

Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej



100100121686

Jarosław Stryczek

Koła zębate maszyn hydraulicznych



Jarosław Stryczek

**Koła zębate
maszyn hydraulicznych**

Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2007

Recenzenci
Waldemar OLEKSIUK
Franciszek W. PRZYSTUPA

Opracowanie redakcyjne
Alina KACZAK

Korekta
Hanna JUREK

Projekt okładki
Dariusz GODLEWSKI

©Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2007

Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISBN 978-83-7493-308-7

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam.214 /07

Spis oznaczeń

a, b	współrzędne środka okręgu
a	odległość osi kół zębatach
a_w	toczna odległość osi kół zębatach
b	szerokość koła zębatego
d, d_a, d_b, d_f, d_w	średnica podziałowa, wierzchołków, zasadnicza, stóp, toczna
g	przesunięcie ekwidystanty
g	grubość zęba
h	wysokość zęba
h	ramię działania siły międzyzębnej
h_a, h_f	wysokość głowy, stopy zęba
K_e, K_h	krzywizna łuku epicykloidy i hipocykloidy
m	moduł koła zębatego
M	moduł cykloidy
M	moment obrotowy
n	prędkość obrotowa
p	ciśnienie
P, P_o, P_r	siła międzyzębna, składowa osiowa i promieniowa siły międzyzębnej
q	wydajność (chłonność) właściwa maszyny
$q_{ew}, q_{c1}, q_{c2}, q_e, q_h$	wydajność (chłonność) właściwa maszyny z zazębieniem ewolwentowym, cykloidalnym 1., 2. rodzaju, 3. rodzaju epicykloidalnym i hipocykloidalnym
q_{or}	wydajność (chłonność) właściwa maszyny o orbitalnym ruchu kół
q_{st}	wydajność (chłonność) właściwa maszyny o osiach stałych
q_u	elementarna wydajność (chłonność) maszyny
$q_{uew}, q_{uc1}, q_{uc2}, q_{ue}, q_{uh}$	elementarna wydajność (chłonność) maszyny z zazębieniem ewolwentowym, cykloidalnym 1., 2. rodzaju, 3. rodzaju epicykloidalnym i hipocykloidalnym
q_z	wydajność (chłonność) przetłoczona przez jedną parę zębów maszyny
$q_{zew}, q_{zc1}, q_{zc2}, q_{ze}, q_{zh}$	elementarna wydajność (chłonność) przetłoczona przez jedną parę zębów maszyny z zazębieniem ewolwentowym, cykloidalnym 1., 2. rodzaju, 3. rodzaju epicykloidalnym i hipocykloidalnym

Q_t	wydajność (chłonność) teoretyczna maszyny
$Q_{tew}, Q_{tc1}, Q_{tc2}, Q_{te}, Q_{th}$	wydajność (chłonność) teoretyczna maszyny z zazębieniem ewolwentowym, cykloidalnym 1., 2. rodzaju, 3. rodzaju epicykloidalnym i hipocykloidalnym
Q_u	wydajność (chłonność) chwilowa maszyny
$Q_{uew}, Q_{uc1}, Q_{uc2}, Q_{ue}, Q_{uh}$	wydajność (chłonność) chwilowa maszyny z zazębieniem ewolwentowym, cykloidalnym 1., 2. rodzaju, 3. rodzaju epicykloidalnym i hipocykloidalnym
$Q_{umax}, Q_{umin}, Q_{ustr}$	maksymalna, minimalna, średnia wartość wydajności (chłonności) chwilowej maszyny
$Q_{uewmax}, Q_{uc1max}, Q_{uc2max}, Q_{uemax}, Q_{uhmax}$	maksymalna wartość wydajności (chłonności) chwilowej maszyny z zazębieniem ewolwentowym, cykloidalnym 1., 2. rodzaju, 3. rodzaju epicykloidalnym i hipocykloidalnym
$Q_{uewmin}, Q_{uc1min}, Q_{uc2min}, Q_{uemin}, Q_{uhmin}$	minimalna wartość wydajności (chłonności) chwilowej maszyny z zazębieniem ewolwentowym, cykloidalnym 1., 2. rodzaju, 3. rodzaju epicykloidalnym i hipocykloidalnym
$Q_{uew\acute{s}r}, Q_{uc1\acute{s}r}, Q_{uc2\acute{s}r}, Q_{ue\acute{s}r}, Q_{uh\acute{s}r}$	średnia wartość wydajności (chłonności) chwilowej maszyny z zazębieniem ewolwentowym, cykloidalnym 1., 2. rodzaju, 3. rodzaju epicykloidalnym i hipocykloidalnym
r, r_a, r_b, r_f, r_w	promień koła podziałowego, wierzchołków, zasadniczego, stóp, tocznego
R_e, R_h	promień krzywizny łuku epicykloidy i hipocykloidy
R_{emin1}, R_{emin2}	minimalny promień krzywizny epicykloidy we wklęsłej i wypukłej części łuku
R_{hmin1}, R_{hmin2}	minimalny promień krzywizny hipocykloidy w wypukłej i wklęsłej części łuku
t	czas
u	odległość punktu przyporu od punktu centralnego zazębienia C (bieguna zazębienia)
u_{max}, u_{min}	maksymalna i minimalna wartość odległości punktu przyporu od punktu centralnego zazębienia C
W	wypadkowa siła międzyzębna w zazębieniu cykloidalnym 3. rodzaju
W_{max}, W_{min}	maksymalna i minimalna wartość wypadkowej siły międzyzębnej w zazębieniu cykloidalnym 3. rodzaju
x, y	współrzędne zarysu uzębienia
x	współczynnik przesunięcia zarysu w kołach ewolwentowych (współczynnik korekcji)
x_e, y_e	współrzędne epicykloidy
x_h, y_h	współrzędne hipocykloidy

x_{eke}, y_{eke}	współrzędne ekwidystanty epicykloidy
x_{ekh}, y_{ekh}	współrzędne ekwidystanty hipocykloidy
x_{re}, y_{re}	współrzędne rodziny epicykloid
x_{rh}, y_{rh}	współrzędne rodziny hipocykloid
z	liczba zębów
α	kąt obrotu
α_0, α_w	nominalny i toczny kąt zarysu
γ	kąt obrotu mimośrodu
δ	współczynnik nierównomierności wydajności (chłonności) maszyny
$\delta_{ew}, \delta_{c1}, \delta_{c2}, \delta_e, \delta_h$	współczynnik nierównomierności wydajności (chłonności) maszyny z zazębieniem ewolwentowym, cykloidalnym 1., 2. rodzaju, 3. rodzaju epicykloidalnym i hipocykloidalnym
η	kąt cykloidy
η_v	sprawność objętościowa maszyny hydraulicznej
η_{ep}, η_{hp}	kąt określający położenie punktu przegięcia epicykloidy i hipocykloidy
$\eta_{emin1}, \eta_{emin2}$	kąt określający położenie minimalnych promieni krzywizny epicykloidy
$\eta_{hmin1}, \eta_{hmin2}$	kąt określający położenie minimalnych promieni krzywizny hipocykloidy
ε	liczba przyporu
λ	współczynnik wysokości zęba cykloidalnego
ν	współczynnik przesunięcia ekwidystanty
ω	prędkość kątowna
ξ	kąt środkowy łuku koła
ϑ	kąt działania jednostkowej siły międzyzębnej w zazębieniu cykloidalnym 3. rodzaju
θ	kąt działania wypadkowej siły międzyzębnej w zazębieniu cykloidalnym 3. rodzaju
ρ	promień koła toczącego się

Przedmowa

Kiedy w 1973 roku, jako młody inżynier, rozpoczynałem swą pracę zawodową w Kombinacie PZL Hydral we Wrocławiu, spotkałem się z ciekawym zdarzeniem. Na jednym z wydziałów produkcyjnych proces technologiczny przebiegał wzorowo. Nagle któregoś kolejnego miesiąca pojawiły się nieoczekiwane kłopoty. Mnożyły się braki, powstawały opóźnienia. Kierownictwo Kombinatów stosunkowo szybko znalazło przyczyny tych kłopotów. Głównym powodem okazało się odejście na emeryturę bardzo doświadczonego i zasłużonego dla przedsiębiorstwa technologa. Jego wiedza i znajomość realiów technicznych zapewniały wzorowe prowadzenie procesu. Wraz z jego odejściem na emeryturę powstała widoczna luka. Wydaje się, że w wielu środowiskach przemysłowych i naukowych pracują podobne osoby i zespoły, które wiedzą, jak rozwiązywać problemy z dziedziny budowy maszyn. Ich autorska wiedza nie jest jednak znana szerszemu gronu zainteresowanych, a często nie jest nawet w jakikolwiek sposób udokumentowana. Z czasem wiedza ta ulega zapomnieniu.

Ponad 30 lat zajmuję się hydraulicznymi maszynami zębatymi. Zebrałem pewne doświadczenia wynikające ze współpracy z Kombinatem PZL Hydral we Wrocławiu (pompy zębate PZ2, PZ3, pompy gerotorowe, wielofunkcyjne maszyny hydrauliczne zębate), Zakładami Waryńskiego w Warszawie (pompy zębate P2C), Fabryką Maszyn Rolniczych Pilmet we Wrocławiu (bloki sterujące orbitrol, silniki orbit, pompy smarownicze), Wytwórnią Pomp Hydraulicznych we Wrocławiu (pompy zębate o zazębieniu wewnętrznym), Zakładami Pioma w Piotrkowie Trybunalskim (silniki wolnoobrotowe orbitalne) oraz Katedrą Hydrauliki i Pneumatyki Politechniki Gdańskiej i Zakładami Fama w Gniewie (silniki wolnoobrotowe orbitalne oraz silniki satelitowe HS), a także wieloma innymi zakładami i uczelniami. W ramach tej współpracy rozwiązywałem różne zadania konstrukcyjne, technologiczne i badawcze. Często zadania te dotyczyły kół zębatych stosowanych w hydraulicznych maszynach zębatych. Koła zębate określały kształt konstrukcyjny maszyny i wpływały na osiągnięte parametry techniczne. W związku z ich wytwarzaniem opracowywano także specjalne procesy technologiczne. Były to więc obiekty wystarczająco ważne, aby poświęcić im odrębną publikację. W ramach tej książki pragnąłem zebrać i uporządkować znaną wiedzę odnoszącą się do tego problemu i dodać wiedzę własną, którą zgromadziłem w trakcie wieloletniej pracy inżynierskiej i naukowej.

Przy tej okazji powstało pytanie, czy nie istnieją podobne publikacje? Oczywiście publikacje takie istnieją – wystarczy spojrzeć na spis literatury, znajdujący się na końcu tej książki. Mimo to zagadnienia nie można uznać za wyczerpane. Syntetyczne, autorskie ujęcie problemu jest zawsze możliwe. Właśnie dlatego przygotowałem tę pracę i oddaję ją w ręce Czytelników z nadzieją, że być może kogoś ona zainteresuje.

Pragnąłbym tu przypomnieć sylwetkę mego Ojca – Profesora Stefana Stryczka. Był on uznanym autorytetem naukowym i inżynierskim. Przez wiele lat przewodził środowisku hydraulików polskich. Wzrastałem w kręgu jego pracy i atmosferze roztaczanej przez jego osobę. Niech ta skromna książka będzie podziękowaniem za dobro, którym tak hojnie mnie obdarował.

Autor

1. Hydrauliczne maszyny zębate

1.1. Przegląd rozwiązań konstrukcyjnych

Przez pojęcie hydrauliczna maszyna zębata rozumie się taki typ maszyny stosowanej w układach napędu i sterowania hydraulicznego, w której koła zębate stanowią podstawowy zespół zarówno ze względu na budowę, jak i zasadę działania. Koła te mają często rozmaity kształt konstrukcyjny i współpracują ze sobą w różny sposób, lecz spełniają one zawsze jedno podstawowe zadanie, jakim jest przemiana energii mechanicznej w hydrauliczną lub odwrotnie.

Hydrauliczne maszyny zębate, podobnie jak cały napęd hydrauliczny, rozwijały się przez ostatnie 400 lat. Ciekawy jest przegląd ważniejszych typów tych maszyn pod kątem zastosowanych w nich ząbów oraz wpływu rozwiązań konstrukcyjnych ząbów na realizowane przez maszynę funkcje i osiągnięte parametry techniczne.

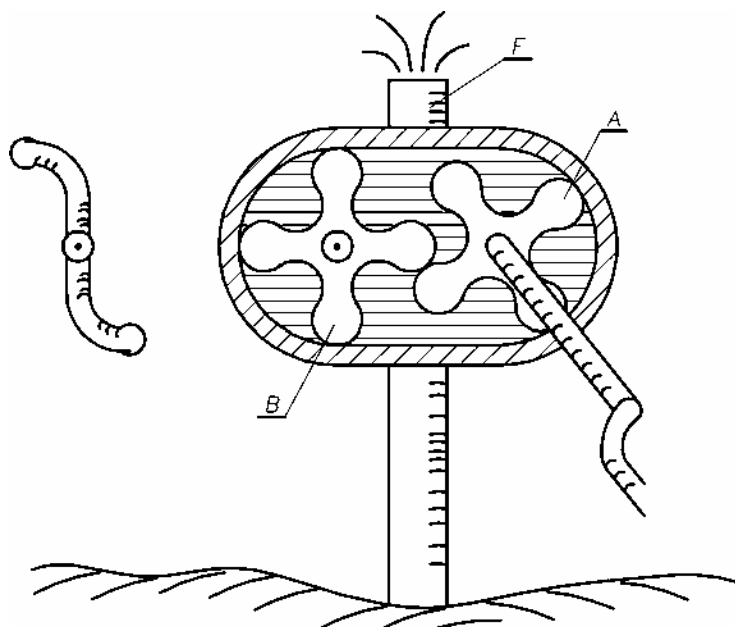
Pierwsza hydrauliczna maszyna zębata pojawiła się na początku XVII wieku. Była to pompa zębata, której wynalazcą był Johannes Kepler (1571–1630), niemiecki astronom i matematyk [1]. Wynalazku tego dokonał w 1604 roku podczas pobytu w Pradze. Na pomysł pompy zębatej wpadł po rozmowie z górnikami, którzy uzalali się na brak pompy samozasysającej, umożliwiającej usuwanie wody ze studzienek szybowych. Pompa miała dwa sześcioboczne wirniki umieszczone w szczelnym kadłubie. Jedno z kół napędzane było korbą. Była to maszyna bezzaworowa, mniej kłopotliwa w obsłudze niż pompy tłokowe. Kepler podkreślał różnorodność zastosowań tej maszyny, która mogła służyć do odwadniania szybów i studzienek oraz usuwania wody ze statków, a także do tłoczenia wody w fontannach parkowych. Pompa pracująca według niezmienionej do dziś zasady jest produkowana współcześnie na całym świecie w milionach sztuk rocznie.

Pierwszy szkic pompy zębatej znalazł się w pracy D. Schwentera pt.: *Deliciae mathematicae oder mathematische und philosophische Erquickstunden* z roku 1636 [2, 3, 69]. W dziele tym występuje problem 88. Leurechona pt.: *O urządzeniach, maszynach hydraulicznych i innych eksperymentach z wodą oraz podobnymi cieczami*. Pisze się tam „o innym pięknym urządzeniu wodnym” w następujących słowach:

„Nie będę opisywał wynalazków Herona, Ktesibiosa i innych, co czyniło już wielu, lecz poprzestanę na opisie nowego, godnego uwagi. Jest to maszyna (rys. 1.1), która ma koła zębate (A) i (B), umieszczone w owalnej obudowie w taki sposób, że zęby jednego z kół atakują zęby drugiego i to tak dokładnie, że ani powietrze, ani woda nie może przechodzić przez kadłub ani środkiem, między współpracującymi zębami, ani

bokami, ponieważ między kołami a ściankami obudowy nie ma luzu. Każde koło ma oś – tak że można je obracać za pomocą korby zewnętrznej. Jeśli korbą napędzać koło (A) w jednym kierunku, to drugie koło obraca się w kierunku przeciwnym. Na skutek tego ruchu woda, wypełniając luki międzyzębne obu obracających się ruchem ciągłym kół, jest unoszona po obu stronach w górę i wypływa otworem (F). Aby umożliwić wypływ wody w dowolnym kierunku, umieszcza się na rurze (F) dwie inne giętkie ruchome rury, co pokazano na rysunku obok, który tę rzecz lepiej wyjaśnia niż słowa.” (rys. 1.1).

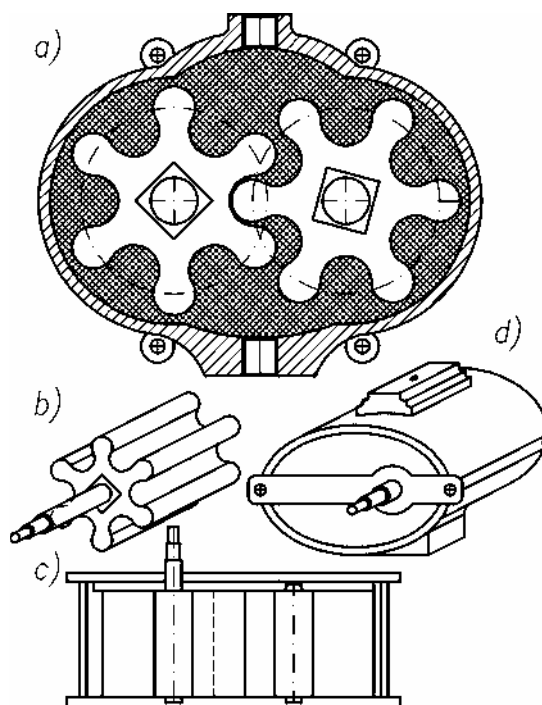
Na uwagę zasługuje podkreślenie konieczności zachowania szczelności wewnętrznej, a więc tego, czym odznaczać się muszą pompy wporowe wszystkich typów. Na rysunku pokazano pompę zlokalizowaną nad poziomem zwierciadła wody.



Rys. 1.1. Pompa zębata J. Leurechona z 1624 r. [2, 3, 69]

Inną pompę zębatą opisał na początku XVIII wieku Jacob Leupold (1674–1727) w dziele *Theatrum machinarum hydraulicarum oder Schauplatz der Wasserkünste* wydanym w Lipsku w 1724 roku [4]. Opisał ją w paragrafie 232, zatytułowanym *Pompa puszkowa (Kapselkunst) o dwóch kołach zębatych, nazywana przez dr. Bechlera »machina Pappenheima«*. Pompę tę przedstawiono na rysunku 1.2. Jak widać na rysunku 1.2a, zęby kół są wyprofilowane według łuków kół, których środki znajdują się na obwodzie kół podziałowych, przy czym profil wrębu międzyzębnego jest łukiem kołowym o promieniu większym od promienia głowy zęba o $1/20$ podział-

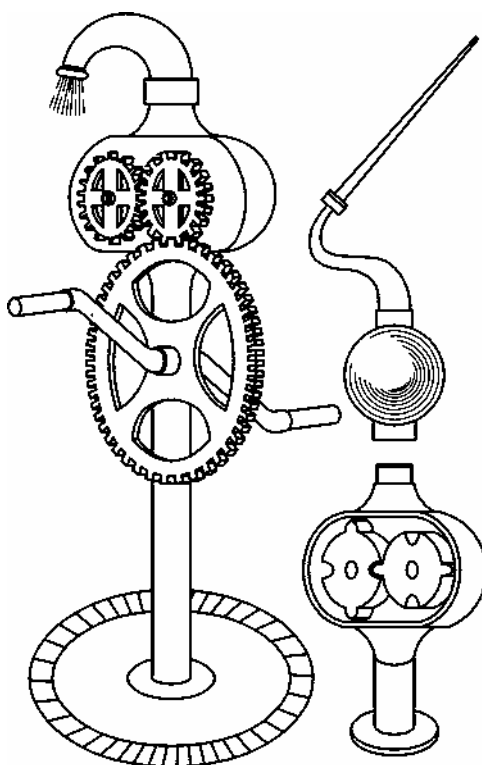
ki. Na rysunku 1.2b przedstawiono koło zębate z wałem, mającym po obu stronach dokładnie obrobione czopy. Szerokość koła wynosiła 6 cali. Na rysunku 1.2c przedstawiono przekrój pompy w płaszczyźnie przechodzącej przez osie kół. Czopy są łożyskowane w pokrywach owalnej obudowy. Na zewnątrz pokrywy wystaje tylko wał koła czynnego z czworokątną końcówką, na której osadza się korbę. Koła zębate pracują w owalnym kadłubie zamkniętym pokrywami, a te skręcone są śrubami (rys. 1.2d). Koła mogły być wykonane z brązu lub też – co jest bardziej prawdopodobne – z drewna. Obudowa była również drewniana. Wały i czopy, jak to pisał Leupold, były „żelazne”.



Rys. 1.2. Machina Pappenheima według J. Leupolda z 1724 r. [4, 69]

Pompy zębate nie znalazły jeszcze w XVIII w. większego zastosowania, prawdopodobnie dlatego że uzyskanie wyższych ciśnień nie było wówczas możliwe ze względów technologicznych. Zapewnienie szczelności obwodowej obracających się kół było przy ówczesnych możliwościach technologicznych trudne do zrealizowania. Łatwiej było uszczelnić tłok w cylindrze za pomocą skórzanego pierścienia samouszczelniającego, dlatego pompy zębate nie były w stanie konkurować z pompami tłokowymi.

Do pomp z elementami wyporowymi o ruchu obrotowym powrócono w początkach XIX wieku. W roku 1827 Amerykanin Eve opatentował pompę przedstawioną na rysunku 1.3 [5, 69]. Montowano ją kołnierzowo na przewodzie ssawnym o długości do 21 stóp (~7 m). W kadłubie umieszczono stykające się bezpośrednio ze sobą walce o średnicy 3,5 cala i długości 6 cali. Każdy walec miał występy w formie zębów współpracujących z wgłębieniami w formie wrębów. Na wałkach wychodzących z obudowy osadzono dwa koła zębate, z których jedno było napędzane przez dodatkowe duże koło zębate wprowadzane w ruch za pomocą korbki. Przełożenie przekładni multiplikującej wynosiło 3. Wydajność pompy napędzanej przez dwóch ludzi wynosiła ok. 10 m³/h. Pompę można było również napędzać za pomocą kieratu konnego. Podnoszono także inne jej zalety, jak niezawodność i trwałość, ponieważ wykonana była w całości z metalu, oraz małe wymiary i ciężar, a wreszcie dużą wydajność zależną od prędkości obrotowej koła pędzącego.

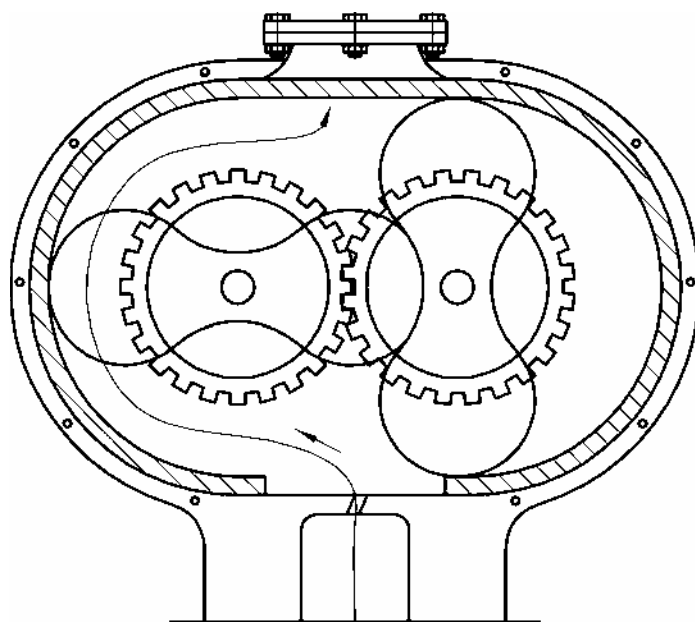


Rys. 1.3. Pompa Eve'a z 1827 r. [5, 69]

Pompę Eve'a można zaliczyć do pomp zębatych, za tym przemawiają kinematyka i zasada pracy. Koła zespołu wirnikowego pozostawały ze sobą w bezpośrednim sty-

ku, tworząc komory wyporowe, w których była przenoszona ciecz z przestrzeni ssawnej do tłocznej. Komory wyporowe tworzyły powierzchnię walców (koło stóp), zarysy sąsiednich występów – zębów (koło wierzchołkowe) oraz wytoczenie kadłuba i jego ścianki boczne. Ten układ geometryczny i zasada działania jest taki sam jak w pompach zębatych.

Na rysunku 1.4 przedstawiono schemat konstrukcyjny wentylatora Amerykanów P.H. i F.M. Rootow-Connersville. Maszynę tę opatentowano w USA, Anglii, Saksonii, Bawarii i w Wirtembergii [5, 69] i pokazano na Wystawie Światowej w Paryżu w 1867 r. Elementy wirnikowe miały średnicę około 0,9 m i szerokość ponad 2 m. Były wykonane z jednolitego kłosa drewnianego, dokładnie wyprofilowanego, aby ściśle wzajemnie przylegały oraz zapewniały szczelność względem ścian kadłuba. Sprawiało to, że można było uzyskać wyższe ciśnienia robocze. Maszyna o takim rozwiązaniu konstrukcyjnym znana jest obecnie raczej jako pompa wyporowa Rootsa.

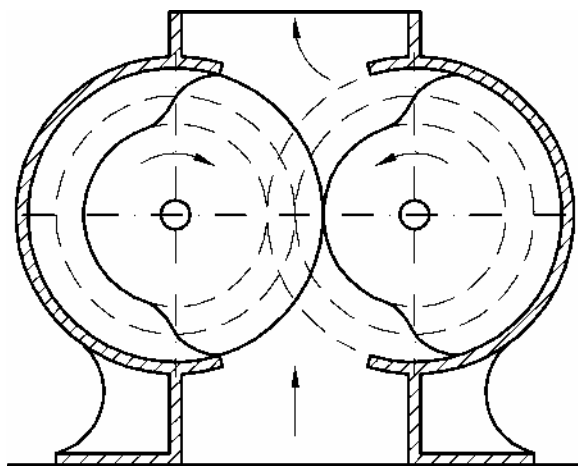


Rys. 1.4. Wentylator Rootsa z 1867 r. [5, 69]

Z dotychczasowego przeglądu pomp zębatych, dokonanego od jej początków do połowy XIX wieku, wynika, że ich rozwiązania konstrukcyjne zmieniały się zarówno pod względem liczby zębów, jak i ich kształtu (zarysu). Pompa Keplera i Pappenhema miały po 6 zębów, Leurechona 4 zęby, Rootsa 2 zęby. Uzębienie kształtowane według okręgów łuków lub też krzywych uformowanych w sposób empiryczny. W tej

sytuacji nasuwało się pytanie, czy można liczbę zębów zminimalizować do wartości granicznej i budować pompy z kołami jednozębnymi.

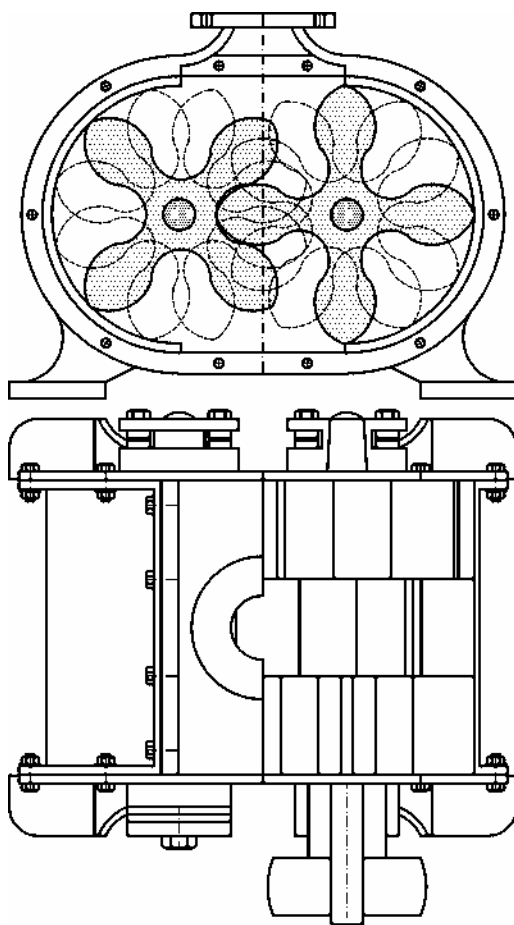
Odpowiedzi twierdzącej na to pytanie udzieliła w latach czterdziestych XIX wieku firma Repsold z Hamburga, podejmując się produkcji takiej pompy [5, 69]. Na rysunku 1.5 przedstawiono jej schemat konstrukcyjny. Mimo że określono ją wówczas jako pompę krzywkową, należy ją zaliczyć do pomp zębatych z kołami jednozębnymi. Zęby miały zarys cykloidalny, przy czym głowy zębów były uformowane przez epi-cykloidę, stopy zaś przez hipocykloidę. Grubość zęba jest równa połowie obwodu koła podziałowego. Na połowie obwodu koła współpracują ze sobą z poślizgiem, tak że powierzchnia głowy zęba ślizga się po powierzchni walcowej dna wrębu. W związku z tym powierzchnie te ulegały zużyciu ściernemu i pogarszała się przez to szczelność międzyzębna kół. Wszystko to sprawiło, że ciśnienie tłoczenia pompy nie było wysokie. Stosowano ją do czerpania wody z wykopów budowlanych, a później do pomp strażackich o średnim zasięgu. Wykorzystywano ją również jako silnik hydrauliczny.



Rys. 1.5. Pompa Repsolda z kołami jednozębnymi z lat 40. XIX wieku [5, 69]

W latach osiemdziesiątych XIX wieku zaczęto dostrzegać potrzebę łagodzenia niekorzystnych zjawisk, wynikających z zasady działania pompy zębatej. Łączy się to m.in. z koniecznością zmniejszania nierównomierności wydajności oraz strat objętościowych. Ciekawe rozwiązania przedstawiła firma H. Hoppe z Brockenheim koło Frankfurtu nad Menem, uzyskując liczne patenty [5, 69]. Na rysunku 1.6 przedstawiono pompę tej firmy z roku 1882. Zastosowano w niej trzy pary kół zębatych, przedstawionych względem siebie o $1/3$ podziałki, co wpłynęło na zmniejszenie nierównomierności wydajności pompy. Koła mają zarys zbliżony do cykloidalnego. Pompa ma

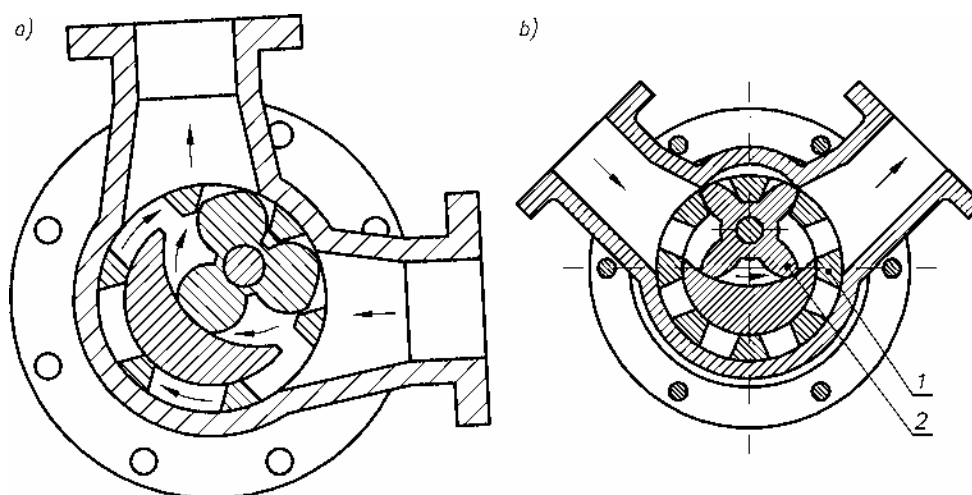
oryginalny, wieloelementowy korpus, który składa się z dwóch płaskich płyt: dolnej i górnej z króćcem tłocznym oraz dwóch wyokrąglonych ścian bocznych, przesuwanych względem płyt i dostawianych do powierzchni obrotowych kół za pomocą śrub. Ma to na celu zminimalizowanie luzu promieniowego w pompach w trakcie montażu oraz eksploatacji, gdy pojawia się zużycie ściernie kół i obudowy. Wałki pompy mają stożkowe czopy i są prowadzone w tulejkach łożysk, przykręcanych do płyt czołowych pompy.



Rys. 1.6. Pompa firmy H. Hoppe z 1882 r. [5, 69]

W drugiej połowie XIX wieku pojawiły się pompy o zazębieniu wewnętrznym. Pompy tego typu, wyprodukowane w 1888 roku przez firmę Selwig U. Lange z Braunschweigu, pokazano na rysunku 1.7 [6, 69]. Na rysunku 1.7a przedstawiono pompę, w której liczba zębów koła wynosiła 3, a wieńca 6, co można symbolicznie

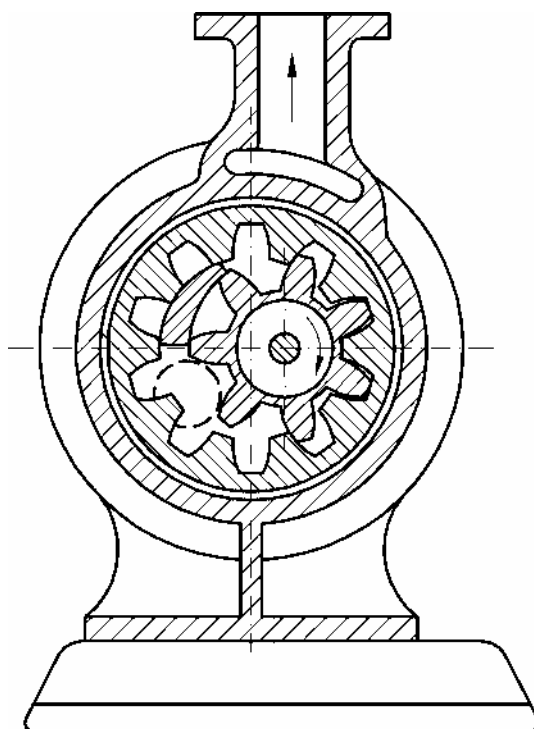
zapisać $z_1/z_2 = 3/6$. Odpowiednio na rysunku 1.7b pokazano pompę o liczbie zębów $z_1/z_2 = 4/8$. W pierwszym przypadku koło zębate o uzębieniu zewnętrznym ma zarys zbliżony do okręgu, koło zaś o uzębieniu wewnętrznym zarys prostoliniowy. W drugim przypadku koła mają zarysy zbliżone do ewolwentowego oraz prostoliniowego. Zasada pracy obu maszyn jest podobna i można ją przeanalizować, korzystając z rysunku 1.7b. Wieniec (1) napędzany jest za pomocą umieszczonego na zewnątrz pompy koła pasowego. Z zębami wienca (1) współpracują zęby koła (2), które obraca się na nieruchomej osi. Przestrzeń ssawną od tłocznej oddziela wkładka sierpowa, z którą współpracują powierzchnie obwodowe kół zębatych (1) i (2). Wkładka stanowi jedną całość z pokrywą, w której jest osadzona oś koła (2). Pompy tego typu były produkowane jeszcze w latach dwudziestych ubiegłego wieku z przeznaczeniem do różnego rodzaju cieczy. Oferowane przez firmę pompy miały wydajność od 80 do 640 dm³/min, a osiągnięte ciśnienia wynosiły 0,15 MPa; zalecane prędkości obrotowe 90–200 obr/min.



Rys. 1.7. Pompy zębate o ząbkowaniu wewnętrznym firmy Selwig U. Lange z 1888 r. [6, 69]

Inne rozwiązanie konstrukcyjne pompy zębatej o ząbkowaniu wewnętrznym zaproponowane zostało przez Fr. Kritzenhalera z Bayreuth w roku 1902 (patent niemiecki D.R.P.Nr.120680). W pompie, którą pokazano na rysunku 1.8 [7, 69], zastosowano ząbkowanie o liczbie zębów 7/10 i zarysie podobnym do ewolwentowego. W tym przypadku napędzane jest koło czynne, a pompa ma wkładkę sierpową, którą można dostosować do powierzchni obwodowych kół i ustalać jej położenie względem pokrywy kadłuba.

Wiek XIX przyniósł znaczny postęp w budowie hydraulicznych maszyn zębatych. Zasób wiedzy o zasadach ich konstruowania był już znaczny. Wyodrębniły się dwa podstawowe typy: o zazębieniu zewnętrznym i wewnętrznym. Korzystając z ważnych osiągnięć kinematyki ząbów, zaczęto stosować cykloidalne zarysy zębów, odchodząc od zarysów kształtowanych według zgrubnych zasad empirycznych właściwych dla XVIII wieku. Nie można wykluczyć, że zastosowano ząbienia ewolwentowe, coraz powszechniej wykorzystywane wtedy w budowie przekładni. Trudno jednak znaleźć na to przekonujące dowody, ponieważ ówczesne opisy patentowe nie podają żadnych informacji o zarysach zębów. Mała liczba zębów, wykorzystywana w tych rozwiązaniach konstrukcyjnych dowodzi, że były to raczej zarysy zbliżone do ewolwentowych. Zauważono także, że luz osiowe i promieniowe wpływają na straty objętościowe maszyn. Pojawiły się pierwsze próby kompensacji luzu promieniowego powstałego na skutek zużycia ściernego elementów wirnika i korpusu. Rozpoznano już w tym czasie zjawisko śtłaczania płynu w międzyzębnych przestrzeniach zasklepionych oraz jego wpływ na obciążenie łożysk i powstawanie drgań i hałasu. Podjęto pierwsze próby odciążenia przestrzeni zasklepionej.



Rys. 1.8. Pompa o zazębieniu wewnętrznym z nastawną wkładką sierpową z 1902 r. [7, 69]

W tym okresie znacznie rozwinęły się procesy wytwórcze maszyn. Powstały precyzyjne metody obróbki skrawaniem, umożliwiające znaczne zmniejszenie odchyłek wykonawczych, szczególnie powierzchni cylindrycznych. Jednocześnie wprowadzano coraz lepsze materiały konstrukcyjne.

Wszystkie te zabiegi miały na celu zwiększenie ciśnienia tłoczenia, sprawności oraz trwałości hydraulicznych maszyn zębatych. W końcu XIX stulecia uzyskiwano ciśnienie robocze o wartości 0,2 MPa. Wydajność dochodziła do kilkuset dm³/min. Hydrauliczne maszyny zębate znalazły zastosowanie do transportu płynów, głównie wody. Maszyny mniejsze zaczęto stosować również do tłoczenia olejów w instalacjach smarowniczych maszyn i urządzeń. Można to uznać za początek ich stosowania jako generatory energii w hydraulicznych układach napędowych.

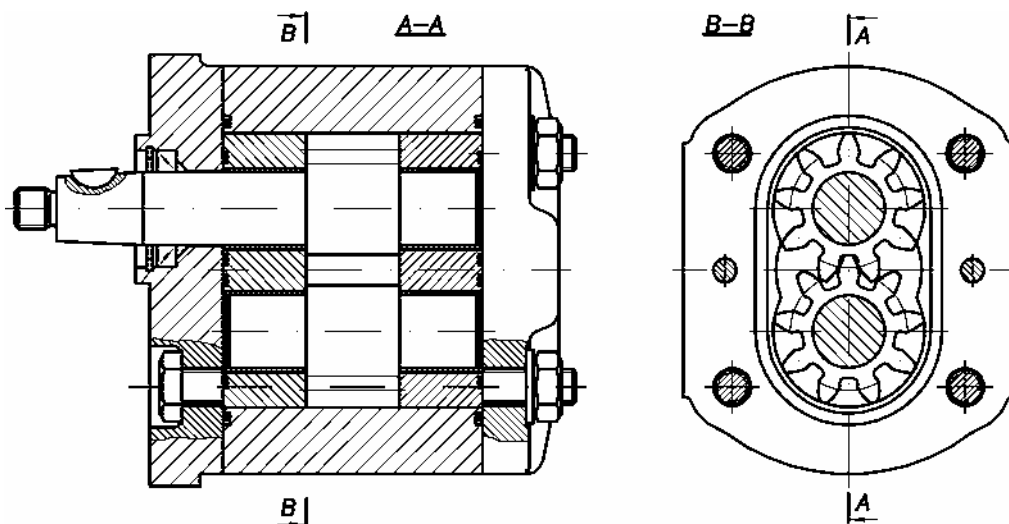
W roku 1926 pojawiła się w Politechnice w Monachium pierwsza rozprawa doktorska dotycząca pomp zębatych pt.: *Zahnradpumpen mit Evolventenverzahnung*. Jej autorem był Rudolf Amman, a ogłoszono ją w *Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München*, Heft 1, Verlag Oldenburg, München 1926 [8]. Jest to praca klasyczna, na którą powołują się wszyscy współcześni autorzy zajmujący się tą dziedziną. Praca pojawiła się w czasach, gdy zaczęto intensywnie pracować nad modernizacją ząbów ewolwentowych. Rozwój w projektowaniu tych ząbów wykorzystano do opracowania podstaw projektowania pomp zębatych. Amman wyprowadził ściśle wzory na wydajność i współczynnik nierównomierności wydajności w zależności od parametrów uzębienia i ząbienia kół ewolwentowych. Wykazał on m.in., że nierównomierność wydajności maleje wraz ze wzrostem liczby zębów w kołach zębatych. Duża liczba zębów powoduje z kolei wzrost liczby przyporu i powiększanie przestrzeni zasklepionej, którą trzeba odciążać, stosując różne zabiegi konstrukcyjne.

Dążąc systematycznie do zwiększania ciśnienia roboczego, zdecydowano się na przyjmowanie liczby zębów zbliżonej do granicznej liczby zębów. Mała liczba zębów i duże moduły oraz korelacja zarysu ząbienia pozwalały ponadto na zbudowanie pompy o mniejszych wymiarach.

Systematyczne poszukiwania możliwości zwiększenia ciśnienia roboczego, sprawności objętościowej oraz trwałości pomp zaowocowały wprowadzeniem układu kompensacji luzów osiowych. Pierwszą europejską firmą, która oferowała od 1936 roku pompy z tego rodzaju udoskonaleniem była niemiecka firma Roth–Lauck.

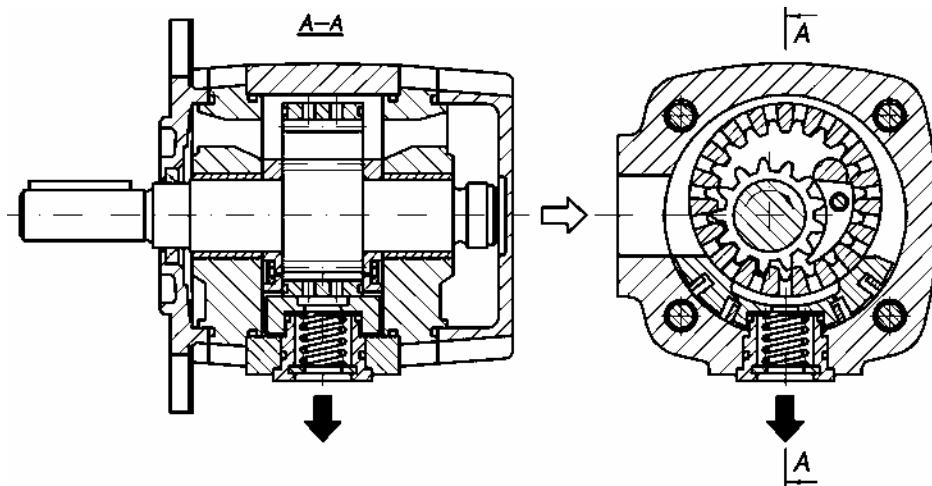
Począwszy od lat 50. ubiegłego wieku, kiedy to napęd hydrostatyczny zaczął się rozpowszechniać w wielu dziedzinach techniki, rozpoczął się systematyczny proces rozwoju pomp i silników zębatych o ząbieniu ewolwentowym. Proces ten wynikał z ogólnego rozwoju techniki, a przede wszystkim z postępu w dziedzinie konstrukcji i technologii kół zębatych oraz rozwoju inżynierii materiałowej.

Przodowały firmy amerykańskie, brytyjskie i niemieckie, również w Polsce, począwszy od lat pięćdziesiątych, rozpoczęto produkcję pomp zębatych w zakładach przemysłu obrabiarkowego, lotniczego oraz maszyn budowlanych. W Wytwórni Sprzętu Komunikacyjnego we Wrocławiu, którą potem przemianowano na Kombinat PZL Hydral, opracowano konstrukcje kolejnych typoszeregów pomp zębatych typu PZ, PZ2 i PZ3. Rozwojem tego typoszeregu zajęła się Wytwórnia Pomp Hydraulicznych z Wrocławia, która w roku 2001 wyprodukowała pompę PZ4 (rys. 1.9) [9, 69]. Zastosowano w niej koła o 10 zębach, poddane korekcji P. Pompa ma kompensację luzów osiowych oraz odciążenie przestrzeni zasklepionej. Mogła pracować pod ciśnieniem roboczym do 28 MPa z wydajnością właściwą $q = 1-80 \text{ cm}^3/\text{obr}$, zachowując sprawność całkowitą $\eta = 90\%$.

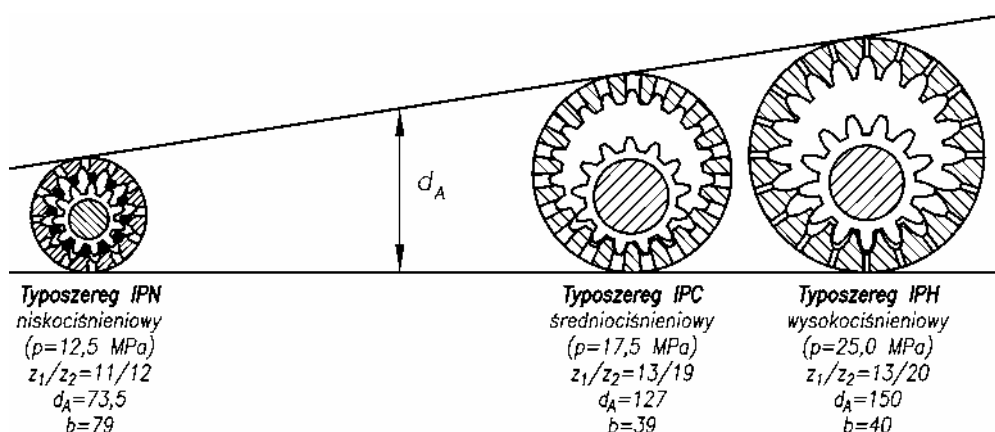


Rys. 1.9. Pompa zębata PZ4 o ząbieniu zewnętrznym ewolwentowym produkcji firmy WPH Wrocław z 2001 r. [9, 69]

W roku 1966 pojawiła się na rynku europejskim pompa według patentu Otto Eckerlego [69] (rys. 1.10). Produkcję pomp tego typu, o wydajnościach właściwych $q = 3,6-15,8 \text{ cm}^3/\text{obr}$, rozpoczęła firma Otto Eckerle z Malsch (Niemcy), a później rozszerzyła firma Voith-Getriebe z Heidenheim (Niemcy), wytwarzając pompy o wydajności właściwej $q = 20,7-125,9 \text{ cm}^3/\text{obr}$. Jest to pompa o ząbieniu wewnętrznym ewolwentowym, korygowanym. Pompy te mają kompensację luzów osiowych i promieniowych, co zapewnia wysoką sprawność oraz ciśnienie robocze. Sprawność objętościowa wynosi do 0,97, całkowita do 0,92 pod ciśnieniem roboczym dochodzącym



Rys. 1.10. Pompa o zazębieniu wewnętrznym ewolwentowym produkcji firmy Otto Eckerle z 1966 r. [69]



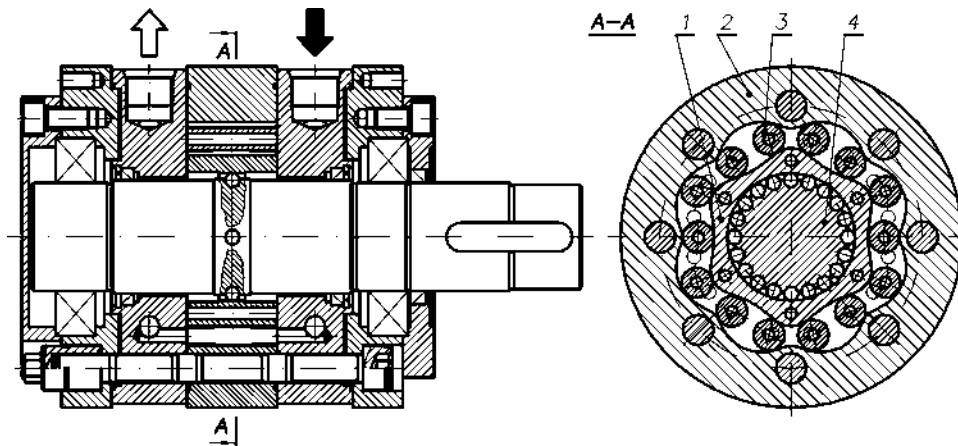
Rys. 1.11. Rozwiązania konstrukcyjne zazębienia ewolwentowych, stosowanych w pompach firmy Otto Eckerle [69]

do 30 MPa. Przez blisko 40 lat firma systematycznie rozwijała i ulepszała swoje pompy. Dotyczy to m. in. wariantowania rozwiązań konstrukcyjnych zespołów kół zębatych. Jak pokazano na rysunku 1.11, w typoszeregu niskociśnieniowym IPN ($p = 12,5$ MPa) stosuje się zazębienie $z_1/z_2 = 11/12$, w którym międzyzębne komory wyporowe są uszczelnione wkładkami ze specjalnego tworzywa. Z kolei w typoszeregu średniociśnieniowym IPC ($p = 17,5$ MPa) stosuje się zazębienie $z_1/z_2 = 13/19$, w typoszeregu wysokociśnieniowym IPH ($p = 25$ MPa) zazębienie $z_1/z_2 = 13/20$. W obu przypadkach

wykorzystywana jest wkładka sierpowa. Na rysunku widać także, że im mniejsza jest różnica zębów $z_2 - z_1$, tym mniejsza jest średnica d_A zespołu kół, a w związku z tym gabaryty pompy. Szerokość kół b podana na rysunku jest zależna od wydajności pompy.

W oryginalny sposób wykorzystywano ewolwentowe zazębienie wewnętrzne w wolnoobrotowym silniku wysokomomentowym typu HS, zaprojektowanym przez B. Sieniawskiego [10, 69] (rys. 1.12). Zespół kół zębatych składa się z „sześciokątne- go” koła centralnego (1) o uzębieniu zewnętrznym, okrągłych satelitów (3) o uzębieniu zewnętrznym oraz „ośmiokątne- go” wieńca (3) o uzębieniu wewnętrznym. Komory wyporowe są utworzone pomiędzy kołem centralnym, wieńcem a satelitami. Ich zasilenie odbywa się kanałami znajdującymi się w płycie bocznej i powoduje przetaczanie się satelitów (3) po nieruchomym wieńcu (2), a jednocześnie po kole centralnym (1), które zostaje wprowadzone w ruch obrotowy. Ze względu na krzywkowe kształty koła słonecznego i bieźni oraz obiegowy ruch satelitów silnik ten nazwano obiegowo-krzywkowym. Silniki tego typu charakteryzują się chłonnością właściwą $q = 500\text{--}6300 \text{ cm}^3/\text{obr}$ i pracują pod ciśnieniem roboczym do $p = 20 \text{ MPa}$.

Zadanie zaprojektowania zespołu dwóch kół zębatych o zazębieniu wewnętrznym i różnicy zębów $z_2 - z_1 = 1$ szczegółowo rozważał Amerykanin Miron F. Hill. Nazwał on taki typ zazębienia gerotorowym, a nazwę zazębienia utworzył, zestawiając słowa Generated ROTOR.

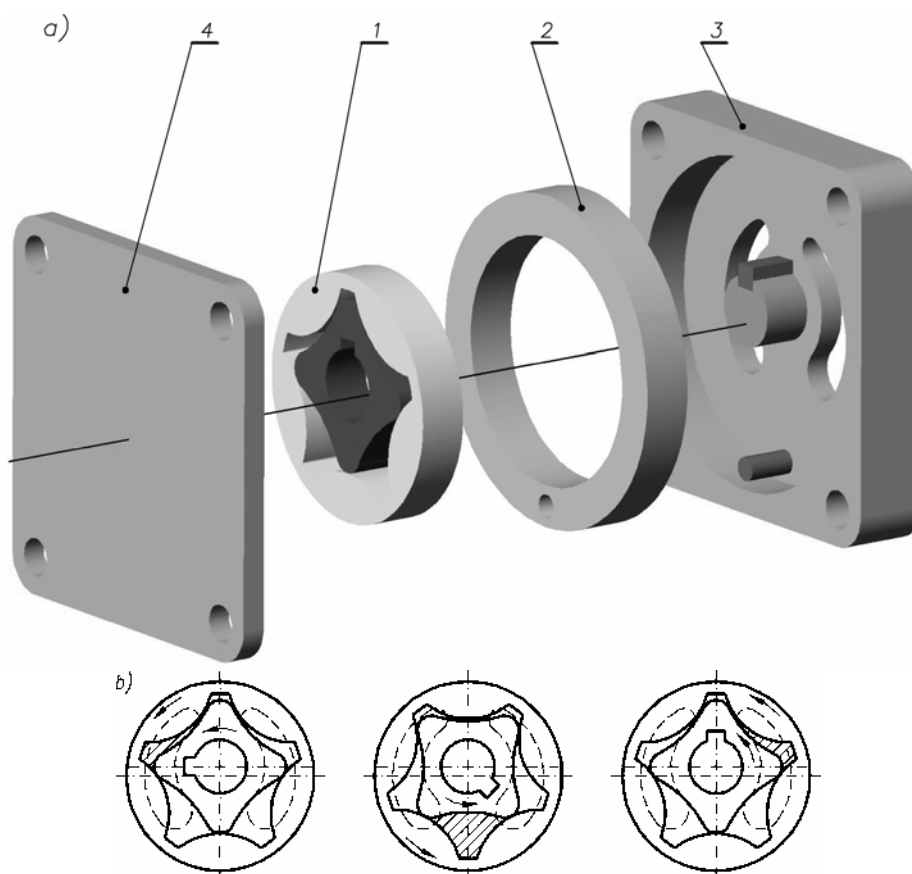


Rys. 1.12. Silnik obiegowo-krzywkowy typu HS B. Sieniawskiego z 2000 r. [10, 69]

W swojej książce: *Kinematics of gerotor*, opracowanej na początku XX wieku opisuje prace Gallowaya (1788), Nasha i Tildena (1879), Cooley'a (1900), Lilly'ego (1915) i Feuerheerda (1918), zmierzające do zbudowania zespołu gerotorowego i zastosowania go do pomp wyporowych. Hill wykonał z pomocą Bilgrama z Filadelfii pierwszy model pompy gerotorowej i zainteresował nim w roku 1930 Nicholasa, wła-

ściociela firmy W.H. Nichols Comp. w Walham, Mass. Elementy zespołu gerotorowego miały niedoskonały kształt i wymagały pracochłonnego docierania. Po długich próbach Nichols osiągnął właściwe zarysy, które opatentował w roku 1937 [11]. Budowę i zasadę działania pompy wyprodukowanej przez firmę Nicholisa pokazano na rysunku 1.13.

Pompa składa się z zespołu kół gerotorowych (1): bieżni – łożyska (2), korpusu przedniego (3) z wałem napędowym i kanałami nerkowymi oraz korpusu tylnego (4) (rys. 1.13b). Koła zespołu gerotorowego mają zarys ukształtowany przez krzywe cykloidalne lub też ich mutacje. Ponieważ różnica zębów obu kół wynosi 1, uzyskuje się więc jednoczesną współpracę wszystkich zębów obu kół. Formują się przez to zamknięte międzyzębne komory wyporowe. Wraz z obrotem kół zwiększają one najpierw swoją objętość, co powoduje zasysanie czynnika z nerki ssawnej, a potem zmniejszają objętość, w rezultacie czego wytłaczanie czynnika do nerki tłocznej.



Rys. 1.13. Pompa gerotorowa Nicholisa z 1937 r.: a) budowa pompy, b) zasada działania [11]

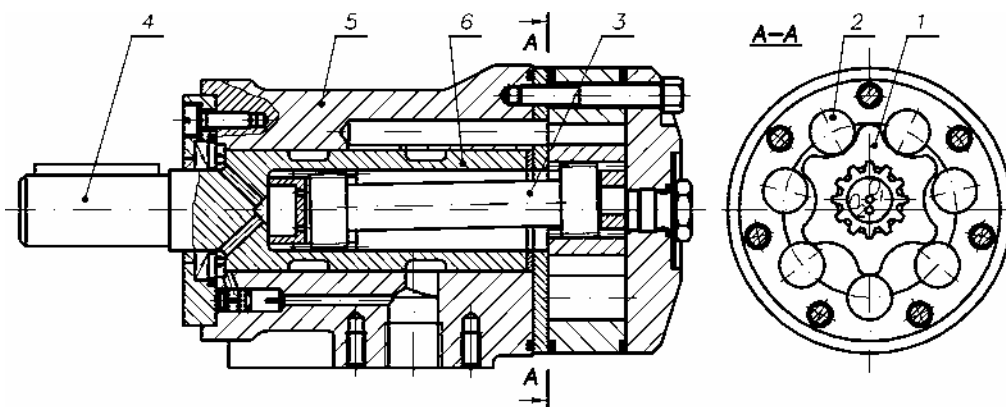
Wprowadzenie zazębień cykloidalnych do budowy pomp dało duże korzyści:

- uzyskano dużą zwartość konstrukcji zespołu kół,
- otrzymano bardzo korzystny rozkład nacisków międzyzębnych,
- otrzymano duże wydajności w stosunku do gabarytów zespołu,
- zmniejszono do minimum przestrzeń zasklepioną,
- uzyskano lepsze warunki zasysania i wyłaczania czynnika.

Koła cykloidalne mogły pracować przy osiach ustalonych, lecz także w przypadku osi ruchomych. Koło o uzębieniu zewnętrznym może przemieszczać się ruchem planetarnym wewnątrz nieruchomego koła o uzębieniu wewnętrznym.

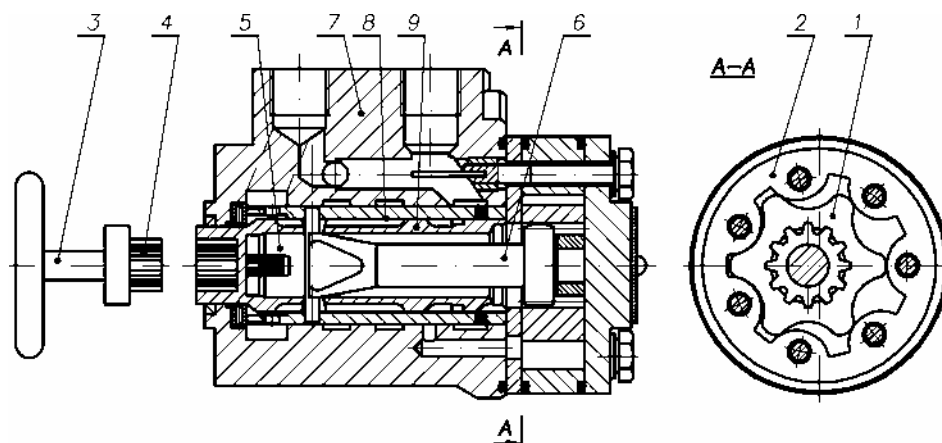
Cechę tę wykorzystał w latach pięćdziesiątych XX w. Lynn L. Charlson, który w firmie Char–Lynn wyprodukował dwie nowe hydrauliczne maszyny zębate, tzn. wolnoobrotowy silnik wysokomomentowy Orbit oraz blok sterujący Orbitrol [12, 69].

Na rysunku 1.14 przedstawiono wolnoobrotowy silnik wysokomomentowy typu Orbit. Zasadniczą rolę odgrywa w nim zespół kół (1, 2) o zazębieniu wewnętrznym cykloidalnym i liczbie zębów $z_1/z_2 = 6/7$. Pomiedzy zębami obu kół są utworzone międzyzębne komory wyporowe, do których kolejno wtłaczany jest olej systemem kanałów uformowanych pomiędzy korpusem (5) i tuleją obrotową (6). Powoduje to ruch planetarny koła (1) względem nieruchomego koła (2). Powstający w ten sposób moment obrotowy jest przekazywany za pomocą wału pośredniego (3) na wał wyjściowy silnika (4). Ze względu na ruch planetarny (orbitalny) koła (1) wał wyjściowy (4) obraca się z wielokrotnie mniejszą prędkością niż to koło. Jednocześnie ruch planetarny powoduje, że silnik charakteryzuje się znacznie większą chłonnością, a w rezultacie dużym momentem rozwijanym na wale wyjściowym.



Rys. 1.14. Silnik orbitalny wolnoobrotowy wysokomomentowy firmy Danfoss z lat 60. XX w. [12, 69]

Na rysunku 1.15 przedstawiono blok sterujący Orbitrol, służący do wspomagania kierownicy w układach skrętu ciężkich pojazdów [12, 69]. W tym przypadku zasadniczą rolę odgrywa zespół kół cykloidalnych (1, 2) o liczbie zębów $z_1/z_2 = 6/7$, w którym utworzone są międzyzębne komory wyporowe. Kolumna kierownicza (3) jest połączona sprzęgłem (4) oraz łącznikiem (5) z wałem pośrednim (6). Za jego pomocą wprawia w ruch koło o uzębieniu zewnętrznym (1). Do komór wyporowych dostarczany jest czynnik roboczy układem kanałów utworzonych pomiędzy korpusem (7) oraz tulejami (8) (9) obracającymi się wspólnie z kolumną kierowniczą. Równoległym biegnącym układem komór – utworzonym między tymi samymi elementami – jest dostarczany czynnik roboczy do cylindrów układu skrętu. Produkcję silników Orbit i bloków Orbitrol rozwinęła w Europie w latach 60. duńska firma Danfoss. Na przełomie lat 70. i 80. XX w. Fabryka Maszyn Rolniczych Agromet-Pilmet z Wrocławia podjęła produkcję tych maszyn na licencji duńskiej. Z licencji wyłączono zespół kół cykloidalnych. Dla Pilmetu autor opracował zasady projektowania i wytwarzania tych kół. Szczegółowo opisano to w rozdziale 10.

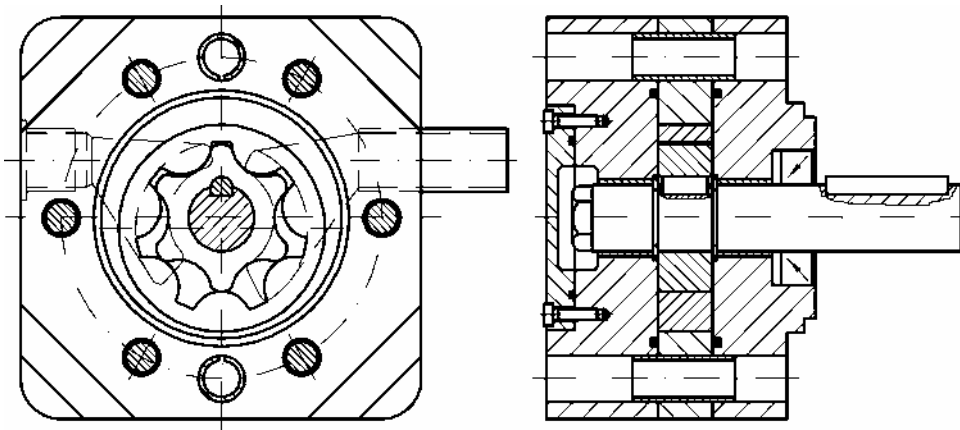


Rys. 1.15. Blok sterujący Orbitrol firmy Danfoss z lat 60. XX w. [12, 69]

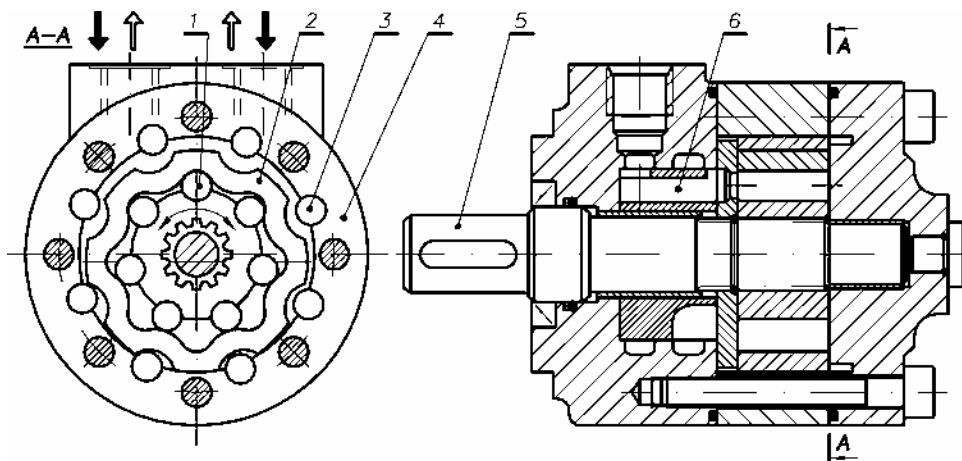
W roku 1974 firma niemiecka Gebr. Heller wprowadziła na rynek pompę, którą nazwała Ring-Rotor-Pumpe (pompa z wirnikiem pierścieniowym) [13, 69]. Jak widać na rysunku 1.16 jest to pompa gerotorowa, w której zastosowano zazębienie epicykloidalne o liczbie zębów $z_1/z_2 = 6/7$. Zasada jej działania jest taka sama jak pompy Nicholsa pokazanej na rysunku 1.13.

W latach 80. ubiegłego wieku niemiecka firma Rexroth przedstawiła oryginalne rozwiązanie konstrukcyjne wolnoobrotowego silnika wysokomomentowego, nazywanego planetarnym [14, 69]. Jak widać na rysunku 1.17, podstawowym zespołem w tym silniku jest zespół kół cykloidalnych (1) i (2) o zazębieniu wewnętrznym oraz

liczbie zębów $z_1/z_2 = 7/8$. Olej dostarczony do międzyzębnych komór wyporowych wprawia w ruch planetarny koło o uzębieniu wewnętrznym (2), które przetacza się ruchem planetarnym po kole o uzębieniu zewnętrznym (1), wprawiając je w ruch obrotowy. Koło (2) jest jednocześnie prowadzone na swej zewnętrznej powierzchni poprzez rolki (3) umieszczone w korpusie (4). Koło o uzębieniu zewnętrznym wprawia w ruch wał napędowy silnika (5). Zasilanie międzyzębnych komór wyporowych i spływ oleju z silnika odbywa się poprzez komutator (6).

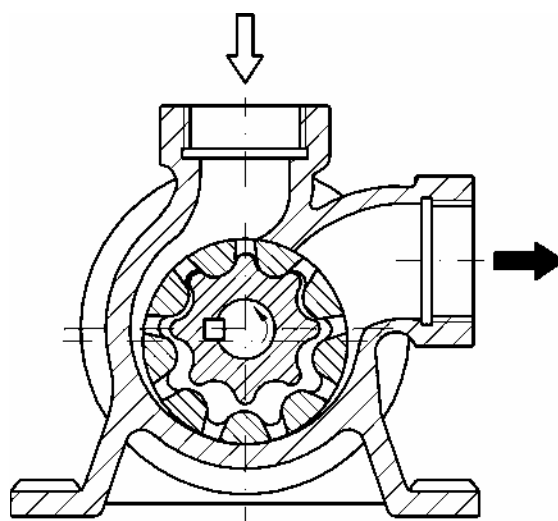


Rys. 1.16. Pompa gerotorowa firmy Heller z 1974 r. [13, 69]



Rys. 1.17. Silnik planetarny wolnoobrotowy wysokomomentowy firmy Rexroth z lat 80. XX w. [14, 69]

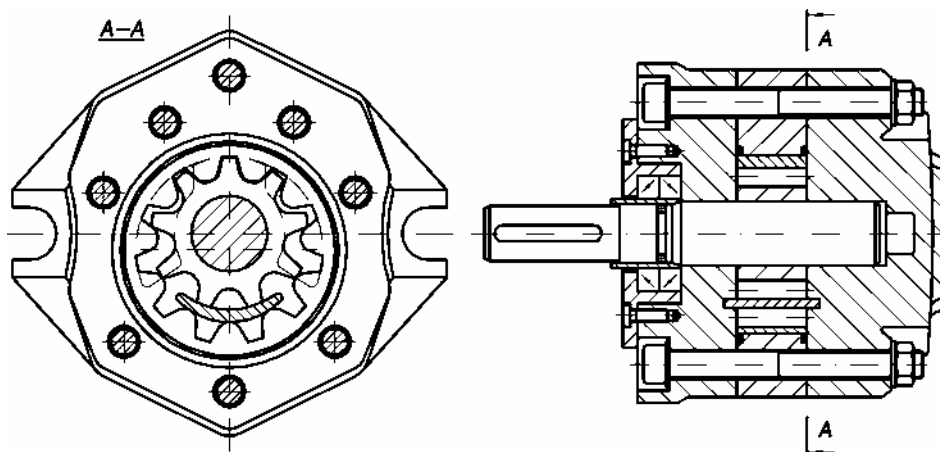
Prócz prezentowanych zarysów ewolwentowych i cykloidalnych w budowie maszyn hydraulicznych stosowano inne specjalne zarysy. Jeszcze w latach 40. ubiegłego stulecia w Stanach Zjednoczonych wyprodukowano pompę gerotorową R.I.S. Pigotta, którą przedstawiono na rysunku 1.18 [15, 69]. Budowa i zasada działania jest taka sama jak w przypadku pompy Nicholisa (rys. 1.13). Charakterystyczne natomiast jest zazębienie o liczbie zębów $z_1/z_2 = 8/9$ i zarysie ukształtowanym według spirali logarymicznej.



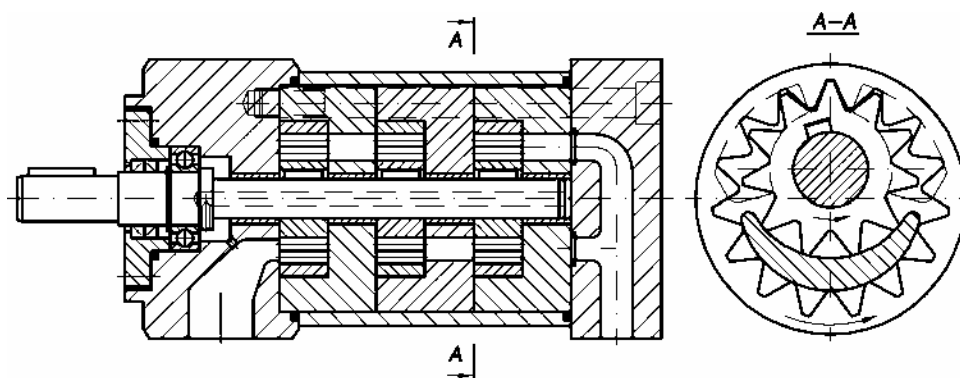
Rys. 1.18. Pompa gerotorowa Pigotta z kołami zębatymi o logarytmicznym zarysie zębów z lat 40. XX w. [15, 48]

Na początku lat 70. XX w. firma Zollern Hydraulik GmbH Aulendorf z Niemiec podjęła produkcję pompy nazwanej trochocentryczną, którą pokazano na rysunku 1.19 [16, 48]. Jest to pompa o zazębieniu wewnętrznym trochoidalnym i liczbach zębów $z_1/z_2 = 9/11$. Zarysy zębów obu kół są uformowane z wykorzystaniem łuków hipocykloid. Różnica liczby zębów jest równa 2, w związku z tym do rozdzielenia strefy ssawnej i tłocznej użyto wkładki sierpowej. Zasada pracy tej pompy jest taka sama jak pomp gerotorowych.

W tym samym okresie pojawiło się oryginalne rozwiązanie konstrukcyjne pompy wielostopniowej o zazębieniu wewnętrznym typu QT wyprodukowanej przez firmę Bucher KG Maschinenfabrik Klettgau (Niemcy), którą przedstawiono na rysunku 1.20 [48, 69]. Zastosowano w niej specjalny zarys zębów według pomysłu Paula Truninngera (Szwajcaria), opatentowanego również w Niemczech (D. P. Nr 1653912 z 16.01.1966 r.). Bok zęba jest uformowany przez łuk o bardzo małej krzywiznie. Sprawia to, że ząb ma kształt zbliżony do trapezu. Przy takim zarysie uzyskano koła o liczbach zębów $z_1/z_2 = 11/15$. Różnica liczby zębów jest równa 4, tak więc i w tej pompie należało zastosować wkładkę sierpową, oddzielającą strefę ssawną od tłocznej.



Rys. 1.19. Pompa o ząbieniu wewnętrznym trochoidalnym firmy Zollern Hydraulik z lat 70. XX w. [16, 48]



Rys. 1.20. Pompa o ząbieniu wewnętrznym systemem Trunnigera firmy Bucher z lat 70. XX w. [48, 69]

W wieku XX nastąpił dalszy postęp w rozwoju hydraulicznych maszyn zębatych. Maszyny te przekształciły się z prostych pomp zębatych, stosowanych pod koniec XIX wieku do tłoczenia wody, w wyrafinowane pod względem budowy jednostki spełniające w hydraulicznych układach napędowych rolę generatorów energii hydraulicznej, silników oraz elementów sterujących. Rozwój ten umożliwiło rozwiązanie wielu zagadnień teoretycznych, takich jak m.in. obliczanie ząbienia, wyznaczenie wydajności i jej nierównomierności, ustalenie zasad projektowania kompensacji luzów osiowych oraz sposobów odciażania przestrzeni zasklepionej. Bardzo istotną rolę odegrał też postęp w dziedzinie technologii oraz inżynierii materiałowej.

1.2. Znaczenie kół zębatych w budowie maszyn hydraulicznych

Cel pracy

Rodzina hydraulicznych maszyn zębatych obejmuje takie jednostki, jak: pompy zębate o zazębieniach zewnętrznych (rys. 1.9) i wewnętrznych (rys. 1.10), pompy gerotorowe (rys. 1.13, 1.16), silniki zębate szybko- i wolnoobrotowe, silniki gerotorowe i orbitalne (rys. 1.14, 1.17), bloki sterujące (rys. 1.15), wzmacniacze momentu, synchronizatory przepływu, wielofunkcyjne maszyny hydrauliczne zębate (rys. 10.9). Maszyny te pracują z wydajnością (chłonnością) właściwą wynoszącą od ułamka cm^3/obr do wielu tysięcy cm^3/obr , pod ciśnieniem roboczym dochodzącym do 20–30 MPa i ze sprawnością całkowitą powyżej 90%. Trwałość tych jednostek wynosi kilka tysięcy godzin przy zapewnieniu stabilnej i niezawodnej pracy.

Na podstawie cech wspólnych wymienionych jednostek można opracować schemat ogólny hydraulicznej maszyny zębatej (rys. 1.21). Zgodnie z nim w maszynie można wyznaczyć dwa zasadnicze zespoły:

- zespół kół zębatych (1),
- zespół korpusu (2).

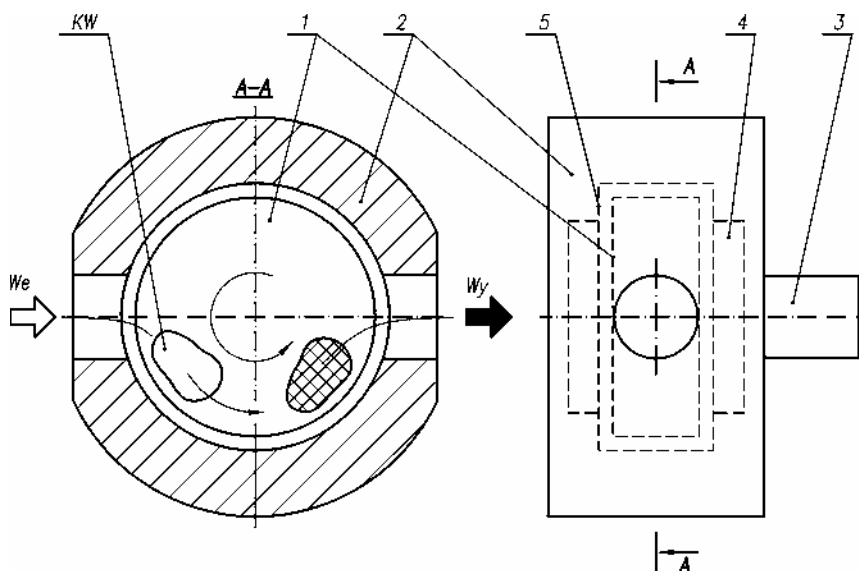
Zespół kół zębatych (1) służy do uformowania międzyzębnych komór wyporowych (KW), które są wprawiane w ruch obrotowy i transportują czynnik roboczy pomiędzy wejściem (We) i wyjściem (Wy) maszyny. Zespół kół zębatych charakteryzuje się:

- zarysem uzębienia (typowe są zarysy cykloidalne, ewolwentowe, specjalne),
- rodzajem zazębienia (zewnętrzne, wewnętrzne),
- liczbą kół (zespoły dwu- i wielokołowe),
- rodzajem ruchu kół (ruch kół przy osiach stałych i ruchomych),
- funkcjami spełnianymi przez koła (funkcja pompowa, silnikowa).

Zespół korpusu (2) służy do umieszczenia w nim zespołu kół, a jednocześnie do uformowania układu kanałów i szczelin wewnętrznych w maszynie, zapewniających dopływ i odpływ czynnika roboczego z międzyzębnych komór wyporowych. Zespół korpusu składa się zazwyczaj z kilku części.

Z zespołem kół zębatych (1) współpracują elementy napędzające, jak wały (3) oraz elementy podtrzymujące je w ruchu – łożyska (4). Z zespołem kół zębatych współpracują także elementy formujące, czy też ograniczające komory wyporowe, jak płyty czy wkładki kompensacyjne, które oznaczono jako (5). Oczywiście elementy (3), (4) i (5) są umieszczone w korpusie maszyny hydraulicznej (2) i w związku z tym współpracują również z nim. Oprócz tego, w maszynie hydraulicznej znajdują się inne elementy, jak pierścienie uszczelniające czy elementy złączne, które, aczkolwiek niezbędne, spełniają rolę wspomagającą i zabezpieczającą proces przemiany energii mechanicznej w hydrauliczną (lub odwrotnie).

Z analizy schematycznego rysunku hydraulicznej maszyny zębatej (rys. 1.21) widać, że zespół kół zębatych (1) wpływa na rozwiązanie konstrukcyjne całej maszyny. Wpływa on na kształt i wymiary komory wyporowej (*KW*) oraz elementów ograniczających tę komorę (5). Wpływa także na kształt i wymiary korpusu (2), elementów napędowych (3) i łożyskowych (4). Postać konstrukcyjna zespołu kół zębatych oraz sposób ich działania wpływa również w istotny sposób na przebieg zjawisk i procesów, zachodzących w maszynie oraz na wartość osiąganych parametrów technicznych. Koła maszyn hydraulicznych mają specyficzne cechy konstrukcyjne niespotykane w przekładniach zębatych. Jednocześnie, aby takie koła wykonać, należy często zastosować specjalistyczne procesy technologiczne. W tej sytuacji konieczne jest poświęcenie specjalnej uwagi kołom zębatym maszyn hydraulicznych.



Rys. 1.21. Schemat ogólny hydraulicznej maszyny zębatej: 1 – zespół kół zębatych, 2 – korpus, 3 – wał, 4 – łożysko, 5 – elementy ograniczające komorę wyporową, *KW* – komora wyporowa

Odpowiednio jako cel pracy przyjęto dokonanie syntezy wiedzy z zakresu konstrukcji, technologii oraz hydrauliki służącej do projektowania kół zębatych maszyn hydraulicznych. Jako weryfikację i dowód przydatności tej wiedzy zaplanowano przedstawienie przykładów rozwiązań konstrukcyjnych różnych zespołów kół, które zastosowano w maszynach hydraulicznych, wykonanych w praktyce. Niektóre z tych maszyn są produkowane i sprzedawane na rynku, inne wykonane w formie prototypów oczekują na wdrożenie.

W ramach takiego systematycznego podejścia do problemu można wyznaczyć kilka zadań szczegółowych.

1. Sformułowanie ogólnych zasad projektowania kół zębatach maszyn hydraulicznych. Należy zwrócić uwagę na podstawowe krzywe, wykorzystywane do projektowania kół, ich klasyfikację i opis matematyczny. Należy także wskazać zasady wykorzystywania tych krzywych do formowania zębów, kół i zespołów kół zębatach.

2. Opracowanie podstaw geometrii i kinematyki tych kół. Przyjawszy za podstawę koła ewolwentowe i klasyczny ich zapis graficzny i matematyczny można w podobny sposób prowadzić zapis innych rodzajów kół, nieznanymi często szerszemu gronu Czytelników, a mających znaczenie w praktyce. Jednorodny zapis ułatwi wzajemne porównanie kół stosowanych w maszynach hydraulicznych.

3. Wyznaczenie sił międzyzębnych w zespołach rozważanych kół. Również i w tym przypadku wykorzystano zasady stosowane w kołach ewolwentowych i zastosowano je do opisu kół o innych zarysach. Znajomość tych sił pozwoli na ustalenie obciążeń wspomnianych elementów i zespołów maszyny hydraulicznej, takich jak korpusy, wały, łożyska.

4. Przedstawienie technologii kół zębatach. Należy nakreślić zasady prowadzenia procesów technologicznych, dotyczących zębatach kół ewolwentowych, akcentując procesy szczególnie przydatne w budowie maszyn hydraulicznych. Specjalną jednak uwagę należy zwrócić na technologie kół cykloidalnych maszyn hydraulicznych, omawiając procesy oraz stosowane w nich maszyny i narzędzia wytwórcze.

5. Opisanie procesów przetwarzania energii w maszynach hydraulicznych za pomocą kół zębatach. Wykorzystana do tego będzie zasada równowagi energii mechanicznej i hydraulicznej oraz jednolity układ parametrów geometrycznych, kinematycznych oraz hydraulicznych. Umożliwi to sformułowanie wzorów do obliczeń takich wielkości, jak wydajność (chłonność) i nierównomierność wydajności (chłonności) maszyn z różnymi typami ząbów. W rezultacie możliwe będzie porównanie między sobą tych maszyn.

6. Zaprezentowanie przykładów projektowania charakterystycznych zespołów kół zębatach, zastosowanych w maszynach hydraulicznych. Będą to rozwiązania autorskie, które wykażą przydatność przedstawionej wiedzy oraz sposoby jej zastosowania w projektowaniu obiektów technicznych.

Takie syntetyczne ujęcie problemu kół zębatach maszyn hydraulicznych, gdzie opisano łącznie zagadnienia konstrukcji, technologii i hydrauliki, jest pewną nowością w literaturze przedmiotu. Wydaje się, że może być ono wartościowe ze względów naukowych, poszerza bowiem wiedzę na temat podstaw konstrukcji pewnej klasy maszyn. Jednocześnie może to być istotne ze względów użytkowych, przedstawienie bowiem przykładów rozwiązań konstrukcyjnych różnych zespołów kół, w różnych jednostkach pokazuje możliwości rozwoju w tej dziedzinie techniki.

2. Ogólne zasady projektowania kół zębatach

2.1. Krzywe cykloidalne

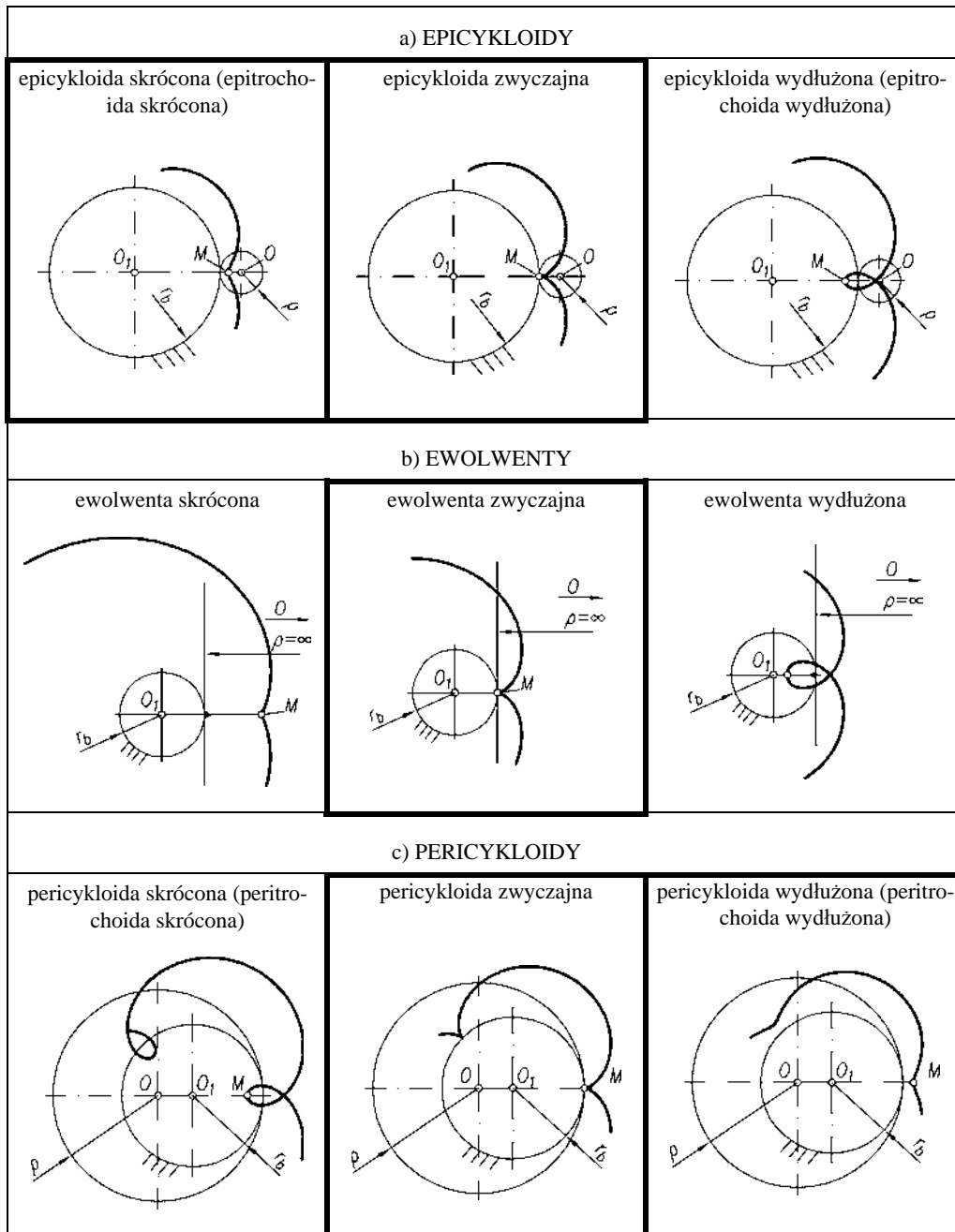
Początkowo w wiekach XVII i XVIII były to koła z zębami ukształtowanymi intuicyjnie według dowolnie wybranych krzywych, takich jak okręgi, łuki o różnej krzywiznie, czy też odcinki prostej (rys. 1.1, 1.2). Później, w wiekach XVIII i XIX, do formowania kół zębatach zaczęto stosować krzywe cykloidalne (rys. 1.4, 1.5, 1.6). Pod koniec XIX wieku oraz w wieku XX stosowano już powszechnie zarysy ewolwentowe, zarówno do zespołów kół o zazębieniach zewnętrznych, jak i wewnętrznych (rys. 1.7–1.11). Jednocześnie w wieku XX rozwijano koła o różnorodnych zarysach cykloidalnych (rys. 1.13–1.16). Wprowadzono także do budowy maszyn hydraulicznych koła o zarysach specjalnych (rys. 1.17, 1.18). Największe jednak znaczenie miały zarysy cykloidalne oraz wywodzące się z nich zarysy ewolwentowe. W związku z tym na rysunku 2.1 rozważano [17, 56] rodziny krzywych cykloidalnych, stanowiące podstawę do formowania uzębienia kół zębatach maszyn hydraulicznych.

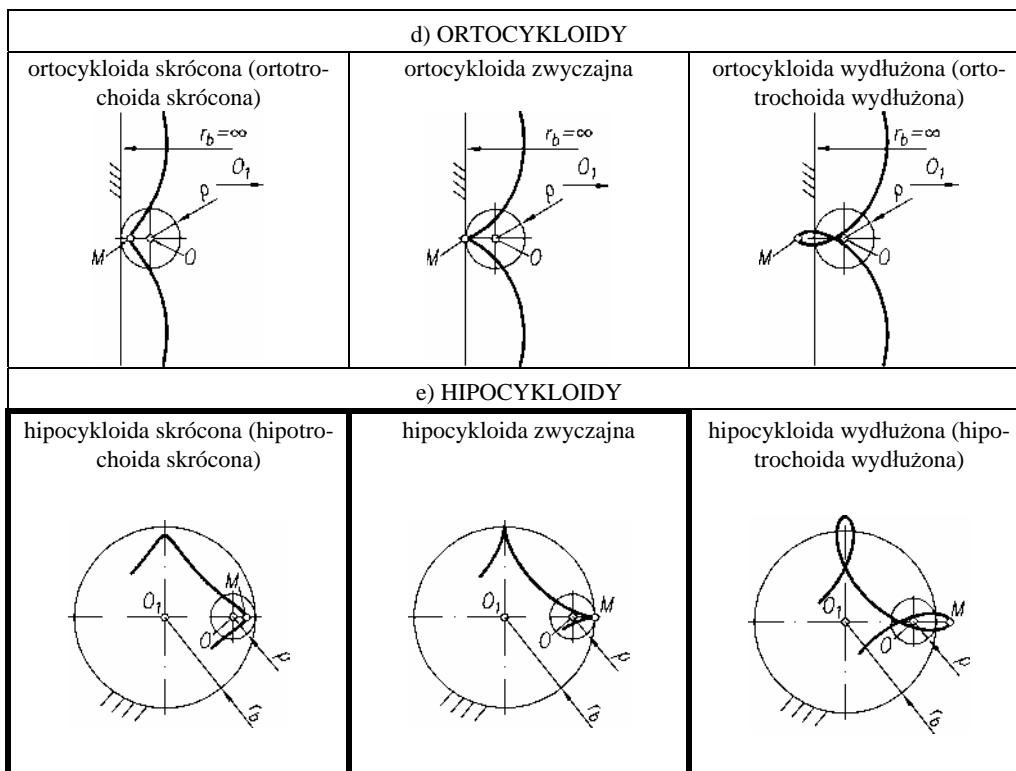
Wyróżnia się trzy podstawowe grupy krzywych, tzn. epicykloidy, ortocykloidy i hipocykloidy oraz dwie grupy dodatkowe, tzn. ewolwenty i pericykloidy. We wszystkich przypadkach krzywe cykloidalne kreśli punkt M , związany z kołem ruchomym o środku O i promieniu ρ , które toczy się bez poślizgu po kole nieruchomym o środku O_1 i promieniu r_b . W dalszych etapach projektowania koło nieruchome nazywa się często kołem zasadniczym, co oznacza, że jest bazą do formowania zarysu zęba.

Odpowiednio – **epicykloidy** (rys. 2.1a) powstają przez przetaczanie koła o promieniu ρ po zewnętrznej stronie koła zasadniczego o promieniu r_b . Jeśli punkt M leży wewnątrz koła ruchomego, to otrzymuje się epicykloidę skróconą, jeśli na jego obwodzie, to otrzymuje się epicykloidę zwyczajną, jeśli na zewnątrz, to otrzymuje się epicykloidę wydłużoną.

Specjalnym przypadkiem epicykloid są **ewolwenty** (rys. 2.1b) – powstają podczas przetaczania koła o promieniu $\rho = \infty$, czyli prostej po zewnętrznej stronie koła zasadniczego o promieniu r_b . Jeśli punkt M leży wewnątrz koła ruchomego, to otrzymuje się ewolwentę skróconą, jeśli na jego obwodzie, to otrzymuje się ewolwentę zwyczajną, a jeśli na zewnątrz, to otrzymuje się ewolwentę wydłużoną.

Czasami w literaturze [18] wyróżnia się **pericykloidy** (rys. 2.1c) – krzywe te powstają podczas obtaczania koła o promieniu ρ po zewnętrznej stronie koła o promieniu $r_b < \rho$. Tak jak w poprzednich przypadkach, jeśli punkt M leży wewnątrz okręgu ruchomego, to otrzymuje się pericykloidę skróconą, jeśli na jego obwodzie, to otrzymuje się pericykloidę zwyczajną, jeśli na zewnątrz okręgu ruchomego, to otrzymuje



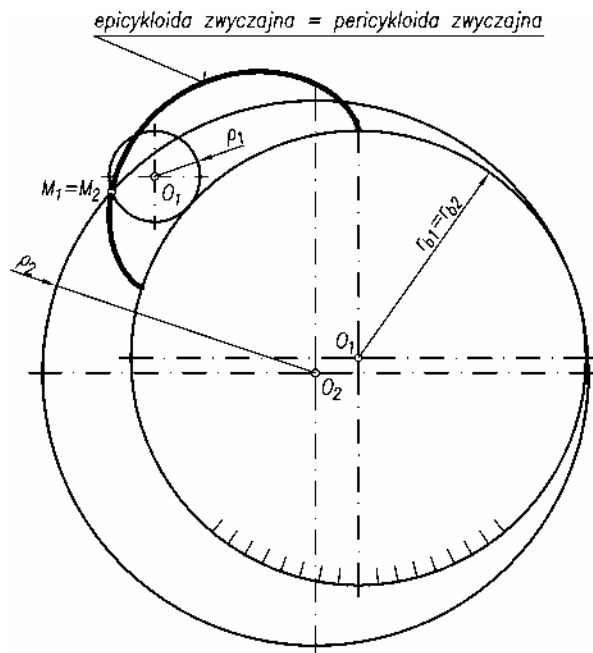


Rys. 2.1. Rodzina krzywych cykloidalnych

się pericykloidę wydłużoną. Pericykloidy są równoważne epicykloidom. Udowodniono to w [19], a pokazano na rysunku 2.2. Na rysunku widać, że epicykloidę zwyczajną rysuje punkt M_1 , znajdujący się na obwodzie koła o środku O_1 i promieniu ρ_1 , które przetacza się po zewnętrznej stronie koła zasadniczego o promieniu r_{b1} . Jednocześnie taką samą krzywą, nazywaną pericykloidą zwyczajną, rysuje punkt M_2 , znajdujący się na obwodzie koła o środku O_2 i promieniu ρ_2 , które przetacza się po zewnętrznej stronie koła zasadniczego o promieniu $r_{b2} = r_{b1}$. Podobnie można wykazać równoważność epicykloidy skróconej i pericykloidy wydłużonej oraz epicykloidy wydłużonej i pericykloidy skróconej.

Ortocykloidy (rys. 2.1d) uzyskuje się, tocząc koło o promieniu ρ po kole zasadniczym o promieniu $r_b = \infty$, czyli po prostej zasadniczej. Również w tym przypadku punkt M może leżeć wewnątrz koła ruchomego i otrzymuje się ortocykloidę skróconą, gdy leży na jego obwodzie i otrzymuje się ortocykloidę zwyczajną, jak i na zewnątrz koła i otrzymuje się ortocykloidę wydłużoną.

Hipocykloidy (rys. 2.1e) powstają w wyniku obtaczania koła o promieniu ρ po wewnętrznej stronie okręgu koła zasadniczego r_b . Jeśli punkt M leży wewnątrz koła



Rys. 2.2. Równoważność epicykloidy zwyczajnej (indeksy „1”) i pericykloidy zwyczajnej (indeksy „2”)

ruchomego, to otrzymuje się hipocykloidę skróconą, jeśli na jego obwodzie, to otrzymuje się hipocykloidę zwyczajną, gdy zaś na zewnątrz, uzyskuje się hipocykloidę wydłużoną.

W literaturze można spotkać również termin krzywe trochoidalne, przy czym odnosi się on raczej do krzywych wydłużonych lub skróconych [17]. W związku z tym na rysunku 2.1 obok poszczególnych krzywych podano oba terminy, którymi mogą być określane.

Zróżnicowanie nazewnictwa sprawia, że ta sama krzywa występuje w literaturze przedmiotu pod różnymi nazwami. Na przykład w pracy [20] mówi się o peritrochoidach wydłużonych, w stosunku do krzywych nazywanych w pracy [21] epicykloidami skróconymi, w pracy zaś [22] trochoidami. W ramach tej pracy zdecydowano się przyjąć nazwę **epicykloida** i **hipocykloida** wraz z bliższymi określeniami – **skrócona**, **zwyczajna** lub **wydłużona**. Nazwa przyjętej krzywej będzie także określać rodzaj zęba, uzębienia oraz zazębienia zespołu kół.

W budowie kół zębatych można wykorzystać jedynie część prezentowanych na rysunku 2.1 krzywych cykloidalnych. Z grupy tej eliminuje się:

- krzywe, które są rozwijane względem prostej zasadniczej, a nie względem okręgu zasadniczego, stanowiącego bazę do budowy koła zębatego,
- krzywe, które mają pętlę w pobliżu punktów zwrotu, ponieważ prowadzi to do interferencji zarysów zębów koła zębatego.

Ze względu na pierwsze zastrzeżenie nieprzydatne są ortocykloidy, a ze względu na drugie – epicykloidy wydłużone (pericykloidy skrócone), ewolwenty wydłużone i hipocykloidy wydłużone.

Ostatecznie przydatne okazują się:

- epicykloidy skrócone i zwyczajne oraz odpowiadające im pericykloidy wydłużone i zwyczajne,
- ewolwenty zwyczajne jako specjalny przypadek epicykloidy,
- hipocykloidy skrócone i zwyczajne.

Krzywe cykloidalne przydatne do projektowania kół zębatych obramowano na rysunku 2.1 linią grubą.

Szczegółowy sposób wyznaczenia krzywych cykloidalnych przedstawiono na rysunku 2.3. Na podstawie rysunku 2.3a wyprowadza się równania parametryczne epicykloidy postaci:

$$\begin{aligned} x_e(\eta) &= (r_b + \rho)\cos\eta - \lambda\rho\cos\left[\left(\frac{r_b + \rho}{\rho}\right)\eta\right] \\ y_e(\eta) &= (r_b + \rho)\sin\eta - \lambda\rho\sin\left[\left(\frac{r_b + \rho}{\rho}\right)\eta\right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie: x_e, y_e – współrzędne punktów epicykloidy, r_b – promień koła zasadniczego, ρ – promień koła toczonego się, η – kąt epicykloidy, $\lambda = OM/\rho$ – współczynnik skrócenia epicykloidy.

Po podstawieniu $\lambda < 1$ otrzymuje się epicykloidę skróconą, $\lambda = 1$ – epicykloidę zwyczajną, $\lambda > 1$ zaś – epicykloidę wydłużoną.

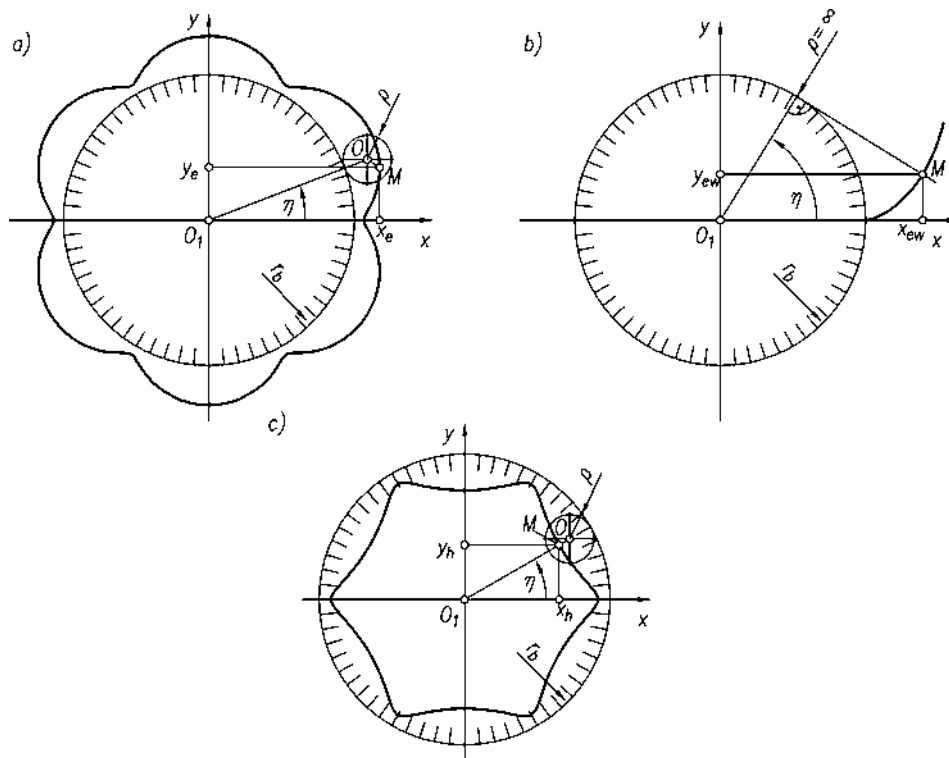
Równania parametryczne ewolwenty zwyczajnej zgodnie z rysunkiem 2.3b mają postać:

$$\begin{aligned} x_{ew}(\eta) &= r_b \cos\eta + r_b \eta \sin\eta \\ y_{ew}(\eta) &= r_b \sin\eta - r_b \eta \cos\eta \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie x_{ew}, y_{ew} – współrzędne punktów ewolwenty, η – kąt ewolwenty.

Na podstawie rysunku 2.3c wyprowadza się równania parametryczne hipocykloidy o postaci:

$$\begin{aligned} x_h(\eta) &= (r_b - \rho)\cos\eta + \lambda\rho\cos\left[\left(\frac{r_b - \rho}{\rho}\right)\eta\right] \\ y_h(\eta) &= (r_b - \rho)\sin\eta - \lambda\rho\sin\left[\left(\frac{r_b - \rho}{\rho}\right)\eta\right] \end{aligned} \quad (2.3)$$



Rys. 2.3. Wyznaczenie krzywych cykloidalnych: a) epicykloidy, b) ewolwenty, c) hipocykloidy

w których oznaczenie parametrów jest takie same jak dla epicykloid. Podobnie jak w przypadku epicykloid, podstawiając $\lambda < 1$ otrzymuje się hipocykloidę skróconą, $\lambda = 1$ – hipocykloidę zwyczajną, $\lambda > 1$ – hipocykloidę wydłużoną.

2.2. Zasady projektowania kół zębatych

Krzywe cykloidalne opisane w poprzednim rozdziale są wykorzystywane do projektowania zębów, kół i zespołów kół maszyn hydraulicznych. Ich projektowanie prowadzi się według zasad przedstawionych na rysunku 2.4.

Zgodnie z nimi proces projektowy dzieli się na trzy etapy. W etapie I projektuje się ząb koła zębatego. Ząb ten charakteryzuje się określonym zarysem, wynikającym z rodzaju i formy zastosowanej krzywej cykloidalnej (rys. 2.4 – kolumna 1). W etapie II projektuje się koła zębate tzw. podstawowe. Uzębienie tego koła formuje się z wcześniej ukształtowanych zębów (rys. 2.4 – kolumna 2). W etapie III projektuje się zespół kół zębatych. Wykorzystuje się do tego celu koło podstawowe i w ścisłym powiązaniu z nimi projektuje się koło współpracujące. Pomiędzy oboma kołami utworzone jest zazębienie (rys. 2.4 – kolumna 3).

	Etap I	Etap II	Etap III
Zęby, koła, zespoły kół cykloidalnych 1. rodzaju	<p>Ząb – zarys zęba</p>		
Zęby, koła, zespoły kół ewolwentowych			

	Etap I	Etap II	Etap III
	Ząb – zarys zęba	Koło zębate – uzeblenie	Zespół kół zębanych – zazębienie
Zęby, koła, zespoły kół cykloidalnych 2. rodzaju	<p>g)</p>	<p>h)</p>	<p>i)</p>
Zęby, koła, zespoły kół cykloidalnych 3. rodzaju	<p>j)</p>	<p>k)</p>	<p>l)</p>

Rys. 2.4. Zasady projektowania kół zębanych

Kształt konstrukcyjny zęba, koła zębatego i zespołu kół zależy od rodzaju i formy krzywej cykloidalnej przyjętej w I etapie projektowania.

Do kształtowania zęba można wykorzystać jedynie wycinki łuków krzywych cykloidalnych. Jak pokazano na rysunku 2.4a z punktu 1 na obwodzie koła zasadniczego o promieniu r_b rozwija się łuk epicykloidy zwyczajnej i hipocykloidy zwyczajnej. Na łuku epicykloidy odcina się w punkcie 2 promieniem r_a część zarysu odpowiadającą głowie zęba. Podobnie na łuku hipocykloidy odcina się w punkcie 3 promieniem r_f część zarysu, odpowiadającą stopie zęba. Ząb o tak utworzonym zarysie jest wykorzystany do projektowania koła (rys. 2.4b), a ono z kolei do projektowania koła współpracującego i zespołu kół (rys. 2.4c).

W literaturze przedmiotu [23, 24, 25] zęby i koła zębate o takiej postaci określa się tradycyjnie jako cykloidalne. W przypadku, gdy krzywe cykloidalne można wykorzystać w innej formie, należy przyjąć bardziej precyzyjną terminologię. Wprowadzono zatem określenie zęby, koła i zespoły kół cykloidalnych 1. rodzaju.

Jak wynika z rysunku 2.4 powszechnie znane, stosowane zęby, koła i zespoły kół ewolwentowych można również zaliczyć do rozwiązań konstrukcyjnych 1. rodzaju. Do ich kształtowania wykorzystuje się wycinek łuku ewolwenty zwyczajnej. Jak pokazano na rysunku 2.4d, z punktu 1 na obwodzie koła zasadniczego o promieniu r_b rozwija się łuk ewolwenty zwyczajnej, która jest szczególnym przypadkiem epicykloidy zwyczajnej (patrz rozdz. 2.1). Na łuku tym odcina się w punkcie 2 promieniem r_a część stanowiącą zarys zęba. Dodatkowo z punktu 1 do punktu 3 prowadzi się tzw. krzywą przejściową, która uzupełnia zarys zęba w rejonie stopy ograniczonej promieniem r_f . Ząb o tak uformowanym zarysie stosuje się do projektowania koła zębatego (rys. 2.4e), a następnie z tych kół formuje się zespoły (rys. 2.4f).

Do kształtowania zębów, kół i zespołów kół można stosować całe łuki krzywych cykloidalnych, kojarząc je ze sobą. Jak pokazano na rysunku 2.4g typowym rozwiązaniem w tym zakresie jest zestawienie wypukłego łuku epicykloidy zwyczajnej oraz wklęsłego łuku hipocykloidy zwyczajnej. Z punktu 1 na obwodzie koła zasadniczego o promieniu r_b rozwija się łuk epicykloidy zwyczajnej, który w punkcie 2 dochodzi do wierzchołka zęba. Z punktu 1 rozwija się także łuk hipocykloidy zwyczajnej, który w punkcie 3 dochodzi do dna wrębu. Zęby o takim zarysie stosowane są do kształtowania koła podstawowego (rys. 2.4h), a potem zespołu kół (rys. 2.4i). W literaturze przedmiotu [24] zęby i koła zębate o takiej konstrukcji są nazywane również cykloidalnymi, co nie odróżnia ich od zębów i kół przedstawionych na rysunku 2.4a, b, c. W związku z tym wprowadzono określenie zęby, koła i zespoły kół cykloidalnych 2. rodzaju.

W projektowaniu zębów, kół i zespołów kół można również wykorzystywać całe krzywe cykloidalne – jako krzywe zwyczajne lub skrócone (patrz rozdział 2.1). Jak pokazano na rysunku 2.4j do kształtowania zęba można wykorzystać przykładowo epicykloidę skróconą, której łuk rozwija się względem koła zasadniczego o promieniu r_b począwszy od punktu 1 przez punkt 2 do punktu 3. Zespół takich łuków, przechodzących jeden w drugi formuje uzębienie całego koła podstawowego (rys. 2.4k). Na-

stępnie, korzystając z koła podstawowego, kształtuje się koło współpracujące i cały zespół (rys. 2.41). Zęby, koła i zespoły kół tego typu określane są w literaturze dotyczącej kół zębatach jako cykloidalne lub cyklo (*cyclo*) [19, 26, 27, 30], w literaturze zaś dotyczącej maszyn hydraulicznych jako trochoidalne i gerotorowe [15]. Z przedstawionej analizy wynika jednak, że podstawą ich kształtowania są dalej krzywe cykloidalne, choć stosowane w innej formie. W związku z tym określono je jako zęby, koła i zespoły kół cykloidalnych 3. rodzaju.

Na rysunku 2.4 przedstawiono jedynie przykładowe rozwiązania konstrukcyjne zębów, kół i zespołów. Mogą one pracować zarówno w układzie zazębienia zewnętrznego, jak i wewnętrznego, przy osiach ustalonych oraz ruchomych. W dalszych rozdziałach omawiać się będzie szczegółowe zasady projektowania zębów, kół i zespołów kół zębatach cykloidalnych 1., 2., 3. rodzaju. W pierwszej kolejności w rozdziale 4, omówione zostaną zasady projektowania zębów, kół i zespołów kół ewolwentowych. Pomimo że zaliczyć je można do grupy kół cykloidalnych 1. rodzaju (rys. 2.1 i 2.4), ze względu na to, że odgrywają one decydującą rolę w budowie maszyn hydraulicznych należy je rozpatrywać jako odrębną grupę.

Do opisu geometrii i kinematyki wszystkich rodzajów i form zębów kół i zespołów kół przyjęto jednolity układ parametrów, na który składają się:

- liczba zębów z ,
- moduł m ,
- kąt zarysu α_0 ,
- współczynnik wysokości zęba kół ewolwentowych y , kół cykloidalnych λ ,
- współczynnik przesunięcia zarysu kół ewolwentowych x , kół cykloidalnych ν ,
- szerokość zęba b .

Przyjęcie takiego układu parametrów pozwala na syntetyczne ujęcie problemów projektowania oraz stwarza możliwości porównania różnych rodzajów i form zębów, kół i zespołów kół. Szczegółowe definicje i wyjaśnienia dotyczące tych parametrów podano w dalszej części pracy.

3. Zęby, koła, zespoły kół ewolwentowych

3.1. Ząb i koło o uzębieniu zewnętrznym

3.1.1. Geometria, parametry charakterystyczne

Jak pokazano na rysunku 2.1d, za pomocą ewolwenty zwyczajnej można kształtować zęby i koła o uzębieniu zewnętrznym ewolwentowym. Zagadnienie przedstawiono szczegółowo na rysunku 3.1. Ząb kształtuje się w ten sposób, że z koła zasadniczego o średnicy d_b rozwija się wzajemnie nachylone ewolwenty zwyczajne „prawą” i „lewą”. Następnie ewolwenty ogranicza się od zewnątrz kołem wierzchołkowym (kołem głów) o średnicy d_a , od wewnątrz zaś kołem podstaw (kołem stóp) o średnicy d_f . Pomiędzy początkiem ewolwenty (punkt B) a kołem podstaw (punkt F) przeprowadza się linię przejściową, którą nacina narzędzie w trakcie obróbki uzębienia (patrz rozdz. 8.1). W rezultacie otrzymuje się ząb o wypukłych bokach, zaokrągleniu zarysu u stopy zęba oraz odpowiednio szerokim wierzchołku.

Pomiędzy kołem wierzchołkowym i kołem podstaw wyznacza się koło podziałowe o średnicy d . Na kole tym odznacza się podziałkę nominalną p i wyznacza kolejne zęby tworzące uzębienie. Liczba zębów wyznaczonych na kole podziałowym musi być liczbą całkowitą. Długość okręgu podziałowego wynosi zatem:

$$\pi d = zp \quad (3.1)$$

gdzie d – średnica koła podziałowego, z – liczba zębów, p – podziałka.

Odpowiednio średnica koła podziałowego wynosi

$$d = z \frac{p}{\pi} \quad (3.2)$$

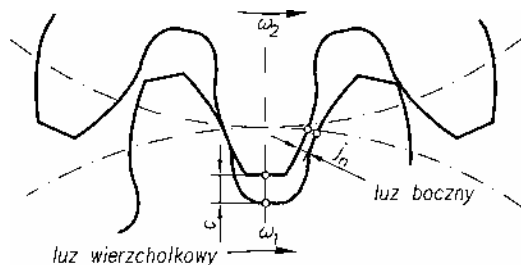
Stosunek podziałki p i liczby π określa się jako moduł m koła zębatego, czyli:

$$m = \frac{p}{\pi} \quad (3.3)$$

Otrzymuje się fundamentalny wzór dla kół zębatych służący do wyznaczania średnicy podziałowej:

$$d = zm \quad (3.4)$$

Średnica podziałowa jest parametrem teoretycznym, który ma znaczenie w obliczeniach geometrycznych kół. Nie podlega ona natomiast sprawdzeniu w trakcie kon-



Rys. 3.2. Luzy międzyzębne w ząbieniu ewolwentowym

Jak pokazano na rysunku 3.1, koło podziałowe dzieli ząb na głowę o wysokości h_a i stopę o wysokości h_f . Odpowiednie wzory do wyznaczania tych wysokości mają postać:

$$h_a = ym \quad (3.5)$$

$$h_f = ym + c \quad (3.6)$$

gdzie h_a , h_f – wysokość głowy i stopy zęba, y – współczynnik wysokości zęba, c – luz wierzchołkowy (według zaleceń jw.).

Współczynnik wysokości zęba może przyjmować wartość:

- $y = 1$ zęby normalne,
- $y > 1$ zęby wysokie,
- $y < 1$ zęby niskie.

Całkowita wysokość zęba wynosi

$$h = h_a + h_f \quad (3.7)$$

W przypadku zębów normalnych, dla których $y = 1$ oraz luz wierzchołkowy $c = 0,25m$, wysokość głowy, stopy i całego zęba wynoszą odpowiednio:

$$h_a = m$$

$$h_f = 1,25m$$

$$h = 2,25m$$

Na podstawie rysunku 3.1 oraz zależności (3.2), (3.5), (3.6) wyprowadza się wzory do określenia średnicy wierzchołków d_a oraz średnicy stóp d_f jako:

$$d_a = d + 2h_a \quad (3.8)$$

$$d_f = d - 2h_f \quad (3.9)$$

W przypadku zębów normalnych, dla których $y = 1$ oraz luz wierzchołkowy $c = 0,25m$, wartości tych średnic są równe:

$$d_a = m(z + 2)$$

$$d_f = m(z - 2,5)$$

Jak pokazano na rysunku 3.1 koło podziałowe o średnicy d przecina ewolwentę kształtującą bok zęba w punkcie C . Pomiędzy promieniem przechodzącym przez punkt C a styczną do ewolwenty przechodzącą przez punkt C utworzony jest nominalny kąt zarysu α_0 . Gdy znany jest kąt zarysu α_0 , można wyprowadzić wzór na średnicę koła zasadniczego d_b , który ma postać:

$$d_b = d \cos \alpha_0, \quad (3.10)$$

oraz wzór na podziałkę zasadniczą o postaci:

$$p_b = \pi m \cos \alpha_0. \quad (3.11)$$

Ząb i koło zębate charakteryzuje się określoną szerokością b , której wartość wiąże się z modułem przez stosunek b/m tak, aby zachować proporcjonalną budowę zęba i koła zębatego.

3.1.2. Graniczna liczba zębów

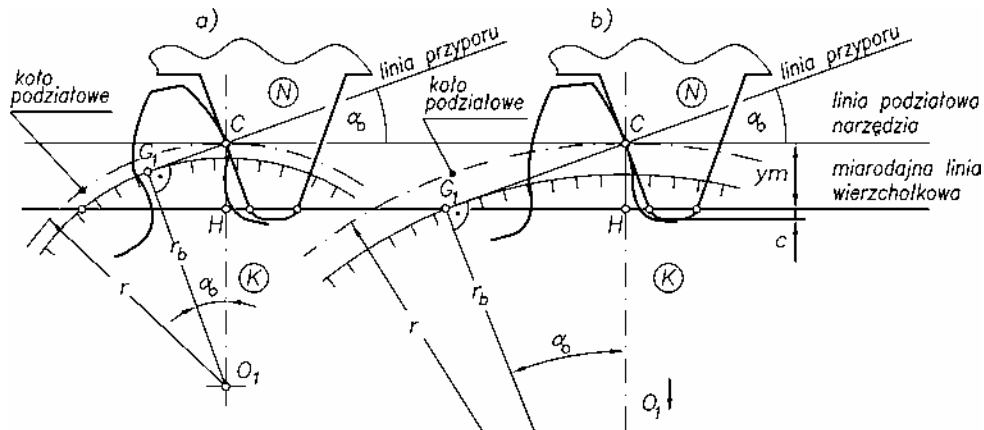
Aby maszyna hydrauliczna charakteryzowała się zwartą konstrukcją i małymi gabarytami, to zastosowane w niej koła zębate powinny mieć możliwie małą liczbę zębów. Jednak w trakcie projektowania nie można w sposób automatyczny zmniejszać liczby zębów i przyjmować bezkrytycznie coraz mniejszą ich liczbę. W procesie projektowania należy uwzględnić zagadnienia technologiczne. Rozpatrując problem minimalizacji liczby zębów w kole zębatym należy rozważyć łącznie zagadnienia konstrukcyjne i technologiczne. W związku z tym bierze się pod uwagę dwie klasyczne technologie uzębienia kół ewolwentowych:

- metoda dłutowania obwiedniowego za pomocą narzędzia zębatki,
- metoda dłutowania obwiedniowego za pomocą dłutaka Fellowsa.

W obu metodach podczas wykonywania uzębienia kół o małej liczbie zębów może nastąpić ich podcinanie u podstawy. Metoda dłutowania narzędziem zębatką jest w tym względzie mniej korzystna, ponieważ podcinanie występuje już dla kół o większej liczbie zębów [24]. Dalsze rozważania prowadzi się będzie zatem dla tej mniej korzystnej metody.

Po założeniu, że stosowana będzie metoda nacinania narzędziem – zębatką, poszukiwać się będzie minimalnej liczby zębów, przy której nie nastąpi ich podcinanie u podstawy. Jest to tzw. graniczna liczba zębów z_g . Zagadnienie to rozważa się korzy-

stając z rysunku 3.3. Nacinanie uzębienia odbywa się w ten sposób, że koło zębate K obraca się jednostajnym ruchem obrotowym względem ustalonego środka O_1 , a narzędzie zębatki N porusza się prostopadle do powierzchni czołowej koła ruchem posuwisto-zwrotnym (rys. 3.3a). Następuje przetaczanie średnicy podziałowej koła po linii podziałowej narzędzia. Podczas tego przetaczania kolejne punkty prostoliniowego zarysu narzędzia zębatki nacinają kolejne punkty ewolwentowego zarysu zęba. Punkty współpracy narzędzia i koła przemieszczają się po linii przyporu. Jak pokazano na rysunku 3.3a koło o małej liczbie zębów z ma mały promień okręgu zasadniczego r_b oraz podziałowego r . Miarodajna linia wierzchołkowa, która rozgranicza prostoliniową część zęba zębatki od zaokrąglonego wierzchołka, przechodzi poniżej punktu G_1 styku linii przyporu z kołem zasadniczym. Wierzchołek narzędzia zębatki podcina w tym przypadku stopę zęba. Jest to niekorzystne ze względów wytrzymałościowych, gdyż zmniejsza się wytrzymałość zęba na zginanie oraz powiększa jego podatność, jak też ze względów hydraulicznych, gdyż powiększa się niekorzystną przestrzeń zasklepioną powstającą u podstawy zęba.



Rys. 3.3. Wyznaczenie granicznej liczby zębów w zazębieniu ewolwentowym zewnętrznym:
 a) podcinanie zęba w kole o liczbie zębów mniejszej od granicznej $z < z_g$, b) brak podcinania zębów w kole o liczbie zębów równej liczbie granicznej $z = z_g$

W związku z tym należy zwiększyć liczbę zębów i związane z tym promienie r_b i r , aby wyeliminować podcięcie zęba. Jednocześnie dąży się do tego, aby była to możliwie mała liczba zębów, czyli postulowana graniczna liczba zębów z_g .

Zagadnienie to rozważano na rysunku 3.3b. W nowej sytuacji wraz z powiększeniem promieni r_b i r miarodajna linia wierzchołkowa przechodzi przez punkt G_1 , a wierzchołek narzędzia nie podcina stopy zęba. Z rysunku wynikają następujące związki geometryczne:

$$\begin{aligned}
 CH &= ym \\
 CH &= CG_1 \sin \alpha_0 \\
 CG_1 &= r \sin \alpha_0
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

z podobieństwa ΔCHG_1 , i ΔCG_1O wynika

$$\frac{CH}{CG_1} = \frac{CG_1}{r}$$

Po przekształceniach otrzymuje się:

$$ym = \frac{CG_1^2}{r}$$

a następnie

$$ym = r \sin^2 \alpha_0$$

Po uwzględnieniu, że

$$r = \frac{zm}{2}$$

otrzymuje się

$$ym = \frac{zm}{2} \sin^2 \alpha_0$$

Ostatecznie wyznacza się graniczną liczbę zębów $z = z_g$

$$z_g = \frac{2y}{\sin^2 \alpha_0} \tag{3.13}$$

Przyjmując zęby normalne, czyli $y = 1$ oraz nominalny kąt zarysu $\alpha_0 = 20^\circ$ wyznacza się wartość granicznej liczby zębów, równą $z_g = 17$ zębów. Można jednak dopuścić nieznaczne podcięcie zęba, w związku z tym praktyczna graniczna liczba zębów wynosi $z_g = 14$.

3.1.3. Korekcja uzębienia

W budowie maszyn hydraulicznych przyjmuje się często liczbę zębów mniejszą od liczby granicznej, z tym wiąże się niebezpieczeństwo podcięcia zębów (rys. 3.4a). Koło zębate K ma liczbę zębów mniejszą od granicznej, czyli $z < z_g$ i charakteryzuje się małymi promieniami koła podziałowego r i zasadniczego r_b . Linia podziałowa narzędzia zębatki N znajduje się w położeniu I i styka się z kołem podziałowym w punkcie C . Miarodajna linia wierzchołkowa zębatki przebiega poniżej punktu G_1 . W tej sytuacji wierzchołek narzędzia podcina stopę zęba. Jednocześnie ząb jest sto-

sunkowo szeroki u wierzchołka. Należy zatem znaleźć sposób na wyeliminowanie tego podcięcie i poprawienie kształtu zęba. Przeprowadza się więc korekcję uzębienia, która polega na przesunięciu narzędzia N względem obrabianego koła zębatego K o wielkość X . Przesunięcie takie ogranicza podcinanie stopy, lecz powoduje zaostrenie wierzchołka. Przykładowe nowe położenia narzędzia N oraz związane z tym przesunięcie X pokazano na rysunku 3.4a linią kreskową. W praktyce operuje się bezwymiarową wielkością, określającą przesunięcie, czyli tzw. współczynnikiem przesunięcia zarysu, zwanym też współczynnikiem korekcji i zdefiniowanym jako:

$$x = \frac{X}{m}$$

gdzie x – współczynnik korekcji, X – przesunięcie zarysu, m – moduł.

Na rysunku 3.4b przedstawiono koło o tej samej liczbie zębów $z < z_g$ i o tych samych promieniach r i r_b . Dokonano korekcji uzębienia przez takie przesunięcie narzędzia względem obrabianego koła, aby w nowym położeniu II wierzchołek narzędzia nie powodował podcinania stopy zęba. To nowe położenie nazywa się minimalnym położeniem granicznym. W położeniu II linia podziałowa narzędzia zębatego jest odległa od położenia początkowego I o wartość minimalnego przesunięcia granicznego $X_{g\min}$, któremu odpowiada minimalna wartość granicznego współczynnika korekcji $x_{g\min} = X_{g\min}/m$. Miarodajna linia wierzchołkowa zębatego przechodzi obecnie przez punkt G_1 . Wierzchołek zębatego nie podcina już stopy zęba. Jednocześnie ząb jest węższy u wierzchołka, choć wystarczająco szeroki, aby nie doszło do jego złamania czy też wykruszenia. W nowym położeniu II powiększa się również średnica koła stóp i koła wierzchołkowego.

Na podstawie przedstawionych na rysunku 3.4b związków geometrycznych wyznacza się wzór do obliczania minimalnej wartości granicznego współczynnika korekcji $x_{g\min}$:

$$CH = ym - x_{g\min}m = CG_1 \sin \alpha$$

$$CG_1 = r \sin \alpha$$

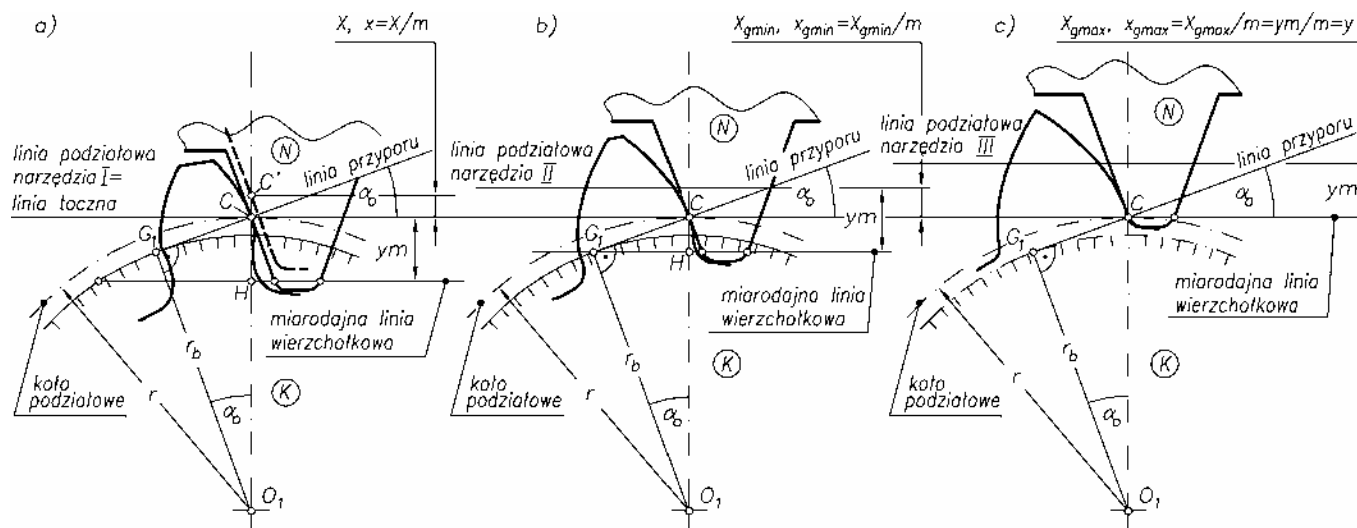
$$r = \frac{zm}{2}$$

Po przekształceniach otrzymuje się:

$$\frac{zm}{2} \sin^2 \alpha = ym - x_{g\min}m,$$

a następnie

$$\frac{z}{2} \sin^2 \alpha = y - x_{g\min}$$



Rys. 3.4. Korekcja uzębienia zewnętrznego a) zęb przed korekcją $x = 0$,
 b) zęb po korekcji, eliminującej podcięcie $x = x_g$, c) zęb po korekcji, powodującej zaostrenie $x = y$

Następnie korzystając z zależności (3.13), otrzymuje się:

$$\sin^2 \alpha = \frac{2y}{z_g}$$

Dokonując odpowiednich podstawień i przekształceń, otrzymuje się ostatecznie wzór do wyznaczania minimalnej granicznej wartości współczynnika korekcji $x_{g \min}$, zapewniającej wyeliminowanie podcięcia:

$$x_{g \min} = y \frac{z_g - z}{z_g} \quad (3.14)$$

gdzie $x_{g \min}$ – minimalna graniczna wartość współczynnika korekcji, y – współczynnik wysokości zęba, z_g – graniczna liczba zębów, z – liczba zębów rozważanego koła.

Przesunięcie narzędzia względem koła może następować dalej. Na rysunku 3.4c przedstawiono poprzednio rozważane koło o liczbie zębów $z_l < z_g$ i o promieniach r i r_b . Linie podziałową narzędzia zębatki przesunięto w położenie III, odległe od położenia początkowego I o maksymalną wartość przesunięcia granicznego $X_{g \max} = ym$, któremu odpowiada maksymalna wartość granicznego współczynnika korekcji wyznaczona z zależności

$$x_{g \max} = \frac{X_{g \max}}{m} = \frac{ym}{m} = y \quad (3.15)$$

Miarodajna linia wierzchołkowa przebiega powyżej punktu G_1 i nie zachodzi podcięcie zęba. Jednak przy takim znacznym wysunięciu zębatka dokonuje zaostrenia zęba u wierzchołka. Jest to oczywiście niekorzystne ze względów wytrzymałościowych, gdyż może nastąpić złamanie (wykruszenie) wierzchołka zęba oraz ze względów hydraulicznych, gdyż ostry wierzchołek współpracujący z wytoczeniem w korpusie maszyny hydraulicznej nie stanowi dostatecznego uszczelnienia pomiędzy sąsiednimi międzyzębnymi komorami wporowymi.

Korzystając z przedstawionych zależności, w przypadku maszyn hydraulicznych należy dobrać wartość współczynnika korekcji z zakresu wartości

$$x_{g \min} < x < x_{g \max}$$

Jak widać na rysunku 3.4b, dokonanie korekcji nie powoduje zmiany wysokości całkowitej zęba h . W ramach tej wysokości zwiększa się jednak wysokość głowy zęba h_a i zmniejsza wysokość stopy zęba h_f . Wynoszą one odpowiednio:

$$h_a = (y + x)m \quad (3.16)$$

$$h_f = (y - x)m + c^* m = (y - x + c^*)m \quad (3.17)$$

W związku z tym zmieniają się również wzory do wyznaczania średnicy głów i średnicy stóp koła korygowanego i przyjmują one postać:

$$d_a = m[z + 2(y + x)] \quad (3.18)$$

$$d_f = m[z - 2(y - x + c^*)] \quad (3.19)$$

3.1.4. Grubość zęba

Przeprowadzenie korekcji uzębienia powoduje istotne zmiany w grubości zęba. Jak pokazano na rysunku 3.4a, b, c ząb staje się grubszy (szerszy) u podstawy, cieńszy (węższy) u wierzchołka. Należy więc określić zmiany wymiarów. Najpierw ustala się zmiany grubości zęba na kole podziałowym. Odpowiednio na rysunku 3.5a pokazano, że w trakcie korekcji następuje przejście narzędzia zębatego z położenia I do położenia II i odsunięcie linii podziałowej narzędzia zębatego od linii podziałowej koła o wartości $X = xm$. Wycinek łuku koła podziałowego $A'B'$, stanowiący przyrost grubości skorygowanego zęba, jest równy wycinkowi linii podziałowej AB , czyli $A'B' = AB$. Linia podziałowa narzędzia przecina zarys skorygowanego zęba w punkcie D , w związku z tym pomiędzy liniami I i II można wyznaczyć trójkąt prostokątny ABD , w którym:

$$\frac{AB}{AD} = \operatorname{tg} \alpha_0 \quad (3.20)$$

gdzie α_0 – nominalny kąt zarysu.

Odcinek AB jest równy połowie przyrostu grubości zęba na średnicy podziałowej, czyli $AB = \Delta g / 2$, odcinek AD zaś jest równy wysunięciu narzędzia, czyli $AD = X = xm$. Po podstawieniu tych związków do wzoru (3.20) i przekształceniach otrzymuje się:

$$\Delta g = 2xmtg \alpha_0 \quad (3.21)$$

Grubość zęba na kole podziałowym po korekcji wynosi:

$$\hat{g}_k = \frac{P}{2} + \Delta g \quad (3.22)$$

Po uwzględnieniu wzoru (3.21) oraz związku $m = p/\pi$ otrzymuje się ostatecznie wzór na grubość \hat{g}_k zęba korygowanego na kole podziałowym

$$\hat{g}_k = m \left(\frac{\pi}{2} + 2xtg \alpha_0 \right) \quad (3.23)$$

W związku z tym ustala się zależność:

$$\widehat{g}_y = 2r_y \widehat{\varphi}_y \quad (3.24)$$

gdzie r_y – promień koła dowolnego, $\widehat{\varphi}_y$ – kąt środkowy, odpowiadający połowie grubości zęba na kole o promieniu r_y .

Kąt $\widehat{\varphi}_y$ wyznacza się za [24] ze wzoru:

$$\widehat{\varphi}_y = \widehat{\varphi}_o + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_y \quad (3.25)$$

gdzie $\widehat{\varphi}_o$ – kąt środkowy, odpowiadający połowie grubości zęba na okręgu podziałowym r , α_0 – nominalny kąt zarysu, mierzony na kole podziałowym r , α_y – kąt zarysu, mierzony na kole dowolnym r_y .

Na podstawie rysunku 3.5b ustala się, że:

$$\widehat{\varphi}_o = \frac{\widehat{g}_k}{2r} \quad (3.26)$$

Po wstawieniu zależności (3.24) i (3.26) do wzoru (3.25) i dokonaniu przekształceń otrzymuje się ostatecznie wzór do wyznaczania grubości \widehat{g}_y zęba na okręgu dowolnym:

$$\widehat{g}_y = 2r_y \left(\frac{\widehat{g}_k}{2r} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_y \right) \quad (3.27)$$

3.2. Ząb i koło o uzębieniu wewnętrznym

3.2.1. Geometria, parametry charakterystyczne

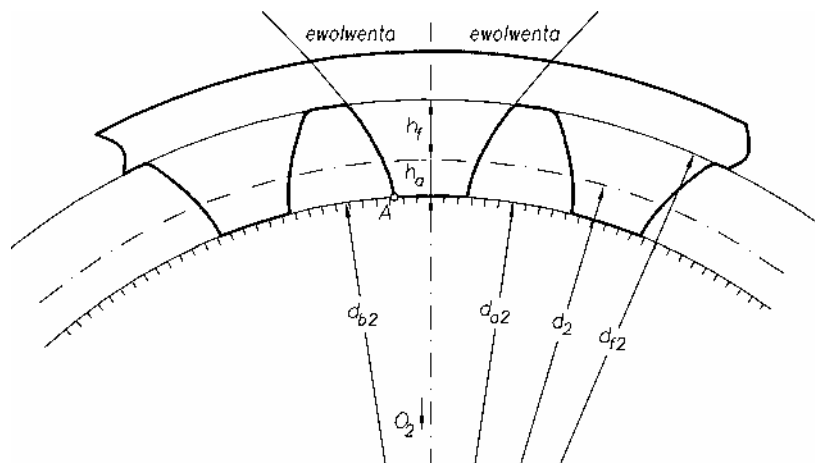
Jak pokazano na rysunku 3.6 ząb koła o uzębieniu wewnętrznym kształtuje się w ten sposób, że z koła zasadniczego o średnicy d_b rozwijają się rozchylone przeciwnie ewolwenty zwyczajne „prawą” i „lewą”. Ewolwenty ogranicza się od wewnątrz kołem wierzchołkowym (kołem głów) o średnicy d_a i od zewnątrz kołem podstawy (kołem stóp) o średnicy d_f . U stopy zęba pomiędzy ewolwentą (punkt B) a kołem podstawy (punkt F) przeprowadza się linię przejściową. W rezultacie otrzymuje się ząb o wklęsłych bokach, zaokrągleniu zarysu u stopy zęba oraz odpowiednio szerokim wierzchołku. Średnica podziałowa dzieli ząb na stopę i głowę. Wyznacza się ją ze wzoru (3.4). Na średnicy podziałowej odmierza się podziałkę p . W kole o uzębieniu wewnętrznym głowa i stopa usytuowane są odwrotnie niż w kole o uzębieniu zewnętrznym. W związku z tym głowa zęba o wysokości h_a usytuowana jest po wewnętrznej stronie okręgu podziałowego, stopa zaś o wysokości h_f po zewnętrznej jego stronie.

3.2.2. Graniczna liczba zębów

Podobnie jak w przypadku kół o uzębieniu zewnętrznym, również w przypadku kół o uzębieniu wewnętrznym poszukuje się minimalnej liczby zębów, gdy mają one jeszcze prawidłowy kształt, czyli poszukuje się granicznej liczby zębów z_g .

Jak pokazano na rysunku 3.7 ząb koła o uzębieniu wewnętrznym kształtuje się w ten sposób, że z koła zasadniczego rozwija się rozchylone przeciwie ewolwenty zwyczajne. Ewolwenty ogranicza się od środka kołem wierzchołkowym o średnicy d_{a2} , od zewnątrz zaś kołem stóp o średnicy d_{f2} . Najniższym punktem ewolwenty tworzącej zarys jest punkt A położony na kole zasadniczym. Nie formuje się więc zęba poniżej tego punktu. W związku z tym minimalna wartość średnicy koła wierzchołkowego powinna być równa lub większa od średnicy koła zasadniczego, czyli:

$$d_a \geq d_b \quad (3.30)$$



Rys. 3.7. Wyznaczanie granicznej liczby zębów w uzębieniu ewolwentowym wewnętrznym

Po podstawieniu do wzoru (3.30) zależności (3.4), (3.5), (3.10) i (3.28) otrzymuje się:

$$zm - 2ym \geq zm \cos \alpha_0$$

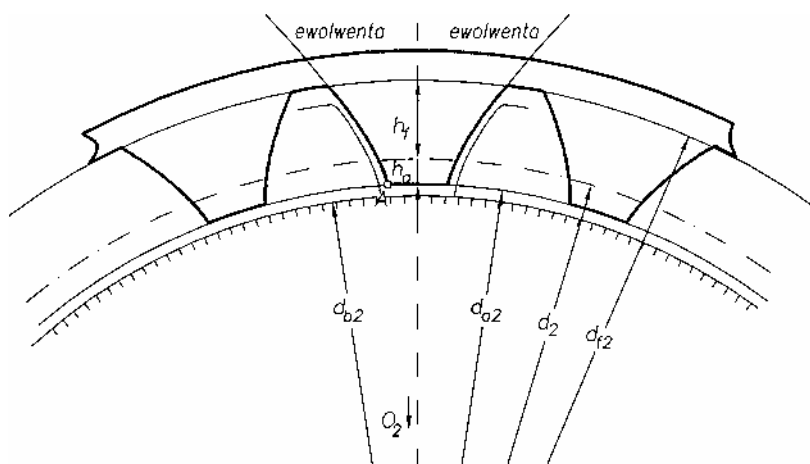
Po przekształceniach otrzymuje się wzór na graniczną liczbę zębów z_g w kole o uzębieniu wewnętrznym

$$z_g = \frac{2y}{1 - \cos \alpha_0} \quad (3.31)$$

Przyjmując zęby normalne, czyli $y = 1$, oraz nominalny kąt zarysu $\alpha_0 = 20^\circ$ wyznacza się wartość granicznej liczby zębów równą $z_g = 33$. Jest to znacznie większa liczba zębów niż graniczna liczba zębów w kole o uzębieniu zewnętrznym, która wynosi $z_g = 17$ lub też $z_g = 14$, po założeniu nieznacznego podcięcia.

3.2.3. Korekcja uzębienia

Gdy w kole o uzębieniu wewnętrznym chce się zastosować liczbę zębów mniejszą od liczby granicznej, czyli $z < z_g$, wówczas podobnie jak w kole o uzębieniu zewnętrznym należy zastosować korekcję uzębienia. Uzębienie wewnętrzne wykonuje się zwykle dłutakiem Fellowsa, a korekcja polega na wsunięciu dłutaka w głąb materiału nacinanego koła. Uzębienie wewnętrzne po korekcji przedstawiono na rysunku 3.8. Wysokość zęba nie zmienia się, natomiast w jej ramach zmniejsza się wysokość głowy zęba h_a oraz zwiększa się wysokość stopy h_f .



Rys. 3.8. Uzębienie ewolwentowe wewnętrzne po korekcji

Odpowiednio wynoszą one:

$$h_a = (y - x)m \quad (3.32)$$

$$h_f = (y + x)m + c^* m \quad (3.33)$$

W związku z tym powiększona zostaje również średnica koła wierzchołkowego d_a i średnica koła stóp d_f , które wyznacza się ze wzorów:

$$d_a = m[z - 2(y - x)] \quad (3.34)$$

$$d_f = m[z + 2(y + x + c^*)] \quad (3.35)$$

Po przeprowadzeniu korekcji należy ponownie rozważyć problem granicznej liczby zębów. Również dla koła korygowanego ważna jest zależność (3.30), do której podstawia się związki (3.34) i (3.10) i otrzymuje się:

$$m[z - 2(y - x)] \geq zm \cos \alpha_0 \quad (3.36)$$

Po przekształceniach otrzymuje się wzór na graniczną liczbę zębów z_g w kole o uzębieniu wewnętrznym korygowanym

$$z_g = 2 \frac{y - x}{1 - \cos \alpha_0} \quad (3.37)$$

Korzystając ze wzoru (3.37) i postępując według [24] wyznacza się graniczną liczbę zębów z_g dla różnych parametrów y, x, α_0 (tab. 3.1).

Należy zauważyć, że graniczna liczba zębów z_g jest stosunkowo duża, zmniejszyć ją można stosując zęby niskie y , większe kąty zarysu α_0 oraz większe współczynniki korekcji x .

Tabela 3.1. Graniczna liczba zębów w korygowanym uzębieniu ewolwentowym wewnętrznym

y	α_0	x					
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	15	59	53	47	41	35	29
	20	33	30	27	23	20	17
0,8	15	47	41	35	29	23	18
	20	27	23	20	17	13	10

Zagadnienie to można odwrócić i dla danej liczby zębów z , współczynnika wysokości y i kąta zarysu α_0 wyznaczyć taką wartość współczynnika korekcji x , aby zachować warunek (3.30), czyli zapewnić utworzenie ewolwentowego zarysu boków zębów. Po przekształceniu wzoru (3.37) otrzymuje się zależność na minimalny graniczny współczynnik przesunięcia zarysu dla koła o uzębieniu wewnętrznym

$$x_g = y - z \frac{1 - \cos \alpha_0}{2} \quad (3.38)$$

Korzystając ze wzoru (3.38) i postępując według [24], wyznacza się wartości współczynnika korekcji x_g dla typowych parametrów uzębienia $y = 1, \alpha_0 = 20^\circ$ (tab. 3.2).

Tabela 3.2. Wartość granicznego współczynnika korekcji x_g w kole o uzębieniu wewnętrznym o liczbie zębów z

z	12	15	17	20	22	24	26	28	30	32
x_g	0,64	0,55	0,49	0,40	0,34	0,28	0,22	0,16	0,10	0,04

Z analizy zestawionych w tabeli 3.2 wartości wynika, że im mniejszą liczbę zębów z przyjmuje się w kole o uzębieniu wewnętrznym, tym większe należy dobrać wartości współczynnika korekcji x_g .

3.3. Zespół kół ewolwentowych o zazębieniu zewnętrznym

3.3.1. Geometria zespołu kół, zasady współpracy, liczba przyporu

Koła zębate kojarzone są ze sobą w zespoły (rozd. 2) i wtedy można je wykorzystywać w budowie maszyn hydraulicznych jako układy wirnikowe. Ze względu na wspomniane już tendencje do zapewnienia zwartej konstrukcyjnej i małych gabarytów przyjmuje się, że koła powinny mieć kilkanaście zębów. Liczba zębów może przy tym być większa, równa lub mniejsza od granicznej liczby zębów.

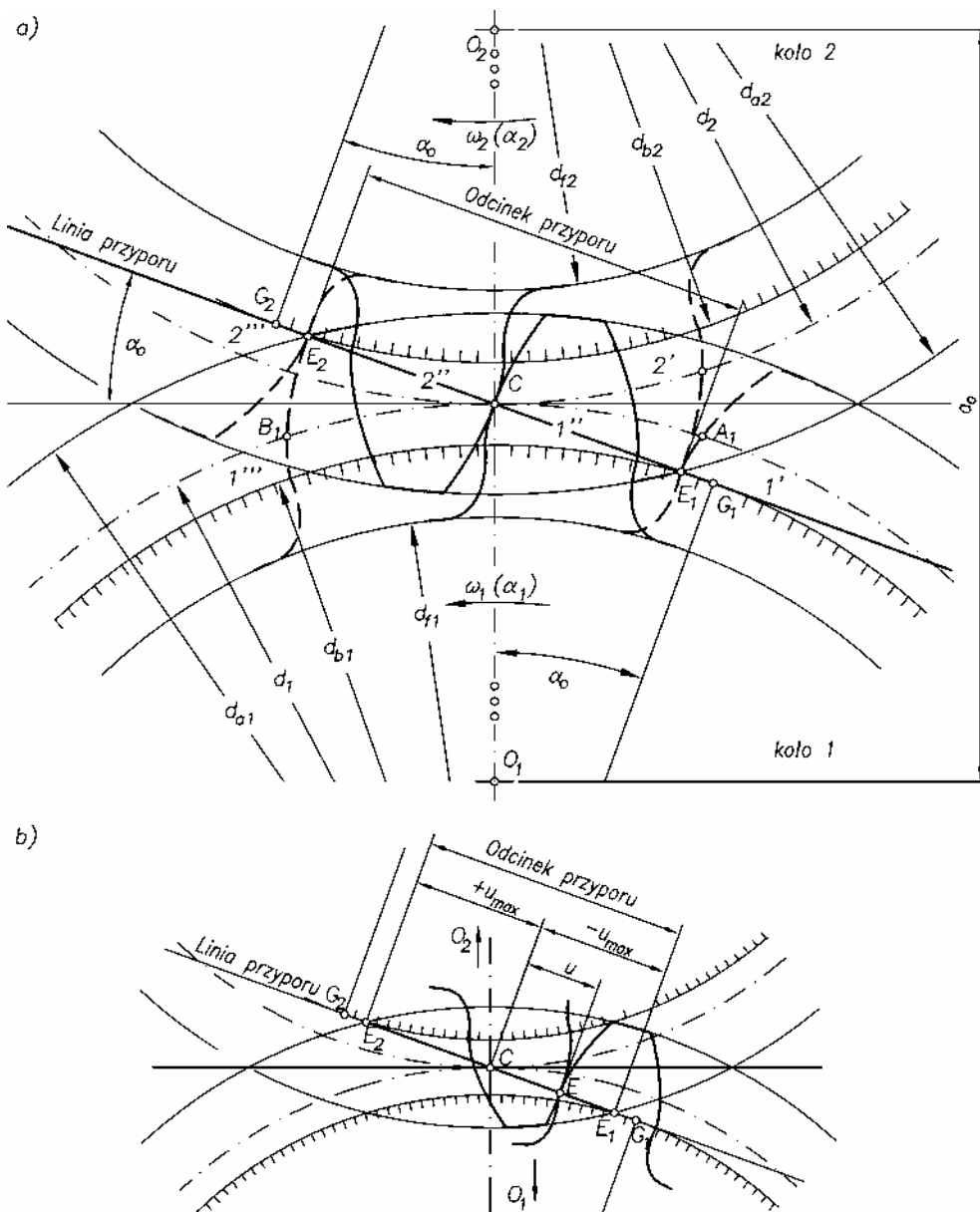
Najpierw rozważano więc (rys. 3.9) zespół dwóch kół o zazębieniu ewolwentowym zewnętrznym i liczbie zębów większej lub równej granicznej $z_1 = z_2 \geq z_g$. Zęby kół nie są podcięte. Są stosunkowo grube u podstawy i odporne na złamanie oraz grube u wierzchołka i odporne na wykruszenie. Koła obracają się wokół ustalonych osi obrotu O_1, O_2 . Stykają się one średnicami podziałowymi w centralnym punkcie zazębienia C , czyli w tzw. biegunie zazębienia. Nominalna odległość osi kół, zwana też centralą, wynosi zatem:

$$a_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} m \quad (3.39)$$

Przez centralny punkt zazębienia C , stycznie do okręgów zasadniczych współpracujących kół, prowadzi się prostą zwaną linią przyporu. Linia przyporu jest nachylona pod kątem przyporu α_0 do prostej prostopadłej wystawionej do centrali O_1, O_2 w biegunie zazębienia C . Współpraca kół, uzębień i zębów odbywa się następująco: napędza się jedno z kół, np. koło 1, które nazywane jest kołem czynnym lub pędzącym. Koło 2 odbiera napęd i jest nazywane kołem biernym lub pędzonym. W związku z tym ząb 1 koła czynnego wchodzi w zazębienie z zębem 2 koła biernego, tworząc wspólny punkt styku, czyli tzw. punkt przyporu. W trakcie obrotu kół punkt przyporu porusza się po linii przyporu począwszy od punktu E_1 , czyli tzw. wżębienia (zęby w położeniu $1', 2'$) poprzez centralny punkt zazębienia C (zęby w położeniu $1'', 2''$), do punktu E_2 , czyli tzw. wyżębienia (zęby w położeniu $1''', 2'''$).

Wyznacza się tak na linii przyporu odcinek przyporu E_1, E_2 . Podczas wżębienia zarys zęba w położeniu $1'$ przecina koło podziałowe w punkcie A_1 , podczas zaś wyżębienia w położeniu $1'''$ w punkcie B_1 . Punkty A_1, B_1 wyznaczają na kole podziałowym łuk przyporu A_1CB_1 . Stosunek długości łuku przyporu $\overset{\square}{A_1CB_1}$ do podziałki p_w odmie-

rzonyj na obwodzie koła podziałowego (d_1), które jest jednocześnie kołem tocznym (d_{w1}), jest określany jako liczba przyporu lub też wskaźnik zazębienia i wynosi:



Rys. 3.9. Współpraca zębów w zewnętrznym zazębieniu ewolwentowym niekorygowanym:
a) widok ogólny zazębienia, b) odległość punktu przyporu od bieguna zazębienia

$$\varepsilon = \frac{A_1CB_1}{P_w} \quad (3.40)$$

Wzór (3.40) można przekształcić tak, aby do obliczeń wykorzystać odcinek przyporu E_1E_2 oraz podziałkę odmierzoną na kole zasadniczym p_b , przyjmuje on wtedy postać:

$$\varepsilon = \frac{E_1CE_2}{P_b} = \frac{E_1C + E_2C}{P_b} \quad (3.41)$$

Aby współpraca zębów i kół mogła odbywać się w sposób płynny bez uderzeń i szarpnięć – w zazębieniu musi pozostawać więcej niż jedna para zębów. W związku z tym liczba przyporu musi być większa od jedności, czyli $\varepsilon > 1$.

Dla rozważań prowadzonych w dalszych rozdziałach istotne jest określenie odległości u punktu przyporu E od bieguna zazębienia C (rys. 3.9b). Odległość ta zmienia się wraz z kątem obrotu α_1 koła czynnego, co opisuje wzór

$$du = r_b d\alpha_1$$

Przyjąwszy, że przez biegun zazębienia C przebiega oś symetrii odcinka przyporu można ustalić, że odległość u zmienia się w granicach od $-u_{\max}$ do $+u_{\max}$, przy czym zmiana znaku oznacza, że punkt przyporu przemieszcza się z jednej strony osi O_1O_2 na drugą.

3.3.2. Korekcja zazębienia zewnętrznego

Na rysunku 3.10a przedstawiono zespół kół o zazębieniu ewolwentowym zewnętrznym i liczbie zębów mniejszej od liczby granicznej $z_1 = z_2 < z_g$. Jak wynika z rozdz. 3.1.2 oraz rys. 3.3 zęby obu kół są podcięte i mają pomniejszoną grubość u podstawy. Natomiast u wierzchołka zęby są stosunkowo grube. Taki kształt jest niekorzystny zarówno ze względów wytrzymałościowych, jak też hydraulicznych. Ze względu na pomniejszoną grubość u podstawy ząb staje się bardziej podatny, może wpadać w drgania, a nawet ulec złamaniu. Jednocześnie powiększone wręby międzyzębne powodują powstawanie znacznej przestrzeni zasklepionej w maszynie hydraulicznej, w której stłaczany jest czynnik roboczy. W rezultacie dochodzi do zwiększonego obciążenia kół i łożysk maszyny i zwiększenia hałaśliwości jej pracy. Współpraca kół z podciętymi zębami chociaż jest niekorzystna, to jednak jest nadal możliwa. W takim przypadku, co pokazano na rysunku 3.10a, koła obracają się wokół ustalonych osi obrotu O_1, O_2 oddalonych o nominalną odległość osi a_0 określoną wzorem (3.39). Podczas obrotu koła podziałowe o promieniach r_1, r_2 stają się kołami tocznymi i przetaczają się po sobie bez poślizgu. W związku z tym punkty przyporu kolejnych

współpracujących par zębów przemieszczają się po linii przyporu nachylonej pod kątem α_0 . Jednak współpracy kół z podciętymi zębami należy zdecydowanie unikać. Jednocześnie zastosowanie opisanej w rozdziale 3.1.3 korekcji uzębienia jest niemożliwe. Polega ona bowiem na wysunięciu narzędzia i nacięciu uzębienia kół na większej średnicy. Otrzymane w wyniku tego zęby pokazano na rysunku 3.10a linią kreskową. Tak uformowane zęby mają co prawda wystarczającą szerokość u podstawy (brak podcięcia) i wierzchołka (brak zaostrenia), jednak zarysy uzębienia współpracujących kół wzajemnie się przenikają, czyli interferują i niemożliwa jest ich współpraca.

Na rysunku 3.10a widać, że interferują boki zębów oraz wierzchołki zębów i dna wrębów. W tej sytuacji należy dokonać korekcji zazębienia, nazywanej korekcją P. Polega ona na rozsunięciu osi obu kół i uzyskaniu powiększonych luzów międzyzębnych. W ramach tych luzów dokonuje się przesunięcia zarysów zębów obu kół tak, aby wyeliminować podcięcia zębów, a jednocześnie zapewnić zetknięcie się tych zębów bokami.

Sposób prowadzenia korekcji P pokazano na rysunku 3.10b. Dokonuje się rozsunienia osi kół O_1 , O_2 od nominalnej odległości osi a_0 do tzw. tocznej odległości osi a_w . W wyniku rozsunienia osi kół utworzono powiększony luz międzyzębny. W jego ramach dokonano korekcji uzębienia obu kół tak, aby doprowadzić do zetknięcia zarysów zębów, w których nie występuje już podcięcie.

Koła zębate mogą się teraz obracać względem nowych osi obrotu. Podczas obrotu koła toczne o promieniach r_{w1} , r_{w2} przetaczają się po sobie bez poślizgu. Punkty przyporu współpracujących par zębów przemieszczają się po linii przyporu nachylonej pod tocznym kątem przyporu α_w . Wzór wiążący nominalną i toczną odległość osi a_0 i a_w oraz nominalny i toczny kąt przyporu α_0 i α_w ma postać:

$$a_w = a_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w} \quad (3.42)$$

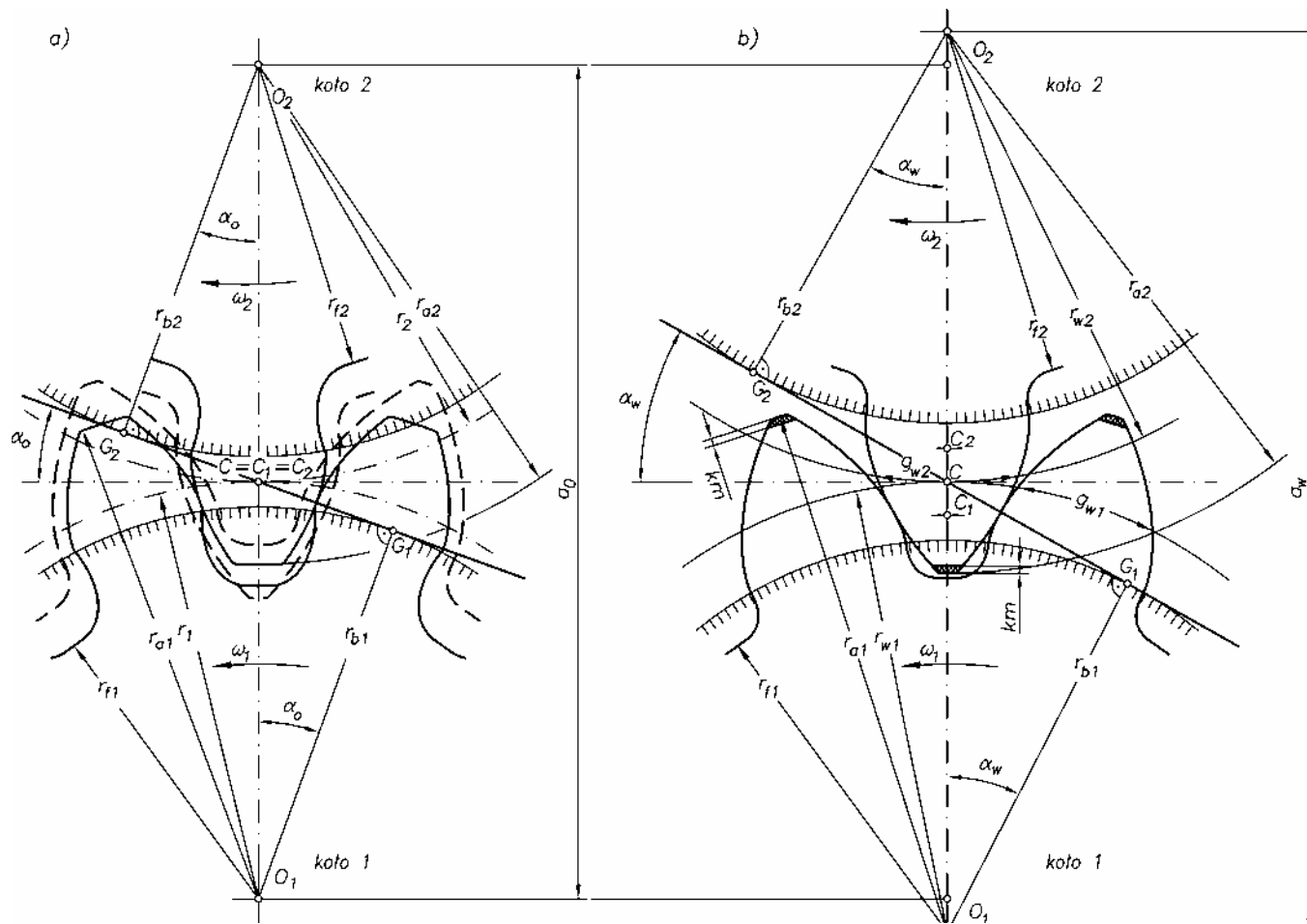
W nowym położeniu kół, po rozsunieniu osi, pogrubione zęby stykają się ze sobą na średnicach kół tocznych. Przyjmuje się zatem, że suma grubości zębów na kołach tocznych g_{w1} , g_{w2} jest równa podziałce tocznej $p_w = m_w \pi$, czyli:

$$g_{w1} + g_{w2} = m_w \pi \quad (3.43)$$

Z zależności (3.27) można wyznaczyć grubość zębów na kołach tocznych jako:

$$g_{w1} = 2r_{w1} \left[\frac{\hat{g}_{k1}}{2r_1} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_w \right] \quad (3.44)$$

$$g_{w2} = 2r_{w2} \left[\frac{\hat{g}_{k2}}{2r_2} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_w \right] \quad (3.45)$$



Rys. 3.10. Korekcja P zązębienia ewolwentowego zewnętrznego a) zązębienie przed korekcją, b) zązębienie po korekcji

Z kolei z zależności (3.23) określa się grubość zębów na kole podziałowym po korekcji jako:

$$\widehat{g}_{k1} = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \quad (3.46)$$

$$\widehat{g}_{k2} = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x_2 \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \quad (3.47)$$

Korzystając z zależności (3.4), otrzymuje się wzory na promienie kół podziałowych i tocznych

$$r_1 = \frac{1}{2} z_1 m, \quad r_{w1} = \frac{1}{2} z_1 m_w, \quad r_2 = \frac{1}{2} z_2 m, \quad r_{w2} = \frac{1}{2} z_2 m_w \quad (3.48)$$

Po podstawieniu podanych związków (3.44), (3.45), (3.46), (3.47) i (3.48) do wzoru (3.43) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} & z_1 m_w \left[\frac{\frac{\pi}{2} + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha_0}{z_1 m} m + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_w \right] \\ & + z_2 m_w \left[\frac{\frac{\pi}{2} + 2x_2 \operatorname{tg} \alpha_0}{z_2 m} m + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_o \right] = m_w \pi \end{aligned} \quad (3.49)$$

Po przekształceniach otrzymuje się wzór wiążący toczny kąt przyporu α_w oraz współczynniki korekcji kół x_1 i x_2 :

$$\operatorname{inv} \alpha_w = 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{inv} \alpha_0 \quad (3.50)$$

Zakładając, że w maszynie zębatej $z_1 = z_2 = z$ oraz $x_1 = x_2 = x$, wzór ten przyjmuje postać:

$$\operatorname{inv} \alpha_w = 2 \frac{x}{z} \operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{inv} \alpha_0 \quad (3.51)$$

Po korekcji zazębienia należy sprawdzić czy nie następuje interferencja wierzchołków i stóp współpracujących zębów. Przedstawiono to symbolicznie na rysunku 3.10 jako zakreskowaną część wierzchołka. Aby interferencja nie zachodziła, powinien być spełniony warunek

$$a_w - \left(\frac{d_f}{2} + \frac{d_a}{2} \right) \geq c$$

gdzie c – luz wierzchołkowy (rys. 3.2).

Jeśli warunek ten nie jest spełniony, to należy skrócić głowy zębów o wielkość km .

Korekcję P zazębienia ewolwentowego zewnętrznego maszyny hydraulicznej można wykonać na dwa sposoby.

Pierwszy sposób polega na przyjęciu z góry założonej odległości osi a_w i wyznaczeniu odpowiadających im współczynników korekcji $x_1 = x_2 = x$. Pozwala to na projektowanie typoszeregów maszyn hydraulicznych o standardowych odległościach osi. Obliczenia wykonuje się według następującego algorytmu:

- zakłada się liczbę zębów $z_1 = z_2 \langle z_g$, moduł m i nominalny kąt zarysu α_0 ,
- wyznacza się nominalną odległość osi a_0 ,
- przyjmuje się toczną odległość osi $a_w > a_0$, która musi być na tyle duża, aby umożliwić eliminację podcięcia zębów, a jednocześnie na tyle mała, aby nie spowodować zaostrenia zębów,
- wyznacza się toczny kąt przyporu α_w dla przyjętej odległości osi a_w ,
- wyznacza się współczynnik korekcji zazębienia $x_1 = x_2 = x$ dla przyjętych liczb zębów $z_1 = z_2 = z$ oraz kątów α_0 i α_w .

Drugi sposób korekcji polega na przyjęciu z góry założonych wartości współczynników korekcji $x_1 = x_2 = x$ i wyznaczeniu odpowiadającej im odległości osi a_w . Pozwala to na dobór takich wartości współczynników korekcji, które są potrzebne do uzyskania założonych parametrów hydraulicznych maszyny (patrz rozdz. 9).

Obliczenia wykonuje się według następującego algorytmu:

- zakłada się liczby zębów $z_1 = z_2 \langle z_g$, moduł m i nominalny kąt zarysu α_0 ,
- wyznacza się nominalną odległość osi a_0 ,
- zakłada się wartość współczynnika korekcji $x_1 = x_2 = x$, która jest korzystna ze względu na parametry hydrauliczne maszyny, jednocześnie powinna się mieścić w zakresie $x_{g \min} \leq x \leq x_{g \max}$ (rys. 3.4), aby uwolnić się od podcięcia zęba i nie spowodować jego zaostrenia,
- wyznacza się toczny kąt przyporu α_w , dla przyjętych liczb zębów $z_1 = z_2 = z$, kąta α_0 i współczynnika korekcji $x_1 = x_2 = x$,
- wyznacza się toczną odległość osi a_w dla odległości osi a_0 oraz kątów α_0 i α_w .

3.3.3. Korekcja zazębienia według metody Judina

W budowie hydraulicznych maszyn zębatych stosowano specjalny przypadek korekcji według metody Judina [28]; był on w przeszłości stosunkowo szeroko rozpowszechniony. Jest to korekcja typu P z rozsunieniem osi kół, którą prowadzi się

w następujący sposób: przyjmuje się zespół dwóch kół zębatych ewolwentowych o zazębieniu zewnętrznym i liczbie zębów $z_1 = z_2 \langle z_g$ oraz module m . Uzębienie takiego koła oznaczono na rysunku 3.11a linią kreskową. Wyznacza się nominalną odległość osi, która zgodnie ze wzorem (3.39) ma postać:

$$a_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} m = zm \quad (3.52)$$

Odpowiednio nominalny kąt przyporu wynosi α_0 , przy czym zwykle przyjmuje się jego wartość równą 20° .

Zgodnie ze wskazaniem podanym w rozdziale 3.3.2, podczas korekcji P należy rozsunąć osie kół i przyjąć tzw. toczną odległość osi a_w , większą od odległości nominalnej a_0 . W poprzednim rozdziale nie podano zasad, według których należy przyjmować wartość tocznej odległości osi a_w . Zależy to od projektanta – może on dobrać dowolne wartości a_w . Mogą to być np. takie wartości, które zapewnią osiągnięcie założonych parametrów hydraulicznych, takich jak wydajność, pulsacja wydajności czy też wielkość przestrzeni zasklepionej (patrz rozdz. 9). Według korekcji Judina zakłada się z góry określoną toczną odległość osi a_w większą od nominalnej a_0 o jeden moduł, czyli:

$$a_w = (z + 1) m \quad (3.53)$$

W tej sytuacji średnica toczna wynosi:

$$d_w = (z + 1) m \quad (3.54)$$

Jak widać na rysunku 3.11a rozsuniecie osi powoduje utworzenie miejsca. Można zatem wysunąć narzędzie, utworzyć zarys skorygowanego zęba na większej średnicy i wyeliminować podcięcie zęba, co przedstawiono na rysunku 3.11a linią ciągłą. Przyjmując, że przesunięcie narzędzia przypadające na jedno koło będzie równe połowie różnicy pomiędzy odległością toczną a_w i nominalną a_0 , można wyznaczyć wartość współczynnika korekcji x jako:

$$\frac{a_w - a_0}{2} = xm$$

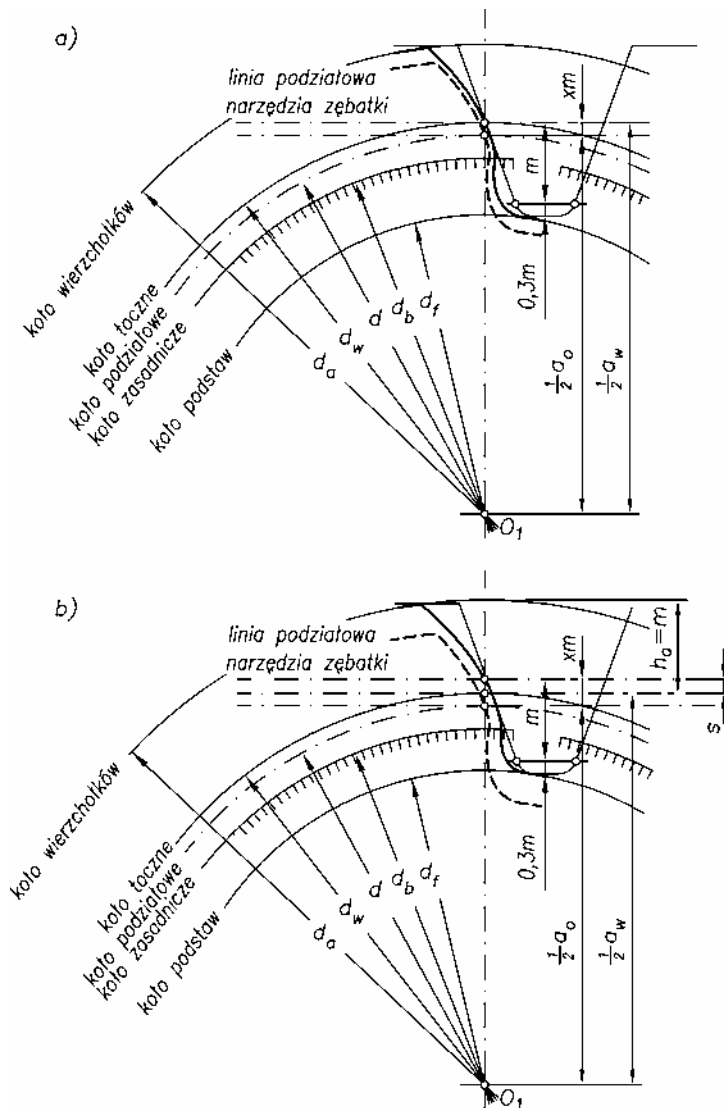
Po podstawieniu wzorów (3.52), (3.53) otrzymuje się

$$\frac{(z + 1)m - zm}{2} = xm$$

Ze wzoru tego wynika, że współczynnik korekcji przy tak wykonanym wysunięciu narzędzia powinien wynosić $x = 0,5$. W praktyce takie wysunięcie narzędzia okazuje się niewystarczające, a koła po takiej korekcji będą współpracować na średnicy tocznej d_w ze zbyt dużym luzem obwodowym. Aby ten luz zmniejszyć, należy powiększyć

wartość współczynnika przesunięcia zarysu x . Odpowiedni zarys niekorygowany i korygowany przedstawiono linią kreskową i ciągłą na rysunku 3.11b. Wartość współczynnika korekcji wyznacza się ze wzoru (3.42), określając toczy kąt przyporu α_w jako:

$$\cos \alpha_w = \frac{a_0}{a_w} \cos \alpha_0$$



Rys. 3.11. Korekcja zazębienia według metody Judina

Po podstawieniu zależności (3.52), (3.53) otrzymuje się

$$\alpha_w = \arccos\left(\frac{z}{z+1} \cos \alpha_0\right) \quad (3.55)$$

W metodzie Judina przyjmuje się, że dopuszczalny luz obwodowy na średnicy tocznej skorygowanego zazębienia nie powinien być większy niż $0,08 m_w$. Korzystając z zależności (3.43), można zapisać:

$$g_{w1} + g_{w2} + 0,08m_w = \pi m_w \quad (3.56)$$

Po wykonaniu przekształceń, podobnych jak w rozdziale 3.3.2, otrzymuje się wyrażenie

$$\text{inv} \alpha_w = 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \text{tg} \alpha_0 + \text{inv} \alpha_0 + \frac{0,08}{z_1 + z_2}$$

które, po uwzględnieniu, że $z_1 = z_2 = z$ oraz $x_1 = x_2 = x$, upraszcza się do postaci

$$\text{inv} \alpha_w = 2 \frac{x}{z} \text{tg} \alpha_0 + \text{inv} \alpha_0 + \frac{0,04}{z}$$

Ostatecznie otrzymuje się wzór na współczynnik korekcji według metody Judina

$$x = \frac{z(\text{inv} \alpha_w - \text{inv} \alpha_0) - 0,04}{2 \text{tg} \alpha_0} \quad (3.57)$$

gdzie α_w wyznacza się ze wzoru (3.55).

Otrzymana z tego wzoru wartość współczynnika korekcji x jest większa od pierwotnie zakładanej wartości $x = 0,5$ (rys. 3.11b), co zapewnia poprawną współpracę kół.

W metodzie Judina średnicę koła wierzchołkowego po korekcji (rys. 3.11b) wyznacza się bez uwzględnienia współczynnika x . Po założeniu, że zęby są normalne $y = 1$, średnicę wierzchołkową oblicza się ze wzoru:

$$d_a = d_w + 2m = (z+1)m + 2m = (z+3)m \quad (3.58)$$

Uwzględniając znormalizowane wartości modułów, otrzymuje się znormalizowane średnice wierzchołkowe kół, co jest bardzo korzystne ze względu na kształtowanie, wymiarowanie i technologię korpusów hydraulicznych maszyn zębatych. Z kolei średnica stóp wynika z zagłębienia narzędzia w nacinane koło podczas procesu obróbki, co jest ściśle powiązane ze współczynnikiem korekcji x . Jak wynika z rozdz. 3.1.1 i rys. 3.11b średnica stóp jest wyrażana wzorem

$$d_f = d_a - 2h$$

przy czym wysokość zęba h jest określona zależnością

$$h = 1,3m + m - s$$

Korzystając z rysunku 3.11b, odcinek s wyznacza się jako:

$$s = \frac{d}{2} + xm - \frac{d_w}{2}$$

Po podstawieniu podanych wyżej wzorów (3.4) i (3.54) oraz przekształceniach otrzymuje się:

$$s = (x - 0,5)m$$

Wzór na średnicę stóp przyjmuje zatem postać:

$$d_f = (z + 3)m - 2[2,3m - (x - 0,5)m]$$

i ostatecznie:

$$d_f = m(z - 2,6 + 2x) \quad (3.59)$$

3.3.4. Wpływ parametrów zazębienia na liczbę przyporu

W rozdziale 3.3.1 stwierdzono, że dla płynnej współpracy zębów i kół zębatych, bez uderzeń i szarpnięć – w zazębieniu musi pozostawać więcej niż jedna para zębów. W związku z tym, liczba przyporu musi być większa od jedności, czyli $\varepsilon > 1$. Jednocześnie ze względu na budowę maszyn hydraulicznych strefa zazębienia nie powinna być zbyt duża, w zamkniętej bowiem przestrzeni tej strefy gromadzi się czynnik roboczy, którego ciśnienie znacznie wzrasta w trakcie stłaczania. Powoduje to zmniejszenie sprawności objętościowej maszyny i przeciążanie jej łożysk. W związku z tym liczba przyporu ε powinna być możliwie mała. Jak wykazano w rozdziałach 3.3.2 i 3.3.3 parametry zazębienia można dobierać w stosunkowo szerokim zakresie. W związku z tym należy zbadać jak ten dobór wpływa na liczbę przyporu ε .

Na podstawie wzoru (3.41) oraz rysunku 3.9a wyznacza się odcinki przyporu E_1C i E_2C jako:

$$E_1C = G_2E_1 - G_2C$$

$$E_2C = G_1E_2 - G_1C$$

Odpowiednio w trójkątach prostokątnych $O_2G_2E_1$ i $O_1G_1E_2$ ważne są zależności:

$$G_2 E_1^2 = O_2 E_1^2 - O_2 G_2^2 = r_{a2}^2 - r_{b2}^2$$

$$G_1 E_2^2 = O_1 E_2^2 - O_1 G_1^2 = r_{a2}^2 - r_{b2}^2$$

Z kolei w trójkątach prostokątnych $O_2 G_2 C$ i $O_1 G_1 C$ ważne są związki:

$$G_2 C = O_2 C \sin \alpha_0 = r_2 \sin \alpha_0$$

$$G_1 C = O_1 C \sin \alpha_0 = r_1 \sin \alpha_0$$

W przypadku gdy przeprowadza się korekcje zazębienia (rys. 3.10), należy dokonać zamiany parametrów r_1 na r_{w1} , r_2 na r_{w2} , a_0 na a_w .

Po przekształceniach otrzymuje się wzory:

$$E_1 C = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - r_{w2} \sin \alpha_w$$

$$E_2 C = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - r_{w1} \sin \alpha_w$$

Po wprowadzeniu tych zależności do wzoru (3.41) otrzymuje się:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a_w \sin \alpha_w}{p_b} \quad (3.60)$$

Po podstawieniu do tego wzoru zależności (4.10), (4.18), (4.42) oraz uwzględnieniu wzoru $p_b = \pi m \cos \alpha_0$ otrzymuje się ostatecznie:

$$\varepsilon = \left[\sqrt{\left(\frac{z_1}{2} + y + x_1\right)^2 - \left(\frac{z_1}{2} \cos \alpha_0\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{z_2}{2} + y + x_2\right)^2 - \left(\frac{z_2}{2} \cos \alpha_0\right)^2} - \frac{(z_1 + z_2)}{2} \cos \alpha_0 \operatorname{tg} \alpha_w \right] \frac{1}{\pi \cos \alpha_0} \quad (3.61)$$

Z analizy wzoru (3.61) wynika, że liczba przyporu ε zależy od następujących parametrów zazębienia:

- liczby zębów z_1, z_2 współpracujących kół,
- współczynnika wysokości zęba y ,
- współczynników korekcji x_1, x_2 ,
- nominalnego i tocznego kąta przyporu a_0 i a_w .

W przypadku hydraulicznych maszyn zębatych przyjmuje się najczęściej zespół dwóch kół o jednakowych liczbach zębów $z_1 = z_2 = z$ i jednakowych współczynnikach korekcji $x_1 = x_2 = x$. Wzór (3.61) ma wtedy postać:

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{z}{2} + y + x\right)^2 - \left(\frac{z}{2} \cos \alpha_0\right)^2} - z \cos \alpha_0 \operatorname{tg} \alpha_w}{\pi \cos \alpha_0} \quad (3.62)$$

3.4. Zespół kół ewolwentowych o zazębieniu wewnętrznym

3.4.1. Geometria zespołu kół, zasady współpracy, liczba przyporu

Istotne znaczenie w budowie maszyn hydraulicznych mają zespoły kół o zazębieniu wewnętrznym ewolwentowym. Ich budowa jest bardziej zwarta niż budowa zespołów o zazębieniu zewnętrznym, a jednocześnie dają możliwości uzyskania korzystniejszych parametrów hydraulicznych (patrz rozdz. 9). Na rysunku 3.12 przedstawiono zespół dwóch kół o zazębieniu wewnętrznym ewolwentowym. W obu kołach liczba zębów jest większa lub równa liczbie granicznej. Oznacza to, że w kole o uzębieniu zewnętrznym, zgodnie z warunkiem (3.13) $z_1 \geq z_{g1}$, w kole zaś o uzębieniu wewnętrznym, zgodnie z warunkiem (3.31) $z_2 \geq z_{g2}$. Zęby kół są grube u podstawy i wierzchołka, a przez to odporne na złamanie czy wykruszenie.

Koła obracają się wokół ustalonych osi obrotu O_1 i O_2 i stykają się na średnicy podziałowej, w centralnym punkcie zazębienia C , zwanym też biegunem zazębienia. Odległość osi kół O_1O_2 , zwana także centralą, wynosi:

$$a = \frac{z_2 - z_1}{2} m \quad (3.63)$$

Przez centralny punkt zazębienia C , stycznie do okręgów zasadniczych r_{b1} , r_{b2} współpracujących kół, prowadzi się linię przyporu. Jest ona nachylona pod kątem przyporu α_0 do prostej prostopadłej wystawionej do centrali O_1O_2 w biegunie zazębienia C .

Współpraca kół, uzębień i zębów odbywa się następująco: zazwyczaj napędza się koło 1 o uzębieniu zewnętrznym, które nazywane jest kołem czynnym lub pędzącym. Koło 2 o uzębieniu wewnętrznym jest kołem biernym, pędzonym. Pomiedzy zębami koła 1 i 2 tworzy się punkt przyporu, który przemieszcza się po linii przyporu. Współpraca rozpoczyna się od punktu E_1 , tzw. wzębienia (zęby w położeniu $1'$, $2'$), następnie przechodzi do centralnego punktu zazębienia C (zęby w położeniu $1''$, $2''$), aby zakończyć się w punkcie E_2 , czyli tzw. wyzębieniu (zęby w położeniu $1'''$, $2'''$). Punkty E_1 , E_2 wyznaczają na linii przyporu odcinek przyporu E_1E_2 .

Podobnie jak w zazębieniu zewnętrznym odległość u punktu przyporu E względem bieguna zazębienia C zmienia się w zakresie od $-u_{max}$ do $+u_{max}$, co przedstawiono na

3.4.2. Graniczna liczba zębów w kole o uzębieniu zewnętrznym ze względu na współpracę z kołem o uzębieniu wewnętrznym

Korzystając z rysunku 3.7 (rozd. 3.2.2), sformułowano definicję granicznej liczby zębów $z_g = z_{g2}$ odnoszącą się do pojedynczego koła zębatego, o uzębieniu wewnętrznym. Zgodnie ze wzorem (3.31) jest to minimalna liczba zębów, dla której głowa zęba jest prawidłowo ukształtowana przez zarys ewolwentowy.

Podczas współpracy kół w zespole o zazębieniu wewnętrznym należy wprowadzić dodatkową definicję granicznej liczby zębów. Przez pojęcie to rozumie się minimalną graniczną liczbę zębów $z_1 = z_{g1}$ w kole o uzębieniu zewnętrznym, dla której jest zapewniona prawidłowa współpraca z zębami z_2 koła o uzębieniu wewnętrznym. Na rysunku 3.13 przedstawiono zasady konstrukcji i prawidłowej współpracy zęba koła zewnętrznego i wewnętrznego.

Przez centralny punkt zazębienia C stycznie do okręgów zasadniczych o promieniach r_{b1} , r_{b2} prowadzi się linię przyporu zazębienia wewnętrznego. Na linii tej wyznacza się odcinek przyporu G_1CE_2 . Współpraca zębów rozpoczyna się w punkcie G_1 , postępuje w kierunku punktu C i kończy się w punkcie E_2 . W związku z tym konstruuje się dwa zarysy ewolwentowe przechodzące przez punkt G_1 . Jest to zarys ewolwentowy e_1 , stanowiący bok zęba zewnętrznego, rozwijany z okręgu zasadniczego r_{b1} oraz zarys ewolwentowy e_2 , stanowiący bok zarysu wewnętrznego rozwijany z okręgu zasadniczego r_{b2} . Punkt G_1 wyznacza stosunki wymiarowe w zazębieniu. Zarys zęba wewnętrznego nie powinien sięgać poniżej punktu G , w związku z tym powinien on być skrócony, średnica wierzchołkowa r_{a2} tak zwiększona, aby przechodzić przez punkt G_1 . Jednocześnie zarys zęba zewnętrznego powinien sięgać poniżej punktu G_1 , a średnica stóp r_{f1} powinna zostać zmniejszona. Warunek wiążący wymiary geometryczne obu kół w punkcie G_1 ma postać

$$r_{a2}^2 = u^2 + w^2 \quad (3.64)$$

Na podstawie rysunku 3.13 ustala się zależności:

$$\begin{aligned} r_{a2} &= r_2 - h_{a2} \\ u &= r_{b1} \sin \alpha_0 \\ w &= O_2C - BC \end{aligned}$$

Przyjawszy ogólnie ważne zależności:

$$i = \frac{r_1}{r_2}, \quad r_{b1} = r_1 \cos \alpha_0$$

otrzymuje się:

Po wprowadzeniu tych zależności do wzoru (3.64), otrzymuje się:

$$\left(\frac{1}{i} - \frac{h_{a2}}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha_0\right)^2 + \left(\frac{1}{i} - \sin^2 \alpha_0\right)^2 \quad (3.65)$$

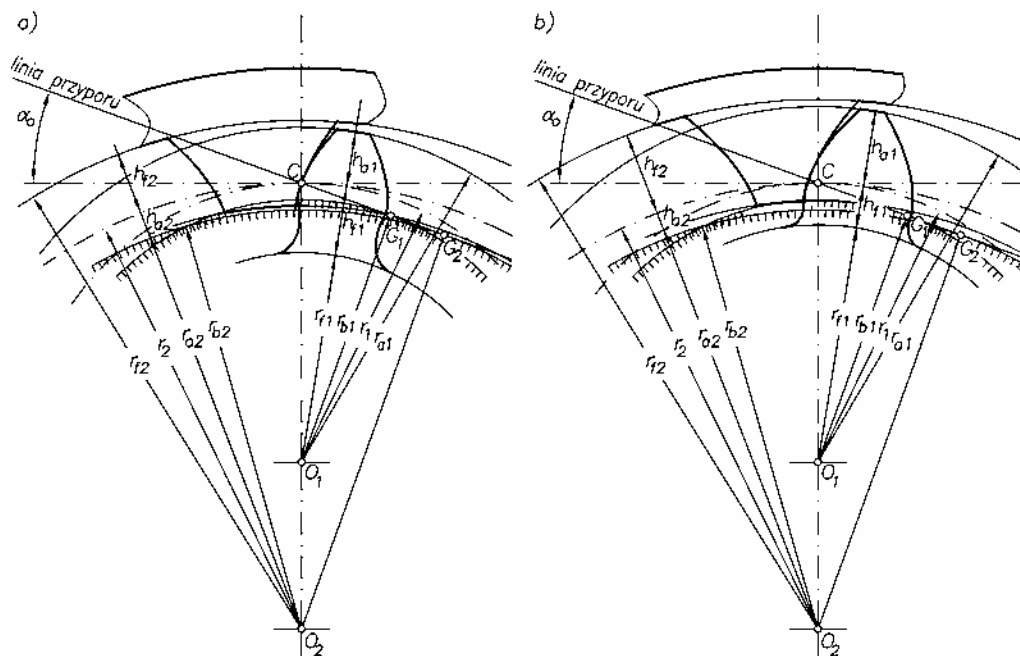
Uwzględnivszy wzory (3.4), (3.5), otrzymuje się po przekształceniach wzór:

$$z_1 = z_{g1} = \frac{2(y - x_2)}{\frac{1}{i} - \sqrt{\left(\frac{\sin^2 \alpha_0}{2}\right) + \left(\frac{1}{i} - \sin^2 \alpha_0\right)^2}} \quad (3.66)$$

Ze wzoru (3.66) wyznacza się minimalną graniczną liczbę zębów $z_1 = z_{g1}$ koła o uzębieniu zewnętrznym, która będzie prawidłowo współpracować z kołem o uzębieniu wewnętrznym.

3.4.3. Korekcja zazębienia wewnętrznego

Zastosowanie zespołu kół o zazębieniu wewnętrznym umożliwi znaczne zmniejszenie gabarytów maszyny hydraulicznej i polepszenie parametrów hydraulicznych. W ramach takiego zespołu można dążyć do dalszego zmniejszenia gabarytów przez przyjęcie w kole o uzębieniu zewnętrznym liczby zębów mniejszej od granicznej $z_g < z_{g2}$ (patrz wzór (3.13) i rys. 3.3). Odpowiednio do tego założenia należy przyjąć, że koło o uzębieniu wewnętrznym powinno mieć liczbę zębów większą od granicznej $z_2 > z_{g2}$ (patrz wzór (3.31) i rys. 3.7). Zespół takich kół przedstawiono na rysunku 3.14a., gdzie widać, że koło o uzębieniu zewnętrznym ma podciętą stopę i stosunkowo szeroką głowę, koło zaś o uzębieniu wewnętrznym ma szeroką głowę. W zespole kół należy przeprowadzić korekcję P-0 bez rozsunięcia kół O_1, O_2 , której efekty przedstawiono na rysunku 3.14b. Narzędzie wysuwa się z materiału koła o uzębieniu wewnętrznym i kształtuje zęby na większej średnicy. Eliminuje się w ten sposób podcięcie zęba i poprawia jego właściwości wytrzymałościowe. Jednocześnie wysunięcie narzędzia nie powinno być zbyt duże, aby nie spowodować zaostrenia zęba u wierzchołka. O ile narzędzie wysunięto z koła o uzębieniu zewnętrznym, o tyle wsuwa się je w materiał koła o uzębieniu wewnętrznym, nie pogarszając przy tym ani jego kształtu, ani właściwości wytrzymałościowych. Wartość współczynnika korekcji koniecznego do wyeliminowania podcięcia zęba wyznacza się ze wzoru (3.14). Wymiary zębów i kół zębatych po korekcji zazębienia oblicza się z zależności od (3.16) do (3.19) oraz od (3.32) do (3.35). W wyniku korekcji powiększa się wysokość głowy zęba w kole o uzębieniu zewnętrznym oraz zmniejsza wysokość jego stopy (rys. 3.14b). W kole natomiast o uzębieniu wewnętrznym następuje odwrotna zmiana.



Rys. 3.14. Korekcja P-0 zazębienia wewnętrznego:
a) zazębienie przed korekcją, b) zazębienie po korekcji

Korekcję zazębienia wewnętrznego prowadzi się także z innych powodów niż eliminacja podcięcia zęba w kole o uzębieniu zewnętrznym. Należą do nich:

- konieczność uniknięcia interferencji w zazębieniu,
- interferencja pomiędzy narzędziem a obrabianym kołem o uzębieniu wewnętrznym,
- trudności w trakcie montażu zespołu kół.

3.4.4. Wpływ parametrów zazębienia na liczbę przyporu

Podobnie jak w zespole kół o zazębieniu zewnętrznym, również w zespole kół o zazębieniu wewnętrznym należy zbadać, jakie parametry zazębienia i w jakim stopniu wpływają na wartość liczby przyporu ε . Liczba przyporu jest zdefiniowana wzorem (3.41). Na podstawie rysunku 3.12 ustala się następujące zależności:

$$E_1C = G_2C - G_2E_1$$

$$E_2C = G_1E_2 - G_1C$$

$$G_2C = r_2 \sin \alpha_0$$

$$G_1C = r_1 \sin \alpha_0$$

$$G_2 E_1^2 = O_2 E_1^2 - O_2 G_2^2 = r_{a2}^2 - r_{b2}^2$$

$$G_1 E_2^2 = O_1 E_2^2 - O_1 G_1^2 = r_{a1}^2 - r_{b1}^2$$

Po przekształceniu otrzymuje się wzory do wyznaczania odcinków przyporu E_1C i E_2C o postaci:

$$E_1C = r_2 \sin \alpha_0 - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}$$

$$E_2C = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - r_1 \sin \alpha_0$$

Po wprowadzeniu tych zależności do wzoru definicyjnego (3.41) otrzymuje się:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} + (r_2 - r_1) \sin \alpha_0}{p_b} \quad (3.67)$$

Gdy przyjmie się, że w zazębieniu wewnętrznym dokonano korekcji P-0 ($x_1 = x_2 = x$) i wprowadzi w związku z tym do zależności (3.67) wzory (3.18) i (3.34), otrzymuje się:

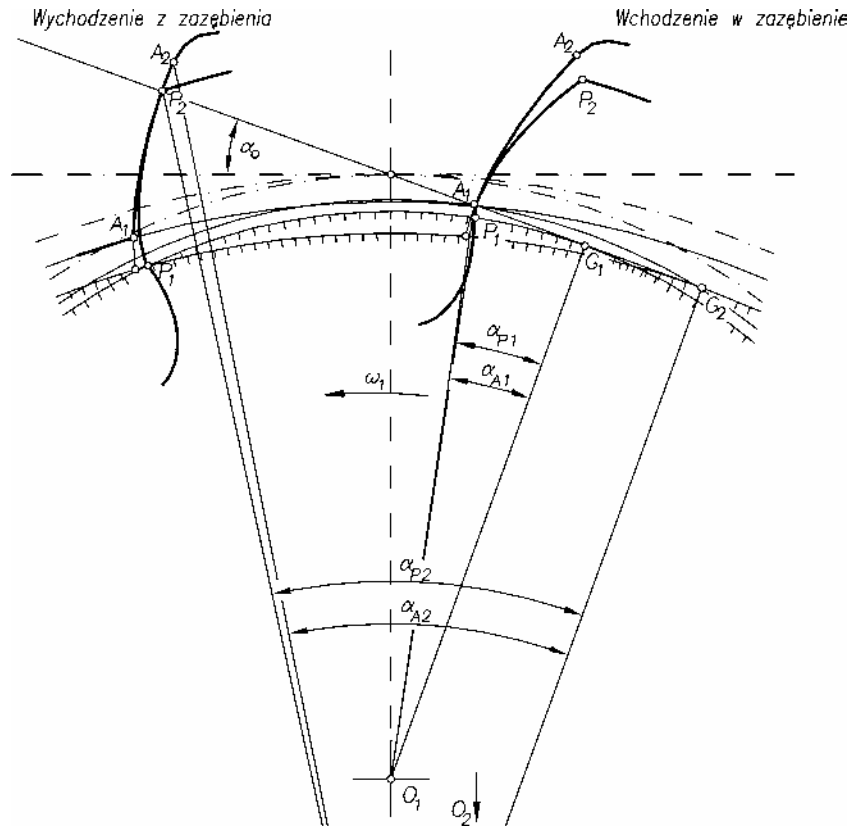
$$\varepsilon = \left[\sqrt{\left(\frac{z_1}{2} + y + x\right)^2 - \left(\frac{z_1}{2} \cos \alpha_0\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{z_2}{2} - y + x\right)^2 - \left(\frac{z_2}{2} \cos \alpha_0\right)^2} + \frac{z_2 - z_1}{2} \sin \alpha_0 \right] \frac{1}{\pi \cos \alpha_0} \quad (3.68)$$

Z analizy wzoru (3.68) widać, że liczba przyporu ε zależy od następujących parametrów zazębienia:

- liczby zębów z_1, z_2 ,
- współczynnika wysokości zęba y ,
- współczynnika korekcji x ,
- nominalnego kąta przyporu α_0 .

3.4.5. Interferencja zębów

W trakcie współpracy zębów w zazębieniu wewnętrznym może dochodzić do zakłóceń. Powodem jest niewłaściwe zaprojektowanie uzębienia i wzajemne przenikanie się zarysów zębów, co powoduje zakłócenia w procesie zazębienia. Przenikanie zarysów nazywa się interferencją. Wyróżnia się dwa podstawowe rodzaje interferencji, tzn. interferencję 1. i 2. rodzaju.



Rys. 3.15. Interferencja 1. rodzaju

Interferencja 1. rodzaju polega na przenikaniu się zarysów wierzchołków i stóp zębów kół o uzębieniu zewnętrznym i wewnętrznym (rys. 3.15). Na rysunku 3.15 widać, że przy wejściu w zazębienie punkt P_1 początku zarysu ewolwentowego zęba zewnętrznego powinien znajdować się poniżej punktu A_1 początku czynnej części ewolwenty zęba wewnętrznego. W przeciwnym razie może nastąpić przenikanie się zarysów zębów. Zgodnie z rysunkiem tangensy kątów opisanych punktami P_1 i A_1 powinny spełniać warunek:

$$\operatorname{tg} \alpha_{A1} \geq \operatorname{tg} \alpha_{P1} \quad (3.69)$$

gdzie α_{A1} – kąt przyporu na kole ograniczającym początek czynnej części ewolwenty zęba wewnętrznego (początek zazębienia), α_{P1} – kąt przyporu na kole wyznaczającym początek ewolwenty zęba zewnętrznego.

Na rysunku widać również, że przy wyjściu z zazębienia punkt A_2 końca zarysu ewolwentowego zęba wewnętrznego powinien znajdować się powyżej punktu P_2 ,

wyznaczającego koniec czynnej części zęba zewnętrznego. Odpowiednio tangensy kątów opisujących położenie tych punktów powinny spełniać warunek

$$\operatorname{tg} \alpha_{p_2} \geq \operatorname{tg} \alpha_{A_2} \quad (3.70)$$

gdzie α_{A_2} – kąt przyporu na kole wyznaczającym koniec ewolwenty zęba wewnętrznego, α_{p_2} – kąt przyporu na kole ograniczającym czynną część ewolwenty zęba zewnętrznego (koniec zazębienia).

Szczegółowe zależności do obliczania kątów α_A i α_P podano w [23], wynikają one z metod wytwarzania kół i zastosowanych narzędzi.

Interferencja 2. rodzaju polega na przenikaniu się wierzchołków zębów koła o uzębieniu zewnętrznym i wewnętrznym przy wejściu i wyjściu ze strefy współpracy. Na rysunku 3.16a przedstawiono dwa charakterystyczne przypadki współpracy zębów kół o zazębieniu wewnętrznym. W pierwszym przypadku przedstawiono współpracę zębów w centralnym punkcie zazębienia C . W drugim przedstawiono współpracę zębów podczas wychodzenia z zazębienia, gdy może dojść do zetknięcia się wierzchołków zęba zewnętrznego i wewnętrznego, czyli interferencji 2. rodzaju. Podczas przejścia od pierwszego do drugiego przypadku współpracy następuje, zgodnie z zasadą zazębienia, przetaczanie się po sobie okręgów tocnych r_1 i r_2 oraz obrót kół o kąty δ_1 i δ_2 , w związku z tym odpowiednie łuki okręgów tocnych $C_1C'_1$ i $C_2C'_2$ są sobie równe, czyli:

$$C_1C'_1 = C_2C'_2$$

Zgodnie z rysunkiem 3.16a dokonuje się odpowiednich podstawień i otrzymuje się:

$$\delta_1 z_1 m = \delta_2 z_2 m$$

Ostatecznie formułuje się warunek zabezpieczenia przed interferencją 2. rodzaju jako:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} > \frac{z_1}{z_2} \quad (3.71)$$

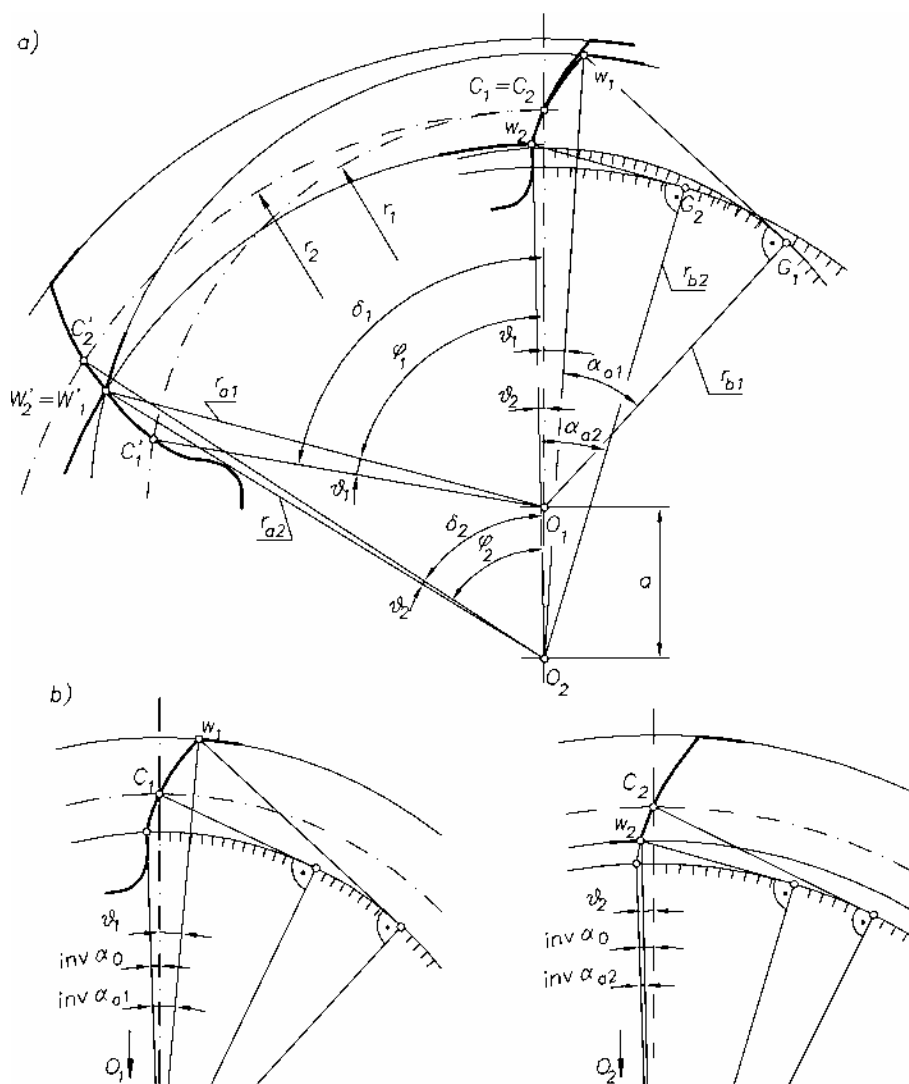
Odpowiednio kąty δ_1 i δ_2 wyznacza się z rysunku 3.16a jako:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \varphi_1 + \vartheta_1 \\ \delta_2 &= \varphi_2 - \vartheta_2 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Z kolei kąty φ_1 i φ_2 wyznacza się z trójkątów $O_1O_2W'_2$ i $O_1O_2W'_1$ jako:

$$\varphi_1 = \arccos \frac{r_{a2}^2 - r_{a1}^2 - a^2}{2ar_{a1}}$$

$$\varphi_2 = \arccos \frac{r_{a2}^2 - r_{a1}^2 + a^2}{2ar_{a2}}$$



Rys. 3.16. Interferencja 2. rodzaju w ząbieniu wewnętrznym:
a) widok ząbienia, b) rysunki pomocnicze do wyznaczania kątów φ_1 i φ_2

Kąty \mathcal{G}_1 i \mathcal{G}_2 wyznacza się na podstawie zależności opisujących ewolwentę:

$$\mathcal{G}_1 = \text{inv } \alpha_{a1} - \text{inv } \alpha_0$$

$$\mathcal{G}_2 = \text{inv } \alpha_o - \text{inv } \alpha_{a2}$$

Na podstawie rysunku 3.16b wyznacza się kąty α_{a1} i α_{a2} jako:

$$\cos \alpha_{a1} = \frac{r_{b1}}{r_{a1}}$$

$$\cos \alpha_{a2} = \frac{r_{b2}}{r_{a2}}$$

Ostatecznie wzory (3.72) przyjmują formę

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \arccos \frac{r_{a2}^2 - r_{a1}^2 - a^2}{2ar_{a1}} + \text{inv } \alpha_{a1} - \text{inv } \alpha \\ \delta_2 &= \arccos \frac{r_{a2}^2 - r_{a1}^2 + a^2}{2ar_{a2}} + \text{inv } \alpha_{a2} - \text{inv } \alpha \end{aligned} \quad (3.73)$$

3.5. Zespoły wielokołowe o zazębieniu ewolwentowym

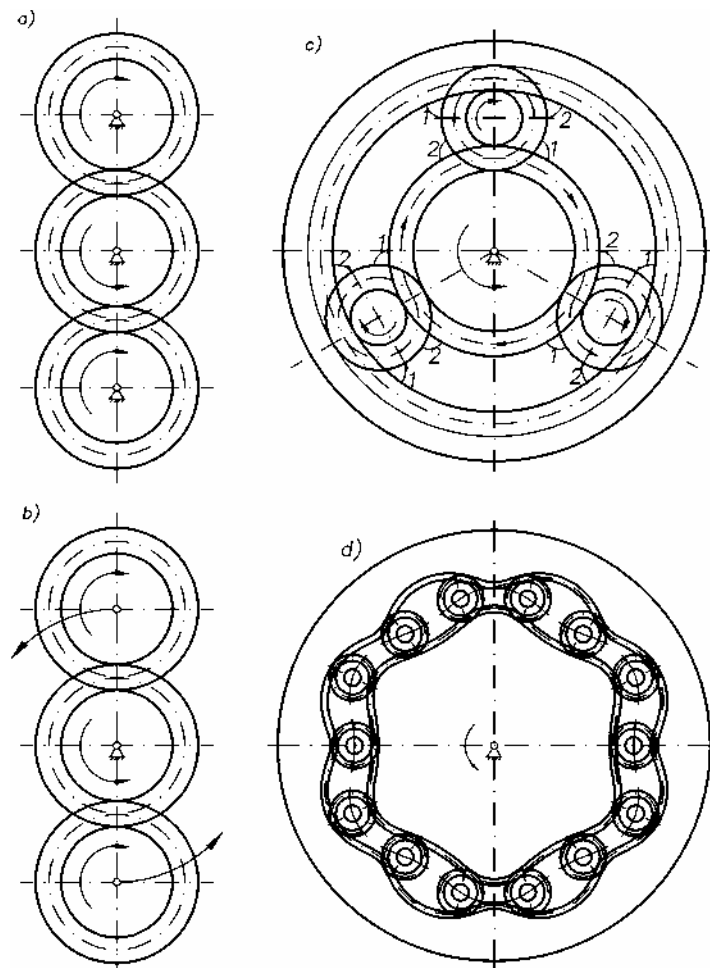
Koła zębate ewolwentowe można zestawiać w zespoły wieloelementowe, nazywane wielokołowymi. Mogą to być zespoły:

- o zazębieniu zewnętrznym (rys. 3.17a,b),
- o zazębieniu wewnętrznym (rys. 3.17c,d).

Koła w tych zespołach mogą współpracować ze sobą w przypadku osi ustalonych (rys. 3.17a, c) lub ruchomych (rys. 3.17b,d). Projektowanie zespołów wielokołowych o zazębieniu zewnętrznym prowadzi się według zasad podanych w rozdziale 3.3. Projektowanie zespołów wielokołowych o zazębieniu wewnętrznym prowadzi się według zasad podanych w rozdziale 3.4, przy czym należy uwzględnić dodatkowe warunki charakterystyczne w projektowaniu przekładni obiegowych [29]:

- warunek współosiowości,
- warunek sąsiedztwa,
- warunek montażowy,
- warunek całkowitej liczby zębów,
- warunek braku podcięcia zębów.

Spełnienie tych warunków łącznie z wymaganiami podanymi w rozdziale 3.4 jest bardzo złożonym zagadnieniem, wymagającym specjalistycznych metod obliczeniowych.



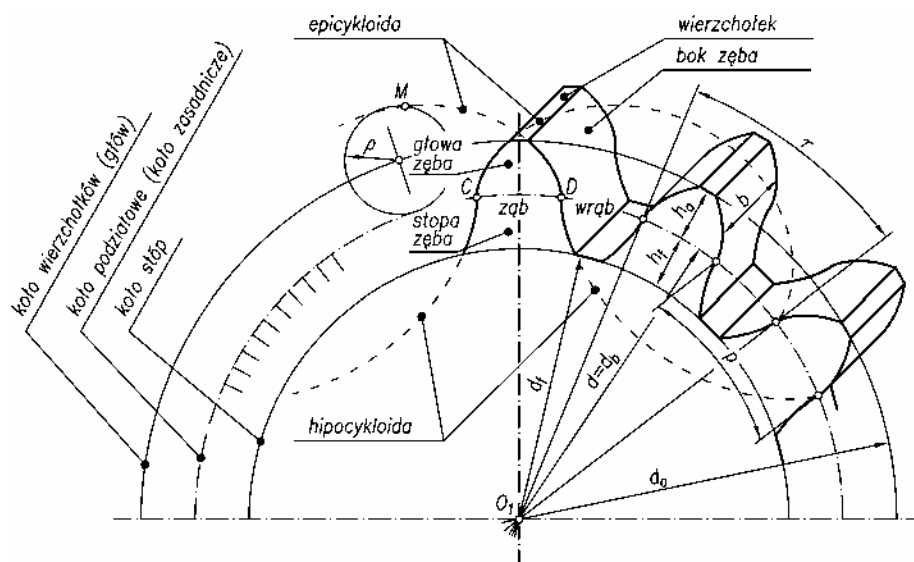
Rys. 3.17. Zespoły wieloelementowe: a), b) o ząbieniu zewnętrznym, c), d) o ząbieniu wewnętrznym

W budowie maszyn hydraulicznych tworzy się także zespoły wielokołowe o ząbieniu wewnętrznym złożone z kół tzw. nieokrągłych (rys. 3.17d). W skład typowego zespołu wchodzi „sześciokątny wirnik”, „ośmiokątna obwodnica” oraz okrągłe satelity. Koła mają uzębienie ewolwentowe o odpowiednio dobranych wartościach parametrów z , m , x i y . Specyficznym problemem projektowym jest ustalenie kształtu i wymiarów wirnika oraz obwodnicy, tak aby spełnić podane warunki, związane z projektowaniem przekładni obiegowych. Szczegółowe wiadomości na ten temat podano w [33, 34].

4. Zęby, koła i zespoły kół cykloidalnych 1. rodzaju

4.1. Ząb i koło o uzębieniu zewnętrznym

Przez pojęcia zęby, koła i zespoły kół cykloidalnych 1. rodzaju rozumie się takie elementy i zespoły, do projektowania których wykorzystano jedynie wycinki łuków krzywych cykloidalnych (patrz rozdz. 2 i rys. 2.1).



Rys. 4.1. Kształtowanie zębów i uzębienia cykloidalnego zewnętrznego 1. rodzaju

Sposób kształtowania zęba i koła cykloidalnego 1. rodzaju przedstawiono na rysunku 4.1. Ząb kształtuje się w ten sposób, że z punktu C , leżącego na obwodzie koła zasadniczego o średnicy d_b , rozwija się po stronie zewnętrznej epicykloidę zwyczajną, po stronie wewnętrznej zaś hipocykloidę zwyczajną. Współrzędne punktów epicykloidy wyznacza się z równań (2.1), punktów zaś hipocykloidy z równań (2.3). Do rozwinięcia obu krzywych wykorzystuje się okrąg o tej samej średnicy 2ρ i leżący na jego obwodzie punkt M . Stosunek średnic okręgu zasadniczego d_b oraz toczącego się 2ρ nazywa się współczynnikiem kształtu zęba R i jest on równy

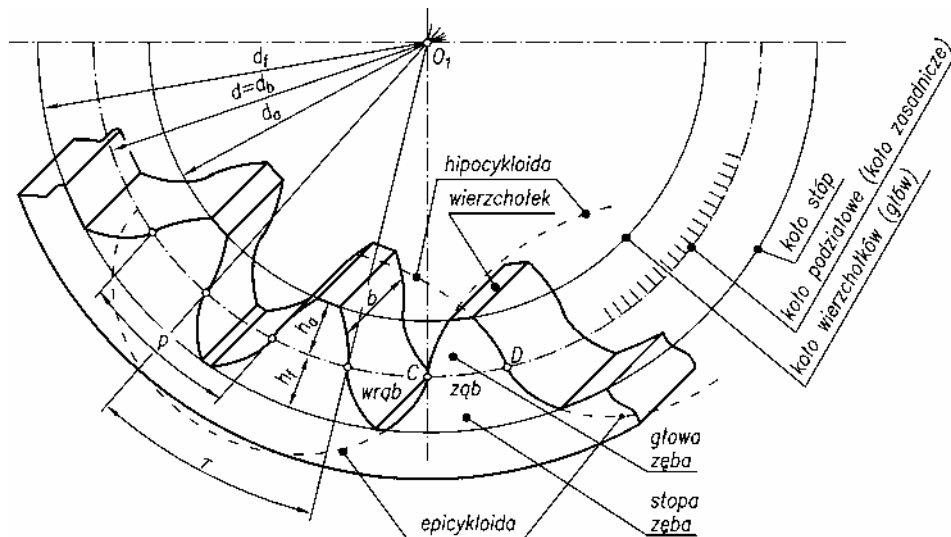
$$R = \frac{d_b}{2\rho} \quad (4.1)$$

Taki sam układ krzywych cykloidalnych rozwija się z punktu D , lecz są one nachy-
lone przeciwnie.

Od zewnątrz epicykloidy ogranicza się kołem wierzchołkowym (kołem głów) o średnicy d_a , od wewnątrz zaś kołem podstaw (kołem stóp) o średnicy d_f . W rezultacie otrzymuje się ząb, w którym głowa jest utworzona przez wypukłe wycinki łuku epicykloidy, natomiast stopa przez wklęsłe wycinki łuku hipocykloidy, przy czym jedne łuki przechodzą w drugie w punktach przegięcia C i D , znajdujących się na średnicy zasadniczej. Wierzchołek i podstawa zęba są stosunkowo szerokie. Koło zasadnicze jest jednocześnie kołem podziałowym, czyli $d_b = d$, odmierza się na nim podziałkę nominalną p i wyznacza kolejne zęby tworzące uzębienie koła. Podobnie jak dla kół ewolwentowych obowiązują zależności (3.4), (3.5), (3.6), (3.8) i (3.9). Ząb charakteryzuje się także odpowiednią szerokością b .

4.2. Ząb i koło o uzębieniu wewnętrznym

Ząb koła o uzębieniu cykloidalnym wewnętrznym kształtuje się w sposób podobny jak ząb koła o uzębieniu zewnętrznym (rys. 4.2). Z punktów C i D położonych na obwodzie koła zasadniczego o średnicy d_b rozwija się w przeciwnych kierunkach epicykloidy i hipocykloidy zwyczajne. Ogranicza się je następnie od wnętrza okręgiem koła wierzchołkowego d_a , od zewnątrz okręgiem koła stóp d_f . Głowa zęba wewnętrznego jest uformowana przez wypukłe wycinki hipocykloidy zwyczajnej, stopa zaś przez wklęsłe łuki epicykloidy zwyczajnej. Ząb jest stosunkowo szeroki u wierzchołka



Rys. 4.2. Kształtowanie zębów i uzębienia cykloidalnego wewnętrznego 1. rodzaju

i podstawy. Średnica koła podziałowego d jest równa średnicy koła zasadniczego d_b . Odpowiednio głowa zęba wewnętrznego o wysokości h_a jest usytuowana po wewnętrznej stronie koła podziałowego, a stopa o wysokości h_f po stronie zewnętrznej. Do wyznaczania parametrów d , h_a , h_f , d_a , d_f służą wzory (3.4), (3.5), (3.6), (3.28) i (3.29). Ząb i koło zębate charakteryzuje się także odpowiednią szerokością b .

4.3. Zespół kół o zazębieniu zewnętrznym

Na rysunku 4.3a przedstawiono zespół dwóch kół o zazębieniu cykloidalnym zewnętrznym. Zęby kół są grube u podstawy i wierzchołka, a przez to odporne na złamanie i wykruszenie. Koła obracają się wokół ustalonych osi obrotu O_1 , O_2 i stykają się średnicami podziałowymi w centralnym punkcie zazębienia C . Odległość osi kół wyznacza się ze wzoru (3.39).

Współpraca kół, uzębień i zębów odbywa się następująco. Napędza się koło czynne 1 (pędzące), a to przekazuje napęd na koło bierne 2 (pędzone). Ząb koła czynnego, będący w położeniu $1'$, wchodzi w zazębienie z zębem koła biernego, znajdującym się w położeniu $2'$, tworząc tzw. punkt wżębienia E_1 . Przy dalszym obrocie kół zęby przyjmują pozycję $1''$ i $2''$, a punkt ich styku pokrywa się z centralnym punktem zazębienia C . W końcu zęby przyjmują pozycję $1'''$ i $2'''$ i wychodzą z zazębienia w tzw. punkcie wyzębienia E_2 . Jak widać, punkt przyporu przemieszcza się po linii przyporu, która biegnie po obwodzie koła o promieniu ρ_h i przechodzi przez punkt C , a następnie po obwodzie koła o promieniu ρ_e . Punkty wżębienia E_1 i wyzębienia E_2 wyznaczają linię przyporu, przechodząc przez centralny punkt zazębienia C .

Odległość u punktu przyporu E od bieguna zazębienia wyznacza się, korzystając z rys. 4.3b. Z zasady współpracy kół wynika zależność:

$$\overline{A_1C} = \overline{EC},$$

która po uwzględnieniu warunków zazębienia przyjmuje postać:

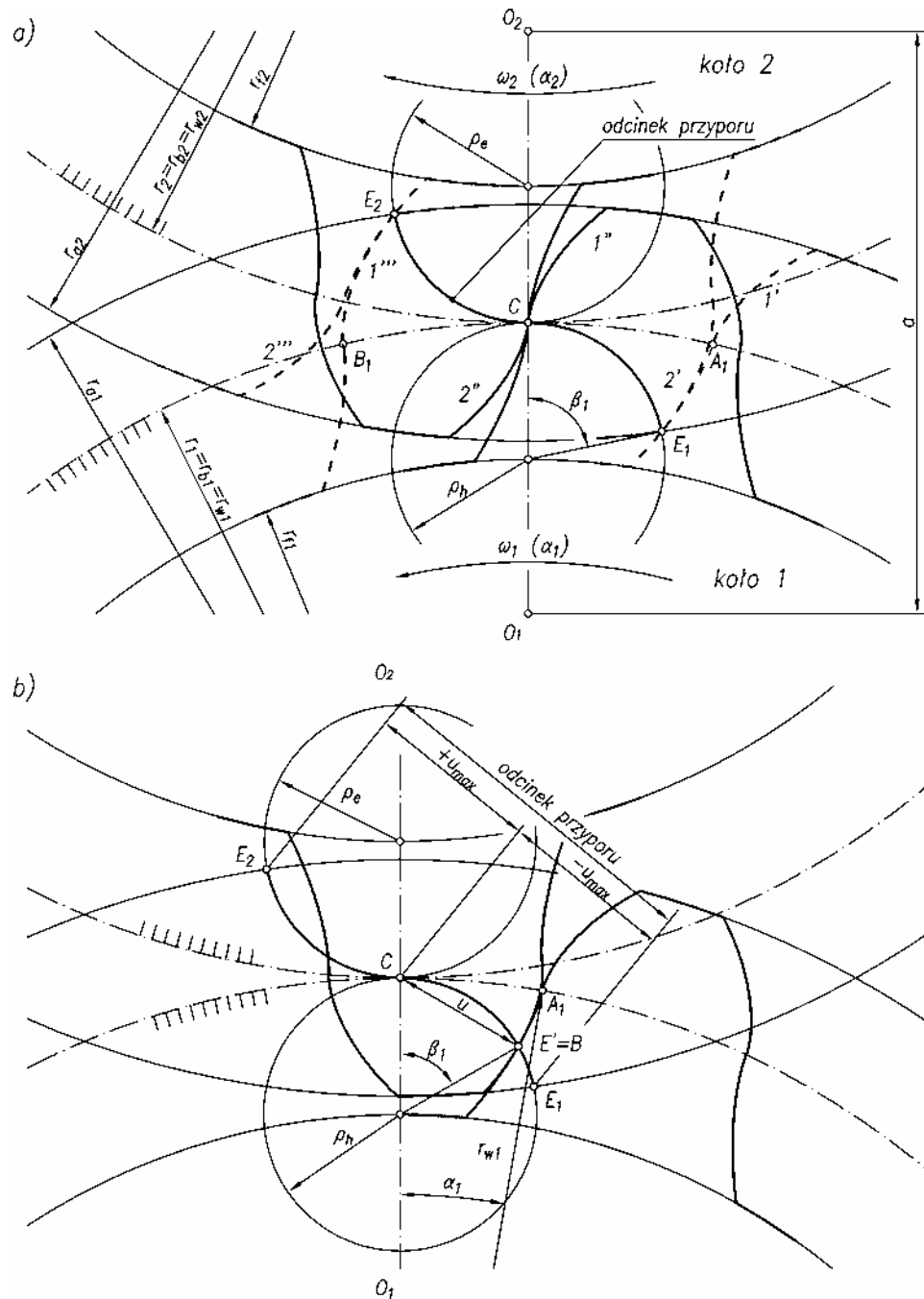
$$r_{w1}\alpha_1 = \rho_h\beta_1$$

Jednocześnie z rysunku można ustalić zależność geometryczną:

$$\frac{u}{2\rho_h} = \sin \frac{\beta_1}{2}$$

W rezultacie po przekształceniach otrzymuje się:

$$u = 2\rho_h \sin \left(\frac{r_{w1}}{2\rho_h} \alpha_1 \right) \quad (4.2)$$



Rys. 4.3. Współpraca zębów w zewnętrznym ząbieniu cykloidalnym 1. rodzaju:
 a) widok ogólny ząbienia, b) odległość punktu przyporu od bieguna ząbienia

Podczas wżębiania w położeniu $1'$ zarys zęba przecina koło podziałowe w punkcie A_1 , podczas wyżębiania w położeniu $1'''$ w punkcie B_1 . W ten sposób wyznacza się na kole podziałowym łuk przyporu A_1CB_1 . Stosunek długości łuku przyporu A_1CB_1 do podziałki tocznej p_w , odmierzanej na kole podziałowym, które jest jednocześnie kołem tocznym, jest określany jako liczba przyporu i opisany jest wzorem:

$$\varepsilon = \frac{\overset{\square}{A_1CB_1}}{p_w} \quad (4.3)$$

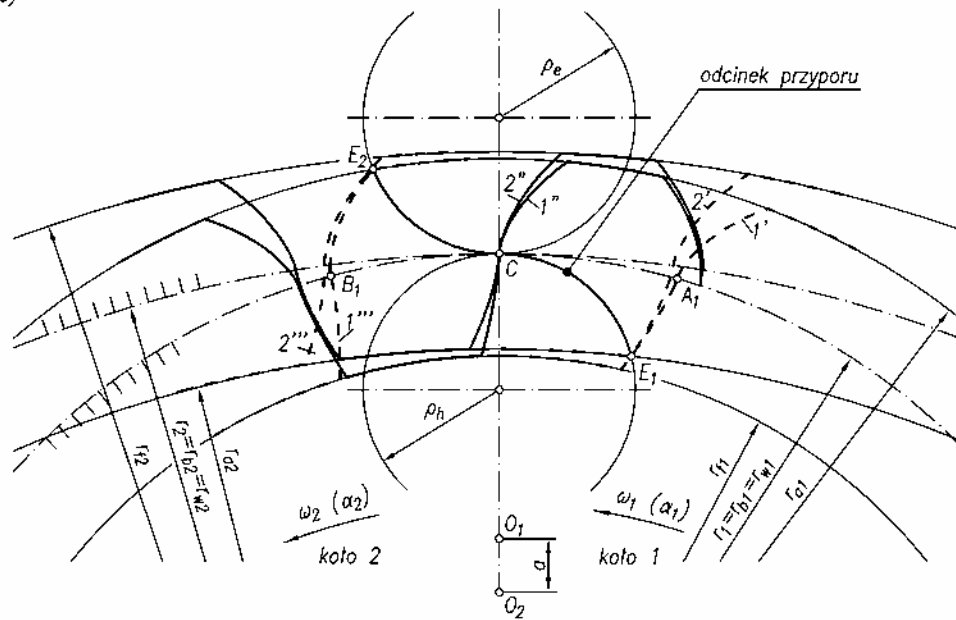
4.4. Zespół kół o zazębieniu wewnętrznym

Na rysunku 4.4a przedstawiono zespół dwóch kół o zazębieniu cykloidalnym wewnętrznym. Zęby kół są grube u podstawy i wierzchołka, a przez to odporne na złamanie i wykruszenie. Kola obracają się wokół ustalonych osi obrotu O_1 , O_2 i stykają się średnicami podziałowymi w centralnym punkcie zazębienia C . Odległość osi kół określona jest wzorem (3.63). Współpraca kół, użębień i zębów odbywa się następująco. Napędza się koło czynne 1 o użębianiu zewnętrznym, a ono przekazuje napęd na koło bierne 2 o użębianiu wewnętrznym. Ząb koła czynnego, znajdujący się w położeniu $1'$, wchodzi w zazębienie z zębem koła biernego, znajdującym się w położeniu $2'$, tworząc tzw. punkt wżębiania E_1 . Przy dalszym obrocie kół zęby przyjmują pozycję $1''$ i $2''$, a punkt ich styku pokrywa się z centralnym punktem zazębienia C . W końcu zęby przyjmują pozycję $1'''$ i $2'''$ i wychodzą z zazębienia w punkcie wyżębiania E_2 . Jak widać, punkt przyporu przemieszcza się po linii, która biegnie po obwodzie koła o promieniu ρ_h , przechodzi przez punkt C , a następnie biegnie po obwodzie koła o promieniu ρ_e . Punkty wżębiania E_1 i wyżębiania E_2 wyznaczają na linii przyporu odcinek przyporu, przechodzący przez centralny punkt zazębienia C .

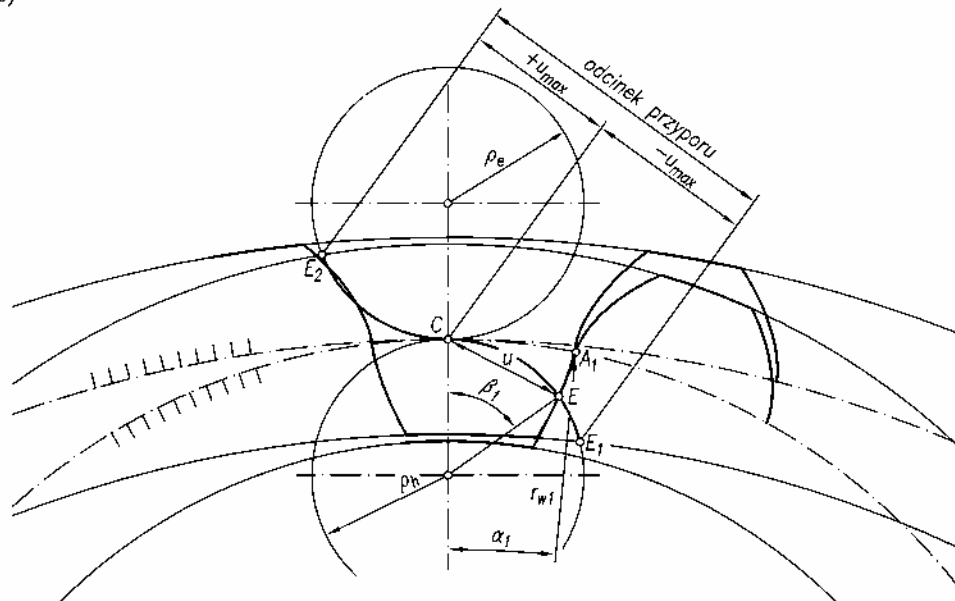
Odległość u punktu przyporu E od bieguna zazębienia C wyznacza się z rysunku 4.4b. Jest ona opisana tym samym wzorem (4.2), który uzyskano dla zazębienia zewnętrznego.

Podczas wżębiania w położeniu $1'$ zarys zęba przecina koło podziałowe r_1 w punkcie A_1 , podczas wyżębiania w położeniu $1'''$ przecina koło podziałowe r_1 w punkcie B_1 . Wyznacza się w ten sposób na kole podziałowym łuk przyporu A_1CB_1 . Stosunek łuku przyporu A_1CB_1 do podziałki tocznej p_w odmierzanej na kole podziałowym, które jest jednocześnie kołem tocznym $r_1 = r_{w1}$, stanowi liczbę przyporu opisaną wzorem (4.3).

a)



b)



Rys. 4.4. Współpraca zębów w wewnętrznym zazębieniu cykloidalnym 1. rodzaju:
 a) widok ogólny zazębienia, b) odległość punktu przyporu od bieguna zazębienia

5. Zęby, koła i zespoły kół cykloidalnych 2. rodzaju

5.1. Ząb i koło o uzębieniu zewnętrznym

Przez pojęcie zęby, koła, zespoły kół cykloidalnych 2. rodzaju rozumie się takie elementy i zespoły, do projektowania których wykorzystuje się całe łuki krzywych cykloidalnych (patrz rozdz. 2, rys. 2.1). Sposób kształtowania zęba i koła cykloidalnego 2. rodzaju przedstawiono na rysunku 5.1. Ząb kształtuje się w ten sposób, że po kole zasadniczym o średnicy d_b przetacza się od strony wewnętrznej okrąg o promieniu $\rho_h = \rho$. Punkt M , leżący na jego obwodzie, tworzy łuk hipocykloidy zwyczajnej. Z kolei po zewnętrznej stronie koła zasadniczego przetacza się okrąg o promieniu $\rho_e = \rho$, a punkt M leżący na jego obwodzie, tworzy łuk epicykloidy zwyczajnej. Oba te łuki przechodzą wzajemnie jeden w drugi w punkcie P na średnicy d_b , tworząc ciągły zarys zęba. W rezultacie otrzymuje się ząb, w którym głowa utworzona jest przez wypukły łuk epicykloidy, stopa zaś przez wklęsły łuk hipocykloidy.

Współrzędne zarysu stopy zęba x_h, y_h , zaznaczone na rysunku 5.1, wyznacza się z równań (2.3). Współrzędne zarysu głowy x_e, y_e pokazane również na tym rysunku wyznacza się z równań (2.1). Bardzo istotny jest dobór parametrów w tych równaniach, będących jednocześnie parametrami uzębienia. Ponieważ uzębienie jest utworzone przez cykloidy zwyczajne, to współczynnik wysokości obu cykloid przyjmuje się więc $\lambda = 1$. Jak pokazano na rysunku 5.1 koło zasadnicze jest jednocześnie kołem podziałowym, czyli $d_b = d$. Liczba zębów w kole zębatym musi być liczbą całkowitą, przy czym przy ich kształtowaniu wykorzystuje się co drugi łuk cykloidy. Wynika z tego, że stosunek promienia r_b koła zasadniczego i promienia ρ koła toczącego się musi wynosić

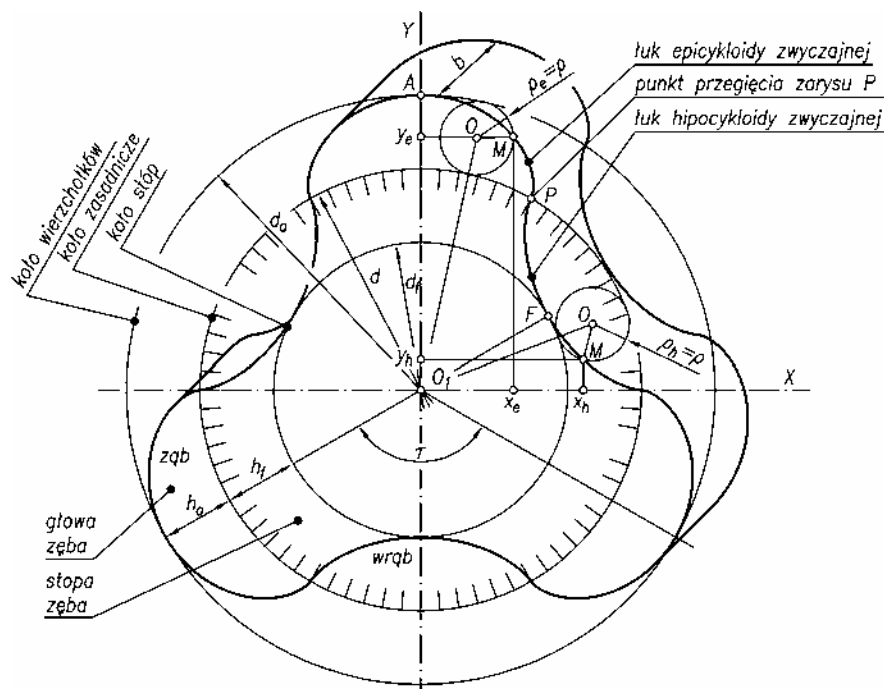
$$\frac{r_b}{\rho} = 2z \quad (5.1)$$

Wartość kąta cykloidy η w równaniach (2.1) i (2.3) przyjmuje się z zakresu, który pozwala wyznaczyć jeden łuk cykloidy.

W rozpatrywanym uzębieniu obowiązuje ogólny wzór dla kół zębatych (3.4). Gdy $d_b = d$, otrzymuje się zależność:

$$d = 4\rho z, \quad (5.2)$$

z której wynika, że moduł uzębienia cykloidalnego 2. rodzaju wynosi $m = 4\rho$.



Rys. 5.1. Kształtowanie zębów i uzębienia cykloidalnego zewnętrznego 2. rodzaju

Koło podziałowe dzieli ząb na głowę o wysokości h_a i stopę o wysokości h_f , które wynoszą:

$$h_a = h_f = 2\rho \quad (5.3)$$

W projektowaniu tego uzębienia nie przewiduje się luzów międzyzębnych, z wyjątkiem tych, które wynikają z dokładności wykonania i montażu.

Wzory do wyznaczania średnicy wierzchołkowej d_a i średnicy stóp d_f mają postać:

$$d_a = d + 2h_a = 4\rho z + 4\rho = 4\rho(z + 1) \quad (5.4)$$

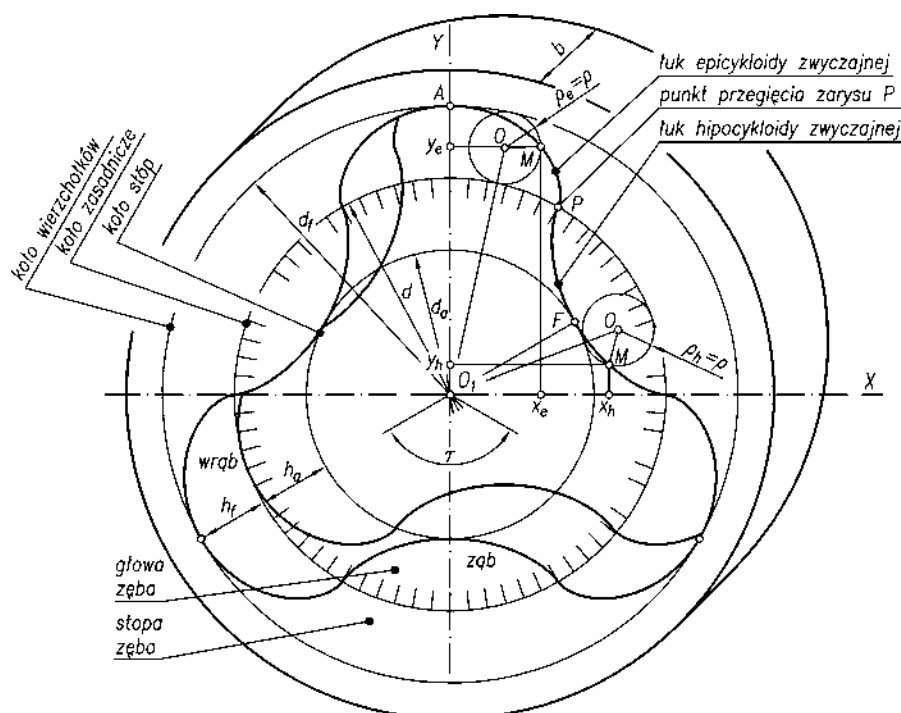
$$d_f = d - 2h_f = 4\rho z - 4\rho = 4\rho(z - 1) \quad (5.5)$$

Dla zęba wyznacza się szerokość b , a pomiędzy zębami wyznacza się podziałkę kątową τ .

5.2. Ząb i koło o uzębieniu wewnętrznym

Jak pokazano na rysunku 5.2, ząb koła o uzębieniu wewnętrznym kształtuje się podobnie jak ząb o uzębieniu zewnętrznym. Po kole zasadniczym o średnicy d_b przetacza

się od strony wewnętrznej okrąg o promieniu $\rho_h = \rho$, od strony zaś zewnętrznej okrąg o promieniu $\rho_e = \rho$. Punkty M , leżące na obwodzie tych kół, wyznaczają łuki hipocykloidy i epicykloidy zwyczajnej. Oba te łuki łączą się ze sobą w punkcie P na średnicy d_b , tworząc ciągły zarys zęba. W rezultacie powstaje ząb, w którym głowa utworzona jest przez wypukły łuk hipocykloidy, stopa zaś przez wklęsły łuk epicykloidy.



Rys. 5.2. Kształtowanie zębów i uzębienia cykloidalnego wewnętrznego 2. rodzaju

Współrzędne zarysu głowy zęba x_h, y_h , zaznaczone na rysunku 5.2 wyznacza się z równań (2.3), współrzędne zarysu stopy x_e, y_e , pokazane na tym samym rysunku wyznacza się z równań (2.1). Do wyznaczania średnicy podziałowej d , która jest równa średnicy zasadniczej d_b , stosuje się wzór (3.4).

Koło podziałowe dzieli ząb na głowę i stopę, których wysokość oblicza się ze wzoru (5.3). Wzory do wyznaczania średnicy wierzchołkowej d_a i średnicy stóp d_f mają postać:

$$d_a = d - 2h_a = 4\rho z - 4\rho = 4\rho(z - 1) \quad (5.6)$$

$$d_f = d + 2h_f = 4\rho z + 4\rho = 4\rho(z + 1) \quad (5.7)$$

Dla zęba określa się szerokość b , a w uzębieniu wyznacza się podziałkę kątową τ .

5.3. Zespół kół o zazębieniu zewnętrznym

Na rysunku 5.3 przedstawiono zespół dwóch kół o zazębieniu zewnętrznym cykloidalnym 2. rodzaju. Koła obracają się wokół ustalonych osi obrotu O_1 , O_2 i stykają się w biegunie zazębienia C średnicami podziałowymi, które są jednocześnie średnicami zasadniczymi i tocznymi. Odległość osi kół wynosi:

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{4\rho z_1 + 4\rho z_2}{2} = \frac{(z_1 + z_2)}{2} m \quad (5.8)$$

Współpraca kół, uzębień, zębów przebiega następująco. Napędza się koło czynne 1, a to przekazuje napęd na koło bierne 2. Stopa zęba koła czynnego, znajdująca się w położeniu $1'$ wchodzi w zazębienie z głową zęba koła biernego, znajdującego się w położeniu $2'$, tworząc tzw. punkt wżębienia E_1 . Przy dalszym obrocie kół zęby przyjmują pozycję $1''$ i $2''$, a punkt ich styku pokrywa się z centralnym punktem zazębienia C . Ostatecznie zęby przyjmują pozycję $1'''$ i $2'''$ i wychodzą z zazębienia w tzw. punkcie wyżębienia E_2 . W rezultacie zarys zęba $A'B'C'$ koła czynnego przetoczył się po zarysie $A''B''C''$ koła biernego. Obracając dalej koło czynne 1, następuje rozsuniecie tych zarysów i przestój w obrocie koła biernego 2.

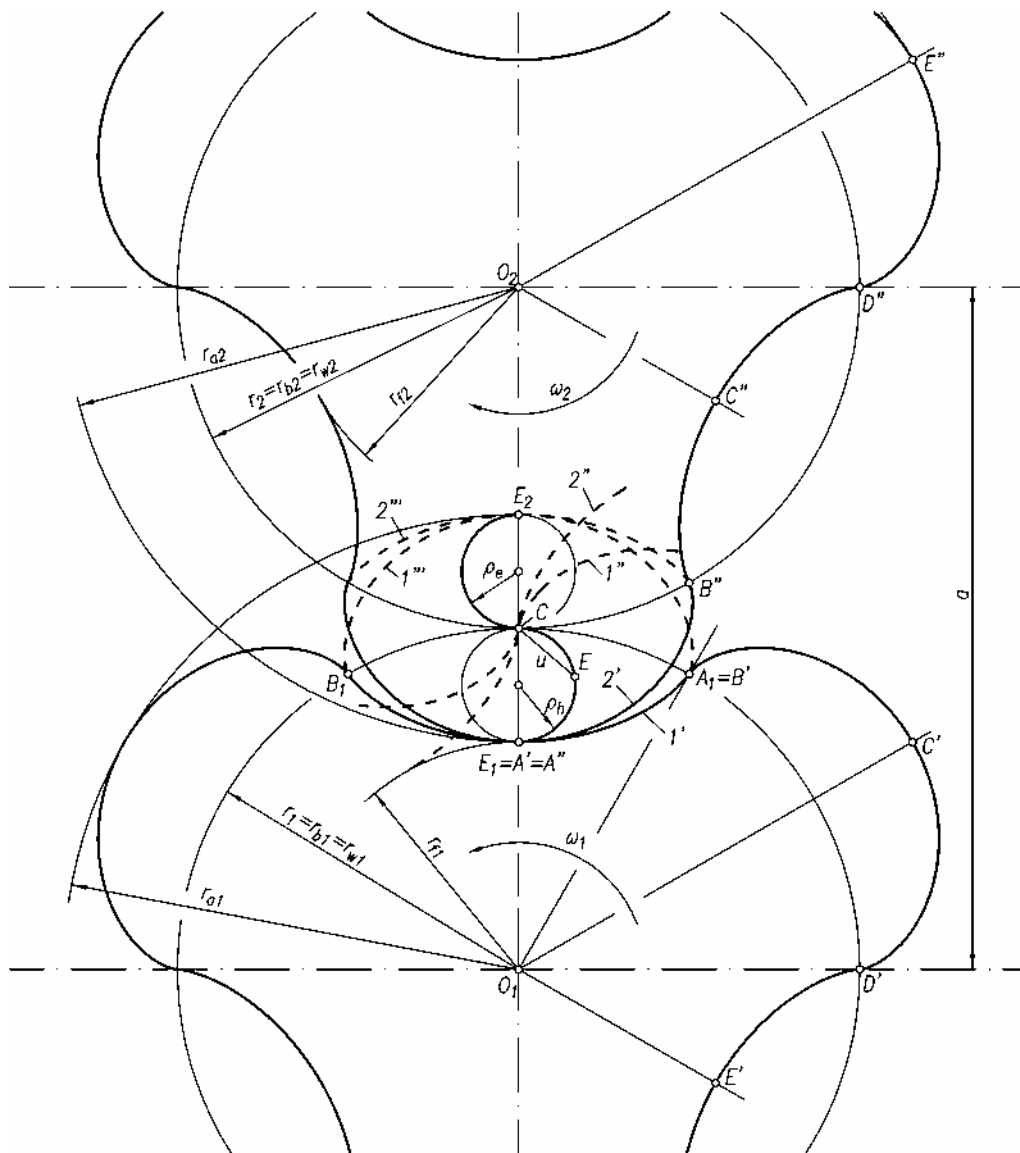
Jak widać na rysunku 5.3, punkt przyporu przemieszcza się po linii przyporu, która biegnie od punktu E_1 po obwodzie koła o promieniu ρ_h , przechodzi przez punkt C , a następnie biegnie po obwodzie koła o promieniu ρ_c do punktu E_2 .

Odległość u punktu przyporu E od bieguna zazębienia C wyrażana jest wzorem (4.2).

Podczas zazębienia w położeniu $1'$ zarys zęba przecina koło toczne w punkcie A_1 podczas zaś wyżębienia w punkcie B_1 . Na kole tocznym wyznacza się tym samym łuk przyporu A_1CB_1 . Stosunek długości łuku przyporu A_1CB_1 do podziałki tocznej p_w , odmierzonej na kole tocznym, które jest jednocześnie kołem podziałowym jest określony jako liczba przyporu

$$\varepsilon = \frac{A_1CB_1}{p_w} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{z_1}}{\frac{2\pi}{z_1}} = \frac{1}{2} \quad (5.9)$$

Jak wynika ze wzoru (5.9) liczba przyporu $\varepsilon < 1$, w tej sytuacji nie jest zachowana ciągłość i płynność zazębienia. Aby ją zapewnić, należy powiązać koło czynne z kołem biernym za pomocą dodatkowego zespołu kół zębatych ewolwentowych. Koło 2 staje się kołem czynnym, koło 1 zaś kołem biernym. Następuje współpraca pomiędzy zarysami $C''D''E''$ i $C'D'E'$. Punkt przyporu przemieszcza się wtedy od E_2 przez C do E_1 .



Rys. 5.3. Współpraca zębów w zewnętrznym zazębieniu cykloidalnym 2. rodzaju

5.4. Zespół kół o zazębieniu wewnętrznym

Na rysunku 5.4 przedstawiono zespół dwóch kół o zazębieniu wewnętrznym cykloidalnym 2. rodzaju. Koło o uzębieniu zewnętrznym ukształtowano zgodnie z zasadami podanymi w rozdziale 5.1, odpowiednio koło o uzębieniu wewnętrznym zaprojekto-

wano zgodnie z zasadami podanymi w rozdziale 5.2. Różnica zębów kół wynosi $z_2 - z_1 = 1$, moduł $m = 4\rho$. Koła obracają się wokół ustalonych osi obrotu O_1 i O_2 . Stykają się w centralnym punkcie zazębienia C średnicami podziałowymi, które są jednocześnie średnicami zasadniczymi i tocznymi. Odległość osi kół wynosi:

$$a = \frac{d_2 - d_1}{2} = \frac{4\rho z_2 - 4\rho z_1}{2} = \frac{z_2 - z_1}{2} m \quad (5.10)$$

Ze względu na różnicę zębów $z_2 - z_1 = 1$ wszystkie zęby koła czynnego są w stałym kontakcie z zębami koła biernego, tworząc punkty styku A_1, A_2, \dots, A_n . Współpraca kół, uzębień i zębów przebiega następująco. Napędza się koło czynne 1 o uzębieniu zewnętrznym, które wprawia w ruch koło bierne 2 o uzębieniu wewnętrznym. Odpowiednio stopa zęba koła czynnego wchodzi w zazębienie z głową zęba 2 koła biernego, tworząc początkowy punkt przyporu A_1 . Podczas dalszego obrotu kół punkt przyporu przemieszcza się w kolejne położenia $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, \dots, A_{1n}, A_{1m}$ i wraca do punktu wyjściowego A_{11} . Punkty przyporu układają się w linię przyporu. Rozpoczyna się ona punktem A_{11} , który jest jednocześnie punktem wżębienia E_1 , biegnie do punktu A_{1n} , który jest punktem wyżębienia E_2 i powraca do punktu E_1 tworząc pętlę. Pionowa oś O_1O_2 łącząca środki kół dzieli tę pętlę na część czynną i bierną. W części czynnej oznaczonej linią ciągłą zęby koła czynnego o uzębieniu zewnętrznym przekazują moment kołu biernemu o uzębieniu wewnętrznym. W części biernej linii przyporu oznaczonej linią kreskową zęby obu kół stykają się jedynie ze sobą nie przenosząc momentu.

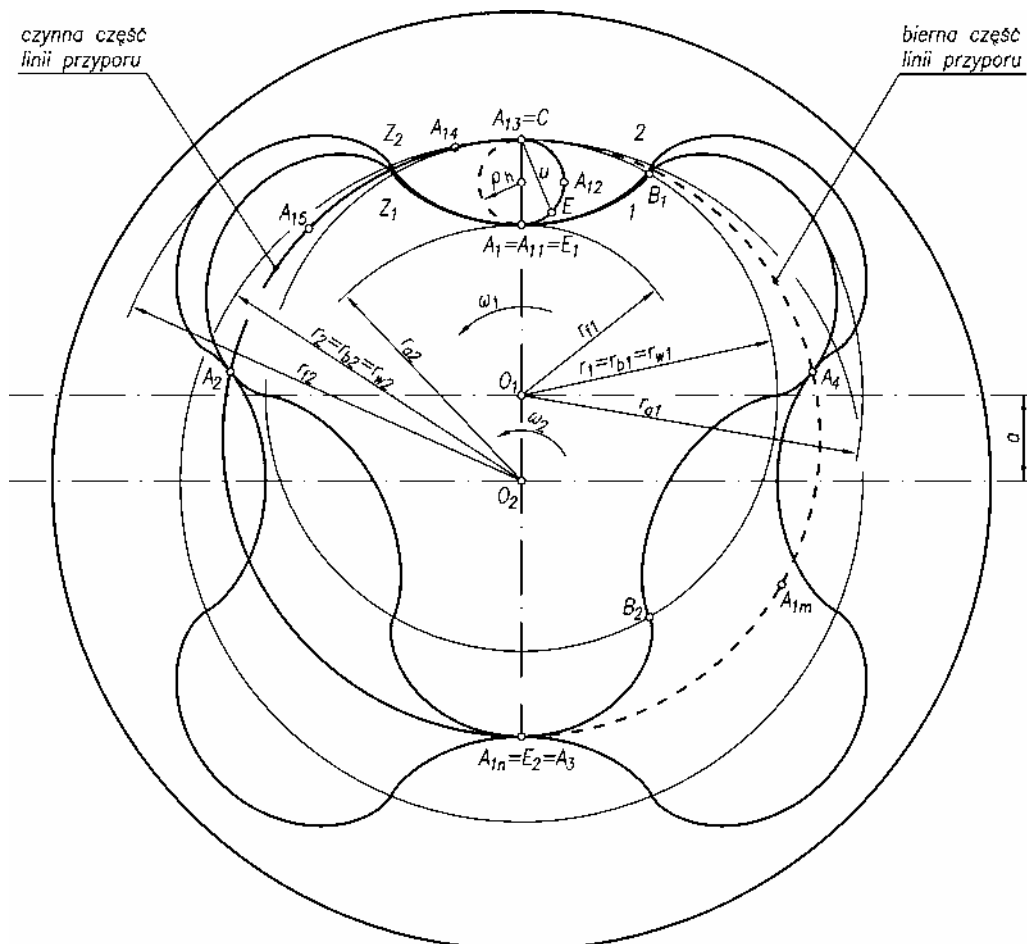
W trakcie współpracy w części czynnej punkt przyporu przemieszcza się od stopy do wierzchołka koła czynnego, a w kole biernym przemieszcza się on od wierzchołka do średnicy podziałowej i z powrotem do wierzchołka.

Jak pokazano na rysunku 5.4 na linii przyporu oprócz rozważanego punktu przyporu A_1 znajdują się punkty A_2, A_3, A_4 , utworzone pomiędzy pozostałymi współpracującymi zębami. Podobnie jak punkt A_1 , przemieszczają się one po linii przyporu w trakcie obrotu kół.

Podczas wżębienia w położeniu 1 zarys zęba koła czynnego przecina koło toczne w punkcie B_1 , podczas zaś wyżębienia w punkcie B_2 . Na kole tocznym wyznacza się tym samym łuk przyporu B_1CB_2 . Stosunek długości tego łuku przyporu do podziałki tocznej p_w , odmierzanej na kole tocznym, stanowi liczbę przyporu ε równą:

$$\varepsilon = \frac{B_1CB_2}{p_w} = \frac{\pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{z_1}}{\frac{2\pi}{z_1}} = \frac{(z_1 + 1)}{2} \quad (5.11)$$

Gdy liczba przyporu $\varepsilon > 1$, wówczas zapewniona jest ciągłość i płynność zazębienia.



Rys. 5.4. Współpraca zębów w wewnętrznym zazębieniu cykloidalnym 2. rodzaju

Odległość u punktu przyporu od bieguna zazębienia C wyrażana jest wzorem (4.2) podanym dla zazębienia cykloidalnego 1. rodzaju.

6. Zęby, koła i zespoły kół cykloidalnych 3. rodzaju

6.1. Ząb i koło o uzębieniu zewnętrznym

6.1.1. Geometria i parametry charakterystyczne

Przez pojęcie zęby, koła, zespoły kół cykloidalnych 3. rodzaju rozumie się takie elementy i zespoły, do projektowania których stosuje się całe krzywe cykloidalne (patrz rozdz. 2, rys. 2.1). Zasady projektowania tych elementów i zespołów omawiano w [45, 49, 51, 52, 56, 57, 58, 60, 67, 70, 90]. Na podstawie m.in. tych prac przedstawiono na rysunku 6.1 szczegółową budowę zębów i kół zębatych cykloidalnych 3. rodzaju.

Koła o uzębieniu zewnętrznym formuje się wewnątrz zamkniętej krzywej cykloidalnej, tzn. epicykloidy lub hipocykloidy. Odpowiednio otrzymuje się koła epicykloidalne i hipocykloidalne. Potrzebne do tego celu krzywe cykloidalne formowane są przez punkt M związany z kołem o promieniu ρ , przetaczającym się po nieruchomym kole zasadniczym o promieniu r_b . Jeden łuk odpowiedniej krzywej cykloidalnej stanowi jeden ząb koła zębatego. Charakterystyczne jest, że ząb cykloidalny ma wypukłą głowę, która łagodnie przechodzi we wklęsłą stopę. Część wypukła i wklęsła przechodzą wzajemnie jedna w drugą w punkcie przegięcia P . Kształt i wymiary zęba cykloidalnego zależą od współczynnika wysokości zęba λ , który jest równoważny współczynnikowi skrócenia cykloidy i , jak wynika z rysunku 6.1, opisany jest zależnością:

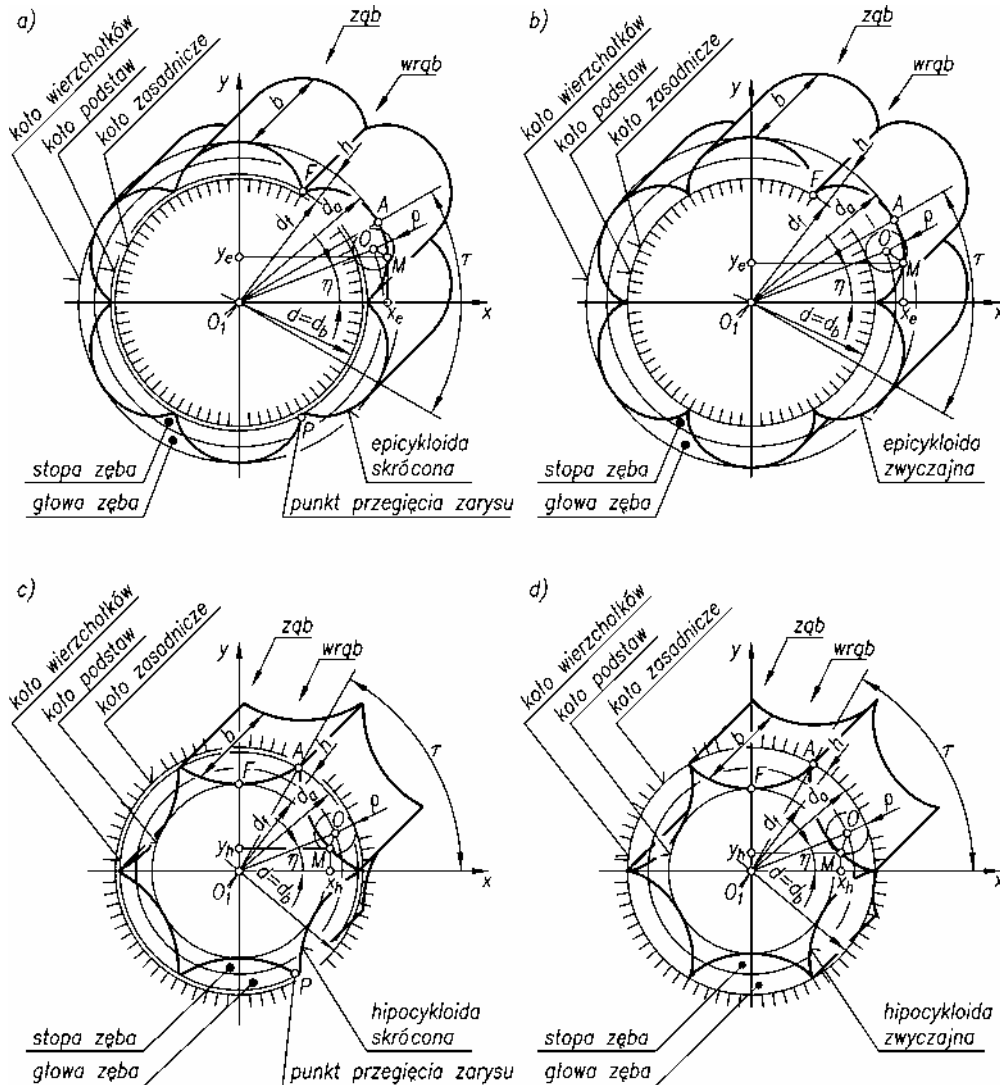
$$\lambda = \frac{OM}{\rho} \quad (6.1)$$

gdzie λ – współczynnik wysokości zęba, OM – odległość punktu M , kreślącego krzywą cykloidalną od środka O koła toczącego się, ρ – promień koła toczącego się.

Współczynnik wysokości zęba cykloidalnego λ może przyjmować wartości:

- $\lambda < 1$ zęby utworzone według cykloid skróconych (rys. 6.1a, c),
- $\lambda = 1$ zęby utworzone według cykloid zwyczajnych (rys. 6.1b, d).

Kolejne łuki połączone są ze sobą w krzywą cykloidalną i stanowią uzębienie koła cykloidalnego.



Rys. 6.1. Kształtowanie zębów i uzębienia cykloidalnego zewnętrznego 3. rodzaju: a), b) zęby i uzębienia epicykloidalne, ukształtowane według epicykloidy skróconej i zwyczajnej, c), d) zęby i uzębienia hipocykloidalne, ukształtowane według hipocykloidy skróconej i zwyczajnej

Krzywą cykloidalną charakteryzuje jej moduł, który określa się jako:

$$M = \frac{r_b}{\rho} \quad (6.2)$$

gdzie r_b – promień koła zasadniczego, ρ – promień koła tocącego się.

Moduł cykloidy określa liczbę łuków, z których składa się cykloida. Liczba łuków jest z założenia równa liczbie zębów koła, czyli $M = z$.

W przypadku koła zębatego cykloidalnego 3. rodzaju okrąg podziałowy jest równoważny okręgowi zasadniczemu i na tym okręgu dokonuje się podziału krzywej cykloidalnej na odpowiednią liczbę łuków – zębów; przyjmuje się więc $r = r_b$. Korzystając z ogólnej zależności dla kół zębatych (3.4) oraz ustalonych związków formułuje się wyrażenie:

$$m = \frac{2r}{z} = \frac{2r_b}{z} = \frac{2M\rho}{z} = 2\rho \quad (6.3)$$

Wynika z tego, że $m = 2\rho$, czyli moduł zęba koła zębatego cykloidalnego jest równy średnicy koła toczącego się stosowanego do tworzenia zarysu. W przypadku zazębienia cykloidalnych moduł wyraża się również w milimetrach, lecz nie jest znormalizowany, jak w przypadku zazębienia ewolwentowych. Dobiera się go odpowiednio do sytuacji projektowej (rozdz. 6.1.2).

Kolejne zęby koła cykloidalnego są oddalone od siebie o podziałkę kątową τ , a pomiędzy nimi znajdują się wręby, w które wchodzi zęby koła współpracującego (rys. 6.1). W przypadku kół cykloidalnych nie obniża się zarysu we wrębie, aby utworzyć luz międzyzębny. Zakłada się, że koła cykloidalne są wykonywane z bardzo dużą dokładnością i współpracują ze sobą bez luzu lub z luzem minimalnym, wynikającym jedynie z odchyłek wykonawczych oraz montażowych. W związku z tym wzory do obliczania wymiarów geometrycznych nie ujmują parametru oznaczającego luz.

Koła wierzchołków przechodzą przez najwyższy punkt łuku cykloidy A , koło podstaw przez najniższy punkt tego łuku F (rys. 6.1).

Odpowiednie wzory do obliczania średnicy wierzchołkowej d_a i średnicy stóp d_f w kołach epicykloidalnych mają postać:

$$d_a = 2(z\rho + \rho + \lambda\rho) = m(z + 1 + \lambda) \quad (6.4)$$

$$d_f = 2(z\rho + \rho - \lambda\rho) = m(z + 1 - \lambda) \quad (6.5)$$

Pomiędzy najwyższym punktem A a najniższym punktem F wyznacza się wysokość zęba h , która jest równa:

$$h = \frac{d_a - d_f}{2} = \frac{2\lambda m}{2} = 2\lambda\rho \quad (6.6)$$

Wzory do obliczania średnicy wierzchołkowej d_a i średnicy stóp d_f w kołach hipocykloidalnych mają postać:

$$d_a = 2(z\rho - \rho + \lambda\rho) = m(z - 1 + \lambda) \quad (6.7)$$

$$d_f = 2(z\rho - \rho - \lambda\rho) = m(z - 1 - \lambda) \quad (6.8)$$

Wysokość zęba hipocykloidalnego wyznacza się ze wzoru (6.6).

Zarys krzywej cykloidalnej jest jednocześnie profilem uzębienia (rys. 6.1). W związku z tym, do wyznaczenia profilu uzębienia epicykloidalnego stosuje się równania (2.1) oraz zależności (6.1), (6.2) i w rezultacie otrzymuje:

$$\begin{aligned} x_e &= \frac{m}{2} [(z+1) \cos \eta - \lambda \cos(z+1)\eta] \\ y_e &= \frac{m}{2} [(z+1) \sin \eta - \lambda \sin(z+1)\eta] \end{aligned} \quad (6.9)$$

gdzie x_e i y_e – współrzędne profilu uzębienia epicykloidalnego (rys. 6.1a i b).

Do wyznaczania profilu uzębienia hipocykloidalnego stosuje się równania parametryczne hipocykloidy (2.3) oraz zależności (6.1), (6.2) i w rezultacie otrzymuje:

$$\begin{aligned} x_h &= \frac{m}{2} [(z-1) \cos \eta + \lambda \cos(z-1)\eta] \\ y_h &= \frac{m}{2} [(z-1) \sin \eta + \lambda \sin(z-1)\eta] \end{aligned} \quad (6.10)$$

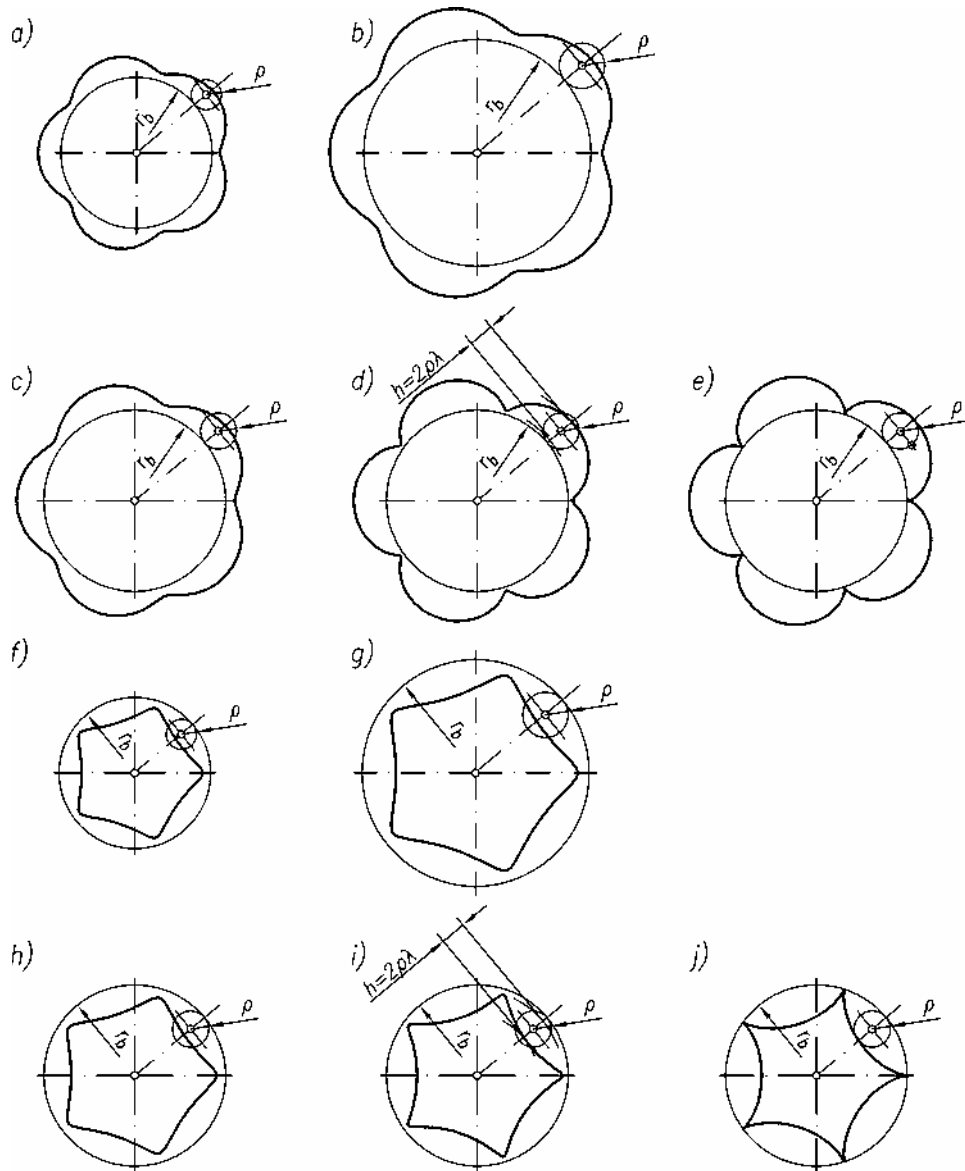
gdzie x_h i y_h – współrzędne profilu uzębienia hipocykloidalnego (rys. 6.1c i d).

6.1.2. Analiza kształtu i wymiarów uzębienia

Kształt i wymiary uzębienia cykloidalnego 3. rodzaju są uzależnione od doboru trzech zdefiniowanych parametrów podstawowych uzębienia, tzn. liczby zębów z , modułu m (lub promienia koła toczącego się ρ) oraz współczynnika wysokości zęba λ . Przyjmując określoną liczbę zębów z na kole cykloidalnym, zgodnie ze wzorem (6.2), ustala się stosunek promienia koła zasadniczego r_b i promienia koła toczącego się ρ , czyli $z = r_b / \rho$. Oznacza to, że promienie tych kół są ściśle powiązane ze sobą, a zmiana wartości jednego powoduje konieczność zmiany wartości drugiego. Istotniejsze znaczenie ma promień ρ , którego wartość zgodnie ze wzorem (6.6) wpływa na wysokość zęba, a także na wymiary koła zębatego. Im większa jest wartość promienia ρ , tym wyższy jest ząb oraz większy promień koła zasadniczego r_b , a w związku z tym rosną gabaryty koła. Zilustrowano to na rysunku 6.2a, b dla przypadku kół epicykloidalnych oraz na rysunku 6.2f, g dla przypadku kół hipocykloidalnych.

W projektowaniu kół cykloidalnych zakłada się zwykle liczbę zębów z i wartość promienia ρ , a następnie oblicza wartość promienia r_b i pozostałe wymiary koła. Możliwe jest również postępowanie odwrotne, tzn. dla przyjętego wstępnie promienia r_b koła zasadniczego i liczby zębów z wyznacza się promień koła toczącego się ρ . W budowie maszyn hydraulicznych najczęściej stosuje się liczbę zębów $z = 4-14$ oraz

promień ρ równy od kilku do kilkunastu milimetrów. Widoczna jest przy tym tendencja, aby wraz ze zwiększaniem liczby zębów zmniejszać wartość promienia ρ , tak aby nie powodować niepotrzebnie wzrostu wymiarów koła zębatego.



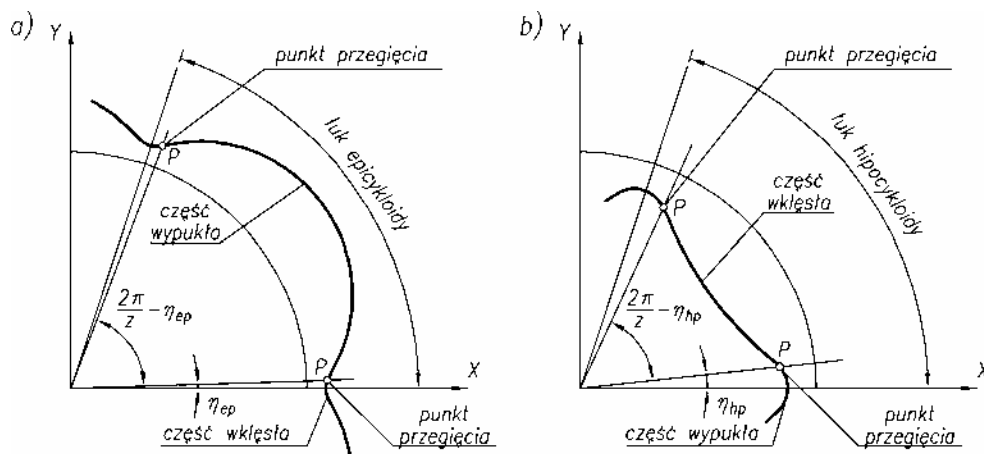
Rys. 6.2. Wpływ parametrów uzębienia na jego kształt i wymiary:
a) – e) uzębienie epicykloidalne, f) – i) uzębienie hipocykloidalne

Wpływ współczynnika wysokości zęba λ na kształt i wymiary uzębienia cykloidalnego wynika ze wzoru (6.1). Im większa jest wartość λ , tym wyższy jest ząb. Pokazano to poglądowo na rysunku 6.2c,d,e w przypadku uzębienia epicykloidalnych oraz rysunku 6.2h,i,j w przypadku uzębienia hipocykloidalnych.

Do konstruowania zębów kół cykloidalnych wykorzystuje się krzywe skrócone $\lambda < 1$ lub zwyczajne $\lambda = 1$ (rozdz. 2.1 i rys. 6.1). Warunek $\lambda \leq 1$ jest zbyt ogólny, należy wobec tego ściśle określić zakres tej zmienności. Jak pokazano na rysunku 6.3a łuk epicykloidy składa się z części wypukłej i wklęsłej, które przechodzą jedna w drugą w punkcie przegięcia P . Współrzędne punktu przegięcia epicykloidy można wyznaczyć za [17] z warunku:

$$\begin{vmatrix} x'_e & y'_e \\ x''_e & y''_e \end{vmatrix} = 0 \quad (6.11)$$

gdzie x'_e, y'_e, x''_e, y''_e – pochodne pierwszego i drugiego rzędu równań profilu epicykloidy, opisanej równaniami (6.9).



Rys. 6.3. Wyznaczanie kątów, określających położenie punktu przegięcia:
a) łuku epicykloidy, b) łuku hipocykloidy

Po podstawieniu równań (6.9) do warunku (6.11) i dokonaniu przekształceń otrzymuje się zależność na kąt η_{ep} określający położenie punktu przegięcia łuku epicykloidy:

$$\eta_{ep} = \frac{1}{z} \arccos \frac{\lambda^2(z+1)+1}{\lambda(z+2)} \quad (6.12)$$

Ze względu na symetrię i powtarzalność krzywej punkty przegięcia występują również dla kątów $\eta_{ep} + k \frac{2\pi}{z}$ i $\left(\frac{2\pi}{z} - \eta_{ep}\right) + k \frac{2\pi}{z}$, przy czym $k = 0, 1, 2, 3, \dots, z$. Wzór (6.12) jest zatem ważny, gdy

$$-1 \leq \frac{\lambda^2(z+1)+1}{\lambda(z+2)} \leq +1 \quad (6.13)$$

czyli

$$\frac{1}{z+1} \leq \lambda \leq 1 \quad (6.14)$$

lub

$$-1 \leq \lambda \leq -\frac{1}{z+1} \quad (6.15)$$

Warunek (6.15) nie może być spełniony, gdyż λ nie może przyjmować wartości ujemnych. Dobór współczynnika λ zgodnie z warunkiem (6.14) gwarantuje, że epicykloida składa się z części wypukłej i wklęsłej odpowiadających głowie i stopie zęba.

Postępując podobnie w przypadku hipocykloid (rys. 6.3b), można wyznaczyć zależność określającą kąt η_{hp} , dla którego występuje punkt przegięcia łuku hipocykloidy:

$$\eta_{hp} = \frac{1}{z} \arccos \frac{\lambda^2(z-1)-1}{\lambda(z-2)} \quad (6.16)$$

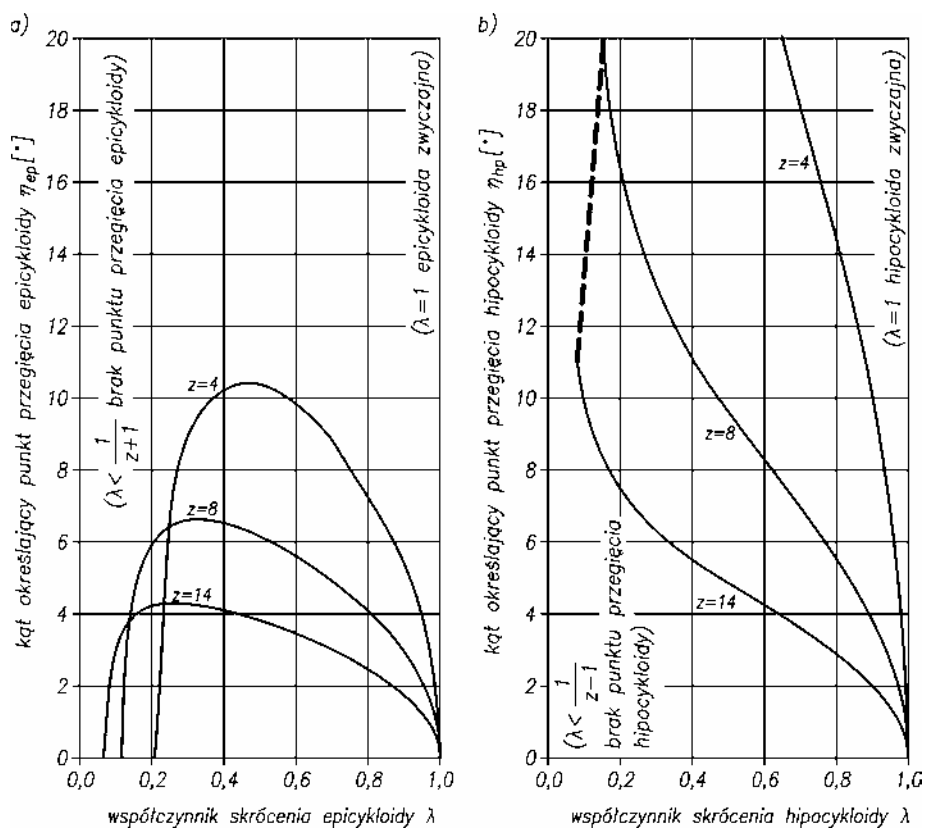
o powtarzalności podobnej jak w przypadku epicykloidy. Wzór jest ważny, gdy

$$\frac{1}{z-1} \leq \lambda \leq 1 \quad (6.17)$$

Interpretacja tego warunku jest analogiczna do przypadku epicykloid.

Na rysunku 6.4 przedstawiono przebieg zależności $\eta_{ep} = f(\lambda)$ oraz $\eta_{hp} = f(\lambda)$ dla wybranej liczby zębów (łuków) jako parametrów. W przypadku epicykloidy (rys. 6.4a) wraz ze zwiększeniem się współczynnika λ w przedziale $1/(z+1) \leq \lambda \leq 1$ wartość kąta η_{ep} początkowo wzrasta od zera do maksimum, a później maleje również do zera dla $\lambda = 1$. Konfrontując to z rysunkiem 6.2c, d, e widać, że początkowo ze wzrostem λ , a więc ze wzrostem wysokości zęba coraz większą część łuku epicykloidy stanowi wycinek wklęsły, kształtujący stopę zęba w stosunku do wycinka wypukłego kształtującego głowę. Później następuje odwrotna tendencja, tak że dla $\lambda = 1$ występują już tylko łuki wypukłe, które można wykorzystywać jedynie po korekcji i modyfikacji uzębienia.

Inny przebieg ma zależność $\eta_{hp} = f(\lambda)$ przedstawiona na rysunku 6.4b. Zwiększenie współczynnika λ , w przedziale $1/(z+1) \leq \lambda \leq 1$, powoduje monotoniczne zmniejszanie kąta η_{hp} do zera dla $\lambda = 1$. Porównując te przebiegi z rysunkiem 6.2h,i,j zauważa się, że ze wzrostem λ , a więc ze wzrostem wysokości zęba, coraz większą część hipocykloidy stanowi łuk wklęsły. Dla $\lambda = 1$ występują już tylko same łuki wklęsłe, będące podstawą do ewentualnego kształtowania zarysu uzębienia po korekcy i modyfikacji uzębienia.



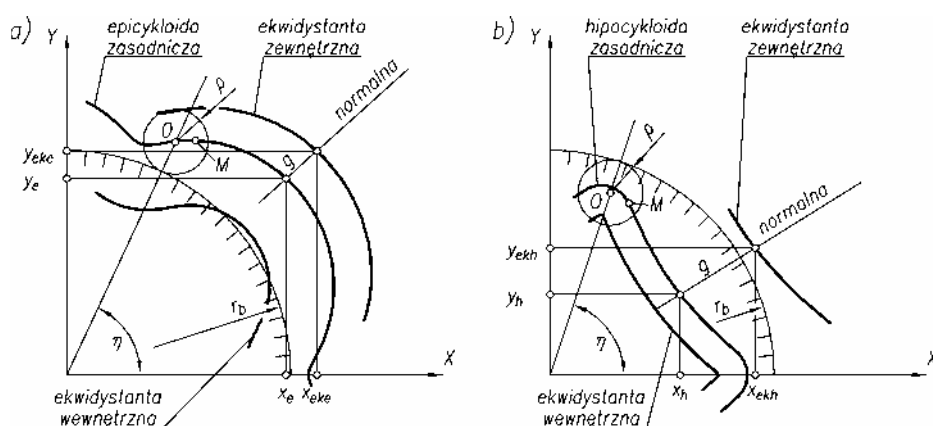
Rys. 6.4. Przebieg zmian kąta, określającego przegięcie łuku cykloidy w zależności od wybranych parametrów uzębienia: a) dla epicykloid, b) dla hipocykloid

6.1.3. Korekcja uzębienia

W projektowaniu kół cykloidalnych, podobnie jak w przypadku kół ewolwentowych, dąży się do osiągnięcia zwartej budowy i małych gabarytów, przy czym koła cykloidalne mogą mieć mniejszą liczbę zębów niż koła ewolwentowe. Mogą to być nawet koła o 2–3 zębami. Kształt zęba cykloidalnego jest opływowy, brak jest zała-

mań i nieciągłości zarysu, wyjąwszy krzywe zwyczajne. W związku z tym nie ma niebezpieczeństwa ani podcinania, ani zaostrzania zęba w procesie wytwarzania. Nie występują zatem technologiczne przyczyny korekcji jak w przypadku uzębienia ewolwentowego.

Są jednak istotne konstrukcyjne przyczyny wprowadzania korekcji uzębienia cykloidalnego. Po przeanalizowaniu rysunków 6.1 i 6.2 zauważa się, że kształty zębów są nieproporcjonalne. Zęby epicykloidalne mają stosunkowo dużą część wypukłą odpowiadającą głowie zęba i stosunkowo małą część wklęsłą odpowiadającą stopie. Zęby hipocykloidalne mają odwrotne proporcje. Zęby utworzone według epicykloid i hipocykloid zwyczajnych mają nawet ostrza. Tak ukształtowane koła cykloidalne określa się jako nieforemne, a ich współpraca z innymi kołami z zespołu jest utrudniona, a nawet niemożliwa, choćby ze względu na naciski międzyzębne. W tej sytuacji konieczna jest korekcja uzębienia cykloidalnego.



Rys. 6.5. Korekcja uzębienia cykloidalnego a) epicykloidalnego, b) hipocykloidalnego

Korekcja uzębienia polega na utworzeniu nowego zarysu, biegnącego równolegle w stosunku do bazowego zarysu cykloidalnego (rys. 6.5). Nowo utworzoną krzywą nazywa się ekwidystantą (z łacińskiego – ekwidystanta, czyli równo oddalona), bazową krzywą cykloidalną określa się jako krzywą zasadniczą. Ekwidystanty można formować zarówno na zewnątrz, jak i wewnątrz krzywej zasadniczej. Odległość pomiędzy ekwidystantą a krzywą zasadniczą określa się jako przesunięcie ekwidystanty g , która wynosi

$$g = \nu\rho \quad (6.18)$$

gdzie ν – współczynnik przesunięcia ekwidystanty, współczynnik korekcji uzębienia cykloidalnego, ρ – promień koła toczącego się, wykorzystywanego do formowania krzywej zasadniczej.

Odpowiednie wzory do obliczania średnicy wierzchołków d_a i średnicy stóp d_f w kołach epicykloidalnych korygowanych mają postać:

$$d_a = 2(z\rho + \rho + \lambda\rho \pm g) = m(z + 1 + \lambda \pm \nu) \quad (6.19)$$

$$d_f = 2(z\rho + \rho - \lambda\rho \pm g) = m(z + 1 - \lambda \pm \nu) \quad (6.20)$$

Wzory dla kół hipocykloidalnych korygowanych mają postać:

$$d_a = 2(z\rho - \rho + \lambda\rho \pm g) = m(z - 1 + \lambda \pm \nu) \quad (6.21)$$

$$d_f = 2(z\rho - \rho - \lambda\rho \pm g) = m(z - 1 - \lambda \pm \nu) \quad (6.22)$$

Wysokość zębów korygowanych wyznacza się ze wzoru (6.6).

Z zależności geometrycznych przedstawionych na rysunku 6.5a wynika, że punkt (x_{eke}, y_{eke}) , leżący na ekwidystancie epicykloidy, leży jednocześnie na normalnej wystawionej w punkcie (x_e, y_e) i jest odległy od niego o odcinek g . Wykorzystując zatem znane z geometrii różniczkowej równanie normalnej w postaci parametrycznej oraz stosując twierdzenie Pitagorasa, otrzymuje się układ równań:

$$\begin{aligned} (x_{eke} - x_e)x'_e + (y_{eke} - y_e)y'_e &= 0 \\ (x_{eke} - x_e)^2 + (y_{eke} - y_e)^2 &= g^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

gdzie x'_e, y'_e – pochodne pierwszego rzędu równań (7.9) względem kąta η .

Po rozwiązaniu tego układu uzyskuje się równania parametryczne ekwidystanty epicykloidy:

$$\begin{aligned} x_{eke} &= x_e \pm g \frac{y'_e}{\sqrt{(x'_e)^2 + (y'_e)^2}} \\ y_{eke} &= y_e \pm g \frac{x'_e}{\sqrt{(x'_e)^2 + (y'_e)^2}} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Po podstawieniu zależności (6.3) i (6.9) oraz przekształceniach otrzymuje się równania parametryczne opisujące profil uzębienia koła utworzonej przez ekwidystantę epicykloidy:

$$\begin{aligned} x_{eke} &= \rho(z+1)\cos\eta - \lambda\rho\cos(z+1)\eta + g \frac{\cos\eta - \lambda\cos(z+1)\eta}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos z\eta + \lambda^2}} \\ y_{eke} &= \rho(z+1)\sin\eta - \lambda\rho\sin(z+1)\eta + g \frac{\sin\eta - \lambda\sin(z+1)\eta}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos z\eta + \lambda^2}} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Po uwzględnieniu, że moduł $m = 2\rho$ otrzymuje się ostatecznie:

$$\begin{aligned} x_{eke} &= \frac{m}{2} \left[(z+1) \cos \eta - \lambda \cos(z+1)\eta + \nu \frac{\cos \eta - \lambda \cos(z+1)\eta}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos z\eta + \lambda^2}} \right] \\ y_{eke} &= \frac{m}{2} \left[(z+1) \sin \eta - \lambda \sin(z+1)\eta + \nu \frac{\sin \eta - \lambda \sin(z+1)\eta}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos z\eta + \lambda^2}} \right] \end{aligned} \quad (6.26)$$

W podobny sposób, na podstawie rysunku 6.5b, wyprowadza się równania na ekwidystantę hipocykloidy zasadniczej, opisującej profil uzębienia koła w postaci:

$$\begin{aligned} x_{ekh} &= \rho(z-1) \cos \eta + \lambda \rho \cos(z-1)\eta + g \frac{\cos \eta - \lambda \cos(z-1)\eta}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos z\eta + \lambda^2}} \\ y_{ekh} &= \rho(z-1) \sin \eta - \lambda \rho \sin(z-1)\eta + g \frac{\sin \eta - \lambda \sin(z-1)\eta}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos z\eta + \lambda^2}} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Po wprowadzeniu modułu (6.3) równania te przyjmują formę:

$$\begin{aligned} x_{ekh} &= \frac{m}{2} \left[(z-1) \cos \eta + \lambda \cos(z-1)\eta + \nu \frac{\cos \eta - \lambda \cos(z-1)\eta}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos z\eta + \lambda^2}} \right] \\ y_{ekh} &= \frac{m}{2} \left[(z-1) \sin \eta - \lambda \sin(z-1)\eta + \nu \frac{\sin \eta - \lambda \sin(z-1)\eta}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos z\eta + \lambda^2}} \right] \end{aligned} \quad (6.28)$$

6.1.4 Analiza kształtu i wymiarów uzębienia po korekcji

Na rysunku 6.6a, b pokazano rezultaty korekcji uzębienia epicykloidalnego, na rysunku 6.6c, d rezultaty korekcji uzębienia hipocykloidalnego. Za pomocą korekcji można uzyskać różne kształty i wymiary uzębień, przy czym inaczej zmieniają się one w przypadku uzębień epicykloidalnych, a inaczej hipocykloidalnych. W przypadku uzębienia epicykloidalnych powinno się dokonywać przesunięcia zarysu do wewnątrz koła ($g < 0$). Uzębienie utworzone według ekwidystanty wewnętrznej charakteryzuje się proporcjonalną budową (rys. 6.6a, b). Przesunięcie zarysu na zewnątrz koła ($g > 0$) i utworzenie uzębienia według ekwidystanty zewnętrznej jest niekorzystne, gdyż powiększa nieproporcjonalną budowę uzębienia. W przypadku uzębienia hipocykloidalnych (rys. 6.6c, d) powinno się dokonywać korekcji na zewnątrz koła ($g > 0$). Uzębienie utworzone według ekwidystanty zewnętrznej jest bardziej proporcjonalne niż utworzone według ekwidystanty wewnętrznej przy korekcji do wewnątrz koła ($g < 0$).

Przy tworzeniu ekwidystant w zbyt dużej odległości g od krzywej zasadniczej mogą powstawać pętle na ich zarysie, czyli dochodzić do interferencji zarysu (rys. 6.6). W tej sytuacji należy ustalić, jakie są i od czego zależą maksymalne wartości przesunięcia ekwidystanty g , tak aby pętle nie powstawały, a zarys uzębienia był ciągły.

Z analizy rysunku 6.6a widać, że maksymalne przesunięcie ekwidystanty g na zewnątrz epicykloidy zasadniczej jest równe minimalnemu promieniowi krzywizny R_{emin1} we wklęsłej części łuku epicykloidy. Maksymalne przesunięcie ekwidystanty do wewnątrz epicykloidy zasadniczej jest równe minimalnemu promieniowi krzywizny R_{emin2} w wypukłej części łuku epicykloidy.

Wzór na krzywiznę epicykloidy K_e można zapisać za [17] w postaci:

$$K_e = \frac{\begin{vmatrix} x'_e & y'_e \\ x''_e & y''_e \end{vmatrix}}{\left[(x'_e)^2 + (y'_e)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (6.29)$$

Po podstawieniu równań (6.9) i przekształceniach otrzymuje się ostatecznie:

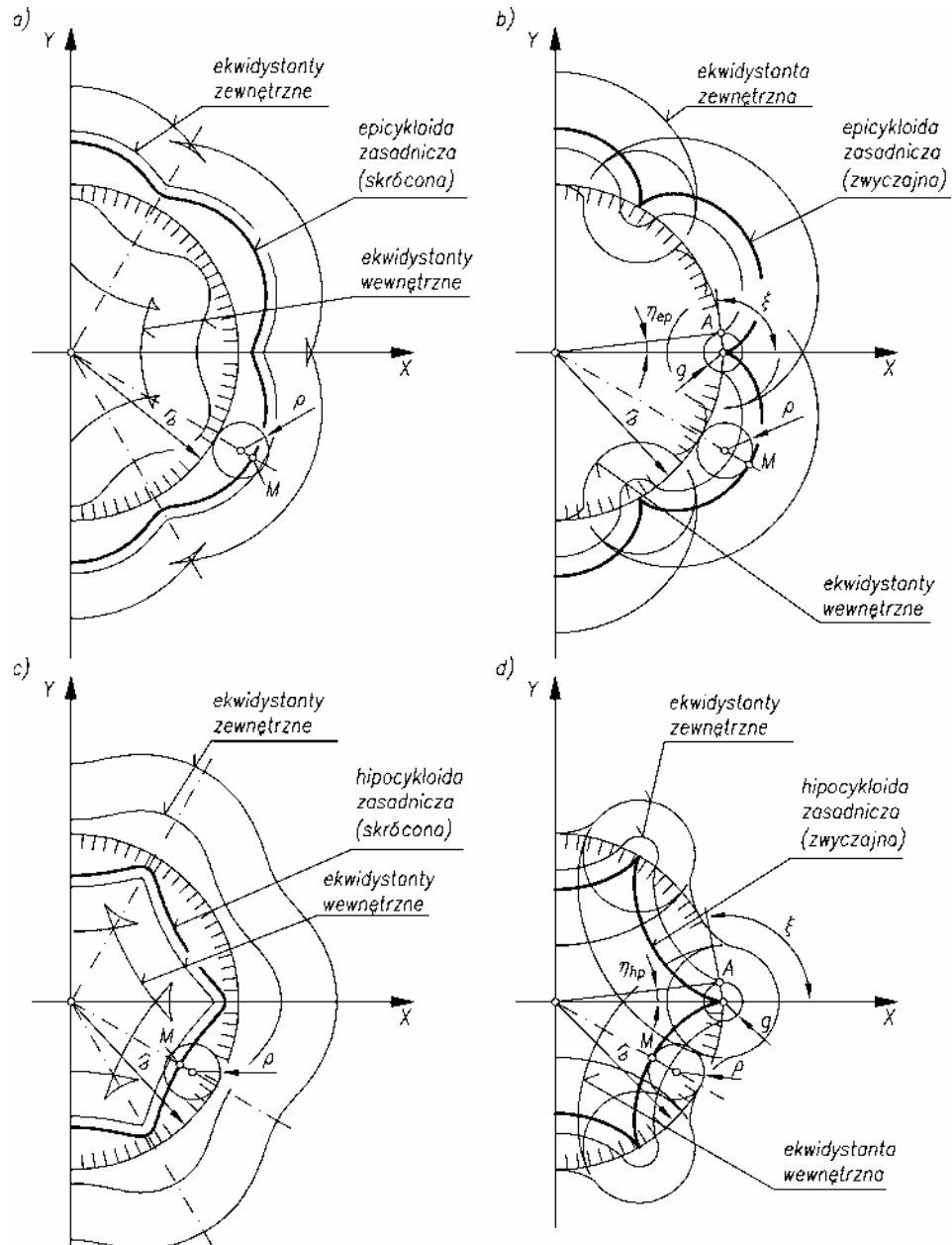
$$K_e = \frac{|1 - \lambda(z+2)\cos z\eta + \lambda^2(z+1)|}{\rho(z+1)[1 - 2\lambda\cos z\eta + \lambda^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (6.30)$$

Promień krzywizny epicykloidy jest więc równy:

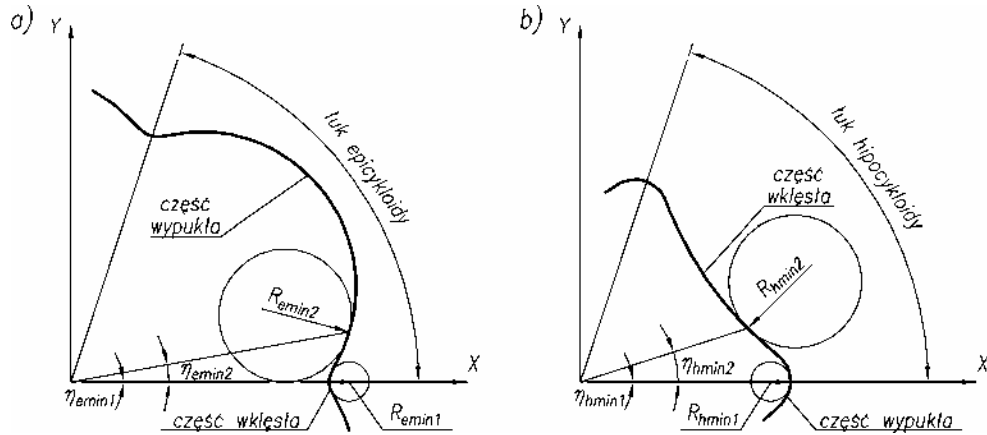
$$R_e = \frac{1}{K_e} = \frac{\rho(z+1)[1 - 2\lambda\cos z\eta + \lambda^2]^{\frac{3}{2}}}{|1 - \lambda(z+2)\cos z\eta + \lambda^2(z+1)|} \quad (6.31)$$

Minimalną wartość promienia krzywizny wyznacza się z warunku $R'_e = 0$. Po zróżniczkowaniu i przekształceniach otrzymuje się

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ 3\lambda\rho z(z+1)\sin z\eta(1 - 2\lambda\cos z\eta + \lambda^2)^{1/2} \right. \\ & \times [1 - \lambda(z+2)\cos z\eta + \lambda^2(z+1)] \\ & \left. - \lambda\rho z(z+1)(z+2)\sin z\eta [1 - 2\lambda\cos z\eta + \lambda^2]^{3/2} \right\} \\ & \times \frac{1}{[1 - \lambda(z+2)\cos z\eta + \lambda^2(z+1)]^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$



Rys. 6.6. Korekcja uzębienia cykloidalnego: a), b) epicykloidalnego, utworzonego według epicykloidy skróconej i zwyčajnej, c), d) hipocykloidalnego, utworzonego według hipocykloidy skróconej i zwyčajnej



Rys. 6.7. Wyznaczanie kątów, określających minimalne promienie krzywizny we wklęsłej i wypukłej części łuku: a) epicykloidy zasadniczej, b) hipocykloidy zasadniczej

Wyrażenie (6.32) będzie spełnione, gdy

$$\sin z\eta = 0 \quad (6.33)$$

lub

$$3(1 - 2\lambda \cos z\eta + \lambda^2)^{1/2} [1 - \lambda(z+2) \cos z\eta + \lambda^2(z+1)] - (z+2)[1 - 2\lambda \cos z\eta + \lambda^2]^{1/2} = 0 \quad (6.34)$$

Po rozwiązaniu równań (6.33) i (6.34) otrzymuje się kąty, dla których występują minimalne promienie krzywizny $R_{e\min 1}$ i $R_{e\min 2}$:

$$\eta_{e\min 1} = 0 \quad (6.35)$$

$$\eta_{e\min 2} = \frac{1}{z} \arccos \frac{\lambda^2(2z+1) - (z-1)}{\lambda(z+2)} \quad (6.36)$$

Ze względu na symetrię i powtarzalność krzywej otrzymuje się odpowiednio kąty:

$$\eta_{e\min 1} + k \frac{2\pi}{z}$$

oraz

$$\eta_{e\min 2} + k \frac{2\pi}{z} \text{ lub } \left(\frac{2\pi}{z} - \eta_{e\min 2} \right) + k \frac{2\pi}{z}$$

gdzie $k = 0, 1, 2, 3, \dots, z$.

Z równań (6.35) i (6.36) wyznacza się wartości kątów $\eta_{\min 1}$ i $\eta_{\min 2}$, a po podstawieniu do wzoru (6.31) otrzymuje się wartości $R_{\min 1}$ i $R_{\min 2}$, odpowiadające tym kątom.

Jak pokazano na rysunku 6.7a maksymalne przesunięcie g ekwidystanty zewnętrznej epicykloidy zasadniczej jest równe promieniowi $R_{\min 1}$ występującemu we wklęsłej części łuku w punkcie określonym kątem $\eta_{\min 1}$, natomiast maksymalne graniczne przesunięcie ekwidystanty wewnętrznej równa się promieniowi $R_{\min 2}$ wypukłej części łuku w punkcie opisanym kątem $\eta_{\min 2}$.

Wzór (6.36) jest ważny, jeśli

$$-1 \leq \frac{\lambda^2(2z+1) - (z-1)}{\lambda(z+2)} \leq 1 \quad (6.37)$$

czyli

$$\frac{z-1}{2z+1} \leq \lambda \leq 1 \quad (6.38)$$

lub

$$-1 \leq \lambda \leq -\frac{z-1}{2z+1} \quad (6.39)$$

Warunek (6.39) nie może być spełniony, ponieważ λ nie może przyjmować wartości ujemnych.

Dobór współczynnika λ zgodnie z warunkiem (6.38) zapewnia, że łuki epicykloidy mają dużą wysokość, a w rezultacie uzyskuje się dużą objętość przestrzeni międzyzębnych spełniających rolę komór wyporowych w maszynach hydraulicznych.

Na podstawie rysunku 6.7b wprowadzono wzór na promień krzywizny hipocykloidy:

$$R_h = \frac{\rho(z-1) \left[1 - 2\lambda \cos z\eta + \lambda^2 \right]^{3/2}}{\left| 1 + \lambda(z-2) \cos z\eta - \lambda^2(z-1) \right|} \quad (6.40)$$

Kąty, dla których promień ten przyjmuje minimalną wartość, określają wzory:

$$\eta_{h \min 1} = 0 \quad (6.41)$$

$$\eta_{h \min 2} = \frac{1}{z} \arccos \frac{\lambda^2(2z-1) - (z+1)}{\lambda(z-2)} \quad (6.42)$$

Kąty odpowiadające pozostałym punktom przegięcia hipocykloidy wynoszą:

$$\eta_{h \min 1} + k \frac{2\pi}{z}$$

$$\eta_{h \min 2} + k \frac{2\pi}{z} \text{ lub } \left(\frac{2\pi}{z} - \eta_{h \min 2} \right) + k \frac{2\pi}{z}$$

gdzie $k = 0, 1, 2, 3, \dots, z$.

Jak pokazano na rysunku 6.7b maksymalne przesunięcie g ekwidystanty zewnętrznej hipocykloidy jest równe granicznemu promieniowi $R_{h \min 2}$ wklęsłej części łuku w punkcie określonym kątem $\eta_{h \min 2}$, ekwidystanty zaś wewnętrznej promieniowi $R_{h \min 1}$ wypukłej części łuku, dla kąta $\eta_{h \min 1}$. Wzór (6.42) jest ważny, gdy

$$\frac{z+1}{2z-1} \leq \lambda \leq 1 \quad (6.43)$$

Jego interpretacja jest podobna jak w przypadku epicykloid. Dobór współczynnika λ zgodnie z warunkiem (6.43) sprawia, że łuki hipocykloidy mają dużą wysokość, zapewniając dużą objętość międzyzębnych komór wporowych w maszynie.

Stosując wyprowadzone równania, przeprowadzono analizę maksymalnych (granicznych) przesunięć uzębień epicykloidalnych i hipocykloidalnych $R_{e(h)} = g$ w zależności od parametrów uzębienia z, λ, ρ .

Odpowiednio na rysunku 6.8 rozważano koła epicykloidalne, dla których przyjęto $\rho = 1$. Zgodnie z zależnością (6.35) kąt określający minimalny promień krzywizny we wklęsłej części łuku epicykloidy wynosi $\eta_{e \min 1} = 0$. Po wstawieniu tej wartości do wzoru (6.31) zbudowano na rysunku 6.8a wykres $R_{e \min 1} = g_1 = f(\lambda)$ dla różnej liczby zębów z . Następnie wykorzystując zależność (6.36), zbudowano na rysunku 6.8b zależność kąta $\eta_{e \min 2} = f(\lambda)$ dla różnej liczby zębów z . Po wstawieniu wartości z tego wykresu do wzoru (6.31) zbudowano następnie na rys. 6.8c zależność $R_{e \min 2} = g_2 = f(\lambda)$ dla różnej liczby zębów z . W obu przypadkach λ zmienia się w granicach wynikających z warunku (6.37). Na rysunku 6.8 widać, że zwiększenie współczynnika λ powoduje zmniejszenie promieni $R_{e \min 1}, R_{e \min 2}$. Oznacza to, że dla większych wartości λ (wyższe zęby – mniejsze promienie łuków głowy i stopy zęba) należy przyjmować mniejsze odległości ekwidystanty, aby uniknąć występowania pętli na zarysie uzębienia. Dla mniejszych wartości λ (niższe zęby – większe promienie łuków głowy i stopy zęba) można stosować bardziej odległe ekwidystanty. Z porównania rysunków 6.8a i c widać również, że odległość ekwidystanty zewnętrznej ograniczona wartością $R_{e \min 1} = g_1$ jest znacznie mniejsza niż odległość ekwidystanty wewnętrznej, ograniczonej promieniem $R_{e \min 2} = g_2$. W praktyce projektowej prawie wyłącznie stosuje się wewnętrzne ekwidystanty epicykloid.

Z kolei na rysunku 6.9 rozważono koła hipocykloidalne, dla których również przyjęto $\rho = 1$. Korzystając ze wzoru (6.41) oraz ze wzoru (6.40), wyznaczono na rysunku 6.9a przebiegi zależności $R_{h \min 1} = g_1 = f(\lambda)$ dla różnej liczby zębów z . Następnie korzystając z zależności (6.42) i (6.40), zbudowano na rysunku 6.9b i c powiązane ze sobą przebiegi $\eta_{h \min 2} = f(\lambda)$ oraz $R_{h \min 2} = g_2 = f(\lambda)$ dla różnej liczby zębów z . Również i tu

λ zmieniano w granicach określonych warunkiem (6.43). Charakter zmienności $R_{h \min 2} = f(\lambda)$ jest podobny jak w przypadku epicykloid. Odległości ekwidystant wewnętrznych ograniczone promieniem $R_{h \min 1} = g_1$ są tu jednak mniejsze niż odległości ekwidystant zewnętrznych ograniczonych promieniem $R_{h \min 2} = g_2$. W związku z tym, w projektowaniu kół hipocykloidalnych stosuje się niemal wyłącznie ekwidystanty zewnętrzne.

Zastosowanie ekwidystant epicykloid zwyczajnych do kształtowania zarysu uzębienia jest możliwe, chociaż w węższym zakresie niż w przypadku ekwidystant cykloid skróconych (rys. 6.6). Ekwidystanta zewnętrzna epicykloidy zwyczajnej (rys. 6.6b) jest do tego celu nieprzydatna, ponieważ dochodzi do nakładania się sąsiednich łuków na siebie i powstawania ostrzy w ich punktach przecięcia. Istnieje możliwość ukształtowania zarysu uzębienia według ekwidystanty wewnętrznej epicykloidy zwyczajnej. Łuki ekwidystant są wówczas przesunięte względem krzywej zasadniczej o odcinek g i muszą być łączone łukiem koła o promieniu g zatoczonym z punktu zwrotu epicykloidy. Zarys uzębienia opisują więc równania ekwidystanty (6.25) oraz równania okręgu umiejscowionego w punkcie zwrotu o postaci :

$$(x - r_b \cos \xi)^2 + (y - r_b \sin \xi)^2 = g^2 \quad (6.44)$$

gdzie ξ – kąt środkowy łuku koła (rys. 6.6b).

Kąt η_{ep} , dla którego następuje przejście jednej krzywej w drugą, wyznacza się z zależności:

$$\eta_{ep} = \arctg \frac{g}{r_b} \quad (6.45)$$

Ostatecznie zarys zęba opisany jest równaniami (6.25) ważnymi dla kątów:

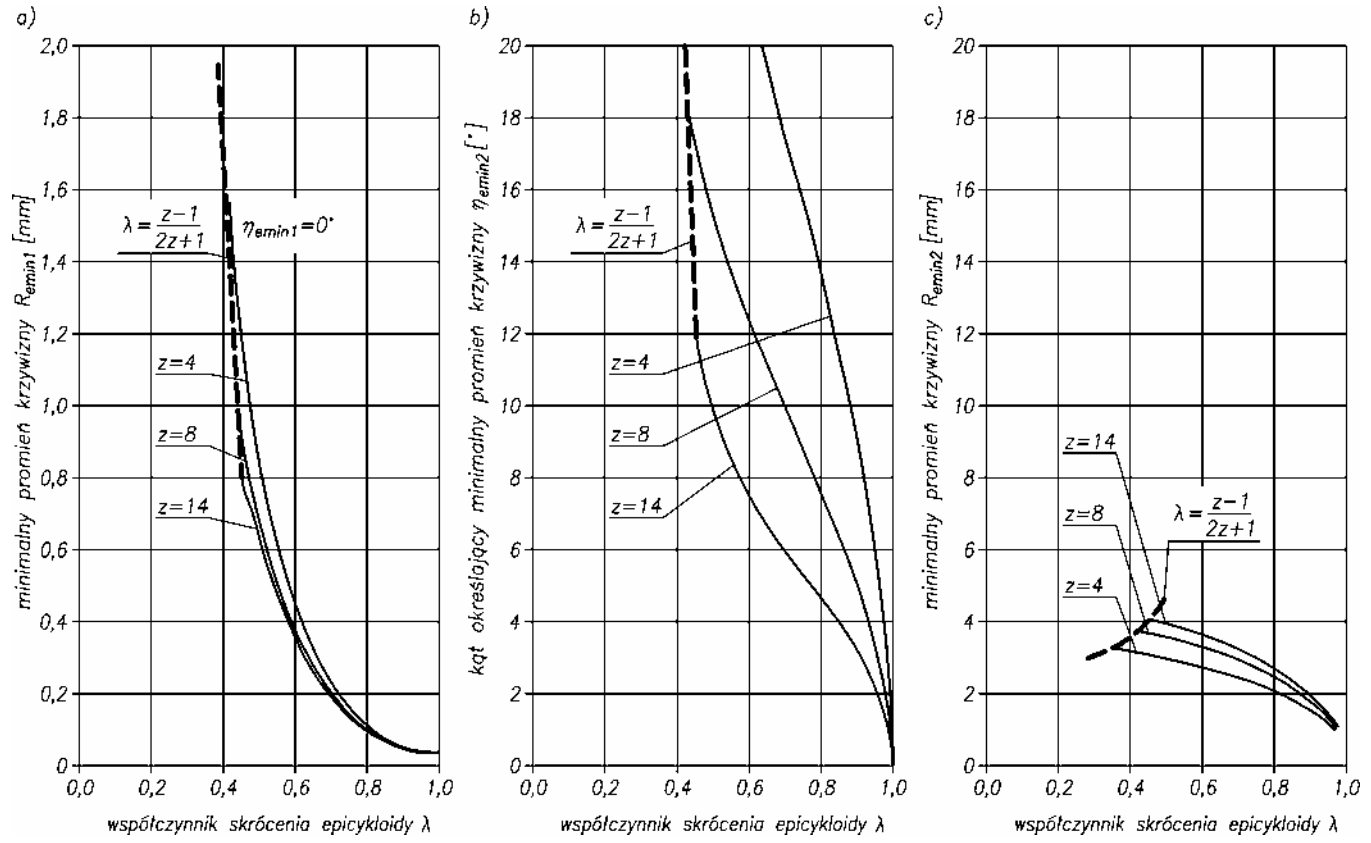
$$\eta \in \left\langle \frac{2k\pi}{z} + \eta_{ep}, \frac{2(k+1)\pi}{z} - \eta_{ep} \right\rangle$$

oraz wzoru (6.44) ważnego dla kątów

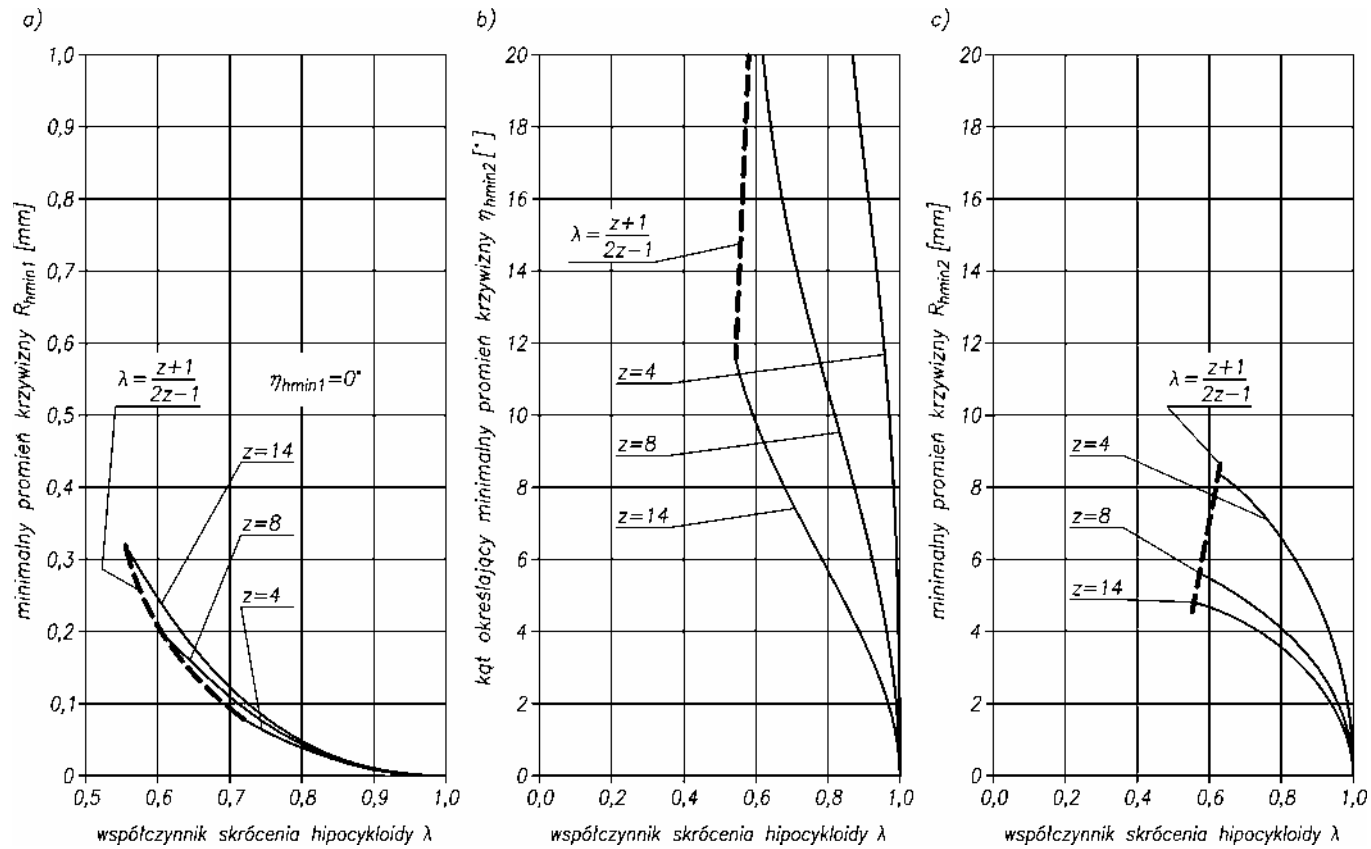
$$\eta \in \left\langle \frac{2k\pi}{z} - \eta_{ep}, \frac{2(k+1)\pi}{z} + \eta_{ep} \right\rangle$$

gdzie: $k = 0, 1, 2, 3, \dots, z$.

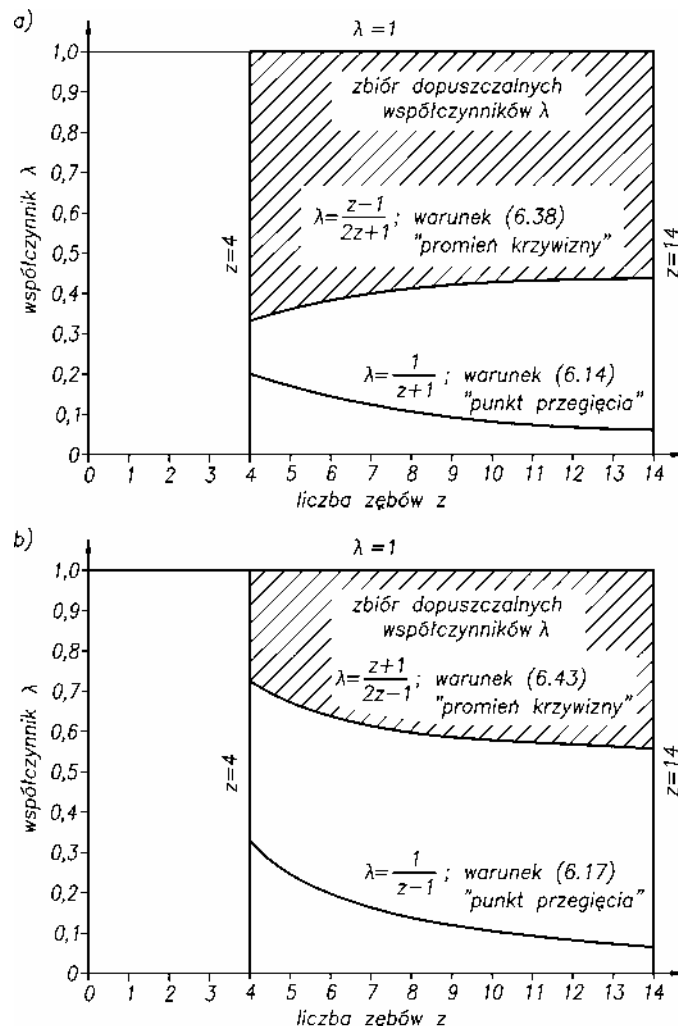
W punktach zbiegu obu krzywych nie ma wspólnej stycznej. Występuje tam nieciągłość profilu – rodzaj uskoku. Jest on stosunkowo niewielki dla małych wartości przesunięć ekwidystanty g ($g < \rho$). W praktyce można łuki ekwidystanty połączyć z łukiem koła odcinkiem prostej. Dla większych wartości g uskok ten przekształca się w pętlę, a obie krzywe – łuk ekwidystanty i koła – zachodzą na siebie, co wyklucza możliwość praktycznego zastosowania takiego zarysu. Podobnie jest w przypadku



Rys. 6.8. Zmiana wybranych parametrów uzębienia epicykloidalnego 3. rodzaju (R_{min1} , η_{min2} , R_{min2}) w funkcji współczynnika skrócenia epicykloidy



Rys. 6.9. Zmiana wybranych parametrów uzębienia hipocykloidalnego 3. rodzaju (R_{hmin1} , η_{hmin2} , R_{hmin2}) w funkcji współczynnika skrócenia hipocykloidy



Rys. 6.10. Zalecane wartości współczynnika wysokości zęba λ dla uzębień:
a) epicykloidalnych, b) hipocykloidalnych

ekwidystant hipocykloidy zwyczajnej (rys. 6.6d), dla których ekwidystanty wewnętrzne są nieprzydatne do profilowania zarysu uzębienia. Można natomiast przyjmować ekwidystanty zewnętrzne, lecz tylko dla przesunięć $g < \rho$. Zarys uzębienia opisują wówczas równania (6.27) i (6.44), ważne dla wartości kątów takich samych jak dla uzębienia epicykloidalnego. Również i w tym przypadku warunek (6.45) zachowuje ważność.

Konfrontując warunek, gwarantujący występowanie punktu przegięcia łuku epicykloidy, opisany wzorem (6.14), z warunkiem opisanym wzorem (6.38), zapewniają-

cym dużą jego wysokość, na rysunku 6.10a przedstawiono zbiór zalecanych wartości współczynnika λ dla najczęściej stosowanej liczby zębów $z = 4-14$. Współczynnik λ dobierany z obszaru zakresowanego na wykresie zapewnia, że epicykloida zasadnicza ma punkt przegięcia, dzielący ją na części wypukłą i wklęsłą, odpowiadające głowie i stopie zęba. Jednocześnie taka wartość współczynnika λ zapewnia, że zęby mają dużą wysokość, a przez to dużą objętość przestrzeni międzyzębnych spełniających rolę komór wyporowych w pompach i silnikach hydraulicznych. Na rysunku 6.10b zestawiono zbiór zalecanych wartości współczynnika λ dla kół hipocykloidalnych, wynikający z warunków na promień krzywizny – wzór (6.17) oraz punkt przegięcia – wzór (6.43).

6.2. Ząb i koło o uzębieniu wewnętrznym

Jak pokazano na rysunku 6.11, koło o uzębieniu wewnętrznym cykloidalnym formuje się na zewnątrz zamkniętej krzywej cykloidalnej, tzn. epicykloidy lub hipocykloidy. Podobnie jak przy uzębieniu zewnętrznym, jeden łuk odpowiedniej krzywej cykloidalnej stanowi jeden ząb koła zębatego. Ząb ten ma wypukłą głowę, która przechodzi we wklęsłą stopę w punkcie przegięcia P . Kolejne łuki połączone są ze sobą w krzywą cykloidalną i stanowią uzębienie koła cykloidalnego. Współczynnik wysokości zęba λ w uzębieniu wewnętrznym oraz jego moduł m wyznacza się podobnie jak dla uzębienia zewnętrznego ze wzorów (6.1) i (6.3). Również podczas projektowania koła o uzębieniu wewnętrznym nie zakłada się luzów międzyzębnych. Jak pokazano na rysunku 6.11 koło wierzchołków przechodzi przez punkt A najbardziej zbliżony do środka O_1 , koło zaś podstaw przez punkt F , najbardziej oddalony od środka cykloidy. Odpowiednie wzory do obliczania średnicy wierzchołków d_a i średnicy stóp d_f w kołach epicykloidalnych, pokazanych na rysunku 6.11a i b, mają postać:

$$d_a = 2(z\rho + \rho - \lambda\rho) = m(z + 1 - \lambda) \quad (6.46)$$

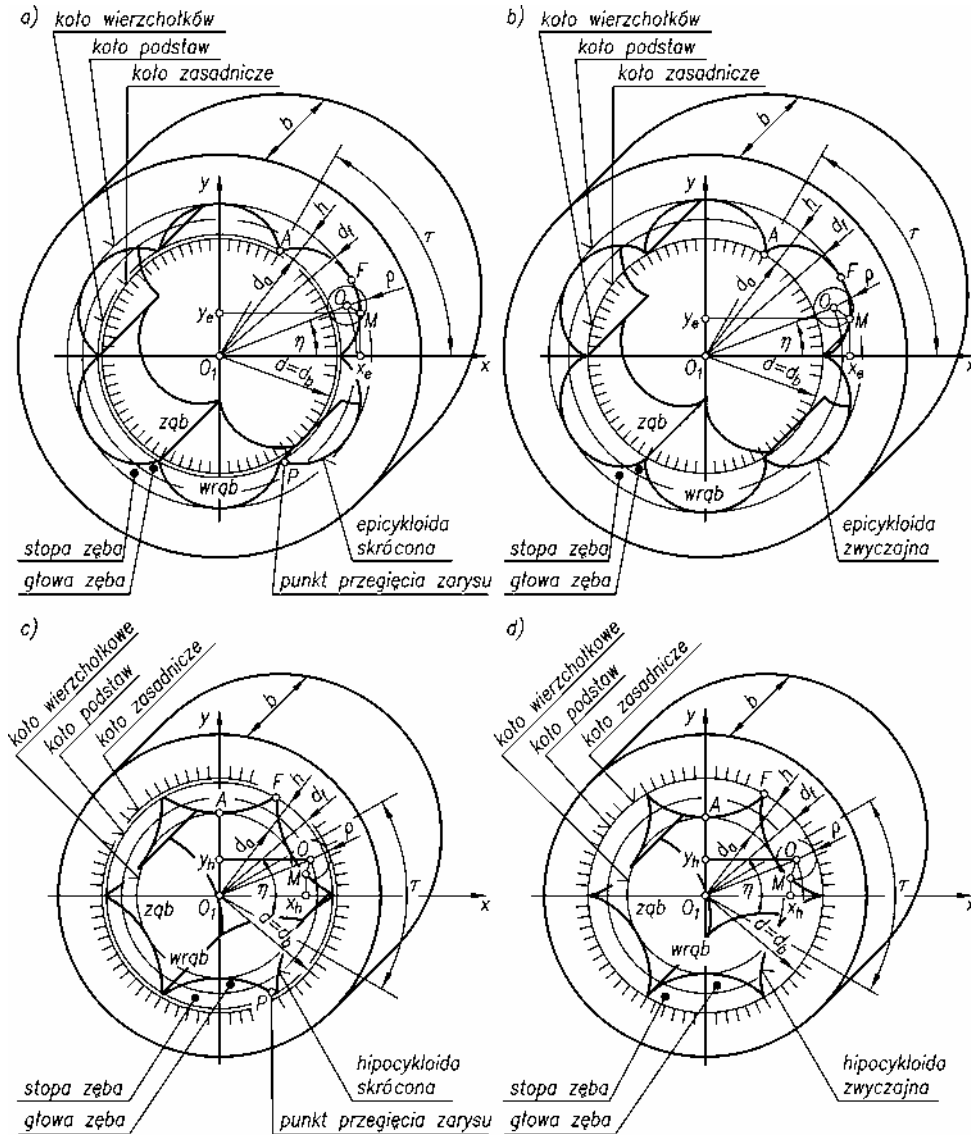
$$d_f = 2(z\rho + \rho + \lambda\rho) = m(z + 1 + \lambda) \quad (6.47)$$

Wzory do obliczania średnicy wierzchołków d_a i średnicy stóp d_f w kołach hipocykloidalnych, pokazanych na rysunku 6.11c i d, mają postać:

$$d_a = 2(z\rho - \rho - \lambda\rho) = m(z - 1 - \lambda) \quad (6.48)$$

$$d_f = 2(z\rho - \rho + \lambda\rho) = m(z - 1 + \lambda) \quad (6.49)$$

Wysokość zęba w uzębieniu wewnętrznym epicykloidalnym, tak jak i hipocykloidalnym, wyznacza się ze wzoru (6.6). Profil uzębienia wewnętrznego epicykloidalnego wyznacza się ze wzorów (2.1) oraz (6.9), uzębienia zaś wewnętrznego hipocykloidalnego ze wzorów (2.3) oraz (6.10).



Rys. 6.11. Kształtowanie zębów i uzębienia cykloidalnego wewnętrznego 3. rodzaju: a), b) zęby i uzębienia epicykloidalne, ukształtowane według epicykloidy skróconej i zwyczajnej; c), d) zęby i uzębienia hipocykloidalne, ukształtowane według hipocykloidy skróconej i zwyczajnej

Kształt i wymiary uzębienia cykloidalnego wewnętrznego są uzależnione, podobnie jak uzębienia zewnętrznego, od trzech parametrów, tzn. liczby zębów z , modułu m (lub promienia koła tocącego się ρ) i współczynnika wysokości zęba λ . Analizę pro-

wadzi się z wykorzystaniem wzorów (6.11)–(6.17), a rezultat pokazano na rysunkach 6.2–6.4.

Korekcję uzębienia wewnętrznego prowadzi się z tych samych powodów i w ten sam sposób jak dla uzębienia zewnętrznego, zamieniając jedynie stronę zarysu, po której formuje się uzębienie.

Wzory do obliczania średnicy wierzchołkowej d_a i średnicy stóp d_f w kołach epicykloidalnych o uzębieniu wewnętrznym korygowanym mają postać:

$$d_a = 2(z\rho + \rho - \lambda\rho \pm g) = m(z + 1 - \lambda \pm \nu) \quad (6.50)$$

$$d_f = 2(z\rho + \rho + \lambda\rho \pm g) = m(z + 1 + \lambda \pm \nu) \quad (6.51)$$

Wzory te dla kół hipocykloidalnych o uzębieniu wewnętrznym korygowanym mają postać:

$$d_a = 2(z\rho - \rho - \lambda\rho \pm g) = m(z - 1 - \lambda \pm \nu) \quad (6.52)$$

$$d_f = 2(z\rho - \rho + \lambda\rho \pm g) = m(z - 1 + \lambda \pm \nu) \quad (6.53)$$

Profil uzębienia po korekcji w kole epicykloidalnym wewnętrznym opisany jest wzorem (6.25) lub (6.26), profil zaś uzębienia w kole hipocykloidalnym wewnętrznym wzorem (6.27) lub (6.28). Analizę kształtu i wymiarów uzębienia po korekcji prowadzi się według wzorów (6.29)–(6.43), a rezultaty analizy są przedstawione na rysunkach 6.5–6.10.

6.3. Zespoły kół o zazębieniu wewnętrznym

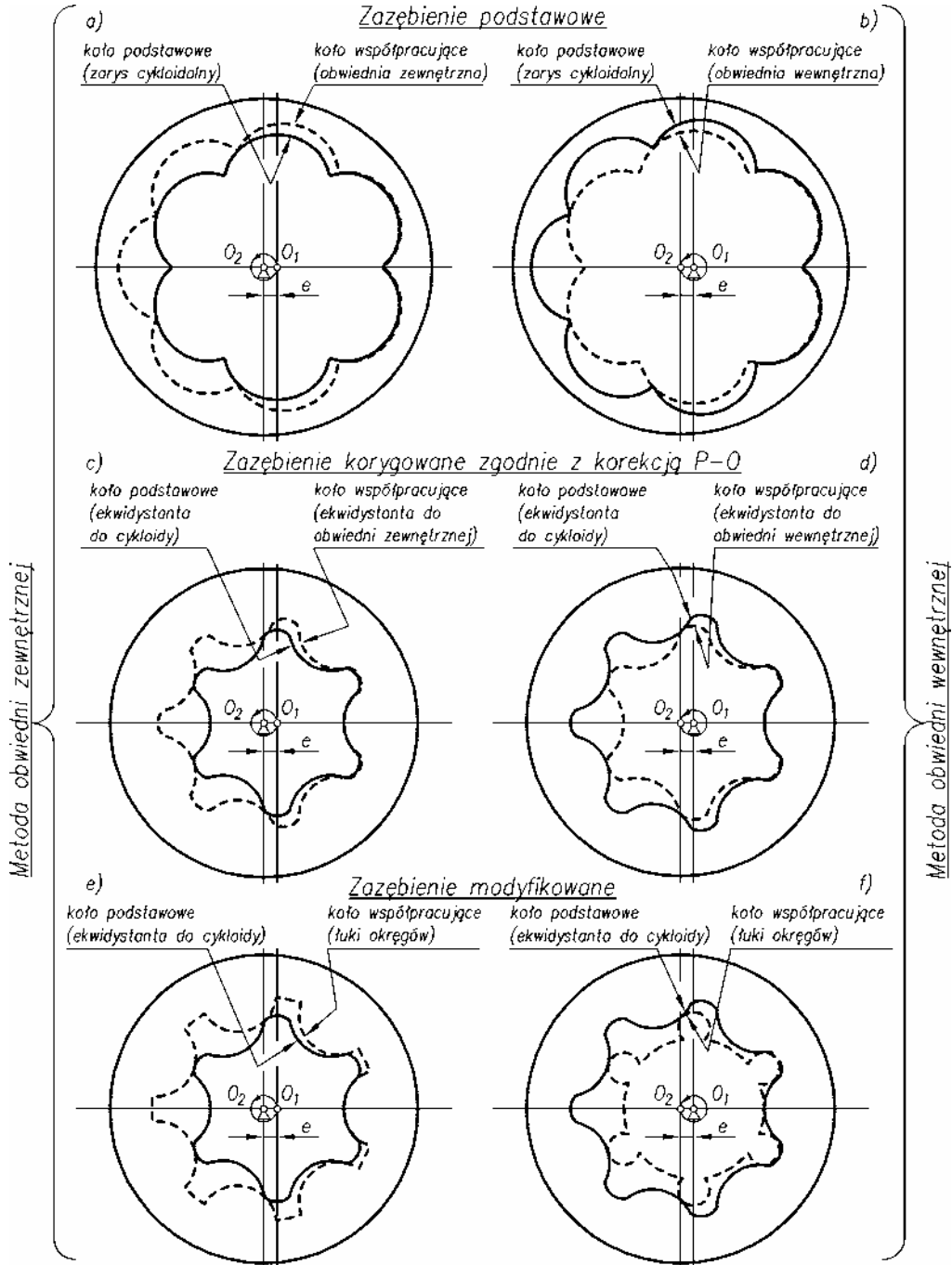
6.3.1. Ogólne zasady projektowania

Stosując pojedyncze koła zębate z uzębieniami cykloidalnymi 3. rodzaju opisane w rozdziałach 6.1 i 6.2 można zaprojektować zespoły kół z zazębieniami cykloidalnymi 3. rodzaju. Nie projektuje się zespołów kół o zazębieniu zewnętrznym ze względu na brak możliwości zapewnienia ciągłości i płynności współpracy zębów. Podstawowe znaczenie mają zespoły o zazębieniu wewnętrznym.

Jak pokazano na rysunku 6.12 stosuje się dwie metody projektowania:

- metodę obwiedni zewnętrznej,
- metodę obwiedni wewnętrznej.

W metodzie obwiedni zewnętrznej (rys. 6.12a) za koło podstawowe przyjmuje się koło o uzębieniu zewnętrznym, zarysie cykloidalnym i środkiem O_1 . Następnie przetacza się je wokół punktu O_2 , otrzymując rodzinę kół podstawowych. Prowadząc obwiednię zewnętrzną do tej rodziny otrzymuje się zarys koła współpracującego o uzębieniu wewnętrznym. Kształt i zarys koła współpracującego jest dopełnieniem kształtu i zarysu koła podstawowego.



Rys. 6.12. Ogólne zasady projektowania zespołów kół cykloidalnych 3. rodzaju

W metodzie obwiedni wewnętrznej (rys. 6.12b) za koło podstawowe przyjmuje się koło o uzębieniu wewnętrznym, zarysie cykloidalnym i środkiem O_2 . Następnie koło podstawowe przetacza się wokół punktu O_1 , otrzymując rodzinę kół podstawowych. Prowadząc obwiednię wewnętrzną do tej rodziny otrzymuje się zarys koła współpracującego o uzębieniu zewnętrznym. Również i w tym przypadku kształt i zarys koła współpracującego jest swoistym dopełnieniem koła podstawowego.

Koła podstawowe, które jak pokazano na rysunku 6.12a i b mogą mieć uzębienie zewnętrzne lub wewnętrzne, projektuje się według zasad podanych w punktach 6.1 i 6.2.

Jak widać na rysunku 6.12a i b zaprojektowane metodą obwiedni zewnętrznej i wewnętrznej zespoły kół charakteryzują się nieproporcjonalnymi zębami. Zęby kół o uzębieniu zewnętrznym mają głowy uformowane przez łuki o dużym promieniu krzywizny, stopy zaś stanowią łuki o małym promieniu. W kole o uzębieniu wewnętrznym proporcje te są odwrotne. Uzębienia obu kół są przez to nieforemne. Jednocześnie współpraca tak ukształtowanych zębów jest niekorzystna ze względu na duże naciski, szybkie zużycie, a nawet niebezpieczeństwo wykruszenia powłoki zęba. Wykonanie takich uzębień jest ponadto trudne i kosztowne.

Po uwzględnieniu podanych przyczyn konstrukcyjnych i technologicznych należy dokonać korekcji uzębienia. Powinna być to korekcja typu P-0, tzn. przy nominalnym rozstawieniu osi (rys. 6.12c, d). Polega ona na przesunięciu zarysów o wartość g w kierunku środka zespołu kół lub w kierunku zewnętrznym i utworzeniu ekwidystant w stosunku do krzywych podstawowych, tzn. cykloidy i obwiedni.

Tak otrzymane nowe profile mogą być w dalszym ciągu niekorzystne ze względów konstrukcyjnych i technologicznych. W związku z tym dokonuje się modyfikacji, pokazanej na rysunku 6.12e i f. Modyfikuje się uzębienie koła współpracującego tak, aby pozbyć się niewygodnej ze względów konstrukcyjnych i technologicznych ekwidystanty do obwiedni. Modyfikację wykonuje się przez zastąpienie ekwidystanty łukami okręgu. Zarys zęba koła podstawowego nie jest modyfikowany.

W dalszej części pracy rozważa się podstawowe zespoły kół o uzębieniach cykloidalnych, zaprojektowane metodą obwiedni zewnętrznej i wewnętrznej oraz ich korekcję i modyfikację.

6.3.2. Zespoły zaprojektowane metodą obwiedni zewnętrznej

6.3.2.1. Zespoły kół o zazębieniach epicykloidalnych

Przebieg procesu projektowania zespołu kół o zazębieniu epicykloidalnym przedstawiono na rysunku 6.13. Za podstawowe przyjęto koło o uzębieniu zewnętrznym, liczbie zębów z_1 i zarysie ukształtowanym według epicykloidy skróconej ($\lambda < 1$). Szczegółowy kształt i wymiary koła podstawowego pokazano na rysunku 6.13a, a zarys uzębienia opisano równaniem (6.9). Przyjmuje się, że koło współpracujące ma

liczbę zębów $z_2 = z_1 + 1$, a jego zarys będzie dopełnieniem zarysu koła podstawowego. Odległość osi obu kół O_1O_2 , czyli inaczej mimośród e , musi być równy połowie wysokości zęba koła podstawowego h_1 , tzn.:

$$O_1O_2 = e = \frac{h_1}{2} = \frac{2\lambda\rho}{2} = \lambda\rho$$

Promienie toczone koła podstawowego i współpracującego wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} r_{w1} &= z_1 e = z_1 \lambda \rho \\ r_{w2} &= z_2 e = z_2 \lambda \rho = (z_1 + 1) \lambda \rho \end{aligned} \quad (6.54)$$

Okrąg toczone koła współpracującego o środku O_2 i promieniu r_{w2} unieruchamia się, a następnie przetacza po jego wewnętrznej stronie okrąg toczone koła podstawowego o środku O_1 i promieniu r_{w1} . W wyniku tego otrzymuje się rodzinę jednakowych epicykloidalnych kół podstawowych. Prowadząc obwiednię zewnętrzną do tej rodziny, otrzymuje się profil koła współpracującego.

Przy obtaczaniu koła o promieniu r_{w1} po kole r_{w2} dokonuje się przesunięcia i obrotu układu X_1Y_1 związanego z kołem podstawowym uzębionym zewnątrz, względem układu X_2Y_2 , związanego z kołem współpracującym uzębionym wewnątrz. Dokonuje się przesunięcia o wektor $[a, b]$ i kąt obrotu φ . Równania wiążące współrzędne w obu tych układach mają postać:

$$\begin{aligned} x_2 &= a + x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi \\ y_2 &= b + x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi \end{aligned} \quad (6.55)$$

gdzie współrzędne początku układu X_1Y_1 w układzie X_2Y_2 wynoszą odpowiednio:

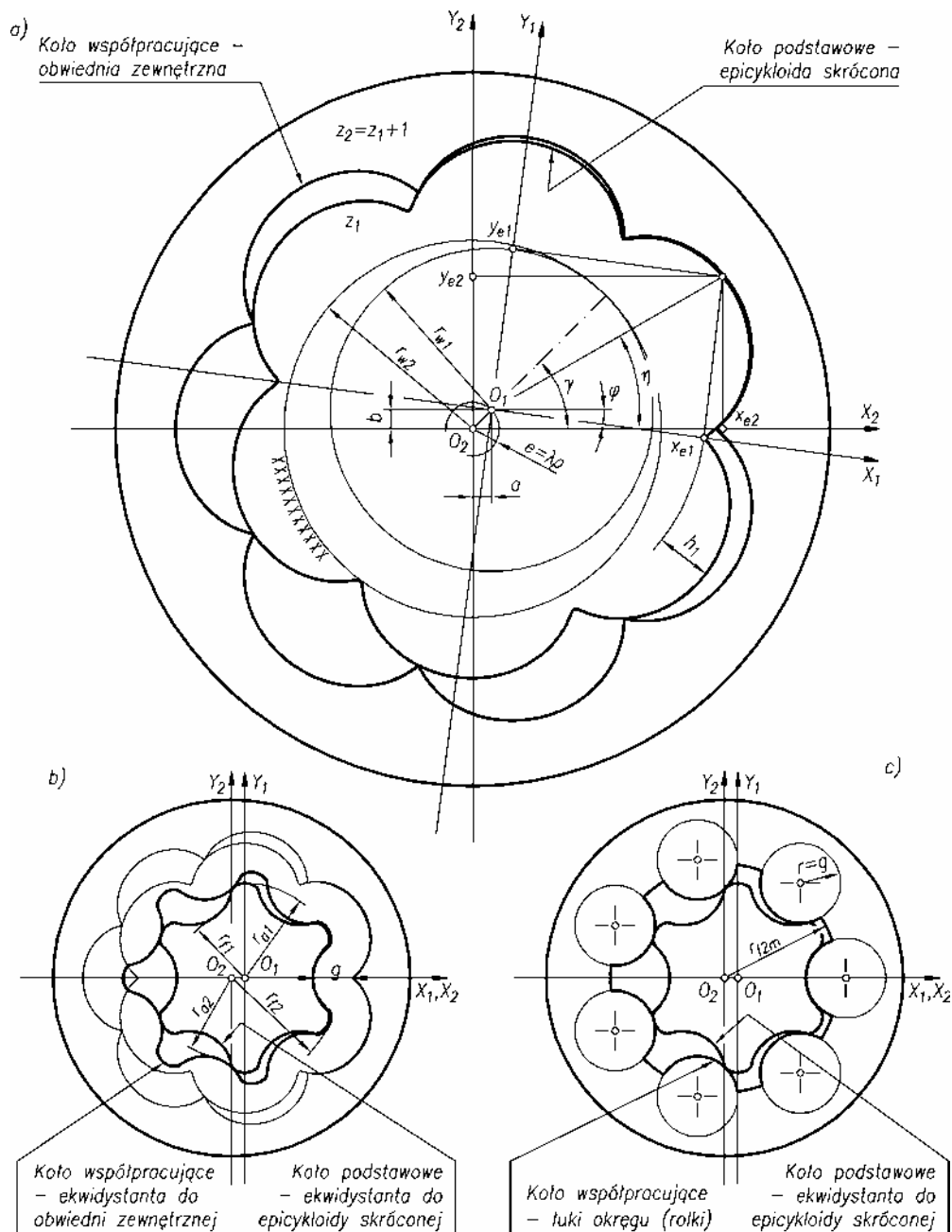
$$\begin{aligned} x_2 &= a = e \cos \gamma \\ y_2 &= b = e \sin \gamma \end{aligned} \quad (6.56)$$

a kąt $\varphi < 0$, co widać na rysunku 6.13a.

Po podstawieniu równań (6.9) i (6.56) do równania (6.55) otrzymuje się

$$\begin{aligned} x_2 &= e \cos \gamma + [\rho(z_1 + 1) \cos \eta - \lambda \rho \cos(z_1 + 1)\eta] \cos \varphi \\ &\quad - [\rho(z_1 + 1) \sin \eta - \lambda \rho \sin(z_1 + 1)\eta] \sin \varphi \\ y_2 &= e \sin \gamma + [\rho(z_1 + 1) \cos \eta - \lambda \rho \cos(z_1 + 1)\eta] \sin \varphi \\ &\quad - [\rho(z_1 + 1) \sin \eta - \lambda \rho \sin(z_1 + 1)\eta] \cos \varphi \end{aligned} \quad (6.57)$$

gdzie η – kąt biejący cykloidy określający zarys epicykloidalnego koła podstawowego, γ – kąt obrotu mimośrodowości kół o środkach O_1 i O_2 , φ – kąt obrotu koła o promieniu r_{w1} względem koła o promieniu r_{w2} .



Rys. 6.13. Projektowanie zespołu kół epicykloidalnych metodą obwiedni zewnętrznej;
 zarys według epicykloidy skróconej a) zazębienie podstawowe,
 b) zazębienie korygowane, c) zazębienie modyfikowane

Kąty φ i γ powiązane są zależnością:

$$\varphi = -\frac{\gamma}{z_1}$$

Po podstawieniu tej zależności do równania (6.57) otrzymuje się po przekształceniach układ równań parametrycznych, opisujących rodzinę kół o zarysie epicykloidalnym w układzie współrzędnych X_2Y_2

$$\begin{aligned} x_{re2} &= \lambda\rho \cos \gamma + \rho(z_1 + 1) \cos \frac{z_1\eta - \gamma}{z_1} - \lambda\rho \cos \frac{(z_1 + 1)z_1\eta - \gamma}{z_1} \\ y_{re2} &= \lambda\rho \sin \gamma + \rho(z_1 + 1) \sin \frac{z_1\eta - \gamma}{z_1} - \lambda\rho \sin \frac{(z_1 + 1)z_1\eta - \gamma}{z_1} \end{aligned} \quad (6.58)$$

które po wprowadzeniu modułu $m = 2\rho$

$$\begin{aligned} x_{re2} &= \frac{m}{2} \left[\lambda \cos \gamma + (z_1 + 1) \cos \frac{z_1\eta - \gamma}{z_1} - \lambda \cos \frac{(z_1 + 1)z_1\eta - \gamma}{z_1} \right] \\ y_{re2} &= \frac{m}{2} \left[\lambda \sin \gamma + (z_1 + 1) \sin \frac{z_1\eta - \gamma}{z_1} - \lambda \sin \frac{(z_1 + 1)z_1\eta - \gamma}{z_1} \right] \end{aligned} \quad (6.59)$$

Równanie (6.59) należy uzupełnić warunkiem obwiedni, który wiąże ze sobą kąt obrotu γ koła podstawowego względem koła współpracującego z kątem epicykloidy η :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_{re2}}{\partial \eta} & \frac{\partial y_{re2}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_{re2}}{\partial \gamma} & \frac{\partial y_{re2}}{\partial \gamma} \end{vmatrix} = 0, \quad (6.60)$$

z którego otrzymuje się ostatecznie

$$\sin z_1\eta - \lambda \sin \left[z_1\eta + \frac{z_1(\eta - \gamma) - \gamma}{z_1} \right] + \sin \frac{z_1(\eta - \gamma) - \gamma}{z_1} = 0 \quad (6.61)$$

Układ równań opisujący zarys koła współpracującego jako obwiednię rodziny kół epicykloidalnych, składa się z równań (6.59) i (6.61). Równania (6.59) służą do wyznaczania zarysu kolejnych kół epicykloidalnych stanowiących rodzinę. Równanie (6.61), po uwzględnieniu położenia poszczególnych kół (kąt γ), służy do wyznaczania tego punktu zarysu koła (kąt η), który jest kolejnym punktem obwiedni, opisującej zarys koła współpracującego. Układ równań (6.59) i (6.61) rozwiązuje się za pomocą techniki komputerowej.

Współpraca koła podstawowego i współpracującego, pokazanych na rysunku 6.13a, byłaby utrudniona. Dochodziłoby do oddziaływania wyokrąglonej głowy zęba koła o uzębieniu zewnętrznym i ostro zakończonej głowy zęba koła o uzębieniu wewnętrznym. Grozi to przyśpieszonym zużyciem powierzchni lub wyłamaniem ostro zakończonego zęba. Uzębienia obu kół są również bardzo trudne do wykonania. W tej sytuacji nie można bezpośrednio wykorzystać tego zazębienia w budowie maszyn hydraulicznych. Należy zatem dokonać korekcji zazębienia, zarówno ze względów konstrukcyjnych, jak i technologicznych. Będzie to korekcja typu P-0 bez zmiany odległości osi kół O_1O_2 . Korekcję zazębienia epicykloidalnego ($\lambda < 1$) zaprojektowanego metodą obwiedni zewnętrznej, pokazano na rysunku 6.13b. Polega ona na przesunięciu zarysów obu kół do wewnątrz zespołu o tę samą wartość g . Przesunięcie do środka koła (ujemne) jest korzystne, ogranicza się bowiem wtedy możliwość wystąpienia interferencji zarysów (porównaj rys. 6.6a). W rezultacie koło podstawowe ma zarys utworzony przez ekwidystantę wewnętrzną do epicykloidy skróconej, który wyznacza się z równań (6.25) lub (6.26). Odpowiednio koło współpracujące powinno mieć zarys utworzony przez ekwidystantę do obwiedni.

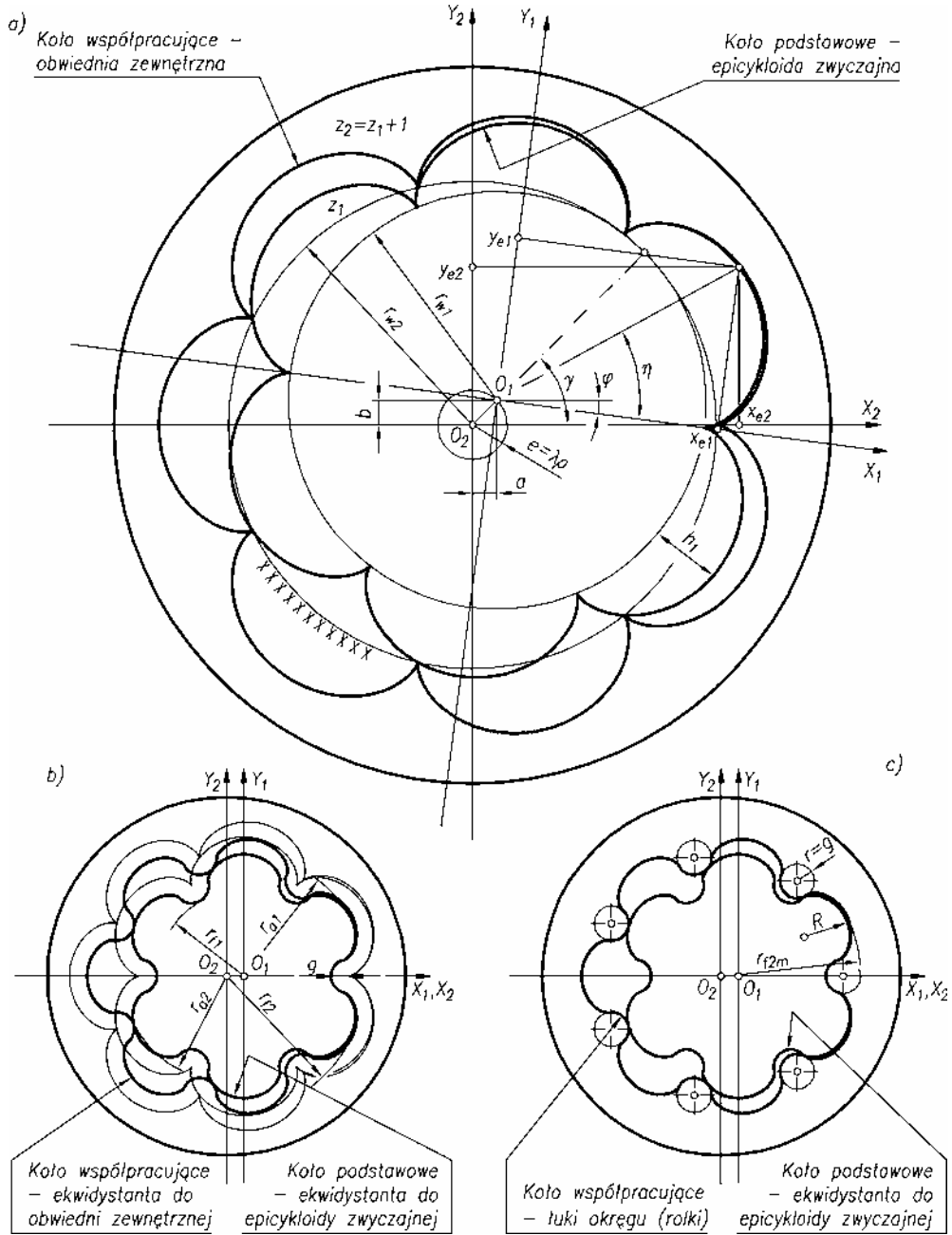
Średnice charakterystyczne koła współpracującego (rys. 6.13b) wyraża się wzorami:

$$d_{a2} = 2(z_1\rho + \rho - \lambda\rho - g + \lambda\rho) = m(z_1 + 1 - \nu)$$

$$d_{f2} = 2(z_1\rho + \rho + \lambda\rho - g + \lambda\rho) = m(z_1 + 1 + 2\lambda - \nu)$$

Opis matematyczny takiej krzywej jest jednak skomplikowany, jednocześnie pojawiają się trudności technologiczne związane z wykonaniem zarysu. Dokonuje się modyfikacji zarysu koła współpracującego, którą przedstawiono na rysunku 6.13c. Polega ona na zastąpieniu łuków ekwidystant do obwiedni okręgami ściśle stycznymi o promieniu $r = g$, zakreślonymi z wierzchołków obwiedni. Następnie okręgi te łączy się łukami innego okręgu o promieniu r_{f2m} , który zatacza się ze środka koła współpracującego O_2 , przy czym okrąg ten ma większy promień niż promień koła stóp r_{f2} , otrzymany w wyniku korekcji (rys. 6.13b). W ten sposób uzyskuje się konieczny międzyzębny luz wierzchołkowy.

Za koło podstawowe można przyjąć także koło o uzębieniu zewnętrznym, liczbie zębów z_1 i zarysie ukształtowanym według epicykloidy zwyczajnej ($\lambda = 1$). Szczegółowy kształt i wymiary koła podstawowego można opracować na podstawie rysunku 7.1b, a zarys uzębienia opisać równaniami (6.9) wstawiając $\lambda = 1$. Obtaczając koło toczne o promieniu r_{w1} po kole tocznym r_{w2} otrzymuje się rodzinę jednakowych epicykloid zwyczajnych (rys. 6.14). Prowadząc obwiednię zewnętrzną do tej rodziny otrzymuje się zarys koła współpracującego. Zarys ten wyznacza się z równań (6.59) i (6.61), wprowadzając do nich $\lambda = 1$. Z równania (6.61), po przekształceniach, dochodzi się do zależności wiążącej kąty η i γ o postaci:



Rys. 6.14. Projektowanie zespołu kół epicykloidalnych metodą obwiedni zewnętrznej; zarys według epicykloidy zwyczajnej: a) zazębienie podstawowe, b) zazębienie korygowane, c) zazębienie modyfikowane

$$\eta = \left(\frac{z_1 + 1}{z_1} \right) \gamma \quad (6.62)$$

po podstawieniu której do równań (6.58) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} x_{re2} &= \rho(z_2 + 1) \cos \gamma - \cos(z_2 + 1)\gamma \\ y_{re2} &= \rho(z_2 + 1) \sin \gamma - \rho \sin(z_2 + 1)\gamma \end{aligned} \quad (6.63)$$

Po uwzględnieniu modułu $m = 2\rho$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned} x_{re2} &= \frac{m}{2} [(z_2 + 1) \cos \gamma - \cos(z_2 + 1)\gamma] \\ y_{re2} &= \frac{m}{2} [(z_2 + 1) \sin \gamma - \sin(z_2 + 1)\gamma] \end{aligned} \quad (6.64)$$

Równania (6.64) mają taką samą postać jak równanie (6.9) z tym tylko, że nastąpiła zmiana kąta η na kąt γ . Oznacza to, że obwiednia opisująca zarys koła współpracującego jest również epicykloidą zwyczajną.

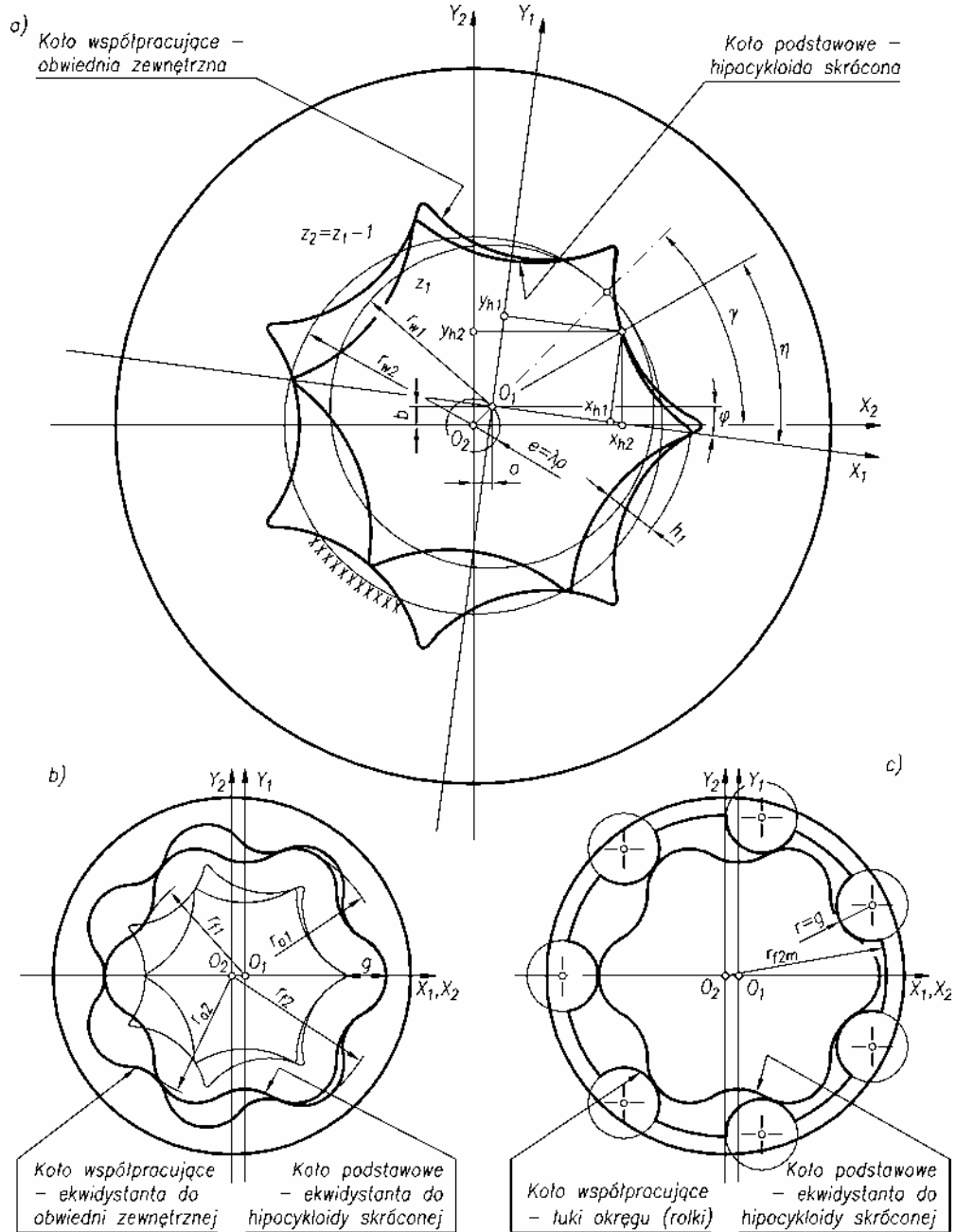
Aby wykorzystać to zazębienie podstawowe (rys. 6.14a) w budowie maszyn hydraulicznych, należy wykonać ze względów konstrukcyjnych i technologicznych korekcję P-0. Sposób przeprowadzenia korekcji przedstawiono na rysunku 6.14b. Polega ona, jak poprzednio, na przesunięciu o wartość g zarysów obu kół w kierunku środka zespołu. Uzyskuje się łuki ekwidystant wewnętrznych do epicykloid zwyczajnych, które opisuje się równaniami (6.25). Łuki te łączy się okręgami o promieniu $r = g$, wystawianymi w punktach zwrotu epicykloidy zwyczajnej.

Średnice charakterystyczne (rys. 6.14b) wyrażane są wzorami podanymi dla zazębienia ukształtowanego według epicykloidy skróconej, przy czym do wzorów należy wprowadzić $\lambda = 1$.

W przypadku koła współpracującego, mającego uzębienie wewnętrzne – zarys ten jest niekorzystny ze względów technologicznych. Można dokonać jego modyfikacji, którą przedstawiono na rysunku 6.14c. Polega ona na tym, że głowy zębów uformowane w kształcie okręgu $r = g$ łączy się łukami okręgów o promieniu R , zastępującymi ekwidystantę do obwiedni. Należy przy tym powiększyć promień koła stóp r_{f2m} w stosunku do promienia r_{f2} (rys. 6.14b), aby uzyskać niezbędny międzyzębny luz wierzchołkowy.

6.3.2.2. Zespoły kół o zazębieniach hipocykloidalnych

Za koło podstawowe można przyjąć koło o uzębieniu zewnętrznym, liczbie zębów z_1 i zarysie ukształtowanym według hipocykloidy skróconej ($\lambda < 1$). Szczegółowy kształt i wymiary koła podstawowego pokazano na rysunku 6.1c, a zarys uzębienia



Rys. 6.15. Projektowanie zespołu kół hipocykloidalnych metodą obwiedni zewnętrznej;
zarys według hipocykloidy skróconej: a) zazębienie podstawowe,
b) zazębienie korygowane, c) zazębienie modyfikowane

opisano równaniami (6.10). Zasada projektowania koła współpracującego jest taka sama jak w przypadku opisanych wcześniej kół epicykloidalnych, co przedstawiono szczegółowo na rysunku 6.15a. Układ równań parametrycznych opisujących rodzinę kół o zarysie hipocykloidalnym ma postać:

$$\begin{aligned} x_{rh2} &= \lambda\rho \cos \gamma + \rho(z_1 - 1) \cos \frac{z_1\eta - \gamma}{z_1} - \lambda\rho \cos \frac{(z_1 - 1)z_1\eta + \gamma}{z_1} \\ y_{rh2} &= \lambda\rho \sin \gamma + \rho(z_1 - 1) \sin \frac{z_1\eta - \gamma}{z_1} - \lambda\rho \sin \frac{(z_1 - 1)z_1\eta + \gamma}{z_1} \end{aligned} \quad (6.65)$$

Po uwzględnieniu modułu $m = 2\rho$ równania te przyjmują formę:

$$\begin{aligned} x_{rh2} &= \frac{m}{2} \left[\lambda \cos \gamma + (z_1 - 1) \cos \frac{z_1\eta - \gamma}{z_1} - \lambda \cos \frac{(z_1 - 1)z_1\eta + \gamma}{z_1} \right] \\ y_{rh2} &= \frac{m}{2} \left[\lambda \sin \gamma + (z_1 - 1) \sin \frac{z_1\eta - \gamma}{z_1} - \lambda \sin \frac{(z_1 - 1)z_1\eta + \gamma}{z_1} \right] \end{aligned} \quad (6.66)$$

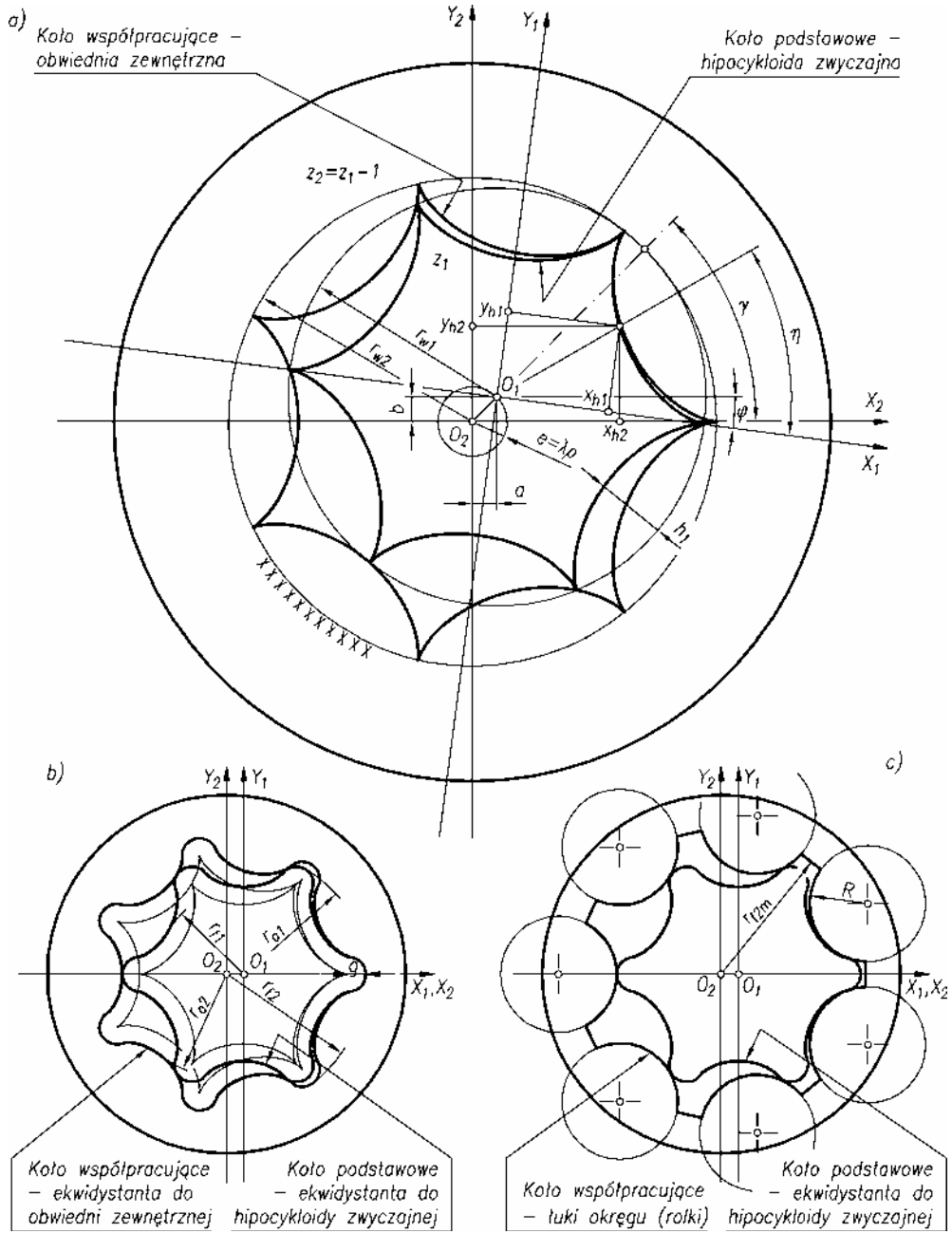
Warunek obwiedni przyjmuje postać:

$$\sin z_1\eta - \lambda \sin \left[z_1\eta - \frac{z_1(\eta - \gamma) - \gamma}{z_1} \right] - \sin \frac{z_1(\eta - \gamma) - \gamma}{z_1} = 0 \quad (6.67)$$

Interpretacja tych równań jest podobna jak w przypadku opisanego zazębienia epicykloidalnego. Równania (6.66) służą do wyznaczania zarysów kolejnych kół hipocykloidalnych stanowiących rodzinę. Równanie (6.67) służy do wyznaczania tego punktu na danym zarysie koła z rodziny, który stanowi kolejny punkt obwiedni. Układ równań rozwiązuje się za pomocą techniki komputerowej.

Podobnie jak w przypadku zespołu kół o zazębieniach epicykloidalnych ze względów konstrukcyjnych i technologicznych dokonuje się korekcji i modyfikacji zazębienia. Jak pokazano na rysunku 6.15b korekcja P-0 polega na przesunięciu zarysów obu kół o tę samą wartość g w kierunku od środka zespołu. Przesunięcie w tym kierunku jest korzystne, unika się bowiem w ten sposób interferencji zarysów (patrz rys. 6.6c). W wyniku korekcji koło podstawowe ma zarys utworzony przez ekwidystantę zewnętrzną do hipocykloidy skróconej, który wyznacza się z równań (6.27). Koło współpracujące ma natomiast zarys utworzony przez ekwidystantę do obwiedni. Średnice charakterystyczne koła współpracującego (rys. 6.15b) opisane są wzorami:

$$\begin{aligned} d_{a2} &= 2(z_1\rho - \rho - \lambda\rho + g + \lambda\rho) = m(z_1 - 1 + \nu) \\ d_{f2} &= 2(z_1\rho - \rho + \lambda\rho + g + \lambda\rho) = m(z_1 - 1 + 2\lambda + \nu) \end{aligned}$$



Rys. 6.16. Projektowanie zespołu kół hipocykloidalnych metodą obwiedni zewnętrznej; zarys według hipocykloidy zwyczajnej: a) ząbienie podstawowe, b) ząbienie korygowane, c) ząbienie modyfikowane

Zarys ten można poddać modyfikacji. Polega ona na zastąpieniu łuków ekwidystant ściśle do nich stycznymi łukami okręgów, o promieniu $r = g$. Następnie łuki te łączy się promieniami okręgu stóp r_{f2m} zakreślonym ze środka koła O_2 . Promień musi być przy tym większy od promienia r_{f2} (rys. 6.15c), tak aby zapewnić niezbędny wierzchołkowy luz międzyzębny.

Za koło podstawowe można przyjąć również koło o uzębieniu zewnętrznym, liczbie zębów z_1 i zarysie ukształtowanym według hipocykloidy zwyczajnej ($\lambda = 1$). Szczegółowy kształt i wymiary koła podstawowego można opracować na podstawie rysunku 6.1d, a zarys uzębienia można opisać równaniami (6.10), wstawiając do nich $\lambda = 1$.

Obtaczając koło toczne o promieniu r_{w1} po kole tocznym r_{w2} otrzymuje się rodzinę jednakowych hipocykloid zwyczajnych (rys. 6.16a). Prowadząc obwiednię zewnętrzną do tej rodziny otrzymuje się zarys koła współpracującego. Zarys ten wyznacza się z równań (6.66) i (6.67) po podstawieniu $\lambda = 1$.

W wyniku przekształceń otrzymuje się równania, które potwierdzają, że obwiednia jest również hipocykloidą zwyczajną. Jak w poprzednim przypadku nie można ze względów konstrukcyjnych i technologicznych wykorzystać tych krzywych jako zazębienia maszyny hydraulicznej.

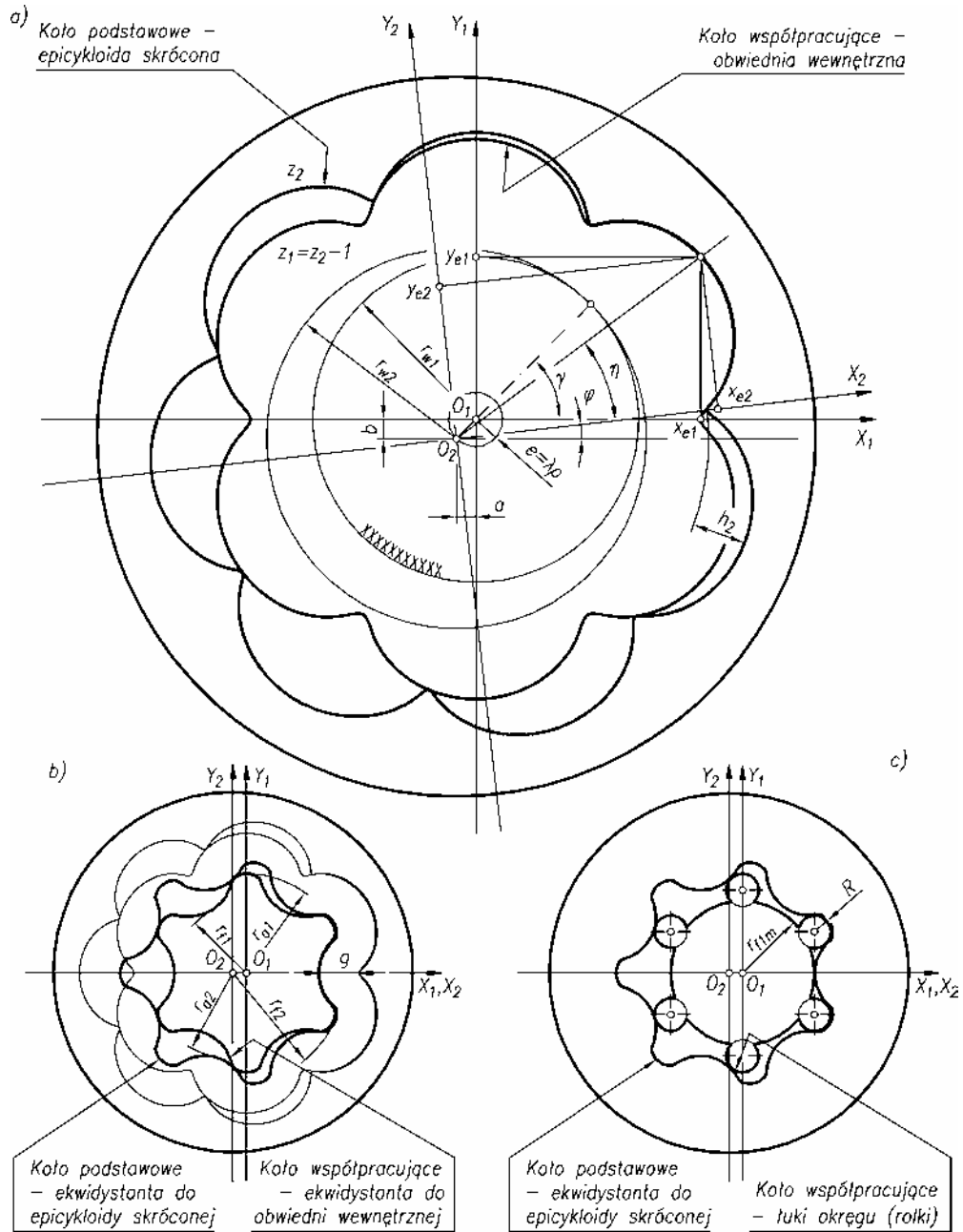
Dokonuje się więc korekcji zazębienia P-0 (rys. 6.16b), polegającej na przesunięciu obu zarysów kół o wartość g w kierunku od środka zespołu. W rezultacie otrzymuje się łuki ekwidystant zewnętrznych do hipocykloid zwyczajnych, które opisane są równaniami (6.27). Łuki te łączy się okręgami o promieniu $r = g$ zatoczonymi z punktu zwrotu hipocykloid zwyczajnych.

Średnice charakterystyczne (rys. 6.16b) wyrażane są wzorami podanymi dla zazębienia ukształtowanego według hipocykloidy skróconej, przy czym do wzorów należy wprowadzić $\lambda = 1$. Uzyskane w ten sposób profile kół są niekorzystne głównie ze względów technologicznych. Można zatem dokonać modyfikacji uzębienia koła współpracującego (rys. 6.16c), która polega na zastąpieniu łuków ekwidystanty ściśle do nich stycznymi łukami okręgów o promieniu R . Następnie łuki te łączy się promieniem okręgu r_{f2m} , który zakreślono ze środka koła O_2 , przy czym promień ten musi być większy od promienia r_{f2} (rys. 6.16b), aby zapewnić międzyzębny luz wierzchołkowy.

6.3.3 Projektowanie zespołów kół metodą obwiedni wewnętrznej

6.3.3.1 Zespoły kół o zazębieniach epicykloidalnych

Przebieg procesu projektowania przedstawiono na rysunku 6.17. Za koło podstawowe przyjęto koło o uzębieniu wewnętrznym, liczbie zębów z_2 i zarysie ukształtowanym według epicykloidy skróconej ($\lambda < 1$). Szczegółowy kształt i wymiary koła podstawowego pokazano na rysunku 6.17a, a zarys uzębienia opisano równaniami (6.9). Koło współpracujące ma uzębienie zewnętrzne i liczbę zębów $z_1 = z_2 - 1$, a jego



Rys. 6.17. Projektowanie zespołu kół epicykloidalnych metodą obwódki wewnętrznej; zarys według epicykloidy skróconej: a) zazębienie podstawowe, b) zazębienie korygowane, c) zazębienie modyfikowane

zarys będzie dopełnieniem zarysu koła podstawowego. Zarys uzębienia koła współpracującego wyznacza się podobnie jak w metodzie obwiedni zewnętrznej z tym, że układ współrzędnych X_2Y_2 jest związany z kołem ruchomym o promieniu r_{w2} , które przetacza się po nieruchomym kole o promieniu r_{w1} (rys. 6.17a). Współrzędne środka O_2 wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} a &= e \cos(\pi + \gamma) \\ b &= e \sin(\pi + \gamma) \end{aligned} \quad (6.68)$$

Po uwzględnieniu

$$\varphi = \frac{\gamma}{z_2} \quad (6.69)$$

uzyskuje się ostatecznie układ równań parametrycznych rodziny kół epicykloidalnych o postaci:

$$\begin{aligned} x_{rel} &= -\lambda \rho \cos \gamma + \rho(z_2 + 1) \cos \frac{z_2 \eta + \gamma}{z_2} - \lambda \rho \cos \frac{(z_2 + 1)z_2 \eta + \gamma}{z_2} \\ y_{rel} &= -\lambda \rho \sin \gamma + \rho(z_2 + 1) \sin \frac{z_2 \eta + \gamma}{z_2} - \lambda \rho \sin \frac{(z_2 + 1)z_2 \eta + \gamma}{z_2} \end{aligned} \quad (6.70)$$

Po uwzględnieniu modułu $m = 2\rho$ wzory te przyjmują postać:

$$\begin{aligned} x_{rel} &= \frac{m}{2} \left[-\lambda \cos \gamma + (z_2 + 1) \cos \frac{z_2 \eta + \gamma}{z_2} - \lambda \cos \frac{(z_2 + 1)z_2 \eta + \gamma}{z_2} \right] \\ y_{rel} &= \frac{m}{2} \left[-\lambda \sin \gamma + (z_2 + 1) \sin \frac{z_2 \eta + \gamma}{z_2} - \lambda \sin \frac{(z_2 + 1)z_2 \eta + \gamma}{z_2} \right] \end{aligned} \quad (6.71)$$

Z zależności (6.60) otrzymuje się związek między kątami η i γ :

$$\sin z_2 \eta - \lambda \sin \left[z_2 \eta + \frac{z_2(\eta - \gamma) + \gamma}{z_2} \right] + \sin \frac{z_2(\eta - \gamma) + \gamma}{z_2} = 0 \quad (6.72)$$

Obwiednię wewnętrzną rodziny kół epicykloidalnych, opisujących zarys koła współpracującego, określają równania (6.70) i (6.72), podobne do równań (6.59) i (6.61), które opisują obwiednię zewnętrzną. Różnice znaków w stosunku do poprzednio rozważanego układu wynikają z różnych wartości współrzędnych środka koła obtaczanego – równania (6.56) i (6.68) oraz współzależności kątów φ i γ – równania (6.57) i (6.70)

Analizując kształt koła współpracującego o uzębieniu zewnętrznym (rys. 6.17a), widać, że zęby są uformowane przez łuki obwiedni i mają nieproporcjonalne kształty

– duże łagodnie zaokrąglone głowy i małe ostro wyokrąglone stopy. Jest to kształt niekorzystny ze względów konstrukcyjnych i technologicznych. Dokonuje się zatem korekcji P-0, która polega na przesunięciu zarysów zębów obu kół o tą samą wartość g w kierunku środka zespołu (rys. 6.17b). Wartość przesunięcia g wynika z rysunku 6.7a i wzoru (6.31). W rezultacie koło podstawowe o uzębieniu wewnętrznym ma zarys utworzony poprzez ekwidystantę wewnętrzną do epicykloidy skróconej, którą wyznacza się z równania (6.25) lub (6.26). Koło współpracujące ma zarys utworzony przez ekwidystantę do obwiedni wewnętrznej. Średnice charakterystyczne koła współpracującego opisane są wzorami:

$$d_{a1} = 2(z_2\rho + \rho + \lambda\rho - g - \lambda\rho) = m(z_2 + 1 - \nu)$$

$$d_{f1} = 2(z_2\rho + \rho - \lambda\rho - g - \lambda\rho) = m(z_2 + 1 - 2\lambda - \nu)$$

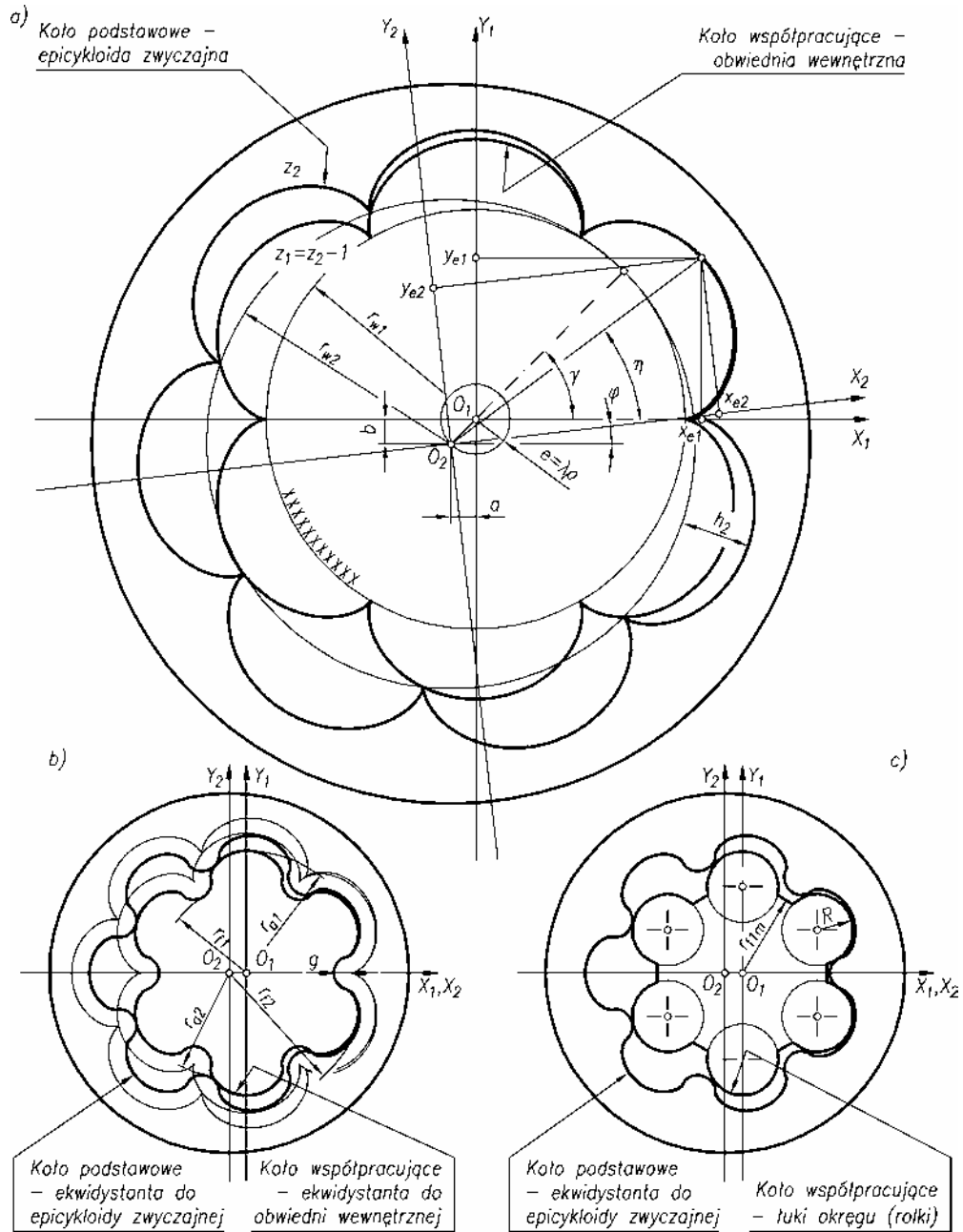
Opis matematyczny zarysu koła współpracującego jest skomplikowany, wykonanie uzębienia zaś trudne i kosztowne. Zarys tego uzębienia można uprościć poprzez dokonanie modyfikacji, której zasady przedstawiono na rysunku 6.17c. Łuki ekwidystant stanowiące głowy zębów zastępuje się łukami okręgów o promieniu R . Następnie łączy się je ze sobą wycinkami okręgu o promieniu r_{fm} , który zakreślono ze środka koła O_1 . Promień ten musi być mniejszy od promienia r_{f1} (rys. 6.17b), aby zapewnić międzyzębny luz wierzchołkowy.

Koło podstawowe o uzębieniu wewnętrznym może mieć zarys wyprofilowany według epicykloidy zwyczajnej ($\lambda = 1$).

Kształt i wymiary koła wynikają z rysunku 6.11b, a zarys uzębienia opisany jest równaniami (6.9), do których należy wprowadzić $\lambda = 1$. Jak pokazano na rysunku 6.18a, obtaczając koło toczne r_{w2} po nieruchomym kole tocznym r_{w1} , otrzymuje się rodzinę jednakowych kół w formie epicykloid zwyczajnych. Prowadząc obwiednię wewnętrzną do tej rodziny otrzymuje się zarys koła współpracującego. Zarys ten wyznacza się z równań (6.70) i (6.72), wprowadzając do nich $\lambda = 1$. Z równań tych wynika, że obwiednia wyznaczająca zarys koła współpracującego jest również epicykloidą zwyczajną.

Ze względu na podane wcześniej przyczyny konstrukcyjne i technologiczne uzębienie tego zespołu kół należy poddać korekcji P-0 (rys. 6.18b), która polega na przesunięciu o wartość g zarysów obu kół w kierunku środka zespołu.

W rezultacie uzyskuje się łuki ekwidystant wewnętrznych do epicykloid zwyczajnych opisane równaniami (6.26), do których wstawia się $\lambda = 1$. Łuki te łączy się ze sobą okręgami o promieniu $r = g$ zakreślonymi z punktów zwrotu epicykloid. Średnice charakterystyczne koła współpracującego wyrażane są wzorami, podanymi dla uzębienia ukształtowanego według epicykloidy skróconej, przy czym do wzorów należy wprowadzić $\lambda = 1$.



Rys. 6.18. Projektowanie zespołu kół epicykloidalnych metodą obwódki wewnętrznej;
zarys według epicykloidy zwyczajnej: a) zazębienie podstawowe,
b) zazębienie korygowane, c) zazębienie modyfikowane

Można dokonać modyfikacji uzębienia koła współpracującego poprzez zastąpienie łuków ekwidystant stanowiących głowy zębów ściśle stycznymi łukami okręgów o promieniach R (rys. 6.18c). Następnie łuki te łączy się ze sobą wycinkami okręgu o promieniu r_{flm} , który zakreśla się ze środka koła O_1 .

6.3.3.2. Zespoły kół o zazębieniach hipocykloidalnych

Proces projektowania przedstawiono na rysunku 6.19a. Za koło podstawowe przyjęto koło o uzębieniu wewnętrznym, liczbie zębów z_2 i zarysie ukształtowanym według hipocykloidy skróconej ($\lambda < 1$). Szczególny kształt i wymiary koła przedstawiono na rysunku 6.11c, a zarys uzębienia opisano równaniami (6.10). Korzystając z rysunku 6.19a, po uwzględnieniu związków (6.68) i (6.69), można zestawić równania zarysu uzębienia koła współpracującego:

$$\begin{aligned} x_{rh1} &= -\lambda\rho \cos \gamma + \rho(z_2 - 1) \cos \frac{z_2\eta + \gamma}{z_2} + \lambda\rho \cos \frac{(z_2 - 1)z_2\eta - \gamma}{z_2} \\ y_{rh1} &= -\lambda\rho \sin \gamma + \rho(z_2 - 1) \sin \frac{z_2\eta + \gamma}{z_2} - \lambda\rho \sin \frac{(z_2 - 1)z_2\eta - \gamma}{z_2} \end{aligned} \quad (6.73)$$

Po uwzględnieniu modułu $m = 2\rho$ wzory te przyjmują postać:

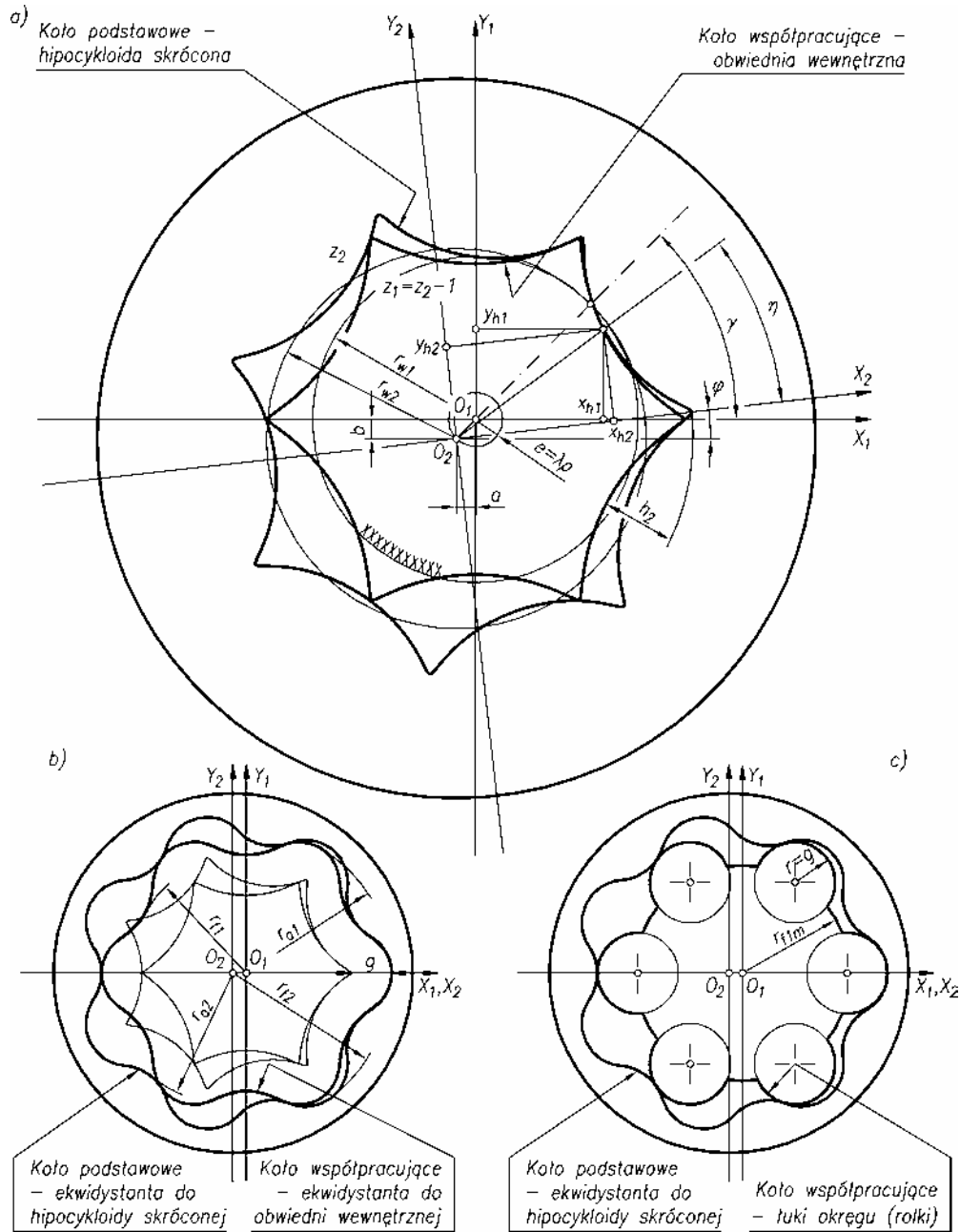
$$\begin{aligned} x_{rh1} &= \frac{m}{2} \left[-\lambda \cos \gamma + (z_2 - 1) \cos \frac{z_2\eta + \gamma}{z_2} + \lambda \cos \frac{(z_2 - 1)z_2\eta - \gamma}{z_2} \right] \\ y_{rh1} &= \frac{m}{2} \left[-\lambda \sin \gamma + (z_2 - 1) \sin \frac{z_2\eta + \gamma}{z_2} - \lambda \sin \frac{(z_2 - 1)z_2\eta - \gamma}{z_2} \right] \end{aligned} \quad (6.74)$$

Z zależności (6.60) otrzymuje się związek pomiędzy kątami η i γ :

$$\sin z_2\eta - \lambda \sin \left[z_2\eta - \frac{z_2(\eta - \gamma) + \gamma}{z_2} \right] - \sin \frac{z_2(\eta - \gamma) + \gamma}{z_2} = 0 \quad (6.75)$$

Interpretacja tych równań jest podobna do interpretacji równań (6.70) i (6.72), opisujących zespoły kół epicykloidalnych.

Korekcja P-0 otrzymanego zazębienia polega na przesunięciu zarysów obu kół o wartość g od środka zespołu (rys. 6.19b). Wartość przesunięcia g wynika z rysunku 6.7b i wzoru (6.40). W rezultacie koło o uzębieniu wewnętrznym ma zarys utworzony przez ekwidystantę zewnętrzną do hipocykloidy skróconej, jest ona opisana równaniami (6.27) lub (6.28). Odpowiednie koło współpracujące ma zarys utworzony przez ekwidystantę do obwiedni. Średnice charakterystyczne koła współpracującego opisane są wzorami:



Rys. 6.19. Projektowanie zespołu kół hipocykloidalnych metodą obwódki wewnętrznej; zarys według hipocykloidy skróconej: a) zazębienie podstawowe, b) zazębienie korygowane, c) zazębienie modyfikowane

$$d_{a1} = 2(z_2\rho - \rho + \lambda\rho + g - \lambda\rho) = m(z_2 - 1 + \nu)$$

$$d_{f1} = 2(z_2\rho - \rho - \lambda\rho + g - \lambda\rho) = m(z_2 - 1 - 2\lambda + \nu)$$

Można dokonać modyfikacji tego zazębienia, polegającej na zastąpieniu łuków ekwidystant kształtujących głowy zębów koła współpracującego łukami okręgów o promieniu $r = g$. Łuki te łączy się wycinkami okręgu o promieniu r_{f1m} , który zatacza się ze środka koła O_1 , przy czym promień ten musi być mniejszy od promienia r_{f1} (rys. 6.19c), aby zapewnić luz wierzchołkowy.

Koło podstawowe o uzębieniu wewnętrznym, liczbie zębów z_2 może mieć zarys ukształtowany zgodnie z hipocykloidą zwyczajną ($\lambda = 1$). Kształt i wymiary koła wynikają z rysunku 6.11d, a zarys uzębienia opisany jest równaniami (6.10). Jak pokazano na rysunku 6.20a, obtaczając koło toczne r_{w2} po kole tocznym r_{w1} , otrzymuje się rodzinę jednakowych kół w formie hipocykloid zwyczajnych. Prowadząc obwiednię wewnętrzną do tej rodziny otrzymuje się zarys koła współpracującego. Jest on opisany równaniami (6.74) i (6.75), do których podstawia się $\lambda = 1$. Z analizy tych równań wynika, że otrzymany zarys koła współpracującego jest również hipocykloidą zwyczajną.

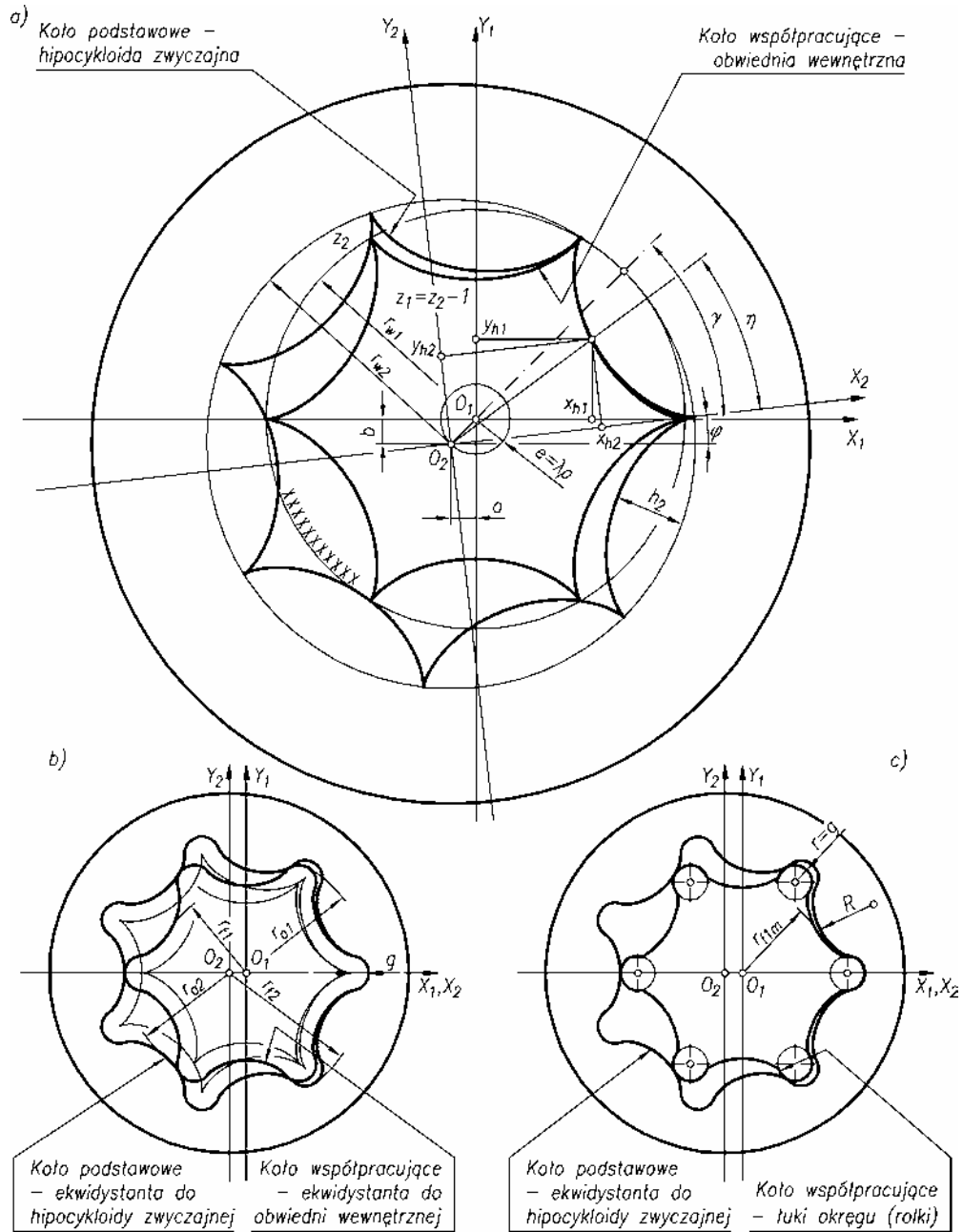
Korekcja P-0 otrzymanego zazębienia polega na przesunięciu zarysów obu kół o wartość g od środka zespołu (rys. 6.20b). Wartość przesunięcia g wynika z rysunku 6.7b i wzoru 6.40. W rezultacie dla obu kół uzyskuje się nowe zarysy w formie łuków ekwidystant zewnętrznych epicykloid zwyczajnych. Opisane są one równaniami (6.27) lub (6.28). Łuki te łączą się okręgami o promieniu $r = g$ zakreślonymi z punktów zwrotu hipocykloid.

Średnice charakterystyczne koła współpracującego (rys. 6.20b) wyrażone są wzorami podanymi dla zazębienia ukształtowanego według hipocykloidy skróconej przy założeniu $\lambda = 1$.

Można przeprowadzić modyfikację uzębienia koła współpracującego (rys. 6.20c). Polega ona na tym, że głowy zębów uformowane w kształcie okręgów o promieniu $r = g$ łączy się z łukami o promieniu R , zastępującymi ekwidystantę do obwiedni. Należy przy tym pomniejszyć promień koła stóp r_{f1m} , w stosunku do promienia r_{f1} , aby zapewnić luz wierzchołkowy.

6.4. Zasady doboru zespołu kół

W rezultacie projektowania zespołów kół cykloidalnych 3. rodzaju metodami obwiedni zewnętrznej i wewnętrznej otrzymano łącznie 24 zespoły kół, które przedstawiono na rysunkach 6.13–6.20. Wszystkie spełniają podstawowy warunek $z_2 - z_1 = 1$, wskazujący na jednoczesną współpracę wszystkich zębów obu kół. Nie wszystkie są jednak przydatne w budowie maszyn hydraulicznych. O praktycznej przydatności zespołu kół decydują następujące kryteria konstrukcyjne i technologiczne:



Rys. 6.20. Projektowanie zespołu kół hipocykloidalnych metodą obwódki wewnętrznej; zarys według hipocykloidy zwyczajnej; a) zazębienie podstawowe, b) zazębienie korygowane, c) zazębienie modyfikowane

- zarysy uzębień muszą być łatwe do opisanie równaniami matematycznymi,
- zarysy muszą być łatwe do zwymiarowania,
- uzębienia powinny mieć duże pola powierzchni wrębów międzyzębnych, co umożliwia uzyskanie dużej wydajności (chłonności) maszyny przy zwartej budowie zespołu kół,
- zęby kół powinny mieć zarysy o możliwie dużych krzywiznach, dających się zastąpić łukami kołowymi lub też rolkami umożliwiającymi polepszenie warunków współpracy międzyzębnej,
- uzębienia kół powinny dać się wykonać metodami ogólnie znanymi w budowie maszyn, umożliwiającymi sprawdzenie wymiarów i kształtu.

Analizując przedstawione na rysunkach 6.13–6.20 zespoły, zauważa się, że podane kryteria w dużej mierze spełniają zespoły kół zazębieniami epicykloidalnymi i hipocykloidalnymi poddanyymi korekcji i modyfikacji, które przedstawiono na rysunkach 6.13b i c, 6.14b i c, 6.15b i c, 6.16b i c, 6.17b i c, 6.18b i c, 6.19b i c, 6.20b i c.

Jednak najbardziej przydatne w budowie maszyn hydraulicznych są:

- zespoły kół epicykloidalnych zaprojektowane metodą obwiedni zewnętrznej z zazębieniem korygowanym i modyfikowanym (rys. 6.13c i 6.14c),
- zespoły kół hipocykloidalnych zaprojektowane metodą obwiedni wewnętrznej z zazębieniem korygowanym i modyfikowanym (rys. 6.19c i 6.20c).

Ostatnie cztery zespoły kół najlepiej spełniają podane kryteria. Zarysy uzębień są opisane stosunkowo prostymi równaniami i można je łatwo zwymiarować. Mają duże wręby międzyzębne, przez co maszyna może uzyskać dużą wydajność lub chłonność. Zęby są ukształtowane w formie łuków o stosunkowo dużych promieniach krzywizny, przez co współpraca zębów jest korzystna ze względów wytrzymałościowych. Technologia uzębienia nie jest prosta, jednak jest już dobrze opanowana i stosunkowo tania. Jednocześnie uzębienie można wykonać z bardzo dużą dokładnością kształtu i wymiarów. W związku z tym, wybrane cztery zespoły kół będą szczegółowo omówione w dalszych rozdziałach.

6.5. Współpraca kół w zespole

Koła zębate cykloidalne mogą współpracować ze sobą w ramach zespołu 3. rodzaju na dwa sposoby. Pierwszy sposób to współpraca kół przy osiach ustalonych, kiedy każde z nich obraca się wokół własnej osi. Drugi to współpraca przy osiach ruchomych, gdy jedno z kół przemieszcza się względem drugiego ruchem planetarnym, nazywanym czasami ruchem orbitalnym, obracając się jednocześnie wokół własnej osi.

6.5.1. Współpraca przy osiach ustalonych

6.5.1.1. Współpraca kół o zazębieniach epicykloidalnych

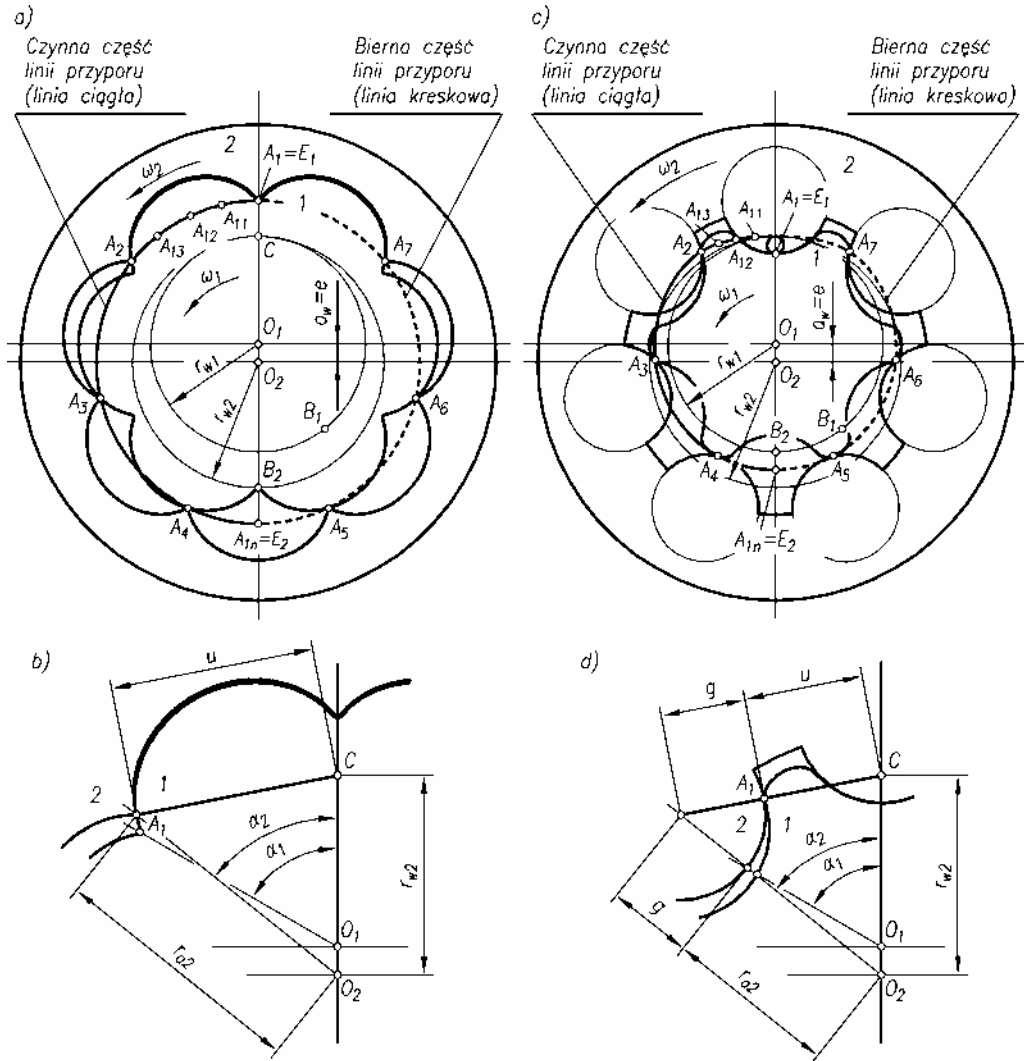
Stosując się do wniosków wynikających z rozdziału 6.4, rozważano zespoły kół epicykloidalnych zaprojektowane metodą obwiedni zewnętrznej. Założono, że koła będą współpracować przy osiach ustalonych. Odpowiednio na rysunku 6.21 przeanalizowano współpracę zespołu kół utworzonego bezpośrednio z epicykloidy skróconej (przypadek z rys. 6.13a). Koło podstawowe o uzębieniu zewnętrznym ma uzębienie utworzone przez epicykloidę skróconą, koło zaś współpracujące ma uzębienie wewnętrzne utworzone przez obwiednię. Koło podstawowe obraca się wokół ustalonej osi O_1 i napędza koło współpracujące o osi O_2 . Współpraca pojedynczej pary zębów rozpoczyna się w punkcie A_1 , gdzie wypukły ząb 1 koła podstawowego styka się u swojej podstawy z ostro zakończonym zębem 2 koła współpracującego. W punkcie A_1 następuje tzw. wżębienie. W trakcie obrotu kół punkt przyporu przemieszcza się w kolejne położenia A_{11}, A_{12}, A_{13} , a wreszcie dochodzi do punktu A_{1n} , kiedy następuje wyżębienie. Jednocześnie w trakcie obrotu punkt przyporu przemieszcza się po zarysie zęba koła podstawowego od dna wrębu do wierzchołka zęba, a w przypadku koła współpracującego pozostaje on na wierzchołku jego zęba. Przy dalszym obrocie kół punkt przyporu oddala się sukcesywnie od punktu A_{1n} i powraca do punktu wyjściowego A_1 . Zęby obu kół w dalszym ciągu stykają się ze sobą, lecz punkt przyporu znajduje się poza wierzchołkiem zęba koła czynnego i przetacza się po jego drugim boku. Po jednokrotnym obrocie koła podstawowego wszystkie punkty przyporu układają się w linię przyporu, która ma kształt pętli A_1, A_{1n}, A_1 . Patrząc na cały zespół i uwzględniając, że współpracują w nim jednocześnie wszystkie zęby obu kół zauważa się, że na linii przyporu znajduje się tyle punktów przyporu, ile jest zębów w kole współpracującym. Oznaczono je odpowiednio A_1, A_2, \dots, A_7 .

Linię przyporu w kształcie pętli A_1, A_{1n}, A_1 można podzielić osią symetrii $A_1O_1O_2A_{1n}$ na dwie części czynną i bierną. W czynnej części, oznaczonej na rysunku 6.21a linią ciągłą, zęby koła podstawowego oddziałują na zęby koła biernego, przekazując moment napędowy. W części biernej, oznaczonej linią kreskową, zęby obu kół stykają się jedynie ze sobą, nie przenosząc obciążeń. W trakcie współpracy koła toczone stykają się ze sobą w punkcie centralnym zazębienia C i przetaczają się po sobie bez poślizgu. Są one opisane wzorem (6.54). Odległość pomiędzy osiami kół $a_w = O_1O_2$ wyznacza się ze wzoru:

$$a_w = O_1O_2 = r_{w2} - r_{w1} = (z_1 + 1)\lambda\rho - z_1\lambda\rho = \lambda\rho \quad (6.76)$$

Określa się ją czasami jako mimośród $e = \lambda\rho$.

Dla dalszych rozważań konieczne jest ustalenie odległości u punktu przyporu A_1 od punktu centralnego zazębienia C . Odpowiednio korzystając z rysunku 6.21b, ustala się zależność:

Rys. 6.21. Współpraca kół o zazębieniu epicykloidalnym i osiach ustalonych:

- a), b) zazębienie niekorygowane, utworzone na bazie epicykloidy skróconej,
- c), d) zazębienie korygowane i modyfikowane

$$u^2 = r_{a2}^2 + r_{w2}^2 - 2r_{a2}r_{w2} \cos \alpha_2$$

z której po podstawieniu wzorów na r_{a2} i r_{w2} oraz $\alpha_2 = z_1\alpha_1/z_2$ otrzymuje się ostatecznie żądany wzór:

$$u = \frac{m}{2}(z_1 + 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{z_1}{z_1 + 1}\right)} \alpha_1 \quad (6.77)$$

Jak ustalono poprzednio, liczba przyporu ε jest to stosunek łuku zazębienia do podziałki na kole tocznym. Łuk zazębienia to łuk wyznaczony na kole tocznym, o który przetoczy się ono podczas współpracy jednej pary zębów począwszy od wżębienia w punkcie A_1 do wyzębienia w punkcie A_{1n} . Zgodnie z rysunkiem 6.21a liczba przyporu ε wyraża się wzorem:

$$\varepsilon = \frac{CB_1}{p_w}$$

Gdy przyjmie się na podstawie rysunku 6.21a, że

$$CB_1 = \frac{1}{2} \left(2\pi r_{w1} + \frac{2\pi r_{w1}}{z_1} \right)$$

oraz

$$p_w = \frac{2\pi r_{w1}}{z_1}$$

otrzymuje się wzór na liczbę przyporu:

$$\varepsilon = \frac{z_2}{2} \quad (6.78)$$

Ze wzoru (6.78) wynika, że wartość liczby przyporu przewyższa liczbę 1 i jest znacznie większa niż wartość liczby przyporu dla zazębień ewolwentowych. W związku z tym współpraca kół jest płynniejsza, a obciążenie zębów mniejsze.

Jak ustalono w rozdziale 6.4, techniczne znaczenie ma zespół kół epicykloidalnych z zazębieniem korygowanym i modyfikowanym (przypadek z rys. 6.13c). Współpracę kół w takim zespole przeanalizowano na rysunku 6.21c. Koło podstawowe o uzębieniu zewnętrznym ma zęby uformowane według ekwidystanty do epicykloidy skróconej, koło współpracujące natomiast ma uzębienie wewnętrzne ukształtowane w formie łuków okręgu. Podobnie jak poprzednio, koło podstawowe obraca się wokół ustalonej osi O_1 i napędza koło współpracujące, które obraca się wokół osi O_2 . Podobnie przebiega współpraca pary zębów 1, 2. Po jednokrotnym obrocie koła czynnego otrzymuje się linię przyporu A_1, A_{1n}, A_1 o kształcie zbliżonym do pętli. Dzieli się ją również na część czynną (linia ciągła) i bierną (linia kreskowa). Podane wzory na promienie kół tocznych r_{w1}, r_{w2} oraz odległość osi a_w , zachowują swą ważność. Na podstawie rysunku 6.21d ustala się zależność odległości u punktu przyporu A_1 od punktu centralnego zazębienia C :

$$(u + g)^2 = (r_{a2}^2 + g)^2 + r_{w2}^2 - 2r_{w2}(r_{a2} + g)\cos\alpha_2 \quad (6.79)$$

Po przekształceniach przyjmuje ona ostatecznie formę:

$$u = \frac{m}{2}(z_1 + 1)\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\left(\frac{z_1}{z_1 + 1}\right)\alpha_1} - g \quad (6.80)$$

Wzór (6.78) na liczbę przyporu zachowuje swą ważność.

Porównując linie przyporu dla zazębienia niekorygowanego oraz korygowanego i modyfikowanego (rys. 6.21a i c), zauważa się, że obie linie mają podobny kształt, a linia dla zazębienia korygowanego jest uformowana wewnątrz linii odnoszącej się do zazębienia niekorygowanego. Przebiega ona w stałej odległości, równej w przybliżeniu przesunięciu zarysu g , wynikającemu z korekcji zazębienia.

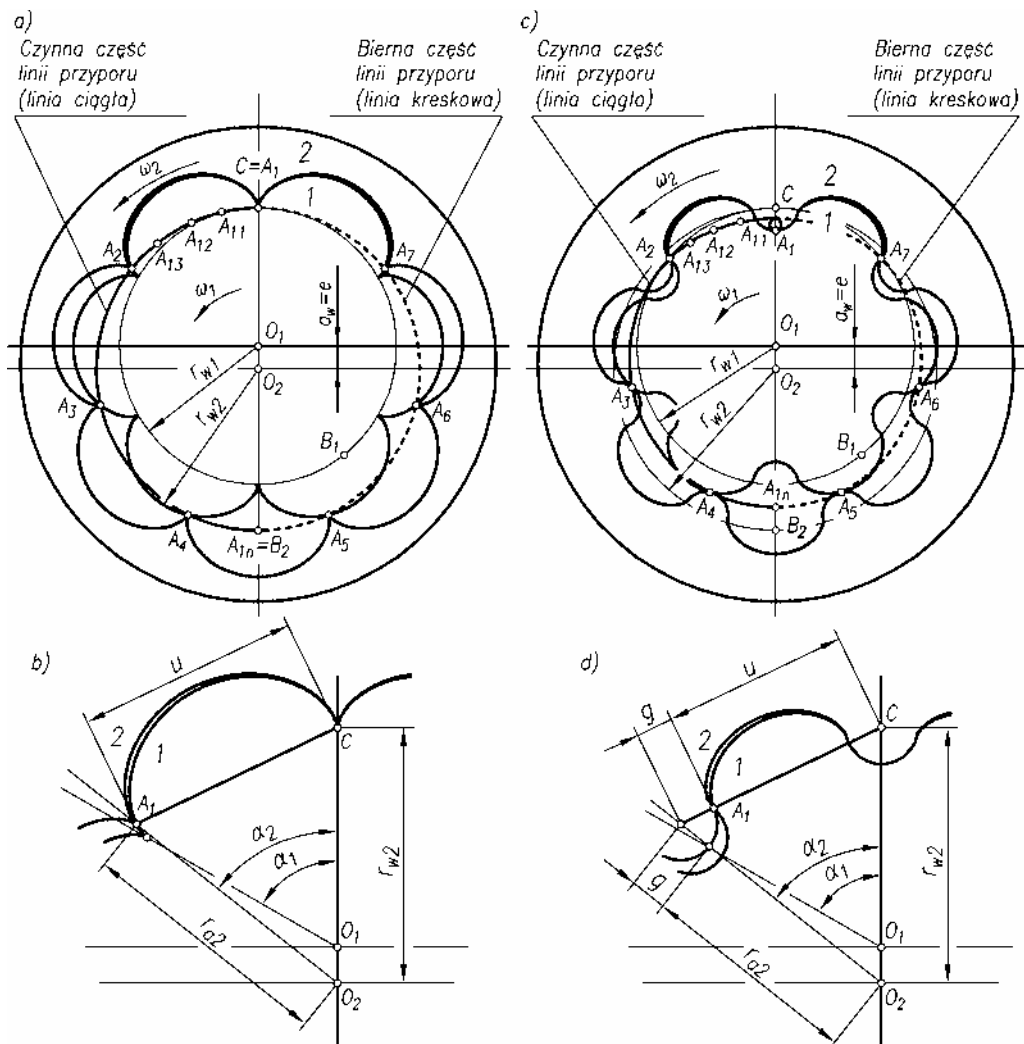
Podobnie odległość punktu przyporu u dla zazębienia korygowanego i modyfikowanego jest mniejsza o wartość g od odległości charakteryzującej zazębienie niekorygowane. Widać to z porównania rysunku 6.21b, d oraz wzorów (6.77) i (6.80).

Na rysunku 6.22a przeanalizowano współpracę szczegółowego przypadku zespołu kół epicykloidalnych utworzonego bezpośrednio z epicykloidy zwyczajnej (patrz rys. 6.14a). Dla zazębienia tego ważny jest wzór (6.77), do którego wstawia się $\lambda = 1$ oraz wzór (6.78). Z kolei na rysunku 7.22c przedstawiono współpracę zespołu kół, dla którego podstawą były również epicykloidy zwyczajne, lecz zazębienie skorygowano i zmodyfikowano (patrz rys. 6.14c). W tym przypadku ważne są wzory (6.80) i (6.78). W obu rozważanych zespołach mechanizm współpracy pozostaje taki sam jak w ogólnym przypadku zazębienia epicykloidalnych rozważanych na rysunku 6.21. Linie przyporu A_1, A_{1n}, A_1 mają kształt pętli i są również przesunięte o odległość g .

6.5.1.2 Współpraca kół o zazębieniach hipocykloidalnych

Stosownie do wniosków podanych w rozdziale 6.4, rozważano zespoły kół hipocykloidalnych zaprojektowane metodą obwiedni wewnętrznej, przy czym założono, że koła będą współpracować przy osiach ustalonych.

Na rysunku 6.23a przedstawiono współpracę zespołu kół utworzonego bezpośrednio z hipocykloidy skróconej i jej obwiedni (przypadek z rys. 6.19a). Koło podstawowe o uzębieniu wewnętrznym ma zarys utworzony przez hipocykloidę skróconą, a koło współpracujące o uzębieniu zewnętrznym ma zarys utworzony przez obwiednię. Koło o uzębieniu zewnętrznym obraca się wokół osi O_1 i napędza koło o uzębieniu wewnętrznym, które obraca się wokół ustalonej osi O_2 . Współpraca pojedynczej pary zębów 1, 2 oraz całego zazębienia obu kół odbywa się na podobnych zasadach jak w omawianym wyżej zespole kół epicykloidalnych. Wzębienie następuje w punkcie A_1 , wyzębienie w punkcie A_{1n} . Linia przyporu A_1, A_{1n}, A_1 ma kształt pętli i jest podzielona przez pionową oś $A_1O_1O_2A_{1n}$ na dwie części – czynną (linia ciągła) i bierną (linia kreskowa). Koła toczne o promieniach r_{w1}, r_{w2} stykają się ze sobą



Rys. 6.22. Współpraca kół o zazębieniu epicykloidalnym i osiach ustalonych: a), b) zazębienie niekorygowane, utworzone na bazie epicykloidy zwyczajnej, c), d) zazębienie korygowane i modyfikowane

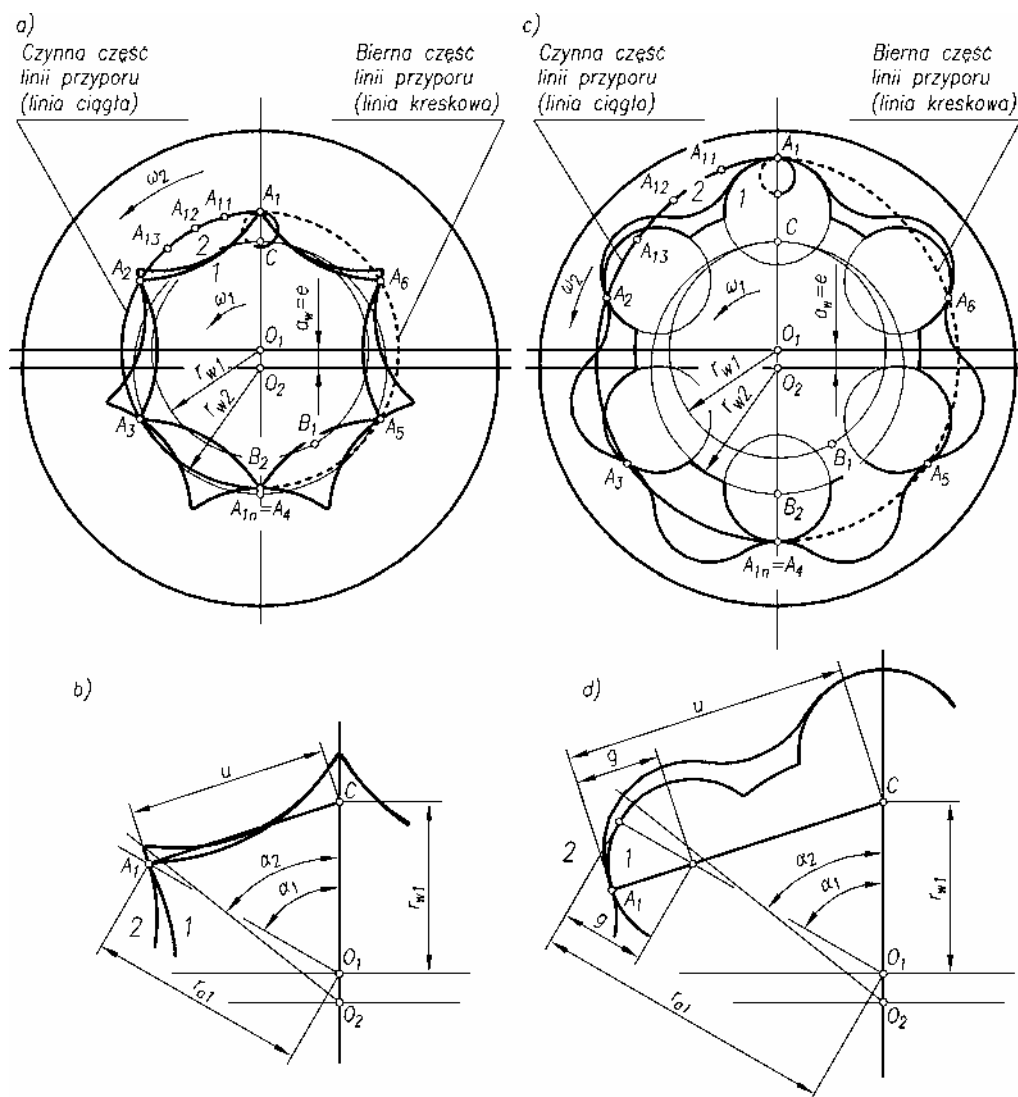
w punkcie C i toczą się po sobie bez poślizgu. Odległość osi kół wyznacza się ze wzoru (6.76).

Odległość u punktu przyporu A_1 od punktu centralnego zazębienia C wyznacza się z rysunku 6.23b. Wynika z tego związek:

$$u^2 = r_{w1}^2 + r_{a1}^2 - 2r_{w1}r_{a1} \cos \alpha_1 \quad (6.81)$$

Po podstawieniu zależności na r_{a1} i r_{w1} oraz przekształceniach otrzymuje się ostatecznie wartość

$$u = \frac{m}{2} (z_2 - 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha_1} \quad (6.82)$$



Rys. 6.23. Współpraca kół o zazębieniu hipocykloidalnym i osiach ustalonych: a), b) zazębienie niekorygowane, utworzone na bazie hipocykloidy skróconej, c), d) zazębienie korygowane i modyfikowane

Liczbę przyporu dla rozważanego zazębienia hipocykloidalnego wyznacza się ze wzoru (6.78).

Na rysunku 6.23c przedstawiono współpracę kół w zespole z zazębieniem hipocykloidalnym korygowanym i modyfikowanym (przypadek z rys. 6.19c). Koło podstawowe o uzębieniu wewnętrznym ma zęby uformowane według ekwidystanty do hipocykloidy skróconej, koło zaś współpracujące ma uzębienie zewnętrzne w formie łuków okręgu.

Oba koła mają ustalone osie obrotu O_1 i O_2 . Koło o uzębieniu zewnętrznym napędza koło o uzębieniu wewnętrznym. Współpraca pojedynczej pary zębów 1, 2 odbywa się na opisanych wcześniej zasadach. Linia przyporu ma kształt pętli i jest podobna do linii przyporu w zazębieniu niekorygowanym. Odległość osi kół wyznacza się ze wzoru (6.76). Korzystając z rysunku 6.23d ustala się zależność na odległość u punktu przyporu A_1 od punktu centralnego zazębienia C :

$$(u - g)^2 = r_{w1}^2 + (r_{a1} - g)^2 + 2r_{w1}(r_{a1} - g)\cos\alpha_1 \quad (6.83)$$

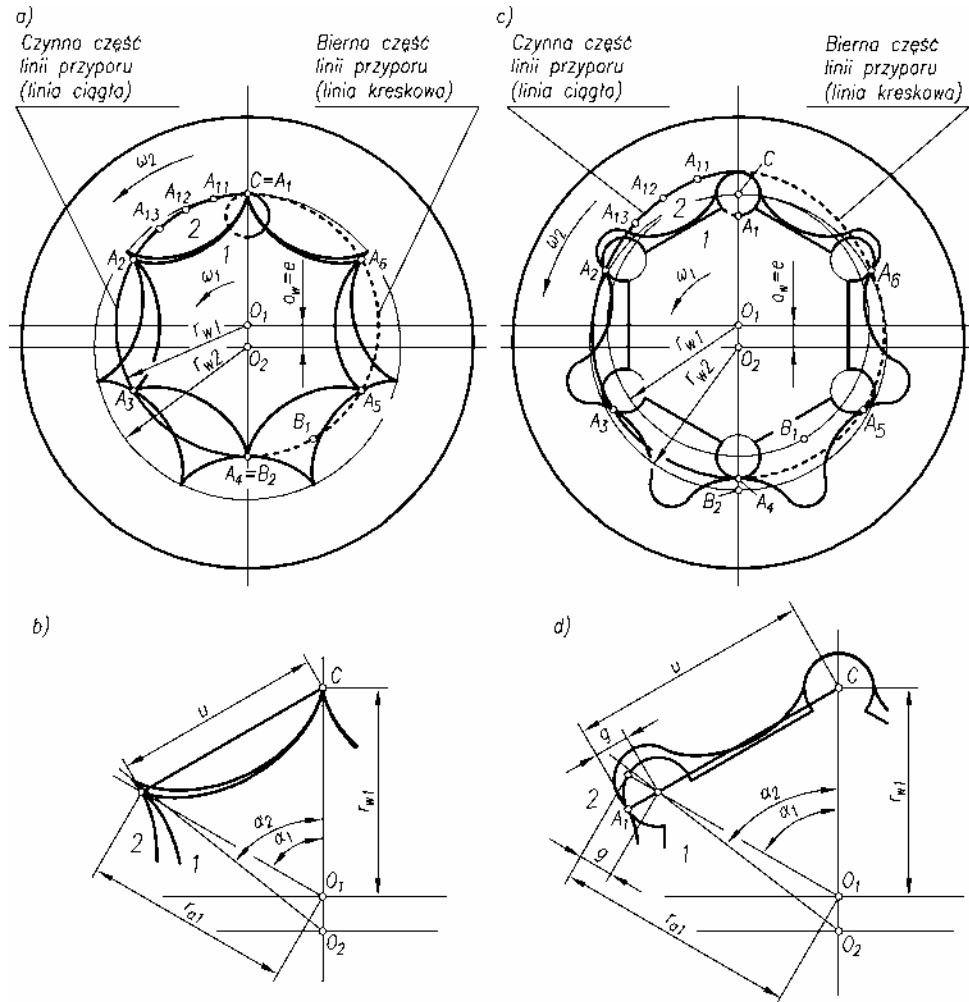
Po przekształceniach przyjmuje on formę:

$$u = \frac{m}{2}(z_2 - 1)\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha_1} + g \quad (6.84)$$

Wzór (6.78) do wyznaczania liczby przyporu pozostaje niezmienny.

Porównując linie przyporu dla zazębienia niekorygowanego (rys. 6.23a) oraz korygowanego i modyfikowanego (rys. 6.23c), zauważa się, że obie linie mają podobny kształt, przy czym linia dla zazębienia korygowanego i modyfikowanego jest uformowana na zewnątrz linii zazębienia niekorygowanego. Jest ona przesunięta o stałą odległość, równą w przybliżeniu przesunięciu zarysu g . Podobnie odległość u punktu przyporu dla zazębienia korygowanego jest większa o wartość g od odległości dla zazębienia niekorygowanego wynika z porównania rysunków 6.23b, d oraz wzorów (6.82) i (6.84).

Na rysunku 6.24a przeanalizowano współpracę szczegółowego przypadku zespołu kół hipocykloidalnych utworzonych bezpośrednio z hipocykloidy zwyczajnej (przypadek z rys. 6.20a). Z kolei na rysunku 6.24c przedstawiono współpracę zespołu kół, dla którego podstawą były również hipocykloidy zwyczajne, lecz zazębienie skorygowano i zmodyfikowano (patrz rys. 6.20c). W obu rozważanych zespołach mechanizm współpracy pozostał taki sam jak w ogólnym przypadku zazębienia hipocykloidalnych rozważanych na rysunku 6.23. Linie przyporu mają podobny kształt i są również przesunięte o odległość g . Prawdziwe pozostają wzory (6.76), (6.82) i (6.84), do których podstawia się $\lambda = 1$. Prawdziwy jest również wzór (6.78), określający liczbę przyporu.



Rys. 6.24. Współpraca kół o zazębieniu hipocykloidalnym i osiach ustalonych:
 a), b) zazębienie niekorygowane, utworzone na bazie hipocykloidy zwyczajnej,
 c), d) zazębienie korygowane i modyfikowane

6.5.2. Współpraca przy osiach ruchomych

Zgodnie ze stwierdzeniem na wstępie rozdziału, współpraca kół cykloidalnych w zespole może odbywać się także według zasady ruchu planetarnego (orbitalnego), gdy osie kół są ruchome. Jak pokazano na rysunku 6.25 istnieją dwa warianty takiej współpracy. W pierwszym z nich (rys. 6.25a) koło o uzębieniu wewnętrznym ma oś ustaloną i pozostaje nieruchome, a wewnątrz niego przemieszcza się ruchem planetarnym koło o uzębieniu zewnętrznym. W drugim wariantcie (rys. 6.25b) sytuacja jest

odwrotna, czyli koło o uzębieniu zewnętrznym ma ustaloną oś obrotu i pozostaje nieruchome, koło zaś o uzębieniu wewnętrznym przemieszcza się wokół niego ruchem planetarnym. W trakcie tej współpracy wszystkie zęby obu kół są we wzajemnym kontakcie i w tej sytuacji koło ruchome jest prowadzone przez koło stałe bez potrzeby stosowania jarzma niezbędnego w klasycznych przekładniach planetarnych. Mimo to jarzmo należy uwzględnić w analizie kinematycznej. Zaznaczono je na rysunku linią kreskową.

Prezentowana zasada planetarnego ruchu kół jest wykorzystywana w budowie wolnoobrotowych silników hydraulicznych oraz bloków sterujących. W tym przypadku dostarcza się do międzyzębnych komór wyporowych czynnik roboczy pod ciśnieniem i wywołuje obrót koła ruchomego. Strumień dopływającego czynnika oznaczono symbolicznie linią punktową. Koło ruchome wywołuje ruch obrotowy wału napędowego. W takim układzie podstawowym zadaniem jest ustalenie przełożenia, które rozumie się jako stosunek prędkości obrotowej koła ruchomego obracającego się względem osi własnej do prędkości obrotowej „jarzma”.

W przypadku zespołu przedstawionego na rysunku 6.25a, stosując metodę Willisa [35], wyznacza się zależność:

$$\frac{n_2 - n_J}{n_1 - n_J} = \frac{z_1}{z_2} \quad (6.85)$$

W zależności tej oraz następnym wykorzystano prędkości obrotowe n zamiast dotychczas stosowanej prędkości kątowej ω , ponieważ prędkość obrotowa jest charakterystycznym parametrem technicznym dla maszyn o obrotowym ruchu wału.

Ponieważ koło o uzębieniu wewnętrznym jest nieruchome ($n_2 = 0$), otrzymuje się:

$$\frac{0 - n_J}{n_1 - n_J} = \frac{z_1}{z_2}$$

i w rezultacie

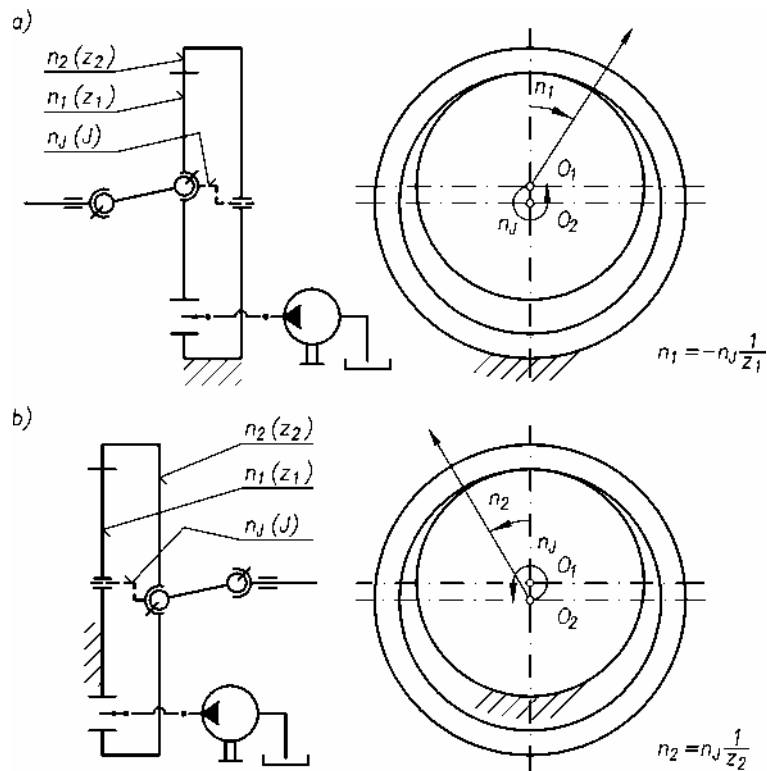
$$\frac{n_1}{n_J} = \frac{z_1 - z_2}{z_1}$$

Uwzględniając, że $z_2 = z_1 + 1$ uzyskuje się ostatecznie

$$\frac{n_1}{n_J} = -\frac{1}{z_1}$$

wynika stąd:

$$n_1 = -n_J \frac{1}{z_1} \quad (6.86)$$



Rys. 6.25. Współpraca kół o ząbieniu cykloidalnym i osiach ruchomych: a) przy ruchomej osi koła użębitego zewnątrz, b) przy ruchomej osi koła użębitego wewnątrz

Z analizy wzoru (6.86) wynika, że aby pokazany na rysunku 6.25a wał związany z kołem ruchomym (z_1) wykonał jeden obrót ($n_1 = 1$), to jarzmo powinno obrócić się z_1 razy ($n_J = z_1$). Innymi słowy koło ruchome powinno przetoczyć się po kole stałym z_1 razy. Znak minus oznacza, że jarzmo obraca się w kierunku przeciwnym do wału.

W przypadku zespołu przedstawionego na rysunku 6.25b wyznacza się zależność:

$$\frac{n_2 - n_J}{n_1 - n_J} = \frac{z_1}{z_2} \quad (6.87)$$

Jeżeli koło o użębieniu zewnętrznym jest nieruchome ($n_1 = 0$), to otrzymuje się:

$$\frac{n_2 - n_J}{0 - n_J} = \frac{z_1}{z_2}$$

a następnie

$$\frac{n_2}{n_J} = \frac{z_2 - z_1}{z_2}$$

Po uwzględnieniu, że $z_2 = z_1 + 1$ uzyskuje się ostatecznie

$$\frac{n_2}{n_J} = \frac{1}{z_2}$$

Ze wzoru tego wynika, że

$$n_2 = n_J \frac{1}{z_2} \quad (6.88)$$

Stwierdza się zatem, że aby wał związany z kołem ruchomym (z_2) wykonał jeden obrót ($n_2 = 0$), to jarzmo powinno obrócić się z_2 razy ($n_J = z_2$). Znak plus przy obrotach jarzma oznacza, że obraca się ono w kierunku zgodnym z wałem.

Przedstawione układy kół cykloidalnych współpracujące według zasad ruchu planetarnego są prostymi przekładniami, w których ruch kół zostaje wymuszony na drodze hydraulicznej poprzez wtłaczanie oleju pod ciśnieniem do międzyzębnych komór wyporowych.

6.6. Zespoły wielokołowe

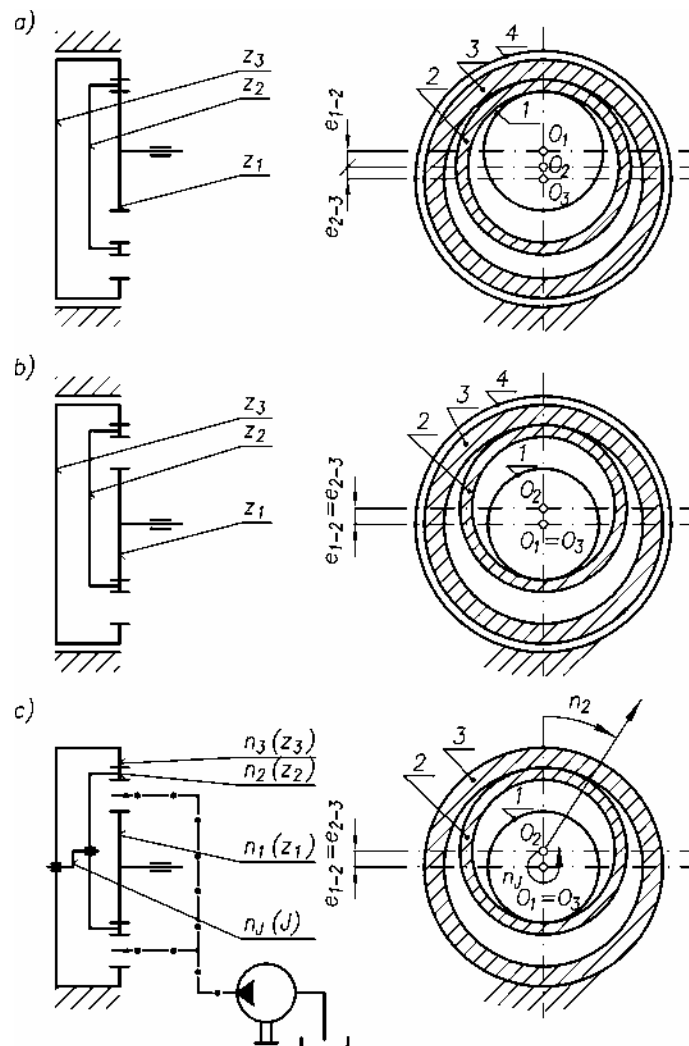
Koła zębate cykloidalne 3. rodzaju można zestawiać w zespoły wielokołowe o zazębieniu wewnętrznym. Zagadnienie to przeanalizowano korzystając z rysunku 6.26, na którym przedstawiono zespół zbudowany z trzech kół cykloidalnych. Oryginalnym elementem tego zespołu jest koło (2) ukształtowane w formie pierścienia, który na zewnętrznej i wewnętrznej stronie ma nacięte specjalne uzębienie cykloidalne. Uzębienie wewnętrzne koła (2) współpracuje z uzębieniem zewnętrznym koła (1), natomiast uzębienie zewnętrzne koła (2) współdziała z uzębieniem wewnętrznym koła (3). Wszystkie zęby w obu zazębeniach są ze sobą w kontakcie, tak że koło (2) jest prowadzone jednocześnie przez koła (1) i (3). Koła (1), (2), (3) mogą współpracować ze sobą zarówno przy osiach ustalonych, jak i ruchomych.

W przypadku współpracy przy osiach ustalonych można wyróżnić dwa warianty współpracy, tzn. współpracę kół z podwójnym mimośrodem (rys. 6.26a) oraz pojedynczym mimośrodem (rys. 6.26b). W obu przypadkach pomiędzy kołami (1) i (2) oraz (2) i (3) utworzone są dwa zazębienia. Napędzając koło (1) wprawia się w ruch obrotowy koło (2), a za jego pośrednictwem koło (3), które z kolei obraca się w łożysku korpusu (4) (patrz rozdz. 6.5.1).

Współpracę kół przy osiach ruchomych przedstawiono na rysunku 6.26c. Podobnie jak w przypadku zespołu pokazanego na rysunku 6.25a przyjmuje się, że elementem napędowym w układzie będzie koło (2), które przetacza się ruchem planetarnym po nieruchomym kole (3), a jednocześnie obtacza się po kole (1), które ma ustaloną oś obrotu i napędza wał wyjściowy zespołu. Ruch planetarny koła (2) wywołuje się przez

doprowadzenie czynnika roboczego do międzyzębnych komór wyporowych, utworzonych pomiędzy kołami (1), (2), (3). Korzystając z rysunku 6.26c, wyznacza się zależność:

$$\frac{n_1 - n_J}{n_3 - n_J} = \frac{z_3}{z_1} \quad (6.89)$$



Rys. 6.26. Współpraca kół o zazębieniu cykloidalnym w zespole wielokółowym: a), b) współpraca przy osiach ustalonych, c) współpraca przy osiach ruchomych

Koło (3) o uzębieniu wewnętrznym jest nieruchome ($n_3 = 0$), dlatego otrzymuje się:

$$\frac{n_1 - n_J}{0 - n_J} = \frac{z_3}{z_1}$$

a następnie

$$\frac{n_1}{n_J} = \frac{z_1 - z_3}{z_1}$$

i po uwzględnieniu $z_3 = z_1 + 2$ otrzymuje się wzór na przełożenie kinematyczne w układzie współrzędnych kół:

$$\frac{n_1}{n_J} = -\frac{2}{z_3} \quad (6.90)$$

Z analizy wzoru (6.90) wynika, że koło (1) i związany z nim wał wyjściowy obraca się $2/z_3$ razy wolniej od jarzma, które napędza koło czynne (2). Znak minus oznacza, że jarzmo obraca się w kierunku przeciwnym do wału.

7. Siły międzyzębne

Podczas przenoszenia momentu obrotowego z jednego koła zębatego na drugie pojawiają się w zazębieniu siły działające w punkcie przyporu, który przemieszcza się po linii przyporu. Działanie sił w dowolnym punkcie przyporu można sprowadzić do działania sił w biegunie zazębienia. Znajomość sił jest potrzebna w obliczeniach wytrzymałościowych kół zębatych, wałów, łożysk i korpusów maszyny hydraulicznej.

7.1. Siły w zazębieniu ewolwentowym

Działanie zespołu kół o zazębieniu zewnętrznym ewolwentowym i zębach prostych można sprowadzić do współpracy dwóch zębów w centralnym punkcie zazębienia C (rys. 7.1a). Ząb związany z kołem czynnym oddziałuje z siłą międzyzębną P na ząb związany z kołem biernym. Oba koła obracają się wokół ustalonych osi obrotu O_1 i O_2 . Siła działa wzdłuż linii przyporu, która jest nachylona do osi poziomej pod kątem przyporu α_w . Siłę międzyzębną P można rozłożyć na składowe: obwodową P_o i promieniową P_r . Wymienione siły wyznacza się ze wzorów:

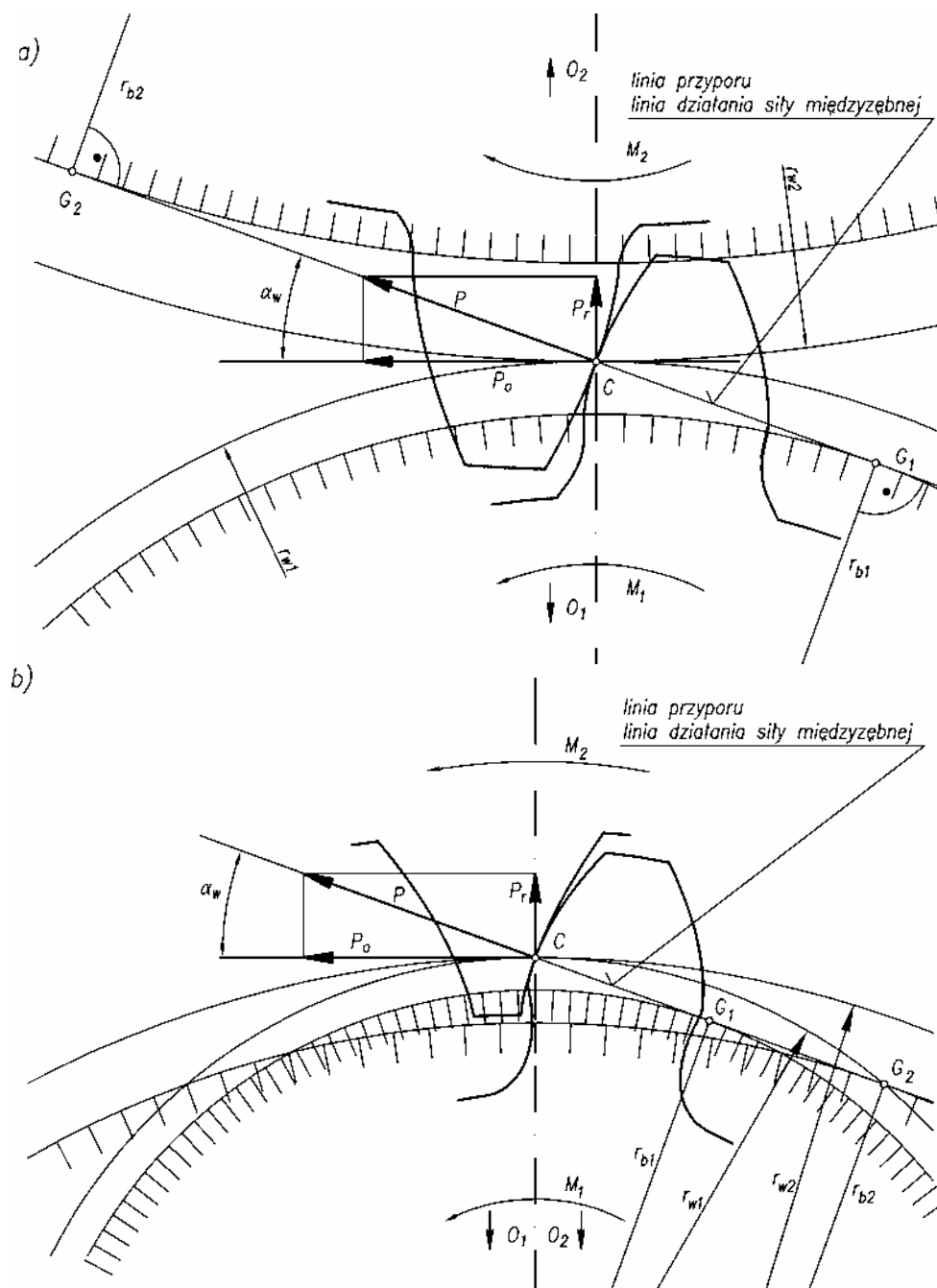
$$P = \frac{P_o}{\cos \alpha_w} \quad (7.1)$$

$$P_o = \frac{M_1}{r_{w1}} \quad (7.2)$$

$$P_r = P_o \operatorname{tg} \alpha_w \quad (7.3)$$

Według podobnych zasad wyznacza się układ sił w zazębieniu wewnętrznym ewolwentowym i zębach prostych, co przedstawiono na rysunku 7.1b. Siły międzyzębne w zazębieniu wewnętrznym wyznacza się również ze wzorów (7.1)–(7.3).

Ogólnie stwierdza się, że rozkład sił w zazębieniu ewolwentowym jest korzystny, gdyż wypadkowa siła międzyzębna P ma stałą wartość, kierunek i zwrot. Wynika to z działania siły wzdłuż linii przyporu, która jest linią prostą, nachyloną do osi poziomej pod stałym kątem α_w . Siła promieniowa P_r , obciążająca łożyska i wały w maszynie hydraulicznej, ma stałą wartość, co zapewnia stabilną pracę maszyny.



Rys. 7.1. Układ sił w zazębieniu ewolwentowym o zębach prostych:
 a) siły w zazębieniu zewnętrznym, b) siły w zazębieniu wewnętrznym

7.2. Siły w zazębieniu cykloidalnym 1. rodzaju

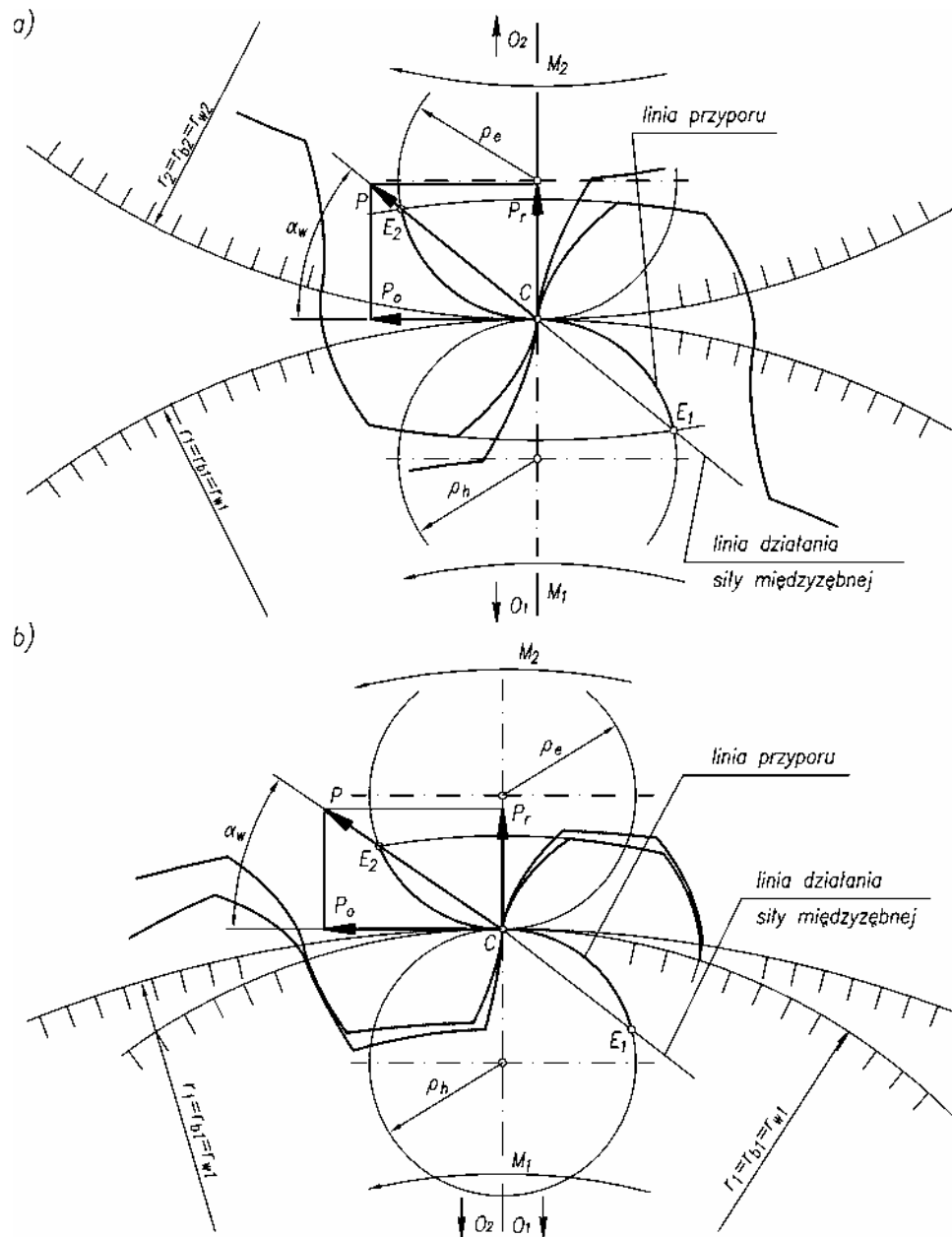
Współpracę kół w zespole o zazębieniu zewnętrznym cykloidalnym 1. rodzaju można również sprowadzić do współpracy dwóch zębów (rys. 7.2a). Ząb koła czynnego oddziałuje siłą międzyzębną P na ząb koła biernego. Linia przyporu jest linią wężykową (patrz rozdz. 4.3). Składa się ona z dwóch łuków okręgów o promieniu ρ_h i ρ_e , które w biegunie zazębienia C przechodzą jeden w drugi. W związku z tym siła międzyzębna P działająca stycznie do linii przyporu zmienia swój kierunek działania w zależności od tego, w którym miejscu na linii przyporu znajduje się punkt przyporu. Odpowiednio do miejsca położenia punktu przyporu zmienia się także kąt przyporu α_w . Obciążenie zębów, kół zębatych, wałów oraz łożysk maszyny jest zmienne, ponieważ kierunek działania siły międzyzębnej jest zmienny. Może to spowodować drgania układu i niestabilną pracę.

Szczegółowa analiza sił w zazębieniu cykloidalnym 1. rodzaju nie jest przedmiotem tej pracy, jednak w trakcie projektowania maszyn hydraulicznych z takim zazębieniem jest potrzebna znajomość przybliżonych wartości tych sił. Aby je zatem wyznaczyć rozważa się współpracę zębów w centralnym punkcie zazębienia C . Przyjmuje się, że siła międzyzębna P działa wzdłuż linii prostej łączącej punkt wżębienia E_1 , punkt centralny C oraz punkt wyżębienia E_2 . Linia ta jest nachylona do osi poziomej pod kątem α_w . Jest to tzw. linia działania siły międzyzębnej, zastępująca w tym przypadku wężykowy odcinek przyporu. Siłę międzyzębną P rozkłada się na składową promieniową P_r i obwodową P_o . Do wyznaczenia wartości sił P , P_r i P_o wykorzystuje się wzory (7.1), (7.2) i (7.3). Postępując według podobnych zasad wyznacza się układ sił w zazębieniu wewnętrznym cykloidalnym 1. rodzaju.

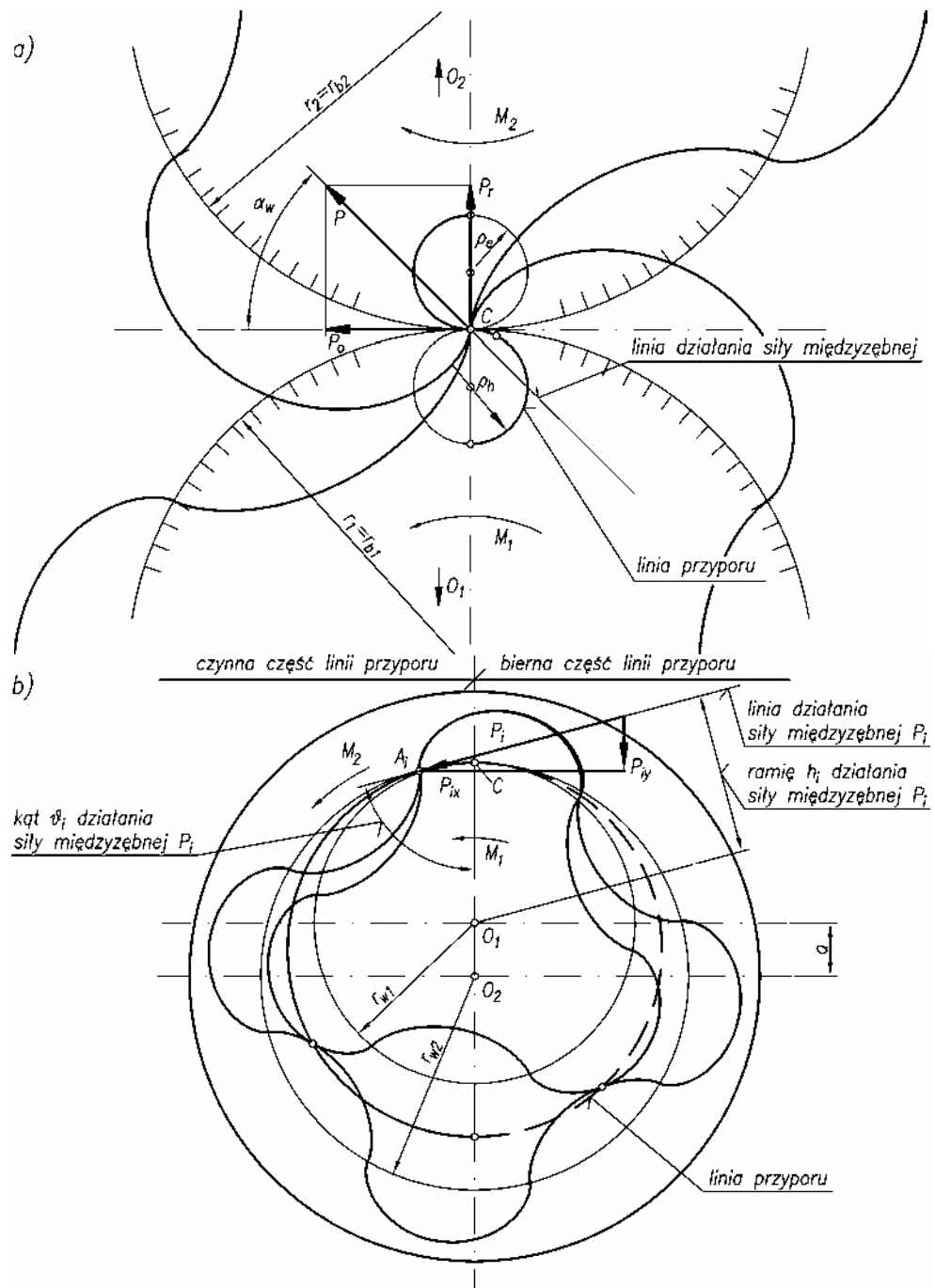
7.3 Siły w zazębieniu cykloidalnym 2. rodzaju

Zespół kół o zazębieniu zewnętrznym cykloidalnym 2. rodzaju działa według zasad podobnych jak zespół kół o zazębieniu 1. rodzaju (rys. 7.3a). Ząb koła czynnego oddziałuje z siłą międzyzębną P na ząb koła biernego. Linia przyporu jest podobnie jak w zazębieniu 1. rodzaju linią wężykową. Siła międzyzębna P jest styczna do linii przyporu i zmienia swój kierunek działania. W rezultacie obciążenie zębów, kół zębatych, wałów i łożysk jest również zmienne i może być przyczyną niestabilnej pracy urządzenia.

Również w przypadku zazębienia cykloidalnego 2. rodzaju nie podejmuje się głębszej analizy tego problemu. Do celów projektowych przyjmuje się obliczenia uproszczone. Zakłada się, że siła międzyzębna P działa wzdłuż linii prostej przechodzącej przez centralny punkt zazębienia C i nachylonej do osi poziomej pod kątem α_w . Jest to linia działania siły międzyzębnej zastępująca wężykową linię przyporu. Siły międzyzębne P rozkłada się na składową promieniową P_r i obwodową P_o , które oblicza się ze wzorów (7.1), (7.2) i (7.3).



Rys. 7.2. Układ sił w ząbieniu cykloidalnym I. rodzaju:
 a) siły w ząbieniu zewnętrznym, b) siły w ząbieniu wewnętrznym



Rys. 7.3. Układ sił w ząbieniu cykloidalnym 2. rodzaju:
 a) siły w ząbieniu zewnętrznym, b) siły w ząbieniu wewnętrznym

Inaczej wyznacza się siły w zazębieniu wewnętrznym 2. rodzaju (rys. 7.3b). W zazębieniu tym wszystkie zęby koła czynnego o uzębieniu zewnętrznym współpracują jednocześnie z zębami koła biernego o uzębieniu wewnętrznym. Pojedynczy ząb koła czynnego oddziałuje na ząb koła biernego z siłą P_i , wzdłuż linii działania siły, na ramieniu h_i względem środka obrotu O_1 i pod kątem działania \mathcal{Q}_i . Oddziaływanie z siłą P_i odbywa się w zakresie czynnej linii przyporu. Siły cząstkowe P_i wszystkich par zębów pozostających w zakresie czynnej linii przyporu można zsumować do wypadkowej siły międzyzębnej. Szczegółowe rozważania dotyczące takiego przypadku przeprowadza się podobnie jak w zazębieniu cykloidalnym 3. rodzaju (rozd. 7.4).

7.4. Siły w zazębieniu cykloidalnym 3. rodzaju

7.4.1. Siły w zazębieniu epicykloidalnym

Na rysunku 7.4a przedstawiono zespół kół o zazębieniu epicykloidalnym korygowanym i modyfikowanym (patrz rys. 6.13c). Jak wynika z rozdz. 6.4 jest to ogólny przypadek zazębienia epicykloidalnego, mający jednocześnie największe znaczenie techniczne. Przekazywanie momentu w zazębieniu odbywa się następująco: koło o uzębieniu zewnętrznym jest kołem czynnym i obraca się wokół ustalonej osi O_1 , koło zaś o uzębieniu wewnętrznym jest kołem biernym i obraca się wokół ustalonej osi O_2 . Obrót obu kół jest wywołany momentem obrotowym M , przyłożonym do koła czynnego. Wszystkie pary zębów są w trakcie pracy zespołu kół w ciągłym zazębieniu. Przyjęto dwa założenia.

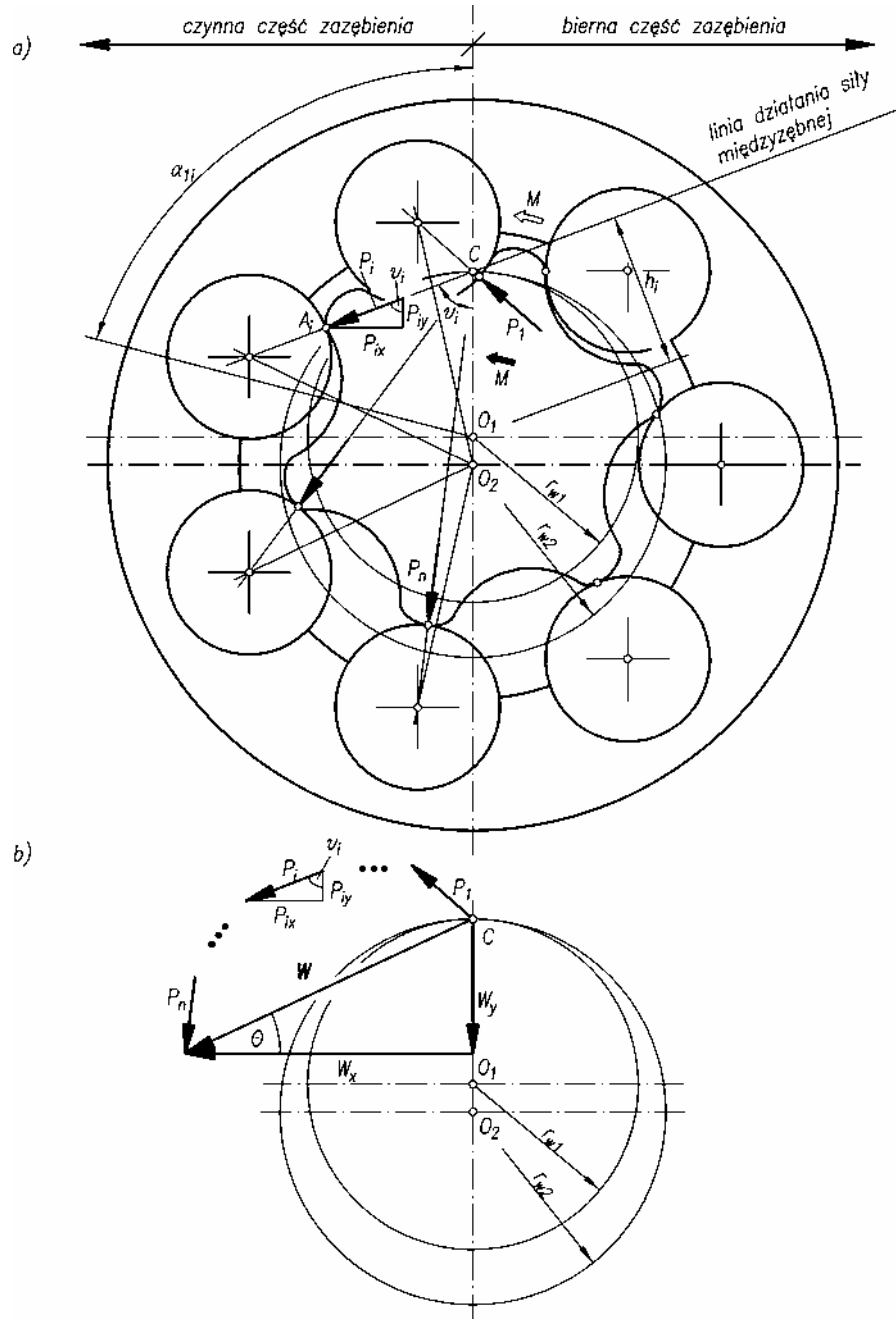
1. Zgodnie z rozdziałem 6.5.1 przyjmuje się, że podczas współpracy zazębienia epicykloidalnego można wyróżnić stronę czynną przenoszącą moment obrotowy i bierną nieprzenoszącą tego momentu. Podział ten występuje wzdłuż osi symetrii CO_1O_2 (rys. 7.4a).
2. Siły międzyzębne dla danego kąta obrotu kół α_i , we wszystkich współpracujących parach zębów po stronie czynnej, są sobie równe.

Zgodnie z założeniem 1 moment obrotowy M , przenoszony przez czynną część zazębienia, rozkłada się na momenty cząstkowe $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$, wywołane przez współdziałanie poszczególnych par zębów $1, 2, \dots, i, \dots, n$, pozostających w czynnej części zazębienia, stąd:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (7.4)$$

Moment cząstkowy M_i jest równy iloczynowi siły międzyzębnej P_i oraz jej ramienia działania h_i :

$$M_i = P_i h_i \quad (7.5)$$



Rys. 7.4. Układ sił w ząbieniu epicykloidalnym: a) siły międzyzębne P_i ,
b) wypadkowa siła międzyzębna W

Zgodnie z założeniem 2 można przyjąć, że dla danego kąta obrotu kół α_i występuje zależność $P_i = P$.

Jak pokazano na rysunku 7.4a siła międzyzębna P_i działa wzdłuż linii zazębienia wyznaczonej przez punkt przyporu A_i danej pary zębów oraz biegun zazębienia C . Linia ta jest nachylona do osi symetrii O_1O_2 pod kątem \mathcal{G}_i , nazywanym kątem działania siły międzyzębnej. Gdy znany jest ten kąt, wówczas można wyznaczyć ramię działania h_i siły międzyzębnej jako:

$$h_i = r_{w1} \sin \mathcal{G}_i \quad (7.6)$$

Po podstawieniu zależności (7.5) i (7.6) do związku (7.4) otrzymuje się:

$$M = \sum_{i=1}^n P_i r_{w1} \sin \mathcal{G}_i \quad (7.7)$$

Po przekształceniach otrzymuje się wzór do wyznaczania siły międzyzębnej P_i w zazębieniu epicykloidalnym:

$$P_i = P = \frac{M}{r_{w1} \sum_{i=1}^n \sin \mathcal{G}_i} \quad (7.8)$$

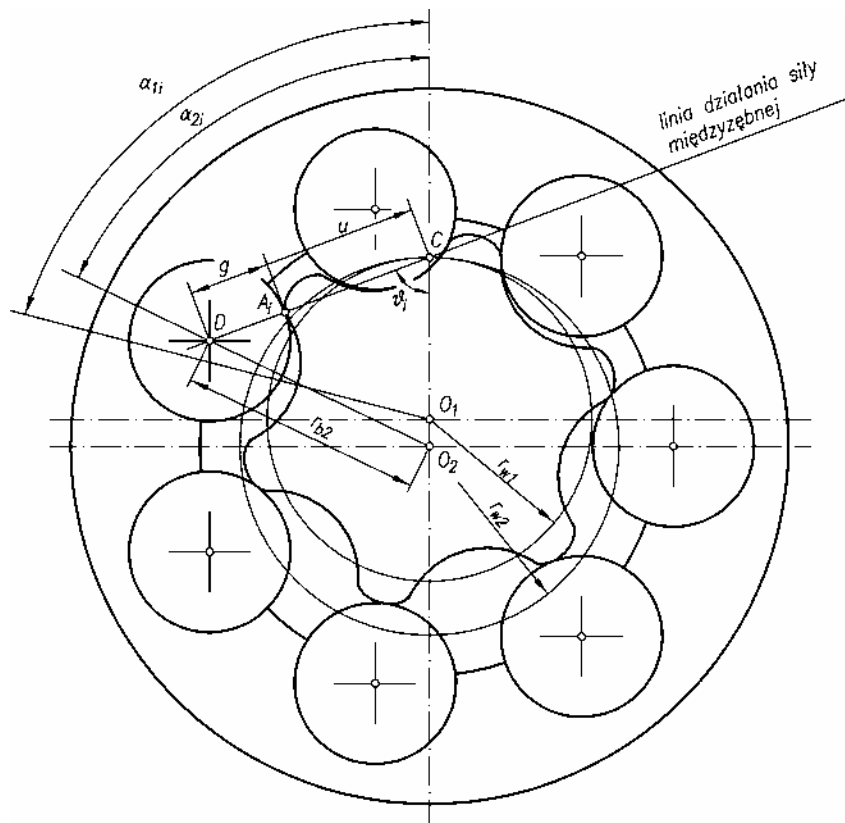
Uwzględnivszy zależność $r_{w1} = \frac{1}{2} z_1 \lambda m$, wzór (7.8) można zapisać jako:

$$P_i = P = \frac{2M}{z_1 \lambda m \sum_{i=1}^n \sin \mathcal{G}_i} \quad (7.9)$$

gdzie M – moment obrotowy, obciążający zespół kół, z_1 – liczba zębów koła czynnego, λ – współczynnik wysokości zęba, m – moduł, \mathcal{G}_i – kąt działania siły międzyzębnej w rozpatrywanej parze współpracujących zębów.

Parametry z , m , λ przyjmują stałą wartość w przypadku wybranego zespołu kół i typu zazębienia. Podobnie zakłada się, że moment M , obciążający zespół kół ma stałą wartość. Kąt działania \mathcal{G}_i siły międzyzębnej P_i zmienia się jednak w zależności od kąta obrotu koła czynnego α_{1i} . Należy zatem ustalić zależność $\mathcal{G}_i = f(\alpha_{1i})$ (rys. 7.5). Rozpatrując i -tą parę zębów współpracujących w punkcie przyporu A_i zauważa się, że obrót koła czynnego 1 względem ustalonej osi obrotu O_1 o kąt α_{1i} powoduje obrót koła biernego 2 względem ustalonej osi obrotu O_2 o kąt α_{2i} . Rozpatrzono zatem zależności geometryczne w trójkącie CDO_2 związane z kołem biernym. Na podstawie twierdzenia sinusów otrzymano:

$$\frac{g + u}{\sin \alpha_{2i}} = \frac{r_{b2}}{\sin \mathcal{G}_i}, \quad (7.10)$$



Rys. 7.5. Związek pomiędzy kątem działania ν_i siły międzyzębnej P_i oraz kątem obrotu α_i koła czynnego w zazębieniu epicykloidalnym

i po przekształceniach:

$$\mathcal{G}_i = \arcsin \frac{r_{b2} \sin \alpha_{2i}}{g + u} \quad (7.11)$$

Do wzoru (6.11) należy podstawić wyprowadzone uprzednio zależności (6.3) i (6.77). Ostatecznie otrzymuje się wzór do wyznaczania kąta działania \mathcal{G}_i siły międzyzębnej P_i

$$\mathcal{G}_i = \arcsin \frac{\sin \left(\frac{z_1}{z_1 + 1} \alpha_{1i} \right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \left(\frac{z_1}{z_1 + 1} \alpha_{1i} \right)}} \quad (7.12)$$

gdzie α_{1i} – kąt obrotu koła czynnego.

Siłę międzyzębną P_i można rozłożyć na składowe poziomą P_{ix} i pionową P_{iy} , które wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} P_{ix} &= P_i \sin \mathcal{G}_i \\ P_{iy} &= P_i \cos \mathcal{G}_i \end{aligned} \quad (7.13)$$

Po zsumowaniu wszystkich składowych poziomych P_{ix} sił międzyzębnych, pozostających w obszarze czynnej części zazębienia (rys. 7.4b), otrzymuje się składową poziomą W_x wypadkowej siły międzyzębnej równą

$$W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = \sum_{i=1}^n P_i \sin \mathcal{G}_i \quad (7.14)$$

Z zależności $P_i = P$ oraz wzoru (7.9) otrzymuje się:

$$W_x = \frac{2M}{z_1 \lambda m \sum_{i=1}^n \sin \mathcal{G}_i} \sum_{i=1}^n \sin \mathcal{G}_i = \frac{2M}{z_1 \lambda m} \quad (7.15)$$

Odpowiednio, po zsumowaniu składowych pionowych P_{iy} otrzymuje się składową pionową W_y wypadkowej siły międzyzębnej równą:

$$W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = \sum_{i=1}^n P_i \cos \mathcal{G}_i \quad (7.16)$$

Po uwzględnieniu zależności (7.9) otrzymuje się

$$W_y = \frac{2M}{z_1 \lambda m} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \cos \mathcal{G}_i}{\sum_{i=1}^n \sin \mathcal{G}_i} \quad (7.17)$$

Ze składowej poziomej W_x i pionowej W_y wyznacza się wypadkową siłę międzyzębną W jako

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \frac{2M}{z_1 \lambda m} \sqrt{1 + \left(\frac{\sum_{i=1}^n \cos \mathcal{G}_i}{\sum_{i=1}^n \sin \mathcal{G}_i} \right)^2} \quad (7.18)$$

Odpowiednio kąt działania wypadkowej siły międzyzębnej wyznacza się jako:

$$\Theta = \arcsin \left(\frac{W_y}{W} \right) \quad (7.19)$$

7.4.2. Siły w zazębieniu hipocykloidalnym

Na rysunku 7.6a przedstawiono zespół kół o zazębieniu hipocykloidalnym korygowanym i modyfikowanym (patrz rys. 6.19c). Jak wynika z rozdziału 6.4 jest to ogólny przypadek zazębienia hipocykloidalnego, mający jednocześnie największe znaczenie techniczne. Koło o uzębieniu zewnętrznym jest kołem czynnym i obraca się wokół ustalonej osi O_1 , koło zaś o uzębieniu wewnętrznym jest kołem biernym i obraca się wokół ustalonej osi O_2 . Zasady współpracy kół i założenia są podobne jak dla zespołu kół epicykloidalnych. Po dokonaniu wyprowadzeń, podobnych jak w zazębieniu epicykloidalnym, otrzymuje się wzór na siłę międzyzębną P w zazębieniu hipocykloidalnym korygowanym

$$P_i = P = \frac{M}{(z_2 - 1)\lambda m \sum_{i=1}^n \sin \mathcal{G}_i} \quad (7.20)$$

gdzie M – moment obrotowy, obciążający zespół kół, z_2 – liczba zębów koła biernego, λ – współczynnik wysokości zęba, m – moduł, \mathcal{G}_i – kąt działania siły międzyzębnej w rozpatrywanej parze współpracujących zębów.

Po rozpatrzeniu na rysunku 7.7 i -tej pary zębów współpracujących w punkcie przyporu A_i zauważa się, że obrót koła czynnego 1 względem ustalonej osi obrotu O_1 o kąt α_{1i} powoduje obrót koła biernego 2 względem ustalonej osi obrotu O_2 o kąt α_{2i} . Z zależności geometrycznych w trójkącie CDO_1 , związanych z kołem czynnym, i zastosowaniu twierdzenia sinusów otrzymano

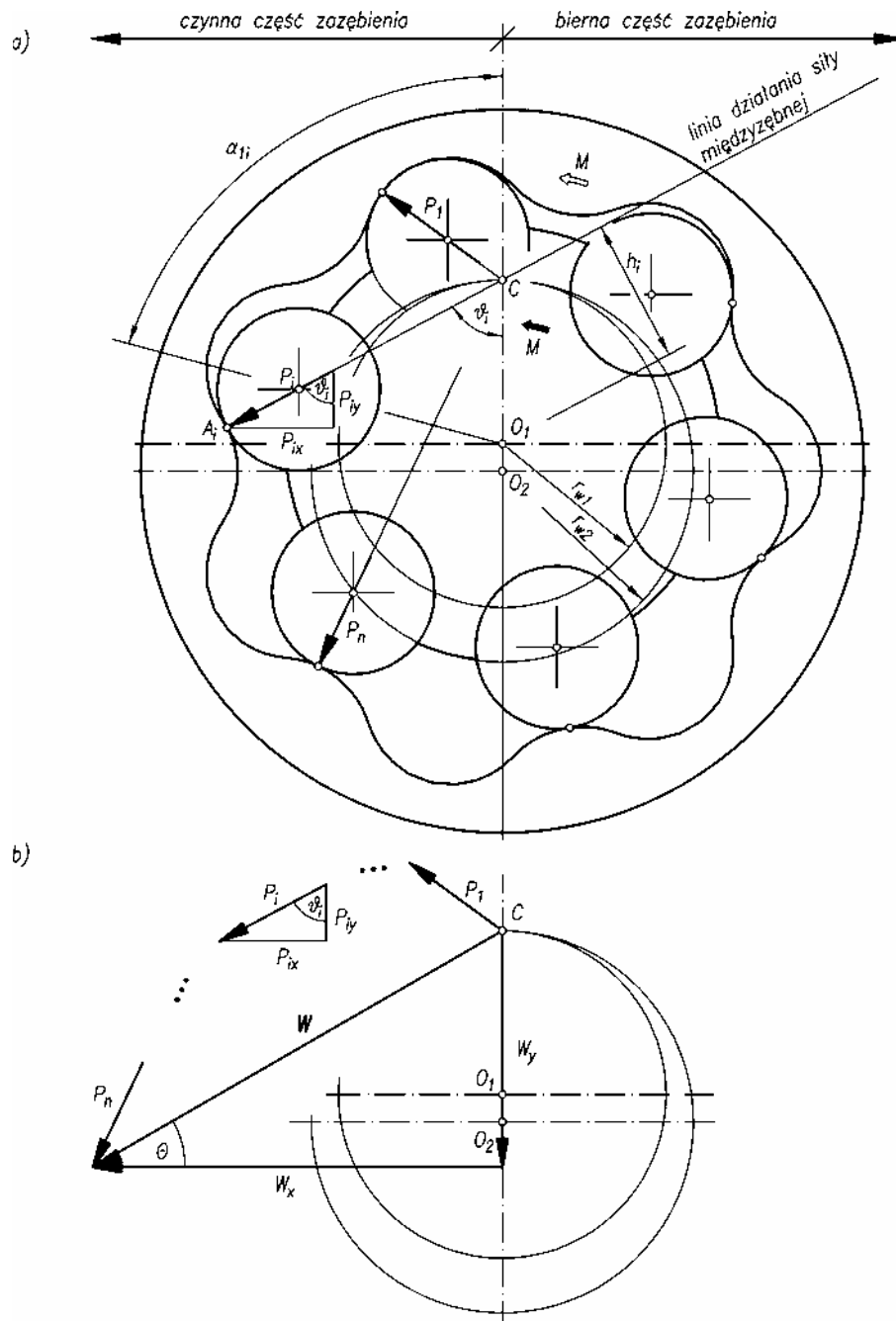
$$\frac{u - g}{\sin \alpha_{1i}} = \frac{r_{a1} - g}{\sin \mathcal{G}_i} \quad (7.21)$$

Po przekształceniach otrzymuje się wzór do wyznaczania kąta działania \mathcal{G}_i siły międzyzębnej P_i

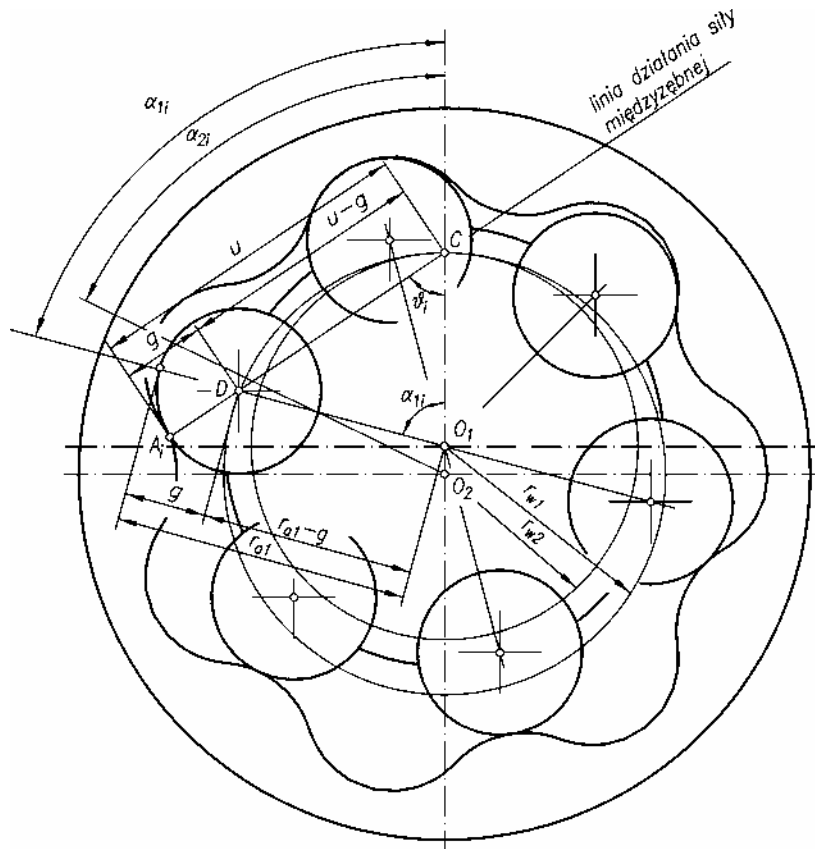
$$\mathcal{G}_i = \arcsin \frac{\sin \alpha_{1i}}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha_{1i}}} \quad (7.22)$$

Również w przypadku zazębienia hipocykloidalnego można siłę międzyzębną P_i rozłożyć na składową poziomą P_{ix} i pionową P_{iy} . Po zsumowaniu składowych P_{ix} otrzymuje się składową poziomą wypadkowej siły międzyzębnej

$$W_x = \frac{2M}{(z_2 - 1)\lambda m} \quad (7.23)$$



Rys. 7.6. Układ sił w ząbieniu hipocykloidalnym: a) siły międzyzębne P_i ,
b) wypadkowa siła międzyzębna W



Rys. 7.7. Związek pomiędzy kątem działania ν_i siły międzyzębnej P_i oraz kątem obrotu α_i koła czynnego w ząbieniu hipocykloidalnym

Następnie, po zsumowaniu składowych pionowych P_{iy} otrzymuje się składową pionową W_y wypadkowej siły międzyzębnej równą:

$$W_y = \frac{2M}{(z_2 - 1)\lambda m} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \cos \vartheta_i}{\sum_{i=1}^n \sin \vartheta_i} \quad (7.24)$$

Wypadkową siłę międzyzębną W i kąt jej działania θ wyznacza się z zależności (7.18) (7.19).

7.4.3. Zależność sił w zazębieniu cykloidalnym 3. rodzaju od jego parametrów geometrycznych

Z analizy wzorów (7.9), (7.20) wynika, że siła międzyzębna P zależy od:

- momentu M , obciążającego zespół kół,
- liczby zębów koła podstawowego z_1 lub z_2 ,
- współczynnika wysokości zęba λ ,
- kątów działania sił międzyzębnych \mathcal{G}_i , zdeterminowanych kątem obrotu koła czynnego α_{1i} ,
- modułu m .

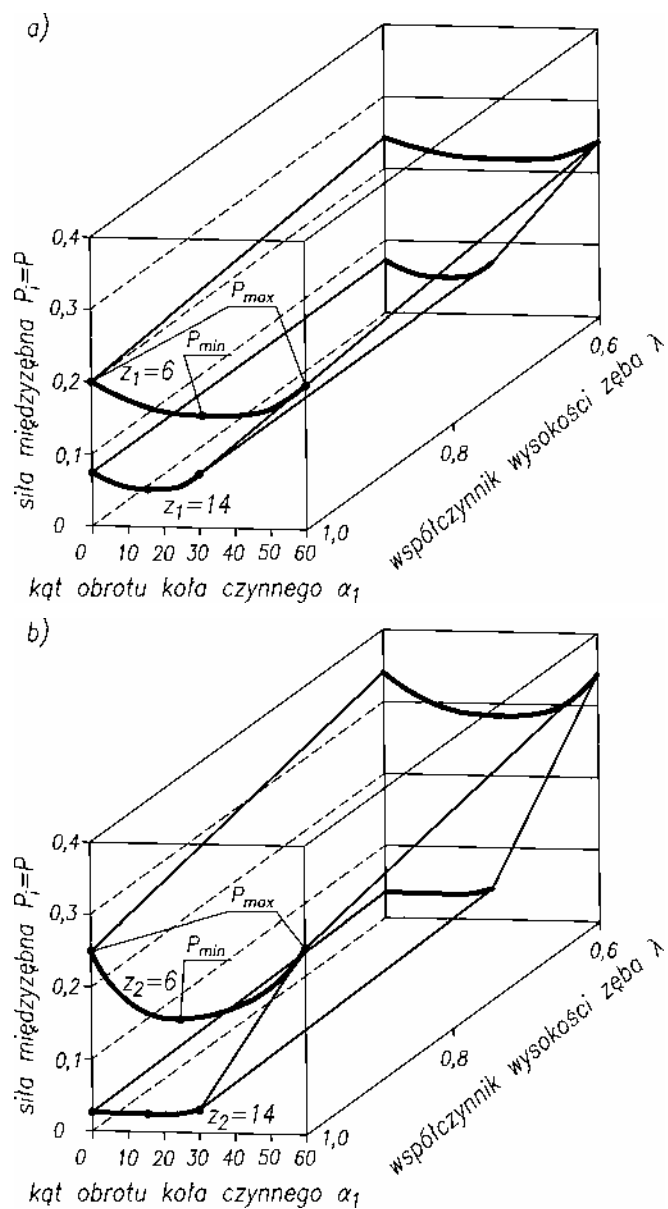
Odpowiednio wpływ tych parametrów na siłę międzyzębną w zazębieniu epicykloidalnym pokazano na rysunku 7.8a. Dla określonej liczby zębów z_1 oraz współczynnika λ wartość siły międzyzębnej P zmienia się wraz ze zmianą kąta obrotu koła czynnego α_1 . Gdy kąt obrotu jest równy $\alpha_1 = 0$, siła wynosi $P = P_{\max}$. Przy dalszym obrocie, gdy $0 < \alpha_1 < 2\pi/z_1$ siła wynosi $P = P_{\min}$. W końcu dla kąta $\alpha_1 = 2\pi/z_1$ przyjmuje ona ponownie wartość $P = P_{\max}$. Wahania te wynikają z tego, że w trakcie obrotu zmienia się liczba zębów w zazębieniu w części czynnej. Jak wynika z rysunku 7.4a, gdy kąt obrotu $\alpha_1 = 0$, wtedy w zazębieniu w punkcie A_1 wchodzi pierwsza para zębów, lecz nie przenosi ona momentu M , gdyż linia działania siły międzyzębnej przechodzi przez punkt obrotu koła O_1 . W związku z tym moment ten przenoszą trzy kolejne pary zębów oddziałujące w punktach A_2, A_3, A_4 i siła międzyzębna wynosi $P = P_{\max}$. Gdy koła współpracujące obracają się w zakresie kąta $0 < \alpha_1 < 2\pi/z_1$, wtedy pierwsza para zębów wspomaga działanie pozostałych, a wartość siły międzyzębnej zmniejsza się do $P = P_{\min}$. Po dalszym obrocie, gdy $\alpha_1 = 2\pi/z_1$, z części czynnej wychodzi czwarta para zębów i na powrót współpracują jedynie trzy pary zębów. Wtedy wartość siły międzyzębnej wzrasta do $P = P_{\max}$.

Z porównania na rysunku 7.8a wykresów sił dla małej i dużej liczby zębów w zazębieniu ($z_1 = 6$ i $z_1 = 14$) widać, że zwiększanie liczby zębów powoduje mniejsze wahania wartości siły międzyzębnej $P_{\min} \div P_{\max}$. Dzieje się to tak, przy większej bowiem liczbie zębów, pozostającej w czynnej części zazębienia (np. $z_1 = 14$), zmiana liczby zębów jednocześnie współpracujących po stronie czynnej zazębienia nie wywiera tak znacznego wpływu, gdy w zazębieniu pozostaje mała liczba zębów (np. $z_1 = 6$).

Z analizy rysunku 7.8b widać podobne zmiany wartości siły międzyzębnej P w zazębieniu hipocykloidalnym spowodowane zmianą kąta obrotu koła czynnego α_1 . Uzasadnia się je także w podobny sposób.

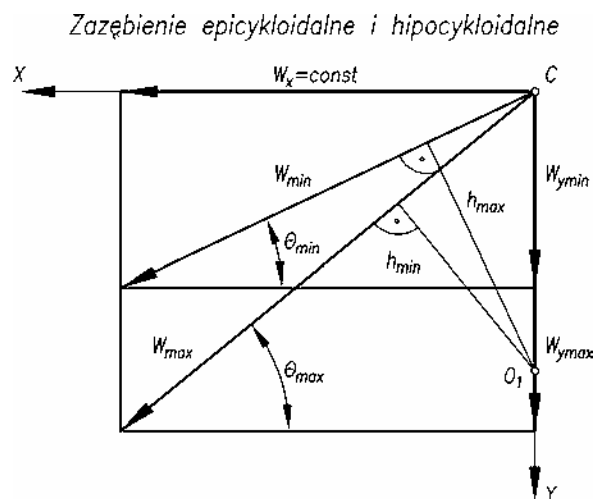
Dalsza analiza rysunku 7.8 wykazuje, że zwiększanie liczby zębów z oraz współczynnika wysokości zębów λ powoduje zmniejszenie wartości siły międzyzębnej. Wynika to z tego, że ten sam moment M przenoszony jest przez większą liczbę zębów z , a tym samym zmniejsza się wartość siły międzyzębnej P . Zwiększanie współ-

czynnika λ powoduje natomiast powiększenie średnicy koła cykloidalnego, a tym samym zwiększenie długości ramienia h , na którym działa siła P . W rezultacie uzyskuje się zmniejszenie wartości siły międzyzębnej P .



Rys. 7.8. Zmiana siły międzyzębnej P w zależności od kąta obrotu koła czynnego α_1 i współczynnika wysokości zęba λ : a) ząbienia epicykloidalne, b) ząbienia hipocykloidalne

Zgodnie ze zmianą wartości pojedynczej siły międzyzębnej P_i i kąta jej działania \mathcal{G}_i , zmienia się wartość wypadkowej siły międzyzębnej W i kąta jej działania θ , które odnoszą się do całego zespołu kół cykloidalnych. Siła zmienia się w zakresie $W_{\min} \div W_{\max}$ i podobnie kąt w zakresie $\theta_{\min} \div \theta_{\max}$. Wyjaśnienie tych zmian należy szukać w łącznej analizie obu parametrów. Przedstawiono to poglądowo na rysunku 7.9 dla zazębienia epicykloidalnego i hipocykloidalnego. Gdy wypadkowa jest równa $W = W_{\min}$, wtedy kąt jej działania wynosi $\theta = \theta_{\min}$, a ramię wypadkowej względem środka obrotu koła O_1 jest równe $h = h_{\max}$. Gdy wypadkowa jest natomiast równa $W = W_{\max}$, wtedy kąt jej działania $\theta = \theta_{\max}$, a ramię działania $h = h_{\min}$. W ten sposób moment napędowy M może być przenoszony – w zależności od kąta obrotu koła α – przez zmieniające się co do wartości i kierunku siły wypadkowe z zakresu $W_{\min} \div W_{\max}$ oraz odpowiadające im ramiona $h_{\max} \div h_{\min}$, powiązane ściśle z kątami działania $\theta_{\min} \div \theta_{\max}$. Jednak cały czas zachowana jest zasada, że iloczyn wypadkowej siły międzyzębnej W i ramienia jej działania h jest stały, czyli $M = W \cdot h = \text{const}$. Taki charakter zmian jest ważny dla obu typów zazębienia, tzn. epi- i hipocykloidalnego.



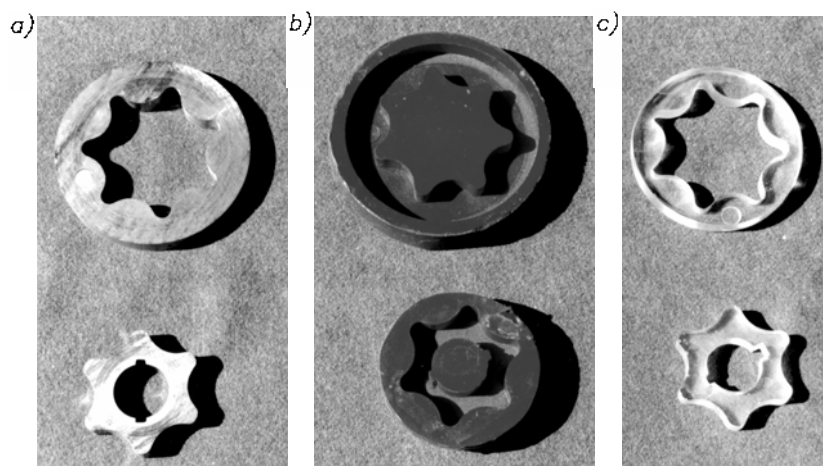
Rys. 7.9. Związek między wypadkową siłą międzyzębną W a kątem jej działania θ dla zazębienia epicykloidalnych i hipocykloidalnych

Jak wynika ze wzorów (7.15), (7.23) wartość składowej poziomej W_x wypadkowej siły międzyzębnej jest niezależna od kąta obrotu α_1 koła cykloidalnego i związanego z nim kąta działania θ siły wypadkowej. Widać to na rysunku 7.9. O zmianie wartości i kierunku wypadkowej W decyduje składowa pionowa W_y , która, jak wynika ze wzorów (7.17) i (7.24), zależy od kątów działania sił międzyzębnych \mathcal{G}_i , zdeteminowanych kątem obrotu koła α_1 . Jest to również widoczne na rysunku 7.9.

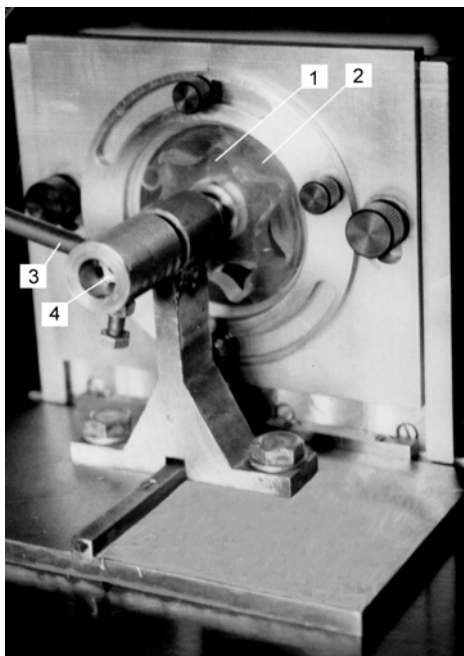
7.4.4. Badania doświadczalne sił międzyzębnych

Aby zweryfikować opracowane metody obliczeń sił międzyzębnych w zespole kół cykloidalnych 3. rodzaju, należy wykonać badania doświadczalne [76]. Badania przeprowadzono metodą elastooptyczną z wykorzystaniem modeli kół epicykloidalnych pokazanych na rysunku 6.13c i wykonanych z żywicy epoksydowej w skali 1:1. Podstawą były oryginalne koła stalowe (rys. 7.10a), które posłużyły do przygotowania form (rys. 7.10b), a te wykorzystano z kolei do wykonania odlewów z żywicy (rys. 7.10c). Odlewy poddano następnie sezonowaniu i dotwardzaniu termicznemu. W rezultacie otrzymano zespół kół, który po zmontowaniu mógł współpracować z minimalnym luzem międzyzębnym. Modele kół z żywicy zamocowano w przyrządzie pokazanym na rysunku 7.11, zachowując dokładną odległość osi O_1O_2 . Zespół kół (1) i (2), stanowiący model, obciążano momentem statycznym M , przyłożonym do koła o uzębieniu zewnętrznym (1) poprzez dźwignię (3) i wał (4). Koło o uzębieniu wewnętrznym (2) było zablokowane. Obrazy elastooptyczne obserwowano w polaryskopie transmisyjnym, a następnie rejestrowano fotograficznie.

Przykładowe obrazy izochrom podczas obciążenia zespołu momentem M przedstawiono na rysunku 7.12. Odpowiednio na rysunku 7.12a pokazano izochromy dla przypadku, gdy koło napędzające o uzębieniu zewnętrznym jest obrócone o kąt $\alpha_1 = 0$ i kiedy w zazębieniu pozostają praktycznie jedynie 3 pary zębów. Z kolei na rysunku 7.12b rozważano przypadek, gdy koło napędzające jest obrócone o kąt $\alpha_1 \approx 30^\circ$ i kiedy w zazębieniu pozostają jeszcze 4 pary zębów. Czwarta para zębów została zasłonięta przez pionowo usytuowaną podpórę łożyska. Przedstawione na rysunku 7.12 obrazy izochrom należy konfrontować z rozkładem sił międzyzębnych pokazanym na rysunku 7.4.



Rys. 7.10. Modele kół zębatych epicykloidalnych: a) koła stalowe, b) formy, c) odlewy z żywicy



Rys. 7.11. Przyrząd do badania sił w ząbieniach cykloidalnych

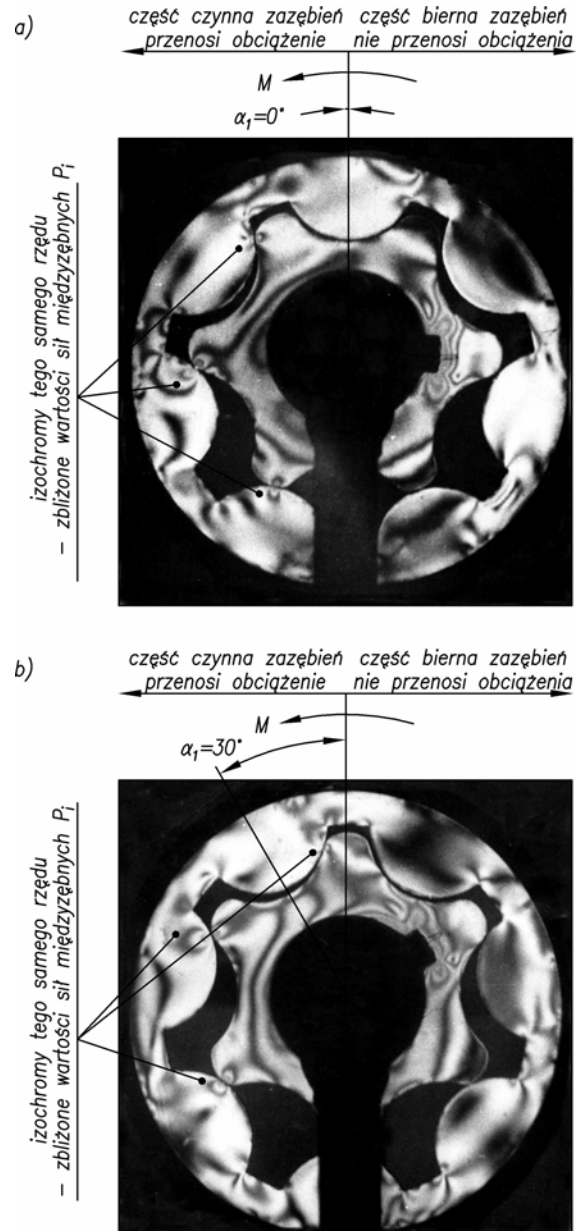
Na podstawie analizy obrazów izochrom można sformułować kilka wniosków.

W ząbieniu można wyróżnić część czynną – przenoszącą obciążenie i bierną – która nie przenosi obciążenia. W rozważanych przypadkach moment obciążający M oddziaływał w lewo w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a w związku z tym czynna część występowała po lewej stronie względem osi łączącej środki obu kół O_1O_2 (porównaj z rys. 7.4).

Siły międzyzębne P_i działają wzdłuż linii wyznaczonych przez punkty przyporu poszczególnych par zębów A_i oraz biegun ząbienia C (porównaj z rys. 7.4). Jednocześnie rzeczywiste kąty działania \mathcal{G}_i odpowiadają kątom wyznaczonym ze wzoru (7.12).

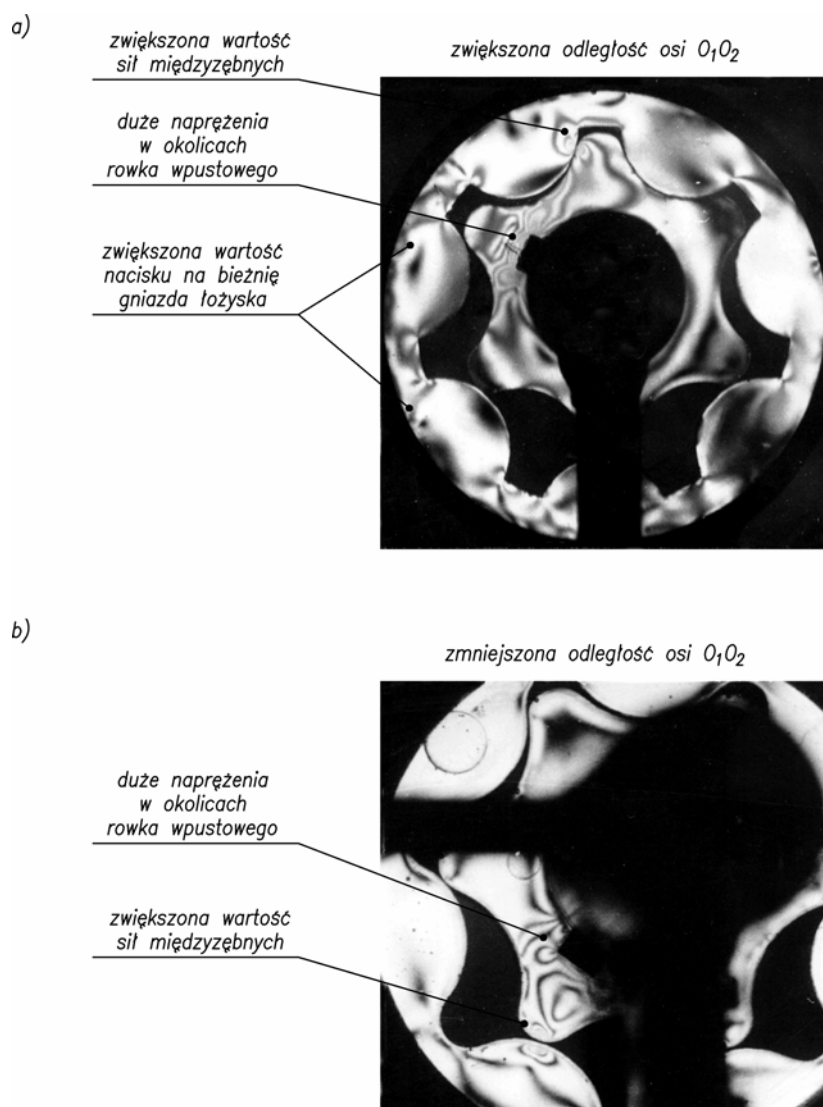
Można przyjąć, że wartości sił międzyzębnych P_i w poszczególnych parach zębów dla określonego kąta obrotu α_1 są zbliżone, czyli $P_i = P = \text{const}$. Widać to na rysunku 7.12a dla kąta $\alpha_1 = 0$ i trzech par współpracujących zębów, gdzie w poszczególnych punktach przyporu występują te same rzędy izochrom. Podobne rezultaty widoczne są na rysunku 7.12b, gdzie kąt obrotu $\alpha_1 \approx 30^\circ$, a w ząbieniu pozostały cztery pary zębów. Izochromy w poszczególnych punktach przyporu są również tego samego rzędu. Porównując ze sobą izochromy na rysunku 7.12a i b zauważa się, że ich rząd jest różny. Sugeruje to, że wartości sił międzyzębnych $P_i = P$ zmieniają się wraz z kątem obrotu α_1 . Jest to ogólne potwierdzenie wzoru (7.9) i związanego z nim wzoru

(7.12) oraz charakterystyki (rys. 7.8a) zmian wartości siły międzyzębnej wraz z obrotem kół, czyli $P_i = P = f(\alpha_1)$.



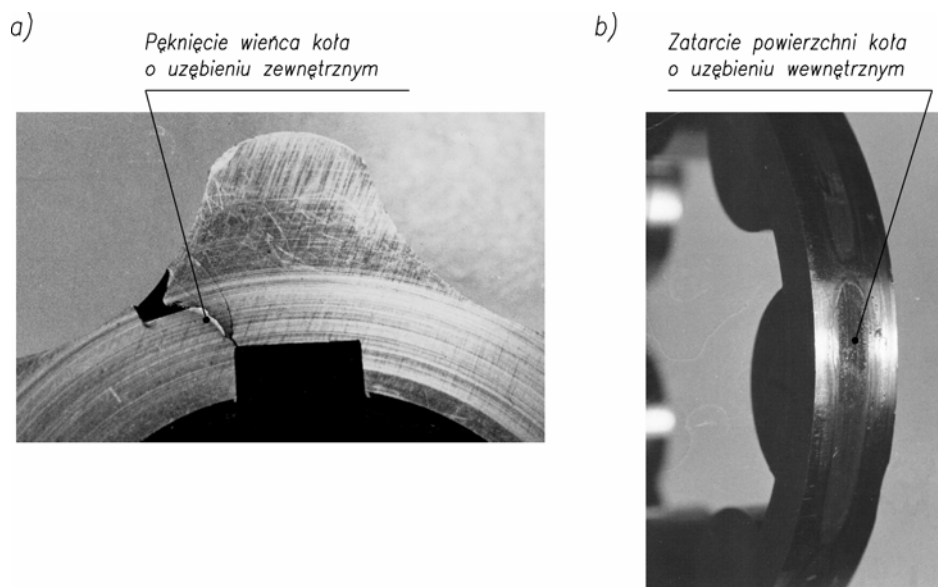
Rys. 7.12. Obrazy izochrom w ząbieniu epicykloidalnym obciążonym momentem obrotowym M :
a) dla kąta obrotu koła czynnego $\alpha_1 = 0^\circ$, b) dla kąta obrotu koła czynnego $\alpha_1 = 30^\circ$

Badania prowadzone były na zespole kół wykonanych z dużą dokładnością zmontowanych z zachowaniem precyzyjnej odległości osi O_1O_2 . Jednak w praktyce mogą wystąpić odstępstwa od takiej idealnej sytuacji. Koła mogą zostać wykonane z mniejszą dokładnością lub nawet błędami, a zespół może zostać nieprecyzyjnie zmontowany.



Rys. 7.13. Obrazy izochrom w ząbieniu epicykloidalnym o powiększonych luzach międzyzębnych i kole zewnętrznym przesuniętym: a) „do góry” (zwiększona odległość osi O_1O_2), b) „na dół” (zmniejszona odległość osi O_1O_2)

Przebadano zatem zespół o znacznie powiększonych luzach międzyzębnych, w ramach których można było zmieniać wzajemne położenie kół poprzez zmianę odległości osi O_1O_2 . Na rysunku 7.13a przedstawiono zespół, w którym w ramach powiększonych luzów międzyzębnych koło czynne przesunięto „do góry” i powiększono odległość osi O_1O_2 . Na rysunku widać, że moment obrotowy jest przenoszony tylko przez jedną parę zębów, w tym przypadku jest to para wchodząca w zazębienie. Z kolei na rysunku 7.13b pokazano zespół, w którym koło czynne przesunięto „na dół” i zmniejszono odległość osi O_1O_2 . Widać, że moment obrotowy jest przenoszony również przez jedną parę zębów, wychodzącą z zazębienia. W obu przypadkach obraz izochrom sygnalizuje występowanie znacznych sił międzyzębnych. Jednocześnie z porównania rysunków 7.13 i 7.12 wynika, że siły te znacznie przewyższają siły, powstające podczas współpracy przy nominalnej odległości O_1O_2 . Jak widać na rysunku 7.13a efektem przeciążenia zębów są znaczne naprężenia w kole czynnym o uzębieniu zewnętrznym m.in. w rejonie rowka wpustowego. W rezultacie może to doprowadzić do pęknięcia koła. Taki skrajny przypadek pęknięcia koła epicykloidalnego wystąpił w praktyce (rys. 7.14a). Z kolei wynikiem przeciążenia zębów koła biernego o uzębieniu wewnętrznym jest jego nadmierny nacisk na bieżnię gniazda łożyskowego (rys. 7.13a). W rezultacie może to doprowadzić do zatarcia łożyska. Również taki skrajny przypadek zaobserwowano w praktyce i przedstawiono na rysunku 7.14b.



Rys. 7.14 Uszkodzenia kół epicykloidalnych, spowodowane przeciążeniami zębów, wynikającymi z niedokładności wykonania i montażu: a) pęknięcie wieńca, b) zatarcie powierzchni zewnętrznej koła

Z wyników badań widać, że dokładność wykonania i montażu zazębienia ma bardzo istotny wpływ na wartość sił międzyzębnych w zazębieniu cykloidalnym i obciążenie kół. Im większe niedokładności wykonania i montażu zazębienia, tym bardziej nierównomierny rozkład sił w zazębieniu i większe przeciążenia kół, a w rezultacie niebezpieczeństwo zatarcia, a nawet pęknięcia zębów.

Badania eksperymentalne sił międzyzębnych uzasadniają prawidłowość założeń przyjętych do obliczeń sił w zazębieniach cykloidalnych podanych w punkcie 7.4.1. W związku z tym przedstawione w punktach 7.4.1 i 7.4.2 metody obliczeniowe mogą być wykorzystywane w praktyce projektowej. Umożliwiają one określenie średnich wartości sił międzyzębnych P , kątów ich działania \mathcal{G} oraz wypadkowej siły międzyzębnej W i kąta jej działania θ .

Można je zastosować do obliczeń łożysk maszyny hydraulicznej oraz elementów korpusu.

8. Technologia kół zębatych

Koła zębate maszyn hydraulicznych można wytwarzać, korzystając z różnych technologii, m. in.:

- obróbki skrawaniem,
- obróbki plastycznej,
- wykrawaniem elektroerozyjnym,
- technologii proszków.

Dominująca jest obróbka skrawaniem, odnosi się to zwłaszcza do kół ewolwentowych, najczęściej stosowanych w napędach hydraulicznych. Inne technologie są stosowane rzadziej i to raczej w przypadku kół cykloidalnych, które wymagają innego podejścia ze względu na swą odmienną geometrię.

Na ogół proces technologiczny prowadzi się w trzech etapach:

- obróbka wstępna,
- obróbka cieplno-chemiczna,
- obróbka wykańczająca.

W trakcie obróbki wstępnej formuje się wstępny kształt i wymiary uzębienia koła. Podczas obróbki cieplno-chemicznej dąży się do uzyskania twardej i odpornej na ścieranie powierzchni zębów z zachowaniem miękkiego i ciągliwego rdzenia zębów. W czasie obróbki wykańczającej dąży się do uzyskania ostatecznego dokładnego kształtu i wymiarów uzębienia oraz dokładnej powierzchni zębów. W niektórych przypadkach stawia się nawet zadania uzyskania odpowiedniej faktury powierzchni zębów.

Zarówno obróbkę wstępną, jak i wykańczającą można realizować metodami:

- obwiedniowymi,
- kształtowymi.

Metody obwiedniowe są na ogół bardziej wydajne, a w wyniku ich stosowania otrzymuje się dokładniejsze uzębienie, niż w metodach kształtowych. Wybór danej technologii pociąga za sobą konieczność doboru odpowiednich maszyn wytwórczych, doboru lub zaprojektowania odpowiednich narzędzi oraz metod kontroli kół zębatych. Zagadnienia te są ściśle ze sobą powiązane.

Wybór technologii zależy od wielu czynników. Zasadniczymi jednak są:

- zarys zęba i rozwiązanie konstrukcyjne kół,
- materiał koła,
- żądana dokładność wykonania,
- wielkość produkcji.

W praktyce o wyborze technologii decyduje kompromis pomiędzy wymaganiami konstrukcyjnymi a możliwościami wytwórczymi. W pierwszej kolejności należy zapewnić uzyskanie potrzebnego kształtu, wymiarów, dokładności powierzchni uzębienia oraz odpowiedniej wydajności procesu. Równocześnie należy dążyć do realizacji tych żądań, korzystając z będących do dyspozycji maszyn i narzędzi. Dopiero po sprawdzeniu rozwiązania konstrukcyjnego można myśleć o ulepszeniu procesu technologicznego, zwiększaniu jego wydajności, co jednak zwykle wiąże się z nakładami finansowymi.

8.1. Technologie kół ewolwentowych

Dominującą technologią w przypadku kół ewolwentowych jest obróbka skrawaniem, należy przy tym rozróżnić procesy wytwarzania koła o uzębieniu zewnętrznym i wewnętrznym.

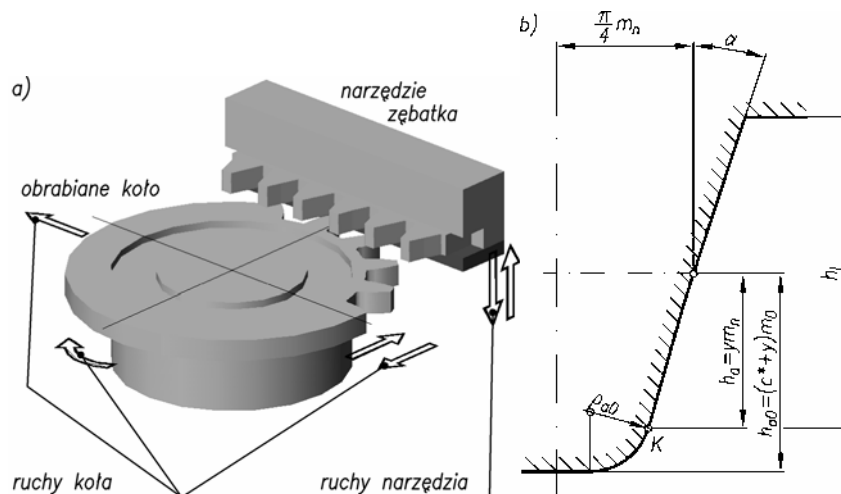
Rozważono zatem najpierw technologię kół o uzębieniu zewnętrznym.

Obróbkę wstępną, polegającą na nacinaniu uzębienia, prowadzi się prawie wyłącznie metodami obwiedniowymi. Są to znane metody Maaga, Fellowsa oraz metoda frezowania frezem ślimakowym.

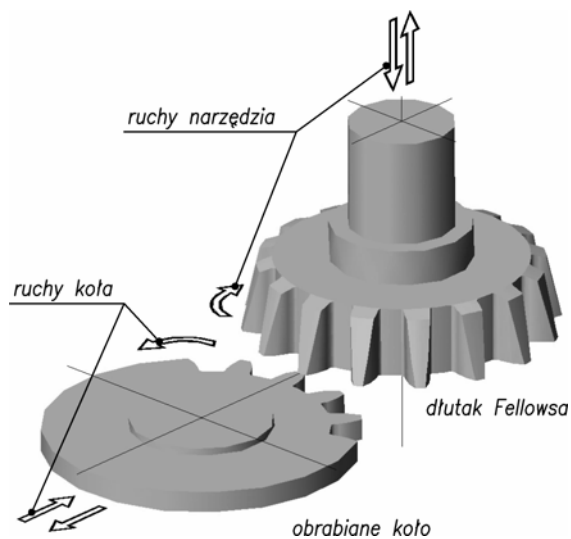
Metoda Maaga pokazana schematycznie za [24, 25, 36] na rysunku 8.1a, polega na dłutowaniu uzębienia za pomocą narzędzia zębatki. Narzędzie wykonuje pionowe ruchy dłutujące. Obrabiane koło wykonuje natomiast złożony ruch toczy polegający na obrocie i przesuwaniu względem zębatki. Inaczej mówiąc, „przetacza się” ono po zębatce. Cały proces prowadzi się na specjalnych dłutownicach Maaga. W jego trakcie wykorzystuje się na ogół standardowe narzędzia, które zgodnie z założoną korekcją należy ustawić w odpowiedniej odległości w stosunku do obrabianego koła.

Zagadnienie to przedstawiono w rozdziale 3.1.3 oraz na rysunku 3.4. Jak widać, istotne znaczenie ma ukształtowanie zarysu narzędzia u wierzchołka, poniżej miarodajnej linii wierzchołkowej. Wpływa to bowiem na kształt zarysu zęba u podstawy, a to z kolei wpływa na wartość parametrów hydraulicznych maszyny. Wariantowe rozwiązanie tego problemu pokazano za [25] na rysunku 8.1b, zgodnie z którym zarys zębatki u wierzchołka zaokrąglono promieniem ρ_{a0} .

Metodę Fellowsa przedstawiono schematycznie na rysunku 8.2. Polega ona na dłutowaniu uzębienia za pomocą dłutaka w kształcie koła zębatego. Narzędzie wykonuje pionowe ruchy dłutujące, obracając się jednocześnie dookoła swej osi. Obrabiane koło obraca się również wokół własnej osi tak, jakby współpracowało z wieńcem narzędzi, tworząc przekładnię. Proces prowadzi się na specjalnych dłutownicach Fellowsa. Wytyczne projektowe dotyczące dłutaków Fellowsa podano m. in. w [24, 37]. Metody Maaga i Fellowsa są stosunkowo mało wydajne.



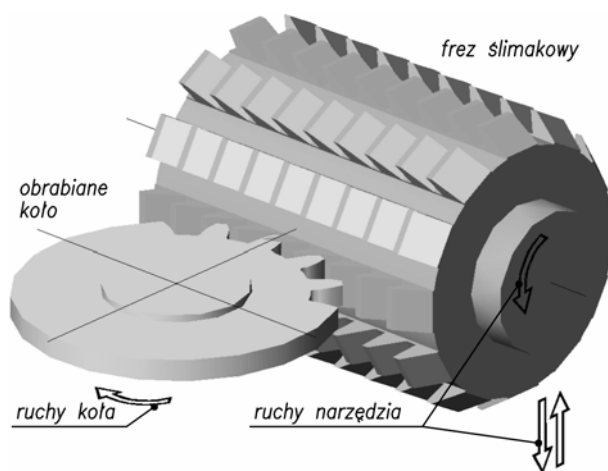
Rys. 8.1. Zasada obróbki wstępnej kół ewolwentowych prowadzonej metodą dłutowania Maaga: a) schemat procesu, b) ukształtowanie wierzchołka narzędzia według [25]; ρ_{a0} – promień zaokrąglenia wierzchołka narzędzia



Rys. 8.2. Zasada obróbki wstępnej kół ewolwentowych prowadzonej metodą dłutowania Fellowsa

Bardziej wydajna i stosunkowo chętnie stosowana przez wytwórców maszyn hydraulicznych jest metoda frezowania obwiedniowego frezem ślimakowym. Zasadę obróbki tą metodą przedstawiono na rysunku 8.3. Wykorzystuje się w tym przypadku zasadę współpracy ślimaka z kołem ślimakowym. Rolę ślimaka spełnia frez ślimakowy, którego ząb w przekroju normalnym ma zarys zębatki, a rolę koła ślimakowego

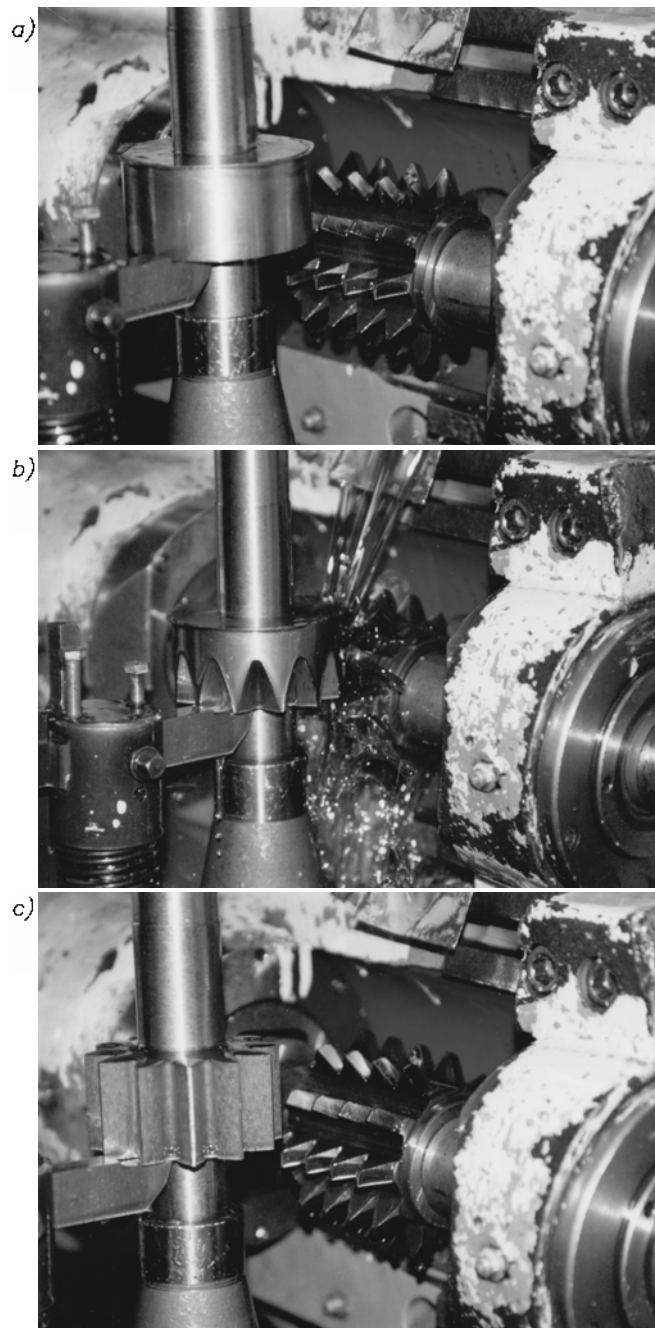
spełnia koło obrabiane. W czasie nacinania uzębienia ostrza freza wykonują ruch obrotowy oraz posuwisto-zwrotny, nacinane zaś koło obraca się wokół własnej osi. W procesie produkcji stosuje się standardowe frezarki oraz handlowe narzędzia. Przebieg nacinania uzębienia prowadzony tą metodą w praktyce przedstawiono na rysunku 8.4. Odpowiednio na rysunku 8.4a widać półfabrykat przygotowany do obróbki oraz frez ślimakowy, na rysunku 8.4b przedstawiono proces nacinania uzębienia, na rysunku 8.4c pokazano nacięte uzębienie koła.



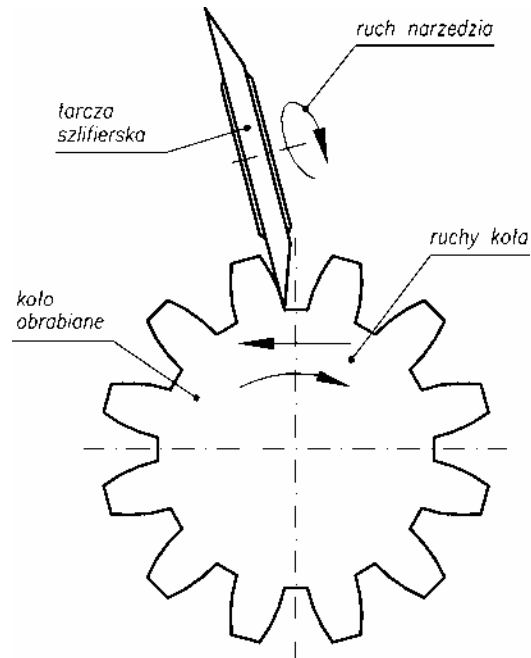
Rys. 8.3. Zasada obróbki wstępnej kół ewolwentowych prowadzonej metodą frezowania obwiedniowego frezem ślimakowym

Po dokonaniu obróbki wstępnej wykonuje się obróbkę cieplno-chemiczną uzębienia. Najczęściej dokonuje się jej metodą nawęglania i hartowania. Dąży się do tego, aby powierzchnia zębów miała twardość około 60 HRC, a ich rdzenie pozostały miękkie. Tak przygotowane uzębienie poddaje się obróbce wykańczającej. Prowadzi się ją głównie metodami obwiedniowymi – Maaga i Reishauera.

Metodę Maaga przedstawiono schematycznie na rysunku 8.5. Polega ona na szlifowaniu uzębienia tarczą szlifierską. Narzędzie wykonuje ruch obrotowy i posuwisto-zwrotny, podobne ruchy wykonuje obrabiane koło. Proces szlifowania prowadzi się na firmowych szlifierkach Maaga, w których zamontowane są narzędzia do ostrzenia ściernic oraz korygowania ich położenia względem szlifowanego koła. Powoduje to, że dokładność obróbki na tych szlifierkach jest bardzo duża. Przebieg szlifowania metodą Maaga w praktyce pokazano na rysunku 8.6.



Rys. 8.4. Obróbka wstępna koła o uzębieniu zewnętrznym ewolwentowym przez frezowanie frezem ślimakowym: a) widok półfabrykatu i freza, b) proces nacinania uzębienia, c) nacięte uzębienie



Rys. 8.5. Zasady obróbki wykańczającej kół ewolwentowych przez szlifowanie metodą Maaga

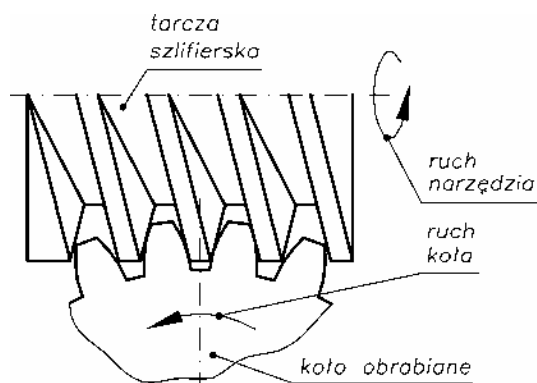


Rys. 8.6. Obróbka wykańczająca koła o uzębieniu ewolwentowym przez szlifowanie metodą Maaga

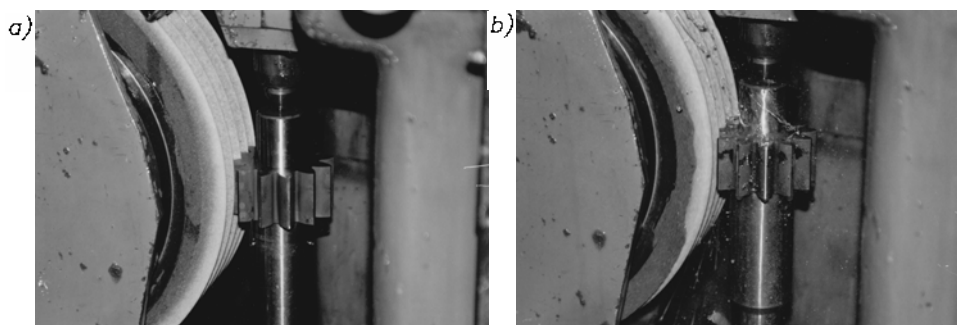
Metodę Reishauera przedstawiono schematycznie na rysunku 8.7. Polega ona na szlifowaniu uzębienia za pomocą ściernicy w formie ślimaka. Ściernica wykonuje ruch obrotowy i, podobnie jak przy współpracy kół w przekładni ślimakowej, wywo-

łuje ruch obrotowy szlifowanego koła. Obrabiane koło jest przesuwane wzdłuż własnej osi tak, aby dokonać szlifowania całego boku zęba.

Proces szlifowania prowadzi się na specjalistycznych szlifierkach Reishauera z wykorzystaniem specjalnie ukształtowanych ściernic. Ściernica jest uformowana jako jednokrotny ślimak, którego zarys kształtuje się najpierw przez wykruszanie wrębu, a potem specjalne ostrzenie. Ściernice podczas pracy są profilowane tak, aby zapewnić dokładność procesu szlifowania. Na rysunku 8.8 przedstawiono przebieg szlifowania metodą Reishauera. Odpowiednio na rysunku 8.8a widać koło zębate przygotowane do obróbki oraz ściernicę ukształtowaną w formie ślimaka, a na rysunku 8.8b przedstawiono proces szlifowania koła. Szlifowanie tą metodą jest bardzo wydajne i stosunkowo dokładne.



Rys. 8.7. Zasady obróbki wykańczającej kół ewolwentowych metodą Reishauera

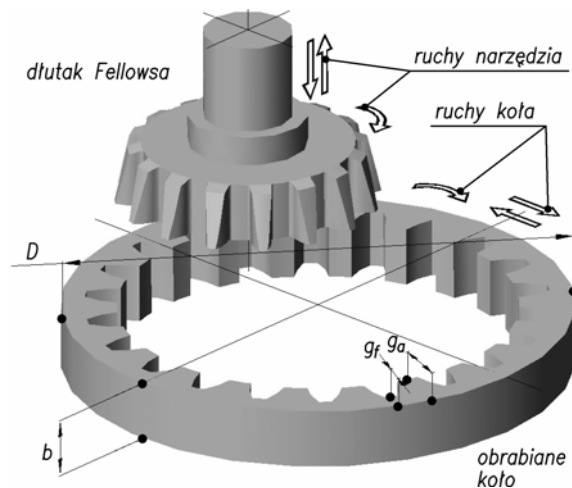


Rys. 8.8. Obróbka wykańczająca koła o zębieniu ewolwentowym przez szlifowanie metodą Reishauera: a) widok tarczy szlifierskiej oraz koła, b) proces szlifowania

Odmienne przebiega proces wytwarzania koła o zębieniu wewnętrznym. Najczęściej wykorzystuje się w tym przypadku metodę Fellowsa. Nacinanie kół tą metodą przedstawiono schematycznie na rysunku 8.9. Podobnie jak w przypadku kół o zę-

bieniu zewnętrznym polega ona na dłutowaniu za pomocą dłutaka w kształcie koła zębatego. Narzędzie wykonuje pionowe ruchy dłutujące, obracając się jednocześnie dookoła swej osi. Obrabiane koło jest dosuwane do narzędzia, a następnie obraca się również wokół własnej osi tak, jakby współpracowało z narzędziem, tworząc przekładnię. Proces prowadzi się na tych samych obrabiarkach, które służą do wykonywania kół o uzębieniu zewnętrznym. Bardzo istotne jednak jest zaprojektowanie dłutaka. Muszą tu być spełnione dwa podstawowe warunki o charakterze technologicznym:

- warunek braku interferencji pomiędzy dłutakiem a kołem podczas obróbki,
- warunek braku kolizji pomiędzy dłutakiem a kołem podczas promieniowego dosuwania dłutaka.

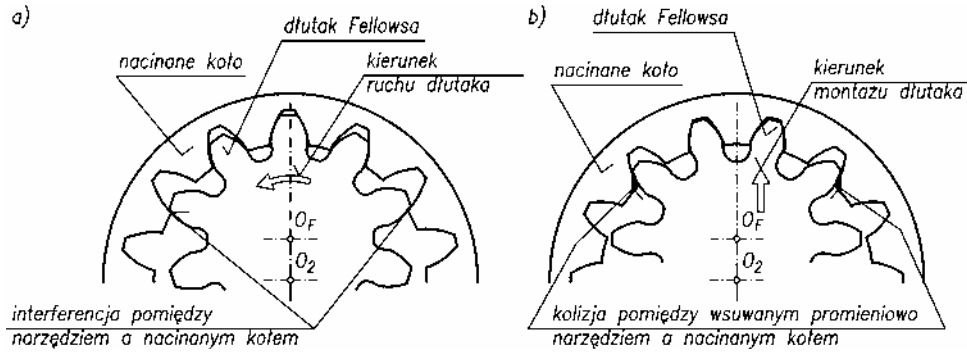


Rys. 8.9. Zasady obróbki wstępnej kół ewolwentowych o uzębieniu wewnętrznym metodą Fellowsa

Pierwszy warunek polega na tym, aby wierzchołki zębów dłutaka wchodzące i wychodzące ze strefy obróbki nie interferowały z wierzchołkami naciętych zębów (rys. 8.10a). Jest to sytuacja podobna do tej, w której następuje interferencja II. rodzaju podczas współpracy kół o zazębieniu wewnętrznym (rozdz. 3.4.5).

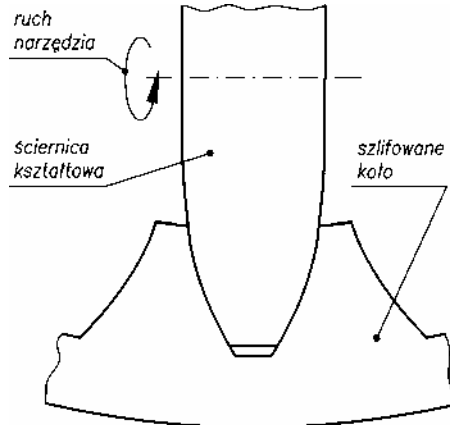
Drugi warunek polega na tym, aby podczas promieniowego wprowadzenia dłutaka w materiał obrabianego koła, wierzchołki zębów dłutaka nie ścinały wierzchołków zębów koła, lecz swobodnie je mijały (rys. 8.10b).

Oprócz podanych warunków technologicznych w projektowaniu narzędzia należy uwzględnić wymagania konstrukcyjne dotyczące uzębienia i zazębienia. W tej sytuacji zaprojektowanie dłutaka Fellowsa staje się zadaniem złożonym i aby je zrealizować niezbędna jest ścisła współpraca konstruktora i technologa. Wytyczne projektowe dotyczące dłutaków Fellowsa podano w [24, 37].



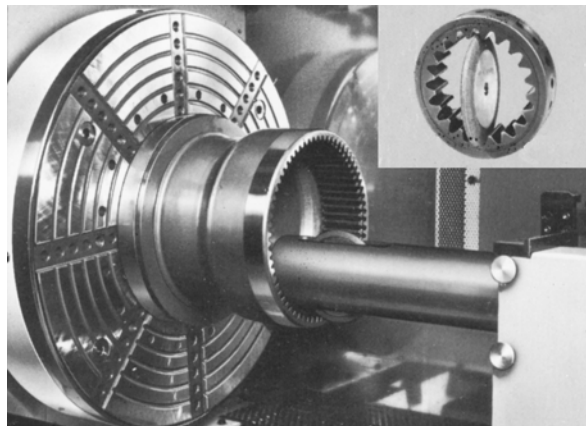
Rys. 8.10. Warunki prawidłowego prowadzenia procesu nacinania uzębienia wewnętrznego ewolwentowego metodą Fellowsa: a) warunek braku interferencji pomiędzy dłutakiem a kołem, b) warunek braku kolizji pomiędzy dłutakiem a kołem podczas promieniowego wprowadzania dłutaka

Po obróbce wstępnej dokonuje się obróbki cieplno-chemicznej, którą prowadzi się podobnie jak w przypadku kół o uzębieniu zewnętrznym. Szczególną uwagę należy zwrócić na to, aby w wyniku tego procesu nie nastąpiło wykrzywienie czy też wypaczenie koła zębatego. Zbyt duży stosunek średnicy koła zębatego D do jego szerokości b , a także różnica grubości pierścienia u wierzchołka g_a i stopy zęba g_f , mogą być przyczyną powstawania niekontrolowanych naprężeń i odkształceń (rys. 8.9).



Rys. 8.11. Zasady obróbki wykańczającej koła o uzębieniu ewolwentowym wewnętrznym metodą kształtową

Obróbkę wykańczającą kół o uzębieniu wewnętrznym prowadzi się głównie metodami kształtowymi. Metodę taką przedstawiono schematycznie na rysunku 8.11. Polega ona na szlifowaniu uzębienia za pomocą ściernicy kształtowej, której przekrój poprzeczny odpowiada wrębowi koła zębatego. Przebieg szlifowania koła o uzębieniu wewnętrznym przedstawiono na rysunku 8.12.



Rys. 8.12. Obróbka wykańczająca koła o uzębieniu wewnętrznym ewolwentowym metodą szlifowania kształtowego

8.2. Technologia kół cykloidalnych 1., 2. i 3. rodzaju

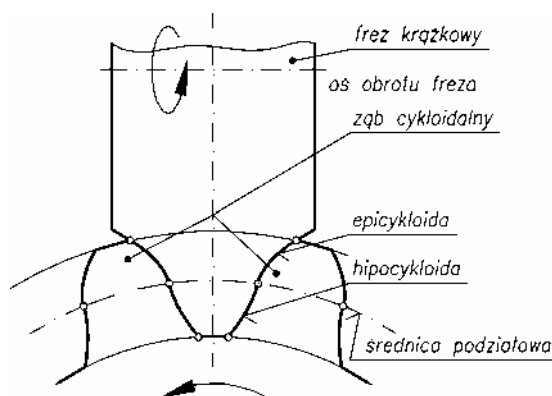
8.2.1. Technologia obróbki skrawaniem

Podobnie, jak w przypadku kół ewolwentowych, tak również w przypadku kół cykloidalnych obróbka skrawaniem jest podstawową technologią stosowaną do ich wytwarzania. Jednakże ze względu na specyficzną geometrię uzębienia i zazębienia technologia ta jest realizowana odmiennie. Stosuje się specjalistyczne obrabiarki, narzędzia oraz metody pomiarów i kontroli kół. Przede wszystkim jednak wybór technologii zależy od zakładanej wielkości produkcji. Zróżnicowane jest wytwarzanie pojedynczego koła czy też małej serii, od produkcji wielkoseryjnej.

Najpierw przeanalizowano technologię kół cykloidalnych 1., 2. i 3. rodzaju, którą można wykorzystać w produkcji jednostkowej i małoseryjnej.

Rozważano metodę obróbki uzębienia cykloidalnego zewnętrznego 1. rodzaju skonstruowanego zgodnie z zasadami przedstawionymi w rozdziale 4 i na rysunku 4.1. Obróbkę wstępną uzębienia tego typu wykonuje się na ogół według metody kształtowej [24]. Odpowiednio na rysunku 8.13 przedstawiono metodę frezowania kształtowo-podziałowego frezem krążkowym, który podczas obrotu wokół osi własnej wycina wręby międzyzębny. Kształt krawędzi skrawającej freza odpowiada zarysowi boku zęba cykloidalnego, tzn. składa się z wycinków łuków epicykloidalnego i hipocykloidalnego, powiązanych ze sobą na średnicy podziałowej koła. Po wyfrezowaniu jednego wrębu następuje wycofanie narzędzia i obrót koła o jedną podziałkę, a następnie frezowanie kolejnego wrębu. Zaprojektowanie i wykonanie narzędzi jest stosunkowo trudne i drogie, a dokładność wykonania uzębienia i wydajność metody

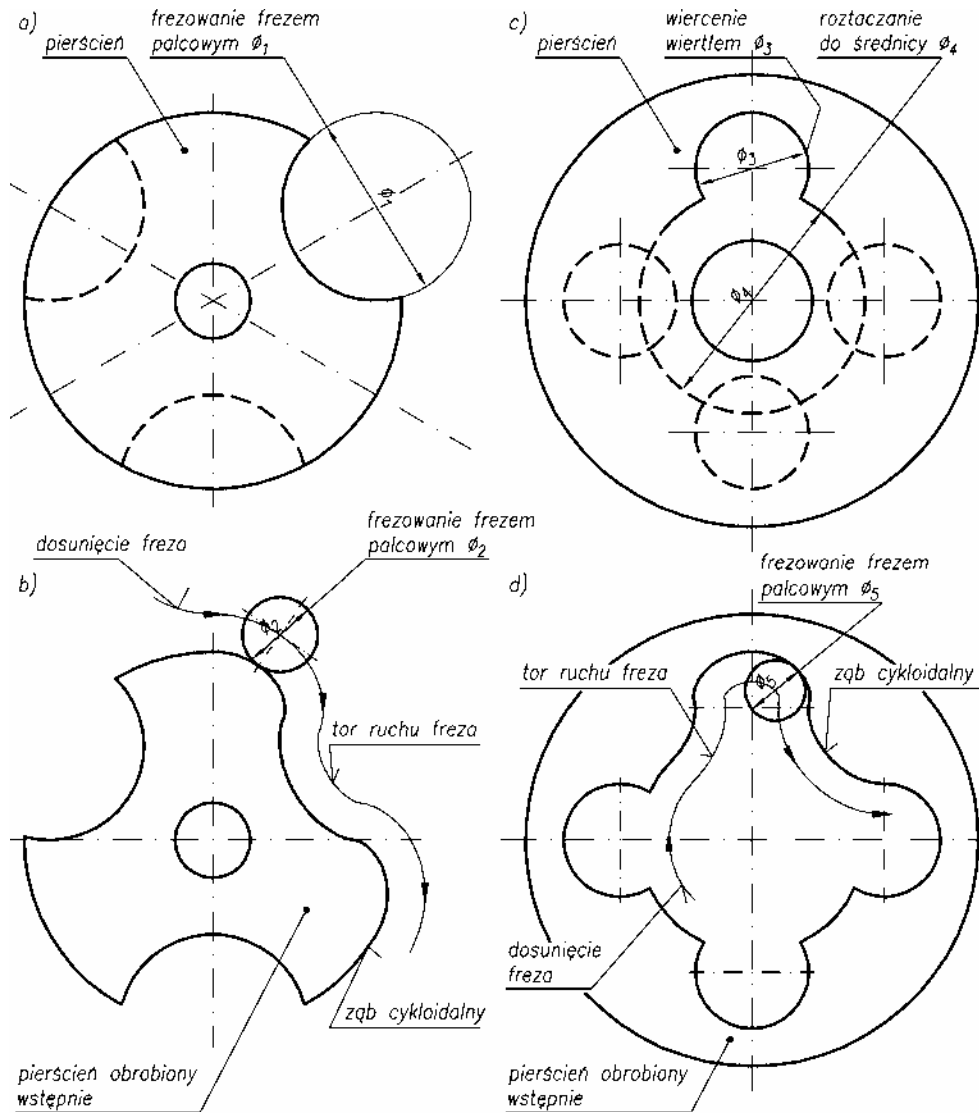
stosunkowo mała. Możliwość prowadzenia obróbki wykańczającej jest ograniczona, gdyż wiąże się ze stosowaniem specjalnie profilowanych ściernic. Zaletą tej metody jest jednak możliwość wykorzystania frezarek ogólnego przeznaczenia.



Rys. 8.13. Zasady obróbki wstępnej kół cykloidalnych 1. rodzaju metodą frezowania frezem krążkowym

Przeanalizowano technologię kół cykloidalnych 2. rodzaju, które zaprojektowano zgodnie z zasadami przedstawionymi w rozdziale 5 (rys. 5.1 i 5.2). Obróbkę wstępną podzielono na dwa etapy (rys. 8.14). W pierwszym przygotowuje się wstępnie obrobione pierścienie, z których usuwa się nadmiar materiału. W przypadku koła o uzębieniu zewnętrznym (rys. 8.14a) frezuje się koliste wybrania frezem palcowym o średnicy ϕ_1 . W przypadku koła o uzębieniu wewnętrznym (rys. 8.14c) wierci się otwory o średnicy ϕ_3 oraz roztacza otwór wewnętrzny o średnicy ϕ_4 .

W drugim etapie, w tak przygotowanych pierścieniach, dokonuje się operacji ostatecznego kształtowania uzębienia cykloidalnego metodą frezowania frezem palcowym. Zarówno w przypadku koła o uzębieniu zewnętrznym (rys. 8.14b), jak i wewnętrznym (rys. 8.14d) frez palcowy przemieszcza się po torze równoległym w stosunku do teoretycznego zarysu uzębienia wyznaczonego z równań (2.1) (2.3). Można stosować tzw. frezy handlowe, jednak należy wymagać, aby były odporne na zużycie i aby w trakcie obróbki nie zmieniały się ich kształt i wymiary. Powinny również mieć możliwie największą średnicę (średnice ϕ_2 i ϕ_5 na rysunku 8.14b, d), aby nie odkształcały się w trakcie obróbki. Do frezowania wykorzystuje się wiertarko-frezarki sterowane numerycznie. Istnieje możliwość przeprowadzania obróbki wykańczającej i zwiększenia dokładności wykonania uzębienia. Należy w związku z tym wykonać obróbkę ciepłno-chemiczną, a następnie dokonać szlifowania ściernicą palcową, wykorzystując przystawkę szlifierską, zamontowaną na głowicy wiertarko-frezarki sterowanej numerycznie.

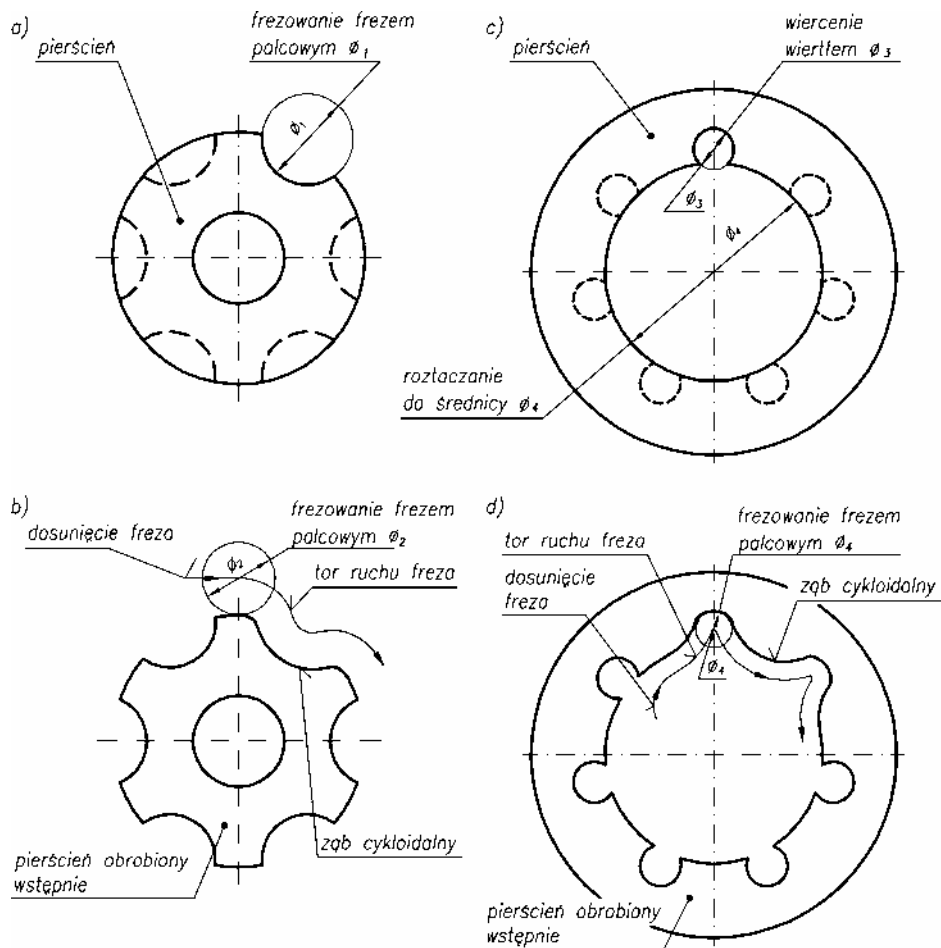


Rys. 8.14. Zasady obróbki wstępnej kół cykloidalnych 2. rodzaju metodą frezowania frezem palcowym a) usuwanie nadmiaru materiału, b) frezowanie uzębienia zewnętrznego, c) usuwanie nadmiaru materiału, d) frezowanie uzębienia wewnętrznego

Technologię kół cykloidalnych 2. rodzaju zastosowano również do wytwarzania kół cykloidalnych 3. rodzaju. Koła te zaprojektowano według zasad podanych w rozdziale 6 oraz na rysunku 6.1 i rys. 6.11. Podobnie jak poprzednio, obróbkę wstępną rozpoczyna się od usunięcia nadmiaru materiału (rys. 8.15a, c). Następnie stosuje się metodę frezowania frezem palcowym i formuje uzębienie cykloidalne (rys. 8.15b, d).

Także i w tym przypadku możliwe jest przeprowadzenie etapu obróbki wykańczającej metodą szlifowania ściernicą palcową współpracującą z wiertarko-frezarką sterowaną numerycznie.

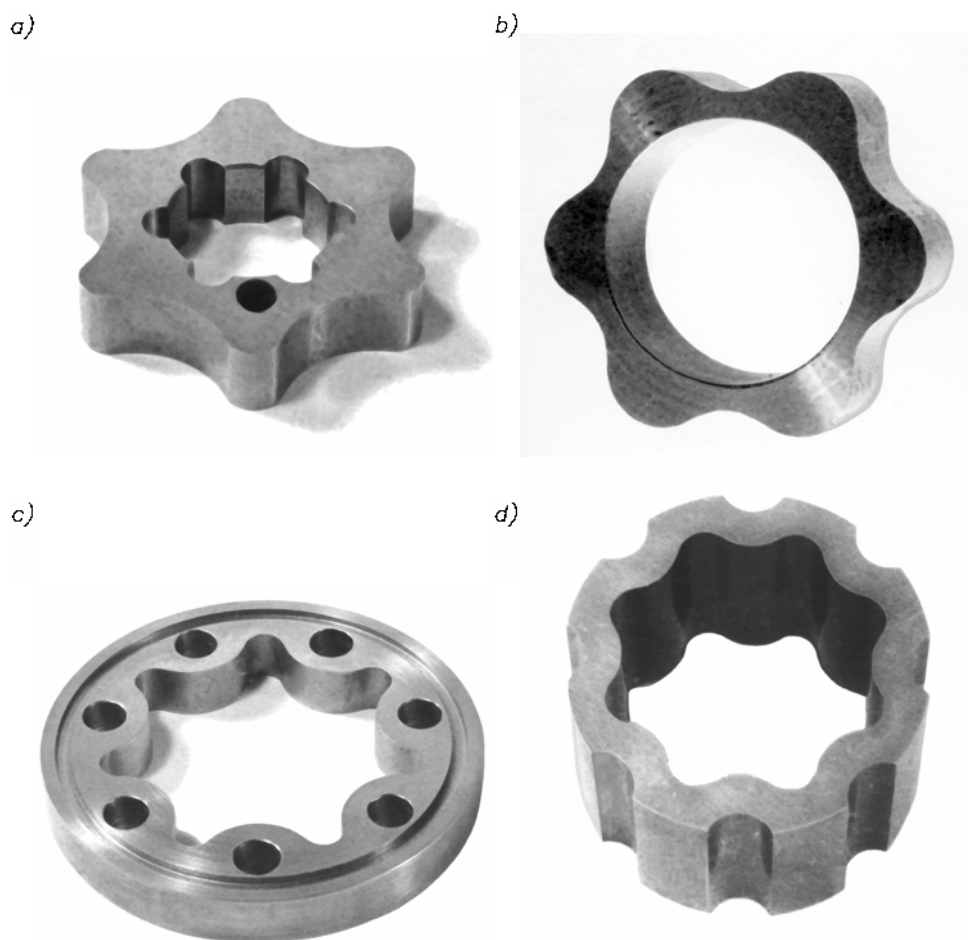
Przedstawiona metoda frezowania na wiertarko-frezarkach sterowanych numerycznie z zastosowaniem freza palcowego jest korzystna ze względów technicznych i ekonomicznych. Wykorzystuje się w niej znane i rozpowszechnione maszyny oraz standardowe narzędzia. W wyniku jej stosowania można otrzymać koła cykloidalne o różnych kształtach i wymiarach ze stosunkowo dużą dokładnością, zachowując w miarę niskie koszty wytwarzania.



Rys. 8.15. Zasada obróbki wstępnej kół cykloidalnych 3. rodzaju metodą frezowania frezem palcowym:

- usuwanie nadmiaru materiału,
- frezowanie uzębienia zewnętrznego,
- usuwanie nadmiaru materiału,
- frezowanie uzębienia wewnętrznego

Opisaną metodę wykorzystano do produkcji małoseryjnej kół cykloidalnych 3. rodzaju (rys. 8.16). Są to koła epicykloidalne o uzębieniu zewnętrznym (rys. 8.16a, b), koła epicykloidalne o uzębieniu wewnętrznym (rys. 8.16c) oraz koła hipocykloidalne o uzębieniu wewnętrznym (rys. 8.16d).

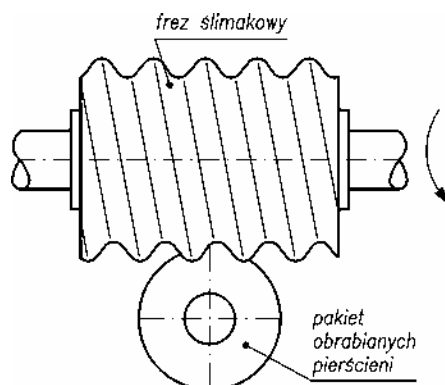


Rys. 8.16. Koła cykloidalne 3. rodzaju wykonane metodą frezowania frezem palcowym:
a), b) koło epicykloidalne o uzębieniu zewnętrznym, c) koło epicykloidalne o uzębieniu wewnętrznym, d) koło hipocykloidalne o uzębieniu wewnętrznym

Technologia produkcji wielkoseryjnej różni się od prezentowanych technologii produkcji jednostkowej czy też małoseryjnej. Przede wszystkim musi zapewnić dużą wydajność procesu, wynoszącą od kilkunastu do kilkudziesięciu, a nawet kilkuset tysięcy kół rocznie. Jednocześnie technologia ta powinna zapewnić dużą dokładność

wymiarów i kształtu wykonywanych uzębień oraz dokładność powierzchni. Wymagania te spełnia się, stosując narzędzia specjalnej konstrukcji oraz specjalistyczne maszyny. Przykład dotyczy kół cykloidalnych 3. rodzaju, które są najczęściej stosowane w maszynach hydraulicznych spośród wszystkich typów kół cykloidalnych.

Obróbkę wstępną koła o uzębieniu zewnętrznym prowadzi się metodą frezowania obwiedniowego z zastosowaniem specjalnie zaprojektowanego freza ślimakowego [36, 37, 54, 62, 63, 67] (rys. 8.17).

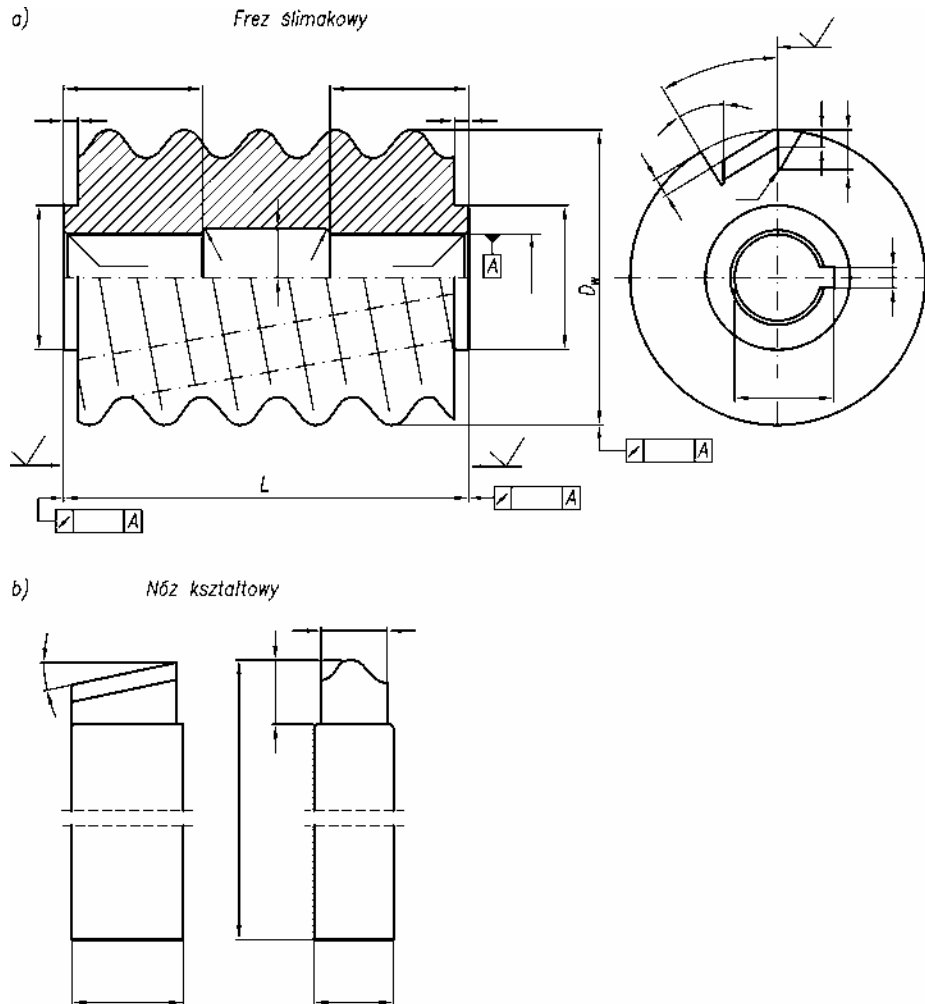


Rys. 8.17. Zasada obróbki wstępnej koła o uzębieniu zewnętrznym cykloidalnym 3. rodzaju metodą frezowania obwiedniowego

Rozwiązanie konstrukcyjne freza przedstawiono na rysunku 8.18a, na którym wi- dać także sposób wymiarowania freza. W tabeli 8.1 zestawiono zespół parametrów konstrukcyjnych charakteryzujących frez. Ostateczny kształt ostrzy freza nadaje się

Tabela 8.1. Parametry konstrukcyjne freza, (rys. 8.18)

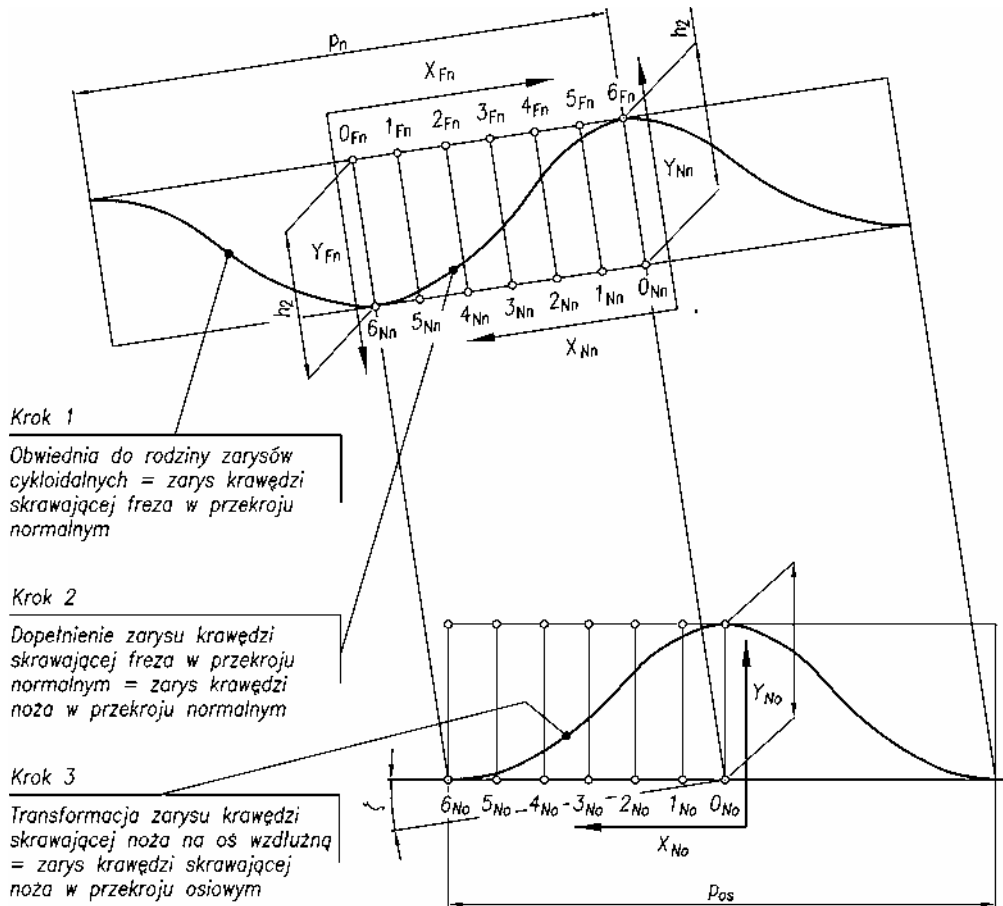
Lp.	Wielkość	Ozn.	Wartość
1	Zarys zwoju	pseudospiralny	
2	Kierunek linii zwojów	prawy	
3	Liczba zwojów	k	
4	Kąt wzniosu zwojów	ζ	
5	Podziałka osiowa	p_{os}	
6	Podziałka normalna	p_n	
7	Skok zatoczenia	S	
8	Średnica zewn. freza	D_w	
9	Długość freza	L	
10	Liczba ostrzy	Z	
11	Kierunek linii rowków wiórowych	lewy	
12	Kąt pochylenia linii rowków wiórowych	γ_p	
13	Skok linii rowków wiórowych	S_r	



Rys. 8.18. Kształt i zasady wymiarowania zespołu narzędzi frez ślimakowy – nóż kształtowy:
a) widok freza (parametry konstrukcyjne freza podano w tabeli 8.1), b) widok noża

przez zataczanie ich powierzchni przyłożenia specjalnym nożem kształtowym (rys. 8.18b). Rozwiązanie konstrukcyjne noża jest ściśle powiązane z rozwiązaniem konstrukcyjnym freza (rys. 8.19). Krok 1 polega na wyznaczeniu zarysu krawędzi skrawającej freza. Wykorzystuje się do tego celu metodę wykreślną, która polega na odtaczaniu po prostej tocznej koła o zarysie cykloidalnym, zaprojektowanym według rozdziału 6. Uzyskuje się w ten sposób rodzinę zarysów cykloidalnych. Obwiednia do rodziny zarysów cykloidalnych stanowi zarys krawędzi skrawającej freza w przekroju normalnym. Krok 2 polega na dopełnieniu (uzupełnieniu) zarysu krawędzi skrawającej freza w przekroju normalnym i uzyskaniu tym samym krawędzi skrawającej noża w

przekroju normalnym. Krok 3 polega na przetransformowaniu zarysu krawędzi skrawającej noża w przekroju normalnym na oś wzdłużną i uzyskaniu zarysu krawędzi skrawającej noża w przekroju osiowym. Wartości współrzędnych, opisujących krawędzie skrawające freza i noża, zestawiono w tabeli 8.2.

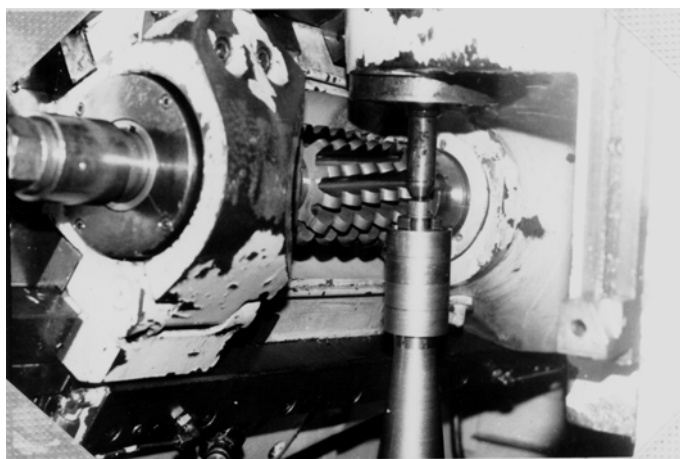


Rys. 8.19. Sposób kształtowania krawędzi skrawającej freza i noża (współzależność wymiarów przedstawiono w tabeli 8.2)

Nacinanie uzębienia za pomocą freza ślimakowego pokazano na rysunku 8.20. Wykorzystuje się do tego specjalną frezarkę. Przygotowane uprzednio pierścienie w postaci pakietu osadza się na pionowym trzpieniu frezarki. Frez ślimakowy osadzony na ukośnie usytuowanym suporcie narzędziowym obraca się wokół osi własnej oraz przemieszcza w pionie, nacinając uzębienie na całym pakiecie. Zarys uzębienia

Tabela 8.2. Współrzędne krawędzi skrawającej freza i noża (rys. 8.19)

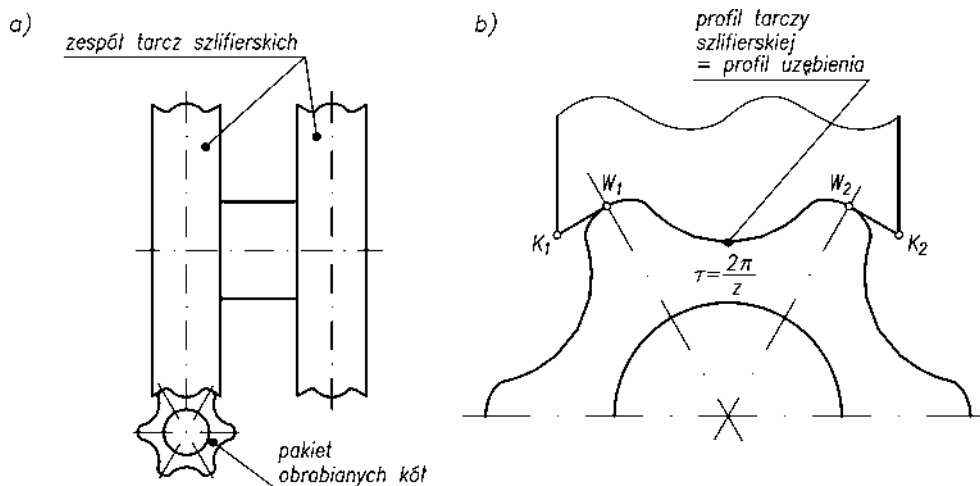
Krok 1		Krok 2		Krok 3				
Współrzędne profilu freza w przekroju normalnym		Współrzędne profilu noża w przekroju normalnym		Współrzędne profilu noża w przekroju osiowym				
	X_{Fn}	Y_{Fn}		X_{Nn}	Y_{Nn}		X_{No}	Y_{No}
0_{Fn}			0_{Nn}			0_{No}		
1_{Fn}			1_{Nn}			1_{No}		
2_{Fn}			2_{Nn}			2_{No}		
3_{Fn}			3_{Nn}			3_{No}		
4_{Fn}			4_{Nn}			4_{No}		
5_{Fn}			5_{Nn}			5_{No}		
6_{Fn}			6_{Nn}			6_{No}		



Rys. 8.20. Obróbka wstępna koła o uzębieniu zewnętrznym cykloidalnym 3. rodzaju metodą frezowania obwiedniowego

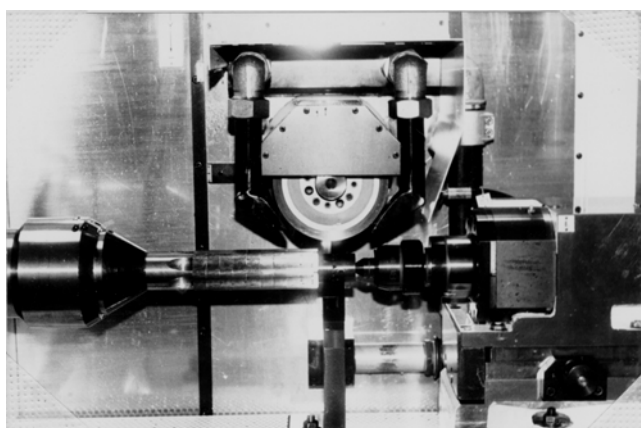
wykonuje się z naddatkiem wynoszącym około 0,2 mm na stronę. Jest on pozostawiony na obróbkę wykańczającą, prowadzoną po obróbce ciepno-chemicznej, która z kolei ma zapewnić dużą twardość powierzchni uzębienia, wynoszącą 60 HRC.

Obróbkę wykańczającą koła o uzębieniu zewnętrznym można prowadzić metodą szlifowania kształtowo-podziałowego z wykorzystaniem zespołu tarcz szlifierskich borazonowych (rys. 8.21a) [62, 63]. Profil tarczy szlifierskiej projektuje się w ścisłym powiązaniu z profilem uzębienia cykloidalnego (rys. 8.20b). Rozważa się wklęsły fragment uzębienia W_1W_2 pomiędzy wierzchołkami dwóch sąsiednich zębów, obejmujący wrąb tego zęba. Odpowiednio do niego kształtuje się wypukły profil tarczy szlifierskiej w formie krzywej ściśle przylegającej do zarysu uzębienia W_1W_2 . Dodatkowo profil ten przedłuża się o fragmenty K_1W_1 i K_2W_2 w formie odcinków prostej. Ma to zapewnić ścisłe przyleganie ściernicy do wierzchołków szlifowanego koła.



Rys. 8.21. Zasady obróbki wykańczającej koła o uzębieniu zewnętrznym cykloidalnym 3. rodzaju metodą szlifowania: a) zasada szlifowania, b) kształt profilu tarczy szlifierskiej

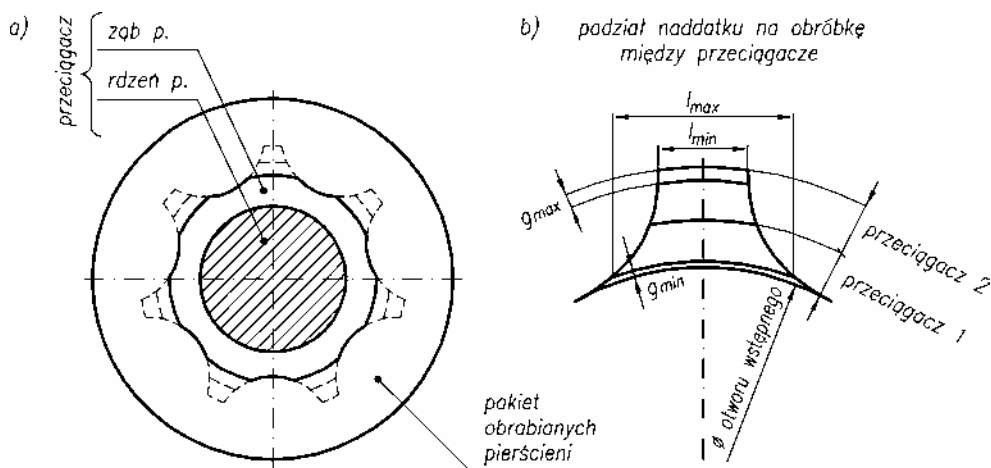
Szlifowanie kół uzębionych zewnątrz za pomocą opisanych ściernic z wykorzystaniem specjalistycznej szlifierki przedstawiono na rysunku 8.22. Pakiet kół obrobnych wstępnie jest osadzony na trzpieniu uchwyconym z jednej strony w głowicy, a z drugiej jest on podparty kłmem. Na wrzecionie szlifierki jest osadzony zespół dwóch ściernic kształtowych (patrz rys. 8.21a). Pierwsza z nich szlifuje zarys wstępnie, druga zaś wykańczająco. Podczas szlifowania wykańczającego druga ściernica przemieszcza się w głąb materiału o wartość około 0,05 mm.



Rys. 8.22. Obróbka wykańczająca koła o uzębieniu zewnętrznym cykloidalnym 3. rodzaju metodą szlifowania kształtowego

Ruch podziałowy trzpienia, na którym zamontowano pakiet kół, uzyskuje się za pomocą bardzo dokładnej podzielnicy sprzężonej z głowicą. Do szlifowania uzębień zastosowano ściernice borazonowe. Zachowują one dużą stabilność kształtu i wymiarów, a jednocześnie nie wymagają profilowania powierzchni roboczej w trakcie obróbki. Po wykonaniu szlifowania partii kół narzędzia te są regenerowane.

W przypadku produkcji wielkoseryjnej kół o uzębieniu wewnętrznym obróbkę wstępną można prowadzić metodą przeciągania. Główny problem polega na zaprojektowaniu i wykonaniu odpowiedniego przeciągacza lub zespołu przeciągaczy [36, 37, 55, 62, 63, 67]. Jak pokazano na rysunku 8.23a koło o uzębieniu wewnętrznym traktuje się jako pierścien z otworem wielorowkowym. Zakłada się, że skrawanie odbywa się w głąb materiału za pomocą wierzchołkowej krawędzi skrawającej zęba, a krawędzie boczne dokonują kalibrowania. Głębokość przeciągania jest na ogół duża i wynosi do 10 mm na stronę. Przyjmując niezbyt duże grubości warstw skrawanych (~0,05 mm) otrzymuje się długie narzędzie około 2000 mm, którego wykonanie jest trudne i drogie, a eksploatacja bardzo kłopotliwa. W tej sytuacji można wykorzystać zespół dwóch przeciągaczy pracujących po sobie.



Rys. 8.23. Zasady obróbki wstępnej koła o uzębieniu wewnętrznym cykloidальnym 3. rodzaju metodą przeciągania a) zasada obróbki, b) podział nadmiaru materiału na przeciągacze

Zgodnie z zasadami konstrukcji przeciągaczy należy przyjmować stopniowo zwiększającą się grubość g skrawanych warstw odpowiednio do zmniejszającej się długości skrawania l tak, aby siła skrawania była mniej więcej stała (rys. 8.23b). Na rysunku widać, że nadatek skrawanego materiału podzielono na dwie części odpowiadające dwóm przeciągaczom. Zgodnie z podaną zasadą przeciągacz 1 skrawa z mniejszymi grubościami warstw (g_{\min}) na większej krawędzi (l_{\max}), natomiast przeciągacz 2 skrawa z większymi grubościami (g_{\max}) na mniejszych długościach krawędzi

(l_{\min}). Szczegółową budowę zespołu dwóch przeciągaczy przedstawiono na rysunku 8.24. W przeciągaczu 1 (rys. 8.24a) wyróżnia się chwyt przedni, część prowadzącą (do przekroju $A-A$), ostrza skrawające (pomiędzy przekrojami $A-A$ i $B-B$) oraz ostrza zapasowe i podparcie tylne (za przekrojem $B-B$). Ostrza przeciągaczy charakteryzują się stopniowo rosnącą średnicą D (rys. 8.24b) oraz stopniowo rosnącą wysokością h (rys. 8.24c). W związku z rosnącą wysokością h muszą one mieć poszerzoną podstawę. Pomiędzy zębami i ostrzami znajdują się głębokie rowki wiórowe, które mogą pomieścić skrawany materiał. Sposób wymiarowania ostrzy i zębów przedstawiono na rysunku 8.24b i c.

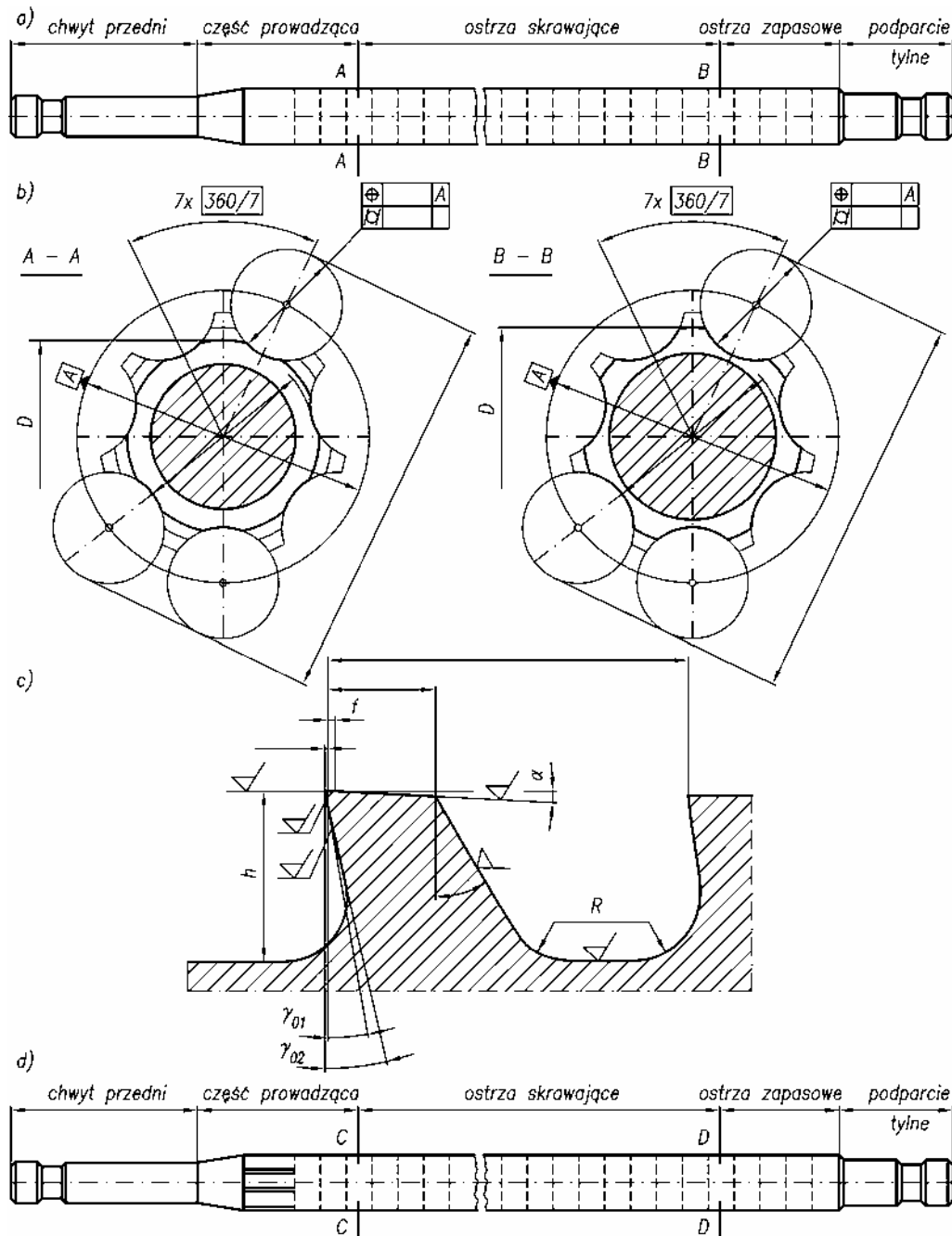
Przeciągacz 2, pokazany na rysunku 8.24d, jest zbudowany w podobny sposób jak przeciągacz 1. Cechą charakterystyczną przeciągacza 2 jest kształt i wymiary ostrzy w części prowadzącej (do przekroju $C-C$), odpowiadające kształtowi i wymiarom ostatnich ostrzy przeciągacza 1 (przekrój $B-B$).

W tabeli 8.3 zestawiono wymiary charakterystyczne ostrzy przeciągacza.

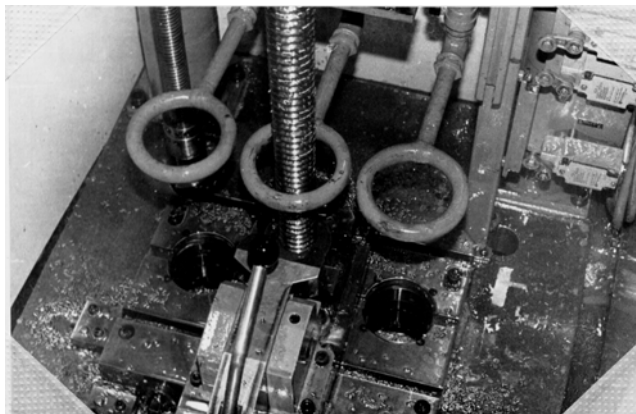
Tabela 8.3. Sposób wymiarowania ostrzy przeciągaczy, pokazanych na rysunku 8.24.

Przeciągacz 1						Przeciągacz 2					
Nr ostrza	D	Odchyłka	α	f		Nr ostrza	D	Odchyłka	α	f	
1					Ostrza skrawające (przekrój $A-A$)	1					Ostrza skrawające (przekrój $C-C$)
72						55					
73						56					
					Ostrza zapasowe (przekrój $B-B$)						Ostrza zapasowe (przekrój $D-D$)
77						60					

Wykonanie uzębień wewnętrznych kół cykloidalnych 3. rodzaju metodą przeciągania przedstawiono na rysunku 8.25. Wykorzystano do tego celu przeciągarce pionową. Pakiet kół obrabianych wstępnie zamocowany jest w specjalnym uchwycie, a narzędzie przemieszcza się w nim pionowo w dół, nacinając uzębienie wewnętrzne.

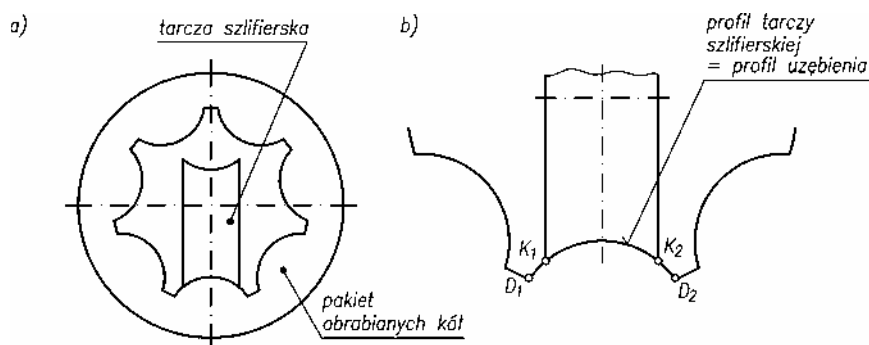


Rys. 8.24. Zespół przeciągaczy do obróbki wstępnej koła o uzębieniu wewnętrznym cykloidalnym 3. rodzaju: a) przeciągacz 1, b), c) kształty i zasady wymiarowania ostrzy przeciągacza oraz zęba (sposób wymiarowania przeciągacza przedstawiono w tabeli 8.3), d) przeciągacz 2



Rys. 8.25. Obróbka wstępna koła o uzębieniu wewnętrznym cykloidalnym 3. rodzaju metodą przeciągania

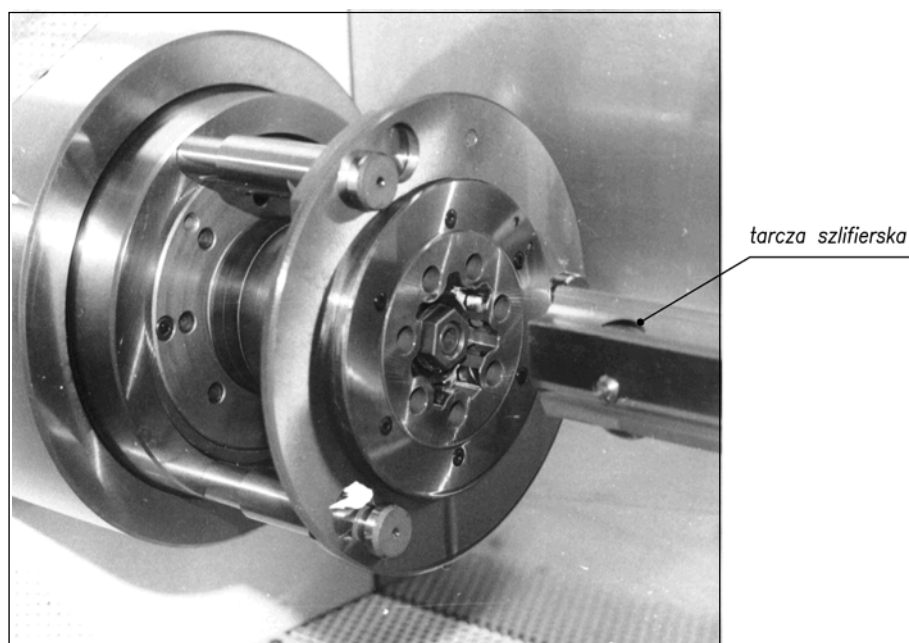
Obróbkę wykańczającą koła o uzębieniu wewnętrznym można, podobnie jak w uzębieniu zewnętrznym, prowadzić metodą szlifowania kształtowo-podziałowego z wykorzystaniem ściernic borazonowych (rys. 8.26a) [62, 63]. Podobnie profil tarczy szlifierskiej projektuje się w ścisłym powiązaniu z profilem uzębienia wewnętrznego (rys. 8.26b). Uwzględnia się przy tym wypukły zarys zęba uformowany pomiędzy D_1D_2 . Odpowiednio do niego formuje się wklęsły profil tarczy szlifierskiej w formie krzywej ściśle przylegającej do zarysu D_1D_2 . Szerokość ściernicy jest jednak mniejsza, tak że punkty końcowe profilu ściernicy K_1K_2 nie dochodzą do punktów końcowych zarysu zęba D_1D_2 . W związku z tym ząb nie jest szlifowany u samego dna wrębu na odcinkach K_1D_1 i K_2D_2 . Nie ma to jednak praktycznego znaczenia, ponieważ w tym rejonie nie zachodzi współpraca z zębem koła współpracującego o uzębieniu wewnętrznym.



Rys. 8.26. Zasady obróbki wykańczającej koła o uzębieniu wewnętrznym cykloidalnym 3. rodzaju metodą szlifowania kształtowego: a) zasada szlifowania, b) kształt profilu tarczy szlifierskiej

Szlifowanie kół uzębionych wewnętrznie za pomocą opisanych ściernic przedstawiono na rysunku 8.27. Również i w tym przypadku wykorzystuje się specjalistyczną szlifierkę zadaniową. Pakiet obrabianych kół osadza się na poziomym trzpieniu w osi głowicy. Trzpień ten jest wycofywany po zaciśnięciu pakietu za pomocą płyty dociskowej. Zarówno szlifowanie wstępne, jak i wykańczające odbywa się za pomocą tej samej ściernicy kształtowej (rys. 8.26a). W czasie szlifowania wykańczającego ściernica doznaje przemieszczenia w głąb materiału o wartość 0,05 mm. Również i w tym przypadku stosuje się ściernice borazonowe, zachowujące dużą stabilność kształtu i wymiarów, które po wykonaniu partii kół są regenerowane.

Opisane technologie obróbki skrawaniem wykorzystano do produkcji wielkoseryjnej kół cykloidalnych 3. rodzaju (rys. 8.28). Według nich wykonano koła epicykloidalne o uzębieniu zewnętrznym (rys. 8.28a, b) oraz koła epicykloidalne o uzębieniu wewnętrznym (rys. 8.28c).

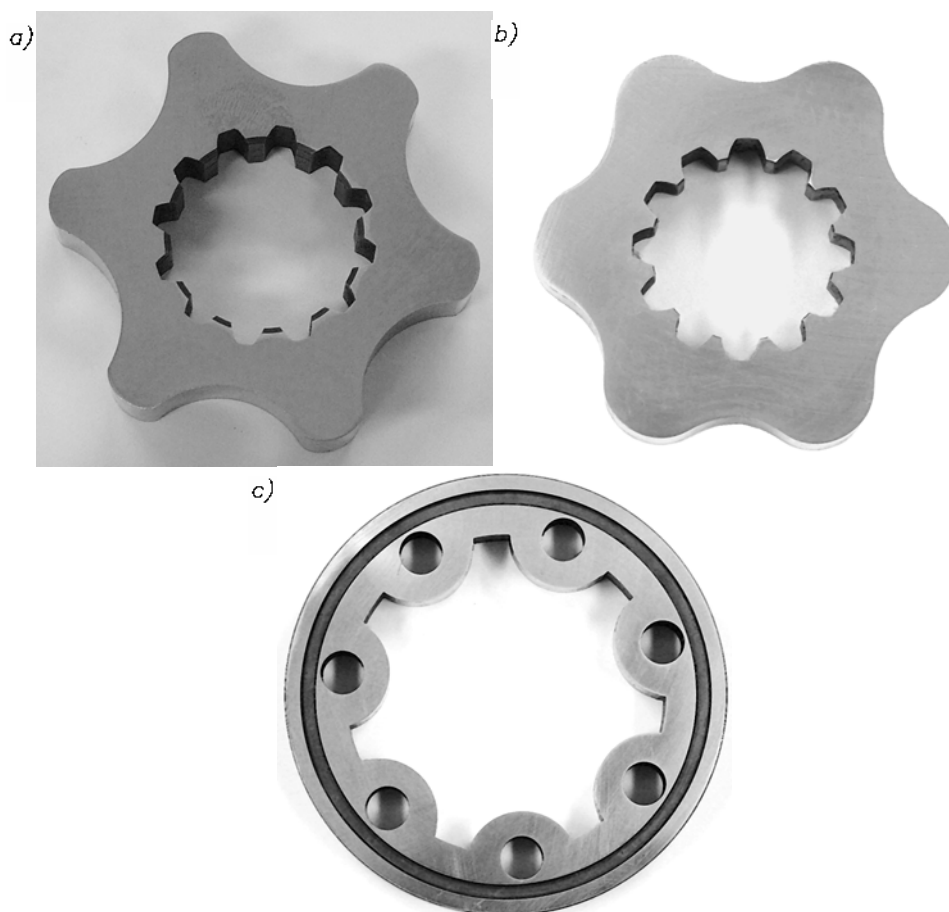


Rys. 8.27. Obróbka wykańczająca koła o uzębieniu wewnętrznym cykloidalnym 3. rodzaju metodą szlifowania kształtowego

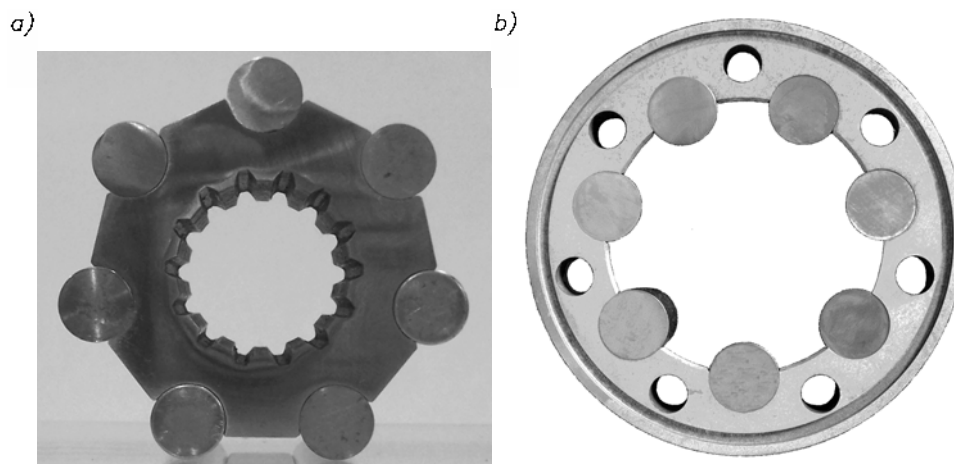
Jak podano w rozdziale 6.3, niektóre koła cykloidalne 3. rodzaju mają korygowane i modyfikowane zarysy. W takiej sytuacji uzębienie tych kół może być uformowane przez rolki. Gdy rolki stanowią uzębienie zewnętrzne koła (rys. 6.19c), wtedy najpierw wykonuje się tarczę koła, a w niej precyzyjne otwory, stanowiące gniazda dla rolek. Obróbkę można prowadzić m.in. na wiertarko-frezarkach sterowanych nume-

rycznie, które zapewniają dokładny podział pomiędzy gniazdami oraz dokładne ich rozmieszczenie na tej samej średnicy. Rolki wykonuje się jako odrębne elementy z zachowaniem dużej dokładności wymiarów i kształtu, co osiąga się przez szlifowanie ich powierzchni walcowej i płaszczyzn czołowych. Na koniec rolki montuje się w gniazdach tarczy koła.

Gdy rolki stanowią uzębienie wewnętrzne koła (rys. 6.15c), wtedy w wieńcu wykonuje się gniazda rolek. Można zastosować do tego celu metodę przeciągania. Tak jak poprzednio, rolki wykonuje się jako odrębne elementy, a następnie montuje się w gniazdach wieńca.



Rys. 8.28. Koła cykloidalne 3. rodzaju: a), b) koła epicykloidalne o uzębieniu zewnętrznym, c) koło epicykloidalne o uzębieniu wewnętrznym



Rys. 8.29. Koła cykloidalne 3. rodzaju a) koło hipocykloidalne o uzębieniu zewnętrznym, b) koło epicykloidalne o uzębieniu wewnętrznym

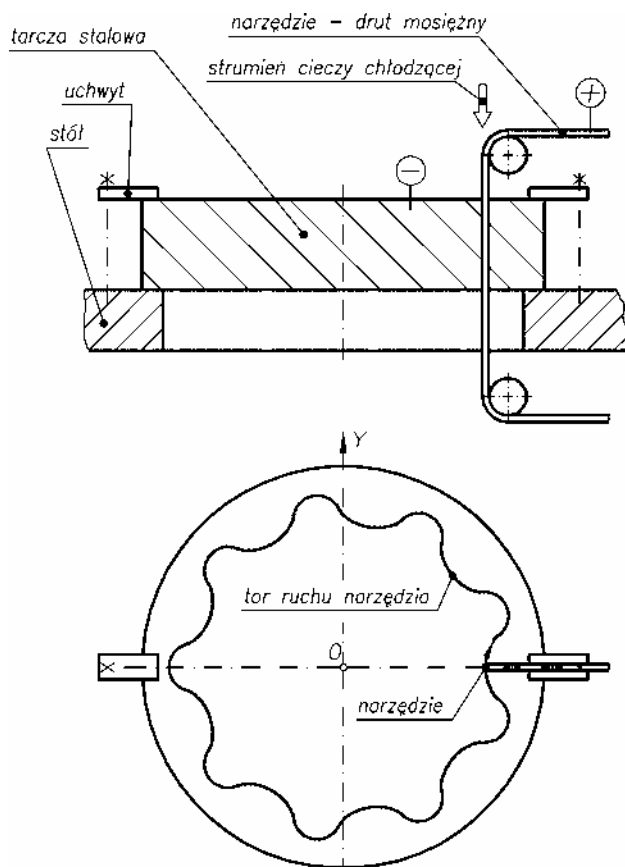
Opisane metody zastosowano do wykonania kół hipocykloidalnych o uzębieniu zewnętrznym pokazanych na rysunku 8.29a oraz epicykloidalnych o uzębieniu wewnętrznym pokazanych na rysunku 8.29b.

8.2.2. Technologia wykrawania elektroerozyjnego

Do wykonywania kół zębatych cykloidalnych stosuje się także technologię wykrawania elektroerozyjnego. Zasady prowadzenia tej obróbki przedstawiono za [72, 79] na rysunku 8.30. Tarczę stalową stanowiącą półfabrykat montuje się na stole elektrodrażarki. Narzędzie stanowi drut mosiężny, który przemieszcza się po torze odpowiadającym zarysowi uzębienia. Sterowanie ruchem narzędzia odbywa się za pomocą komputera elektrodrażarki, do którego wprowadza się współrzędne zarysu uzębienia wyznaczonej z równań podanych w rozdziale 6. W trakcie wykrawania dokonuje się chłodzenia obrabianej powierzchni strumieniem cieczy. Dokładność wykonania kształtu i wymiarów uzębienia jest tym większa, im mniejsza jest prędkość wykrawania i im większa jest liczba przejść narzędzia. Stosując tę technologię, po kilku przejściach narzędzia można otrzymać profil uzębienia mieszczący się w polu tolerancji $\pm 0,02$ mm, o dokładności powierzchni Ra 1,25. Metodą tą można obrabiać półfabrykaty o dużej twardości, nawet powyżej 60 HRC.

Wykonywanie uzębienia cykloidalnego metodą wykrawania elektroerozyjnego przedstawiono na rysunku 8.31. Widać na nim pierścień z wyciętym uzębieniem, narzędzie oraz strumień cieczy chłodzącej. Technologia ta jest czasochłonna i stosunkowo kosztowna. Stosuje się ją do produkcji jednostkowej lub małoseryjnej. Można obniżyć koszty i zwiększyć wydajność procesu poprzez obróbkę kół w pakietach oraz

dobór właściwej prędkości wykrawania do zakładanej dokładności powierzchni. Korzystne w tej technologii jest to, że uzębienie uzyskuje się w wyniku jednej operacji prowadzonej na jednej maszynie.

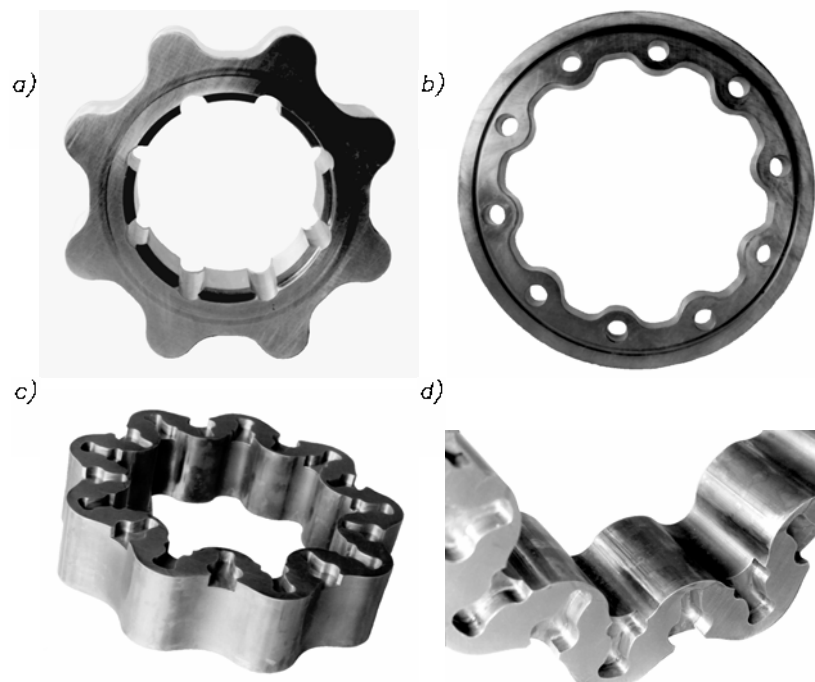


Rys. 8.30. Zasady obróbki koła o uzębieniu wewnętrznym cykloidalnym 3. rodzaju metodą wykrawania elektroerozyjnego

Technologię wykrawania elektroerozyjnego można stosować do wykonywania kół o zróżnicowanych średnicach. Na rysunku 8.32 przedstawiono koła o uzębieniach cykloidalnych i średnicach 200–300 mm, wykonane tą technologią. Są to koła o uzębieniu hipocykloidalnym (rys. 8.32a), epicykloidalnym (rys. 8.32b), jak też o uzębieniu podwójnym epicykloidalno-hipocykloidalnym (rys. 8.32c, d). Na rysunku 8.32d przedstawiono strukturę powierzchni uzębienia. Widać na niej wzdłużne rysy utworzone w trakcie procesu wykrawania elektroerozyjnego. Nie są one jednak na tyle istotne, aby w decydujący sposób wpływać na pracę zespołu kół.

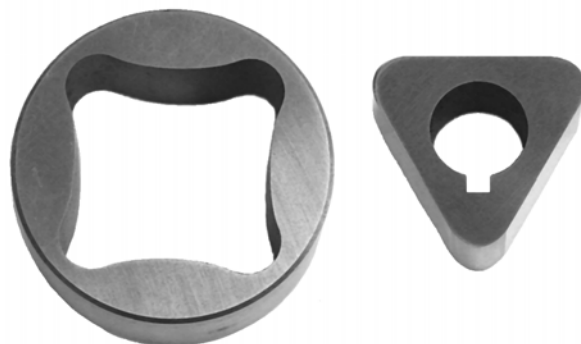


Rys. 8.31. Obróbka koła o uzębieniu wewnętrznym cykloidalnym 3. rodzaju prowadzona metodą wykrawania elektroerozyjnego



Rys. 8.32. Wielkogabarytowe koła cykloidalne 3. rodzaju wykonane metodą wykrawania elektroerozyjnego: a) koło o uzębieniu hipocykloidalnym, b) koło o uzębieniu epicykloidalnym, c) koło o podwójnym uzębieniu epicykloidalno-hipocykloidalnym, d) widok powierzchni uzębienia

Technologię wykrawania elektroerozyjnego zastosowano również do wykonywania zespołu kół cykloidalnych o małych średnicach, wynoszących 30–40 mm. Widoki takich kół o uzębieniu zewnętrznym i wewnętrznym przedstawiono na rysunku 8.33.

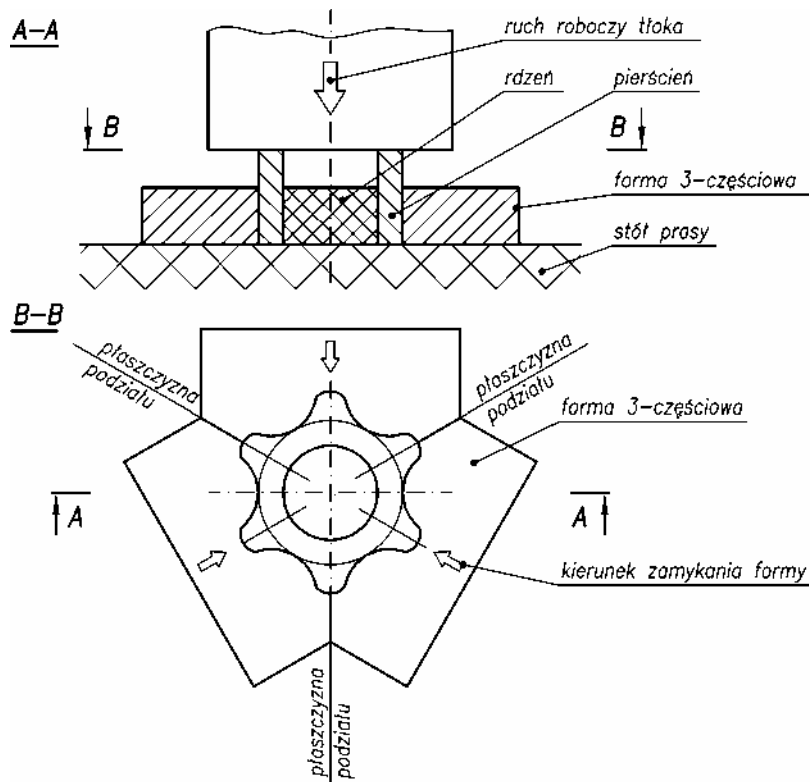


Rys. 8.33. Małogabarytowe koła cykloidalne 3. rodzaju wykonane metodą wykrawania elektroerozyjnego

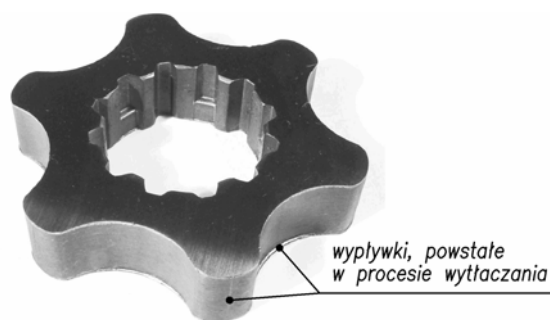
8.2.3. Inne technologie

Powszechnie stosowaną obróbkę skrawaniem można w niektórych etapach zastąpić innymi technologiami. Przyczyną takich działań jest dążenie do uproszczenia procesu, ograniczenia stosowania specjalistycznych maszyn i narzędzi, i obniżenia kosztów. Przykładem jest zastąpienie obróbki skrawaniem, stosowanej do wytwarzania koła o uzębieniu epicykloidalnym zewnętrznym (rys. 8.28a), metodą obróbki plastycznej. Istotą tej technologii przedstawiono na rysunku 8.34. Polega ona na wytłaczaniu kół na prasie. Na stole prasy jest zamontowana 3-częściowa forma, której gniazdo odwzorowuje kształt uzębienia cykloidalnego. W centrum formy umieszczony jest rdzeń, na którym montuje się pierścień, stanowiący materiał wyjściowy do tłoczenia. Następnie formę zamyka się. Materiał pierścienia, który wystaje ponad formę, jest odkształcany plastycznie i wypełnia ściśle gniazdo formy, tworząc uzębienie koła. Na zakończenie procesu wycofuje się tłok i po otwarciu formy wyjmuje z gniazda ukształtowane koło. Koło wykonane opisaną technologią wytłaczania pokazano na rysunku 8.35.

Wytłaczanie uzębienia koła można potraktować jako obróbkę wstępną. W wyniku tej obróbki powierzchnia uzębienia jest wykonana ze stosunkowo dużą dokładnością odpowiadającą dokładności uzyskanej w wyniku frezowania. Jednak na bokach koła na krawędziach zarysu oraz na wierzchołkach zębów, w miejscach odpowiadających płaszczyznom podziału formy, występują nieznaczne wypływkę. Likwiduje się je w procesie obróbki wykańczającej metodą szlifowania kształtowego (rys. 8.21).



Rys. 8.34. Zasady obróbki wstępnej koła cykloidalnego 3. rodzaju metodą wylączania



Rys. 8.35. Koło epicykloidalne 3. rodzaju wykonane metodą wylączania

Do wielkoseryjnego wytwarzania kół cykloidalnych można również zastosować technologię proszków. Dotyczy to szczególnie kół o bardziej skomplikowanych kształtach i niezbyt dużych wymiarach. Do tego celu konieczne jest wcześniejsze zaprojektowanie i wykonanie odpowiedniej formy odwzorowującej uzębienia kół.

Kształt i wymiary takiej formy projektuje się wykorzystując wzory, opisujące uzębienia cykloidalne podane w rozdziale 6, zarówno dla kół o uzębieniu zewnętrznym, jak i wewnętrznym. Do form wprowadza się proszek stalowy z dodatkami innych metali, jak nikiel i molibden. Następnie dokonuje się prasowania i spiekania. Gęstość materiału po zaprasowaniu jest stosunkowo duża i wynosi powyżej 7 g/cm^3 , przy czym bliżej rdzenia zębów jest nieco większa, na obwodzie zaś nieco mniejsza. Stopień wypełnienia objętości koła przez materiał wynosi powyżej 90%. Powierzchnia uzębienia jest gładka i czysta, a dokładność jej wykonania jest porównywalna z dokładnością uzyskaną po szlifowaniu. Struktura powierzchni jest bezkierunkowa i nie widać praktycznie żadnych śladów obróbki. Jest to istotna różnica w stosunku do struktury jednokierunkowej równoległej, otrzymanej na powierzchniach obrabianych metodą szlifowania (patrz rys. 8.21, 8.22, 8.26, 8.27). Ta bezkierunkowa struktura powierzchni kół współpracujących oraz właściwości tłumiące materiału są powodem mniejszej hałaśliwości pracy kół wykonanych technologią proszków w porównaniu do kół wykonanych metodami obróbki skrawaniem. Widok zespołu kół cykloidalnych 3. rodzaju o zazębieniu wewnętrznym, wykonanych technologią proszków pokazano na rysunku 8.36.



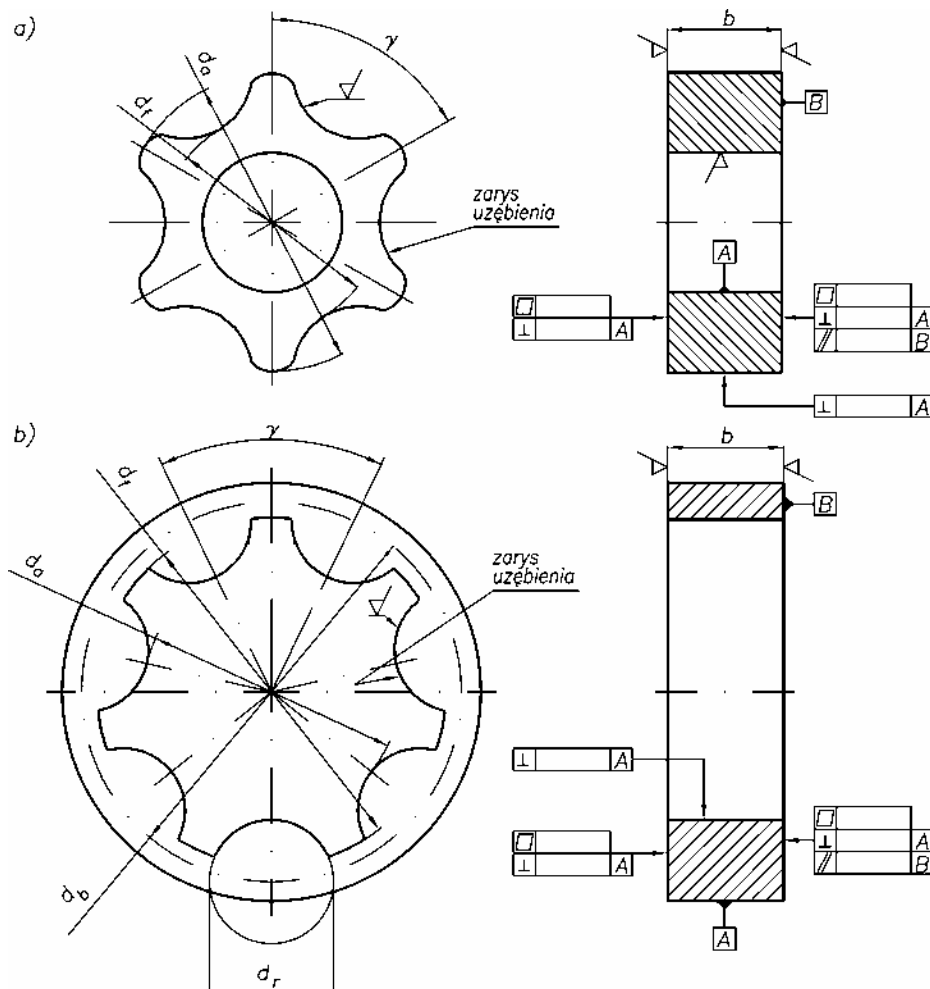
Rys. 8.36. Zespół kół o zazębieniu epicykloidalnym 3. rodzaju wykonanych metodą spiekania proszków

8.3. Sprawdzanie kół zębatych

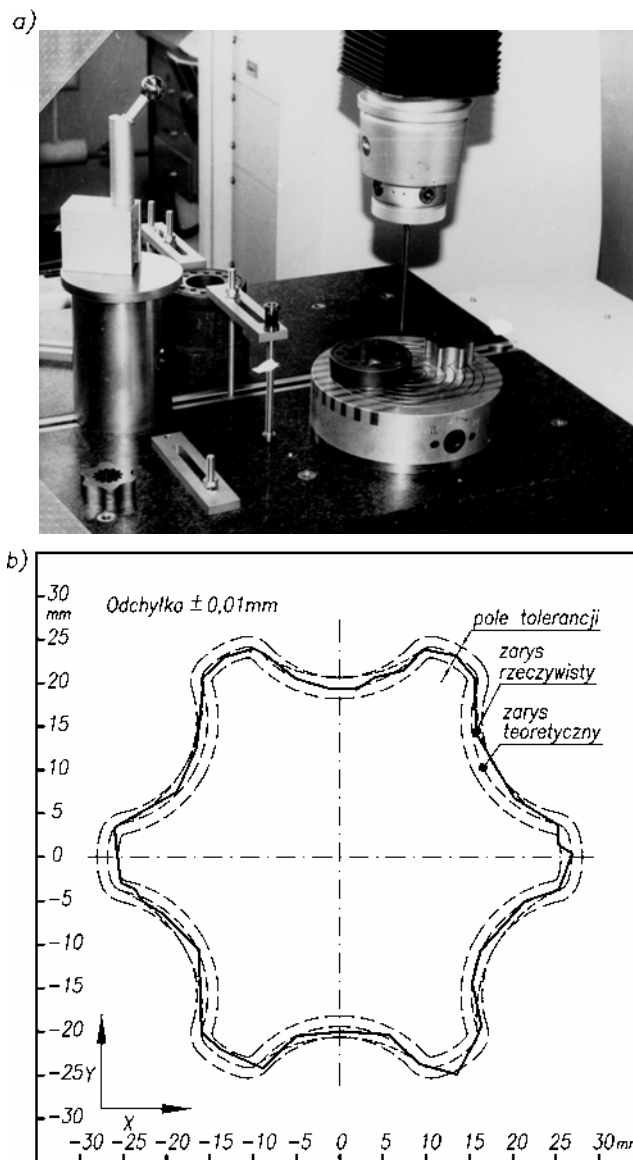
Sprawdzanie kół zębatych ewolwentowych jest w zasadzie czynnością rutynową, prowadzoną na podstawie norm. Inna sytuacja występuje w przypadku kół cykloidalnych. Nie ma norm, które określałyby parametry wymagające sprawdzania ich dopuszczalnych wartości oraz sposób dokonywania pomiarów. Jednak w praktyce we-

ryfikacja taka jest prowadzona [53]. Przykładowo opisano proces sprawdzania zespołu kół o zazębieniu epicykloidalnym korygowanym i modyfikowanym, którego kształt teoretyczny przedstawiono na rysunku 8.13c. Parametry charakterystyczne, które należy sprawdzić, zaznaczono schematycznie na rysunku 8.37. Można wyróżnić następujące grupy parametrów:

- wymiary podstawowe (średnica wierzchołków d_a , średnica stóp d_f , podziałka kątowna γ , szerokość zęba b),
- wymiary opisujące zarys uzębienia,
- odchyłki kształtu i położenia oraz chropowatość powierzchni.



Rys. 8.37. Parametry konstrukcyjne kół epicykloidalnych 3. rodzaju podlegające sprawdzeniu:
a) dla koła o uzębieniu zewnętrznym, b) dla koła o uzębieniu wewnętrznym



Rys. 8.38. Sprawdzanie kół epicykloidalnych 3. rodzaju za pomocą maszyny pomiarowej PMM654 firmy Leitz: a) widok stołu granitowego z zamontowanymi kołami oraz głowicą pomiarową, b) wyniki pomiarów uzębienia koła

Wymiary podstawowe oraz wymiary opisujące zarys wynikają bezpośrednio z kształtu geometrycznego kół, a jednocześnie mają bezpośrednie odniesienie do praktyki technicznej.

Kompleksowego sprawdzenia tych wymiarów można dokonać, wykorzystując maszynę pomiarową [62, 63]. Jak pokazano na rysunku 8.38a – sprawdzane koła mocuje się w specjalnym uchwycie magnetycznym, posadowionym na granitowym stole pomiarowym. Uzębienie sprawdza się czujnikiem stykowym osadzonym w ruchomej głowicy. Z maszyną współpracuje odpowiednio zaprogramowany komputer, do którego wprowadza się dane, określające sposób przeprowadzenia pomiarów, nominalne wartości parametrów uzębienia wraz z odchyłkami, a także procedurę opracowania wyników pomiarów. Maszyny takie umożliwiają zasadniczo pomiary z dokładnością 1 μm . W rezultacie wyznacza się wartości wymiarów podstawowych, a przede wszystkim rzeczywisty zarys uzębienia.

Przykładowe wyniki pomiarów zarysu uzębienia zewnętrznego epicykloidalnego korygowanego pokazano na rysunku 8.38b. Teoretyczny zarys uzębienia zaznaczono linią kreskową. Po obu jego stronach wykreślono także linią kreskową pole tolerancji, określone odchyłką $\pm 0,01$ mm. Na tym tle przedstawiono rzeczywisty zarys uzębienia w formie łamanej linii ciągłej. Z przytoczonych pomiarów widać, że koło zębate jest wykonane prawidłowo, gdyż profil rzeczywisty mieści się w polu tolerancji. Zarys koła o uzębieniu wewnętrznym sprawdza się podobnie, ale gdy uzębienie jest ukształtowane w formie łuków okręgu lub rolek (rys. 6.13c), można dodatkowo podać średnicę ich osadzenia d_b oraz średnicę łuku (rolki) d_r (rys. 8.37b). W przypadku innych zespołów kół cykloidalnych 3. rodzaju, opisanych w rozdziale 6, postępuje się podobnie.

9. Przekształcenia energii w zębatych maszynach hydraulicznych

9.1. Zasada działania maszyn hydraulicznych

Ze względu na funkcje spełniane w układzie hydraulicznym maszyny zębate można podzielić na dwie zasadnicze grupy – pompy i silniki. W obu grupach maszyn zęby, koła i zespoły kół odgrywają zasadniczą rolę, są bowiem wykorzystywane do przetwarzania energii.

W przypadku pompy (rys. 9.1) zespół kół zębatych, napędzany silnikiem S , przetłacza czynnik roboczy od otworu wejściowego (ssawnego) WE do wyjściowego (tłocznego) WY . W związku z tym energia mechaniczna ruchu obrotowego silnika E_{mech} jest zamieniana na energię hydrauliczną ciśnienia E_{hydr} , zakumulowaną w czynniku roboczym. Ponieważ pompa generuje energię hydrauliczną ciśnienia, dlatego często jest nazywana generatorem.

Przyjmując, że pompa stanowi układ zamknięty i nie wymienia energii z otoczeniem, można zgodnie z zasadą zachowania energii zapisać, że $E_{\text{mech}} = E_{\text{hydr}}$. Rozwijając tę zasadę i wykorzystując [8, 40], otrzymuje się

$$M_{gt} \varphi_g = V_{gt} \Delta p_g \quad (9.1)$$

gdzie M_{gt} – teoretyczny moment napędowy na wale pompy (moment generatora), φ_g – kąt obrotu wału pompy, V_{gt} – objętość teoretyczna czynnika roboczego wytłoczonego z pompy, $\Delta p_g = p_{wy} - p_{we}$ – różnica ciśnień na wyjściu p_{wy} i wejściu pompy p_{we} , czyli różnica ciśnień tłoczenia i ssania.

Po zróżniczkowaniu względem czasu równanie (9.1) przyjmuje formę

$$M_{gt} \frac{d\varphi_g}{dt} = \frac{dV_{gt}}{dt} \Delta p_g \quad (9.2)$$

W rezultacie otrzymuje się wzór

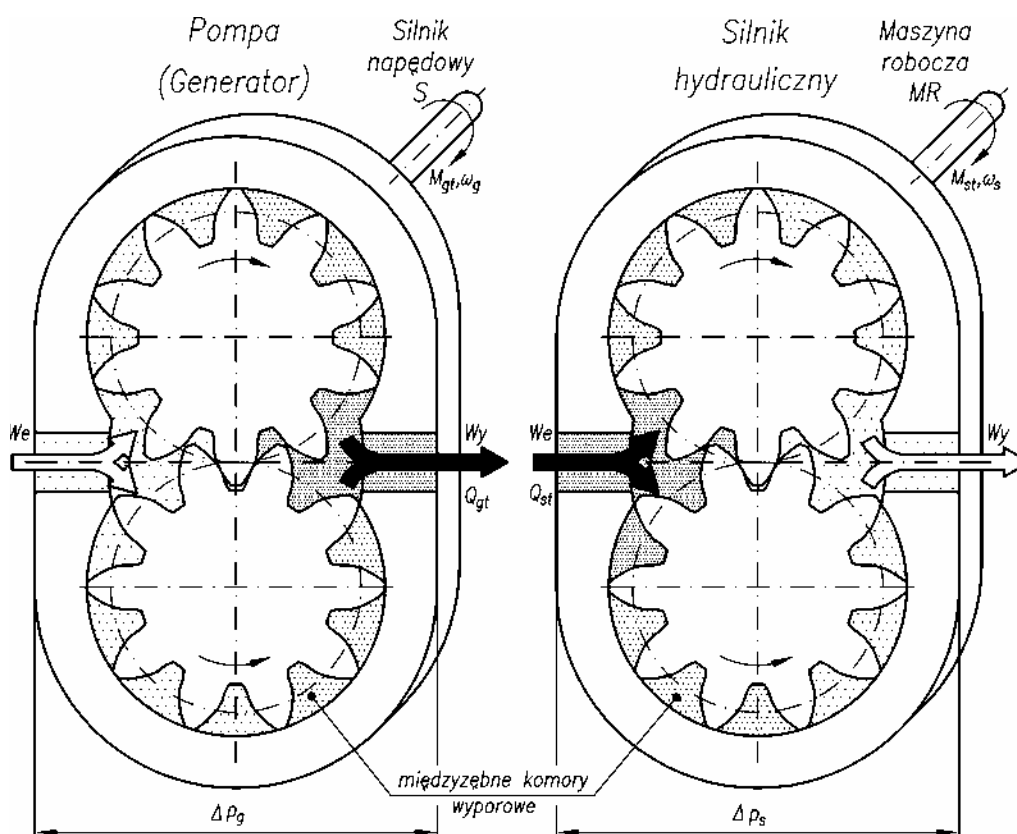
$$M_{gt} \omega_g = Q_{gt} \Delta p_g \quad (9.3)$$

gdzie ω_g – prędkość kątowa wału pompy, Q_{gt} – natężenie przepływu, wytworzone przez pompę, czyli teoretyczna wydajność pompy.

Zgodnie z definicją podaną w [40], teoretyczną wydajność pompy Q_{gt} , bez uwzględniania strat objętościowych, określa się zależnością:

$$Q_{gt} = q_g n_g \quad (9.4)$$

gdzie q_g – wydajność właściwa, rozumiana jako maksymalna, możliwa do osiągnięcia wydajność czynnika roboczego wyrażona w cm^3 , jaką uzyskuje się w pompie rzeczywistej po jednym obrocie wałka pod ciśnieniem tłoczenia równym ciśnieniu ssania $\Delta p_g = p_{wy} - p_{we} = 0$, a więc bez strat objętościowych, n_g – prędkość obrotowa wału pompy.



Rys. 9.1. Zasada działania pompy hydraulicznej (generatora) i silnika hydraulicznego zębatego

Po podstawieniu do wzoru (9.3) zależności (9.4) i uwzględnieniu, że $\omega_g = 2\pi n_g$ i dokonaniu przekształceń, otrzymuje się wzór na moment teoretyczny na wale pompy M_{gt} w zależności od jej wydajności właściwej q_g i różnicy ciśnień Δp_g

$$M_{gt} = \frac{q_g}{2\pi} \Delta p_g \quad (9.5)$$

Odmianą rolę spełniają koła zębate w silniku hydraulicznym. Jak pokazano na rysunku 9.1, czynnik roboczy przepływając od otworu wejściowego *WE* (zasilającego) do wyjściowego *WY* (spływowego) wprawia w ruch obrotowy koła zębate, które poprzez wał napędzają maszynę roboczą *MR*. W tej sytuacji energia hydrauliczna magazynowana w czynniku roboczym jest zamieniana na energię mechaniczną ruchu obrotowego.

Zakładając silnik idealny, który pracuje bez strat, można sformułować przez analogię do pomp równanie

$$M_{st} \omega_s = Q_{st} \Delta p_s \quad (9.6)$$

gdzie M_{st} – teoretyczny moment dyspozycyjny na wale silnika (moment silnika), ω_s – prędkość kątowna wału silnika, Q_{st} – natężenie przepływu cieczy przepływającej przez silnik, czyli teoretyczna chłonność silnika, $\Delta p_s = p_{we} - p_{wy}$ – różnica ciśnień na wejściu p_{we} i wyjściu p_{wy} silnika, czyli różnica ciśnień zasilania i spływu.

Chłonność teoretyczną silnika Q_{st} , bez uwzględniania strat objętościowych, określa się zależnością:

$$Q_{st} = q_s n_s \quad (9.7)$$

gdzie q_s – chłonność właściwa, rozumiana jako minimalna objętość czynnika roboczego wyrażona w cm^3 , jaką należy dostarczyć do silnika, aby jego wał wykonał jeden obrót, pod ciśnieniem zasilania równym ciśnieniu spływu $\Delta p_s = p_{we} - p_{wy} = 0$, n_s – prędkość obrotowa wału silnika.

Po podstawieniu do wzoru (9.6) zależności (9.7), uwzględniając, że $\omega_s = 2\pi n_s$ i dokonaniu podobnych przekształceń, jak w przypadku pomp, otrzymuje się wzór na moment dyspozycyjny na wale silnika M_{st} w zależności od jego chłonności właściwej q_s i różnicy ciśnień Δp_s

$$M_{st} = \frac{q_s}{2\pi} \Delta p_s \quad (9.8)$$

Z analizy wzorów (9.4), (9.5), (9.7) i (9.8) wynika, że podstawowe znaczenie podczas obliczeń związanych z transformacją energii ma wyznaczenie wydajności właściwej pompy q_p lub chłonności właściwej silnika q_s . Wprawdzie są to dwa różne parametry, gdyż odnoszą się do dwóch różnych stanów pracy maszyny zębatej (pracy pompowej i silnikowej), lecz charakter tych parametrów jest taki sam. Dotyczą one bowiem objętości q przepływającej przez maszynę zębatą w trakcie jednego obrotu wału.

Dla uproszczenia, dalsze analizy będzie się prowadzić po założeniu, że maszyny zębate pracują jako pompy. Będzie się więc używać określenia wydajność właściwa o symbolu q .

W związku z tym przeprowadzono systematyczną analizę, dążąc do ustalenia ogólnych wzorów na wydajność maszyn hydraulicznych, pracujących jako pompy, które uwzględniałyby:

- sposób współpracy kół zębatych w maszynie – maszyny o ustalonych i ruchomych osiach obrotu,
- rodzaj zazębienia – maszyny o zazębieniu zewnętrznym i wewnętrznym,
- zarys zęba – maszyny o zazębieniu ewolwentowym, cykloidalnym 1., 2. i 3. rodzaju.

Otrzymane zależności będą także obowiązywać, gdy maszyny zębate będą pracować jako silniki. Odpowiednio wyprowadzone wzory będą służyć do wyznaczania chłonności silników.

9.2. Wydajność chwilowa maszyn o ustalonych osiach obrotu

9.2.1. Maszyny o zazębieniu zewnętrznym

Na rysunku 9.2 przedstawiono model maszyny o ustalonych osiach obrotu kół, zazębieniu zewnętrznym oraz dowolnym zarysie zęba. Z zasady jej działania wynika, że przenoszenie cieczy z przestrzeni ssawnej do tłocznej jest realizowane zawsze przez jedną parę zębów. Zakładając, że jest to pompa idealna, a w związku z tym istnieje pełna szczelność na obwodzie i powierzchniach czołowych kół zębatych – można przyjąć, że oddzielenie przestrzeni tłocznej od ssawnej następuje wzdłuż linii $A_1O_1BO_2A_2$. Punkt przyporu B współpracujących zębów przemieszcza się podczas obrotu kół wzdłuż linii przyporu. Zakładając ponadto, że pompa tłoczy czynnik nieściśliwy bez strat tarcia, można przyjąć równoważność energii ciśnienia oraz pracy mechanicznej. Na podstawie równania (9.1) można napisać:

$$M_1 d\alpha_1 + M_2 d\alpha_2 = dq_u \Delta p \quad (9.9)$$

gdzie M_1, M_2 – momenty na kołach zębatych czynnym i biernym, $d\alpha_1, d\alpha_2$ – kąty obrotu kół czynnego i biernego, dq_u – elementarna objętość wytłoczona przy obrocie kół o kąt $d\alpha_1$ oraz $d\alpha_2$, Δp – różnica ciśnień na wejściu i wyjściu pompy równa w przybliżeniu ciśnieniu tłoczenia $\Delta p = p$.

Po założeniu, że oba koła w przestrzeni ograniczonej obrysem $A_1O_1BO_2A_2$ obciążone są jednakowo ciśnieniem tłoczenia, to przy szerokości kół b momenty na kołach będą miały wartość:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{11} - M_{12} \\ M_2 &= M_{21} - M_{22} \end{aligned} \quad (9.10)$$

Zgodnie z rysunkiem 9.2 momenty cząstkowe $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$ określone są zależnościami:

$$\begin{aligned}
M_{11} &= pb(r_{a1} - r_{f1}) \left(\frac{r_{a1} + r_{f1}}{2} \right) = \frac{pb}{2} (r_{a1}^2 - r_{f1}^2) \\
M_{12} &= pb(e_1 - r_{f1}) \left(\frac{e_1 + r_{f1}}{2} \right) = \frac{pb}{2} (e_1^2 - r_{f1}^2) \\
M_{21} &= pb(r_{a2} - r_{f2}) \left(\frac{r_{a2} + r_{f2}}{2} \right) = \frac{pb}{2} (r_{a2}^2 - r_{f2}^2) \\
M_{22} &= pb(e_2 - r_{f2}) \left(\frac{e_2 + r_{f2}}{2} \right) = \frac{pb}{2} (e_2^2 - r_{f2}^2)
\end{aligned} \tag{9.11}$$

gdzie b – szerokość kół zębatych, r_{a1} , r_{a2} – promienie kół wierzchołkowych, e_1 , e_2 – odległość punktu przyporu B od środków O_1 i O_2 kół zębatych.

Po przekształceniach, wzory (9.10) przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{pb}{2} (r_{a1}^2 - e_1^2) \\
M_2 &= \frac{pb}{2} (r_{a2}^2 - e_2^2)
\end{aligned} \tag{9.12}$$

Po podstawieniu równań (9.12) do wyrażenia (9.9) otrzymuje się:

$$dq_u p = \frac{pb}{2} \left[(r_{a1}^2 - e_1^2) d\alpha_1 + (r_{a2}^2 - e_2^2) d\alpha_2 \right] \tag{9.13}$$

Jak pokazano na rysunku 9.3, w przypadku zazębienia zewnętrznego o dowolnym zarysie odległości e_1 i e_2 wyznacza się z warunków zazębienia jako

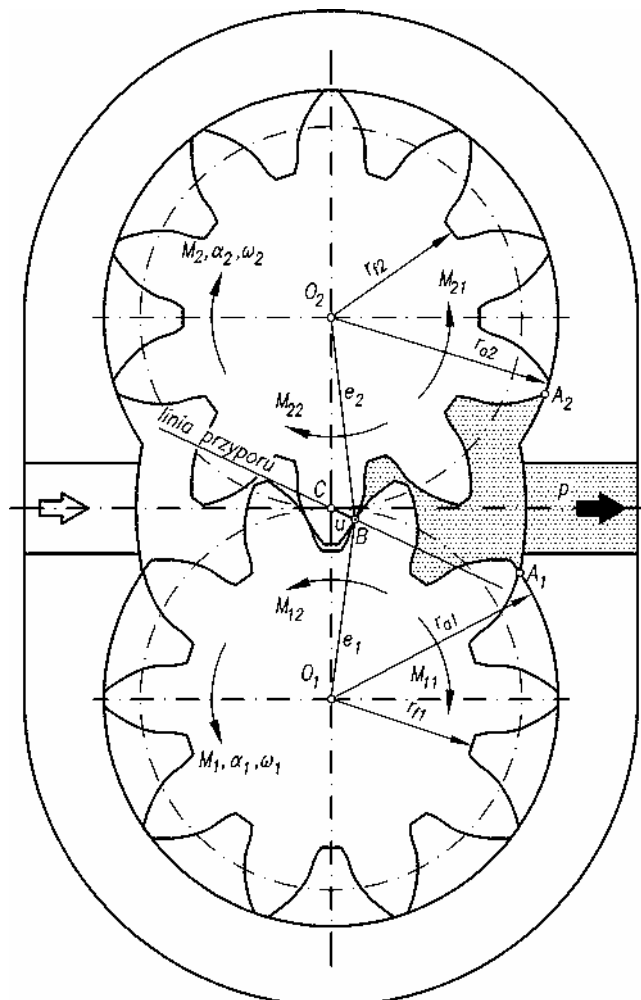
$$\begin{aligned}
e_1^2 &= (r_{w1} - s)^2 + k^2 = r_{w1}^2 - 2r_{w1}s + s^2 + k^2 = r_{w1}^2 - 2r_{w1}s + u^2 \\
e_2^2 &= (r_{w2} + s)^2 + k^2 = r_{w2}^2 + 2r_{w2}s + s^2 + k^2 = r_{w2}^2 + 2r_{w2}s + u^2
\end{aligned} \tag{9.14}$$

Jednocześnie przyjmuje się, że podczas pracy maszyny koła toczne przetaczają się po sobie bez poślizgu, a odpowiednie łuki na ich okręgach tocnych są sobie równe, czyli:

$$\alpha_1 r_{w1} = \alpha_2 r_{w2}$$

W związku z tym kąty obrotu obu kół powiązane są zależnością:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \frac{r_{w1}}{r_{w2}} \tag{9.15}$$



Rys. 9.2. Model maszyny zębatej o ustalonych osiach obrotu, zazębieniu zewnętrznym i dowolnym zarysie zęba

Po podstawieniu wzorów (9.14) i (9.15) do równania (9.13) otrzymuje się

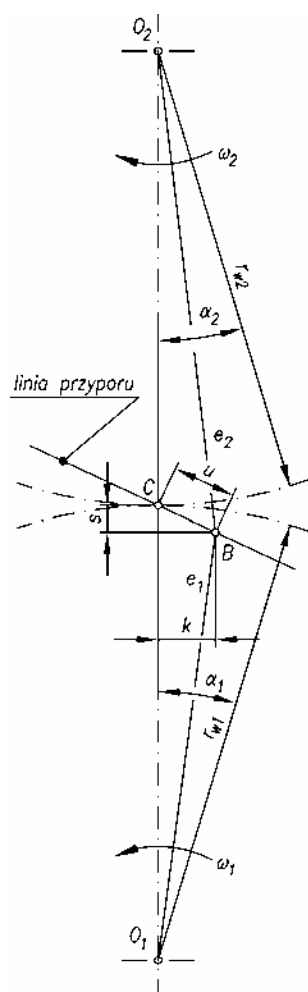
$$dq_u p = \frac{pb}{2} \times \left[\left(r_{a1}^2 - (r_{w1}^2 - 2r_{w1}s + u^2) \right) d\alpha_1 + \left(r_{a2}^2 - (r_{w2}^2 + 2r_{w2}s + u^2) \right) d\alpha_1 \frac{r_{w1}}{r_{w2}} \right] \quad (9.16)$$

Po przekształceniach otrzymuje się wzór, określający objętość elementarną, wytłoczoną podczas obrotu o kąt $d\alpha_1$:

$$dq_u = \frac{b}{2} \left[r_{a1}^2 + \frac{r_{w1}}{r_{w2}} r_{a2}^2 - r_{w1}(r_{w1} + r_{w2}) - \left(1 + \frac{r_{w1}}{r_{w2}} \right) u^2 \right] d\alpha_1 \quad (9.17)$$

Po podzieleniu tej zależności przez $d\alpha_1$ otrzymuje się wzór na wydajność chwilową Q_u pompy zębatej o zazębieniu zewnętrznym:

$$Q_u = \frac{dq_u}{d\alpha_1} = \frac{b}{2} \left[r_{a1}^2 + \frac{r_{w1}}{r_{w2}} r_{a2}^2 - r_{w1}(r_{w1} + r_{w2}) - \left(1 + \frac{r_{w1}}{r_{w2}} \right) u^2 \right] \quad (9.18)$$



Rys. 9.3. Wyznaczenie odległości e_1 i e_2 punktu przyporu B od środków O_1 i O_2 kół zębatych w zazębieniu zewnętrznym

Wydajność Q_u określa się jako chwilową, jak pokazano bowiem na rysunkach 9.2 i 9.3 zależy ona od chwilowego położenia punktu przyporu B względem bieguna zazębienia C , czyli od odległości u . Z kolei odległość u jest ściśle powiązana z kątem obrotu α_1 koła czynnego. Do wzoru (9.18) można zatem wprowadzić odpowiedni związek $u = f(\alpha_1)$ i powiązać wydajność chwilową Q_u z kątem obrotu koła czynnego α_1 . Wzór (9.18) jest ważny tylko w strefie współpracy zębów, określonej podziałką kątową.

Wzór na wydajność chwilową jest uniwersalny i może być stosowany w przypadku pomp o ustalonych osiach obrotu kół, zazębieniu zewnętrznym i dowolnym zarysie zęba. Rozpatrując konkretny zarys zębów należy we wzorze (9.18) uwzględnić odpowiednie promienie kół wierzchołkowych r_a i tocznych r_w oraz zależność opisującą odległość u punktu przyporu B od bieguna zazębienia C .

Jeśli maszyna pracuje jako silnik hydrauliczny (rys. 9.2), to wzór (9.18) służy do obliczania chłonności chwilowej silnika zębatego.

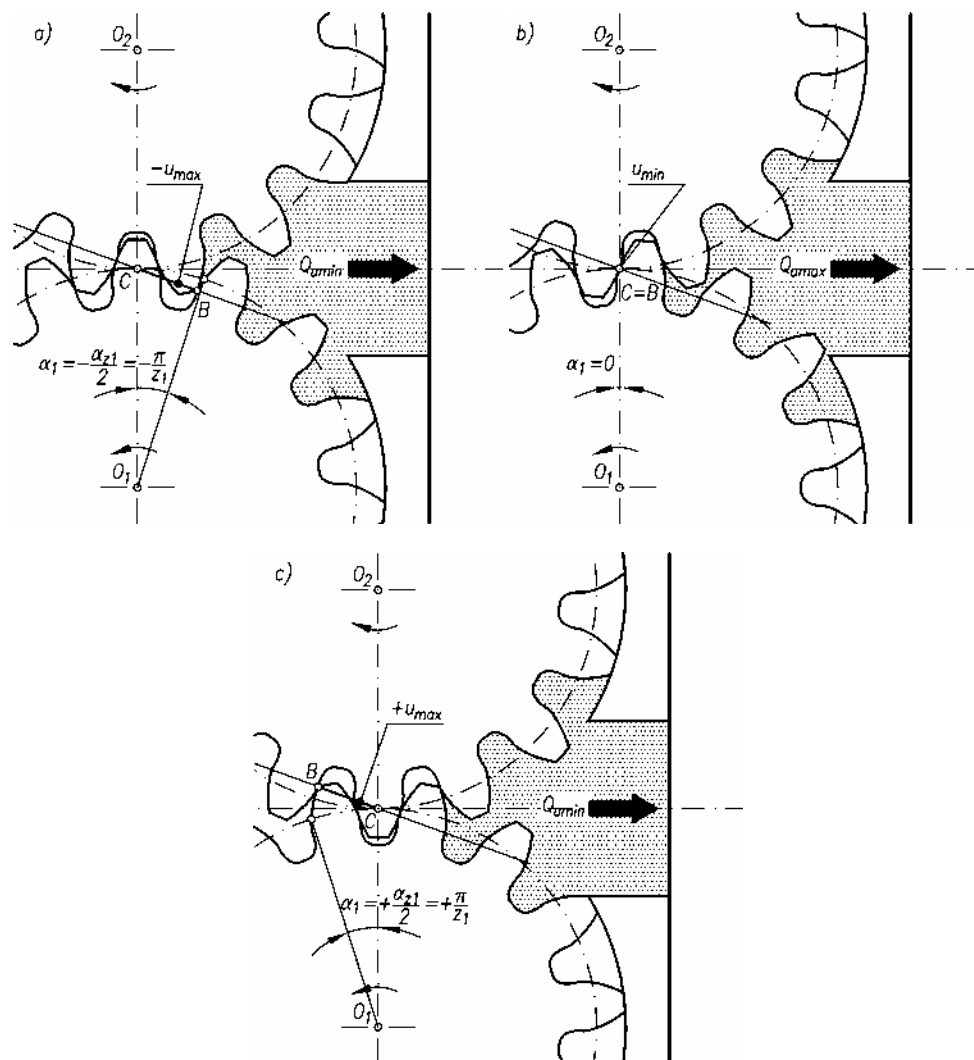
Jak już stwierdzono, wydajność Q_u zmienia się wraz z kątem obrotu α_1 koła czynnego oraz odległością punktu przyporu B względem bieguna zazębienia C . Na rysunku 9.4 widać, że w trakcie pracy pompy punkt przyporu B przemieszcza się z prawej na lewą stronę osi symetrii O_1O_2 i położonego na tej osi bieguna zazębienia C . Aby jednoznacznie ustalić położenie punktu B przyjmuje się odległość u i kąt obrotu α_1 ze znakiem ujemnym, gdy punkt B znajduje się z prawej strony osi i ze znakiem dodatnim, gdy punkt B znajduje się z lewej strony tej osi.

Odpowiednio przy wżębieniu (rys. 9.4a) punkt przyporu B znajduje się po prawej stronie osi O_1O_2 w maksymalnej odległości od bieguna zazębienia C równej $BC = -u_{\max}$. Położenie punktu B jest opisane kątem obrotu koła

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha_{z1}}{2} = -\frac{\pi}{z_1}$$

Przy takim położeniu kół, w przestrzeni tłocznej pompy znajdują się cztery międzyzębne komory wyporowe, przy czym dwie skrajne, położone najbliżej otworu tłoczego, wyparły już czynnik roboczy. W związku z tym wydajność chwilowa pompy przyjmuje wartość minimalną $Q_u = Q_{u \min}$.

W trakcie dalszej współpracy kół (rys. 9.4b) punkt przyporu B znajduje się w minimalnej odległości od osi O_1O_2 i bieguna zazębienia C równej $BC = u_{\min}$, a kąt obrotu koła $\alpha_1 = 0$. W tej sytuacji w przestrzeni tłocznej pompy znajduje się pięć międzyzębnych komór wyporowych, przy czym dwie skrajne wypierają właśnie czynnik roboczy do otworu tłoczego. W związku z tym wydajność chwilowa przyjmuje wartość maksymalną $Q_u = Q_{u \max}$.



Rys. 9.4. Zmiany wydajności chwilowej pompy Q_u w zależności od odległości u punktu przyproru B od punktu centralnego zążeń C : a) wydajność minimalna $Q_{u\min}$, b) wydajność maksymalna $Q_{u\max}$, c) wydajność minimalna $Q_{u\min}$

Ostatecznie, przy wyzębieniu (rys. 9.4c) punkt B znajduje się po lewej stronie osi O_1O_2 w maksymalnej odległości od bieguna C równej $BC = +u_{\max}$, a położenie jego jest opisane kątem obrotu

$$\alpha_1 = +\frac{\alpha_{z1}}{2} = +\frac{\pi}{z_1}$$

Przy takim położeniu w przestrzeni tłocznej znajdują się cztery komory międzyzębne, przy czym dwie skrajne są już opróżnione, a wydajność chwilowa przyjmuje znowu wartość minimalną $Q_u = Q_{u \min}$.

Na rysunku 9.7a przedstawiono w formie graficznej związki pomiędzy objętością elementarną dq_u , wydajnością chwilową Q_u , wydajnością chwilową maksymalną $Q_{u \max}$ i minimalną $Q_{u \min}$ oraz kątem obrotu α_1 koła czynnego.

Jeśli maszyna zębata pokazana na rysunku 9.4 pracuje jako silnik, to chłonność chwilowa silnika zębatego zmienia się według tych samych zasad.

9.2.2. Maszyny o zazębieniu wewnętrznym

Na rysunku 9.5 przedstawiono model maszyny o ustalonych osiach obrotu kół, zazębieniu wewnętrznym i dowolnym zarysie zębów, pracującej jako pompa zębata. Założenia są takie same jak w przypadku pompy o zazębieniu zewnętrznym przedstawionej na rysunku 9.2. Obowiązuje również zasada równoważności energii ciśnienia i pracy mechanicznej wyrażona wzorem (9.9).

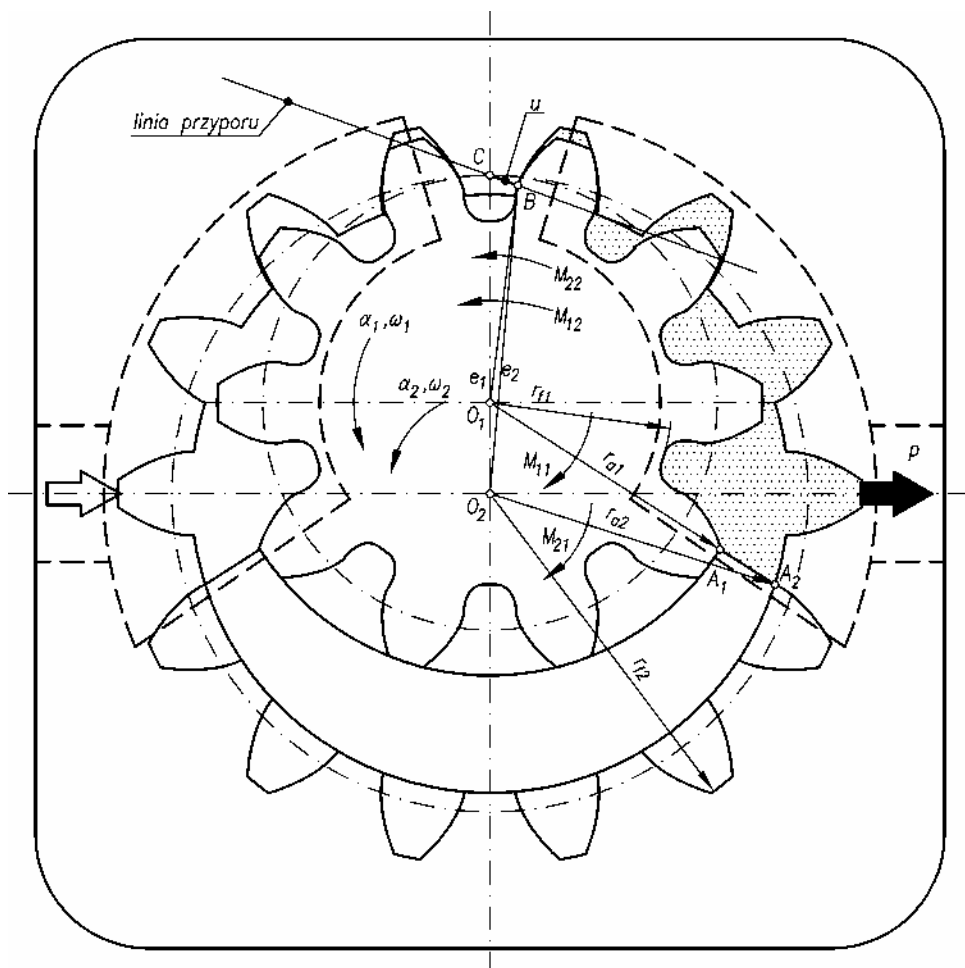
Wzory opisujące momenty M_1 i M_2 na kołach zębatych (rys. 9.5) mają jednak zmienioną formę:

$$\begin{aligned} M_{11} &= pb(r_{a1} - r_{f1}) \left(\frac{r_{a1} + r_{f1}}{2} \right) = \frac{pb}{2} (r_{a1}^2 - r_{f1}^2) \\ M_{12} &= pb(e_1 - r_{f1}) \left(\frac{e_1 + r_{f1}}{2} \right) = \frac{pb}{2} (e_1^2 - r_{f1}^2) \\ M_{21} &= pb(r_{f2} - r_{a2}) \left(\frac{r_{f2} + r_{a2}}{2} \right) = \frac{pb}{2} (r_{f2}^2 - r_{a2}^2) \\ M_{22} &= pb(r_{f2} - e_2) \left(\frac{r_{f2} + e_2}{2} \right) = \frac{pb}{2} (r_{f2}^2 - e_2^2) \end{aligned} \quad (9.19)$$

W wyniku przekształceń, podobnych do prowadzonych dla maszyny o zazębieniu zewnętrznym, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{pb}{2} (r_{a1}^2 - e_1^2) \\ M_2 &= -\frac{pb}{2} (r_{a2}^2 - e_2^2) \end{aligned} \quad (9.20)$$

W przypadku zazębienia wewnętrznego wzór opisujący odległości e_1 i e_2 mają również zmienioną postać. Wyznaczono je (rys. 9.6) jako



Rys. 9.5. Model maszyny zębatej o ustalonych osiach obrotu kół, zazębieniu wewnętrznym i dowolnym zarysie zęba

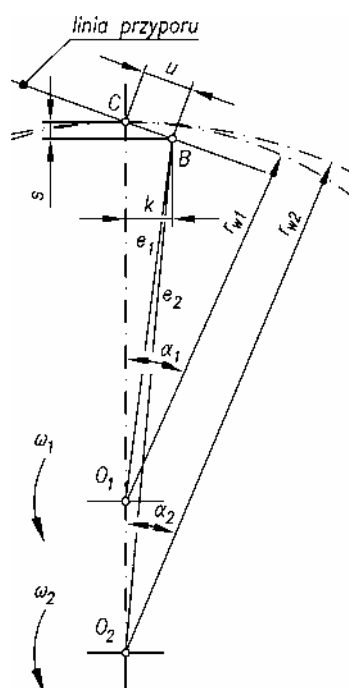
$$\begin{aligned} e_1^2 &= r_{w1}^2 - 2r_{w1}s + u^2 \\ e_2^2 &= r_{w2}^2 - 2r_{w2}s + u^2 \end{aligned} \quad (9.21)$$

Po podstawieniu wzorów (9.20), (9.21) i (9.15) do równania podstawowego (9.13) oraz dokonaniu przekształceń otrzymuje się zależność na wydajność chwilową pompy zębatej o zazębieniu wewnętrznym:

$$Q_u = \frac{dq_u}{d\alpha_1} = \frac{b}{2} \left[r_{a1}^2 - \frac{r_{w1}}{r_{w2}} r_{a2}^2 - r_{w1}(r_{w1} - r_{w2}) - \left(1 - \frac{r_{w1}}{r_{w2}} \right) u^2 \right] \quad (9.22)$$

Również i w tym przypadku mówi się o wydajności chwilowej, zależy bowiem ona od chwilowego położenia punktu przyporu B względem bieguna zazębienia C , czyli od odległości u (rys. 9.5 i 9.6).

Z porównania wzorów określających wydajność chwilową Q_u maszyn o zazębieniu zewnętrznym (9.18) i wewnętrznym (9.22) zauważa się, że mają bardzo zbliżoną postać. Zasadnicza różnica polega na tym, że do wzoru (9.22), dotyczącego maszyn o zazębieniu wewnętrznym, promienie r_{a2} i r_{w2} mają wartości ujemne, co wynika z wewnętrznego układu kół zębatych.



Rys. 9.6. Wyznaczenie odległości e_1 i e_2 punktu przyporu B od środków O_1 i O_2 kół zębatych w zazębieniu wewnętrznym

Wzór (9.22) jest uniwersalny i może być stosowany w przypadku pomp o ustalonych osiach obrotu kół, zazębieniu wewnętrznym i dowolnym zarysie zęba, lecz w zakresie podziałki kątowej. Należy jedynie uwzględnić szczegółowe wzory określające długość promieni r_a i r_w oraz odległość u .

Jeśli przedstawiona maszyna pracuje jako silnik hydrauliczny, to wzór (9.22) służy do obliczania chłonności chwilowej silnika zębatego o zazębieniu wewnętrznym. Zmiany wydajności (chłonności) chwilowej odbywają się według tych samych zasad, co zmiany w maszynach o zazębieniu zewnętrznym.

9.3. Wydajność właściwa, teoretyczna i średnia

Zależności (9.18) i (9.22), opisujące wydajność chwilową Q_u maszyn z zazębieniem zewnętrznym i wewnętrznym, obowiązują w zakresie kąta obrotu α_1 koła czynnego, odpowiadającego jednej podziałce kątowej $2\pi/z_1$. Po uwzględnieniu warunków zazębienia oraz pracy pompy (rys. 9.4) ustala się, że wydajność chwilowa Q_u zmienia się wraz ze zmianą kąta obrotu w przedziale

$$-\frac{\alpha_{z1}}{2} \leq \alpha_1 \leq +\frac{\alpha_{z1}}{2}$$

czyli

$$-\frac{\pi}{z_1} \leq \alpha_1 \leq +\frac{\pi}{z_1}$$

Po scałkowaniu równań (9.18) i (9.22) w podanych granicach otrzymuje się objętość czynnika q_z , wytłoczonego przez jedną parę zębów, czyli

$$q_z = \int_{-\frac{\alpha_{z1}}{2} - \frac{\pi}{z_1}}^{+\frac{\alpha_{z1}}{2} + \frac{\pi}{z_1}} Q_u(u) d\alpha_1 \quad (9.23)$$

Szczegółowy związek $u = f(\alpha_1)$ ustala się odpowiednio do typu zazębienia, uwzględniając zasadę współpracy kół i zarys uzębienia. Objętość q_z przedstawiono na rysunku 9.7a jako pole pod krzywą wydajności chwilowej $Q_u = f(\alpha_1)$.

Aby obliczyć nierównomierność wydajności (patrz dalsze rozdziały), należy wyznaczyć średnią wartość wydajności chwilowej $Q_{u\text{śr}}$, przedstawioną na rysunku 9.7a. Wykorzystując znane w rachunku całkowym twierdzenie o wartości średniej [17], rysunek 9.7a można zinterpretować w ten sposób, że pole pod krzywą wydajności chwilowej Q_u jest równe polu prostokąta o podstawie pomiędzy punktami $-\pi/z_1$ i $+\pi/z_1$ oraz wysokości $Q_{u\text{śr}}$. Można zatem ustalić zależność

$$\int_{-\frac{\pi}{z_1}}^{+\frac{\pi}{z_1}} Q_u(u) d\alpha_1 = \left[\frac{\pi}{z_1} - \left(-\frac{\pi}{z_1} \right) \right] Q_{u\text{śr}} \quad (9.24)$$

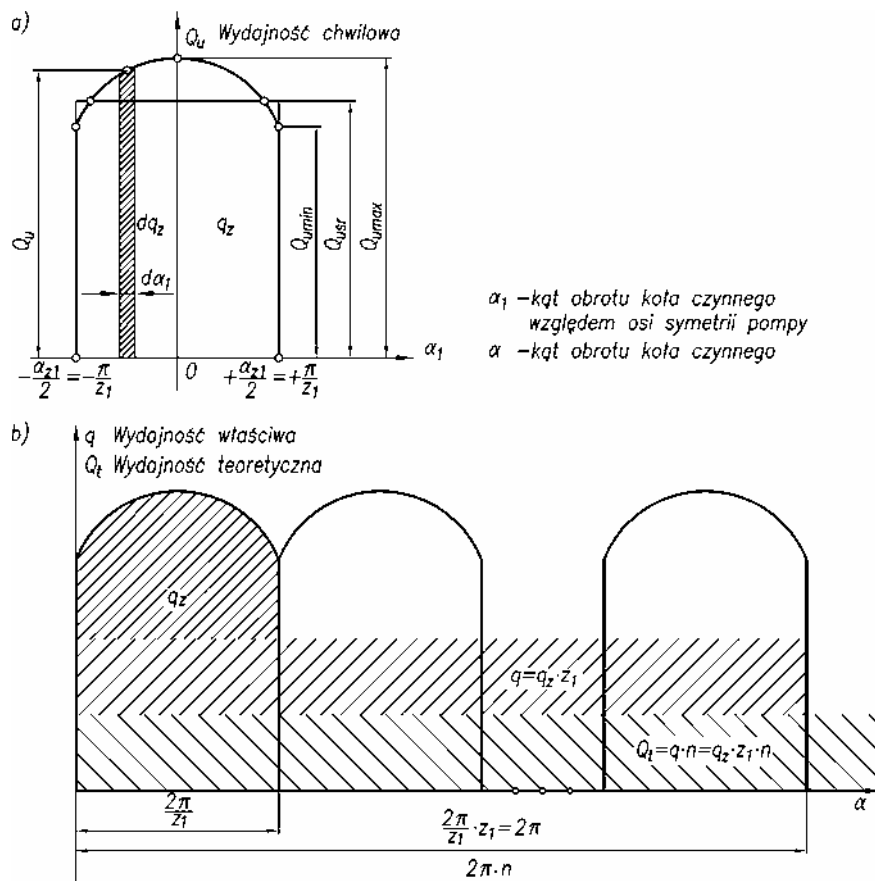
Po uwzględnieniu wzoru (9.23) i dokonaniu przekształceń otrzymuje się:

$$Q_{u\text{śr}} = \frac{q_z}{\frac{2\pi}{z_1}} \quad (9.25)$$

Po pomnożeniu zależności (9.23) przez liczbę zębów koła czynnego z_1 otrzymuje się zdefiniowaną w rozdziale 9.1 wydajność właściwą q , tzn. wydajność na jeden obrót wałka koła czynnego

$$q = q_z z_1 = z_1 \int_{-\frac{\pi}{z_1}}^{+\frac{\pi}{z_1}} Q_u(u) d\alpha_1 \quad (9.26)$$

Po pomnożeniu wydajności właściwej q przez prędkość obrotową wału pompy n otrzymuje się wydajność teoretyczną Q_t (bez uwzględniania strat objętościowych)



Rys. 9.7. Wykresy wydajności maszyny zębatej: a) zmiany wydajności chwilowej Q_u , b) wydajność właściwa q i teoretyczna Q_t

$$Q_t = nq = n z_1 \int_{-\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\pi}{z_1}}^{\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\pi}{z_1}} Q_u(u) d\alpha_1 \quad (9.27)$$

W dalszych rozdziałach wykazano, że wydajność właściwa q , określona wzorem (9.26), jest oprócz parametrów charakterystycznych dla danego rodzaju i zarysu zazębienia, funkcją iloczynu $\pi b m^2$. Po podzieleniu więc wyrażenia (9.26) stronami przez ten iloczyn otrzymuje się wzór określający wydajność właściwą w postaci bezwymiarowej, czyli tzw. jednostkową wydajność właściwą:

$$\frac{q}{\pi b m^2} = \frac{z_1}{\pi b m^2} \int_{-\frac{\pi}{z_1}}^{+\frac{\pi}{z_1}} Q_u(u) d\alpha_1 \quad (9.28)$$

Jednostkowa wydajność właściwa jest wielkością charakterystyczną maszyny zębatej, pracującej jako pompa. Podaje ona, ile czynnika może wytłoczyć dana maszyna przy zastosowaniu określonego zespołu kół zębatych.

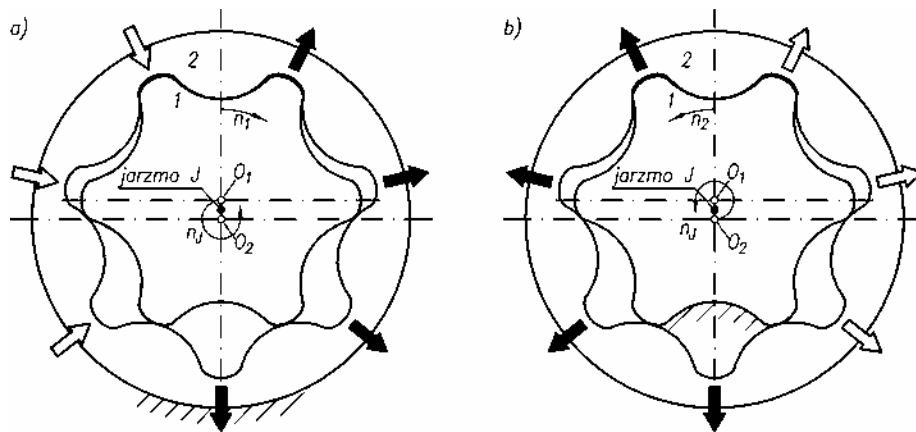
Przedstawione wzory na wydajność właściwą (9.26), jednostkową wydajność właściwą (9.28) oraz wydajność teoretyczną (9.27) obowiązują dla maszyn o osiach ustalonych, zazębieniu zewnętrznym i wewnętrznym oraz dowolnym zarysie zębów. Gdy maszyna pracuje jako silnik, wzory służą do wyznaczania chłonności właściwej, jednostkowej chłonności właściwej oraz chłonności teoretycznej.

9.4. Wydajność maszyn o ruchomych osiach kół (orbitalnym ruchu kół)

Proces przetłaczania czynnika roboczego można zrealizować stosując zespół kół, pracujących przy ruchomych osiach obrotu, czyli za pomocą zasady ruchu orbitalnego kół. Jak pokazano w rozdziale 6.5.2, w przypadku maszyn hydraulicznych jest to możliwe, gdy zastosuje się zespoły kół o zazębieniu wewnętrznym i różnicy zębów $z_2 - z_1 = 1$. Modele maszyn pracujących jako pompy, w których zastosowano planetarny ruch kół zębatych przedstawiono na rysunku 9.8. W pierwszym modelu (rys. 9.8a) napędza się koło o uzębieniu zewnętrznym, które przetacza się po nieruchomym kole o uzębieniu wewnętrznym. W drugim modelu (rys. 9.8b) jest napędzane koło o uzębieniu wewnętrznym, które przetacza się po nieruchomym kole o uzębieniu zewnętrznym. W obu modelach między zębami współpracujących kół są utworzone zamknięte komory wyporowe. Ich liczba jest równa liczbie zębów z_2 koła uzębionego wewnętrznie. W czasie ruchu orbitalnego koła czynnego komory te zmieniają swoją objętość.

Odpowiednio, gdy objętość komór się zwiększa, wówczas komory zostają napełniane, jeśli natomiast objętość maleje, następuje faza tłoczenia. W celu obliczenia wydajności właściwej q , wstępnie zakłada się, że koła współpracują przy osiach ustalonych. W związku z tym korzysta się ze wzoru (9.23) i wyznacza objętość cieczy q_z wytłoczonej z jednej międzyzębnej komory wyporowej. Z kolei po uwzględnieniu ruchu orbitalnego koła czynnego zauważa się, że na jeden obrót ($n_J = 1$) wyobraźnego jarzma J wszystkie komory, których liczba jest równa z_2 , przetłoczą czynnik z przestrzeni ssawnej do tłocznej. W związku z tym objętość cieczy q_J przetłaczana na jeden obrót jarzma jest równa

$$q_J = z_2 q_z \quad (9.29)$$



Rys. 9.8. Modele maszyn zębatych o planetarnym ruchu kół: a) napęd koła o uzębieniu zewnętrznym, b) napęd koła o uzębieniu wewnętrznym

Zgodnie z definicją, wydajność właściwa q jest to objętość czynnika wytłoczona podczas jednego obrotu koła czynnego. W rozdziale 6.5.2. ustalono, że pomiędzy obrotami koła czynnego a obrotami jarzma zachodzą następujące związki:

- $n_1 = -n_J \frac{1}{z_1}$, w przypadku pompy, w której napędzane jest koło o uzębieniu zewnętrznym (rys. 9.8a),
- $n_2 = -n_J \frac{1}{z_2}$, w przypadku pompy, w której napędzane jest koło o uzębieniu wewnętrznym (rys. 9.8b).

Odpowiedni wzór na wydajność pompy, w której napędzane jest koło o uzębieniu zewnętrznym przyjmuje postać:

$$q_{or} = q_J n_J = z_1 z_2 q_z \quad (9.30)$$

Gdy napędzane jest koło o uzębieniu wewnętrznym, wzór jest następujący:

$$q_{or} = q_J n_J = z_2 z_2 q_z \quad (9.31)$$

Z porównania wzorów (9.30) i (9.31) z zależnością (9.26) widać, że wydajność właściwa q_{or} pompy o orbitalnym ruchu kół jest z_2 razy większa od wydajności właściwej q_{st} pompy o osiach stałych:

$$q_{or} = z_2 q_{st}$$

Przedstawione na rysunku 9.8 maszyny mogą pracować również jako silniki hydrauliczne, a wtedy wzory (9.30) i (9.31) służą do wyznaczania ich chłonności właściwej.

9.5. Nierównomierność wydajności (chłonności)

Jak wynika z analizy wzorów (9.18) i (9.22) oraz odpowiadających im rysunkom 9.4 i 9.7a, wydajność chwilowa Q_u jest funkcją odległości u punktu przyporu B od bieguna zazębienia C , czyli kąta obrotu kół α_1 . Wydajność ta zmienia się od wartości minimalnej $Q_{u \min}$ do maksymalnej $Q_{u \max}$, aby z powrotem przyjąć wartość minimalną $Q_{u \min}$. Mówi się więc w tej sytuacji o nierównomierności wydajności lub też pulsacji wydajności. Jej miarą jest współczynnik nierównomierności wydajności (pulsacji wydajności) definiowany za [40] jako:

$$\delta = \frac{Q_{u \max} - Q_{u \min}}{Q_{u \text{śr}}} \quad (9.32)$$

Współczynnik ten określa stopień nierównomierności ilości czynnika, wytłaczanego przez pompę do układu hydraulicznego. Im mniejsza jest jego wartość, tym bardziej równomierna jest praca pompy i układu hydraulicznego. Oprócz wydajności, współczynnik jej nierównomierności jest podstawowym parametrem technicznym opisującym pracę pompy. Gdy maszyna jest używana jako silnik hydrauliczny, mówi się wtedy o nierównomierności chłonności.

9.6. Wydajność i nierównomierność wydajności hydraulicznych maszyn zębatych

9.6.1. Maszyny z kołami ewolwentowymi

Jak sygnalizowano w poprzednich rozdziałach, istotne znaczenie w budowie hydraulicznych maszyn zębatych mają zespoły kół o zazębieniu ewolwentowym [43, 44]. Rozważono dwa podstawowe typy maszyn z kołami o ustalonych osiach obrotu zazębnionymi zewnątrz i wewnątrz.

Rozważając maszyny o zazębieniu zewnętrznym, należy odwołać się do rysunku 3.9, na którym przedstawiono budowę i zasadę współpracy zespołu kół o zazębieniu zewnętrznym ewolwentowym. Linia przyporu jest prostą, przechodzącą przez biegun zazębienia C nachyloną pod nominalnym kątem przyporu α_0 . W biegunie zazębienia C stykają się ze sobą koła podziałowe o promieniach r_1 i r_2 . Punkt przyporu B porusza się wzdłuż linii przyporu, a jego położenie względem bieguna zazębienia C zmienia się od $u = -u_{\max} = -p_b/2$ poprzez $u = u_{\min} = 0$ do $u = +u_{\max} = +p_b/2$.

Jeśli rozważa się uogólniony przypadek zazębienia i dokonuje korekcji zazębienia P , co pokazano na rysunku 3.10, to nominalny kąt przyporu α_0 przechodzi w toczny kąt przyporu α_w , a koła podziałowe r_1 i r_2 przechodzą w koła toczne r_{w1} i r_{w2} . Punkt B dalej przemieszcza się po linii przyporu według poprzednio ustalonych zasad. Na podstawie zależności (3.18) i (3.42) ustala się wzory opisujące promienie kół wierzchołkowych

$$r_{a1} = m \left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1 \right)$$

$$r_{a2} = m \left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2 \right)$$

oraz kół tocznych

$$r_{w1} = r_1 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w} = \frac{mz_1}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w}$$

$$r_{w2} = r_2 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w} = \frac{mz_2}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w}$$

Po podstawieniu tych zależności do wzoru ogólnego (9.18) i dokonaniu przekształceń otrzymuje się wzór określający wydajność chwilową Q_{uew} maszyny z kołami o zazębieniu zewnętrznym ewolwentowym

$$Q_{uew} = \frac{dq_{uew}}{d\alpha_1} = \frac{bm^2}{2} \left[\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2 \right)^2 - \frac{z_1 \cos^2 \alpha_0}{4 \cos^2 \alpha_w} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{u^2}{m^2} \right] \quad (9.33)$$

Zgodnie z ogólnymi zasadami wydajność chwilowa zmienia swą wartość wraz z obrotem kół i zmianą odległości u punktu przyporu B od bieguna C . Dla $u = \pm p_b/2$ przyjmuje ona wartość minimalną:

$$Q_{uew\min} = \frac{bm^2}{2} \left[\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2 \right)^2 - \frac{z_1 \cos^2 \alpha_0}{4 \cos^2 \alpha_w} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{p_b^2}{4m^2} \right] \quad (9.34)$$

natomiast dla $u = 0$ przyjmuje ona wartość maksymalną:

$$Q_{uew\max} = \frac{bm^2}{2} \left[\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2 \right)^2 - \frac{z_1 \cos^2 \alpha_0}{4 \cos^2 \alpha_w} (z_1 + z_2) \right] \quad (9.35)$$

Za pomocą wzoru (9.25) i podstawieniu do niego zależności (9.38) można wyznaczyć średnią wartość wydajności chwilowej:

$$Q_{uew\text{śr}} = \frac{bm^2}{2} \left[\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2 \right)^2 - \frac{z_1 \cos^2 \alpha_0}{4 \cos^2 \alpha_w} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{\pi^2 \cos^2 \alpha_0}{12} \right] \quad (9.36)$$

Na podstawie wzorów (9.23) i (9.33) wyznacza się objętość czynnika q_z wytłoczonego przez jedną parę zębów. Ogólny związek, wiążący odległość u i kąt obrotu α_1 , ma postać

$$du = r_b d\alpha_1, \quad (9.37)$$

gdzie r_b jest promieniem koła zasadniczego równym $r_b = p_b z_1 / 2\pi$.

Granice całkowania przyjmuje się zgodnie z zasadą pracy zazębienia jako:

$$-\frac{p_b}{2} \leq u \leq +\frac{p_b}{2}$$

W rezultacie otrzymuje się

$$q_{zew} = \int_{-\frac{p_b}{2}}^{+\frac{p_b}{2}} \frac{bm^2}{2} \left[\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2 \right)^2 - \frac{z_1 \cos^2 \alpha_0}{4 \cos^2 \alpha_w} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{u^2}{m^2} \right] \frac{du}{r_b} \quad (9.38)$$

a po przekształceniach:

$$q_{zew} = \frac{\pi b m^2}{z_1} \left[\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2 \right)^2 - \frac{z_1 \cos^2 \alpha_0}{4 \cos^2 \alpha_w} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{\pi^2 \cos^2 \alpha_0}{12} \right] \quad (9.39)$$

Korzystając ze wzoru (9.26) i po wymnożeniu zależności (9.39) przez liczbę zębów koła czynnego z_1 , otrzymuje się wydajność (chłonność) właściwą q_{ew} maszyny z kołami o zazębieniu zewnętrznym ewolwentowym

$$q_{ew} = q_{zew} z_1 = \pi b m^2 \left[\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2 \right)^2 - \frac{z_1 \cos^2 \alpha_0}{4 \cos^2 \alpha_w} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{\pi^2 \cos^2 \alpha_0}{12} \right] \quad (9.40)$$

Korzystając ze wzoru (9.27) i po wymnożeniu wydajności właściwej q_{ew} przez prędkość obrotową n wału maszyny, otrzymuje się wydajność teoretyczną Q_{tew}

$$Q_{tew} = q_{ew} n = n \pi b m^2 \left[\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2 \right)^2 - \frac{z_1 \cos^2 \alpha_0}{4 \cos^2 \alpha_w} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{\pi^2 \cos^2 \alpha_0}{12} \right] \quad (9.41)$$

Z kolei po podzieleniu wzoru (9.40) stronami przez $\pi b m^2$ otrzymuje się wzór na wydajność właściwą w postaci bezwymiarowej, czyli tzw. jednostkową wydajność właściwą

$$\frac{q_{ew}}{\pi b m^2} = \left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2 \right)^2 - \frac{z_1 \cos^2 \alpha_0}{4 \cos^2 \alpha_w} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{\pi^2 \cos^2 \alpha_0}{12} \quad (9.42)$$

Jak wykazano w rozdziale 9.3, aby otrzymać wzór na jednostkową wydajność właściwą dla maszyny z zazębieniem ewolwentowym wewnętrznym należy we wzorze (9.42) wprowadzić parametr z_2 ze znakiem minus, co wynika z wewnętrznego układu kół zębatych.

W przypadku, gdy maszyna pracuje jako silnik, przedstawione wzory od (9.33) do (9.42) opisują chłonność.

Z analizy zależności (9.42) wynika, że na jednostkową wydajność właściwą $q_{ew}/\pi b m^2$ wpływają:

- liczby zębów kół z_1 i z_2 ,
- współczynniki wysokości zębów y_1 i y_2 ,
- współczynniki korekcji x_1 i x_2 ,
- nominalny i toczny kąt zarysu α_0 i α_w .

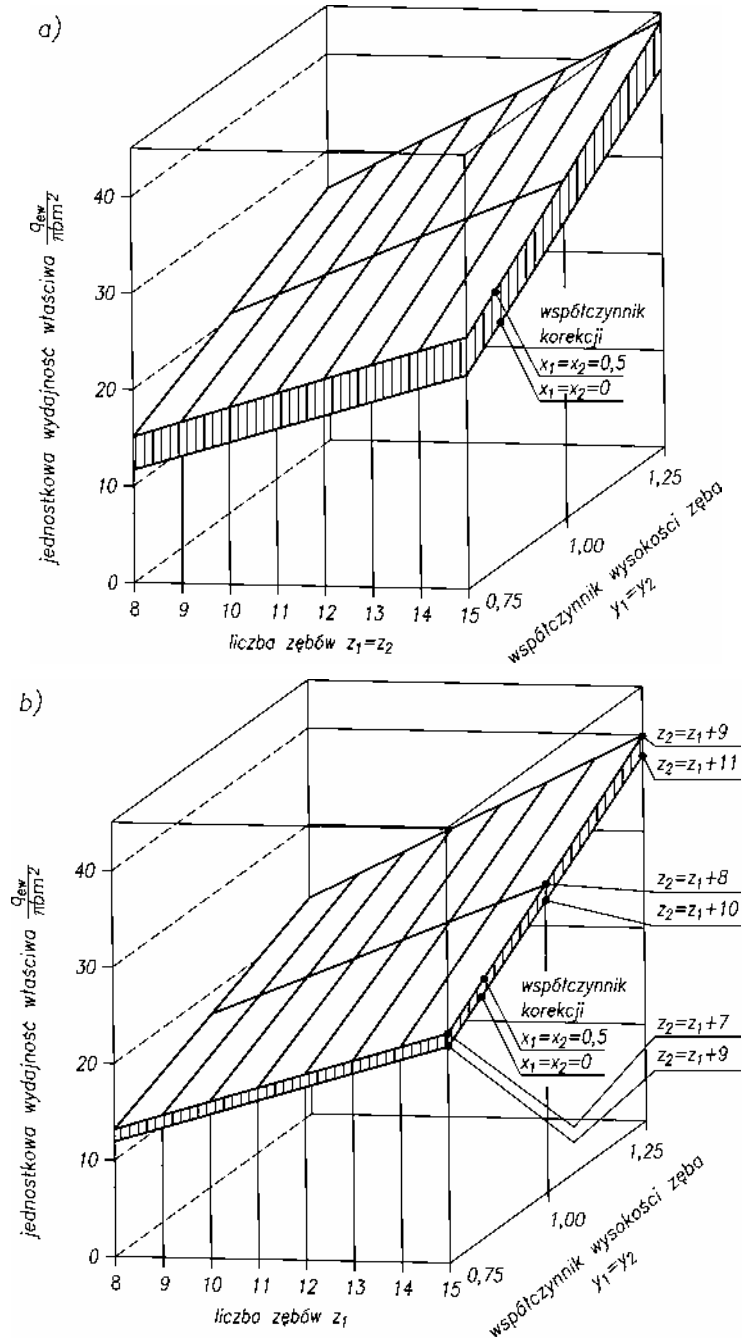
Wpływ pierwszych trzech parametrów na jednostkową wydajność właściwą przedstawiono na rysunku 9.9.

W przypadku maszyn z zazębieniem zewnętrznym (rys. 9.9a) do obliczeń przyjmuje się zespoły kół o takiej samej liczbie zębów $z_1 = z_2 = 8-14$. W przypadku maszyn z zazębieniem wewnętrznym (rys. 9.9b) obliczenia wykonuje się dla liczby zębów $z_1 = 8-14$ oraz $z_2 = z_1 + (7-11)$. Liczba zębów z_2 koła o uzębieniu wewnętrznym jest większa ze względu na wyeliminowanie niebezpieczeństwa interferencji. Dla obu typów zazębień przyjęto takie same wartości współczynników wysokości zęba $y = 0,75; 1; 1,25$ (zęby niskie, normalne, wysokie) oraz współczynniki korekcji $x_1 = x_2 = 0; 0,5$ (zęby bez korekcji i z korekcją). W obliczeniach przyjęto nominalny kąt przyporu $\alpha_0 = 20^\circ$, wartości zaś tocznego kąta przyporu α_w wyznaczono ze wzoru (3.51).

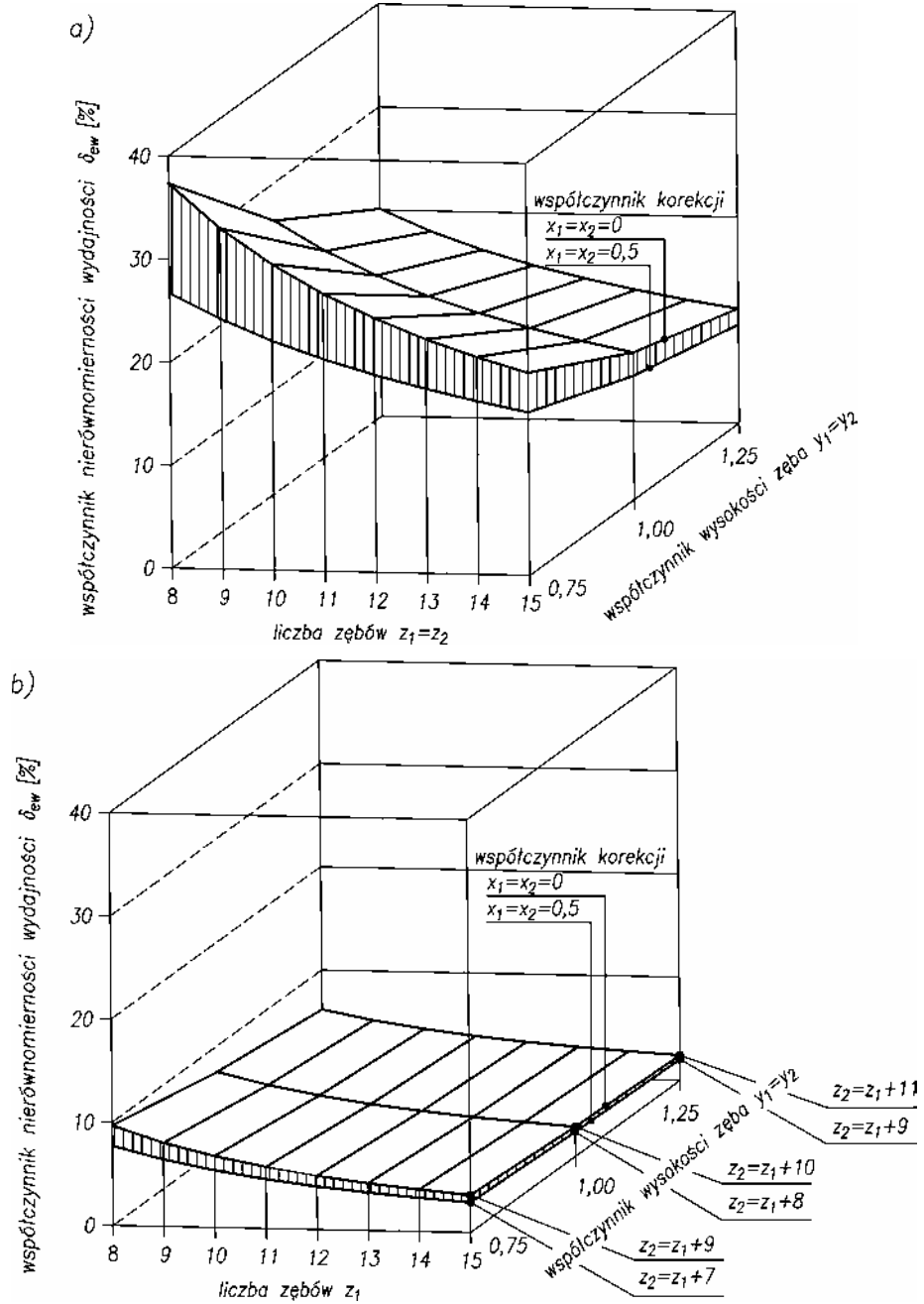
Na rysunku 9.9 widać, że dla tych samych wartości parametrów $z_1, y_1 = y_2, x_1 = x_2$ wydajność ma ten sam charakter. Zwiększanie liczby zębów z_1 powoduje zwiększanie liczby międzyzębnych komór wporowych, a tym samym zwiększanie wydajności. Z kolei zwiększanie współczynnika wysokości zęba y oraz współczynnika korekcji x powoduje zwiększanie wymiarów komory międzyzębnej i w rezultacie również zwiększanie wydajności.

Wzór określający współczynnik nierównomierności wydajności otrzymuje się przez podstawienie do wzoru definicyjnego (9.32) zależności (9.35), (9.34) i (9.36). Po przekształceniach otrzymuje się

$$\begin{aligned} \delta_{ew} &= \frac{A}{B} \\ A &= \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \pi^2 \cos^2 \alpha_0 \\ B &= 4 \left[\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1\right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_1 \cos^2 \alpha_0}{4 \cos^2 \alpha_w} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{\pi^2 \cos^2 \alpha_0}{12} \right] \end{aligned} \quad (9.43)$$



Rys. 9.9. Wykresy zależności jednostkowej wydajności właściwej $q_{ew}/\pi m^2$ od parametrów zazębienia dla maszyn z zazębieniem ewolwentowym:
 a) maszyny o zazębieniu zewnętrznym, b) maszyny o zazębieniu wewnętrznym



Rys. 9.10. Wykresy zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ_{ew} od parametrów zazębienia dla maszyn z zazębieniem ewolwentowym:
 a) maszyny o zazębieniu zewnętrznym, b) maszyny o zazębieniu wewnętrznym

przy czym wartość tocznego kąta przyporu α_w wyznacza się z zależności (3.50). Wzór (9.43) dotyczy maszyn o zazębieniu zewnętrznym. Gdy rozważa się maszyny z zazębieniem wewnętrznym, wówczas we wzorze (11.11) należy uwzględnić znak minus w odniesieniu do liczby zębów z_2 . W przypadku, gdy maszyna pracuje jako silnik, wzór (9.43) opisuje współczynnik nierównomierności chłonności.

Z analizy wzoru (9.43) wynika, że na współczynnik nierównomierności wydajności (chłonności) mają wpływ te same parametry jak na wydajność. Ich wpływ przedstawiono na rysunku 9.10. Na rysunku widać, że wartość współczynnika δ_{ew} dla maszyn o zazębieniu wewnętrznym jest o rząd niższa niż dla maszyn o zazębieniu zewnętrznym. Powoduje to, że maszyny o zazębieniu wewnętrznym pracują bardziej równomiernie i ciszej niż maszyny o zazębieniu zewnętrznym. Na wykresach widać również, że zwiększanie liczby zębów z_1 , zwiększanie współczynników wysokości zęba y oraz współczynników korekcji x powoduje zmniejszenie wartości współczynnika nierównomierności wydajności (chłonności) δ_{ew} .

9.6.2. Maszyny z kołami cykloidalnymi 1. rodzaju

Budowę i zasadę współpracy zespołu kół o zazębieniu zewnętrznym cykloidalnym 1. rodzaju przedstawiono na rysunku 4.3. W biegunie zazębienia C stykają się ze sobą koła podziałowe będące jednocześnie kołami tocznymi, stąd wynika, że

$$r_1 = r_{w1} = \frac{m z_1}{2}$$

$$r_2 = r_{w2} = \frac{m z_2}{2}$$

Kół cykloidalnych 1. rodzaju nie koryguje się, w związku z tym $x_1 = x_2 = 0$, a wzory opisujące promienie kół wierzchołkowych mają, zgodnie z (3.8), postać:

$$r_{a1} = m \left(\frac{z_1}{2} + y_1 \right)$$

$$r_{a2} = m \left(\frac{z_2}{2} + y_2 \right)$$

Linia przyporu ma kształt „wężykowaty” i przebiega przez biegun zazębienia C . W celu zapewnienia płynnej współpracy kół oraz niedopuszczenia do nagłych zmian wydajności, linia przyporu musi być symetryczna względem osi O_1O_2 , a promienie kół odtaczających muszą być sobie równe, czyli $\rho_e = \rho_h = \rho$. Odległość u punktu przyporu B względem bieguna zazębienia C zmienia się wraz z kątem obrotu α_1 koła czynnego. Odległość u i kąt α_1 są powiązane zależnością (4.2) o postaci:

$$u = 2\rho_h \sin \left(\frac{r_{w1}}{\rho_h} \alpha_1 \right),$$

która po podstawieniu $\rho_e = \rho_h = \rho_1$ oraz $R_1 = r_{w1}/\rho_1$ przyjmuje postać:

$$u = 2\rho_1 \sin\left(\frac{R_1}{2}\alpha_1\right).$$

Linia przyporu składa się z dwóch symetrycznych łuków, kąt α_1 , określający obecnie odległość punktu przyporu B od bieguna C zmienia się w granicach

$$-\frac{\alpha_{z1}}{2} \leq \alpha_1 \leq +\frac{\alpha_{z1}}{2},$$

czyli

$$-\frac{\pi}{z_1} \leq \alpha_1 \leq +\frac{\pi}{z_1},$$

przy czym $\alpha_{z1} = 2\pi/z_1$ jest kątem odpowiadającym podziałce zasadniczej p_b .

Po podstawieniu zależności na r_{a1} , r_{a2} , r_{w1} , r_{w2} oraz u do ogólnie ważnego wzoru (9.18) i dokonaniu przekształcenia otrzymuje się wzór określający wydajność chwilową Q_{uc1} maszyny z kołami o zazębieniu zewnętrznym cykloidalnym 1. rodzaju:

$$Q_{uc1} = \frac{dq_{uc1}}{d\alpha_1} = \frac{bm^2}{2} \left[\left(\frac{z_1}{2} + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + y_2 \right)^2 - \frac{z_1}{4} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{z_1^2}{R_1^2} \sin^2 \left(\frac{R_1}{2} \alpha_1 \right) \right] \quad (9.44)$$

Zgodnie z zasadami podanymi w rozdziale 9.2 minimalna wartość wydajności chwilowej występuje, gdy

$$\alpha_1 = \pm \frac{\alpha_{z1}}{2} = \pm \frac{\pi}{z_1}$$

i wynosi

$$Q_{uc1\min} = \frac{bm^2}{2} \left[\left(\frac{z_1}{2} + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + y_2 \right)^2 - \frac{z_1}{4} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{z_1^2}{R_1^2} \sin^2 \left(\frac{\pi R_1}{2z_1} \right) \right] \quad (9.45)$$

Odpowiednio maksymalna wartość wydajności chwilowej występuje, gdy $\alpha_1 = 0$ i wynosi

$$Q_{uc1\max} = \frac{bm^2}{2} \left[\left(\frac{z_1}{2} + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + y_2 \right)^2 - \frac{z_1}{4} (z_1 + z_2) \right] \quad (9.46)$$

Stosując wzór (9.24) i podstawiając do niego zależność (9.49) wyznacza się średnią wartość wydajności chwilowej:

$$Q_{uc1sr} = \frac{bm^2}{2} \left[\left(\frac{z_1}{2} + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + y_2 \right)^2 - \frac{z_1}{4} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \left\{ \frac{z_1^2}{2R_1^2} + \frac{z_1^3}{2\pi R_1^3} \sin \left(\frac{\pi R_1}{z_1} \right) \right\} \right] \quad (9.47)$$

Po scałkowaniu wzoru (9.44) wyznacza się objętość czynnika q_z wytłoczonego przez jedną parę zębów, przy czym całkowanie przeprowadza się w granicach od

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha_{z1}}{2} = -\frac{\pi}{z_1} \quad \text{do} \quad \alpha_1 = +\frac{\alpha_{z1}}{2} = +\frac{\pi}{z_1}.$$

Wtedy

$$q_{zcl} = \int_{-\frac{\pi}{z_1}}^{+\frac{\pi}{z_1}} \frac{bm^2}{2} \left[\left(\frac{z_1}{2} + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + y_2 \right)^2 - \frac{z_1}{4} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{z_1^2}{R_1^2} \sin^2 \left(\frac{R_1}{2} \alpha_1 \right) \right] d\alpha_1 \quad (9.48)$$

Po przekształceniach otrzymuje się:

$$q_{zcl} = \frac{\pi bm^2}{z_1} \left[\left(\frac{z_1}{2} + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + y_2 \right)^2 - \frac{z_1}{4} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \left\{ \frac{z_1^2}{2R_1^2} - \frac{z_1^3}{2\pi R_1^3} \sin \left(\frac{\pi R_1}{z_1} \right) \right\} \right] \quad (9.49)$$

Po wymnożeniu zależności (9.49) przez liczbę zębów koła czynnego z_1 otrzymuje się wydajność właściwą q_{c1} maszyny z zazębieniem zewnętrznym cykloidalnym 1. rodzaju:

$$q_{c1} = q_{zcl} z_1 = \pi bm^2 \left[\left(\frac{z_1}{2} + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + y_2 \right)^2 - \frac{z_1}{4} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \left\{ \frac{z_1^2}{2R_1^2} - \frac{z_1^3}{2\pi R_1^3} \sin \left(\frac{\pi R_1}{z_1} \right) \right\} \right] \quad (9.50)$$

Po wymnożeniu wydajności właściwej q_{c1} przez prędkość obrotową n wału maszyny otrzymuje się wydajność (chłonność) teoretyczną Q_{tc1} równą wydajności średniej

$$Q_{tc1} = q_{c1} n = \pi b m^2 \left[\left(\frac{z_1}{2} + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + y_2 \right)^2 - \frac{z_1}{4} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \left\{ \frac{z_1^2}{2R_1^2} - \frac{z_1^3}{2\pi R_1^3} \sin \left(\frac{\pi R_1}{z_1} \right) \right\} \right] \quad (9.51)$$

Jednostkową wydajność właściwą zdefiniowaną przez zależność (9.28) otrzymuje się przez podzielenie zależności (9.50) przez iloczyn $\pi b m^2$:

$$\frac{q_{c1}}{\pi b m^2} = \left[\left(\frac{z_1}{2} + y_1 \right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + y_2 \right)^2 - \frac{z_1}{4} (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \left\{ \frac{z_1^2}{2R_1^2} - \frac{z_1^3}{2\pi R_1^3} \sin \left(\frac{\pi R_1}{z_1} \right) \right\} \right] \quad (9.52)$$

Wzór określający wydajność właściwą maszyny z kołami o zazębieniu wewnętrznym cykloidalnym 1. rodzaju otrzymuje się po wprowadzeniu do wzoru (9.52) liczby zębów z_2 ze znakiem minus.

W przypadku gdy maszyna pracuje jako silnik, przedstawione wzory opisują chłonność.

Z analizy zależności (9.52) wynika, że na jednostkową wydajność właściwą $q_{c1}/\pi b m^2$ wpływają:

- liczba zębów z_1 i z_2 ,
- współczynnik wysokości zęba y_1 i y_2 ,
- współczynnik kształtu zęba R_1 .

Wpływ wymienionych parametrów na jednostkową wydajność właściwą można przeanalizować na rysunku 9.11.

Obliczenia przeprowadzono, podobnie jak w przypadku zazębienia ewolwentowych, przyjmując w maszynach o zazębieniu zewnętrznym $z_1 = z_2 = 8-14$, w maszynach zaś z zazębieniem wewnętrznym $z_1 = 8-14$ oraz $z_2 = z_1 + (9-11)$ ze względu na wyeliminowanie niebezpieczeństwa interferencji. W obu typach zazębienia przyjęto takie same wartości współczynników wysokości zęba $y = 0,75; 1; 1,25$ oraz $R_1 = 3$. Na wykresach widać, że po założeniu takich samych wartości parametrów $z_1, y_1 = y_2$ oraz R_1 otrzymuje się bardzo zbliżone wartości wydajności właściwej $q_{c1}/\pi b m^2$ dla maszyn o zazębieniu zewnętrznym i wewnętrznym. Z analizy wykresów widać, że wpływ poszczególnych parametrów na wydajność jest tego samego charakteru. Zwiększanie liczby zębów z_1 oraz współczynnika wysokości y powoduje zwiększanie wydajności właściwej. Zwiększanie liczby zębów oznacza zwiększanie liczby międzyzębnych

komór wyporowych, a zwiększanie współczynnika y oznacza zwiększanie objętości pojedynczej komory.

Po podstawieniu do wzoru definicyjnego (9.33) zależności (9.45), (9.46), (9.47) oraz po dokonaniu przekształceń otrzymuje się wzór na współczynnik nierównomierności wydajności δ_{c1} maszyn z kołami o zazębieniu zewnętrznym cykloidalnym 1. rodzaju

$$\begin{aligned} \delta_{c1} &= \frac{A}{B} \\ A &= \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{z_1^2}{R_1^2} \sin^2\left(\frac{\pi R_1}{2z_1}\right) \\ B &= \left[\left(\frac{z_1}{2} + y_1\right)^2 + \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2}{2} + y_2\right)^2\right. \\ &\quad \left. - \frac{z_1}{4}(z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \left\{ \frac{z_1^2}{2R_1^2} - \frac{z_1^3}{2\pi R_1^3} \sin\left(\frac{\pi R_1}{z_1}\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (9.53)$$

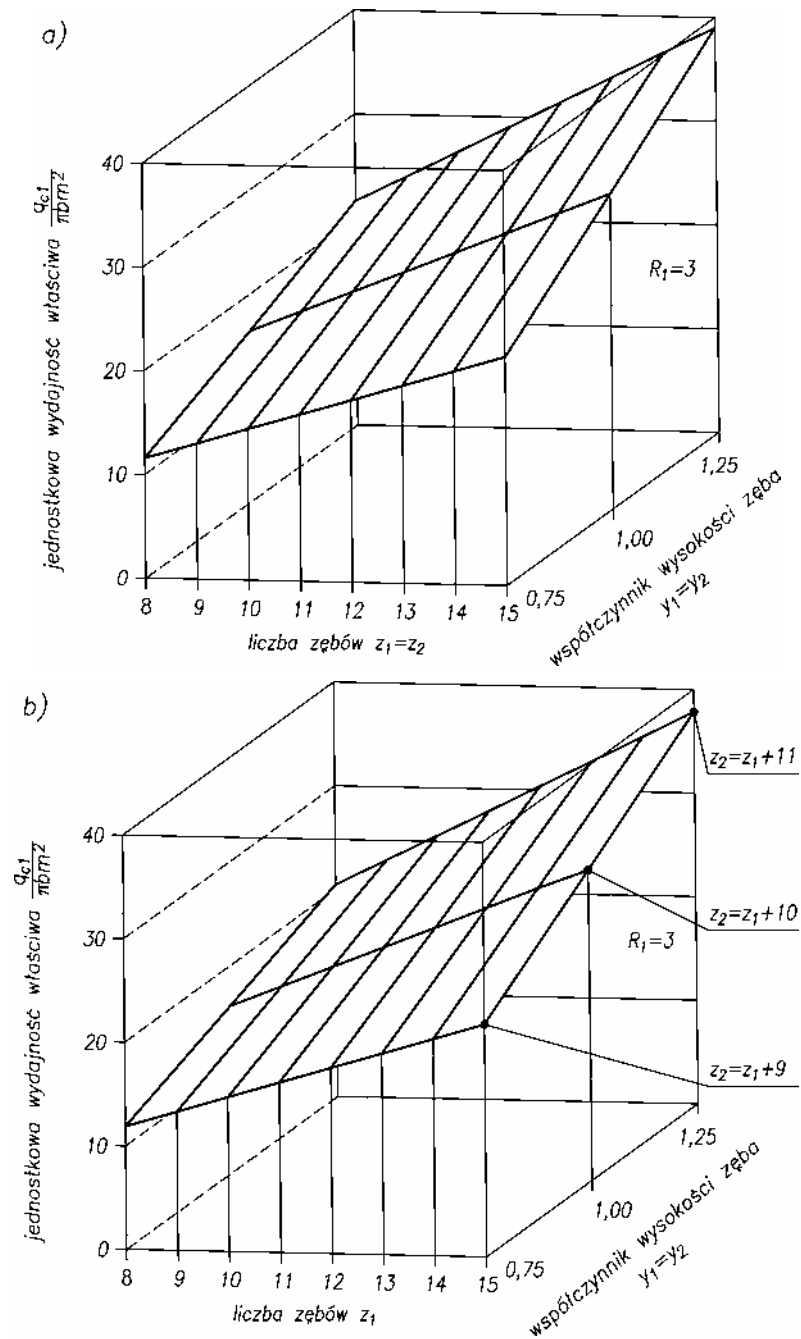
Wzór określający współczynnik nierównomierności wydajności dla maszyn z kołami o zazębieniu wewnętrznym cykloidalnym 1. rodzaju otrzymuje się ze wzoru (9.53) po wprowadzeniu znaku minus przy liczbie zębów z_2 . W przypadku gdy maszyna pracuje jako silnik, przedstawione wzory opisują nierównomierność chłonności.

Z analizy wzoru (9.53) wynika, że na współczynnik nierównomierności wydajności δ_{c1} mają wpływ te same parametry, jak na wydajność właściwą, a ich wpływ przedstawiono w postaci wykresów na rysunku 9.12. Na rysunku widać, że wartość współczynnika δ_{c1} dla maszyn o zazębieniu wewnętrznym jest o rząd niższa niż dla maszyn o zazębieniu zewnętrznym. Powoduje to, że ich praca jest bardziej równomierna i cichobieżna. Na wykresach jest również widoczne, że zwiększanie liczby zębów z_1 oraz współczynnika wysokości zęba y powoduje zmniejszanie współczynnika δ_{c1} .

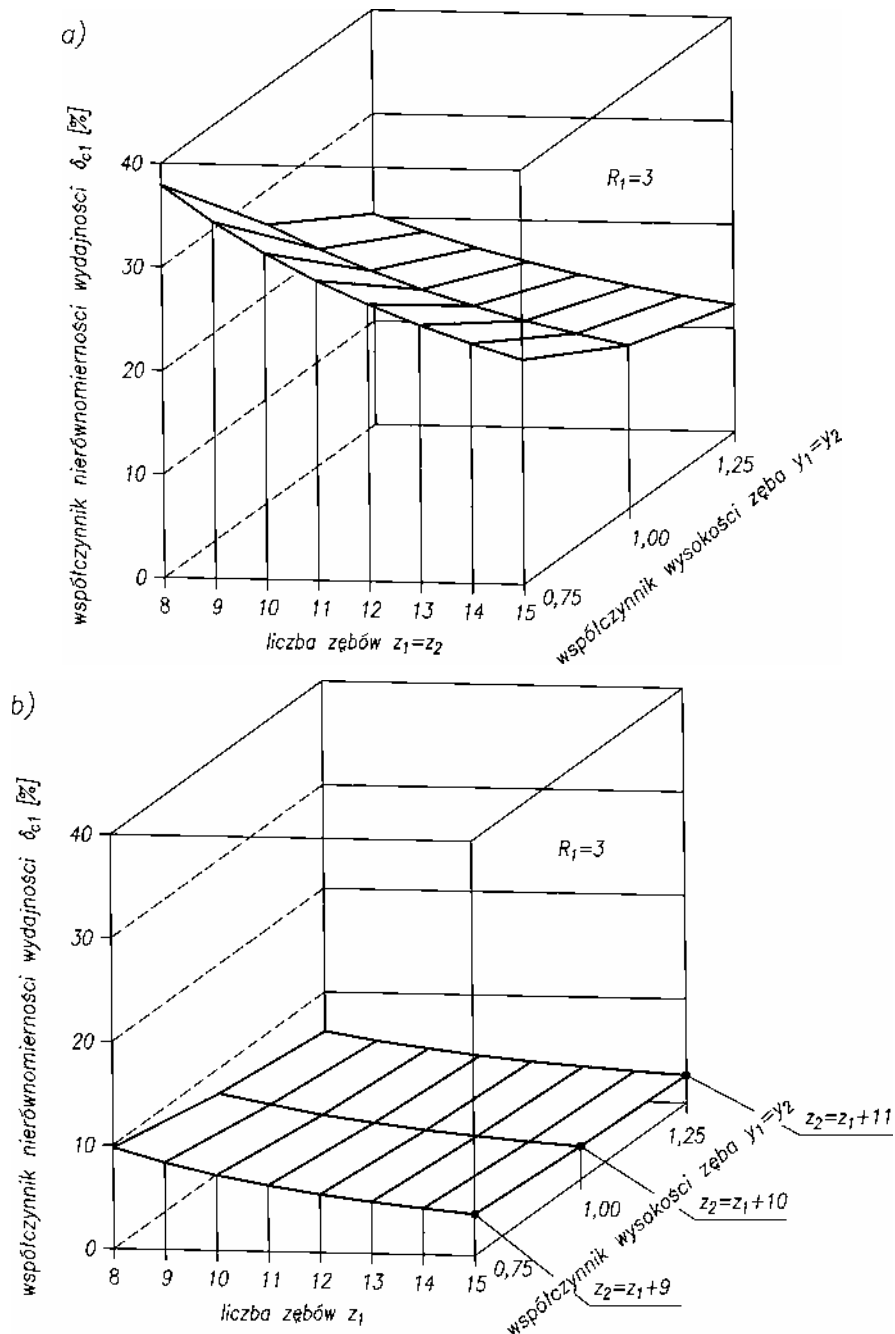
9.6.3. Maszyny z kołami cykloidalnymi 2. rodzaju

Rozwiązanie konstrukcyjne i zasadę współpracy zespołu kół o zazębieniu zewnętrznym cykloidalnym 2. rodzaju przedstawiono na rysunku 5.3. W biegunie zazębienia C stykają się ze sobą koła podziałowe, które są jednocześnie kołami tocznymi. Ze wzoru (5.2) wynika, że

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{w1} = 2\rho z_1 \\ r_2 &= r_{w2} = 2\rho z_2 \end{aligned}$$



Rys. 9.11. Wykres zależności jednostkowej wydajności właściwej $q_{c1}/(\pi b m^2)$ od parametrów ząbkowania dla maszyn z ząbkowaniem cykloidalnym 1. rodzaju: a) maszyny z ząbkowaniem zewnętrznym, b) maszyny z ząbkowaniem wewnętrznym



Rys. 9.12. Wykres zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ_{c1} od parametrów ząbkowania dla maszyn z ząbkowaniem cykloidalnym 1. rodzaju: a) maszyny z ząbkowaniem zewnętrznym, b) maszyny z ząbkowaniem wewnętrznym

Zgodnie z zależnością (5.4) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} r_{a1} &= 2\rho(z_1 + 1) \\ r_{a2} &= 2\rho(z_2 + 1) \end{aligned}$$

Odległość u punktu przyporu B względem bieguna ząbienia C zmienia się wraz z kątem obrotu α_1 koła czynnego. Odległość u i kąt α_1 są powiązane zależnością:

$$u = 2\rho_h \sin\left(\frac{r_{w1}}{2\rho_h} \alpha_1\right),$$

która po podstawieniu $\rho_h = \rho$ oraz $z_1 = r_{w1}/2\rho$ przyjmuje postać:

$$u = 2\rho \sin(z_1 \alpha_1).$$

Kąt α_1 należy rozpatrywać w zakresie odpowiadającym połowie podziałki, tzn.:

$$-\frac{\alpha_{z1}}{4} \leq \alpha_1 \leq +\frac{\alpha_{z1}}{4},$$

czyli

$$-\frac{\pi}{2z_1} \leq \alpha_1 \leq +\frac{\pi}{2z_1}$$

Po podstawieniu podanych zależności określających r_{a1} , r_{a2} , r_{w1} , r_{w2} oraz u do ogólnego wzoru (9.18) i dokonując przekształceń otrzymuje się wzór na wydajność chwilową Q_{uc2} maszyny z kołami o ząbieniu zewnętrznym cykloidalnym 2. rodzaju:

$$\begin{aligned} Q_{uc2} &= \frac{dq_{uc2}}{d\alpha_1} \\ &= \frac{bm^2}{8} \left[(z_1 + 1)^2 + \frac{z_1}{z_2} (z_2 + 1)^2 - z_1 (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \sin^2(z_1 \alpha_1) \right] \end{aligned} \quad (9.54)$$

Zgodnie z zasadami podanymi w rozdziale 9.2 minimalną wydajność chwilową wyznacza się, gdy:

$$\alpha_1 = \pm \frac{\alpha_{z1}}{4} = \pm \frac{\pi}{2z_1}$$

i wynosi ona:

$$Q_{uc2\min} = \frac{bm^2}{8} \left[(z_1 + 1)^2 + \frac{z_1}{z_2} (z_2 + 1)^2 - z_1 (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \right] \quad (9.55)$$

Maksymalna wydajność chwilowa występuje, gdy $\alpha_1 = 0$ i wynosi

$$Q_{uc2\max} = \frac{bm^2}{8} \left[(z_1 + 1)^2 + \frac{z_1}{z_2} (z_2 + 1)^2 - z_1 (z_1 + z_2) \right] \quad (9.56)$$

Gdy zastosuje się wzór (9.25) i podstawią do niego zależność (9.59), wówczas można wyznaczyć średnią wydajność chwilową:

$$Q_{uc2\text{śr}} = \frac{bm^2}{8} \left[(z_1 + 1)^2 + \frac{z_1}{z_2} (z_2 + 1)^2 - z_1 (z_1 + z_2) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \right] \quad (9.57)$$

Po scałkowaniu wzoru (9.54) w granicach od $\alpha_1 = -\frac{\alpha_{z1}}{4} = -\frac{\pi}{2z_1}$ do $\alpha_1 = +\frac{\alpha_{z1}}{4} = +\frac{\pi}{2z_1}$ i podwojeniu go, aby uwzględnić obrót kół o całą podziałkę, otrzymuje się wzór określający objętość czynnika q_{zc2} wytłoczonego przez jedną parę zębów, czyli:

$$q_{zc2} = 2 \int_{-\frac{\pi}{2z_1}}^{+\frac{\pi}{2z_1}} \frac{bm^2}{8} \left[(z_1 + 1)^2 + \frac{z_1}{z_2} (z_2 + 1)^2 - z_1 (z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \sin^2 (z_1 \alpha_1) \right] d\alpha_1 \quad (9.58)$$

Po przekształceniach otrzymuje się:

$$q_{zc2} = \frac{\pi bm^2}{4z_1} \left[(z_1 + 1)^2 + \frac{z_1}{z_2} (z_2 + 1)^2 - z_1 (z_1 + z_2) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \right] \quad (9.59)$$

Po pomnożeniu tej zależności przez liczbę zębów koła czynnego z_1 otrzymuje się wydajność właściwą q_c maszyny z zazębieniem zewnętrznym cykloidalnym 2. rodzaju:

$$q_{c2} = q_{zc2} z_1 = \frac{\pi bm^2}{4} \left[(z_1 + 1)^2 + \frac{z_1}{z_2} (z_2 + 1)^2 - z_1 (z_1 + z_2) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \right] \quad (9.60)$$

Zgodnie ze wzorem (9.27) po pomnożeniu wydajności właściwej q_{c2} przez prędkość obrotową n wału maszyny otrzymuje się wydajność teoretyczną Q_{tc2}

$$Q_{tc2} = q_{c2} n = \frac{n\pi bm^2}{4} \left[(z_1 + 1)^2 + \frac{z_1}{z_2} (z_2 + 1)^2 - z_1 (z_1 + z_2) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \right] \quad (9.61)$$

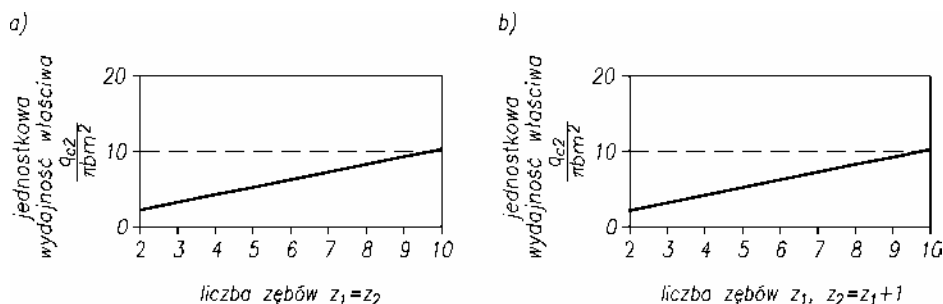
Jednostkową wydajność właściwą, zdefiniowaną przez zależność (9.28), otrzymuje się przez podzielenie zależności (9.60) przez czynnik πbm^2 :

$$\frac{q_{c2}}{\pi b m^2} = \frac{1}{4} \left[(z_1 + 1)^2 + \frac{z_1}{z_2} (z_2 + 1)^2 - z_1 (z_1 + z_2) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \right] \quad (9.62)$$

Zgodnie z ustaleniami podanymi w rozdziale 9.2, wzór na jednostkową wydajność właściwą maszyny z kołami o zazębieniu wewnętrznym cykloidalnym 2. rodzaju otrzymuje się ze wzoru (9.62), po wprowadzeniu liczby zębów z_2 ze znakiem minus.

W przypadku gdy maszyna pracuje jako silnik, przedstawione wzory opisują chłonność.

Z analizy wzoru (9.61) widać, że na jednostkową wydajność właściwą $q_{c2}/(\pi b m^2)$ mają wpływ liczby zębów z_1 i z_2 współpracujących kół. Wpływ ten można przeanalizować na rysunku 9.13, na którym widać, że jednostkowa wydajność właściwa w przypadku maszyn o zazębieniu zewnętrznym i wewnętrznym jest bardzo zbliżona. Widać również, że w obu przypadkach wydajność zwiększa się wraz ze wzrostem liczby zębów, zwiększa się bowiem liczba międzyzębnych komór wyporowych transportujących czynnik roboczy w maszynie.



Rys. 9.13. Wykres zależności jednostkowej wydajności właściwej $q_{c2}/\pi b m^2$ od parametrów zazębienia dla maszyn z zazębieniem cykloidalnym 2. rodzaju:
a) maszyny z zazębieniem zewnętrznym, b) maszyny z zazębieniem wewnętrznym

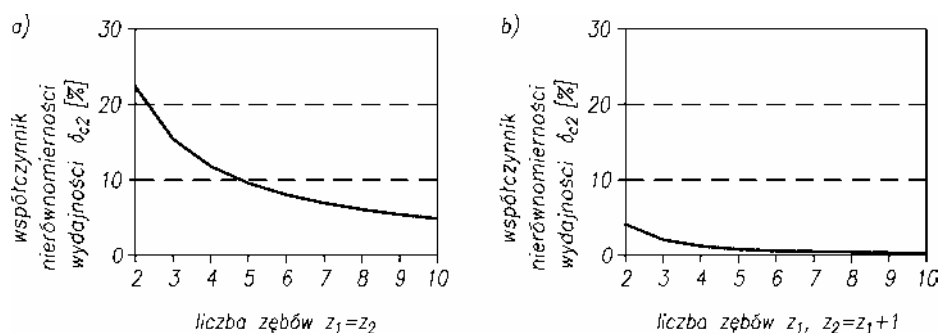
Po podstawieniu do wzoru definicyjnego (9.33) zależności (9.55), (9.56), (9.57) oraz dokonaniu przekształceń otrzymuje się wzór określający współczynnik nierównomierności wydajności δ_{c2} maszyn z kołami o zazębieniu zewnętrznym cykloidalnym 2. rodzaju

$$\delta_{c2} = \frac{\left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right)}{\left[(z_1 + 1)^2 + \frac{z_1}{z_2} (z_2 + 1)^2 - z_1 (z_1 + z_2) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \right]} \quad (9.63)$$

Wzór dla maszyn z kołami o zazębieniu wewnętrznym cykloidalnym 2. rodzaju otrzymuje się ze wzoru (9.63) przez wprowadzenie znaku minus dla liczby zębów z_2 .

W przypadku gdy maszyna pracuje jako silnik, przedstawione wzory opisują nierównomierność chłonności.

Z analizy wzoru (9.63) widać, że na nierównomierność wydajności δ_{c2} ma wpływ liczba zębów z_1 i z_2 . Wpływ ten można przeanalizować na rysunku 9.14, gdzie widać, że współczynnik δ_{c2} dla maszyn o zazębieniu wewnętrznym jest o rząd mniejszy niż dla maszyn o zazębieniu zewnętrznym. Widać również, że w obu przypadkach zwiększenie liczby zębów z_1 i z_2 powoduje zmniejszenie się współczynnika δ_{c2} .



Rys. 9.14. Wykres zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ_{c2} od parametrów zazębienia dla maszyn z zazębieniem cykloidalnym 2. rodzaju:
a) maszyny z zazębieniem zewnętrznym, b) maszyny z zazębieniem wewnętrznym

9.6.4. Maszyny z kołami cykloidalnymi 3. rodzaju

Podstawy projektowania maszyn z kołami cykloidalnymi 3. rodzaju omówiono w [46. 47. 59, 61, 66, 68, 71, 73, 75, 91]. Z prac tych wynika, że największe znaczenie w budowie maszyn hydraulicznych mają:

- zespoły kół epicykloidalnych, zaprojektowane metodą obwiedni zewnętrznej z zazębieniem korygowanym i modyfikowanym, utworzonym na podstawie epicykloidy skróconej (rys. 6.13c) i zwyczajnej (rys. 6.14c),
- zespoły kół hipocykloidalnych, zaprojektowane metodą obwiedni wewnętrznej z zazębieniem korygowanym i modyfikowanym, utworzone na podstawie hipocykloidy skróconej (rys. 6.19c) i zwyczajnej (rys. 6.20c).

W związku z tym, że są to zespoły kół o zazębeniach wewnętrznych, do wyznaczenia ich wydajności chwilowej stosuje się wzór (9.22). Do wzoru tego podstawia się, zgodnie z zasadami budowy zazębienia, zależności wyznaczające promienie r_{a1} , r_{a2} , r_{w1} , r_{w2} oraz zależności, opisujące odległość u punktu przyporu B od bieguna zazębienia C .

9.6.4.1. Maszyny z kołami epicykloidalnymi

Kształt konstrukcyjny i zasadę współpracy zespołów kół z epicykloidalnym zazębieniem wewnętrznym korygowanym i modyfikowanym przedstawiono na rysunku

6.21c i 6.22c. W biegunie zazębienia C stykają się ze sobą koła toczne o promieniach wyrażonych zależnością (6.54), czyli

$$r_{w1} = z_1 \lambda \rho = \frac{1}{2} m z_1 \lambda$$

$$r_{w2} = (z_1 + 1) \lambda \rho = \frac{1}{2} m (z_1 + 1) \lambda$$

Promień wierzchołkowy koła podstawowego o uzębieniu zewnętrznym wyznacza się z zależności

$$r_{a1} = \frac{1}{2} m (z_1 + 1 + \lambda - \nu),$$

natomiast promień wierzchołkowy koła współpracującego o uzębieniu wewnętrznym wyznacza się z zależności

$$r_{a2} = \frac{1}{2} m (z_1 + 1 - \nu)$$

Zgodnie z rysunkami 6.21d i 6.22d odległość punktu przyporu A_1 od centralnego punktu C jest wyrażona zależnością (6.77) o postaci

$$u = \frac{m}{2} (z_1 + 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{z_1}{z_1 + 1}\right) \alpha_1} - g$$

Po podstawieniu do wzoru (9.22) zależności określających r_{a1} , r_{a2} , r_{w1} , r_{w2} oraz u otrzymuje się wzór na wydajność chwilową maszyny z kołami epicykloidalnymi o zazębieniu wewnętrznym

$$Q_{ue} = \frac{dq_{ue}}{d\alpha_1} = \frac{bm^2}{8} \left\{ (z_1 + 1 + \lambda - \nu)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - \nu)^2 + z_1 \lambda^2 - \frac{1}{z_1 + 1} \left[(z_1 + 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{z_1}{z_1 + 1}\right) \alpha_1 - \nu} \right]^2 \right\} \quad (9.64)$$

Maksymalna wydajność chwilowa wystąpi, gdy punkt przyporu A będzie w minimalnej odległości w stosunku od bieguna zazębienia C , czyli dla kąta obrotu koła czynnego $\alpha_1 = 0$ (patrz rys. 6.21d i 6.22d)

$$Q_{ue \max} = \frac{bm^2}{8} \left\{ (z_1 + 1 + \lambda - \nu)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - \nu)^2 + z_1 \lambda^2 - \frac{1}{z_1 + 1} \left[(z_1 + 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda - \nu} \right]^2 \right\} \quad (9.65)$$

Minimalna wydajność chwilowa wystąpi, gdy punkt przyporu A będzie maksymalnie oddalony od bieguna zazębienia C , czyli dla kąta obrotu koła czynnego odpowiadającego połowie podziałki kątowej, a więc dla $\alpha_1 = \pm \frac{\alpha_{z1}}{2} = \pm \frac{\pi}{z_1}$

$$Q_{ue \min} = \frac{bm^2}{8} \left\{ (z_1 + 1 + \lambda - \nu)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - \nu)^2 + z_1 \lambda^2 - \frac{1}{z_1 + 1} \left[(z_1 + 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)} - \nu \right]^2 \right\} \quad (9.66)$$

Gdy zastosuje się wzór (9.25) i podstawią do niego zależność (9.68), wówczas można wyznaczyć średnią wydajność chwilową

$$Q_{ue \text{sr}} = \frac{bm^2}{8} \left\{ (z_1 + 1 + \lambda - \nu)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - \nu)^2 + z_1 \lambda^2 - \frac{1}{z_1 + 1} \left[(z_1 + 1)^2 \left\{ 1 + \lambda^2 - \frac{1}{\pi} 2\lambda (z_1 + 1) \sin\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right) \right\} - \frac{4\nu(z_1 + 1)^2}{\pi} \left\{ \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} E(\varphi, k) - \frac{2\lambda \sin\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}} \right\} + \nu^2 \right] \right\} \quad (9.67)$$

Objętość cieczy q_{ze} , wypartą przez jedną parę zębów przy obrocie koła czynnego o kąt α_{z1} wyznacza się, podstawiając do wzoru (9.23) zależność (9.64). Całkowania należy dokonać w granicach od $-\frac{\alpha_{z1}}{2} = -\frac{\pi}{z_1}$ do $+\frac{\alpha_{z1}}{2} = +\frac{\pi}{z_1}$. Ostatecznie otrzymuje się:

$$q_{ze} = \frac{\pi bm^2}{4z_1} \left\{ (z_1 + 1 + \lambda - \nu)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - \nu)^2 + z_1 \lambda^2 - \frac{1}{z_1 + 1} \left[(z_1 + 1)^2 \left\{ 1 + \lambda^2 - \frac{2\lambda (z_1 + 1) \sin\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}{\pi} \right\} - \frac{4\nu(z_1 + 1)^2}{\pi} \left\{ \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} E(\varphi, k) - \frac{2\lambda \sin\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}} \right\} + \nu^2 \right] \right\} \quad (9.68)$$

Po scałkowaniu we wzorze (9.68) pojawia się, zgodnie z [41], całka eliptyczna drugiego rodzaju $E(\varphi, k)$, dla której parametry φ i k mają postać

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(1 + \lambda^2 - 2\lambda)(1 - \cos \alpha_1)}{2(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha_1)}}$$

$$k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1 + \lambda}$$

gdzie $\alpha_1 = \pi/z_1$.

Całkę $E(\varphi, k)$ można odczytać z tabel podanych w [42] lub obliczyć metodami numerycznymi.

Zgodnie ze wzorem definicyjnym (9.26) wydajność właściwą maszyny q_e wyznacza się po pomnożeniu objętości q_{ze} przez liczbę zębów koła czynnego z_1 . Wydajność właściwa q_e ma zatem postać

$$q_e = q_{ze} z_1 = \frac{\pi b m^2}{4} \left\{ (z_1 + 1 + \lambda - \nu)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - \nu)^2 + z_1 \lambda^2 \right.$$

$$- \frac{1}{z_1 + 1} \left[(z_1 + 1)^2 \left\{ 1 + \lambda^2 - \frac{2\lambda(z_1 + 1) \sin\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}{\pi} \right\} \right.$$

$$\left. \left. - \frac{4\nu(z_1 + 1)^2}{\pi} \left\{ \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} E(\varphi, k) - \frac{2\lambda \sin\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}} \right\} + \nu^2 \right] \right\} \quad (9.69)$$

Po pomnożeniu q_e przez prędkość obrotową wału n otrzymuje się, zgodnie ze wzorem definicyjnym (9.27), wydajność teoretyczną pompy Q_{te}

$$Q_{te} = Q_{ueśr} = \frac{\pi b m^2 n}{4} \left\{ (z_1 + 1 + \lambda - \nu)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - \nu)^2 + z_1 \lambda^2 \right.$$

$$- \frac{1}{z_1 + 1} \left[(z_1 + 1)^2 \left\{ 1 + \lambda^2 - \frac{2\lambda(z_1 + 1) \sin\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}{\pi} \right\} \right.$$

$$\left. \left. - \frac{4\nu(z_1 + 1)^2}{\pi} \left\{ \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} E(\varphi, k) - \frac{2\lambda \sin\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}} \right\} + \nu^2 \right] \right\} \quad (9.70)$$

Jednostkową wydajność właściwą zdefiniowaną przez zależność (9.28) otrzymuje się przez podzielenie zależności (9.69) przez czynnik $\pi b m^2$ i ma ona postać:

$$\begin{aligned} \frac{q_e}{\pi b m^2} = & \frac{1}{4} \left\{ (z_1 + 1 + \lambda - \nu)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - \nu)^2 + z_1 \lambda^2 \right. \\ & - \frac{1}{z_1 + 1} \left[(z_1 + 1)^2 \left\{ 1 + \lambda^2 - \frac{2\lambda(z_1 + 1) \sin\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}{\pi} \right\} \right. \\ & \left. \left. - \frac{4\nu(z_1 + 1)^2}{\pi} \left\{ \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} E(\varphi, k) - \frac{2\lambda \sin\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}} \right\} + \nu^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (9.71)$$

Wyprowadzony wzór ma charakter ogólny i obowiązuje dla obu podstawowych zespołów kół epicykloidalnych, pokazanych na rysunku 6.21c i 6.22c. Do wzoru należy jedynie wprowadzić odpowiednie wartości parametrów λ i ν , które wynoszą:

- $\lambda < 1$, $\nu < 1$, dla kół utworzonych na podstawie epicykloidy skróconej (rys. 6.21c),
- $\lambda = 1$, $\nu < 1$, dla kół utworzonych na podstawie epicykloidy zwyczajnej (rys. 6.22c).

Wzór (9.71) jest niewygodny do stosowania w praktyce projektowej, zwłaszcza kłopotliwe jest obliczanie ostatniego członu wzoru, ograniczonego nawiasami klamrowymi, zawierającego całkę eliptyczną. Stwierdzono, że wpływ tego członu na całkowitą wartość wydajności właściwej $q_e/(\pi b m^2)$ jest stosunkowo niewielki i dla najczęściej stosowanych parametrów z , λ , ν wynosi kilka procent [62, 66]. Do obliczeń praktycznych można zatem stosować, niepopelniając dużego błędu, uproszczoną formę wzoru (9.71) o postaci:

$$\frac{q_e}{\pi b m^2} = \frac{1}{4} \left[(z_1 + 1 + \lambda - \nu)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - \nu)^2 + z_1 \lambda^2 \right] \quad (9.72)$$

W przypadku, gdy maszyna pracuje jako silnik, przedstawione wzory opisują chłonność.

Po podstawieniu do wzoru definicyjnego (9.33) zależności (9.65), (9.66), (9.67) oraz dokonaniu przekształceń otrzymuje się wzór do wyznaczania współczynnika nierównomierności wydajności maszyn z kołami epicykloidalnymi

$$\delta_e = \frac{A}{B}$$

$$A = \frac{1}{z_1 + 1} \left\{ \left[(z_1 + 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)} - \nu \right]^2 - \left[(z_1 + 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} - \nu \right]^2 \right\}$$

$$B = (z_1 + 1 + \lambda - \nu)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - \nu)^2 + z_1 \lambda^2$$

$$- \frac{1}{z_1 + 1} \left\{ (z_1 + 1)^2 \left[1 + \lambda^2 - \frac{2\lambda(z_1 + 1) \sin\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}{\pi} \right] \right.$$

$$\left. - \frac{4\nu(z_1 + 1)^2}{\pi} \left[\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} E(\varphi, k) - \frac{2\lambda \sin\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_1 + 1}\right)}} \right] + \nu^2 \right\} \quad (9.73)$$

W przypadku gdy maszyna pracuje jako silnik, wówczas wzór (9.73) opisuje nierównomierność chłonności.

9.6.4.2. Maszyny z kołami hipocykloidalnymi

Kształt konstrukcyjny i zasadę współpracy zespołów kół z zazębieniem hipocykloidalnym wewnętrznym korygowanym i modyfikowanym przedstawiono na rysunku 6.23c i 6.24c. W biegunie zazębienia C stykają się ze sobą koła toczne o promieniach wyrażonych zależnościami

$$r_{w1} = z_1 \lambda \rho = \frac{1}{2} m (z_2 - 1) \lambda$$

$$r_{w2} = z_2 \lambda \rho = \frac{1}{2} m z_2 \lambda$$

Promień wierzchołkowy koła podstawowego o uzębieniu wewnętrznym wyznacza się z zależności:

$$r_{a2} = \frac{1}{2} m (z_2 - 1 - \lambda + \nu),$$

a promień wierzchołkowy koła współpracującego o uzębieniu zewnętrznym wyznacza się z zależności:

$$r_{a1} = \frac{1}{2} m(z_2 - 1 + \nu)$$

Zgodnie z rysunkami 6.23d i 6.24d odległość punktu przyporu A_1 od punktu centralnego C wyrażona jest zależnością (6.84) o postaci

$$u = \frac{m}{2} (z_2 - 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha_1} + g$$

Po podstawieniu do wzoru (9.22) zależności określających r_{a1} , r_{a2} , r_{w1} , r_{w2} oraz u otrzymuje się wzór na wydajność chwilową maszyny z kołami hipocykloidalnymi o ząbieniu wewnętrznym

$$Q_{uh} = \frac{dq_{uh}}{d\alpha_1} = \frac{bm^2}{8} \left\{ (z_2 - 1 + \nu)^2 - \frac{z_2 - 1}{z_2} (z_2 - 1 - \lambda + \nu)^2 + (z_2 - 1)\lambda^2 + \frac{1}{z_2} \left[(z_2 - 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha_1} + \nu \right]^2 \right\} \quad (9.74)$$

Maksymalna wydajność chwilowa wystąpi, gdy punkt przyporu A_1 będzie w minimalnej odległości w stosunku do bieguna ząbienia C , czyli dla kąta obrotu koła czynnego $\alpha_1 = 0$ (patrz rys. 6.23d i 6.24d)

$$Q_{uh \max} = \frac{bm^2}{8} \left\{ (z_2 - 1 + \nu)^2 - \frac{z_2 - 1}{z_2} (z_2 - 1 - \lambda + \nu)^2 + (z_2 - 1)\lambda^2 - \frac{1}{z_2} \left[(z_2 - 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda + \nu} \right]^2 \right\} \quad (9.75)$$

Minimalna wydajność chwilowa wystąpi, gdy punkt przyporu A_1 będzie maksymalnie oddalony od bieguna ząbienia C , czyli dla kąta obrotu koła czynnego odpowiadającego połowie podziałki kątowej, a więc dla

$$\alpha_1 = \pm \frac{\alpha_{z1}}{2} = \pm \frac{\pi}{z_1} = \pm \frac{\pi}{z_2 - 1}$$

Wtedy

$$Q_{uh \min} = \frac{bm^2}{8} \left\{ (z_2 - 1 + \nu)^2 - \frac{z_2 - 1}{z_2} (z_2 - 1 - \lambda + \nu)^2 + (z_2 - 1)\lambda^2 - \frac{1}{z_2} \left[(z_2 - 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \left(\frac{\pi}{z_2 - 1} \right) + \nu} \right]^2 \right\} \quad (9.76)$$

Gdy zastosuje się wzór (9.25) i podstawią do niego zależność (9.78), wówczas można wyznaczyć średnią wartość wydajności chwilowej

$$\begin{aligned}
 Q_{uh\dot{s}r} = & \frac{bm^2}{8} \left\{ (z_2 - 1 + \nu)^2 - \frac{z_2 - 1}{z_2} (z_2 - 1 - \lambda + \nu)^2 + (z_2 - 1)\lambda^2 \right. \\
 & - \frac{1}{z_2} \left[(z_2 - 1)^2 \left\{ 1 + \lambda^2 - \frac{2\lambda(z_2 - 1)\sin\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}{\pi} \right\} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{4\nu(z_2 - 1)^2}{\pi} \left\{ \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} E(\varphi, k) - \frac{2\lambda \sin\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}} \right\} + \nu^2 \right] \right\} \quad (9.77)
 \end{aligned}$$

Objętość cieczy q_{zh} , wypartą przez jedną parę zębów podczas obrotu koła czynnego o kąt α_{z1} , wyznacza się po podstawieniu do wzoru (9.23) zależności (9.74). Całkuje się w granicach od $-\frac{\alpha_{z1}}{2} = -\frac{\pi}{z_2 - 1}$ do $+\frac{\alpha_{z1}}{2} = +\frac{\pi}{z_2 - 1}$. W rezultacie otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 q_{zh} = & \frac{\pi bm^2}{4(z_2 - 1)} \left\{ (z_2 - 1 + \nu)^2 - \frac{z_2 - 1}{z_2} (z_2 - 1 - \lambda + \nu)^2 + (z_2 - 1)\lambda^2 \right. \\
 & - \frac{1}{z_2} \left[(z_2 - 1)^2 \left\{ 1 + \lambda^2 - \frac{2\lambda(z_2 - 1)\sin\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}{\pi} \right\} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{4\nu(z_2 - 1)^2}{\pi} \left\{ \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} E(\varphi, k) - \frac{2\lambda \sin\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}} \right\} + \nu^2 \right] \right\} \quad (9.78)
 \end{aligned}$$

Całkę eliptyczną $E(\varphi, k)$ wyznacza się podobnie jak w przypadku maszyn z kołami epicykloidalnymi.

Zgodnie ze wzorem definicyjnym (9.26) wydajność właściwą maszyny q_h wyznacza się po pomnożeniu objętości q_{zh} przez liczbę zębów koła czynnego $z_1 = z_2 - 1$. Ma ona zatem postać

$$\begin{aligned}
 q_h = q_{zh} z_1 = \frac{\pi b m^2}{4} & \left\{ (z_2 - 1 + \nu)^2 - \frac{z_2 - 1}{z_2} (z_2 - 1 - \lambda + \nu)^2 + (z_2 - 1) \lambda^2 \right. \\
 & - \frac{1}{z_2} \left[(z_2 - 1)^2 \left\{ 1 + \lambda^2 - \frac{2\lambda(z_2 - 1) \sin\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}{\pi} \right\} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{4\nu(z_2 - 1)^2}{\pi} \left\{ \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} E(\varphi, k) - \frac{2\lambda \sin\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}} \right\} + \nu^2 \right] \right\} \quad (9.79)
 \end{aligned}$$

Z kolei po pomnożeniu q_h przez prędkość obrotową wału napędowego n otrzymuje się, zgodnie ze wzorem definicyjnym (9.27), wydajność teoretyczną pompy Q_{th}

$$\begin{aligned}
 Q_{th} = \frac{\pi b m^2 n}{4} & \left\{ (z_2 - 1 + \nu)^2 - \frac{z_2 - 1}{z_2} (z_2 - 1 - \lambda + \nu)^2 + (z_2 - 1) \lambda^2 \right. \\
 & - \frac{1}{z_2} \left[(z_2 - 1)^2 \left\{ 1 + \lambda^2 - \frac{2\lambda(z_2 - 1) \sin\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}{\pi} \right\} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{4\nu(z_2 - 1)^2}{\pi} \left\{ \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} E(\varphi, k) - \frac{2\lambda \sin\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}} \right\} + \nu^2 \right] \right\} \quad (9.80)
 \end{aligned}$$

Jednostkową wydajność właściwą zdefiniowaną przez zależność (9.28) otrzymuje się przez podzielenie zależności (9.79) przez czynnik $\pi b m^2$ i ma ona postać:

$$\begin{aligned}
\frac{q_h}{\pi b m^2} = & \frac{1}{4} \left\{ (z_2 - 1 + \nu)^2 - \frac{z_2 - 1}{z_2} (z_2 - 1 - \lambda + \nu)^2 + (z_2 - 1) \lambda^2 \right. \\
& - \frac{1}{z_2} \left[(z_2 - 1)^2 \left\{ 1 + \lambda^2 - \frac{2\lambda(z_2 - 1) \sin\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}{\pi} \right\} \right. \\
& \left. \left. + \frac{4\nu(z_2 - 1)^2}{\pi} \left\{ \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda E(\varphi, k)} - \frac{2\lambda \sin\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}} \right\} + \nu^2 \right] \right\} \quad (9.81)
\end{aligned}$$

Przedstawiony wzór ma charakter ogólny i obowiązuje dla obu podstawowych zespołów kół hipocykloidalnych, pokazanych na rysunkach 6.23c i 6.24c. We wzorze zastosowano liczbę zębów z_2 , ponieważ kołem podstawowym w zespole jest koło o użębieniu wewnętrznym. Do wzoru należy wprowadzić odpowiednie wartości parametrów λ i ν , które wynoszą

- $\lambda < 1$, $\nu > 1$, dla kół utworzonych na podstawie hipocykloidy skróconej (rys. 6.23c),
- $\lambda = 1$, $\nu > 1$, dla kół utworzonych na podstawie hipocykloidy zwyczajnej (rys. 6.24c).

Podobnie jak w przypadku maszyn z zazębieniem epicykloidalnym, wzór (9.81) można uprościć, pomijając człon zawarty w nawiasach klamrowych i stosować go do obliczeń praktycznych w postaci

$$\frac{q_h}{\pi b m^2} = \frac{1}{4} \left[(z_2 - 1 + \nu)^2 - \frac{z_2 - 1}{z_2} (z_2 - 1 - \lambda + \nu)^2 + (z_2 - 1) \lambda^2 \right] \quad (9.82)$$

W przypadku gdy maszyna pracuje jako silnik, przedstawione wzory opisują chłonność.

Po podstawieniu do wzoru (9.33) zależności (9.75), (9.76), (9.77) oraz dokonaniu przekształceń otrzymuje się wzór do wyznaczania współczynnika nierównomierności wydajności maszyn z kołami hipocykloidalnymi

$$\delta_h = \frac{C}{D}$$

$$C = \frac{1}{z_2} \left\{ \left[(z_2 - 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)} + \nu \right]^2 - \left[(z_2 - 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} + \nu \right]^2 \right\}$$

$$D = (z_2 - 1 + \nu)^2 - \frac{z_2 - 1}{z_2} (z_2 - 1 - \lambda + \nu)^2 + (z_2 - 1) \lambda^2$$

$$- \frac{1}{z_2} \left\{ (z_2 - 1)^2 \left[1 + \lambda^2 - \frac{2\lambda(z_2 - 1) \sin\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}{\pi} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{4\nu(z_2 - 1)^2}{\pi} \left[\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} E(\varphi, k) - \frac{2\lambda \sin\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_2 - 1}\right)}} \right] + \nu^2 \right\} \quad (9.83)$$

W przypadku gdy maszyna pracuje jako silnik, wówczas wzór (9.83) opisuje nierównomierność chłonności.

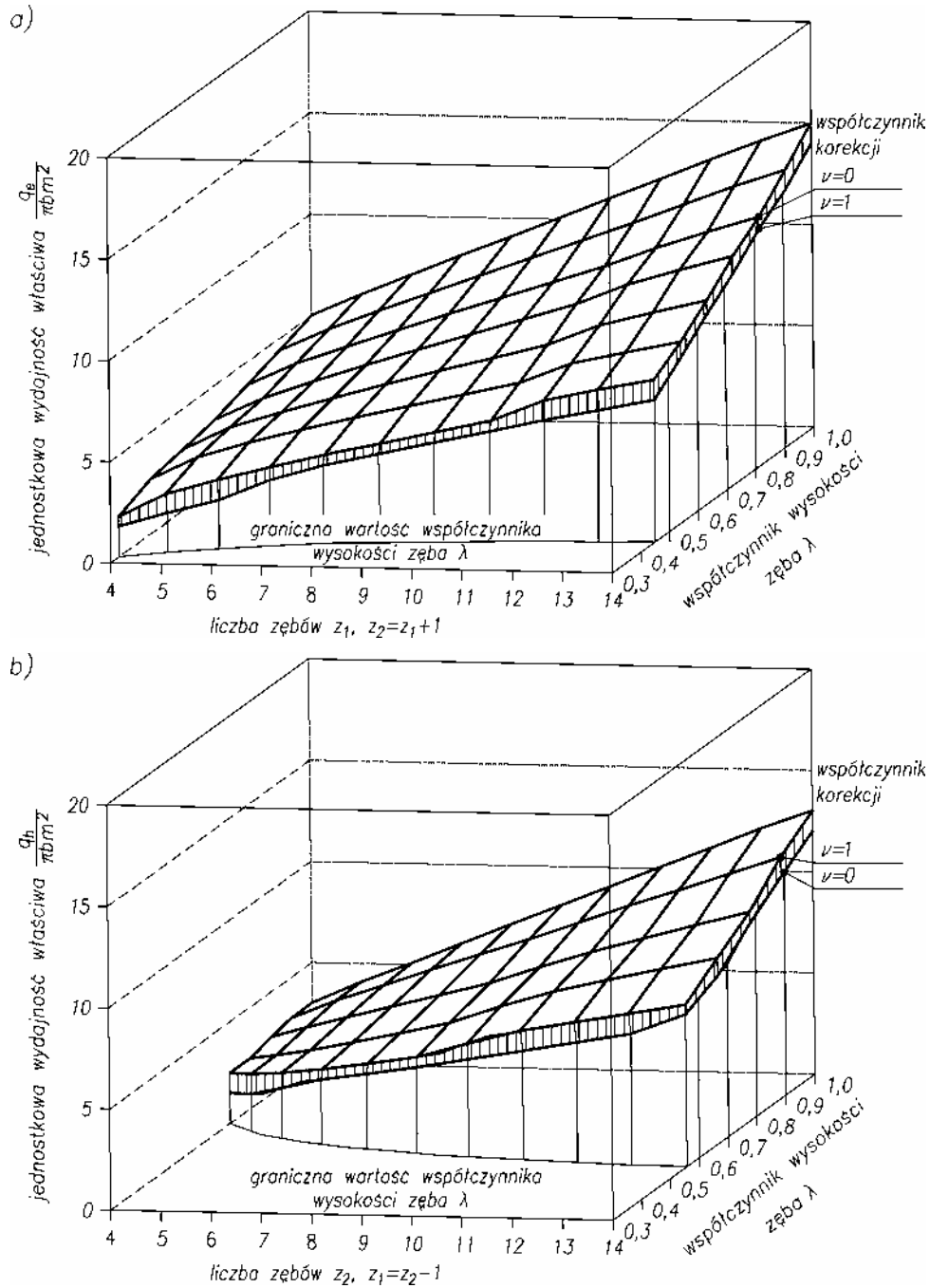
9.6.4.3. Zależność wydajności i nierównomierności wydajności od parametrów geometrycznych kół

Z analizy zależności (9.71) i (9.81) wynika, że na jednostkową wydajność (chłonność) właściwą wpływają:

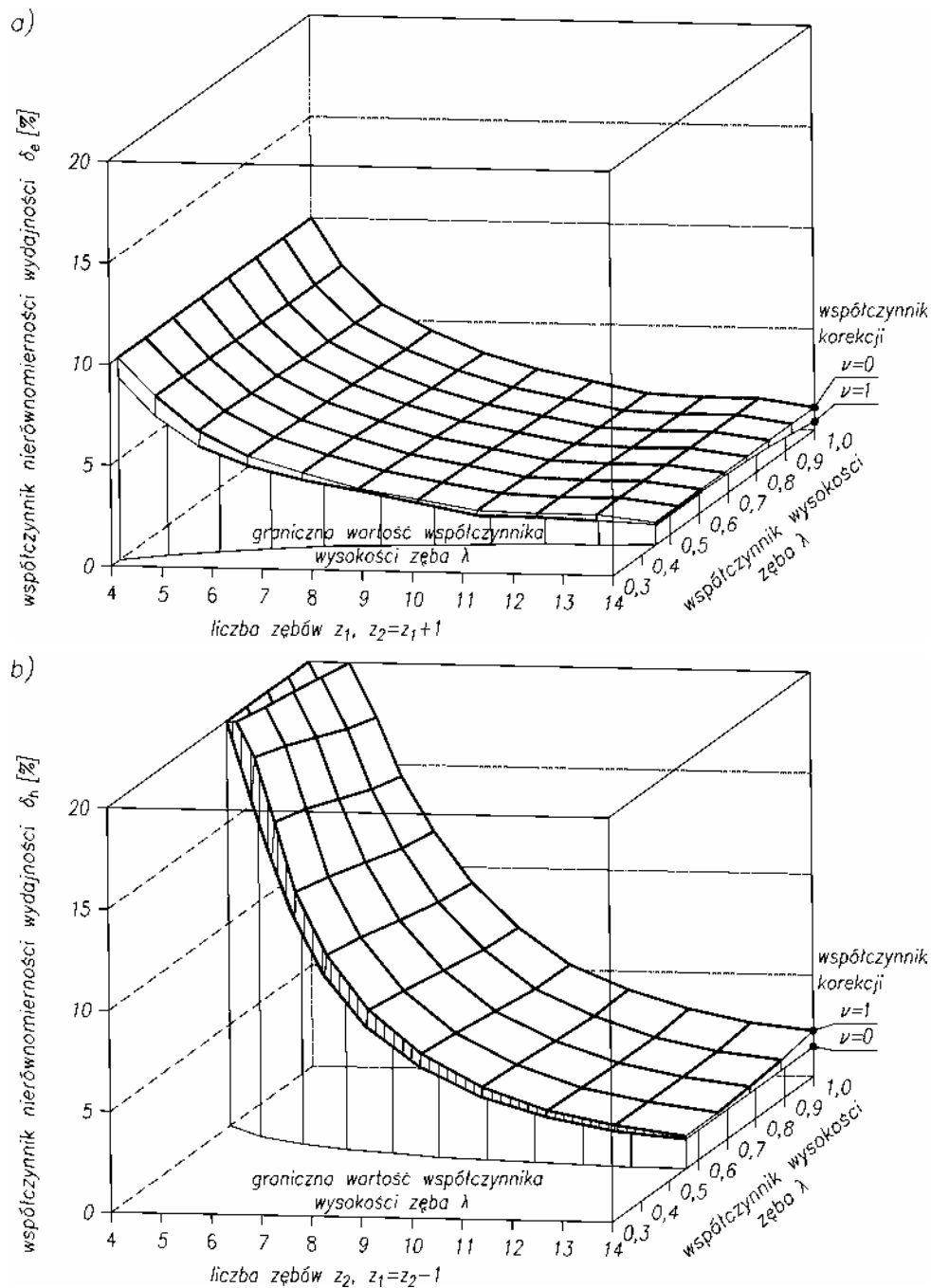
- liczba zębów z_1 lub z_2 ,
- współczynnik wysokości zęba λ ,
- współczynnik przesunięcia ekwidystanty ν .

Na rysunku 9.15a przedstawiono wykresy wpływu parametrów na jednostkową wydajność właściwą maszyn z zazębieniem epicykloidalnym, na rysunku 9.15b zaś maszyn z zazębieniem hipocykloidalnym. Wykresy sporządzono dla zakresów zmienności parametrów ustalonych w rozdziale 6.

Na wykresach widać, że zwiększenie liczby zębów wpływa wprost proporcjonalnie na wydajność pomp. Zwiększenie współczynnika λ również powoduje zwiększenie wydajności jednostkowej, ponieważ zęby mają większą wysokość, przez co zwiększa się objętość wrębów międzyzębnych. Wpływ współczynnika przesunięcia ekwidystanty ν zależy od rodzaju zazębienia. W przypadku pomp o zazębieniach epicykloidalnych (rys. 9.15a) zwiększanie ν od 0 do 1 zmniejsza wydajność pompy. Zarys



Rys. 9.15. Wykresy zależności jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi b m^2)$ od parametrów zazębienia dla maszyn z zazębieniem: a) epicykloidalnym, b) hipocykloidalnym



Rys. 9.16. Wykresy zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od parametrów zazębienia dla maszyn z zazębieniem: a) epicykloidalnym, b) hipocykloidalnym

uzębienia znajduje się bowiem wewnątrz epicykloidy zasadniczej, przez co zmniejszają się wymiary kół, a więc i objętość wrębów. W zazębieniach hipocykloidalnych (rys. 9.15b) zwiększanie współczynnika ν powoduje zwiększanie wydajności. Zarysy kół tworzone są na zewnątrz hipocykloidy zasadniczej, co zwiększa objętość wrębów.

Analiza zależności (9.73) i (9.83) wykazuje, że współczynnik nierównomierności wydajności (chłonności) zależy, podobnie jak wydajność właściwa, od liczby zębów z_1 i z_2 , współczynnika wysokości zęba λ oraz współczynnika przesunięcia ekwidystanty ν . Wpływ tych parametrów na współczynnik nierównomierności wydajności maszyn z zazębieniem epi- i hipocykloidalnym ilustrują wykresy na rysunku 9.16a i 9.16b. Wykresy sporządzono dla zakresów zmienności parametrów zazębienia takich samych jak w analizie wydajności. Z wykresów wynika, że zwiększanie liczby zębów z zasadniczo zmniejsza współczynnik nierównomierności wydajności δ .

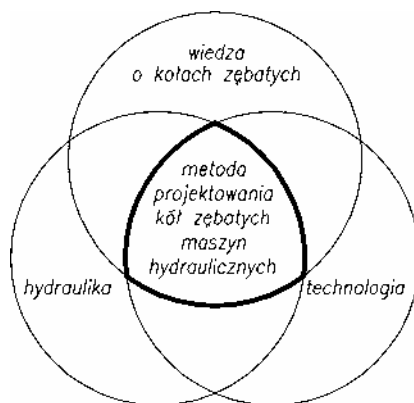
Wpływ współczynników λ i ν należy rozpatrywać łącznie. W zazębieniach epicykloidalnych (rys. 9.16a) zwiększenie λ i ν powoduje zmniejszenie współczynnika δ . Odwrotnie jest w zazębieniach hipocykloidalnych (rys. 9.16b).

W pierwszym przypadku zwiększenie współczynnika λ i ν sprawia, że współczynnik δ_e (9.73) maleje, w drugim δ_h zwiększa się (9.83). W obu przypadkach dla przyjmowanej zwykle liczby zębów $z \geq 6$ oraz typowych wartości parametrów λ i ν przyjmowanych według rozdziału 6, współczynnik wynosi $\delta = 1-10\%$. Wśród pomp wyporowych tylko pompy śrubowe i łopatkowe mają porównywalnie mały współczynnik nierównomierności wydajności.

10. Przykłady projektowania kół zębatach maszyn hydraulicznych

10.1. Metoda projektowania kół zębatach maszyn hydraulicznych

Podstawą projektowania kół zębatach maszyn hydraulicznych są trzy obszary wiedzy, wchodzące w zakres budowy maszyn – wiedza o kołach zębatach, technologii oraz hydraulice (rys. 10.1). Pierwszy obszar obejmuje przede wszystkim geometrię i kinematykę kół zębatach oraz wyznaczanie sił międzyzębatach, występujących w tych kołach. Zagadnienia te opisano szczegółowo w rozdziałach 3–7. Drugi obszar zawiera wiedzę z technologii, zwłaszcza dotyczące opracowania procesu wytwarzania, doboru maszyn oraz doboru i ewentualnie konstrukcji narzędzi. Zagadnienia te opisano w rozdziale 8. Wreszcie trzeci obszar obejmuje wiedzę na temat procesów i zjawisk hydraulicznych, zachodzących w maszynie hydraulicznej z udziałem kół zębatach. Podstawowym problemem jest tu przetwarzanie energii mechanicznej na hydrauliczną i odwrotnie za pomocą kół zębatach. W związku z tym generuje się wydajność lub chłonność. Zagadnienia te opisano szczegółowo w rozdziale 9.



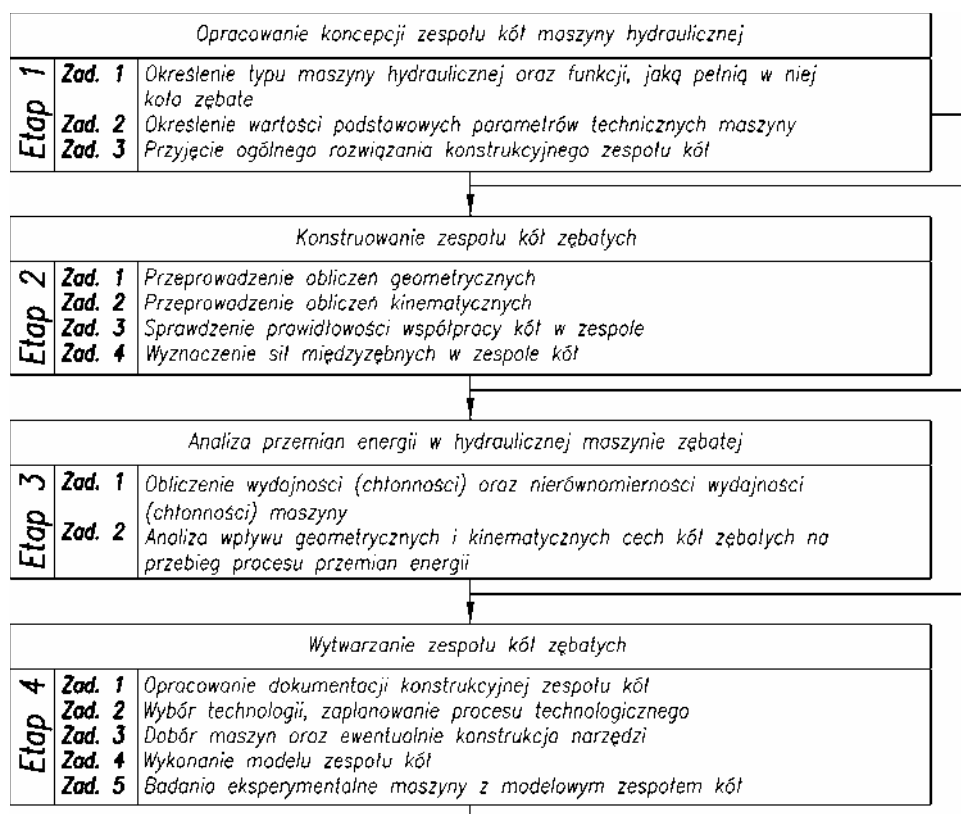
Rys. 10.1. Wzajemność obszarów wiedzy, wykorzystywanych do projektowania kół zębatach maszyn hydraulicznych

Korzystając z wiedzy z zakresu trzech wymienionych obszarów opracowano metodę projektowania kół zębatach maszyn hydraulicznych, której schemat blokowy przedstawiono na rysunku 10.2. Proces projektowania podzielono na cztery etapy:

- opracowanie koncepcji zespołu kół maszyny hydraulicznej,
- konstruowanie zespołu kół zębatach,
- analiza przemian energii w zębatach maszynie hydraulicznej,
- wytwarzanie zespołu kół zębatach.

W ramach poszczególnych etapów wyznaczono zadania. Jak pokazano na rysunku 10.2, cały proces projektowy prowadzi się, przechodząc kolejno od etapu 1 do etapu 4.

Na rysunku 10.2 pokazano również, że istnieje możliwość prowadzenia zmian i korekt w trakcie realizacji procesu projektowego poprzez sprzężenia zwrotne wiążące poszczególne etapy.



Rys. 10.2. Metoda projektowania kół zębatach maszyn hydraulicznych

Przedstawiona ogólna metoda projektowania dotyczy wszystkich opisanych w pracy typów kół zębatach, tzn. kół ewolwentowych oraz cykloidalnych 1., 2. i 3. rodzaju. Istnieją co prawda pewne różnice między poszczególnymi rodzajami kół, ale odnoszą się one raczej do sposobów prowadzenia prac projektowych w poszczególnych etapach niż do treści merytorycznej tych etapów.

Przedstawioną metodę projektowania kół zębatych maszyn hydraulicznych zastosowano do zaprojektowania zespołów kół typowych maszyn zębatych stosowanych w praktyce. Podano więc przykłady procesu projektowania kół:

- ewolwentowych do typoszeregu pomp zębatych,
- ewolwentowych do wielofunkcyjnych maszyn hydraulicznych zębatych,
- cykloidalnych do typoszeregu pomp gerotorowych,
- cykloidalnych do bloków sterujących,
- cykloidalnych do silników orbitalnych,
- cykloidalnych z podwójnym zazębieniem do silników orbitalnych.

10.2. Projektowanie kół ewolwentowych do typoszeregu pomp zębatych

10.2.1. Opracowanie koncepcji zespołu kół maszyny

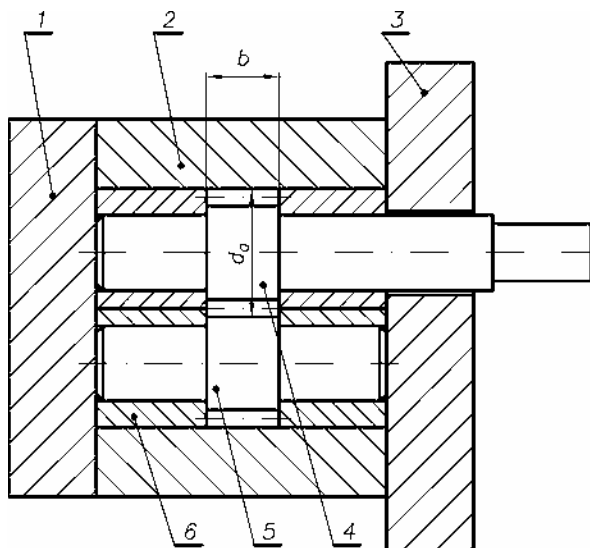
Jak już wcześniej powiedziano, najbardziej popularnymi maszynami zębatymi są pompy zębate o zazębieniu zewnętrznym ewolwentowym. Schematyczne rozwiązanie konstrukcyjne typowej pompy zębatej pokazano na rysunku 10.3. Korpus pompy składa się z trzech części: korpusu tylnego (1), środkowego (2) i przedniego (3). W korpusie środkowym znajduje się zespół kół zębatych (4), (5), które są łożyskowane w łożyskach (6). Łożyska te współpracują jednocześnie z czołami kół zębatych, stanowiąc elementy kompensujące luz osiowy w pompie. Pompy zębate mają prostą i zwartą budowę, małe gabaryty i masę. Mogą pracować pod wysokim ciśnieniem, zróżnicowanymi wydajnościami i dużą sprawnością. Jednakże charakteryzują się stosunkowo dużą pulsacją wydajności i związaną z tym hałaśliwością pracy. W takiej sytuacji bardzo istotne jest prawidłowe zaprojektowanie zespołu kół zębatych (4), (5), które stanowią podstawowy zespół maszyny.

Przyjęto, że przedstawione na rysunku 10.3 rozwiązanie konstrukcyjne stanowi podstawę do projektowania typoszeregu pomp zębatych o zazębieniu ewolwentowym zewnętrznym, złożonego z trzech jednostek o wydajnościach właściwych $q = 10, 16, 20 \text{ cm}^3/\text{obr}$. Zakłada się następujące parametry techniczne dla typoszeregu:

- ciśnienie robocze $p = 20 \text{ MPa}$,
- prędkość obrotowa kół $n = 500 - 2500 \text{ obr/min}$,
- czynnik roboczy – olej mineralny.

Zakłada się również, że rozwiązanie konstrukcyjne kół, dokładność ich wykonania i montażu powinny zapewniać osiągnięcie dużej sprawności pompy. Na podstawie [40, 44] przewiduje się, że

- sprawność objętościowa $\eta_v > 0,90$,
- sprawność całkowita $\eta > 0,80$.



Rys. 10.3. Schemat pompy zębatej o zazębieniu zewnętrznym:
1, 2, 3 – korpusy pompy, 4, 5 – koła zębate, 6 – łożysko

Z zasady pracy pompy zębatej (rys. 9.1) wynika, że zespół kół o zazębieniu ewolwentowym zewnętrznym (4) i (5) ma służyć do realizacji przemiany energii mechanicznej ruchu obrotowego na energię ciśnienia, zmagazynowaną w czynniku roboczym. Do tego celu można wykorzystać koła wykonane ze stali i pracujące przy osiach ustalonych. Ze względu na zakładane wysokie ciśnienie robocze koła zębate (4) i (5) oraz elementy kompensacyjne (6) powinny współpracować ze sobą z zachowaniem minimalnych luzów międzyzębnych oraz luzu osiowego. W związku z tym należy założyć dużą dokładność wykonania kół i korpusów łożysk. Zakłada się także, że koła zębate stosowane w kolejnych jednostkach typoszeregu będą miały taką samą średnicę d_a , a różnić się będą szerokością b (rys. 10.3). Im większa będzie wydajność właściwa pompy q , tym większa będzie szerokość kół b .

10.2.2. Konstruowanie zespołu kół zębatych

Podstawowe parametry uzębienia i zazębienia ustala się według następujących zasad:

- przyjmuje się stosunkowo małą liczbę zębów $z_1 = z_2 = 10$ tak, aby wymiary promieniowe zespołu kół nie były zbyt duże,
- przyjmuje się moduł $m = 3,5$,
- przyjmuje się standardowy współczynnik wysokości zęba $y = 1$,
- przyjmuje się standardowy kąt zarysu $\alpha_0 = 20^\circ$,
- przyjmuje się pomniejszony międzyzębny luz wierzchołkowy $c = 0,2 \cdot m$.

Korzystając ze wzorów (3.5)–(3.10) przeprowadza się obliczenia wstępne wymiarów zęba i koła zębatego, które w odróżnieniu od wymiarów ostatecznych oznaczono znakiem „prim”

$$\begin{aligned}h'_a &= 3,5 \text{ mm} \\h'_f &= 4,2 \text{ m} \\h' &= h'_a + h'_f = 7,7 \text{ mm} \\d' &= 35 \text{ mm} \\d'_a &= 42 \text{ mm} \\d'_f &= 26,6 \text{ mm} \\d'_b &= 32,88 \text{ mm}\end{aligned}$$

Średnica podziałowa i zasadnicza wyznaczone wstępnie są jednocześnie wartościami ostatecznymi, stąd $d = d'$, $d_b = d'_b$.

Korzystając ze wzoru (3.39), wyznacza się odległość osi współpracujących kół równą:

$$a_0 = 35 \text{ mm}$$

Z analizy otrzymanych wstępnie wymiarów kół stwierdza się, że mają one proporcjonalny kształt, a więc można przystąpić do dalszych obliczeń. Dobrana wcześniej liczba zębów $z = 10$ jest mniejsza od granicznej liczby zębów $z_g = 14$, wyznaczonej ze wzoru (3.13), dlatego należy spodziewać się podcięcia zębów. W związku z tym należy dokonać korekcji P (z rozsunieniem osi kół). Graniczny współczynnik korekcji x_g , zapewniający wyeliminowanie podcięcia zęba, wyznacza się ze wzoru (3.14)

$$x_{g \min} = 0,2857$$

Ze względu na zapewnienie odpowiedniej liczby przyporu przyjmuje się współczynnik korekcji $x = 0,4$.

Za pomocą wzoru (3.50) oblicza się toczny kąt przyporu

$$\alpha_w = 28^\circ 12'$$

Ze wzoru (3.42) oblicza się toczną odległość osi

$$a_w = 37,31 \text{ mm}$$

a ze wzorów (3.18) i (3.19) wyznacza się wymiary średnic kół po korekcji

$$\begin{aligned}d_a &= 44,8 \text{ mm} \\d_f &= 29,4 \text{ mm}\end{aligned}$$

Pozostaje jeszcze sprawdzić, czy w wyniku korekcji nie będzie dochodzić do interferencji wierzchołków i stóp współpracujących zębów, zgodnie z warunkiem podanym w rozdziale 3.3.2 oraz na rysunku 3.10, czyli

$$a_w - \left(\frac{d_a}{2} + \frac{d_f}{2} \right) \geq c$$

Po dokonaniu obliczeń otrzymuje się

$$0,2 < 0,7$$

Warunek nie jest zatem spełniony i w związku z tym należy skrócić głowy zębów i zmniejszyć średnicę wierzchołków do $d_a = 43,8$ mm, przez co wyeliminowane zostanie niebezpieczeństwo interferencji.

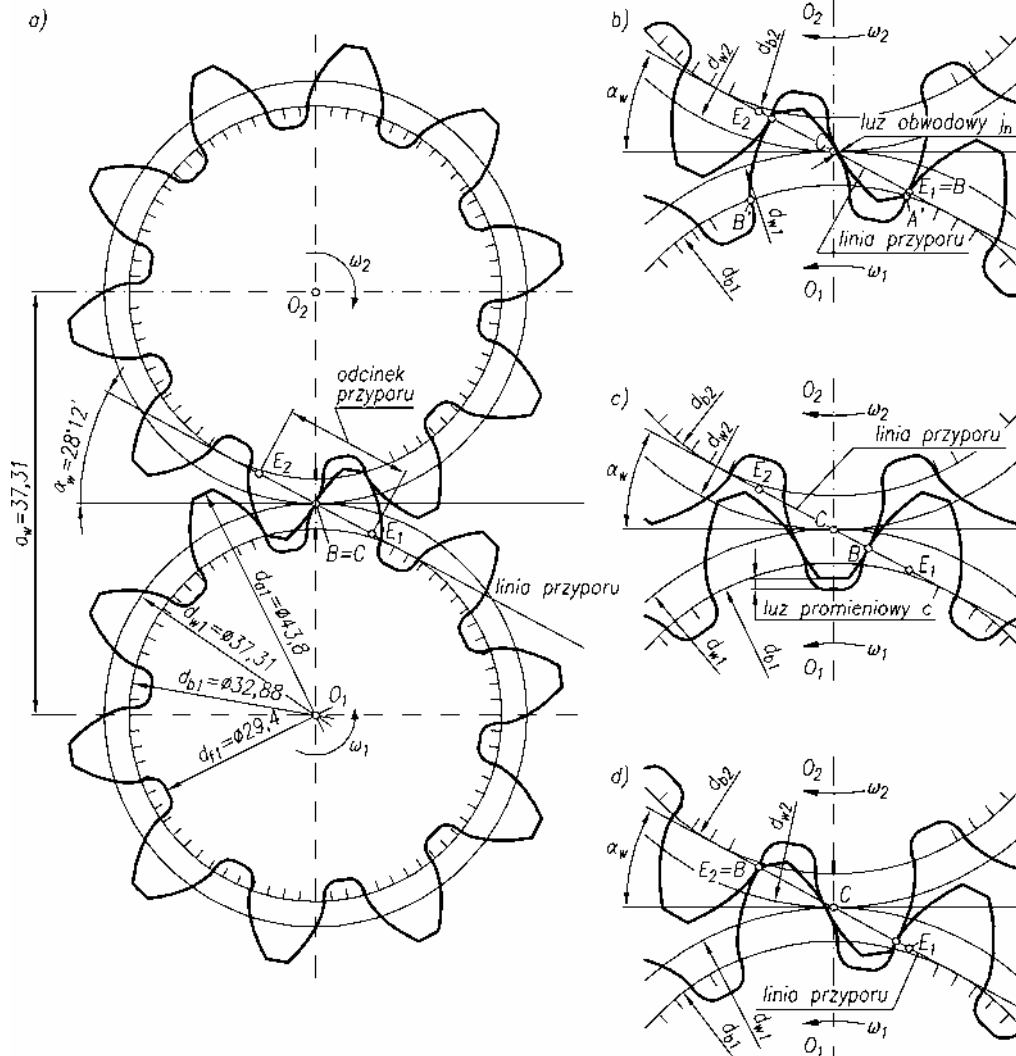
Istotnym elementem jest analiza kinematyczna zespołu kół. Zazębianie będzie odbywać się wzdłuż linii przyporu nachylonej pod kątem przyporu $\alpha_w = 28^\circ 12'$. Po przeprowadzeniu korekcji oraz dokonaniu skrócenia głowy zęba należy wyznaczyć liczbę przyporu. Wykorzystuje się do tego wzór (3.60), zgodnie z którym liczbę przyporu wyznacza się jako

$$\varepsilon = 1,09$$

Liczba przyporu jest dostatecznie duża, aby zapewnić ciągłość i płynność procesu zazębienia, a jednocześnie na tyle mała, aby nie powodować stłaczania oleju w przestrzeni międzyzębnej.

Na podstawie obliczeń ustalono (rys. 10.4a) postać geometryczną zespołu kół i przedstawiono je w trakcie współpracy. Na rysunku widać, że kształty kół, uzębienia i zębów są proporcjonalne, a wymiary geometryczne wyznaczone prawidłowo.

Na rysunku 10.4b, c, d pokazano szczegółowo współpracę zazębienia. Widać więc kolejno jak następuje wżębienie w punkcie E_1 (rys. 10.4b), następnie przemieszczenie się punktu przyporu B po linii przyporu (rys. 10.4c) i wyzębienie w punkcie E_2 (rys. 10.4d). Proces współpracy kół przebiega płynnie, ponieważ liczba przyporu, traktowana jako stosunek długości odcinków E_1E_2 i $A'B'$ (rys. 10.4b), jest większa od jedności. Nie zauważa się interferencji zarysów współpracujących zębów. W zazębieniu nie występuje luz obwodowy j_n (rys. 10.4b), który określa się w późniejszym etapie projektowania przy opracowaniu dokumentacji konstrukcyjnej kół, natomiast jest widoczny wyraźny luz promieniowy c (rys. 11.2c). Zarówno luz obwodowy j_n , jak i promieniowy c można optymalizować w etapie 4, uwzględniając parametry hydrauliczne.



Rys. 10.4. Postać geometryczna (a) oraz przebieg współpracy kół ewolwentowych pompy zębatej w trakcie wżębiania: (b), w położeniu centralnym (c), w trakcie wyżębiania (d)

10.2.3. Analiza przemian energii w pompie zębatej

Aby przeanalizować przemiany energii mechanicznej w hydrauliczną należy wyznaczyć szerokość b zespołu kół zębatych. Do tego celu służy wzór (9.42), określający jednostkową wydajność właściwą $q_{ew}/\pi b m^2$ pomp z kołami ewolwentowymi, do którego podstawia się przyjętą zgodnie z założeniami wydajność właściwą pompy $q = 10 \text{ cm}^3$ oraz wyznaczone wcześniej wartości parametrów użębiania i zazębiania

$m = 3,5$; $z_1 = z_2 = 10$; $x_1 = x_2 = 0,4$; $y_1 = y_2 = 1$; $\alpha_0 = 20^\circ$; $\alpha_w = 28^\circ 12'$. W rezultacie otrzymuje się szerokość kół zębatych $b = 11,4$ mm.

Prowadząc podobne obliczenia dla pozostałych wydajności, otrzymuje się szerokość kół $b = 17,83$ mm dla pompy $q = 16$ cm³ oraz $b = 22,29$ mm dla pompy $q = 20$ cm³. Ostatecznie ustalono, że dla zapewnienia zakładanych wydajności $q = 10, 16, 20$ cm³/obr należy zastosować koła zębate o szerokościach $b = 11, 18, 22$ mm.

Korzystając ze wzoru (9.43) i po wstawieniu do niego przyjętych parametrów uzębienia i zazębienia wyznacza się współczynnik nierównomierności wydajności δ_{ew}

$$\delta_{ew} = 18\%$$

Otrzymana wartość jest stosunkowo duża i sugeruje, że strumień czynnika wypływającego z pompy będzie pulsował, jednak jest to wartość, którą można zaakceptować.

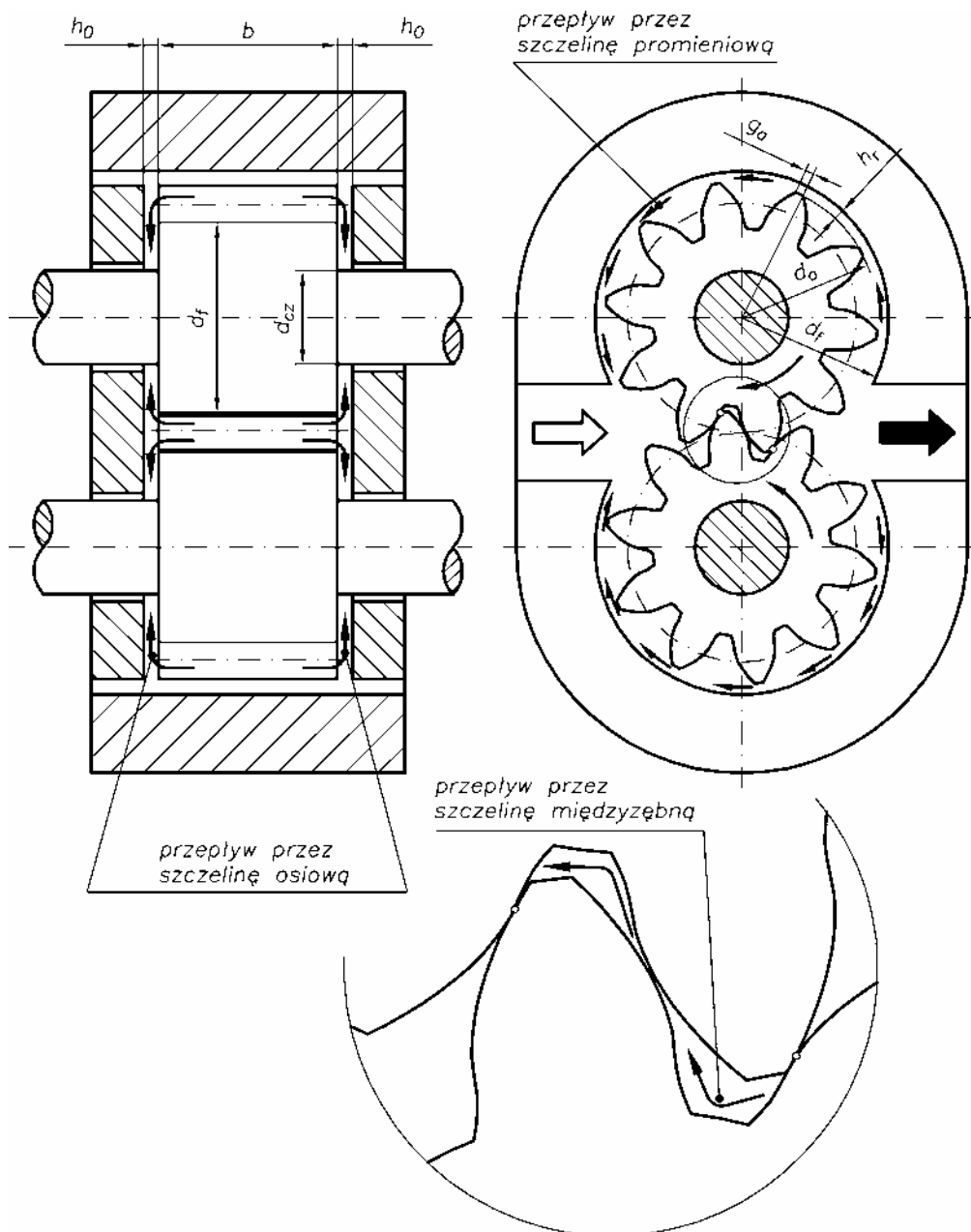
W tym etapie projektowania ważne jest przeprowadzenie analizy wpływu geometrycznych i kinematycznych cech kół zębatych na przebieg procesu przemian energii w maszynie. Jak pokazano na rysunku 10.5 w maszynie hydraulicznej między kołami zębatymi, korpusem i płytami bocznymi utworzone są szczeliny wewnętrzne: osiowa, promieniowa i międzyzębna. Przez te szczeliny odbywa się przepływ czynnika roboczego w formie przecieków wewnętrznych, który pomniejsza strumień główny przepływający przez maszynę i powoduje zmniejszenie sprawności objętościowej maszyny. Należy zatem dokonać analizy przepływu czynnika roboczego przez szczelinę promieniową, osiową i międzyzębną, które zależą od kształtu i wymiarów kół zębatych.

Szczelina promieniowa jest utworzona między wierzchołkiem zęba a wytoczeniem w korpusie maszyny. Jak pokazano na rysunku 10.5 jest to szczelina płaska o długości równej szerokości b koła zębatego, szerokości równej grubości g_a zęba u wierzchołka oraz wysokości h_r równej różnicy pomiędzy promieniem wytoczenia w korpusie i promieniem koła wierzchołkowego r_a , czyli $h_r = r_k - r_a$. Ze względu na minimalizację przecieków, szczelina promieniowa powinna mieć możliwie małą długość b i wysokość h_r oraz dużą szerokość g_a . W związku z tym koło zębate nie powinno mieć zbyt dużej szerokości b w stosunku do średnicy podziałowej d_a . Są to wymiary powiązane i powinny pozostawać ze sobą w zależności $b/d_a = 0,3-0,6$ [44].

W przypadku rozważanych kół stosunek ten kształtuje się następująco:

- dla pompy $q = 10$ cm³ wynosi $b/d_a = 0,25$,
- dla pompy $q = 16$ cm³ wynosi $b/d_a = 0,4$,
- dla pompy $q = 20$ cm³ wynosi $b/d_a = 0,5$.

Widać więc, że warunek jest spełniony dla pomp o większych wydajnościach, natomiast dla pompy o najmniejszej wydajności stosunek szerokości kół do średnicy wierzchołkowej wypada nieznacznie poza zalecanym zakresem.



Rys. 10.5. Miejsca powstawania przecieków wewnętrznych w hydraulicznej maszynie zębataj

Koło zębate powinno mieć zęby o grubości g_a u wierzchołka większej od grubości minimalnej, wynoszącej $g_{a \min} = (0,3-0,4)$ modułu, czyli $g_a > g_{a \min}$. Podstawiając do wzorów (3.23) i (3.27) wyznaczone wcześniej wartości parametrów zazębienia, wyznacza się rzeczywistą grubość zęba u wierzchołka $g_a = 1,87$ mm. Minimalna grubość zęba wynosi $g_{a \min} = 1,05 - 1,40$ mm. W tej sytuacji widać, że rzeczywista grubość zęba u wierzchołka jest większa od grubości minimalnej $g_a > g_{a \min}$, a w związku z tym szerokość szczeliny promieniowej jest zadowalająca.

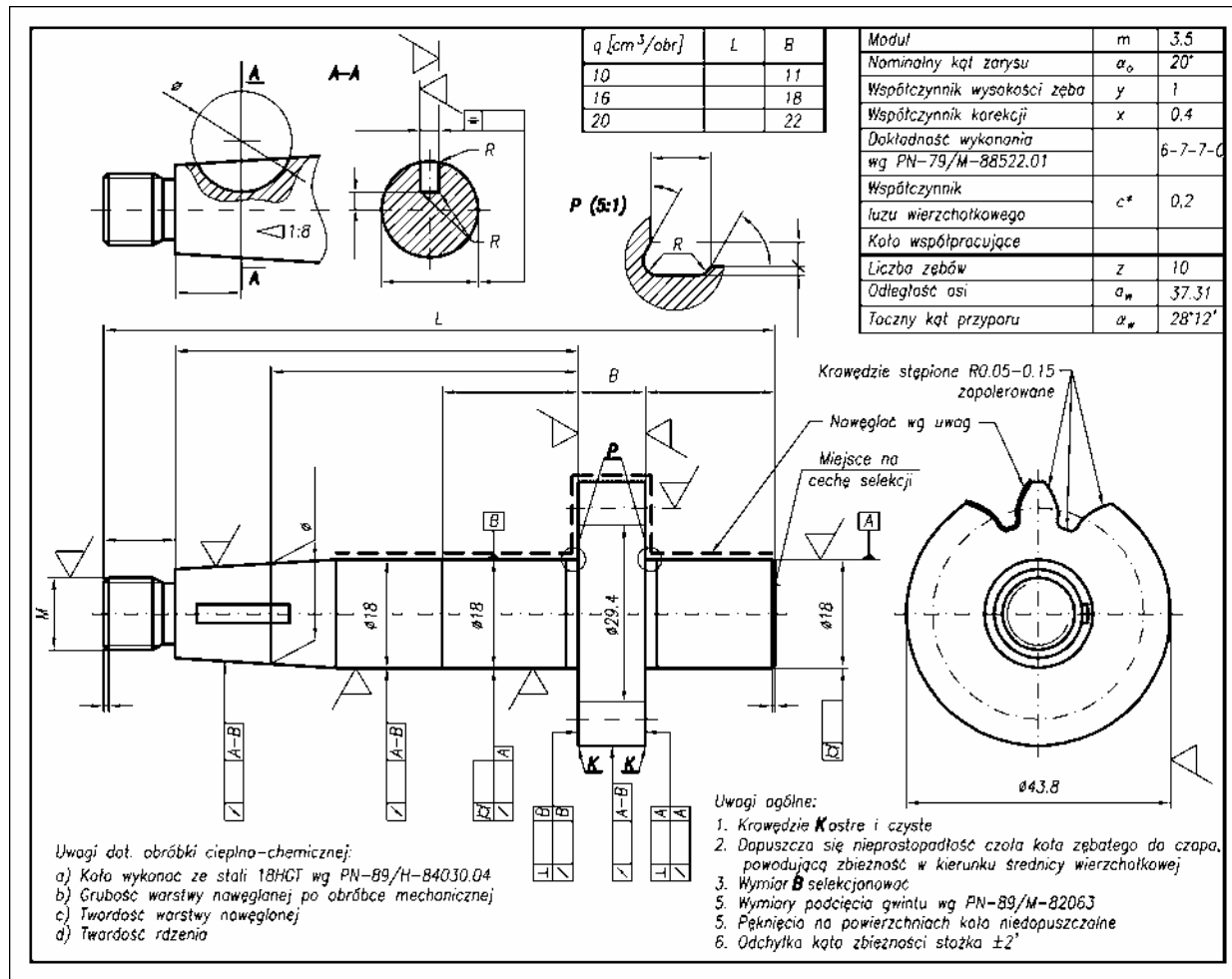
Koło zębate powinno być dokładnie skojarzone z wytoczeniem w korpusie. Wysokość szczeliny promieniowej h_r nie powinna przekraczać 0,1 mm (rys. 10.5). Jej wartość ustala się ostatecznie przez dobór tolerancji wymiarów promienia wytoczenia korpusu r_k oraz promienia koła wierzchołków r_a . Ostatecznie z przeprowadzonej analizy wynika, że szczelina promieniowa ma prawidłowe proporcje i nie powinno dochodzić do zbyt dużych przecieków promieniowych.

Następnie przeanalizowano przepływ czynnika roboczego przez szczelinę osiową. Jak pokazano na rysunku 10.5 jest to szczelina płaska pierścieniowa utworzona pomiędzy okręgiem odpowiadającym średnicy stóp d_f a okręgiem odpowiadającym średnicy czopa d_{cz} , czyli charakteryzująca się szerokością $(d_f - d_{cz})/2$. Wysokość tej szczeliny h_o to odległość między czołami koła zębatego a płytą boczną. Ze względu na minimalizację przecieków szczelina osiowa powinna mieć możliwie dużą szerokość $(d_f - d_{cz})/2$ oraz małą wysokość h_o . Jednak ze względu na prawidłową współpracę kół zębatych z płytami bocznymi, szczelina ta nie może mieć zbyt dużej szerokości i zbyt małej wysokości, gdyż może to wywołać nadmierne tarcie i wzrost strat mechanicznych w maszynie. W skrajnych przypadkach może to doprowadzić do zatarcia współpracujących powierzchni. Przyjmuje się więc, że optymalna szerokość szczeliny powinna być w przybliżeniu równa wysokości zęba, czyli

$$\frac{d_f - d_{cz}}{2} \cong (1,5 \div 2)m = 5,25 \div 7 \text{ mm}$$

Dla rozważanych kół to wyrażenie przyjmuje wartość 5,7 mm, co jest zadowalające. Jednocześnie należy zapewnić bardzo dokładne wykonanie czoł kół zębatych, aby nierówności powierzchni były mniejsze od wysokości szczeliny h_o .

Szczelina międzyzębna jest utworzona pomiędzy zarysami współpracujących par zębów (rys. 10.5) i wynika z liczby przyporu ε , luzu obwodowego j_n oraz wierzchołkowego c . Ogólnie szczelina ta powinna być możliwie jak najmniejsza. W przypadku projektowanego zazębienia liczba przyporu $\varepsilon = 1,09$ oraz luz wierzchołkowy $c = 0,7$ mm przyjmują stosunkowo małe wartości. Natomiast mały luz obwodowy j_n można zapewnić przez wykonanie dokładnej obróbki kół zębatych. Łączne spełnienie przedstawionych warunków zapewni mały przepływ przez szczelinę międzyzębną.



Rys. 10.6. Rysunek konstrukcyjny koła pędzącego pompy zębatej

10.2.4. Wytwarzanie zespołu kół zębatach

Na podstawie analizy i obliczenia opracowano dokumentację konstrukcyjną zespołu kół, która składa się z rysunków konstrukcyjnych kół zębatach: pędzącego i pędzonego. Przykładowe rozwiązanie konstrukcyjne koła pędzącego, które zaprojektowano razem z wałem napędzającym, przedstawiono na rysunku 10.6. Zgrupowano na nim ważniejsze informacje konstrukcyjne i technologiczne:

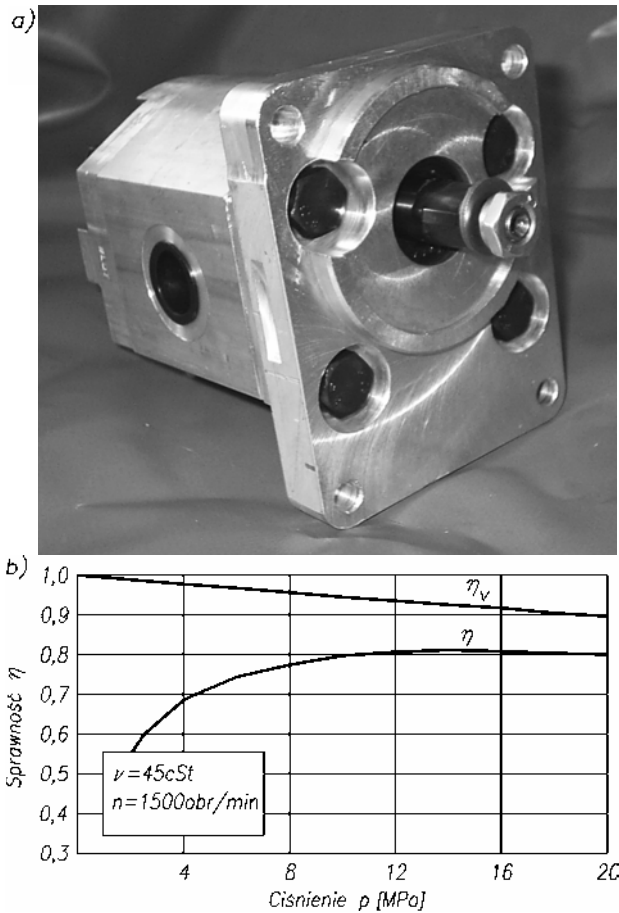
- postać koła wraz z układem wymiarów,
- tabelę parametrów konstrukcyjnych kół,
- uwagi konstrukcyjne i technologiczne,
- uwagi dotyczące materiału i obróbki cieplno-chemicznej,
- tabelę szerokości koła zębatach do poszczególnych pomp typoszeregu.

Proponuje się obróbkę skrawaniem, która jest przydatna do wykonywania kół ze stali, o zarysie ewolwentowym, zazębieniu zewnętrznym i średnich gabarytach. Ponadto zapewnia możliwości uzyskiwania dużej dokładności wykonania i zróżnicowanej wielkości produkcji (od jednostkowej do wielkoseryjnej) z zachowaniem stosunkowo niskich kosztów. Proces wytwarzania powinien składać się z trzech etapów, tzn. obróbki wstępnej, cieplno-chemicznej oraz wykańczającej. Obróbkę wstępną można prowadzić na frezerce, stosując frez ślimakowy (rys. 8.3 i 8.4). W ramach obróbki cieplno-chemicznej koła ze stali stopowej należy nawęglać i hartować. Obróbkę wykańczającą można prowadzić na szlifierkach Reishauera za pomocą specjalnie ukształtowanych ściernic (rys. 8.7, 8.8).

Na rysunku 10.7a pokazano pompę zębatą PZ3-10, wyprodukowaną przez Wytwórnię Pomp Hydraulicznych WPH z Wrocławia. Zastosowane w niej koła zębatach (rys. 10.6) mają rozwiązanie konstrukcyjne bardzo zbliżone do rozwiązania otrzymanego w wyniku przeprowadzonych wcześniej obliczeń. Pompę PZ3-10 przebadano eksperymentalnie, otrzymując następujące parametry techniczne:

- ciśnienie robocze $p = 20$ MPa,
- prędkość obrotowa $n = 600\text{--}2500$ obr/min,
- sprawność objętościowa $\eta_v > 0,90$,
- sprawność całkowita $\eta > 0,80$,
- czynnik roboczy – olej mineralny.

Szczegółowe charakterystyki sprawności przedstawiono na rysunku 10.7b. W tej sytuacji można przewidywać, że zaprojektowane w tym rozdziale zespoły kół również spełnią swoją rolę i osiągną założone parametry techniczne.



Rys. 10.7. Pompa zębata typoszeregu PZ3 produkcji WPH Wrocław:
a) widok pompy, b) charakterystyki sprawności pompy PZ3-10

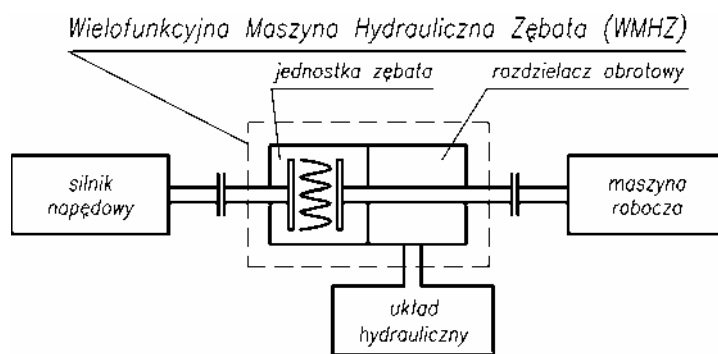
10.3. Projektowanie kół ewolwentowych do wielofunkcyjnej maszyny hydraulicznej zębatej (WMHZ)

10.3.1. Opracowanie koncepcji zespołu kół maszyny

Jednym z kierunków rozwoju maszyn hydraulicznych jest budowa tzw. wielofunkcyjnych maszyn hydraulicznych (WMH). Przez to pojęcie rozumie się maszyny o złożonej strukturze, składające się z kilku maszyn elementarnych, realizujące różne funkcje, np. funkcję pompy, silnika, przekładni, zmiennika prędkości, sprzęgła, hamulca, wreszcie umożliwiające pracę w różnych stanach, tzn. podczas rozruchu, pracy ustalonej, hamowania. Realizując tę definicję w praktyce, opracowano koncepcję wie-

lofunkcyjnej maszyny hydraulicznej zębatej (WMHZ) [84, 86, 95]. Podstawą opracowania były założenia, które schematycznie przedstawiono na rysunku 10.8.

- Maszyna powinna być uniwersalna i znaleźć zastosowanie w budowie układów napędowych maszyn i urządzeń. Jej podstawową funkcją powinno być sprzęganie, czyli przekazywanie napędu od silnika do maszyny roboczej. Można założyć również częściowe sprzężenie wewnątrz maszyny i wtedy będzie realizowana praca przekładniowa. W zależności od potrzeb powinna także pracować jako pompa, silnik lub zmiennik prędkości.
- Maszyna powinna być zbudowana z dwóch jednostek elementarnych, tzn. jednostki zębatej o charakterze pompowo-silnikowym oraz rozdzielacza obrotowego, który zapewniałby zasilanie tej jednostki z układu hydraulicznego.
- Maszyna powinna współpracować z dodatkowym układem hydraulicznym, który będzie służył do jej zasilania i obciążania.



Rys. 10.8. Schemat ideowy układu napędowego z wykorzystaniem wielofunkcyjnej maszyny hydraulicznej zębatej (WMHZ)

Zgodnie z przedstawionymi założeniami opracowano rozwiązanie konstrukcyjne maszyny, które podstawiono na rysunku 10.9. Składa się ona z dwóch maszyn elementarnych, tzn. jednostki zębatej (A) i rozdzielacza obrotowego (B). W jednostce zębatej pracują trzy koła zębata: koło słoneczne (1) oraz dwa koła satelitarne (2). Wał koła słonecznego (1) jest jednocześnie wałem wejściowym maszyny. Jedną z części korpusu (4) połączono z wałem rozrządu (5) rozdzielacza obrotowego (B). Czop wału rozrządu (5) jest jednocześnie wałem wyjściowym maszyny. Ciecz robocza jest dostarczana i odbierana z jednostki zębatej przez przyłącza (6), (7), natomiast otwór (8) jest przeznaczony do odprowadzania przecieków.

Jak pokazano na rysunku 10.9 maszyna jest włączona w układ napędowy pomiędzy silnikiem napędowym i maszyną roboczą, a jednocześnie współpracuje z układem hydraulicznym. Może więc spełniać trzy podstawowe funkcje: pompy, silnika oraz zmiennika prędkości lub sprzęgła.

Jeśli odłącza się maszynę roboczą i blokuje wał wyjściowy (5), to silnik napędza WMHZ, która pracuje jako pompa hydrauliczna. Wał wejściowy z kołem słonecznym (1) napędza koła zębate (2) i (3). Zespół zasysa czynnik roboczy otworem (6) i wytłacza otworem (7), współpracując z układem hydraulicznym.

Jeśli odłącza się silnik napędowy i blokuje wał wejściowy (1), to WMHZ może pracować jako silnik hydrauliczny. Z układu hydraulicznego tłoczony jest wtedy do jednostki zębatej czynnik roboczy, który wprawia w ruch koła zębate (2) i (3), przetaczając je po nieruchomym kole centralnym (1). Wraz z kołami obraca się korpus jednostki (4) i związany z nim wał wyjściowy (5), który napędza maszynę roboczą.

Jeśli WMHZ jest połączona jednocześnie z silnikiem napędowym i maszyną roboczą, to pracuje ona jako zmiennik prędkości lub sprzęgło. W tym przypadku strumień czynnika roboczego dopływa otworem (6) do trójkołowej jednostki zębatej (1), (2), (3), a następnie spływa otworem (7) do układu hydraulicznego. Na przewodzie spływowym strumień czynnika jest dławiony tak, że stopniowo blokuje się obrót kół zębatych z możliwością całkowitego ich zatrzymania. Po zatrzymaniu możliwe jest przekazywanie momentu z silnika napędowego na koła zębate, a z nich na korpus (4) i połączony z nim wał wyjściowy (5). Stopień zatrzymania zależy od natężenia przepływu czynnika roboczego na wyjściu z jednostki zębatej, czyli natężenia przepływu przez otwór (7) i zawór dławiący umieszczony w układzie hydraulicznym. Wraz ze zwiększeniem nastawy zaworu zmniejsza się natężenie przepływu, a tym samym różnica pomiędzy prędkością obrotową silnika napędowego i prędkością maszyny roboczej. Można więc uzyskać płynną zmianę prędkości obrotowej wału wyjściowego WMHZ w zakresie $n_{\min} - n_{\max} = 0 - n_{\text{silnika}}$, czyli realizować funkcję zmiennika prędkości. Przy całkowitym zablokowaniu strumienia wyjściowego WMHZ spełnia rolę sprzęgła.

Z budowy i zasady działania WMHZ wynika projekt zespołu kół zębatych, stanowiących fundamentalny zespół tej maszyny. Przyjęto, że będzie to zespół trzech kół zębatych o zazębieniu zewnętrznym ewolwentowym, które mogą pracować zarówno przy osiach ustalonych, jak i ruchomych.

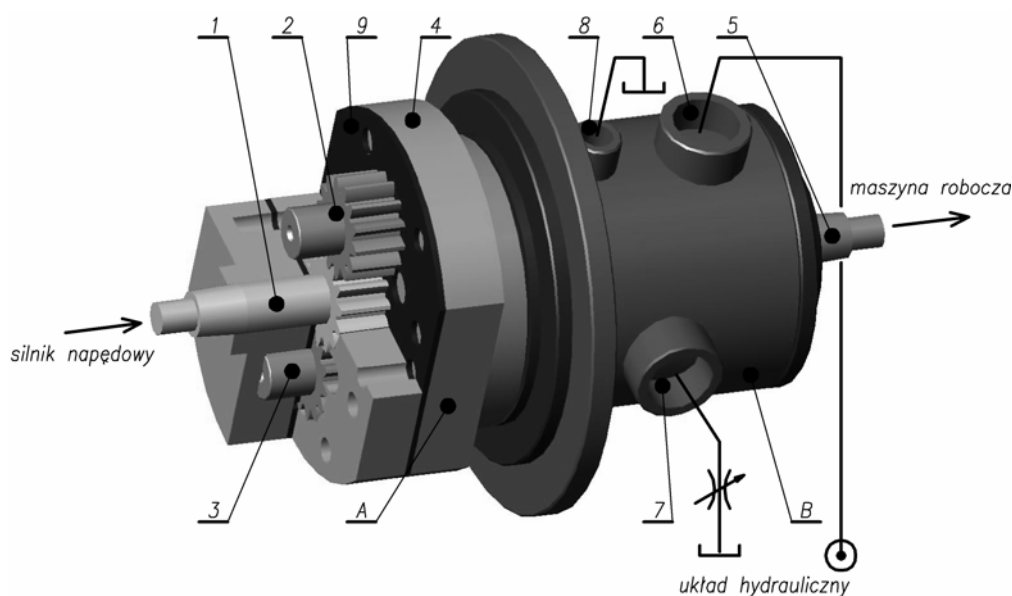
Zakłada się następujące wartości parametrów technicznych maszyny:

- wydajność (chłonność) $q = 60 \text{ cm}^3$,
- ciśnienie robocze $p = 12 \text{ MPa}$,
- prędkość obrotowa kół $n = 0\text{--}1500 \text{ obr/min}$,
- czynnik roboczy – olej mineralny.

Zakłada się również, że rozwiązanie konstrukcyjne kół, dokładność ich wykonania i montażu powinny zapewniać osiągnięcie dużych sprawności maszyny. Na podstawie [84, 86, 95] przewiduje się, że

- sprawność objętościowa $\eta_v > 0,90$,
- sprawność całkowita $\eta > 0,80$.

Zespół kół zębatach ma służyć do przemiany energii mechanicznej ruchu obrotowego na energię ciśnienia, zmagazynowaną w czynniku roboczym i odwrotnie. Ze względu na zakładane ciśnienie robocze koła powinny współpracować z elementami kompensacyjnymi nazywanymi wkładkami (rys. 10.9, poz. 9). Powinny to być zatem koła stalowe o zwiększonej dokładności wykonania.



Rys. 10.9. Budowa i zasada działania wielofunkcyjnej maszyny hydraulicznej zębataj WMHZ,
 A – jednostka zębata, B – rozdzielacz obrotowy, 1, 2, 3 – koła zębata, 4 – korpus,
 5 – czop wału rozdzielacza, 6, 7, 8 – otwory przyłączeniowe, 9 – wkładka kompensacyjna

10.3.2. Konstruowanie zespołu kół zębatach

Parametry uzębienia i zazębienia ustalono według następujących zasad:

- przyjęto powiększoną liczbę zębów $z_1 = z_2 = z_3 = 14$ tak, aby zapewnić założoną wydajność (chłonność) w szerokim zakresie prędkości obrotowych kół $n_{\min} - n_{\max}$ oraz aby zapewnić zmniejszoną pulsację wydajności (chłonności),
- ustalono wartość modułu $m = 3$ mm,
- zastosowano standardową wartość współczynnika wysokości zęba $y = 1$,
- przyjęto standardową wartość kąta zarysu $\alpha_0 = 20^\circ$,
- założono zmniejszoną wartość współczynnika luzu promieniowego $c^* = 0,2$.

Korzystając ze wzorów (3.5)–(3.10) wykonuje się obliczenia wstępne wymiarów zęba i koła zębatach, które dla odróżnienia od wymiarów ostatecznych oznaczono znakiem „prim”.

$$\begin{aligned}
 h'_a &= 3 \text{ mm} \\
 h'_f &= 3,6 \text{ mm} \\
 h' &= h'_a + h'_f = 6,6 \text{ mm} \\
 d' &= 42 \text{ mm} \\
 d'_a &= 48 \text{ mm} \\
 d'_f &= 34,8 \text{ mm} \\
 d'_b &= 39,46 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Średnica podziałowa i zasadnicza, wyznaczone wstępnie, są jednocześnie wartościami ostatecznymi, czyli $d = d'$, $d_b = d'_b$. Na podstawie wzoru (3.39) wyznaczono odległość osi kół

$$a_0 = 42 \text{ mm}$$

Dobrana liczba zębów $z = 14$, jak wynika z warunku (3.13), jest równa granicznej liczbie zębów wynoszącej $z_g = 14$. W związku z tym, nie jest konieczne wykonanie korekcji P , która miałaby za zadanie wyeliminowanie podcięcia zębów w kołach, dla liczby zębów bowiem $z_1 = z_2 = z = 14$ podcięcie nie wystąpi. Można dokonać korekcji ze względów konstrukcyjnych, co wiąże się z:

- zwiększeniem wytrzymałości zębów, pożądanę ze względu na duże obciążenie maszyny i kół zębatych,
- zwiększeniem wydajności i zmniejszeniem nierównomierności wydajności,
- uzyskaniem małej liczby przyporu ε ,
- uzyskaniem korzystnych ze względów technologicznych i pomiarowych, wymiarów rozstawu osi kół oraz wytoczeń w korpusie jednostki.

W tej sytuacji zdecydowano się na korekcję, którą prowadzi się zgodnie z zasadami podanymi w rozdziale 3.3.2. Przyjęto toczną odległość osi $a_w = 45 \text{ mm}$ większą od zerowej odległości osi $a_0 = 42 \text{ mm}$. Wyznaczono wartość tocznego kąta przyporu z zależności (3.42)

$$\cos \alpha_w = 0,8770$$

jako $\alpha_w = 28^\circ 40'$.

Ze wzoru (3.50) wyznaczono współczynnik korekcji, który dla obu kół jest taki sam:

$$x = 0,605$$

Wyznaczono następnie wymiary średnic koła po korekcji jako:

$$\begin{aligned}
 d_a &= 51,63 \text{ mm} \\
 d_f &= 38,43 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Kolejno dokonuje się sprawdzenia, zgodnie z rys. 3.10, czy w wyniku korekcji nie będzie dochodzić do interferencji wierzchołków i stóp współpracujących zębów, czyli czy zachodzi nierówność

$$a_w - \left(\frac{d_a}{2} + \frac{d_f}{2} \right) \geq c$$

Podstawiając wyznaczone wartości, otrzymano

$$-0,03 < 0,6$$

Stwierdza się, że warunek nie jest spełniony i będzie zachodzić interferencja wierzchołków i stóp współpracujących zębów. W tej sytuacji należy zmniejszyć średnicę wierzchołkową kół do wartości $d_a = 50,20$ mm, a wtedy zostanie spełniony warunek braku interferencji

Po dokonaniu korekcji i zmniejszeniu średnicy wierzchołkowej należy wyznaczyć rzeczywistą liczbę przyporu za pomocą wzoru (3.60)

$$\varepsilon = 1,07$$

Otrzymana liczb przyporu jest dostatecznie duża, aby zapewnić ciągłość i płynność zazębienia, a jednocześnie dostatecznie mała, aby nie powodować powstawania zbyt dużej przestrzeni zasklepionej. Postępując podobnie jak w punkcie 10.2.2 i na rysunku 10.4, potwierdzono poprawność współpracy kół w zespole.

10.3.3. Analiza przemian energii w WMHZ

Za pomocą kół zębatych dokonuje się w maszynie przemian energetycznych, polegających w przypadku pracy pompowej na zamianie energii mechanicznej ruchu obrotowego na energię hydrauliczną oraz w przypadku pracy silnikowej na zamianie energii hydraulicznej na mechaniczną. Należy w związku z tym wyznaczyć szerokość kół zębatych b wykorzystywanych do tych przemian. Do tego celu stosuje się wzór (9.42), służący do wyznaczania jednostkowej wydajności (chłonności) właściwej maszyny z zazębieniem ewolwentowym. Do wzoru podstawia się przyjętą zgodnie z założeniami wydajność pompy $q = 30 \text{ cm}^3$ oraz wyznaczone wartości parametrów uzębienia i zazębienia $m = 3$, $z_1 = z_2 = 14$, $x_1 = x_2 = 0,605$, $y_1 = y_2 = 1$, $\alpha_0 = 20^\circ$ i $\alpha_w = 28^\circ 40'$.

Po wykonaniu obliczeń otrzymuje się szerokość koła zębatego równą $b = 25,6$ mm. Ostatecznie przyjmuje się $b = 26$ mm.

Na podstawie wzoru (9.43) i podstawieniu do niego podanych wartości parametrów uzębienia i zazębienia wyznacza się współczynnik nierównomierności wydajności (chłonności)

$$\delta_{ew} = 10,5\%$$

Otrzymana wartość jest stosunkowo mała, jak na maszynę o uzębieniu zewnętrznym. Wpływa to istotnie na równomierną pracę maszyny oraz związanego z nią układu hydraulicznego.

Szerokość koła zębatego b pozostaje względem średnicy wierzchołkowej koła d_a w stosunku

$$\frac{b}{d_a} = 0,52$$

Jest więc spełniony warunek $b/d_a = 0,3 - 0,6$ [44], który zapewnia proporcjonalną budowę koła zębatego. Ze wzorów (3.23) i (3.27) wyznaczono grubość zęba u wierzchołka, równą szerokości szczeliny promieniowej

$$g_a = 2,66 \text{ mm}$$

Zgodnie z warunkiem $g_{amin} = (0,3 - 0,4) \cdot m$ minimalna grubość zęba wynosi $g_{amin} = 0,9 - 1,2 \text{ mm}$. Szerokość zęba jest większa od minimalnej, czyli $g_a > g_{amin}$ i szerokość szczeliny promieniowej jest również wystarczająca, aby skutecznie ograniczyć przepływ między sąsiednimi wrębami, stanowiącymi międzyzębne komory wyporowe. Wysokość szczeliny należy, podobnie jak w przypadku pomp zębatach, zminimalizować do wartości $0,1 \text{ mm}$ przez odpowiedni dobór tolerancji średnicy wierzchołkowej koła oraz średnicy wytoczenia w korpusie pompy.

Szczelina osiowa ma w przypadku rozważanych kół szerokość

$$\frac{d_f - d_{cz}}{2} \cong 7,5 \text{ mm}$$

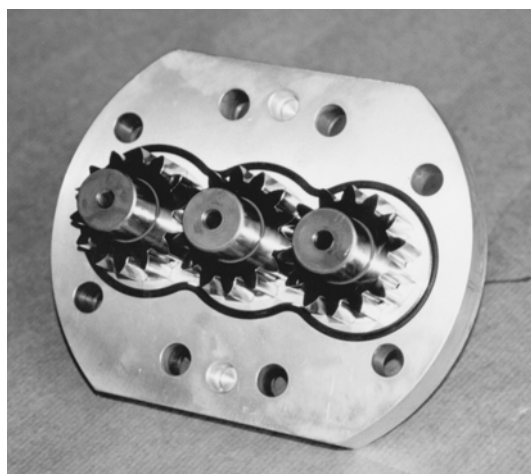
przy czym średnicę czopa d_{cz} wyznaczono z warunku wytrzymałościowego i wynosiła ona $d_{cz} = 25 \text{ mm}$. Szerokość szczeliny jest w przypadku tego koła zębatego większa od szerokości minimalnej wynoszącej $2m = 6 \text{ mm}$.

Również szczelina międzyzębna w sytuacji uzyskania małej liczby przyporu $\varepsilon = 1,07$ oraz małego międzyzębnego luzu wierzchołkowego c jest niezbyt duża i nie powinna negatywnie wpływać na pracę maszyny.

10.3.4. Wytwarzanie zespołu kół zębatach

Korzystając z przeprowadzonej analizy i obliczenia opracowano dokumentację konstrukcyjną zespołu kół. Rysunki konstrukcyjne kół wykonano według tych samych zasad i układu jak rysunek koła pompy zębatej (rys. 10.6). Następnie koła zębatach wykonano technologią przyjętą w rozdziale 10.2.4 i zmontowano w jednostce zębatej WMHZ. Widok zespołu trzech kół pozostających w zazębieniu przedstawiono na rysunku 10.10. Wielofunkcyjną maszynę hydrauliczną zębatą poddano badaniom eksperymentalnym. Zamontowano ją w układzie napędowym (rys. 10.11), który składa się

z silnika elektrycznego (1), wielofunkcyjnej maszyny hydraulicznej zębataj (2), przekładni zębataj (3), silnika hydraulicznego SOK (4), pracującego jako pompa, układu hydraulicznego (5), współpracującego z maszyną (2), oraz układu kontrolno-pomiarowego (6). Badania potwierdziły możliwość różnorodnego wykorzystania WMHZ.

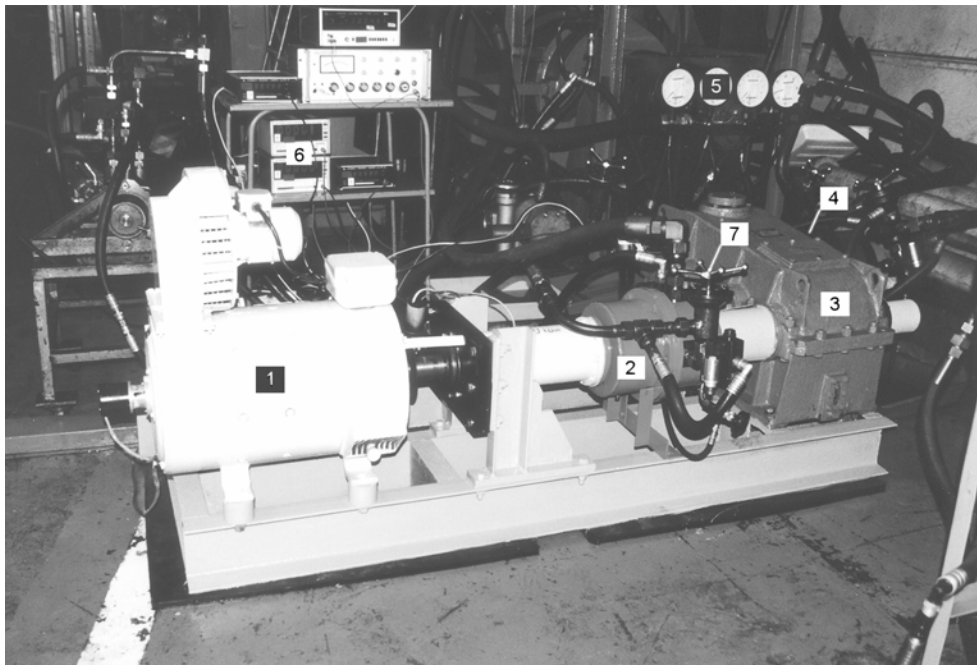


Rys. 10.10. Widok zespołu trzech kół ewolwentowych w zazębieniu

Pracę pompową realizowano przy zablokowanym wale wyjściowym maszyny. W tym przypadku silnik elektryczny (1) napędzał maszynę (2), która współpracowała z układem hydraulicznym (5). Pompa osiągała założoną wydajność $q = 60 \text{ cm}^3$ i ciśnienie robocze $p = 12 \text{ MPa}$.

Pracę silnikową realizowano przy zablokowanym wale wejściowym maszyny, łącząc jej wał wyjściowy z zespołem obciążającym (3), (4). W tym przypadku dodatkowa pompa hydrauliczna w układzie hydraulicznym (5) zasilala maszynę (2), która napędzała zespół obciążający (3), (4).

Pracę maszyny jako zmiennika prędkości realizowano w sytuacji, gdy oba wały maszyny (2) były odblokowane. Silnik elektryczny (1) napędzał maszynę (2) przez wał wejściowy, a ta z kolei przez wał wyjściowy napędzała zespół obciążający (3), (4). Stopniowe dławienie strumienia czynnika roboczego, wypływającego z maszyny (2), realizowane za pomocą zaworu dławiącego (7), powodowało stopniową blokadę kół zębatach w maszynie i przekazywanie ruchu obrotowego ze strony silnika na stronę zespołu obciążającego. Maszyna umożliwiała zmianę prędkości wału wyjściowego w zakresie $n = 0 - 1500 \text{ obr/min}$, pracując pod obciążeniem. Stwierdzono, że zespół kół zębatach pracował prawidłowo w trakcie realizowania trzech zakładanych funkcji.



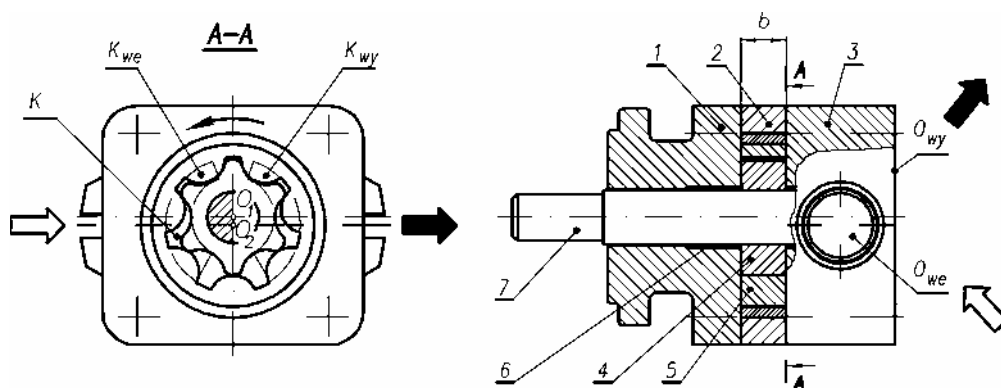
Rys. 10.11. Układ napędowy z wielofunkcyjną maszyną hydrauliczną zębatą WMHZ: 1 – silnik elektryczny, 2 – badana maszyna WMHZ, 3 – przekładnia zębata, 4 – silnik hydrauliczny SOK, 5 – układ hydrauliczny, 6 – układ pomiarowy, 7 – zawór dławiący

10.4. Projektowanie kół cykloidalnych do typoszeregu pomp gerotorowych

10.4.1. Opracowanie koncepcji zespołu kół maszyny

Pompy zębata o zazębieniu zewnętrznym ewolwentowym, opisane w rozdziale 10.2, charakteryzują się obecnie zaawansowanymi rozwiązaniami konstrukcyjnymi oraz wysokimi parametrami technicznymi. Nie są to jednak jedyne rozwiązania konstrukcyjne w tej grupie maszyn. Duże możliwości rozwoju pojawiły się w związku z pompami gerotorowymi, w których zastosowano zazębienie wewnętrzne cykloidalne [78, 81, 83]. Pompy te mogą generować strumień cieczy roboczej pod ciśnieniem porównywalnym z jednostkami o zazębieniu zewnętrznym ewolwentowym oraz pracować z podobnymi sprawnościami. Charakteryzują się natomiast dużo mniejszą pulsacją wydajności i hałaśliwością. Schematyczne rozwiązanie konstrukcyjne pompy gerotorowej przedstawiono na rysunku 10.12. Pompa składa się z korpusu przedniego (1), środkowego (2) i tylnego (3). W korpusie środkowym znajduje się zespół

kół zębatach (4), (5) o zazębieniu wewnętrznym cykloidalnym i różnicy zębów równej 1. Zespół jest napędzany wałem (7), który umiejscowiono w łożyskach (6). Czynnik roboczy jest zasysany przez otwór wejściowy O_{we} i kanał wejściowy K_{we} do międzyzębnej komory wyporowej K . W trakcie obrotu kół (4), (5) względem ustalonych osi obrotu O_1 i O_2 komora K przemieszcza się i łączy z kanałem wyjściowym K_{wy} oraz otworem wyjściowym O_{wy} , którym jest wytłaczany czynnik roboczy.



Rys. 10.12. Budowa i zasada działania pompy gerotorowej: 1, 2, 3 – elementy korpusu, 4, 5 – koła zębata cykloidalne, 6 – łożysko, 7 – wał, O_{we} , O_{wy} – otwory wejściowy i wyjściowy, K_{we} , K_{wy} – kanały wejściowy i wyjściowy, K – komora wyporowa

Prawidłowe działanie pompy gerotorowej zależy od właściwego zaprojektowania i wykonania zespołu kół cykloidalnych. Przyjęto więc zespoły kół zębatach o zazębieniu cykloidalnym wewnętrznym dla typoszeregu pomp gerotorowych, złożonego z trzech jednostek o wydajnościach właściwych $q = 10, 20, 40 \text{ cm}^3/\text{obr}$. Założono, że typoszereg będzie wykonany w dwóch wersjach. W pierwszej wersji typoszereg będzie obejmował pompy bez kompensacji luzu osiowego, które będą pracować na niskie i średnie ciśnienie, natomiast w drugiej wersji, pompy typoszeregu będą mieć kompensację luzów osiowych i pracować pod wysokim ciśnieniem.

Ustalono następujące wartości parametrów typoszeregu:

- ciśnienie robocze $p = 10 \text{ MPa}$ (typoszereg nisko- i średniociśnieniowy), $p = 20 \text{ MPa}$ (typoszereg wysokociśnieniowy),
- prędkość obrotowa kół $n = 500\text{--}2500 \text{ obr}/\text{min}$,
- czynnik roboczy – olej mineralny.

Założono również, że rozwiązanie konstrukcyjne kół, dokładność ich wykonania i montażu powinny zapewniać osiągnięcie dużych sprawności pompy. Na podstawie [78, 82, 83] przewiduje się, że

- sprawność objętościowa $\eta_v > 0,80$,
- sprawność całkowita $\eta > 0,70$.

Z zasady pracy pompy gerotorowej (rys. 10.12) wynika, że zespół kół zębatych cykloidalnych (4), (5) ma służyć do realizacji przemiany energii mechanicznej ruchu obrotowego na energię ciśnienia, zmagazynowaną w czynniku roboczym. Na podstawie wniosków wynikających z rozdziału 6.4 ustalono, że zadanie to najlepiej będzie realizował zespół kół epicykloidalnych o różnicy zębów $z_2 - z_1 = 1$, wykonanych ze stali i pracujących dla osi ustalonych. Przyjęto również, że koła stosowane w kolejnych jednostkach typoszeregu będą miały te same wymiary promieniowe, a różnić się będą szerokością b , która będzie wzrastać wraz ze wzrostem zakładanej wydajności właściwej q (rys. 10.12).

10.4.2. Konstruowanie zespołu kół zębatych

Wartości parametrów podstawowych uzębienia i zazębienia ustala się zgodnie z rozdziałem 6.1 oraz [61, 65, 92] według następujących zasad:

- przyjmuje się liczbę zębów $z_1 = 6$, $z_2 = 7$; która jest mniejsza niż liczba zębów w kołach ewolwentowych pomp zębatych,
- przyjmuje się stosunkowo duży moduł równy $m = 9,714$ mm,
- przyjmuje się współczynnik wysokości zęba koła o uzębieniu zewnętrznym epicykloidalnym $\lambda = 0,777$, który jest dobrany ze zbioru wartości dopuszczalnych dla uzębień epicykloidalnych (rys. 6.10 i zależność $(z-1)/(2z+1) \leq \lambda \leq 1$) i zapewnienia, że zarys epicykloidalny ma punkt przegięcia dzielący go na głowę i stopę, a jednocześnie zęby te mają dużą wysokość i przez to dużą objętość wrębu tworzącego komorę wyporową,
- zakłada się bezluzową współpracę kół, a ewentualne luzy mogą wynikać jedynie z przyczyn technologicznych.

Jak podano w rozdziale 6.3.1, koła tworzące zespół o zazębieniu epicykloidalnym projektuje się w ścisłym powiązaniu ze sobą. W rozważanym przypadku zastosowano metodę obwiedni zewnętrznej, w której koło podstawowe ma zarys utworzony według epicykloidy skróconej i jest opisany równaniem (6.9). Kształt koła zębatego pokazano na rysunku 6.1.

Korzystając ze wzorów (6.3) do (6.6), można dokonać obliczeń wstępnych wymiarów koła zębatego i zęba, które dla odróżnienia od wymiarów ostatecznych oznaczono znakiem „prim”

$$d'_a = 75,545 \text{ mm}$$

$$d'_f = 60,450 \text{ mm}$$

$$h' = 7,547 \text{ mm}$$

$$d'_b = 58,284 \text{ mm}$$

Koło współpracujące zgodnie z rozdziałem 6.3.2.1 ma zarys utworzony w formie obwiedni opisanej równaniami (6.59) i (6.61).

Kształt zespołu kół podstawowego i współpracującego pokazano na rysunku 6.13a. Współpraca obu kół jest praktycznie niemożliwa. Może dochodzić bowiem do oddziaływania wyokrąglonej głowy zęba podstawowego, mającego uzębienie zewnętrzne z ostro zakończoną głową zęba koła współpracującego o uzębieniu wewnętrznym. Grozi to przyspieszonym zużyciem powierzchni, a nawet wyłamaniem ostro zakończonego zęba. Zęby obu kół są bardzo nieforemne. W tej sytuacji należy dokonać korekcji i modyfikacji uzębienia obu kół. Zastosowano korekcję typu P-0, bez zamiany odległości osi kół O_1O_2 , która polega na przesunięciu zarysu obu kół do wewnątrz zespołu o wartość g . Przesunięcie to powinno być mniejsze od przesunięcia granicznego g_{\max} , które wyznacza się, korzystając ze wzorów (6.31) i (6.36) i podstawiając do nich przyjęte parametry uzębienia

$$\eta_{e\min 2} = 10,29^\circ$$

$$R_{e\min 2} = 12,05 \text{ mm}$$

Ostatecznie graniczne przesunięcie, powyżej którego występuje interferencja zarysu, wynosi $g_{\max} = 12,05 \text{ mm}$, dlatego przesunięcie zarysu przyjęto poniżej tej granicy i wybrano $g = 11,1125 \text{ mm}$.

Odpowiednio współczynnik korekcji wynosi

$$\nu = 2,288$$

i jest znacznie większy niż współczynnik korekcji dla kół ewolwentowych rozważanych w przypadku pompy zębatej i wielofunkcyjnej maszyny hydraulicznej zębatej (WMHZ), ponieważ zakres możliwych przesunięć zarysu jest znacznie większy.

Skorygowany zarys uzębienia koła podstawowego (w formie ekwidystanty do epicykloidy) jest opisany zależnościami (6.26). Po podstawieniu do nich przyjętych parametrów uzębienia wyznacza się dla kąta $\eta = 0^\circ$ początkowy punkt zarysu

$$x_{eke} = 19,113 \text{ mm}$$

$$y_{eke} = 0 \text{ mm}$$

Kolejne punkty zarysu wyznacza się, pozostawiając te same parametry uzębienia, zmieniając jedynie kąt bieżący epicykloidy zasadniczej w zakresie $\eta = 0 - \pi/z_1$. Otrzymuje się w ten sposób fragment zarysu uzębienia, począwszy od dna wrębu do wierzchołka zęba. W razie szczegółowego projektowaniu koła zarys ten powtarza się tyle razy, ile jest zębów w kole. Kształt skorygowanego uzębienia epicykloidalnego koła podstawowego przedstawiono na rysunku 6.13b. Na podstawie wzorów (6.19) i (6.20) wyznacza się średnicę wierzchołkową d_{a1} i średnicę stóp d_{f1} koła podstawowego po korekcji, które stanowią wymiary ostateczne

$$d_{a1} = 53,320 \text{ mm}$$

$$d_{f1} = 38,225 \text{ mm}$$

Po dokonaniu korekcji P-0 koło współpracujące ma zarys uformowany przez ekwidystantę do obwiedni. Opis matematyczny takiej krzywej jest skomplikowany i stwarza to duże trudności technologiczne, związane z jej wykonaniem. Dokonuje się więc modyfikacji zarysu, polegającej na zastąpieniu łuków ekwidystant do obwiedni, okręgami ściśle stycznymi o promieniu równym przesunięciu zarysu koła podstawowego $r = g = 11,1125 \text{ mm}$. Następnie łuki łączy się wycinkami okręgu o promieniu r_{f2} zatoczonego ze środka O_2 koła współpracującego. Kształt skorygowanego i zmodyfikowanego uzębienia koła współpracującego przedstawiono na rysunku 6.13c.

Na podstawie wzorów z rozdziału 6.3.2.1 wyznacza się średnice charakterystyczne koła współpracującego

$$d_{a2} = 45,773 \text{ mm}$$

$$d_{f2} = 60,860 \text{ mm}$$

Ze względów technologicznych powiększono średnicę stóp do wartości $d_{pm} = 62,5 \text{ mm}$.

Zaprojektowane koła zębate cykloidalne zestawiono na rysunku 10.13 w zespół i zweryfikowano sposób ich współpracy. Zgodnie z założeniami oba koła mają współpracować ze sobą przy osiach ustalonych O_1 i O_2 . Odległość osi wynosi zgodnie ze wzorem (6.76)

$$a_w = 3,774 \text{ mm}$$

Średnice kół tocznych wyznacza się ze wzorów (6.54) jako

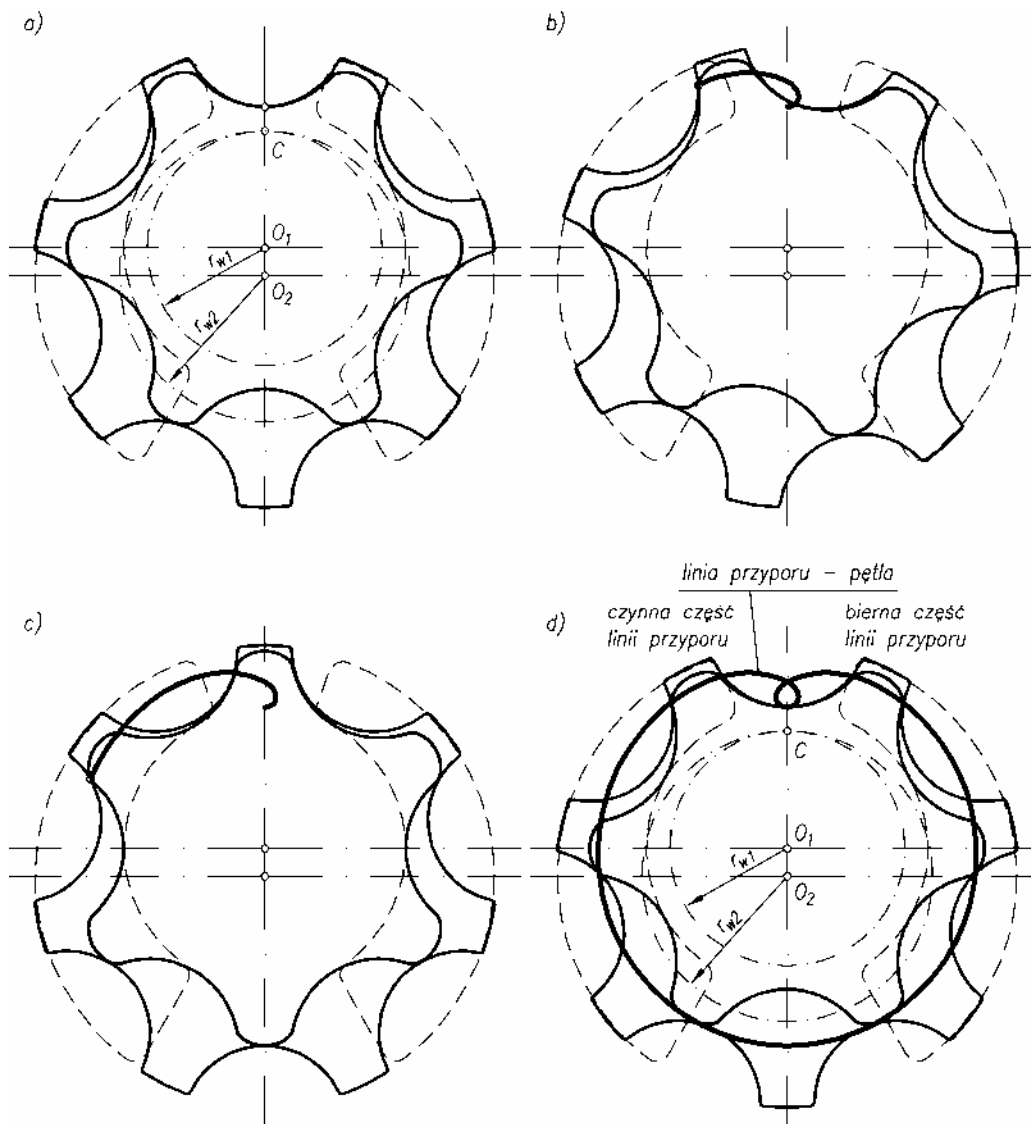
$$d_{w1} = 45,286 \text{ mm}$$

$$d_{w2} = 52,834 \text{ mm}$$

Koła toczne stykają się ze sobą w punkcie centralnym C . Przetaczając po sobie koła toczne, wprawia się w ruch obrotowy współpracujące koła zębate. Widok kół w kolejnych położeniach w trakcie obrotu pokazano na rysunku 10.13. Widać, że współpraca uzębienia przebiega prawidłowo. Wszystkie zęby obu kół pozostają we wzajemnym kontakcie, nie występuje interferencja zarysów. Jednocześnie punkty przyporu układają się w linię zamkniętą w formie pętli, która jest podzielona osią pionową na część czynną i bierną (rys. 10.13d). Liczba przyporu w tym zazębieniu zgodnie ze wzorem (6.78) wynosi:

$$\varepsilon = 3,5$$

Odległość punktu przyporu od bieguna zazębienia jest opisana wzorem (6.80).



Rys. 10.13. Współpraca kół o zazębieniu cykloidalnym wewnętrznym i ustalonych osiach obrotu O_1O_2 : a), b), c), d) kolejne fazy współpracy

10.4.3. Analiza przemian energii w pompie gerotorowej

Aby zespół kół epicykloidalnych mógł realizować w pompie zadanie, jakim jest wytłaczanie założonej objętości q czynnika roboczego, należy ustalić szerokość tych kół. Do obliczeń można zastosować zgodnie z rozdziałem 9.6.4.1 wzór (9.71) w pełnej

postaci, wstawiając do niego przyjętą zgodnie z założeniami wydajność pompy $q_e = 10 \text{ cm}^3$ oraz przyjęte parametry uzębienia $z_1 = 6$, $m = 9,714 \text{ mm}$, $\lambda = 0,777$, $\nu = 2,288$. Po dokonaniu obliczeń otrzymuje się szerokość kół zębatach równą $b = 9,17 \text{ mm}$ dla pompy o wydajności właściwej $q = 10 \text{ cm}^3$.

Prowadząc podobne obliczenia dla pompy o wydajności $q = 20 \text{ cm}^3$ otrzymuje się szerokość kół $b = 18,34 \text{ mm}$, dla pompy o wydajności $q = 40 \text{ cm}^3$ szerokość kół $b = 36,68 \text{ mm}$. Ostatecznie dla typoszeregu pomp gerotorowych $q = 10, 20, 40 \text{ cm}^3/\text{obr}$ przyjęto szerokość kół zębatach $b = 10, 20, 40 \text{ mm}$.

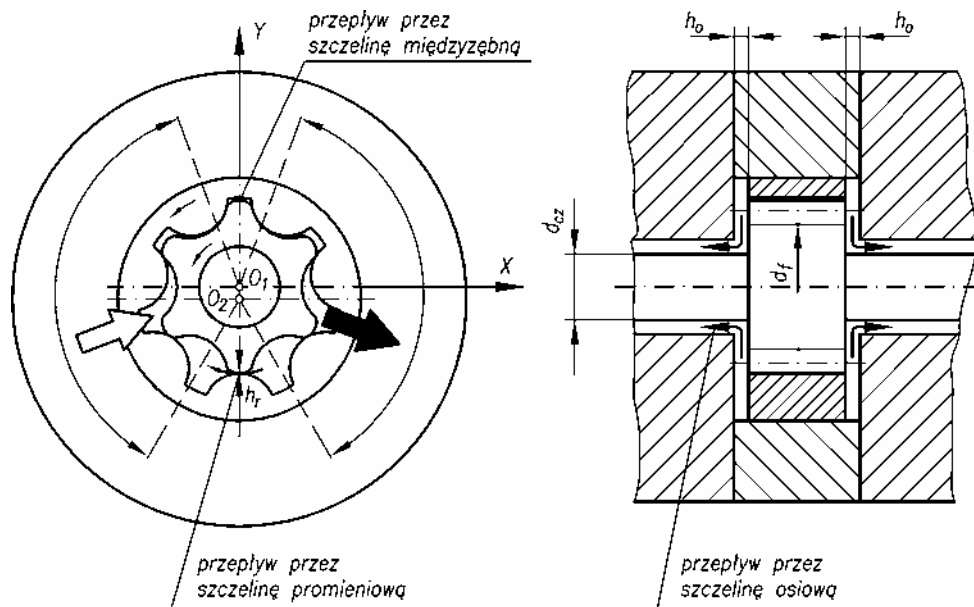
Korzystając ze wzoru (9.73) i podstawiając do niego przyjęte parametry uzębienia wyznaczono współczynnik nierównomierności wydajności δ_c

$$A = 0,045$$

$$B = 14,66$$

$$\delta_c = \frac{A}{B} = 0,3\%$$

Należy zauważyć, że wyznaczony współczynnik nierównomierności wydajności δ_c w przypadku rozważanych pomp gerotorowych jest wielokrotnie mniejsza niż w przypadku pomp z zazębieniem ewolwentowym (rozd. 10.2.3).



Rys. 10.14. Szczeliny wewnętrzne w pompie gerotorowej

Analizę szczelin wewnętrznych utworzonych pomiędzy kołami epicykloidalnymi oraz kołami i elementami korpusu maszyny przeprowadza się na podstawie rysunku 10.14. Teoretycznie w zazębieniu nie występuje szczelina promieniowa h_r , ponieważ zęby pozostają w ciągłym kontakcie ze sobą. W związku z tym nie powinno dochodzić do przepływów między sąsiednimi komorami waporowymi. W praktyce jednak istnieją minimalne szczeliny wynikające z odchyłek wykonawczych i montażowych.

W zazębieniu nie powinna również występować szczelina międzyzębna, bowiem jak wynika z zasady projektowania zazębienia zarysy uzębień ściśle do siebie przylegają. Jednak na skutek korekcji i modyfikacji, a następnie działań technologicznych, doprowadza się do powstania szczeliny międzyzębnej, która jest mała i nie powoduje istotnych przepływów zwrotnych ze strony tłocznej na ssawną.

Najistotniejsze znaczenie dla działania pompy ma szczelina osiowa, która charakteryzuje się wysokością h_o oraz szerokością

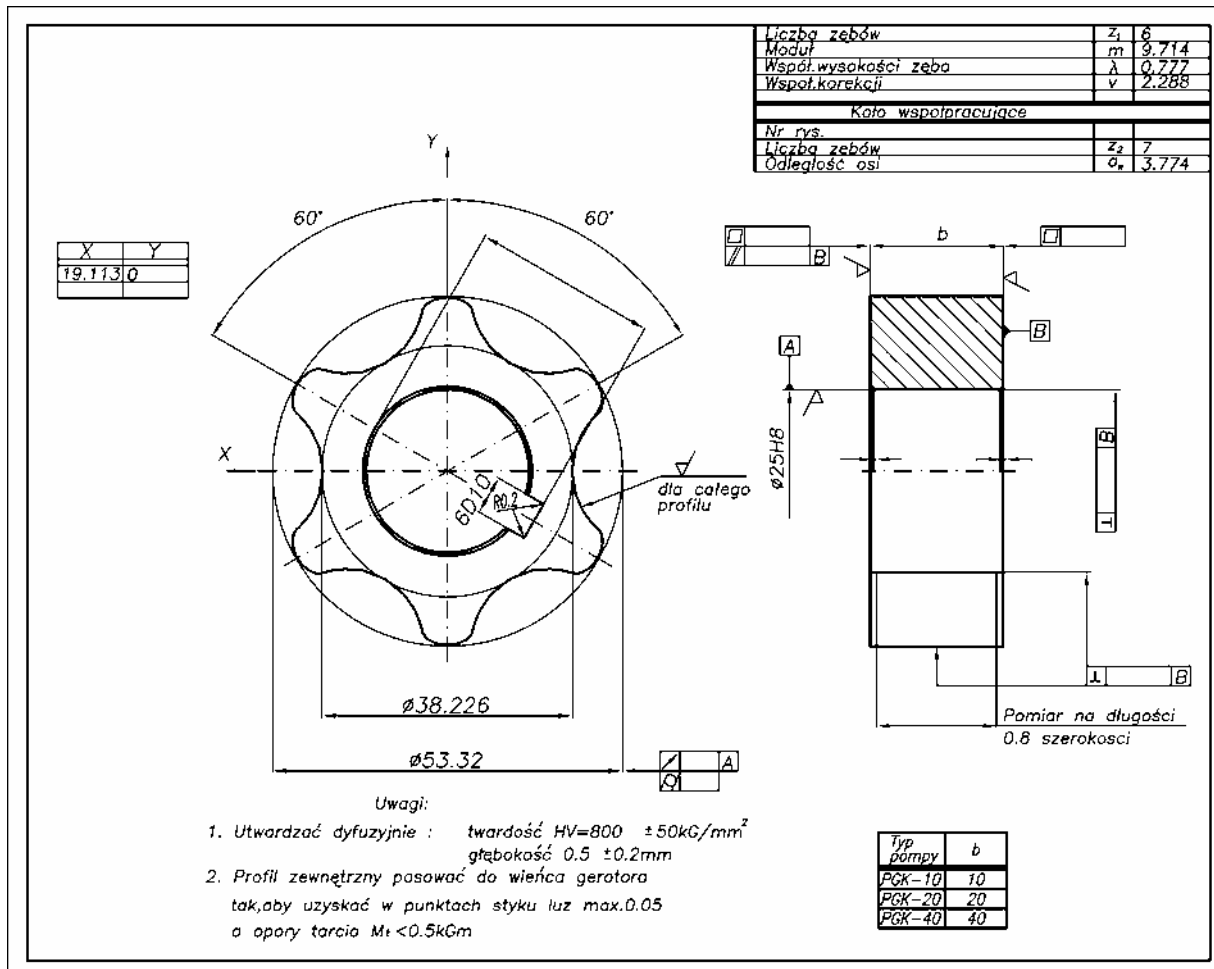
$$\frac{d_f - d_{cz}}{2} \cong 6,5 \text{ mm}$$

W przypadku kół cykloidalnych szerokość ta jest wystarczająca.

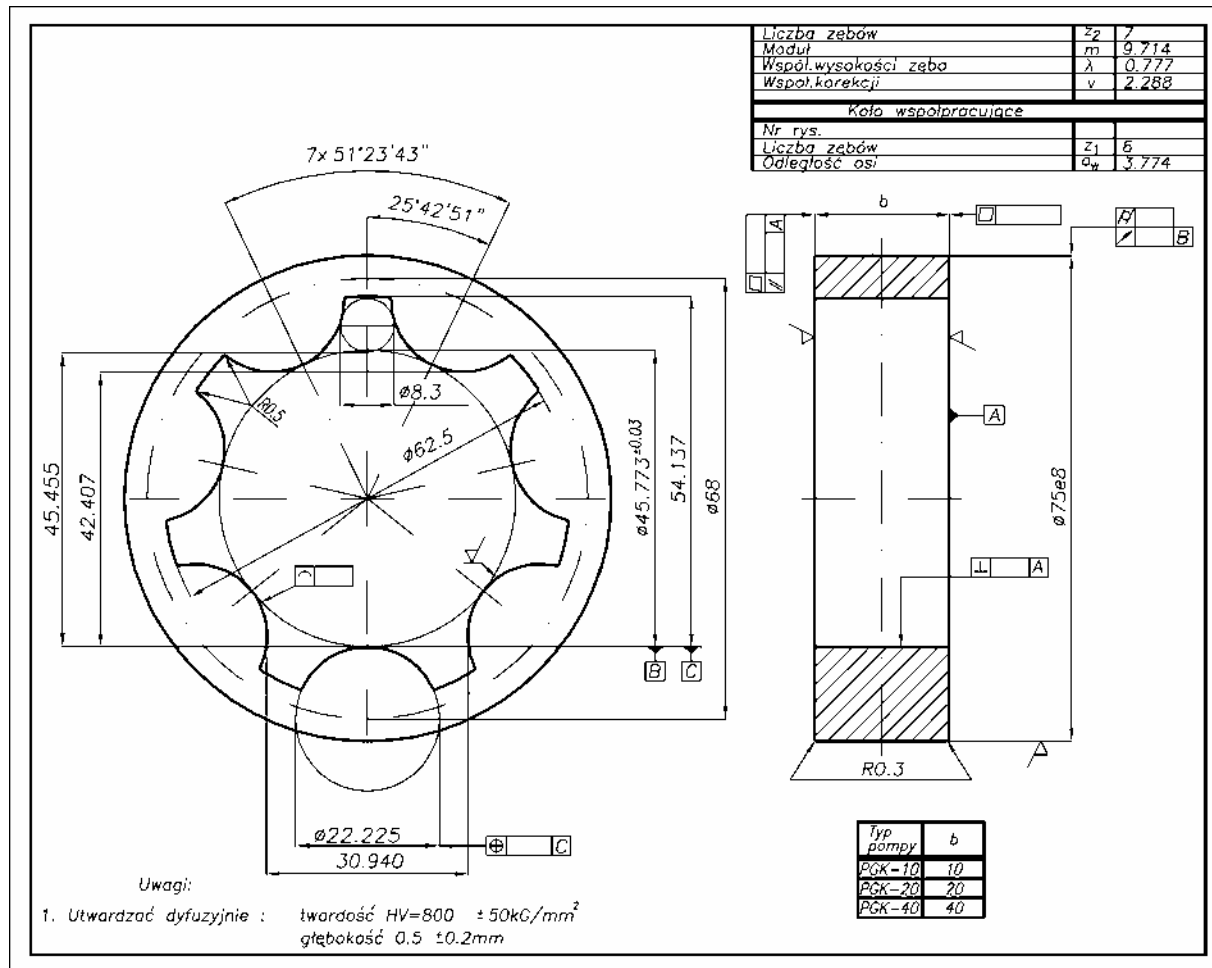
10.4.4. Wytwarzanie zespołu kół zębatach

Na podstawie przeprowadzonej analizy i obliczeń opracowano uproszczoną dokumentację konstrukcyjną zespołu kół. Składa się ona z dwóch rysunków konstrukcyjnych, tzn. rysunku koła pędzącego (rys. 10.15) i pędzonego (rys. 10.16). Tak jak w przypadku kół ewolwentowych na rysunku zgromadzono wszystkie ważniejsze informacje konstrukcyjne i technologiczne charakteryzujące wykonywane koła. Istotną częścią rysunku jest tabela ze współrzędnymi zarysu uzębienia epicykloidalnego w kole pędzącym.

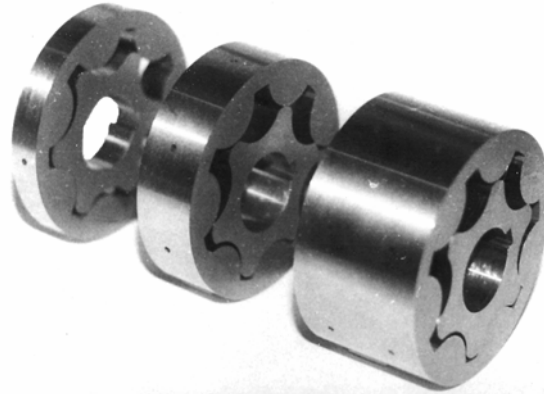
Zespół kół epicykloidalnych proponuje się wykonać metodą obróbki skrawaniem. Umożliwia ona wykonanie kół o średniej wielkości ze stali, z zapewnieniem dużej dokładności powierzchni uzębienia. Stosowanie takiej technologii umożliwi produkcję wielkoseryjną z zachowaniem niskich kosztów.



Rys. 10.15. Rysunek konstrukcyjny koła pędzącego pompy gerotorowej



Rys. 10.16. Rysunek konstrukcyjny koła pędzonego pompy gerotorowej

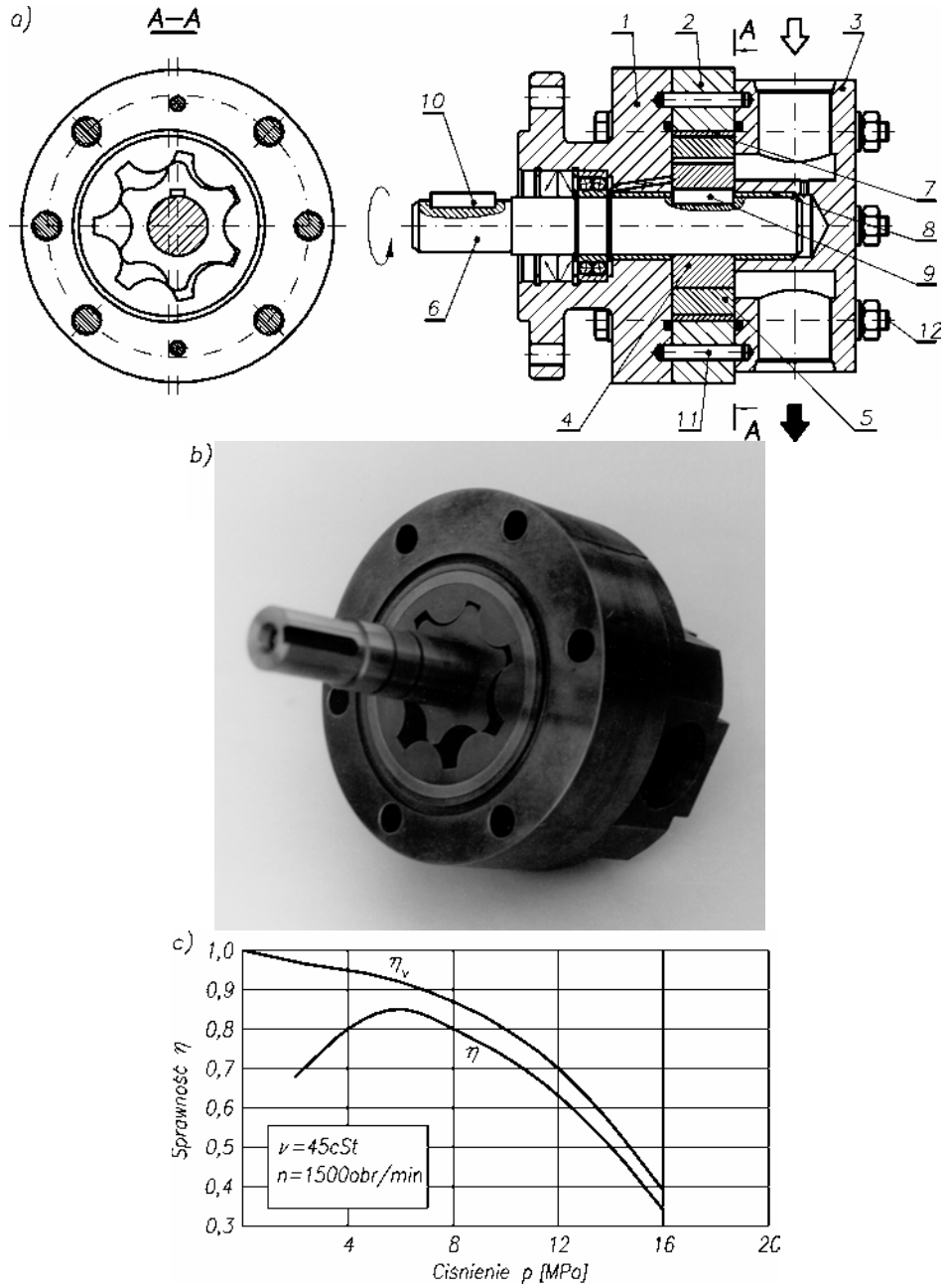


Rys. 10.17. Zespoły kół cykloidalnych o szerokościach $b = 10, 20, 40$ mm przeznaczone do pomp gerotorowych

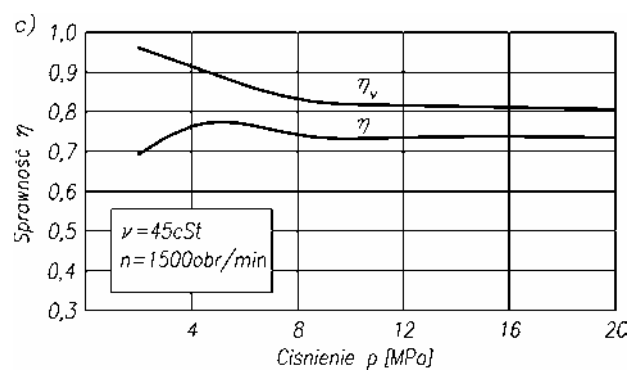
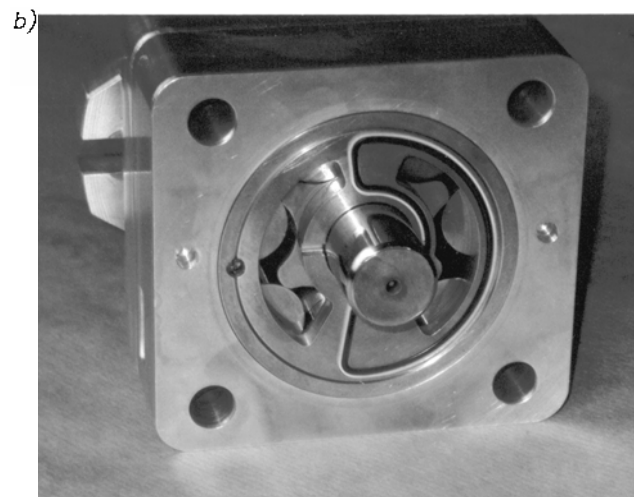
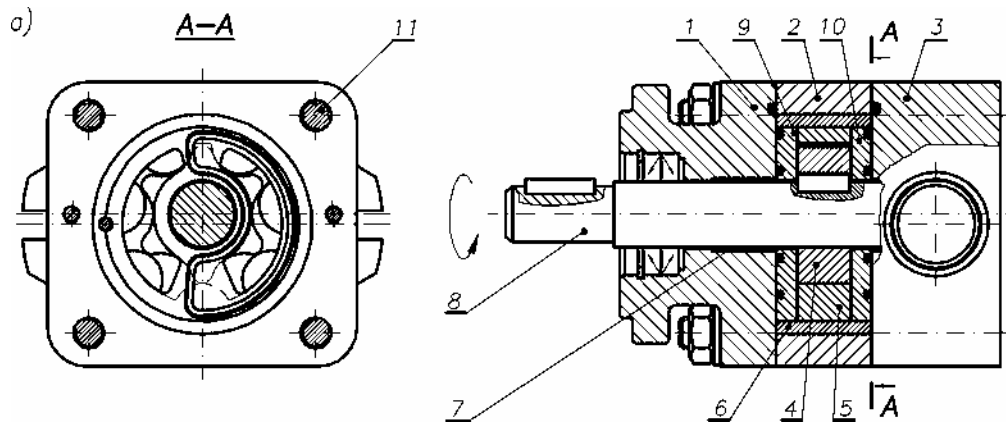
Proces wytwarzania należy prowadzić w trzech etapach: obróbka wstępna, cieplno-chemiczna i wykańczająca. Obróbka wstępna powinna być prowadzona zgodnie z zasadami podanymi w rozdziale 8.2. Koło o uzębieniu zewnętrznym będzie się wykonywać metodą frezowania obwiedniowego (rys. 8.17, 8.20) za pomocą specjalnie zaprojektowanego freza ślimakowego (rys. 8.18). Koło o uzębieniu wewnętrznym można wykonać metodą przeciągania (rys. 8.23, 8.25), stosując do tego celu specjalnie zaprojektowane przeciągacze (rys. 8.24). Po dokonaniu obróbki cieplno-chemicznej, która ma na celu utwardzenie powierzchni kół do około 60 HRC, przystępuje się do obróbki wykańczającej. W przypadku obu kół prowadzi się ją metodą szlifowania kształtowego (rys. 8.21, 8.22, 8.26 i 8.27) specjalnie wyprofilowanymi ściernicami borazonowymi.

Zespoły kół cykloidalnych o wyznaczonych szerokościach $b = 10, 20, 40$ mm, wykonane tą metodą wytwarzania, pokazano na rysunku 10.17.

Zgodnie z przyjętym projektem [68, 82, 85, 87, 93] zespoły kół wykorzystano do budowy typoszeregu pomp gerotorowych w wersji bez kompensacji i z kompensacją luzów osiowych. Do opracowania obu wersji wykorzystano rozwiązanie pokazane na rysunku 10.12. Pompę bez kompensacji luzów osiowych przedstawiono na rysunku 10.18a, a widok modelu pompy o wydajności $q = 20 \text{ cm}^3/\text{obr}$ oraz zamontowanego w niej ząbienia epicykloidalnego pokazano na rysunku 10.18b. Następnie pompę poddano badaniom eksperymentalnym, w wyniku których wyznaczono charakterystyki sprawności przedstawione na rysunku 10.18c. Z wykresu wynika, że pompa osiągnęła zakładane ciśnienie robocze $p = 10 \text{ Mpa}$, zachowując sprawność objętościową $\eta_v > 0,80$ i całkowitą $\eta > 0,70$.



Rys. 10.18. Pompa gerotorowa bez kompensacji luzów osiowych: a) budowa pompy; 1, 2, 3 – korpusy, 4, 5 – koła cykloidalne, 6 – wał napędowy, 7, 8 – łożyska, 9, 10 – wpusty, 11 – kołek ustalający, 12 – śruba, b) widok pompy, c) charakterystyki sprawności pompy



Rys. 10.19. Pompa gerotorowa z kompensacją luzów osiowych: a) budowa pompy; 1, 2, 3 – korpusy, 4, 5 – koła cykloidalne, 6, 7 – łożyska, 8 – wał napędowy, 9, 10 – płyty kompensacyjne, b) widok pompy, c) charakterystyki sprawności pompy

Pompę z kompensacją luzów osiowych przedstawiono na rysunku 10.19a. Nowym elementem w tym rozwiązaniu konstrukcyjnym są płyty kompensacyjne (9) i (10), umieszczone w korpusie środkowym (2) po obu stronach zespołu kół epicykloidalnych (4), (5). W trakcie pracy pompy płyty kompensacyjne są dociskane do powierzchni czołowych kół zębatych minimalizując luz osiowy. Powoduje to zachowanie szczelności wewnętrznej pompy i uzyskanie dużej sprawności objętościowej. Widok modelu pompy o wydajności $q = 20 \text{ cm}^3/\text{obr}$ oraz zespołu kół cykloidalnych w płycie kompensacyjnej pokazano na rysunku 10.19b. Pompę poddano badaniom eksperymentalnym, w wyniku których otrzymano charakterystyki sprawności przedstawione na rysunku 10.19c. Pompa z kompensacją luzów osiowych osiągnęła dwukrotnie wyższe ciśnienie robocze wynoszące $p = 20 \text{ MPa}$ w stosunku do pompy bez kompensacji. Jednocześnie utrzymano w całym zakresie ciśnień sprawność objętościową $\eta_v > 0,80$ i całkowitą $\eta > 0,70$. Współpraca płyt kompensacyjnych z powierzchniami czołowymi kół cykloidalnych przebiegała prawidłowo i nie zaobserwowano śladów zatarcia współpracujących powierzchni.

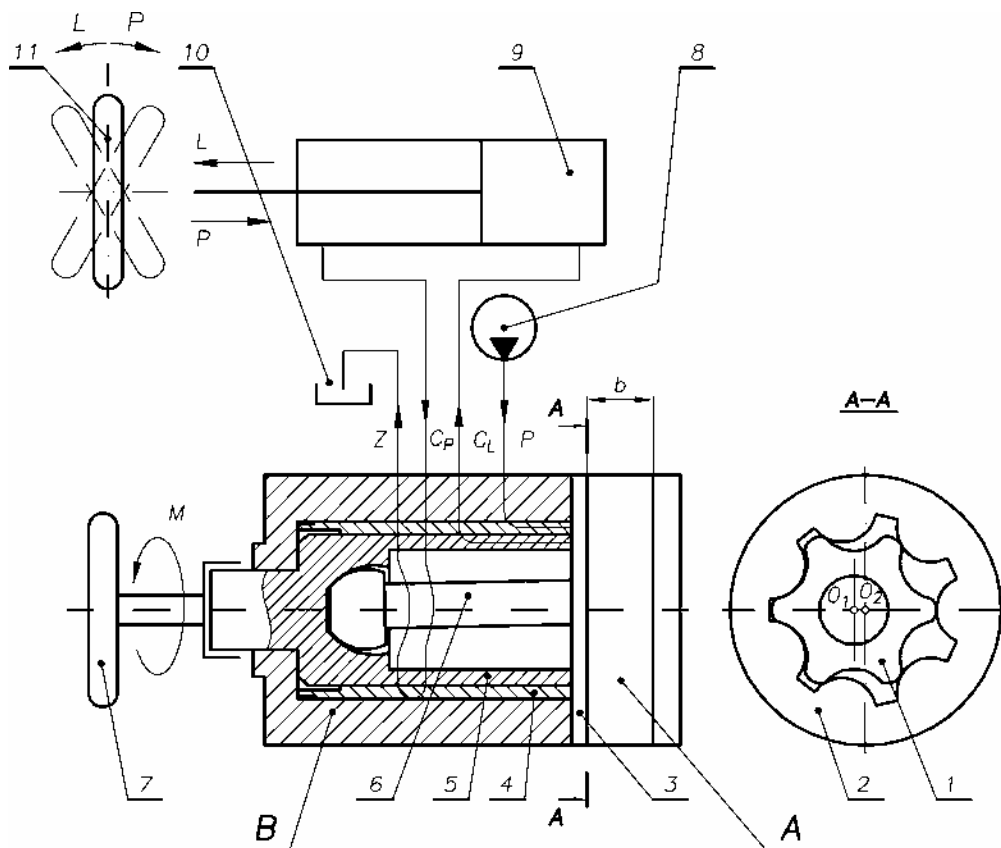
10.5. Projektowanie kół cykloidalnych do bloków sterujących

10.5.1. Opracowanie koncepcji zespołu kół maszyny

Oryginalnymi maszynami zębatymi są bloki sterujące, służące do sterowania hydraulicznymi układami skrętu pojazdów, nazywane też jednostkami skrętu [89]. Budowę i zasadę działania bloków można prześledzić na schematycznym rysunku 10.20. Blok sterujący składa się z dwóch podstawowych zespołów: zespołu kół o zazębieniu wewnętrznym (A) oraz zespołu rozdzielacza obrotowego (B). W skład zespołu kół wchodzi koła o uzębieniu zewnętrznym (1) i wewnętrznym (2). W skład zespołu rozdzielacza wchodzi tarcza rozdzielacza (3), tuleja obrotowa (4) i wał obrotowy (5). Oba zespoły są połączone ze sobą wałem (6) zakończonym z obu stron przegubami. Jednostka skrętu jest połączona czterema przewodami z elementami układu skrętu. Przewodem P z pompą (8), przewodem Z ze zbiornikiem (10) oraz przewodami C_L i C_P z cylindrem skrętu (9), który z kolei współpracuje z kołami pojazdu (11).

Zasada działania jednostki skrętu jest następująca. Kierownicą (7) wprawia się w ruch wał (5) oraz wał przegubowy (6), a ten z kolei wprawia w ruch planetarny koło zębate (1). Przewodem P oraz układem kanałów pomiędzy wałem (5) i tuleją (4) jest dostarczany do międzyzębnych komór wyporowych czynnik roboczy. W wyniku ruchu obrotowego kierownicy (7) i powiązanego z nim ruchu planetarnego koła (1) czynnik zostaje przetłoczony innym układem kanałów pomiędzy wałem (5) i tuleją (4) a następnie przewodem C_L do przestrzeni podtłoczyskowej siłownika skrętu (9), który powoduje skręt kół w lewo. Czynnik roboczy z przestrzeni nadtłoczyskowej spływa przewodem C_P , aby układem połączeń wewnętrznych w rozdzielaczu obrotowym

przedostać się do przewodu Z i zbiornika (10). Z przebiegu procesu widać, że zespół kół zębatach o zazębieniu wewnętrznym (1) i (2), pracujący według zasady ruchu orbitalnego, spełnia rolę pompy przetłaczającej czynnik roboczy pomiędzy pompą skrętu (8) a cylindrem skrętu (9). Jednocześnie zespół kół zębatach (1), (2) spełnia rolę dozownika, który przetłacza do cylindra skrętu objętość czynnika zależną od liczby obrotów kierownicy (7).



Rys. 10.20. Budowa i zasada działania bloku sterującego (jednostki skrętu), A – zespół kół o zazębieniu wewnętrznym, B – rozdzielacz obrotowy: 1, 2 – koła zębata, 3 – tarcza rozdzielacza, 4 – tuleja obrotowa, 5 – wał, 6 – wał z przegubami, 7 – kierownica pojazdu, 8 – pompa skrętu, 9 – cylinder skrętu, 10 – zbiornik, 11 – koło pojazdu

Dla tego problemu formułuje się zadanie zaprojektowania zespołów kół zębatach dla typoszeregu bloków sterujących o wydajnościach właściwych $q = 80, 160, 315 \text{ cm}^3/\text{obr}$. Przyjmuje się, że czynnikiem roboczym będzie olej mineralny, a bloki sterujące będą pracować pod ciśnieniem roboczym $p = 14 \text{ MPa}$. Zakłada się, że funkcję przetłaczania i dozowania oleju będzie realizował zespół kół o zazębieniu we-

wewnętrzny epicykloidalnym i różnicy zębów $z_2 - z_1 = 1$ wykonanych ze stali i pracujących przy osiach ruchomych. Koła epicykloidalne powinny być wykonane z dużą dokładnością tak, aby pompy mogły osiągnąć zakładane parametry techniczne, głównie ciśnienie robocze $p = 14$ MPa oraz równomierność przetłaczania oleju przez jednostkę skrętu.

10.5.2. Konstruowanie zespołu kół zębatych

W blokach sterujących zastosowano zespół kół o zazębieniu wewnętrznym epicykloidalnym i różnicy zębów $z_2 - z_1 = 1$, którego postać geometryczna i wymiary kół są takie, jak w przypadku kół zastosowanych w typoszeregu pomp gerotorowych (rozdz. 10.4.2). Zastosowano więc znane rozwiązanie konstrukcyjne kół, które wykonano technologią wdrożoną w praktyce oraz które sprawdzono wcześniej w eksploatacji.

Kinematyka tego zespołu kół jest jednak odmienna. Z zasady działania bloku sterującego wynika, że zespół kół powinien współpracować według zasady ruchu planetarnego, gdy osie kół są ruchome (rozdz. 6.5.2). Na rysunku 10.21 przedstawiono przebieg współpracy kół w zespole. Koło (1) jest napędzane wyobraźnym jarzmem (J) i przetacza się po nieruchomym kole (2). Ruch koła (1) jest przekazywany na wał przegubowy i wał wyjściowy bloku sterującego (rys. 10.20, poz. 6, 7). Wzór (6.86) o postaci

$$n_1 = -n_J \frac{1}{z_1}$$

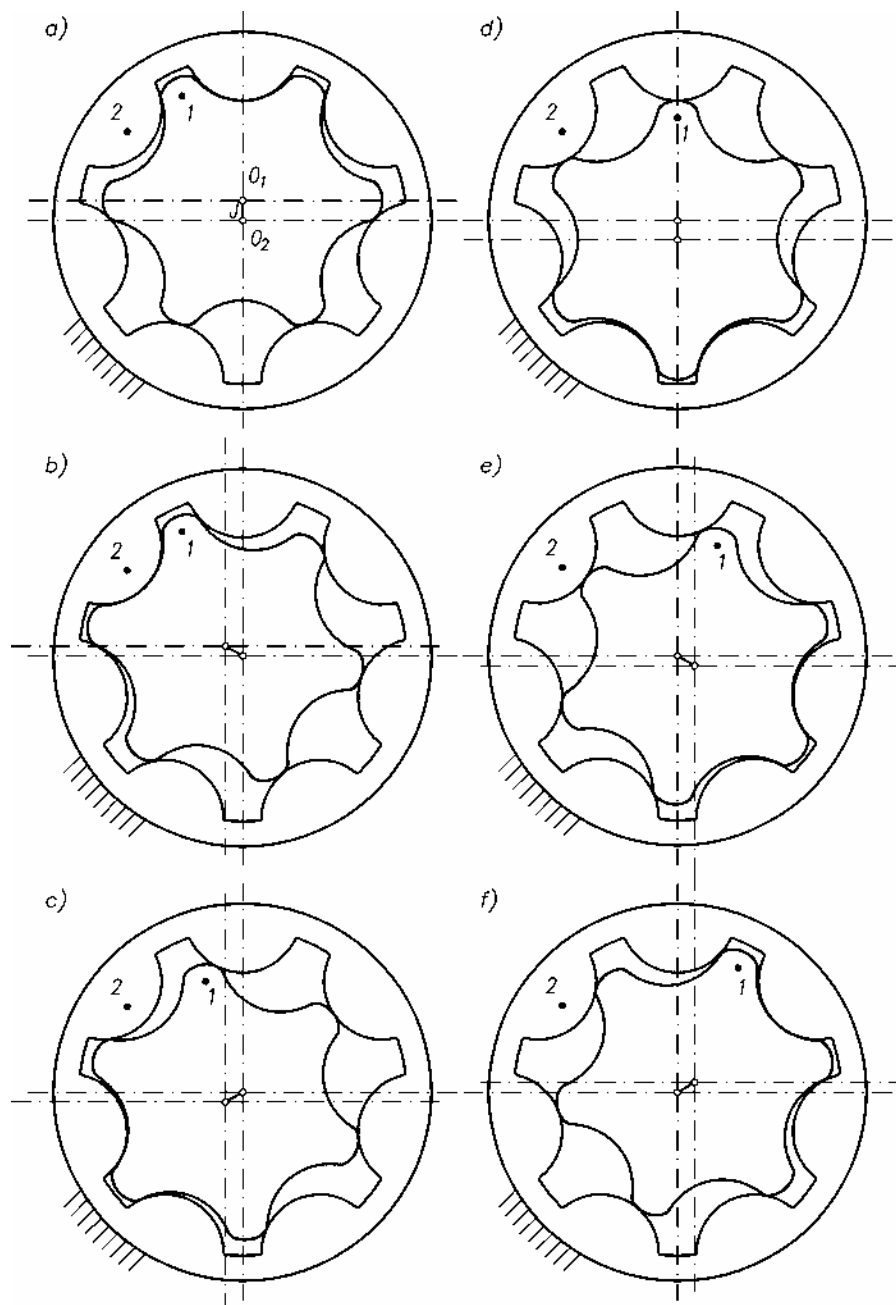
podaje związek pomiędzy obrotami n_J wyobraźnego jarzma a wywołanymi przez nie obrotami n_1 koła (1), a tym samym obrotami wału wyjściowego bloku. Zakładając, że jarzmo wykonuje 1 obrót ($n_J = 1$), czyli że koło (1) przetacza się 1 raz wokół koła (2) oraz zakładając $z_1 = 6$ otrzymuje się obroty koła (1) $n_1 = -1/6$. Oznacza to, że koło (1) i związany z nim wał bloku wykonują 1/6 obrotu w kierunku przeciwnym do obrotów jarzma.

10.5.3. Analiza przemian energii w bloku sterującym

Zespół kół epicykloidalnych bloku sterującego służy do przetłaczania oleju. Wydajność właściwa q_{or} maszyny, której koła pracują według zasady ruchu planetarnego (orbitalnego), w stosunku do wydajności właściwej q_{st} maszyny, której koła pracują przy osiach stałych jest wyrażona wzorem (9.30) o postaci

$$q_{or} = z_2 q_{st}$$

gdzie z_2 – liczba zębów koła współpracującego.



Rys. 10.21. Współpraca kół o zazębieniu cykloidalnym wewnętrznym i ruchomych osiach obrotu O_1 i O_2 (ruch orbitalny): a) – f) kolejne fazy współpracy

Przyjmując założenie, że pierwszy blok sterujący typoszeregu powinien przy orbitalnym ruchu kół zapewnić wydajność $q_{or} = 80 \text{ cm}^3/\text{obr}$, wyznacza się wydajność q_{st} , jaką powinien on osiągnąć podczas pracy przy ustalonych osiach kół, czyli

$$q_{st} = \frac{q_{or}}{z_2} = 11,43 \text{ cm}^3/\text{obr}$$

Następnie ze wzoru (9.72), służącego do wyznaczania wydajności q_{st} pomp z zazębieniem epicykloidalnym i zakładając parametry uzębienia jak dla przypadku pomp gerotorowych (rozdział 10.4) wyznacza się szerokość kół b , która wynosi $b = 10,48 \text{ mm}$.

Prowadząc w podobny sposób dalsze obliczenia, otrzymuje się dla bloku sterującego o wydajności $q_{or} = 160 \text{ cm}^3/\text{obr}$ szerokość kół $b = 20,97 \text{ mm}$ i dla bloku sterującego o wydajności $q_{or} = 315 \text{ cm}^3/\text{obr}$ szerokość kół $b = 41,27 \text{ mm}$. Ostatecznie dla typoszeregu bloków sterujących $q_{or} = 80, 160, 315 \text{ cm}^3/\text{obr}$ przyjęto szerokości kół zębatych $b = 10,4; 20,8; 40,9 \text{ mm}$.

10.5.4. Wytwarzanie zespołu kół zębatych

Na podstawie przeprowadzonych analiz i obliczeń opracowano dokumentację konstrukcyjną zespołu kół. Jest ona bardzo podobna do dokumentacji zespołu kół pomp gerotorowych, przedstawionej na rysunku 10.15 i 10.16. Jedynie koło o uzębieniu zewnętrznym ma otwór wielorowkowy z przeznaczeniem do współpracy z wałem przegubowym, a w kole o uzębieniu wewnętrznym ukształtowano siedem otworów służących do montażu z zespołem rozdzielacza.

Korzystając z technologii takiej samej, jak do kół pomp gerotorowych (rozdz. 8.2 i 10.4.4), wykonano zespoły kół do bloków sterujących o przyjętych szerokościach $b = 10,4; 20,8; 40,9 \text{ mm}$, których widok przedstawiono na rysunku 10.22a. Następnie zespoły te zamontowano w blokach sterujących tworzących typoszereg (rys. 10.22b), które poddano badaniom eksperymentalnym. W ich trakcie stwierdzono, że zespoły kół cykloidalnych pracowały prawidłowo, spełniając funkcję przetłaczania czynnika roboczego z założonymi wydajnościami $q = 80, 160, 315 \text{ cm}^3/\text{obr}$. Bloki mogły pracować pod maksymalnym ciśnieniem roboczym, wynoszącym $p = 14 \text{ MPa}$.

10.6. Projektowanie kół cykloidalnych do silników orbitalnych

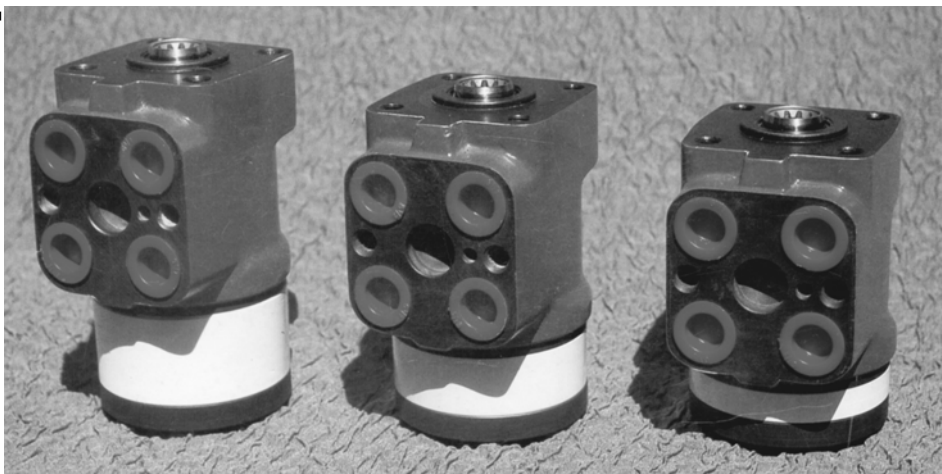
10.6.1. Opracowanie koncepcji zespołu kół maszyny

Zespoły kół cykloidalnych o zazębieniu wewnętrznym stosowano dotychczas w pompach gerotorowych (rozdział 10.4), gdzie służyły do przemiany energii mechanicznej na hydrauliczną oraz w blokach sterujących (rozdz. 10.5), gdzie służyły do

a)



b)



Rys. 10.22. Bloki sterujące $q = 80, 160, 315 \text{ cm}^3/\text{obr}$: a) widok zespołu kół cykloidalnych stosowanego w blokach, b) widok bloków

przetłaczania (dozowania) czynnika roboczego, kierowanego do cylindrów układu skrzętu maszyny. Należy rozważyć, czy nie można wykorzystać kół cykloidalnych do budowy silników hydraulicznych, gdzie służyłyby do przemiany energii hydraulicznej na mechaniczną. Szczególnie dotyczy to silników wolnoobrotowych wysokomomentowych.

Moment dyspozycyjny na wale silnika określa wzór (9.8) o postaci

$$M_{st} = \frac{q_s}{2\pi} \Delta p_s$$

Przy granicznej różnicy ciśnień Δp_s na wejściu i wyjściu z silnika, która w praktyce rzadko przekracza 30 MPa, duży moment M_{st} można uzyskać jedynie poprzez zapewnienie dużej chłonności właściwej silnika q_s . Jak wynika z analizy wzorów (9.71) i (9.81) oraz odpowiadających im rysunków 9.15, dużą chłonność można uzyskać poprzez dobór dużych wartości takich parametrów uzębienia i zazębienia, jak liczba zębów z , moduł m , współczynnik wysokości λ oraz szerokość kół b . Wpływ parametrów z , m , λ na objętość międzyzębnej komory wyporowej pokazano schematycznie na rysunku 10.23. Na rysunku widać, że wraz ze wzrostem wartości tych parametrów powiększa się pole powierzchni (objętość) międzyzębnej komory wyporowej. Na podstawie tej zależności zaprojektowano maszynę z zazębieniem hipocykloidalnym wewnętrznym i parametrach $z_1 = 8$, $z_2 = 9$, $m = 20$, $\lambda = 1$, $\nu = 18$ [96], a następnie wykonano model maszyny o nazwie Max 9, której widok pokazano na rysunku 10.24. Zespół kół cykloidalnych wykonano metodą frezowania obwiedniowego na frezarce numerycznej. Badania eksperymentalne potwierdziły, że mogła ona pracować jako pompa lub silnik, o wydajności lub chłonności właściwej $q = 1200 \text{ cm}^3/\text{obr}$, o ciśnieniu roboczym $p = 2 \text{ MPa}$ i w zakresie prędkościach $n = 1 - 200 \text{ obr/min}$. Zewnętrzna średnica zespołu kół wynosiła 300 mm, co oznacza, że wymiary średnicowe zespołu kół maszyny Max 9 (rys. 10.24) wzrosły w stosunku do zespołu kół pomp gerotorowych (rys. 10.18a, 10.19a) ponad czterokrotnie. Jednocześnie przy dwukrotnie powiększonej szerokości b kół maszyny Max 9 w stosunku do pompy gerotorowej $q = 40 \text{ cm}^3/\text{obr}$ otrzymano 30-krotne zwiększenie wydajności (chłonności) właściwej.

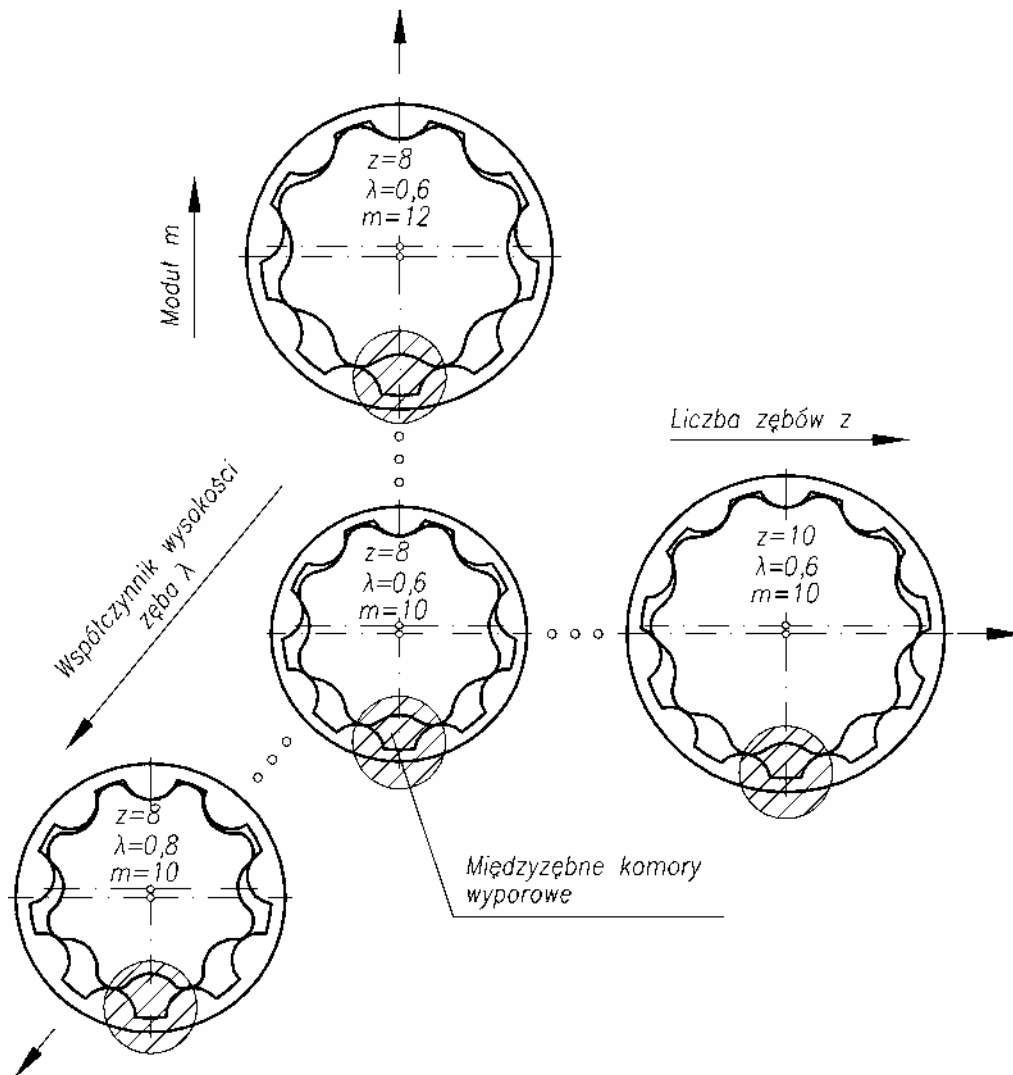
Dalsze powiększanie parametrów zazębienia kół cykloidalnych i wynikających z tego gabarytów kół ze względów konstrukcyjnych, technologicznych i eksploatacyjnych nie jest zalecane. Należy więc rozważyć możliwość wprowadzenia współpracy kół przy osiach ruchomych, co zgodnie ze wzorem (9.30) mogło by skutkować wzrostem wydajności lub chłonności właściwej. Schematyczne rozwiązanie konstrukcyjne oraz zasada działania silnika hydraulicznego z zespołem kół cykloidalnych pracujących według zasady ruchu planetarnego (orbitalnego) przedstawiono na rysunku 10.25.

Silnik składa się z dwóch podstawowych zespołów: zespołu kół o zazębieniu wewnętrznym cykloidalnym (A) oraz zespołu rozdzielacza obrotowego (B), który spełnia rolę rozrządu. W skład zespołu kół wchodzi koła o zazębieniu zewnętrznym (1) i wewnętrznym (2). W skład zespołu rozdzielacza wchodzi: tarcza rozdzielacza (3) oraz wał (4), połączony z wałem silnika i współpracujący z korpusem rozdzielacza (5). Koło (1) jest połączone z wałem (4) wałem przegubowym (6).

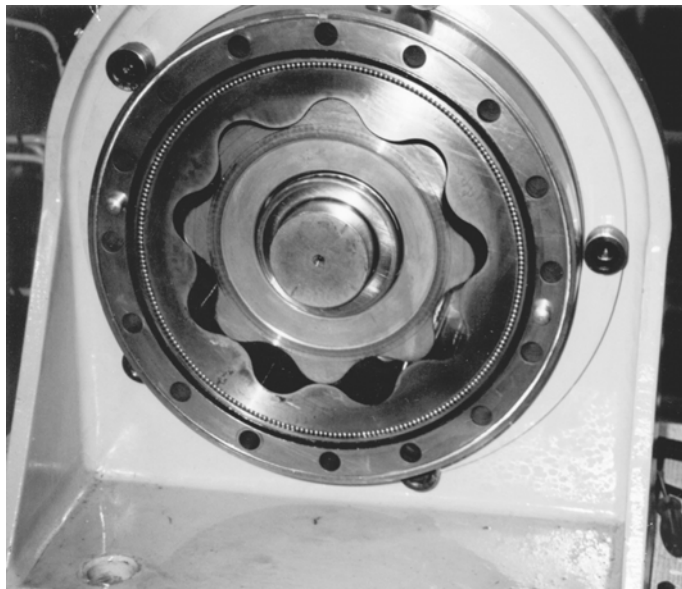
Czynnik roboczy jest dostarczany do silnika przewodem (P), aby następnie układem kanałów pomiędzy korpusem (5) i wałem (4) dostać się do międzyzębnych komór wyporowych utworzonych pomiędzy zębami kół (1) i (2). W wyniku oddziaływania czynnika roboczego, koło (1) przetacza się ruchem planetarnym (orbitalnym)

po nieruchomym kole (2) i poprzez wał przegubowy (6) wprawia w ruch obrotowy wał napędowy silnika. W ten sposób odbywa się przemiana energii hydraulicznej na mechaniczną.

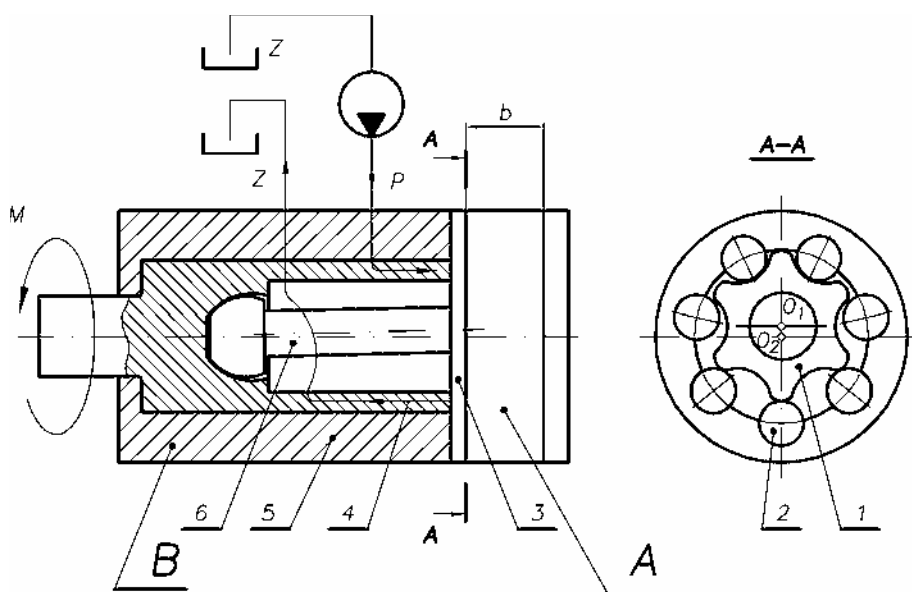
Należy zatem zaprojektować zespół kół zębatach epicykloidalnych o zazębieniu wewnętrznym i różnicy zębów $z_2 - z_1 = 1$, pracujących według zasady ruchu planetarnego, które stanowiłyby zespoły wyporowe w typoszeregu silników hydraulicznych



Rys. 10.23. Poglądowe przedstawienie wpływu parametrów zazębienia cykloidalnego z , m , λ na objętość międzyzębnej komory wyporowej



Rys. 10.24. Widok zazębienia hipocykloidalnego wewnętrznego maszyny hydraulicznej Max 9



Rys. 10.25. Budowa i zasada działania silnika hydraulicznego orbitalnego:
 A – zespół kół cykloidalnych, B – zespół rozdzielacza obrotowego, 1, 2 – koła zębata,
 3 – tarcza rozdzielacza, 4 – wał, 5 – korpus, 6 – wał pośredni

wolnoobrotowych o chłonnościach właściwych $q = 80, 160, 315 \text{ cm}^3/\text{obr}$. Przewiduje się, że czynnikiem roboczym będzie olej mineralny, a silnik będzie pracował pod ciśnieniem roboczym $p = 14 \text{ MPa}$. Aby zapewnić możliwie największą sprawność silnika, równomierność prędkości obrotowej oraz małe wartości momentów rozruchowych przyjęto, że koło (2) będzie miało zęby ukształtowane w formie rolek, które mogą obracać się w gniazdach wieńca. Polepszają się wtedy warunki współpracy z kołem (1), zmniejszają opory ruchu i straty mechaniczne generowane w zazębieniu. Dodatkowo zakłada się dużą dokładność wykonania i montażu obu kół.

10.6.2. Konstruowanie zespołu kół zębatych

Obliczenia prowadzi się w sposób podobny jak obliczenia kół epicykloidalnych pomp gerotorowych (rozdz. 10.4.2). Przyjmuje się następujące wartości parametrów podstawowych uzębienia i zazębienia:

- liczba zębów kół $z_1 = 6, z_2 = 7$,
- moduł $m = 9,142 \text{ mm}$,
- współczynnik wysokości zęba koła o uzębieniu zewnętrznym epicykloidalnym $\lambda = 0,6124$, którego wartość dobrano ze zbioru wartości dopuszczalnych wyznaczonych na rysunku 6.10a,
- zakłada się bezluzową współpracę kół, a ewentualne luzy mogą wynikać jedynie z przyczyn technologicznych.

Koło podstawowe o uzębieniu zewnętrznym, zgodnie z rozdziałem 6.3.2.1, ma zarys utworzony według epicykloidy skróconej, koło zaś współpracujące ma zarys utworzony w formie obwiedni zewnętrznej. Należy dokonać korekcji i modyfikacji uzębienia obu kół. Wybrano korekcję P-0 bez zmiany odległości osi kół O_1O_2 . Graniczne przesunięcie wyznacza się za pomocą wzorów (6.31) i (6.36), do których podstawia się przyjęte parametry uzębienia i w rezultacie otrzymuje

$$\eta_{e\min 2} = 14,67^\circ$$

$$R_{e\min 2} = 12,87 \text{ mm}$$

Oznacza to, że wartość granicznego przesunięcia, powyżej którego występuje interferencja zarysu, wynosi $g_{\max} = 12,87 \text{ mm}$. Na potrzeby rozważanego zazębienia wybrano wartość przesunięcia zarysu $g = 8 \text{ mm}$. Odpowiednio współczynnik korekcji wynosi

$$\nu = \frac{g}{\rho} = 1,750$$

Skorygowany zarys uzębienia koła podstawowego w formie ekwidystanty do epicykloidy wyznacza się z zależności (6.26). Po podstawieniu do nich przyjętych parametrów uzębienia oraz kąta $\eta = 0$ wyznacza się początkowy punkt zarysu

$$x_{eke} = 21,198 \text{ mm}$$

$$y_{eke} = 0 \text{ mm}$$

Współrzędne kolejnych punktów zarysu wyznacza się, zmieniając kąt bieżący epicykloidy zasadniczej w zakresie $\eta = 0 - \pi/z_1$. Otrzymuje się w ten sposób fragment zarysu uzębienia począwszy od dna wrębu do wierzchołka zęba. Zarys ten powtarza się tyle razy, ile jest zębów w kole. Kształt skorygowanego uzębienia koła podstawowego przedstawiono na rysunku 6.13b.

Korzystając ze wzorów (6.19), (6.20) wyznacza się średnicę wierzchołkową d_{a1} i średnicę stóp d_{f1} koła podstawowego po korekcji

$$d_{a1} = 53,594 \text{ mm}$$

$$d_{f1} = 42,396 \text{ mm}$$

Po przeprowadzeniu korekcji P-0 koło współpracujące ma zarys uformowany przez ekwidystantę do obwiedni i należy dokonać modyfikacji zarysu polegającej na zastąpieniu łuków ekwidystant rolkami o promieniu równym przesunięciu ekwidystanty $r = g = 8 \text{ mm}$. Kształt zmodyfikowanego uzębienia koła współpracującego przedstawiono na rysunku 6.13c.

Za pomocą wzorów z rozdziału 6.3.2.1 wyznacza się średnicę wierzchołkową d_{a2} i średnicę stóp d_{f2} koła współpracującego po modyfikacji

$$d_{a2} = 47,995 \text{ mm}$$

$$d_{f2} = 59,192 \text{ mm}$$

Ze względów technologicznych średnicę powiększa się do wartości $d_{f2m} = 62 \text{ mm}$ (rys. 6.13c).

Zaprojektowane koła epicykloidalne zestawia się w zespół, w którym odległość a_w osi O_1 i O_2 , wyznacza się ze wzoru (6.76)

$$a_w = 2,8 \text{ mm}$$

Średnice kół tocznych określa się ze wzorów (6.54)

$$d_{w1} = 33,59 \text{ mm}$$

$$d_{w2} = 39,18 \text{ mm}$$

Jak założono w koncepcji i pokazano na rysunku 10.25 koła powinny współpracować ze sobą według zasady ruchu planetarnego. Przebieg tej współpracy jest taki sam jak przebieg współpracy kół cykloidalnych w bloku sterującym, który przedstawiono na rysunku 10.20.

10.6.3. Analiza przemian energii w silniku orbitalnym

Zespół kół epicykloidalnych silnika służy do przemiany energii hydraulicznej w mechaniczną. Przyjąwszy zastrzeżenie, że pierwszy silnik typoszeregu powinien podczas orbitalnego ruchu kół zapewnić chłonność $q_{or} = 80 \text{ cm}^3/\text{obr}$ wyznacza się ze wzoru (9.30) chłonność q_{st} , jaką powinien on osiągnąć podczas pracy dla ustalonych osi kół

$$q_{st} = \frac{q_{or}}{z_2} = 11,43 \text{ cm}^3/\text{obr}$$

Następnie do wzoru (9.72), służącego do wyznaczania chłonności q_{st} silnika, którego koła współpracują przy ustalonych osiach obrotu, wprowadza się parametry uzębienia i zazębienia, aby wyznaczyć wymaganą szerokość koła $b = 13,61 \text{ mm}$.

Prowadząc w podobny sposób obliczenia wyznaczono szerokości kół dla kolejnych silników typoszeregu: $b = 27,22 \text{ mm}$ dla silnika o chłonności $q_{or} = 160 \text{ cm}^3/\text{obr}$, $b = 52,80 \text{ mm}$ dla silnika o chłonności $q_{or} = 315 \text{ cm}^3/\text{obr}$. Ostatecznie dla typoszeregu bloków sterujących $q_{or} = 80, 160, 315 \text{ cm}^3/\text{obr}$ przyjęto szerokości kół zębatach $b = 14, 27, 53 \text{ mm}$.

10.6.4. Wytwarzanie zespołu kół zębatach

Na podstawie przeprowadzonych analiz i obliczeń opracowano dokumentację konstrukcyjną zespołu kół. Została ona wykonana na wzór dokumentacji zespołu kół pomp gerotorowych, przedstawionej na rysunku 10.15 i 10.16. Główne różnice polegają na wykonaniu otworu wielowypustowego w kole o uzębieniu zewnętrznym, który umożliwia współpracę z wałem pośrednim oraz wykonaniu w wieńcu koła o uzębieniu wewnętrznym siedmiu otworów służących do montażu z zespołem rozdzielacza obrotowego.

Technologia kół silników hydraulicznych jest podobna do technologii kół stosowanych w pompach gerotorowych, którą opisano w rozdziałach 8.2 i 10.4.4. Koło o uzębieniu epicykloidalnym zewnętrznym wykonuje się metodą frezowania obwodniowego oraz szlifowania kształtowego, a wieniec koła o uzębieniu wewnętrznym metodą przeciągania. W gniazdach wieńca montuje się następnie rolki, wykonywane jako odrębne elementy, których powierzchnie walcowe i płaszczyzny czołowe rolek szlifuje się, aby zapewnić dużą dokładność wymiarów i kształtu.

Wykonano zespoły kół do silników hydraulicznych, a jeden z nich o szerokości $b = 14 \text{ mm}$ przedstawiono na rysunku 10.26a. Następnie zespoły te zamontowano w silnikach tworzących typoszereg (rys. 10.26b) i poddano badaniom eksperymentalnym. Zespoły kół cykloidalnych pracowały prawidłowo spełniając założoną funkcję, tzn. służyły do przemiany energii hydraulicznej w mechaniczną. Rolki stanowiące uzębienie koła współpracującego pracowały prawidłowo, a opory ruchu były małe.

Uzyskano założone chłonności właściwe $q = 80, 160, 315 \text{ cm}^3/\text{obr}$. Silniki mogły pracować pod ciśnieniem roboczym $p = 14 \text{ MPa}$ z momentami obrotowymi w zakresie $M = 130\text{--}270 \text{ Nm}$ i prędkościami obrotowymi $n = 10\text{--}200 \text{ obr}/\text{min}$.

a)



b)



Rys. 10.26. Zespół kół cykloidalnych przeznaczony do silników orbitalnych: a) widok zespołu kół epicykloidalnych, stosowanego w silniku, b) widok silników orbitalnych o chłonnościach (od lewej) $q = 315, 160, 80 \text{ cm}^3/\text{obr}$.

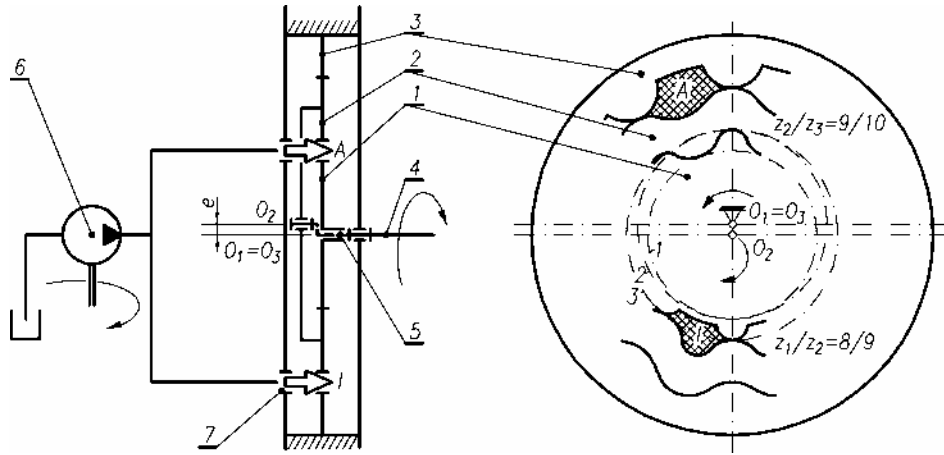
10.7. Projektowanie kół cykloidalnych z podwójnym zazębieniem do silnika orbitalnego

10.7.1. Opracowanie koncepcji zespołu kół maszyny

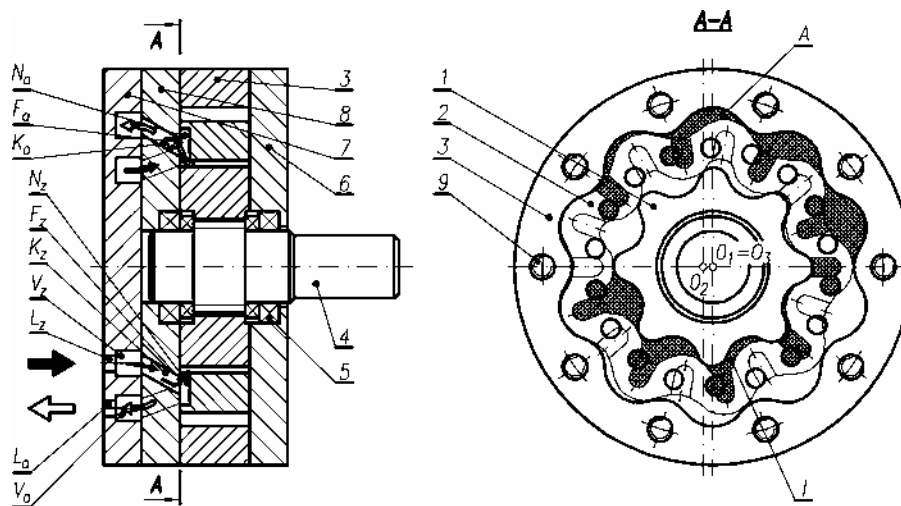
Jak pokazano w rozdziale 10.6 dużą chłonność silnika hydraulicznego i wynikający z niej duży moment na wale można uzyskać przez powiększenie parametrów zazębienia (rys. 10.23 i 10.24), lecz przede wszystkim poprzez wprowadzenie zasady planetarnego ruchu kół (rys. 10.25). Realizując te założenia [91, 94], opracowano koncepcję silnika orbitalnego z podwójnym zazębieniem cykloidalnym, którą przedstawiono na rysunku 10.27. Silnik składa się z trzech kół: koła centralnego (1), uzębionego zewnętrznie o środku O_1 , pierścienia zębatego (2), uzębionego wewnątrz i zewnętrznie o środku O_2 oraz koła słonecznego (3), uzębionego wewnątrz o środku $O_3 = O_1$. Między tymi kołami utworzone są dwa zazębienia – pierwsze pomiędzy uzębieniem koła centralnego (1) i wewnętrznym uzębieniem pierścienia (2) oraz drugie pomiędzy zewnętrznym uzębieniem pierścienia (2) i uzębieniem koła słonecznego (3). Wszystkie zęby w pierwszym i drugim zazębieniu są w ciągłym kontakcie, dzięki czemu koła te są wzajemnie prowadzone i jarzmo (5) może być wyeliminowane. Na rysunku 10.27 oznaczono je linią kreskową jako wyobrażalne. Zęby w obu zazębeniach tworzą między sobą zamknięte komory wyporowe, które w ramach pierwszego zazębienia oznaczono jako I , drugiego zaś jako A . Do komór tych jest dostarczany olej pod wysokim ciśnieniem z pompy (6) poprzez układ kanałów dolotowych (7). Napór oleju wywołuje ruch orbitalny pierścienia zębatego (2) w ramach mimośrodu $O_1O_2 = e$. W następstwie tego ruchu koło (1) i związany z nim wał silnika (4) są wprawiane w ruch obrotowy. Rozwiązanie konstrukcyjne odpowiadające takiej koncepcji przedstawiono na rysunku 10.28.

Silnik zbudowany jest z płyty przedniej (6), środkowej (3), tylnej (8) oraz pokrywy (7). W płycie środkowej (3) ukształtowano uzębienie wewnętrzne koła słonecznego z_3 , a następnie wewnątrz niego umieszczono pierścień (2) z podwójnym uzębieniem wewnętrznym i wewnętrznym z_2 oraz koło centralne (1) z uzębieniem zewnętrznym z_1 . Zespół kół cykloidalnych tworzy dwa zazębienia o liczbach zębów $z_1/z_2 = 8/9$ oraz $z_2/z_3 = 9/10$. Przekazuje on moment obrotowy na wał silnika (4) usytuowany w łożyskach (5). Ze względu na orbitalny ruch kół konieczne jest zaprojektowanie specjalnego rozrządu, czyli systemu zasilania komór międzyzębnych olejem, a następnie jego spływu do zbiornika. Układ ten składa się z

- otworów zasilającego L_z i spływowego L_a ,
- kolektorów zasilającego V_z i spływowego V_a ,
- kanałów zasilającego K_z i spływowego K_a ,
- okien zasilających F_z i spływowych F_a ,
- kanałów rozdzielacza zasilających N_z i spływowych N_a .



Rys. 10.27. Szkic koncepcyjny silnika orbitalnego z podwójnym zazębieniem cykloidalnym:
1, 2, 3 – koła zębata, 4 – wał, 5 – jarzmo, 6 – pompa, 7 – kanał, A, I – komory wyporowe



Rys. 10.28. Budowa i zasada działania silnika orbitalnego z podwójnym zazębieniem cykloidalnym:
1, 2, 3 – koła zębata, 4 – wał, 5 – łożysko, 6, 7, 8 – elementy korpusu, 9 – śruby

Czynnik roboczy wpływa do silnika przez otwór zasilający L_z , następnie rozplywa się kolektorem zasilającym V_z do kanałów zasilających K_z a potem przez okna zasilające F_z oraz kanały rozdzielacza N_z dostaje się do międzyzębnych komór wyporowych I i A. Jak pokazano na rysunku 10.27 jedynie połowa komór I i A jest zasilana. Druga połowa jest połączona w tym samym czasie ze splywem, który odbywa się na drodze (N_a), (F_a), (K_a), (V_a) i (L_a).

W tej sytuacji należy zaprojektować zespół trzech kół zębatych cykloidalnych pracujących w układzie podwójnego zazębienia cykloidalnego według zasady ruchu planetarnego (orbitalnego). Zespół ten powinien zapewnić chłonność właściwą silnika $q = 9000 \text{ cm}^3/\text{obr}$. Silnik powinien pracować pod ciśnieniem roboczym $p = 6,3 \text{ MPa}$ z prędkością obrotową $n = 1\text{--}40 \text{ obr/min}$.

10.7.2. Konstruowanie zespołu kół zębatych

Przyjmuje się za [77, 79, 80], że pomiędzy kołem centralnym (1) a pierścieniem zębatym (2) zostanie zastosowane zazębienie hipocykloidalne, korygowane i modyfikowane, pomiędzy zaś pierścieniem zębatym (2) i kołem słonecznym (3) zostanie zastosowane zazębienie epicykloidalne korygowane i modyfikowane. Taki układ powoduje, że oba skorygowane zarysy, tzn. hipocykloidalny i epicykloidalny są ukształtowane na tym samym pierścieniu (2) (rys. 10.27). Przez prawidłowy dobór parametrów uzębienia i zazębienia można zapewnić odpowiednio dużą szerokość tego pierścienia, potrzebną do ukształtowania w nim kanałów rozdzielczych. Jednocześnie jest to korzystne ze względów technologicznych, oba bowiem zarysy cykloidalne można wykonać w trakcie jednego procesu wytwórczego, dotyczącego tego samego koła zębatego, przez co zwiększa się dokładność wykonania uzębień. Również uzębienie kół (1) i (3) ukształtowane w formie okręgów łatwiej jest wykonać i skojarzyć z uzębieniami koła (2).

Przyjmuje się następujące wartości parametrów podstawowych zazębienia hipocykloidalnego utworzonego pomiędzy kołem (1) i (2):

- liczba zębów kół $z_1 = 8$, $z_2 = 9$,
- moduł $m = 21,25 \text{ mm}$,
- współczynnik wysokości zęba koła o uzębieniu zewnętrznym epicykloidalnym $\lambda = 0,941$, którego wartość dobrano ze zbioru wartości dopuszczalnych, podanych na rysunku 6.10b,
- zakłada się bezluzową współpracę kół, a ewentualne luzy mogą wynikać jedynie z przyczyn technologicznych.

Parametry zazębienia są większe niż te, które przyjęto dla pomp gerotorowych (rozd. 10.4) oraz silników orbitalnych z pojedynczym zazębieniem (rozd. 10.6). Uczyniono tak, aby zwiększyć gabaryty kół, a tym samym objętość międzyzębnych komór wyporowych.

W przyjętym zazębieniu hipocykloidalnym zastosowano korekcję P-0 bez zmiany odległości osi O_1O_2 , której istotę opisano w rozdziale 6.3.3.2.

Graniczne przesunięcie zarysu wyznacza się podstawiając do wzorów (6.42) i (6.40) parametry uzębienia hipocykloidalnego i otrzymuje się

$$\eta_{h\min 2} = 4,43^\circ$$

$$R_{h\min 2} = 21,19 \text{ mm}$$

Wartość granicznego przesunięcia, powyżej którego występuje interferencja zarysu, wynosi $g_{\max} = 21,19 \text{ mm}$, więc dla rozważanego zazębienia wybrano wartość przesunięcia zarysu $g = 15 \text{ mm}$. Odpowiednio współczynnik korekcji wynosi

$$\nu = \frac{g}{\rho} = 1,412$$

Skorygowany zarys uzębienia wewnętrznego koła (2), występujący w formie ekwidystanty do hipocykloidy wyznacza się ze wzorów (6.28). Po podstawieniu do nich przyjętych parametrów uzębienia oraz kąta $\eta = 0$, wyznacza się początkowy punkt zarysu

$$x_{ekh} = 110 \text{ mm}$$

$$y_{ekh} = 0 \text{ mm}$$

Współrzędne kolejnych punktów zarysu wyznacza się zmieniając kąt bieżący hipocykloidy zasadniczej w zakresie $\eta = 0 - \pi/z_2$. Otrzymuje się w ten sposób fragment zarysu uzębienia począwszy od dna wrębu do wierzchołka zęba, który powtarza się tyle razy, ile jest zębów w kole. Kształt skorygowanego uzębienia hipocykloidalnego wewnętrznego koła (2) przedstawiono na rysunku 6.19b.

Ze wzorów (6.52) i (6.53) wyznacza się średnicę wierzchołkową d_{a2} i średnicę stóp d_{f2} tego uzębienia:

$$d_{a2} = 180 \text{ mm}$$

$$d_{f2} = 220 \text{ mm}$$

Skorygowany zarys koła współpracującego ma zarys uzębienia uformowany przez ekwidystantę do obwiedni wewnętrznej. Dokonuje się modyfikacji zarysu polegającej na zastąpieniu łuków ekwidystant rolkami o promieniu równym przesunięciu ekwidystanty $r = g = 15 \text{ mm}$. Kształt zmodyfikowanego uzębienia koła współpracującego przedstawiono na rysunku 6.19c.

Za pomocą wzorów z rozdziału 6.3.3.2 wyznacza się średnicę wierzchołkową d_{a1} i średnicę stóp d_{f1} koła współpracującego po korekcji

$$d_{a1} = 200 \text{ mm}$$

$$d_{f1} = 160 \text{ mm}$$

Kolejnym krokiem jest opracowanie zazębienia epicykloidalnego utworzonego pomiędzy kołem (2) i (3), dla którego przyjmuje się następujące parametry podstawowe:

- liczba zębów $z_3 = 9$, $z_4 = 10$;
- moduł $m = 34 \text{ mm}$;

- współczynnik wysokości zęba $\lambda = 0,588$, którego wartość dobrano ze zbioru wartości dopuszczalnych, podanych na rysunku 6.10a,
- zakłada się bezluzową współpracę kół.

Wartości parametrów zazębienia są tak duże, aby uzyskać duże gabaryty kół, a tym samym dużą objętość międzyzębnych komór wyporowych.

W przyjętym zazębieniu epicykloidalnym zastosowano korekcję P-0 bez zmiany odległości osi O_1O_2 , której istotę opisano w rozdziale 6.3.2.1.

Graniczne przesunięcie zarysu wyznacza się ze wzorów (6.36), (6.31) i podstawiając do nich parametry przyjętego zazębienia epicykloidalnego

$$\eta_{e \min 3} = 8,55^\circ$$

$$R_{e \min 3} = 63,59 \text{ mm}$$

Oznacza to, że wartość granicznego przesunięcia, powyżej którego występuje interferencja zarysu, wynosi $g_{\max} = 63,59 \text{ mm}$. Odpowiednio dla potrzeb rozważanego zazębienia wybrano wartość przesunięcia zarysu $g = 30 \text{ mm}$. Odpowiednio współczynnik korekcji wynosi

$$\nu = \frac{g}{\rho} = 1,765$$

Skorygowany zarys uzębienia zewnętrznego koła (2), występujący w formie ekwidystanty do epicykloidy wyznacza się ze wzorów (6.26). Po podstawieniu do nich przyjętych parametrów uzębienia oraz kąta $\eta = 0$ wyznacza się początkowy punkt zarysu

$$x_{eke} = 130 \text{ mm}$$

$$y_{eke} = 0 \text{ mm}$$

Współrzędne kolejnych punktów zarysu wyznacza się, zmieniając kąt bieżący epicykloidy zasadniczej w zakresie $\eta = 0 - \pi/z_3$. Otrzymuje się w ten sposób fragment zarysu uzębienia począwszy od dna wrębu do wierzchołka zęba, który powtarzając z_3 razy tworzy uzębienie koła. Kształt skorygowanego uzębienia epicykloidalnego zewnętrznego w kole (2) przedstawiono na rysunku 6.13b.

Ze wzorów (6.19) i (6.20) wyznacza się średnicę wierzchołkową d_{a3} i średnicę stóp d_{f4} koła podstawowego po korekcji

$$d_{a3} = 300 \text{ mm}$$

$$d_{f3} = 260 \text{ mm}$$

Po dokonaniu korekcji P-0 koło współpracujące ma zarys uformowany przez ekwidystantę do obwiedni. Przeprowadza się modyfikację tego zarysu, polegającą na za-

stąpieniu łuków ekwidystant łukami okręgów o promieniu $r = g = 30$ mm. Kształt zmodyfikowanego uzębienia koła współpracującego przedstawiono na rysunku 6.13c.

Ze wzorów z rozdziału 6.3.2.1 wyznacza się średnicę wierzchołkową d_{a4} i średnicę stóp d_{f4} koła współpracującego po modyfikacji

$$d_{a4} = 280 \text{ mm}$$

$$d_{f4} = 320 \text{ mm}$$

Zaprojektowane koła (1), (2), (3) zestawiono w zespół, który pokazano na rysunku 10.29a. Zgodnie z założeniami pomiędzy kołem (1) i (2) zastosowano zazębienie hipocykloidalne, pomiędzy zaś kołami (2) i (3) zazębienie epicykloidalne. Aby współpraca kół (1) i (2), tworzących zazębienie hipocykloidalne, mogła odbywać się prawidłowo, to odległość pomiędzy osiami O_1 i O_2 powinna być równa połowie wysokości zęba hipocykloidalnego, czyli

$$O_1O_2 = \frac{h_h}{2} = \lambda_h \frac{m_h}{2} = 10 \text{ mm}$$

Aby jednocześnie współpraca kół (2) i (3), tworzących zazębienie epicykloidalne, mogła przebiegać prawidłowo, odległość pomiędzy osiami O_2 i O_3 powinna być równa połowie wysokości zęba epicykloidalnego, a jednocześnie odległości osi O_1 i O_2 , czyli

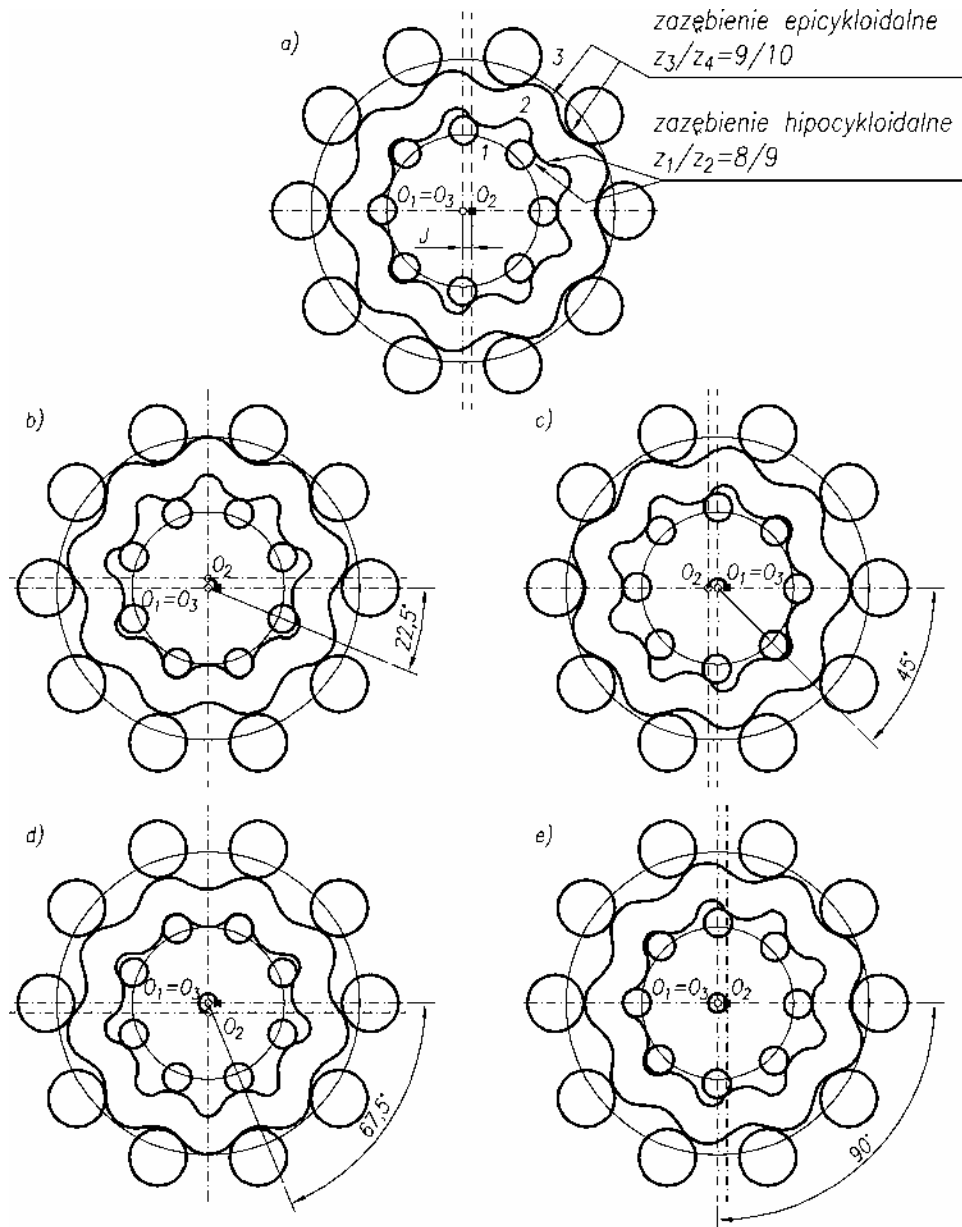
$$O_2O_3 = \frac{h_e}{2} = \lambda_e \frac{m_e}{2} = 10 \text{ mm} = O_1O_2$$

Po spełnieniu tych warunków zęby w obu zazębeniach są w stałym kontakcie ze sobą, tworząc podczas ruchu planetarnego koła (2) zamknięte komory wyporowe. Przebieg ruchu planetarnego przebadano w formie symulacji komputerowej, a charakterystyczne położenia kół przedstawiono na rysunku 10.29 [77].

Na rysunkach widać, że koło (2) napędzane wyobraźnym jarzmem J przetacza się po nieruchomym kole (3), wprowadzając jednocześnie w ruch obrotowy koło (1). Z kolei ruch koła (1) jest przekazywany na wał wyjściowy silnika. Wzór (6.90) o postaci

$$n_1 = -n_J \frac{2}{z_1}$$

podaje związek pomiędzy obrotami n_J wyobraźnego jarzma J a wywoływanymi przez nie obrotami n_1 koła (1) i wału wyjściowego silnika. Zakładając, że jarzmo wykoną 1 obrót ($n_J = 1$), czyli że koło (2) przetoczy się 1 raz wokół koła (1) oraz zakładając, że $z_1 = 8$ oblicza się, że obroty koła (1) wynoszą $n_1 = -1/4$. Oznacza to, że koło (1) i związany z nim wał silnika wykonają 1/4 obrotu i to w kierunku przeciwnym do obrotów jarzma.



Rys. 10.29. Współpraca kół o podwójnym zazębieniu cykloidalnym i ruchomych osiach obrotu O_1 , O_2 i O_3 ; a) – e) kolejne fazy współpracy

W wyniku przeprowadzenia komputerowej symulacji ruchu kół stwierdzono, że oba zazębienia współpracują prawidłowo i ich ruch jest jednostajny. Nie zauważono interferencji zarysów uzębień uformowanych w wyniku korekcji i modyfikacji.

10.7.3. Analiza przemian energii w silniku orbitalnym

Zespół trzech kół cykloidalnych, jak to pokazano na rysunku 10.27, ma być wykorzystywany do zamiany energii hydraulicznej zakumulowanej w czynniku roboczym na energię mechaniczną ruchu obrotowego wału silnika. Chłonność właściwa maszyny q_{or} , której koła pracują w układzie zazębienia podwójnego i planetarnego ruchu kół jest sumą chłonności powstających w układach pojedynczych zazębień, tzn. hipocykloidalnego q_{orh} i epicykloidalnego q_{ore} , czyli

$$q_{or} = q_{orh} + q_{ore}$$

Chłonność powstającą w maszynie w wyniku działania pojedynczego zazębienia opisuje się, jak podano w rozdziale 9.4, wzorem (9.30)

$$q_{or} = q_J n_J$$

gdzie q_{or} – chłonność zapewniana przez działanie pojedynczego zazębienia, niezbędna do uzyskania jednego obrotu wału silnika, czyli $n_1 = 1$, q_J – chłonność zapewniana przez działanie pojedynczego zazębienia w trakcie realizacji jednego obrotu jarzma $n_J = 1$, n_J – liczba obrotów jarzma, niezbędna do uzyskania jednego obrotu wału silnika, czyli $n_1 = 1$.

Liczba obrotów jarzma n_J niezbędna do wywołania jednego obrotu wału silnika jest określona wzorem (6.90) i wynosi $n_1 = -n_J \frac{2}{z_1}$.

Natomiast chłonność q_J powstająca w trakcie jednego obrotu jarzma wynika, jak podaje wzór (9.24), z pomnożenia chłonności q_z pojedynczej międzyzębnej komory wyporowej przez liczbę komór utworzonych w danym zazębieniu, czyli

$$q_J = q_z z$$

Wykorzystując przedstawione zasady przeprowadzono obliczenia chłonności silnika. Chłonność pojedynczej międzyzębnej komory wyporowej w zazębieniu hipocykloidalnym wyznacza się, korzystając z uproszczonej formy wzoru (9.78), w którym pominięto człon z całką eliptyczną. Po podstawieniu do niego wyznaczonych wyżej parametrów uzębienia i zazębienia hipocykloidalnego oraz przyjętej wstępnie szerokości zespołu kół $b = 70$ mm otrzymuje się

$$q_{zh} = 98\,917 \text{ mm}^3 \cong 100 \text{ cm}^3$$

Chłonność międzyzębnej komory wyporowej w zazębieniu epicykloidalnym wyznacza się z uproszczonej formy wzoru (9.68), podstawia się do niego wyznaczone parametry uzębienia i zazębienia epicykloidalnego oraz szerokość kół $b = 70$ mm

$$q_{ze} = 140\,621 \text{ mm}^3 \cong 141 \text{ cm}^3$$

Chłonność q_J , powstającą w trakcie jednego obrotu jarzma w ramach pojedynczych uzębień, wynosi zatem

$$q_{Jh} = q_{zh} z_h = 900 \text{ cm}^3$$

$$q_{Je} = q_{ze} z_e = 1410 \text{ cm}^3$$

Liczba obrotów jarzma niezbędna do uzyskania jednego obrotu wału silnika, wyznaczona ze wzoru $n_1 = -n_J \frac{2}{z_1}$ wynosi

$$n_J = -\frac{n_1 z_1}{2} = -4$$

Chłonność powstająca w ramach poszczególnych zazębnień w trakcie jednego obrotu wału silnika wynosi:

- dla zazębnienia hipocykloidalnego $q_{orh} = q_{Jh} n_J = 3600 \text{ cm}^3$,
- dla zazębnienia epicykloidalnego $q_{ore} = q_{Je} n_J = 5640 \text{ cm}^3$.

Całkowita chłonność silnika z podwójnym zazębieniem cykloidalnym wynosi

$$q_s = q_{or} = q_{orh} + q_{ore} = 9240 \text{ cm}^3$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że silnik zapewni zakładaną chłonność właściwą q . Otwarta pozostaje jednakże sprawa zapewnienia założonego ciśnienia roboczego $p = 6,3 \text{ MPa}$ i osiągnięcia tym samym dla wyznaczonej chłonności właściwej $q = 9240 \text{ cm}^3/\text{obr}$, zakładanej na początku dużej wartości momentu na wale silnika, która wynosiłaby

$$M = \frac{q_s}{2\pi} \Delta p_s \cong 9270 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Sprawa ta zostanie ostatecznie rozstrzygnięta po zbudowaniu modelu silnika i przeprowadzeniu jego badań eksperymentalnych.

10.7.4. Wytwarzanie zespołu kół zębatych

Korzystając z przeprowadzonych analiz i obliczeń opracowano dokumentację konstrukcyjną zespołu kół. Składa się ona z rysunku koła zębatego z uzębieniem zewnętrznym (rys. 10.30, tab. 10.1), rysunku pierścienia zębatego z podwójnym uzębieniem (rys. 10.31, tab. 10.2 i 10.3) oraz rysunku pierścienia zębatego z uzębieniem wewnętrznym (rys. 10.32, tab. 10.4). Tak jak poprzednio, na rysunkach i w tabelach przedstawiono wszystkie ważniejsze informacje konstrukcyjne i technologiczne charakteryzujące te koła.

Zespół kół z podwójnym zazębieniem cykloidalnym wykonano technologią wykrawania elektroerozyjnego. Jest to metoda korzystna, nadaje się bowiem do wyko-

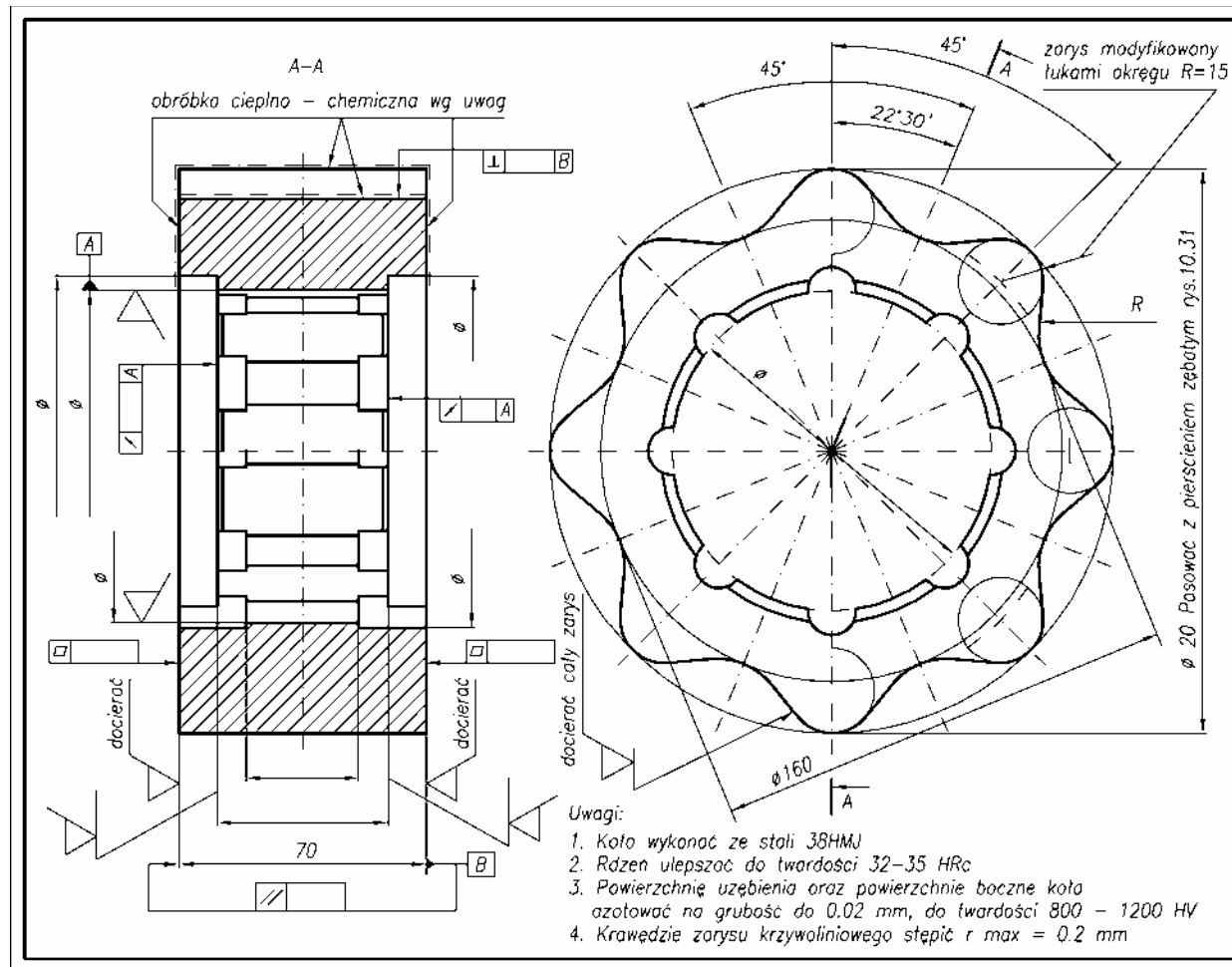
nywania kół ze stali o dużych gabarytach (średnice kół przekraczają 300 mm), średniej dokładności wykonania uzębienia. W tym przypadku jest przewidziana produkcja jednostkowa lub małoseryjna z zachowaniem możliwie najniższych kosztów. Technologię tę opisano w rozdziale 8.2.2, a przykłady kół wytworzonych za pomocą wykrawania elektroerozyjnego pokazano na rysunku 8.32a, b, c, d. Po procesie wykrawania uzębienie poddano azotowaniu w celu utwardzenia warstwy wierzchniej.

Tabela 10.1. Parametry konstrukcyjne koła zębatego cykloidalnego, pokazanego na rysunku 10.30

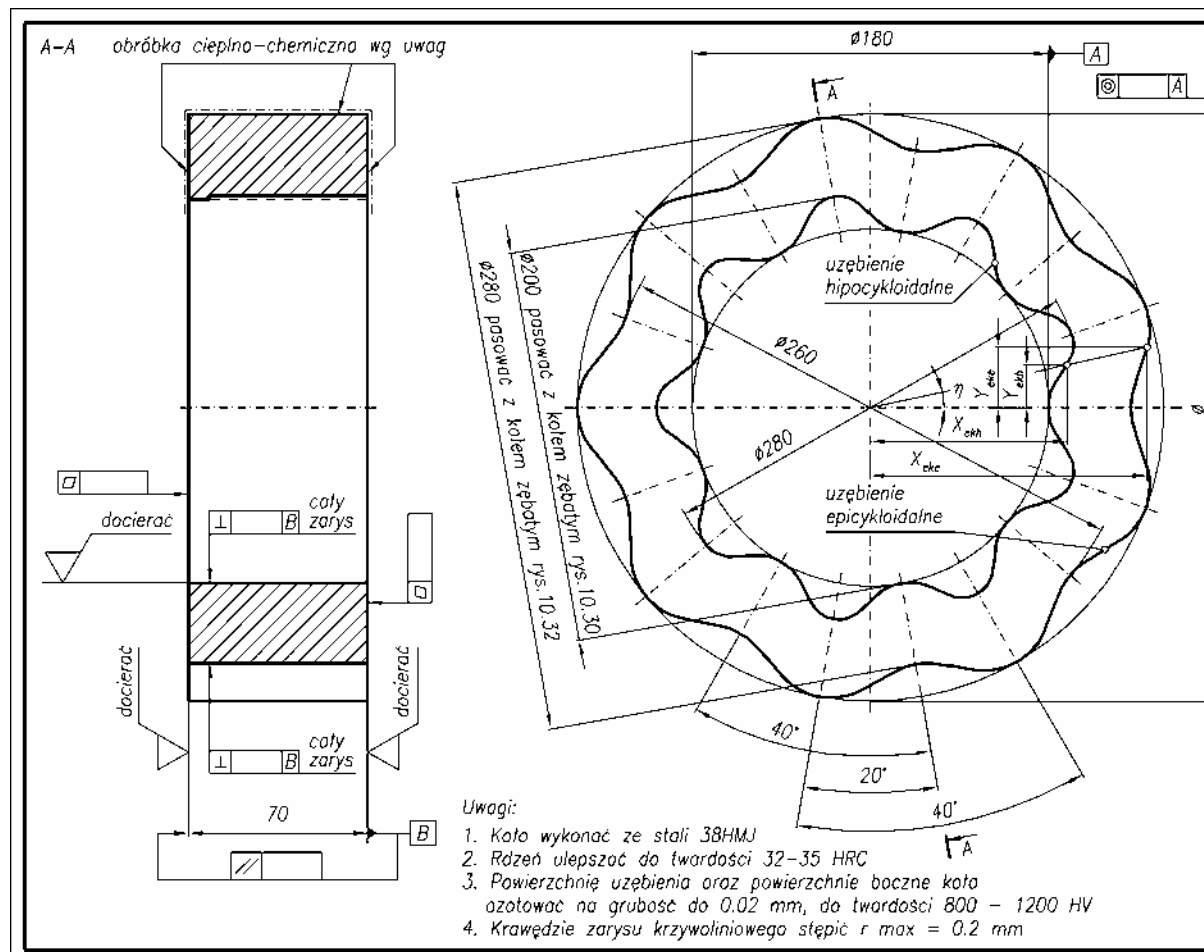
Wielkość	Ozn.	Wartość
Liczba zębów	z_1	8
Moduł	m	21,25
Współczynnik wysokości zęba	λ	0,941
Współczynnik korekcji	ν	1,412
Koło współpracujące		
Nr rysunku		10.31
Liczba zębów	z_2	9
Odległość osi	a_w	10

Tabela 10.2. Parametry konstrukcyjne koła zębatego cykloidalnego, pokazanego na rysunku 10.31

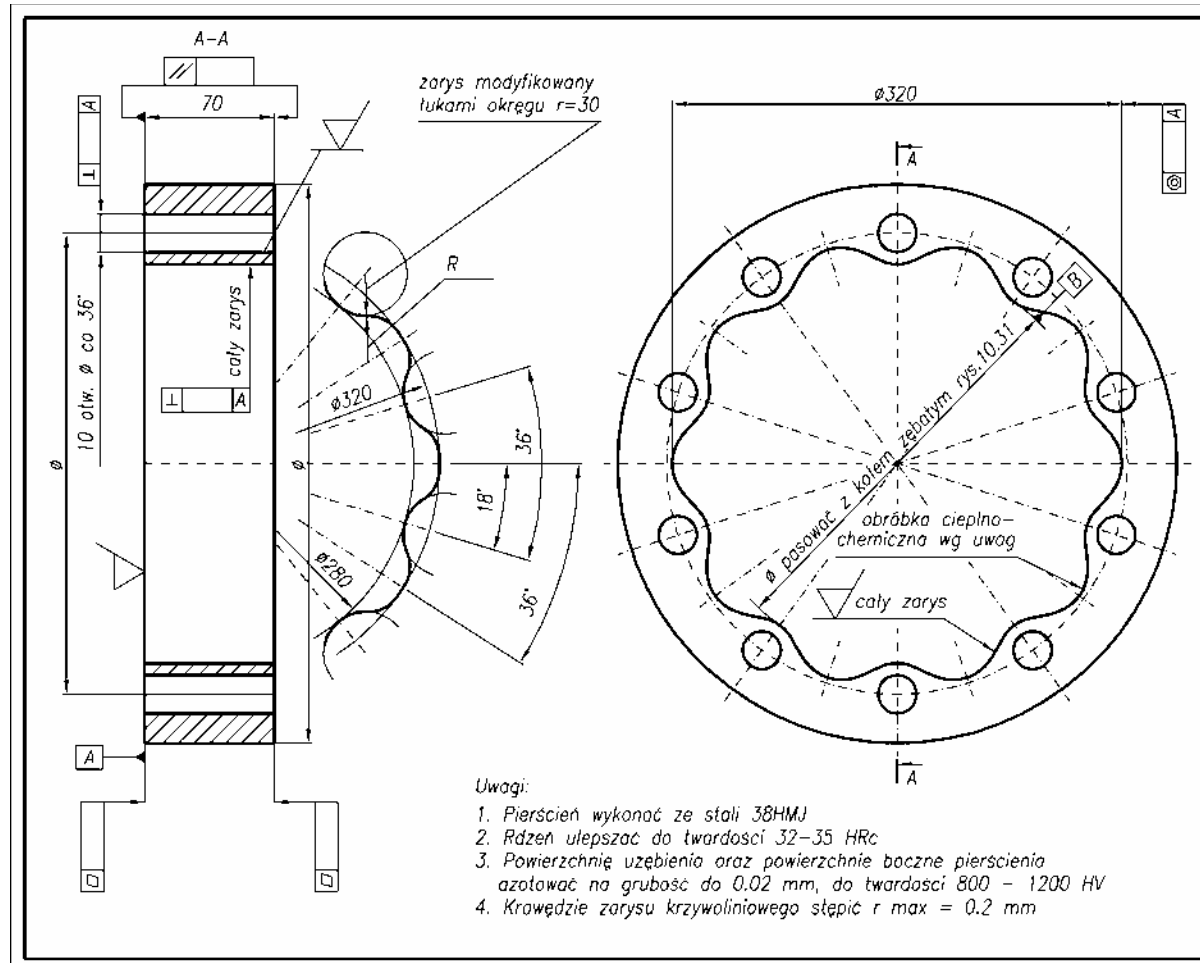
	Wielkość	Ozn.	Wartość
Zazębienie hipocykloidalne	Liczba zębów	z_2	9
	Moduł	m	21,25
	Współczynnik wysokości zęba	λ	0,941
	Współczynnik korekcji	ν	1,412
	Koło współpracujące		
	Nr rysunku		10.30
	Liczba zębów	z_1	8
	Odległość osi	a_{w1-2}	10
Zazębienie hipocykloidalne	Liczba zębów	z_3	9
	Moduł	m	34
	Współczynnik wysokości zęba	λ	0,588
	Współczynnik korekcji	ν	1,765
	Koło współpracujące		
	Nr rysunku		10.32
	Liczba zębów	z_4	10
	Odległość osi	a_{w1-3}	10



Rys. 10.30. Koło zębate cykloidalne o uzębieniu zewnętrznym



Rys. 10.31. Koło zębate z podwójnym uzębieniem cykloidalnym (pierścień zębaty)



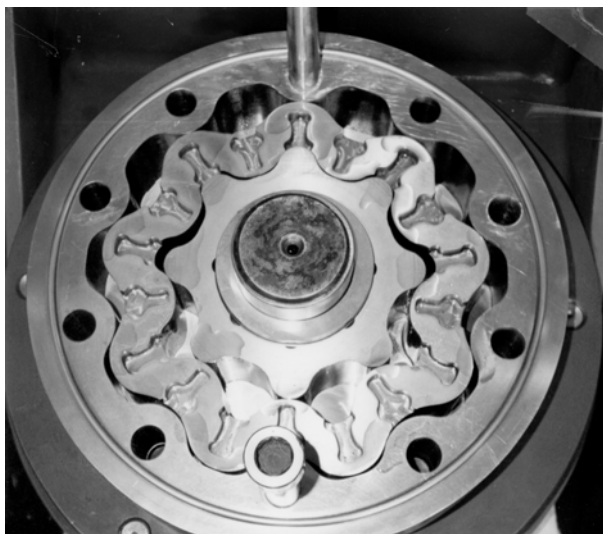
Rys. 10.32. Koło zębate cykloidalne z uzębieniem wewnętrznym

Tabela 10.3. Tabela współrzędnych zarysów uzębień cykloidalnych (patrz rozdz. 10.7.2)

η°	X_{ekh}	Y_{ekh}	X_{eke}	Y_{eke}
1	110	0	130	0
2				

Tabela 10.4. Parametry konstrukcyjne koła zębatego, pokazanego na rysunku 10.32

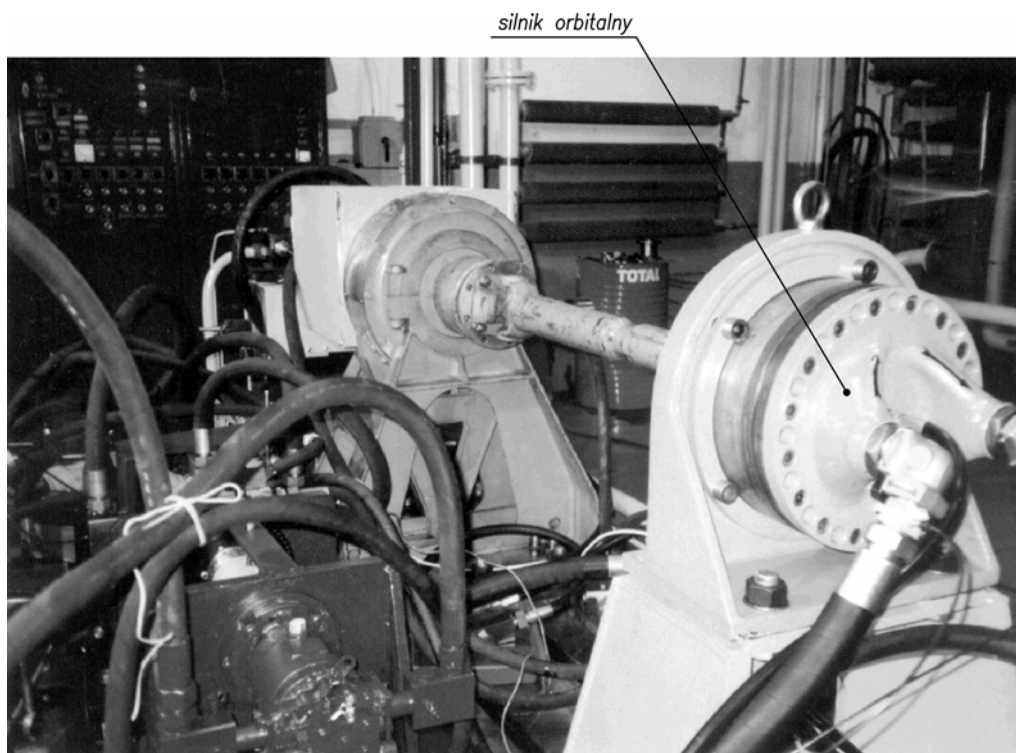
Wielkość	Ozn.	Wartość
Liczba zębów	z_1	10
Moduł	m	34
Współczynnik wysokości zęba	λ	0,588
Współczynnik korekcji	ν	1,765
Koło współpracujące		
Nr rysunku		10.31
Liczba zębów	z_1	9
Odległość osi	a_{w1-2}	10



Rys. 10.33. Widok podwójnego zazębienia cykloidalnego zastosowanego w silniku orbitalnym

Następnie koła zmontowano w zespół, który pokazano na rysunku 10.33. Widać, że zęby kół w obu zazębieniach, tzn. epicykloidalnym i hipocykloidalnym pozostają we wzajemnym kontakcie, a pomiędzy nimi są utworzone międzyzębne komory wyporowe. Dodatkowo na rysunkach widać, że komory międzyzębne utworzone w ra-

mach obu zazębien są połączone specjalnymi kanałami rozdzielczymi, wyfrezowanymi w pierścieniu zębatym. Kanały te zgodnie z rysunkiem 10.28 służą do zasilania i spływu czynnika roboczego z komór.



Rys. 10.34. Widok silnika orbitalnego z podwójnym zazębieniem cykloidalnym podczas badań eksperymentalnych

Następnie zespół kół zamontowano w silniku i poddano badaniom eksperymentalnym. Silnik zamontowany na stanowisku badawczym przedstawiono na rysunku 10.34. Ważniejsze wyniki badań przedstawiono za [79, 80] w tabeli 10.5. W trakcie badań koła cykloidalne spełniały założoną funkcję polegającą na przetwarzaniu energii hydraulicznej zmagazynowanej w czynniku roboczym na energię mechaniczną ruchu obrotowego. Chłonność właściwa uzyskana w trakcie badań była nieznacznie mniejsza od chłonności teoretycznej. Powodem jest rozbieżność pomiędzy założonymi wymiarami teoretycznymi a otrzymanymi wymiarami rzeczywistymi oraz niepełne napełnianie międzyzębnych komór wyporowych silnika, wynikające z zastosowania specyficznego i nie do końca zoptymalizowanego układu rozrządu w silniku. Silnik ma korzystny stosunek masy i gabarytów do chłonności właściwej q_s . Osiągnięte ciśnienie robocze $p = 5,9$ MPa było również bardzo zbliżone do założonego ciśnie-

nia $p = 6,3$ MPa. Nie udało się uzyskać w badanym modelu wyższego ciśnienia głównie ze względu na zbyt duże luzy międzyzębne oraz niedokładności wykonania rozrządu. Moment na wale silnika można uznać za zadowalający. Wydaje się, że przy zwiększeniu dokładności wykonania silnik może osiągnąć wyższe ciśnienie robocze. Uzyskano stabilną prędkość obrotową wału silnika w zakresie $n = 1-40$ obr/min. Wydaje się, że po optymalizacji rozwiązania konstrukcyjnego oraz skorygowaniu technologii i sposobu montażu można znacznie podwyższyć parametry techniczne silników orbitalnych z podwójnym zazębieniem cykloidalnym i mogą one być bardzo przydatne w budowie maszyn górniczych, budowlanych, dźwigowych i okrętowych.

Tabela 10.5. Ważniejsze wyniki badań eksperymentalnych silnika orbitalnego z podwójnym zazębieniem cykloidalnym

Lp.	Rodzaj parametru	Symbol parametru	Parametr	
			założony lub obliczony	otrzymany eksperymentalnie
1	Chłonność właściwa	q_s	9240 cm ³ /obr	9000 cm ³ /obr
2	Ciśnienie robocze (różnica ciśnień na wejściu i wyjściu silnika hydraulicznego $\Delta p_s = p_{we} - p_{wy}$)	Δp_s	6,3 MPa	5,9 MPa
3	Moment na wale silnika	M_s	9270 N·m	6624 N·m
4	Zakres prędkości obrotowej pracy silnika	$n_{\min} - n_{\max}$	1-40 obr/min	1-40 obr/min
5	Zakres lepkości cieczy roboczej	$\nu_{\min} - \nu_{\max}$	30-100 cSt	30-100 cSt

11. Podsumowanie

Jak podano w rozdziale 1.2, celem tej monografii było dokonanie syntezy wiedzy z zakresu konstrukcji, technologii oraz hydrauliki służącej do projektowania kół zębatych maszyn hydraulicznych. W jej ramach sformułowano następujące zadania szczegółowe:

- opracowanie ogólnych zasad projektowania kół zębatych maszyn hydraulicznych,
- opracowanie podstaw geometrii i kinematyki kół zębatych,
- wyznaczenie sił międzyzębnych w zespołach kół,
- opracowanie podstaw technologii kół zębatych,
- opisanie procesów przetwarzania energii w maszynach hydraulicznych z wykorzystaniem kół zębatych,
- zweryfikowanie przedstawionej wiedzy przez zaprojektowanie, wykonanie i przebadanie wybranych zespołów kół maszyn hydraulicznych.

W wyniku realizacji poszczególnych zadań uzyskano oryginalne wyniki.

Opracowano ogólną metodę projektowania zespołu kół zębatych maszyn hydraulicznych, polegającą na kształtowaniu kolejno: zarysu uzębienia, postaci zęba i koła zębatego oraz ostatecznie zespołu kół. Ustalono, że podstawową grupą zarysów stosowanych w budowie maszyn hydraulicznych są zarysy cykloidalne, wśród których znajduje się również zarys ewolwentowy jako zarys specjalny. Zdefiniowano trzy podstawowe typy kół zębatych cykloidalnych, tzn. koła 1., 2. i 3. rodzaju, a na tym tle określono koła ewolwentowe. Przyjęto jednolity uniwersalny układ parametrów służący do opisu geometrii i kinematyki kół cykloidalnych i ewolwentowych, składający się z:

- liczby zębów z ,
- modułu m ,
- kąta zarysu α_0 ,
- współczynnika wysokości zęba y lub λ ,
- współczynnika przesunięcia zarysu x lub ν ,
- szerokości zęba b .

Wykorzystując ten układ parametrów, opisano geometrię i kinematykę kół cykloidalnych 1., 2. i 3. rodzaju oraz kół ewolwentowych. Szczególną uwagę poświęcono kołom cykloidalnym 3. rodzaju o zazębieniu wewnętrznym, zwanych popularnie kołami gerotorowymi. Zespoły kół tego typu mają bowiem bardzo duże znaczenie techniczne, gdyż są stosowane w różnego rodzaju maszynach hydraulicznych, wykorzystywanych w praktyce. Jednocześnie są one objęte tajemnicą przemysłową przez producentów i wiedza na ich temat nie jest dostępna w literaturze. W związku z tym

opracowano podstawy kształtowania uzębień kół i zespołów kół 3. rodzaju, ich korekcję i modyfikację oraz zasady współpracy kół przy osiach stałych i ruchomych.

W dalszej kolejności opracowano zasady wyznaczania sił w zazębieniach cykloidalnych 1., 2. i 3. rodzaju. Również i w tym przypadku najczęściej uwagi poświęcono zazębieniom 3. rodzaju, które nie były gruntownie rozpatrywane w literaturze naukowo-technicznej. Wyniki analiz teoretycznych zostały w tym przypadku potwierdzone rezultatami badań eksperymentalnych, dokonanych metodą elastooptyczną.

Dokonano przeglądu technologii kół zębatych ewolwentowych oraz kół cykloidalnych 1., 2. i 3. rodzaju. Technologię kół ewolwentowych, jako powszechnie znaną, skomentowano jedynie zwracając uwagę na te metody, które są stosowane w przemyśle maszyn hydraulicznych. Szczegółowo natomiast opisano technologię kół cykloidalnych, która ma charakter oryginalny. Opisano procesy technologiczne, stosowane maszyny oraz podano zasady projektowania narzędzi. Zaprezentowano przykłady wykonania kół cykloidalnych z wykorzystaniem zaproponowanych technologii.

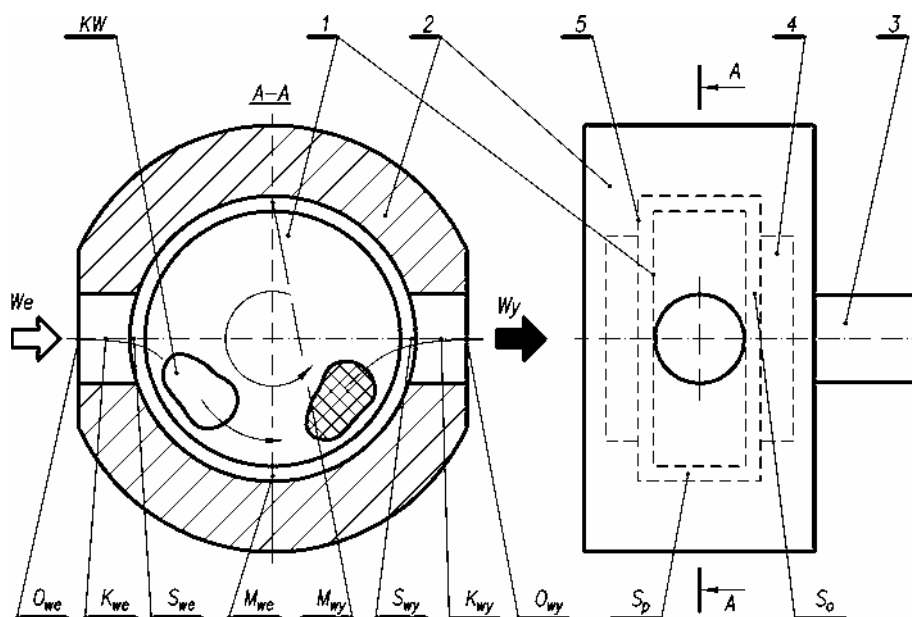
Zespoły kół zębatych stanowią „serce” maszyny hydraulicznej, a ich zadaniem jest przekształcanie energii mechanicznej na hydrauliczną lub odwrotnie. Wychodząc zatem z zasady równoważności energii mechanicznej i hydraulicznej i wprowadzając do równania ogólnego cechy geometryczne oraz kinematyczne poszczególnych typów kół, tzn. ewolwentowych, cykloidalnych 1., 2. i 3. rodzaju, uzyskano wzory na podstawowe wielkości hydrauliczne maszyn z tymi kołami zębatymi. Wielkościami hydraulicznymi były wydajność (chłonność) i nierównomierność wydajności (chłonności). Bardzo ważne jest, że wielkości te uzależniono od tego samego układu parametrów, którym opisano geometrię i kinematykę kół ($z, m, \alpha_0, y, \lambda, x, v, b$). Otrzymane wzory umożliwiają w tej sytuacji ustalenie wpływu parametrów geometrycznych i kinematycznych na wielkości hydrauliczne. W rezultacie można dokonywać porównania maszyn hydraulicznych z różnymi typami kół.

Przedstawioną wiedzę z zakresu konstrukcji, technologii oraz hydrauliki zastosowano w procesie projektowania i wytwarzania różnych typów kół maszyn hydraulicznych zębatych. Wiedza ta okazała się przydatna. Wszystkie ważniejsze równania i wzory teoretyczne, opracowane metody wytwarzania zostały zweryfikowane w praktyce konstrukcyjnej i technologicznej. W rezultacie uzyskano kilka rozwiązań konstrukcyjnych zespołów kół zębatych zastosowanych w praktyce technicznej. Były to zespoły kół:

- ewolwentowych do typoszeregu pomp zębatych,
- ewolwentowych do wielofunkcyjnych maszyn hydraulicznych,
- cykloidalnych do typoszeregu pomp gerotorowych,
- cykloidalnych do bloków sterujących,
- cykloidalnych do silników orbitalnych,
- cykloidalnych z podwójnym zazębieniem do silników orbitalnych.

Postawiony w rozdziale 1.2 cel ogólny oraz wynikające z niego zadania szczegółowe zostały zrealizowane. Przedstawiono syntetyczne ujęcie wiedzy z zakresu konstrukcji i technologii kół zębatach maszyn hydraulicznych. Wiedza ta ma charakter oryginalny i stanowi nowość w dyscyplinie budowy i eksploatacji maszyn. Potwierdzeniem jest opublikowanie jej w czasopismach naukowych i naukowo-technicznych [56, 57, 58, 60, 66, 71, 90, 91]. Rozwiązanie techniczne uzyskane w wyniku wykorzystania przedstawionej wiedzy są oryginalne, a niektóre z nich mają charakter wynalazku, co potwierdzają patenty [92, 93]. Część rozwiązań technicznych została wprowadzona do produkcji wielkoseryjnej, jak np. koła cykloidalne bloków sterujących, produkowane początkowo w Zakładach Pilmet, obecnie Sauer-Danfoss we Wrocławiu. Część zaś wykorzystano w formie prototypów i oczekują one na wdrożenie przemysłowe. Rezultaty te świadczą o przydatności monografii w praktyce przemysłowej.

Zakończenie tej pracy odsłania pole do prowadzenia pracy nowej. Skoro bowiem ustalono, jak projektować koła zębatach maszyn hydraulicznych, to należy pójść dalej i zaprojektować otoczenie, w którym koła te pracują. Dotyczy to głównie kształtowania kanałów i szczelin wewnętrznych w maszynie, które umożliwiają przepływ czynnika roboczego przez jej wnętrze. W związku z tym, na rysunku 11.1 przedstawiono



Rys. 11.1. Schemat ogólny hydraulicznej maszyny zębatach: 1 – zespół kół zębatach, 2 – korpus, 3 – wał, 4 – łożysko, 5 – elementy ograniczające komory wyporowe, KW – komora wyporowa, O_{we} , k_{we} , S_{we} – otwór, kanał, strefa wejściowa, M_{we} , M_{wy} – mostek wejściowy i wyjściowy, O_{wy} , k_{wy} , S_{wy} – otwór, kanał, strefa wyjściowa, S_p , S_o – szczelina promieniowa i osiowa

ponownie schemat ogólny maszyny hydraulicznej zębatej, który został rozbudowany w stosunku do schematu pierwotnego (rys. 1.21). Na rysunku 11.1 zaznaczono symbolicznie wspomniany układ kanałów i szczelin wewnętrznych znajdujący się w maszynie. Począwszy od wejścia do maszyny są to:

- otwór, kanał, strefa wejściowa (O_{we}, k_{we}, S_{we}),
- mostki rozdzielające wejściowe i wyjściowe (M_{we}, M_{wy}),
- otwór, kanał, strefa wyjściowa (O_{wy}, k_{wy}, S_{wy}),
- szczelina osiowa i promieniowa (S_o, S_p).

Na rysunku widać, że droga czynnika przez wnętrze maszyny jest skomplikowana, a proces przepływu jest złożony. Opisanie tego procesu, a następnie opracowanie podstaw projektowania kanałów i szczelin wewnętrznych w maszynie jest poważnym zagadnieniem naukowym i technicznym z dziedziny budowy maszyn, które planuje się podjąć w najbliższym czasie.

Literatura

- [1] Abel F., *Johannes Kepler and his importance to modern science*. Inter Nationes Bonn – Bad Godesberg, 1971.
- [2] Beck Th., *Jean Leurechon (1591 bis 1670)*. Z.d. VDI, Bd. 45 (1901), 1498.
- [3] Feldhaus F. M., *Die Technik der Vorzeit, der geschichtlichen Zeit und der Naturvölker*. Verlag von W. Engelmann, Leipzig und Berlin, 1914.
- [4] Leupold J., *Teatrum machinarum hydraulicarum*. Leipzig, 1724.
- [5] *Dinglers polytechnisches Journal*. Wyd. Gottfried Dingler, Stuttgart, Bd. 1–346, Jg. 1820–1931.
- [6] Berg H., *Die Kolbenpumpen, einschliesslich der Flügel- und Rotationspumpen*. J. Springer, Berlin, 1921.
- [7] Zeitschrift des Vereins Deutsches Ingenieure. Bd. 15–84, Jg. 1871–1940.
- [8] Amann R., *Zahnradpumpen mit Evolventen Verzahnung*. Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München, Heft 1, Verlag Oldenburg München, 1926.
- [9] Wiczorek K., *PZ4 – pompy zębate czwartej generacji*. Hydraulika i Pneumatyka nr 1, 2001.
- [10] Sieniawski B., Janowski M., *Silniki obiegowo-krzywkowe wysokomomentowe wolnoobrotowe SOK*. „Postęp techniczny w krajowych konstrukcjach napędów hydraulicznych”, Konferencja Naukowo-Techniczna SIMP, Wrocław, 1980.
- [11] Pippenger J.J., Dong J.X., *History of gerotor hydraulics*. SAE Off-Highway Engineering, June 2004.
- [12] Ohrberg C. V., *Comparaisons entre le moteur gerotor et le moteur orbit*. EFL HPA 7/1969.
- [13] Schöllner K., *Die Ring-Rotor-Pumpe ein geräuscharmer Hydrogenerator*. Ölhydraulik und Pneumatik, 5/1974.
- [14] Wüsthof P., Schneider J., *Grundlagen der Planetmotoren – Vorstellung eines neuen Planetmotors*. Ölhydraulik und Pneumatik, 2/1981.
- [15] Birjukow B. N., *Rotarno-poršnievyje gidravličeskie mašiny*. Mašinostrojenie, 1972.
- [16] Eisenmann S. A., *Neue Trochoideninnenzahnradpumpe mit geringer Pulsation und extrem ruhigem Lauf*. Ölhydraulik und Pneumatik, 4/1973.
- [17] Bronsztejn J. N., Siemiendiajew K. A., *Matematyka, poradnik encyklopedyczny*. PWN, Warszawa, 1970.
- [18] Lehmann M., *Sonderformen der Zykloidenverzahnung*. Konstruktion, 11/1979.
- [19] Litvin F. L., *Teorija zubčatych zaceplenij*. Moskva, Nauka, 1968.
- [20] Pham Duc Nhuan, *O doborze parametrów konstrukcyjnych i modelowaniu pewnych maszyn hydraulicznych o ząbieniach cykloidalnym*. Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1978.
- [21] Lobastov V. K., *K teorii vnecentroidnogo epicikloidalnogo zaceplenija planetarnych mehanizmov*. Teoria mehanizmov i Mašin, Izdatelstvo pri Charkovskom Gosudarstvennom Universitete, 25/1978.
- [22] Colbourne I. R., *The geometry of Trochoid Envelopes and Their Application in Rotary Pumps*. Mechanism and Machine Theory, Vol. 9, 1974.
- [23] Müller L., *Przekładnie zębate*. Warszawa, WNT, 1979.
- [24] Ochęduszek K., *Kola zębate*. Warszawa, WNT, 1969.
- [25] Dziama A., Michniewicz M., Niedźwiedzki A., *Przekładnie zębate*. PWN, 1989.
- [26] Lasocki L., Dudek A., *Silnie redukujące przekładnie mechaniczne*. Przegląd Mechaniczny, 6/1989.
- [27] Šannikom V., *Planetarnye reduktory s vnecentroidnym cevočnym zacepleniem*. Mašgiz, 1948.

- [28] Judin F. M., *Pompy zębate*. Warszawa, PWT, 1958.
- [29] Miller S., *Teoria mechanizmów i maszyn. Analiza układów mechanicznych*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, 1996.
- [30] Müller L., *Przekładnie obiegowe*. PWN, 1983.
- [31] Wilk A., Folega P., *Dobór cech konstrukcyjnych tulei podatnej przekładni falowej z wykorzystaniem MES*. Przegląd Mechaniczny, 10/2002.
- [32] Rejman E., *Geometria reduktora trochoidalnego*. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, 119/1993.
- [33] Kujawski M., *Mechanizmy obiegowe z nieokrągłymi kołami zębatymi*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 1992.
- [34] Drogosz P., *Graficzne modelowanie geometrii i animacja pracy obiegowego silnika hydraulicznego*. Napędy i Sterowania Hydrauliczne 2002, Konferencja Naukowo-Techniczna SIMP, Wrocław, 2002.
- [35] Miller S., Gronowicz A., *Mechanizmy*. Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1997.
- [36] Choroszy B., *Technologia maszyn*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2000.
- [37] Kunstetter S., *Narzędzia skrawające do metali*. Warszawa, WNT, 1973.
- [38] Gamez-Montero J., Codina E., *Contact Stress In a Gerotor Pump*. 2003 ASME International Mechanical Engineering Congress and R&D EXPO, Washington, 2003.
- [39] Manco S., Nervegna N., Rundo M., *Miniature gerotor pump prototype for automotive applications*. 3rd International Fluid Power Conference (3rd IFK), Aachen, 2002.
- [40] Stryczek S., *Napęd hydrostatyczny t. 1 i 2*. Warszawa, WNT, 2005.
- [41] Gradsztejn L. S., Ryżyk I. M., *Tablice calek, sum, szeregów i iloczynów*. Warszawa, PWN, 1964.
- [42] Antoniewicz J., *Tablice funkcji dla inżynierów*. Warszawa, PWN, 1969.
- [43] Stryczek J., *Pompy zębate o ząbieniu ewolwentowym*. Przegląd Mechaniczny, 7/1978.
- [44] Kollek W., Stryczek J., *Optimierung der Parameter von Zahnradpumpen mit Evolventen-Aussenverzahnung*. Ölhydraulik und Pneumatik, 4/1978.
- [45] Stryczek J., *Ząbienia hipocykloidalne*. Przegląd Mechaniczny, 19/1982.
- [46] Stryczek J., *Pompy zębate o ząbieniach hipocykloidalnych*. Przegląd Mechaniczny, 4/1983.
- [47] Stryczek J., *Die Zahnradpumpen mit hypocykloidalen Verzahnungen*. 5. Fachtagung Hydraulik und Pneumatik, Dresden, 1983.
- [48] Stryczek J., *Pompy i silniki zębate. Przegląd i systematyka konstrukcji*. Część 1 – Sterowanie i Napęd Hydrauliczny 4/1985, Część 2 – Sterowanie i Napęd Hydrauliczny 5-6/1985.
- [49] Stryczek J., *Ząbienia cykloidalne silników hydraulicznych Orbit*. Przegląd Mechaniczny 5/1985.
- [50] Stryczek J., *Konstrukcja i wykonanie kół zębatych o zarysie cykloidalnym*. Mechanik 10-11/1986.
- [51] Stryczek J., *Geometria uzębień cykloidalnych pomp i silników zębatych*. Sterowanie i Napęd Hydrauliczny 1/1988.
- [52] Stryczek J., *Projektowanie ząbieni cykloidalnych*. Sterowanie i Napęd Hydrauliczny 2/1988.
- [53] Stryczek J., *Wymiarowanie cykloidalnych kół zębatych*. Sterowanie i Napęd Hydrauliczny 3/1988.
- [54] Stryczek J., *Frez ślimakowy do obróbki kół zębatych epicykloidalnych*. Narzędzia Polskie 1/1989.
- [55] Stryczek J., *Przeciagacze do obróbki epicykloidalnych uzębieni wewnętrznych*. Narzędzie Polskie 1/1989.
- [56] Stryczek J., *Cycloidal Gears in Design of Gear Pumps and Motors*. Archiwum Budowy Maszyn 1-2/1990.
- [57] Stryczek J., *Principles of the Design of Cycloidal Gears in Hydraulic Machinery*. Archiwum Budowy Maszyn 3/1990.
- [58] Stryczek J., *Projektieren der Zykloidenverzahnungen hydraulischer Verdrängermaschinen*. Mechanism and Machine Theory Journal 6/1990.

- [59] Stryczek J., *Wydajność i pulsacja wydajności pomp o ząbieniach cykloidalnych*. Przegląd Mechaniczny 10/1991.
- [60] Stryczek J., *Principles of Design of Cycloidal Gears in Hydraulic Machinery*. Prace Naukowe Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn 4/1991.
- [61] Stryczek J., *Charakterystyczne parametry hydraulicznych maszyn wyporowych z ząbieniami cykloidalnymi*. Sterowanie i Napęd Hydrauliczny 1/1991.
- [62] Stryczek J., *Ząbienia cykloidalne w budowie pomp i silników zębatych*. Monografia. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1991.
- [63] Lempart A., Stryczek J., *Technologia kół zębatych cykloidalnych stosowanych w maszynach hydraulicznych*. Mechanik 7/1992.
- [64] Stryczek J., *Wpływ czynników konstrukcyjnych i eksploatacyjnych na charakterystyki pomp gerotorowych*. „Napędy i Sterowania Hydrauliczne 93”, Konferencja Naukowo–Techniczna SIMP, Wrocław, 1992.
- [65] Stryczek J., *Podstawowe problemy projektowania pomp gerotorowych*. Sterowanie i Napęd Hydrauliczny 2/1993.
- [66] Stryczek J., *Charakteristische Parameter hydraulischer Verdrängermaschinen mit Zykloidenverzahnung*. Mechanism and Machine Theory Journal 1/1993.
- [67] Stryczek J., *Projektierungsgrundlagen von hydraulischer Verdrängermaschinen mit Zykloidenverzahnungen*. Maschinenmarkt 49/1993.
- [68] Stryczek J., *Zahn um Zahn. Hydraulische Verdrängermaschinen mit Zykloidenverzahnung setzen sich durch*. Maschinenmarkt 21/1994.
- [69] Stryczek J., Stryczek S., *Pompy zębate – zarys historii*. Część 1 – Sterowanie i Napęd Hydrauliczny 2/1994, Część 2 – Sterowanie i Napęd Hydrauliczny 3/1994.
- [70] Stryczek J., *Die Zykloidenverzahnungen von hydraulischen Maschinen. Projektierungsgrundlagen und Fertigungsmethoden*. Konferencja „International Congress – Gear Transmission 95”, Sofia, 1995.
- [71] Stryczek J., *Hydraulic Machines with Cycloidal Gearing*. Archiwum Budowy Maszyn, 1/1996.
- [72] Stryczek J., *Technologie wykonania kół zębatych cykloidalnych*. Międzynarodowa Konferencja nt.: „Kola zębate 96. Wytwarzanie, pomiary, eksploatacja.”, Poznań, 1996.
- [73] Stryczek J., *Stand und Entwicklungstendenzen von hydraulischen Gerotor- und Orbitmaschinen*. Drugie Polsko-Niemieckie Seminarium „Innowacje i postęp w hydraulice i pneumatyce”, Warszawa, 1997.
- [74] Bednarczyk S., Stryczek J., *Teoretyczno-doświadczalne badania przepływów przez kanały wewnętrzne w pompie gerotorowej*. III Konferencja naukowa: „Metody doświadczalne w budowie i eksploatacji maszyn”, Wrocław–Szklarska Poręba, 1997.
- [75] Stryczek J., *The Development of Hydraulic Pumps and Motors – Gerotor and Orbital Units*. International Scientific Forum on Developments in Fluid Power Control of Machinery and Manipulators, Cracow, 1998.
- [76] Jankowski L., Stryczek J., *Siły międzyzębne w ząbieniu cykloidalnym*. Przegląd Mechaniczny 8/1998.
- [77] Miszczak K., Stryczek J., *Hydrauliczny silnik orbitalny z podwójnym ząbieniem cykloidalnym – koncepcja, podstawy projektowania*. Seminarium „Przekładnie specjalne – modelowanie, rozwój konstrukcji i perspektywy zastosowań”, Warszawa, 1998.
- [78] Stryczek J., *Stan obecny i tendencje rozwojowe w budowie hydraulicznych maszyn gerotorowych i orbitalnych*. Przegląd Mechaniczny 3/1998.
- [79] Balawender A., Stryczek J., *Der Langsamlaufende Motor mit Doppelter Zykloidenverzahnung. Projektierungsgrundlagen, Fertigung, Untersuchungen*. Trzecie Polsko-Niemieckie Seminarium „Innowacje i postęp w hydraulice i pneumatyce”, Warszawa – Zakopane, 1999.

- [80] Balawender A., Stryczek J., *Wolnoobrotowy silnik orbitalny z podwójnym zazębieniem cykloidalnym*. „Napędy i Sterowania Hydrauliczne 1999” Konferencja Naukowo–Techniczna, Wrocław–Polanica Zdrój, 1999.
- [81] Stryczek J., *Znaczenie konstrukcji gerotorowych i orbitalnych dla rozwoju hydraulicznych maszyn wyporowych*. *Hydraulika i Pneumatyka* 1/2000.
- [82] Bednarczyk S., Stryczek J., *Gerotor Pump with Hydraulic Compensation of Axial Clearance*. 1st FPNI – PhD Symposium, Hamburg, 2000.
- [83] Bednarczyk S., Stryczek J., *Rozwój pomp gerotorowych*. *Hydraulika i Pneumatyka* 3/2001.
- [84] Banaś M., Stryczek J., *Eine neue hydrostatische Anlaufkupplung. Bauweise und Simulation des Anlaufes*. Czwarte Polsko-Niemieckie Seminarium „Innowacje i postęp w hydraulice i pneumatyce”, Warszawa-Sopot, 2001.
- [85] Antoniak P., Stryczek J., *Kształtowanie kanałów rozdzielacza tarczowego w pompie gerotorowej na podstawie analizy zmian objętości jej komór roboczych*. Konferencja „Napędy i Sterowania Hydrauliczne 2002”, Wrocław, 2002.
- [86] Banaś M., Stryczek J., *Theoretical and experimental studies of a new hydrostatic coupling*. 2nd FPNI – PhD Symposium, Modena, 2002.
- [87] Bednarczyk S., Stryczek J., *Axial Clearance Compensation in Gear Displacement Machines*. 3rd FPNI – PhD Symposium, Barcelona, 2004.
- [88] Grreczanik T., Stryczek J., *Proces projektowania kół zębatach maszyn hydraulicznych*. *Hydraulika i Pneumatyka* 5/2004.
- [89] Stryczek J., *Nowyje typy zubčatych gidromašin*. *Promisova Gidravlika i Pniewmatika*, 1/2004.
- [90] Stryczek J., *Gerotor und Orbitmaschinen. Projektierungsgrundlagen*. *Ölhydraulik und Pneumatik*, 10/2003.
- [91] Stryczek J., *Gerotor und Orbitmaschinen. Konstruktionen für neue technische Anwendungen*. *Ölhydraulik und Pneumatik*, 6/2005.
- [92] Stryczek J., *Zespół gerotorowy do maszyn hydraulicznych*. Urząd Patentowy Rzeczypospolitej Polskiej, Patent PL 167103B1 z dnia 22.09.1995.
- [93] Bednarczyk S., Pietrus H., Stryczek J., *Pompa gerotorowa i sposób kompensacji luzów w pompie gerotorowej*. Urząd Patentowy Rzeczypospolitej Polskiej, Patent PL 186682B1 z dnia 27.02.2004.
- [94] Bald Cz., *Hydrauliczna maszyna robocza z obrotowym tłokiem i obrotowym cylindrem*. Urząd Patentowy Rzeczypospolitej Polskiej, Wzór użytkowy 54006.
- [95] Bania S., Banaś F., Stróżniak K., *Sprzęgło hydrostatyczne*. Urząd Patentowy Rzeczypospolitej Polskiej, Patent 170813 na rzecz Fabryki Kotłów „RAFAKO” S.A., Warszawa, 1997.
- [96] Bald Cz., *Hydrauliczna maszyna robocza z obrotowym tłokiem*. Urząd Patentowy Rzeczypospolitej Polskiej, Patent PL 168490, Warszawa, 1996.

Spis treści

Spis oznaczeń	3
Przedmowa	7
1. Hydrauliczne maszyny zębate	9
1.1. Przegląd rozwiązań konstrukcyjnych	9
1.2. Znaczenie kół zębatych w budowie maszyn hydraulicznych. Cel pracy.	28
2. Ogólne zasady projektowania kół zębatych	32
2.1. Krzywe cykloidalne	32
2.2. Zasady projektowania kół zębatych	38
3. Zęby, koła, zespoły kół ewolwentowych	43
3.1. Ząb i koło o uzębieniu zewnętrznym	43
3.1.1. Geometria, parametry charakterystyczne	43
3.1.2. Graniczna liczba zębów	46
3.1.3. Korekcja uzębienia	48
3.1.4. Grubość zęba	52
3.2. Ząb i koło o uzębieniu wewnętrznym	54
3.2.1. Geometria, parametry charakterystyczne	54
3.2.2. Graniczna liczba zębów	55
3.2.3. Korekcja uzębienia	56
3.3. Zespół kół ewolwentowych o zazębieniu zewnętrznym	58
3.3.1. Geometria zespołu kół, zasady współpracy, liczba przyporu	58
3.3.2. Korekcja zazębienia zewnętrznego	61
3.3.3. Korekcja zazębienia wg metody Judina	65
3.3.4. Wpływ parametrów zazębienia na liczbę przyporu	68
3.4. Zespół kół ewolwentowych o zazębieniu wewnętrznym	70
3.4.1. Geometria zespołu kół, zasady współpracy, liczba przyporu	70
3.4.2. Graniczna liczba zębów w kole o uzębieniu zewnętrznym ze względu na współpracę z kołem o uzębieniu wewnętrznym	72
3.4.3. Korekcja zazębienia wewnętrznego	74
3.4.4. Wpływ parametrów zazębienia na liczbę przyporu	75
3.4.5. Interferencja zębów	76
3.5. Zespoły wielokołowe o zazębieniu ewolwentowym	80
4. Zęby, koła i zespoły kół cykloidalnych 1. rodzaju	82
4.1. Ząb i koło o uzębieniu zewnętrznym	82
4.2. Ząb i koło o uzębieniu wewnętrznym	83
4.3. Zespół kół o zazębieniu zewnętrznym	84
4.4. Zespół kół o zazębieniu wewnętrznym	86
5. Zęby, koła i zespoły kół cykloidalnych 2. rodzaju	89
5.1. Ząb i koło o uzębieniu zewnętrznym	89
5.2. Ząb i koło o uzębieniu wewnętrznym	90
5.3. Zespół kół o zazębieniu zewnętrznym	92

5.4. Zespół kół o zazębieniu wewnętrznym	93
6. Zęby, koła i zespoły kół cykloidalnych 3. rodzaju	96
6.1. Ząb i koło o uzębieniu zewnętrznym	96
6.1.1. Geometria i parametry charakterystyczne	96
6.1.2. Analiza kształtu i wymiarów uzębienia	99
6.1.3. Korekcja uzębienia	104
6.1.4. Analiza kształtu i wymiarów uzębienia po korekcji	106
6.2. Ząb i koło o uzębieniu wewnętrznym	116
6.3. Zespoły kół o zazębieniu wewnętrznym	118
6.3.1. Ogólne zasady projektowania	118
6.3.2. Zespoły zaprojektowane metodą obwiedni zewnętrznej	120
6.3.2.1. Zespoły kół o zazębieniach epicykloidalnych	120
6.3.2.2. Zespoły kół o zazębieniach hipocykloidalnych	126
6.3.3. Projektowanie zespołów kół metodą obwiedni wewnętrznej	130
6.3.3.1. Zespoły kół o zazębieniach epicykloidalnych	130
6.3.3.2. Zespoły kół o zazębieniach hipocykloidalnych	135
6.4. Zasady doboru zespołu kół	139
6.5. Współpraca kół w zespole	140
6.5.1. Współpraca przy osiach ustalonych	140
6.5.1.1. Współpraca kół o zazębieniach epicykloidalnych	140
6.5.1.2. Współpraca kół o zazębieniach hipocykloidalnych	144
6.5.2. Współpraca przy osiach ruchomych	148
6.6. Zespoły wielokołowe	150
7. Siły międzyzębne	153
7.1. Siły w zazębieniu ewolwentowym	153
7.2. Siły w zazębieniu cykloidalnym 1. rodzaju	155
7.3. Siły w zazębieniu cykloidalnym 2. rodzaju	155
7.4. Siły w zazębieniu cykloidalnym 3. rodzaju	158
7.4.1. Siły w zazębieniu epicykloidalnym	158
7.4.2. Siły w zazębieniu hipocykloidalnym	163
7.4.3. Zależność sił w zazębieniu cykloidalnym 3. rodzaju od jego parametrów geometrycznych	166
7.4.4. Badania doświadczalne sił międzyzębnych	169
8. Technologia kół zębatych	175
8.1. Technologie kół ewolwentowych	176
8.2. Technologia kół cykloidalnych 1., 2. i 3. rodzaju	184
8.2.1. Technologia obróbki skrawaniem	184
8.2.2. Technologia wykrawania elektroerozyjnego	202
8.2.3. Inne technologie	205
8.3. Sprawdzanie kół zębatych	208
9. Przekształcenia energii w zębatych maszynach hydraulicznych	211
9.1. Zasada działania hydraulicznych maszyn	211
9.2. Wydajność chwilowa maszyn o ustalonych osiach obrotu	214
9.2.1. Maszyny o zazębieniu zewnętrznym	214
9.2.2. Maszyny o zazębieniu wewnętrznym	220
9.3. Wydajność właściwa, teoretyczna i średnia	223

Spis treści

9.4. Wydajność maszyn o ruchomych osiach kół (orbitalnym ruchu kół)	225
9.5. Nierównomierność wydajności (chłonności)	227
9.6. Wydajność i nierównomierność wydajności hydraulicznych maszyn zębatych	227
9.6.1. Maszyny z kołami ewolwentowymi	227
9.6.2. Maszyny z kołami cykloidalnymi 1. rodzaju	234
9.6.3. Maszyny z kołami cykloidalnymi 2. rodzaju	241
9.6.4. Maszyny z kołami cykloidalnymi 3. rodzaju	244
9.6.4.1. Maszyny z kołami epicykloidalnymi	245
9.6.4.2. Maszyny z kołami hipocykloidalnymi	251
9.6.4.3. Zależność wydajności i nierównomierności wydajności od parametrów geometrycznych kół	257
10. Przykłady projektowania kół zębatych maszyn hydraulicznych	261
10.1. Metoda projektowania kół zębatych maszyn hydraulicznych	261
10.2. Projektowanie kół ewolwentowych do typoszeregu pomp zębatych	263
10.2.1. Opracowanie koncepcji zespołu kół maszyny	263
10.2.2. Konstruowanie zespołu kół zębatych	264
10.2.3. Analiza przemian energii w pompie zębatej	267
10.2.4. Wytwarzanie zespołu kół zębatych	272
10.3. Projektowanie kół ewolwentowych do wielofunkcyjnej maszyny hydraulicznej zębatej (WMHZ)	273
10.3.1. Opracowanie koncepcji zespołu kół maszyny	273
10.3.2. Konstruowanie zespołu kół zębatych	276
10.3.3. Analiza przemian energii w WMHZ	278
10.3.4. Wytwarzanie zespołu kół zębatych	279
10.4. Projektowanie kół cykloidalnych do typoszeregu pomp gerotorowych	281
10.4.1. Opracowanie koncepcji zespołu kół maszyny	281
10.4.2. Konstruowanie zespołu kół zębatych	283
10.4.3. Analiza przemian energii w pompie gerotorowej	286
10.4.4. Wytwarzanie zespołu kół zębatych	288
10.5. Projektowanie kół cykloidalnych do bloków sterujących	295
10.5.1. Opracowanie koncepcji zespołu kół maszyny	295
10.5.2. Konstruowanie zespołu kół zębatych	298
10.5.3. Analiza przemian energii w bloku sterującym	298
10.5.4. Wytwarzanie zespołu kół zębatych	300
10.6. Projektowanie kół cykloidalnych do silników orbitalnych	300
10.6.1. Opracowanie koncepcji zespołu kół maszyny	300
10.6.2. Konstruowanie zespołu kół zębatych	304
10.6.3. Analiza przemian energii w silniku orbitalnym	305
10.6.4. Wytwarzanie zespołu kół zębatych	306
10.7. Projektowanie kół cykloidalnych z podwójnym zazębieniem do silnika orbitalnego	308
10.7.1. Opracowanie koncepcji zespołu kół maszyny	308
10.7.2. Konstruowanie zespołu kół zębatych	310
10.7.3. Analiza przemian energii w silniku orbitalnym	315
10.7.4. Wytwarzanie zespołu kół zębatych	316
11. Podsumowanie	324
Literatura	328



Wynalazcą pierwszej hydraulicznej maszyny zębatej był w 1605 r. Johannes Kepler. Była to pompa zębata, którą zastosowano do odwadniania szybów górniczych w Czechach. Przez 400 lat maszyny te systematycznie się rozwijały i znajdowały różne zastosowania w technice. Obecnie są one powszechnie używane w hydraulicznych układach napędowych jako generatory energii, silniki oraz jednostki sterujące. Kluczowym zespołem tych maszyn jest zespół kół zębatych, który wyznacza ich kształt konstrukcyjny i wpływa na osiągnięte parametry techniczne.

W książce dokonano syntezy wiedzy z zakresu konstrukcji, technologii oraz hydrauliki służącej do projektowania zespołów kół zębatych maszyn hydraulicznych. Wiedzę tę wykorzystano do zaprojektowania oraz wykonania oryginalnych maszyn hydraulicznych, takich jak pompy i silniki zębate, gerotorowe, silniki orbitalne, bloki sterujące, wielofunkcyjne hydrauliczne maszyny zębate, które zostały następnie wdrożone do produkcji w przemyśle krajowym.

Dr hab. inż. Jarosław Stryczek pracuje na stanowisku profesora nadzwyczajnego na Wydziale Mechanicznym Politechniki Wrocławskiej. Specjalizuje się w dziedzinach: podstawy konstrukcji maszyn oraz napęd i sterowanie hydrauliczne. Opublikował ok. 100 prac naukowych i naukowo-technicznych z tego zakresu. Ścisłe współpracuje z przemysłem krajowym, dla którego wykonał kilkadziesiąt opracowań konstrukcyjnych i technologicznych dotyczących głównie różnych typów hydraulicznych maszyn zębatych.



Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w księgarni
„Tech”
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
budynek D-1 PWr., tel. 071 320 29 35
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową

ISBN 978-83-7493-308-7