

EKONOMETRIA

26

Zastosowanie matematyki w ekonomii

Redaktor naukowy Janusz Łyko



**Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2009**

Spis treści

Wstęp	7
Beata Bal-Domańska , Ekonometryczna analiza sigma i beta konwergencji regionów Unii Europejskiej	9
Andrzej Bąk, Aneta Rybicka, Marcin Pelka , Modele efektów głównych i modele z interakcjami w <i>conjoint analysis</i> z zastosowaniem programu R	25
Katarzyna Budny , Kurtoza wektora losowego	44
Wiktor Ejsmont , Optymalna liczebność grupy studentów	55
Kamil Fijorek , Model regresji dla cechy przyjmującej wartości z przedziału $(0,1)$ – ujęcie bayesowskie	66
Paweł Hanczar , Wyznaczanie zapasu bezpieczeństwa w sieci logistycznej ...	77
Roman Huptas , Metody szacowania wewnątrzdziennej sezonowości w analizie danych finansowych pochodzących z pojedynczych transakcji	83
Aleksandra Iwanicka , Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w skończonym horyzoncie czasowym w wieloklasowym modelu ryzyka.....	97
Agnieszka Lipieta , Stany równowagi na rynkach warunkowych	110
Krystyna Melich-Iwanek , Polski rynek pracy w świetle teorii histerezy.....	122
Rafał Piszczek , Zastosowanie modelu logit w modelowaniu upadłości	133
Marcin Salamaga , Próba weryfikacji teorii parytetu siły nabywczej na przykładzie kursów wybranych walut	149
Antoni Smoluk , O zasadzie dualności w programowaniu liniowym	160
Małgorzata Szulc-Janek , Influence of recommendations announcements on stock prices of fuel market	170
Jacek Welc , Regresja liniowa w szacowaniu fundamentalnych współczynników Beta na przykładzie spółek giełdowych z sektorów: budownictwa, informatyki oraz spożywczego	180
Andrzej Wilkowski , O współczynniku korelacji	191
Mirosław Wójciak , Klasyfikacja nowych technologii energetycznych ze względu na determinanty ich rozwoju.....	199
Andrzej Wójcik , Wykorzystanie modeli wektorowo-autoregresyjnych do modelowania gospodarki Polski.....	209
Katarzyna Zeug-Żebro , Rekonstrukcja przestrzeni stanów na podstawie wielowymiarowych szeregów czasowych.....	219

Summaries

Beata Bal-Domańska , Econometric analysis of sigma and beta convergence in the European Union regions	24
Andrzej Bąk, Aneta Rybicka, Marcin Pelka , Main effects models and main and interactions models in <i>conjoint analysis</i> with application of R software.....	43
Katarzyna Budny , Kurtosis of a random vector	53
Wiktor Ejsmont , Optimal class size of students	65
Kamil Fijorek , Regression model for data restricted to the interval (0,1) – Bayesian approach.....	76
Paweł Hanczar , Safety stock level calculation in a supply chain network.....	82
Roman Huptas , Estimation methods of intraday seasonality in transaction financial data analysis	96
Aleksandra Iwanicka , An impact of some outside risk factors on the finite-time ruin probability for a multi-classes risk model.....	109
Agnieszka Lipieta , States of contingent market equilibrium	121
Krystyna Melich-Iwanek , The Polish labour market in light of the hysteresis theory	132
Rafał Piszczek , Logit model applications for bankrupcty modelling.....	148
Marcin Salamaga , Attempt to verify the purchasing power parity theory in the case of some foreign currencies.....	159
Antoni Smoluk , On dual principle of linear programming	168
Małgorzata Szulc-Janek , Analiza wpływu rekomendacji analityków na ceny akcji branży paliwowej (Analiza wpływu rekomendacji analityków na ceny akcji branży paliwowej).....	178
Jacek Welc , A linear regression in estimating fundamental betas in the case of the stock market companies from construction, it and food industries	190
Andrzej Wilkowski , About the coefficient of correlation	198
Mirosław Wójciak , Classification of new energy related technologies based on the determinants of their development	208
Andrzej Wójcik , Using vector-autoregressive models to modelling economy of Poland.....	218
Katarzyna Zeug-Żebro , State space reconstruction from multivariate time series	227

Wiktor Ejsmont

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

OPTYMALNA LICZEBNOŚĆ GRUPY STUDENTÓW

Streszczenie: Artykuł koncentruje się na zastosowaniach modelu Lazeara. W pierwszej jego części pokazano warunki, jakie powinny być spełnione, aby można było wyznaczyć optymalny rozmiar klasy. Następnie zastosowano model do danych rzeczywistych. W drugiej części rozszerzono twierdzenie Lazeara o sortowaniu studentów względem zachowania. Na końcu przedstawiono wnioski i sugestie wynikające z przeprowadzonych badań.

Słowa kluczowe: funkcja produkcji w edukacji, optymalny rozmiar klasy, uczenie.

1. Wstęp

Idea inwestycji w kapitał ludzki jest tematem bardzo ważnym z punktu widzenia ekonomicznego. W artykule skupiono się głównie na optymalnym zrównoważeniu pomiędzy liczbą uczniów a potencjalnymi zyskami osiąganymi przez uczelnie wyższe. Inspiracją do napisania artykułu była praca E.P. Lazeara *Educational Production* [2001].

Pierwszą część pracy stanowi zastosowanie modelu Lazeara do obliczenia optymalnej liczebności grupy studentów dla danych rzeczywistych. Sformułowano również kryterium matematyczne, określające, jakie zależności powinny być spełnione dla wyznaczenia optymalnego rozmiaru grupy. W drugiej części artykułu rozbudowano twierdzenie Lazeara o segregacji względem zachowania na przypadek wielowymiarowy. Artykuł ma wyjaśnić, jak duży wpływ na optymalny rozmiar grupy ma zachowanie się studentów. Temat jest szeroko opisywany w literaturze, m.in. w pracach [Akerhielm 1995; Hanushek 1998; Bernard, Brown, Helland 1999]. Rezultaty zawarte we wspomnianej literaturze mają istotne znaczenie dla wyboru rozmiaru klasy¹, aczkolwiek na jej podstawie trudno jednoznacznie wybrać metodę, która najbardziej przybliży nas do uzyskania optymalnych rezultatów.

¹ Pojęcia „klasa” i „grupa” będą stosowane zamiennie.

2. Model Lazeara

Wprowadzenie parametru uwzględniającego zachowanie się studentów opiera się na idei, że zdolność jednych studentów zależy od zachowania się innych. Studenci wolą uczyć się w szkołach, w których proces zdobywania wiedzy nie jest utrudniany przez innych studentów. Utrudnienia, o których mówi Lazear, mogą być różnie interpretowane. Na przykład student zadający często pytania zakłóca proces edukacji pozostałym uczniom², którzy w tym momencie tracą czas mogący posłużyć do zdobycia wiedzy. W przeprowadzonych badaniach za „zakłócających uczniów” uznano tych, którzy otrzymali przynajmniej jedną ocenę „dwa” jako ocenę ostateczną z danego przedmiotu. Ich destrukcyjny wpływ możemy opisać w ten sposób, że podczas zajęć mogli nie słuchać tego, co ma do przekazania wykładowca, zajmując się w tym czasie innymi rzeczami. Tym samym mogli przeszkadzać innym studentom w zdobywaniu wiedzy. Studenci nieprzygotowani do egzaminu lub kolokwium dużo częściej próbują „ściągać” od tych dobrze przygotowanych, co wpływa na wyniki osiągnięte przez lepiej przygotowanych uczniów. Ponadto jeżeli w grupie studentów kształcących się w określonym kierunku znajdują się osoby, które „nie radzą sobie z pewnymi przedmiotami”, to może mieć to negatywny wpływ na wiedzę pozostałych. Zdarza się bowiem, że nauczyciel na prowadzonych zajęciach musi poświęcić im więcej czasu. Rozważane w niniejszym artykule dane rzeczywiste będą dotyczyły studiów uzupełniających magisterskich, a więc możemy założyć, iż przedmioty są już ściśle ukierunkowane. Na przykład przedmiot matematyka na Wydziale Nauk Ekonomicznych dla niektórych studentów może wydawać się „barierą nie do przejścia”, mimo iż kierunek, na którym studiują, jest zgodny z ich zainteresowaniami.

Oznaczenia:

p – prawdopodobieństwo, że student nie przeszkadza sobie i innym studentom, tzn. że zachowuje się dobrze,

V – wartość jednostki kapitału wiedzy na rynku; w artykule będzie to czesne,

W – koszt, jaki uczelnia ponosi m.in. na wynagrodzenie nauczyciela; w naszym przypadku będzie to koszt prowadzenia grupy studentów,

Z – liczba studentów,

m – liczba grup, na które są podzieleni studenci.

Wówczas funkcje zysku uczelni wyrazimy w postaci (model Lazeara):

$$\pi(p, Z, V, W, m) = ZVp^{Z/m} - Wm. \quad (1)$$

Celem będzie maksymalizacja powyższego wyrażenia w zależności od parametru m . Skrócony zapis π , jaki zastosowano, jest równoważny z $\pi(p, Z, V, W, m)$.

Optymalny rozmiar grupy otrzymujemy wówczas ze wzoru

$$n = Z / m \quad (2)$$

(zakładamy równoliczność grup).

² Pojęcia „student” i „uczeń” będą stosowane zamiennie.

Aby wyznaczyć m , które maksymalizuje model (1), liczymy pochodną $\partial\pi / \partial m$, następnie otrzymane równanie przyrównujemy do zera, czyli

$$\frac{\partial\pi}{\partial m} = -V \frac{Z^2}{m^2} p^{Z/m} \ln(p) - W = 0, \quad (3)$$

i rozwiązujemy w zależności od parametru m . Parametry p , Z , V i W traktuje się jako ustalone. O funkcji π od tego momentu można myśleć jak o funkcji jednej zmiennej m . Licząc drugą pochodną cząstkową po m , mamy:

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial m^2} = \frac{VZ^2 p^{Z/m} \ln p^{2m+Z \ln p}}{m^4}.$$

Załóżmy, że $W > V$. Zakładam, że koszt kształcenia grupy studentów nie może być mniejszy od czesnego wnoszonego przez pojedynczego studenta. Ze wzoru (3) widzimy, że $\partial\pi / \partial m(p, Z, V, W, Z) = -Vp \ln(p) - W < -Vp \ln(p) - V < 0$, ponieważ dla $p \in (0, 1)$ wartość wyrażenia $p \ln(p) \in [-e^{-1}, 0)$. Znak wartości wyrażenia $\partial^2\pi / \partial m^2$ zależy od $2m + Z \ln p$. W punkcie $m = -Z \ln p / 2$ funkcja $\partial^2\pi / \partial m^2$ zmienia znak w taki sposób, że:

- $\partial^2\pi / \partial m^2 < 0$ dla $m > -Z \ln(p) / 2$,
- $\partial^2\pi / \partial m^2 > 0$ dla $m < -Z \ln(p) / 2$.

Zauważmy, że $-Z \ln(p) / 2 > 0$. Widać również, że $-Z \ln(p) / 2 < Z$ dla $p > \exp(-2) \approx 0,135$. Czyli zakładając, że p „jest bliskie” 1, zawsze będzie spełniony warunek $-Z \ln(p) / 2 \in (0, Z)$. Funkcja $\partial\pi / \partial m(p, Z, V, W, m)$ jest malejąca dla $m > -Z \ln(p) / 2$, rosnąca dla $m < -Z \ln(p) / 2$ oraz $\partial\pi / \partial m(p, Z, V, W, Z) < 0$. Łącząc powyższe fakty, dochodzi się do wniosku, że aby równanie (3) miało rozwiązanie w przedziale $m \in (0, Z)$, musi być spełniony warunek

$$\begin{aligned} R(p, Z, V, W) &= \frac{\partial\pi}{\partial m}(p, Z, V, W, -Z \ln(p) / 2) = \\ &= -V \frac{Z^2}{(-Z \ln(p) / 2)^2} p^{Z/(-Z \ln(p) / 2)} \ln(p) - W > 0. \end{aligned}$$

Przy czym m , które jest jednocześnie maksimum lokalnym funkcji $\pi(p, Z, V, W, m)$, znajduje się w przedziale $(-Z \ln(p) / 2, Z)$.

Zauważmy, iż równanie (1) można sprowadzić do postaci:

$$\pi = V(Zp^{Z/m} - mW / V).$$

Ponieważ zmienne W , V są stałe, to maksymalizacja równania (1) jest równoważna z maksymalizacją wyrażenia postaci:

$$(Zp^{Z/m} - mW'), \quad (4)$$

przy czym $W' = W / V$.

3. Dane rzeczywiste

Badania przeprowadzono na podstawie danych opisujących studentów rozpoczynających studia zaoczne uzupełniające magisterskie na Uniwersytecie Ekonomicznym we Wrocławiu na Wydziale Zarządzania, Informatyki i Finansów, w rozbiciu na lata kształcenia oraz kierunki studiów. Tabele poniżej przedstawiają szczegółowe zestawienie.

Tabela 1. Zestawienie studentów

Rok nauki	Kierunek*	Liczba studentów z oceną ndst.	Liczba studentów	Liczba grup	Średnia liczebność grupy	p	m optymalne	Modelowy rozmiar grupy	$R(p, Z, V, W)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2005/06	FiB	0	25	1	25	1	–	–	–
	ZiM	2	159	6	26,5	0,98742	3,99076	39,84208	65 702,63154
2006/07	FiB	5	108	4	27	0,9537	4,05127	26,6583	37 04,247903
	ZiM	3	116	5	23,2	0,97414	4,2593	27,2344	21 721,94559
2007/08	FiR	9	247	8	30,88	0,96356	9,24875	26,7063	10 139,09608
	Z	26	297	11	27	0,91246	–	–	– 8 339,68

* Skróty z kolumny 2 oznaczają:

- FiB – kierunek finanse i bankowość.
- ZiM – kierunek zarządzanie i marketing.
- FiR – kierunek finanse i rachunkowość.
- Z – kierunek zarządzanie.

Źródło: Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu.

Tabela 2. Zestawienie danych „pieniężnych”

Rok	Czesne – V	Koszt – W	W'
2005/06	2 145,00 zł	26 029,11 zł	12,1348
2006/07	1 950,00 zł	18 565,06 zł	9,5206
2007/08	2 130,00 zł	20 925,81 zł	9,8243

Źródło: Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu.

W kolumnie 3 tab. 1 przedstawiono liczbę studentów z oceną ndst. określającą tych studentów, którzy dostali przynajmniej jedną ocenę niedostateczną z jakiegokolwiek przedmiotu. Jest to ocena ostateczna wystawiona w ostatnim z możliwych terminów w semestrze zimowym. Liczba studentów to wszyscy studenci, którzy

rozpoczynali naukę w semestrze zimowym. Na podstawie kolumny 5 policzono kolumnę 6 – zawierającą liczbę studentów przypadających na grupę.

Prawdopodobieństwo p jest to prawdopodobieństwo, że student zdał w pierwszym semestrze wszystkie przedmioty pozytywnie (tzn. ocena ze wszystkich przedmiotów była przynajmniej dostateczna (3)), co będzie interpretowane jako p z modelu (1). Jest ono liczone jako iloraz różnicy pomiędzy kolumnami 4 i 3 przez kolumnę 4.

Kolumna 8 oznacza m , które jest rozwiązaniem równania (3) dla poszczególnych kierunków prowadzonych w różnych latach, co automatycznie daje modelowy rozmiar grupy zapisany wzorem (2). Kolumna 10 zawiera wartość współczynnika $R(p, Z, V, W)$ określającego możliwość wyznaczenia optymalnego rozmiaru grupy.

Kolumny tab. 2 przedstawiają kolejno:

- rok akademicki,
- V – czesne wpłacane przez studenta,
- W – koszt prowadzenia grupy studentów,
- zmienną $W' = W / V$ wyrażającą stosunek kosztów semestralnych prowadzenia grupy studentów do kosztów, jakie ponosi student na naukę w semestrze zimowym (czesne).

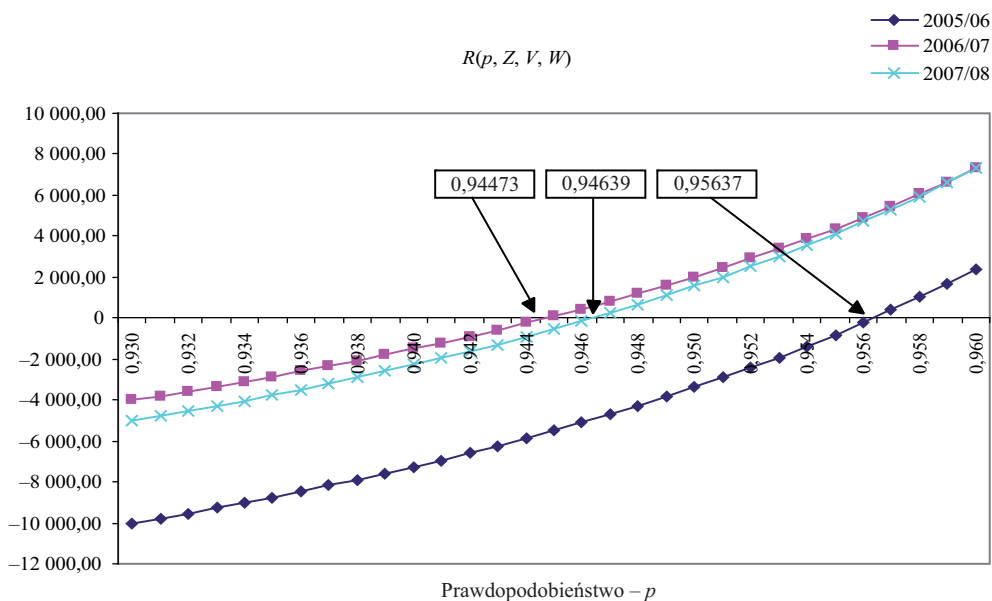
Zgodnie z ogólnie przyjętą zasadą przy analizie przyjęto konwencję zaokrąglania do liczby całkowitej. Widzimy, że w roku akademickim 2005/2006 prawdopodobieństwo otrzymania oceny pozytywnej na kierunku zarządzanie i marketing jest równe ok. 0,99. Jest to wysoki wynik w porównaniu z pozostałymi kierunkami. Zgodnie z twierdzeniem Lazeara rozmiar grupy rośnie w miarę wzrostu p . Daje to w przybliżeniu wynik 40 studentów przypadających na jedną grupę. Wynik ten jest także powodem dość wysokich kosztów prowadzenia jednej grupy, tzn. współczynnik kosztów do wkładu finansowego studentów był najwyższy w latach 2005/2006. Twierdzenie Lazeara mówi o zwiększaniu się liczności grupy przy zwiększaniu kosztów prowadzenia grupy studentów. Te dwa czynniki składają się na to, że optymalny rozmiar grupy jest na poziomie 40 osób, czyli ok. 4 grup studentów. W tym przypadku podejście modelowe jest nierealne. W 40-osobowej grupie studentów samo prowadzenie zajęć jest utrudnione ze względów technicznych.

Na kierunku finanse i bankowość w roku akademickim 2005/2006 było tylko 25 studentów. Można również zauważyć, że nie było studentów, którzy otrzymali oceny niedostateczne, tym samym prawdopodobieństwo jest równe 1. Oczywiście przy tak małej liczbie studentów jak najbardziej racjonalne jest utworzenie jednej grupy. Jednocześnie niemożliwe jest wykorzystanie modelu Lazeara z $p = 1$ do wyliczenia optymalnego rozmiaru grupy.

W roku akademickim 2006/2007 mamy znacznie mniejsze koszty prowadzenia grupy studenckiej. Prawdopodobieństwo dobrego zachowania się studentów jest również mniejsze niż w roku akademickim 2005/2006. Powoduje to spadek rozmiaru grupy (w porównaniu z poprzednim rocznikiem) do poziomu 27 studentów

w przypadku kierunku FiB. Widzimy, że w przypadku kierunku finanse i bankowość zaokrąglona liczba osób w grupie wyliczona na podstawie modelu Lazeara jest dokładnie taka jak średni rozmiar grupy odgórnego podziału przez administrację uczelni.

Przeanalizujmy teraz rok akademicki 2007/2008. Koszt prowadzenia grupy jest zbliżony do roku 2006/2007. Na kierunku FiR optymalny rozmiar grupy wynosi ok. 27 studentów. Jest to mniejsza liczba studentów w grupie, niż wynikałoby z podziału administracyjnego. Na kierunku zarządzanie sytuacja wygląda już całkiem inaczej, gdyż przy prawdopodobieństwie $p = 0,91246$ oraz parametrach, które są zawarte w tab. 1 i 2, funkcja opisana wzorem (1) nie osiąga maksimum dla $m \in [0, Z]$. Widzimy, że wartość współczynnika $R(p, Z, V, W)$ jest ujemna, to zaś potwierdza fakt, że nie możemy wyznaczyć takiego m , które maksymalizuje równanie (1).



Rys. 1. Funkcja $R(p, Z, V, W)$ w kolejnych latach dla Z, V, W z tab. 1 i 2 oraz $0,93 \leq p \leq 0,96$

Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 1 obrazuje granicę, jakiej nie może przekroczyć prawdopodobieństwo p , aby można było według idei Lazeara wyznaczyć optymalny rozmiar grupy. Granica ta jest wyraźnie uzależniona od współczynnika W' . Najniżej położona jest krzywa rocznika 2005/2006, potem odpowiednio lat 2007/2008 oraz 2006/2007. W miarę wzrostu W' krzywe położone są „coraz niżej”, co przekłada się na przesuwanie wartości p , przy której możemy wyznaczyć optymalny rozmiar grupy

w kierunku 1. W roku akademickim 2007/2008 to prawdopodobieństwo powinno być na poziomie powyżej 0,94639, co jeszcze raz tłumaczy, dlaczego nie mogliśmy wyznaczyć optymalnego m w przypadku kierunku zarządzanie.

4. Segregacja według typu

Założmy, że studentów jesteśmy w stanie podzielić na k grup ze względu na prawdopodobieństwo p . Niech p_1, \dots, p_k będą prawdopodobieństwami w kolejnych grupach, które będziemy oznaczali odpowiednio przez A_1, \dots, A_k . Biorąc nadal pod uwagę założenie o równoliczności klas (w każdej jest n studentów), będzie można zbudować daną klasę tylko ze studentów jednej z grup A_i , przy czym przez $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będziemy rozumieli udział studentów odpowiednio z A_1, \dots, A_k . Czyli $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$, stąd także przy tych założeniach $\alpha_i Z$ studentów pochodzi z grupy A_i . Wówczas przy powyższych oznaczeniach całkowity zysk uczelni segregującej uczniów ze względu na prawdopodobieństwo p możemy wyrazić w postaci:

$$\pi' = ZV(\alpha_1 p_1^n + \dots + \alpha_k p_k^n) - Wm. \quad (5)$$

Zauważamy również, że przy powyższych założeniach zysk uczelni bez segregacji ze względu na prawdopodobieństwo wynosi:

$$\pi'' = ZV(p_1^{\alpha_1 n} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k n}) - Wm. \quad (6)$$

Przy czym budując bez segregacji, zakładamy, że do danej klasy wejdą studenci ze wszystkich grup A_i , a ich udział w danej klasie będzie wyrażony odpowiednio przez liczby $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Zauważamy, że porównanie dwóch powyższych wielkości (wyrażonych wzorami (5) oraz (6)) zależy od porównania wielkości $\alpha_1 p_1^n + \dots + \alpha_k p_k^n$ oraz $p_1^{\alpha_1 n} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k n}$. Zostanie teraz pokazane, że $\pi' \leq \pi''$. Zależność pomiędzy tymi wielkościami wynika bezpośrednio z nierówności Jensena.

Nierówność Jensena: dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \dots, a_k \in [0, 1]$ takich, że $a_1 + \dots + a_k = 1$, oraz dowolnych liczb $x_1, x_2, \dots, x_k \in P$ (gdzie $P \subseteq R$ jest przedziałem) i dowolnej funkcji wypukłej f w P prawdziwa jest nierówność $f(\sum_{i=1}^k a_i x_i) \leq \sum_{i=1}^k a_i f(x_i)$.

Za funkcję f obieram funkcję wypukłą postaci $f(x) = \exp(x)$ oraz $x_i = \ln(p_i^n)$ i $a_i = \alpha_i$, wówczas lewa strona nierówności Jensena wygląda następująco:

$$\exp\left[\sum_{i=1}^k \alpha_i \ln(p_i^n)\right] = p_1^{\alpha_1 n} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k n}.$$

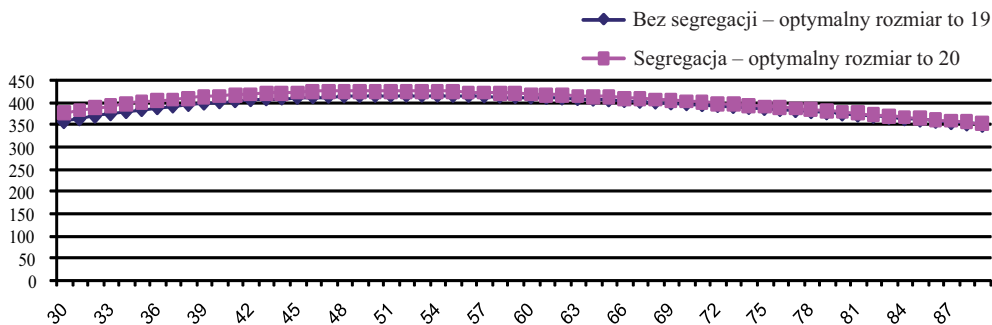
Strona prawa tej samej nierówności równa się:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \exp(\ln(p_i^n)) = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i^n.$$

Potwierdza to ostatecznie tezę, że segregując studentów pod względem prawdopodobieństwa dobrego zachowania się, otrzymujemy większy zysk wyjściowy. Lepszy efekt uzyskujemy, jeżeli będziemy segregowali uczniów ze względu na prawdopodobieństwo p , tzn. będziemy tworzyli klasy rozmiaru n , umieszczając w obrębie i – tej grupy studentów, których zachowanie możemy opisać za pomocą prawdopodobieństwa p_i .

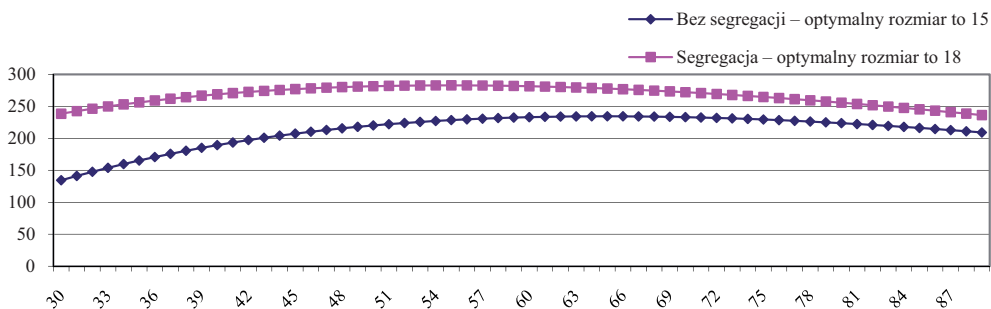
W dalszej części artykułu przedstawiono kilka symulacji, które obrazują, jak wygląda optymalny rozmiar klasy, jeżeli bierzemy pod uwagę studentów z trzema różnymi prawdopodobieństwami p . Na rysunkach kolorem różowym oznaczono krzywą zysku dla studentów posegregowanych, niebieskim zaś bez segregacji. Na osi odciętych zaznaczono kolejne punkty liczby grup, na jakie podzieliilibyśmy wszystkich studentów, czyli m , na osi rzędnych zaś odpowiadające im wartości zysku. W legendzie zaznaczono optymalny rozmiar klasy, jaki otrzymano dla tych m , które maksymalizują funkcję zysków.

Z symulacji widzimy, że optymalna liczebność grupy studentów otrzymana w grupie z segregacją uczniów jest w każdym z rozważanych przypadków większa od grupy tworzonej bez takiej segregacji. Rysunek 2 ukazuje bardzo zbliżone funkcje zysków i tym samym zbliżone rozmiary klasy. Jest to spowodowane przede wszystkim niewielkimi różnicami pomiędzy prawdopodobieństwami p_i . Na rysunkach 2-5 widać, że rozproszenie p_i na „większy rozstęp” daje wyraźnie większe różnice pomiędzy zyskami i tym samym optymalnymi rozmiarami klas. Na rysunkach 6 i 7 zauważamy, że dodając większy udział studentów z mniejszym p ,



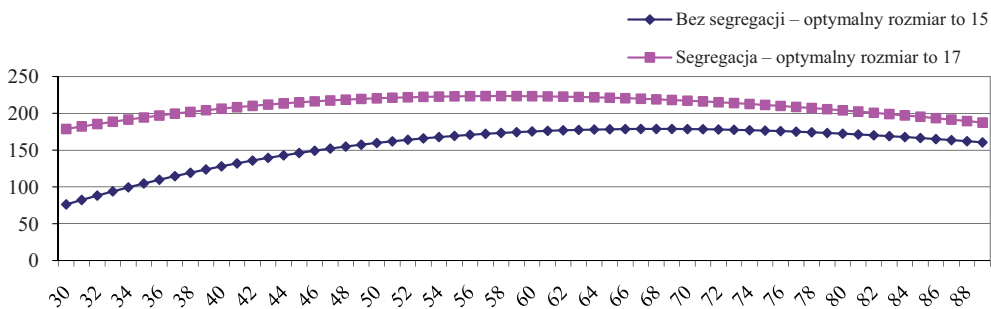
Rys. 2. Funkcje zysku opisane wzorami (5) i (6) dla $V = 1$, $Z = 999$, $W = 5$, $30 \leq m \leq 89$, $p_1 = 0,99$, $p_2 = 0,98$, $p_3 = 0,97$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$

Źródło: obliczenia własne.



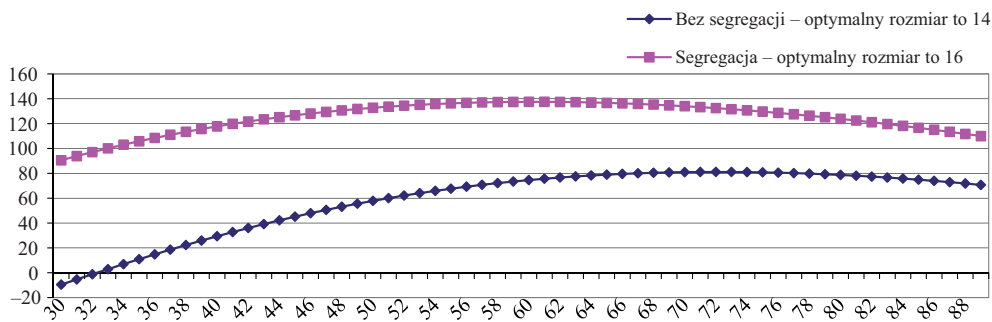
Rys. 3. Funkcje zysku opisane wzorami (5) i (6) dla $V = 1$, $Z = 999$, $W = 5$, $30 \leq m \leq 89$, $p_1 = 0,99$, $p_2 = 0,97$, $p_3 = 0,93$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$

Źródło: obliczenia własne.



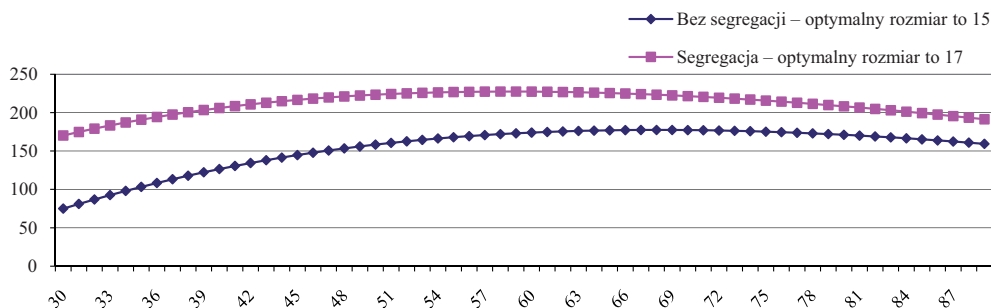
Rys. 4. Funkcje zysku opisane wzorami (5) i (6) dla $V = 1$, $Z = 999$, $W = 5$, $30 \leq m \leq 89$, $p_1 = 0,99$, $p_2 = 0,95$, $p_3 = 0,93$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$

Źródło: obliczenia własne.



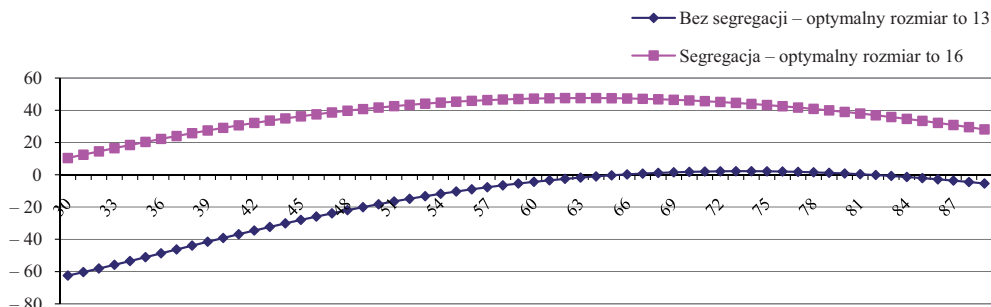
Rys. 5. Funkcje zysku opisane wzorami (5) i (6) dla $V = 1$, $Z = 999$, $W = 5$, $30 \leq m \leq 89$, $p_1 = 0,98$, $p_2 = 0,95$, $p_3 = 0,90$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 6. Funkcje zysku opisane wzorami (5) i (6) dla $V = 1$, $Z = 999$, $W = 5$, $30 \leq m \leq 89$, $p_1 = 0,98$, $p_2 = 0,95$, $p_3 = 0,90$, $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 0,33$, $\alpha_3 = 0,167$

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 7. Funkcje zysku opisane wzorami (5) i (6) dla $V = 1$, $Z = 999$, $W = 5$, $30 \leq m \leq 89$, $p_1 = 0,98$, $p_2 = 0,95$, $p_3 = 0,90$, $\alpha_1 = 0,167$, $\alpha_2 = 0,33$, $\alpha_3 = 0,5$

Źródło: obliczenia własne.

powodujemy spadek optymalnej liczebności grupy w przypadku zarówno bez segregacji, jak i z segregacją studentów, czyli jest to naturalny efekt zwiększenia udziału studentów o gorszym zachowaniu.

5. Zakończenie

Widzimy, że prawdopodobieństwo dobrego zachowania było podobne w latach akademickich 2006/2007 i 2007/2008. Modelowe liczebności klas, jakie otrzymano, stabilizują się na poziomie ok. 27 studentów. Zakładając, że współczynnik W' nie zmieni się bardzo istotnie w stosunku do poprzednich lat, możemy stwierdzić, że optymalny rozmiar klasy powinien zachować się na podobnym poziomie, tzn. ok. 27 studentów. Przy takiej prognozie oczywiście ważne jest, aby poziom egzaminów i zaliczeń pozostał taki sam, tj. aby odsetek tych studentów, którzy otrzymali przynajmniej jedną ocenę niedostateczną, oscylował wokół 5%. Zauważmy,

że w roku akademickim 2005/2006 procent studentów mających ocenę niedostateczną jest niski w stosunku do lat następnych. Trudno jest też tutaj mówić o podobnym poziomie nauczania. Oczywiście może to być spowodowane różnymi czynnikami, szczególnie zmianami kadrowymi i odmiennymi wymaganiami, jakie wykładowcy stawiają przed studentami w poszczególnych latach.

Rysunek 1 ukazuje, jak małe może być p , aby kierując się ideą Lazeara, wyznaczyć optymalny rozmiar grupy. Prawdopodobieństwo to musi być na poziomie powyżej wartości ok. 0,94 dla lat 2006/2007 i 2007/2008. Zbyt małe wartości dla kierunku zarządzanie uniemożliwiają obliczenie optymalnego rozmiaru klasy. Wykres z rys. 1 pokazuje, że wielkość współczynnika R zależy również od innych parametrów. Jeżeli W' jest małe (np. obniżymy koszty kształcenia), to przedział wyznaczający „dziedzinę parametru p ” poszerza się.

Przeprowadzone symulacje obrazują przede wszystkim, jak dużo możemy zyskać, jeżeli segregujemy studentów ze względu na prawdopodobieństwo p . Optymalne liczebności grup, jakie otrzymano dla studentów bez segregacji, były zawsze mniejsze od tych, dla których segregujemy uczniów. Tym samym w drugim przypadku mamy zawsze mniejszą liczbę grup, co przekłada się na mniejsze koszty, jakie muszą ponosić uczelnie. Straty te są szczególnie widoczne przy sporym różnicowaniu grup ze względu na prawdopodobieństwo dobrego zachowania.

Literatura

- Akerhielm K., *Does Class Size Matter*, „Economics of Educational Review” 1995.
- Bernard K., Brown W.O., Helland E., *School Size and the Distribution of Test Scores*, unpublished manuscript, Claremont McKenna College, 1999.
- Biernacki M., *Problemy pomiaru systemu kształcenia w szkołach wyższych*, UE, Kraków.
- Card D., Krueger A., *Does Class Quality Matter?, Returns to Education and the Characteristic of Public School in the United States*, „Journal of Political Economy” 1992.
- Hanushek E., *The Economics of Schooling*, „Journal of Economic Literature” 1986.
- Jakubowski J., Sztencel R., *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, SCRIPT 2004.
- Lazear E.P., *Educational Production*, „The Quarterly Journal of Economics” 2001.
- Rosen S., *Some Economics of Teaching*, „Journal of Labor Economics” 1987.
- Sander W., *Catholic High Schools and Rural Academic Achievement*, „American Journal of Agricultural Economics” 1997.

OPTIMAL CLASS SIZE OF STUDENTS

Summary: The paper concerns the application of model Lazear. In the first part of the paper the author introduces the mathematical conditions defining relationship among variables that must be fulfilled to find optimal class size. Then he applies the model to real data. In the second part he extends the proposition of Lazear concerning the segregation of students by behaviour. At the end of the paper conclusions and suggestions resulting from the research are presented.