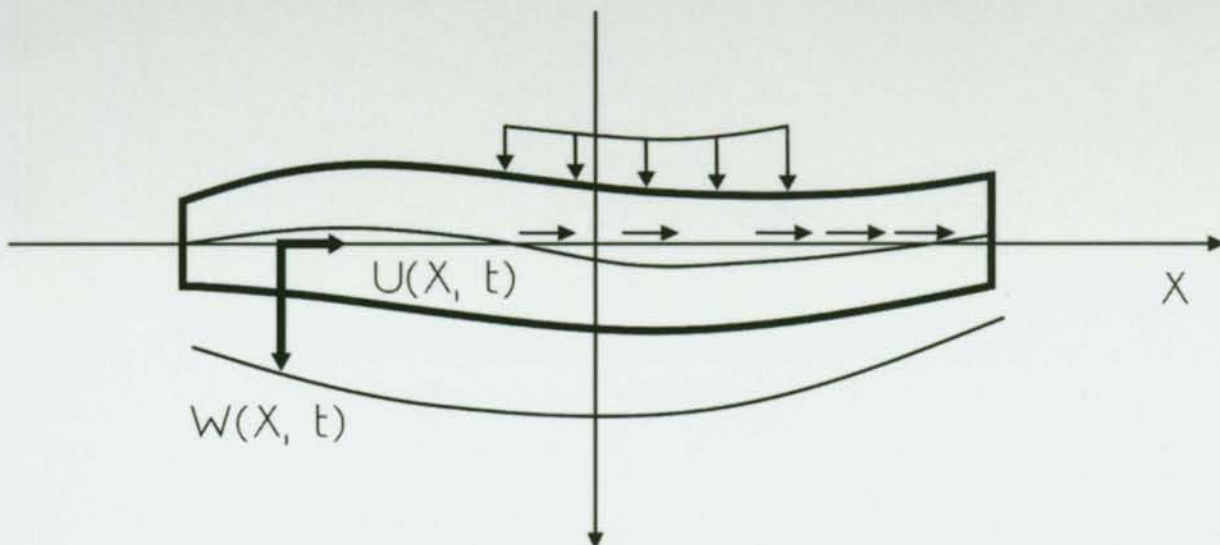


Zastosowanie
wielomianów
Czebyszewa
w dynamice
dźwigarów
o zmiennych
parametrach
geometrycznych
i mechanicznych



Piotr Ruta

**Zastosowanie wielomianów
Czebyszewa w dynamice
dźwigarów o zmiennych
parametrach geometrycznych
i mechanicznych**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2007

Recenzenci

Wacław SZCZEŚNIAK
Paweł ŚNIADY

Opracowanie redakcyjne i korekta

Alina KACZAK

Projekt okładki

Zofia i Dariusz GODLEWSCY

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część niniejszej książki, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez zgody właściciela praw autorskich.

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2007

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

<http://www.oficyna.pwr.wroc.pl>

e-mail: oficwyd@pwr.wroc.pl

ISBN 978-83-7493-338-4

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 653/2007.

SPIS TREŚCI

1. Wstęp.....	5
2. Wybrane zagadnienia dotyczące wielomianów i szeregów Czebyszewa oraz teorii równań różniczkowych.....	11
2.1. Wprowadzenie.....	11
2.2. Definicje szeregów Czebyszewa, zbieżność.....	11
2.3. Przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych z wykorzystaniem szeregów Czebyszewa.....	15
2.4. Wybrane zagadnienia dotyczące równań różniczkowych.....	22
3. Drgania niepryzmatycznych prętów Eulera o osi prostoliniowej.....	25
3.1. Wprowadzenie.....	25
3.2. Sformułowanie zadania.....	28
3.3. Ogólne rozwiązanie problemu drgań.....	31
3.4. Wybrane zagadnienia drgań prętów niepryzmatycznych.....	41
3.4.1. Zagadnienie własne.....	41
3.4.2. Drgania wymuszone harmonicznie.....	46
3.4.3. Drgania wymuszone aperiodycznie.....	47
3.5. Porównanie rozwiązań zagadnienia własnego prętów przyzmatycznych uzyskanych różnymi metodami.....	56
4. Zagadnienie drgań prętów niepryzmatycznych o osi krzywoliniowej.....	64
4.1. Wprowadzenie.....	64
4.2. Sformułowanie problemu.....	65
4.3. Rozwiązanie zadania.....	66
5. Stateczność układów prętowych.....	79
5.1. Wprowadzenie.....	79
5.2. Sformułowanie zagadnienia.....	80
5.3. Rozwiązanie zadania stateczności.....	84
6. Niepryzmatyczny prętowy element skończony.....	90
6.1. Wprowadzenie.....	90
6.2. Sformułowanie i rozwiązanie zadania.....	91
7. Zagadnienie drgań harmonicznich pręta spoczywającego na inercyjnej półpłaszczyźnie sprężystej.....	100
7.1. Wprowadzenie.....	100
7.2. Sformułowanie zagadnienia.....	101
7.3. Rozwinięcie w szereg Czebyszewa funkcji przemieszczeń półpłaszczyzny sprężystej.....	103
7.4. Rozwiązanie zadania drgań belki niepryzmatycznej.....	108
7.5. Rozwiązanie problemu interakcji belki z półpłaszczyzną sprężystą.....	113
7.6. Przykłady obliczeniowe.....	114
8. Drgania niepryzmatycznej belki Timoshenki.....	122
8.1. Wprowadzenie.....	122
8.2. Sformułowanie problemu.....	125
8.3. Rozwiązanie układu równań ruchu.....	128
8.4. Przykłady obliczeniowe.....	132
8.5. Porównanie rozwiązań zagadnienia własnego przyzmatycznych belek Timoshenki wyznaczonych różnymi metodami.....	143

9. Zagadnienie drgań kołowych i pierścieniowych płyt cienkich.....	151
9.1. Wprowadzenie	151
9.2. Sformułowanie zagadnienia	155
9.3. Rozwiązanie problemu	160
9.4. Przykład obliczeniowy	188
10. Kołowa płyta średniej grubości według teorii Hencky'ego–Bolle'a.....	193
10.1. Wprowadzenie	193
10.2. Sformułowanie zadania	194
10.3. Rozwiązanie zagadnienia	199
10.4. Przykład obliczeniowy	216
Podsumowanie.....	220
Literatura	224

1. WSTĘP

Konieczność racjonalnego, ekonomicznego projektowania nowoczesnych konstrukcji inżynierskich, jak również względy architektoniczne inspirują badaczy do udoskonalania istniejących metod oraz opracowywania nowych, służących do analizy lub projektowania tych konstrukcji. Jedną z grup problemów, dotyczących takich konstrukcji są zagadnienia drgań dźwigarów (układów prętowych, tarcz, płyt i powłok) o zmiennych parametrach geometrycznych i fizycznych.

Podstawową metodą stosowaną w programach komputerowych jest metoda elementów skończonych (MES). W praktyce projektowej profesjonalne oprogramowanie, korzystające z tej metody, umożliwia rozwiązanie zagadnień statycznych oraz podstawowych zagadnień dynamicznych (zagadnienie własne, drgania wymuszone itp.). Programy te, mimo wielu zalet, m.in. możliwości rozwiązywania dużych pod względem numerycznym układów oraz wzrostu liczby zagadnień dynamicznych rozwiązywanych przez te programy, mają też pewne wady. Wadą pojawiającą się w rozwiązywaniu układów o zmiennych parametrach może być ograniczona dokładność rozwiązania w przypadku małej liczby elementów skończonych. Zastosowana w algorytmach metoda dyskretyzacji, polegająca na zastąpieniu elementów o zmiennych parametrach (np. o zmiennym przekroju) elementami o parametrach stałych lub o arbitralnie przyjętej zmienności, może dawać wyniki obciążone trudnymi do oszacowania błędami. Uzyskana dokładność może być dostateczna dla projektanta, natomiast dla badacza rozwiązującego złożone, skomplikowane problemy dynamiczne jest niewystarczająca. Dokładność tę można oczywiście zwiększyć przez zagęszczenie siatki podziału na elementy, ale niestety prowadzi to do dużej liczby współrzędnych uogólnionych. Trzeba tutaj również wspomnieć, że nie zawsze zagęszczanie siatki podziału prowadzi do zwiększenia dokładności wyników. Typowym przykładem jest tak zwany efekt blokady ścinania (*shear locking*), pojawiający się w przypadku zastosowania w elemencie Timoshenki do obliczeń przemieszczeń poprzecznych i kątów obrotu przekrojów poprzecznych aproksymacji liniowych. W tej sytuacji, mimo zwiększania liczby elementów, nie uzyskuje się zbieżności do rozwiązania dokładnego. Drugim sposobem zwiększenia dokładności jest dokładniejszy opis tzw. funkcji kształtu.

Wadą rozwiązań opartych na MES jest także czysto numeryczny charakter wyników. Uzyskane w postaci zbioru liczb rozwiązanie trudno bowiem poddać dalszym

badaniom jakościowym. Numeryczny charakter ogranicza również możliwość tworzenia rozwiązań hybrydowych, łączących rozwiązania otrzymane metodą MES z rozwiązaniami uzyskanymi metodami analitycznymi. Jednym z wielu przykładów może być interakcja dźwigarów z nieskończonymi ośrodkami ciągłymi, modelującymi podłoże sprężyste. W przypadku MES można, co prawda, wykorzystać do dalszych badań odcinkową aproksymację wynikającą z funkcji kształtu, ale ze względu na niski stopień wielomianów stosowanych zazwyczaj do opisu tych funkcji (funkcji kształtu) uzyskane w ten sposób rozwiązanie nie jest dostatecznie regularne, zwłaszcza jego kolejne pochodne. Zastosowanie metody elementów skończonych z klasyczną aproksymacją przemieszczeń oraz z wykorzystaniem dokładniejszych i bardziej złożonych funkcji kształtu do dynamicznej analizy układów prętowych, o zmiennych parametrach, można znaleźć w pracach: [10, 35, 58, 64, 70, 92, 152]. Zastosowanie tej metody do rozwiązywania płyt o zmiennych parametrach podano w pracach: [60, 63, 81, 113, 138, 149, 163, 179].

Do rozwiązania układów o zmiennych parametrach stosuje się również metodę sztywnych elementów skończonych (SES). Opis metody oraz przykłady jej zastosowania można znaleźć m.in. w pracach [100–102].

Wad opisanych w przypadku MES nie mają oczywiście ściśle rozwiązania analityczne. Niestety równania różniczkowe, opisujące rozważane w pracy problemy, są równaniami o zmiennych współczynnikach i mają rozwiązania analityczne tylko dla określonej postaci współczynników. Przykłady takich rozwiązań dla zagadnień statycznych, w tym problemów stateczności, można znaleźć np. w monografii [104]. Zagadnienia dynamiczne rozwiązywane metodami analitycznymi dla określonej postaci współczynników równań ruchu można znaleźć w pracach [21, 28, 30, 53, 56, 63, 146]. W przypadku ogólnym, tj. dla dowolnych współczynników, rozwiązania analityczne nie istnieją.

Inną klasą metod mających zastosowanie do rozwiązywania tego typu zadań są metody aproksymacyjne, w których rozwiązań poszukujemy w postaci skończonych lub nieskończonych szeregów. Niewątpliwą zaletą tych metod jest półanalityczna postać rozwiązania. Dokładność rozwiązania zależy od postaci przyjętych funkcji bazowych, od rozmiaru bazy aproksymującej, a przede wszystkim od zastosowanej metody; na przykład: metody Rayleigha–Ritza, Galerkina, szeregów potęgowych oraz metod, w których stosuje się do aproksymacji klasyczne szeregi Fouriera.

Metodę Rayleigha–Ritza do rozwiązania zagadnień dynamicznych, w których analizowanymi układami były belki o zmiennych parametrach, wykorzystano w pracach: [4, 70, 85]. Rozwiązanie tą samą metodą zagadnienia drgań płyt podłużnie niejednorodnych przedstawiono w pracach: [7, 9, 14, 25, 65, 67, 68, 69, 76, 110, 170, 202]. Metoda Rayleigha–Ritza jest jedną z częściej stosowanych do rozwiązania tego typu problemów metod aproksymacyjnych.

Przykłady zastosowania metody Galerkina można znaleźć w pracach [11 i 20]. Rozwiązania zagadnienia drgań prętów i płyt prostokątnych, o zmiennej sztywności z zastosowaniem do aproksymacji szeregów Fouriera, przedstawiono m.in. w monografii

[82]. Prezentowane w pracy [82] rozwiązania są ciekawą ilustracją zastosowania metody szeregów Fouriera.

Rozwiązania te mają jednak słabe strony, które wynikają z zastosowanej metody, a są nimi: ograniczona dokładność aproksymacji w otoczeniu końców przedziału, w przypadku gdy poszukiwana funkcja przyjmuje na końcach różne wartości (co wynikało ze znanego w teorii szeregów Fouriera zjawiska Gibbsa), konieczność doboru funkcji aproksymujących (sinus, kosinus) w zależności od występujących warunków brzegowych oraz z tego, że zmiana warunków brzegowych wymaga praktycznie ponownego rozwiązania. Powoduje to, że metoda jest trudno „algorytmizowalna”. Zastosowanie do aproksymacji w zagadnieniach dynamicznych szeregów Fouriera można znaleźć również w pracach: [56, 59, 124, 197]. Rozwiązania omawianych zagadnień z zastosowaniem wielomianów lub szeregów potęgowych przedstawiono w pracach: [33, 40, 41, 42, 43, 48, 58, 70, 92] (układy prętowe), [7, 32, 66, 67, 68, 110, 190] (płyty). Zdecydowana większość prac, w których stosowano metody aproksymacyjne dotyczyła układów, w których zmienne parametry przyjmowały zadaną, określoną postać.

Z innych metod stosowanych do rozwiązywania zagadnień drgań układów nieprzematycznych jest metoda kwadratur różnicowych DQM (*Differential Quadrature Method*), która polega na zastosowaniu w rozwiązywanym równaniu różniczkowym kwadratur numerycznych służących do wyznaczenia pochodnych funkcji na podstawie zbioru wartości funkcji wyjściowej. Tę czysto numeryczną metodę zastosowano m.in. w pracach [87, 88, 90].

Należy podkreślić, że wskazanie wad opisywanych sposobów rozwiązywania problemów nie ma na celu ich dyskredytowania, ale pokazanie, że wciąż jest miejsce na udoskonalanie oraz opracowywanie nowych metod służących do ich rozwiązywania. Każda metoda rozwiązania ma bowiem swoje niezaprzeczalne zalety oraz pewne wady, a ich występowanie zależy od typu zagadnień, czy typu układów, do których rozwiązywania ją zastosowano.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie metody oraz opracowanie na jej podstawie algorytmów służących do analizy dynamicznej dźwigarów (belek, płyt) o zmiennych parametrach geometrycznych i fizycznych (w pracy nie rozważa się zagadnień prowadzących do równań o zmiennych w czasie współczynnikach). W rozważanej metodzie korzysta się z twierdzenia opisującego sposób przybliżonego rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych za pomocą wielomianów Czebyszewa (patrz praca [144]). Ze względu na ogólny charakter zastosowanego twierdzenia, użycie skutecznych algorytmów wymaga zdefiniowania równań opisujących rozwiązywane zagadnienie (np. przyjęcie równania ruchu belki, równania ruchu płyty), nie wymaga natomiast określenia występujących w równaniu współczynników funkcyjnych. Opisana metoda jest metodą aproksymacyjną – rozwiązanie otrzymujemy w postaci szeregu Czebyszewa. Uzyskane rozwiązania mają zatem wygodną do dalszych ewentualnych przekształceń postać półanalityczną. Jak już wspomniano, stosowana metoda umożliwia rozwiązanie zagadnień, w których parametry geometryczne i materiałowe analizowanych układów są opisane dowolnymi funkcjami. Jedynym z nielicz-

nych warunków stawianym tym funkcjom jest możliwość rozwijania pewnych (określonych w założeniach stosowanego twierdzenia) liniowych kombinacji tych funkcji i ich pochodnych w zbieżne szeregi Czebyszewa.

Dlaczego do rozwiązania analizowanych problemów wybrano właśnie szeregi Czebyszewa? Powodów jest kilka. Jednym z nich jest to, że należą one do jednych z lepiej przebadanych i opisanych wielomianów. Drugim ważniejszym powodem są ich bardzo dobre właściwości aproksymacyjne. Opis tych właściwości wraz z dowodami odpowiednich twierdzeń można znaleźć w obszernej literaturze specjalistycznej dotyczącej tych wielomianów m.in. w monografii [144], czy w pracach cytowanych w tej monografii. O przydatności wielomianów Czebyszewa we wszelkiego rodzaju procedurach numerycznych może świadczyć również bogata literatura dotycząca metod numerycznych, w których te wielomiany mają zastosowanie. Przykładem mogą być prace: [36, 37, 78, 86, 91, 143, 165, 189].

Analizowane w pracy modele układów mają bardzo ogólny charakter i uwzględniają zazwyczaj najważniejsze czynniki wpływające na dany układ, wyprowadzone rozwiązania pozwalają na analizowanie wielu zagadnień związanych z rozważanymi układami. W niektórych przedstawianych problemach, aby zwiększyć przejrzystość prezentowanego rozumowania, została ograniczana liczba uwzględnianych czynników wpływających na dany układ. W tych jednak przypadkach można wykorzystać wcześniejsze rozważania umożliwiające wyprowadzenie brakujących elementów rozwiązania.

Rozprawa zawiera 11 rozdziałów. W rozdziale drugim przedstawiono wybrane definicje, właściwości i twierdzenia dotyczące wielomianów i szeregów Czebyszewa. W rozdziale tym przedstawiono również wybrane zagadnienia związane z teorią równań różniczkowych zwyczajnych. W kolejnych rozdziałach wyprowadzono, z wykorzystaniem omawianej w pracy metody, ogólne rozwiązania zagadnień drgań układów prętowych i płyt.

Rozdział trzeci dotyczy dynamiki niepryzmatycznych prostoliniowych prętów Eulera. W rozdziale tym opracowano metodę umożliwiającą rozwiązanie wszystkich podstawowych zagadnień dynamicznych: zagadnienia własnego, problemu drgań wymuszonych harmonicznie i aperiodycznie oraz drgań wymuszonych nieinercyjnym obciążeniem ruchomym. Dokonano porównania rozwiązań zagadnienia własnego belek przyzmatycznych, uzyskanych różnymi metodami. Porównywane metody to: metoda elementów skończonych oraz metody aproksymacyjne, w których rozwiązania poszukiwano w postaci klasycznych szeregów potęgowych lub trygonometrycznych szeregów Fouriera. Otrzymane rozwiązania porównano również dokładnymi rozwiązaniami analitycznymi. Rezultaty tych porównań pokazały, że różnica między dokładnym rozwiązaniem analitycznym a rozwiązaniem przybliżonym (błąd rozwiązania) jest znacznie mniejsza w przypadku zastosowania do rozwiązania prezentowanej w pracy metody niż w przypadku stosowania innych testowanych w przykładzie metod.

Rozdział czwarty dotyczy zagadnienia drgań niepryzmatycznych prętów Eulera, gdy warunek prostoliniowości osi pręta nie jest spełniony. W tej sytuacji do matematycznego opisu modelu pręta wprowadza się prostoliniową oś odniesienia. Konsekwencją tego jest powstanie w równaniach sprzężeń między przemieszczeniami poprzecznymi i podłużnymi. Wyprowadzono zależności pozwalające na rozwiązanie tego problemu oraz pokazano możliwość wykorzystania opracowanej metody do rozwiązania zagadnień nieliniowych. Analizowanym zagadnieniem nieliniowym jest problem drgań niepryzmatycznej belki o osi krzywoliniowej, gdzie uwzględniono wpływ sił osiowych na poprzeczne przemieszczenia belki.

Rozdział piąty dotyczy zagadnień stateczności układów prętowych obciążonych siłami zachowawczymi i niekonserwatywnymi. Analizując układy liniowe, ograniczono rozważania do określenia poziomu obciążeń krytycznych. Jako warunki utraty stateczności wykorzystano kinetyczne kryterium w sensie węższym (utrata stateczności przez flutter) oraz kryterium statyczne (utrata stateczności przez bifurkacje – wyboczenia). Wykorzystując opisywaną w pracy metodę rozwiązania, opracowano algorytm pozwalający na rozwiązanie tego typu problemów.

W rozdziale szóstym pokazano możliwość zastosowania opisanej metody rozwiązywania do zdefiniowania niepryzmatycznego elementu skończonego. Rozwiązanie zagadnienia drgań belki krótkiej spoczywającej na inercyjnej półpłaszczyźnie sprężystej zamieszczono w rozdziale siódmym. To skomplikowane zagadnienie rozwiązano, wykorzystując omawianą w pracy metodę oraz metodę analityczną zastosowaną w pracy Sejmowa [160] do rozwiązania zagadnienia drgań sztywnego bloku fundamentowego na półpłaszczyźnie sprężystej. Rozważania dotyczące drgań oraz stateczności układów prętowych, w których elementami są belki Timoshenki zamieszczono w rozdziale ósmym. Podobnie jak w rozdziale trzecim, dokonano porównania rozwiązań zagadnienia własnego belki pryzmatycznej, uzyskanych różnymi metodami: metodą elementów skończonych oraz metodami aproksymacyjnymi, wykorzystującymi do aproksymacji klasyczne szeregi potęgowe lub szeregi Fouriera. Otrzymane rozwiązania porównano również z dokładnymi rozwiązaniami analitycznymi.

Kolejne dwa rozdziały (rozd. 9, 10) są poświęcone dynamice niejednorodnych (niepryzmatycznych) płyt kołowych i pierścieniowych. W rozdziale dziewiątym rozwiązano ogólnie zagadnienia drgań kołowych i pierścieniowych płyt cienkich o osiowo-symetrycznym rozkładzie parametrów, obciążonych obciążeniem o dowolnym rozkładzie. Uwzględniono wpływ sił statycznych działających w płaszczyźnie płyty na jej ugięcie. Rozwiązanie równań ruchu płyt średniej grubości opisanych według teorii Hencky'ego–Bolle'a przedstawiono w rozdziale dziesiątym.

Określając zakres analizy prezentowanych w poszczególnych rozdziałach problemów, przyjęto zasadę, że w przypadku szczegółowego omówienia określonego zadania jednego typu konstrukcji, nie rozważa się go w konstrukcji innego typu. Oczywiście, kiedy w rozumowaniu nowego typu układu nie pojawiają się istotne zmiany. Omówione w przypadku belek Eulera zagadnienia drgań harmonicznym, aperiodycznym nie są rozważane w rozdziałach dotyczących innych typów układów. Analogicznie

postąpiono z tłumieniem, uwzględniając go tylko w belkach, pominięto je natomiast w pozostałych analizowanych układach. Uproszczenie to miało na celu zwiększenia przejrzystości prezentowanych rozwiązań.

Wyprowadzone rozwiązania ogólne są ilustrowane przykładami obliczeniowymi. Przykłady te można podzielić na dwie grupy. Jedną grupę tworzą przykłady ilustrujące możliwość zastosowanie wyprowadzonych rozwiązań ogólnych do rozwiązania konkretnych problemów mechaniki. Grupę drugą stanowią przykłady służące do ilustracji skuteczności metody oraz badania dokładności otrzymanych rozwiązań. W przykładach tych porównujemy otrzymane w pracy rozwiązania z rozwiązaniami uzyskanymi przez innych autorów, a w przypadku ich braku porównania wykonywane są z układami o stałych parametrach (belki pryzmatyczne, płyty jednorodne), gdzie istnieją ścisłe rozwiązania analityczne. Ponieważ celem pracy było przedstawienie metody oraz opracowanie odpowiednich algorytmów, zrezygnowano z rozwiązywania takich przykładów, w których celem byłaby szczegółowa analiza wpływu wybranych parametrów na zachowanie się rozważanego układu.

Wyniki we wszystkich przykładach numerycznych otrzymano za pomocą programów kodowanych przez autora w systemie *Mathematica*®, z wykorzystaniem numerycznych procedur tego systemu. Ze względu na możliwość pełnej kontroli dokładności obliczeń, otrzymane wyniki w ramach analizowanych procedur możemy uważać za dokładne.

2. WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE WIELOMIANÓW I SZEREGÓW Czebyszewa ORAZ TEORII RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

2.1. WPROWADZENIE

W rozdziale przedstawimy wybrane definicje, właściwości i twierdzenia dotyczące wielomianów i szeregów Czebyszewa, ograniczając rozważania do podania tych informacji, które najczęściej będą stosowane w niniejszej monografii. Czytelnika zainteresowanego ogólną wiedzą oraz problemami szczegółowymi dotyczącymi wielomianów i szeregów Czebyszewa odsyłamy do specjalistycznej literatury, m.in. do wielokrotnie cytowanej w niniejszej pracy monografii [144]. W rozdziale tym przedstawimy również wybrane zagadnienia związane z teorią równań różniczkowych zwyczajnych.

2.2. DEFINICJE SZEREGÓW Czebyszewa, ZBIEŻNOŚĆ

Szeregiem Czebyszewa funkcji $g(x)$ określonej w przedziale $[-1, 1]$, nazywamy jej rozwinięcie

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k [g] T_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} a_0 [g] T_0(x) + a_1 [g] T_1(x) + a_2 [g] T_2(x) + \dots, \quad (2.1)$$

gdzie

$$a_k [g] = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} g(x) T_k(x) dx, \quad (2.2)$$

a $T_k(x)$ są wielomianami Czebyszewa I rodzaju.

Wielomiany Czebyszewa I rodzaju są ortogonalne w przedziale $[-1, 1]$ z wagą $(1 - x^2)^{-1/2}$ i definiują je następujące wzory rekurencyjne

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, \\ T_k(x) &= 2x T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), & k &= 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Wielomiany można również określić wzorami

$$T_k(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2j} x^{k-2j} (x^2 - 1)^j, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

lub

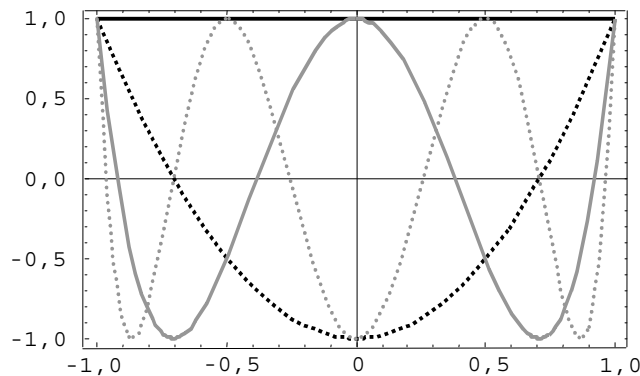
$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad |x| \leq 1, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.5)$$

gdzie $\lfloor k \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby.

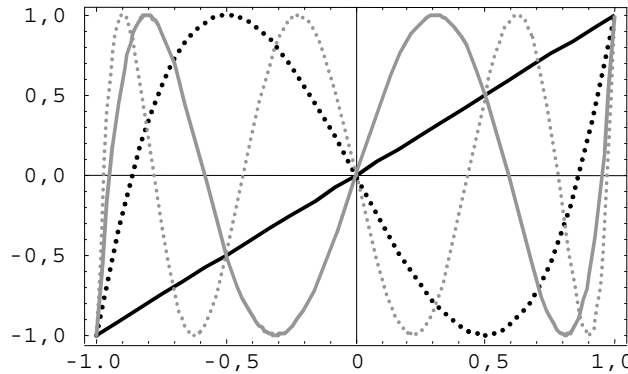
Przyjęcie następującej zależności

$$T_{-k}(x) = T_k(x) \quad (2.6)$$

umożliwia rozszerzenie definicji wielomianów na ujemne całkowite wartości k . Łatwo wykazać, że wielomiany $T_k(x)$ są funkcjami parzystymi dla parzystych k i nieparzystymi dla k nieparzystych. Wykresy pierwszych czterech parzystych i nieparzystych wielomianów Czebyszewa I rodzaju przedstawiono na rysunkach 2.1 i 2.2.



Rys. 2.1. Wielomiany Czebyszewa $T_k(x)$, $k = 0, 2, 4, 6$

Rys. 2.2. Wielomiany Czebyszewa $T_k(x)$, $k = 1, 3, 5, 7$

Po przyjęciu

$$a_{-k}[g] = a_k[g], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.7)$$

szereg Czebyszewa (2.1) możemy przedstawić w postaci

$$g(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k[g] T_k(x). \quad (2.8)$$

Jednym z podstawowych twierdzeń dotyczących zbieżności szeregów Czebyszewa jest twierdzenie ([144], s. 111, T. 8.4), że dla dowolnej funkcji $g(x)$ ciągłej i mającej wahania skończone w przedziale $[-1, 1]$ (do szerokiej klasy funkcji o wahanach skończonych należą m. in. funkcje przedziałami monotoniczne) jej szereg Czebyszewa (2.1) zbiega do funkcji $g(x)$ jednostajnie w tym przedziale. W przypadku funkcji przedziałami ciągłej szereg jest jednostajnie zbieżny w każdym domkniętym podprzedziale przedziału ciągłości.

Oprócz wielomianów Czebyszewa $T_k(x)$ – pierwszego rodzaju, definiuje się wielomiany Czebyszewa drugiego rodzaju $U_k(x)$. Ponieważ w niniejszej pracy pojawiają się one rzadko, ograniczymy rozważania tylko do podania ich definicji. Wielomiany $U_k(x)$ definiują następujące związki rekurencyjne

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \quad U_1(x) = 2x, \\ U_k(x) &= 2xU_{k-1}(x) - U_{k-2}(x), \quad k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

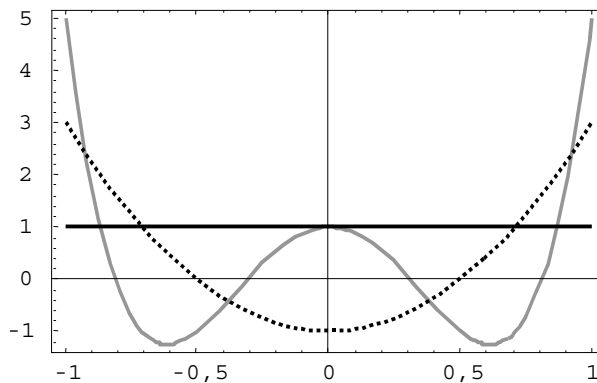
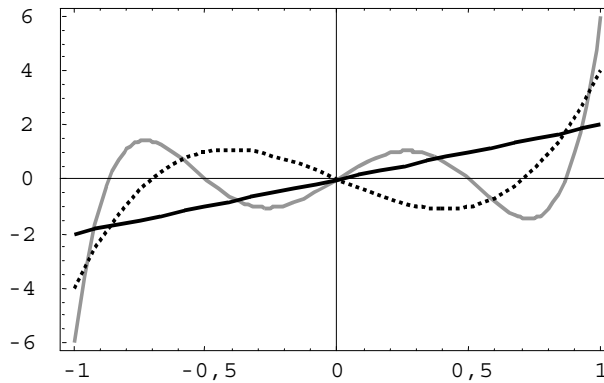
Można je również określić wzorami

$$U_k(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k+1}{2j+1} x^{k-2j} (x^2-1)^j, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

lub

$$U_k(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \sin[(k+1)\arccos x], \quad |x| < 1, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.11)$$

Wykresy pierwszych trzech parzystych i nieparzystych wielomianów Czebyszewa II rodzaju przedstawiono na rysunkach 2.3 i 2.4.

Rys. 2.3. Wielomiany Czebyszewa $U_k(x)$, $k = 0, 2, 4$ Rys. 2.4. Wielomiany Czebyszewa $U_k(x)$, $k = 1, 3, 5$

W przypadku gdy rozwijana funkcja jest określona w przedziale $[0, 1]$, wygodnie jest stosować przesunięte wielomiany Czebyszewa

$$T_n^*(x) = T_n(2x-1), \quad U_n^*(x) = U_n(2x-1).$$

2.3. PRZYBLIŻONE ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH Z WYKORZYSTANIEM SZEREGÓW CZEBSZEWY

Jednym z podstawowych narzędzi wykorzystywanych do rozwiązywania omawianych w pracy zagadnień jest następujące twierdzenie, dotyczące równań różniczkowych zwyczajnych [144]:

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia równanie różniczkowe liniowe rzędu $n > 0$

$$\sum_{m=0}^n \hat{P}_m(x) f^{(n-m)}(x) = \hat{P}(x) \quad (2.12)$$

oraz

$$Q_m(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m+j} \binom{n-j}{m-j} \hat{P}_j^{(m-j)}(x), \quad m=0, 1, \dots, n, \quad (2.13)$$

gdzie

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

a \hat{P}_m, \hat{P} są dowolnymi funkcjami, ale takimi, że funkcje $(Q_0 f)^{(n)}, (Q_1 f)^{(n-1)}, \dots, Q_n f, \hat{P}$ mają określone współczynniki szeregów Czebyszewa zwykłych lub przesuniętych, to dla każdego całkowitego k prawdziwa jest następująca tożsamość

$$\sum_{m=0}^n 2^{n-m} \sum_{j=0}^m b_{nmj}(k) a_{k-m+2j} [Q_m(x) f(x)] = \sum_{j=0}^n b_{nmj}(k) a_{k-n+2j} [\hat{P}(x)], \quad (2.14)$$

$$\sum_{m=0}^n 4^{n-m} \sum_{j=0}^m b_{nmj}(k) a_{k-m+2j}^* [Q_m(x) f(x)] = \sum_{j=0}^n b_{nmj}(k) a_{k-n+2j}^* [\hat{P}(x)],$$

gdzie $b_{nmj}(k)$ są wielomianami zmiennej całkowitej k

$$b_{nmj}(k) = (-1)^j \binom{m}{j} (k-n)_{n-m+j} (k-m+2j) (k+j+1)_{n-j} (k^2 - n^2)^{-1}, \quad (2.15)$$

$$m=0, 1, \dots, n, \quad j=0, 1, \dots, m,$$

$$(k)_n = \begin{cases} 1 & n=0, \\ k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1) & n=1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (2.16)$$

a $a_k[h]$ i $a_k^*[h]$ – są odpowiednio k -tymi współczynnikami rozwinięcia funkcji $h(x)$ w szereg Czebyszewa względem zwykłych i przesuniętych wielomianów Czebyszewa I rodzaju.

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w pracy [144], s. 231–234. W celu lepszego zrozumienia przedstawionego twierdzenia oraz prezentowanych jego uogólnień, przedstawimy szkic zaprezentowanego w pracy [144] szczegółowego dowodu twierdzenia. W szkicu tym ograniczymy rozważania do wzorów związanych ze zwykłymi wielomianami Czebyszewa. W pierwszym etapie dowodu twierdzenia udowadnia się prawdziwość zależności

$$\sum_{m=0}^n (Q_m(x)f(x))^{(n-m)} = \sum_{m=0}^n \hat{P}_m(x)f^{(n-m)}(x) \quad (2.17)$$

pozwalającej na zastąpienie równania (2.12) równaniem

$$\sum_{m=0}^n (Q_m(x)f(x))^{(n-m)} = \hat{P}(x). \quad (2.18)$$

Korzystając z tego, że obie strony równania (2.18) mają identyczne współczynniki rozwinięcia Czebyszewa, przyrównuje się do siebie takie same następujące ich liniowe kombinacje

$$\sum_{j=0}^n b_{mj}(k) \sum_{m=0}^n a_{k-n+2j} \left[(Q_m(x)f(x))^{(n-m)} \right] = \sum_{j=0}^n b_{mj}(k) a_{k-n+2j} \left[\hat{P}(x) \right]. \quad (2.19)$$

Ostatni etap polega na udowodnieniu zależności

$$\begin{aligned} & 2^{n-m} \sum_{j=0}^m b_{nmj}(k) a_{k-m+2j} \left[Q_m(x)f(x) \right] \\ & = \sum_{j=0}^n b_{nmj}(k) a_{k-n+2j} \left[(Q_m(x)f(x))^{(n-m)} \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

z której oraz z równania (2.19) wynika teza twierdzenia (2.14).

Cytowane twierdzenie można uogólnić na układy liniowych równań różniczkowych (patrz [144], s. 323). Układ N równań różniczkowych możemy przedstawić w postaci macierzowej

$$\sum_{m=0}^n \hat{\mathbf{P}}_m(x) \mathbf{f}^{(n-m)}(x) = \hat{\mathbf{P}}(x), \quad (2.21)$$

gdzie współczynniki $\hat{\mathbf{P}}_m(x)$ są macierzami kwadratowymi stopnia N , a $\mathbf{f}(x)$ i $\hat{\mathbf{P}}(x)$ są N -elementowymi wektorami. Różniczkowanie wektora oznacza tutaj różniczkowanie każdej jego składowej. Jeśli funkcja wektorowa $\mathbf{f}(x)$ spełnia układ równań (2.21) oraz są spełnione założenia cytowanego twierdzenia, to dla każdego całkowitego k prawdziwa jest tożsamość

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n 2^{n-m} \sum_{j=0}^m b_{mj}(k) a_{k-m+2j} [\mathbf{Q}_m(x) \mathbf{f}(x)] &= \sum_{j=0}^n b_{mj}(k) a_{k-n+2j} [\hat{\mathbf{P}}(x)], \\ \sum_{m=0}^n 4^{n-m} \sum_{j=0}^m b_{mj}(k) a_{k-m+2}^* [\mathbf{Q}_m(x) \mathbf{f}(x)] &= \sum_{j=0}^n b_{mj}(k) a_{k-n+2j}^* [\hat{\mathbf{P}}(x)]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Występujące we wzorze funkcje $\mathbf{Q}_m(x)$ są macierzowymi odpowiednikami funkcji określonych wzorem (2.13)

$$\mathbf{Q}_m(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m+j} \binom{n-j}{m-j} \hat{\mathbf{P}}_j^{(m-j)}(x), \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (2.23)$$

a $a_l [\mathbf{Q}_m(x) \mathbf{f}(x)]$ oznacza wektor, którego elementami są l -te współczynniki rozwinięcia Czebyszewa składowych wektora $\mathbf{Q}_m(x) \mathbf{f}(x)$.

Analizując szkic dowodu cytowanego twierdzenia, łatwo zauważyć następującą możliwość uogólnienia tego twierdzenia:

Jeżeli funkcje $\mathbf{f}(x)$ i $\mathbf{g}(x)$ spełniają równanie różniczkowe

$$\sum_{m=0}^n \left(\hat{\mathbf{P}}_m(x) \mathbf{f}^{(n-m)}(x) + \hat{\mathbf{R}}_m(x) \mathbf{g}^{(n-m)}(x) \right) = \hat{\mathbf{P}}(x) \quad (2.24)$$

oraz

$$\mathbf{Q}_m(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m+j} \binom{n-j}{m-j} \hat{\mathbf{P}}_j^{(m-j)}(x), \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{S}_m(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m+j} \binom{n-j}{m-j} \hat{\mathbf{R}}_j^{(m-j)}(x), \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (2.26)$$

to dla każdego całkowitego k prawdziwa jest tożsamość

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^n 2^{n-m} \sum_{j=0}^m b_{nmj}(k) \left(a_{k-m+2j} [\mathbf{Q}_m(x)\mathbf{f}(x)] + a_{k-m+2j} [\mathbf{S}_m(x)\mathbf{g}(x)] \right) \\
&= \sum_{j=0}^n b_{nmj}(k) a_{k-n+2j} [\hat{\mathbf{P}}(x)], \\
& \sum_{m=0}^n 4^{n-m} \sum_{j=0}^m b_{nmj}(k) \left(a_{k-m+2j}^* [\mathbf{Q}_m(x)\mathbf{f}(x)] + a_{k-m+2j}^* [\mathbf{S}_m(x)\mathbf{g}(x)] \right) \\
&= \sum_{j=0}^n b_{nmj}(k) a_{k-n+2j}^* [\hat{\mathbf{P}}(x)].
\end{aligned} \tag{2.27}$$

W szczególnym przypadku, gdy wszystkie występujące we wzorze (2.24) funkcje są funkcjami dwóch zmiennych (x, t) , a funkcja $\mathbf{g}(x, t) = \partial^p \mathbf{f}/\partial t^p$, wtedy układ równań (2.24) staje się układem równań różniczkowych cząstkowych. Przedstawione uogólnienie pozwala na sprowadzeniu układu równań różniczkowych cząstkowych do nieskończonego układu równań różniczkowych zwyczajnych, w których niewiadomymi są zależne od t współczynniki rozwinięcia Czebyszewa poszukiwanej funkcji $\mathbf{f}(x, t)$.

Ponieważ w dalszej części pracy będziemy wykorzystywać cytowane twierdzenie do rozwiązywania równań lub układów równań różniczkowych rzędu 2 i 4 (ze względu na zmienną x), dalsze rozważania ograniczymy do układu równań tych rzędów, traktując jednocześnie równanie (2.12) jako szczególny przypadek równania (2.21).

W przypadku układu czwartego rzędu ($n = 4$), po obliczeniu wielomianów $b_{nmj}(k)$ występujących we wzorze (2.22) i wykorzystaniu zależności (patrz [144] s.128, 139), określającej wartość k -tego współczynnika rozwinięcia iloczynu funkcji $g(x)$ i $f(x)$ wzorem

$$\begin{aligned}
a_k [g(x)f(x)] &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (a_{k-l}[g] + a_{k+l}[g]) a_l[f], \\
a_k^* [g(x)f(x)] &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (a_{k-l}^*[g] + a_{k+l}^*[g]) a_l[f],
\end{aligned} \tag{2.28}$$

równania (2.22) przyjmą postać nieskończonego układu równań algebraicznych

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ 8(k^2 - 9)(k^2 - 4)(k^2 - 1)k(a_{k-l}[\mathbf{Q}_0] + a_{k+l}[\mathbf{Q}_0]) \right. \\
& \quad + 4(k^2 - 9)(k^2 - 4)(k^2 - 1)(a_{k-l-1}[\mathbf{Q}_1] + a_{k+l-1}[\mathbf{Q}_1] - a_{k-l+1}[\mathbf{Q}_1] - a_{k+l+1}[\mathbf{Q}_1]) \\
& \quad + 2(k^2 - 9)(k^2 - 4)((k+1)(a_{k-l-2}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+l-2}[\mathbf{Q}_2]) - 2k(a_{k-l}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+l}[\mathbf{Q}_2]) \\
& \quad \quad \left. + (k-1)(a_{k-l+2}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+l+2}[\mathbf{Q}_2])) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (k^2 - 9)((k+1)(k+2)(a_{k-l-3}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+l-3}[\mathbf{Q}_3]) \\
& \quad - 3(k-1)(k+2)(a_{k-l-1}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+l-1}[\mathbf{Q}_3])) \\
& \quad + 3(k+1)(k-2)(a_{k-l+1}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+l+1}[\mathbf{Q}_3]) \\
& \quad - (k-1)(k-2)(a_{k-l+3}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+l+3}[\mathbf{Q}_3])) \\
& + \frac{1}{2}((k+1)(k+2)(k+3)(a_{k-l-4}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l-4}[\mathbf{Q}_4]) \\
& \quad - 4(k+3)(k^2-4)(a_{k-l-2}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l-2}[\mathbf{Q}_4]) \\
& \quad + 6k(k^2-9)(a_{k-l}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l}[\mathbf{Q}_4]) \\
& \quad - 4(k-3)(k^2-4)(a_{k-l+2}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l+2}[\mathbf{Q}_4]) \\
& \quad + (k-1)(k-2)(k-3)(a_{k-l+4}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l+4}[\mathbf{Q}_4]))\} a_l[f] \\
& = (k+1)(k+2)(k+3)a_{k-4}[\hat{\mathbf{P}}] - 4(k+3)(k^2-4)a_{k-2}[\hat{\mathbf{P}}] + 6k(k^2-9)a_k[\hat{\mathbf{P}}] \\
& \quad - 4(k-3)(k^2-4)a_{k+2}[\hat{\mathbf{P}}] + (k-1)(k-2)(k-3)a_{k+4}[\hat{\mathbf{P}}], \\
& \hspace{25em} k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.29)
\end{aligned}$$

gdzie

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l[f] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}a_0[f] + a_1[f] + a_2[f] + \dots, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_0 &= \hat{\mathbf{P}}_0, \quad \mathbf{Q}_1 = -4\hat{\mathbf{P}}_0^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_1, \quad \mathbf{Q}_2 = 6\hat{\mathbf{P}}_0^{(2)} - 3\hat{\mathbf{P}}_1^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_2, \\
\mathbf{Q}_3 &= -4\hat{\mathbf{P}}_0^{(3)} + 3\hat{\mathbf{P}}_1^{(2)} - 2\hat{\mathbf{P}}_2^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_3, \quad \mathbf{Q}_4 = \hat{\mathbf{P}}_0^{(4)} - \hat{\mathbf{P}}_1^{(3)} + \hat{\mathbf{P}}_2^{(2)} - \hat{\mathbf{P}}_3^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_4,
\end{aligned} \quad (2.31)$$

a $a_l[\mathbf{f}]$ są poszukiwanymi współczynnikami rozwinięcia Czebyszewa funkcji wektorowej \mathbf{f} .

W przypadku uogólnionej wersji twierdzenia 1 (wzory (2.24)–(2.27)), we wzorze (2.29) zamiast funkcji \mathbf{Q}_m wprowadzamy $\mathbf{Q}_m + \mathbf{S}_m$.

Postępując analogicznie w przypadku równań rzędu drugiego ($n = 2$), otrzymamy

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ 2(k^2-1)k(a_{k-l}[\mathbf{Q}_0] + a_{k+l}[\mathbf{Q}_0]) \right. \\
& \quad + (k^2-1)(a_{k-l-1}[\mathbf{Q}_1] + a_{k+l-1}[\mathbf{Q}_1] + a_{k-l+1}[\mathbf{Q}_1] + a_{k+l+1}[\mathbf{Q}_1]) \\
& \quad + \frac{1}{2}((k+1)(a_{k-l-2}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+l-2}[\mathbf{Q}_2]) - 2k(a_{k-l}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+l}[\mathbf{Q}_2]) \\
& \quad \left. + (k-1)(a_{k-l+2}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+l+2}[\mathbf{Q}_2]))\right\} a_l[\mathbf{f}] \\
& = (k+1)a_{k-2}[\hat{\mathbf{P}}] - 2ka_k[\hat{\mathbf{P}}] + (k-1)a_{k+2}[\hat{\mathbf{P}}], \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \quad (2.32)$$

gdzie

$$\mathbf{Q}_0 = \hat{\mathbf{P}}_0, \quad \mathbf{Q}_1 = -2\hat{\mathbf{P}}_0^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_1, \quad \mathbf{Q}_2 = \hat{\mathbf{P}}_0^{(2)} - \hat{\mathbf{P}}_1^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_2. \quad (2.33)$$

W przypadku zastosowania do rozwiązania równań różniczkowych przesuniętych wielomianów Czebyszewa I rodzaju otrzymujemy analogiczne równania różniące się od równań (2.29) i (2.32) tylko współczynnikami liczbowymi. I tak we wzorze (3.29) współczynniki 8, 4, 2, 1 należy zastąpić liczbami 128, 64, 8, 2, natomiast we wzorze (3.32) współczynniki 2, 1 zastępujemy liczbami 8, 2. Wynika to ze wzoru (2.14) oraz z tego, że wzór na współczynniki rozwinięcia iloczynu dwóch funkcji w przypadku wielomianów przesuniętych jest taki sam jak dla zwykłych wielomianów Czebyszewa (patrz wzór (2.28)).

W nieskończonych układach równań (2.29) i (2.32), w zależności od rzędu równania różniczkowego n , którego one dotyczą, pierwsze n równań dla $k = 0, 1, \dots, n-1$ jest spełnionych tożsamościowo. W rozważanych przez nas przypadkach mamy odpowiednio $n = 4$ lub $n = 2$. Równania te zastępuje się równaniami opisującymi warunki brzegowe. W określaniu warunków brzegowych przydatne będą następujące wzory służące do obliczania wartości wielomianów Czebyszewa i ich pochodnych w punktach $x = \pm 1, 0$ ([144], s. 48):

$$T_n^{(m)}(1) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } m = 0 \\ \frac{n}{(2m-1)!!} \prod_{k=-m+1}^{m-1} (n+k) & \text{gdy } m > 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

$$T_n^{(m)}(-1) = (-1)^{n-m} T_n^{(m)}(1). \quad (2.35)$$

$$T_n^{(m)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{gdy } m = 0, \quad n \text{ parzyste} \\ (-1)^{\frac{n-m}{2}} \prod_{k=1}^{m-1} (n-m+2k) & \text{gdy } m > 0, \quad n-m \text{ parzyste} \\ 0 & \text{gdy } n-m \text{ nieparzyste} \end{cases} \quad (2.36)$$

gdzie $0 \leq m \leq n$.

W wyniku podstawienia związków (2.31) i (2.33) odpowiednio do układów równań (2.29) i (2.32), w układach tych pojawią się współczynniki rozwinięć w szeregi Czebyszewa funkcji $\mathbf{P}_i(x) - a_l [\mathbf{P}_i(x)]$ oraz współczynniki rozwinięć pochodnych tych funkcji $\mathbf{P}_i^{(m)}(x) - a_l [\mathbf{P}_i^{(m)}(x)]$, gdzie w zależności od rzędu równania i postaci funkcji

$\mathbf{P}_i(x)$ parametr m może przyjmować wartości $m = 1, 2, 3, 4$ lub $m = 1, 2$. Po wykonaniu opisanego podstawienia głównym problemem, jaki pojawia się w metodzie rozwiązywania, jest wyrażenie współczynników rozwinięć pochodnych funkcji

$$a_l^{(m)} = a_l \left[f^{(m)} \right] = a_l \left[\frac{\partial^m f}{\partial x^m} \right]$$

przez współczynniki rozwinięć funkcji wyjściowych $a_l = a_l[f]$, gdzie przez f oznaczyliśmy dowolną funkcję będącą elementem wzoru określającego funkcje $\mathbf{P}_i(x)$.

Do rozwiązania zagadnienia wykorzystuje się następujący związek między współczynnikami rozwinięcia w szereg Czebyszewa funkcji $f(x)$ a współczynnikami rozwinięcia jej pierwszej pochodnej $f'(x)$ ([144], s. 124, 127)

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{1}{2l} (a'_{l-1} - a'_{l+1}), \quad l \neq 0, \\ a_l^* &= \frac{1}{4l} (a_{l-1}^* - a_{l+1}^*), \quad l \neq 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

gdzie

$$a_l = a_l[f], \quad a'_l = a_l[f'] = a_l \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right], \quad a_l^* = a_l^*[f], \quad a_{l'}^* = a_l^*[f'] = a_l^* \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right].$$

Zastosowanie zależności (2.37) (mimo jej prostoty) w przypadku równań różniczkowych wyższych rzędów nie jest zadaniem prostym.

Ze względu na konieczność pozbycia się, w niektórych równaniach różniczkowych osobliwych mnożników x^{-m} , $m \leq k$ lub $(1 - x^2)^{-1/2}$, równania będą mnożone obustronnie przez x^k lub $1 - x^2$. Podczas wykonywania tej operacji korzysta się z następującego związku (patrz [144], s. 123, 126)

$$\begin{aligned} a_l \left[x^m f(x) \right] &= 2^{-m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a_{l-m+2j}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ a_l^* \left[x^m f(x) \right] &= 2^{-2m} \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} a_{l-m+j}^*, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.38)$$

gdzie $a_l = a_l[f(x)]$, $a_l^* = a_l^*[f(x)]$.

2.4. WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Bardzo użytecznym twierdzeniem wykorzystywanym w rozwiązywaniu układu równań różniczkowych o stałych współczynnikach ($\mathbf{A} = \text{const}$)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{f}, \\ \mathbf{q}_0 &= \mathbf{q}(0)\end{aligned}\tag{2.39}$$

jest następujące twierdzenie o sprowadzaniu macierzy do postaci kanonicznej Jordana (patrz np. [29], s. 117, [71] s. 537):

Twierdzenie 2

Każda macierz kwadratowa \mathbf{A} n -tego stopnia jest podobna¹ do pewnej macierzy

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1}, \quad (\det \mathbf{S} \neq 0)\tag{2.40}$$

mającej postać jordanowską

$$\mathbf{J} = \text{diag}[\mathbf{J}_1(\lambda_1), \mathbf{J}_2(\lambda_2), \dots, \mathbf{J}_m(\lambda_m)], \quad m \leq n,\tag{2.41}$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ są różnymi wartościami własnymi macierzy \mathbf{A} ,

$$\mathbf{J}_k(\lambda_k) = \text{diag}[\mathbf{J}_k^{(1)}(\lambda_k), \mathbf{J}_k^{(2)}(\lambda_k), \dots, \mathbf{J}_k^{(r)}(\lambda_k)], \quad r = r(k)\tag{2.42}$$

oraz

$$\mathbf{J}_k^{(i)}(\lambda_k) = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} & i = 1, 2, \dots, r(k), \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ & \dim[\mathbf{J}_k^{(i)}(\lambda_k)] = e_k^{(i)} \times e_k^{(i)} \end{aligned}$$

¹ Mówimy, że macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} są podobne, jeśli istnieje macierz $\mathbf{S}(\det \mathbf{S} \neq 0)$ taka, że $\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1}$.

jest tzw. klatką Jordana, odpowiadającą wartości własnej λ_k , przy czym każdej wartości własnej λ_k macierzy \mathbf{A} , o krotności α_k , odpowiada jedna lub kilka klatek Jordana stopnia $e_k^{(i)}$, gdzie $e_k^{(1)} + e_k^{(2)} + \dots + e_k^{(r)} = \alpha_k$, $r = r(k)$, $k = 1, 2, \dots, m$ oraz $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$.

Liczba $r(k)$ klatek Jordana, odpowiadających wartości własnej λ_k , jest równa maksymalnej liczbie liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy \mathbf{A} dla wartości λ_k . W przypadku gdy $r(k) = \alpha_k$, mamy $e_k^{(1)} = e_k^{(2)} = \dots = e_k^{(r)} = 1$ i wszystkie klatki Jordana, odpowiadające λ_k , redukują się do jednoelementowych klatek prostych $\mathbf{J}_k^{(i)}(\lambda_k) = [\lambda_k]$.

Z przedstawionego twierdzenia 2 wynika, że macierz współczynników \mathbf{A} (równ. (2.39)) można przedstawić w postaci $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{S}$, gdzie \mathbf{J} jest macierzą Jordana, a zatem układ równań różniczkowych (2.39) sprowadzić do następującej postaci

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{S}\mathbf{q} + \mathbf{f}. \quad (2.43)$$

Po wprowadzeniu podstawienia $\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{q}$ i pomnożeniu lewostronnie obu stron równania (2.43) przez \mathbf{S} otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{J}\mathbf{y} + \mathbf{S}\mathbf{f}, \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{y}(0) = \mathbf{S}\mathbf{q}_0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Z teorii równań różniczkowych zwyczajnych wiadomo, że rozwiązaniem układu równań o stałych współczynnikach (2.44) jest funkcja (patrz [71], s. 139)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{y}(0) + \int_0^t \mathbf{Y}(t-\tau)(\mathbf{S}\mathbf{f}(\tau))d\tau, \quad (2.45)$$

gdzie $\mathbf{Y}(t)$ jest unormowaną macierzą fundamentalną równania jednorodnego, tj. macierzą kwadratową spełniającą następujące macierzowe równanie różniczkowe

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \mathbf{J}\mathbf{Y}(t) \quad (2.46)$$

oraz warunek początkowy $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{I}$. Korzystając z faktu, że $\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{q}$, rozwiązanie $\mathbf{q}(t)$ wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y}(t)\mathbf{S}\mathbf{q}(0) + \int_0^t \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y}(t-\tau)\mathbf{S}\mathbf{f}(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{Z}(t)\mathbf{q}(0) + \int_0^t \mathbf{Z}(t-\tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ponieważ macierz \mathbf{J} ma postać jordanowską określoną wzorem (2.41), unormowane fundamentalne rozwiązanie układu (2.46) wyraża się wzorem (patrz [71], s. 151)

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\mathbf{J}t} = \text{diag} \left[e^{\mathbf{J}_1(\lambda_1)t}, e^{\mathbf{J}_2(\lambda_2)t}, \dots, e^{\mathbf{J}_m(\lambda_m)t} \right], \quad (2.48)$$

gdzie

$$e^{\mathbf{J}_k(\lambda_k)t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_k t} & \frac{t}{1!} e^{\lambda_k t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_k t} & \dots & \frac{t^{e_k-1}}{(e_k-1)!} e^{\lambda_k t} \\ 0 & e^{\lambda_k t} & \frac{t}{1!} e^{\lambda_k t} & \dots & \frac{t^{e_k-2}}{(e_k-2)!} e^{\lambda_k t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_k t} & \dots & \frac{t^{e_k-3}}{(e_k-3)!} e^{\lambda_k t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

3. DRGANIA NIEPRYZMATYCZNYCH PRĘTÓW EULERA O OSI PROSTOLINIOWEJ

3.1. WPROWADZENIE

W niniejszym rozdziale analizujemy zagadnienia drgań prętów niepryzmatycznych, tj. prętów, których charakterystyki geometryczne lub materiałowe są zmienne na długości pręta. O dużym znaczeniu tego typu zadań w praktyce inżynierskiej może świadczyć duża liczba publikacji zajmujących się tą problematyką.

Rozwiązanie wielu zagadnień statycznych, w tym stateczności, można znaleźć w monografii Krynickiego i Mazurkiewicza [104]. Autorzy pracy [104] rozpatrzyli wiele złożonych stanów obciążeń. Uzyskane rozwiązania miały postać analityczną. Autorzy ograniczyli rozważania do prętów, których moment bezwładności przekroju można opisać funkcją

$$J(\xi) = J_s (\mu_i (1 - \xi) + \mu_k \xi)^n, \quad n = 0, 2, 3, 4.$$

Ten sam sposób rozwiązania zagadnienia drgań ram złożonych z prętów o liniowo zmiennej wysokości zastosowano w pracy Krynickiego [103]. Analityczne rozwiązanie problemu drgań swobodnych belki o liniowo zmiennej wysokości i szerokości z dołączonym do belki zbiorem oscylatorów harmonicznym uzyskano w pracy Chena i Wu'a [21]. Wyznaczone rozwiązanie miało postać liniowej kombinacji funkcji Bessela. Rozwiązanie w postaci kombinacji funkcji Bessela otrzymali również De Rosa i Maurizi [28]. W cytowanej pracy rozwiązali zagadnienie drgań swobodnych dla belki o zadanym zmiennym przekroju

$$A(z) = A_0 \left(1 + \frac{cz}{L}\right)^n, \quad I(z) = I_0 \left(1 + \frac{cz}{L}\right)^{n+2}$$

z dodatkową masą skupioną oraz jawnym elementem tłumiącym. Rozwiązanie, polegające na rozwinięciu funkcji przemieszczeń w szereg Fouriera, wyznaczeniu energii kinetycznej i sprężystej, a następnie rozwiązanie równania Lagrange'a zostało przed-

stawione w pracy Heidebrechta [72]. Szeregi Fouriera do rozwiązania problemów statycznych i dynamicznych wykorzystał w swej monografii Kacner [82]. Zastosowanie szeregów Fouriera uzupełnionych wielomianami potęgowymi do rozwiązywania szerokiej klasy problemów opisanych przez liniowe równania różniczkowe o zmiennych współczynnikach, do których prowadzą m.in. zagadnienia drgań prętów o zmiennym przekroju przedstawiono w pracy Ganga Rao i Spyrakosa [59]. Macierz sztywności i bezwładności belki o liniowo zmiennej wysokości wyznaczył Gupta [64] i na ich podstawie rozwiązał zagadnienie własne belki wspornikowej i swobodnie podpartej. Belkami niepryzmatycznymi zajmował się również Eisenberger. W pracy [34] Eisenberger wyznaczył elementy macierzy sztywności dla kilku rodzajów belek niepryzmatycznych. Razem z Reichem w pracy [35], zastosował do rozwiązania zagadnień statycznych i dynamicznych metodę elementów skończonych, aproksymując przemieszczenia wewnątrz elementu wielomianami trzeciego stopnia. W rozważanych zagadnieniach sztywność i gęstość belki była określona przez wielomiany potęgowe. Formuły pozwalające na wyznaczenie elementów macierzy sztywności elementu belkowego o zmiennych sztywnościach osiowej, skrętnej i giętnej, opisanych szeregami potęgowymi, Eisenberger przedstawił w pracy [33]. Taką samą wielomianową aproksymację do wyznaczenia macierzy sztywności i bezwładności belkowych elementów skończonych typu Eulera i Timoshenki, o zmiennych parametrach, zastosował Klasztorny [92]. W pracy [92] zostało rozwiązanych wiele przykładów ilustrujących zastosowanie opisanej metody. Uogólnienie formuł uzyskanych w pracy [33], opisujących macierze sztywności i bezwładności dla prętów o zmiennej na długości pręta sztywności i gęstości, spoczywających na dwuparametrowym podłożu, możemy znaleźć w pracy Głabisza [58]. W pracy tej analizowano zagadnienie stateczności niepryzmatycznego pręta poddanego działaniu niepotencjalnych obciążeń. Podobnie jak w pracy [33] i [92] do aproksymacji funkcji przemieszczeń zastosowano szeregi potęgowe. Klasyczne wielomiany potęgowe do rozwiązania zagadnień drgań różnych typów belek zastosował również w swych pracach Elishakoff [40–43]. Uwzględniając przestrzenny rozkład odkształceń i naprężeń (3-D) oraz stosując metodę Ritza, w pracy [85] Kang i Leissa rozwiązały zagadnienie własne dla belki o zmiennym na długości, kołowym przekroju. Otrzymane rozwiązanie porównano z rozwiązaniem klasycznym (1-D) belki Eulera. Jako przykłady zastosowania innych metod do rozwiązywania omawianego problemu mogą służyć prace Mateji [131] oraz Karami i Malekzadeha [88]. Autor pracy [131], wykorzystując metodę macierzy przeniesienia rozwiązał zagadnienie drgań swobodnych dwóch połączonych sprężystości prętów o skokowo zmiennym przekroju. Natomiast w pracy [88] zastosowano do rozwiązania problemu drgań belek niepryzmatycznych metodę kwadratur różnicowych DQM (*Differential Quadrature Method*). Metoda ta polega na zastosowaniu w rozwiązywanym równaniu różniczkowym kwadratur numerycznych służących do wyznaczenia pochodnych funkcji na podstawie zbioru wartości funkcji wyjściowej. Szczegółowy opis tej metody można znaleźć m.in. w pracy Berta i Malika [16]. Metodę tę do rozwiązywania zagadnień drgań prętów pryzmatycznych zastosowali również Chen, Striz i Bert [23]. Zastosowanie tej

samej metody do rozwiązywania problemów drgań belek i płyt prostokątnych można znaleźć też w pracy Wanga, Berta i Striza [191]. Rozwiązanie zagadnienia drgań belki niepryzmatycznej obciążonej siłą osiową przedstawiono w pracy Auciello [6]. Zadanie rozwiązano metodą Rayleigha–Ritza, przyjmując za funkcje aproksymujące zbiór funkcji ortogonalnych. Pierwszy element tego zbioru to wielomian spełniający warunki brzegowe, następne elementy wyznaczono metodą ortogonalizacji Grama–Schmidta. Analityczne rozwiązanie swobodnych drgań podłużnych pręta o zmiennym przekroju w postaci funkcji hipergeometrycznych przedstawiono w pracy [146]. Przykłady rozwiązania problemów statycznych i dynamicznych, dotyczących belek niepryzmatycznych z wykorzystaniem różnych metod, można znaleźć w pracy Głabisza [56]. Zastosowane w tej pracy metody to: metoda Galerkina z aproksymacją trygonometryczną, metoda Ritza, metoda „strzałów”. Do rozwiązania jako narzędzie wspomagające wykorzystano program *Mathematica*[®].

Osobną grupę dotyczącą zagadnień drgań belek stanowią prace, w których czynnikiem wymuszającym drgania są obciążenia ruchome. Pomijając bogatą bibliografię dotyczącą układów pryzmatycznych, którą można znaleźć m.in. w monografii Fryby [52], Śniadego [171] oraz pracach przeglądowych Szcześniaka [175, 177], ograniczymy dyskusję do prac dotyczących układów niepryzmatycznych. Analiza zagadnień tego typu można znaleźć np. w pracach Dugusha, Eisenbergera [31], Zhenga, Cheunga, Au’a, Chenga [24, 201], oraz Martineza–Castro, Muserosa i Castillo–Linaresa [129]. W pracy [31] rozwiązano zagadnienie drgań wieloprzęsłowej belki, wykorzystując do aproksymacji klasyczne wielomiany potęgowe. Funkcje własne jako funkcje aproksymujące oraz zasadę Hamiltona zastosowano w pracy [201]. Rozwiązanie problemu drgań belki o okresowej geometrii wywołanych działaniem deterministycznych i losowych obciążeń ruchomych przedstawiono w pracach Mazur-Śniady i Śniadego [136, 137]. W pracach tych wykorzystano model belki, o prawie periodycznej strukturze, uzyskany metodą uśredniania tolerancyjnego opracowanej przez Woźniaka [194].

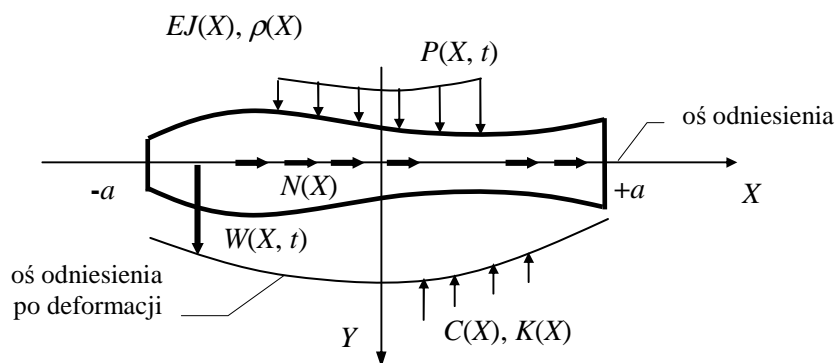
W niniejszym rozdziale rozważamy zagadnienie liniowych drgań belki o zmiennych parametrach wytrzymałościowych i geometrycznych, spoczywającej na dwuparametrowym niejednorodnym podłożu sprężystym [55, 80, 164] (w pracy [80] podano obszerny przegląd literatury dotyczącej problematyki układów spoczywających na sprężystym podłożu). Zakładamy, że zmienne parametry pręta, takie jak sztywność giętna i osiowa, gęstość, zmienne (pod belką) parametry podłoża i obciążenie, można przedstawić w postaci rozwinięcia w szereg względem wielomianów Czebyszewa I rodzaju. Wykorzystując twierdzenia i zależności dotyczące tych wielomianów przedstawione w rozdziale 2, wyznaczamy ogólne rozwiązanie w postaci szeregu Czebyszewa. Współczynniki otrzymanego rozwiązania są określone zamkniętymi formułami analitycznymi. Analizowane są podłużne i poprzeczne drgania pręta. Stosując analogię między równaniami opisującymi ruch podłużny i skrętny pręta można zastosować, uzyskane zależności określające drgania podłużne do opisu drgań skrętnych. Przedstawioną metodę zastosowano do rozwiązania zagadnienia własnego belki swobodnie

podpartej i wspornikowej. Uzyskane wyniki numeryczne porównano z rezultatami uzyskanymi w pracach [64, 72]. Rozwiązano również zagadnienie drgań wymuszonych harmonicznymi, drgań wymuszonych aperiodycznie oraz drgań wymuszonych obciążeniem ruchomym.

W rozdziale dokonano porównania rozwiązań zagadnienia własnego belek pryzmatycznych, uzyskanych różnymi metodami. Porównywane metody to: metoda elementów skończonych oraz metody aproksymacyjne, w których rozwiązania poszukiwano w postaci klasycznych szeregów potęgowych lub trygonometrycznych szeregów Fouriera. Otrzymane rozwiązania porównano również z dokładnymi rozwiązaniami analitycznymi. Rezultaty tych porównań pokazały, że rozwiązania otrzymane prezentowaną w pracy metodą są obarczone znacznie mniejszymi błędami (w stosunku do dokładnych rozwiązań) niż wyniki uzyskane innymi metodami testowanymi w przykładzie. Niektóre z omawianych w tym rozdziale problemów przedstawiono w pracy autora [150].

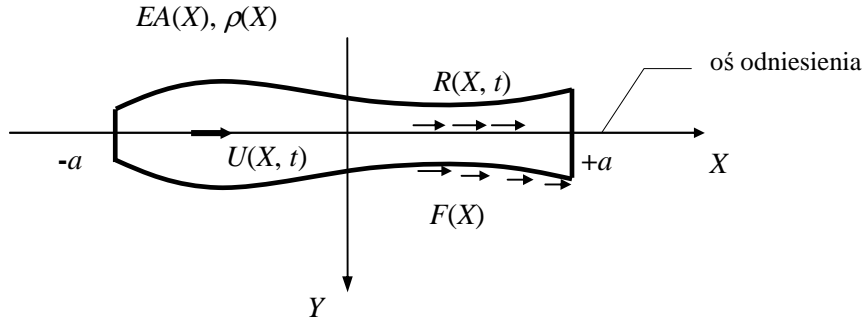
3.2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Przedmiotem rozważań jest analiza drgań niepryzmatycznej belki Eulera o osi prostoliniowej, długości $2a$, spoczywającej na dwuparametrowym podłożu sprężystym, którą poddano działaniu obciążeń dynamicznych. Analizowane będą dwa odrębne zagadnienia: zagadnienie drgań poprzecznych belki wywołanych obciążeniem normalnym $P(X, t)$ (rys. 3.1) oraz zagadnienie drgań podłużnych wywołanych przez styczne siły $R(X, t)$ (rys. 3.2).



Rys. 3.1. Schemat dynamiczny układu w przypadku analizy drgań poprzecznych

Rozdzielenie drgań na dwa zagadnienia umożliwia wprowadzenie założenia upraszczającego, polegającego na pominięciu wpływu zmiennych sił osiowych (wyni-



Rys. 3.2. Schemat dynamiczny układu w przypadku analizy drgań podłużnych

kających z drgań podłużnych) na poprzeczne drgania belki. Przyjmujemy ponadto, że występujące w układzie tłumienie ma charakter zewnętrzny oraz w celu uproszczenia pominiemy wpływ sił bezwładności podłoża (uwzględnienie sił bezwładności podłoża omówiono szczegółowo w rozdziale 7).

Dla przyjętych założeń poprzeczne i podłużne liniowe drgania niepryzmatycznej belki są opisane następującymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi (patrz np. Osiński [142])

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(EJ(X) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(N(X) \frac{\partial W}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(C(X) \frac{\partial W}{\partial X} \right) + K(X)W \\ + \theta_V(X) \frac{\partial W}{\partial t} + \rho(X) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = P(X, t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$-\frac{\partial}{\partial X} \left(EA(X) \frac{\partial U}{\partial X} \right) + HU + \theta_H(X) \frac{\partial U}{\partial t} + \rho(X) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = R(X, t), \quad (3.2)$$

gdzie W i U – przemieszczenie prostopadłe i styczne do osi belki, E – moduł Younga, $A(x)$ i $J(x)$ – pole i moment bezwładności przekroju belki.

Funkcja $\rho(X)$ jest masą pręta, przypadającą na jednostkę długości, $H(X)$, $K(X)$, $C(X)$ – funkcje charakteryzujące reakcje podłoża sprężystego, a θ_V , θ_H – funkcyjne parametry tłumienia. Przyjęto, że $N(X) > 0$ dla siły rozciągającej.

W formułowaniu warunków brzegowych, wynikających ze sposobu podparcia belki w punktach $\pm a$, będziemy dodatkowo korzystać z zależności definiujących kąt obrotu przekroju belki, momenty gnące, siły tnące oraz siły osiowe

$$\begin{aligned}
\Phi(X,t) &= \frac{\partial W}{\partial X}, \\
M(X,t) &= -EJ \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}, \\
Q(X,t) &= -\frac{\partial}{\partial X} EJ \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + (N+C) \frac{\partial W}{\partial X}, \\
S(X,t) &= EA \frac{\partial U}{\partial X},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$x = \frac{X}{a}, \quad w = \frac{W}{a}, \quad u = \frac{U}{a}$$

równania (3.1) i (3.2) przyjmą postać

$$\begin{aligned}
\overline{EJ}(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(2 \frac{\partial \overline{EJ}(x)}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial^2 \overline{EJ}(x)}{\partial x^2} - n(\overline{N}(x) + \overline{C}(x)) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
- n \left(\frac{\partial \overline{N}(x)}{\partial x} + \frac{\partial \overline{C}(x)}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + n \overline{K}(x) w + \theta_V(x) \frac{\partial w}{\partial t} \\
+ g \overline{\rho}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = n \overline{p}(x,t),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
-d \left(\overline{EA}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \overline{EA}(x)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + n \overline{H}(x) u + \theta_H(x) \frac{\partial u}{\partial t} \\
+ g \overline{\rho}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = n \overline{r}(x,t),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

a związki (3.3) wyrażą się wzorami

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= \Phi(ax,t) = \frac{\partial w}{\partial x}, \\
m(x,t) &= \frac{M(ax,t)a}{EJ_0} = -\overline{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
q(x,t) &= \frac{Q(ax,t)a^2}{EJ_0} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{EJ} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \overline{EJ} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + n(\overline{N} + \overline{C}) \frac{\partial w}{\partial x}, \\
s(x,t) &= \frac{S(ax,t)}{EA_0} = \overline{EA} \frac{\partial u}{\partial x},
\end{aligned} \tag{3.6}$$




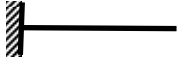
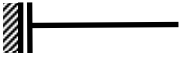
gdzie

$$\begin{aligned}
 EJ &= EJ_0 \overline{EJ}, \quad N = P_0 \overline{N}, \quad C = P_0 \overline{C}, \quad K = \frac{P_0}{a^2} \overline{K}, \quad \rho = \rho_0 \overline{\rho}, \quad \theta_{v,H} = \frac{EJ_0}{a^4} \overline{\theta}_{v,H}, \quad P = \frac{P_0}{a} \overline{P}, \\
 EA &= EA_0 \overline{EA}, \quad H = \frac{P_0}{a^2} \overline{H}, \quad R = \frac{P_0}{a} \overline{r}, \quad n = \frac{a^2 P_0}{EJ_0}, \quad g = \frac{a^4 \rho_0}{EJ_0}, \quad d = \frac{a^2 EA_0}{EJ_0},
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

a EJ_0, EA_0, ρ_0, P_0 są wielkościami porównawczymi. W celu uproszczenia zapisu konsekwentnie przyjmujemy EJ, EA, N, \dots zamiast $\overline{EJ}, \overline{EA}, \overline{N}, \dots$. Nie będziemy również rozróżniali symboli θ_v i θ_H , przyjmując na nich jedno oznaczenie θ , pamiętając, że w równaniach dotyczących drgań poprzecznych $\theta = \theta_v$, a w równaniach opisujących drgania podłużne $\theta = \theta_H$.

Warunki brzegowe podstawowych sposobów podparcia belki w punktach $\pm a$ przedstawiono w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Warunki brzegowe podstawowych sposobów podparcia belki

Sposób podparcia	w	φ	q	m	u	s
			0	0		0
	0			0		0
	0			0	0	
	0	0			0	
		0	0		0	

Równania (3.4) i (3.5), uzupełnione warunkami brzegowymi, są podstawą do rozwiązania sformułowanego problemu.

3.3. OGÓLNE ROZWIĄZANIE PROBLEMU DRGAŃ

Do rozwiązania równań (3.4), (3.5) wykorzystano przedstawione w punkcie 2.3 twierdzenie 1 dotyczące równań różniczkowych zwyczajnych.

Rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych (3.4), (3.5) poszukiwać będziemy w postaci szeregów Czebyszewa

$$w(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l [w] T_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l(t) T_l(x), \quad (3.8)$$

$$u(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l [u] T_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} u_l(t) T_l(x), \quad (3.9)$$

gdzie $a_l [w]$, $a_l [u]$ – poszukiwane współczynniki rozwinięcia funkcji przemieszczeń w i u w szeregi Czebyszewa, oznaczone w dalszej części pracy odpowiednio przez w_l i u_l .

Rozwiązanie problemu rozpoczniemy od równania czwartego rzędu (3.4), opisującego przemieszczenia $w(x, t)$. W tym przypadku występujące w (2.24) funkcje \hat{P}_m , \hat{P} są określone wzorami:

$$\begin{aligned} \hat{P}_0(x) &= EJ(x), \\ \hat{P}_1(x) &= 2 \frac{\partial EJ(x)}{\partial x}, \\ \hat{P}_2(x) &= \frac{\partial^2 EJ(x)}{\partial x^2} - n(N(x) + C(x)), \\ \hat{P}_3(x) &= -n \left(\frac{\partial N(x)}{\partial x} + \frac{\partial C(x)}{\partial x} \right), \\ \hat{P}_4(x) &= nK(x), \\ \hat{P}(x, t) &= n p(x, t) - g \rho(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \theta(x) \frac{\partial w}{\partial t^2} \\ &= n p(x, t) - g \rho(x) \ddot{w}(x, t) - \theta(x) \dot{w}(x, t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Po podstawieniu wyrażeń opisujących funkcje \hat{P}_m do wzoru (2.31) otrzymamy:

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= EJ(x), \\ Q_1(x) &= -2 \frac{\partial EJ(x)}{\partial x}, \\ Q_2(x) &= \frac{\partial^2 EJ(x)}{\partial x^2} - n(N(x) + C(x)), \\ Q_3(x) &= n \left(\frac{\partial N(x)}{\partial x} + \frac{\partial C(x)}{\partial x} \right), \\ Q_4(x) &= nK(x). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Jeżeli wprowadzimy następujące oznaczenia współczynników rozwinięć występujących w równaniu różniczkowym (3.4) funkcji:

$$\begin{aligned} e_l &= a_l [EJ(x)], \quad n_l = a_l [N(x)], \quad c_l = a_l [C(x)], \quad k_l = a_l [K(x)], \quad g_l = a_l [\rho(x)], \\ \theta_l &= a_l [\theta(x)], \quad p_l(t) = a_l [p(x,t)], \quad \ddot{w}_l(t) = a_l [\ddot{w}(x,t)], \quad \dot{w}_l(t) = a_l [\dot{w}(x,t)], \end{aligned} \quad (3.12)$$

to współczynniki rozwinięcia w szereg Czebyszewa funkcji $Q_i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ oraz $\hat{P}(x,t)$ będą miały postać

$$\begin{aligned} a_l [Q_0] &= a_l [EJ] = e_l, \\ a_l [Q_1] &= a_l \left[-2 \frac{\partial EJ}{\partial x} \right] = -2e_l', \\ a_l [Q_2] &= a_l \left[\frac{\partial^2 EJ}{\partial x^2} - n(N+C) \right] = e_l'' - n(n_l + c_l), \\ a_l [Q_3] &= a_l \left[n \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial x} \right) \right] = n(n_l' + c_l'), \\ a_l [Q_4] &= a_l [K] = k_l, \\ a_l [\hat{P}] &= n p_l(t) - \frac{1}{2} g \sum_{m=0}^{\infty} (g_{l-m} + g_{l+m}) \ddot{w}_m(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (\theta_{l-m} + \theta_{l+m}) \dot{w}_m(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

We wzorze (3.13) zastosowano następującą konwencję dotyczącą oznaczania współczynników: jeśli przez a_l oznaczymy l -ty współczynnik rozwinięcia funkcji $f(x)$, tj. $a_l = a_l [f]$, to a_l' oznacza l -ty współczynnik rozwinięcia funkcji $f'(x)$, tzn. $a_l' = a_l [f']$ itd.

Określone współczynniki funkcji $Q_i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ oraz $\hat{P}(x,t)$ (wzór 3.13) podstawiamy do układu równań (2.29). Układ ten poddajemy dalszym przekształceniom z wykorzystaniem związku (2.37). W celu umożliwienia czytelnikowi prześledzenia toku wykonywanych przekształceń, jak również ułatwienia stosowania omawianej metody do rozwiązywania innych nieprezentowanych w pracy problemów, przedstawimy szczegółowy tok wykonanych na równaniu (2.29) przekształceń. Dla przejrzystości przedstawianych operacji ograniczymy rozważania do pokazania szczegółowych przekształceń tylko tych współczynników równania (2.29), które zawierają funkcję $EJ(x)$ i jej pochodne. Po wykorzystaniu wprowadzonych we wzorze (3.13) oznaczeń, odpowiednie części równania (2.29), związane z funkcjami $Q_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, przyjmują postać:

- współczynniki związane z $Q_0(x)$

$$8(k^2 - 9)(k^2 - 4)(k^2 - 1)k(e_{k-l} + e_{k+l}), \quad (3.14)$$

- współczynniki związane z $Q_1(x)$

$$-8(k^2 - 9)(k^2 - 4)(k^2 - 1)(e'_{k-l-1} + e'_{k+l-1} - e'_{k-l+1} - e'_{k+l+1}), \quad (3.15)$$

- współczynniki związane z $Q_2(x)$

$$\begin{aligned} &+2(k^2 - 9)(k^2 - 4) \\ &((k+1)(e''_{k-l-2} + e''_{k+l-2}) - 2k(e''_{k-l} + e''_{k+l}) + (k-1)(e''_{k-l+2} + e''_{k+l+2})). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pominięcie w równaniu (2.29) elementów związanych z funkcjami $Q_3(x)$, $Q_4(x)$ wynika z tego, że w $Q_3(x)$ i $Q_4(x)$ nie występują funkcje $EJ^{(m)}(x)$. Dalsze przekształcenia polega na takiej modyfikacji wzorów (3.15) i (3.16), aby można było zastosować wzór (2.37) zapisany w formie $a'_{l-1} - a'_{l+1} = 2la_l$, $l \neq 0$.

Przekształcenie wzoru (3.15):

$$\begin{aligned} &-8(k^2 - 9)(k^2 - 4)(k^2 - 1)(e'_{k-l-1} + e'_{k+l-1} - e'_{k-l+1} - e'_{k+l+1}) \\ &= -8(k^2 - 9)(k^2 - 4)(k^2 - 1)((e'_{k-l-1} - e'_{k-l+1}) + (e'_{k+l-1} - e'_{k+l+1})) \\ &= -16(k^2 - 9)(k^2 - 4)(k^2 - 1)((k-l)e_{k-l} + (k+l)e_{k-l}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Przekształcenie wzoru (3.16):

$$\begin{aligned} &2(k^2 - 9)(k^2 - 4)((k+1)(e''_{k-l-2} + e''_{k+l-2}) - 2k(e''_{k-l} + e''_{k+l}) + (k-1)(e''_{k-l+2} + e''_{k+l+2})) \\ &= 2(k^2 - 9)(k^2 - 4)((k+1)(e''_{k-l-2} - e''_{k-l}) - (k-1)(e''_{k-l} - e''_{k-l+2}) \\ &\quad + (k+1)(e''_{k+l-2} - e''_{k+l}) - (k-1)(e''_{k+l} - e''_{k+l+2})) \\ &= 4(k^2 - 9)(k^2 - 4)((k+1)(k-l-1)e'_{k-l-1} - (k-1)(k-l+1)e'_{k-l+1} \\ &\quad + (k+1)(k+l-1)e'_{k+l-1} - (k-1)(k+l+1)e'_{k+l+1}) \\ &= 4(k^2 - 9)(k^2 - 4)((k+1)(k-l-1)(e'_{k-l-1} - e'_{k-l+1}) - 2le'_{k-l+1} \\ &\quad + (k-1)(k+l+1)(e'_{k+l-1} - e'_{k+l+1}) + 2le'_{k+l+1}) \\ &= 4(k^2 - 9)(k^2 - 4)((k+1)(k-l-1)(e'_{k-l-1} - e'_{k-l+1}) - 2l \sum_{j=1}^{l-1} (e'_{k-l+2j-1} - e'_{k-l+2j+1}) \\ &\quad + (k-1)(k+l+1)(e'_{k+l-1} - e'_{k+l+1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8(k^2 - 9)(k^2 - 4) \left((k+1)(k-l-1)(k-l)e_{k-l} - 2l \sum_{j=1}^{l-1} (k-l+2j)e_{k-l+2j} \right. \\
&\quad \left. + (k-1)(k+l+1)(k+l)e_{k+l} \right). \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Po wykonaniu na pozostałych elementach wzoru (2.29) analogicznych przekształceń oraz redukcji podobnych wyrazów otrzymamy nieskończony układ równań różniczkowych zwyczajnych, pozwalający na wyznaczenie współczynników w_l rozwinięcia funkcji przemieszczeń w określonego wzorem (3.8):

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty} \left((E_{k,l} + nN_{k,l} + nC_{k,l} + nK_{k,l})w_l + \Theta_{k,l} \dot{w}_l + gG_{k,l} \ddot{w}_l \right) &= nF_k, \tag{3.19} \\
k &= 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

gdzie

$$E_{k,l} = 8(k^2 - 9)(k^2 - 4) l \left[(k+1)(l-1) e_{k-l} - 2 \sum_{j=1}^{l-1} (k-l+2j) e_{k-l+2j} + (k-1)(l-1) e_{k+l} \right]$$

$$\begin{aligned}
N_{k,l} = -2(k^2 - 9) l \left[(k+1)(k+2)(n_{k-l-2} - n_{k+l-2}) - 2(k^2 - 4)(n_{k-l} - n_{k+l}) \right. \\
\left. + (k-1)(k-2)(n_{k-l+2} - n_{k+l+2}) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{k,l} = -2(k^2 - 9) l \left[(k+1)(k+2)(c_{k-l-2} - c_{k+l-2}) - 2(k^2 - 4)(c_{k-l} - c_{k+l}) \right. \\
\left. + (k-1)(k-2)(c_{k-l+2} - c_{k+l+2}) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{k,l} = \frac{1}{2} \left[(k+1)(k+2)(k+3)(k_{k-l-4} + k_{k+l-4}) - 4(k+3)(k^2 - 4)(k_{k-l-2} + k_{k+l-2}) \right. \\
+ 6k(k^2 - 9)(k_{k-l} + k_{k+l}) - 4(k-3)(k^2 - 4)(k_{k-l+2} + k_{k+l+2}) \\
\left. + (k-1)(k-2)(k-3)(k_{k-l+4} + k_{k+l+4}) \right], \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{k,l} = & \frac{1}{2} \left[(k+1)(k+2)(k+3)(g_{k-l-4} + g_{k+l-4}) - 4(k+3)(k^2-4)(g_{k-l-2} + g_{k+l-2}) \right. \\
& + 6k(k^2-9)(g_{k-l} + g_{k+l}) - 4(k-3)(k^2-4)(g_{k-l+2} + g_{k+l+2}) \\
& \left. + (k-1)(k-2)(k-3)(g_{k-l+4} + g_{k+l+4}) \right], \tag{3.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{k,l} = & \frac{1}{2} \left[(k+1)(k+2)(k+3)(\theta_{k-l-4} + \theta_{k+l-4}) - 4(k+3)(k^2-4)(\theta_{k-l-2} + \theta_{k+l-2}) \right. \\
& + 6k(k^2-9)(\theta_{k-l} + \theta_{k+l}) - 4(k-3)(k^2-4)(\theta_{k-l+2} + \theta_{k+l+2}) \\
& \left. + (k-1)(k-2)(k-3)(\theta_{k-l+4} + \theta_{k+l+4}) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_k = & (k+1)(k+2)(k+3)p_{k-4} - 4(k+3)(k^2-4)p_{k-2} \\
& + 6k(k^2-9)p_k - 4(k-3)(k^2-4)p_{k+2} + (k-1)(k-2)(k-3)p_{k+4}. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Aby wyznaczyć przemieszczenia $u(x, t)$, należy rozwiązać równanie różniczkowe (3.5). Funkcje \hat{P}_m, \hat{P} , występujące we wzorze (2.21) oraz związane z nimi zależnością (2.33) funkcje Q_m , są określone w tym przypadku następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_0(x) &= -d EA(x), \\
\hat{P}_1(x) &= -d \frac{\partial EA(x)}{\partial x}, \\
\hat{P}_2(x) &= n H(x), \\
\hat{P}(x, t) &= n r(x, t) - g \ddot{u} - \theta \dot{u},
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
Q_0(x) &= -d EA(x), \\
Q_1(x) &= d \frac{\partial EA(x)}{\partial x}, \\
Q_2(x) &= n H(x).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Funkcję przemieszczeń u poszukujemy w postaci szeregu Czebyszewa, określonego wzorem (3.9). Podobnie jak w przypadku wyznaczania przemieszczeń w , zmienną t traktujemy jako parametr. Po wyznaczeniu współczynników rozwinąć w szeregi Czebyszewa funkcji Q_m , podstawieniu ich do układu równań (2.32) i wykonaniu takich samych przekształceń jak w przypadku rozwiązywania równania (3.4) otrzymamy następujący nieskończony układ równań różniczkowych zwyczajnych pozwalający na wyznaczenie poszukiwanych współczynników u_l

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left((d D_{k,l} + n H_{k,l}) u_l + \Theta_{k,l} \dot{u}_l + g G_{k,l} \ddot{u}_l \right) = n R_k, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

gdzie

$$\begin{aligned} D_{k,l} &= -2(k^2 - 1)l(d_{k-l} + d_{k+l}), \\ H_{k,l} &= \frac{1}{2} \left((k+1)(h_{k-l-2} + h_{k+l-2}) - 2k(h_{k-l} + h_{k+l}) + (k-1)(h_{k-l+2} + h_{k+l+2}) \right), \\ G_{k,l} &= \frac{1}{2} \left((k+1)(g_{k-l-2} + g_{k+l-2}) - 2k(g_{k-l} + g_{k+l}) + (k-1)(g_{k-l+2} + g_{k+l+2}) \right), \\ \Theta_{k,l} &= \frac{1}{2} \left((k+1)(\theta_{k-l-2} + \theta_{k+l-2}) - 2k(\theta_{k-l} + \theta_{k+l}) + (k-1)(\theta_{k-l+2} + \theta_{k+l+2}) \right), \\ R_k &= (k+1)r_{k-2} - 2k r_k + (k-1)r_{k+2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Występujące we wzorze (3.26) współczynniki są współczynnikami rozwinięć następujących funkcji:

$$d_l = a_l [EA(x)], \quad h_l = a_l [H(x)], \quad g_l = a_l [\rho(x)], \quad r_l(t) = a_l [r(x,t)].$$

W dotychczasowych rozważaniach nie uwzględnialiśmy warunków brzegowych. Warunki te wynikają ze sposobu podparcia belki w punktach ± 1 (końce belki) i w przypadku podstawowych sposobów podparcia zostały opisane w tabeli 1. Przy ich opisie korzystając będziemy ze wzorów (3.6), z rozwinięć w szeregi Czebyszewa funkcji $EJ(x)$, $N(x)$, $EA(x)$ oraz zależności (2.34), (2.35).

Wartości wielomianów Czebyszewa i ich pochodnych w punktach ± 1 , obliczone na podstawie wzorów (2.34) i (2.35), wynoszą

$$\begin{aligned} T_n(1) &= 1, & T_n(-1) &= (-1)^n, \\ T_n'(1) &= n^2, & T_n'(-1) &= -(-1)^n n^2, \\ T_n''(1) &= n^2 \frac{n^2 - 1}{3}, & T_n''(-1) &= \frac{(-1)^n n^2 (n^2 - 1)}{3}, \\ T_n'''(1) &= \frac{n^2 (n^2 - 1)(n^2 - 4)}{15}, & T_n'''(-1) &= -\frac{(-1)^n n^2 (n^2 - 1)(n^2 - 4)}{15}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Obliczone zaś z ich wykorzystaniem wartości funkcji EJ , N , EA , $\partial EJ/\partial x$, niezbędne do wyznaczenia sił przekrojowych w punktach ± 1 , wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned}
EJ(+1) &= EJ_+ = \sum_{l=0}^{\infty} ' e_l T_l(1) = \sum_{l=0}^{\infty} ' e_l, \\
EJ(-1) &= EJ_- = \sum_{l=0}^{\infty} ' e_l T_l(-1) = \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l e_l,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial EJ}{\partial x} \right|_{x=+1} &= EJ'_+ = \sum_{l=0}^{\infty} ' e_l T'_l(1) = \sum_{l=0}^{\infty} ' l^2 e_l, \\
\left. \frac{\partial EJ}{\partial x} \right|_{x=-1} &= EJ'_- = \sum_{l=0}^{\infty} ' e_l T'_l(-1) = -\sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l l^2 e_l,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(+1) &= N_+ = \sum_{l=0}^{\infty} ' n_l, & N(-1) &= N_- = \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l n_l, \\
C(+1) &= C_+ = \sum_{l=0}^{\infty} ' c_l, & C(-1) &= C_- = \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l c_l,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$EA(+1) = EA_+ = \sum_{l=0}^{\infty} ' d_l, \quad EA(-1) = EA_- = \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l d_l.$$

Na podstawie wzorów (3.6) oraz obliczonych wartości funkcji (3.28), (3.29) otrzymamy zależności niezbędne w definiowaniu warunków brzegowych. Zależności te, związane odpowiednio z drganiami poprzecznymi i podłużnymi pręta, mają postać

$$\begin{aligned}
w(+1, t) &= \frac{W(+a, t)}{a} = \sum_{l=0}^{\infty} ' w_l, & w(-1, t) &= \frac{W(-a, t)}{a} = \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l w_l, \\
\phi(+1, t) &= \Phi(+a, t) = \sum_{l=0}^{\infty} ' l^2 w_l, & \phi(-1, t) &= \Phi(-a, t) = -\sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l l^2 w_l, \\
m(+1, t) &= \frac{M(+a, t)a}{EJ_0} = -\frac{1}{3} EJ_+ \sum_{l=0}^{\infty} ' l^2 (l^2 - 1) w_l, \\
m(-1, t) &= \frac{M(-a, t)a}{EJ_0} = -\frac{1}{3} EJ_- \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l l^2 (l^2 - 1) w_l, \\
q(+1, t) &= \frac{Q(+a, t)a^2}{EJ_0} = -\sum_{l=0}^{\infty} ' \left(l^2 \left[\frac{1}{3} (l^2 - 1) EJ'_+ + \frac{1}{15} (l^2 - 1) (l^2 - 4) EJ_+ \right] w_l \right. \\
&\quad \left. - n l^2 (N_+ + C_+) w_l \right), \\
q(-1, t) &= \frac{Q(-a, t)a^2}{EJ_0} = \sum_{l=0}^{\infty} ' \left((-1)^l l^2 \left[-\frac{1}{3} (l^2 - 1) EJ'_- + \frac{1}{15} (l^2 - 1) (l^2 - 4) EJ_- \right] w_l \right. \\
&\quad \left. - n (-1)^l l^2 (N_+ + C_+) w_l \right)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

oraz

$$\begin{aligned} u(+1, t) &= \frac{U(+a, t)}{a} = \sum_{l=0}^{\infty} ' u_l, & u(-1, t) &= \frac{U(-a, t)}{a} = \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l u_l, \\ s(+1, t) &= \frac{S(+a, t)}{EA_0} = EA_+ \sum_{l=0}^{\infty} ' l^2 u_l, & s(-1, t) &= \frac{S(-a, t)}{EA_0} = -EA_- \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l l^2 u_l. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Gdy dwuparametrowym podłożem jest podłoże Pasternaka, Własowa czy Fiłnienki-Borodicz, a koniec belki jest końcem swobodnym, wówczas na koniec pręta działa dodatkowa siła wynikająca z oddziaływania nieobciążonej, znajdującej się poza linią kontaktu, części podłoża sprężystego. Uwzględnienie tej siły prowadzi do następujących równań określających warunki brzegowe

$$q(\pm 1, t) = nC(\pm 1) \left. \frac{\partial \hat{w}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\pm 1}, \quad (3.32)$$

gdzie $\hat{w}(x, t)$ jest rozwiązaniem dla nieobciążonej części podłoża $|x| \geq 1$ opisanej równaniem

$$-n \frac{\partial}{\partial x} \left(C(x) \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right) - nK(x) \hat{w} + g \rho(x) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.33)$$

W przypadku przyjęciu założenia, że parametry podłoża dla $|x| \geq 1$ są stałe oraz pominięciu sił bezładności podłoża w tym obszarze, przemieszczenia $\hat{w}(x, t)$ są określone wzorem (patrz np. [193])

$$\hat{w}(x, t) = \begin{cases} w(-1, t) e^{\alpha(x+1)} & \text{gd } x \leq -1 \\ w(+1, t) e^{-\alpha(x-1)} & \text{gd } x \geq +1 \end{cases} \quad (3.34)$$

gdzie

$$\alpha = \sqrt{\frac{K}{C}}.$$

W tym przypadku wartości pochodnych występujących we wzorze (3.32) można wyrazić wzorem

$$\left. \frac{\partial \hat{w}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\pm 1} = \pm \alpha \hat{w}(\pm 1, t) = \pm \alpha w(\pm 1, t) = \pm \alpha \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l w_l. \quad (3.35)$$

W nieskończonych układach równań (3.19) i (3.25), jak już wspominaliśmy, odpowiednio pierwsze cztery oraz pierwsze dwa równania są spełnione tożsamościowo. Równania te zastępujemy równaniami określającymi warunki brzegowe.

W przypadku równań różniczkowych cząstkowych prezentowana metoda prowadzi do nieskończonego układu równań różniczkowych zwyczajnych, w przypadku zagadnień stacjonarnych (zagadnienie własne, drgania wymuszone harmonicznymi) – do nieskończonego układu równań algebraicznych.

Nieskończone układy równań mogą być przedstawione w następującej postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pr} \\ \mathbf{K}_{rp} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p \\ \mathbf{v}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{rp} & \mathbf{C}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_p \\ \dot{\mathbf{v}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{rp} & \mathbf{B}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{v}}_p \\ \ddot{\mathbf{v}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{F}_r \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

gdzie $\mathbf{v} = [w_0, w_1, w_2, \dots]^T$ lub $\mathbf{v} = [u_0, u_1, u_2, \dots]^T$.

Po wykonaniu mnożenia równanie (3.36) przyjmuje postaci

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{pp} \mathbf{v}_p + \mathbf{K}_{pr} \mathbf{v}_r = \mathbf{F}_p, \\ \mathbf{K}_{rp} \mathbf{v}_p + \mathbf{K}_{rr} \mathbf{v}_r + \mathbf{C}_{rp} \dot{\mathbf{v}}_p + \mathbf{C}_{rr} \dot{\mathbf{v}}_r + \mathbf{B}_{rp} \ddot{\mathbf{v}}_p + \mathbf{B}_{rr} \ddot{\mathbf{v}}_r = \mathbf{F}_r, \end{cases} \quad (3.37)$$

gdzie podmacierze \mathbf{K}_{pp} , \mathbf{K}_{pr} mają odpowiednio wymiary $n \times n$ i $n \times \infty$ ($n = 4$ lub 2) i ich elementy są współczynnikami związanymi z warunkami brzegowymi, podmacierze \mathbf{K}_{rp} , \mathbf{K}_{rr} , \mathbf{C}_{rp} , \mathbf{C}_{rr} i \mathbf{B}_{rp} , \mathbf{B}_{rr} są macierzami współczynników występujących w równaniach (3.19) lub (3.25), $\mathbf{v}_p = [v_0, \dots, v_{n-1}]^T$, $\mathbf{v}_r = [v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \dots]^T$, a wektory \mathbf{F}_p , \mathbf{F}_r określają odpowiednio warunki brzegowe oraz współczynniki związane z obciążeniem zewnętrznym.

Z równania (3.37), w przypadku gdy $\det \mathbf{K}_{pp} \neq 0$ ($\det \mathbf{K}_{pp} = 0$ w przypadku układu geometrycznie zmiennego), otrzymamy

$$\mathbf{v}_p = -\mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pr} \mathbf{v}_r + \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{F}_p. \quad (3.38)$$

Po podstawieniu (3.38) do równania (3.37)₂ dostaniemy

$$\begin{aligned} & (\mathbf{K}_{rr} - \mathbf{K}_{rp} \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pr}) \mathbf{v}_r + (\mathbf{C}_{rr} - \mathbf{C}_{rp} \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pr}) \dot{\mathbf{v}}_r + (\mathbf{B}_{rr} - \mathbf{B}_{rp} \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pr}) \ddot{\mathbf{v}}_r \\ & = \mathbf{F}_r - (\mathbf{K}_{rp} + \mathbf{C}_{rp} + \mathbf{B}_{rp}) \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{F}_p. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Aby rozwiązać układy równań różniczkowych, jest konieczne jeszcze określenie warunków początkowych

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(0) &= [\mathbf{v}_p(0), \mathbf{v}_r(0)]^T = [-\mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pr} \mathbf{v}_r(0) + \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{F}_p, \mathbf{v}_r(0)]^T, \\ \dot{\mathbf{v}}(0) &= [\dot{\mathbf{v}}_p(0), \dot{\mathbf{v}}_r(0)]^T = [-\mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pr} \dot{\mathbf{v}}_r(0) + \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{F}_p, \dot{\mathbf{v}}_r(0)]^T. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ponieważ między wektorami $\mathbf{v}_p(0)$ i $\mathbf{v}_r(0)$ oraz $\dot{\mathbf{v}}_p(0)$ i $\dot{\mathbf{v}}_r(0)$ zachodzi związek (3.38), bardzo często mówiąc o warunkach początkowych, będziemy ograniczali analizę do warunków określonych przez wektory $\mathbf{v}_r(0)$, $\dot{\mathbf{v}}_r(0)$.

3.4. WYBRANE ZAGADNIENIA DRGAŃ PRĘTÓW NIEPRYZMATYCZNYCH

3.4.1. ZAGADNIENIE WŁASNE

Wyprowadzone w punkcie 3.3 równania wykorzystamy do rozwiązania zagadnienia własnego. Nieskończony układ równań różniczkowych (3.39) w przypadku zagadnienia własnego staje się nieskończonym układem równań algebraicznych

$$\left[(\mathbf{K}_{rr} - \mathbf{K}_{rp} \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pr}) - \omega^2 (\mathbf{B}_{rr} - \mathbf{B}_{rp} \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pr}) \right] \mathbf{v}_r = \mathbf{0}. \quad (3.41)$$

W celu jego rozwiązania ograniczymy go do układu skończonego. Wtedy funkcje przemieszczeń są określone przez skończone sumy szeregów Czebyszewa

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{l=0}^m w_l T_l(x), \\ u(x) &= \sum_{l=0}^m u_l T_l(x). \end{aligned} \quad (3.42)$$

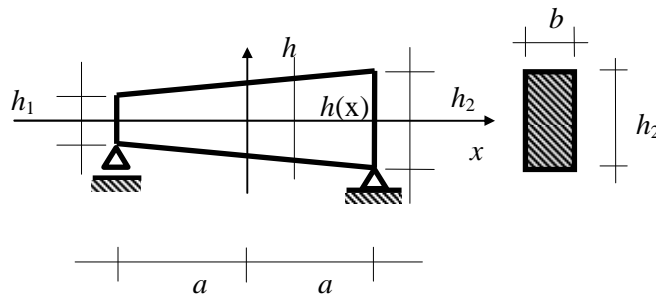
Po rozwiązaniu zagadnienia własnego otrzymujemy częstości własne ω_i oraz wektory własne \mathbf{v}_{ir} równania (3.41). Korzystając z obliczonych wektorów \mathbf{v}_{ir} oraz związku (3.38), można wyznaczyć wektory \mathbf{v}_i

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ip} \\ \mathbf{v}_{ir} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pr} \mathbf{v}_{ir} \\ \mathbf{v}_{ir} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

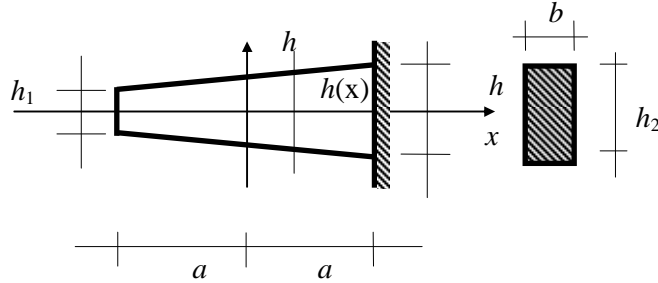
Elementy wektorów \mathbf{v}_i są współczynnikami rozwinięć (3.42) form własnych $w_i(x)$ lub $u_i(x)$ rozważanego zagadnienia.

Przykład 3.1

Przedstawioną metodę stosujemy do rozwiązania zagadnienia własnego dla przedstawionych na rysunkach 3.3 i 3.4 prętów niepryzmatycznych. Przykłady te zaczerpnięto z prac [59, 64, 72].



Rys. 3.3. Schemat belki swobodnie podpartej



Rys. 3.4. Schemat belki wspornikowej

Parametry geometryczne prętów wynoszą: $a = 0,381$ m (15 in), $b = 0,024$ m (1 in), $h_1 = 0,03810$ m (1,5 in), $h_2 = 0,05715$ m (2,25 in).

Pozostałe parametry zadania to

$$E = 2,068929 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \left(30 \cdot 10^6 \text{ lb/in}^2 \right),$$

$$\rho_V = 7845,4494 \text{ kg/m}^3 \left(0,00073386 \text{ lb sec}^2/\text{in}^4 \right)$$

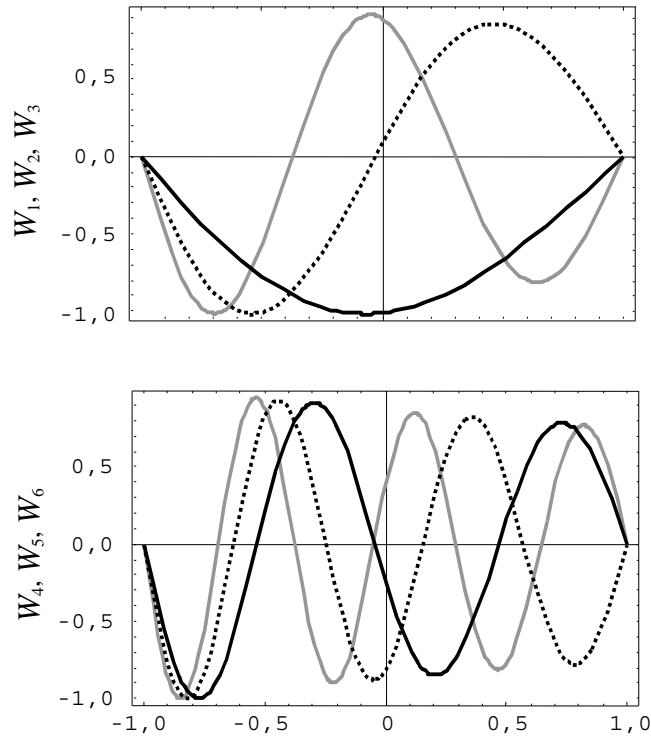
gdzie ρ_V – masa na jednostkę objętości.

Badając zbieżność rozwiązań układu (3.41), rozwiązano zadanie dla coraz większego rozmiaru bazy aproksymującej, przyjmując kolejno $m = 20, 25, 30$. Uzyskane częstości własne oraz formy własne w_i , $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ przedstawiono odpowiednio dla belki swobodnie podpartej w tabeli 3.2 i 3.3 oraz na rys. 3.5 i 3.6, dla belki zaś wspornikowej w tabeli 3.4 i na rysunku 3.7 (przedstawiono tylko częstości i poprzeczne formy własne, ponieważ częstości i podłużne formy własne belki wspornikowej są takie same jak belki swobodnie podpartej).

Tabela 3.2. Częstości poprzecznych drgań własnych belki swobodnie podpartej

m	ω_1 [rad/s]	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
20	1183,976	4762,564	10706,35	19023,94	29716,57	42779,43	58213,59
25	1183,976	4762,564	10706,35	19023,94	29716,53	42784,54	58227,98
30	1183,976	4762,564	10706,35	19023,94	29716,53	42784,54	58228,15

m	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
20	76371,16	95895,16	121336,9+ 10999,61 i	121336,9 – 10999,61 i	160171,3+ 43595,25 i	160171,3+ 43595,25 i	236992,6 – 141566,2 i
25	76046,55	96278,36	118897,6	142701,6	168360,9	204872,0+ 22784,6 i	204872,0 – 22784,6 i
30	76047,46	96242,50	118814,9	143765,7	170950,1	200485,3	236858,1

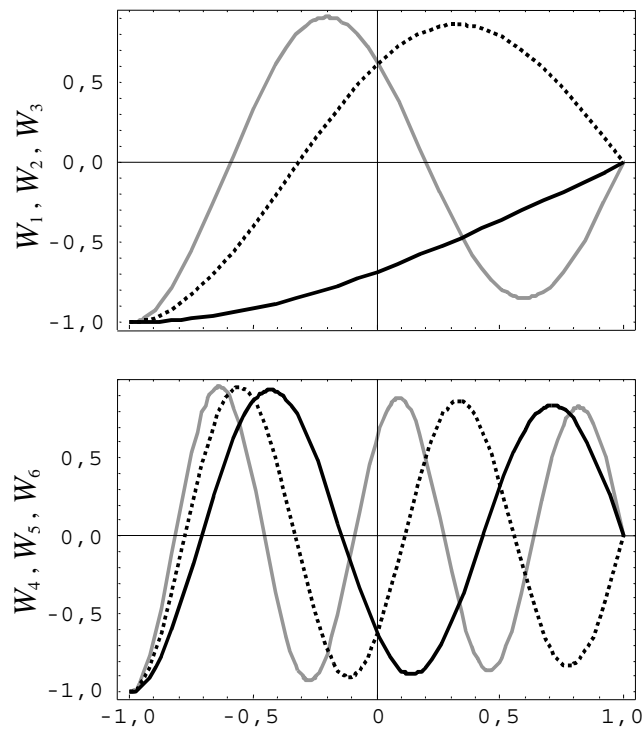


Rys. 3.5. Poprzeczne formy własne belki swobodnie podpartej

Tabela 3.3. Częstości podłużnych drgań własnych belki swobodnie podpartej

m	ω_1 [rad/s]	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
20	11466,43	32080,81	53125,22	74241,55	95382,38	116534,4	137694,0
25	11466,43	32080,81	53125,22	74241,55	95382,38	116534,5	137692,6
30	11466,43	32080,81	53125,22	74241,55	95382,38	116534,5	137692,6

m	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
20	158874,2	179928,4	200490,0	223335,2	276529,1	328887,6	474410,0
25	158854,4	180019,1	201180,1	222307,3	243648,5	265784,6	284431,8
30	158854,4	180018,5	201184,3	222351,1	243517,2	264695,7	285930,4



Rys. 3.6. Podłużne formy własne belki swobodnie podpartej

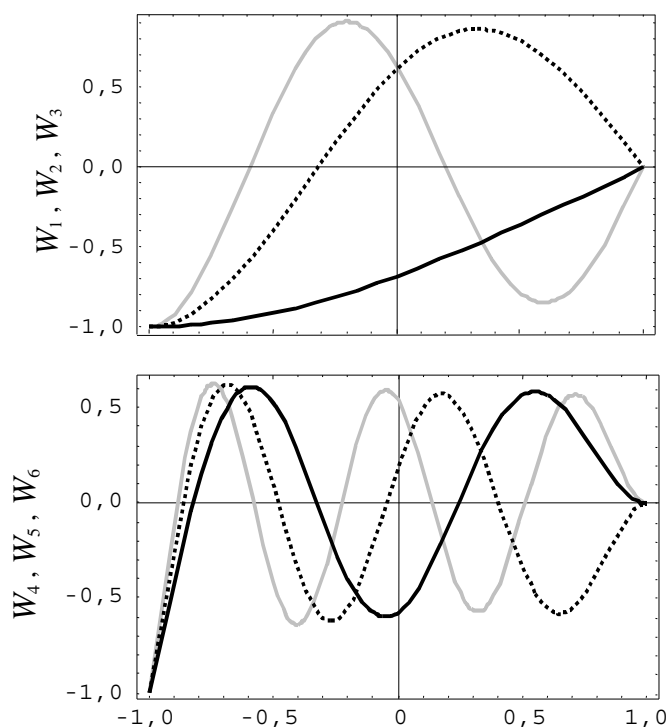
Tabela 3.4. Częstości poprzecznych drgań własnych belki wspornikowej

m	ω_1 , [rad/s]	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
20	538,2102	2863,900	7637,498	14766,37	24271,00	36147,47	50462,99
25	538,2102	2863,900	7637,498	14766,37	24271,21	36151,29	50407,01
30	538,2102	2863,900	7637,498	14766,37	24271,21	36151,29	50406,95

m .	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
20	68292,05	122071,8	C ^{*)}	C	C	C	C
25	67043,51	86090,80	107092,0	128225,3	157486,4	215992,1	252043,0
30	67038,30	86045,55	107428,0	131151,1	157144,7	187138,8	258759,3

*) C – zespolona wartość własna

Występowanie częstości własnych, o wartościach zespolonych, może być pewnym zaskoczeniem. Należy jednak pamiętać, że macierz współczynników układu równań nie jest macierzą symetryczną, co jest warunkiem dostatecznym otrzymania rzeczywistych wartości własnych. Do macierzy takiej prowadzą inne metody rozwiązywania,



Rys. 3.7. Poprzeczne formy własne belki wspornikowej

np. metoda elementów skończonych. Trzeba pamiętać, że również w tych metodach, mimo że wyższe częstotliwości własne są liczbami rzeczywistymi, wyznaczone wartości dla ograniczonej bazy aproksymacyjnej mogą znacznie różnić się od wartości faktycznych.

Wyznaczone częstotliwości poprzecznych drgań własnych układu z rysunku 3.3 porównano z wynikami przedstawionymi w pracach [64, 72] oraz z częstotliwościami uzyskanymi metodą elementów skończonych przy podziale układu na 6 elementów prętowych typu Eulera (elementy o 4 stopniach swobody). Wartości zestawiono w tabeli 3.5. Częstotliwości, podobnie jak w cytowanych pracach, wyrażono w Hz.

Tabela 3.5. Porównanie wyników

	ω_1 , [Hz]	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
Praca	188,44	757,99	1703,97	3027,75	4729,39	6808,80	9286,04	12103,70
[72]	188,45	758,08	1704,90					
[64]	189,12	843,64	2116,50					
MES	189,19	760,55	1715,09	3076,50	4873,81	7607,60	10357,42	1417,59

Z porównania uzyskanych wyników widzimy, że częstotliwości własne, wyznaczone za pomocą prezentowanej w pracy metody, nieznacznie różnią się od wartości dokładnych

uzyskanych analitycznie (patrz praca [72]). Maksymalny błąd względny pierwszych trzech częstości wynosi $5,5 \cdot 10^{-2} \%$ i w stosunku do błędów, jakimi są obciążone częstości otrzymane za pomocą pozostałych metod, jest błędem najmniejszym.

3.4.2. DRGANIA WYMUSZONE HARMONICZNIE

Ograniczając rozważania do zagadnienia drgań poprzecznych pręta, przyjmijmy, że na pręt działa obciążenie harmonicznym zmiennym $p(x, t) = p(x)e^{i\omega t}$, gdzie ω jest częstością kołową wzbudzenia. W tym przypadku układ równań (3.36) przyjmuje postać

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pr} \\ \mathbf{K}_{rp} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{rp} & \mathbf{C}_{rr} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{rp} & \mathbf{B}_{rr} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{w}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_r \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Wektor wyrazów wolnych $\mathbf{F}_r = [F_4, F_5, F_6, \dots]^T$ jest określony przez prawą stronę równania (3.19) i jego elementy wyrażają się wzorem

$$F_k = n \left\{ (k+1)(k+2)(k+3) p_{k-4} - 4(k+3)(k^2-4) p_{k-2} + 6k(k^2-9) p_k - 4(k-3)(k^2-4) p_{k+2} + (k-1)(k-2)(k-3) p_{k+4} \right\}, \quad (3.45)$$

gdzie p_l – współczynniki rozwinięcia w szereg Czebyszewa funkcji rozkładu obciążenia $p(x)$

$$p(x) = \sum_{l=0}^m p_l T_l(x). \quad (3.46)$$

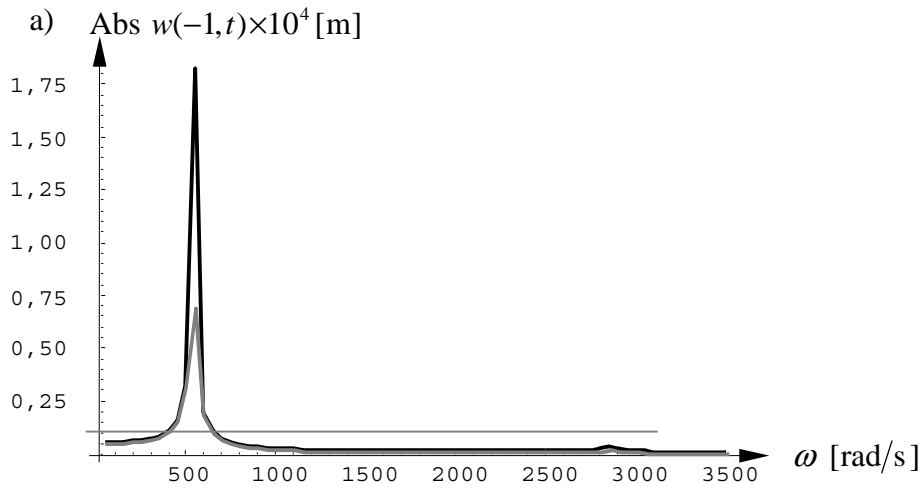
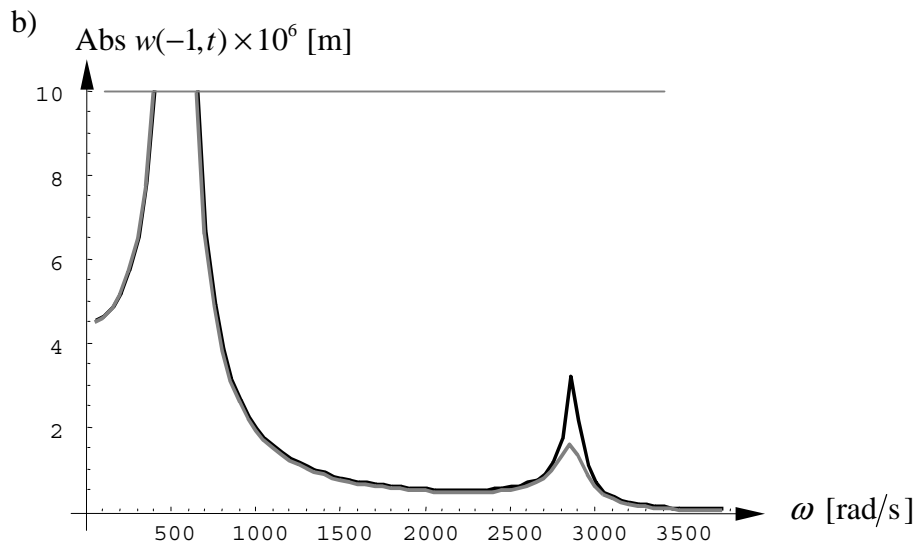
Układ równań algebraicznych (3.44) pozwala na bezpośrednie rozwiązanie analizowanego zagadnienia.

Przykład 3.2

Rozwiążemy problem drgań układu przedstawionego na rysunku 3.4, przyjmując obciążenie jako równomiernie rozłożone

$$p(x) = p = \frac{1}{2}(2p). \quad (3.47)$$

Obliczenia wykonano dla różnych wartości częstości wymuszenia ω oraz dwóch wartości parametru tłumienia (przyjęto $\mathbf{C}_{rp} = \kappa \mathbf{K}_{rp}$, $\mathbf{C}_{rr} = \kappa \mathbf{K}_{rr}$, gdzie $\kappa = \gamma/\omega$, a $\gamma = 0,025, 0,050$). Wykresy maksymalnego przemieszczenia punktu $x = -a$ belki z rysunku 3.4, w zależności od częstości wymuszenia ω , przedstawiono na rysunku 3.8.

Rys. 3.8a. Wykres przemieszczeń dla $x = -1$, w zależności od częstotliwości wymuszenia ω 

Rys. 3.8b. Powiększenie fragmentu wykresu zaznaczonego na rysunku 3.8a

3.4.3. DRGANIA WYMUSZONE APERIODYCZNIE

Drgania pręta wymuszone aperiodycznie opisuje równanie ruchu przedstawione wzorem (3.39). Nie zmniejszając ogólności rozważań, przyjmiemy, że wektor \mathbf{F}_p , opisujący warunki brzegowe, jest wektorem zerowym. Założymy ponadto, że układ ten

jest już układem skończonym, tj. przyjęliśmy poszukiwaną funkcję przemieszczeń (w lub u) w postaci skończonego szeregu. Uwzględniając te założenia i wprowadzając następujące oznaczenia

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}_{rr} - \mathbf{K}_{rp} \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pr}, \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}_{rr} - \mathbf{C}_{rp} \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pr}, \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{B}_{rr} - \mathbf{B}_{rp} \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pr},\end{aligned}\quad (3.48)$$

równanie (3.39) możemy napisać w następujący sposób

$$\hat{\mathbf{B}} \ddot{\mathbf{v}}_r + \hat{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{v}}_r + \hat{\mathbf{K}} \mathbf{v}_r = \mathbf{F}_r. \quad (3.49)$$

Macierze $\hat{\mathbf{K}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ są macierzami kwadratowymi o wymiarze

$$N \times N = (m-3) \times (m-3)$$

dla równania opisującego drgania poprzeczne oraz

$$N \times N = (m-1) \times (m-1)$$

dla równania drgań podłużnych pręta, gdzie m jest parametrem określającym rozmiar bazy aproksymującej (p. wzór (3.42)). Po pomnożeniu równania (3.49) przez macierz $\hat{\mathbf{B}}^{-1}$ i wprowadzeniu podstawienia $\mathbf{x}_r = \dot{\mathbf{v}}_r$ układ równań (3.49) sprowadzimy do układu pierwszego rzędu

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_r \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \hat{\mathbf{B}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} & \hat{\mathbf{B}}^{-1} \hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_r \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{F}_r \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

a warunki początkowe przyjmą postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_r(0) \\ \mathbf{x}_r(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_r(0) \\ \dot{\mathbf{v}}_r(0) \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

gdzie $\mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ jest macierzą jednostkową.

Układ ten oczywiście ma rozmiar dwukrotnie większy niż układ wyjściowy (3.49). Po wprowadzeniu nowych oznaczeń układ (3.50) oraz warunki początkowe (3.51) możemy napisać w prostszej postaci

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_r &= \mathbf{A} \mathbf{q}_r + \mathbf{f}_r, \\ \mathbf{q}_{r0} &= \mathbf{q}_r(0),\end{aligned}\quad (3.52)$$

gdzie

$$\mathbf{q}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_r \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_r \\ \dot{\mathbf{v}}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \hat{\mathbf{B}}^{-1}\hat{\mathbf{K}} & \hat{\mathbf{B}}^{-1}\hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{F}_r \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Gdy zastosujemy do rozwiązania równania (3.52) metodę przedstawioną w rozdziale 2.4 (postać równania (3.52), identyczną z postacią równania (2.39)), otrzymamy ostatecznie

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_r(t) &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y}(t)\mathbf{S}\mathbf{q}_r(0) + \int_0^t \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y}(t-\tau)\mathbf{S}\mathbf{f}_r(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{Z}(t)\mathbf{q}_r(0) + \int_0^t \mathbf{Z}(t-\tau)\mathbf{f}_r(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.54)$$

gdzie $\mathbf{Y}(t)$ wyraża się wzorem (2.48), a macierz \mathbf{S} jest macierzą sprowadzającą macierz współczynników \mathbf{A} do postaci Jordana, tj. $\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{J}$ (\mathbf{J} jest macierzą Jordana).

Pamiętając o tym, że $\mathbf{q}_r(t) = [\mathbf{v}_r(t), \dot{\mathbf{v}}_r(t)]^T$, a wektor współczynników rozwinięcia funkcji przemieszczeń ma postać $\mathbf{v}(t) = [\mathbf{v}_p(t), \mathbf{v}_r(t)]^T$ oraz że między wektorami $\mathbf{v}_p(t)$ i $\mathbf{v}_r(t)$ zachodzi związek (3.38), ostatecznie otrzymamy

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{pp}^{-1}\mathbf{K}_{pr}\mathbf{v}_r(t) \\ \mathbf{v}_r(t) \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Ponieważ bezpośrednio z równania (3.54) otrzymujemy również wektor $\dot{\mathbf{v}}_r(t) = \mathbf{x}_r(t)$, możemy więc bez formalnego różniczkowania (względem czasu) otrzymać wektor współczynników rozwinięcia funkcji prędkości

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{pp}^{-1}\mathbf{K}_{pr}\mathbf{x}_r(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Procedura ta jest szczególnie efektywna w przypadku, gdy rozkład Jordana prowadzi do jednokrotnych wartości własnych. W tym przypadku macierz Jordana jest macierzą diagonalną $\mathbf{J} = \{\lambda\}$ i układ równań (2.44) prowadzi do niezależnych równań postaci

$$\dot{y}_j(t) = \lambda_j y_j(t) + F_j(t), \quad F_j(t) = \sum_k^{2N} s_{jk} f_{r,k}(t), \quad j = 1, 2, \dots, 2N, \quad (3.57)$$

gdzie s_{jk} są elementami macierzy $\mathbf{S} = \mathbf{W}^{-1}$ będącej odwrotnością macierzy własnej \mathbf{W} , $\mathbf{A}\mathbf{W} = \mathbf{W}\{\lambda\}$.

Po wyznaczeniu wszystkich funkcji $y_j(t)$ i wykorzystaniu zależności $\mathbf{q}_r(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}\mathbf{y}(t)$ otrzymamy

$$q_{r,j}(t) = \sum_k^{2N} w_{jk} y_k(t), \quad j=1, 2, \dots, 2N. \quad (3.58)$$

gdzie w_{jk} są elementami macierzy własnej \mathbf{W} .

W przypadku bardziej skomplikowanych wymuszeń $\mathbf{F}_r(t)$ ($\mathbf{f}_r(t)$) wygodniejszą metodą rozwiązania równania (3.57) może być bezpośrednio całkowanie numeryczne. Opisana metoda jest znana w literaturze pod nazwą metody modalnej (patrz np. [94], s.128).

Czas obliczeń można skrócić, odrzucając nieistotne postacie drgań. Taką samą operację możemy wykonać w przypadku postaci drgań obarczonych błędami (formy własne odpowiadające wyższym częstościom). W tym przypadku uwzględniamy $k < 2N$ form własnych, a macierze transformacji \mathbf{W} i $\mathbf{S} = \mathbf{W}^{-1}$ stają się macierzami prostokątnymi, odpowiednio o wymiarach $2N \times k$ i $k \times 2N$. Zmienia się również liczba rozprzężonych równań (3.57) (zamiast $2N$ mamy teraz k równań) oraz liczba składników sumy (3.58), gdzie granicę sumowania $2N$ zastępujemy k (patrz [94], s.128).

Z możliwości zmniejszenia bazy aproksymacyjnej korzystamy w zagadnieniach aperiodycznych. Jak pokazano w p. 3.4.1 uzyskiwane przedstawioną metodą częstości własne w początkowej części widma charakteryzują się bardzo dużą dokładnością i liczba tych bardzo dokładnych wartości własnych zwiększa się wraz ze wzrostem rozmiaru szeregu aproksymującego. Jednocześnie dalsza część widma jest obciążona błędami metody. Częstości te oraz związane z nimi formy własne jako „błędne” będą pomijane.

W przypadku gdy macierz tłumienia jest liniową kombinacją macierzy sztywności i bezwładności $\hat{\mathbf{C}} = \beta \hat{\mathbf{B}} + \kappa \hat{\mathbf{K}}$, zamiast analizy układu (3.52) wygodniej rozwiązywać zmodyfikowany układ wyjściowy (3.49)

$$\ddot{\mathbf{v}}_r + \hat{\mathbf{B}}^{-1}(\beta \hat{\mathbf{B}} + \kappa \hat{\mathbf{K}}) \dot{\mathbf{v}}_r + \hat{\mathbf{B}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} \mathbf{v}_r = \ddot{\mathbf{v}}_r + \tilde{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{v}}_r + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{v}_r = \tilde{\mathbf{F}}_r, \quad (3.59)$$

gdzie

$$\tilde{\mathbf{C}} = \beta \mathbf{I} + \kappa \hat{\mathbf{B}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}, \quad \text{a} \quad \tilde{\mathbf{F}}_r = \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{F}_r.$$

Jeżeli rozwiązaniem zagadnienia własnego, odpowiadającego zadaniu opisanemu równaniem (3.59), są jednokrotne wartości własne, macierzą rozprzegającą jest macierz własna Φ ($\tilde{\mathbf{K}}\Phi = \Phi\{\omega^2\}$). Stosując podstawienie $\mathbf{v}_r = \Phi \mathbf{x}$ oraz mnożąc lewostronnie równanie (3.49) przez Φ^{-1} , otrzymamy N rozprzężonych równań

$$\ddot{x}_j(t) + (\beta + \kappa\omega_j^2)\dot{x}_j(t) + \omega_j^2 x_j(t) = P_j(t),$$

$$P_j(t) = \sum_k^N \phi_{jk} \tilde{F}_{r,k}(t), \quad j=1, 2, \dots, N, \quad (3.60)$$

gdzie ω_j – częstości własne układu.

Po rozwiązaniu układu (3.60) i wykorzystaniu zależności $\mathbf{v}_r = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}$ otrzymamy

$$v_{r,j}(t) = \sum_k^N \phi_{jk} x_k(t), \quad j=1, 2, \dots, N. \quad (3.61)$$

Założenie o postaci macierzy tłumienia $\hat{\mathbf{C}}$ możemy osłabić. Wystarczy, żeby macierz ta miała taką postać, aby iloczyn macierzy $\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{C}}\mathbf{\Phi}$ w wyniku dawał macierz diagonalną.

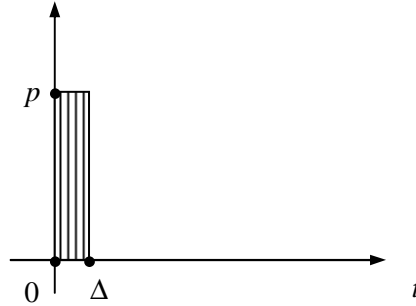
Przykład 3.3

Opisaną metodą rozwiążemy następujące zadanie. Niech na układ przedstawiony na rysunku 3.3 działa na całej długości belki, prostopadłe do osi, obciążenie równomiernie rozłożone

$$p(x,t) = p[\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}(t - \Delta)] = \frac{1}{2}(2p)[\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}(t - \Delta)], \quad (3.62)$$

gdzie $\mathbf{H}(t)$ – funkcja Heaviside'a.

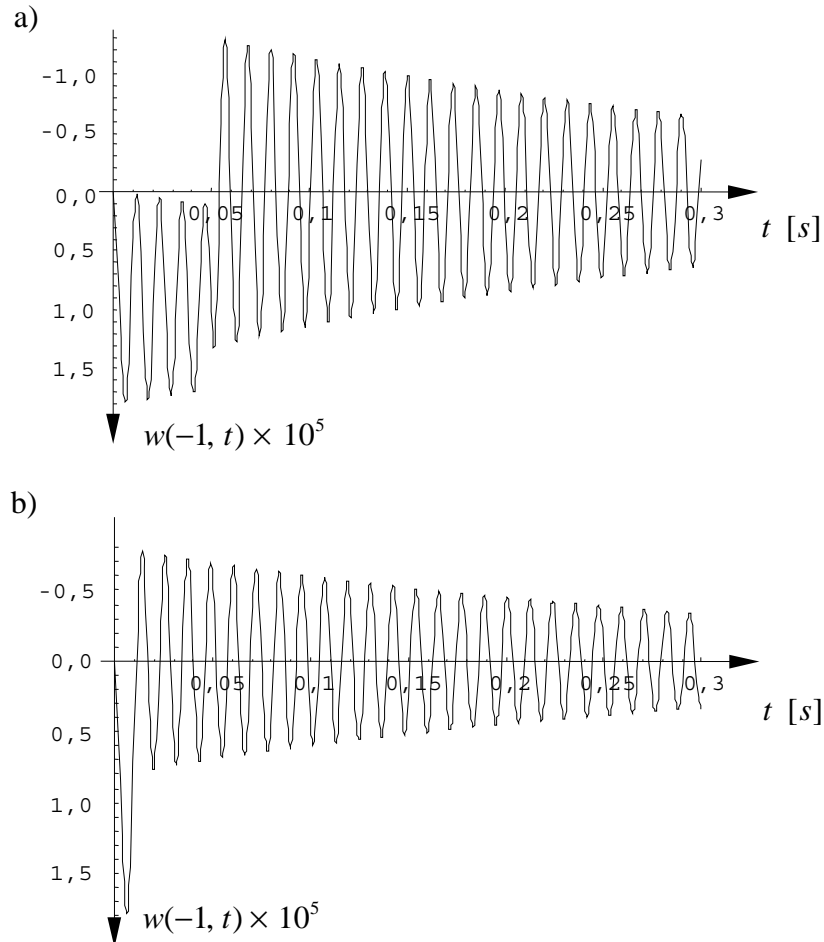
Rozkład czasowy obciążenia przedstawiono na rysunku 3.9.



Rys. 3.9. Obciążenie impulsowe belki

Rozwinięcie w szereg Czebyszewa przestrzennego rozkładu obciążenia w tym przypadku redukuje się do jednego wyrazu $p_0 = 2p$, $p_i = 0$, $i \neq 0$. Przyjmujemy zerowe warunki początkowe $\mathbf{v}(0) = \mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$. Geometryczne i materiałowe parametry przyjmują wartości określone w przykładzie 3.1. Wykresy przemieszczeń końca belki wspornikowej $w(-1, t)$ przedstawiono na rysunku 3.10, przy czym rysunek (a) dotyczy

przemieszczeń wywołanych impulsem o czasie trwania $\Delta = 0,05$ s, a rysunek (b) zaś $\Delta = 0,01$ s.



Rys. 3.10. Wykresy przemieszczeń dla $x = -1$, wywołane przez impulsy prostokątne

Przykład 3.4

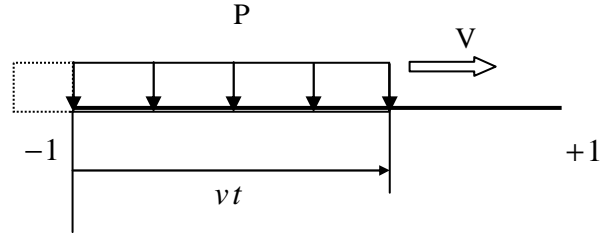
Innym ważnym typem obciążeń występującym w praktyce inżynierskiej są obciążenia ruchome. Typowym przykładem zagadnienia, gdzie obciążenia te występują, jest zadanie drgań mostów wywołanych ruchem pojazdów. Jak wiadomo, na końcową postać równań ruchu, oprócz modelu dźwigara, duży wpływ ma model poruszających się pojazdów. Ponieważ problem ten doczekał się wielu opracowań, a celem pracy nie jest szczegółowe omówienie zjawisk dynamicznych wynikających z interakcji między dźwigarem a różnymi modelami pojazdów, rozważania ograniczymy do przypadku obciążeń nieinercyjnych, o ustalonej wartości i ustalonym rozkładzie. W przypadku

obciążeń inercyjnych (ruchome masy resorowane i nieresorowane lub ich złożone układy) w równaniach ruchu pojawiają się zmienne w czasie współczynniki i jak wspomniano we wstępie tego typu problemy nie są przedmiotem rozważań w niniejszej pracy.

Rozpatrzmy zadanie, w którym obciążenie porusza się po pręcie ze stałą prędkością V . Rozkład przestrzenno-czasowy obciążenia po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych i parametrów opisanych wzorem (3.7) oraz podstawieniu $V = av$ jest opisany wzorem

$$p(x,t) = P(H(-1-x+vt) - H(-1-x)). \quad (3.63)$$

Schematyczny wykres obciążenia przedstawiono na rysunku 3.11.



Rys. 3.11. Postać obciążenia dla różnych czasów

Zanim określimy wyrazy szeregu Czebyszewa obciążenia $p(x, t)$, zdefiniowanego wzorem (3.63), wyznaczmy rozwinięcie występującej w tym wzorze funkcji $H(-x)$, gdzie $H(x)$ jest funkcją Heaviside'a. Formalnie k -ty wyraz szeregu tej funkcji jest określony wzorem

$$a_k [H(x_0 - x)] = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 H(x_0 - x) (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} T_k(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{x_0} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} T_k(x) dx, \quad (3.64)$$

$$x_0 \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie funkcja $(1 - x^2)^{-1/2}$ jest funkcją wagową.

Po wykonaniu podstawienia $x = \cos t$ oraz wykorzystaniu przedstawionych w rozdziale 2 wzorów (2.5) i (2.11) otrzymamy

$$a_k [H(x_0 - x)] = -\frac{2}{\pi k} \sin(k \arccos x_0) = -\frac{2}{\pi k} U_{k-1}(x_0) (1 - x_0^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.65)$$

$$a_0 [H(x_0 - x)] = 2 - \frac{2}{\pi} \arccos x_0 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Gdy mamy wzory (3.65), określające wyrazy rozwinięcia w szereg Czebyszewa funkcji $H(-x)$, możemy wyznaczyć wyrazy rozwinięcia obciążenia $p(x, t)$:

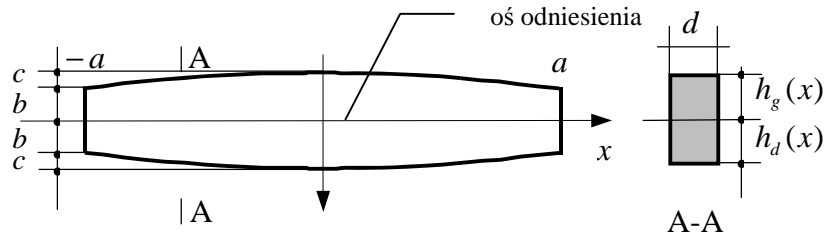
- $k = 0$

$$p_0(t) = -P \frac{2}{\pi} (\arccos(vt-1) - \arccos(-1)), \quad (3.66)$$

- $k = 1, 2, 3, \dots$

$$p_k(t) = -P \frac{2}{\pi k} U_{k-1}(vt-1) \left(1 - (vt-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.67)$$

Jako przykład ilustrujący zagadnienie drgań wymuszonych obciążeniem ruchomym rozwiążemy belkę stalową przedstawioną na rysunku 3.12.



Rys. 3.12. Analizowana belka

Geometria belki opisana jest funkcjami

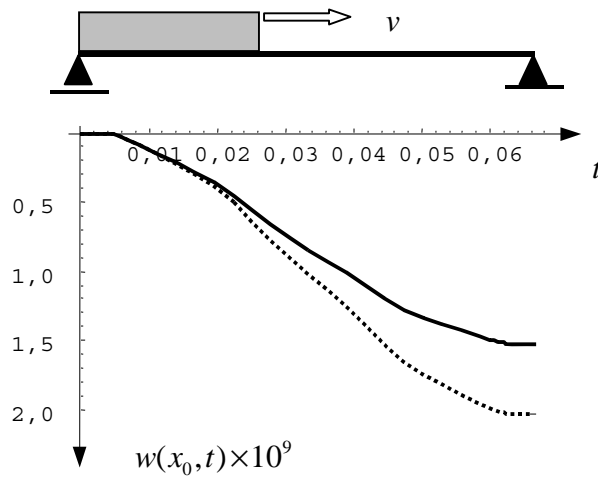
$$\begin{aligned} h_g(x) &= \frac{1}{2}c(T_2(x)-1) - b, \\ h_d(x) &= -\frac{1}{2}c(T_2(x)-1) + b, \end{aligned} \quad (3.68)$$

gdzie $T_2(x) = 2x^2 - 1$ jest wielomianem Czebyszewa I rodzaju, drugiego stopnia.

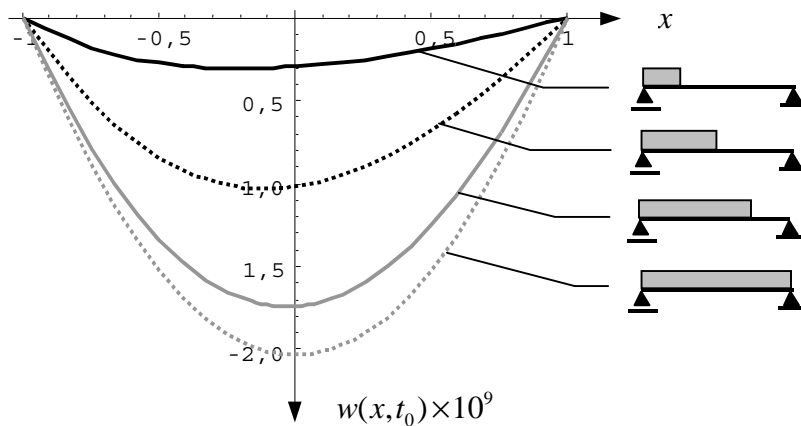
Przyjmijmy ponadto:

$$a = 1,0 \text{ m}, \quad b = 0,1 \text{ m}, \quad c = 0,05 \text{ m}, \quad d = 0,2 \text{ m}.$$

Rozważać będziemy dwa schematy statyczne: belkę swobodnie podpartą oraz belkę wspornikową. Pozostałe parametry to: moduł Younga $E = 2,067 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, gęstość belki $\rho_V = 7845,45 \text{ kg/m}^3$, prędkość ruchu obciążenia $v = 30 \text{ m/s}$, obciążenie $P = 1 \text{ N/m}$. W układach pominięto tłumienie. Do aproksymacji użyto 11 wyrazów szeregu Czebyszewa. Uzyskane wyniki w postaci funkcji przemieszczeń, zależnych od czasu dla charakterystycznych punktów analizowanych belek $x_0 = -0,5, 0,0$ oraz

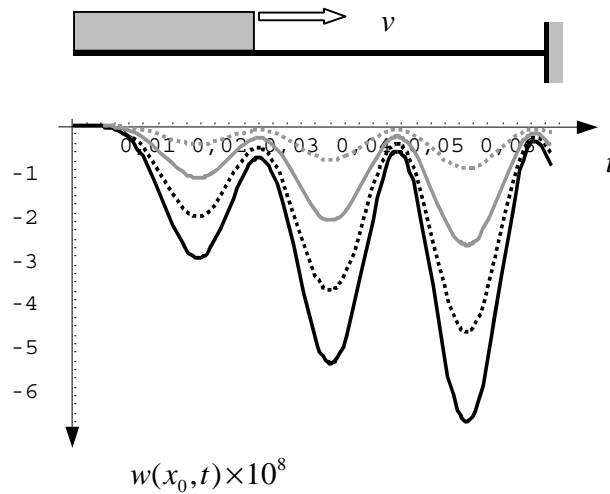


Rys. 3.13. Przemieszczenia belki swobodnie podpartej wywołane ruchomym obciążeniem w wybranych punktach belki: $x_0 = -0,5$ (—), $x_0 = 0,0$ (.....)

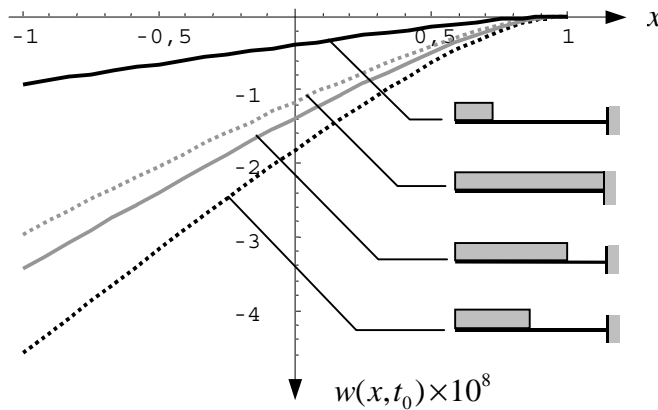


Rys. 3.14. Przemieszczenia belki swobodnie podpartej wywołane ruchomym obciążeniem w wybranych chwilach: $t_0 = 0,25T$ (—), $t_0 = 0,5T$ (.....), $t_0 = 0,75T$ (—), $t_0 = T$ (.....) (T – czas przejazdu frontu obciążenia przez belkę)

$x_0 = -1,0, -0,5, 0,0, 0,5$ przedstawiono na rysunkach 3.13 i 3.15. Czas obserwacji ograniczono do czasu przejazdu siły po belce. Funkcje przemieszczeń całej belki w wybranych chwilach $t_0 = 0,25T, 0,5T, 0,76T, 1T$, gdzie T – czas przejazdu przez belkę frontu obciążenia (rys. 3.14 i 3.16).



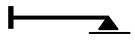
Rys. 3.15. Przemieszczenia belki wspornikowej wywołane ruchomym obciążeniem w wybranych punktach belki: $x_0 = -1,0$ (—), $x_0 = -0,5$ (.....), $x_0 = 0,0$ (— —), $x_0 = 0,5$ (— · —)



Rys. 3.16. Przemieszczenia belki wspornikowej wywołane ruchomym obciążeniem w wybranych chwilach: $t_0 = 0,25T$ (—), $t_0 = 0,5T$ (.....), $t_0 = 0,75T$ (— —), $t_0 = T$ (— · —)

3.5. PORÓWNANIE ROZWIĄZAŃ ZAGADNIENIA WŁASNEGO PRĘTÓW PRYZMATYCZNYCH UZYSKANYCH RÓŻNYMI METODAMI

W celu zbadania dokładności i skuteczności metody prezentowanej w pracy porównamy otrzymane rozwiązania z dokładnymi rozwiązaniami analitycznymi (patrz Nowacki

[139]). Jako zadanie testowe rozważymy zagadnienie własne belki pryzmatycznej. Z dokładnym rozwiązaniem analitycznym porównamy również rozwiązania uzyskane innymi metodami przybliżonymi. Porównywane metody to: metoda elementów skończonych oraz metody aproksymacyjne, w których rozwiązania poszukujemy w postaci klasycznego szeregu potęgowego oraz klasycznego (trygonometrycznego) szeregu Fouriera. Obliczenia wykonamy w przypadku dwóch typów belek: belki wspornikowej oraz belki na jednym końcu sztywno utwierdzonej, a na końcu drugim swobodnie podpartej , którą w dalszej części pracy będziemy nazywać belką sztywno-przegubową.

Nie wchodząc w szczegóły związane z wyprowadzeniem równań, przedstawiamy końcowe wzory pozwalające na wyznaczenie poszukiwanych współczynników szeregów aproksymujących dokładne rozwiązania. W przypadku zastosowania szeregów Fouriera równania te przyjmują postać:

- Belka wspornikowa (aproksymacja kosinusowa)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^4} \left(2(-1)^{k+m} + \delta_{km} + \frac{6 - (-1)^k L^2 \alpha_k^2}{3\alpha_k^2} \alpha_m^2 \right) w_k'' - \lambda^2 w_m'' = 0, \\ w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6 - (-1)^k L^2 \alpha_k^2}{3\alpha_k^2} w_k'', \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.69)$$

gdzie $L = 2a$ – długość belki, w_k'' – współczynniki rozwinięcia w szereg Fouriera drugiej pochodnej funkcji przemieszczeń $\partial^2 w / \partial x^2$, $x = X/L$ – zmienna bezwymiarowa,

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{L}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \lambda^2 = \frac{1}{\omega^2} \frac{EJ}{\rho A L^4},$$

a δ_{km} – symbol Kroneckera.

Po zastąpieniu we wzorze (3.69) sum nieskończonych sumami skończonymi i rozwiązaniu dla otrzymanego układu równań zagadnienia własnego dostajemy wartości własne oraz odpowiadające im współczynniki rozwinięć form własnych. Formy te oraz ich kolejne trzy pochodne wyznaczamy ze wzorów

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{2} w_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k''}{\alpha_k^2} \cos \alpha_k x + w'(L) \frac{1}{6L} (3x^2 - L^2), \\ w'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k''}{\alpha_k} \sin \alpha_k x + w'(L) \frac{x}{L}, \\ w''(x) &= \frac{w'(L)}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} w_k'' \cos \alpha_k x, \\ w'''(x) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w_k'' \sin \alpha_k x, \end{aligned} \quad (3.70)$$

gdzie

$$w'(L) = -L \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k w_k''.$$

• Belka sztywno-przegubowa (aproksymacja sinusowa) – końcowe wzory przyjmują postać

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^4 - \lambda^2} &= 0, \\ w_k'' &= -\frac{2M(0)}{EJL} \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^4 - \lambda^2} \end{aligned} \quad (3.71)$$

gdzie

$$\lambda^2 = \omega^2 \frac{\rho AL^4}{EJ},$$

a $M(0)$ jest nieokreśloną wartością momentu gnącego w punkcie $x = 0$ (funkcje własne wyznaczamy z dokładnością do stałego mnożnika).

Po wyznaczeniu wartości własnych oraz odpowiadających im współczynników rozwinięć form własnych, formy te wyznaczamy ze wzorów

$$\begin{aligned} w(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k''}{\alpha_k^2} \sin \alpha_k x, & w'(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k''}{\alpha_k} \cos \alpha_k x, \\ w''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} w_k'' \sin \alpha_k x, & w'''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w_k'' \cos \alpha_k x. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Do wyprowadzania prezentowanych równań wykorzystano wzory przedstawione w pracy Kacnera [82].

W przypadku zastosowania do aproksymacji szeregów potęgowych do rozwiązania wykorzystamy metodę Hadamarda (patrz Nowacki [139], s. 448). W metodzie tej funkcja przemieszczeń i jej pochodne są określone wzorem

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \frac{x^k}{k!}, \quad w^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{k+p} \frac{x^k}{k!}, \quad (3.73)$$

Końcowe równania pozwalające na rozwiązanie zagadnienia własnego belki pryzmatycznej mają postać

$$w_k = \lambda^2 w_{k-4}, \quad k = 4, 5, 6, \dots, \quad (3.74)$$

gdzie

$$\lambda^2 = \omega^2 \frac{\rho A L^4}{EJ}.$$

Równania te należy uzupełnić czterema równaniami wynikającymi z warunków brzegowych:

- belka wspornikowa

$$\begin{aligned} w(0) &= w_0 = 0, \\ w'(0) &= w_1 = 0, \\ w''(1) &= w_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k)!} + w_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k+1)!} = 0, \\ w'''(1) &= w_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2(k+1)}}{(4k+3)!} + w_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k)!} = 0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

- belka sztywno-przegubowa

$$\begin{aligned} w(0) &= w_0 = 0, \\ w'(0) &= w_1 = 0, \\ w(1) &= w_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k+2)!} + w_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k+3)!} = 0, \\ w''(1) &= w_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k)!} + w_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k+1)!} = 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

We wszystkich stosowanych metodach przyjęto identyczne (lub w przypadku MES nieznacznie większe) rozmiary baz aproksymacyjnych $m = 25$. Równania opisujące zagadnienie przyjęto w postaci bezwymiarowej, dlatego w przypadku częstości własnych należy pamiętać o mnożniku wymiarowym $\sqrt{EJ/(\rho A L^4)}$, gdzie EJ – sztywność belki na zginanie, ρ – gęstość belki przypadająca na jednostkę objętości, A – pole przekroju poprzecznego, L – długość.

Dokładne oraz otrzymane przybliżonymi metodami wartości własne przedstawiono w tabelach 3.6 i 3.7. W tabelach tych w celu określenia stosowanej do rozwiązania metody przyjęto następujące oznaczenia: MES – metoda elementów skończonych, CF – metoda aproksymacyjna z aproksymacją rozwiązań klasycznymi szeregami Fouriera, CP – metoda aproksymacyjna z aproksymacją klasycznymi szeregami potęgowymi.

Oprócz częstości własnych porównano również wektory własne. W tym przypadku przedmiotem porównań były funkcje błędów względnych określonych wzorem

$$E(f) = \frac{|f(x) - \tilde{f}(x)|}{\|f(x)\|}, \quad (3.77)$$

gdzie $f(x)$ – rozwiązanie dokładne, $\tilde{f}(x)$ – rozwiązanie przybliżone, natomiast

$$\|f(x)\| = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Tabela 3.6. Częstości własne belki wspornikowej wyznaczone różnymi metodami

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
MES	3,51602	22,0347	61,7028	120,943	200,043	299,154	418,579	558,796	720,474
CF	3,51544	22,0424	61,6843	120,964	199,863	298,796	417,147	555,847	713,693
CP	3,51602	22,0345	61,8060	96,6521	C	C	C	C	C
Praca	3,51602	22,0345	61,6972	120,902	199,86	298,556	416,991	555,116	712,865
Dokładne	3,51602	22,0345	61,6972	120,902	199,86	298,556	416,991	555,65	713,079

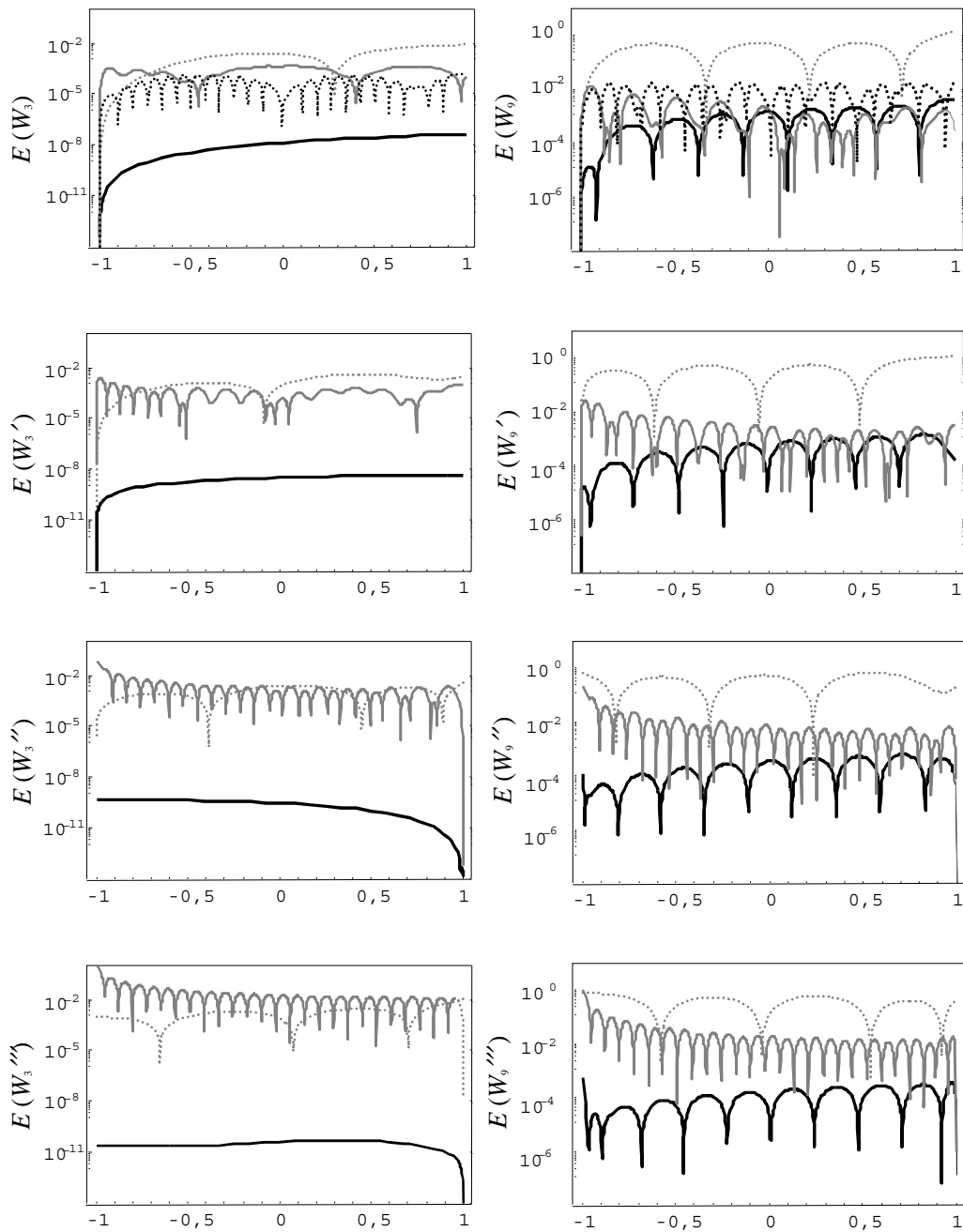
Tabela 3.7. Częstości własne belki sztywno-przegubowej wyznaczone różnymi metodami

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
MES	15,4183	49,9679	104,275	178,40	272,500	386,842	521,893	678,343	857,116
CF	15,6742	50,8163	106,071	181,47	277,045	392,829	528,856	685,165	861,797
CP	15,4182	49,9623	C	C	C	C	C	C	C
Praca	15,4182	49,9649	104,248	178,27	272,031	385,531	518,773	671,748	844,135
Dokładne	15,4182	49,9649	104,248	178,27	272,031	385,531	518,771	671,750	844,468

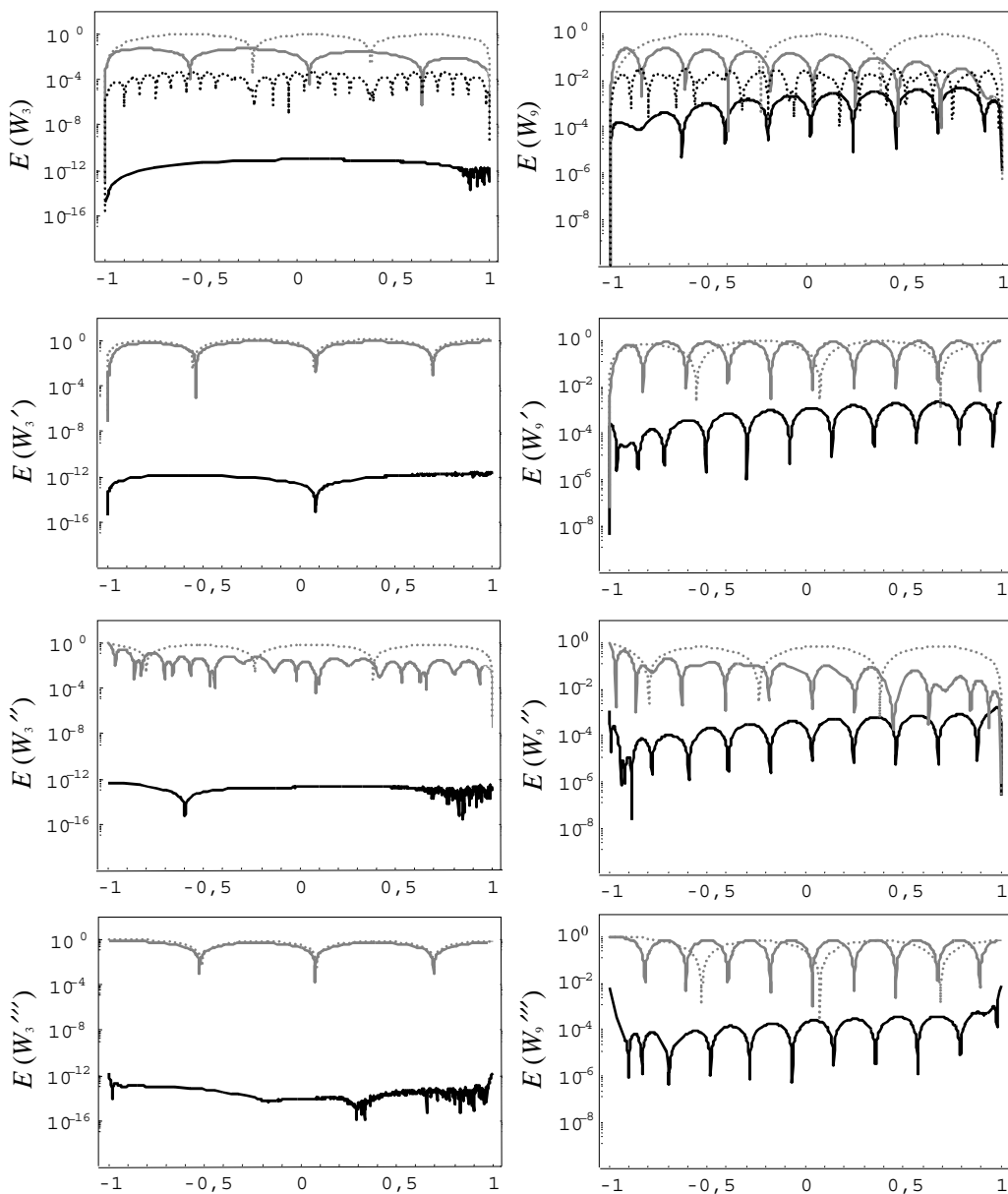
C – oznacza zespoloną wartość własną

Ponieważ formy własne wyznaczamy z dokładnością do stałego mnożnika, mnożnik w rozwiązaniu przybliżonym przyjęto tak, aby błąd średniokwadratowy $\int_{-1}^1 (\tilde{f}(x) - f(x))^2 dx$ przyjmował wartość najmniejszą. Wykresy błędów względnych (3.77) wybranych form własnych (W_3, Φ_3) , (W_9, Φ_9) , wyznaczonych różnymi metodami, pokazano w skali logarytmicznej na rysunkach 3.17 i 3.18. Rysunki te dotyczą odpowiednio wyników dla: belki wspornikowej oraz belki sztywno-przegubowej.

Analiza dokładności uzyskanych wyników pokazuje bardzo dobrą zgodność między częstościami własnymi obliczonymi proponowaną metodą a dokładnymi wartościami częstości wyznaczonymi analitycznie. Błąd względny pierwszych 9 częstości własnych nie przekracza wartości $3,9 \cdot 10^{-4}$. Podobnie bardzo dobrze aproksymowane są formy własne.



Rys. 3.17. Wykresy błędów względnych E_m określonych wzorem (3.69) wybranych form własnych belki wspornikowej, wyznaczone z wykorzystaniem następujących metod: proponowana metoda (—), aproksymacja klasycznym szeregiem Fouriera (.....), MES (---), aproksymacja klasycznym szeregiem potęgowym (-.-.-)



Rys. 3.18. Wykresy błędów względnych E_m określonych wzorem (3.69) wybranych form własnych belki sztywno-przegubowej, wyznaczone z wykorzystaniem następujących metod: proponowana metoda (—), aproksymacja klasycznym szeregiem Fouriera (.....), MES (---), aproksymacja klasycznym szeregiem potęgowym (-.-.-)

Z analizy wartości własnych (patrz tabele 3.6 i 3.7) oraz wykresów błędów względnych, zdefiniowanych wzorem (3.77), różnych metod rozwiązania zagadnienia własnego (patrz rys. 3.17 i 3.18), widzimy, że najdokładniejsze wyniki uzyskano metody prezentowaną w pracy. W przypadku form własnych błąd ten jest mniejszy

od błędów innych metod rozwiązania o kilka rzędów wielkości. Szczególnie jest to widoczne w przypadku drugiej i trzeciej pochodnej funkcji przemieszczeń. Podobną dokładność pierwszych dwóch wartości i form własnych dała metoda aproksymacyjna z wykorzystaniem klasycznych szeregów potęgowych, niestety już od piątej częstości, w przypadku belki wspornikowej oraz od trzeciej częstości w przypadku belki sztywno-przegubowej, uzyskujemy niedające się z niczym porównać rozwiązania zespolone. Osobnego komentarza wymagają nieprezentowane w pracy wyniki dla belki swobodnie podpartej. W tym przypadku najlepszą aproksymację uzyskano za pomocą klasycznych szeregów Fouriera (prezentowana metoda dawała błąd o kilka rzędów większy). Wynik ten jednak należałoby traktować jako wyjątek od reguły. Tak dobra aproksymacja za pomocą klasycznych szeregów Fouriera w przypadku belki swobodnie podpartej wynika z faktu, że dokładne, wyznaczone analitycznie, formy własne tego typu belek mają postać sinusoid $A_i \sin \alpha_i x$. W przypadku zastosowania do aproksymacji szeregu Fouriera rozwiązania zagadnienia własnego (formy własne) określone są przez jeden odpowiedni wyraz szeregu i przyjmują postać rozwiązania dokładnego. Pojawiające się w rozwiązaniu błędy wynikają z ograniczonej dokładności obliczeń.

Co prawda, wykonanie porównań kilku przykładów nie pozwala na formułowanie bardzo ogólnych wniosków, niemniej jednak przykłady te pokazują, że dokładność rozwiązania otrzymanego proponowaną metodą przybliżoną w stosunku do ścisłych, analitycznych rozwiązań jest bardzo duża. W rozważanych przypadkach jest ona większa o kilka rzędów niż dokładność rozwiązań otrzymanych innymi przybliżonymi metodami.

4. ZAGADNIENIE DRGAŃ PRĘTÓW NIEPRYZMATYCZNYCH O OSI KRZYWOLINIOWEJ

4.1. WPROWADZENIE

W rozdziale 3 prezentowane rozważania dotyczyły belek niepryzmatycznych o osi prostoliniowej. Mimo braku takiego założenia w pracach omawianych w poprzednim rozdziale (co mogłoby sugerować, że wykorzystywane tam równania mają charakter uniwersalny i dotyczą każdej niepryzmatycznej belki Eulera), zdaniem autora wszystkie cytowane prace dotyczyły tego typu belek. W przypadku gdy oś belki nie jest prostoliniowa, powstaje wątpliwość: czy taką belkę nadal można opisać tymi samymi równaniami, które opisują belkę prostoliniową? Odpowiedź na to pytanie uzyskamy, analizując analogiczny problem w teorii płyt. Odpowiednikiem belki o prostoliniowej i nieprostoliniowej osi w teorii płyt są płyty odpowiednio o symetrycznej i niesymetrycznej niejednorodności poprzecznej. Dla płyt o symetrycznej niejednorodności poprzecznej płaszczyzną odniesienia jest płaszczyzna środkowa, a wyprowadzone względem niej równania przemieszczeniowe są rozseparowane (oczywiście mówimy tutaj o liniowym modelu płyty, w którym pomijamy wpływ sił tarczowych na jej przemieszczenia poprzeczne). W przypadku gdy płyta jest niesymetrycznie niejednorodna poprzecznie, wprowadzamy do opisu jako płaszczyznę odniesienia tzw. płaszczyznę podstawową (patrz praca pod redakcją Woźniaka [195]), a wyprowadzone względem tej płaszczyzny równania przemieszczeniowe są równaniami sprzężonymi.

Analogicznie postąpimy w przypadku belek o osi krzywoliniowej. Wprowadzimy mianowicie do opisu belki prostoliniową oś odniesienia. Uzyskane względem tej osi równania przemieszczeniowe są wtedy równaniami sprzężonymi.

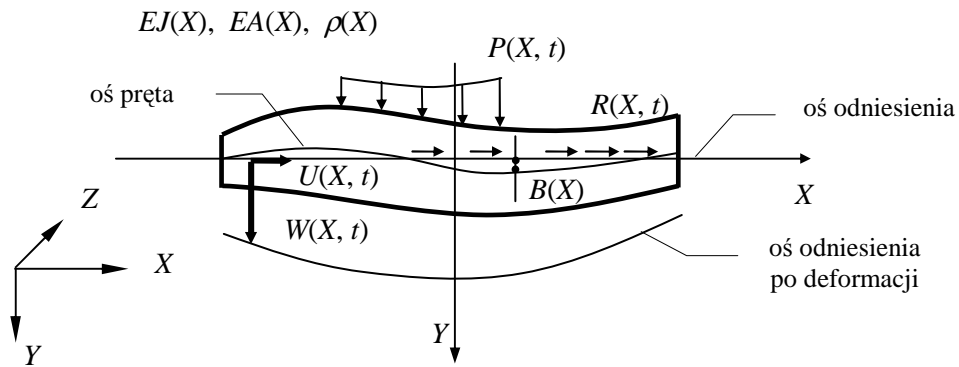
W analizowanym przykładzie numerycznym dokonamy porównania rozwiązania układu sprzężonego otrzymanego dla belki o osi krzywoliniowej, z rozwiązaniem uproszczonym (brak sprzężeń w równaniach), uzyskanym w przypadku modelu belki, w którym tę oś „wyprostowano”.

4.2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W dotychczasowych rozważaniach analizowaliśmy pręty niepryzmatyczne, w których oś była linią prostą. W niniejszym rozdziale rozpatrzmy przypadek, w którym warunek ten nie jest spełniony. Rozważmy pręt o zmiennym przekroju, symetrycznym względem płaszczyzny ruchu XY . Wykorzystując wzory określające stan naprężeń w prętach liniowo-sprężystych (patrz np. [54], s. 209) oraz równania równowagi, otrzymamy następujące równania opisujące drgania pręta

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(EJ_Z \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(ES_Z \frac{\partial U}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(\left(EA \frac{\partial U}{\partial X} - ES_Z \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \frac{\partial W}{\partial X} \right) + \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = P, \\ -\frac{\partial}{\partial X} \left(EA \frac{\partial U}{\partial X} - ES_Z \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - S_Z^m \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial t^2} = R, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

gdzie U i W są podłużnymi i poprzecznymi przemieszczeniami punktów osi odniesienia X (niebędącej w analizowanym przypadku osią pręta); $J_Z(X)$, $S_Z(X)$, $A(X)$ są odpowiednio momentem bezwładności, momentem statycznym (względem osi Z) oraz polem przekroju poprzecznego, a $S_Z^m(X) = S_Z(X) \rho(X)$ jest masowym momentem statycznym. Prostopadła do płaszczyzny ruchu pręta oś Z nie jest w tym przypadku centralną główną osią bezwładności przekroju. Analizowany układ schematycznie przedstawiono na rysunku 4.1.



Rys. 4.1. Schemat układu

4.3. ROZWIĄZANIE ZADANIA

Rozważania rozpocznijmy od rozwiązania zagadnienia, w którym pominiemy wpływ sił osiowych

$$N(X, t) = EA \frac{\partial U}{\partial X} - ES_z \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \quad (4.2)$$

na poprzeczne przemieszczenia pręta. W tym przypadku równania (4.1) upraszczają się do postaci

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(EJ_z \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(ES_z \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = P, \\ -\frac{\partial}{\partial X} \left(EA \frac{\partial U}{\partial X} - ES_z \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - S_z^m \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial t^2} = R, \end{cases} \quad (4.3)$$

a określone w (2.24) funkcje $\hat{\mathbf{P}}_m, \hat{\mathbf{P}}$, odpowiadające układowi równań (4.3), po przejściu w tym układzie do zmiennych bezwymiarowych $x = X/a, w = W/a, u = U/a$ określone są wzorami:

- współczynniki związane z $\mathbf{f}^{(m)}(x, t) = [\partial^m w / \partial x^m, \partial^m u / \partial x^m]^T$

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = \begin{bmatrix} EJ_z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{P}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial EJ_z}{\partial x} & -d ES_z \\ d ES_z & 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{P}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 EJ_z}{\partial x^2} & -2d \frac{\partial ES_z}{\partial x} \\ d \frac{\partial ES_z}{\partial x} & -d EA \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -d \frac{\partial^2 ES_z}{\partial x^2} \\ 0 & -d \frac{\partial EA}{\partial x} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{P}}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} np \\ nr \end{bmatrix},$$

- współczynniki związane z $\ddot{\mathbf{f}}^{(m)}(x,t) = \left[\partial^m \ddot{w} / \partial x^m, \partial^m \ddot{u} / \partial x^m \right]^T$

$$\hat{\mathbf{R}}_0 = \hat{\mathbf{R}}_1 = \hat{\mathbf{R}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{R}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -gS_z^m & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{R}}_4 = \begin{bmatrix} g\rho & 0 \\ 0 & g\rho \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Występujące we wzorach (4.4) i (4.5) stałe są określone we wzorze (3.7). We wzorach tych przyjęto ponadto $ES_z = EA_0 a \overline{ES}_z$, a w oznaczeniach funkcji bezwymiarowych, podobnie jak w rozdziale 3.2, dla uproszczenia zapisu zastosowano oznaczenie EJ zamiast \overline{EJ} itd.

Zależne od funkcji $\hat{\mathbf{P}}_m$ funkcje \mathbf{Q}_m przyjmują postać:

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} EJ_z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} -2 \frac{\partial EJ_z}{\partial x} & -dES_z \\ dES_z & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 EJ_z}{\partial x^2} & d \frac{\partial ES_z}{\partial x} \\ -2d \frac{\partial ES_z}{\partial x} & -dEA \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d \frac{\partial^2 ES_z}{\partial x^2} & d \frac{\partial EA}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} np \\ nr \end{bmatrix}$$

a funkcje \mathbf{S}_m zależne od funkcji $\hat{\mathbf{R}}_m$ wyrażają się wzorami:

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -gS_z^m & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} g\rho & 0 \\ g \frac{\partial S_z^m}{\partial x} & g\rho \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Po podstawieniu do wzoru (2.29) sumy $\mathbf{Q}_m + \mathbf{S}_m$, $m = 1, 3, 4$, wykonaniu przekształceń szczegółowo opisanych w p. 3.3, otrzymujemy nieskończony układ równań różniczkowych

$$\sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k_{11}(k,l) & k_{12}(k,l) \\ k_{21}(k,l) & k_{22}(k,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_l \\ u_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(k) \\ P_2(k) \end{bmatrix} + \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} m_{11}(k,l) & 0 \\ m_{21}(k,l) & m_{22}(k,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_l \\ \ddot{u}_l \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$

w którym występujące współczynniki określone są wzorami

$$\begin{aligned}
k_{11}(k, l) &= 8(k^2 - 9)(k^2 - 4)l \\
&\left((k+1)(l-1)e_{k-l} - 2\sum_{j=1}^{l-1} (k-l+2j)e_{k-l+2j} + (k-1)(l-1)e_{k+l} \right), \\
k_{12}(k, l) &= -4d(k^2 - 9)(k^2 - 4)l((k+1)(s_{k-l-1} - s_{k-l+1}) - (k-1)(s_{k+l-1} + s_{k+l+1})), \\
k_{21}(k, l) &= 4d(k^2 - 9)(k^2 - 4)l((k+1)(s_{k-l-1} - s_{k+l-1}) - (k-1)(s_{k-l+1} + s_{k+l+1}) \\
&\quad + (k+1)(k+2)(l+1)s_{k+l-1} - (k-1)(k-2)(l-1)s_{k+l+1} \\
&\quad - 12\sum_{j=0}^{l-1} (k-l+1+2j)s_{k-l+1+2j}), \\
k_{22}(k, l) &= -2d(k^2 - 9)l((k+1)(k+2)a_{k-l-2} \\
&\quad - 2(k^2 - 4)a_{k-l} + (k-1)(k-2)a_{k-l+2} \\
&\quad - (k+1)(k+2)a_{k+l-2} + 2(k^2 - 4)a_{k+l} - (k-1)(k-2)a_{k+l+2}), \tag{4.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{11}(k, l) &= -\frac{1}{2}g[(k+1)(k+2)(k+3)(g_{k-l-4} + g_{k+l-4}) \\
&\quad - 4(k+3)(k^2 - 4)(g_{k-l-2} + g_{k+l-2}) \\
&\quad + 6k(k^2 - 9)(g_{k-l} + g_{k+l}) - 4(k-3)(k^2 - 4)(g_{k-l+2} + g_{k+l+2}) \\
&\quad + (k-1)(k-2)(k-3)(g_{k-l+4} + g_{k+l+4})], \\
m_{21}(k, l) &= gl[(k+1)(k+2)(k+3)(s_{k-l-3}^m - s_{k+l-3}^m) - 3(k^2 - 9)(k+2)(s_{k-l-1}^m - s_{k+l-1}^m) \\
&\quad + 3(k^2 - 9)(k-2)(s_{k-l+1}^m - s_{k+l+1}^m) - (k-1)(k-2)(k-3)(s_{k-l+3}^m - s_{k+l+3}^m)], \\
m_{22}(k, l) &= -\frac{1}{2}g[(k+1)(k+2)(k+3)(g_{k-l-4} + g_{k+l-4}) \\
&\quad - 4(k+3)(k^2 - 4)(g_{k-l-2} + g_{k+l-2}) \\
&\quad + 6k(k^2 - 9)(g_{k-l} + g_{k+l}) - 4(k-3)(k^2 - 4)(g_{k-l+2} + g_{k+l+2}) \\
&\quad + (k-1)(k-2)(k-3)(g_{k-l+4} + g_{k+l+4})], \tag{4.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1(k) &= n \left((k+1)(k+2)(k+3)p_{k-4} - 4(k+3)(k^2-4)p_{k-2} + 6k(k^2-9)p_k \right. \\
&\quad \left. - 4(k-3)(k^2-4)p_{k+2} + (k-1)(k-2)(k-3)p_{k+4} \right), \\
P_2(k) &= n \left((k+1)(k+2)(k+3)r_{k-4} - 4(k+3)(k^2-4)r_{k-2} + 6k(k^2-9)r_k \right. \\
&\quad \left. - 4(k-3)(k^2-4)r_{k+2} + (k-1)(k-2)(k-3)r_{k+4} \right), \tag{4.11}
\end{aligned}$$

gdzie

$$a_l[ES_z] = e_l, a_l[EA] = a_l, a_l[ES_z] = s_l, a_l[\rho] = g_l, a_l[S_z^m] = s_l^m, a_l[p] = p_l, a_l[r] = r_l.$$

Pierwsze 8 równań (4 grupy po 2 równania) jest spełnionych tożsamościowo. Równania te zastępujemy sześcioma równaniami opisującymi warunki brzegowe. Liczba warunków brzegowych wynika z rzędów równań występujących w układzie (4.3). Do opisu kinetycznych warunków brzegowych wykorzystamy następujące wzory określające siły przekrojowe (wzory w postaci bezwymiarowej)

$$\begin{aligned}
m(x,t) &= \frac{M(ax,t)a}{EJ_0} = d ES_z \frac{\partial u}{\partial x} - EJ_z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
q(x,t) &= \frac{Q(ax,t)a^2}{EJ_0} = d \left(\frac{\partial}{\partial x} ES_z \right) \frac{\partial u}{\partial x} + d ES_z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&\quad - \left(\frac{\partial}{\partial x} EJ_z \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - EJ_z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \\
n(x,t) &= \frac{N(ax,t)}{EA_0} = EA \frac{\partial u}{\partial x} - ES_z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Po rozwinięciu sił przekrojowych opisanych wzorem (4.12) w szereg Czebyszewa i wykorzystaniu wzorów określających wartości wielomianów Czebyszewa w punktach ± 1 (wzory (2.34), (2.35)) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
m(+1,t) &= \frac{M(+a,t)a}{EJ_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(d ES_{z+} l^2 u_l - \frac{1}{3} EJ_{z+} l^2 (l^2 - 1) w_l \right), \\
m(-1,t) &= \frac{M(-a,t)a}{EJ_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(-d ES_{z-} (-1)^l l^2 u_l - \frac{1}{3} EJ_{z-} (-1)^l l^2 (l^2 - 1) w_l \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(+1, t) &= \frac{Q(+a, t)a^2}{EJ_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(d l^2 \left[ES'_{\mp} + \frac{1}{3} (l^2 - 1) ES_{z+} \right] u_l \right. \\
&\quad \left. - l^2 \left[\frac{1}{3} (l^2 - 1) EJ'_{\mp} + \frac{1}{15} (l^2 - 1)(l^2 - 4) EJ_{z+} \right] w_l \right), \\
q(-1, t) &= \frac{Q(-a, t)a^2}{EJ_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(-d(-1)^l l^2 \left[ES'_{\mp} - \frac{1}{3} (l^2 - 1) ES_{z+} \right] u_l \right. \\
&\quad \left. + (-1)^l l^2 \left[-\frac{1}{3} (l^2 - 1) EJ'_{\mp} + \frac{1}{15} (l^2 - 1)(l^2 - 4) EJ_{z-} \right] w_l \right), \\
n(+1, t) &= \frac{N(+a, t)}{EA_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(EA_+ l^2 u_l - \frac{1}{3} ES_{z+} l^2 (l^2 - 1) w_l \right), \\
n(-1, t) &= \frac{N(-a, t)}{EA_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(-EA_- (-1)^l l^2 u_l - \frac{1}{3} ES_{z-} (-1)^l l^2 (l^2 - 1) w_l \right), \quad (4.13)
\end{aligned}$$

gdzie we wzorze zastosowano następujące oznaczenie

$$f_- = f(-1), \quad f_+ = f(1).$$

Do opisu kinematycznych warunków brzegowych wykorzystamy wzory (3.30)₁₋₂ i (3.31)₁.

W przypadku uwzględnienia wpływu sił osiowych na poprzeczne drgania pręta rozważane zagadnienie komplikuje się, ponieważ jest opisane przez nieliniowy układ równań (4.1). W celu uproszczenia postaci wyrazu nieliniowego występującego w układzie (4.1) układ ten zapiszemy w postaci

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(EJ_Z \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(ES_Z \frac{\partial U}{\partial X} \right) - \frac{\partial N}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial X} - N \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = P, \\ -\frac{\partial}{\partial X} \left(EA \frac{\partial U}{\partial X} - ES_Z \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - S_Z^m \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial t^2} = R, \end{cases} \quad (4.14)$$

gdzie zgodnie z (4.2) przyjęto

$$N = EA \frac{\partial U}{\partial X} - ES_Z \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}.$$

Opisywana w pracy metoda dotyczy tylko równań różniczkowych liniowych. Można ją jednak zastosować pośrednio do równań nieliniowych. Pośrednie zastoso-

wanie metody polega na linearyzacji danego układu równań. W wyniku linearyzacji równanie nieliniowe zostaje zastąpione ciągiem rekurencyjnie tworzonych równań różniczkowych liniowych, a te z kolei są rozwiązywane przedstawioną w pracy metodą (patrz [144], s. 330).

Po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych, zastosowana do linearyzacji procedura iteracyjna, przyjmuje postać

$$\left\{ \begin{array}{l} EJ_z \frac{\partial^4 w_{(n)}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial EJ_z}{\partial x} \frac{\partial^3 w_{(n)}}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 EJ_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_{(n)}}{\partial x^2} \\ - d \left(ES_z \frac{\partial^3 u_{(n)}}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial ES_z}{\partial x} \frac{\partial^2 u_{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 ES_z}{\partial x^2} \frac{\partial u_{(n)}}{\partial x} \right) \\ - d \left(\frac{\partial N_{(n)}}{\partial x} \frac{\partial w_{(n)}}{\partial x} + N_{(n)} \frac{\partial^2 w_{(n)}}{\partial x^2} \right) + g\rho \frac{\partial^2 w_{(n)}}{\partial t^2} = n p, \\ - d EA \frac{\partial^2 u_{(n)}}{\partial x^2} - d \frac{\partial EA}{\partial x} \frac{\partial u_{(n)}}{\partial x} + d ES_z \frac{\partial^3 w_{(n)}}{\partial x^3} + d \frac{\partial ES_z}{\partial x} \frac{\partial^2 w_{(n)}}{\partial x^2} \\ + g\rho \frac{\partial^2 u_{(n)}}{\partial t^2} - gS_z^m \frac{\partial^3 w_{(n)}}{\partial x \partial t^2} = n r, \end{array} \right. \quad (4.15)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

W pierwszym kroku iteracyjnym przyjmujemy $N_{(0)} \equiv 0$ (pominięcie w pierwszym kroku wpływu sił osiowych na poprzeczne przemieszczenia pręta). W przypadku gdy są znane wartości sił osiowych od obciążenia statycznego $N_{\text{stat}}(x)$, w pierwszym kroku iteracyjnym możemy przyjąć $N_{(0)} = N_{\text{stat}}(x)$. W kolejnych krokach iteracyjnych przyjmujemy

$$N_{(n)} = EA \frac{\partial u_{(n-1)}}{\partial x} - ES_z \frac{\partial^2 w_{(n-1)}}{\partial x^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.16)$$

We wzorze (4.15) wprowadzono stałe i funkcje bezwymiarowe określone w (3.7), wyjątkiem jest inne określenie funkcji $\bar{N} = N/EA_0$. Ponadto w celu uproszczenia zapisu przyjęto oznaczenia EJ zamiast \bar{EJ} itd.

Większość macierzowych współczynników $\hat{\mathbf{P}}_m$, $\hat{\mathbf{P}}$ i $\hat{\mathbf{R}}_m$ układu (4.15) wyraża się wzorami (4.4) i (4.5). Różnice dotyczą tylko współczynników $\hat{\mathbf{P}}_2$, $\hat{\mathbf{P}}_3$, które w tym przypadku są określone wzorami

$$\hat{\mathbf{P}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 EJ_z}{\partial x^2} - dN_{(n)} & -2d \frac{\partial ES_z}{\partial x} \\ d \frac{\partial ES_z}{\partial x} & -dEA \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{P}}_3 = \begin{bmatrix} -d \frac{\partial N_{(n)}}{\partial x} & -d \frac{\partial^2 ES_z}{\partial x^2} \\ 0 & -d \frac{\partial EA}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

a zależne od nich współczynniki $\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$ przyjmują postać

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 EJ_z}{\partial x^2} - dN_{(n)} & d \frac{\partial ES_z}{\partial x} \\ -2d \frac{\partial ES_z}{\partial x} & -dEA \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} d \frac{\partial N_{(n)}}{\partial x} & 0 \\ d \frac{\partial^2 ES_z}{\partial x^2} & d \frac{\partial EA}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Po podstawieniu do wzoru (2.29) $\mathbf{Q}_m + \mathbf{S}_m$, $m = 0, 1, 2, 3, 4$ i wykonaniu przekształceń otrzymujemy nieskończony układ równań opisany wzorem (4.8). Wszystkie występujące we wzorze (4.8) współczynniki, z wyjątkiem $k_{11}(k, l)$, są określone wzorami (4.9)–(4.11). Współczynnik $k_{11}(k, l)$ wyraża się natomiast wzorem

$$\begin{aligned} k_{11}(k, l) = & 8(k^2 - 9)(k^2 - 4) \\ & l \left((k+1)(l-1)e_{k-l} - 2 \sum_{j=1}^{l-1} (k-l+2j)e_{k-l+2j} + (k-1)(l-1)e_{k+l} \right) \\ & - 2d(k^2 - 9)l \left((k+1)(k+2)(N_{k-l-2} - N_{k+l-2})_{(n)} \right) \\ & - 2(k^2 - 4)(N_{k-l} - N_{k+l})_{(n)} + (k-1)(k-2)(N_{k-l+2} - N_{k+l+2})_{(n)}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Modyfikacji ulega też wzór określający siły tnące (4.12), w którym należy dodać dodatkowy składnik $N \partial w / \partial x$ oraz odpowiednio zmodyfikować wzory (4.13)_{3,4}.

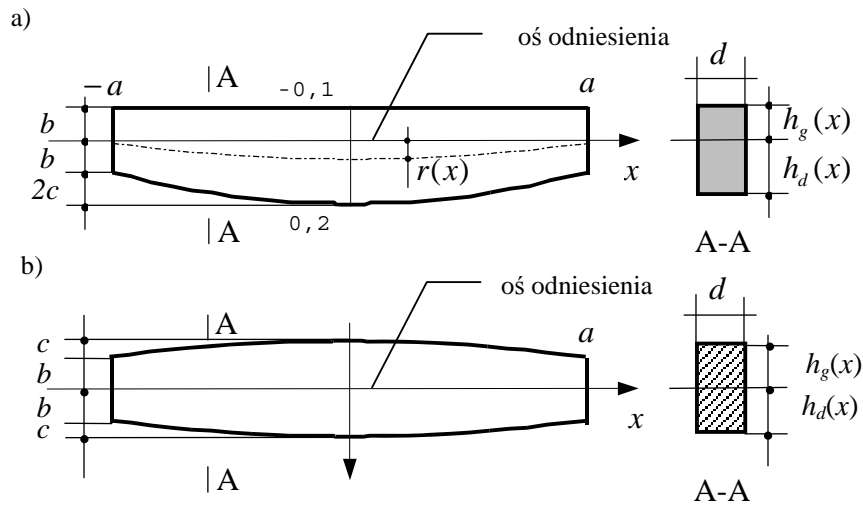
Przykład 4.1

W przykładzie rozwiążemy zagadnienia własne belki o osi krzywoliniowej (rys. 4.2a) oraz dla jej odpowiednika o osi prostoliniowej (rys. 4.2b)

Geometria belki o osi prostoliniowej jest określona wzorem (3.68). Geometria belki o osi krzywoliniowej jest opisana natomiast wzorem

$$\begin{aligned} h_g(x) &= -b, \\ h_d(x) &= -c(T_2(x) - 1) + b, \end{aligned} \quad (4.20)$$

gdzie $T_2(x) = 2x^2 - 1$ jest wielomianem Czebyszewa I rodzaju, drugiego stopnia.



Rys. 4.2. Belka o osi krzywoliniowej (a), odpowiadająca tej belce belce „wyprostowana” o osi prostoliniowej (b)

Przedstawione na rysunku 3.12 oraz we wzorze (3.68) i (4.20) parametry przyjmują wartości $a = 1,0$ m, $b = 0,1$ m, $c = 0,05$ m, $d = 0,2$ m. Pozostałe parametry to: $E = 2,8 \cdot 10^{10}$ N/m²; $\rho_V = 2400$ kg/m³. Rozważać będziemy dwa schematy statyczne: belkę swobodnie podpartą oraz belkę wspornikową. W przykładzie tym w celu uzyskania dużej dokładności rozwiązań do aproksymacji użyto 50 wyrazów szeregu Czebyszewa. Jak już wcześniej wykazaliśmy drgania belki o osi krzywoliniowej są opisane równaniami sprzężonymi. W przypadku belki o osi prostoliniowej równania te się rozprzegają.

Otrzymane w wyniku rozwiązania częstości własne zostały przedstawione w tabelach 4.1 i 4.2. W pierwszym wierszu umieszczono wartości uzyskane w wyniku rozwiązania układu sprzężonego, tj. belki o osi krzywoliniowej. Kolejne dwa wiersze zawierają wartości własne dotyczące belki o osi prostoliniowej, odpowiadające odpowiednio „poprzecznym” oraz „podłużnym” formom własnym.

Tabela 4.1. Wartości własne belki wspornikowej

	ω_1 , rad/s	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
Formy sprzężone	208,15977	1459,9777	2686,8541	4063,6880	7818,8809	8210,4024
Formy W	208,12565	1478,7192	–	4078,9303	7944,0417	–
Formy U	–	–	2664,2312	–	–	8040,7086

	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}	ω_{12}
Formy sprzężone	12881,5945	13651,296	18652,670	19632,536	24273,272	26843,178
Formy W	13089,8790	–	–	19517,688	–	27228,500
Formy U	–	13327,075	18621,107	–	23915,266	–

Tabela 4.2. Wartości własne belki swobodnie podpartej

	ω_1 , rad/s	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
Formy sprzężone	688,02455	2488,6149	2799,0824	5793,9015	8138,5473	10265,988
Formy W	691,44619	2609,9372	–	5837,4972	–	10344,580
Formy U	–	–	2664,2312	–	8040,7086	–

	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}	ω_{12}
Formy sprzężone	13542,400	15955,802	19019,129	22606,546	24814,364	29002,185
Formy W	–	16132,788	–	23203,307	–	–
Formy U	13327,075	–	18621,107	–	23915,266	29212,266

Dokonano również porównania form własnych analizowanych belek. Ponieważ formy własne są określone z dokładnością do stałego mnożnika, formy otrzymane dla belek o osi krzywoliniowej unormowano z użyciem normy $\sup_{|x| \leq 1} |f(x)|$, co daje dla tych belek funkcje własne o maksymalnej wartości równej 1,0. Formy własne belek o osi prostoliniowej unormowano natomiast w taki sposób, by zminimalizować błąd średniokwadratowy

$$\int_{-1}^1 (f^K(x) - f^P(x))^2 dx,$$

gdzie f^K i f^P są formami własnymi odpowiednio dla belki o osi krzywo- i prostoliniowej.

Tak unormowane formy własne porównano, wprowadzając jako miarę różnicy poprzecznych form własnych W_i funkcje

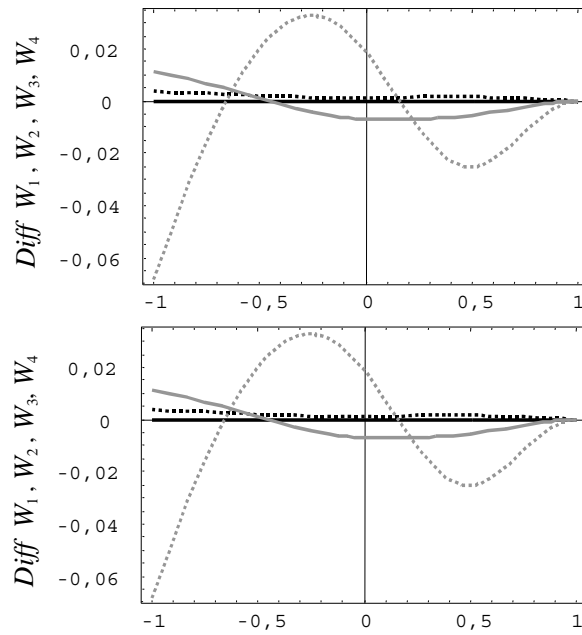
$$Diff[W_i] = W_i^K(x) - W_i^P(x) \quad (4.21)$$

a dla form podłużnych

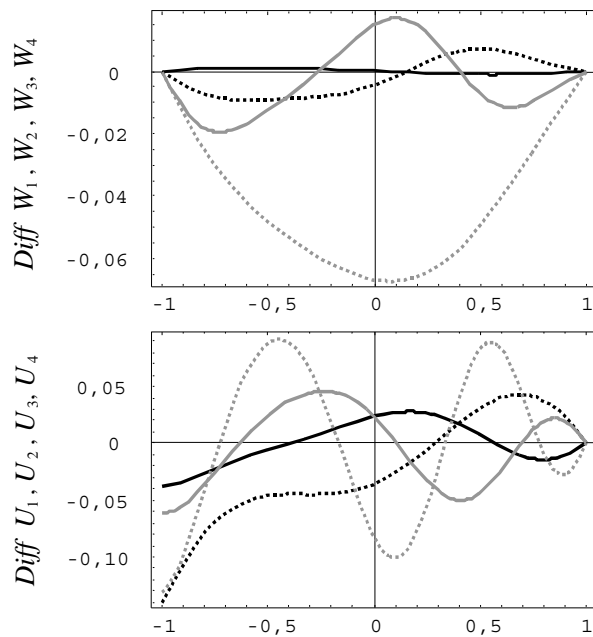
$$Diff[U_i] = U_i^K(x) - U_i^P(x) - \phi(x)r(x), \quad (4.22)$$

gdzie $\phi(x)$ – kąt obrotu przekroju poprzecznego, $r(x)$ – odległość między osią belki a osią odniesienia (patrz rys. 3.12).

Ostatni składnik we wzorze (4.22) określa naturalną różnicę w przemieszczeniach podłużnych między dwoma punktami $A(x_0)$ i $B(x_0)$ leżącymi odpowiednio na osi odniesienia i na osi belki. Otrzymane wyniki w postaci wykresów przedstawiono: dla belki wspornikowej na rysunku 4.3, dla belki swobodnie podpartej na rysunku 4.4.



Rys. 4.3. Różnice między formami własnymi $Diff[W_i]$ i $Diff[U_i]$ belki wspornikowej o osi krzywoliniowej i jej odpowiednika o osi prostoliniowej:
 $i = 1$ (—), $i = 2$ (.....), $i = 3$ (- - -), $i = 4$ (- · - · -)



Rys. 4.4. Różnice między formami własnymi $Diff[W_i]$ i $Diff[U_i]$ belki swobodnie podpartej o osi krzywoliniowej i jej odpowiednika o osi prostoliniowej:
 $i = 1$ (—), $i = 2$ (.....), $i = 3$ (- - -), $i = 4$ (- · - · -)

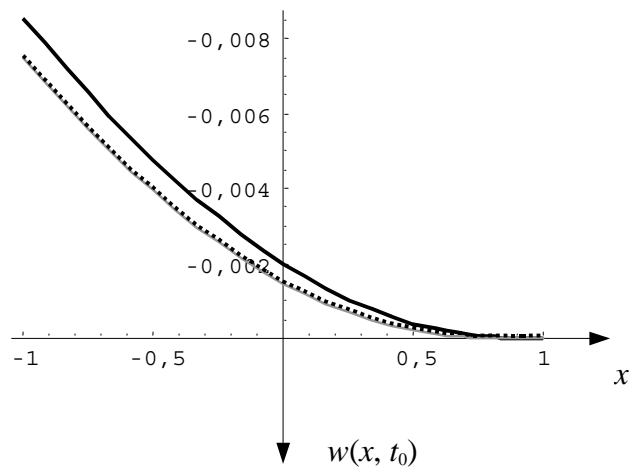
Przedstawione rezultaty pokazują, że zastąpienie belki o osi krzywoliniowej (układ sprzężony) jej odpowiednikiem o osi prostoliniowej (układ rozsprężony) może dawać różnice między otrzymanymi rozwiązaniami. Widoczne przy porównywaniu wartości własnych różnice pierwszych 12 wartości własnych wynoszą:

- belka wspornikowa
 - formy poprzeczne 1,62%,
 - formy podłużne 2,38%,
- belka swobodnie podparta
 - formy poprzeczne 2,64%,
 - formy podłużne 4,82%.

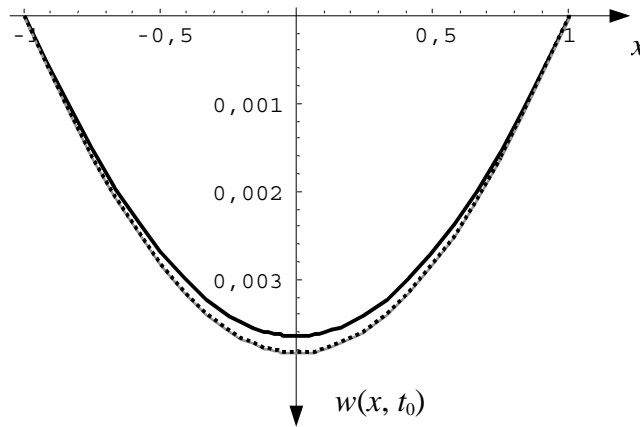
Znacznie większe różnice otrzymano dla form własnych. W przypadku poprzecznych form własnych różnica wynosi około 6%, a w przypadku form podłużnych nawet ok. 35%.

Przykład 4.2

Aby zilustrować możliwości zastosowania opisanej metody do rozwiązywania zagadnienia nieliniowego, rozważymy problem drgań wymuszonych harmonicznymi, z uwzględnieniem wpływu sił osiowych na poprzeczne drgania pręta. Przedmiotem analizy jest belka wspornikowa i swobodnie podparta, opisana w przykładzie 4.1. Belki te na całej długości są obciążone obciążeniem równomiernie rozłożonym o intensywności $5,0 \cdot 10^4$ N/m i częstości wymuszenia $\omega = 100 \pi$ rad/s. Na końcach, z możliwością przesuwu poziomego, belki są obciążone stałą siłą osiową o wartości $N = -10 \cdot 10^6$ N. W rozważaniach nieuwzględniono tłumienia. Do aproksymacji funkcji przemieszczeń przyjęto 31 wyrazów szeregu Czebyszewa.



Rys. 4.5. Wykresy przemieszczeń belki wspornikowej $w(x, t) = w \exp(i\omega t)$, gdy $t_0 = T/4 + kT$, $k = 0, 1, 2 \dots$



Rys. 4.6. Wykresy przemieszczeń belki swobodnie podpartej
 $w(x, t) = w \exp(i\alpha x_0)$, gdy $t_0 = T/4 + kT$, $k = 0, 1, 2 \dots$

W pierwszym kroku iteracyjnym pominięto wpływ sił osiowych na poprzeczne przemieszczenia pręta – $N_{(0)} \equiv 0$. Wykresy przemieszczeń $w(x, t) = amw \exp(i\alpha x_0)$, gdy $t_0 = T/4 + kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$ w kolejnych trzech iteracjach przedstawiono na rysunkach 4.5 i 4.6.

Tabela 4.3. Współczynniki rozwinięcia funkcji $\bar{N}(x) = \frac{a^2}{EJ} N(x)$
dla kolejnych kroków iteracji – belka wspornikowa

l	Iteracja 1	Iteracja 2	Iteracja 3	Iteracja 4
0	$-7,2203179 \times 10^{-05}$	$-7,2214812 \times 10^{-05}$	$-7,2214813 \times 10^{-05}$	$-7,2214813 \times 10^{-05}$
1	$-3,1546293 \times 10^{-07}$	$-3,2242892 \times 10^{-07}$	$-3,2243003 \times 10^{-07}$	$-3,2243003 \times 10^{-07}$
2	$7,5426047 \times 10^{-08}$	$7,5397034 \times 10^{-08}$	$7,5396980 \times 10^{-08}$	$7,5396980 \times 10^{-08}$
3	$2,2096365 \times 10^{-09}$	$3,3933083 \times 10^{-09}$	$3,3935381 \times 10^{-09}$	$3,3935382 \times 10^{-09}$
4	$-6,8977779 \times 10^{-10}$	$-7,2291451 \times 10^{-10}$	$-7,2292960 \times 10^{-10}$	$-7,2292960 \times 10^{-10}$
5	$4,9483274 \times 10^{-10}$	$3,8720807 \times 10^{-10}$	$3,8718918 \times 10^{-10}$	$3,8718918 \times 10^{-10}$
6	$-1,9239509 \times 10^{-10}$	$-2,0281868 \times 10^{-10}$	$-2,0281928 \times 10^{-10}$	$-2,0281928 \times 10^{-10}$
7	$-5,2255033 \times 10^{-12}$	$-4,5232888 \times 10^{-12}$	$-4,5233220 \times 10^{-12}$	$-4,5233220 \times 10^{-12}$
8	$-3,9082955 \times 10^{-12}$	$-4,0746332 \times 10^{-12}$	$-4,0746622 \times 10^{-12}$	$-4,0746622 \times 10^{-12}$
9	$-1,4343183 \times 10^{-13}$	$-1,2465627 \times 10^{-13}$	$-1,2465026 \times 10^{-13}$	$-1,2465026 \times 10^{-13}$
10	$-1,6106202 \times 10^{-13}$	$-1,6477992 \times 10^{-13}$	$-1,6478019 \times 10^{-13}$	$-1,6478019 \times 10^{-13}$
11	$-6,1627480 \times 10^{-15}$	$-5,1944085 \times 10^{-15}$	$-5,1940601 \times 10^{-15}$	$-5,1940601 \times 10^{-15}$
12	$-7,9045153 \times 10^{-15}$	$-7,8360347 \times 10^{-15}$	$-7,8360110 \times 10^{-15}$	$-7,8360110 \times 10^{-15}$
13	$-3,2535270 \times 10^{-16}$	$-2,5820155 \times 10^{-16}$	$-2,5817427 \times 10^{-16}$	$-2,5817426 \times 10^{-16}$
14	$-7,7521839 \times 10^{-17}$	$-4,1865239 \times 10^{-17}$	$-4,1863228 \times 10^{-17}$	$-4,1863228 \times 10^{-17}$
15	$-1,9391708 \times 10^{-17}$	$-1,4037064 \times 10^{-17}$	$-1,4034543 \times 10^{-17}$	$-1,4034543 \times 10^{-17}$

Wykresy dla drugiego i trzeciego kroku iteracyjnego praktycznie się pokrywają. Wartości pierwszych 16 współczynników rozwinięcia w szereg Czebyszewa funkcji sił osiowych

$$\bar{N}(x) = \frac{a^2}{EJ} N(x)$$

dla kolejnych czterech kroków iteracji przedstawiono w tabelach 4.3 i 4.4.

Tabela 4.4 Współczynniki rozwinięcia funkcji $\bar{N}(x) = \frac{a^2}{EJ} N(x)$

dla kolejnych kroków iteracji – belka swobodnie podparta

	Iteracja 1	Iteracja 2	Iteracja 3	Iteracja 4
0	-7,2429764×10-05	-7,2442418×10-05	-7,2442421×10-05	-7,2442421×10-05
1	-4,3366241×10-07	-4,3940178×10-07	-4,3940288×10-07	-4,3940288×10-07
2	8,0279605×10-08	8,0928670×10-08	8,0928789×10-08	8,0928789×10-08
3	1,3294282×10-08	1,3470344×10-08	1,3470380×10-08	1,3470380×10-08
4	2,4254163×10-10	3,7129977×10-10	3,7132315×10-10	3,7132316×10-10
5	-3,2132448×10-12	-3,0848691×10-12	-3,0830552×10-12	-3,0830550×10-12
6	-2,9218298×10-10	-3,0580762×10-10	-3,0581016×10-10	-3,0581016×10-10
7	-4,3028847×10-13	-4,5808328×10-13	-4,5831830×10-13	-4,5831835×10-13
8	-5,3277014×10-12	-5,5238630×10-12	-5,5238907×10-12	-5,5238907×10-12
9	-1,2514786×10-14	-1,3220192×10-14	-1,3226090×10-14	-1,3226091×10-14
10	-2,1271029×10-13	-2,1639858×10-13	-2,1639811×10-13	-2,1639811×10-13
11	-5,5621964×10-16	-5,6603286×10-16	-5,6610972×10-16	-5,6610972×10-16
12	-1,0203828×10-14	-1,0087262×10-14	-1,0087205×10-14	-1,0087205×10-14
13	-2,9928222×10-17	-2,8485306×10-17	-2,8473010×10-17	-2,8473008×10-17
14	-1,4780297×10-17	-1,1636367×10-17	-1,1632998×10-17	-1,1632997×10-17
15	-1,7994750×10-18	-1,5465352×10-18	-1,5444284×10-18	-1,5444282×10-18

Analizując wyniki przedstawione w tabelach 4.3 i 4.4, widzimy, że proces iteracyjny jest szybko zbieżny. Po zaokrąglenia do siedmiu cyfr znaczących (w tabelach przedstawiono liczby z dokładnością do ośmiu cyfr znaczących) wartości otrzymane po 4 iteracjach są równe wartościom uzyskanym po 3 iteracjach. Wyniki te potwierdzają skuteczność omawianej metody w rozwiązaniu analizowanego problemu nieliniowego.

5. STATECZNOŚĆ UKŁADÓW PRĘTOWYCH

5.1. WPROWADZENIE

Jednym z podstawowych zagadnień w praktyce inżynierskiej jest problem stateczności konstrukcji. Jego podstawowe znaczenie wynika z tego, że wiele współczesnych obiektów inżynierskich jest konstrukcjami smukłymi, dla których analiza stateczności jest niezbędna.

Rozwiązanie wielu zagadnień stateczności belek i ram, składających się z elementów niepryzmatycznych, można znaleźć w monografii Krynickiego i Mazurkiewicza [104]. Eisenberger i Reich w pracy [35] zastosowali metodę elementów skończonych do analizy statycznej, dynamicznej oraz rozwiązania problemu stateczności, aproksymując przemieszczenia belki wielomianami trzeciego stopnia. Wśród innych prac na uwagę zasługują prace dotyczące układów poddanych działaniu obciążeń niepotencjalnych. Elishakoff i Pellegrini [45], wykorzystując funkcje Bessela, rozwiązali problem swobodnie podpartego pręta obciążonego stycznym, rozłożonym obciążeniem śledzącym. Massey i Van der Meen [130] badali stateczność niepryzmatycznego wspornika obciążonego skupioną siłą śledzącą. Sankaran i Venkateswara Rao [157] wyznaczyli krytyczne wartości obciążeń śledzących zbieżnych kolumn o sztywno i sprężysto zamocowanych końcach. Uogólnienie formuł uzyskanych przez Eisenbergera [33], opisujących macierze sztywności i bezwładności prętów o zmiennej sztywności i gęstości, w przypadku prętów spoczywających na dwuparametrowym podłożu i poddanych działaniu obciążeń niepotencjalnych możemy znaleźć w pracy Glabisza [58]. W pracy tej, wykorzystując opracowaną oryginalną metodę, rozwiązano kilka zagadnień stateczności, dotyczących niepryzmatycznych kolumn wspornikowych poddanych działaniu rozłożonych i skupionych obciążeń niepotencjalnych. Podobnie jak w [33] do aproksymacji funkcji przemieszczeń w pracy [58] zastosowano klasyczne szeregi potęgowe.

W niniejszym rozdziale, wykorzystując prezentowaną w pracy metodę szeregów Czebyszewa, rozwiążemy zagadnienie stateczności prętów niepryzmatycznych o zmiennych parametrach wytrzymałościowych i geometrycznych, spoczywających na dwuparametrowym niejednorodnym podłożu sprężystym [148]. Zakładamy, że zmienne para-

metry pręta, takie jak sztywność giętna i osiowa, gęstość, zmienne parametry podłoża i obciążenie, możemy przedstawić w postaci rozwinięcia w szereg względem wielomianów Czebyszewa I rodzaju. Rozważania ograniczymy do analizy układów obciążonych statycznie. Poszukując rozwiązania w postaci $W(X, t) = W(X)e^{\lambda t}$, wyznaczmy zespolone wartości $\lambda_j = \alpha_j \pm i\omega_j$ (wartości własne), dla których rozważane zagadnienie ma nietrywialnie $W(X) \neq 0$ rozwiązanie. Ze względu na przyjęty liniowy opis problemu, analiza otrzymanych wartości własnych umożliwia ściśle wyznaczenie obciążeń krytycznych. Rozwiązanie zagadnienia własnego uniemożliwia natomiast określenie pokrytycznego zachowania się układu (wektory własne pozwalają na określenie przemieszczeń w momencie utraty stateczności z dokładnością do stałego mnożnika).

Przedstawiony w niniejszym rozdziale sposób rozwiązania zastosowano do analizy problemu stateczności niepryzmatycznego pręta wspornikowego oraz pręta sztywno-przegubowego, obciążonych skupionym lub rozłożonym obciążeniem śledzącym. Rozważone przykłady zaczerpnięto z pracy Głabisza [58]. Uzyskane wyniki numeryczne porównano z rezultatami uzyskanymi w pracach [15, 58, 116]. Niektóre z omawianych w tym rozdziale problemów przedstawiono w pracy autora [151].

Czytelnika zainteresowanego powszechnie rozumianą tematyką dotyczącą stateczności odsyłamy do literatury specjalistycznej, np. do pracy Timoshenki i Gera [180] lub pracy pod redakcją Waszczyszyna [192], czy prac Tomskiego i zespołu [182–187].

5.2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Przedmiotem rozważań jest niepryzmatyczny, prostoliniowy pręt wspornikowy o długości $2a$, spoczywający na dwuparametrowym podłożu sprężystym, poddany na swobodnym końcu działaniu skupionej siły P i skupionego momentu $M = Pe$ (rys. 5.1). Ponadto na pręt działa osiowe, niepotencjalne obciążenie rozłożone $s(X)$. W tym przypadku liniowe poprzeczne drgania pręta opisane są następującym równaniem różniczkowym

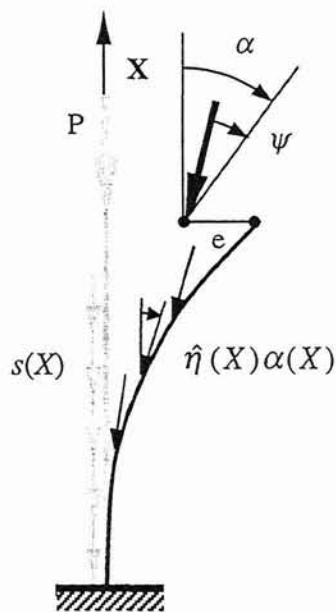
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(EJ(X) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(N(X) \frac{\partial W}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(C(X) \frac{\partial W}{\partial X} \right) \\ + K(X)W + \rho(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = s(X) \hat{\eta}(X) \frac{\partial W}{\partial X} . \end{aligned} \quad (5.1)$$

Między siłą osiową a obciążeniem zewnętrznym zachodzi związek

$$N(X) = - \left(P + \int_x^a s(X) dX \right).$$

Występujący we wzorze (5.1) współczynnik $\hat{\eta}(X)$ nosi nazwę „współczynnika śledzenia”. Pozostałe współczynniki opisano w punkcie 3.2 (patrz opis pod wzorami (3.1), (3.2)).

Geometryczną interpretację funkcyjnego współczynnika $\hat{\eta}(X)$ przedstawiono na rysunku 5.1. W przypadku gdy $\hat{\eta} \equiv 0$, obciążenie $s(X)$ staje się klasycznym obciążeniem potencjalnym o przestrzennie ustalonym kierunku i materialnie zadany punkt przyłożenia. Natomiast gdy $\hat{\eta} = 1$, $s(X)$ jest obciążeniem śledzącym.



Rys. 5.1. Schemat układu

W trakcie utraty stateczności może zmieniać się punkt przyłożenia siły określony przez parametr e , jak również może zmienić się jej kierunek określony przez parametr ψ .

Po wykorzystaniu wzorów (3.3), określających siły wewnętrzne, warunki brzegowe, wynikające z zachowania się obciążenia w trakcie utraty stateczności, przyjmują postać:

- w przypadku końca swobodnego ($X = a$)

$$M(a,t) = -EJ(a) \frac{\partial^2 W(X,t)}{\partial X^2} \Big|_{X=a} = -Pe,$$

$$Q(a,t) = -\frac{\partial}{\partial X} \left(EJ(X) \frac{\partial^2 W(X,t)}{\partial X^2} \right) \Big|_{X=a} + N(a) \frac{\partial W(X,t)}{\partial X} \Big|_{X=a} = -P(\alpha - \psi),$$
(5.2)

gdzie

$$\alpha = \frac{\partial W(X,t)}{\partial X} \Big|_{X=a}, \quad N(a) = -P;$$
(5.3)

- w przypadku końca utwierdzonego ($X = -a$)

$$W(-a,t) = 0, \quad \frac{\partial W(X,t)}{\partial X} \Big|_{X=-a} = 0.$$
(5.4)

Przesunięcie punktu przyłożenia siły e i kąt jej obrotu względem ugiętej osi pręta ψ zależą od przemieszczenia $W(a, t)$ i obrotu $\partial W / \partial X|_{X=a}$ swobodnego końca pręta. Ponieważ wartość krytyczna obciążenia zależy tylko od liniowej kombinacji tych funkcji (patrz praca [192], s. 23 lub praca [187]), zachowanie się obciążenia w trakcie utraty stateczności możemy uzależnić od czterech bezwymiarowych parametrów $\hat{\rho}, \hat{\nu}, \hat{\mu}, \hat{\gamma}$

$$e = \hat{\rho} a \frac{\partial W(X,t)}{\partial X} \Big|_{X=a} + \hat{\nu} W(a,t),$$

$$\psi = \hat{\mu} \frac{\partial W(X,t)}{\partial X} \Big|_{X=a} + \hat{\gamma} \frac{1}{a} W(a,t).$$
(5.5)

Jak pokazano w pracy [192], obciążenie swobodnego końca pręta jest obciążeniem potencjalnym, w przypadku gdy spełniony jest warunek

$$\hat{\nu} + \hat{\mu} - 1 = 0.$$
(5.6)

Uogólnioną formułę tego warunku podał Tomski i zespół w pracy [182] w postaci

$$(\hat{\nu} + \hat{\mu} - 1) \left(W_n(l,t) \frac{\partial W_m(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=a} - W_m(l,t) \frac{\partial W_n(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=a} \right) = 0,$$
(5.7)

gdzie przez W_n, W_m określono n -tą i m -tą formę własną.

Zerowanie się we wzorze drugiego czynnika oznacza liniową zależność między formami własnymi W_n, W_m . Po uwzględnieniu związków (5.5) warunki brzegowe (5.2) przyjmują postać

$$\begin{aligned} EJ(a) \frac{\partial^2 W(X,t)}{\partial X^2} \Big|_{X=a} &= P \left(\hat{\rho} a \frac{\partial W(X,t)}{\partial X} \Big|_{X=a} + \hat{\nu} W(a,t) \right), \\ \frac{\partial}{\partial X} \left(EJ(X) \frac{\partial^2 W(X,t)}{\partial X^2} \right) \Big|_{X=a} &= P \left(\hat{\mu} \frac{\partial W(X,t)}{\partial X} \Big|_{X=a} + \hat{\gamma} \frac{1}{a} W(a,t) \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Rozwiązania równania (5.1) poszukiwać będziemy w postaci

$$W(X,t) = W(X) e^{\lambda t}. \quad (5.9)$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$x = \frac{X}{a}, \quad W(X,t) = W(X) e^{\lambda t} = a w(x) e^{\lambda t}$$

oraz

$$s(X) \hat{\eta}(X) = \frac{P_0}{a} \bar{S}(x) \quad (5.10)$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \overline{EJ}(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(2 \frac{\partial \overline{EJ}(x)}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial^2 \overline{EJ}(x)}{\partial x^2} - n(\overline{N}(x) + \overline{C}(x)) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ - n \left(\frac{\partial \overline{N}(x)}{\partial x} + \frac{\partial \overline{C}(x)}{\partial x} + \bar{S}(x) \right) \frac{\partial w}{\partial x} + n \overline{K}(x) w + \lambda^2 g \overline{\rho}(x) w = n p(x), \end{aligned} \quad (5.11)$$

a warunki brzegowe (5.8) wyrażą się wzorami

$$\begin{aligned} \overline{EJ}(1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=1} &= n \overline{P} \left(\hat{\rho} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=1} + \hat{\nu} w(1,t) \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{EJ}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=1} &= n \overline{P} \left((1-\hat{\eta}) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=1} + \hat{\gamma} w(1,t) \right), \end{aligned} \quad (5.12)$$

gdzie funkcje $\overline{EJ}, \overline{N}, \overline{C}, \overline{K}, \overline{\rho}$ oraz stałe n, g zdefiniowane są we wzorze (3.7).

Dalej w celu uproszczenia zapisu konsekwentnie przyjmować będziemy EJ , N , S , C , K , ρ zamiast \overline{EJ} , \overline{N} , \overline{S} , \overline{C} , \overline{K} , $\overline{\rho}$. We wzorze (5.12) współczynnik $\hat{\mu}$ zastąpiono „współczynnikiem śledzenia” $\hat{\eta} = 1 - \hat{\mu}$.

5.3. ROZWIĄZANIE ZADANIA STATECZNOŚCI

Do rozwiązania równania różniczkowego (5.11) korzystamy z przedstawionego w rozdziale 2 twierdzenia 1. Rozwiązania poszukiwać będziemy w postaci szeregu Czebyszewa (3.8).

Występujące w równaniu (5.11) funkcje \hat{P}_1 , \hat{P}_2 , \hat{P}_3 są takie same jak te określone we wzorze (3.10). Pozostałe natomiast wyrażają się wzorem

$$\begin{aligned}\hat{P}_3(x) &= -n \left(\frac{\partial N(x)}{\partial x} + \frac{\partial C(x)}{\partial x} + S(x) \right), \\ \hat{P}_4(x) &= n K(x) + \lambda^2 g \rho(x), \\ \hat{P}(x, t) &\equiv 0.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Po wykorzystaniu zależności (2.31) funkcje Q_m związane z \hat{P}_m przyjmują postać

$$\begin{aligned}Q_0(x) &= EJ(x), \\ Q_1(x) &= -2 \frac{\partial EJ(x)}{\partial x}, \\ Q_2(x) &= \frac{\partial^2 EJ(x)}{\partial x^2} - n(N(x) + C(x)), \\ Q_3(x) &= n \left(\frac{\partial N(x)}{\partial x} + \frac{\partial C(x)}{\partial x} + S(x) \right), \\ Q_4(x) &= n \left(K(x) - \frac{\partial S(x)}{\partial x} + \lambda^2 g \rho(x) \right).\end{aligned}\tag{5.14}$$

Korzystając z cytowanego twierdzenia oraz wykonując opisane w rozdziale 3.3 przekształcenia, ostatecznie otrzymamy

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(E_{k,l} + n N_{k,l} + n C_{k,l} + n K_{k,l} + n S_{k,l} + \lambda^2 g G_{k,l} \right) w_l = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \tag{5.15}$$

gdzie współczynniki $E_{k,l}$, $N_{k,l}$, $C_{k,l}$, $K_{k,l}$, $G_{k,l}$ są określone odpowiednio wzorami (3.20)–(3.22).

Współczynniki związane z niepotencjalnym obciążeniem $S(x)$ wyrażają się wzorem

$$S_{k,l} = -l \left[(k+1)(k+2)(k+3)(s_{k-l-3} - s_{k+l-3}) - 3(k+2)(k^2-9)(s_{k-l-1} - s_{k+l-1}) + 3(k-2)(k^2-9)(s_{k-l+1} - s_{k+l+1}) - (k-1)(k-2)(k-3)(s_{k-l+3} - s_{k+l+3}) \right]. \quad (5.16)$$

Występujące we wzorze (5.16) parametry $s_l = a_l [S(x)]$ są współczynnikami rozwinięcia funkcji $S(x)$.

Ponieważ wyjściowe równanie było równaniem rzędu 4, pierwsze cztery równania układu spełnione tożsamościowo, zastępujemy czterema równaniami określającymi warunki brzegowe. Po przyjęciu zdefiniowanych we wzorze (3.28) wartości funkcji EJ_+ , EJ'_+ oraz obliczonych ze wzorów (3.27) wartości wielomianów $T_n(\pm 1)$ równania te możemy napisać w następującej postaci:

- równania wynikające z warunku sztywnego utwierdzenia na końcu $x = -1$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l w_l = 0, \quad \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^2 w_l = 0, \quad (5.17)$$

- równania wynikające z warunków brzegowych na końcu $x = +1$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3} l^2 (l^2 - 1) EJ_+ - n P(\hat{\rho} l^2 + \hat{\nu}) \right] w_l = 0, \quad (5.18)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3} l^2 (l^2 - 1) EJ'_+ + \frac{1}{15} l^2 (l^2 - 1)(l^2 - 4) EJ_+ - n P((1 - \hat{\eta}) l^2 + \hat{\gamma}) \right] w_l = 0.$$

W wyniku rozwiązania zagadnienia własnego opisanego „obciążonym” do skończonych rozmiarów układem równań (5.15), uzupełnionym równaniami opisującymi warunki brzegowe, otrzymamy zbiór zespolonych wartości własnych $\lambda_j = \alpha_j \pm i\omega_j$. Ruch wokół położenia równowagi jest stateczny, a zatem równowaga jest stateczna (patrz praca [192], s. 10), gdy wszystkie części rzeczywiste α_j są ujemne (ruch asymptotycznie stateczny), jeżeli istnieje część rzeczywista α_j dodatnia, to oczywiście amplituda rozwiązania narasta w czasie i ruch jest niestateczny. Niestateczność pojawia się również w przypadku, gdy dla jednego z pierwiastków mamy $\alpha_j = 0$. Jeżeli jednocześnie $\omega_j = 0$, to mamy do czynienia z utratą stateczności przez dywergencję (wyboczenie), natomiast w przypadku gdy warunkowi $\alpha_j = 0$ odpowiada $\omega_j \neq 0$, wówczas utrata stateczności następuje przez flutter. Pierwsze kryterium, tj. $\alpha_j = 0$ i $\omega_j = 0$, nosi nazwę statycznego kryterium utraty stateczności, kryterium drugie $\alpha_j = 0$ i $\omega_j \neq 0$ nazywane jest kinetycznym kryterium utraty stateczności w sensie węższym. Utrata stateczności może wystąpić również w przypadku, gdy niektóre części rzeczywiste α_j są równe zero,

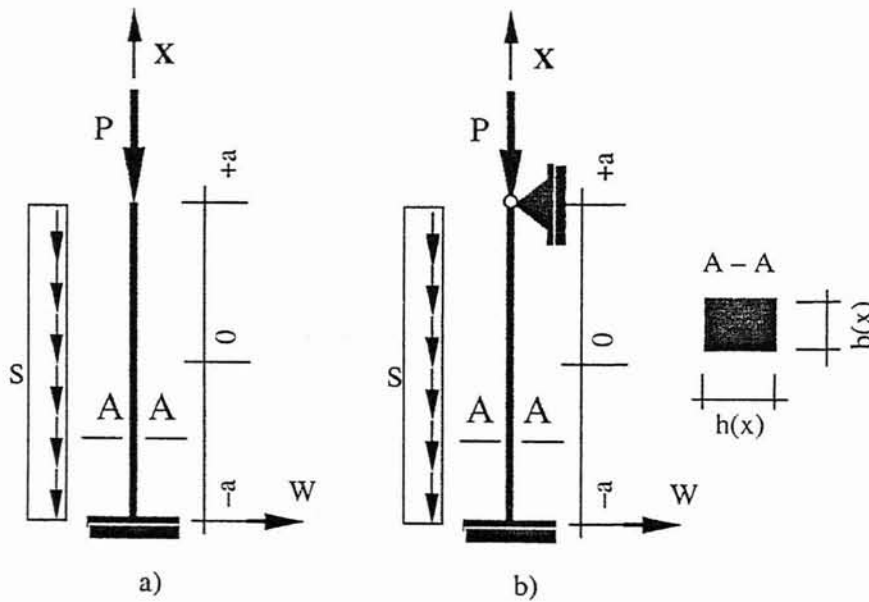
a odpowiadające im częstości ω_j się zrównają. Występuje wtedy utrata stateczności przez flutter. Opis układów, w których utrata stateczności ma bardziej skomplikowany charakter (np. układy hybrydowe), można znaleźć m.in. w pracy Tomskiego i Szmidli [187].

Przedstawione rozważania dotyczyły kolumny wspornikowej. Odpowiedni dobór współczynników $\hat{\rho}, \hat{\nu}, \hat{\mu}, \hat{\gamma}$ umożliwia określenie różnych typów obciążeń. Czytelnika zainteresowanego tą problematyką odsyłamy do pracy [192] oraz do prac [182–187].

Przykład 5.1

Opisaną metodę stosujemy do analizy problemu stateczności prętów pod obciążeniem niepotencjalnym. Przedstawione przykłady zaczerpnięto z pracy [58]. Rozważać będziemy dwa schematy statyczne: pręt wspornikowy (rys. 5.2a) oraz pręt sztywno-przegubowy (rys. 5.2b). W przykładach tych współczynniki $\hat{\rho}, \hat{\nu}, \hat{\mu}, \hat{\gamma}$ przyjmują następujące wartości:

$$\hat{\rho} = \hat{\nu} = \hat{\gamma} = 0, \quad \hat{\mu} = 1 - \hat{\eta}, \quad 0 \leq \hat{\eta} \leq 1. \quad (5.19)$$

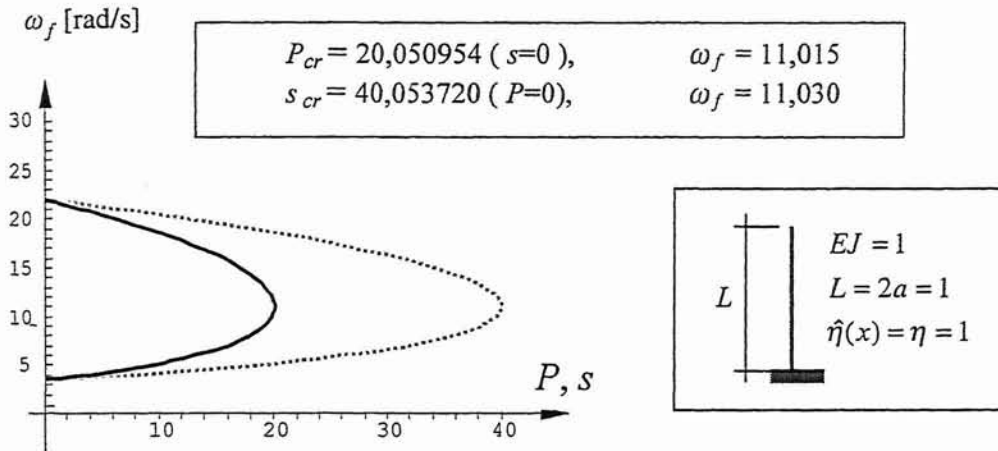


Rys. 5.2. Pręt wspornikowy a) oraz sztywno-przegubowy b) obciążony niepotencjalną siłą skupioną P oraz niepotencjalnym obciążeniem równomiernie rozłożonym s

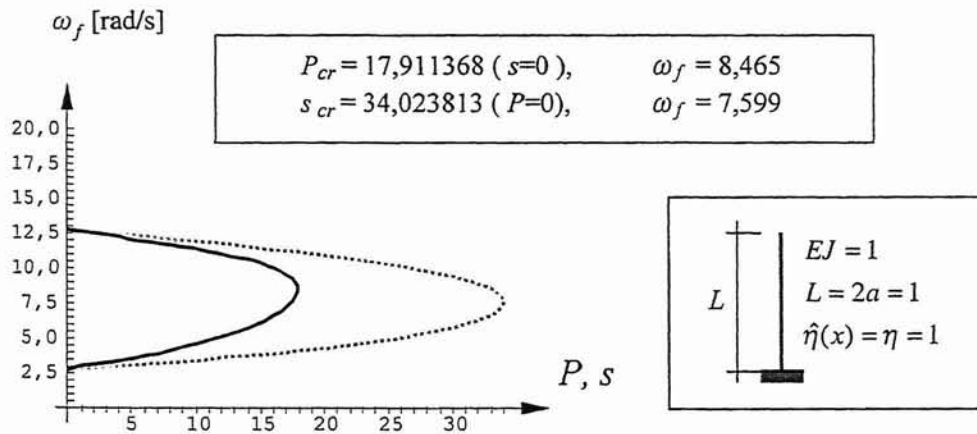
Pręty obciążone są skupioną siłą śledzącą lub śledzącym, stycznym obciążeniem równomiernie rozłożonym. Korzystając z dynamicznego kryterium utraty stateczności

(bifurkacja lub flutter), wyznaczmy krytyczne wartości rozważanych obciążeń. Analizę wykonamy dla prętów jednorodnych, o zmiennych przekrojach opisanych funkcjami $b(x)$, $h(x)$ (rys. 5.2). Przyjmiemy ponadto, że długość pręta $L = 2a = 1$ m, moduł Younga $E = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ oraz gęstość pręta na jednostkę objętości $\rho_V = 1 \text{ kg/m}^3$.

W pierwszym przykładzie (rys. 5.3) analizowano kolumny Becka i Leipholza obciążone skupioną siłą śledzącą oraz śledzącym obciążeniem równomiernie rozłożonym [15, 116].



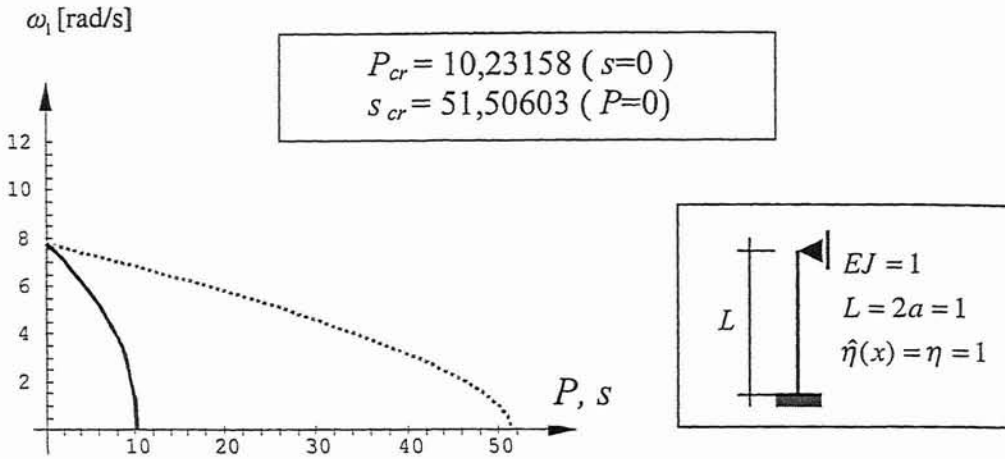
Rys. 5.3. Zależność częstości drgań swobodnych od skupionego P (—) i rozłożonego s (····) obciążenia śledzącego dla kolumn Becka oraz Leipholza



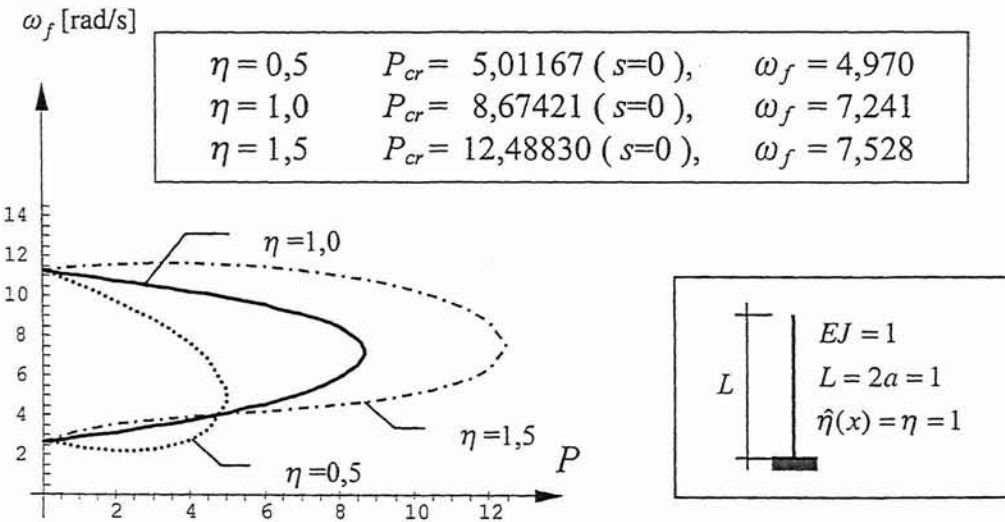
Rys. 5.4. Zależność częstości drgań swobodnych wspornika o zmiennym przekroju $b(x) = h(x) = 2 - (x+1)^2/4$ od skupionego P (—) i rozłożonego s (····) obciążenia śledzącego

Na rysunkach 5.4 i 5.5 przedstawiono rozwiązania problemu stateczności prętów o zmiennym przekroju opisanym funkcjami

$$b(x) = h(x) = 2 - \frac{(x+1)^2}{4}$$



Rys. 5.5. Zależność częstości drgań swobodnych pręta sztywno-przegubowego o zmiennym przekroju $b(x) = h(x) = 2 - (x+1)^2/4$ od skupionego P (—) i rozłożonego s (.....) obciążenia śledzącego



Rys. 5.6. Zależność siły krytycznej P dla kolumny Becka o zmiennym przekroju $b(x) = h(x) = 2 - (x+1)^2/4$ od wartości współczynnika śledzenia

Wpływ parametru śledzenia $\hat{\eta}$ na wartość siły krytycznej w przypadku pręta o przekroju

$$b(x) = h(x) = 2 - \frac{x+1}{2}$$

pokazano na rys. 5.6.

Wyznaczone wartości sił krytycznych oraz wyniki uzyskane przez Becka [15], Leipholza i Madana [116] oraz Głabisza [58] przedstawiono w tabeli 5.1.

Tabela 5.1. Porównanie wyników

	Układ z rys. 5.3				Układ z rys. 5.4			
	P_{cr}	ω_f	s_{cr}	ω_f	P_{cr}	ω_f	s_{cr}	ω_f
Praca autora	20,05095	11,015	40,05371	11,030	17,91136	8,465	34,02381	7,599
Praca [58]	20,05095	11,016	40,0537	11,029	17,93	–	34,00	–
Praca [15], [116]	20,0509 ^[15]	–	40,05 ^[116]	–	–	–	–	–

	Układ z rys. 5.5				Układ z rys. 5.6			
	P_{cr}	ω_1	s_{cr}	ω_1	$P_{cr}(\eta = 0.5)$	ω_f	$P_{cr}(\eta = 1.5)$	ω_f
Praca autora	10,3158	0,0	51,50603	0,0	5,01167	4,970	12,48830	7,528
Praca [58]	10,23	0,0	51,49	0,0	5,01	–	12,48	–

Otrzymane rezultaty potwierdzają idealną zgodność z rozwiązaniami otrzymanymi teoretycznie [15, 116] oraz z wynikami uzyskanymi w pracy [58]. Dzięki zastosowaniu wielomianów Czebyszewa można ograniczyć rozmiary bazy aproksymującej. We wszystkich przedstawionych przykładach funkcję przemieszczeń aproksymowano szeregiem Czebyszewa (3.42), przyjmując $m = 20$ (aproksymacja – 21 wyrazów szeregu).

6. NIEPRYZMATYCZNY PRĘTOWY ELEMENT SKOŃCZONY

6.1. WPROWADZENIE

Ze względu na duże znaczenie MES w praktyce inżynierskiej w niniejszym rozdziale pokażemy możliwość zastosowania prezentowanej w pracy metody do opisu belkowego niepryzmatycznego prostoliniowego elementu skończonego typu Eulera. Ten sposób podejścia do rozwiązania problemu drgań układów, o zmiennych parametrach geometrycznych i mechanicznych, prezentują w swych pracach m.in. Gupta [64], Eisenberger i Reich [35]. Autor pracy [64] wyznaczył macierz sztywności i bezwładności pręta o liniowo zmiennej wysokości. W pracy [35] autorzy zastosowali metodę elementów skończonych do analizy statycznej, dynamicznej oraz rozwiązania problemu stateczności. Do aproksymacji funkcji kształtu zastosowali wielomiany trzeciego stopnia. Wzory pozwalające na wyznaczenie elementów statycznej i dynamicznej macierzy sztywności elementu belkowego o zmiennej sztywności, przedstawił w pracy [33] Eisenberger. Uogólnienie formuł uzyskanych przez Eisenbergera [33], opisujących macierze sztywności i bezwładności prętów o zmiennej sztywności i gęstości, w przypadku prętów spoczywających na dwuparametrowym podłożu i poddanych działaniu obciążeń niepotencjalnych możemy znaleźć w pracy Głabisza [58]. Podobnie jak w [33], do aproksymacji funkcji przemieszczeń w pracy [58] zastosowano klasyczne szeregi potęgowe. Aproksymację wielomianową do wyznaczenia macierzy sztywności i bezwładności belkowych elementów skończonych o zmiennych parametrach typu Eulera i Timoshenki zastosował Klasztorny [92]. Klasyczne wielomiany potęgowe do aproksymacji funkcji kształtu, w metodzie krępych elementów spektralnych zastosował również Wrana [196]. Zależne od częstości funkcje kształtu umożliwiają wyznaczenie dynamicznej macierzy sztywności.

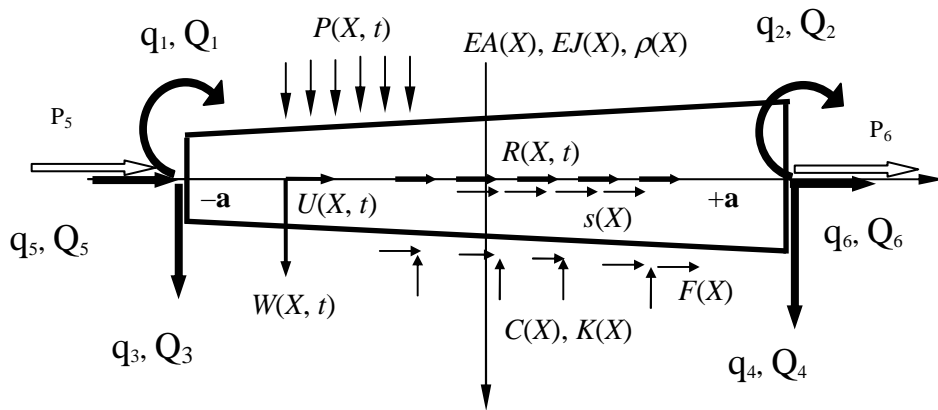
Rozważany w niniejszym rozdziale prętowy element skończony, o zmiennych parametrach geometrycznych i mechanicznych, jest elementem typu Eulera o sześciu stopniach swobody. Zakładamy, że dowolnie zmienne parametry pręta, takie jak sztywność giętna i osiowa, gęstość, zmienne parametry podłoża i obciążenie, można przedstawić w postaci szeregu względem wielomianów Czebyszewa I rodzaju. Na

podstawie twierdzenia i zależności dotyczących tych wielomianów, przedstawionych w rozdziale 2, wyznaczamy funkcje kształtu, a z nich dynamiczną macierz sztywności rozważanego elementu.

Opisane elementy zastosowano do rozwiązania metodą MES zagadnienia stateczności układów ramowych.

6.2. SFORMUŁOWANIE I ROZWIĄZANIE ZADANIA

Rozważmy niepryzmatyczny, prostoliniowy element skończony typu Eulera, o długości $2a$, spoczywający na dwuparametrowym podłożu sprężystym, poddany działaniu dynamicznych obciążeń normalnych $P(X, t)$ i stycznych $R(X, t)$ (rys. 6.1). Ponadto na pręt działają osiowo, niepotencjalne obciążenie rozłożone $s(X)$, a na końcach pręta skupione niepotencjalne siły P_5, P_6 .



Rys. 6.1. Poglądowy schemat elementu skończonego

Zagadnienie drgań przedstawionego układu opisują równania różniczkowe (3.1) i (3.2), przy czym prawą stronę równania (3.1) należy uzupełnić składnikiem $s(X)\eta(X)\partial W/\partial X$, opisującym wpływ niepotencjalnego obciążenia rozłożonego (patrz równanie (5.1)). Poszukując rozwiązań tych równań w postaci szeregów Czebysze-wa oraz ograniczając rozważania do drgań harmoniczných, uzyskujemy następujące nieskończone układy równań algebraicznych opisujących odpowiednio drgania poprzeczne

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(E_{k,l} + n(N_{k,l} + C_{k,l} + K_{k,l} + S_{k,l}) + i\omega\Theta_{V k,l} - \omega^2 g G_{k,l} \right) w_l = n F_k, \quad (6.1)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

oraz podłużne drgania pręta

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(dD_{k,l} + nH_{k,l} + i\omega\Theta_{H_{k,l}} - \omega^2 gG_{k,l} \right) u_l = nR_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

Występujące w równaniach (6.1) i (6.2) współczynniki określone są odpowiednio we wzorach (3.20)–(3.22), (3.26) oraz we wzorze (5.16).

Dynamiczna macierz sztywności elementu skończonego, będąca macierzą transformacji przemieszczeń brzegowych $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_6]^T$ na siły brzegowe $\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2, \dots, Q_6]^T$ ($\mathbf{Q} = \mathbf{S}(\omega)\mathbf{q}$), ma strukturę blokową

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^u \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

i jest macierzą zależną od zmiennej ω (patrz np. [108], s. 117]. Podbloki tej macierzy możemy wyznaczyć z następujących zależności [13]

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^w(\omega) = & \frac{1}{a^3} \int_{-1}^1 \mathbf{H}_w''(x) EJ(x) \mathbf{H}_w''^T(x) dx + \frac{1}{a} \int_{-1}^1 \mathbf{H}_w'(x) N(x) \mathbf{H}_w'^T(x) dx \\ & + a \int_{-1}^1 \mathbf{H}_w(x) K(x) \mathbf{H}_w^T(x) dx + \frac{1}{a} \int_{-1}^1 \mathbf{H}_w'(x) C(x) \mathbf{H}_w'^T(x) dx \\ & - a\omega^2 \int_{-1}^1 \mathbf{H}_w(x) \rho(x) \mathbf{H}_w^T(x) dx - \int_{-1}^1 \mathbf{H}_w'(x) S(x) \mathbf{H}_w'^T(x) dx, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^u(\omega) = & \frac{1}{a} \int_{-1}^1 \mathbf{H}_u'(x) EA(x) \mathbf{H}_u'^T(x) dx + a \int_{-1}^1 \mathbf{H}_u(x) F(x) \mathbf{H}_u^T(x) dx \\ & - a\omega^2 \int_{-1}^1 \mathbf{H}_u(x) \rho(x) \mathbf{H}_u^T(x) dx, \end{aligned} \quad (6.5)$$

gdzie macierze $\mathbf{H}_w(x)$, $\mathbf{H}_u(x)$ określają zależność między przemieszczeniami $W(x)$ i $U(x)$ wewnątrz elementu a współrzędnymi q_1, q_2, \dots, q_6 opisującymi przemieszczenia i obroty na końcach pręta.

Zależności te mają następującą postać:

$$W(x) = \mathbf{H}_w^T(x) \mathbf{q}_w = \begin{bmatrix} H_1(x) & H_2(x) & H_3(x) & H_4(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

$$U(x) = \mathbf{H}_u^T(x) \mathbf{q}_u = \begin{bmatrix} H_5(x) & H_6(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Występujące we wzorach (6.6), (6.7) funkcje $H_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, 6$ nazywane są funkcjami kształtu. Funkcje H_1, H_2, H_3, H_4 można wyznaczyć, rozwiązując nieskończony układ równań (6.1), w którym pierwsze cztery równania spełnione tożsamościowo zastępujemy równaniami określającymi warunki brzegowe. Warunki te w przypadku funkcji H_i , $i = 1, 2, 3, 4$, przyjmują odpowiednio postać:

$$\begin{aligned} H_1 : q_1 = \phi(-1) = 1, \quad q_2 = \phi(1) = 0, \quad q_3 = aw(-1) = 0, \quad q_4 = aw(1) = 0, \\ H_2 : q_1 = \phi(-1) = 0, \quad q_2 = \phi(1) = 1, \quad q_3 = aw(-1) = 0, \quad q_4 = aw(1) = 0, \\ H_3 : q_1 = \phi(-1) = 0, \quad q_2 = \phi(1) = 0, \quad q_3 = aw(-1) = 1, \quad q_4 = aw(1) = 0, \\ H_4 : q_1 = \phi(-1) = 0, \quad q_2 = \phi(1) = 0, \quad q_3 = aw(-1) = 0, \quad q_4 = aw(1) = 1, \end{aligned} \quad (6.8)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \phi(-1) = -\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^2 w_l = q_1, \quad \phi(+1) = \sum_{l=0}^{\infty} l^2 w_l = q_2, \\ w(-1) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l w_l = \frac{q_3}{a}, \quad w(+1) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l = \frac{q_4}{a}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

W wyniku uzyskamy cztery ciągi współczynników W_l^k , $k = 1, 2, 3, 4$; $l = 0, 1, 2, \dots$, określające poszukiwane ściśle funkcje kształtu

$$\begin{aligned} H_k(x) = a \sum_{l=0}^{\infty} W_l^k T_l(x), \quad k = 1, 2, \\ H_k(x) = \hat{a} \sum_{l=0}^{\infty} W_l^k T_l(x), \quad k = 3, 4, \end{aligned} \quad (6.10)$$

gdzie przez \hat{a} oznaczono bezwymiarową część wielkości porównawczej a (np. jeśli $a = 2,5$ m, to $\hat{a} = 2,5$).

Analogicznie można wyznaczyć H_5, H_6 . W tym przypadku rozwiązujemy układ równań (6.2), w którym pierwsze dwa równania mają postać

$$u(-1) = \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l u_l = \frac{q_5}{a}, \quad u(+1) = \sum_{l=0}^{\infty} ' u_l = \frac{q_6}{a}, \quad (6.11)$$

a warunki brzegowe są określone wzorem:

$$\begin{aligned} H_5: \quad q_5 = au(-1) = 1, \quad q_6 = au(1) = 0, \\ H_6: \quad q_5 = au(-1) = 0, \quad q_6 = au(1) = 1. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Mając dwa rozwiązania układu $U_l^k, k = 5, 6; l = 0, 1, 2, \dots$, otrzymujemy

$$H_k(x) = \hat{a} \sum_{l=0}^{\infty} ' U_l^k T_l(x), \quad k = 5, 6. \quad (6.13)$$

Inną metodą wyznaczenia dynamicznej macierzy sztywności elementu skończonego jest bezpośrednie obliczenie wartości sił Q_1, Q_2, \dots, Q_6 . Siły te można wyznaczyć ze wzorów (3.30)₃₋₆, (3.31)₂, które określają wartości sił przekrojowych na końcach pręta

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{EJ_0}{a} m(-1) = -\frac{1}{3} \frac{EJ_0}{a} EJ_- \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l l^2 (l^2 - 1) w_l, \\ Q_2 &= -\frac{EJ_0}{a} m(+1) = \frac{1}{3} \frac{EJ_0}{a} EJ_+ \sum_{l=0}^{\infty} ' l^2 (l^2 - 1) w_l, \\ Q_3 &= -\frac{EJ_0}{a^2} t(-1) = -\frac{EJ_0}{a^2} \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l l^2 \left[-\frac{1}{3} (l^2 - 1) EJ_- \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{15} (l^2 - 1)(l^2 - 4) EJ_- - n N_- \right] w_l \\ Q_4 &= \frac{EJ_0}{a^2} t(+1) = -\frac{EJ_0}{a^2} \sum_{l=0}^{\infty} ' l^2 \left[\frac{1}{3} (l^2 - 1) EJ_+ + \frac{1}{15} (l^2 - 1)(l^2 - 4) EJ_+ - n N_+ \right] w_l \end{aligned} \quad (6.14)$$

oraz

$$\begin{aligned} Q_5 &= -EA_0 q(-1) = EA_0 EA_- \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l l^2 u_l, \\ Q_6 &= EA_0 q(+1) = EA_0 EA_+ \sum_{l=0}^{\infty} ' l^2 u_l. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Po podstawieniu do wzorów (6.14), (6.15) odpowiednio współczynników rozwinięcia funkcji kształtu H_1, H_2, H_3, H_4 oraz H_5, H_6 , tj. współczynniki W_l^k , $k = 1, 2, 3, 4$, $l = 0, 1, 2, \dots$, oraz U_l^k , $k = 5, 6$; $l = 0, 1, 2, \dots$, otrzymamy elementy dynamicznej macierzy sztywności

$$\begin{aligned}
S_{1k}^w &= -\frac{1}{3} \frac{EJ_0}{a} EJ_- \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^2 (l^2 - 1) W_l^k, \\
S_{2k}^w &= \frac{1}{3} \frac{EJ_0}{a} EJ_+ \sum_{l=0}^{\infty} l^2 (l^2 - 1) W_l^k, \\
S_{3k}^w &= -\frac{EJ_0}{a^2} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^2 \left[-\frac{1}{3} (l^2 - 1) EJ'_- \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{15} (l^2 - 1)(l^2 - 4) EJ_- - n N_- \right] W_l^k - \eta n \bar{P}_5 \right), \\
S_{4k}^w &= -\frac{EJ_0}{a^2} \left(\sum_{l=0}^{\infty} l^2 \left[\frac{1}{3} (l^2 - 1) EJ'_+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{15} (l^2 - 1)(l^2 - 4) EJ_+ - n N_+ \right] W_l^k - \eta n \bar{P}_6 \right),
\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$k = 1, 2, 3, 4,$$

$$\begin{aligned}
S_{5k}^u &= EA_0 EA_- \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^2 U_l^k, \\
S_{6k}^u &= EA_0 EA_+ \sum_{l=0}^{\infty} l^2 U_l^k, \quad k = 5, 6,
\end{aligned} \tag{6.17}$$

gdzie $P_5 = P_0 \bar{P}_5$, $P_6 = P_0 \bar{P}_6$.

Występujące we wzorze siły P_5, P_6 mają oczywiście również wpływ na wartości sił osiowych N_-, N_+ .

Wektory węzłowych sił czynnych możemy wyznaczyć z relacji

$$\mathbf{F}^w = P_0 \int_{-1}^1 p(x) \mathbf{H}_w(x) dx, \quad \mathbf{F}^u = P_0 \int_{-1}^1 r(x) \mathbf{H}_u(x) dx. \tag{6.18}$$

Po podstawieniu do wzoru (6.18) rozwinięć funkcji $p(x)$, $r(x)$, rozwinięć funkcji kształtu oraz zastosowaniu zależności (2.28) otrzymamy

$$\begin{aligned}
F_i^w &= -aP_0 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \left[\sum_{l=0}^{\infty} p_l (W_{n-l}^i + W_{n+l}^i) \right] T_n(x), \quad i=1, 2, \\
F_i^w &= -\hat{a}P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \left[\sum_{l=0}^{\infty} p_l (W_{n-l}^i + W_{n+l}^i) \right] T_n(x), \quad i=3, 4, \\
F_i^u &= -\hat{a}P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \left[\sum_{l=0}^{\infty} r_l (U_{n-l}^i + U_{n+l}^i) \right] T_n(x), \quad i=5, 6.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Wykorzystując związek ([144], s. 43)

$$\int_{-1}^1 T_n(x) dx = \begin{cases} -\frac{2}{n^2-1}, & \text{gdy } n \text{ parzyste} \\ 0, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \end{cases} \tag{6.20}$$

ostatecznie otrzymujemy

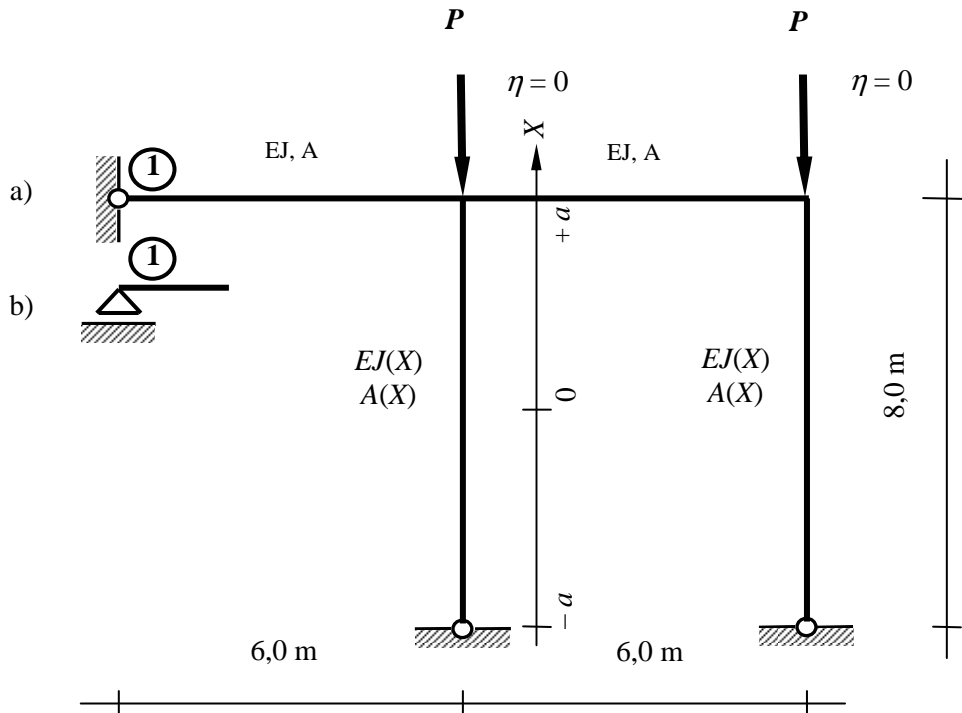
$$\begin{aligned}
F_i^w &= -aP_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} p_l (W_{2n-l}^i + W_{2n+l}^i) \right] \frac{1}{4n^2-1}, \quad i=1, 2, \\
F_i^w &= -\hat{a}P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} p_l (W_{2n-l}^i + W_{2n+l}^i) \right] \frac{1}{4n^2-1}, \quad i=3, 4, \\
F_i^u &= -\hat{a}P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} r_l (U_{2n-l}^i + U_{2n+l}^i) \right] \frac{1}{4n^2-1}, \quad i=5, 6.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Przykład 6.1

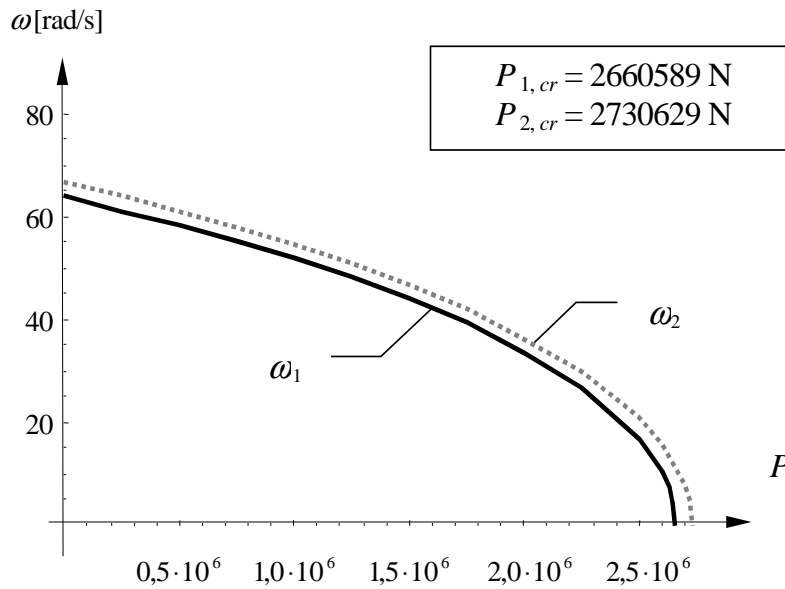
Opisane elementy skończone zastosujemy do rozwiązania zagadnienia stateczności układów ramowych obciążonych osiowym statycznym obciążeniem potencjalnym. Schematy analizowanych ram przedstawiono na rysunku 6.2.

Pierwszy z przykładów zaczerpnięto z monografii [104], s. 63. W pracy tej zagadnienie stateczności rozwiązano metodami analitycznymi, ograniczając rozważania do wyznaczenia pierwszej siły krytycznej. Przyjęto następujące parametry układu

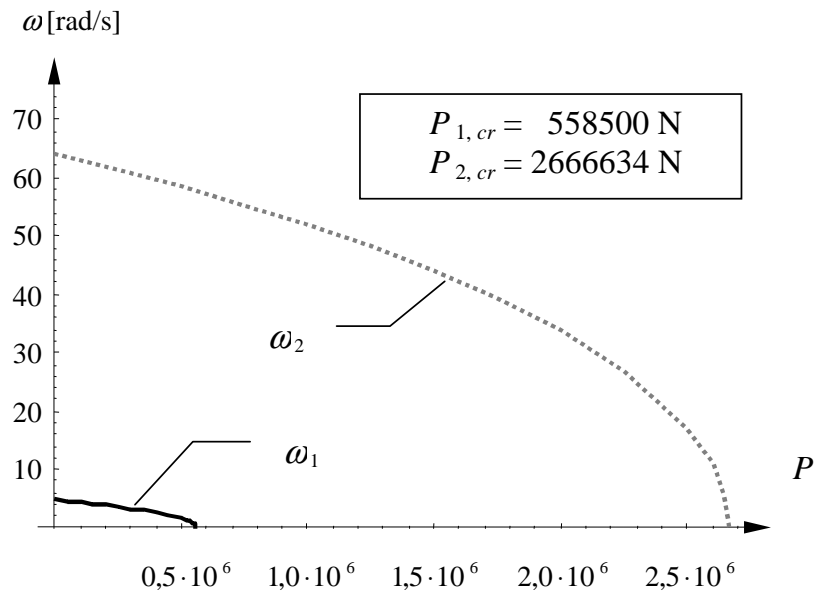
$$\begin{aligned}
J &= 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4, & A &= 0,24 \text{ m}^2, \\
J(X) &= \frac{\pi \cdot 10^{-4}}{64} \left(3 + \frac{X}{a} \right)^4, \text{ m}^4, & A(X) &= \frac{\pi \cdot 10^{-2}}{8} \left(3 + \frac{X}{a} \right)^2, \text{ m}^2, \\
E &= 2,8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, & \rho &= 2400 \text{ kg/m}^3,
\end{aligned} \tag{6.22}$$



Rys. 6.2. Rama o węzłach nieprzesuwnych a) i przesuwnych, b) obciążona osiowym obciążeniem potencjalnym P



Rys. 6.3 Zależność częstości drgań swobodnych ramy (schemat z rys. 6.2 a) od osiowej siły potencjalnej P



Rys. 6.4. Zależność częstości drgań swobodnych ramy (schemat z rys. 6.2 b) od osiowej siły potencjalnej P

Tabela 6.1. Porównanie wyników

Układ z rys. 6.2a					Układ z rys. 6.2b				
	Praca	Klasyczna FEM	Praca	Klasyczna FEM		Praca	Klasyczna FEM	Praca	Klasyczna FEM
$P[\text{N}]$	$\omega_1, [\text{rad/s}]$	$\omega_1, [\text{rad/s}]$	ω_2	ω_2	$P[\text{N}]$	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2
0	63,96	61,86	66,80	64,38	0	4,77	4,70	64,08	61,98
250 000	61,24	59,10	64,01	61,57	50 000	4,56	4,48	–	61,44
500 000	58,34	56,14	61,05	58,56	100 000	4,33	4,25	–	60,90
750 000	55,21	52,95	57,87	55,32	150 000	4,10	4,01	–	60,34
1 000 000	51,83	49,47	54,43	51,81	200 000	3,84	3,75	–	59,78
1 250 000	48,11	45,63	50,89	47,95	250 000	3,57	3,47	61,36	59,22
1 500 000	43,97	41,32	46,53	43,64	300 000	3,28	3,17	–	58,64
1 750 000	39,26	36,35	41,85	38,72	350 000	2,95	2,82	–	58,06
2 000 000	33,73	30,38	36,41	32,89	400 000	2,57	2,43	–	57,47
2 250 000	26,83	22,60	29,78	25,52	450 000	2,13	1,96	–	56,87
2 500 000	16,94	9,15	20,81	14,35	500 000	1,57	1,31	58,46	56,27

Układ z rysunku 6.2 podzielona na 4 elementy skończone (2 słupy + 2 rygle), stojąc do aproksymacji przemieszczeń w elementach niepryzmatycznych 26 wyrazów szeregu Czebyszewa ($m = 25$). Uzyskane rezultaty przedstawiono na rysunkach 6.3, 6.4 oraz w tabelach 6.1, 6.2.

Tabela 6.2. Porównanie wyników

	Układ z rys. 6.2a		Układ z rys. 6.2b	
	$P_{1,cr}$ [N]	$P_{2,cr}$ [N]	$P_{1,cr}$ [N]	$P_{2,cr}$ [N]
Praca	2 660 589	2 730 629	558 500	2 666 634
Klasyczna FEM	2 547 908	2 612 683	540 865	2 553 525
Praca [104]	2 618 000	–	–	–

W tabelach tych w celu porównania umieszczono również wyniki uzyskane z zastosowaniem do rozwiązania klasycznych, pryzmatycznych elementów skończonych (elementy o czterech stopniach swobody). W tym przypadku układ podzielono na 12 elementów skończonych (słupy – 4 elementy, rygle – 3 elementy). Uzyskane wyniki pokazują dobrą zgodność z wynikami uzyskanymi innymi metodami.

7. ZAGADNIENIE DRGAŃ HARMONICZNYCH PRĘTA SPOCZYWAJĄCEGO NA INERCYJNEJ PÓLPŁASZCZYŹNIE SPRĘŻYSTEJ

7.1. WPROWADZENIE

Szczególne znaczenie zagadnień dotyczących statyki i dynamiki ustrojów na podłożu sprężystym wynika z tego, że prawie każda konstrukcja inżynierska spoczywa bezpośrednio lub pośrednio na podłożu gruntowym. W rozważaniach dotyczących tego typu problemów przyjmuje się różne modele podłoża sprężystego, poczynając od najprostszego modelu Winklera, poprzez modele dwuparametrowe (Pasternak, Fiłnienko-Borodicz, Własow [193]), kończąc na jednym z bardziej skomplikowanych, inercyjnej półprzestrzeni sprężystej. Wymienione modele nie wyczerpują oczywiście wszystkich opisanych i stosowanych w praktyce inżynierskiej modeli. Opis tych modeli można znaleźć w pracach przeglądowych, np. w pracy Jemielity i Szcześniaka [80], w monografii Sevaduraiego [164] lub w pracy [162].

Z prac korzystających z prostszych modeli podłoża, w których rozwiązano problem drgań belki niepryzmatycznej, można wymienić omawiane we wcześniejszych rozdziałach prace [41, 58, 150, 151] oraz prace Elishakoffa [46] oraz Burra, Triantafyloulou'a i Yue'a [19]. W pracy [46] rozwiązano problem polegający na wyznaczeniu funkcji sztywności belki oraz parametrów podłoża sprężystego o zadanym rozkładzie gęstości, tak aby pierwsza forma własna przyjmowała określoną postać, np. aby była identyczna z statycznym rozwiązaniem belki obciążonej równomiernie. Natomiast w pracy [19] badano problemy falowe dla odcinkowo niepryzmatycznej belce nieskończonej. Analiza drgań belki spoczywającej na dwuparametrowym podłożu sprężystym wywołanych różnymi typami obciążeń jest omówiona w pracy Ghani Razaqpur i Shah [148]. W tym przypadku rozważania ograniczono do belek pryzmatycznych. Problem drgań belki pryzmatycznej na podłożu Pasternaka rozważany był również w pracy Coskuna [27], w której rozwiązano problem drgań belki krótkiej obciążonej skupioną siłą harmonicznymi zmienną. Ciekawym elementem tej pracy jest uwzględnienie w rozwiązywanym zagadnieniu więzów jednostronnych i wyznaczenie obszarów kontaktu między belką a podłożem sprężystym. Ten sam model Pasternaka zastosowali Chen, Lu i Bian w pracy [22], w której rozwiązali problem drgań

li Chen, Lu i Bian w pracy [22], w której rozwiązali problem drgań swobodnych belki krótkiej metodą DQ (*differential quadrature*). Zastosowanie innego, trójparametrowego modelu podłoża (modelu Kerra) w zagadnieniu statycznym przedstawiono w pracy Avramidisa i Morfidisa [8]. Przegląd prac związanych z zastosowaniem tego modelu możemy znaleźć w pracy [76].

Bardzo liczną grupą prac, przedstawiających rozwiązanie problemów interakcji między konstrukcją a podłożem, są prace dotyczące zagadnień drgań sztywnych fundamentów blokowych na podłożu sprężystym. Bogatą bibliografię dotyczącą tej tematyki można znaleźć m.in. w pracy Filipkowskiego, Hryniewicza i Sienkiewicza [51] oraz w pracy Sienkiewicza [168]. Literaturę, aczkolwiek nie tak liczną jak w wymienionych pracach, można znaleźć również w pracy [93]. Mniej liczną grupę stanowią prace dotyczące problemów drgań układów odkształcalnych (belki, płyty, powłoki), spoczywających na inercyjnej półprzestrzeni sprężystej. Rozwiązanie tych skomplikowanych zagadnień można znaleźć m.in. w pracach [75, 125, 147, 159].

W niniejszym rozdziale rozwiązujemy problem drgań wymuszonych harmoniczných, niepryzmatycznej belki krótkiej spoczywającej na inercyjnej półpłaszczyźnie sprężystej. W prezentowanych rozważaniach, w części dotyczącej wyznaczenia funkcji przemieszczeń półpłaszczyzny sprężystej, pomysł rozwiązania zaczerpnięto z prac Sejmowa (patrz prace [160, 161]). Przedstawione w tych pracach rozwiązanie dotyczyło zagadnienia drgań sztywnego fundamentu blokowego spoczywającego na półpłaszczyźnie sprężystej.

W rozdziale tym wykorzystano wyniki autora przedstawione w pracy [153].

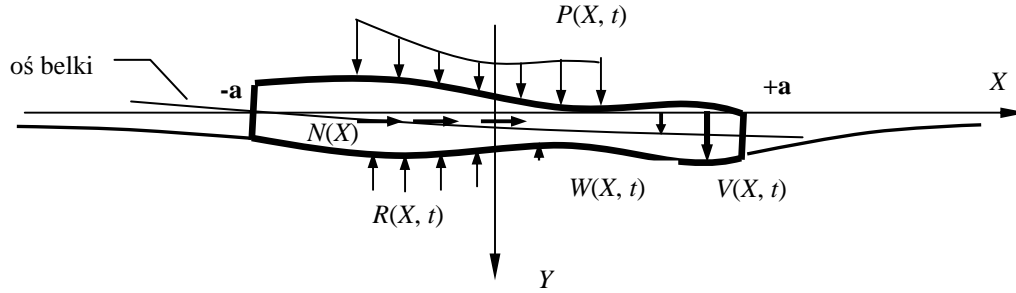
7.2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Przedmiotem rozważań jest niepryzmatyczna, prostoliniowa belka Eulera o długości $2a$, spoczywająca na inercyjnej półpłaszczyźnie sprężystej, poddana działaniu dynamicznych obciążeń normalnych $P(X, t)$ oraz statycznych sił osiowych $N(X)$. Belka i półpłaszczyzna są połączone w kierunku normalnym więziami dwustronnymi (rys. 7.1).

Rozważania ograniczymy do drgań wymuszonych harmoniczných. Liniowe poprzeczne drgania belki opisuje się wtedy następującym równaniem różniczkowym

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(EJ(X) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(N(X) \frac{\partial W}{\partial X} \right) - \omega^2 \rho_B(x) W = P(X, t) - R(X, t), \quad (7.1)$$

gdzie ρ_B – masa belki przypadająca na jednostkę długości, $R(X, t)$ – funkcja opisująca reakcję podłoża sprężystego.



Rys. 7.1. Schemat układu

Siły przekrojowe: momenty gnące oraz siły tnące określone są wzorami (3.3)_{2,3}.

Funkcje przemieszczeń inercyjnej półpłaszczyzny sprężystej opisane są dwoma sprzężonymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} \right) &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (7.2)$$

oraz następującymi warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} \sigma_{YY}(X, 0, t) &= -R(X) e^{i\omega t}, & \text{gdy } -a \leq X \leq +a, \\ \sigma_{YY}(X, 0, t) &= 0, & \text{gdy } a < |X|, \\ \sigma_{XY}(X, 0, t) &= 0, & \text{gdy } -\infty \leq X \leq +\infty. \end{aligned} \quad (7.3)$$

gdzie $U(X, Y)$, $V(X, Y)$ – odpowiednio poziome i pionowe przemieszczenia półpłaszczyzny, λ , μ – stałe Lamégo, ρ – gęstość podłoża sprężystego.

Ze względu na wprowadzone więzy między belką a półpłaszczyzną dla przemieszczeń zachodzi następujący związek

$$V(X, 0, t) = W(X, t) \quad \text{dla } -a \leq X \leq +a. \quad (7.4)$$

Po wprowadzeniu w równaniach (7.1)–(7.2) wielkości bezwymiarowych $x = X/a$, $y = Y/a$ i wykorzystaniu w tych równaniach zależności

$$\begin{aligned} W(X, t) &= W(X) e^{i\omega t} = a w(x) e^{i\omega t}, & P(X, t) &= P(X) e^{i\omega t} = \frac{P_0}{a} p(x) e^{i\omega t}, \\ V(X, 0, t) &= V(X, 0) e^{i\omega t} = a v(x, 0) e^{i\omega t}, \\ U(X, 0, t) &= U(X, 0) e^{i\omega t} = a u(x, 0) e^{i\omega t}, & R(X, t) &= R(X) e^{i\omega t} = \frac{P_0}{a} r(x) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

otrzymamy następujące równanie drgań belki

$$\begin{aligned} \overline{EJ}(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(2 \frac{\partial \overline{EJ}(x)}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial^2 \overline{EJ}(x)}{\partial x^2} - n \overline{N}(x) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ - n \frac{\partial \overline{N}(x)}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \omega^2 g \overline{\rho_B}(x) w = n(p(x) - r(x)), \end{aligned} \quad (7.6)$$

a siły przekrojowe wyrażą się wzorami (3.6)_{2,3}. Występujące w równaniu (7.6) funkcje \overline{EJ} , \overline{N} , $\overline{\rho_B}$ są określone we wzorze (3.7). Dalej dla uproszczenia zapisu konsekwentnie przyjmować będziemy EJ , N , ρ_B zamiast \overline{EJ} , \overline{N} , $\overline{\rho_B}$.

Po zastosowaniu zależności (7.5) równania opisujące drgania półpłaszczyzny wyrażą się wzorami

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\beta^2 \kappa^2 u, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\beta^2 \kappa^2 v, \end{aligned} \quad (7.7)$$

a warunki brzegowe przyjmą postać

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = -P_0 \frac{r(x) e^{i\alpha x}}{a}, \quad \text{gdy } -1 \leq x \leq +1, \\ \sigma_{yy} = 0, \quad \text{gdy } 1 > |x|, \\ \sigma_{xy} = 0, \quad \text{gdy } -\infty \leq x \leq +\infty, \end{aligned} \quad (7.8)$$

gdzie

$$\beta^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \kappa = \frac{\omega a}{c_2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

są odpowiednio prędkościami rozchodzenia się fal podłużnych i poprzecznych w podłożu.

7.3. ROZWINIĘCIE W SZEREG CZEBYSZEWA FUNKCJI PRZEMIESZCZEŃ PÓLPŁASZCZYZNY SPRĘŻYSTEJ

Do rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych (7.7) zastosujemy metodę potencjałów oraz transformację Fouriera. Nie wchodząc w szczegóły tego klasycznego sposobu rozwiązywania problemów elastokinetyki (patrz np. [139]), przedstawiamy ostateczne rozwiązanie

$$v(x, 0) = -\frac{P_0}{\sqrt{2\pi} a\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa^2 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \kappa^2} \bar{r}(\alpha)}{(2\alpha^2 - \kappa^2)^2 - 4\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \kappa^2} \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}} e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (7.9)$$

gdzie $\bar{r}(\alpha)$ – transformata Fouriera funkcji odporu podłoża $r(x)$.

Nieznanej funkcji odporu podłoża $r(x)$ poszukiwać będziemy w następującej postaci (patrz [160], s. 70)

$$r(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} r_l T_l(x), \quad (7.10)$$

gdzie $T_l(x)$ są wielomianami Czebyszewa I rodzaju.

Wykonując na równaniu (7.10) transformację Fouriera oraz wykorzystując następujące wzory całkowe (patrz [61], s. 850)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_{2l}(x) e^{-i\alpha x} dx &= (-1)^l J_{2l}(\alpha), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_{2l+1}(x) e^{-i\alpha x} dx &= i (-1)^l J_{2l+1}(\alpha), \end{aligned} \quad (7.11)$$

gdzie $J_l(x)$ są funkcjami Bessela pierwszego rodzaju, otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{r}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} r_l \int_{-\infty}^{\infty} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_l(x) e^{i\alpha x} dx \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l r_{2l} J_{2l}(\alpha) + i \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l r_{2l+1} J_{2l+1}(\alpha) \right). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Po podstawieniu transformaty (7.12) do wzoru (7.9) dostaniemy

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= -\frac{P_0}{2a\mu} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa^2 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \kappa^2} r_{2l} J_{2l}(\alpha)}{(2\alpha^2 - \kappa^2)^2 - 4\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \kappa^2} \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}} e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &\quad - \frac{P_0 i}{2a\mu} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa^2 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \kappa^2} r_{2l+1} J_{2l+1}(\alpha)}{(2\alpha^2 - \kappa^2)^2 - 4\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \kappa^2} \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}} e^{-i\alpha x} d\alpha. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Funkcję przemieszczeń (7.13) rozwiemy (patrz [160], s. 71) w szereg względem wielomianów Czebyszewa I rodzaju

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[v] T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(x). \quad (7.14)$$

Z definicji współczynniki tego rozwinięcia $a_n[w]$ są określone wzorem (2.2).
Po wykorzystaniu zależności (7.11), wzoru

$$J_\nu(e^{m\pi i} z) = e^{m\nu\pi i} J_\nu(z) \quad (7.15)$$

oraz wprowadzeniu podstawienia $\xi = \alpha/\kappa$ ostatecznie otrzymujemy:

$$a_{2n}[v] = v_{2n} = -\frac{P_0}{a\mu} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+n} r_{2l} \int_0^{\infty} \frac{2\sqrt{\xi^2 - \beta^2} J_{2l}(\kappa\xi) J_{2n}(\kappa\xi)}{(2\xi^2 - 1)^2 - 4\xi^2\sqrt{\xi^2 - \beta^2}\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi, \quad (7.16)$$

$$a_{2n+1}[v] = v_{2n+1} = -\frac{P_0}{a\mu} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+n} r_{2l+1} \int_0^{\infty} \frac{2\sqrt{\xi^2 - \beta^2} J_{2l+1}(\kappa\xi) J_{2n+1}(\kappa\xi)}{(2\xi^2 - 1)^2 - 4\xi^2\sqrt{\xi^2 - \beta^2}\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi.$$

Całki niewłaściwe (7.16) poddamy dalszym przekształceniom. W celu uproszczenia zapisu wprowadzimy następujące oznaczenia

$$\varphi_{n,l} = 2 \int_0^{\infty} F(\xi) J_l(\kappa\xi) J_n(\kappa\xi) d\xi, \quad l - n = 2m, \quad (7.17)$$

gdzie

$$F(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 - \beta^2}}{(2\xi^2 - 1)^2 - 4\xi^2\sqrt{\xi^2 - \beta^2}\sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (7.18)$$

Dodatkowy warunek we wzorze (7.17) oznacza, że liczby l, n , określające rzędy funkcji Bessela, są jednocześnie parzyste lub jednocześnie nieparzyste. Założymy ponadto, że $l \geq n$. Dokonując we wzorze (7.17) podstawienia

$$2J_\nu(x) = H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x) \quad (7.19)$$

gdzie

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i N_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i N_\nu(x) \quad (7.20)$$

są funkcjami Hankela I i II rodzaju, otrzymamy

$$\varphi_{n,l} = \int_0^{\infty} F(\xi) J_l(\kappa\xi) H_n^{(1)}(\kappa\xi) d\xi + \int_0^{\infty} F(\xi) J_l(\kappa\xi) H_n^{(2)}(\kappa\xi) d\xi. \quad (7.21)$$

Całki (7.21) obliczymy, przechodząc z całkowaniem na płaszczyznę zespoloną. Odpowiednie kontury całkowania przedstawiono na rysunkach 7.2 i 7.3. Znaki oraz charakterystyczne wartości występujących we wzorze (7.18) funkcji wieloznacznych

$$v_1 = \sqrt{z^2 - \beta^2}, \quad v_2 = \sqrt{z^2 - 1},$$

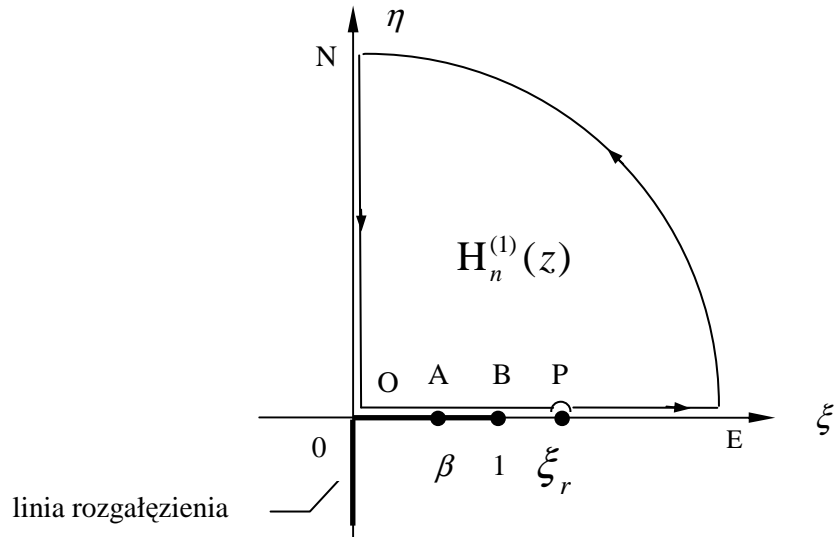
gdzie

$$z = \xi + i\eta$$

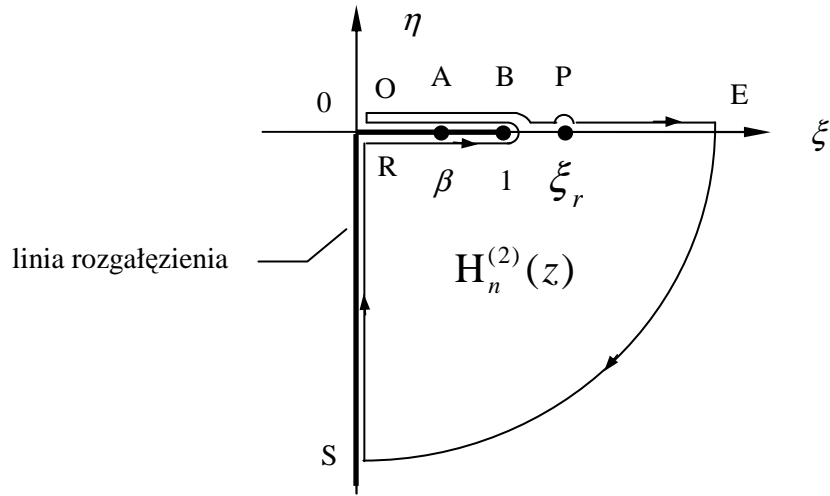
przedstawiono na rysunku 7.4.

Korzystając ze znanego twierdzenia, dotyczącego całkowania na płaszczyźnie zespolonej, otrzymamy

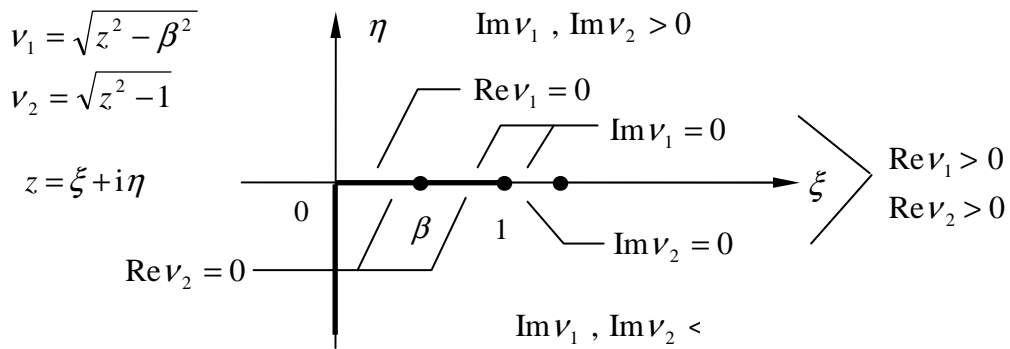
$$\begin{aligned} \varphi_{n,l} &= \int_0^{\infty} F(\xi) J_l(\kappa\xi) H_n^{(1)}(\kappa\xi) d\xi + \int_0^{\infty} F(\xi) J_l(\kappa\xi) H_n^{(2)}(\kappa\xi) d\xi \\ &= \int_0^{\infty} I_1 d\xi + \int_0^{\infty} I_2 d\xi = \int_{\text{OBR}} I_2 dz + \int_{\text{O}}^{\text{N}} I_1 dz + \int_{\text{R}}^{\text{S}} I_2 dz - 2\pi i \sum \text{res } I_2. \end{aligned} \quad (7.22)$$



Rys. 7.2. Kontur całkowania, w przypadku gdy w funkcji podcałkowej występuje funkcja $H_n^{(1)}(z)$



Rys. 7.3. Kontur całkowania, w przypadku gdy w funkcji podcałkowej występuje funkcja $H_n^{(2)}(z)$



Rys. 7.4. Znaki oraz charakterystyczne wartości funkcji wieloznacznych $v_1 = \sqrt{z^2 - \beta^2}$, $v_2 = \sqrt{z^2 - 1}$ na płaszczyźnie zespolonej

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń za pomocą zależności (7.15) oraz następującego wzoru

$$H_v^{(1)}(e^{\pi i} z) = -e^{-\nu \pi i} H_v^{(2)}(z) \quad (7.23)$$

ostatecznie otrzymamy

$$\begin{aligned}
\varphi_{n,l} = & 2i \left[\int_0^\beta \frac{\sqrt{\beta^2 - \xi^2}}{(2\xi^2 - 1)^2 + 4\xi^2 \sqrt{\beta^2 - \xi^2} \sqrt{1 - \xi^2}} J_l(\kappa\xi) H_n^{(2)}(\kappa\xi) d\xi \right. \\
& + \int_\beta^1 \frac{4\xi^2 (\xi^2 - \beta^2) \sqrt{1 - \xi^2}}{(2\xi^2 - 1)^4 + 16\xi^4 (\xi^2 - \beta^2) (1 - \xi^2)} J_l(\kappa\xi) H_n^{(2)}(\kappa\xi) d\xi \\
& \left. - \pi \frac{\sqrt{\xi^2 - \beta^2}}{\left[(2\xi^2 - 1)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - \beta^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \right]'} \right]_{\xi = \xi_r} J_l(\kappa\xi_r) H_n^{(2)}(\kappa\xi_r), \\
& l - n = 2m, \quad l \geq n.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

W przypadku gdy $l < n$, iloczyn funkcji Bessela $J_l(\cdot) H_n^{(2)}(\cdot)$ występujący we wzorze (7.24), należy zastąpić iloczynem $J_n(\cdot) H_l^{(2)}(\cdot)$. Szczegóły przedstawionej metody obliczenia całek nieskończonych można znaleźć m.in. w pracy [49], s. 132–134 oraz w pracy [62].

7.4. ROZWIĄZANIE ZADANIA DRGAŃ BELKI NIEPRYZMATYCZNEJ

Po podstawieniu do równania (7.6) funkcji odporu podłoża (7.10) otrzymamy

$$\begin{aligned}
EJ(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(2 \frac{\partial EJ(x)}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial^2 EJ(x)}{\partial x^2} - nN(x) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - n \frac{\partial N(x)}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\
- \omega^2 g \rho_B(x) w = n \left(p(x) - (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} r_l T_l(x) \right).
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Rozwiązania równania różniczkowego (7.25) poszukiwać będziemy w postaci szeregów Czebyszewa

$$w(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l [w] T_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l T_l(x). \tag{7.26}$$

Do rozwiązania równania (7.25) zastosujemy przedstawione w punkcie 2.3, twierdzenie 1.

Zastosowanie tego twierdzenia wymaga m.in. rozwinięcia prawej strony równania (7.25) w szereg Czebyszewa. Ponieważ funkcja $(1-x^2)^{-1/2}$, związana z reakcją podłoża, nie ma takiego rozwinięcia, prawą i lewą stronę równania (7.25) przemnożymy przez $(1-x^2)$, otrzymując następujące równanie

$$\begin{aligned}
& (1-x^2)EJ(x)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(2(1-x^2)\frac{\partial EJ(x)}{\partial x}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\
& + (1-x^2)\left(\frac{\partial^2 EJ(x)}{\partial x^2} - nN(x)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
& - n(1-x^2)\frac{\partial N(x)}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} - \omega^2 g(1-x^2)\rho_B(x)w \\
& = n\left((1-x^2)p(x) - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\sum_{l=0}^{\infty} r_l T_l(x)\right).
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Występujące w tak zmodyfikowanym równaniu różniczkowym czwartego rzędu funkcje \hat{P}_m , \hat{P} są określone wtedy wzorami

$$\begin{aligned}
\hat{P}_0(x) &= (1-x^2)EJ(x), \\
\hat{P}_1(x) &= 2(1-x^2)\frac{\partial EJ(x)}{\partial x}, \\
\hat{P}_2(x) &= (1-x^2)\left(\frac{\partial^2 EJ(x)}{\partial x^2} - nN(x)\right), \\
P_3(x) &= -(1-x^2)n\frac{\partial N(x)}{\partial x}, \\
\hat{P}_4(x) &= -(1-x^2)\omega^2 g\rho_B(x), \\
\hat{P}(x,t) &= n\left((1-x^2)p(x) - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\sum_{l=0}^{\infty} r_l T_l(x)\right).
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Po wykorzystaniu zależności (2.31) związane z \hat{P}_m funkcje Q_m przyjmują postać

$$\begin{aligned}
Q_0(x) &= (1-x^2)EJ(x), \\
Q_1(x) &= -2(1-x^2)\frac{\partial EJ(x)}{\partial x} + 8x EJ(x), \\
Q_2(x) &= (1-x^2)\frac{\partial^2 EJ(x)}{\partial x^2} - 12x\frac{\partial EJ(x)}{\partial x} - 12EJ(x) - (1-x^2)nN(x), \quad (7.29) \\
Q_3(x) &= 4x\frac{\partial^2 EJ(x)}{\partial x^2} + 12\frac{\partial EJ(x)}{\partial x} + (1-x^2)n\frac{\partial N(x)}{\partial x} - 4xnN(x), \\
Q_4(x) &= -2\frac{\partial^2 EJ(x)}{\partial x^2} + 2xn\frac{\partial N(x)}{\partial x} + 2nN(x) - (1-x^2)\omega^2 g \rho_B(x).
\end{aligned}$$

W dalszych przekształceniach wykorzystamy zależności (2.38) oraz rozwinięcie w szereg Czebyszewa funkcji $(1-x^2)^{1/2}$ ([144], s. 143)

$$(1-x^2)^{1/2} = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4m^2-1} T_{2m}(x). \quad (7.30)$$

Po podstawieniu formuł (7.29) do wzoru (2.29) i wykonaniu złożonych przekształceń, z wykorzystaniem wzorów (2.37) i (2.38), otrzymamy nieskończony układ równań algebraicznych umożliwiający wyznaczenie współczynników w_l rozwinięcia funkcji przemieszczeń $w(x)$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (E_{k,l} + nN_{k,l} + \omega^2 g G_{k,l}) w_l = n \left(F_k + \sum_{l=0}^{\infty} r_l R_{k,l} \right), \quad k=0, 1, 2, 3, \dots, \quad (7.31)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
E_{k,l} &= -2(k+1)(k+2)(k+3)(k-4)(k-5)(l-1)l e_{k-l-2} \\
&\quad - 2(k-1)(k-2)(k-3)(k+4)(k+5)(l-1)l e_{k+l+2} \\
&\quad + \left(4(k^2-9)(k^2-4)l(kl+11) - 8(k+2)(k+3)(k-l)l(7k-23) \right) e_{k-l} \\
&\quad + \left(4(k^2-9)(k^2-4)l(kl-11) + 8(k-2)(k-3)(k+l)l(7k+23) \right) e_{k+l} \\
&\quad + \left(2(k^2-9)(k^2-4)(k^2-1)(k-2l-4) \right. \\
&\quad \left. - 2(k^2-9)(k^2-4)(k-l+1)((k+1)(k-l+2) - 12(k-1)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -8(k^2 - 9)(k-1)(k-2)(k-l)(k-l+2) \\
& -4(k-1)(k-2)(k-3)(k-l+2)(k-l+3)e_{k-l+2} \\
& + (2(k^2 - 9)(k^2 - 4)(k^2 - 1)(k+2l+4) \\
& - 2(k^2 - 9)(k^2 - 4)(k+l-1)((k-1)(k+l-2)+12(k+1)) \\
& + 8(k^2 - 9)(k+1)(k+2)(k+l)(k+l-2) \\
& - 4(k+1)(k+2)(k+3)(k+l-2)(k+l-3)e_{k+l-2} \\
& + \begin{cases} -4(k^2 - 9)(k^2 - 4)(l-2)[(k-l+2)e_{k-l+2} + (k+l-2)e_{k+l-2}], & \text{gdy } l=0,1; \\ -4\sum_{j=1}^{l-1} [24l(2k^2 - 23) + (k^2 - 9)(k^2 - 4)(l-2)](k-l+2j)e_{k-l+2j}, & \text{gdy } l=2,3; \\ -96l\sum_{j=1}^{l-1} (2k^2 - 23)(k-l+2j)e_{k-l+2j} & \text{gdy } l \geq 4, \\ -(k^2 - 9)(k^2 - 4)(l-2)[(k-l+2)e_{k-l+2} + (k+l-2)e_{k+l-2}], \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.32}$$

$$\begin{aligned}
N_{k,l} &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)(k+3)(k-5)l(n_{k-l-4} - n_{k+l-4}) \\
& - (k+2)(k+3)(2k^2 - 9k + 13)l(n_{k-l-2} - n_{k+l-2}) \\
& + 3(k^2 - 9)(k^2 + 2)l(n_{k-l} - n_{k+l}) \\
& - (k-2)(k-3)(2k^2 + 9k + 13)l(n_{k-l+2} - n_{k+l+2}) \\
& + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)(k-3)(k+5)l(n_{k-l+4} - n_{k+l+4}),
\end{aligned} \tag{7.33}$$

$$\begin{aligned}
G_{k,l} &= \frac{1}{8}((k+1)(k+2)(k+3)(g_{k-l-6} + g_{k+l-6}) \\
& - 6(k-1)(k+2)(k+3)(g_{k-l-4} + g_{k+l-4}) \\
& + 15(k+1)(k-2)(k+3)(g_{k-l-2} + g_{k+l-2}) - 20k(k^2 - 7)(g_{k-l} + g_{k+l}) \\
& + 15(k-1)(k+2)(k-3)(g_{k-l+2} + g_{k+l+2}) \\
& - 6(k+1)(k-2)(k-3)(g_{k-l+4} + g_{k+l+4}) \\
& + (k-1)(k-2)(k-3)(g_{k-l+6} + g_{k+l+6})),
\end{aligned} \tag{7.34}$$

$$\begin{aligned}
F_k = & \frac{1}{4} \left(-(k+1)(k+2)(k+3)p_{k-6} + 6(k-1)(k+2)(k+3)p_{k-4} \right. \\
& - 15(k+1)(k-2)(k+3)p_{k-2} + 20k(k^2-7)p_k \\
& - 15(k-1)(k+2)(k-3)p_{k+2} + 6(k+1)(k-2)(k-3)p_{k+4} \\
& \left. - (k-1)(k-2)(k-3)p_{k+6} \right), \tag{7.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{k,l} = & \frac{2}{\pi} \left(\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{(k-l-4)^2-1} + \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{(k+l-4)^2-1} \right. \\
& - \frac{4(k^2-4)(k+3)}{(k-l-2)^2-1} - \frac{4(k^2-4)(k+3)}{(k+l-2)^2-1} + \frac{6k(k^2-9)}{(k-l)^2-1} \\
& + \frac{6k(k^2-9)}{(k+l)^2-1} - \frac{4(k^2-4)(k-3)}{(k-l+2)^2-1} - \frac{4(k^2-4)(k-3)}{(k+l+2)^2-1} \\
& \left. + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{(k-l+4)^2-1} + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{(k+l+4)^2-1} \right) \left((k+l+1) \bmod 2 \right). \tag{7.36}
\end{aligned}$$

Występujące we wzorach (7.32)–(7.35) parametry e_l , n_l , g_l , p_l są współczynnikami rozwinięć funkcji

$$e_l = a_l [EJ(x)], \quad n_l = a_l [N(x)], \quad g_l = a_l [\rho_B(x)], \quad p_l = a_l [p(x)].$$

Pierwsze cztery równania spełnione tożsamościowo zastępuje się równaniami określającymi warunki brzegowe. W rozważanym problemie warunki te mają postać (patrz wzory (3.3)_{2,3})

$$\begin{aligned}
m(\mp 1) = & -EJ(x) \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=\mp 1} = 0, \\
q(\mp 1) = & -EJ(x) \frac{\partial^3 w(x)}{\partial x^3} - \left(\frac{\partial}{\partial x} EJ(x) \right) \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + nN(x) \frac{\partial w(x)}{\partial x} \Big|_{x=\mp 1} = 0. \tag{7.37}
\end{aligned}$$

Korzystając z wartości wielomianów $T_n^{(m)}(\mp 1)$ obliczonych ze wzorów (2.34), (2.35) oraz wartości stałych EJ_- , EJ_+ , EJ'_- , EJ'_+ , N_- , N_+ (patrz wzory (3.28), (3.29)), otrzymamy cztery dodatkowe równania opisujące warunki brzegowe

$$\begin{aligned}
m(-1) = m_- &= -EJ_- \frac{1}{3} \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l l^2 (l^2 - 1) w_l = \sum_{l=0}^{\infty} ' B_{0,l} w_l = 0, \\
m(+1) = m_+ &= -EJ_+ \frac{1}{3} \sum_{l=0}^{\infty} ' l^2 (l^2 - 1) w_l = \sum_{l=0}^{\infty} ' B_{1,l} w_l = 0, \\
q(-1) = t_- &= \sum_{l=0}^{\infty} ' (-1)^l l^2 \left[-\frac{1}{3} (l^2 - 1) EJ'_- \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{15} (l^2 - 1) (l^2 - 4) EJ_- - n N_- \right] w_l = \sum_{l=0}^{\infty} ' B_{2,l} w_l = 0, \\
q(+1) = t_+ &= -\sum_{l=0}^{\infty} ' l^2 \left[\frac{1}{3} (l^2 - 1) EJ'_+ \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{15} (l^2 - 1) (l^2 - 4) EJ_+ - n N_+ \right] w_l = \sum_{l=0}^{\infty} ' B_{3,l} w_l = 0.
\end{aligned} \tag{7.38}$$

Cztery równania (7.38) oraz równania (7.31) dla $k = 4, 5, 6, \dots$ tworzą nieskończony układ równań algebraicznych, pozwalający na wyznaczenie nieznanycy współczynniczy rozwinięcia funkcji przemieszczeń $w(x)$ (wzór (7.26)). Po zapisaniu układu w uproszczonej postaci otrzymamy

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty} ' B_{k,l} w_l &= 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \\
\sum_{l=0}^{\infty} ' (E_{k,l} + n N_{k,l} + \omega^2 g G_{k,l}) w_l &= n \left(F_k + \sum_{l=0}^{\infty} ' r_l R_{k,l} \right), \quad k = 4, 5, 6, \dots,
\end{aligned} \tag{7.39}$$

7.5. ROZWIĄZANIE PROBLEMU INTERAKCJI BELKI Z PÓLPŁASZCZYZNĄ SPRĘŻYSTĄ

W analizowanym zagadnieniu założyliśmy następujące warunki zgodności przemieszczeń półpłaszczyzny i belki (wzór (7.4) po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych)

$$v(x, 0) = w(x), \quad \text{gdy} \quad -1 \leq x \leq +1 \tag{7.40}$$

równoważne relacjom

$$w_l = v_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots \tag{7.41}$$

gdzie $v(x, 0)$ – amplituda przemieszczeń brzegu półpłaszczyzny, $w(x)$ – amplituda drgań osi belki.

Po podstawieniu związku (7.41) do układu równań (7.39), wykorzystaniu (7.16), (7.17), (7.22) i wykonaniu przekształceń otrzymujemy nieskończony układ równań algebraicznych

$$\begin{aligned}
 & -\frac{P_0}{a\mu} \left[\sum_{m=0}^{\infty} r_{2m} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{m+l} B_{k,2l} \varphi_{2l,2m} \right) \right. \\
 & \left. + \sum_{m=0}^{\infty} r_{2m+1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{m+l} B_{k,2l+1} \varphi_{2l+1,2m+1} \right) \right] = 0, \\
 & \qquad \qquad \qquad k = 0, 1, 2, 3 \\
 & -\sum_{m=0}^{\infty} r_{2m} \left(\frac{P_0}{a\mu} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{m+l} C_{k,2l} \varphi_{2l,2m} \right) + n R_{k,2m} \right) \\
 & -\sum_{m=0}^{\infty} r_{2m+1} \left(\frac{P_0}{a\mu} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{m+l} C_{k,2l+1} \varphi_{2l+1,2m+1} \right) + n R_{k,2m+1} \right) = n F_k, \\
 & \qquad \qquad \qquad k = 4, 5, 6, \dots
 \end{aligned} \tag{7.42}$$

gdzie

$$C_{k,l} = E_{k,l} + n N_{k,l} + \omega^2 g G_{k,l} \tag{7.43}$$

pozwalający na wyznaczenie nieznanych współczynników r_m . Po podstawieniu współczynników r_m do wzorów (7.16) wyznaczmy wyrazy rozwinięcia poszukiwanej funkcji przemieszczeń półpłaszczyzny (7.14), a po uwzględnieniu relacji (7.40) również przemieszczeń belki (7.26).

7.6. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

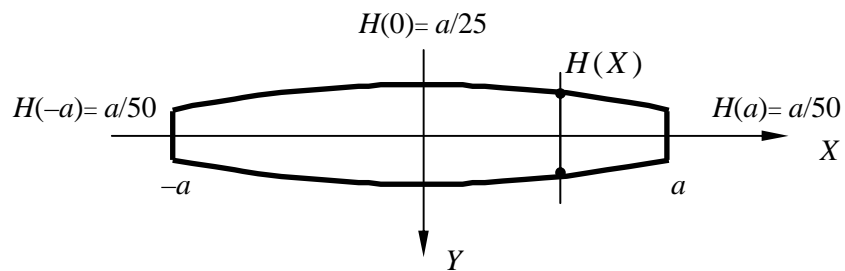
Przykład 7.1

W celu ilustracji przedstawionej metody zastosujemy ją do rozwiązania problemu drgań belki o symetrycznym przekroju względem osi X , dla której wysokość jest opisana funkcją (rys. 7.5)

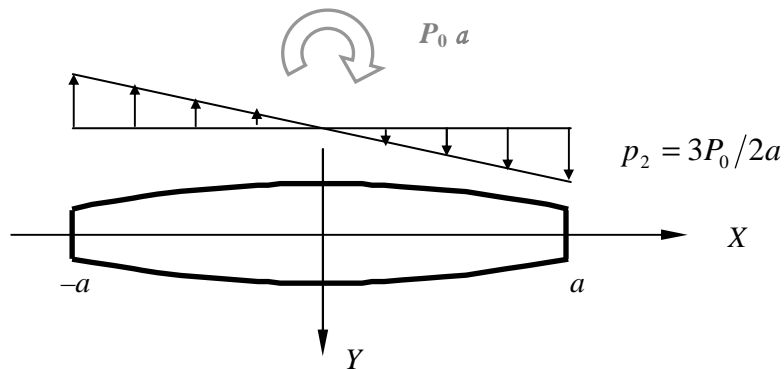
$$H(X) = -a \frac{\left[\left(\frac{X}{a} \right)^2 - 1 \right] - 1}{50}. \quad (7.44)$$

Po przejściu do wielkości bezwymiarowych (7.5) funkcja ta wyrazi się wzorem

$$h(x) = -\frac{(x^2 - 1) - 1}{50}. \quad (7.45)$$



Rys. 7.5. Charakterystyczne wartości funkcji $H(X)$ opisującej wysokość belki



Rys. 7.6. Przestrzenny rozkład obciążenia działającego na układ

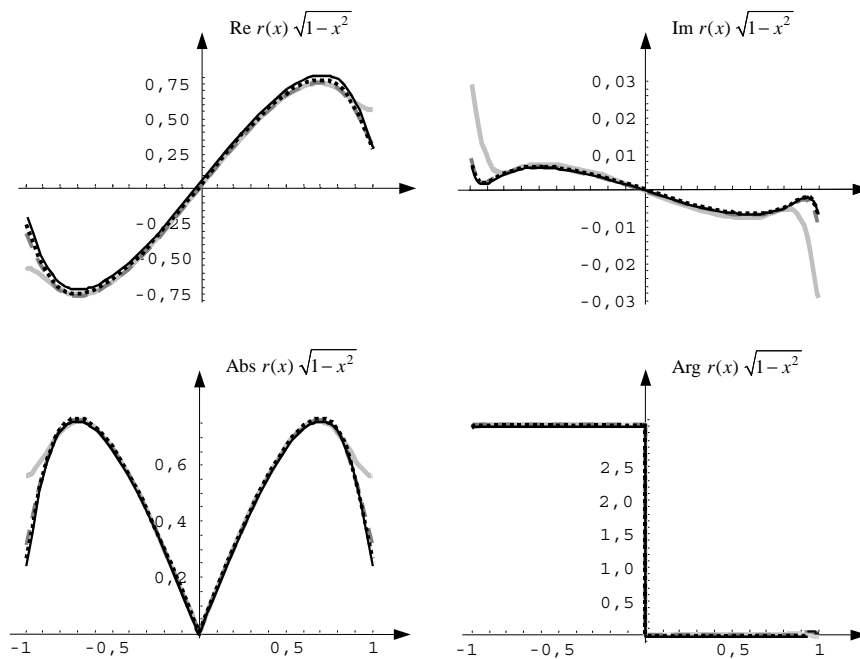
Pozostałe parametry belki wykonanej z betonu to: $E = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\rho_{BV} = 2400 \text{ kg/m}^3$ (ρ_{BV} jest masą na jednostkę objętości), $a = 1 \text{ m}$, dla półpłaszczyzny $\mu = 1,5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,3$. Na belkę działa liniowo zmienne obciążenie antysymetryczne (rys. 7.6). Przestrzenny rozkład obciążenia w postaci bezwymiarowej wyraża funkcja

$$p_2(x) = \frac{3}{2}x. \quad (7.46)$$

Po rozwinięciu w szeregi Czebyszewa bezwymiarowych charakterystyk geometrycznych belki $J(x)$ i $A(x)$ – gdzie $A(x)$ jest jej polem przekroju i podstawieniu pozostałych wartości liczbowych otrzymamy $EJ(x)$ oraz $\rho_B = \rho_{BV} A(x)$.

Obliczenia wykonano dla czterech częstości wymuszenia: $\omega_1 = 25\pi$ rad/s, $\omega_2 = 50\pi$ rad/s, $\omega_3 = 100\pi$ rad/s, $\omega_4 = 200\pi$ rad/s. W celu rozwiązania nieskończonego układu równań algebraicznych (7.42) ograniczymy go do układu skończonego. Wtedy funkcja przemieszczeń oraz funkcja oporu podłoża są określone przez skończone sumy szeregów Czebyszewa

$$w(x) = \sum_{l=0}^m w_l T_l(x), \quad r(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^m r_l T_l(x). \quad (7.47)$$



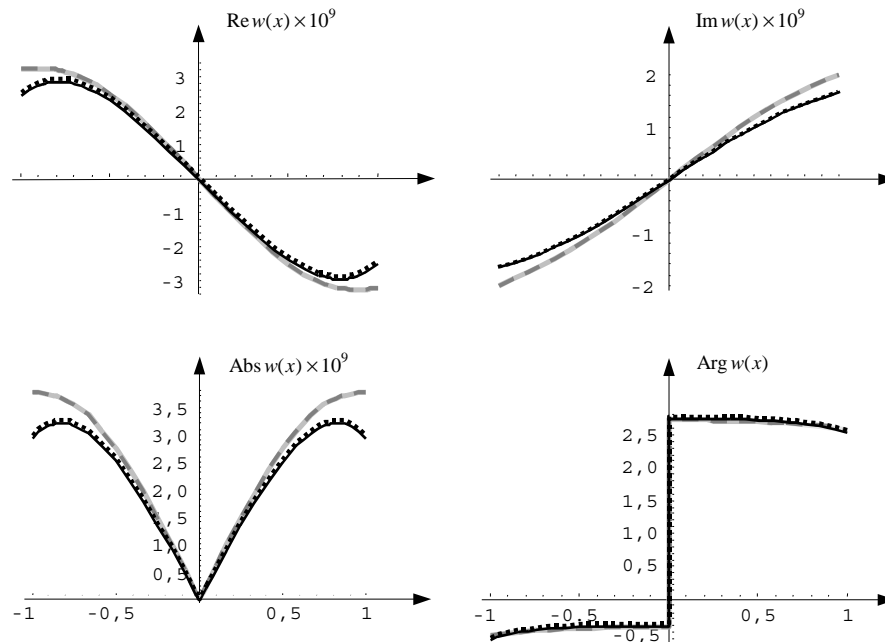
Rys. 7.7. Wykresy zespolonej funkcji $r(x)\sqrt{1-x^2}$ ($r(x)$ – funkcja oporu podłoża) w przypadku różnych rozmiarów bazy aproksymacyjnej $m = 13$ (---), 25 (- · -), 37 (·····), 49 (—)

Badając zbieżność rozwiązań, układ ten rozwiązano dla coraz większego rozmiaru bazy aproksymującej $m = 13, 25, 37, 49$. Otrzymane w wyniku obliczeń funkcje przedstawiono na rysunkach 7.7 i 7.8.

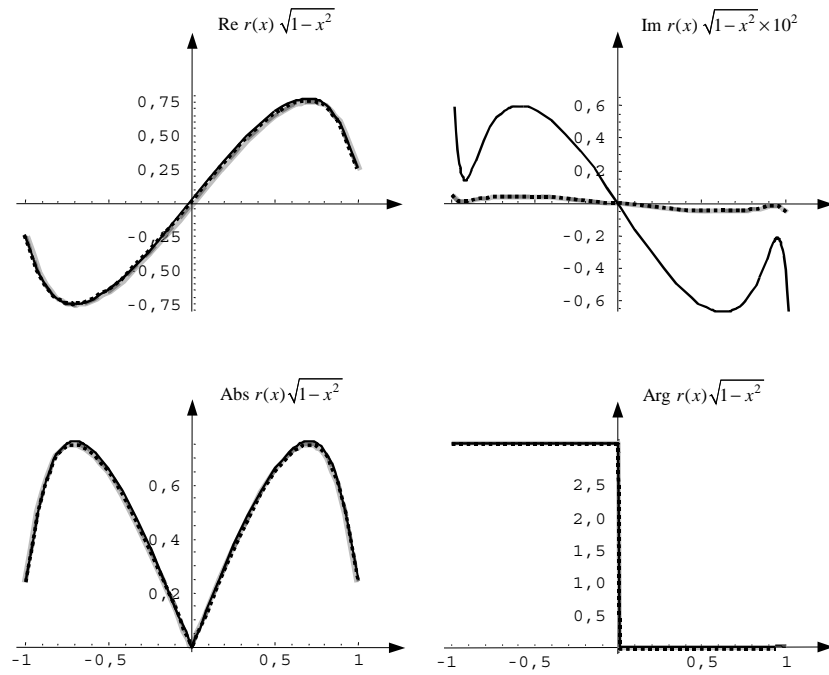
Ponieważ funkcje $r(x)$, $w(x)$ przyjmują wartości zespolone, na rysunkach tych przedstawiono ich części rzeczywiste – $\text{Re}(z)$ oraz urojone – $\text{Im}(z)$, a występujące tam również funkcje $\text{Abs}(z)$, $\text{Arg}(z)$ oznaczają odpowiednio moduł oraz argument zespolonej wartości z . Na rysunku 7.7 przedstawiono wykresy funkcji $r(x)\sqrt{1-x^2}$. Analogiczne rezultaty dla funkcji przemieszczeń $w(x)$ pokazano na rysunku 7.8. Obliczenia wykonano dla częstości wymuszenia $\omega = 100\pi$ rad/s.

Wykresy przedstawione na rysunkach 7.9 i 7.10 pokazują natomiast funkcje $r(x)\sqrt{1-x^2}$, $w(x)$ obliczone dla różnych częstości wymuszenia $\omega = 25\pi, 50\pi, 100\pi, 200\pi$ rad/s, w tym przypadku parametr $m = 49$.

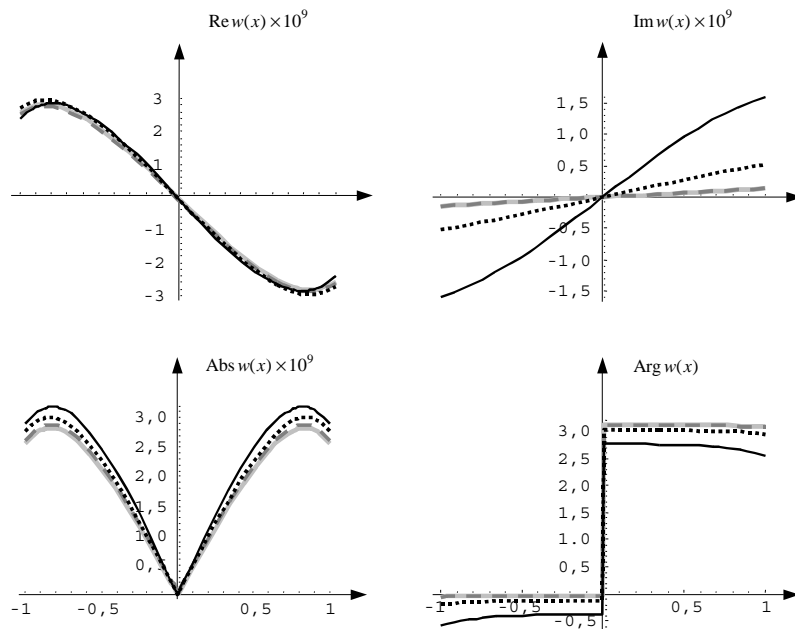
Wykresy zespolonych funkcji przemieszczeń $w(1)$ (na końcu belki) w zależności od wartości bezwymiarowego parametru częstości $\omega a/c_2$ przedstawiono na rys. 7.11. Przyjęte do obliczeń częstości $\omega = 25\pi, 50\pi, 100\pi, 200\pi$ rad/s odpowiadają następującym wartościom bezwymiarowego parametru częstości $\omega a/c_2 = 0,287, 0,573, 1,147, 2,294$.



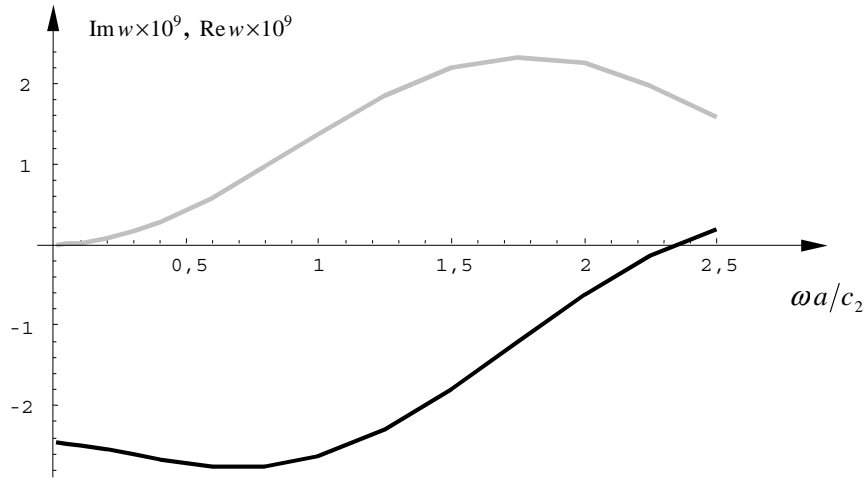
Rys. 7.8. Wykresy zespolonej funkcji przemieszczeń $w(x)$ w przypadku różnych rozmiarów bazy aproksymacyjnej $m = 13$ (—), 25 (---), 37 (.....), 49 (-.-.-)



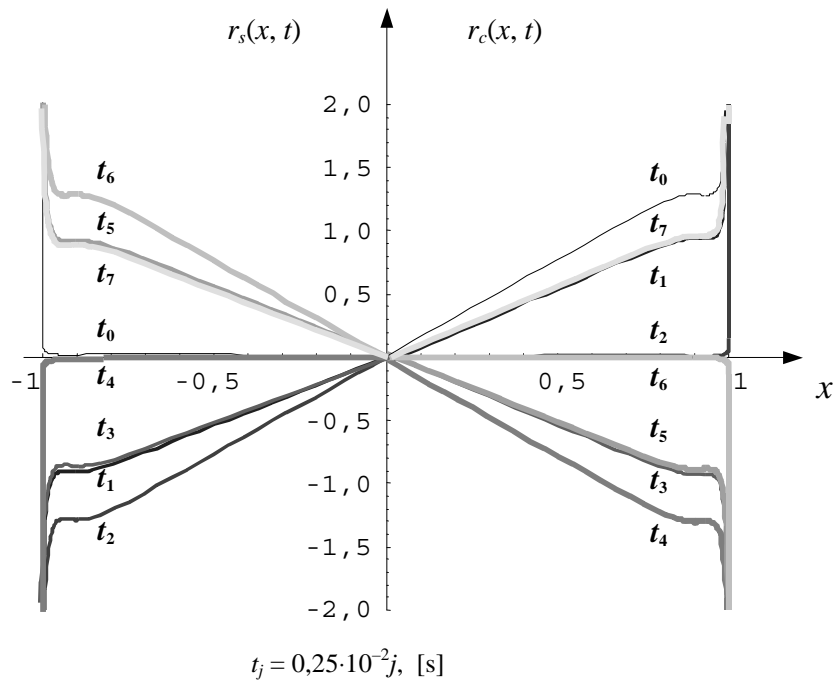
Rys. 7.9. Wykresy zespolonej funkcji $r(x)\sqrt{1-x^2}$ w przypadku różnych częstotliwości wymuszenia $\omega = 25\pi$ (—), 50π (— —), 100π (· · · · ·), 200π (— — —)



Rys. 7.10. Wykresy zespolonej funkcji przemieszczeń $w(x)$ w przypadku różnych częstotliwości wymuszenia $\omega = 25\pi$ (—), 50π (— —), 100π (· · · · ·), 200π (— — —)



Rys. 7.11. Wykresy zespolonej funkcji przemieszczeń $w(1)$: Re (—), Im (—), w przypadku różnych wartości bezwymiarowego parametru częstości wymuszenia $\omega a/c_2$.



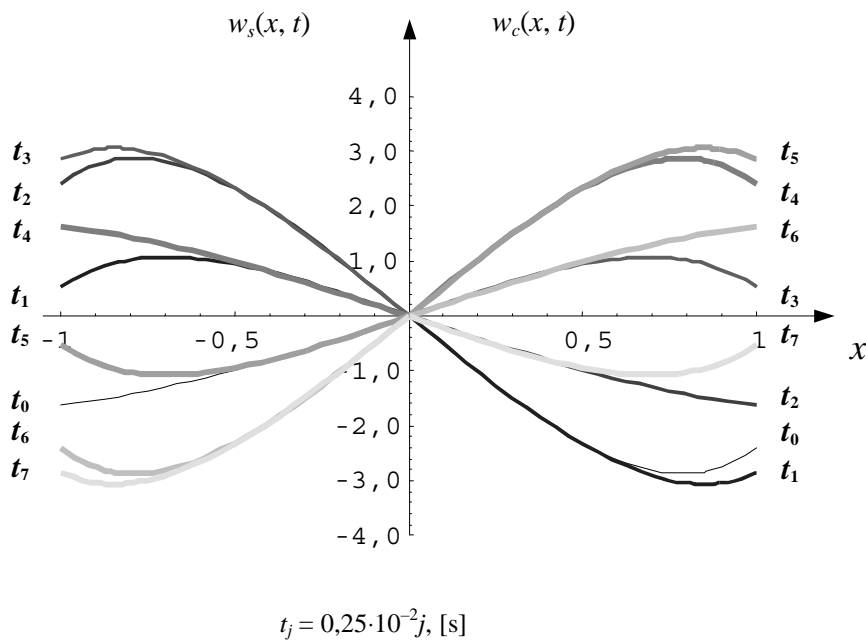
Rys. 7.12. Wykresy funkcji oporu podłoża $r_c(x, t) = |r(x)| \cos(100\pi t + \text{Arg}(r(x)))$ i $r_s(x, t) = |r(x)| \sin(100\pi t + \text{Arg}(r(x)))$ w przypadku różnych wartości czasu t

Aby uzyskać zależności funkcji odporu podłoża od czasu t , należy wykorzystać relacje (7.5) oraz wykonać następujące przekształcenia:

$$\begin{aligned} r(x,t) &= r_c(x,t) + i r_s(x,t) = r(x) \exp(i\omega t) = (\operatorname{Re} r(x) + i \operatorname{Im} r(x)) \exp(i\omega t) \\ &= |r(x)| \exp(i(\omega t + \operatorname{Arg}(r(x)))) \\ &= |r(x)| \cos(\omega t + \operatorname{Arg}(r(x))) + i |r(x)| \sin(\omega t + \operatorname{Arg}(r(x))). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Analogicznie w przypadku funkcji przemieszczeń otrzymujemy

$$\begin{aligned} w(x,t) &= w(x) \exp(i\omega t) = w_c(x,t) + i w_s(x,t) \\ &= |w(x)| \cos(\omega t + \operatorname{Arg}(w(x))) + i |w(x)| \sin(\omega t + \operatorname{Arg}(w(x))). \end{aligned} \quad (7.49)$$



Rys. 7.13. Wykresy funkcji przemieszczeń $w_c(x,t) = |w(x)| \cos(100\pi t + \operatorname{Arg}(w(x)))$ i $w_s(x,t) = |w(x)| \sin(100\pi t + \operatorname{Arg}(w(x)))$ w przypadku różnych wartości czasu t

We wzorach (7.48), (7.49) oznaczenie funkcji $\operatorname{Abs}(z)$ zastąpiono symbolem $|z|$. Wykresy funkcji $r_c(x,t)$, $r_s(x,t)$ oraz $w_c(x,t)$, $w_s(x,t)$ w przypadku różnych wartości czasu t przedstawiono na rysunkach 7.12, 7.13. Z analizy otrzymanych wyników widać, że dostatecznie dobrą aproksymację rozwiązań uzyskujemy dla $m = 37$. Różnice

między wynikami dla $m = 37$ oraz $m = 49$ są bardzo małe. Zaskoczeniem mogą natomiast być nieduże różnice w rozwiązaniach dla różnych częstości wymuszeń. W przypadku częstości 100π rad/s i 200π rad/s wykresy analizowanych funkcji prawie się pokrywają.

Wyniki uzyskane w przypadku gdy na układ z rysunku 7.5 działa obciążenie równomiernie rozłożone można znaleźć w pracy autora [153].

8. DRGANIA NIEPRYZMATYCZNEJ BELKI TIMOSHENKI

8.1. WPROWADZENIE

Zagadnienia dotyczące układów belkowych typu Timoshenki, podobnie jak problemy związane z układami prętowymi typu Eulera, cieszą się dużym zainteresowaniem. O zainteresowaniu tym świadczy duża liczba prac o tej tematyce. Analityczne rozwiązanie zagadnienia drgań własnych pryzmatycznej belki Timoshenki przedstawił m.in. Huang [74]. Sprowadził on układ dwóch równań różniczkowych do jednego równania, które rozwiązał analitycznie. Uzyskane rozwiązanie wyraża się przez funkcje trygonometryczne i hiperboliczne. Zagadnienia drgań własnych belki wspornikowej, z umieszczonym na końcu elementem masowym o niepomiąalnej bezwładności obrotowej, Bruch i Mitchell [18] rozwiązali tą samą metodą. Wiele z publikowanych prac zajmujących się drganiami belek Timoshenki dotyczy zagadnienia stateczności. Problemem tym zajmowali się m.in. Katsikadelis [95] i Kounadis [95], [96]. W pracy [95] przedstawiono analityczne rozwiązanie stateczności kolumny Becka. W pracy [96] Kounadis wyprowadził równania opisujące drgania belki Timoshenki obciążonej skupionym i równomiernie rozłożonym obciążeniem śledzącym. Równania te zostały wyprowadzone niezależnie trzema metodami z zastosowaniem: zasady prac przygotowanych, zasady Hamiltona oraz na podstawie stanu równowagi dynamicznej infinytymalnego elementu belki. Wykorzystanie do wyprowadzenia równań, opisujących drgania belki Timoshenki obciążonej siłą osiową i siłą śledzącą, wariacyjnej zasady Hamiltona można znaleźć w pracy Sato [158]. Zagadnienia drgań i stateczności niepryzmatycznej belki Timoshenki rozwiązane metodą macierzy przeniesienia przedstawiono w pracy Irie, Yamada i Takahashi [77]. Rozwiązanie problemu stateczności belek niepryzmatycznych, z uwzględnieniem różnych sposobów podparcia belki, przedstawili w pracy [48] Esmailzadeh i Ohadi. W pracy tej rozwiązania poszukiwano w postaci szeregów potęgowych. Szeregów potęgowych użyto również do rozwiązania zagadnienia stateczności belki wspornikowej i sztywno-przegubowej w pracy Leunga i Zhou'a [121]. Rozwiązanie zagadnienia drgań belek niepryzmatycznych, z wykorzystaniem metody elementów skończonych, można znaleźć w pracy Klasztornego [92]. W pracy tej przyjęto wielomianową aproksymację funkcji kształtu, na pod-

stawie których wyznaczono następnie macierze sztywności i bezwładności belkowych elementów skończonych typu Eulera i Timoshenki. Metoda elementów skończonych do rozwiązania zagadnienia własnego pryzmatycznej belki Timoshenki, sprężystości utwierdzonej na brzegach, została zastosowana również przez Abbasa [2]. Teorię dotyczącą metody krępych elementów spektralnych oraz zastosowanie tej metody do analizy dynamicznej fundamentów ramowych pod turbozespoły przedstawiono w monografii Wrany [196]. Dynamiczna macierz sztywności pryzmatycznego elementu skończonego typu Timoshenki została wyznaczona analitycznie w pracy [10] przez Banerjee'a i Williamsa. Zastosowanie do rozwiązania transformacji Laplace'a można znaleźć pracach Lueschen, Bergmana i McFarlanda [127] oraz Saito i Otomi [154]. W pracy [127] wyznaczono i porównano funkcje Greena pryzmatycznych belek Eulera i Timoshenki. W przypadku belki Eulera uwzględniono obciążenia belki niezmiennym w czasie obciążeniem osiowym. W pracy [154] rozwiązano zadanie drgań i stateczności belki Timoshenki z dodanym elementem masowym (o niepomijalnej bezwładności obrotowej), poddanej działaniu obciążenia osiowego oraz obciążenia śledzącego. Dodatkowy element masowy, przytwierdzony do swobodnego końca belki, uwzględniono również w pracy Auciello [5]. W pracy tej za pomocą aproksymacji Lagrange'a rozwiązano zagadnienie drgań swobodnych sprężystości utwierdzonej belki wspornikowej o liniowo zmiennej wysokości. W innej pracy Auciello i Ercolano [4] do rozwiązania zagadnienia drgań belki Timoshenki obciążonej siłą osiową zastosowali metodę Rayleigha–Ritza. Jako zbiór funkcji bazowych zastosowano funkcje ortogonalne. Pierwszy element tego zbioru to wielomian spełniający warunki brzegowe, następnie otrzymywane są metodą ortogonalizacji Grama–Schmidta. Metodę Rayleigh–Ritza do wyznaczenia częstości własnych belki swobodnie podpartej, sprężystości utwierdzonej na końcach, o zmiennej liniowo wysokości, zastosowali również Gutierrez, Laura i Rossi w [70]. Do aproksymacji przemieszczeń i funkcji obrotu przekroju poprzecznego wykorzystali klasyczne wielomiany potęgowe. Metodę Galerkiną do wyznaczenia częstości własnych zastosowali w pracy [20] Chehil i Jategaonkar. W pracy analizowano belki o przedziałami liniowo zmiennych parametrach. Jedną ze stosowanych metod do rozwiązywania omawianych problemów jest metoda DQM (*Differential Quadrature Method*). Przykład jej zastosowania możemy znaleźć w pracy Karami, Malekzadeha i Shahpari [89]. Rozwiązanie problemu drgań belki o okresowej geometrii wywołanych obciążeniem harmonicznym wraz z zagadnieniem wrażliwości przedstawiono w pracy Mazur-Śniady i Śniadego [135]. Problem drgań skrętnych belki Timoshenki obciążonej siłą osiową rozwiązano w pracy [166].

Odmienne podejście do rozwiązania problemu drgań belek niepryzmatycznych przedstawiają Tong, Tabarrok i Yeh [188]. Belkę niepryzmatyczną aproksymowali oni belką odcinkowo-pryzmatyczną o skokowo zmiennych parametrach. Korzystając z analitycznych rozwiązań belki pryzmatycznej oraz warunków ciągłości, rozwiązali analizowany problem. Rozwiązanie zagadnienia drgań belki, o skokowo zmiennych parametrach, przedstawili w pracy [200] Yavari, Sarkaniand i Reddy. Do rozwiązania wykorzystali formalizm teorii dystrybucji. Zagadnieniem drgań bardziej złożonych

układów zajmował się m.in. Posiadała [145]. W pracy [145] rozwiązano problem poprzecznych drgań swobodnych belki Timoshenki z dodatkowymi elementami, takimi jak sprężyny, elementy masowe z zerowym i niezerowym momentem bezwładności, liniowe oscylatory oraz dodatkowe podpory. Funkcję przemieszczeń i kątów obrotu przekroju poprzecznego aproksymowano szeregiem względem funkcji własnych, które uzyskano z rozwiązania zagadnienia bez dodatkowych elementów. W pracy zastosowano formalizm wariacyjny z mnożnikami Lagrange'a.

W części z cytowanych prac, tj. [10, 18, 74, 95, 96, 145, 154, 158], rozważania dotyczą belek pryzmatycznych. Jeżeli w pracach pojawiają się rozważania dotyczące prętów niepryzmatycznych, to zazwyczaj przyjmuje się w nich szczególną postać funkcji opisujących zmienne parametry układu, np. funkcje liniowe, paraboliczne, wykładnicze (jak np. w pracy [5, 70, 77]) lub wielomiany potęgowe (jak w pracy [48]). W przypadku ogólnym rozwiązania te nie są znane. Obszerną bibliografię dotyczącą belek Timoshenki możemy znaleźć w pracy przeglądowej Laurry, Mauriziego i Rossiego [112].

W niniejszej rozdziale rozważamy zagadnienie liniowych drgań belki Timoshenki o zmiennych parametrach wytrzymałościowych i geometrycznych, spoczywającej na dwuparametrowym niejednorodnym podłożu sprężystym. Zakładamy, że funkcje określające zmienne parametry pręta, takie jak sztywność giętna, gęstość, zmienne parametry podłoża i obciążenia, można opisać dowolnymi funkcjami. Jednym z nielicznych ograniczeń jest założenie, że funkcje te można rozwinąć w szereg względem wielomianów Czebyszewa I rodzaju. Przedstawioną metodę zastosowano do rozwiązania trzech zagadnień: drgań własnych belki pryzmatycznej, stateczności belek niepryzmatycznych obciążonych obciążeniem niepotencjalnym oraz stateczności układu ramowego. Wyniki uzyskane w pierwszym przykładzie, tj. częstości własne oraz odpowiadające im formy własne, porównano z dokładnymi wynikami analitycznymi uzyskanymi przez Huanga [74]. W przykładzie drugim dokonano porównania rozwiązań uzyskanych belek Timoshenki z rozwiązaniami prętów Eulera oraz rozwiązano przykład pokazujący wpływ podłoża dwuparametrowego na wartości obciążenia krytycznego. Przykład trzeci ilustruje możliwość zastosowania opisanej metody do bardziej złożonych układów prętowych.

W celu zbadania skuteczności oraz określenia dokładności prezentowanej metody, zagadnienie własne belki pryzmatycznej rozwiązano również innymi metodami przybliżonymi. Zastosowane metody: metoda elementów skończonych (metoda z niezależną aproksymacją kąta obrotu, wynikającego z odkształcalności postaciowej, przedstawiona w pracy Langer i Bryji [107]) oraz metody aproksymacyjne, w których rozwiązania poszukiwano w postaci klasycznych szeregów potęgowych lub klasycznych (trygonometrycznych) szeregów Fouriera. Otrzymane rozwiązania porównano z dokładnymi rozwiązaniami analitycznymi [74]. Rezultaty tych porównań pokazały, że prezentowana w pracy metoda daje znacznie mniejsze błędy (w stosunku do dokładnych rozwiązań) niż inne testowane w przykładzie metody.

W niniejszym rozdziale wykorzystano wyniki autora opublikowane w pracy [152].

8.2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Przedmiotem rozważań jest prostoliniowa niepryzmatyczna belka Timoshenki o długości $2a$, spoczywająca na dwuparametrowym podłożu sprężystym. Belka poddana jest działaniu dynamicznych siłowych obciążeń normalnych $p(X, t)$, obciążeń momentowych $o(X, t)$ oraz obciążeń stycznych $r(X, t)$. Ponadto na belkę działa obciążenie statyczne $F(X)$, które w przypadku $\eta = 1$ jest obciążeniem śledzącym, a gdy $\eta = 0$, jest obciążeniem osiowym. Przyjęto, że $F(X) > 0$ w przypadku siły rozciągającej. Liniowe poprzeczne i podłużne drgania belki są opisane wtedy następującym układem równań różniczkowych cząstkowych [77] (w celu uproszczenia pominięto wpływ tłumienia)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial X} + \eta F(X) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - \rho_V(X) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left(C(X) \frac{\partial W}{\partial X} \right) - K(X)W + p(X, t) &= 0, \\ Q - \frac{\partial M}{\partial X} - (1 - \eta) F(X) \frac{\partial W}{\partial X} - I(X) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + o(X, t) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial X} \left(EA(X) \frac{\partial U}{\partial X} \right) - H(X)U - \rho_H(X) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + r(X, t) &= 0, \end{aligned} \quad (8.1)$$

gdzie W – oznacza przemieszczenie prostopadłe do osi pręta, U – przemieszczenie styczne, Φ – kąt obrotu przekroju poprzecznego, M – moment gnący, Q – siła tnąca.

Funkcje

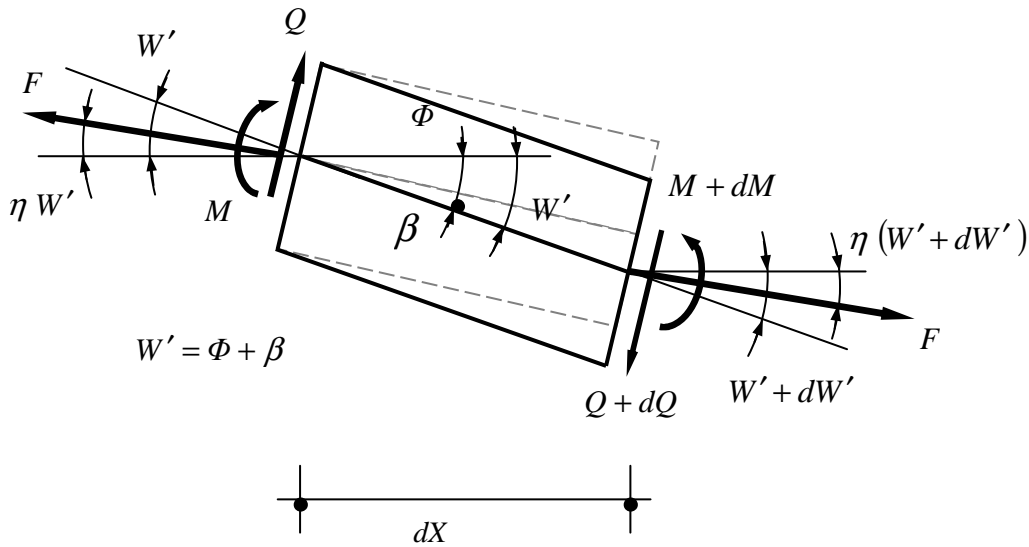
$$\rho_{V,H}(X) = \rho_B(X) + \rho_F^{V,H}(X)$$

są sumą mas pręta oraz tzw. mas „współpracujących” podłoża, przypadających na jednostkę długości, $I(X) = I_B(X)$ jest masowym momentem bezwładności przekroju pręta (przypadającym na jednostkę długości pręta), a $K(X)$, $C(X)$, $H(X)$ są funkcjami charakteryzującymi reakcje podłoża sprężystego. Element pręta dX przedstawiono na rysunku 8.1.

W równaniu (8.1) pominięto również wpływ na drgania poprzeczne pręta efektów drugiego rzędu, wynikających z działania zmiennej w czasie siły osiowej $S = EA(X) \partial U / \partial X$. W przypadku braku takiego założenia otrzymuje się sprzężony układ równań nieliniowych. Sprzężenia w układzie (8.1) pojawiają się również w przypadku braku symetrii parametrów względem osi X .

Po wykorzystaniu wzorów określających momenty gnące, siły tnące i siły osiowe

$$\begin{aligned} M(X, t) = -EJ(X) \frac{\partial \Phi}{\partial X}, \quad Q(X, t) = \kappa GA(X) \beta - F(X) \left(\eta \frac{\partial W}{\partial X} - \Phi \right), \\ \beta = \frac{\partial W}{\partial X} - \Phi, \quad S(X, t) = EA \frac{\partial U}{\partial X}, \end{aligned} \quad (8.2)$$



Rys. 8.1. Element dX belki obciążony obciążeniem osiowym ($\eta = 0$) oraz śledzącym ($\eta = 1$)

gdzie $EJ(X)$ – sztywność pręta na zginanie, $EA(X)$ – sztywność osiową, $\kappa GA(X)$ – sztywność pręta na ścinanie, κ – współczynnik ścinania, β – kąt odkształcenia postaciowego, układ równań (8.1) zapisujemy w następujący sposób:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\kappa GA + C) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial \kappa GA}{\partial X} - \frac{\partial(\eta F)}{\partial X} + \frac{\partial C}{\partial X} \right) \frac{\partial W}{\partial X} - KW \\ \quad - (\kappa GA - F) \frac{\partial \Phi}{\partial X} - \left(\frac{\partial \kappa GA}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial X} \right) \Phi - \rho_V \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + p = 0, \\ (\kappa GA - F) \frac{\partial W}{\partial X} + EJ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial EJ}{\partial X} \frac{\partial \Phi}{\partial X} - (\kappa GA - F) \Phi - I \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + o = 0, \\ EA \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial EA}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial X} - HU - \rho_H \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + r = 0. \end{array} \right. \quad (8.3)$$

Po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych

$$x = \frac{X}{a}, \quad w(x) = \frac{W(X)}{a}, \quad u(x) = \frac{U(X)}{a}, \quad \phi(x) = \Phi(X)$$

układ równań (8.3) przyjmie postać:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left(\overline{\kappa GA} + n\overline{C} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \overline{\kappa GA}}{\partial x} - n \left(\frac{\partial (\overline{\eta F})}{\partial x} - \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial w}{\partial x} - n\overline{K} w \\
- \left(\overline{\kappa GA} - n\overline{F} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \left(\frac{\partial \overline{\kappa GA}}{\partial x} - n \frac{\partial \overline{F}}{\partial x} \right) \phi - g \overline{\rho}_V \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + n\overline{p} = 0, \\
\left(\overline{\kappa GA} - n\overline{F} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \overline{EJ} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \overline{EJ}}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \left(\overline{\kappa GA} - n\overline{F} \right) \phi - g \overline{I} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + n\overline{o} = 0, \\
d \left(\overline{EA} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \overline{EA}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - n\overline{H} u - g \overline{\rho}_H \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + n\overline{r} = 0,
\end{array} \right. \quad (8.4)$$

a siły przekrojowe (8.2) wyrażą się wzorami:

$$\begin{aligned}
m(x,t) &= \frac{M(X,t)a}{EJ_0} = -\overline{EJ} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\
q(x,t) &= \frac{Q(ax)a^2}{EJ_0} = \overline{\kappa GA} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) - n\overline{F} \left(\overline{\eta} \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right), \\
s(x,t) &= \frac{S(ax)}{EA_0} = \overline{EA} \frac{\partial u}{\partial x}
\end{aligned} \quad (8.5)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
EJ(X) &= EJ_0 \overline{EJ}(x), \quad \kappa GA(X) = \frac{EJ_0}{a^2} \overline{\kappa GA}(x), \\
EA(X) &= EA_0 \overline{EA}(x), \quad F(X) = P_0 \overline{F}(x), \\
\eta(X) &= \overline{\eta}(x), \quad \rho_{V,H} = \rho_0 \overline{\rho}_{V,H}, \quad I(X) = \rho_0 a^2 \overline{I}(x), \\
n &= \frac{a^2 P_0}{EJ_0}, \quad g = \frac{a^4 \rho_0}{EJ_0}, \quad d = \frac{a^2 EA_0}{EJ_0}, \\
p(X,t) &= \frac{P_0}{a} \overline{p}(x,t), \quad o(X,t) = P_0 \overline{o}(x,t), \quad r(X,t) = \frac{P_0}{a} \overline{r}(x,t), \\
C(X) &= P_0 \overline{C}(x), \quad K(X) = \frac{P_0}{a^2} \overline{K}(x), \quad H(X) = \frac{P_0}{a^2} \overline{H}(x),
\end{aligned} \quad (8.6)$$

a EJ_0 , EA_0 , ρ_0 , P_0 są wielkościami porównawczymi.

W celu uproszczenia zapisu konsekwentnie przyjmujemy oznaczenia EJ , κGA , EA , F , C , K , H , I , $\rho_{V,H}$, η , p , o , r zamiast \overline{EJ} , $\overline{\kappa GA}$, \overline{EA} , \overline{F} , \overline{C} , \overline{K} , \overline{H} , \overline{I} , $\overline{\rho}_{V,H}$, $\overline{\eta}$, \overline{p} , \overline{o} , \overline{r} .

Nie będziemy również rozróżniać symboli ρ_V i ρ_H , przyjmując dla nich jedno oznaczenie ρ , pamiętając, że w równaniach dotyczących drgań poprzecznych $\rho = \rho_V$, a w równaniach opisujących drgania podłużne $\rho = \rho_H$.

8.3. ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ RUCHU

Rozwiązania układu równań różniczkowych (8.4) poszukujemy w postaci szeregów Czebyszewa I rodzaju

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l[w] T_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l T_l(x), \\ \phi(x,t) &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l[\phi] T_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \phi_l T_l(x), \\ u(x,t) &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l[u] T_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} u_l T_l(x), \end{aligned} \quad (8.7)$$

Do rozwiązania układu (8.4) zastosowano twierdzenie 1, przedstawione w rozdziale 2.3. Korzystając z oznaczeń występujących w tym twierdzeniu, można przedstawić analizowany układ równań (8.4) w następującej postaci macierzowej

$$\hat{\mathbf{P}}_0(x) \mathbf{f}''(x,t) + \hat{\mathbf{P}}_1(x) \mathbf{f}'(x,t) + \hat{\mathbf{P}}_2(x) \mathbf{f}(x,t) = \hat{\mathbf{P}}(x,t), \quad (8.8)$$

gdzie

$$\hat{\mathbf{P}}_0(x) = \begin{bmatrix} \kappa GA + nC & 0 & 0 \\ 0 & EJ & 0 \\ 0 & 0 & -dEA \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{P}}_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \kappa GA}{\partial x} - n \left(\frac{\partial(\eta F)}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) & -(\kappa GA - nF) & 0 \\ \kappa GA - nF & \frac{\partial EJ}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -d \frac{\partial EA}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{P}}_2(x) = - \begin{bmatrix} nK & \frac{\partial \kappa GA}{\partial x} - n \frac{\partial F}{\partial x} & 0 \\ 0 & \kappa GA - nF & 0 \\ 0 & 0 & -nH \end{bmatrix}, \quad (8.9)$$

a

$$\hat{\mathbf{P}}(x,t) = \begin{bmatrix} g\rho \ddot{w} - np \\ gI \ddot{\phi} - no \\ g\rho \ddot{u} - nr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g\rho & 0 & 0 \\ 0 & gI & 0 \\ 0 & 0 & g\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{u} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} np \\ no \\ nr \end{bmatrix}. \quad (8.10)$$

Określone wzorem (2.33) funkcje $\mathbf{Q}_m(x)$ przyjmują następującą postać

$$\mathbf{Q}_0(x) = \begin{bmatrix} \kappa GA + nC & 0 & 0 \\ 0 & EJ & 0 \\ 0 & 0 & -d EA \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_1(x) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \kappa GA}{\partial x} - n \left(\frac{\partial(\eta F)}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial x} \right) & -(\kappa GA - nF) & 0 \\ \kappa GA - nF & -\frac{\partial EJ}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & d \frac{\partial EA}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_2(x) = - \begin{bmatrix} -n \frac{\partial^2(\eta F)}{\partial x^2} + nK & 0 & 0 \\ \frac{\partial \kappa GA}{\partial x} - n \frac{\partial F}{\partial x} & \kappa GA - nF & 0 \\ 0 & 0 & -nH \end{bmatrix}. \quad (8.11)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń, dotyczących współczynników rozwinięć Czebyszewa, występujących we wzorze (8.8) funkcji

$$\begin{aligned}
a_l[EJ] = e_l, \quad a_l[\kappa GA] = a_l, \quad a_l[EA] = d_l, \quad a_l[F] = f_l, \quad a_l[C] = c_l, \quad a_l[K] = k_l, \\
a_l[H] = h_l, \quad a_l[\rho] = g_l, \quad a_l[I] = i_l, \quad a_l[p] = p_l, \quad a_l[o] = o_l, \quad a_l[r] = r_l,
\end{aligned} \quad (8.12)$$

przyjęciu założenia, $\eta(x) = \eta = \text{const}$, wykorzystaniu wzoru (2.32) oraz po wykonaniu przekształceń za pomocą zależności (2.37), otrzymujemy następujący nieskończony układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k_{11}(k,l) & k_{12}(k,l) & 0 \\ k_{21}(k,l) & k_{22}(k,l) & 0 \\ 0 & 0 & k_{33}(k,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_l \\ \phi_l \\ u_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(k) \\ P_2(k) \\ P_3(k) \end{bmatrix} \\
+ \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} m_{11}(k,l) & 0 & 0 \\ 0 & m_{22}(k,l) & 0 \\ 0 & 0 & m_{33}(k,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_l \\ \ddot{\phi}_l \\ \ddot{u}_l \end{bmatrix} \quad (8.13) \\
k = 0, 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
k_{11}(k, l) = & 2(k^2 - 1)l \left[n(c_{k-l} - c_{k+l}) + (a_{k-l} - a_{k+l}) \right] \\
& - \frac{1}{2}n \left[(k+1)(k_{k-l-2} - k_{k+l-2}) - 2k(k_{k-l} - k_{k+l}) + (k-1)(k_{k-l+2} - k_{k+l+2}) \right] \\
& - 2n\eta \left[(k+1)(k-l)l f_{k-l} - (k-1)(k+l)l f_{k+l} \right] \\
& - \begin{cases} 0 & \text{gd } l = 0, 1; \\ 4n\eta l \sum_{j=1}^{l-1} (k-l+2j) f_{k-l+2j} & \text{gd } l \geq 2; \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{12}(k, l) = & -(k^2 - 1) \left[(a_{k-l-1} + a_{k+l-1} - a_{k-l+1} - a_{k+l+1}) \right. \\
& \left. - n(f_{k-l-1} + f_{k+l-1} - f_{k-l+1} - f_{k+l+1}) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{21}(k, l) = & (k+1)l(a_{k-l-1} - a_{k+l-1}) - (k-1)l(a_{k-l+1} - a_{k+l+1}) \\
& - n \left[(k+1)l(f_{k-l-1} - f_{k+l-1}) - (k-1)l(f_{k-l+1} - f_{k+l+1}) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{22}(k, l) &= 2(k^2 - 1)l(e_{k-l} - e_{k+l}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[(k+1)(a_{k-l-2} + a_{k+l-2}) - 2k(a_{k-l} + a_{k+l}) + (k-1)(a_{k-l+2} + a_{k+l+2}) \right. \\
&\quad \left. - n \left((k+1)(f_{k-l-2} + f_{k+l-2}) - 2k(f_{k-l} + f_{k+l}) + (k-1)(f_{k-l+2} + f_{k+l+2}) \right) \right], \\
k_{33}(k, l) &= 2(k^2 - 1)l(d_{k-l} - d_{k+l}), \tag{8.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1(k) &= -n \left[(k+1)p_{k-2} - 2kp_k + (k-1)p_{k+2} \right], \\
P_2(k) &= -n \left[(k+1)o_{k-2} - 2ko_k + (k-1)o_{k+2} \right], \\
P_3(k) &= -n \left[(k+1)r_{k-2} - 2kr_k + (k-1)r_{k+2} \right], \tag{8.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{11}(k, l) &= \frac{1}{2}g \left((k+1)(g_{k-l-2} + g_{k+l-2}) - 2k(g_{k-l} + g_{k+l}) + (k-1)(g_{k-l+2} + g_{k+l+2}) \right), \\
m_{11}(k, l) &= \frac{1}{2}g \left((k+1)(i_{k-l-2} + i_{k+l-2}) - 2k(i_{k-l} + i_{k+l}) + (k-1)(i_{k-l+2} + i_{k+l+2}) \right), \\
m_{33}(k, l) &= \frac{1}{2}g \left((k+1)(g_{k-l-2} + g_{k+l-2}) - 2k(g_{k-l} + g_{k+l}) + (k-1)(g_{k-l+2} + g_{k+l+2}) \right). \tag{8.16}
\end{aligned}$$

W nieskończonym układzie równań (8.13) pierwsze dwie grupy równań, gdy $k = 0, 1$ (6 równań), są spełnione tożsamościowo. Równania te zastępujemy równaniami określającymi warunki brzegowe. W przypadku belki Timoshenki warunki brzegowe podstawowych sposobów podparcia mają taką samą postać jak dla belki Eulera (patrz tab. 3.1).

Po rozwinięciu funkcji występujących w definicji sił wewnętrznych (8.5) w szeregi Czebyszewa, wyznaczeniu odpowiednich pochodnych i wykorzystaniu tożsamości (2.34) otrzymujemy następujące wyrażenia służące do określenia brzegowych warunków kinetycznych

$$\begin{aligned}
m(-1, t) &= EJ_- \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^2 \phi_l, \quad m(+1, t) = -EJ_+ \sum_{l=0}^{\infty} l^2 \phi_l, \\
q(-1, t) &= - \sum_{l=0}^{\infty} (\kappa GA - n\eta f)_- (-1)^l l^2 w_l - \sum_{l=0}^{\infty} (\kappa GA - n f)_- (-1)^l \phi_l, \\
q(+1, t) &= \sum_{l=0}^{\infty} (\kappa GA - n\eta f)_+ l^2 w_l - \sum_{l=0}^{\infty} (\kappa GA - n f)_+ \phi_l, \\
s(-1, t) &= EA_- \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^2 u_l, \quad s(+1, t) = EA_+ \sum_{l=0}^{\infty} l^2 u_l, \tag{8.17}
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
EJ_- &= EJ(-1) = \sum_{l=0}^{\infty} e_l T_l(-1) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l e_l, \\
EJ_+ &= EJ(+1) = \sum_{l=0}^{\infty} e_l T_l(1) = \sum_{l=0}^{\infty} e_l, \\
(\kappa GA - n s f)_- &= \kappa GA(-1) - n s f(-1) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} (a_l - n s f_l) T_l(-1) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (a_l - n s f_l), \\
(\kappa GA - n s f)_+ &= \kappa GA(+1) - n s f(+1) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} (a_l - n s f_l) T_l(+1) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l - n s f_l), \\
& \qquad \qquad \qquad s=1 \vee s=\eta.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Do określania brzegowych warunków kinematycznych korzysta się natomiast ze wzorów:

$$\begin{aligned}
w(-1, t) &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l w_l, & w(+1, t) &= \sum_{l=0}^{\infty} w_l, \\
\phi(-1, t) &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \phi_l, & \phi(+1, t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \phi_l, \\
u(-1, t) &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l u_l, & u(+1, t) &= \sum_{l=0}^{\infty} u_l
\end{aligned} \tag{8.19}$$

otrzymanych z wyrażeń (8.7), po uwzględnieniu zależności (2.34), (2.35).

Po zastąpieniu pierwszych sześciu równań układu nieskończonego (8.13) równaniami określającymi warunki brzegowe uzyskujemy nieskończony układ równań różniczkowych zwyczajnych pozwalający na rozwiązanie danego zagadnienia.

8.4. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

W celu ilustracji przedstawionej metody, jak również w celu weryfikacji jej skuteczności rozwiązano trzy przykłady numeryczne. W przykładach tych dokonano porównania rozwiązań uzyskanych przedstawioną w pracy metodą z rozwiązaniami uzyskanymi innymi metodami (w tym porównania z dokładnymi rozwiązaniami anali-

tycznymi) oraz porównano rozwiązania otrzymane według modelu Timoshenki z rozwiązaniami uzyskanymi według modelu Eulera. W pierwszych dwóch przykładach analizowano tylko przemieszczenia poprzeczne belek, w przykładzie ostatnim uwzględniono również przemieszczenia podłużne.

Przykład 8.1

Przedstawiona metoda posłużyła do rozwiązania zagadnienia drgań własnych belki pryzmatycznej. W przykładzie rozważano dwa typy belek: belkę swobodnie podpartą i wspornikową. Przyjęte do obliczeń parametry belek wynosiły: moduł sprężystości $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, moduł ścinania $G = 3E/8$, długość $2a = 0,4 \text{ m}$, przekrój poprzeczny: prostokąt o wysokości $h = 0,08 \text{ m}$ i szerokości $b = 0,02 \text{ m}$, współczynnik ścinania $\kappa = 2/3$, gęstość belek $\rho_v = 7850 \text{ kg/m}^3$. Przyjęta wartość współczynnika κ jest wartością przykładową. Wartość taka była przyjęta m.in. w pracy Brucha i Mitchella [18] oraz Huanga [74]. Zagadnieniu wyznaczania tego współczynnika na drodze teoretycznej lub doświadczalnej poświęcono wiele prac. Czytelnika zainteresowanego tematem odsyłamy do specjalistycznej literatury. Bibliografię dotyczącą tego tematu można znaleźć m.in. w pracy [196]. Uzyskane wyniki porównano z rozwiązaniami analitycznymi uzyskanymi przez Huang [74]. Ponieważ w pracy [74] pojawiły się pewne błędy redakcyjne (m.in. błędne znaki w niektórych wyrażeniach), jak również błędnie wprowadzono wzór określający częstości własne belki swobodnie podpartej (błąd polegał na pominięciu pewnej grupy rozwiązań), do porównania rozwiązań wykorzystano wzory będące poprawionymi wersjami wzorów występujących w pracy [74]. W przypadku zagadnienia drgań własnych układ równań różniczkowych (8.13) (uzupełniony równaniami określającymi warunki brzegowe) staje się nieskończonym układem równań algebraicznych. W celu rozwiązania tych równań układ ograniczono do układu skończonego. Wtedy funkcja przemieszczeń oraz funkcja obrotu przekroju poprzecznego są określone przez skończone sumy szeregów Czebyszewa

$$w(x) = \sum_{l=0}^m w_l T_l(x), \quad \phi(x) = \sum_{l=0}^m \phi_l T_l(x). \quad (8.20)$$

Badając zbieżność rozwiązań, układ ten rozwiązano, przyjmując dwa rozmiary bazy aproksymującej $m = 20, 30$. Częstości drgań własnych wyznaczone omawianą metodą oraz dokładne wartości obliczone na podstawie pracy [74] przedstawiono w tabelach 8.1, 8.3. Natomiast błąd względny między dokładnym rozwiązaniem [74] a rozwiązaniem uzyskanym z wykorzystaniem prezentowanej metody przedstawiono w tabelach 8.2, 8.4. Błąd ten jest określony następującym wyrażeniem

$$Err_m(f) = \frac{\sup_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{f}_m(x) - f(x)|}{\|f(x)\|}, \quad (8.21)$$

gdzie $\|f(x)\| = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$, $f(x)$ – dokładne rozwiązanie, $\tilde{f}_m(x)$ – rozwiązanie

określone przez skończony szereg Czebyszewa o $m + 1$ wyrazach. Na rysunkach 8.2, 8.3 przedstawiono wykresy form własnych. Formy te wyznaczono omawianą w pracy metodą, przyjmując rozmiar bazy aproksymacyjnej $m = 30$.

Tabela 8.1. Częstości własne belki swobodnie podpartej

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
$m = 20$	6838,8336	23190,827	43443,493	64939,185	86710,888	108431,32	111981,29	120647,23	130006,37
$m = 30$	6838,8336	23190,827	43443,493	64939,185	86710,889	108431,34	111981,29	120647,23	130003,61
Dokładna	6838,8336	23190,827	43443,493	64939,185	86710,889	108431,34	111981,29	120647,23	130003,61

Tabela 8.2. Błąd względny Err_m określony wzorem (8.21) belki swobodnie podpartej

		$i = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$m = 20$	W_i	$1,44 \times 10^{-15}$	$1,92 \times 10^{-15}$	$4,59 \times 10^{-11}$	$1,62 \times 10^{-9}$	$9,06 \times 10^{-7}$	$4,34 \times 10^{-6}$	0,00	$6,17 \times 10^{-13}$	$5,12 \times 10^{-4}$
	Φ_i	$2,04 \times 10^{-15}$	$6,21 \times 10^{-15}$	$1,82 \times 10^{-10}$	$2,52 \times 10^{-9}$	$7,41 \times 10^{-6}$	$4,87 \times 10^{-6}$	0,00	$2,90 \times 10^{-13}$	$7,05 \times 10^{-3}$
$m = 30$	W_i	$1,87 \times 10^{-15}$	$2,26 \times 10^{-15}$	$7,47 \times 10^{-15}$	$1,42 \times 10^{-14}$	$4,64 \times 10^{-14}$	$1,63 \times 10^{-13}$	0,00	$2,86 \times 10^{-13}$	$3,07 \times 10^{-10}$
	Φ_i	$1,91 \times 10^{-15}$	$1,51 \times 10^{-15}$	$2,96 \times 10^{-14}$	$3,98 \times 10^{-14}$	$1,07 \times 10^{-13}$	$1,75 \times 10^{-13}$	0,00	$6,65 \times 10^{-14}$	$4,06 \times 10^{-9}$

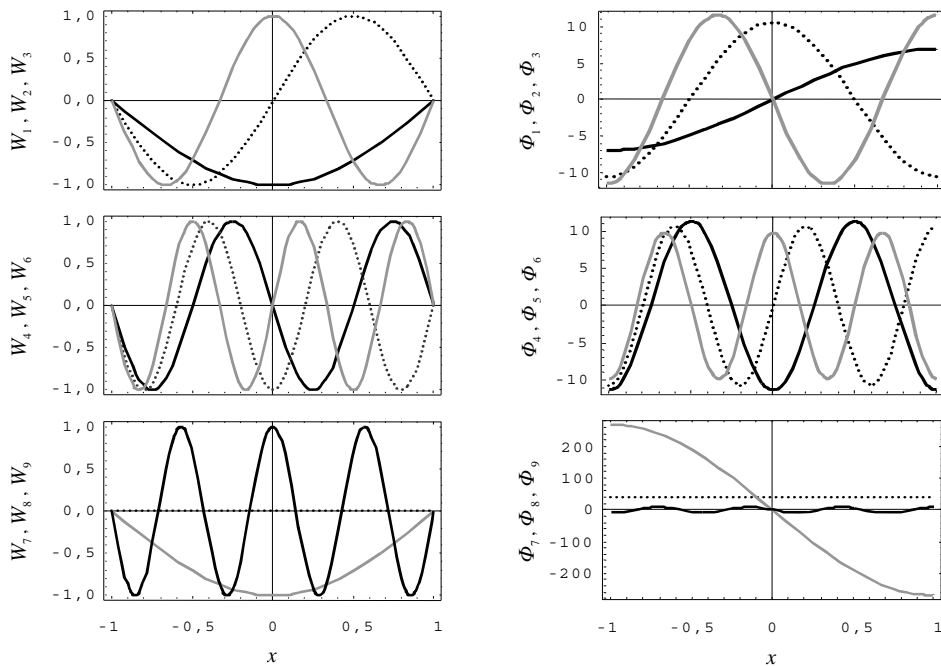
Tabela 8.3. Częstości własne belki wspornikowej

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
$m = 20$	2529,4927	13279,905	31044,791	50825,834	71565,046	91994,772	110976,10	119244,95	131611,40
$m = 30$	2529,4927	13279,905	31044,791	50825,834	71565,047	91994,824	110975,98	119244,57	131606,52
Dokładna	2529,4927	13279,905	31044,791	50825,834	71565,047	91994,824	110975,98	119244,57	131606,52

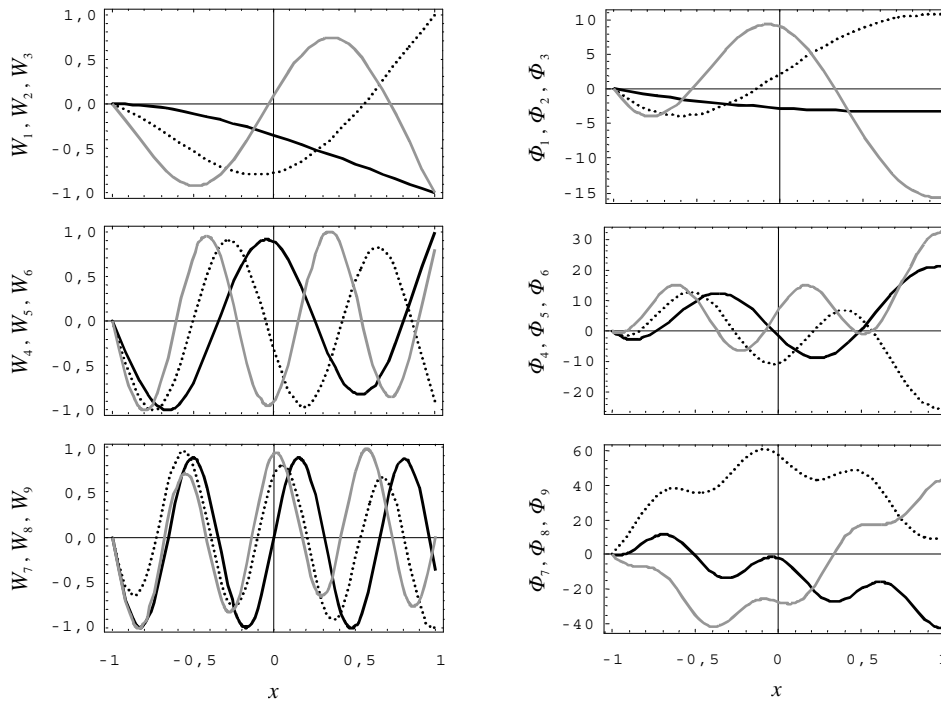
Tabela 8.4. Błąd względny Err_m określony wzorem (8.21) belki wspornikowej

		$i=1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$m=20$	W_i	$8,88 \times 10^{-16}$	$3,33 \times 10^{-15}$	$3,91 \times 10^{-12}$	$1,30 \times 10^{-9}$	$1,59 \times 10^{-7}$	$6,68 \times 10^{-6}$	$2,18 \times 10^{-5}$	$1,43 \times 10^{-4}$	$5,06 \times 10^{-4}$
	Φ_i	$2,02 \times 10^{-15}$	$5,57 \times 10^{-15}$	$2,65 \times 10^{-12}$	$1,66 \times 10^{-9}$	$1,20 \times 10^{-7}$	$2,17 \times 10^{-6}$	$1,06 \times 10^{-4}$	$1,64 \times 10^{-4}$	$5,03 \times 10^{-4}$
$m=30$	W_i	$7,77 \times 10^{-16}$	$3,33 \times 10^{-15}$	$2,59 \times 10^{-14}$	$1,22 \times 10^{-13}$	$2,01 \times 10^{-13}$	$6,01 \times 10^{-13}$	$3,46 \times 10^{-12}$	$4,12 \times 10^{-11}$	$3,52 \times 10^{-10}$
	Φ_i	$1,88 \times 10^{-15}$	$5,40 \times 10^{-15}$	$1,44 \times 10^{-14}$	$7,63 \times 10^{-14}$	$7,36 \times 10^{-14}$	$2,52 \times 10^{-14}$	$1,39 \times 10^{-11}$	$4,00 \times 10^{-11}$	$2,93 \times 10^{-10}$

W wyznaczonych formach własnych belki swobodnie podpartej widoczne są charakterystyczne dla belki Timoshenki grupy form własnych. W opisie tych grup będą pomocne parametry, stosowane w innym (równoważnym) sposobie definiowania modelu Timoshenki. Przyjmujemy, że przemieszczenie poprzeczne belki jest sumą efektów odkształceń giętych i postaciowych, a przemieszczenia te przedstawiamy w formie $W(X, t) = W_M(X, t) + W_Q(X, t)$. Zależności między wykorzystywanymi w niniejszej pracy do opisu modelu kątami: kątem obrotu przekroju Φ , kątem odkształcenia postaciowego β a przemieszczeniami $W_M(X, t)$, $W_Q(X, t)$ są następujące:



Rys. 8.2. Wykresy form własnych (W_i, Φ_i) (—), (W_{i+1}, Φ_{i+1}) (.....), (W_{i+2}, Φ_{i+2}) (—), $i = 1, 4, 7, 10$ belki swobodnie podpartej



Rys. 8.3. Wykresy form własnych (W_i, Φ_i) (—), (W_{i+1}, Φ_{i+1}) (.....), (W_{i+2}, Φ_{i+2}) (—), $i = 1, 4, 7, 10$ belki wspornikowej

$$\Phi = \frac{\partial W_M}{\partial X}, \quad \beta = \frac{\partial W_Q}{\partial X}.$$

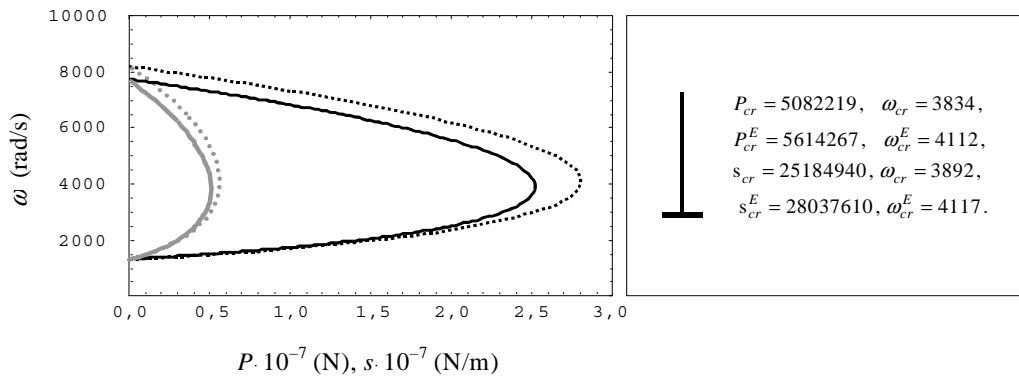
Wykorzystując wprowadzone przemieszczenia $W_M(X, t)$, $W_Q(X, t)$, możemy opisać występujące w rozwiązaniu belki swobodnie podpartej grupy form własnych. Pierwsza grupa to formy ze zgodnymi co do znaku przemieszczeniami giętnymi i postaciowymi (do grupy tej należą formy $(W_1, \Phi_1) - (W_7, \Phi_7)$), druga grupa to formy z przeciwnymi co do znaku przemieszczeniami $W_M(X, t)$, $W_Q(X, t)$. Pierwszym reprezentantem tej grupy jest forma (W_9, Φ_9) i następne, nieprzedstawione na rysunku 8.2, formy własne. Między tymi grupami pojawia się forma czysto postaciowa (W_8, Φ_8) ($W \equiv 0$, $\Phi = -\beta = \text{const} \neq 0$). Opisy grup częstości, pojawiających się w widmach własnych belek Timoshenki, możemy znaleźć m.in. w pracach Abbasa, Thomasa [1], Bhashyama i Prathapa [17], O'Reillya, Turcotte'ego [141], Levinsona i Cooke'a [122], Stephena [172] oraz Szcześniaka [176].

Analiza dokładności uzyskanych wyników pokazuje bardzo dobrą zgodność między częstościami własnymi obliczonymi proponowaną metodą a dokładnymi wartościami częstości wyznaczonymi analitycznie. Błąd względny pierwszych 9 częstości własnych nie przekracza wartości $3,7 \cdot 10^{-5}$ w przypadku aproksymacji 20 wielomianami oraz $9,2 \cdot 10^{-8}$ przy aproksymacji 30 wielomianami. Podobnie bardzo dobrze aproksymowane są formy własne, z tym że zazwyczaj mniej dokładnie aproksymowana jest funkcja obrotów przekrojów poprzecznych niż funkcja przemieszczeń. Błąd względny pierwszych 9 form własnych nie przekracza dla funkcji przemieszczeń $5,1 \cdot 10^{-4}$, dla funkcji zaś obrotów $7,1 \cdot 10^{-3}$ przy aproksymacji 20 wielomianami oraz odpowiednio $3,5 \cdot 10^{-10}$ i $4,1 \cdot 10^{-9}$ przy aproksymacji 30 wielomianami.

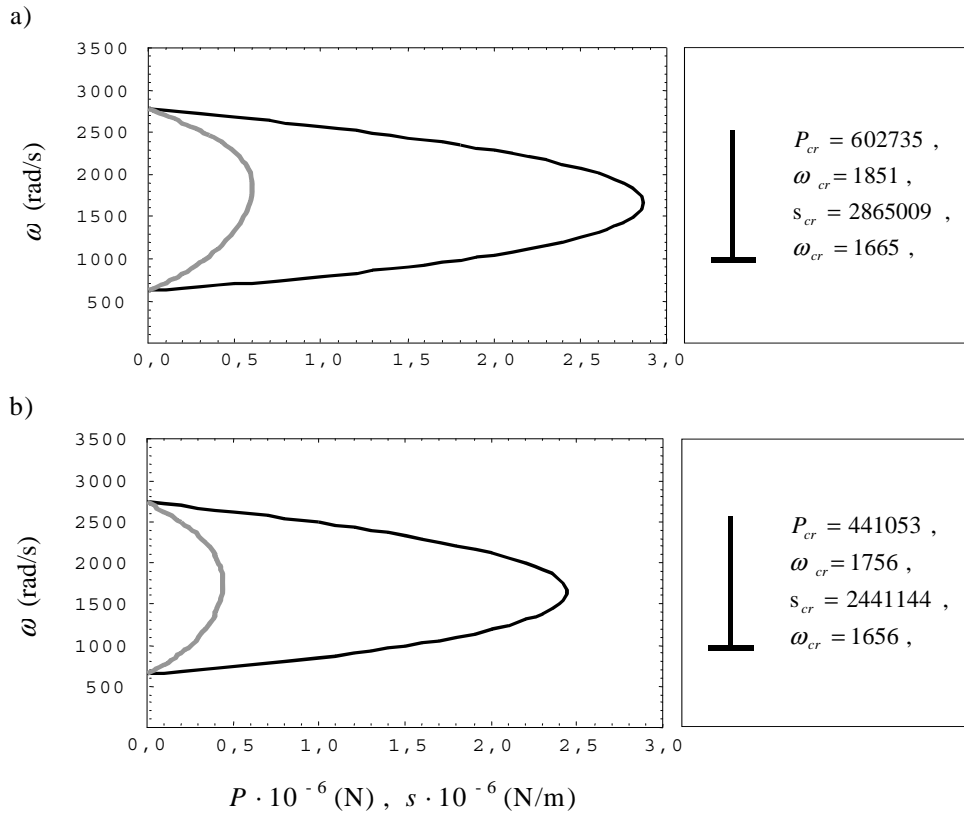
Przykład 8.2

W przykładzie rozwiązano stateczność dynamiczną belek pod obciążeniem niepotencjalnym (rys. 8.1). Rozważono dwa schematy statyczne: belkę wspornikową (rys. 5.2a) oraz belkę sztywno-przegubową (rys. 5.2b). Belki obciążono skupioną siłą śledzącą lub śledzącym, stycznym obciążeniem równomiernie rozłożonym. Wykorzystując dynamiczne kryterium utraty stateczności (bifurkacja lub flutter), wyznaczono krytyczne wartości rozważanych obciążeń. Analizę wykonano dla belek jednorodnych przyrządczych oraz belek o zmiennych przekrojach opisanych funkcjami $b(x)$, $h(x)$ (rys. 5.2). Przyjęto ponadto, że moduł sprężystości pręta $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ N/m², moduł ścinania $G = 3E/8$, długość belki $L = 2a = 0,4$ m, przekrój poprzeczny – prostokąt o wysokości $h(x)$ i szerokości $b(x)$, współczynnik ścinania $\kappa = 2/3$, gęstość belki $\rho_V = 7850$ kg/m³.

Analizowano kolumny Becka i Leipholza (belki wspornikowe) o $b(x) = h(x) = 0,04$ m, obciążone skupioną siłą śledzącą lub śledzącym obciążeniem równomiernie rozłożonym. Uzyskane wyniki przedstawiono w postaci wykresu na rysunku 8.4. Na rysunku tym jako tło umieszczono również rozwiązanie dla belek Eulera, o parametrach takich samych jak belka Timoshenki.



Rys. 8.4. Zależność częstości drgań swobodnych od skupionego P i rozłożonego s obciążenia śledzącego pryzmatycznych kolumn Becka oraz Leipholza $b(x) = h(x) = 0,04$ w przypadku pręta Timoshenki (T) i Eulera (E). Przyjęte oznaczenia: obciążenie P – pręt T (—), obciążenie P – pręt E (.....), obciążenie s – pręt T (—), obciążenie s – pręt E (.....)



Rys. 8.5. Zależność częstości drgań swobodnych belki wspornikowej o zmienny przekroju a) $b(x) = h(x) = 0,04\sqrt{15/43} (2 - (x+1)^2/4)$, b) $b(x) = h(x) = 0,04\sqrt{3/7} (2 - (x+1)/2)$ od skupionego P (—) i rozłożonego obciążenia śledzącego s (—)

Rozwiązania problemu stateczności belek wspornikowych, o zmiennych przekrojach opisanych odpowiednio funkcjami

$$b(x) = h(x) = 0,04 \sqrt{\frac{15}{43}} \left(2 - \frac{(x+1)^2}{4} \right), \text{ m,}$$

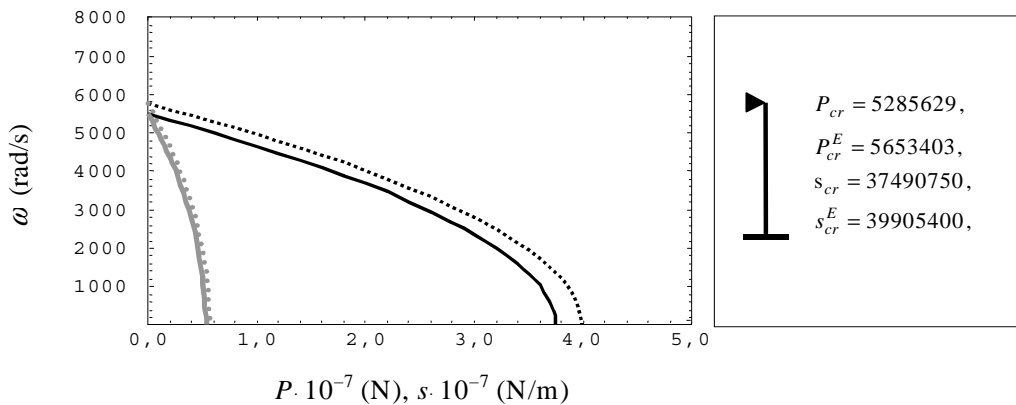
oraz

$$b(x) = h(x) = 0,04 \sqrt{\frac{3}{7}} \left(2 - \frac{x+1}{2} \right), \text{ m,}$$

przedstawiono na rysunku 8.5a i 8.5b. Występujące we wzorach określających $b(x)$, $h(x)$ mnożniki $\sqrt{15/43}$ oraz $\sqrt{3/7}$ dobrano w ten sposób, aby wszystkie analizowane pręty miały taką samą objętość $0,04 \times 0,04 \times 0,4 \text{ m}^3$.

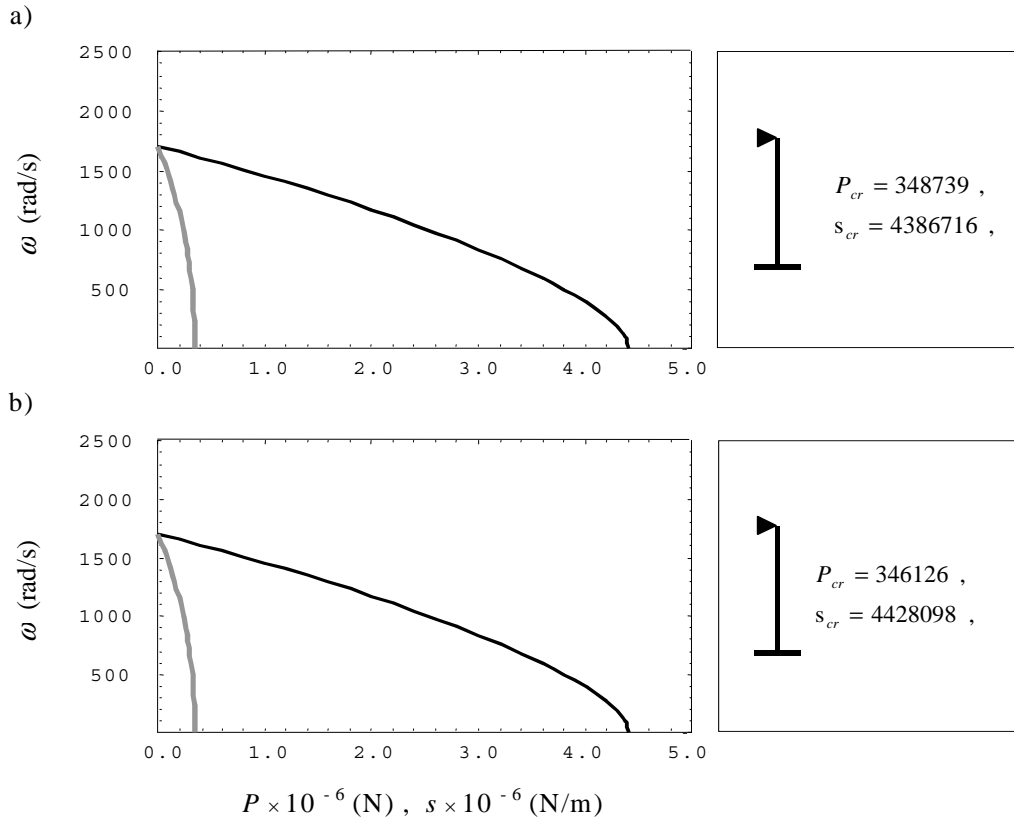
W analizowanych przypadkach utrata stateczności następowała przez flutter. Analogiczne rozważania przeprowadzono dla prętów sztywno-przegubowych, przyjmując parametry takie same jak dla belek wspornikowych. Uzyskane rezultaty przedstawiono na rysunkach 8.6, 8.7.

W przykładzie tym dokonano porównania rozwiązań zagadnienia stateczności (wykresy zależności częstości drgań swobodnych od wartości śledzącej siły ściskającej przedstawione na rys. 8.4 i 8.6) między rozwiązaniami uzyskanymi dla prętów Timoshenki oraz prętów Eulera. Ponieważ stosunek wymiarów poprzecznych prętów do ich długości wynosił 1/10, wyniki uzyskane dla modelu Eulera nie powinny znacznie różnić się od tych, które obliczono, analizując pręt Timoshenki. Potwierdzenie tego widzimy na rysunkach 8.4 i 8.6. Jeszcze większą zgodność uzyskujemy w przypadku układów z rysunków 8.5 i 8.7. Mamy wtedy różnice na tyle małe, że zrezygnowano z prezentacji rozwiązań dla prętów Eulera, ponieważ wykresy praktycznie się pokrywały.



Rys. 8.6. Zależność częstości drgań swobodnych od skupionego P i rozłożonego s obciążenia śledzącego sztywno-przegubowej belki pryzmatycznej $b(x) = h(x) = 0,04$ w przypadku pręta Timoshenki (T) i Eulera (E). Przyjęte oznaczenia: obciążenie P – pręt T (—), obciążenie P – pręt E (----), obciążenie s – pręt T (—), obciążenie s – pręt E (.....)

Na rysunku 8.8 przedstawiono rozwiązanie problemu stateczności belki pryzmatycznej wspornikowej spoczywającej na jednoparametrowym (podłoże Winklera) i dwuparametrowym podłożu sprężystym. Dla porównania na rysunkach 8.8a–8.8c przedstawiono również rozwiązania nieuwzględniające wpływu podłoża sprężystego. Parametry belki są takie same jak w opisanym wcześniej zagadnieniu stateczności belki pryzmatycznej.

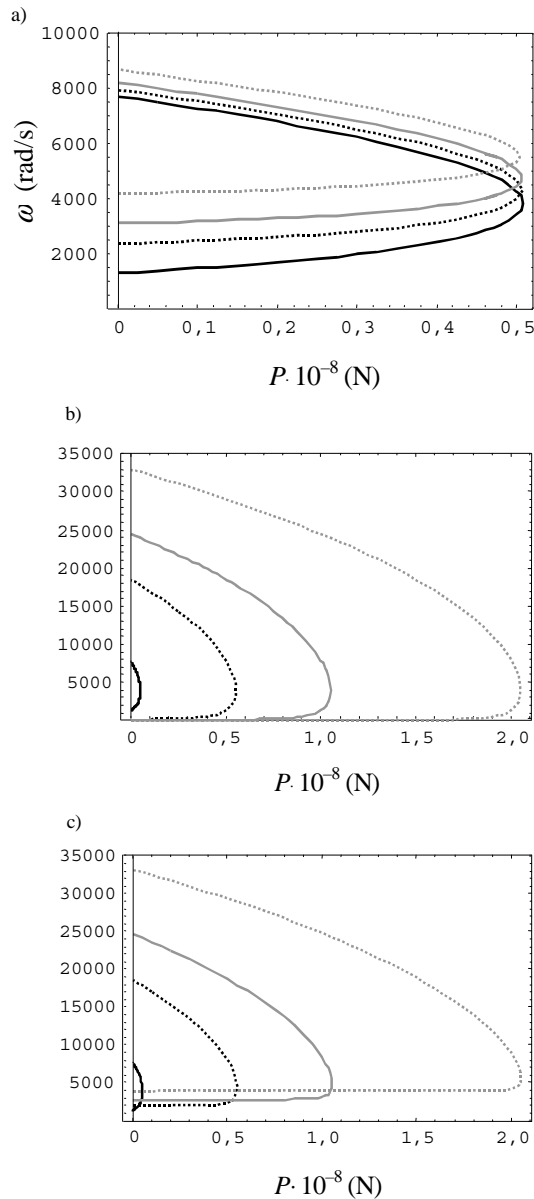


Rys. 8.7. Zależność częstości drgań swobodnych pręta sztywno-przegubowego o zmienny przekroju:

a) $b(x) = h(x) = 0,04\sqrt{15/43} (2 - (x+1)^2/4)$, b) $b(x) = h(x) = 0,04\sqrt{3/7} (2 - (x+1)/2)$

od skupionego P (—) i rozłożonego obciążenia śledzącego s (---)

Za parametry podłoża przyjęto: $K_1 = 0,5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, $K_2 = 1,0 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, $K_3 = 2,0 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, $C_1 = C_2 = C_3 = 0,0$ (podłoże Winklera) – wyniki na rysunku 8.8a; $K_1 = K_2 = K_3 = 0,0$, $C_1 = 0,5 \cdot 10^8 \text{ N}$, $C_2 = 1,0 \cdot 10^8 \text{ N}$, $C_3 = 2,0 \cdot 10^8 \text{ N}$ – wyniki na rysunku 8.8b; oraz $K_1 = C_1 = 0,5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, $K_2 = C_2 = 1,0 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, $K_3 = C_3 = 2,0 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, wyniki na rys. 8.8c. We wszystkich przypadkach założono, że $\rho_F^V = 0$.



Rys. 8.8. Zależność częstości drgań swobodnych od skupionego obciążenia P pryzmatycznej belki wspornikowej spoczywającej na podłożu sprężystym: a) podłoże Winklera – $K_1 = 0,5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ (****), $P_{cr} = 5\,071\,794 \text{ N}$; $K_2 = 1,0 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ (—), $P_{cr} = 5\,061\,370 \text{ N}$; $K_3 = 2,0 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ (*****), $P_{cr} = 50\,400\,529 \text{ N}$; b) podłoże dwuparametrowe, przy czym $K_1 = K_2 = K_3 = 0,0$, $C_1 = 0,5 \cdot 10^8 \text{ N}$ (****), $P_{cr} = 55\,245\,768 \text{ N}$; $C_2 = 1,0 \cdot 10^8 \text{ N}$ (—), $P_{cr} = 105\,326\,413 \text{ N}$; $C_3 = 2,0 \cdot 10^8 \text{ N}$ (*****), $P_{cr} = 205\,406\,409 \text{ N}$; c) podłoże dwuparametrowe $K_1 = C_1 = 0,5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ (****), $P_{cr} = 55\,234\,920 \text{ N}$; $K_2 = C_2 = 1,0 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ (—), $P_{cr} = 105\,304\,289 \text{ N}$; $K_3 = C_3 = 2,0 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ (*****), $P_{cr} = 205\,361\,293 \text{ N}$. Na rysunku linią (—) oznaczono rozwiązanie, w którym nie uwzględniono wpływu podłoża sprężystego $P_{cr} = 5\,082\,219 \text{ N}$

Z analizy wyników można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Zwiększanie sztywności podłoża typu Winklera – parametr K (patrz rys. 8.8a) powoduje w rozważanym zakresie parametrów niewielkie zmniejszenie wartości P_{cr} . Wartości te wynoszą kolejno $P_{cr} = 5\,071\,794$, $5\,061\,370$, $5\,040\,529$ N. Wniosek ten jest potwierdzeniem wyników (dotyczących problemu stateczności pryzmatycznej belki Timoshenki spoczywającej na podłożu Winklera) uzyskanych wcześniej w pracach innych autorów, m.in. w pracy Lee i Yong [115]. Widoczny jest też większy wpływ parametru K na zwiększenie wartości pierwszej częstości własnej, belki niż na zwiększenie częstości drugiej.

2. Zwiększenie wartości parametru C w podłożu dla $K = 0$ (patrz rys. 8.8b) powoduje znaczne zwiększenie krytycznych wartości obciążenia $P_{cr} = 55\,245\,768$, $106\,326\,413$, $205\,406\,409$ N oraz znaczne zwiększenie drugiej częstości własnej z jednoczesnym zmniejszeniem pierwszej częstości własnej belki.

3. Jednoczesne zwiększanie wartości parametrów C i K (w badanym zakresie parametrów) powoduje zwiększenie wartości obciążenia krytycznego $P_{cr} = 55\,234\,920$, $105\,304\,289$, $205\,361\,293$ N, zwiększenie wartości pierwszej i drugiej częstości własnej, przy czym wzrost częstości drugiej jest znacznie większy niż częstości pierwszej.

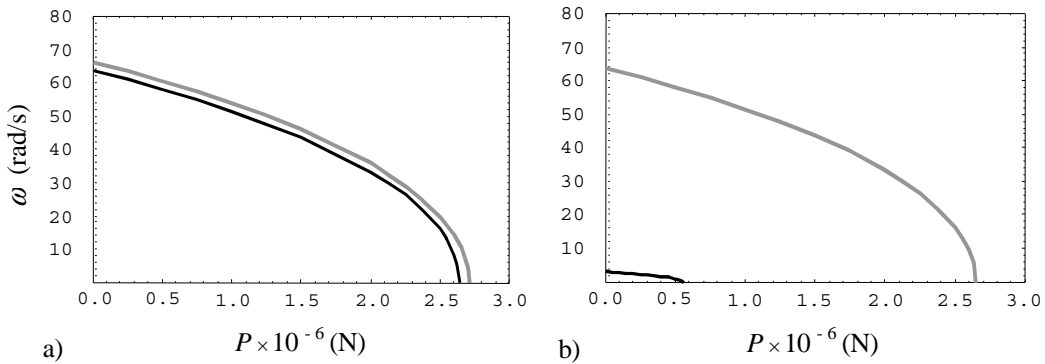
Przykład 8.3

W przedstawianym przykładzie, aby pokazać zastosowanie prezentowanej metody do analizy bardziej złożonych układów prętowych, rozwiązano zagadnienie stateczności układów ramowych obciążonych osiowym obciążeniem potencjalnym. Schematy statyczne analizowanych ram przedstawiono na rysunku 6.2. Układy analizowano, przyjmując następujące wartości parametrów materiałowych: moduł sprężystości $E = 2,8 \cdot 10^{10}$ N/m², moduł ścinania $G = 5E/12$, gęstość $\rho_V = 2400$ kg/m³. Dla każdego schematu z rysunku 6.2 analizowano dwie ramy różniące się poprzecznymi wymiarami prętów. Przekroje tych ram dobrano tak, aby pierwsza była ramą zbudowaną z prętów smukłych, druga zaś z prętów krępych. Przyjęte parametry geometryczne prętów:

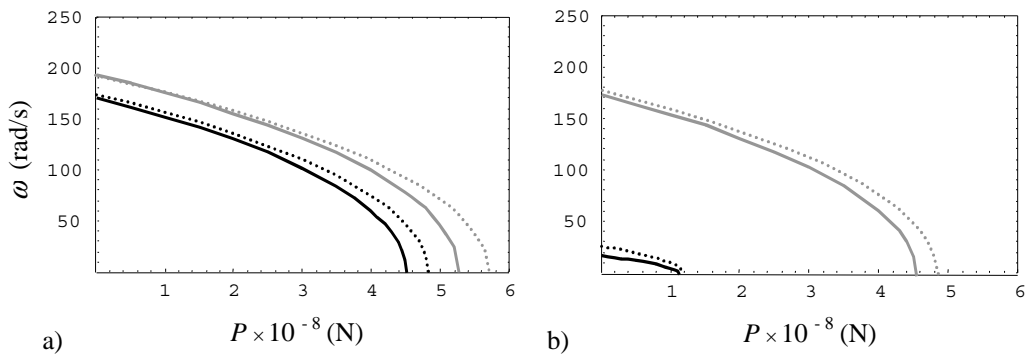
a) rama z prętami smukłymi: rygiel o przekroju prostokątnym, pole przekroju $A = 0,24$ m², moment bezwładności przekroju $J = 7,2 \cdot 10^{-3}$ m⁴, współczynnik kształtu $\kappa = 2/3$; słupy o przekroju kołowym, $A(x) = (\pi 10^{-2}/8)(3 + x/a)^2$, m², $J(x) = (\pi 10^{-4}/64)(3 + x/a)^4$, m⁴, $\kappa = 3/4$.

b) rama z prętami krępymi: rygiel o przekroju prostokątnym, pole przekroju $A = 0,96$ m², moment bezwładności przekroju $J = 1,152 \cdot 10^{-3}$ m⁴, współczynnik kształtu $\kappa = 2/3$; słupy o przekroju kołowym $A(x) = 2\pi 10^{-2}(3 + x/a)^2$, m², $J(x) = 4\pi 10^{-4}(3 + x/a)^4$, m⁴, $\kappa = 3/4$.

Długości prętów oraz lokalny układ współrzędnych, wykorzystany do opisu zmiennych parametrów słupów, pokazano na rysunku 6.2. Rozwiązując ten układ, w węzłach przyjęto zgodność kątów obrotów przekrojów poprzecznych ϕ , a do aproksymacji przemieszczeń w i kąta obrotu ϕ zastosowano 25 wyrazów szeregu Czebyszewa. Uzyskane rezultaty przedstawiono na rysunkach 8.9 i 8.10.



Rys. 8.9. Dwie pierwsze częstotliwości drgań swobodnych (przykład 8.3a): a) ramy (schemat z rys. 6.2a) wywołane potencjalną siłą P , uzyskane wartości: $P_{1,cr} = 2\,642\,249$ N, $P_{2,cr} = 2\,711\,027$ N; b) ramy (schemat z rys. 6.2b) wywołane potencjalną siłą P , uzyskane wartości: $P_{1,cr} = 557\,457$ N, $P_{2,cr} = 2\,648\,587$ N



Rys. 8.10. Dwie pierwsze częstotliwości drgań swobodnych modelu Timoshenki (T) i Eulera (E) (przykład 8.3a): a) ramy (schemat z rys. 6.2a) wywołane potencjalną siłą P , uzyskane wartości: $P_{1,cr} = 452\,408\,663$ N, $P_{2,cr} = 527\,698\,668$ N, $P_{1,cr}^E = 484\,374\,662$ N, $P_{2,cr}^E = 577\,625\,970$ N; b) ramy (schemat z rys. 6.2b) wywołane potencjalną siłą P , uzyskane wartości: $P_{1,cr} = 114\,024\,713$ N, $P_{2,cr} = 455048782$ N, $P_{1,cr}^E = 118\,851\,305$ N, $P_{2,cr}^E = 486\,731\,964$ N. Oznaczenia: ω_1 – model T (—), model E (·····), ω_2 – model T (—), model E (·····)

Rozwiązany przykład pokazuje, że proponowana metoda może być stosowana do bardziej złożonych przykładów. Podobnie jak w przykładzie 8.2, występujące w ramie z przykładu 8.3a pręty miały na tyle dużą smukłość, aby wyniki uzyskane za pomocą modelu Timoshenki, nie różniły się znacznie od wyników uzyskanych z zastosowaniem prętów typu Eulera. Potwierdzeniem tego jest porównanie uzyskanych wyników (patrz rys. 8.9) z wynikami uzyskanymi w przykładzie 6.1. Otrzymane wykresy w obu przypadkach praktycznie się pokrywają. W przykładzie 8.3b, gdzie rama jest zbudowana z prętów krępych, różnice są większe (patrz rys. 8.10), dotyczy to zwłaszcza ramy z rys. 6.2a.

8.5. PORÓWNANIE ROZWIĄZAŃ ZAGADNIENIA WŁASNEGO PRYZMATYCZNYCH BELEK TIMOSHENKI WYZNACZONYCH RÓŻNYMI METODAMI

Podobnie jak w punkcie 3.5, w celu zbadania dokładności i skuteczności prezentowanej w pracy metody rozwiązano różnymi metodami przybliżonymi zagadnienie własne belki pryzmatycznej. Zastosowane metody to: metoda elementów skończonych (z niezależną aproksymacją kąta obrotu, wynikającego z odkształcalności postaciowej) oraz metody aproksymacyjne, w których rozwiązania poszukiwano w postaci klasycznych szeregów potęgowych lub trygonometrycznych szeregów Fouriera. Obliczenia wykonano dla trzech typów belek: swobodnie podpartej, wspornikowej, sztywno-przegubowej. Podobnie jak w punkcie 3.5, w przypadku porównywanych metod, ograniczymy analizę do podania końcowych równań pozwalających na wyznaczanie częstości i współczynników rozwinięć odpowiadających tym częstościom form własnych. W przypadku zastosowania do rozwiązania klasycznych szeregów Fouriera końcowe równania mają postać:

- Belka swobodnie podparta (aproksymacja sinusowa)

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 w_0 = 0, \\ -\varphi_0 + \omega^2 b^2 s^2 r^2 \varphi_0 = 0, \\ w_m'' - \frac{1}{\alpha_m} \varphi_m'' - \omega^2 b^2 s^2 \frac{1}{\alpha_m^2} w_m'' = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \\ -\frac{1}{\alpha_m} w_m'' + \left(\frac{1}{\alpha_m^2} + s^2 \right) \varphi_m'' - \omega^2 b^2 s^2 r^2 \frac{1}{\alpha_m^2} \varphi_m'' = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \end{array} \right. \quad (8.22)$$

gdzie $L = 2a$ – długość belki, w_k'' – współczynnik rozwinięcia w szereg Fouriera drugiej pochodnej funkcji przemieszczeń $\partial^2 w / \partial x^2$, φ_k'' – współczynnik rozwinięcia w szereg Fouriera drugiej pochodnej funkcji obrotów przekrojów poprzecznych $\partial^2 \varphi / \partial x^2$, x – zmienna wymiarowa, $\alpha_k = k\pi/L$, $k = 1, 2, 3, \dots$, $b^2 = \rho A / EJ$, $r^2 = J / A$, $s^2 = EJ / \kappa GA$, δ_{km} – symbol Kroneckera.

Po wyznaczeniu z równań (8.22) częstości własnych oraz odpowiadających im współczynników rozwinięć funkcji własnych, funkcje własne określimy, korzystając z następujących wzorów

$$\begin{aligned}
w(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k''}{\alpha_k^2} \sin \alpha_k x, \\
\varphi(x) &= \frac{1}{2} \varphi_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k''}{\alpha_k^2} \cos \alpha_k x.
\end{aligned} \tag{8.23}$$

• Belka wspornikowa (aproksymacja kosinusowa), odpowiednikami równania (8.22) oraz wzoru (8.23) są równania

$$\left\{ \begin{aligned}
& -\frac{3}{L^2} w_0 + \frac{6}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2} w_k'' + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k} \varphi_k'' + \omega^2 b^2 s^2 w_0 = 0, \\
& 1 \varphi_0 = 0, \\
& w_m'' + \frac{1}{\alpha_m} \varphi_m'' + \omega^2 b^2 s^2 \left(-\frac{3}{L^2 \alpha_m^2} w_0 + \frac{1}{\alpha_m^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6}{L^2 \alpha_k^2} - \delta_{km} \right) w_k'' \right. \\
& \quad \left. + \frac{1+2(-1)^m}{\alpha_m^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k} \varphi_k'' \right) = 0, \quad m=1, 2, 3, \dots, \\
& \frac{3}{L^2 \alpha_m} w_0 - \frac{1}{\alpha_m} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6}{L^2 \alpha_k^2} - \delta_{km} \right) w_k'' \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k - \delta_{km} - \delta_{km} s^2 \alpha_k \alpha_m \right) \frac{1}{\alpha_k \alpha_m} \varphi_k'' \\
& \quad + \omega^2 b^2 s^2 r^2 \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \left(2(-1)^{k+m} + \delta_{km} \right) \frac{1}{\alpha_k \alpha_m} \right) \varphi_k'' = 0, \quad m=1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \right. \tag{8.24}$$

oraz wzór

$$\begin{aligned}
w(x) &= \frac{1}{2} w_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k''}{\alpha_k^2} \cos \alpha_k x + w'(L) \frac{1}{6L} (3x^2 - L^2) \\
& \quad - w'(0) \frac{1}{6L} (3(x-L)^2 - L^2), \\
\varphi(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k''}{\alpha_k^2} \sin \alpha_k x + \varphi(L) \frac{x}{L},
\end{aligned} \tag{8.25}$$

gdzie

$$\begin{aligned} w'(L) = \varphi(L) &= L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k} \varphi_k'', \\ w'(0) &= \frac{3}{L} \left(\frac{1}{2} w_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2} w_k'' - \frac{L^2}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k} \varphi_k'' \right). \end{aligned} \quad (8.26)$$

• Belka sztywno-przegubowa (aproxymacja sinusowa), odpowiednie równanie i wzór przyjmują postać

$$\left\{ \begin{aligned} &1 w_0 = 0, \\ &\left(1 + s^2 \frac{3}{L^2} \right) \varphi_0 - s^2 \frac{6}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2} \varphi_k'' - \omega^2 b^2 s^2 r^2 \varphi_0 = 0, \\ &w_m'' - \frac{3}{L^2} \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6}{L^2 \alpha_k^2} - \delta_{km} \right) \frac{1}{\alpha_m} \varphi_k'' - \omega^2 b^2 s^2 \frac{1}{\alpha_m^2} w_m'' = 0, \\ & \hspace{15em} m = 1, 2, 3, \dots, \\ &-\frac{1}{\alpha_m} w_m'' + \frac{3}{L^2} \varphi_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6}{L^2 \alpha_k^2} - \delta_{km} - s^2 \alpha_m^2 \delta_{km} \right) \frac{1}{\alpha_m^2} \varphi_k'' \\ & \quad - \omega^2 b^2 s^2 r^2 \left(\frac{3}{L^2} \varphi_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6}{L^2 \alpha_k^2} - \delta_{km} \right) \frac{1}{\alpha_m^2} \varphi_k'' \right) = 0, \\ & \hspace{15em} m = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \right. \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} w(x) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k''}{\alpha_k^2} \sin \alpha_k x, \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2} \varphi_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k''}{\alpha_k^2} \cos \alpha_k x - \varphi'(0) \frac{1}{6L} \left(3(x-L)^2 - L^2 \right), \end{aligned} \quad (8.28)$$

gdzie

$$\varphi'(0) = \frac{3}{L} \left(\frac{1}{2} \varphi_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2} \varphi_k'' \right). \quad (8.29)$$

W przypadku zastosowania aproxymacji potęgowej funkcja przemieszczeń, funkcja opisująca kąt obrotu przekroju poprzecznego oraz ich pochodne wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned}
w(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k \frac{x^k}{k!}, & w^{(p)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_{k+p} \frac{x^k}{k!}, \\
\varphi(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{x^k}{k!}, & \varphi^{(p)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{k+p} \frac{x^k}{k!}.
\end{aligned} \tag{8.30}$$

a końcowy układ równań pozwalający na rozwiązanie zagadnienia własnego belki pryzmatycznej ma postać

$$\begin{cases} w_{k+2} - \varphi_{k+1} + \omega^2 b^2 s^2 w_k = 0, \\ \phantom{w_{k+2} - \varphi_{k+1} + \omega^2 b^2 s^2 w_k = 0,} k = 0, 1, 2, \dots \\ w_{k+1} - \varphi_k + s^2 \varphi_{k+2} + \omega^2 b^2 s^2 r^2 \varphi_k = 0. \end{cases} \tag{8.31}$$

Równania te należy uzupełnić czterema równaniami wynikającymi z warunków brzegowych.

- w przypadku belki swobodnie podpartej

$$\begin{aligned}
w(0) &= w_0 = 0, & \varphi'(0) &= \varphi_1 = 0, \\
w(L) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k \frac{L^k}{k!} = 0, & \varphi'(L) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{k+1} \frac{L^k}{k!} = 0;
\end{aligned} \tag{8.32}$$

- w przypadku belki wspornikowej

$$\begin{aligned}
w(0) &= w_0 = 0, & \varphi(0) &= \varphi_0 = 0, \\
\varphi'(L) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{k+1} \frac{L^k}{k!} = 0, & w'(L) - \varphi(L) &= \sum_{k=0}^{\infty} (w_{k+1} - \varphi_k) \frac{L^k}{k!} = 0;
\end{aligned} \tag{8.33}$$

- w przypadku belki sztywno-przegubowej

$$\begin{aligned}
w(0) &= w_0 = 0, & \varphi(0) &= \varphi_0 = 0, \\
w(L) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k \frac{L^k}{k!} = 0, & \varphi'(L) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{k+1} \frac{L^k}{k!} = 0.
\end{aligned} \tag{8.34}$$

We wszystkich stosowanych metodach przyjęto identyczne (lub w przypadku FEM nieznacznie większe) rozmiary baz aproksymacyjnych $m = 25$. Otrzymane rozwiązania porównano z dokładnymi rozwiązaniami analitycznymi [74]. Dokładne oraz otrzymane przybliżonymi metodami wartości własne przedstawiono odpowiednio w tabelach 8.5–8.7. W tabelach tych w celu określenia stosowanej do rozwiązania metody przyjęto następujące oznaczenia: FEM – metoda elementów skończonych, CF –

metoda aproksymacyjna z aproksymacją rozwiązań klasycznymi szeregami Fouriera, CP – metoda aproksymacyjna z aproksymacją klasycznymi szeregami potęgowymi. Przykładowe wykresy funkcji błędów względnych określonych wzorem (3.77) wybranych form własnych (W_1, Φ_1), (W_9, Φ_9), wyznaczonych różnymi metodami pokazano w skali logarytmicznej na rysunkach 8.11–8.13.

Analizując wartości pierwszych 9 częstości własnych (patrz tab. 8.5–8.7), w przypadku różnych metod rozwiązania zagadnienia własnego, widzimy, że najdokładniejsze wyniki uzyskano w metodzie prezentowanej w pracy. Największe błędy względne 9 początkowych częstości własnych wynoszą bowiem w przypadku:

- belki swobodnie podpartej
FEM – 10,54%, CF – 0,00%,
CP – 40,77% (dla pierwszych 8 rzeczywistych częstości),
PM (prezentowana metoda) – 0,00%.
- belki wspornikowej:
FEM – 1,38%, CF – 0,64%,
CP – 3,58% (dla pierwszych 4 rzeczywistych częstości),
PM – 0,00%.
- belki sztywno-przegubowej:
FEM – 2,01%, CF – 1,36%,
CP – 6,84% (dla pierwszych 4 rzeczywistych częstości),
PM – 0,00%.

W przypadku form własnych (patrz rys. 8.11–8.13) błędy względne zdefiniowane wzorem (3.77) są mniejsze od błędów innych metod rozwiązania, od 10^4 do ponad 10^{10} razy. Podobną dokładność początkowych wartości i form własnych daje metoda aproksymacyjna z wykorzystaniem klasycznych szeregów potęgowych, niestety już od piątej częstości w przypadku belki wspornikowej oraz sztywno-przegubowej, uzyskujemy nie dające się z niczym porównać rozwiązania zespolone. Z analizy rysunków 8.11–8.13 jest widoczne, że błędy pierwszych form własnych w prezentowanej metody wynikają tylko z błędów zaokrągleń. Analogiczne wnioski można przedstawić w przypadku belki sztywno-przegubowej. W tym przypadku również prezentowana metoda daje błędy mniejsze od kilku do kilkunastu rzędów, niż inne analizowane metody. Osobnego komentarza wymaga belka swobodnie podparta. W tym przypadku najlepszą aproksymację uzyskano za pomocą klasycznych szeregów Fouriera (prezentowana metoda dawała błąd o kilka rzędów większy). Wynik ten jednak należałoby traktować jako wyjątek od reguły.

Tabela 8.5. Częstości własne belki swobodnie podpartej wyznaczone różnymi metodami

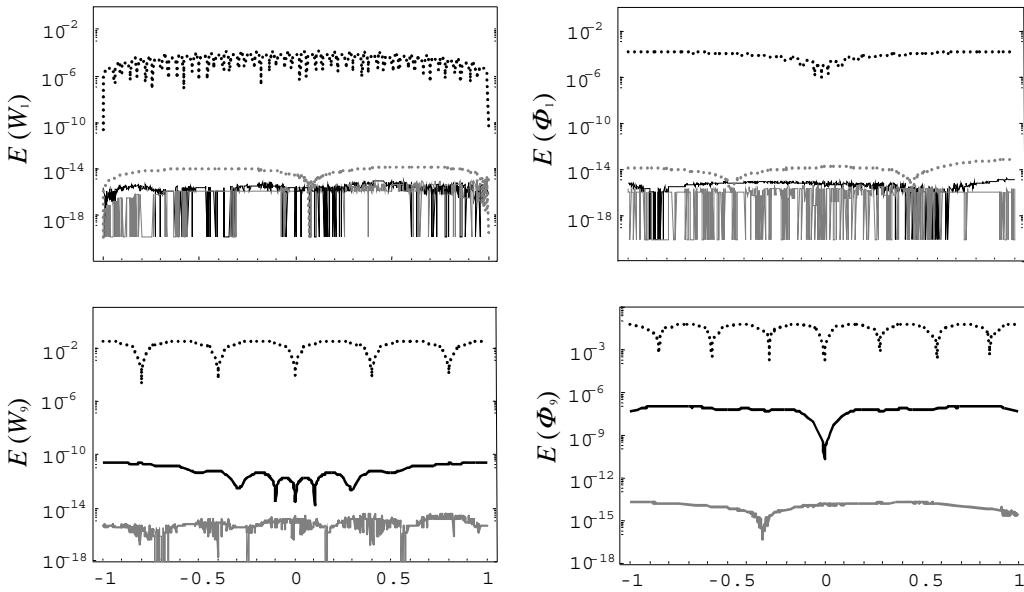
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
FEM	6839,3317	23209,616	43565,582	65347,928	87691,485	110365,62	120717,22	133364,30	142569,22
CF	6838,8336	23190,827	43443,493	64939,185	86710,899	108431,34	111981,29	120647,23	130003,61
CP	6838,8336	23190,840	43219,907	83549,436	111981,29	120647,23	142312,59	169836,83	55237,544– 10321,338 i
Praca	6838,8336	23190,827	43443,493	64939,185	86710,899	108431,34	111981,29	120647,23	130003,61
Dokładne	6838,8336	23190,827	43443,493	64939,185	86710,899	108431,34	111981,29	120647,23	130003,61

Tabela 8.6. Częstości własne belki wspornikowej wyznaczone różnymi metodami

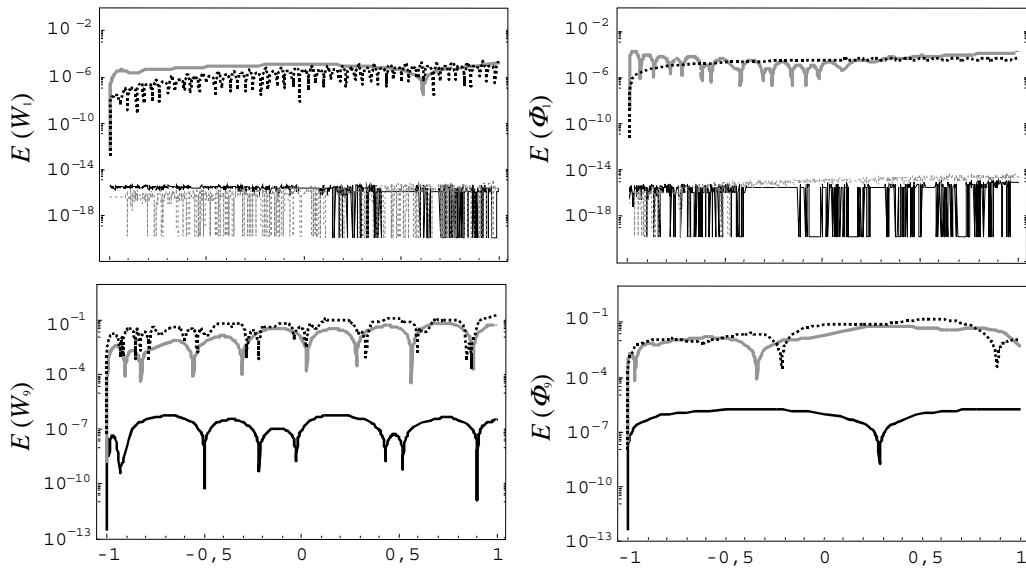
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
FEM	2529,5182	13283,393	31088,060	51011,254	72075,176	93025,284	112457,31	119997,12	133427,40
CF	2529,3240	13294,154	31082,644	50943,476	71763,763	92403,849	111681,07	119271,29	132393,69
CP	2529,4927	13279,905	31043,365	49008,433	52960,403– 11441,036 i	52960,403+ 11441,036 i	55118,411– 31897,209 i	55118,411+ 31897,209 i	79570,979– 12157,165 i
Praca	2529,4927	13279,905	31044,791	50825,834	71565,047	91994,824	110975,98	119244,57	131606,52
Dokładne	2529,4927	13279,905	31044,791	50825,834	71565,047	91994,824	110975,98	119244,57	131606,52

Tabela 8.7. Częstości własne belki sztywno-przegubowej wyznaczone różnymi metodami

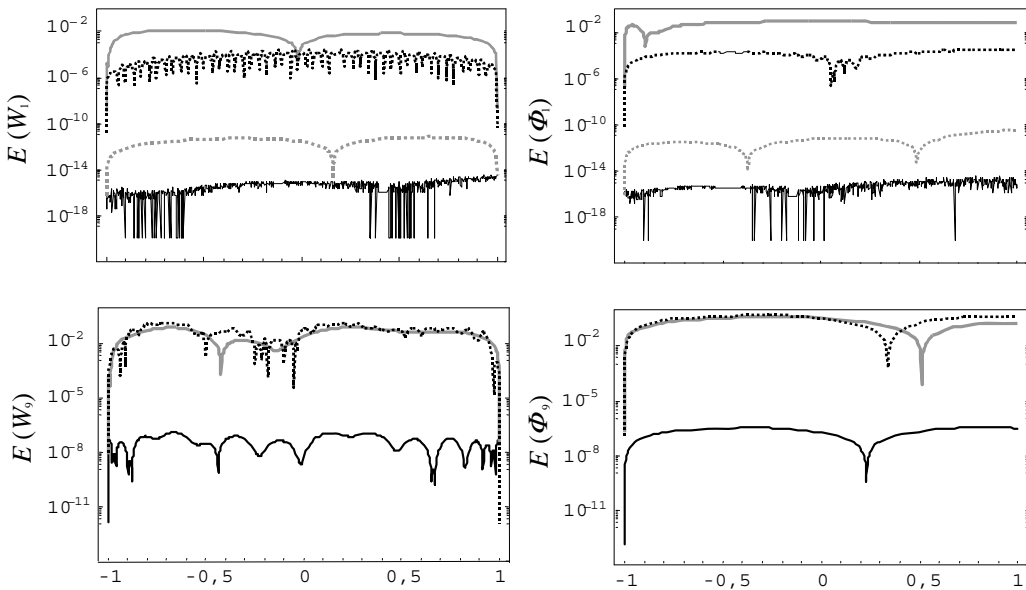
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
FEM	9743,3994	26177,811	45689,635	66653,519	88392,185	110525,42	114935,83	130504,47	134249,87
CF	9783,3232	26396,111	45776,637	66337,260	87386,634	108284,65	112739,37	127926,37	131321,56
CP	9741,9469	26150,190	45453,261	70738,319	57387,938– 9247,182 i	57387,938+ 9247,182 i	60943,200– 31336,762 i	60943,200+ 31336,762 i	72027,412– 19697,700 i
Praca	9741,9469	26150,251	45545,510	66211,993	87376,644	108601,14	114295,44	128739,39	131610,63
Dokładne	9741,9469	26150,251	45545,510	66211,993	87376,644	108601,14	114295,44	128739,39	131610,63



Rys. 8.11. Wykresy błędów względnych opisanych wzorem (3.77) różnych metod rozwiązania zagadnienia własnego belki swobodnie podpartej. Oznaczenia zastosowanej metody: metoda prezentowana w niniejszej pracy (—), aproksymacja klasycznymi szeregami Fouriera (---), FEM (.....), aproksymacja klasycznymi szeregami potęgowymi (-.-.-)



Rys. 8.12. Wykresy błędów względnych opisanych wzorem (3.77) różnych metod rozwiązania zagadnienia własnego belki wspornikowej. Oznaczenia zastosowanej metody: metoda prezentowana w niniejszej pracy (—), aproksymacja klasycznymi szeregami Fouriera (---), FEM (.....), aproksymacja klasycznymi szeregami potęgowymi (-.-.-)



Rys. 8.13. Wykresy błędów względnych opisanych wzorem (3.77) różnych metod rozwiązania zagadnienia własnego belki sztywno-przegubowej. Oznaczenia zastosowanej metody: metoda prezentowana w niniejszej pracy (—), aproksymacja klasycznymi szeregami Fouriera (---), FEM (.....), aproksymacja klasycznymi szeregami potęgowymi (-.-.-)

Tak dobra aproksymacja za pomocą klasycznych szeregów Fouriera w przypadku belki swobodnie podpartej wynika bowiem z tego, że dokładne analityczne rozwiązania tej belki mają postać skończonej liniowej kombinacji funkcji trygonometrycznych. Z analogiczną sytuacją mamy do czynienia dla swobodnie podpartej belki Eulera, gdzie dokładne rozwiązania mają postać sinusoid. W tym przypadku aproksymacja już tylko jednym (odpowiednim) elementem szeregu Fouriera daje rozwiązanie dokładne.

9. ZAGADNIENIE DRGAŃ KOŁOWYCH I PIERŚCIENIOWYCH PŁYT CIENKICH

9.1. WPROWADZENIE

Podobnie jak w przypadku układów prętowych, konieczność racjonalnego, ekonomicznego kształtowania konstrukcji oraz względy poznawcze są powodem dużego zainteresowania badaczy drganiami płyt o zmiennych parametrach geometrycznych i wytrzymałościowych. Dotyczy to zarówno statyki, jak i dynamiki płyt, włączając w to również zagadnienia odnoszące się do płyt przyzmatycznych. Świadczą o tym obszerne bibliografie zamieszczone w monografiach: Kączkowskiego [83], Szcześniaka [178] oraz w pracy zbiorowej, monografii pod redakcją Cz. Woźniaka [195] (autorzy S. Borkowski, G. Jemielita, B. Michalak, R. Nagórski, W. Pietraszkiewicz, M. Rudnicki, M. Woźniak i Cz. Woźniak). Obszerną literaturę można również znaleźć w pracach przeglądowych Laissy [117–120].

W niniejszym rozdziale ograniczymy rozważania do omówienia wybranych prac dotyczących drgań płyt cienkich podłużnie niejednorodnych. W większości z tych prac zakładano określoną postać funkcji opisującej zmianę grubości płyty. Płyty kołowe i pierścieniowe, o liniowo zmiennej grubości, rozważane były w pracach: [50, 65, 66, 67, 68, 76, 110, 111]. W pracy [66] Gupta i Lal rozwiązali zagadnienie własne. Rozwiązanie poszukiwali w postaci klasycznego szeregu potęgowego. Ci sami autorzy oraz Jain w pracy [68], stosując do rozwiązania metodę Ritza (do aproksymacji zastosowali klasyczne wielomiany potęgowe), badali wpływ parametrów podłoża Winklera na częstości własne płyty o liniowo i parabolicznie zmiennej grubości. Rozwiązanie problemu stateczności i zagadnienia własnego płyty biegunowo ortotropowej o liniowo zmiennej grubości, spoczywającej na podłożu Winklera przedstawili w pracy [67] Gupta, Lal i Jain. Zagadnienie rozwiązano metodą Ritza, wykorzystując do aproksymacji przemieszczeń wielomiany potęgowe. Statecznością i zagadnieniem własnym płyty sprężyste utwierdzonej na obwodzie zajmowali się w pracy [76] Irie, Yamada, Kitayama. Do rozwiązania zastosowali metodę Ritza, wykorzystując do aproksymacji formy własne wyznaczone dla płyty o stałych parametrach. Analizowali płyty o liniowo i skokowo zmiennej grubości. Problem własny w zakresie częstości własnych pły-

ty swobodnie podpartej, sprężystie utwierdzonej na brzegu, rozwiązano w pracy Ficcacanti de Iglesiasa i Laury [50]. Umieszczone na brzegu więzy sprężyste miały zmienną sztywność rotacyjną. Podobne zagadnienie zostało rozwiązane w pracy Laury, Gutierrez, Carnicera i Sanzi [111]. W analizowanych w pracy [111] płytach grubość opisana była liniową oraz odcinkowo-liniową funkcją. Zagadnienia drgań swobodnych płyty biegunowo ortotropowej, o liniowo zmiennej grubości, rozwiązano z zastosowaniem metody Rayleigha–Ritza w pracy Gupty i Ansariego [65]. Drgania płyty pierścieniowej biegunowo ortotropowej o liniowo zmiennej grubości, zajmowali się również Laura, Gutierrez i Rossi. W pracy [110] autorzy zastosowali do rozwiązania drgań swobodnych metodę Rayleigh–Ritza (aproksymacja przemieszczeń klasycznym szeregiem potęgowym). Oprócz płyty o liniowo zmiennej grubości rozważali płytę o grubości zmieniającej się skokowo. Rozwiązanie zagadnienia własnego płyty kołowej, o przedziałami liniowo zmiennej grubości, przedstawili Singh i Saxena w pracy [169]. Autorzy analizowali płytę utwierdzoną oraz swobodnie podpartą. Lal Roshan, Sharma Shuchita w pracy [106] rozwiązali zagadnienie drgań swobodnych osiowo-symetrycznej ortotropowej, cienkiej płyty pierścieniowej, o zmiennej eksponencjalnie grubości. Do rozwiązania problemu zastosowano metodę kolokacyjną, wykorzystując do aproksymacji skończony szereg Czebyszewa. Zagadnienie rozwiązano przy różnych warunkach brzegowych. Płyty o parabolicznie zmieniającej się grubości były przedmiotem rozważań w cytowanej już pracy [68] oraz w pracy Barakata i Baumanna [12]. W pracy [12] rozwiązanie poszukiwano w postaci szeregu, w którym funkcjami bazowymi były formy własne wyznaczone dla płyty jednorodnej. Opisaną metodę zastosowano do rozwiązania zagadnienia własnego. Analizowano również płyty o innych ustalonych rozkładach grubości płyty. I tak, w pracy Duana, Queka., Wanga [30] analizowano drgania płyty pierścieniowej, w której radialny przekrój opisany był funkcjami $z = \pm(1/2)h_0(r/a)^m$, $m \geq 0$ lub $z = \pm(1/2)h_0(r/b)^m$, $m < 0$, gdzie a , b to odpowiednio zewnętrzny i wewnętrzny promień płyty. Analityczne rozwiązanie otrzymano w postaci funkcji hipergeometrycznych. W pracy Singh i Saxena [170], zmienna grubość płyty opisana była wzorem $h(x, y) = 1 + \alpha x + \beta r^2$. Autorzy za pomocą metody Rayleigh–Ritza rozwiązali zagadnienie drgań swobodnych płyty będącej ćwiartką koła. Osiowo-symetryczny problem drgań swobodnych płyty kołowej o zmiennej grubości opisanej wzorami: $1 + aR^m$, R^m rozwiązano w pracy Wanga [190]. W cytowanej pracy rozwiązanie poszukiwano w postaci klasycznego szeregu potęgowego. Płyta eliptyczna o zmiennej grubości $h(x, y) = ch_0(\alpha + \beta(x^2 + y^2))$ była przedmiotem rozważań w pracy Bayera, Guvena i Altaya [14]. Przedstawiony w pracy problem własny rozwiązano dwoma metodami: momentową (przyporównanie do zera kolejnych, parzystych momentów założonej funkcji przemieszczeń) oraz metodą Rayleigh–Ritza. Płyty o skokowej zmianie grubości analizowane były w pracach: Gallego Juareza [53], Avalosa, Layry i Bianchiego [7] oraz Laury i zespołu [113]. W pracy [53] rozwiązano problem własny metodą analityczną. Otrzymane rozwiązanie było kombinacją liniową funkcji Bessela. Rozwiązanie zagadnienia własnego płyty kołowej sprężystie utwierdzonej na brzegu (więzy translacyjne i rotacyjne) przedstawiono

w pracy [7]. Problem rozwiązano metodą Rayleigh–Ritza, aproksymując funkcję przemieszczeń wielomianem potęgowym. Wiele zagadnień dla płyt kołowych o zmiennej grubości opisanej funkcją

$$h(r) = h_0 r^{\alpha_0} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} k_n r^n\right),$$

zostało rozwiązanych w interesujących monografiach Kovalenki [97, 98, 99]. W pracach tych do rozwiązania prezentowanych zagadnień wykorzystano funkcje hipergeometryczne. W pracy [113] do rozwiązania zagadnienia własnego zastosowano metodę elementów skończonych. Metodę elementów skończonych zastosowano również w pracy Gormana [60], gdzie przedstawiono rozwiązanie problemu własnego płyty pierścieniowej, stosując do modelowania układu elementy pierścieniowe o liniowo zmiennej grubości. Podobny sposób rozwiązania zastosowano w pracy Selmane'a i Lakisa [163], w której wyznaczono częstości własne płyt kołowych i pierścieniowych, stosując kołowy i pierścieniowe elementy skończone. Analizowano płyty o liniowo i skokowo zmiennej grubości. Rozwiązania wielu zagadnień statycznych i dynamicznych, dotyczących płyt niepryzmatycznych, można znaleźć w monografii Mateji [133]. Stosując metodę macierzy przeniesienia, autor rozwiązał m.in. zagadnienie drgań płyty spoczywającej na dwuparametrowym podłożu Własowa. Zastosowanie metody małego parametru możemy znaleźć w pracy Yanga [199]. Odmiernym od dotychczas omawianych typem zagadnień zajmował się Elishakoff, Storch i Meyer. W pracach [38, 39, 44, 47, 173] rozwiązali problem polegający na wyznaczeniu funkcji sztywności płyty przy zadanym rozkładzie gęstości, tak aby pierwsza forma własna przyjmowała określoną postać, np. była taka sama jak statyczne rozwiązanie płyty obciążonej równomiernie. Prawie wszystkie z cytowanych prac dotyczyły płyt kołowych lub pierścieniowych. Nie mniej liczną grupę stanowią prace dotyczące czworobocznych płyt poprzecznie niejednorodnych, a w tym głównie płyt prostokątnych. Rozwiązanie statycznego problemu niejednorodnej poprzecznie płyty kołowej i prostokątnej przedstawił Kączkowski w pracy [84], wykorzystując do rozwiązania klasyczne szeregi Fouriera. Wyznaczeniem funkcji ugięcia izotropowej płyty prostokątnej swobodnie podpartej na brzegu obciążonej dowolnym prostopadłym do brzegu obciążeniem (zagadnienie styczne) oraz wyznaczeniem częstości własnych zajmował się Mazurkiewicz w pracy [134]. Równanie opisujące omawiane problemy sprowadził on do równań Fredholma drugiego rodzaju i rozwiązał je z wykorzystaniem podwójnych szeregów Fouriera. Szeregi Fouriera do rozwiązania problemu drgań płyt prostokątnych wykorzystywał w swej monografii również Kacner [82], z tym że szeregi te były wykorzystywane do rozwiązania wyjściowego równania różniczkowego. Płyty prostokątne o grubości zmiennej tylko w jednym kierunku opisanej w dwóch przedziałach funkcją liniową, analizowali w swojej pracy Gutierrez, Laura, Grossi [69]. W pracy tej, stosując metodę Ritza, autorzy rozwiązyli zagadnienie własne. Do aproksymacji zastosowano iloczyn wielomianów czwartego stopnia oraz iloczyn wielomianu i funkcji $\cos(y)$. Rozwiązanie zagadnienia własnego w zakresie częstości własnych

prostokątnej płyty wspornikowej o zmiennej liniowo grubości przedstawiono w pracy Kuttler, Sigillito [105] oraz pracy Roya i Ganesana [149], gdzie analizowano płyty o liniowo i parabolicznie zmiennej grubości. Do rozwiązania w pracy [149] zastosowano metodę elementów skończonych. Inny typ zmiany grubości płyty opisanej funkcją $h(x, y) = h_0(x/A)^r(y/B)^s$ możemy znaleźć w pracach Cheung, Zhou [25] oraz Zhou [202]. W pracy [25] rozwiązano problem drgań swobodnych, stosując metodę Rayleigh–Ritza oraz wykorzystując do aproksymacji funkcje będące kolejnymi wyrazami rozwiązania pewnego zagadnienia statycznego. Natomiast w pracy [202] Zhou rozwiązał zagadnienie drgań swobodnych płyty punktowo podpartej. W pracy tej również wykorzystano metodę Rayleigh–Ritza. Jako funkcje aproksymujące przyjęto rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia płyty o stałej grubości. Problemem drgań płyt o skokowo zmiennej grubości zajmowali się Guo, Keane, Moshrefi-Torbati [63], Bambill, Rossi, Laura i Rossit [9], Xiang [197]. W pracy [63] problem rozwiązano analitycznie oraz metodą elementów skończonych. Przedmiotem rozważań w [9] była płyta prostokątna o dwóch przyległych brzegach swobodnych, dla pozostałych brzegów przyjęto różne sposoby podparcia. Do rozwiązania użyto metodę Rayleigh–Ritza. Do aproksymacji zastosowano skończony podwójny szereg trygonometryczny, wprowadzając w argumentach funkcji pewne dodatkowe parametry optymalizacyjne. W pracy Xiang [197] analizowano stateczność i zagadnienie własne płyty o jednokierunkowej, skokowo zmiennej grubości. W [197] zastosowano rozwinięcie funkcji przemieszczeń w szereg Fouriera w kierunku prostopadłym do kierunku zmienności oraz metodę Levy’ego. Płyty o parametrach zmiennych tylko w jednym kierunku rozważano również w pracach Lina [124], gdzie do rozwiązania zastosowano szeregi Fouriera oraz w pracy Ashoura [3], w której wykorzystano metodę macierzy przeniesienia oraz pasma skończone. Jako przykłady zastosowania innych metod do rozwiązania drgań płyt o zmiennych podłużnie parametrach mogą służyć prace Karamiego i Malekzadeha [87, 90], w których do rozwiązania zastosowano metodę DQM. W pierwszej pracy analizowano zagadnienie statyczne oraz stateczność płyty. W pracy drugiej [87] rozwiązano problem drgań swobodnych płyty czworokątnej. Wyznaczeniem częstości własnych płyty ukośnokątnej, o liniowo zmiennej grubości, z wykorzystaniem metody Galerkina, zajmował się Banerjee w pracy [11]. Zagadnienia drgań pasm płytowych były rozważane w pracy Mateji [132] oraz Szcześniaka [174]. W pracy [174] analizowano drgania pasma płytowego, którego zmienna grubość opisana była funkcją paraboliczną, a moduł Younga i gęstość płyty zmieniały się eksponencjalnie. W przykładzie liczbowych rozważano również pasmo o zmiennej grubości opisanej wzorem $h(x) = h_0(1 + \sin \pi x/l)$. Przykładem zastosowania do rozwiązania płyt wielomianów ortogonalnych jest praca Langer [109]. W pracy tej, stosując metodę Ritza oraz wielomiany Legendre’a, rozwiązano problem własny ortotropowej płyty prostokątnej. Praca ta, co prawda nie jest związana wprost z tematyką układów o zmiennych parametrach, ale jest ciekawym przykładem zastosowania wielomianów ortogonalnych, a do tej grupy należą również wielomiany Czebyszewa.

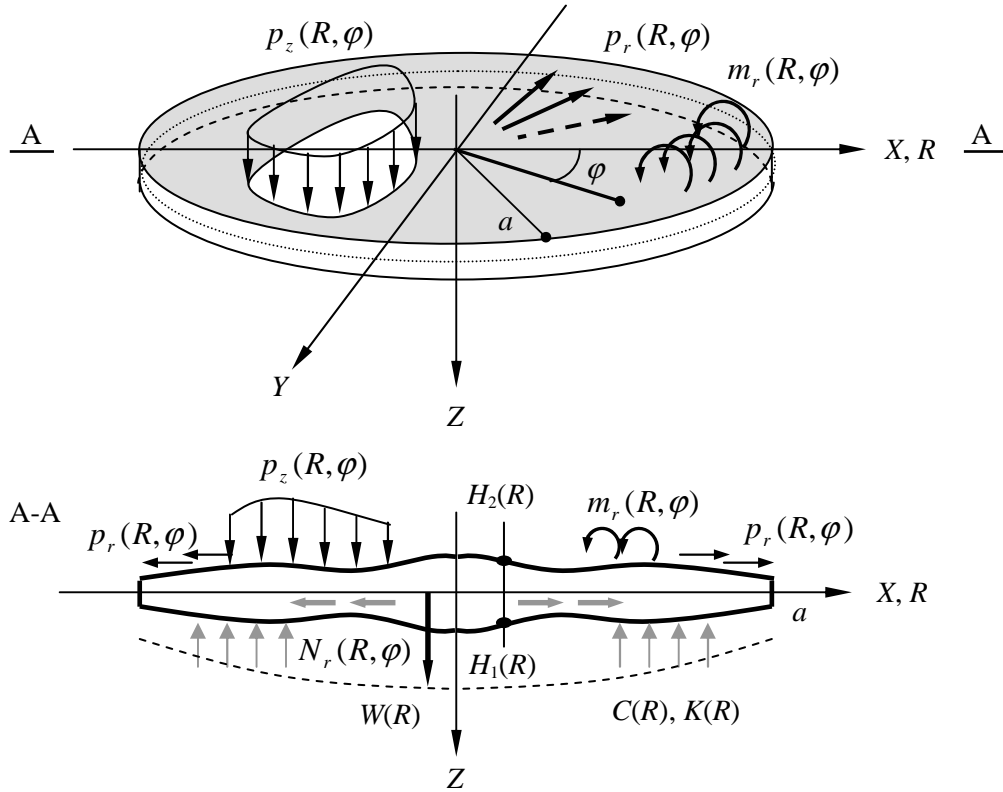
W niniejszym rozdziale rozwiążemy zagadnienie drgań kołowej i pierścieniowej niejednorodnej płyty cienkiej, spoczywającej na dwuparametrowym podłożu sprężystym typu Winklera (patrz Kączkowski [83], s. 58). W celu uproszczenia założymy, że zmienne parametry płyty i podłoża odznaczają się osiową symetrią i są opisane dowolną funkcją. Jednym z założeń, dotyczącym tych funkcji, jest możliwość ich rozwinięcia w zbieżne szeregi Czebyszewa. Jeżeli chodzi o obciążenie zewnętrzne, to zakładamy, że jest ono obciążeniem rozłożonym i ma dowolny rozkład (brak założenia o osiowej symetrii).

W określaniu warunków brzegowych płyty kołowej na brzegu wewnętrznym (w przypadku płyty kołowej brzeg ten redukuje się do jednego punktu – środka płyty), w klasycznej teorii płyt korzysta się z warunków ograniczoności przemieszczeń i określonych sił wewnętrznych. Warunków ograniczoności nie można zastosować wprost w przedstawionej w niniejszej pracy metodzie rozwiązania. W rozdziale tym przedstawimy sposób rozwiązania tego zagadnienia. Podamy przykład numeryczny, w którym rozwiążemy zagadnienie własne płyty jednorodnej. Uzyskane wyniki porównamy ze znanymi dla płyt jednorodnych rozwiązaniami analitycznymi.

9.2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Przedmiotem rozważań jest kołowa lub pierścieniowa izotropowa płyta cienka o zmiennej sztywności, symetrycznej niejednorodności poprzecznej przy $H_1(r) = H_2(r)$ (rys. 9.1).

Płyta spoczywa na dwuparametrowym (sztywność poprzeczna i podłużna) podłożu sprężystym typu Winklera (patrz [83], [133]) i jest obciążona poprzecznym obciążeniem $p_z(R, \varphi, t)$, momentami $m_r(R, \varphi, t)$ i $m_\varphi(R, \varphi, t)$ oraz statycznym obciążeniem stycznym $p_r(R, \varphi)$. Zakładamy osiowo-symetryczny rozkład sztywności $D(R)$, gęstości $\rho_i(R)$ i parametrów podłoża sprężystego $C(R)$ $K(R)$ oraz dowolny rozkład pozostałych parametrów i sił zewnętrznych. Założenie o osiowo-symetrycznym rozkładzie sztywności, gęstości oraz parametrów podłoża sprężystego nie zmniejsza ogólności rozważań, przyczynia się jedynie do skrócenia zapisu i tak już rozbudowanych równań. Założymy ponadto, że współczynnik Poissona ν jest stały, a współczynniki rozszerzalności cieplnej α oraz przewodnictwa cieplnego nie zależą od zmiennej z . Ograniczając rozważania do zginania płyty oraz uwzględniając wpływ statycznych sił osiowych na jej ugięcie (z pominięciem sił bezwładności równoległych do płaszczyzny odniesienia), zagadnienie poprzecznych drgań płyty możemy opisać w prawoskrętnym układzie odniesienia następującym liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym (patrz Woźniak [195], s. 191, 215)



Rys. 9.1. Schemat układu

$$\begin{aligned}
 & \nabla^2 (D \nabla^2 W) - L[D(1-\nu), W] + \rho_0 \ddot{W} - \left(\rho_2 \nabla^2 \ddot{W} + \frac{\partial \rho_2}{\partial R} \frac{\partial \ddot{W}}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \varphi} \frac{\partial \ddot{W}}{\partial \varphi} \right) \\
 & - N_r \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} - 2 \left(\frac{N_{r\varphi}}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial R \partial \varphi} - \frac{N_{r\varphi}}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) - N_\varphi \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \\
 & + p_r \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{p_\varphi}{R} \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} C + \left(\frac{C}{R} + \frac{\partial C}{\partial R} \right) \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{1}{R^2} C \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial C}{\partial \varphi} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) + KW \\
 & = p_z + \frac{1}{R} \frac{\partial (R m_r)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} - \nabla^2 \left(D(1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{H} \right)
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

gdzie $W = W(R, \varphi, t)$ – poprzeczne przemieszczenie płyty, $D = D(R)$ – sztywność płyty na zginanie, $C(R)$, $K(R)$ – funkcje opisujące parametry podłoża, N_r , N_φ – siły normalne w płycie, $N_{r\varphi}$ – styczne, $\Delta T = T^d - T^s$ – różnica temperatury między dolną a górną powierzchnią płyty, $H = H_1(R) + H_2(R)$ – wysokość płyty.

Współczynniki D i ρ_i – określono wzorami

$$D = \int_{-H_2}^{H_1} \frac{z^2 E}{1-\nu^2} dz, \quad \rho_i = \int_{-H_2}^{H_1} z^i \rho dz. \quad (9.2)$$

gdzie ν – liczba Poissona.

Zakładamy, że są dane wewnętrzne siły osiowe (tarczowe) $N_r, N_\varphi, N_{r\varphi}$. W rzeczywistości, aby je uzyskać, należy rozwiązać stan tarczowy, który w przypadku płyty o symetrycznej niejednorodności poprzecznej jest opisany niezależnymi równaniami (brak sprzężenia między równaniami opisującymi stan płytowy i tarczowy).

Występujące we wzorze (9.1) operatory: operator Laplace'a ∇^2 oraz operator L w biegunowym układzie współrzędnych wyrażają się wzorami

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (9.3)$$

$$\begin{aligned} L[D(1-\nu), W] &= \frac{\partial^2 D(1-\nu)}{\partial R^2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \\ &- 2 \frac{\partial^2}{\partial R \partial \varphi} \left(\frac{D(1-\nu)}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial R \partial \varphi} \left(\frac{W}{R} \right) + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial D(1-\nu)}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 D(1-\nu)}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial R^2}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Występujące w płycie siły wewnętrzne określone są wzorami:

- momenty gnące i skręcające

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \nu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) + (1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{H} \right], \\ M_\varphi &= -D \left[\nu \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) + (1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{H} \right], \\ M_{r\varphi} &= -D \left[(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial R \partial \varphi} \left(\frac{W}{R} \right) \right]; \end{aligned} \quad (9.5)$$

- siły poprzeczne

$$\begin{aligned} Q_r &= \frac{\partial D(1-\nu)}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial D(1-\nu)}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial R} \left(D \nabla^2 W \right) - \frac{\partial}{\partial R} \left(D(1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{H} \right) + (N_r + C) \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{N_{r\varphi}}{R} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + m_r, \end{aligned} \quad (9.6)$$

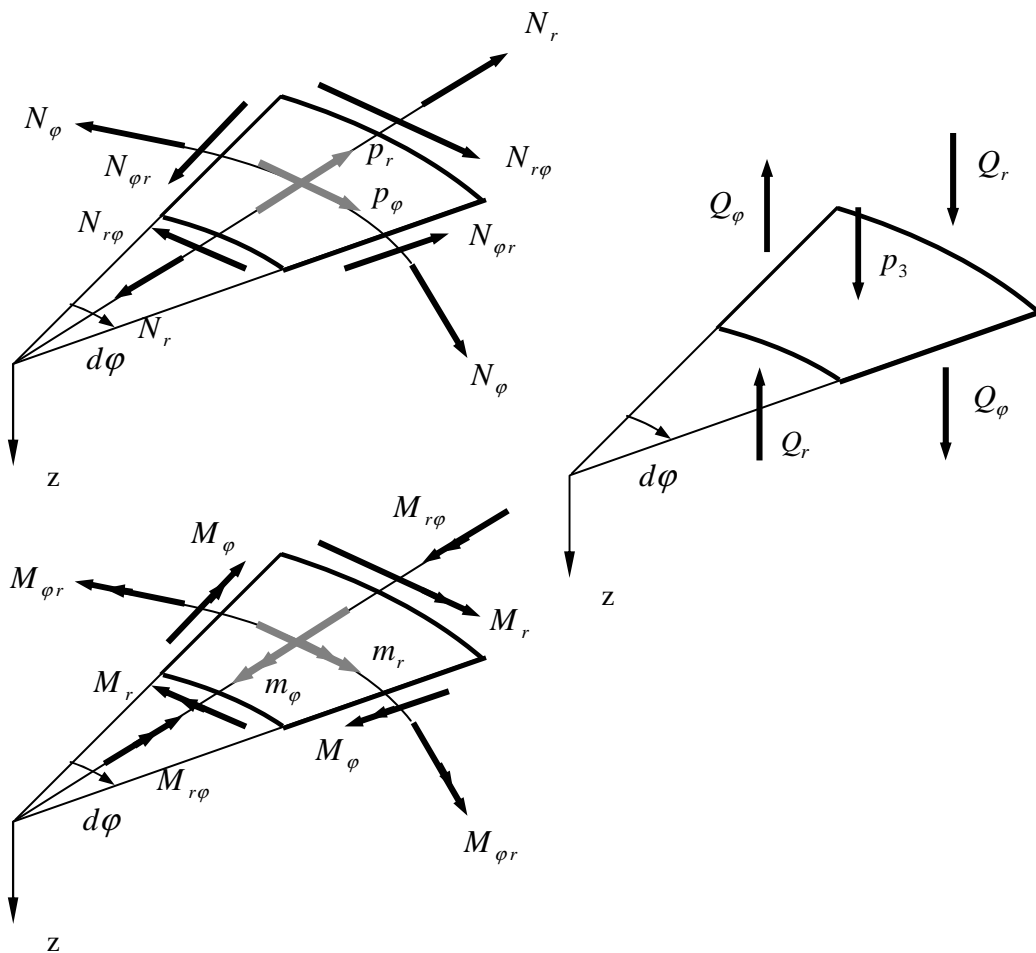
$$Q_\varphi = -\frac{\partial D(1-\nu)}{\partial R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial D(1-\nu)}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} (D \nabla^2 W) \quad (9.7)$$

$$- \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(D(1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{H} \right) + N_{r\varphi} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{N_\varphi + C}{R} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + m_\varphi;$$

- reakcje brzegowe Kirchhoffa

$$V_r = Q_r + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \rho_2 \frac{\partial \ddot{W}}{\partial R}. \quad (9.8)$$

Dodatknie siły przekrojowe działające na infinytezymalny element płaszczyzny podstawowej płyty przedstawiono na rysunku 9.2.



Rys. 9.2. Dodatkne zwroty sił i momentów działających na infinytezymalny element płyty

Po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych $r = R/a$, $w = W/a$, $h = H/a$ równanie ruchu (9.1) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 (\bar{D} \nabla^2 w) - L[\bar{D}(1-\nu), w] + g \bar{\rho}_0 \ddot{w} - g \left(\bar{\rho}_2 \nabla^2 \ddot{w} + \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial r} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial \varphi} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \varphi} \right) \\
& - f \left(\bar{N}_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2 \left(\frac{\bar{N}_{r\varphi}}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\bar{N}_{r\varphi}}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right. \\
& \left. + \bar{N}_\varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \bar{p}_r \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\bar{p}_\varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\
& - f \left(\bar{C} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\frac{\bar{C}}{r} + \frac{\partial \bar{C}}{\partial r} \right) \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \bar{C} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + f \bar{K} w \\
& = f \left(\bar{p}_z + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \bar{m}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{m}_\varphi}{\partial \varphi} \right) - \nabla^2 \left(\bar{D}(1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \right)
\end{aligned} \tag{9.9}$$

a operatory ∇^2 , L określone są wzorami

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \tag{9.10}$$

$$\begin{aligned}
L[\bar{D}(1-\nu), w] &= \frac{\partial^2 \bar{D}(1-\nu)}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{\bar{D}(1-\nu)}{r} \right) \\
&\times \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{w}{r} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{D}(1-\nu)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{D}(1-\nu)}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}.
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Występujące we wzorach (9.9)–(9.11) funkcje i stałe definiują następujące wyrażenia:

$$\begin{aligned}
D &= D_0 \bar{D}, \quad N_\beta = \frac{P_0}{a} \bar{N}_\beta, \quad C = \frac{P_0}{a} \bar{C}, \quad K = \frac{P_0}{a^3} \bar{K}, \\
p_\beta &= \frac{P_0}{a^2} \bar{p}_\beta, \quad m_\beta = \frac{P_0}{a} \bar{m}_\beta, \quad \rho_i = a^i \Gamma_0 \bar{\rho}_i, \\
f &= \frac{P_0 a}{D_0}, \quad g = \frac{\Gamma_0 a^4}{D_0},
\end{aligned} \tag{9.12}$$

gdzie D_0 , P_0 , Γ_0 – parametry porównawcze.

Występujące w płycie siły wewnętrzne, po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych, przyjmują postać

- momenty gnące i skręcające

$$\begin{aligned}\bar{M}_r &= \frac{M_r a}{D_0} = -\bar{D} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + (1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \right], \\ \bar{M}_\varphi &= \frac{M_\varphi a}{D_0} = -\bar{D} \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + (1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \right], \\ \bar{M}_{r\varphi} &= \frac{M_{r\varphi} a}{D_0} = -\bar{D} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{w}{r} \right) \right],\end{aligned}\quad (9.13)$$

- siły poprzeczne

$$\begin{aligned}\bar{Q}_r &= \frac{Q_r a^2}{D_0} = \frac{\partial \bar{D}(1-\nu)}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{D}(1-\nu)}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial r} (\bar{D} \nabla^2 w) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{D}(1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \right) + f \left(\bar{N}_r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\bar{N}_{r\varphi}}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \bar{m}_r \right) + f \bar{C} \frac{\partial w}{\partial r},\end{aligned}\quad (9.14)$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_\varphi &= \frac{Q_\varphi a^2}{D_0} = -\frac{\partial \bar{D}(1-\nu)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{D}(1-\nu)}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{D} \nabla^2 w) \\ &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\bar{D}(1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \right) + f \left(\bar{N}_{r\varphi} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\bar{N}_\varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \bar{m}_\varphi \right) + f \frac{\bar{C}}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi},\end{aligned}\quad (9.15)$$

- reakcje brzegowe Kirchhoffa

$$\bar{V}_r = \frac{V_r a^2}{D_0} = \bar{Q}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{M}_{r\varphi}}{\partial \varphi} - g \bar{\rho}_2 \frac{\partial \dot{w}}{\partial r}.\quad (9.16)$$

Dalej w celu uproszczenia zapisu zamiast oznaczeń \bar{D} , \bar{N}_β , ... będziemy stosować oznaczenia D , N_β , ...

9.3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

W celu pozbycia się w równaniu (9.9) osobliwych współczynników $1/r^k$, $k = 1, 2, 3, 4$ obie strony równania pomnożymy przez r^4 . Rozwiązanie tak zmodyfikowanego równania (9.9) rozpoczniemy od zastosowania klasycznej metody rozwiązywania, po-

legającej na rozwinięciu poszukiwanej funkcji $w(r, \varphi, t)$ oraz wszystkich występujących w równaniu (9.9) współczynników w szeregi Fouriera

$$\begin{aligned}
 w(r, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(w_n^c(r, t) \cos n\varphi + w_n^s(r, t) \sin n\varphi \right), \\
 p_\beta(r, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(p_{\beta, n}^c(r, t) \cos n\varphi + p_{\beta, n}^s(r, t) \sin n\varphi \right), \quad \beta = \varphi, r, z, \\
 m_\beta(r, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(m_{\beta, n}^c(r, t) \cos n\varphi + m_{\beta, n}^s(r, t) \sin n\varphi \right), \quad \beta = \varphi, r, \\
 N_\beta(r, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(N_{\beta, n}^c(r) \cos n\varphi + N_{\beta, n}^s(r) \sin n\varphi \right), \quad \beta = \varphi, r, r\varphi, \\
 T(r, \varphi) &= D(1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \\
 &= \frac{D(r)(1+\nu)\alpha(r)}{h(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\Delta T_n^c(r) \cos n\varphi + \Delta T_n^s(r) \sin n\varphi \right).
 \end{aligned} \tag{9.17}$$

W przypadku funkcji niezależnych od φ rozwinięcia te ograniczymy do jednego wyrazu szeregu

$$D(r) = \frac{1}{2} D_0^c(r), \quad C(r) = \frac{1}{2} C_0^c(r), \quad K(r) = \frac{1}{2} K_0^c(r), \quad \rho_i(r) = \frac{1}{2} \rho_{i,0}^c(r). \tag{9.18}$$

Zastosowanie tej metody pozwala na rozdzielenie funkcji na: funkcje zależne od zmiennej φ oraz funkcje zależne od r .

W dalszych przekształceniach wykorzystamy twierdzenia dotyczące mnożenia szeregów trygonometrycznych oraz ich różniczkowania (patrz Tołstow [181], s. 126, 135).

Twierdzenie 3

Niech dla funkcji $f(\varphi)$ oraz $g(\varphi)$ będą określone szeregi Fouriera

$$\begin{aligned}
 f(\varphi) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi \right), \\
 g(\varphi) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_n^c \cos n\varphi + g_n^s \sin n\varphi \right),
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

wtedy szereg odpowiadający iloczynowi funkcji $f(\varphi)g(\varphi)$ (pod warunkiem, że iloczyn ten jest funkcją całkowalną) wyraża się wzorem

$$f(\varphi)g(\varphi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n^c \cos n\varphi + \alpha_n^s \sin n\varphi \right), \quad (9.20)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha_n^c &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(f_m^c (g_{m+n}^c + g_{m-n}^c) + f_m^s (g_{m+n}^s + g_{m-n}^s) \right), \\ \alpha_n^s &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(f_m^c (g_{m+n}^s - g_{m-n}^s) - f_m^s (g_{m+n}^c - g_{m-n}^c) \right), \end{aligned} \quad (9.21)$$

$$f_{-m}^c = f_m^c, \quad g_{-m}^c = g_m^c, \quad f_{-m}^s = -f_m^s, \quad g_{-m}^s = -g_m^s \quad \text{dla } m = 0, 1, 2, \dots$$

Twierdzenie 4

Jeżeli funkcja ciągła $f(\varphi)$ ma w przedziale domkniętym $[-\pi, \pi]$ bezwzględnie całkowalną pochodną $f'(\varphi) = \partial f / \partial \varphi$ oraz $f(-\pi) = f(\pi)$, to szereg Fouriera odpowiadający pochodnej $f'(\varphi)$ ma postać

$$f'(\varphi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} n \left(f_n^s \cos n\varphi - f_n^c \sin n\varphi \right). \quad (9.22)$$

Nie wchodząc w szczegóły dotyczące kryteriów zbieżności, zakładamy, że wszystkie występujące we wzorach szeregi są zbieżne (czytelnika zainteresowanego tą tematyką odsyłamy do literatury specjalistycznej, np. Tołstow [181]). Przy tym założeniu występujący we wzorach (9.19), (9.20), (9.22) znak \sim można zastąpić znakiem równości $=$.

Po podstawieniu szeregów (9.17) do równania (9.9) oraz wykorzystaniu twierdzeń 3 i 4 otrzymamy następujący nieskończony układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{P}}_0 \mathbf{w}^{(4)} + \hat{\mathbf{P}}_1 \mathbf{w}^{(3)} + \hat{\mathbf{P}}_2 \mathbf{w}^{(2)} + \hat{\mathbf{P}}_3 \mathbf{w}^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_4 \mathbf{w} + \hat{\mathbf{R}}_2 \ddot{\mathbf{w}}^{(2)} + \hat{\mathbf{R}}_3 \ddot{\mathbf{w}}^{(1)} + \hat{\mathbf{R}}_4 \ddot{\mathbf{w}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{P}_0^{00} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_0^{11} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_0^{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0^{(4)} \\ \mathbf{w}_1^{(4)} \\ \mathbf{w}_2^{(4)} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{P}_1^{00} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_1^{11} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_1^{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0^{(3)} \\ \mathbf{w}_1^{(3)} \\ \mathbf{w}_2^{(3)} \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{P}_2^{00} & \mathbf{P}_2^{01} & \mathbf{P}_2^{02} & \cdots \\ \frac{1}{2} \mathbf{P}_2^{10} & \mathbf{P}_2^{11} & \mathbf{P}_2^{12} & \cdots \\ \frac{1}{2} \mathbf{P}_2^{20} & \mathbf{P}_2^{21} & \mathbf{P}_2^{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0^{(2)} \\ \mathbf{w}_1^{(2)} \\ \mathbf{w}_2^{(2)} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{R}_2^{00} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2^{11} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_2^{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_0^{(2)} \\ \ddot{\mathbf{w}}_1^{(2)} \\ \ddot{\mathbf{w}}_2^{(2)} \\ \vdots \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{P}_3^{00} & \mathbf{P}_3^{01} & \mathbf{P}_3^{02} & \cdots \\ \frac{1}{2} \mathbf{P}_3^{10} & \mathbf{P}_3^{11} & \mathbf{P}_3^{12} & \cdots \\ \frac{1}{2} \mathbf{P}_3^{20} & \mathbf{P}_3^{21} & \mathbf{P}_3^{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0^{(1)} \\ \mathbf{w}_1^{(1)} \\ \mathbf{w}_2^{(1)} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{R}_3^{00} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_3^{11} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_3^{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_0^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{w}}_1^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{w}}_2^{(1)} \\ \vdots \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{P}_4^{00} & \mathbf{P}_4^{01} & \mathbf{P}_4^{02} & \cdots \\ \frac{1}{2} \mathbf{P}_4^{10} & \mathbf{P}_4^{11} & \mathbf{P}_4^{12} & \cdots \\ \frac{1}{2} \mathbf{P}_4^{20} & \mathbf{P}_4^{21} & \mathbf{P}_4^{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{R}_4^{00} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_4^{11} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_4^{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_0 \\ \ddot{\mathbf{w}}_1 \\ \ddot{\mathbf{w}}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{P}}, \quad (9.23)
\end{aligned}$$

gdzie występujące we wzorze podmacierze \mathbf{P}_j^{nm} , \mathbf{R}_j^{nm} i wektory $\mathbf{w}_n^{(p)}$, \mathbf{P}_n mają postać

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_j^{nm} &= \begin{bmatrix} P_{j,cc}^{nm} & P_{j,cs}^{nm} \\ P_{j,sc}^{nm} & P_{j,ss}^{nm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_j^{nm} = \begin{bmatrix} R_{j,cc}^{nm} & 0 \\ 0 & R_{j,ss}^{nm} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{w}_n^{(p)} &= \begin{bmatrix} \partial^p w_n^c / \partial r^p \\ \partial^p w_n^s / \partial r^p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_n = \begin{bmatrix} P_n^c \\ P_n^s \end{bmatrix}, \quad (9.24)
\end{aligned}$$

a elementy tych podmacierzy określone są następującymi wzorami:

$$P_{0,cc}^{nn} = P_{0,ss}^{nn} = r^4 D, \quad P_{0,cs}^{nn} = P_{0,sc}^{nn} = 0, \quad (9.25)$$

$$P_{1,cc}^{nn} = P_{1,ss}^{nn} = 2r^3 D + 2r^4 \frac{\partial D}{\partial r}, \quad P_{1,cs}^{nn} = P_{1,sc}^{nn} = 0, \quad (9.26)$$

$$\begin{aligned}
P_{2,cc}^{nm} &= P_2 \delta_{nm} - \frac{1}{2} r^4 f N_{r,nm}^{+c}, \quad P_{2,ss}^{nm} = P_2 \delta_{nm} - \frac{1}{2} r^4 f N_{r,nm}^{-s}, \\
P_{2,cs}^{nm} &= -\frac{1}{2} r^4 f N_{r,nm}^{+s}, \quad P_{2,sc}^{nm} = \frac{1}{2} r^4 f N_{r,nm}^{-c}, \quad (9.27)
\end{aligned}$$

$$P_2 = -(1+2n^2)r^2 D + (2+\nu)r^3 \frac{\partial D}{\partial r} + r^4 \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} - r^4 f C,$$

$$\begin{aligned}
P_{3,cc}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(-2nr^3 N_{r\varphi, nm}^{+s} + r^3 N_{\varphi, nm}^{+c} - r^4 p_{r, nm}^{+c} \right) + P_3 \delta_{nm}, \\
P_{3,ss}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(+2nr^3 N_{r\varphi, nm}^{-c} + r^3 N_{\varphi, nm}^{-s} - r^4 p_{r, nm}^{-s} \right) + P_3 \delta_{nm}, \\
P_{3,cs}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(+2nr^3 N_{r\varphi, nm}^{+c} + r^3 N_{\varphi, nm}^{+s} - r^4 p_{r, nm}^{+s} \right), \\
P_{3,sc}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(+2nr^3 N_{r\varphi, nm}^{-s} - r^3 N_{\varphi, nm}^{-c} + r^4 p_{r, nm}^{-c} \right), \\
P_3 &= (1+2n^2) r D - (1+2n^2) r^2 \frac{\partial D}{\partial r} + \nu r^3 \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} - r^3 f C - r^4 f \frac{\partial C}{\partial r}
\end{aligned} \tag{9.28}$$

$$\begin{aligned}
P_{4,cc}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(+2nr^2 N_{r\varphi, nm}^{+s} - n^2 r^2 N_{\varphi, nm}^{+c} + nr^3 p_{\varphi, nm}^{+s} \right) + P_4 \delta_{nm}, \\
P_{4,ss}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(-2nr^2 N_{r\varphi, nm}^{-c} - n^2 r^2 N_{\varphi, nm}^{-s} + nr^3 p_{\varphi, nm}^{-c} \right) + P_4 \delta_{nm}, \\
P_{4,cs}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(-2nr^2 N_{r\varphi, nm}^{+c} - n^2 r^2 N_{\varphi, nm}^{+s} + nr^3 p_{\varphi, nm}^{+c} \right) \\
P_{4,sc}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(-2nr^2 N_{r\varphi, nm}^{-s} + n^2 r^2 N_{\varphi, nm}^{-c} + nr^3 p_{\varphi, nm}^{-s} \right), \\
P_4 &= n^2 (n^2 - 4) D + 3n^2 r \frac{\partial D}{\partial r} - \nu n^2 r^2 \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} - n^2 r^2 f C + r^4 f K
\end{aligned} \tag{9.29}$$

$$\begin{aligned}
R_{2,cc}^{nn} = R_{2,ss}^{nn} &= -r^4 g \rho_2, \quad R_{3,cc}^{nn} = R_{3,ss}^{nn} = -r^3 g \rho_2 - r^4 g \frac{\partial \rho_2}{\partial r}, \\
R_{4,cc}^{nn} = R_{4,ss}^{nn} &= r^4 g \rho_0 + n^2 r^2 g \rho_2
\end{aligned} \tag{9.30}$$

$$\begin{aligned}
P_n^c &= f \left(r^4 p_{z, n}^c + r^3 m_{r, n}^c + r^4 \frac{\partial m_{r, n}^c}{\partial r} + nr^3 m_{\varphi, n}^s \right) \\
&\quad - \frac{D(1+\nu)\alpha}{h} \left(r^4 \frac{\partial^2 \Delta \Gamma_n^c}{\partial r^2} + r^3 \frac{\partial \Delta \Gamma_n^c}{\partial r} - n^2 r^2 \Delta \Gamma_n^c \right), \\
P_n^s &= f \left(r^4 p_{z, n}^s + r^3 m_{r, n}^s + r^4 \frac{\partial m_{r, n}^s}{\partial r} - nr^3 m_{\varphi, n}^c \right) \\
&\quad - \frac{D(1+\nu)\alpha}{h} \left(r^4 \frac{\partial^2 \Delta \Gamma_n^s}{\partial r^2} + r^3 \frac{\partial \Delta \Gamma_n^s}{\partial r} - n^2 r^2 \Delta \Gamma_n^s \right),
\end{aligned} \tag{9.31}$$

gdzie w celu skrócenia zapisu wprowadzono oznaczenia

$$\begin{aligned} N_{\beta, nm}^{\pm c} &= N_{\beta, n+m}^c \pm N_{\beta, n-m}^c, & N_{\beta, nm}^{\pm s} &= N_{\beta, n+m}^s \pm N_{\beta, n-m}^s, \\ P_{\beta, nm}^{\pm c} &= P_{\beta, n+m}^c \pm P_{\beta, n-m}^c, & P_{\beta, nm}^{\pm s} &= P_{\beta, n+m}^s \pm P_{\beta, n-m}^s, \end{aligned} \quad (9.32)$$

a δ_{nm} – symbol Kroneckera.

W przypadku szczególnym, gdy $n = 0$ lub $m = 0$, wzory (9.25)–(9.31) ulegają modyfikacji. Wówczas mamy

$$\begin{aligned} \bullet n = 0: & P_{i, sc}^{0m} = P_{i, ss}^{0m} = R_{i, sc}^{0m} = R_{i, ss}^{0m} = 0, \quad P_0^s = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \\ \bullet m = 0: & P_{i, cs}^{n0} = P_{i, ss}^{n0} = R_{i, cs}^{n0} = R_{i, ss}^{n0} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (9.33)$$

a wzory określające pozostałe elementy pozostają bez zmian. Zmiana wyrażeń dla $n = 0$ lub $m = 0$ powoduje pojawienie się w układzie (9.23) spełnionego tożsamościowego równania

$$0 \cdot \left(\frac{\partial^4 w_0^s}{\partial r^4} + \frac{\partial^3 w_0^s}{\partial r^3} \frac{\partial^2 w_0^s}{\partial r^2} + \frac{\partial w_0^s}{\partial r} + w_0^s + \frac{\partial^2 \dot{w}_0^s}{\partial r^2} \frac{\partial \ddot{w}_0^s}{\partial r} + \ddot{w}_0^s \right) = 0$$

Tożsamość ta wynika z faktu uwzględnienia w równaniu (9.23) oraz wzorach wcześniejszych nieistniejącego w rozwinięciach Fouriera wyrazu $w_0^s \sin(0\varphi)$. Uwzględnienie tego wyrazu pozwoliło na zachowanie jednakowej przejrzystej struktury wyprowadzanych wzorów. Eliminując spełnione tożsamościowo równania (drugie równanie układu (9.23)), w jego miejsce wprowadzamy równanie, z którego wynikać będzie tożsamość $w_0^s \equiv 0$. W tym celu w istniejącym układzie równań wystarczy przyjąć $P_{4, ss}^{00} = 1$.

W dalszych rozważaniach nieskończony układ równań (9.23) ograniczymy do układu skończonego, przyjmując w układzie (9.23) skończone rozmiary wektorów $2(lf + 1)$ i macierzy $2(lf + 1) 2(lf + 1)$.

W takim ograniczonym układzie równań różniczkowych zastosujemy twierdzenie 1.

Ponieważ funkcje przemieszczeń w przypadku płyty kołowej są określone w przedziale $[0, 1]$, więc funkcje te będziemy poszukiwali w postaci rozwinięcia w szereg względem przesuniętych wielomianów Czebyszewa $T_n^*(x) = T_n(2x - 1)$. Z zależności (2.31) wyznaczamy macierze \mathbf{Q}_i , będące kombinacją liniową funkcji $\hat{\mathbf{P}}_j$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$ oraz macierze \mathbf{S}_i będące analogicznymi kombinacjami liniowymi funk-

cji $\hat{\mathbf{R}}_j$, $j=0,1,2,3,4$. Macierze \mathbf{Q}_i , \mathbf{S}_i mają strukturę podobną jak macierze $\hat{\mathbf{P}}_j$, $\hat{\mathbf{R}}_j$ i wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_i &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{Q}_i^{00} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_i^{11} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_i^{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad i=0,1, \\
 \mathbf{Q}_i &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{Q}_i^{00} & \mathbf{Q}_i^{01} & \mathbf{Q}_i^{02} & \dots \\ \frac{1}{2}\mathbf{Q}_i^{10} & \mathbf{Q}_i^{11} & \mathbf{Q}_i^{12} & \dots \\ \frac{1}{2}\mathbf{Q}_i^{20} & \mathbf{Q}_i^{21} & \mathbf{Q}_i^{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad i=2,3,4, \\
 \mathbf{S}_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad i=0,1, \\
 \mathbf{S}_i &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{S}_i^{00} & \mathbf{S}_i^{01} & \mathbf{S}_i^{02} & \dots \\ \frac{1}{2}\mathbf{S}_i^{10} & \mathbf{S}_i^{11} & \mathbf{S}_i^{12} & \dots \\ \frac{1}{2}\mathbf{S}_i^{20} & \mathbf{S}_i^{21} & \mathbf{S}_i^{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad i=2,3,4,
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

gdzie występujące we wzorze (9.34) podmacierze \mathbf{Q}_i^{nm} , \mathbf{S}_i^{nm} mają postać

$$\mathbf{Q}_j^{nm} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{j,cc}^{nm} & \mathcal{Q}_{j,cs}^{nm} \\ \mathcal{Q}_{j,sc}^{nm} & \mathcal{Q}_{j,ss}^{nm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_j^{nm} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{j,cc}^{nm} & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_{j,ss}^{nm} \end{bmatrix}, \tag{9.35}$$

a elementy tych podmacierzy określone są następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_{0,cc}^{nn} = \mathcal{Q}_{0,ss}^{nn} = r^4 D, & \quad \mathcal{Q}_{0,cs}^{nn} = \mathcal{Q}_{0,sc}^{nn} = 0, \\
 \mathcal{Q}_{1,cc}^{nn} = \mathcal{Q}_{1,ss}^{nn} = -14r^3 D - 2r^4 \frac{\partial D}{\partial r}, & \quad \mathcal{Q}_{1,cs}^{nn} = \mathcal{Q}_{1,sc}^{nn} = 0,
 \end{aligned} \tag{9.36}$$

$$\begin{aligned}
Q_{2,cc}^{nm} &= Q_2 \delta_{nm} - \frac{1}{2} r^4 f N_{r,nm}^{+c}, & Q_{2,ss}^{nm} &= Q_2 \delta_{nm} - \frac{1}{2} r^4 f N_{r,nm}^{-s}, \\
Q_{2,cs}^{nm} &= -\frac{1}{2} r^4 f N_{r,nm}^{+s}, & Q_{2,sc}^{nm} &= \frac{1}{2} r^4 f N_{r,nm}^{-c}, \\
Q_2 &= (53 - 2n^2) r^2 D + (20 + \nu) r^3 \frac{\partial D}{\partial r} + r^4 \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} - r^4 f C;
\end{aligned} \tag{9.37}$$

$$\begin{aligned}
Q_{3,cc}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(-8r^3 N_{r,nm}^{+c} - 2r^4 \frac{\partial N_{r,nm}^{+c}}{\partial r} - 2nr^3 N_{r\varphi,nm}^{+s} + r^3 N_{\varphi,nm}^{+c} - r^4 p_{r,nm}^{+c} \right) \\
&\quad + Q_3 \delta_{nm}, \\
Q_{3,ss}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(-8r^3 N_{r,nm}^{-s} - 2r^4 \frac{\partial N_{r,nm}^{-s}}{\partial r} + 2nr^3 N_{r\varphi,nm}^{-c} + r^3 N_{\varphi,nm}^{-s} - r^4 p_{r,nm}^{-s} \right) \\
&\quad + Q_3 \delta_{nm}, \\
Q_{3,cs}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(-8r^3 N_{r,nm}^{+s} - 2r^4 \frac{\partial N_{r,nm}^{+s}}{\partial r} + 2nr^3 N_{r\varphi,nm}^{+c} + r^3 N_{\varphi,nm}^{+s} - r^4 p_{r,nm}^{+s} \right), \\
Q_{3,sc}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(8r^3 N_{r,nm}^{-c} + 2r^4 \frac{\partial N_{r,nm}^{-c}}{\partial r} + 2nr^3 N_{r\varphi,nm}^{-s} - r^3 N_{\varphi,nm}^{-c} + r^4 p_{r,nm}^{-c} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_3 &= -(55 - 10n^2) r D - (47 - 2n^2 + 6\nu) r^2 \frac{\partial D}{\partial r} - (6 + \nu) r^3 \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} + 7r^3 f C \\
&\quad + r^4 f \frac{\partial C}{\partial r};
\end{aligned} \tag{9.38}$$

$$\begin{aligned}
Q_{4,cc}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(12r^2 N_{r,nm}^{+c} + 8r^3 \frac{\partial N_{r,nm}^{+c}}{\partial r} + r^4 \frac{\partial^2 N_{r,nm}^{+c}}{\partial r^2} + 8nr^2 N_{r\varphi,nm}^{+s} \right. \\
&\quad + 2nr^3 \frac{\partial N_{r\varphi,nm}^{+s}}{\partial r} - (n^2 + 3) r^2 N_{\varphi,nm}^{+c} - r^3 \frac{\partial N_{\varphi,nm}^{+c}}{\partial r} \\
&\quad \left. + 4r^3 p_{r,nm}^{+c} + r^4 \frac{\partial p_{r,nm}^{+c}}{\partial r} + nr^3 p_{\varphi,nm}^{+s} \right) + Q_4 \delta_{nm},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{4,ss}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(12r^2 N_{r, nm}^{-s} + 8r^3 \frac{\partial N_{r, nm}^{-s}}{\partial r} + r^4 \frac{\partial^2 N_{r, nm}^{-s}}{\partial r^2} - 8nr^2 N_{r\varphi, nm}^{-c} \right. \\
&\quad - 2nr^3 \frac{\partial N_{r\varphi, nm}^{-c}}{\partial r} - (n^2 + 3) r^2 N_{\varphi, nm}^{-s} - r^3 \frac{\partial N_{\varphi, nm}^{-s}}{\partial r} + 4r^3 p_{r, nm}^{-s} \\
&\quad \left. + r^4 \frac{\partial p_{r, nm}^{-s}}{\partial r} - nr^3 p_{\varphi, nm}^{-c} \right) + Q_4 \delta_{nm}, \\
Q_{4,cs}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(12r^2 N_{r, nm}^{+s} + 8r^3 \frac{\partial N_{r, nm}^{+s}}{\partial r} + r^4 \frac{\partial^2 N_{r, nm}^{+s}}{\partial r^2} \right. \\
&\quad - 8nr^2 N_{r\varphi, nm}^{+c} - 2nr^3 \frac{\partial N_{r\varphi, nm}^{+c}}{\partial r} - (n^2 + 3) r^2 N_{\varphi, nm}^{+s} \\
&\quad \left. - r^3 \frac{\partial N_{\varphi, nm}^{+s}}{\partial r} + 4r^3 p_{r, nm}^{-s} + r^4 \frac{\partial p_{r, nm}^{+s}}{\partial r} - nr^3 p_{\varphi, nm}^{+c} \right), \\
Q_{4,sc}^{nm} &= -\frac{1}{2} f \left(-12r^2 N_{r, nm}^{-c} - 8r^3 \frac{\partial N_{r, nm}^{-c}}{\partial r} - r^4 \frac{\partial^2 N_{r, nm}^{-c}}{\partial r^2} \right. \\
&\quad - 8nr^2 N_{r\varphi, nm}^{-s} - 2nr^3 \frac{\partial N_{r\varphi, nm}^{-s}}{\partial r} + (n^2 + 3) r^2 N_{\varphi, nm}^{-c} \\
&\quad \left. + r^3 \frac{\partial N_{\varphi, nm}^{-c}}{\partial r} - 4r^3 p_{r, nm}^{+c} - r^4 \frac{\partial p_{r, nm}^{-c}}{\partial r} - nr^3 p_{\varphi, nm}^{-s} \right), \tag{9.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_4 &= (9 - 10n^2 + n^4) D - 3(-7 + n^2 - 2\nu) r \frac{\partial D}{\partial r} \\
&\quad + (6 + 3\nu - \nu n^2) r^2 \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} + (n^2 - 9) r^2 f C - 3r^2 f \frac{\partial C}{\partial r} - r^4 f K;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2,cc}^{nn} &= S_{2,ss}^{nn} = -r^4 g \rho_2, \\
S_{3,cc}^{nn} &= S_{3,ss}^{nn} = 7r^3 g \rho_2 + r^4 g \frac{\partial \rho_2}{\partial r}, \\
S_{4,cc}^{nn} &= S_{4,ss}^{nn} = (n^2 - 9) r^2 g \rho_2 - 3r^3 g \frac{\partial \rho_2}{\partial r} + r^4 g \rho_0.
\end{aligned} \tag{9.40}$$

W przypadku gdy $n = 0$ lub $m = 0$, wzory (9.36)–(9.40) ulegają modyfikacji i występujące w tych wzorach funkcje przyjmują postać

$$\begin{aligned}
\bullet n = 0: & \quad Q_{i,sc}^{0m} = Q_{i,ss}^{0m} = S_{i,sc}^{0m} = S_{i,ss}^{0m} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \\
\bullet m = 0: & \quad Q_{i,cs}^{n0} = Q_{i,ss}^{n0} = S_{i,cs}^{n0} = S_{i,ss}^{n0} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \\
\bullet n = m = 0 \text{ i } i = 4: & \quad Q_{4,ss}^{00} = 1.
\end{aligned} \tag{9.41}$$

Pozostałe elementy pozostają bez zmian.

Kolejnym krokiem jest rozwinięcie w szereg Czebyszewa macierzy funkcyjnych \mathbf{Q}_i , \mathbf{S}_i . Ponieważ w wyrazach macierzy, oprócz funkcji wyjściowych, występują mnożniki r^k , $k = 1, 2, 3, 4$, w czasie wyznaczania współczynników rozwinięć Czebyszewa wykorzystamy następujące zależności wynikające ze wzoru (2.38)

$$\begin{aligned}
a_l^* [r f(r)] &= \frac{1}{4} (a_{l-1}^* + 2a_l^* + a_{l+1}^*), \\
a_l^* [r^2 f(r)] &= \frac{1}{16} (a_{l-2}^* + 4a_{l-1}^* + 6a_l^* + 4a_{l+1}^* + a_{l+2}^*), \\
a_l^* [r^3 f(r)] &= \frac{1}{64} (a_{l-3}^* + 6a_{l-2}^* + 15a_{l-1}^* + 20a_l^* + 15a_{l+1}^* + 6a_{l+2}^* + a_{l+3}^*), \\
a_l^* [r^4 f(r)] &= \frac{1}{256} (a_{l-4}^* + 8a_{l-3}^* + 28a_{l-2}^* + 56a_{l-1}^* + 70a_l^* + 56a_{l+1}^* \\
&\quad + 28a_{l+2}^* + 8a_{l+3}^* + a_{l+4}^*),
\end{aligned} \tag{9.42}$$

gdzie a_l^* – współczynniki rozwinięcia funkcji $f(r)$ względem przesuniętych wielomianów Czebyszewa I rodzaju.

Ze względu na rozbudowaną postać tych rozwinięć ograniczymy rozważania do przedstawienia rozwinięcia jednego z elementów macierzy \mathbf{Q}_2 – rozwinięcia funkcji $Q_{2,cc}^{nm}$, przy czym we wzorze (9.43) oraz wszystkich następnych wzorach występujących w tym rozdziale, aby uprościć zapis pominiemy w oznaczeniach współczynników rozwinięć względem wielomianów przesuniętych znak *, tj. zamiast oznaczeń a_l^* , $(F)_l^*$ użyjemy oznaczeń a_l , $(F)_l$

$$\begin{aligned}
Q_{3,cc}^{nm} = & \left(-\frac{1}{2} (55 - 10n^2) (d_{l-1} + d_{l+1}) - \frac{1}{4} (47 - 2n^2 + 6\nu) (d'_{l-2} + 2d'_l + d'_{l+2}) \right. \\
& - \frac{1}{8} (6 + \nu) (d''_{l-3} + 3d''_{l-1} + 3d''_{l+1} + d''_{l+3}) \\
& + \frac{7}{8} f(c_{l-3} + 3c_{l-1} + 3c_{l+1} + c_{l+3}) \\
& \left. + \frac{1}{16} f(c'_{l-4} + 4c'_{l-2} + 6c'_l + 4c'_{l+2} + c'_{l+4}) \right) \delta_{nm}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} f \left(\left(N_{r, nm}^{+c} \right)_{l-3} + 3 \left(N_{r, nm}^{+c} \right)_{l-1} + 3 \left(N_{r, nm}^{+c} \right)_{l+1} + \left(N_{r, nm}^{+c} \right)_{l+3} \right) \\
& + \frac{1}{16} f \left(\left(N_{r, nm}^{+c} \right)'_{l-4} + 4 \left(N_{r, nm}^{+c} \right)'_{l-2} \right. \\
& \left. + \left(N_{r, nm}^{+c} \right)'_l + \left(N_{r, nm}^{+c} \right)'_{l+2} + \left(N_{r, nm}^{+c} \right)'_{l+4} \right) \\
& + \frac{n}{8} f \left(\left(N_{r\varphi, nm}^{+s} \right)_{l-3} + 3 \left(N_{r\varphi, nm}^{+s} \right)_{l-1} + 3 \left(N_{r\varphi, nm}^{+s} \right)_{l+1} + \left(N_{r\varphi, nm}^{+s} \right)_{l+3} \right) \\
& - \frac{1}{16} f \left(\left(N_{\varphi, nm}^{+c} \right)_{l-3} + 3 \left(N_{\varphi, nm}^{+c} \right)_{l-1} + 3 \left(N_{\varphi, nm}^{+c} \right)_{l+1} + \left(N_{\varphi, nm}^{+c} \right)_{l+3} \right) \\
& + \frac{1}{32} f \left(\left(p_{r, nm}^{+c} \right)_{l-4} + 4 \left(p_{r, nm}^{+c} \right)_{l-2} + 6 \left(p_{r, nm}^{+c} \right)_l + 4 \left(p_{r, nm}^{+c} \right)_{l+2} + \left(p_{r, nm}^{+c} \right)_{l+4} \right). \quad (9.43)
\end{aligned}$$

We wzorze (9.43) oraz w następnym przyjęto następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
d_l^{(p)} &= a_l \left[\frac{\partial^p D}{\partial r^p} \right], \quad c_l^{(p)} = a_l \left[\frac{\partial^p C}{\partial r^p} \right], \quad k_l = a_l [K], \quad g_{i,l}^{(p)} = a_l \left[\frac{\partial^p \rho_i}{\partial r^p} \right], \\
Dh_l &= a_l \left[\frac{D(1+\nu)\alpha}{h} \right], \quad t_{n,l}^{c,s} = a_l [T_n^{c,s}], \quad \mathbf{w}_{n,l} = \begin{bmatrix} a_l [w_n^c] \\ a_l [w_n^s] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{n,l}^c \\ w_{n,l}^s \end{bmatrix}. \quad (9.44)
\end{aligned}$$

W przypadku funkcji lub macierzy funkcyjnych indeksowanych wieloma wskaźnikami (np. $N_{r, nm}^{+c}$, \mathbf{w}_n , \mathbf{Q}_i^{nm}) wprowadzono we wzorze (9.43) nowe, dodatkowe oznaczenie określające współczynniki Czebyszewa rozwinięć tych funkcji i ich pochodnych

$$(\mathbf{F})_l^{(p)} = a_l \left[\frac{\partial^p \mathbf{F}}{\partial r^p} \right]. \quad (9.45)$$

Oznaczenia te dla występujących we wzorach (9.36)–(9.40) funkcji mają postać

$$\begin{aligned}
\left(N_{\beta, nm}^{\pm cs} \right)_l^{(p)} &= a_l \left[\frac{\partial^p N_{\beta, nm}^{\pm cs}}{\partial r^p} \right], \quad \left(p_{\beta, nm}^{\pm cs} \right)_l^{(p)} = a_l \left[\frac{\partial^p p_{\beta, nm}^{\pm cs}}{\partial r^p} \right], \\
\left(p_{\beta, n}^{cs} \right)_l^{(p)} &= a_l \left[\frac{\partial^p p_{\beta, n}^{cs}}{\partial r^p} \right], \quad \left(m_{\beta, n}^{cs} \right)_l^{(p)} = a_l \left[\frac{\partial^p m_{\beta, n}^{cs}}{\partial r^p} \right], \quad (9.46) \\
cs &= c \vee s, \quad \beta = r, \varphi, r\varphi, z, \quad m = 0, 1, \dots, lf.
\end{aligned}$$

Uwaga! Nie w każdej funkcji wskaźnik β przyjmuje wszystkie wartości $r, \varphi, r\varphi, z$.

Po podstawieniu współczynników rozwinięć Czebyszewa funkcji \mathbf{Q}_i , \mathbf{S}_i do zmodyfikowanego wzoru (2.29) (modyfikacja polega na tym, że we wzorze (2.29) po lewej stronie, oprócz iloczynów współczynników rozwinięcia funkcji \mathbf{Q}_i i \mathbf{w} , występują analogiczne iloczyny współczynników rozwinięcia funkcji \mathbf{S}_i i $\ddot{\mathbf{w}}$), wzór ten podajemy dalszym przekształceniom. W przekształceniach stosujemy zależność (2.37) umożliwiającą wyrażenie współczynników rozwinięć pochodnych funkcji przez współczynniki rozwinięć Czebyszewa funkcji wyjściowych. Nie wchodząc w szczegóły wykonanych przekształceń, przedstawiamy końcowy wynik: nieskończony układ równań różniczkowych, umożliwiający wyznaczenie wektora poszukiwanych współczynników $\mathbf{w}_{n,l}$ rozwinięć Czebyszewa funkcji \mathbf{w}_n , tj.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{lf} \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{0,l} \\ \mathbf{w}_{1,l} \\ \mathbf{w}_{2,l} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{lf,l} \end{bmatrix} T_l^*(x), \quad \mathbf{w}_{n,l} = \begin{bmatrix} a_l [w_n^c] \\ a_l [w_n^s] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{n,l}^c \\ w_{n,l}^s \end{bmatrix}, \quad (9.47)$$

Układ tych równań określony jest następującym wzorem

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{00}(k, l) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbf{D}^{11}(k, l) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbf{D}^{22}(k, l) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\ & + f \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{00}(k, l) & \mathbf{N}^{01}(k, l) & \mathbf{N}^{02}(k, l) & \cdots \\ \mathbf{N}^{10}(k, l) & \mathbf{N}^{11}(k, l) & \mathbf{N}^{12}(k, l) & \cdots \\ \mathbf{N}^{20}(k, l) & \mathbf{N}^{21}(k, l) & \mathbf{N}^{22}(k, l) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{0,l} \\ \mathbf{w}_{1,l} \\ \mathbf{w}_{2,l} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ & + \sum_{l=0}^{\infty} g \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{00}(k, l) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbf{M}^{11}(k, l) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^{22}(k, l) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_{0,l} \\ \ddot{\mathbf{w}}_{1,l} \\ \ddot{\mathbf{w}}_{2,l} \\ \vdots \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0(k) \\ \mathbf{F}_1(k) \\ \mathbf{F}_2(k) \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{F}(k), \\ & k = 0, 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (9.48)$$

gdzie podmacierze $\mathbf{D}^{mm}(k, l)$, $\mathbf{N}^{mm}(k, l)$ $\mathbf{M}^{mm}(k, l)$ oraz wektory $\mathbf{F}_n(k)$ mają postać

$$\mathbf{D}^{nn}(k, l) = \begin{bmatrix} D_{cc}^{nn}(k, l) & 0 \\ 0 & D_{ss}^{nn}(k, l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^{nm}(k, l) = \begin{bmatrix} N_{cc}^{nm}(k, l) & N_{cs}^{nm}(k, l) \\ N_{sc}^{nm}(k, l) & N_{ss}^{nm}(k, l) \end{bmatrix}, \quad (9.49)$$

$$\mathbf{M}^{nn}(k, l) = \begin{bmatrix} M_{cc}^{nn}(k, l) & 0 \\ 0 & M_{ss}^{nn}(k, l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_n(k) = \begin{bmatrix} F_n^c(k) \\ F_n^s(k) \end{bmatrix}.$$

Elementy podmacierzy (9.49) oraz wektora wyrazów wolnych $\mathbf{F}(k)$ wyrażają się wzorami

$$D_{cc}^{nn}(k, l) = D_{ss}^{nn}(k, l) = \sum_{j=-4}^4 D_{k-l+j}^{nn} d_{k-l+j} - 16l(4k^2 - 2k^2(44 + 3\nu) + (99 - 15n^2)\nu + 558) \times \sum_{j=0}^{l-1} ((k-l+2j)d_{k-l+2j} + 2(k-l+2j+1)d_{k-l+2j+1} + (k-l+2j+2)d_{k-l+2j+2}), \quad (9.50)$$

$$M_{cc}^{nn}(k, l) = M_{ss}^{nn}(k, l) = \sum_{j=-8}^8 \mathbf{G}_{0, k-l+j}^{nm} g_{0, k-l+j} + \sum_{j=-6}^6 \mathbf{G}_{2, k-l+j}^{nm} g_{2, k-l+j}, \quad (9.51)$$

$$N_{cc}^{nm}(k, l) = \sum_{j=-6}^6 N_{r, k-l+j}^{nm} (N_{r, nm}^{+c})_{k-l+j} + \sum_{j=-6}^6 N_{r\varphi, k-l+j}^{nm} (N_{r\varphi, nm}^{+s})_{k-l+j} + \sum_{j=-5}^5 N_{\varphi, k-l+j}^{nm} (N_{\varphi, nm}^{+c})_{k-l+j} + \sum_{j=-7}^7 N_{r, k-l+j}^{nm} (p_{r, nm}^{+c})_{k-l+j} + \sum_{j=-7}^7 N_{\varphi, k-l+j}^{nm} (p_{\varphi, nm}^{+s})_{k-l+j},$$

$$N_{ss}^{nm}(k, l) = - \sum_{j=-6}^6 N_{r, k-l+j}^{nm} (N_{r, nm}^{-c})_{k-l+j} - \sum_{j=-6}^6 N_{r\varphi, k-l+j}^{nm} (N_{r\varphi, nm}^{-s})_{k-l+j} - \sum_{j=-5}^5 N_{\varphi, k-l+j}^{nm} (N_{\varphi, nm}^{-c})_{k-l+j} - \sum_{j=-7}^7 \rho_{r, k-l+j}^{nm} (p_{r, nm}^{-c})_{k-l+j} - 7 \sum_{j=0}^7 \rho_{\varphi, k-l+j}^{nm} (p_{\varphi, nm}^{-s})_{k-l+j},$$

$$\begin{aligned}
N_{cs}^{nm}(k, l) &= \sum_{j=-6}^6 N_{r, k-l+j}^{nm} \left(N_{r, nm}^{+s} \right)_{k-l+j} - \sum_{j=-6}^6 N_{r\varphi, k-l+j}^{nm} \left(N_{r\varphi, nm}^{+c} \right)_{k-l+j} \\
&\quad + \sum_{j=-5}^5 N_{\varphi, k-l+j}^{nm} \left(N_{\varphi, nm}^{+s} \right)_{k-l+j} \\
&\quad + \sum_{j=-7}^7 p_{r, k-l+j}^{nm} \left(p_{r, nm}^{+s} \right)_{k-l-7+2j} - \sum_{j=-7}^7 p_{\varphi, k-l+j}^{nm} \left(p_{\varphi, nm}^{+c} \right)_{k-l+j}, \\
N_{sc}^{nm}(k, l) &= \sum_{j=-6}^6 N_{r, k-l+j}^{nm} \left(N_{r, nm}^{-s} \right)_{k-l+j} - \sum_{j=-6}^6 N_{r\varphi, k-l+j}^{nm} \left(N_{r\varphi, nm}^{-c} \right)_{k-l+j} \\
&\quad + \sum_{j=-5}^5 N_{\varphi, k-l+j}^{nm} \left(N_{\varphi, nm}^{-s} \right)_{k-l+j} \\
&\quad + \sum_{j=-7}^7 p_{r, k-l+j}^{nm} \left(p_{r, nm}^{-s} \right)_{k-l+j} - \sum_{j=-7}^7 p_{\varphi, k-l+j}^{nm} \left(p_{\varphi, nm}^{-c} \right)_{k-l+j}, \quad (9.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_n^c(k) &= \sum_{j=-8}^8 p_{z, k+j}^n \left(p_{z, n}^c \right)_{k+j} + \sum_{j=-7}^7 m_{r, k+j}^n \left(m_{r, n}^c \right)_{k+j} + \sum_{j=-7}^7 m_{\varphi, k+j}^n \left(m_{\varphi, n}^s \right)_{k+j} \\
&\quad - \frac{1}{2f} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{j=-6}^6 \left(T_{k-l+j}^n Dh_{k-l+j} + T_{k+l+j}^n Dh_{k+l+j} \right) \right) t_{n, l}^c, \\
F_n^s(k) &= \sum_{j=-8}^8 p_{z, k+j}^n \left(p_{z, n}^s \right)_{k+j} + \sum_{j=-7}^7 m_{r, k+j}^n \left(m_{r, n}^s \right)_{k+j} - \sum_{j=-7}^7 m_{\varphi, k+j}^n \left(m_{\varphi, n}^c \right)_{k+j} \\
&\quad - \frac{1}{2f} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{j=-6}^6 \left(T_{k-l+j}^n Dh_{k-l+j} + T_{k+l+j}^n Dh_{k+l+j} \right) \right) t_{n, l}^s, \quad (9.53)
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
D_{k\mp l-4} &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)(k+3) \left[\mp(1-\nu)l \left(k^2 + 2k(n^2 - 5) - 9n^2 + 24 \right) \right. \\
&\quad \left. + n^2 \left(-(k-4)(k-5)\nu + 3k + n^2 - 16 \right) + l^2 \left(k^2 - 11k - (k+n^2-6)\nu + 30 \right) \right], \\
D_{k\mp l-3} &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)(k+3) \left[\pm l \left(4k^2 - 36k + 81 + 4kn^2 - 15n^2 \pm l \left(4k^2 - 38k + 90 \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + 3(k-3)n^2 - (k \pm l - 3) \left(\pm 3l(k-5) + 2(k \pm l - 4)n^2 \right) \nu \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{k\mp l-2} = & (k+2)(k+3) \left[\pm l \left(-k(15k(k-7) + (4k+1)n^2 + 108) + 45n^2 - 318 \right. \right. \\
& + \left. \left((k(4k+5) - 41)n^2 + k(k-5)(7k+4) + 108 \right) \nu \right) \\
& + l^2 \left(k(k(14k-97) + 87) - (k(7k-17) + 2(k+4)n^2) \nu + 6(9\nu + 53) \right) \\
& \left. - (k-2) \left(k((2k+1)\nu + 3) + 2n^2 - 25\nu - 23 \right) n^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{k\mp l-1} = & (k+2)(k+3) \left[(k-1)(k-3)(2(k-8)\nu - 9)n^2 \right. \\
& \pm l \left(-9k(4k(k-6) + 9) + 87n^2 + 141\nu - 921 + k(4k-41)n^2 \right. \\
& \left. + \left(k(k(7k+3) - 151) - 2(k(2k-23) + 35)n^2 \right) \nu \right) \\
& \left. + l^2 \left(2k(k(14k-73) - 24) + 141\nu - (k(7k+10) - 2(k-11)n^2) \nu + 798 \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{k\mp l} = & k(k^2 - 9) \left[(5k^2 - 38)\nu + 3n^2 - 30 \right] n^2 \\
& \pm 2l \left[5k^4(n^2(1-\nu) + 6\nu) - 9((19\nu - 35)n^2 + 696) \right. \\
& \left. - k^2((80 - 104\nu)n^2 + 6(65\nu - 76)) \right] \\
& + 5l^2 k \left[7k^4 + k^2((n^2 - 12)\nu - 151) - (25n^2 - 156)\nu + 888 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{k\mp l+1} = & (k-2)(k-3) \left[(k+1)(k+3)(2(k+8)\nu + 9)n^2 \right. \\
& \pm l \left(9k(4k(k+6) + 9) + 87n^2 + 141\nu - 921 + k(4k-41)n^2 \right. \\
& \left. + \left(k(k(7k+3) - 151) - 2(k(2k-23) + 35)n^2 \right) \nu \right) \\
& \left. + l^2 \left(2k(k(14k+73) - 24) - 141\nu + (k(7k-10) + 2(k+11)n^2) \nu - 798 \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{k\mp l+2} = & (k-2)(k-3) \pm \left[l \left(k(15k(k+7) - (4k-1)n^2 + 108) + 45n^2 - 318 \right. \right. \\
& + \left. \left((k(4k-5) - 41)n^2 - k(k+5)(7k-4) + 108 \right) \nu \right) \\
& + l^2 \left(k(k(14k+97) + 87) + (k(7k+17) - 2(k-4)n^2) \nu - 6(9\nu + 53) \right) \\
& \left. (k+2) \left(k((2k-1)\nu - 3) + 2n^2 - 25\nu - 23 \right) n^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{k\mp l+3} &= \frac{1}{2}(k-1)(k-2)(k-3) \left[\pm l \left(4k^2 + 36k + 81 - 4kn^2 - 15n^2 \pm l(4k^2 + 38k + 90) \right) \right. \\
&\quad \left. - 3(k+3)n^2 - (k\mp l+3) \left(\pm 3l(k+5) + 2(k\mp l+4)n^2 \right) \nu \right], \\
D_{k\mp l+4} &= \frac{1}{2}(k-1)(k-2)(k-3) \left[\pm(1-\nu)l \left(k^2 - 2k(n^2 - 5) - 9n^2 + 24 \right) \right. \\
&\quad \left. + n^2 \left(-(k+4)(k+5)\nu - 3k + n^2 - 16 \right) \right. \\
&\quad \left. + l^2 \left(k^2 + 11k - (-k + n^2 - 6)\nu + 30 \right) \right], \tag{9.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{0,k\mp l-8}^{mn} &= \frac{1}{512}(k+1)(k+2)(k+3), & G_{0,k\mp l-7}^{mn} &= \frac{1}{64}(k+1)(k+2)(k+3), \\
G_{0,k\mp l-6}^{mn} &= \frac{3}{128}(k+2)(k+3)(2k+3), & G_{0,k\mp l-5}^{mn} &= \frac{3}{64}(k+2)(k+3)(k+5), \\
G_{0,k\mp l-4}^{mn} &= -\frac{3}{128}(k+3)(k(3k-16)-49), & G_{0,k\mp l-3}^{mn} &= -\frac{3}{64}(5k+14)(k^2-9), \\
G_{0,k\mp l-2}^{mn} &= -\frac{1}{128}(k-2)(11k(2k+19)+435), & G_{0,k\mp l-1}^{mn} &= \frac{1}{64}(k-1)(11k(k-5)-294), \\
G_{0,k\mp l}^{mn} &= \frac{9}{256}k(11k^2-159), \\
G_{0,k\mp l+1}^{mn} &= \frac{1}{64}(k+1)(11k(k+5)-294), & G_{0,k\mp l+2}^{mn} &= -\frac{1}{128}(k+2)(11k(2k-19)+435), \\
G_{0,k\mp l+3}^{mn} &= -\frac{3}{64}(5k-14)(k^2-9), & G_{0,k\mp l+4}^{mn} &= -\frac{3}{128}(k-3)(k(3k+16)-49), \\
G_{0,k\mp l+5}^{mn} &= \frac{3}{64}(k-2)(k-3)(k-5), & G_{0,k\mp l+6}^{mn} &= \frac{3}{128}(k-2)(k-3)(2k-3), \\
G_{0,k\mp l+7}^{mn} &= \frac{1}{64}(k-1)(k-2)(k-3), & G_{0,k\mp l+8}^{mn} &= \frac{1}{512}(k-1)(k-2)(k-3), \tag{9.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{2,k\mp l-6}^{mn} &= -\frac{1}{32}(k+1)(k+2)(k+3) \left(\pm l(k-6) - n^2 \right), \\
G_{2,k\mp l-5}^{mn} &= -\frac{1}{16}(k+1)(k+2)(k+3) \left(\pm l(4k-21) - 2n^2 \right), \\
G_{2,k\mp l-4}^{mn} &= -\frac{1}{16}(k+2)(k+3) \left(\pm l(k(13k-41)-84) - (k+7)n^2 \right), \\
G_{2,k\mp l-3}^{mn} &= -\frac{1}{16}(k+2)(k+3) \left(\pm l(k(20k-19)-243) + 6(k-3)n^2 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{2, k\mp l-2}^{mn} &= -\frac{1}{32}(k+3)\left(\pm 3l(k(k(5k+81)-160)-684)+(k-2)(17k+49)n^2\right), \\
G_{2, k\mp l-1}^{mn} &= \frac{1}{8}(k+3)\left(\pm 3l(k(k(4k-33)-15)+264)+2(k-1)(k-8)n^2\right), \\
G_{2, k\mp l}^{mn} &= \frac{1}{8}\left(\pm 3l(7k^2(k^2-23)+912)+k(7k^2-73)n^2\right), \\
G_{2, k\mp l+1}^{mn} &= \frac{1}{8}(k-3)\left(\pm 3l(k(k(4k+33)-15)-264)+2(k+1)(k+8)n^2\right), \\
G_{2, k\mp l+2}^{mn} &= -\frac{1}{32}(k-3)\left(\pm 3l(k(k(5k-81)-160)+684)+(k+2)(17k-49)n^2\right), \\
G_{2, k\mp l+3}^{mn} &= -\frac{1}{16}(k-2)(k-3)\left(\pm l(k(20k+19)-243)+6(k+3)n^2\right), \\
G_{2, k\mp l+4}^{mn} &= -\frac{1}{16}(k-2)(k-3)\left(\pm l(k(13k+41)-84)-(k-7)n^2\right), \\
G_{2, k\mp l+5}^{mn} &= -\frac{1}{16}(k-1)(k-2)(k-3)\left(\pm l(4k+21)-2n^2\right), \\
G_{2, k\mp l+6}^{mn} &= -\frac{1}{32}(k-1)(k-2)(k-3)\left(\pm l(k+6)-n^2\right), \tag{9.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{r, k\mp l-6}^{nm} &= -\frac{1}{32}(k+1)(k+2)(k+3)(l\mp 1)l, \\
N_{r, k\mp l-5}^{nm} &= -\frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(l\mp 1)l, \\
N_{r, k\mp l-4}^{nm} &= -\frac{1}{16}(k+2)(k+3)(k(13l\mp 14)+19l\mp 20)l, \\
N_{r, k\mp l-3}^{nm} &= -\frac{1}{4}(k+2)(k+3)(k(5l\mp 7)+17l\mp 19)l, \\
N_{r, k\mp l-2}^{nm} &= -\frac{3}{32}(k+3)\left(k(k(5l\mp 23)+123l\mp 185)+246l\mp 298\right)l, \\
N_{r, k\mp l-1}^{nm} &= \frac{3}{2}(k+3)\left(k((k-9)l\pm k\pm 19)-32l\pm 44\right)l, \\
N_{r, k\mp l}^{nm} &= \frac{3}{8}\left(7k\left((k^2-39)l\pm 14k\right)\pm 1048\right)l, \\
N_{r, k\mp l+1}^{nm} &= \frac{3}{2}(k-3)\left(k((k+9)l\mp k\pm 19)-32l\mp 44\right)l, \\
N_{r, k\mp l+2}^{nm} &= -\frac{3}{32}(k-3)\left(k(k(5l\mp 23)-123l\mp 185)+246l\pm 298\right)l,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{r, k\mp l+3}^{nm} &= -\frac{1}{4}(k-2)(k-3)(k(5l\pm 7)-17l\mp 19)l, \\
N_{r, k\mp l+4}^{nm} &= -\frac{1}{16}(k-2)(k-3)(k(13l\pm 14)-19l\mp 20)l, \\
N_{r, k\mp l+5}^{nm} &= -\frac{1}{4}(k-1)(k-2)(k-3)(l\pm 1)l, \\
N_{r, k\mp l+6}^{nm} &= -\frac{1}{32}(k-1)(k-2)(k-3)(l\pm 1)l,
\end{aligned} \tag{9.57}$$

$$\begin{aligned}
N_{\varphi, k\mp l-5}^{nm} &= -\frac{1}{8}(k+1)(k+2)(k+3)(k\mp l-5)(\pm l-n^2), \\
N_{\varphi, k\mp l-4}^{nm} &= -\frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k\mp l-4)(\pm 3l-2n^2), \\
N_{\varphi, k\mp l-3}^{nm} &= -\frac{1}{8}(k+2)(k+3)(k\mp l-3)((13k+25)l-3(k+5)n^2), \\
N_{\varphi, k\mp l-2}^{nm} &= -(k+2)(k+3)(k\mp l-2)(\pm(k+10)l+(k-5)n^2), \\
N_{\varphi, k\mp l-1}^{nm} &= \frac{1}{4}(k+3)(k\mp l-1)(\pm(7k(k-9)-184)l-(k(7k-3)-64)n^2), \\
N_{\varphi, k\mp l}^{nm} &= \frac{1}{2}(\pm(7k^3-223k+480)l-12(k^2-9)n^2)(k\mp l), \\
N_{\varphi, k\mp l+1}^{nm} &= \frac{1}{4}(k-3)(k\mp l+1)(\pm(7k(k+9)-184)l+(k(7k+3)-64)n^2), \\
N_{\varphi, k\mp l+2}^{nm} &= -(k-2)(k-3)(k\mp l+2)(\pm(k-10)l-(k+5)n^2), \\
N_{\varphi, k\mp l+3}^{nm} &= -\frac{1}{8}(k-2)(k-3)(k\mp l+3)((13k-25)l+3(k-5)n^2), \\
N_{\varphi, k\mp l+4}^{nm} &= -\frac{1}{4}(k-1)(k-2)(k-3)(k\mp l+4)(\pm 3l+2n^2), \\
N_{\varphi, k\mp l+5}^{nm} &= -\frac{1}{8}(k-1)(k-2)(k-3)(k\mp l+5)(\pm l+n^2),
\end{aligned} \tag{9.58}$$

$$\begin{aligned}
N_{r\varphi, k\mp l-6}^{nm} &= -\frac{1}{16}(k+1)(k+2)(k+3)(1\mp l)n, \\
N_{r\varphi, k\mp l-5}^{nm} &= -\frac{1}{8}(k+1)(k+2)(k+3)(2\mp 3l)n, \\
N_{r\varphi, k\mp l-4}^{nm} &= \frac{1}{8}(k+2)(k+3)(\pm 6(k+2)l-k-7)n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{r\varphi, k\mp l-3}^{nm} &= \frac{1}{8}(k+2)(k+3)(k(6\pm l)\pm 37l-18)n, \\
N_{r\varphi, k\mp l-2}^{nm} &= -\frac{1}{16}(k+3)(-k(17k+15)\pm k(27k-75)l\mp 318l+98)n, \\
N_{r\varphi, k\mp l-1}^{nm} &= \frac{1}{4}(k+3)(2(k-1)(k-8)\pm 3(3k(k+1)-40)l)n, \\
N_{r\varphi, k\mp l}^{nm} &= -\frac{1}{4}(k(7k(k\pm 6l)-73)\mp 408l)n, \\
N_{r\varphi, k\mp l+1}^{nm} &= \frac{1}{4}(k-3)(-2(k+1)(k+8)\pm 3(3(k-1)-40)l)n, \\
N_{r\varphi, k\mp l+2}^{nm} &= -\frac{1}{16}(k-3)(-k(17k-15)\mp k(27k+75)l\pm 318l+98)n, \\
N_{r\varphi, k\mp l+3}^{nm} &= \frac{1}{8}(k-2)(k-3)(k(6\mp l)\pm 37l+18)n, \\
N_{r\varphi, k\mp l+4}^{nm} &= \frac{1}{8}(k-2)(k-3)(\pm 6(k-2)l-k+7)n, \\
N_{r\varphi, k\mp l+5}^{nm} &= -\frac{1}{8}(k-1)(k-2)(k-3)(2\pm 3l)n, \\
N_{r\varphi, k\mp l+6}^{nm} &= -\frac{1}{16}(k-1)(k-2)(k-3)(1\pm l)n, \tag{9.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{r, k\mp l-7}^{nm} &= \pm \frac{1}{128}(k+1)(k+2)(k+3)l, & \rho_{r, k\mp l-6}^{nm} &= \pm \frac{1}{16}(k+1)(k+2)(k+3)l, \\
\rho_{r, k\mp l-5}^{nm} &= \pm \frac{1}{128}(k+2)(k+3)(25k+37)l, & \rho_{r, k\mp l-4}^{nm} &= \pm \frac{1}{4}(k+2)(k+3)(k+4)l, \\
\rho_{r, k\mp l-3}^{nm} &= \mp \frac{1}{128}(k+3)(k(11k-279)-662)l, & \rho_{r, k\mp l-2}^{nm} &= \mp \frac{1}{16}(k+3)(k(11k-27)-158)l, \\
\rho_{r, k\mp l-1}^{nm} &= \mp \frac{3}{16}(3k(k(11k+46)-159)-1822)l, & \rho_{r, k\mp l}^{nm} &= \mp \frac{1}{2}(9k^2-96) \\
\rho_{r, k\mp l+1}^{nm} &= \pm \frac{3}{16}(3k(k(11k-46)-159)+1822)l, & \rho_{r, k\mp l+2}^{nm} &= \pm \frac{1}{16}(k-3)(k(11k+27)-158)l, \\
\rho_{r, k\mp l+3}^{nm} &= \pm \frac{1}{128}(k-3)(k(11k+279)-662)l, & \rho_{r, k\mp l+4}^{nm} &= \mp \frac{1}{4}(k-2)(k-3)(k-4)l, \\
\rho_{r, k\mp l+5}^{nm} &= \mp \frac{1}{128}(k-2)(k-3)(25k-37)l, & \rho_{r, k\mp l+6}^{nm} &= \mp \frac{1}{16}(k-1)(k-2)(k-3)l, \\
\rho_{r, k\mp l+7}^{nm} &= \mp \frac{1}{128}(k-1)(k-2)(k-3)l, \tag{9.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{\varphi, k\mp l-7}^{nm} &= -\frac{1}{128}(k+1)(k+2)(k+3)n, & \rho_{\varphi, k\mp l-6}^{nm} &= -\frac{3}{64}(k+1)(k+2)(k+3)n, \\
\rho_{\varphi, k\mp l-5}^{nm} &= -\frac{1}{128}(k+2)(k+3)(11k+23)n, & \rho_{\varphi, k\mp l-4}^{nm} &= \frac{1}{32}(k+2)(k+3)(k-17)n, \\
\rho_{\varphi, k\mp l-3}^{nm} &= \frac{3}{128}(k^2-9)(13k+30)n, & \rho_{\varphi, k\mp l-2}^{nm} &= \frac{1}{64}(k-2)(k+3)(19k+83)n, \\
\rho_{\varphi, k\mp l-1}^{nm} &= -\frac{3}{128}(k-1)(9k(k-5)-226)n, & \rho_{\varphi, k\mp l}^{nm} &= -\frac{3}{16}k(3k^2-37)n, \\
\rho_{\varphi, k\mp l+1}^{nm} &= -\frac{3}{128}(k+1)(9k(k+5)-226)n, & \rho_{\varphi, k\mp l+2}^{nm} &= \frac{1}{64}(k+2)(k-3)(19k-83)n, \\
\rho_{\varphi, k\mp l+3}^{nm} &= \frac{3}{128}(k^2-9)(13k-30)n, & \rho_{\varphi, k\mp l+4}^{nm} &= \frac{1}{32}(k-2)(k-3)(k+17)n, \\
\rho_{\varphi, k\mp l+5}^{nm} &= -\frac{1}{128}(k-2)(k-3)(11k-23)n, & \rho_{\varphi, k\mp l+6}^{nm} &= -\frac{3}{64}(k-1)(k-2)(k-3)n, \\
\rho_{\varphi, k\mp l+7}^{nm} &= -\frac{1}{128}(k-1)(k-2)(k-3)n, & &
\end{aligned} \tag{9.61}$$

$$\begin{aligned}
m_{r, k\mp 7}^n &= -\frac{1}{64}(k\pm 1)(k\pm 2)(k\pm 3)(6\mp k), \\
m_{r, k\mp 6}^n &= -\frac{1}{32}(k\pm 1)(k\pm 2)(k\pm 3)(21\mp 4k), \\
m_{r, k\mp 5}^n &= \pm \frac{1}{64}(k\pm 2)(k\pm 3)(k(25k\mp 77)-162), \\
m_{r, k\mp 4}^n &= \pm \frac{1}{16}(k\pm 2)(k\pm 3)(k(8k\mp 1)-111), \\
m_{r, k\mp 3}^n &= \mp \frac{1}{64}(k\pm 3)(k(k(11k\mp 273)+148)\pm 1716), \\
m_{r, k\mp 2}^n &= \mp \frac{1}{32}(k\pm 3)(k(k(44k\mp 177)-371)\pm 1098), \\
m_{r, k\mp 1}^n &= \mp \frac{9}{64}(k\mp 1)(k(k(11k\pm 43)-144)\mp 532), \\
m_{r, k}^n &= -\frac{9}{8}k(7k^2-73),
\end{aligned} \tag{9.62}$$

$$\begin{aligned}
m_{\varphi, k \mp 7}^n &= \frac{1}{64}(k \pm 1)(k \pm 2)(k \pm 3)n^2, \\
m_{\varphi, k \mp 6}^n &= \frac{3}{32}(k \pm 1)(k \pm 2)(k \pm 3)n^2, \\
m_{\varphi, k \mp 5}^n &= \frac{1}{64}(k \pm 2)(k \pm 3)(23k \pm 11)n^2, \\
m_{\varphi, k \mp 4}^n &= -\frac{1}{16}(k \pm 2)(k \pm 3)(k \mp 17)n^2, \\
m_{\varphi, k \mp 3}^n &= -\frac{3}{64}(k^2 - 9)(13k \pm 30)n^2, \\
m_{\varphi, k \mp 2}^n &= -\frac{1}{32}(k \mp 2)(k \pm 3)(19k \pm 83)n^2, \\
m_{\varphi, k \mp 1}^n &= \frac{3}{64}(k \mp 1)(9k(k \mp 5) - 226)n^2, \\
m_{\varphi, k}^n &= \frac{3}{8}k(k^2 - 37)n^2,
\end{aligned} \tag{9.63}$$

$$\begin{aligned}
p_{z, k \mp 8}^n &= \frac{1}{256}(k \pm 1)(k \pm 2)(k \pm 3), \\
p_{z, k \mp 7}^n &= \frac{1}{32}(k \pm 1)(k \pm 2)(k \pm 3), \\
p_{z, k \mp 6}^n &= \frac{3}{64}(k \pm 2)(k \pm 3)(2k \pm 3), \\
p_{z, k \mp 5}^n &= \frac{3}{32}(k \pm 2)(k \pm 3)(k \pm 5), \\
p_{z, k \mp 4}^n &= -\frac{3}{64}(k \pm 3)(k(3k \mp 16) - 49), \\
p_{z, k \mp 3}^n &= -\frac{3}{32}(k^2 - 9)(5k \pm 14), \\
p_{z, k \mp 2}^n &= -\frac{1}{64}(k \mp 2)(11k(2k \pm 19) + 435), \\
p_{z, k \mp 1}^n &= \frac{1}{32}(k \mp 1)(11k(k \mp 5) \pm 294), \\
p_{z, k}^n &= \frac{9}{128}k(11k^2 - 159),
\end{aligned} \tag{9.64}$$

$$\begin{aligned}
T_{k\mp l-6}^n &= \frac{1}{32}(k+1)(k+2)(k+3)(l^2 - n^2), \\
T_{k\mp l-5}^n &= \frac{1}{16}(k+1)(k+2)(k+3)(l(4l \mp 1) - 2n^2), \\
T_{k\mp l-4}^n &= \frac{1}{16}(k+2)(k+3)(\mp 8l(k+1) + l^2(13k+19) - (k+7)n^2), \\
T_{k\mp l-3}^n &= \frac{1}{16}(k+2)(k+3)(l(k(20l \mp 27) + 68l \mp 39) + 6(k-3)n^2), \\
T_{k\mp l-2}^n &= \frac{1}{32}(k+3)(\mp 96l(k+2)(k+3) \\
&\quad + 3l^2(k(5k+123) + 246) + (k-2)(17k+49)n^2), \\
T_{k\mp l-1}^n &= \frac{1}{8}(k+3)(\mp 3l(7k(k+11) \pm 4kl(k-9) \mp 128l + 136) \\
&\quad - 2(k-1)(k-8)n^2), \\
T_{k\mp l}^n &= \frac{1}{8}(\mp 3l(7k(\pm(k^2-39)l + 16k) + 912) - k(7k^2 - 73)n^2), \\
T_{k\mp l+1}^n &= \frac{1}{8}(k-3)(\pm 3l(7k(k-11) \mp 4kl(k-9) \mp 128l + 136) \\
&\quad - 2(k+1)(k+8)n^2), \\
T_{k\mp l+2}^n &= \frac{1}{32}(k-3)(\pm 96l(k-2)(k-3) + 3l^2(k(5k-123) + 246) \\
&\quad + (k+2)(17k-49)n^2), \\
T_{k\mp l+3}^n &= \frac{1}{16}(k-2)(k-3)(l(k(20l \pm 27) - 68l \mp 39) + 6(k+3)n^2), \\
T_{k\mp l+4}^n &= \frac{1}{16}(k-2)(k-3)(\pm 8l(k-1) + l^2(13k-19) - (k-7)n^2), \\
T_{k\mp l+5}^n &= \frac{1}{16}(k-1)(k-2)(k-3)(l(4l \pm 1) - 2n^2), \\
T_{k\mp l+6}^n &= \frac{1}{32}(k-1)(k-2)(k-3)(l^2 - n^2). \tag{9.65}
\end{aligned}$$

Jak wiadomo z wcześniejszych rozważań, pierwsze cztery grupy równań, składające się z $4 \cdot 2(lf + 1)$ równań, tj. równania (9.48) dla $k = 0, 1, 2, 3$, są spełnione tożsamościowo. Równania te należy zastąpić równaniami określającymi warunki brze-

gowe. Liczba tych warunków jest równa $8(lf + 1)$ (po cztery warunki brzegowe dla każdego z $2(lf + 1)$ równań czwartego rzędu).

W określaniu warunków brzegowych korzystamy z następujących wzorów wynikających z postaci poszukiwanego wektora funkcji przemieszczeń (9.47) oraz wzorów (9.13)–(9.16) określających funkcje wewnętrzne

$$\begin{aligned}
 w_n^{c,s}(r, t) &= \sum_{l=0}^{\infty} w_{n,l}^{c,s}(t) T_l^*(r), \\
 \theta_{r,n}^{c,s}(r, t) &= \frac{\partial w_n^{c,s}(r, t)}{\partial r} = \sum_{l=0}^{\infty} w_{n,l}^{c,s}(t) T_l^{*'}(r), \\
 M_{r,n}^{c,s}(r, t) &= -D(r) \sum_{l=0}^{\infty} \left(T_l^{*''}(r) + \nu \left(\frac{1}{r} T_l^{*'}(r) - \frac{n^2}{r^2} T_l^*(r) \right) \right) w_{n,l}^{c,s}(t) \\
 &\quad - \frac{D(r)(1+\nu)\alpha(r)}{h(r)} \Delta T_n^{c,s}(r),
 \end{aligned} \tag{9.66}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 Q_{r,n}^{c,s}(r, t) \\
 V_{r,n}^{c,s}(r, t)
 \end{aligned} \right\} &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(-D(r) T_l^{*'''}(r) - \left(\frac{D(r)}{r} + \frac{\partial D(r)}{\partial r} \right) T_l^{*''}(r) \right. \right. \\
 &\quad + \left. \left(\frac{n^2 + 1}{(2-\nu)n^2 + 1} \right) \frac{D(r)}{r^2} + f N_{r,n}^{c,s}(r) - \frac{\nu}{r} \frac{\partial D(r)}{\partial r} \right) T_l^{*'}(r) \\
 &\quad - \left. \left(\frac{n^2}{r^3} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 3-\nu \end{array} \right\} D(r) - \frac{\nu n^2}{r^2} \frac{\partial D(r)}{\partial r} \pm n f \frac{1}{r} N_{r\varphi,n}^{s,c}(r) \right) T_l^*(r) \right) w_{n,l}^{c,s}(t) \\
 &\quad - g \rho_2(r) T_l^{*'}(r) \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\} \ddot{w}_{n,l}^{c,s}(t) \Big] + f m_{r,n}^{c,s}(r) \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{D(r)(1+\nu)\alpha(r)}{h(r)} \Delta T_n^{c,s}(r) \right).
 \end{aligned}$$

W przypadku płyt pierścieniowych warunki brzegowe określamy bezpośrednio z funkcji $w_n^{c,s}(r, t)$, $\partial w_n^{c,s}(r, t)/\partial r$, $M_{r,n}^{c,s}(r, t)$, $V_n^{c,s}(r, t)$. Na brzegu zewnętrznym $r = 1$, we wzorach (9.66) możemy skorzystać z zależności (2.34), przekształcając (9.66) do prostszej postaci:

$$\begin{aligned}
w_n^{c,s}(1,t) &= \sum_{l=0}^{\infty} w_{n,l}^{c,s}(t), \\
\theta_{r,n}^{c,s}(1,t) &= \frac{\partial w_n^{c,s}(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=1} = 2 \sum_{l=0}^{\infty} l^2 w_{n,l}^{c,s}(t), \\
M_{r,n}^{c,s}(1,t) &= -D(1) \sum_{l=0}^{\infty} \left(4 \frac{l^2}{3} (l^2 - 1) + \nu (2l^2 - n^2) \right) w_{n,l}^{c,s}(t) \\
&\quad - \frac{D(r)(1+\nu)\alpha(r)}{h(r)} \Delta T_n^{c,s}(r) \Big|_{r=1}, \\
\left. \begin{aligned} Q_{r,n}^{c,s}(1,t) \\ V_{r,n}^{c,s}(1,t) \end{aligned} \right\} &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(-8 \frac{l^2}{15} (l^2 - 4)(l^2 - 1) D(1) - 4 \frac{l^2}{3} (l^2 - 1) \left(D(1) + \frac{\partial D(r)}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) \right) \right. \\
&\quad + 2l^2 \left(\left\{ \begin{array}{c} n^2 + 1 \\ (2-\nu)n^2 + 1 \end{array} \right\} D(1) + f N_{r,n}^{c,s}(1) - \nu \frac{\partial D(r)}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) \\
&\quad - \left(n^2 \left(\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 3-\nu \end{array} \right\} D(1) - \nu \frac{\partial D(r)}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) \pm n f N_{r\varphi,n}^{s,c}(1) \right) \left. \right] w_{n,l}^{c,s}(t) \\
&\quad - 2gl^2 \rho_2(1) \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\} \ddot{w}_{n,l}^{c,s}(t) + f m_{r,n}^{c,s}(1) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{D(r)(1+\nu)\alpha(r)}{h(r)} \Delta T_n^{c,s}(r) \right) \Big|_{r=1}, \tag{9.67}
\end{aligned}$$

Niestety w równaniach (9.66), dotyczących brzegu wewnętrznego $r = r_0$, jesteśmy zmuszeni do obliczenia wartości wielomianów $T_l^*(r)$ i ich pochodnych $T_l^{*'}(r)$, $T_l^{*''}(r)$, $T_l^{*'''}(r)$ w punkcie $r = r_0$.

Równania w przypadku podstawowych sposobów podparcia brzegów płyty pierścieniowej mają postać:

- brzeg swobodny

$$M_{r,n}^{c,s}(r,t) = 0, \quad V_n^{c,s}(r,t) = 0, \quad \text{gdy } r = 1 \vee r = r_0,$$

- brzeg utwierdzony

$$w_n^{c,s}(r,t) = 0, \quad \frac{\partial w_n^{c,s}(r,t)}{\partial r} = 0, \quad \text{gdy } r = 1 \vee r = r_0,$$

- brzeg przegubowo podparty

$$w_n^{c,s}(r, t) = 0, \quad M_{r,n}^{c,s}(r, t) = 0, \quad \text{gdy } r = 1 \vee r = r_0,$$

- brzeg utwierdzony przesuwnie

$$\frac{\partial w_n^{c,s}(r, t)}{\partial r} = 0, \quad V_n^{c,s}(r, t) = 0 \quad \text{gdy } r = 1 \vee r = r_0.$$

Określenie warunków brzegowych znacznie komplikuje się w płytach kołowych. Do określenia warunków na brzegu, $r = 1$, wykorzystujemy te same równania (9.66), (9.67), które stosowaliśmy w formułowaniu warunków płyty pierścieniowej. Problem pojawia się natomiast w określeniu warunków na brzegu wewnętrznym, który w przypadku płyty kołowej redukuje się do punktu $r = 0$.

Jak wiadomo, w klasycznej teorii płyt, w wyniku rozwiązania odpowiedniego równania różniczkowego, otrzymujemy rozwiązanie zawierające cztery nieznanne stałe. Do wyznaczenia tych stałych, oprócz warunków brzegowych dotyczących brzegu $r = 1$, korzysta się z warunków ograniczoneści przemieszczeń i sił wewnętrznych w punkcie $r = 0$. Konsekwencją zastosowania warunków ograniczoneści jest odrzucenie w całości ogólnych wyrazów osobliwych, gdy $r = 0$ (wyzeroowanie dwóch stałych). Ponieważ w dalszej części pracy będziemy stosowali klasyczne rozwiązanie, dalej przedstawiamy w skróconej formie sposób jego wyznaczenia. Równanie opisujące statyczne zagadnienie kołowej izotropowej płyty jednorodnej w postaci bezwymiarowej wyraża się wzorem (patrz Nowacki [140], s. 294)

$$D\nabla^2\nabla^2\hat{w}(r, \varphi) = \hat{q}(r, \varphi), \quad D = \text{const},$$

$$\hat{q}(r, \varphi) = f\left(p_z + \frac{1}{r}\frac{\partial(rm_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi}\right) - \nabla^2\left(D(1+\nu)\frac{\alpha\Delta T}{h}\right). \quad (9.68)$$

Funkcja przemieszczeń $\hat{w}(r, \varphi)$ jest sumą całki szczególnej (zależnej od prawej strony równania) oraz całki ogólnej będącej rozwiązaniem równania jednorodnego ($\hat{q}(r, \varphi) \equiv 0$). Dążąc do rozdzielania zmiennych, wyrazimy obciążenie $\hat{q}(r, \varphi)$ oraz rozwiązanie $\hat{w}(r, \varphi)$ za pomocą szeregu Fouriera

$$\hat{q}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\hat{q}_n^c(r) \cos n\varphi + \hat{q}_n^s(r) \sin n\varphi \right),$$

$$\hat{w}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\hat{w}_n^c(r) \cos n\varphi + \hat{w}_n^s(r) \sin n\varphi \right). \quad (9.69)$$

Po podstawieniu wyrażenia (9.69) do wzoru (9.68) otrzymamy dwa rozseparowane układy równań różniczkowych zwyczajnych

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}\right)^2 \hat{w}_n^c(r) = \hat{q}_n^c(r), \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}\right)^2 \hat{w}_n^s(r) = \hat{q}_n^s(r). \quad (9.70)$$

Rozwiązania tych układów wyrażają się następującymi wzorami (patrz Nowacki [140], s. 294)

$$\begin{aligned} \hat{w}_0^{c,s}(r) &= a_0^{c,s} + b_0^{c,s} r^2 + c_0^{c,s} \ln r + d_0^{c,s} r^2 \ln r + \tilde{w}_0^{c,s}(r), \\ \hat{w}_1^{c,s}(r) &= a_1^{c,s} r + b_1^{c,s} r^3 + c_1^{c,s} r^{-1} + d_1^{c,s} r \ln r + \tilde{w}_1^{c,s}(r), \\ \hat{w}_n^{c,s}(r) &= a_n^{c,s} r^n + b_n^{c,s} r^{n+2} + c_n^{c,s} r^{-n} + d_n^{c,s} r^{-n+2} + \tilde{w}_n^{c,s}(r), \quad \text{gdy } n \geq 2, \end{aligned} \quad (9.71)$$

gdzie $\tilde{w}_n^{c,s}(r)$ są całkami szczególnymi równań (9.70).

Ponieważ przy $c_n^{c,s} \neq 0$, $d_n^{c,s} \neq 0$ przemieszczenia i momenty zginające byłyby nieskończenie duże, z warunku ich ograniczoności wynika, że $c_n^{c,s} = 0$, $d_n^{c,s} = 0$ dla $n \geq 0$. Po uwzględnieniu tych warunków rozwiązania układów przyjmują postać

$$\hat{w}_n^{c,s}(r) = a_n^{c,s} r^n + b_n^{c,s} r^{n+2} + \tilde{w}_n^{c,s}(r), \quad \text{gdy } n \geq 0. \quad (9.72)$$

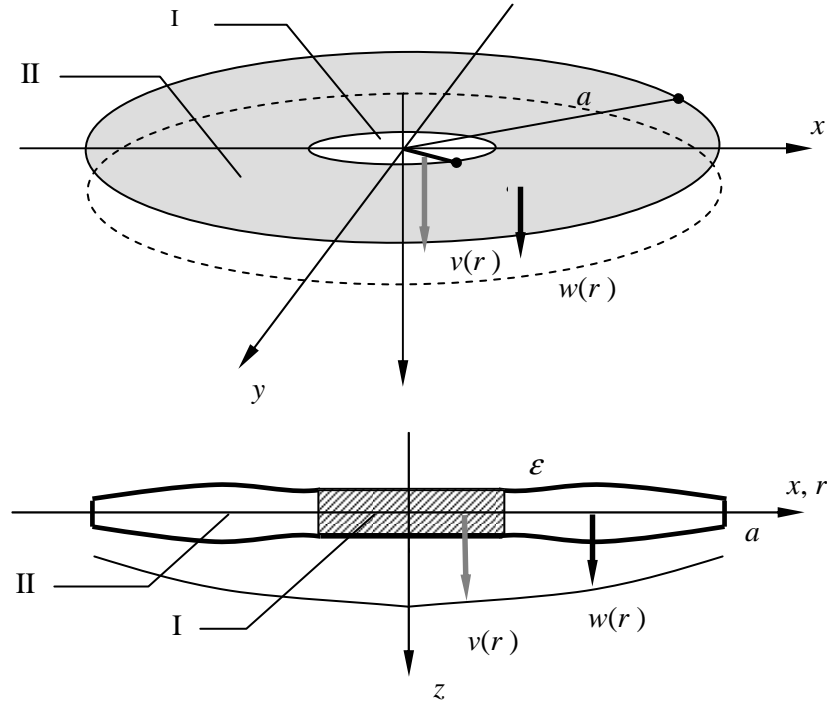
Do wyznaczenia pozostałych dwóch stałych wykorzystuje się warunki brzegowe dotyczące brzegu zewnętrznego.

Z oczywistych powodów warunków ograniczoności nie możemy bezpośrednio zastosować w prezentowanej w pracy metodzie rozwiązania omawianego zagadnienia. Sposób pokonania trudności związanych z określeniem warunków brzegowych płyty kołowej opiszemy poniżej.

Analizowaną płytę kołową podzielmy myślowo na dwie rozłączne części. Linia tego podziału jest okrąg o promieniu $r = \varepsilon$ (patrz rys. 9.3). W przypadku gdy promień ε jest bardzo mały, możemy w przybliżeniu założyć, że parametry opisujące wewnętrzną część płyty są stałe (nie zależą od zmiennej r) i $D = D(\varepsilon)$, $h = h(\varepsilon)$. Kolejnym uproszczeniem jest założenie, że na wewnętrzną część nie działają: siły bezwładności oraz siły osiowe, a obciążenie zewnętrzne jest niezależne od zmiennej r (np. dla temperatury mamy $\Delta T_n^{c,s} = \Delta T_n^{c,s}(\varepsilon)$). W tej sytuacji przemieszczenia wewnętrznej części płyty możemy opisać wzorem (9.72), dodając do listy argumentów funkcji czas – $\hat{w}_n^{c,s}(r, t)$, $\hat{w}_n^{c,s}(r, t)$, $a_n^{c,s}(t)$, $b_n^{c,s}(t)$ (zależność od czasu wynika ze zmiennych w czasie warunków brzegowych na linii $r = \varepsilon$).

Na linii podziału, tj. na okręgu o promieniu ε , muszą być spełnione warunki ciągłości płyty:

$$\begin{aligned} w_n^{c,s}(\varepsilon, t) &= \hat{w}_n^{c,s}(\varepsilon, t), & \frac{\partial w_n^{c,s}(\varepsilon, t)}{\partial r} &= \frac{\partial \hat{w}_n^{c,s}(\varepsilon, t)}{\partial r}, \\ M_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t) &= \hat{M}_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t), & Q_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t) &= \hat{Q}_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t), \end{aligned} \quad (9.73)$$



Rys. 9.3. Płyta z wydzielonymi dwoma podobszarami I i II

gdzie występujące we wzorze (9.73) funkcje $\hat{M}_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t)$, $\hat{Q}_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t)$ mają postać taką samą jak funkcje $M_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t)$, $Q_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t)$.

W przypadku gdy funkcje opisujące szeroko rozumiane obciążenie zewnętrzne (siły, momenty, temperatura) są odpowiednio regularne w punkcie $r = \varepsilon$, warunki ciągłości (9.73) możemy zastąpić następującymi prostszymi układami równań

$$\left. \frac{\partial^p w_n^{c,s}(r, t)}{\partial r^p} \right|_{r=\varepsilon} = \left. \frac{\partial^p \hat{w}_n^{c,s}(\varepsilon, t)}{\partial r^p} \right|_{r=\varepsilon}, \quad p = 0, 1, 2, 3. \quad (9.74)$$

Funkcja $\hat{w}_n^{c,s}(r, t)$ i jej kolejne pochodne w jawnej postaci wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} \hat{w}_n^{c,s}(r, t) &= a_n^{c,s}(t)r^n + b_n^{c,s}(t)r^{n+2} + \tilde{w}_n^{c,s}(r, t), \\ \frac{\partial \hat{w}_n^{c,s}(r, t)}{\partial r} &= a_n^{c,s}(t)nr^{n-1} + b_n^{c,s}(t)(n+2)r^{n+1} + \frac{\partial \tilde{w}_n^{c,s}(r, t)}{\partial r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \hat{w}_n^{c,s}(r,t)}{\partial r^2} &= a_n^{c,s}(t)(n-1)nr^{n-2} + b_n^{c,s}(t)(n+1)(n+2)r^n + \frac{\partial^2 \tilde{w}_n^{c,s}(r,t)}{\partial r^2}, \\
\frac{\partial^3 \hat{w}_n^{c,s}(r,t)}{\partial r^3} &= a_n^{c,s}(t)(n-2)(n-1)nr^{n-3} + b_n^{c,s}(t)n(n+1)(n+2)r^{n-1} \\
&\quad + \frac{\partial^3 \tilde{w}_n^{c,s}(r,t)}{\partial r^3}, \quad n \geq 0.
\end{aligned} \tag{9.75}$$

Po wyznaczeniu z pierwszych dwóch wzorów (9.75)_{1,2} funkcji $a_n^{c,s}(t)$, $b_n^{c,s}(t)$ i podstawieniu ich do pozostałych dwóch wzorów (9.75)_{3,4} otrzymamy następujące zależności

$$\begin{aligned}
&\hat{w}_n^{c,s}(r,t)n(n+2) - \frac{\partial \hat{w}_n^{c,s}(r,t)}{\partial r}(1+2n)r + \frac{\partial^2 \hat{w}_n^{c,s}(r,t)}{\partial r^2}r^2 \\
&= \tilde{w}_n^{c,s}(r,t)n(n+2) - \frac{\partial \tilde{w}_n^{c,s}(r,t)}{\partial r}(1+2n)r + \frac{\partial^2 \tilde{w}_n^{c,s}(r,t)}{\partial r^2}r^2,
\end{aligned} \tag{9.76}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{w}_n^{c,s}(r,t)n(n+2)(2n-1) - 3\frac{\partial \hat{w}_n^{c,s}(r,t)}{\partial r}n^2r + \frac{\partial^3 \hat{w}_n^{c,s}(r,t)}{\partial r^3}r^3 \\
&= \tilde{w}_n^{c,s}(r,t)n(n+2)(2n-1) - 3\frac{\partial \tilde{w}_n^{c,s}(r,t)}{\partial r}n^2r + \frac{\partial^3 \tilde{w}_n^{c,s}(r,t)}{\partial r^3}r^3.
\end{aligned}$$

Korzystając z tego, że (zakładamy, że szeregi te mają właściwości umożliwiające różniczkowanie ich wyraz po wyrazie)

$$\frac{\partial^p w_n^{c,s}(r,t)}{\partial r^p} = \sum_{l=0}^{\infty} w_n^{c,s}(t) T_l^{*(p)}(r) \tag{9.77}$$

oraz warunki ciągłości płyty na okręgu $r = \varepsilon$ – (9.74), otrzymamy następujące równania

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{\infty} \left(n(n+2)T_l^*(\varepsilon) - (1+2n)\varepsilon T_l^{*'}(\varepsilon) + \varepsilon^2 T_l^{*''}(\varepsilon) \right) w_{n,l}^{c,s}(t) \\
&= \tilde{w}_n^{c,s}(\varepsilon, t)n(n+2) - \frac{\partial \tilde{w}_n^{c,s}(\varepsilon, t)}{\partial r}(1+2n)\varepsilon + \frac{\partial^2 \tilde{w}_n^{c,s}(r,t)}{\partial r^2}\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{\infty} \left(n(n+2)(2n-1)T_l^*(\varepsilon) - 3n^2\varepsilon T_l^{*'}(\varepsilon) + \varepsilon^3 T_l^{*'''}(\varepsilon) \right) w_{n,l}^{c,s}(t) \\
&= \tilde{w}_n^{c,s}(\varepsilon, t) n(n+2)(2n-1) - 3 \frac{\partial \tilde{w}_n^{c,s}(\varepsilon, t)}{\partial r} n^2 \varepsilon + \frac{\partial^3 \tilde{w}_n^{c,s}(\varepsilon, t)}{\partial r^3} \varepsilon^3, \\
& \varepsilon > 0
\end{aligned} \tag{9.78}$$

pozwalające wraz z równaniami określającymi warunki brzegowe na brzegu $r = 1$ na rozwiązanie analizowanej płyty kołowej.

Występujące we wzorze (9.78) całki szczególne zależą oczywiście od postaci obciążenia zewnętrznego (siły, momentu, temperatury). Przedstawimy rozwiązanie najczęściej pojawiającego się w praktyce. Założymy mianowicie, że na wewnętrzną część działa tylko obciążenie p_z i czynnik temperaturowy ΔT ($m_r = m_\varphi \equiv 0$). Po wykonaniu opisanego wcześniej rozwinięcia tych czynników w klasyczne szeregi Fouriera, w równaniach (9.70) po prawej stronie pojawiają się następujące funkcje zależne tylko od zmiennej $r - \hat{p}_{z,n}^{c,s}(r)$, $\Delta \hat{T}_n^{c,s}(r)$. Ponieważ z założenia promień wewnętrznej części płyty jest mały $r = \varepsilon$, możemy przyjąć, że $\hat{p}_{z,n}^{c,s} = \hat{p}_{z,n}^{c,s}(\varepsilon) = \text{const}$, $\Delta \hat{T}_n^{c,s} = \Delta \hat{T}_n^{c,s}(r) = \text{const}$. W tym przypadku całki szczególne $\tilde{w}_n^{c,s}(r)$ przyjmują postać

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_n^{c,s}(r) &= \frac{\hat{p}_{z,n}^{c,s} r^4}{(n^2 - 16)(n^2 - 4)}, \quad n \geq 0, \quad n \neq 2, \quad n \neq 4, \\
\tilde{w}_2^{c,s}(r) &= \frac{1}{48} \hat{p}_{z,2}^{c,s} r^4 \ln r, \\
\tilde{w}_4^{c,s}(r) &= -\frac{1}{96} \hat{p}_{z,4}^{c,s} r^4 \ln r,
\end{aligned} \tag{9.79}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_n^{c,s}(r) &= \frac{D(1+\nu)\alpha}{h} \frac{\Delta \hat{T}_n^{c,s} r^2}{(n^2 - 4)}, \quad n \geq 0, \quad n \neq 2, \\
\tilde{w}_2^{c,s}(r) &= \frac{D(1+\nu)\alpha}{4h} \Delta \hat{T}_2^{c,s} r^2 \ln r.
\end{aligned}$$

9. 4. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przykład 9.1

Przedstawioną metodę zastosowano do rozwiązania zagadnienia własnego płyty kołowej o stałych parametrach. Przyjęcie stałych parametrów pozwala na porównanie otrzy-

manyh rozwiązań z dokładnymi wynikami uzyskanymi metodami analitycznymi (patrz Nowacki [139]). W rozważanym przykładzie zbadano również wpływ parametru ε (promień okręgu dzielącego płytę kołową) na dokładność uzyskanych rozwiązań. Obliczenia wykonano dla płyty kołowej, uwzględniając dwa sposoby podparcia zewnętrznego brzegu płyty: podparcie przegubowe oraz sztywne utwierdzenie. Równania opisujące zagadnienie przyjęto w postaci bezwymiarowej, stąd w przypadku częstości własnych ω_{nm} należy pamiętać o mnożniku wymiarowym $\sqrt{D/(\rho a^4)}$, gdzie D jest sztywnością płyty na zginanie i w przypadku płyty o stałej grubości wyraża się wzorem

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)},$$

ρ jest gęstością belki przypadającą na jednostkę powierzchni, a a jest zewnętrznym promieniem płyty. Dokładne oraz otrzymane przybliżonymi metodami ($\varepsilon = 0,01, 0,001, 0,0001$) wartości własne uzyskane z zastosowaniem aproksymacji 31-wyrazowym szeregiem Czebyszewa, przedstawiono w tabelach 9.1–9.4.

Tabela 9.1. Wartości własne ω_{m0} płyty kołowej przegubowo podpartej

ε	ω_{10}	ω_{20}	ω_{30}	ω_{40}	ω_{50}	ω_{60}	ω_{70}	ω_{80}	ω_{90}
0,01	4,78366	29,6204	74,1116	138,377	222,446	326,341	450,080	593,680	757,150
0,001	4,78264	29,6047	74,0502	138,221	222,129	325,780	449,175	592,315	755,180
0,0001	4,78259	29,6038	74,0467	138,212	222,112	325,748	449,123	592,237	755,067
Dokładne	4,78258	29,6037	74,0464	138,211	222,110	325,745	449,118	592,229	755,079

Tabela 9.2. Wartości własne ω_{m1} płyty kołowej przegubowo podpartej

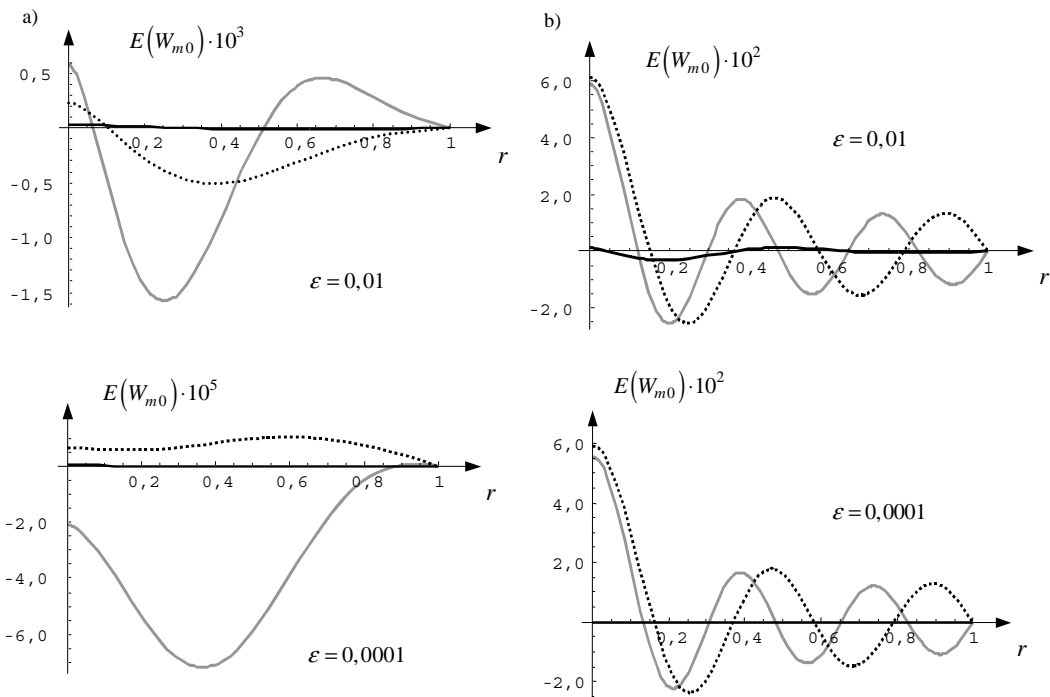
ε	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{41}	ω_{51}	ω_{61}	ω_{71}	ω_{81}	ω_{91}
0,01	13,7705	48,3665	102,665	176,696	270,463	383,969	517,216	670,205	842,931
0,001	13,7705	48,3665	102,665	176,695	270,461	383,965	517,207	670,188	842,897
0,0001	13,7705	48,3665	102,665	176,695	270,461	383,965	517,207	670,188	842,896
Dokładne	13,7705	48,3665	102,665	176,695	270,461	383,965	517,207	670,187	842,907

Tabela 9.3. Wartości własne ω_{m0} płyty kołowej sztywno utwierdzonej na brzegu

ε	ω_{10}	ω_{20}	ω_{30}	ω_{40}	ω_{50}	ω_{60}	ω_{70}	ω_{80}	ω_{90}
0,01	10,2195	39,7965	89,1898	158,386	247,400	356,248	484,946	633,511	801,941
0,001	10,2160	39,7726	89,1092	158,196	247,030	355,609	483,935	632,008	799,785
0,0001	10,2158	39,7713	89,1046	158,185	247,009	355,573	483,878	631,923	799,660
Dokładne	10,2158	39,7711	89,1041	158,184	247,006	355,569	483,872	631,915	799,697

Tabela 9.4. Wartości własne ω_{m1} płyty kołowej sztywno utwierdzonej na brzegu

ε	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{41}	ω_{51}	ω_{61}	ω_{71}	ω_{81}	ω_{91}
0,01	21,2604	60,8287	120,0790	199,054	297,762	416,208	554,393	712,320	889,973
0,001	21,2604	60,8287	120,0790	199,053	297,760	416,203	554,382	712,301	889,926
0,0001	21,2604	60,8287	120,0790	199,053	297,760	416,203	554,83	712,301	889,926
Dokładne	21,604	60,8287	120,0790	199,053	297,760	416,203	554,382	712,300	889,956

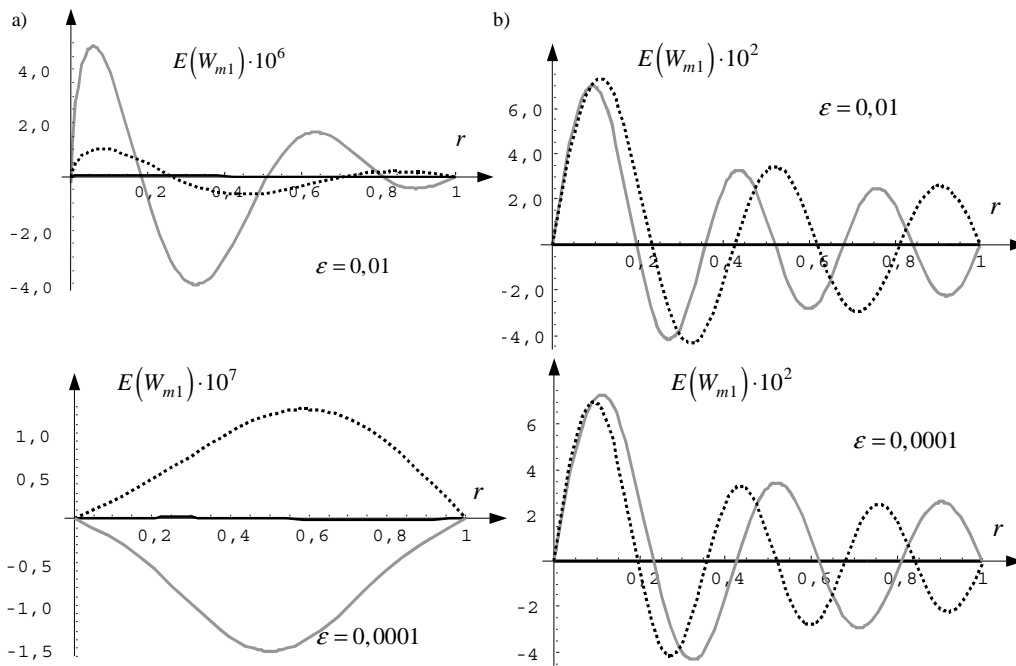


Rys. 9.4. Wykresy błędów $E(W_{m0})$ form własnych płyty kołowej przegubowo podpartej na brzegu:
 a) $m = 1, 2, 3$, b) $m = 4, 5, 6$. Oznaczenia: $m = 1, 4$ (—), $m = 2, 5$ (.....), $m = 3, 6$ (—)

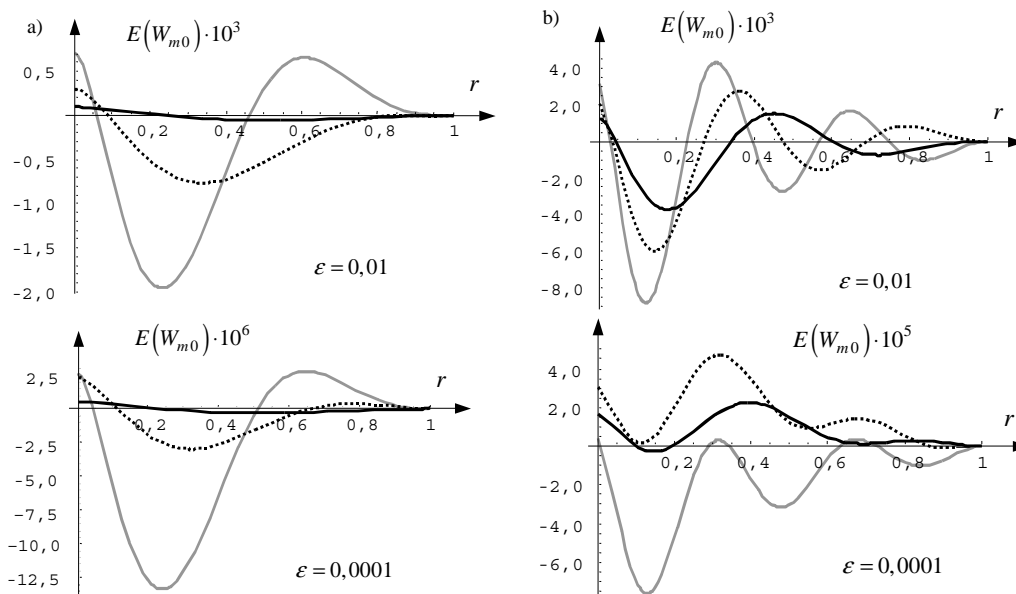
Dokonano również porównania form własnych W_{mm} , stosując opisany w rozdziale 3.5 sposób normowania dokładnych i przybliżonych funkcji własnych oraz przyjmując jako miarę błędu funkcję

$$E(f) = \frac{f(x) - \tilde{f}(x)}{\|f(x)\|}.$$

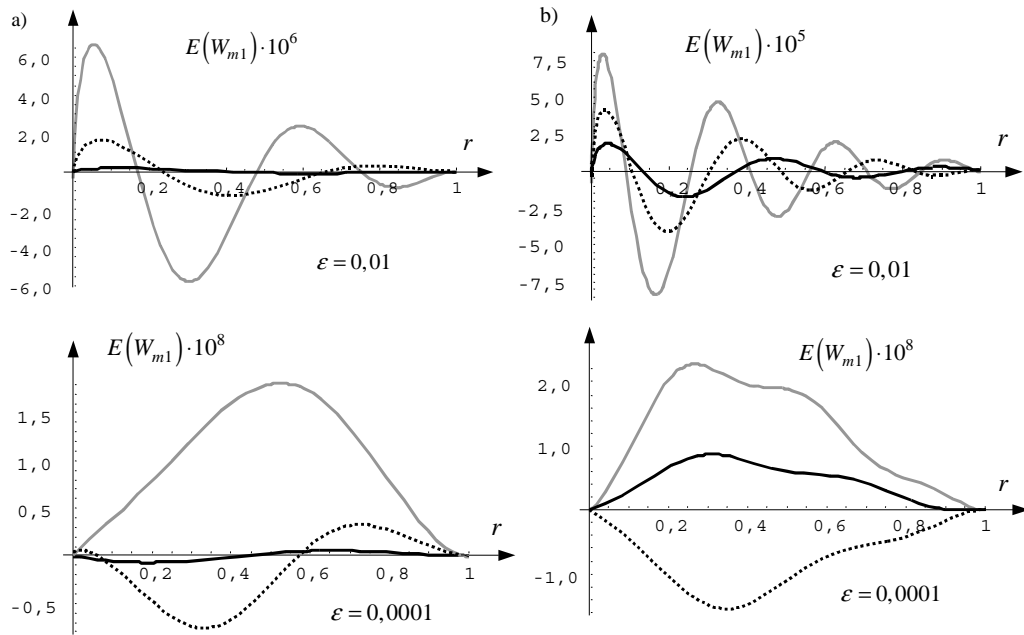
W tym przypadku również zastosowano aproksymację 31 wyrazowym szeregiem. Otrzymane rezultaty, w postaci pierwszych sześciu form własnych, przedstawiono w postaci wykresów na rysunkach 9.4–9.7.



Rys. 9.5. Wykresy błędów $E(W_{m1})$ form własnych płyty kołowej przegubowo podpartej na brzegu: a) $m = 1, 2, 3$, b) $m = 4, 5, 6$. Oznaczenia jak na rys. 9.4



Rys. 9.6. Wykresy błędów $E(W_{m0})$ form własnych płyty kołowej sztywno utwierdzonej na brzegu a) $m = 1, 2, 3$, b) $m = 4, 5, 6$. Oznaczenia jak na rys. 9.4



Rys. 9.7. Wykresy błędów $E(W_{m1})$ form własnych płyty kołowej sztywno utwierdzonej na brzegu a) $m = 1, 2, 3$, b) $m = 4, 5, 6$. Oznaczenia jak na rys. 9.4

Z analizy uzyskanych wyników widzimy, że również w przypadku płyt proponowana metoda daje w rozważanym zagadnieniu wyniki obarczone małymi błędami. Co prawda, w przypadku płyt błąd ten jest większy niż analogiczne błędy pojawiające się w zagadnieniach drgań układów prętowych, ale nadal ich wartości są małe. Na otrzymane wyniki, oprócz wpływu błędów wynikających z ograniczonej bazy aproksymacyjnej (skończona liczba wyrazów szeregu aproksymującego), wpływ miał również sposób uwzględnienia warunków brzegowych w punkcie $r = 0$. Wpływ ten jest widoczny podczas porównania funkcji błędów $E(W_{mn})$ dla różnych wartości parametru ϵ . Jak należało się spodziewać w przypadku malejących wartości tego parametru błąd maleje.

10. KOŁOWA PŁYTA ŚREDNIEJ GRUBOŚCI WEDŁUG TEORII HENCKY'EGO–BOLLE'A

10.1. WPROWADZENIE

W tym rozdziale zajmiemy się zagadnieniem drgań podłużnie niejednorodnych płyt średniej grubości. Podobnie jak w przypadku płyt cienkich, wśród prac dotyczących tego typu problemów jedną z grup tworzą prace, w których rozwiązują się zagadnienie po założeniu określonego rozkładu parametrów. Przykładem takiego podejścia są prace: Li [123], Efraima i Eisenbergera [32], Cheunga i Zhou [26] oraz Xiang i Zhanga [198]. W pracy [123] rozwiązano zagadnienie własne płyt o eksponencjalnie i potęgowo zmiennej grubości. Formy i częstości własne pierścieniowej płyty średniej grubości o liniowo i parabolicznie zmiennej grubości wyznaczono w pracy Efraima i Eisenbergera [32]. Do rozwiązania wykorzystano klasyczne szeregi potęgowe. W pracy [26] analizowano zagadnienie drgań swobodnych płyty prostokątnej o zmiennej grubości opisanej funkcją $h(x, y) = h_0(x/A)^r(y/B)^s$. Do rozwiązania użyto metody Rayleigh–Ritza, przyjmując za funkcje aproksymujące rozwiązania pewnego statycznego zagadnienia belki Timoshenki.

W pracy [198] wyznaczono częstości własne płyty kołowej o skokowo zmiennej grubości. Po podziale płyty na element kołowy i elementy pierścieniowe zagadnienie rozwiązano analitycznie. Bardziej ogólne założenia dotyczące rozkładu grubości przyjęto w pracy Shufrina i Eisenbergera [167], gdzie analizowano płyty o zmiennej grubości opisanej funkcją $\bar{h}(x, y) = h(x)H(y)$. Zagadnienie drgań rozwiązano dla różnych modeli płyty: płyty cienkiej, Reissnera–Mindlina oraz według teorii wyższych rzędów, uwzględniających wpływ sił poprzecznych na deformację płyty. Równania opisujące zagadnienie oraz warunki brzegowe wyprowadzono za pomocą zasady Hamiltona. Wyniki numeryczne otrzymano, stosując do rozwiązania wariacyjnego metodę Kantorowicza. Przyjęto za funkcje aproksymujące wielomiany potęgowe. Rozwiązaniem problemów dynamicznych metodą elementów skończonych zajmowali się m.in. Ju, Lee i Lee [81], Mihir Chandra Manna [138] oraz Taher z zespołem [179]. W pracy [81] przedmiotem analizy były płyty kołowe i prostokątne. W pracy [138] rozwiązano zagadnienie własne płyty prostokątnej. Do rozwiązania zastosowano

wprowadzony w pracy trójkątny element o 51 stopniach swobody. Rozwiązanie zagadnienia własnego płyt kołowych i pierścieniowych z wykorzystaniem przestrzennego elementu skończonego przedstawiono w pracy [179]. Rozwiązanie problemu drgań swobodnych wycinka kołowego, z uwzględnieniem różnych sposobów podparcia, analizowano w pracy Liu i Liewa [126], stosując do rozwiązania metodę DQ (*Differential Quadrature*). Korzystając z tej samej metody Malekzadeh i Karami [128] rozwiązali problem drgań prostokątnej płyty spoczywającej na dwuparametrowym podłożu sprężystym. Rozważano różne sposoby podparcia. Inny sposób podejścia do omawianego zagadnienia przedstawiono w pracach Sakiyama i Huanga [155, 156] oraz w pracy Huanga, Ma, Sakiyamy, Matudy i Mority [73]. W cytowanych pracach [73, 155, 156] autorzy wyznaczyli dyskretną funkcję Greena i z jej wykorzystaniem rozwiązali zagadnienie własne: w pracy [156] – izotropowej płyty prostokątnej, w [155] – płyty trójkątnej, a w pracy [73] – ortotropowej płyty prostokątnej.

W niniejszym rozdziale przedstawimy rozwiązanie dla osiowo-symetrycznej izotropowej płyty kołowej obciążonej obciążeniem normalnym o dowolnym rozkładzie. W rozważanym zadaniu nieuwzględniono wpływu obciążeń osiowych na poprzeczne przemieszczenia płyty. Wpływ ten pominięto w celu uproszczenia zapisu już tak rozbudowanych równań i wzorów. Rozdział zakończono przykładem numerycznym.

10.2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Przedmiotem rozważań jest kołowa lub pierścieniowa izotropowa płyta średniej grubości o zmiennej sztywności, symetrycznej niejednorodności poprzecznej – $H_1(R) = H_2(R) = H(R)/2$. Płyta jest obciążona obciążeniem $p_z(R, \varphi, t)$, momentami $m_r(R, \varphi, t)$ i $m_\varphi(R, \varphi, t)$ oraz statycznym obciążeniem stycznym $p_r(R, \varphi)$, $p_\varphi(R, \varphi)$. Zakładamy osiowo-symetryczny rozkład sztywności płytowej $D(R)$, sztywności postaciowej $K(R)$, gęstości i momentów masowych $\rho(R)$. Upraszczające założenie o osiowo-symetrycznym rozkładzie sztywności i gęstości przyjęto w celu skrócenia zapisu i zwiększenia przejrzystości prezentowanej metody rozwiązania. Założymy ponadto, że współczynnik Poissona ν jest stały, a współczynniki rozszerzalności cieplnej α i przewodnictwa cieplnego nie zależą od zmiennej z .

W analizowanym w niniejszym rozdziale modelu płyty, opisanym według teorii Hencky’ego–Bolle’a (patrz praca [195], s. 217), odstępując od założeń Naviera–Kirchhoffa, zakłada się, że prostoliniowe włókna prostopadłe do płaszczyzny podstawowej przed odkształceniem, po wygięciu zachowują swój kształt. Włókna te mogą jednak zmienić kąt nachylenia do powierzchni odkształconej. Zagadnienie poprzecznych drgań płyty według tej teorii możemy opisać w prawoskrętnym układzie współrzędnych następującym liniowym układem równań różniczkowych cząstkowych (patrz Woźniak [195], s. 303)

$$\begin{aligned}
 & K \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{\partial K}{\partial R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{K}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{K}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} - K \frac{\partial \Theta_r}{\partial R} - \frac{\partial K}{\partial R} \Theta_r - \frac{K}{R} \frac{\partial \Theta_\varphi}{\partial \varphi} \\
 & + \left(\frac{\partial f_r}{\partial R} + \frac{f_r}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \right) + p_z - \rho_0 \ddot{W} = 0, \\
 & K \frac{\partial W}{\partial R} + D \frac{\partial^2 \Theta_r}{\partial R^2} + \left(\frac{D}{R} + \frac{\partial D}{\partial R} \right) \frac{\partial \Theta_r}{\partial R} + \frac{1-\nu}{2} \frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta_r}{\partial \varphi^2} - \left(\frac{D}{R^2} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial D}{\partial R} + K \right) \Theta_r \\
 & + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{R} D \frac{\partial^2 \Theta_\varphi}{\partial R \partial \varphi} - \left(\frac{3-\nu}{2R^2} D - \frac{\nu}{R} \frac{\partial D}{\partial R} \right) \frac{\partial \Theta_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial R} \left(D(1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \right) \\
 & - (m_r - f_r) - \rho_2 \ddot{\Theta}_r - \frac{\partial(\hat{s} + \hat{S}\xi)}{\partial R} = 0, \tag{10.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{K}{R} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{R} D \frac{\partial^2 \Theta_r}{\partial R \partial \varphi} + \left(\frac{3-\nu}{2R^2} D + \frac{1-\nu}{2R} \frac{\partial D}{\partial R} \right) \frac{\partial \Theta_r}{\partial \varphi} + \frac{1-\nu}{2} D \frac{\partial^2 \Theta_\varphi}{\partial R^2} + \frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta_\varphi}{\partial \varphi^2} \\
 & + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{D}{R} + \frac{\partial D}{\partial R} \right) \frac{\partial \Theta_\varphi}{\partial R} - \left(\frac{1-\nu}{2R^2} D + \frac{1-\nu}{2R} \frac{\partial D}{\partial R} + K \right) \Theta_\varphi \\
 & + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(D(1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \right) - (m_\varphi - f_\varphi) - \rho_2 \ddot{\Theta}_\varphi - \frac{\partial(\hat{s} + \hat{S}\xi)}{\partial \varphi} = 0.
 \end{aligned}$$

Występujące w płycie średniej grubości siły wewnętrzne określone są wzorami:

- momenty gnące i skręcające

$$\begin{aligned}
 M_r &= -D \left[\frac{\partial \Theta_r}{\partial R} + \nu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Theta_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\Theta_r}{R} \right) + (1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{H} \right] + (\hat{s} + \hat{S}\xi), \\
 M_\varphi &= -D \left[\nu \frac{\partial \Theta_r}{\partial R} + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Theta_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\Theta_r}{R} \right) + (1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{H} \right] + (\hat{s} + \hat{S}\xi), \tag{10.2} \\
 M_{r\varphi} &= -\frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Theta_r}{\partial \varphi} + R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\Theta_\varphi}{R} \right) \right)
 \end{aligned}$$

- siły poprzeczne

$$\begin{aligned} Q_r &= K \left(\frac{\partial W}{\partial R} - \Theta_r \right) + f_r, \\ Q_\varphi &= K \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \Theta_\varphi \right) + f_\varphi. \end{aligned} \quad (10.3)$$

We wzorach (10.1)–(10.3) $W = W(R, \varphi, t)$ oznacza poprzeczne przemieszczenie płyty, $\Theta_r = \Theta_r(R, \varphi, t)$ i $\Theta_\varphi = \Theta_\varphi(R, \varphi, t)$ kąty obrotu przekrojów, a $K(R)$ określa sztywność płyty na ścinanie. Sztywność ta oraz wyrazy f_r, f_φ określone są wzorami

$$K = \kappa \int_{-H_2}^{H_1} G dz, \quad (10.4)$$

$$f_r = (K^+ H_1 p_r^+ + K^- H_2 p_r^-), \quad f_\varphi = (K^+ H_1 p_\varphi^+ + K^- H_2 p_\varphi^-), \quad (10.5)$$

gdzie κ, K^+, K^- są współczynnikami ścinania.

Czytelnika zainteresowanego metodami ich wyznaczania odsyłamy do monografii Woźniaka [195], s. 229.

Wyrazy \hat{s}, \hat{S}^ξ opisują wpływ na siły wewnętrzne naprężeń S_{zz} , przy czym pierwszy składnik uwzględnia wpływ naprężeń S_{zz} wywołanych siłami zewnętrznymi, a składnik drugi wpływ naprężeń wywołanych siłami bezwładności (patrz Woźniak [195], s. 300, 301). Ponieważ wpływy te mają znaczenie drugorzędne w stosunku do wpływu pozostałych naprężeń, wyrazy \hat{s}, \hat{S}^ξ będziemy dalej pomijać. Pozostałe współczynniki zdefiniowano we wzorach (9.1)–(9.2).

Podobnie jak w przypadku zagadnienia drgań płyt cienkich równania przekształcamy do postaci bezwymiarowej, wprowadzając zmienne bezwymiarowe $r = R/a, w = W/a, h = H/a, \theta_r = \Theta_r, \theta_\varphi = \Theta_\varphi$. Po wprowadzeniu tych zmiennych momenty gnące i skręcające określone są wzorami:

$$\begin{aligned} \overline{M}_r &= \frac{M_r a}{D_0} = -\overline{D} \left[\frac{\partial \theta_r}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\theta_r}{r} \right) + (1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \right], \\ \overline{M}_\varphi &= \frac{M_\varphi a}{D_0} = -\overline{D} \left[\nu \frac{\partial \theta_r}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\theta_r}{r} \right) + (1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \right], \\ \overline{M}_{r\varphi} &= \frac{M_{r\varphi} a}{D_0} = -\overline{D} (1-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta_\varphi}{\partial r} - \frac{\theta_\varphi}{r} \right), \end{aligned} \quad (10.6)$$

a siły poprzeczne

$$\begin{aligned}\bar{Q}_r &= \frac{Q_r a^2}{D_0} = \bar{K} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \theta_r \right) + f \bar{f}_r, \\ \bar{Q}_\varphi &= \frac{Q_\varphi a^2}{D_0} = \bar{K} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \theta_\varphi \right) + f \bar{f}_\varphi,\end{aligned}\tag{10.7}$$

gdzie

$$\bar{D} = \frac{D}{D_0}, \quad \bar{K} = \frac{a^2}{D_0} K, \quad \bar{f}_\beta = K^+ h_1 p_\beta^+ + K^- h_2 p_\beta^-, \quad p_\beta^\pm = \frac{P_0}{a^2} \bar{p}_\beta^\pm, \quad f = \frac{P_0 a}{D_0}.$$

Ze względu na dowolny rozkład sił zewnętrznych obciążenia zewnętrzne, przemieszczenia i kąty obrotu przekroju rozwijamy w szeregi Fouriera. Rozwinięcia sił i przemieszczeń przedstawione są we wzorze (9.17), rozwinięcia kątów obrotu przekrojów mają postać

$$\theta_\beta(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\theta_{\beta,n}^c(r, t) \cos n\varphi + \theta_{\beta,n}^s(r, t) \sin n\varphi \right), \quad \beta = \varphi, r.\tag{10.8}$$

Ponieważ w układzie równań (10.1) wszystkie (z wyjątkiem wyrazów wolnych) współczynniki są funkcjami tylko zmiennej r , układ równań będzie spełniony dla każdej wartości φ , gdy dla każdego n funkcje $w_n^c, \theta_{r,n}^c, \theta_{\varphi,n}^c, w_n^s, \theta_{r,n}^s, \theta_{\varphi,n}^s$ będą spełniać następujący układ sześciu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned}\bar{K} \frac{\partial^2 w_n^c}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{K}}{\partial r} \frac{\partial w_n^c}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \bar{K} w_n^c - \frac{n}{r^2} \bar{K} w_n^s - \bar{K} \frac{\partial \theta_{r,n}^c}{\partial r} - \frac{\partial \bar{K}}{\partial r} \theta_{r,n}^c - \frac{n}{r} \bar{K} \theta_{\varphi,n}^s \\ + f \left(\frac{\partial f_{r,n}^c}{\partial r} + \frac{f_{r,n}^c}{r} + n \frac{f_{\varphi,n}^s}{r} \right) + f \bar{p}_{z,n}^c - g \bar{\rho}_0 \ddot{w}_n^c = 0, \\ \bar{K} \frac{\partial w_n^c}{\partial r} + \bar{D} \frac{\partial^2 \theta_{r,n}^c}{\partial r^2} + \left(\frac{\bar{D}}{r} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial r} \right) \frac{\partial \theta_{r,n}^c}{\partial r} - \left(\left(\frac{(1-\nu)n^2}{2} + 1 \right) \frac{\bar{D}}{r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial \bar{D}}{\partial r} + \bar{K} \right) \theta_{r,n}^c \\ + \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{r} \bar{D} \frac{\partial \theta_{\varphi,n}^s}{\partial r} - n \left(\frac{3-\nu}{2r^2} \bar{D} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial \bar{D}}{\partial r} \right) \theta_{\varphi,n}^s + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{D}(1+\nu)\alpha}{h} \Delta \Gamma_n^c \right) \\ - f \left(\bar{m}_{r,n}^c - \bar{f}_{r,n}^c \right) - g \bar{\rho}_2 \ddot{\theta}_{r,n}^c = 0,\end{aligned}\tag{10.9}$$

$$\begin{aligned}
& n \frac{\bar{K}}{r} w_n^s + \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{r} \bar{D} \frac{\partial \theta_{r,n}^s}{\partial r} + n \left(\frac{3-\nu}{2r^2} \bar{D} + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial \bar{D}}{\partial r} \right) \theta_{r,n}^s + \frac{1-\nu}{2} \bar{D} \frac{\partial^2 \theta_{\varphi,n}^c}{\partial r^2} \\
& + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\bar{D}}{r} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial r} \right) \frac{\partial \theta_{\varphi,n}^c}{\partial r} - \left(\frac{1-\nu+2n^2}{2r^2} \bar{D} + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial \bar{D}}{\partial r} + \bar{K} \right) \theta_{\varphi,n}^c \\
& + \frac{n}{r} \left(\frac{\bar{D}(1+\nu)\alpha}{h} \Delta \Gamma_n^s \right) - f(\bar{m}_{\varphi,n}^c - \bar{f}_{\varphi,n}^c) - g \bar{\rho}_2 \ddot{\theta}_{\varphi,n}^c = 0, \\
\\
& \bar{K} \frac{\partial^2 w_n^s}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{K}}{\partial r} \frac{\partial w_n^s}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \bar{K} w_n^s + \frac{n}{r^2} \bar{K} w_n^c - \bar{K} \frac{\partial \theta_{r,n}^s}{\partial r} - \frac{\partial \bar{K}}{\partial r} \theta_{r,n}^s + \frac{n}{r} \bar{K} \theta_{\varphi,n}^c \\
& + f \left(\frac{\partial f_{r,n}^s}{\partial r} + \frac{f_{r,n}^s}{r} - n \frac{f_{\varphi,n}^c}{r} \right) + f \bar{p}_{z,n}^s - g \bar{\rho}_0 \ddot{w}_n^s = 0 \\
\\
& \bar{K} \frac{\partial w_n^s}{\partial r} + \bar{D} \frac{\partial^2 \theta_{r,n}^s}{\partial r^2} + \left(\frac{\bar{D}}{r} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial r} \right) \frac{\partial \theta_{r,n}^s}{\partial r} - \left(\left(\frac{(1-\nu)n^2}{2} + 1 \right) \frac{\bar{D}}{r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial \bar{D}}{\partial r} + \bar{K} \right) \theta_{r,n}^s \\
& - \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{r} \bar{D} \frac{\partial \theta_{\varphi,n}^c}{\partial r} + n \left(\frac{3-\nu}{2r^2} \bar{D} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial \bar{D}}{\partial r} \right) \theta_{\varphi,n}^c + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{D}(1+\nu)\alpha}{h} \Delta \Gamma_n^s \right) \\
& - f(\bar{m}_{r,n}^s - \bar{f}_{r,n}^s) - g \bar{\rho}_2 \ddot{\theta}_{r,n}^s = 0 \\
\\
& -n \frac{\bar{K}}{r} w_n^c - \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{r} \bar{D} \frac{\partial \theta_{r,n}^c}{\partial r} - n \left(\frac{3-\nu}{2r^2} \bar{D} + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial \bar{D}}{\partial r} \right) \theta_{r,n}^c + \frac{1-\nu}{2} \bar{D} \frac{\partial^2 \theta_{\varphi,n}^s}{\partial r^2} \\
& + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\bar{D}}{r} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial r} \right) \frac{\partial \theta_{\varphi,n}^s}{\partial r} - \left(\frac{1-\nu+2n^2}{2r^2} \bar{D} + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial \bar{D}}{\partial r} + \bar{K} \right) \theta_{\varphi,n}^s, \\
& - \frac{1}{r} \left(\frac{\bar{D}(1+\nu)\alpha}{h} \Delta \Gamma_n^c \right) - f(\bar{m}_{\varphi,n}^s - \bar{f}_{\varphi,n}^s) - g \bar{\rho}_2 \ddot{\theta}_{\varphi,n}^s = 0 \tag{10.9}_{cd}
\end{aligned}$$

Gdzie stałe f, g określono we wzorze (10.7).

10.3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Aby pozbyć się (10.9) osobliwych mnożników r^{-1} , r^{-2} , równania układu przemnożymy obustronnie przez r^2 . Stosując zapis macierzowy, możemy układ sześciu równań wyrazić wzorem

$$\hat{\mathbf{P}}_0(r)\mathbf{f}''(r,t) + \hat{\mathbf{P}}_1(r)\mathbf{f}'(r,t) + \hat{\mathbf{P}}_2(r)\mathbf{f}(r,t) + \hat{\mathbf{R}}_2(r)\ddot{\mathbf{f}}(r,t) = \hat{\mathbf{P}}(r,t) \quad (10.10)$$

gdzie współczynniki macierzowe $\hat{\mathbf{P}}_i(r)$, $i = 0, 1, 2$ mają postać

$$\hat{\mathbf{P}}_i(r) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i,cc} & \mathbf{P}_{i,cs} \\ \mathbf{P}_{i,sc} & \mathbf{P}_{i,ss} \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

a między podmacierzami macierzy \mathbf{P}_i^{\otimes} zachodzą relacje: $\mathbf{P}_{i,ss} = \mathbf{P}_{i,cc}$, $\mathbf{P}_{i,sc} = -\mathbf{P}_{i,cs}$.

Analogiczną postać ma macierz $\hat{\mathbf{R}}_2(r)$ i dla jej podmacierzy zachodzą relacje podobne jak dla podmacierzy macierzy \mathbf{P}_i^{\otimes} . Podmacierze macierzy \mathbf{P}_i^{\otimes} i $\hat{\mathbf{R}}_2(r)$ są określone wzorami:

$$\mathbf{P}_{0,cc} = \begin{bmatrix} r^2 K & 0 & 0 \\ 0 & r^2 D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} r^2 D \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{0,cs} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{1,cc} = \begin{bmatrix} r^2 \frac{\partial K}{\partial r} & -r^2 K & 0 \\ r^2 K & r^2 \frac{\partial D}{\partial r} + rD & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \left(r^2 \frac{\partial D}{\partial r} + rD \right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{1,cs} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{2} nrD \\ 0 & \frac{1+\nu}{2} nrD & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{2,cc} = \begin{bmatrix} -n^2 K & -r^2 \frac{\partial K}{\partial r} & 0 \\ 0 & -\left(\left(1 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) D - \nu r \frac{\partial D}{\partial r} + r^2 K \right) & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\left(\frac{1-\nu+2n^2}{2} \right) D + \frac{1-\nu}{2} r \frac{\partial D}{\partial r} + r^2 K \right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{2,cs} = \begin{bmatrix} -nK & 0 & -nrK \\ 0 & 0 & -n \left(\frac{3-\nu}{2} D - \nu r \frac{\partial D}{\partial r} \right) \\ nrK & n \left(\frac{3-\nu}{2} D - \frac{1-\nu}{2} r \frac{\partial D}{\partial r} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

$$\mathbf{R}_{2,cc} = \begin{bmatrix} -r^2 g \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 g \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 g \rho_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{2,cs} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.13)$$

Podobnie jak w poprzednich zagadnieniach, w celu uproszczenia zapisu we wzorach (10.12) i następujących, zamiast oznaczeń \bar{K} , \bar{D} ..., będziemy stosować oznaczenia K , D itd. Następnym krokiem jest wyznaczenie za pomocą wzorów (2.33) funkcji \mathbf{Q}_i , $i = 0, 1, 2$ i \mathbf{S}_2 . Funkcje, te podobnie jak funkcje $\hat{\mathbf{P}}_i$, przyjmują postać

$$\mathbf{Q}_i(r) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{i,cc} & \mathbf{Q}_{i,cs} \\ \mathbf{Q}_{i,sc} & \mathbf{Q}_{i,ss} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{i,ss} = \mathbf{Q}_{i,cc}, \quad \mathbf{Q}_{i,sc} = -\mathbf{Q}_{i,cs}, \quad (10.14)$$

$$\mathbf{S}_2(r) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{2,cc} & \mathbf{S}_{2,cs} \\ \mathbf{S}_{2,sc} & \mathbf{S}_{2,ss} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{2,ss} = \mathbf{S}_{2,cc}, \quad \mathbf{S}_{2,sc} = -\mathbf{S}_{2,cs},$$

a występujące we wzorze (10.14) podmacierze wyrażają się wzorami

$$\mathbf{Q}_{0,cc} = \mathbf{P}_{0,cc}, \quad \mathbf{Q}_{0,cs} = \mathbf{P}_{0,cs},$$

$$\mathbf{Q}_{1,cc} = \begin{bmatrix} -r^2 \frac{\partial K}{\partial r} - 4rK & -r^2 K & 0 \\ r^2 K & -r^2 \frac{\partial D}{\partial r} - 3rD & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-\nu}{2} \left(r^2 \frac{\partial D}{\partial r} + 3rD \right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{1,cs} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{2} nrD \\ 0 & \frac{1+\nu}{2} nrD & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.15)$$

$$\mathbf{Q}_{2,cc} = \begin{bmatrix} 2r \frac{\partial K}{\partial r} + (2-n^2)K & 2rK & 0 \\ -r^2 \frac{\partial K}{\partial r} - 2rK & -\left(\frac{1-\nu}{2} n^2 D - (1+\nu)r \frac{\partial D}{\partial r} + r^2 K \right) & 0 \\ 0 & 0 & -(n^2 D + r^2 K) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{2,cs} = \begin{bmatrix} -nK & 0 & -nrK \\ 0 & 0 & -n \left(2D + \frac{1-\nu}{2} r \frac{\partial D}{\partial r} \right) \\ nrK & n \left((1-\nu)D - \nu r \frac{\partial D}{\partial r} \right) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{2,cc} = \begin{bmatrix} -r^2 g \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 g \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 g \rho_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{2,cs} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.16)$$

Po rozwinięciu funkcji \mathbf{Q}_i , $i = 0, 1, 2$ i \mathbf{S}_2 w szeregi względem przesuniętych wielomianów Czebyszewa $T_i^*(x) = T_i(2x-1)$ i zastosowaniu do dalszych przekształceń zależności (2.37), dla każdego $n > 0$ otrzymamy następujący nieskończony układ równań różniczkowych zwyczajnych, pozwalający na wyznaczenie poszukiwanych współczynników rozwinięć funkcji w_n^c , $\theta_{r,n}^c$, $\theta_{\varphi,n}^c$, w_n^s , $\theta_{r,n}^s$, $\theta_{\varphi,n}^s$ (w celu uproszczenia zapisu w oznaczeniach współczynników we wzorze (10.17) oraz następnym, podobnie jak to uczyniliśmy dla płyty cienkiej, pominięto górny wskaźnik *):

$$\sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k_{11}(k,l) & k_{12}(k,l) & 0 & 0 & 0 & k_{16}(k,l) \\ k_{21}(k,l) & k_{21}(k,l) & 0 & 0 & 0 & k_{26}(k,l) \\ \hline 0 & 0 & k_{33}(k,l) & k_{34}(k,l) & k_{35}(k,l) & 0 \\ 0 & 0 & -k_{16}(k,l) & k_{11}(k,l) & k_{12}(k,l) & 0 \\ 0 & 0 & -k_{26}(k,l) & k_{21}(k,l) & k_{22}(k,l) & 0 \\ -k_{34}(k,l) & -k_{35}(k,l) & 0 & 0 & 0 & k_{33}(k,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (w_n^c)_l \\ (\theta_{r,n}^c)_l \\ (\theta_{\varphi,n}^c)_l \\ (w_n^s)_l \\ (\theta_{r,n}^s)_l \\ (\theta_{\varphi,n}^s)_l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{1,n}^c(k) \\ P_{2,n}^c(k) \\ P_{3,n}^c(k) \\ P_{1,n}^s(k) \\ P_{2,n}^s(k) \\ P_{3,n}^s(k) \end{bmatrix} + \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} b_{11}(k,l) & & & & & \\ & b_{22}(k,l) & & & & 0 \\ & & b_{33}(k,l) & & & \\ \hline & & & b_{11}(k,l) & & \\ & 0 & & & b_{22}(k,l) & \\ & & & & & b_{33}(k,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\ddot{w}_n^c)_l \\ (\ddot{\theta}_{r,n}^c)_l \\ (\ddot{\theta}_{\varphi,n}^c)_l \\ (\ddot{w}_n^s)_l \\ (\ddot{\theta}_{r,n}^s)_l \\ (\ddot{\theta}_{\varphi,n}^s)_l \end{bmatrix},$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10.17)$$

W przypadku gdy $n = 0$, układ równań (10.17) ulega modyfikacji

$$\sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k_{11}(k,l) & k_{12}(k,l) & 0 & & & \\ k_{21}(k,l) & k_{22}(k,l) & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & k_{33}(k,l) & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (w_n^c)_l \\ (\theta_{r,n}^c)_l \\ (\theta_{\varphi,n}^c)_l \\ (w_n^s)_l \\ (\theta_{r,n}^s)_l \\ (\theta_{\varphi,n}^s)_l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{1,n}^c(k) \\ P_{2,n}^c(k) \\ P_{3,n}^c(k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} b_{11}(k,l) & & & & & \\ & b_{22}(k,l) & & & 0 & \\ & & b_{33}(k,l) & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\ddot{w}_n^c)_l \\ (\ddot{\theta}_{r,n}^c)_l \\ (\ddot{\theta}_{\varphi,n}^c)_l \\ (\ddot{w}_n^s)_l \\ (\ddot{\theta}_{r,n}^s)_l \\ (\ddot{\theta}_{\varphi,n}^s)_l \end{bmatrix},$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$ (10.18)

Modyfikacja ta wynika z braku w rozwinięciu Fouriera współczynników $w_{r,0}^s, \theta_{r,0}^s, \theta_{\varphi,0}^s$. Ponieważ dla przejrzystości równań wprowadzono te współczynniki, układ (10.18) tak zmodyfikowano, aby w wyniku jego rozwiązania otrzymać $w_{r,0}^s = \theta_{r,0}^s = \theta_{\varphi,0}^s = 0$. We wzorze (10.17) i (10.18) przez $(f)_l$ oznaczono l -ty współczynnik rozwinięcia w szereg Czebyszewa funkcji

$$f(r, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (f)_l T_l^*(r),$$

gdzie f jest jedną z poszukiwanych funkcji: $w_n^c, \theta_{r,n}^c, \theta_{\varphi,n}^c, w_n^s, \theta_{r,n}^s, \theta_{\varphi,n}^s$.

Ponieważ w funkcjach Q_i występują mnożniki r, r^2 , przy wyznaczaniu współczynników rozwinięć Czebyszewa tych funkcji zastosowano zależności (9.42).

Występujące w równaniu różniczkowym (10.17) elementy macierzy i wektorów wyrażają się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
k_{11}(k, l) &= \frac{1}{2} \left[(k+1)((k-3)l - n^2)k_{k-l-2} + 4(k+1)(k-2)lk_{k-l-1} \right. \\
&\quad + 2((3k^2 - 5)l + kn^2)k_{k-l} + 4(k-1)(k+2)lk_{k-l+1} \\
&\quad - (k+1)((k-3)l + n^2)k_{k+l-2} - 4(k+1)(k-2)lk_{k+l-1} \\
&\quad - 2((3k^2 - 5)l - kn^2)k_{k+l} - 4(k-1)(k+2)lk_{k+l+1} \\
&\quad \left. - (k-1)((k+3)l + n^2)k_{k+l+2} \right], \\
k_{12}(k, l) &= -\frac{1}{8} \left[(k+1)(k-3)k_{k-l-3} + 4(k+1)(k-2)k_{k-l-2} \right. \\
&\quad + (k-1)(5k+7)k_{k-l-1} - 8k k_{k-l} - (k+1)(5k-7)k_{k-l+1} \\
&\quad - 4(k-1)(k+2)k_{k-l+2} - (k-1)(k+3)k_{k-l+3} \\
&\quad + (k+1)(k-3)k_{k+l-3} + 4(k+1)(k-2)k_{k+l-2} \\
&\quad + (k-1)(5k+7)k_{k+l-1} + 8k k_{k+l} - (k+1)(5k-7)k_{k+l+1} \\
&\quad \left. - 4(k-1)(k+2)k_{k+l+2} - (k-1)(k+3)k_{k+l+3} \right], \\
k_{14}(k, l) &= -\frac{1}{2} n \left[(k+1)(k_{k-l-2} + k_{k+l-2}) - 2k(k_{k-l} + k_{k+l}) + (k-1)(k_{k-l+2} + k_{k+l+2}) \right], \\
k_{16}(k, l) &= -\frac{1}{8} n \left[(k+1)k_{k-l-3} + 2(k+1)k_{k-l-2} - (k-1)k_{k-l-1} - 4k k_{k-l} \right. \\
&\quad - (k+1)k_{k-l+1} + 2(k-1)k_{k-l+2} + (k-1)k_{k-l+3} \\
&\quad + (k+1)k_{k+l-3} + 2(k+1)k_{k+l-2} - (k-1)k_{k+l-1} - 4k k_{k+l} \\
&\quad \left. - (k+1)k_{k+l+1} + 2(k+1)k_{k+l+2} + (k-1)k_{k+l+3} \right], \\
k_{21}(k, l) &= \frac{1}{8} l \left[(k+1)k_{k-l-3} + 4(k+1)k_{k-l-2} + (5k+7)k_{k-l-1} + 8k_{k-l} \right. \\
&\quad - (5k-7)k_{k-l+1} - 4(k-1)k_{k-l+2} - (k-1)k_{k-l+3} \\
&\quad - (k+1)k_{k+l-3} - 4(k+1)k_{k+l-2} - (5k+7)k_{k+l-1} - 8k_{k+l} \\
&\quad \left. + (5k-7)k_{k+l+1} + 4(k-1)k_{k+l+2} + (k-1)k_{k+l+3} \right], \tag{10.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{22}(k, l) = & \frac{1}{4} \left[(k+1) \left(2l(k-2-\nu) + 2(k-2)\nu - 2 - (1-\nu)n^2 \right) d_{k-l-2} \right. \\
 & + 4(k+1) \left(l(2k-3-\nu) + (k-1)\nu \right) d_{k-l-1} \\
 & + \left(4l(3k^2-4-\nu) + 2k(2(1+\nu) + (1-\nu)n^2) \right) d_{k-l} \\
 & + 4(k-1) \left(l(2k+3+\nu) - (k+1)\nu \right) d_{k-l+1} \\
 & \left. + (k-1) \left(2l(k+2+\nu) - 2(k+2)\nu - 2 - (1-\nu)n^2 \right) d_{k-l+2} \right] \\
 & - \frac{1}{4} \left[(k+1) \left(2l(k-2-\nu) - 2(k-2)\nu + 2 + (1-\nu)n^2 \right) d_{k+l-2} \right. \\
 & + 4(k+1) \left(l(2k-3-\nu) - (k-1)\nu \right) d_{k+l-1} \\
 & + \left(4l(3k^2-4-\nu) - 2k(2(1+\nu) + (1-\nu)n^2) \right) d_{k+l} \\
 & + 4(k-1) \left(l(2k+3+\nu) + (k+1)\nu \right) d_{k+l+1} \\
 & \left. + (k-1) \left(2l(k+2+\nu) + 2(k+2)\nu + 2 + (1-\nu)n^2 \right) d_{k+l+2} \right] \\
 & - \frac{1}{32} \left[(k+1)k_{k-l-4} + 4(k+1)k_{k-l-3} + 2(2k+3)k_{k-l-2} - 4(k-1)k_{k-l-1} - 10kk_{k-l} \right. \\
 & - 4(k+1)k_{k-l+1} + 2(2k-3)k_{k-l+2} + 4(k-1)k_{k-l+3} + (k-1)k_{k-l+4} \\
 & + (k+1)k_{k+l-4} + 4(k+1)k_{k+l-3} + 2(2k+3)k_{k+l-2} - 4(k-1)k_{k+l-1} - 10kk_{k+l} \\
 & \left. - 4(k+1)k_{k+l+1} + 2(2k-3)k_{k+l+2} + 4(k-1)k_{k+l+3} + (k-1)k_{k+l+4} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{26}(k, l) = & \frac{1}{4} n \left[(k+1) \left((2k-l-3)\nu + (l-3) \right) d_{k-l-2} + 2(k+1) \left((2k-l-2)\nu + l \right) d_{k-l-1} \right. \\
 & + 2((3k+l) + (k-l)\nu) d_{k-l} \\
 & - 2(k-1) \left((2k-l+2)\nu + l \right) d_{k-l+1} - (k-1) \left((2k-l+3)\nu + (l+3) \right) d_{k-l+2} \\
 & + (k+1) \left((2k+l-3)\nu - (l+3) \right) d_{k+l-2} + 2(k+1) \left((2k+l-2)\nu - l \right) d_{k+l-1} \\
 & + 2((3k-l) + (k+l)\nu) d_{k+l} \\
 & \left. - 2(k-1) \left((2k+l+2)\nu - l \right) d_{k+l+1} - (k-1) \left((2k+l+3)\nu - (l-3) \right) d_{k+l+2} \right],
 \end{aligned}$$

(10.19)_{cd}.

$$\begin{aligned}
k_{33}(k, l) = & \frac{1}{4} \left[(k+1) \left((1-\nu)(k-1)(l-1) - 2n^2 \right) d_{k-l-2} + 2(k^2-1)(1-\nu)(2l-1) d_{k-l-1} \right. \\
& + 2 \left(2kn^2 + 3(k^2-1)(1-\nu)l \right) d_{k-l} \\
& + 2(k^2-1)(1-\nu)(2l+1) d_{k-l+1} + (k-1) \left((1-\nu)(k+1)(l+1) - 2n^2 \right) d_{k-l+2} \left. \right] \\
& - \frac{1}{4} \left[(k+1) \left((1-\nu)(k-1)(l+1) + 2n^2 \right) d_{k+l-2} + 2(k^2-1)(1-\nu)(2l+1) d_{k+l-1} \right. \\
& + 2 \left(2kn^2 - 3(k^2-1)(1-\nu)l \right) d_{k+l} \\
& + 2(k^2-1)(1-\nu)(2l-1) d_{k+l+1} + (k-1) \left((1-\nu)(k+1)(l-1) + 2n^2 \right) d_{k+l+2} \left. \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{34}(k, l) = & \frac{1}{8} n \left[(k+1)k_{k-l-3} + 2(k+1)k_{k-l-2} - (k-1)k_{k-l-1} - 4kk_{k-l} \right. \\
& - (k+1)k_{k-l+1} + 2(k-1)k_{k-l+2} + (k-1)k_{k-l+3} \\
& + (k+1)k_{k+l-3} + 2(k+1)k_{k+l-2} - (k-1)k_{k+l-1} - 4kk_{k+l} \\
& \left. - (k+1)k_{k+l+1} + 2(k-1)k_{k+l+2} + (k-1)k_{k+l+3} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{35}(k, l) = & \frac{1}{4} n \left[(k+1) \left((1+2l-k)\nu + (k+1) \right) d_{k-l-2} \right. \\
& - 2(k+1) \left((k-2l-1)\nu + (k-1) \right) d_{k-l-1} - 4(k-l\nu) d_{k-l} \\
& + 2(k-1) \left((k-2l+1)\nu - (k+1) \right) d_{k-l+1} \\
& + (k-1) \left((1-2l+k)\nu - (k-1) \right) d_{k-l+2} \left. \right] \\
& + \frac{1}{4} n \left[(k+1) \left((1-2l-k)\nu + (k+1) \right) d_{k+l-2} \right. \\
& - 2(k+1) \left((k+2l-1)\nu + (k-1) \right) d_{k+l-1} - 4(k+l\nu) d_{k+l} \\
& + 2(k-1) \left((k+2l+1)\nu - (k+1) \right) d_{k+l+1} \\
& + (k-1) \left((1+2l+k)\nu - (k-1) \right) d_{k+l+2} \left. \right].
\end{aligned} \tag{10.19}_{\text{cd}}$$

$$\begin{aligned}
 b_{11}(k, l) = & \frac{1}{32} g \left[(k+1)\rho_{0,k-l-4} + 4(k+1)\rho_{0,k-l-3} + 2(2k+3)\rho_{0,k-l-2} \right. \\
 & - 4(k-1)\rho_{0,k-l-1} - 10k\rho_{0,k-l} - 4(k+1)\rho_{0,k-l+1} \\
 & + 2(2k-3)\rho_{0,k-l+2} + 4(k-1)\rho_{0,k-l+3} + (k-1)\rho_{0,k-l+4} \\
 & + (k+1)\rho_{0,k+l-4} + 4(k+1)\rho_{0,k+l-3} + 2(2k+3)\rho_{0,k+l-2} \\
 & - 4(k-1)\rho_{0,k+l-1} - 10k\rho_{0,k+l} - 4(k+1)\rho_{0,k+l+1} \\
 & \left. + 2(2k-3)\rho_{0,k+l+2} + 4(k-1)\rho_{0,k+l+3} + (k-1)\rho_{0,k+l+4} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{22}(k, l) = & b_{33}(k, l) = \\
 = & \frac{1}{32} g \left[(k+1)\rho_{2,k-l-4} + 4(k+1)\rho_{2,k-l-3} + 2(2k+3)\rho_{2,k-l-2} \right. \\
 & - 4(k-1)\rho_{2,k-l-1} - 10k\rho_{2,k-l} - 4(k+1)\rho_{2,k-l+1} \\
 & + 2(2k-3)\rho_{2,k-l+2} + 4(k-1)\rho_{2,k-l+3} + (k-1)\rho_{2,k-l+4} \\
 & + (k+1)\rho_{2,k+l-4} + 4(k+1)\rho_{2,k+l-3} + 2(2k+3)\rho_{2,k+l-2} \\
 & - 4(k-1)\rho_{2,k+l-1} - 10k\rho_{2,k+l} - 4(k+1)\rho_{2,k+l+1} \\
 & \left. + 2(2k-3)\rho_{2,k+l+2} + 4(k-1)\rho_{2,k+l+3} + (k-1)\rho_{2,k+l+4} \right], \quad (10.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{1,n}^{c,s}(k) = & -\frac{1}{4} f \left[(k+1)(k-2)(f_{r,n}^{c,s})_{k-3} + 2(k+1)(2k-3)(f_{r,n}^{c,s})_{k-2} \right. \\
 & + (k-1)(5k+6)(f_{r,n}^{c,s})_{k-1} + 4k(f_{r,n}^{c,s})_k \\
 & - (k+1)(5k-6)(f_{r,n}^{c,s})_{k+1} - 2(k-1)(2k+3)(f_{r,n}^{c,s})_{k+2} \\
 & - (k-1)(k+2)(f_{r,n}^{c,s})_{k+3} \\
 & \pm n \left[(k+1)(f_{\varphi,n}^{s,c})_{k-3} + 2(k+1)(f_{\varphi,n}^{s,c})_{k-2} - (k-1)(f_{\varphi,n}^{s,c})_{k-1} - 4k(f_{\varphi,n}^{s,c})_k \right. \\
 & \left. - (k+1)(f_{\varphi,n}^{s,c})_{k+1} + 2(k-1)(f_{\varphi,n}^{s,c})_{k+2} + (k-1)(f_{\varphi,n}^{s,c})_{k+3} \right] \\
 & - \frac{1}{16} f \left[(k+1)(p_{z,n}^{c,s})_{k-4} + 4(k+1)(p_{z,n}^{c,s})_{k-3} + 2(2k+3)(p_{z,n}^{c,s})_{k-2} \right. \\
 & - 4(k-1)(p_{z,n}^{c,s})_{k-1} - 10k(p_{z,n}^{c,s})_k \\
 & \left. - 4(k+1)(p_{z,n}^{c,s})_{k+1} + 2(2k-3)(p_{z,n}^{c,s})_{k+2} + 4(k+1)(p_{z,n}^{c,s})_{k+3} + (k-1)(p_{z,n}^{c,s})_{k+4} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{2,n}^{c,s}(k) &= \frac{1}{16} f \left[(k+1) \left((m_{r,n}^{c,s})_{k-4} - (f_{r,n}^{c,s})_{k-4} \right) + 4(k+1) \left((m_{r,n}^{c,s})_{k-3} - (f_{r,n}^{c,s})_{k-3} \right) \right. \\
&\quad + 2(2k+3) \left((m_{r,n}^{c,s})_{k-2} - (f_{r,n}^{c,s})_{k-2} \right) - 4(k-1) \left((m_{r,n}^{c,s})_{k-1} - (f_{r,n}^{c,s})_{k-1} \right) \\
&\quad - 10k \left((m_{r,n}^{c,s})_k - (f_{r,n}^{c,s})_k \right) \\
&\quad - 4(k-1) \left((m_{r,n}^{c,s})_{k+1} - (f_{r,n}^{c,s})_{k+1} \right) + 2(2k-3) \left((m_{r,n}^{c,s})_{k+2} - (f_{r,n}^{c,s})_{k+2} \right) \\
&\quad \left. + 4(k-1) \left((m_{r,n}^{c,s})_{k+3} - (f_{r,n}^{c,s})_{k+3} \right) + (k-1) \left((m_{r,n}^{c,s})_{k+4} - (f_{r,n}^{c,s})_{k+4} \right) \right], \\
P_{3,n}^{c,s}(k) &= \frac{1}{16} f \left[(k+1) \left((m_{\varphi,n}^{c,s})_{k-4} - (f_{\varphi,n}^{c,s})_{k-4} \right) + 4(k+1) \left((m_{\varphi,n}^{c,s})_{k-3} - (f_{\varphi,n}^{c,s})_{k-3} \right) \right. \\
&\quad + 2(2k+3) \left((m_{\varphi,n}^{c,s})_{k-2} - (f_{\varphi,n}^{c,s})_{k-2} \right) - 4(k-1) \left((m_{\varphi,n}^{c,s})_{k-1} - (f_{\varphi,n}^{c,s})_{k-1} \right) \\
&\quad - 10k \left((m_{\varphi,n}^{c,s})_k - (f_{\varphi,n}^{c,s})_k \right) \\
&\quad - 4(k+1) \left((m_{\varphi,n}^{c,s})_{k+1} - (f_{\varphi,n}^{c,s})_{k+1} \right) + 2(2k-3) \left((m_{\varphi,n}^{c,s})_{k+2} - (f_{\varphi,n}^{c,s})_{k+2} \right) \\
&\quad \left. + 4(k-1) \left((m_{\varphi,n}^{c,s})_{k+3} - (f_{\varphi,n}^{c,s})_{k+3} \right) + (k-1) \left((m_{\varphi,n}^{c,s})_{k+4} - (f_{\varphi,n}^{c,s})_{k+4} \right) \right], \quad (10.21)
\end{aligned}$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia

$$\begin{aligned}
d_l &= a_l [D], \quad k_l = a_l [K], \quad \rho_{i,l} = a_l [\rho_i], \quad (m_{\varphi,n}^{c,s})_l = a_l [m_{\varphi,n}^{c,s}], \\
(f_{\varphi,n}^{c,s})_l &= a_l [f_{\varphi,n}^{c,s}], \quad (m_{\varphi,n}^{c,s})_l = a_l [m_{\varphi,n}^{c,s}], \quad (f_{\varphi,n}^{c,s})_l = a_l [f_{\varphi,n}^{c,s}]. \quad (10.22)
\end{aligned}$$

Spełnione tożsamościowo dwie grupy równań (10.17) dla $k = 0, 1$ (przypomnijmy, że każda grupa składa się z 6 równań) zastępujemy równaniami określającymi warunki brzegowe. W formułowaniu tych równań korzystamy z następujących wzorów, określających przemieszczenia uogólnione oraz wybrane siły wewnętrzne

$$\begin{aligned}
w_n^{c,s}(r,t) &= \sum_{l=0}^{\infty} (w_n^{c,s})_l T_l^*(r), \\
\theta_{r,n}^{c,s}(r,t) &= \sum_{l=0}^{\infty} (\theta_{r,n}^{c,s})_l T_l^*(r), \quad \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r,t) = \sum_{l=0}^{\infty} (\theta_{\varphi,n}^{c,s})_l T_l^*(r),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{r,n}^{c,s}(r,t) &= -D(r) \sum_{l=0}^{\infty} \left(\left(\theta_{r,n}^{c,s} \right)_l T_l^{*'}(r) + \nu \frac{1}{r} \left(\left(\theta_{r,n}^{c,s} \right)_l \pm n \left(\theta_{\varphi,n}^{s,c} \right)_l \right) T_l^*(r) \right) \\
 &\quad - \frac{D(r)(1+\nu)\alpha(r)}{h(r)} \Delta T_n^{c,s}(r), \\
 M_{r\varphi,n}^{c,s}(r,t) &= -D(r)(1-\nu) \sum_{l=0}^{\infty} \left(\left(\theta_{\varphi,n}^{c,s} \right)_l T_l^{*'}(r) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r} \left(\pm n \left(\theta_{r,n}^{s,c} \right)_l - \left(\theta_{\varphi,n}^{c,s} \right)_l \right) T_l^*(r) \right), \\
 Q_{r,n}^{c,s}(r,t) &= K(r) \sum_{l=0}^{\infty} \left(\left(w_n^{c,s} \right)_l T_l^{*'}(r) - \left(\theta_{r,n}^{c,s} \right)_l T_l^*(r) \right) + f f_{r,n}^{c,s}(r)
 \end{aligned} \tag{10.23}$$

Podobnie jak w przypadku pierścieniowych płyt cienkich warunki brzegowe wynikają bezpośrednio ze sposobu podparcia płyty na brzegach $r = 1$ i $r = r_0$, gdzie r_0 jest promieniem wewnętrznym płyty. Dla $r = 1$ we wzorach (10.23) możemy wykorzystać zależności (2.34), przekształcając go do prostszej postaci

$$\begin{aligned}
 w_n^{c,s}(1,t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(w_n^{c,s} \right)_l, \\
 \theta_{r,n}^{c,s}(1,t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\theta_{r,n}^{c,s} \right)_l, \quad \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r,t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\theta_{\varphi,n}^{c,s} \right)_l, \\
 M_{r,n}^{c,s}(1,t) &= -D(1) \sum_{l=0}^{\infty} \left((2l^2 + \nu) \left(\theta_{r,n}^{c,s} \right)_l \pm n \left(\theta_{\varphi,n}^{s,c} \right)_l \right) \\
 &\quad - \frac{D(r)(1+\nu)\alpha(r)}{h(r)} \Delta T_n^{c,s}(r) \Big|_{r=1}, \\
 M_{r\varphi,n}^{c,s}(1,t) &= -D(1)(1-\nu) \sum_{l=0}^{\infty} \left((2l^2 - 1) \left(\theta_{\varphi,n}^{c,s} \right)_l \pm n \left(\theta_{r,n}^{s,c} \right)_l \right), \\
 Q_{r,n}^{c,s}(1,t) &= K(1) \sum_{l=0}^{\infty} \left(2l^2 \left(w_n^{c,s} \right)_l - \left(\theta_{r,n}^{c,s} \right)_l \right) + f f_{r,n}^{c,s}(1)
 \end{aligned} \tag{10.24}$$

Na brzegu, $r = r_0$, musimy obliczyć wartości wielomianów $T_l^*(r_0)$ oraz $T_l^{*'}(r_0)$, przy czym przy wyznaczaniu wartości pochodnej wielomianu $T_l^{*'}(r_0)$ skorzystamy z następującej tożsamości, wynikającej ze wzoru $T_l'(x) = l U_{l-1}(x)$ ([144], s. 37)

$$T_l^{*'}(r_0) = 2l U_{l-1}^*(r_0). \tag{10.25}$$

Przykładowe równania określające podstawowe sposoby podparcia brzegów płyty pierścieniowej średniej grubości mają postać:

- brzeg swobodny

$$M_{r,n}^{c,s}(r,t) = 0, \quad M_{r\varphi,n}^{c,s}(r,t) = 0, \quad Q_n^{c,s}(r,t) = 0, \quad \text{gdy } r = 1 \vee r = r_0,$$

- brzeg sztywno utwierdzony

$$w_n^{c,s}(r,t) = 0, \quad \theta_{r,n}^{c,s}(r,t) = 0, \quad \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r,t) = 0, \quad \text{gdy } r = 1 \vee r = r_0,$$

- brzeg przegubowo podparty

$$w_n^{c,s}(r,t) = 0, \quad M_{r,n}^{c,s}(r,t) = 0, \quad \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r,t) = 0, \quad \text{gdy } r = 1 \vee r = r_0,$$

- brzeg utwierdzony przesuwnie

$$\theta_{r,n}^{c,s}(r,t) = 0, \quad \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r,t) = 0, \quad Q_n^{c,s}(r,t) = 0, \quad \text{gdy } r = 1 \vee r = r_0.$$

Warunki brzegowe pozwalają na sformułowanie sześciu równań, którymi zostanie zastąpionych sześć pierwszych spełnionych tożsamościowo równań (dwie grupy ($k = 0, 1$) po trzy równania) układu (10.17) lub (10.18).

W określaniu warunków brzegowych płyty kołowej natrafimy na podobne trudności, jakie pojawiły się w przypadku płyty cienkiej. Przypomnijmy, że problem polegał na braku możliwości bezpośredniego wykorzystania warunków ograniczoności w prezentowanej w pracy metodzie rozwiązania.

Problem ten rozwiążemy podobnie jak w przypadku płyty cienkiej. Płytę podzielimy myślowo na dwie części, przy czym linią podziału będzie okrąg o promieniu $r = \varepsilon$. Przy małym ε możemy w przybliżeniu założyć, że parametry opisujące wewnętrzną część płyty są stałe $D = D(\varepsilon)$, $K = K(\varepsilon)$, $h = h(\varepsilon)$ itd. Założymy ponadto, że na część wewnętrzną nie działają siły bezwładności oraz siły osiowe. Równania opisujące statyczne (bo pominiemy siły bezwładności) uogólnione przemieszczenia takiej płyty, po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych i pominięciu wpływu naprężeń S_{zz} , mają postać (patrz [83, 195])

$$\begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2\hat{w} &= f\left(p_z + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rm_r)}{\partial r} + \frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi}\right)\right) \\ &\quad - \frac{fD}{K}\nabla^2\left(p_z + \frac{1}{6r}\left(\frac{\partial(rm_r)}{\partial r} + \frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi}\right)\right) - \frac{D(1+\nu)\alpha}{h}\nabla^2(\Delta T), \\ \nabla^2\hat{\psi} - \frac{2K}{D(1-\nu)}\hat{\psi} &= \frac{10f}{6D(1-\nu)}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial m_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rm_\varphi)}{\partial r}\right), \\ \hat{\psi} &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\theta_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\theta_\varphi)}{\partial r}\right), \end{aligned} \tag{10.26}$$

gdzie

$$D = \frac{1}{D_0} \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}, \quad K = \frac{a^2}{D_0} \frac{5}{6} GH, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad h = \frac{H}{a}.$$

Otrzymane w wyniku rozwiązania równań (10.26) funkcje \hat{w} , $\hat{\psi}$ pozwalają na wyznaczenie funkcji obrotów θ_r , θ_φ . Obroty te wyrażają się wzorami (patrz Woźniak [195], s. 236):

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_r &= \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{D(1-\nu)}{2K} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \hat{w}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2f}{K(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} \left(p_z + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r m_r)}{\partial r} + \frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right) - \frac{2}{D(1-\nu)} m_r \right] \\ &\quad + \frac{D(1+\nu)\alpha}{Kh} \frac{\partial \Delta T}{\partial r}, \\ \hat{\theta}_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \varphi} + \frac{D(1-\nu)}{2K} \left[-\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} + \frac{2}{(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla^2 \hat{w}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2f}{K(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(p_z + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r m_r)}{\partial r} + \frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right) - \frac{2}{D(1-\nu)} m_\varphi \right] \\ &\quad + \frac{D(1+\nu)\alpha}{Kh} \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta T}{\partial \varphi}. \end{aligned} \tag{10.27}$$

Dążąc do rozdzielania zmiennych, rozwiniemy występujące we wzorze (10.26) funkcje oraz θ_r , θ_φ w klasyczne szeregi Fouriera. Po podstawieniu tych rozwinięć do wzorów (10.26) otrzymamy nieskończone, rozseparowane układy równań różniczkowych

$$\begin{aligned} D \nabla^2 \nabla^2 \hat{w}_n^{c,s} &= f \left(p_{z,n}^{c,s} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r m_{r,n}^{c,s})}{\partial r} \pm n m_{\varphi,n}^{s,c} \right) \right) \\ &\quad - \frac{fD}{K} \nabla^2 \left(p_{z,n}^{c,s} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r m_{r,n}^{c,s})}{\partial r} \pm n m_{\varphi,n}^{s,c} \right) \right) \\ &\quad - \frac{D(1+\nu)\alpha}{h} \nabla^2 (\Delta T_n^{c,s}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{\psi}_n^{c,s} - \frac{2K}{D(1-\nu)} \hat{\psi}_n^{c,s} &= \frac{10f}{6D(1-\nu)} \frac{1}{r} \left(\pm n m_{r,n}^{s,c} - \frac{\partial (r m_{\varphi,n}^{c,s})}{\partial r} \right), \\ \hat{\psi}_n^{c,s} &= \frac{1}{r} \left(\pm n \hat{\theta}_{r,n}^{s,c} - \frac{\partial (r \hat{\theta}_{\varphi,n}^{c,s})}{\partial r} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (10.28)$$

a funkcje obrotów wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{r,n}^{c,s}(r) &= \frac{\partial \hat{w}_n^{c,s}}{\partial r} + \frac{D(1-\nu)}{2K} \left[\pm \frac{n}{r} \hat{\psi}_n^{s,c} + \frac{2}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \hat{w}_n^{c,s}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2f}{K(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} \left(p_{z,n}^{c,s} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r m_{r,n}^{c,s})}{\partial r} \pm n m_{\varphi,n}^{s,c} \right) \right) - \frac{2}{D(1-\nu)} m_{r,n}^{c,s} \right] \\ &\quad + \frac{D(1+\nu)\alpha}{Kh} \frac{\partial \Delta T_n^{c,s}}{\partial r}, \\ \hat{\theta}_{\varphi,n}^{c,s}(r) &= \pm \frac{n}{r} \hat{w}_n^{s,c} + \frac{D(1-\nu)}{2K} \left[-\frac{\partial \hat{\psi}_n^{c,s}}{\partial r} \pm \frac{2}{(1-\nu)} \frac{n}{r} (\nabla^2 \hat{w}_n^{s,c}) \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{2f}{K(1-\nu)} \frac{n}{r} \left(p_{z,n}^{c,s} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r m_{r,n}^{c,s})}{\partial r} \pm n m_{\varphi,n}^{s,c} \right) \right) - \frac{2}{D(1-\nu)} m_{\varphi,n}^{c,s} \right] \\ &\quad \pm \frac{D(1+\nu)\alpha}{Kh} \frac{n}{r} \Delta T_n^{s,c}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Rozwiązaniami równań (10.28) są następujące funkcje

$$\begin{aligned} \hat{w}_0^{c,s}(r) &= a_0^{c,s} + b_0^{c,s} r^2 + c_0^{c,s} \ln r + d_0^{c,s} r^2 \ln r + \tilde{w}_0^{c,s}(r), \\ \hat{w}_1^{c,s}(r) &= a_1^{c,s} r + b_1^{c,s} r^3 + c_1^{c,s} r^{-1} + d_1^{c,s} r \ln r + \tilde{w}_1^{c,s}(r), \\ \hat{w}_n^{c,s}(r) &= a_n^{c,s} r^n + b_n^{c,s} r^{n+2} + c_n^{c,s} r^{-n} + d_n^{c,s} r^{-n+2} + \tilde{w}_n^{c,s}(r), \quad n \geq 2, \\ \hat{\psi}_n^{c,s}(r) &= A_n^{c,s} I_n(br) + B_n^{c,s} K_n(br) + \tilde{\psi}_n^{c,s}(r), \quad n \geq 0, \\ b^2 &= \frac{2K}{D(1-\nu)}, \end{aligned} \quad (10.30)$$

gdzie funkcje $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ są tzw. zmodyfikowanymi funkcjami Bessela, a przez $\tilde{w}_n^{c,s}$, $\tilde{\psi}_n^{c,s}$ oznaczono całki szczególne równań (10.28).

Ponieważ przy $c_n^{c,s} \neq 0$, $d_n^{c,s} \neq 0$, $B_n^{c,s} \neq 0$ przemieszczenia i kąty obrotów przekrojów poprzecznych byłyby nieskończenie duże, stałe te muszą przyjmować wartość zero. Po uwzględnieniu tego rozwiązania przyjmują postać

$$\begin{aligned}\hat{w}_n^{c,s}(r) &= a_n^{c,s} r^n + b_n^{c,s} r^{n+2} + \tilde{w}_n^{c,s}(r), \\ \hat{\psi}_n^{c,s}(r) &= A_n^{c,s} I_n(br) + \tilde{\psi}_n^{c,s}(r), \quad n \geq 0.\end{aligned}\quad (10.31)$$

Na linii podziału, tj. na okręgu o promieniu ε , muszą być spełnione warunki ciągłości płyty:

$$\begin{aligned}w_n^{c,s}(\varepsilon, t) &= \hat{w}_n^{c,s}(\varepsilon, t), & \theta_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t) &= \hat{\theta}_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t), & \theta_{\varphi,n}^{c,s}(\varepsilon, t) &= \hat{\theta}_{\varphi,n}^{c,s}(\varepsilon, t), \\ M_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t) &= \hat{M}_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t), & M_{r\varphi,n}^{c,s}(\varepsilon, t) &= \hat{M}_{r\varphi,n}^{c,s}(\varepsilon, t), & Q_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t) &= \hat{Q}_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t).\end{aligned}\quad (10.32)$$

W przypadku gdy funkcje opisujące szeroko rozumiane obciążenie zewnętrzne są odpowiednio regularne $r = \varepsilon$, warunki ciągłości (10.32) możemy zastąpić następującymi równaniami

$$\begin{aligned}\frac{\partial^p w_n^{c,s}(r, t)}{\partial r^p} \Big|_{r=\varepsilon} &= \frac{\partial^p \hat{w}_n^{c,s}(\varepsilon, t)}{\partial r^p} \Big|_{r=\varepsilon}, \\ \frac{\partial^p \theta_{r,n}^{c,s}(r, t)}{\partial r^p} \Big|_{r=\varepsilon} &= \frac{\partial^p \hat{\theta}_{r,n}^{c,s}(\varepsilon, t)}{\partial r^p} \Big|_{r=\varepsilon}, \\ \frac{\partial^p \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r, t)}{\partial r^p} \Big|_{r=\varepsilon} &= \frac{\partial^p \hat{\theta}_{\varphi,n}^{c,s}(\varepsilon, t)}{\partial r^p} \Big|_{r=\varepsilon}, \quad p = 0, 1.\end{aligned}\quad (10.33)$$

Wynika to z postaci równań definiujących występujące w (10.32) siły wewnętrzne. Korzystając z postaci funkcji

$$\hat{\psi}_n^{c,s} = \frac{1}{r} \left(\pm n \hat{\theta}_{r,n}^{s,c} - \hat{\theta}_{\varphi,n}^{c,s} - \frac{\partial \hat{\theta}_{\varphi,n}^{c,s}}{\partial r} \right),$$

ostatni warunek w (10.33), tj.

$$\frac{\partial \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{\partial \hat{\theta}_{\varphi,n}^{c,s}(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=\varepsilon}$$

zastąpimy warunkiem

$$\frac{1}{r} \left(\pm n \theta_{r,n}^{s,c} - \theta_{\varphi,n}^{c,s} - \frac{\partial \theta_{\varphi,n}^{c,s}}{\partial r} \right) = \hat{\psi}_n^{c,s}.\quad (10.34)$$

Po podstawieniu rozwiązań (10.31) do pierwszych dwóch warunków zgodności (10.33) oraz do warunku (10.34) wyznaczymy nieznane funkcje $a_n^{c,s}(t)$, $b_n^{c,s}(t)$, $A_n^{c,s}(t)$. Gdy podstawimy te funkcje do pozostałych warunków zgodności, otrzymamy następujące trzy równania

$$\begin{aligned} \theta_{r,n}^{c,s}(r) &= \left[\hat{c}^2 \hat{d}^2 \frac{n}{r^2} \left(\pm n \theta_{r,n}^{s,c}(r) - \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r) - \frac{\partial \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r)}{\partial r} - \tilde{\psi}_n^{c,s}(r) \right) \right. \\ &\quad \left. - 2\hat{c}^2 \frac{n^2(n+1)}{r^3} (w_n^{c,s}(r) - \tilde{w}_n^{c,s}(r)) \right. \\ &\quad \left. + \left(2\hat{c}^2 \frac{n(n+1)}{r^2} + 1 \right) \left(\frac{\partial w_n^{c,s}(r)}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{w}_n^{c,s}(r)}{\partial r} \right) + \tilde{\theta}_{r,n}^{c,s}(r) \right] \Bigg|_{r=\varepsilon}, \\ \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r) &= \left[\left(\hat{c}^2 \hat{d}^2 \frac{n}{r^2} + \frac{1}{2(n+1)} \right) \left(\pm n \theta_{r,n}^{s,c}(r) - \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r) - \frac{\partial \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r)}{\partial r} - \tilde{\psi}_n^{c,s}(r) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{n}{r} - 2\hat{c}^2 \frac{n^2(n+1)}{r^3} \right) (w_n^{c,s}(r) - \tilde{w}_n^{c,s}(r)) \right. \\ &\quad \left. + 2\hat{c}^2 \frac{n(n+1)}{r^2} \left(\frac{\partial w_n^{c,s}(r)}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{w}_n^{c,s}(r)}{\partial r} \right) + \tilde{\theta}_{\varphi,n}^{c,s}(r) \right] \Bigg|_{r=\varepsilon}, \\ \frac{\partial \theta_{r,n}^{c,s}(r)}{\partial r} &= \left[\left(\hat{c}^2 \hat{d}^2 \frac{n(n-1)}{r^3} + \frac{n}{2r(n+1)} \right) \right. \\ &\quad \cdot \left(\pm n \theta_{r,n}^{s,c}(r) - \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r) - \frac{\partial \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r)}{\partial r} - \tilde{\psi}_n^{c,s}(r) \right) \\ &\quad \left. - \left(\frac{n(n+2)}{r^2} + 2\hat{c}^2 \frac{n^2(n^2-1)}{r^4} \right) (w_n^{c,s}(r) - \tilde{w}_n^{c,s}(r)) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1+2n}{r} + 2\hat{c}^2 \frac{n(n^2-1)}{r^3} \right) \left(\frac{\partial w_n^{c,s}(r)}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{w}_n^{c,s}(r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial \tilde{\theta}_{r,n}^{c,s}}{\partial r} \right] \Bigg|_{r=\varepsilon}, \end{aligned} \quad (10.35)$$

gdzie występujące we wzorze stałe są określone wzorem

$$\hat{c}^2 = \frac{D}{K}, \quad \hat{d}^2 = \frac{1-\nu}{2},$$

a funkcje $\tilde{\theta}_{r,n}^{s,c}(r)$, $\tilde{\theta}_{\varphi,n}^{s,c}(r)$ wyznaczamy za wzorów (10.29), podstawiając w nich zamiast funkcji $\hat{w}_n^{c,s}(r)$, $\hat{\psi}_n^{c,s}(r)$, funkcje $\tilde{w}_n^{c,s}(r)$, $\tilde{\psi}_n^{c,s}(r)$, będące całkami szczególnymi równań (10.28).

Przy wyprowadzaniu wzorów (10.35) ze względu na małe wartości $r \leq \varepsilon$, do określania wartości zmodyfikowanej funkcji Bessela $I_n(kr)$ wykorzystaliśmy jej rozwinięcia w szereg potęgowy

$$I_n(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^{n+2m}}{2^{n+2m} m!(n+m)!}, \quad (10.36)$$

biorąc pod uwagę tylko pierwszy wyraz tego szeregu

$$I_n(r) = \frac{r^n}{2^n} n!.$$

Po podstawieniu do wzoru (10.35) rozwinięcia funkcji przemieszczeń $w_n^{c,s}(r)$ i kątów obrotów przekrojów $\theta_{r,n}^{c,s}(r)$, $\theta_{\varphi,n}^{c,s}(r)$, określonych we wzorze (10.23), ostatecznie otrzymamy następujące trzy równania

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \left[\hat{c}^2 \hat{d}^2 n \varepsilon \left(\pm n \left(\theta_{r,n}^{s,c} \right)_l - \left(T_l^*(\varepsilon) + T_l^{*'}(\varepsilon) \right) \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r) \right) - \varepsilon^3 T_l^*(\varepsilon) \left(\theta_{r,n}^{c,s} \right)_l \right. \\ & \quad \left. - 2\hat{c}^2 n^2 (n+1) T_l^*(\varepsilon) \left(w_n^{c,s} \right)_l + \left(2\hat{c}^2 \varepsilon n (n+1) + \varepsilon^3 \right) T_l^{*'}(\varepsilon) \left(w_n^{c,s} \right)_l \right] \\ & = \hat{c}^2 \hat{d}^2 n \varepsilon \tilde{\psi}_n^{c,s}(\varepsilon) - 2\hat{c}^2 n^2 (n+1) \tilde{w}_n^{c,s}(\varepsilon) \\ & \quad + \left(2\hat{c}^2 \varepsilon n (n+1) + \varepsilon^3 \right) \frac{\partial \tilde{w}_n^{c,s}(r)}{\partial r} \Bigg|_{r=\varepsilon} - \varepsilon^3 \tilde{\theta}_{r,n}^{c,s}(\varepsilon), \\ & \sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(\hat{c}^2 \hat{d}^2 n \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2(n+1)} \right) \left(\pm n \left(\theta_{r,n}^{s,c} \right)_l - \left(T_l^*(\varepsilon) + T_l^{*'}(\varepsilon) \right) \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r) \right) \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon^3 T_l^*(\varepsilon) \left(\theta_{r,n}^{c,s} \right)_l + \left(n \varepsilon^2 - 2\hat{c}^2 n^2 (n+1) \right) T_l^*(\varepsilon) \left(w_n^{c,s} \right)_l \right. \\ & \quad \left. + 2\hat{c}^2 \varepsilon n (n+1) T_l^{*'}(\varepsilon) \left(w_n^{c,s} \right)_l \right] = \left(\hat{c}^2 \hat{d}^2 n \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2(n+1)} \right) \tilde{\psi}_n^{c,s}(\varepsilon) \\ & \quad + \left(n \varepsilon^2 - 2\hat{c}^2 n^2 (n+1) \right) \tilde{w}_n^{c,s}(\varepsilon) + 2\hat{c}^2 \varepsilon n (n+1) \frac{\partial \tilde{w}_n^{c,s}(r)}{\partial r} \Bigg|_{r=\varepsilon} - \varepsilon^3 \tilde{\theta}_{\varphi,n}^{c,s}(r), \end{aligned} \quad (10.37)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(\hat{c}^2 \hat{d}^2 \varepsilon n(n-1) + \frac{n\varepsilon^3}{2(n+1)} \right) \left(\pm n (\theta_{r,n}^{c,s})_l - \left(T_l^*(\varepsilon) + T_l^{*'}(\varepsilon) \right) \theta_{\varphi,n}^{c,s}(r) \right) \right. \\
& - \varepsilon^4 T_l^{*'}(\varepsilon) (\theta_{r,n}^{c,s})_l - \left(\varepsilon^2 n(n+2) + 2\hat{c}^2 n^2 (n^2 - 1) \right) T_l^*(\varepsilon) (w_n^{c,s})_l \\
& \left. + \left(\varepsilon^3 (1+2n) + 2\hat{c}^2 \varepsilon n (n^2 - 1) \right) T_l^{*'}(\varepsilon) (w_n^{c,s})_l \right] = \left(\hat{c}^2 \hat{d}^2 \varepsilon n(n-1) + \frac{n\varepsilon^3}{2(n+1)} \right) \tilde{\psi}_n^{c,s}(\varepsilon) \\
& - \left(\varepsilon^2 n(n+2) + 2\hat{c}^2 n^2 (n^2 - 1) \right) \tilde{w}_n^{c,s}(\varepsilon) \\
& + \left(\varepsilon^3 (1+2n) + 2\hat{c}^2 \varepsilon n (n^2 - 1) \right) \frac{\partial \tilde{w}_n^{c,s}(r)}{\partial r} \Bigg|_{r=\varepsilon} - \varepsilon^4 \frac{\partial \tilde{\theta}_{r,n}^{c,s}}{\partial r} \Bigg|_{r=\varepsilon}. \quad (10.37)_{cd}.
\end{aligned}$$

W szczególnym przypadku, gdy na wewnętrzną część płyty nie działa obciążenie momentowe $m_r = m_\varphi \equiv 0$, całki szczególne $\tilde{w}_n^{c,s}(r)$ określone są wzorem (9.79), całka $\tilde{\psi}_n^{c,s}(r) \equiv 0$, a $\tilde{\theta}_{r,n}^{c,s}(r)$, $\tilde{\theta}_{\varphi,n}^{c,s}(r)$, jak już wspomniano wcześniej, wyznaczamy za wzorów (10.29), podstawiając w nich zamiast funkcji $\hat{w}_n^{c,s}(r)$, $\hat{\psi}_n^{c,s}(r)$, funkcje $\tilde{w}_n^{c,s}(r)$, $\tilde{\psi}_n^{c,s}(r)$.

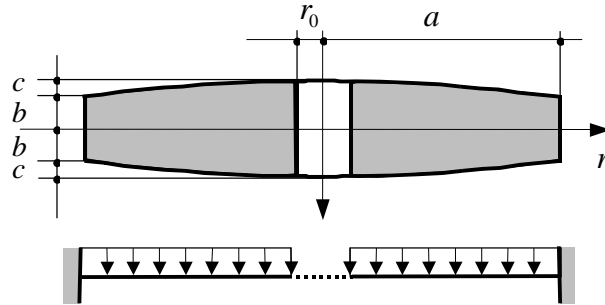
Równania (10.37) wraz z trzema równaniami określającymi warunki brzegowe na brzegu $r = 1$ i równania (10.17) ((10.18) dla $n = 0$) dla $k = 2, 3, 4, \dots$ tworzą nieskończony układ równań różniczkowych pozwalających na rozwiązanie analizowanego problemu

10.4. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

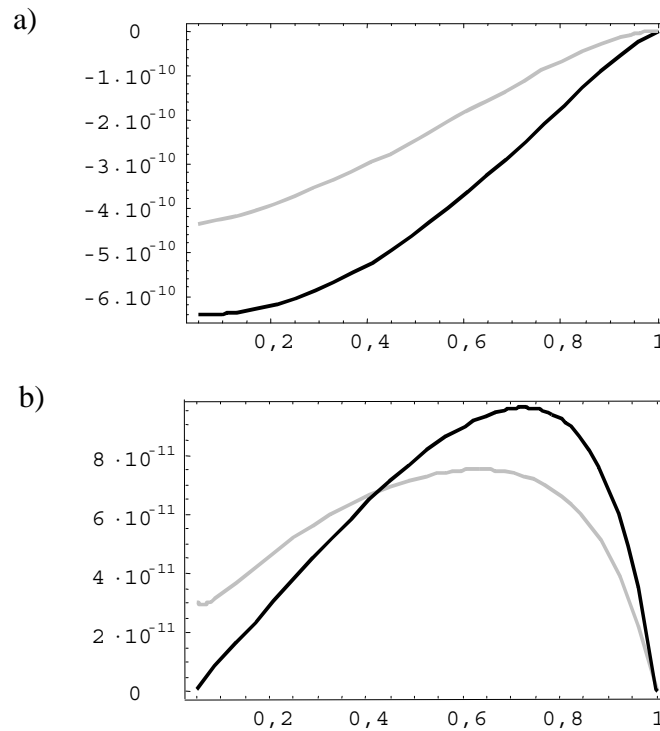
Przykład 10.1

Przedstawioną w niniejszym rozdziale metodę zastosujemy do rozwiązania zagadnienia drgań wymuszonych harmonicznym obciążeniem równomiernie rozłożonym, w przypadku płyty pierścieniowej sztywno utwierdzonej na brzegu zewnętrznym, swobodnej na brzegu wewnętrznym. Analizowano dwie płyty o geometrii przedstawionej na rysunku 10.1 i opisanej wzorem (3.68), różniące się wartościami parametrów b , c . W płycie „pierwszej” przyjęto $b = 0,1$ m, $c = 0,05$ m, w płycie „drugiej” $b = 0,2$ m, $c = 0,1$ m. Pozostałe parametry układu przyjmują wartości: $a = 1,0$ m, $r_0 = 0,05$ m, $\rho_V = 2400$ kg/m³, $E = 2,8 \cdot 10^{10}$ N/m², $\nu = 0,2$ ($G = 1,6667 \cdot 10^{10}$ N/m²). Intensywność obciążenia równomiernie rozłożonego wynosi 1 N/m², a częstość

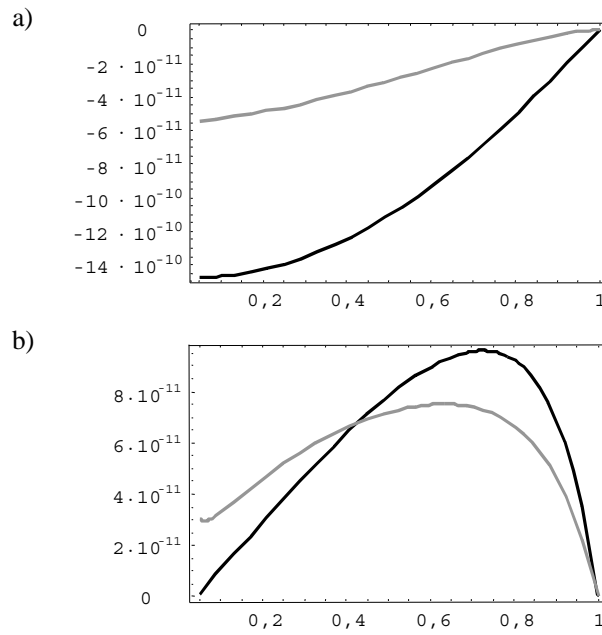
wymuszenia harmonicznego $\omega = 50$ rad/s. Otrzymane wykresy funkcji przemieszczeń oraz funkcji obrotu przekroju poprzecznego przedstawiono dla belki „pierwszej” na rysunku 10.2, dla belki „drugiej” na rysunku 10.3. Na rysunkach tych w celu porównania umieszczono również rozwiązania płyty „cienkiej”.



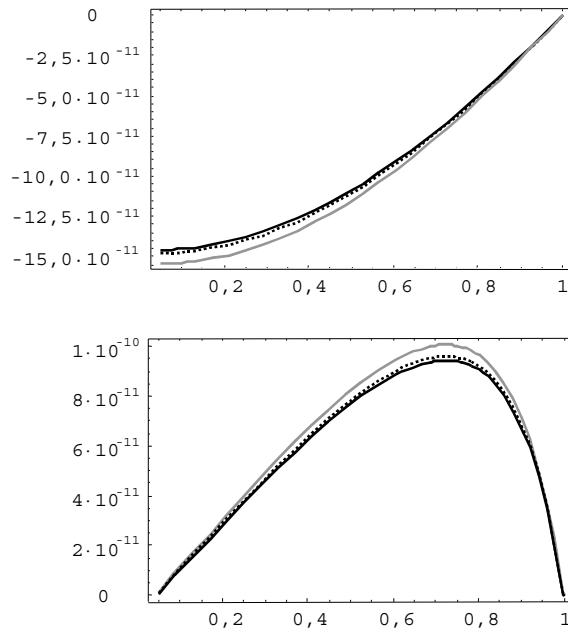
Rys. 10.1 Przekrój analizowanej płyty



Rys. 10.2. Wykresy: a) funkcji przemieszczeń, b) kąta obrotu przekroju poprzecznego; płyty średniej grubości (—) i płyty cienkiej (—) – $b = 0,1$ m, $c = 0,05$ m



Rys. 10.3. Wykresy: a) funkcji przemieszczeń, b) kąta obrotu przekroju poprzecznego; płyty średniej grubości (—) i płyty cienkiej (—) – $b = 0,2$ m, $c = 0,1$ m



Rys. 10.4. Wykresy: a) funkcji przemieszczeń, b) kąta obrotu przekroju poprzecznego; płyty średniej grubości dla różnych częstości wymuszenia $\omega = 50$ rad/s (—), $\omega = 100$ rad/s (····), $\omega = 200$ rad/s (—)

W przypadku płyty „drugiej” rozważano również wpływ częstości wymuszenia, przyjmując za częstość wymuszenia harmonicznego $\omega = 50$ rad/s, 100 rad/s, 200 rad/s. Otrzymane wyniki w postaci wykresów przedstawiono na rysunku 10.4

Analizując otrzymane wyniki, widzimy różnice w rozwiązaniach płyty o średniej grubości i płyty cienkiej. Różnice te są znane i zależą od stosunku wysokości płyty do jej promienia. Im ten stosunek jest większy, tym różnice są większe (zagadnienie statyczne, patrz np. Kączkowski [83], s. 199). Nieznaczny wpływ częstości wymuszenia na funkcje przemieszczeń i kątów obrotu przekrojów poprzecznych wynika z tego, że częstości te nie leżą w obszarach rezonansowych.

Na podstawie przeprowadzonych, lecz nie prezentowanych w niniejszym rozdziale „doświadczeń numerycznych” zauważono, że zbieżność i dokładność rozwiązań płyt pierścieniowych maleje wraz ze wzrostem promienia wewnętrznego r_0 . Z analizy wynika, że środkiem zaradczym może być zastosowanie zamiast przesuniętych wielomianów Czebyszewa $T_l^*(x) = T_l(2x - 1)$ wielomianów Czebyszewa określonych w przedziale $[a, b]$, tzn. wielomianów $T_l\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}\right)$, gdzie a jest wewnętrznym promieniem płyty, a b jest jej promieniem zewnętrznym. Zmiana ta jednak pociąga za sobą konieczność zmiany współczynników występujących we wzorach (2.14), (2.22) twierdzenia 1 oraz zmiany postaci wzorów (2.37) i (2.38).

11. PODSUMOWANIE

W monografii, na podstawie twierdzenia opisującego metodę rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych z zastosowaniem wielomianów Czebyszewa oraz korzystając z właściwości tych wielomianów, opracowano algorytmy umożliwiające dynamiczną analizę dźwigarów o zmiennych charakterystykach geometrycznych i fizycznych. Otrzymane algorytmy umożliwiają rozwiązanie dynamicznych układów ciągłych, w których zmienne parametry są opisane dowolnymi funkcjami. Jednym z nielicznych ograniczeń dotyczących tych funkcji jest wymóg, aby pewne (określone w założeniach stosowanego twierdzenia) liniowe kombinacje tych funkcji i ich pochodnych dawały się rozwinąć w zbieżne szeregi Czebyszewa. Uzyskane algorytmy prowadzą do nieskończonego układu równań różniczkowych zwyczajnych, a w przypadku zagadnień stacjonarnych do nieskończonego układu równań algebraicznych. W pracy analizowano układy prętowe oraz płyty kołowe i pierścieniowe. W przypadku układów prętowych do opisu wykorzystano dwa modele prętów: model Eulera oraz model Timoshenki, natomiast problemy dotyczące płyt rozwiązywano, stosując do opisu teorię płyt cienkich oraz teorię Hencky'ego–Bolle'a, opisującą płyty średniej grubości. W równaniach ruchu danego typu dźwigara starano się uwzględnić wszystkie najważniejsze czynniki wpływające na zachowanie się dźwigara. Dlatego otrzymane w pracy rozwiązania mają charakter ogólny i umożliwiają rozwiązanie wielu zagadnień szczegółowych. W przypadku układów prętowych, rozwiązano następujące zagadnienia szczegółowe belek: zagadnienie własne, drgania wymuszone harmonicznie oraz drgania wymuszone aperiodycznie, przyjmując różne sposoby podparcia belek. W zagadnieniu drgań wymuszonych aperiodycznie analizowano dwa typy obciążeń aperiodycznych: obciążenie w postaci impulsu prostokątnego oraz poruszające się po belce ze stałą prędkością obciążenie ruchome. Na podstawie omawianych przykładów można bez większych problemów uogólnić otrzymane rozwiązania w przypadku obciążeń o bardziej złożonym rozkładzie. W celu sprawdzenia dokładności prezentowanej metody porównano rozwiązania zagadnienia własnego z dokładnymi rozwiązaniami analitycznymi oraz wynikami uzyskanymi innymi metodami, takimi jak: MES oraz metody aproksymacyjne, w których rozwiązania poszukuje się w postaci trygonometrycznego szeregu Fouriera oraz klasycznego szeregu potęgowego. Przedmiotem rozważań była pryzmatyczna belka Eulera, w której przyjęto różne sposoby podparcia.

Uzyskane wyniki pokazały, że proponowana metoda, w porównaniu z innymi rozważanymi metodami, dała wyniki obarczone najmniejszymi błędami względnymi. Błędy te były co najmniej o kilka rzędów mniejsze od błędów, które dawały inne metody. Mając świadomość, że wyniki uzyskane w kilku przykładach nie pozwalają na wyciągnięcie wniosków ogólnych typu: „prezentowana metoda w porównaniu z innymi metodami jest metodą najdokładniejszą”, możemy na podstawie otrzymanych wyników na pewno stwierdzić, że metoda ta bardzo dobrze przybliżyła rozwiązania dokładne, dając bardzo małe błędy względne. Analogiczne porównanie wykonano dla belek Timoshenki. Uzyskane w tym przypadku wyniki pozwalają na wyciągnięcie wniosków podobnych jak w przypadku porównań wykonanych dla belek Eulera. Kolejnym ważnym ze względu na praktykę inżynierską rozwiązywanym zagadnieniem był problem utraty stateczności. Wyprowadzone rozwiązanie ogólne umożliwia uwzględnienie różnych typów obciążeń: obciążeń potencjalnych i niepotencjalnych. Rozwiązane w tym przypadku przykłady potwierdziły zgodność otrzymanych wyników z rozwiązaniami uzyskanymi przez innych autorów.

W większości rozwiązywanych w pracy zagadnieniach przedmiotem analizy były belki niepryzmatyczne o osi prostoliniowej. Rozwiązano również zagadnienie drgań belek o zmiennym przekroju i osi krzywoliniowej. W tym przypadku równania opisujące problem są równaniami sprzężonymi. Na podstawie wyprowadzonego rozwiązania ogólnego zagadnienia własnego pokazano, że wyniki otrzymane dla belki o osi krzywoliniowej różnią się od wyników otrzymanych dla jej „wyprostowanego” odpowiednika. Różnice występowały w podłużnych formach własnych. Rozwiązując w pracy problem drgań belki o osi krzywoliniowej, z uwzględnieniem wpływu sił osiowych na poprzeczne przemieszczenia belki, pokazano możliwość wykorzystania prezentowanej metody do zagadnień nieliniowych. Przedstawiona procedura iteracyjna cechowała się szybką zbieżnością do rozwiązania dokładnego. Pokazany przykład wskazuje, że omawianą metodę można zastosować z powodzeniem do innych zagadnień nieliniowych. Ze względu na szczególne znaczenie oddziaływania podłoża na rzeczywiste konstrukcje inżynierskie, we wszystkich rozwiązaniach ogólnych uwzględniono problem interakcji układu z podłożem sprężystym. Rozważano uproszczone modele podłoża sprężystego, takie jak: model Winklera, modele dwuparametrowe Pasternaka, Własowa, oraz modele bardziej złożone, szczególnie przydatne w analizie problemów falowych – modele typu inercyjnej półprzestrzeni sprężystej. Problem interakcji belki niepryzmatycznej obciążonej harmonicznie zmiennym obciążeniem z inercyjną półpłaszczyzną sprężystą pokazuje możliwość zastosowania omawianej metody do rozwiązywania problemów dynamicznych z uwzględnieniem skomplikowanych pod względem matematycznym modeli.

Kolejnym ważnym z praktyki inżynierskiej rozwiązywanym problemem było zastosowanie prezentowanej metody do opisu niepryzmatycznych elementów skończonych. Stosując metodę elementów skończonych, mamy dwa sposoby na zwiększenie dokładności rozwiązań. Sposób pierwszy, polega na zagęszczaniu siatki podziału na elementy, co prowadzi w przypadku złożonych układów do dużych rozmiarów baz

aproxymujących. Sposób drugi, polega na dokładniejszym opisie funkcji rozkładu przemieszczeń wewnątrz elementu tzw. funkcji kształtu. W przypadku aproksymacji wielomianowej zwiększa się wtedy stopień wielomianów przyjętych do opisu funkcji kształtu. Trzeba tutaj wspomnieć, że nie zawsze zagęszczanie siatki podziału prowadzi do zwiększenia dokładności wyników. Typowym przykładem jest tak zwany efekt blokady ścinania (*shear locking*) pojawiający się przypadku zastosowania w elemencie Timoshenki do aproksymacji przemieszczeń poprzecznych i kątów obrotu przekrojów poprzecznych funkcji liniowych. W tej sytuacji mimo zagęszczania siatki podziału nie uzyskujemy zbieżności do rozwiązania dokładnego. W pracy przyjęto drugi sposób postępowania polegający na dostatecznie dokładnym wyznaczeniu funkcji kształtu analizowanego elementu skończonego. Prezentowany przykład pokazał, że przyjęcie podziału, w którym jeden pręt to jeden element skończony, prowadzi do dostatecznie dokładnych wyników. Takie postępowanie pozwala na znaczne zmniejszenie bazy aproksymującej w razie zastosowania MES z opisanymi w pracy nieprzymalnymi elementami skończonymi.

W przypadku dźwigarów płytowych, podobnie jak w przypadku układów prętowych, w wyjściowych równaniach ruchu starano się uwzględnić wszystkie najważniejsze czynniki mające wpływ na rozwiązania analizowanego problemu. W przyjętym opisie uwzględniono obciążenie zewnętrzne o dowolnym rozkładzie, wpływ dowolnie rozłożonych obciążeń tarczowych na poprzeczne przemieszczenia płyty, wpływ temperatury. Przyjęto co prawda założenie o osiowo-symetrycznym rozkładzie parametrów geometrycznych i fizycznych samej płyty, ale przyjęcie tego założenia miało na celu uproszczenie i tak już skomplikowanych przekształceń oraz złożonych wzorów końcowych, i nie wynikało z ograniczeń stosowanej metody. Jak już wspomniano, analizowano dwa modele płyt: płyty cienkie oraz płyty o średniej grubości. Za pomocą modelu płyty cienkiej, podobnie jak w przypadku belek, rozwiązano zadanie testowe polegające na porównaniu otrzymanego rozwiązania zagadnienia własnego ze znanymi rozwiązaniami analitycznymi oraz z wynikami uzyskanymi z zastosowaniem do rozwiązania innych metod. Porównywanymi metodami były: MES, metody aproksymacyjne wykorzystujące do aproksymacji rozwiązania klasyczne szeregi Fouriera oraz szeregi potęgowe. Podobnie jak w przypadku belek, stosowana metoda dawała zazwyczaj najmniejsze błędy względne w porównaniu z innymi metodami. W tym jednak przypadku różnice nie były tak spektakularne, jak w przypadku belek. Jednym z powodów było pojawianie się w analizowanym przykładzie dodatkowych błędów wynikających z przybliżonego ujęcia warunków brzegowych w środku płyty. Konieczność zastosowania tego przybliżenia spowodowana było brakiem możliwości bezpośredniego wykorzystania warunków ograniczoności rozwiązań w środku płyty. Rozwiązane, dla płyty średniej grubości, zagadnienie drgań wymuszonych harmonicznymi, potwierdziło istotne różnice między rozwiązaniami uzyskanymi dla modelu płyty cienkiej a wynikami dla płyty średniej grubości. Różnice są oczywiście tym większe, im większy jest stosunek wysokości płyty do jej średnicy.

W pracy pominięto przykłady rozwiązań układów o skokowo zmiennych parametrach. Można je bowiem rozwiązywać tymi samymi metodami, które zaprezentowano w rozprawie. W tym przypadku należy jednak oczekiwać, że uzyskanie porównywalnie z układami o „ciągłych” parametrach małych błędów będzie wiązało się z koniecznością zwiększenia rozmiarów baz aproksymacyjnych (szeregi funkcji z nieciągłością typu skok są wolniej zbieżne). Prostszy sposób na uzyskanie bardzo dokładnych rozwiązań, bez konieczności zwiększenia rozmiarów baz aproksymacyjnych, jest podział układu w punkcie skokowej zmiany parametrów na dwa oddzielnie rozwiązywane podukłady i zastosowanie dodatkowych równań uwzględniających warunki ciągłości rozwiązań w miejscu podziału.

Oprócz wymienionych zalet wyprowadzonych algorytmów, tj. ich ogólności oraz bardzo dużej dokładności uzyskanych rozwiązań, dodatkową ich zaletą jest półanalityczna postać rozwiązania szczególnie przydatna w razie konieczności wykonywania dalszych przekształceń otrzymanych rozwiązań. Występuje to m.in. w sytuacji rozwiązywania złożonych zagadnień z wykorzystaniem kilku metod. Przykładem może być rozwiązanie zagadnienia belki spoczywającej na półpłaszczyźnie sprężystej.

Jedną z wad przedstawionej metody jest konieczność wykonania złożonych przekształceń w przypadku wyprowadzania rozwiązań ogólnych. Raz jednak wyprowadzone równania umożliwiają rozwiązanie każdego zadania, w którym uwzględniono czynniki takie same jak w algorytmie ogólnym. Wystarczy do układu równań podstawić współczynniki rozwinięć parametrów aktualnie analizowanego układu i układ ten rozwiązać. Inną wadą może być duży rozmiar układów równań otrzymanych dla złożonych układów prętowych. W tym przypadku wygodniejsze wydaje się jest zastosowanie MES z elementami niepryzmatycznymi, opisanymi w niniejszej pracy.

Podsumowując, możemy stwierdzić, że wyprowadzone algorytmy pozwalają na rozwiązanie wielu problemów dynamicznych, z którymi spotykamy się w praktyce inżynierskiej. Bezpośrednio nadają się one zwłaszcza do rozwiązywania układów, w których liczba elementów nie jest zbyt duża. Dla układów składających się z dużej liczby elementów algorytmy te możemy pośrednio stosować do rozwiązania metodą elementów skończonych, z użyciem elementów niepryzmatycznych, opisanych w rozprawie. Ze względu na dużą dokładność uzyskiwanych rozwiązań algorytmy te mogą służyć również do testowania prawidłowości i dokładności rozwiązań uzyskanych innymi metodami.

LITERATURA

- [1] ABBAS B.A.H., THOMAS J., *The second frequency spectrum of Timoshenko beams*, Journal of Sound and Vibration (1977), 51(1), s. 123–137.
- [2] ABBAS B.A.H., *Vibrations of Timoshenko beams with elastically restrained ends*, Journal of Sound and Vibration (1984), 97(4), s. 541–548.
- [3] ASHOUR A.S., *A semi-analytical solution of the flexural vibration of orthotropic plates of variable thickness*, Journal of Sound and Vibration (2001), 240(3), s. 431–445.
- [4] AUCIELLO N.M., ERCOLANO A., *A general solution for dynamic response of axially loaded non-uniform Timoshenko beams*, International Journal of Solids and Structures (2004), 41, s. 4861–4874.
- [5] AUCIELLO N. M., *Free vibration of a restrained shear-deformable tapered beam with a tip mass at its free end*, Journal of Sound and Vibration (2000), 237(3), s. 542–549.
- [6] AUCIELLO N. M., *On the transverse vibrations of non-uniform beams with axial loads and elastically restrained ends*, International Journal of Mechanical Sciences (2001), 43, s. 193–208.
- [7] AVALOS D., LAURA P.A.A., BIANCHI A.M., *Analytical and experimental investigation on vibrating circular plates with stepped thickness over a concentric circular region*, The Journal of the Acoustical Society of America (1987), 82(1), s. 13–16.
- [8] AVRAMIDIS I.E., MORFIDIS K., *Bending of beams on three-parameter elastic foundation*, International Journal of Solids and Structures (2006), 43, s. 357–375.
- [9] BAMBILL D.V., ROSSI R.E., LAURA P.A.A., ROSSIT C.A., *Vibrations of orthotropic, rectangular plates of non-uniform thickness and two adjacent free edges*, Journal of Sound and Vibration (1998), 215(1), s. 189–194.
- [10] BANERJEE J.R., WILLIAMS F.W., *Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for Timoshenko beam elements*, Computers and Structures (1992), 42(3), s. 301–310.
- [11] BANERJEE M.M., *On the vibration of skew plates of variable thickness*, Journal of Sound and Vibration (1979), 63(3), s. 377–383.
- [12] BARAKAT R., BAUMANN E., *Axisymmetric vibrations of a thin circular plate having parabolic thickness variation*, The Journal of the Acoustical Society of America (1968), 44(2), s. 641–643.
- [13] BATHE K.J., WILSON E.L., *Numerical methods in finite element analysis*,. New Jersey Prentice-Hall Inc. 1976.
- [14] BAYER I., GUVEN U., ALTAY G., *A parametric study on vibrating clamped elliptical plates with variable thickness*, Journal of Sound and Vibration (2002), 254(1), s. 179–188.
- [15] BECK M., *Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (1952), 3, s. 225–228.
- [16] BERT C.W., MALIK M., *Differential quadrature method in computational mechanics: a review*, Applied Mechanics Review (1996), 49(1), s. 1–28.
- [17] BHASHYAM G.R., PRATHAP G., *The second frequency spectrum of Timoshenko beams*, Journal of Sound and Vibration (1981), 76(3), s. 407–420.
- [18] BRUCH J.C., Jr., MITCHELL T.P., *Vibrations of a mass-loaded clamped-free Timoshenko beam*, Journal of Sound and Vibration (1987), 114(2), s. 341–345.
- [19] BURR K.P., TRIANTAFYLLOU M.S., YUE D. K.P., *Asymptotic governing equation for wave propagation along weakly non-uniform Euler-Bernoulli beams* Journal of Sound and Vibration (2001), 247(4), s. 577–613.
- [20] CHEHIL D.S., JATEGAONKAR R., *Determination of natural frequencies of a beam with varying section properties*, Journal of Sound and Vibration (1987), 115(3), s. 423–436.

- [21] CHEN D. W., WU J.S., *The exact solutions for the natural frequencies and mode shapes of non-uniform beams with multiple spring-mass systems*, Journal of Sound and Vibration (2002), 255(2), s. 299–322.
- [22] CHEN W.Q., LU C.F., BIAN Z.G., *A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation*, Applied Mathematical Modeling (2004), 28, s. 877–890.
- [23] CHEN W., STRIZ A.G., BERT C.W., *A new approach to the differential quadrature method for fourth-order equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering (1997), 40, s. 1941–1956.
- [24] CHEUNG Y.K., AU F.T.K., ZHENG D.Y., CHENG Y.S., *Vibration of multi-span non-uniform bridges under moving vehicles and trains by using modified beam vibration functions*, Journal of Sound and Vibration (1999), 228(3), s. 611–628.
- [25] CHEUNG Y.K., ZHOU D., *The free vibrations of tapered rectangular plates using a new set of beam functions with the Rayleigh-Ritz method*, Journal of Sound and Vibration (1999), 223(5), s. 703–722.
- [26] CHEUNG Y.K., ZHOU D., *Vibration of tapered Mindlin plates in terms of static Timoshenko beam functions*, Journal of Sound and Vibration (2003), 260, s. 693–709.
- [27] COSKUN I., *The response of a finite beam on a tensionless Pasternak foundation subjected to a harmonic load*, European Journal of Mechanics A/Solids (2003), 22, s. 151–161.
- [28] DE ROSA M.A., MAURIZI M.J., *Damping in exact analysis of tapered beams*, Journal of Sound and Vibration (2005), 286, s. 1041–1047.
- [29] DEMIDOWICZ B.P., *Matematyczna teoria stabilności*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1972.
- [30] DUAN W.H., QUEK S.T., WANG Q., *Generalized hypergeometric function solutions for transverse vibration of a class of non-uniform annular plates*, Journal of Sound and Vibration (2005), 287, s. 785–807.
- [31] DUGUSH Y.A., EISENBERGER M., *Vibrations of non-uniform continuous beams under moving loads*, Journal of Sound and Vibration (2002), 254(5), s. 911–926.
- [32] EFRAIM E., EISENBERGER M., *Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates*, Journal of Sound and Vibration (2007), 299, s. 720–738.
- [33] EISENBERGER M., *Exact static and dynamic stiffness matrices for general variable cross section members*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal (1990), 28, s. 1105–1109.
- [34] EISENBERGER M., *Explicit stiffness matrices for non-prismatic members*, Computers and Structures (1985), 4, s. 715–720.
- [35] EISENBERGER M., REICH Y., *Static, vibration and stability analysis of non-uniform beams*, Computers and Structures (1989), 31, s. 567–573.
- [36] ELBARBARY ELSAYED M.E., EL-KADY M., *A Chebyshev expansion method for solving nonlinear optimal control problems*, Applied Mathematics and Computation (2002), 129, s. 171–182.
- [37] EL-GENDI S.E., *Chebyshev solution of differential, integral and integro-differential equations*, The Computer Journal (1969), 12(1), s. 282–287.
- [38] ELISHAKOFF I., *Axisymmetric vibration of inhomogeneous clamped circular plates: an unusual closed-form solution*, Journal of Sound and Vibration (2000), 233(4), s. 727–738.
- [39] ELISHAKOFF I., *Axisymmetric vibration of inhomogeneous free circular plates: an unusual exact, closed-form solution*, Journal of Sound and Vibration (2000), 234(1), s. 167–170.
- [40] ELISHAKOFF I., BECQUET R., *Closed-form solutions for natural frequency for inhomogeneous beams with one sliding support and the their pinned*, Journal of Sound and Vibration (2000), 238(3), s. 529–539.
- [41] ELISHAKOFF I., BECQUET R., *Closed-form solutions for natural frequency for inhomogeneous beams with one sliding support and the other clamped*, Journal of Sound and Vibration (2000), 238(3), s. 540–546.
- [42] ELISHAKOFF I., CANDAN S., *Apparently first closed-form solution for vibrating inhomogeneous beam*, International Journal of Solids and Structures (2001), 38, s. 3411–3441.
- [43] ELISHAKOFF I., JOHNSON V., *Apparently the first closed-form solution of vibrating inhomogeneous beam with a tip mass*, Journal of Sound and Vibration (2005), 286, s. 1057–1066.

- [44] ELISHAKOFF I., MEYER D., *Inverse vibration problem for inhomogeneous circular plate with translational spring*, Journal of Sound and Vibration (2005), 285, s. 1192–1202.
- [45] ELISHAKOFF I., PELLEGRINI F., *Exact solutions for buckling of some divergence-type nonconservative systems in terms of Bessel and Lommel functions*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1988), 66, s. 107–119.
- [46] ELISHAKOFF I., *Some unexpected results in vibration of non-homogeneous beam on elastic foundation*, Chaos, Solitons and Fractals (2001), 12, s. 2177–2218.
- [47] ELISHAKOFF I., STORCH J.A., *An unusual exact, closed-form solution for axisymmetric vibration of inhomogeneous simply supported circular plates*, Journal of Sound and Vibration (2005), 284, s. 1217–1228.
- [48] ESMAILZADEH E., OHADI A.R., *Vibration and stability analysis of non-uniform Timoshenko beams under axial and distributed tangential loads*, Journal of Sound and Vibration (2000), 236(3), s. 443–456.
- [49] EWING W.M., JARDETZKY W.S., PRESS F., *Elastic waves in layered media*, New York, Toronto, London McGraw-Hill Book Company 1957.
- [50] FICCADENTI DE IGLESIAS G.M., LAURA P.A.A., *Numerical experiments on vibrating circular plates of non-uniform thickness and variable rotational constraint along the edge*, Journal of Sound and Vibration (1986), 111(1), s. 173–175.
- [51] FILIPKOWSKI J., HRYNIEWICZ Z., SIENKIEWICZ Z., *Problemy drgań fundamentów blokowanych na podłożu gruntowym i zagadnienia falowe*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Koszalinie, Monografie 22, Koszalin 1987.
- [52] FRYBA L., *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Academia, Prague 1972.
- [53] GALLEGO JUAREZ J.A., *Axisymmetric vibrations of circular plates with stepped thickness*, Journal of Sound and Vibration (1973), 23(3), s. 411–416.
- [54] GAWĘCKI A., *Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych*, T. I i II, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej 1998.
- [55] GHANI RAZAQPUR, SHAH K.R., *Exact analysis of beams on two-parameters elastic foundations*, International Journal of Solids and Structures (1991), 27, s. 435–454.
- [56] GLABISZ W., *MATHEMATICA® w zagadnieniach mechaniki konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003.
- [57] GLABISZ W., *Sily niekonserwatywne w mechanice ustrojów prętowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1998.
- [58] GLABISZ W., *Stability of non-prismatic rods subjected to non-conservative loads*, Computers and Structures (1993), 46, s. 479–586.
- [59] GONGA RAO H.V.S., SPYRAKOS C.C., *Closed form series solutions of boundary value problems with variable properties*, Computers and Structures (1986), 23, s. 211–215.
- [60] GORMAN D.G., *Natural frequencies of transverse vibration of polar orthotropic variable thickness annular plates*, Journal of Sound and Vibration (1983), 86(1), s. 47–60.
- [61] ГРАДШТЕЙН И.С., РЫЖИК И.М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Издательство Наука, Москва 1971.
- [62] GRAFF K.F., *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publications, Inc., New York 1991.
- [63] GUO S.J., KEANE A.J., MOSHREFI-TORBATI M., *Vibration analysis of stepped thickness plates*, Journal of Sound and Vibration (1997), 204(4), s. 645–657.
- [64] GUPTA K., *Vibration of tapered beams*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, (1985), 111, s.19–36.
- [65] GUPTA U.S., ANSARI A.H., *Free vibration of polar orthotropic circular plates of variable thickness with elastically restrained edge*, Journal of Sound and Vibration (1998), 213(3), s. 429–445.
- [66] GUPTA U.S., LAL R., *Buckling and vibrations of circular plates of variable thickness*, Journal of Sound and Vibration (1978), 58(4), s. 501–507.
- [67] GUPTA U.S., LAL R., JAIN K., *Buckling and vibrations of polar orthotropic circular plates of linearly varying thickness resting on an elastic foundation*, Journal of Sound and Vibration (1991), 147(3), s. 423–434.

- [68] GUPTA U.S., LAL R., JAIN K., *Effect of elastic foundation on axisymmetric vibrations of polar orthotropic circular plates of variable thickness*, Journal of Sound and Vibration (1990), 139(3), s. 503–513.
- [69] GUTIERREZ R.H., LAURA P.A.A., GROSSI R.O., *Vibrations of rectangular plates of bilinearly varying thickness and with general boundary conditions*, Journal of Sound and Vibration (1981), 75(3), s. 323–328.
- [70] GUTIERREZ R.H., LAURA P.A.A., ROSSI R.E., *Fundamental frequency of vibration of a Timoshenko beam of non-uniform thickness*, Journal of Sound and Vibration (1991), 145(2), s. 341–344.
- [71] GUTOWSKI R., *Równania różniczkowe zwyczajne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1971.
- [72] HEIDEBRECHT A.C., *Vibration of non-uniform simply-supported beam*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, (1967), 93, s. 1–15.
- [73] HUANG M., MA X.Q., SAKIYAMA T., MATUDA H., MORITA C., *Free vibration analysis of orthotropic rectangular plates with variable thickness and general boundary conditions*, Journal of Sound and Vibration (2005), 288, s. 931–955.
- [74] HUANG T.C., *The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions*, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics (1961), 28, s. 579–584.
- [75] IGUCHI M., LUCO J.E., *Dynamic response of flexible rectangular foundations on an elastic half-space*, Earthquake Engineering and Structural Dynamic, (1981), 9, s. 239–249.
- [76] IRIE T., YAMADA G., KITAYAMA M., *Vibration and stability of a circular plate of unidirectionally varying thickness*, Journal of Sound and Vibration (1983), 90(1), s. 81–90.
- [77] IRIE T., YAMADA G., TAKAHASHI I., *Vibration and stability of non-uniform Timoshenko beam subjected to a follower force*, Journal of Sound and Vibration (1980), 70(4), s. 503–512.
- [78] JADDU H., *Direct solution of nonlinear optimal control problems using quasilinearization and Chebyshev polynomial*, Journal of the Franklin Institute (2002), 339, s. 479–498.
- [79] JEMIELITA G., *Governing equations and boundary conditions of a generalized model of elastic foundation*, Journal of theoretical and Applied Mechanics (1994), 32(4), s. 877–901.
- [80] JEMIELITA G., SZCZEŚNIAK W., *Sposoby modelowania podłoża*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo (1993), z. 120, s. 5–49.
- [81] JU F., LEE H. P., LEE K.H., *Free vibration of plates with stepped variations in thickness on non-homogeneous elastic foundations*, Journal of Sound and Vibration (1995), 183(3), s. 533–545.
- [82] KACNER A., *Pręty i płyty o zmiennej sztywności*, Biblioteka Mechaniki Stosowanej, IPPT PAN, PWN, Warszawa 1969.
- [83] KĄCZKOWSKI Z., *Płyty obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1980.
- [84] KĄCZKOWSKI Z., *Static of non-homogeneous rectangular plates and discs*, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sciences techniques (1959), VII, 2–3, s. 93–97.
- [85] KANG JAE-HOON, LEISSA A. W., *Three-dimensional vibration analysis of thick, tapered rods and beams with circular cross-section*, International Journal of Mechanical Sciences (2004), 46, s. 929–944.
- [86] KARAGEORGHIS A., *A note on the Chebyshev coefficients of the moments of the general order derivative of an infinitely differentiable function*, Journal of Computational and Applied Mathematics (1988), 21, s. 383–386.
- [87] KARAMI G., MALEKZADEH P., *An efficient differential quadrature methodology for free vibration analysis of arbitrary straight-sided quadrilateral thin plates*, Journal of Sound and Vibration (2003), 263, s. 415–442.
- [88] KARAMI G., MALEKZADEH P., *A new differential quadrature methodology for beam analysis and the associated differential quadrature element method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (2002), 191, s. 3509–3526.

- [89] KARAMI G., MALEKZADEH P., SHAHPARI S.A., *A DQEM for vibration of shear deformable non-uniform beams with general boundary conditions*, Engineering Structures (2003), 25, s. 1169–1178.
- [90] KARAMI G., MALEKZADEH P., *Static and stability analyses of arbitrary straight-sided quadrilateral thin plates by DQM*, International Journal of Solids and Structures (2002), 39, s. 4927–4947.
- [91] KHALIFA AHMED K., ELBARBARY ELSAYED M.E., ABD ELRAZEK MOHAMED A., *Chebyshev expansion method for solving second and fourth-order elliptic equations*, Applied Mathematics and Computation (2003), 135, s. 307–318.
- [92] KLASZTORNY M., *Finite beam elements of Euler and Timoshenko type*, Computer Methods in Civil Engineering (1992), 2, s. 7–32.
- [93] KLASZTORNY M., LANGER J., MIRONOWICZ W., *Analiza dynamiczna fundamentów blokowanych pod maszyny nieudarowe*, Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej 23, Monografie 6, Wyd. PWr., Wrocław 1978.
- [94] KLEIBER M., red., *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, Mechanika Techniczna, T. XI, PWN, Warszawa 1995. Praca pod redakcją M. Kleibera., Autorzy: A. Borkowski, T. Burczyński, L. Demkowicz, K. Dems, J. Grabacki, W. Gutkowski, Z. Kączkowski, M. Kleiber, J. Kruszewski, Z. Mróz, J. Orkisz, Z. Waszczyszyn.
- [95] KOUNADIS A.N., KATSIKADELIS J.T., *Shear and rotatory inertia effect on Beck's column*, Journal of Sound and Vibration (1976), 49(2), s. 171–178.
- [96] KOUNADIS A.N., *On the derivation of equations of motion for a vibrating Timoshenko column*, Journal of Sound and Vibration (1980), 73(2), s. 177–184.
- [97] КОВАЛЕНКО А.Д., *Избранные труды*, Издательство «Наукова Думка», Киев 1976.
- [98] КОВАЛЕНКО А.Д., *Круглые пластины переменной толщины*, Государственное Издательство Физико-Математической Литературы, Москва 1959.
- [99] КОВАЛЕНКО А.Д., *Пластины и оболочки в роторах турбомашин*, Издательство Академии Наук Украинской ССР, Киев 1955.
- [100] KRUSZEWSKI J., SAWIAK S., WITTBRODT E., *Metoda sztywnych elementów skończonych w dynamicie konstrukcji*, WNT, Warszawa 1999.
- [101] KRUSZEWSKI J., WITTBRODT E., *Drgania układów mechanicznych w ujęciu komputerowym*, T. I, WNT, Warszawa 1992.
- [102] KRUSZEWSKI J., WITTBRODT E., WALCZYK Z., *Drgania układów mechanicznych w ujęciu komputerowym*, T. II, WNT, Warszawa 1992.
- [103] KRYNICKI E., *Drgania ram złożonych z prętów o liniowo zmiennej wysokości przekroju poprzecznego*, Archiwum Inżynierii Lądowej (1966), T. 12, Z. 1.
- [104] KRYNICKI E., MAZURKIEWICZ Z., *Ramy z prętów o zmiennych sztywnościach*. PWN, Warszawa 1966.
- [105] KUTTLER J.R., SIGILLITO V.G., *Vibrational frequencies of clamped plates of variable thickness*, Journal of Sound and Vibration (1983), 86(2), s. 181–189.
- [106] LAL ROSHAN, SHARMA SHUCHITA, *Axisymmetric vibrations of non-homogeneous polar orthotropic annular plates of variable thickness*, Journal of Sound and Vibration (2004), 272, s. 245–265.
- [107] LANGER J., BRYJA D., *Timoshenko beam element in FEM analysis of bar system*, Proceedings of 11th Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, Kielce -Cedzyna (1993), s. 493–500.
- [108] LANGER J., *Dynamika budowli*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.
- [109] LANGER J., *Zastosowanie wielomianów Legendre'a do obliczania ortotropowej płyty mostowej*, Archiwum Inżynierii Lądowej (1966), T. 12, Z. 1, s. 43–55.
- [110] LAURA P.A.A., GUTIERREZ R.H. ROSSI R.E., *Vibrations of circular annular plates of cylindrical anisotropy and non-uniform thickness*, Journal of Sound and Vibration (2000), 231(1), s. 246–252.
- [111] LAURA P.A.A., GUTIERREZ R.H., CARNICER R., SANZI H.C., *Free vibrations of a solid circular plate of linearly varying thickness and attached to a Winkler foundation*, Journal of Sound and Vibration (1991), 144(1), s. 149–161.

- [112] LAURA P.A.A., MAURIZI M.J., ROSSI R.E., *A survey of studies dealing with Timoshenko beams*, The Shock and Vibration Digest (1990), 22(11), s. 3–10.
- [113] LAURA P.A.A., ROSSI R.E., VEGA D.A., VERA S.A., SANCHEZ M.D., *Vibrations of orthotropic, circular annular plates of non-uniform thickness and a free inner edge*, Journal of Sound and Vibration (1998), 218(1), s. 159–163.
- [114] LEBIEDIEW N.N., *Funkcje specjalne i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1957.
- [115] LEE S.Y., YANG C.C., *Non-conservative instability of a Timoshenko beam resting on Winkler elastic foundation*, Journal of Sound and Vibration (1993), 162(1), s. 177–184.
- [116] LEIPHOLZ H. H.E., MADAN O.P., *On the solution of the stability problem of elastic rods subjected to uniformly distributed, tangential follower forces*, Ingenieur Archive (1975), 44, s. 347–357.
- [117] LEISSA A.W., *Plate vibration research, 1976–1980: classical theory*, Shock and Vibration Digest (1981), 13(9), s. 11–22.
- [118] LEISSA A.W., *Plate vibration research, 1976–1980: complicating effects*, Shock and Vibration Digest (1981), 13(10), s. 19–36.
- [119] LEISSA A.W., *Recent studies in plate vibrations: 1981–1985, part I, classical theory*, The Shock and Vibration Digest (1987), 19(2), s. 11–18.
- [120] LEISSA A.W., *Recent studies in plate vibrations: 1981–1985, part II, complicating effect*, The Shock and Vibration Digest (1987), 19(3), s. 11–18.
- [121] LEUNG A.Y.T., ZHOU W.E., *Dynamic stiffness analysis of axially loaded non-uniform Timoshenko columns*, Computers and Structures (1995), 56(4), s. 577–588.
- [122] LEVINSON M., COOKE D.W., *On the two frequency spectra of Timoshenko beams*, Journal of Sound and Vibration (1982), 84(3), s. 319–326.
- [123] LI Q.S., *Free vibration of elastically restrained flexural-shear plates with varying cross-section*, Journal of Sound and Vibration (2000), 235(1), s. 63–85.
- [124] LIN S.M., *The closed-form solution for the forced vibration of non-uniform plates with distributed time-dependent boundary Conditions*, Journal of Sound and Vibration (2000), 232(3), s. 493–509.
- [125] LIN Y.J., *Dynamic Response of Circular Plates Resting on Viscoelastic Half Space*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, (1978), 45, s. 379–384.
- [126] LIU F.L., LIEW K.M., *Free vibration analysis of Mindlin sector plates: numerical solutions by differential quadrature method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1999), 177, s. 77–92.
- [127] LUESCHEN G.G.G., BERGMAN L.A., MCFARLAND D.M., *Green's functions for uniform Timoshenko beams*, Journal of Sound and Vibration (1996), 194(1), s. 93–102.
- [128] MALEKZADEH P., KARAMI G., *Vibration of non-uniform thick plates on elastic foundation by differential quadrature method*, Engineering Structures (2004), 26, s. 1473–1482.
- [129] MARTINEZ-CASTRO A.E., MUSEROS P., CASTILLO-LINARES A., *Semi-analytic solution in the time domain for non-uniform multi-span Bernoulli–Euler beams traversed by moving loads*, Journal of Sound and Vibration (2006), 294, s. 278–297.
- [130] MASSEY C., VAN DER MEEN A.T., *Errata on stability of non-prismatic cantilever columns under tangential loadings*, Journal of Applied Mechanics (1971), 38, s. 269–271.
- [131] MATEJA O., *Drgania swobodne dwóch sprężyste sprzężonych prętów o zmiennych przekrojach*, Archiwum Inżynierii Łądowej (1970), T. 16, Z. 3.
- [132] MATEJA O., *Drgania swobodne pasma płytowego o zmiennej grubości*, Rozprawy Inżynierskie (1968), 16(4).
- [133] MATEJA O., *Problemy statyki i dynamiki płyt pierścieniowych oraz powłok obrotowych*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, Z. 4, Opole 1972.
- [134] MAZURKIEWICZ Z., *The problem of bending and free vibration of a simply supported, isotropic, non-homogeneous, rectangular plate*, Archiwum Mechaniki Stosowanej (1960), 12(4), s. 497–519.
- [135] MAZUR-ŚNIADY K., ŚNIADY P., *Design Sensitivity of the Beam with Periodically Variable Geometry under Harmonic Excitation*, Angewandte Mathematik und Mechanik 2000, Vol. 80, sup-

- plement 2, s. S395–S396, Komunikat z Annual Meeting Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik GAMM 99. Metz, France, April 12–16, 1999.
- [136] MAZUR-ŚNIADY K., ŚNIADY P., *Dynamic response of a micro-periodic beam under moving load-deterministic and stochastic approach*, Journal of theoretical and Applied Mechanics (2001), 39(2), s. 323–338.
- [137] MAZUR-ŚNIADY K., ŚNIADY P., *Vibrations of the beam with variable cross-section caused by moving stochastic load*, Proceedings Applied Mathematic and. Mechanics (2002), 1, s. 452–453.
- [138] MIHIR CHANDRA MANNA, *Free vibration analysis of isotropic rectangular plates using a high-order triangular finite element with shear*, Journal of Sound and Vibration (2005), 281, s. 235–259.
- [139] NOWACKI W., *Dynamika Budowli*, Arkady, Warszawa 1972.
- [140] NOWACKI W., *Dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1980.
- [141] O'REILLY O. M., TURCOTTE J. S., *Another mode of vibration in Timoshenko beam*, Journal of Sound and Vibration (1996), 198(4), s. 517–521.
- [142] OSIŃSKI Z., *Teoria Drgań*, PWN, Warszawa 1978.
- [143] PARASKEVOPOULOS P. N., *Chebyshev Series Approach to System Identification, Analysis and Optimal Control*, Journal of the Franklin Institute (1983), 316(2), s. 135–157.
- [144] PASZKOWSKI S., *Zastosowania numeryczne wielomianów Czebyszewa*, PWN, Warszawa 1975.
- [145] POSIADAŁA B., *Free vibrations of uniform Timoshenko beams with attachments*, Journal of Sound and Vibration (1997), 204(2), s. 359–369.
- [146] RAJ ANIL, SUJITH R.I., *Closed-form solutions for the free longitudinal vibration of inhomogeneous rods*, Journal of Sound and Vibration (2005), 283, s. 1015–1030.
- [147] RAJAPAKSE R.K.D., *Dynamic Response of Elastic Plates on Viscoelastic Half Space*, Journal of Engineering Mechanics (1989), 115(9), s. 1867–1881.
- [148] RAZAQPUR GHANI, SHAH K.R., *Exact analysis of beams on two-parameters elastic foundations*, International Journal of Solids and Structure (1991), 27, s. 435–454.
- [149] ROY P.K., GANESAN N., *Studies on the dynamic behaviour of a square plate with varying thickness*, Journal of Sound and Vibration (1995), 182(3), s. 355–367.
- [150] RUTA P., *Application of Chebyshev series to solution of non-prismatic beam vibration problems*, Journal of Sound and Vibration (1999), 227(2), s. 449–467.
- [151] RUTA P., *Dynamic stability problem of a non-prismatic rod*, Journal of Sound and Vibration (2002), 250(3), s. 445–464.
- [152] RUTA P., *The application of Chebyshev polynomials to the solution of the nonprismatic Timoshenko beam vibration problem*, Journal of Sound and Vibration (2006), 296, s. 243–263.
- [153] RUTA P., *The vibration of a non-prismatic beam on an inertial elastic half-plane*, Journal of Sound and Vibration (2004), 275, s. 533–556.
- [154] SAITO H., OTOMI K., *Vibration and stability of elastically supported beams carrying an attached mass under axial and tangential loads*, Journal of Sound and Vibration (1980), 62(2), s. 257–266.
- [155] SAKIYAMA T., HUANG M., *Free-vibration analysis of right triangular Plates with variable thickness*, Journal of Sound and Vibration (2000), 234(5), s. 841–858.
- [156] SAKIYAMA T., HUANG M., *Free vibration analysis of rectangular plates with variable thickness*, Journal of Sound and Vibration (1998), 216(3), s. 379–397.
- [157] SANKARAN G.V., VENKATESWARA RAO G., *Stability of tapered cantilever columns subjected to follower forces*, Computers and Structures (1976), 6, s. 217–220.
- [158] SATO K., *On the governing equations for vibration and stability of a Timoshenko beam: Hamilton's principle*, Journal of Sound and Vibration (1980), 145(2), s. 338–340.
- [159] SAVIDIS S.A., RICHTER T., *Dynamic response on elastic plates on the surface of the half-space*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics (1979), 3, s. 245–254.
- [160] СЕЙМОВ В.М., *Применение метода ортогональных многочленов к динамическим контактным задачам*, Прикладная Механика, (1972), 8, s. 69–77.

- [161] СЕЙМОВ В.М., ОСТРОВЕРХ Б.Н., ЕРМОЛЕНКО А.И., Динамика и сейсмостойкость гидротехнических сооружений, Киев Наукова Думка 1983.
- [162] SEKHAR CHANDRA DUTTA, ROY RANA, Review Article: *A critical review on idealization and modeling for interaction among soil–foundation–structure system*, Computers and Structures (2002), 80, s. 1579–1594.
- [163] SELMANE A., LAKIS A.A., *Natural frequencies of transverse vibrations of non-uniform circular and annular plates*, Journal of Sound and Vibration (1999), 220(2), s. 225–245.
- [164] SELVADURAI A.P.S., *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam–Oxford–New York 1979.
- [165] SHEN J., *Efficient Spectral-Galerkin method II. Direct Solvers of second- and fourth- order equations using Chebyshev polynomials*, SIAM Journal on Scientific Computing, (1995), 16(1), s. 74–87.
- [166] SHING HUEI HO, CHA’O KUANG CHEN, *Free transverse vibration of an axially loaded non-uniform spinning twisted Timoshenko beam using differential transform*, International Journal of Mechanical Sciences (2006), 48, s. 1323–1331.
- [167] SHUFRIN I., EISENBERGER M., *Vibration of shear deformable plates with variable thickness first-order and higher-order analyses*, Journal of Sound and Vibration (2006), 290, s. 465–489.
- [168] SIENKIEWICZ Z., *Drgania sztywnej bryły na liniowo odkształcalnym podłożu*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Koszalinie, Monografie 55, Koszalin 1995.
- [169] SINGH B., SAXENA V., *Axisymmetric vibration of a circular plate with double linear variable thickness*, Journal of Sound and Vibration (1995), 179(5), s. 879–897.
- [170] SINGH B., SAXENA V., *Transverse vibration of a quarter of a circular plate with variable thickness*, Journal of Sound and Vibration (1995), 183(1), s. 49–67.
- [171] ŚNIADY P., *Drgania dźwigarów wywołane ruchomym obciążeniem*, Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, Monografie 5, Wyd. PWr., Wrocław 1976.
- [172] STEPHEN N.G., *The second frequency spectrum of Timoshenko beams*, Journal of Sound and Vibration (1982), 80(4), s. 578–582.
- [173] STORCH J. A., ELISHAKOFF I., *Apparently first closed-form solutions of inhomogeneous circular plates in 200 years after Chladni*, Journal of Sound and Vibration (2004), 276, s. 1108–1114.
- [174] SZCZEŚNIAK W., *Drgania pasma płytowego o zmiennej grubości*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Mechanika Z. 52, Problemy dynamiki konstrukcji, X Jubileuszowe Sympozjum Dynamiki Konstrukcji, Rzeszów 1999, s. 103–110.
- [175] SZCZEŚNIAK W., *Inercyjne obciążenie ruchome na belkach i płytach. Przegląd podstawowych pozycji literatury*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo (1991), Z. 112, s. 7–74.
- [176] SZCZEŚNIAK W., *O pewnej częstotliwości krytycznej w zagadnieniu własnym belki Timoshenki*, Konferencja: Komputerowe Systemy Wspomagania Nauki, Przemysłu i Transportu, TRANSCOMP 2000, Zakopane’2000, s. 431–440.
- [177] SZCZEŚNIAK W., *Wybrane zagadnienia kolejowe, wzajemne oddziaływanie w układzie pojazd – tor kolejowy – podtorze – podłoże gruntowe*, Prace Naukowe Budownictwo 1995, Z. 129, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
- [178] SZCZEŚNIAK W., *Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
- [179] TAHER H. ROKNI DAMAVANDI, OMIDI M., ZADPOOR A.A., NIKOOYAN, A.A., *Free vibration of circular and annular plates with variable thickness and different combinations of boundary conditions*, Journal of Sound and Vibration (2006), 296, s. 1084–1092.
- [180] TIMOSHENKO S. P., GERE J. M., *Teoria stateczności sprężystej*, ARKADY, Warszawa 1963.
- [181] TOŁSTOW G., *Szeregi Fouriera*, PWN, Warszawa 1954.
- [182] TOMSKI L., PRZYBYLSKI J., GOŁĘBIEWSKA-ROZANOW M., SZMIDLA J., *Vibrations and stability of elastic columns subjected to a generalized load*, Archive of Applied Mechanics (1996), 67, s. 105–116.

- [183] TOMSKI L., PRZYBYLSKI J., GOŁĘBIEWSKA-ROZANOW M., SZMIDLA J., *Vibration and stability of a cantilever column subject to a follower force passing through a fixed point*, Journal of Sound and Vibration (1998), 214(1), s. 67–81.
- [184] TOMSKI L., PRZYBYLSKI J., GOŁĘBIEWSKA-ROZANOW M., SZMIDLA J., *Vibrations and stability of columns subjected to a certain type of generalised load*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics (1999), 37(2), s. 283–299.
- [185] TOMSKI L., PRZYBYLSKI J., *Static Instability of an Elastically Restrained Cantilever Under a Partial Follower Force*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal (1985), 23(10), s. 1637–1639.
- [186] TOMSKI L., SZMIDLA J., *Local and global instability and vibration of overbraced Euler's column*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics (2003), 41(1), s. 137–154.
- [187] TOMSKI L., SZMIDLA J., *Vibration and stability of a column subjected to the generalised load by a force directed towards the pole*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics (2004), 42(1), s. 163–193.
- [188] TONG X., TABARROK B., YEH K.Y., *Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section*, Journal of Sound and Vibration (1995), 186(5), s. 821–835.
- [189] VAN DOOREN R., VLASSEN BROECK J., *Chebyshev Series Solutions of the Controlled Duffing Oscillator*, Journal of Computational Physics, (1982), 47, s. 321–329.
- [190] WANG J., *Generalized power series solutions of the vibration of classical circular plates with variable thickness*, Journal of Sound and Vibration (1997), 202(4), s. 593–599.
- [191] WANG X., BERT C.W., STRIZ A. G., *Differential quadrature analysis of deflection, buckling and free vibration of beam and rectangular plates*, Computers and Structure (1993), 48(3), s. 473–479.
- [192] WASZCZYŹYŹN Z. red., *Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji*, Ossolineum, Wrocław 1981.
- [193] ВЛАСОВ В.Э., ЛЕОНТЕВ Н.Н., *Балки, плиты и оболочки на упругом основании*, Физматгиз, Москва 1960.
- [194] WOŹNIAK CZ., *A Model for Analysis of Micro-Heterogeneous Solids, Tolerance Averaging Versus Homogenization*, Mechanik Berichte (1999), IAM, 1.
- [195] WOŹNIAK CZ., *Mechanika sprężystych płyt i powłok*, Mechanika Techniczna, T. VIII, PWN, Warszawa 2001. Praca pod redakcją Cz. Woźniaka,. Autorzy: S. Borkowski, G. Jemielita, B. Michalak, R. Nagórski, W. Pietraszkiewicz, M. Rudnicki, M. Woźniak i Cz. Woźniak.
- [196] WRANA B., *Metoda krępych elementów spektralnych i jej zastosowanie do analizy dynamicznej fundamentów pod turbozespoły*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, seria Inżynieria Lądowa, Monografie 253, Kraków 1999.
- [197] XIANG Y., *Exact buckling and vibration solutions for stepped rectangular plates*, Journal of Sound and Vibration (2002), 250(3), s. 503–517.
- [198] XIANG Y., ZHANG L., *Free vibration analysis of stepped circular Mindlin plates*, Journal of Sound and Vibration (2005), 280, s. 633–655.
- [199] YANG J.S., *The vibration of a circular plate with varying thickness*, Journal of Sound and Vibration (1993), 165(1), s. 178–184.
- [200] YAVARI S., SARKANI S., REDDY J.N., *On non-uniform Euler-Bernoulli and Timoshenko beams with jump discontinuities*, International Journal of Solids and Structures (2001), 38, s. 8389–8406.
- [201] ZHENG D.Y., CHEUNG Y.K., AU F.T.K., CHENG Y.S., *Vibration of multi-span non-uniform beams under moving loads by using modified beam vibration functions*, Journal of Sound and Vibration (1998), 212(3), s. 455–467.
- [202] ZHOU D., *Vibrations of point-supported rectangular plates with variable thickness using a set of static tapered beam functions*, International Journal of Mechanical Sciences (2002), 44, s. 149–164.

APPLICATION OF CZEBYSCHEV POLYNOMIALS IN THE DYNAMICS OF GIRDERS WITH VARIABLE GEOMETRIC AND MECHANICAL PARAMETERS

The paper presents a method and algorithms (based on the method) for the dynamic analysis of girders (beams and plates) with variable geometric and physical parameters. The key component of the algorithms is a theorem describing the way in which linear differential equations with variable coefficients are approximately solved using Chebyshev polynomials. The application of the theorem leads to an infinite system of ordinary differential equations and in the case of stationary problems (eigenproblems, harmonically excited vibration problems, etc.), to an infinite system of algebraic equations. The coefficients of the equations are described by closed analytical formulas. The solutions, obtained as Chebyshev series, have a half-analytic form which is convenient for further transformations. The proposed method makes it possible to solve problems in which the geometric and material parameters of analysed systems are described by arbitrary functions. The only condition which the function must meet is the possibility of expanding certain (defined by the theorem's assumptions) linear combinations of the functions and their derivatives into convergent Chebyshev series.

Bar systems and circular and annular plates are the subject of the analysis. Most of the factors having a bearing on the solution of the analysed structures are taken into account in the equations describing the considered problems. Thanks to the general description, general solutions could be obtained. The Euler model and the Timoshenko model were adopted for description in the case of the bar systems. Using the obtained general solutions specific problems such as: the free vibration problem and the harmonically and periodically excited vibration problems (including the problem of vibrations excited by a moving load and the stability loss problem) were solved. In all the general solutions the interaction between the system and the elastic foundation was taken into account. The Winkler model, a two-parameter (Pasternak, Wlasov, Filonienko-Borodicz) foundation and an inert foundation of elastic half-space type were adopted as the foundation models used to solve the harmonically excited vibration problem for the finite Euler beam. In the case of circular and annular plates, as with the bar systems, general solutions were derived. An arbitrary transverse load distribution, an arbitrary static shear load distribution, the effect of the disk load on the transverse displacement of the plate and the temperature effect were taken into account in the solution. Thin plates and medium-thick plates described according to the Hencky-Bolle theory were analysed. Specific solutions were limited to eigenproblems and the harmonically excited vibration problem.

In order to verify the effectiveness and accuracy of the presented method, each specific problem was illustrated with a numerical example. The examples can be divided into two general groups: one group comprises examples which are to show the possibilities of applying the proposed method to a given problem, while the other group comprises examples which are to demonstrate the accuracy of the obtained solutions in comparison with exact analytical solution (only for prismatic systems) or solutions obtained by other approximate methods. The results in all the calculation examples were obtained by means of programs coded by the author in *Mathematica*®, using the system's numerical procedures. The examples have shown the suitability of the proposed method for solving complex engineering problems in which systems with variable geometric and mechanical parameters are the subject of analysis. It has also been shown that the solutions obtained by the method are highly accurate in comparison with those yielded by other methods whereby the algorithms can be used to test the correctness of solutions obtained by other calculation methods.

W pracy przedstawiono metodę, na podstawie której opracowano algorytmy do analizy dynamicznej dźwigarów o zmiennych parametrach geometrycznych i fizycznych. Omawiana metoda pozwala na rozwiązanie zagadnień, w których parametry geometryczne i materiałowe analizowanych układów opisane są dowolnymi funkcjami, a otrzymane w postaci szeregów Czebyszewa rozwiązania mają wygodną do przekształceń postać półanalityczną.

Przedmiotem analizy dynamicznej są układy prętowe oraz płyty kołowe i pierścieniowe. W równaniach opisujących omawiane zagadnienia uwzględniono większość czynników mających wpływ na rozwiązanie analizowanych ustrojów. Przyjęcie ogólnego opisu pozwoliło na wyznaczenie rozwiązań ogólnych.

W układach prętowych rozważano dwa modele prętów, przyjmując do opisu modele Eulera i Timoshenki.

W przypadku płyt kołowych i pierścieniowych przedmiotem analizy były dwa modele płyt: płyty cienkie oraz płyty średniej grubości opisane według teorii Hencky'ego-Bolle'a.

Praca jest przeznaczona dla specjalistów z dziedziny „mechanika budowli”.



Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w księgarni
„Tech”
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
budynek D-1 PWr., tel. 071 320 29 35
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową

ISBN 978-83-7493-338-4