a mianowicie:

$$\frac{Qv^2}{2g} = \frac{R^2 Fl}{2E} \quad (356)$$

Graniczna wartość energii kinetycznej uderzającego ciała jest przeto (w przybliżeniu) proporcjonalną względem objętości pręta narażonego na podłużne uderzenie i nie zależy od stosunku jego wymiarów.

Rozpatrzmy teraz przypadek zgięcia. Na pręt w obu końcach podparty spada ciężar Q z wysokości h . Dla uproszczenia przyjmujemy, że miejscem uderzenia jest środek rozpiętości i że zgięcie pod wpływem uderzenia zachodzi w jednej z płaszczyzn głównych. Niechaj f_d oznacza wartość największego ugięcia przy uderzeniu (strzałka dynamiczna). Temu ugięciu odpowiada nacisk spadającego ciężaru Q równy:

$$P = \frac{48EI f_d}{l^3}.$$

Energją potencjalną pręta, odpowiadającą ugięciu f_d , będzie:

$$V = \frac{P f_d}{2} = \frac{24EI f_d^2}{l^3}.$$

Jeżeli pominiemy masę pręta, to w chwili największego jego ugięcia całkowita praca ciężkości spadającego ciężaru zamieni się oczywiście w energję potencjalną odkształconego pręta. Do wyznaczenia f_d otrzymamy wtedy równanie:

$$Q(h + f_d) = \frac{24EI}{l^3} f_d^2,$$

z którego:

$$f_d = \frac{Ql^3}{48EI} + \sqrt{\left(\frac{Ql^3}{48EI}\right)^2 + \frac{2Ql^3 h}{48EI}} = f_{st} + \sqrt{f_{st}^2 + f_{st} 2h}.$$

Znaleziony wzór ma tę samą postać, co formuła (352), otrzymana dla pręta narażonego na uderzenie podłużne¹⁾. Znając wielkość strzałki dynamicznej, znajdziemy łatwo i odpowiadającą wartość największego naprężenia. Największym momentem zginającym w środku pręta będzie:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} = f_d \frac{12EI}{l^2},$$

a zatem:

$$p_{\max} = \frac{12f_d EI}{l^2 W} = \frac{12Eaf_d}{l^2}.$$

Tutaj oznacza a odległość włókna skrajnego od osi obojętnej. Jeżeli wysokość h spadku ciężaru jest wielka wobec ugięcia statycznego, to dla największego ugięcia otrzymamy dość dokładną wartość z wzoru:

$$f_d = \sqrt{2f_{st}h} = \sqrt{\frac{Ql^3}{48EI} \frac{v^2}{g}}.$$

Odpowiadające największe naprężenie określi równanie:

$$p'_{\max} = \frac{12aE}{l^2} \sqrt{\frac{Ql^3}{48EI} \frac{v^2}{g}}. \quad (357)$$

Gdy przez R oznaczymy wielkość naprężenia dopuszczalnego przy zgięciu, to z wzoru (357) znajdziemy graniczną wartość dla energii kinetycznej spadającego ciężaru Q :

$$\frac{Qv^2}{2g} = \frac{R^2 Il}{6Ea^2}.$$

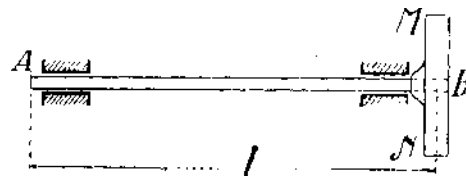
W przypadku przekroju prostokątnego będzie:

$$\frac{Qv^2}{2g} = \frac{R^2 Fl}{18E}. \quad (358)$$

przyczem F oznacza pole przekroju. Znaleźliśmy więc znowu, że graniczna wartość energii kinetycznej spadającego ciężaru jest proporcjonalna względem objętości pręta narażonego na uderzenie.

Znaczenie uderzenia przy skręcaniu objaśnimy na następującym prostym przykładzie. Koło zamachowe MN (rys. 396) obraca się z daną prędkością kątową ω . Jakie powstaną naprężenia, jeżeli wstrzymamy nagle obrót lewego końca A ? Po zatrzymaniu końca A będzie widocznie koło MN obracać się dalej tak długo, dopóki jego energia kinetyczna nie zamieni się całkowicie w energię potencjalną skręconego wału. Tej chwili będzie odpowiadać największa wartość φ kąta skręcenia. Jeżeli Θ oznacza moment bezwładności koła zamachowego, a I_p biegunowy moment bezwładności (kołowego) przekroju poprzecznego wału, to dla znalezienia φ otrzymamy następujące równanie:

$$\frac{\varphi^2 GI_p}{2l} = \frac{\Theta \omega^2}{2},$$



Rys. 396

które wyraża, że energia potencjalna skręconego wału równa się energii kinetycznej koła zamachowego. Wyznaczwszy φ łatwo znaleźć i odpowiadające naprężenia.

§ 171. WPŁYW MASY PRĘTA NA WIELKOŚĆ NAPRĘŻEŃ PRZY UDERZENIU

Przy obliczeniu naprężeń dynamicznych pomijaliśmy w poprzednich zadaniach własną masę uderzonego pręta lub belki. Takie uproszczenie zadania nie pociąga za sobą większych błędów, dopóki masa $\frac{Q}{g}$ spadającego ciężaru jest wielka w porównaniu do masy pręta $\frac{P}{g}$; atoli w razie przeciwnym nie wolno pomijać masy pręta. Przedstawimy tutaj przybli-

¹⁾ Takież sam wzór można otrzymać i w najogólniejszym przypadku, jeżeli wyjdziemy z założenia, że cała energia kinetyczna spadającego ciężaru zamienia się w energię potencjalną ciała uderzonego, a zarazem przesunięcie punktu, na który ciężar trafia, jest w każdej chwili proporcjonalne względem nacisku tegoż ciężaru.

zony sposób oceny tego wpływu¹⁾. Dopóki pomijamy masę pręta, wielkość odkształceń wyznacza się z warunku, że energia kinetyczna spadającego ciężaru zamienia się w zupełności na energię potencjalną pręta. W pierwszym okresie uderzenia nie mamy tedy żadnej straty energii. Inny wynik otrzymamy, skoro uwzględnimy masę pręta. Prędkość v , jaką posiada ciężar spadający w chwili dotknięcia pręta, zmienia się tak długo, dopóki ciężar i część pręta stykająca się z nim bezpośrednio nie przybiorą pewnej wspólnej prędkości c . Gdyby pręt uderzony był ciałem swobodnym niesprężystym, to wielkość c możnaby wyznaczyć z równania ilości ruchu:

$$\frac{P+Q}{g}c = \frac{Q}{g}v, \quad \text{a mianowicie} \quad c = v \frac{Q}{P+Q}.$$

W rzeczywistości zaczyna się pręt odkształcać od pierwszej chwili uderzenia i w chwili, gdy przekrój, odpowiadający miejscu uderzenia osiąga prędkość c , mogą inne przekroje mieć inne prędkości. Utwierdzone punkty pręta, albo podparte końce belki będą mieć prędkość równą zeru. Skoro uczynimy pewne założenia co do prawa, według którego zmienia się prędkość wzdłuż pręta, to wpływ masy pręta na wielkość naprężeń dynamicznych można oznaczyć tą samą drogą elementarną, jaką obraliśmy przy badaniu drgań (§ 162). Rozpatrzmy przypadek podłużnego rozciągania pręta AB przez spadający ciężar Q (rys. 390). Niechaj v oznacza prędkość, z którą ciężar Q dosięga dolnego końca pręta AB . Odpowiadającą energią kinetyczną będzie $\frac{Q}{g} \frac{v^2}{2}$. W dalszym ciągu nastąpi wyrównanie prędkości ciężaru Q i dolnego końca pręta.

Oznaczmy wspólną prędkość przez c i przypuśćmy, że prędkości oddzielnych elementów długości pręta zmieniają się według tego samego prawa, co i przesunięcia odpowiadających przekrojów przy rozciąganiu pręta siłą działającą na koniec. W takim przypadku prędkość przekroju mn w odległości x od utwierdzonego końca będzie równa:

$$c_x = c \frac{x}{l}.$$

Energję kinetyczną całego pręta określi wyrażenie:

$$\int_0^l \frac{P}{gl} dx \cdot \frac{c_x^2}{2} = \frac{P}{3g} \cdot \frac{c^2}{2}.$$

Wartość energii jest zatem taka, jak gdyby trzecia część masy pręta była skupiona na jego uderzonym końcu, a cała długość pręta była zresztą pozbawiona masy. Wobec tego równanie ilości ruchu przybierze postać:

$$\frac{Q}{g}c + \frac{1}{3} \frac{P}{g}c = \frac{Q}{g}v, \quad \text{z której znajdziemy:} \quad c = v \frac{Q}{Q + \frac{1}{3}P}.$$

Mając prędkość c możemy obliczyć energję kinetyczną układu po pierwszym okresie uderzenia. Przyjąwszy, że cała ta energia zamienia się na energję potencjalną, znajdziemy wyrażenie dla naprężeń dynamicznych. (To przyjęcie odpowiada założeniu, że uderzenie jest doskonale niesprężystym, czyli, że po przyjęciu wspólnej prędkości c ciężar pozostaje nadal w zetknięciu z prętem). Jeżeli nazwiemy przez λ największe wydłużenie pręta przy uderzeniu, to równanie dla wyznaczenia tej wielkości napiszemy w postaci:

$$\frac{\left(Q + \frac{1}{3}P\right)c^2}{2g} + Q\lambda = \frac{\lambda^2 EF}{2l}.$$

Wstawiając zamiast c wartość powyżej znaną i uwzględniając, że:

$$\frac{Ql}{EF} = \lambda_{st},$$

możemy powyższe równanie przekształcić na następujące:

$$\frac{v^2 Q}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{P}{Q}} + Q\lambda = \frac{\lambda^2 EF}{2l}.$$

Stąd:

$$\lambda = \lambda_{st} + \sqrt{\lambda_{st}^2 + \frac{\lambda_{st} v^2}{g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{P}{Q}}} \quad (359)$$

W podobny sposób da się ocenić wpływ masy pręta przy zgięciu wskutek uderzenia. Niechaj np. ciężar Q spada z wysokości h na środek rozpiętości belki w obu końcach podpartej. W pierwszym okresie uderzenia ustala się pewna

¹⁾ Ten sposób podał H. Cox, Cambridge Phil. Soc. Trans. z r. 1849, str. 73. Ob. Todhunter and Pearson A. History of the Theory of Elasticity, t. I, str. 895.

Dokładniejsze badania teoretyczne nad uderzeniem prętów zawdzięczamy de Saint-Venant'owi, który zauważył zadowalniającą zgodność dokładniejszej teorii i doświadczeń z wynikami metody przybliżonej. Ob. Clebsch'a: Théorie de l'élasticité... w przekładzie de S.-Venant'a; dodatek do § 61.

wspólna prędkość c ciężaru i środkowego przekroju belki. Przyjmując, że na długości belki zmieniają się prędkości według tego samego prawa, co i przesunięcia przy zgięciu statycznym pod wpływem siły skupionej w środku, znajdziemy, że energia kinetyczna belki w pierwszej chwili uderzenia będzie taka, jak gdyby $\frac{17}{35}$ masy belki było skupione w środku rozpiętości. Prędkość c otrzymamy z równania ilości ruchu:

$$\frac{Q}{g} v = \left(\frac{Q}{g} + \frac{17}{35} \frac{P}{g} \right) c, \quad \text{a mianowicie:} \quad c = v \frac{Q}{Q + \frac{17}{35} P}$$

Przyjmąwszy, że energia kinetyczna ciężaru i pręta zamienia się w zupełności na energję potencjalną odkształcenia, otrzymamy dla wyznaczenia ugięcia dynamicznego równanie:

$$f_d^2 - 2 f_d f_{st} - \frac{f_{st} v^2}{g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{P}{Q}} = 0,$$

z którego:

$$f_d = f_{st} + \sqrt{f_{st}^2 + \frac{f_{st} v^2}{g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{P}{Q}}} \quad (360)$$

Gdy $v = 0$, t. j. gdy ciężar umieszczono na belce bez prędkości początkowej (ale nagle), otrzymamy znany wynik $f_d = 2 f_{st}$.

Od rozpatrzonych przykładów łatwo przejść do przypadku ogólniejszego. Jeżeli układ, na który spada ciężar Q jest taki, że przesunięcie s punktu odpowiadającego miejscu oderzenia jest proporcjonalne względem nacisku uderzającego ciężaru, to wielkość dynamicznego przesunięcia s_d można obliczyć według wzoru:

$$s_d = s_{st} + \sqrt{s_{st}^2 + \frac{s_{st} v^2}{g} \cdot \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}}} \quad (361)$$

Tutaj oznacza s_{st} przesunięcie miejsca uderzenia przy statycznym działaniu ciężaru Q , zaś liczba k jest współczynnikiem, który należy w każdym szczególnym przypadku wyznaczyć na podstawie przyjęcia co do rozmieszczenia prędkości w układzie w pierwszym okresie uderzenia¹⁾.

Ażeby osądzić o ile dokładne wyniki daje wyłożona metoda przybliżona, przytoczymy w niżej umieszczonej tabeli kilka liczb, otrzymanych przez de S.-Venant'a dla prętów w obu końcach podpartych i narażonych na uderzenie w środku rozpiętości.

$\frac{P}{Q} =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
Dokładne rozwiązanie $f_d/A =$	1,09	0,739	0,477	0,297	0,167
Przybliżone rozwiązanie $f_d/A =$	1,09	0,738	0,474	0,291	0,168

W tej tabeli oznacza A stałą zależną od rozmiarów i ciężaru pręta, oraz od prędkości spadającego ciężaru. Zauważyć wypada, że dokładne rozwiązanie de S.-Venant'a polega na przyjęciu pewnych określonych warunków w chwili uderzenia. De S.-Venant przyjmował mianowicie, że w pierwszym okresie uderzenia przekrój pręta, odpowiadający miejscu uderzenia, przybiera prędkość równą prędkości spadającego ciężaru, a potem pręt wykonywa drgania razem z ciężarem. Atoli szczegółowe badanie pierwszego okresu uderzenia wykazuje²⁾, że przy pewnych stosunkach masy belki do masy spadającego ciężaru rozpada się uderzenie na kilka po sobie następujących uderzeń, a całe zjawisko przedstawia się jako bez porównania bardziej złożone, aniżeli to przyjmował w swych badaniach de S.-Venant.

Rozpatrzyliśmy przypadki uderzenia prętów, t. j. ciał, w których jeden wymiar jest wielki w porównaniu do dwu pozostałych. Dzięki temu można było pominąć rozważanie odkształceń w miejscu uderzenia, a czas, w którym te odkształcenia powstają, uważać za znikomo mały w porównaniu do trwania uderzenia³⁾. Jeżeli jednak wszystkie wymiary uderzających się ciał są tego samego rzędu, np. w przypadku uderzenia dwóch kul, to odkształcenia miejscowe występują na pierwszy plan. Dopóki te odkształcenia zachodzą w granicach sprężystości, to ich wielkość i trwanie uderzenia można obliczyć bardzo dokładnie według wzorów Hertz'a (§ 37). Otrzymane tą drogą wyniki teoretyczne zostały w zupełności potwierdzone doświadczeniem⁴⁾, (oczywiście w granicach ważności założeń teorii).

¹⁾ Liczbowy przykład tego rodzaju znajduje się w artykule prof. Tschetsche: „Berechnung dynamisch beanspruchter Tragkonstruktionen“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. z r. 1894, str. 134.

²⁾ Ob: pracę autora: „W kwestji działania uderzenia na belkę“ (po ros.) Izv. Petersb. Politechn. Inst. z r. 1912.

³⁾ Przy podłużnem uderzeniu prętów grają miejscowe odkształcenia nader ważną rolę. Ob. J. E. Sears: „The longitudinal impact of metal rods with rounded ends“, Cambridge Phil. Soc. z r. 1907.

⁴⁾ Hamburger, Wied. Ann. d. Phys. 28 z r. 1886.

A. N. Dinnik: „Trwanie uderzenia kul sprężystych“ (po ros.) Izv. Kijew. Pol. Inst. z r. 1907.

A. N. Dinnik: „Udar i szatie uprugich tiel“, tamże w r. 1909.

§ 172. PĘNIĘCIE WSKUTEK UDERZENIA

Wzory poprzedniego paragrafu rozwiązują kwestję uderzenia w tych przypadkach, kiedy odkształcenia nie przekraczają granic sprężystości, i między przesunięciem punktu działania nacisku a jego wielkością zachodzi zależność linjowa. Poza granicami sprężystości staje się zjawisko uderzenia bardziej złożone. Dla znalezienia wydłużeń lub ugięć dynamicznych, oraz tej wartości granicznej energii kinetycznej spadającego ciężaru, przy której pręt pęka, trzeba mieć diagram rozciągania statycznego, aż do rozerwania i diagram statycznego zginania poza granicą sprężystości. Jeżeli przypuścimy, że przy rozerwaniu wskutek uderzenia zachodzi między wydłużeniami i napięciami taka sama zależność, jak przy rozerwaniu statycznym¹⁾, to z wielkości „właściwej pracy odkształcenia“ (§ 10) dla danego materiału można sądzić o energii kinetycznej spadającego ciężaru, potrzebnej do rozerwania pręta. Przyczyny, zmniejszające wydłużenie pręta przy rozrywaniu statycznym, zmniejszają także pracę, potrzebną do tego rozerwania, a zatem osłabiają wytrzymałość pręta na uderzenie.

Skoro weźmiemy pręty żelazne, przedstawione na rys. (47), i porównamy je z prętem walcowym o średnicy 15 mm, to znajdziemy, że przy rozerwaniu przez uderzenie, będzie stosunek ich wytrzymałości nie taki sam, jak przy statycznym rozrywaniu. Ten wynik łatwo objaśnić zwróciwszy uwagę na odkształcenie pręta. W pręcie walcowym wydłużają się przy rozciąganiu wszystkie elementy jednakowo, podczas gdy w prętach z szyjkami doznają grubsze części tylko nieznacznego wydłużenia, a główne odkształcenie koncentruje się w szyjce. Ostateczne wydłużenie pręta walcowego będzie znacznie większe, niż wydłużenie prętów z szyjkami, wskutek czego potrzeba większej pracy do jego rozerwania. Przy „próbie uderzenia“ okaże się pręt walcowy wytrzymałym. Wytrzymałość prętów z szyjkami będzie zależeć od długości szyjki i stopnia nagłości zmiany przekroju pręta. Okazuje się, że przy rozerwaniu z wielką prędkością, jaka zachodzi przy uderzeniach, zbyt mało czasu na wyrównanie naprężeń w płaszczyźnie osłabionego przekroju poprzecznego, wobec czego materiały, dające znaczne wydłużenia przy rozrywaniu statycznym, mogą się okazać kruchymi przy uderzeniu. Wogóle przy badaniu pod uderzeniem występują na jaw szczególnie wyraźnie różne wady materiału, wskutek czego „próbie uderzenia“ poświęcono w ostatnich czasach większą uwagę w laboratorjach do badania materiałów²⁾. Powiększenie kruchości prętów przez osłabienie ich przekrojów poprzecznych wypada wziąć w rachubę w rozlicznych konstrukcjach żelaznych. Okazuje się np., że blachy i kształtówki żelazne stają się bardziej kruche wskutek ich osłabienia otworami na nity i ta okoliczność tłumaczy niekiedy ich pęknięcie³⁾.

¹⁾ Są dane doświadczalne, wskazujące na to, że przy znacznej szybkości odkształcenia powstaje inny diagram aniżeli w przypadku rozrywania statycznego. Granica sprężystości przy rozrywaniu przez uderzenie jest wyższą, niż przy zwykłym rozrywaniu. Ob. N. N. Dawidenkow, Izv. Peterb. Polít. Inst. z r. 1913.

²⁾ Opis odpowiadających przyrządów i metod badania można znaleźć w następujących pracach: Breuil, „Nouveaux mécanismes et nouvelles méthodes pour l'essai des métaux“, Paris 1910, str. 140—240. B. Blount, W. Kirkaldy, H. Sankey, Proc. of the Inst. of Mech. Engin., r. 1910, 1—2.

³⁾ Ob. Hackstroh, Baumaterialienkunde, r. 1905, str. 321. Zimmermann, Zentralblatt d. Bauverw., r. 1899, str. 265.

Co do wielokrotnych uderzeń prętów z nacięciami ob. pracę Preuss'a w Zeitschr. d. Ver. d. Ing. z r. 1914.

CZĘŚĆ VIII

O STATECZNOŚCI UKŁADÓW SPRĘŻYSTYCH

ROZDZIAŁ XX

§ 173. STATECZNE I NIESTATECZNE POSTACIE RÓWNOWAGI

Przy projektowaniu konstrukcji technicznych obiera się rozmiary części składowych w ten sposób, aby naprężenia materiału nigdzie nie przekraczały pewnych norm (naprężeń dopuszczalnych), ustanowionych na podstawie doświadczalnego badania wytrzymałości materiałów. Szereg wielkich katastrof wykazał, że takie obliczenie jest często nie wystarczające dla spólczesnych konstrukcji inżynierskich, że przyjęte normy naprężeń dopuszczalnych niezawsze zapewniają należytą trwałość konstrukcji i że niezbędnymi są dodatkowe badania stateczności tych postaci równowagi, które przyjęto za podstawę obliczenia tak części składowych, jak i całej projektowanej konstrukcji. Ważność sprawdzenia stateczności jest uznana powszechnie, atoli wskutek braku teoretycznego opracowania poświęcano do ostatnich czasów bardzo niewiele uwagi kwestjom stateczności w technicznych obliczeniach.

W praktyce napotykamy szczególnie często zagadnienia stateczności prętów, narażonych na ściskanie. Skoro pręt przyrzmatyczny ściskają siły osiowe, to wogóle zajdzie skrócenie pręta przy zachowaniu prostolinjowej postaci. Atoli w pewnych warunkach prostolinjowa postać równowagi może się okazać niestateczną i pręt się wygnie [jakkolwiek na początku działania sił zewnętrznych nie ma wcale momentów zginających, a więc napozór nie ma przyczyn, wywołujących zgięcie]. To zjawisko zakrzywienia osi pod wpływem samych sił podłużnych występuje tem łatwiej, im większą jest długość pręta w porównaniu do jego rozmiarów poprzecznych; nazywamy je („zgięciem podłużnym“, albo „wyboczeniem“. W przypadku bardzo giętkich prętów można zjawisko wyboczenia obserwować już przy bardzo małych wartościach podłużnego naprężenia. Te okoliczności wskazują, że przekrój poprzeczny prętów ściskanych należy obliczać nietylko według wielkości dopuszczalnego ciśnienia, lecz także według wielkości „krytycznego obciążenia“, przy którym postać prostolinjowa przestaje być stateczną. Obliczenie ściskanych prętów stanowi najprostsze zadanie, w którym trzeba roztrząsać kwestję stateczności. Ten przypadek opracowano wszechstronnie na drodze teoretycznej i doświadczalnej. Prócz niego napotykamy przy obliczeniu konstrukcji inżynierskich o wiele więcej złożone zadania, wymagające dodatkowego sprawdzenia stateczności. Często np. mamy do czynienia z obliczeniem płyt, narażonych na siły ściskające, które działają w płaszczyźnie środkowej płyty. Przy działaniu takich sił może płaska postać równowagi płyty okazać się niestateczną i płyta się wyboczy. Wysokie belki kształtu Γ , posiadające wielką sztywność zgięcia w płaszczyźnie ścianki, mogą się okazać niedostatecznie sztywnymi w kierunku prostopadłym do tej płaszczyzny i wyboczyć się pod wpływem pionowych nacisków, wywartych przez obciążenia zginające. Cienkościenna okrągła rura, poddana równomiernemu ciśnieniu zewnętrznemu, może również być w stanie niestatecznej równowagi i ulec spłaszczeniu (zakłęśnięciu), gdy ciśnienie zewnętrzne przekroczy pewną wartość „krytyczną“. Wszystkie tego rodzaju zadania mają nie-

tylko znaczenie teoretyczne, lecz są także praktycznie nader ważne. Można wymienić niemało przypadków zawalenia się budowli inżynierskich, które wynikały wskutek niedostatecznego uwzględnienia kwestji stateczności.

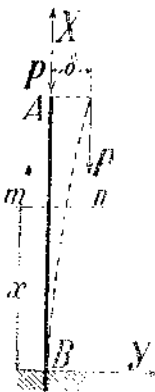
Przystępując do badania stateczności układów sprężystych trzeba przedewszystkiem zbadać przy jakich warunkach zachodzi wogóle kwestja stateczności tej lub innej konstrukcji. Jeżeli ciało sprężyste może mieć tylko jedną postać równowagi, to ta postać będzie stateczną. Gdyby jakiegokolwiek dodatkowe siły zewnętrzne tę postać zmieniły i przestały następnie działać, to ciało powróciłoby do pierwotnego stanu, albowiem ten stan odpowiada jedynej możliwej postaci równowagi. (Zakładamy, że wszelkie zmiany zachodzą w granicach sprężystości). W przypadku, kiedy istnieje więcej możliwych postaci równowagi, może się sprawa przedstawiać inaczej: ciało, wyprowadzone z jednej ze swych postaci równowagi, może nie wrócić do pierwotnego położenia i przyjąć jakąkolwiek inną postać równowagi. Skoro wszystkie wymiary ciała są tego samego rzędu, to w granicach sprężystości są możliwe tylko drobne przesunięcia punktów i można dowieść, że wówczas istnieje tylko jedna postać równowagi; ta postać, jako jedyna, będzie oczywiście stateczną¹⁾. Jeżeli zaś jeden lub dwa wymiary ciała są małe w porównaniu do innych, jak np. w przypadku cienkich płyt lub prętów, to mogą zajść znaczne zmiany postaci bez przekroczenia granic sprężystości; płytę można zgiąć silnie, zwinąć ją w trąbkę, cienki pręt zgiąć w pierścień i t. d. W tych warunkach mogą się zdarzyć przypadki, w których jednemu i temu samemu układowi sił odpowiada więcej postaci równowagi. Pręt ściskany podłużnie może zachować postać prostolinjową, ale może także zgiąć się. Płyta, ściskana siłami leżącymi w jej płaszczyźnie środkowej, może pozostać płaską, ale może w pewnych warunkach się wyboczyć.

Projektowana konstrukcja będzie oczywiście trwała tylko w tym przypadku, gdy przyjęta za podstawę obliczenia postać równowagi jest stateczną; z tego powodu jest dla zastosowań praktycznych niezbędną znajomość tej najmniejszej wartości obciążenia, przy której istnieje więcej jak jedna postać równowagi. Tę wartość będziemy nadal nazywać „krytyczną“. Dopóki obciążenie jest mniejsze od krytycznego, będzie możliwą tylko jedna postać równowagi i ta postać będzie oczywiście stateczną. Przy obciążeniach większych od krytycznego są możliwe przynajmniej dwie różne postacie równowagi. Różne metody wyznaczenia krytycznej wartości obciążenia objaśnimy przy rozpatrywaniu poszczególnych zadań.

§ 174. ZAGADNIENIE EULERA

Pierwsze zagadnienie, odnoszące się do kwestji stateczności równowagi ciała sprężystego, rozwiązał Euler²⁾. Ten uczony znalazł wartość obciążenia P , po osiągnięciu której pręt, dolnym końcem pionowo utwierdzony, zaczyna się wyginać (rys. 397). Dopóki siła ściskająca P jest dość mała, pręt AB zachowuje stale swoją postać prostolinjową i odkształcenie będzie się ograniczać do prostego skrócenia. Skoro dowolną siłą poziomą wywołamy zgięcie pręta, to po usunięciu tej siły powróci pręt do swej pierwotnej prostolinjowej postaci równowagi. Atoli taka stateczność prostolinjowej postaci zachodzi tylko do pewnej granicy. Zwiększając w sposób ciągły siłę P , można osiągnąć taki stan graniczny, w którym najmniejsza przyczyna może zakrzywić pręt, a po usunięciu przyczyny wywołującej zgięcie, pręt nie powraca do postaci prostolinjowej. Nasze zadanie polega na tem, aby wyznaczyć ową „krytyczną“ wartość siły ściskającej P .

Przyjmujemy, że pręt może się wygiąć swobodnie w każdym kierunku, wskutek czego wygięcie musi widocznie zajść w kierunku najmniejszego oporu, czyli w płaszczyźnie najmniejszej sztywności pręta. Tę płaszczyznę obierzemy za płaszczyznę XY . Dajmy na to, że przy pewnej wartości P , większej od krytycznej, pręt AB wygiął się w sposób, przedstawiony na rysunku, linią przerywaną. Skoro teraz będziemy zmniejszać siłę P , to zmniejszy się i wygięcie pręta. Gdy wkońcu osiągniemy krytyczną wartość P_{kr} , t. j. tę wartość, przy której dopiero zaczyna być możliwym pojawienie się skrzywienia, to postać wygięta zejdzie się z prostolinjową. Jeżeli siła ściskająca przekroczy wartość



Rys. 397

¹⁾ Ob. G. H. Bryan, Cambridge Phil. Soc. Proc. V, 6 (r. 1888).

²⁾ Berlin, Histoire de l'Académie, t. 13, r. 1757.

krytyczną o małą wielkość, to zakrzywiona postać różni się mało od prostolinjowej; z tego skorzystamy, ażeby znaleźć P_{kr} . Pójdziemy jednak niejako odwrotną drogą, a mianowicie przyjmiemy, że postać zakrzywiona jest możliwa i będziemy szukali odpowiedniej wartości siły ściskającej. Momentem zginającym w dowolnym przekroju poprzecznym $m n$ (rys. 392) jest (przy obranym układzie współrzędnych):

$$M = -P(\delta - y),$$

a zatem przybliżonem równaniem różniczkowym krzywej postaci równowagi będzie:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py - P\delta = 0 \quad \dots \quad (a)$$

Ogólna całka tego równania różniczkowego linjowego ma postać:

$$y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + \delta, \text{ przyczem } \alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \dots \quad (b)$$

Stałe dowolne wyznaczmy z warunków na końcach zgiętego pręta:

Dla $x = 0$ jest I) $y = 0$ i II) $y' = 0$; dla $x = l$ jest III) $y = \delta$.

Z (I) otrzymujemy:

$$C_1 = -\delta;$$

z (II):

$$[-C_1 \alpha \sin \alpha x + C_2 \alpha \cos \alpha x]_{x=0} = 0, \text{ czyli } C_2 = 0;$$

a zatem:

$$y = \delta(1 - \cos \alpha x).$$

Aby uczynić zadość warunkowi (III) musimy przyjąć:

$$\cos \alpha l = 0, \text{ czyli } \alpha l = \frac{(2n+1)\pi}{2}.$$

Uwzględniając oznaczenie (b), otrzymamy:

$$P = (2n+1)^2 \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad \dots \quad (362)$$

Najmniejsza wartość P , przy której zakrzywienie staje się możliwym, będzie:

$$P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2} \quad \dots \quad (363)$$

To równanie określa wartość krytyczną siły ściskającej, przy której staje się możliwą przyjęta przez nas zakrzywiona postać równowagi.

Od rozpatrzonego zadania łatwo przejść do niektórych innych przypadków wyboczenia. Weźmy np. pręt, którego oba końce są przegibnie ustalone¹⁾ na prostej AB (rys. 398). Styczna w środku wygiętego pręta będzie równoległą do jego pierwotnej osi, czyli do prostej AB , obidwie przeto połowy zginającego się pręta będą w takich samych warunkach, jak i w przypadku rozważonym powyżej. Krytyczną wartością ściskającej siły będzie:

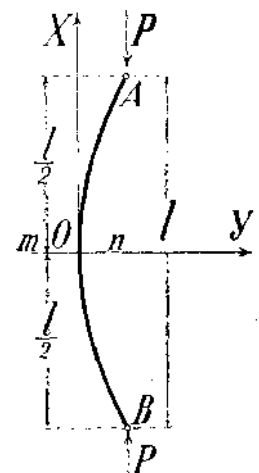
$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \dots \quad (364)$$

Dotychczas rozpatrywaliśmy pierwszą postać wygięcia, t. j. postać, której odpowiada najmniejsza wartość siły ściskającej. Rozpatrzmy teraz inne możliwe kształty równowagi. W ogólnej postaci określi linję ugięcia równanie:

$$y = \delta(1 - \cos \alpha x), \text{ przyczem } \alpha l = \frac{(2n+1)\pi}{2}.$$

Rozpatrzywszy przypadek $n = 0$, otrzymaliśmy pierwszą możliwą postać. Kładąc $n = 1$, albo $n = 2$, znajdziemy:

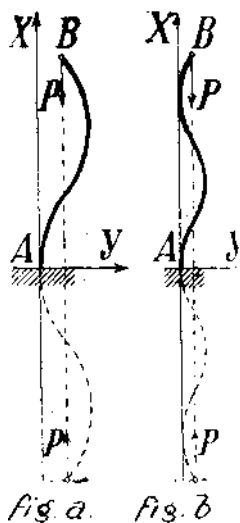
$$P_{kr} = \frac{3^2 \pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2}, \text{ albo: } P_{kr} = \frac{5^2 \pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2}.$$



Rys. 398

¹⁾ [Skoro jest mowa o przegibnem ustaleniu obu końców ściskanego pręta, to mamy na myśli najprostszy przypadek, w którym niema przeszkód do wzajemnego zbliżenia się przegubów].

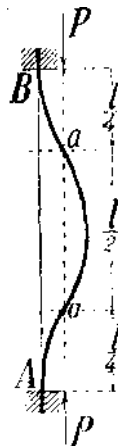
Odpowiadające krzywe przedstawia fig. (a) i (b) na rys. (399). Przedłużając je symetrycznie w kierunku ujemnych X -ów, jak wskazuje rysunek, otrzymamy rozliczne krzywe kształty równowagi dla prętów o końcach przegibnie ustalonych. W miejscach przecięcia się kierunku sił P z zakrzywioną osią pręta powstaną punkty przegięcia; w tych punktach moment zginający staje się zerem. Te wszystkie wyższe kształty są możliwe przy większych wartościach ściskającej siły i wszystkie są, jak wykazuje doświadczenie, niestające.



Rys. 399

Rozpatrzmy jeszcze jeden przypadek, mogący mieć praktyczne znaczenie, a mianowicie ściskanie pręta obu końcami utwierdzonego (rys. 400). Aby przeszkodzić obrotowi końców trzeba na nie działać momentami utwierdzającymi. Siła osiowa P i moment sprowadzają się do jednej siły mimośrodowej P . Na jej linii działania muszą leżeć punkty przegięcia aa zakrzywionej osi pręta. Rzut oka na rysunek wystarczy, aby zauważyć, że ten przypadek sprowadza się do pierwszego, jeżeli zamiast l weźmiemy $\frac{l}{4}$; a zatem w naszym przypadku:

$$P_{kr} = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (365)$$



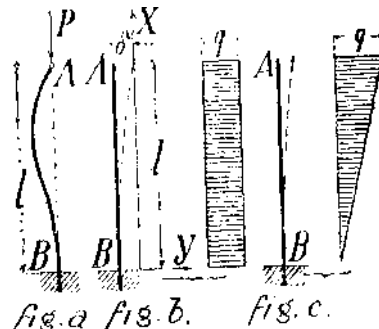
Rys. 400

czyli obciążenie krytyczne jest 4 razy większe, niż dla pręta o końcach przegibnie ustalonych. Ten wniosek będzie naturalnie prawdziwym tylko w tym przypadku, kiedy końce pręta są doskonale utwierdzone. Gdy końce mogą się obrócić choćby bardzo mało, to wyoboczenie zajdzie przy sile znacznie mniejszej. W praktycznych obliczeniach poszczególnych ściskanych prętów ze względu na wyoboczenie przyjmuje się możliwość obrotu końców, ponieważ zwykłe sposoby ustalenia końców nie mogą zapewnić doskonałego utwierdzenia.

Wyliczyliśmy najczęściej napotykaną przypadki wyoboczenia. Dla wszystkich można wartość obciążenia krytycznego przedstawić wspólnym wzorem:

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{(\mu l)^2} \quad (366)$$

w którym zmienia się tylko współczynnik liczbowy μ , zwany „współczynnikiem długości“. Skoro tylko znaleziono wartość μ dla jakiegokolwiek przypadku działania sił, to kwestia wyznaczenia siły krytycznej sprowadza się do przypadku pręta o końcach przegibnie ustalonych; we wzór (364) należy wówczas zamiast długości rzeczywistej wstawić pewną długość sprowadzoną (także „swobodną“) μl . Na zakończenie przytoczymy bez wywodów wartość współczynnika μ dla niektórych szczególnych przypadków (rys. 401).



Rys. 401

Jeżeli dolny koniec pręta jest utwierdzony, a górny ustalony przegibnie (fig. a), to:

$$P_{kr} = \frac{2,046 \pi^2 EI}{l^2}, \quad \text{zaś } \mu = 0,7.$$

Przy obciążeniu rozłożonym równomiernie na całej długości pręta o natężeniu q (fig. b) jest wartością krytyczną całkowitego obciążenia ¹⁾:

$$ql = \frac{\pi^2 EI}{(1,12 l)^2}, \quad \text{a więc } \mu = 1,12.$$

Przy rozłożeniu obciążenia pionowego według prawa trójkąta na całej długości pręta wypada jako wartość krytyczna obciążenia dolnego przekroju ²⁾:

$$\frac{ql}{2} = \frac{\pi^2 EI}{(1,388 l)^2}, \quad \text{a zatem } \mu = 1,388.$$

¹⁾ To rozwiązanie podał pierwszy A. G. Greenhill, Cambridge Phil. Soc. Proc., t. 4, r. 1881.

²⁾ To zadanie rozwiązał najpierw prof. F. Jasiński; ob. zbiorowe wyd. jego prac (po ros.), t. I, str. 164. Szereg zadań bardziej złożonych rozwiązał A. N. Dinnik. Ob. Wiestnik Inżynierów z r. 1915, str. 94.

§ 175. GRANICE STOSOWALNOŚCI OTRZYMANYCH WZORÓW

Obierzmy przypadek pręta o końcach przegiębnie ustalonych za podstawowy i wyznaczmy tę wielkość ciśnienia w przekroju poprzecznym pręta, przy której może się rozpocząć wyboczenie. Z formuły (364) znajdujemy:

$$p_{kr} = \frac{P_{kr}}{F} = \pi^2 E \left(\frac{r}{l} \right)^2, \quad (367)$$

przyczem r oznacza najmniejszy promień bezwładności przekroju. Otrzymane w ten sposób naprężenie można uważać za pewnego rodzaju doraźną wytrzymałość, albowiem powstanie w konstrukcji naprężeń, przy których mogą zajść wyboczenia prętów, jest tak samo niebezpieczne, jak i osiągnięcie granicy wytrzymałości.

Wszystkie nasze wywody polegały na założeniu, że materiał pręta jest doskonale sprężysty i podlega prawu Hooke'a. Tylko w tym przypadku jest ważne podstawowe równanie (a) w § (174). Znaleziona wartość krytycznej siły ściskającej będzie odpowiadać rzeczywistości tylko wtedy, gdy otrzymane przytem ciśnienie p_{kr} nie przekracza granicy sprężystości materiału. Dla naprężeń powyżej granicy sprężystości, wyniki otrzymane według wzorów Euler'a nie mają żadnego realnego znaczenia. Z wzoru (367) widać, że zjawisko wyboczenia będzie zachodzić w granicach sprężystości przy stosunkowo znacznej długości l , a małym promieniu bezwładności r . Dla każdego materiału o znanym współczynniku sprężystości E i znanej granicy sprężystości, można wyznaczyć graniczną wartość stosunku $l:r$ [czyli „smukłości“ pręta], przy której zachodzi wyboczenie jeszcze w granicach sprężystości, czyli przy której wolno jeszcze stosować wzór Euler'a. Jeżeli np. dla żelaza spawalnego weźmiemy $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, a granicę sprężystości $p = 2000 \text{ kg/cm}^2$, to otrzymamy graniczną wartość [smukłości, t. j.] stosunku $l:r = \sim 100$, co wskazuje, że dla możliwości zastosowania wzoru Euler'a w przypadku podstawowym, musi smukłość pręta z żelaza spawalnego być ≥ 100 . Weźmy np. równoramienną kątownikę $70 \times 70 \times 10 \text{ mm}$. Odpowiadający najmniejszy promień bezwładności $r = 1,35 \text{ cm}$, a zatem przy długości kątowniki, przewyższającej $1,35 \text{ m}$, można używać wzoru Euler'a. W przypadku przekroju okrągłego jest $I = \frac{\pi d^4}{64}$, $r = \frac{d}{4}$; przeto formułę Eulera można stosować przy długości $l \geq 25 d$.

Dla obliczenia ściskanych prętów w przypadku, kiedy wzór Eulera traci ważność dlatego, bo otrzymane z niego naprężenia przekraczają granicę sprężystości, należy zużytkować dane doświadczalne¹⁾, a zwłaszcza doświadczenia Tetmajera. Te doświadczenia potwierdziły ważność wzoru Eulera w granicach sprężystości i dały dostateczny materiał dla ustawienia formuły empirycznej dla naprężeń krytycznych poza granicami sprężystości, t. j. przy stosunkowo małej długości prętów. Prof. Jasiński opracował dane doświadczalne, odnoszące się do żelaza kowalnego i przedstawił wyniki wzorem:

$$p_{kr} = a - b \frac{l}{r},$$

którego współczynniki a i b obliczył z doświadczeń Tetmajera, Bauschingera i Considère'a metodą najmniejszych kwadratów. Dla żelaza zlewego otrzymał:

$$p_{kr} = \left[3387 - 14,83 \frac{l}{r} \right] \text{ kg/cm}^2, \quad (368)$$

w granicach

$$70 < \frac{l}{r} < 110.$$

Dla żelaza lanego można używać wzoru Euler'a przy długościach $l \geq 80 r$. Przy mniejszych długościach wypadnie obliczać naprężenie krytyczne według empirycznego wzoru Tetmajera:

$$p_{kr} = \left[7760 - 120 \frac{l}{r} + 0,53 \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right] \text{ kg/cm}^2.$$

Dla drzewa podaje Tetmajer:

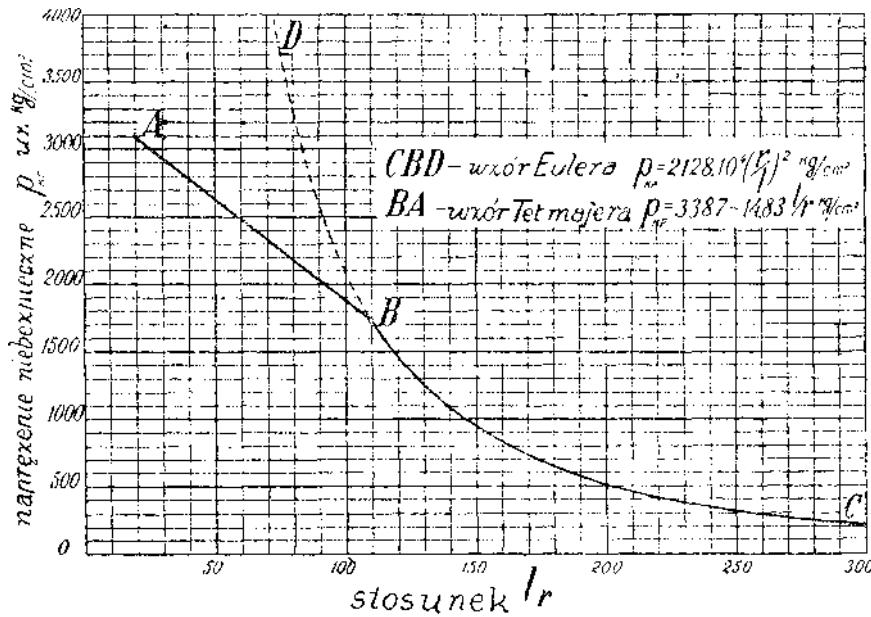
$$p_{kr} = \left[293 - 1,94 \frac{l}{r} \right] \text{ kg/cm}^2,$$

jeżeli $l \leq 110 r$. [Dla $l > 110 r$ należy używać wzoru Euler'a].

¹⁾ Najobszerniejsze doświadczalne badania nad wyboczeniem przeprowadził L. Tetmajer; ob. „Die Gesetze der Knickungs- und zusammengesetzten Druckfestigkeit“, wyd. 3, r. 1903.

Z nowszych badań wymienimy pracę T. Kármán'a: „Untersuchungen über Knickfestigkeit“, Göttingen Diss., r. 1909.

Rys. (402) przedstawia wykreślenie wyniki wzoru Euler'a i wzoru empirycznego dla żelaza zlewego. Jako odcięte figurują wartości stosunku $l : r$, zaś jako rzędne odpowiadające naprężenia



Rys. 402

krytyczne p_{kr} . Formule empirycznej odpowiada część prosta AB , a wzorowi Euler'a część BC hiperboli sześcienniej.

Prof. Jasiński ułożył tablicę wartości naprężenia krytycznego, albo łamiącego¹⁾ dla smukłości $l : r > 20$. Tę tablicę przytaczamy poniżej w skróceniu. Posługując się nią łatwo dobierać przekroje ściskanych prętów. Najpierw przyjmujemy w przybliżeniu rozmiary przekroju poprzecznego i znajdujemy jego najmniejszy promień bezwładności r . Z danej długości obliczamy smukłość $l : r$, a następnie szukamy odpowiadającego naprężenia łamiącego p_{kr} . Wielkość $F \cdot p_{kr}$ będzie obciążeniem

łamiącym, które powinno 4 do 5 razy przewyższać daną siłę ściskającą pręt.

TABLICA naprężeń krytycznych w kg/cm^2 dla słupów z żelaza zlewego, ściskanych w warunkach przypadku podstawowego.

$\frac{l}{r} = 20$	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
$\varphi = 0,88$	0,84	0,80	0,76	0,71	0,67	0,63	0,59	0,54	0,50	0,42	0,36
$p_{kr} = 3090$	2940	2790	2650	2500	2350	2200	2050	1900	1760	1480	1260
$\frac{l}{r} = 140$	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250
$\varphi = 0,31$	0,27	0,24	0,21	0,19	0,17	0,15	0,14	0,13	0,11	0,10	0,10
$p_{kr} = 1090$	946	831	736	657	589	532	483	440	402	369	340

Oprócz wzorów Euler'a i formuł zbudowanych na danych doświadczalnych istnieje w literaturze technicznej niemało innych formuł do obliczenia ściskanych prętów, pozbawionych naukowej podstawy, które się pojawiły w czasach, kiedy granice stosowalności wzorów Euler'a nie były dostatecznie wyjaśnione. Z pośród nich zyskał największe rozpowszechnienie wzór Schwarz-Rankine'a. Według niego obliczają często ściskane pręty w konstrukcjach żelaznych²⁾. Wzór Schwarz-Rankine'a:

$$p_{kr} = \frac{R'}{1 + \alpha \left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad (369)$$

¹⁾ [Przy bardzo wielkiej smukłości, nie mającej, co prawda, zastosowania praktycznego, nie jest naprężenie łamiące identyczne z naprężeniem krytycznym, lecz jest od niego większe, albowiem po przekroczeniu przez naprężenie wartości krytycznej zachodzi zrazu wygięcie zupełnie sprężyste i dopiero obciążenie większe od krytycznego wywoła pojawienie się odkształceń trwałych i w dalszym ciągu złamanie pręta].

²⁾ Rozpowszechnienie tego wzoru można po części objaśnić tem, że wyznaczone według niego wartości p_{kr} są zwykle większe od wyznaczonych z wzoru Euler'a, a więc obliczone pręty wypadają lżejsze. [Jeszcze ważniejszą zapewne okolicznością, decydującą o powodzeniu formuły Schwarz-Rankine'a wśród praktycznych inżynierów, była jej uniwersalność i wynikająca stąd wygoda obliczenia jednym wzorem zamiast dwu. Jedynym zaś argumentem, usprawiedliwiającym opozycję przeciw wzorowi Euler'a jest niezaprzeczony fakt, że bardzo często mamy w praktyce do czynienia ze zbroczeniami obciążenia od środka przekroju, a odpowiadających mimośrodków nie można nieraz wyznaczyć z jaką taką dokładnością. To je-

przyczem R' oznacza doraźną wytrzymałość materiału, zaś α stały współczynnik. W Rosji przyjmują dla żelaza kowalnego $\alpha = 0,00008$. Przy małych długościach prętów jest wyraz $\alpha \left(\frac{l}{r}\right)^2$ mały i można go pominąć wobec 1. Wzór p_{kr} daje wówczas wielkość stałą, równą doraźnej wytrzymałości. Przy bardzo wielkich długościach będzie $\alpha \left(\frac{l}{r}\right)^2$ wielkie, wobec czego można w mianowniku opuścić 1, a wzór Schwarz-Rankine'a przybierze postać wzoru Euler'a. Stosowanie formuły Schwarz-Rankine'a w granicach sprężystości nie ma racji, ponieważ tam obowiązuje ściśle wzór Euler'a [przy zupełnie środkowym obciążeniu]. Poza granicami sprężystości, t. j. dla żelaza zlewne przy $l > 110r$, daje wzór Schwarz-Rankine'a, jak wykazały głównie doświadczenia Tetmajera, niezawsze wyniki zadowalające. Przy mniejszych wartościach $l:r$ wypadają z tego wzoru zbyt wielkie wartości naprężeń łamiących, ale przy $40 < \frac{l}{r} < 110$ można jej używać kładąc $\alpha = 0,0001$.

Przy pomocy przytoczonych wzorów możemy w poszczególnych przypadkach znaleźć wielkość naprężenia krytycznego lub łamiącego. Dla zapewnienia należytej trwałości obiera się rozmiary ściskanych prętów tak, ażeby rzeczywiste naprężenia stanowiły tylko pewną część naprężeń łamiących. Wielkość naprężeń bezpiecznych (dopuszczalnych) określa się na tej podstawie, że stan, odpowiadający obciążeniu krytycznemu, uważa się za równie niebezpieczny, jak i stan, odpowiadający granicy wytrzymałości. W takim razie stosunek naprężenia bezpiecznego przy wyboczeniu do bezpiecznego naprężenia przy prostym rozciąganiu powinien być ten sam, co stosunek „naprężenia krytycznego“ do doraźnej wytrzymałości R' . Oznaczywszy ten stosunek przez φ , znajdziemy, że naprężenie bezpieczne przy ściskaniu prętów równa się φR , przyczem R oznacza naprężenie bezpieczne przy prostym rozciąganiu. „Współczynnik zmniejszenia“ φ da się w każdym szczególnym przypadku obliczyć z danej wielkości naprężenia łamiącego i doraźnej wytrzymałości R' . Przytoczona powyżej tablica zawiera wartości φ przy założeniu, że doraźna wytrzymałość materiału jest równa 3500 kg/cm^2 .

Oprócz wzorów czysto empirycznych można dla wyznaczenia p_{kr} poza granicami sprężystości zbudować także formułę analityczną¹⁾, analogiczną z wzorem Euler'a (367). Trzeba tylko dla materiału pręta znać zależność między odkształceniami i naprężeniami przy ściskaniu poza granicą sprężystości. Za tą granicą rosną odkształcenia pręcej od naprężeń, a stosunek przyrostu naprężenia do przyrostu odkształcenia będzie pewną funkcją naprężenia; oznaczymy ją przez E_1 . Dajmy na to, że pręt o przekroju poprzecznym prostokątnym, ściskany poza granicą sprężystości, zaczyna się wyginać; wtedy powiększy się ściskanie włókien po stronie wklęsłej, a zmniejszy się po stronie wypukłej. Tym zmianom odkształceń odpowiadają dodatkowe naprężenia zgięcia. Gdyby całe zjawisko zachodziło w granicach sprężystości, to te naprężenia zmieniałyby się linijowo na wysokości przekroju. W naszym przypadku przedstawia się zadanie nie tak prosto. Po stronie wklęsłej zachodzi dodatkowe ściskanie poza granicami sprężystości i zależność między naprężeniami a odkształceniami określa się zmienną wielkością E_1 , zależną od początkowego ściskania pręta. Po stronie wypukłej zachodzi przy zgięciu zmniejszenie pierwotnego ciśnienia, wobec czego zależność odkształceń od naprężeń określi zwykły współczynnik sprężystości E . Rozkład naprężeń przy zakrzywieniu pręta ściskanego poza granicą sprężystości będzie przeto taki, jak w przypadku zgięcia prętów, których materiał ma różne współczynniki sprężystości przy rozciąganiu i ściskaniu (ob. § 99). Ogólna postać równania różniczkowego zgiętej osi pozostaje niezmienną, tylko zamiast współczynnika sprężystości E wstawimy wielkość:

$$E' = \frac{4 E E_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2}.$$

Odpowiednio do tego zmieni się i wzór dla obciążenia krytycznego, który w podstawowym przypadku przybierze postać:

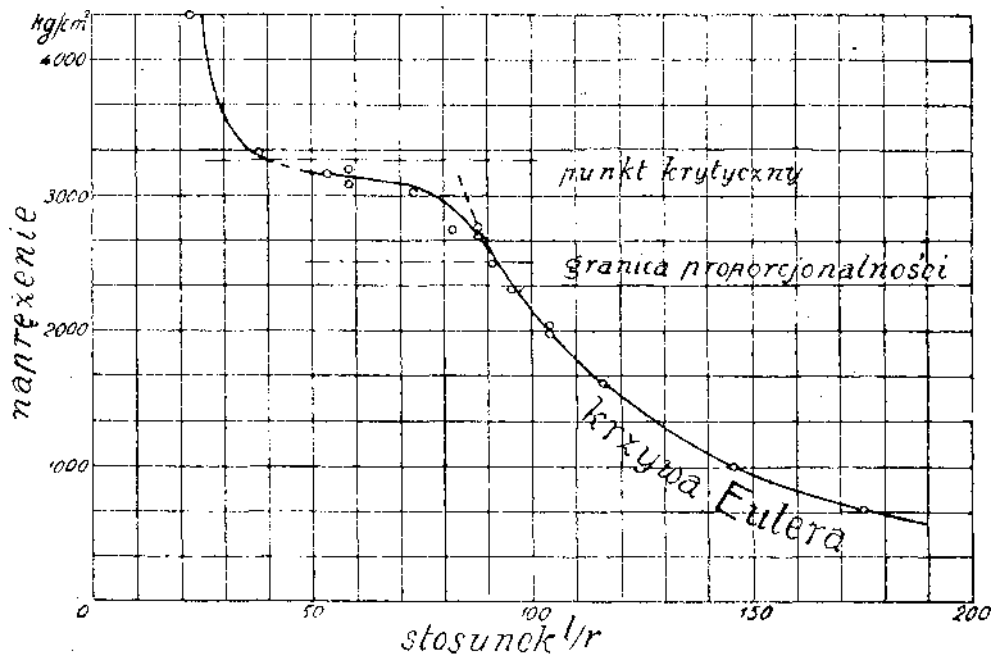
$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E' I}{l^2}, \quad p_{kr} = \pi^2 E' \left(\frac{r}{l}\right)^2 \quad \dots \quad (370)$$

dnakże nie przemawia na korzyść uniwersalnej formuły Schwarz-Rankine'a, lecz każe w przypadkach obciążeń o znanym mimośrodku używać ogólniejszych wzorów teoretycznych, o których poniżej będzie mowa; w przypadkach zaś, kiedy mimośród obciążenia nie da się dokładnie wyznaczyć, kiedy zatem ten mimośród waha się między pewnymi granicami, będzie najracjonalniej przyjąć za podstawę obliczenia mimośród, odpowiadający granicy wyższej i również zastosować wzory teoretyczne. (Por. M. T. Huber „O wytrzymałości słupów“, Przegl. techn. 1907). W ten sposób wprowadzamy niejako nowy rodzaj pewności].

¹⁾ Pierwszą próbę analitycznego rozwiązania zagadnienia wyboczenia poza granicą sprężystości zrobił Engesser, ob. Zeitschr. f. Arch. u. Ing. (Hannover) z r. 1889.

Dalszem opracowaniem tej kwestji zajął się T. Kármán; ob. cytowaną powyżej pracę: Untersuchungen über Knickfestigkeit.

Dla każdej wartości podłużnego ciśnienia można znaleźć E_1 , a zatem i E' z uprzednich doświadczeń nad ściskaniem poza granicami sprężystości, a następnie na podstawie wzoru (370) ułożyć tablicę krytycznych naprężeń dla różnych wartości stosunku $l:r$. O ile



Rys. 403

O ile otrzymane tą drogą wartości p_{kr} zgadzają się z doświadczalnymi, widać z załączonego diagramu (rys. 403), przedstawiającego wyniki doświadczeń Kármán'a nad prętami ze stali Martinowskiej o dużej wytrzymałości przy rozciąganiu 6800 kg/cm^2 i całkowitem wydłużeniu $16,7\%$. Kółkami zaznaczone wyniki poszczególnych doświadczeń, linią ciągłą zaś wyniki obliczeń. Zgodność dat doświadczalnych i teoretycznych jest widocznie bardzo dobra. W odróżnieniu od wyników Tetmajera widzimy, że przy zmniejszeniu długości prętów, począwszy od $l:r = 40$, zaczyna wartość p_{kr} szybko wzrastać. Zaznaczmy, że w chwili,

kiedy ciśnienia odpowiadają punktowi krytycznemu [granicy plastyczności], pręt znajduje się w położeniu równowagi niestatecznej; przekroczyć ten punkt i dojść do wysokich wartości naprężeń krytycznych można tylko przy najstaranniejszym urządzeniu doświadczeń¹⁾.

Co się tyczy wyboru kształtu przekroju poprzecznego ściskanych prętów, to zaznaczmy przedewszystkiem, że wielkość krytycznego obciążenia zależy od wielkości stosunku $l:r$. Im ten stosunek jest mniejszy, tem większą wartość ma naprężenie łamiące, tem mniejszem będzie potrzebne pole przekroju, a więc i ciężar własny pręta. Przy obiorze poprzecznego przekroju będzie przeto korzystnem możliwe powiększenie promienia bezwładności, co prowadzi do przekrojów rurowych. Im większą obierzemy średnicę rury, tem cieńsza wypadnie ścianka i tem mniej wyjdzie materiału na rurę. Jednakowoż nie można tutaj iść zbyt daleko. Są granice w zmniejszaniu grubości ścianki, poniżej których nie należy schodzić. We wzór Euler'a wchodzi wielkość momentu bezwładności przekroju poprzecznego, którą uważamy za stałą, przyjmując, że kształt poprzecznego przekroju pozostaje niezmiennym. Atoli przy zbyt cienkiej ściance może się pojawić miejscowe wyboczenie samej ścianki rury i wzór Euler'a traci swą ważność. Kwestja stateczności ściskanej ścianki rury jest jeszcze mało opracowana; pewne wyniki, odnoszące się do niej, podamy poniżej.

Co do jakości materiału zauważymy, że przy większej długości, dla której zachodzi ważność wzoru Euler'a, zależy wielkość naprężenia krytycznego tylko od współczynnika sprężystości E ; zważywszy więc, że E mało się zmienia z podwyższeniem jakości materiału, widzimy, że obciążenie dopuszczalne pręta zmieni się także nie wiele. Przy krótszych prętach, w których zjawisko wyboczenia zachodzi poza granicami sprężystości, wypada używać danych doświadczalnych. Wielkość naprężenia krytycznego zależy wówczas w znacznej mierze od jakości materiału, a szczególnie od wysokości granicy sprężystości. Stosowanie np. w konstrukcji mostów stali niklowej pozwala znacznie podwyższyć naprężenia dopuszczalne dla ściskanych prętów.

¹⁾ [Chodzi tutaj o możliwie dokładne spełnienie warunków, t.j. prostolinijowość osi pręta, jednolitość materiału i osiowość obciążenia].

§ 176. WPŁYW MIMOŚRODU OBCIĄŻENIA I POCZĄTKOWEGO ZAKRZYWIENIA PRĘTA NA WIELKOŚĆ SIŁY KRYTYCZNEJ

Przy wyprowadzeniu podstawowej formuły dla wyboczenia przyjęliśmy, że oś pręta jest ściśle prostolinjową, a siły ściskające trafiają dokładnie w środki ciężkości przekrojów końcowych. Te idealne założenia nie odpowiadają w praktyce rzeczywistości. Zobaczymy tedy, jak się zmieniają wywoły poprzednich paragrafów w przypadku, kiedy oś pręta posiada pewną początkową krzywiznę $1:r$, a siła P działa na mimośrodku e (rys. 404)¹⁾. Oznaczmy przez δ wygięcie górnego końca pręta, a przez ρ promień krzywizny po odkształceniu, mamy:

$$EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right) = M; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{r} + \frac{P}{EI}(\delta + e - y),$$

albo po podstawieniu $\frac{P}{EI} = \alpha^2$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = \frac{1}{r} + \alpha^2(\delta + e).$$

Ogólną całkę tego równania różniczkowego otrzymamy w postaci:

$$y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + \delta + e + \frac{1}{\alpha^2 r}.$$

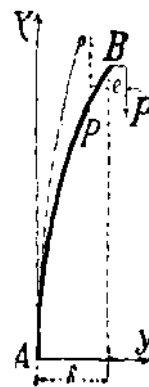
Dla $x = 0$ jest $y = 0$ i $y' = 0$. Tym warunkom uczyni zadość wyrażenie następujące:

$$y = -\left(\delta + e + \frac{1}{\alpha^2 r}\right) \cos \alpha x + \delta + e + \frac{1}{\alpha^2 r}.$$

Dla $x = l$ jest $y = \delta$, a zatem:

$$\delta = \left(e + \frac{1}{\alpha^2 r}\right) \frac{1 - \cos \alpha l}{\cos \alpha l}. \quad (371)$$

Dopóki P jest małe, będzie α także małą wielkością, a $\cos \alpha l$ będzie się niewiele różnić od 1, a zatem ugięcia będą bardzo małe. Skoro jednakże P zaczyna się zbliżać do wartości Eulerowskiej, to αl , jak widzieliśmy, zbliża się do $\frac{\pi}{2}$, a $\cos \alpha l$ zdąży do wartości zera. Ugięcie δ , jak widać z wzoru (371), zdąży wówczas do nieskończoności. Trzeba jednak pamiętać, że nasz wzór jest dostatecznie dokładny tylko dla małych ugięć, wobec czego wynik powyższy znaczy tyle, że z przybliżeniem obciążenia do wartości Eulerowskiej zaczynają ugięcia rosnać bardzo szybko. Stąd wniosek, że przy obliczeniu prętów rzeczywistych, czyli prętów z małymi przypadkowymi zboczeniami od prostolinjowości osi etc., musimy uczynić zadość tym samym warunkom, co w idealnym przypadku pręta prostolinjowego i osiowo obciążonego. Atoli te warunki mogą się okazać dla prętów rzeczywistych niewystarczającymi. Przy mimośrodku obciążenia $e \leq 0,1 r$ i pierwotnej krzywiznie pręta $< 0,008 (m^{-1})$ (według rachunków Jasińskiego) wystarczy przeprowadzić obliczenie pręta na podstawie wzorów z poprzednich paragrafów. Przy większych zboczeniach wypadnie stosować ogólniejsze wzory, do wyprowadzenia których nadaje się bardzo dobrze metoda przybliżona (ob. § 137)²⁾.



Rys. 404

¹⁾ [Trzeci rodzaj możliwych zboczeń od idealnych warunków, t. j. niejednorodność materiału, da się sprowadzić do nieprostolinjowości osi].

²⁾ Niektórzy autorowie proponują, zamiast obliczenia według wzoru Euler'a, wyjść z wzorów dla ugięcia wskutek mimośrodkowego działania siły ściskającej i dobrać tak wymiary przekroju, aby naprężenia nie przekraczały nigdzie dopuszczalnych norm, ob. Ostenfeld, „Exzentrische und zentrische Knickfestigkeit“, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. z r. 1898, str. 1462. W tych obliczeniach pozostaje dowolna wielkość mimośrodu. [Por. uwagę tłumacza w poprzednim paragrafie].

z dowolnymi parametrami, których wielkości dobierzemy następnie tak, aby wyrażenie dla krytycznego obciążenia otrzymało wartość minimum.

Objaśnimy to bliżej na kilku przykładach. Rozpatrzmy podstawowy przypadek wybożenia pręta obu końcami przegibnie podpartego. Oś pręta zakrzywi się przytem, jak widzieliśmy (§ 174) według sinusoidy o równaniu:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Zmianą energii odkształcenia, odpowiadającą temu wygięciu, będzie [z pominięciem wpływu naprężeń ścinających] (wz. 220):

$$V = f^2 \frac{\pi^4 EI}{4 l^3}.$$

Siły ściskające P wykazują przytem pracę (wz. 227):

$$T = f^2 \frac{\pi^2 P}{4 l}.$$

Po wstawieniu tych wyrażeń w rów. (a) i rozwiązaniu względem P znajdziemy:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

W danym przypadku znaleźliśmy wyrażenie dla wygiętej postaci równowagi i dlatego rów. (a) dało nam dokładną wartość P_{kr} .

Weźmy teraz zadanie bardziej złożone. Pręt utwierdzony pionowo dolnym końcem ściskają siły rozłożone równomiernie na długości pręta (rys. 396, fig. b). Dla linii ugięcia przyjmiemy wyrażenie w postaci szeregu trygonometrycznego:

$$y = a_1 \cos \frac{\pi x}{2l} + a_2 \cos \frac{3\pi x}{2l} + \dots \quad (b)$$

czyniącego zadość następującym warunkom krańcowym:

$$1) \quad y = 0 \text{ dla } x = l \quad \text{ i } \quad 2) \quad y = \delta \text{ i } y' = 0 \text{ dla } x = 0.$$

Jeżeli ograniczymy się do dwu wyrazów tego szeregu, to energia potencjalna zgięcia [z pominięciem energii ściskania] będzie:

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{64 l^3} (a_1^2 + 81 a_2^2).$$

Znajdziemy teraz pracę sił zewnętrznych przy wygięciu pręta. Każdy element obciążenia $q dx$, wydzielony w odległości x od dolnego końca, obniży się o wielkość $\frac{1}{2} \int_0^x (y')^2 dx$ i wykona przytem pracę: $\frac{1}{2} q dx \int_0^x (y')^2 dx$. Całkowita praca obciążenia, wykonana przy skrzywieniu pręta, równa się:

$$T = \frac{q}{2} \int_0^l dx \int_0^x (y')^2 dx = \frac{q}{2} \int_0^l (l-x) (y')^2 dx.$$

Wstawiając zamiast y dwa pierwsze wyrazy szeregu (b) i wykonawszy potrzebne działania, znajdziemy:

$$T = \frac{q}{2} \frac{\pi^2}{4} \left[a_1^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) + a_2^2 \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) + \frac{6}{\pi^2} a_1 a_2 \right] = \frac{q}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} (0,1487 a_1^2 + 0,6078 a_1 a_2 + 2,1487 a_2^2).$$

Mając wyrażenia dla T i V otrzymamy z rów. (a):

$$ql = \frac{\pi^2 EI}{8 l^3} \cdot \frac{a_1^2 + 81 a_2^2}{0,1487 a_1^2 + 0,6078 a_1 a_2 + 2,1487 a_2^2} = \frac{\pi^2 EI}{8 l^3} \cdot \frac{1 + 81 z^2}{0,1487 + 0,6078 z + 2,1487 z^2} \quad (c)$$

przyczem stosunek a_2/a_1 oznaczono przez z . Aby znaleźć możliwie dokładne wyrażenie dla $(ql)_{kr}$, trzeba tak obrać stosunek z , aby wyrażenie (c) stało się minimum. Utworzywszy pochodną tego wyrażenia względem z i przyrównawszy ją do zera, otrzymamy dla wyznaczenia z równanie:

$$z^2 + 0,4020 z = 0,01235$$

o pierwiastkach:

$$z_1 = 0,0286 \quad \text{ i } \quad z_2 = -0,4306.$$

Po wstawieniu z_1 w wyrażenie (c), znajdziemy:

$$(qI)_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(1,12 l)^2}.$$

Ten wynik zgadza się dokładnie z tem, co podaliśmy poprzednio (§ 174). Gdybyśmy się ograniczyli w wyrażeniu dla y tylko do pierwszego wyrazu szeregu (b) i podstawili zatem $a_2 = z = 0$, to znaleźlibyśmy:

$$(qI)_{kr} \approx \frac{\pi^2 EI}{(1,09 l)^2}.$$

Pierwsze przybliżenie dałoby przeto w danym przypadku błąd około 5%.

§ 178. O WYBOCZENIU PRĘTA W SPRĘŻYSTEM ŚRODOWISKU ¹⁾

Dajmy na to, że pręt pryzmatyczny w końcach podpartych ściskają dwie siły wprost przeciwne P . Wszelkiemu skrzywieniu pręta przeszkadzają reakcje środowiska. Zrobimy założenie, że reakcyjne napięcie, przypadające na element pręta, jest proporcjonalne względem długości rzutu elementu na oś pręta i względem wielkości ugięcia y w rozpatrywanym przekroju. Te warunki można uważać w przybliżeniu za spełnione w całym szeregu zadań technicznych. Przy szukaniu P_{kr} trzeba uwzględnić energję odkształcenia nie tylko pręta, lecz także i sprężystego środowiska. Podstawowe równanie dla wyznaczenia P_{kr} napiszemy tedy w postaci:

$$\frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx \quad \dots \quad (a)$$

Lewa strona równania przedstawia pracę sił zewnętrznych przy skrzywieniu pręta, po prawej stronie mamy energję zgięcia pręta i energję odkształcenia środowiska; k oznacza stały współczynnik, przez który trzeba pomnożyć ugięcie y , aby otrzymać reakcję środowiska, odniesioną do jednostki długości pręta. Ogólną postać zgiętej osi pręta otrzymamy przez superpozycję oddzielnych sinusoid (ob. wz. 223), a mianowicie:

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots = \sum_{m=1, 2, 3, \dots} a_m \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \dots \quad (b)$$

Wstawiszmy to wyrażenie dla ugięcia w rów. (a) i wykonawszy potrzebne obliczenia, otrzymamy:

$$P = \frac{EI \sum a_m^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + k \sum a_m^2}{\sum a_m^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} \quad \dots \quad (372)$$

Najmniejszą wartość otrzyma powyższe wyrażenie, gdy wszystkie współczynniki a_m , prócz jednego, staną się zerami. Pierwszą możliwą zakrzywioną postacią równowagi będzie przeto sinusoida. W odróżnieniu od przypadków poprzednio roztrząśniętych (§ 174) może tutaj pierwsza postać mieć więcej punktów przegięcia. Ich liczba będzie zależęć od wielkości współczynnika k , charakteryzującego sztywność środowiska. Im większe k , tem większa liczba półfal powstaje w pręcie przy wyboczeniu. Oznaczenie liczby półfal można w każdym szczególnym przypadku wykonać na podstawie następującego rozumowania: Przypuśćmy, że pierwsza postać zakrzywiona tworzy m półfal, czyli, że:

$$y = a_m \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Wtedy wz. (372) daje:

$$P_{kr} = \frac{EI(m\pi)^4 + k l^4}{m^2 \pi^2 l^2} \quad \dots \quad (c)$$

Wprowadziszmy oznaczenie:

$$B^2 = \frac{k l^4}{16 EI} \quad \dots \quad (d)$$

napiszemy wzór dla P_{kr} w postaci:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(m^2 + \frac{16 B^2}{m^2 \pi^4} \right) = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad \dots \quad (373)$$

przyczem „współczynnik długości“:

$$\mu = \sqrt{m^2 + \frac{16 B^2}{m^2 \pi^4}} \quad \dots \quad (374)$$

¹⁾ Ob. pracę autora: „O wyboczeniu prętów w sprężystym środowisku“ (po ros.), Izv. Petersb. Pol. Inst. z r. 1907 i pracę cytowaną w poprzednim paragrafie, a nadto prace: Zimmermann'a w Zentralblatt d. Bauv. z r. 1906 i Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss., Berlin, z lat 1906, 1907 i 1909.

Dopóki sztywność środowiska jest mała i odpowiednio małym jest współczynnik k , będzie zupełnie naturalnym przyjęć, że pierwsza zakrzywiona postać równowagi nie posiada punktów przegięcia, tak jak w podstawowym prostym przypadku wyboczenia. Zwiększając k , albo, co na jedno wychodzi, powiększając B^2 , dojdziemy kolejno do wartości granicznych, przy których niejako łatwiej przychodzi prętowi zgąć się według krzywej z dwiema półfalami, a dalej z trzema, czterema i t. d. półfalami. Niechaj pierwsza krzywa postać równowagi przy danej wartości B^2 posiada m półfal, a B^2 ulega teraz zwiększeniu; zachodzi pytanie, przy jakiej wartości B^2 przybierze pręt postać o $(m+1)$ półfalach? Ta ostatnia będzie oczywiście pierwszą zakrzywioną postacią równowagi przy tej wartości B^2 , która odpowiada współczynnikowi długości μ , jaki wypadnie z wz. (374), jeżeli w nim zastąpimy m przez $(m+1)$. Graniczną wartość B^2 , odpowiadającą chwili przejścia od m do $(m+1)$ półfal, określi zatem równanie:

$$\sqrt{m^2 + \frac{16 B^2}{m^2 \pi^4}} = \sqrt{(m+1)^2 + \frac{16 B^2}{(m+1)^2 \pi^4}},$$

$$\text{z którego: } B^2 = \frac{\pi^4}{16} m^2 (m+1)^2. \quad (e)$$

Kładąc $m=1$ znajdziemy: $B^2 = 24,35$. Dopóki $B^2 < 24,35$, pierwsza krzywa postać równowagi nie ma punktów przegięcia. Podstawiając kolejno zamiast m w rów. (e) liczby 2, 3, 4, ..., otrzymujemy szereg wartości B^2 , przy których zachodzi przemiana jednej postaci równowagi na drugą o większej liczbie półfal. Te wartości zestawiono w następującej tabeli:

$m =$	1	2	3	4	5	6	7
$B^2 =$	24,35	219,2	876,7	2435	5479	10739	19091

Górny szereg cyfr daje liczbę półfal dla pierwszej zakrzywionej postaci równowagi, dolny zaś krańcowe wartości B^2 , przy których te postacie powstać mogą. Wyznaczwszy B^2 na podstawie danych odnoszących się do sprężystych własności układu, możemy w powyższej tabeli znaleźć liczbę półfal m , na które pręt się dzieli przy wyboczeniu. Wstawiając tę wartość we wzór (374), znajdziemy wielkość współczynnika długości μ i z wzoru (373) odpowiadającą wartość P_{kr} ¹⁾. Przy większej wartości m postąpimy w sposób następujący: Wyrażenie (c) napiszemy w postaci:

$$P_{kr} = EI \left[\frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{m}\right)^2} + \frac{k}{EI} \left(\frac{l}{m}\right)^2 \frac{1}{\pi^2} \right] = EI \left(\frac{\pi^2}{s^2} + \frac{k s^2}{\pi^2 EI} \right) \quad (f)$$

Tutaj oznacza s długość jednej półfali. Najmniejszą wartość przybiera to wyrażenie przy

$$s = \pi \sqrt[4]{\frac{EI}{k}}.$$

Z powiększeniem liczby półfal zbliża się ich długość do znalezionej granicy s , a wielkość P_{kr} , jak widać z wyrażenia (f) do wartości:

$$P_{kr} = EI \left[\sqrt{\frac{k}{EI}} + \sqrt{\frac{k}{EI}} \right] = 2 \sqrt{k EI} = 2 \frac{\pi^2 EI}{s^2}.$$

Jako drugi przykład rozpatrzmy zagadnienie stateczności ściskanych pasów u mostów otwartych²⁾ (rys. 406). Jeżeli przez Q oznaczymy całkowite obciążenie jednej belki, rozłożone równomiernie na rozpiętości l , to przy wielkiej liczbie wę-

¹⁾ Zanotujemy tutaj pewien wynik, mający znaczenie w teorii giętkich wałów. Przy obrocie wału z prędkością kątową ω pojawiają się skutek jakiegokolwiek zakrzywienia osi wału siły odśrodkowe $\frac{q}{g} \omega^2 y$, przypadające na jednostkę długości wału o ciężarze q . Te siły dążą do powiększenia zakrzywienia, a więc wał zachowuje się tak, jak pręt w sprężystym środowisku o ujemnej wartości $k = -\frac{q}{g} \omega^2$. Jak widać z wzoru (c) wygnie się wał bez współdziałania siły podłużnej, gdy:

$$EI(m\pi)^4 = -k l^4 = \frac{q}{g} \omega^2 l^4.$$

Krytyczną wartość prędkości kątowej (wz. 351) otrzymamy stąd, przyjąwszy $m=1$.

²⁾ To zadanie rozwiązał najpierw F. S. Jasiński; ob. zbior. wyd. dzieł, t. I, str. 215. Uproszczenie rozwiązania i niektóre poprawki podał autor w pracy: „O stateczności układów sprężystych“, str. 31.

złów, nacisk, przeniesiony przez jakąkolwiek przekątną na pas górny belki, przedstawi z dostateczną dokładnością wyrażenie:

$$\frac{Q}{l} \left(x - \frac{l}{2} \right) \operatorname{ctg} \varphi,$$

$\frac{Q}{l} \left(x - \frac{l}{2} \right)$ jest tutaj siłą ścinającą w przekroju mn . Dla uproszczenia dalszych obliczeń zastąpimy te siły skupione obciążeniem ciągłym, którego rozkład przedstawia wykreślenie fig. (c). Natężenie obciążenia w jakimkolwiek przekroju mn znajdziemy, dzieląc wielkość nacisku, przeniesionego odpowiadającą przekątną na pas, przez odstęp węzłów a . Znajdziemy więc:

$$\frac{Q}{al} \left(x - \frac{l}{2} \right) \operatorname{ctg} \varphi = \frac{Q}{hl} \left(x - \frac{l}{2} \right) = q \left(x - \frac{l}{2} \right), \text{ przyczem } q = \frac{Q}{hl}.$$

Natężenie zastępczego obciążenia rośnie zatem od środka rozpiętości ku podporom według prawa trójkąta. Największy nacisk zachodzi w środkowym przekroju pasa, gdzie go określa pole jednego z zakreskowanych trójkątów (fig. c), t. j. $\frac{ql^2}{8}$.

W otwartych mostach niema połączeń między górnymi pasami, to też, kiedy naciski przekroczą pewną granicę, może zająć wyboczenie pasów, któremu towarzyszy wygięcie słupów i przekątnych belki kratowej (fig. b). Przy wyznaczeniu krytycznej wartości siły ściskającej $\frac{ql^2}{8}$ można górny pas każdej belki kratowej rozpatrywać jako pręt ściskany siłami rozłożonymi według fig. (c), przyczem wyboczeniu pręta przeszkadza sprężyste środowisko o sztywności zcharakteryzowanej współczynnikiem k . Wielkość k , jak i poprzednio (§ 97), da się obliczyć drogą zastąpienia skupionych oporów poszczególnych słupów, oporami, rozłożonymi na długości a^1). Uważając każdy słup za belkę jednym końcem utwierdzoną, mamy;

$$y = \frac{Pb^2}{3EI_1}.$$

W przypadkach, kiedy słupy podlegają znacznemu naciskowi podłużnemu, trzeba uwzględnić wpływ sił ściskających na wielkość ugięcia (wz. 229) i zastosować wzór:

$$y = \frac{Pb^2}{3EI_1} \frac{1}{1-\alpha^2},$$

w którym α^2 oznacza stosunek siły ściskającej do obciążenia krytycznego dla słupa o dolnym końcu utwierdzonym, a górnym swobodnym. Dla „reakcji“ P górnego końca słupa otrzymujemy tedy wyrażenie:

$$P = \frac{3EI_1}{b^3} (1-\alpha^2) y.$$

Rozłożywszy tę siłę na długość a (odstęp międzywęzłowy), znajdziemy:

$$\frac{P}{a} = \frac{3EI_1}{ab^3} (1-\alpha^2) y \quad \text{i} \quad k = \frac{3EI_1}{ab^3} (1-\alpha^2) \quad \dots \quad (375)$$

Wyznaczywszy siły działające na pręt i sprężyste własności środowiska, znajdziemy krytyczną wartość siły ściskającej przez porównanie pracy sił zewnętrznych przy wyboczeniu ze zmianą energii potencjalnej układu. Wydzielmy dwa elementy pręta, położone symetrycznie względem jego środka. Pracę odpowiadających sił zewnętrznych

$$q \left(\frac{l}{2} - x \right) dx$$

przy wygięciu osi pręta przedstawi wyrażenie:

$$\frac{1}{2} q \left(\frac{l}{2} - x \right) dx \int_x^{1-x} (y')^2 dx.$$

Pracą wszystkich sił zewnętrznych pręta będzie więc:

$$T = \frac{q}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - x \right) dx \int_x^{1-x} (y')^2 dx = \frac{q}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} x (l-x) (y')^2 dx.$$

Przyrównawszy ją do zmiany energii potencjalnej odkształcenia, otrzymamy podstawowe równanie²⁾:

$$\frac{q}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} x (l-x) (y')^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx,$$

¹⁾ Otrzymana tą drogą krytyczna wartość siły ściskającej będzie naturalnie tem dokładniejszą, im gęściej są rozmieszczone słupy. Przy małej liczbie, a znacznej sztywności słupów wypadnie wziąć pod uwagę reakcje skupione. Zamiast pręta w sprężystym środowisku będziemy mieli pręt na sprężystych podporach. Zadania tego rodzaju znajdzie czytelnik w książce I. G. Bubnowa: „Mechanika budowlana okrętu“ (po ros.), str. 260

Ob. także A. Ostenfeld, Die Seitensteifigkeit offener Brücken, Beton u. Eisen z r. 1916.

²⁾ Zakładamy, że sztywność zginania pasu jest stała, a w przypadkach, kiedy ta sztywność zmienia się na długości pręta, będziemy wstawiać za EI tę wartość, dla której z wzoru (h) wypadają najmniejsze wartości naprężenia krytycznego.

z którego

$$\frac{q l^2}{8} = \frac{l^2}{8} \frac{EI \int_0^1 (y'')^2 dx + k \int_0^1 y^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^1 x(l-x)(y')^2 dx} \quad (h)$$

W ten sposób sprowadza się kwestja znalezienia krytycznej wartości sił wewnętrznych w pasie do szukania minimum ułamka (h). Jeżeli słupy narożnikowe są tak sztywne, że ich zgięcie można pominąć, to ściskany pas wypada uważać za pręt o końcach podpartych i wziąć dla linii ugięcia ogólne wyrażenie (b). Aby uprościć obliczenia, najlepiej rozpatrzyć oddzielnie każdą z możliwych postaci równowagi. W przypadku środowiska bardzo podatnego będzie pierwszą zakrzywioną postacią równowagi krzywa bez punktów przegięcia, tworząca jedną półfale. Ta krzywa będzie symetryczna względem środka, wobec czego, poprzestając na dwu wyrazach szeregu (b), trzeba przyjąć:

$$y = a \sin \frac{2\pi x}{l} + a_1 \sin \frac{3\pi x}{l}$$

Wyrazy $\sin \frac{2\pi x}{l}$, $\sin \frac{4\pi x}{l}$ odpadają, albowiem odpowiadają postaciom niesymetrycznym względem środka). Wstawiając to wyrażenie w ogólny wzór (h) i wykonawszy potrzebne obliczenia, znajdziemy:

$$\frac{q l^2}{8} = \frac{\pi^2 EI}{l^3} \frac{1 + 81 z^2 + \frac{16 B^2}{\pi^2} (1 + z^2)}{2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi^2} \right) - \frac{15}{\pi^2} z + 2 \left(3 - \frac{1}{\pi^2} \right) z^3} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (k)$$

Wielkości z i B^2 mają przytem poprzednie znaczenie. Dla otrzymania krytycznej siły ściskającej trzeba dobrać taką wartość z , przy której wyrażenie (k) staje się minimum. Dokonałszy tego dla kilku wartości B^2 , a odpowiadające wielkości współczynnika długości μ zestawiliśmy w poniższej tablicy:

$B^2 = 0$ $\mu = 0,694$	5 0,524	10 0,443	15 0,394	22,8 0,363	56,5 0,324
$B^2 = 100$ $\mu = 0,289$	162,8 0,257	200 0,245	300 0,224	500 0,204	1000 0,174

Począwszy mniej więcej od $B^2 = 18$ tworzy pręt przy wyboczeniu dwie półfale z punktem przegięcia w środku długości. Wtedy, poprzestając na dwu wyrazach szeregu (b), trzeba przyjąć:

$$y = a \sin \frac{2\pi x}{l} + a_1 \sin \frac{4\pi x}{l}$$

Wstawiając nową wartość y w ogólną formułę (h) możemy obliczyć w poprzedni sposób wartości współczynnika długości dla drugiej zakrzywionej postaci równowagi i t. d. Wyniki obliczeń zawiera powyższa tablica. Wprowadzając w rachunek najniekorzystniejszy słup i najniekorzystniejszy przekrój pasa¹⁾, wyznaczamy wielkość B^2 na podstawie wzorów (375) i (d), a z tablicy znajdujemy odpowiadającą wartość współczynnika długości μ . Dalszy rachunek prowadzi się tak samo, jak dla podstawowego przypadku wyboczenia²⁾.

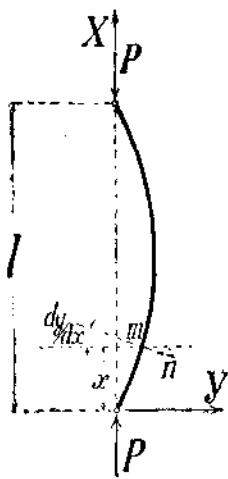
§ 179. O WYBOCZENIU PRĘTÓW ZŁOŻONYCH

W praktyce stosuje się bardzo często pręty złożone z kilku równoległych kształtówek, połączonych kratą; zachodzi tedy pytanie, jakie są warunki stateczności takich prętów. Okazuje się, że w tych przypadkach na wielkość krytycznego obciążenia może istotny wpływ wywrzeć siła poprzeczna, pojawiająca się przy wyboczeniu pręta. Rolę siły poprzecznej objaśnimy najpierw na podstawowym przypadku wyboczenia. Przyjmijmy, że pręt przyrzmatyczny o końcach przegiębnie ustalonych wy-

¹⁾ Należy brać ten słup, dla którego k , obliczone według wz. (375), ma najmniejszą wartość, oraz ten przekrój pasa, dla którego wielkość $\mu l : r$ (r jest promień bezwładności przekroju) jest najmniejsza.

²⁾ Zakładając, że współczynnik długości μ zachowuje swoją wartość i poza granicami sprężystości popelniamy pewien błąd, który jednakże idzie na korzyść pewności; ob.: „O stateczności układów sprężystych“, str. 73.

boczył się pod działaniem podłużnych sił ściskających P (rys. 407). Wskutek zakrzywienia osi, w każdym poprzecznym przekroju pręta wystąpi oprócz siły podłużnej także i siła poprzeczna



Rys. 407

$Q = P \frac{dy}{dx}$, przedstawiająca rzut siły P na normalną do zgiętej osi w rozpatrywanym przekroju mn . Aby ocenić wpływ tej siły na wielkość obciążenia krytycznego, trzeba wziąć pod uwagę nie tylko energię zgięcia, lecz także i energię ścinania zakrzywionego pręta. Ponieważ krzywizna zależy w danym przypadku nie tylko od momentu zginającego, lecz także od siły poprzecznej, więc do wyrażenia dla energii zgięcia:

$$V_1 = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{P^2}{2EI} \int_0^l y^2 dx$$

dołączmy wyrażenie dla energii ścinania:

$$V_2 = \int_0^l \frac{k' Q^2}{2FG} dx = \frac{k' P^2}{2FG} \int_0^l (y')^2 dx,$$

przyczem

$$\frac{k' Q}{FG} = \beta$$

przedstawia kąt odkształcenia postaciowego, uwarunkowany działaniem siły poprzecznej Q . Podstawowe równanie dla wyznaczenia obciążenia krytycznego przybierze tedy postać

$$\frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{P^2}{2EI} \int_0^l y^2 dx + \frac{k' P^2}{2FG} \int_0^l (y')^2 dx \dots (a)$$

Lewa strona równania przedstawia pracę sił ściskających przy zakrzywieniu pręta; po stronie prawej mamy energię zgięcia i energię ścinania. Najmniejszą wartość dla obciążenia krytycznego otrzymamy, przyjmując zakrzywienie według sinusoidy bez punktów przegięcia. Wstawivszy w rów. (a) zamiast ugięcia wyrażenie:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}$$

i wykonawszy wskazane operacje, znajdziemy:

$$P_{kr} = \frac{1}{\frac{l^2}{\pi^2 EI} + \frac{k'}{FG}} \dots (376)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń:

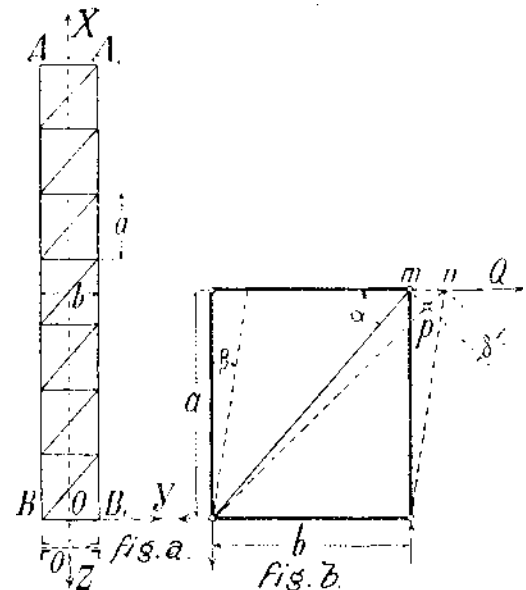
$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad P_d = \frac{FG}{k'}$$

otrzymamy z wzoru (376):

$$P_{kr} = P_e \cdot \frac{P_d}{P_d + P_e} = \varphi P_e.$$

Ponieważ P_d jest bardzo wielkie w porównaniu do P_e , więc współczynnik φ różni się niewiele od 1, a zatem wpływ siły poprzecznej na wielkość krytycznego obciążenia będzie wogóle mały¹⁾. Wzór (376) wyprowadziliśmy tylko dlatego, ponieważ on ułatwia przejście do badania stateczności prętów złożonych, jeżeli zwrócimy uwagę na tę okoliczność, że dodatkowy wyraz $\frac{k'}{FG}$ w mianowniku otrzymanego wzoru przedstawia czynnik, przez który trzeba pomnożyć siłę poprzeczną, aby otrzymać kąt odkształcenia postaciowego β .

Dajmy na to, że wyboczenie pręta, złożonego z dwu pasów AB i A_1B_1 , połączonych krata (rys. 408, fig. a), może zająć w płaszczyźnie XY . Do zwykłego wzoru Eulera wejdzie zatem mo-



Rys. 408

¹⁾ Ob. pracę autora: „K'woprosu o prodołnom izgibie”, Izv. Kij. Pol. Inst. z r. 1908. Ten sam wynik otrzymał inną drogą inż. Nussbaum, Zeitschr. f. Math. u. Ph., t. 55.

ment bezwładności I_0 względem osi OZ . Przy ocenie wpływu siły poprzecznej przyjmujemy, że liczba przedziałów kraty jest bardzo wielka i znajdziemy kąt odkształcenia postaciowego β z rozważania odkształceń jednego przedziału (fig. b). Oznaczmy przez F_d pole przekroju poprzecznego przekątnych, a przez F_k i F_p odpowiednio pole przekrojów pasów i słupków (rozpór). Jeżeli wielkość F_d jest mała w porównaniu do F_k i F_p , to można przyjąć, że odkształcenie przedstawione na fig. (b) liniami przerywanymi będzie głównie wynikiem wydłużenia przekątnej. To wydłużenie δ określi równanie:

$$\delta = \frac{Qa}{\cos \alpha EF_d \sin \alpha}.$$

Bezwzględne posunięcie mn wyrazimy przez δ przy pomocy trójkąta mnp , a mianowicie: $mn = \delta : \cos \alpha$. Stąd:

$$\beta = \frac{mn}{a} = \frac{Q}{EF_d \cos^2 \alpha \sin \alpha} \quad (b)$$

Wstawiając we wzór (376) zamiast $k' : FG$ współczynnik przy Q w wyrażeniu (b), otrzymamy szukaną wartość P_{kr} dla pręta złożonego, przedstawionego na fig. (a)¹⁾:

$$P_{kr} = \frac{1}{\frac{l^2}{\pi^2 EI_0} + \frac{1}{EF_d \cos^2 \alpha \sin \alpha}} \quad (377)$$

Łatwo zauważyć, że wpływ siły poprzecznej na wielkość P_{kr} może być znacznym tylko w przypadku małych wartości przekroju przekątnych F_d .

Skoro przy obliczeniu kąta β uwzględnimy ścisnienie słupków (rozpór) kraty, to znajdziemy bez trudności:

$$\beta = \frac{Q}{EF_d \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{Qb}{EF_p a} = \frac{Q}{E} \left(\frac{1}{F_d \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{1}{F_p \operatorname{tg} \alpha} \right) \quad (c)$$

A zatem analogicznie, jak powyżej:

$$P_{kr} = \frac{1}{\frac{l^2}{\pi^2 EI_0} + \frac{1}{EF_d \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{1}{EF_p \operatorname{tg} \alpha}} \quad (378)$$

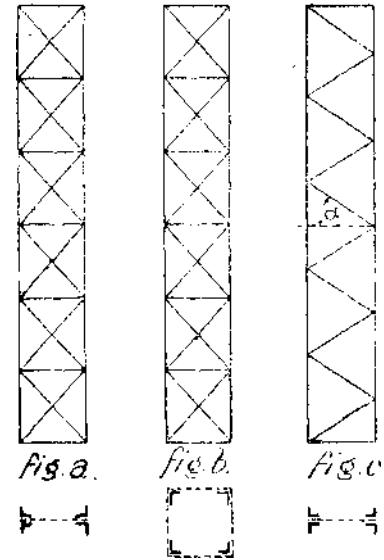
Jeżeli krata ma podwójne przekątne (rys. 409, fig. a), to zamiast F_d trzeba we wzór (378) wstawić wielkość $2F_d$. U prętów o przekroju rurowym (fig. b) trzeba uwzględnić dwie kraty łączące i z tego powodu wstawić we wz. (378) zamiast F_d wielkość $4F_d$, a zamiast F_p wielkość $2F_p$. Przy obliczeniu pręta przedstawionego na fig. (c), można zastosować wzór (377), ale przez α należy pojmować kąt wskazany na rysunku. We wszystkich rozpatrzonych przypadkach jest wielkość krytycznego obciążenia mniejszą od obciążenia Eulerowskiego:

$$P_c = -\frac{\pi^2 EI_0}{l^2}$$

i da się przedstawić formułą:

$$P_{kr} = \varphi P_c.$$

Znalazłszy przy pomocy wzoru (377), albo (378) liczbę φ , sprowadzamy obliczenie prętów złożonych do podstawowego przypadku wyboczenia; poza granicami sprężystości możemy przeto postąpić się znowu podanymi poprzednio formułami empirycznymi lub tablicą Jasińskiego.



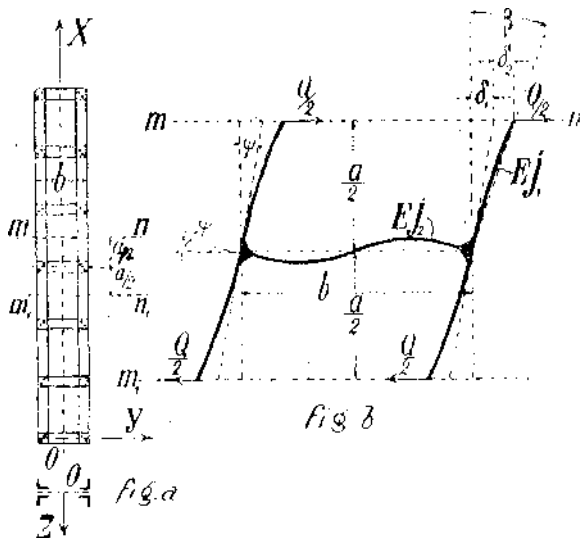
Rys. 409

¹⁾ Ten wzór otrzymał najpierw Engesser. Późniejsza publikacja jego rozwiązania znajduje się w Zentralblatt der Bauverw. z r. 1909, str. 136.

Badaniem tejże kwestji w związku z rozpatrywaniem przyczyn zaważenia się mostu pod Quebec zajął się również L. Prandtl; ob. „Die Knicksicherheit von Gitterstäben“, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. z r. 1907. W obu pracach stosowano metodę badania odmienną od wyłożonej powyżej.

Co do zastosowań w konstrukcjach mostowych ob. N. P. Winogradow, „Obliczenie ścisanych prętów kratowych“ (po ros.), Wiest. Ob-a Technologow z r. 1914.

Przejdziemy teraz do przypadku, kiedy pasy złożonego pręta są połączone tylko szeregiem słupków (bez przekątnych) (rys. 410). Tego rodzaju konstrukcje pozyskały w ostatnich czasach szerokie rozpowszechnienie, jako ściskane elementy kratownic mostowych. Przyjmijmy, że przy ściskaniu nasz pręt złożony może się wycożyć w płaszczyźnie XY . Oznaczmy przez I_0 moment bezwładności całego przekroju względem osi Z -ów, a odpowiednio przez I_1 i I_2 momenty bezwładności przekroju jednego pasa i jednego słupka. Tutaj możemy znowu użyć wzoru (376), skoro



Rys. 410

tylko znajdziemy związek między kątem odkształcenia postaciowego β , a siłą poprzeczną Q . W tym celu wydzielimy z pręta przekrojami mn i m_1n_1 część o długości a . Odkształconą postać tej części w zwiększonej skali przedstawia fig. (b). Jej ukos zależy od zgięcia pasów i słupka. Z fig. (b) widać, że

$$\beta = (\delta_1 + \delta_2) : \frac{a}{2}.$$

Korzystając ze znanych wzorów, znajdziemy:

$$\psi = \delta_1 : \frac{a}{2} = \frac{Qab}{2 \cdot 6EI_2}, \quad \delta_2 = \frac{Qa^3}{3 \cdot 2 \cdot 8EI_1},$$

a zatem:

$$\beta = \frac{Q}{E} \left(\frac{ab}{12I_2} + \frac{a^2}{24I_1} \right).$$

Wstawiając otrzymany współczynnik przy Q we wzór (376) zamiast $k' : FG$, znajdziemy:

$$P_{kr} = \frac{1}{\frac{l^2}{\pi^2 EI_0} + \frac{ab}{12EI_2} + \frac{a^2}{24EI_1}} \quad (379)$$

Znowu tedy okazuje się wielkość P_{kr} mniejszą od obciążenia Eulerowskiego, obliczonego według wzoru dla pręta jednolitego. Różnica między prętem litym a złożonym będzie tem większa, im mniejszą jest sztywność słupków poprzecznych i im większy ich odstęp a . W przypadkach, kiedy a jest wielkie, albo sztywność pasów EI_1 mała, może się zdarzyć, że wielkość $\frac{1}{2} P_{kr}$, obliczona z wzoru (379) nie będzie mała w porównaniu do wielkości $\frac{\pi^2 EI_1}{a^3}$, obciążenia krytycznego, obliczonego dla części pasa zawartej między dwoma słupkami poprzecznymi. W tych warunkach daje wz. (379) nieco za wielkie wartości dla P_{kr} ²⁾.

Trzeba jeszcze zauważyć, że wz. (379) wyprowadziliśmy przy założeniu, że zjawisko zachodzi w granicach sprężystości. Można go jednak używać i poza temi granicami do znalezienia stosunku między obciążeniem krytycznym dla pręta złożonego, a obciążeniem krytycznym dla odpowiadającego pręta litego, aby następnie zastosować formuły empiryczne, znalezione dla prętów litych³⁾. Co się tyczy doświadczeń przeprowadzonych nad statecznością złożonych prętów, to one nie wystarczają jeszcze do ustalenia dobrze ugruntowanych wzorów empirycznych.

§ 180. UWAGI CO DO USTALENIA KOŃCÓW I OSŁABIENIA PRZEKROJÓW POPRZECZNYCH ŚCISKANYCH PRĘTÓW

Przy wywodzie wzorów dla obciążenia krytycznego rozróżniają końce swobodne, podparte (przegiębnie ustalone) i utwierdzone. W praktyce napotykaemy często i warunki pośrednie. Zwykle

¹⁾ Ten wzór daje wyniki bliskie znalezionym doświadczalnie przez prof. Rudeloff'a; ob. Eisenbau z r. 1913, str. 41.

²⁾ Dalsze badania tej kwestji i dane doświadczalne zawiera praca autora: „O stateczności układów sprężystych“, str. 57.

Inny wywód wzoru (379) podał prof. Kayser; ob. Eisenbau z r. 1910.

Ob. także prace Müller-Breslau'a w Eisenbau z lat 1911–1913.

³⁾ Błędy, powstające przy takim sposobie obliczenia, idą na korzyść pewności; ob.: „O stateczności ukł. spr.“, str. 75.

bowiem są końce pręta przynitowane do innych części konstrukcji, wobec czego nie można ich uważać za ustalone przegibnie. Ale również nie wolno uważać ich za doskonale utwierdzone. Nawet przy najzupelniejszym przymocowaniu mogą końce obracać się częściowo i ta okoliczność obniża wielkość obciążenia krytycznego. Jeżeli kąty obrotu końców są proporcjonalne względem pojawiających się momentów podporowych, to będziemy mieli do czynienia ze sprężystym utwierdzeniem końców i przy danej sztywności utwierdzenia będziemy mogli ocenić jego wpływ na wielkość obciążenia krytycznego. Przy użyciu metody przybliżonej wypadnie uwzględnić nietylko energię odkształcenia rozpatrywanego pręta, lecz także i tych części konstrukcji, z którymi pręt się łączy. W ten sposób dochodzimy do badania stateczności układów prętów¹⁾. W takich przypadkach, dla uproszczenia obliczeń, pomija się zwykle w praktyce wpływ utwierdzeń na korzyść pewności i używa się wzorów, wyprowadzonych dla prętów o końcach przegibnie podpartych. Zaznaczymy tutaj, że wpływ utwierdzeń końców na wielkość obciążenia krytycznego maleje ze zmniejszeniem długości pręta. Dla przykładu porównamy pręt o końcach podpartych i pręt, którego końce są doskonale utwierdzone. W ostatnim przypadku współczynnik długości $\mu=0,5$. Dopóki zjawisko wyboczenia zachodzi dla obu prętów w granicach sprężystości, jest obciążenie krytyczne przy utwierdzonych końcach cztery razy większe, niż przy końcach podpartych. Poza granicami sprężystości zachowuje swoją wartość współczynnik długości μ , atoli stosunek obciążeń krytycznych będzie już inny. Przy pomocy tablicy Jasińskiego (str. 332) łatwo otrzymać wyniki następujące:

$\frac{l}{r} =$	200	150	100	50
(Dla końców podpartych) $p_{kr} =$	532	946	1904	2646 kg/cm^2
$\frac{\mu l}{r} =$	100	75	50	25
(Dla końców utwierdzonych) $p'_{kr} =$	1904	2275	2646	3016 kg/cm^2
$p'_{kr} : p_{kr} =$	3,58	2,40	1,39	1,15

Z tej tablicy widać, jak ubywa stosunek $p'_{kr} : p_{kr}$ ze zmniejszeniem długości pręta. U krótkich prętów jest wpływ utwierdzenia końców na wielkość naprężeń krytycznych wcale nieznaczący.

Pręty ściskane posiadają zwykle pewne przekroje osłabione otworami na nity, lub innego rodzaju niedoborami; zachodzi tedy pytanie, o ile wskutek tych osłabień zmniejsza się wielkość obciążenia krytycznego. Rozwiązanie tego zadania jest związane z badaniem wyboczenia prętów o zmiennym przekroju. W przypadkach, kiedy długość osłabionej części pręta jest niewielka²⁾, okazuje się jej wpływ na wielkość obciążenia krytycznego równoważnym z wpływem przyrostu długości pręta o wielkość:

$$\delta l = d \cdot \frac{I - I'}{I} \cos^2 \frac{\pi c}{l} \quad (380)$$

Tutaj oznacza odpowiednio I i I' moment bezwładności nieosłabionego i osłabionego przekroju, c odległość osłabionego miejsca od środka pręta, d długość osłabionej części. Największy wpływ na P_{kr} objawia osłabienie w samym środku pręta, t. j. gdy $c=0$. Jeżeli na pręcie znajduje się szereg osłabień równych i równoodległych od siebie, to ich ogólny wpływ na P_{kr} otrzymamy przez

¹⁾ Jako przykład zadania tego rodzaju można przytoczyć badanie stateczności ściskanych prętów kratownicy wielokrotnej, ob. Jasiński, t. I, str. 177.

Ob. także: Vianello, „Die Knickfestigkeit eines dreiarmligen ebenen Systems“, Zeit. d. Ver. d. Ing. z r. 1906, tr. 1753.

Pewien przypadek szczególnie rozpatruje praca autora: „K' woprosu o prodołnom izgibie“. Izv. Kij. Pol. Inst. z r. 1908.

²⁾ Ob. cytowaną powyżej pracę autora.

sumowanie wpływów oddzielnych osłabień i , na podstawie wz. (380), można ten wpływ zastąpić przyrostem długości pręta o wielkość:

$$\delta l = \frac{n d l - l'}{2} \quad (381)$$

przyczem n jest liczbą miejsc osłabionych. Na liczbowym przykładzie można okazać, że u prętów żelaznych jest wpływ otworów na nity na wielkość P_{kr} dość mały.

Weźmy np. kątownik $75 \times 75 \times 10 \text{ mm}$ o długości $l = 2,5 \text{ m}$, opatrzoną 10-ciu otworami na nity o średnicy 20 mm . Taki otwór osłabia przekrój pręta w przybliżeniu o 14% i o tyleż mniej więcej zmniejsza się moment bezwładności. A zatem:

$$(l - l') : l = \sim 0,17.$$

Skoro we wz. (381) podstawimy zamiast długości osłabionej części średnicę nitu, to znajdziemy:

$$\delta l = 1,7 \text{ cm}.$$

Zważywszy, że obciążenie krytyczne jest odwrotnie proporcjonalne względem kwadratu długości pręta, obliczone przez nas zastępcze zwiększenie jego długości δl pomniejsza P_{kr} o:

$$100 \frac{2\delta}{l} = \sim 1,4\%.$$

Zmniejszenie P_{kr} zachodzi zatem w znacznie mniejszym stopniu, niż osłabienie przekroju i dlatego przy obliczeniu kształtówek żelaznych ze względu na wyboczenie bierzemy w rachubę moment bezwładności przekroju brutto, nie uwzględniając otworów na nity. (Te ostatnie trzeba jednak uwzględnić przy obliczeniu naprężeń dla sprawdzenia warunku wytrzymałości).

Na tem zakończymy rozpatrywanie kwestji stateczności ściskanych prętów. Wyłożone tutaj metody można także zastosować przy rozwiązywaniu bardziej złożonych zadań, jak np. kwestji stateczności prętów o zmiennym przekroju¹⁾, prętów o równej wytrzymałości na wyboczenie²⁾ i prętów w kilku punktach podpartych³⁾. Do przybliżonego rozwiązania tych zadań można też zastosować metodę wykreślną⁴⁾.

§ 181. O STATECZNOŚCI OKRĄGŁEGO PIERŚCIENIA I WALCOWEJ RURY

Jeżeli okrągły pierścień, albo cienkościenna rura o przekroju kołowym i promieniu a jest narażona na działanie równomiernie rozłożonych nacisków zewnętrznych, to, jak pokazuje doświadczenie, można przez powiększenie ciśnienia p osiągnąć taki stan graniczny, przy którym okrągła postać równowagi przestaje być stateczną, a pierścień lub rura zaczynają się spłaszczać. Dla wyznaczenia krytycznej wartości zewnętrznego ciśnienia możnaby naturalnie użyć ogólnego sposobu i otrzymać potrzebne równanie, przyrównywując pracę zewnętrznych nacisków przy spłaszczaniu rury do zmiany energii potencjalnej odkształcenia układu⁵⁾. W tym jednak przypadku dojdziemy prędzej do celu, stosując równanie różniczkowe równowagi dla linii ugięcia krzywego pręta (§ 137):

$$EI \left(\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{y}{a^2} \right) = -M \quad (a)$$

¹⁾ Ob. Franke, „Die Tragkraft der Säulen bei veränd. Querschnitt“, Zeit. f. Math. u. Ph. z r. 1901.

Franke, „Die Knicksicherheit bei entspr. Zunahme d. Trägheitsmomentes“, Zeitschr. für Arch. u. Ing. z r. 1907.

A. Dinnik, Wiest. Ob-a Technologow z r. 1913 i Wiest. Inż. z r. 1915, str. 94.

H. Kayser, „Knickwiderstand v. Druckstäben mit veränderlichem Querschnitt“, Eisenbau z r. 1910, str. 451.

²⁾ Ob. Verhandl. d. Gewerbeleiss. z r. 1910, zesz. VI.

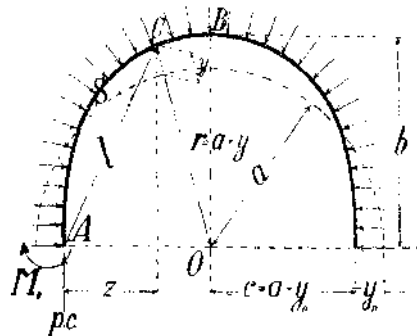
³⁾ Ob. Wittenbauer, „Die Knicklast mehrfach befestigter Stäbe“, Zeit. d. V. d. Ing., r. 1902.

Johnson, „The Theory of continuons columns“, Amer. Soc. of. civ. Eng. z r. 1906.

⁴⁾ Ob. Vianello, Zeit. d. Ver. d. Ing. z r. 1898, str. 1436.

⁵⁾ Ob. pracę autora: „Zastosowanie spólrzędnych normalnych...“ (po ros.), Izw Kijew. Pol. Inst. z r. 1910.

Dla uproszczenia wywodów przyjmijmy, że pierścień ma przekrój poprzeczny prostokątny, a szerokość przekroju w kierunku prostopadłym do płaszczyzny pierścienia jest równa 1; wtedy nacisk, przypadający na każdą jednostkę długości pierścienia, będzie równy ciśnieniu p . Dajmy na to, że pod działaniem tych nacisków powstało spłaszczenie pierścienia i niech linja pełna na rys. (411) przedstawia zgiętą oś pierścienia, a proste OA i OB jej osie symetrii. Przetnijmy pierścień w punkcie A . Działanie dolnej części pierścienia na górną można zastąpić naciskiem podłużnym $p \cdot c$ (przyczem c oznacza mniejszą półkę spłaszczonej postaci równowagi) i momentem M_0 . Moment zginający w dowolnym punkcie C będzie równy:



Rys. 411

$$M = -M_0 - pcz + \frac{pl^2}{2},$$

jeżeli tak samo, jak przy wyprowadzeniu równania (a) będziemy uważać ten moment za dodatni, któremu odpowiada zwiększenie krzywizny osi. Tutaj zastąpiono ciśnienie wzdłuż łuku AC ciśnieniem na cięciwę $AC=l$. Długość cięciwy znajdziemy z trójkąta OAC :

$$\overline{OC^2} = r^2 = l^2 + c^2 - 2cz, \text{ a więc: } \frac{l^2}{2} - cz = \frac{r^2 - c^2}{2} = \frac{(a+y)^2 - (a+y_0)^2}{2} = a(y - y_0).$$

Uwzględnivszy to i wstawivszy wyrażenie dla M w rów. (a), otrzymamy:

$$EI \left(\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{y}{a^2} \right) = M_0 + p a y_0 - p a y.$$

$$\text{albo: } \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{M_0 + p a y_0}{EI} + \left(\frac{p a}{EI} + \frac{1}{a^2} \right) y = 0 \quad \dots \quad (b)$$

Ogólną całką tego równania jest:

$$y = \frac{M_0 + p a y_0}{EI \alpha^2} + C \cos \alpha s + C_1 \sin \alpha s \quad \dots \quad (c)$$

przyczem

$$\alpha^2 = \frac{a p}{EI} + \frac{1}{a^2},$$

zaś C i C_1 są dowolnymi stałymi. Przesunięcie y w kierunku promienia r posiada największą ujemną i największą dodatnią wartość odpowiednio w punktach A i B , gdzie $s=0$ i $s=\frac{a\pi}{2}$; w tych punktach jest $\frac{dy}{ds} = 0$. Aby uczynić zadość tym warunkom trzeba przyjąć:

$$C_1 = 0 \quad \text{i} \quad \left[\sin \alpha s \right]_{s=\frac{a\pi}{2}} = 0,$$

a zatem:

$$\frac{\alpha a \pi}{2} = n \pi, \quad \text{albo} \quad \sqrt{\frac{a p}{EI} + \frac{1}{a^2}} = \frac{2n}{a}.$$

Najmniejszą wartość ciśnienia, przy której będzie możliwe spłaszczenie pierścienia, otrzymamy, przyjmując $n=1$; wtedy:

$$p_{kr} = \frac{3EI}{a^3} \quad \dots \quad (382)$$

W przypadku cienkościenniej rury, możemy z niej wydzielić dwoma przekrojami pierścień, którego szerokość w kierunku osi rury jest równa 1. Stateczność takiego pierścienia można sprawdzać według wzoru (382), skoro w nim sztywność EI zastąpimy sztywnością „walcową”, a zatem:

$$p_{kr} = \frac{3 E h^3}{12 (1 - \sigma^2) a^3} \quad \dots \quad (383)$$

jeżeli h oznacza grubość ściany rury. Otrzymany wzór zgadza się dobrze z doświadczeniami¹⁾ i pozwala obliczać długie rury ze względu na stateczność ich sprężystej równowagi. W przypadku

¹⁾ Ob. P. A. Carman, Univ. of Illinois Bulletin Nr. 5, r. 1906.

Slocum, „The collapse of tubes under external pressure“. Engineering, r. 1909, str. 35.

rury o skończonej dowolnej długości¹⁾ l , będzie wartość ciśnień krytycznych większa, aniżeli to wypada z wzoru (383) (ponieważ końce rury są przymocowane, np. do den kofła parowego) i da się wyznaczyć z wzoru²⁾:

$$p_{kr} = \frac{E}{(n^2 - 1) \left[1 + \left(\frac{nl}{\pi a} \right)^2 \right]^2} \cdot \frac{h}{a} + 0,73 E \left[n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1,3}{1 + \left(\frac{nl}{\pi a} \right)^2} \right] \frac{h^3}{(2a)^3} \quad (384)$$

Tutaj oznacza n (całkowitą) liczbę półfal, na które dziela się przy wyboczeniu równoległe pierścienie elementarne walcowej rury. Liczbę n należy tak dobrać, aby naprężenie krytyczne, wyznaczone z wzoru 384 miało najmniejszą wartość. W niżej umieszczonej tablicy podano szereg wartości p_{kr} w kg/cm^2 , obliczonych dla $E=2 \cdot 10^{10} kg/cm^2$ i $\sigma=0,3$. Przy współczynniku E' , odmiennym od E , trzeba dane tablicy pomnożyć przez ułamek $E':E$. Linja gruba oddziela na tablicy ciśnienia, odpowiadające naprężeniom większym od $1800 kg/cm^2$.

$\frac{a}{l}$	$\frac{100h}{a} =$							
	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2
	Zewnętrzne ciśnienie krytyczne w kg/cm^2							
0	0,035	0,28	0,95	2,25	4,4	7,6	12	18
0,1	0,18	1,0	2,9	6,6	12,3	17	23	31
0,2	0,37	2,1	5,9	13	21	32	47	66
0,3	0,56	3,2	9,3	18	32	51	76	111
0,4	0,76	4,5	11,6	25	45	70	101	140
0,5	0,97	5,5	15	32	55	87	132	190

Jeżeli zamiast całkowitego pierścienia mamy tylko jego część o końcach przegiębnie ustalonych, to krytyczną wartość normalnego nacisku p , przypadającego na jednostkę długości zakrzywionego pręta i rozłożonego równomiernie, określi równanie:

$$p_{kr} = \frac{EI}{a^3} \left(\frac{4\pi^2}{\varphi^2} - 1 \right) \quad (d)$$

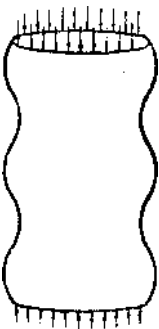
w którym φ oznacza kąt środkowy, odpowiadający osi krzywego pręta³⁾. Na podstawie tego wzoru można nabrać wyobrażenia o stateczności łuków dwuprzegubowych lub trójprzegubowych i ustalić graniczne wartości dla ich grubości. Przy małej krzywiznie można wzór (d) z wystarczającym przybliżeniem napisać w postaci:

$$p_{kr} = \frac{4\pi^2 EI}{a^3 \varphi^2} = \frac{4\pi^2 EI}{as^2}$$

przyczem s oznacza długość pręta. Wówczas krytyczna wartość podłużnej siły ściskającej w łuku:

$$P_{kr} = a p_{kr} = \frac{4\pi^2 EI}{s^2} \quad (385)$$

Ten wzór jest identyczny z otrzymanym pierwiej dla przypadku wyboczenia pręta prostego o końcach utwierdzonych⁴⁾.



Rys. 412

¹⁾ Ob. R. V. Southwell, Phil. Mag. z r. 1913, str. 503 i z r. 1915, str. 67.

²⁾ R. v. Mises, Zeit. d. V. d. Ing. z r. 1914, str. 750.

Ob. także „Kurs teorii uprugosti“, cz. II, str. 387.

³⁾ Ob. pracę autora: Ob. ustojczowości uprugich sistem“, str. 66. Nadto: Mayer-Mita, Zeit. d. V. d. Ing. z r. 1914, str. 649 i Eisenbau z r. 1913, str. 361.

⁴⁾ Co się tyczy innych zadań stateczności rury ob. pracę autora: „Einige Stabilitätsprobleme d. Elastizitätstheorie“, Z. f. Math. u. Ph. z r. 1910, a nadto:

Lorenz, „Die nichtachsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder“, Phys. Zeitschr. z r. 1911, str. 241;

S. Timoszenko, „K' woprosu o deformacjach i ustojczowości cilindriczeskoj obołoczki“, Wiest. Ob-a Techn., z r. 1914

Cienkościenna prosta rura może okazać niestateczność sprężystej równowagi także przy podłużnym ściskaniu siłami rozłożonemi równomiernie na przekrojach końcowych. Skoro odpowiadające tym siłom naprężenia przekroczą pewną granicę, to rura może się pomarszczyć poprzecznie w sposób uwidoczony na rys. (412). Nie trudno znaleźć wielkość obciążenia krytycznego, rozpatrując element rury, wydzielony dwiema nieskończenie bliskimi tworzącymi, jako pręt w sprężystym środowisku (§ 179). Stopień sztywności środowiska określa się w sposób wskazany w § 155.

§ 182. O STATECZNOŚCI ŚCISKANYCH PŁYT¹⁾

Jako części dodatkowych żelaznych konstrukcyj używa się nierazko blach, których grubość bywa zwykle małą w porównaniu do innych rozmiarów. Do tych blach można tedy stosować z dostateczną dokładnością wszystkie wywody odnoszące się do cienkich płyt. Jeżeli płyta jest narazona na siły ściskające, które działają w jej płaszczyźnie środkowej, to, zwiększając te siły, można osiągnąć granicę, przy której płaska postać równowagi przestaje być stateczną i nastąpi wyboczenie płyty. Możliwość tego zjawiska, analogicznego do wyboczenia cienkich prętów, należy uwzględnić przy obliczeniu konstrukcyj złożonych z blach, naprzykład przy obliczeniu ściskanych pasów belek kratowych o przekroju T , U i rurowym, przy obliczeniu grubości ścianek belek nitowanych i t. d.

Do najprostszych, a zarazem praktycznie najważniejszych należą zagadnienia stateczności płyt, ograniczonych konturem prostokątnym²⁾. Brzegi płyty przyjmiemy za podparte i rozpatrzmy kilka szczególnych przypadków, odpowiadających różnym sposobom rozłożenia sił ściskających (rys. 413). Przy szukaniu krytycznej wartości sił będziemy się posługiwać metodą przybliżoną. Przyjąwszy zbliżoną postać dla powierzchni wygięcia płyty, obliczymy odpowiadającą zmianę potencjalnej energii odkształcenia i przyrównamy ją do pracy wykonanej przez siły ściskające przy wyboczeniu płyty. Jeżeli się nam uda obrać dla powierzchni ugięcia wyrażenie dokładne, to otrzymamy także dokładne wyrażenie dla krytycznej wartości sił ściskających.

1) Przy ściskaniu płyty siłami równomiernie rozłożonemi na brzegach poprzecznych (fig. a³⁾), zachodzi wyboczenie według powierzchni, której przekroje płaszczyznami $x = \text{const.}$, albo $y = \text{const.}$ są sinusoidami. Jeżeli długość płyty jest niewielka ($a < b\sqrt{2}$), to z każdej z tych sinusoid realizuje się tylko jedna półfala, a równanie powierzchni wygięcia ma postać:

$$w = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (a)$$

Łatwo sprawdzić, że wyrażenie (a) dla ugięcia w czyni zadość warunkom na podpartym obwodzie płyty. Wyrażenie dla energii potencjalnej zgięcia, odpowiadające przyjętej powierzchni równowagi, znaleźliśmy już poprzednio (§ 154) w formie:

$$V = \frac{C a b}{8} A^2 \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2.$$

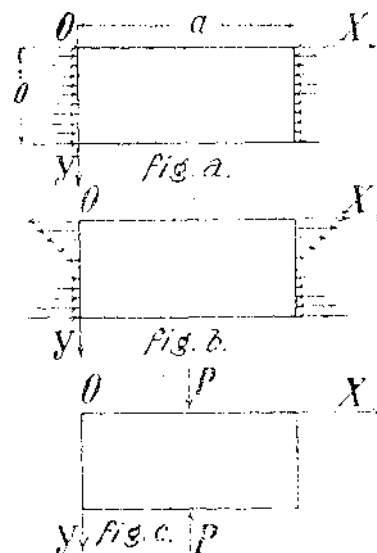
Co się tyczy pracy T sił ściskających, to oznaczając przez P wielkość nacisku, przypadającego na jednostkę długości obwodu i uwzględniając, że zbliżenie dwu jakichkolwiek punktów, leżących na brzegach poprzecznych i odpowiadających tej samej wartości y , jest równe $\frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$, możemy napisać:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^b P dy \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = P \frac{a b}{8} A^2 \frac{\pi^2}{a^2}.$$

Porównawszy ten wynik z energią potencjalną zgięcia, otrzymamy wartość krytyczną nacisku:

$$P_{kr} = C \pi^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} \right)^2 \quad (386)$$

Zwiększając stopniowo długość płyty a , możemy otrzymać warunki, przy których płyta się wyboczy w dwie półfale, przy dalszem powiększaniu długości powstają trzy, cztery półfale i t. d. Z powiększeniem długości płyty zmienia się obraz zjawiska wogóle tak, jak przy wyboczeniu pręta w sprężystym środowisku (§ 179). Przy podziale płyty na m półfal będzie każda półfala w takich samych warunkach, jak płyta o brzegach podpartych i długości $\frac{a}{m}$, a szerokości b . Krytyczną war-



Rys. 413

¹⁾ Szczegółowe rozwiązanie szeregu zadań i tablice liczbowe znajdzie czytelnik w dziele autora: „Kurs teorii uprugosti“, cz. II, str. 317—362.

²⁾ Zagadnienie stateczności ściskanych płyt rozwiązano także w przypadku konturu kołowego; ob. A. N. Dinnik, Izv. Kij. Pol. Inst. z r. 1911.

Ob. także: Nádai, Z. d. V. d. Ing. r. 1915, str. 169.

³⁾ To zadanie rozwiązał pierwszy G. H. Bryan, Lond. Math. Soc. Proc. z r. 1891, t. 22.

tość sił ściskających znajdziemy, wstawivszy we wz. (386) zamiast a wielkość $\frac{a}{m}$. Przejście od postaci o m półfalach do postaci o $(m + 1)$ półfalach odpowiada takim warunkom, przy których wielkość P_{kr} obliczona przy założeniu m , albo $(m + 1)$ półfal przybiera tę samą wartość, czyli kiedy:

$$\frac{m}{a} + \frac{a}{mb^2} = \frac{m+1}{a} + \frac{a}{(m+1)b^2}; \quad \text{a stąd: } a = b\sqrt{m(m+1)} \quad \dots \quad (b)$$

Przyjmując $m = 1$, otrzymujemy $a = b\sqrt{2}$; począwszy więc od tego stosunku wyboczy się płyta w dwie półfale. Dla $m = 2$, $a = b\sqrt{6}$. Ten stosunek odpowiada przejściu od wyboczenia w dwie półfale do trzech półfal i t. d. Przy bardzo wielkiej długości płyty jest liczba m wielką i zamiast równania (b) możemy napisać $a = bm$, albo $a : m = b$, czyli długa płyta dąży przy wyboczeniu do podziału na kwadraty [naprzemian wklęsłe i wypukłe]. Dla zastosowań praktycznych dogodniej przejść od wielkości P_{kr} do odpowiadających naprężeń krytycznych:

$$p_{kr} = \frac{P_{kr}}{h} = \frac{E \pi^2}{12(1-\sigma^2)} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2 \frac{h^2}{b^2}$$

Tutaj wstawiliśmy zamiast sztywności walcowej jej wyrażenie przez stałe sprężystości i grubość płyty h . Na podstawie otrzymanego wyniku wnosimy, że przy określonym stosunku $a : b$ są naprężenia krytyczne proporcjonalne względem stosunku $h^2 : b^2$. Podwajając grubość płyty zwiększamy tem samym czterokrotnie p_{kr} . Z tego można skorzystać dla ułożenia tablicy, ułatwiającej obliczenie ściskanych płyt ze względu na wyboczenie. Taka tablica, umieszczona poniżej, zawiera wartości p_{kr} , odpowiadające różnym wartościom stosunku $a : b$, i obliczone przy założeniu, że $b : h = 100$, $E = 2 \cdot 10^9 \text{ kg/cm}^2$. Jeżeli w praktyce mamy do czynienia ze stosunkiem $b : h = n$, to dla otrzymania odpowiadających naprężeń krytycznych trzeba liczby tablicy pomnożyć przez $\left(\frac{100}{n}\right)^2$.

$\frac{a}{b} =$	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
(dla $b : h = 100$) $p_{kr} =$	1097	900	795	761	738	709	702	709	725	750	784	823 kg/cm^2

Z tablicy widać, że znacznym zboczeniem wartości stosunku $a : b$ od jednostki odpowiadają tylko małe zmiany w wartości p_{kr} . Wobec tego można dla dostatecznie długich płyt nie szukać liczby półfal i przyjąć, że półfale dzielą płytę na kwadraty. W takim przypadku będzie naprężenie krytyczne:

$$p_{kr} = 702 \left(\frac{100h}{b} \right)^2 (\text{kg/cm}^2) \quad \dots \quad (387)$$

W całkiem podobnych do rozpatrzonego przypadku warunkach znajdują się ściany rury o przekroju kwadratowym, ściskanej siłami rozłożonymi równomiernie na przekrojach końcowych.

2) Przy rozłożeniu nacisków, przedstawionem na fig. (b), t. j. w przypadku zginania płyty w jej płaszczyźnie, odpowiadające ciśnienia w dowolnym punkcie przekroju określa wyrażenie:

$$\frac{P}{h} \left(1 - \frac{2y}{b} \right)$$

Do wyznaczenia P_{kr} można użyć poprzedniej metody. Nie będziemy tutaj zastanawiać się nad obioem przybliżonej postaci powierzchni wyboczenia i utworzeniem wyrażeń dla V i T , lecz ograniczymy się tylko do przytoczenia wyników końcowych¹⁾. Okazuje się, że i w tym przypadku jest, dla określonej wartości stosunku $a : b$, wielkość p_{kr} proporcjonalną względem $h^2 : b^2$. Poniżej podajemy wartości p_{kr} , obliczone dla różnych stosunków $a : b$ przy założeniu, że $b : h = 100$ i $E = 2 \cdot 10^9 \text{ kg/cm}^2$. Jeżeli przy obliczeniu będziemy mieć $b : h = n$, to odpowiadającą wartość p_{kr} znajdziemy, mnożąc liczby tablicy przez $(100h : b)^2$.

$\frac{a}{b} =$	0,2	0,4	0,5	0,6	0,707	0,8	1,0	1,2
(dla $b : h = 100$) $p_{kr} =$	14680	5780	4870	4500	4390	4440	4870	5560 kg/cm^2

Z tablicy widać, że najmniejsza wartość p_{kr} odpowiada stosunkowi $a : b = 0,707$, że zatem w przypadku długiej płyty musi wyboczenie zachodzić według powierzchni z szeregiem półfal. Liczba półfal m jest taka, że stosunek $\frac{a}{m} : b$ zbliża się możliwie do liczby 0,707, odpowiadającej najmniejszej wartości p_{kr} . Wzór dla obliczeń ma postać:

$$p_{kr} = 4390 \left(\frac{100h}{b} \right)^2 (\text{kg/cm}^2) \quad \dots \quad (388)$$

¹⁾ Rozwiązanie tego zadania znajduje się w pracy autora: „O stateczności układów sprężystych“.

Tym wzorem należy się posługiwać przy sprawdzeniu stateczności ścianki wysokich belek I w środku rozpiętości, gdzie naprężenia zginające mają największą wartość, a ścianka znajduje się mniej więcej w takich warunkach, jak rozpatrywana właśnie płyta. Wpływ pasów, przeszkadzających swobodnemu obrotowi brzegów ścianki przy wyboczeniu, można pominąć na korzyść bezpieczeństwa (pewności). Zaznaczymy tutaj, że pionowe żebra, które się usztywnia ścianki wysokich nitowanych belek I, nie mogą przeszkodzić wyboczeniu tych ścianek i wpływają tylko na długość półfal, podług których zachodzi wyboczenie. To zaś, jak widać z tablicy, odbija się niewiele na wielkości p_{kr} .

W pobliżu podpór belek nitowanych mają największą wartość naprężenia styczne. Dla wyznaczenia ich krytycznej wartości można użyć następującej tablicy¹⁾, w której, w zależności od stosunku $a:b$, podano wartości naprężeń krytycznych $(p_t)_{kr}$ dla prostokątnej płyty na całym obwodzie podpartej i narażonej na działanie naprężeń stycznych, rozłożonych równomiernie na obwodzie.

$\frac{a}{b} =$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0
(dla $b:h = 100$) $(p_t)_{kr} =$	1650	1406	1280	1230	1190	1160	1100	1070 kg/cm ²

W przypadku długich płyt można wartość $(p_t)_{kr}$ określić wzorem²⁾:

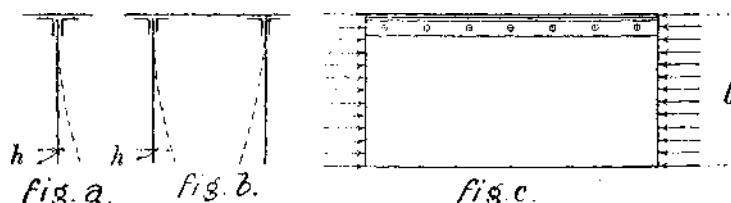
$$(p_t)_{kr} = 990 \left(\frac{100h}{b} \right)^2 \text{ (kg/cm}^2\text{)} \quad (389)$$

Tutaj okazują żebra usztywniające istotny wpływ na stateczność ścianki³⁾.

3) Zagadnienia stateczności płyt, ściskanych siłami skupionymi, są jeszcze zawilsze. Obecnie posiadamy rozwiązanie tylko na przypadku przedstawionego na fig. (c) (rys. 408)⁴⁾. Przy znacznej długości płyty można wartość krytyczną ściskającej siły (w przypadku podpórtych brzegów płyty) obliczyć według wzoru:

$$P_{kr} = \frac{4\pi C}{b} \quad (390)$$

4) Rozpatrzmy teraz kilka przypadków, w których jeden z długich brzegów płyty jest zupełnie swobodny. Te zadania mają praktyczne znaczenie w związku z obliczeniem ściskanych pasów kształtu T lub U (rys. 414). Przy powiększeniu nacisków P można osiągnąć granicę, kiedy płaska postać równowagi pionowej blachy przestaje być stateczną i zachodzi wyboczenie dolnej swobodnej krawędzi. Wielkość naprężeń krytycznych zależy od stopnia utwierdzenia pionowej blachy wzdłuż górnej krawędzi. W przypadku przekroju T można zwykle na rzecz pewności pominąć wpływ poziomej wstęgi i kątownek, a blachę „stojącą” rozpatrywać jako płytę o trzech brzegach podpartych, a jednym swobodnym; wtedy znajdziemy naprężenia krytyczne na podstawie następującej tablicy⁵⁾:



Rys. 414

$\frac{a}{b} =$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3	4	5	10	∞
(dla $b:h = 100$) $p_{kr} =$	253	199	167	147	133	123	107	98,9	90,5	86,8	81,6	80,0 kg/cm ²

Naprężenia krytyczne maleją z powiększeniem długości płyty, a zatem przy wyboczeniu będzie zgięcie zachodzić według powierzchni o jednej półfali. Wielkość p_{kr} obliczono przy założeniu, że $b:h = 100$; dla innej wartości tego stosunku należy postąpić tak samo, jak i w przypadkach poprzednio rozpatrywanych.

W przypadku przekroju U (fig. b) utwierdzenie górnych krawędzi blachy stojącej posiada zwykle dostateczną sztywność; można ją zatem rozpatrywać jako płytę, której brzegi poprzeczne są podparte, jeden z podłużnych doskonale utwierdzony, a drugi swobodny. Wielkość odpowiadających naprężeń krytycznych podaje następująca tablica dla stosunku $b:h = 100$

¹⁾ Ob. S. P. Timoszenko, „Ob ustojczivosti plastinok...”, Sborn. Inst. Inż. Put. Soobszcz. z r. 1914.

²⁾ Ob. „O stateczności układów sprężystych”, str. 163.

³⁾ W interesującej książce W. E. Lilly, „The design of plate girders and columns”, r. 1908, znajduje się opis kilku doświadczeń, wyjaśniających wpływ żeber na stateczność ścianki belki I.

Pewne wskazówki co do obioru sztywności żeber znajdują się w pracy autora: „O stateczności płyt wzmocnionych sztywnymi żebrami” (po ros.), Petrograd 1914.

⁴⁾ Ob. Sommerfeld, „Über die Knicksicherheit der Stege v. Walzwerkprofilen”, Z. I. Math. u. Ph. z r. 1907.

S. P. Timoschenko, „Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie”, Z. I. Math. u. Ph. z r. 1910.

⁵⁾ Ob. pracę autora: „Ob ustojczivosti szatych plastinok”. Izv. Kij. Pol. Inst. z r. 1907.

$\frac{a}{b} =$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
(dla $b : h = 100$) $p_{kr} =$	298	274	257	247	239	235	234	234 kg/cm^2
$\frac{a}{b} =$	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
(dla $b : h = 100$) $p_{kr} =$	235	239	243	249	255	262	270	280 kg/cm^2

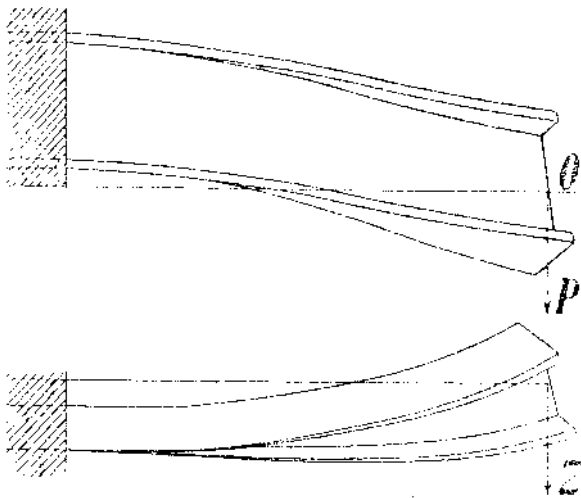
Przy innych wartościach tego stosunku trzeba postąpić tak, jak w przypadkach powyżej omawianych. Wszystkie wywody odnoszą się oczywiście do wyboczenia sprężystego; jeżeli wyboczenie zachodzi poza granicami sprężystości, to nasze tablice dadzą dla naprężeń krytycznych za wielkie wartości.

Bez szczególnych trudności da się też rozwiązać zadanie o stateczności płyty prostokątnej, której jeden lub dwa brzegi, równoległe do osi X -ów (ob. rys. 408) są sprężysto podparte. Wielkość naprężeń krytycznych będzie zależała naturalnie od stosunku sztywności EI tej belki, która podpira brzeg płyty, do sztywności bC samej płyty. Poniżej przytoczymy parę dat¹⁾ dla przypadku płyty kwadratowej, obciążonej według fig. (a) (rys. 408) i podpartej wzdłuż brzegów $y=0$ i $y=b$ przez giętkie belki o sztywności EI^2 .

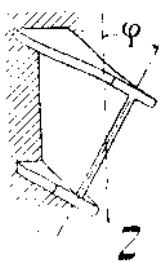
$\frac{EI}{bC} =$	∞	29,1	14,2	5,2	2,15	1,15	0,60
(dla $b : h = 100$) $p_{kr} =$	702	685	667	614	526	439	351 kg/cm^2

§ 183. O STATECZNOŚCI PŁASKIEJ POSTACI ZGIĘCIA BELEK I

Rozpatrzmy tutaj te przypadki niestatecznej równowagi, jakie powstają niekiedy przy zginaniu prętów w płaszczyźnie ich największej sztywności. Jeżeli jedna z głównych sztywności zgięcia jest mała w porównaniu do drugiej, to zginając pręt w płaszczyźnie największej sztywności, można przez powiększenie sił osiągnąć granicę, kiedy druga postać zgięcia przestaje być stateczną. Oś pręta zakrzywia się w kierunku łatwiejszego zginania, przyczem przekroje poprzeczne pręta obracają się nie tylko około osi prostopadłych do płaszczyzny zginania, lecz także dokoła osi prostopadłych do płaszczyzny



Rys. 415



przekroju. Zamiast płaskiego zgięcia powstanie zgięcie osi pręta według krzywej przestrzennej, a więc zgięcie połączone ze skręceniem. To zjawisko da się najłatwiej zademonstrować na zwykłym linjale. Zginając linjał rękoma w płaszczyźnie jego największej sztywności, łatwo wyczuć tę graniczną wartość momentu zginającego, przy której płaska postać linii ugięcia przestaje być stateczną. Rys. (415) przedstawia wyboczenie belki I, jednym końcem poziomo utwierdzonej, pod działaniem pionowego obciążenia na końcu swobodnym. Zjawisko niestateczności jest możliwe przy różnych kształtach poprzecznego przekroju. Rozpatrzmy tutaj przypadek przekroju prostokątnego i dwuteowego. Ten drugi zwłaszcza ma większe znaczenie praktyczne z powodu ogromnego rozpowszechnienia belek o przekroju I. Dążenie do możliwie wielkiej oszczędności materiału, a zarazem jak największej sztywności w płaszczyźnie działania sił zniwala konstruktora do powiększania wysokości belki. Ze względów konstrukcyjnych nie można przytem zbyt zwiększać szerokości pasów. W rezultacie wypada przekrój, którego jeden z głównych

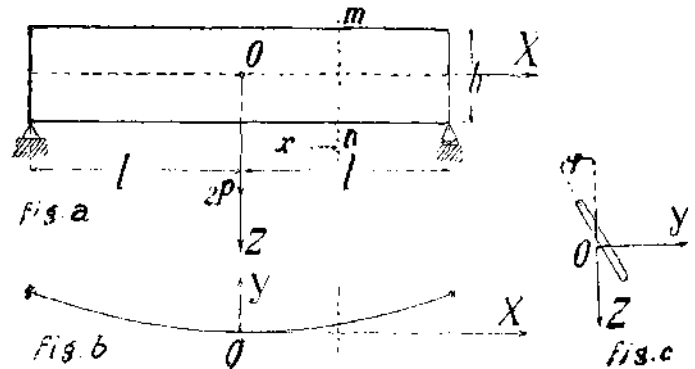
momentów bezwładności jest wielokrotnie większy od drugiego. Belka ma wskutek tego niewystarczającą sztywność w kierunku prostopadłym do płaszczyzny działania sił i staje się możliwym zjawisko niestateczności. W konstrukcjach inżynierskich ten niedobór sztywności wynagradza się zwyczajnie dodatkowymi połączeniami, ale niekiedy nie można tych połączeń wykonać ze względów konstrukcyjnych, to znów bywają niewystarczające; w obu przypadkach może belka okazać się znacznie mniej wytrzymałą, niż to wynika ze zwykłych obliczeń, polegających na wyznaczeniu największych naprężeń.

Przy badaniu stateczności płaskiej postaci zgięcia przyjmujemy, że skrzywienie osi w kierunku najmniejszej sztywności towarzyszy tylko obrót przekrojów poprzecznych belki, ich postać zaś pozostaje przytem niezmienną. Takie zjawiska, jak wyboczenie pionowej ścianki lub poziomych stopek, rozpatrzyliśmy już w poprzednim paragrafie.

¹⁾ Obliczył je inżynier K. Czajłyszew; ob. Sborn. Inst. Inż. Put. Soobszcz. z r. 1914.

²⁾ Ogólniejsze zadanie rozpatruje W. Rak w artykule „Ob ustojczowości priamougolnoj płastinki, podkrępliennoj po kraju ugotkom żestkosti“. Sborn. Inst. Inż. Put. Soobszcz. r. 1916.

Do wyznaczenia wielkości obciążenia krytycznego w różnych szczególnych przypadkach będziemy stosować metodę przybliżoną¹⁾. Na podstawie danych doświadczalnych i warunków podporowych obieramy przybliżoną postać wybożenia; dla tej postaci obliczamy zmianę energii potencjalnej odkształcenia i porównujemy, ją z odpowiadającą pracą sił zewnętrznych. Rozpatrzymy zginanie wysokiej belki prostokątnej w obu końcach podpartej i obciążonej siłą $2P$ (rys. 416), działającą w środku ciężkości środkowego przekroju poprzecznego. Warunki podporowe pozwalają na swobodny obrót końców około głównych osi bezwładności przekroju, ale nie dopuszczają obrotu około osi belki. Zwiększając obciążenie, można osiągnąć granicę, przy której płaska postać ugięcia stanie się niestateczną i oś belki wyboży się w kierunku najłatwiejszego wygięcia, jak to wskazuje fig. (b). Postać tego wybożenia da się określić wielkością wygięcia y w płaszczyźnie XY i wielkością kąta φ , określającego obroty oddzielnych przekrojów poprzecznych (fig. c). Przy obiorze przybliżonej postaci wybożenia musimy uwzględnić, że między wielkościami y i φ zachodzi związek, który łatwo ustawić przy pomocy różniczkowych równań równowagi.



Rys. 416

W dowolnym przekroju poprzecznym mn , moment zgięcia, działający w płaszczyźnie pionowej, równa się $P(l-x)$. Wskutek obrotu przekroju przy wybożeniu belki płaszczyzna momentu nie schodzi się już z głównymi płaszczyznami belki i zgięciu w kierunku najmniejszej sztywności będzie odpowiadać moment $P(l-x)\varphi$. Równanie różniczkowe zgiętej osi belki w płaszczyźnie XY ma tedy postać:

$$B \frac{d^2 y}{dx^2} = P(l-x)\varphi \quad \dots \quad (a)$$

przyczem B oznacza najmniejszą sztywność zginania. (Tutaj pomijamy nachylenie płaszczyzny XY do płaszczyzny najłatwiejszego wygięcia). Otrzymane równanie przedstawia potrzebną nam zależność między φ a y . Skrzywieniu belki w kierunku najłatwiejszego wygięcia odpowiada energia potencjalna zgięcia w płaszczyźnie najmniejszej sztywności i energia skręcenia. Obie postacie energii określają wzory:

$$V_1 = B \int_0^l (y'')^2 dx \quad \text{ i } \quad V_2 = C \int_0^l (\varphi')^2 dx,$$

przyczem C oznacza sztywność skręcania belki. W dalszym ciągu, dla przekroju I , będziemy się posługiwać przy obliczeniu C wzorem (48). Dla wyznaczenia pracy sił zewnętrznych, odpowiadającej przyjętemu wybożeniu belki, trzeba znaleźć wyrażenie dla obniżenia punktu działania O ciężaru $2P$. W tym celu będziemy uważać punkt O za nieruchomy i obliczymy o ile podniosą się względem niego końce belki wskutek przyjętego skrzywienia. To podniesienie będzie oczywiście równe się szukanemu obniżeniu punktu O . Z powodu skrzywienia elementu belki, leżącego w przekroju mn , jej prawy koniec opisze łuk $y' dx(l-x)$. Ponieważ skrzywienie zachodzi w płaszczyźnie największej giętkości, więc znalezione przesunięcie końca belki jest nachylone do poziomu pod kątem φ , wskutek czego odpowiadającym podwyższeniem tego końca będzie: $y' dx(l-x)\varphi$. Uwzględniając skrzywienie wszystkich elementów belki, znajdziemy dla podniesienia końców, albo, co na jedno wychodzi, dla obniżenia punktu O wyrażenie:

$$\int_0^l y''(l-x)\varphi dx.$$

Podstawowym równaniem do wyznaczenia obciążenia krytycznego będzie przeto:

$$2P \int_0^l y''(l-x)\varphi dx = B \int_0^l (y'')^2 dx + C \int_0^l (\varphi')^2 dx \quad \dots \quad (b)$$

Przy obiorze przybliżonej postaci wybożenia przyjmiemy wyrażenie dla kąta φ w postaci szeregu trygonometrycznego:

$$\varphi = A \cos \frac{\pi x}{2l} + A_1 \cos \frac{3\pi x}{2l} + A_2 \cos \frac{5\pi x}{2l} + \dots \quad \dots \quad (c)$$

czyniącego zadość warunkom podporowym. Dla $x=l$ wszystkie wyrazy stają się zerem, ponieważ końce belki nie obracają się względem osi X -ów. Dla $x=0$ osiąga φ największą wartość. Wstawivszy wyrażenie dla φ w rów. (a), znajdziemy od-

¹⁾ Rozwiązanie kilku zadań tego rodzaju, drogą całkowania odpowiadających równań różniczkowych równowagi, znajduje się w pracach następujących:

L. Prandtl, „Kipp-Erscheinungen“, Münch. Diss., r. 1899;

S. P. Timoszenko, „Ob ustojczivosti płoskiej formy izgiba dwutawrowych bałok“, Izv. Petersb. Pol. Inst. z r. 1906;

A. N. Dinnik, „Ob ustojczivosti płoskiej formy izgiba“, Izv. Dons. Pol. Inst. z r. 1913;

A. Korobow, Izv. Kij. Pol. Inst. z lat 1911 i 1913.

powiadającą wartość y'' . Następnie znajdziemy krytyczne obciążenie $2P_{kr}$ z rów. (b) jako funkcję współczynników A, A_1, A_2, \dots . Pozostaje dobrać wartość tych współczynników tak, aby wielkość P_{kr} była minimum. Ograniczwszy się do pierwszych dwu wyrazów szeregu (c) i wykonawszy potrzebne rachunki, znajdziemy w rów. (b):

$$P_{kr}^2 = \frac{BC}{l^4} \cdot \frac{\frac{\pi^2}{8}(1+9z^2)}{\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{10}{4\pi^2}z + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9\pi^2}\right)z^2} \quad (d)$$

Tutaj, podobnie jak pierwiej, oznacza z stosunek $A_1:A$. Najmniejszą wartość dla P_{kr} otrzymamy, kładąc $z = 0,051$; temu odpowiada:

$$P_{kr} = \frac{3,117\sqrt{BC}}{l^2}, \quad \text{albo} \quad 2P_{kr} = \frac{16,936\sqrt{BC}}{(2l)^2} \quad (391)$$

Krytyczną wartość zginającej siły określa przeto iloczyn z najmniejszej sztywności zgięcia przez sztywność skręcania, tudzież rozpiętość belki. Wzory tejsze postaci otrzymamy i przy innych sposobach działania sił. Np. przy zgięciu belki prostokątnej jednym końcem utwierdzonej siłą P , działającą w środku ciężkości przekroju na drugim końcu (rys. 410), otrzymamy:

$$P_{kr} = \frac{4,01\sqrt{BC}}{l^2} \quad (392)$$

Przy zgięciu belki obciążonej równomiernie na rozpiętości $2l$ (od podpory do podpory) jest:

$$(ql)_{kr} = \frac{3,54\sqrt{BC}}{l^2}, \quad \text{albo} \quad (2ql)_{kr} = \frac{28,32\sqrt{BC}}{(3l)^2} \quad (393)$$

Badanie stateczności w przypadku zgięcia belek] komplikuje się nieco wskutek tego, że trzeba uwzględnić niejednakowe zgięcie pasów belki przy skrzywieniu jej osi w kierunku najłatwiejszego wygięcia. Jeżeli przez y będziemy, jak i poprzednio, oznaczać ugięcia osi belki w płaszczyźnie XY (rys. 411), to ugięcia górnego i dolnego pasa będą odpowiednio równe:

$$y + \frac{h}{2}\varphi \quad \text{i} \quad y - \frac{h}{2}\varphi,$$

jeżeli h jest wysokością belki. Oznaczywszy przez D sztywność pasa (względnie stopki) przy zgięciu w kierunku prostopadłym do płaszczyzny ścianki, otrzymamy dla energii zgięcia przy wyboczeniu belki w płaszczyźnie XY wyrażenie:

$$V_1 = (B - 2D) \int_0^l (y'')^2 dx + D \int_0^l \left(y'' + \frac{h}{2}\varphi'\right)^2 dx + D \int_0^l \left(y'' - \frac{h}{2}\varphi'\right)^2 dx = B \int_0^l (y'')^2 dx + \frac{Dh^2}{2} \int_0^l (\varphi')^2 dx.$$

(Dla zwykłych belek] można z dostateczną dokładnością przyjąć $D = \frac{B}{2}$). Podstawowe rów. (b) do wyznaczenia obciążenia krytycznego napiszemy teraz w postaci:

$$2P \int_0^l \varphi y'' (l-x) dx = B \int_0^l (y'')^2 dx + C \int_0^l (\varphi')^2 dx + \frac{Dh^2}{2} \int_0^l (\varphi')^2 dx. \quad (e)$$

Ograniczając się, jak i w poprzednim przypadku, do dwu wyrazów w formule (c) dla kąta φ , znajdziemy z rów. (e) po wykonaniu kwadratur:

$$P_{kr}^2 = \frac{BC}{l^4} \cdot \frac{\frac{\pi^2}{8}(1+9z^2) + \frac{\pi^4}{32}\gamma^2(1+81z^2)}{\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{10}{4\pi^2}z + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9\pi^2}\right)z^2} \quad (f)$$

Tutaj ma z znaczenie poprzednie, a prócz tego wprowadzono dla uproszczenia oznaczenie:

$$\gamma^2 = Dh^2 : 2Cl^2.$$

Pozostaje teraz dobrać z w ten sposób, aby otrzymać dla obciążenia krytycznego najmniejszą wartość. Wzór dla P_{kr} zachowa poprzedni wygląd ogólny, a mianowicie:

$$P_{kr} = \frac{k\sqrt{BC}}{l^2} \quad (394)$$

tylko współczynnik k będzie się zmieniać w zależności od wielkości γ . Szereg wartości dla k zawiera tablica A . Wzór (394) zachowuje swą ważność także przy innych sposobach działania sił, skoro tylko wstawimy odpowiadającą wartość k^2 . Jeżeli np. siła $2P$ nie działa w środku ciężkości środkowego przekroju, lecz w punkcie, odpowiadającym górnej krawędzi

¹⁾ Tutaj, podobnie jak we wz. (391) i wszystkich dalszych przypadkach belek w obu końcach podpartych, oznacza l połowę rozpiętości, a P i ql połowę obciążenia.

²⁾ Szereg tablic dla k , przy rozmaitych sposobach obciążenia i różnych ustaleniach końców, znajduje się w pracy autora: „O stateczności układów sprężystych“.

Ob. także: „Kurs teorii uprugosti“, cz. II, str. 152.

belki, to dla wyznaczenia k trzeba użyć tablicy B. Przy działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego na górnej krawędzi belki w obu końcach podpartej, należy współczynnik k we wzorze:

$$(ql)_{kr} = \frac{k\sqrt{BC}}{l^2}$$

wyznaczyć według tablicy C.

TABLICA A

$\frac{1}{\gamma^2}$	k	p_{kr} dla $\Phi=0,0001$ $E=2.10^6 \text{ kg/cm}^2$	$\frac{1}{\gamma^2}$	k	p_{kr} dla $\Phi=0,0001$ $E=2.10^6 \text{ kg/cm}^2$
0,1	10,8	680 kg/cm^2	24	2,24	2190 kg/cm^2
1	3,99	800 „	32	2,21	2500 „
2	3,20	910 „	40	2,19	2770 „
4	2,73	1090 „	50	2,18	3080 „
6	2,54	1250 „	60	2,17	3360 „
8	2,45	1380 „	70	2,16	3620 „
12	2,37	1620 „	80	2,15	3860 „
16	2,29	1830 „	90	2,15	4080 „
20	2,26	2020 „	100	2,15	4300 „
			∞	2,115	

TABLICA B

$\frac{1}{\gamma^2}$	k	p_{kr} dla $\Phi=0,0001$ $E=2.10^6 \text{ kg/cm}^2$	$\frac{1}{\gamma^2}$	k	p_{kr} dla $\Phi=0,0001$ $E=2.10^6 \text{ kg/cm}^2$
0,1	6,42	405 kg/cm^2	16	1,86	1490 kg/cm^2
1	2,52	505 „	24	1,88	1840 „
2	2,13	600 „	32	1,89	2140 „
3	1,99	690 „	40	1,92	2420 „
4	1,93	770 „	50	1,93	2740 „
6	1,88	920 „	60	1,94	3020 „
8	1,86	1050 „	70	1,95	3260 „
10	1,85	1170 „	80	1,96	3500 „
12	1,85	1280 „	100	1,97	3940 „
			∞	2,115	

TABLICA C dla $\Phi=0,0001$ i $E=2.10^6 \text{ kg/cm}^2$

$\frac{1}{\gamma^2} =$	0,1	1	2	4	6	8	12	16	20	
$k =$	11,6	4,54	3,80	3,43	3,31	3,28	3,27	3,22	3,23	
$p_{kr} =$	367	454	538	684	813	923	1120	1290	1440 (kg/cm^2)	
$\frac{1}{\gamma^2} =$	24	32	40	50	60	70	80	90	100	∞
$k =$	3,25	3,26	3,27	3,29	3,30	3,30	3,31	3,32	3,33	3,54
$p_{kr} =$	1590	1840	2080	2330	2560	2770	2980	3160	3330 (kg/cm^2)	

Przy obliczeniach praktycznych najdogodniej używać wartości krytycznych naprężeń, zamiast krytycznych obciążeń. Obliczenie p_{kr} w powyżej przytoczonych przypadkach nie przedstawia żadnych trudności. Weźmy np. zgięcie belki w obu końcach podpartej pod wpływem siły $2P$, działającej w środku rozpiętości. Największy moment zginający równa się Pl , a naprężenie krytyczne:

$$p_{kr} = \frac{P_{kr} l}{W} = \frac{E P_{kr} l \frac{h}{2}}{B_1}$$

przyczem B_1 oznacza (największą) sztywność belki w płaszczyźnie ścianki. Wstawimy zamiast P_{kr} wartość z wzoru (394) i uwzględnimy, że:

$$C = \frac{D h^2}{2 F^2 \gamma^2} \approx \frac{B h^2}{4 I^2 \gamma^2},$$

znajdziemy:

$$p_{kr} = E \frac{k}{\gamma} \cdot \frac{B}{B_1} \cdot \frac{h^2}{(2l)^2} = E \frac{k}{\gamma} \Phi, \quad \text{jeżeli} \quad \Phi = \frac{B}{B_1} \cdot \left(\frac{h}{2l}\right)^2. \quad (395)$$

W podanych powyżej tablicach obliczono wartości p_{kr} przy założeniu, że $\Phi = 0,0001$. Gdy dla obliczonej belki będzie $\Phi = \frac{1}{n}$, to trzeba naprężenia znalezione z tablic pomnożyć przez $\frac{10^4}{n}$.

Ogólny tok obliczenia belki I ze względu na stateczność jest następujący: Z danych rozmiarów belki oznaczamy wielkości: F , t. j. pole przekroju poprzecznego, $B = EI$, t. j. najmniejszą sztywność zgięcia, $B_1 = EI_1$, t. j. największą sztywność zgięcia, $D = \sim \frac{B}{2}$, t. j. sztywność zgięcia jednego pasu, $C = \frac{1}{40} \frac{F^4}{I_1 I_1} G$, t. j. sztywność skręcania, $\frac{1}{\gamma^2} = \frac{2 C I^2}{D h^2}$ i $\Phi = \frac{B}{B_1} \left(\frac{h}{2l}\right)^2 = \frac{1}{n}$, h , t. j. wysokość przekroju i na koniec l , t. j. połowę rozpiętości w przypadku belek, spoczywających na dwu podporach. Według obliczonej wartości $\frac{1}{\gamma^2}$ znajdujemy z tablic naprężenie krytyczne dla przypadku, gdy $\Phi = 0,0001$. Szukane p_{kr} będzie równe temu naprężeniu pomnożonemu przez $\frac{10^4}{n}$.

Weźmy np. nitowaną belkę I złożoną z blachy stojącej $70 \times 0,8$ (cm) i czterech kątowników $70 \times 70 \times 8$ (mm). Rozpiętość belki $2l = 3,25$ m. A zatem $F = 98,2$ cm²; $B = 446 E$ kg·cm²; $B_1 = 59140 E$ kg·cm²; $D = \frac{1}{2} B = 223 E$ kg·cm². Przyjawszy dla żelaza kowalnego $E = 2,10^6$ kg/cm² i $G = 8,10^5$ kg/cm², znajdziemy: $C = 31,2 \cdot 10^6$ kg·cm², $\frac{1}{\gamma^2} = 0,75$ i $\Phi = \frac{1}{2860}$.

Jeżeli belka się zgina pod działaniem siły skupionej w środku ciężkości środkowego przekroju, to trzeba użyć tablicy A. Dla obliczonej wartości $\frac{1}{\gamma^2}$ znajdziemy drogą interpolacji: $p_{kr} = 767$ kg/cm². Aby otrzymać rzeczywistą wartość naprężenia krytycznego, trzeba znaną wielkość pomnożyć przez $\frac{10^4}{2860} \approx 3,5$.

Jeżeli na belkę działa obciążenie równomiernie rozłożone na górnej powierzchni belki, to należy zastosować tablicę C. Dla $\frac{1}{\gamma^2} = 0,75$ znajdujemy drogą interpolacji: $p_{kr} = 430$ kg/cm². W celu otrzymania naprężeń krytycznych trzeba znaną wielkość pomnożyć przez 3,5.

Wszystkie wywody odnoszące się do badania stateczności belek I polegają na założeniu, że zjawisko wyboczenia zachodzi przy naprężeniach nieprzekraczających granicy sprężystości. Poza tę granicę będą nasze wzory dawać za wielkie wartości dla naprężeń krytycznych. Przy obliczeniach można przyjąć¹⁾, że rzeczywiste naprężenia krytyczne p_{kr} są tyle razy mniejsze od naprężeń p'_{kr} , określonych wzorami ważnemi w granicach sprężystości, ile razy rzeczywiste naprężenia przy prostym wyboczeniu pręta są mniejsze od naprężeń określonych wzorami Euler'a. Oto szereg p'_{kr} i odpowiadających im rzeczywistych naprężeń krytycznych²⁾ w kg/cm²:

$p'_{kr} =$	2000	2500	3000	3500	4000	5000	7000	10000	13000	20000	30000	50000
$p =$	1860	2020	2140	2230	2310	2420	2570	2710	2790	2890	3000	3080

Posługując się wyłożonymi sposobami, możemy według rozmiarów belki i sposobu działania sił znaleźć wielkość p'_{kr} ; powyższa tablica pozwala wówczas znaleźć wielkość rzeczywistego naprężenia krytycznego p_{kr} . Wyznaczwszy tą drogą naprężenia krytyczne dla obliczanej belki, możemy, znając doraźną wytrzymałość materiału, znaleźć współczynnik zmniejszenia, przez który trzeba mnożyć naprężenie R , dopuszczalne przy prostym rozciąganiu.

Na tem kończymy badanie kwestji stateczności układów sprężystych. Dalsze szczegóły można znaleźć w pracach powyżej cytowanych.

¹⁾ Ob. „O stateczności układów sprężystych“, str. 147.

²⁾ Liczby otrzymane na podstawie tablicy Jasińskiego.



KOŃCOWE SŁOWO TŁUMACZA

Nieprzewidziane trudności wydawnicze sprawiły, że zgorą rok minął od napisania przedmowy, która wobec tego straciła po części aktualność. (W ciągu r. 1921 ukazała się bowiem „Wytrzymałość Tworzyw“ prof. L. Karasińskiego w drugim wydaniu, obejmującym całość. Oryginalna ta książka stanowi pod pewnymi względami pożądane uzupełnienie niniejszej i nawzajem). Względ na koszty i brak czasu stanęły niestety na przeszkodzie w dodaniu dalszych własnych uzupełnień, wskutek czego musiałem poprzestać na odesłaniu Sz. Czytelników do źródeł. Dotyczy to szczególnie nowszych teoryj wytrzymałości, zagadnienia ściskania kul i wałków (str. 65), naprężeń termicznych w grubościennej rurze (str. 277) i kwestji wytrzymałości prętów ściskanych (str. 333). Zapowiedziana w odsyłaczu na str. 286 moja praca p. t. „Teorja płyt prostokątne-różnokierunkowych...“ już opuściła prasę drukarską i znajduje się na składzie w księgarniach Gubrynowicza i Syna we Lwowie i w Warszawie, oraz Gebethnera i Spki w Krakowie. Inżynierowie, chcący pracować naukowo w dziedzinie obliczeń konstrukcyj żelazno-betonowych, znajdą tam podostatkami nowego materiału do pracy.

Wielce pomocnymi w korekcie byli mi pp. dr. Z. Fuchs, adjunkt katedry mechaniki technicznej i K. Górka, asystent tejże katedry, za co im obu składam gorące podziękowanie. Nie mogąc pominąć milczeniem szczegółu, że, wskutek długiego trwania druku książki, nastąpiło ustalenie jej pisowni dopiero w dalszych arkuszach, poczuwam się nakoniec do miłego obowiązku szczerego podziękowania Sz. Zarządom „Książnicy Polskiej“ T-wa Nauczycieli Szkół Wyższych i drukarni „Grafia“ za wytworną, jak na obecne czasy, wydawniczą szatę książki.

We Lwowie w marcu 1922

M. T. HUBER

ZESTAWIENIE NIEKTÓRYCH OZNACZEŃ

(W nawiasie [] oznaczenia lub nazwy, używane dotąd zwykle w wykładach tłumacza, albo stosowane w „Techniku“)

Naprężenie [natężenie] normalne	p_n, p_x, p_y, p_z [$\sigma, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$]
Naprężenie styczne, lub ścinające	$p_t, [\tau]$
Doraźna wytrzymałość przy rozciąganiu	$R', [K_z]$
Naprężenie bezpieczne przy rozciąganiu	$R, [k_z], [\sigma_{bezp.}]$
Stoień bezpieczeństwa (pewność)	n
Przedłużenie [wydłużenie bezwzględne, lub całkowite]	$\lambda, [\Delta l]$
Wydłużenie względne albo właściwe	$e, [\lambda], [e]$
Liczba Poisson'a	$\sigma, [\mu], \left[\frac{1}{m} \right]$
Energja potencjalna odkształcenia [Praca odkształcenia]	$V, [L], [A]$
Promień bezwładności (ramię bezwładności)	$r, [i]$
Pole (powierzchnia)	$F, [A]$



TREŚĆ

PRZEDMOWA TŁUMACZĄ	Str. 3
WSTĘP	5

CZĘŚĆ I

ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE

ROZDZIAŁ I. ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE W GRANICACH SPRĘŻYSTOŚCI	9
§ 1. Pojęcia zasadnicze	9
§ 2. Prawo Hooke'a	11
§ 3. Opóźnienie sprężyste	14
§ 4. Energia odkształcenia przy rozciąganiu	14
§ 5. Zmiana rozmiarów poprzecznych przy rozciąganiu	15
ROZDZIAŁ II. ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE POZA GRANICAMI PROPORCJONALNOŚCI	16
§ 6. Diagram rozciągania	16
§ 7. Wpływ czasu na wydłużenia	18
§ 8. Podwyższenie punktu krytycznego [granicy plastyczności]	19
§ 9. Badanie metali zapomocą „próby rozrywania“	20
§ 10. Praca potrzebna do rozerwania	23
§ 11. Ściskanie	23
§ 12. Wpływ temperatury	26
ROZDZIAŁ III. O NAPRĘŻENIACH PRZY ROZCIĄGANIU I ŚCISKANIU	28
§ 13. Naprężenia w przypadku prostego rozciągania	28
§ 14. Rozkład naprężeń w przypadku rozciągania lub ściskania w dwu kierunkach wzajemnie prostopadłych	29
§ 15. Elipsa naprężeń	30
§ 16. Przedstawienie naprężeń sposobem Mohr'a	31
§ 17. Związek między odkształceniem i naprężeniem w dwuwymiarowym stanie napięcia	31
§ 18. Rozkład naprężeń w trójwymiarowym stanie napięcia	32
§ 19. Odkształcenia przy trójwymiarowym stanie napięcia	33
ROZDZIAŁ IV. ZASTOSOWANIA OTRZYMANYCH WYNIKÓW	34
§ 20. Stopień bezpieczeństwa czyli pewność	34
§ 21. Wpływ obciążenia działającego nagle	36
§ 22. Znużenie metali	37
§ 23. Doświadczenia Wöhler'a	37
§ 24. Doświadczenia O. Reynolds'a i H. Smith'a	39
§ 25. Doświadczenia Stanton'a i Bairstow'a	40
§ 26. Naprężenia bezpieczne przy zmiennych napięciach	41
§ 27. Przyczyny zjawiska znużenia metali	43
§ 28. Rozciąganie i ściskanie prętów o zmiennym przekroju	44
§ 29. Rozrywanie prętów o zmiennym przekroju	47
§ 30. Wpływ ciężaru własnego. Pręty o równomiernej wytrzymałości przy rozciąganiu	48
§ 31. Obliczenie rozpiętych cięgien	49
§ 32. Wpływ temperatury	51
[§ 32a. Dokładniejsza teoria rozpiętych cięgien]	52
§ 33. Obliczenie lin drucianych	55

§ 34. Zagadnienia statycznie niewyznaczalne	57
§ 35. O naprężeniach w ścianach naczyń	59
§ 36. O teorjach wytrzymałości	62
§ 37. Ściskanie kul i walców	65

CZĘŚĆ II

ŚCINANIE I SKRĘCANIE

ROZDZIAŁ V. ŚCINANIE	68
§ 38. Proste ścinanie	68
§ 39. Energia potencjalna ścinania	70
§ 40. O naprężeniach bezpiecznych przy ścinaniu	70
§ 41. Zastosowania	71
ROZDZIAŁ VI. SKRĘCANIE	72
§ 42. Skręcanie pręta okrągłego	72
§ 43. Skręcanie prętów o przekroju prostokątnym	75
§ 44. Skręcanie w przypadkach innych postaci przekroju	76
§ 45. Zastosowania	77
§ 46. Energia potencjalna przy skręcaniu	79

CZĘŚĆ III

ZGINANIE PROSTYCH PRĘTÓW

ROZDZIAŁ VIII ¹⁾ . WEWNĘTRZNE SIŁY SPRĘŻYSTOŚCI PRZY ZGINANIU PRĘTÓW PRYZMATYCZNYCH	82
§ 54. Pojęcie zginania	82
§ 55. Dane doświadczalne	83
§ 56. O naprężeniach w pr ypadku czystego zginania	85
§ 57. Zgięcie ukośne	87
§ 58. Zginanie belki siłami prostopadłymi do osi	89
§ 59. Naprężenia ścinające przy zginaniu	90
§ 60. Rozkład naprężeń ścinających w przekroju kołowym	93
§ 61. Rozkład naprężeń ścinających w przekroju dwuteowym	94
§ 62. O naprężeniach głównych w zginanej belce	95
§ 63. O naprężeniach miejscowych	99
ROZDZIAŁ IX. OBLICZENIE BELEK	100
§ 64. Wyznaczenie reakcyj podporowych	100
§ 65. Diagram momentów zginających i diagram sił poprzecznych	102
§ 66. Obliczenie naprężeń niebezpiecznych	106
§ 67. Obliczenie belek nitowanych kształtu I	108
§ 68. Obliczenie złożonych belek drewnianych	111
§ 69. Obliczenie płatwi	111
§ 70. Obciążenie ruchome	112
§ 71. Porównanie przekrojów poprzecznych o różnej postaci	113
ROZDZIAŁ X. LINJA UGIĘCIA BELKI	117
§ 72. Równanie linii ugięcia	117
§ 73. Ugięcie belki jednym końcem utwierdzonej	118
§ 74. Ugięcie belki w obu końcach podpartej	119
§ 75. Ugięcie belki w obu końcach podpartej, pod wpływem obciążenia równomiernie rozłożonego	123
§ 76. Składanie skutków działania sił	124
§ 77. Linja ugięcia jako krzywa sznurowa	125
§ 78. Wykreślno-analityczny sposób wyznaczania ugięcia belek	127
§ 79. Belki o równomiernej wytrzymałości przy zginaniu	130
§ 80. Wpływ sposobu rozłożenia obciążeń na wielkość momentu zginającego i strzałkę ugięcia belek	135
§ 81. Wpływ naprężeń ścinających na ugięcie belek	137
ROZDZIAŁ XI. STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE PRZYPADKI ZGIĘCIA BELEK	139
§ 82. Zbędne ustalenia	139
§ 83. Zgięcie belki równomiernie obciążonej w jednym końcu utwierdzonej a w drugim podpartej	140

¹⁾ W przekładzie opuszczono rozdział VII (ob. uwagę na str. 82).

	Str.
§ 84. Zgięcie belki jednym końcem utwierdzonej a drugim podpartej, pod działaniem siły skupionej	142
§ 85. Zgięcie belki obu końcami utwierdzonej	144
§ 86. Belki z końcami sprężysto utwierdzonymi	147
§ 87. Belka dwuprzęsłowa	150
§ 88. Wpływ podwyższenia lub obniżenia środkowej podpory	152
§ 89. Równanie trzech momentów	152
§ 90. Szczegółowe przypadki obciążenia belki ciągłej	155
§ 91. Równanie dwóch momentów	156
§ 92. Wpływ obciążenia jednego przęsła	158
§ 93. Najniekorzystniejsze obciążenie belki ciągłej	159
§ 94. Linje wpływowe dla belek ciągłych	161
§ 95. Belki ciągłe o przekroju zmiennym	162
§ 96. Zgięcie belek spoczywających na sprężystym podłożu	163
§ 97. Belki na sprężystych podporach	168
ROZDZIAŁ XII. ZGINANIE BELEK Z MATERJAŁU NIEPODLEGAJĄCEGO PRAWU HOOKE'A	170
§ 98. Wyznaczenie naprężeń normalnych sposobem analitycznym	170
§ 99. Przybliżony sposób wyznaczenia naprężeń normalnych	172
§ 100. Wykreślna metoda wyznaczenia naprężeń normalnych	173
§ 101. Wyznaczenie naprężeń normalnych w belkach żelazno-betonowych	174
§ 102. Rozkład naprężeń stycznych (ścinających)	176
ROZDZIAŁ XIII. WYTRZYMAŁOŚĆ ZŁOŻONA	176
§ 103. Zgięcie w połączeniu z rozciąganiem lub ściskaniem	176
§ 104. Rdzeń czyli jądro przekroju	179
§ 105. Zginanie i skręcanie	181
§ 106. Obliczenie wału korbowego wyginanego	183
CZĘŚĆ IV	
PRACA WEWNĘTRZNYCH SIŁ SPRĘŻYSTOŚCI	
ROZDZIAŁ XIV. OGÓLNE METODY OBLICZANIA UKŁADÓW STATYCZNIE NIETYCZNYCH	186
§ 107. Układy statycznie niewyznaczalne	186
§ 108. Energja potencjalna układu sprężystego	187
§ 109. Energja potencjalna przy zginaniu	188
§ 110. Uogólnione współrzędne i uogólnione siły	190
§ 111. Ogólne wyrażenie energii potencjalnej ciał sprężystych	191
§ 112. Przypadki wyjątkowe	194
§ 113. Twierdzenie Castigliano'a	196
§ 114. Zasada najmniejszej pracy	200
§ 115. Zasada wzajemności przesunięć	205
§ 116. Zastosowanie zasady wzajemności przesunięć do obliczenia belek ciągłych	206
§ 117. Linje wpływowe dla belki wzmocnionej (wieszarowej)	209
§ 118. Zastosowanie zasady wzajemności przesunięć do obliczania kratownic statycznie niewyznaczalnych	209
§ 119. Metoda Mohr'a	211
§ 120. Zastosowanie sposobu Mohr'a do obliczania kratownic statycznie niewyznaczalnych	213
§ 121. Zastosowanie sposobu Mohr'a do wyznaczenia przesunięć	215
§ 122. Zastosowanie sposobu Mohr'a do badania statycznie niewyznaczalnych przypadków zgięcia belek	216
§ 123. O naprężeniach pierwotnych w układach statycznie niewyznaczalnych	216
§ 124. Naprężenia termiczne w układach statycznie niewyznaczalnych	218
ROZDZIAŁ XV. PRZYBLIŻONY SPOSÓB BADANIA ZGIĘCIA PRĘTÓW	219
§ 125. Ogólny zarys metody	219
§ 126. Zgięcie belek w obu końcach podpartych	220
§ 127. Jednoczesne działanie rozciągania lub ściskania i zgięcia	223
§ 128. Zgięcie belek obu końcami utwierdzonych	227
§ 129. Przypadek nieznanymi siłami podłużnymi	230
§ 130. Wzory dla obliczeń w przypadku jednoczesnego działania zgięcia i ściskania	232
§ 131. Zgięcie belek leżących na sprężystym podłożu	233
§ 132. Obliczenie belek skrzyżowanych	237

CZĘŚĆ V

PRĘTY ZAKRZYWIONE

	Str.
ROZDZIAŁ XVI	240
§ 133. Rozkład naprężeń	240
§ 134. Szczegółowe przypadki zgięcia krzywych prętów	244
§ 135. Zadanie Lamè'go	247
§ 136. Obliczenie ucha w połączeniu sworzniozem i ogniów łańcuchów	250
§ 137. Odkształcenie prętów zakrzywionych	252
§ 138. Obliczenie okrągłego pierścienia	256
§ 139. Łuk dwuprzegubowy	258
§ 140. Linje wpływowe dla łuku dwuprzegubowego	260
§ 141. Najniekorzystniejsze obciążenie łuku	261
§ 142. Łuk bezprzegubowy	262
§ 143. Łuk paraboliczny o końcach utwierdzonych [bezprzegubowy]	266

CZĘŚĆ VI

ROZDZIAŁ XVII. ZGIĘCIE CIENKICH PŁYT	268
§ 144. Zgięcie płyty podług powierzchni walcowej	268
§ 145. Obliczenie długich płyt prostokątnych	269
§ 146. Zgięcie złożone z dwu zgięć walcowych	274
§ 147. Naprężenia termiczne w płytach	276
§ 148. Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty okrągłej symetrycznie obciążonej	277
§ 149. Zgięcie okrągłej płyty wskutek obciążenia równomiernie rozłożonego	279
§ 150. Zgięcie okrągłej płyty siłą skupioną w środku	282
§ 151. Zgięcie okrągłej płyty z kolistym otworem w środku	283
§ 152. Granice stosowalności wyprowadzonych wzorów	284
§ 153. Energia potencjalna zgiętej płyty	285
§ 154. Przybliżona metoda badania zgięcia płyt	286
§ 155. Obliczenie ścian [płyt] zakrzywionych czyli powłok	289

CZĘŚĆ VII

ZAGADNIENIA DYNAMICZNE NAUKI O WYTRZYMAŁOŚCI

ROZDZIAŁ XVIII. WPŁYW SIŁ BEZWŁADNOŚCI	293
§ 156. O naprężeniach w prętach poruszających się	293
§ 157. Naprężenia w wirującym pierścieniu	295
§ 158. Naprężenia w wirujących krążkach	296
§ 159. Krążek o równomiernej wytrzymałości	298
§ 160. Naprężenia w wieńcu koła zamachowego	299
ROZDZIAŁ XIX. O DRGANIACH UKŁADÓW SPRĘŻYSTYCH	301
§ 161. Swobodne drgania układu o jednym stopniu swobody	301
§ 162. Przybliżone obliczenie okresów podstawowych [głównych] drgań układów złożonych	303
§ 163. Drgania przy oporze środowiska	306
§ 164. Drgania wymuszone	307
§ 165. Praktyczne znaczenie zjawiska spółbrzmienia	311
§ 166. Drgania skręcające (torsyjne)	312
§ 167. Drgania belki pod wpływem ruchomego obciążenia	315
§ 168. Prędkość krytyczna dla giętkiego wału Laval'a	317
§ 169. Krytyczna prędkość kątowna dla wału nieobciążonego	320
§ 170. O naprężeniach przy uderzeniu	321
§ 171. Wpływ masy pręta na wielkość naprężeń przy uderzeniu	323
§ 172. Pęknięcie wskutek uderzenia	326

CZĘŚĆ VIII

O STATECZNOŚCI UKŁADÓW SPRĘŻYSTYCH

ROZDZIAŁ XX	327
§ 173. Stateczne i niestateczne postacie równowagi	327
§ 174. Zagadnienie Euler'a	328

	Str.
§ 175. Granice stosowalności otrzymanych wzorów	331
§ 176. Wpływ mimośrodowego obciążenia i początkowego zakrzywienia pręta na wielkość siły krytycznej	335
§ 177. Przybliżona metoda rozwiązywania zagadnień stateczności	336
§ 178. O wyboczeniu pręta w sprężystym środowisku	338
§ 179. O wyboczeniu prętów złożonych	341
§ 180. Uwagi co do ustalenia końców i osłabienia przekrojów poprzecznych ściskanych prętów	344
§ 181. O stateczności okrągłego pierścienia i walcowej rury	346
§ 182. O stateczności ściskanych płyt	349
§ 183. O stateczności płaskiej postaci zgięcia belek]	352
KOŃCOWE SŁOWO TŁUMACZA	357
ZESTAWIENIE NIĘKTÓRYCH OZNACZEŃ	358
TREŚĆ	359







BIBLIOTEKA GŁÓWNA

348019L/A