EKONOMETRIA

26

Zastosowanie matematyki w ekonomii

Redaktor naukowy **Janusz Łyko**

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2009

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 76
Ekonometria 26 2009

Katarzyna Budny
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

KURTOZA WEKTORA LOSOWEGO

Streszczenie: W teorii jednowymiarowych zmiennych losowych jedną z miar koncentracji rozkładu wokół wartości oczekiwanej czy też miar spłaszczenia rozkładu jest kurtoza. Przypomnijmy, że kurtoza zmiennej losowej jest definiowana jako czwarty moment centralny dzielony przez kwadrat wariancji.

Definicje potęgi wektora w przestrzeni z iloczynem skalarnym oraz momentu centralnego wektora losowego zaproponowane przez J. Tatara pozwalają na próbę podobnego określenia kurtozy wielowymiarowego wektora losowego.

Zaprezentowano podstawowe własności tak skonstruowanego wskaźnika oraz sformułowane i udowodniono twierdzenie podające postać kurtozy dla wektora losowego o stochastycznie niezależnych współrzędnych. W celu zobrazowania tego twierdzenia przedstawione zostaną postaci kurtozy dla wybranych wielowymiarowych typów rozkładów prawdopodobieństwa.

Słowa kluczowe: kurtoza, momenty wektora losowego, rozkłady wielowymiarowe, potęga wektora.

W teorii jednowymiarowych zmiennych losowych jedną z miar koncentracji rozkładu wokół wartości oczekiwanej czy też miar spłaszczenia rozkładu jest kurtoza. Celem niniejszej pracy jest uogólnienie tej charakterystyki na przypadek wielowymiarowy oraz zaprezentowanie jej wybranych własności.

Punktem wyjścia dla tych rozważań jest zaproponowana przez J. Tatara [1996; 1999] oraz wielokrotnie przywoływana (m.in. [Osiewalski, Tatar 1999; Tatar 2000a; 2000b; Tatar, Budny 2009]) definicja potęgi wektora w przestrzeni z iloczynem skalarnym.

Definicja 1

Dla dowolnego $v \in R^n$ oraz dowolnej liczby $k \in N_\circ = N \cup \{0\}$ ***k*-tą potęgę wektora *v*** definiujemy w następujący sposób:

$$v^o = 1 \in R$$

oraz

$$v^k = \begin{cases} v^{k-1} \cdot v, & \text{dla } k\text{-nieparzystych} \\ \langle v^{k-1}, v \rangle, & \text{dla } k\text{-parzystych} \end{cases}.$$

Z powyższej definicji – w sposób oczywisty – wynikają następujące dwie ważne własności

$$\forall v \in R^n,\ k \in N_\circ\ :\ k\text{-parzysta} \ \Rightarrow\ v^k \in R,$$

$$\forall v \in R^n,\ k \in N\ :\ k\text{-nieparzysta} \ \Rightarrow\ v^k \in R^n.$$

W pracy ograniczymy się do przestrzeni wektorowej $(R^n, R, +, \cdot)$, w której określono klasyczny (euklidesowy) iloczyn skalarny postaci:

$$\forall v = (v_1, v_2, ..., v_n), w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in R^n :\ \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Na bazie pojęcia potęgi wektora zostały zdefiniowane m.in. momenty centralne wielowymiarowego wektora losowego [Tatar 1996; 1999].

Przypomnijmy, że przez kurtozę zmiennej losowej rozumiemy czwarty moment centralny tej zmiennej dzielony przez kwadrat jej wariancji. Wykorzystując definicję momentu centralnego wektora losowego, w pracy [Tatar, Budny 2009] podjęto próbę podobnego określenia kurtozy wielowymiarowego wektora losowego.

Niech $X = \left(X_1, ..., X_n\right) : \Omega \to R^n$ będzie wektorem losowym, dla którego istnieje kurtoza.

Definicja 2

Kurtozę wektora losowego $X = \left(X_1, ..., X_n\right) : \Omega \to R^n$ definiujemy następująco:

$$\text{Kurt}X = \frac{E\left[\left(X - EX\right)^4\right]}{\left(D^2 X\right)^2}.$$

Przed przystąpieniem do omawiania własności tak skonstruowanego wskaźnika przypomnijmy, że dla zmiennej losowej $\xi : \Omega \to R$, dla której istnieje kurtoza, jej ekscesem nazywamy wielkość:

$$Excess\xi = \text{Kurt}\xi - 3 = \frac{E\left(\left(\xi - E\xi\right)^4\right)}{\left(D^2\xi\right)^2} - 3.$$

Zauważmy, że dokonując stosownych przekształceń, eksces kurtozy można przedstawić w postaci:

$$Excess\xi = \frac{E\left(\xi^4\right) - 4mE\left(\xi^3\right) + 12m^2 E\left(\xi^2\right) - 3\left(E\left(\xi^2\right)\right)^2 - 6m^4}{\left(D^2\xi\right)^2}, \tag{1}$$

gdzie $E\xi = m$.

Istotnie

$$Excess\xi = \mathrm{Kurt}\xi - 3 = \frac{E\left(\left(\xi - E\xi\right)^4\right)}{\left(D^2\xi\right)^2} - 3 =$$

$$= \frac{E\left(\xi^4 - 4\xi^3 m + 6\xi^2 m^2 - 4\xi m^3 + m^4\right)}{\left(E\left(\xi^2\right) - \left(E\xi\right)^2\right)^2} - 3 =$$

$$= \frac{E\left(\xi^4\right) - 4mE\left(\xi^3\right) + 6m^2 E\left(\xi^2\right) - 4m^3 E\xi + m^4}{\left(E\left(\xi^2\right)\right)^2 - 2E\left(\xi^2\right)\left(E\xi\right)^2 + \left(E\xi\right)^4} -$$

$$\frac{3\left(\left(E\left(\xi^2\right)\right)^2 - 2E\left(\xi^2\right)\left(E\xi\right)^2 + \left(E\xi\right)^4\right)}{\left(E\left(\xi^2\right)\right)^2 - 2E\left(\xi^2\right)\left(E\xi\right)^2 + \left(E\xi\right)^4} =$$

$$= \frac{E\left(\xi^4\right) - 4mE\left(\xi^3\right) + 6m^2 E\left(\xi^2\right) - 4m^4 + m^4 - 3\left(E\left(\xi^2\right)\right)^2 + 6E\left(\xi^2\right)m^2 - 3m^4}{\left(E\left(\xi^2\right)\right)^2 - 2E\left(\xi^2\right)m^2 + m^4} =$$

$$= \frac{E\left(\xi^4\right) - 4mE\left(\xi^3\right) + 12m^2 E\left(\xi^2\right) - 3\left(E\left(\xi^2\right)\right)^2 - 6m^4}{\left(D^2\xi\right)^2}.$$

W dalszej części pracy zostanie sformułowane i udowodnione twierdzenie podające postać kurtozy dla wektora losowego o stochastycznie niezależnych współrzędnych. W dowodzie tego twierdzenia wykorzystamy m.in. następujący lemat:

Lemat 1

Niech $X = \left(X_1, ..., X_n\right) : \Omega \to R^n$ będzie wektorem losowym, dla którego istnieje kurtoza, oraz takim, że dla wszystkich $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, jeżeli $i \neq j$, to X_i jest stochastycznie niezależna od X_j (innymi słowy: $X_i \perp X_j$ dla wszystkich $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ takich, że $i \neq j$) .

Wówczas prawdziwe są następujące równości:

1) $$E\left(\langle X, X\rangle^2\right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} E\left(X_i^2\right)E\left(X_j^2\right) + \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^4\right),$$

2) $$E\left(\langle X, X\rangle\langle X, EX\rangle\right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} E\left(X_i^2\right)m_j^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i E\left(X_i^3\right),$$

3) $E\left(\langle X, EX\rangle^2\right) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} m_i^2 m_j^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i^2 E\left(X_i^2\right),$

4) $\langle EX, EX\rangle E\left(\langle X, X\rangle\right) = \sum_{i,j=1}^{n} m_i^2 E\left(X_j^2\right),$

5) $\langle EX, EX\rangle^2 = \sum_{i,j=1}^{n} m_i^2 m_j^2,$

gdzie $m_i = EX_i$, dla każdego $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Dowód:

Korzystając z własności całki oraz z niezależności zmiennych losowych X_i^2 oraz X_j^2 dla wszystkich $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ takich, że $i \neq j$, otrzymujemy

$$E\left(\langle X, X\rangle^2\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} X_j^2\right)\right] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} E\left(X_i^2 X_j^2\right) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} E\left(X_i^2\right) E\left(X_j^2\right) + \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^4\right),$$

czyli tezę1.

Podobnie, wykorzystując niezależność zmiennych losowych X_i^2 oraz X_j dla wszystkich $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ takich, że $i \neq j$, otrzymujemy tezę 2.

Rzeczywiście, prawdziwy jest bowiem ciąg równości:

$$E\left(\langle X, X\rangle\langle X, EX\rangle\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} X_j m_j\right)\right] = \sum_{i,j=1}^{n} E\left(X_i^2 X_j m_j\right) =$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} m_j E\left(X_i^2\right) E\left(X_j\right) + \sum_{i=1}^{n} m_i E\left(X_i^3\right) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} E\left(X_i^2\right) m_j^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i E\left(X_i^3\right).$$

Dla dowodu tezy 3 również korzystamy z założenia niezależności zmiennych losowych X_i oraz X_j, gdy $i \neq j$. Mamy więc:

$$E\left(\langle X, EX\rangle^2\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i EX_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} X_j EX_j\right)\right] = \sum_{i,j=1}^{n} E\left(X_i X_j m_i m_j\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} m_i m_j E\left(X_i X_j\right) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} m_i^2 m_j^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i^2 E\left(X_i^2\right).$$

Z kolei teza 4 wynika z następującego ciągu przekształceń:

$$\langle EX, EX\rangle E(\langle X, X\rangle) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i^2\right) E\left(\sum_{j=1}^{n} X_j^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} E\left(X_j^2\right)\right) = \sum_{i,j=1}^{n} m_i^2 E\left(X_j^2\right).$$

Teza 5 jest oczywista.

Możemy teraz przystąpić do sformułowania i udowodnienia twierdzenia tej pracy.

Twierdzenie 1

Niech $X = (X_1, ..., X_n): \Omega \to R^n$ będzie wektorem losowym, spełniającym założenia lematu1.

Wówczas

$$\text{Kurt}X = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(2 + ExcessX_i\right)\left(D^2 X_i\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} D^2 X_i D^2 X_j}.$$

Dowód:

Pokażemy najpierw, że

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(2 + ExcessX_i\right)\left(D^2 X_i\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} D^2 X_i D^2 X_j} = \tag{2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(E\left(X_i^4\right) - 4m_i E\left(X_i^3\right) + 8m_i^2 E\left(X_i^2\right) - \left(E\left(X_i^2\right)\right)^2 - 4m_i^4\right)}{\sum_{i,j=1}^{n} D^2 X_i D^2 X_j},$$

gdzie $m_i = EX_i$, dla wszystkich $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Wykorzystując (1), przeprowadzimy następujące przekształcenie:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(2 + ExcessX_i\right)\left(D^2 X_i\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} D^2 X_i D^2 X_j} =$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{E\left(X_i^4\right)-4m_iE\left(X_i^3\right)+12m_i^2E\left(X_i^2\right)-3\left(E\left(X_i^2\right)\right)^2-6m_i^4}{\left(D^2X_i\right)^2}\right)\left(D^2X_i\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n}D^2X_iD^2X_j}=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2\left(\left(E\left(X_i^2\right)\right)^2-2E\left(X_i^2\right)m_i^2+m_i^2\right)+E\left(X_i^4\right)-4m_iE\left(X_i^3\right)+12m_i^2E\left(X_i^2\right)-3\left(E\left(X_i^2\right)\right)^2-6m_i^4}{\left(D^2X_i\right)^2}\right)\left(D^2X_i\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n}D^2X_iD^2X_j}=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(E\left(X_i^4\right)-4m_iE\left(X_i^3\right)+8m_i^2E\left(X_i^2\right)-\left(E\left(X_i^2\right)\right)^2-4m_i^4\right)}{\sum_{i,j=1}^{n}D^2X_iD^2X_j}.$$

Z kolei korzystając z definicji parzystej potęgi wektora, dwuliniowości iloczynu skalarnego oraz własności całki, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}E\left[(X-EX)^4\right]&=E\left[\langle X-EX,X-EX\rangle^2\right]=\\&=E\left[\left(\langle X,X\rangle-2\langle X,EX\rangle+\langle EX,EX\rangle\right)^2\right]=\\&=E\Big(\langle X,X\rangle^2-4\langle X,X\rangle\langle X,EX\rangle+4\langle X,EX\rangle^2+2\langle X,X\rangle\langle EX,EX\rangle-\\&\quad 4\langle X,EX\rangle\cdot\langle EX,EX\rangle+\langle EX,EX\rangle^2\Big).\end{aligned}\tag{3}$$

Zauważmy ponadto, że

$$E\left(\langle X,EX\rangle\langle EX,EX\rangle\right)=\left(\langle EX,EX\rangle\right)^2.\tag{4}$$

Istotnie

$$E\left(\langle X,EX\rangle\langle EX,EX\rangle\right)=E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}X_iEX_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left(EX_j\right)^2\right)\right]=E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}X_im_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}m_j^2\right)\right]=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}m_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}m_iEX_i\right)=\left(\sum_{j=1}^{n}m_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}m_i^2\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}m_k^2\right)^2=\left(\langle EX,EX\rangle\right)^2.$$

Zatem – na mocy (4) – równość (3) można przekształcić do postaci:

$$E\left[\left(X-EX\right)^4\right]=E\left(\left\langle X,X\right\rangle^2\right)-4E\left(\left\langle X,X\right\rangle\left\langle X,EX\right\rangle\right)+$$
$$4E\left(\left\langle X,EX\right\rangle^2\right)+2\left\langle EX,EX\right\rangle E\left(\left\langle X,X\right\rangle\right)-3\left\langle EX,EX\right\rangle^2. \tag{3'}$$

Zapisując teraz kolejne składniki prawej strony równości (3′) tak, jak na to pozwala teza lematu 1, otrzymujemy:

$$E\left(\left(X-EX\right)^4\right)=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}E\left(X_i^2\right)E\left(X_j^2\right)+\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^4\right)-$$
$$4\left(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}E\left(X_i^2\right)m_j^2+\sum_{i=1}^{n}m_iE\left(X_i^3\right)\right)+$$
$$+4\left(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}m_i^2m_j^2+\sum_{i=1}^{n}m_i^2E\left(X_i^2\right)\right)+2\sum_{i,j=1}^{n}m_i^2E\left(X_j^2\right)-3\sum_{i,j=1}^{n}m_i^2m_j^2=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}E\left(X_i^2\right)E\left(X_j^2\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(E\left(X_i^2\right)\right)^2+\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^4\right)-2\sum_{i,j=1}^{n}E\left(X_i^2\right)m_j^2-2\sum_{i,j=1}^{n}E\left(X_i^2\right)m_j^2+$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right)m_i^2-4\sum_{i=1}^{n}m_iE\left(X_i^3\right)+\sum_{i,j=1}^{n}m_i^2m_j^2+3\sum_{i,j=1}^{n}m_i^2m_j^2-4\sum_{i=1}^{n}m_i^4+$$
$$+2\sum_{i,j=1}^{n}m_i^2E\left(X_j^2\right)-3\sum_{i,j=1}^{n}m_i^2m_j^2=$$
$$=\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left(E\left(X_i^2\right)E\left(X_j^2\right)-2\sum_{i,j=1}^{n}E\left(X_i^2\right)m_j^2+\sum_{i,j=1}^{n}m_i^2m_j^2\right)\right)-2\sum_{i,j=1}^{n}m_i^2E\left(X_j^2\right)+$$
$$+2\sum_{i,j=1}^{n}m_i^2E\left(X_j^2\right)+3\sum_{i,j=1}^{n}m_i^2m_j^2-3\sum_{i,j=1}^{n}m_i^2m_j^2+\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^4\right)-4\sum_{i=1}^{n}m_iE\left(X_i^3\right)+$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right)m_i^2+4\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right)m_i^2+$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left(E\left(X_i^2\right)\right)^2-4\sum_{i=1}^{n}m_i^4=$$
$$=\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left(E\left(X_i^2\right)E\left(X_j^2\right)-2\sum_{i,j=1}^{n}E\left(X_i^2\right)m_j^2+\sum_{i,j=1}^{n}m_i^2m_j^2\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^4\right)-$$
$$4\sum_{i=1}^{n}m_iE\left(X_i^3\right)+8\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right)m_i^2-\sum_{i=1}^{n}\left(E\left(X_i^2\right)\right)^2-4\sum_{i=1}^{n}m_i^4,$$

czyli ostatecznie

$$E\left(\left(X-EX\right)^4\right)=\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left(E\left(X_i^2\right)E\left(X_j^2\right)-2E\left(X_i^2\right)m_j^2+m_i^2m_j^2\right)\right)+ \\ +\sum_{i=1}^{n}\left(E\left(X_i^4\right)-4m_iE\left(X_i^3\right)+8m_i^2E\left(X_i^2\right)-\left(E\left(X_i^2\right)\right)^2-4m_i^4\right). \tag{3''}$$

Wykorzystując równość (3″), uzyskujemy:

$$\text{Kurt}\, X=\frac{E\left[\left(X-EX\right)^4\right]}{\left(D^2X\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}\left(E\left(X_i^2\right)E\left(X_j^2\right)-2E\left(X_i^2\right)m_j^2+m_i^2m_j^2\right)\right)+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(E\left(X_i^4\right)-4m_iE\left(X_i^3\right)+8m_i^2E\left(X_i^2\right)-\left(E\left(X_i^2\right)\right)^2-4m_i^4\right)}{\sum\limits_{i,j=1}^{n}D^2X_iD^2X_j}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n}D^2X_iD^2X_j+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(E\left(X_i^4\right)-4m_iE\left(X_i^3\right)+8m_i^2E\left(X_i^2\right)-\left(E\left(X_i^2\right)\right)^2-4m_i^4\right)}{\sum\limits_{i,j=1}^{n}D^2X_iD^2X_j}=$$

$$=1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(E\left(X_i^4\right)-4m_iE\left(X_i^3\right)+8m_i^2E\left(X_i^2\right)-\left(E\left(X_i^2\right)\right)^2-4m_i^4\right)}{\sum\limits_{i,j=1}^{n}D^2X_iD^2X_j}.$$

Wobec udowodnionej wcześniej równości (2) mamy więc:

$$\text{Kurt}\, X=1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(2+ExcessX_i\right)\left(D^2X_i\right)^2}{\sum\limits_{i,j=1}^{n}D^2X_iD^2X_j},$$

czyli żądaną tezę.

Prostą konsekwencją twierdzenia 1 jest następujący wniosek.

Wniosek 1

Jeżeli $X=\left(X_1, ..., X_n\right):\Omega\to\Re^n$ będzie wektorem losowym spełniającym założenia lematu 1 oraz dodatkowo $D^2X_1=D^2X_2=....=D^2X_n=\sigma^2$, to

$$\mathrm{Kurt}\, X = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(2 + ExcessX_i\right)}{n^2}.$$

Dowód:
Dzięki tezie twierdzenia 1 otrzymujemy:

$$\mathrm{Kurt}\, X = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(2 + ExcessX_i\right)\left(\sigma^2\right)^2}{\left(n\sigma^2\right)\cdot\left(n\sigma^2\right)\cdot} = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(2 + ExcessX_i\right)}{n^2}.$$

Twierdzenie 1 dostarcza również – w oczywisty sposób – poniższych wniosków.

Wniosek 2

Jeżeli $X = \left(X_1, ..., X_n\right): \Omega \to \Re^n$ będzie wektorem losowym, spełniającym założenia lematu 1 oraz dodatkowo $X_i \sim N\left(m_i, \sigma_i^2\right)$ dla każdego $i \in \{1, 2, ..., n\}$, to:

$$\mathrm{Kurt}\, X = 1 + \frac{2\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^4}{\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i^2 \sigma_j^2} = 1 + \frac{2\sum_{i=1}^{n} \left(D^2 X_i\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} D^2 X_i D^2 X_j}.$$

Ponadto przy założeniu $\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = \sigma$ otrzymujemy

$$\mathrm{Kurt}\, X = 1 + \frac{2}{n}.$$

Wniosek 3

Jeżeli $X = \left(X_1, ..., X_n\right): \Omega \to \Re^n$ będzie wektorem losowym spełniającym założenia lematu 1 oraz $X_i \sim t_{\nu_i}$ (tzn. X_i ma rozkład *t*-Studenta z ν_i stopniami swobody), gdzie $\nu_i > 4$ dla każdego $i \in \{1, 2, ..., n\}$, to

$$\mathrm{Kurt}\, X = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{6}{\nu_i - 4}\right)\left(\frac{\nu_i}{\nu_i - 2}\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\nu_i}{\nu_i - 2}\right)\left(\frac{\nu_j}{\nu_j - 2}\right)}.$$

Przy dodatkowym założeniu $\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n = \nu > 4$ uzyskujemy

$$\text{Kurt}\, X = 1 + \frac{2 + \dfrac{6}{\nu - 4}}{n}.$$

Wnioski 2 oraz 3 podają postać kurtozy dla wybranych typów rozkładów, co zostało także przedstawione w pracy [Tatar, Budny 2009].

Kolejny fakt jest natychmiastową konsekwencją tych wniosków.

Wniosek 4

Jeżeli $X = (X_1, ..., X_n): \Omega \to \Re^n$ będzie wektorem losowym spełniającym założenia wniosku 2 oraz zajdzie warunek $\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = \sigma$, a $Y = (Y_1, ..., Y_n):$ $\Omega \to \Re^n$ będzie wektorem losowym spełniającym założenia wniosku 3 oraz dodatkowo $\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n = \nu > 4$, to wówczas

$$\text{Kurt}\, Y > \text{Kurt}\, X.$$

Literatura

Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. 1 i 2, PWN, Warszawa 1969.

Fisz M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1969.

Jakubowski J., Sztencel R., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa,* Script, Warszawa 2004.

Osiewalski J., Tatar J., *Multivariate Chebyshev Inequality Based on a New definition of Moments of a Random Vector*, „Przegląd Statystyczny" 1999, z. 2.

Plucińska A., Pluciński E., *Probabilistyka. Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna, procesy stochastyczne*, WNT, Warszawa 2006.

Tatar J., *O niektórych miarach rozproszenia rozkładów prawdopodobieństwa*, „Przegląd Statystyczny" 1996 z. 3/4.

Tatar J., *Moments of a Random Variable in a Hilbert Space*, „Przegląd Statystyczny" 1999 z. 2.

Tatar J., *Nowa charakteryzacja wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa,* Sprawozdanie z badań statutowych; um. nr: 92/KM/1/99/S, AE, Kraków 2000a.

Tatar J., *Momenty absolutne wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa*, Komisja Statystyczno-Demograficzna PAN, O/Kraków, 17 listopada 2000b.

Tatar J., Budny K., *Kurtosis of a Random Vector – Special Types of Distributions*, praca złożona do druku, 2009.

KURTOSIS OF A RANDOM VECTOR

Summary: Kurtosis is one of the measures of concentration distribution around expected value or measures of flattening, frequently used in the theory of single-dimensional random variables. To remind: kurtosis of a random variable is defined as the fourth central moment divided by the square of the variance.

Definitions of the power of a vector in the space with the scalar product and the central moment of a random vector proposed by J. Tatar [1996; 1999] allow to make an attempt to redefine the kurtosis of the multi-dimensional random vector.

In the paper the essential properties of such constructed indicator are presented and the theorem giving a form of kurtosis for a random vector with stochastically independent marginal variables is formulated and proved. To illustrate this theorem, the forms of kurtosis for special, multi-dimensional types of distributions are presented.