EKONOMETRIA

26

Zastosowanie matematyki w ekonomii

Redaktor naukowy **Janusz Łyko**

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2009

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 76
Ekonometria 26 2009

Agnieszka Lipieta
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

STANY RÓWNOWAGI NA RYNKACH WARUNKOWYCH

Streszczenie: Rozważmy dwuokresowy model ekonomii wymiany (*contingent market*) opisany w pracy M. Magill i M. Quinzii [2002]. Jest to uogólnienie modelu Arrowa-Debreu, w którym opisywana gospodarka sekwencyjnie zmienia się w czasie. Rozważana ekonomia funkcjonuje w dwóch momentach czasu: teraźniejszym i przyszłym, przy czym czas przyszły opisany jest stanami świata (interpretowanymi jako zbiór wszystkich możliwości, w jakich gospodarka może znaleźć się w przyszłości).

Zanalizowano problem jedyności stanów równowagi na rynkach warunkowych. Jest to uzupełnienie znanych rezultatów dotyczących problemu istnienia równowagi na tego typu rynkach. Zaletą tej analizy jest brak konieczności standardowych założeń o różniczkowalności funkcji użyteczności poszczególnych konsumentów, co zwiększa klasę relacji preferencji, które można poddać analizie.

Słowa kluczowe: warunkowa ekonomia wymiany, stan równowagi, optimum Pareta, rzut ortogonalny.

1. Wstęp

System ekonomiczny, zwany ekonomią Debreu (zob. [Debreu 1959]), ze względu na swój statyczny charakter doczekał się wielu uogólnień (zob. np. [Radner 1970; Aliprantis 1996; Magill, Quinzii 2002; Malawski 2005; Malawski, Woerter 2006; Moore 2007]). Rozważana w pracy [Magill, Quinzii 2002] warunkowa ekonomia wymiany (*contingent market*) jest jedną ze znanych w literaturze modyfikacji ekonomii Debreu. Jest to dwuokresowy, sekwencyjny model rynku, w którym rozważa się tylko jedno dobro. We wspomnianej pracy, oprócz prezentacji modelu, omówiony został także problem istnienia równowagi w warunkowej ekonomii wymiany. W większości zaprezentowanych metod autorzy przyjmowali dodatkowe założenie o różniczkowalności funkcji użyteczności charakteryzujących wybory poszczególnych konsumentów. Wyznaczanie stanów równowagi na rynkach warunkowych sprowadza się do wyznaczenia ekstremów warunkowych funkcji użyteczności na zbiorach budżetowych, które muszą spełniać dodatkowo warunek równowagi. Funkcje użyteczności są rzeczywistymi funkcjami wielu zmiennych, więc do wyznaczenia ekstremów można zastosować klasyczne metody analizy matematycznej i programowania liniowego. Jednak w niektórych przypadkach, zwłaszcza gdy wymiar przestrzeni jest duży, napotykamy liczne przeszkody natury technicznej. Dodatkowo funkcje użyteczności w warunkowej ekonomii wymiany nie muszą być różniczkowalne.

W artykule przedstawione zostaną pewne własności zbiorów konsumpcji, zasobów, wektorów cen i funkcji użyteczności charakteryzujących warunkową ekonomię wymiany, które mogą być przydatne w procesach efektywnego wyznaczania stanów równowagi oraz podczas analizy problemu jedyności stanów równowagi. Zaletą tych rezultatów jest brak konieczności założeń o różniczkowalności funkcji użyteczności poszczególnych konsumentów, co zwiększa klasę relacji preferencji, które można poddać analizie.

2. Definicja warunkowej ekonomii wymiany. Struktura działania

Warunkowa ekonomia wymiany funkcjonuje w dwóch okresach. Okres $t=0$ jest rozumiany jako czas teraźniejszy, okres $t=1$ oznacza przyszłość. Okres $t=1$ jest opisany przez skończony zbiór $\{1, ..., S\}$ tzw. stanów natury (świata), gdzie $S \in \{1, 2, 3, ...\}$. Liczba $s \in \{1, ..., S\}$ oznacza jedną z możliwości realizacji świata w okresie $t=1$. Okres $t=0$ jest interpretowany jako początkowy stan natury $s=0$, stąd rozważa się $S+1$ stanów świata. Obserwacja liczby jednostek jednego (ustalonego) dobra w każdym stanie $s=0, 1, ..., S$ prowadzi do definicji przestrzeni towarów i cen $\Re^{S+1}$.

Niech $I \in \{1, 2, ...\}$ oznacza skończoną liczbę konsumentów działających w ekonomii. Każdemu konsumentowi i $(i=1, ..., I)$ przyporządkowane są:

- zbiór konsumpcji X^i – zbiór tych strumieni konsumpcji $x^i \in \Re^{S+1}$, których posiadaniem jest zainteresowany konsument i
  $\{1, ..., I\} \ni i \to X^i \subset \Re^{S+1}$,
- relacja preferencji $\preccurlyeq_i$ (relacja spójna, przechodnia i ciągła)
  $\{1, ..., I\} \ni i \to \preccurlyeq_i \subset \Re^{S+1} \times \Re^{S+1}$.

Jeżeli $X^i = \Re_+^{S+1}$, to zbiór X^i jest zbiorem wszystkich możliwych wielkości danego dobra dla konsumenta $i=1, ..., I,$ w każdym stanie $s=0, 1, ..., S.$ Zakładamy też, że relacja preferencji $\preccurlyeq_i$ każdego konsumenta i jest reprezentowana przez ciągłą funkcję użyteczności $u^i : \Re_+^{S+1} \to \Re$ spełniającą warunek silnej monotoniczności:

$$\forall x, \hat{x} \in \Re_+^{S+1} : x < \hat{x} \Rightarrow u^i(x) < u^i(\hat{x}), \tag{1}$$

gdzie: jeśli $x=(x_1, ..., x_{S+1}), \hat{x}=(\hat{x}_1, ..., \hat{x}_{S+1}),$ to

$$x < \hat{x} \overset{def}{\Leftrightarrow} [(\forall l \in \{1, ..., S+1\} : x_l \leq \hat{x}_l) \wedge x \neq \hat{x}]. \tag{2}$$

W stanie $s = 0$ konsument i posiada zasób $\omega_0^i \in \Re_+$ oraz (poprawnie) określa swój zasób ω_s^i w każdym stanie $s = 1, ..., S$. Zatem każdy konsument i scharakteryzowany jest przez wektor zasobów początkowych.

$$\omega^i = (\omega_0^i, \omega_1^i, ..., \omega_S^i) \in X^i.$$

Analogicznie konsument i $(i = 1, ..., I)$, wybierając strumień konsumpcji

$$x^i = (x_0^i, x_1^i, ..., x_S^i) \in X^i,$$

określa swoją konsumpcję (liczbę jednostek danego dobra) x_0^i w okresie $t = 0$ oraz przewiduje konsumpcję w okresie $t = 1$ dla każdego stanu $s = 0, 1, ..., S$.

Definicja 1 (zob. [Magill, Quinzii 2002]). Dwuokresową ekonomię $\mathrm{E}(u, \omega)$, w której działa I konsumentów scharakteryzowanych poprzez funkcje użyteczności i zasoby początkowe

$$(u, \omega) = (u^1, ..., u^I, \omega^1, ..., \omega^I),$$

nazywamy warunkową ekonomią wymiany lub rynkiem warunkowym (*contingent market*).

Niech

$$\mathrm{O} = (0, ..., 0) \in \Re^{S+1}$$

oznacza wektor zerowy w przestrzeni towarów i cen.

Definicja 2 (zob. [Magill, Quinzii 2002]). Alokacją w ekonomii $E(u, \omega)$ nazywamy wektor $x = (x^1, ..., x^I)$, gdzie wektor $x^i \in \Re^{S+1}$ jest strumieniem konsumpcji każdego konsumenta $i = 1, ..., I$. Alokację $x = (x^1, ..., x^I)$ nazywamy dostępną lub dopuszczalną, jeżeli

$$\forall i \in \{1, ..., I\} : x^i \in X^i \text{ oraz } \sum_{i=1}^{I} (x^i - \omega^i) \leq \mathrm{O}.$$

Zbiór wszystkich dostępnych alokacji oznaczamy przez

$$F = \{x \in \Re_+^{(S+1) \cdot I} : \sum_{i=1}^{I} (x^i - \omega^i) \leq \mathrm{O})\}.$$

Zauważmy że zbiór F zależy tylko od postaci całkowitego zasobu

$$\varpi = \sum_{i=1}^{I} \omega^i \tag{3}$$

ekonomii $\mathrm{E}(u, \omega)$.

Definicja 3 (zob. [Magill, Quinzii 2002]). Alokację $\hat{x} = (\hat{x}^1, ..., \hat{x}^I)$ nazywamy optimum Pareta w warunkowej ekonomii wymiany $\mathrm{E}(u, \omega)$, jeżeli:

$$\hat{x} \in F$$

oraz

$$\sim (\exists x \in F : [(\forall i \in \{1, ..., I\} : u^i(x) \geq u^i(\hat{x})) \wedge (\exists i_0 \in \{1, ..., I\} : u^i(x) > u^i(\hat{x}))]).$$

Definicja 4 (zob. [Magill, Quinzii 2002]). Kontraktem warunkowym w ekonomii $\mathrm{E}(u, \omega)$ nazywamy obietnicę dostarczenia jednej jednostki rozważanego dobra w każdym stanie $s = 0, 1, ..., S$. Warunkowym wektorem cen (*contingent market price*) nazywamy wektor $p = (p_0, p_1, ..., p_S) \in \Re^{S+1}$, gdzie p_s $(s = 0, ..., S)$ jest zdyskontowaną (zaktualizowaną na okres $t = 0$) ceną jednej jednostki dobra w stanie *s*, płaconą w okresie $t = 0$.

W powyższej definicji p_s oznacza liczbę ustalonych arbitralnie jednostek pieniężnych.

Każdy konsument działający na rynku warunkowym ma możliwość realokacji swoich zasobów. W tym momencie pojawiają się naturalne pytania: czy istnieją w zbiorach budżetowych każdego konsumenta *i* strumienie konsumpcji preferowane bardziej niż zasoby początkowe ω^i $(i = 1, ..., I)$ oraz co motywuje konsumentów do realokacji swoich zasobów. Kluczem do odpowiedzi na te dwa pytania jest rozstrzygnięcie, czy zasoby $\omega^1, ..., \omega^I$ tworzą z danym wektorem cen stan równowagi w warunkowej ekonomii wymiany. Jeśli tak, to konsumenci nie mają motywacji do realokacji zasobów, jeśli nie, to motywuje ich to do działania.

Warunkowa ekonomia wymiany $\mathrm{E}(u, \omega)$ działa w następujący sposób. W okresie $t = 0$ konsument *i* może sprzedać swój zasób początkowy ω^i względem warunkowego wektora cen $p = (p_0, p_1, ..., p_S)$, otrzymując dochód w wysokości:

$$w^i = p \circ \omega^i = \sum_{s=0}^{S} p_s \cdot \omega_s^i. \tag{4}$$

Konsument *i* może zakupić strumień konsumpcji $x^i = (x_0^i, x_1^i, ..., x_S^i) \in \Re^{S+1}$, którego wartość nie przekracza jego dochodu, tzn.

$$\sum_{s=0}^{S} p_s \cdot x_s^i \leq w^i.$$

Założenie monotoniczności funkcji użyteczności prowadzi do analogicznej własności monotoniczności relacji preferencji $\preccurlyeq_i$ każdego konsumenta *i*:

$$\forall x^i, \bar{x}^i \in X^i : x^i < \bar{x}^i \Rightarrow x \prec_i \bar{x}$$

interpretowanej jako „im więcej, tym lepiej". Zgodnie z tą interpretacją warunkowy zbiór budżetowy konsumenta *i* względem warunkowego wektora cen $p \in \Re^{S+1}$ (*contingent market budget set*) zdefiniowany jako

$$\mathrm{B}(p, \omega^i) \overset{def}{=} \{x^i \in \Re^{S+1} : p \circ x^i \leq p \circ \omega^i\}$$

jest postaci

$$\mathrm{B}(p, \omega^i) = \{x^i \in \Re^{S+1} : p \circ x^i = p \circ \omega^i = w^i\}. \quad (5)$$

Zauważmy, że konsument *i* w przypadku podjęcia decyzji o realokacji wydaje cały swój dochód w^i z warunku (4) na zakup strumienia konsumpcji x^i.

Warunkowa ekonomia wymiany działa prawidłowo, jeżeli każdy konsument ma możliwość sprzedaży i zakupu takiej ilości dobra, ile chce, o ile tylko nie wpływa to na zmianę ceny tego dobra. Zatem wymiana na rynkach warunkowych musi być oparta na pewnych regułach, które gwarantują jej prawidłowe funkcjonowanie i które są przestrzegane przez wszystkich uczestników rynku. Zakłada się, że:

- wszystkie umowy handlowe są zawierane w okresie $t = 0$,
- ceny kontraktów w różnych stanach są mierzone w tych samych, ustalonych w okresie $t = 0$ jednostkach pieniężnych,
- istnieje wolny od opłat ze strony konsumentów monitoring rynku,
- nie ma możliwości renegocjowania cen kontraktów w okresie $t = 1$.

Definicja 5 (zob. [Magill, Quinzii 2002]). Warunkowym stanem równowagi (*contingent market equilibrium*) w ekonomii $\mathrm{E}(u, \omega)$ z jednym dobrem nazywamy parę

$$(x^*, p^*) \in \Re_+^{(S+1)\cdot I} \times \Re_+^{(S+1)}$$

złożoną z alokacji x^* i warunkowego wektora cen p^* taką, że

$$\forall i \in \{1, ..., I\} : x^{i*} \in \arg\max\{u^i(x^i) : x^i \in \mathrm{B}(p^*, \omega^i)\}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{I} (x^{i*} - \omega^i) = \mathrm{O}.$$

Zauważmy, że warunkowy stan równowagi jest stanem równowagi konkurencyjnej na rynku, w którym konsumenci są biorcami cen, tzn. każdy konsument kupuje tyle, ile chce, i nie ma to wpływu na zmianę ceny towaru p_s w każdym stanie $s \in 0,1, ..., S$. Zatem, przy założeniu silnej monotoniczności relacji preferencji, problem maksymalizacji użyteczności na zbiorach budżetowych ma rozwiązanie, jeśli ceny towaru w każdym stanie są dodatnie, tzn. rozważane dobro nie jest dobrem wolnym w żadnym stanie.

Spostrzeżenie to formalizuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1 (o braku wolnych kontraktów na rynkach warunkowych) (zob. [Magill, Quinzii 2002]). W ekonomii $\mathrm{E}(u, \omega)$ następujące warunki są równoważne:

- para (x^*, p^*) jest warunkowym stanem równowagi w tej ekonomii,
- $p^* \in \Re^{S+1}_{++}$,
- zbiór $\mathrm{B}(p^*, \omega^i)$ jest zwarty dla każdego $i \in \{1, ..., I\}$.

Twierdzenie 2 (zob. [Magill, Quinzii 2002]). Niech $\mathrm{E}(u, \omega)$ będzie warunkową ekonomią wymiany. Jeżeli para (x^*, p^*) jest warunkowym stanem równowagi w tej ekonomii, to alokacja x^* jest optimum Pareta.

Jeżeli ekonomia $\mathrm{E}(u, \omega)$ jest w stanie równowagi, to żaden konsument nie ma motywacji do realokacji swoich zasobów. Każdy stan dopuszczalny (zob. definicję 2), który nie jest stanem równowagi, będzie „prowokował" kolejne realokacje zasobów do momentu uzyskania stanu równowagi.

Zauważmy na koniec tej części pracy, że kontrakty warunkowe, zdefiniowane w definicji 4, mogą być wykorzystane np. do modelowania kontraktów ubezpieczeniowych, przy czym stany natury zawierają różne rodzaje ryzyka, od którego ubezpiecza się konsument. Może to być ubezpieczenie od pożaru, kradzieży, wypadku samochodowego, choroby, kalectwa, śmierci i innych „stanów niepewności", na wypadek zajścia których zwykle dokonuje się ubezpieczeń.

3. Główne rezultaty

Kiedy został już rozstrzygnięty problem istnienia równowagi na rynkach warunkowych, pojawiają się kolejne problemy: jak wygląda stan równowagi na rynkach warunkowych, czy jest on jedyny i jakich użyć metod, aby go wyznaczyć. Jeśli funkcje użyteczności są klasy C^2, to najprostszą metodą, za pomocą której można wyznaczyć stan równowagi przy danym wektorze cen, jest metoda mnożników Lagrange'a. Jeżeli natomiast zakładamy tylko ciągłość funkcji użyteczności (bez zakładania różniczkowalności), pozostają metody programowania liniowego. W tej sytuacji przydatne są wszystkie informacje, które uprościłyby procesy optymalizacyjne.

Niech $\mathrm{E}(u,\omega)$ będzie warunkową ekonomią wymiany (zob. definicję 1), w której para (x^*, p^*) jest warunkowym stanem równowagi oraz wektor $\varpi \in \Re_+^{S+1}$ jest całkowitym zasobem (zob. (3)). Zauważmy, z twierdzenia 1, że $p^* \in \Re_{++}^{S+1}$ (tzn. wszystkie współrzędne wektora p^* są dodatnie). W tej sytuacji zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. Istnieje warunkowa ekonomia wymiany $\mathrm{E}(u,\hat{\omega})$, różniąca się od ekonomii $\mathrm{E}(u,\omega)$ tylko wektorami zasobów początkowych, w której istnieje stan równowagi postaci (x^*, p^*) oraz całkowite zasoby w obu ekonomiach są takie same, tzn.

$$\varpi = \omega^1 + \ldots + \omega^I = \hat{\omega}^1 + \ldots + \hat{\omega}^I .$$

Ponadto wektory zasobów początkowych wszystkich konsumentów w ekonomii $\mathrm{E}(u,\hat{\omega})$ zawierają się w podprzestrzeni wektorowej przestrzeni $\Re^{S+1}$ wymiaru 1.

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli $p^* \in \Re_{++}^{S+1}$ oraz $\varpi \in \Re_+^{S+1}$, to

$$p^* \circ \varpi \neq 0 .$$

Warunkowy wektor cen p^* indukuje przekształcenie liniowe postaci

$$\tilde{p}^* : \Re^{S+1} \ni x \to p^* \circ x \in \Re.$$

Niech $Q : \Re^{S+1} \to \Re^{S+1}$ będzie odwzorowaniem danym przepisem

$$Q(x) = \frac{\tilde{p}^*(x)}{\tilde{p}^*(\varpi)} \cdot \varpi. \tag{6}$$

Oznaczmy

$$\hat{\omega}^i = Q(\omega^i) \text{ dla } i = 1, \ldots, I.$$

Wtedy dla dowolnego $x \in \Re^{S+1}$

$$Q(x) \circ p^* = x \circ p^*. \tag{7}$$

Z warunku (7) wynika, że zbiory budżetowe względem warunkowego wektora cen p^* w ekonomiach $\mathrm{E}(u,\omega)$ oraz $\mathrm{E}(u,\hat{\omega})$ są takie same. Skoro relacje preferencji dla każdego konsumenta są również te same, to wektory maksymalizujące użyteczności na zbiorach budżetowych poszczególnych konsumentów w ekonomii $\mathrm{E}(u,\omega)$ maksymalizują użyteczności na zbiorach budżetowych w ekonomii

$\mathrm{E}(u,\hat{\omega})$. Z definicji odwzorowania Q (zob. (6)) wynika, że wektory $\hat{\omega}^1, ..., \hat{\omega}^I$ są zawarte w jednowymiarowej podprzestrzeni generowanej przez wektor całkowitych zasobów ϖ (zob. (3)).

Zauważmy, z warunku (7), że liniowe odwzorowanie Q (zob. (6)) jest rzutem ortogonalnym na jednowymiarową podprzestrzeń generowaną przez wektor ϖ. Z twierdzenia 3 wynika, że jeśli

$$\exists i \in \{1, ..., I\} : \hat{\omega}^i \neq \omega^i,$$

to istnieją przynajmniej dwie różne alokacje zasobów wszystkich konsumentów, które przy danym wektorze cen i danych funkcjach użyteczności dają ten sam stan równowagi.

Ekonomia $\mathrm{E}(u,\hat{\omega})$ ma charakter pomocniczy. Do procesów optymalizacyjnych, zamiast danych zasobów $\omega^1, ..., \omega^I$ poszczególnych konsumentów, można użyć ich rzutów ortogonalnych na prostą generowaną przez wektor produkcji całkowitej (3).

Zajmiemy się teraz sytuacją, kiedy wybory każdego konsumenta ograniczają się do mniejszego zbioru niż $\Re_+^{S+1}$. Wówczas prawdziwe jest twierdzenie.

Twierdzenie 4. Jeśli istnieje podprzestrzeń wektorowa $V \subset \Re^{S+1}$, $V \cap \Re_+^{S+1} \neq \{\mathrm{O}\}$ taka, że

$$\forall i \in \{1, ..., I\} : X^i \subset V, \tag{8}$$

to istnieje wektor cen $\hat{p}^* \in V$ taki, że para $(x^*, \hat{p}^*)$ jest warunkowym stanem równowagi w ekonomii $\mathrm{E}(u,\omega)$.

Dowód. Zauważmy, że jeśli $V \subset \Re^{S+1}$ oraz $V \neq \Re^{S+1}$, to $\dim V < S+1$. Oznaczmy $k = S+1-\dim V$ $(k \in \{1, 2, ..., S\})$. Wtedy istnieją wektory $h^1, ..., h^k$ $\in \Re^{S+1}$, $(h^l = (h_0^l, ..., h_S^l),\ \ l \in \{1, ..., k\})$ takie, że

$$V = \bigcap_{l=1}^{k} \ker \tilde{h}^l,$$

gdzie funkcjonały

$$\tilde{h}^l : \Re^{S+1} \ni (x_0, ..., x_S) \to h_0^l x_0 + ... + h_S^l x_S \in \Re$$

są liniowe i ciągłe dla każdego $l \in \{1,...,k\}$.

Ustalmy bazę $(v^1, ..., v^{S+1-k})$ w przestrzeni V. Niech wektory $q^1, ..., q^k \in \Re^{S+1}$ będą wyznaczone z warunków:

$$\begin{cases} h^l(q^j) = \delta^{l,j} \\ v^n(q^j) = 0 \end{cases} \quad \text{dla} \quad l, j \in \{1, ..., k\}, n \in (1, ..., S+1-k).$$

Wówczas wektor $\hat{p}^*$ postaci:

$$\hat{p}^* = p^* - \sum_{l=1}^{k} h^l(p^*) \cdot q^l$$

spełnia tezę twierdzenia.

Z twierdzenia 4 wynika, że w sytuacji, gdy wybory konsumentów są ograniczone do pewnej podprzestrzeni wektorowej $V \subset \Re^{S+1}$, gdzie $\dim V = S+1-k$, $k \in \{1, ..., S\}$, to problem wyznaczenia warunkowego wektora cen równowagi można zawęzić do podprzestrzeni V, co w procesach optymalizacyjnych pozwala na wyeliminowanie k zmiennych z warunków budżetowych i dziedziny funkcji użyteczności. Zauważmy, że w przypadku założenia (7) dana alokacja x^*, która daje stan równowagi w całej ekonomii z pewnym wektorem cen, tworzy też stan równowagi z pewnym wektorem cen z podprzestrzeni V.

Wniosek 1. Niech $\mathrm{E}(u, \omega)$ będzie warunkową ekonomii wymiany, w której

$$\forall i \in \{1, ..., I\} : X^i \subset V \text{ oraz } p^* \notin V.$$

Wtedy w ekonomii tej istnieją przynajmniej dwa stany równowagi, a zbiory budżetowe przy cenach p^* oraz $\hat{p}^*$ są identyczne.

Wniosek 2. Z twierdzenia 1 wynika, że $\hat{p}^* \in \Re^{S+1}_{++}$ oraz

$$\| \hat{p}^* \| \leq \| p^* \|, \tag{9}$$

gdzie norma $\| \cdot \|$ jest zadana przez iloczyn skalarny. Zatem jeśli nierówność w warunku (9) jest ostra, to wektor cen $\hat{p}^*$ jest korzystniejszym z punktu widzenia konsumentów warunkowym wektorem cen równowagi.

Rozważmy teraz sytuację, w której, przy danym wektorze cen $p^* \in \Re^{S+1}_{++}$, istnieją w ekonomii $\mathrm{E}(u, \omega)$ co najmniej dwa różne

$$(x^*, p^*), (\hat{x}^*, p^*)$$

stany równowagi, gdzie $x^*, \hat{x}^* \in \Re^{(S+1)\cdot I}$, $x^* \neq \hat{x}^*$.

Niech

$$R(p^*) = \{x^* = (x^{1*}, ..., x^{I*}) \in \Re^{(S+1)\cdot I} :$$

$$\forall i \in \{1, ..., I\} : u^i(x^{i*}) = \max\{u^i(x^i) : x^i \in \mathrm{B}(p^*, \omega^i)\} \wedge x^{1*} + ... + x^{I*} = \varpi \quad (10)$$

będzie zbiorem tych dostępnych alokacji (zob. definicje 2 oraz 5), które wraz z wektorem p^* tworzą stan równowagi w warunkowej ekonomii wymiany $\mathrm{E}(u, \omega)$.

Uwaga 1. Wektory x^*, $\hat{x}^* \in R(p^*)$ są nieporównywalne względem relacji $"<" \subset \Re^{S+1} \times \Re^{S+1}$ (zob. (1)). Ponadto

$$\forall i \in \{1, ..., I\} : ((x^{i*} - \hat{x}^{i*}) \perp p^*) \text{ oraz } \exists i \in \{1, ..., I\} : x^{i*} - \hat{x}^{i*} \notin \Re^{S+1}_{++}.$$

Dowód. Przypuśćmy, że wektory x^*, $\hat{x}^* \in \Re^{(S+1)\cdot I}$ są porównywalne względem relacji $"<" \subset \Re^{S+1} \times \Re^{S+1}$, np. $x^* - \hat{x}^* > 0$. Wtedy

$$\forall i \in \{1, ..., I\} : x^{i*} \leq \hat{x}^{i*} \text{ oraz } \exists i \in \{1, ..., I\} : x^{i*} < \hat{x}^{i*}.$$

Z założenia monotoniczności relacji preferencji otrzymamy

$$\forall i \in \{1, ..., I\} : u^i(x^{i*}) \leq u^i(\hat{x}^{i*}) \text{ oraz } \exists i \in \{1, ..., I\} : u^i(x^{i*}) < u^i(\hat{x}^{i*}),$$

co znaczyłoby, że para (x^*, p^*) nie jest warunkowym stanem równowagi w ekonomii $\mathrm{E}(u, \omega)$.

Niech $i = 1, ..., I$. Wtedy (zob. (4))

$$w^i = p^* \circ x^{i*} = p^* \circ \hat{x}^{i*},$$

co w konsekwencji oznacza dla każdego $i = 1, ..., I$ prostopadłość wektorów $(x^{i*} - \hat{x}^{i*})$ oraz p^*.

Gdyby

$$\forall i \in \{1, ..., I\} : x^{i*} - \hat{x}^{i*} \in \Re^{S+1}_{++},$$

to

$$x^* - \hat{x}^* > 0,$$

co znaczyłoby, że para $(\hat{x}^*, p^*)$ nie jest warunkowym stanem równowagi w ekonomii $\mathrm{E}(u, \omega)$.

Uwaga 2. Jeżeli w warunkowej ekonomii wymiany $\mathrm{E}(u, \omega)$ funkcje użyteczności wszystkich konsumentów są silnie wypukłe, to przy danym wektorze cen istnieje co najwyżej jeden stan równowagi.

Dowód. Silna wypukłość relacji preferencji oznacza, że

$$\forall x^i, \hat{x}^i \in X^i : [(u^i(x^i) = u^i(\hat{x}^i)) \Rightarrow \forall t \in (0,1) : (u^i(x^i) < u^i(tx^i + (1-t)\hat{x}^i))].$$

Gdyby w ekonomii istniały dwa różne stany równowagi $(x^*, p^*), (\hat{x}^*, p^*)$, to

$$\exists i \in \{1, ..., I\} : x^{i*} \neq \hat{x}^{i*}.$$

Z silnej wypukłości wynikałoby więc, że

$$\forall t \in (0,1) : u^i(x^{i*}) < u^i(tx^{i*} + (1-t)\hat{x}^{*i}).$$

Wektor postaci $tx^{i*} + (1-t)\hat{x}^{*i}$ leżący w zbiorze budżetowym byłby bardziej preferowany niż wektor x^{i*}, co prowadzi do sprzeczności.

Na koniec artykułu zostanie podane twierdzenie charakteryzujące zbiór stanów równowagi w warunkowej ekonomii wymiany przy danym wektorze cen $p^* \in \Re^{S+1}_{++}$.

Niech $\mathrm{E}(u, \omega)$ będzie warunkową ekonomią wymiany (zob. definicję 1), w której para (x^*, p^*) jest warunkowym stanem równowagi (zob. definicję 5 i twierdzenie 1), wektor $\varpi \in \Re^{S+1}_{+}$ jest całkowitym zasobem (zob. (3)), a zbiór $R(p^*)$ jest wyznaczony z warunku (10). Wówczas prawdziwe jest twierdzenie.

Twierdzenie 5. Niech

$$X^{i*} = \{x^{i*} \in X^i : u^i(x^{i*}) = \max\{u^i(x^i) : x^i \in \mathrm{B}(p^*, \omega^i)\}\}$$

dla $i \in \{1, 2, ..., I\}$ oraz

$$f : X^{1*} \times X^{2*} \times ... \times X^{I*} \ni (x^1, x^2, ..., x^I) \to x^1 + x^2 + ... + x^I \in \Re^{S+1}. \tag{11}$$

Wtedy

$$x^* \in R(p^*) \Leftrightarrow x^* \in f^{-1}(\varpi) \tag{12}$$

oraz zbiór $f^{-1}(\varpi)$ jest zwarty.

Dowód. Zauważmy, że niepustość zbiorów X^{i*} dla $i = 1, ..., I$ wynika z faktu, iż względem wektora cen p^* istnieje stan równowagi w ekonomii $\mathrm{E}(u, \omega)$. Postać odwzorowania f z warunku (11) oraz warunek (12) są konsekwencją definicji 5.

Odnotujmy, że odwzorowanie f jest ciągłe. Zatem zbiór $f^{-1}(\varpi)$ jako przeciwobraz zbioru domkniętego jest zbiorem domkniętym w przestrzeni $\Re^{(S+1)\cdot I}$. Ponadto

$$f^{-1}(\varpi) \subset \mathrm{B}(p^*, \omega^1) \times ... \times \mathrm{B}(p^*, \omega^I),$$

gdzie zbiory budżetowe $\mathrm{B}(p^*, \omega^i)$ dla $i = 1, ..., I$ są zwarte (zob. twierdzenie 1). Z twierdzenia Tichonowa (zob. [Engelking 1975]) wynika, że iloczyn kartezjański zbiorów budżetowych będzie zbiorem zwartym w przestrzeni $\Re^{(S+1)\cdot I}$. Domknięty podzbiór zbioru zwartego jest również zwarty, co daje tezę twierdzenia.

4. Podsumowanie

Niektóre zaprezentowane w artykule fakty (twierdzenia 3 i 5) mogą być pomocne (przez redukcję pewnej liczby zmiennych) podczas efektywnego wyznaczania stanów równowagi w warunkowej ekonomii wymiany. Inne zaś (twierdzenie 4, uwaga 2) opisują sytuację, kiedy w tej ekonomii istnieje więcej niż jeden stan równowagi. Do całościowej analizy problemu jedyności stanu równowagi na rynku warunkowym potrzebna jest jeszcze wiedza na temat postaci funkcji użyteczności poszczególnych konsumentów. Pewną charakterystykę zbioru stanów równowagi w warunkowej ekonomii wymiany daje twierdzenie 5.

Literatura

Aliprantis C.D., *Problems in Equilibrium Theory*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, Germany 1996.

Debreu G., *Theory of Value*, Wiley, New York 1959.

Engelking R., *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa 1975.

Magill M., Quinzii M., *Theory of Incomplete Markets*, MIT Press, Cambridge 2002.

Malawski A., *A Dynamical System Approach to the Arrow–Debreu theory of General Equilibrium,* The 9-th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics, and Informatics, Proceeding 2005, July 10-13, Orlando, Florida, USA, Vol. VII, 2005.

Malawski A., Woerter M., *Diversity Structure of the Schumpeterian Evolution. An Axiomatic Approach,* Arbeitspapiere/Working Papers of the Swiss Institute for Business Cycle Research, No 153, Zurich 2006.

Moore J.C., *General Equilibrium and Welfare Economics*, Springer, Berlin 2007.

Radner R., *Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets*, „Econometrica" 1970 vol. 40.

STATES OF CONTINGENT MARKET EQUILIBRIUM

Summary: Let $\mathrm{E}(u, \omega)$ be the contingent market studied in [Magill M., Quinzii M., *Theory of Incomplete Markets*, MIT Press, Cambridge, 2002]. The aim of this paper is the presentation of some properties of consumption sets, utility functions and total endowments which may be useful in the characterization of the sets of states of equilibrium and in the effective calculation of the states of equilibrium on the contingent market.